



**HAL**  
open science

# Approche probabiliste des particules collantes et système de gaz sans pression

Octave Moutsinga

► **To cite this version:**

Octave Moutsinga. Approche probabiliste des particules collantes et système de gaz sans pression. Mathématiques [math]. Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, 2003. Français. NNT : . tel-00008721v2

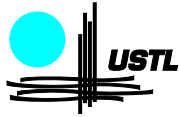
**HAL Id: tel-00008721**

**<https://theses.hal.science/tel-00008721v2>**

Submitted on 11 Mar 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° d'ordre : 3302

# THÈSE

présentée à :

l'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE,  
LILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR  
DISCIPLINE : MATHÉMATIQUES  
SPÉCIALITÉ : PROBABILITÉS

par

**Octave MOUTSINGA**

**Approche Probabiliste des Particules Collantes  
et Système de Gaz sans Pression**

Rapporteurs : François COQUET, Universités de Rennes 1 et du Havre  
Boualem DJEHICHE, Université de Stockholm, Suède  
Michel A. LIFSHITS, Saint-Petersburg State University, Russia

Thèse soutenue le 16 juin 2003, devant le jury composé de

Président : Youri DAVYDOV, Université Lille 1  
Directeur de Thèse : Azzouz DERMOUNE, Université Lille 1  
Rapporteur : François COQUET, Universités de Rennes 1 et du Havre  
Examineurs : Bernhard BECKERMANN, Université Lille 1  
Sergei KUZNETSOV, University of Colorado, Boulder, USA



# Table des matières

Dédicaces	ii
Remerciements	iv
Résumé de la thèse	vii
Abstract of the thesis	viii
<b>0 Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Modèle des particules collantes et enveloppe convexe</b>	<b>9</b>
1.1 Modèle discret des particules collantes . . . . .	10
1.2 Principe variationnel généralisé (GVP) . . . . .	14
1.3 Masses effectives, Particules effectives . . . . .	15
1.4 Recherche des masses effectives à l'instant $t$ . . . . .	19
1.5 Particules effectives à l'instant $t$ . . . . .	24
1.5.1 Recherche des extrémités gauche et droite . . . . .	25
1.5.2 Recherche d'une particule massive . . . . .	26
1.5.3 Recherche d'une particule non massive . . . . .	27
1.5.4 Partition $\xi_t$ . . . . .	28
1.6 Particules collantes et équation de Burgers . . . . .	29
1.7 Trajectoires des particules . . . . .	35
1.8 Lien avec une équation de Hamilton-Jacobi . . . . .	42
1.9 Passage du cas discret au cas continu . . . . .	44
1.10 Lien avec le système de gaz sans pression . . . . .	47
<b>2 Flot de particules</b>	<b>49</b>
2.1 Définition . . . . .	50
2.2 Recherche de la vitesse . . . . .	51
2.3 Processus stochastique lié au flot . . . . .	54
2.4 Caractérisation du flot . . . . .	57
2.5 Approximations discrètes . . . . .	63
2.6 Le comportement limite . . . . .	70

<b>3</b>	<b>Loi de conservation scalaire, représentation probabiliste</b>	<b>73</b>
3.1	Loi de conservation scalaire . . . . .	74
3.2	Système de gaz sans pression . . . . .	77
<b>4</b>	<b>Autour de l'équation différentielle stochastique <math>dX_t = E[v_0(X_0)/X_t]dt</math></b>	<b>81</b>
4.1	Les solutions discrètes $\sigma(X_0)$ -mesurables . . . . .	81
4.2	Les solutions discrètes non $\sigma(X_0)$ -mesurables . . . . .	84
4.3	Cas général . . . . .	85
4.4	Processus affine par morceaux . . . . .	87
4.5	Stabilité . . . . .	89
<b>5</b>	<b>Extension aux mesures de Radon</b>	<b>93</b>
5.1	Enveloppes convexes . . . . .	94
5.2	Flot de particules . . . . .	96
5.3	Le flot et l'équation $dX_t = E[v_0(X_0)/X_t]dt$ . . . . .	97
5.4	Caractérisation du flot . . . . .	99
5.5	Approximation probabiliste . . . . .	100
5.6	Lien avec une équation de Hamilton-Jacobi . . . . .	104
5.7	Lien avec la loi de conservation scalaire . . . . .	105
5.8	Approximation de la loi de conservation scalaire . . . . .	107
5.9	Lien avec l'équation de Burgers . . . . .	110
<b>6</b>	<b>Equation de Burgers et Flot des particules collantes</b>	<b>113</b>
6.1	Equation de Burgers . . . . .	113
6.2	Lien avec le flot des particules collantes . . . . .	115
	<b>Conclusion</b>	<b>123</b>

Tâ DOUMA !

A Mâm NYANGUI,  
qui m'a été arrachée si brutalement.

A Inès Nyangui, ma fille.

A *zouzou mam'es*, Fatiha,  
ma petite fleur.



# Remerciements

Cette thèse a commencé par un travail approfondi sur les Particules Collantes et les EDP, alors que j'explorais pour la première fois ce champ de recherche. Je remercie vivement Azzouz Dermoune de m'y avoir initié avec autant de pédagogie. Ce travail n'aurait pu aboutir sans son inconditionnelle disponibilité. C'est cette disponibilité qui a rendu si exaltante l'aventure de la thèse.

Je remercie mon enseignant de Maîtrise et de DEA, Youri Davydov, pour ses conseils qui sont toujours judicieux. Je lui exprime toute ma gratitude, surtout pour l'honneur qu'il m'a fait, en présidant le jury de cette thèse. Messieurs François Coquet, Boualem Djehiche et Michel Lifshits ont fait des rapports pertinents qui ont permis la soutenance de cette thèse. Je les remercie énormément pour l'attention qu'ils ont accordé à ce travail, en particulier François Coquet, qui a eu la gentillesse de s'accommoder aux exigences temporelles. Ma gratitude va également à Bernhard Beckermann et Sergei Kuznetsov pour avoir bien voulu faire partie du jury.

A l'UFR de Mathématiques, je tiens à remercier Anne-Marie Chollet pour son aimable accueil, lorsque j'arrivais pour la première fois en France, en m'inscrivant en Maîtrise. Je remercie aussi Raymond Moché pour les enrichissantes discussions que nous avons souvent eues.

J'ai énormément apprécié mon travail et ma collaboration à l'UFR en tant qu'Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche. Je remercie ici le personnel et les collègues enseignants, en particulier ceux du Laboratoire de Statistique et Probabilités.

Une bonne thèse, c'est aussi des moments agréables passés avec les collègues thésards. Je remercie Hatim, Jean-Christophe, Mohamedou, David, Pierre-Yves, Abbas et Fred pour les remarquables instants que nous avons partagés. Je n'oublierai pas les nouveaux venus, Siham, Sébastien et Frédéric qui ont significativement enrichi les nombreuses discussions tant mathématiques, sociologiques que théologiques.

Ce travail n'aurait pu arriver à terme sans ma compagne Fatiha qui a su être forte et a organisé ma vie dans les moments difficiles. Fatiha et Inès, notre fille, ont été ma principale source de motivation. Je leur en suis infiniment reconnaissant.

Je tiens à louer le soutien perpétuel qui m'a été apporté ma famille, mes frères et



soeurs. En particulier, Emmanuel, Michel, Mapessi, René, Marcelline, Exupère, Didier, Guy-Roger et Georges ont toujours été présents, malgré les distances. Qu'ils trouvent ici ma profonde gratitude.

Mes remerciements vont aussi à mes amis, pour m'avoir souvent été de bon conseil, et pour m'avoir toujours soutenu dans l'adversité. Ils sont nombreux, et je sais qu'ils m'excusent déjà de ne pouvoir les citer.

De père et mère, j'ai retenu l'amour et un sens profond de l'humanité. *Diboti di neni.*

# Résumé de la thèse

A chaque instant  $t$ , nous construisons la dynamique des particules collantes distribuées initialement suivant une fonction de répartition  $F_0$ , avec une vitesse  $u_0$ , à partir de l'enveloppe convexe  $H(\cdot, t)$  de la fonction

$$m \in (0, 1) \mapsto \int_a^m (F_0^{-1}(z) + tu_0(F_0^{-1}(z))) dz .$$

Ici,  $F_0^{-1}$  est l'une des deux fonctions inverses de  $F_0$ . Nous montrons que les processus

$$X_t^-(m) = \partial_m^- H(m, t), \quad X_t^+(m) = \partial_m^+ H(m, t) ,$$

définis sur l'espace probabilisé  $([0, 1], \mathcal{B}, \lambda)$ , sont indistinguables et ils modélisent les trajectoires des particules. Le processus  $X_t := X_t^- = X_t^+$  est une solution de l'équation

$$(EDS) : \quad \frac{dX_t}{dt} = E[u_0(X_0)/X_t] ,$$

telle que  $P(X_0 \leq x) = F_0(x) \forall x$ . L'inverse  $M_t := M(\cdot, t)$  de la fonction  $m \mapsto \partial_m H(m, t)$  est la fonction de répartition des particules à l'instant  $t$ . Elle est aussi la fonction de répartition de la variable aléatoire  $X_t$ . On montre l'existence d'un flot  $(\phi(x, t, M_s, u_s), s < t)$  tel que  $X_t = \phi(X_s, t, M_s, u_s)$ , où  $u_s(x) = E[u_0(X_0)/X_s = x]$  est la fonction vitesse des particules à l'instant  $s$ . Si  $\frac{dF_0^n}{dx}$  converge faiblement vers  $\frac{dF_0}{dx}$ , alors la suite des flots  $\phi(\cdot, \cdot, F_0^n, u_0)$  converge uniformément, sur tout compact, vers  $\phi(\cdot, \cdot, F_0, u_0)$ .

Ensuite, nous retrouvons et étendons certains résultats des équations aux dérivées partielles : la fonction  $(x, t) \mapsto M(x, t)$  est la solution entropique d'une loi de conservation scalaire de donnée initiale  $F_0$ , et la famille

$$\left( \rho(dx, t) = P(X_t \in dx), \quad u(x, t) = E[u_0(X_0)/X_t = x], \quad t > 0 \right)$$

est une solution faible du système de gaz sans pression de données initiales  $\frac{dF_0(x)}{dx}, u_0$ .

Cette thèse contient aussi d'autres solutions de l'équation différentielle stochastique (EDS) ci-dessus. Ces solutions sont obtenues par la superposition des dynamiques collante et de désintégration.

**Mots-clés :** Processus stochastique, Equation différentielle stochastique, Particules collantes, Flot, Enveloppe convexe, Equations de gaz sans pression, Loi de conservation scalaire, Equation de Hamilton-Jacobi, Equation de Burgers.



# Abstract of the thesis

At each time  $t$ , our construction of sticky particle dynamics, with initial repartition function  $F_0$  and velocities  $u_0$ , is given by the convex hull  $H(\cdot, t)$  of the function

$$m \in (0, 1) \mapsto \int_a^m (F_0^{-1}(z) + tu_0(F_0^{-1}(z))) dz .$$

Here,  $F_0^{-1}$  is one of two inverse functions of  $F_0$ . We show that the processes  $X_t^-(m) = \partial_m^- H(m, t)$ ,  $X_t^+(m) = \partial_m^+ H(m, t)$ , defined on the probability space  $([0, 1], \mathcal{B}, \lambda)$ , are not distinguishable, and they model the particles trajectories. The process  $X_t =: X_t^- = X_t^+$  is a solution of the equation

$$(SDE) : \quad \frac{dX_t}{dt} = E[u_0(X_0)/X_t] ,$$

such that  $P(X_0 \leq x) = F_0(x) \forall x$ . The inverse  $M_t := M(\cdot, t)$  of the map  $m \mapsto \partial_m H(m, t)$  is the repartition function of the particles at each time  $t$ . It is also the repartition function of the random variable  $X_t$ . We show the existence of a forward flow map  $(\phi(x, t, M_s, u_s), s < t)$  satisfying  $X_t = \phi(X_s, t, M_s, u_s)$ , where  $u_s(x) = E[u_0(X_0)/X_s = x]$  is the velocity map of the particles at time  $s$ . If  $\frac{dF_0^n}{dx}$  converges weakly towards  $\frac{dF_0}{dx}$ , then the flow  $\phi(\cdot, \cdot, F_0^n, u_0)$  converges uniformly, on every compact subset of  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ , towards  $\phi(\cdot, \cdot, F_0, u_0)$ .

We then recover and generalise some results about partial differential equations : the map  $(x, t) \mapsto M(x, t)$  is the entropy solution of a scalar conservation law with  $F_0$  as initial data, and the family

$$\left( \rho(dx, t) = P(X_t \in dx), \quad u(x, t) = E[u_0(X_0)/X_t = x], \quad t > 0 \right)$$

is a weak solution of the system of pressure-less gas equations with initial datum  $\frac{dF_0(x)}{dx}, u_0$ .

This thesis also presents other solutions of the above stochastic differential equation (SDE). Theses solutions are obtained by the superposition of the sticky dynamics and the disintegration dynamics.

**Keywords:** Stochastic process, Stochastic differential equation, Sticky particles, Forward flow, Convex hull, Pressure-less gas equations, Scalar conservation law, Hamilton-Jacobi equation, Burgers equation.



# Chapitre 0

## Introduction

Pour expliquer la formation des grosses structures dans l'univers (amas des particules et leur évolution), Zeldovich [43] propose le modèle des particules collantes suivant : on considère un système de particules  $\{x_i^0\} \subset \mathbb{R}$  ayant comme vitesses initiales  $\{v_i^0\}$  et pour masses initiales  $\{m_i^0\}$ . Les particules se déplacent avec une vitesse constante entre les instants de chocs. A chaque instant de choc, les particules qui se rencontrent forment une nouvelle particule massive. Sa masse et sa vitesse sont données par les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Plus précisément, si les particules  $x_i^0$ ,  $k \leq i \leq j$  se rencontrent, alors elles forment une nouvelle particule de masse  $m_{k,j}$ , et qui part avec une nouvelle vitesse  $v_{k,j}$  ; la masse et la vitesse de cette particule sont données par les équations

$$m_{k,j} = \sum_{l=k}^j m_l^0, \quad m_{k,j} v_{k,j} = \sum_{l=k}^j m_l^0 v_l^0.$$

Dans le cas continu, l'état initial du système des particules est défini par une mesure positive  $\rho(dx, 0)$  et par une fonction vitesse  $x \mapsto u_0(x)$ . Si on note par  $\rho(dx, t)$  et  $u(x, t)$  respectivement la distribution de la matière et la fonction vitesse à l'instant  $t$ , alors les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement sont données par le système

$$\begin{cases} \partial_t(\rho) + \partial_x(u\rho) & = 0 \\ \partial_t(u\rho) + \partial_x(u^2\rho) & = 0 \\ \rho(dx, t) \rightarrow P_0, \quad u(x, t)\rho(dx, t) \rightarrow u_0(x)P_0(dx) & \text{faiblement, lorsque } t \rightarrow 0^+ \end{cases}$$

Ce système est appelé système de gaz sans pression, et il a fait l'objet de plusieurs travaux [4, 27, 5, 25]. Du point de vue de la physique, ce système a été étudié comme un modèle de particules collantes par Zeldovich. Mathématiquement, les solutions de ce système sont naturellement des mesures. Ainsi, la famille  $t \mapsto (\rho(dx, t), u(x, t))$  doit être une solution faible de ce dernier système, c'est-à-dire que pour toute fonction  $f \in C_0^1$ , l'espace  $C_0^1$  étant l'ensemble des fonctions de classe  $C^1$  à support compact, et pour tous

$0 < t_1 < t_2$ ,

$$\begin{aligned} \int f(x)\rho(dx, t_2) - \int f(x)\rho(dx, t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} \int f'(x)u(x, t)\rho(dx, t)dt, \\ \int f(x)u(x, t_2)\rho(dx, t_2) - \int f(x)u(x, t_1)\rho(dx, t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} \int f'(x)u^2(x, t)\rho(dx, t)dt, \\ \int f(x)\rho(dx, t) &\rightarrow \int f(x)\rho_0(dx), \\ \int f(x)u(x, t)\rho(dx, t) &\rightarrow \int f(x)u_0(x)\rho_0(dx), \quad \text{lorsque } t \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

L'existence globale d'une solution faible a été obtenue par Brenier, Grenier [4] et E, Rykov, Sinai [25]. On rappelle ici les deux constructions.

Dans [25], on approche la distribution initiale  $\rho_0$  par une suite de mesures discrètes  $\rho_0^n(dx) = \sum_{i=1}^n m_i^n \delta(x_i^n - x)$ . Pour chaque entier  $n$ , on construit la dynamique des particules collantes associée au système initialement situé aux positions  $(x_i^n : 1 \leq i \leq n)$  avec les vitesses et les masses  $(u_0(x_i^n), m_i^n : 1 \leq i \leq n)$ . On associe à chaque  $x_i^n$  sa trajectoire  $(\varphi^n(x_i^n, t) : t \geq 0)$ . La distribution de la matière à l'instant  $t$  est donnée par

$$\rho^n(dx, t) = \sum_{i=1}^n m_i^n \delta(\varphi^n(x_i^n, t) - x),$$

et la fonction vitesse est donnée par

$$u_n(\varphi^n(x_i^n, t), t) = \partial_t \varphi^n(x_i^n, t).$$

On montre que pour chaque  $n$ , la famille  $(\rho^n(dx, t), u_n(x, t) : t \geq 0)$  est une solution faible au système de gaz sans pression avec la distribution initiale  $\rho_0^n(dx)$  et la vitesse initiale  $(u_0(x_i^n) : 1 \leq i \leq n)$ . En faisant tendre  $n \rightarrow +\infty$ , sous l'hypothèse

$$\frac{\rho_0(dx)}{dx} > 0 \quad \forall x \in \text{Supp}(\rho_0),$$

et sous l'hypothèse de la continuité de la vitesse initiale  $u_0$ , on montre que la suite des flots  $(\varphi^n)$  converge uniformément sur tout compact de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  vers une fonction continue  $\varphi$ . Finalement, on montre que  $(\rho(dx, t) := \rho_0 \circ \varphi^{-1}(\cdot, t), u(\cdot, t) : t \geq 0)$  est une solution faible au système de gaz sans pression, avec

$$u(x, t) := \frac{\int_{[\varphi(x, t) = \varphi(y, t)]} (y + tu_0(y)) \rho_0(dy)}{\int_{[\varphi(x, t) = \varphi(y, t)]} \rho_0(dy)}.$$

Les deux points délicats de cette approche sont la construction du flot limite  $\varphi(x, t)$  et la convergence de la suite des vitesses  $u_n(x, t)$  vers la vitesse limite  $u(x, t)$ .

L'approche de Brenier et Grenier [4] consiste à montrer que pour chaque  $t$ , la suite des mesures  $(\rho^n(dx, t) = \rho_0^n \circ (\varphi^n)^{-1}(\cdot, t) : n \geq 1)$  converge faiblement vers une probabilité  $\rho(dx, t)$  dont les fonctions de répartition  $(M(x, t) = \rho((-\infty, x], t) : x, t)$  constituent l'unique solution entropique de l'équation de loi de conservation suivante :

$$\partial_t M + \partial_x(A(M)) = 0 ,$$

où  $M_0(x) = \rho_0((-\infty, x])$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , et

$$A(m) = \int_0^m u_0(M_0^{-1}(z)) dz , \quad \forall m \in (0, 1) .$$

Ils montrent que la mesure  $\partial_x(A(M))$  est absolument continue par rapport à la mesure  $\partial_x M$ , et que la famille

$$\left( \partial_x M, \frac{d[\partial_x(A(M))]}{d[\partial_x M]} =: u(x, t) \right)$$

est une solution faible du système de gaz sans pression.

Une approche probabiliste a été faite par Dermoune [14]. Il a montré que les trajectoires des particules collantes sont modélisées par un processus stochastique solution de l'équation différentielle

$$dX_t = E[u_0(X_0)/X_t]dt, \quad \text{loi}(X_0) = \rho(dx, 0) . \quad (0.0.1)$$

En utilisant la formule de changement de variables, il montre que pour toute solution  $(X_t)$  de (0.0.1), la famille

$$(\rho(dx, t) := P(X_t \in dx), \quad u(x, t) := E[u_0(X_0)/X_t = x])$$

est une solution faible du système de gaz sans pression. Pour construire cette solution, Dermoune [14] considère une variable aléatoire  $X_0$  dont la loi est une mesure de probabilité  $\rho_0$ , et une suite de variables aléatoires  $(X_0^n)$  discrètes telle que  $X_0^n \rightarrow X_0$  p.s. Il montre, sous les mêmes hypothèses que celles de [25], que les processus  $(X_t^n := \varphi^n(X_0^n, t) : t \geq 0)$  et la limite  $(X_t := \varphi(X_0, t) : t \geq 0)$  sont solutions de (0.0.1). Le point délicat dans cette approche est de montrer que le processus limite  $(X_t)$  est solution de (0.0.1).

On arrive maintenant à la motivation et aux résultats essentiels de cette thèse. La construction du flot limite  $\varphi$  dans l'approche de E, Rykov, Sinai [25] est basée sur un principe variationnel généralisé qui consiste à définir chaque amas de particules à l'aide de son extrémité gauche et de son extrémité droite. Ces extrémités sont bien définies lorsque la distribution initiale est une mesure discrète, mais elles deviennent ambiguës dans le cas où la distribution initiale est diffuse. Le point de départ de cette thèse était de comprendre et de corriger cette ambiguïté. Ceci est l'objet du chapitre 1. On reprend la construction de la dynamique des particules collantes sous un angle légèrement différent de celui de [25], dont voici un résumé.



La matière est initialement distribuée suivant une mesure de probabilité  $P_0$ , et une vitesse  $v_0$  non forcément continue qui a des « sauts négatifs ». Nous désignons par  $F_0$  la fonction de répartition de  $P_0$ , et par  $F_0^{-1}$  son « inverse ». Nous définissons le modèle des particules collantes de la manière suivante.

- (i) L'ensemble des particules initiales est décrit par la fonction  $m \in (0, 1) \mapsto F_0^{-1}(m)$ .
- (ii) Tant qu'il n'y a pas de choc, l'ensemble des particules, à l'instant  $t$ , est décrit par la fonction

$$m \in (0, 1) \mapsto F_0^{-1}(m) + tv_0(F_0^{-1}(m)) .$$

- (iii) Après le premier choc, cette dernière fonction n'est plus croissante, ce qui se traduit par la non convexité de la primitive

$$m \in (0, 1) \mapsto \int_{\frac{1}{2}}^m [F_0^{-1}(z) + tv_0(F_0^{-1}(z))] dz .$$

On montre que l'enveloppe convexe  $m \in (0, 1) \mapsto H(m, t)$  de cette primitive détermine l'état du système des particules collantes à l'instant  $t$ . L'ensemble des positions occupées par le système est donné par la fonction

$$m \in (0, 1) \mapsto \partial_m H(m, t) ,$$

et les extrémités des amas sont les images, par la fonction  $F_0^{-1}$ , des points extrémaux de l'enveloppe convexe.

Cette approche a plusieurs avantages. Elle corrige le principe variationnel généralisé de E, Rykov, Sinai [25], et elle permet de retrouver les résultats de Brenier, Grenier [4], [25], Dermoune [14] sans passer par la discrétisation de la mesure initiale. Elle permet aussi d'étendre leurs résultats à des vitesses initiales non forcément continues.

Dans le chapitre 2, on étudie le processus stochastique  $(m, t) \mapsto \partial_m H(m, t)$  défini sur l'espace probabilisé  $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ . On montre d'abord qu'il est solution de (0.0.1). Puis, on construit un processus stochastique  $(y, t) \mapsto \phi(y, t, P_0, v_0)$  sur l'espace probabilisé  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_0)$ . Pour chaque  $y \in \mathbb{R}$ , la trajectoire  $t \mapsto \phi(y, t, P_0, v_0)$  est celle de la particule soumise à la dynamique des particules collantes, partie initialement de la position  $y$ . On montre ensuite que les deux processus

$$(m, t) \mapsto \phi(F_0^{-1}(m), t, P_0, v_0) , \quad (m, t) \mapsto \partial_m H(m, t)$$

sont indistinguables, et qu'ils sont solutions de (0.0.1).

Ces résultats donnent, d'une part, une autre preuve au résultat de Dermoune, et d'autre part, ils prolongent l'existence de la solution de (0.0.1) lorsque la probabilité initiale est quelconque. Comme conséquence de cette nouvelle approche, on obtient la propagation des sauts négatifs, c'est-à-dire que  $u_s$ , la vitesse des particules à l'instant  $s$ , a elle aussi des « sauts négatifs ». De plus, le flot vérifie la propriété de Markov suivante

$$\phi(y, t + s, P_0, v_0) = \phi(\phi(y, s, P_0, v_0), t, P_s, u_s) ,$$

où  $P_s$  est la distribution des masses à l'instant  $s$ . Un corollaire de la propriété de Markov du flot est l'existence d'un processus stochastique  $(X_t)$  solution de (0.0.1), tel que  $X_t = \phi(X_s, P_s, u_s)$  pour tous  $s < t$ .

D'autre part, si  $(P_0^{(n)})$  est une suite de probabilités à support fini telle que  $P_0^{(n)} \rightarrow P_0$  faiblement, on montre que la suite des flots  $\phi(\cdot, \cdot, P_0^{(n)}, v_0)$  converge uniformément sur tout compact de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  vers  $\phi(\cdot, \cdot, P_0, v_0)$ . De plus,  $\phi(\cdot, \cdot, P_s^{(n)}, u_s^{(n)})$  converge uniformément sur tout compact de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  vers  $\phi(\cdot, \cdot, P_s, u_s)$ .

Ce résultat nouveau complète celui de [25] dans lequel des restrictions fortes étaient imposées à la mesure  $P_0$ . Enfin, nous terminons le chapitre 2 par l'étude du comportement limite des amas de particules, lorsque le temps tend vers l'infini.

Dans le chapitre 3, on s'intéresse à la résolution probabiliste de la loi de conservation scalaire

$$\partial_t M + \partial_x(A(M)) = 0 .$$

D'abord, nous rappelons la définition de la solution entropique et des solutions faibles de cette équation. Ensuite, nous montrons que si le processus

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mathbb{E}[v_0(X_0)/X_s] ds$$

est tel que  $X_t = f(X_0, t)$ , où  $f(\cdot, t)$  est une fonction croissante, alors

$$(x, t) \mapsto P(X_t \leq x) := M(x, t)$$

est solution faible de la loi de conservation. L'unique processus ayant ces propriétés est celui des particules collantes, c'est-à-dire  $X_t = \phi(X_0, t, P_0, v_0)$ .

Le chapitre 4 est consacré à la recherche des processus stochastiques solutions de l'équation différentielle

$$dX_t = \mathbb{E}[v_0(X_0)/X_t] dt .$$

On montre que l'unique processus de Markov  $\sigma(X_0)$ -mesurable est celui des particules collantes. Dans le cas discret, on caractérise toutes les solutions de (0.0.1) comme les trajectoires de la dynamique des particules qui se déplacent avec une vitesse constante entre les instants de chocs, et aux moments des chocs, certaines particules se collent et d'autres se désintègrent.

Ensuite, on s'intéresse aux processus stochastiques de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t V_s ds ,$$

et nous obtenons une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour que

$$(P(X_t \in dx), u(x, t) = \mathbb{E}[V_t/X_t = x])$$

soit une solution faible du système de gaz sans pression, à savoir :  $f \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ ,

$$\mathbb{E} \left[ \int_{t_1}^{t_2} f(X_t, t) dV_t + \int_{t_1}^{t_2} \text{var}(V_t/X_t) (\partial_x f)(X_t, t) dt \right] = 0, \quad (\text{CNS})$$

où

$$\text{var}(V_t/X_t) = \mathbb{E} [V_t^2/X_t] - (\mathbb{E}[V_t/X_t])^2.$$

La « différentielle »  $dV_t$  est définie a priori par la formule de changement de variables

$$\int_{t_1}^{t_2} f(X_t, t) dV_t = f(X_{t_2}, t_2) V_{t_2} - f(X_{t_1}, t_1) V_{t_1} - \int_{t_1}^{t_2} [(\partial_x f)(X_t, t) V_t^2 + (\partial_t f)(X_t, t) V_t] dt,$$

pour toute fonction  $f \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ .

Lorsque  $(V_t)$  est une martingale ou une martingale inverse, la condition (CNS) se réduit à

$$\mathbb{E} \left[ \int_{t_1}^{t_2} f(X_t, t) dV_t \right] = \mathbb{E} \left[ \int_{t_1}^{t_2} \text{var}(V_t/X_t) (\partial_x f)(X_t, t) dt \right] = 0, \quad \forall f \in C^1 \quad (\text{CS})$$

Nous montrons, lorsque  $X_t$  est  $\sigma(X_0)$ -mesurable et  $(V_t)$  est une martingale, que nécessairement  $V_t = u_0(X_0)$ , où  $u_0$  est une fonction mesurable. Dans le cas où  $(V_t)$  est une martingale inverse, nous montrons que  $V_t = \mathbb{E}[u_0(X_0)/X_t]$ , et que le processus  $(X_t)$  est celui des particules collantes.

Pour les processus affines par morceaux, les conditions (CNS) et (CS) sont équivalentes. Dans ce cas,  $V_t$  est  $\sigma(X_t)$ -mesurable entre les instants de chocs. Nous montrons qu'un tel processus est complètement déterminé de la manière suivante. Soient  $(\tau_0 = 0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < \dots)$  et  $(X_0, V_n)$  deux suites indépendantes de variables aléatoires discrètes telles que

$$\mathbb{E} \left[ V_n - V_{n-1} / X_0 + \sum_{i=0}^n (\tau_i - \tau_{i-1}) V_{i-1}, \tau_1, \dots, \tau_n \right] = 0 \quad \forall n \geq 1,$$

alors

$$X_t := X_{\tau_{n-1}} + (t - \tau_{n-1}) V_{n-1}, \quad \forall t \in [\tau_{n-1}, \tau_n).$$

Nous terminons ce chapitre par l'étude de la stabilité de l'équation

$$dX_t = \mathbb{E}[v_0(X_0)/X_t] dt,$$

qui se traduit comme suit. Si on dispose d'une suite de processus  $(X_t^n)$  telle que

$$dX_t^n = \mathbb{E}[v_0(X_0^n)/X_t^n] dt,$$

et si

$$X_t^n \rightarrow X_t \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty,$$

le processus limite  $X$  est-il solution de  $dX_t = \mathbb{E}[v_0(X_0)/X_t] dt$  ?

Grâce aux résultats de Hoover [28], nous obtenons, en plus de la stabilité de l'équation différentielle, la convergence dans  $L^1$  de la suite des vitesses  $E[v_0(X_0^n)/X_t^n]$  vers la vitesse limite  $E[v_0(X_0)/X_t]$  pour tout  $t$ . Dans le cas des particules collantes étudié dans le chapitre 2, la stabilité a déjà été obtenue. Le gain ici, c'est la convergence de la suite des vitesses.

Dans le chapitre 5, nous étendons, par une étude similaire, les résultats des quatre chapitres précédents au cas des mesures de Radon. Dans le cas où la mesure de Radon est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ , nous montrons que la fonction vitesse  $u(x, t)$  des particules collantes est la solution entropique de l'équation de Burgers

$$\partial_t u(x, t) + \partial_x \left( \frac{u^2(x, t)}{2} \right) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

Dans le dernier chapitre 6, nous faisons le lien entre les lignes de discontinuité de l'équation de Burgers et un flot de particules collantes. Nous supposons que la donnée initiale  $u_0$  de l'équation de Burgers est une fonction décroissante et bornée. Plus précisément, pour chaque partition  $(y_0 = -\infty, y_1, \dots, y_{N+1} = +\infty)$  de  $\mathbb{R}$ , on considère la solution de l'équation de Burgers de vitesse initiale  $\sum_{i=1}^N u_0(y_i) 1_{[y_i, y_{i+1})}$ . Pour chaque  $i$  on note par  $x(y_i, t) : t \geq 0$  la ligne de discontinuité de la solution qui part de  $y_i$ . Nous montrons que  $\{x(y_i, t) : 1 \leq i \leq N, t \geq 0\}$  converge sur tout compact  $[a, b] \times [0, T]$ , lorsque

$$\max_{\{0 \leq i \leq N\}} |y_{i+1} - y_i| \rightarrow 0,$$

vers le flot  $\phi(\cdot, \cdot, -du_0, u_0)$  des particules collantes ayant  $-du_0$  comme distribution initiale, et  $u_0$  comme vitesse initiale. Ce flot coïncide avec les lignes de discontinuité de l'équation de Burgers de vitesse initiale  $u_0$ .

En outre, nous montrons que la solution de l'équation de Burgers  $u$  coïncide avec la vitesse des particules collantes ; elle est discontinue en un point  $(x, t)$  ssi  $x$  est la position à l'instant  $t$  d'une particule massive.



# Chapitre 1

## Modèle des particules collantes et enveloppe convexe

Dans ce chapitre, nous allons étudier la dynamique des particules collantes sur la droite réelle. Le système de particules est initialement distribué selon une mesure de probabilité de fonction de répartition  $F_0$ , et un champ de vitesse  $V_0$ . Le résultat essentiel de ce chapitre consiste à montrer que cette dynamique est entièrement déterminée par les enveloppes convexes  $(H(\cdot, t) : t \geq 0)$  des fonctions  $m \in (0, 1) \rightarrow \int_a^m [F_0^{-1}(z) + tV_0(F_0^{-1}(z))]dz$ , où  $a \in (0, 1)$  est quelconque. Dans la suite, on prendra  $a = 1/2$ . Les points extrémaux de  $H(\cdot, t)$  fournissent les groupes de particules qui se trouvent collées avant ou à l'instant  $t$ . La dérivée de  $H(\cdot, t)$  s'interprète comme les positions à l'instant  $t$  des groupes de particules. Si les dérivées

$$\partial_m^- H(m, t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{H(m, t) - H(m - \varepsilon, t)}{\varepsilon}$$

et

$$\partial_m^+ H(m, t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{H(m + \varepsilon, t) - H(m, t)}{\varepsilon}$$

sont différentes, alors elles représentent les positions à l'instant  $t$  de deux groupes de particules voisins. Si  $\partial_m^- H(m, t) = \partial_m^+ H(m, t)$ , pour l'abscisse  $m$  d'un point extrémal de l'enveloppe convexe, alors les deux groupes voisins viennent de rentrer en collision à l'instant  $t$ .

La fonction inverse  $F_t$  de la fonction  $m \in (0, 1) \mapsto \partial_m^+ H(m, t)$  est la fonction de répartition de la distribution des particules à l'instant  $t$ . Cette fonction de répartition nous permettra de retrouver et d'étendre les résultats concernant le système de gaz sans pression.

Une partie de ce chapitre a fait l'objet d'une publication dans le Séminaire de Probabilités [24], et d'une prépublication dans la revue IRMA de Lille 1 [22]. Une autre partie de ce chapitre a été publiée dans Seminar on Stochastic Analysis [23].

## 1.1 Modèle discret (fini) des particules collantes

Nous considérons  $N$  particules situées sur la droite réelle aux positions  $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ . Chaque particule est représentée par sa position initiale  $x_j$  et a initialement la vitesse  $v_j$  et la masse  $m_j$ . Les particules se meuvent avec une vitesse constante tant qu'il n'y a pas de choc. Aux instants de chocs, les particules se collent (chocs mous) suivant les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

Pour tout  $t > 0$ , soient les particules  $x_g, \dots, x_d$  qui se trouvent collées à l'instant  $t$ . Elles forment une nouvelle particule qui se trouve à la position

$$x_i(t) = \frac{\sum_{g \leq j \leq d} m_j (x_j + tv_j)}{\sum_{g \leq j \leq d} m_j} \quad \forall i \in \{g, \dots, d\}, \quad (1.1.1)$$

avec la vitesse

$$v_i(t) = \frac{\sum_{g \leq j \leq d} m_j v_j}{\sum_{g \leq j \leq d} m_j} \quad (1.1.2)$$

obtenue grâce à la conservation de la quantité de mouvement. La masse de la nouvelle particule est

$$m_i(t) = \sum_{g \leq j \leq d} m_j \quad (1.1.3)$$

obtenue grâce à la conservation de la masse.

Si on définit la fonction de flot

$$\{x_1, \dots, x_N\} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} : x_i \mapsto \phi(x_i, t) = x_i(t),$$

alors

$$\forall (x_i, t), \quad v_i(t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\phi(x_i, t + \varepsilon) - \phi(x_i, t)}{\varepsilon}.$$

Chaque fonction  $\phi(x_i, \cdot)$  est affine par morceaux car sa dérivée est constante par morceaux.

### 1.1.1 Propriété (du flot)

1.  $x_i < x_j \implies \phi(x_i, t) \leq \phi(x_j, t) \quad \forall t > 0$
2.  $\phi(x_i, t) = \phi(x_j, t) \implies \phi(x_k, t) = \phi(x_i, t) \quad \forall x_k \in [x_i, x_j]$ .

Pour une commodité d'écriture, nous notons  $\phi(\cdot, t) =: \phi_t$ . Pour chaque  $i$ ,  $\phi_t^{-1}\{\phi_t(x_i)\}$  est le groupe des particules qui se sont agglomérées avec  $x_i$  avant ou à l'instant  $t$ .

Par construction, nous avons les résultats suivants.

### 1.1.2 Proposition

Pour chaque  $t$ ,  $\xi_t := \{\phi_t^{-1}\{\phi_t(x_i)\}, 1 \leq i \leq N\}$  est une partition de  $\{x_1, \dots, x_N\}$ . La dynamique des particules est entièrement déterminée par  $(\xi_t, t \geq 0)$ .

Nous allons maintenant retrouver la dynamique des particules collantes d'une autre manière. On suppose que  $\sum_1^N m_j = 1$ . Soit la mesure de probabilité  $P_0 = \sum_1^N m_j \delta_{x_j}$  où pour chaque  $j$ ,  $\delta_{x_j}$  désigne une mesure de Dirac.

Soit la fonction de répartition  $F_0$  de  $P_0$  définie par

$$F_0(a) = P_0(-\infty, a], \quad a \in \mathbb{R}.$$

Elle est complètement déterminée par l'ensemble de ses valeurs  $\{m_1, m_1 + m_2, \dots, m_1 + \dots + m_i, \dots, 1\}$  sur le support  $\mathcal{S} = \{x_i : 1 \leq i \leq N\}$ . Ses fonctions « inverses » sont définies par

$$\begin{aligned} [0, 1] \ni m \mapsto F_g^{-1}(m) &= \inf\{a : F_0(a) > m\} \\ &= \sup\{a : F_0(a) \leq m\}, \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

$$\begin{aligned} [0, 1] \ni m \mapsto F_d^{-1}(m) &= \sup\{a : F_0(a) < m\} \\ &= \inf\{a : F_0(a) \geq m\}. \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

La signification des indices  $g$  et  $d$  des inverses apparaîtra dans ce qui suit.

On peut déjà énoncer le lemme suivant qui va jouer un rôle important dans le cas continu.

### 1.1.3 Lemme

Pour tous  $M_1 < M_2$  appartenant à  $F_0(\mathbb{R})$  et pour toute fonction  $f$  mesurable bornée

$$\int_{M_1}^{M_2} f(F_0^{-1}(z)) dz = \int_{[F_g^{-1}(M_1), F_d^{-1}(M_2)]} f(\eta) P_0(d\eta).$$

Nous allons montrer que la dynamique des particules collantes est entièrement déterminée par les enveloppes convexes  $H(\cdot, t)$  de

$$[0, 1] \ni z \mapsto \varphi(z, t) = \int_{\frac{1}{2}}^z [F_0^{-1}(m) + tV_0(F_0^{-1}(m))] dm.$$

Ici,  $F_0^{-1}$  désigne indifféremment  $F_g^{-1}$  ou  $F_d^{-1}$ . Pour chaque  $t$ , l'enveloppe convexe  $H(\cdot, t)$  de  $\varphi(\cdot, t)$  est la plus grande parmi les fonctions convexes qui minorent  $\varphi(\cdot, t)$ .

Pour tout  $G \subset \mathbb{R}$ , on pose

$$C(G, t) = \frac{\sum_{x_j \in G} m_j(x_j + tv_j)}{\sum_{x_j \in G} m_j} \quad \forall t.$$

On peut énoncer le résultat suivant.



### 1.1.4 Proposition

Pour chaque  $t$ ,  $H(\cdot, t)$  est affine par morceaux. Soient  $M_1 < M_2$  les abscisses de deux extrémités successives d'un segment du graphe de  $H(\cdot, t)$ . L'intervalle  $[F_g^{-1}(M_1), F_d^{-1}(M_2)]$  est le plus grand intervalle de la forme  $[x_i, x_{i+1}, \dots, x_j]$  tel que :

$$1) \quad C([x_i, x_j], t) = \frac{H(M_2, t) - H(M_1, t)}{M_2 - M_1},$$

$$2) \quad \forall y \in [x_i, x_j], \quad C([y, x_j], t) \leq C([x_i, y], t).$$

La preuve repose sur le lemme précédent et sur le fait que  $m \mapsto H(m, t)$  est l'enveloppe convexe de  $\varphi(\cdot, t)$ .

Nous avons aussi le résultat suivant

### 1.1.5 Proposition

Soit  $M$  l'abscisse d'un point extrémal de  $H(\cdot, t)$ . Si  $x_i = F_g^{-1}(M)$  (resp.  $x_i = F_d^{-1}(M)$ ), alors

$$C([y_1, x_i], t) < C([x_i, y_2], t), \quad \text{si } y_1 < x_i < y_2 \quad (1.1.6)$$

(resp.

$$C([y_1, x_i], t) < C([x_i, y_2], t), \quad \text{si } y_1 < x_i < y_2). \quad (1.1.7)$$

Inversement, si  $x_i$  vérifie (1.1.6) (resp. (1.1.7)), alors il existe un unique point extrémal de  $H(\cdot, t)$  dont l'abscisse  $M$  est telle que  $x_i = F_g^{-1}(M)$  (resp.  $x_i = F_d^{-1}(M)$ ).

### 1.1.6 Proposition

Si  $0 < M_1 < \dots < M_k < 1$  désignent les abscisses de tous les points extrémaux de  $H(\cdot, t)$ , alors

$$\xi_t = \{[F_g^{-1}(0), F_d^{-1}(M_1)], \dots, [F_g^{-1}(M_k), F_d^{-1}(1)]\}.$$

La dynamique à l'instant  $t$  est donc entièrement définie par  $H(\cdot, t)$ .

### 1.1.7 Remarque

Dans la proposition précédente,  $F_g^{-1}(M_i)$  (respectivement  $F_d^{-1}(M_i)$ ) est toujours une extrémité gauche (respectivement une extrémité droite) d'un élément de  $\xi_t$ . Ceci justifie les indices  $g$  et  $d$ .

### 1.1.8 Illustration

Soit  $P_0 = m_1\delta_{x_1} + m_2\delta_{x_2}$ ,  $x_1 < x_2$ . Il y a deux particules initiales de vitesses respectives  $V_0(x_i) =: v_i$  et de masses respectives  $m_i$ . On a

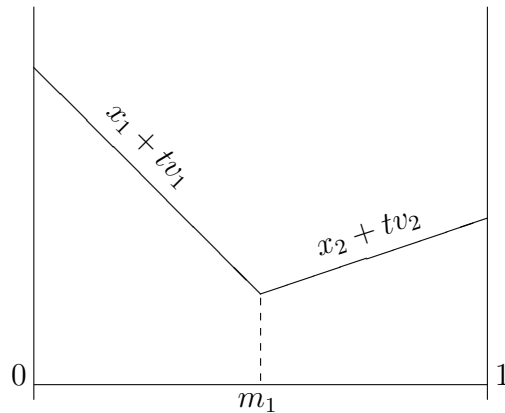
$$F_0(\mathbb{R}) = \{0, m_1, 1\},$$

et

$$F_g^{-1}(0) = F_d^{-1}(m_1) = x_1, \quad F_g^{-1}(m_1) = F_d^{-1}(1) = x_2.$$

On distingue alors deux cas :

(i)  $x_1 + tv_1 < x_2 + tv_2$  : les particules  $x_1, x_2$  ne se sont pas encore rencontrées.



**Fig. 1 :** L'ensemble des abscisses des extrémités de  $H(\cdot, t)$  est  $\{0, m_1, 1\}$ .

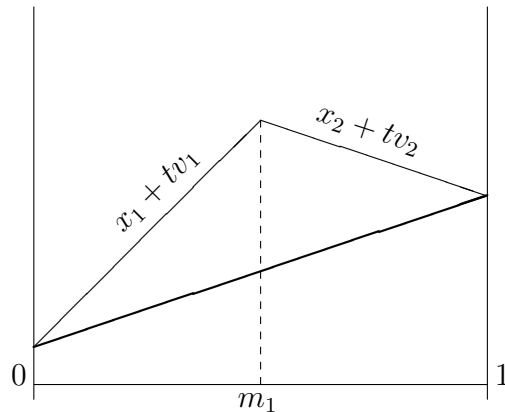
$\varphi(\cdot, t) = H(\cdot, t)$

On a deux segments sur l'enveloppe convexe qui correspondent aux intervalles  $[0, m_1]$  et  $[m_1, 1]$ . Ces intervalles donnent la partition de l'ensemble des particules

$$\xi_t = \{\{x_1\}, \{x_2\}\} .$$

Ce qui indique que les particules ne se sont pas encore rencontrées à l'instant  $t$ .

(ii)  $x_1 + tv_1 \geq x_2 + tv_2$  : les particules  $x_1, x_2$  sont collées avant ou à l'instant  $t$ .



**Fig. 2 :** L'ensemble des abscisses des extrémités de  $H(\cdot, t)$  est  $\{0, 1\}$ .

—  $\varphi(\cdot, t)$

—  $H(\cdot, t)$

On a un seul segment sur l'enveloppe convexe qui donne la partition de l'ensemble des particules

$$\xi_t = \{x_1, x_2\} .$$

Ce qui indique que les particules se trouvent collées à l'instant  $t$ .

Nous remarquons que les positions de  $x_1$  et  $x_2$  sont respectivement données par

$$H_m^-(m_1, t) = H_m^+(0, t) \quad \text{et} \quad H_m^-(1, t) = H_m^+(m_1, t) .$$

**1.1.9 Remarque**

La dynamique du système de particules est déterminée par l'ensemble  $(F_t, t \geq 0)$  des fonctions de répartition de la matière à chaque instant  $t$ . Elle est aussi déterminée par l'ensemble  $(F_t^{-1}, t \geq 0)$  des positions des particules à chaque instant  $t$ .

On vient de voir, dans le cas d'un nombre fini de particules, que la dynamique des particules collantes est complètement déterminée par les enveloppes convexes  $(H(\cdot, t), t \geq 0)$  qui fournissent  $(F_t^{-1} := \frac{\partial H}{\partial m}(\cdot, t), t > 0)$ . On se propose d'étendre cette construction à une probabilité  $P_0$  quelconque sur  $\mathbb{R}$ .

## 1.2 Principe variationnel généralisé (GVP)

On vient de définir la dynamique des particules collantes à partir des enveloppes convexes  $H(\cdot, t)$ , lorsque la distribution initiale de la matière est une combinaison linéaire de mesures de Dirac  $P_0 = \sum_1^N m_j \delta_{x_j}$ . On voudrait faire la même chose pour une mesure de probabilité  $P_0$  quelconque.

Une solution a été proposée par Weinan E, Yu. G. Rykov et Ya. G. Sinai [25] lorsque  $P_0(dx) = \rho(x)dx$  et la vitesse est continue. Elle consiste à construire à chaque instant  $t$  une partition  $\xi_t$  de  $\mathbb{R}$  en passant par un « principe variationnel » qui s'énonce comme suit.

### 1.2.1 Définition (GVP)

Soient  $V_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et bornée, et  $P_0$  une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}$ . Le principe variationnel généralisé (GVP) est défini par les assertions  $(GVP_g)$  et  $(GVP_d)$  suivantes :

$(GVP_g)$   $\alpha$  est l'extrémité gauche d'un élément de  $\xi_t$  ssi  $\forall y_1 < \alpha < y_2$

$$\frac{\int_{[y_1, \alpha]} [\eta + tV_0(\eta)] P_0(d\eta)}{P_0[y_1, \alpha]} < \frac{\int_{[\alpha, y_2]} [\eta + tV_0(\eta)] P_0(d\eta)}{P_0[\alpha, y_2]} ;$$

$(GVP_d)$   $\beta$  est l'extrémité droite d'un élément de  $\xi_t$  ssi  $\forall y_1 < \beta < y_2$

$$\frac{\int_{(y_1, \beta]} [\eta + tV_0(\eta)] P_0(d\eta)}{P_0(y_1, \beta]} < \frac{\int_{(\beta, y_2]} [\eta + tV_0(\eta)] P_0(d\eta)}{P_0(\beta, y_2]} .$$

Pour tout  $t$ , les éléments de  $\xi_t$  sont les intervalles  $[\alpha, \beta]$  tels que  $\alpha$  vérifie  $(GVP_g)$  à l'instant  $t$ ,  $\beta$  vérifie  $(GVP_d)$  à l'instant  $t$  et il n'y a aucune extrémité à l'instant  $t$  dans  $(\alpha, \beta)$ .

Cette définition coïncide avec celle de la section précédente lorsque  $P_0 = \sum_1^N m_j \delta_{x_j}$ . Mais si  $P_0$  est diffuse, alors cette construction est mal définie. Dans ce cas, toute extrémité gauche est aussi une extrémité droite.

Nous allons voir que la définition du modèle des particules collantes à l'aide des enveloppes convexes permet de clarifier et de corriger cette ambiguïté, et de l'étendre à des vitesses non forcément continues et des probabilités quelconques.

## 1.3 Masses effectives, Particules effectives

Nous allons d'abord définir les informations particulières contenues dans la fonction de répartition  $F_0$  et dans ses inverses  $F_d^{-1}, F_g^{-1}$ .

### 1.3.1 Définition (Supports $\mathcal{S}, \mathcal{S}_+, \mathcal{S}_-$ )

On appelle support de  $P_0$  l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} : P_0(x - \varepsilon, x + \varepsilon) > 0, \forall \varepsilon > 0\} .$$

On définit

$$\mathcal{S}_+ = \{x \in \mathbb{R} : P_0[x, x + \varepsilon) > 0, \forall \varepsilon > 0\} ,$$

et

$$\mathcal{S}_- = \{x \in \mathbb{R} : P_0(x - \varepsilon, x] > 0, \forall \varepsilon > 0\} .$$

On a alors  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_+ \cup \mathcal{S}_-$ .

Si  $x \in \mathcal{S}_+$ , alors  $x$  est la position d'une particule massive ( $P_0(\{x\}) > 0$ ), ou bien il y a accumulation de particules à droite de  $x$ . Les éléments de  $\mathcal{S}_-$  présentent les mêmes propriétés à gauche.

Une particule est effective pour  $P_0$  (ou bien  $F_0$ ) si elle appartient à  $\mathcal{S}$ . L'ensemble des masses effectives pour  $P_0$  (ou bien  $F_0$ ) est défini par

$$\mathcal{E}_0 = \{F_0(x - 0), F_0(x) : x \in \mathcal{S}\} .$$

Un élément  $m \in (0, 1)$  n'est pas une masse effective lorsqu'il existe deux masses effectives consécutives  $m_1 < m_2$  telles que  $m \in (m_1, m_2)$ . Les masses effectives déterminent complètement la manière dont les particules occupent la droite réelle. Inversement, les inverses  $F_d^{-1}$  et  $F_g^{-1}$  associent à chaque masse  $m$  deux particules effectives  $F_d^{-1}(m)$  et  $F_g^{-1}(m)$ . On vérifie facilement qu'une masse  $m \in (0, 1)$  est effective ssi

$$P_0(-\infty, F_g^{-1}(m)) = m \quad \text{ou} \quad P_0(-\infty, F_d^{-1}(m)] = m .$$

On distingue deux cas.

1)  $F_d^{-1}(m) < F_g^{-1}(m)$ . Les deux demi-droites  $(-\infty, F_g^{-1}(m))$  et  $[F_g^{-1}(m), +\infty)$  sont séparées par le vide  $(F_d^{-1}(m), F_g^{-1}(m))$ , car  $P_0(F_d^{-1}(m), F_g^{-1}(m)) = 0$ . Ce cas se présente seulement lorsque  $m \in F_0(\mathbb{R})$ . Les extrémités  $F_d^{-1}(m), F_g^{-1}(m)$  peuvent être chargées ou non.

2)  $F_d^{-1}(m) = F_g^{-1}(m) := F_0^{-1}(m)$ . Dans ce cas il y a une accumulation de masse à gauche ou à droite de  $m$ . L'extrémité  $F_0^{-1}(m)$  peut être chargée ou non.

Maintenant, si on dispose uniquement d'une primitive de  $F_0^{-1}(m)$ , c'est-à-dire de la fonction convexe

$$H(\cdot, 0) : m \in (0, 1) \mapsto \int_{\frac{1}{2}}^m F_0^{-1}(z) dz ,$$

on obtient  $F_0$  en inversant la fonction  $m \mapsto \partial_m H(m, 0)$ . Les masses effectives sont les points extrémaux de  $H(\cdot, 0)$ .

Nous revenons à la dynamique des particules collantes avec la vitesse initiale  $V_0$  mesurable et bornée. La distribution initiale de la masse est donnée par la fonction de répartition  $F_0$  d'une probabilité  $P_0$ .

A chaque instant  $t$ , on considère l'enveloppe convexe  $H(\cdot, t)$  de la fonction

$$(0, 1) \ni z \mapsto \varphi(z, t) = \int_{\frac{1}{2}}^z [F_0^{-1}(m) + tV_0(F_0^{-1}(m))] dm . \quad (1.3.1)$$

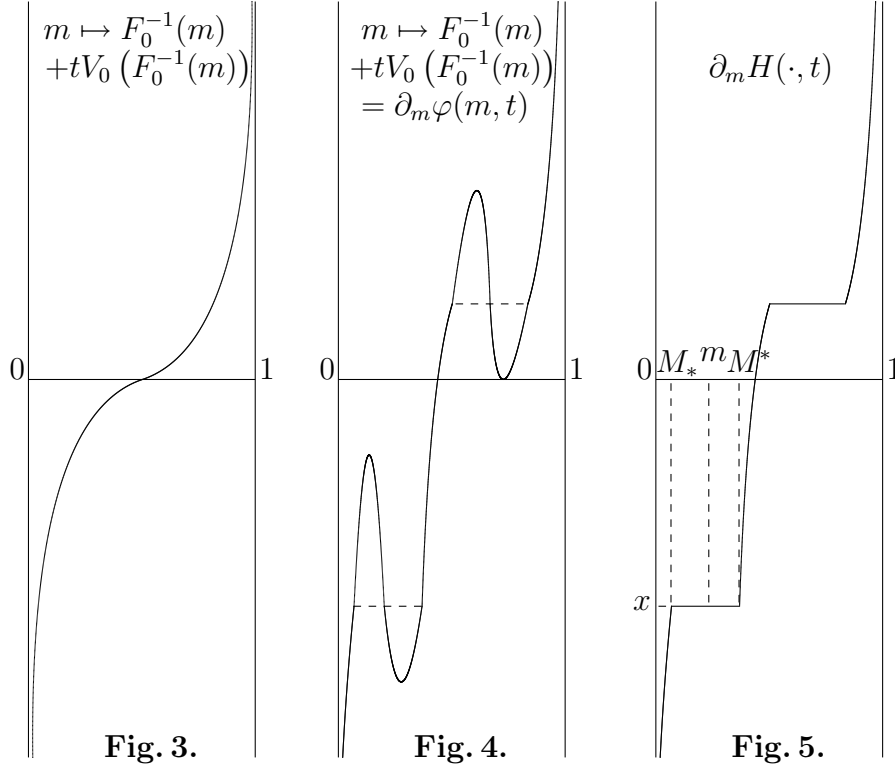
Il est clair qu'il existe une fonction de répartition  $F_t$  d'une probabilité  $P_t$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $H(\cdot, t)$  soit une primitive de  $F_t^{-1}$ , c'est-à-dire

$$H(m, t) = \int^m F_t^{-1}(z) dz \quad \forall m \in (0, 1) .$$

Dans le reste de ce chapitre, nous allons montrer que  $P_t$  est la distribution à l'instant  $t$  de la masse des particules collantes. Les abscisses des points extrémaux de  $H(\cdot, t)$  sont les masses effectives de  $P_t$ . Les dérivées de  $H(\cdot, t)$  sont les particules effectives de  $P_t$ . Pour déterminer les particules effectives de  $P_0$  qui forment une particule effective  $\partial_m H(m, t)$  de  $P_t$ , avec  $m$  l'abscisse d'un point extrémal de  $H(\cdot, t)$ , il suffit de calculer  $F_d^{-1}(m)$  et  $F_g^{-1}(m)$ .

Tant que la fonction  $\mathcal{E}_0 \ni m \mapsto F_0^{-1}(m) + tV_0(F_0^{-1}(m))$  est croissante, il n'y a pas de choc et chaque particule  $F_g^{-1}(m)$  se trouve à la position  $F_g^{-1}(m) + tV_0(F_g^{-1}(m))$  et sa voisine  $F_d^{-1}(m)$  se trouve à la position  $F_d^{-1}(m) + tV_0(F_d^{-1}(m))$  (**Fig. 3**).

Lorsque cette fonction cesse d'être croissante (**Fig. 4**), il y a choc et la position à l'instant  $t$  de chaque particule  $F_d^{-1}(m)$  est donnée par la dérivée en  $m$ , à gauche  $\partial_m^- H(m, t)$ ; la position de sa voisine  $F_g^{-1}(m)$  est donnée par la dérivée en  $m$ , à droite  $\partial_m^+ H(m, t)$  (**Fig. 5**).



**Fig. 3.** Les particules ne se sont pas encore rencontrées. La particule  $m$  est à la position  $F_0^{-1}(m) + tV_0(F_0^{-1}(m))$ .

**Fig. 4.** La position des particules qui se sont collées avant ou à l'instant  $t$  est représentée en pointillés.

**Fig. 5.** L'ordonnée d'un point  $(m, x)$  du graphe est la position à l'instant  $t$  des particules indexées par  $m$ . La longueur  $M^* - M_*$  d'un segment horizontal du graphe est la masse d'un amas de particules à l'instant  $t$ .

On termine cette section en énonçant les propriétés suivantes des inverses de  $F_0$ . On définit l'ensemble

$$F_0(\mathbb{R} - 0) = \{F_0(x - 0) : x \in \mathbb{R}\} .$$

**1.3.2 Proposition (Inverses de  $F_0$  et support)**

1.  $F_g^{-1} : F_0(\mathbb{R} - 0) \rightarrow \mathcal{S}_+$  est une bijection.

$F_d^{-1} : F_0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_-$  est une bijection.

2.  $F_g^{-1}$  est croissante et continue à droite.  $F_d^{-1}$  est croissante et continue à gauche. De plus,  $F_d^{-1} \leq F_g^{-1}$  et  $\forall z$ ,

$$F_g^{-1}(z - 0) = F_d^{-1}(z) , \quad F_d^{-1}(z + 0) = F_g^{-1}(z) .$$

3. Pour toute fonction intégrable  $f$ ,

$$\int_{m_1}^{m_2} f(F_0^{-1}(z))dz = \int_{(F_d^{-1}(m_1), F_d^{-1}(m_2))} f(\eta)P_0(d\eta) \quad \forall m_1, m_2 \in F_0(\mathbb{R}),$$

et

$$\int_{m_1}^{m_2} f(F_0^{-1}(z))dz = \int_{[F_g^{-1}(m_1), F_d^{-1}(m_2)]} f(\eta)P_0(d\eta) \quad \forall m_1 \in F_0(\mathbb{R} - 0), \forall m_2 \in F_0(\mathbb{R}).$$

### Preuve de la Proposition

1. Montrons que  $F_g^{-1}$  prend ses images dans  $\mathcal{S}_+$ .  $\forall z, \forall a > F_g^{-1}(z)$ , on a

$$F_0(a) > z \geq F_0(F_g^{-1}(z) - 0), \quad \text{donc } P_0[F_g^{-1}(z), a] > 0.$$

On en déduit que  $F_g^{-1}(z) \in \mathcal{S}_+ \quad \forall z$ .

Montrons que  $F_g^{-1}$  atteint tout  $\mathcal{S}_+$ . Pour  $a \in \mathcal{S}_+$ ,  $z := F_0(a - 0)$  vérifie

$$a \leq F_g^{-1}(z) \quad \text{et} \quad F_0(F_g^{-1}(z) - 0) = z = F_0(a - 0).$$

Si  $a < F_g^{-1}(z)$ , alors  $P_0[a, F_g^{-1}(z)) = 0$  ce qui contredit  $a \in \mathcal{S}_+$ . Donc

$$a = F_g^{-1}(F_0(a - 0)) \quad \forall a \in \mathcal{S}_+.$$

Montrons que  $F_g^{-1}$  est strictement croissante sur  $F_0(\mathbb{R} - 0)$ .

Si  $z_1 = F_0(a_1 - 0) < F_0(a_2 - 0) = z_2$ , on a

$$F_0(F_g^{-1}(z_1) - 0) = z_1 < F_0(F_g^{-1}(z_2) - 0) = z_2$$

et alors  $F_g^{-1}(z_1) < F_g^{-1}(z_2)$ .

Pour  $F_d^{-1}$ , la démonstration est analogue à la précédente. On montre que  $F_d^{-1}$  est strictement croissante sur  $F_0(\mathbb{R})$ .

2. Il reste à étudier la continuité de ces fonctions. Supposons

$$z^n \longrightarrow z - 0, \quad n \longrightarrow \infty.$$

En prenant  $y_g^n = F_g^{-1}(z^n)$ ,  $y_d^n = F_d^{-1}(z^n)$ , on a

$$F_0(y_g^n - 0) \leq z^n \leq F_0(y_g^n), \quad F_0(y_d^n - 0) \leq z^n \leq F_0(y_d^n) \quad \text{avec } y_d^n \leq y_g^n \leq y_d^{n+1} \leq y_g^{n+1}.$$

On a alors

$$y_g^n \longrightarrow y, \quad y_d^n \longrightarrow y, \quad n \longrightarrow \infty$$

pour un certain  $y$ . On va voir que  $y = F_d^{-1}(z)$ .

En cas de stationnarité des suites  $(y_g^n)$  et  $(y_d^n)$ , on a

$$y_g^n = y_d^n = y, \quad F_0(y - 0) \leq z^n \leq F_0(y).$$

Comme  $z^n \longrightarrow z - 0$ , on obtient

$$F_0(y - 0) < z \leq F_0(y) \quad \text{et donc} \quad y = F_d^{-1}(z).$$

Si les suites ne sont pas stationnaires, on a

$$y_g^n, y_d^n \longrightarrow y - 0 \quad \text{et alors} \quad F_0(y_g^n), F_0(y_d^n) \longrightarrow F_0(y - 0) = z.$$

On a aussi  $z = F_0(y - 0) \leq F_0(y)$  et

$$\forall a < y, \quad F_0(a) < z \quad \text{car} \quad F_0(a) \leq F_0(y_d^n) < z$$

à partir d'un certain rang. Donc

$$y = \sup\{a : F_0(a) < z\} = F_d^{-1}(z).$$

On a montré que

$$F_g^{-1}(z^n), F_d^{-1}(z^n) \longrightarrow F_d^{-1}(z) \quad \text{si} \quad z_n \longrightarrow z - 0.$$

De même,

$$F_g^{-1}(z^n), F_d^{-1}(z^n) \longrightarrow F_g^{-1}(z) \quad \text{si} \quad z_n \longrightarrow z + 0.$$

**3.** La fonction  $F_d^{-1}$  étant strictement croissante et continue à gauche sur  $F_0(\mathbb{R})$ , on a pour  $m_1 < m_2$  dans  $F_0(\mathbb{R})$

$$F_d^{-1}((m_1, m_2]) = (F_d^{-1}(m_1), F_d^{-1}(m_2)] \cap \mathcal{S}.$$

On en déduit le premier changement de variables. Si  $m_1 \in F_0(\mathbb{R}) \cap F_0(\mathbb{R} - 0)$ , on a deux possibilités. Soit  $F_d^{-1}(m_1) = F_g^{-1}(m_1)$  et alors  $P_0 \{F_d^{-1}(m_1)\} = 0$ ; soit  $F_d^{-1}(m_1) < F_g^{-1}(m_1)$  et alors  $P_0(F_d^{-1}(m_1), F_g^{-1}(m_1)) = 0$ . Si  $m_1 \notin F_0(\mathbb{R})$ , alors  $m_1$  est une accumulation à gauche d'éléments de  $F_0(\mathbb{R})$ . On utilise ensuite le fait que  $F_d^{-1}(m_1) = F_g^{-1}(m_1)$ . ■

## 1.4 Recherche des masses effectives à l'instant $t$

Nous rappelons que  $(m, H(m, t))$  est un point extrémal de  $H(\cdot, t)$  si

$$\forall m_1 < m < m_2, \quad \frac{\varphi(m, t) - \varphi(m_1, t)}{m - m_1} < \frac{\varphi(m_2, t) - \varphi(m, t)}{m_2 - m}. \quad (1.4.1)$$



### 1.4.1 Définition

Un point  $m \in (0, 1)$  est une masse effective à l'instant  $t$  si elle est l'abscisse d'un point extrémal de  $H(\cdot, t)$ . L'ensemble  $\mathcal{E}_t$  désigne l'ensemble des masses effectives à l'instant  $t$ .

Une masse  $m \in \mathcal{E}_t$  est massive à gauche si elle est l'extrémité droite d'un segment de l'enveloppe convexe.

Une masse  $m \in \mathcal{E}_t$  est massive à droite si elle est l'extrémité gauche d'un segment de l'enveloppe convexe.

Une masse  $m \in \mathcal{E}_t$  est non massive si elle est une accumulation à gauche et à droite de masses effectives.

Notations :  $\mathcal{E}_t^-$  est l'ensemble des masses qui sont massives à gauche, et non à droite.

$\mathcal{E}_t^+$  est l'ensemble des masses qui sont massives à droite, et non à gauche.

$\mathcal{E}_t^{-,+}$  est l'ensemble des masses qui sont massives à gauche et à droite.

$\mathcal{E}_t^0$  est l'ensemble des masses non massives.

On peut remarquer que  $\mathcal{E}_t^-$ ,  $\mathcal{E}_t^+$ ,  $\mathcal{E}_t^{-,+}$ ,  $\mathcal{E}_t^0$  est une partition de  $\mathcal{E}_t$ . Dans la suite, nous considérons

$$F_0(S + 0) := \left\{ m : m = \lim_{\{m_n \in F_0(\mathbb{R}) : m_n > m\}} m_n \right\}$$

et

$$F_0(S - 0) := \left\{ m : m = \lim_{\{m_n \in F_0(\mathbb{R}) : m_n < m\}} m_n \right\}.$$

Maintenant, nous décrivons  $\mathcal{E}_0$ .

### 1.4.2 Proposition

1)  $m \in \mathcal{E}_0^-$  ssi  $m \in F_0(S + 0) \setminus F_0(S - 0)$ . Dans ce cas, on peut avoir  $F_d^{-1}(m) = H_z^-(m, 0) < F_g^{-1}(m) = H_z^+(m, 0)$ , ou bien  $F_d^{-1}(m) = H_z^-(m, 0) = F_g^{-1}(m) = H_z^+(m, 0)$ . De plus,  $F_d^{-1}(m)$  est chargée.

2)  $m \in \mathcal{E}_0^+$  ssi  $m \in F_0(S - 0) \setminus F_0(S + 0)$ . Dans ce cas, on peut avoir  $F_d^{-1}(m) = H_z^-(m, 0) < F_g^{-1}(m) = H_z^+(m, 0)$ , ou bien  $F_d^{-1}(m) = H_z^-(m, 0) = F_g^{-1}(m) = H_z^+(m, 0)$ . De plus,  $F_g^{-1}(m)$  est chargée.

3)  $m \in \mathcal{E}_0^{-,+}$  ssi  $m \in F_0(S) \setminus (F_0(S - 0) \cup F_0(S + 0))$ . Dans ce cas  $F_d^{-1}(m) = H_z^-(m, 0) < F_g^{-1}(m) = H_z^+(m, 0)$ .

4)  $m \in \mathcal{E}_0^0$  ssi  $m \in F_0(S - 0) \cap F_0(S + 0)$ . Dans ce cas, on peut avoir  $F_d^{-1}(m) = H_z^-(m, 0) < F_g^{-1}(m) = H_z^+(m, 0)$ , ou bien  $F_d^{-1}(m) = H_z^-(m, 0) = F_g^{-1}(m) = H_z^+(m, 0)$ . De plus,  $F_d^{-1}(m)$  et  $F_g^{-1}(m)$  ne sont pas chargées.

Nous avons aussi

$$\mathcal{E}_t \subset \mathcal{E}_0 \quad \forall t. \quad (1.4.2)$$

En effet, pour tout  $m \notin \mathcal{E}_0 := \overline{F_0(\mathbb{R})}$ , soit  $\alpha = F_g^{-1}(m)$ . D'après les propriétés des inverses de  $F_0$ , on a forcément  $F_0(\alpha - 0) < m < F_0(\alpha)$ . Comme  $\varphi(\cdot, t)$  est linéaire sur  $[F_0(\alpha - 0), F_0(\alpha)]$ ,  $m$  ne vérifie pas (1.4.1). Donc  $m \notin \mathcal{E}_t$ .

Nous allons maintenant définir une condition appelée « sauts négatifs », sur la vitesse  $V_0$ , afin de définir la dynamique des particules collantes. Pour chaque  $m \in \mathcal{E}_0$ , on pose

$$l^-(m) := \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{-1} \int_{m-\varepsilon}^m V_0(F_0^{-1}(z)) dz$$

et

$$l^+(m) := \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{-1} \int_m^{m+\varepsilon} V_0(F_0^{-1}(z)) dz .$$

Dans la suite, on supposera que

$$l^-(m) \geq V_0(F_d^{-1}(m)) , \quad V_0(F_g^{-1}(m)) \geq l^+(m) \quad \forall m .$$

Cette condition est satisfaite lorsque  $V_0$  est continue sur  $\mathcal{S}$ . Si  $V_0$  admet des limites à gauche et à droite, cette condition signifie que les sauts de  $V_0$  sur  $\mathcal{S}$  sont négatifs.

### 1.4.3 Proposition

1) *L'application*

$$m \in \mathcal{E}_0^0 \cup \mathcal{E}_0^+ \mapsto V_0^-(F_d^{-1}(m)) := \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\int_{[F_d^{-1}(m)-\varepsilon, F_d^{-1}(m)]} V_0(x) P_0(dx)}{P_0([F_d^{-1}(m) - \varepsilon, F_d^{-1}(m)])}$$

est bien définie, et nous avons  $V_0^-(F_d^{-1}(m)) = l^-(m)$ .

2) *L'application*

$$m \in \mathcal{E}_0^0 \cup \mathcal{E}_0^- \mapsto V_0^+(F_g^{-1}(m)) := \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\int_{(F_g^{-1}(m), \varepsilon + F_g^{-1}(m)]} V_0(x) P_0(dx)}{P_0((F_g^{-1}(m), \varepsilon + F_g^{-1}(m)])}$$

est bien définie, et nous avons  $V_0^+(F_g^{-1}(m)) = l^+(m)$ .

Pour  $m \in \mathcal{E}_0^+$ , soit  $m_2$  son extrémité droite sur l'enveloppe convexe  $H_0$ . Si  $F_d^{-1}(m) = F_d^{-1}(m_2)$ , alors

$$l^-(m_2) = V_0(F_d^{-1}(m)) \leq l^-(m) = V_0^-(F_d^{-1}(m)) .$$

De même, pour  $m \in \mathcal{E}_0^-$ , soit  $m_1$  son extrémité gauche sur l'enveloppe convexe  $H_0$ . Si  $F_g^{-1}(m) = F_g^{-1}(m_1)$ , alors

$$l^+(m_1) = V_0(F_g^{-1}(m)) \geq l^+(m) = V_0^+(F_g^{-1}(m)) .$$

Nous allons voir que si  $m \in \mathcal{E}_t$ , alors  $l^-(m_2) = l^-(m)$  (resp.  $l^+(m_1) = l^+(m)$ ). Ceci entraîne qu'on peut prolonger les applications de la proposition précédente sur  $\mathcal{E}_t$ , en les définissant par

$$V_0^-(F_d^{-1}(m)) = l^-(m) , \quad V_0^+(F_g^{-1}(m)) = l^+(m) \quad \forall m \in \mathcal{E}_t .$$

#### 1.4.4 Lemme

1) Pour tout  $m \in \mathcal{E}_t$ ,

$$F_d^{-1}(m) + tl^-(m) \leq H_z^-(m, t) \leq H_z^+(m, t) \leq F_g^{-1}(m) + tl^+(m) .$$

2) Si  $F_d^{-1}(m) = F_g^{-1}(m) := F_0^{-1}(m)$  avec  $m \in \mathcal{E}_t$ , alors

$$H_z^-(m, t) = H_z^+(m, t) = F_0^{-1}(m) + tV_0(F_0^{-1}(m)) .$$

De plus,  $l^-(m) = l^+(m) = V_0(F_0^{-1}(m))$ .

3) Si  $m \in \mathcal{E}_t^{-,+}$  alors  $H_z^-(m, t) < H_z^+(m, t)$ , et forcément  $F_d^{-1}(m) < F_g^{-1}(m)$ .

#### Preuve du Lemme

Nous avons pour tous  $m_1 < m < m_2$ ,

$$\frac{\int_{m_1}^m F_0^{-1}(z) + tV_0(F_0^{-1}(z))dz}{m - m_1} \leq H_z^-(m, t) \leq H_z^+(m, t) \leq \frac{\int_m^{m_2} F_0^{-1}(z) + tV_0(F_0^{-1}(z))dz}{m_2 - m} .$$

On en déduit 1). Les assertions 2) et 3) découlent de 1). ■

#### 1.4.5 Remarque (Nécessité de la condition des sauts négatifs)

Les propriétés 2) et 3) montrent que la condition des sauts négatifs garantit qu'une particule ne se désintègre pas au cours du temps. Si cette condition n'est pas vérifiée, on peut avoir

$$H_z^-(m, t) < H_z^+(m, t) \quad \text{et} \quad F_d^{-1}(m) = F_d^{-1}(m) =: F_0^{-1}(m) .$$

Tout se passe comme si la particule initiale  $F_0^{-1}(m)$  se trouvait désintégrée à l'instant  $t$ .

#### Un premier bilan

Pour  $m \in \mathcal{E}_0$ , on distingue deux cas.

1.  $F_d^{-1}(m) = F_g^{-1}(m) := F_0^{-1}(m)$  : dans ce cas, nous avons

$$H_z^-(m, t) = H_z^+(m, t) = F_0^{-1}(m) + tV_0(F_0^{-1}(m)) \quad \forall t .$$

Par conséquent,  $m \in \mathcal{E}_t^- \cup \mathcal{E}_t^0 \cup \mathcal{E}_t^+$ .

2.  $F_d^{-1}(m) < F_g^{-1}(m)$  : dans ce cas, nous verrons plus loin que  $H_z^-(m, t) < H_z^+(m, t)$  pour  $t$  assez petit. Lorsque  $t$  est grand, il se peut que  $H_z^-(m, t) = H_z^+(m, t)$ .

Dans la suite, nous considérons l'ensemble

$$F_0(\mathbb{R} - 0) = \{F_0(x - 0) : x \in \mathbb{R}\} .$$

### 1.4.6 Proposition

1. Si  $m$  est un point anguleux de  $H(\cdot, t)$ , alors forcément  $m \in F_0(\mathbb{R})$ , et  $F_d^{-1}(m) < F_g^{-1}(m)$ .
2. Si  $m_1 < m_2$  sont les abscisses de deux points extrémaux successifs, alors forcément  $m_1 \in F_0(\mathbb{R} - 0)$ ,  $m_2 \in F_0(\mathbb{R})$ .

#### Preuve de la Proposition

1. On a  $H_z^-(m, t) < H_z^+(m, t)$ . D'après le lemme précédent,

$$F_d^{-1}(m) + tl^-(m) < F_g^{-1}(m) + tl^+(m) ,$$

donc  $F_d^{-1}(m) < F_g^{-1}(m)$ . Ainsi,  $m = F_0(F_d^{-1}(m)) = F_0(F_g^{-1}(m) - 0)$ .

2. Si  $m_2 \notin F_0(\mathbb{R})$ , alors  $F_d^{-1}(m_2) = F_g^{-1}(m_2) = \beta$  est un point de discontinuité de  $F_0$  et on a  $m_2 = F_0(\beta - 0) < F_0(\beta)$ . Ceci entraîne que  $m_2$  est un point anguleux, c'est-à-dire  $H_z^-(m_2, t) < H_z^+(m_2, t)$ . Alors, d'après le résultat précédent,  $F_d^{-1}(m_2) < F_g^{-1}(m_2)$ . Ce qui est absurde.

De même, si  $m_1 \notin F_0(\mathbb{R} - 0)$ ,  $m_1$  est un point anguleux car  $F_d^{-1}(m_1) = F_g^{-1}(m_1) = \alpha$  est un point de discontinuité de  $F_0$ , avec  $F_0(\alpha - 0) < F_0(\alpha) = m_1$ . Alors on aboutit à la contradiction  $F_d^{-1}(m_1) < F_g^{-1}(m_1)$ . ■

Nous terminons cette section par une condition sur la vitesse, qui garantit que l'ensemble des abscisses des points extrémaux à chaque instant  $t$  est négligeable pour la mesure de Lebesgue. Ceci entraîne que l'enveloppe convexe  $H(\cdot, t)$  est formée essentiellement de segments.

Nous définissons les fonctions

$$V(m, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \int_m^{m+\varepsilon} V_0(F_0^{-1}(z)) dz - V_0(F_0^{-1}(m)) \quad \forall m, \forall \varepsilon \neq 0$$

$$F(m, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \int_m^{m+\varepsilon} F_0^{-1}(z) dz - F_0^{-1}(m) \quad \forall m, \forall \varepsilon \neq 0 .$$

La condition de « non dérivabilité » suivante est imposée à la vitesse. Pour presque tout  $m \in \mathcal{E}_0$ ,

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V(m, \varepsilon)}{F(m, \varepsilon)} = -\infty .$$

On peut remarquer que cette condition est plus forte que celle des sauts négatifs. En effet, soit  $m \in \mathcal{E}_0^0$ . Pour  $\varepsilon_1 < 0 < \varepsilon_2$ , nous avons

$$F(m, \varepsilon_1) < 0 < F(m, \varepsilon_2) .$$

Donc, lorsque  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont assez proches de 0, nous obtenons

$$V(m, \varepsilon_1) > 0 > V(m, \varepsilon_2) ,$$

ce qui entraîne que

$$l^-(m) - V_0(F_0^{-1}(m)) \geq 0 \geq l^+(m) - V_0(F_0^{-1}(m)) .$$

### 1.4.7 Proposition

Supposons que pour presque tout  $m \in \mathcal{E}_0$ ,

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V(m, \varepsilon)}{F(m, \varepsilon)} = -\infty .$$

Nous avons

$$\lambda \left( \bigcup_{t>0} \mathcal{E}_t \right) = 0 .$$

Si en plus  $F_0$  est strictement croissante, alors chaque ensemble  $\mathcal{E}_t$  est du type cantorien, c'est-à-dire nulle part dense et ayant la puissance du continu.

### 1.4.8 Remarque

Nous verrons plus loin que  $\mathcal{E}_t \subset \mathcal{E}_s \quad \forall t > s$ . Donc nous avons la réunion dénombrable

$$\bigcup_{t>0} \mathcal{E}_t = \bigcup_{n>0} \mathcal{E}_{\frac{1}{n}} .$$

Ce résultat découle de la proposition suivante qui est due à Y. Davydov [13].

### 1.4.9 Proposition ([13])

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une application absolument continue. Supposons que pour presque tout  $m$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\inf_{m-\varepsilon < m' < m} (f(m') - f(m) - (m' - m)f'(m)) < 0 ,$$

ou bien

$$\inf_{m < m' < m+\varepsilon} (f(m') - f(m) - (m' - m)f'(m)) < 0 .$$

Si on note  $E$  l'ensemble des abscisses des points extrémaux de l'enveloppe convexe de  $f$ , alors nous avons

$$\lambda(E) = 0 .$$

De plus, l'ensemble  $E$  est du type cantorien s'il ne contient pas de point isolé.

## 1.5 Particules effectives à l'instant $t$

### 1.5.1 Théorème

Soit  $m$  l'abscisse d'un point extrémal de  $H(\cdot, t)$ . On pose  $\alpha = F_g^{-1}(m)$ ,  $\beta = F_d^{-1}(m)$ . Pour tous  $y_1 < \alpha < y_2$  tels que  $P_0([y_1, \alpha]) > 0$ ,  $P_0([\alpha, y_2]) > 0$ , nous avons

$$\frac{\int_{[y_1, \alpha]} [\eta + tV_0(\eta)] P_0(d\eta)}{P_0([y_1, \alpha])} < \frac{\int_{[\alpha, y_2]} [\eta + tV_0(\eta)] P_0(d\eta)}{P_0([\alpha, y_2])} .$$

De même, pour tous  $y_1 < \beta < y_2$  tels que  $P_0([y_1, \beta]) > 0$ ,  $P_0((\beta, y_2]) > 0$ , nous avons

$$\frac{\int_{[y_1, \beta]} [\eta + tV_0(\eta)] P_0(d\eta)}{P_0([y_1, \beta])} < \frac{\int_{(\beta, y_2]} [\eta + tV_0(\eta)] P_0(d\eta)}{P_0((\beta, y_2])} .$$

Ceci découle du fait que  $m$  est l'abscisse d'un point extrémal et de la formule de changement de variables de la proposition 1.3.2. Selon la définition 1.2.1 de E, Sinai, Rykov,  $F_d^{-1}(m)$  et  $F_g^{-1}(m)$  sont respectivement des extrémités gauche et droite. Nous allons voir que ce n'est pas toujours le cas.

### 1.5.2 Définition

L'ensemble

$$\{H_z^-(m, t), H_z^+(m, t) : m \in \mathcal{E}_t\}$$

est l'ensemble des particules effectives à l'instant  $t$ . La particule  $H_z^-(m, t)$  (resp.  $H_z^+(m, t)$ ) est massive lorsque  $m \in \mathcal{E}_t^-$  (resp.  $m \in \mathcal{E}_t^+$ ).

Nous allons montrer qu'une particule effective à l'instant  $t$  est formée par un groupe  $[\alpha, \beta] \cap \mathcal{S}$  de particules effectives à l'instant 0. L'extrémité  $\alpha$  sera appelée extrémité gauche du groupe et  $\beta$  l'extrémité droite.

### 1.5.1 Recherche des extrémités gauche et droite

Nous allons maintenant déterminer les particules initiales qui forment les deux particules voisines  $H_z^-(m, t), H_z^+(m, t)$  à l'instant  $t$ . On distingue deux cas.

1)  $H_z^-(m, t) < H_z^+(m, t)$ . Dans ce cas,  $F_d^{-1}(m)$  (resp.  $F_g^{-1}(m)$ ) est l'extrémité droite (resp. gauche) du groupe qui forme la particule  $H_z^-(m, t)$  (resp.  $H_z^+(m, t)$ ).

2)  $H_z^-(m, t) = H_z^+(m, t) := x$ . Dans ce cas, on a forcément  $m \in \mathcal{E}_t^- \cup \mathcal{E}_t^0 \cup \mathcal{E}_t^+$ .

i)  $m \in \mathcal{E}_t^-$  : la position  $x$ , aussi égale à  $F_g^{-1}(m) + tV_0^+(F_g^{-1}(m))$ , est occupée par une particule massive ; à sa droite il y a accumulation de particules de masse qui tend vers 0 en se rapprochant de  $x$ . L'extrémité droite de cette particule massive est donnée par  $F_g^{-1}(m)$ .

ii)  $m \in \mathcal{E}_t^+$  : la position  $x$ , aussi égale à  $F_d^{-1}(m) + tV_0^-(F_d^{-1}(m))$ , est occupée par une particule massive ; à sa gauche il y a accumulation de particules de masse qui tend vers 0 en se rapprochant de  $x$ . L'extrémité gauche de cette particule massive est donnée par  $F_d^{-1}(m)$ .

iii)  $m \in \mathcal{E}_t^0$  : la position  $x$ , aussi égale à

$$F_d^{-1}(m) + tV_0^-(F_d^{-1}(m)) = F_g^{-1}(m) + tV_0^+(F_g^{-1}(m)) ,$$

est occupée par une particule non massive ; à sa droite et à sa gauche il y a accumulation de particules de masse qui tend vers 0 en se rapprochant de  $x$ . La position  $x$  est donc occupée par  $\{F_d^{-1}(m), F_g^{-1}(m)\}$ . Il faut bien remarquer que  $P_0(\{F_d^{-1}(m), F_g^{-1}(m)\}) = 0$ .

### 1.5.2 Recherche d'une particule massive

Prenons le cas où  $m_1 \in \mathcal{E}_t^+$ . Nous allons chercher l'intervalle  $[\alpha, \beta] \cap \mathcal{S}$  qui forme la particule  $H_z^+(m_1, t)$ . Soit  $(m_2, H(m_2, t))$  l'extrémité droite du segment de l'enveloppe convexe de  $H(\cdot, t)$  dont l'extrémité gauche est le point  $(m_1, H(m_1, t))$ . voir (**Fig. 6.**). Nous avons

$$\frac{\int_{m_1}^{m_2} F_0^{-1}(z) + tV_0(F_0^{-1}(z))dz}{m_2 - m_1} = H_z^+(m_1, t) = H_z^-(m_2, t) .$$

Cette position est occupée par une particule effective à l'instant  $t$  de masse  $m_2 - m_1$ . Pour déterminer l'intervalle  $[\alpha, \beta]$  qui forme cette particule il faut distinguer quatre cas.

i)  $H_z^-(m_1, t) < H_z^+(m_1, t), H_z^-(m_2, t) < H_z^+(m_2, t)$  : dans ce cas

$$[\alpha, \beta] = [F_g^{-1}(m_1), F_d^{-1}(m_2)]$$

ii)  $H_z^-(m_1, t) < H_z^+(m_1, t), H_z^-(m_2, t) = H_z^+(m_2, t)$  : dans ce cas

$$[\alpha, \beta] = [F_g^{-1}(m_1), F_g^{-1}(m_2)]$$

iii)  $H_z^-(m_1, t) = H_z^+(m_1, t), H_z^-(m_2, t) < H_z^+(m_2, t)$  : dans ce cas

$$[\alpha, \beta] = [F_d^{-1}(m_1), F_d^{-1}(m_2)]$$

iv)  $H_z^-(m_1, t) = H_z^+(m_1, t), H_z^-(m_2, t) = H_z^+(m_2, t)$  : dans ce cas

$$[\alpha, \beta] = [F_d^{-1}(m_1), F_g^{-1}(m_2)] .$$

Nous définissons

$$C(G, t) := \frac{\int_G [\eta + tv_0(\eta)] P_0(d\eta)}{P_0(G)} \quad \forall G \subset \mathbb{R}, P_0(G) > 0 .$$

### 1.5.3 Théorème

Dans chacun des quatre cas précédents, nous avons

$$\frac{\int_{m_1}^{m_2} [F_0^{-1}(z) + tV_0(F_0^{-1}(z))] dz}{m_2 - m_1} = \frac{\int_{[\alpha, \beta]} [\eta + tV_0(\eta)] P_0(d\eta)}{P_0[\alpha, \beta]} .$$

L'intervalle  $[\alpha, \beta]$  est le plus grand intervalle de  $\mathcal{S}$  qui vérifie les propriétés suivantes :

- 1)  $C([\alpha, \beta], t) = \frac{\int_{m_1}^{m_2} [F_0^{-1}(z) + tV_0(F_0^{-1}(z))] dz}{m_2 - m_1} ,$
- 2)  $C((y, \beta], t) \leq C([\alpha, \beta], t) \leq C([\alpha, y], t) \quad \forall \alpha \leq y \leq \beta .$

Nous terminons cette partie par un résultat qui caractérise un élément  $[\alpha, \beta] \cap \mathcal{S} \in \xi_t$ .

### 1.5.4 Théorème

A) Un intervalle  $[\alpha, \beta] \cap \mathcal{S}$  tel que  $P_0[\alpha, \beta] > 0$  appartient à  $\xi_t$  ssi

$$1) \quad C((y, \beta], t) \leq C([\alpha, y], t) \quad \forall \alpha \leq y \leq \beta, \quad P_0((y, \beta]) > 0, P_0([\alpha, y]) > 0,$$

$$2) \quad C([y_1, \alpha), t) < C([\alpha, y_2), t),$$

pour tous  $y_1 < \alpha < y_2$  tels que  $P_0([y_1, \alpha)) > 0, P_0([\alpha, y_2)) > 0,$

$$3) \quad C([y_1, \beta], t) < C((\beta, y_2], t),$$

pour tous  $y_1 < \beta < y_2$  tels que  $P_0([y_1, \beta]) > 0, P_0((\beta, y_2]) > 0.$

B) Un intervalle  $[\alpha, \beta] \cap \mathcal{S}$  tel que  $P_0[\alpha, \beta] = 0$  appartient à  $\xi_t$  ssi  $\alpha$  et  $\beta$  vérifient respectivement les propriétés 2) et 3) ci-dessus et

$$\alpha + tv_0^-(\alpha) = \beta + tv_0^+(\beta).$$

### 1.5.3 Recherche d'une particule non massive

Nous avons trois types de particules non massives.

1)  $m \in \mathcal{E}_t^-, H_z^-(m, t) < H_z^+(m, t)$  : dans ce cas  $H_z^+(m, t) = F_g^{-1}(m) + tV_0^+(F_g^{-1}(m))$  est non massive. Elle est formée uniquement de  $\{F_g^{-1}(m)\}$ .

2)  $m \in \mathcal{E}_t^+, H_z^-(m, t) < H_z^+(m, t)$  : dans ce cas  $H_z^-(m, t) = F_d^{-1}(m) + tV_0^-(F_d^{-1}(m))$  est non massive. Elle est formée uniquement de  $\{F_d^{-1}(m)\}$ .

3)  $m \in \mathcal{E}_t^0, H_z^-(m, t) < H_z^+(m, t)$  : dans ce cas

$$H_z^-(m, t) = F_d^{-1}(m) + tV_0^-(F_d^{-1}(m)),$$

$$H_z^+(m, t) = F_g^{-1}(m) + tV_0^+(F_g^{-1}(m))$$

sont non massives. La première est formée uniquement de  $\{F_d^{-1}(m)\}$ , la seconde est formée de  $\{F_g^{-1}(m)\}$ .

4)  $m \in \mathcal{E}_t^0, H_z^-(m, t) = H_z^+(m, t) = x$  : dans ce cas

$$x = F_g^{-1}(m) + tV_0^+(F_g^{-1}(m)) = F_d^{-1}(m) + tV_0^-(F_d^{-1}(m))$$

est aussi non massive. Elle est formée de  $\{F_d^{-1}(m), F_g^{-1}(m)\}$ .



### 1.5.4 Partition $\xi_t$

On associe à chaque  $m \in \mathcal{E}_t$  les deux intervalles  $[\alpha_t^-(m), \beta_t^-(m)]$ ,  $[\alpha_t^+(m), \beta_t^+(m)]$  qui forment respectivement  $H_z^-(m, t)$  et  $H_z^+(m, t)$ . Dans le cas  $H_z^-(m, t) = H_z^+(m, t)$  les deux intervalles coïncident.

### 1.5.5 Définition

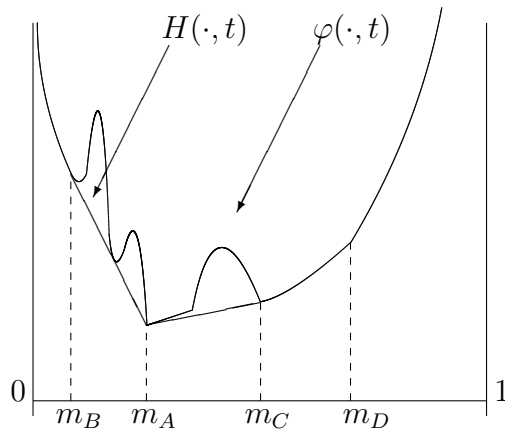
La famille

$$\xi_t := \{[\alpha_t^-(m), \beta_t^-(m)] \cap \mathcal{S}, [\alpha_t^+(m), \beta_t^+(m)] \cap \mathcal{S} : m \in \mathcal{E}_t\}$$

est une partition de  $\mathcal{S}$ .

Ceci définit à chaque instant  $t$  une partition  $\xi_t$  du support  $\mathcal{S}$  de  $P_0$ . Un élément de  $\xi_t$  est un intervalle  $[\alpha, \beta] \cap \mathcal{S}$  qui constitue à l'instant  $t$  la particule massive qui se trouve à la position  $C([\alpha, \beta], t)$ . Lorsque la particule n'est pas massive, c'est-à-dire  $P_0([\alpha, \beta]) = 0$ , alors sa position est donnée par

$$\begin{aligned} \alpha + tV_0^-(\alpha) = \beta + tV_0^+(\beta) & \quad \text{si } \alpha < \beta, \\ \alpha + tV_0^-(\alpha) & \quad \text{si } \alpha = \beta \in \mathcal{S}_-, \\ \beta + tV_0^+(\beta) & \quad \text{si } \alpha = \beta \in \mathcal{S}_+, \\ \alpha + tV_0(\alpha) & \quad \text{si } \alpha = \beta \in \mathcal{S}_- \cap \mathcal{S}_+. \end{aligned}$$



**Fig. 6.** Les différents cas de points extrémaux de  $H(\cdot, t)$ .  $m_i$  illustre la façon dont le point extrémal est isolé ou non.

### 1.5.6 Remarque

1. Si  $F_0$  est strictement croissante, alors il n'y a pas d'éléments successifs de  $\xi_t$  ayant des masses strictement positives.
2.  $s > t \implies \mathcal{E}_s \subset \mathcal{E}_t$ .  
Soit  $m \in \mathcal{E}_s$ . L'intervalle  $[\alpha_s(m), \beta_s(m)]$  désigne indifféremment  $[\alpha_s^-(m), \beta_s^-(m)]$  et  $[\alpha_s^+(m), \beta_s^+(m)]$ . Nous avons pour tout  $t < s$ ,

$$[\alpha_t(m), \beta_t(m)] \subset [\alpha_s(m), \beta_s(m)].$$

Soit  $m$  tel que  $F_d^{-1}(m) < F_g^{-1}(m)$ . Pour tout  $t > 0$ ,  $F_d^{-1}(m)$  appartient au groupe qui forme la particule  $H_z^-(m, t)$ , et  $F_g^{-1}(m)$  appartient au groupe qui forme la particule  $H_z^+(m, t)$ .

En effet, pour  $s > t$ , soit  $m \in \mathcal{E}_s$ . On a

$$\forall m_1 < m < m_2, \quad \frac{\varphi(m, s) - \varphi(m_1, s)}{m - m_1} < \frac{\varphi(m, s) - \varphi(m_2, s)}{m - m_2}.$$

Les droites

$$s' \mapsto I_1(s') := \frac{\varphi(m, s') - \varphi(m_1, s')}{m - m_1} \quad \text{et} \quad s' \mapsto I_2(s') := \frac{\varphi(m, s') - \varphi(m_2, s')}{m - m_2}$$

ont au plus un point d'intersection. Comme

$$I_1(0) \leq F_d^{-1}(m) \leq F_g^{-1}(m) \leq I_2(0) \quad \text{et} \quad I_1(s) < I_2(s),$$

on a

$$I_1(t) < I_2(t).$$

On en déduit que  $m \in \mathcal{E}_t$ . On a ainsi l'inclusion cherchée.

Dans la section suivante, nous allons faire le lien entre la dynamique des particules collantes et l'étude de l'équation de Burgers. Grâce à une étude similaire à celle de l'équation de Burgers, nous allons définir la fonction de répartition des particules effectives à l'instant  $t$ .

## 1.6 Particules collantes et équation de Burgers

L'équation de Burgers est interprétée par un modèle de particules collantes où la distribution initiale est la mesure de Lebesgue  $\lambda$  sur  $\mathbb{R}$ . La vitesse  $u(x, t)$  d'un groupe de particules qui se trouve à la position  $x$  à l'instant  $t$ , est la solution entropique de l'équation de Burgers

$$\partial_t u(x, t) + \partial_x \left( \frac{u^2(x, t)}{2} \right) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

Elle s'obtient à chaque instant  $t > 0$  en étudiant l'enveloppe convexe de la fonction

$$y \mapsto \int_0^y [\eta + tu_0(\eta)] d\eta.$$

Nous rappelons rapidement cette construction. On fixe  $x, t$  et on minimise la fonction

$$\mathbb{R} \ni y \mapsto G(x, y, t) = \int_0^y [\eta + tu_0(\eta)] d\eta - xy.$$

On note

$$y_*(x, t) = \min\{y : G(x, y, t) = \min_z G(x, z, t)\},$$

$$y^*(x, t) = \max\{y : G(x, t, y) = \min_z G(x, z, t)\}.$$

La solution  $u$  est donnée par

$$u(x, t) = \frac{x - y(x, t)}{t}$$

lorsque  $y_*(x, t) = y^*(x, t) := y(x, t)$ . Les points  $(x, t)$  pour lesquels  $y_*(x, t) \neq y^*(x, t)$  sont des points de discontinuité de  $u$ . Plus précisément, on a

$$\lim_{x' \rightarrow x^-} u(x', t) = \frac{x - y_*(x, t)}{t}, \quad \lim_{x' \rightarrow x^+} u(x', t) = \frac{x - y^*(x, t)}{t}.$$

L'intervalle  $[y_*(x, t), y^*(x, t)]$  est l'ensemble des positions initiales des particules qui se trouvent à l'instant  $t$  à la position  $x$ . La différence  $y^*(x, t) - y_*(x, t) = \lambda([y_*(x, t), y^*(x, t)])$  est la masse de la particule massive située au point  $x$  à l'instant  $t$ . Pour chaque  $(x_1, t_1)$  fixé avec  $t_1 > 0$  on lui associe deux segments dans le plan  $(x, t)$  définis par

$$S_*(x_1, t_1) = [(x_1, t_1), (y_*(x_1, t_1), 0)]$$

et

$$S^*(x_1, t_1) = [(x_1, t_1), (y^*(x_1, t_1), 0)].$$

Nous avons pour tout  $t < t_1$  les résultats suivants :

$$y_*(x, t) = y^*(x, t) = y_*(x_1, t_1) \quad \forall (x, t) \in S_*(x_1, t_1)$$

et

$$y_*(x, t) = y^*(x, t) = y^*(x_1, t_1) \quad \forall (x, t) \in S^*(x_1, t_1).$$

Ainsi, la solution  $u$  est constante sur chacun des segments lorsque  $t < t_1$ . Pour une étude détaillée nous renvoyons le lecteur à l'article de Hopf [30].

On se propose de faire une étude analogue pour la fonction

$$\mathbb{R} \times (0, 1) \times \mathbb{R}_+ \ni (x, z, t) \mapsto G(x, z, t) = \varphi(z, t) - xz, \quad (1.6.1)$$

où  $\varphi$  est la fonction (1.3.1) étudiée dans les sections précédentes.

Si  $C = \|V_0\|_\infty$  et si  $F_0^{-1}(m_1) \leq F_0^{-1}(m_2) \leq x - Ct$  ou  $F_0^{-1}(m_1) \geq F_0^{-1}(m_2) \geq x + Ct$ , alors on vérifie que

$$G(x, m_1, t) - G(x, m_2, t) \geq 0.$$

Ceci entraîne que la fonction continue  $G(x, \cdot, t)$  est minorée et atteint son minimum  $g(x, t)$  sur  $[F_0(x - Ct), F_0(x + Ct)]$ . On est alors assuré de l'existence des quantités

$$M_*(x, t) := \min\{z : G(x, z, t) = g(x, t)\}, \quad (1.6.2)$$

$$M^*(x, t) := \max\{z : G(x, z, t) = g(x, t)\}. \quad (1.6.3)$$

Si  $M_*(x, t) = 0$ , les limites en 0 de  $G(x, \cdot, t)$  et  $\varphi(x, \cdot, t)$  existent, et on peut prolonger ces fonctions par continuité en 0. De même, si  $M^*(x, t) = 1$ ,  $G(x, \cdot, t)$  et  $\varphi(x, \cdot, t)$  sont prolongeables par continuité en 1. La fonction  $G$  étant continue, on a

$$\forall (x, t), \quad G(x, M_*(x, t), t) = G(x, M^*(x, t), t) = g(x, t). \quad (1.6.4)$$

Le théorème suivant montre que nous venons de paramétrer les masses effectives à l'instant  $t$  par les particules effectives (à l'instant  $t$ ).

### 1.6.1 Théorème

$$\forall t, \quad \mathcal{E}_t = M^*(\mathbb{R}, t) \cup M_*(\mathbb{R}, t). \quad (1.6.5)$$

$$\forall (x, t), \quad (M_*(x, t), M^*(x, t)) \cap \mathcal{E}_t = \emptyset. \quad (1.6.6)$$

$M_*(x, t)$  et  $M^*(x, t)$  sont donc des éléments consécutifs dans  $\mathcal{E}_t$ . Si  $x$  est une particule effective à l'instant  $t$ , alors sa masse est égale à  $M^*(x, t) - M_*(x, t)$ .

#### Preuve du Théorème

Nous allons montrer l'inclusion de  $\mathcal{E}_t$  dans cet ensemble de masses. Si  $m \in \mathcal{E}_t$ , on a

$$\forall z_1 < m < z_2, \quad \frac{\varphi(m, t) - \varphi(z_1, t)}{m - z_1} < \frac{\varphi(m, t) - \varphi(z_2, t)}{m - z_2}.$$

Soit

$$x := \sup_{z < m} \frac{\varphi(m, t) - \varphi(z, t)}{m - z}.$$

On a alors deux possibilités pour garantir l'inégalité ci-dessus : ou bien

$$(i) \quad \forall z_1 < m < z_2, \quad \frac{\varphi(m, t) - \varphi(z_1, t)}{m - z_1} \leq x < \frac{\varphi(m, t) - \varphi(z_2, t)}{m - z_2},$$

ou bien

$$(ii) \quad \forall z_1 < m < z_2, \quad \frac{\varphi(m, t) - \varphi(z_1, t)}{m - z_1} < x \leq \frac{\varphi(m, t) - \varphi(z_2, t)}{m - z_2}.$$

Le cas (i), équivaut à

$$\begin{cases} z < m \implies \varphi(z, t) - xz \geq \varphi(m, t) - xm, \\ z > m \implies \varphi(z, t) - xz > \varphi(m, t) - xm. \end{cases}$$

Donc (i) équivaut à  $m = M^*(x, t)$ . Le même type d'argument montre que le cas (ii) équivaut à  $m = M_*(x, t)$ .

Pour montrer l'inclusion inverse, nous notons (1.6.2) et (1.6.3) par  $M_*$  et  $M^*$  respectivement (pour  $(x, t)$  fixé). Par définition de  $M_*$  et  $M^*$ , on a

$$\begin{aligned} g(x, t) &= \varphi(M_*, t) - xM_* = \varphi(M^*, t) - xM^*, \\ G(x, z, t) &> g(x, t) \quad \forall z \notin [M_*, M^*]. \end{aligned} \quad (1.6.7)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \varphi(z, t) - xz &> \varphi(M_*, t) - xM_* & \forall z < M_* , \\ \varphi(z, t) - xz &> \varphi(M^*, t) - xM^* & \forall z > M^* ; \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\varphi(M_*, t) - \varphi(z, t)}{M_* - z} < x \quad \forall z < M_* , \quad (1.6.8)$$

$$\frac{\varphi(M^*, t) - \varphi(z, t)}{M^* - z} > x \quad \forall z > M^* . \quad (1.6.9)$$

Si  $M_* = M^* =: M$ , alors ces deux inéquations montrent que  $M \in \mathcal{E}_t$ .

Si  $M_* < M^*$ , il découle de (1.6.7) que

$$x = \frac{\varphi(M_*, t) - \varphi(M^*, t)}{M_* - M^*} . \quad (1.6.10)$$

En procédant alors comme précédemment, on obtient pour tout  $z \in [M_*, M^*]$  la double inégalité

$$\frac{\varphi(M_*, t) - \varphi(z, t)}{M_* - z} \geq \frac{\varphi(M_*, t) - \varphi(M^*, t)}{M_* - M^*} \geq \frac{\varphi(M^*, t) - \varphi(z, t)}{M^* - z} \quad (1.6.11)$$

qui montre, avec (1.6.8), (1.6.9) et (1.6.10), que  $M_*, M^* \in \mathcal{E}_t$ . On en déduit l'inclusion cherchée.

En outre, (1.6.11) montre qu'on a bien l'intersection vide (1.6.6) du théorème. ■

### 1.6.2 Corollaire

Pour  $m_1 < m_2$  consécutifs dans  $\mathcal{E}_t$  et

$$x := \frac{\varphi(m_1, t) - \varphi(m_2, t)}{m_1 - m_2} ,$$

on a

$$m_1 = M_*(x, t), \quad m_2 = M^*(x, t) . \quad (1.6.12)$$

### Preuve du corollaire

Par définition,  $m_1$  et  $m_2$  vérifient respectivement (i) et (ii) dans la preuve du théorème 1.6.1. On en déduit comme dans cette preuve que

$$m_1 = M_*(x, t), \quad m_2 = M^*(x, t) . \quad \blacksquare$$

Nous allons maintenant montrer quelques propriétés des fonctions  $M_*$  et  $M^*$ .

### 1.6.3 Théorème (Régularité de $M_*$ et $M^*$ )

(a)  $\forall t, \quad M^*(x, t) \leq M_*(x', t) \quad \text{si } x < x'.$

(b) Si  $m$  est une valeur d'adhérence des points  $M_*(x', s)$  ou  $M^*(x', s)$  lorsque  $(x', s)$  tend vers  $(x, t)$ , alors

$$m \in [M_*(x, t), M^*(x, t)]$$

et  $G(x, \cdot, t)$  atteint son minimum en  $m$ .

(c)  $\forall (x, t)$ ,  $M_*(x+0, t) = M^*(x+0, t) = M^*(x, t)$ ,  
 $M_*(x-0, t) = M^*(x-0, t) = M_*(x, t)$ .

(d)  $M_*$  ( resp.  $M^*$ ) est continue en  $(x, t)$  si et seulement si  $M_*(x, t) = M^*(x, t)$ .

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} M^*(x, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} M^*(x, t) = 1.$$

### Preuve du Théorème

(a) Si  $x < x'$ , on a

$$\forall z > M_*(x', t), \quad G(x', z, t) \geq G(x', M_*(x', t), t).$$

Donc  $\forall z > M_*(x', t)$ ,

$$G(x, z, t) \geq G(x, M_*(x', t), t) + (x' - x)(z - M_*(x', t)) > G(x, M_*(x', t), t).$$

Donc  $G(x, \cdot, t)$  atteint son minimum avant ou en  $M_*(x', t)$  et on conclut que

$$M^*(x, t) \leq M_*(x', t).$$

(b) Si

$$M_*(x', s) \longrightarrow m, \quad (x', s) \longrightarrow (x, t),$$

soient  $z_1 < m < z_2$ . Pour  $(x', s)$  proche de  $(x, t)$ , on a  $z_1 < M_*(x', s) < z_2$  et alors

$$G(x', M_*(x', s), s) \leq G(x', z_1, s), \quad G(x', M_*(x', s), s) \leq G(x', z_1, s).$$

$G$  étant continue, on obtient lorsque  $(x', s)$  tend vers  $(x, t)$

$$G(x, m, t) \leq G(x, z_1, t), \quad G(x, m, t) \leq G(x, z_1, t).$$

Donc  $G(x, \cdot, t)$  atteint son minimum en  $m$ .

On montre de cette manière que  $G(x, \cdot, t)$  atteint son minimum en toute valeur d'adhérence  $m$  des points  $M_*(x', s)$  ou  $M^*(x', s)$  lorsque  $(x', s)$  tend vers  $(x, t)$ . Donc  $m \in [M_*(x, t), M^*(x, t)]$ .

(c) Pour tout  $(x, t)$ , on tire de (a) que les fonctions  $M_*(\cdot, t)$  et  $M^*(\cdot, t)$  sont croissantes et

$$M_*(x-0, t) \leq M^*(x-0, t) \leq M_*(x, t).$$

Or d'après **(b)**, on a  $M_*(x-0, t) \geq M_*(x, t)$ . Donc

$$M_*(x-0, t) = M^*(x-0, t) = M_*(x, t) .$$

De même,

$$M_*(x+0, t) = M^*(x+0, t) = M^*(x, t) .$$

**(d)** est une conséquence immédiate de **(b)** et **(c)**. ■

Dans le corollaire suivant, la dérivée est aussi bien celle à gauche que celle à droite.

#### 1.6.4 Corollaire (Fonctions « inverses » des positions)

$\forall (x, t)$ ,

$$M_*(x, t) = \sup\{z : \partial_z H(z, t) < x\}, \quad (1.6.13)$$

$$M^*(x, t) = \inf\{z : \partial_z H(z, t) > x\}. \quad (1.6.14)$$

$x \mapsto M^*(x, t)$  est la fonction de répartition des particules effectives à l'instant  $t$ , et  $M_*(x, t) = M^*(x-0, t)$ .

#### Preuve du corollaire

Soit  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ . Par définition des points  $M_*(x, t)$  et  $M^*(x, t)$ , la fonction  $\varphi(\cdot, t)$  est au dessus de la droite de pente  $x$  qui relie les points  $(M_*(x, t), \varphi(M_*(x, t), t))$  et  $(M^*(x, t), \varphi(M^*(x, t), t))$ . Donc son enveloppe convexe  $H(\cdot, t)$  est au dessus de cette droite. On a alors

$$H(M_*(x, t), t) = \varphi(M_*(x, t), t) \quad \text{et} \quad H(M^*(x, t), t) = \varphi(M^*(x, t), t), \quad (1.6.15)$$

et pour tout  $z$ ,

$$H(z, t) \geq H(M^*(x, t), t) + x(z - M^*(x, t)) = H(M_*(x, t), t) + x(z - M_*(x, t)) .$$

Ainsi,

$$\frac{H(M^*(x, t), t) - H(z, t)}{M^*(x, t) - z} \leq x \quad \forall z < M^*(x, t),$$

$$\frac{H(M_*(x, t), t) - H(z, t)}{M_*(x, t) - z} \geq x \quad \forall z > M_*(x, t) .$$

Donc

$$H_z^- (M_*(x, t), t) \leq x, \quad (1.6.16)$$

$$H_z^+ (M^*(x, t), t) \geq x. \quad (1.6.17)$$

Pour tout  $z < M_*(x, t)$ , il existe  $x' < x$  tel que  $z < M_*(x', t)$  car  $M_*(x-0, t) = M_*(x, t)$ . Alors d'après la convexité de  $H(\cdot, t)$  puis (1.6.16),

$$\partial_z^- H(z, t) \leq H_z^- (M_*(x', t), t) \leq x' .$$

D'où

$$\partial_z^- H(z, t) < x \quad \forall z < M_*(x, t). \quad (1.6.18)$$

De même, la limite  $M_*(x+0, t) = M^*(x, t)$  et (1.6.17) donnent

$$\partial_z^- H(z, t) > x \quad \forall z > M^*(x, t). \quad (1.6.19)$$

Le corollaire est donc vrai. ■

### 1.6.5 Résumé

Nous avons défini la fonction  $M^*(\cdot, t)$  et montré que c'est une fonction de répartition d'une mesure de probabilité  $P_t$ . Le support de  $P_t$  est égal à l'ensemble des particules effectives à l'instant  $t$ .

## 1.7 Trajectoires des particules

A toute masse effective  $m \in \mathcal{E}_0$ , on associe les trajectoires

$$t \mapsto H_z^-(m, t) =: x^-(m, t),$$

$$t \mapsto H_z^+(m, t) =: x^+(m, t).$$

Nous avons  $x^-(m, 0) = F_d^{-1}(m)$ , et  $x^+(m, 0) = F_g^{-1}(m)$ .

La masse  $m$  crée la partition  $I^-(m) := (-\infty, F_d^{-1}(m)]$ ,  $I^+(m) := [F_g^{-1}(m), +\infty)$  de la droite réelle. On appellera l'extrémité  $F_d^{-1}(m)$  le front de droite (défini par  $m$  à l'instant 0), et  $F_g^{-1}(m)$  le front de gauche (défini par  $m$  à l'instant 0). Les deux fronts peuvent être séparés par le vide ( $F_d^{-1}(m), F_g^{-1}(m)$ ). Dans ce cas, il faut un certain temps pour que les deux fronts se croisent. La position à l'instant  $t$  du front de droite est définie par  $x^-(m, t) = H_z^-(m, t)$  (c'est aussi la position du groupe qui contient  $F_d^{-1}(m)$ ), et la position du front de gauche est  $x^+(m, t) = H_z^+(m, t)$  (c'est la position du groupe qui contient  $F_g^{-1}(m)$ ).

Par contre, si  $F_0^{-1}(m) := F_d^{-1}(m) = F_g^{-1}(m)$ , alors les deux fronts  $I^-(m) = (-\infty, F_0^{-1}(m))$  et  $I^+(m) = [F_0^{-1}(m), +\infty)$  peuvent être séparés par le vide lorsque  $P_0(F_0^{-1}(m) - \varepsilon, F_0^{-1}(m)) = 0$  pour un certain  $\varepsilon > 0$ . Sinon ils ne sont pas séparés par le vide.

Soit  $[\alpha^-(m, t), \beta^-(m, t)]$  (respectivement  $[\alpha^+(m, t), \beta^+(m, t)]$ ) l'unique élément de  $\xi_t$  qui constitue la particule effective  $x^-(m, t)$  (respectivement  $x^+(m, t)$ ).

Dans la suite,  $x(m, t)$  (respectivement  $[\alpha(m, t), \beta(m, t)]$ ) désigne  $x^+(m, t)$  ou  $x^-(m, t)$  (respectivement  $[\alpha^+(m, t), \beta^+(m, t)]$  ou  $[\alpha^-(m, t), \beta^-(m, t)]$ ).

### 1.7.1 Propriété (évolution des particules)

1) La fonction  $t \mapsto \alpha(m, t)$  est càdlàg et décroissante. La fonction  $t \mapsto \beta(m, t)$  est càdlàg et croissante.



2)  $\forall m, \forall s > t,$

$$M_*(x(m, s), s) \leq M_*(x(m, t), t) \leq M^*(x(m, t), t) \leq M^*(x(m, s), s) .$$

De plus, les fonctions  $t \mapsto m_*(t) := M_*(x(m, t), t), m^*(t) := M^*(x(m, t), t)$  sont càdlàg. La première est décroissante, la seconde est croissante.

### Preuve de la Propriété

1) Soient  $s > t$ . Les points  $x(m, t)$  et  $x(m, s)$  sont les positions du front aux instants respectifs  $t$  et  $s$ . A l'instant  $s$  le groupe de particules  $[\alpha(m, s), \beta(m, s)]$  qui se trouvent à la position  $x(m, s)$ , a peut-être été heurté durant l'intervalle de temps  $(t, s]$  par sa gauche ou par sa droite. Ceci entraîne que  $\alpha(m, s) \leq \alpha(m, t)$  et  $\beta(m, t) \leq \beta(m, s)$ . Il reste à montrer la continuité à droite. Supposons  $\alpha(m, t+0) := \beta < \alpha(m, t)$ .

i) Si  $\beta$  est une extrémité droite à l'instant  $t$  d'un groupe  $[\alpha, \beta]$ , alors

$$C([\alpha, \beta], t) < x(m, t).$$

Il faut donc un temps  $s > t$  pour que  $[\alpha(m, t), \beta(m, t)]$  rencontre la particule  $\beta$ . Ceci contredit le fait que  $\alpha(m, t+\varepsilon) < \beta$  pour tout  $\varepsilon > 0$ .

ii) Si  $\beta$  n'est pas une extrémité droite à l'instant  $t$ , alors forcément  $\alpha(m, t) = \beta$ .

D'où la continuité à droite de  $t \mapsto \alpha(m, t)$ . La preuve est identique pour  $\beta(m, t)$ .

2) Nous rappelons que  $M_*(x, t)$  est la masse des particules qui se trouvent à l'instant  $t$  dans la demi-droite ouverte  $(-\infty, x)$  et que  $M^*(x, t)$  est celle des particules qui se trouvent dans la demi-droite fermée  $(-\infty, x]$ . Ainsi  $M_*(x(m, t), t) = P_0(-\infty, \alpha(m, t)) := m_*(t)$  et  $M^*(x(m, t), t) = P_0(-\infty, \beta(m, t)] := m^*(t)$ . Les propriétés de  $t \mapsto \alpha(m, t)$  et  $t \mapsto \beta(m, t)$  citées dans 1) achèvent la preuve. ■

### 1.7.2 Remarque

Soit  $F_t$  la fonction de répartition  $M^*(\cdot, t)$ . On peut vérifier que  $\forall m \in \mathcal{E}_0,$

$$F_{t,d}^{-1}(m) = x^-(m^*(t), t) \quad \text{si } m_*(t) < m \leq m^*(t) ,$$

$$F_{t,g}(m) = x^+(m_*(t), t) \quad \text{si } m_*(t) \leq m < m^*(t) .$$

Pour étudier la vitesse d'une trajectoire, nous définissons la fonction

$$(0, 1) \ni m \mapsto A(m) = \int_0^m V_0(F_0^{-1}(z)) dz . \quad (1.7.1)$$

On a alors

$$\varphi(m, t) = \varphi(m, 0) + tA(m) - tA\left(\frac{1}{2}\right) \quad \forall (m, t) .$$

Les résultats suivants montrent que ce sont les taux d'accroissement de  $A$  qui définissent les vitesses des particules.

**1.7.3 Théorème (Régularité des trajectoires)**

Soient  $t < s$  et  $m \in (0, 1)$ .

1) Si  $m_*(s) < m^*(t)$  et  $m_*(t) < m^*(s)$ , alors

$$\frac{A(m_*(t)) - A(m^*(s))}{m_*(t) - m^*(s)} \leq \frac{x^-(m, s) - x^-(m, t)}{s - t} \leq \frac{A(m_*(s)) - A(m^*(t))}{m_*(s) - m^*(t)}. \quad (1.7.2)$$

2) Si  $m = m_*(s) = m^*(t) < m^*(s)$ , alors

$$\begin{aligned} x^-(m, s) - x^-(m, t) &= (s - t)V_0^-(F_d^{-1}(m)) , \\ \frac{A(m^*(s)) - A(m)}{m^*(s) - m} &\leq \frac{x^+(m, s) - x^+(m, t)}{s - t} \leq V_0^+(F_g^{-1}(m)) . \end{aligned} \quad (1.7.3)$$

3) Si  $m_*(s) < m_*(t) = m^*(s) = m$ , alors

$$\begin{aligned} V_0^-(F_d^{-1}(m)) &\leq \frac{x^-(m, s) - x^-(m, t)}{s - t} \leq \frac{A(m_*(s)) - A(m)}{m_*(s) - m} , \\ x^+(m, s) - x^+(m, t) &= (s - t)V_0^+(F_g^{-1}(m)) . \end{aligned} \quad (1.7.4)$$

4) Si  $m_*(s) = m^*(s) = m$ , alors

$$\begin{aligned} x^-(m, s) - x^-(m, t) &= (s - t)V_0^-(F_d^{-1}(m)) , \\ x^+(m, s) - x^+(m, t) &= (s - t)V_0^+(F_g^{-1}(m)) . \end{aligned}$$

**Preuve du Théorème**

Pour tout  $s > t$ , on a  $m_*(s) \leq m_*(t) \leq m^*(t) \leq m^*(s)$ . Pour étudier l'accroissement  $x(m, s) - x(m, t)$ , on distingue trois cas.

1) Si  $m_*(s) < m^*(t)$  et  $m_*(t) < m^*(s)$ , le théorème 1.5.3 implique que

$$\frac{\varphi(m_*(s), s) - \varphi(m^*(t), s)}{m_*(s) - m^*(t)} \geq x(m, s) \geq \frac{\varphi(m_*(t), s) - \varphi(m^*(s), s)}{m_*(t) - m^*(s)} .$$

Comme  $G(x(m, t), \cdot, t)$  atteint son minimum en  $m_*(t)$  et  $m^*(t)$ , on a aussi

$$\frac{\varphi(m_*(s), t) - \varphi(m^*(t), t)}{m_*(s) - m^*(t)} \leq x(m, t) \leq \frac{\varphi(m_*(t), t) - \varphi(m^*(s), t)}{m_*(t) - m^*(s)} .$$

Alors

$$\frac{A(m_*(s)) - A(m^*(t))}{m_*(s) - m^*(t)} \geq \frac{x(m, s) - x(m, t)}{s - t} \geq \frac{A(m_*(t)) - A(m^*(s))}{m_*(t) - m^*(s)} .$$

2)  $m_*(s) = m^*(t) = m < m^*(s)$ . Dans ce cas,  $m_*(s) = m_*(t) = m$  et cela signifie, pour la particule  $F_d^{-1}(m)$ , qu'elle n'a pas encore subi de choc par sa gauche durant l'intervalle de temps  $[0, s]$ . Ce qui entraîne que

$$x^-(m, s) = F_d^{-1}(m) + sV_0^-(F_d^{-1}(m)) , \quad x^-(m, t) = F_d^{-1}(m) + tV_0^-(F_d^{-1}(m)) .$$

Donc

$$x^-(m, s) - x^-(m, t) = (s - t)V_0^- (F_d^{-1}(m)) .$$

Par ailleurs,  $m^*(t) = m$  signifie, pour la particule  $F_g^{-1}(m)$ , qu'elle n'a pas encore subi de choc par la droite durant l'intervalle de temps  $[0, t]$ . Ce qui entraîne que

$$x^+(m, t) = F_g^{-1}(m) + tV_0^+ (F_g^{-1}(m)) .$$

Par contre,  $m_*(s) = m < m^*(s)$  signifie que cette particule a subi des chocs uniquement par la droite durant l'intervalle de temps  $(t, s]$ . Ces chocs ralentissent la particule  $F_g^{-1}(m)$ , c'est-à-dire

$$x^+(m, s) \leq x^+(m, t) + (s - t)V_0^+ (F_g^{-1}(m)) .$$

En outre,

$$x^+(m, t) < \frac{\varphi(m^*(s), t) - \varphi(m, t)}{m^*(s) - m}$$

et

$$x^+(m, s) = \frac{\varphi(m^*(s), s) - \varphi(m, s)}{m^*(s) - m} .$$

Donc

$$x^+(m, s) - x^+(m, t) \geq \frac{A(m^*(s)) - A(m)}{m^*(s) - m}(s - t) .$$

On en déduit (1.7.3).

**3)**  $m_*(s) < m_*(t) = m^*(s) = m$ . Dans ce cas,  $m_*(t) = m$  signifie, pour la particule  $F_d^{-1}(m)$ , qu'elle n'a pas encore subi de choc par la gauche durant l'intervalle de temps  $[0, t]$ . Donc

$$x^-(m, t) = F_d^{-1}(m) + tV_0^- (F_d^{-1}(m)) .$$

L'hypothèse  $m_*(s) < m = m^*(s)$  signifie que cette particule a subi des chocs uniquement par la gauche durant l'intervalle de temps  $(t, s]$ . Ces chocs accélèrent la particule  $F_d^{-1}(m)$ , c'est-à-dire

$$x^-(m, s) \geq x^-(m, t) + (s - t)V_0^- (F_d^{-1}(m)) .$$

En outre,

$$\frac{\varphi(m_*(s), t) - \varphi(m, t)}{m_*(s) - m} < x^-(m, t)$$

et

$$x^-(m, s) = \frac{\varphi(m_*(s), s) - \varphi(m, s)}{m_*(s) - m} .$$

Donc

$$x^-(m, s) - x^-(m, t) \leq \frac{A(m_*(s)) - A(m)}{m_*(s) - m} (s - t) .$$

On en déduit (1.7.4).

Par ailleurs, l'hypothèse  $m = m_*(s)$  signifie, pour la particule  $F_g^{-1}(m)$ , qu'elle n'a pas encore subi de choc par la droite durant l'intervalle de temps  $[0, s]$ . Ce qui entraîne que

$$x^+(m, s) = F_g^{-1}(m) + sV_0^+(F_g^{-1}(m)) , \quad x^+(m, t) = F_g^{-1}(m) + tV_0^+(F_g^{-1}(m)) .$$

Donc

$$x^+(m, s) - x^+(m, t) = (s - t)V_0^+(F_g^{-1}(m)) .$$

4)  $m_*(s) = m^*(s) = m$ . Dans ce cas, les particules  $F_d^{-1}(m)$  et  $F_g^{-1}(m)$  n'ont pas encore subi de choc durant l'intervalle de temps  $[0, s]$ . Ce qui entraîne que

$$x^-(m, s) = F_d^{-1}(m) + sV_0^-(F_d^{-1}(m)) , \quad x^+(m, t) = F_g^{-1}(m) + tV_0^+(F_g^{-1}(m)) . \quad \blacksquare$$

#### 1.7.4 Corollaire

Si  $C = \|V_0\|_\infty$ , alors

$$|x(m, s) - x(m, t)| \leq C|s - t| \quad \forall m, \forall s, t .$$

$$\partial_t^+ x(m, t) = \frac{A(m_*(t)) - A(m^*(t))}{m_*(t) - m^*(t)} \quad \text{si } m_*(t) < m^*(t) . \quad (1.7.5)$$

Si  $m_*(t) = m^*(t) = m$  et  $x^-(m, t) < x^+(m, t)$ , alors

$$\partial_t^+ x^-(m, t) = V_0^-(F_d^{-1}(m)) , \quad \partial_t^+ x^+(m, t) = V_0^+(F_g^{-1}(m)) .$$

Si  $m_*(t) = m^*(t) = m$  et  $x^-(m, t) = x^+(m, t)$ , alors

$$\begin{aligned} V_0^+(F_g^{-1}(m)) &\leq \liminf_{s \rightarrow t+0} \frac{x(m, s) - x(m, t)}{s - t} \leq \\ &\limsup_{s \rightarrow t+0} \frac{x(m, s) - x(m, t)}{s - t} \leq V_0^-(F_d^{-1}(m)) . \end{aligned}$$

### Preuve du corollaire

Les trajectoires sont clairement lipschitziennes, d'après le théorème précédent. La formule (1.7.5) découle du premier cas du théorème. Si  $m_*(t) = m^*(t) = m$  et  $x^-(m, t) < x^+(m, t)$ , les particules mettent un certain temps avant de se rencontrer. Alors pendant cet intervalle de temps, on est dans le cas 2), 3) ou 4) du théorème. On en déduit les dérivées.

Il reste à montrer le dernier cas du corollaire. On a dans ce cas

$$x(m, t) = F_d^{-1}(m) + tV_0^-(F_d^{-1}(m)) = F_g^{-1}(m) + tV_0^+(F_g^{-1}(m)) .$$

Si  $F_d^{-1}(m) = F_g^{-1}(m) =: F_0^{-1}(m)$ , on obtient

$$V_0^+(F_0^{-1}(m)) = V_0^-(F_0^{-1}(m)) = V_0(F_0^{-1}(m)) .$$

Si cette particule n'est pas heurtée immédiatement après l'instant  $t$ , alors on est dans le cas 4) du théorème précédent. Il en découle que

$$\partial_t^+ x(m, t) = V_0(F_0^{-1}(m)) .$$

Si cette particule est heurtée immédiatement après l'instant  $t$ , alors on obtient

$$m_*(s) < m_*(t) = m = m^*(t) < m^*(s) \quad \forall s > t .$$

On obtient ce même résultat lorsque  $F_d^{-1}(m) < F_g^{-1}(m)$ .

En faisant tendre  $s$  vers  $t$  dans (1.7.2), on obtient

$$\begin{aligned} V_0^+(F_g^{-1}(m)) &\leq \liminf_{s \rightarrow t+0} \frac{x(m, s) - x(m, t)}{s - t} \leq \\ &\limsup_{s \rightarrow t+0} \frac{x(m, s) - x(m, t)}{s - t} \leq V_0^-(F_d^{-1}(m)) . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 1.7.5 Remarque

1) Pour chaque  $m$ , la trajectoire est lipschitzienne. Ainsi,  $t \mapsto x(m, t)$  est *dt* p.p. dérivable.

2) Chaque trajectoire  $t \mapsto x(m, t)$  admet une dérivée à droite à chaque instant  $t$ , sauf dans le cas  $m_*(t) = m^*(t) = m$  avec

$$F_d^{-1}(m) < F_g^{-1}(m) \quad \text{et} \quad \{F_d^{-1}(m), F_g^{-1}(m)\} \in \xi_t .$$

Dans ce cas,  $V_0^+(F_g^{-1}(m)) < V_0^-(F_d^{-1}(m))$  et les deux particules forment un groupe non massif à l'instant  $t$ . La vitesse du groupe formé n'est alors pas définie à l'instant  $t$ . Néanmoins, si la limite suivante

$$\lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0+} \frac{\int_{\alpha - \varepsilon_1}^{\beta + \varepsilon_2} V_0(\eta) P_0(d\eta)}{P_0[\alpha - \varepsilon_1, \beta + \varepsilon_2]} := V_0(\alpha, \beta)$$

existe pour tout  $\alpha < \beta \in \mathcal{S}$  tels que  $P_0[\alpha, \beta] = 0$ , alors en attribuant la vitesse  $V(F_d^{-1}(m), F_g^{-1}(m))$  au groupe  $\{F_d^{-1}(m), F_g^{-1}(m)\}$  à l'instant  $t$ , on obtient des trajectoires  $t \mapsto x(m, t)$  ayant toujours une dérivée à droite.

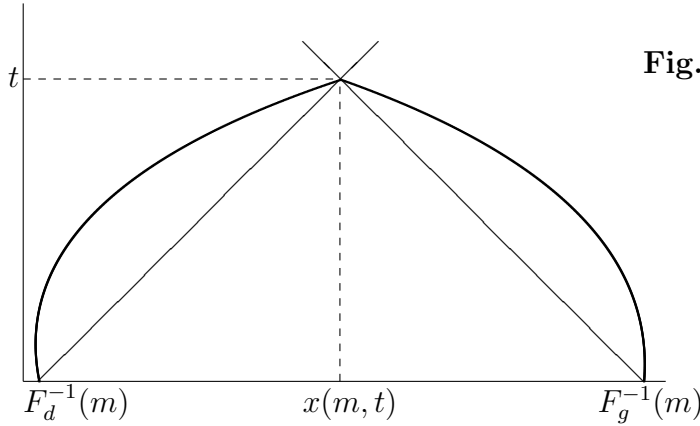
### 1.7.6 Proposition (Espace vide de particules)

Si  $m \in \mathcal{E}_t$ , alors les deux fronts  $x^-(m, s)$  et  $x^+(m, s)$  sont séparés par le vide (c'est-à-dire  $P_s(x^-(m, s), x^+(m, s)) = 0$ ) durant l'intervalle de temps  $[0, t]$ . Si en plus  $F_d^{-1}(m) < F_g^{-1}(m)$ , alors

$$x^-(m, s) < x^+(m, s) \quad \forall s < t .$$

En effet, comme  $m \in \mathcal{E}_t \subset \mathcal{E}_0$ , les extrémités  $(F_d^{-1}(m), F_g^{-1}(m))$  des deux fronts définis par  $m$  (à l'instant 0) n'ont pas changé durant l'intervalle  $[0, t]$ .

Il n'y a donc pas de particule à l'intérieur du « papillon » aux ailes déployées défini par les trajectoires  $x^-(m, \cdot)$  et  $x^+(m, \cdot)$ .



**Fig. 7.** Trajectoires des particules  $F_d^{-1}(m)$  et  $F_g^{-1}(m)$  avant leur rencontre.

Pour tout  $(x, t)$ , on définit

$$y_*(x, t) = F_g^{-1}(M_*(x, t)), \quad y^*(x, t) = F_d^{-1}(M^*(x, t)) .$$

$y_*(x, t)$  et  $y^*(x, t)$  permettent de déterminer (selon l'accumulation des particules effectives autour de  $x$ ) l'ensemble des particules qui forment la particule  $x$  à l'instant  $t$ .

Pour tout  $m \in \mathcal{E}_{t_1}$ , soient  $\mathcal{C}_d(m, t_1)$  la trajectoire  $[0, t_1) \ni t \mapsto x^-(m, t)$  et  $\mathcal{C}_g(m, t_1)$  la trajectoire  $[0, t_1) \ni t \mapsto x^+(m, t)$ . Nous avons

$$\begin{aligned} M_*(x, t) &= F_0(F_g^{-1}(m) - 0) \quad \forall (x, t) \in \mathcal{C}_g(m, t_1), t < t_1 \\ M^*(x, t) &= F_0(F_d^{-1}(m)) \quad \forall (x, t) \in \mathcal{C}_d(m, t_1), t < t_1 . \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} y_*(x, t) &= F_g^{-1}(m) \quad \forall (x, t) \in \mathcal{C}_g(m, t_1), \quad t < t_1 \\ y^*(x, t) &= F_d^{-1}(m) \quad \forall (x, t) \in \mathcal{C}_d(m, t_1), \quad t < t_1 . \end{aligned}$$

Si  $F_0$  est strictement croissante, les papillons se réduisent à des segments  $\mathcal{C}_g(m, t_1) = \mathcal{C}_d(m, t_1) := \mathcal{C}(m, t_1)$ . Ce segment est celui qui relie les points  $(F_0^{-1}(m), 0)$  et  $(x(m, t), t)$ . Pour toute position  $x_1$  de particule à l'instant  $t_1$ , on a alors

$$\mathcal{C}(M_*(x_1, t_1), t_1) = S_*(x_1, t_1), \quad \mathcal{C}(M^*(x_1, t_1), t_1) = S^*(x_1, t_1) .$$

D'où

$$\begin{aligned} y_*(x, t) &= y^*(x, t) = y_*(x_1, t_1) \quad \forall (x, t) \in S_*(x_1, t_1), \quad t < t_1 \\ y_*(x, t) &= y^*(x, t) = y^*(x_1, t_1) \quad \forall (x, t) \in S^*(x_1, t_1), \quad t < t_1 . \end{aligned}$$

Dans la section suivante nous allons montrer que la fonction

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \ni (x, t) \mapsto \Psi(x, t) = \int_0^x M(y, t) dy$$

est la solution de viscosité de l'équation de Hamilton-Jacobi suivante

$$\partial_t \Psi + A(\partial_x \Psi) = 0 .$$

Ceci nous permettra de déduire que  $(M(x, t) : t \geq 0)$  est la solution entropique de la loi de conservation suivante :

$$\partial_t M + \partial_x (A(M)) = 0, \quad M_0 = F_0, \quad (1.7.6)$$

où le flux est  $A(m) = \int_0^m V_0(F_0^{-1}(z)) dz$ . Ce résultat est bien connu lorsque  $V_0$  est continue.

## 1.8 Lien avec une équation de Hamilton-Jacobi

Nous rappelons que ces résultats ont déjà été obtenus dans [5] et [4] lorsque le support  $\mathcal{S}$  est borné et  $V_0$  est continue. Nous en donnons ici une preuve légèrement différente basée sur les enveloppes convexes  $H(\cdot, t)$ . Nos résultats sont valables pour une mesure de probabilité quelconque, et une vitesse initiale non forcément continue.

La fonction  $m \mapsto H(m, t)$  est l'enveloppe convexe de la fonction

$$m \in (0, 1) \mapsto \int_{\frac{1}{2}}^m F_0^{-1}(m') dm' + t \int_{\frac{1}{2}}^m V_0(F_0^{-1}(m')) dm' .$$

On peut supposer sans perte de généralité que  $F_0^{-1}(\frac{1}{2}) = 0$ . On vérifie par un changement de variables que

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^m F_0^{-1}(z) dz &= mF_0^{-1}(m) - \int_0^{F_0^{-1}(m)} F_0(x) dx \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ xm - \int_0^x F_0(y) dy \right\} := H_0(m). \end{aligned}$$

De même, la fonction

$$\begin{aligned} x \mapsto \Psi(x, t) &= \sup_{m \in (0,1)} \left\{ xm - H_0(m) - t \int_{\frac{1}{2}}^m V_0(F^{-1}(m')) dm' \right\} \\ &= - \inf_{m \in (0,1)} G(x, m, t) = xM(x, t) - H(M(x, t), t) \end{aligned}$$

est la transformée de Legendre-Fenchel de la fonction

$$m \in (0, 1) \mapsto H_0(m) + t \int_{\frac{1}{2}}^m V_0(F^{-1}(m')) dm',$$

où  $G$  est la fonction de la Section 1.6.

On en déduit que pour tout  $t \geq 0$ , la fonction  $m \mapsto H(m, t)$  est la transformée de Legendre-Fenchel de la fonction  $x \mapsto \Psi(x, t)$ . Plus précisément,

$$\forall m \in (0, 1), \quad H(m, t) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{xm - \Psi(x, t)\} = \left( H_0 + t \int_{\frac{1}{2}}^{\cdot} V_0(F^{-1}(m')) dm' \right)^{**} (m),$$

où  $*$  désigne la transformée de Legendre-Fenchel. Il en découle que la fonction inverse de la dérivée  $\partial_m H(m, t)$  est égale à  $\partial_x \Psi(x, t)$ . Par conséquent,

$$M(x, t) = \partial_x \Psi(x, t).$$

Maintenant on peut dire que  $M$  est la solution entropique de (1.7.6). En effet d'après un résultat de Bardi et Evans [2], la fonction  $\Psi$  est la solution de viscosité de l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\partial_t \Psi + A(\partial_x \Psi) = 0, \quad \Psi(x, 0) = \int_0^x M_0(y) dy,$$

et ceci entraîne que  $\partial_x \Psi$  est la solution entropique de (1.7.6). Nous renvoyons le lecteur aux articles de Crandall et Lions [9], [10] pour la définition et l'étude des solutions de viscosité.

On pourra montrer directement que  $M$  est la solution entropique, grâce à la caractérisation de Dafermos [12]. En effet, les lignes de discontinuité de  $M$  vérifient la condition d'entropie

$$\lim_{s \rightarrow t+0} \frac{x(m, s) - x(m, t)}{s - t} = \frac{A(m^*(t)) - A(m_*(t))}{m^*(t) - m_*(t)}.$$



Il nous reste à montrer que  $M$  est solution faible de l'équation. Ceci apparaîtra dans le chapitre 3.

Dans la section suivante, nous allons montrer que la loi de conservation scalaire (1.7.6) est la limite des lois de conservation scalaire obtenues en discrétisant la donnée initiale  $F_0$ . Donc les solutions entropiques obtenues par les modèles discrets des particules collantes convergent vers la solution entropique du modèle continu.

## 1.9 Passage du cas discret au cas continu

Nous rappelons le résultat suivant dû à Y. Brenier et E. Grenier [4].

### 1.9.1 Proposition

Soit  $P$  une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}$ , et soit  $u_0$  une fonction continue et bornée. On considère une suite  $(P_n)$  de mesures de probabilité dont le support est fini et telle que  $P_n \rightarrow P$  faiblement. Les fonctions  $F_n, F$  désignent leurs fonctions de répartition respectives. On considère une suite  $(u_0^n)$  de fonctions continues qui converge uniformément vers  $u_0$ , et on définit

$$A_n(m) = \int_0^m u_0^n(F_n^{-1}(z))dz, \quad A(m) = \int_0^m u_0(F^{-1}(z))dz \quad \forall m \in [0, 1].$$

Alors pour toute fonction  $f \in L^1([0, 1], dm)$ ,

$$\sup_{m \in [0, 1]} \left| \int_0^m f(m) dA_n(m) - \int_0^m f(m) dA(m) \right| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Sous les hypothèses de cette proposition, soit  $M_n$  la solution entropique de la loi de conservation scalaire de flux  $A_n$  et donnée initiale  $F_n$ , et soit  $M$  la solution entropique de la loi de conservation scalaire de flux  $A$  et donnée initiale  $F$ . Nous allons montrer que

$$\sup_{t \leq T} \int |M_n(x, t) - M(x, t)| dx \rightarrow 0.$$

D'abord, nous allons démontrer la proposition précédente. Grâce au lemme suivant qui provient de [38], on a une démonstration très simple.

### 1.9.2 Lemme ([38])

Soient  $F, F_n$  ( $n \geq 1$ ) des fonctions de répartition. On a la convergence faible

$$F_n \rightarrow F, \quad n \rightarrow \infty \quad \text{ssi}$$

$$F_n^{-1}(m) \rightarrow F^{-1}(m), \quad n \rightarrow \infty$$

partout où  $F^{-1}$  est continue.

Ainsi, pour  $f \in L^1([0, 1], dm)$ , on obtient le résultat souhaité en utilisant le théorème de convergence dominée et le fait que la suite  $(u_0^n)$  est bornée.

Dans [4], la preuve est basée sur le résultat élémentaire suivant.

### 1.9.3 Lemme

Soit  $(\mu_n)$  une suite de mesures de probabilité sur  $\mathbb{R}$ , et  $(M_n)$  la suite de leurs fonctions de répartition respectives c'est-à-dire

$$\mu_n(-\infty, x] = M_n(x) .$$

Les propositions suivantes sont équivalentes.

- i)  $\mu_n \rightarrow \mu$  faiblement.
- ii)  $\int_a^b |M_n(x) - M(x)| dx \rightarrow 0 \quad \forall a < b$ .
- iii) Pour toute fonction croissante continue  $B$  définie sur  $[0, 1]$  et telle que  $B(0) = 0$ ,  $B(1) = 1$ ,  $\partial_x(B(M_n)) \rightarrow \partial_x(B(M))$ .

### Preuve du Lemme

On va montrer que i)  $\iff$  ii). Si  $M_n \rightarrow M$  dans  $L^1_{loc}$ , alors  $M'_n = \mu_n \rightarrow M' = \mu$  au sens des distributions. Comme  $\mu_n$  et  $\mu$  sont des mesures de probabilité, l'approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions de classe  $C^1$  permet d'avoir i). Réciproquement, cette convergence faible est équivalente à la convergence simple  $M_n \rightarrow M$  partout où  $M$  est continue, donc  $dx$ -presque partout. Par le théorème de convergence dominée, on en déduit que  $M_n \rightarrow M$  dans  $L^1_{loc}$ .

De la même manière, i) implique que  $B(M_n) \rightarrow B(M)$  dans  $L^1_{loc}$ . On en déduit comme précédemment la convergence faible des mesures de probabilité  $\partial_x(B(M_n)) \rightarrow \partial_x(B(M))$ . Donc i)  $\implies$  iii)  $\implies$  ii). ■

Avant de démontrer la proposition 1.9.1, nous faisons la remarque suivante.

### 1.9.4 Remarque

Dans iii), on peut considérer les fonctions  $B \in C^1([0, 1])$ .

En effet,  $m \mapsto \frac{B(m)-B(0)}{B(1)-B(0)}$  permet de généraliser le lemme aux fonctions croissantes continues sur  $[0, 1]$ . Par suite, toute fonction  $B \in C^1([0, 1])$  est la différence de deux fonctions croissantes continues.

On procède enfin à la preuve de la proposition 1.9.1.

### Preuve de la Proposition 1.9.1

L'assertion iii) du lemme précédent et la convergence  $\|u_0^n - u_0\|_\infty \rightarrow 0$  impliquent que

$$\forall B \in C^1([0, 1]), \quad \langle \partial_x(B(F_n)), u_0^n \rangle \rightarrow \langle \partial_x(B(F)), u_0 \rangle .$$

En remarquant que

$$\begin{aligned} \forall B \in C^1([0, 1]), \quad \langle \partial_x(B(F_n)), u_0^n \rangle &= \int_0^1 B'(m) u_0^n(F_n^{-1}(m)) dm, \\ \langle \partial_x(B(F)), u_0 \rangle &= \int_0^1 B'(m) u_0(F^{-1}(m)) dm, \end{aligned}$$

on obtient

$$\forall f \in C([0, 1]), \quad \int_0^1 f(m) dA_n(m) \rightarrow \int_0^1 f(m) dA(m).$$

On étend ce résultat à  $f \in L^1([0, 1], dm)$  par densité de  $C([0, 1])$  dans  $L^1([0, 1], dm)$ , et en utilisant le fait que les fonctions  $u_0^n$  sont uniformément bornées.

Pour  $f \in L^1([0, 1], dm)$ , on a donc la convergence simple des fonctions continues

$$G_n(m) := \int_0^m f(z) dA_n(z) \rightarrow G(m) := \int_0^m f(z) dA(z) \quad \forall m \in [0, 1].$$

La suite  $(G_n)$  étant en plus équi-continue, on en déduit la convergence uniforme  $G_n \rightarrow G$ . ■

Le résultat suivant est dû à M. G. Crandall, L. C. Evans et P. L. Lions [11] et va nous permettre d'exploiter la proposition 1.9.1.

### 1.9.5 Théorème

Soit  $F_n(y, u, p)$  une suite de fonctions continues sur  $\Theta \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction  $F(y, u, p)$ . Ici  $\Theta$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $u_n$  la solution de viscosité de  $F_n(y, u_n(y), \nabla u_n(y)) = 0$ . Si  $u_n$  converge uniformément sur tout compact de  $\Theta$  vers une fonction  $u$ , alors  $u$  est la solution de viscosité de  $F(y, u(y), \nabla u(y)) = 0$ .

Comme  $A_n$  converge uniformément vers  $A$ , ce théorème va nous permettre de conclure qu'on a la convergence des solutions entropiques.

### 1.9.6 Application 1.

$$F_n(x, t, u, p) = p_1 + A_n(p_2), \quad F(x, t, u, p) = p_1 + A(p_2).$$

La solution de viscosité de

$$F_n(x, t, u, \nabla u) = 0$$

est égale à

$$u_n(x, t) = \int_0^x M_n(y, t) dy,$$

où

$$\partial_t M_n + \partial_x(A_n(M_n)) = 0.$$

Nous en déduisons que

$$\sup_n \sup_{(x,t) \in K} |\nabla u_n(x,t)| < +\infty$$

sur tout compact  $K$  de  $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ . Ainsi la suite  $(u_n)$  est équi-continue. Grâce au théorème précédent et à l'unicité de la solution de viscosité, on conclut que  $u_n \rightarrow u$  uniformément sur tout compact, et que  $u$  est la solution de viscosité de

$$F(x,t,u,\nabla u) = 0.$$

Comme conséquence, on obtient

$$\int \int f(x,t) M_n(x,t) dx dt \rightarrow \int \int f(x,t) M(x,t) dx dt$$

pour toute fonction  $f$  continue à support compact.

En utilisant des résultats standard sur les lois de conservation [35], on obtient une meilleure convergence.

**1.9.6 Application 2.** Nous avons montré que pour toute fonction  $f$  de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$

$$\sup_{m \in [0,1]} \left| \int_0^m f'(z) dA_n(z) - \int_0^m f'(z) dA(z) \right| \rightarrow 0,$$

et comme

$$\int |M_n(x,0) - M(x,0)| dx \rightarrow 0,$$

nous obtenons

$$\sup_{t \leq T} \int |M_n(x,t) - M(x,t)| dx \rightarrow 0.$$

Maintenant, nous allons faire le lien avec le système d'équations de gaz sans pression grâce aux mesures  $\rho(dx,t) = \partial_x M(x,t)$ ,  $q(dx,t) = \partial_x(A(M(x,t)))$ .

## 1.10 Lien avec le système de gaz sans pression

Le système suivant

$$\begin{cases} \partial_t(\rho) + \partial_x(u\rho) & = 0 \\ \partial_t(u\rho) + \partial_x(u^2\rho) & = 0 \\ \rho(dx,t) \rightarrow P_0, & u(x,t)\rho(dx,t) \rightarrow V_0(x)P_0(dx) \end{cases} \text{ faiblement, lorsque } t \rightarrow 0^+$$

est appelé système d'équations de gaz sans pression. Soit  $M$  la solution entropique de (1.7.6) où  $P_0 = \partial_x M(\cdot, 0)$ . Nous utilisons le résultat suivant qui est dû à [4].

### 1.10.1 Théorème

Si on pose  $\rho(dx,t) = \partial_x M(x,t)$ ,  $q(dx,t) = \partial_x(A(M(x,t)))$ , alors la mesure  $q(dx,t)$  est absolument continue par rapport à  $\rho(dx,t)$ . Si  $u$  est sa densité, alors la famille  $(\rho(dx,t), u(x,t))_{t>0}$  est une solution faible du système de gaz précédent.

### Preuve du Théorème

Nous avons vu que  $(x, t) \mapsto M(x, t)$  est une fonction à variation bornée, c'est-à-dire que  $\partial_t M$  et  $\partial_x M$  sont des mesures de Radon sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ . Le calcul différentiel sur l'espace  $BV(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$  des fonctions à variation bornées sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  [40] montre qu'il existe une fonction borélienne  $u(x, t)$  à valeurs dans  $[\inf V_0, \sup V_0]$ , déterminée  $\partial_x M$ -presque partout, et telle que

$$\nabla(A(M(x, t))) = (u(x, t)\partial_t M, u(x, t)\partial_x M) . \quad (1.10.1)$$

Ici,  $\nabla$  désigne l'opérateur gradient. Si on pose

$$\rho(dx, t) = \partial_x M(x, t) \quad \text{et} \quad q(dx, t) = \partial_x(A(M(x, t))) ,$$

alors

$$q(dx, t) = u(x, t)\rho(dx, t) .$$

D'après (1.7.6), nous avons

$$\partial_t \rho(dx, t) + \partial_x(q(dx, t)) = 0$$

au sens des distributions. En utilisant de nouveau (1.10.1) on obtient

$$\begin{aligned} \partial_t q(dx, t) &= \partial_t \partial_x(A(M)) = \partial_x \partial_t(A(M)) \\ &= \partial_x(u \partial_t M) = -\partial_x(u^2 \partial_x M) = -\partial_x(uq(dx, t)) . \end{aligned}$$

Ceci montre que  $(\rho(dx, t), u(x, t))_{t>0}$  est une solution du système de gaz ci-dessus. ■

# Chapitre 2

## Flot de particules

Dans ce chapitre, on considère la dynamique des particules collantes distribuées initialement suivant une mesure de probabilité  $P_0$ , et de vitesse initiale  $v_0$ . La fonction  $v_0$  vérifie les conditions du chapitre 1.

On associe à chaque position initiale  $y$ , sa position  $\phi(y, t, P_0, v_0)$  à l'instant  $t$ . Dans la section 2.4, on montre que la fonction  $(y, t) \mapsto \phi(y, t, P_0, v_0)$  est l'unique qui vérifie les propriétés suivantes :

1.  $\forall y, \quad \phi(y, 0) = y;$
- 2.

$$\phi(y, t) = \frac{\int_{\{\phi_t^{-1}\{\phi(y, t)\}\}} [\eta + tv_0(\eta)] P_0(d\eta)}{P_0\{\phi_t^{-1}\{\phi(y, t)\}\}};$$

3. si  $\phi_t^{-1}\{\phi(y, t)\} = [\alpha, \beta]$  alors

$$C([\alpha, y], t) \geq C([\alpha, \beta], t) \quad \forall y \in [\alpha, \beta];$$

4. pour tout  $t$ ,  $\phi(\cdot, t)$  est croissante.

Comme conséquence de cette caractérisation, on obtient la propriété du flot suivante

$$\phi(y, t + s, P_0, v_0) = \phi(\phi(y, s, P_0, v_0), t, P_s, u_s)$$

où  $P_s$  (respectivement  $u_s$ ) est la distribution des masses (respectivement la vitesse des particules) à l'instant  $s$ .

En outre, si  $P_0$  est une probabilité et  $(P_0^{(n)})$  est une suite de probabilités à support fini telle que  $P_0^{(n)} \rightarrow P_0$  faiblement, on montre dans la section 2.5 que la suite des flots  $\phi(\cdot, \cdot, P_0^{(n)}, v_0)$  converge uniformément sur tout compact de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  vers  $\phi(\cdot, \cdot, P_0, v_0)$ . De plus,  $\phi(\cdot, \cdot, P_s^{(n)}, u_s^{(n)})$  converge uniformément sur tout compact de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  vers  $\phi(\cdot, \cdot, P_s, u_s)$ . Ce résultat nouveau complète celui de [25] dans lequel des restrictions fortes étaient imposées à la mesure  $P_0$ .

Nous construisons aussi sur l'espace probabilisé  $([0, 1], \mathcal{B}, dm)$ , où  $dm$  désigne la mesure de Lebesgue, un processus stochastique  $(X_t, t \geq 0)$ , solution de l'équation différentielle stochastique

$$X_t = X_0 + \int_0^t E[v_0(X_0)/X_s] ds, \quad \forall t \geq 0,$$

où  $X_0$  a pour loi  $P_0$ . Nous montrons que les trois processus

$$(m, t) \rightarrow X_t(m), \phi(F_d^{-1}(m), t, P_0, v_0), \phi(F_g^{-1}(m), t, P_0, v_0)$$

sont indistinguables. Ces processus modélisent les trajectoires des particules collantes. Le processus  $(X_t)$  a été construit par [14] en discrétisant la probabilité  $P_0$ , puis en passant à la limite. Notre preuve est directe, elle est basée sur les enveloppes convexes  $H(\cdot, t)$  étudiées dans le chapitre 1.

## 2.1 Définition

Nous rappelons que  $(0, 1) \ni m \mapsto H(m, t)$  définie dans le chapitre 1 est l'enveloppe convexe de l'application  $(0, 1) \ni m \mapsto \int_{\frac{1}{2}}^m [F_0^{-1}(z) + tv_0(F_0^{-1}(z))] dz$ . Ici  $F_0$  est la fonction de répartition de  $P_0$ , ses inverses sont notées par  $F_d^{-1}$ ,  $F_g^{-1}$  définis par (1.1.4) et (1.1.4). La fonction  $v_0$  est mesurable, bornée et vérifie la condition

$$v_0^-(x) \geq v_0(x) \geq v_0^+(x) \quad \forall x, \quad (2.1.1)$$

où  $v_0^-$  et  $v_0^+$  sont définis dans la proposition 1.4.3. Cette condition est celle des sauts négatifs définie dans le chapitre 1.

Nous rappelons les notations suivantes :

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} : P_0(x - \varepsilon, x + \varepsilon) > 0, \forall \varepsilon > 0\},$$

$$\mathcal{S}_- = \{x \in \mathbb{R} : P_0(x - \varepsilon, x] > 0, \forall \varepsilon > 0\},$$

$$\mathcal{S}_+ = \{x \in \mathbb{R} : P_0[x, x + \varepsilon) > 0, \forall \varepsilon > 0\}.$$

$\mathcal{S}_-$  et  $\mathcal{S}_+ \setminus \mathcal{S}_-$  constituent une partition de  $\mathcal{S}$ . Pour tout  $t$ , nous définissons sur  $\mathcal{S}$  la fonction

$$\phi(x, t, P_0, v_0) = \begin{cases} H_m^-(F_0(x), t) & \text{si } x \in \mathcal{S}_-, \\ H_m^+(F_0(x), t) & \text{si } x \in \mathcal{S}_+ \setminus \mathcal{S}_-. \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Nous allons voir que  $\phi(x, t, P_0, v_0)$  est la position à l'instant  $t$  de la particule située initialement en  $x$ . En effet, si  $H_m^-(F_0(x), t) = H_m^+(F_0(x), t)$ , il existe deux masses effectives successives  $m^- \leq m^+$  qui vérifient  $m^- \leq F_0(x) \leq m^+$ , et telles que

$$H_m^+(m^-, t) = H_m^-(F_0(x), t) = H_m^+(F_0(x), t) = H_m^-(m^+, t) := y.$$

Cette position  $y$  est occupée par le groupe  $[F^{-1}(m^-), F^{-1}(m^+)]$ , où  $F^{-1}$  désigne  $F_d^{-1}$  ou  $F_g^{-1}$  selon la nature des masses effectives  $m^-$ ,  $m^+$ . Il est clair que

$$x \in [F^{-1}(m^-), F^{-1}(m^+)] .$$

Si  $H_m^-(F_0(x), t) < H_m^+(F_0(x), t)$ , alors  $F_0(x)$  est une masse effective à l'instant  $t$ , c'est-à-dire que  $F_0(x)$  est l'abscisse d'un point extrémal de l'enveloppe convexe  $H(\cdot, t)$ . Par conséquent,  $F_d^{-1}(F_0(x))$  est l'extrémité droite du groupe qui occupe la position  $H_m^-(F_0(x), t)$ , et  $F_g^{-1}(F_0(x))$  est l'extrémité gauche du groupe qui occupe la position  $H_m^+(F_0(x), t)$ . Maintenant, il suffit de remarquer que  $x \in \{F_d^{-1}(F_0(x)), F_g^{-1}(F_0(x))\}$ . Par suite, la position de  $x$  à l'instant  $t$  est soit  $H_m^-(F_0(x), t)$  lorsque  $x = F_d^{-1}(F_0(x))$ , soit  $H_m^+(F_0(x), t)$  lorsque  $x = F_g^{-1}(F_0(x))$ .

Ainsi, la fonction  $x \mapsto \phi(x, t, P_0, v_0)$  est complètement déterminée par la partition  $\xi_t$  de  $\mathcal{S}$  définie dans le chapitre 1.

Il est clair que  $[\alpha, \beta] := \{z : \phi(z, t, P_0, v_0) = \phi(x, t, P_0, v_0)\}$  est bien le groupe qui occupe la position  $\phi(x, t, P_0, v_0)$  à l'instant  $t$ , et que  $[\alpha, \beta] \cap \mathcal{S} \in \xi_t$ . De plus, si  $P_0[\alpha, \beta] > 0$ , alors

$$\phi(x, t, P_0, v_0) = \frac{\int_{[\alpha, \beta]} [\eta + tv_0(\eta)] P_0(d\eta)}{P_0[\alpha, \beta]} \quad \forall x \in [\alpha, \beta] . \quad (2.1.3)$$

Si  $P_0([\alpha, \beta]) = 0$ , alors forcément  $x \in \{F_d^{-1}(F_0(x)), F_g^{-1}(F_0(x))\}$ . Nous avons ainsi deux cas :

$$1) \ x = F_d^{-1}(F_0(x)) \text{ entraîne que } \phi(x, t, P_0, v_0) = x + tv_0^-(x),$$

$$2) \ x = F_g^{-1}(F_0(x)) \text{ entraîne que } \phi(x, t, P_0, v_0) = x + tv_0^+(x).$$

Il faut remarquer que lorsque  $F_d^{-1}(F_0(x)) = F_g^{-1}(F_0(x))$ , la condition de saut négatif  $v_0^-(x) \geq v_0^+(x)$  et le fait que  $F_0(x) \in \mathcal{E}_t$  nous garantissent que  $x$  est un point de continuité de  $v_0$ . Par conséquent, il n'y a aucune ambiguïté dans la définition de  $\phi(x, t, P_0, v_0)$ . Nous terminons cette section en remarquant que

$$\phi(x, 0, P_0, v_0) = x \quad \forall x \in \mathcal{S}.$$

## 2.2 Recherche de la vitesse

Nous avons déjà montré que pour tout  $m$  la trajectoire  $t \mapsto H(m, t)$  est lipschitzienne. Par conséquent, pour tout  $y \in \mathcal{S}$ , la trajectoire de la particule  $y$  est aussi lipschitzienne. Ainsi, pour chaque  $y$ , il existe une fonction  $t \mapsto v(y, t, P_0, v_0)$  mesurable telle que

$$\phi(y, t, P_0, v_0) = y + \int_0^t v(y, s, P_0, v_0) ds .$$



Nous allons déterminer cette fonction « vitesse »  $v(y, t, P_0, v_0)$ . On pose  $[\alpha, \beta] = \phi_t^{-1}(\phi(y, t, P_0, v_0))$  et on distingue quatre cas :

1)  $P_0([\alpha, \beta]) > 0$  : dans ce cas, on pose

$$v(x, t, P_0, v_0) := \frac{\int_{[\alpha, \beta]} v_0(\eta) P_0(d\eta)}{P_0([\alpha, \beta])} \quad \forall x \in [\alpha, \beta]. \quad (2.2.1)$$

2)  $P_0([\alpha, \beta]) = 0$ ,  $F_d^{-1}(F_0(x)) + tv_0^-(F_d^{-1}(F_0(x))) < F_g^{-1}(F_0(x)) + tv_0^+(F_g^{-1}(F_0(x)))$  : dans ce cas, on a  $x = F_d^{-1}(F_0(x))$  et alors  $v(x, t, P_0, v_0) := v_0^-(x)$ , ou bien  $x = F_g^{-1}(F_0(x))$  et alors  $v(x, t, P_0, v_0) := v_0^+(x)$ .

3)  $P_0([\alpha, \beta]) = 0$ ,  $F_d^{-1}(F_0(x)) < F_g^{-1}(F_0(x))$ ,  $F_d^{-1}(F_0(x)) + tv_0^-(F_d^{-1}(F_0(x))) < F_g^{-1}(F_0(x)) + tv_0^-(F_g^{-1}(F_0(x)))$  : dans ce cas,  $v(x, t, P_0, v_0)$  est à priori mal définie, sauf si on impose une condition supplémentaire sur  $v_0$  et  $P_0$ , à savoir

$$\lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \frac{\int_{[\alpha - \varepsilon_1, \beta + \varepsilon_2]} v_0(\eta) P_0(d\eta)}{P_0([\alpha - \varepsilon_1, \beta + \varepsilon_2])} =: v(\alpha, t, P_0, v_0) = v(\beta, t, P_0, v_0).$$

Il faut remarquer que l'ensemble

$$\{x : P_0(F_d^{-1}(F_0(x)), F_g^{-1}(F_0(x))) = 0, \quad F_d^{-1}(F_0(x)) < F_g^{-1}(F_0(x))\}$$

est  $P_0$ -négligeable.

4)  $P_0([\alpha, \beta]) = 0$ ,  $x = F_d^{-1}(F_0(x)) = F_g^{-1}(F_0(x))$  : dans ce cas,

$$v(x, t, P_0, v_0) := v_0(x).$$

Le résultat suivant montre que  $v(x, t, P_0, v_0)$  est bien la vitesse de la particule à l'instant  $t$ . On note  $\phi(x, t)$  pour la position de  $x$ , et  $v(x, t)$  pour sa vitesse à l'instant  $t$ .

### 2.2.1 Propriété (Lien entre flot et vitesse)

Nous avons

$$\phi(x, t) = x + \int_0^t v(x, s) ds \quad \forall (x, t) \in S \times \mathbb{R}_+. \quad (2.2.2)$$

Pour  $P_0$ -presque tout  $x$ , la fonction  $t \mapsto v(x, t)$  est càdlàg et

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\phi(x, t+h) - \phi(x, t)}{h} = v(x, t) \quad \forall t \geq 0. \quad (2.2.3)$$

En utilisant le théorème 1.5.3, et la définition des extrémités, on obtient les propriétés suivantes. On rappelle que

$$C(G, t) := \frac{\int_G [\eta + tv_0(\eta)] P_0(d\eta)}{P_0(G)} \quad \forall G \subset \mathbb{R}, P_0(G) > 0.$$

### 2.2.2 Propriété (des chocs)

Si  $[\alpha, \beta] \cap \mathcal{S} \in \xi_t$ , alors

$$\alpha + tv_0^-(\alpha) \geq \phi(\alpha, t) \geq \beta + tv_0^+(\beta) . \quad (2.2.4)$$

$$\forall x \in [\alpha, \beta], \quad C([\alpha, x], t) \geq \phi(x, t) \geq C([x, \beta], t) . \quad (2.2.5)$$

De plus,  $[0, t] \ni s \mapsto \phi(\alpha, s)$  est concave et  $[0, t] \ni s \mapsto \phi(\beta, s)$  est convexe.

La concavité de la trajectoire de  $\alpha$  est due à (2.2.5). Pour tout  $s < t$ ,  $\alpha$  est une extrémité gauche à l'instant  $s$ . Soit  $\beta(s)$  son extrémité droite; on a  $\beta(s) \in [\alpha, \beta]$  et

$$v(\alpha, s) = \frac{\int_{[\alpha, \beta(s)]} v_0(\eta) P_0(d\eta)}{P_0[\alpha, \beta(s)]} , \quad \frac{\int_{[\alpha, \beta]} v_0(\eta) P_0(d\eta)}{P_0[\alpha, \beta]} = v(\alpha, t) .$$

En remplaçant  $x$  par  $\beta(s)$  dans (2.2.5), on obtient

$$C([\alpha, \beta(s)], 0) + tv(\alpha, s) = C([\alpha, \beta(s)], t) \geq C([\alpha, \beta], t) = C([\alpha, \beta], 0) + tv(\alpha, t) .$$

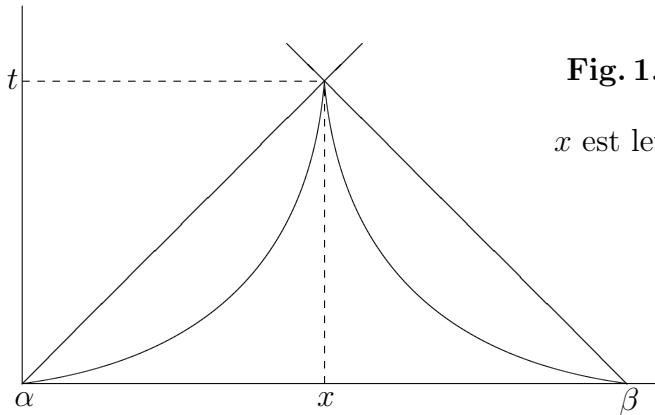
Comme

$$C([\alpha, \beta(s)], 0) \leq C([\alpha, \beta], 0) ,$$

on en déduit que  $v(\alpha, s) \geq v(\alpha, t)$ . On montre ainsi que

$$\forall s_1 < s_2 \leq t, \quad v(\alpha, s_1) \geq v(\alpha, s_2), \quad v(\beta, s_1) \leq v(\beta, s_2) .$$

les courbes de  $\alpha$  et  $\beta$  donnent alors un « papillon » aux ailes repliées.



**Fig. 1.** Trajectoires des particules  $\alpha$  et  $\beta$  avant leur rencontre.  $x$  est leur position commune à l'instant  $t$ .

## 2.3 Processus stochastique lié au flot

Soit l'espace probabilisé  $([0, 1], \mathcal{B}, \lambda)$ , où  $\lambda$  est la mesure de Lebesgue et  $\mathcal{B}$  est la tribu borélienne de  $[0, 1]$ . Dans cette section nous allons étudier les processus stochastiques  $(m, t) \in [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow H_z^-(m, t)$ ,  $(m, t) \in [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow H_z^+(m, t)$ . Ils vérifient

$$\lambda(\{m : H_z^-(m, t) = H_z^+(m, t) \quad \forall t\}) = 1$$

car  $\{m : H_z^-(m, t) = H_z^+(m, t) \quad \forall t\}$  contient  $\{m : F_d^{-1}(m) = F_g^{-1}(m)\}$ . En effet, supposons  $F_d^{-1}(m) = F_g^{-1}(m)$ . Pour tout  $t > 0$ , il existe un unique couple  $m^- < m^+$ , éléments successifs de  $\mathcal{E}_t$  (ensemble des points extrémaux de  $H(\cdot, t)$ ) tel que  $m^- \leq m \leq m^+$ . Deux cas se présentent :

1)  $m \in (m^-, m^+)$  : dans ce cas,

$$H_z^+(m^-, t) = H_z^-(m, t) = H_z^+(m, t) = H_z^-(m^+, t) .$$

2)  $m = m^-$  ou bien  $m = m^+$  : dans ce cas,  $H_z^-(m, t) = H_z^+(m, t)$ . En effet, nous avons

$$F_d^{-1}(m) + tv_0^-(F_d^{-1}(m)) \leq H^-(m, t) \leq H^+(m, t) \leq F_g^{-1}(m) + tv_0^+(F_g^{-1}(m)) ,$$

comme  $F_d^{-1}(m) = F_g^{-1}(m) = x$  et  $v_0^-(x) \geq v_0^+(x)$ , forcément  $v_0^-(x) = v_0^+(x)$  et par suite,  $H_z^-(m, t) = H_z^+(m, t)$ .

Nous concluons que les deux processus sont indistinguables. On peut donc désigner indifféremment  $H_z^-(m, t)$  et  $H_z^+(m, t)$  par  $X_t(m) = H_z(m, t)$ . En particulier,  $m \mapsto X_0(m) = F^{-1}(m) = H_z(m, 0)$  représente indifféremment les variables aléatoires  $m \mapsto F_d^{-1}(m)$  et  $m \mapsto F_g^{-1}(m)$ . En utilisant le fait que  $F_d^{-1}(m) \in \mathcal{S}_-$ , les deux processus  $t \rightarrow X_t$  et  $t \rightarrow \phi(X_0, t)$  sont aussi indistinguables.

### 2.3.1 Proposition

1) p.s.  $X_t = \phi(X_0, t)$  et  $v(X_0, t)$  est  $\sigma(X_t)$ -mesurable pour tout  $t \geq 0$ .

2) Nous avons

$$X_t = \mathbb{E}[X_0 + tv_0(X_0)/X_t] \quad \forall t , \quad (2.3.1)$$

$$v(X_0, t) = \mathbb{E}[v_0(X_0)/X_t] =: u(X_t, t) \quad \forall t , \quad (2.3.2)$$

$$\sigma(X_{t+s}) \subset \sigma(X_t) \quad \forall t, \forall s > 0 . \quad (2.3.3)$$

3)

$$\left\{ (m, t) : \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{X_{t+\varepsilon} - X_t}{\varepsilon} \neq u(X_t, t) \right\} \subset$$

$$\left\{ (m, t) : F_d^{-1}(m) < F_g^{-1}(m) , \quad F_d^{-1}(m) + tv_0^-(F_d^{-1}(m)) = F_g^{-1}(m) + tv_0^+(F_g^{-1}(m)) \right\} .$$

Ainsi,  $\forall m \notin \{m' : F_d^{-1}(m') < F_g^{-1}(m')\}$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{X_{t+\varepsilon} - X_t}{\varepsilon} = \frac{d}{dt} X_t = u(X_t, t) \quad \forall t .$$

En particulier,

$$\frac{d}{dt}X_t = u(X_t, t) \quad dt dm \quad p.p.$$

4) Pour toute fonction  $f(\cdot, t)$  continue et croissante,  $f(X_0, t)$  a même loi que  $X_t$  si et seulement si

$$f(X_0, t) = X_t \quad p.s.$$

La propriété (2.3.3) est une conséquence de la dynamique. La propriété (2.3.1) est due au lemme suivant qui va jouer un rôle important dans la suite.

### 2.3.2 Lemme

Soit  $\Phi$  une fonction qui vérifie

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) &= \frac{\int_{\{\Phi_t^{-1}\{\Phi(x, t)\}\}} [\eta + tv_0(\eta)] P_0(d\eta)}{P_0\{\Phi_t^{-1}\{\Phi(x, t)\}\}} && \text{si } P_0\{\Phi_t^{-1}\{\Phi(x, t)\}\} > 0, \\ \Phi(x, t) &= x + tv_0^-(x) && \text{si } P_0\{\Phi_t^{-1}\{\Phi(x, t)\}\} = 0 \quad \text{et } x \in \mathcal{S}_-, \\ \Phi(x, t) &= x + tv_0^+(x) && \text{si } P_0\{\Phi_t^{-1}\{\Phi(x, t)\}\} = 0 \quad \text{et } x \in \mathcal{S}_+. \end{aligned}$$

Si  $Y_0$  est une variable aléatoire de loi  $P_0$ , alors le processus  $(Y_t := \Phi(Y_0, t), t > 0)$  est tel que

$$Y_t = E[Y_0 + tv_0(Y_0)/Y_t] \quad \forall t.$$

#### Preuve du Lemme

Pour toute fonction  $f$  continue bornée,

$$E[(Y_0 + tv_0(Y_0))f(Y_t)] = E[(Y_0 + tv_0(Y_0))f(Y_t)1_A(Y_0)] + E[(Y_0 + tv_0(Y_0))f(Y_t)1_B(Y_0)]$$

où

$$A = \{x : P_0[\Phi = \Phi(x, t)] = 0\}, \quad B = \{x : P_0[\Phi = \Phi(x, t)] > 0\}.$$

Nous avons

$$\tilde{A} := A \cap \{x : F_d^{-1}(F_0(x)) = F_g^{-1}(F_0(x))\} \subset \mathcal{S}_- \cap \mathcal{S}_+.$$

Ceci implique que pour tout  $x \in \tilde{A}$ ,

$$\Phi(x, t) = x + tv_0^-(x) = x + tv_0^+(x),$$

et  $v_0^-(x) = v_0^+(x) = v_0(x)$  grâce à la condition des sauts (2.1.1). Donc

$$\Phi(x, t) = x + tv_0(x) \quad \forall x \in \tilde{A}.$$

D'autre part,  $P_0(A \setminus [x : F_d^{-1}(F_0(x)) = F_g^{-1}(F_0(x))]) = 0$  et  $\{Y_0 \in \tilde{A}\}$  est p.s.  $\sigma(Y_t)$ -mesurable. Nous obtenons

$$E[(Y_0 + tv_0(Y_0))f(Y_t)1_A(Y_0)] = E[(Y_0 + tv_0(Y_0))f(Y_t)1_{\tilde{A}(Y_0)}] = E[Y_t f(Y_t)1_{\tilde{A}(Y_0)}].$$

De même,  $\{Y_0 \in B\}$  est  $\sigma(Y_t)$ -mesurable, et pour tout  $x \in B$ ,

$$E[Y_0 + tv_0(Y_0)/Y_t = \phi(x, t)] = \phi(x, t) .$$

Donc

$$E[(Y_0 + tv_0(Y_0))f(Y_t)1_B(Y_0)] = E[Y_t f(Y_t)1_B(Y_0)] .$$

Ainsi,

$$E[(Y_0 + tv_0(Y_0))f(Y_t)] = E[Y_t f(Y_t)] . \quad \blacksquare$$

De la même manière, on montre (2.3.2). Pour montrer la quatrième assertion de la proposition 2.3.1, on utilise le lemme suivant.

### 2.3.3 Lemme

1) Soit  $X$  une variable aléatoire de fonction de répartition  $F$ . Soit  $h$  une fonction mesurable, et soit  $G$  la fonction de répartition de  $h(X)$ . Les inverses de  $F$  et  $G$  sont bien définis  $dm$ -presque sûrement sur  $[0, 1]$ . Si  $h$  est croissante et continue, alors

$$G^{-1} = h(F^{-1}) \quad dm - p.s.$$

2) Soient  $h$  et  $g$  deux fonctions croissantes et continues. Si  $h(X)$  et  $g(X)$  ont la même loi, alors

$$h(X) = g(X) \quad p.s.$$

### Preuve du Lemme

1) D'après les hypothèses du lemme, les variables aléatoires  $G^{-1}$  et  $h(F^{-1})$  ont la même loi. Leurs inverses respectifs coïncident alors, puisqu'ils constituent la fonction de répartition commune. On en déduit que

$$G^{-1} = h(F^{-1}) \quad p.s.$$

Pour le détail de la preuve, on considère  $\text{Cont}(F^{-1}) \cap \text{Cont}(G^{-1})$  qui est un ensemble de mesure totale. Pour tout  $m$  sur cet ensemble, on a

$$F^{-1}(m) = \inf\{y : F(y) \geq m\} \geq \inf\{y : G(h(y)) \geq m\} =: a .$$

D'abord, on va montrer que  $h(a) = G^{-1}(m)$ . Par définition de  $a$ , on a  $G(h(a)) \geq m$ , donc  $h(a) \geq G^{-1}(m)$ . Pour tout  $x < h(a)$ , Il existe  $y < a$  tel que  $x < h(y)$  (car  $h(a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(a - \varepsilon)$ ). On obtient alors  $G(x) \leq G(h(y)) < m$ , d'où  $G^{-1}(m) \geq h(a)$ . Donc  $h(a) = G^{-1}(m)$ .

Il reste à montrer que  $h(a) = h(F^{-1}(m))$ . Pour tout  $y < a$ , on a

$$G(h(y)) < m \leq G(h(a)) .$$

Donc

$$h(y) < h(a) \quad \forall y < a .$$

La fonction  $h$  étant croissante et continue, il existe  $b \geq a$  tel que

$$h^{-1}(h(a)) = [a, b] .$$

Comme  $F(b) = G(h(b)) = G(h(a)) \geq m$ , on obtient  $b \geq F^{-1}(m)$ . Ainsi,

$$F^{-1}(m) \in [a, b] \quad \text{et} \quad h(a) = h(F^{-1}(m)) .$$

2) Soit  $F$  la fonction de répartition de  $X$ . La variable  $F^{-1}$ , définie sur  $([0, 1], dm)$ , a la même loi que  $X$  et on a

$$g(F^{-1}(m)) = h(F^{-1}(m)) \quad dm - \text{p.s.}$$

Donc pour toute fonction  $f$  continue et bornée,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(g(X) - h(X))] &= \int_0^1 f(g(F^{-1}(m)) - h(F^{-1}(m))) dm \\ &= \int_0^1 f(0) dm = f(0) . \end{aligned}$$

Ce qui implique que la loi de  $g(X) - h(X)$  est la mesure de Dirac en 0, d'où

$$g(X) = h(X) \quad \text{p.s.} \quad \blacksquare$$

### 2.3.4 Remarque

Si  $g$  et  $h$  ne sont pas croissantes et continues, on ne peut pas conclure que  $g(X) = h(X)$ . Par exemple, soit  $U$  la loi uniforme sur  $[0, 1]$ . Pour

$$g = 1_{[0, \frac{1}{2}]} \quad \text{et} \quad h = 1_{(\frac{1}{2}, 1]} ,$$

$g(U)$  et  $h(U)$  suivent  $b(\frac{1}{2})$ , la loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{2}$ .

Maintenant, nous présentons la caractérisation du flot.

## 2.4 Caractérisation du flot

La caractérisation suivante permet d'identifier toute fonction ayant ces propriétés au flot des particules collantes.

### 2.4.1 Propriété (caractéristique du flot)

Les propriétés suivantes caractérisent le flot des particules collantes :

1.  $\forall x, \quad \phi(x, 0) = x.$

2. Pour tout  $(x, t) \in \mathcal{S} \times \mathbb{R}_+$ ,

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= \frac{\int_{\{\phi_t^{-1}\{\phi(x, t)\}\}} [\eta + tv_0(\eta)] P_0(d\eta)}{P_0\{\phi_t^{-1}\{\phi(x, t)\}\}} && \text{si } P_0\{\phi_t^{-1}\{\phi(x, t)\}\} > 0, \\ \phi(x, t) &= x + tv_0^-(x) && \text{si } P_0\{\phi_t^{-1}\{\phi(x, t)\}\} = 0 \text{ et } x \in \mathcal{S}_-, \\ \phi(x, t) &= x + tv_0^+(x) && \text{si } P_0\{\phi_t^{-1}\{\phi(x, t)\}\} = 0 \text{ et } x \in \mathcal{S}_+. \end{aligned}$$

3. Si  $\phi_t^{-1}\{\phi(x, t)\} = [\alpha, \beta]$  alors

$$C([\alpha, y], t) \geq C([\alpha, \beta], t) \quad \forall y \in [\alpha, \beta].$$

4. Pour tout  $t$ ,  $\phi(\cdot, t)$  est croissante.

### 2.4.2 Remarque

La troisième propriété est équivalente à

$$C([\alpha, y], t) \geq \phi(\alpha, t) \geq C([y, \beta], t) \quad \forall y \in [\alpha, \beta];$$

de plus, on peut ouvrir les intervalles en  $y$ .

La démonstration de la propriété caractéristique est basée sur le lemme 2.3.2 précédent.

### Preuve de la Propriété

Le flot des particules collantes vérifie déjà ces quatre propriétés. Soit  $\Phi$  une fonction qui vérifie ces quatre propriétés. La propriété de croissance montre que pour tout  $(x, t)$ , il existe  $\alpha, \beta$  sur  $\mathcal{S}$  tels que  $\Phi_t^{-1}\{\Phi(x, t)\} = [\alpha, \beta]$ . Nous allons montrer que  $[\alpha, \beta] \cap \mathcal{S} \in \xi_t$ , en montrant que  $\alpha$  vérifie  $(GVP_g)$ , et  $\beta$  vérifie  $(GVP_d)$  à l'instant  $t$ . On peut se reporter à la définition 1.2.1 pour se rappeler le GVP.

Les extrémités de chaque intervalle  $\Phi_t^{-1}(\Phi(z, t)) = [a, b]$  seront appelées respectivement extrémité gauche et extrémité droite.

Nous allons d'abord montrer que pour toute extrémité droite  $\beta_1$  et pour toute extrémité gauche  $\alpha_2$  telles que  $\beta_1 < \alpha_2$ ,

$$\Phi(\beta_1, t) < C((\beta_1, \alpha_2), t) < \Phi(\alpha_2, t).$$

Soit le processus  $(X_t(x) := \Phi(x, t), t \geq 0)$  défini sur  $(\mathbb{R}, P_0)$ , on a d'après le lemme 2.3.2

$$X_t = \mathbb{E}[X_0 + tv_0(X_0)/X_t] \quad \forall t.$$

Donc

$$\begin{aligned} C((\beta_1, \alpha_2), t) &= \mathbb{E}[X_0 + tv_0(X_0)/\beta_1 < X_0 < \alpha_2] \\ &= \mathbb{E}[X_0 + tv_0(X_0)/\Phi(\beta_1, t) < X_t < \Phi(\alpha_2, t)] = \mathbb{E}[X_t/\Phi(\beta_1, t) < X_t < \Phi(\alpha_2, t)]. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\Phi(\beta_1, t) < C((\beta_1, \alpha_2), t) < \Phi(\alpha_2, t) .$$

On revient à  $[\alpha, \beta] = \Phi_t^{-1}\{\Phi(x, t)\}$ . Pour  $y_1 < \alpha < y_2$ , soient  $\beta_1$  l'extrémité droite de  $y_1$ , et  $\alpha_2$  l'extrémité gauche de  $y_2$ . On a  $\beta_1 < \alpha \leq \alpha_2$ . Si on applique le résultat précédent à  $\beta_1$  et  $\alpha$ , on a

$$\Phi(\beta_1, t) < C((\beta_1, \alpha), t) < \Phi(\alpha, t) ;$$

et d'après la propriété 3,

$$C([y_1, \beta_1], t) \leq \Phi(\beta_1, t) .$$

Donc

$$C([y_1, \beta_1], t) < C((\beta_1, \alpha), t) < \Phi(\alpha, t) ,$$

et on obtient par le calcul des barycentres

$$C([y_1, \alpha], t) < \Phi(\alpha, t) .$$

Si  $\alpha_2 = \alpha$ , on a d'après la propriété 3

$$\Phi(\alpha, t) \leq C([\alpha, y_2], t) .$$

On obtient alors

$$C([y_1, \alpha], t) < C([\alpha, y_2], t) .$$

Si  $\alpha < \alpha_2$ , alors  $\beta < \alpha_2$  et le même raisonnement pour  $\beta$  et  $\alpha_2$  montre que

$$\Phi(\beta, t) < C((\beta, \alpha_2), t) < \Phi(\alpha_2, t) \quad \text{et} \quad \Phi(\alpha_2, t) \leq C([\alpha_2, y_2], t) .$$

Donc

$$\Phi(\beta, t) < C((\beta, \alpha_2), t) < C([\alpha_2, y_2], t) ,$$

et par suite

$$\Phi(\beta, t) < C((\beta, y_2), t) .$$

D'où

$$C([y_1, \alpha], t) < C([\alpha, y_2], t) .$$

Ainsi,  $\alpha$  vérifie  $(GVP_g)$  à l'instant  $t$ . La même preuve montre que  $\beta$  vérifie  $(GVP_g)$  à l'instant  $t$ . On en déduit que  $\Phi = \phi(\cdot, \cdot, P_0, v_0)$ . ■



La fonction  $\phi(\cdot, t)$  définit les particules effectives à l'instant  $t$ . Leur distribution est  $P_t := P_0\phi_t^{-1}$ . La vitesse de ces particules est définie par

$$u_t(x) = v(\phi_t^{-1}\{x\}, t, P_0, v_0) .$$

La vitesse n'est pas bien définie si  $P_0(\phi_t^{-1}\{x\}) = 0$ . Dans ce cas, on pose

$$u_t(x) := v(\beta, t) \quad \text{si } \phi_t^{-1}\{x\} = [\alpha, \beta] .$$

On peut remarquer que la fonction  $u_t$  n'est pas continue. Cependant, elle vérifie la condition des sauts négatifs.

### 2.4.3 Propriété (Propagation des sauts négatifs)

Pour tout  $t > 0$ , on a

$$u_t^-(x) \geq u_t(x) \geq u_t^+(x) \quad \forall x .$$

En effet, soit le processus  $(X_t(x) = \phi(x, t), s \geq 0)$  défini sur  $(\mathbb{R}, P_0)$ . Par définition de la vitesse  $u_t$ , on a  $v(X_0, t) = u_t(X_t)$ . Donc, d'après la proposition 2.3.1,

$$u_t(X_t) = E[v_0(X_0)/X_t] .$$

Si  $\phi_t^{-1}\{x\} = [\alpha, \beta]$  et  $x$  est une accumulation à gauche d'éléments de  $\phi(\mathcal{S}, t)$ , alors  $\alpha$  est une accumulation à gauche d'éléments de  $\mathcal{S}$ . En notant  $\phi_t^{-1}\{x'\} = [\alpha', \beta']$  dans le calcul suivant, on obtient

$$u_t^-(x) = \limsup_{x' \rightarrow x-0} \frac{\int_{[x', x]} u_t(\eta) P_t(d\eta)}{P_t([x', x])} = \limsup_{\alpha' \rightarrow \alpha-0} \frac{\int_{[\alpha', \alpha]} v_0(\eta) P_0(d\eta)}{P_0([\alpha', \alpha])} = v_0^-(\alpha) .$$

Si  $x$  est une accumulation à droite d'éléments de  $\phi(\mathcal{S}, t)$ , alors  $\beta$  est une accumulation à droite d'éléments de  $\mathcal{S}$ . En notant  $\phi_t^{-1}\{x'\} = [\alpha', \beta']$  dans le calcul suivant, on obtient

$$u_t^+(x) = \liminf_{x' \rightarrow x+0} \frac{\int_{(x, x']} u_t(\eta) P_t(d\eta)}{P_t((x, x'])} = \liminf_{\beta' \rightarrow \beta+0} \frac{\int_{(\beta, \beta']} v_0(\eta) P_0(d\eta)}{P_0((\beta, \beta'])} = v_0^+(\beta) .$$

La propriété 2.2.2 des chocs montre alors que

$$\alpha + tu_t^-(x) \geq x = C([\alpha, \beta], 0) + tu_t(x) \geq \beta + tu_t^+(x) ,$$

donc

$$u_t^-(x) \geq u_t(x) \geq u_t^+(x) .$$

Si en plus  $\alpha < \beta$ , alors  $u_t^-(x) > u_t^+(x)$ .

Nous pouvons donc considérer le flot  $\phi(\cdot, \cdot, P_t, u_t)$ . Ce flot est lié au premier de la manière suivante.

**2.4.4 Corollaire (Propriété de Markov)**

La fonction définie sur  $\phi(\mathcal{S}, t) \times \mathbb{R}_+$  par

$$\psi(x, s) := \phi(\phi_t^{-1}\{x\}, t + s, P_0, v_0)$$

coïncide avec le flot  $\phi(\cdot, \cdot, P_t, u_t)$ . De plus,

$$\phi(y, t + s, P_0, v_0) = \phi(\phi(y, t, P_0, v_0), s, P_t, u_t) \quad \forall (y, s) \in \mathcal{S} \times \mathbb{R}_+. \quad (2.4.1)$$

La preuve de ce résultat repose sur la caractérisation 2.4.1 du flot, où  $(P_0, v_0)$  est remplacé par  $(P_t, u_t)$ .

**Preuve du corollaire**

Soit la fonction

$$(x, s) \mapsto \psi(x, s) := \phi(\phi_t^{-1}\{x\}, t + s, P_0, v_0)$$

définie sur  $\phi(\mathcal{S}, t) \times \mathbb{R}_+$ . On a

$$\phi(y, t + s, P_0, v_0) = \psi(\phi(y, t, P_0, v_0), s) \quad \forall (y, s) \in \mathcal{S} \times \mathbb{R}_+.$$

Il reste à montrer que  $\psi = \phi(\cdot, \cdot, P_t, u_t)$ . Pour cela, il suffit de montrer que  $\psi$  vérifie la caractérisation 2.4.1 du flot défini par  $(P_t, u_t)$ . Les propriétés 1 et 4 sont immédiates. Pour montrer la propriété 2, nous allons montrer que

$$\psi(\cdot, s) = E_{P_t}[\psi_0 + su_t(\psi_0)/\psi(\cdot, s)] \quad \forall s$$

sur l'espace probabilisé  $(\mathbb{R}, P_t)$ . Ici,  $\psi_0$  désigne la fonction identité. Soient le processus  $(X_t(x) = \phi(x, t), s \geq 0)$  défini sur  $(\mathbb{R}, P_0)$ . D'après la proposition 2.3.1, on a

$$\begin{aligned} u_t(X_t) &= v(X_0, t) = E_{P_0}[v_0(X_0)/X_t], \\ X_s &= E_{P_0}[X_0 + sv_0(X_0)/X_s] \quad \forall s. \end{aligned}$$

On a donc pour tout  $s > 0$ ,

$$E_{P_0}[X_0 + (t + s)v_0(X_0)/X_t] = X_t + su_t(X_t).$$

Comme  $\sigma(X_{t+s}) \subset \sigma(X_t)$ , on obtient

$$E_{P_0}[X_0 + (t + s)v_0(X_0)/X_{t+s}] = E_{P_0}[X_t + su_t(X_t)/X_{t+s}],$$

c'est-à-dire

$$X_{t+s} = E_{P_0}[X_t + su_t(X_t)/X_{t+s}].$$

On a donc

$$\psi(X_t, s) = E_{P_0}[X_t + su_t(X_t)/\psi(X_t, s)]$$

sur l'espace probabilisé  $(\mathbb{R}, P_0)$ . Comme  $P_0 X_t^{-1} = P_t$ , On en déduit que

$$\psi(\cdot, s) = E_{P_t}[\psi_0 + s u_t(\psi_0) / \psi(\cdot, s)]$$

sur l'espace probabilisé  $(\mathbb{R}, P_t)$ . La propriété 2 est donc vérifiée lorsque  $P_t\{\psi_s^{-1}\{x\}\} > 0$ .

La fonction  $\psi(\cdot, s)$  étant croissante et continue, il existe  $a, b$  sur le support  $\phi(\mathcal{S}, t)$  de  $P_t$  tel que  $\psi_s^{-1}\{x\} = [a, b]$ . Il existe aussi  $[\alpha, \beta] \cap \mathcal{S} \in \xi_{t+s}$  tel que  $[\alpha, \beta] = \phi_{t+s}^{-1}\{x\}$ . On a alors

$$a = \phi(\alpha, t), \quad b = \phi(\beta, t).$$

En effet, on a

$$\psi(\phi(\alpha, t), s) = \phi(\alpha, t + s) = x, \quad \psi(\phi(\beta, t), s) = \phi(\beta, t + s) = x.$$

Pour tout  $a' = \phi(y, t) < \phi(\alpha, t)$ , on a  $y < \alpha$  et par définition de  $\alpha$ ,

$$\psi(a', s) = \phi(y, t + s) < \phi(\alpha, t + s) = x.$$

De même, pour tout  $b' = \phi(y', t) > \phi(\beta, t)$ , on a  $y' > \beta$  et par définition de  $\beta$ ,

$$\psi(b', s) = \phi(y', t + s) > \phi(\beta, t + s) = x.$$

On a donc  $a = \phi(\alpha, t)$ ,  $b = \phi(\beta, t)$  et  $P_t[a, b] = P_0[\alpha, \beta]$ .

Si  $P_t[a, b] = P_0[\alpha, \beta] = 0$ , deux possibilités se présentent.

i) Si  $a \in \phi(\mathcal{S}, t)_-$ , c'est-à-dire  $a$  est une accumulation à gauche d'éléments de  $\phi(\mathcal{S}, t)$ , alors  $\alpha \in \mathcal{S}_-$  et dans ce cas,

$$a = \phi(\alpha, t) = \alpha + t v_0^-(\alpha), \quad x = \phi(\alpha, t + s) = \alpha + (t + s) v_0^-(\alpha).$$

De plus, en notant  $[\alpha_1, \beta_1] := \phi_t^{-1}\{a'\}$ , on a

$$u_t^-(a) = \limsup_{a' \rightarrow a-0} \frac{\int_{[a', a]} u_t(\eta) P_t(d\eta)}{P_t([a', a])} = \limsup_{\alpha_1 \rightarrow \alpha-0} \frac{\int_{[\alpha_1, \alpha]} v_0(\eta) P_0(d\eta)}{P_0([\alpha_1, \alpha])} = v_0^-(\alpha).$$

Donc

$$x = \psi(a, s) = a + s u_t^-(a).$$

ii) Si  $a \in \phi(\mathcal{S}, t)_+$ , c'est-à-dire  $b$  est une accumulation à droite d'éléments de  $\phi(\mathcal{S}, t)$ , alors  $\beta \in \mathcal{S}_+$  et dans ce cas,

$$b = \phi(\beta, t) = \beta + t v_0^+(\beta), \quad x = \phi(\beta, t + s) = \beta + (t + s) v_0^+(\beta).$$

En notant  $[\alpha_2, \beta_2] := \phi_t^{-1}\{b'\}$ , on a

$$u_t^+(b) = \liminf_{b' \rightarrow b+0} \frac{\int_{(b, b']} u_t(\eta) P_t(d\eta)}{P_t((b, b'])} = \liminf_{\beta_2 \rightarrow \beta+0} \frac{\int_{(\beta, \beta_2]} v_0(\eta) P_0(d\eta)}{P_0((\beta, \beta_2])} = v_0^+(\beta).$$

Donc

$$x = \psi(b, s) = b + su_t^+(b) .$$

Il reste à montrer que  $[a, b] = \psi_s^{-1}\{x\}$  vérifie la propriété 3. Pour tout  $y \in [a, b] \cap \phi(\mathcal{S}, t)$ , on a

$$[\alpha_1, \beta_1] := \phi_t^{-1}\{y\} \subset \phi_t^{-1}([a, b]) = [\alpha, \beta] .$$

La propriété 3 pour  $\beta_1 \in [\alpha, \beta] = \phi_{t+s}^{-1}\{x\}$  s'écrit

$$\phi(\alpha, t + s) \leq E_{P_0}[X_0 + (t + s)v_0(X_0)/\alpha \leq X_0 \leq \beta_1] .$$

Comme

$$\begin{aligned} E_{P_0}[X_0 + (t + s)v_0(X_0)/\alpha \leq X_0 \leq \beta_1] &= E_{P_0}[X_0 + (t + s)v_0(X_0)/a \leq X_t \leq y] \\ &= E_{P_0}[X_t + su_t(X_t)/a \leq X_t \leq y] = E_{P_t}[\psi_0 + su_t(\psi_0)/a \leq \psi_0 \leq y] , \end{aligned}$$

on obtient

$$\psi(a, s) = \phi(\alpha, t + s) \leq E_{P_t}[\psi_0 + su_t(\psi_0)/a \leq \psi_0 \leq y] .$$

Ce qui est la propriété 3 pour  $y \in [a, b] = \psi_s^{-1}\{x\}$ .

D'après la caractérisation du flot des particules collantes, on conclut que  $\psi = \phi(\cdot, \cdot, P_t, u_t)$ . ■

La section suivante est consacrée à la discrétisation du flot  $\phi(\cdot, \cdot, P_0, v_0)$ .

## 2.5 Approximations discrètes

Soit  $P_0$  une mesure de probabilité quelconque et  $v_0$  une fonction mesurable bornée ayant la propriété des « sauts négatifs » (2.1.1) du chapitre 1. Dans cette section, nous avons besoin de la condition supplémentaire

$$\lim_{|x-y| \rightarrow 0} \sup_{x \leq \beta \leq \alpha \leq y} (v_0^-(\alpha) - v_0^+(\beta)) \leq 0 . \quad (2.5.1)$$

Cette condition est évidemment satisfaite lorsque  $v_0$  est continue.

### 2.5.1 Remarque

*Nous avons déjà vu que le flot des vitesses  $u(x, t)$  des particules collantes n'est pas continu en général. Néanmoins, nous allons voir qu'il vérifie la condition ci-dessus.*

Le but de cette partie est de montrer que pour toute suite  $(P_0^n)$  de mesures de probabilité à support fini qui converge faiblement vers  $P_0$ , et pour toute suite  $(v_0^n)$  de fonctions qui converge uniformément vers  $v_0$  sur tout compact, nous avons la convergence uniforme (sur tout compact) de la suite des flots  $\phi(\cdot, \cdot, P_0^n, v_0^n)$  vers le flot  $\phi(\cdot, \cdot, P_0, v_0)$ .

En particulier, nous retrouvons le résultat de [25] dans lequel les auteurs obtiennent l'approximation discrète du flot lorsque la mesure  $P_0$  est diffuse.

Dans le théorème suivant, nous notons  $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$  l'ensemble des fonctions continues sur  $K$ , muni de la norme uniforme.

### 2.5.2 Théorème (de relative compacité)

1. Soit  $\mathcal{P}_0$  est une famille de mesures de probabilité sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $\mathcal{V}_0$  une famille de fonctions uniformément bornées sur  $\mathbb{R}$ , et qui vérifient (2.5.1) et la condition des sauts (2.1.1). La famille des flots

$$\mathcal{F} = \{\phi(\cdot, \cdot, P_0, v_0) : P_0 \in \mathcal{P}_0, v_0 \in \mathcal{V}_0\}$$

est relativement compacte dans  $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$  pour tout compact  $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ .

### 2. (Stabilité)

Soit  $P_0$  une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}$ , et soit  $v_0$  une fonction continue et bornée. Si  $(P_0^n)$  est une suite de mesures de probabilité qui converge faiblement vers  $P_0$  et si  $(v_0^n)$  est une suite de fonctions qui converge uniformément vers  $v_0$  sur tout compact de  $\mathbb{R}$ , alors on a la convergence uniforme sur tout compact de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$

$$\phi(x, t, P_0^n, v_0^n) \rightarrow \phi(x, t, P_0, v_0), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.5.2)$$

Une telle famille de flots  $\mathcal{F}$  est donc fermée pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

L'équi-continuité des flots découle du lemme suivant.

### 2.5.3 Lemme (d'équi-continuité)

Nous avons

$$\forall (x, y, t, s), \quad |\phi(x, t) - \phi(y, s)| \leq C|t - s| + |x - y| + t \sup_{x \leq \beta \leq \alpha \leq y} (v_0^-(\alpha) - v_0^+(\beta)). \quad (2.5.3)$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} |\phi(x, t) - \phi(y, s)| &\leq |\phi(x, t) - \phi(x, s)| + |\phi(x, s) - \phi(y, s)| \\ &\leq C|t - s| + |\phi(x, s) - \phi(y, s)| \end{aligned}$$

Supposons  $x < y$  et qu'ils appartiennent à  $\mathcal{S}$ . Soit  $\beta$  l'extrémité droite de  $x$  à l'instant  $s$ , et soit  $\alpha$  celle de  $y$ . On a  $x \leq \beta < \alpha \leq y$  et

$$\begin{aligned} \beta + sv_0^+(\beta) &\leq \phi(x, s) < \phi(y, s) \leq \alpha + sv_0^-(\alpha); \quad \text{donc} \\ |\phi(x, s) - \phi(y, s)| &\leq \alpha - \beta + s[v_0^-(\alpha) - v_0^+(\beta)]. \end{aligned}$$

On en déduit (2.5.3).

Soit  $K = [a, b] \times [0, T]$  un compact de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ , et soit  $C = \sup_{v_0 \in \mathcal{V}_0} \|v_0\|_\infty$ . On a

$$|\phi(x, t, P_0, v_0)| \leq |x| + tC \quad \forall (x, t) \in K \quad \forall (P_0, v_0) \in \mathcal{P}_0 \times \mathcal{V}_0 .$$

Ce résultat et l'équi-continuité précédente montrent, d'après le théorème d'Ascoli, que  $\mathcal{F}$  est relativement compacte sur  $K$ .

Il reste à démontrer la deuxième partie du théorème 2.5.2. On se propose de donner deux démonstrations.

Si  $P_0^n$  converge faiblement vers  $P_0$  et si  $v_0^n$  converge uniformément sur tout compact vers  $v_0$ , on vient de montrer qu'il existe une sous-suite de flots qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction continue  $\Phi$ . On va montrer que  $\Phi$  coïncide avec le flot  $\phi(\cdot, \cdot, P_0, v_0)$  des particules collantes. Sans perdre la généralité de la démonstration, on peut supposer que toute la suite converge vers  $\Phi$ .

Soient  $X_0^n$  et  $X_0$  des variables aléatoires de lois respectives  $P_0^n$  et  $P_0$ , définies sur le même espace probabilisé, et telles qu'on ait la convergence presque sûre

$$X_0^n \rightarrow X_0, \quad n \rightarrow \infty .$$

On a la convergence presque sûre des processus stochastiques

$$\forall t, \quad X_t^n := \phi(X_0^n, t, P_0^n, v_0^n) \rightarrow X_t := \Phi(X_0, t), \quad n \rightarrow \infty .$$

Nous allons montrer que la fonction de répartition  $M^n(\cdot, t)$  de  $X_t^n$  est la solution entropique de la loi de conservation scalaire

$$\partial_t M + \partial_x (A_n(M)) = 0, \quad M_0 = F_n ,$$

où  $F_n$  est la fonction de répartition de  $X_0^n$  et le flux est  $A_n(m) = \int_0^m v_0^n(F_n^{-1}(z)) dz$ . En utilisant les résultats du chapitre 1, nous en déduisons que la fonction de répartition  $M(\cdot, t)$  de  $X_t$  est la solution entropique de la loi de conservation scalaire

$$\partial_t M + \partial_x (A(M)) = 0, \quad M_0 = F_0 ,$$

où  $F_0$  est la fonction de répartition de  $X_0$  et le flux est  $A(m) = \int_0^m v_0(F_0^{-1}(z)) dz$ .

Il suffit de montrer que la solution entropique  $M(\cdot, t)$  de cette dernière équation est la fonction de répartition de  $\phi(X_0, t, P_0, v_0)$ .

La solution entropique de la loi de conservation scalaire précédente est définie dans le chapitre 1 par (1.6.3) à l'aide des enveloppes convexes  $(0, 1) \ni m \mapsto H(m, t)$  définies par  $P_0$  et  $v_0$ . La fonction  $(m, t) \mapsto \partial_m H(m, t) =: H_m(m, t)$  est bien définie pour presque tout  $m$ . Par définition du flot, on a pour tout  $t$

$$\phi(F_0^{-1}(m), t, P_0, v_0) = H_m(m, t) \quad dm\text{-presque sûrement.}$$

On va utiliser le processus  $(H_m(m, t), t \geq 0)$  défini sur  $((0, 1), \lambda)$  et le fait que  $P_0 = \lambda(F_0^{-1})^{-1}$ . Ici  $\lambda$  désigne la mesure de Lebesgue.

Si  $X_0$  est défini sur l'espace probablisé  $(\Omega, \mu)$ , alors on a pour tout  $x$

$$\begin{aligned} \mu\{\phi(X_0, t, P_0, v_0) \leq x\} &= \lambda\{m : \phi(F_0^{-1}(m), t, P_0, v_0) \leq x\} \\ &= \lambda\{m : H_m(m, t) \leq x\}. \end{aligned}$$

La propriété (1.6.14) de  $M(\cdot, t)$  montre que  $\{m : H_m(m, t) \leq x\} = (0, M(x, t)]$ . Donc

$$\mu\{\phi(X_0, t, P_0, v_0) \leq x\} = M(x, t).$$

Ainsi,  $M(\cdot, t)$  est la fonction de répartition de  $\phi(X_0, t, P_0, v_0)$ ; et pour tout  $n$ , la fonction de répartition de  $X_t^n$  est la solution entropique de la loi de conservation scalaire correspondante. Donc la fonction de répartition de  $\Phi(X_0, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_t^n$  est la solution entropique de la loi de conservation scalaire limite. Par unicité de la solution entropique, les processus  $\phi(X_0, t, P_0, v_0)$  et  $\Phi(X_0, t)$  ont la même loi. La proposition 2.3.1 montre alors que

$$\phi(X_0, t, P_0, v_0) = \Phi(X_0, t) \quad \text{p.s.}$$

Donc  $\phi(\cdot, t, P_0, v_0) = \Phi(\cdot, t)$  sur le support de  $P_0$ .

On se propose maintenant de donner une autre preuve, en montrant que  $\Phi$  vérifie les propriétés caractéristiques 2.4.1. Il est clair que la fonction  $\Phi$  vérifie les propriétés 1 et 4 qui caractérisent le flot. Nous allons montrer que  $\Phi$  vérifie aussi la propriété 2; et ensuite, la loi commune des processus nous permettra de conclure.

Nous montrons d'abord que  $\Phi$  vérifie la propriété 2, en trois étapes.

i) Dans le cas où  $P_0(\Phi_t^{-1}\{\Phi(x, t)\}) > 0$ , il suffit de montrer que le processus  $X_t = \Phi(X_0, t)$  vérifie

$$X_t = E[X_0 + tv_0(X_0)/X_t] \quad \forall t.$$

Par définition du flot, cette équation est vérifiée pour tout  $n$  d'après (2.3.1). Donc pour toute fonction  $f \in C_0(\mathbb{R})$ ,

$$E[f(X_t^n)X_t^n] = E[f(X_t^n)(X_0^n + tv_0^n(X_0^n))] \quad \forall n.$$

Ces variables aléatoires sont intégrées pour  $X_t^n \in \text{Supp} f$  et on a

$$|X_0^n + tv_0^n(X_0^n)| \leq |X_t^n| + 2Ct.$$

Ici,  $\text{Supp} f$  désigne le support de la fonction  $f$ . Il découle alors du théorème de convergence dominée que

$$E[f(X_t)X_t] = E[f(X_t)(X_0 + tv_0(X_0))] \quad \forall t, \forall f \in C_0(\mathbb{R}).$$

Ce qui est le résultat cherché.

La fonction  $\Phi(\cdot, t)$  étant croissante et continue, il existe  $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$  tels que  $\Phi_t^{-1}\{\Phi(x, t)\} = [\alpha, \beta]$ .

ii) Si  $P_0[\alpha, \beta] = 0$  et  $\alpha = \beta = x$ , on considère  $\alpha_n$  l'extrémité gauche de  $x$  et  $\beta_n$  son extrémité droite pour le flot  $\phi(\cdot, t, P_0^n, v_0^n)$ . On a

$$\beta^n + tv_0^n(\beta^n) \leq \phi(\alpha_n, t, P_0^n, v_0^n) = \phi(x, t, P_0^n, v_0^n) = \phi(\beta_n, t, P_0^n, v_0^n) \leq \alpha_n + tv_0^n(\alpha_n) \quad \forall n.$$

Si  $\alpha'$  et  $\beta'$  sont des points d'accumulation respectifs de  $(\alpha_n)$  et  $(\beta_n)$ , on obtient

$$\beta' + tv_0(\beta') \leq \Phi(\alpha', t) = \Phi(x, t) = \Phi(\beta', t) \leq \alpha' + tv_0(\alpha').$$

Alors  $\alpha' = x = \beta'$ ; sinon  $\Phi(\cdot, t)$  serait constante sur l'ensemble de masse non nulle  $[\alpha', \beta'] \cap \mathcal{S}$  qui contient  $x$ , et aurait  $\alpha < \beta$ . On en déduit que

$$\Phi(x, t) = x + tv_0(x).$$

iii) Si  $P_0[\alpha, \beta] = 0$  et  $\alpha < \beta$ , alors  $\alpha$  est la limite à gauche de points  $y_i$  du support  $\mathcal{S}$  tels que

$$x_i := \Phi(y_i, t) < \Phi(y_j, t) \quad \forall i < j.$$

Soit  $[\alpha_i, \beta_i] := \Phi_t^{-1}\{x_i\}$ . Grâce à la continuité de  $y \mapsto y + tv_0(y)$ , il existe  $z_i \in [\alpha_i, \beta_i]$  tel que

$$\Phi(y_i, t) = C([\alpha_i, \beta_i], t) = z_i + tv_0(z_i),$$

et on a  $z_i \rightarrow \alpha - 0$ ,  $i \rightarrow \infty$ . Par continuité de  $\Phi(\cdot, t)$ , on obtient  $\Phi(\alpha, t) = \alpha + tv_0(\alpha)$ . De même,  $\beta$  est limite à droite de points de  $\mathcal{S}$  et obtient  $\Phi(\beta, t) = \beta + tv_0(\beta)$  par continuité de  $\Phi(\cdot, t)$ . Ainsi,

$$\Phi(\alpha, t) = \Phi(\beta, t) = \alpha + tv_0(\alpha) = \beta + tv_0(\beta).$$

Maintenant, nous utilisons la loi commune des deux processus pour obtenir la troisième propriété caractéristique du flot. Comme  $\mathcal{S}$  est le support de la mesure  $P_0$ , celui de  $P_0\Phi_t^{-1} = P_0\phi_t^{-1}$  est

$$\Phi(\mathcal{S}, t) = \phi(\mathcal{S}, t) \quad \forall t.$$

Pour  $x \in \Phi(\mathcal{S}, t)$ , on définit

$$[\alpha, \beta] := \Phi_t^{-1}\{x\} \quad \text{et} \quad [\alpha', \beta'] := \phi_t^{-1}\{x\}.$$

Le cas  $P_0[\alpha, \beta] = 0$  étant évident, on s'intéresse au cas  $P_0[\alpha, \beta] > 0$ . On va montrer que

$$[\alpha, \beta] \subset [\alpha', \beta'] \quad \text{avec} \quad P_0[\alpha', \alpha] = P_0(\beta, \beta') = 0,$$

et en déduire qu'on a la propriété 3, puisque  $[\alpha', \beta']$  la vérifie.

Supposons  $\alpha < \alpha'$ . Comme

$$P_0(-\infty, \alpha) = P_0\{\Phi(\cdot, t) < x\} = P_0\{\phi(\cdot, t) < x\} = P_0(-\infty, \alpha'),$$

on a  $P_0[\alpha, \alpha'] = 0$ . Alors par définition de la partition  $\xi_t$ ,  $\alpha$  vérifie  $(GVP_d)$  à l'instant  $t$ , et

$$\alpha + tv_0(\alpha) \leq \phi(\alpha, t) < \phi(\alpha', t) = x.$$



D'autre part,  $\alpha$  est une accumulation à gauche d'éléments de  $\mathcal{S}$  car  $P_0[\alpha, \alpha'] = 0$ . On montre comme précédemment qu'il existe des points  $z_i$  tels que

$$\Phi(z_i, t) = z_i + tv_0(z_i) \quad \forall i$$

avec  $z_i \rightarrow \alpha - 0$ ,  $i \rightarrow \infty$ . La continuité de  $\Phi(\cdot, t)$  en  $\alpha$  implique alors

$$\Phi(\alpha, t) = \alpha + tv_0(\alpha) = x.$$

Ce qui est absurde.

De même, si  $\beta' < \beta$ , on obtient par la loi commune  $P_0(\beta', \beta) = 0$ . On en déduit que  $\beta$  vérifie ( $GV P_g$ ) à l'instant  $t$ , et alors

$$\beta + tv_0(\beta) \geq \phi(\beta, t) > \phi(\beta', t) = x.$$

Comme  $\beta$  est limite à droite d'éléments de  $\mathcal{S}$ , il existe des points  $z_i$  tels que

$$\Phi(z_i, t) = z_i + tv_0(z_i) \quad \forall i$$

avec  $z_i \rightarrow \alpha - 0$ ,  $i \rightarrow \infty$ . On obtient la contradiction

$$\Phi(\beta, t) = \beta + tv_0(\beta) = x.$$

On conclut donc que

$$[\alpha, \beta] \subset [\alpha', \beta'] \quad \text{avec} \quad P_0[\alpha', \alpha] = P_0(\beta, \beta') = 0.$$

Ce qui est suffisant pour montrer que  $\Phi$  vérifie la caractérisation du flot. Mais on peut montrer directement que  $[\alpha, \beta] = [\alpha', \beta']$ . En effet, si  $\alpha' < \alpha$ , on a

$$\Phi(\alpha, t) = x > \Phi(\alpha', t) =: x'.$$

Soient

$$[\alpha_1, \beta_1] := \Phi_t^{-1}\{x'\} \quad \text{et} \quad [\alpha_2, \beta_2] := \phi_t^{-1}\{x'\}.$$

On a, comme précédemment, l'inclusion  $[\alpha_1, \beta_1] \subset [\alpha_2, \beta_2]$ . Par définition de  $\beta_1$ , on a  $\beta_1 \geq \alpha'$ , ce qui implique que  $\beta_2 \geq \alpha'$ . On obtient alors la contradiction

$$x' = \phi(\beta_2, t) \geq \phi(\alpha', t) = x.$$

Donc  $\alpha = \alpha'$ ; on montre de même que  $\beta = \beta'$ . ■

#### 2.5.4 Corollaire (Propagation de la stabilité)

Nous considérons  $P_0, v_0, P_0^n$ , et  $v_0^n$  du théorème 2.5.2. Soient  $P_t$  (resp.  $P_t^n$ ) la distribution des particules effectives à l'instant  $t$ , et  $u_t$  (resp.  $u_t^n$ ) leur vitesse.

On a la convergence uniforme sur tout compact

$$\phi(\cdot, \cdot, P_t^n, u_t^n) \rightarrow \phi(\cdot, \cdot, P_t, u_t) \quad n \rightarrow \infty.$$

Le résultat suivant montre l'équi-continuité des flots  $\phi(\cdot, \cdot, P_t^n, u_t^n)$ .

### 2.5.5 Lemme

Pour tout  $t > 0$ , on a  $\|u_t\|_\infty \leq \|v_0\|_\infty$ ; et pour tout  $(x_1, x_2)$ ,

$$\frac{u_t(x_2) - u_t(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{1}{t}. \quad (2.5.4)$$

#### Preuve du Lemme

La première assertion est claire. Pour  $t > 0$  et  $x_1 < x_2$  sur  $\phi(\mathcal{S}, t)$ , soient

$$[\alpha_1, \beta_1] := \Phi_t^{-1}\{x_1\} \quad \text{et} \quad [\alpha_2, \beta_2] := \phi_t^{-1}\{x_2\}.$$

On a

$$x_2 - x_1 = \phi(\beta_2, t) - \phi(\beta_1, t) = \frac{\int_{[\alpha_2, \beta_2]} \eta P_0(d\eta)}{P_0[\alpha_2, \beta_2]} - \frac{\int_{[\alpha_1, \beta_1]} \eta P_0(d\eta)}{P_0[\alpha_1, \beta_1]} + t[v(\beta_2, t) - v(\beta_1, t)]$$

avec  $u_t(x_2) = v(\beta_2, t)$  et  $u_t(x_1) = v(\beta_1, t)$ . Par définition des extrémités, on a

$$\frac{\int_{[\alpha_2, \beta_2]} \eta P_0(d\eta)}{P_0[\alpha_2, \beta_2]} \geq \alpha_2 > \beta_1 \geq \frac{\int_{[\alpha_1, \beta_1]} \eta P_0(d\eta)}{P_0[\alpha_1, \beta_1]}.$$

On en déduit (2.5.4). ■

La suite des flots  $\phi(\cdot, \cdot, P_t^n, u_t^n)$  vérifie donc la première partie du théorème 2.5.2.

La propriété d'équi-continuité est précisément la suivante.

$$\forall (x, y, s, s'), \quad |\phi(x, s', P_t, u_t) - \phi(y, s, P_t, u_t)| \leq C|s' - s| + |x - y| \left(1 + \frac{s}{t}\right). \quad (2.5.5)$$

Ce résultat s'obtient en remplaçant  $(P_0, v_0)$  par  $(P_t, u_t)$  dans le lemme 2.5.3. La majoration finale est due à (2.5.4).

On peut supposer la convergence uniforme sur tout compact

$$\phi(x, s, P_t^n, u_t^n) \rightarrow \psi(x, s),$$

où  $\psi$  est une fonction lipschitzienne qui vérifie (2.5.5). Pour tout  $n$ , on a

$$\phi(y, t + s, P_0^n, v_0^n) = \phi(\phi(y, t, P_0^n, v_0^n), s, P_t^n, u_t^n) \quad \forall y.$$

Comme  $\phi(y, t, P_0^n, v_0^n) \rightarrow \phi(y, t, P_0, v_0)$ , nous obtenons

$$\phi(y, t + s, P_0, v_0) = \psi(\phi(y, t, P_0, v_0), s).$$

On déduit alors du corollaire 2.4.4 que  $\psi = \phi(\cdot, \cdot, P_t, u_t)$ . ■

La section suivante est une introduction à l'étude du comportement limite du flot.

## 2.6 Le comportement limite

Le but de cette section est d'étudier le comportement des groupes de particules lorsque le temps tend vers l'infini. Nous nous intéressons donc à la limite des fonctions  $\phi(\cdot, t)$ , lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Même si la limite n'existe pas, les limites inférieure et supérieure existent toujours dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Nous allons voir que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(x, t) = +\infty, -\infty$  ou bien  $\phi(x, \cdot)$  va osciller entre deux bornes

$$a(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf \phi(x, t, v_0, P_0), \quad b(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \phi(x, t, v_0, P_0) .$$

Pour chaque  $x$ , il existe  $[\alpha(x, t), \beta(x, t)] \cap \mathcal{S} \in \xi_t$  tel que

$$\phi(x, t, v_0, P_0) = C([\alpha(x, t), \beta(x, t)], t) .$$

Les fonctions  $t \mapsto \alpha(x, t), t \mapsto \beta(x, t)$  sont respectivement décroissante et croissante. On pose

$$\alpha(x, +\infty) := \lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(x, t), \quad \beta(x, +\infty) := \lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(x, t) .$$

Nous obtenons lorsque  $t \rightarrow +\infty$

$$C([\alpha(x, t), \beta(x, t)], 0) \rightarrow C((\alpha(x, +\infty), \beta(x, +\infty)), 0) ,$$

et

$$t^{-1}[\phi(x, t) - C([\alpha(x, t), \beta(x, t)], 0)] \rightarrow \frac{\int_{(\alpha(x, +\infty), \beta(x, +\infty))} v_0(\eta) P_0(d\eta)}{P_0((\alpha(x, +\infty), \beta(x, +\infty)))} .$$

Le comportement de  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(x, t)$  dépend donc complètement de la valeur

$$v(x, +\infty) := \frac{\int_{(\alpha(x, +\infty), \beta(x, +\infty))} v_0(\eta) P_0(d\eta)}{P_0((\alpha(x, +\infty), \beta(x, +\infty)))} .$$

Si  $v(x, +\infty) \neq 0$ , alors  $\phi(x, t) \rightarrow \infty$ . Le problème se pose lorsque  $v(x, +\infty) = 0$ . Dans ce cas,  $\phi(x, t)$  va osciller entre

$$C((\alpha(x, +\infty), \beta(x, +\infty)), 0) + \liminf_{t \rightarrow +\infty} t v(x, t)$$

et

$$C((\alpha(x, +\infty), \beta(x, +\infty)), 0) + \limsup_{t \rightarrow +\infty} t v(x, t) .$$

**2.6.1 Remarque**

La limite de  $\phi(\cdot, t)$  peut ne pas exister lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Tout de même, nous pouvons considérer les limites inférieure et supérieure dans  $\overline{\mathbb{R}}$ . Elles sont définies respectivement par

$$\phi_{\inf}(x) = C((\alpha(x, +\infty), \beta(x, +\infty)), 0) + \liminf_{t \rightarrow +\infty} tv(x, t), \quad (2.6.1)$$

$$\phi_{\sup}(x) = C((\alpha(x, +\infty), \beta(x, +\infty)), 0) + \limsup_{t \rightarrow +\infty} tv(x, t). \quad (2.6.2)$$

La fonction  $\phi_{\inf}$  étant croissante, on peut lui associer une partition  $\xi_{+\infty}$  de  $\mathcal{S}$ . Chaque élément  $(\alpha, \beta) \in \xi_{+\infty}$  a pour la signification suivante.  $\alpha$  (respectivement  $\beta$ ) a été une extrémité gauche (respectivement droite) pour tout  $t$ .

En effet, on a pour tout  $x < \alpha$ ,  $\phi_{\inf}(x) < \phi_{\inf}(\alpha)$ . Donc pour tout  $t$ , il existe  $t' > t$  tel que  $\phi(x, t') < \phi(\alpha, t')$ . Ceci implique que

$$\phi(x, t) < \phi(\alpha, t) \quad \forall x < \alpha, \forall t.$$

Ce qui signifie que  $\alpha$  est une extrémité gauche à tout instant  $t$ . De même,  $\beta$  est une extrémité droite à tout instant  $t$ .



# Chapitre 3

## Loi de conservation scalaire, représentation probabiliste

Nous avons déjà vu dans le chapitre 1 que l'inverse  $(x, t) \mapsto M(x, t)$  de la fonction  $(m, t) \rightarrow \partial_m H(m, t)$  est la solution entropique de la loi de conservation scalaire

$$\partial_t M + \partial_x(A(M)) = 0, \quad M(\cdot, 0) = F_0,$$

où  $F_0$  est la fonction de répartition d'une mesure de probabilité  $P_0$ , et le flux

$$(0, 1) \ni m \mapsto A(m) = \int_0^m v_0(F_0^{-1}(z)) dz$$

est défini par une fonction mesurable bornée  $v_0$ , et l'inverse  $F_0^{-1}$  de  $F_0$ . La preuve était basée sur la solution de viscosité de l'équation aux dérivées partielles

$$\partial_t \psi + A(\partial_x \psi) = 0, \quad \psi(x, 0) = \int_0^x F_0(y) dy.$$

Le but du présent chapitre est de donner une preuve directe, en utilisant le processus stochastique  $X_t = X_0 + \int_0^t \mathbb{E}[v_0(X_0)/X_s] ds$  déjà construit dans le chapitre 2.

Dans la section 3.1, nous montrons que si pour presque tout  $t$ ,  $X_t = f(X_0, t)$ , où  $f(\cdot, t)$  est une fonction croissante et continue de  $X_0$ , alors  $(x, t) \mapsto P(X_t \leq x)$  est une solution faible de la loi de conservation scalaire ci-dessus.

Comme conséquence de cette représentation, nous montrons que la solution entropique est l'unique fonction qui admet la représentation stochastique ci-dessus. En outre, le processus des particules collantes est l'unique qui vérifie

$$X_t = f(X_0, t) = X_0 + \int_0^t \mathbb{E}[v_0(X_0)/X_s] ds, \quad f(\cdot, t) \text{ croissante et continue,}$$

pour  $X_0, v_0$  données.

### 3.1 Loi de conservation scalaire

Soit  $F_0$  une fonction de répartition, et soit  $v_0$  une fonction mesurable et bornée. Nous considérons la loi de conservation scalaire suivante

$$\partial_t M + \partial_x(A(M)) = 0, \quad M(\cdot, 0) = F_0, \quad (3.1.1)$$

où le flux est défini par

$$A(m) = \int_0^m v_0(F_0^{-1}(z)) \quad \forall m \in (0, 1).$$

#### 3.1.1 Théorème

1) Soit  $X = (X_t, t \geq 0)$  un processus stochastique. Pour tout  $t \geq 0$ , soit  $F_t$  la fonction de répartition de  $X_t$ . Si  $X$  est absolument continu et tel que

$$dX_t = E[v_0(X_0)/X_t]dt, \quad X_t = f(X_0, t) \quad (3.1.2)$$

où  $f(\cdot, t)$  est une fonction croissante et continue, alors la fonction  $(x, t) \mapsto M(x, t) := P(X_t \leq x) := F_t(x)$  est une solution faible la de la loi de conservation scalaire (3.1.1).

2) La fonction  $M$  est la solution entropique de la loi de conservation scalaire si et seulement si  $M$  admet un représentant solution de (3.1.2), et en plus

$$\forall m \in (M(x-0, t), M(x+0, t)), \quad \frac{A(m) - A(M(x-0, t))}{m - M(x-0, t)} \geq \frac{A(m) - A(M(x+0, t))}{m - M(x+0, t)}. \quad (3.1.3)$$

3) Soit  $\phi(\cdot, \cdot, P_0, v_0)$  le flot des particules collantes. Le processus

$$(\phi(X_0, t, P_0, v_0), t \geq 0)$$

est l'unique qui représente la solution entropique.

D'abord, nous rappelons la définition de la solution entropique de la loi de conservation (3.1.1).

#### 3.1.2 Définition (Solution entropique)

Soit  $f$  une fonction continue localement lipschitzienne. L'équation

$$\partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0, \quad u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{donnée}$$

est appelée loi de conservation scalaire.

Une solution faible entropique de cette équation est une fonction localement intégrable  $u$  telle que pour toute fonction  $g \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$  à support compact, et pour toute fonction croissante  $h(\cdot)$ ,

$$\int \int \partial_t g(x, t) I(u(x, t)) + \partial_x g(x, t) F(u(x, t)) dx dt + \int g(x, 0) u_0(x) dx = 0$$

$$\text{avec } I(u) = \int_0^u h(x) dx, \quad F(u) = \int_0^u h(x) df(x).$$

Pour étudier les solutions entropiques, nous considérons la caractérisation suivante due à C. M. Dafermos [12], lorsque la donnée initiale est à variation localement bornée.

### 3.1.3 Proposition

Soient  $f$  une fonction continue localement lipschitzienne et  $u_0 \in BV_{loc}(\mathbb{R})$  une fonction bornée. La loi de conservation scalaire

$$\partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0, \quad u(\cdot, 0) = u_0$$

admet une fonction (localement intégrable)  $u$ , pour solution faible entropique ssi

#### 1. (Solution faible)

$\forall g \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$  à support compact

$$\int \int [\partial_t g \cdot u + \partial_x g \cdot f(u)] dt dx = 0 ;$$

#### 2. (Condition entropique)

les lignes de discontinuité  $x(t)$  de  $u$  vérifient

$$\lim_{x \rightarrow x(t)-0} u(x, t) =: u_-, \quad \lim_{x \rightarrow x(t)+0} u(x, t) =: u_+$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}$$

$$u_- < u_+ \Rightarrow \forall u \in (u_-, u_+) :$$

$$\frac{f(u) - f(u_-)}{u - u_-} \geq \frac{f(u_+) - f(u)}{u_+ - u}$$

Une telle solution est unique.

Pour la preuve du théorème, nous utilisons le lemme suivant.

### 3.1.4 Lemme

Soit  $M$  la fonction du théorème et soit  $H = 1_{[0, +\infty)}$  la fonction de Heaviside. Nous avons pour presque tout  $t$  et pour tout  $x$ ,

$$\begin{aligned} M(x, t) &= \mathbb{E} H(x - X_t), \\ A(M(x, t)) &= \mathbb{E} (v_0(X_0)H(x - X_t)). \end{aligned}$$

### Preuve du Lemme

La première ligne est claire. Pour presque tout  $t$  et pour tout  $x$ , nous avons

$$m \leq M(x, t) = F_t(x) \iff F_{t,d}^{-1}(m) \leq x,$$



donc

$$\begin{aligned} A(M(x, t)) &= \int_0^{M(x, t)} v_0(F_0^{-1}(m)) dm = \int H(x - F_{t,d}^{-1}(m)) v_0(F_0^{-1}(m)) dm \\ &= \int H(x - F_t^{-1}(m)) v_0(F_0^{-1}(m)) dm . \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.3.3,  $F_t^{-1} = f(F_0^{-1}, t)$ . Donc

$$\begin{aligned} A(M(x, t)) &= \int H(x - f(F_0^{-1}(m), t)) v_0(F_0^{-1}(m)) dm \\ &= \mathbb{E} (v_0(X_0) H(x - f(X_0, t))) = \mathbb{E} (v_0(X_0) H(x - X_t)) . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Maintenant, nous montrons que  $M$  est solution faible.

### Preuve du Théorème 3.1.1

1) Soit  $(H_n) \subset C_0^1(\mathbb{R})$  une suite de fonction qui converge vers  $H$ . Pour toute fonction  $h \in C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ , nous avons

$$\begin{aligned} \iint \partial_t h(x, t) M(x, t) dx dt &= \mathbb{E} \iint \partial_t h(x, t) H(x - X_t) dx dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \iint \partial_t h(x, t) H_n(x - X_t) dx dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \iint h(x, t) H'_n(x - X_t) dX_t dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \iint h(x, t) v_0(X_0) H'_n(x - X_t) dt dx \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \iint v_0(X_0) \partial_x h(x, t) H_n(x - X_t) dx dt \\ &= - \iint \partial_x h(x, t) \mathbb{E} (v_0(X_0) H(x - X_t)) dx dt = - \iint \partial_x h(x, t) A(M(x, t)) . \end{aligned}$$

Donc  $\partial_t M + \partial_x (A(M)) = 0$ .

2) La condition est suffisante, d'après la proposition précédente.

Inversement, nous avons vu dans le chapitre 2 que la solution entropique  $M$  est représentée par  $\phi(X_0, t, P_0, v_0)$ , il reste à montrer que  $M$  vérifie la propriété (3.1.3). Ceci découle du théorème 1.5.3. En effet, Si  $M(x - 0, t) < M(x + 0, t)$ , ces deux masses sont consécutives dans  $\mathcal{E}_t$ . Alors nous avons pour tout  $m \in (M(x - 0, t), M(x + 0, t))$ ,

$$\frac{\int_{M(x-0,t)}^m [F_0^{-1}(z) + tV_0(F_0^{-1}(z))] dz}{m - M(x - 0, t)} \geq \frac{\int_m^{M(x+0,t)} [F_0^{-1}(z) + tV_0(F_0^{-1}(z))] dz}{M(x + 0, t) - m} ,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{\int_{M(x-0,t)}^m F_0^{-1}(z) dz}{m - M(x - 0, t)} + t \frac{A(m) - A(M(x - 0, t))}{m - M(x - 0, t)} &\geq \frac{\int_m^{M(x+0,t)} F_0^{-1}(z) dz}{M(x + 0, t) - m} \\ &\quad + t \frac{A(M(x + 0, t)) - A(m)}{M(x + 0, t) - m} . \end{aligned}$$

Comme

$$\frac{\int_{M(x-0,t)}^m F_0^{-1}(z) dz}{m - M(x-0,t)} \leq F_d^{-1}(m) \leq F_g^{-1}(m) \leq \frac{\int_m^{M(x+0,t)} F_0^{-1}(z) dz}{M(x+0,t) - m},$$

on obtient

$$\frac{A(m) - A(M(x-0,t))}{m - M(x-0,t)} \geq \frac{A(M(x+0,t)) - A(m)}{M(x+0,t) - m}.$$

3) Si  $f(X_0, t)$  est un autre représentant de la solution entropique, alors  $\phi(X_0, t, P_0, v_0)$  et  $f(X_0, t)$  ont la même loi. Le théorème 2.3.1 permet de conclure que  $\phi(X_0, t, P_0, v_0) = f(X_0, t)$ . ■

On peut conclure à l'unicité de la solution de (3.1.2).

### 3.1.5 Remarque

- 1) La solution entropique de la loi de conservation scalaire est caractérisée par (3.1.2).
- 2) Le processus lié au flot est l'unique qui vérifie (3.1.2).

Cette remarque montre que la dynamique des particules collantes est entièrement déterminée par (3.1.2). Elle découle de la fin de la preuve précédente et de la proposition suivante qui est due à F. Bouchut et F. James [5].

### 3.1.6 Proposition ([5], page 9)

Soit  $M(x, t)$  une fonction faiblement continue par rapport à la variable  $t$ , et soit  $f$  une fonction lipschitzienne. Soit  $M_0$  est une fonction croissante telle que pour tout  $x$

$$\frac{f(m) - f(M_0(x-0))}{m - M_0(x-0)} \geq \frac{f(m) - f(M_0(x+0))}{m - M_0(x+0)} \quad \forall m \in (M_0(x-0), M_0(x+0)).$$

Si  $M$  est solution faible de

$$\partial_t M + \partial_x(f(M)) = 0, \quad M(\cdot, t) = M_0,$$

alors  $M$  est la solution entropique si et seulement si pour tout  $t$ , la fonction  $M(\cdot, t)$  est croissante.

Dans la section suivante, nous rappelons la représentation du système de gaz sans pression obtenue par Dermoune.

## 3.2 Système de gaz sans pression

Soit le système suivant d'équations de gaz sans pression, défini sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ .

$$\begin{cases} \partial_t(\rho) + \partial_x(u\rho) & = 0 \\ \partial_t(u\rho) + \partial_x(u^2\rho) & = 0 \\ \rho(dx, t) \rightarrow P_0, \quad u(x, t)\rho(dx, t) \rightarrow v_0(x)P_0(dx) & \text{faiblement, lorsque } t \rightarrow 0^+ \end{cases} \quad (3.2.1)$$

où  $P_0$  est une mesure de probabilité, et  $v_0$  est une fonction mesurable bornée.

### 3.2.1 Définition (Solution faible)

Soit  $(\rho(\cdot, t), t \geq 0)$  une famille de mesures de probabilité sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $t$ , soit  $q(\cdot, t) = u(\cdot, t)\rho(\cdot, t)$  une mesure absolument continue par rapport à  $\rho(\cdot, t)$ .

On dit que  $(\rho(\cdot, t), u(\cdot, t), t \geq 0)$  est une solution faible de (3.2.1) si

1. pour toute  $f \in C_0^1(\mathbb{R})$ , l'ensemble des fonctions de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  à support compact, et tous  $0 < t_1 < t_2$  :

$$\begin{aligned} \int f(x)\rho(dx, t_2) - \int f(x)\rho(dx, t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} \int f'(x)q(dx, t)dt, \\ \int f(x)q(dx, t_2) - \int f(x)q(dx, t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} \int f'(x)u(x, t)q(dx, t)dt; \end{aligned}$$

2. pour toute fonction  $f$  continue bornée sur  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \int f(x)\rho(dx, t) &= \int f(x)P_0(dx), \\ \lim_{t \rightarrow 0} \int f(x)q(dx, t) &= \int f(x)v_0(x)P_0(dx). \end{aligned}$$

Nous rappelons le résultat suivant dû à Dermoune [15, 16, 17]. Dans la suite,  $\mathcal{L}(X)$  désigne la loi de la variable aléatoire  $X$ .

### 3.2.2 Proposition ([15])

Soit  $(X_t, t \geq 0)$  un processus stochastique absolument continu. Si

$$dX_t = \mathbb{E}[v_0(X_0)/X_t]dt := u(X_t, t)dt \quad \text{avec} \quad \mathcal{L}(X_0) = P_0,$$

alors

$$(\rho(dx, t) := \mathcal{L}(X_t), u(x, t), t \geq 0)$$

est une solution faible de (3.2.1).

**Preuve de la Proposition**

Pour  $f \in C_0^1(\mathbb{R})$  et  $0 < t_1 < t_2$ , nous avons

$$\begin{aligned} \int f(x)\rho(dx, t_2) - \int f(x)\rho(dx, t_1) &= E_{\rho_0} [f(X_{t_2}) - f(X_{t_1})] = \\ E_{\rho_0} \left[ \int_{t_1}^{t_2} f'(X_t)u(X_t, t)dt \right] &= \int_{t_1}^{t_2} \int f'(x)u(x, t)\rho(dx, t)dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int f'(x)q(dx, t)dt ; \end{aligned}$$

et  $\int f(x)q(dx, t_2) - \int f(x)q(dx, t_1)$

$$\begin{aligned} &= E_{\rho_0} [f(X_{t_2})u(X_{t_2}, t_2)] - E_{\rho_0} [f(X_{t_1})u(X_{t_1}, t_1)] \\ &= E_{\rho_0} [f(X_{t_2})v_0(X_0)] - E_{\rho_0} [f(X_{t_1})v_0(X_0)] \\ &= E_{\rho_0} \left[ \int_{t_1}^{t_2} f'(X_t)u(X_t, t)v_0(X_0)dt \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int f'(x)u(x, t)q(dx, t)dt . \end{aligned}$$

Nous avons donc le premier point de la définition. Le deuxième traduit la continuité du processus. ■

**3.2.3 Résumé**

Nous avons montré que les processus solution de l'équation

$$dX_t = E[v_0(X_0)/X_t]dt$$

fournissent des solutions faibles au système de gaz sans pression. Parmi ces solutions, le processus des particules collantes est l'unique (en loi) dont la famille des fonctions de répartition est la solution entropique de la loi de conservation scalaire.

Récemment, A. Dermoune et B. Djehiche [20, 21] ont généralisé ce procédé pour résoudre le système de gaz sans pression avec viscosité. Ils ont construit des processus solutions de

$$dX_t = E[v_0(X_0)/X_t]dt + \nu dB_t ,$$

où  $B$  est un mouvement brownien standard, puis ont fait le lien avec le système de gaz sans pression avec viscosité

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\rho) + \operatorname{div}(u\rho) = \frac{\sigma^2}{2} \Delta(\rho) \\ \partial_t(u\rho) + \operatorname{div}(u^2\rho) = \frac{\sigma^2}{2} \Delta(u\rho) \\ \rho(dx, t) \rightarrow P_0, \quad u(x, t)\rho(dx, t) \rightarrow v_0(x)P_0(dx) \quad \text{faiblement, lorsque } t \rightarrow 0^+ . \end{array} \right.$$



# Chapitre 4

## Autour de l'équation différentielle stochastique $dX_t = E[v_0(X_0)/X_t]dt$

Nous avons vu, dans le chapitre 3, que tout processus stochastique  $X_t = X_0 + \int_0^t E[v_0(X_0)/X_s]ds$  donne une solution au système de gaz sans pression. Dans ce chapitre nous allons étudier les processus

$$X_t = X_0 + \int_0^t V_s ds$$

dont les lois  $\rho(dx, t) = P(X_t \in dx)$ , et les fonctions  $u(x, t) = E[V_t/X_t = x]$  constituent une solution du système de gaz sans pression.

### 4.1 Les solutions discrètes $\sigma(X_0)$ -mesurables

Soit  $X_0$  une variable aléatoire discrète de loi  $\sum_{i=1}^n m_i \delta_{x_0^i}$ . Nous allons caractériser les processus  $X_t = \varphi(X_0, t)$  solution de l'équation différentielle. La variable aléatoire  $X_t$  est identifiée au vecteur  $(x_t^i := \varphi(x_0^i, t), i \leq n)$ . Dans ce cas,  $x_t$  est solution de l'équation intégrale

$$x_t = x_0 + \int_0^t F(x_s) ds ,$$

où  $F = (F_1, \dots, F_n)$  avec

$$F_i(x) = \frac{\sum_{j=1}^n m_j v_j \mathbf{1}_{[x^i=x^j]}}{\sum_{j=1}^n m_j \mathbf{1}_{[x^i=x^j]}} \quad \forall i ,$$

et

$$v_j = E[V_0/X_0 = x_0^j] \quad \forall j .$$

On remarque que  $V_0$  n'intervient dans la dynamique que par  $E[V_0/X_0]$ . Par conséquent, on suppose que  $V_0 = u_0(X_0)$ . Avant le premier choc, la solution est unique :

$$x_t^i = x_0^i + t m_i v^i \quad \forall i .$$

Soit  $\tau_1$  l'instant du premier choc. A cet instant, certaines particules se croisent et nous avons trois possibilités.

- 1) Les particules qui se croisent se collent en suivant la loi de conservation de la masse et de la quantité de mouvement ;
- 2) ou bien une partie de ces particules se collent et les autres continuent leurs chemins sans dévier ;
- 3) ou bien toutes les particules continuent leurs chemins sans déviation.

Au deuxième instant de choc  $\tau_2$ , si les particules qui se croisent subissent leur premier choc, alors la situation est similaire aux trois cas précédents. Par contre, si ces particules subissent leur deuxième choc, elles peuvent se désintégrer en récupérant leurs vitesses et leurs masses initiales.

La proposition suivante montre que la dynamique des particules collantes définit un unique flot « forward ».

#### 4.1.1 Proposition

A chaque  $x \in \mathbb{R}^N$ , on associe les trajectoire  $t \mapsto \psi(x, t)$  des particules collantes, ayant comme positions initiales  $x$  et vitesses initiales  $(u_0(x) := v_i)$ . L'application  $(x, t) \mapsto \psi(x, t)$  est un flot « forward », c'est-à-dire :

- 1)  $\psi(\psi(x, t), s) = \psi(x, t + s) \quad \forall (x, t, s) ,$
- 2)  $\lim_{s \rightarrow t+0} \frac{\psi(x, s) - \psi(x, t)}{s - t} = F(\psi(x, t)) \quad \forall (x, t) .$

#### 4.1.2 Corollaire

Les propositions suivantes sont équivalentes.

- 1) Pour tout  $1 \leq i \leq N$ ,

$$x_t^i = x_0^i + \int_0^t F_i(x_s) ds ,$$

et

$$\lim_{s \rightarrow t+0} F_i(x_s) = F_i(x_t) .$$

- 2)  $x_t = \psi(x_0, t)$ .
- 3)  $x_t$  est collante.

Nous donnons maintenant la version probabiliste de ce dernier corollaire. On part d'une solution  $x_t = (x_t^1, \dots, x_t^n)$  du système d'équations différentielles ordinaires, et on considère le processus stochastique

$(x_0^i, t) \rightarrow X_t(x_0^i) = x_t^i$ . On associe à ce processus sa vitesse

$$\lim_{s \rightarrow t+0} \frac{X_s - X_t}{s - t} =: V_t .$$

La variable aléatoire  $V_t$  est  $\sigma(X_t)$ -mesurable entre les instants de chocs. Si  $t$  est un instant de choc, alors  $V_t$  est  $\sigma(X_t)$ -mesurable ssi  $V_t = E[V_0/X_t = x_t^i]$  sur les événements  $[X_t = x_t^i]$ , c'est-à-dire ssi  $x$  est la solution collante. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- 1) Pour tout  $t \geq 0$ ,  $V_t$  est  $\sigma(X_t)$  mesurable.
- 2) Pour tout  $t \geq 0$ ,  $V_t = E[v_0(X_0)/X_t]$ .
- 3)  $t \rightarrow E[v_0(X_0)/X_t]$  est continue à droite.
- 4) Pour tous  $t < s$ ,  $\sigma(X_s) \subset \sigma(X_t)$ .
- 5) Le processus  $t \rightarrow V_t$  est une martingale inverse par rapport à la filtration  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \geq t)$ .
- 6) Le processus  $X$  est collant.
- 7) Il existe une fonction  $(t, s, x) \rightarrow \phi(t, s, x)$  telle que  $X_s = \phi(t, s, X_t)$  pour tous  $t < s$ .

#### 4.1.3 Remarque

1) Entre les instants de chocs, nous avons  $V_t = E[V_0/X_t]$ . Par contre, si  $t = \tau_i$  est le  $i^{\text{eme}}$  instant de choc, alors

$$V_{\tau_i} = E[V_0/X_s] \quad \forall s \in (\tau_i, \tau_{i+1}),$$

et  $s \in (\tau_i, \tau_{i+1}) \mapsto \sigma(X_s)$  est constante.

2)  $X$  est collant ssi  $V_t = E[V_0/X_t]$  pour tout  $t$ .

3) Dans tous les cas, la vitesse  $t \mapsto V_t$  est discontinue aux instants de chocs. Néanmoins, pour toute fonction continue et bornée  $f$ , la fonction

$$t \mapsto E[f(X_t)V_t] = \int f(x)q(dx, t)$$

est continue. Ceci est dû à l'égalité

$$E[f(X_t)V_t] = E[f(X_t)V_0].$$

Si en plus  $f \in C^1$ , alors  $t \mapsto \int f(x)q(dx, t)$  est lipschitzienne, et on a pour  $s < t$ ,

$$\int f(x)q(dx, t) - \int f(x)q(dx, s) = \int_s^t \int f'(x)u(x, r)q(dx, r)dr.$$

#### 4.1.4 Conclusion

Nous avons construit tous les processus discrets  $\sigma(X_0)$ -mesurables solutions de l'équation différentielle ordinaire

$$X_t = X_0 + \int_0^t E[v_0(X_0)/X_s]ds.$$

Ces processus fournissent une classe de solutions faibles au système de gaz sans pression. L'unique processus de Markov dans cette classe est le processus collant.



## 4.2 Les solutions discrètes non $\sigma(X_0)$ -mesurables

On cherche précisément les solutions de

$$X_t = X_0 + \int_0^t E[V_0/X_s]ds$$

de la forme  $X_t = \varphi((X_0, Y_0), t)$ , où  $Y_0$  est un vecteur aléatoire discret à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . On identifie  $X_t := (\varphi(x_0^i, y_0^j, t) : i, j)$ . Dans ce cas, L'équation différentielle ordinaire est équivalente au système

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(x_s)ds ,$$

où  $f = (f_{ij})$  avec

$$f_{ij}(x) = \frac{\sum_{l,k} m_{lk} v_{lk} \mathbf{1}_{[x^l=x^i, y^k=y^j]}}{\sum_{l,k} m_{lk} \mathbf{1}_{[x^l=x^i, y^k=y^j]}} \quad \forall (i, j) ,$$

$$v_{ij} = E [V_0/(X_0, Y_0) = (x_0^i, y_0^j)] \quad \text{et} \quad m_{ij} = P(X_0 = x_0^i, Y_0 = y_0^j) .$$

On remarque que  $V_0$  n'intervient dans la dynamique que par  $E[V_0/(X_0, Y_0)]$ . Par conséquent, on suppose que  $V_0 = u_0(X_0, Y_0)$ .

Avant le premier choc la solution est unique :

$$x_{ij}(t) = x_0^i + t v_{ij} \quad \forall (i, j) .$$

Ceci signifie que la particule  $x_0^i$  se désintègre en plusieurs particules  $x_0^{ij}$ . Chaque particule  $x_0^{ij}$  part avec la vitesse  $v_{ij}$ . Aux instants de chocs, on a trois possibilités.

- 1) Les particules qui se croisent se collent en suivant la loi de conservation de la masse et de la quantité de mouvement ;
- 2) ou bien une partie de ces particules se désintègrent ; certaines poussières continuent leurs chemins sans dévier, tandis que les autres poussières s'agglomèrent en suivant la loi de conservation de la masse et de la quantité de mouvement ;
- 3) ou bien toutes les particules continuent leurs chemins sans déviation.

**Exemple** Soient  $N$  points  $x_0^i = (x_0^{1i}, \dots, x_0^{di})$   $i \leq N$  dans  $\mathbb{R}^d$ . Chaque point a une masse  $m_i$  et une vitesse initiale  $u_0(x_0^i)$ . Ces points évoluent suivant la dynamique des particules collantes. Soit  $\varphi(x_0^i, t)$  la trajectoire de la particule  $x_0^i$ , et soit  $X_0$  une variable aléatoire de loi

$$\sum m_i \delta_{x_0^i} .$$

Si on pose

$$X_t = \varphi(X_0, t) \quad \forall t ,$$

alors

$$X_t = X_0 + \int_0^t E[u_0(X_0)/X_s]ds \quad \forall t .$$

Il est clair que chaque composante  $X_t^i$ ,  $i \leq d$ , est solution de

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t \mathbb{E}[u_0^i(X_0)/X_s] ds .$$

On vérifie également que

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t \mathbb{E}[u_0^i(X_0)/X_s^i] ds$$

mais contrairement à la section précédente,  $X_t^i$  n'est pas  $\sigma(X_0^i)$ -mesurable.

### 4.3 Cas général

Dans cette section, on cherche les processus

$$X_t = X_0 + \int_0^t V_s ds ,$$

tels que  $(P(X_t \in dx), u(x, t) = \mathbb{E}[V_t/X_t = x])$  soit une solution faible du système de gaz sans pression.

Le processus  $t \mapsto V_t$  n'est pas forcément à variations finies. Néanmoins, on définit l'intégrale suivante par une intégration par parties :  $\forall f \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ ,

$$\int_{t_1}^{t_2} f(X_t, t) dV_t = f(X_{t_2}, t_2) V_{t_2} - f(X_{t_1}, t_1) V_{t_1} - \int_{t_1}^{t_2} [(\partial_x f)(X_t, t) V_t^2 + (\partial_t f)(X_t, t) V_t] dt .$$

Pour vérifier le système de gaz sans pression à partir de l'équation ordinaire, une condition nécessaire et suffisante sur  $V$  est

$$\mathbb{E} \left[ \int_{t_1}^{t_2} f(X_t, t) dV_t + \int_{t_1}^{t_2} \text{var}(V_t/X_t) (\partial_x f)(X_t, t) dt \right] = 0 , \quad (\text{CNS})$$

où

$$\text{var}(V_t/X_t) = \mathbb{E} [V_t^2/X_t] - (\mathbb{E}[V_t/X_t])^2 .$$

En particulier, on obtient  $\mathbb{E}[V_t] = \mathbb{E}[V_0]$ . Ceci entraîne que  $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0] + t \mathbb{E}[V_0]$ .

Une condition suffisante sur  $V$  est :  $\forall f \in C^1, \forall t_1 < t_2$ ,

$$\mathbb{E} \left[ \int_{t_1}^{t_2} f(X_t, t) dV_t \right] = \mathbb{E} \left[ \int_{t_1}^{t_2} \text{var}(V_t/X_t) (\partial_x f)(X_t, t) dt \right] = 0 . \quad (\text{CS})$$

Dans ce cas, forcément

$$\text{var}(V_t/X_t) = 0 \quad dt \text{ p.p.},$$

c'est-à-dire qu'il existe une fonction mesurable  $u$  telle que

$$V_t = u(X_t, t) \quad dt \text{ p.p.}$$

La condition

$$E \int f(X_t, t) dV_t = 0$$

entraîne que  $(P(X_t \in dx), u(x, t) = E[V_t/X_t = x])$  est bien solution faible du système de gaz sans pression. Nous allons donner une hypothèse sous laquelle la (CNS) et la (CS) sont équivalentes.

Dans la suite, nous allons considérer deux situations différentes : le cas où  $V$  est une martingale (ou une martingale inverse), et ensuite le cas où  $X$  est affine par morceaux.

#### 4.3.1 Théorème

Soit  $X_t = \varphi(X_0, t)$  qui vérifie la (CNS). On suppose que  $t \mapsto V_t$  est une martingale (ou une martingale inverse) bornée par rapport à une filtration  $\mathcal{F}_t$ . On a

$$V_t = u_0(X_0) \quad \text{ou bien} \quad V_t = E[u_0(X_0)/X_t].$$

#### Preuve du Théorème

Comme  $V$  est une martingale, on a

$$E \int f(X_t) dV_t = 0 \quad \forall f \in C_0^1.$$

Par conséquent,  $E[\int \text{var}(V_t/X_t) f'(X_t) dt] = 0$ . Ceci entraîne que  $\text{var}(V_t/X_t) = 0$ ,  $dt$  p.p. Ainsi,  $V_t = u(X_t, t)$ ,  $dt$  p.p. Deux cas se présentent alors.

- 1)  $V$  est une martingale : dans ce cas,  $V_t = E[V_T/X_t]$  pour tous  $T > t$ . Donc  $V_0 = E[V_T/X_0] = V_T$ , car  $V_T = u(X_T, T)$  et  $X_T$  est  $\sigma(X_0)$ -mesurable. On obtient  $V_T = u(X_0, 0)$ .
- 2)  $V$  est une martingale inverse : dans ce cas,

$$V_t = E[V_0/X_t]. \quad \blacksquare$$

Le lemme suivant donne un exemple où  $(V_t)$  est une martingale inverse.

#### 4.3.2 Lemme

Soit  $X$  le processus collant associé à une vitesse initiale  $v_0$ . Le processus  $V_t = E[v_0(X_0)/X_t]$  est une martingale inverse par rapport à la filtration  $\sigma(X_s : s \geq t)$ .

#### Preuve du Lemme

Il suffit de remarquer que  $\sigma(X_s) \subset \sigma(X_t)$  pour tous  $t < s$ . D'où

$$E[V_t/X_s] = V_s \quad \forall t < s.$$

Maintenant, nous considérons les processus affine par morceaux.

## 4.4 Processus affine par morceaux

Nous allons présenter une caractérisation de tous les processus discrets affines par morceaux qui sont solutions du système de gaz sans pression.

Un processus est affine par morceaux s'il existe  $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots$  tels que

$$X_t = X_{t_i} + (t - t_i)V_{t_i} \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}] .$$

### 4.4.1 Théorème

Si  $X$  est discret et affine par morceaux, alors la (CNS) est équivalente à la (CS).

#### Preuve du Théorème

On va montrer qu'un tel processus est de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(X_s, s) ds .$$

Pour  $t \in (t_i, t_{i+1})$ , les trajectoires qui sont confondues à l'instant  $t$  restent confondues au voisinage de  $t$ ; ce qui se traduit par

$$\{X_t = X_t(\omega)\} = \{X_{t+\delta} = X_{t+\delta}(\omega)\} \quad \forall |\delta| < \varepsilon, \forall \omega$$

pour un certain  $\varepsilon > 0$ . On en déduit que

$$1_{\{X_t = X_t(\omega)\}} V_t = 1_{\{X_t = X_t(\omega)\}} V_t(\omega) \quad \forall \omega ,$$

ce qui signifie que  $V_t$  est  $\sigma(X_t)$ -mesurable. Donc, il existe une fonction mesurable  $u(\cdot, t)$  telle que  $V_t = u(X_t, t)$ .

Ainsi, la (CNS) équivaut à la (CS). ■

Dans la suite,  $\Delta V_\tau$  désigne le saut de  $V$  en  $\tau$ .

### 4.4.2 Proposition

Un processus discret et affine par morceaux est solution du système de gaz sans pression ssi

$$E[\Delta V_\tau / X_\tau] = 0, \quad \forall \tau . \quad (\text{CS}')$$

Cette dernière équation traduit la conservation de la quantité de mouvement.

#### Preuve de la Proposition

Il faut montrer que la condition (CS') équivaut à la condition (CS). Pour toute valeur  $x$  prise par la variable  $X_\tau$ , pour toute fonction  $f$  à support compact suffisamment voisin de  $x$ , la condition (CS) s'écrit

$$0 = E \int f(X_\tau) dV_\tau = E \left( f(x) E[\Delta V_\tau / X_\tau = x] \right) .$$

Ce qui est équivalent à

$$E[\Delta V_\tau / X_\tau = x] = 0 \quad \forall x, \forall \tau ,$$

c'est à dire

$$E[\Delta V_\tau / X_\tau] = 0 \quad \forall \tau . \quad \blacksquare$$

### 4.4.3 Remarque

Pour chaque discontinuité  $\tau$  de  $V$ , on a deux possibilités :

1. soit  $\tau$  est un instant de choc d'au moins deux trajectoires ;
2. soit  $\tau$  est un instant de désintégration d'au moins une trajectoire.

En effet, dans le cas contraire, Les trajectoires qui sont confondues à l'instant  $\tau$  restent confondues au voisinage de  $\tau$  ; ce qui se traduit par  $\sigma(\Delta V_\tau) \subset \sigma(X_\tau)$ , comme dans la preuve du théorème précédent. On a alors

$$\Delta V_\tau = E[\Delta V_\tau / X_\tau] = 0 .$$

Ce qui est absurde.

On termine cette partie par une caractérisation des processus affines par morceaux, où les instants de chocs sont aléatoires.

### 4.4.4 Corollaire

Soient  $\tau_0 = 0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < \dots$  et  $(X_0, V_n : n \geq 0)$  deux suites de variables aléatoires discrètes. On suppose que les deux suites sont indépendantes. Si

$$E \left[ V_n - V_{n-1} / X_0 + \sum_{i=0}^n (\tau_i - \tau_{i-1}) V_{i-1}, \tau_1, \dots, \tau_n \right] = 0 \quad \forall n \geq 1 ,$$

alors le processus affine par morceaux

$$X_t := X_{\tau_{n-1}} + (t - \tau_{n-1}) V_{n-1}, \quad \forall t \in [\tau_{n-1}, \tau_n)$$

est une solution du système de gaz sans pression

Nous terminons ce chapitre par l'étude du comportement des solutions de donnée initiale discrète  $X_0^n$ , lorsque la suite  $(X_0^n)$  converge vers une variable aléatoire  $X_0$  non forcément discrète.

## 4.5 Stabilité

Soient  $X_0$  une variable quelconque, et  $X_0^n$  une suite de variables discrètes qui converge p.s. vers  $X_0$ . Pour chaque  $n$  on considère un processus  $(X_t^n)$ ,  $\sigma(X_0^n)$ -mesurable solution de l'EDS

$$X_t^n = X_0^n + \int_0^t E[v_0(X_0^n)/X_s^n] ds .$$

Une question naturelle est la stabilité de cette équation différentielle stochastique. On suppose qu'il existe un processus  $X$  tel que pour chaque  $t$  la suite  $X_t^n \rightarrow X_t$  en probabilité. On se demande si  $X$  est aussi solution de

$$X_t = X_0 + \int_0^t E[v_0(X_0)/X_s] ds .$$

Nous rappelons un résultat de D. N. Hoover [28] qui garantit cette convergence.

**4.5.1 Proposition ([28])**

Soit  $(X, X_n : n \geq 1)$  une suite de variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . On suppose que pour tout  $m$  il existe  $N > m$  tel que pour tout  $n > N$  la variable  $X_n$  soit indépendante de  $\sigma(X_i : i \leq m)$  conditionnellement à  $X$  (on dira que les variables  $X_n$  sont asymptotiquement indépendantes sachant  $X$ ).

Si  $X_n \rightarrow X$  en probabilité, alors la convergence

$$\mathbb{E}[F/X_n] \rightarrow \mathbb{E}[F/X]$$

a lieu dans  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$  pour tout élément  $F \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Nous en déduisons la stabilité suivantes des solutions de l'EDS.

**4.5.2 Proposition**

On suppose que  $v_0$  est continue bornée. On suppose que pour chaque  $t$ , les variables  $X_t^n$  sont asymptotiquement indépendantes sachant  $X_t$ . Alors

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mathbb{E}[v_0(X_0)/X_s] ds, \quad \forall t.$$

En effet sous ces hypothèses on montre, en utilisant le résultat de Hoover, que pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\mathbb{E}[v_0(X_0^n)/X_t^n] \rightarrow \mathbb{E}[v_0(X_0)/X_t]$$

dans  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . En utilisant le théorème de convergence dominée, on a

$$\int_0^t \mathbb{E}[v_0(X_0^n)/X_s^n] ds \rightarrow \int_0^t \mathbb{E}[v_0(X_0)/X_s] ds$$

dans  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Par conséquent

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mathbb{E}[v_0(X_0)/X_s] ds.$$

On se propose maintenant de donner des conditions suffisantes pour avoir l'indépendance asymptotique. On prend le cas où

- 1)  $X_t^n = \phi^n(X_0^n, t)$ ,  $X_t = \phi(X_0, t)$ ,
- 2) les variables aléatoires  $(X_0^n)$  sont asymptotiquement indépendantes sachant  $X_0$ ,
- 3) pour tout événement  $A$ ,  $P(A/X_t = x) = P(A/X_0 \in \phi^{-1}(x, t)) \quad \mu_{X_t}(dx) \text{ p.p.}$ ,
- 4) pour tout  $t$ , la suite  $\phi^n(\cdot, t)$  converge uniformément sur tout compact vers  $\phi(\cdot, t)$ ,
- 5) la suite  $X_0^n \rightarrow X_0$  p.s.

Sous ces conditions les hypothèses de Hoover sont satisfaites.

Maintenant, nous faisons quelques remarques.

- La condition 5) s'obtient par discrétisation de la variable aléatoire  $X_0$ .
- D'après [28] (Theorem 7.5), on peut toujours se ramener à une discrétisation qui satisfait la condition 2).

- La condition 1) est vérifiée par  $X_t^n$ , par construction des solutions discrètes. Si on suppose 4), alors la condition 1) est vérifiée par  $X_t$ .
- Finalement, les seules conditions imposées sont les conditions 3) et 4).

Nous terminons ce chapitre par un retour au cas des particules collantes. Soit une suite de variables aléatoires  $X_0^n$  telles que  $X_0^n \rightarrow X_0$  p.s. Pour chaque donnée initiale  $X_0^n$ , on lui associe le processus des particules collantes  $(X_t^n)$  de valeur initiale  $X_0^n$ . Nous avons déjà montré dans le chapitre 2, en utilisant les enveloppes convexes  $H$ , qu'on a la stabilité de l'EDS. Nous allons retrouver cette stabilité en utilisant le résultat de Hoover.

D'abord, d'après la section 2.4 du chapitre 2, pour chaque  $t < s$ , il existe une fonction  $\phi^n(\cdot, t, s)$  telle que

$$X_s^n = \phi^n(X_t^n, t, s) .$$

De plus,  $\phi^n(\cdot, t, \cdot)$  converge uniformément sur tout compact de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  vers une fonction  $\phi(\cdot, t, \cdot)$ . Par conséquent,  $t \rightarrow X_t^n$  converge uniformément sur tout compact vers le processus  $(X_t = \phi(X_0, t))$ . Ainsi, les hypothèses 1), 4), 5) sont satisfaites. Si on choisit les variables  $X_0^n$  asymptotiquement indépendantes sachant  $X_0$ , et si la loi de  $X_t$  est discrète, alors les hypothèses manquantes 2) et 3) sont satisfaites. On retrouve ainsi que

$$X_t = X_0 + \int_0^t E[v_0(X_0)/X_s] ds .$$

On remarque que la preuve du chapitre 2 ne nécessite pas les hypothèses 2) et 3), mais elle ne dit rien sur la convergence des vitesses  $E[v_0(X_0^n)/X_t^n]$ . Par contre, les hypothèses 2) et 3) garantissent que pour chaque  $t$  les vitesses  $E[v_0(X_0^n)/X_t^n]$  convergent en probabilité et dans  $L^1$  vers la vitesse limite  $E[v_0(X_0)/X_t]$ .

Nous avons déjà vu que l'indépendance asymptotique de  $(X_0^n)$  sachant  $X_0$  n'est en réalité pas une contrainte. Donc dans le cas des particules collantes, la seule condition qu'il reste à vérifier est la condition 3). Sous les hypothèses de la proposition 1.4.7 du chapitre 1, cette condition est aussi satisfaite.

### 4.5.3 Remarque

Nous avons déjà

$$\begin{aligned} \forall t, \quad X_t^n &= \phi^n(X_0^n, t), \quad X_t = \phi(X_0, t), \\ \forall T, \quad \sup_{t \leq T} |X_t^n - X_t| &\rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty . \end{aligned}$$

Sous les hypothèses de la proposition 1.4.7, nous avons en plus la convergence en probabilité et dans  $L^1$

$$E[v_0(X_0^n)/X_t^n] \rightarrow E[v_0(X_0)/X_t], \quad n \rightarrow \infty . \quad (4.5.1)$$

Autrement dit, si on impose aux particules de subir des chocs immédiatement après l'instant initial, alors on est assuré non seulement de la stabilité de l'EDS, mais aussi de la convergence en probabilité et dans  $L^1$  de la vitesse.

Nous rappelons que la convergence (4.5.1) répond à une question plus générale, celle de l'existence d'une convergence du type de Skorokhod [39], pour les martingales. Etant données des martingales, on cherche des martingales de même loi qui convergent presque sûrement, quitte à grossir les filtrations.

Cette question, qui a inspiré l'article de Hoover [28], a été posée par M. T. Barlow et S. D. Jacka [3] comme suit. Etant données des martingales  $M^n$ ,  $M$  de filtrations respectives  $\mathcal{F}^n$ ,  $\mathcal{F}$ , quand existe-t-il des martingales  $N^n$ ,  $N$  ayant les propriétés suivantes?

- 1)  $N^n$  a même loi que  $M^n$ , et  $N$  a même loi que  $M$ ,
- 2)  $N^n$  et  $N$  ont la même filtration,
- 3) p.s.,  $N^n \rightarrow N$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

La notion de convergence des filtrations est sous-jacente à cette question. Pour s'y familiariser, on peut se reporter aux travaux de [28] et F. Coquet, J. Mémin, L. Slominski [8] et Aldous [1].

Nous terminons en concluant que le processus des particules collantes est l'unique solution de l'équation

$$X_t = X_{t_1} + \int_{t_1}^t E[v_0(X_0)/X_s] ds, \quad 0 < t_1 < t, \quad X_{t_1} \text{ donnée,}$$

telle que  $E[v_0(X_0)/X_t = x] =: u(x, t)$  satisfasse la condition de Ćelenick

$$\frac{u(x_2, t) - u(x_1, t)}{x_2 - x_1} \leq \frac{1}{t}, \quad \forall x_1, x_2, t > 0.$$

En effet, nous avons déjà montré, dans le chapitre 2, que la vitesse des particules collantes vérifie la condition de Ćelenick. Alors d'après un résultat de A. F. Fillipov [26], il existe une unique solution de l'équation

$$dX_t = u(X_t, t) dt, \quad 0 < t_1 < t, \quad X_{t_1} = x \text{ donnée.}$$

On conclut que si deux processus  $X$  et  $Y$  sont solutions de cette équation, avec  $X_{t_1} = Y_{t_1}$ , alors  $X_t = Y_t \forall t > t_1$ .

Pour obtenir l'unicité de la solution avec  $t_1 = 0$ , la condition de Ćelenick ne suffit plus. Par contre, nous avons vu dans le chapitre 3 que si  $X_t$  est une fonction croissante continue de  $X_0$ , alors la solution est unique, avec  $t_1 = 0$ .





# Chapitre 5

## Extension aux mesures de Radon

Dans ce chapitre, nous allons étendre les résultats des chapitres 1, 2 et 3 au cas où la distribution initiale  $\rho_0$  des masses est une mesure de Radon positive. Lorsque  $\rho_0 = dx$  (mesure de Lebesgue) nous retrouverons la dynamique donnée par l'équation de Burgers.

Le résultat essentiel de la section 5.1 consiste à montrer, comme dans le cas où la distribution initiale est une probabilité, que la dynamique des particules collantes est entièrement déterminée par les enveloppes convexes ( $H(\cdot, t) : t \geq 0$ ) des fonctions  $m \in (0, 1) \mapsto \int_a^m [F_0^{-1}(z) + tv_0(F_0^{-1}(z))] dz$ , où  $a \in (0, 1)$  est quelconque. Ici  $F_0$  est une fonction de répartition de  $\rho_0$ . Les points extrémaux de  $H(\cdot, t)$  fournissent les groupes de particules qui se trouvent collées avant ou à l'instant  $t$ . Les dérivées  $m \in (0, 1) \mapsto \partial_m^- H(m, t)$ ,  $\partial_m^+ H(m, t)$  s'interprètent comme les positions à l'instant  $t$  des groupes de particules. Grâce à elles, on définit le flot  $\phi(\cdot, \cdot, \rho_0, v_0)$  pour la mesure de Radon, dans la section 5.2.

Dans la section 5.5, nous montrons que cette dynamique coïncide localement avec des dynamiques probabilistes. Plus précisément, soit  $\phi(\cdot, \cdot, \rho_0^n, v_0)$  le flot des particules collantes distribuées initialement suivant la mesure de probabilité

$$\rho_0^n = 1_{[-n, n]} \frac{\rho_0}{\rho_0([-n, n])}, \quad n \geq 1.$$

Nous montrons que pour tout  $(x, t)$ , il existe  $n_0(x, t)$  tel que

$$\phi(x, t, \rho_0, v_0) = \phi(x, t, \rho_0^n, v_0) \quad \forall n \geq n_0(x, t).$$

La fonction inverse  $F_t$  de la fonction  $m \mapsto \partial_m H(m, t)$  est la « fonction de répartition » de la distribution des particules à l'instant  $t$ . Grâce à cette fonction de répartition, nous généralisons les résultats des chapitres 1 et 3 concernant les équations de Hamilton-Jacobi, les systèmes de gaz sans pression et les lois de conservation scalaire. Ceci est l'objet des sections 5.6 à 5.8.

Une partie de ce chapitre a fait l'objet d'une prépublication dans la revue IRMA de Lille 1 [34].

## 5.1 Enveloppes convexes

Soit  $\rho_0$  une mesure de Radon positive. Nous allons définir la dynamique des particules collantes dont la masse est initialement distribuée suivant la mesure de Radon  $\rho_0$ . Les particules partent avec une vitesse initiale  $v_0$  mesurable et bornée.

Soit la fonction de répartition  $F_0$  de  $\rho_0$  définie par

$$F_0(x) = \begin{cases} \rho_0(0, x], & x \geq 0 \\ -\rho_0(x, 0], & x < 0. \end{cases}$$

Ses fonctions « inverses » sont définies par

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \ni m \mapsto F_g^{-1}(m) &= \inf\{a : F_0(a) > m\} \\ &= \sup\{a : F_0(a) \leq m\}, \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \ni m \mapsto F_d^{-1}(m) &= \sup\{a : F_0(a) < m\} \\ &= \inf\{a : F_0(a) \geq m\}. \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

De manière analogue à la section 1.3, nous définissons les informations particulières à l'aide du support  $\mathcal{S}$  de  $\rho_0$ , et ses sous-ensembles  $\mathcal{S}_-$  et  $\mathcal{S}_+$ . L'ensemble  $\mathcal{S}$  est l'ensemble des particules effectives pour  $\rho_0$  (ou bien  $F_0$ ). L'ensemble des masses effectives pour  $\rho_0$  (ou bien  $F_0$ ) est défini par

$$\mathcal{E}_0 = \{F_0(x-0), F_0(x) : x \in \mathcal{S}\}.$$

On vérifie facilement que les fonctions  $F_d^{-1}$  et  $F_g^{-1}$  vérifient la proposition 1.3.2 en remplaçant la mesure de probabilité  $\rho_0$  par une mesure de Radon positive quelconque.

Comme dans le cas d'une mesure de probabilité, pour définir la dynamique des particules, on impose que la vitesse  $v_0$  vérifie la condition des sauts négatifs suivante : pour tout  $m \in \mathcal{E}_0$ ,

$$\begin{aligned} l^-(m) &:= \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{-1} \int_{m-\varepsilon}^m v_0(F_0^{-1}(z)) dz \geq v_0(F_d^{-1}(m)), \\ v_0(F_g^{-1}(m)) &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{-1} \int_m^{m+\varepsilon} v_0(F_0^{-1}(z)) dz =: l^+(m). \end{aligned}$$

Ceci est équivalent à

$$v_0^-(x) \geq v_0(x) \geq v_0^+(x) \quad \forall x \in \mathcal{S},$$

où  $v_0^-$  et  $v_0^+$  sont définis comme dans la proposition 1.4.3.

À chaque instant  $t$ , on considère l'enveloppe convexe  $H(\cdot, t)$  de la fonction

$$(0, 1) \ni z \mapsto \varphi(z, t) = \int_0^z [F_0^{-1}(m) + tv_0(F_0^{-1}(m))] dm, \quad (5.1.3)$$

c'est-à-dire la plus grande parmi les fonctions convexes qui minorent  $\varphi(\cdot, t)$ . La fonction  $v_0$  étant bornée, nous avons

$$\int_0^z [F_0^{-1}(m) + tv_0(F_0^{-1}(m))] dm \rightarrow +\infty \quad |z| \rightarrow +\infty .$$

Donc la fonction  $\varphi(\cdot, t)$  est minorée. Ceci garantit l'existence de l'enveloppe convexe  $H(\cdot, t)$ . Tous les résultats du chapitre 1 se prolongent sans aucun problème.

En particulier, il existe une « fonction de répartition »  $F_t$  d'une mesure de Radon  $\rho_t$  sur  $\mathbb{R}$ , telle que  $H(\cdot, t)$  soit une primitive de  $F_t^{-1}$ . La mesure  $\rho_t$  est la « distribution » à l'instant  $t$  de la masse des particules collantes. Les abscisses des points extrémaux de  $H(\cdot, t)$  sont les masses effectives de  $\rho_t$ . L'ensemble de ces masses effectives est noté  $\mathcal{E}_t$ . Les dérivées de  $H(\cdot, t)$  sont les particules effectives de  $\rho_t$ .

Pour déterminer les particules effectives de  $\rho_0$  qui forment une particule effective  $\partial_m H(m, t)$  de  $\rho_t$ , avec  $m \in \mathcal{E}_t$ , il suffit de calculer  $F_d^{-1}(m)$  et  $F_g^{-1}(m)$ .

Nous obtenons ainsi une dynamique des particules collantes dont la description est identique à celle du chapitre 1. Tant que la fonction  $\mathcal{E}_0 \ni m \mapsto F_0^{-1}(m) + tv_0(F_0^{-1}(m))$  est croissante, il n'y a pas de choc et chaque particule  $F_g^{-1}(m)$  se trouve à la position  $F_g^{-1}(m) + tv_0(F_g^{-1}(m))$  et sa voisine  $F_d^{-1}(m)$  se trouve à la position  $F_d^{-1}(m) + tv_0(F_d^{-1}(m))$  (**Fig. 3, page 17**).

Lorsque cette fonction cesse d'être croissante (**Fig. 4**), il y a choc et la position à l'instant  $t$  de chaque particule  $F_d^{-1}(m)$  est donnée par la dérivée en  $m$ , à gauche  $\partial_m^- H(m, t)$ ; la position de sa voisine  $F_g^{-1}(m)$  est donnée par la dérivée en  $m$ , à droite  $\partial_m^+ H(m, t)$  (**Fig. 5**).

Tous les résultats des sections 1.3 à 1.7 sont alors valables. En particulier, nous pouvons énoncer le théorème suivant. Nous rappelons la définition

$$C(G, t) := \frac{\int_G [\eta + tv_0(\eta)] \rho_0(d\eta)}{\rho_0(G)} \quad \forall G \subset \mathbb{R}, \rho_0(G) > 0 .$$

### 5.1.1 Théorème

A tout instant  $t$ , l'ensemble  $\mathcal{E}_t$  permet de définir une partition  $\xi_t$  de  $\mathcal{S}$  de la manière suivante.

A) Si  $m_1 < m_2$  sont consécutives dans  $\mathcal{E}_t$ , elles définissent un unique élément  $F_0^{-1}([m_1, m_2]) =: [\alpha, \beta] \cap \mathcal{S}$  de  $\xi_t$  de masse  $\rho_0([\alpha, \beta]) = m_2 - m_1$ . L'intervalle  $[\alpha, \beta]$  est le plus grand intervalle de  $\mathcal{S}$  qui vérifie les propriétés suivantes :

- 1)  $C([\alpha, \beta], t) = \frac{\int_{m_1}^{m_2} [F_0^{-1}(z) + tv_0(F_0^{-1}(z))] dz}{m_2 - m_1} ,$
- 2)  $C((y, \beta], t) \leq C([\alpha, \beta], t) \leq C([\alpha, y], t) \quad \forall \alpha \leq y \leq \beta .$
- 3)  $C([y_1, \alpha), t) < C([\alpha, y_2], t) \quad \forall y_1 < \alpha < y_2 ,$

$$4) \quad C([y_1, \beta], t) < C((\beta, y_2], t) \quad \forall y_1 < \beta < y_2 .$$

De plus, le groupe de particules  $[\alpha, \beta] \cap \mathcal{S}$  se trouve collé à l'instant  $t$  et à la position  $C([\alpha, \beta], t)$ .

B) Une masse  $m$  non isolée dans  $\mathcal{E}_t$  définit aussi un unique élément  $\{\alpha, \beta\}$  de  $\xi_t$  de masse nulle tel que  $\alpha$  vérifie 3), et  $\beta$  vérifie 4) précédents ( $\alpha \leq \beta$ ). De plus, le groupe de particules  $\{\alpha, \beta\}$  se trouve collé à l'instant  $t$  et à la position

$$\begin{aligned} \alpha + tv_0^-(\alpha) &= \beta + tv_0^+(\beta) & \text{si } \alpha < \beta , \\ \alpha + tv_0^-(\alpha) & & \text{si } \alpha = \beta \in \mathcal{S}_- , \\ \beta + tv_0^+(\beta) & & \text{si } \alpha = \beta \in \mathcal{S}_+ , \\ \alpha + tv_0(\alpha) & & \text{si } \alpha = \beta \in \mathcal{S}_- \cap \mathcal{S}_+ . \end{aligned}$$

Dans la section suivante, nous allons définir le flot des particules collantes pour la mesure de Radon.

## 5.2 Flot de particules

Dans cette section, nous allons définir le flot d'une manière analogue au chapitre 2. Nous allons montrer que la caractérisation obtenue dans le chapitre 2 est aussi valable dans le cadre des mesures de Radon.

Pour tout  $t$ , nous définissons sur  $\mathcal{S}$  la fonction

$$\phi(x, t, \rho_0, v_0) = \begin{cases} H_m^-(F_0(x), t) & \text{si } x \in \mathcal{S}_- , \\ H_m^+(F_0(x), t) & \text{si } x \in \mathcal{S}_+ \setminus \mathcal{S}_- . \end{cases} \quad (5.2.1)$$

L'étude faite dans le chapitre 2 montre que  $\phi(x, t, \rho_0, v_0)$  est la position à l'instant  $t$  de la particule située initialement en  $x$ . De plus,  $[\alpha, \beta] := \{z : \phi(z, t, \rho_0, v_0) = \phi(x, t, \rho_0, v_0)\}$  est le groupe qui occupe la position  $\phi(x, t, \rho_0, v_0)$  à l'instant  $t$ . Il vérifie  $[\alpha, \beta] \cap \mathcal{S} \in \xi_t$ . Ainsi, le flot est entièrement déterminé par les partitions  $\xi_t$ . Nous avons alors

$$\phi(x, t, \rho_0, v_0) = \begin{cases} \frac{\int_{[\alpha, \beta]} [\eta + tv_0(\eta)] \rho_0(d\eta)}{\rho_0([\alpha, \beta])} & \text{si } \rho_0([\alpha, \beta]) > 0 , \\ x + tv_0^-(x) & \text{si } \alpha = \beta = x \in \mathcal{S}_- , \\ x + tv_0^+(x) & \text{si } \alpha = \beta = x \in \mathcal{S}_+ . \end{cases} \quad (5.2.2)$$

La vitesse de de la particule  $x$  à l'instant  $t$  est définie par

$$v(x, t, \rho_0, v_0) := \begin{cases} \frac{\int_{[\alpha, \beta]} v_0(\eta) \rho_0(d\eta)}{\rho_0([\alpha, \beta])} & \text{si } \rho_0([\alpha, \beta]) > 0 , \\ v_0(x) & \text{si } \alpha = \beta = x \in \mathcal{S}_- \cap \mathcal{S}_+ , \\ v_0^-(x) & \text{si } \alpha = \beta = x \notin \mathcal{S}_+ , \\ v_0^+(x) & \text{si } \alpha = \beta = x \notin \mathcal{S}_- . \end{cases} \quad (5.2.3)$$

La vitesse  $v(x, t, \rho_0, v_0)$  n'est a priori pas définie lorsque  $\rho_0([\alpha, \beta]) = 0$  et  $\alpha < \beta$ , sauf si on impose une condition supplémentaire sur  $v_0$  et  $\rho_0$ , à savoir

$$\lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \frac{\int_{[\alpha - \varepsilon_1, \beta + \varepsilon_2]} v_0(\eta) \rho_0(d\eta)}{\rho_0([\alpha - \varepsilon_1, \beta + \varepsilon_2])} =: v(\alpha, t, \rho_0, v_0) = v(\beta, t, \rho_0, v_0) .$$

Il faut remarquer que nous avons dans ce cas  $\alpha = F_d^{-1}(F_0(x))$ ,  $\beta = F_g^{-1}(F_0(x))$  et que l'ensemble

$$\{x : \rho_0(F_d^{-1}(F_0(x)), F_g^{-1}(F_0(x))) = 0, \quad F_d^{-1}(F_0(x)) < F_g^{-1}(F_0(x))\}$$

est  $\rho_0$ -négligeable.

Le résultat suivant montre que la vitesse est bien la dérivée du flot.

### 5.2.1 Propriété (Lien entre la vitesse et le flot)

La vitesse initiale  $v_0$  étant bornée, le flot  $t \mapsto \phi(\cdot, t)$  est lipschitzien, et nous obtenons

$$\phi(x, t) = x + \int_0^t v(x, s) ds \quad \forall (x, t) \in S \times \mathbb{R}_+. \quad (5.2.4)$$

Pour  $\rho_0$ -presque tout  $x$ , la fonction  $t \mapsto v(x, t)$  est càdlàg et

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\phi(x, t+h) - \phi(x, t)}{h} = v(x, t) \quad \forall t \geq 0. \quad (5.2.5)$$

## 5.3 Le flot et l'équation $dX_t = E[v_0(X_0)/X_t]dt$

Soit l'espace mesuré  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ , où  $\lambda$  est la mesure de Lebesgue, et  $\mathcal{B}$  est la tribu borélienne de  $\mathbb{R}$ . Dans cette section, nous allons montrer que les fonctions

$$(m, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow H_z^-(m, t) \quad \text{et} \quad (m, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow H_z^+(m, t)$$

sont solutions de l'équation intégrale

$$X_t(m) = X_0(m) + \int_0^m E[v_0(X_0)/X_s = X_s(m)] ds.$$

Ici, l'espérance conditionnelle est celle définie pour la mesure  $\lambda$ , qui n'est pas une probabilité, mais une mesure de Radon.

Nous avons

$$\lambda(\{m : \exists t \text{ t. q. } H_z^-(m, t) \neq H_z^+(m, t)\}) = 0$$

car

$$\{m : \exists t \text{ t. q. } H_z^-(m, t) \neq H_z^+(m, t)\} \subset \{m : F_d^{-1}(m) \neq F_g^{-1}(m)\}.$$

Ceci implique que  $t \rightarrow H_z^-(\cdot, t)$  et  $t \rightarrow H_z^+(\cdot, t)$  sont indistinguables, et on peut les désigner indifféremment par  $t \rightarrow H_z(\cdot, t) =: X_t$ . En particulier,  $m \mapsto X_0(m) = F_0^{-1}(m) = H_z(m, 0)$  représente indifféremment  $m \mapsto F_d^{-1}(m)$  et  $m \mapsto F_g^{-1}(m)$ . En utilisant le fait que  $F_d^{-1}(m) \in \mathcal{S}_-$ , les deux fonctions  $t \rightarrow X_t$  et  $t \rightarrow \phi(X_0, t)$  sont aussi indistinguables.

### 5.3.1 Proposition

1) Nous avons p.p.  $X_t = \phi(X_0, t) \quad \forall t$ .

En outre,  $v(X_0, t)$  est  $\sigma(X_t)$ -mesurable pour tout  $t \geq 0$ .

2) Nous avons

$$\mathbb{E}[f(X_t)X_t] = \mathbb{E}[f(X_t)(X_0 + tv_0(X_0))] \quad \forall f \in C_0^1(\mathbb{R}), \forall t. \quad (5.3.1)$$

$$\mathbb{E}[f(X_t)v(X_0, t)] = \mathbb{E}[f(X_t)v_0(X_0)] \quad \forall f \in C_0^1(\mathbb{R}), \forall t. \quad (5.3.2)$$

$$\sigma(X_{t+s}) \subset \sigma(X_t) \quad \forall t, \forall s > 0. \quad (5.3.3)$$

### 5.3.2 Corollaire

$t \mapsto X_t$  est absolument continu. Pour tout  $t$ , il existe une fonction mesurable  $u(\cdot, t)$  telle que

$$\frac{d}{dt}X_t = v(X_0, t) = u(X_t, t).$$

Si en plus  $v_0$  est  $\rho_0$ -intégrable, alors nous avons  $\lambda$ -p.p.

$$u(X_t, t) = \mathbb{E}[v_0(X_0)/X_t] \quad \forall t.$$

Le point 1) ainsi que la propriété (5.3.3) sont une conséquence de la dynamique. La propriété (5.3.1) est due au lemme suivant qui va jouer un rôle important dans la caractérisation du flot. La propriété (5.3.2) se démontre de la même manière.

### 5.3.3 Lemme

Soit  $\Phi$  une fonction qui vérifie

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) &= \frac{\int_{\{\Phi_t^{-1}\{\Phi(x, t)\}\}} [\eta + tv_0(\eta)] \rho_0(d\eta)}{\rho_0(\Phi_t^{-1}\{\Phi(x, t)\})} & \text{si } \rho_0(\Phi_t^{-1}\{\Phi(x, t)\}) > 0, \\ \Phi(x, t) &= x + tv_0^-(x) & \text{si } \rho_0(\Phi_t^{-1}\{\Phi(x, t)\}) = 0 \text{ et } x \in \mathcal{S}_-, \\ \Phi(x, t) &= x + tv_0^+(x) & \text{si } \rho_0(\Phi_t^{-1}\{\Phi(x, t)\}) = 0 \text{ et } x \in \mathcal{S}_+. \end{aligned}$$

Sur l'espace mesuré  $(\mathbb{R}, \rho_0)$ , soit la fonction  $(x, t) \mapsto Y_t(x) := \Phi(x, t)$ . Soit  $Y_0$  la fonction identité sur  $\mathbb{R}$ . Nous avons pour tout  $t$ ,

$$\mathbb{E}[f(Y_t)Y_t] = \mathbb{E}[f(Y_t)(Y_0 + tv_0(Y_0))] \quad \forall f \in C_0^1(\mathbb{R}).$$

La preuve de ce lemme est identique à celle du lemme 2.3.2.

Dans la section suivante, nous allons présenter la caractérisation du flot.

## 5.4 Caractérisation du flot

Comme dans le chapitre 2, le flot est la seule fonction qui vérifie la propriété suivante.

### 5.4.1 Propriété (caractéristique du flot)

Les propriétés suivantes caractérisent le flot des particules collantes :

1.  $\forall x, \quad \phi(x, 0) = x.$
2. Pour tout  $(x, t) \in \mathcal{S} \times \mathbb{R}_+,$

$$\phi(x, t) = \frac{\int_{\{\phi_t^{-1}\{\phi(x, t)\}\}} [\eta + tv_0(\eta)] \rho_0(d\eta)}{\rho_0\{\phi_t^{-1}\{\phi(x, t)\}\}} \quad \text{si } \rho_0\{\phi_t^{-1}\{\phi(x, t)\}\} > 0,$$

$$\phi(x, t) = x + tv_0^-(x) \quad \text{si } \rho_0\{\phi_t^{-1}\{\phi(x, t)\}\} = 0 \quad \text{et } x \in \mathcal{S}_-,$$

$$\phi(x, t) = x + tv_0^+(x) \quad \text{si } \rho_0\{\phi_t^{-1}\{\phi(x, t)\}\} = 0 \quad \text{et } x \in \mathcal{S}_+.$$

3. Si  $\phi_t^{-1}\{\phi(x, t)\} = [\alpha, \beta]$  alors

$$C([\alpha, y], t) \geq C([\alpha, \beta], t) \quad \forall y \in [\alpha, \beta].$$

4. Pour tout  $t, \phi(\cdot, t)$  est croissante.

La preuve de cette propriété est identique à celle de la propriété 2.4.1. Il faut remarquer que dans cette preuve, on a utilisé l'espérance conditionnelle du processus lié au flot sur l'espace probabilisé  $(\mathbb{R}, P_0)$ . Pour la mesure de Radon, l'espérance conditionnelle du flot n'existe pas. Tout de même, nous pouvons reproduire la même preuve en considérant le lemme 5.3.3.

Nous terminons cette section par l'étude du lien qui existe entre le flot initial et celui défini par la distribution des particules formées avant ou à l'instant  $t$ .

Soit  $\rho_t$  la distribution des particules à l'instant  $t$ . Leur vitesse est donnée par la fonction  $u_t$  définie par

$$u_t(x) = v(\phi_t^{-1}\{x\}, t, \rho_0, v_0) \quad \forall x \in \mathcal{S}.$$

On peut remarquer, comme dans le chapitre 2, que cette vitesse n'est en général pas continue. Néanmoins, elle vérifie la condition des sauts négatifs

$$u_t^-(x) \geq u_t(x) \geq u_t^+(x) \quad \forall x.$$

Le flot  $\phi(\cdot, \cdot, \rho_t, u_t)$  est donc bien défini.

Grâce à la caractérisation de ce flot, nous obtenons la propriété

$$\phi(y, t + s, \rho_0, v_0) = \phi(\phi(y, t, \rho_0, v_0), s, \rho_t, u_t) \quad \forall (y, s) \in \mathcal{S} \times \mathbb{R}_+. \quad (5.4.1)$$

Dans la section suivante, nous approximons la dynamique définie par la mesure de Radon par des dynamiques probabilistes, c'est-à-dire des dynamiques construites à partir des probabilités.



## 5.5 Approximation probabiliste

Nous considérons la dynamique des particules collantes « distribuées » initialement suivant la mesure de Radon  $\rho_0$ , avec une vitesse initiale  $v_0$  mesurable et bornée.

Pour tout  $n > 0$ , nous considérons la « dynamique locale » des particules collantes situées initialement dans  $[-n, n]$ . En passant à l'étape  $n + 1$ , on « perturbe » la dynamique de ces particules car elles ont des collisions avec le « rajout » de particules situées initialement dans  $[-n - 1, -n)$  et  $(n, n + 1]$ .

Nous montrons, lorsque le temps est fini, que la dynamique des particules situées initialement dans un compact fixé  $[a, b]$  cesse d'être perturbée par les rajouts de particules à partir d'un certain rang  $n_0$ . Ce fait est énoncé dans le théorème 5.5.1 suivant qui est le résultat principal de cette section.

Dans la suite, nous considérons les mesures de probabilité

$$\rho_0^n := 1_{[-n, n]} \frac{\rho_0}{\rho_0([-n, n])} \quad n \geq 1,$$

et les flots

$$\phi^n(\cdot, \cdot) := \phi^n(\cdot, \cdot, \rho_0^n, v_0), \quad \phi(\cdot, \cdot) := \phi(\cdot, \cdot, \rho_0, v_0).$$

### 5.5.1 Théorème

Soit  $\rho_0$  une mesure de Radon positive de support  $S$ ; soit  $v_0$  une fonction mesurable et bornée ( $m \leq v_0 \leq M$ ) qui vérifie la condition des sauts négatifs.

Pour tout  $n$ , nous considérons le flot  $\phi^n(\cdot, \cdot)$  des particules collantes situées initialement dans  $[-n, n] \cap S =: S^n$ , avec des vitesses définies par  $v_0$ .

1) Soit un compact fixé  $[a, b] \subset [-n, n]$ .

A tout instant  $t > 0$ , l'ensemble des particules collées à  $a$  est du type

$$\{\phi^n(\cdot, t) = \phi^n(a, t)\} \cap S^n = [A^n(t), \beta^n(t)] \cap S$$

et l'ensemble des particules collées à  $b$  est du type

$$\{\phi^n(\cdot, t) = \phi^n(b, t)\} \cap S^n = [\alpha^n(t), B^n(t)] \cap S.$$

2) Pour  $T > 0$ , soit

$$n_0 = \max(-a, b) + T(M - m). \quad (5.5.1)$$

Si  $n > n_0$  et  $t \leq T$ , alors

$$A^{n+1}(t) = A^n(t), \quad \beta^{n+1}(t) = \beta^n(t)$$

et

$$\alpha^{n+1}(t) = \alpha^n(t), \quad B^{n+1}(t) = B^n(t).$$

D'où

$$\phi^{n+1} = \phi^n = \phi \quad \text{sur} \quad [a, b] \times [0, T]. \quad (5.5.2)$$

Dans la suite,  $l_{\xi_t}$  (resp.  $l_{\xi_t^n}$ ) désigne l'ensemble des extrémités gauches de  $\xi_t$  (resp. de  $\xi_t^n$ ) et  $r_{\xi_t}$  (resp.  $r_{\xi_t^n}$ ) désigne l'ensemble des extrémités droites de  $\xi_t$  (resp. de  $\xi_t^n$ ).

### Preuve du Théorème

Techniquement, la preuve est due essentiellement au fait que les ensembles  $\xi_t^n$  sont construits à partir des enveloppes convexes, et donc leurs extrémités vérifient le théorème 5.1.1 (avec  $y_1, y_2 \in [-n, n]$ ).

1) Nous avons  $[a, b] \subset [-n, n]$ , et  $\xi_t^n$  est une partition de  $[-n, n] \cap S$ . Donc il existe

$$[A(t), \beta(t)] \cap S \in \xi_t^n, \quad [\alpha(t), B(t)] \cap S \in \xi_t^n$$

tels que

$$a \in [A(t), \beta(t)], \quad b \in [\alpha(t), B(t)].$$

Pour ne pas alourdir les notations, les extrémités sont notées  $e(t)$  au lieu de  $e^n(t)$ . Les ensembles  $[A(t), \beta(t)] \cap S$  et  $[\alpha(t), B(t)] \cap S$  sont donc nos ensembles de particules collées à l'instant  $t$  évoqués dans le théorème.

2) Supposons que  $\phi^{n+1}(\cdot, t) \neq \phi^n(\cdot, t)$  sur  $[a, b]$ . Nous allons montrer par les deux lemmes suivants qu'alors

$$A(t) \notin l_{\xi_t^{n+1}} \quad \text{ou bien} \quad B(t) \notin r_{\xi_t^{n+1}}.$$

Ce qui signifie que la dynamique de la particule (située initialement en)  $A(t)$  ou celle de la particule  $B(t)$  est perturbée par le rajout de particules.

#### 5.5.2 Lemme

Soient  $\alpha, \beta \in [-n, n]$ .

1. Si  $\alpha \in l_{\xi_t^{n+1}}$  (resp.  $\beta \in r_{\xi_t^{n+1}}$ ), alors  $\alpha \in l_{\xi_t^n}$  (resp.  $\beta \in r_{\xi_t^n}$ ).

2.

$$[\alpha, \beta] \cap S \in \xi_t^{n+1} \implies [\alpha, \beta] \cap S \in \xi_t^n.$$

Ce lemme confirme le fait que la dynamique d'une particule non perturbée par le rajout de particules de l'étape  $n+1$  reste définie par la dynamique de l'étape  $n$ .

#### Preuve du lemme

La première assertion est immédiate. Nous allons montrer la deuxième.

Soit

$$[\alpha, \beta] \cap S \in \xi_t^{n+1} \quad \text{avec} \quad [\alpha, \beta] \subseteq [-n, n].$$

On a clairement  $\alpha \in l_{\xi_t^n}$  et  $\beta \in r_{\xi_t^n}$ .

Dire que  $[\alpha, \beta] \cap S \notin \xi_t^n$  revient à dire que

$$\exists e \in (\alpha, \beta) \cap l_{\xi_t^n}$$

et alors

$$\frac{\int_{[\alpha, e]} [\eta + tv_0(\eta)] \rho_0(d\eta)}{\rho_0[\alpha, e]} < \frac{\int_{[e, \beta]} [\eta + tv_0(\eta)] \rho_0(d\eta)}{\rho_0[e, \beta]} .$$

Ce qui est absurde car, du fait que  $[\alpha, \beta] \cap S \in \xi_t^{n+1}$ , on a (cf. théorème 5.1.1,(2))

$$\frac{\int_{[\alpha, e]} [\eta + tv_0(\eta)] \rho_0(d\eta)}{\rho_0[\alpha, e]} \geq \frac{\int_{[e, \beta]} [\eta + tv_0(\eta)] \rho_0(d\eta)}{\rho_0[e, \beta]} . \blacksquare$$

Nous allons maintenant établir une condition nécessaire pour que la dynamique de l'étape  $n$  ne soit pas perturbée.

### 5.5.3 Lemme (Locale Stationnarité de la Dynamique)

On suppose que

$[A, B] \subset [-n, n]$ . Si  $A \in l_{\xi_t^{n+1}}$  et  $B \in r_{\xi_t^{n+1}}$ , alors  $\forall \alpha, \beta \in [A, B]$  :

$$[\alpha, \beta] \cap S \in \xi_t^n \iff [\alpha, \beta] \cap S \in \xi_t^{n+1} .$$

Donc si  $A$  et  $B$  ne sont pas perturbés, toutes les particules initialement dans  $[A, B]$  ne sont pas perturbées.

#### Preuve du lemme

Soient  $\alpha, \beta \in [A, B]$ . On a déjà par le lemme 5.5.2 :

$$[\alpha, \beta] \cap S \in \xi_t^{n+1} \implies [\alpha, \beta] \cap S \in \xi_t^n .$$

Il reste à montrer la réciproque. Soient  $\alpha' \in l_{\xi_t^{n+1}}$ ,  $\beta' \in r_{\xi_t^{n+1}}$  tels que  $\alpha \in [\alpha', \beta']$ . On a forcément  $A \leq \alpha' \leq \beta' \leq B$ , donc  $\alpha', \beta' \in [-n, n]$ . Il en découle, d'après le lemme 5.5.2, que  $\alpha' \in l_{\xi_t^n}$ ,  $\beta' \in r_{\xi_t^n}$ . Les extrémités de  $\alpha$  dans la partition  $\xi_t^n$  étant uniques, on en déduit que

$$\alpha' = \alpha \in l_{\xi_t^{n+1}} \quad \text{et} \quad \beta' = \beta \in r_{\xi_t^{n+1}} . \blacksquare$$

Comme conséquence de ces résultats, on a le résultat suivant.

### 5.5.4 Lemme (Locale Stationnarité des Flots)

Pour  $[A, B] \subset [-n, n]$ , on a :

$$A \in l_{\xi_t^{n+1}} \quad \text{et} \quad B \in r_{\xi_t^{n+1}} \implies \phi^{n+1}(\cdot, t) = \phi^n(\cdot, t) \quad \text{sur} \quad [A, B] .$$

#### Suite de la preuve du théorème 5.5.1

On va maintenant montrer que pour  $A(t)$  et  $B(t)$  du début de la preuve, la condition de locale stationnarité des flots est vérifiée à partir du rang  $n_0 = \max(-a, b) + T(M - m)$ .

D'après le lemme 5.5.4, la différence  $\phi^{n+1}(\cdot, t) \neq \phi^n(\cdot, t)$  implique que

$$A(t) \notin l_{\xi_t^{n+1}} \quad \text{ou bien} \quad B(t) \notin r_{\xi_t^{n+1}} .$$

Supposons que  $A(t) \notin l_{\xi_t^{n+1}}$ . Il existe  $[y_1, y_2] \cap S \in \xi_t^{n+1}$  tel que  $A(t) \in (y_1, y_2]$ . Par le lemme 5.5.2-1, on voit que  $y_2 \geq \beta(t) \geq a$ . Sinon  $A(t) \leq y_2 < \beta(t)$  et alors  $y_2 \in r_{\xi_t^n}$ , d'où  $y_2 = \beta(t)$ . De plus,  $y_1 \in [-n-1, -n)$ . Sinon,  $y_1 \in [-n, n]$  et alors  $y_1 \in l_{\xi_t^n}$ , d'où  $y_1 = A(t)$ .

Comme  $[y_1, y_2] \cap S \in \xi_t^{n+1}$ , on a grâce aux propriétés de  $\xi_t^{n+1}$  (théorème 5.1.1, (2))

$$\frac{\int_{[y_1, -n]} [\eta + tv_0(\eta)] \rho_0(d\eta)}{\rho_0[y_1, -n]} \geq \frac{\int_{[y_1, y_2]} [\eta + tv_0(\eta)] \rho_0(d\eta)}{\rho_0[y_1, y_2]} \geq \frac{\int_{[a, y_2]} [\eta + tv_0(\eta)] \rho_0(d\eta)}{\rho_0[a, y_2]}.$$

Alors

$$-n + tM \geq a + tm, \quad \text{d'où} \quad n \leq -a + t(M - m).$$

Supposons que  $B(t) \notin r_{\xi_t^{n+1}}$ . Alors  $\exists [y'_1, y'_2] \cap S \in \xi_t^{n+1}$  tel que  $B(t) \in [y'_1, y'_2]$ . Comme dans le cas précédent, on a  $y'_1 \leq \alpha(t) \leq b$ ,  $y'_2 \in (n, n+1]$  et les propriétés de  $\xi_t^{n+1}$  impliquent que

$$\frac{\int_{[y'_1, b]} [\eta + tv_0(\eta)] \rho_0(d\eta)}{\rho_0[y'_1, b]} \geq \frac{\int_{[y'_1, y'_2]} [\eta + tv_0(\eta)] \rho_0(d\eta)}{\rho_0[y'_1, y'_2]} \geq \frac{\int_{[n, y'_2]} [\eta + tv_0(\eta)] \rho_0(d\eta)}{\rho_0[n, y'_2]}.$$

On obtient

$$n \leq b + t(M - m).$$

Donc lorsque  $n > n_0$  et  $t \leq T$ , on est dans les conditions du lemme 5.5.4 :  $A(t) \in l_{\xi_t^{n+1}}$  et  $B(t) \in r_{\xi_t^{n+1}}$ . C'est-à-dire

$$A^{n+1}(t) = A^n(t) \quad \text{et} \quad B^{n+1}(t) = B^n(t).$$

On a alors la stationnarité (5.5.2) des flots.

Grâce à cette stationnarité des flots, leur limite vérifie la propriété caractéristique 5.4.1. Cette limite coïncide donc avec le flot des particules collantes  $\phi(\cdot, \cdot, \rho_0, v_0)$ . ■

### 5.5.5 Remarque

Pour  $n > n_0$  et  $t \leq T$ , on a

$$\phi^{n+1}(\cdot, t) = \phi^n(\cdot, t) = \phi(\cdot, t) \quad \text{sur} \quad [A(t), B(t)] \supset [a, b].$$

Dans la section suivante, nous allons généraliser les résultats de la section 1.8 concernant le lien entre les enveloppes convexes et l'équation de Hamilton-Jacobi.

Ceci nous permettra d'en déduire la solution entropique de la loi de conservation scalaire dont la donnée initiale est la fonction de répartition de la mesure de Radon  $\rho_0$ , et le flux est la quantité de mouvement des particules distribuées suivant  $\rho_0$ , avec la vitesse  $v_0$ .

## 5.6 Lien avec une équation de Hamilton-Jacobi

Nous rappelons que  $\rho_0$  est une mesure de Radon quelconque, et  $v_0$  est une fonction mesurable et bornée non forcément continue, qui vérifie la condition des sauts négatifs. La fonction  $m \mapsto H(m, t)$  est l'enveloppe convexe de la fonction

$$m \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(m, t) = \int_0^m F_0^{-1}(m') dm' + t \int_0^m v_0(F_0^{-1}(m')) dm' ,$$

où  $F_0$  est une fonction de répartition de  $\rho_0$ .

La fonction inverse de la dérivée  $m \mapsto \partial_m H(m, t)$  est la fonction  $x \mapsto M(x, t)$  définie comme suit, de manière analogue à la section 1.6.

$$M(x, t) := \max\{z : \varphi(z, t) - xz = c(x)\} ,$$

où

$$c(x) = \min_{z \in \mathbb{R}} (\varphi(z, t) - xz) .$$

On montre, comme dans la section 1.8, que la fonction

$$\begin{aligned} (x, t) \mapsto \Psi(x, t) &:= \sup_{m \in \mathbb{R}} \left\{ xm - H_0(m) - t \int_0^m v_0(F_0^{-1}(m')) dm' \right\} \\ &= xM(x, t) - H(M(x, t), t) \end{aligned}$$

vérifie

$$H(m, t) = \Psi(\cdot, t)^*(m) = \left( H_0 + t \int_0^\cdot v_0(F_0^{-1}(m')) dm' \right)^{**} (m) \quad \forall m \in \mathbb{R} ,$$

où le symbole  $*$  désigne la transformée de Legendre-Fenchel. On en déduit, d'après les résultats de Bardi, Evans [2] et Bouchut, James [5], que la fonction  $\Psi$  est la solution de viscosité de l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\partial_t \Psi + A(\partial_x \Psi) = 0 , \quad \Psi(x, 0) = \int_0^x F_0(y) dy ,$$

où  $A(m) = \int_0^m v_0(F_0^{-1}(z)) dz \quad \forall m$ .

On déduit de cette équation que la fonction  $(x, t) \mapsto M(x, t) = \partial_x \Psi(x, t)$  est la solution entropique de la loi de conservation scalaire

$$\partial_t M + \partial_x (A(M)) = 0 , \quad M(\cdot, 0) = F_0 .$$

Par ailleurs, il découle du théorème 1.10.1 dû à Brenier et Grenier [4], que la mesure  $\partial_x M(\cdot, t)$  est absolument continue par rapport à la mesure  $\partial_x (A(M(\cdot, t)))$ , avec

$$\frac{d[\partial_x (A(M(\cdot, t)))]}{d[\partial_x M(\cdot, t)]} =: u(\cdot, t) ,$$

et alors la famille

$$(\partial_x M(\cdot, t), u(\cdot, t), t \geq 0)$$

est une solution faible du système de gaz sans pression de donnée initiale  $(\rho_0, v_0)$ . Nous verrons dans la section suivante que  $\partial_x M(\cdot, t)$  est la distribution des particules collantes  $\rho(\cdot, t) := \lambda X_t^{-1}$  à l'instant  $t$ , et  $u(\cdot, t)$  est leur vitesse.

Nous terminons cette section par une remarque sur l'obtention, d'une manière directe, de cette solution faible du système de gaz sans pression. Nous rappelons que la vitesse initiale  $v_0$  est supposée mesurable et bornée.

### 5.6.1 Remarque (Système de gaz sans pression)

*Le flot  $(X_t)$  des particules collantes vérifie*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} X_t &= u(X_t, t) \quad dt - p.p. \\ \mathbb{E}[f(X_t)u(X_t, t)] &= \mathbb{E}[f(X_t)v_0(X_0)] \quad dt - p.p. \quad \forall f \in C_0^1(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

*Ceci permet de conclure, grâce à la preuve de la proposition 3.2.2, que*

$$(\rho(\cdot, t), u(\cdot, t), t \geq 0)$$

*est une solution faible du système de gaz sans pression de donnée initiale  $(\rho_0, v_0)$ .*

Dans la section suivante, nous donnons la forme explicite de la solution entropique et nous montrons que la dérivée de Radon-Nikodym précédente est la vitesse des particules collantes. En outre, nous retrouvons d'une manière directe la solution entropique.

Nous allons utiliser d'une part, le fait que  $M(\cdot, t)$  est une fonction de répartition des particules à l'instant  $t$ , et d'autre part, le fait que le flot des particules vérifie l'équation différentielle  $dX_t = \mathbb{E}[v_0(X_0)/X_t]dt$  (lorsque  $v_0$  est intégrable).

## 5.7 Lien avec la loi de conservation scalaire

Dans cette section, nous cherchons la forme explicite de la solution entropique de

$$\partial_t M + \partial_x(A(M)) = 0, \quad M(\cdot, 0) = F_0,$$

où  $F_0$  est une fonction de répartition de la mesure de Radon  $\rho_0$ . Le flux

$$A(m) = \int_0^m v_0(F_0^{-1}(z))dz \quad \forall m.$$

est défini par une fonction mesurable bornée  $v_0$ , qui vérifie la condition des sauts négatifs. Nous allons montrer que la solution s'exprime en fonction de  $F_0$  :

$$M(x, t) = F_0(\phi_t^{-1}(x)) \quad \text{avec} \quad \phi_t^{-1}(x) = \sup\{a : \phi(a, t) \leq x\} \quad \forall x.$$

En outre, lorsque  $F_0(\alpha) = 0$  pour une particule initiale  $\alpha$  qui n'est jamais heurtée à sa droite (ou à sa gauche), nous obtenons d'une manière directe la loi de conservation scalaire.

Nous venons de montrer que la solution entropique  $M$  existe.  $M(\cdot, t) =: F_t$  est une fonction de répartition de la distribution des particules collantes à l'instant  $t$  et nous avons pour tout  $x_1 < x_2$ ,

$$(M(x_1, t), M(x_2, t)] = \{m : x_1 < \phi(F_0^{-1}, t) \leq x_2\},$$

donc

$$M(x_2, t) - M(x_1, t) = \lambda(F_0^{-1})^{-1} \phi(\cdot, t)^{-1}(x_1, x_2] = \rho_0 \phi(\cdot, t)^{-1}(x_1, x_2].$$

Ainsi,

$$\partial_x M(\cdot, t) = \rho_0 \phi(\cdot, t)^{-1} =: \rho_t \quad \forall t$$

et il existe une fonction  $t \mapsto f(t)$  telle que

$$F_t(x) = M(x, t) = F_0(\phi_t^{-1}(x)) + f(t) \quad \forall (x, t).$$

Comme  $F_t^{-1} = X_t = \phi(F_0^{-1}, t)$ , on obtient  $f = 0$ .

Maintenant, nous montrons que la dérivée de Radon-Nikodym

$$\frac{d[\partial_x(A(M(\cdot, t)))]}{d[\partial_x M(\cdot, t)]}$$

de la section précédente coïncide avec la vitesse des particules collantes. Soit  $u(\cdot, t)$  la vitesse des particules collantes à l'instant  $t$ . On remarque que

$$\begin{aligned} M(x, t) &= \int_{\phi_t(0)}^x \rho(dy, t) + F_0(\phi_t^{-1}(\phi_t(0))), \\ A(M(x, t)) &= \int_{\phi_t(0)}^x u(y, t) \rho(dy, t) + \int_0^{\phi_t^{-1}(\phi_t(0))} v_0(F_0^{-1}(z)) dz. \end{aligned}$$

Donc

$$\partial_x(A(M(x, t))) = u(x, t) \partial_x M(x, t).$$

Dans la suite, nous allons montrer d'une façon directe que  $M$  est la solution entropique, lorsque la fonction de répartition initiale s'annule en point qui n'est jamais heurté à sa droite (ou à sa gauche).

Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , nous considérons la fonction de répartition initiale

$$F_0(x) = \begin{cases} \rho_0(\alpha, x], & x \geq \alpha \\ -\rho_0(x, \alpha], & x < \alpha. \end{cases}$$

Pour tout  $n$ , nous considérons le flot des particules collantes  $\phi^n$  du théorème 5.5.1, ainsi que la distribution  $\rho^n(\cdot, t)$  de la masse à l'instant  $t$ . Soient les fonctions

$$(x, t) \mapsto M^n(x, t) = \rho_0^n(x, t) \rho_0([-n, n]),$$

$$(x, t) \mapsto M(x, t) = F_0(\phi_t^{-1}(x)).$$

### 5.7.1 Théorème (Loi de conservation scalaire locale)

Nous supposons que

$$\phi_t^{-1}(\phi_t(\alpha)) = \alpha \quad \forall t.$$

Pour tout ouvert borné  $\mathcal{O} \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ , il existe un rang à partir duquel

$$\partial_t M(x, t) + \partial_x(A(M(x, t))) = -\partial_t M^n(\phi_t(\alpha), t) \quad \forall (x, t) \in \mathcal{O}. \quad (5.7.1)$$

De plus, pour un tel  $n$

$$M^n(\phi_t^n(\alpha), t) = M^n(\alpha, 0), \quad \forall t \leq T.$$

Ici, l'hypothèse  $\phi_t^{-1}(\phi_t(\alpha)) = \alpha \quad \forall t$  signifie que la particule initiale  $\alpha$  n'est jamais heurtée à sa droite.

Nous obtenons ces résultats en observant le mouvement des particules dont les masses initiales sont distribuées suivant la mesure tronquée  $1_{[-n, n]}\rho_0$ . Ce qui revient à étudier des lois locales de conservation scalaire.

## 5.8 Approximation de la loi de conservation scalaire

Nous rappelons que  $X_0 = F_0^{-1}$  et  $X_t = \phi(X_0, t)$  sont définis sur l'espace mesuré  $(\mathbb{R}, \lambda)$ . On passe à l'espace  $(\mathbb{R}, \rho_0)$  en considérant  $Y_0$  l'identité de  $\mathbb{R}$ , et  $Y_t = \phi(Y_0, t)$ . On peut remarquer l'égalité des mesures-image

$$\lambda(X_0, X_t)^{-1} = \rho_0(Y_0, Y_t)^{-1} \quad \forall t.$$

Pour tout  $n$ , on considère le processus lié au flot

$$Y_t^n = \phi^n(Y_0, t).$$

Soit la fonction de Heavyside  $H = 1_{[0, +\infty)}$ . Pour les particules initiales de distribution  $1_{[-n, n]}\rho_0$ , il est clair que les fonctions

$$M^n(x, t) = \int H(x - Y_t^n) 1_{[-n, n]}(Y_0) d\rho_0$$

$$A^n(M^n(x, t)) = \int v_0(Y_0) H(x - Y_t^n) 1_{[-n, n]}(Y_0) d\rho_0$$



vérifient sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$

$$\text{LCS}(n) : \quad \partial_t M^n + \partial_x(A^n(M^n)) = 0 .$$

Soit maintenant un ouvert borné  $\mathcal{O}$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ . Si nous montrons qu'à partir d'un certain rang et pour tout  $(x, t) \in \mathcal{O}$

$$\begin{aligned} M(x, t) &= M^n(x, t) - M^n(\phi_t^n(\alpha), t) , \\ A(M(x, t)) &= A^n(M^n(x, t)) - A^n(M^n(\phi_t^n(\alpha), t)) , \end{aligned}$$

alors nous pourrions conclure que le théorème 5.7.1 est vrai. Ceci est dû au lemme suivant.

### 5.8.1 Lemme

*Nous avons*

$$M(x, t) = \int_{\phi_t(\alpha)}^x \rho(dy, t) = \mathbb{E}[H(x - Y_t) - H(\phi_t(\alpha) - Y_t)] \quad (5.8.1)$$

$$A(M(x, t)) = \mathbb{E}\left(v_0(Y_0)[H(x - Y_t) - H(\phi_t(\alpha) - Y_t)]\right) \quad (5.8.2)$$

$$= \int_{\phi_t(\alpha)}^x u(y, t)\rho(dy, t) .$$

Avant de démontrer ce lemme, nous achevons la preuve du théorème 5.7.1.

### Preuve du Théorème 5.7.1 (suite et fin)

Il existe  $a, b$  et  $T$  tels que pour tout  $(x, t) \in \mathcal{O}$

$$x, \phi_t(\alpha) \in (a, b) \quad \text{et} \quad t \leq T .$$

De plus, il existe  $y_1, y_2$  tels que

$$\phi_t^{-1}(a, b) \subset [y_1, y_2] \quad \forall t \leq T .$$

On a alors

$$H(x - Y_t) - H(\phi_t(\alpha) - Y_t) = [H(x - Y_t) - H(\phi_t(\alpha) - Y_t)]1_{[y_1, y_2]}(Y_0) .$$

Pour  $n > n_0(y_1, y_2, T)$  et  $t \leq T$ , on a  $\phi_t^n = \phi_t$  sur  $[y_1, y_2]$  et leurs inverses coïncident sur  $(a, b)$ . Donc si  $Y_0 \in [y_1, y_2]$  et  $t \leq T$ , on a  $Y_t^n = Y_t$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} H(x - Y_t) - H(\phi_t(\alpha) - Y_t) &= [H(x - Y_t^n) - H(\phi_t^n(\alpha) - Y_t^n)]1_{[y_1, y_2]}(Y_0) \\ &= [H(x - Y_t^n) - H(\phi_t^n(\alpha) - Y_t^n)]1_{[-n, n]}(Y_0) . \end{aligned}$$

On a donc les deux égalités cherchées grâce à (5.8.1) et (5.8.2). On en déduit (5.7.1).

De plus,  $\alpha$  est une extrémité droite à tout instant  $t \leq T$  pour la dynamique définie par  $\rho_0^n$  car les inverses de  $\phi_T^n$  et  $\phi_T$  coïncident en  $\alpha$ . Donc

$$M^n(\phi_t^n(\alpha), t) = M^n(\alpha, 0), \quad \forall t \leq T. \quad \blacksquare$$

Nous terminons cette section par la preuve du lemme 5.8.1.

### Preuve du Lemme 5.8.1

On va utiliser le fait que pour tout  $t$ ,  $\rho(\cdot, t) = \rho_0 Y_t^{-1}$  et  $\forall a < b$ ,

$$\mathbb{E} \left( u(Y_t, t) [H(b - Y_t) - H(a - Y_t)] \right) = \mathbb{E} \left( v_0(Y_0) [H(b - Y_t) - H(a - Y_t)] \right).$$

L'écriture (5.8.1) de  $M(x, t)$  est immédiate car

$$\{\phi_t(\alpha) < Y_t \leq x\} = \{\phi_t(\alpha) < \phi_t(Y_0) \leq x\} = \{\alpha < Y_0 \leq \phi_t^{-1}(x)\}.$$

On déduit de ce résultat que

$$\begin{aligned} \int_{\phi_t(\alpha)}^x u(y, t) \rho(dy, t) &= \int_{\phi_t(\alpha)}^x u(y, t) \rho_0 Y_t^{-1}(dy) \\ &= \mathbb{E} \left( u(Y_t, t) [H(x - Y_t) - H(\phi_t(\alpha) - Y_t)] \right) \\ &= \mathbb{E} \left( v_0(Y_0) [H(x - Y_t) - H(\phi_t(\alpha) - Y_t)] \right) \\ &= \mathbb{E} \left( v_0(Y_0) [H(\phi_t^{-1}(x) - Y_0) - H(\alpha - Y_0)] \right) \\ &= \int_{\alpha}^{\phi_t^{-1}(x)} v_0(\eta) \rho_0(d\eta). \end{aligned}$$

Pour montrer l'égalité avec  $A(M(x, t))$ , on utilise le changement de variables  $\eta = F_0^{-1}(z)$  et la mesure image  $\rho_0 = \lambda(F_0^{-1})^{-1}$ , où  $\lambda$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ . On a

$$\{z : \alpha < F_0^{-1}(z) \leq \phi_t^{-1}(x)\} = \{z : F_0(\alpha) < z < F_0(\phi_t^{-1}(x))\}$$

avec  $F_0(\alpha) = 0$  et  $F_0(\phi_t^{-1}(x)) = M(x, t)$ . En procédant au changement de variables, on obtient

$$\int_{\alpha}^{\phi_t^{-1}(x)} v_0(\eta) \rho_0(d\eta) = \int_0^{M(x, t)} v_0(F_0^{-1}(z)) dz = A(M(x, t)).$$

Ce qui est (5.8.2).  $\blacksquare$

Nous terminons ce chapitre par le lien entre la dynamique des particules collantes et l'équation de Burgers.

## 5.9 Lien avec l'équation de Burgers

Nous avons déjà signalé dans le chapitre 1 le lien entre l'équation de Burgers et les particules collantes dont la distribution initiale de la masse est la mesure de Lebesgue  $\lambda$  sur  $\mathbb{R}$ .

Nous allons montrer que la vitesse des particules collantes, avec la distribution initiale  $\lambda$ , est la solution entropique de l'équation de Burgers. C'est-à-dire que la vitesse  $u(x, t)$  d'un groupe de particules qui se trouve à la position  $x$  à l'instant  $t$  est la solution entropique de l'équation

$$\partial_t u(x, t) + \partial_x \left( \frac{u^2(x, t)}{2} \right) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

En effet, la solution entropique s'obtient à chaque instant  $t > 0$  en étudiant l'enveloppe convexe de la fonction

$$y \mapsto \int_0^y [\eta + tu_0(\eta)] d\eta.$$

Nous rappelons rapidement cette construction. On fixe  $x, t$  et on minimise la fonction

$$\mathbb{R} \ni y \mapsto G(x, y, t) = \int_0^y [\eta + tu_0(\eta)] d\eta - xy.$$

On note

$$y_*(x, t) = \min\{y : G(x, y, t) = \min_z G(x, z, t)\},$$

$$y^*(x, t) = \max\{y : G(x, y, t) = \min_z G(x, z, t)\}.$$

La solution  $u$  est donnée par

$$u(x, t) = \frac{x - y(x, t)}{t}$$

lorsque  $y_*(x, t) = y^*(x, t) := y(x, t)$ . Les points  $(x, t)$  pour lesquels  $y_*(x, t) \neq y^*(x, t)$  sont des points de discontinuité de  $u$ . Plus précisément, on a

$$\lim_{x' \rightarrow x^-} u(x', t) = \frac{x - y_*(x, t)}{t}, \quad \lim_{x' \rightarrow x^+} u(x', t) = \frac{x - y^*(x, t)}{t}.$$

L'intervalle  $[y_*(x, t), y^*(x, t)]$  est l'ensemble des positions initiales des particules qui se trouvent à l'instant  $t$  à la position  $x$ . La différence  $y^*(x, t) - y_*(x, t) = \lambda([y_*(x, t), y^*(x, t)])$  est la masse de la particule massive située au point  $x$  à l'instant  $t$ . Pour chaque  $(x_1, t_1)$  fixé avec  $t_1 > 0$  on lui associe deux segments dans le plan  $(x, t)$  définis par

$$S_*(x_1, t_1) = [(x_1, t_1), (y_*(x_1, t_1), 0)]$$

et

$$S^*(x_1, t_1) = [(x_1, t_1), (y^*(x_1, t_1), 0)].$$

Nous avons pour tout  $t < t_1$  les résultats suivants :

$$y_*(x, t) = y^*(x, t) = y_*(x_1, t_1) \quad \forall (x, t) \in S_*(x_1, t_1)$$

et

$$y_*(x, t) = y^*(x, t) = y^*(x_1, t_1) \quad \forall (x, t) \in S^*(x_1, t_1).$$

Ainsi, la solution  $u$  est constante sur chacun des segments lorsque  $t < t_1$ . Lorsque  $y_*(x, t) = y^*(x, t) := y(x, t)$ , on a  $u(x, t) = u_0(y(x, t))$ . Pour une étude détaillée nous renvoyons le lecteur à l'article de Hopf [30].

Nous avons ainsi deux résultats, pour  $u_0$  ayant des sauts négatifs :

- 1)  $y^*(x, t) = M_*(x, t)$ ,  $y^*(x, t) = M^*(x, t) =: M(x, t)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$ ,
- 2) la vitesse  $u(x, t) = u_0(y(x, t))$  est bien la densité de  $\partial_x(A(M(\cdot, t)))$  par rapport à la mesure  $\partial_x M(\cdot, t)$ . En effet, nous avons dans ce cas

$$F_0(x) = F_0^{-1}(x) = x \quad \text{et} \quad A(m) = \int_0^m u_0(z) dz .$$

$$y_*(x, t) = M_*(x, t) , \quad y^*(x, t) = M^*(x, t) .$$

Tout amas  $[y_*(x, t), y^*(x, t)]$  est une accumulation à gauche et à droite d'amas, donc sa position vaut

$$x = y_*(x, t) + tu_0(y_*(x, t)) = y^*(x, t) + tu_0(y^*(x, t)) .$$

Si  $y_*(x, t) = y^*(x, t) := y(x, t)$ , la vitesse de cette particule est alors

$$u_0(y(x, t)) = \frac{x - y(x, t)}{t} := u(x, t) .$$

Donc la solution de l'équation de Burgers coïncide avec la vitesse des particules collantes.



# Chapitre 6

## Equation de Burgers et Flot des particules collantes

Dans ce chapitre nous allons étudier la solution de l'équation de Burgers avec une vitesse initiale  $u_0$  continue, décroissante et bornée.

Pour chaque partition  $(y_0 = -\infty, y_1, \dots, y_{N+1} = +\infty)$  de  $\mathbb{R}$ , on considère la solution à l'équation de Burgers de vitesse initiale  $\sum_{i=1}^N u_0(y_i) 1_{[y_i, y_{i+1})}$ . Pour chaque  $i$  on note par  $x(y_i, t) : t \geq 0$  la ligne de discontinuité de la solution qui part de  $y_i$ . Nous montrons que  $\{x(y_i, t) : 1 \leq i \leq N, t \geq 0\}$  converge sur tout compact  $[a, b] \times [0, T]$ , lorsque

$$\max_{\{0 \leq i \leq N\}} |y_{i+1} - y_i| \rightarrow 0,$$

vers le flot  $\phi(\cdot, \cdot, -du_0, u_0)$  des particules collantes ayant  $-du_0$  comme distribution initiale, et  $u_0$  comme vitesse initiale. Ce flot coïncide avec les lignes de discontinuité de l'équation de Burgers de vitesse initiale  $u_0$ .

### 6.1 Equation de Burgers

Soit  $u_0$  une fonction continue et soit  $u(\cdot, \cdot, \nu)$  une solution de l'équation de Burgers de viscosité  $\nu$

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx} \quad \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad u(\cdot, 0) = u_0. \quad (6.1.1)$$

Si on définit le potentiel  $\psi$  par  $u = -\partial_x \psi$ , la substitution de Hopf-Cole  $\psi = 2\nu \ln(\theta)$  montre que  $\theta$  satisfait l'équation de la chaleur

$$\partial_t \theta = \nu \partial_{xx}^2 \theta.$$

On en déduit alors que

$$u(x, t, \nu) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-y)}{t} \exp\left\{-\frac{F(x,y,t)}{2\nu}\right\} dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{F(x,y,t)}{2\nu}\right\} dy}, \quad (6.1.2)$$

où

$$F(x, y, t) = \frac{(x - y)^2}{2t} + \int_0^y u_0(\eta) d\eta.$$

En gardant  $u_0$  fixée et en faisant tendre  $\nu$  vers 0, Burgers [7] montre que  $u(\cdot, \cdot, \nu)$  converge vers la solution  $u(\cdot, \cdot, 0)$  de l'équation sans viscosité. Les résultats suivants permettent de calculer  $u(\cdot, \cdot, 0)$  et sont dus à Hopf [30].

### 6.1.1 Théorème (de Hopf)

Pour  $(x, t)$  fixé, la fonction  $F(x, \cdot, t)$  atteint son minimum pour une ou plusieurs valeurs de  $y$ , la plus petite et la plus grande sont notées par  $y_*(x, t)$  et  $y^*(x, t)$  respectivement. Pour tout  $(x, t)$ , on a

$$\frac{x - y^*(x, t)}{t} \leq \liminf_{\nu \rightarrow 0+, \xi \rightarrow x, \tau \rightarrow t} u(\xi, \tau, \nu),$$

$$\limsup_{\nu \rightarrow 0+, \xi \rightarrow x, \tau \rightarrow t} u(\xi, \tau, \nu) \leq \frac{x - y_*(x, t)}{t}.$$

Si  $y_*(x, t) = y^*(x, t)$ , alors

$$\lim_{\nu \rightarrow 0+, \xi \rightarrow x, \tau \rightarrow t} u(\xi, \tau, \nu) = \frac{x - y^*(x, t)}{t} = u(x, t, 0).$$

On peut remarquer que la fonction  $F(x, \cdot, t)$  atteint son minimum en  $y$  si et seulement si la fonction  $G(x, \cdot, t)$  atteint son minimum en  $y$ , où

$$G(x, y, t) = \int_0^y [\eta + tu_0(\eta)] d\eta - xy. \quad (6.1.3)$$

Chaque fonction  $y(\cdot, t) := y^*(\cdot, t)$  est construite de manière analogue à celle du chapitre 1. Elle est croissante et vérifie

$$y(x - 0, t) = y_*(x, t), \quad y(x + 0, t) = y^*(x, t) \quad \forall x.$$

La fonction  $y$  est appelée Lagrangien inverse, et son inverse  $x(y)$  est le Lagrangien, c'est-à-dire la position à l'instant  $t$  de la particule située initialement en  $y$ . On a

$$u(x, t, 0) = \frac{x - y(x, t)}{t} \quad dx - \text{presque partout}. \quad (6.1.4)$$

Dans la section suivante, nous interprétons la fonction  $u(\cdot, \cdot, 0)$  à l'aide du modèle des particules collantes. La limite  $u(x, t, 0)$  n'est pas bien définie car on peut lui affecter plusieurs valeurs lorsque  $y_*(x, t) \neq y^*(x, t)$ . Ces points de discontinuité sont interprétés comme des chocs ;  $y^*(x, t) - y_*(x, t)$  est la taille du choc et  $m(x, t) = u(x - 0, t) - u(x + 0, t)$  est la masse du groupe qui se trouve à la position  $x$  à l'instant  $t$ , et avec la vitesse  $u(x, t, 0)$ .

## 6.2 Lien avec le flot des particules collantes

Nous considérons l'équation de Burgers

$$u_t + uu_x = 0, \quad u(\cdot, 0) = u_0 \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \quad (6.2.1)$$

Lorsque la donnée initiale  $u_0$  est une fonction décroissante, nous allons montrer que les lignes de discontinuité de la solution coïncident avec un flot de particules collantes distribuées initialement suivant la mesure  $-du_0$ . La mesure  $du_0$  est définie par

$$du_0(a, b] = u_0(b) - u_0(a), \quad \forall a < b.$$

Soit

$$u_0 = \sum_{i=0}^N v_i 1_{[y_i, y_{i+1})} \quad \text{où } -\infty = y_0 < y_1 < \dots < y_{N+1} = +\infty, \\ v_i > v_{i+1} \quad \forall i.$$

Pour calculer la solution de (6.2.1), il faut calculer les points  $y_*(x, t)$  et  $y^*(x, t)$  où la fonction

$$\mathbb{R} \ni y \mapsto G(x, y, t) = \int_0^y [\eta + tu_0(\eta) - x] d\eta$$

atteint son minimum absolu. Pour tout  $i$  et pour tout  $y \in (y_i, y_{i+1})$ , on a  $u_0(y) = v_i$ . Donc

$$\forall y < y_1, \quad G(x, y, t) = G(x, y_1, t) + \int_{y_1}^y [\eta + tv_0 - x] d\eta \\ = G(x, y_1, t) + \frac{y^2 - y_1^2}{2} + (y - y_1)[tv_0 - x];$$

$$\forall i \geq 1, \forall y \in [y_i, y_{i+1}), \quad G(x, y, t) = G(x, y_i, t) + \int_{y_i}^y [\eta + tv_i - x] d\eta \\ = G(x, y_i, t) + \frac{y^2 - y_i^2}{2} + (y - y_i)[tv_i - x].$$

On a alors

$$\lim_{|y| \rightarrow +\infty} G(x, y, t) = \lim_{|y| \rightarrow +\infty} \frac{y^2}{2} = +\infty;$$

ce qui prouve que la fonction  $G(x, \cdot, t)$  est minorée, et atteint son minimum absolu sur un compact. Donc pour tout  $(x, t)$ , les points  $y_*(x, t)$  et  $y^*(x, t)$  existent. Nous obtenons les résultats suivants.

### 6.2.1 Proposition

Pour tout  $(x, t)$ , il existe un unique couple  $(n, m)$  tel que  $n \leq m$  et

$$y_*(x, t) = x - tv_n \in (y_n, y_{n+1}), \quad y^*(x, t) = x - tv_m \in (y_m, y_{m+1}). \quad (6.2.2)$$



La solution  $u$  de l'équation de Burgers est alors donnée par

$$u(x-0, t) = v_n, \quad u(x+0, t) = v_m .$$

### Preuve de la Proposition

On a pour tout  $i$

$$\partial_y G(x, y, t) = y + tv_i - x =: G_y(x, y, t) \quad \forall y \in (y_i, y_{i+1}) .$$

Si un minimum local est atteint en  $y_i$ , alors

$$G_y(x, y_i - 0, t) \leq 0 \leq G_y(x, y_i + 0, t) ,$$

c'est-à-dire

$$y_i + tv_{i-1} - x \leq y_i + tv_i - x \quad \text{et} \quad v_{i-1} \leq v_i .$$

Ce qui est impossible par définition des  $v_i$ . Le minimum absolu est donc atteint dans au moins un intervalle  $(y_k, y_{k+1})$ . La fonction étant une parabole convexe sur  $(y_k, y_{k+1})$ , le minimum est atteint lorsque que  $G_y(x, y, t) = y + tv_k - x = 0$ , c'est-à-dire en  $y = x - tv_k \in (y_k, y_{k+1})$ . On en déduit (6.2.2). ■

Nous considérons maintenant la dynamique des particules collantes définie par la mesure  $P_0$  et la fonction de vitesse initiale  $V_0$  suivantes

$$P_0 = -du_0 = \sum_1^N [v_{i-1} - v_i] \delta_{y_i}, \quad V_0 = \sum_1^N \frac{v_i + v_{i-1}}{2} 1_{[y_i, y_{i+1})} .$$

La fonction

$$\{y_1, \dots, y_N\} \times \mathbb{R}_+ \ni (y_i, t) \mapsto \phi(y_i, t, P_0, V_0)$$

est le flot de ces particules, étudié au début du chapitre 1. Dans le théorème suivant, nous notons

$$\mathcal{S} := \{y_1, \dots, y_N\} \quad \text{et} \quad \phi_t(\cdot) := \phi(\cdot, t, P_0, V_0)$$

pour une commodité d'écriture.

### 6.2.2 Théorème

Pour tout  $(x, t)$ ,

$$y_*(x, t) < y^*(x, t) \iff x \in \phi(\mathcal{S}, t, P_0, V_0)$$

et dans ce cas,  $n$  et  $m$  définis par (6.2.2) vérifient

$$\phi_t^{-1}\{x\} = [y_{n+1}, y_m] ,$$

$$x = \frac{1}{v_n - v_m} \sum_{i=n+1}^m [v_{i-1} - v_i] \left[ y_i + t \frac{v_i + v_{i-1}}{2} \right] . \quad (6.2.3)$$

**Preuve du Théorème**

On va calculer  $x$  lorsque  $y_*(x, t) < y^*(x, t)$ . La technique utilisée servira pour le reste du théorème. D'après la proposition 6.2.1, il existe  $n < m$  tels que

$$y_*(x, t) = x - tv_n \in (y_n, y_{n+1}), \quad y^*(x, t) = x - tv_m \in (y_m, y_{m+1}).$$

On a alors

$$\begin{aligned} 0 &= G(x, y^*(x, t), t) - G(x, y_*(x, t), t) \\ &= \frac{y^*(x, t)^2 - y_*(x, t)^2}{2} - x[y^*(x, t) - y_*(x, t)] + tv_n[y_{n+1} - y_*(x, t)] \\ &\quad + t \sum_{i=n+1}^m v_i[y_{i+1} - y_i] - tv_m[y_{m+1} - y^*(x, t)]. \end{aligned}$$

On a le terme

$$tv_n y_{n+1} + t \sum_{i=n+1}^m v_i[y_{i+1} - y_i] - tv_m y_{m+1} = t \sum_{i=n+1}^m [v_{i-1} - v_i] y_i.$$

Grâce à l'égalité  $y_*(x, t) + tv_n = y^*(x, t) + tv_m$ , on obtient

$$x[y^*(x, t) - y_*(x, t)] = xt[v_n - v_m].$$

En utilisant les carrés  $(y_*(x, t) + tv_n)^2 = (y^*(x, t) + tv_m)^2$ , on obtient aussi

$$\frac{y^*(x, t)^2 - y_*(x, t)^2}{2} - tv_n y_*(x, t) + tv_m y^*(x, t) = \frac{t^2}{2} [v_n^2 - v_m^2].$$

Il en découle que

$$x[v_n - v_m] = \frac{t}{2} [v_n^2 - v_m^2] + \sum_{i=n+1}^m [v_{i-1} - v_i] y_i.$$

On en déduit (6.2.3) en remarquant que

$$v_n^2 - v_m^2 = \sum_{i=n+1}^m [v_{i-1} - v_i][v_{i-1} + v_i].$$

Pour tout  $x \in \phi(\mathcal{S}, t, P_0, V_0)$ , il existe  $l \leq r$  tels que  $[y_l, y_r] = \phi_t^{-1}\{x\}$ . On va montrer que  $n$  et  $m$  précédents vérifient  $l = n + 1$  et  $r = m$ , d'où  $y_*(x, t) < y^*(x, t)$ .

On a vu au chapitre 1 que

$$y_{l-1} + tV_0(y_{l-1}) < x \leq y_l + tV_0(y_l).$$

Comme  $V_0(y_l) < v_{l-1} < V_0(y_{l-1})$ , on obtient  $y_{l-1} + tv_{l-1} < x < y_l + tv_{l-1}$ . De même,  $y_r + tv_r < x < y_{r+1} + tv_r$ . Donc

$$\exists z_{l-1} \in (y_{l-1}, y_l), \exists z_r \in (y_r, y_{r+1}) \text{ t. q. } z_{l-1} + tv_{l-1} = z_r + tv_r = x.$$

Grâce à ces égalités, on calcule comme précédemment les accroissements de  $G(x, \cdot, t)$  sur  $\{z_{l-1}, z_r, y_*(x, t), y^*(x, t)\}$ . Si  $l \leq n$ , alors  $z_{l-1} < y_*(x, t)$  et

$$0 > G(x, y_*(x, t), t) - G(x, z_{l-1}, t) = t \sum_{i=l}^n [v_{i-1} - v_i] \left[ y_i + t \frac{v_i + v_{i-1}}{2} \right] - tx[v_{l-1} - v_n],$$

d'où

$$x = \phi(y_l, t, P_0, V_0) > \frac{\int_{[y_l, y_n]} [\eta + tV_0(\eta)] P_0(d\eta)}{P_0[y_l, y_n]}.$$

Si  $l > n + 1$ , alors  $z_{l-1} > y_*(x, t)$  et on obtient comme précédemment

$$x = \phi(y_l, t, P_0, V_0) \leq \frac{\int_{[y_{n+1}, y_{l-1}]} [\eta + tV_0(\eta)] P_0(d\eta)}{P_0[y_{n+1}, y_{l-1}]}.$$

Ces deux cas sont impossibles car  $y_l$  est une extrémité gauche à l'instant  $t$ . Donc  $l = n + 1$ , et on montre de même que  $r = m$ .

On va maintenant montrer que

$$x \notin \phi(\mathcal{S}, t, P_0, V_0) \implies y_*(x, t) = y^*(x, t).$$

Pour  $x \notin \phi(\mathcal{S}, t, P_0, V_0)$ , il existe  $y_r$  tel que

$$x_1 := \phi(y_r, t, P_0, V_0) < x < \phi(y_{r+1}, t, P_0, V_0) =: x_2.$$

On a alors

$$y_r < y^*(x_1, t) \leq y_*(x, t) \leq y^*(x, t) \leq y_*(x_2, t) < y_{r+1}.$$

D'où  $y_*(x, t) = y^*(x, t) = x - tv_r$ . ■

### 6.2.3 Remarque

On peut prendre  $u_0$  telle que  $v_i \geq v_{i+1}$ ,  $\forall i$ . Alors pour tout  $(x, t)$ , il existe  $n \leq m$ ,  $k \geq 0$  et  $p \geq 0$  tels que

$$\begin{aligned} v_{n-k-1} > v_{n-k} = v_n > v_{n+1} & \text{ et } y_*(x, t) = x - tv_n \in (y_{n-k}, y_{n+1}), \\ v_{m-1} > v_m = v_{m+p} > v_{m+p+1} & \text{ et } y^*(x, t) = x - tv_m \in (y_m, y_{m+p+1}). \end{aligned}$$

De plus,  $y_{n+1}$  et  $y_m$  vérifient le théorème précédent.

Ce théorème montre que pour tout point de discontinuité  $(x, t)$  de la solution  $u$  de (6.2.1),  $x$  est la position à l'instant  $t$  d'un groupe de particules de masse  $u(x - 0, t) - u(x + 0, t)$ . Le théorème suivant généralise ce résultat à une classe plus large de fonctions  $u_0$ .

Pour toute fonction  $u_0$ , soit  $u$  la solution de l'équation (6.2.1) de donnée initiale  $u_0$ . Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , soit  $u^N$  la solution de l'équation (6.2.1) de donnée initiale

$$u_0^N = \sum_{i=0}^N u_0(y_i) 1_{[y_i, y_{i+1})} \quad \text{où } -\infty = y_0 < y_1 < \dots < y_{N+1} = +\infty, \quad (6.2.4)$$

et soient

$$P_0^N = -du_0^N = \sum_1^N [u_0(y_{i-1}) - u_0(y_i)] \delta_{y_i} \quad \text{et} \quad V_0^N = \sum_1^N \frac{u_0(y_i) + u_0(y_{i-1})}{2} 1_{[y_i, y_{i+1})}.$$

Si la fonction  $u_0$  est bornée et décroissante, nous considérons le flot  $\phi(\cdot, \cdot, -du_0, u_0)$  des particules collantes. Pour tout  $(x, t)$ , soit la vitesse  $w(x, t)$  de la particule qui se trouve à la position  $x$  à l'instant  $t$ . La fonction  $w$  est définie à partir du flot (voir chapitre 2).

Dans le théorème suivant, nous notons par  $\mathcal{S}$  le support de la mesure  $du_0$ , et identifions  $u$  comme étant la vitesse  $w$  des particules collantes.

#### 6.2.4 Théorème

Si  $u_0$  est continue, décroissante et bornée, alors

$$u(x-0, t) \neq u(x+0, t) \iff x \in \phi(\mathcal{S}, t, -du_0, u_0) \quad \text{et} \quad \phi_t^{-1}\{x\} \text{ est un intervalle.}$$

De plus

$$\begin{aligned} \forall x \in \phi(\mathcal{S}, t, -du_0, u_0), \quad \phi_t^{-1}\{x\} &=: [\alpha, \beta] \quad \text{vérifie} \\ y_*(x, t) = x - tu_0(\alpha) &\leq \alpha \leq \beta \leq y^*(x, t) = x - tu_0(\beta), \\ \text{d'où} \quad u(x-0, t) &= w(x-0, t), \quad u(x+0, t) = w(x+0, t). \end{aligned}$$

Si

$$\left( \max_{0 \leq i \leq N} |y_{i+1} - y_i|, \xi, \tau \right) \rightarrow (0, x, t), \quad \text{alors}$$

$$u(x+0, t) \leq \liminf u^N(\xi, \tau) \leq \limsup u^N(\xi, \tau) \leq u(x-0, t);$$

et on a la convergence uniforme sur tout compact

$$\phi(\cdot, \cdot, -du_0^N, V_0^N) \rightarrow \phi(\cdot, \cdot, -du_0, u_0), \quad \max_{0 \leq i \leq N} |y_{i+1} - y_i| \rightarrow 0.$$

Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , les lignes de discontinuité de  $u^N$  coïncident avec le flot des particules collantes  $\phi(\cdot, \cdot, -du_0^N, V_0^N)$ .

Dans le chapitre 2 (théorème 2.5.2), nous avons montré la convergence uniforme sur tout compact des flots

$$\phi(\cdot, \cdot, -du_0^N, V_0^N) \rightarrow \phi(\cdot, \cdot, -du_0, u_0), \quad \max_{0 \leq i \leq N} |y_{i+1} - y_i| \rightarrow 0.$$

Ces résultats montrent donc que les lignes de discontinuité de  $u^N$  convergent vers celles de  $u$ .

Avant de démontrer le théorème 6.2.4, on remarque que pour tout  $(x, t, z_1, z_2)$ ,

$$\int_{z_1}^{z_2} [\eta + tu_0(\eta)] d\eta = t \int_{z_1}^{z_2} [\eta + tu_0(\eta)] P_0(d\eta) + \frac{(z_2 + tu_0(z_2))^2 - (z_1 + tu_0(z_1))^2}{2}. \quad (6.2.5)$$

En effet, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} - \int_{z_1}^{z_2} \eta du_0(\eta) - t \int_{z_1}^{z_2} u_0 du_0 &= -z_2 u_0(z_2) + z_1 u_0(z_1) + \int_{z_1}^{z_2} u_0(\eta) d\eta - \frac{t}{2} \int_{z_1}^{z_2} d(u_0^2) \\ &= \int_{z_1}^{z_2} u_0(\eta) d\eta - z_2 u_0(z_2) + z_1 u_0(z_1) - \frac{t}{2} (u_0(z_2)^2 - u_0(z_1)^2) \\ &= \int_{z_1}^{z_2} u_0(\eta) d\eta + \frac{(z_1 + tu_0(z_1))^2 - (z_2 + tu_0(z_2))^2 - z_1^2 + z_2^2}{2t} \\ &= \frac{1}{t} \int_{z_1}^{z_2} [\eta + tu_0(\eta)] d\eta + \frac{(z_1 + tu_0(z_1))^2 - (z_2 + tu_0(z_2))^2}{2t}. \end{aligned}$$

#### Preuve du Théorème 6.2.4

Si  $x \in \phi(\mathcal{S}, t, -du_0, u_0)$ , alors  $[\alpha, \beta] := \phi_t^{-1}\{x\}$  vérifie  $\beta + tu_0(\beta) \leq x \leq \alpha + tu_0(\alpha)$ . On va utiliser les deux possibilités  $x = \alpha + tu_0(\alpha)$  ou  $x < \alpha + tu_0(\alpha)$ . On a  $x < \alpha + tu_0(\alpha)$  seulement lorsque  $\alpha$  n'est pas une accumulation de particules à gauche :  $\alpha \notin \mathcal{S}_-$ . Dans ce cas, il existe une extrémité droite  $z < \alpha$  telle que

$$du_0(z, \alpha) = 0 = u_0(\alpha) - u_0(z), \quad z + tu_0(z) \leq \phi(z, t, -du_0, u_0) < x < \alpha + tu_0(\alpha).$$

On a alors  $x - tu_0(\alpha) =: z_1 \in (z, \alpha)$ . La fonction  $u_0$  étant constante sur  $[z, \alpha]$ , on obtient

$$z_1 + tu_0(z_1) = x.$$

Par ailleurs, la fonction

$$\mathbb{R} \ni y \mapsto G(x, y, t) = \int_0^y [\eta + tu_0(\eta) - x] d\eta$$

a une dérivée continue  $y \mapsto G_y(x, y, t) = y - tu_0(y) - x$  qui s'annule en  $y_*(x, t)$  et  $y^*(x, t)$ . Donc

$$y_*(x, t) + tu_0(y_*(x, t)) = x = y^*(x, t) + tu_0(y^*(x, t)).$$

On en déduit, en posant  $z_2 = y_*(x, t)$  dans (6.2.5), que

$$\begin{aligned} t \int_{y_*(x, t)}^{\alpha} [\eta + tu_0(\eta)] P_0(d\eta) &= t \int_{y_*(x, t)}^{z_1} [\eta + tu_0(\eta)] P_0(d\eta) = \int_{y_*(x, t)}^{z_1} [\eta + tu_0(\eta)] d\eta \\ &= G(x, z_1, t) - G(x, y_*(x, t), t) + x(z_1 - y_*(x, t)). \end{aligned}$$

Comme

$$z_1 - y_*(x, t) = t[u_0(y_*(x, t)) - u_0(\alpha)] = tP_0[y_*(x, t), \alpha] ,$$

on obtient

$$\int_{y_*(x, t)}^{\alpha} [\eta + tu_0(\eta)] P_0(d\eta) - xP_0[y_*(x, t), \alpha] = \frac{G(x, z_1, t) - G(x, y_*(x, t), t)}{t} .$$

Il en découle par définition de  $\alpha$  et  $y_*(x, t)$  que le cas  $z_1 \neq y_*(x, t)$  est impossible, donc  $y_*(x, t) = x - tu_0(\alpha)$ . De même,  $y^*(x, t) = x - tu_0(\beta)$ .

Si  $x \notin \phi(S, t, -du_0, u_0)$ , il existe  $x_1, x_2 \in \phi(S, t, -du_0, u_0)$  tels que

$$x_1 = \phi(\beta_1, t, -du_0, u_0) < x < x_2 = \phi(\alpha_2, t, -du_0, u_0) ,$$

où  $\beta_1$  et  $\alpha_2$  sont respectivement des extrémités droite et gauche à l'instant  $t$ , et vérifient

$$\beta_1 < \alpha_2, \quad du_0(\beta_1, \alpha_2) = 0 = u_0(\alpha_2) - u_0(\beta_1) .$$

Par croissance de la fonction  $y(\cdot, t)$ , on a

$$y^*(x_1, t) \leq y_*(x, t) \leq y^*(x, t) \leq y_*(x_2, t) .$$

En outre,

$$\beta_1 \leq x_1 - tu_0(\beta_1) = y^*(x_1, t) \leq y_*(x_2, t) = x_2 - tu_0(\beta_1) \leq \alpha_2 .$$

Donc

$$y_*(x, t), y^*(x, t) \in [\beta_1, \alpha_2] .$$

D'autre part,  $u_0$  étant constante sur  $[\beta_1, \alpha_2]$ ,  $G(x, \cdot, t)$  est une parabole sur  $[\beta_1, \alpha_2]$  dont la dérivée s'annule en  $x - tu_0(\beta_1) \in (\beta_1, \alpha_2)$ . On en déduit que

$$y_*(x, t) = y^*(x, t) = x - tu_0(\beta_1) .$$

Pour démontrer le reste du théorème, nous considérons les fonctions  $y^N$  et  $y$  qui définissent respectivement  $u^N$  et  $u$ . Pour tout  $(x, t)$ , nous allons montrer que  $[y(x-0, t), y(x+0, t)]$  contient tous les points d'accumulation des points  $y^N(\xi, \tau)$  lorsque

$$\left( \max_{0 \leq i \leq N} |y_{i+1} - y_i|, \xi, \tau \right) \rightarrow (0, x, t) .$$

Soit  $z$  un de ces points d'accumulation. La fonction

$$z' \mapsto G^N(\xi, z', \tau) = \int_0^{z'} [\eta + \tau u_0^N(\eta)] d\eta - \xi z'$$

a pour minimum absolu  $G^N(\xi, y^N(\xi, \tau), \tau)$ . Lorsque  $\max_{0 \leq i \leq N} |y_{i+1} - y_i| \rightarrow 0$ , on a la convergence uniforme sur tout compact de  $G^N$  vers  $G$ . En effet, il suffit de remarquer que pour tout  $(\xi, \tau)$  et pour tout compact  $[z_1, z_2]$ ,

$$\begin{aligned} \sup_{z_1 \leq z' \leq z_2} |G^N(\xi, z', \tau) - G(\xi, z', \tau)| &\leq \int_{z_1}^{z_2} |u_0^N(\eta) - u_0(\eta)| d\eta \\ &\leq (z_2 - z_1) \sup_{z_1 \leq \eta \leq z_2} |u_0^N(\eta) - u_0(\eta)|, \end{aligned}$$

avec le terme de droite qui tend vers zéro. Il en découle que  $G(x, z, t)$  est le minimum absolu de la fonction  $G(x, \cdot, t)$ , donc  $z \in [y(x-0, t), y(x+0, t)]$ .

Ainsi, on obtient

$$y(x-0, t) \leq \liminf y^N(\xi, \tau) \leq \limsup y^N(\xi, \tau) \leq y(x+0, t).$$

On en déduit le résultat cherché. ■

# Conclusion

L'objet de cette thèse est de comprendre et de donner une définition précise du modèle des particules collantes, car ce dernier joue un rôle central dans la résolution du système d'équations de gaz sans pression

$$\begin{cases} \partial_t(\rho) + \partial_x(u\rho) = 0, & \partial_t(u\rho) + \partial_x(u^2\rho) = 0; \\ \rho(dx, t) \rightarrow P_0, & u(x, t)\rho(dx, t) \rightarrow v_0(x)P_0(dx) \quad \text{faiblement, lorsque } t \rightarrow 0^+ . \end{cases}$$

Nous avons abordé ce problème sous un angle nouveau, à l'aide d'enveloppes convexes définies à partir de la distribution initiale de la masse  $P_0$ , et de la vitesse initiale  $v_0$  qui peut avoir des sauts négatifs. D'abord, nous définissons l'état initial du système de particules par la fonction  $m \in (0, 1) \mapsto F_0^{-1}(m)$  qui définit les quantiles de la fonction de répartition  $F_0$  de  $P_0$ . Avant le premier choc, la position du quantile d'ordre  $m$ , à l'instant  $t$ , est donnée par  $F_0^{-1}(m) + tv_0(F_0^{-1}(m))$ . Après le premier choc, cette fonction (de  $m$ ) cesse d'être croissante, et donc sa primitive  $m \mapsto \int_{\frac{1}{2}}^m (F_0^{-1}(z) + tv_0(F_0^{-1}(z))) dz$  cesse d'être convexe. L'état du système, à l'instant  $t$ , est déterminé par l'enveloppe convexe  $H(\cdot, t)$  de cette dernière fonction. Plus précisément, la position du quantile d'ordre  $m$  est donnée par la dérivée partielle  $\partial_m H(m, t)$ .

Le modèle des particules collantes permet de construire un processus stochastique, solution de l'équation aux dérivées partielles

$$dX_t = E[v_0(X_0)/X_t]dt, \quad \text{Loi}(X_0) = P_0. \quad (\text{EDS})$$

La solution est donnée par le processus  $X_t(m) = \partial_m H(m, t)$ , défini sur l'espace probabilisé  $([0, 1], \mathcal{B}, \lambda)$ , où  $\lambda$  désigne la mesure de Lebesgue. Nous obtenons aussi, sur l'espace probabilisé  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_0)$ , un processus stochastique  $(y, t) \mapsto \phi(y, t)$ , qui est solution de (EDS) et qui modélise les trajectoires des particules collantes. Cette solution est non seulement l'unique qui soit un processus de Markov, mais aussi l'unique telle que  $X_t$  soit une fonction croissante et continue de  $X_0$ . En outre, les processus

$$(m, t) \mapsto \phi(F_0^{-1}(m), t, P_0, v_0), \quad (m, t) \mapsto \partial_m H(m, t)$$

s'avèrent indistinguables.

Grâce aux lois marginales  $\rho(dx, t)$  de ce processus, nous résolvons directement, et d'une manière probabiliste, des équations dont les solutions ont, jusqu'ici, été obtenues



par discrétisations. Nous montrons que la fonction  $(x, t) \mapsto M(x, t) = \rho((-\infty, x], t)$  est la solution entropique de la loi de conservation scalaire

$$\partial_t M + \partial_x(A(M)) = 0, \quad M_0(x) = F_0(x),$$

où le flux  $A$  représente la quantité de mouvement

$$A(m) = \int_0^m v_0(F_0^{-1}(z)) dz, \quad \forall m \in (0, 1).$$

Pour tout  $t$ ,  $M(\cdot, t)$  est la fonction de répartition de la masse des particules à l'instant  $t$ ; elle est liée au flux par l'équation

$$A(M(x, t)) = \mathbb{E} [v_0(X_0) 1_{\{X_t \leq x\}}], \quad \forall (x, t).$$

En outre, la fonction  $\psi(x, t) = \int_0^t M(y, t) dy$  est la solution de viscosité de l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\partial_t \psi + A(\partial_x \psi) = 0, \quad \psi_0(x) = \int_0^t F_0(y) dy;$$

et une solution faible du système de gaz sans pression est donnée par

$$(\rho(dx, t), u(x, t) := \mathbb{E}[v_0(X_0)/X_t = x], t > 0).$$

Après avoir généralisé ces résultats probabilistes aux mesures de Radon, nous terminons en montrant que la vitesse des particules collantes

$$u(x, t) = \mathbb{E}[v_0(X_0)/X_t = x],$$

avec  $P_0 = |dv_0|$ , ou  $P_0 = \lambda$  la mesure de Lebesgue, est la solution entropique de l'équation de Burgers

$$u_t + uu_x = 0, \quad u(x, 0) = v_0(x).$$

Notre approche des particules collantes a les avantages suivants :

1. elle étend la définition du modèle des particules collantes de [25] à une distribution initiale de la masse quelconque, et une vitesse initiale non forcément continue;
2. elle donne une solution directe à l'équation (EDS) précédente, sans passer par l'approximation de Dermoune [15]; de plus, elle généralise la résolution à  $X_0$  quelconque et  $v_0$  non forcément continue;
3. elle permet de résoudre, sans utiliser la discrétisation, l'équation de Hamilton-Jacobi, la loi de conservation scalaire, ainsi que le système de gaz sans pression;
4. elle permet d'étendre ces résultats, notamment la résolution probabiliste, aux mesures de Radon.

# Bibliographie

- [1] D. J. Aldous. Weak convergence and the general theory of processes (Unpublished).
- [2] M. Bardi, L. C. Evans. On Hopf's formula for solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Nonlinear Anal.*, 8 , pp. 1373-1381 (1984).
- [3] M. T. Barlow, S. D. Jacka. Tracking a diffusion and an application to convergence. *In : Kendall, D.G. (ed.) Analytic and geometric statistics Applied Probability Trust* (1986).
- [4] Y. Brenier, E. Grenier. Sticky particles and scalar conservation laws. *Siam. Journal of Numer. Anal.*, Vol. 35, No. 6, pp. 2317-2328 (December 1998).
- [5] F. Bouchut, F. James. Duality solutions for pressureless gases, monotone scalar conservation laws, and uniqueness. *Commun. In PDE*, 24 (11 & 12), pp. 2173-2189 (1999).
- [6] F. Bouchut, F. James. Differentiability with respect to initial data for a scalar conservation law. *International Series Num. Math.* 129, Birkhäuser, pp. 113-118 (1999).
- [7] J. M. Burgers. The non-linear diffusion equation. *Dordrecht : D. Reidel* (1974).
- [8] F. Coquet, J. Mémin, L. Slominski. On the weak convergence of filtrations. *Séminaire de Probabilités XXXV, Lect. Notes in Math.*, 1755, pp. 306-328 (2001).
- [9] M. G. Crandall and P. L. Lions. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol 277, pp. 1-42 (1983).
- [10] M. G. Crandall and P. L. Lions. Conditions d'unicité pour les solutions généralisées des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B* 292, pp 183-186 (1981).
- [11] M. G. Crandall, L. C. Evans and P. L. Lions. Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 282, No 2 (april 1984).
- [12] C.M. Dafermos. Polygonal approximations of solutions of the initial value problem for a conservation law. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 38, pp. 33-41 (1972).
- [13] Yu. Davydov. Enveloppes convexes des processus gaussiens. *Ann. I. H. Poincaré - PR* 38, pp. 847-861 (2002).
- [14] A. Dermoune. The inviscid Burgers equation with initial value of Poissonian type. *Journal of Stat. Phys.* Vol 88, No 3/4, 873-883 (1997).

- [15] A. Dermoune. Probabilistic interpretation for system of conservation law arising in adhesion particle dynamics. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 5 (1998).
- [16] A. Dermoune. Probabilistic interpretation of sticky particles model. *The Annals of Probability*, Vol. 27, No. 3, pp. 1357-1367 (1999).
- [17] A. Dermoune. Sticky particles and propagation of chaos. *Nonlinear Analysis*, Vol. 45, pp. 529-541 (2001).
- [18] A. Dermoune. Stability of stochastic differential equation with measurable drift. *Pub. IRMA, Vol. 57, No IV*, Lille (2002).
- [19] A. Dermoune. Propagation and conditional propagation of chaos for pressureless gaz equations. To appear in *Probab. Th. Rel. Fields* (2003).  
*Pub. IRMA, Vol. 59, No V*, Lille (2002).
- [20] A. Dermoune, B. Djehiche. Pressureless gaz equations with viscosity and nonlinear diffusion. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 332, série I, pp. 745-750 (2001).
- [21] A. Dermoune, B. Djehiche. Global solution of the pressureless gaz equation with viscosity. *Physica D 163*, pp. 184-190 (2002).
- [22] A. Dermoune, H. Machrafi, O. Moutsinga. Generalized variational principles. *Pub. IRMA, Vol. 52, No V*, Lille (2000).
- [23] A. Dermoune, H. Machrafi, O. Moutsinga. Sticky particle particles, scalar conservation laws and pressureless gas equations. *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications III, Progress in Probability*, Vol. 52, pp. 111-120 (2002).
- [24] A. Dermoune, O. Moutsinga. Generalized variational principles. *Séminaire de Probabilités XXXVI, Lect. Notes in Math.*, 1801, pp. 183-200 (2002).
- [25] Weinan E, Yu. G. Rykov, Ya. G. Sinai. Generalized variational principles, global weak solutions and behavior with random initial data for systems of conservation laws arising in adhesion particle dynamics. *Commun. Math. Phys.* 177, pp. 349-380 (1996).
- [26] A. F. Phillipov. Differential equations with discontinuous righthand side. *AMS Transl.*, 42(2), pp. 199-231 (1964).
- [27] E. Grenier. Existence globale pour le système des gaz sans pression. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 321, Série I, pp. 171-174 (1995).
- [28] D. N. Hoover. Convergence in distribution and Skorokhod convergence for the general theory of processes. *Probab. Th. Rel. Fields*, 89, pp. 239-259 (1991).
- [29] F. Huang, Z. Wang. Well posedness for pressureless flow. *Commun. Math. Phys.*, 222, pp. 117-146 (2001).
- [30] E. Hopf. The partial differential equation  $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ . *Comm. Pure Appl. Math.* 3, pp. 201-230 (1950).
- [31] J. Li, G. Warnecke. Generalized characteristics and the uniqueness of entropy solutions to zero-pressure gaz dynamics. *Preprint. Institut für Analysis und Numerik, Magdeburg, Germany* (2001).

- [32] J. Li, G. Warnecke. On measure solutions to the Zero-pressure gas model and their uniqueness. *Math. Bohem.* 127, No.2, pp. 265-273 (2002).
- [33] J. LI, T. Zhang et S. Yang. The two-dimensional Riemann problem in gaz dynamics. *Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics*, 98, Longman, Harlow (1998).
- [34] O. Moutsinga. Equations de gaz sans pression avec une distribution initiale de Radon. *Pub. IRMA, Vol. 57, No VIII*, Lille (2002).
- [35] Denis Serre. Systèmes de lois de conservation I. *Fondations, Arts et Sciences*, (1996).
- [36] M. Sever. A class of nonlinear, nonhyperbolic systems of conservation laws with well-posed initial value problems. *J. of Dif. Eq.*, 180, 238-271 (2002).
- [37] S. Shandarin et Ya. B. Zeldovich. The large structure of the universe : turbulence, intermittency, strutures in a self-gravitng medium. *Rev. Mod. Phys.*, 61, pp. 185-220 (1989).
- [38] G. R. Shorack et J. A. Wellner. Empirical processes with applications to statistics. *Wiley series in prob. and math. stat.* (1986).
- [39] A. V. Skorokhod. Limit theorems for stochastic processes. *Theory Prob. Appl.* 1, pp. 261-290 (1979).
- [40] A. I. Volpert. The space  $BV$  and the quasilinear equations. *Math. sb.*, 73, pp. 225-302 (1967).  
English translation in *Math. USSR, Sbornik*, 21, pp. 225-267 (1967).
- [41] Z. Wang, F. Huang, X. Ding. On the Cauchy problem of transportation equations. *Acta Math. Appl. Sin.*, 13, No.2, pp. 113-122 (1997).
- [42] Z. Wang, X. Ding. Uniqueness of generalized solution for the Cauchy problem of transportation equations. *Acta Math. Sci.*, 17, No.3, 341-352 (1997)
- [43] Ya. B. Zeldovich. Gravitational instability ; an approximation theory for large density perturbations. *Astron. Astrophys.*, 5, pp. 84-89 (1970).