



HAL
open science

Equations différentielles stochastiques multivoques : aspects théoriques et numériques - Applications

Frédéric Bernardin

► **To cite this version:**

Frédéric Bernardin. Equations différentielles stochastiques multivoques : aspects théoriques et numériques - Applications. Mathématiques [math]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2004. Français. NNT: . tel-00008778

HAL Id: tel-00008778

<https://theses.hal.science/tel-00008778>

Submitted on 15 Mar 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre: 243-2004

THÈSE

Présentée devant

L'université Lyon 1

pour obtenir le grade de :

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

Spécialité

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

Frédéric BERNARDIN

École doctorale : MATHIF

Titre de la thèse :

Equations différentielles stochastiques multivoques

Aspects théoriques et numériques Applications

soutenue le 6 décembre 2004 devant la commission d'examen

Mme :	Michèle	CHAMBAT	Président
MM. :	Jean	PICARD	Rapporteurs
	Manuel	MONTEIRO-MARQUES	
M. :	Aimé	LACHAL	Examineur
Mme :	Michelle	SCHATZMAN	Directeur de thèse
M. :	Claude-Henri	LAMARQUE	Directeur de thèse

N° d'ordre: 243-2004

THÈSE

Présentée devant

L'université Lyon 1

pour obtenir le grade de :

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

Spécialité

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

Frédéric BERNARDIN

École doctorale : MATHIF

Titre de la thèse :

Equations différentielles stochastiques multivoques

Aspects théoriques et numériques Applications

soutenue le 6 décembre 2004 devant la commission d'examen

Mme :	Michèle	CHAMBAT	Président
MM. :	Jean	PICARD	Rapporteurs
	Manuel	MONTEIRO-MARQUES	
M. :	Aimé	LACHAL	Examinateur
Mme :	Michelle	SCHATZMAN	Directeur de thèse
M. :	Claude-Henri	LAMARQUE	Directeur de thèse

*Aux anges qui m'escortent,
Léo et Nathalie.*

REMERCIEMENTS

Même si les mots ne peuvent pas souvent grand chose pour exprimer un sentiment profond, ils permettent néanmoins de ne pas le garder jalousement pour soi. Il a bien été question de sentiments dans ma rencontre avec Michelle Schatzman et cela constitue la plus grande découverte de cette thèse. Puis-je tout simplement la remercier pour ce qu'elle est ?

La direction de cette thèse a également été assurée par Claude-Henri Lamarque : je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance pour tous les engagements qu'il a pris en ma faveur et ils ont été nombreux. Il m'a toujours encouragé, depuis 1997, à faire des mathématiques à l'université Claude Bernard tout en suivant ma scolarité à l'Ecole nationale des travaux publics de l'Etat. J'ai pu apprendre, au cours de ces trois dernières années, grâce à la confiance qu'il m'a accordée, ce qui me semble être la liberté responsable d'un chercheur : une liberté individuelle doublée d'une nécessaire responsabilité collective. Qu'il soit ici remercié pour l'amitié qu'il m'a toujours témoignée.

Mes premiers pas dans le monde du stochastique n'ont pu donner place à des foulées plus soutenues que par l'aide essentielle apportée par Aimé Lachal : je le remercie encore vivement.

Monsieur Jean Picard et Monsieur Manuel Monteiro Marques m'ont fait l'honneur d'être les rapporteurs de cette thèse : je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Madame Michèle Chambat a accepté d'être la présidente du jury et je la remercie d'avoir accepté cette charge.

Je n'oublierai pas les collègues de mon bureau de l'ENTPE, Abalo, Givanildo, Véronique et enfin Michaël avec qui les discussions sur nombre de sujets ont souvent été au rendez-vous. Les conseils informatiques et avisés de Jean-Michel m'ont souvent été d'un grand secours, surtout dans l'urgence : qu'il sache que sa patience, sa gentillesse et son efficacité continueront à attirer mes incompétences. Je pense également à Antoine, Denis, Marie, Simon, Damien, Stéphane, Stéphane, Jean-Marc, Claude, Emmanuelle, Corinne, Jean-Claude, Laurent...

Le laboratoire MAPLY de l'université de Lyon m'a accueilli administrativement. Je garderai une tendre pensée pour Christiane, Clair, Ronan, Magali, Frédérique, Thierry, Adrien, Pierre...

Ce travail n'aurait pas vu le jour sans mon "zinzin" à moi, le Ministère en charge à ce jour de l'Équipement, des Transports, de l'Aménagement du territoire, du Tourisme et de la Mer, qui a financé cette thèse. Je remercie à ce titre la Direction du personnel et des services et l'ENTPE d'avoir cru au projet que je leur avais jadis présenté.

Table des matières

Introduction	5
1 Convergence d'un schéma d'Euler	9
1.1 Introduction	9
1.2 Opérateurs multivoques maximaux monotones	9
1.2.1 Définitions et propriétés	10
1.2.2 Exemple fondamental d'opérateur maximal monotone	11
1.3 Equations différentielles stochastiques	12
1.3.1 Généralités sur les processus stochastiques	12
1.3.2 Intégrale stochastique	15
1.4 Equations différentielles stochastiques multivoques	20
1.4.1 Enoncé du problème	20
1.4.2 Résultats d'existence et d'unicité	21
1.5 Article 1 : convergence du schéma numérique	24
1.6 Commentaires	48
2 EDSM d'ordre 2 sur une variété riemannienne	55
2.1 Introduction	55
2.2 Ordre 2 ou ordre 1	55
2.3 Géométrie riemannienne	56
2.3.1 Cas de la sphère	57
2.3.2 Cas général	57
2.4 Dynamique de systèmes mécaniques	63
2.4.1 Définition d'un système mécanique	63
2.4.2 Equation de la dynamique	65
2.5 Connexion, dérivée covariante, géodésiques...	67
2.6 Terme maximal monotone	70
2.7 Terme stochastique	71
2.8 Article 2 : Compte-rendu à l'Académie des sciences	72
2.9 Article 3 : Existence et unicité de solutions	80
3 Modélisation de structures mécaniques et identification	109
3.1 Introduction	109
3.2 Modélisation de la structure	109
3.3 Couplage sol-structure	110
3.4 Modélisation de la sollicitation sismique	114
3.4.1 Introduction	114
3.4.2 Spectre de réponse réglementaire	114
3.4.3 Etude de la source sismique	115

3.4.4	Etudes d'accélérogrammes	115
3.4.5	Méthode probabiliste issue de l'observation des accélérogrammes réels : un exposé détaillé	116
3.4.6	Conclusion : le problème est posé	118
3.5	Article 4 : Identification	119
3.6	Introduction	121
3.7	The model	122
3.8	Existence and uniqueness results	123
3.8.1	Deterministic frame	123
3.8.2	Stochastic frame	125
3.9	Numerical results	126
3.9.1	Deterministic case	126
3.9.2	Stochastic case	127
3.10	Locally Lipschitz continuous frictions laws	128
3.11	Identification of hysteresis cycles	129
3.11.1	Identification without damping	129
3.11.2	Identification with damping	130
3.11.3	Identification : an example	133
3.12	Numerical simulations	133
3.12.1	Monotone friction law with a cubic term	133
3.12.2	Monotone friction laws	134
3.12.3	Locally Lipschitz continuous frictions laws	134
3.13	Conclusion	135
.1	Proofs of theoretical results	135
.2	Curves of the numerical simulations	141
	Conclusion	145

Introduction

Motivation

Dans cette thèse, on essaie d'apporter des connaissances supplémentaires dans l'étude de structures mécaniques soumises à des sollicitations aléatoires, l'une de ses déclinaisons étant par exemple celle des bâtiments soumis à des séismes. On se place alors dans le cadre plus large de la dynamique des structures qui peut apporter au dimensionnement des ouvrages (et surtout lorsque ces derniers ne sont pas standards) une composante corrective, sinon cruciale dans des cas où le dimensionnement exclusivement statique peut conduire malheureusement à des situations dramatiques. Ce travail ne se veut pas un catalogue de recettes directement applicables pour résoudre l'enjeu décrit précédemment : il n'est rien d'autre qu'une contribution à sa résolution. Il se place en amont des applications pratiques (par exemple des règles précises de dimensionnement) et ses aspects théoriques constituent son essence même. Il ne doit pourtant pas être perçu par le monde de l'ingénierie comme un travail inutile mais bien comme un premier aboutissement d'une démarche dont l'objectif est d'assurer scientifiquement les résultats auxquels elle est parvenue.

Tout le problème d'une telle entreprise repose sur la modélisation du réel que l'on se donne. Dans le cas présent, on a considéré des systèmes pouvant être régis, en dynamique, par des *équations différentielles stochastiques multivoques*. Leur intérêt est double : des phénomènes très irréguliers, comme le frottement sec ou l'impact, peuvent être considérés ainsi que des sollicitations de nature aléatoire. On décrit par exemple dans le Chapitre 2 l'exemple du pendule sphérique frottant sur une sphère métallique et soumis à une sollicitation stochastique. Le Chapitre 3 met en valeur la possibilité d'identifier des paramètres pour le calage de modèles étudiés au préalable. Ces études préalables ont été rendues possibles grâce à l'outil numérique qui fournit des simulations permettant l'analyse de certains modèles et la fiabilité de cet outil, de laquelle on doit s'assurer, donne toute sa pertinence à l'analyse. C'est la raison pour laquelle le premier chapitre de cette thèse est consacré à la convergence d'un schéma numérique associé à des équations différentielles stochastiques multivoques évoluant dans un espace euclidien : les résultats obtenus généralisent les résultats existants et permettent d'obtenir un ordre de convergence. Le deuxième assure l'existence et l'unicité d'une solution pour des équations différentielles stochastiques multivoques d'ordre deux sur une variété riemannienne, permettant ainsi de considérer l'exemple du pendule sphérique frottant. Ce type d'équations n'avait pas encore été considéré jusqu'à présent et le champ d'investigation est encore très fertile. Enfin, le Chapitre 3 utilise les résultats du Chapitre 1 pour l'analyse de l'identification des paramètres de modèles servant à décrire des structures sous séismes.

Résultats principaux

Convergence d'un schéma numérique

On s'intéresse aux équations différentielles stochastiques multivoques (EDSM) d'inconnue le processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d et vérifiant :

$$dX_t + A(X_t)dt \ni b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad (1)$$

où b et σ sont des fonctions assez régulières, $(W_t)_{t \geq 0}$, le mouvement brownien standard sur \mathbb{R}^d et A , un opérateur multivoque maximal monotone de \mathbb{R}^d . Le mouvement brownien est utilisé pour la modélisation de l'aléa et l'opérateur multivoque pour celle de la structure et/ou du couplage sol-structure (présence de frottement sec ou de plasticité). Malgré le caractère multivoque de A , un schéma numérique est défini en écrivant approximativement (1) de la manière suivante. Pour toute discrétisation $0 = t_0 < \dots < t_N = T$ de l'intervalle de temps $[0, T]$, l'approximation X_n de $X(t_n)$ pour $0 \leq n \leq N-1$ est définie par récurrence selon :

$$X_{n+1} - X_n + hA(X_{n+1}) \ni b(t_n, X_n)h + \sigma(t_n, X_n)(W_{t_{n+1}} - W_{t_n}). \quad (2)$$

On utilise une formulation implicite pour le terme multivoque dans le but, en notant $\mathbf{1}_E$ l'application identité de l'ensemble E , d'introduire l'opérateur $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d} + hA$ dont l'inverse, *a priori* multivoque, est en fait univoque. Cette dernière remarque fait toute la force de ce schéma qui peut être implémenter très facilement. La fiabilité et la précision de ce schéma sont obtenues dans le sens suivant :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left\{ \sup_{0 \leq n \leq N} \|X_n - X(t_n)\|^2 \right\} = 0 \quad (3)$$

et, sous certaines conditions,

$$\mathbb{E} \left\{ \sup_{0 \leq n \leq N} \|X_n - X(t_n)\|^2 \right\} \leq C \sqrt{\frac{1}{N} \ln N}. \quad (4)$$

Existence et unicité de solution pour une EDSM d'ordre 2 sur une variété riemannienne

On se donne une variété riemannienne M et pour chaque $t \geq 0$ et $x \in M$, un opérateur maximal monotone $A(t, x, \cdot)$ de $\mathbb{T}_x M$ où $\mathbb{T}_x M$ désigne l'espace tangent à M en x . On se donne également une application $\sigma(t, x, \cdot) : \mathbb{T}_x M \rightarrow L(\mathbb{R}^d, \mathbb{T}_x M)$ où $L(\mathbb{R}^d, \mathbb{T}_x M)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de \mathbb{R}^d dans $\mathbb{T}_x M$, une application $\nu(t, x, \cdot) : \mathbb{T}_x M \rightarrow \mathbb{T}_x M$ et un mouvement brownien d -dimensionnel standard $(B_t)_{t \geq 0}$ défini sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. L'équation différentielle stochastique multivoque d'ordre deux sur M que nous avons considérée est la suivante :

$$\begin{cases} \delta x_t = v_t dt, \\ D_{\dot{x}(t)} v_t + A(t, x_t, v_t) dt \ni \nu(t, x_t, v_t) dt + \sigma(t, x_t, v_t) \delta B_t, & T_0 \leq t < T, \\ (x(T_0), v(T_0)) = (\pi(\eta), \eta) \text{ p.s.}, \end{cases}$$

où η est une variable aléatoire à valeurs dans le fibré tangent TM à M , T est un réel positif et T_0 est une variable aléatoire \mathcal{F}_0 -mesurable prenant presque sûrement ses valeurs entre 0 et T . Enfin, $D_{\dot{x}(t)}v_t$ désigne la différentielle covariante du champ de vitesses v le long de la courbe x et δ désigne la différentielle stochastique au sens de Stratonovich.

Modélisation de structures sous séismes et identification

On décrit dans quelle mesure une structure soumise à un séisme peut être modélisée par une association de ressorts, d'amortissements visqueux ou d'éléments de Saint-Venant (patins) mis en parallèle ou en série. On s'est intéressé plus particulièrement au modèle représenté sur la Figure 1. Si on note x le déplacement de la masse m , lorsqu'on trace $F - m\ddot{x}$ en fonction de x (où F peut être de nature stochastique), on obtient des *cycles d'hystérésis* dont les caractéristiques géométriques permettent d'identifier les paramètres c , a , k_0, \dots, k_n , $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

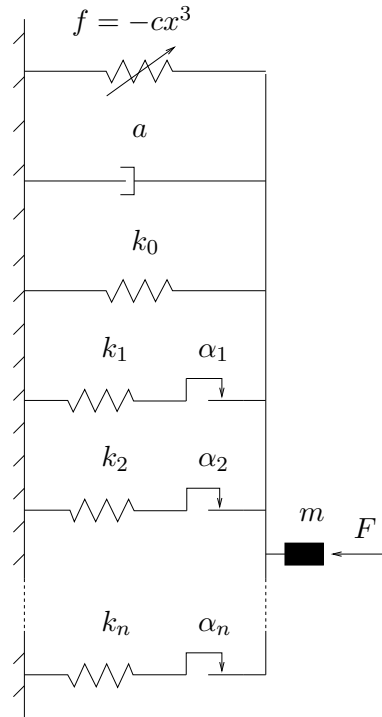


FIG. 1 – Le système de Prandtl

Présentation des résultats

On a choisi de présenter dans ce mémoire les résultats obtenus en reproduisant les

articles publiés ou soumis pendant ces trois années de thèse (voir [3, 4, 5, 15]). Cette démarche s'explique par la progression thématique des sujets abordés dans les articles qui leur confère une interdépendance : le premier s'intéresse à la définition et la fiabilité de l'outil numérique pour des modèles décrits dans un cadre euclidien, le deuxième trouve son intérêt dans l'enrichissement des modèles à un cadre riemannien et le dernier dans l'utilisation de l'outil numérique pour les premiers de ces modèles.

Chapitre 1

Convergence d'un schéma d'Euler

1.1 Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre à l'approximation numérique des équations différentielles stochastiques multivoques dans un cadre euclidien du type

$$\begin{cases} dX_t + A(X_t)dt \ni b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, & 0 \leq t \leq T, \\ X_0 = \xi \end{cases} \quad (1.1)$$

où A est un opérateur multivoque maximal monotone de l'espace euclidien \mathbb{R}^d (voir la Définition 1.4), b et σ des fonctions régulières définies sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ à valeurs respectivement dans \mathbb{R}^d et $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$, $(W_t)_{t \geq 0}$ le mouvement brownien standard sur \mathbb{R}^d et ξ une variable aléatoire à valeurs dans le domaine de A (voir la Définition 1.1). On s'est intéressé dans ce travail à la convergence forte des solutions approchées vers la solution exacte. On a ainsi démontré qu'en moyenne, la différence entre la solution approchée X^δ et la solution exacte X de (1.1),

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|X^\delta(t) - X(t)\|^2,$$

tend vers 0 lorsque le pas de discrétisation δ de l'intervalle d'étude $[0, T]$ tend vers 0.

Le schéma numérique utilisé est de type Euler avec un terme implicite pour la partie multivoque monotone permettant de rendre univoque une application *a priori* multivoque. On s'appuie sur un résultat classique des opérateurs multivoques maximaux monotones : si A est un tel opérateur de \mathbb{R}^d et si $\mathbf{1}_V$ désigne la fonction identité de l'espace vectoriel V , l'application $(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d} + \lambda A)^{-1}$ est univoque pour tout réel λ positif (voir la Proposition 1.2).

On donne dans les sections 1.2 et 1.3 des rappels sur les opérateurs multivoques maximaux monotones et les équations différentielles stochastiques. Dans la section 1.4, on donne un sens précis à l'inclusion différentielle (1.1) et on rappelle les résultats théoriques obtenus par E. Cépa sur les équations différentielles stochastiques multivoques. La définition et la convergence du schéma numérique sont données dans la section 1.5 qui reprend un article publié dans le journal *Set-Valued Analysis* en 2003 ([3]). La section 1.6 est destinée aux commentaires sur cet article.

1.2 Opérateurs multivoques maximaux monotones

Pour la compréhension des équations différentielles stochastiques multivoques faisant intervenir des opérateurs multivoques maximaux monotones, une définition de tels opérateurs et leurs propriétés essentielles sont présentées dans cette section. Dans [6], H. Brézis

présente les opérateurs maximaux monotones sur des espaces de Hilbert. On se limitera au cas de la dimension finie. On se fixe $d \in \mathbb{N}^*$ et on pose $E = \mathbb{R}^d$. Toutes les définitions et propriétés énoncées dans cette section sont tirées de l'ouvrage [6]. On ne mentionne dans ce travail que certains résultats sur les opérateurs maximaux monotones nécessaires à la compréhension du présent rapport. On invite néanmoins le lecteur à consulter directement la source pour des précisions ou des démonstrations.

1.2.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1. *Un opérateur multivoque de E est une application A de E dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E . Le domaine $D(A)$ de A est l'ensemble des points $x \in E$ tels que $A(x)$ est non vide.*

Une application "classique", c'est-à-dire univoque, de E dans E est un cas particulier d'opérateur multivoque de E .

Définition 1.2. *Soit A un opérateur multivoque de E . On définit son graphe par*

$$\text{Gr } A = \{(x, y) \in E^2, x \in D(A), y \in A(x)\}. \quad (1.2)$$

On confondra par la suite A et son graphe.

Proposition 1.1. *L'ensemble des opérateurs multivoques de E est ordonné par l'inclusion des graphes :*

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in E, A(x) \subset B(x). \quad (1.3)$$

Définition 1.3. *Un opérateur multivoque de E est dit monotone si pour tout couple (x_1, x_2) d'éléments du domaine de A et pour tous éléments y_1, y_2 de E tels que $y_1 \in A(x_1)$ et $y_2 \in A(x_2)$, on a*

$$(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \geq 0, \quad (1.4)$$

où (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire euclidien de E .

La condition de monotonie assure, pour tout $\lambda > 0$, qu'il ne peut y avoir plus d'une solution à l'inclusion $x + \lambda A(x) \ni y$ pour tout $y \in E$ donné. En effet, s'il existe deux solutions x_1 et x_2 alors $(y - x_1)/\lambda \in A(x_1)$ et $(y - x_2)/\lambda \in A(x_2)$. Par monotonie de A , on en déduit que $\|x_1 - x_2\|^2 \leq 0$ et donc x_1 est égal à x_2 . Dans le cadre des inclusions différentielles ou équations différentielles multivoques, le caractère monotone que l'on exigera de l'opérateur multivoque assurera l'unicité de la solution. Pour avoir l'existence, une condition supplémentaire sera d'une grande utilité, il s'agit de la *maximalité* de l'opérateur multivoque monotone considéré.

Définition 1.4. *Un opérateur multivoque monotone A de E est dit maximal s'il est maximal dans l'ensemble des opérateurs multivoques monotones sur E pour la relation d'ordre définie dans la Proposition 1.1. On dit dans ce cas que A est un opérateur maximal monotone de E .*

Les assertions suivantes sont extraites de [6] et seront très utiles dans ce qui suit.

Proposition 1.2. *Soit A un opérateur multivoque de E . Les trois assertions qui suivent sont équivalentes :*

- (i) *A est maximal monotone ;*
- (ii) *A est monotone et $(\mathbf{1}_E + A)(E) = E$;*
- (iii) *pour tout $\lambda > 0$, $(\mathbf{1}_E + \lambda A)^{-1}$ est une contraction (univoque) définie sur E tout entier.*

Proposition 1.3. *Tout opérateur maximal monotone A de E est localement borné sur l'intérieur de son domaine : pour tout ensemble borné $K \subset \text{Int } D(A)$, l'ensemble $\{y \in A(x), x \in K\}$ est borné.*

Proposition 1.4. *Si A est un opérateur maximal monotone de E alors pour tout $x \in D(A)$, l'ensemble $A(x)$ est un convexe fermé non vide de E . On définit alors $A^0 : D(A) \rightarrow E$ par $A^0(x) = \text{proj}_{A(x)} 0$ où proj_C désigne la projection convexe sur C pour tout convexe fermé non vide C de E .*

Définition 1.5. *Soit A un opérateur maximal monotone de E . Pour tout $\lambda > 0$, on note J_λ l'application univoque de E dans E définie par*

$$J_\lambda = (\mathbf{1}_E + \lambda A)^{-1}. \quad (1.5)$$

Proposition 1.5. *Si A est un opérateur maximal monotone de E , $\overline{D(A)}$ est un convexe fermé non vide de E et*

$$\forall x \in E, \lim_{\lambda \rightarrow 0} J_\lambda(x) = \text{proj}_{\overline{D(A)}} x. \quad (1.6)$$

Définition 1.6. *Pour tout opérateur maximal monotone A de E et pour tout $\lambda > 0$, on définit l'approximée au sens de Yosida A_λ de A par*

$$A_\lambda = \frac{\mathbf{1}_E - J_\lambda}{\lambda}. \quad (1.7)$$

Proposition 1.6. *Pour tout opérateur maximal monotone A de E et pour tout réel positif λ , l'opérateur A_λ est maximal monotone et lipschitzien de rapport $1/\lambda$. On a de plus, pour tout $x \in D(A)$,*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} A_\lambda(x) = A^0(x). \quad (1.8)$$

1.2.2 Exemple fondamental d'opérateur maximal monotone

Définition 1.7. *Soit $\varphi : E \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe. Son domaine est défini par*

$$\text{Dom } \varphi = \{x \in E, \varphi(x) < +\infty\}.$$

On dit que φ est propre (resp. strictement propre) si son domaine est non vide (resp. si l'intérieur de son domaine est non vide).

Définition 1.8. *Une fonction $\varphi : E \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est semi-continue inférieurement (s.c.i.) si pour tout $x \in E$, $\liminf_{y \rightarrow x} \varphi(y) \geq \varphi(x)$.*

Définition 1.9. *Soit $\varphi : E \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction propre de E . On définit son sous-différentiel $\partial\varphi$ comme l'opérateur multivoque sur E donné par son graphe :*

$$(x, y) \in \text{Gr } \partial\varphi \Leftrightarrow \forall z \in E, \varphi(x) \leq \varphi(z) + (y, x - z). \quad (1.9)$$

Proposition 1.7. *Soit $\varphi : E \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe propre s.c.i. de E . Alors son sous-différentiel $\partial\varphi$ est un opérateur maximal monotone de E . On a de plus les inclusions suivantes :*

$$\text{Int } D(\partial\varphi) = \text{Int } \text{Dom } \varphi \subset D(\partial\varphi) \subset \text{Dom } \varphi \subset \overline{\text{Dom } \varphi} \subset \overline{D(\partial\varphi)}. \quad (1.10)$$

Dans le cas particulier où φ est la fonction indicatrice d'un convexe fermé non vide D de E , c.-à-d.

$$\varphi(x) = \psi_D(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in D \\ +\infty & \text{si } x \notin D, \end{cases} \quad (1.11)$$

la fonction φ est convexe, propre, s.c.i. et son sous-différentiel est défini par :

$$\partial\psi_D(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \notin D \\ \{0\} & \text{si } x \in \text{Int}(D) \\ \Pi_x & \text{si } x \in \partial D, \end{cases} \quad (1.12)$$

où on a noté Π_x le cône normal extérieur à D en x défini par :

$$\Pi_x = \{y \in E, \forall z \in D, (y, x - z) \geq 0\}$$

1.3 Equations différentielles stochastiques

On va donner dans cette section les définitions essentielles utiles à la compréhension des équations différentielles stochastiques. Leur exposé reposent sur deux théories fondamentales, celle des processus stochastiques et celle de l'intégrale stochastique. On se réfère dans cette section à l'ouvrage [18] pour un premier contact avec les processus stochastiques et à [13] pour des précisions.

1.3.1 Généralités sur les processus stochastiques

Définition 1.10. On appelle espace probabilisé tout triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où Ω est un ensemble non vide appelé l'univers des possibles, \mathcal{F} une tribu sur Ω appelée tribu des événements, et \mathbb{P} une probabilité sur l'espace mesurable (Ω, \mathcal{F}) , c'est-à-dire une mesure positive bornée, de masse 1 sur (Ω, \mathcal{F}) .

Définition 1.11. Une variable aléatoire sur l'espace probabilisable (mesurable) (Ω, \mathcal{F}) est une fonction borélienne $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Si \mathbb{P} est une probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) , on note \mathbb{P}_X la loi de X , c'est-à-dire la probabilité sur \mathbb{R} image par X de la probabilité \mathbb{P} .

Définition 1.12. Soit (Ω, \mathcal{F}) un espace probabilisable et $(X_i)_{i \in I}$ une famille de variables aléatoires sur (Ω, \mathcal{F}) . La tribu engendrée par la famille $(X_i)_{i \in I}$, notée $\sigma(X_i, i \in I)$, est la sous-tribu de \mathcal{F} engendrée par la classe des ensembles \mathcal{F} -mesurables $\{X_i^{-1}(B), i \in I, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ où $\mathcal{B}(\mathbb{O})$ désigne la tribu des boréliens de \mathcal{O} pour tout espace topologique \mathcal{O} .

Définition 1.13. Si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on dit que X admet un moment d'ordre p ($p \geq 1$) si

$$\int_{\Omega} |X(\omega)|^p d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} |x|^p d\mathbb{P}_X(x) < +\infty. \quad (1.13)$$

Dans ce cas, X admet un moment d'ordre q pour tout $q \leq p$ défini par

$$\int_{\Omega} X(\omega)^q d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x^q d\mathbb{P}_X(x). \quad (1.14)$$

Si $p = 2$, X est dite du second ordre. Lorsqu'il existe, le moment d'ordre 1 de X est appelé espérance mathématique de X et noté $\mathbb{E}X$.

Définition 1.14. Soit X une variable aléatoire sur l'espace probabilisable (Ω, \mathcal{F}) de moment d'ordre un fini et \mathcal{G} une sous-tribu de \mathcal{F} . L'espérance conditionnelle de X par rapport à \mathcal{G} , notée $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$, est l'unique variable aléatoire \mathcal{G} -mesurable Y vérifiant pour tout $A \in \mathcal{G}$,

$$\int_A X d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P}.$$

L'existence d'une telle variable aléatoire repose sur le théorème de Radon-Nicodým relatif aux mesures absolument continues.

Définition 1.15. Un processus stochastique est une collection, indexée par $t \in \mathbb{R}_+$, de variables aléatoires à valeurs dans un même espace mesurable (M, \mathcal{A}) définies sur un espace probabilisable (Ω, \mathcal{F}) . Autrement dit, un processus stochastique est une application

$$\begin{aligned} X : \quad \mathbb{R}_+ \times \Omega &\rightarrow M \\ (t, \omega) &\mapsto X(t, \omega). \end{aligned} \tag{1.15}$$

On note $(X_t)_{t \geq 0}$ un tel processus et on dit qu'il est à valeurs dans M .

Définition 1.16. Un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans (M, \mathcal{A}) est dit mesurable si l'application définie en (1.15) est mesurable, $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ étant muni de la tribu produit $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$.

Définition 1.17. Si $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus stochastique, on désigne par

$$\begin{aligned} X^\omega : \quad \mathbb{R}_+ &\rightarrow M \\ t &\mapsto X(t, \omega), \end{aligned} \tag{1.16}$$

la trajectoire du processus associée à l'aléa $\omega \in \Omega$.

Définition 1.18. Une filtration sur un espace probabilisable (Ω, \mathcal{F}) est une famille croissante $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ de sous-tribus de \mathcal{F} . On note \mathcal{F}_∞ la plus petite sous-tribu de \mathcal{F} contenant chaque tribu \mathcal{F}_t . Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ alors $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé filtré.

Définition 1.19. Pour tout processus $(X_t)_{t \geq 0}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on définit sa filtration canonique par

$$\forall t \geq 0, \mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t). \tag{1.17}$$

La tribu \mathcal{F}_t^X est donc la tribu engendrée par la classe des événements

$$X_s^{-1}(B), s \in [0, t], B \in \mathcal{A}.$$

Définition 1.20. Une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est dite continue à droite si

$$\forall t \geq 0, \mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s. \tag{1.18}$$

Définition 1.21. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré. En notant \mathcal{N} la classe des ensembles \mathbb{P} -négligeables de \mathcal{F}_∞ , on dit que la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est complète si $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$.

Définition 1.22. On dit qu'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ vérifie les conditions habituelles si elle est à la fois continue à droite et complète.

Définition 1.23. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré. On dit qu'un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ sur (Ω, \mathcal{F}) est \mathcal{F}_t -adapté si pour tout $t \geq 0$, la variable aléatoire X_t est \mathcal{F}_t -mesurable.

Définition 1.24. Un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d défini sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ est une martingale si

- (i) il est \mathcal{F}_t -adapté ;
- (ii) $\forall t \geq 0, \mathbb{E}|X_t| < +\infty$;
- (iii) $\forall t \geq 0, \forall s \in [0, t], \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$.

Définition 1.25. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré. Une variable aléatoire $T : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ est un \mathcal{F}_t -temps d'arrêt si pour tout $t \geq 0$, l'ensemble $\{T \leq t\}$ est élément de la tribu \mathcal{F}_t .

Définition 1.26. Si T est un \mathcal{F}_t -temps d'arrêt, on définit la tribu $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}$ par l'ensemble des événements $A \in \mathcal{F}$ tels que $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t \geq 0$. On dit que les éléments de \mathcal{F}_T sont les événements se produisant avant T .

Lemme 1.1. Si S et T sont deux \mathcal{F}_t -temps d'arrêt tels que S est presque sûrement inférieur à T alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$. Si $T = t$ presque sûrement où $t \geq 0$ alors $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$.

Proposition 1.8. Si $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus \mathcal{F}_t -adapté à trajectoires presque-sûrement continues, alors X_T est \mathcal{F}_T -mesurable, où X_T désigne la variable aléatoire $\omega \rightarrow X(T(\omega), \omega)$.

Définition 1.27. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On appelle mesure de Gauss centrée réduite sur \mathbb{R}^d la mesure

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{d/2} e^{-\|x\|^2/2} dx, \quad (1.19)$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de \mathbb{R}^d .

Définition 1.28. On appelle mesure de Gauss sur \mathbb{R}^d toute mesure image de la mesure de Gauss centrée réduite, par une application affine de \mathbb{R}^d .

Définition 1.29. Un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d est gaussien si pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et pour tous réels positifs $t_1 < t_2 < \dots < t_p$, le vecteur aléatoire $(X_{t_1}, \dots, X_{t_p})$ à valeurs dans \mathbb{R}^{dp} suit une loi gaussienne sur \mathbb{R}^{dp} .

Définition 1.30. Un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d est dit du second ordre si pour tout $t \geq 0$, la variable aléatoire X_t admet un moment d'ordre deux.

Définition 1.31. Si $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus réel du second ordre, on définit sa fonction de covariance par

$$\forall (s, t) \in (\mathbb{R}_+)^2, K(s, t) = \mathbb{E}(X_t X_s) - \mathbb{E}X_t \mathbb{E}X_s.$$

Définition 1.32. Un processus réel du second ordre est dit stationnaire si pour tout couple (s, t) de réels positifs, $K(s, t)$ ne dépend que de $|t - s|$. On note dans ce cas $C(h) = K(t, t + h)$ pour tous réels positifs t et h . La densité spectrale de puissance du processus X , notée S , est définie, lorsqu'elle existe, par

$$\forall t \geq 0, C(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{iut} S(u) du. \quad (1.20)$$

Définition 1.33. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré. Un mouvement brownien réel standard défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ est un processus gaussien réel \mathcal{F}_t -adapté, noté $(W_t)_{t \geq 0}$ vérifiant :

- (i) $\mathbb{P}(W_0 = 0) = 1$;
- (ii) $\forall t \geq 0, \mathbb{E}W_t = 0$;
- (iii) $\forall t \geq 0, \forall s \in [0, t], W_t - W_s$ est indépendant de la tribu \mathcal{F}_s ;
- (iv) $\forall (s, t) \in (\mathbb{R}_+)^2, \mathbb{E}(W_t W_s) = t \wedge s$.

Grâce aux théorèmes d'extension et de continuité de Kolmogorov, on sait qu'il existe un tel processus ayant de plus ses trajectoires presque sûrement continues (cf Théorèmes 2.15 et 2.2.3 de [18]).

Définition 1.34. *Pour tout espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, le mouvement brownien réel standard sur \mathbb{R}^d défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ est un processus stochastique à valeurs dans \mathbb{R}^d dont les composantes sont des mouvements browniens réels standards définis sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ mutuellement indépendants.*

Proposition 1.9. *Pour tout espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, le mouvement brownien réel standard sur \mathbb{R}^d défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ est une martingale.*

Cette dernière propriété du mouvement brownien est essentielle dans la définition de l'intégrale stochastique d'Itô.

1.3.2 Intégrale stochastique

On va présenter dans cette section l'intégrale stochastique d'Itô par rapport au mouvement brownien. Elle s'inscrit dans la théorie plus large de l'intégrale stochastique par rapport à des semi-martingales continues qui ne sera pas présentée ici car on ne l'utilisera pas dans ce mémoire.

On va commencer par définir la classe des fonctions aléatoires que l'on va intégrer. Dans toute cette sous-section, on suppose donné un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$.

Définition 1.35. *Pour (S, T) tels que $0 \leq S \leq T$, $L^2(S, T)$ est l'ensemble des processus stochastiques réels $f : [S, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définis sur (Ω, \mathcal{F}) , \mathcal{F}_t -adaptés tels que*

$$\mathbb{E} \left(\int_S^T f^2(t, \omega) dt \right) < +\infty. \quad (1.21)$$

Définition 1.36. *Un processus f de $L^2(S, T)$ est un processus élémentaire s'il existe une partition $S = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ de $[S, T]$ et des variables aléatoires e_0, \dots, e_{n-1} respectivement $\mathcal{F}_{t_0}, \dots, \mathcal{F}_{t_{n-1}}$ -mesurables tels que pour presque tout $\omega \in \Omega$,*

$$f(t, \omega) = \sum_{i=0}^{n-1} e_i(\omega) \chi_{[t_i, t_{i+1}[}(t) \quad (1.22)$$

Définition 1.37. *Pour tout processus élémentaire f , on définit l'intégrale d'Itô $I(f, S, T)$ de f par rapport au mouvement brownien W par :*

$$I(f, S, T)(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} e_i(\omega) (W_{t_{i+1}}(\omega) - W_{t_i}(\omega)) \text{ p.s.} \quad (1.23)$$

On note $I(f, S, T)(\omega)$ ainsi définie par

$$\int_S^T f(t, \omega) dW_t.$$

On remarque que cette définition correspond à celle de l'intégrale de Riemann pour une fonction en escalier puisque $e_i = f(t_i)$. En revanche, contrairement au cas de l'intégrale de Riemann où $f(t_i)$ peut être remplacé par $f(t_{i+1})$ sans modifier après passage à la limite la valeur finale de l'intégrale, l'intégrale stochastique exige un peu plus de prudence. En

effet, pour une partition $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ de $[0, T]$, considérons les processus élémentaires f_1 et f_2 définis par

$$f_1(t, \omega) = \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i}(\omega) \chi_{[t_i, t_{i+1}[}(t), \quad (1.24)$$

et

$$f_2(t, \omega) = \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_{i+1}}(\omega) \chi_{[t_i, t_{i+1}[}(t). \quad (1.25)$$

On a alors

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T f_1(t) dW_t \right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}(W_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})) = 0, \quad (1.26)$$

car les variables aléatoires W_{t_i} et $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ sont indépendantes en vertu de l'assertion (iii) de la Définition 1.33. Mais on a également, en utilisant successivement l'argument précédent sur le mouvement brownien et l'assertion (iv) de la Définition 1.33 :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^T f_2(t) dW_t \right] &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}(W_{t_{i+1}}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}((W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}((W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2) = T. \end{aligned} \quad (1.27)$$

On voit donc sur cet exemple toute l'importance du caractère anticipatif (cas de f_2) ou pas (cas de f_1) du processus à intégrer par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Le lemme qui suit est essentiel puisqu'il permet d'établir la continuité uniforme de la fonction $f \mapsto I(f, S, T)$ de l'ensemble des processus élémentaires, muni de la norme définie en (1.21), dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Lemme 1.2. *Pour tout processus élémentaire f , on a l'égalité suivante :*

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_S^T f(t) dW_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_S^T f^2(t) dt \right]. \quad (1.28)$$

On voit que la continuité est très forte puisque l'intégrale stochastique est une isométrie de l'ensemble des processus élémentaires dans l'ensemble des variables aléatoires du second ordre. En utilisant la densité de l'ensemble des processus élémentaires dans $L^2(S, T)$, il est alors possible d'étendre $f \mapsto I(f, S, T)$ à l'ensemble $L^2(S, T)$ par passage à la limite et on obtient la définition de l'intégrale stochastique sur $L^2(S, T)$. Plus précisément,

Définition 1.38. *Pour $f \in L^2(S, T)$, il existe une suite de processus élémentaires $(f_n)_{n \geq 0}$ telle que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left(\int_S^T (f(t, \omega) - f_n(t, \omega))^2 dt \right) = 0,$$

et l'intégrale stochastique de f est définie par

$$\int_S^T f(t, \omega) dW_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_S^T f_n(t, \omega) dW_t(\omega), \quad (1.29)$$

où la limite est prise dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Cette définition implique que le caractère isométrique (1.28) de l'intégrale stochastique se prolonge à tout $L^2(S, T)$.

Si on se donne un processus stochastique $f \in L^2(0, T)$, l'intégrale stochastique permet de définir un processus stochastique $(I(f, 0, t))_{0 \leq t \leq T}$. En effet, tout processus de $L^2(0, T)$ est élément de $L^2(0, t)$ pour tout $t \leq T$. On peut donc définir $I(f, 0, t)$ pour $0 \leq t \leq T$ dès que f est élément de $L^2(0, T)$. Les propositions qui suivent énoncent les propriétés du processus stochastique $(I(f, 0, t))_{0 \leq t \leq T}$.

Proposition 1.10. *Pour tout processus $f \in L^2(0, T)$, il existe une modification continue du processus $I(f, 0, t)_{0 \leq t \leq T}$, c'est-à-dire qu'il existe un processus stochastique $(\alpha_t)_{0 \leq t \leq T}$ à trajectoires presque sûrement continues et vérifiant :*

$$\forall t \in [0, T], \mathbb{P}\left(\omega \in \Omega, \int_0^t f(s, \omega) dW_s(\omega) = \alpha_t(\omega)\right) = 1. \quad (1.30)$$

La démonstration de ce résultat (voir [18] p.32) repose sur l'approximation de f par des processus élémentaires f_n pour lesquels $t \mapsto \int_0^t f_n(s) dW_s$ est p.s. continue ; un résultat de convergence uniforme sur $[0, T]$ donne la continuité de la limite qui est égale presque sûrement à $t \mapsto \int_0^t f_s dW_s$. Dans toute la suite, on choisira toujours cette modification à trajectoires presque sûrement continues.

Proposition 1.11. *Pour $f \in L^2(0, T)$, le processus $(I(f, 0, t))_{0 \leq t \leq T}$ est une martingale sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. On a de plus*

$$\forall t \in [0, T], \mathbb{E}\left(\int_0^t f(s, \omega) dW_s(\omega)\right) = 0. \quad (1.31)$$

La relation de Chasles ainsi que la linéarité par rapport au processus intégré sont vérifiées par l'intégrale stochastique :

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}_+, s \leq t, \forall f \in L^2(0, t), \int_0^t f_u dW_u = \int_0^s f_u dW_u + \int_s^t f_u dW_u, \quad (1.32)$$

et

$$\forall (f, g) \in (L^2(S, T))^2, \forall c \in \mathbb{R}, \int_S^T (f_t + cg_t) dW_t = \int_S^T f_t dW_t + c \int_S^T g_t dW_t. \quad (1.33)$$

On vient de construire l'intégrale forte d'Itô, en ce sens qu'on a exigé du processus intégré d'être élément de l'ensemble $L^2(S, T)$. Il est possible d'affaiblir les hypothèses sur le processus f que l'on intègre et de définir un prolongement de l'intégrale stochastique à cette nouvelle classe de processus.

Définition 1.39. *Pour (S, T) tels que $0 \leq S \leq T$, $P(S, T)$ est l'ensemble des processus stochastiques réels $f : [S, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définis sur (Ω, \mathcal{F}) , \mathcal{F}_t -adaptés tels que*

$$\mathbb{P}\left(\int_S^T f^2(t, \omega) dt < +\infty\right) = 1. \quad (1.34)$$

Proposition 1.12. *Pour tout processus f de $P(S, T)$, il existe une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ de processus élémentaires de $P(S, T)$ telle que, en probabilité*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_S^T (f_n(t) - f(t))^2 dt = 0.$$

On définit alors l'intégrale de f par rapport au mouvement brownien W_t sur l'intervalle $[S, T]$ comme la limite en probabilité de la suite

$$\left(\int_S^T f_n(t) dW_t \right)_{n \geq 0}.$$

Comme précédemment, il est possible de trouver une modification continue sur $[0, T]$ du processus

$$t \rightarrow \int_0^t f_s dW_s,$$

pour tout processus $f \in P(0, T)$. On notera que ce processus n'est pas une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, il s'agit d'une $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -martingale locale continue, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le processus $(\int_0^{t \wedge n} f_s dW_s)_{t \geq 0}$ est une \mathcal{F}_t -martingale. C'est la raison pour laquelle l'intégrale stochastique, dans une formulation plus générale, est définie par rapport à une *semi-martingale continue*, somme d'un processus à variation bornée et d'une martingale locale continue. Ainsi, l'intégration d'une semi-martingale continue par rapport à une autre donne une semi-martingale continue.

Dans la définition de l'intégrale stochastique des processus élémentaires donnée dans (1.23), on avait attiré l'attention sur la différence que pouvait apporter la modification des e_i . Dans le cas de l'intégrale d'Itô, $e_i = f(t_i)$ presque sûrement. Il est possible de considérer $e_i = f((t_i + t_{i+1})/2)$ et l'intégrale limite en sera alors modifiée : dans ce cas, elle prend le nom d'intégrale de Stratonovich. On ne décrira pas l'ensemble des processus qu'il est alors possible d'intégrer mais on va voir son utilité dans le cadre du calcul différentiel stochastique et de la formule d'Itô plus précisément.

Proposition 1.13 (Formule d'Itô). *Soit $f \in P(0, T)$ et posons*

$$\forall t \in [0, T], X_t = \int_0^t f_s dW_s. \quad (1.35)$$

Pour toute fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , on a presque sûrement :

$$\forall t \in [0, T], g(X_t) = g(X_0) + \int_0^t g'(X_s) f_s dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t g''(X_s) f_s^2 ds. \quad (1.36)$$

Le terme

$$\frac{1}{2} \int_0^t g''(X_s) f_s^2 ds, \quad (1.37)$$

n'est pas présent lorsqu'on intègre par rapport à une fonction à variation bornée, comme dans le cas de l'intégrale de Riemann-Stieljes mais, il n'est pas nul ici, car le mouvement brownien, par rapport auquel on intègre, est presque sûrement à trajectoires à variation non bornée sur tout intervalle borné. Ce terme prend en compte la variation quadratique du mouvement brownien, laquelle est nulle pour une fonction continue à variation bornée.

Si on définit, dans (1.35), X_t par

$$\forall t \in [0, T], X_t = \int_0^t f_s \delta W_s, \quad (1.38)$$

où la présence de δ indique que l'on utilise l'intégrale de Stratonovich, alors le terme (1.37) n'apparaît plus dans (1.36).

Proposition 1.14. Soit $(f_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus intégrable au sens de Stratonovich par rapport au mouvement brownien et $(X_t)_{t \geq 0}$ défini par (1.38). Alors, pour toute fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , on a presque sûrement :

$$\forall t \in [0, T], g(X_t) = g(X_0) + \int_0^t g'(X_s) f_s \delta W_s. \quad (1.39)$$

On voit alors que tout l'intérêt de l'intégrale de Stratonovich réside dans le fait qu'elle permet de développer un calcul différentiel stochastique dont les règles de dérivation de fonctions composées sont identiques à celle du calcul différentiel déterministe. Cette approche est largement utilisée dans l'étude des équations différentielles stochastiques évoluant sur des variétés non euclidiennes puisqu'elle permet de définir directement des notions intrinsèques (indépendantes du choix de la carte locale) à la variété. De manière indirecte, il est possible de définir ces mêmes notions via le calcul stochastique d'Itô puisqu'il existe une relation entre les deux calculs.

Proposition 1.15. Soient $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne et $(X_t)_{t \geq 0}$ le processus stochastique réel défini en (1.35) vérifiant :

$$\int_0^t \sigma(X_s) \delta W_s \text{ et } \int_0^t \sigma(X_s) dW_s$$

existent pour tout $t \geq 0$. Si on suppose σ de classe C^1 alors

$$\int_0^t \sigma(X_s) \delta W_s = \int_0^t \sigma(X_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f_s \sigma'(X_s) ds.$$

On a défini l'intégrale stochastique pour des processus à valeurs réelles. On peut alors définir aisément l'intégrale stochastique pour des processus à valeurs matricielles. Pour cela, soit $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^n)$ un mouvement brownien standard sur \mathbb{R}^n défini sur l'espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. On peut alors définir en toute généralité pour tout processus $f_t = (f_t^{ij})_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq d}$ tel que $(f_t^{ij})_{S \leq t \leq T} \in P(S, T)$, l'intégrale stochastique

$$\int_S^T f_t dW_t,$$

comme le vecteur aléatoire de \mathbb{R}^d dont la $j^{\text{ième}}$ composante est définie par

$$\left(\int_S^T f_t dW_t \right)_j = \sum_{i=1}^n \int_S^T f_t^{ij} dW_t^i.$$

L'intégrale stochastique permet de donner un sens aux équations différentielles stochastiques.

Définition 1.40. Soit $T > 0$, d et n deux entiers strictement positifs, $b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{M}_{nd}(\mathbb{R})$ des fonctions boréliennes où $\mathcal{M}_{nd}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices réelles à n lignes et d colonnes. On désigne par $(W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard sur \mathbb{R}^n défini sur un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. Une équation différentielle stochastique sur \mathbb{R}^d de coefficient de dérive b et de diffusion σ consiste en la recherche d'un processus $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d vérifiant presque sûrement :

$$\forall t \in [0, T], X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s. \quad (1.40)$$

On écrira encore

$$\forall t \in [0, T], dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t. \quad (1.41)$$

Pour que l'équation (1.40) ait un sens, il faut que les intégrales en jeu aient un sens, ce qui peut être assuré en imposant à b et σ des conditions qui ne seront pas développées dans cette section.

1.4 Equations différentielles stochastiques multivoques

On donne dans cette partie un sens précis à l'équation (1.1) et on rappelle les résultats obtenus par E. Cépa dans sa thèse [7] dont on conservera les notations.

Pour écrire correctement (1.1), on introduit un processus $(K_t)_{0 \leq t \leq T}$ presque sûrement à variation bornée sur $[0, T]$, nul en 0 et qui doit vérifier $dK_t \in A(X_t)dt$ (en un sens à préciser) de telle manière que (1.1) peut s'écrire sous la forme intégrale suivante :

$$X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s - K_t. \quad (1.42)$$

L'existence d'une solution de (1.1) repose alors sur l'existence d'un couple solution $(X_t, K_t)_{0 \leq t \leq T}$ de (1.42). En notation différentielle, (1.42) implique

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t - dK_t.$$

1.4.1 Enoncé du problème

On suppose donnés un entier positif d , un réel positif T , un opérateur maximal monotone A de \mathbb{R}^d , deux fonctions boréliennes $b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$, un espace probabilisé filtré $\mathcal{E} = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ vérifiant les conditions habituelles, une variable aléatoire ξ , \mathcal{F}_0 -mesurable, à valeurs presque sûrement dans l'adhérence $\overline{D(A)}$ du domaine de A et un mouvement brownien d -dimensionnel standard $(W_t)_{t \geq 0}$ sur \mathcal{E} . On dira que le processus stochastique $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ est solution de (1.1) s'il existe un processus stochastique $(K_t)_{0 \leq t \leq T}$ s'annulant presque sûrement en 0 tel que :

1. $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ est à valeurs presque sûrement dans $\overline{D(A)}$, \mathcal{F}_t -adapté, à trajectoires presque sûrement continues sur $[0, T]$;
2. $(K_t)_{0 \leq t \leq T}$ est à valeurs dans \mathbb{R}^d , \mathcal{F}_t -adapté, à trajectoires presque sûrement à variation bornée sur $[0, T]$;
3. La relation différentielle suivante a lieu :

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t - dK_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \mathbb{P} - p.s.; \quad (1.43)$$

4. $X_0 = \xi_0$, $\mathbb{P} - p.s.$;
5. Pour tout processus $(\alpha_t)_{0 \leq t \leq T}$ et $(\beta_t)_{0 \leq t \leq T}$, \mathcal{F}_t -adaptés, à trajectoires presque sûrement continues, et vérifiant

$$\forall u \in [0, T], (\alpha_u, \beta_u) \in \text{Gr}(A),$$

la mesure

$$(X_u - \alpha_u, dK_u - \beta_u du)$$

est presque sûrement positive sur $[0, T]$, où (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire sur \mathbb{R}^d .

Remarque 1.1. La dernière assertion donne un sens précis à $dK_t \in A(X_t)dt$. Plus précisément, si on suppose les trajectoires du processus $(K_t)_{0 \leq t \leq T}$ presque sûrement continûment dérivables sur $[0, T]$ et que l'on note $(\dot{K}_t)_{0 \leq t \leq T}$ le processus dérivé, le point 5 s'énonce de la manière suivante : presque sûrement,

$$(X_u - \alpha_u, \dot{K}_u - \beta_u)$$

est presque partout (et donc partout par continuité) positif sur $[0, T]$, ce qui est équivalent, en vertu de la monotonie et de la maximalité de A , à : presque sûrement, $\dot{K}_u \in A(X_u)$ pour tout $u \in [0, T]$.

On dit qu'il y a unicité pour le problème (1.1) si deux solutions $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ et $(X'_t)_{0 \leq t \leq T}$ de (1.1) vérifient l'unicité trajectorielle suivante :

$$\mathbb{P}\{\forall t \in [0, T], X_t = X'_t\} = 1. \quad (1.44)$$

1.4.2 Résultats d'existence et d'unicité

On donne ici le résultat fondamental obtenu par E. Cépa dans sa thèse [7].

Théorème 1.1. *Supposons que l'intérieur du domaine de A ne soit pas vide :*

$$\text{Int}(D(A)) \neq \emptyset; \quad (1.45)$$

supposons de plus qu'il existe une constante $C(T)$ telle que pour tout $t \in [0, T]$ et $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$\|b(t, x) - b(t, y)\| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq C(T)\|x - y\| \quad (1.46)$$

et

$$\|b(t, x)\| + \|\sigma(t, x)\| \leq C(T)(1 + \|x\|). \quad (1.47)$$

Alors il existe une unique solution de (1.1).

La démonstration de ce résultat a été obtenue dans [7] de deux manières différentes. La première repose sur la construction d'une solution faible et l'application du théorème de Yamada-Watanabe adapté aux équations différentielles stochastiques multivoques (cf Théorème 1.2.8 p.19 de [7]). Une autre approche, déterministe, est présentée. Il s'agit de généraliser le problème défini dans [22]. Ce problème, connu sous le nom de problème de Skorohod, consiste, pour une fonction continue $w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ donnée vérifiant $w(0) \geq 0$, en la recherche d'une fonction continue $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ obtenue de w de manière minimale dans un sens que l'on va préciser. On impose à x de vérifier sur $[0, T]$, $x = w - k$ où $k : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue à variation bornée sur $[0, T]$ s'annulant en 0, appelée "reflection function" dans [22], devant rester constante dès qu'elle le peut : k est autorisée à ne plus être constante que lorsque x s'annule. En d'autres termes, en notant $|k|_t$ la variation totale de k sur $[0, t]$, on doit avoir :

$$\forall t \in [0, T], \int_0^t \mathbf{1}_{\{0 \leq u \leq t, x(u) > 0\}}(s) d|k|_s = 0.$$

La solution est connue explicitement par la formule suivante :

$$x(t) = w(t) - 0 \wedge \inf_{0 \leq s \leq t} w(s) \quad (1.48)$$

et x est la fonction réfléchie de w en 0. Une première généralisation consiste à considérer la réflexion sur le bord d'un domaine d'un espace euclidien (voir [17], [21] et [25]) et

d'introduire des équations différentielles stochastiques réfléchies. Or un tel problème peut s'exprimer par l'introduction du sous-différentiel de l'indicatrice du convexe considéré (voir la Proposition 1.7 et ses commentaires) et la dernière étape de la généralisation consiste à considérer des opérateurs multivoques maximaux monotones en lieu et place des sous-différentiels.

Une fois défini le problème de Skorohod généralisé, qui est déterministe, la solution est alors construite trajectoire par trajectoire. Cette dernière approche mérite d'être exposée dans le présent rapport puisque la démonstration de la convergence du schéma que l'on présentera dans la section 1.5 est obtenue grâce à l'étude d'un problème de Skorohod discret. On va donc définir le problème de Skorohod généralisé et donner le résultat d'existence d'une solution obtenu dans [7].

Définition 1.41 (Problème de Skorohod généralisé). *On se donne un opérateur maximal monotone A de \mathbb{R}^d dont le domaine n'est pas d'intérieur vide. On fixe $T > 0$ et une application continue $w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ de valeur initiale $w(0)$ appartenant à l'adhérence $\overline{D(A)}$ du domaine de A . Le problème de Skorohod consiste en la recherche de deux fonctions continues x et k de $[0, T]$ dans \mathbb{R}^d telles que :*

- (i) x est à valeurs dans $\overline{D(A)}$;
- (ii) k est à variation bornée sur $[0, T]$ et s'annule en 0 ;
- (iii) $\forall t \in [0, T], x(t) = w(t) - k(t)$;
- (iv) Pour tout couple de fonctions (α, β) continues sur $[0, T]$, à valeurs dans \mathbb{R}^d telles que $(\alpha(t), \beta(t)) \in \text{Gr}(A)$ pour tout $t \in [0, T]$,

$$\text{la mesure } (x(t) - \alpha(t), dk(t) - \beta(t)dt) \text{ est positive.} \quad (1.49)$$

Le théorème 4.1.2 p.66 de [7] assure l'existence d'une unique solution au problème précédent sans aucune hypothèse supplémentaire. L'existence est obtenue par l'approximation de w par une suite (indexée par n) de fonctions de classe C^∞ pour lesquelles une solution est obtenue par régularisation lipschitzienne de l'opérateur maximal monotone A (en utilisant les approximations au sens de Yosida définies dans la Définition 1.6). Le passage à la limite est rendu possible grâce à une majoration uniforme en n des variations totales des fonctions k_n associées à chaque approximant w_n de w . Cette majoration repose sur le résultat fondamental suivant (Proposition 4.1.5 p.68 de [7]), corollaire de la Proposition 1.3 :

Proposition 1.16. *Soit A un opérateur maximal monotone de \mathbb{R}^d . Il existe $a \in \mathbb{R}^d$, $\gamma > 0$ et $\mu \geq 0$ (ne dépendant que de A) tels que pour toute fonction continue $w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ de condition initiale appartenant à l'adhérence du domaine de A , si (x, k) est solution du problème de Skorohod généralisé associé à A et w , alors pour tous $(s, t) \in [0, T]^2$, $s \leq t$:*

$$\int_s^t (x(u) - a, dk(u)) \geq \gamma |k|_s^t - \nu \int_s^t \|x(u) - a\| du - \gamma \mu (t - s), \quad (1.50)$$

où $|k|_s^t$ désigne la variation totale de k entre s et t .

1.5 Article 1 : convergence du schéma numérique

Les pages qui suivent sont la reproduction de l'article [3] publié en 2003 dans le journal *Set-Valued Analysis* sous le titre "Multivalued stochastic differential equations : convergence of a numerical scheme". Ce texte comporte 23 pages. On démontre dans cet article la convergence d'un schéma numérique vers la solution de (1.1) pour un opérateur maximal monotone A dont la section A^0 a une croissance polynomiale. L'intérêt d'un tel schéma, qui a déjà été étudié dans des cas moins généraux, est sa possible utilisation pratique car il est explicite (l'étape $n + 1$ est totalement déterminée par l'étape n), grâce à la disparition de l'inclusion pour une égalité (voir (3.1) p.396 de l'article).



Set-Valued Analysis **11**: 393–415, 2003.
© 2003 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

393

Multivalued Stochastic Differential Equations: Convergence of a Numerical Scheme

FRÉDÉRIC BERNARDIN

URA 1652 CNRS, Département Génie Civil et Bâtiment, Laboratoire Géomatériaux,
Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat, Rue Maurice Audin, 69518 Vaulx-en-Velin Cedex,
France,

UMR 5585 CNRS, MAPLY, Laboratoire de mathématiques appliquées de Lyon,
Université Claude Bernard Lyon I, 69622 Villeurbanne Cedex, France

(Received: 12 February 2003; in final form: 27 May 2003)

Abstract. In this paper we show the strong mean square convergence of a numerical scheme for a \mathbb{R}^d -multivalued stochastic differential equation:

$$dX_t + A(X_t) dt \ni b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t$$

and obtain the rate of convergence $\mathcal{O}((\delta \log(1/\delta))^{1/2})$ when the diffusion coefficient is bounded. By introducing a *discrete Skorokhod problem*, we establish L^p -estimates ($p \geq 2$) for the solutions and prove the convergence by using a deterministic result. Numerical experiments for the rate of convergence are presented.

Mathematics Subject Classifications (2000): 60H10, 60H99.

Key words: stochastic differential equations, maximal monotone operators, numerical scheme, Skorokhod problem, numerical experiments.

1. Introduction

In this paper we prove the convergence of a numerical scheme for a \mathbb{R}^d -multivalued stochastic differential equation (abbreviated MSDE)

$$dX_t + A(X_t) dt \ni b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t,$$

where A is a *multivalued maximal monotone operator* on \mathbb{R}^d and $(W_t)_{t \geq 0}$ is the standard Brownian motion on \mathbb{R}^d . Such stochastic differential equations (SDE's) were introduced by Krée [5] and studied subsequently by many authors, e.g., Bensoussan and Rascanu [1], Cépa [4], Lépingle and Marois [7], and Storm [15]. In point of fact, MSDE's generalize SDE's with reflecting boundary conditions on which many investigations have been carried out, see, e.g., Tanaka [16], Lions and Snitzman [8]. When the maximal monotone drift is the subdifferential of the indicator of a closed convex domain, the MSDE is a SDE with reflecting boundary conditions; see [3] for more explanations. In [1] or [15] the monotone

operator considered is the subdifferential of a lower semi-continuous convex map and in [4], it is an arbitrary multivalued maximal monotone operator; in these cases the existence and uniqueness of solutions are proved. From an other view point, numerical schemes have been developed for SDE's with reflecting boundary conditions; among which, the projection scheme has been studied by several authors, Lépingle [6], Slominski [13, 14] and Pettersson [9, 10].

In this note we consider a generalization of this numerical scheme and show its strong convergence when A verifies a polynomial growth condition: this is always the case for the subdifferential of the indicator of a closed convex domain. In [10], the same result is obtained for a subdifferential of an arbitrary lower semi-continuous convex map and uniform time step. In this article we do not assume a constant time step and we give a convergence rate of under appropriate condition on the diffusion coefficient σ .

The paper is organized as follows. In Section 2, we collect some basic definitions and results concerning MSDE's and maximal monotone operators. In Section 3, we define the numerical scheme. In Section 4, we consider the Skorokhod problem for a semi-martingale and give new L^p -estimates. In Section 5, we define the *discrete Skorokhod problem*, which is new, and give discrete version of above L^p -estimates. In Section 6 (Theorem 6.1), we prove the convergence of the solution of a discrete Skorokhod problem to the solution of the continuous problem. To do this we must establish (Proposition 6.1) a deterministic result for a piecewise affine approximation which is not a semi-martingale. In the penultimate section we show in Theorem 7.1 the convergence of the numerical scheme and give the rate for a bounded σ . In the last section we give results about the rate of convergence obtained by numerical experiments.

2. Preliminaries

2.1. MULTIVALUED STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION

We use the same notation and assumption as in [4]. Let $J = [0; T]$, $T > 0$, $d \in \mathbb{N}^*$, A a multivalued maximal monotone operator on \mathbb{R}^d , $b: J \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ and $\sigma: J \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ two Borel-measurable functions, $\mathcal{E} = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$ a filtered probability space which satisfies the usual conditions, $W = \{W_t, \mathcal{F}_t; t \in J\}$ the standard d -dimensional Brownian motion defined on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ with $W_0 = 0$ and ξ_0 a random variable which belongs to $\overline{D(A)}$ \mathbb{P} -a.s. A process $X = \{X_t, \mathcal{F}_t; t \in J\}$ is a solution of the MSDE

$$\begin{cases} dX_t + A(X_t) dt \ni b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, & \forall t \in J, \\ X_0 = \xi_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

if there exists a process $K = \{K_t, \mathcal{F}_t; t \in J\}$ such that

1. $(X_t)_{t \in J}$ is a \mathbb{R}^d -valued process, \mathcal{F}_t -adapted with continuous sample paths;
2. $(K_t)_{t \in J}$ is a \mathbb{R}^d -valued process, \mathcal{F}_t -adapted whose sample paths are continuous and of bounded variation on J ;

3.

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t - dK_t, \quad \forall t \in J, \mathbb{P} - a.s.; \quad (2.2)$$

4. $X_0 = \xi_0 \mathbb{P} - a.s.$;

5. For all \mathbb{R}^d -valued processes (α, β) , $\alpha = \{\alpha_t, \mathcal{F}_t, t \in J\}$ and $\beta = \{\beta_t, \mathcal{F}_t; t \in J\}$ continuous, adapted on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, verifying:

$$\forall u \in J, \quad (\alpha_u, \beta_u) \in \text{Gr}(A),$$

the measure

$$\langle X_u - \alpha_u, dK_u - \beta_u du \rangle$$

is $\mathbb{P} - a.s.$ nonnegative on J , where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the scalar product on \mathbb{R}^d .

We suppose the interior of the domain of A not empty:

$$\text{Int } D(A) \neq \emptyset, \quad (2.3)$$

and the existence of a constant $C > 0$ such that

$$\begin{aligned} |b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| &\leq C|x - y|, \\ \forall t \in J, \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \end{aligned} \quad (2.4)$$

and

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|), \quad \forall t \in J, \forall x, y \in \mathbb{R}^d. \quad (2.5)$$

By [4], there exists under the above assumptions a unique (strong) solution of (2.1).

2.2. KNOWN RESULTS AND NOTATIONS

In this subsection we give well-known results about maximal monotone operator (see [2], e.g., for more explanations). Let d a nonnegative integer and denote by $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ the set of all subsets of \mathbb{R}^d . The domain $D(A)$ of $A: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ is the set of all $x \in \mathbb{R}^d$ such that $A(x)$ is not empty. We denote by $\text{Gr}(A)$ the graph of A , i.e., $\text{Gr}(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d, x \in D(A), y \in A(x)\}$. We say that A is monotone if for all $x, x' \in D(A)$, and for all $y \in A(x)$ and $y' \in A(x')$, $\langle x - x', y - y' \rangle \geq 0$ is valid. The space of all graphs on \mathbb{R}^d is ordered by inclusion and, identifying an operator and its graph, there exists maximal element among the multivalued monotone operators on \mathbb{R}^d : such an element is a multivalued maximal monotone operator on \mathbb{R}^d . It can be proved that $A(x) = \{y, (x, y) \in \text{Gr}(A)\}$ is a closed convex set if A is maximal monotone. Finally, for A a multivalued operator, we define its inverse A^{-1} or, what is equivalent, $\text{Gr}(A^{-1})$, as the graph obtained from $\text{Gr } A$ by exchanging the order of the elements in any pair $(x, y) \in \text{Gr}(A)$. We recall the following results about maximal monotone operators:

396

FRÉDÉRIC BERNARDIN

1. For $\lambda > 0$, the single-valued map $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ from \mathbb{R}^d to \mathbb{R}^d is a contraction;
2. For $\lambda > 0$, Yosida's approximation

$$A_\lambda = \frac{I - J_\lambda}{\lambda}$$

is a single-valued map from \mathbb{R}^d to \mathbb{R}^d which is maximal, monotone and Lipschitz continuous with Lipschitz constant $1/\lambda$. Furthermore, for all $x \in D(A)$,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} A_\lambda(x) = A^0(x),$$

where $A^0(x) = \text{proj}_{A(x)} 0$ is the projection of 0 on the closed convex set $A(x)$; moreover

$$|A_\lambda(x)| \leq |A^0(x)|. \tag{2.6}$$

If k is a continuous function from $[0, T]$ to \mathbb{R}^d with bounded variation, we denote by $|k|_t$ the variation of its restriction to $[0, t]$. We recall finally Jensen's inequality (see [11]) which we will use throughout this paper: let $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ a measure space with $\mu(\Omega) < \infty$, $f \in L^1(\mu)$ maps Ω to $[a, b] \subset \mathbb{R}$ and $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is a convex function. Then

$$\varphi\left(\frac{1}{\mu(\Omega)} \int_{\Omega} f \, d\mu\right) \leq \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_{\Omega} \varphi(f) \, d\mu. \tag{2.7}$$

3. Numerical Scheme

Let $\pi_\delta = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n^\delta} = T\}$ be a partition of $[0, T]$; let $h_k^\delta = t_{k+1} - t_k$, and let δ be the mesh size given by $\delta = \max\{h_k^\delta : 0 \leq k \leq n^\delta - 1\}$. We define n^δ random variables on $\mathcal{E} = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$ inductively for all $n \in \{0, \dots, n^\delta - 1\}$ as follows:

$$\begin{cases} x_{n+1}^\delta = (I + h_n^\delta A)^{-1}(x_n^\delta + b(t_n, x_n^\delta)h_n^\delta + \sigma(t_n, x_n^\delta)(W_{t_{n+1}} - W_{t_n})), \\ x_0^\delta = \xi_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Finally for $n \in \{0, \dots, n^\delta - 1\}$ and $t \in [t_n, t_{n+1}[$, we put

$$X^\delta(t) = x_n^\delta + \frac{t - t_n}{h_n^\delta}(x_{n+1}^\delta - x_n^\delta). \tag{3.2}$$

We remark that $(X_t^\delta)_t$ is a process with continuous sample paths on J . We will show later the convergence of X^δ to the solution X in the sense

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E}\left(\sup_{t \in J} |X^\delta(t) - X(t)|^2\right) = 0.$$

4. Skorokhod Problem

In [4], Cépa introduces the

DEFINITION 4.1 (Theorem). For all dimension d , let A a multivalued maximal monotone operator on \mathbb{R}^d such that $\text{Int}(D(A)) \neq \emptyset$. Let w be a continuous function from $[0; T]$, $T > 0$ to \mathbb{R}^d such that $w(0) \in \overline{D(A)}$. Then there exists a unique pair of functions (x, k) verifying:

1. $x = \{x(t), 0 \leq t \leq T\}$ is a continuous function taking its values in $\overline{D(A)}$;
2. $k = \{k(t), 0 \leq t \leq T\}$ is a \mathbb{R}^d -valued continuous function with bounded variation on $[0, T]$ such that $k(0) = 0$;
3. $\forall t \in [0; T]$, $x(t) = w(t) - k(t)$;
4. For all pair (α, β) of continuous functions from $[0; T]$ to \mathbb{R}^d which verify

$$\forall u \in [0; T], \quad (\alpha(u), \beta(u)) \in \text{Gr}(A),$$

the measure

$$\langle x(u) - \alpha(u), dk(u) - \beta(u) du \rangle$$

is nonnegative.

Then we say that (x, k) is the solution to the generalized Skorokhod problem associated to A and w , denoted by $\mathcal{S}(A; w; [0, T])$.

Remark 4.1. This definition gives a precise sense to the assertion $dk \in A(x) dt$.

Remark 4.2. Almost surely, the solution to the MSDE studied in the present article solves the Skorokhod problem associated to the function

$$w(t) = \xi_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s.$$

Remark 4.3. The solution to $\mathcal{S}(A; w; T)$ for a constant function w is not necessarily a constant function as the case for the subdifferential of an indicator of a convex domain. In fact, if $A = \partial\varphi$ with $\varphi(u) = \exp(u)$ from \mathbb{R} to \mathbb{R} and $w(t) = 0$ on $[0, T]$, then $x(t) = -\log(1 + t)$ is the solution to $\mathcal{S}(A; w; T)$.

We recall here a lemma due to Cépa (see [4]).

LEMMA 4.1. *There exists $a \in \text{Int}(D(A))$, $\gamma > 0$ and $\mu \geq 0$ (depending only on A) such that if (x, k) is the pair of solutions to $\mathcal{S}(A; w; [0; T])$, then for all $0 \leq s \leq t \leq T$,*

$$\int_s^t \langle x(u) - a, dk(u) \rangle \geq \gamma |k|_t^s - \mu \int_s^t \|a - x(u)\| du - \gamma \mu (t - s). \quad (4.1)$$

Let $(w_t)_{0 \leq t \leq T}$ be a stochastic process with continuous sample paths. The process $(X_t, K_t)_{0 \leq t \leq T}$ is said to be a solution to the Skorokhod problem associated to w if almost surely $(X(\omega), K(\omega))$ is the solution of $\mathcal{S}(A; w(\omega); [0; T])$ described in the above definition. We keep the notation $\mathcal{S}(A; w; [0; T])$ for this Skorokhod problem. The following two propositions both concern Skorokhod problems; in the first one, we obtain estimates for the solution of a Skorokhod problem with data not depending on the solution; in the second, we obtain estimates for a Skorokhod problem relative to a stochastic differential equation. The main difference with Cépa's results is that we use estimates in L^p instead of L^2 .

PROPOSITION 4.1. *Let $p \geq 2$ and $\mathcal{E} = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$ a filtered probability space satisfying the usual conditions. We denote by $W = \{W_t, \mathcal{F}_t; t \in J\}$ the standard d -dimensional Brownian motion on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ with $W_0 = 0$. We consider a \mathbb{R}^d -valued process $(y_t)_{0 \leq t \leq T}$ such that*

$$\|y\|_p^p = \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|y(t)\|^p < +\infty,$$

and the continuous semi-martingale

$$w(t) = w_0 + \int_0^t b(s, y_s) ds + \int_0^t \sigma(s, y_s) dW_s,$$

where w_0 is a random variable satisfying

$$\|w_0\|_p^p = \mathbb{E}\|w_0\|^p < +\infty.$$

Then the process solution $(X_t, K_t)_{0 \leq t \leq T}$ to the Skorokhod problem associated to the process w verifies

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \{\|X_t\|^p + \|K_t\|^p + |K|_t^{p/2}\} < +\infty. \quad (4.2)$$

Proof. Let a be the element defined in Lemma 4.1; since the result is known for $p = 2$ (see [3]), X_t is a semi-martingale and we apply the Itô's formula to the continuous semi-martingale $X(t) - a = w(t) - a - K(t)$ and we use (4.1) to obtain

$$\begin{aligned} \|X_t - a\|^2 &\leq \|w_0 - a\|^2 + \int_0^t \|\sigma(s, y_s)\|^2 ds + \\ &\quad + 2 \int_0^t \langle X_s - a, b(s, y_s) \rangle ds + \\ &\quad + 2 \int_0^t \langle X_s - a, \sigma(s, y_s) \rangle dW_s - 2\gamma |K|_t + \\ &\quad + 2\mu \int_0^t \|X_s - a\| ds + 2\gamma\mu t. \end{aligned} \quad (4.3)$$

We raise this to the power $p/2$ and use the inequalities: for all $a_i \geq 0$,

$$\forall q \geq 1, \quad \sum_{i=1}^N a_i^q \leq \left(\sum_{i=1}^N a_i \right)^q \leq N^{q-1} \sum_{i=1}^N a_i^q \tag{4.4}$$

to obtain:

$$\begin{aligned} & (2\gamma |K|_t)^{p/2} + \|X_t - a\|^p \\ & \leq C \left\{ \|w_0 - a\|^p + \left(\int_0^t \|\sigma(s, y_s)\|^2 ds \right)^{p/2} + \right. \\ & \quad + \left(2 \int_0^t \langle X_s - a, b(s, y_s) \rangle ds \right)^{p/2} + \\ & \quad + \left(4 \int_0^t \langle X_s - a, \sigma(s, y_s) \rangle dW_s \right)^{p/2} + \\ & \quad \left. + \left(2\mu \int_0^t \|X_s - a\| ds \right)^{p/2} + (2\gamma\mu)^{p/2} T^{p/2} \right\}. \end{aligned}$$

We apply the expectation to the above inequality and we apply Cauchy–Schwarz inequality to the fourth term in its right-hand side;

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \{ (2\gamma |K|_s)^{p/2} + \|X_s - a\|^p \} \\ & \leq C \left\{ \mathbb{E} \|w_0 - a\|^p + \mathbb{E} \left(\int_0^t \|\sigma(s, y_s)\|^2 ds \right)^{p/2} + \right. \\ & \quad + \mathbb{E} \left(2 \int_0^t \|X_s - a\| \|b(s, y_s)\| ds \right)^{p/2} + \\ & \quad + \mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \left(2 \int_0^s \langle X_u - a, \sigma(u, y_u) \rangle dW_u \right)^{p/2} + \\ & \quad \left. + \mathbb{E} \left(2\mu \int_0^t \|X_s - a\| ds \right)^{p/2} + (2\gamma\mu T)^{p/2} \right\}. \end{aligned}$$

We apply Burkholder–Davis–Gundy inequalities to the term involving a sup, Jensen inequality (2.7) and Cauchy–Schwarz inequality, obtaining thus

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \{ (2\gamma |K|_s)^{p/2} + \|X_s - a\|^p \} \\ & \leq C \left\{ \mathbb{E} \|w_0 - a\|^p + C \mathbb{E} \left(\int_0^t \|\sigma(s, y_s)\|^p ds \right) + \right. \\ & \quad + 2^{p/2} C \mathbb{E} \left(\int_0^t \|X_s - a\|^{p/2} \|b(s, y_s)\|^{p/2} ds \right) + \\ & \quad \left. + 2^{p/2} C \mathbb{E} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} \|X_s - a\|^{p/2} \left(\int_0^t \|\sigma(u, y_u)\|^2 du \right)^{p/4} \right\} + \right. \end{aligned}$$

400

FRÉDÉRIC BERNARDIN

$$+(2\mu)^{p/2} \sqrt{\mathbb{E} \left(\int_0^t \|X_s - a\| ds \right)^p} + (2\gamma\mu T)^{p/2} \Big\}.$$

We use now Cauchy–Schwarz inequality on the fourth term of the right-hand side, the growth assumptions (2.5) on the terms containing b and σ , and (4.4):

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \left\{ (2\gamma|K|_s)^{p/2} + \|X_s - a\|^p \right\} \\ & \leq C \left\{ \mathbb{E} \|w_0 - a\|^p + C(1 + \mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \|y_s\|^p) + \right. \\ & \quad + 2^{p/2} C \sqrt{\mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \|X_s - a\|^p} \sqrt{1 + \mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \|y_s\|^p} + \\ & \quad + 2^{p/2} C \sqrt{\mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \|X_s - a\|^p} \sqrt{1 + \mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \|y_s\|^p} + \\ & \quad \left. + (2\mu)^{p/2} C \sqrt{\mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \|X_s - a\|^p} + (2\gamma\mu T)^{p/2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

This last inequality is valid if we replace t by $t \wedge \tau_n$ where the stopping time τ_n is defined by $\tau_n = \inf\{0 \leq s \leq T, \|X_s\| \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Define

$$\varphi_n(t) = \sqrt{\mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \|X_{s \wedge \tau_n} - a\|^p}.$$

We have then

$$\varphi_n^2 - C_1 \varphi_n - C_0 \leq 0, \quad (4.6)$$

and also

$$\varphi_n(t) \leq C,$$

where C does not depend on n . We can finally write

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \|X_{s \wedge \tau_n}\|^p < +\infty.$$

Since $\tau_n \uparrow +\infty$ when $n \uparrow +\infty$, by Beppo–Lévi lemma,

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \|X_s\|^p < +\infty. \quad (4.7)$$

Using (4.7) and (4.5), we have

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |K|_t^{p/2} < +\infty.$$

The estimate on $\|K_t\|^p$ is obtained by observing that

$$X(t) = w(t) - K(t);$$

this allows us to express K_t in terms of X_t and y_t and all other relevant quantities. \square

PROPOSITION 4.2. *Let X_t be the solution of (2.1) as obtained by Cépa; assume moreover that*

$$\|\xi_0\|_p^p = \mathbb{E}\|\xi_0\|^p < +\infty.$$

Then the following estimate holds

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \{ \|X_t\|^p + \|K_t\|^p + |K|_t^{p/2} \} < +\infty. \tag{4.8}$$

Proof. This result is known if A is the subdifferential of a lower semi-continuous function (see [15]) but not in the present more general case. The following calculations are similar to those presented in the proof of Proposition 4.6. We write as in (4.3)

$$\begin{aligned} \|X_t - a\|^2 &\leq \|\xi_0 - a\|^2 + \int_0^t \|\sigma(s, X_s)\|^2 ds + \\ &\quad + 2 \int_0^t \langle X_s - a, b(s, X_s) \rangle ds + \\ &\quad + 2 \int_0^t \langle X_s - a, \sigma(s, X_s) \rangle dW_s - 2\gamma |K|_t + \\ &\quad + 2\mu \int_0^t \|X_s - a\| ds + 2\gamma\mu t, \end{aligned} \tag{4.9}$$

and with the arguments of Proposition 4.1, we infer

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \{ (2\gamma |K|_s)^{p/2} + \|X_s\|^p \} \\ &\leq C \left\{ \mathbb{E}\|a\|^p + \mathbb{E}\|\xi_0 - a\|^p + C + \left(C \int_0^t \mathbb{E} \sup_{0 \leq u \leq s} \|X_u\|^p ds \right) + \right. \\ &\quad + C I_t \sqrt{\mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \|X_s - a\|^p} + C I_t \sqrt{\mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \|X_s - a\|^p} + \\ &\quad \left. + C \left(1 + \sqrt{\int_0^t \mathbb{E} \sup_{0 \leq u \leq s} \|X_u\|^p ds} \right) + (2\gamma\mu T)^{p/2} \right\}, \end{aligned} \tag{4.10}$$

where

$$I_t = \sqrt{\int_0^t \left(1 + \mathbb{E} \sup_{0 \leq u \leq s} \|X_u\|^p \right) ds}.$$

Define

$$\varphi_n(t) = \mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \|X_{s \wedge \tau_n}\|^p$$

402

FRÉDÉRIC BERNARDIN

with $\tau_n = \inf\{0 \leq s \leq T, \|X_s\| \geq n\}$. Since $ab \leq (1/\epsilon)a^2 + \epsilon b^2$ for all $a, b \geq 0$ and $\epsilon > 0$, using (4.4) and (4.10) with $t\tau_n$ instead of t , there exist constants α and β such that

$$\varphi_n(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t \varphi_n(s) \, ds. \quad (4.11)$$

Observe that this relation parallels (4.6); it is natural to use a Gronwall lemma since we have a differential equation situation and its application, with the help of Beppo–Lévi lemma, to (4.11) yields

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \|X_s\|^p < +\infty, \quad (4.12)$$

and from (4.10) and (4.12), we have

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |K|_t^{p/2} < +\infty.$$

The proof of the estimate on $\|K_t\|^p$ results from the integral form of (2.2) which allows us to express K_t in terms of X_t and all other relevant quantities. \square

5. Discrete Skorokhod Problem

Let $\delta > 0$ and let π_δ be a partition of $[0, T]$. For $t \in [0, T]$, denote $\sup\{t_k \leq t : 0 \leq k \leq n^\delta\}$ by τ_t^δ . For stochastic differential equations with reflecting boundary conditions, we can extend the Skorokhod problem to processes with right-continuous with left-hand limits paths and therefore the piecewise constant approximation is a solution to Skorokhod problem associated to (see [12], Remark 1.4)

$$w^\delta(t) = \xi_0 + \int_0^t b(s, X_{\tau_s^\delta}) \, ds + \int_0^t \sigma(s, X_{\tau_s^\delta}) \, dW_s. \quad (5.1)$$

By Remark 4.3, in our general case, the piecewise constant approximation of (3.1) can not be a solution to an extended Skorokhod problem associated to (5.1). Thus we cannot use the above results to get estimates on $(x_n^\delta)_n$; we introduce a *discrete Skorokhod problem* whose $(x_n^\delta)_n$ is a solution too.

5.1. DEFINITION AND BASIC RESULTS

DEFINITION 5.1. For all dimension d , let A a multivalued maximal monotone operator on \mathbb{R}^d such that $\text{Int } D(A) \neq \emptyset$. Let w be any function from $[0; T]$, $T > 0$ to \mathbb{R}^d such that $w(0) \in \overline{D(A)}$, $\delta > 0$ and let $\pi_\delta = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n^\delta} = T\}$ be a partition of $[0, T]$ with meshsize $\delta = \max\{h_k^\delta : 0 \leq k \leq n^\delta - 1\}$ where $h_k^\delta = t_{k+1} - t_k$. We say that $(x_0^\delta, \dots, x_{n^\delta}^\delta) \in (\overline{D(A)})^{n^\delta+1}$ is a solution to the discrete

Skorokhod problem $\mathcal{SD}(A, T, \pi_\delta, w)$ if there exists $(k_0^\delta, \dots, k_{n^\delta}^\delta) \in (\mathbb{R}^d)^{n^\delta+1}$ such that $x_0^\delta = w(0), k_0^\delta = 0$ and if $(x_0^\delta, \dots, x_{n^\delta}^\delta)$ satisfies

$$\begin{cases} x_{n+1}^\delta - x_n^\delta + h_n^\delta k_{n+1}^\delta = w(t_{n+1}) - w(t_n), \\ k_{n+1}^\delta \in A(x_{n+1}^\delta). \end{cases} \quad 0 \leq n \leq n^\delta - 1 \quad (5.2)$$

The monotonicity of A gives immediately

PROPOSITION 5.1. *Under the above assumptions the problem (5.2) admits a unique solution given by*

$$\begin{cases} x_{n+1}^\delta = J_{h_n^\delta}(x_n^\delta + w(t_{n+1}) - w(t_n)), \\ k_{n+1}^\delta = A_{h_n^\delta}(x_n^\delta + w(t_{n+1}) - w(t_n)). \end{cases} \quad 0 \leq n \leq n^\delta - 1 \quad (5.3)$$

We recall that $J_\lambda: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ is defined by $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ and $A_\lambda = \lambda(I - J_\lambda)$.

We give here two lemmas which will be useful to establish some estimates for the solution of $\mathcal{SD}(A, T, \pi_\delta, w)$. We begin with a discrete version of Cépa's Lemma 4.1, which we can find in [10] for the case $A = \partial\phi$.

LEMMA 5.1. *There exists $a \in \text{Int}(D(A))$, $\gamma > 0$ and $\mu \geq 0$ (depending only on A) such that for all partition π_δ of $[0, T]$, if $(x_n^\delta, k_n^\delta)_{n \in \{0, \dots, n^\delta\}}$ is the solution to $\mathcal{SD}(A, T, \pi_\delta, w)$, then for all $1 \leq n \leq m \leq n^\delta$,*

$$\begin{aligned} \sum_{i=n}^m h_{i-1}^\delta \langle x_i^\delta - a, k_i^\delta \rangle &\geq \gamma \sum_{i=n}^m h_{i-1}^\delta \|k_i^\delta\| - \\ &\quad - \mu \sum_{i=n}^m h_{i-1}^\delta \|a - x_i^\delta\| - \gamma \mu (t_m - t_n). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Proof. Since the interior of $D(A)$ is not empty, it contains a point a ; a result of [2] implies that for some positive γ and μ , the closed ball $\overline{B}(a, \gamma)$ of radius γ about a is included in $\text{Int}(D(A))$ and A is bounded on this ball:

$$\mu = \sup\{|y|, y \in A(x), x \in \overline{B}(a, \gamma)\} < +\infty.$$

Following Cépa, let e be an element of \mathbb{R}^d such that $\|e\| = 1$. For all $i \in \{1, \dots, n^\delta\}, k_i^\delta \in A(x_i^\delta)$ and $A^0(a + \gamma e) \in A(a + \gamma e)$ and so, by monotonicity of A :

$$\langle x_i^\delta - a - \gamma e, k_i^\delta - A^0(a + \gamma e) \rangle \geq 0.$$

Therefore the following inequality holds:

$$\begin{aligned} \langle x_i^\delta - a - \gamma e, k_i^\delta \rangle &\geq \langle x_i^\delta - a - \gamma e, A^0(a + \gamma e) \rangle \\ &\geq -\langle a - x_i^\delta, A^0(a + \gamma e) \rangle - \gamma \langle e, A^0(a + \gamma e) \rangle \\ &\geq -\|a - x_i^\delta\| \|A^0(a + \gamma e)\| - \|A^0(a + \gamma e)\| \gamma \\ &\geq -(\|a - x_i^\delta\| + \gamma) \mu. \end{aligned} \quad (5.5)$$

404

FRÉDÉRIC BERNARDIN

If $k_i^\delta \neq 0$, we take $e = k_i^\delta / \|k_i\|^\delta$ and (5.5) becomes

$$\langle x_i^\delta - a, k_i^\delta \rangle \geq \gamma \|k_i^\delta\| - \|a - x_i^\delta\| \mu - \gamma \mu,$$

which holds even if k_i^δ vanishes. By summation with respect to i , we obtain the result. \square

5.2. L^p -ESTIMATES

We show the L^p -boundedness uniformly with respect to the partitions π_δ of the solutions when w is a continuous semi-martingale. To do this we estimate the norm of the solution in terms of the discrete quadratic variation of w .

LEMMA 5.2. *Let N be a positive integer, $\pi = \{t_0, \dots, t_N\}$ a partition of $[0, T]$ and $w(t)_{0 \leq t \leq T}$ a semi-martingale with values in \mathbb{R}^d . If we denote by (x_0, \dots, x_N) and (k_0, \dots, k_N) the solution of $\mathcal{S}\mathcal{D}(A, T, \pi, w)$, we have, for all $a \in \overline{D(A)}$,*

$$\begin{aligned} \|x_n - a\|^2 &\leq \|w(0) - a\|^2 + \sum_{i=1}^n \|w(t_i) - w(t_{i-1})\|^2 - \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^n h_{i-1} \langle x_i - a, k_i \rangle + \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^n \langle w(t_i) - w(t_{i-1}), x_{i-1} - a \rangle. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Proof. This inequality is a direct consequence of the Itô's formula (applied to the function $x \mapsto \|x\|^2$ and the semi-martingale $w - a$) and the inequality (5.4). \square

Remark 5.1. We could obtain this result for any process w by using only discrete and elementary calculations, what is longer than the application of Itô's formula and also not pertinent here.

We can give now the main result, i.e. an uniform estimate in the mean square sense of x_n^δ and K_n^δ :

PROPOSITION 5.2. *Assume $p \geq 2$ and let $\mathcal{E} = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$ be a filtered probability space satisfying the usual conditions. We denote by $W = \{W_t, \mathcal{F}_t; t \in J\}$ the standard d -dimensional Brownian motion on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ with $W_0 = 0$. Given a \mathbb{R}^d -valued process $(y_t)_{0 \leq t \leq T}$ such that*

$$\|y\|_p^p = \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|y(t)\|^p < +\infty$$

and the continuous semi-martingale

$$w(t) = w(0) + \int_0^t b(s, y_s) ds + \int_0^t \sigma(s, y_s) dW_s,$$

where $w(0)$ is a random variable satisfying

$$\|w(0)\|_p^p = \mathbb{E}\|w(0)\|^p < +\infty,$$

there exists a constant C dependent on $A, T, w(0), y$ and p such that if we denote by $(x_n^\delta, k_n^\delta)_{n \in \{0, \dots, n^\delta\}}$ the solution to $\mathcal{S}\mathcal{D}(A, T, \pi_\delta, w)$, then

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq n \leq N} \|x_n^\delta\|^p \leq C \tag{5.7}$$

and

$$\mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{n^\delta} h_{n-1}^\delta \|k_n^\delta\| \right)^{p/2} \leq C. \tag{5.8}$$

Proof. The arguments of this proof are completely parallel of those developed for Proposition 4.1; the difference comes from replacing continuous by discrete time integration and using the discrete result (5.4) of (4.1). \square

6. Mean Square Convergence of the Solution to the Discrete Problem to the Solution to the Continuous Problem

To show this convergence we must estimate the difference between the solutions to a discrete and a continuous Skorokhod problems. To do this we can use the stochastic integration by parts formula which involves the term $\int_0^t \langle X_s - X_{\tau_s}^\delta, dK_s - dK_{\tau_s}^\delta \rangle$, where (X_t, K_t) and $(X_{\tau_t}^\delta, K_{\tau_t}^\delta)$ are respectively the solution to $\mathcal{S}(A, w, T)$ and the piecewise constant approximation of the solution to $\mathcal{S}\mathcal{D}(A, w, \pi_\delta, T)$. By Remark 4.4, this term is not necessarily nonnegative but, in [10], Pettersson estimates this term from above by a telescopic sum, which tends to zero with δ without obtaining an estimate with respect to δ even if σ is bounded. This result is obtained thanks for a uniform partition π^δ and under the assumption $A = \partial\varphi$. In this paper, since we are dealing with a general operator A , this approach cannot be applied. Here we use a continuous linear piecewise approximations (X_t^δ, K_t^δ) ; we construct a function m^δ such that $dK_t^\delta \in A(X_t^\delta + m_t^\delta) dt$ for using the monotonicity of A . Since X_t^δ is no more a semi-martingale, we cannot use the stochastic integration by parts formula and we need a preliminary deterministic result:

PROPOSITION 6.1. *Let w a continuous function from $[0, T]$ to \mathbb{R}^d such that $w(0)$ is in $\overline{D(A)}$. Let (X, K) the solution to $\mathcal{S}(A; w; [0; T])$ and $(x_n^\delta, k_n^\delta)_{n \in \{0, \dots, n^\delta\}}$ the*

406

FRÉDÉRIC BERNARDIN

solution to $\mathcal{SD}(A, T, \pi_\delta, w)$. If we pose, for $n \in \{0, \dots, n^\delta - 1\}$ and for $t \in [t_n, t_{n+1}[$

$$X^\delta(t) = x_n^\delta + \frac{t - t_n}{h_n^\delta}(x_{n+1}^\delta - x_n^\delta),$$

then the following estimate holds:

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} \|X^\delta(t) - X(t)\|^2 \\ & \leq 4 \sup_{0 \leq i \leq n^\delta - 1} \sup_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} \|w(t) - w(t_i)\|^2 + \\ & \quad + 10 \left(|K|_T + \sum_{i=1}^{n^\delta} h_{i-1}^\delta \|k_i^\delta\| \right) \sup_{0 \leq i \leq n^\delta - 1} \sup_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} \|w(t) - w(t_i)\| + \\ & \quad + 2 \left(|K|_T + \sum_{i=1}^{n^\delta} h_{i-1}^\delta \|k_i^\delta\| \right) \delta \sup_{0 \leq i \leq n^\delta} \|A_{h_i^\delta}(x_i^\delta)\|. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Proof. For $n \in \{0, \dots, n^\delta - 1\}$ let

$$K_n^\delta = \sum_{i=0}^n h_i^\delta k_i^\delta$$

and for $t \in [t_n, t_{n+1}[$, we define

$$X^\delta(t) = x_n^\delta + \frac{t - t_n}{h_n^\delta}(x_{n+1}^\delta - x_n^\delta),$$

$$K^\delta(t) = K_n^\delta + \frac{t - t_n}{h_n^\delta}(K_{n+1}^\delta - K_n^\delta) = K_n^\delta + (t - t_n)k_{n+1}^\delta,$$

$$m^\delta(t) = \frac{t_{n+1} - t}{h_n^\delta}(x_{n+1}^\delta - x_n^\delta)$$

and

$$w^\delta(t) = w(t_n) + \frac{t - t_n}{h_n^\delta}(w(t_{n+1}) - w(t_n)).$$

For $0 \leq t \leq T$, since $X(t) = w(t) - K(t)$ and $X^\delta(t) = w^\delta(t) - K^\delta(t)$,

$$\begin{aligned} \|X(t) - X^\delta(t)\|^2 &= \|w(t) - w^\delta(t)\|^2 - 2\langle w(t) - w^\delta(t), K(t) - K^\delta(t) \rangle + \\ & \quad + \|K(t) - K^\delta(t)\|^2, \end{aligned}$$

forcing the appearance of integrals, since K^δ and K are continuous on $[0, T]$:

$$\begin{aligned} \|X(t) - X^\delta(t)\|^2 &= \|w(t) - w^\delta(t)\|^2 - \\ & \quad - 2 \int_0^t \langle w(t) - w^\delta(t), dK(s) - dK^\delta(s) \rangle + \\ & \quad + 2 \int_0^t \langle K(s) - K^\delta(s), dK(s) - dK^\delta(s) \rangle, \end{aligned}$$

subtracting and adding $w(s) - w^\delta(s)$:

$$\begin{aligned} \|X(t) - X^\delta(t)\|^2 &= \|w(t) - w^\delta(t)\|^2 - \\ &\quad - 2 \int_0^t \langle w(s) - w^\delta(s), dK(s) - dK^\delta(s) \rangle + \\ &\quad + 2 \int_0^t \langle K(s) - K^\delta(s), dK(s) - dK^\delta(s) \rangle - \\ &\quad - 2 \int_0^t \langle w(t) - w^\delta(t) - w(s) + \\ &\quad \quad + w^\delta(s), dK(s) - dK^\delta(s) \rangle, \end{aligned}$$

using again the definition of X and X^δ :

$$\begin{aligned} \|X(t) - X^\delta(t)\|^2 &= \|w(t) - w^\delta(t)\|^2 - \\ &\quad - 2 \int_0^t \langle X(s) - X^\delta(s), dK(s) - dK^\delta(s) \rangle - \\ &\quad - 2 \int_0^t \langle w(t) - w^\delta(t) - (w(s) - \\ &\quad \quad - w^\delta(s)), dK(s) - dK^\delta(s) \rangle, \end{aligned}$$

and forcing m^δ :

$$\begin{aligned} \|X(t) - X^\delta(t)\|^2 &= \|w(t) - w^\delta(t)\|^2 - 2 \int_0^t \langle m^\delta(s), dK(s) - dK^\delta(s) \rangle - \\ &\quad - 2 \int_0^t \langle X(s) - (X^\delta(s) + m^\delta(s)), dK(s) - dK^\delta(s) \rangle - \\ &\quad - 2 \int_0^t \langle w(t) - w^\delta(t) - \\ &\quad \quad - (w(s) - w^\delta(s)), dK(s) - dK^\delta(s) \rangle. \end{aligned}$$

Since $dK(s)$ belongs to $A(X_s) ds$ and $dK^\delta(s)$ belongs to $A(X_s^\delta + m^\delta(s)) ds$, by lemma 4.1 of [4], the measure $\langle X(s) - (X^\delta(s) + m^\delta(s)), dK(s) - dK^\delta(s) \rangle$ is a.s. nonnegative and then for $t_n \leq t < t_{n+1}$:

$$\begin{aligned} \|X(t) - X^\delta(t)\|^2 &\leq (\|w(t) - w(t_n)\| + \|w(t_n) - w(t_{n+1})\|)^2 + \\ &\quad + 2 \sup_{0 \leq s \leq T} \|m^\delta(s)\| \left(|K|_T + \sum_{i=1}^{n^\delta} h_{i-1}^\delta \|k_i^\delta\| \right) + \\ &\quad + 4 \sup_{0 \leq s \leq T} \|w(s) - w^\delta(s)\| \left(|K|_T + \sum_{i=1}^{n^\delta} h_{i-1}^\delta \|k_i^\delta\| \right) + \\ &\leq 4 \sup_{0 \leq i \leq n^\delta - 1} \sup_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} \|w(t) - w(t_i)\|^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \sup_{0 \leq i \leq n^\delta - 1} \|x_{i+1}^\delta - x_i^\delta\| \left(|K|_T + \sum_{i=1}^{n^\delta} h_{i-1}^\delta \|k_i^\delta\| \right) + \\
& + 8 \sup_{0 \leq i \leq n^\delta - 1} \sup_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} \|w(t) - w(t_i)\| \times \\
& \times \left(|K|_T + \sum_{i=1}^{n^\delta} h_{i-1}^\delta \|k_i^\delta\| \right). \tag{6.2}
\end{aligned}$$

We have to estimate $\|x_{i+1}^\delta - x_i^\delta\|$, which we do starting from its definition (5.3), and using the contraction property of Yosida's approximation:

$$\begin{aligned}
\|x_{i+1}^\delta - x_i^\delta\| & = \|J_{h_i^\delta}(x_i^\delta + w(t_{i+1}) - w(t_i)) - x_i^\delta\| \\
& \leq \|J_{h_i^\delta}(x_i^\delta + w(t_{i+1}) - w(t_i)) - J_{h_i^\delta}(x_i^\delta)\| + \|J_{h_i^\delta}(x_i^\delta) - x_i^\delta\| \\
& \leq \|w(t_{i+1}) - w(t_i)\| + h_i^\delta \|A_{h_i^\delta}(x_i^\delta)\|,
\end{aligned}$$

therefore (6.2) yields (6.1). \square

We give a stochastic version of the above result:

PROPOSITION 6.2. *Assume $p \geq 4$ and that the hypotheses of the Proposition 5.2 are verified. Then there exist three constants C_0 , C_1 and C_2 depending only on A , T , $w(0)$ and y such that if $(x_n^\delta, k_n^\delta)_{n \in \{0, \dots, n^\delta\}}$ is the solution to $\mathfrak{S}\mathcal{D}(A, T, \pi_\delta, w)$,*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|X^\delta(t) - X(t)\|^2 & \leq C_0 \sqrt{\mathbb{E} \sup_{0 \leq i \leq n^\delta - 1} \sup_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} \|w(t) - w(t_i)\|^2} + \\
& + C_1 \mathbb{E} \sup_{0 \leq i \leq n^\delta - 1} \sup_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} \|w(t) - w(t_i)\|^2 + \\
& + C_2 \delta \sqrt{\mathbb{E} \sup_{0 \leq i \leq n^\delta} \|A_{h_i^\delta}(x_i^\delta)\|^2}. \tag{6.3}
\end{aligned}$$

Proof. We infer from (6.1) the following inequality:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|X^\delta(t) - X(t)\|^2 \\
& \leq 4 \mathbb{E} \sup_{0 \leq i \leq n^\delta - 1} \sup_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} \|w(t) - w(t_i)\|^2 + \\
& + 10 \mathbb{E} \left[\left(|K|_T + \sum_{i=1}^{n^\delta} h_{i-1}^\delta \|k_i^\delta\| \right) \sup_{0 \leq i \leq n^\delta - 1} \sup_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} \|w(t) - w(t_i)\| \right] + \\
& + 2 \mathbb{E} \left[\left(|K|_T + \sum_{i=1}^{n^\delta} h_{i-1}^\delta \|k_i^\delta\| \right) \delta \sup_{0 \leq i \leq n^\delta} \|A_{h_i^\delta}(x_i^\delta)\| \right],
\end{aligned}$$

and by the Cauchy–Schwarz inequality

$$\begin{aligned} &\leq 4\mathbb{E} \sup_{0 \leq i \leq n^\delta - 1} \sup_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} \|w(t) - w(t_i)\|^2 \\ &+ 10 \sqrt{\mathbb{E} \left(|K|_T + \sum_{i=1}^{n^\delta} h_{i-1}^\delta \|k_i^\delta\| \right)^2} \sqrt{\mathbb{E} \sup_{0 \leq i \leq n^\delta - 1} \sup_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} \|w(t) - w(t_i)\|^2} + \\ &+ 2\delta \sqrt{\mathbb{E} \left(|K|_T + \sum_{i=1}^{n^\delta} h_{i-1}^\delta \|k_i^\delta\| \right)^2} \sqrt{\mathbb{E} \sup_{0 \leq i \leq n^\delta} \|A_{h_i^\delta}(x_i^\delta)\|^2}. \end{aligned}$$

Since $p \geq 4$, (5.8), (4.2) and this last inequality give the result. □

We give a last estimation to prove the convergence of the discrete solution to the continuous solution.

PROPOSITION 6.3. *Under the assumptions of Proposition 5.2, it holds that*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E} \sup_{0 \leq i \leq n^\delta - 1} \sup_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} \|w(t) - w(t_i)\|^2 = 0. \tag{6.4}$$

Proof. Using the classical inequality $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, we see that

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \sup_{0 \leq i \leq n^\delta - 1} \sup_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} \|w(t) - w(t_i)\|^2 \\ &\leq 2\mathbb{E} \sup_{0 \leq i \leq n^\delta - 1} \sup_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} \left\| \int_{t_i}^t b(s, y_s) ds \right\|^2 + \\ &+ 2\mathbb{E} \sup_{0 \leq i \leq n^\delta - 1} \sup_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} \left\| \int_{t_i}^t \sigma(s, y_s) dW_s \right\|^2. \end{aligned} \tag{6.5}$$

By the linear growth assumption (2.5), we can write for the first term:

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq i \leq n^\delta - 1} \sup_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} \left\| \int_{t_i}^t b(s, y_s) ds \right\|^2 \leq C\delta^2 \left(1 + \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|y(t)\|^2 \right), \tag{6.6}$$

and for the second:

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq i \leq n^\delta - 1} \sup_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} \left\| \int_{t_i}^t \sigma(s, y_s) dW_s \right\|^2 \leq \sum_{i=0}^{n^\delta - 1} \mathbb{E} \sup_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} \left\| \int_{t_i}^t \sigma(s, y_s) dW_s \right\|^2,$$

by Burkholder–Davis–Gundy inequalities:

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq i \leq n^\delta - 1} \sup_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} \left\| \int_{t_i}^t \sigma(s, y_s) dW_s \right\|^2 \leq C \sum_{i=0}^{n^\delta - 1} \mathbb{E} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\sigma(s, y_s)\|^2 ds,$$

410

FRÉDÉRIC BERNARDIN

and by (2.5):

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sup_{0 \leq i \leq n^\delta - 1} \sup_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} \left\| \int_{t_i}^t \sigma(s, y_s) dW_s \right\|^2 \\ & \leq CT \left(1 + \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|y(t)\|^2 \right) < +\infty. \end{aligned} \quad (6.7)$$

We infer from (6.7), the *a.s.*-uniform continuity of paths of the stochastic integral on compact, the dominated convergence theorem and its converse:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E} \sup_{0 \leq i \leq n^\delta - 1} \sup_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} \left\| \int_{t_i}^t \sigma(s, y_s) dW_s \right\|^2 = 0. \quad (6.8)$$

Finally, (6.5), (6.6) and (6.8) yield the result. \square

COROLLARY 6.1. *Under the assumptions of Proposition 5.2, if we suppose moreover that there is a constant L such that $\|\sigma(t, x)\| \leq L$ for all $t \in [0, T]$ and $x \in \mathbb{R}^d$, then:*

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq i \leq n^\delta - 1} \sup_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} \|w(t) - w(t_i)\|^2 = \mathcal{O}((\delta \log(1/\delta))^{1/2}). \quad (6.9)$$

Proof. This estimate is Slominski's lemma A.4 from [14]. \square

We can give the main result of this section:

THEOREM 6.1. *Let $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ be the solution to the multivalued stochastic differential equation (2.1) and assume $\mathbb{E}\|\xi_0\|^p < \infty$ for some $p \geq 4$. Let X^δ be the process defined in Proposition 6.1 with*

$$w(t) = \xi_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s.$$

If we suppose

$$\forall x \in D(A) : \|A^0(x)\| \leq C(1 + \|x\|^{p/2}), \quad (6.10)$$

then

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|X^\delta(t) - X(t)\|^2 = 0. \quad (6.11)$$

Proof. Using (5.7), (2.6), (6.3) and the above propositions, the result is immediate. \square

If we suppose the initial data ξ_0 *a.s.* constant, as in [10], we obtain:

COROLLARY 6.2. *If σ is bounded and the assumption*

$$\exists p \geq 0, \forall x \in D(A), \quad \|A^0(x)\| \leq C(1 + \|x\|^p) \tag{6.12}$$

holds, then

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|X^\delta(t) - X(t)\|^2 = \mathcal{O}((\delta \log(1/\delta))^{1/2}).$$

7. Numerical Scheme Convergence

In this section we show the convergence of the numerical scheme. Under the assumptions of Section 1, we let

$$w(t) = \xi_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s.$$

For all $\delta > 0$, we denote by $(y_n^\delta, k_n^\delta)_{n \in \{0, \dots, n^\delta\}}$ the solution to $\mathfrak{S}\mathcal{D}(A, T, \pi_\delta, w)$ and define $(x_n^\delta)_{n \in \{0, \dots, n^\delta\}}$ and X^δ respectively as in (3.1) and (3.2). Similarly, Y^δ is defined from y_n^δ as X^δ is defined from x_n^δ . We let

$$w^\delta(t) = \xi_0 + \int_0^t b(s, X_{\tau_s}^\delta) ds + \int_0^t \sigma(s, X_{\tau_s}^\delta) dW_s,$$

where

$$\forall t \in [0, T], \quad \tau_t = \min\{t_k \leq t, 0 \leq k \leq n^\delta - 1\}.$$

We remark that $(x_n^\delta)_{n \in \{0, \dots, n^\delta\}}$ is the solution to $\mathfrak{S}\mathcal{D}(A, T, \pi_\delta, w^\delta)$.

PROPOSITION 7.1. *For $p \geq 2$, and for all partition π_δ , there exists a constant C such that*

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq n \leq n^\delta} \|x_n^\delta\|^p \leq C. \tag{7.1}$$

Proof. The calculations are similar to those presented for the proof of Proposition 4.2. The difference is that we need use the discrete version of Gronwall's lemma and (5.4) in the place of (4.1). □

We need the following intermediate result, due to Pettersson [10]:

PROPOSITION 7.2. *Under the assumptions of Proposition 7.1, there exists a constant C independent on all partitions π_δ of $[0, T]$ such that*

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq n \leq n^\delta} \|x_n^\delta - y_n^\delta\|^2 \leq C \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|Y^\delta(t) - X(t)\|^2. \tag{7.2}$$

412

FRÉDÉRIC BERNARDIN

Proof. Pettersson deduced this result from (5.6) and the monotonicity of A and though our assumptions are more general than his, the proof goes through unchanged. \square

We can finally establish the:

THEOREM 7.1 (Convergence of the numerical scheme). *Under assumption (6.10) with $p \geq 4$,*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|X^\delta(t) - X(t)\|^2 = 0.$$

Proof. Using inequality (4.4) with $N = 4$ and $q = 2$, for all $0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} \|X^\delta(t) - X(t)\|^2 \leq & C \{ \|X^\delta(t) - X^\delta(\tau_t)\|^2 + \|X^\delta(\tau_t) - Y^\delta(\tau_t)\|^2 + \\ & + \|Y^\delta(\tau_t) - Y^\delta(t)\|^2 + \|Y^\delta(t) - X(t)\|^2 \}, \end{aligned}$$

therefore,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|X^\delta(t) - X(t)\|^2 \\ & \leq C \left\{ \mathbb{E} \sup_{0 \leq n \leq n^\delta - 1} \|x_n^\delta - x_{n+1}^\delta\|^2 + \mathbb{E} \sup_{0 \leq n \leq n^\delta} \|x_n^\delta - y_n^\delta\|^2 + \right. \\ & \quad \left. + \mathbb{E} \sup_{0 \leq n \leq n^\delta - 1} \|y_n^\delta - y_{n+1}^\delta\|^2 + \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|Y^\delta(t) - X(t)\|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

We infer from (4.4) and the definition of x_{n+1}^δ :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sup_{0 \leq n \leq n^\delta - 1} \|x_n^\delta - x_{n+1}^\delta\|^2 \\ & \leq C \left\{ \delta^2 \mathbb{E} \sup_{0 \leq n \leq n^\delta - 1} \|b(t_n, x_n^\delta)\|^2 + \mathbb{E} \sup_{0 \leq n \leq n^\delta} \|\sigma(t_n, x_n^\delta)\|^2 \|W_{t_{n+1}} - W_{t_n}\|^2 + \right. \\ & \quad \left. + \delta^2 \mathbb{E} \sup_{0 \leq n \leq n^\delta} \|A_{h_n^\delta}(x_n^\delta)\|^2 \right\}; \end{aligned}$$

the linear growth assumption (2.5), (6.10), (7.1) and Hölder inequality imply:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sup_{0 \leq n \leq n^\delta} \|x_n^\delta - x_{n+1}^\delta\|^2 \\ & \leq \delta^2 \left(C_0 + C_1 \mathbb{E} \sup_{0 \leq n \leq n^\delta} \|x_n^\delta\|^2 + C_2 \mathbb{E} \sup_{0 \leq n \leq n^\delta} \|x_n^\delta\|^p \right) + \\ & \quad + C \left(1 + \mathbb{E} \sup_{0 \leq n \leq n^\delta} \|x_n^\delta\|^p \right) \mathbb{E} \sup_{0 \leq n \leq n^\delta} \|W_{t_{n+1}} - W_{t_n}\|^{2p/(p-2)} \\ & \leq C_0 \delta^2 + C_1 \delta^{1/p-2} \leq C \delta^{1/p-2}, \end{aligned} \quad (7.4)$$

MULTIVALUED STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

413

since, by the appendices of [14]:

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq n \leq n^\delta} \|W_{t_{n+1}} - W_{t_n}\|^{2p/(p-2)} \leq C(\delta \log(1/\delta))^{p/(p-2)}.$$

From (6.10) and (5.7), we write similarly:

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq n \leq n^\delta - 1} \|y_n^\delta - y_{n+1}^\delta\|^2 \leq C(\delta \log(1/\delta))^{p/(p-2)}. \quad (7.5)$$

Finally, using (7.3), (7.4), (7.5), (6.11) and (7.2), the result holds. \square

We deduce directly from the above results:

COROLLARY 7.1. *If we suppose moreover that σ is bounded, we have*

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|X^\delta(t) - X(t)\|^2 = \mathcal{O}((\delta \log(1/\delta))^{1/2}).$$

8. Numerical Experiments

In this section we try to obtain numerically the rate of convergence of the scheme defined with uniform partitions and to compare it with the previous result.

8.1. PRELIMINARIES

With the above notations we would like to plot the function

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|X^\delta(t) - X(t)\|^2$$

versus δ . We suppose that there exists $a > 0$ such that

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|X^\delta(t) - X(t)\|^2 \sim C(\delta \log(1/\delta))^a.$$

We never know the solution and we cannot obtain exactly the desired function; nevertheless we can write:

$$\begin{aligned} & \log\left(\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|X^\delta(t) - X^{\delta/2}(t)\|^2\right) \\ & \sim \log(4C) + a \log(\delta) + a \log(-\log(\delta)), \end{aligned} \quad (8.1)$$

and

$$\begin{aligned} \log(\epsilon(\delta)) &= \log\left(\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|X^\delta(t) - X^{\delta/2}(t)\|^2\right) - a \log(-\log(\delta)) \\ &\sim \log(4C) + a \log(\delta). \end{aligned} \quad (8.2)$$

The idea is as follows: we can obtain numerically, for $a \in [0, a_0]$, a discretization of the function $\delta \mapsto \log(\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|X^\delta(t) - X^{\delta/2}(t)\|^2) - a \log(-\log(\delta))$, approximating the expectation by the arithmetic mean. A linear approximation gets therefore

$$\log\left(\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|X^\delta(t) - X^{\delta/2}(t)\|^2\right) - a \log(-\log(\delta)) \sim C(a) + f(a) \log(\delta),$$

and we hope the function f has a fixed point in $[0, a_0]$, which will be a good candidate for the rate of convergence of the scheme. In practice we use the FORTRAN code MT19937 developed previously in C^{++} language by Makoto Matsumoto and Takuji Nishimura in 1997 and translated in FORTRAN by Hiroshi Takano in 1999; this code generates pseudorandom numbers which are uniformly distributed in $]0, 1[$. We can therefore easily simulate random variables with normal law and consequent increments of Brownian motion. The expectation is approximated by a Monte-Carlo method based on 100 000 repetitions. We investigate values of δ between 10^{-4} and 10^{-2} what gives good results – we obtain aligned points and the employed method of linear approximation is therefore efficient – and lower values would give better results but CPU time would be too high.

8.2. STUDY OF AN EXAMPLE

We are interested in a linear mechanical system with one degree of freedom submitted to a white noise and a friction force (Coulomb's law), which is governed by the MSDE

$$dX_t + A(X_t) dt \ni b(t, X_t) dt + s(t, X_t) dW_t,$$

where

$$A(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial|\cdot| \end{pmatrix}, \quad b(t, x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k/m & c/m \end{pmatrix} x, \quad \text{and} \quad s(t, x) = P_b \in \mathbb{R}.$$

For this system we find $a_{\text{num}} = 0.95$ for the numerical rate of strong convergence (see Figure 1) which is larger than $a = 1/2$ which had been obtained theoretically at Corollary 7.1.

Remark 8.1. We see in Figure 1 the importance of \log in the rate of convergence. Indeed the value 0.78 for $f(0)$ is the 'polynomial part' of the rate which we only obtain if we have neglected the term $a \log(-\log(\delta))$ in (8.1).

Acknowledgements

I would like to thank Professors M. Schatzman and C. H. Lamarque for their help with this work and Professor A. Lachal for his advice.

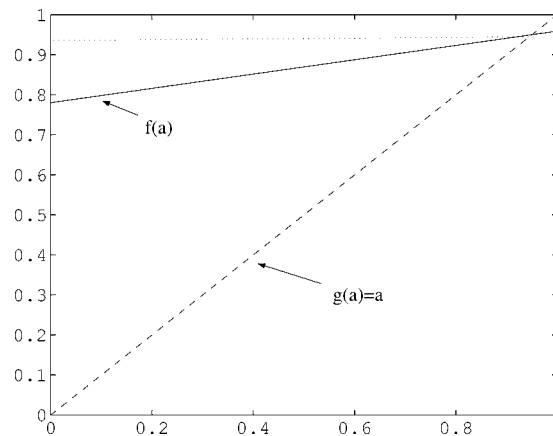


Figure 1. The function $f(a)$ obtained for the strong convergence and its fixed point.

References

1. Bensoussan, A. and Rascanu, A.: Stochastic variational inequalities in infinite dimensional spaces, *Numer. Funct. Anal. Optim.* **18** (1997), 19–54.
2. Brézis, H.: Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, *Mathematics Studies*, North-Holland, 1973.
3. Cépa, E.: Equations différentielles stochastiques multivoques, Ph.D. Thesis, Université d'Orléans, 1994.
4. Cépa, E.: Equations différentielles stochastiques multivoques, *Lecture Notes in Mathematics, Séminaire de Probabilités XXIX* (1995), 86–107.
5. Krée, P.: Diffusion equation for multivalued stochastic differential equations, *J. Funct. Anal.* **49** (1982), 73–90.
6. Lépingle, D.: Un schéma d'Euler pour équations différentielles stochastiques réfléchies, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **316** (1993), 601–605.
7. Lépingle, D. and Marois, C.: Equations différentielles stochastiques multivoques unidimensionnelles, *Séminaire de Probabilités XXI* (1987), 520–533.
8. Lions, P. L. and Snitzman, A. S.: Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions, *Comm. Pure Appl. Math.* **XXXVII** (1984), 511–537.
9. Pettersson, R.: Approximations for stochastic differential equations with reflecting boundaries, *Stochastic Process. Appl.* **59** (1995), 295–308.
10. Pettersson, R.: Projection scheme for stochastic differential equations with convex constraints, *Stochastic Process. Appl.* **88** (2000), 125–134.
11. Rudin, W.: *Real and Complex Analysis*, Mc-Graw-Hill, London, 1970.
12. Saisho, Y.: Stochastic differential equations for multi-dimensional domain with reflecting boundary, *Probab. Theory Related Fields* **74** (1987), 455–477.
13. Slominski, L.: On approximations of solutions of multidimensional sde's with reflecting boundary conditions, *Stochastic Process. Appl.* **50** (1994), 197–219.
14. Slominski, L.: Euler's approximations of solutions of sdes with reflecting boundary, *Stochastic Process. Appl.* **94** (2001), 317–337.
15. Storm, A.: Stochastic differential equations with convex constraint, *Stochastics* **53** (1995), 241–274.
16. Tanaka, H.: Stochastic differential equations with reflecting boundary condition in convex regions, *Hiroshima Math. J.* **9** (1979), 163–177.

1.6 Commentaires

Dans cette section, il est demandé au lecteur la plus grande attention sur les références des équations, définitions, lemmes, propositions et théorèmes puisqu'on a conservé, en reproduisant l'article tel qu'il a été publié, ses références propres qui peuvent rentrer en conflit avec celles du présent rapport. Néanmoins, les références externes à l'article (et donc propres au présent rapport) sont toutes du type (1.xx) et ne peuvent être confondues avec celles internes à l'article qui sont du type (5.xx) ou (6.xx).

Lorsque l'opérateur A est le sous-différentiel de l'indicatrice d'un convexe fermé non vide D , l'équation (1.1) correspond à une équation différentielle stochastique réfléchie dans le domaine D . Dans ce cas, R. Pettersson ([19]) et L. Slominski ([23]) ont montré la convergence du schéma numérique étudié dans le présent chapitre. Ils ont obtenu dans le cas général un ordre de convergence identique à celui qu'on a obtenu et un ordre 1 dans le cas de polyèdres. La démonstration repose sur deux points cruciaux : l'estimation uniforme (5.8) (qui provient du Lemme 5.1) et la Proposition 6.2. L'estimation uniforme (5.8) est l'équivalent discret du résultat obtenu dans [7] pour l'estimation uniforme des variations totales des processus k_n , rappelée dans la Proposition 1.16. Dans le cas des EDS réfléchies dans un domaine convexe fermé non vide D , le résultat de la Proposition 6.2 repose sur la comparaison de solutions du problème de Skorohod. En effet, dans ce cas particulier, il est possible de définir le problème de Skorohod pour des fonctions continues à droite et de démontrer l'existence de solutions pour de telles fonctions (voir [25]). En particulier, soit la fonction w valant $w_i \in \mathbb{R}^d$ sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}[$ avec $\pi : 0 = t_0 < t_1 \cdots < t_N = T$ une partition de $[0, T]$ et $w_0 \in D$. Alors, en notant $\bar{\alpha}$ la projection convexe sur le domaine D de α , le couple de fonctions x, k définies sur $[0, T]$ par

$$x(t) = \begin{cases} w(t), & 0 \leq t < t_1, \\ \frac{x(t_{i-1}) + w_i - w_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}, & t_i \leq t < t_{i+1}, \quad (i \geq 1), \end{cases} \quad (1.51)$$

et

$$k(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_1, \\ k(t_{i-1}) - x(t_i) + (x(t_{i-1}) + w_i - w_{i-1}), & t_i \leq t < t_{i+1}, \quad (i \geq 1), \end{cases} \quad (1.52)$$

est solution du problème de Skorohod étendu aux fonctions continues à droite (voir [21]). On reconnaît dans (1.51) et (1.52) la solution au problème de Skorohod discret $\mathcal{SD}(\partial\psi_D, T, \pi, w)$ défini dans la Définition 5.1 de l'article. En effet, dans le cas où $A = \partial\psi_D$, J_λ correspond à la projection convexe sur D pour tout λ positif. On utilise ensuite le Lemme 2.2 de [25] donnant l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \|x(t) - \tilde{x}(t)\|^2 &\leq \|w(t) - \tilde{w}(t)\|^2 \\ &+ 2 \int_0^t (w(t) - \tilde{w}(s) - w(s) + \tilde{w}(s), dk(s) - \tilde{d}\tilde{k}(s)), \end{aligned} \quad (1.53)$$

pour tous couples solution (x, k) et (\tilde{x}, \tilde{k}) associés respectivement aux fonctions w et \tilde{w} , continues à droite sur $[0, T]$ de mêmes conditions initiales dans D . Dans les cas plus généraux où l'opérateur multivoque n'est pas le sous-différentiel de l'indicatrice d'un convexe fermé, d'autres méthodes doivent être employées. Dans le cas où l'opérateur A est le sous-différentiel d'une fonction convexe propre s.c.i. φ , Pettersson ([20]) démontre la Proposition 6.8 en utilisant la forme particulière de A et la version variationnelle de (1.49) que l'on écrit sous la forme suivante : pour toute fonction continue v à valeurs dans le domaine de $A = \partial\varphi$,

$$\int_0^t (x(s) - v(s), dk(s)) \geq \int_0^t (\varphi(x(s)) - \varphi(v(s))) ds.$$

Pour établir l'inégalité (6.3), R. Pettersson impose un pas constant à la discrétisation de l'intervalle $[0, T]$ afin d'obtenir des sommes telescopiques et utilise la continuité de φ qu'il a supposée sur l'adhérence du domaine de φ .

Dans le cas général, que l'on a traité, un résultat déterministe est d'abord obtenu et un passage à l'espérance mathématique est ensuite opéré pour obtenir le résultat de la Proposition 6.8. On n'a pas eu besoin de supposer une forme particulière de l'opérateur A , ni de supposer un pas constant pour la subdivision de l'intervalle $[0, T]$. Dans le cas où le coefficient de diffusion est borné, un ordre de convergence est même obtenu.

La continuité de φ supposée dans [20] et la condition de croissance polynomiale de la section principale A^0 que l'on a supposée interdisent d'envisager des EDS avec des coefficients de dérive explosant au bord du domaine, équations étudiées par Lépingle, Nguyen et Cépa. Dans le cas de particules browniennes chargées électrostatiquement, le modèle de répulsion utilisé dans [9] conduit à l'étude d'équations différentielles stochastiques avec, dans le cadre monodimensionnel, un coefficient de dérive du type $x \rightarrow 1/x$. Cette dernière application ne vérifie pas la condition de croissance linéaire (1.47) mais elle est au signe près la dérivée de la fonction $\varphi : x \rightarrow -\log x$ qui est une fonction propre convexe s.c.i. de domaine \mathbb{R}_+^* . La solution existe par le résultat de Cépa mais les résultats de Pettersson, pas plus que les nôtres, ne peuvent donner la convergence des schémas numériques vers la solution continue car φ n'est pas continue en 0 et $(\partial\varphi)^0$ n'est pas à croissance polynomiale (pour une définition de $(\partial\varphi)^0$, voir la Proposition 1.4). Récemment, Lépingle et Nguyen ([16]) ont montré la convergence d'un schéma sans obtenir d'ordre. Il correspond en temps au schéma présenté bien qu'il comporte une discrétisation supplémentaire en espace. S'appuyant sur les travaux de Storm ([24]) sur les EDS avec un terme maximal monotone sous la forme d'un sous-différentiel, cette discrétisation spatiale et temporelle a permis de lever le problème sur les EDS avec des coefficients de dérive explosant au bord.

On avertit le lecteur d'une erreur présente dans la preuve du Lemme 5.2 : on n'utilise pas la formule d'Itô et seule compte la remarque qui lui fait suite (Remarque 5.1) dont on reproduit les calculs dans les deux lemmes qui suivent. On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien de \mathbb{R}^d et $|\cdot|$ la norme associée.

Lemme 1.3 (Intégration par parties discrète). *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ et $(y_k)_{0 \leq k \leq n}$ des éléments de \mathbb{R}^d . Alors,*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle y_i, x_i - x_{i-1} \rangle &= \langle x_n, y_n \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle - \sum_{i=1}^n \langle x_i, y_i - y_{i-1} \rangle \\ &+ \sum_{i=1}^n \langle y_i - y_{i-1}, x_i - x_{i-1} \rangle. \end{aligned} \tag{1.54}$$

En particulier,

$$2 \sum_{i=1}^n \langle y_i, y_i - y_{i-1} \rangle = |y_n|^2 - |y_0|^2 + \sum_{i=1}^n |y_i - y_{i-1}|^2. \tag{1.55}$$

Démonstration. On écrit :

$$\sum_{i=1}^n \langle y_i, x_i - x_{i-1} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle y_i, x_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle y_i, x_{i-1} \rangle;$$

on renumérote les indices de la deuxième somme du terme de droite :

$$\sum_{i=1}^n \langle y_i, x_i - x_{i-1} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle y_i, x_i \rangle - \sum_{i=0}^{n-1} \langle y_{i+1}, x_i \rangle;$$

on regroupe les termes différemment :

$$\sum_{i=1}^n \langle y_i, x_i - x_{i-1} \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \langle y_i - y_{i+1}, x_i \rangle + \langle y_n, x_n \rangle - \langle y_1, x_0 \rangle; \quad (1.56)$$

on fait apparaître de force les produits $\langle y_i - y_{i+1}, x_i - x_{i+1} \rangle$ dans le premier terme du côté droit de (110) :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle y_i, x_i - x_{i-1} \rangle &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle y_i - y_{i+1}, x_{i+1} \rangle + \sum_{i=1}^{n-1} \langle y_i - y_{i+1}, x_i - x_{i+1} \rangle \\ &\quad + \langle y_n, x_n \rangle - \langle y_1, x_0 \rangle; \end{aligned}$$

on renumérote les deux sommes contenant l'indice i , et on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle y_i, x_i - x_{i-1} \rangle &= - \sum_{i=1}^n \langle x_i, y_i - y_{i-1} \rangle + \langle x_1, y_1 \rangle - \langle x_1, y_0 \rangle \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \langle y_{i-1} - y_i, x_{i-1} - x_i \rangle + \langle y_n, x_n \rangle \\ &\quad - \langle y_1, x_0 \rangle - \langle y_0 - y_1, x_0 - x_1 \rangle, \end{aligned}$$

ce qui conduit au résultat. \square

Lemme 1.4. Soit un entier N et $(h_k)_{0 \leq k \leq N-1}$ un N -uplet de réels positifs. On suppose que les N -uplets de vecteurs de \mathbb{R}^d $(w_n, x_n, k_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ et $(w'_n, x'_n, k'_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ satisfont :

$$\begin{cases} x_{n+1} - x_n + h_n k_{n+1} = w_{n+1} - w_n, \\ x'_{n+1} - x'_n + h_n k'_{n+1} = w'_{n+1} - w'_n, \end{cases} \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (1.57)$$

avec $x_0 = w_0$, $x'_0 = w'_0$ et $k_0 = k'_0 = 0$. Alors,

$$\begin{aligned} |x_n - x'_n|^2 &= |w_0 - w'_0|^2 + \sum_{i=1}^n |(w_i - w'_i) - (w_{i-1} - w'_{i-1})|^2 \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^n h_{i-1} \langle x_i - x'_i, k_i - k'_i \rangle \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^n \langle (w_i - w'_i) - (w_{i-1} - w'_{i-1}), x_{i-1} - x'_{i-1} \rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^n h_{i-1}^2 |k_i - k'_i|^2. \end{aligned} \quad (1.58)$$

En particulier, avec $w' = a \in \overline{D(A)}$,

$$\begin{aligned} |x_n - a|^2 &= |w_0 - a|^2 + \sum_{i=1}^n |w_i - w_{i-1}|^2 - 2 \sum_{i=1}^n h_{i-1} \langle x_i - a, k_i \rangle \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^n \langle w_i - w_{i-1}, x_{i-1} - a \rangle - \sum_{i=1}^n h_{i-1}^2 |k_i|^2. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Démonstration. Posons $K_n = \sum_{i=1}^n h_{i-1} k_i$. Par (1.57),

$$|x_n - x'_n|^2 = |w_n - w'_n|^2 + |K_n - K'_n|^2 - 2\langle w_n - w'_n, K_n - K'_n \rangle,$$

et par (1.55) avec $y_n = K_n - K'_n$,

$$\begin{aligned} |x_n - x'_n|^2 = & |w_n - w'_n|^2 + 2 \sum_{i=1}^n h_{i-1} \langle K_i - K'_i, k_i - k'_i \rangle - \sum_{i=1}^n h_{i-1}^2 |k_i - k'_i|^2 \\ & - 2 \sum_{i=1}^n h_{i-1} \langle w_n - w'_n, k_i - k'_i \rangle, \end{aligned}$$

où on a introduit un terme intégré comportant $2\langle K_i - K'_i, k_i - k'_i \rangle$; en forçant l'introduction du terme $w_i - w'_i$, on obtient

$$\begin{aligned} |x_n - x'_n|^2 = & |w_n - w'_n|^2 + 2 \sum_{i=1}^n h_{i-1} \langle K_i - K'_i, k_i - k'_i \rangle \\ & - 2 \sum_{i=1}^n h_{i-1} \langle w_n - w'_n - w_i + w'_i, k_i - k'_i \rangle \\ & - 2 \sum_{i=1}^n h_{i-1} \langle w_i - w'_i, k_i - k'_i \rangle - \sum_{i=1}^n h_{i-1}^2 |k_i - k'_i|^2, \end{aligned}$$

et donc, puisque $x_i = w_i - K_i$ et $x'_i = w'_i - K'_i$

$$\begin{aligned} |x_n - x'_n|^2 = & |w_n - w'_n|^2 - 2 \sum_{i=1}^n h_{i-1} \langle x_i - x'_i, k_i - k'_i \rangle, \\ & - 2 \sum_{i=1}^n h_{i-1} \langle w_n - w'_n - w_i + w'_i, k_i - k'_i \rangle \quad (1.60) \\ & - \sum_{i=1}^n h_{i-1}^2 |k_i - k'_i|^2. \end{aligned}$$

On s'intéresse maintenant au troisième terme de droite de l'équation précédente. On transforme l'intégration discrète par rapport à $K_i - K'_i$ en une intégration par rapport à $w_i - w'_i$ en introduisant la variation quadratique discrète de $w - w'$. Alors, en utilisant (1.57), on peut écrire :

$$\begin{aligned} & - 2 \sum_{i=1}^n h_{i-1} \langle w_n - w'_n - w_i + w'_i, k_i - k'_i \rangle \\ = & - 2 \sum_{i=1}^n \langle w_n - w'_n - w_i + w'_i, (x_i - x'_i) - (x_{i-1} - x'_{i-1}) \rangle \\ & - 2 \sum_{i=1}^n \langle w_n - w'_n - w_i + w'_i, -(w_i - w'_i) + (w_{i-1} - w'_{i-1}) \rangle, \end{aligned}$$

et donc,

$$\begin{aligned}
& -2 \sum_{i=1}^n h_{i-1} \langle w_n - w'_n - w_i + w'_i, k_i - k'_i \rangle \\
& = -2 \sum_{i=1}^n \langle w_n - w'_n, (x_i - x'_i) - (x_{i-1} - x'_{i-1}) \rangle \\
& \quad + 2 \sum_{i=1}^n \langle w_n - w'_n, (w_i - w'_i) - (w_{i-1} - w'_{i-1}) \rangle \\
& \quad + 2 \sum_{i=1}^n \langle w_i - w'_i, (x_i - x'_i) - (x_{i-1} - x'_{i-1}) \rangle \\
& \quad - 2 \sum_{i=1}^n \langle w_i - w'_i, (w_i - w'_i) - (w_{i-1} - w'_{i-1}) \rangle.
\end{aligned}$$

En vertu de (1.54) avec $x_i - x'_i$ et $w_i - w'_i$ pour le troisième terme et (1.55) avec $w_i - w'_i$ pour le quatrième terme de droite, on a :

$$\begin{aligned}
& -2 \sum_{i=1}^n h_{i-1} \langle w_n - w'_n - w_i + w'_i, k_i - k'_i \rangle \\
& = -2 \left\langle w_n - w'_n, \sum_{i=1}^n (x_i - x'_i) - (x_{i-1} - x'_{i-1}) \right\rangle \\
& \quad + 2 \left\langle w_n - w'_n, \sum_{i=1}^n (w_i - w'_i) - (w_{i-1} - w'_{i-1}) \right\rangle \\
& \quad + 2 \langle x_n - x'_n, w_n - w'_n \rangle - 2 \langle x_0 - x'_0, w_0 - w'_0 \rangle \\
& \quad - 2 \sum_{i=1}^n \langle x_i - x'_i, (w_i - w'_i) - (w_{i-1} - w'_{i-1}) \rangle \\
& \quad + 2 \sum_{i=1}^n \langle (w_i - w'_i) - (w_{i-1} - w'_{i-1}), (x_i - x'_i) - (x_{i-1} - x'_{i-1}) \rangle \\
& \quad - |w_n - w'_n|^2 + |w_0 - w'_0|^2 - \sum_{i=1}^n |(w_i - w'_i) - (w_{i-1} - w'_{i-1})|^2.
\end{aligned}$$

Les deux premiers termes de droite font apparaître des sommes télescopiques : en utilisant $x_0 = w_0$ et $x'_0 = w'_0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
& -2 \sum_{i=1}^n h_{i-1} \langle w_n - w'_n - w_i + w'_i, k_i - k'_i \rangle \\
& = |w_n - w'_n|^2 - |w_0 - w'_0|^2 - \sum_{i=1}^n |(w_i - w'_i) - (w_{i-1} - w'_{i-1})|^2 \quad (1.61) \\
& \quad - 2 \sum_{i=1}^n \langle (w_i - w'_i) - (w_{i-1} - w'_{i-1}), x_{i-1} - x'_{i-1} \rangle.
\end{aligned}$$

On déduit (1.58) de (1.60) et (1.61). L'égalité (1.59) est obtenue avec $w'_i = x'_i = a$ et $k'_i = 0$ pour tout i dans $\{1, \dots, N\}$. \square

L'intérêt de ce travail consiste en la mise en place d'un problème de Skorohod discret, pour lequel on peut obtenir des estimations à l'aide des calculs élémentaires présentés dans les deux lemmes précédents. Une fois obtenues ces estimations, la convergence du schéma a pu être établie et son ordre sous certaines conditions.

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques multivoques d'ordre 2 sur une variété riemannienne

2.1 Introduction

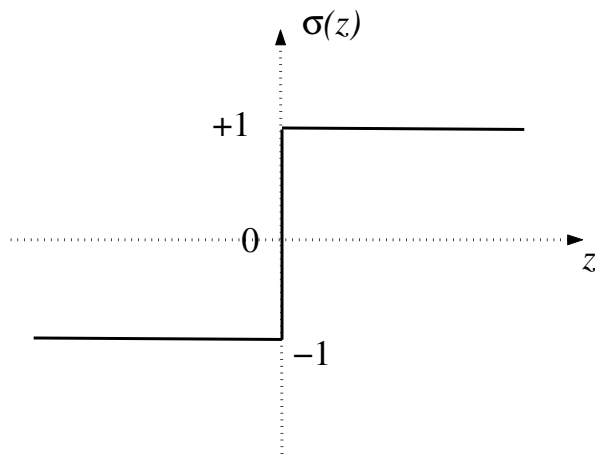
On s'intéresse dans ce chapitre à l'existence d'une solution pour des équations différentielles stochastiques multivoques sur une variété riemannienne. Cette étude est motivée par la modélisation de systèmes mécaniques à nombre fini de degrés de liberté soumis à des sollicitations aléatoires et des forces de frottement sec de type Coulomb. L'existence d'une unique solution à de telles équations n'avait pas encore été obtenue jusqu'à présent dans un cadre regroupant des aspects stochastiques, multivoques et riemanniens. Le présent chapitre est donc à la croisée de plusieurs disciplines des mathématiques (calcul stochastique, analyse fonctionnelle et géométrie riemannienne). Des rappels seront donc apportés sur les aspects géométriques dans la section 2.3. On explique dans la section 2.2 la difficulté de définir des équations différentielles multivoques à caractère monotone d'ordre 1 sur une variété riemannienne quelconque : il est nécessaire de supposer la variété fibrée. L'approche retenue est alors de considérer sur la variété des équations différentielles multivoques d'ordre 2, ce qui revient à les considérer d'ordre 1 sur le fibré tangent, qui est un cas particulier de variété fibrée.

2.2 Ordre 2 ou ordre 1

L'écriture de l'équation de la dynamique d'un système mécanique conduit à des équations différentielles d'ordre 2 puisque l'accélération est en jeu. Lorsque le système peut être paramétré globalement par des coordonnées euclidiennes, il est possible de définir des opérateurs monotones par rapport à ces coordonnées. Considérons par exemple le cas d'une masse unité à un degré de liberté x évoluant dans \mathbb{R} et soumise à une excitation $f(t)$ et une force de frottement sec de type Coulomb $F_r(\dot{x})$. L'équation de la dynamique s'écrit alors

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + F_r(\dot{x}(t)) = f(t), & 0 \leq t \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.1)$$

La force de frottement est modélisée par l'intermédiaire de l'opérateur signe σ dont le graphe est donné sur la figure 2.1 : $F_r(\dot{x}) = \sigma(\dot{x})$.

FIG. 2.1 – Opérateur signe $\sigma(z)$

En posant $X = (x, \dot{x})$, $X_0 = (x_0, \dot{x}_0)$, $A(x, y) = (0, \sigma(y))$ et $F(t) = (0, f(t))$, (2.1) devient l'équation d'ordre 1 suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) + A(X(t)) \ni F(t), & 0 \leq t \\ X(0) = X_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

où A est un opérateur multivoque maximal monotone de \mathbb{R}^2 .

On contraint maintenant la masse à se déplacer sur le cercle unité centré en l'origine du plan \mathbb{R}^2 . On note $x(t)$ la trajectoire de la masse et $v(t)$ son champ de vitesses. La force de frottement $F_r(x(t), v(t))$ s'exprime selon

$$F_r(x(t), v(t)) = \begin{cases} -\frac{v(t)}{\|v(t)\|}, & \text{si } v(t) \neq 0, \\ S(x(t)), & \text{si } v(t) = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

où, pour tout point P du cercle, $S(P)$ désigne le segment porté par la droite tangente au cercle en P , centré en P et de longueur 2. L'opérateur associé,

$$A(x, v) = \begin{cases} -\frac{v}{\|v\|}, & \text{si } v \neq 0, \\ S(x), & \text{si } v = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

défini sur le fibré tangent au cercle, est seulement *localement* monotone, c'est-à-dire qu'il est monotone dans chacune des fibres du fibré tangent.

L'étude des équations différentielles multivoques d'ordre 2 sur une variété revient à celle des équations différentielles d'ordre 1 sur une variété fibrée avec un terme localement monotone. On s'est restreint, en raison de l'origine des problèmes (modélisation de systèmes mécaniques), à des fibrés particuliers que sont les fibrés tangents.

On utilise dans la suite la convention d'Einstein selon laquelle toute répétition d'un même indice dans une expression vaut sommation par rapport à cet indice.

2.3 Géométrie riemannienne

On fournit dans cette section les principaux outils de géométrie riemannienne utiles pour la compréhension des équations différentielles sur des variétés. On définira en particulier les notions de *courbes*, de *dérivée covariante* d'un champ de vecteurs et de *transport*

parallèle le long d'une courbe. Dans cette section on s'est appuyé sur les ouvrages [1] et [11]. Afin d'introduire ces notions, on étudiera en détail le cas de la sphère.

2.3.1 Cas de la sphère

On considère dans cette section le système mécanique formé d'une masse unité évoluant sur la sphère unité \mathbb{S}^2 de \mathbb{R}^3 . On notera f l'ensemble des forces auxquelles est soumis le système. En notant u_x , u_y et u_z une base orthonormée de \mathbb{R}^3 et (x, y, z) les coordonnées cartésiennes associées, l'équation de la dynamique s'écrit selon :

$$\begin{cases} \ddot{x} u_x + \ddot{y} u_y + \ddot{z} u_z = f_x u_x + f_y u_y + f_z u_z, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

Pour décrire un point de la sphère unité, seules deux coordonnées sont nécessaires : la sphère est une variété de dimension 2. On va donc exprimer l'équation (2.5) à l'aide de deux coordonnées θ et φ définies par la relation (2.6) valable pour tout point de coordonnées (x, y, z) appartenant à la sphère \mathbb{S}^2 , paramétrable par $(\theta, \varphi) \in [0, \pi/2] \times [-\pi, \pi[$.

$$\begin{cases} x = \cos \theta \cos \varphi, \\ y = \cos \theta \sin \varphi, \\ z = \sin \theta. \end{cases} \quad (2.6)$$

On définit les vecteurs tangents u_θ et u_φ par

$$u_\theta = -\sin \theta \cos \varphi u_x - \sin \theta \sin \varphi u_y + \cos \theta u_z \quad (2.7)$$

et

$$u_\varphi = -\cos \theta \sin \varphi u_x + \cos \theta \cos \varphi u_y. \quad (2.8)$$

On s'intéresse à la partie tangentielle de l'équation (2.5), et on écrit, après calcul,

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \cos \theta \sin \theta (\dot{\varphi})^2 = f_\theta, \\ \ddot{\varphi} - 2(\tan \theta) \dot{\theta} \dot{\varphi} = f_\varphi, \end{cases} \quad (2.9)$$

avec

$$\begin{cases} f_\theta = -\sin \theta \cos \varphi f_x - \sin \theta \sin \varphi f_y + \cos \theta f_z, \\ f_\varphi = -\frac{\sin \varphi}{\cos \theta} f_x + \frac{\cos \varphi}{\cos \theta} f_y. \end{cases} \quad (2.10)$$

Les termes de gauche du système (2.9) sont l'expression en *coordonnées locales* (θ, φ) de la *dérivée covariante* $\nabla_{v(t)} v(t)$ de la vitesse de la masse le long de sa trajectoire. Ils se décomposent en une partie "euclidienne" et une partie quadratique qui fait intervenir les *symboles de Christoffel* de la sphère.

2.3.2 Cas général

On va définir de manière générale les notions introduites très sommairement dans la sous-section précédente. On ne définira que la notion de *variété différentiable*, qui est un cas particulier de variété topologique.

Définition 2.1. Soit S un espace topologique. Une carte locale sur S est un difféomorphisme φ d'un ouvert U de S sur un ouvert d'un espace vectoriel de dimension finie F . On notera (U, φ) une telle carte. Soit $e = (e_1, \dots, e_d)$ une base de F . Pour tout $x \in U$, les composantes (x^1, \dots, x^d) du vecteur $\varphi(x)$ sur la base e sont appelées *coordonnées locales de x dans la carte (U, φ)* .

Définition 2.2. *Un atlas sur un espace topologique S est une famille \mathcal{A} de cartes locales $\{(U_i, \varphi_i), i \in I\}$ telle que :*

(i) $S = \cup_{i \in I} U_i$;

(ii) *Pour tout couple de cartes locales (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) de \mathcal{A} telles que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, l'application $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \big|_{\varphi_i(U_i \cap U_j)}$ est différentiable. On dit que ces deux cartes sont compatibles.*

Deux atlas sont dits équivalents si leur réunion est encore un atlas.

Par exemple, sur la sphère unité \mathbb{S}^2 , considérons les deux cartes locales (U_n, φ_n) et (U_s, φ_s) définies par

$$U_n = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2, z \neq 1\}, \quad (2.11)$$

$$U_s = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2, z \neq -1\}, \quad (2.12)$$

$$\varphi_n(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right) \quad (2.13)$$

et

$$\varphi_s(x, y, z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right). \quad (2.14)$$

On a alors pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \varphi_n(U_n \cap U_s)$,

$$(\varphi_s \circ \varphi_n^{-1})(\alpha, \beta) = \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right), \quad (2.15)$$

et on déduit que $\mathcal{A} = ((u_n, \varphi_n), (U_s, \varphi_s))$ est un atlas de \mathbb{S}^2 : on l'appellera l'atlas des projections stéréographiques de pôles nord et sud.

Définition 2.3. *Une variété différentiable M est la donnée d'un espace topologique S et d'une classe d'équivalence d'atlas sur S . L'atlas maximal \mathcal{A} sur M est la réunion de tous les atlas de cette classe. La variété est de dimension d si toute carte locale de l'atlas maximal définit une bijection entre un ouvert de S et un ouvert de \mathbb{R}^d . La classe d'équivalence définit une structure différentiable sur S . On confondra dans la suite M et S .*

On notera la remarque importante suivante. Pour définir une structure de variété différentiable sur M , un atlas (pas nécessairement maximal) est suffisant. En effet, pour tout atlas \mathcal{A} défini sur M , il existe un unique atlas maximal $\hat{\mathcal{A}}$ sur M contenant \mathcal{A} (voir Proposition 1.7 p.59 de [11]). Par suite, la donnée d'un atlas sur M définit de manière unique une structure de variété différentiable sur M , celle de l'atlas maximal qui le contient. A ce titre, on considérera sur tout espace euclidien \mathbb{R}^d , la structure différentiable canonique définie par la carte $(\mathbb{R}^d, \mathbf{1}_{\mathbb{R}^d})$. De même, la sphère unité \mathbb{S}^2 sera munie de la structure différentiable définie par l'atlas des projections stéréographiques de pôles nord et sud définies respectivement en (2.13) et (2.14).

Proposition 2.1. *Soit M une variété topologique. Deux structures différentiables sur M définies par les atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ et $(V_k, \psi_k)_{k \in K}$ sont identiques si et seulement si pour tout U_i et V_k tels que $U_i \cap V_k \neq \emptyset$, les applications $\varphi_i \circ \psi_k^{-1}$ et $\psi_k \circ \varphi_i^{-1}$ sont différentiables.*

On peut définir sur la sphère unité \mathbb{S}^2 les cartes $(U_{i,\epsilon}, \varphi_{i,\epsilon})_{1 \leq i \leq 3, \epsilon \in \{-1,1\}}$ par

$$U_{i,\epsilon} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2, \epsilon x_i > 0\}, \quad (2.16)$$

et

$$\varphi_{1,\epsilon}(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3), \quad \varphi_{2,\epsilon}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3), \quad \varphi_{3,\epsilon}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2). \quad (2.17)$$

Grâce à la Proposition 2.1, on peut montrer que la structure différentiable ainsi définie sur \mathbb{S}^2 coïncide avec celle définie par les projections stéréographiques.

Définition 2.4. Une sous-variété d'une variété $M = (S, \mathcal{A})$ est un sous-ensemble B de M tel qu'il existe des espaces vectoriels de dimension finie E et G tels que pour tout $b \in B$, il existe une carte (U, φ) de \mathcal{A} avec $b \in U$ et qui vérifie :

$$\varphi : U \rightarrow E \times G, \text{ et } \varphi(U \cap B) = \varphi(U) \cap (E \times \{0\}). \quad (2.18)$$

Dans ce cas, l'ensemble

$$\mathcal{A}_B = \{(U \cap B, \varphi|_{U \cap B}), (U, \varphi) \text{ vérifie (2.18)}\}, \quad (2.19)$$

définit un atlas sur B .

Tout ouvert B de M est automatiquement une sous-variété de M .

Si \mathbb{R}^3 est muni de sa structure différentiable canonique, en utilisant les cartes définies en (2.16) et (2.17), la sphère \mathbb{S}^2 est une sous-variété de \mathbb{R}^3 . On peut également utiliser un outil de géométrie affine. Si P est un point de l'espace affine \mathbb{R}^3 et k un réel positif, on appelle *inversion* de pôle P et de puissance k l'application qui à un point $M \in \mathbb{R}^3$ associe le point M' de la droite (PM) vérifiant $(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PM'}) = k$. Cette application est involutive et définit un difféomorphisme de $\mathbb{R}^3 \setminus \{P\}$ dans lui-même. Considérons les deux inversions i_n et i_s de puissance 2, de pôles respectifs $N = (0, 0, 1)$ et $S = (0, 0, -1)$. On peut alors montrer que les projections stéréographiques de pôle nord et sud sont respectivement les restrictions de i_n et i_s à \mathbb{S}^2 , ce qui donne immédiatement le résultat.

Définition 2.5. Soient M et N deux variétés. Pour $x \in M$, on dit qu'une fonction $f : M \rightarrow N$ admet une représentation locale en x s'il existe des cartes locales (U, φ) et (V, ψ) de M et N telles que $x \in U$ et $f(U) \subset V$. Dans ce cas, la fonction $f_{\varphi\psi} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est une représentation locale de f en x .

Définition 2.6. Si M et N sont deux variétés, une fonction $f : M \rightarrow N$ est de classe C^r si toute représentation locale de f est de classe C^r . On dira que f est un C^r -difféomorphisme si f est de classe C^r sur M , est bijective de M dans N et sa bijection réciproque est de classe C^r sur N .

Définition 2.7. Soit F un espace topologique. Un fibré localement trivial de fibre F est la donnée d'un triplet $\eta = (E, p, B)$ avec :

- (i) E et B sont des espaces topologiques,
- (ii) $p : E \rightarrow B$ est une application continue et surjective.

Il faut de plus que la condition suivante soit satisfaite :

$$\begin{aligned} &\text{pour tout point } b \text{ de } B, \text{ il existe un voisinage ouvert } U \text{ de } b \\ &\text{et un homéomorphisme } \phi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F \text{ tel que } p_1 \circ \phi = p \quad (2.20) \\ &\text{(où } p_1 \text{ désigne la projection de } U \times F \text{ sur } U). \end{aligned}$$

Le couple (U, ϕ) est alors une carte de η . On dit que E est l'espace total de η , B la base, p la projection et $F_b = p^{-1}(b)$ la fibre au-dessus de b .

On déduit de cette définition que chaque fibre de η est isomorphe à F et que la base B est l'espace topologique quotient de E par la relation d'équivalence dont les classes sont les fibres de η .

Définition 2.8. Soit $\eta = (E, p, B)$ un fibré localement trivial et soit A une partie de B . Une section de η au-dessus de A est une application continue $s : A \rightarrow E$ telle que $p \circ s$ soit l'application identique de A .

Définition 2.9. Deux fibrés localement triviaux (E, p, B) et (E', p', B) de même base B sont dits équivalents si il existe un homéomorphisme $H : E \rightarrow E'$ tel que $p' \circ H = p$ sur E .

Définition 2.10. Un fibré localement trivial $\eta = (E, p, B)$ de fibre F est un fibré vectoriel si F est un espace vectoriel de dimension finie et s'il existe une famille $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i), i \in I\}$ de cartes de η ayant les propriétés suivantes :

(i) $\cup_{i \in I} U_i = B$;

(ii) pour tout couple d'indices (i, j) de I tel que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, il existe une application continue c_{ji} de $U_i \cap U_j$ dans $GL(F)$ vérifiant :

$$\forall (b, f) \in (U_i \cap U_j) \times F, (\phi_j \circ \phi_i^{-1})(b, f) = (b, c_{ji}(b)f); \quad (2.21)$$

(iii) si $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ vérifie (i) et (ii) alors $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.

L'ensemble \mathcal{A} est l'atlas de η , les éléments de \mathcal{A} , les cartes vectorielles de η , et les applications c_{ji} sont les changements de cartes de l'atlas.

Puisque F est un espace vectoriel, on peut munir chaque fibre F_b d'une structure d'espace vectoriel. Si (U_i, ϕ_i) est une carte vectorielle du fibré vectoriel η , on définit la somme de deux éléments x et y de F_b pour $b \in U_i$ par

$$x + y = \phi_i^{-1}(p(x), (p_2 \circ \phi_i)(x) + (p_2 \circ \phi_i)(y)), \quad (2.22)$$

où p_2 désigne la projection de $U_i \times F$ sur F . On définit la multiplication extérieure λx pour $\lambda \in \mathbb{R}$ par

$$\lambda x = \phi_i^{-1}(p(x), \lambda(p_2 \circ \phi_i)(x)). \quad (2.23)$$

De plus, il existe un élément neutre dans la fibre F_b , qu'on obtient en définissant la section s_0 au-dessus de B par son expression dans la carte (U_i, ϕ_i) :

$$\forall b \in B, s_0(b) = \phi_i^{-1}(b, 0). \quad (2.24)$$

On choisit alors $s_0(b)$ comme l'élément neutre de F_b .

Définition 2.11. Soit F un espace vectoriel réel et B une variété différentiable. Un fibré vectoriel $\eta = (E, p, B)$ est un fibré vectoriel différentiable s'il possède un atlas pour lequel les changements de cartes sont différentiables. Dans ce cas, l'atlas est dit différentiable et ses éléments sont appelés des cartes vectorielles différentiables de η .

Théorème 2.1. Soit B un espace topologique recouvert par une famille $(U_i)_{i \in I}$ de ses ouverts et F un espace vectoriel de dimension finie. Soit $c_{ji} : U_j \cap U_i \rightarrow GL(F)$, pour $U_j \cap U_i \neq \emptyset$, une famille d'applications continues telles que

$$\forall x \in U_k \cap U_j \cap U_i, c_{kj}(x)c_{ji}(x) = c_{ki}(x). \quad (2.25)$$

Alors il existe, à équivalence de fibrés localement triviaux près, un unique fibré vectoriel $\eta = (E, p, B)$ de fibre F pour lequel les applications c_{ji} soient les changements de cartes vectorielles.

Pour une démonstration, on se reportera au Théorème 2.14 p.46 de [11]. L'idée est de définir Σ comme la réunion des $U_i \times F$ et d'identifier les couples $(x, e) \in U_i \times F$ et $(y, f) \in U_j \times F$ lorsque $x = y$ et $f = c_{ji}(x)e$. L'espace total E du fibré vectoriel sera pris égal au quotient de Σ par la relation d'équivalence ainsi définie. La projection $p : E \rightarrow B$ est définie par $p(\overline{(x, f)}) = x$ où $\overline{(x, f)}$ désigne la classe d'équivalence de (x, f) .

Proposition 2.2. *Soit $\eta = (E, p, B)$ un fibré vectoriel différentiable. Alors il existe sur E une seule structure de variété différentiable telle que pour toute carte vectorielle différentiable (U, ϕ) de η , ϕ soit un difféomorphisme de l'ouvert $p^{-1}(U)$ sur la variété produit $U \times F$. Si n est la dimension de F et m celle de B alors E est de dimension $m + n$.*

La démonstration de ce résultat repose sur l'existence d'un unique atlas différentiable $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i), i \in I\}$ de η contenant tous les autres, c'est-à-dire d'un atlas maximal. Et on montre ensuite que cet atlas permet de définir une structure de variété différentiable sur l'espace total E .

Définition 2.12. *Soit M une variété de dimension d et $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i), i \in I\}$ son atlas maximal. Le fibré tangent à M est, à équivalence de fibrés localement triviaux près, l'unique fibré vectoriel différentiable de base M et de fibre \mathbb{R}^d déterminé par les changements de cartes différentiables c_{ji} avec*

$$\forall x \in U_j \cap U_i, c_{ji}(x) = D(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(\phi_i(x)), \quad (2.26)$$

où $D(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(\phi_i(x))$ désigne la différentielle dans \mathbb{R}^d de l'application $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ au point $\phi_i(x)$. On le note $\tau M = (\mathbb{T}M, \pi, M)$. L'espace total $\mathbb{T}M$ est l'espace tangent à M , et la fibre $\mathbb{T}_x M$ au-dessus de $x \in M$ est appelée l'espace tangent à M en x .

Un tel fibré existe en vertu du Théorème 2.1. On va regarder le cas de la sphère \mathbb{S}^2 . Soit le fibré vectoriel $\eta = (E, p, B)$ défini par

$$E = \left\{ (x, y, z, u, v, w) \in \mathbb{R}^6, (x, y, z) \in \mathbb{S}^2, xu + yv + zw = 0 \right\}, \quad (2.27)$$

$B = \mathbb{S}^2$ et $p : E \rightarrow B$ vérifiant $p(x, y, z, u, v, w) = (x, y, z)$. On va montrer que le fibré η est le fibré tangent à la sphère unité \mathbb{S}^2 . Pour cela, on considère les ouverts U_n et U_s de \mathbb{S}^2 (définis respectivement en (2.11) et (2.12)) et on définit $\phi_n : p^{-1}(U_n) \rightarrow U_n \times \mathbb{R}^2$ et $\phi_s : p^{-1}(U_s) \rightarrow U_s \times \mathbb{R}^2$ par

$$\phi_n(x, y, z, u, v, w) = \left(x, y, z, \frac{u}{1-z} + \frac{x}{(1-z)^2}w, \frac{v}{1-z} + \frac{y}{(1-z)^2}w \right), \quad (2.28)$$

et

$$\phi_s(x, y, z, u, v, w) = \left(x, y, z, \frac{u}{1+z} - \frac{x}{(1+z)^2}w, \frac{v}{1+z} - \frac{y}{(1+z)^2}w \right). \quad (2.29)$$

Pour tout $(x, y, z, \alpha, \beta) \in (U_n \cap U_s) \times \mathbb{R}^2$, on a

$$(\phi_s \circ \phi_n^{-1})(x, y, z, \alpha, \beta) = \left(x, y, z, \frac{1}{(1+z)^2} \begin{pmatrix} y^2 - x^2 & -2xy \\ -2xy & x^2 - y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right), \quad (2.30)$$

ce qui montre que le changement de cartes c_{sn} est différentiable dans \mathbb{R}^2 et l'atlas $((U_n, \phi_n), (U_s, \phi_s))$ définit une structure de fibré vectoriel différentiable sur η . Pour le voir comme le fibré tangent à la sphère unité \mathbb{S}^2 munie de l'atlas $\mathcal{A} = ((U_n, \phi_n), (U_s, \phi_s))$ défini en (2.13) et (2.14), il suffit de vérifier que

$$c_{sn}(x, y, z) = D(\phi_s \circ \phi_n^{-1})(\phi_n(x, y, z)). \quad (2.31)$$

En dérivant (2.15) par rapport à α et β , on a

$$\forall (x, y, z) \in U_n \cap U_s, D(\phi_s \circ \phi_n^{-1})(\phi_n(x, y, z)) = \frac{1}{(1+z)^2} \begin{pmatrix} y^2 - x^2 & -2xy \\ -2xy & x^2 - y^2 \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

ce qui permet, en utilisant (2.30), d'établir (2.31).

La définition qui suit permet de donner une autre approche du fibré tangent en introduisant la notion de *courbe* sur une variété.

Définition 2.13. Une courbe d'une variété M est une application $\gamma : I \rightarrow M$ de classe C^1 où I est un intervalle de \mathbb{R} . Si on pose $x = \gamma(0)$, on dit que γ part de x .

Définition 2.14. Soit M une variété, $x \in M$ et (U, φ) une carte locale telle que x appartienne à U . On dira que deux courbes γ_1 et γ_2 partant de x sont tangentes en x relativement à (U, φ) si les dérivées des fonctions $\varphi \circ \gamma_1$ et $\varphi \circ \gamma_2$ coïncident en 0.

Soient (U, φ) et (V, ψ) deux cartes locales et soit x dans $U \cap V$. Si γ_1 et γ_2 sont tangentes en x relativement à (U, φ) alors $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$. Or $\psi \circ \gamma_i = (\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma_i)$ pour $i \in \{1, 2\}$, donc par dérivation classique de fonctions vectorielles composées, on obtient $(\psi \circ \gamma_1)'(0) = (\psi \circ \gamma_2)'(0)$ et les courbes sont donc tangentes relativement à (V, ψ) . La notion de tangence de courbes est donc indépendante du choix de la carte locale utilisée pour l'exprimer, c'est ce qu'on appelle une propriété *intrinsèque*.

On peut donc définir en un point x d'une variété M une relation d'équivalence sur les courbes de M partant de x : les classes d'équivalences sont les ensembles de courbes tangentes entre elles en x . On note $\overline{\gamma}_x$ la classe de la courbe γ partant de x . On peut alors donner une autre définition de l'espace tangent à M .

Définition 2.15. Soit M une variété et $x \in M$. L'espace tangent $\mathbb{T}_x M$ à M en x est l'ensemble des classes d'équivalence

$$\mathbb{T}_x M = \{\overline{\gamma}_x, \gamma \text{ courbe de } M \text{ partant de } x\}. \quad (2.33)$$

En posant $\mathbb{T}M = \cup_{x \in M} \mathbb{T}_x M$ et $\pi : \mathbb{T}M \rightarrow M$ définie par $\pi(\overline{\gamma}_x) = x$, le triplet $\tau M = (\mathbb{T}M, \pi, M)$ est un fibré vectoriel différentiable de fibre \mathbb{R}^d appelé fibré tangent à la variété M .

Cette définition est équivalente à la Définition 2.12. En effet, soit $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i), i \in I\}$ l'atlas maximal de M . On définit sur le fibré vectoriel $\tau M = (\mathbb{T}M, \pi, M)$ de fibre \mathbb{R}^d donné dans la Définition 2.15, les cartes vectorielles $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ avec

$$\begin{aligned} \forall i \in I, \phi_i : \quad & \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^d \\ & \overline{\gamma}_x \mapsto (x, (\varphi_i \circ \gamma)'(0)). \end{aligned} \quad (2.34)$$

La dernière expression définit bien une bijection entre $\pi^{-1}(U_i)$ et $U_i \times \mathbb{R}^d$ car pour $(b, f) \in U_i \times \mathbb{R}^d$, l'application $\gamma : t \mapsto \varphi_i^{-1}(\varphi_i(b) + tf)$ pour t assez petit définit une courbe de M partant de b telle que $(\varphi_i \circ \gamma)'(0) = f$. On prend alors $\phi_i^{-1}(b, f) = \overline{\gamma}_b$. On a alors pour tout couple d'indices (i, j) de I , la relation suivante :

$$\forall (b, f) \in (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^d, (\phi_j \circ \phi_i^{-1})(b, f) = (b, D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(b)f), \quad (2.35)$$

et $\tau M = (\mathbb{T}M, \pi, M)$ est donc le fibré vectoriel de fibre \mathbb{R}^d déterminé par les changements de cartes différentiables c_{ji} vérifiant (2.26).

Proposition 2.3. Soient γ_1 et γ_2 deux courbes d'une variété M tangentes en $x \in M$. Soit N une variété et $f : M \rightarrow N$ une fonction de classe C^1 sur M . Alors $f \circ \gamma_1$ et $f \circ \gamma_2$ sont tangents en $f(x) \in N$.

Définition 2.16. Soient M et N deux variétés et $f : M \rightarrow N$ une fonction de classe C^1 . On définit l'application tangente à f , $\mathbb{T}f : \mathbb{T}M \rightarrow \mathbb{T}N$, par

$$\forall \overline{\gamma}_x \in \mathbb{T}M, \mathbb{T}f(\overline{\gamma}_x) = \overline{f \circ \gamma_{f(x)}}. \quad (2.36)$$

Les cartes différentiables ϕ_n et ϕ_s définies sur le fibré tangent à la sphère unité \mathbb{S}^2 en (2.28) et (2.29) sont les applications tangentes à φ_n et φ_s définies respectivement en (2.13) et (2.14).

Proposition 2.4. *Soient M, N, K trois variétés et $f : M \rightarrow N, g : N \rightarrow K$ deux fonctions de classe C^1 . Alors $g \circ f : M \rightarrow K$ est de classe C^1 et*

$$\mathbb{T}(g \circ f) = \mathbb{T}g \circ \mathbb{T}f. \quad (2.37)$$

Définition 2.17. *Soit M une variété. Pour tout $x \in M, \mathbb{T}_x^*M$ est l'ensemble des formes linéaires de \mathbb{T}_xM . On pose $\mathbb{T}^*M = \cup_{x \in M} \mathbb{T}_x^*M$ et $\pi^* : \mathbb{T}^*M \rightarrow M$ est définie par $\pi^*(\alpha) = x$ si et seulement si $\alpha \in \mathbb{T}_x^*M$. Le fibré vectoriel différentiable $\tau^*M = (\mathbb{T}^*M, \pi^*, M)$ est appelé le fibré cotangent à M .*

Définition 2.18. *Soit M une variété. Un champ de vecteurs sur M est une section différentiable du fibré tangent à M . Un champ de covecteurs, ou forme différentielle, sur M est une section différentiable du fibré cotangent à M .*

Définition 2.19. *Une courbe intégrale d'un champ de vecteurs X sur une variété M est une courbe $\gamma : I \rightarrow M$ de M telle que pour tout élément t de $I, \gamma'(t) = X(\gamma(t))$.*

Définition 2.20. *Soit M une variété. On dit qu'un champ de vecteurs X sur le fibré tangent $\tau M = (\mathbb{T}M, \pi, M)$ définit une équation différentielle d'ordre deux si pour toute courbe intégrale $\gamma : I \rightarrow TM$ de X et pour tout élément t de $I, (\pi \circ \gamma)'(t) = \gamma(t)$.*

2.4 Dynamique de systèmes mécaniques

On va s'intéresser dans cette section à la dynamique d'un solide indéformable. On aura besoin d'introduire de nouvelles notions mathématiques sur les variétés précédemment définies. Il s'agit essentiellement d'outils de géométrie riemannienne : on les définira et on énoncera leurs propriétés au fur et à mesure de leur apparition dans la description des systèmes mécaniques étudiés.

2.4.1 Définition d'un système mécanique

Dans ce mémoire, un système mécanique est la donnée d'une variété différentiable M de dimension d , d'une fonction différentiable T sur l'espace total $\mathbb{T}M$ du fibré tangent à M et d'une forme différentielle "semi-basique" $F(\alpha)$ du fibré tangent à M , dépendant d'un paramètre α pouvant être le temps ; le terme semi-basique sera expliqué plus loin. La variété M est appelée *variété de configuration* du système, T est son *énergie cinétique* et F est appelé *champ de forces*. La dimension de M est appelée le *nombre de degrés de liberté* du système. On ne considèrera dans la suite que des systèmes avec un nombre fini de degrés de liberté. On se limitera également au cas où l'énergie cinétique est définie par une *métrique riemannienne* sur M , confèrent ainsi à M une structure de variété riemannienne.

Définition 2.21. *Soit M une variété de dimension d . Une métrique riemannienne sur M est une application g définie sur M telle que pour tout x de $M, g(x)$ est un produit scalaire sur \mathbb{T}_xM . De plus, pour tout ouvert U de M et tous champs de vecteurs X et Y sur U , l'application $x \mapsto g(x)(X(x), Y(x))$ de U dans \mathbb{R} est différentiable sur U . La variété M munie d'une telle métrique est notée (M, g) et définie une variété riemannienne. Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, on notera le produit scalaire $g(x)$ par $(\cdot, \cdot)_x$.*

Lorsque la variété M est une sous-variété de \mathbb{R}^d , on définit une métrique riemannienne sur M issue du produit scalaire (\cdot, \cdot) de \mathbb{R}^d . On considère par exemple le cas de la sphère \mathbb{S}^2 plongée dans \mathbb{R}^3 . On a vu que l'espace total de son fibré tangent $\mathbb{T}\mathbb{S}^2$ est l'ensemble défini en (2.27) qui se plonge dans l'espace affine \mathbb{R}^3 . Pour définir une métrique riemannienne sur \mathbb{S}^2 , on va définir en tout point $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{(x,y,z)}$ sur $\mathbb{T}_{(x,y,z)}\mathbb{S}^2$ par

$$\forall (\xi, \eta) \in (\mathbb{T}_{(x,y,z)}\mathbb{S}^2)^2, (\xi, \eta)_{(x,y,z)} = (\xi, \eta),$$

c'est-à-dire que si $\xi = (x, y, z, u, v, w)$ et $\eta = (x, y, z, u', v', w')$, on alors

$$(\xi, \eta)_{(x,y,z)} = uu' + vv' + ww'. \quad (2.38)$$

On peut exprimer cette dernière égalité en coordonnées stéréographiques relatives au pôle nord. On considère pour cela $(x, y, z) \in U_n$ où U_n est défini en (2.11). Si on pose

$$(\alpha, \beta) = \varphi_n(x, y, z)$$

où φ_n est défini en (2.13), on obtient l'expression de la métrique en coordonnées stéréographiques :

$$g(\alpha, \beta) = \frac{4}{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

$g(\alpha, \beta)$ étant ici représentée par la matrice associée à la forme quadratique qu'elle définit sur $\mathbb{T}_{(x,y,z)}\mathbb{S}^2$. On pourrait obtenir le même type d'expression pour une projection stéréographique de pôle sud. On va s'intéresser maintenant à la manière de définir une métrique riemannienne pour un système mécanique.

Plus précisément, dans le cas d'un solide indéformable, le système évolue dans l'espace réel affine \mathcal{E} . On note $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{E}$ le solide à l'état initial. La variété de configuration, dans son cas le plus général, est la variété M des isométries de \mathcal{E} .

Soit $x : t \rightarrow x(t)$ une courbe sur M . On appellera trajectoire du solide dans le monde réel \mathcal{E} l'application $t \rightarrow (x(t))(\mathcal{S}_0)$. Si P est un point du monde réel, on note $v_P(t)$ sa vitesse. Si $P \notin (x(t))(\mathcal{S}_0)$ alors $v_P(t) = 0$. On note μ_0 la distribution de masse du solide à son état initial : μ_0 est une mesure positive bornée de \mathcal{E} et la distribution de masse dans la configuration $x(t)$ est définie par la mesure $\mu_{x(t)}$ donnée par

$$\forall P \in \mathcal{E}, d\mu_{x(t)}(P) = d\mu_0(x(t)^{-1}(P)). \quad (2.40)$$

L'énergie cinétique du solide à l'instant t est définie par

$$E_c(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{E}} \|v_P(t)\|^2 d\mu_{x(t)}(P). \quad (2.41)$$

On peut relier $v_P(t)$ à $x(t)$ et $\dot{x}(t)$ par la relation

$$v_P(t) = \frac{d}{dt}(x(t))(P),$$

et l'énergie cinétique $E_c(t)$ s'exprime en fonction de $x(t)$ et $\dot{x}(t)$. En remplaçant dans cette nouvelle expression, $\dot{x}(t)$ par un vecteur tangent appartenant à $\mathbb{T}_{x(t)}M$, on peut montrer que l'on est en présence d'une norme sur $\mathbb{T}_{x(t)}M$ dont on peut extraire un produit scalaire. Une métrique riemannienne peut alors être définie sur M et elle est directement reliée à l'énergie cinétique du système.

Le champ de forces $F(\alpha)$ est une forme différentielle semi-basique sur le fibré tangent τM . Le terme semi-basique veut simplement dire que, en coordonnées locales $(x^1, \dots, x^d, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^d)$ du fibré tangent, la forme différentielle s'écrit sous la forme suivante :

$$F(\alpha, x^1, \dots, x^d, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^d) = F_1(\alpha, x^1, \dots, x^d, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^d)dx_1 + \dots + F_d(\alpha, x^1, \dots, x^d, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^d)dx_d, \quad (2.42)$$

où les applications $F_i(\alpha, \cdot, \cdot)$ sont différentiables de $U' \times \mathbb{R}^d$ dans \mathbb{R} et U' est un ouvert de \mathbb{R}^d . On impose donc au champ de forces de ne pas avoir de composantes sur les formes $d\dot{x}_1, \dots, d\dot{x}_d$.

2.4.2 Equation de la dynamique

On considère un système mécanique dont la variété de configuration est munie d'une structure riemannienne. Soit $x : t \rightarrow M$ la trajectoire du solide dans la variété de configuration M , ce qui revient à dire que $t \rightarrow x(t)(\mathcal{S}_0)$ est la trajectoire réelle du solide dans le monde réel \mathcal{E} . On notera par $T(\dot{x}(t))$ l'énergie cinétique du système à l'instant t et elle est reliée à la métrique riemannienne par la formule suivante :

$$T(\dot{x}(t)) = (\dot{x}(t), \dot{x}(t))_{x(t)}. \quad (2.43)$$

Le paramètre α intervenant dans la définition du champ de forces est pris égal au temps t et on définit la *puissance des efforts internes et externes* à l'instant t par

$$\mathcal{P}_{ie}(t) = F(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{x}(t), \quad (2.44)$$

et la *puissance virtuelle des efforts internes et externes* à l'instant t par

$$\mathcal{P}_{vie}(t) = F(t, x(t), \dot{x}(t)). \quad (2.45)$$

La puissance $\mathcal{P}_{ie}(t)$ apparaît donc comme l'image de la vitesse $\dot{x}(t)$ par la puissance virtuelle $\mathcal{P}_{vie}(t)$. On définit également la *puissance des forces inertielles* par la dérivée temporelle de l'énergie cinétique :

$$\mathcal{P}_i(t) = \frac{d}{dt}T(\dot{x}(t)). \quad (2.46)$$

Le principe faible de la dynamique affirme qu'à tout instant la puissance des efforts internes et externes équilibre la puissance des forces inertielles c.-à-d.

$$\forall t, \mathcal{P}_{ie}(t) = \mathcal{P}_i(t). \quad (2.47)$$

S'il existe une fonction $t \mapsto \mathcal{P}_{vi}(t)$ telle que pour tout t , $\mathcal{P}_{vi}(t)$ est une forme différentielle définie le long de la trajectoire $x(t)$ vérifiant :

$$\mathcal{P}_{vi}(t)\dot{x}(t) = \mathcal{P}_i(t), \quad (2.48)$$

alors le principe fort de la dynamique donne l'égalité entre \mathcal{P}_{vi} et \mathcal{P}_{vie} pour tout t . Pour montrer l'existence de ce champ de covecteurs, on va exprimer la relation (2.47) en coordonnées locales et établir une existence locale.

Soit (U, φ) une carte locale de M , $U' = \varphi(U)$ et $\psi = \varphi^{-1}$. A l'aide de la base canonique (e_1, \dots, e_d) de \mathbb{R}^d , on désigne par y^1, \dots, y^d le système de coordonnées locales associé et on définit pour tout entier i compris entre 1 et d le vecteur

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = (\mathbb{T}\psi)(y^1, \dots, y^d)e_i \quad (2.49)$$

de l'espace tangent à M en $\psi(y^1, \dots, y^d)$. Dans ce système de coordonnées locales, on note pour tout couple (i, j) d'entiers de $\{1, \dots, d\}$, la fonction $g_{ij} : U' \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall y = (y^1, \dots, y^d) \in U', g_{ij}(y) = (\partial/\partial y^i, \partial/\partial y^j)_{\psi(y)}. \quad (2.50)$$

On remarque que $g_{ij} = g_{ji}$. Pour tout $y \in U'$, $(g_{ij}(y))_{1 \leq i, j \leq d}$ définit une matrice réelle carrée de dimension d qui est symétrique et définie positive. On notera $(g^{ij}(y))_{1 \leq i, j \leq d}$ sa matrice inverse. Pour tout $y \in U'$, les espaces vectoriels $\mathbb{T}_{\psi(y)}M$ et $\mathbb{T}_{\psi(y)}^*M$ sont en dualité et la forme linéaire associée au vecteur $\partial/\partial y^i$ est la forme $g_{ki}(y)dy^k$. L'ensemble des g_{ij} est la représentation locale de la métrique riemannienne dans le système de coordonnées locales défini par la carte (U, φ) .

En dérivant par rapport au temps la relation (2.43), exprimée en coordonnées locales, (2.46) s'écrit :

$$\mathcal{P}_i(t) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}(y(t)) \dot{x}^i \dot{y}^j \dot{y}^k + g_{mj}(y(t)) \ddot{y}^m \dot{y}^j. \quad (2.51)$$

En posant, pour tout $y \in U'$,

$$\Gamma_{ki}^m(y) = \frac{1}{2} g^{mh}(y) \left(\frac{\partial g_{hk}}{\partial y^i}(y) + \frac{\partial g_{hi}}{\partial y^k}(y) - \frac{\partial g_{ik}}{\partial y^h}(y) \right), \quad (2.52)$$

on a

$$g_{jm}(y(t)) \Gamma_{ki}^m(y(t)) \dot{y}^i \dot{y}^j = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}(y(t)) \dot{y}^i \dot{y}^j. \quad (2.53)$$

La relation (2.51) devient alors

$$\mathcal{P}_i(t) = g_{mj}(y(t)) \left(\Gamma_{ki}^m(y(t)) \dot{y}^i \dot{y}^k + \ddot{y}^m \right) \dot{y}^j. \quad (2.54)$$

On va définir au dessus de la courbe $\psi(y(t))$ le champ de covecteurs suivant : pour tout t , $D(t)$ est la forme linéaire sur $\mathbb{T}_{\psi(y(t))}M$ définie dans la carte locale (U, φ) par la formule suivante :

$$\forall t, D(t) = g_{mj}(y(t)) \left(\Gamma_{ki}^m(y(t)) \dot{y}^i \dot{y}^k + \ddot{y}^m \right) dy(t)^j. \quad (2.55)$$

Cette dernière expression définit un objet de manière intrinsèque, c'est-à-dire qu'elle est indépendante du choix de la carte locale dans laquelle elle est développée. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k = \frac{\partial y^p}{\partial \bar{y}^i} \frac{\partial y^q}{\partial \bar{y}^j} \Gamma_{pq}^r \frac{\partial \bar{y}^k}{\partial y^r} + \frac{\partial \bar{y}^k}{\partial y^p} \frac{\partial^2 y^p}{\partial \bar{y}^i \partial \bar{y}^j}, \quad (2.56)$$

où $(\bar{y}^1, \dots, \bar{y}^d)$ est un système de coordonnées locales définies sur un ouvert \bar{U}' de \mathbb{R}^d tel que $U' \cap \bar{U}' \neq \emptyset$ et les $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ sont définis comme dans la relation (2.52) à l'aide des variables $(\bar{y}^1, \dots, \bar{y}^d)$ à la place de (y^1, \dots, y^d) . On a alors, en notant \bar{g}_{ij} la représentation locale de la métrique dans le système de coordonnées \bar{y} ,

$$\forall t, D(t) = \bar{g}_{mj}(\bar{y}(t)) \left(\bar{\Gamma}_{ki}^m(\bar{y}(t)) \dot{\bar{y}}^i \dot{\bar{y}}^k + \ddot{\bar{y}}^m \right) d\bar{y}(t)^j. \quad (2.57)$$

En utilisant (2.54) et $\langle dy^i, \partial/\partial y^j \rangle = \delta_j^i$

$$\forall t, D(t) \dot{x}(t) = \mathcal{P}_i(t). \quad (2.58)$$

Si on définit la *puissance virtuelle des forces inertielles* par

$$\forall t, \mathcal{P}_{vi}(t) = D(t), \quad (2.59)$$

le principe fort de la dynamique classique s'énonce selon

$$\forall t, \mathcal{P}_{vi}(t) = \mathcal{P}_{vie}(t), \quad (2.60)$$

qui est une égalité, pour t fixé, dans l'ensemble $\Gamma_{\psi(x(t))}^* M$ des formes linéaires sur $\Gamma_{\psi(x(t))} M$. La puissance virtuelle des forces inertielles définit une forme différentielle au-dessus de la courbe x . Le champ de vecteurs associé par dualité est ce que l'on appelle la *dérivée covariante* de la vitesse \dot{x} le long de x . Le principe de la dynamique assure, à la dualité près, le long de la trajectoire x , l'égalité entre le champ de forces et la dérivée covariante de la vitesse.

2.5 Connexion, dérivée covariante, géodésiques et transport parallèle

La dérivée covariante est définie via les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k de la variété riemannienne M . Ces termes apparaissent de manière générale dans la dérivation des champs de vecteurs par l'intermédiaire de la *connexion*.

Définition 2.22. Une connexion (affine) sur une variété M est une application qui à toute paire X, Y de champs de vecteurs sur M associe un autre champ de vecteurs $\nabla_X Y$ sur M vérifiant :

(i) $\nabla_X Y$ est bilinéaire en X et Y ;

(ii) pour toute fonction différentiable $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$ et $\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + \mathbb{T}f \circ X$.

Le champ de vecteurs $\nabla_X Y$ est appelé la *dérivée covariante* de Y le long de X . Si (y^1, \dots, y^d) est un système de coordonnées locales, on définit les symboles de Christoffel associés à la connexion affine ∇ en écrivant sur la base des champs de vecteurs la décomposition de la dérivée covariante du $k^{\text{ième}}$ champ dans la direction du $j^{\text{ième}}$:

$$\nabla_{\partial/\partial y^j} \left(\frac{\partial}{\partial y^k} \right) = \Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial y^i} \quad (2.61)$$

Proposition 2.5. Soit ∇ une connexion sur une variété M et X, Y deux champs de vecteurs sur M . Soit (U, φ) une carte locale de M avec $\psi = \varphi^{-1}$ et (y^1, \dots, y^d) le système de coordonnées associé. On note X^1, \dots, X^d et Y^1, \dots, Y^d les composantes respectives des champs de vecteurs X et Y sur la base $\partial/\partial y^1, \dots, \partial/\partial y^d$ de $\Gamma_{\psi(y)} M$. Les composantes du champ de vecteurs $\nabla_X Y$ dans cette même base vérifient :

$$(\nabla_X Y)^i = \frac{\partial Y^i}{\partial y^j} X^j + \Gamma_{jk}^i X^j Y^k. \quad (2.62)$$

On remarque que si $M = \mathbb{R}^d$ est muni du produit scalaire euclidien $x \cdot y$ alors $\nabla_X Y = X \cdot \nabla Y$ où ∇ désigne le gradient et les symboles de Christoffel sont nuls.

Définition 2.23. Soit $\gamma : I \rightarrow M$ une courbe d'une variété M munie d'une connexion ∇ et X un champ de vecteurs au-dessus de γ . La dérivée covariante de X le long de γ est le champ de vecteurs au-dessus de γ défini par

$$\forall t \in I, \frac{DX}{dt} = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} X. \quad (2.63)$$

On dit que le champ de vecteurs X est parallèle le long de γ si sa dérivée covariante est identiquement nulle.

Définition 2.24. Une courbe $\gamma : I \rightarrow M$ d'une variété M munie d'une connexion ∇ est une géodésique de M si la dérivée covariante de son champ de vitesses le long d'elle-même est identiquement nulle. En coordonnées locales, l'équation des géodésiques s'écrit alors :

$$\ddot{\gamma}^i(t) + \Gamma_{jk}^i(\gamma(t))\dot{\gamma}^j(t)\dot{\gamma}^k(t) = 0. \quad (2.64)$$

On retrouve, dans le cas euclidien, que les géodésiques sont portées par les droites.

On reprend la carte locale (U_n, φ_n) de \mathbb{S}^2 définie en (2.11) et (2.13). A l'aide des formules (2.39) et (2.52) (qui correspond à une connexion bien particulière définie dans la Proposition 2.6), on obtient, avec des notations évidentes :

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) = \Gamma_{\beta\beta}^\beta(\beta, \alpha) = \frac{-2\alpha}{1 + \alpha^2 + \beta^2}, \quad (2.65)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha(\alpha, \beta) = \Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\beta, \alpha) = \frac{-2\beta}{1 + \alpha^2 + \beta^2}, \quad (2.66)$$

$$\Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta) = \Gamma_{\alpha\alpha}^\beta(\beta, \alpha) = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2 + \beta^2}. \quad (2.67)$$

L'équation des géodésiques s'écrit alors

$$\begin{cases} (1 + \alpha^2 + \beta^2)\ddot{\alpha} - 2\alpha(\dot{\alpha})^2 - 4\beta\dot{\alpha}\dot{\beta} + 2\alpha(\dot{\beta})^2 = 0, \\ (1 + \alpha^2 + \beta^2)\ddot{\beta} + 2\beta(\dot{\alpha})^2 - 4\alpha\dot{\alpha}\dot{\beta} - 2\beta(\dot{\beta})^2 = 0. \end{cases} \quad (2.68)$$

La résolution du système (2.68) ne paraît pas aisé. On va se limiter à une vérification. On sait que les géodésiques de la sphère sont les grands cercles (cercles de rayon 1) et sont alors définis par l'intersection de la sphère \mathbb{S}^2 avec un plan contenant le centre de la sphère. Or, l'image d'un tel plan par l'inversion de pôle nord et de puissance 2 est soit un plan soit une sphère, selon que le pôle nord appartient ou non à ce plan. Il en découle que l'image d'un grand cercle, et même de tout cercle, est l'intersection (nécessairement non vide) d'un plan ou d'une sphère avec le plan équatorial, c'est-à-dire soit une droite, soit un cercle. On écarte la condition initiale $\dot{\alpha}_0 = \dot{\beta}_0 = 0$ qui conduit à la solution constante $(\alpha, \beta) = (\alpha_0, \beta_0)$. On va supposer que la solution de (2.68) est portée par un cercle de centre (a, b) et de rayon $c > 0$. On écrira alors

$$\alpha(t) = c \cos(u(t)) + a, \quad \beta(t) = c \sin(u(t)) + b.$$

Dans ce cas, α et β vérifient (2.68) si et seulement si

$$c^2 = 1 + a^2 + b^2 \quad (2.69)$$

et

$$(c + a \cos u + b \sin u)\ddot{u} = (b \cos u - a \sin u)(\dot{u})^2. \quad (2.70)$$

En posant $a = r \cos \theta$, $b = r \sin \theta$ et $v = u - \theta$, on obtient

$$v(t) = 2 \arctan \left\{ (c - r) \tan \left(\frac{\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2}{c(\alpha_0 \dot{\beta}_0 - \beta_0 \dot{\alpha}_0)} \right) \right\}. \quad (2.71)$$

Cette dernière expression n'a un sens, et ne définit une solution portée par le cercle de centre (a, b) et de rayon c , que si

$$\alpha_0 \dot{\beta}_0 - \beta_0 \dot{\alpha}_0 \neq 0. \quad (2.72)$$

Dans ce dernier cas, qui correspond à la colinéarité des vecteurs (α_0, β_0) et $(\dot{\alpha}_0, \dot{\beta}_0)$, la solution est recherchée sous la forme $\alpha(t) = \gamma\beta(t)$ ou $\alpha(t) = \epsilon\beta(t)$, $\gamma \in \mathbb{R}$ et $\epsilon \in \mathbb{R}$ et la résolution est alors possible. On obtient donc les deux types de géodésiques : soient elles sont portées par des cercles dont le centre et le rayon vérifient la relation (2.69), soit elles sont portées par des droites passant par l'origine.

L'équation locale des géodésiques (2.64) est une équation différentielle ordinaire pour laquelle les résultats classiques d'existence locale et d'unicité de solutions permettent d'affirmer l'existence d'un intervalle I de \mathbb{R} et d'une unique géodésique $\gamma : I \rightarrow M$ telle que $\gamma(0) = \gamma_0 \in M$ et $\gamma'(0) = \gamma'_0$ pour tout $\gamma_0 \in M$ et $\gamma'_0 \in T_{\gamma_0}M$.

Dans le même ordre d'idées, pour toute courbe γ d'une variété M et pour tout vecteur $v \in T_{\gamma(0)}M$, il existe un unique champ de vecteurs X parallèle le long de γ tel que $X(\gamma(0)) = v$. On notera que l'équation différentielle ordinaire locale régissant un tel problème est linéaire en l'inconnue X et donc le champ de vecteurs est défini au-dessus de la courbe entière. L'existence d'un tel champ de vecteurs permet de définir le *transport parallèle* le long d'une courbe.

Définition 2.25. Soit M une variété munie d'une connexion ∇ et $\gamma : I \rightarrow M$ une courbe de M . Pour tout $(s, t) \in I^2$, le transport parallèle de $T_{\gamma(s)}M$ à $T_{\gamma(t)}M$ le long de $\gamma|_{[s,t]}$ est l'application linéaire $\tau(\gamma|_{[s,t]}): T_{\gamma(s)}M \rightarrow T_{\gamma(t)}M$ qui à tout vecteur $v \in T_{\gamma(s)}M$ associe $X(\gamma(t))$ où X est l'unique champ de vecteurs sur M parallèle le long de $\gamma|_{[s,t]}$ tel que $X(\gamma(s)) = v$.

Proposition 2.6. Soit M une variété riemannienne. Alors il existe une unique connexion sur M , appelée connexion de Levi-Civita, telle que :

1. Pour tout système de coordonnées locales (x^1, \dots, x^d) de M , les symboles de Christoffel de M vérifient $\Gamma_{ij}^k(x) = \Gamma_{ji}^k(x)$ pour tous les indices i, j et k entre 1 et d ;
2. Pour toute courbe $\gamma : I \rightarrow M$ de M , tous champs de vecteurs X et Y au-dessus de γ et tout $t \in I$,

$$\frac{d}{dt}(X(\gamma(t)), Y(\gamma(t)))_{\gamma(t)} = \left(\frac{DX}{dt}(t), Y(\gamma(t)) \right)_{\gamma(t)} + \left(X(\gamma(t)), \frac{DY}{dt}(t) \right)_{\gamma(t)}. \quad (2.73)$$

On remarque immédiatement que si les champs de vecteurs X et Y sont parallèles le long de γ alors leur produit scalaire dans chaque espace tangent $T_{\gamma(t)}M$ est constant : le transport parallèle est une isométrie, ce qui rend la connexion de Levi-Civita très utile. L'équation (2.73) permet de relier les symboles de Christoffel à la métrique selon :

$$\Gamma_{ij}^k(y) = \frac{1}{2}g^{hk}(y) \left(\frac{\partial g_{hj}}{\partial y^i}(y) + \frac{\partial g_{ih}}{\partial y^j}(y) - \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^h}(y) \right) \quad (2.74)$$

et on retrouve la définition des symboles de Christoffel que l'on avait donnée dans (2.52). Toutes les variétés riemanniennes considérées dans la suite seront munies de la connexion de Levi-Civita.

On va maintenant définir une distance sur une variété riemannienne M , ce qui explique le terme de métrique utilisé.

Définition 2.26. Soit M une variété riemannienne. On définit la longueur d'une courbe $\gamma : I \rightarrow M$ de M par

$$\ell(\gamma) = \int_I \sqrt{(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))_{\gamma(t)}} dt. \quad (2.75)$$

Proposition 2.7. *Soit M une variété riemannienne. L'application $d_M : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par*

$$\forall (x, y) \in M^2, d_M(x, y) = \inf\{\ell(\gamma), \gamma \text{ est une courbe reliant } x \text{ à } y\}, \quad (2.76)$$

est une distance sur M , et la topologie qu'elle induit est identique à la topologie d'origine de M .

2.6 Terme maximal monotone

Le principe de la dynamique assure l'égalité entre la puissance virtuelle des efforts internes et externes et la dérivée covariante de la vitesse le long de la trajectoire du solide. On a défini jusqu'à présent la puissance virtuelle des efforts internes et externes par le champ de forces que l'on a supposé différentiable. Pour prendre en compte des phénomènes non réguliers comme le frottement sec par exemple, il est nécessaire de considérer des champs de forces non réguliers. Plus précisément, on supposera que les forces sont la somme des forces régulières $F(\alpha)$ et d'un terme non régulier dont on va expliciter l'expression. Ce terme, bien qu'il représente une force, est directement défini dans le fibré tangent et non le fibré cotangent : il pourra ainsi être ajouté sans aucune transformation à la dérivée covariante de la vitesse dans l'équation de la dynamique.

On considère la variété de configuration M que l'on suppose riemannienne. On va donc définir pour tout t et $x \in M$, un opérateur maximal monotone $A'(t, x, \cdot)$ dans $\mathbb{T}_x M$ pour le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_x$ de $\mathbb{T}_x M$. Pour tout $x \in M$, $A'(t, x, \cdot)$ est une application de $\mathbb{T}_x M$ à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{T}_x M)$ des parties de $\mathbb{T}_x M$. Elle est de plus monotone, c'est-à-dire

$$\forall (v, v') \in (\mathbb{T}_x M)^2, \forall (w, w') \in A'(t, x, v) \times A'(t, x, v'), (v - v', w - w')_x \geq 0. \quad (2.77)$$

L'équation différentielle que nous avons à considérer est donc la suivante :

$$\forall t, D_{\dot{x}(t)} \dot{x}(t) + A'(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \ni (\sharp F(t)) \dot{x}(t) dt, \quad (2.78)$$

où $\sharp : \mathbb{T}^* M \rightarrow \mathbb{T} M$ est l'opérateur qui transforme une forme linéaire α sur $\mathbb{T}_x M$ en son vecteur dual $\sharp \alpha$ dans la dualité définie par $(\cdot, \cdot)_x$. On comprend cette dernière équation en coordonnées locales $y = (y^1, \dots, y^d)$ comme l'équation différentielle multivoque euclidienne suivante :

$$\forall t, d\dot{y}(t) + \dot{y}(t)^T \Gamma(y(t)) \dot{y}(t) + A'_{loc}(t, y(t), \dot{y}(t)) dt \ni F^\sharp(t, y(t), \dot{y}(t)) dt, \quad (2.79)$$

où la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur $F^\sharp(t, y(t), \dot{y}(t))$ est égale à $g^{ij}(y(t)) F_j(t, y(t), \dot{y}(t))$ avec F_j définie dans (2.42). L'application $A'_{loc}(t, y, \cdot)$ est la représentation locale de $A'(t, x, \cdot)$ et $v^T \Gamma(y) v$ est le vecteur dont la $i^{\text{ème}}$ composante est $\Gamma_{jk}^i(y) v^j v^k$.

L'équation (2.78) est une équation différentielle d'ordre deux sur M au sens de la Définition 2.20. Pour le voir, on va définir, en coordonnées locales, le champ de vecteurs sur $\mathbb{T} M$ qui lui correspond. A l'aide de l'expression locale (2.79), on définit le champ de vecteurs multivoque $X(t, \cdot)$ sur $\mathbb{T} M$ par

$$X(t, y, v) = v^i \frac{\partial}{\partial y^i} - \Gamma_{jk}^i(y) v^j v^k \frac{\partial}{\partial v^i} + (F^{\sharp, i}(t, y, v) - A'_{loc}{}^i(t, y, v)) \frac{\partial}{\partial v^i}. \quad (2.80)$$

On n'a pas encore défini correctement ce qu'était le champ de vecteurs multivoque $X(t, \cdot)$. Pour tout t , $X(t, \cdot)$ est une application définie sur $\mathbb{T} M$ telle que pour tout $u \in \mathbb{T} M$,

$X(t, u) : \mathbb{T}_{\pi(u)}M \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{T}_{\pi(u)}M)$, la dépendance en u étant de nature différentiable pour la partie univoque et la régularité de la partie multivoque maximale monotone est donnée dans l'hypothèse **H3** de l'article 3.

Ce champ de vecteurs induit bien une équation différentielle multivoque d'ordre deux car, en coordonnées locales, la composante au point (y, v) sur le vecteur $\partial/\partial y^i$ est égale à v^i . Une équation est d'ordre deux sur une variété si elle peut être écrite sous la forme d'une équation d'ordre un sur le fibré tangent à la variété. Ici, c'est précisément le cas puisque, en coordonnées locales :

$$\forall t, \frac{d}{dt}(y(\cdot), v(\cdot))(t) = X(t, y(t), v(t)), \quad (2.81)$$

qui est une équation différentielle d'ordre un sur le fibré tangent à M , $X(t, y(t), v(t))$ étant un élément du deuxième fibré tangent à M .

L'équation différentielle (2.81) n'est pas une équation différentielle monotone sur $\mathbb{T}M$. En effet, le terme $A'_{loc}{}^i(t, y, v) \frac{\partial}{\partial v^i}$ n'est pas monotone pour la métrique de $\mathbb{T}M$ ne serait-ce parce qu'il paraît difficile de définir une monotonie sur $\mathbb{T}M$ qui n'a pas de structure vectorielle. On sait seulement, qu'à y fixé, $v \mapsto A'_{loc}{}^i(t, y, v) \frac{\partial}{\partial v^i}$ est monotone pour le produit scalaire local de la fibre $\mathbb{T}_{\psi(y)}M$. C'est la raison pour laquelle on a étudié dans l'article 3 des équations différentielles monotones multivoques sur une variété qui sont d'ordre deux et donc d'ordre un sur le fibré tangent à la variété avec la présence d'un terme localement monotone.

2.7 Terme stochastique

Pour une modélisation plus riche des efforts externes agissant sur le système mécanique, nous avons pris en compte la possibilité d'avoir une sollicitation *aléatoire* ou *stochastique*. Il devient alors nécessaire d'envisager des équations différentielles stochastiques sur des variétés. On renvoie à [12] pour un exposé sur les EDS d'ordre un sur des variétés et à [10] pour un exposé sur les processus (semi-martingales continues) sur les variétés et leurs liens avec les EDS sur les variétés.

Dans toute cette section $\mathcal{E} = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé filtré vérifiant les conditions habituelles (voir les Définitions 1.10 et 1.22). On note par $(B_t)_{t \geq 0}$ le mouvement brownien standard sur \mathbb{R}^d défini sur \mathcal{E} . On notera par δ la différentiation de Stratonovich.

Définition 2.27. *Une semi-martingale continue sur une variété M est un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans M tel que pour toute fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^∞ sur M , le processus réel $(f(X_t))_{t \geq 0}$ est une semi-martingale continue.*

On peut définir le transport parallèle le long d'une semi-martingale (qui joue ici le rôle de la courbe dans le cas déterministe) comme dans le cas déterministe. On utilise pour le définir la proposition suivante.

Proposition 2.8. *Soit M une variété et $(X_t)_{t \geq 0}$ une semi-martingale continue sur M \mathcal{F}_t -adaptée. Il existe une unique semi-martingale continue $(Y_t)_{t \geq 0}$ sur $\mathbb{T}M$ au-dessus de $(X_t)_{t \geq 0}$ (c.-à-d. $\pi(Y_t) = X_t$ pour tout t) vérifiant dans une carte locale (U, φ) quelconque :*

$$\delta Y_S^i + \Gamma_{jk}^i(X_S) Y_S^j \delta X_S^k = 0, \quad (2.82)$$

pour tout \mathcal{F}_t -temps d'arrêt S presque sûrement inférieur à $T_{(U, \varphi)} = \inf\{t \geq 0, X_t \notin U\}$.

Définition 2.28. Soit M une variété et $(X_t)_{t \geq 0}$ une semi-martingale continue sur M \mathcal{F}_t -adaptée. La semi-martingale définie dans la Proposition 2.8 est dite obtenue de X par différentiation covariante le long de X .

D'après la Proposition 2.8, pour tout vecteur $v \in \mathbb{T}_{X(s)}M$, il existe une unique semi-martingale $(Y_u)_{s \leq u \leq t}$ de $\mathbb{T}M$ obtenue de $(X_u)_{s \leq u \leq t}$ par différentiation covariante le long de $(X_u)_{s \leq u \leq t}$ vérifiant $Y_s = v$. Le transport parallèle stochastique

$$\tau(X \big|_{[s,t]}): \mathbb{T}_{X(s)}M \rightarrow \mathbb{T}_{X(t)}M,$$

le long de $(X_u)_{s \leq u \leq t}$ est une isométrie qui au vecteur v associe Y_t . Si X est une courbe de classe C^1 , le transport parallèle stochastique coïncide avec le transport parallèle déterministe et on parle alors de différentiation covariante le long de la courbe X et l'équation (2.82) s'écrit sous la forme

$$D_{\dot{X}(t)}Y(t) = 0. \quad (2.83)$$

On ne s'intéresse dans cette section qu'aux EDS multivoques sur le fibré tangent à une variété M . On considère une variété M et pour chaque $t \geq 0$ et $x \in M$, un opérateur maximal monotone $A'(t, x, \cdot)$ sur \mathbb{T}_xM , une application $\sigma'(t, x, \cdot): \mathbb{T}_xM \rightarrow L(\mathbb{R}^d, \mathbb{T}_xM)$ où $L(\mathbb{R}^d, \mathbb{T}_xM)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de \mathbb{R}^d dans \mathbb{T}_xM et une application $\nu'(t, x, \cdot): \mathbb{T}_xM \rightarrow \mathbb{T}_xM$. L'équation différentielle stochastique multivoque d'ordre deux sur M que nous avons considérée est la suivante :

$$\begin{cases} \delta x'_t = v'_t dt, \\ D_{\dot{x}'(t)}v'_t + A'(t, x'_t, v'_t) dt \ni \nu'(t, x'_t, v'_t) dt + \sigma'(t, x'_t, v'_t)\delta B_t, & T_0 \leq t < T, \\ (x'(T_0), v'(T_0)) = (\pi(\eta'), \eta') p.s., \end{cases} \quad (2.84)$$

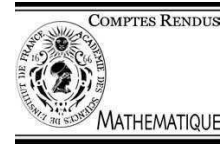
où η' est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{T}M$, T est un réel positif et T_0 est une variable aléatoire \mathcal{F}_0 -mesurable prenant presque sûrement ses valeurs entre 0 et T .

2.8 Article 2 : Compte-rendu à l'Académie des sciences

On a reproduit dans les pages suivantes un Compte-rendu à l'académie des sciences [5] publié en 2004 sous le titre " A stochastic differential equation from friction mechanics". Ce texte comporte 6 pages. Dans ce compte rendu, les résultats essentiels obtenus dans l'article 3 sont présentés.

Available online at www.sciencedirect.com

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 837–842



Partial Differential Equations

A stochastic differential equation from friction mechanics

Frédéric Bernardin ^a, Michelle Schatzman ^b, Claude-Henri Lamarque ^a^a *Laboratoire géomatériaux, ENTPE, rue Maurice Audin, 69518 Vaulx-en-Velin, France*^b *Laboratoire de mathématiques appliquées de Lyon, CNRS et UCBL, 69622 Villeurbanne cedex, France*

Received and accepted 16 March 2004

Available online 17 April 2004

Presented by Haïm Brezis

Abstract

The existence and uniqueness of solutions to multivalued stochastic differential equations of the second order on Riemannian manifolds are proved. The class of problem is motivated by rigid body and multibody dynamics with friction and an application to the spherical pendulum with friction is presented. *To cite this article: F. Bernardin et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.

Résumé

Une équation différentielle stochastique en mécanique du frottement. On démontre l'existence et l'unicité de la solution d'un système d'équations stochastiques multivoques du deuxième ordre sur une variété riemannienne. L'étude de cette classe de problèmes est motivée par la dynamique du corps rigide, et plus généralement des problèmes multicorps. On présente une application au pendule sphérique avec frottement. *Pour citer cet article : F. Bernardin et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.

Version française abrégée

Les problèmes de mécanique à nombre fini de degré de liberté avec frottement fournissent une large classe de systèmes différentiels multivoques naturellement posés sur des variétés riemanniennes (voir [2]).

Diverses applications technologiques, principalement le comportement de grandes structures bâties soumises à un tremblement de terre ou de robots dans un environnement incomplètement connu, conduisent à perturber ces systèmes par des termes stochastiques. Suivant une interprétation largement acceptée, le choix d'un terme stochastique est un choix de description de données incomplètes. Il conviendra alors de faire les hypothèses mathématiques qui permettent de faire des démonstrations et de comparer à l'expérience les résultats obtenus au moyen de simulations numériques.

E-mail addresses: frederic.bernardin@entpe.fr (F. Bernardin), schatz@maply.univ-lyon1.fr (M. Schatzman), claude.lamarque@entpe.fr (C.-H. Lamarque).

1631-073X/\$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.
doi:10.1016/j.crma.2004.03.011

Nous nous plaçons donc sur une variété M riemannienne lisse, et nous considérons le système (2), dont nous allons expliquer les notations.

L'espace $\mathcal{E} = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité filtré vérifiant les conditions habituelles, et B_t est un mouvement brownien d -dimensionnel standard défini sur \mathcal{E} (voir [8] pour des définitions).

Le couple $(x(t), v(t))$ avec un abus de notation classique est un élément du fibré tangent. La notation δ désigne la différentielle de Stratonovich, $D_{\dot{x}(t)}v(t)$ est la dérivée covariante de Stratonovich au dessus de x de la semi-martingale continue v à l'instant t (se reporter à [9] ou [7] pour des précisions sur le transport parallèle stochastique).

L'opérateur A est maximal monotone dans chaque fibre du fibré tangent TM , ce qui veut dire que si $(v, w)_x$ désigne le produit scalaire dans la fibre $T_x M$, on doit avoir pour chaque $w_i \in A(t, x, v_i)$, $i = 1, 2$, la relation de monotonie (1), et il doit être maximal parmi les opérateurs vérifiant cette condition (voir [4]). Le vecteur $v(t, x, v)$ est tangent, c est le drift de l'équation différentielle stochastique, et l'opérateur linéaire $\sigma(t, x, v)$ applique un espace fixe \mathbb{R}^d dans l'espace tangent $T_x M$: c est la matrice de diffusion.

La condition initiale est une variable aléatoire η à valeurs dans le fibré tangent, dont le moment d'ordre 2 est fini, et le temps initial T_0 est un temps d'arrêt, à valeurs presque sûrement dans $[0, T]$.

Nous prouvons l'existence et l'unicité d'une solution \mathcal{F}_t -adaptée du problème (2); voir l'énoncé exact de la Proposition 2.1, ainsi que les hypothèses faites sur la variété, le drift, la diffusion et l'opérateur maximal monotone.

La démonstration repose sur trois idées : d'abord, il est possible de localiser, ce qui requiert une hypothèse technique toujours vérifiée si la variété M est compacte ou plus généralement de courbure bornée. Or les équations de la mécanique, écrites en coordonnées locales sans précaution, comportent des termes quadratiques d'origine géométrique difficiles à traiter en stochastique multivoque. Nous nous débarrassons de ces termes en transportant parallèlement la vitesse (stochastique) le long de la courbe des positions. Les images par ce procédé du drift et de la diffusion ne sont plus que localement lipschitziennes par rapport à la vitesse. Il faut donc les approcher par un drift et une diffusion lipschitziens en vitesse. Il reste à effectuer une étape de discrétisation partielle en temps rappelant la démonstration du théorème de Carathéodory pour l'existence de solutions d'équations différentielles ordinaires. On peut alors appliquer un théorème de Cépa [5] sur les systèmes stochastiques maximaux monotones du premier ordre.

La preuve fait appel à des domaines divers des mathématiques, ce qui contribue à sa technicité.

Nous avons montré que nos résultats permettent de traiter un problème simple : le pendule sphérique avec un frottement sec de Coulomb. C'est un exemple intéressant, parce que c'est l'exemple le plus simple pour lequel la variété de configuration M est non triviale.

1. Introduction

Motivated by problems from the mechanics of rigid bodies with frictional contact, we have studied a class of second order multivalued stochastic differential equations on a Riemannian manifold, for which we have obtained an existence and uniqueness result.

The choice of working on a manifold is the standard choice of mechanics with bilateral constraints, including for instance rigid body dynamics, multibody dynamics without loss of contact; it is indeed a natural choice in the realm of theoretical mechanics with a finite number of degrees of freedom (see [2]).

Modelling friction in robotics is very useful, since it can be assumed that no perfect contact exists; if, moreover, we include in the exterior forces a stochastic term, we are naturally led to the class of models considered here.

Let us observe that this model is of substantial interest for applications. Indeed, if exterior forces are known only by their statistics, which is for instance the case of the forces created by an earthquake, and if we model a large man-made structure, such as a bridge, a building, an offshore platform or a tunnel, as an object with a finite number of degrees of freedom and friction at all contacts, we find the type of model considered here.

Our results could not be modified so as to treat an analogous stochastic multivalued system of first order. Indeed, the problem lies with the monotonicity, and we do not know how to define a monotone operator on an ordinary manifold for lack of an appropriate vector structure. However, we know how to express the monotonicity in the tangent bundle, provided that we use parallel transport in order to compare tangent vectors at different points.

The mathematical framework and the notations are described in Section 2, the idea of the proof is sketched in Section 3, Section 4 is devoted to the spherical pendulum; conclusions and perspectives are drawn in Section 5.

2. The mathematical setting

Let us describe now our notations and assumptions. The d -dimensional Riemannian manifold M is smooth, and it satisfies a technical hypothesis which is always true for compact manifolds or manifolds with bounded curvature tensor.

The tangent bundle is TM and the scalar product in the fibre at x is denoted by $(\cdot, \cdot)_x$. The corresponding norm is $|\cdot|_x$. Let ρ be a mapping of class C^1 from $[0, t]$ to M . The parallel transport along $\rho|_{[a,b]}$ can be defined, and it is an isometry $\tau(\rho|_{[a,b]})$ from $T_{\rho(a)}$ to $T_{\rho(b)}$ (see [1] for a proof). In particular, if x and y are close enough, there is a unique geodesic from x to y and the parallel transport along this geodesic is denoted by $\bar{\tau}(y, x)$, which maps T_xM into T_yM .

Our class of maximal monotone operators are maximal monotone in each fibre of the tangent bundle. More precisely, for each $t \in [0, T]$ and $x \in M$, $A(t, x)$ is a maximal monotone operator in T_xM^2 , i.e., for each $v \in T_xM$ the image of v by $A(t, x)$ is a closed convex subset $A(t, x, v)$ of T_xM . Given v_1 and v_2 in T_xM and $w_j \in A(t, x, v_j)$, the monotonicity assumption is

$$(w_2 - w_1, v_2 - v_1)_x \geq 0, \tag{1}$$

and $A(t, x)$ is maximal among all multivalued mapping possessing property (1) (see [4]).

The dependence of $A(t, x)$ on t and x will be described in assumption H3, and for this purpose, we need the projection of $w \in T_xM$ onto $A(t, x, v)$: it is well defined provided that $A(t, x, v)$ is not empty and is written $A(t, x, v, w)$.

Let us define now the drift $\nu(t, x)$ and the diffusion matrix $\sigma(t, x)$. For all t and x , $\nu(t, x)$ is a map from T_xM to itself and $\sigma(t, x)$ is a continuously differentiable mapping from T_xM to the set of linear mappings from \mathbb{R}^d to T_xM . The operator norm of a linear mapping from \mathbb{R}^d equipped with a given fixed Euclidean metric to T_xM is denoted by $\|\cdot\|_x$.

It is convenient to write $\nu(t, x, v)$ and $\sigma(t, x, v)$ for the respective images of v by $\nu(t, x)$ and $\sigma(t, x)$.

The following assumptions essentially say that all the objects needed in the proof are locally Lipschitz continuous with respect to position and time, and Lipschitz continuous with respect to velocity. They use a continuous, non negative function ℓ on $[0, T]$.

H0 For all bounded open subset $U \subset M$, there exists $C_0(U)$ such that for all close enough x_1 and x_2 in U , for all v_1 in $T_{x_1}M$ and v_2 in $T_{x_2}M$, for all t_1 and t_2 in $[0, T]$:

$$\left| \frac{\partial \|\sigma(t_1, x_1, v)\|_x^2}{\partial v} \Big|_{v=v_1} - \frac{\partial \|\sigma(t_2, x_2, v)\|_x^2}{\partial v} \Big|_{v=v_2} \right| \leq C_0(U) (\ell(t_1 - t_2) + d_M(x_1, x_2) + |v_1 - \bar{\tau}(x_1, x_2)v_2|_{x_1}).$$

H1 There exists a constant C_1 such that for all $t \in [0, T]$ and for all $(x, v) \in TM$,

$$|\nu(t, x, v)|_x + \|\sigma(t, x, v)\|_x + \left| \frac{\partial \|\sigma(t, x, v)\|_x^2}{\partial v} \right| \leq C_1 (1 + d_M(x, x_0) + |v|_x).$$

Here x_0 is fixed in M and d_M is the geodesic distance.

840

F. Bernardin et al. / C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 837–842

H2 For all bounded open subset $U \subset M$, there exists $C_2(U)$ such that for all close enough x_1 and x_2 in U , for all v_1 in $T_{x_1}M$ and v_2 in $T_{x_2}M$, for all t_1 and t_2 in $[0, T]$:

$$\begin{aligned} & \left| v(t_1, x_1, v_1) - \bar{\tau}(x_1, x_2)v(t_2, x_2, v_2) \right|_{x_1} + \left\| \sigma(t_1, x_1, v_1) - \bar{\tau}(x_1, x_2)\sigma(t_2, x_2, v_2) \right\|_{x_1} \\ & \leq C_2(U) (\ell(|t_1 - t_2|) + d_M(x_1, x_2) + |v_1 - \bar{\tau}(x_1, x_2)v_2|_{x_1}). \end{aligned}$$

H3 For all bounded open subset $U \subset M$, there exists $C_3(U)$ such that for all close enough x_1 and x_2 in U , for all v_1 and w_1 in $T_{x_1}M$ and v_2 and w_2 in $T_{x_2}M$, for all t_1 and t_2 in $[0, T]$:

$$\begin{aligned} & \left| A(t_1, x_1, v_1, w_1) - \bar{\tau}(x_1, x_2)A(t_2, x_2, v_2, w_2) \right|_{x_1} \\ & \leq C_3(U) (\ell(|t_1 - t_2|) + d_M(x_1, x_2) + |v_1 - \bar{\tau}(x_1, x_2)v_2|_{x_1} + |w_1 - \bar{\tau}(x_1, x_2)w_2|_{x_1}). \end{aligned}$$

We prove the following result, where we denote by δ the Stratonovich differential:

Proposition 2.1. *Let T be a strictly positive number, and let A , σ and v satisfy assumptions H0–H3. Let $\mathcal{E} = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ be a filtered probability space verifying the usual conditions. Let B_t be the standard \mathbb{R}^d -Brownian motion on \mathcal{E} , and let T_0 be an \mathcal{F}_t -stopping time with values in $[0, T]$ almost surely. Let η be an \mathcal{F}_{T_0} -measurable random variable which takes its values in TM and whose second order moment is finite. Denote by $D_{\hat{x}(t)}v(t)$ the Stratonovich covariant differential of the continuous semi-martingale v above x at time t . There exists a unique \mathcal{F}_t -adapted stochastic process $(x(t), v(t))$ with values in TM which satisfies the following multivalued stochastic differential system:*

$$\begin{cases} \delta x(t) = v(t) dt, \\ D_{\hat{x}(t)}v(t) + A(t, x(t), v(t)) dt \ni v(t, x(t), v(t)) dt + \sigma(t, x(t), v(t)) \delta B(t), & T_0 \leq t \leq T, \\ (x(T_0), v(T_0)) = \eta, & \text{almost surely.} \end{cases} \quad (2)$$

3. The strategy of proof

The proof is extremely technical, but the main steps can be sketched. First, we localize the problem in small balls where all pairs of points can be connected by a unique geodesic. The technical assumption on the manifold enables us to provide coverings by balls of this type in a sufficiently uniform fashion. We have also to localize the initial data by a partition of unity.

Next, we transport the problem along the solution curve by parallel transport to the random initial position, which takes its values in a small ball U and then by parallel transport along geodesics to a given point x_0 . This technique provides a system devoid of quadratic terms of geometrical origin. However, it does not look Markovian anymore, while initially, it is indeed Markovian.

We also use a change of function, in order to work with a vanishing initial time, instead of a random initial time. This provides a new Brownian motion, denoted by $W(t)$.

Then, we perform a semi-discretization which is somewhat reminiscent of the Carathéodory construction: we discretize the time variable by defining $t_i^p = 2^{-p}i T$, and on the time interval $[t_i^p, t_{i+1}^p]$, we use the position data only up to time t_i^p , and we solve the stochastic differential equation:

$$\delta v^p(t) + \tilde{A}^n(t_i^p, x^p|_{[0, t_i^p]}, v^p(t)) dt \ni \tilde{v}^n(t_i^p, x^p|_{[0, t_i^p]}, v^p(t)) dt + \tilde{\sigma}^n(t_i^p, x^p|_{[0, t_i^p]}, v^p(t)) \delta W(t), \quad (3)$$

with initial condition $v^p(t_i^p + 0) = v^p(t_i^p - 0)$. Here, the quantities decorated with a tilde denote the image of the quantities without the decoration, after all the transport and diffeomorphism operations; moreover, the upper index n refers to a regularization yielding Lipschitz continuous functions, whose Lipschitz constant depends on n .

The results of Cépa [5,6] apply and we obtain the existence of a solution of (3).

Then it remains to perform a number of passages to the limit, some of which are delicate, in particular, the passage to the limit with respect to n .

4. The spherical pendulum

The case of a spherical pendulum with Coulomb friction is covered by our model. The system consists of a material point with unit mass attached to a rigid stem of length 1 and of negligible mass, which is connected at its other end to a fixed point O by a connection authorizing only angular displacements. In our units, the gravity is 1. In addition to its weight, the pendulum is submitted, at its mobile end, to a dry friction of Coulomb's type (with coefficient μ) and a random force acting in the tangent plane of the sphere. The configuration manifold is the unit sphere \mathbb{S}^2 . The initial conditions are $(x_0, v_0) \in \mathbb{T}\mathbb{S}^2$. In the present case, the Riemannian metric is the metric induced by the Euclidean metric of \mathbb{R}^3 , and therefore, we will abuse notations and denote the scalar product in the tangent space at x to \mathbb{S}^2 without an index x , the same convention holding for the norm of tangent vectors.

Let H_1 and H_2 be two bounded and locally Lipschitz continuous sections of $\mathbb{T}\mathbb{S}^2$.

Let (B^1, B^2) be a two-dimensional Brownian motion; we write formally the stochastic part of the exterior forces as (in Itô form)

$$F_s(t, x) dt = dB^1(t)H_1(x) + dB^2(t)H_2(x).$$

Thanks to the boundedness and the local Lipschitz continuity of H_1 and H_2 , the linear mapping

$$\sigma(x)(v^1, v^2) = v^1 H_1(x) + v^2 H_2(x)$$

satisfies H1 and H2 of Section 2.

The normal components of the acceleration and the weight are respectively $a_N(x, v) = -\|v\|^2 x$ and $P_N(x) = p^n(x)x$, with $p^n(x) = -x_3$. Therefore, the sum of the reaction of the support and of the tension of the stem is

$$R(x, v) + F(x, v) = -(\|v\|^2 + p^n(x))x.$$

The friction force is then given by the multivalued relation

$$F_r(x, v) \in \begin{cases} \{0\} & \text{if } p^n(x) \leq -\|v\|^2, \\ -\mu \{(p^n(x) + \|v\|^2)v/\|v\|\} & \text{if } p^n(x) > -\|v\|^2 \text{ and } v \neq 0, \\ \mu \{u \in \mathbb{T}_x \mathbb{S}^2, \|u\| \leq p^n(x)\} & \text{if } p^n(x) > 0 \text{ and } v = 0. \end{cases} \quad (4)$$

It can be proved that $-F_r$ is a monotone operator A in the fiber, i.e., for all $w \in -F_r(x, v)$ and $w' \in -F_r(x, v')$, the following inequality holds:

$$(w - w', v - v') \geq 0. \quad (5)$$

Let $P = (0, 0, 1)$ be the weight and let $v(x, v) = P_T(x) = P + x_3 x$, be its tangential component. Then, the equation of the dynamic applied to the pendulum takes the form of (2):

$$\begin{cases} dx(t) = v(t) dt, \\ D_{\dot{x}(t)} v(t) + A(x(t), v(t)) dt \ni v(x(t), v(t)) dt + \sigma(x(t)) dB(t), & 0 \leq t < T, \\ (x(0), v(0)) = (x_0, v_0). \end{cases}$$

Assumptions H0–H3 are verified, as can be checked in a straightforward manner. Therefore, Proposition 2.1 applies.

5. Conclusion and perspectives

We have thought of a different proof strategy, which would have always kept the Markovian character of the stochastic processes. We could have written the local problems directly in the local charts, keeping the quadratic

terms of geometrical origin. In order to estimate them, we would have needed to estimate the change of velocity after parallel transport along a loop in M . This can be done provided that the curvature tensor is bounded, and the loop encloses a region of bounded 2-area. We intend to produce such a proof, but up to now, we have been held up by significant mathematical difficulties.

There remains a large number of theoretical and applied questions in the present area. The first and very natural question would be to find the Fokker–Planck equation associated to stochastic friction problems in mechanics. We are aware that this may be very difficult and probably not very applicable: we expect the equation to be defined only in high spatial dimension and therefore numerical simulations would be very difficult to perform.

The numerical simulation of the problem is also an interesting question, since there are no standard methods; of course, we expect that the Euler stochastic scheme, which is well known in the Euclidean case (see [3]), will run. But can we do better? Can we improve the efficiency of the simulations? What kind of precision do we get? These are all open questions.

The technological applications include robotics, and in particular robotics of bipeds. It is well known that a biped (or a quadruped) can walk only because there is friction – see what happens on a frozen lake in winter. Including a stochastic term is a natural idea, and we expect that if the models are well posed, the stochastic part should not be too much of a disturbance. However, the reader should observe here that our model does *not* include impacts. Impact dynamics with a stochastic term seems much harder than friction dynamics with a stochastic term.

References

- [1] R. Abraham, J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Addison-Wesley, 1985.
- [2] P. Ballard, Formulation and well-posedness of the dynamics of rigid bodies with unilateral or frictional constraints, in: *Advances in Mechanics and Mathematics 2002*, Kluwer Academic, 2002, pp. 3–88.
- [3] F. Bernardin, Multivalued stochastic differential equations: convergence of a numerical scheme, *Set-Valued Anal.* 11 (2003) 393–415.
- [4] H. Brézis, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, in: *Math. Studies*, North-Holland, 1973.
- [5] E. Cépa, in: *Équations différentielles stochastiques multivoques*, Séminaire de Probabilités XXIX, in: *Lecture Notes in Math.*, vol. 1613, Springer, Berlin, 1995, pp. 86–107.
- [6] E. Cépa, Problème de Skorohod multivoque, *Ann. Probab.* 26 (2) (1998) 500–532.
- [7] M. Emery, *Stochastic Calculus in Manifolds*, Springer, 1989.
- [8] I. Karatzas, E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, second ed., Springer, 1991.
- [9] J.R. Norris, A complete differential formalism for stochastic calculus in manifolds, in: *Séminaire de Probabilités XXVI*, 1992, pp. 189–209.

2.9 Article 3 : Existence et unicité de solutions pour les EDSM sur des variétés

On a reproduit dans les pages suivantes un article publié dans Proceedings A of the Royal Society of London sous le titre “ Second order multivalued stochastic differential equations on Riemannian manifolds” (voir [4]). Ce texte comporte 27 pages.

L'existence et l'unicité d'une solution pour une équation différentielle stochastique du type (2.84) sont obtenues. Comme le montre l'équation (2.64) des géodésiques, qui est un cas particulier d'équation fondamentale de la dynamique, des termes quadratiques en vitesse doivent être considérés. Les hypothèses classiques de continuité lipschitzienne et de croissance linéaire ne sont donc pas directement applicables. Pour faire disparaître ces termes, on a transporté parallèlement le long de la courbe solution la vitesse et on a ainsi transporté le problème dans l'espace tangent initial, ce dernier étant aléatoire. Par des techniques de partition de l'unité (sur la condition initiale), on s'est ramené à un espace fixe. On a alors obtenu des équations différentielles stochastiques multivoques sans terme quadratique mais dont les coefficients dépendent de l'histoire de la solution. En discrétisant l'intervalle de temps $[0, T]$ à l'aide d'une partition $0 = t_0 < \dots < t_N = T$, on s'est ramené sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}[$ à une équation différentielle stochastique multivoque dans un cadre euclidien vérifiant les conditions classiques de Lipschitz et de croissance linéaire. L'existence d'une solution sur $[t_i, t_{i+1}[$ devenait alors une conséquence des résultats obtenus dans [7, 8].

10.1098/rspa.2004.1312

FirstCite®
e-publishing
 THE ROYAL
SOCIETY

Second-order multivalued stochastic differential equations on Riemannian manifolds

BY FRÉDÉRIC BERNARDIN¹, MICHELLE SCHATZMAN² AND
CLAUDE-HENRI LAMARQUE¹

¹*Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat, Laboratoire GéoMatériaux, DGCB
URA CNRS 1652, 2 rue Maurice Audin, 69518 Vaulx-en-Velin CEDEX, France*

²*Université Claude Bernard Lyon I, Laboratoire d'analyse numérique—UMR
CNRS 5585, 43 bd. du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne CEDEX, France
(frederic.bernardin@wanadoo.fr)*

Received 6 August 2003; revised 19 February 2004; accepted 2 March 2004

The existence and uniqueness of solutions to multivalued stochastic differential equations of the second order on Riemannian manifolds are proved. The class of problem is motivated by rigid body and multibody dynamics with friction and an application to the spherical pendulum with friction is presented.

Keywords: stochastic differential equations; manifolds; friction;
differential inclusions; maximal monotone operators; rigid body dynamics

1. Introduction

In the theory of rigid bodies mechanics, a system is described by the *configuration manifold* M , which is generally the set of isometries of the three-dimensional space; the movement of the body is then a curve on this manifold. The kinetic energy defines a Riemannian metric and the equation of motion is a differential equation on a Riemannian manifold. If a stochastic term is involved in the forces acting on the system, stochastic differential equations must be used and we refer to Ikeda & Watanabe (1989), Norris (1992) and Emery (1989) for information. We are interested in multivalued maximal monotone operators, since our physical model includes friction. The friction force f is of physical origin. Mathematically, it belongs to the cotangent space at x to M , since it is a generalized force. Moreover, it must belong to a closed convex subset $C(x)$ of the cotangent space T_x^*M , and it is related to the velocity through the principle of maximal dissipation, stated for instance by Ballard (2002) under the form

$$\forall g \in C(x), \quad -\langle f, \dot{x} \rangle_x \geq -\langle g, \dot{x} \rangle_x,$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ denotes the scalar product between T_x^*M and the tangent space at x , T_xM . It is equivalent to writing $f \in -\partial\psi_{C(x)}(\dot{x})$, where $\psi_{C(x)}$ is a convex homogeneous function of degree 1 which will be defined later, and ∂ denotes the subdifferential. It is well known that the subdifferential of such a convex function is a multivalued maximal monotone operator. This the reason why we are interested in *second-order multivalued stochastic differential equations (MSDEs) on Riemannian*

03PA0245/2

F. Bernardin, M. Schatzman and C.-H. Lamarque

manifolds. We prove existence and uniqueness under the classical assumptions: Lipschitz continuity and linear growth of the drift and diffusion coefficients (see Mao (1997, p. 51) for classical stochastic differential equations).

Let us observe that it is not easy to give a meaning to a first-order multivalued differential equation on a Riemannian manifold; indeed, assume that in a local chart the equation would be of the type

$$\frac{dx}{dt} + A(t, x) \ni f(t).$$

We have to understand dx/dt as an element of the tangent space at $x(t)$, $T_{x(t)}M$ and, therefore, $f(t)$ must belong to the same space and $A(t, x)$ must be a subset of this space. If we would like to state a monotonicity assumption on $A(t, \cdot)$, it is not difficult to transport the elements of $A(t, x_1)$ by parallel transport to the tangent space at x_2 ; however, monotonicity is a concept which requires duality between vector spaces. The difference $x_1 - x_2$ cannot be assigned an intrinsic meaning and, therefore, the main principle of differential geometry, that is, chart independence, cannot be upheld. This objection fails if, instead of working on a manifold M , we work on its tangent space TM , which is the space of classical mechanics, our present setting.

In a local chart, the simplest equation of mechanics, that is, the equation of geodesics, contains a quadratic term of geometric origin. In order to apply the results of Cépa (1995), we have to get rid of this quadratic term, and we can do that by a parallel transport of the equation back to the initial position. Unfortunately, we have to pay for this transformation, since now the coefficients of the new equation depend on the history up to time t of the position, i.e. the restriction $x|_{[0,t]}$ of x to $[0, t]$. The initial formulation is Markovian, the transformation by parallel transport does not have to be Markovian, the construction in the tangent space at the initial point is not Markovian, but the reciprocal transformation which enables us to return to the initial formulation takes care of all these difficulties.

The paper is organized as follows. In § 2, we give definitions and assumptions and define the problem. Working in a local chart is equivalent to working in an open subset of \mathbb{R}^d ; in § 3 we extend the coefficients of the equation to all of \mathbb{R}^d and we will denote these coefficients \tilde{b} , $\tilde{\nu}$, $\tilde{\sigma}$ and \tilde{A} . Unfortunately, they are only locally Lipschitz continuous with respect to the velocity v . We define new coefficients which have better properties; typically, $\sigma_n(t, x, v)$ is equal to $\tilde{\sigma}(t, x, v)$ if $\|v\| \leq n$, and is Lipschitz continuous if $\|v\| \geq n$. There may exist a geometrical proof showing that \tilde{b} is Lipschitz continuous, under appropriate assumptions on the curvature tensor but this proof will not be presented in this article. In § 4, we apply the results of Cépa (1995) to prove the existence and uniqueness of a solution of our equation with coefficients b_n , σ_n and ν_n . In § 5, we prove convergence for n tending to infinity by stopping-time techniques. In § 6, we patch together the local solutions. Finally, an illustrative example is given in § 7: the spherical pendulum.

Throughout this article, the Einstein summation convention is used, the time derivative of a map f is denoted by \dot{f} and the value of f at the point t is denoted indifferently by $f(t)$ or f_t .

2. Definitions

We consider a smooth Riemannian manifold M of dimension d and we denote by d_M the Riemannian metric on M and by $B_M(x, \varepsilon)$ (respectively $\bar{B}_M(x, \varepsilon)$) the open

ball $\{y \in M, d_M(x, y) < \varepsilon\}$ (respectively the closed ball $\{y \in M, d_M(x, y) \leq \varepsilon\}$). We suppose the following.

Assumption 2.1. *There exist $r > 0, r' \in]0, r[$ and a finite or countable number of points z_k in M , such that M can be covered by balls $B_M(z_k, r')$ of radius r' about z_k and each ball of radius r about z_k is totally included in one chart of M . Moreover, this covering can be taken to be locally finite.*

In particular, this assumption is verified if M is a compact manifold or if its curvature tensor is bounded. A curve on M is a map ρ of class C^1 from $[0, T]$ to M ($T > 0$) and we denote by $\tau(\rho_{/[a,b]})$ the parallel transport along $\rho_{/[a,b]}$ from $T_{\rho(a)}M$ to $T_{\rho(b)}M$. We recall that $\tau(\rho_{/[a,b]})$ is an isometry between $T_{\rho(a)}M$ and $T_{\rho(b)}M$ (see Abraham & Marsden (1985) for a proof) and is independent of the parametrization of ρ . We need also the important particular case of geodesics: assuming that the geodesic from $x_1 \in M$ to $x_2 \in M$ is unique $\bar{\tau}(x_1, x_2)$ is the parallel transport from $T_{x_1}M$ to $T_{x_2}M$. We denote by $\pi : TM \rightarrow M$ the projection map of the tangent bundle TM of M .

In order to describe the class of maximal monotone operators used here, we observe first that, for each $x \in M$, a maximal monotone graph relative to the tangent scalar product $(\cdot, \cdot)_x$ in the fibre T_xM can be defined in a straightforward fashion: such a graph is a subset A'_x of $(T_xM)^2$ such that for all pairs (v_1, w_1) and (v_2, w_2) in A'_x ,

$$(v_1 - v_2, w_1 - w_2)_x \geq 0 \text{ (monotonicity)}$$

and A'_x is maximal for inclusion among all monotone graphs. In consequence and, without being too formal, there is a bundle of maximal monotone graphs on the manifold M : if T^2M denotes the bundle whose generic fibre is $T_x^2M = (T_xM)^2$, the fibre of the bundle of maximal monotone graphs is simply the set of maximal monotone graphs in T_x^2M . In order to avoid repetitions we will even assume that this A'_x also depends on the time $t \in [0, T]$ so that we consider for each $t \in [0, T]$ and $x \in M$ a maximal monotone graph $A'(t, x)$ in T_x^2M . Assumption 2.5 describes the regularity of $A'(t, x)$ with respect to t and x . For all t, x and $v \in T_xM$, we denote by $A'(t, x, v)$ the image by $A'(t, x)$ of v , which is a closed convex set. We suppose that the domain of $A'(t, x)$ is all T_xM for all $0 \leq t \leq T$ and $x \in M$, i.e. for all t in $[0, T]$ and all x in M and all v in T_xM , $A'(t, x, v)$ is not empty. Given $w \in T_xM$, we denote by $A'(t, x, v, w)$ the projection of w onto $A'(t, x, v)$ relative to the metric of T_xM .

We denote \mathbb{R}^d by E . If F and G are two finite-dimensional vector spaces, we denote by $L(F, G)$ the set of linear maps from F into G . For $t \in [0, T]$ and $x \in M$, let the drift $\nu'(t, x)$ be a map from T_xM into T_xM and let the diffusion matrix $\sigma'(t, x)$ be a differentiable map from T_xM into $L(E, T_xM)$. For all $v \in T_xM$, let us define

$$R(t, x, v) = \|\sigma'(t, x, v)\|_{L(E, T_xM)}^2.$$

Here $\sigma'(t, x, v)$ and $\nu'(t, x, v)$ are, respectively, the image of v by $\sigma'(t, x)$ and by $\nu'(t, x)$. Our assumption on the drift and the diffusion are tailored for a Stratonovich stochastic differential system; for this reason the square of the diffusion matrix appears in assumptions 2.2 and 2.3.

We denote by ℓ a continuous map from $[0, T]$ to \mathbb{R}_+ such that $\lim_{t \rightarrow 0} \ell(t) = 0$. We suppose the following assumptions.

03PA0245/4

F. Bernardin, M. Schatzman and C.-H. Lamarque

Assumption 2.2. For all bounded open subset $U \subset M$, there exists $C_0(U)$ such that for all close enough x and y in U , for all v in $T_x M$ and u in $T_y M$, and for all s and t in $[0, T]$,

$$\left| \frac{\partial R}{\partial v}(t, x, v) - \frac{\partial R}{\partial v}(s, y, u) \right| \leq C_0(U)(\ell(|t-s|) + d_M(x, y) + \|v - \bar{\tau}(y, x)u\|_x).$$

Assumption 2.3. There exists a constant C_1 such that for all $0 \leq t \leq T$ and for all $(x, v) \in TM$,

$$\|\nu'(t, x, v)\|_x + \|\sigma'(t, x, v)\|_{L(E, T_x M)} + \left| \frac{\partial R}{\partial v}(t, x, v) \right| \leq C_1(1 + d_M(x, x_0) + \|v\|_x).$$

Here x_0 is fixed in M .

Assumption 2.4. For all bounded open subset $U \subset M$, there exists $C_2(U)$ such that for all close enough x and y in U , for all v in $T_x M$ and u in $T_y M$, and for all s and t in $[0, T]$,

$$\begin{aligned} \|\nu'(t, x, v) - \bar{\tau}(y, x)\nu'(s, y, u)\|_x + \|\sigma'(t, x, v) - \bar{\tau}(y, x) \circ \sigma'(s, y, u)\|_{L(E, T_x M)} \\ \leq C_2(U)(\ell(|t-s|) + d_M(x, y) + \|v - \bar{\tau}(y, x)u\|_x). \end{aligned}$$

Assumption 2.5. For all bounded open subset $U \subset M$, there exists $C_3(U)$ such that for all close enough x and y in U , for all v and w_1 in $T_x M$ and u and w_2 in $T_y M$, and for all s and t in $[0, T]$,

$$\begin{aligned} \|A'(t, x, v, w_1) - \bar{\tau}(y, x)A'(s, y, u, w_2)\|_x \\ \leq C_3(U)(\ell(|t-s|) + d_M(x, y) + \|v - \bar{\tau}(y, x)u\|_x + \|w_1 - \bar{\tau}(y, x)w_2\|_x). \end{aligned}$$

Remark 2.6. Assumption 2.5 has an immediate consequence: $A'(t, x, v)$ is locally bounded with respect to v , uniformly with respect to $t \in [0, T]$ and to x in compact subsets of M .

We consider $\mathcal{E}' = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}'_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ a filtered probability space which verifies the usual conditions (see Karatzas & Shreve (1991) for a definition). Let $(B_t)_{t \geq 0}$ be the standard \mathbb{R}^d -Brownian motion on \mathcal{E}' . Let δ be the symbol for the Stratonovich differentiation. Let T_0 be a (\mathcal{F}'_t) -stopping time such that $T_0 \leq T$ almost surely. Let η' be a random variable \mathcal{F}'_{T_0} -measurable which takes its values in TM , whose second-order moment, written in a local chart of M , is finite. If $(v_t)_{t \geq 0}$ is a TM -valued continuous semi-martingale over the curve $\rho : [0, T] \rightarrow M$ (a stochastic process X on a manifold Q is a continuous semi-martingale on Q if $f \circ X$ is a real continuous semi-martingale for every C^∞ map $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$: see Emery (1989) for details), we denote by $D_{\dot{\rho}(t)}v_t$ the Stratonovich covariant differential of v along ρ at time t (see Norris (1992) for a definition). We consider also the MSDE on the manifold M :

$$\left. \begin{aligned} \delta x'_t &= v'_t dt, \\ D_{\dot{x}'(t)}v'_t + A'(t, x'_t, v'_t) dt &\ni \nu'(t, x'_t, v'_t) dt + \sigma'(t, x'_t, v'_t)\delta B_t, \quad T_0 \leq t < T, \\ (x'(T_0), v'(T_0)) &= (\pi(\eta'), \eta') \text{ a.s.} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

The first equation of (2.1) shows that x'_t is almost surely of class C^1 on $[T_0, T]$. For $t \in [T_0, T]$, we apply parallel transport along the trajectories' x' solution of (2.1), and

Norris (1992) has proved that the covariant differential is mapped to Stratonovich differential yielding then the following system:

$$\left. \begin{aligned} \tau(x'_{/[T_0,t]})^{-1} \delta x'_t &= (\tau(x'_{/[T_0,t]})^{-1} v'_t) dt, \\ \delta((\tau(x'_{/[T_0,t]})^{-1} v'_t) + (\tau(x'_{/[T_0,t]})^{-1} A'(t, x'_t, v'_t)) dt \\ &\quad \ni (\tau(x'_{/[T_0,t]})^{-1} \nu'(t, x'_t, v'_t)) dt \{(\tau(x'_{/[T_0,t]})^{-1} \circ \sigma'(t, x'_t, v'_t))\} \delta B_t, \\ (x'(T_0), v'(T_0)) &= (\pi(\eta'), \eta') \text{ a.s.} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Let V (respectively, V') a bounded open subset of E (respectively, of M) such that $\varphi : V' \rightarrow V$ define a local chart of M and put $\psi = \varphi^{-1}$. Let x_0 be a point of V' and we identify $T_{x_0}M$ and $E = \mathbb{R}^d$. Without loss of generality, we suppose that $\varphi(x_0) = 0$ and $T_{x_0}\varphi = I_E$, where $T_y\varphi$ denotes the tangent mapping to φ at the point $y \in M$ and I_E denotes the identity map of E . Let $W' \subset V'$ be an open set of M such that each pair of points of W' can be linked by a unique geodesic of M . We define $W = \varphi(W')$. We will define now all the transported objects; for all the primed notation, the corresponding non-primed notation denote a transported object. For $0 \leq s \leq t \leq T$ we denote by $C^1_W([s, t], V)$ the set of the maps $\xi : [s, t] \rightarrow V$ of class C^1 such that $\xi(0) \in W$. For ξ an element of $C^1_W([s, t], V)$, $\psi(\xi)$ is a curve on V' , and for $v \in V$, we define

$$b(s, t, \xi, v) = T_{\psi(\xi_t)}\varphi\tau(\psi(\xi))\bar{\tau}(x_0, \psi(\xi)(s))v. \quad (2.3)$$

We define

$$A(s, t, \xi, v) = \bar{\tau}(\psi(\xi)(s), x_0)(\tau(\psi(\xi)))^{-1}A'(t, \psi(\xi_t), \tau(\psi(\xi))\bar{\tau}(x_0, \psi(\xi)(s))v), \quad (2.4)$$

$$\nu(s, t, \xi, v) = \bar{\tau}(\psi(\xi)(s), x_0)(\tau(\psi(\xi)))^{-1}\nu'(t, \psi(\xi_t), \tau(\psi(\xi))\bar{\tau}(x_0, \psi(\xi)(s))v), \quad (2.5)$$

and for all $z \in E$,

$$\sigma(s, t, \xi, v)z = \bar{\tau}(\psi(\xi)(s), x_0)(\tau(\psi(\xi)))^{-1}[\sigma'(t, \psi(\xi_t), \tau(\psi(\xi))\bar{\tau}(x_0, \psi(\xi)(s))v)]z. \quad (2.6)$$

Remark 2.7. It is convenient to express the transport in A , ν and σ only through b . Let us explain how to do this on ν : if $S = T_{\psi(\xi(t))}\varphi$, we introduce SS^{-1} at two places in the definition of $\nu(s, t, \xi, v)$:

$$\begin{aligned} \nu(s, t, \xi, v) \\ = \bar{\tau}(\psi(\xi)(s), x_0)(\tau(\psi(\xi)))^{-1}S^{-1}S\nu'(t, \psi(\xi_t), S^{-1}S\tau(\psi(\xi))\bar{\tau}(x_0, \psi(\xi)(s))v). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Since $S\tau(\psi(\xi))\bar{\tau}(x_0, \psi(\xi)(s)) = b(s, t, \xi)$, (2.7) is equivalent to

$$\nu(s, t, \xi, v) = (b(s, t, \xi))^{-1}S\nu'(t, \psi(\xi_t), S^{-1}b(s, t, \xi, v)). \quad (2.8)$$

By a legitimate abuse of notation corresponding to the choice of a local chart, we may drop $\psi(\xi_t)$ and $S = T_{\psi(\xi(t))}\varphi$ in (2.8), yielding thus

$$\nu(s, t, \xi, v) = b(s, t, \xi)^{-1}\nu'(t, \xi_t, b(s, t, \xi, v)). \quad (2.9)$$

There are analogous formulae for σ and A :

$$\sigma(s, t, \xi, v) = b(s, t, \xi)^{-1} \circ \sigma'(t, \xi_t, b(s, t, \xi, v)). \quad (2.10)$$

03PA0245/6

F. Bernardin, M. Schatzman and C.-H. Lamarque

and

$$A(s, t, \xi, v) = b(s, t, \xi)^{-1} A'(t, \xi_t, b(s, t, \xi, v)). \quad (2.11)$$

We suppose in a first time that $\pi(\eta)$ belongs to W almost surely. By defining for all $T_0 \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \varphi(x'_t), \\ \bar{v}(t) &= \bar{\tau}(x'(T_0), x_0)(\tau(x'_{/[T_0, t]}))^{-1} v'_t, \\ \bar{\eta} &= \bar{\tau}(x'(T_0), x_0)\eta, \end{aligned}$$

we have

$$\left. \begin{aligned} d\bar{x}_t &= b(T_0, t, \bar{x}_{/[T_0, t]}, \bar{v}_t) dt, \\ \delta\bar{v}_t + A(T_0, t, \bar{x}_{/[T_0, t]}, \bar{v}_t) dt \\ &\ni \nu(T_0, t, \bar{x}_{/[T_0, t]}, \bar{v}_t) dt + \sigma(T_0, t, \bar{x}_{/[T_0, t]}, \bar{v}_t) \delta B_t, \quad T_0 \leq t, \\ (\bar{x}(T_0), \bar{v}(T_0)) &= (\pi(\bar{\eta}), \bar{\eta}) \text{ a.s.} \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Finally, we define $(\eta_1, \eta_2) = (\pi(\bar{\eta}), \bar{\eta})$ and $x, v : [0, T - T_0] \rightarrow E$ by

$$x(t) = \bar{x}(t + T_0) \quad \text{and} \quad v(t) = \bar{v}(t + T_0)$$

and then, by denoting $b(0, t, \xi, v)$ by $b(t, \xi, v)$, $\nu(0, t, \xi, v)$ by $\nu(t, \xi, v)$, $\sigma(0, t, \xi, v)$ by $\sigma(t, \xi, v)$ and $A(0, t, \xi, v)$ by $A(t, \xi, v)$, we seek the restriction to $[0, T - T_0[$ of the solution to the following system:

$$\left. \begin{aligned} dx_t &= b(t, x_{/[0, t]}, v_t) dt, \\ \delta v_t + A(t, x_{/[0, t]}, v_t) dt \\ &\ni \nu(t, x_{/[0, t]}, v_t) dt + \sigma(t, x_{/[0, t]}, v_t) \delta W_t, \quad 0 \leq t \leq T, \\ (x(0), v(0)) &= (\eta_1, \eta_2) \text{ a.s.,} \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

where $(W_t)_{t \geq 0}$ is defined by $W_t = B_{t+T_0} - B_{T_0}$.

For all $t \geq 0$, let $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}'_{T_0+t}$. It is well known that $(W_t)_{t \geq 0}$ is a standard Brownian motion on the filtered probability space $\mathcal{E} = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. We say that $(x_t, v_t)_{0 \leq t \leq T}$ is a solution to (2.13) if $(x_t, v_t)_{0 \leq t \leq T}$ is \mathcal{F}_t -adapted, $dx_t = b(t, x_{/[0, t]}, v_t) dt$ almost surely and if there exists a stochastic process \mathcal{F}_t -adapted $(K_t)_{0 \leq t \leq T}$ taking its values in E with bounded variation on $[0, T]$ such that $K_0 = 0$ almost surely and

$$v_t = v_0 + \int_0^t \nu(s, x_{/[0, s]}, v_s) ds + \int_0^t \sigma(s, x_{/[0, s]}, v_s) \delta W_s - K_t$$

and $dK_t \in A(t, x_{/[0, t]}, v_t) dt$. The last inclusion has the following sense: the measure $(v_t - \alpha_t, dK_t - \beta_t dt)_{x_0}$ is almost surely non-negative on $[0, T]$ for all choices of continuous maps $\alpha, \beta : [0, T] \rightarrow E$ such that $\beta_t \in A(t, x_{/[0, t]}, \alpha_t)$ (see Cépa (1995) for precisions).

Remark 2.8. If $\sigma'(t, x, v)$ does not depend on v , it is possible to consider the equation (2.1) in the Itô sense—the formulation is intrinsic—and the assumption 2.2 and the linear growth condition 2.3 for $R(t, x, v)$ are then not necessary.

In the following we will denote by (\cdot, \cdot) the scalar product $(\cdot, \cdot)_{x_0}$.

3. Extension of the problem to E

We are slightly abusive when we say that we extend b , A , ν and σ since we have first to restrict the values of x to a set $U \ni x_0$, with \bar{U} a subset of V . More precisely, given a smooth cut-off function χ such that

$$\chi(y) = \begin{cases} 1 & \text{if } y \in U, \\ 0 & \text{if } y \notin V, \end{cases} \tag{3.1}$$

the function $s \mapsto \chi(x_s)x_s = \tilde{x}_s$ coincides with x_s as long as x_s does not leave U . If we use \tilde{x}_s instead of x_s in the definition of b , A , ν and σ , we will prove that the corresponding \tilde{b} , $\tilde{\nu}$ and $\tilde{\sigma}$ are not Lipschitz continuous with respect to x or v . Therefore, we will need an extra step, where we project v onto the ball of radius n about 0. Let us go into the technicalities.

The functions b , ν , σ and A have been respectively defined in (2.3), (2.5), (2.6) and (2.4), which depend on the local chart φ ; therefore all the upcoming constants will also depend on φ .

Let U be a fixed bounded neighbourhood of $x_0 \in V$ and assume $\bar{W} \subset U \subset \bar{U} \subset V$. For B an open subset of E containing x_0 , $\Delta(B)$ is the set of pairs (t, x) with $t \in [0, T]$ and x a function of class C^1 from $[0, t]$ to B , such that $x(0) \in W$:

$$\Delta(B) = \{(t, x), t \in [0, T], x \in C^1_W([0, t], B)\}.$$

We denote by $G = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ the metric tensor whose inverse is denoted by $G^{-1} = (g^{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ and the functions g_{ij} and g^{ij} are smooth on V . Let (x^1, \dots, x^d) be the local coordinates of the chart φ and $e_0 = (\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^d)$ be a basis of E . For $(t, x) \in \Delta(V)$ and $1 \leq i \leq d$, $b(t, x, e_{0,i}) = e_i^j(t)e_{0,j}$, where (see Abraham & Marsden 1985)

$$e_i^j(t) = e_{i,0}^j - \int_0^t \Gamma_{kl}^j(x_s)e_i^k(s)\dot{x}_s^l ds.$$

The functions

$$\Gamma_{lk}^i(x) = \Gamma_{kl}^i(x) = \frac{1}{2}g^{ih}(x) \left(\frac{\partial g_{hk}}{\partial x^l}(x) + \frac{\partial g_{hl}}{\partial x^k}(x) - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^h}(x) \right)$$

are the Christoffel symbols of (M, G) . If we denote by I_E the identity matrix of E , we can write $b(t, x)^T G(x_t) b(t, x) = I_E$ (see Abraham & Marsden 1985) and then $\text{tr}\{b(t, x)b(t, x)^T\} = \text{tr}\{G^{-1}(x_t)\}$, which shows the boundedness of $(t, x) \mapsto b(t, x)$, which can also be seen on the definition of b in (2.3). Let χ be as in (3.1). Throughout this paper we denote by $\|\cdot\|_{\infty, t}$ the uniform norm on the space $C^0([0, t], E)$ of continuous maps from $[0, t]$ to E , $t > 0$.

Lemma 3.1. *Define ζ on $C^0([0, t], E)$ by $\zeta(u) = \chi(u)u$. Then ζ is Lipschitz continuous from $C^0([0, t], E)$ to itself.*

Proof. Clear. ■

Let $(t, x) \in \Delta(V)$; we first define t_x^U , which is the first exit time out of U :

$$t_x^U = \inf\{s \leq t, x(s) \notin U\} \wedge T.$$

03PA0245/8

F. Bernardin, M. Schatzman and C.-H. Lamarque

We now let

$$\tilde{x} = \chi(x)x$$

and \tilde{x} coincides with x on the interval $[0, t_x^U]$. Moreover, the following estimates are straightforward:

$$\|\tilde{x}\|_{\infty, t} \leq C_\varphi, \quad \|\dot{\tilde{x}}\|_{\infty, t} \leq C_\varphi \|\dot{x}\|_{\infty, t}, \quad (3.2)$$

and, if $(t, y) \in \Delta(V)$,

$$\|\tilde{x} - \tilde{y}\|_{\infty, t} + \|\dot{\tilde{x}} - \dot{\tilde{y}}\|_{\infty, t} \leq C_\varphi (\|\dot{x}\|_{\infty, t} + \|\dot{y}\|_{\infty, t}) (\|x - y\|_{\infty, t} + \|\dot{x} - \dot{y}\|_{\infty, t}), \quad (3.3)$$

with C_φ depending only on U, V and φ . The verification of these estimates is straightforward and left to the reader.

Definition 3.2. We let, for all $(t, x) \in D(E)$,

$$\tilde{b}(t, x) = b(t, \tilde{x}), \quad (3.4)$$

$$\tilde{\nu}(t, x) = \nu(t, \tilde{x}), \quad (3.5)$$

$$\tilde{\sigma}(t, x) = \sigma(t, \tilde{x}), \quad (3.6)$$

$$\tilde{A}(t, x) = A(t, \tilde{x}). \quad (3.7)$$

Lemma 3.3. *The maps \tilde{b} , $\tilde{\nu}$ and $\tilde{\sigma}$ grow at most linearly, that is, for all $((t, x), v) \in \Delta(E) \times E$,*

$$\|\tilde{\nu}(t, x, v)\| + \|\tilde{\sigma}(t, x, v)\| + \|\tilde{b}(t, x, v)\| \leq C_\varphi (\|x\|_{\infty, t} + \|\dot{x}\|_{\infty, t} + \|v\|).$$

Proof. We know that a constant C_φ exists so that for all $((t, x), v) \in \Delta(E) \times E$, $\|\tilde{b}(t, x, v)\| \leq C_\varphi \|v\|$ and $\|(\tilde{b}(t, x))^{-1}v\| \leq C_\varphi \|v\|$. Since $\tau(\psi(\tilde{x}))\bar{\tau}(x_0, \psi(\tilde{x})(0))$ is an isometry between E and $T_{\psi(\tilde{x})(t)}M$ and using assumption 2.3, the result holds. ■

The functions \tilde{b} , $\tilde{\nu}$ and $\tilde{\sigma}$ are not Lipschitz continuous with respect to x and v . We replace them by Lipschitz continuous approximations as follows. For $n \in \mathbb{N}^*$, let $\mathcal{U}_n = \mathcal{B}(0, n)$, $\mathcal{V}_n = \mathcal{B}(0, n+1)$ and χ_n be the map associated to these bounded open sets. All constants depending only on n are denoted by C_n and by $C_{\varphi n}$ if they depend on φ and n . For $(t, x) \in \Delta(E)$, let us define

$$x_n(s) = x(0) + \int_0^s \chi_n(\dot{x}(u))\dot{x}(u) du,$$

and clearly

$$\|\dot{x}_n\|_{\infty, t} \leq n + 1. \quad (3.8)$$

Using lemma 3.1, for all $(t, y) \in \Delta(E)$, we have

$$\|x_n - y_n\|_{\infty, t} + \|\dot{x}_n - \dot{y}_n\|_{\infty, t} \leq C_{\varphi n} (\|x(0) - y(0)\| + \|\dot{x} - \dot{y}\|_{\infty, t}). \quad (3.9)$$

If $t_x^n = \inf\{s \leq t, \|\dot{x}(s)\| \geq n\} \wedge T$, $x_n = x$ on $[0, t_x^n]$.

Definition 3.4. We let for all $(t, x, v) \in \Delta(E) \times E$,

$$b_n(t, x, v) = \tilde{b}(t, x_n, \text{proj}_{\mathcal{B}(0, n)} v), \quad (3.10)$$

$$\nu_n(t, x, v) = \tilde{\nu}(t, x_n, \text{proj}_{\mathcal{B}(0, n)} v), \quad (3.11)$$

$$\sigma_n(t, x, v) = \tilde{\sigma}(t, x_n, \text{proj}_{\mathcal{B}(0, n)} v), \quad (3.12)$$

$$A_n(t, x, v) = \tilde{A}(t, x_n, v). \quad (3.13)$$

We give now several results on the above introduced functions.

Lemma 3.5. *The functions b_n and \tilde{b} verify*

$$\forall (t, x) \in \Delta(E), \forall v \in \tilde{\mathcal{B}}(0, n), \forall s \leq t_x^n, \quad b_n(s, x_{/[0,s]}, v) = \tilde{b}(s, x_{/[0,s]}, v).$$

Proof. Indeed by definition of b_n ,

$$b_n(s, x_{/[0,s]}, v) = \tilde{b}(s, x_{n/[0,s]}, \text{proj}_{\tilde{\mathcal{B}}(0,n)} v) = \tilde{b}(s, x_{/[0,s]}, v),$$

since $s \leq t_x^n = \inf\{u \leq t, \|\dot{x}(u)\| \geq n\}$. ■

Remark 3.6. With the help of remark 2.7 and the definitions of ν_n , σ_n and A_n , the same equality occurs for ν_n , σ_n and A_n .

Lemma 3.7. *Operators $A(t, x)$ and $A_n(t, x)$ are multivalued, maximal and monotone on E for all $(t, x) \in \Delta(E)$.*

Proof. This is a direct consequence of the fact that the transport operator is an isometry. ■

Remark 3.8. The functions b_n , ν_n and σ_n grow at most linearly, thanks to lemma 3.3.

Lemma 3.9. *The maps $b_n(t, \cdot, \cdot)$, $(b(t, \tilde{x}_n)^{-1}, \nu_n(t, \cdot, \cdot))$ and $\sigma_n(t, \cdot, \cdot)$ are Lipschitz continuous functions: for all $((t, x), (t, y), v, u) \in (\Delta(E))^2 \times E^2$,*

$$\begin{aligned} & \|b_n(t, x, v) - b_n(t, y, u)\| + \|(b(t, \tilde{x}_n))^{-1}v - (b(t, \tilde{y}_n))^{-1}u\| \\ & + \|\nu_n(t, x, v) - \nu_n(t, y, u)\| + \|\sigma_n(t, x, v) - \sigma_n(t, y, u)\| \\ & \leq C_{\varphi n}(\|x - y\|_{\infty, t} + \|\dot{x} - \dot{y}\|_{\infty, t} + \|v - u\|). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Proof. If we write $\tilde{b}(t, x) = E(t)$ and $\tilde{b}(t, y) = F(t)$, by definition of \tilde{b} we have $\dot{E}(t) = L(\tilde{x}, t)E(t)$ and $\dot{F}(t) = L(\tilde{y}, t)F(t)$, where $L(\rho, t)$ maps linearly the set of invertible square matrices of dimension $d \times d$ into itself and is defined by

$$(L(\rho, s)A)_i^j = -\Gamma_{kl}^j(\rho(s))A_i^k \rho_s^l, \quad s \leq t,$$

for all ρ in $\Delta(V)$ and matrix A . We begin by writing

$$\left. \begin{aligned} & |[L(\tilde{x}, s)E(s) - L(\tilde{y}, s)E(s)]_i^j| = |\Gamma_{kl}^j(\tilde{y}(s))E_i^k(s)\dot{\tilde{y}}_s^l - \Gamma_{kl}^j(\tilde{x}(s))E_i^k(s)\dot{\tilde{x}}_s^l| \\ & \leq |(\Gamma_{kl}^j(\tilde{y}(s)) - \Gamma_{kl}^j(\tilde{x}(s)))E_i^k(s)\dot{\tilde{y}}_s^l| \\ & \quad + |\Gamma_{kl}^j(\tilde{x}(s))E_i^k(s)(\dot{\tilde{y}}_s^l - \dot{\tilde{x}}_s^l)| \\ & \leq C_{\varphi}(\|\dot{\tilde{y}}\|_{\infty, t} \cdot \|\tilde{x} - \tilde{y}\|_{\infty, t} + \|\dot{\tilde{y}} - \dot{\tilde{x}}\|_{\infty, t}). \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

We comment here on the last line of (3.15): it is the term $\|\dot{\tilde{y}}\|_{\infty, t} \|\tilde{x} - \tilde{y}\|_{\infty, t}$ which prevents \tilde{b} from being Lipschitz continuous with respect to x , since $\|\dot{\tilde{y}}\|_{\infty, t}$ does not have to be bounded. There may exist a geometrical proof showing that \tilde{b} is Lipschitz continuous, under appropriate assumptions on the curvature tensor. Let us define $E_n(t) = b(t, \tilde{x}_n)$ and $F_n(t) = b(t, \tilde{y}_n)$. Since

$$E_n(t) = I_E - \int_0^t L(\tilde{x}_n, s)E_n(s) ds$$

03PA0245/10

F. Bernardin, M. Schatzman and C.-H. Lamarque

and

$$F_n(t) = I_E - \int_0^t L(\widetilde{y}_n, s) F_n(s) \, ds,$$

we have

$$\begin{aligned} \|E_n(s) - F_n(s)\| &\leq \int_0^s \|L(\widetilde{y}_n, u) F_n(u) - L(\widetilde{y}_n, u) E_n(u)\| \, du \\ &\quad + \int_0^s \|(L(\widetilde{y}_n, u) - L(\widetilde{x}_n, u)) E_n(u)\| \, du, \end{aligned}$$

and then

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq s \leq t} \|E_n(s) - F_n(s)\| &\leq \sup_{0 \leq s \leq t} \|L(\widetilde{y}_n, s)\| \int_0^t \sup_{0 \leq u \leq s} \|E_n(u) - F_n(u)\| \, ds \\ &\quad + C_\varphi (\|\widetilde{y}_n\|_{\infty, t} \|\widetilde{x}_n - \widetilde{y}_n\|_{\infty, t} + \|\widetilde{y}_n - \widetilde{x}_n\|_{\infty, t}). \end{aligned}$$

Using (3.2), (3.8) and the continuity of the functions $(\Gamma_{kl}^j)_{k,l,j}$, we have

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \|L(\widetilde{y}_n, s)\| \leq C_{\varphi n} \|\widetilde{y}_n\|_{\infty, t} \leq C_{\varphi n} (n+1).$$

Using the Gronwall's lemma and inequalities (3.2), (3.3), (3.8), (3.9), we have

$$\|E_n(t) - F_n(t)\| \leq C_{\varphi n} (\|x - y\|_{\infty, t} + \|\dot{y} - \dot{x}\|_{\infty, t}).$$

This last inequality and the definition of b_n lead to:

$$\|b_n(t, x, v) - b_n(t, y, u)\| \leq C_{\varphi n} (\|x - y\|_{\infty, t} + \|\dot{x} - \dot{y}\|_{\infty, t} + \|v - u\|).$$

Since $b(t, x)^T G(x_t) b(t, x) = I_E$ and $x \mapsto G(x)$ is of class C^1 , the last inequality is valid for $(b(t, \widetilde{x}_n))^{-1}$ and $(b(t, \widetilde{y}_n))^{-1}$ instead of $b_n(t, x, \cdot)$ and $b_n(t, y, \cdot)$. Using expressions defining ν_n and σ_n in terms of b_n , b_n^{-1} , ν' and σ' , the assumptions 2.4, 2.3 and inequality $\|b_n(t, x, v)\| \leq C_{\varphi n}$ we obtain easily the Lipschitz continuity of ν_n and σ_n . ■

Lemma 3.10. For all $(t, x) \in \Delta(E)$, $0 \leq s \leq t$ and $u \in E$, the following estimates hold:

$$\left. \begin{aligned} \|b_n(s, x_{/[0,s]}, u) - b_n(t, x, u)\| &\leq C_{\varphi n} |t - s|, \\ \|b(s, x_{/[0,s]})^{-1} u - b(t, x)^{-1} u\| &\leq C_{\varphi n} |t - s|, \\ \|\nu_n(s, x_{/[0,s]}, u) - \nu_n(t, x, u)\| &\leq C_{\varphi n} \ell(|t - s|), \\ \|\sigma_n(s, x_{/[0,s]}, u) - \sigma_n(t, x, u)\| &\leq C_{\varphi n} \ell(|t - s|). \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Proof. With the notation and intermediary results of lemma 3.9, we can write

$$\begin{aligned} \|b_n(s, x_{/[0,s]}, u) - b_n(t, x, u)\| &= \|(b(s, \widetilde{x}_n_{/[0,s]}) - b(t, \widetilde{x}_n)) \cdot \text{proj}_{\mathbb{E}(0,n)} u\| \\ &\leq n \|b(s, \widetilde{x}_n_{/[0,s]}) - b(t, \widetilde{x}_n)\| = n \|E_n(s) - E_n(t)\| \\ &\leq C_{\varphi n} |t - s| \|\widetilde{x}_n\|_{\infty, t} \leq C_{\varphi n} |t - s|. \end{aligned}$$

Using this last inequality and the assumption 2.4 we obtain the result. ■

Lemma 3.11. *Let $(T, x) \in \Delta(E)$. Then there exists $\lambda_0 > 0$ such that $\alpha^\lambda : u \mapsto (I + \lambda A_n(u, x_{/[0,u]}, \cdot))^{-1}(z)$ is continuous on $[0, T]$ for any $0 < \lambda \leq \lambda_0, z \in E$.*

Proof. For $(t, s) \in [0, T]^2$, we can write

$$\frac{z - \alpha_t^\lambda}{\lambda} \in A_n(t, x_{/[0,t]}, \alpha_t^\lambda) \quad \text{and} \quad \frac{z - \alpha_s^\lambda}{\lambda} \in A_n(s, x_{/[0,s]}, \alpha_s^\lambda).$$

Using the monotonicity, we have then

$$\begin{aligned} \|\alpha_t^\lambda - \alpha_s^\lambda\|^2 &= \lambda \left(\alpha_t^\lambda - \alpha_s^\lambda, \frac{\alpha_t^\lambda - z}{\lambda} + \frac{z - \alpha_s^\lambda}{\lambda} \right) \\ &= 2\lambda \left(\alpha_t^\lambda - \frac{\alpha_t^\lambda + \alpha_s^\lambda}{2}, \frac{\alpha_t^\lambda - z}{\lambda} + \beta_1 \right) - \lambda(\alpha_t^\lambda - \alpha_s^\lambda, \beta_1 - \beta_2) \\ &\quad + 2\lambda \left(\frac{\alpha_s^\lambda + \alpha_t^\lambda}{2} - \alpha_s^\lambda, \beta_2 - \frac{z - \alpha_s^\lambda}{\lambda} \right) \\ &\leq \lambda(\alpha_t^\lambda - \alpha_s^\lambda, \beta_2 - \beta_1) \leq \frac{1}{2}\lambda \|\alpha_t^\lambda - \alpha_s^\lambda\|^2 + \frac{1}{2}\lambda \|\beta_1 - \beta_2\|^2, \end{aligned}$$

with $\beta_1 = \text{proj}_{A_n(t, x_{/[0,t]}, (\alpha_s^\lambda + \alpha_t^\lambda)/2)} 0$ and $\beta_2 = \text{proj}_{A_n(s, x_{/[0,s]}, (\alpha_s^\lambda + \alpha_t^\lambda)/2)} 0$. By assumption 2.5, we have

$$\|\alpha_t^\lambda - \alpha_s^\lambda\|^2 \leq \lambda C_{\varphi n} (\ell^2(|t - s|) + |\alpha_t^\lambda - \alpha_s^\lambda|^2 + \|x_t - x_s\|^2)$$

and it is possible to choose $\lambda_0(\varphi, n) > 0$ such that for all $\lambda \leq \lambda_0, \alpha^\lambda$ is continuous on $[0, T]$. ■

Remark 3.12. We note that λ_0 depends only on n and φ .

Lemma 3.13. *Let r and r' be continuous functions from $[0, t]$ into $[0, T]$, where t verifies $0 \leq t \leq T$. If we set $t_r = \sup_{0 \leq s \leq t} r(s)$ and $t_{r'} = \sup_{0 \leq s \leq t} r'(s)$, we consider (t_r, x) and $(t_{r'}, x')$ elements of $\Delta(E)$. Let us assume the existence of continuous functions v, v', K and K' from $[0, t]$ into E such that*

- (i) K and K' are functions with bounded variations on $[0, t]$;
- (ii) $dK_s \in A_n(r(s), x_{/[0,r(s)]}, v(s)) ds$ and $dK'_s \in A_n(r'(s), x'_{/[0,r'(s)]}, v'(s)) ds$, that is, the measures

$$(v_s - \alpha_s, dK_s - \beta_s ds)$$

and

$$(v'_s - \alpha'_s, dK'_s - \beta'_s ds)$$

are non-negative on $[0, t]$ for any choice of continuous functions $\alpha, \alpha', \beta, \beta' : [0, t] \rightarrow E$ verifying

$$\forall s \in [0, t], (\alpha_s, \beta_s) \in Gr(A_n(r(s), x_{/[0,r(s)]}))$$

and

$$(\alpha'_s, \beta'_s) \in Gr(A_n(r'(s), x'_{/[0,r'(s)]})),$$

03PA0245/12

F. Bernardin, M. Schatzman and C.-H. Lamarque

where $Gr(B)$ denotes the graph of the multivalued operator B defined on the whole space E , i.e. the set $\{(x, y) \in E^2, y \in B(x)\}$. Then there exists a map $C_{\varphi n} : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}_+$ such that the measure

$$(v'_s - v_s, dK'_s - dK_s) + C_{\varphi n}(s)(\|x - x'\|_{\infty, r(s) \wedge r'(s)}^2 + \|v - v'\|_{\infty, s}^2 + \|x(r(s)) - x'(r'(s))\|^2 + \ell^2(|r(s) - r'(s)|)) ds \quad (3.17)$$

is non-negative on $[0, t]$.

Remark 3.14. In the case where A_n is independent of t and x , the first term in (3.17) is already non-negative; the extra terms account for the dependency on t and x .

Proof. For $p \in \mathbb{N}^*$ and $s \in [0, t]$, let us define

$$\begin{aligned} \alpha_p(s) &= (I + A_n(r(s), x_{/[0, r(s)]})/p)^{-1}((v(s) + v'(s))/2), \\ \beta_p(s) &= p((v(s) + v'(s))/2 - \alpha_p(s)), \\ \alpha'_p(s) &= (I + A_n(r'(s), x'_{/[0, r'(s)]})/p)^{-1}((v(s) + v'(s))/2), \end{aligned}$$

and

$$\beta'_p(s) = p((v(s) + v'(s))/2 - \alpha'_p(s)).$$

If $c : [0, t] \rightarrow E$ is continuous, the function

$$\gamma_p : s \mapsto (I + 1/p A_n(r(s), x_{/[0, r(s)]}))^{-1}(c(s))$$

is continuous for $p \geq p_0$, where p_0 depends on n and φ . This results from lemma 3.11.

We can conclude that α_p , α'_p , β_p and β'_p are continuous on $[0, t]$.

By hypothesis (ii) we can write

$$(v(s) - \alpha_p(s), dK(s) - \beta_p(s) ds) \geq 0$$

and

$$(v'(s) - \alpha'_p(s), dK'(s) - \beta'_p(s) ds) \geq 0.$$

By summation of these last inequalities, we have

$$\begin{aligned} (v(s) - \alpha_p(s), dK(s)) + (v'(s) - \alpha'_p(s), dK'(s)) \\ - (v(s) - \alpha_p(s), \beta_p(s) ds) - (v'(s) - \alpha'_p(s), \beta'_p(s) ds) \geq 0. \quad (3.18) \end{aligned}$$

By results of Brézis (1973),

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow +\infty} \alpha_p(s) &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \alpha'_p(s) = \frac{1}{2}(v(s) + v'(s)), \\ \lim_{p \rightarrow +\infty} \beta_p(s) &= A_n^0(r(s), x_{/[0, r(s)]}, \frac{1}{2}(v(s) + v'(s))) \end{aligned}$$

and

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \beta'_p(s) = A_n^0(r'(s), x'_{/[0, r'(s)]}, \frac{1}{2}(v(s) + v'(s))),$$

where $A_n^0(r(s), x_{/[0,r(s)]})$ (respectively, $A_n^0(r'(s), x'_{/[0,r'(s)]})$) denotes the principal section of $A_n(r(s), x_{/[0,r(s)]})$ (respectively, of $A_n(r'(t), x'_{/[0,r'(t)]})$). Inequality (3.18) implies then

$$\begin{aligned} & (v(s) - v'(s), dK'(s) - dK(s)) \\ & \leq (v(s) - v'(s), A_n^0(r(s), x_{/[0,r(s)]}, \frac{1}{2}(v(s) + v'(s))) \\ & \quad - A_n^0(r'(s), x'_{/[0,r'(s)]}, \frac{1}{2}(v(s) + v'(s)))) \\ & \leq \frac{1}{2} \|v(s) - v'(s)\|^2 \\ & \quad + \frac{1}{2} \|A_n^0(r(s), x_{/[0,r(s)]}, \frac{1}{2}(v(s) + v'(s))) - A_n^0(r'(s), x'_{/[0,r'(s)]}, \frac{1}{2}(v(s) + v'(s)))\|^2. \end{aligned}$$

This last inequality and assumption 2.5 yields the result. ■

4. Existence of solutions in E

In order to obtain the existence of a solution we will use the results of Cépa (1998), which ensure the existence of solutions to the MSDE of the following type:

$$dX_t + B(X_t) dt \ni \alpha(X_t) dt + \beta(X_t) dW_t,$$

where B is a maximal monotone operator on E and α and β verify the classical Lipschitz and linear growth conditions. If the probability space is $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{Q})$ and the initial condition is \mathcal{G}_0 -measurable, then the solution is \mathcal{G}_t -adapted and belongs to $L^2(\Omega, C^0([0, T], E))$.

Remark 4.1. It is crucial for the following to remark that the results of Cépa (1998) can be extended to random operator B and random maps α and β for which we have the following properties.

- (i) There exists a constant $C > 0$ such that for all $x \in E$ and $y \in E$,

$$\begin{aligned} & \|\alpha(x)\| + \|\beta(x)\| \leq C(1 + \|x\|) \text{ a.s.}, \\ & \|\alpha(x) - \alpha(y)\| + \|\beta(x) - \beta(y)\| \leq C\|x - y\| \text{ a.s.} \end{aligned}$$

- (ii) There exists a constant $R > 0$ and $M > 0$ such that

$$\forall x \in E, \quad \|x\| \leq R \implies (\forall y \in B(x), \|y\| \leq M) \text{ a.s.}$$

- (iii) The maps α and β are, respectively, $\mathcal{G}_0 \otimes \mathcal{B}(E), \mathcal{B}(E)$ -measurable and $\mathcal{G}_0 \otimes \mathcal{B}(E), \mathcal{B}(E^d)$ -measurable, where $\mathcal{B}(\mathcal{O})$ denotes the Borel σ -algebra of the topological set \mathcal{O} .

- (iv) For all maps $Y, Z : \Omega \rightarrow E$ such that $Z \in B(Y)$ almost surely, if Y is \mathcal{G}_0 -measurable, then Z is \mathcal{G}_0 -measurable.

We give here a lemma which will be useful.

Lemma 4.2. For all $c \in E$, $t \in [0, T]$ and continuous map $v : [0, t] \rightarrow E$ there exists a unique C^1 map $x : [0, t] \rightarrow E$ such that

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = b(s, x_{/[0,s]}, v(s)), \\ x(0) = c. \end{cases}$$

03PA0245/14

F. Bernardin, M. Schatzman and C.-H. Lamarque

Proof. The space $Z = C^1([0, t], E)$ is a Banach space when equipped with the norm $\|f\| = \|f\| + \|df/dt\|$. For $f \in Z$, let $L(f) \in Z$ be defined by $L(f)(s) = c + \int_0^s b(u, f|_{[0,u]}, v(u)) du$. Using lemma 3.9, L^m is strictly contracting for large enough m . We infer the existence of the solution on $[0, t]$ by application of the Banach fixed point theorem on Z . ■

The construction of a solution is performed in several steps. We replace first the v equation by an equation which contains only the initial data, and we can integrate it with the help of Cépa's results. We then integrate the x equation according to lemma 4.2. This gives an approximate solution on an interval $[0, t_1]$. Assuming this interval to be small, we restart the process: we integrate an approximate v equation on $[t_1, t_2]$ by using only the x data from the previous interval, which is possible thanks to Cépa's results. The process is recursive and yields an approximate solution on $[0, T]$, the approximation parameter being the size of the subintervals. We take this size to be $T/2^p$, and we compare the approximate solutions for the integers p and q , and we show by stochastic techniques that the expectation of appropriate norms of the difference tends to 0.

Theorem 4.3. *For all $n \geq 1$, there exists a solution to the following system*

$$\left. \begin{aligned} \delta x_t^n &= b_n(t, x_{|[0,t]}^n, v_t^n) dt, \\ \delta v_t^n &+ A_n(t, x_{|[0,t]}^n, v_t^n) dt \\ &\ni \nu_n(t, x_{|[0,t]}^n, v_t^n) dt + \sigma(t, x_{|[0,t]}^n, v_t^n) \delta W_t, \quad 0 \leq t \leq T, \\ (x(0), v(0)) &= (\eta_1, \eta_2). \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Proof. To lighten the notations, we denote b_n, ν_n, σ_n and A_n by b, ν, σ and A .

Step 1 (Construction of the approximate solution). We denote by $s^i(t, \xi, v)$ the square of the norm of the i th row (considered as an E -valued vector) of $\sigma(t, \xi, v)$ for all $(t, \xi) \in \Delta(E)$ and $v \in E$. We define then

$$\alpha(t, \xi, v) = \nu(t, \xi, v) + \frac{\partial}{\partial v} \{(s^1(t, \xi, v), \dots, s^d(t, \xi, v))^T\}. \quad (4.2)$$

We consider now, for $p \in \mathbb{N}^*$, the uniform partition $0 < t_1^p < \dots < t_{2^p}^p = T$ of $[0, T]$ with step size $T/2^p$ and we construct two processes x^p and v^p as follows. To simplify the notation we denote t_i^p by t_i . Results of Cépa mentioned in the beginning of the section, remarks 4.1 and 2.6, (3.14), (3.16), assumptions 2.2 and 2.3 give a solution v^p of the Itô MSDE on $[0, t_1]$:

$$\left. \begin{aligned} dv_t^p &+ A(0, \eta_1, v_t^p) dt \ni \alpha(0, \eta_1, v_t^p) dt + \sigma(0, \eta_1, v_t^p) dW_t, \\ v^p(0) &= \eta_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

By definition of α and using the relation between the Itô integral and the Stratonovich integral, equation (4.3) is equivalent to the following Stratonovich MSDE

$$\left. \begin{aligned} \delta v_t^p &+ A(0, \eta_1, v_t^p) dt \ni \nu(0, \eta_1, v_t^p) dt + \sigma(0, \eta_1, v_t^p) \delta W_t, \\ v^p(0) &= \eta_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Using lemma 4.2, let x^p be the solution on $[0, t_1]$ to

$$\begin{cases} \dot{x}^p(s) = b(s, x^p_{/[0,s]}, v^p(s)), \\ x^p(0) = \eta_1. \end{cases}$$

Suppose (x^p, v^p) defined on $[0, t_1] \cup \dots \cup [t_{i-1}, t_i] = [0, t_i]$ and consider the solution $(v_t^p)_{t_i \leq t \leq t_{i+1}}$ on $[t_i, t_{i+1}]$ of the MSDE

$$\begin{cases} \delta v_t^p + A(t_i, x^p_{/[0,t_i]}, v_t^p) dt \ni \nu(t_i, x^p_{/[0,t_i]}, v_t^p) dt + \sigma(t_i, x^p_{/[0,t_i]}, v_t^p) \delta W_t, \\ v^p(t_i^+) = v^p(t_i^-), \end{cases}$$

and x^p the solution on $[t_i, t_{i+1}]$ to

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}^p(s) &= b(s, x^p_{/[0,s]}, v_s^p), \\ x^p(t_i^+) &= x^p(t_i^-). \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Since $(v_t^p)_{0 \leq t \leq T}$ belongs to $L^2(\Omega, C^0([0, T], E))$ and $\|b(s, f)\| \leq C_\varphi$ for all $(s, f) \in \Delta(E)$, $(x_t^p)_{0 \leq t \leq T}$ belongs to $L^2(\Omega, C^1([0, T], E))$.

Step 2 (the approximate solutions form a Cauchy sequence). We will now show that $(x_t^p, v_t^p)_{0 \leq t \leq T}$ is a Cauchy sequence of $L^2(\Omega, C^0([0, T], E) \times C^1([0, T], E))$. Let $1 \leq p \leq q$ be integers and denote by $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{2q-p} < \dots < t_{2q-p+1} < \dots < t_{2q} = T$ the partition of $[0, T]$ associated to q . We note that $0 < t_{2q-p} < t_{2q-p+1} < \dots < t_{2q} = T$ is the partition associated with p . Let $s \in [0, T]$ and put $r_1(s) = t_{\lfloor s2^q \rfloor}$ and $r_2(s) = t_{\lfloor s2^p \rfloor}$. We then have

$$\begin{aligned} v_s^q - v_s^p &= \int_0^s (\nu(r_1(u), x^q_{/[0,r_1(u)]}, v_u^q) - \nu(r_2(u), x^p_{/[0,r_2(u)]}, v_u^p)) du \\ &\quad + \int_0^s (\sigma(r_1(u), x^q_{/[0,r_1(u)]}, v_u^q) - \sigma(r_2(u), x^p_{/[0,r_2(u)]}, v_u^p)) \delta W_u \\ &\quad + K_s^p - K_s^q \end{aligned}$$

with

$$dK_u^q \in A(r_1(u), x^q_{/[0,r_1(u)]}, v_u^q) du, \quad 0 \leq u \leq s,$$

and

$$dK_u^p \in A(r_2(u), x^p_{/[0,r_2(u)]}, v_u^p) du, \quad 0 \leq u \leq s.$$

Using Itô's formula, we can write

$$\begin{aligned} \|v_s^q - v_s^p\|^2 &= 2 \int_0^s (v_u^q - v_u^p, \delta v_u^q - \delta v_u^p) \\ &= 2 \int_0^s (\alpha(r_1(u), x^q_{/[0,r_1(u)]}, v_u^q) - \alpha(r_2(u), x^p_{/[0,r_2(u)]}, v_u^p), v_u^q - v_u^p) du \\ &\quad + 2 \int_0^s \|\sigma(r_1(u), x^q_{/[0,r_1(u)]}, v_u^q) - \sigma(r_2(u), x^p_{/[0,r_2(u)]}, v_u^p)\|^2 du \\ &\quad + 2 \int_0^s (\sigma(r_1(u), x^q_{/[0,r_1(u)]}, v_u^q) - \sigma(r_2(u), x^p_{/[0,r_2(u)]}, v_u^p), v_u^q - v_u^p) dW_u \\ &\quad + 2 \int_0^s (v_u^q - v_u^p, dK_u^p - dK_u^q), \end{aligned}$$

03PA0245/16

F. Bernardin, M. Schatzman and C.-H. Lamarque

where the norm of matrices is defined by $\|B\|^2 = \text{tr}\{B^T B\}$. Using lemmas 3.10, 3.9, the assumptions 2.2 and 2.3, Cauchy–Schwarz’s and Burkholder–Gundy–Davis’s inequalities and denoting $r(p, q) = \sup_{0 \leq s \leq T} |r_1(s) - r_2(s)|$, which tends to zero when p and q tend to infinity, we have

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \|v_s^q - v_s^p\|^2 \\ & \leq C_{\varphi n} \ell^2(r(p, q)) + C_{\varphi n} \int_0^t (\mathbb{E} \|x^p - x^q\|_{\infty, s}^2 + \mathbb{E} \|\dot{x}^p - \dot{x}^q\|_{\infty, s}^2 + \mathbb{E} \|v^p - v^q\|_{\infty, s}^2) ds \\ & \quad + C_{\varphi n} \mathbb{E} \sqrt{\int_0^t [\ell^2(r(p, q)) + \|x^p - x^q\|_{\infty, s}^2 + \|\dot{x}^p - \dot{x}^q\|_{\infty, s}^2 + \|v^p - v^q\|_{\infty, s}^2] \|v_s^q - v_s^p\|^2 ds} \\ & \quad + 2\mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \sum_{i=1}^{\lfloor s2^q \rfloor} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (v_u^q - v_u^p, dK_u^p - dK_u^q) + \int_{t_{\lfloor s2^q \rfloor}}^t (v_u^q - v_u^p, dK_u^p - dK_u^q). \end{aligned}$$

Using the inequalities

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}, \quad ab \leq (1/\delta)a^2 + \delta b^2 \quad (\delta > 0)$$

and lemma 3.13 for the intervals $[t_{i-1}, t_i]$ (on each of them we put $r = r_1$ and $r' = r_2$), we have

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \|v_s^q - v_s^p\|^2 \\ & \leq C_{\varphi n} \ell^2(r(p, q)) + C_{\varphi n} \delta \mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \|v_s^q - v_s^p\|^2 \\ & \quad + \frac{C_{\varphi n}}{\delta} \int_0^t (\mathbb{E} \|x^p - x^q\|_{\infty, s}^2 + \mathbb{E} \|\dot{x}^p - \dot{x}^q\|_{\infty, s}^2 + \mathbb{E} \|v^p - v^q\|_{\infty, s}^2) ds \\ & \quad + C_{\varphi n} \mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \left(\sum_{i=1}^{\lfloor s2^q \rfloor} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\ell^2(r(p, q)) + \|x^p - x^q\|_{\infty, u}^2 \right. \\ & \quad \quad \quad \left. + \|\dot{x}^p - \dot{x}^q\|_{\infty, u}^2 + \|v^p - v^q\|_{\infty, u}^2) du \right. \\ & \quad \quad \left. + \int_{t_{\lfloor s2^q \rfloor}}^t (\ell^2(r(p, q)) + \|x^p - x^q\|_{\infty, u}^2 \right. \\ & \quad \quad \quad \left. + \|\dot{x}^p - \dot{x}^q\|_{\infty, u}^2 + \|v^p - v^q\|_{\infty, u}^2) du \right). \end{aligned}$$

Choosing δ such that $C_{\varphi n} \delta = 1/2$, we can write

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \|v_s^q - v_s^p\|^2 \\ & \leq C_{\varphi n} \ell^2(r(p, q)) + C_{\varphi n} \int_0^t (\mathbb{E} \|x^p - x^q\|_{\infty, s}^2 + \mathbb{E} \|\dot{x}^p - \dot{x}^q\|_{\infty, s}^2 + \mathbb{E} \|v^p - v^q\|_{\infty, s}^2) ds. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Moreover, by lemmas 3.10 and 3.9, we have

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \|\dot{x}_s^q - \dot{x}_s^p\|^2 \\ & \leq C_{\varphi n} \ell^2(r(p, q)) + C_{\varphi n} \int_0^t (\mathbb{E}\|x^p - x^q\|_{\infty, s}^2 + \mathbb{E}\|\dot{x}^p - \dot{x}^q\|_{\infty, s}^2 + \mathbb{E}\|v^p - v^q\|_{\infty, s}^2) ds \end{aligned} \tag{4.7}$$

and

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \|x_s^q - x_s^p\|^2 \\ & \leq C_{\varphi n} \ell^2(r(p, q)) + C_{\varphi n} \int_0^t (\mathbb{E}\|x^p - x^q\|_{\infty, s}^2 + \mathbb{E}\|\dot{x}^p - \dot{x}^q\|_{\infty, s}^2 + \mathbb{E}\|v^p - v^q\|_{\infty, s}^2) ds. \end{aligned} \tag{4.8}$$

The inequalities (4.6)–(4.8) imply that

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\|x^q - x^p\|^2 + \|\dot{x}^q - \dot{x}^p\|_{\infty, t}^2 + \|v^q - v^p\|^2) \\ & \leq C_{\varphi n} \ell^2(r(p, q)) + C_{\varphi n} \int_0^t \mathbb{E}(\|x^p - x^q\|_{\infty, s}^2 + \|\dot{x}^p - \dot{x}^q\|_{\infty, s}^2 + \|v^p - v^q\|_{\infty, s}^2) ds, \end{aligned}$$

and the application of Gronwall’s lemma yields

$$\mathbb{E}(\|x^q - x^p\|^2 + \|\dot{x}^q - \dot{x}^p\|_{\infty, t}^2 + \|v^q - v^p\|^2) \leq C_{\varphi n} \ell^2(r(p, q))$$

and the sequence (x^p, v^p) is a Cauchy sequence in $L^2(\Omega, C^1([0, T], E) \times C^0([0, T], E))$ and there exists then a stochastic process (x, v) which is the limit of (x^p, v^p) .

To complete the proof of existence we must prove that (x, v) verifies the MSDE. For this it remains to show that $(K^p)_{p \geq 1}$ converges almost surely towards a process $(K_t)_{0 \leq t \leq T}$ with bounded variation on $[0, T]$ and verifying $dK_t \in A(t, x_{/[0, t]}, v_t) dt$. Since (x^p, v^p) converges in $L^2(\Omega, C^1([0, T], E) \times C^0([0, T], E))$, there exists a subsequence, which is still denoted by p , such that (x^p, v^p) tends almost surely to (x, v) in $C^1([0, T], E) \times C^0([0, T], E)$. It follows that K^p tends almost surely to a process K in $C^0([0, T], E)$.

Step 3 (uniform estimation of the total variation of K on $[0, T]$). For each $p \in \mathbb{N}^*$, we consider the above partition $0 < t_1^p < \dots < t_{2^p}^p = T$ of $[0, T]$ and we denote by $r_p(t)$ the t_i^p such that $t_i^p \leq t < t_{i+1}^p$.

Lemma 4.4. *There exists a random variable almost surely non-negative which estimates from above for all p the total variation $|K^p|_T$ of K^p on $[0, T]$.*

Proof. Let γ be a positive real and $A(\gamma, V') = \{(t, y, v) \in [0, T] \times TM, y \in V', \|v\|_y \leq \gamma\}$. By remark 2.6,

$$\mu = \sup_{(t, y, v) \in A(\gamma, V')} \|A'(t, y, v)\|_y \tag{4.9}$$

03PA0245/18

F. Bernardin, M. Schatzman and C.-H. Lamarque

is finite. We apply proposition 4.4 of Cépa (1998) (with $a = 0$ and γ) to the process (v^p, K^p) on each $[t_i^p, t_{i+1}^p]$ to obtain for all $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\begin{aligned}
\gamma |K^p|_s^t &\leq \sum_{i=k}^l \gamma |K^p|_{t_i}^{t_{i+1}} + \gamma |K^p|_s^{t_k} + \gamma |K^p|_{t_l}^t \\
&\leq \sum_{i=k}^l \left\{ \int_{t_i}^{t_{i+1}} (v^p(u), dK^p(u)) \right\} + \int_t^{t_l} (v^p(u), dK^p(u)) \\
&\quad + \int_s^{t_k} (v^p(u), dK^p(u)) \\
&\quad + \sum_{i=k}^l \left\{ \mu \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|v^p(u)\| du + \gamma \mu (t_{i+1} - t_i) \right\} \\
&\quad + \mu \int_s^{t_k} \|v^p(u)\| du + \gamma \mu (t_k - s) \\
&\quad + \mu \int_{t_l}^t \|v^p(u)\| du + \gamma \mu (t - t_l) \\
&= \int_s^t (v^p(u), dK^p(u)) + \mu \int_s^t \|v^p(u)\| du + \gamma \mu (t - s), \tag{4.10}
\end{aligned}$$

where t_k and t_l verify $t_{k-1} < s \leq t_k$ and $t_l \leq t < t_{l+1}$. Otherwise, with $w^p = v^p + K^p$, we have

$$\|v^p(t)\|^2 = \|w^p(t)\|^2 - 2 \int_0^t (v^p(u), dK^p(u)) + 2 \int_0^t (w^p(u) - w^p(t), dK^p(u))$$

and

$$-\|v^p(s)\|^2 = -\|w^p(s)\|^2 + 2 \int_0^s (v^p(u), dK^p(u)) - 2 \int_0^s (w^p(u) - w^p(s), dK^p(u)).$$

By summation of the two last equalities and using the inequality (4.10), we can write

$$2[\gamma - \sup\{\|w^p(u) - w^p(v)\|, |u - v| \leq |t - s|\}] |K^p|_s^t \leq C_{\varphi_n}(\omega),$$

since v^p , K^p and w^p are almost surely uniformly bounded with p on $[0, T]$. Recalling that $(w^p)_{p \geq 1}$ converges uniformly towards a continuous function w we can conclude by Ascoli's theorem that there exists $\eta_{\varphi_n}(\omega) > 0$ such that $\sup\{\|w^p(u) - w^p(v)\|, |u - v| \leq \eta_{\varphi_n}\} \leq \gamma/2$ and then $|K^p|_s^t \leq C_{\varphi_n}(\omega)/\gamma$. If $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_N = T$ is a partition of $[0, T]$ such that $s_{i+1} - s_i \leq \eta_{\varphi_n}$, then

$$|K^p|_T \leq \sum_{i=0}^{N-1} |K^p|_{s_i}^{s_{i+1}} \leq N_{\varphi_n} \frac{C_{\varphi_n}(\omega)}{\gamma}.$$

■

This last result implies that K is almost surely with bounded variation on $[0, T]$ and for all sequences of processes $\varphi_p \in C([0, T], E)$ converging almost surely in

$C([0, T], E)$ to a process φ , then (see Saisho (1987) for more details):

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_s^t (\varphi_p(u), dK^p(u)) = \int_s^t (\varphi(u), dK(u)), \quad 0 \leq s \leq t \leq T. \quad (4.11)$$

Step 4 (end of the proof). Let $\alpha, \beta : [0, T] \rightarrow E$ be two continuous functions such that β_t belongs to $A(t, x_{/[0,t]}, \alpha_t)$. Let us set $\beta_p(t) = \text{proj}_{\mathcal{K}_p(t)} \beta_t$ with $\mathcal{K}_p(t) = A(r_p(t), x_{/[0,r_p(t)]}^p, \alpha_t)$. By assumption 2.5,

$$\|\beta_p(t) - \beta(t)\| \leq C_{\varphi_n}(\omega)(\|x - x^p\|_{\infty, r_p(t)} + \|x(t) - x^p(r_p(t))\| + \ell(|t - r_p(t)|))$$

and then $(\beta_p)_p$ converges almost surely uniformly to β . Moreover, β_p is almost surely continuous on each $[t_i^p, t_{i+1}^p[$ and then

$$\int_{t_i^p}^{t_{i+1}^p} (v^p(u) - \alpha(u), dK^p(u) - \beta_p(u) du) \geq 0.$$

We deduce from this last inequality, (4.11) and the dominated Lebesgue theorem that

$$\int_s^t (v(u) - \alpha(u), dK(u) - \beta(u) du) \geq 0, \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

which is the definition of $dK(t) \in A(t, x_{/[0,t]}, v_t) dt$. ■

5. Existence and uniqueness in the local chart

(a) Existence

We return to the notation b_n, ν_n, σ_n and A_n , and n will tend to infinity. Let τ_n be the stopping time defined by $\tau_n(\omega) = \inf\{t \leq T, \|\dot{x}_t^n(\omega)\| \geq n \text{ or } \|v_t^n(\omega)\| \geq n\}$. Clearly, $(\tau_n)_{n \geq 1}$ is a non-decreasing sequence of stopping times and $(x_t^n, v_t^n) = (x_t^m, v_t^m)$ almost surely on $[0, \tau_n]$ for all $n \leq m$. We note then $\tau = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n$ and we put, for $0 \leq t < \tau(\omega)$, $x(t, \omega) = x^n(t, \omega)$ and $v(t, \omega) = v^n(t, \omega)$, where n is such that $t \leq \tau_n(\omega)$. Therefore, by theorem 4.3 and lemma 3.5, (x, v) verifies:

$$\left. \begin{aligned} \delta x_t &= \tilde{b}(t, x_{/[0,t]}, v_t) dt \\ \delta v_t &+ \tilde{A}(t, x_{/[0,t]}, v_t) dt \\ &\ni \tilde{\nu}(t, x_{/[0,t]}, v_t) dt + \tilde{\sigma}(t, x_{/[0,t]}, v_t) \delta W_t, \quad 0 \leq t < \tau, \\ (x(0), v(0)) &= (\eta_1, \eta_2). \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Lemma 5.1. *Almost surely, $\tau = T$.*

Proof. It suffices to prove for all $t \leq T$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\{\tau_n \leq t\} = 0.$$

Let $t < T$, $n \geq 1$. Since for all $0 \leq s \leq t \wedge \tau_n$, $\dot{x}_s = \tilde{b}(s, x_{/[0,s]}, v_s)$,

$$\|\dot{x}_s\| \leq C_\varphi \|v_s\|, \quad (5.2)$$

03PA0245/20

F. Bernardin, M. Schatzman and C.-H. Lamarque

and therefore, since $t < T$,

$$\|x_s\| \leq \|\eta_1\| + C_\varphi \|v\|_{\infty, s}. \quad (5.3)$$

We write

$$\begin{aligned} \|v_{s \wedge \tau_n}\|^2 &= \|\eta_2\|^2 + 2 \int_0^{s \wedge \tau_n} (v_u, \delta v_u) \\ &= \|\eta_2\|^2 + 2 \int_0^{s \wedge \tau_n} (v_u, \alpha(u, x_{/[0, u]}, v_u)) du \\ &\quad + 2 \int_0^{s \wedge \tau_n} \text{tr}\{\sigma(u, x_{/[0, u]}, v_u)^T \sigma(u, x_{/[0, u]}, v_u)\} du \\ &\quad - 2 \int_0^{s \wedge \tau_n} (v_u, dK_u) \\ &\quad + 2 \int_0^{s \wedge \tau_n} (v_u, \sigma(u, x_{/[0, u]}, v_u)) dW_u. \end{aligned}$$

Let $0 \leq u \leq v \leq T$. With the same notation of lemma 4.4 and by (4.10),

$$\gamma |K^p|_u^v \leq \int_u^v (v^p(s), dK^p(s)) + \mu \int_u^v \|v^p(s)\| ds + \gamma \mu (v - u),$$

and then, when p tends to infinity,

$$- \int_u^v (v(s), dK(s)) \leq \mu \int_u^v \|v(s)\| ds + \gamma \mu (v - u). \quad (5.4)$$

Lemma 3.3 gives the growth properties of \tilde{b} , $\tilde{\nu}$ and $\tilde{\sigma}$ and then, by assumption 2.3, the growth property of α . Using this lemma, (5.4) with $u = 0$ and $v = s \wedge \tau_n$, the Cauchy–Schwarz inequality and writing $\mu \|v(s)\| \leq (\mu^2 + \|v(s)\|^2)/2$, we have

$$\begin{aligned} \|v_{s \wedge \tau_n}\|^2 &\leq \|\eta_2\|^2 + C_\varphi + C_\varphi \int_0^{s \wedge \tau_n} \|v_u\|^2 du \\ &\quad + C_\varphi \int_0^{s \wedge \tau_n} (1 + \|x\|_{\infty, u} + \|\dot{x}\|_{\infty, u} + \|v\|_{\infty, u})^2 du \\ &\quad + 2 \int_0^{s \wedge \tau_n} (v_u, \sigma(u, x_{/[0, u]}, v_u)) dW_u. \end{aligned}$$

Taking the suprema and the expectation in the last inequality, using the assumptions 2.3 and 2.4, inequality $ab \leq ((1/\varepsilon)a^2 + \varepsilon b^2)/2$, $\varepsilon > 0$, the Burkholder–Gundy–Davis inequalities, (5.2) and (5.3)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \|v_{s \wedge \tau_n}\|^2 &\leq C_\varphi + C_\varphi \int_0^t \mathbb{E} \sup_{0 \leq u \leq s} \|v_{u \wedge \tau_n}\|^2 ds \\ &\quad + C_\varphi \mathbb{E}^{1/2} \left\{ \int_0^t \|v_s\|^2 (1 + \|v\|_{\infty, s}^2) ds \right\} \end{aligned}$$

and then

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \|v_{s \wedge \tau_n}\|^2 \leq C_\varphi + C_\varphi \int_0^t \mathbb{E} \sup_{0 \leq u \leq s} \|v_{u \wedge \tau_n}\|^2 ds + \frac{1}{2} \mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \|v_{s \wedge \tau_n}\|^2,$$

and the Gronwall lemma yields

$$\mathbb{E}\|v_{t \wedge \tau_n}\|^2 \leq C_\varphi$$

and by (5.2),

$$\mathbb{E}\|\dot{x}_{t \wedge \tau_n}\|^2 \leq C_\varphi.$$

Now,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\|v_{t \wedge \tau_n}\|^2 + \|\dot{x}_{t \wedge \tau_n}\|^2) &= \int_{\Omega} (\|v_{t \wedge \tau_n}\|^2 + \|\dot{x}_{t \wedge \tau_n}\|^2) d\mathbb{P} \\ &\geq \int_{\{\tau_n \leq t\}} (\|v_{t \wedge \tau_n}\|^2 + \|\dot{x}_{t \wedge \tau_n}\|^2) d\mathbb{P} \\ &\geq n^2 \mathbb{P}(\tau_n \leq t) \end{aligned}$$

and then

$$\mathbb{P}(\tau_n \leq t) \leq \frac{C_\varphi}{n^2},$$

which completes the proof. ■

Theorem 5.2. *There exists a solution to the system*

$$\begin{cases} \delta x_t = \tilde{b}(t, x_{/[0,t]}, v_t) dt, \\ \delta v_t + \tilde{A}(t, x_{/[0,t]}, v_t) dt \ni \tilde{\nu}(t, x_{/[0,t]}, v_t) dt + \tilde{\sigma}(t, x_{/[0,t]}, v_t) \delta W_t, & 0 \leq t < T, \\ (x(0), v(0)) = (\eta_1, \eta_2). \end{cases}$$

Proof. Since $\tau = T$, the construction of (x, v) from (x^n, v^n) and theorem 4.3 give the result. ■

By definition of \tilde{b} , \tilde{A} , $\tilde{\nu}$ and $\tilde{\sigma}$, if we put $\tau_U = \inf\{t < T, x(t) \notin U\} \wedge T$, $(x_t, v_t)_{0 \leq t < \tau_U}$ verifies

$$\begin{cases} \delta x_t = b(t, x_{/[0,t]}, v_t) dt, \\ \delta v_t + A(t, x_{/[0,t]}, v_t) dt \ni \nu(t, x_{/[0,t]}, v_t) dt + \sigma(t, x_{/[0,t]}, v_t) \delta W_t, & 0 \leq t < \tau_U, \\ (x(0), v(0)) = (\eta_1, \eta_2). \end{cases}$$

Remark 5.3. We can remark that the process $(x_t, v_t)_{0 \leq t < \tau_U}$ is \mathcal{F}_t -adapted.

(b) *Uniqueness*

We have the following proposition.

Proposition 5.4. *Let (x, v) and (x', v') be solutions to (4.1), then $x = x'$ almost surely and $v = v'$ almost surely.*

03PA0245/22

F. Bernardin, M. Schatzman and C.-H. Lamarque

Proof. Indeed, by Itô's formula,

$$\begin{aligned}
 \|v_t - v'_t\|^2 &= 2 \int_0^t (v_s - v'_s, \delta v_s - \delta v'_s) \\
 &= 2 \int_0^t (\nu_n(s, x_{/[0,s]}, v_s) - \nu_n(s, x'_{/[0,s]}, v'_s), v_s - v'_s) ds \\
 &\quad + 2 \int_0^t \|\sigma_n(s, x_{/[0,s]}, v_s) - \sigma_n(s, x'_{/[0,s]}, v'_s)\|^2 ds \\
 &\quad + 2 \int_0^t (\sigma_n(s, x_{/[0,s]}, v_s) - \sigma_n(s, x'_{/[0,s]}, v'_s), v_s - v'_s) \delta W_s \\
 &\quad + 2 \int_0^t (v_s - v'_s, dK'_s - dK_s). \tag{5.5}
 \end{aligned}$$

Using lemma 3.9, the inequality $\mathbb{E}\|x_t - x'_t\|^2 \leq C_{\varphi n} \mathbb{E}\|v_t - v'_t\|^2$ and lemma 3.13, (5.5) becomes

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \|v_s - v'_s\|^2 \leq C_{\varphi n}(t) \int_0^t \mathbb{E} \sup_{0 \leq u \leq s} \|v_u - v'_u\|^2 ds,$$

and the Gronwall lemma yields the result. ■

(c) Independence on the chart

Let V'_1 and V'_2 be two open subsets of M such that $V' = V'_1 \cap V'_2 \neq \emptyset$ and let $x_0 \in V'$. We denote by E the tangent space of M at the point x_0 . Let W' be an open subset of M such that $x_0 \in W' \subset \overline{W'} \subset V'$ and each pair of points of W' can be linked by a unique geodesic of M . Let $\varphi_1 : V'_1 \subset M \rightarrow V_1 \subset E$, $\psi_1 = \varphi_1^{-1}$, $\varphi_2 : V'_2 \subset M \rightarrow V_2 \subset E$, $\psi_2 = \varphi_2^{-1}$ two local charts of M such that $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0) = 0$ and $T_{x_0}\varphi_1 = T_{x_0}\varphi_2 = I_E$. We denote by b_i, ν_i, σ_i and A_i , $1 \leq i \leq 2$ the maps associated to φ_i . For all open subsets U' of M verifying $\overline{W'} \subset U' \subset \overline{U'} \subset V'$ and for all second-order random variables η on TM such that $\pi(\eta) \in W'$, we put $U = \varphi(U')$ and denote by (x^i, v^i) , ($1 \leq i \leq 2$), the solution to

$$\left. \begin{aligned}
 dx_t^i &= b^i(t, x_{/[0,t]}^i, v_t^i) dt, \\
 \delta v_t^i + A^i(t, x_{/[0,t]}^i, v_t^i) dt &\ni \nu^i(t, x_{/[0,t]}^i, v_t^i) dt + \sigma^i(t, x_{/[0,t]}^i, v_t^i) \delta W_t, \\
 (x^i(0), v^i(0)) &= (\varphi_i(\eta), \bar{\tau}(\pi(\eta)x_0)\eta),
 \end{aligned} \right\} \tag{5.6}$$

until the exit time τ_U^i of U .

Let $\tau_U = \tau_U^1 \wedge \tau_U^2$. To prove the independence on the chart, it suffices to show that $x_t^2 = \varphi_2(\psi_1(x_t^1))$ and $v_t^2 = v_t^1$ for all $t < \tau_U$. To do this, by uniqueness of (5.6), we will prove that $(\varphi_2(\psi_1(x_t^1)), v_t^1)$ is a solution of (5.6) with $i = 2$. For $t < \tau_U$, let us define $y_t = \varphi_2(\psi_1(x_t^1))$ and write

$$\begin{aligned}
 \dot{y}(t) &= T_{\psi_1(x_t^1)}\varphi_2(T_{x_t^1}\psi_1\dot{x}_t^1) \\
 &= (T_{\psi_2(x^2)}\varphi_2\tau(\psi_2(x_{/[0,t]}^2))\bar{\tau}(x_0, \pi(\eta)))(\bar{\tau}(\pi(\eta), x_0)(\tau(\psi_1(x_{/[0,t]}^1))))^{-1} T_{x_t^1}\psi_1\dot{x}_t^1 \\
 &= b_2(t, x_{/[0,t]}^2)(b_1(t, x_{/[0,t]}^1))^{-1}\dot{x}_t^1 \\
 &= b_2(t, x_{/[0,t]}^2, v_t^1).
 \end{aligned}$$

To complete the proof, it remains to show that $\nu_2(t, y_{/[0,t]}) = \nu_1(t, x^1_{/[0,t]})$ and similar equalities for σ_2 and A_2 . By definition of ν_2 , ν_1 , x^1 and x^2 , we can write, for $0 \leq t < \tau_U$ and $v \in E$:

$$\begin{aligned} \nu_2(t, y_{/[0,t]}) &= \bar{\tau}(\pi(\eta), x_0)(\tau(\psi_2(y_{/[0,t]})))^{-1} \nu'(t, \psi_2(y)(t), \tau(\psi_2(y))\bar{\tau}(x_0, \pi(\eta))v) \\ &= \bar{\tau}(\pi(\eta), x_0)(\tau(\psi_1(x^1_{/[0,t]})))^{-1} \nu'(t, \psi_1(x_1)(t), \tau(\psi_1(x^1_{/[0,t]}))\bar{\tau}(x_0, \pi(\eta))v) \\ &= \nu_1(t, x^1_{/[0,t]}, v) \end{aligned}$$

and the calculations are similar for σ_2 and A_2 .

In §3, we have shown the existence and uniqueness in a local chart, and in this section we have proved that two local solutions starting with the same local initial data obtained thanks to several local charts define the same solution on the manifold.

6. Global existence on the manifold

We have the following result.

Proposition 6.1. *Let T be a strictly positive number, and let A' , σ' and ν' satisfy assumptions 2.2–2.5. Let $\mathcal{E}' = (\Omega, \mathcal{F}', (\mathcal{F}'_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ be a filtered probability space verifying the usual conditions. Let B_t be the standard \mathbb{R}^d Brownian motion on \mathcal{E}' , and let T_0 be an \mathcal{F}'_t -stopping time with values in $[0, T]$ almost surely. Let η' be an \mathcal{F}'_{T_0} -measurable random variable which takes its values in TM and whose second-order moment is finite. There exists a unique \mathcal{F}'_t -adapted solution (x'_t, v'_t) to the following system:*

$$\left. \begin{aligned} \delta x'_t &= v'_t dt, \\ D_{\dot{x}'_t} v'_t + A'(t, x'_t, v'_t) dt &\ni \nu'(t, x'_t, v'_t) dt + \sigma'(t, x'_t, v'_t) \delta B_t, \quad T_0 \leq t \leq T, \\ (x'(T_0), v'(T_0)) &= (\pi(\eta'), \eta'), \quad \text{a.s.} \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Proof. We keep the notation used until now. Under the assumption that $\pi(\eta')$ takes its values almost surely in W' , we have obtained the existence of a solution $(x'_t, v'_t)_{T_0 \leq t < \tau_{U'}}$ of (2.1) for all open subsets U' of M containing the closed set \bar{W}' and which can be described by a unique chart of M . Moreover, (x'_S, v'_S) is \mathcal{F}'_S -measurable for all \mathcal{F}'_t -stopping time S such that $T_0 \leq S \leq T$ almost surely. We now suppose that η' can take its values in all TM .

A consequence of assumption 2.1 is that M can be covered by an, at most, countable number of open sets W'_i such that

- (i) for each pair of points of W'_i there is a unique geodesic between them;
- (ii) $\pi^{-1}W'_i$ is trivialisable;
- (iii) W'_i is included in one of the balls $B_M(z_k, r')$.

Let W''_i now be a measurable partition of M such that W''_i is included in W'_i . We define

$$\Omega_i = (\pi\eta')^{-1}W''_i$$

and η'_i a random variable on W''_i which coincides with η' on Ω_i . Let (x'_i, v'_i) be the solution to (2.1) with initial condition η'_i at time T_0 . Let $K(i)$ be the set of indices k

03PA0245/24

F. Bernardin, M. Schatzman and C.-H. Lamarque

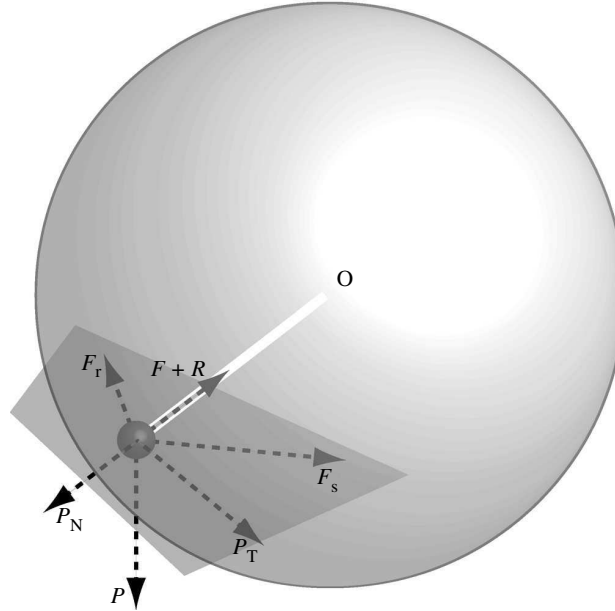


Figure 1. The weight is P , its normal and tangential components are, respectively, P_N and P_T , F_r is the friction force, F_s is the stochastic force and $F + R$ is the sum of the reaction of the constraints and the tension of the stem.

such that W'_i is included in $B_M(z_k, r')$. There is for each $k \in K(i)$ an exit time σ_k , which is the largest time for which $x'_{i/[T_0, \sigma_k[}$ belongs to $B_M(z_k, r)$, and we let

$$\bar{\sigma}_i = \max\{\sigma_k, k \in K(i)\}.$$

We define now a \mathcal{F}'_t -stopping time

$$\tau(T_0, \eta') = \sum_i \mathbf{1}_{\Omega_i} \bar{\sigma}_i;$$

then (x', v') is obtained by patching together the (x'_i, v'_i) :

$$(x', v') = \sum_i \mathbf{1}_{\Omega_i} (x'_i, v'_i),$$

which is well defined for all stopping times $S \in [T_0, \tau(T_0, \eta')[$. In particular (x'_S, v'_S) is \mathcal{F}'_S -measurable. We are going to estimate $\tau(T_0, \eta')$ from below: on $\{\tau(T_0, \eta') < T\}$, $x'(\tau(T_0, \eta'))$ is almost surely at least at a distance $r - r'$ from $x'(T_0)$. By the triangle inequality,

$$\int_{T_0}^{\tau(T_0, \eta')} \|v'(s)\|_{x'(s)} ds \geq r - r'. \tag{6.2}$$

Denoting by $\tau_1 = \tau(T_0, \eta')$, we obtained thus a solution $(x'_t, v'_t)_{T_0 \leq t < \tau_1}$ of (2.1) with initial condition $\eta' \in TM$ at time T_0 . We can apply the previous process with $\eta' = v'(\tau_1)$ and $T_0 = \tau_1$ and define then a \mathcal{F}'_t -stopping time τ_2 and so on. We construct thus a non-decreasing sequence $(\tau_n)_n$ of stopping time, which tends to a

stopping time τ . By similar calculations to those presented in lemma 5.1, we can show that, for $t < T$ and for all n ,

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \|v'_{s \wedge \tau_n}\|_{x'(s)}^2 \leq C.$$

Moreover, by (6.2) applied on each $[\tau_i, \tau_{i+1}[$, we have for all stopping time $S \in [T_0, T[$,

$$C \geq \mathbb{E} \int_{T_0}^S \|v'(s)\|_{x'(s)} ds \geq \int_{\{\tau_n \leq S\}} n(r - r') d\mathbb{P},$$

and then

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\{\tau_n \leq S\}) = 0,$$

which proves that $\tau = T$. ■

7. Application to the pendulum

We consider a spherical pendulum (see figure 1) consisting of a material point with unit mass attached to a rigid stem of length 1 and of negligible mass, which is connected at its other end to a fixed point O by a connection authorizing only angular displacements. In our units, the gravity is 1. In addition to its weight, the pendulum is submitted, at its mobile end, to a dry friction of Coulomb type (with coefficient μ) and a random force acting in the tangent plane of the sphere. We will now define precisely our model of stochastic and dry friction forces. The initial conditions are $(x_0, v_0) \in \mathcal{TS}^2$.

In the present case, the Riemannian metric is the metric induced by the Euclidean metric of \mathbb{R}^3 and, therefore, we will abuse notation and denote the scalar product in the tangent space at x to \mathbb{S}^2 without an index x , the same convention holding for the norm of tangent vectors.

Let H_1 and H_2 be two sections of \mathcal{TS}^2 which satisfy the following conditions.

Assumption 7.1.

$$\forall x \in \mathbb{S}^2, \|H_1(x)\|_x + \|H_2(x)\|_x \leq C, \tag{7.1}$$

$\forall x, y \in \mathbb{S}^2$ in the same open hemisphere

$$\|H^1(x) - \bar{\tau}(y, x)H^1(y)\|_x + \|H^2(x) - \bar{\tau}(y, x)H^2(y)\|_x \leq Cd_{\mathbb{S}^2}(x, y). \tag{7.2}$$

Observe that (7.2) implies the continuity of H_1 and H_2 ; therefore, according to the theorem of the hairy sphere, each of the fields H_1 and H_2 has to vanish at some point of \mathbb{S}^2 .

Let (W^1, W^2) be a two-dimensional Brownian motion; we formally write the stochastic part of the exterior forces as

$$F_s(t, x) dt = dW^1(t)H_1(x) + dW^2(t)H_2(x).$$

Thanks to assumptions (7.1) and (7.2), the linear mapping

$$\sigma'(x)(v^1, v^2) = v^1 H_1(x) + v^2 H_2(x)$$

satisfies assumptions 2.3 and 2.4 of § 2.

03PA0245/26

F. Bernardin, M. Schatzman and C.-H. Lamarque

If $t \mapsto x(t)$ is a motion on the sphere \mathbb{S}^2 , we differentiate twice the relation $\|x(t)\|^2 = 1$ and we find $x \cdot \ddot{x} = -|\dot{x}|^2$, which means that the normal component of the acceleration is $a_N(x, v) = -\|v\|^2 x$.

The normal component of the weight at x is $P_N(x) = p^n(x)x$, with $p^n(x)$ equal to x_3 . Therefore, the sum of the reaction of the support and of the tension of the stem is

$$R(x, v) + F(x, v) = x(x_3 + \|v\|^2).$$

The friction force is then given by the multivalued relation

$$F_r(x, v) \in \begin{cases} \{0\} & \text{if } p^n(x) \leq -\|v\|^2, \\ -\mu\{(p^n(x) + \|v\|^2)v/\|v\|\} & \text{if } p^n(x) > -\|v\|^2 \text{ and } v \neq 0, \\ \mu\{u \in T_x\mathbb{S}^2, \|u\| \leq p^n(x), \} & \text{if } p^n(x) > 0 \text{ and } v = 0. \end{cases} \quad (7.3)$$

Let us check now that $-F_r$ is a monotone operator in the fibre, i.e. for all $w \in -F_r(x, v)$ and $w' \in -F_r(x, v')$, the following inequality holds:

$$(w - w', v - v') \geq 0. \quad (7.4)$$

If v and v' are both in case 1 or 3 of (7.3), it is plain that (7.4) holds. If w is in case 2 or 3, and w' is in case 1, the conclusion is still clear; therefore, we just have to check the inequality when v and v' are in case 2, or when v is in case 2 and v' is in case 3.

If neither v nor v' vanish and $p^n(x) > -\min(\|v\|^2, \|v'\|^2)$, then

$$(w - w', v - v') = p^n(x) \left(\left(\frac{v}{\|v\|} - \frac{v'}{\|v'\|} \right), v - v' \right) + (\|v\|v - \|v'\|v', v - v').$$

An elementary calculation shows that the above expression is non-negative.

If v is in the second case and v' in the third, we have to study the expression

$$\left((p^n(x) + \|v\|^2) \frac{v}{\|v\|} - u, v \right),$$

where $\|u\| \leq p^n(x)$. It is once again straightforward to verify that this expression is non-negative.

If we put $\nu'(x, v) = P_T(x) = -x + x_3x$, which is the tangential component of the weight, the equation of the dynamic applied to the pendulum takes the form:

$$\left. \begin{aligned} dx_t &= v_t dt, \\ D_{\dot{x}(t)}v_t + A'(x_t, v_t) dt &\ni \nu'(x_t, v_t) dt + \sigma'(x_t) dW_t, \quad 0 \leq t < T, \\ (x(0), v(0)) &= (x_0, v_0). \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

Remark 7.2. Observe that we could have considered more general forces than the weight, which can be easily included in this theory.

Thanks to remark 2.8 and, since assumptions 2.3–2.5 are clearly verified, we then have the existence and uniqueness of solutions to equation (7.5).

8. Conclusion

In this work a new result on stochastic differential equations is given: the existence and uniqueness of solutions to MSDEs on Riemannian manifolds are obtained. This

work generalizes the results of Cépa (1998) devoted to the Euclidean case. To simplify the expression of Stratonovich's covariant differential in the equation relative to velocities, that is, to eliminate the quadratic terms, which offers the possibility to approximate equations by classical (with Lipschitz continuous assumptions) MSDE on Euclidean space, we used the parallel transport along the solution curve, but we had to pay by losing Lipschitz continuity of \tilde{b} . Then we had to approximate \tilde{b} by Lipschitz continuous maps b_n and this allowed us to construct the expected solution. From the application viewpoint the result obtained in this article finds its interest in the modelling of mechanical systems submitted to stochastic forcing and friction; the example of the stochastic spherical pendulum with friction fits into this framework.

To approximate the solution it is possible to adapt a numerical scheme developed for classical stochastic differential equations with convex constraints in Petterson (2000) and for general MSDE in Bernardin (2003). Numerical simulation of this class of models is the topic of future work.

The authors express their thanks to Professor J. Picard and Professor A. Lachal for their suggestions and encouragement.

References

- Abraham, R. & Marsden, J. E. 1985 *Foundations of mechanics*. Addison-Wesley.
- Ballard, P. 2002 Formulation and well-posedness of the dynamics of rigid bodies with unilateral or frictional constraints. In *Advances in mechanics and mathematics*, pp. 3–88. Dordrecht: Kluwer Academic.
- Bernardin, F. 2003 Multivalued stochastic differential equations: convergence of a numerical scheme. *Set-Valued Analysis* **11**, 393–415.
- Brézis, H. 1973 *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. Amsterdam: North-Holland.
- Cépa, E. 1995 *Equations différentielles stochastiques multivoques*. Lecture Notes in Mathematics, Séminaire de Probabilités, vol. XXIX, pp. 86–107. Springer.
- Cépa, E. 1998 Problème de Skorohod multivoque. *Ann. Probab.* **26**, 500–532.
- Emery, M. 1989 *Stochastic calculus in manifolds*. Springer.
- Ikeda, N. & Watanabe, S. 1989 *Stochastic differential equations and diffusion processes*, 2nd edn. Amsterdam: North-Holland.
- Karatzas, I. & Shreve, E. 1991 *Brownian motion and stochastic calculus*, 2nd edn. Springer.
- Mao, X. 1997 *Stochastic differential equations and applications*. Horwood.
- Norris, J. R. 1992 *A complete differential formalism for stochastic calculus in manifolds*. Lecture Notes in Mathematics, Séminaire de Probabilités, vol. XXVI, pp. 189–209. Springer.
- Petterson, R. 2000 Projection scheme for stochastic differential equations with convex constraints. *Stoch. Process. Applic.* **88**, 125–134.
- Saisho, Y. 1987 Stochastic differential equations for multi-dimensional domain with reflecting boundary. *Probab. Theory Relat. Fields* **74**, 455–477.

Chapitre 3

Modélisation de structures mécaniques et identification

3.1 Introduction

L'étude des bâtiments, et plus généralement de structures mécaniques, soumises à des séismes, est une préoccupation largement répandue dans le monde de l'ingénierie (voir par exemple [?, ?, ?]). Le problème est le suivant : étudier la réponse d'un bâtiment soumis à des sollicitations sismiques. Il revêt plusieurs aspects qui une fois mis en évidence permettent d'obtenir une "mise en équation" du phénomène. La démarche qui est entreprise est donc celle de la modélisation qui permettra un traitement mathématique et numérique et donc prédictif qui prépare aussi l'identification de paramètres de certains modèles que l'on détaillera par la suite. Il faut alors déterminer les différents éléments à modéliser qui paraissent décrire de manière significative le problème réel auquel on est confronté. Dans le cas d'une structure soumise à des sollicitations sismiques, les éléments suivants sont à relever :

1. modélisation de la structure et de sa fondation ;
 - (a) un seul élément pour représenter la fondation (ou la structure) alors définie par sa masse ;
 - (b) plusieurs éléments : connexion entre eux ?
2. modélisation du couplage sol-structure ;
3. modélisation de la sollicitation sismique.

3.2 Modélisation de la structure

La modélisation de la structure dépend des informations que l'on veut obtenir mais également des informations que l'on a sur la structure elle-même. Si l'objectif est d'avoir dans un premier temps une idée qualitative de la réponse de la structure, il n'est pas nécessaire de considérer une modélisation complexe et identifier un bâtiment à sa masse peut constituer une première approche. Si l'on veut être plus précis, on peut considérer l'interaction des différents éléments qui composent le bâtiment (les différents étages par exemple) en associant une modélisation *ad hoc*. Plusieurs modélisations peuvent être employées : modèle de poutre, assemblage de masses, ressorts et amortissements visqueux, etc. Nous retiendrons dans la suite le deuxième type de modélisation qui consiste à représenter

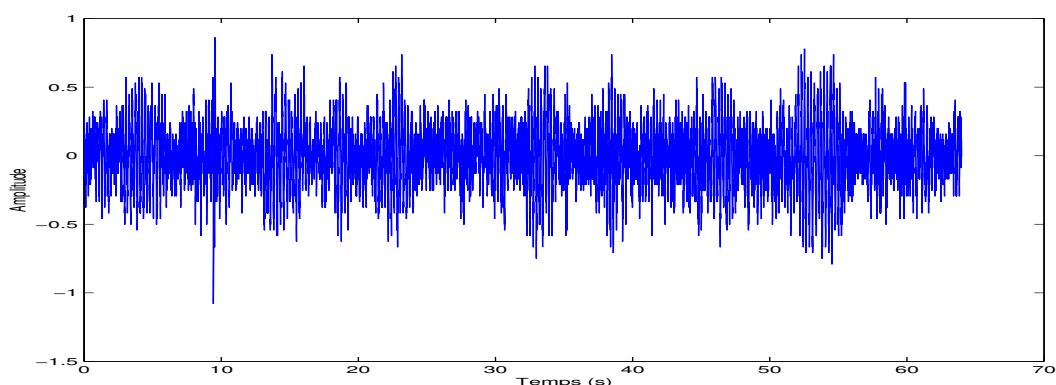


FIG. 3.1 – Exemple de bruit de fond.

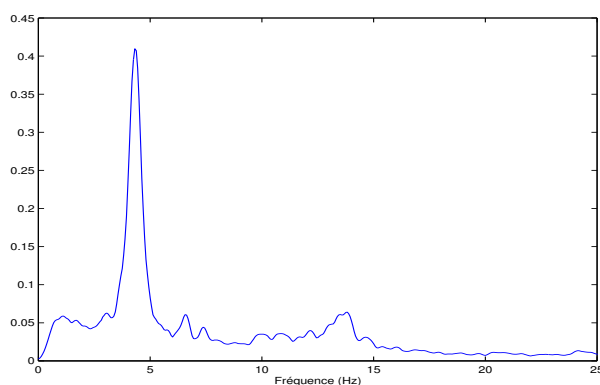


FIG. 3.2 – Exemple de transformée de Fourier de la réponse.

la structure par une mise en série ou en parallèle d'éléments simples comme des masses, ressorts ou amortissements visqueux.

Les informations que l'on peut avoir sur les structures via des mesures expérimentales contribuent à l'élaboration d'une modélisation d'autant plus précise que ces résultats expérimentaux sont pris en considération. On peut citer par exemple des mesures de vibrations engendrées par le trafic routier effectuées sur des bâtiments situés en bordure d'autoroutes ou de périphériques. Des mesures identiques peuvent également être réalisées sur des bâtiments destinés à la destruction en générant des vibrations artificiellement. Il ressort de ces dernières des modes principaux de vibration qui représenteront une partie des éléments de la modélisation (voir [?]).

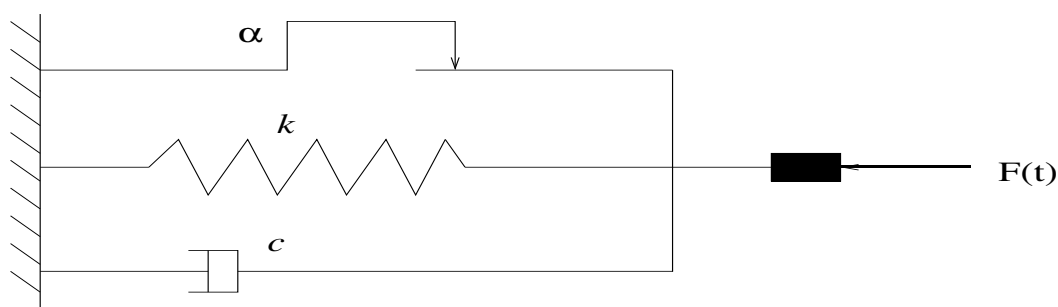
On a représenté par exemple sur la Figure 3.1 un bruit de fond (trafic routier) sollicitant un bâtiment. Des capteurs permettent de mesurer le déplacement en tête de bâtiment et une analyse de Fourier du signal réponse fait ressortir les fréquences propres (voir Figure 3.2).

3.3 Couplage sol-structure

L'interaction entre sol et structure est primordiale dans le problème évoqué puisque toute sollicitation appliquée au sol est transmise par son intermédiaire à la structure. En supposant connues la sollicitation (voir paragraphe suivant) et la structure étudiée via une



FIG. 3.3 – Éléments utilisés pour la modélisation rhéologique des sols.

FIG. 3.4 – Modèle de *Coulomb*.

certaine modélisation, il nous faut connaître l'interaction sol-structure pour être à même d'évaluer la réponse de la structure. Là encore, plusieurs approches peuvent être utilisées, comme par exemple les modèles de cônes : une portion du sol située au-dessous de la structure et en forme de cône est prise en compte pour l'interaction avec la structure (voir [?, ?]). Ces modèles peuvent conduire, après décomposition en éléments finis par exemple, à un assemblage de masses, ressorts et amortissements visqueux.

On voit donc, tant dans la modélisation de la structure que du couplage sol-structure, apparaître des assemblages de masses et d'éléments linéaires. Il peut être avantageux, pour élargir les modèles, d'introduire des éléments non linéaires comme par exemple l'élément de Saint-Venant, appelé encore patin et représenté sur la Figure 3.3. De tels modèles avec présence de non linéarités ont été étudiés par exemple dans [?] sur la ruine d'un oscillateur élastoplastique soumise à un bruit blanc, modélisant une structure sous séisme.

On reprend ici les modèles étudiés par Jérôme Bastien dans sa thèse [?] auxquels on a apporté quelques modifications en considérant de l'amortissement visqueux.

1. Frottement de Coulomb

On considère une masse m frottant sur un support soumise à une excitation F dont la force de rappel est visco-élastique linéaire de caractéristique k et c (voir Figure 3.4).

En notant μ_d et μ_s les coefficients de frottement respectivement dynamique et statique, F_n la force normale exercée par le support sur la masse, x le déplacement relatif de la masse par rapport au support, la relation fondamentale de la dynamique

s'énonce selon :

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) - \mu_d F_n \text{signe}(\dot{x}) & \text{pour } \dot{x} \neq 0 \\ kx = F(t) + F_s \text{ avec } F_s \in [-\mu_s F_n; \mu_s F_n] & \text{pour } \dot{x} = 0 \\ x(0) = x_0 \text{ et } \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

L'équation (3.1) du mouvement peut s'écrire aussi sous la forme plus condensée :

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \alpha\sigma(\dot{x}) \ni F \\ x(0) = x_0 \text{ et } \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

où $\alpha = \mu F_n$, $\mu = \mu_d = \mu_s$ et la fonction σ est défini par la formule suivante :

$$\sigma(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x > 0, \\ [-1, 1] & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

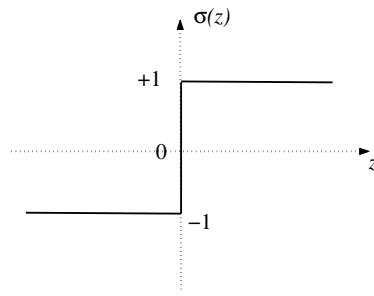


FIG. 3.5 – Graphe $\sigma(z)$.

2. Modèle de Prandtl

Considérons le modèle représenté sur la Figure 3.6 où l'on associe en série un ressort de raideur k , un amortisseur de caractéristique c et un patin de seuil α .

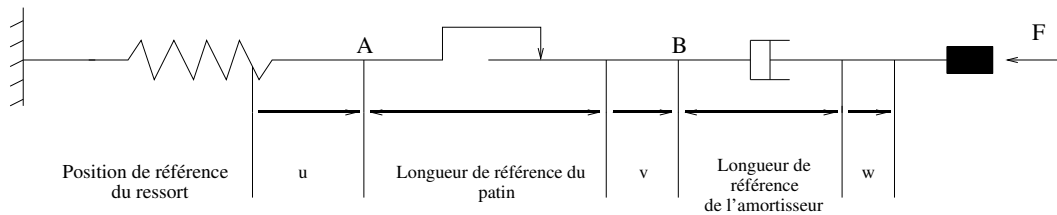


FIG. 3.6 – Modèle de *Prandtl*.

En notant u le déplacement du ressort, v celui du patin, w celui de l'amortisseur chacun par rapport à une longueur de référence respective et f la force exercée par A sur B , on peut écrire :

$$x = u + v + w \quad (3.4)$$

$$f = -ku, \quad (3.5)$$

$$f \in -\alpha\sigma(\dot{v}), \quad (3.6)$$

$$f = -c\dot{u}. \quad (3.7)$$

La relation fondamentale de la dynamique et (3.5) donnent :

$$m\ddot{x} = F - ku \quad (3.8)$$

De (3.4), (3.5) et (3.6), nous obtenons :

$$ku \in \alpha\sigma\left(\dot{x} - \dot{u} - \frac{ku}{c}\right). \quad (3.9)$$

Ceci implique que :

$$\dot{u} + \beta\left(\frac{ku}{\alpha}\right) \ni \dot{x} - \frac{ku}{c}, \quad (3.10)$$

où β est le graphe inverse de α défini par (voir Figure 3.7) :

$$\beta(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[, \\ \{0\} & \text{si } x \in]-1, 1[, \\ \mathbb{R}_- & \text{si } x = -1, \\ \mathbb{R}_+ & \text{si } x = 1. \end{cases} \quad (3.11)$$

En posant $y = \dot{x}$ et remarquant que (3.5) et (3.6) impliquent $u \in [-\frac{\alpha}{k}; \frac{\alpha}{k}]$, le modèle

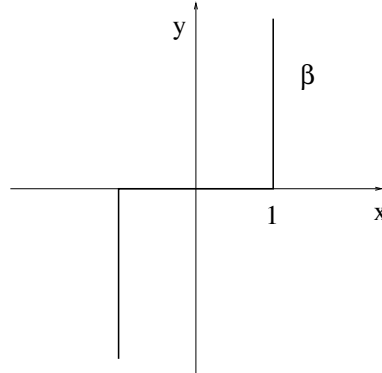


FIG. 3.7 – Graphe β .

de *Prandtl* est régi par le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = (F - ku)/m, \\ \dot{u} + \beta(u/\eta) \ni y - ku/c, \end{cases} \quad (3.12)$$

avec les conditions initiales

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad u(0) = u_0 \in [-\eta, \eta], \quad (3.13)$$

où l'on a posé $\eta = \frac{\alpha}{k}$.

3. Les deux modèles précédents peuvent être associés en série et en parallèle pour obtenir des modèles plus complexes développés dans [?] et [?]. Pour des précisions sur ces derniers, on se reportera à ces deux références.

Remarque 3.1. Les deux modèles précédents recouvrent un même aspect formel, à savoir l'utilisation pour des équations différentielles, de fonctions qui sont à valeurs non dans \mathbb{R} mais dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ d'où l'utilisation d'opérateurs multivoques.

3.4 Modélisation de la sollicitation sismique

3.4.1 Introduction

Considérons un bâtiment implanté sur un site donné pour lequel des investigations expérimentales ont été menées. A l'aide des modèles précédents, il est possible de rendre compte dans un certain formalisme mathématique du couplage sol-structure. Dès lors, la structure et son comportement vis-à-vis de son environnement (sol sur lequel elle repose) est d'une certaine manière appréhendée. Pour évaluer la réponse d'une telle structure à une excitation sismique future, il faut modéliser cette sollicitation et de la manière la plus générale qu'il soit.

Dans le domaine sismique, et plus particulièrement dans celui relevant de la modélisation de la sollicitation, la norme européenne EUROCOD 8 fait référence. Nous allons présenter plusieurs approches, chacune d'elle pouvant s'inscrire dans le cadre de cette norme, et nous intéresser plus particulièrement à l'une d'entre elles. Bien qu'une certaine pluralité est permise par EUROCOD 8, une condition de conformité au *spectre de réponse réglementaire* est néanmoins imposée.

3.4.2 Spectre de réponse réglementaire

La méthode du spectre de réponse est une approche exclusivement fréquentielle du problème, laissant de côté l'aspect temporel. Plus précisément, il s'agit de considérer d'une part un oscillateur à un degré de liberté défini par sa pulsation propre ω et son taux d'amortissement ξ et d'autre part l'accélération \ddot{x}_{sol} du sol que l'on prend quelconque. Cet oscillateur est régi par l'équation :

$$\begin{cases} -\ddot{x}_{sol} = \ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

dont la solution (intégrale de *Duhamel*) est :

$$x(t) = \frac{-1}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} \int_0^t x_{sol}(\tau) \exp^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin(\omega\sqrt{1-\xi^2}(t-\tau)) d\tau \quad (3.15)$$

On considère ensuite le maximum de la réponse x sur un intervalle de temps $[0, T]$. Le spectre de réponse est alors l'application de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ qui à ω fixé associe le maximum de la réponse.

Remarque 3.2. Deux points sont à relever :

1. Ce spectre de réponse dépend de l'accélération du sol donc n'est déterminé que pour un accélérogramme donné.
2. Il dépend également de la durée T considérée.

Une fois obtenu le spectre de réponse, on vérifie la structure (bâtiment par exemple) sous ce spectre, c'est-à-dire en estimant pour certaines pulsations caractéristiques de la structure la réponse de la structure. On voit apparaître les limites de ce mode opératoire :

1. Il s'agit d'un spectre relatif à un accélérogramme donné et on ne vérifie alors la structure que pour cet accélérogramme (ou pour une accélération du sol donnée). Il est possible d'y remédier en définissant un spectre moyen (réglementaire) à partir de traitement statistique dans lequel interviennent les caractéristiques du séisme (magnitude, distance à l'hypocentre et/ou épïcêtre) : à chaque type de séisme est associé un spectre moyen et l'on vérifie la structure sous ce dernier.

2. Le traitement est exclusivement fréquentiel, l'aspect temporel n'intervenant que dans le choix de la durée T et il n'est alors approprié qu'aux structures à comportement linéaire dont on peut, à partir de la base modale, obtenir des oscillateurs simples (de fréquence propre ω_n et de taux d'amortissement ξ_n) découplés dont on connaît pour chacun d'eux le maximum de réponse par définition même du spectre de réponse.

Si l'on s'intéresse à des structures à comportement non-linéaire (voir [?]), le traitement temporel est nécessaire et il faut alors générer des accélérogrammes, ce qui revient à modéliser l'accélération du sol lors d'un séisme, cette modélisation prenant en compte le maximum de caractéristiques du phénomène physique. On pourrait utiliser des accélérogrammes réels enregistrés pour dimensionner une structure mais la nature très irrégulière, peut-être même aléatoire..., observée sur les accélérogrammes laissent penser que toute l'information n'est pas contenue dans un ou plusieurs accélérogrammes et qu'il faut plutôt chercher à modéliser des accélérogrammes dits synthétiques. Dans l'esprit d'EUROCOD 8, la génération de tels accélérogrammes, pour laquelle il n'est pas imposée de méthode particulière, doit en revanche être conforme au spectre de réponse réglementaire.

Pour modéliser l'accélération du sol, on distingue deux méthodes, l'une s'appuyant sur l'étude d'accélérogrammes réels, l'autre sur l'étude de la source sismique.

3.4.3 Etude de la source sismique

La méthode consiste à déterminer le mécanisme de la rupture à l'origine du séisme et d'étudier ensuite la transmission des ondes de la source au site considéré. C'est un travail réalisé par les sismologues et géophysiciens qui demande, pour être compris, certaines connaissances dans le domaine. Nous indiquons les quelques références que nous avons pu relever pour des précisions sur le sujet : [?, ?, ?].

Remarque 3.3. Cette méthode s'applique lorsque, pour un site considéré, l'origine des ondes sismiques ainsi que les caractéristiques de leur transmission sont connues, ce qui implique une distance raisonnable entre le site et la source. En effet, la transmission d'ondes est difficile à appréhender et multiplier les distances augmente cette difficulté.

3.4.4 Etudes d'accélérogrammes

Une des méthodes, dite *méthode probabiliste*, consiste à considérer l'accélération du sol comme un processus stochastique stationnaire. On peut alors lui associer sa *densité spectrale de puissance* (voir la Définition 1.32) que l'on peut relier au spectre de réponse (voir [?]). Aussi le spectre de réponse (imposé par la norme) étant déterminé, on cèle le processus via sa densité spectrale de puissance par itérations successives (voir [?, ?, ?]). Pour tenir compte du caractère non-stationnaire observé sur les accélérogrammes réels, on module ce processus par une fonction g déterministe dépendant du temps.

Une autre méthode, dite du *spectre physique* et développée par Sabetta et Pugliese en 1995 dans [?] et en 1996 dans [?], consiste à générer des accélérogrammes pour une situation spécifique (magnitude, distance hypo- et épacentrale et conditions locales du site déterminées).

A partir de 190 accélérogrammes enregistrés en Italie, les auteurs ont déterminé un spectre de puissance noté $PS(\omega, t)$ qui correspond à une collection indexée par le temps de densités spectrales de puissance d'où la dépendance en ω et t de PS . Cette approche est très intéressante puisqu'elle tient compte de la non-stationnarité des accélérations du sol au contraire de l'autre méthode qui n'est pas tout à fait non-stationnaire mais quasi-stationnaire (g est à variation très lente par rapport au processus stationnaire).

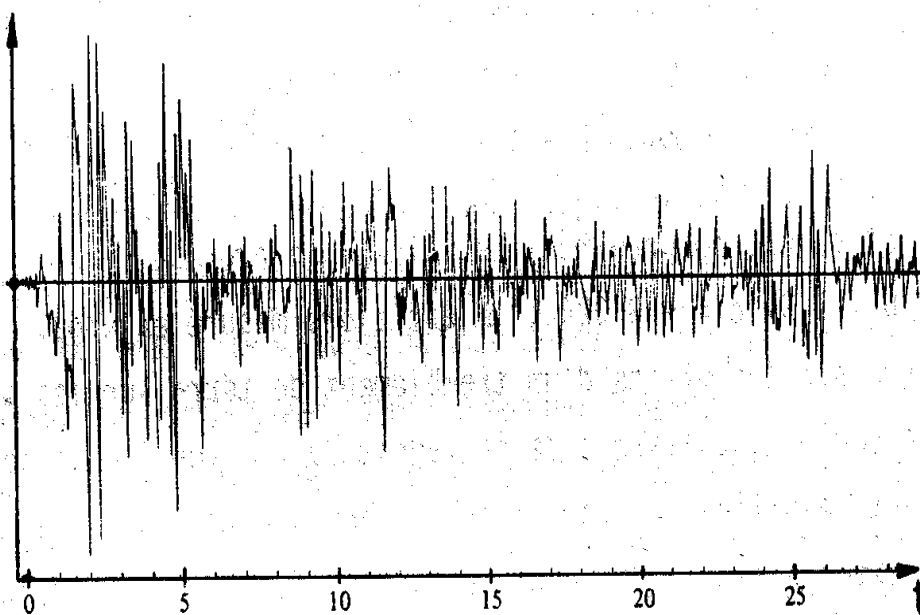


FIG. 3.8 – Exemple d'accélérogramme enregistré à EL CENTRO en 1940.

Il n'en reste pas moins que la première méthode est la plus utilisée, la plus connue, qui semble tout de même conforme aux observations. Nous retiendrons cette méthode dans la suite du document.

3.4.5 Méthode probabiliste issue de l'observation des accélérogrammes réels : un exposé détaillé

L'étude d'accélérogrammes de tremblements de terre montre une nature stochastique du signal, comme on peut le voir sur la Figure 3.8. Ceci peut s'expliquer de la façon suivante (voir [?]).

D'une part, un séisme est déterminé par la profondeur du foyer, la quantité d'énergie libérée, la durée de libération de l'énergie, la vitesse de propagation etc. qui sont des paramètres liés au séisme lui-même. Or la localisation d'un séisme par rapport à un site donné où se trouve la structure est d'une certaine manière aléatoire (pour des sites très éloignés de la source) et l'on retrouve ce caractère aléatoire dans le phénomène lui-même.

D'autre part les ondes sismiques proviennent du foyer et se propagent à travers des couches successives pour atteindre le site considéré. Elles subissent donc toute une série de diffractions, réflexions, atténuations avant d'atteindre leur "cible" (qui n'en est pas une en fait) qui confèrent au phénomène sismique considéré sur un site précis une nature aléatoire.

Ces différentes considérations conduisent à adopter une approche stochastique des phénomènes sismiques et les équations qui régiront la réponse de la structure étudiée devront prendre en compte un caractère aléatoire de la sollicitation.

Etant donnée la nature stochastique des phénomènes sismiques, l'accélération du sol

générée par la séisme et qui sollicite le bâtiment est un processus stochastique. L'étude statistique de nombreux accélérogrammes conduit à définir le processus accélération Γ de la manière suivante (voir [?]).

Définition 3.1. *L'accélération Γ est un processus à valeurs dans \mathbb{R}^3 , gaussien, centré, non stationnaire, continu du second ordre. De plus l'application $(M, t) \mapsto \Gamma(M, t)$ est à trajectoires continues.*

Plus précisément, les composantes Γ_j , $j \in \{1, 2, 3\}$, du processus Γ s'écrivent sous la forme :

$$\Gamma_j(t) = g_j(t)\gamma_j(t)$$

où :

1. $t \mapsto g_j(t)$ est une fonction déterministe de \mathbb{R}_+ de carré intégrable sur \mathbb{R}_+ appelée fonction de modulation,
2. $t \mapsto \gamma_j(t)$ est un processus stochastique défini sur \mathbb{R}_+ à valeurs réelles, gaussien, centré, stationnaire, continu du second ordre dont la mesure spectrale de puissance admet une densité $S_{\gamma_j}(\omega)$ par rapport à la mesure de Lebesgue telle que

$$S_{\gamma_j}(\omega) \sim_{|\omega| \rightarrow +\infty} \frac{1}{|\omega|^a}$$

avec $a > 2$.

Les fonctions g les plus utilisées sont les suivantes :

1. $g(t) = a_0(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$ avec $0 < \alpha < \beta$ et $0 \leq t \leq T$ (voir [?])
2. $g(t) = \begin{cases} a_0(\frac{t}{t_1})^n & \text{si } t \leq t_1 \\ a_0 & \text{si } t_1 \leq t \leq t_2, \text{ (voir [?])} \\ a_0 e^{-\alpha(t-t_2)} & \text{si } t_2 \leq t \leq T \end{cases}$
3. $g(t) = \begin{cases} \frac{10}{T}t & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{T}{10} \\ 1 & \text{si } \frac{T}{10} < t < \frac{9}{10}T, \text{ (voir [?])} \\ -\frac{10}{T} & \text{si } \frac{9}{10}T \leq t \leq T \end{cases}$
4. $g(t) = \begin{cases} (\frac{t}{3})^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 3s \\ 1 & \text{si } 3 \leq t \leq 12, 5s, \text{ (voir [?])} \\ e^{-0.1824(t-12,5)} & \text{si } t \leq 12, 5s \end{cases}$

Les formes les plus répandues pour $S_{\gamma_j}(\omega)$ sont de type rationnel :

$$S_{\gamma_j}(\omega) = \left| \frac{P_{\gamma_j}(i\omega)}{Q_{\gamma_j}(i\omega)^2} \right|,$$

où P_{γ_j} et Q_{γ_j} sont des polynômes à coefficients réels tels que

$$d^\circ Q_{\gamma_j} < d^\circ P_{\gamma_j},$$

et Q_{γ_j} a des racines de partie réelle strictement négative. Un cas particulier très utilisé est le modèle de *Kanaï-Tajimi* :

$$S(\omega) = S_0 \frac{1 + 4\xi_1^2(\frac{\omega}{\omega_1})^2}{[1 - (\frac{\omega}{\omega_1})^2]^2 + 4\xi_1^2(\frac{\omega}{\omega_1})^2},$$

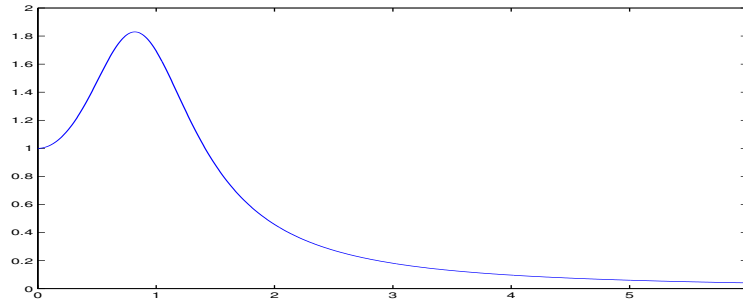
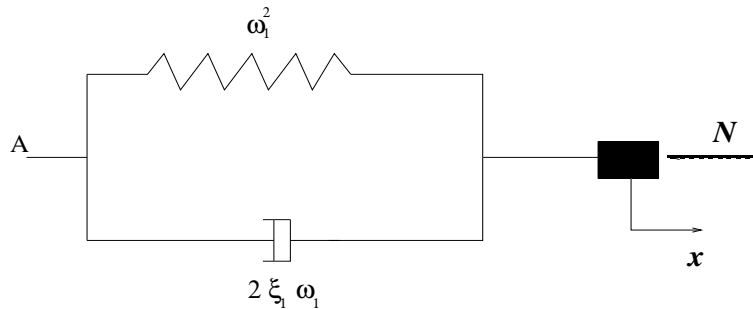


FIG. 3.9 – Densité spectrale du modèle de Kanai-Tajimi

FIG. 3.10 – Modèle de *Kanai-Tajimi*.

où S_0 , ω_1 et ξ_1 sont strictement positifs. On se reportera à l'article [?] pour une utilisation de ce modèle. On peut citer également le modèle de *Clough et Perzien* dont la densité spectrale est donnée par :

$$S(\omega) = S_0 \frac{1 + 4\xi_1^2 \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]^2 + 4\xi_1^2 \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \cdot \frac{1 + 4\xi_2^2 \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right]^2 + 4\xi_2^2 \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}$$

où S_0 , ω_1 , ω_2 , ξ_1 et ξ_2 sont strictement positifs. Enfin, la densité spectrale

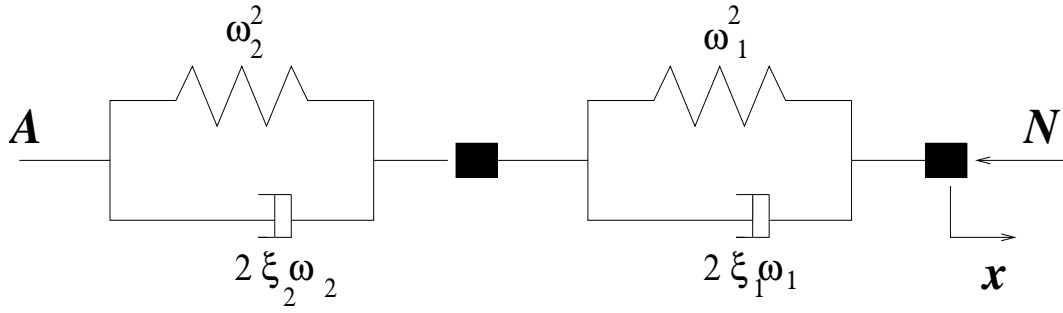
$$S(\omega) = S_0 \frac{4\xi_1^2 \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]^2 + 4\xi_1^2 \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}$$

est utilisé dans [?]. On peut obtenir de tels processus à partir du bruit blanc (voir [?]) en introduisant un filtre linéaire dont l'entrée est un bruit blanc et la sortie le processus recherché.

Exemple 3.1. *Les modèles de Kanai-Tajimi et de Clough et Perzien sont obtenus par filtration linéaire d'un bruit blanc N respectivement à travers les filtres représentés sur les Figures 3.10 et 3.11.*

3.4.6 Conclusion : le problème est posé

Les modélisations de la structure, du couplage sol-structure, du sol et de la sollicitation sismique (ces deux derniers étant intimement liés comme on vient de le voir) qu'on vient de présenter conduisent à considérer une association de ressorts, amortisseurs et patins, soumise à une sollicitation étant pour une part déterministe et pour une autre, stochastique.

FIG. 3.11 – Modèle de *Clough et Perzien*.

L'association de tels éléments a été présentée, de manière non exhaustive, dans la sous-section ?? dans le cas d'une sollicitation déterministe notée $F(t)$. Il faut en plus ajouter le terme stochastique, ce qui revient à remplacer par exemple $F(t)$ par $F(t) + N(t)$. Gardant à l'esprit que $dW_t = N_t dt$, où W est un mouvement brownien, on écrira le problème sous la forme d'une *équation différentielle stochastique multivoque* :

$$dX_t + A(X_t)dt \ni F(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad (3.16)$$

où A est un opérateur multivoque.

3.5 Article 4 : Identification

Les modélisations des structures qu'on a présentées dans les sections 3.2 et 3.3 ne peuvent pas être utilisées en pratique si on ne connaît pas les valeurs de leurs paramètres (raideurs, coefficients d'amortissement, seuil des éléments de Saint-Venant etc.). Pour certains modèles, il est possible d'utiliser leurs *cycles d'hystérésis* pour déterminer les paramètres en question. Plus précisément, si on considère le système représenté sur la Figure 3.12, il est régi par le système suivant :

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_0x + cx^3 + a\dot{x} + \sum_{i=1}^n k_i u_i = F, \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \dot{u}_i + \beta(u_i/\eta_i) \ni \dot{x}, \end{cases} \quad (3.17)$$

où x représente le déplacement de la masse, u_i sont les élongations de chaque ressort et $\eta_i = \alpha_i/k_i$.

L'équation (3.24) peut se mettre sous la forme (3.16) et on peut lui associer le schéma numérique défini dans le Chapitre 1 dans le cas où la force F est un bruit blanc ou coloré. Il est alors possible de simuler des trajectoires et de représenter $F - m\ddot{x}$ en fonction de x comme on peut le voir sur la Figure 3.13. Or, les caractéristiques géométriques du cycle peuvent être reliées aux paramètres $c, a, k_0, \dots, k_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ du système (voir l'article 4 qui suit) et il devient possible à partir de cycles expérimentaux d'identifier les paramètres nécessaires à la modélisation. On reproduit l'article 4 soumis à l'European Journal of Mechanics. A. Solids sous le titre "Study of rheological model with a friction term and a cubic term : deterministic and stochastic cases". Ce texte comporte 30 pages.

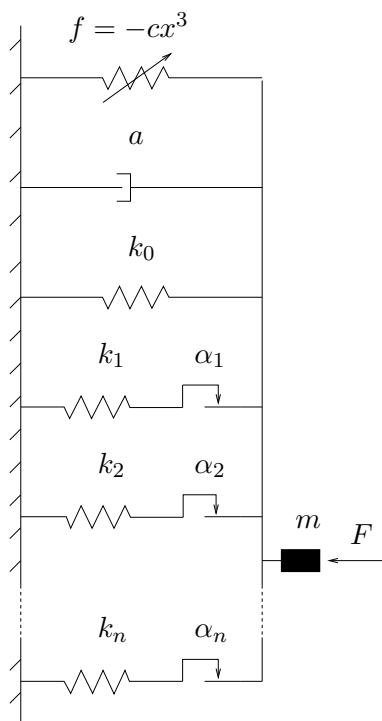


FIG. 3.12 – Le système de Prandtl

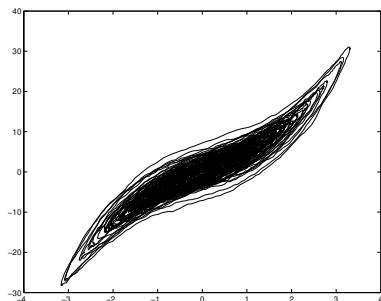


FIG. 3.13 – Un exemple de cycle d'hystérésis sous sollicitation stochastique

STUDY OF A RHEOLOGICAL MODEL WITH A FRICTION TERM AND A CUBIC TERM : DETERMINISTIC AND STOCHASTIC CASES

Claude-Henri LAMARQUE ^{*}, Frédéric BERNARDIN [†], Jérôme BASTIEN [‡]

^{*} URA 1652 CNRS, Département Génie Civil et Bâtiment, Laboratoire Géomatériaux, École Nationale des Travaux Publics de l'Etat, Rue Maurice Audin, 69518 Vaulx-en-Velin Cedex, France.

[†] UMR 5585 CNRS, MAPLY, Laboratoire de mathématiques appliquées de Lyon, Université Claude Bernard Lyon I, 69622 Villeurbanne Cedex, France.

[‡] Laboratoire Mécatronique 3M, Equipe d'accueil A 3318, Université de Technologie de Belfort-Montbéliard, 90010 Belfort cedex, France.

ABSTRACT - First, results on existence of solutions and their numerical approximations are given for the studied models. Some results of the identification of hysteretic discrete mechanical systems with damping submitted to deterministic or stochastic forcing are given. The identification is obtained thanks to hysteresis cycles which are convex or non-convex.

KEYWORDS - identification, discrete mechanical systems, friction, damping, stochastic excitation.

3.6 Introduction

In previous works, rheological models including friction terms have been studied : first, well/ill-posed problems have been addressed in the spirit of Coulomb type models [?]. The models with one degree of freedom or n degrees of freedom based on combinations in parallel or series of elementary constitutive elements (linear springs, dashpots, Saint-Venant elements) have been considered [?]. These models were described by using differential inclusions. Existence and uniqueness results based on known mathematical results of Brézis [6] have been established and special implicit Euler numerical scheme of order 1 has been given. Extensions to one mass model involving an infinite number of degrees of freedom via infinite number of Saint-Venant elements have been considered in the points of view of mechanical modelling, mathematics, numerics [?]. In paper [?], identification process from the knowledge of half of an hysteretic cycle has been given, for systems without damping.

So these previous works consider only linear springs (in a mathematical point of view, only the simplest Lipschitz-continuous springs). Also they do not include damping in identification process. In these papers also, external solicitations have been chosen deterministic ones. The aim of this paper is to extend results for modelling and identification to cases where damping, nonlinear springs and perhaps stochastic excitation are taken into account. In order to simplify, extension will be made for one degree of freedom systems.

The paper is organized as follows. In Section 2, a simple model with one degree of freedom involving nonlinear spring is described. In Section 3, theoretical results for more general models with one degree of freedom and nonlinear springs are given in the deterministic and stochastic frames in the case of mechanical systems involving globally Lipschitz-continuous nonlinear springs. In Section 4, the Euler implicit numerical scheme is defined for these models and its properties are explained. In Section 5, theoretical results of existence, uniqueness and convergence of the numerical schemes are extended to

the case of systems including only locally Lipschitz nonlinear springs. Section 6 is devoted to generalization of identification procedure : cases with cubic nonlinear springs, without or with damping, in deterministic or stochastic cases are presented. In Section 7, a few numerical examples are proposed. In Section 8, conclusions are provided.

3.7 The model

In [?, ?], we studied the generalized Prandtl rheological model with linear hardening (also called discrete Masing model) : we consider the association of a linear spring of stiffness k_0 and n associations of a linear spring of stiffness k_i and a dry friction element of threshold α_i (see figure 3.14). The material point has abscissa x and mass m . This material point is submitted to an external force F .

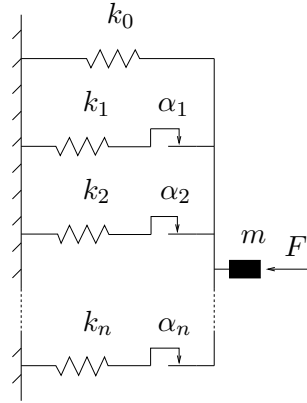


FIG. 3.14 – The generalized Prandtl rheological model with linear hardening.

Denote by β the maximal monotone graph defined by

$$\beta(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } |x| < 1, \\ \mathbb{R}_+ & \text{if } x = 1, \\ \mathbb{R}_- & \text{if } x = -1, \\ \emptyset & \text{if } |x| > 1. \end{cases} \quad (3.18)$$

In [?, ?], we proved that this mechanical model is governed by the following differential inclusion

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_0x + \sum_{i=1}^n k_i u_i = F, \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \dot{u}_i + \beta(k_i u_i / \alpha_i) \ni \dot{x}, \end{cases} \quad (3.19)$$

which is equivalent to

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = F/m - (k_0/m)x - (1/m) \sum_{i=1}^n k_i u_i, \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \dot{u}_i + \beta(u_i / \eta_i) \ni y, \end{cases} \quad (3.20)$$

where

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \eta_i = \frac{\alpha_i}{k_i}, \quad (3.21)$$

The initial data are

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad u_i(0) = u_{i,0} \in [-\eta_i, \eta_i]. \quad (3.22)$$

We now assume that there are a viscous damping a and a rheological model with a constitutive law of the form

$$f = -cx^3, \quad (3.23)$$

where $c \geq 0$ (see figure 3.15).

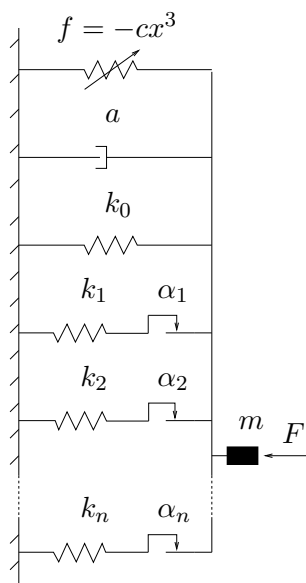


FIG. 3.15 – The general studied model

We obtain then the model governed by equations

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_0x + cx^3 + a\dot{x} + \sum_{i=1}^n k_i u_i = F, \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \dot{u}_i + \beta(u_i/\eta_i) \ni \dot{x}, \end{cases} \quad (3.24)$$

with initial conditions

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad u_i(0) = u_{i,0} \in [-\eta_i, \eta_i]. \quad (3.25)$$

3.8 Existence and uniqueness results

3.8.1 Deterministic frame

3.8.1.1 A particular case

If $a = c = 0$, (3.24) is equivalent to (3.19). So, we only study now problem (3.24), where $a \in \mathbb{R}$ and $c \geq 0$.

We have the following result :

Proposition 3.1. *If $F \in L^\infty(0, T)$, $m, \eta_i > 0$, $k_0, c \geq 0$, and $k_i, a \in \mathbb{R}$, there exists a unique solution $x \in W^{2,1}(0, T)$ of (3.24)-(3.25).*

In fact, differential inclusion (3.24)-(3.25) is very close to differential inclusions studied by Brezis in [6]. However, the term cx^3 is not monotone according to the velocity \dot{x} . Then, we use a classical method : for any $M \geq 0$, we consider G_M the function from \mathbb{R} to \mathbb{R} , equals to cx^3 if $|x|$ is small enough and vanishes if $|x|$ is big enough. So, the function G_M is Lipschitz continuous and we can easily prove the existence and the uniqueness of $(x_M, u_{i,M})$, the solution of the problem

$$\begin{cases} m\ddot{x}_M + k_0x_M + G_M(x_M) + a\dot{x}_M + \sum_{i=1}^n k_i u_{i,M} = F, \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \dot{u}_{i,M} + \beta(u_{i,M}/\eta_i) \ni \dot{x}_M, \end{cases} \quad (3.26)$$

with initial conditions

$$x_M(0) = x_0, \quad \dot{x}_M(0) = \dot{x}_0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad u_{i,M}(0) = u_{i,0} \in [-\eta_i, \eta_i]. \quad (3.27)$$

Then, by using the positiveness of the function : $t \mapsto \int_0^t \dot{x}(s)x^3(s)ds$, we prove that x_M is bounded uniformly in M . So, if M is big enough, we have

$$\forall t \in [0, T], \quad G_M(x_M(t)) = cx_M^3(t), \quad (3.28)$$

and $(x_M, u_{i,M})$ is the unique solution of (3.24)-(3.25).

Proposition 3.1 is a particular case of the general case, presented in the following subsection.

3.8.1.2 A more general case

We consider the following problem

$$\begin{cases} m\ddot{x} + G_1(x, \dot{x}) + G_2(x, \dot{x}) + \sum_{i=1}^n k_i u_i = F, \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \dot{u}_i + \beta(u_i/\eta_i) \ni \dot{x}, \end{cases} \quad (3.29)$$

with initial conditions

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad u_i(0) = u_{i,0} \in [-\eta_i, \eta_i], \quad (3.30)$$

where G_1 and G_2 are functions with properties which will be explained in the

Proposition 3.2. *Assume that $F \in L^\infty(0, T)$, $m, \eta_i > 0$, G_1 is a Lipschitz continuous function from \mathbb{R}^2 to \mathbb{R} which verifies a linear growth condition on \mathbb{R}^2 :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |G_1(x, y)| \leq C(1 + |x| + |y|) \quad (3.31)$$

and

$$\forall (x, x', y, y') \in \mathbb{R}^4, \quad |G_1(x, y) - G_1(x', y')| \leq C\|(x, y) - (x', y')\|, \quad (3.32)$$

and G_2 a differentiable map from \mathbb{R}^2 to \mathbb{R} . If we suppose moreover that there exists a function $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that for all C^1 -map $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\int_0^1 G_2(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t)dt + g(\gamma(0)) \geq 0, \quad (3.33)$$

there exists a unique solution $x \in W^{2,1}(0, T)$ to the problem (3.29)-(3.30).

We give the complete proof of this proposition in appendix .1.

Example 3.1. We can study the model defined by

$$G_1(x, y) = -k_0x + ay, \quad G_2(x, y) = cx^3, \quad (3.34)$$

where $a, c, k_0 \geq 0$, which gives

$$\begin{cases} m\ddot{x} - k_0x + cx^3 + a\dot{x} + \sum_{i=1}^n k_i u_i = F, \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \dot{u}_i + \beta(u_i/\eta_i) \ni \dot{x}. \end{cases} \quad (3.35)$$

3.8.2 Stochastic frame

In this subsection F is the standard white noise which formally verifies $F(t)dt = dW(t)$ where $(W(t))_{0 \leq t < +\infty}$ is the real standard Brownian motion. In this case, the problem (3.29) takes the form

$$\begin{cases} dX(t) + A(X(t))dt \ni b^1(X(t))dt + b^2(X(t))dt + s(X(t))dW(t) \\ X(0) = (x_0, \dot{x}_0, u_{1,0}, \dots, u_{n,0}) \end{cases} \quad (3.36)$$

with

$$b^1(x, y, u_1, \dots, u_n) = \left(0, \frac{1}{m} \left(G_1(x, y) - \sum_{i=1}^n k_i u_i \right), y, \dots, y \right)^T,$$

$$b^2(x, y, u_1, \dots, u_n) = \left(0, \frac{1}{m} G_2(x, y), 0, \dots, 0 \right)^T,$$

$$s(x, y, u_1, \dots, u_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma/m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

and

$$A(x, y, u_1, \dots, u_n) = (0, 0, \beta(u_1/\eta_1), \dots, \beta(u_n/\eta_n))^T.$$

To prove the existence of solutions to the problem (3.36) we consider, as in the previous subsection, the following equations ($p \in \mathbb{N}^*$) :

$$\begin{cases} dX_p(t) + A(X_p(t))dt \ni b^1(X_p(t))dt + b_p^2(X_p(t))dt + s(X_p(t))dW(t) \\ X_p(0) = (x_0, \dot{x}_0, u_{1,0}, \dots, u_{n,0}) \end{cases} \quad (3.37)$$

with $b_p^2(X) = \chi_p(x, y)b^2(X)$ where χ_p denotes a smooth function from \mathbb{R}^2 into $[0, 1]$ vanishing on $(]-\infty, -p-1[\cup]p+1, +\infty[)^2$ and taking the value 1 on $([-p, p])^2$.

Since b^1 , b_p^2 and s are Lipschitz continuous functions which verify a linear growth condition and A is a multivalued and maximal monotone operator whose domain is non empty, there exists a unique solution $(X_p(t))_{0 \leq t < +\infty}$ to (3.36) (see [8]). We can not use here the same method presented in the previous section because trajectory by trajectory the white noise is not bounded on the intervals $[0, t]$.

We define, for $p \geq 0$, the stopping time

$$\tau_p = \inf\{t \geq 0, |x_p(t)| \geq p \text{ or } |y_p(t)| \geq p\} \quad (3.38)$$

and $(\tau_p)_p$ is an increasing sequence whose limit is a stopping time denoted by τ . We construct the stochastic process X on $[0, \tau[$ by $X = X_p$ on $[0, \tau_p]$ and this process is well defined since $X_p = X_{p+1}$ a.s. on $[0, \tau_p]$. By definition of the times $(\tau_p)_p$, $(X(t))_{0 \leq t < \tau}$ verifies

$$\begin{cases} dX(t) + A(X(t))dt \ni b^1(X(t))dt + b^2(X(t))dt + s(X(t))dW(t), & 0 \leq t < \tau \\ X(0) = (x_0, \dot{x}_0, u_{1,0}, \dots, u_{n,0}) \end{cases}$$

and we will show that $\tau = +\infty$ a.s. For this, we have the preliminary result

Proposition 3.3. *For all $t \geq 0$, there exists a constant $C(t)$, which does not depend on p , such that*

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} |y_p(s \wedge \tau_p)|^2 \leq C(t).$$

We deduce from this result the

Proposition 3.4. *For all $t \geq 0$,*

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\tau_p \leq t) = 0. \quad (3.39)$$

Since for all $t \geq 0$, $\mathbb{P}(\tau \leq t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\tau_p \leq t)$, (3.39) yields $\tau = +\infty$ a.s. For the proofs, see Appendix A.

3.9 Numerical results

3.9.1 Deterministic case

We proved in [?, ?, ?] the numerical following result : we discretize differential inclusion (90) by the following numerical scheme : let $N \in \mathbb{N}^*$ and $h = T/N$ and for all $q \in \{0, \dots, N\}$, $t_q = hq$; we consider the value $(X_q)_{0 \leq q \leq N}$ of \mathbb{R}^p defined by

$$\begin{cases} \forall q \in \{0, \dots, N-1\}, & \frac{X_{q+1} - X_q}{h} + \partial\Phi(X_{q+1}) \ni H(t_q, X_q), \\ X_0 = \xi. \end{cases} \quad (3.40)$$

We assume moreover that

$$\forall R \geq 0, \quad \sup \left\{ \left\| \frac{\partial H}{\partial t}(\cdot, v) \right\|_{L^2(0, T; \mathbb{R}^p)} : \|v\|_{L^2(0, T; \mathbb{R}^p)} \leq R \right\} < +\infty. \quad (3.41)$$

Let us denote by $|\cdot|$ a norm of \mathbb{R}^p .

We have then

Proposition 3.5. *Under the assumptions (87) and (3.41), numerical scheme (3.40) is of order 1, i.e. : there exists $C \geq 0$ such that*

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall q \in \{0, \dots, N\}, \quad |X(t_q) - X_q| \leq \frac{C}{N}. \quad (3.42)$$

It is classical that (3.40) is equivalent to

$$\begin{cases} \forall q \in \{0, \dots, N-1\}, & X_{q+1} = (I + h\partial\Phi)^{(-1)}(X_q + hH(t_q, X_q)), \\ X_0 = \xi. \end{cases} \quad (3.43)$$

We set for all $q \in \{0, \dots, N\}$

$$X_q = \begin{pmatrix} x_q \\ y_q \\ u_{1,q} \\ \vdots \\ u_{n,q} \end{pmatrix}.$$

We consider the numerical scheme : for all $q \in \{0, \dots, N - 1\}$,

$$x_{q+1} = x_q + hy_q, \tag{3.44}$$

$$y_{q+1} = y_q + \frac{h}{m} \left(F(t_q) - k_0 x_q - \sum_{i=1}^n k_i u_{i,q} - ay_q - cx_q^3 \right), \tag{3.45}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad u_{i,q+1} = \begin{cases} u_{i,q} + hy_q, & \text{if } |u_{i,q} + hy_q| \leq \eta_i, \\ \eta_i \text{ sign}(u_{i,q} + hy_q), & \text{if } |u_{i,q} + hy_q| \geq \eta_i. \end{cases} \tag{3.46}$$

We have the following numerical result

Proposition 3.6. *If $F \in H^1(0, T)$, then there exist $C \geq 0$ and $N_0 \in \mathbb{N}^*$ such that for all $N \geq N_0$, for all $q \in \{0, \dots, N\}$*

$$|x(t_q) - x_q| \leq \frac{C}{N}, \tag{3.47a}$$

$$|y(t_q) - y_q| \leq \frac{C}{N}, \tag{3.47b}$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} |u_i(t_q) - u_{i,q}| \leq \frac{C}{N}. \tag{3.47c}$$

This result comes from proposition 3.5. We give the complete proof of this proposition in appendix .1.

3.9.2 Stochastic case

We consider the following discretization of (3.36) on $[0, T]$ which is the stochastic counterpart of (3.44), (3.45) and (3.46) : for all $q \in \{0, \dots, N - 1\}$,

$$x_{q+1} = x_q + hy_q, \tag{3.48}$$

$$y_{q+1} = y_q - (h/m) \left(G_1(x_q, y_q) + G_2(x_q, y_q) + \sum_{i=1}^n k_i u_{i,q} \right) + (\sigma/m)(W(t_{q+1}) - W(t_q)), \tag{3.49}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad u_{i,q+1} = \begin{cases} u_{i,q} + hy_q, & \text{if } |u_{i,q} + hy_q| \leq \eta_i, \\ \eta_i \text{ sign}(u_{i,q} + hy_q), & \text{if } |u_{i,q} + hy_q| \geq \eta_i. \end{cases} \tag{3.50}$$

We have the following convergence's result :

Proposition 3.7. *For all $h > 0$, we denote by \bar{X}_h the piecewise linear approximation of $(X_q)_{1 \leq q \leq N}$ define in (3.48), (3.49) and (3.50). Under the assumptions (3.31), (3.32) and (3.33),*

$$\forall T > 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq T} \|\bar{X}_h(t) - X(t)\| = 0 \text{ a.s.}, \tag{3.51}$$

where X is the solution to (3.36).

We give the complete proof of this proposition in appendix .1.

3.10 Locally Lipschitz continuous frictions laws

We have the following result :

Proposition 3.8. *Assume that $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differentiable on \mathbb{R}^2 and locally Lipschitz continuous on \mathbb{R}^2 , i.e. for all $R \geq 0$, there exists $\omega \geq 0$ such that for all (x_1, y_1) and (x_2, y_2) in \mathbb{R}^2 ,*

$$\left(\begin{aligned} & \left| (x_1, y_1) - (x_2, y_2) \right| \leq R \\ & \implies \left| G(x_1, y_1) - G(x_2, y_2) \right| \leq \omega \left| (x_1, y_1) - (x_2, y_2) \right| \end{aligned} \right). \quad (3.52)$$

We consider the following problem

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} + G(x, \dot{x}) + \sum_{i=1}^n k_i u_i = F, \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \dot{u}_i + \beta(u_i/\eta_i) \ni \dot{x} \end{array} \right. \quad (3.53)$$

with $m, \eta_i > 0$ and $k_i, a \in \mathbb{R}$.

– If F is deterministic and $F \in L^\infty(0, T)$,

$$\text{if } T \text{ is small enough,} \quad (3.54)$$

then there exists a unique solution $x \in W^{2,1}(0, T)$ of (3.53) with initial conditions (3.25).

– If $F = \sigma N$ where $\sigma > 0$ and N is the standard real white noise, there exists a stopping time $\tau > 0$ such that (3.25) has a unique solution until the time τ .

Démonstration. Straightforward by use of the existence results given in Proposition 3.2 and in section 3.8 for the case in which G is some Lipschitz continuous function. \square

Example 3.2. We can study the model defined by

$$G(x, y) = k_0 x + ay - cx^3, \quad (3.55)$$

where $k_0, a \in \mathbb{R}$ and $c \geq 0$, which gives

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} + k_0 x - cx^3 + a\dot{x} + \sum_{i=1}^n k_i u_i = F, \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \dot{u}_i + \beta(u_i/\eta_i) \ni \dot{x}. \end{array} \right. \quad (3.56)$$

By using previous remarks and as in proposition 3.6, we can prove the following result :

Proposition 3.9. *For $h > 0$, we consider \overline{X}_h^d and \overline{X}_h^s the numerical schemes defined on $[0, +\infty[$ respectively in (3.44)-(3.46) and in (3.48)-(3.50) (we put $G(x, y) = G_1(x, y) + G_2(x, y)$). Under assumptions of Proposition 3.8, denoting respectively by X^d and X^s the solutions to the deterministic version and the stochastic version of problem (3.25), we have the following convergence's results :*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\overline{X}_h^d - X^d\| \leq Ch \quad (3.57)$$

and

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|\overline{X}_h^s - X^s\| = 0 \text{ a.s.} \quad (3.58)$$

Démonstration. Thanks to the Proposition 3.6 and the Proposition 3.7, the results can be obtained easily. \square

3.11 Identification of hysteresis cycles

3.11.1 Identification without damping

We now study the frame of (3.24)-(3.25) and the examples 3.1 and 3.2. To simplify the identification of cycle, we assume that there is not damping, that is to say that $a = 0$. So we can rewrite equations (3.24)-(3.25), (3.35) and (3.56) under the form

$$\begin{cases} m\ddot{x} + G(x) + \sum_{i=1}^n k_i u_i = F, \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \dot{u}_i + \beta(u_i/\eta_i) \ni \dot{x} \end{cases} \quad (3.59)$$

where F is deterministic or stochastic. We will choose

$$G(x) = cx^3 + k_0x, \text{ for equation (3.24),} \quad (3.60a)$$

$$G(x) = cx^3 - k_0x, \text{ for equation (3.35),} \quad (3.60b)$$

$$G(x) = -cx^3 + k_0x, \text{ for equation (3.56).} \quad (3.60c)$$

Like in [?], we can give some results of identification : from some hysteresis cycles, we can deduce mechanical parameters. Like in [?], we assume that the $\eta_i = \alpha_i/k_i$ are all distinct and we reorder the indices so that

$$\eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_{n-1} < \eta_n. \quad (3.61)$$

We assume the following properties :

- 1) $u_j(0) = -\eta_j, \quad \forall j = 1, \dots, n,$
- 2) x is increasing on $[0, T],$
- 3) $u_j(T) = \eta_j, \quad \forall j = 1, \dots, n.$

Like in [?], we can prove that there exists an increasing sequence $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} = T$ such that

$$\forall j \in \{0, \dots, n\}, \quad F - m\ddot{x} - \sum_{i=j+1}^n k_i x - G(x) \text{ is constant on }]t_j, t_{j+1}[. \quad (3.62)$$

That is equivalent to say that : there exists a strictly increasing sequence $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1}$ and $n + 1$ reals $e_0 < e_1 < e_2 < \dots < e_n$ such that : if we plot the curve $(x(t), F(t) - m\ddot{x}(t))_{0 \leq t \leq T},$ we obtain a loading phase of the hysteresis cycle of the form $Y = \mathcal{F}(X)$ where :

$$\forall j \in \{0, \dots, n\}, \quad \forall X \in]x_j, x_{j+1}[, \quad \mathcal{F}(X) = \sum_{i=j+1}^n k_i X + G(X) + e_j. \quad (3.63)$$

Moreover, if G is cubic polynomial (according to (3.60)), then the curve $(X, \mathcal{F}(X))_{x \in [x_0, x_n]}$ is piecewise polynomial curve of degree three. See figure 3.16. If we assume that

$$G \text{ is derivable,} \quad (3.64)$$

then, according to (3.63), we can write, for all $l \in \{1, \dots, n\},$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(x_l - 0) &= \sum_{i=l}^n k_i + G'(x_l), \\ \mathcal{F}'(x_l + 0) &= \sum_{i=l+1}^n k_i + G'(x_l). \end{aligned}$$

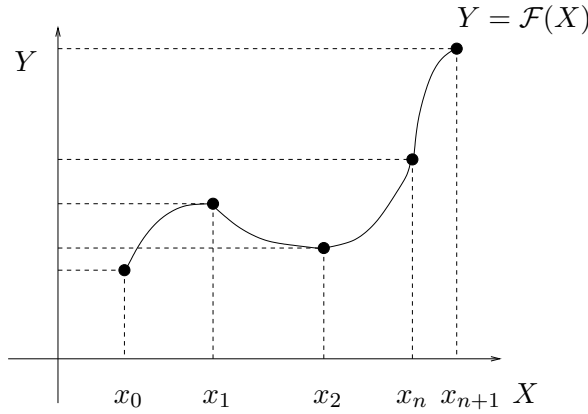


FIG. 3.16 – Piecewise polynomial half hysteresis cycle of degree three $Y = \mathcal{F}(X)$.

Thus, we have for all x in $]x_0, x_{n+1}[$,

$$\mathcal{F}'(x+0) - \mathcal{F}'(x-0) = \begin{cases} k_l, & \text{if } x = x_l, \\ 0, & \text{else.} \end{cases} \quad (3.65)$$

So, thanks to curve $(X, \mathcal{F}(X))_{x \in [x_0, x_n]}$, we can determine according to (3.65), stiffness $(k_i)_{1 \leq i \leq n}$. Now, if $(k_i)_{1 \leq i \leq n}$ are known, we can plot the curve $(X, \mathcal{G}(X))_{x \in [x_0, x_n]}$, with

$$\mathcal{G}(X) = \mathcal{F}(X) - \sum_{i=j+1}^n k_i X = G(X) + e_j, \quad (3.66)$$

for all j in $\{0, \dots, n\}$ and for all X in $]x_j, x_{j+1}[$. By least square, we can determine function

$$G(X) = k_0 X \pm cX^3. \quad (3.67)$$

(see (3.60)). Let us denote by A_1, A_2, \dots, A_{n+1} and A_{n+2} the ends of segments which constitute the hysteresis half-cycle (see Figure 3.17). For $i \in \{1, \dots, n\}$, d_i denotes the difference between abscissa of A_{i+1} and A_1 (positive real). For $i \in \{1, \dots, n+1\}$, p_i denotes the slope of the segment $[A_i, A_{i+1}]$. From (3.62), we can deduce that

$$\forall j \in \{1, \dots, n+1\}, \quad p_j = \sum_{l=j}^n k_l, \quad (3.68)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad d_i = 2\eta_i. \quad (3.69)$$

From (3.68) and (3.69) we have a one to one correspondence between the parameters of generalized Prandtl model k_i and η_i and geometrical parameters p_j and d_j of the hysteresis cycle in the $(x, F - m\ddot{x} - G(x))$ plane.

3.11.2 Identification with damping

To give results available with the frame of (3.24)-(3.25), and the examples 3.1 and 3.2, we assume that

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \quad G_1(x, y) + G_2(x, y) = G(x) + \tilde{G}(y), \quad (3.70)$$

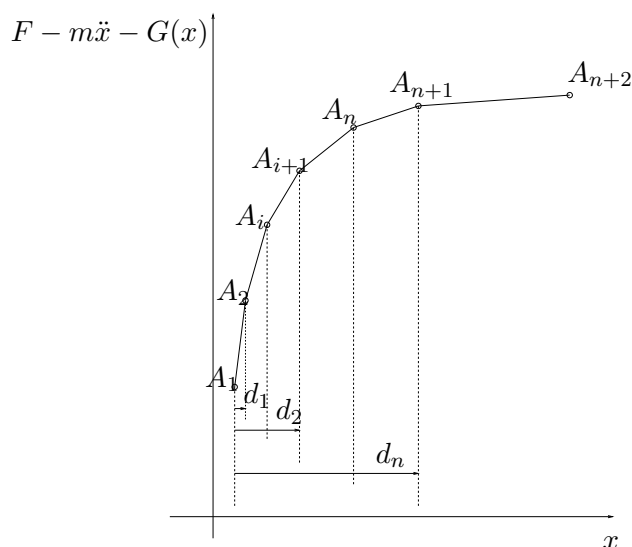


FIG. 3.17 – Loading curve $(x, F - m\ddot{x} - G(x))$ for the studied model, described by (3.59).

and then we study the following inclusion

$$\begin{cases} m\ddot{x} + G(x) + \tilde{G}(\dot{x}) + \sum_{i=1}^n k_i u_i = F, \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \dot{u}_i + \beta(u_i/\eta_i) \ni \dot{x}, \end{cases} \quad (3.71)$$

We focus on a monotonic phase of x assumed to be hold between 0 and T . On the graph $(x, F - m\ddot{x})_{0 \leq t \leq T} = (X, \mathcal{G}(X))$ some regularity's phases can be observed. In fact, in the deterministic case, \dot{x} is a derivable function with respect to x and we observe only n discontinuities on the graph $(X, \mathcal{G}'(X))$. We can locate this discontinuities by using wavelet's tools presented for example in [?] and [?]. In the stochastic case, \mathcal{G} is not necessary derivable and we have only the existence of a real γ , $0 < \gamma \leq 1$ and a constant C such that a.s.

$$\sup_{0 \leq s < t \leq T} |\mathcal{G}(x(s)) - \mathcal{G}(x(t))| \leq C|x(t) - x(s)|^\gamma.$$

If h denotes the time-step of the numerical scheme (3.48)-(3.50) and $0 = t_0 < \dots < t_N = T$ is the associated partition of $[0, T]$, the graph $(\log(h), \log(e(h)))_{10^{-5} \leq h \leq 10^{-4}}$ is represented on the figure 3.18 with

$$\mathcal{G}_i(h) = \sigma \frac{W(t_i) - W(t_{i-1})}{h} - m \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \quad 1 \leq i \leq N,$$

and

$$e(h) = \sup_{1 \leq i \leq N-1} \left\{ \mathcal{G}_{i+1}(h) - \mathcal{G}_i(h) \right\}$$

for the values $n = 5$, $k_0 = 0$, $m = 1$, $\sigma = 3$, $T = 10$ and the functions $G_1(x, y) = \tilde{G}(y) = 0.5y$ and $G_2(x, y) = G(x) = 0.5x^3$. We see on this figure that $\gamma \simeq 0.46 < 1$.

To detect the slope's changes of the term $\sum_{i=1}^n k_i u_i$ by analysing the graph of \mathcal{G} we can still use the wavelets but the scale for the analysis has to be chosen large enough to detect only irregularities of $\sum_{i=1}^n k_i u_i$ and not these associated to \dot{x} . As a consequence of this rescaling a loss of accuracy is observed for the localization of the phase's changes but it is

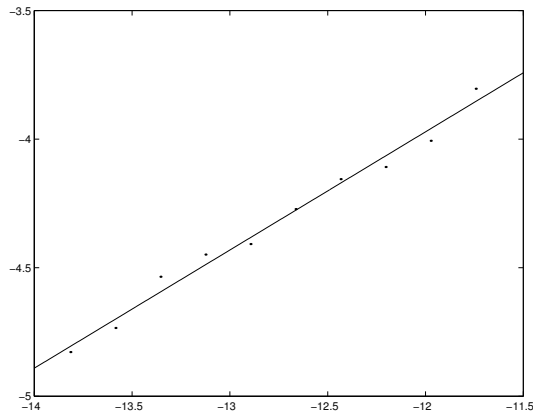


FIG. 3.18 – The curve $(\log(h), \log(e(h)))_{10^{-5} \leq h \leq 10^{-4}}$

still possible to find non empty intervals on which $\sum_{i=1}^n k_i u_i$ has a continuous derivative (see the figure 3.19) and then the situation is the same as the deterministic case. We can see this slope's detections on the figure 3.19 for a system with the values $n = 5$, $k_0 = 0$, $m = 1$, $\sigma = 3$, $T = 10$ and the functions $G_1(x, y) = \tilde{G}(y) = 0.5y$ and $G_2(x, y) = 0$. On this figure the vertical axis is devoted to the amplitude of wavelets coefficients and the horizontal one to a transformation of the displacement x : we represent on the horizontal axis not the value of the discretization $(x_i)_{1 \leq i \leq N}$ of x but the number i .

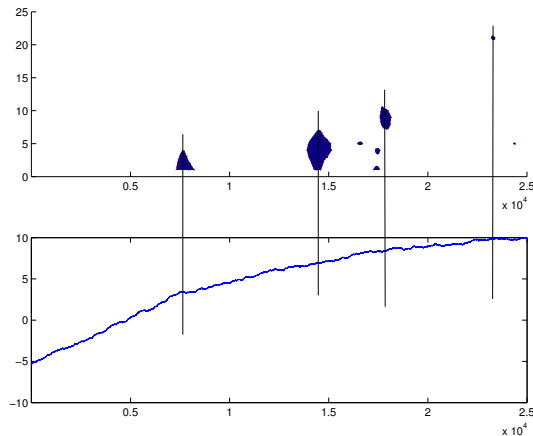


FIG. 3.19 – Amplitude of wavelet's coefficients versus displacement x .

If we suppose that \dot{x} is a data of the identification's problem it is possible to identify the function $\tilde{G}(y) = ay$. We can suppose that only x is known and in this case we assume that we can use a numerical derivator to obtain \dot{x} . If we are not in the first case neither in the second it seems to be very difficult to identify the parameter a with the hysteresis cycle.

3.11.3 Identification : an example

To evaluate the process of identification, we simulate numerically x , \dot{x} and $F - m\ddot{x}$ on the system

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_0x + cx^3 + a\dot{x} + \sum_{i=1}^n k_i u_i = \sigma N, \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \dot{u}_i + \beta(u_i/\eta_i) \ni \dot{x}, \end{cases} \quad (3.72)$$

with initial conditions

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad u_i(0) = u_{i,0} \in [-\eta_i, \eta_i],$$

and we use the identification process to determine a and c . For the simulation we chose $n = 5$, $k_0 = 0$, $m = 1$, $\sigma = 3$, $T = 10$, $c = 1$ and $a = 0.5$. Using the results of the previous subsection, we can find an interval $[x_1, x_2]$ on which there is no slope change. For this example we compute the numerical scheme (3.48)-(3.50) with $h = 10^{-4}$ and we consider $[x_1, x_2] = [-2.25, -0.5]$ on which the map x increases with respect to time t . We can obtain numerically the linear approximation $p(\alpha, \beta)x + q(\alpha, \beta)$ of the graph $F - m\ddot{x} - \alpha x^3 - \beta\dot{x}$ with respect to x and this for $\alpha \in [0, 2]$ and $\beta \in [0, 1]$. By evaluating the minimum of the error between $F - m\ddot{x} - \alpha x^3 - \beta\dot{x}$ and $p(\alpha, \beta)x + q(\alpha, \beta)$ by mean square procedure, we can determine approximated values of a and c with accuracy : we find $\alpha_{min} = 1.003$ and $\beta_{min} = 0.496$.

3.12 Numerical simulations

For all the simulations, we choose

$$m = 1, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad k_i = 1, \quad \eta_i = i/n, \quad (3.73)$$

with initial conditions

$$x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad u_{i,0} = 0. \quad (3.74)$$

For all the simulations, we choose

$$n = 3, \quad (3.75)$$

except simulations (3.80), where

$$n = 15, \quad (3.76)$$

and (3.81) for which

$$n = 5. \quad (3.77)$$

3.12.1 Monotone friction law with a cubic term

This section is devoted to numerical study of the differential inclusion (3.59). According to results of section 3.11.1 and [?], if we choose in (3.59)

$$G(x) = k_0x,$$

we find polygonal hysteresis cycles ; for example, results presented in figure 20 correspond to :

$$k_0 = 1/2, \quad F(t) = 2.5 \cos(0.5t). \quad (3.78)$$

If we choose in (3.59)

$$G(x) = cx^3$$

we obtain non convex cubic hysteresis cycles or polygonal hysteresis cycles : in figures 21 and 22, for which we chose respectively

$$c = 0.65, \quad k_0 = 1/2, \quad F(t) = 3 \cos(2t), \quad (3.79)$$

and

$$c = 0.65, \quad k_0 = 1/2, \quad F(t) = 3 \cos(2t), \quad n = 15. \quad (3.80)$$

The figure 23 corresponds to :

$$n = 5, \quad c = 0.5, \quad a = 0.5, \quad k_0 = 0, \quad F(t) = 3N(t). \quad (3.81)$$

3.12.2 Monotone friction laws

This section is devoted to numerical study of the differential inclusion (3.59) (or Example 3.1). We choose :

$$G(x) = cx^3 - k_0x.$$

Hysteretic cycles presented in figure 24 corresponds to

$$k_0 = 8, \quad c = 0.65, \quad F(t) = 20 \cos(2t). \quad (3.82)$$

In figure 24, the hysteresis cycle is not convex.

If we numerically study inclusion (3.71) (or Example 3.1) with

$$G(x) = cx^3 - k_0x, \quad \tilde{G}(y) = ay,$$

and

$$k_0 = 8, \quad c = 0.65, \quad a = 0.5, \quad F(t) = 20 \cos(2t), \quad (3.83)$$

we obtain again non-convex hysteresis cycle (figure 25). In figure 26, the contribution of non smooth part to the cycle is presented.

3.12.3 Locally Lipschitz continuous frictions laws

This section is devoted to numerical study of the differential inclusion (3.59) (or Example 3.2). For this example, we have not global existence and uniqueness (see proposition 3.8). We choose :

$$G(x, y) = k_0x - cx^3 + ay,$$

and

$$k_0 = 1/2, \quad c = 0.65, \quad a = 0.5, \quad F(t) = 3 \cos(2t). \quad (3.84)$$

In figure 27, functions x and \dot{x} are plotted versus time t : these functions seem to be unbounded. We observe numerically that the solution explodes within finite time (which is independent on the step size h).

3.13 Conclusion

In this paper, theoretical and numerical analysis of mechanical systems involving non smooth terms with friction (Saint-Venant elements) have been reported. Now, smooth nonlinear terms globally or locally Lipschitz corresponding to nonlinear springs can be included in the models. Stochastic external solicitation and not only deterministic ones have been examined. Models that extends the mechanical models described in previous works can be studied. The results described in this paper for one degree of freedom mechanical systems could be easily generalized to systems with n degrees of freedom involving nonlinear springs.

Identification procedure has been described. Now, damping can be included. Nevertheless, one can see that efficient tools are needed to cut off the hysteretic cycle. The problem is not fully solved. Also, the identification procedure is based on the knowledge of hysteretic cycle where external force is known. It can be the case the applications if one makes experiments in the laboratory or in situ and if external force is generated by given machine. This is not the case if one intends to use external natural unknown excitations. The general identification problem is not solved.

.1 Proofs of theoretical results

Proof of proposition 3.2. For any $M \geq 0$, we denote by χ_M a smooth function from \mathbb{R}^2 to $[0, 1]$ such that $\chi_M = 1$ on $[-M, M] \times [-M, M]$ and $\chi_M = 0$ on $(]-\infty, -M - 1] \cup [M + 1, +\infty[)^2$. We define the function $G_M^2 = \chi_M G_2$.

By setting $\dot{x}_M = y_M$, we consider the system (3.29) with initial conditions (3.30) in which we replace G_2 by G_M^2 :

$$\begin{cases} \dot{x}_M = y_M, \\ \dot{y}_M = F/m - (1/m)G_1(x_M, y_M) - (1/m)G_M^2(x_M, y_M) \\ \quad - (1/m) \sum_{i=1}^n k_i u_{i,M}, \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \dot{u}_{i,M} + \beta(u_{i,M}/\eta_i) \ni y_M, \end{cases} \quad (85)$$

and

$$x_M(0) = x_0, y_M(0) = \dot{x}_0, \forall i \in \{1, \dots, n\}, u_{i,M}(0) = u_{i,0} \in [-\eta_i, \eta_i]. \quad (86)$$

We give now the general mathematical formulation of problem (85) with initial conditions (86). The reader is referred to [6]. We assume that T is strictly positive and that H is a function from $[0, T] \times \mathbb{R}^p$ to \mathbb{R}^p which is Lipschitz continuous with respect to its second argument, i.e. there exists $\omega \geq 0$ such that

$$\forall t \in [0, T], \quad \forall X_1, X_2 \in \mathbb{R}^p, \quad |H(t, X_1) - H(t, X_2)| \leq \omega |X_1 - X_2|. \quad (87)$$

Moreover, we assume that

$$\forall Y \in \mathbb{R}^p, \quad H(\cdot, Y) \in L^\infty(0, T, \mathbb{R}^p). \quad (88)$$

Let $\langle \cdot, \cdot \rangle$ be scalar product on \mathbb{R}^p . If Φ is a convex proper and lower semi-continuous function from \mathbb{R}^p to $] - \infty, +\infty]$, we can define its sub-differential $\partial\Phi$ by

$$\begin{cases} y \in \partial\Phi(x) \iff \forall h \in \mathbb{R}^p, \quad \Phi(x+h) - \Phi(x) \geq \langle y, h \rangle, \\ D(\partial\Phi) = \{x : \partial\Phi(x) \neq \emptyset\}; \end{cases} \quad (89)$$

moreover, $\partial\Phi$ is a maximal monotone graph in $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$. We have the very important following result, which can be found in [6] (proposition 3.12 page 106) .

Proposition .10. *Under assumptions (87) and (88), for all $\xi \in D(\partial\Phi)$, there exists a unique function X in $W^{1,1}(0, T; \mathbb{R}^p)$ such that*

$$\begin{cases} \dot{X}(t) + \partial\Phi(X(t)) \ni H(t, X(t)) & \text{a.e. on }]0, T[, \\ X(0) = \xi. \end{cases} \quad (90)$$

In order to prove that problem (85)-(86) has a unique solution, we write it under the form (90) : we set $p = n + 2$, for all $X = (x, y, u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^p$, for all $t \in [0, T]$,

$$H_M(t, X) = \begin{pmatrix} y \\ F(t)/m - (1/m)G_1(x_M, y_M) \\ - (1/m)G_M^2(x_M, y_M) - (1/m) \sum_{i=1}^n k_i u_i \\ y \\ \vdots \\ y \end{pmatrix}. \quad (91)$$

Denote $\phi_{[A,B]}$ the indicatrix function of $[A, B]$ defined by

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi_{[A,B]}(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \in [A, B], \\ +\infty, & \text{if } x \notin [A, B]. \end{cases}$$

We have

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \partial\phi_{[-1,1]}(x) = \beta(x),$$

where β is defined by (3.18). So, if we set

$$\forall X = (x, y, u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^p, \quad \Phi(X) = \sum_{i=1}^n \phi_{[-\eta_i, \eta_i]},$$

then we have for all $X = (x, y, u_1, \dots, u_n)$ in \mathbb{R}^p ,

$$\partial\Phi(X) = \{0\} \times \{0\} \times \beta(u_1/\eta_1) \times \dots \times \beta(u_n/\eta_n). \quad (92)$$

Since G_M^2 is derivable on \mathbb{R}^2 and vanishes outside $[-M - 1, M + 1]^2$, it is Lipschitz continuous on \mathbb{R}^2 and then, with notations (91) and (92), assumptions (87) and (88) hold ; according to proposition .10, there exists a unique solution

$$X_M = (x_M, y_M, u_{1,M}, \dots, u_{n,M}) \quad (93)$$

of (85)-(86), which is equivalent to (3.26)-(3.27).

Let us now bound the function x_M . We suppose that $M > |x_0| + |\dot{x}_0|$ and we define

$$T_M = \inf\{t \in [0, T], |x_M(t)| \geq M \text{ or } |y_M(t)| \geq M\}.$$

Multiplying the second equation of (85) by $\dot{x}_M(\tau)$ and integrating between 0 and t , we obtain for all t in $[0, T_M]$

$$\begin{aligned} & m \int_0^t \ddot{x}_M(\tau) \dot{x}_M(\tau) d\tau + \int_0^t G_M^2(x_M(\tau), y_M(\tau)) \dot{x}_M(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t F(\tau) \dot{x}_M(\tau) d\tau - \int_0^t G_1(x_M(\tau), y_M(\tau)) \dot{x}_M(\tau) d\tau \\ & \quad - \int_0^t \sum_{i=1}^n k_i u_{i,M}(\tau) \dot{x}_M(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (94)$$

Using (3.33), (94) implies

$$\begin{aligned} & \frac{m}{2} (\dot{x}_M^2(t) - \dot{x}_0^2) - g(x_0) \\ & \leq \int_0^t F(\tau) \dot{x}_M(\tau) d\tau - \int_0^t G^1(x_M(\tau), y_M(\tau)) \dot{x}_M(\tau) d\tau \\ & \quad - \int_0^t \sum_{i=1}^n k_i u_{i,M}(\tau) \dot{x}_M(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (95)$$

Using the inequality $xy \leq (x^2 + y^2)/2$, (3.31) and $|u_{i,M}| \leq \eta_i$, we can deduce

$$\begin{aligned} & \frac{m}{2} (\dot{x}_M^2(t) - \dot{x}_0^2) - g(x_0) \\ & \leq \left(\frac{1}{2}(2 + 3C) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |k_i| \right) \int_0^t \dot{x}_M^2(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \|F\|_{L^2(0,T)}^2 + \frac{1}{2} TC^2 \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |k_i| \eta_i^2 T + \frac{CT}{2} \sup_{0 \leq s \leq t} x_M^2(s). \end{aligned} \quad (96)$$

Since

$$x_M(s) = x_0 + \int_0^s \dot{x}_M(\tau) d\tau, \quad (97)$$

we have

$$\forall t \in [0, T_M], \quad \sup_{0 \leq s \leq t} \dot{x}_M^2(s) \leq \mathcal{K}_1 \int_0^t \sup_{0 \leq s \leq \tau} \dot{x}_M^2(s) d\tau + \mathcal{K}_2, \quad (98)$$

where

$$\mathcal{K}_1 = \frac{2}{m} \left(\frac{1}{2}(2 + 5C) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |k_i| \right), \quad (99)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2 = & \frac{2}{m} \left(\frac{1}{2} \|F\|_{L^2(0,T)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |k_i| \eta_i^2 T \right. \\ & \left. + \frac{m}{2} \dot{x}_0^2 + g(x_0) + \frac{1}{2} TC^2 + CTx_0^2 \right). \end{aligned} \quad (100)$$

Thanks to Gronwall's inequality, we have then

$$\forall t \in [0, T_M], \quad y_M^2(t) \leq \mathcal{K}_2 e^{T\mathcal{K}_1}. \quad (101)$$

Using (97) and (101), we can write :

$$\forall t \in [0, T_M], \quad |x_M(t)| + |y_M(t)| \leq |x_0| + \sqrt{\mathcal{K}_2 e^{T\mathcal{K}_1}} (T_M + 1). \quad (102)$$

If we take $t = T_M$ in (102), we have

$$T_M \geq \frac{M - |x_0| - \sqrt{\mathcal{K}_2 e^{T\mathcal{K}_1}}}{\sqrt{\mathcal{K}_2 e^{T\mathcal{K}_1}}}$$

and then, for M big enough, $T_M \geq T$ what implies $x_M(t) \leq M$ and $y_M(t) \leq M$ for all $t \in [0, T]$ and $(x_M, u_{i,M})_{1 \leq i \leq n}$, which is not depending on M , is the solution to (3.29)-(3.30). \square

Proof of proposition 3.3. We can write :

$$dy_p(t) = -(1/m)G_1(x_p(t), y_p(t))dt - (1/m)G_2(x_p(t), y_p(t))dt \\ - (1/m) \sum_{i=1}^n k_i u_{p,i}(t) - (\sigma/m)dW_t \quad (103)$$

and by Itô's rule (see [?] for explanations) applied to the continuous semi-martingale y_p and the C^2 -function $f : x \mapsto x^2$ from \mathbb{R} to \mathbb{R} , for any $s \geq 0$:

$$y_p^2(s \wedge \tau_p) = y_0^2 - (2/m) \int_0^{s \wedge \tau_p} y_p(\tau)G_1(x_p(\tau), y_p(\tau))d\tau \\ - (2/m) \sum_{i=1}^n \int_0^{s \wedge \tau_p} k_i y_p(\tau)u_{p,i}(\tau)d\tau + \int_0^{s \wedge \tau_p} (\sigma/m)^2 d\tau \\ - (2/m) \int_0^{s \wedge \tau_p} y_p(\tau)G_2(x_p(\tau), y_p(\tau))d\tau \\ - 2(\sigma/m) \int_0^{s \wedge \tau_p} y_p(\tau)dW_\tau.$$

Taking the sup on $[0, t]$, the expectation, using $|u_{p,i}| \leq \eta_i$ a.s., $ab \leq (1/2)(a^2 + b^2)$ for $a, b \geq 0$ and (3.33) we have :

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} y_p^2(s \wedge \tau_p) \leq y_0^2 + ((1+n)/m)\mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \int_0^{s \wedge \tau_p} y_p^2(\tau)d\tau \\ + (1/m)\mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \int_0^{s \wedge \tau_p} G_1^2(x_p(\tau), y_p(\tau))d\tau \\ + (t/m) \sum_{i=1}^n k_i^2 \eta_i^2 + t(\sigma/m)^2 + (2/m)g(x_0) \\ - 2(\sigma/m)\mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \int_0^{s \wedge \tau_p} y_p(\tau)dW_\tau.$$

Using (3.31) and the Burkholder-Gundi-Davis inequality for the stochastic integral (see [?] for details), we obtain :

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} y_p^2(s \wedge \tau_p) \leq y_0^2 + ((1+n)/m)\mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \int_0^{s \wedge \tau_p} y_p^2(\tau)d\tau \\ + (C^2/m)\mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \int_0^{s \wedge \tau_p} (1 + |x_p(\tau)| + |y_p(\tau)|)^2 d\tau \\ + (t/m) \sum_{i=1}^n k_i^2 \eta_i^2 + t(\sigma/m)^2 + (2/m)g(x_0) \\ + 2(K\sigma/m)\mathbb{E} \sqrt{\int_0^{s \wedge \tau_p} y_p^2(\tau)d\tau},$$

where K is an universal constant. Using $\sqrt{a} \leq 1 + a$, $(a + b + c)^2 \leq 4(a^2 + b^2) + 2c^2$, $a, b, c \geq 0$ and

$$x_p(s) = x_0 + \int_0^s y_p(\tau)d\tau, \quad (104)$$

there exists two constants $K_1(t)$ and $K_2(t)$ such that

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} y_p^2(s \wedge \tau_p) \leq K_1(t) + K_2(t) \int_0^t \mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq \tau} y_p^2(s \wedge \tau_p) d\tau,$$

and the Gronwall's lemma yields the result. \square

Proof of proposition 3.4. For all $t \geq 0$ and $p \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{|y_p^2(t \wedge \tau_p)| + |x_p^2(t \wedge \tau_p)|\} &= \int_{\Omega} (|y_p^2(t \wedge \tau_p)| + |x_p^2(t \wedge \tau_p)|) d\mathbb{P} \\ &\geq \int_{\{\tau_p \leq t\}} (|y_p^2(t \wedge \tau_p)| + |x_p^2(t \wedge \tau_p)|) d\mathbb{P} \\ &= \int_{\{\tau_p \leq t\}} (|y_p^2(\tau_p)| + |x_p^2(\tau_p)|) d\mathbb{P} \\ &\geq p^2 \int_{\{\tau_p \leq t\}} d\mathbb{P} = p^2 \mathbb{P}\{\tau_p \leq t\}. \end{aligned}$$

By Proposition 3.3 and (104) then there exists a constant $K_3(t)$ such that

$$\mathbb{P}\{\tau_p \leq t\} \leq \frac{K_3(t)}{p^2},$$

which gives the result. \square

Proof of proposition 3.6. From proposition (3.5), it is enough to verify that the function $x \mapsto cx^3$ is Lipschitz continuous on \mathbb{R} . But, that is not true! In fact, according to the proof of proposition 3.1, we can remark that differential inclusion (3.24) is equivalent to (90), where $H = H_M$, defined by (91) if we choose M big enough. For all $M \geq 0$, we consider the following numerical scheme

$$\begin{cases} 0 \leq q \leq N - 1, & X_{M,q+1} = (I + h\partial\Phi)^{(-1)}(X_{M,q} + hH_M(t_q, X_{M,q})), \\ X_{M,0} = \xi. \end{cases} \quad (105)$$

where X_M is defined by (93). Since function $x \mapsto H_M(x)$ is Lipschitz continuous on \mathbb{R} and according to proposition 3.5, we have

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall q \in \{0, \dots, N\}, \quad |X_M(t_q) - X_{M,q}| \leq \frac{C(M)}{N}, \quad (106)$$

Then we have

$$|X_{M,q}| \leq |X_M(t_q)| + \frac{C(M)}{N}. \quad (107)$$

If M is big enough, then $X_M = X$; so, if N is big enough, $X_{M,q}$ is bounded uniformly in M : it is enough to choose M big enough so that numerical scheme (105) is equivalent to numerical scheme (3.43) and $X_{M,q} = X_q$. So, if N is big enough, (106) implies

$$\forall q \in \{0, \dots, N\}, \quad |X(t_q) - X_q| \leq \frac{C(M)}{N},$$

which implies immediately (3.47). \square

Proof of proposition 3.7. For all continuous function f from $[0, T]$ into \mathbb{R}^{n+2} we put $\|f\|_{\infty, T} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|$. For $p \in \mathbb{N}^*$, we consider the following numerical scheme

$$\begin{cases} X_p^q = (I + hA)^{-1} (X_p^q + hb_1(X_p^q) + hb_p^2(X_p^q) + s(X_p^q)(W(t_{q+1}) - W(t_q))) \\ X_p^0 = X_0. \end{cases}$$

Since b_p^2 is a Lipschitz continuous function, thanks to (3.31) and (3.32), the piecewise linear approximation \overline{X}_p^h of the $(X_p^q)_{0 \leq q \leq N}$ converges sample path by sample path to the solution X_p of the equation (3.37) (see [23] or [3]) :

$$\forall T > 0, \lim_{h \rightarrow 0} \|\overline{X}_p^h - X_p\|_{\infty, T} = 0 \text{ a.s.} \quad (108)$$

We can write that for all $p > 0$ and $h > 0$,

$$\|\overline{X}_{2p}^h\|_{\infty, T} \leq \|X_{2p}\|_{\infty, T} + \|\overline{X}_{2p}^h - X_{2p}\|_{\infty, T},$$

which implies :

$$\forall t \leq \tau_{2p}, \|\overline{X}_{2p}^h(t)\| \leq \|X(t)\| + \|\overline{X}_{2p}^h(t) - X(t)\| \text{ a.s. ,} \quad (109)$$

where τ_{2p} is defined by (3.38). We fix p and by (108) there exists $h(p, \omega) > 0$ such that for all $0 < h < h(p, \omega)$, $\|\overline{X}_{2p}^h - X_{2p}\|_{\infty, \tau_p} \leq p$ and (109) becomes

$$\|\overline{X}_{2p}^h\|_{\infty, \tau_p} \leq 2p. \quad (110)$$

By definition of b_{2p}^2 , we deduce from (110) that $\overline{X}_{2p}^h(t) = \overline{X}_h(t)$ a.s. for $0 \leq t \leq \tau_p$ and (108) implies

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\overline{X}_h - X\|_{\infty, \tau_p} = 0 \text{ a.s.} \quad (111)$$

Since (111) is verified for all p , we obtain the result. \square

.2 Curves of the numerical simulations

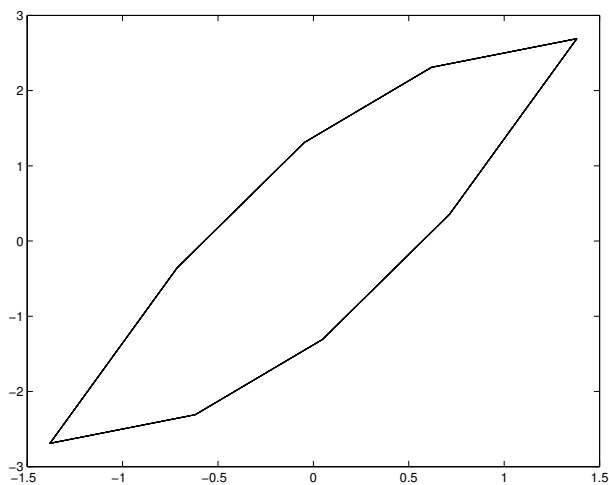


FIG. 20 – The curve $\{x(t), F(t) - m\ddot{x}(t)\}_{t \in [300, 400]}$ for the model defined by (3.78).

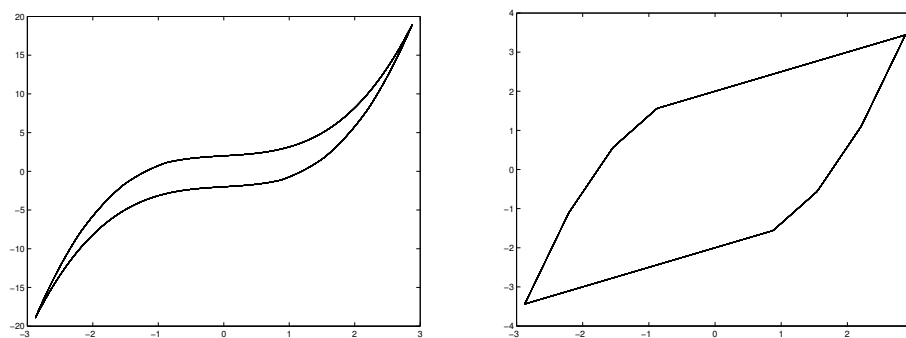


FIG. 21 – The curves $\{x(t), F(t) - m\ddot{x}(t)\}_{t \in [600, 700]}$ (left) and $\{x(t), F(t) - m\ddot{x}(t) - cx^3(t)\}_{t \in [600, 700]}$ (right) for the model defined by (3.79).

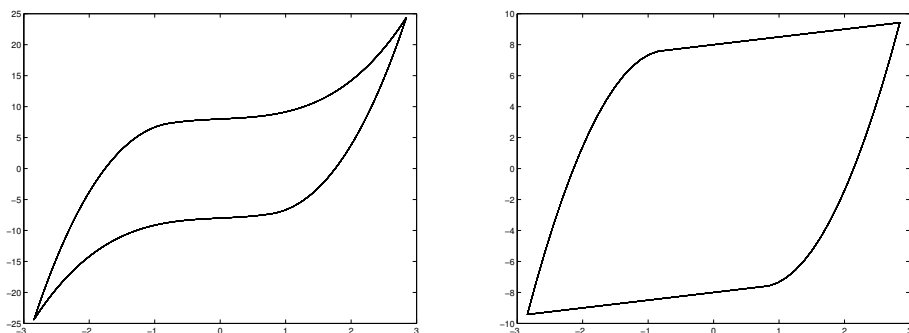


FIG. 22 – The curves $\{x(t), F(t) - m\ddot{x}(t)\}_{t \in [600, 700]}$ (left) and $\{x(t), F(t) - m\ddot{x}(t) - cx^3(t)\}_{t \in [600, 700]}$ (right) for the model defined by (3.80).

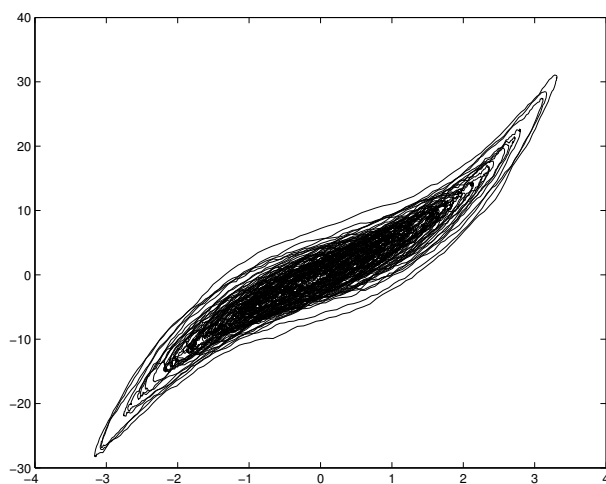


FIG. 23 – The curve $\{x(t), F(t) - m\ddot{x}(t)\}_{t \in [800, 1000]}$ for the model defined by (3.81).

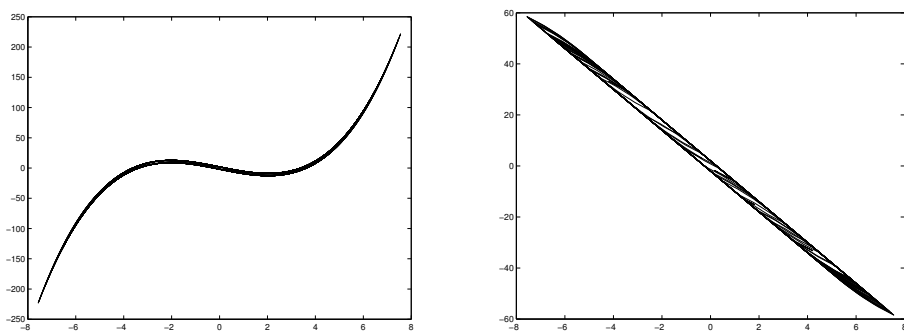


FIG. 24 – The curves $\{x(t), F(t) - m\ddot{x}(t)\}_{t \in [1200, 1300]}$ (left) and $\{x(t), F(t) - m\ddot{x}(t) - cx^3(t)\}_{t \in [1200, 1300]}$ (right) for the model defined by (3.82).

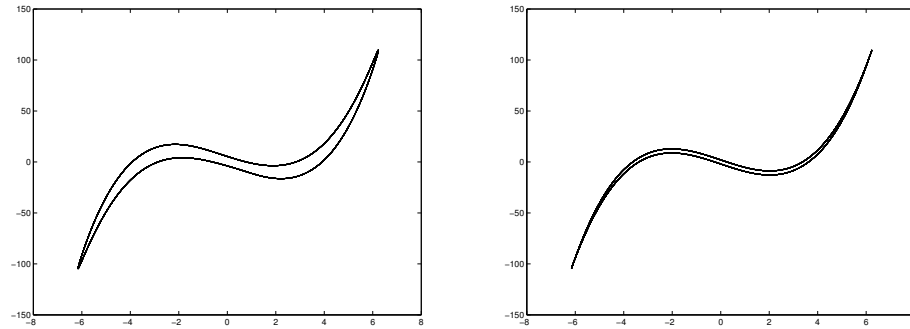


FIG. 25 – The curves $\{x(t), F(t) - m\ddot{x}(t)\}_{t \in [600, 700]}$ (left) and $\{x(t), F(t) - m\ddot{x}(t) - a\dot{x}(t)\}_{t \in [600, 700]}$ (right) for the model defined by (3.83).

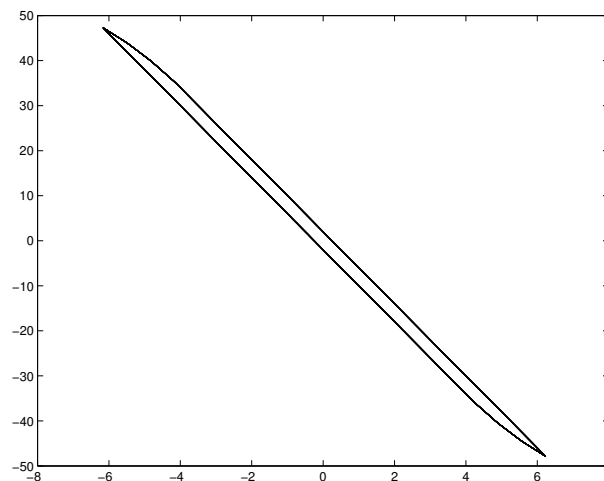


FIG. 26 – The curve $\{x(t), F(t) - m\ddot{x}(t) - a\dot{x}(t) - cx^3(t) + k_0x(t)\}_{t \in [600, 700]}$ for the model defined by (3.83).

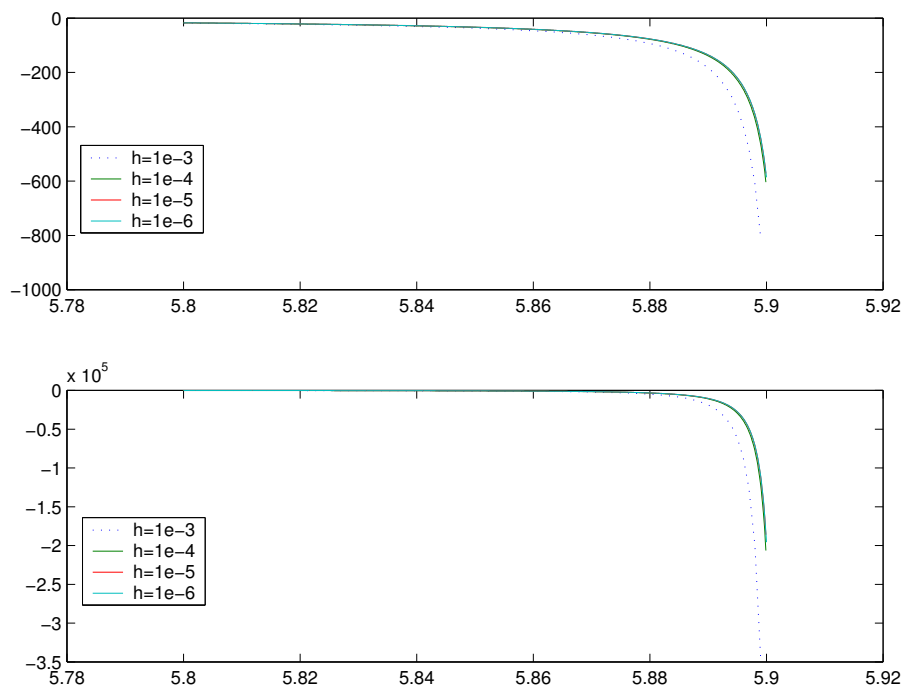


FIG. 27 – The curves $\{t, x(t)\}_{t \in [5.78, 5.92]}$ (in top) and $\{t, \dot{x}(t)\}_{t \in [5.78, 5.92]}$ (in bottom) for the model defined by (3.84) and for step sizes belonging to $\{10^{-6}, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}\}$.

Conclusion et perspectives

On conclura brièvement en soulignant l'apport de ce travail à la modélisation de structures sous séismes par l'introduction de non-linéarités fortement irrégulières pour la prise en compte du frottement sec comme modèle rhéologique de plasticité par exemple. La possibilité de considérer une nature aléatoire de la sollicitation est aussi un atout de ce travail. L'approche à la fois théorique et numérique et l'intérêt manifesté pour des applications dans le domaine de l'ingénierie donnent plusieurs pistes quant à l'obtention de nouveaux résultats.

Aspects numériques

Il faudrait s'intéresser à l'approximation des solutions évoluant sur des variétés, ce qui constituerait une poursuite des résultats à la fois du Chapitre 1 et du Chapitre 2. Une amélioration des ordres de convergence serait aussi une avancée significative. Pour obtenir cette amélioration, on pourrait s'intéresser à la convergence faible des schémas.

Aspects théoriques

Pour ce qui est de ces aspects – existence et unicité de solutions – on pourrait par exemple assouplir les hypothèses sur le domaine du graphe maximal monotone de l'article 3 pour permettre de prendre en compte des opérateurs associés à des phénomènes d'impact. Ce dernier problème reste très ouvert puisque, dans un cadre déterministe, Ballard ([2]) a réussi à montrer l'unicité d'une solution dans le cas d'une sollicitation *analytique*, ce qui est loin d'être le cas des processus stochastiques.

On peut également penser à l'introduction de retard dans les équations et les problèmes restent en partie ouverts.

Aspects applicatifs

L'enrichissement des modèles est primordial et on peut proposer deux pistes : considérer des impacts comme on vient de le voir ou considérer de manière plus générale des inclusions différentielles stochastiques dans lesquelles interviennent des fonctions multivaluées mais qui ne sont plus nécessairement monotones. Dans des proportions sans doute plus modestes, on pourrait s'intéresser à l'écriture de l'équation de Fokker-Planck pour les EDSM (on rejoint ici les aspects théoriques), problème qui est encore ouvert dans un cadre général même si dans certains cas particuliers, comme pour les équations différentielles stochastiques réfléchies, ou encore pour certaines EDSM particulières ([14]), une telle équation a été écrite. Ceci intéresserait les ingénieurs pour lesquels les lois de probabilité sont d'une toute première importance. On voit en définitive dans cette dernière préoccupation tout l'intérêt que pourrait avoir la convergence faible du schéma présenté dans le Chapitre 1,

problème qu'on a soulevé dans les perspectives pour les aspects numériques.

Bibliographie

- [1] R. Abraham et J.E. Marsden, *Foundations of mechanics*, Addison-Wesley, 1980.
- [2] P. Ballard, *Formulation and well-posedness of the dynamics of rigid bodies with unilateral or frictional constraints*, Advances in Mechanics and mathematics 2002, Kluwer Academic Publishers (2002), 3–88.
- [3] F. Bernardin, *Multivalued stochastic differential equations : convergence of a numerical scheme*, Set-Valued Analysis **11-4** (2003), 393–415.
- [4] F. Bernardin, M. Schatzman et C.-H. Lamarque, *Second-order multivalued stochastic differential equations on riemannian manifolds*, Proc. R. Soc. Lond. A **460** (2004), 3095–3121.
- [5] ———, *A stochastic differential equation from friction mechanics*, C. R. Acad. Sci. Paris **Ser.I 338** (2004), 837–842.
- [6] H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973, North-Holland Mathematics Studies, No. 5. Notas de Matemática (50).
- [7] E. Cépa, *Equations différentielles stochastiques multivoques*, Thèse de doctorat, Université d’Orléans, 1994.
- [8] ———, *Equations différentielles stochastiques multivoques*, Lectures Notes in Mathematics, Séminaire de Probabilités XXIX (1995), 86–107.
- [9] E. Cépa et D. Lépingle, *Diffusing particles with electrostatic repulsion*, Probab. Th. Rel. Fields **107-4** (1997), 429–449.
- [10] M. Emery, *Stochastic calculus in manifolds*, Springer, 1989.
- [11] C. Godbillon, *Géométrie différentielle et mécanique analytique*, Hermann, Paris, 1969.
- [12] N. Ikeda et S. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes, second edition*, North-Holland, 1989.
- [13] I. Karatzas et E. Shreve, *Brownian motion and stochastic calculus, second edition*, Springer, 1991.
- [14] P. Krée, *Diffusion equation for multivalued stochastic differential equations*, J. Funct. Anal. **49** (1982), 73–90.
- [15] C.-H. Lamarque, F. Bernardin et J. Bastien, *Study of a rheological model with a friction term and a cubic term : deterministic and stochastic cases*, Eur. J. Mech. A Solids, soumis (2004).
- [16] D. Lépingle et T. Nguyen, *Approximating and simulating multivalued stochastic differential equations*, Monte-Carlo Methods and Applications **10** (2004), 129–152.
- [17] P. L. Lions et A. S. Snitzman, *Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions*, Comm. Pure Appl. Math. **XXXVII** (1984), 511–537.

- [18] B. Øksendal, *Stochastic differential equations*, Springer, 2000.
- [19] R. Pettersson, *Approximations for stochastic differential equations with reflecting boundaries*, Stochastic Process. Appl. **59** (1995), 295–308.
- [20] R. Pettersson, *Projection scheme for stochastic differential equations with convex constraints*, Stochastic Process. Appl. **88** (2000), 125–134.
- [21] Y. Saisho, *Stochastic differential equations for multi-dimensional domain with reflecting boundary*, Probab. Th. Rel. Fields **74** (1987), 455–477.
- [22] A. V. Skorohod, *Stochastic equations for diffusion processes in a bounded region*, Theory of probability and its applications **VI** (1961), 264–274.
- [23] L. Slominski, *On approximations of solutions of multidimensional sde's with reflecting boundary conditions*, Stochastic Process. Appl. **50** (1994), 197–219.
- [24] A. Storm, *Stochastic differential equations with convex constraint*, Stochastics **53** (1995), 241–274.
- [25] H. Tanaka, *Stochastic differential equations with reflecting boundary condition in convex regions*, Hiroshima Math. J. **9** (1979), 163–177.