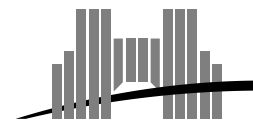


Aspects combinatoires des pavages

Frédéric Chavanon

LIP, UMR CNRS - INRIA - Univ. Lyon I - ENS Lyon 5668

(frederic.chavanon)@ens-lyon.fr

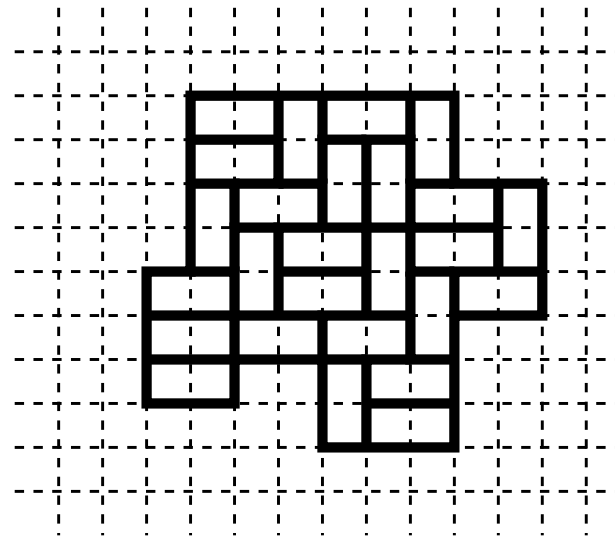
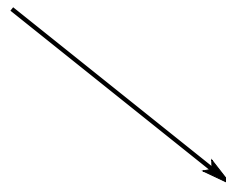
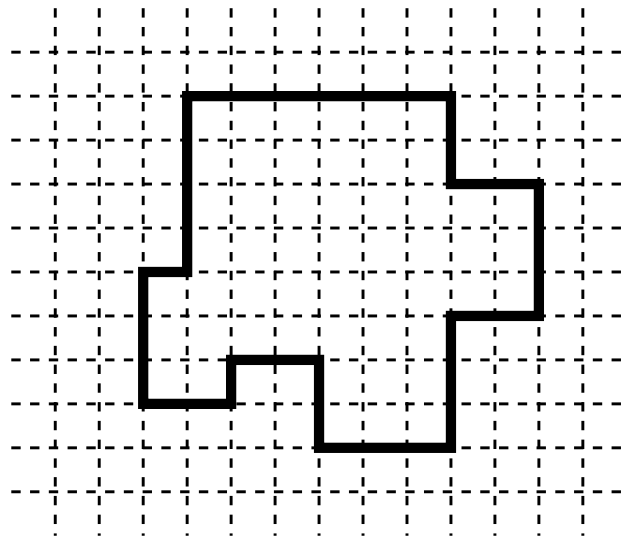


Plan

1. Introduction- Problèmes de pavages
2. Pavages de zonotopes
3. Premier codage, structure d'un pavage
4. Deuxième codage, espace de pavages
5. Structure en codimension 2
6. Conclusion et perspectives

1- Introduction

Problème de pavage

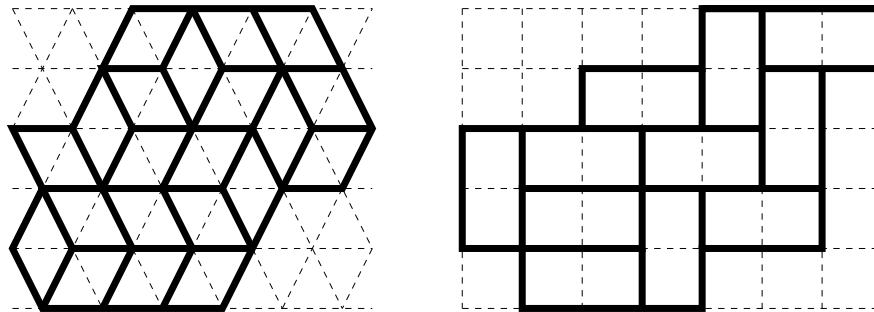


Questions classiques

- Pavabilité
- Nombre de pavages
- Génération aléatoire uniforme

Structure de l'espace des pavages

Etat de l'art :
cas des pavages par dominos ou losanges



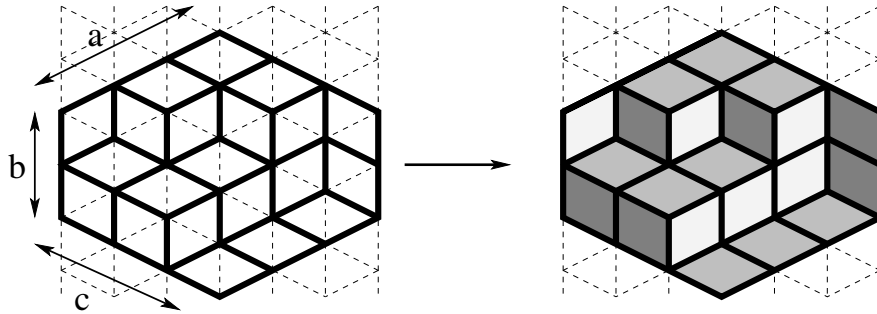
Pavabilité :

Algorithme de Thurston

Nombre de pavages :

Losanges : Formule de MacMahon

$$\frac{H(a+b+c)H(a)H(b)H(c)}{H(a+b)H(a+c)H(b+c)} \quad H(n) = (n-1)!(n-2)! \dots 2!$$



Dominoes : Formule de Kasteleyn

$$\left[\prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^n \left(2 \cos\left(\frac{\pi j}{m+1}\right) + 2i \cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right) \right) \right]^{1/2}$$

Structure de l'espace des pavages : treillis distributif (Propp, Rémila)

Génération aléatoire uniforme (Propp-Wilson, Luby-Randall-Sinclair, Wilson)

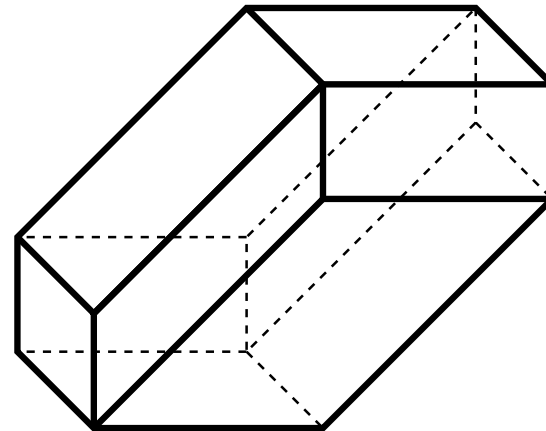
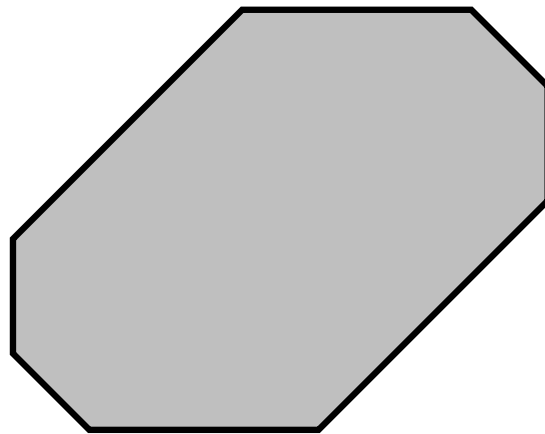
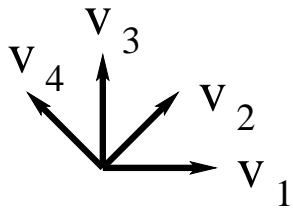
Génération exhaustive - algorithme de Thurston modifié (Desreux-Rémila)

2- Pavages de zonotopes

Zonotope

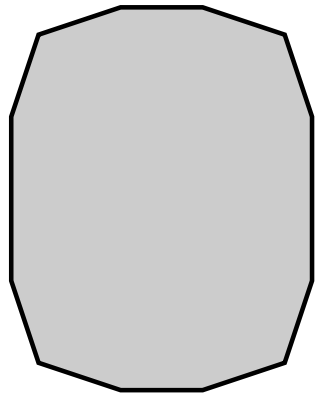
$$V = (v_1, v_2, v_3, v_4), M = (2, 3, 1, 1), D = 4$$

$$\left\{ \sum_{i=1}^D \lambda_i v_i, 0 \leq \lambda_i \leq m_i, m_i \in M, v_i \in V \right\}$$

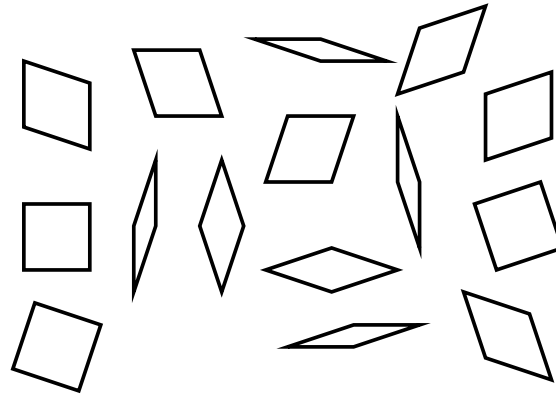


$$\text{taille } t = \sum_{i=1}^D m_i$$

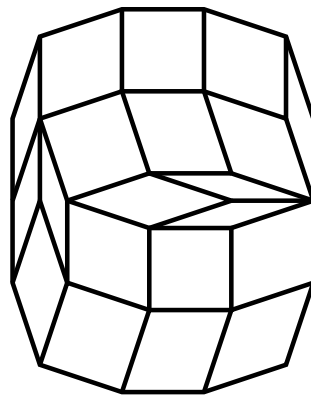
Pavages de zonotopes



zonotope



proto-tuiles



pavage

Pavages de zonotopes

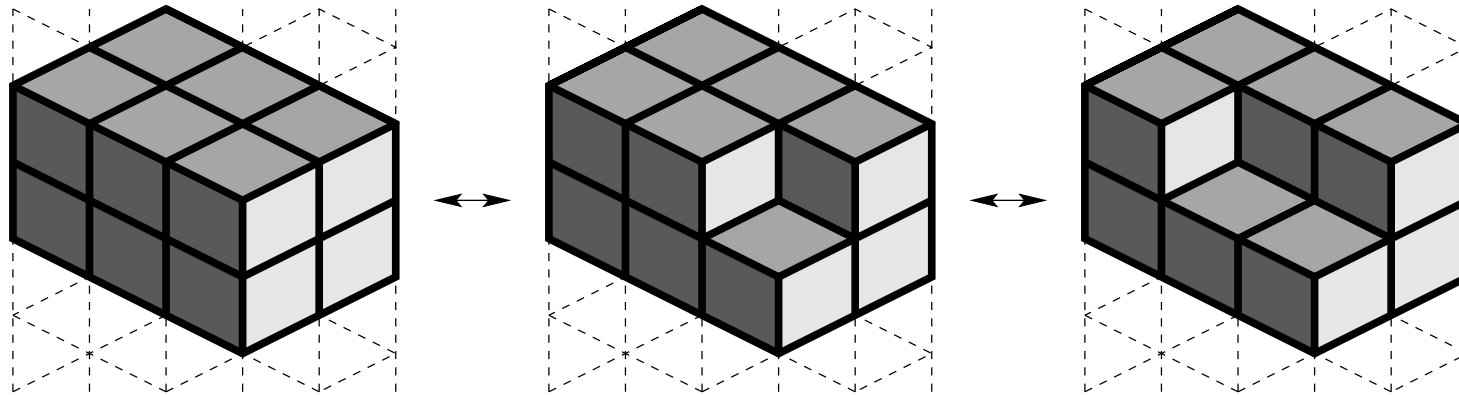
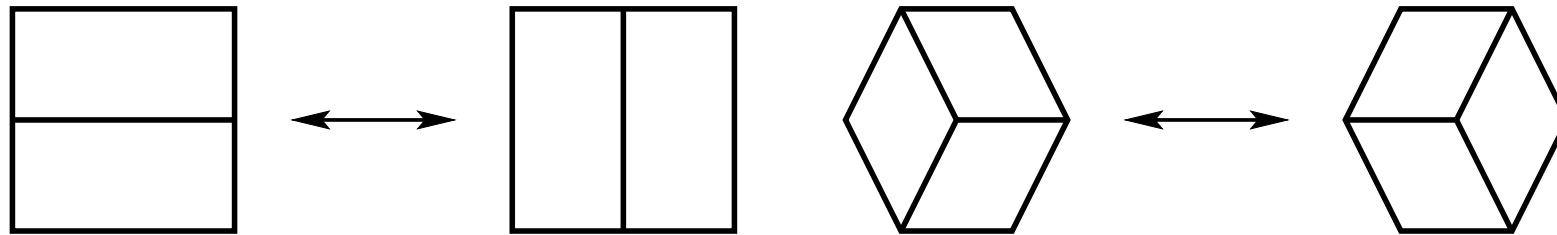
- Pas de grille sous-jacente (résultats de Thurston non applicables)
- Définis en toute dimension
- Relations avec physique (quasicristaux), structures apériodiques
- Combinatoire (étude des espaces de pavages)

Retour aux questions classiques

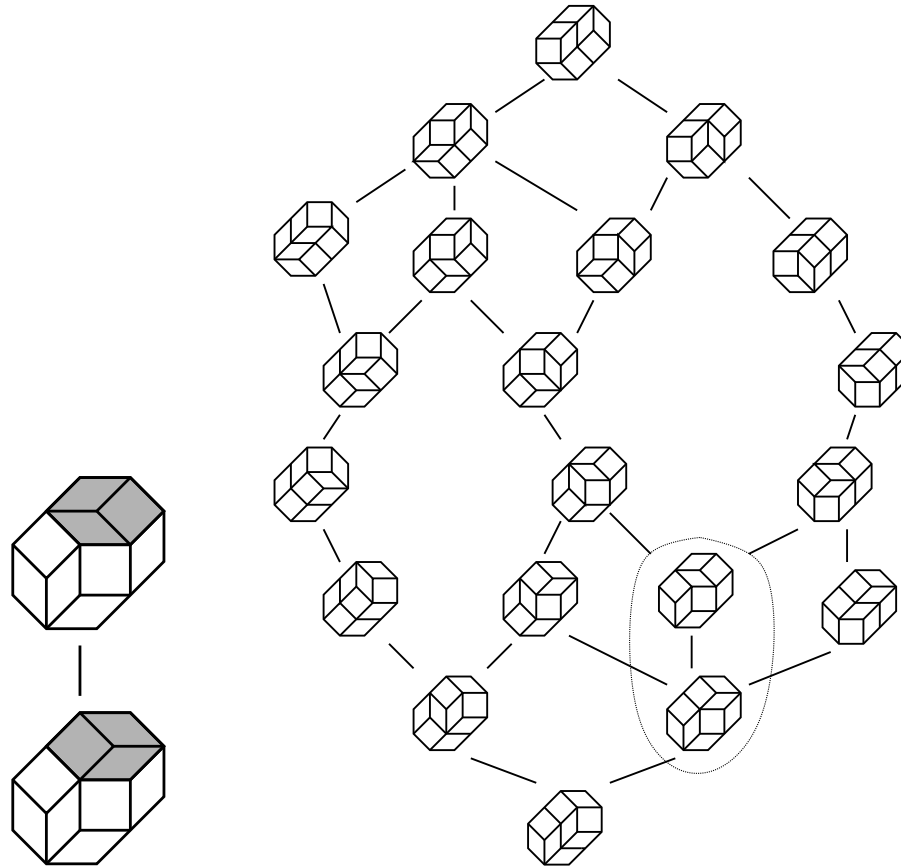
Cas des pavages de zonotopes

- Pavabilité - évident avec les définitions données
- Nombre de pavages - pb ouvert même dans le cas planaire (avec $D > 4$)
- Structure de l'espace des pavages - (Kenyon, Elnitsky : connexité par flips pour $d = 2$)
- Génération aléatoire - (Propp-Wilson, Luby-Randall-Sinclair pour $D = 3$ $d = 2$)

Flips, espace de pavages



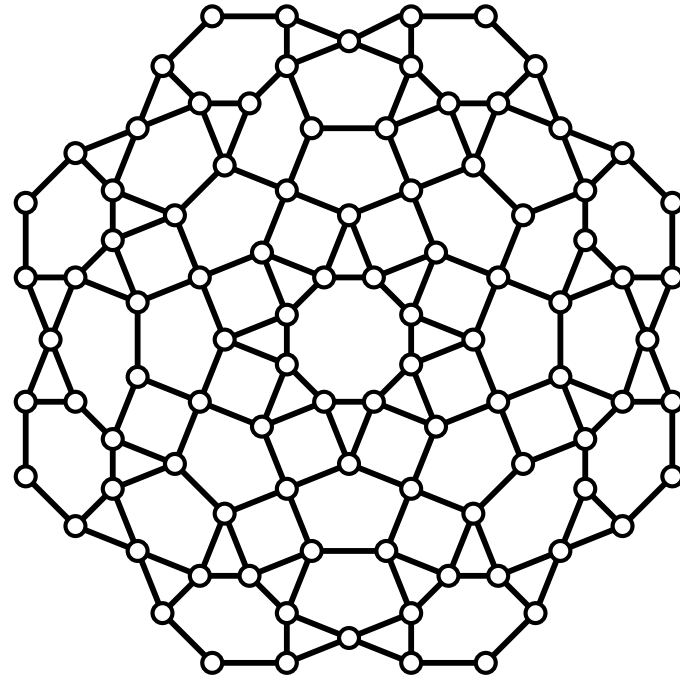
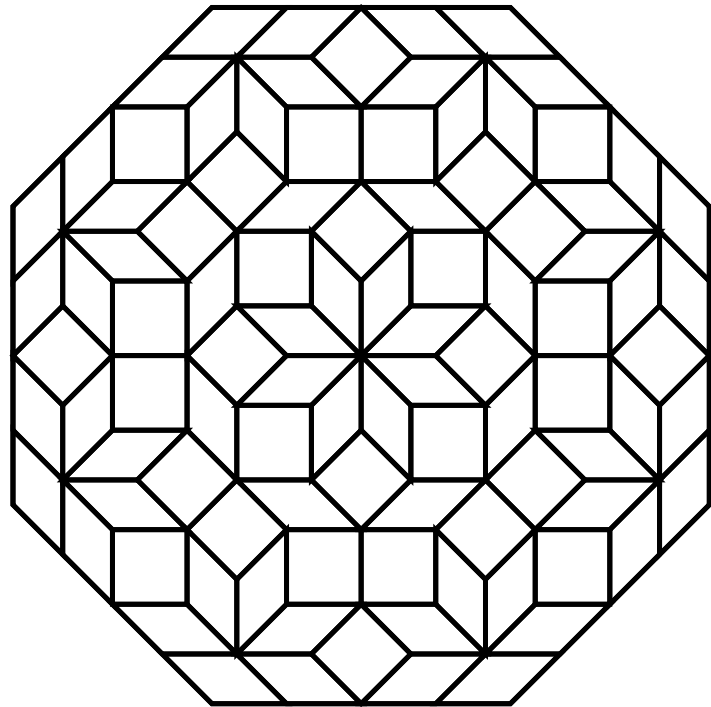
Cas des pavages de zonotopes



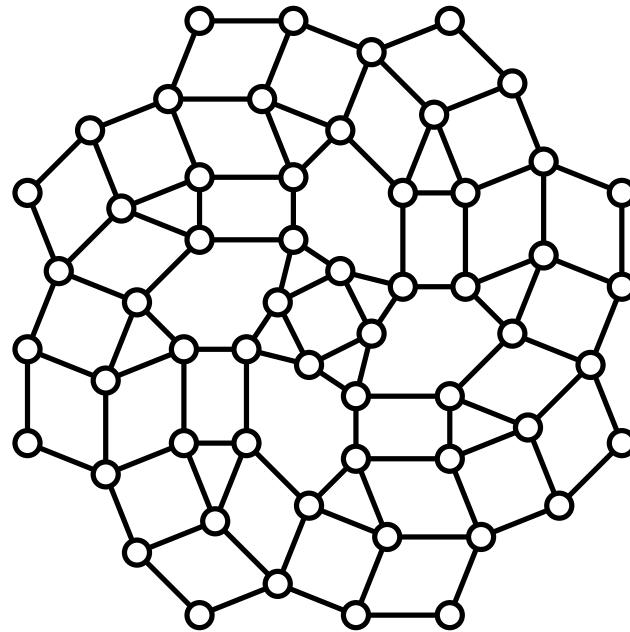
- Treillis distributif en codimension 1.
- Connexe pour les pavages de dimension 2. (Kenyon, Elnitsky)

3- Premier codage,
structure d'un pavage
de dimension 2

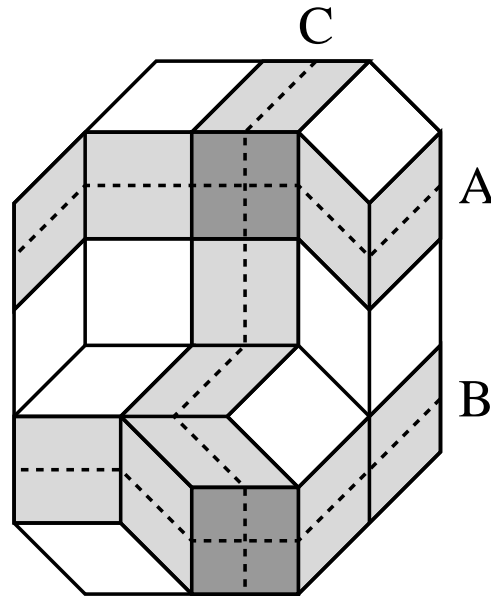
Graphe induit par la relation d'adjacence



Problème de caractérisation



Sections et familles de De Bruijn

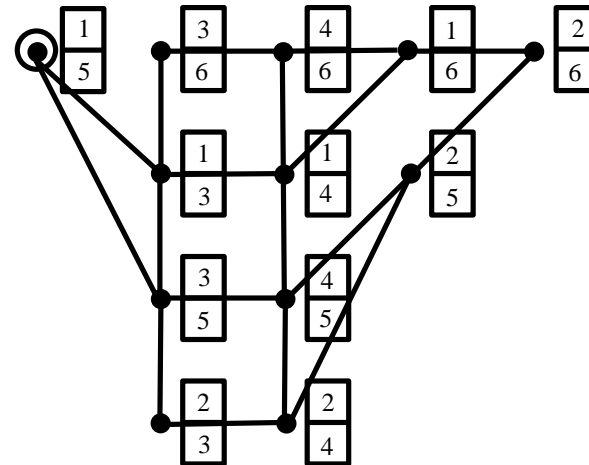
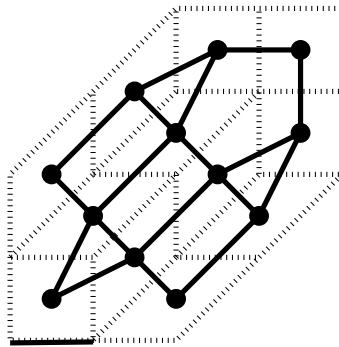
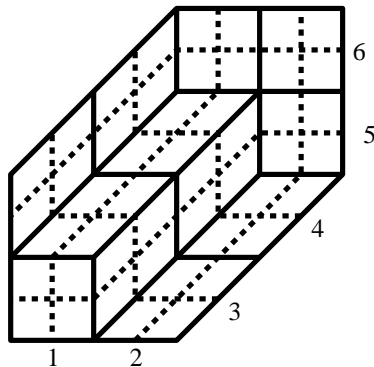


m_i = nombre de sections de la famille i .

Deux sections de familles différentes se coupent exactement une fois.

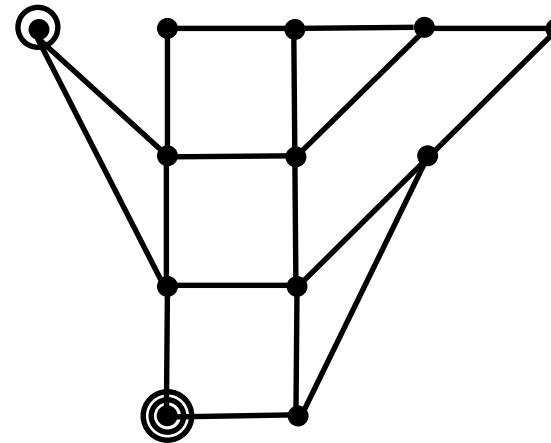
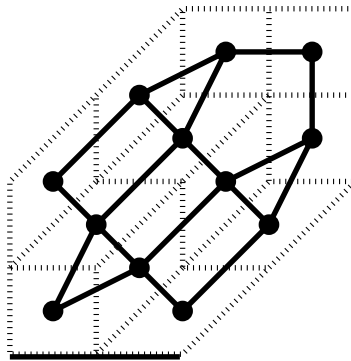
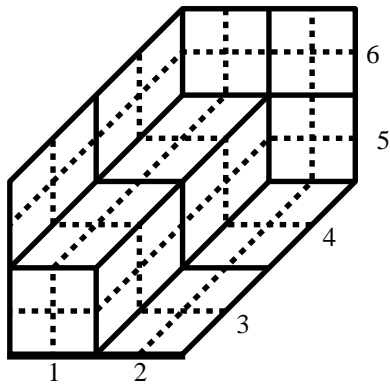
Deux sections d'une famille donnée ne se coupent pas.

Graphe de De Bruijn



Théorème : il existe un algorithme en $O(n)$, où n est le nombre de tuiles, construisant un pavage T à partir de son graphe de de Bruijn.

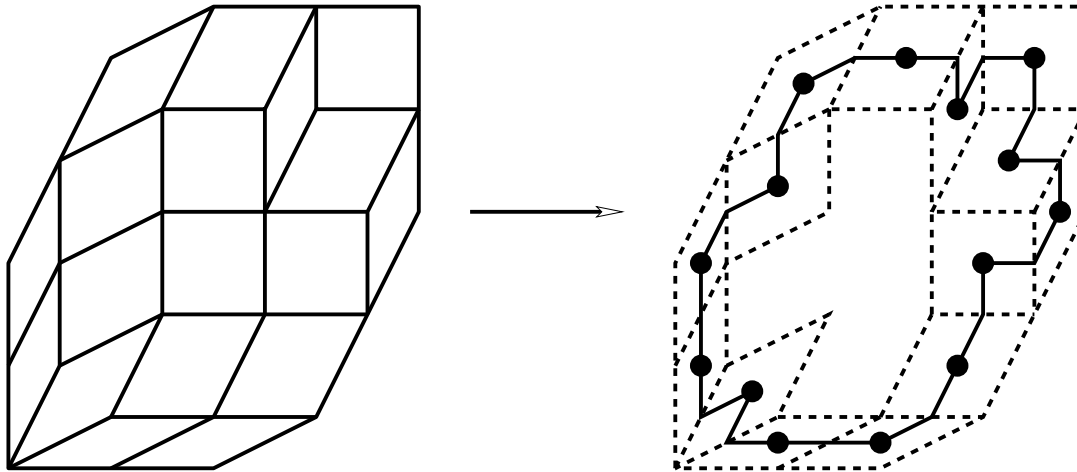
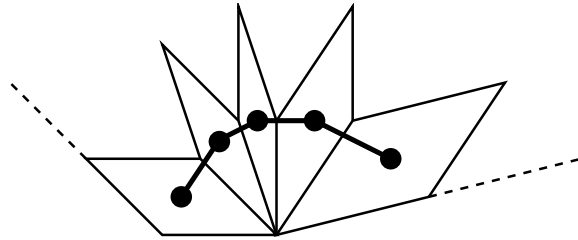
Graphe avec origines



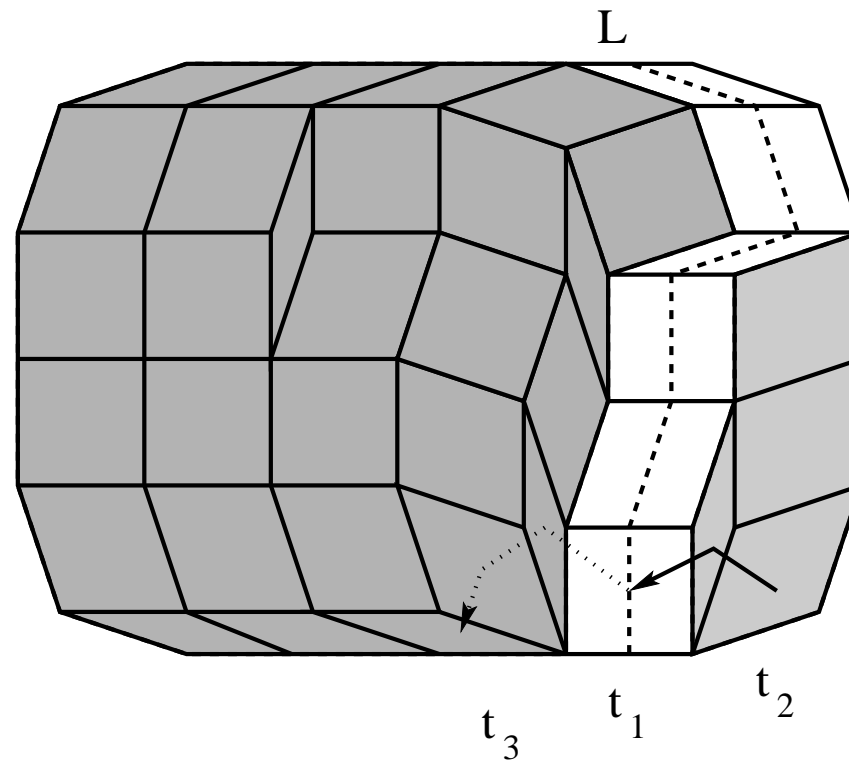
Problèmes :

- calculer les multiplicités
- construire les lignes de de Bruijn

Eventail, bordure

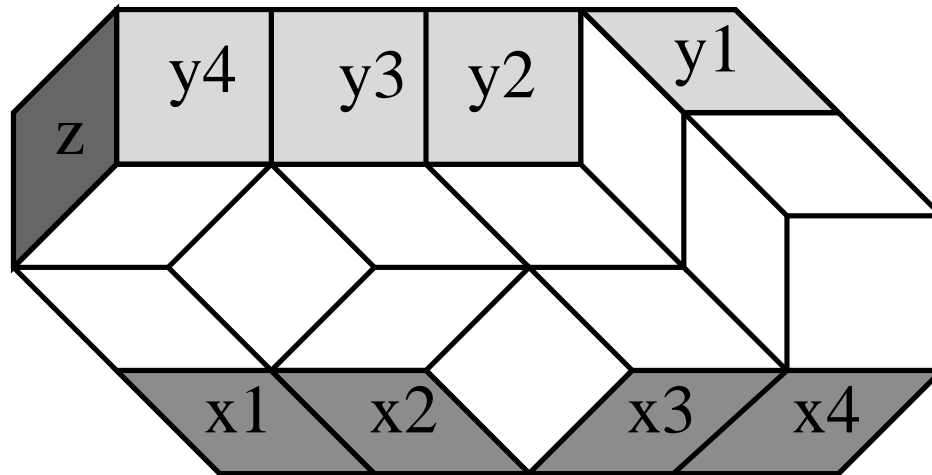


Construction de la bordure



Théorème : il existe un algorithme en $O(m \cdot n)$, où n est le nombre de sommets et m la somme des multiplicités, calculant la bordure d'un graphe de pavage avec origines.

Construction des lignes de De Bruijn



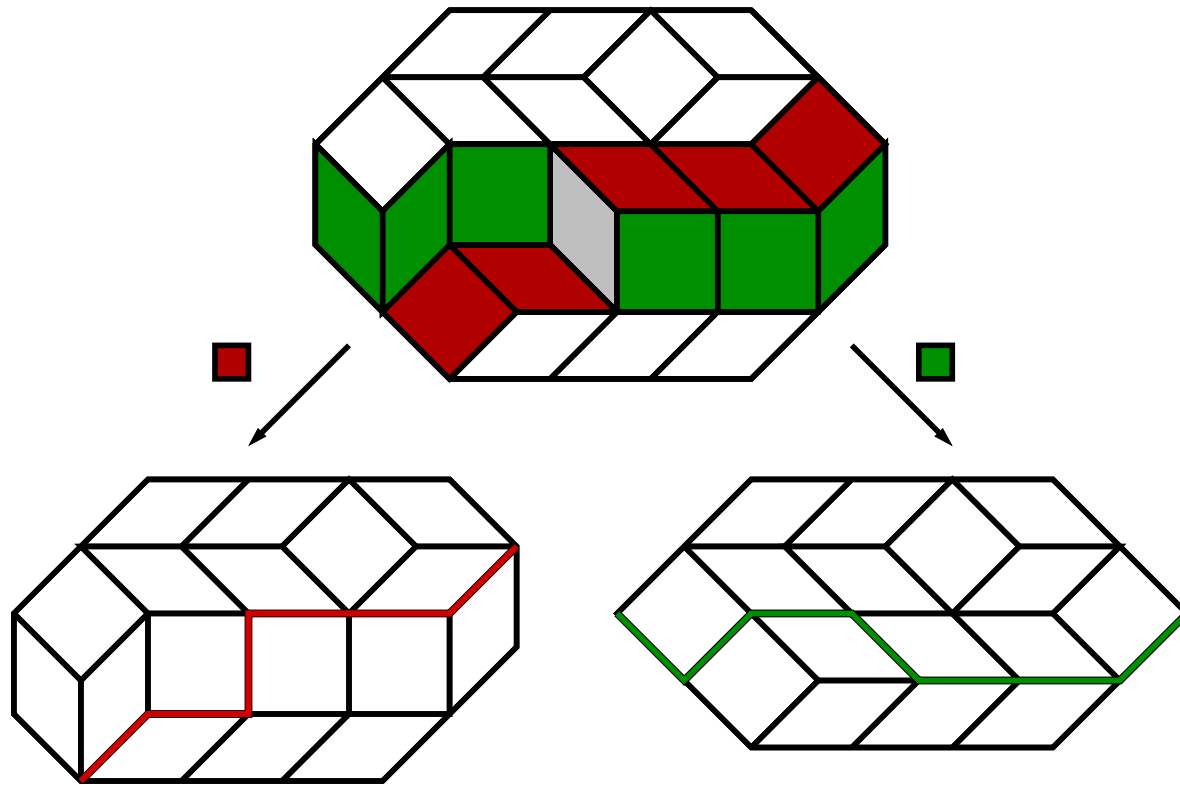
Théorème : il existe un algorithme de complexité $O(m \cdot n)$, où n est le nombre de sommets et m la somme des multiplicités, calculant le graphe de de Bruijn d'un pavage à partir de son graphe avec origines et de sa bordure.

Résultats

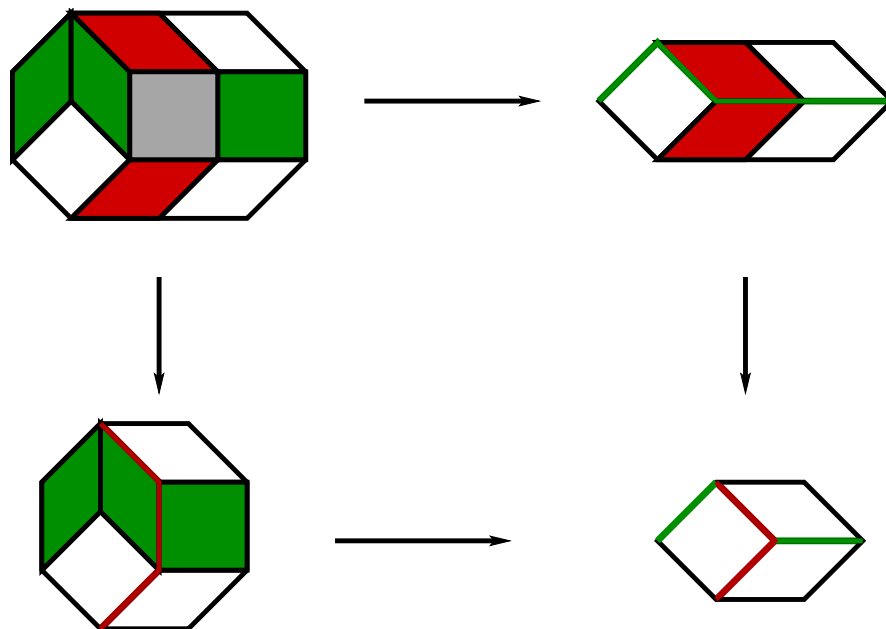
- représentation indépendante de la géométrie
- caractérisation des graphes effectivement codants

4- Deuxième codage, espace de pavages

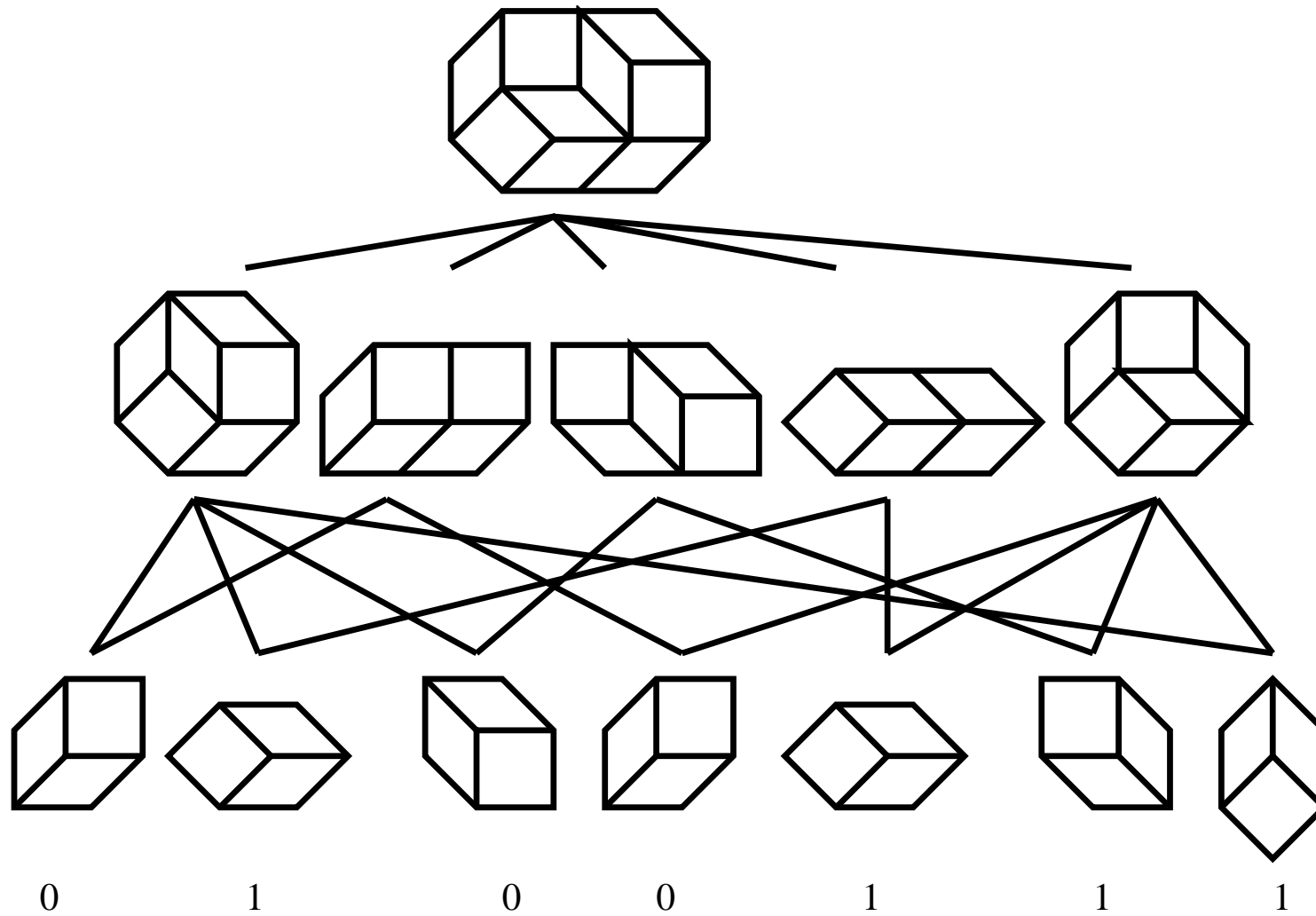
Opération de suppression



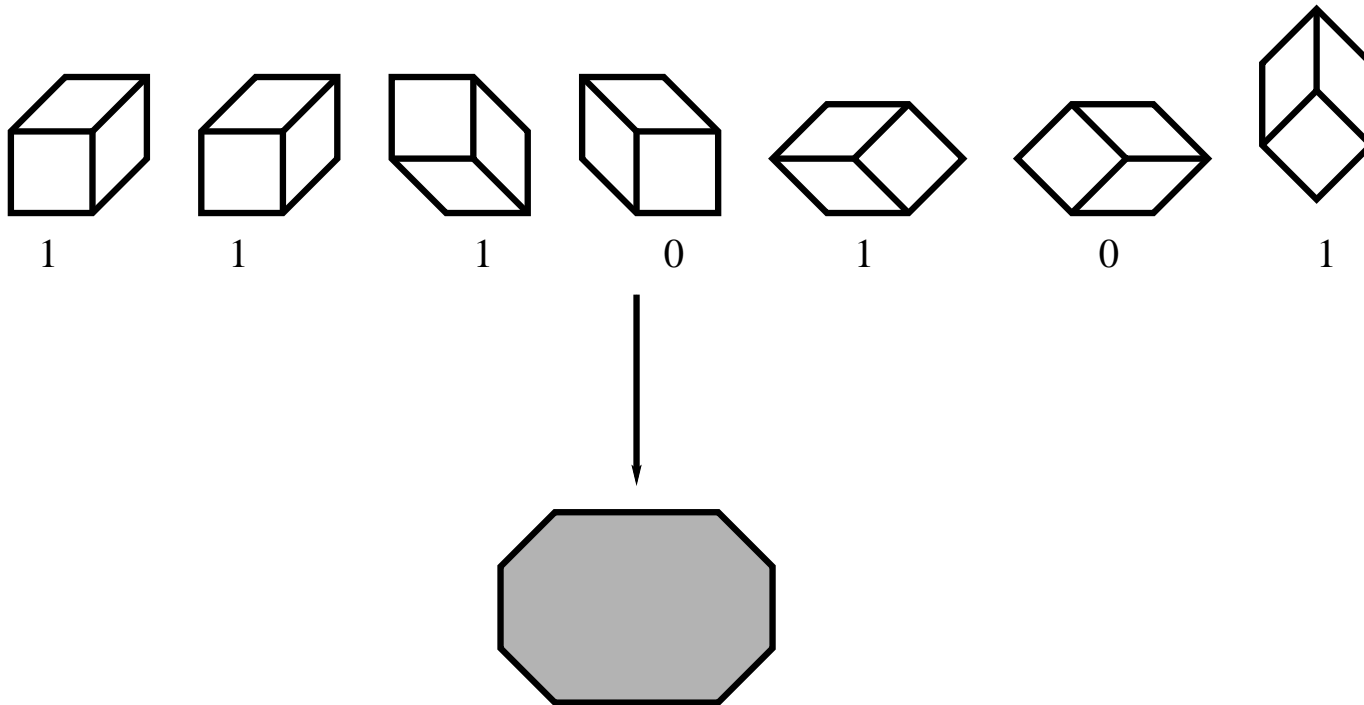
Commutativité des suppressions



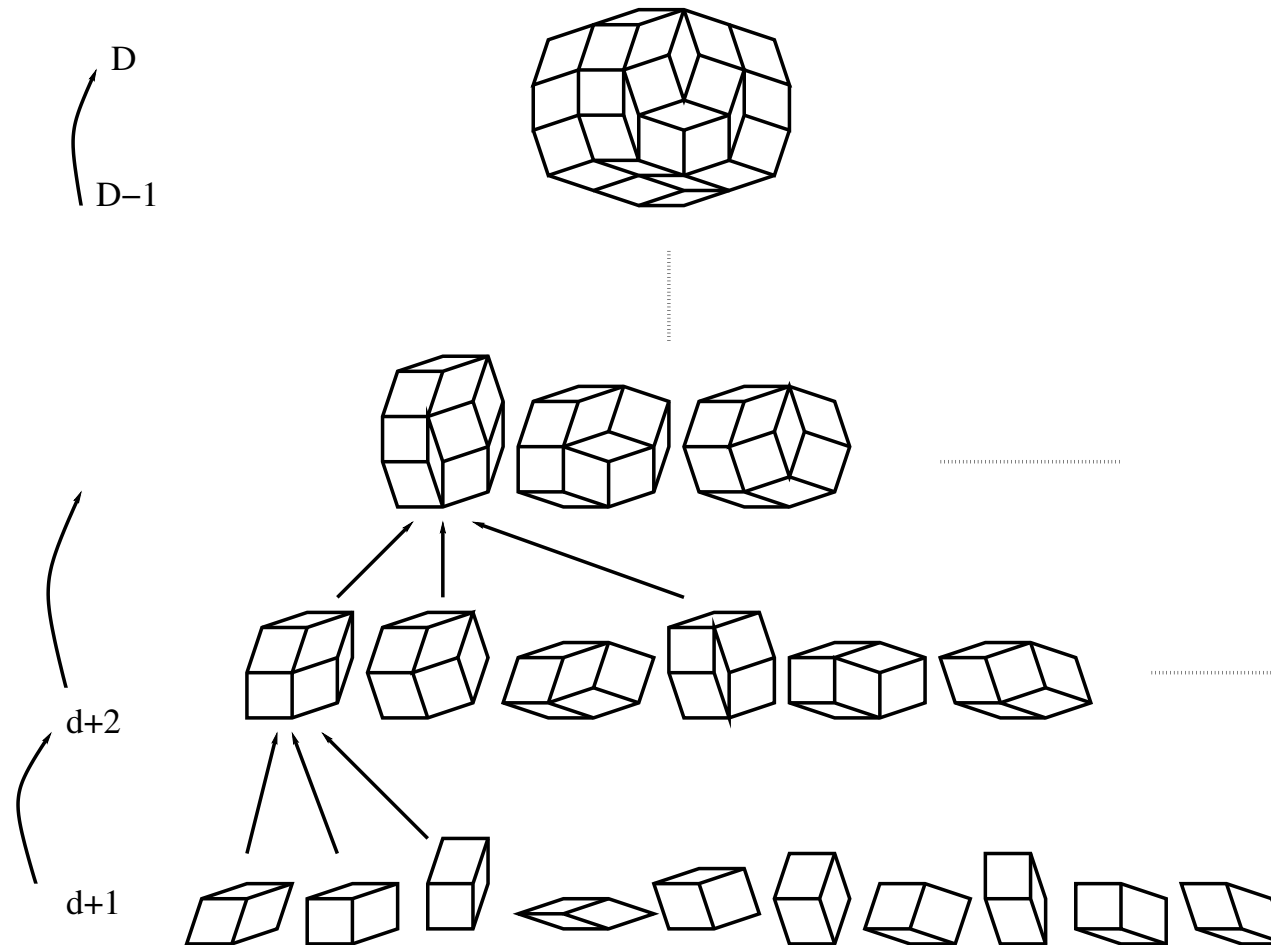
Codage induit par les suppressions



Problème de reconstruction



Théorème de reconstruction

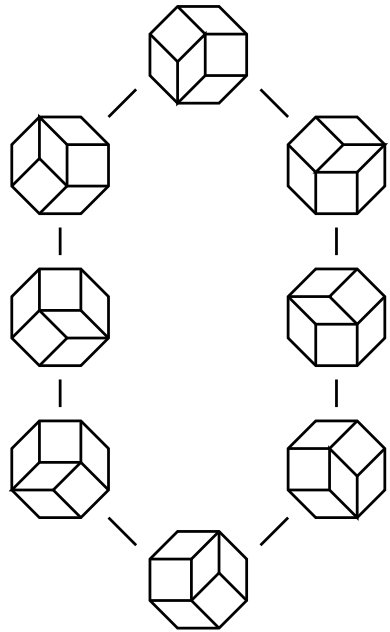


Théorème : la première étape suffit

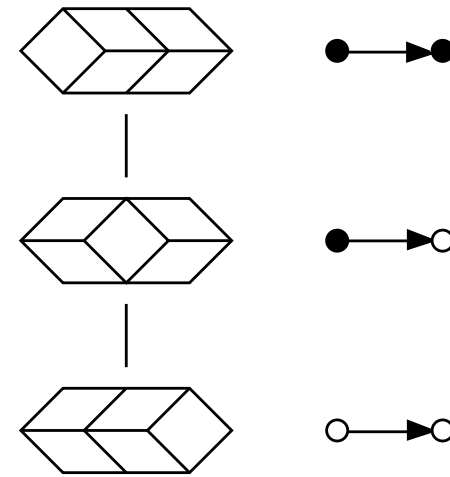
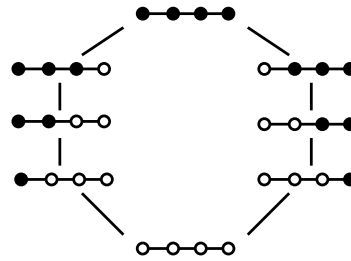
Représentation



Combinaisons

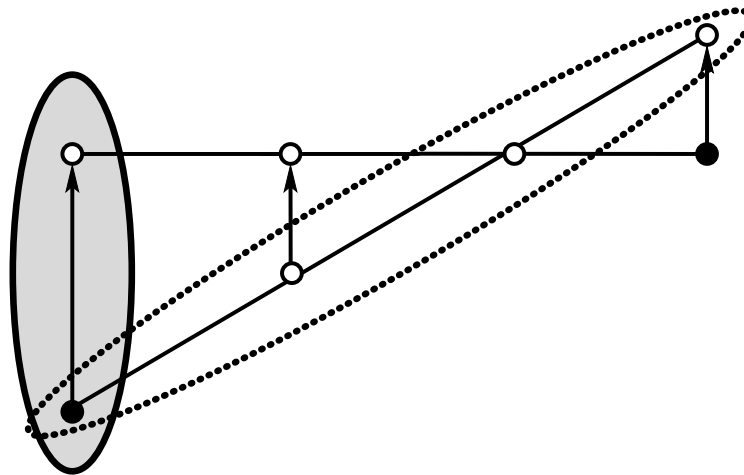
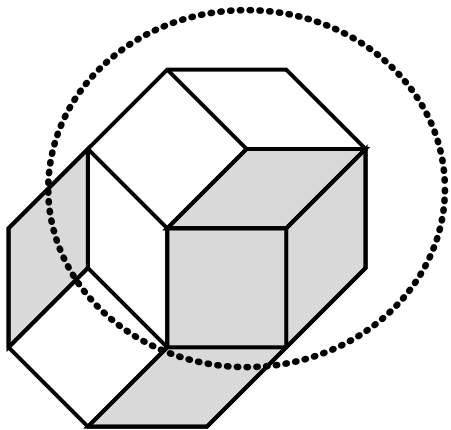


Contrainte de ligne



Contrainte de flèche

Diagramme de représentation



5- Structure en codimension 2

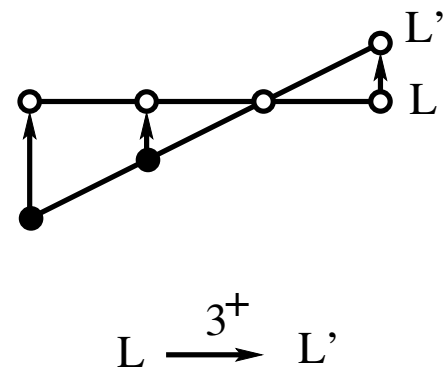
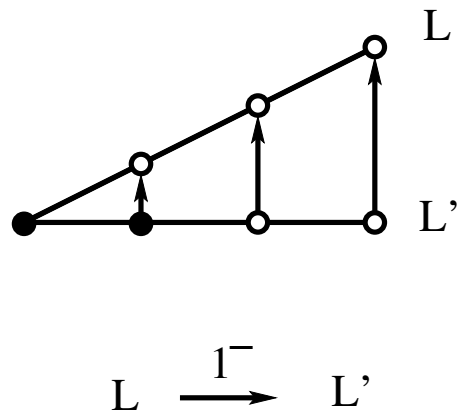
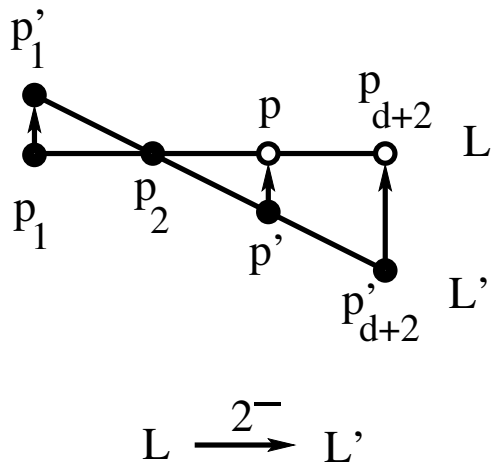
Ordre des flips, ordre des mineurs

Ordre de flips : $T \leq_{flip} T' \Leftrightarrow$ suite de flips montants de T à T'

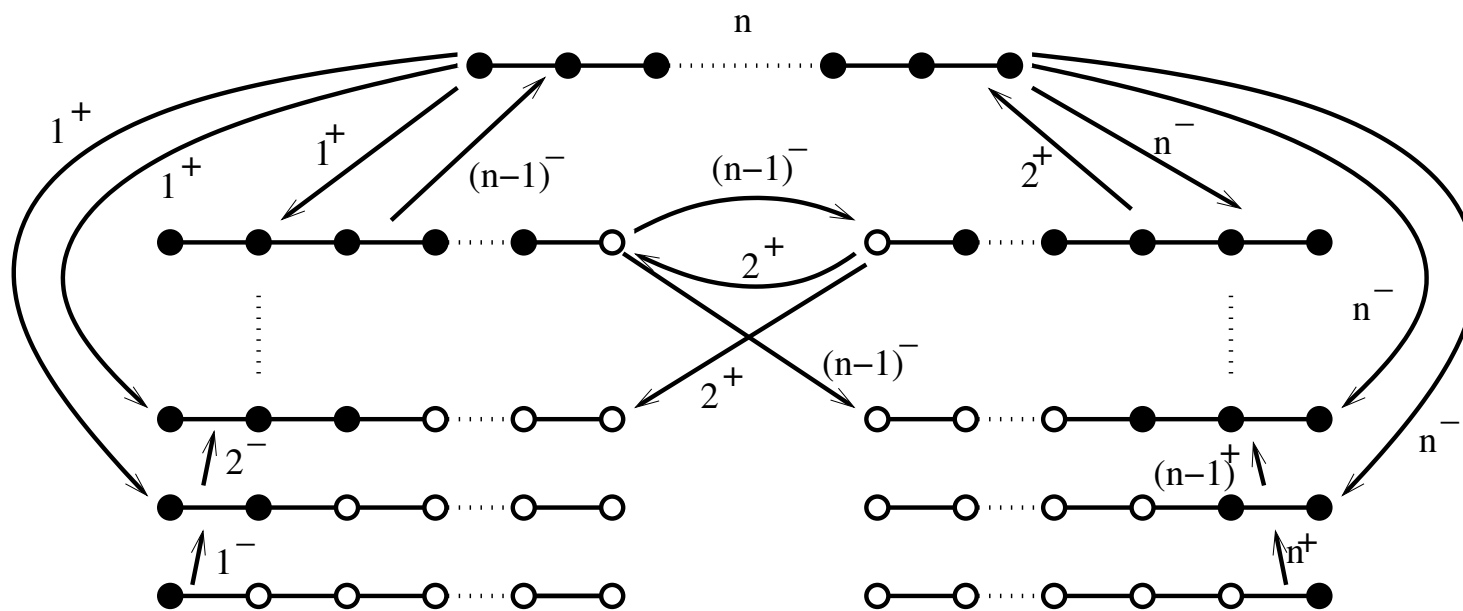
Ordre des mineurs : $T \leq_{mineur} T' \Leftrightarrow$ pour tout $(d + 1)$ -mineur X ,
 $X_T \leq X_{T'}$

Théorème : Ces deux ordres sont identiques.

Idée de preuve : graphe d'obstacles



Structure du graphe d'obstacles



Résultats

- Codage par les suppressions
- Théorème de reconstruction
- Structure d'ordre gradué pour la codimension 2 \Rightarrow connexité par flips en codimension 2.
- Pas de structure de treillis dans le cas de codimension 2

6- Conclusion, perspectives

Conclusion

- ouverture vers un cas particulier sans grille sous-jacente
- adaptation à des dimensions supérieures à 2
- caractérisation des pavages et représentation en grandes dimensions
- connexité par flips en codimension 2

Perspectives

- Distance de flips
- Adaptations aux plus grandes codimensions
- Génération aléatoire uniforme