



**HAL**  
open science

# Deux études d'un instrument de musique de type clarinette : analyse des fréquences propres du résonateur et calcul des auto-oscillations par décomposition modale

Vincent Debut

## ► To cite this version:

Vincent Debut. Deux études d'un instrument de musique de type clarinette : analyse des fréquences propres du résonateur et calcul des auto-oscillations par décomposition modale. Acoustique [physics.class-ph]. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2004. Français. NNT: . tel-00008711

**HAL Id: tel-00008711**

**<https://theses.hal.science/tel-00008711>**

Submitted on 7 Mar 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LA MEDITERRANEE  
AIX-MARSEILLE II

Spécialité:  
Acoustique

présentée par

Vincent DEBUT

pour obtenir le grade de  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE LA MEDITERRANEE  
AIX-MARSEILLE II

**Deux études d'un instrument de musique de type  
clarinette :**

**Analyse des fréquences propres du résonateur et  
calcul des auto-oscillations par décomposition  
modale**

Soutenue le 27 octobre 2004

devant le jury composé de :

M. Antoine Chaigne	<i>Président</i>
M. José Antunes	<i>Rapporteur</i>
M. Jean-Pierre Dalmont	<i>Rapporteur</i>
M. Sergio Bellizzi	<i>Examineur</i>
M. Jean Kergomard	<i>Directeur de thèse</i>
M. Franck Laloë	<i>Co-directeur de thèse</i>
M. Cornelis J. Nederveen	<i>Invité</i>

*A Robert,*

# Remerciements

Mes remerciements sont tout naturellement adressés à tous ceux qui ont rendu ce travail possible et donc en premier lieu à mes parents qui m’ont toujours soutenu et encouragé dans mes études que ce soit à Brive, Toulouse, Paris, Le Mans ou Marseille. Ils ne s’imagineront jamais à quel point je les aime.

Je remercie Jean Kergomard pour son investissement et l’attention dont il a fait preuve lors de la direction de ce travail. Merci de m’avoir tantôt guidé, tantôt laissé faire. Merci pour les suggestions, les discussions, les corrections et les re-re-lectures. Je pense avoir beaucoup appris pendant ces trois années de thèse.

J’adresse mes remerciements à José Antunes et Jean-Pierre Dalmont pour l’intérêt qu’ils ont porté à mon travail. Je les remercie pour leur lecture attentive de ce manuscrit, et pour les critiques et suggestions judicieuses qu’ils ont proposées. Un remerciement particulier à Jean-Pierre Dalmont pour son accueil au LAUM et les discussions enrichissantes d’une semaine bien remplie.

Je tiens aussi à remercier Franck Laloë pour ses précieux conseils de *physicien* et sa disponibilité pour répondre à mes interrogations.

Merci à Antoine Chaigne et Sergio Bellizzi d’avoir bien voulu prendre part au jury de thèse. Je remercie particulièrement Sergio Bellizzi d’avoir passé du temps à comprendre les “fingerings” et autres subtilités de la clarinette, et de son aide pour les aspects numériques de mon travail.

Je tiens à remercier Guy Deplus, Claude Desurmond, Robert Fontaine et Dominique Vidal pour avoir pris le temps de répondre à mes questions lorsque que je les ai sollicités.

Je n’oublierai pas certains enseignants-chercheurs que j’ai eu la chance d’avoir et/ou rencontrer durant mon parcours. Merci à Jean-Pierre Ulmet, Claude Legros, Jacques Degauques, Laurent Millot et l’équipe enseignante du DEA d’Acoustique Appliquée de l’université du Maine et tout particulièrement Bernard Castagnède et Michel Bruneau.

Un grand nombre de personnes ont contribué à ce travail directement ou indirectement en rythmant 24 heures sur 24 ces trois années. Je remercie spécialement les *Pink Floyd* du LMA, Olivier Brivois, Fred Gibaudan et Loïc Le Marrec, toujours présents et sans qui ces trois années n’auraient, à coup sûr, pas été les mêmes. Merci à mes compagnons de bureau, Olivier Gipouloux et Jonathan Terroir qui ont réussi à ne pas craquer, et à Yohan *Boulet 1* Lechevalier, colloc’/collègue de la première heure. Je ne peux oublier l’ensemble de l’équipe s2M, les barbec’ et les cafés qui vont avec. Un merci spécial à mes soeurs adorées Béatrice et Marie toujours à mes côtés, qu’importe la distance. Un *abrazo gigante* à Luisita, *mi princesa azul*. Des mercis à Mérouane pour son accueil, aux “japonais” Snorre et André, à Isa pour ses tests, à Anne pour son quotidien et aussi à Bloen, Nathalie, El gato, La Peña, Alex, l’équipe du *Train en Marche* et son staff Jé, Béberty, Bouy et Paulo. Enfin, j’adresse à tout ceux qui savent que je ne les oublie pas, un grand **MERCI** pour tout ce qu’il y a eu jusqu’à présent.



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>9</b>
<b>I Analyse et optimisation de la justesse des douzièmes pour un résonateur de type clarinette</b>	<b>11</b>
<b>Présentation et résumé en français</b>	<b>13</b>
1.1 Introduction	15
1.2 Generalities on the clarinet	16
1.2.1 Definitions	16
1.2.2 Inharmonicity and sound production	17
1.2.3 Method and approximation	19
1.3 Length correction and inharmonicity produced by a small perturbation: analysis of the different effects for a real clarinet resonator	19
1.3.1 Length corrections: definition	20
1.3.2 Inharmonicity of the resonance frequencies	20
1.3.3 Length corrections and inharmonicity formulae for acoustic basic systems	20
1.3.4 Other effects: radiation, dispersion and temperature	30
1.3.5 Theoretical analysis of a clarinet resonator	31
1.3.6 Comparison between theory and measurements	35
1.3.7 Discussion and conclusions	36
1.4 Optimization of the location of the register hole and tuning corrections: statement of the problem	39
1.4.1 Assumptions	39
1.4.2 Formulation of the optimization problem	39
1.4.3 Criterion functions	40
1.5 Results and discussions	41
1.5.1 Register hole location	41
1.5.2 Adjustements of natural frequencies by means of small changes of the bore	44
1.6 Conclusion	48

<b>II</b>	<b>Calcul des auto-oscillations d'un instrument à anche par décomposition modale</b>	<b>49</b>
	<b>Introduction</b>	<b>53</b>
<b>1</b>	<b>Tuyau sonore excité par une source localisée</b>	<b>55</b>
1.1	Position du problème . . . . .	55
1.2	Etablissement des équations du résonateur avec amortissement . . . . .	57
1.3	Présentation de deux formulations du problème de propagation . . . . .	59
1.3.1	Formulation avec condition de type Neumann à l'entrée . . . . .	59
1.3.2	Formulation avec condition absorbante à l'entrée . . . . .	60
1.3.3	Solutions intégrales du problème de propagation . . . . .	61
1.4	Conclusion . . . . .	63
<b>2</b>	<b>Décomposition modale et formulation des auto-oscillations</b>	<b>67</b>
2.1	Introduction . . . . .	67
2.1.1	Problème de Green et la solution élémentaire . . . . .	67
2.1.2	Modes propres : définitions dans le domaine fréquentiel . . . . .	68
2.1.3	Modes de résonance . . . . .	68
2.2	Développement de la fonction de Green sur les modes propres avec condition de Neumann à l'entrée . . . . .	69
2.2.1	Calcul des modes propres . . . . .	69
2.2.2	Développement modal . . . . .	69
2.3	Développement de la fonction de Green sur les modes de résonance . . . . .	72
2.3.1	Solution compacte dans le domaine fréquentiel . . . . .	72
2.3.2	Calcul des pôles . . . . .	73
2.3.3	Position des pôles . . . . .	75
2.3.4	Calcul des résidus . . . . .	75
2.3.5	Fonction de Green décomposée sur les modes . . . . .	75
2.3.6	Cas d'une terminaison active . . . . .	76
2.3.7	Validation de la forme décomposée . . . . .	77
2.4	Mise sous forme d'équations différentielles des auto-oscillations . . . . .	78
2.4.1	Problème avec condition de Neumann à l'entrée . . . . .	80
2.4.2	Problème avec condition parfaitement absorbante à l'entrée . . . . .	81
2.5	Discussions . . . . .	82
<b>3</b>	<b>Résultats des simulations temporelles et validation de la méthode</b>	<b>83</b>
3.1	Conditions initiales . . . . .	83
3.2	Réduction à un mode : un oscillateur de Van der Pol . . . . .	85
3.2.1	Approche de la dynamique du modèle au seuil d'oscillation . . . . .	86
3.2.2	Approche de la solution au seuil d'oscillation . . . . .	88
3.2.3	Simulations numériques . . . . .	91
3.3	Résonateur multimodes - Simulations numériques . . . . .	98
3.3.1	Comportement du système . . . . .	99
3.3.2	Convergence et confrontation de la méthode avec l'équilibrage harmonique . . . . .	106
3.3.3	Discussions . . . . .	113
<b>4</b>	<b>Conclusions - perspectives</b>	<b>117</b>

---

<b>Annexes</b>	<b>123</b>
<b>A Exact calculation of length corrections</b>	<b>123</b>
<b>B Effect of the resistive term in the hole impedance on resonance frequencies</b>	<b>125</b>
<b>C Calculs d'inharmonicité: comparaison des résultats obtenus par calcul de corrections de longueur et par matrices de transfert</b>	<b>129</b>
<b>D Compte rendu d'interview de clarinettes</b>	<b>135</b>
<b>E Resonance modes in a 1D medium with purely absorbing boundaries conditions</b>	<b>137</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>161</b>





# Introduction générale

L’acoustique des instruments de musique a pour but principal de fournir des modèles d’instruments et des méthodes de calcul pour comprendre et expliquer le fonctionnement des instruments de musique. L’étude des modèles et l’exploitation des résultats ont pour but la mise au point d’outils pour la synthèse sonore et la facture instrumentale.

Les premières théories, initiées par Bernoulli, se sont intéressées essentiellement aux fréquences de jeu. Il supposait que ce sont les fréquences propres d’un résonateur dans lequel l’excitation est simplement remplacée par une condition aux limites élémentaires (tuyau fermé pour les anches, ouvert pour les flûtes). Il a ainsi mis en évidence le rôle primordial du résonateur, dont la forme et les dimensions fixent principalement la hauteur de la note. L’approche théorique reposant sur un modèle linéarisé [5, 81, 34] confirme cette théorie en démontrant, pour un instrument à anche, qu’il ne peut y avoir d’oscillations stables (donc production du son) que si la fréquence de jeu correspond à un maximum de son impédance d’entrée, ou plus précisément, à un zéro de la partie imaginaire de l’admittance d’entrée. Jusque là il n’y pas d’explications liées au contenu harmonique du son, mais bien des résultats concernant les fréquences de jeu ont été obtenus [65], et leur utilisation a permis par exemple la mise au point et le développement de systèmes micro-intervalles pour les instruments à vent [60].

L’étude du système complet incluant la non-linéarité a commencé dans les années 1960, et deux axes de recherche peuvent être distingués. Le premier concerne l’influence qualitative de la non-linéarité sur les fréquences de jeu et le timbre, en s’intéressant à la courbe d’impédance d’entrée. Benade explique ainsi l’existence de *régime d’oscillations* [13] et relie la facilité d’émission d’une note à l’harmonicité des pics de résonances de l’impédance d’entrée de l’instrument. Il s’ensuit de nombreux travaux [9, 10, 65] dont le but est de prédire et améliorer les qualités musicales des instruments à vent. Récemment, leur exploitation a donné des outils d’aide à la facture [74, 46].

Le second axe s’attache à décrire en détail la production d’une note, en faisant notamment le lien avec les systèmes dynamiques. L’approche fréquentielle [82, 38] permet l’accès aux solutions stationnaires du régime périodique. Elle renseigne sur la hauteur de la note et l’évolution du spectre en fonction des paramètres du modèle [68] mais ne permet pas de conclure quant à la validité “physique” des solutions, c’est-à-dire leur stabilité. Ce sont les méthodes temporelles qui permettent de combler ce manque en testant un modèle à partir conditions initiales. La solution temporelle répond à une équation intégrale pour laquelle Schumacher [75] propose l’usage d’une *fonction de réflexion*. L’accès aux transitoires d’attaque dont l’importance est certainement capitale pour la perception, est ainsi possible.

Ce travail de thèse se divise en deux parties distinctes. Dans la première, nous nous plaçons dans l’approche linéaire, nous intéressant à l’inharmonicité des fréquences de résonance pour traiter un problème de justesse de la clarinette. Notre approche prolonge les tra-

vaux de Benade et Nederveen. L'usage de fonctions d'inharmonicité permet d'étudier si l'ensemble des perturbations dans l'instrument par rapport à une forme cylindrique sont telles que les relations d'harmonicité entre pics de résonances expliquent les défauts de justesse observés par les musiciens. Nous verrons que ce n'est pas le cas, et qu'on peut en conclure le rôle essentiel des paramètres de contrôle du musicien en situation de jeu.

La seconde partie s'inscrit dans ce que nous avons appelé le deuxième axe d'étude de la production du son, s'intéressant aux régimes d'oscillations. L'étude se place dans le domaine temporel ce qui rapproche notre travail de ceux initiés par Schumacher [75], puisqu'en particulier elle s'intéresse aux transitoires autant qu'au régime permanent. Cependant nous proposons une formulation des auto-oscillations par méthode modale, méthode très peu employée jusqu'à présent. L'analyse modale est une technique très utilisée en acoustique musicale pour analyser et simuler le rendu sonore de structures vibrantes complexes [1, 35, 77]. Agulló et Barjau [2] s'intéressent à l'analyse modale pour extraire les paramètres modaux d'une impédance d'entrée mesurée. Récemment, Facchinetti et Boutilon [31] ont utilisé l'analyse modale pour calculer les modes propres de vibration d'une clarinette complète, sans tenir compte de l'écoulement d'excitation, non-linéaire. Finalement, peu d'études se sont penchées sur l'application de cette méthode aux instruments auto-oscillants pour lesquels le terme forçant, la source, dépend de l'inconnue. Seuls Antunes et coll.[3] ont auparavant appliqué l'analyse modale pour décrire les auto-oscillations de la corde.

## Première partie

# Analyse et optimisation de la justesse des douzièmes pour un résonateur de type clarinette



# Présentation et résumé en français de l'article

## *“Analysis and optimisation of the tuning of the twelfths for a clarinet resonator”*

**Auteurs: V. Debut, J. Kergomard, F. Laloë**

Cette partie est la reproduction d'un article en anglais, accepté pour publication dans la revue *Applied Acoustics*. Il est écrit en collaboration avec Jean Kergomard et Franck Laloë. Nous présentons les résultats d'une étude théorique et expérimentale sur l'inharmonicité des fréquences de résonance dans un instrument de type clarinette.

### **Résumé**

Si les facteurs d'instruments se sont efforcés à améliorer la justesse des intervalles de douzièmes entre les notes du premier et deuxième registre de la clarinette, on constate qu'ils ne sont pas parvenus à corriger totalement ce défaut, les premières douzièmes restant toujours très grandes. Dans cet article, on s'intéresse aux fréquences de résonance d'un instrument de type clarinette et en particulier à leur inharmonicité, au travers de deux études distinctes. Dans une première partie, on analyse de manière systématique les causes et effets sur l'inharmonicité des résonances de petites perturbations insérées sur un tube cylindrique : trous latéraux (ouverts ou fermés), trou de registre, troncs de cône, gradient de température, dispersion visco-thermique... Considérant le cas d'un instrument réel, on compare les prédictions des calculs avec des mesures d'impédance d'entrée. Bien souvent, on explique l'inharmonicité des premières douzièmes par l'ouverture du trou de registre ; il est certain qu'elle décale vers les hautes fréquences, la position des pics de résonance pour chaque doigté excepté la note pour laquelle le trou est exactement placé à un noeud de pression. Il ressort de cette étude que la situation physique est plus compliquée et que les inharmonicités des éléments de la clarinette se compensent globalement sur l'ensemble du registre, ce qui est confirmé expérimentalement à partir de courbes d'impédance d'entrée. On comprend ainsi que l'approche linéaire est insuffisante pour expliquer le défaut de justesse et que son origine est peut être à rechercher dans les effets d'anche et/ou l'interaction avec le conduit vocal. Dans une seconde partie, on s'intéresse à l'effet du trou de registre seul, en considérant un modèle élémentaire de clarinette : un tube parfaitement cylindrique sans trou de note. On cherche une position "optimale" du trou de registre sur le tube à l'aide de techniques d'optimisation : la position calculée est alors proche de celle choisie par les facteurs. Enfin, on tente numériquement de trouver la géométrie d'un système unique, placé en amont du premier trou de note, qui compenserait l'inharmonicité résiduelle, pour

toutes les notes incriminées ; cette approche ne conduit pas aux résultats espérés ce qui suggère d'appréhender le problème non plus globalement mais localement, en recherchant pour chaque note, la solution adéquate.

## 1.1 Introduction

Many contributions, either experimental or theoretical, have been made in the past to improve our understanding of single reed woodwind instruments (see e.g. [65, 58, 38, 23]). Our knowledge of the linear behaviour of the resonator is now satisfactory, which probably explains why most of the recent literature deals with the understanding of the sound production and oscillation regimes, an inherently non-linear problem. This does not mean that all interesting questions concerning the linear behaviour of the resonator have been solved. For instance, Benade [44] proposed in the seventies some basic ideas and methods allowing the qualities of a wind instrument to be characterised (impedance peak alignment), but more detailed explorations along this line would be useful; Meynial and Kergomard [60] proposed relatively recently simple acoustical systems that shift the scale of a woodwind by a given micro-interval. Concerning the relation between linear properties and non-linear oscillations, ref. [22] discusses in general how it is possible to predict the emission frequencies, and even some aspects of the clean intonation and tone colour, which naturally leads to the design of modified instruments as soon as appropriate optimization criteria are defined. Recently, optimization techniques have been used in order to define longitudinal profiles of brass instruments [46, 67].

An example of an unsolved problem is given by the clarinet. While many musicians agree that it is now a well tuned instrument, the twelfths corresponding to the four lowest tones remain slightly too large, by 20 or 30 cents [72, 36, 29]. One could imagine many reasons for this problem: deviation of the bore from purely cylindrical shape, existence of open or closed side holes (cavities), temperature gradient, etc. A generally accepted idea states nevertheless that the main reason resides in the register hole, because it cannot be ideally placed for every fingering.

The first purpose of the present article is to analyze the origin of this tuning problem in detail. We will actually see that the occurrence of wide twelfths at either end of the clarinet register is not an obvious problem in terms of linear impedance theory, in contradiction with common wisdom. In real clarinets, various effects of opposite signs tend to compensate each other, at least partially (role of the flaring bell for instance). The second purpose of the article is to investigate whether or not it is possible to design a register hole allowing the first two complete registers to be perfectly well tuned (the definition of the registers will be given in the next section), ignoring all the other sources for inharmonicity except the register hole. We will then reason on a simplified shape, cylindrical and without tone holes, the different values of the tones being adjusted simply by choosing different lengths for the tube. Two questions will be discussed :

- i) what is the optimum location of the register hole for the tuning of the twelfths intervals between the first two registers?
- ii) is it possible to propose some simple system, located upstream from the highest tone hole, to provide a good correction to the residual tuning defaults?

The outline of this paper is as follows: the second section recalls some general features of the clarinet. The third section is devoted to the first study: it analyzes the length corrections and their variation with frequency for the main kinds of discontinuities encountered in wind instruments. It ends with an application to a real clarinet resonator in order to find whether the register hole is the main culprit of the clarinet tuning defect; calculations are compared with measurements. A validation of the calculations to first order in the ratio of



the length correction to the wavelength is also given as well as a complete analysis of the effects of an open and closed tone holes. Then, sections 4 and 5 are concerned with the second part of our study and answer questions i) and ii) respectively. Some useful formulae are given in appendix A.

## 1.2 Generalities on the clarinet

### 1.2.1 Definitions

For a given fingering, several resonance frequencies of the resonator occur, and several oscillation regimes can be obtained. The term register is used to describe the set of tones obtained for the same regime: the *first register* involves the tones corresponding to the first mode (i.e. the first resonance frequency) of the resonator, the frequencies being denoted  $f_1$ , and the *second register* involves the tones corresponding to the second mode, the frequencies being denoted  $f_2$  (where  $f_2$  is approximately  $3f_1$ ). The opening of the register hole allows the musician to "jump" from a given tone of the first register to the corresponding tone of the second register, one octave and a fifth above, the first two registers covering ideally more than 3 octaves. We notice that while this division into two registers seems obvious to the scientist, the analysis of the characteristics of the tone colour is not so clear, and musicians divide this musical compass in four registers: chalumeau, throat, clarinet and extreme [73]. For the fingerings corresponding to the higher tones of the first register, i.e. for written fingerings from  $f'\sharp$  to  $a'\sharp^1$ , the opening of the register hole is not sufficient in order to get the proper twelfth, and it is necessary to modify slightly the fingering in order to ensure the good tuning. Thus, in order to play the corresponding twelfths (i.e tones from  $c'''\sharp$ ), the third resonance, corresponding to an interval of a 17th, is used, corresponding to that the physicist can call the third register (see figure 1.1).

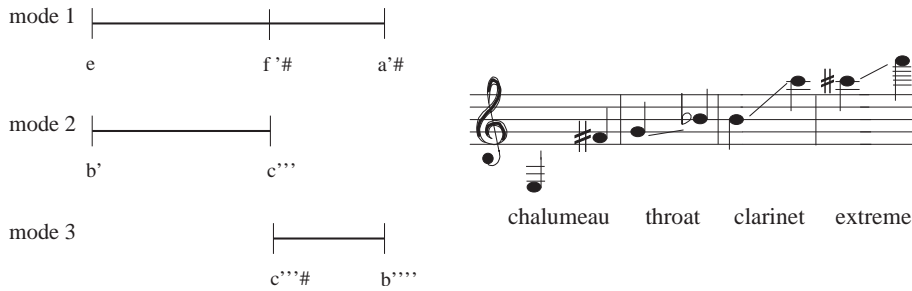


FIG. 1.1 – *Compass and operative resonance frequency for a clarinet (written notes).*

The most commonly used clarinet is the B-flat clarinet which sounds one tone below the written note. Five parts can be distinguished on a clarinet: the mouthpiece, the barrel, the upper and lower joints and the bell. To first approximation, the clarinet is a cylindrical instrument, but a detailed determination of the geometrical dimensions of the instrument reveals deviations from this regular, cylindrical shape over parts which are short with respect to the wavelength. This is shown in figure 1.2 with a bore plot of a Buffet Crampon clarinet, system Boehm, no F53682 (see table 1.1 for bore and holes measurements) which will be the central clarinet in the investigations. Moreover, the existence of tone and register holes, bore irregularities, thermal gradient and dispersion due to visco-thermal

1. The notation system adopted in this paper is the same as that used by Baines [6].

effects alter the resonance frequencies and their harmonicity; they must be included for a detailed study of the tuning of the instrument.

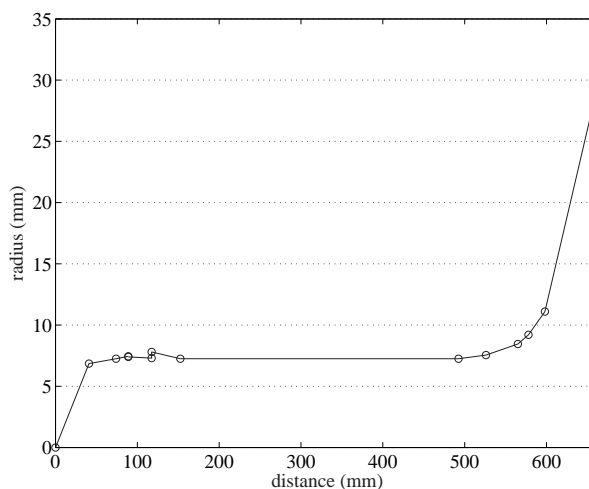


FIG. 1.2 – Radius of a clarinet as a function of the distance from the reed tip (see table 1.1).

### 1.2.2 Inharmonicity and sound production

The sound of the clarinet is produced by self-sustained oscillations. Theory shows [39] that, at low sound intensity, the playing frequencies are determined by the zero of the imaginary part of the input admittance of the resonator (they are therefore very close to the frequencies of the maxima of the input impedance modulus). In addition, the reed has also a small influence on the playing frequency, for two different reasons: the volume velocity created by the motion of the reed movement, which adds to that produced by the pressure difference across the reed opening; the frequency pulling effect of the resonance of the reed (at higher frequencies) combined with its damping. It can be shown that these two effects can be taken into account by introducing appropriate length corrections to the instrument, which are almost independent of the frequency [65, 22]. At higher sound intensities, the playing frequency also depends on other impedance peaks; it can slightly change under the effect of the inharmonicity of the resonances of the resonator. A proper harmonicity of the first two resonances is therefore important for the pitch of a tone: the sound frequency remains independent of the playing level, even if the first two resonances have similar magnitude, and good impedance peak cooperation ensures a stable sound emission [11]. This question is actually intricate because it involves the influence of many parameters. Here, for the sake of simplicity we limit ourselves to low intensity sounds; in other words, our goal will just be to achieve a perfect tuning at least for pianissimo levels. In this article, we will distinguish between *inter-resonance* inharmonicity and *inter-register* inharmonicity. The former refers to the inharmonicity between the first two resonance frequencies of the resonator for a given fingering; the latter defines the ratio between the resonance frequencies of the first impedance peak when the register hole is closed and the second one when the register hole is open.<sup>2</sup>

2. The targeted interval is a pure twelfth, i.e. almost a ratio of 3. Actually for a tempered scale, the ratio is slightly different, because the tempered intervals are different from the natural ones: the exact value is  $2^{19/12} = 2.9966$ . The relative difference is 0.11%, i.e. 2 cents (it is the difference between the tempered fifth

no	$\ell$ (mm)	$r$ (mm)	$h$ (mm)
24	152.7	1.4	13.0
23	166.9	2.35	7.1
22	193.4	2.8	7.1
21	202.9	2.7	7.1
20	213.2	2.55	7.2
19	230.4	2.4	6.4
18	238.9	3.9	10.8
17	241.3	2.35	6.8
16	252.2	2.45	8.8
15	270.5	2.3	6.9
14	284.3	3.3	8.8
13	287.1	2.7	6.8
12	289.3	2.85	6.9
11	308.2	3.95	7.4
10	318.8	2.4	7.2
9	348.9	3.55	6.5
8	364.8	4.05	8.9
7	369.5	3.95	6.1
6	391.0	3.85	8.9
5	413.1	4.85	8.9
4	445.6	5.4	6.0
3	472.9	6.1	5.0
2	504.9	5.6	5.2
1	543.7	5.8	4.4

position (mm)	diameter (mm)
0	0
41	13.7
74	14.5
89	14.9
89	14.8
117.5	14.6
117.5	15.6
152.5	14.5
492.5	14.5
526	15.1
565	16.9
578.2	18.4
598	22.2
664	60

TAB. 1.1 – Numerical data concerning the Buffet Crampon clarinet investigated. Tones holes are numbered from 1 to 24 in order of decreasing distance from mouthpiece, the 24<sup>th</sup> being the register hole. Distances are given from the reed tip. For the input impedance measurements the mouthpiece is replaced by a cylindrical tube of length 77 mm. For the comparison with computations, a position correction of about  $-12$  mm is introduced for the tone hole locations.

### 1.2.3 Method and approximation

The shape of a clarinet is very close to a pure cylinder. For a given fingering of the chalumeau, with first resonance frequency  $f_1$ , an effective length  $\ell_{eff}$  can be defined as

$$\ell_{eff} = c/4f_1 ,$$

where  $c$  is the speed of sound. A first approximation of this length is given by the physical length between the input of the instrument (taking into account a length correction for the above mentioned reed effects) and the first open tone hole position, where the tube is assumed to be cut. All the perturbations from the cylindrical shape, such as enlargements or contractions, closed tone holes, as well as the precise effects of the open tone hole (depending on the downstream geometry and radiation property), can be regarded as small corrections to this first approximation leading to the correct value,  $\ell_{eff}$ . For the lowest tone, for which all holes are closed, an equivalent length of the flaring horn is used as in [65]. If the resonator was purely cylindrical and lossless, the second resonance frequency would be exactly  $f_2 = 3f_1$ . However all the perturbations produce corrections slightly different from those on the first resonance: this creates the inter-resonance inharmonicity (for inter-register inharmonicity, the opening of the register hole also needs to be taken into account). Here, we are actually concerned not by the effect itself of the perturbations from the cylindrical shape, but by the variation of this effect between the two registers. The concept of frequency dependent length corrections is an adequate tool for this study. As in reference [60] the corrections upstream of the first open hole can be calculated separately for each kind of perturbation, with respect to the effective input of the tube (taking into account the reed effects) where the imaginary part of the admittance must be zero for self-sustained oscillations. The frequency dependence of the length corrections for all fingerings provides the inharmonicity. Only the effect of the part that is upstream the first open hole needs to be studied for each fingering.

All calculations are carried out by ignoring the different kinds of dissipation (due to visco-thermal effects in the boundary layers, to radiation, etc...): weak dissipation is known to have a negligible effect on the resonance frequencies [50]. In Appendix B the effect of the resistance of a small hole is discussed: it is shown that nonlinear effects can modify the playing frequency at high sound intensity as it is observed by Dalmont *et al.* [26]; in this study, only low sound intensity is considered. A consequence is the systematic use of purely imaginary impedances, which means for the resonance condition, that the input impedance is infinite. Perturbation to the planar mode theory is classically taken into account using lumped elements representing the effects of higher order, evanescent modes of the tubes.

## 1.3 Length correction and inharmonicity produced by a small perturbation: analysis of the different effects for a real clarinet resonator

In this section we study the analytic expressions of length corrections and inharmonicity of the first two resonance frequencies associated with small perturbations to a purely cylindrical shape. This formulation gives a good idea of the inharmonicity encountered on a real clarinet resonator.

---

and the harmonic one, called the "skhisma"). Nevertheless this difference is very small and for simplicity in what follows we will ignore it (2 cents are almost inaudible, and within the "tunability range" [55, 18]).

### 1.3.1 Length corrections: definition

The effect of a geometrical perturbation on a cylindrical resonator may be expressed conveniently in terms of a length correction to the main tube, denoted  $\Delta\ell$ . Using an exact formulation of  $\Delta\ell$  is possible but in this study, we use an approximation of length corrections to first order in the ratio of the length correction to the wavelength: this gives a sufficiently accurate determination of the resonance frequencies. Moreover, the length corrections associated with different perturbations can be simply added as we will see in a particular example. The perturbation is located at a distance  $\ell$  from the effective input, which is the origin of the coordinates once the clarinet embouchure has been replaced by an equivalent cylinder and the reed effects have been taken into account (see 1.3.5).

### 1.3.2 Inharmonicity of the resonance frequencies

Inharmonicity can be defined as the relative difference between the resonance frequency  $f_n$  and  $n$  times the first resonance  $f_1$ , as follows:

$$IH = \frac{f_n - nf_1}{nf_1} = \frac{\ell_{eff} + \Delta\ell_1}{\ell_{eff} + \Delta\ell_n} - 1 = -\frac{\Delta\ell_n - \Delta\ell_1}{\ell_{eff}} + o\left(\frac{\Delta\ell}{\ell_{eff}}\right), \quad (1.1)$$

where  $\ell_{eff}$  is the acoustic length of the unperturbed system and  $\Delta\ell_n$  is the length correction associated to the  $n$ th resonance.

In the case  $IH > 0$  the basic intervals are enlarged; when  $IH < 0$  the intervals are reduced. In the present paper, results are given in *cent*; the cent is the micro-interval equal to one hundredth of a tempered semi-tone:

$$1 \text{ cent} = 5.78 \cdot 10^{-4} \quad \text{and} \quad (IH)_{cents} = \frac{IH}{5.78 \cdot 10^{-4}}.$$

We notice that the smallest frequency deviation perceptible by the human ear, estimated to be 4 cents, corresponds to  $IH \simeq 0.25\%$ .

### 1.3.3 Length corrections and inharmonicity formulae for acoustic basic systems

This section contains analysis of inharmonicity associated with the simple acoustical systems usually encountered in a clarinet, and depicted in table 1.2. This section uses results obtained by Meynial and Kergomard [60] concerning the effects of the insertion of an admittance branched in parallel and an impedance branched in series, on a cylindrical tube. From the calculation of first order length corrections<sup>3</sup>, analytical expressions of inharmonicity between the first and second resonance frequencies are derived. For exact formulations of length corrections, the reader is referred to appendix A.

#### *a) General formulation for an admittance in parallel and an impedance in series*

Before a detailed investigation of different cases of discontinuities, we present two general formulations for any discontinuity inserted in parallel or in series branched on a straight cylindrical tube.

For the case of a discontinuity inserted in parallel, we denote  $Y$  the admittance of the

3. The expression *first order length corrections* refers to length corrections expanded to first order in the ratio of the length correction to the wavelength.

register hole	
tone hole	
closed-hole	
abrupt change in cross section in the upper part of the instrument	
localized enlargement/contraction in the upper part of the instrument	
truncated cone in the upper part of the instrument	

TAB. 1.2 – Acoustic basic systems and associated length corrections.

discontinuity<sup>4</sup> and  $Y_{up}$  and  $Y_{down}$  the main tube admittances upstream and downstream the discontinuity respectively. The following equation can be written at the location of the discontinuity ( $x = \ell$ ),

$$Y_{up} = Y + Y_{down} , \quad (1.2)$$

Looking backwards to the top-end of the resonator where the input impedance must be infinite for self-sustained oscillations (i.e from  $x = \ell$  to  $x = 0$ ), and writing  $Y_{down} = -jY_c \tan k(\ell + \Delta\ell)$ , we get from equation (1.2):

$$-jY_c \tan k\ell = Y - jY_c \tan k(\ell + \Delta\ell) , \quad (1.3)$$

where  $\Delta\ell$  is the length correction,  $Y_c = S/\rho c$  is the characteristic admittance of the main tube ( $\rho$  is the density of air and  $S$  the cross section area of the main tube),  $k = 2\pi f/c$  is the wavenumber and  $j = \sqrt{-1}$ . After some algebra, the following result is obtained:

$$k\Delta\ell = \text{Arctan} \left( \frac{-j\frac{Y}{Y_c} \cos^2 k\ell}{1 - \frac{1}{2}j\frac{Y}{Y_c} \sin 2k\ell} \right) , \quad (1.4)$$

which can be approximated in the limit of small  $Y/Y_c$  by:

$$k\Delta\ell \simeq -j\frac{Y}{Y_c} \cos^2 k\ell . \quad (1.5)$$

For the case of a series impedance  $Z$  branched on a cylindrical tube, similar expressions are found to be, respectively:

$$k\Delta\ell = \text{Arctan} \left( \frac{-j\frac{Z}{Z_c} \sin^2 k\ell}{1 + \frac{1}{2}j\frac{Z}{Z_c} \sin 2k\ell} \right) , \quad (1.6)$$

and in the limit of small  $Z/Z_c$ ,

$$k\Delta\ell \simeq -j\frac{Z}{Z_c} \sin^2 k\ell . \quad (1.7)$$

Formulae (1.5) and (1.7) can also be deduced from Rayleigh's variational principle [71]. They are useful for different kinds of small discontinuities (see reference [60]), but for some particular cases, other formulae need to be derived as we see below.

### ***b) Insertion of a side hole***

Starting from the tone hole model proposed by Keefe [48] with the values given by Dubos *et al.* in [30], we propose a new calculation of an equivalent length that includes the effects of both the series and shunt impedances. Consequences for the cases of a register hole, an open side hole and a closed hole are subsequently discussed.

---

4. Throughout the paper the admittance is defined as a ratio of an acoustic volume velocity to an acoustic pressure.

**i)Side hole** Referring to [30] for the tone hole model, the acoustic pressure and the acoustic volume velocity at both sides of the hole can be related by the following transfer matrix:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - Y_s Z_a / 4} \begin{pmatrix} 1 + Y_s Z_a / 4 & Z_a \\ Y_s & 1 + Y_s Z_a / 4 \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

where  $Z_a$  and  $Y_s$  are the series impedance and shunt admittance respectively. This formulation emphasizes the dual role of the two terms  $Z_a$  and  $Y_s$ , as opposed to formulations based on the classical T or  $\Pi$  equivalent circuits. Manipulation of equation (1.8) gives the length correction:

$$-j Y_c \tan k(\ell + \Delta\ell) = \frac{-Y_s + D Y_\ell}{A - Z_a Y_\ell}, \quad (1.9)$$

where  $Y_\ell = -j Y_c \tan k\ell$ . Finally:

$$k\Delta\ell = \text{Arctan} \left( \frac{-j Y_s / Y_c \cos^2 k\ell - j Z_a / Z_c \sin^2 k\ell}{1 + Y_s Z_a / 4 + j(Z_a / Z_c - Y_s / Y_c) \sin k\ell \cos k\ell} \right). \quad (1.10)$$

As a result, equation (1.10) is a general expression for the length correction of a tube branched to a cylindrical tube. It gives the influence of both the series and shunt impedances in the determination of the equivalent length. No assumption has been made concerning the dimensions and shape of the hole: it is therefore possible to derive first order approximations for special cases as tone hole, register hole or closed hole from the relative influence of  $Z_a$  and  $Y_s$ . For instance, in the case of an open hole, both  $Z_a$  and  $Y_s$  are inductive. With the low frequencies approximation, equation (1.10) shows that  $\Delta\ell$  is mostly determined by the shunt admittance. If  $Y_s / Y_c \ll 1$ , the length correction is small and equation (1.10) gives equation (1.5); this is the case of the register hole.

**ii)Open hole: register hole** The register hole is a side chimney with small diameter but large height located a distance  $\ell \simeq 140 \text{ mm}$  down the effective input (typically  $r = 1.5 \text{ mm}$ ,  $h = 13 \text{ mm}$ ). Using [30] to calculate the elements of the model, we obtain the series impedance as:

$$Z_a = j\omega\rho\ell_a^{(o)} / S, \quad (1.11)$$

where  $\ell_a^{(o)}$  is the series length correction for an open hole given by [66]

$$\ell_a^{(o)} = -0.28 r \delta^3, \quad (1.12)$$

where  $\delta = r/R$  ( $R$  being the main tube radius) and the subscript  $o$  is used to refer to the open hole case. The shunt impedance is:

$$Z_s = Y_s^{-1} = \frac{\rho c}{S_h} (j \tan[k(h + h_m + h_r)] + j k h_s), \quad (1.13)$$

where  $S_h$  is the cross-sectional area of the hole, and  $h_m$ ,  $h_s$  and  $h_r$  are height corrections associated with the matching volume, the higher order modes impedance and radiation, respectively. Expressions for  $h_m$  and  $h_s$  can be found in [30] (see also [24] for a correction to [30] for  $h_s$ ) and are given hereafter:

$$h_m = \frac{r\delta}{8} (1 + 0.207\delta^3), \quad (1.14)$$

$$h_s = r(0.82 - 0.193\delta - 1.09\delta^2 + 1.27\delta^3 - 0.71\delta^4). \quad (1.15)$$



Since the situation at the end of a hole is not very well defined (due to the presence of a key above the hole and/or undercutting), a radiation length correction  $h_r$  between the flanged and unflanged cases is considered, assumed to be

$$h_r = 0.7 r . \quad (1.16)$$

In the low frequency limit, the shunt impedance is well approximated by:

$$Z_s = j \frac{\rho c}{S_h} k h' , \quad (1.17)$$

where:

$$h' = h + h_m + h_s + h_r . \quad (1.18)$$

This equation allows us to discuss the relative influence of the series and shunt impedances. Calculation gives  $|Y_s Z_a| \simeq 0.0045\%$  which confirms that the series impedance can be ignored in the case of a long chimney with a small diameter. Finally, equations (1.10) is identical to (1.5), which provides:

$$k \Delta \ell \simeq - \frac{S_h \ell \cos^2 k \ell}{S h' k \ell} , \quad (1.19)$$

where  $\ell$  is the distance of the hole from the effective input. Equation (1.19) shows that a small open side hole always introduces a negative length correction, i.e. an increase in the resonance frequencies. It also shows that  $\Delta \ell$  decreases as the inverse of the square of frequency. Therefore, the register hole opening affects the first resonance frequencies much more than the second one, which is an important requirement for the clarinet to overblow correctly [10].

From equation (1.19), since the register hole has no effect on tones of the first register for which it is closed, the frequency shift of the second resonance frequency due to the register hole opening can be derived. We then get:

$$IH \simeq - \frac{\Delta \ell_2}{\ell_{eff}} \simeq \frac{2}{3\pi} \frac{S_h \cos^2 k_2 \ell}{S h' k_2} , \quad (1.20)$$

where  $k_2 = 3k_1$ ,  $k_1$  being the wavenumber of the fundamental frequency of the played tone. This expression shows that the register hole opening generates positive inharmonicity by pulling the second vibration mode upward in frequency at both ends of the register scale and has no effect at a pressure node as it is well known (see figure 1.3 where  $r = 1.4 \text{ mm}$ ,  $h = 13 \text{ mm}$  and  $\ell = 140 \text{ mm}$ ). It also appears that the two geometrical parameters which control inter-resonance inharmonicity are  $S h' / S_h$  and  $\ell$ .

**iii) Open hole: tone hole** In the limit of zero frequency, the shunt admittance of an open hole increases to infinity (see equation (1.5)) and the main tube behaves as if it was cut at the location of the hole. The ratio  $Y_s / Y_c$  becomes large for tone holes and equation (1.10) can no longer be used since the perturbation cannot be considered as small anymore. As a consequence,  $\Delta \ell$  is no longer seen as an extension of the entire air column of length  $\ell_{eff}$  but as an additional length to  $\ell$  the distance from the effective input to the hole location. For an open hole of height  $h'$  (see eq.(1.18)), radius  $r$  at distance  $\ell_d$  from the open end, the length correction is now obtained from:

$$-j Y_c \cot k \Delta \ell = \frac{Y_s + D Y_\ell}{A + Z_a Y_\ell} , \quad (1.21)$$

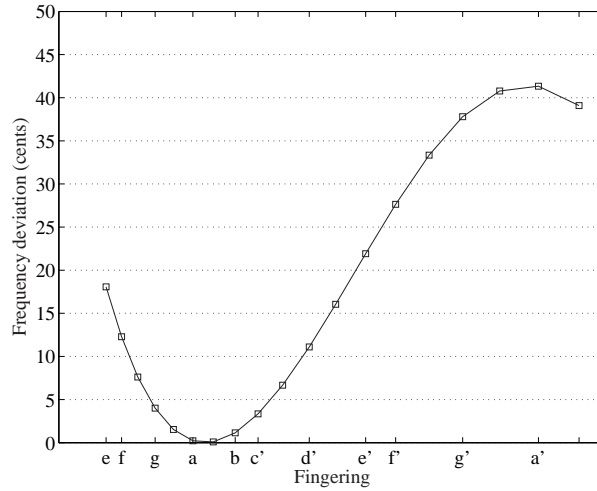


FIG. 1.3 – Shift of the second resonance frequency due to a register hole of radius  $r = 1.4$  mm, height  $h = 13$  mm, located a distance  $\ell = 140$  mm from the effective input. For the  $b$  flat fingering, the register hole does not alter the second vibration mode since, in this case, the register hole is located at one third the effective length.

where now  $Y_\ell = -j Y_c \cot k\ell_d$ . Thus:

$$k\Delta\ell = \text{Arctan} \left( \frac{-jY_c[(1 + Z_a Y_s/4) - jZ_a Y_c \cot k\ell_d]}{Y_s - (1 + Z_a Y_s/4)jY_c \cot k\ell_d} \right). \quad (1.22)$$

For a real clarinet using the expressions for  $Z_a$ ,  $Y_s$  and  $Y_c$  for an open hole, we see that the quantity  $|Z_a Y_s/4|$  is small compared to unity, except for the four bottom tones for which the order of magnitude is to 0.015. In the same way, the term in bracket at the numerator is close to unity. This leads us to assume that  $Z_a$  has a negligible effect in this study for open holes especially since we focus on inharmonicity. Setting the term in bracket to unity in equation (1.22) and using Taylor's formula to the third order in  $k\ell_d$  and to the first order in  $k\Delta\ell$ , the tone hole equivalent length becomes:

$$\Delta\ell \simeq \frac{1}{\frac{1}{\ell_{hole}} + \frac{1}{\ell_d(1+(k\ell_d)^2/3)}}, \quad (1.23)$$

where  $\ell_{hole} = h' S/S_h$  is a transformed hole length [65] relative to the geometry of the tone hole. From equation (1.23), the length correction becomes a constant value in the lower frequency limit given by  $\Delta\ell = \ell_d \ell_{hole}/(\ell_d + \ell_{hole})$ . When frequency increases, the tone hole length correction increases too. Then, any upper resonance frequency relative to the lowest one is flattened, and negative inharmonicity is generated as it can be seen in figure 1.4 (for a tone hole geometry given by  $r = 4.5$  mm,  $h = 4$  mm located, for each length of tube, at a distance  $\ell_d = 30$  mm from the open end).

Concerning the inter-resonance inharmonicity, equation (1.23) leads to the expression

$$IH \simeq -\frac{16}{3\pi} \frac{k_1^3 \ell_d^3}{(1 + \ell_d/\ell_{hole})^2}. \quad (1.24)$$

Discrepancy between equation (1.24) and numerical calculations from equation (1.22) gives less than a 4-cent difference for all fingerings except for three tones,  $c'\#$ ,  $f'$  and  $g'\#$  for

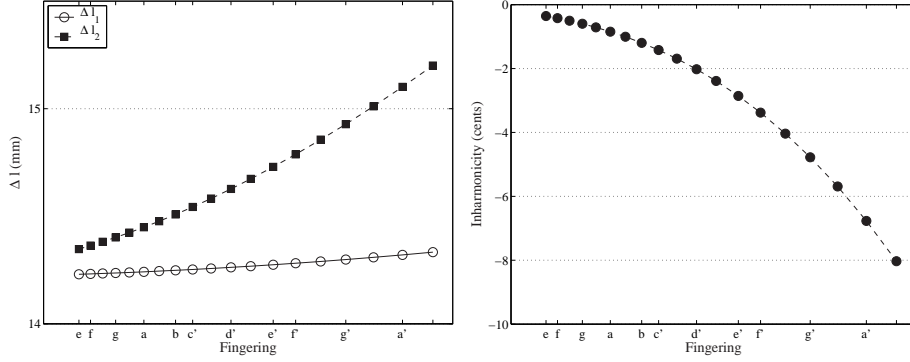


FIG. 1.4 – Length corrections (left) and corresponding inter-resonance inharmonicity (right) for a tone hole of radius  $r = 4.5$  mm, height  $h = 4$  mm, located at a distance  $\ell_d = 30$  mm from the open end for each tube length. See equations (1.23) and (1.24).

which results differ of an amount to about 8 cents. This appears to be due to the use of the Taylor expansion of the *cot* function to obtain equation (1.23). Finally, equation (1.24) is a simple analytic formula which also appears reliable, and will be used in the next. It also gives an interesting feature: the freedom it gives the designer to control inharmonicity due to open hole in the choice of the hole size. Large tone holes would be preferred to reduce inharmonicity of the first two resonance frequencies.

**iv) Closed hole (or cavity)** According to [30], the series and shunt impedances for a closed hole are

$$Z_s = \frac{\rho c}{S_h} [-j \cot k(h + h_m) + jkh_s], \quad (1.25)$$

and

$$Z_a = j\omega\rho\ell_a^{(c)}/S, \quad (1.26)$$

respectively, where  $\ell_a^{(c)}$  is the series equivalent length for a closed tube given by

$$\ell_a^{(c)} = -r\delta^2 [1.78 \coth(1.84(h + h_m)/r) + 0.940 + 0.540\delta + 0.285\delta^2]^{-1}. \quad (1.27)$$

In the low frequency approximation, the shunt impedance becomes

$$Z_s = \frac{\rho c}{S_h} \frac{-j}{k(h + h_m)},$$

and shows that it behaves as a shunt acoustic compliance  $C = v/\rho c^2$  determined by its volume  $v = S_h(h + h_m)$ . Substituting  $Z_a$  and  $Z_s$  in equation (1.10) and denoting  $X = v/S\ell$ , the length correction to first order is found to be:

$$\Delta\ell \simeq X\ell \cos^2 kl + \ell_a^{(c)} \sin^2 kl, \quad (1.28)$$

which can be rewritten in

$$\Delta\ell \simeq (X\ell - \ell_a^{(c)}) \cos^2 kl + \ell_a^{(c)}. \quad (1.29)$$

This expression shows that the effect of a closed hole inserted on a cylindrical tube depends mainly on its size and position. It also shows that the change in inertance described by  $\ell_a^{(c)}$  appears in the determination of the series closed-hole length correction. For the lowest

tone of a clarinet, when adding each hole contribution, it gives a 6 mm length decrease on the closed-hole length correction for this fingering i.e a 20-cent raising effect for the pitch of the written tone  $e$ . This term must be taken into account especially when investigating the tuning of a real instrument for which many cavities can act for a given fingering; this cannot be neglected as it is done in several papers [60, 47]. We notice that since  $k\ell \ll 1$ , the effect of a cavity is proportional to the ratio of the inserted volume to the volume of air included between the reed tip and the closed hole.

With the use of equation (1.29), inter-resonance inharmonicity becomes:

$$\begin{aligned} \Delta\ell_1 - \Delta\ell_2 &= -\left(\frac{v}{S} - \ell_a^{(c)}\right)(\cos^2 3k_1\ell - \cos^2 k_1\ell), \\ &= 2\left(\frac{v}{S} - \ell_a^{(c)}\right) \sin^2 2k_1\ell \cos 2k_1\ell, \end{aligned}$$

so that:

$$IH \simeq \frac{4}{\pi} \left(\frac{v}{S} - \ell_a^{(c)}\right) k_1 \sin^2 2k_1\ell \cos 2k_1\ell. \quad (1.30)$$

The result depends on two geometrical parameters, the location  $\ell$  and the ratio  $v/S$  where  $v$  is the hole volume. Dealing with the case of real clarinet resonator and ignoring the effect of  $Z_a$  in equation (1.10) underestimates the cavity effect to about 10 cents for the lowest fingerings when adding each cavity contribution. This confirms the necessity to take into account the series impedance  $Z_a$  in the length correction calculations. Besides, as a consequence of the term  $\cos 2k_1\ell$ , either negative or positive inharmonicity is associated with a closed hole (see figure 1.5 for a hole volume equal to  $v = 0.3 \text{ cm}^3$ ). Finally, since the magnitude is proportional to the wavenumber  $k_1$ , inharmonicity associated with a hole of fixed size and position increases with the fundamental frequency of the played tone.

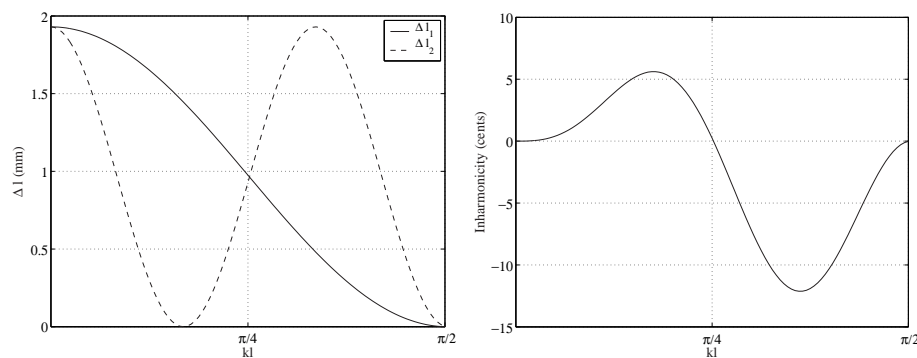


FIG. 1.5 – Length corrections (left) and corresponding inter-resonance inharmonicity (right) for a closed hole whose volume  $v = 0.3 \text{ cm}^3$  ( $r = 3.5 \text{ mm}$   $h = 7.5 \text{ mm}$ ) as a function of  $k_1\ell$ . See equations (1.29) and (1.30).

### c) Localized enlargement/contraction

Consider a localized enlargement (or contraction) of length  $\ell'$  located at distance  $\ell$  from the effective input in a cylindrical air column and let  $\alpha = S'/S$  be the ratio of the cross section area of the enlargement (or contraction) to the one of the main tube. Assuming  $\alpha$  to be close to the unity (only small bore changes are considered), we obtain the change in resonance frequencies expressed through length correction according to (see appendix A eq.(A.2)):

$$k\Delta\ell = (\alpha - 1) \sin k\ell' \cos k(2\ell + \ell'). \quad (1.31)$$

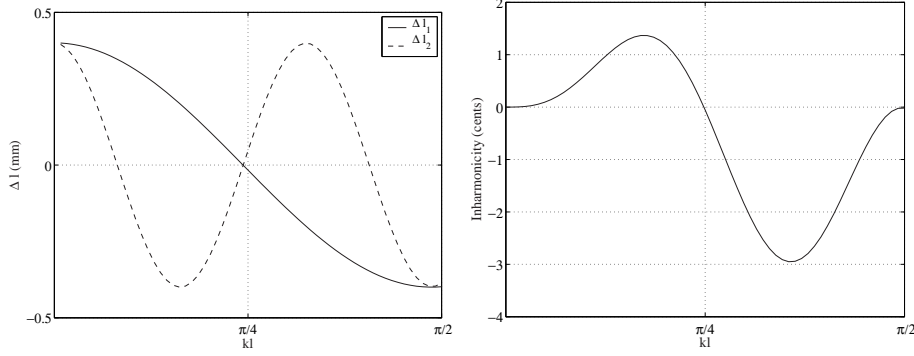


FIG. 1.6 – Length corrections (left) and corresponding inter-resonance inharmonicity (right) for a localized enlargement as a function of  $k_1\ell$  ( $\ell' = 10$  mm,  $S' = 1.04S$ ). See equations (1.31) and (1.32).

Then, the relationship between first and second resonance frequencies is:

$$IH \simeq \frac{4}{3\pi}(\alpha - 1)(\sin^3 2k_1(\ell + \ell') - \sin^3 2k_1\ell), \quad (1.32)$$

which states that the two diameter discontinuities located at points  $\ell$  and  $\ell + \ell'$  create either positive or negative inharmonicity. This is shown in figure 1.6 in the case of an enlargement ( $\alpha = 1.04$ ) of length  $\ell' = 10$  mm.

Substituting  $\ell = 0$  in equations (1.31) and (1.32) and omitting for convenience the  $'$  of  $\ell'$ , the effects due to a change in cross section in part of a cylindrical tube are calculated. The length correction becomes

$$k\Delta\ell \simeq \frac{1}{2}(\alpha - 1) \sin 2k\ell, \quad (1.33)$$

and the inharmonicity can be written

$$IH \simeq \frac{4}{3\pi}(\alpha - 1) \sin^3 2k\ell, \quad (1.34)$$

where the term  $\sin 2k_1\ell$  still remains positive since  $k_1\ell \in [0, \pi/2]$ . As a consequence, the sign of inharmonicity associated with a discontinuity depends only on the value of  $\alpha$  as shown in figure 1.7 for a bore widening and contraction of 2%.

#### d) Change in taper close to the tube input

The acoustical behaviour of a change in taper over a length  $\ell_c$  can be represented with an equivalent electrical circuit including two inductances of opposite sign and the elements of a cylindrical tube of length  $\ell_c$  [12]. Writing  $X_1 = \ell/x_1$  and  $X_2 = (\ell + \ell_c)/x_2$ , we obtain the length correction calculated to first order in  $X_i$  ( $i = 1, 2$ ) (see appendix A eq.(A.3))

$$k\Delta\ell \simeq X_2 \frac{\cos^2 k(\ell + \ell_c)}{k(\ell + \ell_c)} - X_1 \frac{\cos^2 k\ell}{k\ell}. \quad (1.35)$$

Equation (1.35) states that a single taper change is equivalent to two open side holes with a positive and a negative inertance respectively. It is valid either for a positive or negative taper change, the difference being in the sign of the  $X_i$  which are positive for a diverging cone and negative for a converging cone.

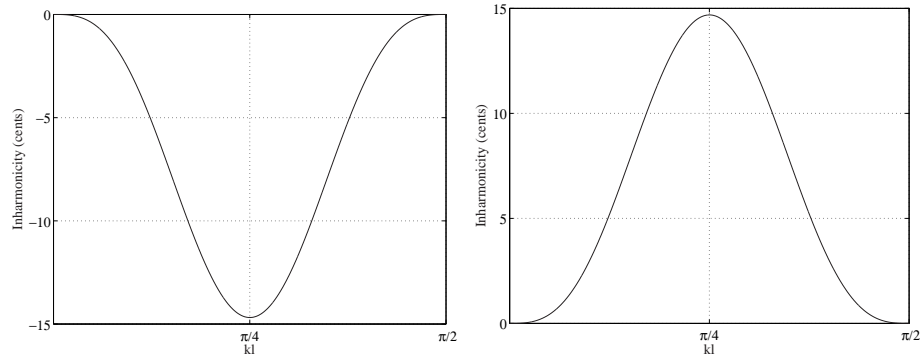


FIG. 1.7 – *Inter-resonance inharmonicity due to an abrupt change in cross section area as a function of  $k_1 \ell$ : contraction  $S' = 0.98 S$  (left) and enlargement  $S' = 1.02 S$  (right). See equation (1.34)*

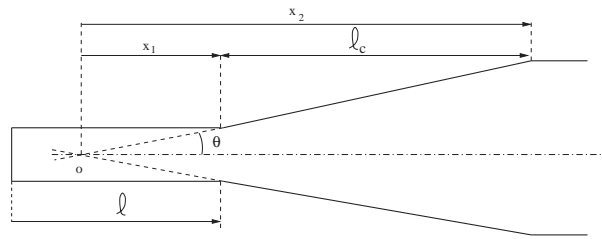


FIG. 1.8 – *Geometry and symbols used for the case of a truncated cone.*

In order to evaluate the inharmonicity generated by a small truncated cone, it is convenient to reformulate the expression of the length correction in terms of two control parameters by rewriting equation (1.35). Since approximations  $k \ell_c \ll 1$  and  $\ell_c/x_1 \ll 1$  are still valid, it is possible to write:

$$\cos^2 k(\ell + \ell_c) = \cos^2 k\ell - k\ell_c \sin 2k\ell + o(k\ell_c),$$

and

$$\frac{1}{kx_2} = \frac{1}{kx_1(1 + \ell_c/x_1)} \simeq \frac{1}{kx_1}.$$

Therefore a simplified expression for the length correction is derived

$$k\Delta\ell \simeq -\frac{\ell_c}{x_1} \sin 2k\ell, \quad (1.36)$$

where  $\ell_c/x_1$  and  $\ell$  are the two parameters. Under these conditions and with the use of equation (1.36), inharmonicity is given by:

$$IH \simeq -\frac{8}{3\pi} \frac{\ell_c}{x_1} \sin^3 2k_1 \ell. \quad (1.37)$$

An example of diverging cone of length  $\ell_c = 5 \text{ mm}$ , large-end radius  $R = 7.5 \text{ mm}$  and half-angle  $\theta = 1.7^\circ$  is shown in figure 1.9. Finally, looking at equation (1.36), the equivalence between a positive truncated cone and an abrupt change in cross section for the case  $S' < S$  can be noticed.

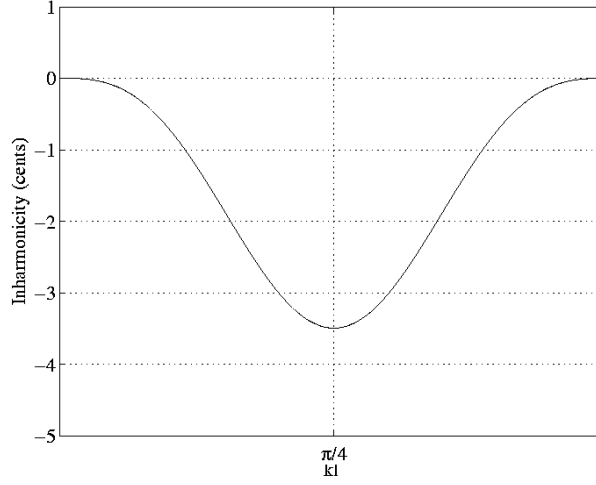


FIG. 1.9 – *Inter-resonance inharmonicity for a positive truncated cone as a function of  $k_1\ell$  ( $R = 7.5$  mm,  $\theta = 1.7^\circ$ ,  $\ell_c = 5$  mm).*

### 1.3.4 Other effects: radiation, dispersion and temperature

Because of dispersion due to visco-thermal effects, the eigenfrequencies of the cylindrical air column cannot be exactly harmonically related. From the well known expression of the speed of sound with respect to frequency [69], it can be shown that dispersion introduces a positive inter-resonance inharmonicity given by

$$IH = \frac{\Gamma_1 - \Gamma_3}{1 - \Gamma_1}, \quad (1.38)$$

where  $\Gamma_n = \frac{1}{R\sqrt{2k_n}}(\sqrt{\ell_v} + (\gamma - 1)\sqrt{\ell_h})$  is the dispersion factor associated to the  $n$ th eigenfrequencies,  $\ell_v$  and  $\ell_h$  are the viscous and thermal characteristic lengths and  $\gamma$  the ratio of specific heats. The order of magnitude is given in the next section.

Another effect which affects the relationship between the resonance frequencies is the axial temperature drop. With the relation  $\frac{\Delta T}{T} = -\frac{\Delta \rho}{\rho}$ , the temperature gradient can be seen as a small perturbation in series which modifies the air density. Looking at a location  $x$ , the infinitesimal length correction is

$$\delta x = -jZ/Z_c \sin^2 kx, \quad (1.39)$$

where  $Z = j\omega\Delta\rho dx/S$ . The total length correction is obtained by an integration over the length of the perturbed part of the tube. Assuming arbitrarily a linear temperature profile over the upper third of the length  $\ell_{eff}$  of the instrument  $T(x) = 3\frac{T_{out} - T_{in}}{\ell_{eff}}x + T_{in}$ , where  $T_{in}$  is the temperature at the input ( $x = 0$ ) and  $T_{out}$  is the external temperature, the effect of the thermal gradient is evaluated as follows:

$$\Delta\ell = -3\frac{T_{out} - T_{in}}{T_{out}} \int_0^{x_0} x \sin^2 kx dx + \frac{T_{in} - T_{out}}{T_{out}} \int_0^{x_0} \sin^2 kx dx, \quad (1.40)$$

where  $x_0 = \ell_{eff}/3$ . Expression (1.40) can be calculated analytically since the lower and upper bounds are given by  $k_1\ell = \pi/6$  and  $k_2\ell = \pi/2$  and approximation for inharmonicity is given by

$$IH = -0.0422 \frac{T_{out} - T_{in}}{T_{out}}. \quad (1.41)$$

With these assumptions, a 19-degree temperature difference produces a constant 5-cent positive inharmonicity across the complete register. Applying a linear thermal gradient over the entire instrument instead of the third of its effective length, would lead to inharmonicity of +10 cents for the same temperature difference. Finally, with an arbitrary linear temperature profile which is surely not very realistic, it can be said that the thermal gradient have a significant effect on inharmonicity but no more than 5 and 10 cents over the entire scale.

Since radiation of wind instruments depends on frequency, radiation is also a cause of inharmonicity but its effect is very small compared to the previous effects (less than 1 cent). For a detailed description of radiation impedances in musical instruments, see reference [25].

### 1.3.5 Theoretical analysis of a clarinet resonator

Our major results concerning inharmonicity are summarized in table 1.3.

Basic perturbation	Sign of $IH$	Effective parameters
tone hole	$< 0$	$s/Sh'$ and $\ell_d$
closed-hole	$k\ell \lesssim \pi/4 \Rightarrow IH > 0$ $k\ell \gtrsim \pi/4 \Rightarrow IH < 0$	$v/S$ and $\ell$
abrupt change in cross section in the upper part of the instrument	$S' > S \Rightarrow IH > 0$ $S' < S \Rightarrow IH < 0$	$S'/S$ and $\ell$
localized enlargement/contraction in the upper part of the instrument	$> 0$ or $< 0$	$S'/S$ and $\ell$
diverging truncated cone in the upper part of the instrument	$< 0$	$\ell/x_1$ and $\ell$
converging truncated cone in the upper part of the instrument	$> 0$	$\ell/x_1$ and $\ell$
register hole	$> 0$	$s/Sh'$ and $\ell$

TAB. 1.3 – *Sign of inharmonicity associated with basic acoustic perturbations close to the tube input.*

To compare them with a real clarinet, a Buffet Crampon clarinet (system Boehm) has been investigated theoretically and experimentally. From the geometrical dimensions of the instrument, given in table 1.1, and with the mathematical formulations of inharmonicity between the first two resonance frequencies, both inter-resonance and inter-register inharmonicities were predicted directly for each fingering, simply adding inharmonicities associated to each perturbation. In order to validate these calculations, computations of the input impedance of the clarinet were carried out using a transmission-line model and transfer matrices. Multiplying sequentially the transfer matrix of each element from the open end to the mouthpiece results in the input response of the instrument. From the obtained impedance curves, inharmonicities between the resonance frequencies were determined for all fingerings.

Calculations with both transfer matrix and length correction approximate formulae coincide satisfactorily for the total inter-register inharmonicity as shown in figure 1.10. Focusing on the influence of a single perturbation, a good agreement is also obtained even if the two



methods do not coincide for few tones. For a detailed validation of length correction calculations, readers are referred [28]. Since the two methods give similar results, our method based on adding corrections to first order seems appropriate.

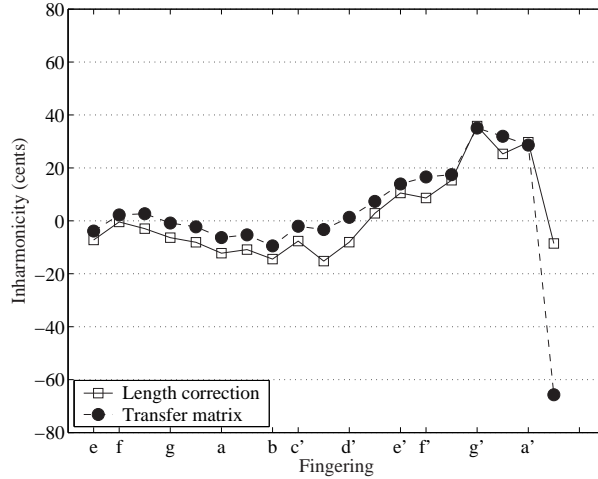


FIG. 1.10 – Total inter-register inharmonicity for a Buffet Crampon clarinet. Length correction calculations ( $\square$ ) and transfer matrix calculations ( $\bullet$ ) (the temperature gradient has been ignored).

### Calculation procedure and results

The influence on inharmonicity of each bore perturbation found on a clarinet is now discussed and results are plotted in figures 1.11 and 1.12. Results for the register hole have been shown in figure 1.3. The principles of the length correction calculations are given for every kind of perturbations.

**Mouthpiece** The acoustical top of the instrument (i.e the effective input) for measurements is defined assuming a cylinder of length  $\ell_G = 77 \text{ mm}$  and radius equal to the main tube radius ( $R = 7.25 \text{ mm}$ ). Even if this can be seen as an equivalent embouchure which represents the embouchure of a clarinet of a volume  $v = 11 \text{ cm}^3$  plus a length correction due to reed effects equal to  $10 \text{ mm}$  as measured in reference [22] by comparing the resonance and playing frequencies, it must be noticed that this equivalent length is imposed by the experimental setup and ignores the variation of reed effects with frequency. This characterisation of the mouthpiece does not take into account the complex geometry of the embouchure which influences the functioning. Actually, the theoretical analysis is made in two steps:

- i) the analysis of the input impedance of the instrument, the mouthpiece being replaced by the equivalent embouchure (present section 1.3.5);
- ii) after a comparison of the results of the present section with experiments, a discussion of the effect of the conicity of the mouthpiece is given in the next section (see 1.3.6).

**Barrel and top part of the upper joint** Both the barrel and the top part of the upper joint are tapered towards the bottom with a step discontinuity between them. Inharmonicity due to change in cross-section is evaluated with equation (1.34) and since the assumption  $X \ll 1$  is not true for both changes in taper, inharmonicities are derived using

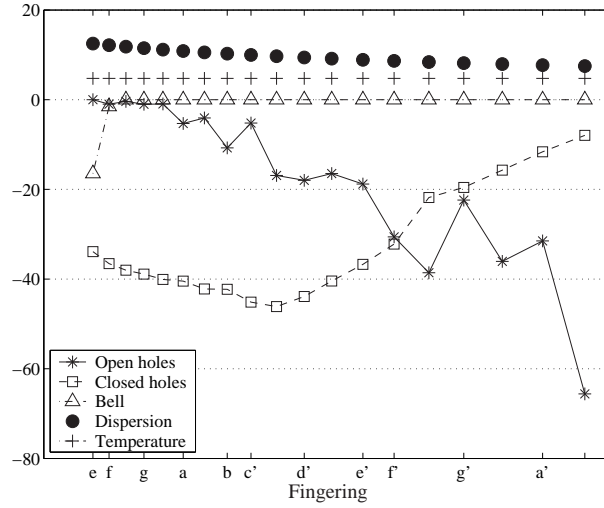


FIG. 1.11 – *Inter-resonance inharmonicities due to open holes (\*), closed holes (□), dispersion (●), temperature (+) and the flaring bell (△).*

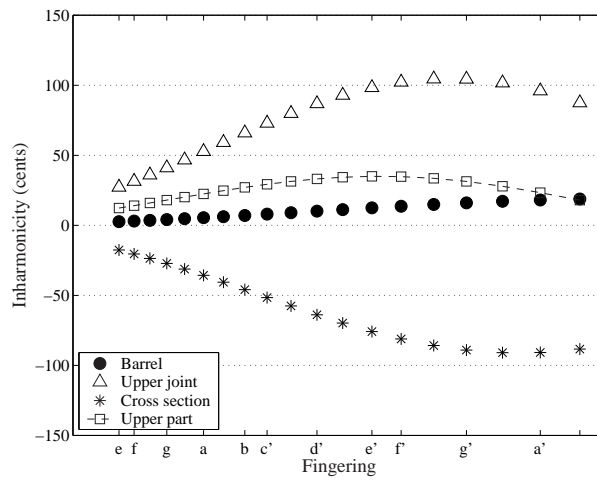


FIG. 1.12 – *Inter-resonance inharmonicities due to bore perturbations of the upper part: barrel (●), change in cross sections (\*), upper joint (△) and upper part (sum of the three curves) (□).*

exact formulae for length corrections (see appendix A eq.(A.3)) and equation (1.1).

It appears that the barrel entails positive inharmonicity and affects much more the highest part of the register than the lower part. Besides, even if the change in cross section tends to balance the effect of the inverse conical upper joint (see figure 1.12), the total inharmonicity associated with bore perturbations at the input is positive and appears to be essential to correct the damage caused by open holes, cavities, dispersion and the flaring horn as it will be shown below.

An important point to notice is that since length corrections due to taper and discontinuity in cross section are frequency dependent, a correction is needed for the location of closed tone holes, depending on the considered fingering.

**Open holes** As apparent with equation (1.24), inharmonicity associated with open holes depends strongly on the length  $\ell_d$  of the tube-part below the first open hole. To allow realistic calculations, a good estimation of this parameter is needed. Instead of approximating  $\ell_d$  as the distance between the first two open tone holes, the following method is used. Starting from fingering  $f$  with hole 1 open, calculation of  $\ell_d$  is self-evident: an equivalent length  $\Delta\ell$  of the two removed admittances ( $Y$  and  $Y_{down}$ ) can be deduced with equation (1.23). This gives the substitution tube of length  $\ell + \Delta\ell$  to produce tone  $f$ . Dealing with the next tone  $f\#$ ,  $\ell_d$  is now approximated by the distance between the first two open holes increased by the tube-piece of length  $\Delta\ell$  calculated previously. This allows to take into account, up to a certain extent, the effect of the tone hole lattice (only two or three open holes may play a role in the determination of the playing frequencies [9]). Then, inharmonicity is deduced for this fingering, a new  $\Delta\ell$  is calculated and so on. In practice, the method is very convenient but fails for few situations such as cross-fingering, because of the proximity effects between two open holes.

As it is expected, examination of inharmonicity due to open side holes shows the tendency to produce negative inharmonicity across the entire scale (see figure 1.11). Besides, it appears that the highest tones of the register are more affected than the bottom tones because of the strong dependence of inharmonicity with the wavenumber  $k_1$  (see equation (1.24)).

**Closed holes** Inharmonicity due to a closed side-hole located above the first open hole is calculated with equation (1.30) assuming that every hole is independent of the others. Adding each closed hole contribution, the total closed-side hole inharmonicity is determined.

Figure 1.11 shows the important role of the closed holes. Inharmonicity is negative and the shape of this curve can be interpreted by studying the combined action of cavities located at both extremities of the tube of length  $\ell_{eff}$ . It must be reminded that inharmonicity due to a closed hole is mainly proportional to the hole volume, the hole volumes being larger for cavities near the open-end than those located at the input of the instrument. On one hand, for tones from  $e$  to  $c'\#$ , cavities located near the open-end have a larger (negative) effect than those located near the mouthpiece which produce small positive inharmonicity. As a consequence, harmonicity is more and more altered. On the other hand, for tones from  $c'\#$  to  $a'\#$ , inharmonicity still remains negative but decreases when the chromatic scale is played which is mainly due to the decreasing of the number of closed holes.

**Flaring horn** The expanding part at the open-end of the clarinet has been modeled as a catenoidal horn with a horn constant  $h = 0.085$ . Using the procedure given in [65] and restricting our investigation to the two lowest tones only, a length correction referring to

the geometrical length has been assigned to the flaring bell according to

$$\Delta\ell_h = -\ell_h + 1/k \operatorname{Arctan}(kh' \tan(L_h/h')), \quad (1.42)$$

where  $L_h$  is the effective length including the classical end-correction  $0.6R_f$  ( $R_f$  being the end-radius of the flare) and  $h' = h/\sqrt{1-k^2h^2}$ . Besides, a position correction has been given to the two holes located in the expanding part of the bell as Nederveen did. As expected, the flaring horn produces negative inharmonicity for the lowest tone to about -15 cents and has small influence on fingering  $f$ .

**Dispersion and temperature** Calculations of the effects of dispersion is obtained with equations (1.38) and results are plotted in figure 1.11. Dispersion effect is continuous over the entire scale of an amount to about +10 cents. Concerning the effect of the thermal gradient, it has been discussed in section 1.3.4.

### 1.3.6 Comparison between theory and measurements

To correlate theoretical results and measurements, an input impedance measurement device is used (see reference [21]). It gives the acoustic linear response of the passive instrument (i.e without reed effects) to an harmonic excitation. Measurements are made in a well-insulated room and temperature is  $18.5^\circ\text{C}$ <sup>5</sup>. The resonance frequencies are obtained by interpolating the imaginary part of the admittance in the vicinity of each resonance, the oscillating frequency satisfying  $\operatorname{Im}(Y) = 0$ . The absolute uncertainty on the measurements is estimated to be  $\pm 5$  cents.

Figures 1.13 and 1.14 show that agreement between experiment and theory is good, but for few tones discrepancies are about 15 cents which can be explained by an inconvenient determination of the length  $\ell_d$  when investigating the open hole effect.

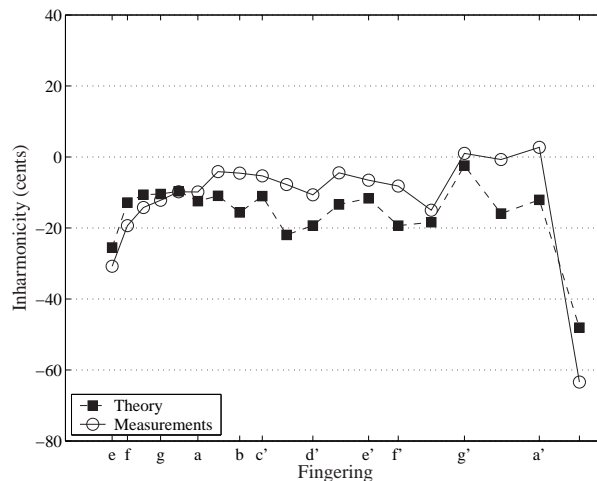


FIG. 1.13 – *Inter-resonance inharmonicity. Comparison between input impedance measurements (○) and length correction calculations (■) (uniform temperature).*

Figure 1.14 also shows the inter-register inharmonicity with conditions close to the normal use of a clarinet, i.e when both the thermal gradient and the conicity of the embouchure at the end of the mouthpiece are taken into account. With the use of the

<sup>5</sup> Two other changes in cross section occur in the experimental setup at the input of the instrument but their effect on the resonance frequencies is subtracted algebraically.

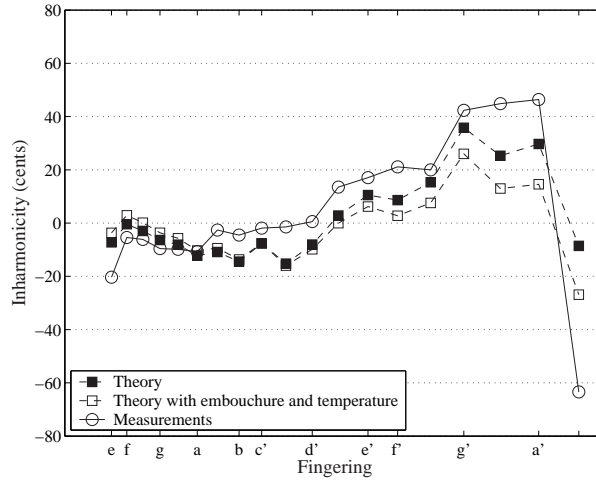


FIG. 1.14 – *Inter-register inharmonicity. Comparison between input impedance measurements (○) and length correction calculations (■). Adding the effects of the thermal gradient and the conicity of the embouchure to (■) gives (□).*

geometry of a classical embouchure (see reference [80]), the effect of the conical part at the end of the embouchure has been evaluated with the exact formulae of length corrections given in appendix A (see eq.(A.3)). It appears that the embouchure conicity narrows the inharmonicity of the highest tones of the register up to 20 cents.

Otherwise, another clarinet has been investigated experimentally. It appears that both clarinets have the same general tendencies in inharmonicity as figure 1.15 shows, even if small differences can be noticed for few tones. This fact has previously been reported in [22] and is linked to differences in bore profile of the upper part of the instrument. In the same reference, figure 11 shows results for two different clarinets, very similar to the results of figure 1.15 for the inter-resonance inharmonicity: nevertheless a tendency for the results of the present study is to be 5 cents lower than the results for the clarinets measured in [22]. Moreover, adding the results for the inter-resonance inharmonicity and for the inharmonicity due to register hole leads to very similar inter-register inharmonicity results for the two studies.

### 1.3.7 Discussion and conclusions

i) All our calculations deal with resonance frequencies and no excitation mechanism has been introduced. As shown by figures 1.11 and 1.16, our analysis leads to the following statements concerning the origin of the general tendency of clarinets to have tuning deficiencies for the lowest twelfths:

- the used linear theory does not reveal a tuning problem for the lowest tones,
- certain dimensions of the tone holes have been chosen by makers. When their effects are considered as imposed, the remaining parameters to achieve a correct tuning are mainly in the bore profile and the location of the register hole,
- a good compromise between the bell profile and the register hole location and size, is needed to control the tuning of the lowest twelfth (tone  $e$ ),
- the barrel and bore profile at the top end of the upper joint are of great importance in order to bring the lowest and middle twelfths in tune. This effect tends to balance the effect of the closed holes over the entire scale.

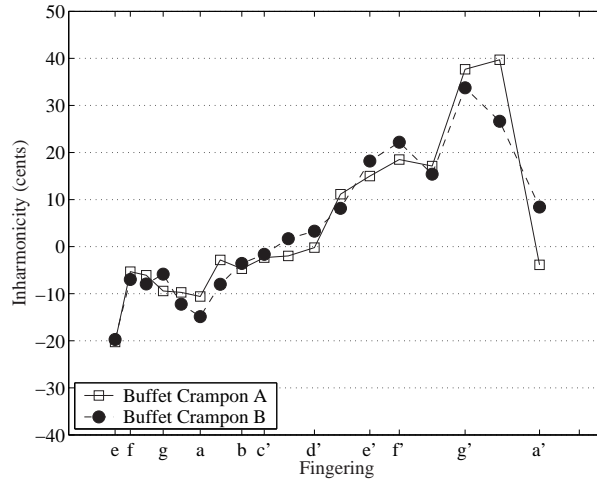


FIG. 1.15 – Measured inter-register inharmonicities obtained from input impedance measurements for two Buffet Crampon clarinet models.

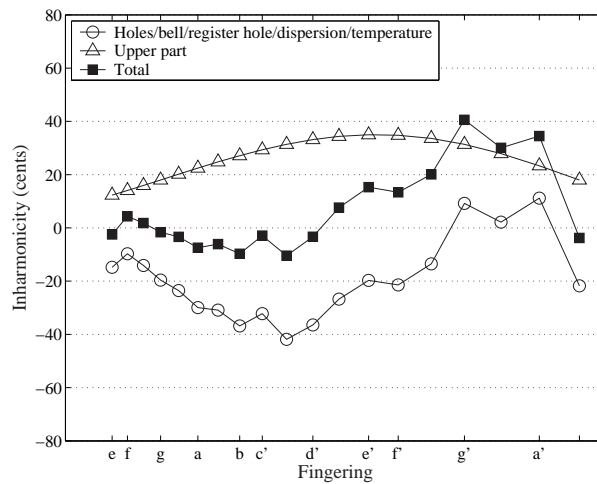


FIG. 1.16 – Inharmonicities due to perturbations found in the upper part (barrel/change in cross-section/upper joint) ( $\Delta$ ), due to hole/bell/register hole/temperature/dispersion ( $\circ$ ), and resulting total inter-register inharmonicity (sum of the two curves) ( $\blacksquare$ ).

Finally, if positive inharmonicity of the resonator is observed for the lowest twelfths, the origin of the problem may lie in combination of the action of register hole opening, cavities, bell and inappropriate bore perturbations in the upper part. Nederveen [65] has raised the question of the necessity of bore perturbations in musical instruments. In the case of the clarinet, calculations reveal the need to resort to bore irregularities close to the input to compensate for the negative inharmonicity caused by open holes, cavities, flaring bell and dispersion. Reaming the upper bore profile appears to be a difficult task and must be done carefully, since this part seems to control the accuracy of the twelfths.

ii) As discussed in section 2, predicting playing frequencies from resonance curves is not an easy task. Reference [22] shows that the measured length correction due to the reed effects (volume velocity of the reed and reed damping) is rather constant over the entire first register and the first half of the second one, then increases strongly. This allows compensation for the large increase of inter-register inharmonicity shown e.g. in figure 1.15. Nevertheless this kind of measurement, done using an artificial mouth, is rather difficult. It is also difficult to compare directly to the results obtained at different levels by an instrumentalist. An example of this difficulty is given in [7]. From our results for the two clarinets of figure 1.15, it is not possible to explain why the players are obtaining too large twelfths for the first tones ( $e$  to  $g$ ). This is a subject for future investigation: maybe the analysis could be made using also an artificial mouth, but the fact is that the players often complain about too large twelfths, and this fact seems to be quite common: as an example, recently Buffet Crampon has designed a new clarinet, called *Tosca*, correcting the tone  $f$ . For these low tones, what is the optimum inharmonicity of the resonator for having well tuned twelfth? Is it zero? The answer is not obvious, depending also on the excitation level since the resistance of a hole lowers the playing frequency (see reference [26] and appendix B), and certainly on the "tunability range" [55, 29], due to several factors, including the modification of both the embouchure (reed opening and reed damping) and the vocal tract. These musician-control parameters have not been extensively investigated yet. Moreover the "tunability range" increases with the pitch of the played tone: it is larger for the higher register than for the lower one, particularly due to the low level of the second impedance peak (for the second register, the second peak corresponds to the fifth peak of the first register).

iii) In the next sections, we continue our study in the same direction but in a different perspective. First, the register hole is searched to allow a register jump for the 19-tone complete register. This is an alternative to what makers do since clarinetists use different fingerings to play tones from  $f'\sharp$  to  $a'\sharp$  and their associated twelfths. Second, instead of working with a real instrument, we consider a perfect cylindrical tube (without tone holes and flare) with only one register hole. The next sections are devoted to the following general question: is it possible to find a register hole location on a cylindrical tube, combined with a simple perturbation in the upper part, which allows the first two complete registers to be perfectly well tuned? In other words, we examine if it is possible to design a well-tuned instrument which is provided with additional bore perturbations in the upper part which exactly compensate for inharmonicity due to tone holes and other effects.

## 1.4 Optimization of the location of the register hole and tuning corrections : statement of the problem

### 1.4.1 Assumptions

Our goal now is to achieve harmonicity of the first two resonance frequencies  $f_1$  and  $f_2$ , for the effective lengths corresponding to each hole, i.e. between two extreme values of  $\ell_{eff}$ , written  $\ell_{min}$  and  $\ell_{max}$ . The precise intermediate values of the length is without importance for the present objective. As a consequence, the absolute effect of small discontinuities, e.g. cavities or tapers, is not important as well, only their relative effect between these two registers being important. It is therefore convenient to consider a continuous variation of the length between the two extreme values. After the optimization of the intervals between the two registers for  $\ell_{eff} \in [\ell_{min}; \ell_{max}]$ , it will be possible to find the precise location of the tone holes achieving the desired scale.

How can harmonicity between the frequency  $f_1$  of the tone of the first register and the frequency  $f_2$  of the tone when the register hole is open, be achieved for all lengths between  $\ell_{min}$  and  $\ell_{max}$ ? First we will find an optimal location for the register hole, located upstream of  $\ell_{min}$ , second we will study if a correction system can compensate the residual defaults of this register hole. The dimensions of the hole are considered to be optimized by the practice of makers, and therefore are regarded as imposed. It is actually a difficult question, related to nonlinear effects as well as humidity, the important fact being that the linear behaviour, at low level, is well known [79]. We do not take into account the use of the register hole as a B flat tone hole. The correction systems are sought in order to be without manipulation by the instrumentalist, and therefore to act on both the first and the second registers, contrary to the register hole itself.

### 1.4.2 Formulation of the optimization problem

Optimization techniques are used to find a set of design parameters  $x_\star = \{x_\star^{(1)}, \dots, x_\star^{(n)}\}$  that can in some way be defined as optimal. These parameters are obtained by minimizing (or maximizing) a criterion function  $\mathcal{F}$  which may be subject to constraints and/or parameter boundaries. Thus, the design parameters are subjected to the following requirements:

- small changes location must be less than the distance between the reed tip and the first tone hole;
- dimensions of the acoustical systems must be reasonable for the realization;
- geometrical dimensions are positive.

Our optimization problem is formulated as follows:

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{F}(x) & \text{where } \mathcal{F} \text{ is the criterion function} \\ l_{b_i} \leq x_i \leq u_{b_i} & i=1, \dots, n \end{cases} \quad (1.43)$$

where  $x$  is the vector of design parameters ( $x \in \mathbb{R}^n$ ) and  $l_{b_i}$  and  $u_{b_i}$  are the lower and upper parameter boundaries respectively, for the design parameter  $x_i$ .



### 1.4.3 Criterion functions

#### *a) Location of the register hole*

As previously shown, the presence of the register hole suggests that it is probably impossible to build a clarinet in a way that the two registers might be played perfectly in tune with the same fingerings. Thus, the objective is to find the register hole location that entails the smallest frequency shift of the second resonance frequency for all fingerings. The first optimization is performed in order to play a 19-tone compass i.e a complete register. Then, a second optimization is performed restricting attention to fingerings from  $e$  to  $f'$  (above this fingering, clarinetists do not use the same fingering for the fundamental and the associated twelfth). The distance  $\ell$  of the hole from the effective input is the only design parameter. The optimization problem deals with equation (1.20) which predicts theoretically the frequency deviation associated with the opening of the register hole. It can be formulated with one of the two following criterions:

- criterion 1: to minimize the maximum of the frequency deviation;
- criterion 2: to minimize the mean of the square of the derivative with respect to  $k$  of equation (1.20).

The first criterion consists in limiting the most important tuning default of the instrument. This criterion, which is very simple and intuitive for anyone who is interested in instrument design, can be written:

$$\text{criterion 1: } \mathcal{F}_1 = \sup \left( \frac{2}{3\pi} \frac{s}{Sh'} \frac{\cos^2 k_2 \ell}{k_2} \right). \quad (1.44)$$

An interesting point about criterion 1 is that the solution can be approximated analytically as it is shown in section 1.5.1. On the contrary, once the maximum of the deviation is achieved for a fixed register hole location, the frequency deviations associated with other fingerings are not taken into account for the evaluation of the function.

Concerning criterion 2, the criterion function to minimize is formulated as

$$\text{criterion 2: } \mathcal{F}_2 = \frac{1}{2} \int_{k_{min}}^{k_{max}} \left[ \frac{\partial}{\partial k_2} \left( \frac{2}{3\pi} \frac{s}{Sh'} \frac{\cos^2 k_2 \ell}{k_2} \right) \right]^2 dk_2, \quad (1.45)$$

where  $\partial/\partial k_2$  is the derivative with respect to the wavenumber  $k_2$ ,  $k_{min}$  and  $k_{max}$  being related to the playing frequency via the effective length by  $k_{min} = 3\pi/2\ell_{max}$  and  $k_{max} = 3\pi/2\ell_{min}$  respectively. Contrary to criterion 1, this criterion function takes into account the deviation associated with all fingerings for its evaluation. The global minimum of this criterion function is achieved when the integrand is zero, i.e when the frequency deviation is constant for all fingerings. Nevertheless, noting that equation (1.20) is necessarily equal to zero for a particular frequency,  $k_2 \ell = 3\pi/2$ , it appears that the register hole location given by this criterion function is the one that minimizes inharmonicity variations around zero and may lead to a more homogeneous register jump across the entire register.

#### *b) Correction of the register hole effect*

The second aim of this optimization is to give suggestions on how to compensate for the register hole effect. We are looking for geometrical dimensions of acoustical systems whose effects alter the resonance frequencies in order to restore the original  $f_2/f_1$ -mode frequency ratio. Similarly to the study of the location of the register hole and denoting

$IH_{reg}$  and  $IH_{pert}$  the inharmonicities associated with the register hole and the perturbation respectively, a criterion function can be written as

$$\text{criterion 1: } \mathcal{F}_1 = \sup (|IH_{reg} + IH_{pert}|) , \quad (1.46)$$

which deals with the maximum of the total inharmonicity. Moreover, a second criterion function has also been investigated by minimizing the function defined as

$$\text{criterion 3: } \mathcal{F}_3 = \frac{1}{2} \int_{k_{min}}^{k_{max}} [IH_{reg} + IH_{pert}]^2 dk . \quad (1.47)$$

for which the minimum is reached when inharmonicity associated with the inserted perturbation is of the same magnitude as the register hole deviation and in the opposite direction.

## 1.5 Results and discussions

For the optimization, the radius of the main tube is taken as  $R = 7.5 \text{ mm}$ . The height of the register hole is  $12.5 \text{ mm}$  and its radius  $1.55 \text{ mm}$ . The upper bound for the acoustical system location, is set to  $154 \text{ mm}$  which is the first tone hole location according to table 1.1. The other parameter boundaries for all perturbations have been chosen in order to make the realization possible. Numerical results are performed with the minimisation routine *fmincon* from the MATLAB optimisation toolbox.

### 1.5.1 Register hole location

#### *a) Criterion 1: maximum of the frequency deviation*

As mentioned earlier, an optimum of criterion 1 defined by equation (1.44) can be derived analytically. In order to achieve the solution, we rewrite the frequency shift as follows

$$IH = \frac{2}{3\pi} \frac{S_h}{S_h'} \ell \frac{\cos^2 k_2 \ell}{k_2 \ell} , \quad (1.48)$$

and note that the magnitude of the deviation is proportional to  $\ell$  and varies as the function  $F(x) = \cos^2 x/x$  where  $x = k_2 \ell$ . We will first prove that the maximum of  $F(x)$  does not depend on  $\ell$  for a certain interval of values of  $k_2 \ell$  and therefore the optimum value of  $IH$  is obtained for the minimum of  $\ell$  on this interval.

The effective length of the tube varies between  $\ell_{max} = L = 585 \text{ mm}$ , the total length of the instrument including reed and radiation length corrections, and  $\ell_{min}$ . If the compass of a register is one twelfth minus one semi-tone, the two extreme values of the effective length are related by  $\ell_{min} = \ell_{max}/2^{18/12}$  which for simplicity we assume first to be  $\ell_{min} = \ell_{max}/3$ . The location of the register hole, defined by  $\ell$ , is in the upper part of the instrument and satisfies  $\ell < \ell_{min}$ .

Then, for a given effective length,  $\ell_{eff}$  lying between  $\ell_{min}$  and  $\ell_{max}$ , the wavenumber is defined as  $k_2 = 3\pi/2\ell_{eff}$ , and therefore the argument of  $F(x)$  varies follows :

$$\frac{3\pi\ell}{2\ell_{max}} < k_2\ell < \frac{3\pi\ell}{2\ell_{min}} , \quad (1.49)$$

thus

$$\frac{3\pi}{2} \frac{\ell}{L} < k_2\ell < \frac{9\pi}{2} \frac{\ell}{L} . \quad (1.50)$$

Because the ratio  $\ell/L$  is less than  $1/3$ , the upper bound for  $x = k_2\ell$  is therefore  $3\pi/2$  for which  $F(x) = 0$ . Figure 1.17 shows the variation of  $F(x)$ . From  $\ell = L/3$ , for the interval defined by inequalities (1.50),  $F(x)$  varies from 0 to 0, with a maximum value equal to 0.327, for  $x_0 = 2.975$ . When  $\ell$  decreases from  $L/3$ , figure 1.17 shows that the maximum values remains constant, equal to  $F(x_0)$ , except if  $\ell$  becomes so small that the value of  $F(x)$  for the minimum value of  $k_2\ell$  reaches the same value 0.327. Using the subscripts  $\star$  for referring to the optimal value and  $(i)$  ( $i = 1,2,3$ ) for referring to the studied criterion, this corresponds to  $\ell_\star^{(1)} = 0.205 L$ . Below this value, the maximum of  $F(x)$  grows rapidly. As

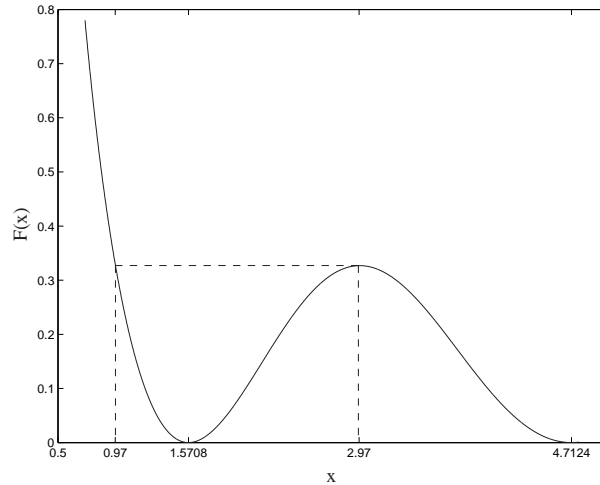


FIG. 1.17 – Perturbation function  $F(x) = \cos^2 x/x$ . The same local maximum is reached for  $x_0 = 2.97$  and  $x_\star = 0.97$ .

a consequence, the optimum of  $IH$  for the criterion 1 is finally the value  $\ell_\star^{(1)} = 0.205 L$ . Nevertheless, this value is not so critical, because the criterion function  $\mathcal{F}_1$  for criterion 1 is linear with  $\ell$ , over the interval  $[0.205 L, L/3]$ , thus the variation is not strong. Moreover, it appears clearly that any other criterion relative to the maximum of the frequency deviation will lead to a value within the interval, because the maximum is reached two times instead of one only.

Finally, taking into account that the interval  $[\ell_{min}, \ell_{max}]$  corresponds actually to a slightly smaller interval than a twelfth i.e  $2^{18/12}$ , a numerical study leads to the optimal value for criterion 1 slightly smaller than  $\ell = 0.205 L$ , i.e  $\ell_\star^{(1)} = 0.2041 L$ . Figure 1.18 confirms that for criterion 1, the function  $\mathcal{F}_1$  increases linearly above this optimum value but increases strongly when  $\ell$  decreases below it. The register hole deviation obtained with this “optimal” position is plotted on figure 1.19. As expected, the maximum of deviation appears at the beginning of the register and is almost equal to a quarter tone. Moreover, this result shows that the register hole is located close to its ideal position to produce the  $c'/g''$  transition: the register hole is located at one third of the effective length for this fingering so that the frequency shift is zero.

### b) Criterion 2: mean of the square of the derivative of the deviation

The register hole location achieved with the minimization of (1.45) is found to be

$$\frac{\ell_\star^{(2)}}{L} = 0.250, \quad (1.51)$$

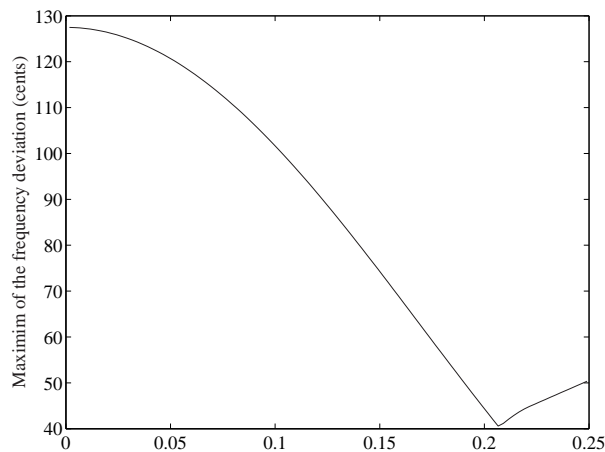


FIG. 1.18 – *Maximum of the frequency deviation as a function of  $\ell/L$ . Above  $\ell/L = 0.2041$ , the maximum value of the frequency shift increases linearly with the register hole location.*

which is not only larger than the previous result but also larger than the one found with numerical data given by Nederveen ( $\ell/L = 0.230$ ). For the investigated clarinet (see table 1.1), this ratio gives  $\ell/L = 0.240$ . The frequency deviations obtained with the optimal position defined by (1.51) and the one found in literature [22, 10] are similar: the  $a$ - $e''$  transition is correct and the frequency shift at the beginning of the register is about 20 cents (see figure 1.19).

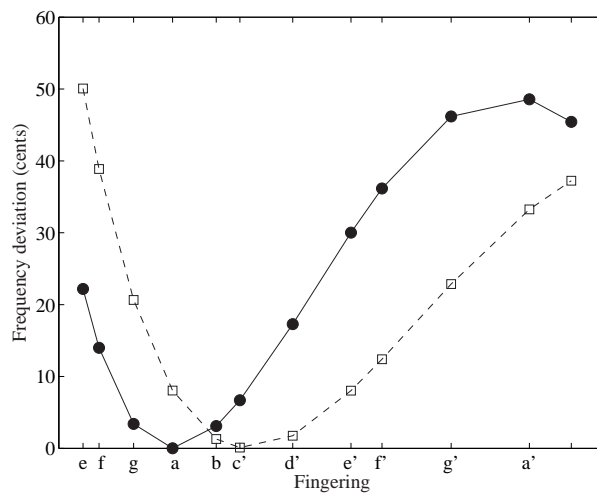


FIG. 1.19 – *Frequency deviations associated with the register hole. The register hole is found to be located at  $\ell_{\star}^{(1)} = 120.45$  mm from the top end for criterion 1 ( $\square$ ) and  $\ell_{\star}^{(2)} = 146.2$  mm for criterion 2 ( $\bullet$ ).*

### c) Conclusion

Performing optimization by minimizing the criterion functions defined by (1.44) and (1.45) gives different results and indicates that the final location of the register hole is the result of a compromise. However, as expected with equation (1.48), the magnitude of the maximum of deviation increases with the distance  $\ell$  but slightly for location larger

than  $\ell/L = 0.2041$ . As a consequence, above this critical value, the location of the register hole is not so essential on this point of view and this explain the difference in the register hole location observed by Nederveen and the investigated clarinet for instance. Finally, it appears that a register hole location far from the effective input and above the critical value should be an interesting compromise in order to improve the first twelfths of the register. Hence, we choose the location given by the optimization of criterion 2 that is  $\ell_{\star}^{(2)} = 146.2 \text{ mm}$ .

Restricting now attention to fingerings from  $e$  to  $f'$  (and not up to  $a' \#$ ) may be interesting in order to understand what instrument makers do. The result is that the optimization process converges to a position for the register hole between the two previous extreme values for the two criterion functions. Moreover, for the criterion 1, the distance from the clarinet effective input is found to be  $\ell_{\star}^{(1)} = 133.7 \text{ mm}$ . This result corresponds to the location used by Nederveen in its calculation [65] (i.e  $\ell = 135 \text{ mm}$ ). For that case, the twelfths at the bottom of the scale are still large but the maximum of the frequency deviation, which is also obtained for the lowest tone, has noticeably fallen to 35 cents (see figure 1.20). Concerning criterion 2, the location is close from the one found for the large compass.

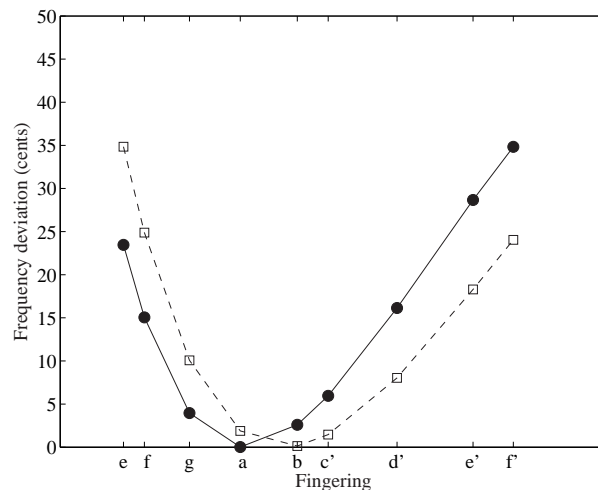


FIG. 1.20 – Frequency deviation associated with the register hole in the case of a real clarinet (i.e restricting our optimization to fingering from  $e$  to  $f'$ : above  $f'$ , fingerings are modified to ensure the well tuning and the third resonance is used). Optimal positions are  $\ell_{\star}^{(1)} = 133.7 \text{ mm}$  ( $\square$ ) and  $\ell_{\star}^{(2)} = 145.0 \text{ mm}$  ( $\bullet$ )

## 1.5.2 Adjustements of natural frequencies by means of small changes of the bore

### a) Overview of the possibilities

As mentioned earlier, the criterion is now to compensate for the frequency deviation due to the register hole by means of small changes of the bore. We are looking for a solution localized in the upper part of the instrument, i.e a solution acting for all fingerings. Looking at table 1.3, only three systems give inharmonicity in the right direction: an abrupt change in cross section area with  $S' < S$ , a change of conicity at the top end, and a localized enlargement or contraction. Concerning the case of a closed cavity, it has been shown (see

figure 1.5) that both positive and negative inharmonicity can be generated: in order to produce negative inharmonicity, the condition  $k_1 \ell > \pi/4$  which corresponds to playing frequencies larger than  $f_1 = c/8\ell_{max}$  must be valid. Thus, the accuracy of the twelfths at the end of the second-register scale (from  $e'$  fingering) would be improved only.

### b) Abrupt change in cross section area: $S' < S$

Fixing the radius of the tube downstream the discontinuity equal to 7.5 mm, the upstream tube radius  $R'$  and the location  $\ell$  of the discontinuity are used as optimization variables. Performing optimization leads to the following results:

- criterion 1:  $\ell_{\star}^{(1)} = 76.9 \text{ mm}$  and  $R'_{\star}^{(1)} = 7.1 \text{ mm}$ .
- criterion 3:  $\ell_{\star}^{(3)} = 76.4 \text{ mm}$  and  $R'_{\star}^{(3)} = 7.1 \text{ mm}$ .

The deviation from the tempered scale of the first resonance frequencies and inter-register for each fingering are plotted on figure 1.21. Results show that even if "optimal" parameters are quite different, the shape and the magnitude of final inharmonicities obtained with the two criterion functions are similar. The  $f_2/f_1$  frequency ratio is noticeably improved for all fingerings except for the twelfth associated with the lowest tone which is still 20-cent large. An interesting result is that the discontinuity in the diameter is found to be located near the barrel joint which is at a distance of  $60 \pm 4 \text{ mm}$  from the closed-end on a clarinet. This result agrees with the practice of many makers: Nederveen noticed that change in cross section area are mostly found near the embouchure for reed instruments.

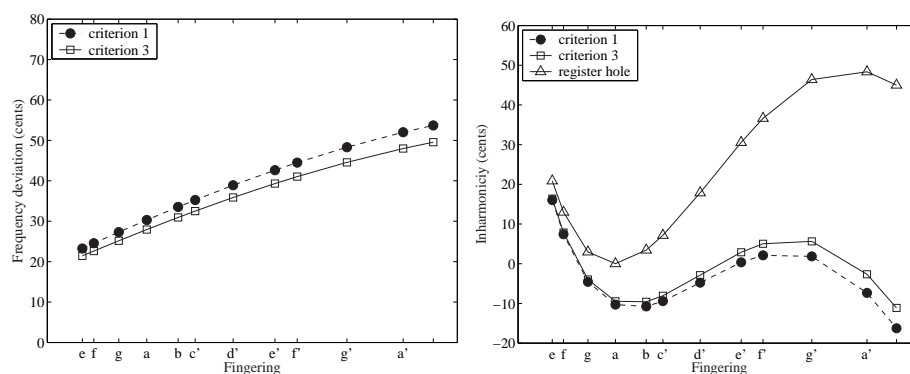


FIG. 1.21 – Frequency deviation for the first register (left) and inter-register inharmonicity (right): abrupt change in cross section area. Minimisations of the two criteria give the same result: the  $f_2/f_1$ -frequency ratio is improved for the highest notes but is still large for the lowest notes.

### c) Localized enlargement/contraction

The optimization variables used in this case are the location  $\ell$  of the perturbation, its length  $\ell'$  and the radius  $R'$  as indicated on table 1.2. Performing optimization for the case of a localized enlargement leads to the conclusion that small enlargement does not improve the relationship between first and second resonance frequencies. Even if optimization process converges with both criterion functions, final inharmonicities are not satisfactory. Figure 1.22 shows the tendency of the bottom notes to widen the  $f_2/f_1$  ratio which is musically unacceptable. On the contrary, for the considered particular case, contracting the air column causes negative inharmonicity across the entire register and tends to improve

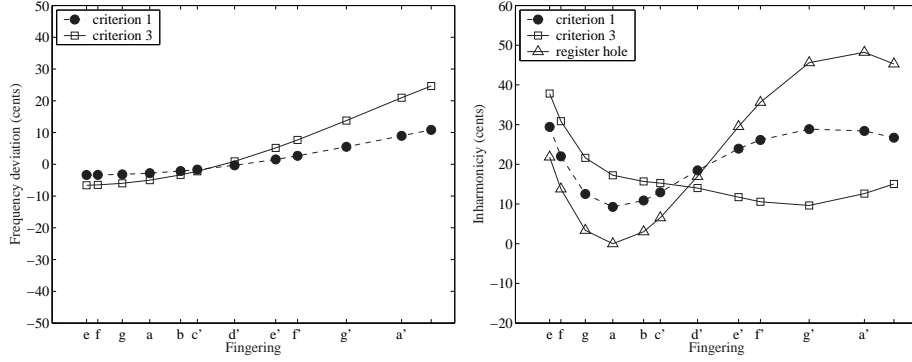


FIG. 1.22 – Frequency deviation for the first register (left) and inter-register inharmonicity (right): localized enlargement. Inter-register inharmonicity gets worst for the lowest notes which is musically unacceptable.

the inharmonicity (see figure 1.23). The optimization process converges to the following parameters:

$$\text{criterion 1} \begin{cases} \ell_{\star}^{(1)} = 62.74 \text{ mm} \\ \ell'_{\star}^{(1)} = 36.76 \text{ mm} \\ R'_{\star}^{(1)} = 7.17 \text{ mm} \end{cases} \quad \text{criterion 3} \begin{cases} \ell_{\star}^{(3)} = 60.0 \text{ mm} \\ \ell'_{\star}^{(3)} = 22.41 \text{ mm} \\ R'_{\star}^{(3)} = 7.0 \text{ mm} \end{cases}$$

When minimizing the criterion function defined by equation (1.46), an interesting result is that the design parameters given by the optimization process are similar to those of a clarinet barrel. As for an abrupt change in cross section, the contraction is located at a point near the barrel joint. In addition, the acoustic length of the contraction is the same as a common barrel ( $\ell_{\text{barrel}} \sim 40 \text{ mm}$ ). When looking at what makers do, their practice varies considerably concerning the geometry of the barrel. However, some makers insert narrower barrel than the cylindrical portion of the entire instrument in order to get accurate twelfths in the upper part of the scale [17]. While the results given by the minimization of (1.47) generate negative inharmonicity (see figure 1.23), the optimization process converges to two lower boundaries ( $R'_{\star}^{(3)} = R'_{\text{max}}$  and  $\ell_{\star}^{(3)} = \ell_{\text{min}}$ ). When enlarging the domain where optimization variables are looking for, a new minimum (lower than the one found) is achieved. Thus, we do not consider this solution in the next. Finally, the mean value of inharmonicity is about -0.6 cents and the standard deviation of the mean value is equal to 11.9 cents.

#### d) Change in conicity at the input

The optimization variables used for the case of tapered perturbation (see table 1.2) are the radius of the upper end of our model  $R'$ , the top angle  $\theta$  and the location point  $\ell$ . For each criterion function, the optimization process converges to the following design parameters:

$$\text{criterion 1} \begin{cases} \ell_{\star}^{(1)} = 98.5 \text{ mm} \\ \theta_{\star}^{(1)} = 0.10^{\circ} \\ R'_{\star}^{(1)} = 7.46 \text{ mm} \end{cases} \quad \text{criterion 3} \begin{cases} \ell_{\star}^{(3)} = 73.05 \text{ mm} \\ \theta_{\star}^{(3)} = 0.22^{\circ} \\ R'_{\star}^{(3)} = 7.37 \text{ mm} \end{cases}$$

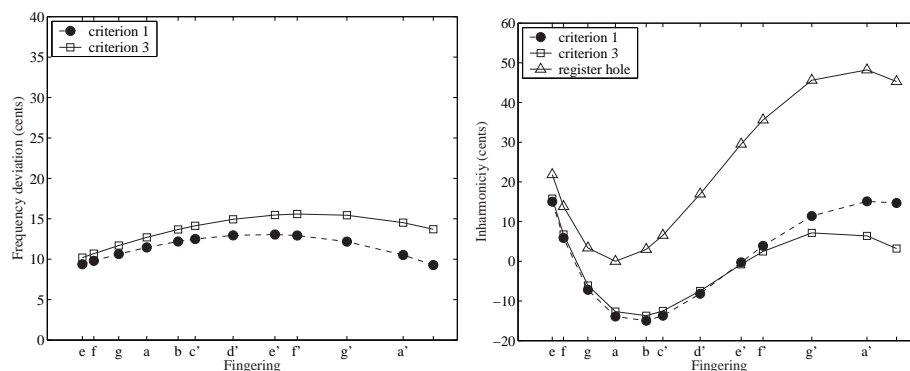


FIG. 1.23 – *Frequency deviation for the first register (left) and inter-register inharmonicity (right): localized contraction. Inter-register is improved across the entire register but remains large for the bottom notes.*

The lengths of the tapered perturbations corresponding to criterion 3 and criterion 1 are about 44.5 mm and 46.5 mm which are both larger than the length of a classic barrel. Concerning the location point, it is near the barrel joint for criterion 3 and slightly below this point for criterion 1. An important thing to note is that the location achieved by the optimization process is always close to the barrel joint whatever small change is used.

Figure 1.24 shows final inharmonicities obtained with the minimization of the two criterion functions. The  $f_2/f_1$ -frequency ratio is improved globally across the entire scale for both criterion functions except for the first fingering which is deteriorated slightly for criterion 3. As a consequence, only the design parameters given by the minimization of criterion 1 are considered. The mean value of the total inharmonicity is found to be 3.6 cents and the standard deviation of the mean value is about 11 cents.

Finally, results indicate that the 20-cent deficiency still remains for the notes at the bottom of the scale whatever acoustic system is used in order to alter the resonance frequencies. Thus, no improvement can be done to compensate for the effect of the register hole except for tones at the end of the scale.

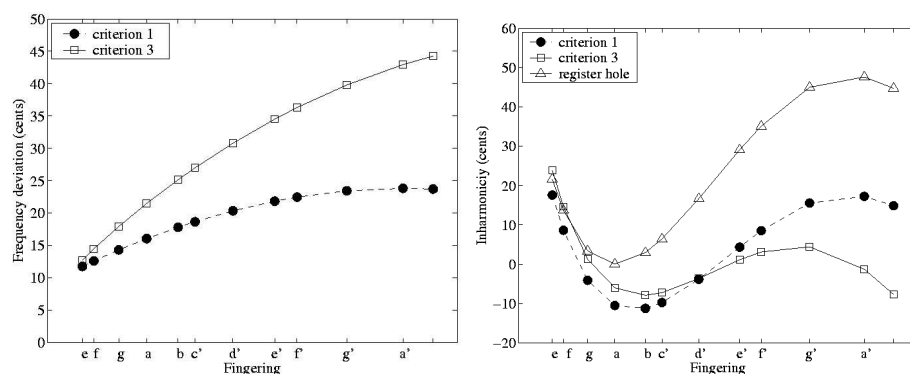


FIG. 1.24 – *Frequency deviation for the first register (left) and inter-register inharmonicity (right): positive truncated cone. The  $f_2/f_1$ -frequency ratio is improved globally across the entire scale but is still 20-cent large for the lowest notes.*



## 1.6 Conclusion

Many deviations from the standard cylindrical tube can be observed on a woodwind instrument. The present work provides some theoretical results concerning the effects of these bore irregularities in the perspective of the relationship between the first two resonance frequencies for the two first registers. The calculations using small perturbations are classical but the case of a side hole has been treated precisely, taking into account both the series and shunt impedances.

Calculations of inharmonicity associated with small perturbations and application to a real case give access to the relative influence on the first two resonance frequencies of each perturbing system found on a woodwind and reveal, in the case of the clarinet, the necessity to resort to bore perturbations to compensate for the damage on the resonance frequencies caused mainly by the presence of closed holes and the register hole.

In addition, the use of simple optimization techniques has been shown to be useful in order to give a more general view of the problem. However, optimization is very sensitive to the definitions of the criteria; for our purpose, performing optimization on the accuracy of the twelfths does not impose a unique possible criterion. For instance, the use of optimization techniques with weight for the lowest tones is of course possible and would probably give other results.

The main results of the present work can be summarized as follows:

- the origin of the occurrence of wide twelfths for the lowest tones of a clarinet is not to be found in shifts of the resonance frequencies of the resonator, as opposed to common wisdom. A way for future investigations may be the influences of the blowing parameters, reed parameters and the vocal tract since players can modify both of them and claim to do it.
- with a single corrective system, designing a new instrument having for the two registers a compass of a twelfth with the same fingering except the register hole opening, is impossible without tuning deficiencies;
- if the aim is the improvement of a common clarinet, the use of contractions near the barrel can help to some extent; nevertheless, no simple solution located in the upper part of the instrument can ensure the perfect tuning of the twelfths corresponding to the first lowest tones.

Finally, combining global and local solutions, i.e solutions acting mainly on one particular tone, is necessary in order to achieve the best tuning.

## Acknowledgements

We wish to thank P. Mallet, J.P. Dalmont, O. Gipouloux and K. Nederveen for fruitful discussions, as well as J.P. Dalmont for a loan of the input impedance measurement device. The Laboratoire Kastler Brossel of the Département de Physique de l'ENS is a laboratoire associé au CNRS et à l'Université Pierre et Marie Curie.

## Deuxième partie

# Calcul des auto-oscillations d'un instrument à anche par décomposition modale



Table des principaux symboles utilisés dans cette partie

$A, B, C$	coefficients du développement polynomial de la relation non-linéaire $F_{NL}$
$c$	vitesse du son $c = 340 \text{ m.s}^{-1}$
$\delta$	mesure de Dirac
$f$	fréquence (Hz)
$f_i$	fréquence instantannée (Hz)
$F_{NL}$	caractéristique non-linéaire de l'anche
$g$	fonction de Green dans le domaine temporel pour la formulation avec condition de Neumann
$\tilde{g}$	fonction de Green dans le domaine temporel pour la formulation avec condition absorbante
$G(\omega)$	transformée de Fourier de $g$
$\tilde{G}(\omega)$	transformée de Fourier de $\tilde{g}$
$H(t)$	fonction de Heaviside
$j$	$\sqrt{-1}$
$k$	nombre d'onde $k = \omega/c$
$k_n$	valeur propre
$\ell$	longueur du tuyau
$N$	ordre de troncature de la décomposition
$p(t)$	pression acoustique
$p_n(t)$	composante du champ de pression $p(t)$
$p_M$	pression de plaquage de l'anche
$P(\omega)$	transformée de Fourier de $p(t)$
$q_s(t)$	terme source
$Q_s(\omega)$	transformée de Fourier de $q_s$
$Q_n$	facteur de qualité du $n^{\text{ième}}$ pic de résonance du tuyau
$r$	rayon du tuyau
$S$	section du tuyau ( $S = \pi r^2$ )
$t$	temps
$u(t)$	débit acoustique
$u_{00}$	débit statique
$u_L(t)$	termes linéaires de la caractéristique non-linéaire $F_{NL}$
$\tilde{u}_{NL}(t)$	termes non-linéaires de la caractéristique non-linéaire $F_{NL}$
$\tilde{u}(t)$	$\tilde{u}(t) = u_{00} + \tilde{u}_{NL}(t)$
$U(\omega)$	transformée de Fourier de $u(t)$
$\tilde{U}(\omega)$	transformée de Fourier de $\tilde{u}(t)$
$\mathcal{K}$	constante de propagation $\mathcal{K} = j\frac{\omega}{c} + \alpha$
$x$	position du point d'observation
$x_0$	position de la source
$Y_n$	admittance du tuyau à la pulsation $\omega_n$
$Z_e(\omega)$	impédance d'entrée du tuyau
$\alpha$	coefficient d'atténuation des ondes au cours de la propagation
$\alpha_n$	coefficient d'atténuation pour le $n^{\text{ième}}$ pic de résonance du tuyau
$\alpha_v$	coefficient d'atténuation visqueux
$\epsilon$	petit paramètre
$\Omega_n$	partie réelle de la pulsation de résonance $\omega_n$
$\gamma$	paramètre sans dimension de pression dans la bouche
$\gamma_c$	rapport des chaleurs spécifiques ( $\gamma_c = C_p/C_v$ )

Table des principaux symboles utilisés dans cette partie

$\gamma_m$	partie imaginaire de la pulsation de résonance $\omega^\pm$
$\Gamma_n$	partie imaginaire de la pulsation de résonance $\omega_n$
$\Phi_n$	fonction propre associée à la valeur propre $k_n$
$\omega$	pulsation de l'onde
$\omega_n$	pulsation (réelle) propre
$\tilde{\omega}_n$	pulsation (complexe) de résonance pour la formulation avec condition absorbante
$\omega^\pm$	pulsation complexe de résonance pour la formulation avec condition de Neumann
$\rho$	masse volumique de l'air ( $\rho = 1,2929 \text{ kg.m}^{-3}$ )
$\zeta$	paramètre d'adaptation d'anche au résonateur

# Introduction

Cette partie est consacrée à la description des régimes d'oscillations dans les instruments de musique à anche auto-oscillants. Le cadre général dans lequel s'inscrit la démarche modélisatrice est celui de la théorie modale dont l'usage est courant pour étudier les comportements de systèmes linéaires mais qui, *a priori*, n'est pas forcément bien adaptée à l'analyse de phénomènes non-linéaires. Plus exactement, nous proposons une décomposition du son en composantes élémentaires qui, en régime linéaire, c'est-à-dire un court instant pendant le transitoire, sont les modes du système. Le but de cette étude est de fournir une méthode de calculs si possible simple, pour mieux comprendre les mécanismes de production du son et en particulier, les régimes transitoires dans les instruments à anche. On présente la méthode en l'appliquant au modèle élémentaire de clarinette à deux équations écrites à l'entrée de l'instrument, sans tenir compte de la dynamique de l'anche [81, 58, 51].

Une manière simple d'aborder le problème par méthode modale consiste à décomposer l'impédance d'entrée sur les modes propres du résonateur. C'est la première approche retenue dans ce travail qui est similaire à celle employée par Agulló et Barjau [2] pour estimer la fonction de réflexion à l'entrée d'un système unidimensionnel à partir d'une impédance d'entrée mesurée. La différence est que nous proposons une décomposition de l'impédance du système sans nous limiter à l'entrée de celui-ci. Partant de cette écriture décomposée, on aboutit à une formulation des auto-oscillations dans le domaine temporel sous la forme d'un système d'équations différentielles non-linéaires pour lequel les composantes du champ sont couplées, limitant ainsi l'approche analytique.

L'objectif recherché avec la seconde formulation du problème est de découpler les composantes du champ en régime transitoire. Considérant dans un premier temps le système dans sa version linéaire, on aboutit à une expression analytique du son pendant le début du transitoire. La non-linéarité est ajoutée après coup, lorsque l'on s'intéresse au comportement du modèle dans son ensemble, depuis l'instant initial jusqu'au régime permanent.

Si l'on se contente ici d'appliquer la méthode au cas d'un instrument à anche pour lequel le résonateur est cylindrique, la méthode présentée est générale. Son extension à d'autres formes de résonateur se fait simplement une fois connue l'expression de son impédance d'entrée. Dans ce travail, il n'est pas question de faire une étude détaillée des auto-oscillations pour un instrument de type clarinette ; il s'agit plutôt de présenter une méthode de calcul et de montrer ce qu'elle peut apporter à la compréhension de la production d'une note. Pour une description précise, il faudrait, en particulier, tenir compte de l'anche qui intervient dans l'auto-oscillation. Dans la formulation proposée, cela se traduit par l'ajout d'une ou de plusieurs équations au système d'équations final selon que l'on prenne un ou plusieurs de ses modes de vibration, avec l'implication, pour la non-linéarité, de devenir une fonction de la pression et de l'ouverture de l'anche.

Enfin, on note que pour les deux formulations présentées, l'approche est ici temporelle, les solutions calculées étant des solutions réelles du modèle, obtenues à partir d'un jeu de

conditions initiales. On calcule des signaux de pression qui peuvent être écoutés, offrant ainsi une validation perceptive du modèle d'instrument retenu.

# Chapitre 1

## Tuyau sonore excité par une source localisée

Le modèle le plus simple utilisé pour calculer les oscillations d'une clarinette repose habituellement sur des équations valables à l'entrée de l'instrument. L'objet de ce chapitre est d'établir les équations pour toute la longueur du résonateur auxquelles répond le modèle de clarinette et de donner une écriture de la pression à partir d'une fonction de Green. On présente le modèle physique élémentaire de l'instrument sensé reproduire les comportements dynamiques de l'instrument puis on propose une mise en équations du problème à partir de la théorie des lignes de transmission : faisant usage des résultats de Zwikker et Kosten [84], l'établissement des équations se fait dans le domaine fréquentiel et inclut les pertes par effets visco-thermiques. Une fois les équations établies et le problème posé, une réécriture du problème est recherchée dans l'idée de traduire l'effet de la condition aux frontières dans le second membre de l'équation de propagation. Deux formulations équivalentes du problème initial sont proposées, chacune correspondant à un problème distinct. Pour chaque formulation, on donne la solution du problème à partir de la fonction de Green qui vérifie les conditions aux limites du problème. En particulier, on met en évidence que, pour un échelon de débit entrant, la solution du problème au stade linéaire, est la fonction de Green du problème associé, pour lequel la condition aux frontières à l'entrée est caractérisée par une admittance directement liée au souffle du musicien.

Le passage dans le domaine temporel se fait en supposant l'amortissement indépendant de la fréquence ; sa variation sera réintroduite une fois la décomposition modale effectuée (au chapitre 2), en attribuant à chaque mode l'amortissement correspondant à sa fréquence.

### 1.1 Position du problème

Le principe du modèle d'instrument considéré est le modèle élémentaire d'instruments à anche de type clarinette utilisé par de nombreux auteurs [75, 51, 8, 39, 68]. C'est un modèle concis, qui produit de nombreux comportements dynamiques observés et qui permet, grâce à certaines approximations, l'accès à des solutions analytiques. Il repose sur deux équations, que nous rappelons brièvement.

La première, non linéaire, relie de façon quasi-statique le débit  $u(t)$  entrant dans l'instrument à la pression  $p(t)$  dans le bec. L'anche étant supposée sans masse ni amortissement, son déplacement est proportionnel à la différence de pression  $\Delta p(t)$  entre la pression dans la bouche de l'instrumentiste  $p_m$ , supposée constante, et la pression  $p(t)$ . Connaissant ainsi la surface d'ouverture de l'anche, il reste à connaître la vitesse de l'air entrant dans



l'instrument pour en déduire le débit. Pour la clarinette, le comportement du jet hydrodynamique entrant dans l'instrument est décrit par un modèle quasi-stationnaire reposant sur l'équation de Bernoulli avec certaines hypothèses [43]. La seconde, écrite dans le domaine fréquentiel, caractérise le comportement linéaire du résonateur décrit par son impédance d'entrée  $Z_e(\omega)$ . On a ainsi deux équations qui relient le débit entrant à la pression dans le bec, qui s'écrivent :

$$u(t) = F_{NL}[\Delta p(t)], \quad (1.1)$$

$$P(\omega) = Z_e(\omega)U(\omega), \quad (1.2)$$

où  $P(\omega)$  et  $U(\omega)$  sont les transformées de Fourier respectives de  $p(t)$  et  $u(t)$ . La fonction non linéaire s'écrit :

$$F_{NL} = S_r \left[ 1 - \frac{\Delta p}{p_M} \right] \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}},$$

où  $S_r$  est la surface d'ouverture de l'anche,  $\rho$  la masse volumique de l'air, et  $p_M$  la pression de placage statique, proportionnelle à la raideur de l'anche (pour cette pression, l'anche est plaquée et n'oscille plus).

Le problème étant non-linéaire, la forme de la solution est fortement liée à la forme de la non-linéarité [35]. Pour notre part, nous simplifions cette caractéristique en nous plaçant au voisinage du seuil d'oscillation de sorte que la pression dans l'instrument ne s'écarte pas trop de la pression nulle. Nous allons utiliser un développement en série de Taylor de la caractéristique non-linéaire qui conduit à une expression de la relation pression-débit sous la forme d'un polynôme de degré 3 que l'on peut écrire sous la forme

$$u(t) = u_{00} + A p(t) + B p^2(t) + C p^3(t), \quad (1.3)$$

où  $u_{00}$  est la composante statique du débit et les coefficients  $A$ ,  $B$ , et  $C$  s'expriment en fonction des paramètres de contrôle du modèle. On note qu'ici, les coefficients du polynôme de la caractéristique de l'anche sont des coefficients avec dimensions. Pour le modèle choisi, on ignore le débit produit par la vibration de l'anche ; sa prise en compte ne fait que modifier légèrement l'impédance d'entrée, et on sait qu'il est possible de l'inclure dans la modélisation sous forme de correction de longueur ajoutée à la longueur du résonateur [22]. Le modèle retenu pour le résonateur est celui d'un tube cylindrique débouchant à l'extrémité  $x = \ell$  sur une impédance nulle, le rayonnement du tube étant pris en compte sous forme de correction d'extrémité  $\Delta\ell_r = 0,6r$  [69]. Ainsi, en bout de tube, on a  $p(\ell, t) = 0$ . Dans la suite, seul le champ interne  $p(x, t)$  nous intéresse. On note cependant que le champ rayonné serait obtenu à partir du débit acoustique du monopôle en sortie de tube, à condition que le rayon soit très inférieur à la longueur d'onde [69].

Au regard des équations (1.1) et (1.2), l'extension de la démarche proposée dans ce travail à d'autres modèles d'instruments est possible, notamment pour d'autres formes de résonateurs, donnant ainsi une portée générale à notre approche. Le résonateur doit être linéaire et seule la connaissance de l'impédance d'entrée est nécessaire.

En raison de la simplicité de ce modèle, de nombreux auteurs se sont intéressés à la recherche de ses solutions auto-oscillantes. Diverses approches ont été envisagées : Grand et coll. [39] se sont intéressés à la nature de l'oscillation au seuil d'oscillation en développant la solution en série de Fourier. Kergomard [51] a analysé en détail la production d'une note en l'absence de pertes et fait le lien avec les paramètres de jeu. Dalmont et coll. [23] s'intéressent au raccord des théories "petites oscillations" et "modèle sans pertes". Récemment, Ollivier [68] a étudié la capacité de ce modèle "simpliste" à décrire précisément le comportement de l'instrument réel en comparant des données mesurées et calculées.

## 1.2 Etablissement des équations du résonateur avec amortissement

Les développements de ce paragraphe reprennent ceux présentés dans la référence [51]. Nous avons décidé de les reprendre en partie pour clarifier les implications de la prise en compte des phénomènes dissipatifs dans l'écriture de l'équation de propagation et des conditions aux limites.

Le problème de la propagation en onde plane dans un tube cylindrique peut être traité en faisant usage de la formulation en ligne de transmission. Les grandeurs pression et vitesse sont alors remplacées par leur valeur moyenne prise sur la section du guide. La prise en compte des effets visco-thermiques, phénomènes qui dépendent de la fréquence, conduit à présenter les équations dans le domaine fréquentiel. Le point de départ des développements sont les résultats de Zwicker et Kosten [84] dont le domaine de validité englobe une large bande de fréquences et de rayons, ce qui les rend applicables aux instruments de musique. L'intérêt de leur approche réside dans la séparation des effets visqueux et thermiques ce qui les amène à décrire la propagation de l'onde comme celle d'une onde plane, solution du système d'équations suivant

$$d_x P = -Z_v U, \quad (1.4)$$

$$d_x U = -Y_t P. \quad (1.5)$$

L'impédance  $Z_v$  associée aux effets visqueux et l'admittance  $Y_t$  associée aux effets thermiques exprimées par unité de longueur de la ligne sont définies par

$$Z_v = j \frac{\rho \omega}{S} [1 - K(k_v r)]^{-1},$$

et

$$Y_t = j \frac{\omega S}{\rho c^2} [1 + (\gamma_c - 1)K(k_t r)],$$

où  $\omega$  est la pulsation de l'onde,  $c$  est la célérité du son,  $S = \pi r^2$  la section du guide cylindrique de rayon  $r$ ,  $\gamma_c$  le rapport des chaleurs massiques et  $j = \sqrt{-1}$ . Les fonctions  $K(x)$  sont définies par

$$K(x) = \frac{2 J_1(x)}{x J_0(x)}, \quad (1.6)$$

où les fonctions  $J_i$  sont les fonctions de Bessel cylindriques d'ordre  $i$  de première espèce. Leurs arguments  $k_v$  et  $k_t$  sont les nombres d'ondes de diffusion visqueuse et de diffusion thermique qui sont liés aux longueurs des couches visqueuses  $\ell_v$  et thermiques  $\ell_t$  par les relations

$$k_v^2 = -i \frac{\omega}{c} / \ell_v, \quad \text{et} \quad k_t^2 = -i \frac{\omega}{c} / \ell_t,$$

avec

$$\ell_v = \mu / \rho c, \quad \text{et} \quad \ell_t = \lambda / (\rho c C_p),$$

où  $\mu$  et  $\lambda$  sont les coefficients de cisaillement et de conduction thermique et  $C_p$  la capacité calorifique massique à pression constante.

L'application de l'opérateur dérivée par rapport à la variable  $x$  noté  $d_x$  à l'équation (1.4) compte tenu de (1.5), conduit à l'équation de propagation suivante

$$d_{xx}^2 P(x) - Y_t Z_v P(x) = 0. \quad (1.7)$$

Les développements asymptotiques de (1.6) au premier ordre des rapports  $\ell_v/r$  et  $\ell_t/r$  donnent respectivement pour l'impédance et l'admittance de la ligne

$$Z_v \simeq j \frac{\rho\omega}{S} \left[ 1 + (1-j) \frac{\beta_v}{kr} \right], \quad (1.8)$$

et

$$Y_t \simeq j \frac{\omega S}{\rho c^2} \left[ 1 + (1-j) \frac{\beta_t}{kr} \right], \quad (1.9)$$

dans lesquels on a posé

$$\beta_v = \sqrt{\frac{2\omega\ell_v}{c}} \quad \text{et} \quad \beta_t = (\gamma_c - 1) \sqrt{\frac{2\omega\ell_t}{c}}, \quad (1.10)$$

et où  $k = \omega/c$ . [A noter que la référence [51] omet le facteur  $(\gamma_c - 1)$ ]. En définitive, le report des quantités (1.8) et (1.9) dans l'équation de propagation (1.7) conduit à

$$d_{xx}^2 P - \left( j \frac{\omega}{c} + \alpha \right)^2 P = 0, \quad (1.11)$$

dans laquelle on note  $\alpha$  un coefficient qui est directement lié aux effets visco-thermiques donné par

$$\alpha = \frac{1}{2} (1+j) \frac{\beta_v + \beta_t}{r}. \quad (1.12)$$

Au regard de (1.10), les effets visco-thermiques dans le guide sont proportionnels à la racine carrée de la fréquence de l'onde. Le facteur  $\alpha$  possède une partie réelle qui traduit l'atténuation de l'amplitude des ondes au cours de la propagation et une partie imaginaire qui correspond au phénomène de dispersion (variation de la vitesse des ondes en fonction de la fréquence). Dans la suite, nous ignorons la dispersion mais notons qu'il serait facile d'en tenir compte, sa prise en compte ne modifiant pas la démarche. Définissant la constante de propagation

$$\mathcal{K} = \sqrt{Y_t Z_v} = j \frac{\omega}{c} + \alpha, \quad (1.13)$$

et l'impédance caractéristique

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z_v}{Y_t}} = \frac{\rho c}{S} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{\beta_v - \beta_t}{kr} \right], \quad (1.14)$$

les solutions de (1.11) sont données classiquement par

$$P(x) = P^+ e^{-\mathcal{K}x} + P^- e^{\mathcal{K}x}, \quad (1.15)$$

ce qui implique

$$U(x) = \frac{1}{Z_c} (P^+ e^{-\mathcal{K}x} - P^- e^{\mathcal{K}x}), \quad (1.16)$$

où  $P^+$  et  $P^-$  sont respectivement les amplitudes des ondes se propageant suivant les  $x > 0$  et  $x < 0$ . La condition aux limites en  $x = 0$  s'écrit, à partir de l'équation (1.4):

$$d_x P = -(jk + \alpha_v) \frac{\rho c}{S} U. \quad (1.17)$$

dans laquelle on note  $\alpha_v = \frac{1}{2} \frac{\beta_v}{r}$ . On constate alors qu'en raison du modèle d'amortissement retenu, l'impédance en  $x = 0$  et par conséquent l'impédance d'entrée du système ne sont pas nulles pour la fréquence zéro d'après (1.17). Dans la suite, **on ignore le terme**

**d'amortissement visqueux  $\alpha_v$  dans la condition aux limites** et ce pour deux raisons. L'impédance à fréquence nulle est généralement faible (notons qu'elle doit être recherchée avec un autre modèle d'écoulement dans le tuyau) et a peu d'influence sur le comportement dynamique du modèle puisque ce sont les pics d'impédance de grande amplitude qui participent à l'auto-oscillation. Mais la raison principale tient au fait que le produit de convolution qui apparaît lorsque l'on cherche à écrire le système en temporel complique sensiblement les calculs, surtout si  $\alpha_v$  intervient dans des termes de couplage entre modes.

Finalement, nous retenons la formulation suivante du problème central de l'étude, sous la forme:

$$\begin{cases} [d_{xx}^2 - (j\frac{\omega}{c} + \alpha)^2] P(x) = 0, & \forall x \in [0; \ell], \\ d_x P(x) = -j\omega \frac{\rho}{S} U, & \text{en } x = 0, \\ P(x) = 0, & \text{en } x = \ell, \end{cases} \quad (1.18)$$

dans lequel l'expression du débit  $U$  est donnée par la transformée de Fourier de (1.1).

### 1.3 Présentation de deux formulations du problème de propagation

Deux formulations distinctes du problème (1.18) sont envisagées. Elles sont obtenues par application des relations de continuité du champ et de sa dérivée spatiale à l'entrée du résonateur, la différence entre les deux formulations provenant du choix de la condition aux frontières associée à chacun des problèmes, et du choix d'un terme source dans l'équation de propagation.

On considère une tranche de fluide d'épaisseur infinitésimale  $\delta x$  à l'entrée du résonateur, au point  $x = 0$ , qui sépare le domaine considéré ( $x > 0$ ) du milieu extérieur ( $x < 0$ ). En effet, on peut imaginer l'excitation comme cette tranche de fluide qui est animée d'un mouvement vibratoire provoquant un débit  $U$ . La propagation des ondes s'effectue suivant les  $x$  positifs croissants. Au point  $x = 0$ , on définit une normale  $\vec{n}_0$  sortante du domaine (voir figure C.1).

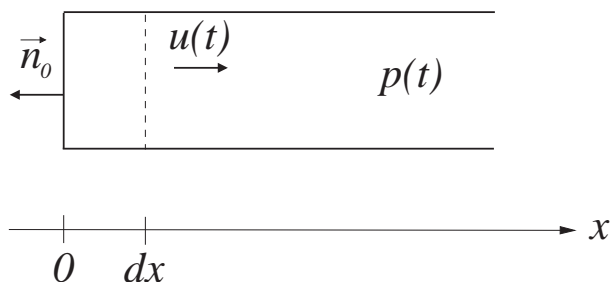


FIG. 1.1 – Paroi à l'entrée du modèle. On s'intéresse à la pression  $p(t)$  et au débit  $u(t)$  à l'entrée du tuyau cylindrique. On utilise la normale sortante pour définir l'impédance de paroi. Le débit entrant  $u(t)$  est orienté dans l'autre sens.

#### 1.3.1 Formulation avec condition de type Neumann à l'entrée

Le premier choix qui vient à l'esprit est celui d'une condition aux limites de type Neumann à l'entrée: en effet, en régime permanent, il est bien connu que la condition

d'auto-oscillations (partie imaginaire de l'impédance nulle) est très proche d'une condition de Neumann, la clarinette fonctionnant pour des fréquences proches des maximums d'impédance d'entrée [5, 81, 34]. Ce choix reviendra simplement à faire une décomposition de l'impédance d'entrée  $Z_e(\omega)$  quand nous chercherons une décomposition modale des auto-oscillations. La condition aux limites est donc différente de celle indiquée en (1.18), et nous devons compenser ce changement par un terme source dans l'équation de propagation, cherché sous la forme suivante, puisqu'elle est ponctuelle et localisée en  $x_0 = 0$  :

$$d_{xx}^2 P - (j\frac{\omega}{c} + \alpha)^2 P = -Q_s \delta(x), \quad (1.19)$$

dans laquelle  $Q_s$  est la fonction source recherchée et  $\delta$  est la mesure de Dirac. Ceci permet d'écrire, compte tenu des relations de continuité du champ  $P(x)$  et de sa dérivée spatiale au point  $x = 0$

$$\int_0^{\delta x} d_{xx}^2 P(x) dx = [d_x P(x)]_0^{\delta x} = -Q_s. \quad (1.20)$$

Le choix d'une condition de type Neumann à l'entrée impose

$$[d_x P(x)]_0 = 0, \quad (1.21)$$

et le report de (1.17) conduit à l'expression de  $Q_s$  donnée par

$$Q_s(\omega) = j\omega \frac{\rho}{S} U(\omega). \quad (1.22)$$

La source  $Q_s$  ainsi définie traduit l'effet de la condition aux frontières (1.17). La condition de Neumann (1.21) exprime que la paroi (fictive) au point  $x = 0$  est parfaitement rigide et que par conséquent, tout le débit  $U$  entre dans le résonateur : l'impédance de paroi  $Z$  est infinie.

En résumé, notre première formulation, dite *formulation avec condition de type Neumann à l'entrée*, s'écrit :

$$\begin{cases} [d_{xx}^2 - (j\frac{\omega}{c} + \alpha)^2]P(x) = -Q_s \delta(x), & \forall x \in [0; \ell], \\ d_x P(x) = 0, & \text{en } x = 0, \\ P(x) = 0, & \text{en } x = \ell, \end{cases} \quad (1.23)$$

avec le terme source  $Q_s(\omega) = j\omega \frac{\rho}{S} U(\omega)$ .

### 1.3.2 Formulation avec condition absorbante à l'entrée

L'idée directrice de la seconde formulation réside dans la volonté de traduire la condition aux limites à l'entrée sous la forme d'une condition d'impédance qui prend en compte la partie linéaire variable de la relation pression-débit. Pour ce faire, on écrit l'équation (1.1) sous la forme

$$u(t) = Ap(t) + \tilde{u}(t), \quad (1.24)$$

dans laquelle  $\tilde{u} = u_{00} + u_{NL}$  et où  $u_{NL}$  regroupe les termes non-linéaires de (1.1). Imposant au terme source  $\tilde{Q}_s$  de traduire de l'effet de  $\tilde{u}(t)$ , on écrit

$$\tilde{Q}_s(\omega) = j\omega \frac{\rho}{S} \tilde{U}(\omega). \quad (1.25)$$

où  $\tilde{U}(\omega)$  est la transformée de Fourier du débit  $\tilde{u}(t)$ . Compte tenu de (1.17) et par une méthode analogue à celle présentée au §1.3.1, il vient la condition aux frontières à l'entrée donnée par

$$[d_x P(x)]_0 = -j\omega \frac{\rho}{S} U^-, \quad (1.26)$$

dans laquelle on note

$$U^-(\omega) = A P(\omega), \quad (1.27)$$

un débit qui entre dans le domaine d'étude au point  $x = 0$ .

La nouvelle formulation, appelée *formulation avec condition absorbante à l'entrée*, s'écrit donc :

$$\begin{cases} [d_{xx}^2 - (j\frac{\omega}{c} + \alpha)^2]P(x) = -\tilde{Q}_s(\omega) \delta(x), & \forall x \in [0; \ell], \\ d_x P(x) = -j\omega \frac{\rho}{S} A P(x), & \text{en } x = 0, \\ P(x) = 0, & \text{en } x = \ell, \end{cases} \quad (1.28)$$

avec  $\tilde{Q}_s(\omega) = j\omega \frac{\rho}{S} [U(x) - A P(x)]$ . Remarquons que l'impédance de paroi doit être définie en utilisant la projection du débit sur la normale sortante à la paroi  $\vec{n}_0$ , en  $x = 0$ . Or l'admittance  $A$  est définie selon la normale entrante (voir figure C.1); elle est donc l'opposé de l'admittance d'entrée conventionnelle :

$$Y(\omega) = Z^{-1}(\omega) = -U^-(\omega)/P(0, \omega) = -A. \quad (1.29)$$

L'admittance conventionnelle a une partie réelle positive si elle correspond à un milieu passif, absorbant, et négative dans le cas où l'extrémité apporte de l'énergie. Au contraire, l'admittance  $A$  est positive si l'extrémité est active, permettant à une oscillation de démarrer : c'est en effet la condition d'oscillation pour un système sans pertes [51].

En définitive, deux approches différentes du même problème (1.18) sont envisagées. En raison de l'utilisation de méthodes modales, on pourra adapter la base de fonctions sur laquelle on développera les solutions à la formulation traitée. A ce stade, il convient d'insister sur le fait que l'on recherche les solutions d'un même problème et que, quelle que soit la formulation utilisée, seule la prise en compte d'une infinité de modes dans chaque formulation conduit au champ de pression du problème (1.18).

### 1.3.3 Solutions intégrales du problème de propagation

La solution du problème (1.18) est recherchée en faisant usage de la forme intégrale des deux formulations présentées. La formulation intégrale est une méthode de résolution des problèmes aux limites linéaires de l'acoustique qui repose sur le fait qu'un champ acoustique dans un domaine limité peut être décrit comme une superposition de champs élémentaires (champs à caractère monopolaire et/ou dipolaire) dont la solution élémentaire est la fonction de Green d'un problème associé au problème initial. Il n'est pas question ici d'en faire une description détaillée et le lecteur est renvoyé à par exemple [69, 16] pour une description claire partant de la physique.

Traitant le problème dans le domaine fréquentiel, l'équation intégrale donne le champ de pression acoustique  $P(x)$  en tout point  $x$  du domaine  $[0; \ell]$  qui est solution de l'équation suivante

$$P(x) = \int_0^\ell G(x; x_0) F_s(x_0) dx_0 + \int_{\mathcal{F}} [G(x; x_0) \partial_{n_0} P(x_0) - P(x_0) \partial_{n_0} G(x; x_0)] d\mathcal{F}_0 \quad (1.30)$$

où la fonction  $G(x; x_0)$  est la fonction de Green dans le domaine de Fourier d'un problème associé au problème réel,  $F_s(x_0)$  est la fonction qui traduit l'effet des sources incluses dans le domaine  $[0; \ell]$ ,  $\partial_{n_0}$  est la dérivée partielle par rapport à la normale  $\vec{n}_0$  sortante du domaine et  $\mathcal{F}$  est la frontière du domaine. Le calcul de la fonction de Green sera traité en détail au chapitre 2. Pour le moment, nous nous contenterons de rappeler que le choix des conditions aux frontières auxquelles elle satisfait comporte un certain arbitraire ce qui permet de choisir une fonction de Green adaptée au problème à résoudre. En particulier, le choix d'une fonction de Green qui satisfait aux mêmes conditions aux frontières que la pression recherchée permet de simplifier le calcul de (1.30), la seconde intégrale devenant nulle. Notons que l'équivalence entre modification de la condition aux limites et modification du terme source aurait pu également être obtenue en utilisant l'équation (1.30) pour des fonctions de Green non adaptées.

Dans la suite, on écrit pour chaque formulation le problème de Green associé ainsi que la solution de chacun des problèmes en fonction de la fonction de Green.

### Formulation avec condition de Neumann à l'entrée

La fonction de Green  $G(x; x_0)$  utilisée répond au problème aux limites non-homogène suivant écrit dans le domaine de Fourier:

$$\begin{cases} [d_{xx}^2 - (j\frac{\omega}{c} + \alpha)^2]G(x, x_0) = -\delta(x - x_0), & \forall x, x_0 \in ]0; \ell[ \text{ et } x_0 \rightarrow 0, \\ d_x G(x, x_0) = 0, & \text{en } x = 0, \\ G(x, x_0) = 0, & \text{en } x = \ell. \end{cases} \quad (1.31)$$

Le report du second membre de l'équation de propagation (1.19) et l'intégration sur la variable  $x_0$  de l'équation intégrale (1.30) conduit au champ de pression en tout point  $x$  du domaine écrit sous la forme

$$P(x, \omega) = G(x; 0) Q_s(\omega), \quad (1.32)$$

pour lequel la source  $Q_s$  est donnée par

$$Q_s(\omega) = j\omega \frac{\rho}{S} U(\omega). \quad (1.33)$$

La transformée de Fourier de ces équations conduit à

$$p(x, t) = g(x, t|x_0, t_0) * q_s(t), \quad (1.34)$$

pour lequel la source  $q_s(t)$  est donnée par

$$q_s(t) = \frac{\rho}{S} \frac{d}{dt} u(t), \quad (1.35)$$

et la fonction de Green  $g(x, t|x_0, t_0)$  est la transformée de Fourier inverse de  $G(x, x_0)$  : comme nous l'avons annoncé, celle-ci sera calculée en supposant l'amortissement constant dans la propagation. Signalons aussi que c'est ici qu'intervient l'idée d'ignorer le terme  $\alpha_v$  dans la condition aux limites : on évite d'avoir un terme constant dans (1.35), l'impédance d'entrée à fréquence nulle devenant effectivement nulle, et on évite un produit de convolution entre  $\alpha_v$  et  $u(t)$ . Les conditions initiales qui assurent l'unicité de la solution, seront discutées au chapitre 3.

### Formulation avec condition absorbante à l'entrée

La fonction de Green  $\tilde{G}(x; x_0)$  utilisée répond au problème aux limites non-homogène suivant<sup>1</sup>

$$\begin{cases} [d_{xx}^2 - (j\frac{\omega}{c} + \alpha)^2]\tilde{G} = -\delta(x - x_0), & \forall x, x_0 \in ]0; \ell[ \text{ et } x_0 \rightarrow 0, \\ d_x \tilde{G}(x) = -j\frac{\omega}{c} \frac{\rho c}{S} A \tilde{G}, & \text{en } x = 0, \\ \tilde{G}(x) = 0, & \text{en } x = \ell. \end{cases} \quad (1.36)$$

De la même manière que précédemment, le champ acoustique en tout point  $x$  du domaine est donné par

$$P(x, \omega) = \tilde{G}(x; 0) \tilde{Q}_s(\omega), \quad (1.37)$$

avec

$$\tilde{Q}_s(\omega) = j\omega \frac{\rho}{S} \tilde{U}(\omega). \quad (1.38)$$

Dans le domaine temporel, on obtient :

$$p(x, t) = \tilde{g}(x, t|x_0, t_0) * \tilde{q}_s(t), \quad (1.39)$$

avec

$$\tilde{q}_s(t) = \frac{\rho}{S} \frac{d}{dt} \tilde{u}(t). \quad (1.40)$$

Cette formulation revient donc à regrouper les termes non-linéaires dans la fonction source  $\tilde{q}_s(t)$ .

**Conséquence :** dans le cas où on impose un brutal changement des paramètres d'excitation, de sorte que les conditions initiales se traduisent par une fonction de Heaviside

$$\tilde{u}(t) = H(t)[u_{00} + u_{NL}(t)],$$

la formulation (1.39) et (1.40) montre que la fonction de Green  $\tilde{g}(x, t|x_0, t_0)$  est, au facteur  $\rho u_{00}/S$  près, la solution du problème (1.18) dans sa version *linéaire* (on remplace  $G$  par  $P$  dans (1.18)).

## 1.4 Conclusion

Voici donc la mise en équation du problème sous une forme qui ne nécessite plus que la détermination des fonctions de Green associées aux deux formulations retenues. Dans la suite, on traite le problème en raisonnant essentiellement dans le domaine fréquentiel : les équations en temporel seront utilisées uniquement pour préciser les conditions initiales lors des simulations du comportement du modèle (chapitre 3).

Les développements précédents ont montré que la connaissance de la fonction de Green du problème avec condition aux limites absorbantes à l'entrée apparaît comme une étape importante de notre travail. Pour une excitation brutale du modèle, la fonction de Green est la solution du problème (1.18) dans l'approximation *linéaire*.

1. La source du problème étant sur une frontière du domaine (en  $x_0 = 0$ ), une alternative au calcul de la fonction de Green puis au passage à la limite en faisant  $x_0 \rightarrow 0$ , est de calculer le noyau de Poisson qui est la solution élémentaire d'un système mécanique vérifiant des conditions aux limites spécifiques (autres que celles de Neumann et de Dirichlet) [14].



L'étape suivante envisagée dans le chapitre 2, consiste à déterminer, pour chaque formulation, une expression de la fonction de Green que nous recherchons sous la forme d'un développement sur les modes du tuyau. Puis, partant de la forme décomposée, on présentera une écriture des auto-oscillations du modèle sous la forme d'un système d'équations différentielles qui gouvernent l'amplitude de composantes élémentaires du champ de pression.

## Récapitulatif des équations principales du chapitre 1

(domaine fréquentiel)

### PROBLÈME DE CETTE ÉTUDE

$$\left\{ \begin{array}{l} [d_{xx}^2 - (j\frac{\omega}{c} + \alpha)^2] P(x) = 0, \quad \forall x \in [0; \ell], \\ d_x P(x) = -j\omega \frac{\rho}{S} U, \quad \text{en } x = 0, \\ P(x) = 0, \quad \text{en } x = \ell. \end{array} \right. \quad (1.41)$$

### FORMULATION AVEC CONDITION DE NEUMANN À L'ENTRÉE

- La solution

$$P(x, \omega) = G(x; 0) Q_s(\omega), \quad (1.42)$$

avec

$$Q_s(\omega) = j\omega \frac{\rho}{S} U(\omega). \quad (1.43)$$

- Le problème de Green

$$\left\{ \begin{array}{l} [d_{xx}^2 - (j\frac{\omega}{c} + \alpha)^2] G(x, x_0) = -\delta(x - x_0), \quad \forall x, x_0 \in ]0; \ell[ \text{ et } x_0 \rightarrow 0, \\ d_x G(x, x_0) = 0, \quad \text{en } x = 0, \\ G(x, x_0) = 0, \quad \text{en } x = \ell. \end{array} \right. \quad (1.44)$$

### FORMULATION AVEC CONDITION ABSORBANTE À L'ENTRÉE

- La solution

$$P(x, \omega) = \tilde{G}(x; 0) \tilde{Q}_s(\omega), \quad (1.45)$$

avec

$$\tilde{Q}_s(\omega) = j\omega \frac{\rho}{S} \tilde{U}(\omega), \quad (1.46)$$

où

$$\tilde{U}(\omega) = U(\omega) - A P(\omega).$$

- Le problème de Green

$$\left\{ \begin{array}{l} [d_{xx}^2 - (j\frac{\omega}{c} + \alpha)^2] \tilde{G} = -\delta(x - x_0), \quad \forall x, x_0 \in ]0; \ell[ \text{ et } x_0 \rightarrow 0, \\ d_x \tilde{G}(x) = -j\frac{\omega}{c} \frac{\rho c}{S} A \tilde{G}, \quad \text{en } x = 0, \\ \tilde{G}(x) = 0, \quad \text{en } x = \ell. \end{array} \right. \quad (1.47)$$



## Chapitre 2

# Décomposition modale et formulation des auto-oscillations

L'objet de ce chapitre est de donner une expression de la fonction de Green associée à chacune des formulations présentées au chapitre précédent sous la forme d'un développement modal et de proposer une écriture modale des auto-oscillations dans le domaine temporel. Le début du chapitre est consacré à rappeler brièvement quelques notions utilisées relatives aux fonctions de Green, aux modes propres et *modes de résonance* [32]. La suite du chapitre présente les développements analytiques qui mènent aux formes décomposées. Le calcul de la fonction de Green associée à la *formulation avec condition de Neumann à l'entrée* sera rapidement présenté, ce cas ayant déjà été largement traité par ailleurs, comme par exemple dans [16]. La recherche de la fonction de Green correspondante à la *formulation avec condition absorbante à l'entrée* sera étudiée en détail. En effet, peu d'études en acoustique se sont penchées sur la propagation en espace clos avec condition aux limites dissipatives alors que la solution exacte de ce problème canonique existe sous la forme de réflexions successives. On présentera les calculs qui mènent à la solution développée sur les *modes de résonance* du système. La dépendance en fréquence de la condition aux limites est ainsi prise en compte et on obtient directement les fréquences de résonance et facteurs d'amortissements associés à chacun des modes. L'application à la clarinette des résultats obtenus, est ensuite présentée, situation pour laquelle la condition aux limites est de type actif ( $\text{Re}(Z_{\text{paroi}}) < 0$ ). La fin du chapitre est consacrée à la présentation de l'écriture des auto-oscillations dans le domaine temporel sous la forme d'un système infini d'équations différentielles du second ordre, non-linéaires et couplées dont la résolution et la validation seront l'objet du chapitre suivant.

### 2.1 Introduction

Le but de cette section est de rappeler quelques notions fondamentales qui sont utilisées dans ce chapitre. On aborde brièvement des notions relatives aux fonctions de Green et à la théorie modale, dans la volonté de préciser les grandes lignes des développements analytiques qui suivent.

#### 2.1.1 Problème de Green et la solution élémentaire

La fonction de Green  $g(x,t|x_0,t_0)$  est la solution élémentaire d'un problème et traduit l'effet au point  $x$  à l'instant  $t$  d'une impulsion émise en  $x_0$  à un instant antérieur  $t_0$ . Elle est donc la solution de l'équation de propagation non-homogène en temporel (ou équation

de Helmholtz non-homogène en fréquentiel) pour laquelle le terme source est une source ponctuelle de type impulsif. Deux principes essentiels sont vérifiés par les fonctions de Green : la relation de réciprocité et le principe de causalité. Le premier principe traduit le fait qu’intervertir les positions de l’émetteur et du récepteur et de changer les temps d’émissions en  $-t$  et de réception en  $-t_0$  ne modifie en rien la fonction de Green  $g(x,t|x_0,t_0)$ . Le second exprime qu’un effet doit être précédé d’une cause et qu’on ne peut “ressentir” une onde à un instant antérieur à son temps d’émission.

### 2.1.2 Modes propres : définitions dans le domaine fréquentiel

Les modes propres  $\psi_m$  (ou fonctions propres) d’un système sont les solutions non-nulles d’un problème formé de l’équation de Helmholtz homogène (équation de propagation dans le domaine fréquentiel, sans source) à laquelle sont associées certaines conditions aux frontières. Un tel problème n’admet de solutions que pour des valeurs données  $k_m(\omega)$  du nombre d’onde. Dans le domaine fréquentiel, un problème aux valeurs propres prend la forme générale suivante

$$\begin{cases} [\Delta + k_m^2(\omega)]\psi_m(x,\omega) = 0, & x \in [0,\ell], \\ \left[ \frac{\partial}{\partial n} + jk_0/\zeta(x,\omega) \right] \psi_m(x,\omega) = 0, & \forall x \in S, \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $\zeta(x,\omega) = Z(x,\omega)/\rho c$  est une impédance normalisée qui caractérise les phénomènes au niveau des parois ( $Z$  est une impédance de paroi). Les fonctions propres sont ainsi déterminées par la géométrie du domaine et par les conditions aux limites, le nombre d’onde  $k_m$  ne prenant pas en compte la dissipation au cours de la propagation. Pour une impédance  $\zeta(x,\omega)$  imaginaire pure, les modes propres présentent le caractère d’orthogonalité, propriété très utile dès lors que l’on cherche à projeter la solution sur la base de fonctions que forme l’ensemble des fonctions propres  $\psi_m$ . Cependant, dans de nombreuses situations, les fonctions propres posent problème puisque les conditions aux frontières sont généralement décrites par des conditions mixtes pour lesquelles la condition aux limites dépend de la fréquence [16]. Les valeurs propres et modes propres dépendent alors de la pulsation  $\omega$ , ce qui rend délicat l’obtention de la solution du problème dans le domaine temporel par transformée de Fourier inverse. Ce type de méthode est discutée dans l’annexe E.

### 2.1.3 Modes de résonance

Les *modes de résonance* [32] d’un système correspondent à ses modes d’oscillations libres. Ainsi, contrairement au concept de modes propres, la notion de *modes de résonance* est proche de la physique du système. On excite le système puis après extinction de la source, chaque mode de résonance oscille avec sa propre pulsation de résonance, son amplitude décroissant dans le temps avec son propre facteur d’amortissement, chaque mode pouvant vérifier différentes conditions aux frontières. Le concept de mode de résonance prend en compte la géométrie, les phénomènes dissipatifs aux limites et leur dépendance fréquentielle. On notera que pour des problèmes avec conditions aux limites de type Neumann, les modes propres et les modes de résonance sont identiques.

Dans la suite, nous ferons usage des modes propres pour développer les solutions de la formulation avec condition de Neumann à l’entrée. La résolution du problème par la formulation avec condition absorbante sera, elle, envisagée en développant les solutions sur les modes de résonance du système.

## 2.2 Développement de la fonction de Green sur les modes propres avec condition de Neumann à l'entrée

Avant d'utiliser les modes propres pour approcher la solution du problème couplé (1.1) et (1.2), on se propose de présenter leur calcul pour ensuite trouver la forme décomposée de la fonction de Green du problème (1.44), la source étant localisée au point  $x_0 = 0$ . On se contente de donner quelques étapes qui permettent d'aboutir aux expressions de la fonction de Green en fréquentiel puis, en temporel. Les développements qui suivent sont classiques et peuvent être trouvés notamment dans [16, 32].

### 2.2.1 Calcul des modes propres

La fonction de Green est recherchée sous la forme d'un développement sur la base des fonctions propres qui vérifient une condition de Neumann en  $x = 0$  et une condition de Dirichlet en  $x = \ell$ . Les fonctions propres  $\Phi_m(x)$  vérifient alors le problème aux valeurs propres qui suit

$$\begin{cases} [\Delta + k_m^2]\Phi_m(x) = 0, & \forall x \in [0, \ell], \\ \partial_x \Phi_m(x) = 0, & x = 0, \\ \Phi_m(x) = 0, & x = \ell, \end{cases} \quad (2.2)$$

où  $m$  est un indice et où  $k_m$  sont les valeurs du nombre d'onde pour lesquelles le problème admet les solutions  $\Phi_m(x)$ . Le calcul des fonctions propres est direct et mène à écrire, compte tenu des conditions aux frontières,

$$\Phi_m(x) = \cos k_m x, \quad (2.3)$$

pour lesquelles les valeurs propres sont données par  $k_m = m\pi/2\ell$ . La norme des fonctions propres vaut  $\Lambda_n = \ell/2$ . Les modes sont orthogonaux et on note :

$$\int_0^\ell \Phi_n(x) \Phi_m(x) dx = \Lambda_n \delta_{nm},$$

avec  $\delta_{nm}$  le symbole de Kronecker.

### 2.2.2 Développement modal

L'ensemble des fonctions  $\Phi_m(x)$  forment une base de l'espace considéré sur laquelle la fonction de Green peut être développée sous la forme

$$G(x,0) = \sum_{m=0}^{\infty} G_m \Phi_m(x), \quad (2.4)$$

où les  $G_m$  sont les amplitudes modales associées à chaque mode  $\Phi_m(x)$ . En remplaçant dans l'équation de propagation de (1.44) la fonction de Green donnée par (2.4), puis après multiplication de chaque membre de l'équation obtenue par la fonction propre  $\Phi_q(x)$  et après intégration sur le domaine, il vient :

$$\sum_{m=0}^{\infty} [k^2 + k_m^2] G_m \int_0^\ell \Phi_m(x) \Phi_q(x) dx = \Phi_q(0),$$

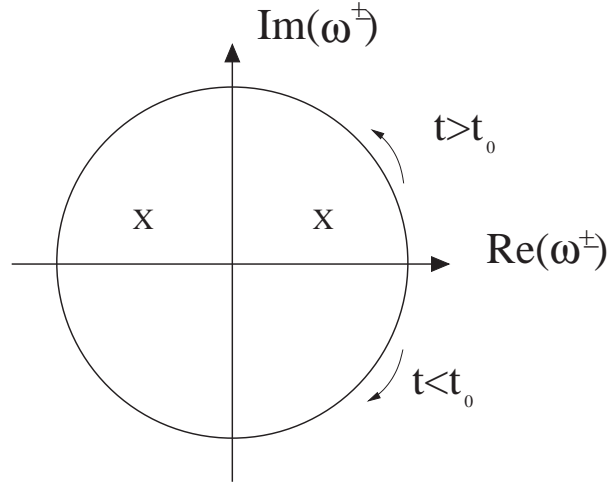


FIG. 2.1 – Position des pôles ( $X$ ) et choix du contour d'intégration.

qui, compte tenu de la relation d'orthogonalité des fonctions propres, donne<sup>1</sup>

$$G(x,0) = \frac{2}{\ell} c^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Phi_m(0)}{(\omega^2 - \omega_m^2 - 2j\alpha\omega c - \alpha^2 c^2)} \Phi_m(x). \quad (2.5)$$

Les zéros du dénominateur de (2.5) sont les pulsations de résonance du système qui s'écrivent

$$\omega^{\pm} = \pm\omega_m + j\gamma_m, \quad (2.6)$$

avec

$$\omega_m = k_m c, \quad (2.7)$$

$$\gamma_m = \alpha c, \quad (2.8)$$

où  $\gamma_m$  est un facteur directement lié à la dissipation (nul en l'absence de dissipation). La prise en compte de l'amortissement conduit à l'apparition de pulsations  $\omega^{\pm}$  complexes dont la partie réelle traduit un mouvement oscillant et la partie imaginaire une diminution de l'amplitude du mouvement avec le temps. L'hypothèse d'un amortissement indépendant de la fréquence aboutit comme attendu à une partie imaginaire des pulsations  $\omega^{\pm}$  indépendante du mode. Enfin, la valeur des pulsations de résonance du système sont a priori très proches des pulsations propres  $\omega_m$  du fait que l'amortissement au cours de la propagation est faible ( $\gamma_m \ll \omega_m$ ). Définissant le facteur de qualité associé à la pulsation de résonance  $\omega^{\pm}$  par

$$Q_m = \omega_m / 2\gamma_m, \quad (2.9)$$

la fonction de Green en fluide dissipatif prend la forme de (2.4) dans laquelle on écrit

$$G_m = \frac{2}{\ell} c^2 \frac{\Phi_m(0)}{\omega_m^2 - \omega^2 + j\omega\omega_m/Q_m}. \quad (2.10)$$

1. On remplace l'indice  $q$  par l'indice  $m$ .

Définissant la transformée de Fourier  $F(\omega)$  de la fonction  $f(t)$  par

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (2.11)$$

et la transformée de Fourier inverse par

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega, \quad (2.12)$$

l'expression de la fonction Green en temporel est donnée par

$$g(x,t|0,t_0) = -\frac{2}{\ell} \frac{c^2}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m(x)\Phi_m(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega(t-t_0)}}{(\omega - \omega^+)(\omega - \omega^-)} d\omega.$$

L'intégrale à calculer dans le plan complexe se ramène à un calcul de résidus des points singuliers de l'intégrande, situés à l'intérieur d'un contour d'intégration fermé : la valeur de l'intégrale est à  $2j\pi$  près la somme des résidus calculés. Le choix du parcours d'intégration se fait à l'aide du *lemme de Jordan* qui impose un parcours différent suivant le signe de  $t - t_0$ . Le calcul aboutit à des solutions qui peuvent être causales ou non-causales selon la position des pôles par rapport à l'axe réel (on regarde le signe de leur partie imaginaire). Pour  $t > t_0$ , on ferme le parcours par le demi-plan supérieur et pour  $t < t_0$ , on le ferme par le demi-plan inférieur (voir figure 2.1). D'après (2.8), les pôles sont situés au-dessus de l'axe réel si bien que le théorème des résidus donne

$$g(x,t|0,t_0) = 2j\pi \sum Res[G]_{\omega^\pm} H(t - t_0),$$

où la fonction  $H(t - t_0)$  traduit le principe de causalité. Le résidu de  $G(x;0)$  au point  $\omega = \omega^+$  s'écrit

$$Res[G]_{\omega^+} = -\frac{2}{\ell} \frac{c^2}{2\pi} \Phi_m(x)\Phi_m(0) \frac{e^{j\omega^+(t-t_0)}}{2\omega_m},$$

La fonction de Green correspondante dans le domaine temporel, obtenue par transformée de Fourier inverse à partir de (2.10) en intégrant par la méthode des résidus (voir encadré), est donnée par

$$g(x,t|0,t_0) = H(t - t_0) \sum_{m=0}^{\infty} g_m(t)\Phi_m(x), \quad (2.13)$$

pour laquelle les coefficients modaux  $g_m(t)$  s'écrivent

$$g_m(t) = \frac{2}{\ell} c^2 \Phi_m(0) e^{-\gamma_m(t-t_0)} \frac{\sin \omega_m(t-t_0)}{2\omega_m}. \quad (2.14)$$

La fonction de Green est la superposition de fonctions sinusoïdales exponentiellement amorties, chaque composante oscille à la pulsation propre  $\omega_m$ , son amplitude décroissant au cours du temps avec son propre facteur d'amortissement  $\gamma_m = \alpha c$  qui est indépendant du mode considéré. Cependant, un modèle d'amortissement indépendant de la fréquence n'est pas représentatif de la situation physique considérée. Pour rendre le modèle plus réaliste, on décide d'attribuer à chaque amplitude modale  $g_m(t)$  un facteur d'amortissement  $\gamma_m$  qui correspond à la valeur de l'amortissement pour la fréquence du mode. A ce stade,



nous devons insister sur le fait que cette modification fait que la solution (2.13) n'est plus solution du problème (1.44). Cependant, on constate qu'en définissant les fréquences de résonance comme celles qui annulent la partie imaginaire de l'admittance d'entrée, les termes d'amortissement n'auront que peu d'influence sur la détermination des fréquences d'oscillation du système. Pour les simulations, on utilisera le facteur d'atténuation  $\alpha_m$  pour la composante  $m$ , qui est relié à l'admittance (connue)  $Y_m$  par la relation

$$Y_m = \tanh \alpha_m \ell ,$$

et qui devient pour  $\alpha_m \ell \ll 1$ ,

$$Y_m \simeq \alpha_m \ell . \quad (2.15)$$

## 2.3 Développement de la fonction de Green sur les modes de résonance

Les développements qui suivent reprennent les travaux de l'article *en cours de préparation* présenté à l'annexe E en proposant une application directe au cas de la clarinette. Dans un premier temps, on présente en détail les développements analytiques en considérant une situation couramment rencontrée pour laquelle la terminaison (dissipative) est supposée passive ( $A < 0$ ). Pour la clarinette, cette situation présente un intérêt limité : elle correspond à un apport d'énergie du musicien dans l'instrument qui est insuffisant pour établir un régime d'oscillations stable, ce qui implique un retour du système à son régime statique non-oscillant. Le cas d'une terminaison active ( $A > 0$ ) qui correspond, dans le cas sans perte, à une croissance exponentielle du son, est envisagé dans un second temps et seuls les résultats essentiels sont présentés.

La démarche proposée est générale et consiste dans un premier temps, à rechercher une expression de la fonction de Green dans le domaine de Fourier sous une forme non décomposée appelée *forme compacte*. Le calcul des pôles de cette fonction conduit aux pulsations (complexes) de résonance dans lesquelles interviennent l'atténuation de l'onde au cours de sa propagation et l'amortissement aux limites. Enfin, la solution temporelle est obtenue par transformée de Fourier inverse à l'aide du théorème des résidus.

### 2.3.1 Solution compacte dans le domaine fréquentiel

Pour  $x \neq 0$ , les solutions de l'équation de propagation de (1.47) s'écrivent

$$\begin{aligned} \tilde{G}^-(x; 0) &= \mathcal{A}^- \cosh[\mathcal{K}x + \chi], & x < 0, \\ \tilde{G}^+(x; 0) &= \mathcal{A}^+ \cosh[\mathcal{K}(\ell - x) + \chi\ell], & x > 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

avec  $\mathcal{K}$  le nombre d'onde complexe donné par  $\mathcal{K} = j\frac{\omega}{c} + \alpha$ , et pour lesquelles les conditions aux frontières en  $x = 0$  et  $x = \ell$  imposent respectivement

$$\coth \chi = \coth \eta \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{K} - \alpha} = -\frac{1}{A} \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{K} - \alpha}, \quad (2.17)$$

et

$$\coth \chi\ell = 0, \quad (2.18)$$

où l'on a posé

$$\tanh \eta = -A, \quad (2.19)$$

la condition qu'imposent les conditions aux frontières à l'entrée quand l'amortissement au cours de la propagation n'est pas pris en compte. A partir de maintenant, **le coefficient  $A$  est sans dimension**, c'est-à-dire que l'on a multiplié le coefficient de (1.3) par  $\rho c/S$  pour rester cohérent avec l'annexe E. Les relations de continuité en  $x = 0$  de la fonction de Green et de sa dérivée s'écrivent

$$\tilde{G}^-(0^-) = \tilde{G}^+(0^+), \quad (2.20)$$

et

$$\int_{0^-}^{0^+} d_{xx}^2 \tilde{G}(x) dx = \left[ d_x \tilde{G}(x) \right]_{0^-}^{0^+} = -1, \quad (2.21)$$

ce qui aboutit à

$$\mathcal{A}^- = \frac{1}{\mathcal{K}} \frac{\sinh \mathcal{K} \ell}{\cosh[\mathcal{K} \ell + \chi]}, \quad \text{et,} \quad \mathcal{A}^+ = \frac{1}{\mathcal{K}} \frac{\cosh \chi}{\cosh[\mathcal{K} \ell + \chi]}. \quad (2.22)$$

Finalement, la fonction de Green s'écrit dans le domaine fréquentiel

$$\begin{cases} \tilde{G}^-(x) = \frac{1}{\mathcal{K}} \frac{\sinh \mathcal{K} \ell \cosh[\mathcal{K} x + \chi]}{\cosh[\mathcal{K} \ell + \chi]}, & x < 0, \\ \tilde{G}^+(x) = \frac{1}{\mathcal{K}} \frac{\cosh \chi \sinh[\mathcal{K}(\ell - x)]}{\cosh[\mathcal{K} \ell + \chi]}, & x > 0. \end{cases} \quad (2.23)$$

Le calcul de la transformée de Fourier inverse de (2.23) se fait à l'aide du théorème des résidus (la variable  $\omega$  est un nombre complexe) et nécessite le calcul des pôles que l'on présente au paragraphe suivant.

### 2.3.2 Calcul des pôles

Les pôles de (2.23) sont les solutions de l'équation

$$\cosh[\mathcal{K} \ell + \chi] = 0 \iff \mathcal{K} \ell + \chi(\mathcal{K}) = jn \frac{\pi}{2}, \quad (2.24)$$

où  $n$  est un entier impair. Puisque l'inégalité  $n \neq 0$  est toujours vérifiée, le module de  $\mathcal{K}$  est toujours grand devant le terme  $\chi$ , qui est relatif aux phénomènes dissipatifs : la recherche des zéros de (2.24) peut se faire par perturbation, la perturbation considérée étant du même ordre que le rapport  $\alpha/\mathcal{K}$ .

La solution à l'ordre zéro est donnée par

$$\mathcal{K}^{(0)} \ell = jn \frac{\pi}{2} - \eta,$$

où l'indice <sup>(0)</sup> rappelle que l'on cherche une approximation à l'ordre zéro en  $\alpha/\mathcal{K}$ . Ecrivant l'inconnue sous la forme  $\chi^{(1)} = \eta + \epsilon$  avec  $\epsilon \ll 1$ , l'équation (2.17) devient

$$\tanh(\eta + \epsilon) = -A(1 - \alpha/\mathcal{K}) = \tanh \eta \cdot (1 - \alpha/\mathcal{K}),$$

qui, après quelques manipulations, permet d'approximer la perturbation  $\epsilon$  au premier ordre en  $\alpha/\mathcal{K}$  par

$$\epsilon = -\frac{\alpha}{\mathcal{K}^{(0)}} \sinh \eta \cosh \eta,$$

et l'inconnue  $\chi^{(1)}$  par,

$$\chi^{(1)} = \eta - \frac{\alpha}{\mathcal{K}^{(0)}} \frac{A}{A^2 - 1}. \quad (2.25)$$

La valeur exacte des pôles peut être recherchée en itérant le processus. Pour notre part, nous nous contenterons de l'approximation des pôles au premier ordre donnée à partir de l'équation

$$j \frac{\tilde{\omega}_n \ell}{c} = -\alpha \ell - \eta + j n \frac{\pi}{2} + \frac{2\alpha \ell}{j n \pi - 2\eta} \left[ \frac{A}{A^2 - 1} \right], \quad (2.26)$$

les pôles étant écrits sous la forme

$$\tilde{\omega}_n = \Omega_n + j\Gamma_n \quad (2.27)$$

où

$$\Omega_n = k_n c (1 - \varepsilon_n), \quad (2.28)$$

et

$$\Gamma_n = \frac{c}{\ell} [Y - (1 + \varepsilon_n)A], \quad (2.29)$$

en posant  $Y = \alpha \ell$  (voir (2.15) avec  $\alpha_m = \alpha$ ),  $k_n = \frac{n\pi}{2\ell}$  et

$$\varepsilon_n = \frac{4Y}{(n\pi)^2 + (2\eta)^2} \frac{A}{A^2 - 1}. \quad (2.30)$$

Les pulsations de résonance (2.28) et les amortissements (2.29) des modes dépendent ainsi de l'amortissement aux limites caractérisé par le paramètre  $A$  et différent de ceux calculés pour la formulation avec condition de type Neumann (voir équations (2.7) et (2.8)). Pour le cas d'une terminaison passive ( $A < 0$ ), on assiste à une baisse des fréquences de résonance et à une accentuation de la décroissance de l'amplitude de chaque mode.

Au regard de (2.25), on remarque les limites de la méthode perturbative et de l'usage de (2.26) pour approximer la valeur des pôles. Pour des valeurs de  $A$  proche de l'unité, la perturbation devient grande devant le module de  $\mathcal{K}$  et l'approximation au premier ordre n'est plus correcte. Cependant, ne considérant que l'application au cas de la clarinette, cette situation ne se présente pas car le paramètre  $A$  reste inférieur à l'unité. Des simulations numériques ont montré que la convergence de la méthode est rapide pour de telles valeurs de  $A$  et que deux ou trois itérations suffisent pour approcher correctement la valeur des pôles. Finalement, l'usage de (2.26) pour approcher les pôles est retenue. On note que pour  $|A| > 1$ , l'annexe E montre que la forme des résultats change complètement puisque la condition à l'entrée se rapproche d'une condition de type Dirichlet.

Revenant au cas de la clarinette et rappelant que la fonction de Green recherchée est le champ de pression un court instant après l'attaque de la note, on s'attend à observer une variation de la fréquence de jeu entre le régime transitoire et le régime permanent puisque la valeur de la fréquence de jeu attendue en régime permanent, est  $\omega = kc$  (le résonateur est supposé harmonique et la dispersion n'est pas prise en compte). Néanmoins, il semble que cette variation est faible et qu'elle diminue lorsque le numéro du mode augmente. En effet, la dissipation visco-thermique est faible ( $\alpha \ell \ll 1$ ) et le terme  $A$ , qui dépend des paramètres de contrôle du modèle, prend des valeurs proche de zéro au seuil d'oscillation d'après [51, 39]. Compte tenu également que l'influence du terme  $\varepsilon_n$  diminue avec l'indice du mode, on a la relation  $\varepsilon_n \ll 1$  qui est d'autant plus marquée que  $n$  est élevé.

### 2.3.3 Position des pôles

Le calcul de l'expression de la fonction de Green dans le domaine temporel se fait par application du théorème des résidus (voir encadré 2.2.2). Pour  $x > 0$ , l'application du théorème des résidus donne

$$\begin{aligned} \tilde{g}(x,t|0,t_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\bar{\mathcal{K}}} \frac{\cosh \chi \sinh[\mathcal{K}(\ell - x)]}{\cosh[\mathcal{K}\ell + \chi]} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega \\ &= 2j\pi \sum_n \operatorname{Res} \left[ \frac{1}{2\pi} \tilde{G} e^{j\omega(t-t_0)} \right]_{\tilde{\omega}_n} . \end{aligned} \quad (2.31)$$

et les sens de parcours du contour d'intégration sont les mêmes qu'au paragraphe 2.2.2. Pour des valeurs négatives de  $A$  telle que  $|A| < 1$  et d'après (2.29), les pôles  $\tilde{\omega}_n$  et  $\tilde{\omega}_{-n}$  se situent dans le demi-plan supérieur à l'axe réel ce qui assure à notre problème des solutions causales.

### 2.3.4 Calcul des résidus

Autour de chaque pôle  $\tilde{\omega}_n$ , le développement de Taylor de  $\cosh(\mathcal{K}\ell + \chi)$  permet de faire apparaître le terme  $(\omega - \tilde{\omega}_n)$  au dénominateur de (2.23) ce qui est pratique pour le calcul des résidus. Posant pour commodité d'écriture,

$$\Lambda_n = \frac{1}{\tilde{\omega}_n} \left[ \frac{j\tilde{\omega}_n \ell}{c} + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\mathcal{K}_n} \sinh 2\chi_n \right] , \quad (2.32)$$

où  $\mathcal{K}_n = j\tilde{\omega}_n/c + \alpha$  et  $\chi_n = \chi(\mathcal{K}_n)$ , on obtient

$$\cosh[\mathcal{K}\ell + \chi] = (\omega - \tilde{\omega}_n) \Lambda_n \sinh[\mathcal{K}_n \ell + \chi_n].$$

Le résidu de  $\tilde{G}(x;0)$  pour  $\omega = \tilde{\omega}_n$  s'écrit alors

$$\tilde{G}_n(x;0) = \frac{1}{\mathcal{K}_n} \frac{\cosh \chi_n \sinh[\mathcal{K}_n(\ell - x)]}{(\omega - \tilde{\omega}_n) \Lambda_n \sinh[\mathcal{K}_n \ell + \chi_n]} ,$$

qui compte tenu de

$$\sinh[\mathcal{K}_n(\ell - x) + \chi_n - \chi_n] = \sinh[\mathcal{K}_n \ell + \chi_n] \cosh[\mathcal{K}_n x + \chi_n] ,$$

devient

$$\tilde{G}_n(x;0) = \frac{1}{\mathcal{K}_n} \frac{\cosh \chi_n \cosh[\mathcal{K}_n x + \chi_n]}{(\omega - \tilde{\omega}_n) \Lambda_n} . \quad (2.33)$$

Finalement, le résidu de l'équation (2.31) au point  $\tilde{\omega}_n$  s'écrit

$$\operatorname{Res} \left[ \frac{1}{2\pi} \tilde{G} e^{j\omega(t-t_0)} \right]_{\tilde{\omega}_n} = \frac{1}{2\pi \Lambda_n} \frac{\cosh \chi_n \cosh[\mathcal{K}_n x + \chi_n]}{\mathcal{K}_n} e^{-\Gamma_n t} e^{j\Omega_n t} . \quad (2.34)$$

### 2.3.5 Fonction de Green décomposée sur les modes

Le report de (2.34) dans (2.31) mène à l'expression dans le domaine temporel de la fonction de Green décomposée sur les modes de résonance du problème

$$\tilde{g}(x,t|0,t_0) = H(t - t_0) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j \frac{\cosh \chi_n}{\Lambda_n \mathcal{K}_n} e^{-\Gamma_n(t-t_0)} e^{j\Omega_n(t-t_0)} \cosh(\mathcal{K}_n x + \chi_n) , \quad (2.35)$$

développement de la forme

$$\tilde{g}(x,t;0,t_0) = H(t-t_0) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{g}_n(t) \Phi_n(x), \quad (2.36)$$

dans laquelle les déformées modales  $\Phi_n(x)$  sont données par

$$\Phi_n(x) = \cosh(\mathcal{K}_n x + \chi_n), \quad (2.37)$$

et les amplitudes modales  $\tilde{g}_n(t)$  par

$$\tilde{g}_n(t) = j \frac{\cosh \chi_n}{\Lambda_n \mathcal{K}_n} e^{-\Gamma_n(t-t_0)} e^{j\Omega_n(t-t_0)}. \quad (2.38)$$

L'expression (2.35) montre que la fonction de Green décomposée sur les modes de résonance correspond bien à une solution de type oscillation libre : chaque mode de résonance oscille sur sa pulsation propre de résonance  $\Omega_n$ , chaque mode étant atténué au cours du temps de manière exponentielle avec son propre facteur dissipatif  $\Gamma_n$  qui prend en compte l'ensemble des phénomènes dissipatifs du modèle. On remarque que la sommation fait intervenir les composantes  $n$  et  $-n$  et que la somme de ces deux composantes aboutit à une écriture lourde. Notons qu'à l'instant précis  $t = t_0$ , la fonction de Green n'est pas nulle compte tenu de

$$\Phi_{-n} = \Phi_n^*, \quad \Lambda_{-n} = -\Lambda_n^*, \quad \tilde{\omega}_{-n} = -\tilde{\omega}_n^*, \quad \text{et} \quad \mathcal{K}_{-n} = \mathcal{K}_n^*, \quad (2.39)$$

et que ce point est une insuffisance de la méthode qui reste à comprendre. Par ailleurs, on note que la transformée de Fourier (2.35) est donnée directement par (2.33), relation utile lors de la dérivation des équations temporelles gouvernant les amplitudes modales. Enfin, la question de l'orthogonalité des modes  $\Phi_n(x)$  est traitée dans [52] et on retiendra qu'ils ne sont pas orthogonaux au sens où

$$\int_0^\ell \Phi_n(x) \Phi_m(x) dx \neq 0, \quad \text{si} \quad m \neq n. \quad (2.40)$$

### 2.3.6 Cas d'une terminaison active

Dans l'application à la clarinette, le paramètre  $A$  peut être positif si le musicien souffle suffisamment fort : l'apport d'énergie compense les pertes du système et le système commence à osciller. Pour  $A > 0$  tel que  $|A| < 1$ , le terme  $\varepsilon_n$  qui apparaît dans la détermination des pôles (2.30) est négatif. Il s'ensuit que la position des pôles dans le plan complexe et le comportement du système sont modifiés. En particulier, au regard de la partie imaginaire des pôles (2.29), des solutions non-causales existent à notre problème ce qui, d'un point de vue physique est inacceptable. Cependant, dans le cas d'une terminaison active, le développement (2.35) est correct comme cela est montré dans [52]. Sans présenter les calculs qui supposent un changement de fonction, nous nous contentons d'affirmer que le développement (2.35) est également valable dans le cas d'une terminaison active. Par ailleurs, rappelant que la fonction de Green (2.35) correspond au champ de pression dans l'instrument pendant le régime transitoire, la forme de la solution obtenue pour le mode  $n$  produit les comportements essentiels attendus au seuil d'oscillation. Négligeant le terme  $\varepsilon_n$  dans (2.29) et supposant  $A$  petit, l'amortissement modal est donné en première approximation par

$$\Gamma_n \simeq \frac{c}{\ell}(Y - A).$$

Pour  $Y - A > 0$ , l'amortissement global du système reste positif: l'apport d'énergie extérieur ne compense pas les pertes dans l'instrument; la fonction de Green est la superposition de fonctions sinusoïdales exponentiellement amorties et le système revient vers son régime statique. En revanche, dès lors que  $Y - A < 0$ , l'amortissement global est négatif, le régime statique perd sa stabilité au profit d'un autre régime avec une croissance exponentielle de l'amplitude des oscillations [51]. Prenant en compte la variation de l'amortissement en fonction de la fréquence comme au §.2.2.2, l'état stable/instable de chaque composante  $g_n$  est alors contrôlée en première approximation, par le paramètre  $Y_n - A$  où  $Y_n = \alpha_n \ell$  (voir équation (2.15)).

### 2.3.7 Validation de la forme décomposée

La solution du problème en temporel est connue sous la forme des réflexions successives. Cette forme s'explique aisément par des considérations physiques et consiste à faire réfléchir aux extrémités du tube une onde décrite par la fonction de Green de l'espace 1D infini. Elle permet en particulier d'étudier la mise en place du champ de pression dans une cavité [32]. Pour le trouver, on part de la forme non décomposée (2.23): les développements qui suivent permettent de valider la forme (2.35).

Ecrivant le second terme du dénominateur de (2.23) sous la forme

$$\frac{1}{\cosh(\mathcal{K}\ell + \chi)} = \frac{2e^{-\mathcal{K}\ell - \chi}}{1 + e^{-2\mathcal{K}\ell - 2\chi}},$$

et supposant que le module de l'exponentielle au dénominateur est petit devant un, on obtient

$$\frac{1}{\cosh(\mathcal{K}\ell + \chi)} = 2e^{-\mathcal{K}\ell - \chi} [1 + F(\omega) + F^2(\omega) + F^3(\omega) + \dots],$$

où l'on note

$$F(\omega) = -e^{-j2\omega\ell/c - 2\alpha - 2\chi}, \quad (2.41)$$

une fonction qui décrit un trajet aller/retour dans le tube d'une durée  $2\ell/c$ . Le signe "−" correspond à la réflexion en  $x = \ell$  de coefficient de réflexion  $R_\ell = -1$ , et le terme  $R = e^{-2\chi}$  est le coefficient de réflexion à l'entrée. Remarquant que le numérateur de (2.23) peut s'écrire

$$\cosh \chi \sinh[\mathcal{K}(\ell - x)] = \frac{1}{4j} e^{\mathcal{K}\ell + \chi} [e^{-\mathcal{K}x} + r e^{-\mathcal{K}x} - e^{-\mathcal{K}(2\ell - x)} - r e^{\mathcal{K}(2\ell - x)}],$$

il vient une autre expression de la fonction de Green dans le domaine fréquentiel

$$\tilde{G}(x; 0) = \frac{1}{2j\mathcal{K}} \tilde{G}_p(x; 0) [1 + F(\omega) + F^2(\omega) + F^3(\omega) + \dots], \quad (2.42)$$

dans laquelle on a notée

$$\tilde{G}_p(x; 0) = e^{-\mathcal{K}x} + R e^{-\mathcal{K}x} - e^{-\mathcal{K}(2\ell - x)} - R e^{\mathcal{K}(2\ell - x)}.$$

La fonction de Green  $\tilde{G}(x; 0)$  est alors décrite par un ensemble de quatre *ondes primaires*  $\tilde{G}_p$  qui se propage dans le tube et se réfléchit à ses extrémités, la durée d'un cycle étant  $2\ell/c$ , chaque cycle étant répété aux instants  $2\ell/c, 4\ell/c, \dots$ . La transformée de Fourier inverse

de (2.42) est donnée par les produits de convolution des transformées de Fourier inverse de chacun des termes qui s'écrivent respectivement,

$$\mathcal{TF}^{-1}[1/\mathcal{K}] = \frac{c}{2} e^{-\alpha ct} H(t),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{TF}^{-1}[\tilde{G}_p(x; 0)] &= e^{-\alpha|x|} \delta(t - |x|/c) + r(t) * e^{-\alpha|x|} \delta(t - |x|/c) \\ &\quad - e^{-\alpha|2\ell-x|} \delta(t - |2\ell - x|/c) - r(t) * e^{-\alpha|2\ell-x|} \delta(t - |2\ell - x|/c), \end{aligned}$$

$$\mathcal{TF}^{-1}[1 + F(\omega) + F^2(\omega) + \dots] = \delta(t) + f(t) + f(t) * f(t) + \dots$$

où  $r(t)$  est la fonction de réflexion à l'entrée (transformé de Fourier inverse de  $R$ ) donnée par

$$r(t) = e^{-2\eta} \delta(t) + H(t) \frac{4\pi A \alpha c}{(A-1)^2} e^{-\frac{\alpha c}{A-1} t}. \quad (2.43)$$

et  $f(t)$  est donnée par

$$f(t) = -e^{-\alpha\ell} r(t) * \delta(t - 2\ell/c).$$

Finalement, on arrive à l'expression temporelle de la fonction de Green sous la forme des réflexions successives donnée par

$$\tilde{g}(x, t|0, t_0) = \frac{c}{2} \tilde{g}_p(x, t|0, t_0) * [\delta(t) + f(t) + f(t) * f(t) + \dots], \quad (2.44)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{g}_p(x, t|0, t_0) &= e^{-\alpha ct} H[t - |x|/c] + r(t) * e^{-\alpha ct} H[t - |x|/c] - \\ &\quad e^{-\alpha ct} H[t - |2\ell - x|/c] - r(t) * e^{-\alpha ct} H[t - |2\ell - x|/c]. \end{aligned}$$

Des simulations numériques dans le domaine temporel ont été effectuées avec MATLAB. L'accord entre la formulation (2.35) et le résultat donné par (2.44) permet de valider la formulation proposée. La figure 2.2 montre la comparaison des deux formulations pour une onde effectuant un aller-retour (une réflexion). L'excitation est placée au point  $x_0 = 0$  et le récepteur au point  $x = 0,1 m$ . La longueur du tube est  $\ell = 0,655 m$ , l'amortissement aux limites vaut  $A = 0,040$ , l'atténuation au cours de la propagation est constante ( $\alpha\ell = 0,036$ ), et 100 modes ( $n = 50$ ) sont utilisés pour la décomposition. La forme du signal est proche d'un signal carré d'amplitude croissante, chaque niveau étant légèrement atténué au cours du temps. Cette légère baisse d'amplitude provient du modèle d'amortissement pour la condition aux frontières lorsque l'on a supposé  $\alpha_v = 0$ . Enfin, on note l'apparition des oscillations de Gibbs au niveau de chaque discontinuité, phénomène classique lorsque l'on reconstruit un signal ayant de fortes discontinuités à partir de fonctions sinusoïdales.

Enfin, on note que pour la formulation avec la condition de type Neumann à l'entrée, la solution sous forme de réflexions successives est obtenue en faisant  $A = 0$  dans l'expression de la fonction de réflexion (2.43) et que l'expression (2.44) reste inchangée.

## 2.4 Mise sous forme d'équations différentielles des auto-oscillations

L'étape suivante consiste à utiliser les expressions développées sur les modes pour établir une solution approchée du système d'équations non-linéaires (1.41). Pour chaque

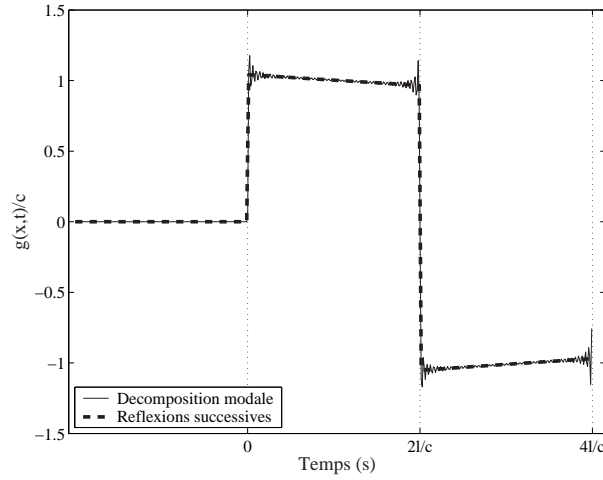


FIG. 2.2 – Calcul de la fonction de Green : comparaison de la forme décomposée (2.35) et de la solution sous la forme de réflexions successives (2.44). 100 modes sont pris en compte ( $n = 50$ ). L'excitation est placée en  $x_0 = 0$  et le récepteur en  $x = 0,1$  m. L'amortissement au cours de la propagation est constant ( $\alpha l = 0,036$ ) et l'amortissement aux limites vaut  $A = 0,040$ . La longueur du tube est  $l = 0,655$  m. On constate le très bon accord de la forme temporelle et on remarque la croissance de l'oscillation. On note également le phénomène des oscillations de Gibbs au niveau des discontinuités.

formulation, le champ de pression à l'entrée ( $x = 0$ ) est écrit sous la forme

$$p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t), \quad (2.45)$$

où les  $p_n$  sont les amplitudes recherchées. Revenant sur les développements du paragraphe précédent qui concernait la version linéarisée du problème (1.41), les  $p_n$  correspondent aux amplitudes modales associées aux modes  $\Phi_n$ . Le report de la forme décomposée de la fonction de Green dans la solution obtenue à partir de la forme intégrale (voir chapitre 1) puis l'usage de la transformée de Fourier inverse mènent à une formulation du problème incluant la non-linéarité pour laquelle la notion de modes n'est plus définie. Enfin, on note que le choix de ne s'intéresser à la pression qu'en un seul point (ici  $x = 0$ ) supprime la dépendance spatiale mais n'apparaît pas comme une restriction de la méthode, puisqu'on connaît la valeur des modes en tout point dès qu'on la connaît en  $x = 0$ .

A ce stade, nous choisissons d'utiliser des grandeurs adimensionnées, définies par :

$$\mathbf{p}(t) = p(t)/p_M, \quad \text{et} \quad \mathbf{u}(t) = \frac{\rho c u(t)}{S p_M},$$

ce qui conduit pour la non-linéarité à l'expression suivante :

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_{00} + A \mathbf{p}(t) + B \mathbf{p}^2(t) + C \mathbf{p}^3(t), \quad (2.46)$$

avec

$$\mathbf{u}_{00} = \zeta(1 - \gamma)\sqrt{\gamma}, \quad A = \zeta \frac{3\gamma - 1}{2\sqrt{\gamma}}, \quad B = -\zeta \frac{3\gamma + 1}{8\gamma^{3/2}}, \quad C = -\zeta \frac{\gamma + 1}{16\gamma^{5/2}}. \quad (2.47)$$



où  $\zeta$  et  $\gamma$  sont les paramètres de contrôle du modèle qui caractérisent respectivement l'embouchure et le souffle du musicien [51] sont donnés par:

$$\gamma = p_m/p_M \quad \text{et,} \quad \zeta = c \frac{S_r}{S} \sqrt{\frac{2\rho}{p_M}}.$$

Dans la suite, on oublie l'écriture en caractères gras.

### 2.4.1 Problème avec condition de Neumann à l'entrée

Après substitution dans (1.42) de (2.10) et de la transformée de Fourier de (2.45) rappelant que les fonctions  $\Phi_n$  sont données par (2.3) évaluées au point  $x = 0$ , on trouve la composante  $P_n$  du champ de pression dans le domaine de Fourier qui s'écrit

$$P_n = \frac{2c}{\ell} \frac{j\omega U}{\omega_n^2 - \omega^2 + j\omega\omega_n/Q_n}, \quad (2.48)$$

où  $\omega_n$  et  $Q_n$  sont respectivement la pulsation propre donnée par (2.7) et le facteur de qualité (2.9), associés au mode propre  $\Phi_n$ . Supposant  $Q_n$  lentement variable avec la fréquence et les coefficients  $A$ ,  $B$  et  $C$  constants, la transformée de Fourier inverse de (2.48) permet d'écrire

$$\left[ \partial_{tt}^2 + \frac{2c}{\ell} Y_n \partial_t + \omega_n^2 \right] p_n(t) = \frac{2c}{\ell} \partial_t u(t), \quad (2.49)$$

dans laquelle on note  $Y_n = k_n \ell / 2Q_n$  l'admittance du résonateur pour la pulsation  $\omega_n$ . La substitution de  $u(t)$  par (2.46) conduit au système d'équations suivant :

$$\ddot{p}_n + \frac{2c}{\ell} Y_n \dot{p}_n + \omega_n^2 p_n = \frac{2c}{\ell} \left[ A + 2B \sum_{m=1}^{\infty} p_m + 3C \left( \sum_{m=1}^{\infty} p_m \right)^2 \right] \sum_{m=1}^{\infty} \dot{p}_m, \quad (2.50)$$

où l'on note  $\dot{\phantom{x}}$  l'opérateur associé à la dérivation par rapport au temps. Le membre de gauche représente le mouvement de la composante associée à  $p_n$  décrit comme un oscillateur linéaire amorti tandis que le terme de droite traduit le couplage non-linéaire des différents modes réalisé par l'excitateur. La non-linéarité se compose de termes quadratiques et cubiques et apparaît dans le terme de dissipation de l'équation du mouvement puisque le membre de droite est proportionnel à  $\dot{p}$ .

Finalement, on aboutit à une formulation du problème sous forme d'un système constitué d'une infinité d'équations différentielles du second ordre non-linéaires et couplées. On note que, en posant  $y = \dot{p}$ , on aurait pu écrire directement des équations différentielles du premier ordre, qui conduisent à une écriture du problème sous forme de système dynamique, chaque  $p_n$  étant remplacé par le couple  $(p_n, y_n)$ .

On remarque que la formulation obtenue revient à projeter la source sur les modes du tuyau. En effet, partant de l'équation de propagation

$$\left[ \partial_{xx}^2 - \frac{2\alpha}{c} \partial_t - \frac{1}{c^2} \partial_{tt}^2 \right] p(t) = -\frac{1}{c} \partial_t u(t) \delta(x - x_0), \quad (2.51)$$

et écrivant  $p(t) = \sum p_m(t) \Phi_m(x)$  où les  $\Phi_m(x)$  vérifient  $\Delta \Phi_m(x) = -k_m^2 \Phi_m(x)$ , il vient, compte tenu que l'admittance (adimensionnée par  $1/Z_c$ ) vaut  $Y = \tanh \alpha \ell \simeq \alpha \ell$ ,

$$\left[ \partial_{tt}^2 + \frac{2c}{\ell} Y \partial_t + \omega_m^2 \right] \sum_{m=1}^{\infty} p_m(t) \Phi_m(x) = c \partial_t u(t) \delta(x - x_0), \quad (2.52)$$

En multipliant les deux membres de l'équation par un des modes  $\Phi_q$ , puis en intégrant sur le domaine  $[0; \ell]$ , les propriétés d'orthogonalité des modes  $\Phi_m$  mènent au système d'équations

$$\left[ \partial_{tt}^2 + \frac{2c}{\ell} Y \partial_t + \omega_m^2 \right] p_q(t) = \frac{2c}{\ell} \partial_t u(t) \Phi_q(x_0), \quad (2.53)$$

qui est identique à (2.49) avec  $Y = Y_n$  et  $\Phi_q(x_0 = 0) = 1$ , et dans laquelle le membre de droite est bien obtenu par projection de la source sur le mode propre  $\Phi_q(x)$ .

### 2.4.2 Problème avec condition parfaitement absorbante à l'entrée

L'obtention du système d'équations différentielles est identique à celle présentée au paragraphe précédent. Comme nous nous attachons à présenter ici une formulation sous forme d'équations différentielles du second ordre, nous devons d'abord effectuer l'addition des composantes d'indice  $-n$  et  $n$ .

Faisant usage de (2.33), le report de la transformée de Fourier inverse de (2.35) dans l'équation (1.45), conduit à

$$P = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\cosh^2 \chi_n}{(\omega - \tilde{\omega}_n) \Lambda_n \mathcal{K}_n} j \frac{\omega}{c} \tilde{U}. \quad (2.54)$$

Compte tenu des relations (2.39), la somme des composantes  $n$  et  $-n$  notée  $P_n$  ( $n > 0$ ) conduit à l'équation

$$P_n = j \frac{\omega}{c} \left[ \frac{\Phi_n^2}{\mathcal{K}_n \Lambda_n} \frac{1}{(\omega - \tilde{\omega}_n)} - \left( \frac{\Phi_n^2}{\mathcal{K}_n \Lambda_n} \right)^* \frac{1}{(\omega + \omega_n^*)} \right] \tilde{U}, \quad (2.55)$$

où l'on note  $\Phi_n = \cosh \chi_n$ . Après quelques manipulations, il vient

$$P_n = \left[ \frac{-\omega^2 \mathcal{I}m(\Theta_n) + j\omega \mathcal{R}e(\Theta_n \tilde{\omega}_n^*)}{\omega^2 - j\omega 2\mathcal{I}m(\tilde{\omega}_n) - |\tilde{\omega}_n|^2} \right] \tilde{U}, \quad (2.56)$$

dans laquelle on a posé  $\Theta_n = \frac{2}{c} \frac{\Phi_n^2}{\mathcal{K}_n \Lambda_n}$ . Supposant  $\mathcal{I}m(\Theta_n)$ ,  $\mathcal{R}e(\Theta_n \tilde{\omega}_n^*)$  et  $\mathcal{I}m(\tilde{\omega}_n)$  lentement variables avec la fréquence (ce qui revient à supposer  $\alpha$  lentement variable avec la fréquence), la transformée de Fourier inverse de l'équation (2.56) aboutit à

$$\left[ \partial_{tt}^2 + 2\Gamma_n \partial_t + |\tilde{\omega}_n|^2 \right] p_n(t) = - \left[ \partial_{tt}^2 \mathcal{I}m(\Theta_n) + \partial_t \mathcal{R}e(\Theta_n \tilde{\omega}_n^*) \right] \tilde{u}(t), \quad (2.57)$$

que l'on peut réécrire

$$\begin{aligned} \ddot{p}_n + 2\Gamma_n \dot{p}_n + |\tilde{\omega}_n|^2 p_n = & \\ & - \mathcal{I}m(\Theta_n) \left[ 2B \sum_{m=1}^{\infty} p_m + 3C \left( \sum_{m=1}^{\infty} p_m \right)^2 \right] \sum_{m=1}^{\infty} \ddot{p}_m \\ & - \mathcal{R}e(\Theta_n \tilde{\omega}_n^*) \left[ 2B \sum_{m=1}^{\infty} p_m + 3C \left( \sum_{m=1}^{\infty} p_m \right)^2 \right] \sum_{m=1}^{\infty} \dot{p}_m \\ & - \mathcal{I}m(\Theta_n) \left[ 2B + 6C \sum_{m=1}^{\infty} p_m \right] \left( \sum_{m=1}^{\infty} \dot{p}_m \right)^2 \end{aligned} \quad (2.58)$$

L'équation (2.58) montre que le couplage non-linéaire vient modifier les termes d'inertie ( $\ddot{p}$ ) et de dissipation ( $\dot{p}$ ) et que la non-linéarité fait intervenir des termes quadratiques et cubiques. Chaque oscillateur oscille à une pulsation  $\tilde{\omega}_n$  complexe donnée par (2.27). Enfin, on remarque que comme convenu, l'annulation des termes  $B$  et  $C$  dans (2.50) et (2.58) met en évidence que l'écriture du problème avec condition absorbante est bien la version linéaire du problème initial, le système étant mis sous forme diagonale en régime linéaire.

## 2.5 Discussions

Les développements précédents aboutissent à deux écritures du problème incluant la non-linéarité sous la forme de systèmes d'équations de dimension infinie qui gouvernent les évolutions temporelles des amplitudes  $p_n$ . Théoriquement, il faut prendre en compte l'infinité des modes pour obtenir la solution exacte du problème initial. Cependant, une approximation de la solution peut être obtenue en tronquant le système à  $N$  équations où le nombre  $N$  dépend du nombre de modes qui ont une contribution non négligeable dans la solution. Dans le cas de la clarinette, l'ouverture des trous latéraux agit comme un filtre passe-haut, limitant ainsi le nombre de pics de résonance impliqués dans l'auto-oscillation. Cela nous amène à penser qu'il suffit de ne garder dans les systèmes (2.50) et (2.58) qu'un faible nombre d'équations ce qui réduit avantageusement la dimension du système.

Bien entendu nous n'avons aucune idée de la convergence des deux systèmes quand le nombre de composantes tend vers l'infini mais nous savons déjà, qu'au stade linéaire, le développement donne la solution des réflexions successives.

L'approche envisagée avec la formulation avec condition de Neumann à l'entrée montre un résultat original : considérant un résonateur à un seul mode, le système (2.50) se réduit à une seule équation de type Van der Pol. L'étude analytique de ce modèle sera envisagée au chapitre suivant, permettant de retrouver des résultats de Grand et coll.[39] concernant la nature de l'oscillation au seuil.

L'approche du problème avec paroi parfaitement absorbante à l'entrée, aboutit à une forme plus compliquée du problème et ce, même lorsqu'un seul mode est pris en compte : ceci laisse supposer que les composantes  $p_n$  des deux formulations ne sont pas identiques et que pour un même nombre de composantes, les solutions ne sont pas forcément voisines. Cependant, cette seconde formulation permet l'accès au comportement du système pendant le début du régime transitoire. De manière analytique, il est alors possible d'étudier par exemple les évolutions de la fréquence de jeu et les seuils d'instabilité en fonction du nombre de composantes pris en compte. Malheureusement, le temps nous a manqué pour mener à bien ce travail et nous devons nous contenter d'une résolution numérique du système (2.58).

Enfin, on peut remarquer que la méthode de décomposition utilisée qui consiste à rechercher les pôles de la fonction de Green (dont l'impédance de transfert est la dérivée) pour accéder à sa forme décomposée garde un intérêt général. Une fois l'impédance d'entrée du résonateur connue de manière analytique, la démarche est identique rendant possible son application à d'autres géométries d'instruments. On imagine par exemple l'application de cette méthode aux instruments à anche conique comme le saxophone ou le hautbois.

## Chapitre 3

# Résultats des simulations temporelles et validation de la méthode

Dans ce chapitre, il s'agit essentiellement de présenter les solutions du modèle à deux équations obtenues avec les formulations proposées au chapitre précédent. Le début du chapitre est consacré à préciser les conditions initiales pour chaque formulation qui assurent l'unicité de la solution. Puis, l'étude du comportement dynamique du système commence. On traite d'abord le problème avec condition de Neumann à l'entrée. Tout d'abord, on réduit la dimension infinie du système en se restreignant à un résonateur à un degré de liberté, prélude à la considération de plusieurs composantes dans l'auto-oscillation. La dynamique de la clarinette est gouvernée par une seule équation et prend la forme d'une équation de Van der Pol pour la formulation avec condition de Neumann. La stabilité du système et les conditions d'auto-oscillations sont recherchées et une expression analytique du signal de pression pendant le régime transitoire est proposée par une méthode perturbative. Le cas d'un résonateur comportant plusieurs pics d'impédances est ensuite traité numériquement. L'approche temporelle permet de décrire les mécanismes de production du son depuis les conditions initiales jusqu'au régime permanent. La fin du chapitre s'intéresse à estimer la convergence de la méthode et à comparer les résultats fournis par les deux formulations avec ceux obtenus par équilibrage harmonique [38].

### 3.1 Conditions initiales

L'évolution au cours du temps des systèmes d'équations (2.50) et (2.58) nécessite la donnée d'un état initial complètement spécifié pour aboutir à un état final unique. L'écriture sous forme d'équations différentielles du second ordre impose d'associer à chaque composante du champ une condition initiale sur le champ et sa dérivée. Pour les déterminer, nous supposons que le régime est linéaire au démarrage et nous choisissons l'instant initial  $t_0$  pour nos simulations, dans la première "demi-période", mais non nul.

L'excitation du système que nous choisissons est un brutal saut de pression dans la bouche du musicien à  $t = 0$  tel que

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= 0, & t < 0, \\ \gamma(t) &= \gamma, & t \geq 0.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Ce choix revient à considérer, pendant la première demi-période, une excitation  $q_i(t)$  de

la forme

$$q_i(t) = \frac{d}{dt}[u_L(t) H(t)], \quad (3.2)$$

dans laquelle  $u_L(t)$  représente la contribution des termes linéaires de la fonction source du problème et  $H(t)$  est la fonction d'Heaviside. Partant du champ à l'entrée que l'on connaît par les réflexions successives pour  $t \in [0; 2\ell/c]$ , on accède aux conditions initiales pour chaque composante. Pour ce faire, on note que pendant la première demi-période, la fonction de Green à l'entrée ne se compose que de deux ondes, l'onde directe et l'onde réfléchie en  $x = 0$ .

### Formulation avec conditions de Neumann à l'entrée

L'expression exacte de la fonction de Green du système s'écrit

$$g(t) = c e^{-\alpha c t} H(t). \quad (3.3)$$

Rappelant que  $u_L(t) = u_{00} + A p(t)$ , la substitution de (3.3) dans (1.34) conduit à

$$p(t) = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} [c e^{-\alpha c t} H(t)] * ([u_{00} + A p(t)]) H(t),$$

qui devient après développement

$$p(t) = \{ [u_{00} + A p(t)] H(t) - \alpha c e^{-\alpha c t} H(t) * [u_{00} + A p(t)] H(t) \}.$$

Puisqu'il est toujours possible de choisir un instant  $t$  petit de sorte que  $e^{-\alpha c t}$  soit négligeable et compte tenu que  $\alpha \ell \ll 1$ , une approximation de la pression s'écrit

$$p(t) = \frac{u_{00}}{1 - A} H(t), \quad (3.4)$$

qui devient à un instant  $t_0 > 0$  ( $t_0 \in ]0; 2\ell/c]$ )

$$p(t_0) = \frac{u_{00}}{1 - A}. \quad (3.5)$$

La condition sur la dérivée par rapport au temps est donnée à partir de (3.4) et s'écrit

$$\frac{d}{dt} p(t) = \frac{u_{00}}{1 - A} \delta(t), \quad (3.6)$$

qui à un instant  $t_0 > 0$  devient nulle. Concernant les conditions initiales vérifiées par chaque composante  $p_n$ , on écrit

$$p_n(t) = g_n(t) * q_i(t), \quad (3.7)$$

qui après développement devient

$$p_n(t) = \frac{1}{c} g_n(t) [u_{00} + A p(t)] + A g_n(t) * \frac{d}{dt} [p(t) H(t)].$$

Faisant usage de (3.5) et (3.6), on trouve respectivement pour le champ et sa dérivée à un instant  $t_0 > 0$ ,

$$p_n(t_0) = \frac{1}{c} \frac{u_{00}}{1 - A} g_n(t_0), \quad (3.8)$$

et

$$\frac{d}{dt} p_n(t_0) = \frac{1}{c} \frac{u_{00}}{1 - A} \frac{d}{dt} g_n(t_0), \quad (3.9)$$

la somme de toutes les composantes pour  $n \rightarrow \infty$  devant aboutir aux expressions (3.5) et (3.6).

### Formulation avec paroi absorbante à l'entrée

La fonction de Green est donnée par

$$g(t) = c e^{-\alpha t} [1 + r(t)] * H(t), \quad (3.10)$$

dans laquelle  $r(t)$  est définie par (2.43). Supposant que l'on peut considérer des instants  $t$  petits de sorte qu'un terme contenant  $e^{-\alpha t}$  est négligeable et compte tenu que  $\alpha \ell \ll 1$ , une expression approchée de (3.10) est donnée par

$$\hat{g}(t) = c \frac{e^{-\alpha t}}{1 - A} H(t).$$

Le report de cette expression dans l'écriture (1.34) conduit à

$$p(t) = \hat{g}(t) * q_i(t) = \frac{1}{c} \hat{g}(t) * \frac{d}{dt} [u_{00} H(t)], \quad (3.11)$$

ce qui mène pour le champ total et sa dérivée par rapport au temps, aux expressions (3.5) et (3.6) comme attendu. En revanche, partant de (3.7), les conditions initiales (pour  $t_0 \in ]0; 2\ell/c]$ ) vérifiées par les composantes sont données ici par

$$p_n(t_0) = \frac{1}{c} g_n(t_0) u_{00}, \quad (3.12)$$

et

$$\frac{d}{dt} p_n(t_0) = \frac{1}{c} u_{00} \frac{d}{dt} g_n(t_0). \quad (3.13)$$

## 3.2 Réduction à un mode : un oscillateur de Van der Pol

Le but de cette section est de présenter les solutions du problème formé des équations (1.1) et (1.2) en se restreignant au cas où le résonateur ne présente qu'un seul pic d'impédance au système excitateur. En particulier, on montre que pour la formulation avec condition de Neumann à l'entrée, le système (2.50) se réduit à une équation de type Van der Pol (on note que l'équation obtenue à partir de la formulation avec condition absorbante est différente). Une approche analytique des solutions de cette équation permet d'étudier au seuil d'oscillation la nature de l'oscillation (amplitude et contenu spectral), la stabilité du système, le type de bifurcation (directe ou inverse) et donc de retrouver les principaux résultats obtenus par Grand et coll.[39] une fois que l'on suppose dans leur travaux les admittances  $Y_n$  infinies pour tout  $n > 1$ . Un calcul perturbatif donne accès à une expression du signal de pression pour le régime permanent et pour le transitoire, qui montre le rôle des termes non-linéaires dans l'auto-oscillation.

La réduction du système (2.50) lorsqu'un seul mode ( $n = 1$ ) est considéré conduit à l'équation

$$\ddot{p} + \frac{2c}{\ell} [Y - (A + 2Bp(t) + 3Cp^2(t))\dot{p} + \omega_1^2 p] = 0, \quad (3.14)$$

pour laquelle on note la présence d'un terme non-linéaire d'amortissement. Supposant pour un temps l'influence du coefficient  $B$  négligeable devant celle des autres coefficients<sup>1</sup>,

1. Cette approximation consiste à ignorer les harmoniques pairs dans le spectre interne dont l'influence dans l'auto-oscillation est connue faible [53].

l'équation (3.14) prend la forme d'une équation de Van der Pol que l'on écrit sous la forme [15]

$$\ddot{p} + R_0 [1 - p^2/p_0^2] \dot{p} + \omega_1^2 p = 0. \quad (3.15)$$

en posant

$$\begin{cases} R_0 = \frac{2c}{\ell}(Y - A), & \text{un paramètre de contrôle,} \\ p_0^2 = (Y - A)/3C, & \text{une amplitude de référence.} \end{cases}$$

Depuis l'application originelle due à Van der Pol en 1927, l'équation de Van der Pol a fait l'objet d'un nombre considérable d'études car de nombreux phénomènes non-linéaires (mécaniques, électriques, biologiques...) peuvent se modéliser à l'aide de cette équation [15, 63]. Elle modélise le comportement d'un oscillateur auquel un terme non-linéaire quadratique est ajouté, lui permettant d'auto-osciller. Supposant  $R_0$  négatif<sup>2</sup>, le signe du coefficient d'amortissement de l'oscillateur noté  $R = R_0 [1 - p^2/p_0^2]$  est tel que

$$\begin{aligned} R < 0, & \quad \text{pour } p^2 < p_0^2, \\ R > 0, & \quad \text{pour } p^2 > p_0^2. \end{aligned}$$

Il s'ensuit une croissance des oscillations pour de petites amplitudes et une décroissance des oscillations pour de grandes amplitudes. Parmi les caractéristiques de l'oscillateur de Van der Pol, l'état d'équilibre  $p = 0$  est toujours solution mais il peut devenir instable sous l'effet d'une petite perturbation. On note également l'existence, l'unicité et la stabilité d'un *cycle limite* qui atteste le caractère périodique du régime permanent. En particulier, pour un même jeu de paramètres, le cycle limite est le même pour différentes conditions initiales, la forme du cycle limite dépendant uniquement du paramètre de contrôle  $R_0$ . Enfin, on signale que la *nature* de l'équation (3.15) n'est pas la même que celle d'une équation de Van der Pol. En effet, pour  $Y - A \rightarrow 0$  c'est-à-dire au seuil, le terme non-linéaire tend vers l'infini dans (3.15) alors qu'il tend vers zéro pour l'oscillateur de Van der Pol.

### 3.2.1 Approche de la dynamique du modèle au seuil d'oscillation

L'étude du comportement dynamique du modèle commence par la recherche des positions d'équilibre et de leur stabilité qui sera discutée par application du théorème de Hopf. L'approche est classique et seuls les principaux résultats sont énoncés. Les définitions précises des notions présentées peuvent être trouvées notamment dans [61, 57] pour une approche partant de la physique et dans [41] pour une présentation plus formelle. Ensuite, une solution de (3.14) est recherchée par perturbation par la méthode des échelles multiples dont on trouvera une présentation dans [64, 57]. Enfin, on note que le terme  $B$  est de nouveau pris en compte dans les développements qui suivent.

#### *Etat d'équilibre, stabilité locale et bifurcation au seuil d'oscillation*

Un *état d'équilibre* est défini classiquement comme un état dépourvu de forces de sorte qu'il n'y ait aucun mouvement ( $\ddot{p} = \dot{p} = 0$ ). Appliquée à l'équation (3.15), l'unique point fixe du système est  $p^{PF} = 0$ .

---

2. Cette hypothèse impose le signe de coefficient  $C$  qui doit être négatif pour que la condition  $p_0^2 > 0$  soit vérifiée. Il se trouve que dans la modèle présenté, on a bien  $C < 0$ .

La *stabilité locale* du point fixe (au sens de Lyapunov) est obtenue par l'analyse du système dans sa version linéaire dans le voisinage du point fixe (on regarde la dynamique tangente au point fixe). On s'intéresse au comportement du modèle en fonction du paramètre de contrôle qui modifie l'état stable/instable du système. On écrit le système linéarisé dans sa base propre et on s'intéresse au signe de la partie réelle des valeurs propres. Posant  $y = \dot{p}$ , la séparation des termes linéaires et non-linéaires dans les matrices  $L$  et  $N$  respectivement, conduit à une écriture équivalente à (3.14) donnée par

$$\frac{\partial X}{\partial t} = L.X + N(X), \quad (3.16)$$

où

$$X = \begin{pmatrix} p \\ y \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_1^2 & -\frac{2c}{\ell}(Y - A) \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 \\ 2c/\ell(2Bp + 3Cp^2)y \end{pmatrix}.$$

La matrice  $L$  est la matrice Jacobienne du système dont les valeurs propres  $\lambda$  sont obtenues par le calcul de  $\det(L - \lambda I) = 0$  où  $I$  est la matrice unité. Dans l'hypothèse d'un oscillateur peu amorti, le calcul des valeurs propres  $\lambda_{1,2}$  donnent

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{\ell}(Y - A) \pm j\sqrt{\omega_1^2 - \left[\frac{c}{\ell}(Y - A)\right]^2}. \quad (3.17)$$

L'application du *Premier théorème de Lyapunov*<sup>3</sup> donne la stabilité de la position d'équilibre qui est instable pour  $Y - A < 0$  et stable pour  $Y - A > 0$  (le théorème ne permet pas de conclure pour  $Y - A = 0$ ). On note que le paramètre  $Y - A$  modifie le changement d'état du point fixe et on écrit dans la suite  $\mu = Y - A$  le paramètre de contrôle.

Dans le cas où l'instabilité du point fixe est démontrée, le théorème de Hopf permet de prouver l'existence d'une solution périodique et de conclure sur sa stabilité [42].

**Théorème de Hopf**: considérons le système différentiel  $\dot{X} = L(\mu)X + N(X, \mu)$  avec  $X \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ . Nous sommes en présence d'une bifurcation de Hopf au point  $(X_0, \mu_0)$  si les trois conditions suivantes sont réunies :

- $N(X_0, \mu_0) = 0$ , et  $D_x N((X_0, \mu_0)) = 0$  où  $D_x N$  est la matrice Jacobienne de  $N$ ;
- la matrice  $L(\mu)$  admet une paire de valeurs propres à partie imaginaire pure  $\lambda = \pm i\omega_0$ , tandis que toutes les autres valeurs propres ont une partie réelle non nulle,
- $\left[\frac{d}{d\mu}(\operatorname{Re}(\lambda(\mu)))\right]_{\mu_0} \neq 0$ , ce qui revient à supposer que les valeurs propres traversent l'axe imaginaire avec une vitesse non-nulle.

Il s'ensuit la perte de stabilité de la position d'équilibre et l'apparition d'une solution oscillante.

On peut s'assurer que le système (3.16) vérifie les conditions d'application du théorème. Au point d'équilibre  $(p^{PF}, \mu)$ , on a

$$N(p^{PF}, \mu) = 0, \quad \left(\frac{\partial N}{\partial p}\right)_{(p^{PF}, \mu)} = 0, \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)_{(p^{PF}, \mu)} = 0, \quad (3.18)$$

3. Premier théorème de Lyapunov (stabilité locale) : si la matrice  $L$  n'a pas de valeur propre à partie réelle nulle, la nature et la stabilité du point singulier du système non-linéaire sont localement, c'est-à-dire dans un certain voisinage de la singularité, les mêmes que celles du système linéarisé.



ainsi que

$$\left[ \frac{d}{d\mu} (\mathcal{R}e(\lambda_i)) \right]_{\mu} = \frac{c}{\ell}, \quad i=1,2 \quad (3.19)$$

avec les  $\lambda_i$  qui sont imaginaires pures au point de bifurcation (voir (3.17)). En conclusion, une fois que  $A > Y$ , le modèle subit une bifurcation de Hopf: il y a perte de stabilité de la position d'équilibre et existence d'une solution périodique. Les développements qui suivent permettent d'approcher cette solution au seuil d'oscillation.

### 3.2.2 Approche de la solution au seuil d'oscillation

La méthode des échelles multiples peut être utilisée pour approcher la solution suite à la bifurcation du point fixe [63]. L'idée de la méthode est de rectifier les défauts de synchronisation entre l'oscillateur linéaire et l'oscillateur non-linéaire en supposant les paramètres de la solution linéaire comme fonctions de plusieurs variables (ou échelles); la subtilité consiste à éliminer les *termes séculaires*, termes forçants à la pulsation  $\omega$  de l'oscillateur qui engendreraient des solutions non-périodiques et non-bornées [57, 78].

Définissant plusieurs échelles de temps à l'aide d'un petit paramètre  $\epsilon$  introduit artificiellement<sup>4</sup>

$$T_i = \epsilon^i t \quad ; i \geq 0,$$

on cherche une écriture de la solution sous la forme d'un développement

$$p(t) = p_{eq} + \epsilon p_1(T_0, T_1, T_2) + \epsilon^2 p_2(T_0, T_1, T_2) \dots \quad (3.20)$$

où  $p_{eq} = 0$  est le point d'équilibre. Nous nous limitons ici au premier ordre en  $\epsilon$ . On note que pour une description précise de la solution, il conviendrait de prendre en compte aussi l'évolution de la pulsation au cours du temps: on écrirait alors  $\omega = \omega_1 + \epsilon \omega_2(T_0, T_1, T_2) + \dots$ . Nous nous contentons de l'approche pour laquelle  $\omega$  est supposée constante ( $\omega = \omega_1$ ).

Suite au changement d'échelles, les dérivées temporelles deviennent

$$\begin{aligned} \partial_t &= D_0 + \epsilon D_1 + \epsilon^2 D_2 + \dots, \\ \partial_{tt} &= D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + \epsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \end{aligned} \quad (3.21)$$

où les opérateurs  $D_i$  correspondent à  $D_i = \partial/\partial T_i$ . Au regard de (3.14), il apparaît que ce sont les termes cubiques  $p^2 \dot{p}$  qui vont modifier la dynamique du système puisque des termes de fréquence  $\omega_1$  et  $3\omega_1$  leur sont associés. En conséquence, l'influence du paramètre de contrôle  $\mu = Y - A$  et du terme non-linéaire  $C$  n'apparaît qu'à l'ordre  $O(\epsilon^3)$  ce qui conduit à poser en utilisant le paramètre  $\epsilon$

$$\mu = \epsilon^2 \mu_2, \quad (3.22)$$

Effectuant les changements de variables et injectant la solution développée dans l'équation (3.14) puis identifiant les puissances en  $\epsilon$ , il vient:

ordre  $O(\epsilon)$

$$D_0^2 p_1 + \omega_1^2 p_1 = 0, \quad (3.23)$$

4. On verra que le paramètre  $\epsilon$  permet de commander l'arrivée des termes non-linéaires dans les calculs. A la fin des calculs, on pose  $\epsilon = 1$  [64].

ordre  $O(\epsilon^2)$

$$D_0^2 p_2 + \omega_1^2 p_2 = -2 D_0 D_1 p_1 + \frac{4c}{\ell} B p_1 D_0 p_1, \quad (3.24)$$

ordre  $O(\epsilon^3)$

$$D_0^2 p_3 + \omega_1^2 p_3 = -2 D_0 D_1 p_2 - \frac{2c}{\ell} \mu_2 D_0 p_1 - 2 D_2 D_0 p_1 - D_1^2 p_1 + \frac{4c}{\ell} B [p_1 (D_0 p_2 + D_1 p_1) + p_2 D_0 p_1] + \frac{6c}{\ell} C p_1^2 D_0 p_1. \quad (3.25)$$

La solution de (3.23) s'écrit simplement

$$p_1 = a_1(T_1, T_2) e^{j\omega_1 t} + c.c., \quad (3.26)$$

où  $c.c.$  désigne le complexe conjugué du terme précédent et où le terme d'amplitude  $a_1(T_1, T_2)$  sera déterminé ultérieurement. Introduisant cette solution dans (3.24), des termes de pulsation  $\omega_1$  apparaissent dans le terme de droite. La *condition de solvabilité* qui consiste à annuler les termes forçants résonnants [57], s'écrit:

$$D_1 a_1(T_1, T_2) = 0, \quad (3.27)$$

ou encore

$$a_1 = a_1(T_2). \quad (3.28)$$

Compte tenu de (3.28), la solution de (3.24) s'écrit

$$p_2 = \left[ a_2(T_1, T_2) e^{j\omega_1 t} - j \frac{4c}{3\omega_1 \ell} B a_1^2(T_2) e^{j2\omega_1 t} \right] + c.c., \quad (3.29)$$

qui fait apparaître le lien déjà évoqué, entre le terme  $B$  et la génération d'harmoniques pairs. Le report des solutions (3.26) et (3.29) dans (3.25) conduit à la condition de solvabilité suivante pour l'ordre  $O(\epsilon^3)$

$$-j \left[ \frac{2c}{\ell} \mu_2 a_1 - \frac{6c}{\ell} C a_1^2 \bar{a}_1 + 2 a_1' \right] + \frac{8c}{3\omega_1 \ell} B^2 a_1^2 \bar{a}_1 = 0, \quad (3.30)$$

où  $\bar{a}_1$  désigne le complexe conjugué de  $a_1$  et  $'$  désigne maintenant la dérivation par rapport à  $T_2$ . Notant  $a_1(T_2) = \frac{1}{2} \rho(T_2) e^{j\theta(T_2)}$  où  $\rho$  et  $\theta$  sont réels ( $a_1$  est supposé sinusoïdal) et imposant  $\epsilon = 1$  ( $\mu_2$  devient  $\mu$ ), l'identification des parties réelles et imaginaires de (3.30) donne un système dynamique gouvernant l'amplitude complexe de la solution à l'ordre  $O(\epsilon)$  après la bifurcation. Il vient :

$$\dot{\rho} = -\frac{c}{\ell} \rho \left( \mu - \frac{3}{4} C \rho^2 \right), \quad (3.31)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{c}{3\omega_1 \ell} B^2 \rho^2. \quad (3.32)$$

*Solution en régime permanent*

Pour  $C \neq 0$ , l'équation (3.31) possède 3 points fixes :

$$\rho^{PF} = 0, \quad \rho^{PF} = -2\sqrt{\frac{\mu}{3C}}, \quad \text{et,} \quad \rho^{PF} = +2\sqrt{\frac{\mu}{3C}}. \quad (3.33)$$

Pour  $\mu < 0$ , le point fixe  $\rho^{PF} = 0$  est instable tandis que les deux autres points fixes sont respectivement stables sous la condition  $C < 0$  et instables sinon, les bifurcations correspondantes étant qualifiées de directe et inverse. Pour qu'un régime permanent stable soit établi, le modèle à un mode confirme deux résultats publiés dans [39] : la nécessité du terme  $C$  dans le développement de la fonction non-linéaire et  $C < 0$ . Pour les solutions non triviales,  $\rho^{PF} \neq 0$ , la correction pour la fréquence de l'oscillation est donnée par

$$\theta = -\frac{c}{3\omega_1\ell} B^2 (\rho^{PF})^2 t + \theta_0. \quad (3.34)$$

où  $\theta_0$  est une constante. En définitive, une approximation du signal de pression en régime permanent est

$$p(t) = A \cos(\omega_m t + \theta_0), \quad (3.35)$$

avec

$$A = 2\sqrt{\frac{Y-A}{3C}}, \quad (3.36)$$

$$\omega_m = \omega_1 \left[ 1 - \frac{4c}{9\ell\omega_1^2} B^2 \frac{Y-A}{C} \right]. \quad (3.37)$$

A l'ordre  $O(\epsilon)$  c'est-à-dire pour des valeurs du paramètre de contrôle proche de zéro, les oscillations sont sinusoïdales, la fréquence d'oscillations étant très légèrement inférieure à la fréquence  $c/4\ell$ . L'amplitude de l'harmonique  $P_1$  en régime permanent est identique à celle donnée dans [39, 53], le facteur deux venant du fait que l'on donne ici l'amplitude réelle. Le résultat (3.36) fait apparaître un phénomène typiquement non-linéaire : la dépendance en amplitude de la solution. Revenant sur le développement (3.20), la solution à l'ordre  $O(\epsilon^2)$  illustre l'autre caractéristique des phénomènes non-linéaires : la distortion non-linéaire. Des termes de pulsation  $2\omega_1$  apparaissent dans la solution et la forme des oscillations pourra fortement s'éloigner de celle d'une sinusoïde.

### *Solution en régime transitoire*

Une fois connu le comportement du système en régime permanent, on s'intéresse à l'évolution du système depuis le point de bifurcation jusqu'au régime permanent en intégrant les équations (3.31) et (3.32).

La résolution de (3.31) se fait par la méthode des variables séparées. On a  $\mu < 0$  et  $|\rho| < 2\sqrt{(Y-A)/3C}$ . La séparation des variables  $\rho$  et  $t$  dans (3.31) puis le calcul de la primitive de chaque membre de l'équation conduit à l'expression de  $\rho(t)$  pendant le transitoire d'attaque donnée par

$$\rho^2(t) = \frac{4(Y-A)}{3C} \frac{e^{-\frac{2c}{\ell}(Y-A)t+2K_1}}{1 + e^{-\frac{2c}{\ell}(Y-A)t+2K_1}}, \quad (3.38)$$

où  $K_1$  est une constante donnée par les conditions initiales et  $C \neq 0$ . Supposant qu'à l'instant initial  $\rho(t_0 = 0) = \rho_0 \neq 0$ , l'amplitude de  $p(t)$  est finalement donnée par

$$A(t) = 2\sqrt{\frac{Y-A}{3C}} \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{4(Y-A)}{3C\rho_0^2} - 1 \right) e^{\frac{2c}{\ell}(Y-A)t}}}, \quad (3.39)$$

qui, pour  $t \rightarrow \infty$ , est identique à (3.36).

La correction à la fréquence d'oscillation pendant le régime transitoire est obtenue par intégration par rapport au temps de (3.32) ce qui mène à

$$\theta(t) = -\frac{2}{9} \frac{B^2}{\omega_1 C} \left\{ \frac{2c}{\ell} (Y - A) t - \ln \left[ 1 + \left( \frac{4(Y - A)}{3C\rho_0^2} - 1 \right) e^{2c(Y-A)t/\ell} \right] \right\} + K_2, \quad (3.40)$$

où  $K_2$  est une constante déterminée avec les conditions initiales. Supposant qu'à l'instant initial  $\theta(t_0 = 0) = \theta_0$ , il vient pour la correction de la fréquence en régime transitoire

$$\theta(t) = -\frac{2}{9} \frac{B^2}{\omega_1 C} \left\{ \frac{2c}{\ell} (Y - A) t - \ln \left[ \frac{3C\rho_0^2}{4(Y - A)} + \left( 1 - \frac{3C\rho_0^2}{4(Y - A)} \right) e^{\frac{2c}{\ell}(Y-A)t} \right] \right\} + \theta_0. \quad (3.41)$$

La présence de la non-linéarité entraîne avec l'accroissement de l'amplitude de l'oscillation, une variation de la fréquence d'oscillations du système. La modification de la fréquence est ici très faible (inférieur au dixième de cent pour  $(\zeta = 0,35, \gamma = 0,42, \eta = 0,0228)$  et la validité de (3.41) est limitée puisque l'effet des termes non-linéaires sur la période n'a pas été correctement pris en compte dans les développements précédents (il aurait fallu écrire  $\omega = \omega_1 + \epsilon\omega_2(T_0, T_1, T_2) + \dots$ ). Enfin, on note que le fait d'imposer pour conditions initiales  $\rho_0 = \rho^{PF}$  redonnent (3.36) et (3.37).

### 3.2.3 Simulations numériques

Le but de cette section est de présenter les solutions de la réduction du système à un mode unique pour avoir une première approche du modèle. Les résultats de l'approche analytique sont comparés aux calculs numériques. On montre l'insuffisance du modèle à une composante.

Les simulations que nous présentons sont obtenues pour un tuyau cylindrique de longueur  $\ell = 0,655 \text{ m}$  et de rayon  $r = 7,5 \text{ mm}$ . L'admittance du résonateur pour la pulsation  $\omega$  est donnée par  $Y = \psi \eta$ , avec  $\psi = 1,3$  et  $\eta = 0,0228$ , deux constantes reliées respectivement au nombre de Prandtl et aux effets visqueux. Les spectres de puissance  $SP$  sont obtenus à partir de Transformée de Fourier rapide discrète (FFT) du signal échantillonné à la fréquence  $f_e$ , calculée sur  $N_p$  points où  $N_p$  correspond à une puissance de 2 qui est inférieure ou égale à la longueur de signal ( $N_p = 65536$  pour  $1,48 \text{ s}$  de son). Pour la fréquence discrète  $f_k$ , elle est définie par

$$P(f_k) = 1/N_p \sum_{n=0}^{N_p-1} p(nT_e) e^{-j2\pi n k/N_p}, \quad (3.42)$$

avec  $T_e = 1/f_e$ , le pas d'échantillonnage, et  $f_k = kf_e/N_p$ . Le spectre de puissance pour la fréquence  $f_k$  ( $k=1, \dots, N_p/2$ ), exprimé en décibel, est donné par

$$SP(f_k)_{dB} = 10 \log (|P(f_k)|^2). \quad (3.43)$$

Enfin, on rappelle que les signaux de pression sont normalisés.

### Méthode de résolution numérique

L'intégration numérique temporelle de (3.14) est effectuée à l'aide du solveur ODE 45 que propose MATLAB. La méthode de discrétisation utilisée est une méthode de Runge-Kutta imbriquée d'ordre 4 et 5. L'implémentation nécessite une réécriture du système d'équations

sous la forme canonique d'un système dynamique que l'on obtient en posant  $y = \dot{p}$ . Ce faisant, on aboutit à

$$\begin{cases} \dot{p} = y, \\ \dot{y} = -\frac{2c}{\ell} [(Y - A - 2Bp - 3Cp^2) y - \omega_1^2 p]. \end{cases} \quad (3.44)$$

Il convient de spécifier au solveur les bornes d'intégration et les conditions initiales. L'erreur relative maximale est choisie égale à  $10^{-5}$  et les autres propriétés du solveur prennent les valeurs par défaut. Le temps de calcul est de l'ordre de la dizaine de secondes pour une seconde du signal lorsqu'un seul mode est considéré. Pour une description de la méthode de Runge-Kutta, on renvoie le lecteur à un ouvrage classique d'analyse numérique (par exemple [70]) et on se contentera de rappeler simplement que l'algorithme construit la solution à l'instant  $t_{n+1}$  en combinant les résultats de plusieurs évaluations à l'instant  $t_n$ . Les signaux présentés sont rééchantillonnés après calcul à la fréquence  $f_e = 44100 \text{ Hz}$ .

### Oscillations en régime permanent

Les figures 3.1 illustrent le comportement non-linéaire du système. Elles montrent, en régime permanent, respectivement la forme d'onde et le spectre de puissance associés pour trois jeux de paramètres de contrôle :  $(\zeta ; \gamma) = (0,2 ; 0,40)$ ,  $(\zeta ; \gamma) = (0,35 ; 0,42)$  et  $(\zeta ; \gamma) = (0,8 ; 0,48)$ . La première configuration est telle que le système est au seuil d'oscillation. L'oscillation est alors sinusoïdale et son amplitude relativement faible. Augmentant les deux paramètres, on observe une augmentation de l'amplitude des oscillations et l'apparition d'harmoniques d'ordre supérieurs. Le système est "loin" du seuil et l'influence des termes non-linéaires sur l'oscillation plus importante. Augmentant à nouveau les paramètres de jeu, le système se rapproche du régime "anche battante" : la non-linéarité est forte et l'oscillation différente d'une sinusoïde. On note cependant que cette configuration est "extrême" au sens où elle n'est certainement pas représentative d'une situation de jeu réelle. Il ressort que les simulations sont en accord avec les mesures de Meynial [59] qui observe des signaux de pression interne quasi-sinusoïdaux pour un résonateur *monochromatique*<sup>5</sup> quelle que soit la valeur de la pression d'alimentation. Néanmoins, on observe un enrichissement du spectre (même si cela n'est pas nettement visible à l'œil sur les formes temporelles) et une augmentation de l'amplitude des signaux suivant la force de la non-linéarité, qui sont caractéristiques du comportement non-linéaire du modèle.

Finalement, ces figures mettent en évidence la différence fondamentale entre la décomposition modale proposée et la décomposition en série de Fourier qu'utilise la méthode d'équilibrage harmonique par exemple. Les harmoniques sont ici générés (par la non-linéarité) puis amplifiés au cours du temps et aucune hypothèse n'est faite sur le contenu spectral de la solution.

### Comparaison des solutions analytique et numérique

Le report de l'amplitude (3.39) et de la correction de fréquence (3.41) dans la solution (3.35) permet de décrire le démarrage des oscillations suite à une petite perturbation de l'état d'équilibre. Pour valider la formulation analytique proposée et pour simplifier l'écriture des conditions initiales, l'instant initial est pris à  $t_0 = 0$  pour lequel on impose

5. Un tel résonateur est constitué de deux cylindres de sections différentes de sorte que la courbe d'impédance d'entrée ne présente qu'un seul pic de résonance principal et de petits pics secondaires très inharmoiques.

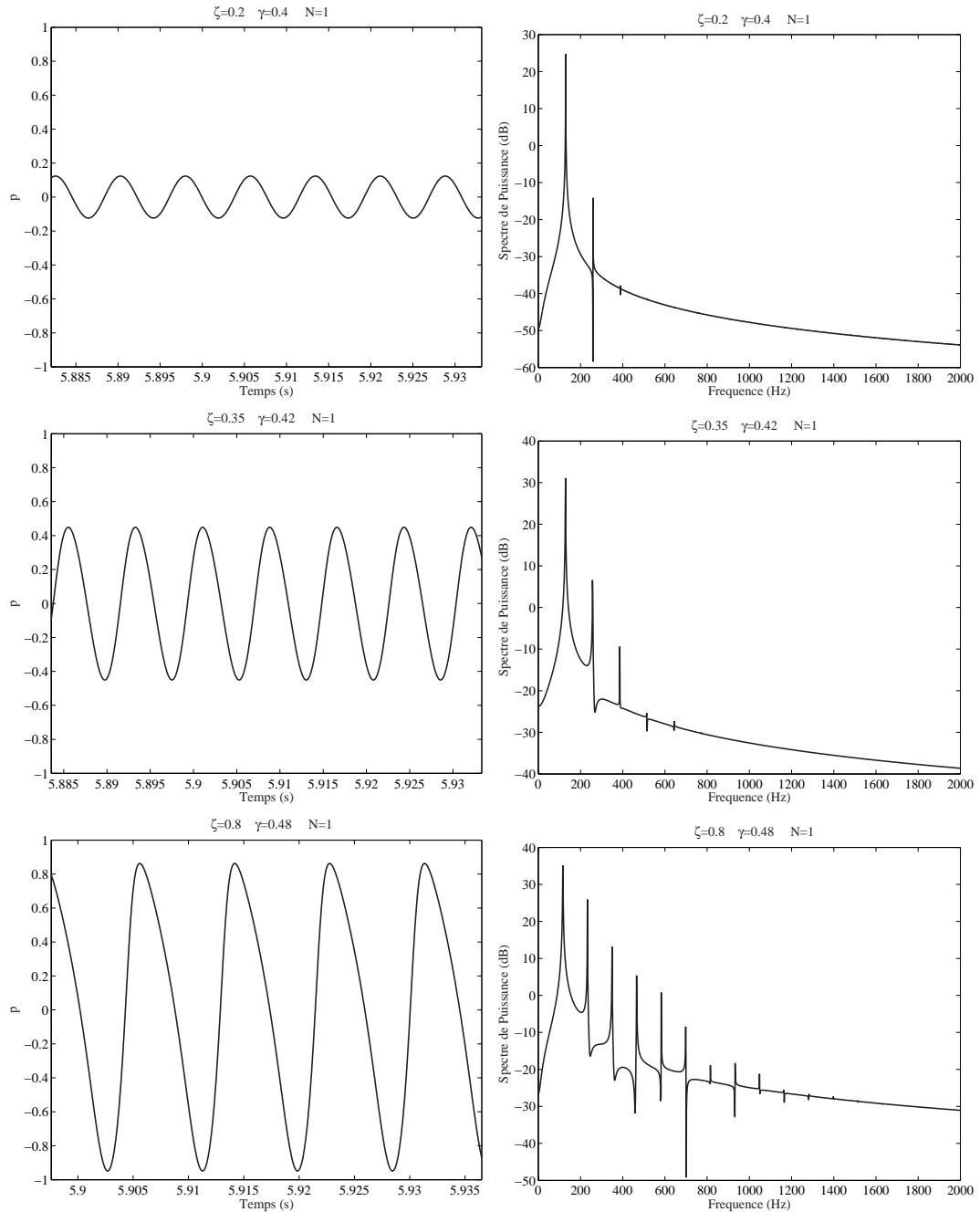


FIG. 3.1 – Forme d'onde et spectre de puissance pour la réduction à un mode - formulation avec condition de Neumann à l'entrée. Les figures vont par deux, la force de la non-linéarité augmentant ( $\zeta$  et  $\gamma$  augmentent). On remarque l'augmentation de l'amplitude et la génération d'harmoniques supérieures à laquelle est associée la déformation du signal.

une perturbation telle que

$$p(t_0 = 0) = \frac{u_{00}}{1 - A} \quad \text{et,} \quad \left[ \frac{d}{dt} p \right]_{t_0=0} = 0.$$

La figure 3.2 présente les solutions analytique et numérique pour  $(\zeta, \gamma) = (0,35; 0,42)$ . Au début du transitoire, les deux courbes sont identiques puis on observe un déphasage qui apparaît vers la fin du transitoire en raison de l'influence de la non-linéarité pendant le transitoire. On note que le système est ici "loin" du seuil d'oscillation et que cet écart dimi-

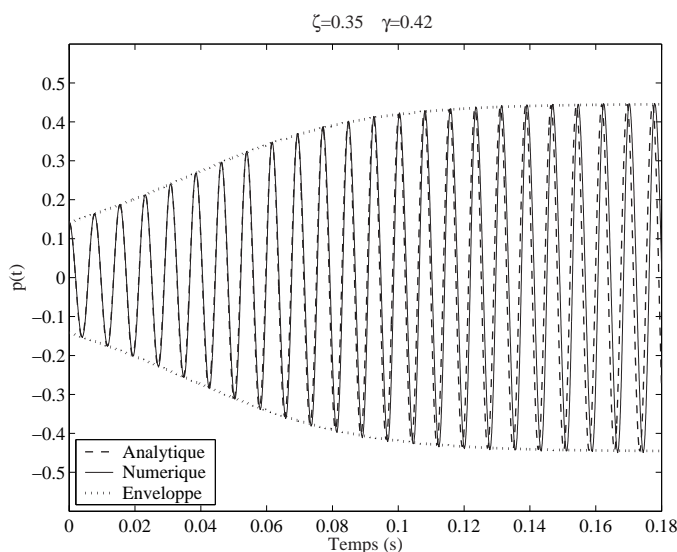


FIG. 3.2 – Réduction à un mode - formulation avec condition de Neumann à l'entrée : forme d'onde obtenue par approche analytique et par calcul numérique en régime transitoire pour  $(\zeta, \gamma) = (0,35; 0,42)$ . Si la fréquence de l'oscillation n'est pas très bien estimée par le calcul analytique, on constate le bon accord entre l'approximation de l'enveloppe calculée par (3.39) et celle obtenue par calcul numérique à partir de (3.44).

nue pour des valeurs des paramètres de jeu plus faible. Ceci est en accord avec l'hypothèse retenue pour l'approche analytique qui n'est valable qu'au seuil d'oscillation. Quant à l'enveloppe temporelle de la solution, on constate le très bon accord entre l'expression analytique et l'enveloppe de la solution numérique ce qui rend envisageable l'utilisation de (3.39) dans des algorithmes de synthèse (synthèse additive par exemple) pour simuler les transitoires d'attaque. Des résultats similaires sont présentés à la figure (3.3) en régime permanent. Comme pour le régime transitoire, le décalage dans le temps observé pour des configurations "loin" du seuil provient d'une mauvaise estimation de la fréquence d'oscillations (voir figure 3.3). L'approche analytique suppose la pulsation  $\omega$  constante alors que les termes non-linéaires agissent également sur la fréquence de l'oscillation. On observe une différence de 13 cents entre les deux fréquences d'oscillation qui provient de l'insuffisance des développements analytiques concernant l'estimation de la fréquence de l'oscillation (voir § 3.2.2).

### Comparaison des deux formulations

Jusqu'à présent, l'étude d'un résonateur à un seul mode ne concernait que la formulation du problème avec condition de Neumann à l'entrée et on a remarqué que, pour la seconde

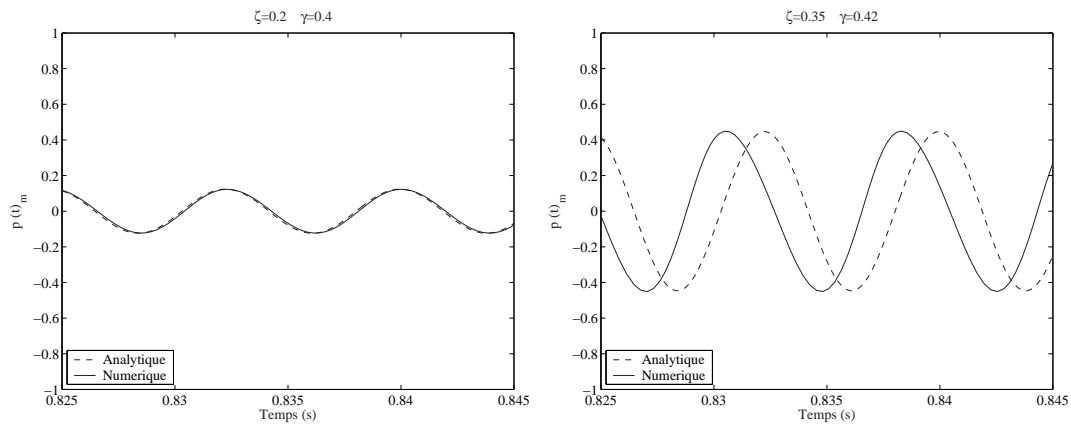


FIG. 3.3 – Réduction à un mode - formulation avec condition de Neumann à l'entrée : forme d'onde obtenue par approche analytique et par calcul numérique en régime permanent pour deux configurations. Gauche :  $(\zeta, \gamma) = (0,2; 0,4)$ . Droite :  $(\zeta, \gamma) = (0,35; 0,42)$ . On constate que lorsque l'on s'éloigne du seuil d'oscillation, la fréquence de l'oscillation n'est plus correctement estimée par le calcul analytique. En revanche, l'estimation de l'amplitude, même si elle n'est pas exacte, reste correcte.

formulation proposée, la réduction à un mode n'aboutit pas à une équation de type Van der Pol. Cette remarque soulève la question du degré de similitude entre les composantes  $p_n$  des deux formulations pour un  $n$  donné. La figure 3.4 montre les formes d'onde en régime permanent et les spectres de puissance associés pour les deux formulations lorsqu'un seul mode est considéré pour  $(\zeta, \gamma) = (0,35; 0,42)$ . La forme temporelle des signaux et le spectre de puissance sont sensiblement les mêmes; les fréquences de l'oscillation, en régime permanent, diffèrent de 0,02 Hz soit environ 0,2 cents. L'écart des amplitudes pour l'harmonique 1 est inférieur à 0,2 dB soit environ 2% et les rapports de l'harmonique 2 sur l'harmonique 1 ( $P_2/P_1$ ) diffèrent de moins de 1%. Le cas du régime transitoire sera discuté lors de l'analyse temps-fréquence. Finalement, ces observations laissent supposer que les deux décompositions proposées sont très semblables.

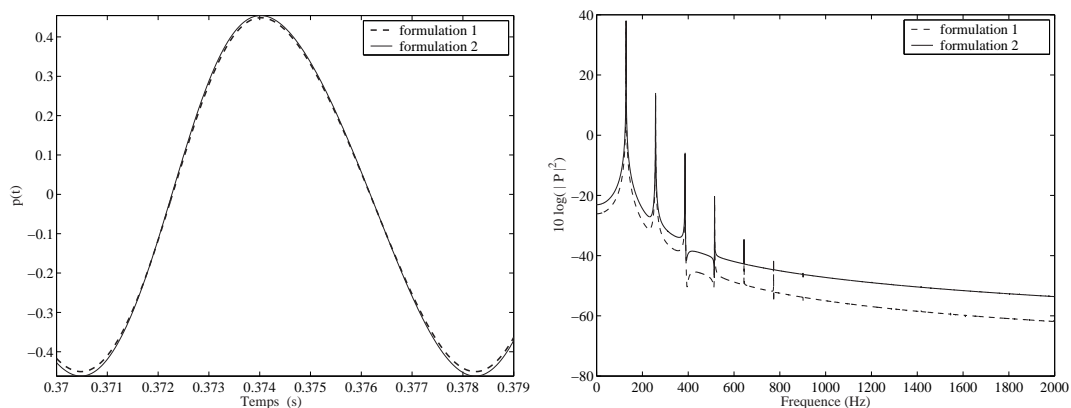


FIG. 3.4 – Réduction à un mode. Forme d'ondes et spectres de puissance : résolutions numériques pour les deux formulations présentées. On appelle formulation 1 celle avec condition de Neumann à l'entrée, et formulation 2, celle avec condition absorbante. Au regard du spectre et de la forme d'onde, on constate que les deux formulations conduisent à des résultats très proches.



### Analyse temps-fréquence

Dans ce travail, les propriétés temporelles des harmoniques d'un son sont obtenues à partir de la transformée de Fourier inverse à "court-terme fréquentiel" [76]. La méthode consiste à isoler par fenêtrage une composante du spectre du signal pour aboutir, par transformée de Fourier inverse, à l'expression d'un signal analytique. Cette représentation complexe d'une composante monochromatique permet de définir la *fréquence instantanée* notée  $f_i$  qui, pour une onde monochromatique  $x(t)$  telle que

$$x(t) = a(t) \cos(\Phi(t)),$$

est obtenue par la dérivée de la phase soit en écrivant

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \Phi(t).$$

On note qu'une première estimation de la fréquence centrale de chaque composante est effectuée à partir du spectre du signal total et qu'ensuite chacune des composantes harmoniques est isolée à l'aide d'une fenêtre de Hanning dont la taille est ajustée selon la largeur du pic dans ce spectre.

L'analyse temps/fréquence des signaux met en évidence une variation de fréquence entre le régime transitoire et le régime permanent. Cependant, il convient de préciser que la variation observée ne semble pas correspondre à celle calculée analytiquement avec la formulation avec condition absorbante. A ce stade, nous devons signaler que les simulations montrent que le modèle fonctionne en régime linéaire pendant la première demi-période seulement c'est-à-dire pendant un très court instant (voir figure 3.5). Or la fenêtre d'ana-

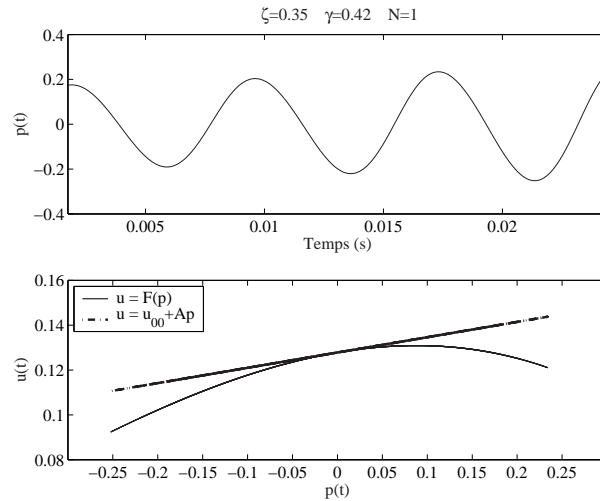


FIG. 3.5 – Réduction à un mode - formulation avec condition de Neumann à l'entrée : trois première périodes. Forme d'onde et relation pression-débit. On constate que l'approximation linéaire de la caractéristique pression-débit n'est déjà plus correcte après trois périodes : l'influence du terme  $B$  (responsable de la courbure) se fait sentir dès la seconde demi-période. Par ailleurs, on remarque que la détermination des conditions initiales à partir du régime linéaire cause une erreur d'environ 5 % sur la détermination de la pression à l'instant initial.

lyse a une certaine taille dans le domaine temporel qui s'avère être plus grande qu'une

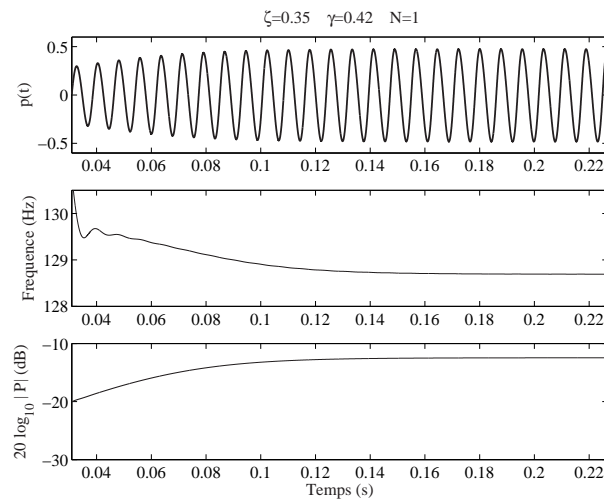


FIG. 3.6 – Réduction à un mode - formulation avec condition absorbante : forme d’onde (haut), variation de la fréquence du premier harmonique (milieu) et amplitude du premier harmonique (bas). Pendant que l’amplitude de l’oscillation croît, on assiste simultanément à une variation de la fréquence de jeu et une amplification de l’harmonique 1. On signale que les variations générales observées sont identiques pour les deux formulations du problème excepté à l’attaque de la note (voir figure 3.20).

demi-période et notre analyse est “aveugle” au changement de fréquence mis en évidence analytiquement. Par ailleurs, la méthode d’analyse utilisée possède un biais pour des signaux d’amplitude très faible : cela se traduit par des oscillations au niveau du module et de la fréquence instantanée du signal analytique, qui ne permettent pas de conclure sur les valeurs exactes de ces deux grandeurs après l’attaque de la note (voir figure 3.6). Enfin, une application numérique de l’équation (2.28) faite pour  $(\zeta, \gamma) = (0,35; 0,42)$  conduit à une variation de fréquence d’environ 1,3 cents par rapport à la fréquence théorique  $f_1 = c/4\ell = 129,7$  Hz, ce qui est inaudible (pour  $(\zeta, \gamma) = (0,35; 0,48)$ , l’écart est de 2 cents). Néanmoins, on observe une variation de fréquence d’environ 10 cents pendant le régime transitoire comme montré à la figure 3.6, qui provient de l’effet de la non-linéarité sur la fréquence de l’oscillation. On signale que cette variation est observée avec les deux formulations ce qui confirme que les composantes  $p_1$  des deux formulations sont très proches. A ce stade, il convient de préciser que les deux formulations ne donnent pas exactement les mêmes fréquences de jeu après l’attaque de la note comme nous l’avons montré analytiquement (voir chapitre 2). Nous verrons au paragraphe 3.3.3, que l’on observe effectivement un écart d’environ 1 cent en extrapolant les courbes des fréquences instantanées. Enfin, on constate que la réduction à une composante conduit à une mauvaise estimation de la fréquence en régime permanent, la fréquence attendue étant  $f_1 = c/4\ell = 129,7$  Hz. En effet, l’absence des pics d’impédance aux fréquences  $nf_1$  ( $n > 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ) fait qu’il est facile pour les termes non-linéaires, d’influencer la fréquence de l’oscillation, la position du pic d’impédance pouvant ainsi être modifiée.

## Discussions

Même si en pratique le résonateur peut être vu comme un filtre passe-bas, l’hypothèse d’un résonateur à un seul mode est une approximation brutale. L’approche analytique a mis en évidence l’apparition de termes de pulsation  $n\omega$  ( $n > 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ) dans la solution

qui peuvent exciter d'autres composantes  $p_n$ . En particulier, pendant un court instant, toutes les composantes vont être excitées ; ensuite, puisque les fréquences propres de toutes les composantes sont proches de former une série harmonique en régime transitoire, on devrait assister à des échanges d'énergie entre elles, par couplage, favorisant l'émergence des harmoniques impairs. Enfin, la figure 3.7 montre les formes d'onde et les spectres de puissance calculés en se restreignant à une et huit composantes pour  $(\zeta, \gamma) = (0,35 ; 0,42)$ . On observe une différence très nette entre les signaux. Pour le cas  $N = 8$ , on retrouve l'allure temporelle caractéristique de la pression pour une clarinette [38, 51] qui diffère nettement d'un signal quasi-sinusoidal. Aussi, le spectre de puissance met en évidence la nécessité de ne pas se limiter à un seul pic d'impédance pour décrire le résonateur : l'énergie est (principalement) concentrée dans les cinq premiers harmoniques impairs et non pas dans un seul. Ces considérations conduisent à la section suivante dont l'objet est l'étude d'un résonateur à plusieurs pics de résonance.

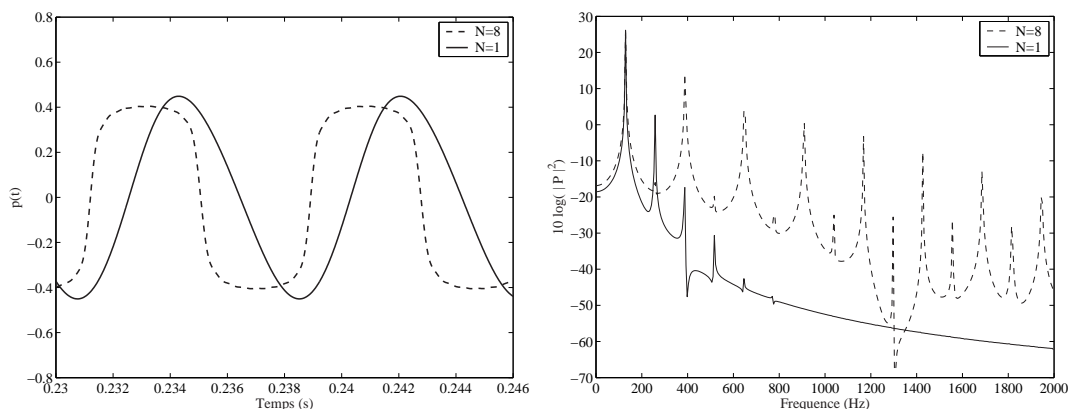


FIG. 3.7 – *Forme d'onde (gauche) et spectre de puissance (droite)-formulation avec condition de Neumann à l'entrée. Comparaison des solutions pour  $N = 1$  et  $N = 8$ . Formulation avec condition de Neumann à l'entrée.  $\zeta = 0,35$ ,  $\gamma = 0,42$ ,  $\eta = 0,0228$ . L'insuffisance du modèle à un mode est manifeste : les allures temporelles des signaux diffèrent fortement lorsque l'ordre de troncature augmente, ainsi que le contenu spectral dans lequel on remarque l'importance des harmoniques d'ordre supérieurs qui ne sont pas excités dans le système à un mode.*

### 3.3 Résonateur multimodes - Simulations numériques

Dans cette section, on présente les solutions du problème couplé (1.1) et (1.2) lorsque le résonateur présente à l'anche plusieurs pics d'impédance en relation harmonique. On commence par décrire le comportement global du modèle depuis l'attaque de la note jusqu'au régime permanent et on s'intéresse en particulier, à la contribution d'une composante dans l'oscillation du modèle (§ 3.3.1). La convergence des méthodes est ensuite étudiée et les résultats fournis par chacune d'elles sont comparés à ceux obtenus par équilibrage harmonique afin de valider la méthode de décomposition (§ 3.3.2).

Les simulations que nous présentons sont obtenues pour un tuyau cylindrique de longueur  $\ell = 0,655 \text{ m}$  et de rayon  $r = 7,5 \text{ mm}$ . Les admittances (réelles)  $Y_n$  aux fréquences  $(2n - 1) f_1$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) sont définies par

$$Y_n = \psi \eta \sqrt{2n - 1}, \quad (3.45)$$

avec  $\psi = 1,3$  et  $\eta \approx 0,02$  (la valeur de  $\eta$  est précisée pour chaque simulation).

### 3.3.1 Comportement du système

Ce paragraphe a pour but de décrire l'évolution du modèle depuis l'instant initial jusqu'à l'établissement du régime stationnaire. On analyse les résultats des simulations en temporel, en fréquentiel et par une analyse temps-fréquence.

#### Transitoire d'attaque et conditions initiales

On s'intéresse à la réponse du système à partir des conditions initiales présentées à la section 3.1. Durant un (très) court instant, le comportement du système est linéaire et la réponse du modèle est, au facteur  $u_{00}/c$  près, la fonction de Green que l'on a calculé analytiquement au chapitre 2. La figure 3.8 montre la réponse du modèle pour la formulation avec condition de Neumann et l'expression "exacte" de la fonction de Green obtenue par (2.35). On constate que les deux courbes sont très proches pendant les cinq premières périodes et qu'en raison de l'influence des termes non-linéaires, elles s'écartent l'une de l'autre après plusieurs périodes<sup>6</sup>. D'ailleurs, on note que cet écart apparaît d'autant plus tôt que la non-linéarité est forte. La figure 3.9 montre que l'accord est aussi parfait entre la solution de la formulation avec condition absorbante et celle obtenue par les réflexions successives (le paramètre de perte étant pris constant,  $\alpha\ell = 0,0228$ ).

Pour le choix de l'instant initial, il faut s'assurer qu'à  $t = t_0$ , les conditions (3.5) et (3.6) sont bien vérifiées. Des problèmes de convergence vers ces deux conditions ont été observés si l'instant initial est trop proche de zéro. Puisque l'on essaie de reconstruire un échelon de pression à partir d'une somme de fonctions sinusoïdales, on observe inévitablement des oscillations de Gibbs au niveau des discontinuités; par conséquent, pour  $t$  très petit, il est difficile de respecter à la fois les conditions sur le champ et sa dérivée (zone de fortes variations de la pression et/ou de mauvaise estimation du champ). Il s'agit donc de choisir un instant initial "loin" de cette zone et il est préférable de prendre  $t_0 \approx \ell/c$ . Pour les simulations présentées, l'instant initial est pris à  $t_0 = 1,74 \text{ ms}$ . Finalement, ces observations montrent que l'écriture des conditions initiales est correcte.

#### Evolution temporelle du modèle

La figure 3.11 montre la décomposition du signal de pression en huit composantes élémentaires  $p_n$  ( $n = 1, \dots, 8$ ) pour ( $\zeta = 0,35; \gamma = 0,42, \eta = 0,0228$ ). On distingue nettement trois phases: l'attaque du son, pendant laquelle toutes les composantes sont excitées; le régime transitoire pendant lequel certaines composantes voient leur amplitude croître alors que d'autres sont amorties; le régime permanent pour lequel toutes les composantes participent à l'oscillation. Les composantes qui perdent leur stabilité à l'attaque de la note, sont celles qui gouvernent la dynamique de l'ensemble: on les appelle parfois composantes *maîtres*. L'étude du problème au stade linéaire (voir chapitre 2) renseigne que la condition d'instabilité pour la composante  $p_n$ , à l'attaque de la note, s'écrit

$$Y_n - A < 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.46)$$

6. Comme nous l'avons mis en évidence avec les simulations à une composante, le système n'est plus linéaire après la première demi-période. Un zoom de la figure 3.8 permet de le vérifier. Néanmoins, à l'oeil, les deux courbes paraissent identiques pendant quelques périodes.

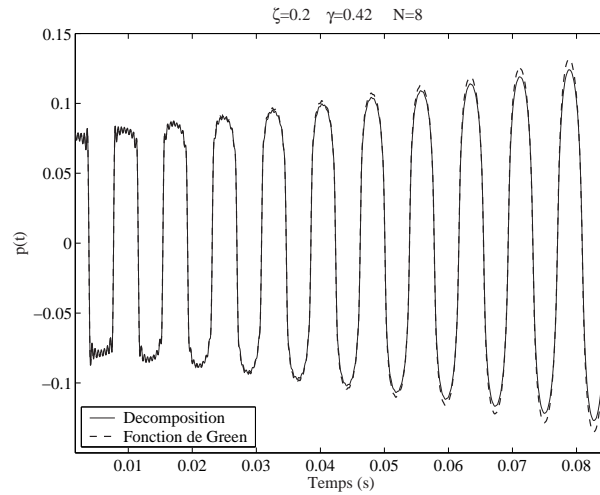


FIG. 3.8 – *Transitoire d'attaque (10 premières périodes)*. Comparaison entre la solution de la formulation avec condition de Neumann et la fonction de Green (2.35). L'instant initial est pris à  $t_0 = 1,74$  ms. On note que la fonction de Green est multipliée par le facteur  $u_{00}/c$  (voir équation (3.11)).  $\zeta = 0,2$ ,  $\gamma = 0,42$ ,  $N=8$ . La variation de l'amortissement avec la fréquence est pris en compte. On constate que pendant les cinq premières périodes, la réponse du système est très proche de la fonction de Green : le modèle est dans un fonctionnement quasi-linéaire. On signale que le même résultat est obtenu avec la formulation avec condition absorbante.

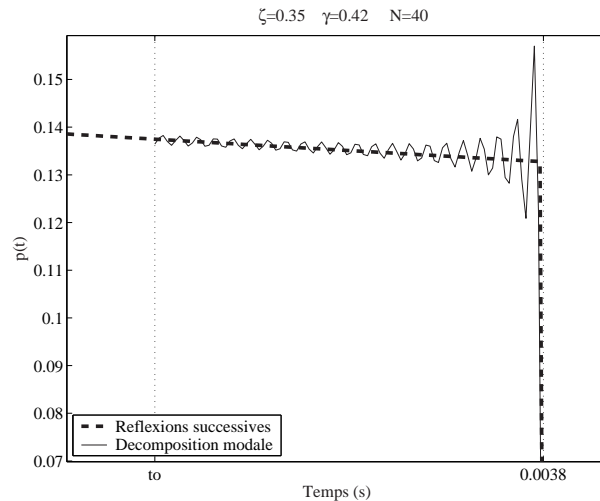


FIG. 3.9 – *Transitoire d'attaque (première demi-période)*. Comparaison entre la solution de la formulation avec condition absorbante et la solution des réflexions successives (2.44).  $\zeta = 0,35$ ,  $\gamma = 0,42$ ,  $\eta = 0,0228$  (constant),  $N=40$ . La réponse du modèle aux conditions initiales donnent le résultat des réflexions successives. Le même résultat est obtenu avec la formulation avec condition de Neumann.

Pour le cas présenté à la figure 3.11, on peut s'assurer que les trois composantes *maîtres* vérifient la condition (3.46) pour ( $\zeta = 0,35; \gamma = 0,42$ ). Les composantes qui sont amorties après l'instant initial sont parfois appelées composantes *esclaves*. En l'absence de couplage non-linéaire, ces composantes retourneraient vers leur position d'équilibre stable ( $p_n = 0$ ). Mais les échanges d'énergie entre composantes, par couplage, se mettent en place, et les composantes *esclaves* sont réexcitées par les composantes *maîtres*. On note également que les composantes *esclaves* perdent une à une leur stabilité et que ces instabilités se produisent à des instants qui sont à relier à l'amplitude de l'admittance  $Y_n$  et à la force du couplage non-linéaire (qui dépend des paramètres de contrôle du modèle).

Concernant les amplitudes des composantes, on remarque qu'il existe un rapport 100 (40 dB) entre les amplitudes de la première et de la huitième composantes pour l'exemple présenté, et que l'amplitude des composantes diminue lorsque  $n$  augmente.

Finalement, on constate que si pendant un court instant la dynamique du modèle n'est menée que par un nombre restreint de composantes (celles qui vérifient  $Y_n - A < 0$ ), toutes les composantes de la décomposition apportent leur contribution au régime d'oscillations.

### Régime permanent : la solution et ses composantes

On commence par présenter à la figure 3.10 trois formes d'onde en régime permanent, qui montrent que la forme du signal de pression change lorsque l'on augmente la pression d'alimentation [4, 53]. Pour des valeurs de  $\gamma$  croissantes, la forme du signal est modifiée depuis une forme quasi-sinusoïdale pour les faibles valeurs de  $\gamma$  vers un signal proche d'un signal carré pour des pressions d'alimentation élevées. Alors que le nombre de composantes est fixe ( $N=8$ ), on assiste à un enrichissement du spectre du signal en fonction du niveau d'excitation. On note une différence nette avec les formes temporelles de la figure 3.1 obtenues pour la réduction à une composante : le signal est beaucoup plus carré ce qui confirme l'importance de prendre plusieurs composantes dans la décomposition.

Au regard du zoom à la figure 3.11, il est certain que la décomposition proposée n'est pas une décomposition en série de Fourier compte tenu des variations temporelles complexes de chaque composante. Si les formes temporelles des premières composantes sont proches de sinusoides, celles des composantes  $p_n$  d'ordre supérieur en sont très éloignées. D'ailleurs, on observe assez distinctement la présence de l'harmonique  $2n - 1$  dans la composante  $p_n$  mais aussi celles d'autres harmoniques, en particulier l'harmonique 1.

Pour estimer quantitativement la contribution d'une composante dans le spectre de la solution, on regarde en termes d'énergie, l'apport de chaque composante à une fréquence particulière. A la figure 3.12, on superpose les spectres de puissance de la solution, décomposée sur 8 composantes, et de chacune des six premières composantes. Outre le fait que le spectre du signal total montre la prépondérance très marquée des harmoniques impairs sur les pairs, on constate que l'énergie contenue dans un harmonique impair provient essentiellement d'une composante. Ceci n'était pas évident a priori en raison du couplage non-linéaire. D'ailleurs, il est aussi probable que cette observation dépend de la force de la non-linéarité. On remarque une différence d'environ 35 dB entre les apports d'énergie des composantes  $p_n$  et  $p_{n\pm 1}$  dans l'harmonique  $2n - 1$  pour ( $\zeta = 0,35, \gamma = 0,42, \eta = 0,02$ ), et pour des configurations "extrêmes" ( $\zeta = 0,8, \gamma = 0,48$ ), on observe une différence d'environ 25 dB.

Par ailleurs, on présente à la figure 3.13 deux spectres de puissance obtenus pour un même jeu de paramètres de contrôle, en tronquant les développements respectivement aux ordres 4 et 5. On constate que l'ajout d'une composante profite également aux harmoniques impairs d'ordre supérieur : si l'harmonique 9 est effectivement amplifié d'environ 20 dB, les harmoniques 11 et 13 le sont également, de 8 dB et 3 dB respectivement. On note

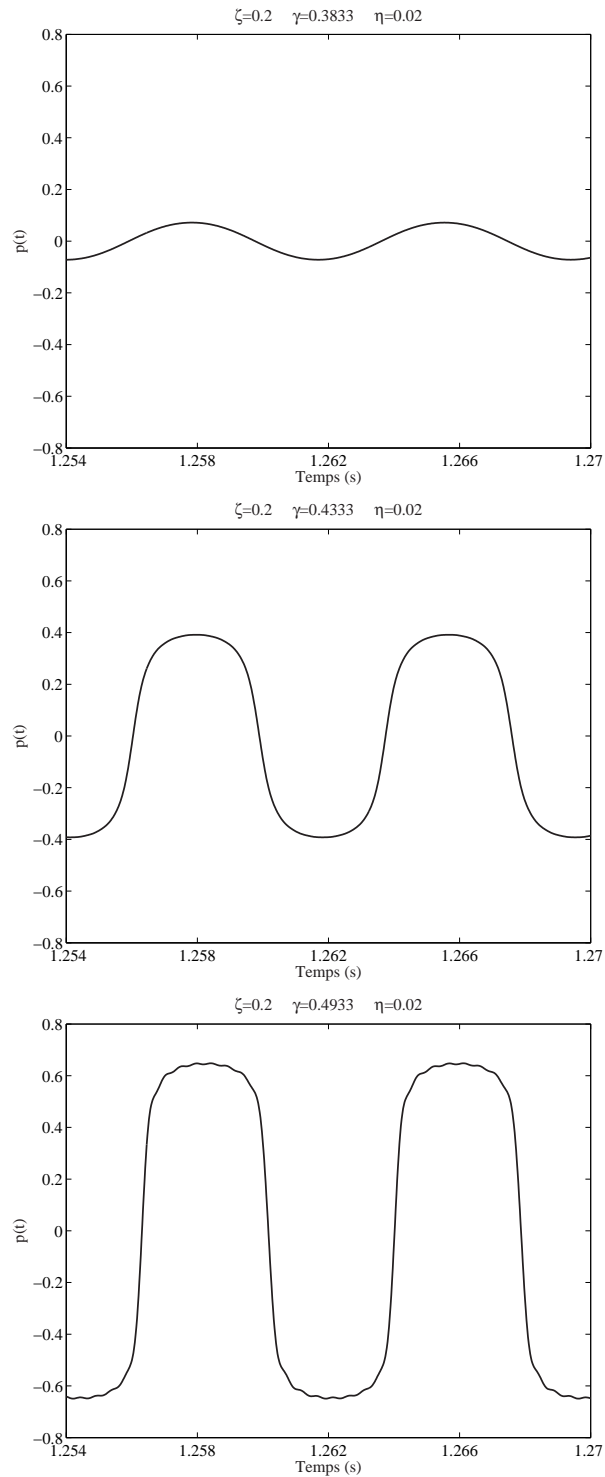


FIG. 3.10 – *Forme temporelle pour  $\gamma = 0,39$  (haut),  $\gamma = 0,43$  (milieu) et  $\gamma = 0,49$  (bas). Formulation avec condition de Neumann à l'entrée. On observe la modification du signal en fonction de la pression d'alimentation depuis une forme sinusoïdale jusqu'à un signal proche d'un signal carré.  $\zeta = 0,2, \eta = 0,02, N = 8$ . Un tel changement de forme ne peut qu'être corrélé à un enrichissement du spectre.*

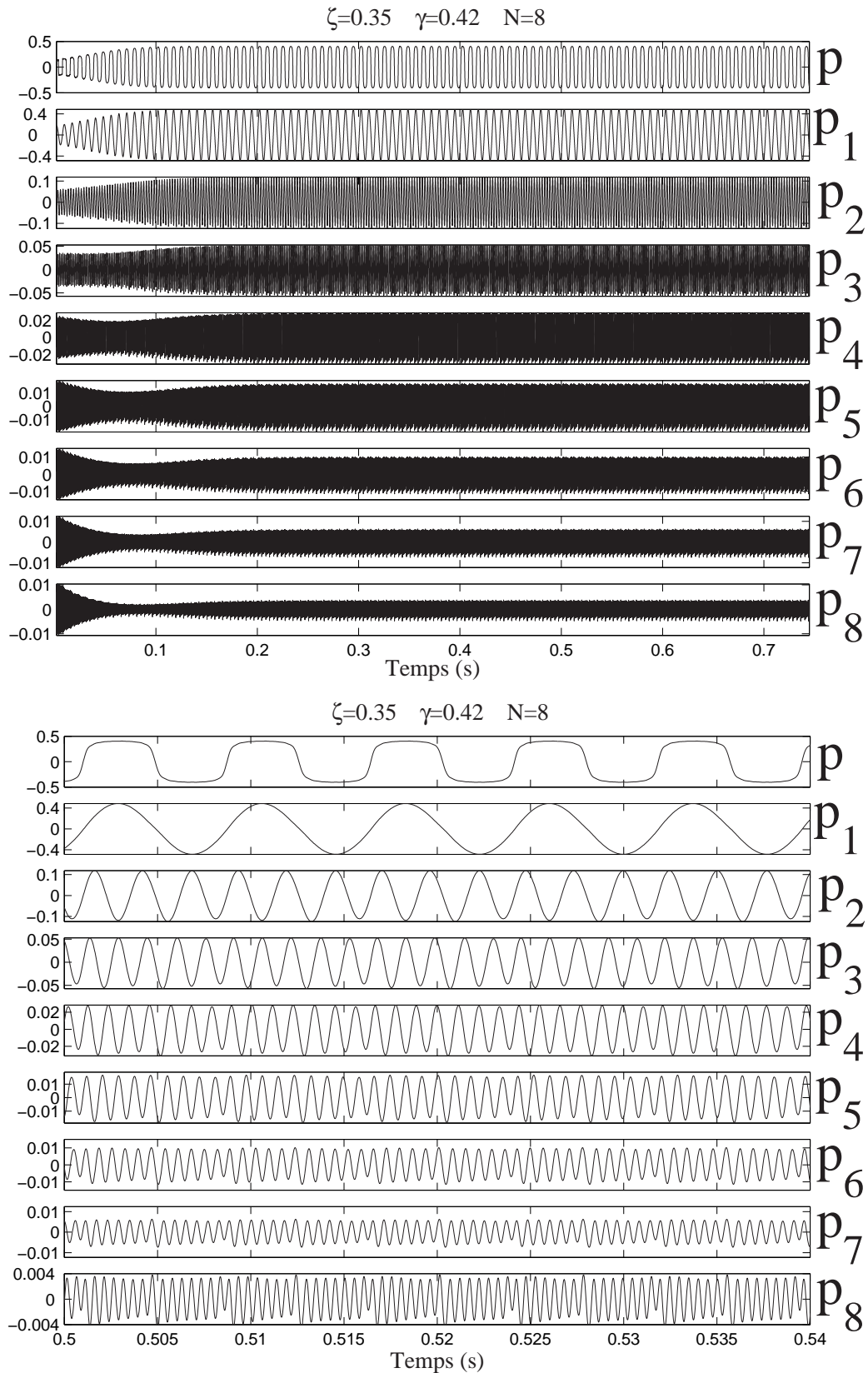


FIG. 3.11 – Décomposition du signal de pression  $p(t)$  en huit composantes élémentaires  $p_n(t)$  ( $n = 1, \dots, 8$ ). Formulation avec condition de Neumann à l'entrée ( $\zeta = 0,35, \gamma = 0,42, \eta = 0,0228, N=8$ ). Haut : allure générale. Bas : zoom. On constate que les premières composantes sont quasi-sinusoidales tandis que les composantes d'ordre supérieur sont nettement non sinusoidales.



cependant que ce gain est faible comparé à l'ajout des sixième et septième composantes qui cause un gain de 20 dB pour ces deux harmoniques. D'ailleurs, de tels changements dans le spectre sont perceptibles à l'écoute et la différence entre un son synthétisé avec 5 ou 6 composantes est nettement audible.

En ce qui concerne les harmoniques pairs, on s'aperçoit que la troncature surestime systématiquement l'amplitude de l'harmonique  $N+1$ , mais que l'ajout d'une composante dans la décomposition diminue toujours l'influence des harmoniques pairs d'ordre inférieurs à  $N$ . Ainsi, à la figure 3.13, on observe pour l'harmonique 8, une diminution de 8 dB lorsque l'ordre de troncature passe de  $N=4$  à  $N=5$ .

Finalement, ces observations conduisent aux conclusions suivantes :

- la prise en compte d'une composante supplémentaire dans la décomposition de la solution temporelle a pour effet d'amplifier les amplitudes des harmoniques impairs d'ordre supérieur et d'atténuer l'influence des harmoniques pairs d'ordre inférieur. Ces deux effets assurent que l'ajout d'une composante améliore la description de la solution ;
- si on s'intéresse au contenu spectral de la solution, la formulation proposée n'a qu'un intérêt limité comparé aux méthodes fréquentielles comme l'équilibrage harmonique. Une description précise du contenu fréquentiel nécessite la prise en compte d'un nombre important de composantes et pour la synthèse sonore, il est connu que les harmoniques aigus jouent un rôle important dans la perception. Or, comme toute méthode modale, la convergence est d'autant plus longue que le nombre de composantes pris en compte est élevé : c'est l'inconvénient de la méthode proposée. Or les temps de calculs sont déjà très importants : environ 9 heures de calcul sur un PC avec un processeur à 1 GHz pour 0,37 s de son lorsque 20 composantes sont prises en compte. C'est l'inconvénient de la méthode modale qui converge lentement lorsqu'on prend en compte un nombre important de modes ;
- l'estimation d'un ordre de troncature optimal à partir duquel l'ajout d'une composante n'apporte que peu de modification dans le spectre de la solution, n'est pas évidente à ce stade du travail puisque l'ajout d'une composante dans la décomposition contribue à l'émergence d'un harmonique dans le spectre.

### Analyse temps-fréquence

Si l'analyse proposée n'apporte pas de résultats originaux quant à l'étude des régimes permanents, il semble que ce soit en combinant les informations temporelles et fréquentielles que la méthode montre son intérêt. En particulier, elle permet d'étudier les régimes transitoires et renseigne sur les mécanismes d'apparition des harmoniques dans le spectre de la solution. Jusqu'à présent, l'analyse du résonateur multimodes a mis en évidence deux phénomènes : les arrivées successives des composantes dans le régime d'oscillation et l'association entre une composante et l'émergence d'un harmonique impair en régime permanent. L'analyse temps-fréquence va permettre de relier sans ambiguïté ces deux observations.

On présente à la figure 3.14 les enveloppes temporelles des trois premiers harmoniques du signal  $p(t)$  et de ces deux premières composantes, depuis l'attaque de la note jusqu'au régime permanent. La configuration étudiée est telle que :  $\zeta = 0,20$ ,  $\gamma = 0,42$ , et  $\eta = 0,02$  et l'unique composante *maître* est la composante  $p_1$ . On constate que les variations de l'harmonique 3 du signal  $p(t)$  et de la composante  $p_2$  sont identiques (différence de 0,01 dB) et de la même manière, on observe que les variations de l'harmonique  $(n + 1)/2$  sont principalement contrôlées par la composante  $p_n$ , et ce, depuis le régime transitoire

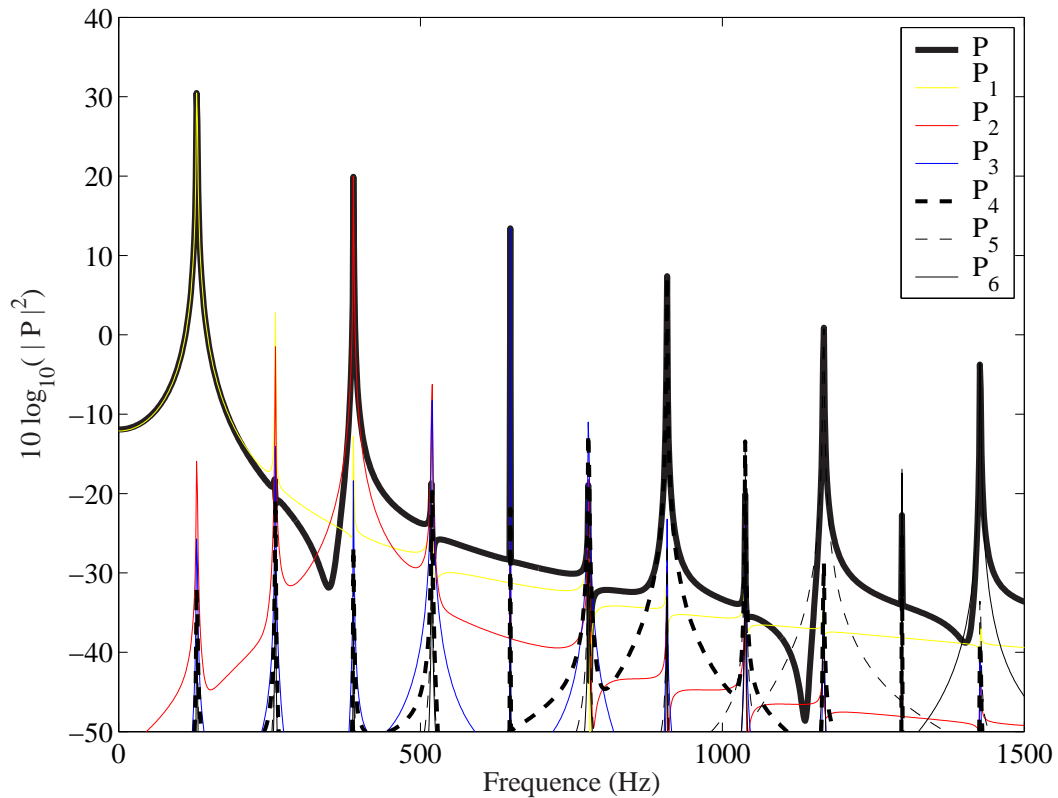


FIG. 3.12 – Contribution des 6 premières composantes dans le spectre de puissance du signal total en régime permanent - formulation avec condition de Neumann à l'entrée. La solution a été décomposée en 8 composantes ( $N = 8$ ).  $\zeta = 0,35, \gamma = 0,42$ . Pour les harmoniques impairs, on constate le lien fort entre un harmonique dans le spectre et une composante dans la description temporelle. En revanche, toutes les composantes influent sur l'amplitude des harmoniques pairs.

jusqu'au régime permanent. Les variations des amplitudes de chacun des harmoniques impairs sont donc à relier à celles des amplitudes des composantes comme cela est montré avec l'harmonique 3 qui est principalement "portée" par la composante *esclave*  $p_2$ . Une seconde illustration de cette observation est proposée à partir des spectrogrammes (voir figure 3.15). Sont représentés les spectrogrammes du signal total et de la composante  $p_4$ . Les échelles de couleurs permettent de montrer assez nettement que l'amplitude de l'harmonique 7 dans le signal total est principalement contrôlée par la composante  $p_4$ . Finalement, outre le fait que cette analyse confirme la relation forte entre une composante dans la description temporelle et l'apparition d'un harmonique dans le spectre, on met en évidence ici l'apparition des harmoniques un à un dans le son, le temps d'apparition d'un harmonique dépendant de la quantité  $Y_n - A$  et donc des trois paramètres  $\eta$ ,  $\zeta$  et  $\gamma$ .

Concernant la fréquence de jeu, on remarque, figure 3.16, que les variations pour  $t \gtrsim 60 \text{ ms}$ , n'apparaissent pas à la figure 3.6. On note aussi une différence dans la fréquence de jeu en régime permanent ( $t > 0,2 \text{ s}$ ) par rapport à celle obtenue lors de la réduction à une seule composante. Ceci mène à penser que des interactions entre composantes apparaissent dans le système pendant le transitoire. La figure 3.16 montre que pour  $t < 0,2 \text{ s}$ , les rapports entre les trois premiers harmoniques et le fondamental ne sont pas entiers alors qu'ils le sont pour les instants d'après. Une interprétation possible

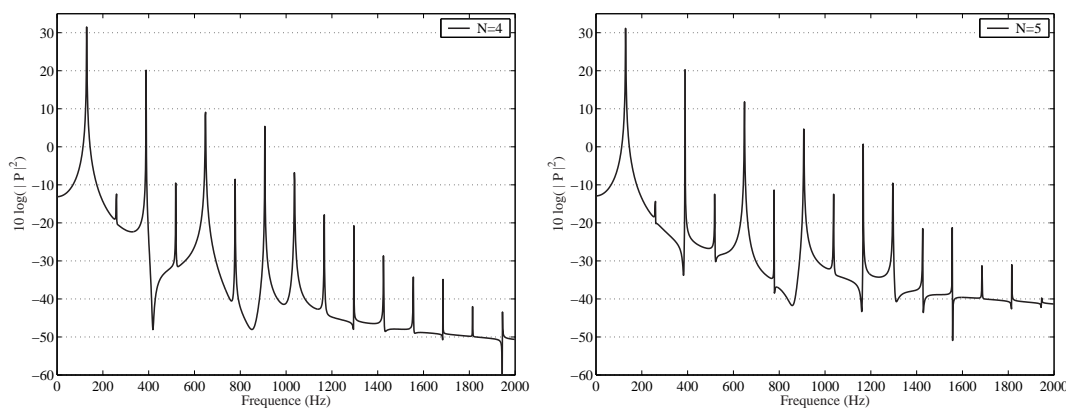


FIG. 3.13 – Influence sur le spectre de puissance de l'ajout d'une composante dans la décomposition de la solution - formulation avec condition de Neumann à l'entrée. Gauche :  $N=4$ . Droite :  $N=5$ .  $\zeta = 0,35$ ,  $\gamma = 0,42$ ,  $\eta = 0,0228$ . On remarque que l'ajout de la composante  $n = 5$  fait ressortir nettement l'harmonique 9 et atténue principalement l'amplitude de l'harmonique 8. Les harmoniques 11, 13 et 15 voient également leur amplitude augmenter.

de cette observation est l'existence d'un *bloquage de phase* [10, 33] pendant le transitoire. En effet, puisque les fréquences d'oscillations des composantes ne forment pas une série harmonique à l'instant initial (voir équation (2.28)), il est nécessaire qu'elles "s'accordent" pour favoriser un régime d'oscillations stable.

En définitive, l'idée essentielle qui ressort de ces analyses est qu'il est nécessaire de prendre en compte un nombre important de composantes pour décrire précisément le comportement du modèle. L'ajout d'une composante a des répercussions immédiates dans le spectre (avec l'apparition d'un harmonique), et la fréquence de jeu, qui résulte de l'interaction entre les pics de résonance, est moins libre d'évoluer (en raison du blocage de phase).

### 3.3.2 Convergence et confrontation de la méthode avec l'équilibrage harmonique

L'objet de ce paragraphe est de valider la méthode de décomposition proposée. Avant de comparer les régimes d'oscillations avec les régimes permanents calculés par équilibrage harmonique numérique, on se propose d'estimer la vitesse de convergence des deux formulations et de comparer leurs résultats. En effet, les composantes calculées par les deux formulations sont a priori différentes et seule la prise en compte d'une infinité de composantes dans chaque décomposition doit conduire au même résultat.

#### Convergence des deux formulations

On étudie ici la convergence des deux formulations en fonction de l'ordre de troncature, l'objectif recherché étant de réduire la dimension du problème. En particulier, pour le cas d'un vrai instrument avec trous latéraux, l'existence d'une fréquence de coupure autour de 1500 Hz [10] pour le résonateur (en raison de la présence du pavillon pour la note la plus grave et des trous ouverts pour les autres doigtés), laisse supposer qu'on puisse effectivement ne conserver qu'un nombre peu élevé de composantes, rendant la méthode intéressante pour des applications à la synthèse sonore.

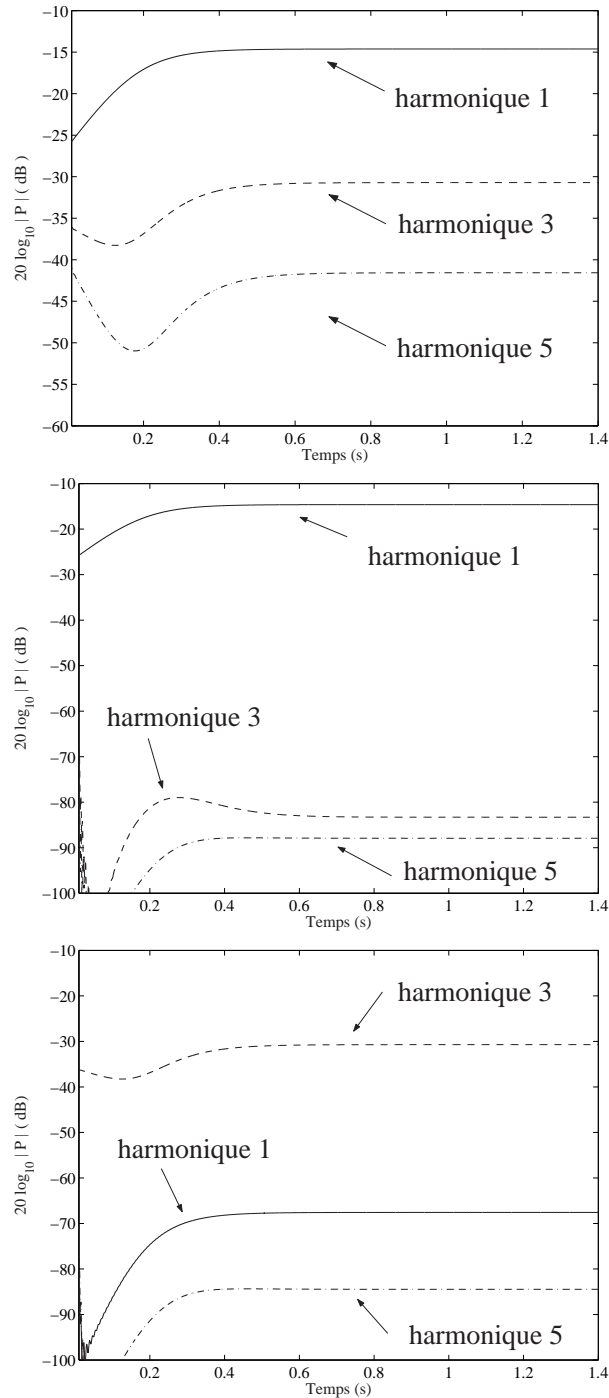


FIG. 3.14 – Evolution temporelle des 3 premiers harmoniques d'un signal décomposé en huit composantes - formulation avec condition de Neumann à l'entrée.  $\zeta = 0,2, \gamma = 0,42, \eta = 0,02$ . Haut : signal  $p(t)$ . Milieu : composante élémentaire  $p_1(t)$ . Bas : composante élémentaire  $p_2(t)$ . Les évolutions de l'harmonique 3 dans le signal  $p(t)$  et dans la composante  $p_2(t)$  sont identiques en régime transitoire et en régime permanent. On constate que les évolutions temporelles d'un harmonique dans le spectre sont nettement corrélées à celles d'une composante de la décomposition.

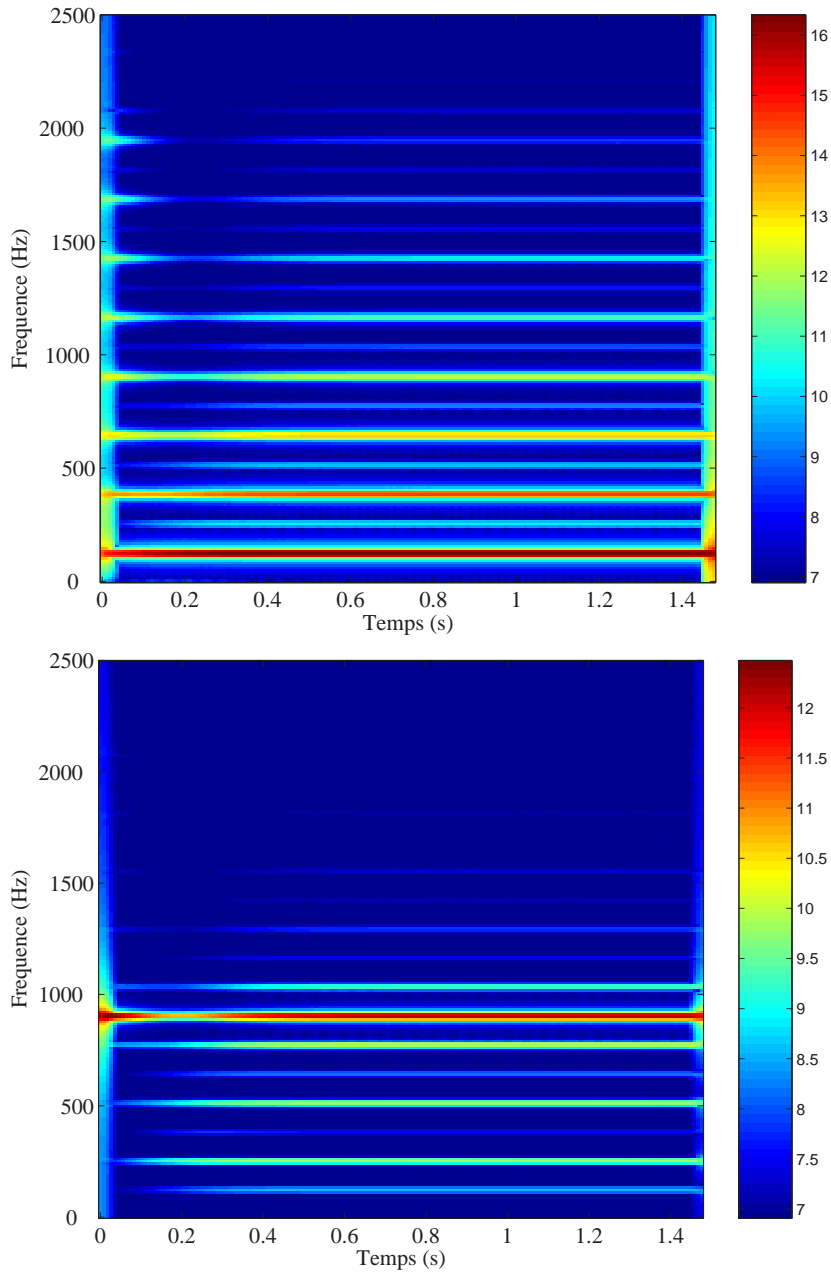


FIG. 3.15 – Spectrogramme. Décomposition du signal de pression en huit composantes - formulation avec condition de Neumann à l'entrée.  $\zeta = 0,2, \gamma = 0,42$ . Haut : spectrogramme de la solution  $p(t)$ . Bas : spectrogramme de la composante élémentaire  $p_4(t)$ . L'échelle des couleurs met en évidence que les variations de l'harmonique 7 sont principalement contrôlées par la composante  $p_4(t)$ .

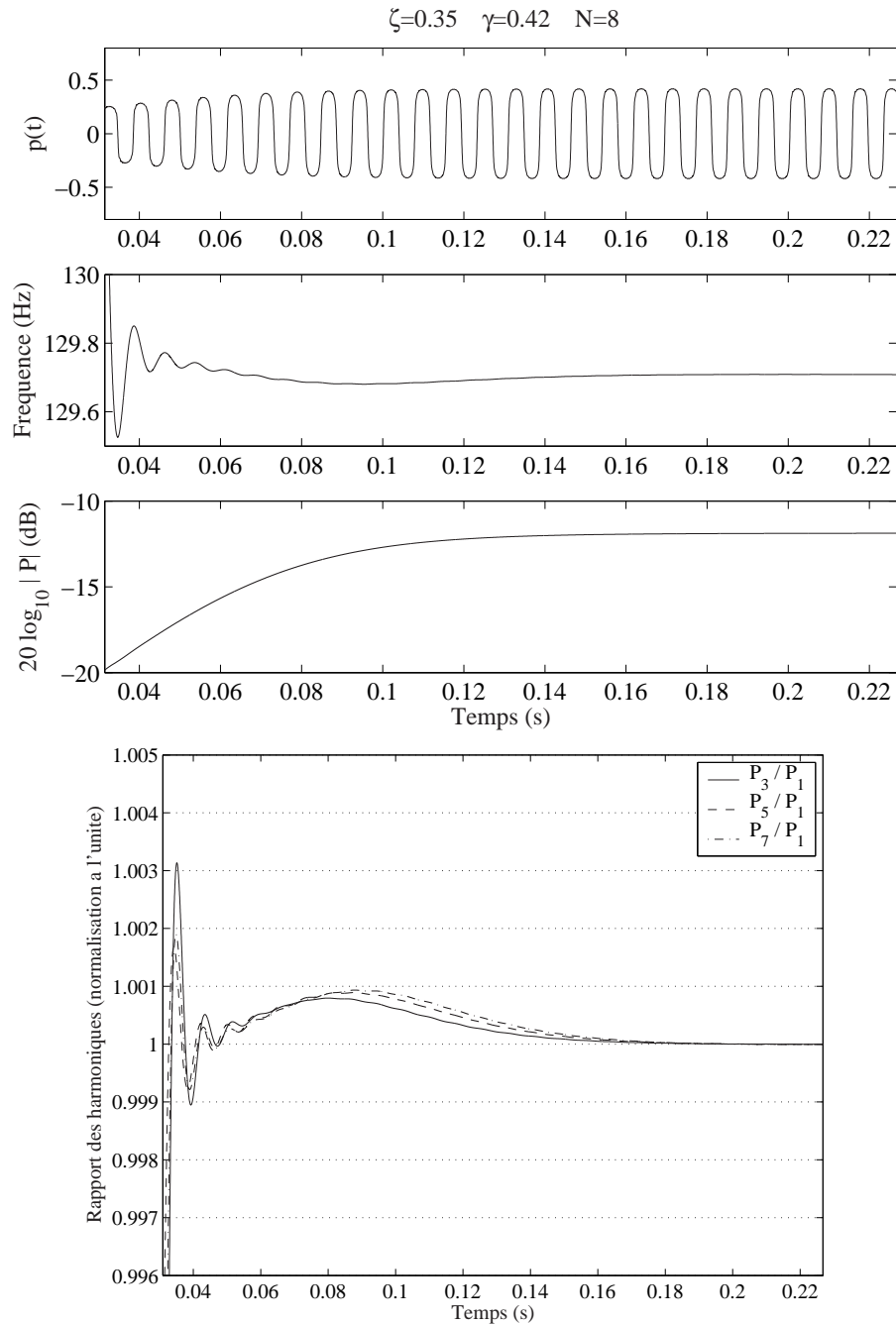


FIG. 3.16 – Régime transitoire - formulation avec condition de Neumann à l'entrée.  $\zeta = 0,35, \gamma = 0,42, \eta = 0,02, N=8$ . Haut : forme d'onde du signal de pression, fréquence de jeu, amplitude du premier harmonique. On observe une variation de la fréquence de jeu plus marquée que lors de la réduction à une composante (voir figure 3.6). On rappelle que les oscillations à l'attaque de la note ( $t \lesssim 50 \text{ ms}$ ) proviennent d'un biais de la méthode d'analyse. Bas : rapport entre les trois premiers harmoniques ( $P_3, P_5, P_7$ ) et le fondamental ( $P_1$ ), normalisé à l'unité. On remarque que, pendant le transitoire, les rapports entre les harmoniques ne sont pas entiers et qu'ils le deviennent en régime permanent. On observe un phénomène de blocage de phase entre les composantes.

Le signal de référence que l'on considère est un signal calculé avec  $N=20$  composantes. Bien entendu, il ne correspond pas à la solution exacte du problème qui nécessite la prise en compte d'un nombre infini de composantes mais il apparaît, pour l'application à la clarinette, comme une solution physiquement acceptable compte tenu du filtrage du résonateur.

Même si la comparaison des formes temporelles est insuffisante, elle permet une première estimation de la convergence. Les formes temporelles des solutions pour la formulation avec condition de Neumann, figure 3.17, calculées pour  $N$  croissant, montrent que pour  $N=8$ , les allures du signal de référence et du signal analysé, en régime permanent, sont voisines. On constate également que la convergence est rapide au niveau de la forme et que seule l'allure du signal pour  $N=1$  diffère fortement des autres. Quant à la fréquence d'oscillation, on remarque que l'estimation s'améliore pour des  $N$  croissants et qu'à partir de  $N=8$ , un écart inférieur au cent est obtenu par rapport à celle du signal de référence.

Une comparaison plus quantitative a été faite en calculant l'énergie contenue dans le signal en régime transitoire et en régime permanent. L'intérêt d'un tel critère est qu'il est indépendant de la description du signal (temporelle ou fréquentielle) choisie. On calcule les énergies en additionnant les quantités  $|P(f_k)|^2$  pour toutes les fréquences  $f_k$  où  $P(f_k)$  est la transformée de Fourier du signal, estimée à la fréquence  $f_k$  (voir §3.2.3). Pour le régime transitoire, les signaux calculés ont une durée 0,34 s. On représente à la figure 3.18, les écarts relatifs (exprimés en pourcentage par rapport à l'énergie du signal de référence) des énergies de la solution "exacte" et du signal tronqué avec  $N \leq 10$ . On constate que la convergence est effectivement rapide et que les vitesses de convergence pour les deux formulations sont sensiblement les mêmes. En particulier, à partir de  $N=5$ , l'erreur estimée est inférieure au pourcent. Si on s'intéresse à l'énergie contenue dans l'ensemble du signal, c'est-à-dire à l'énergie en régime transitoire et régime permanent, on constate que les résultats sont semblables (voir figure 3.18) à ceux obtenus pour le transitoire, ce qui n'était pas évident compte tenu que les composantes arrivent une à une dans l'oscillation. Il convient de signaler que l'analyse a été effectuée en considérant des signaux de 1,48 s et que pour des questions de limitations de mémoire de l'ordinateur sur lequel ont été effectués les calculs, le signal de référence pour la formulation avec condition absorbante, est calculé en prenant en compte 12 composantes seulement ; cependant, compte tenu du fait que l'énergie contenue dans les composantes diminue lorsque  $n$  augmente, la vitesse de la convergence "vraie" est sûrement du même ordre de grandeur que celle que nous estimons. Finalement, il ressort de la figure 3.18 que les deux formulations convergent rapidement, et qu'une estimation correcte de la solution est obtenue à partir de  $N=8$  composantes pour les deux formulations.

Enfin, auditivement, on entend nettement la modification de la fréquence de jeu et l'enrichissement du spectre au fur et à mesure que l'ordre de troncature augmente, depuis  $N=1$  jusqu'à  $N=5$ . A partir de  $N=5$ , il est difficile d'entendre un changement dans la fréquence de jeu mais la modification du timbre, elle, continue à s'entendre. Pour  $N=7$  et  $N=8$ , les deux sons semblent identiques, puis, lorsque l'on continue à augmenter l'ordre de troncature, le timbre du son change beaucoup et n'a que peu de rapport avec un son de clarinette : le phénomène de distorsion harmonique est trop marqué. Ce point reste à étudier d'autant que ce défaut est encore plus marqué quand on s'intéresse au son externe. Cependant, notre modèle utilise une approximation de la fonction non-linéaire et nous avons ignoré la dispersion.

Finalement, on conclut que les deux formulations convergent rapidement vers la solution et qu'à partir de  $N=8$ , les estimations des solutions pour les deux méthodes sont satisfaisantes : la fréquence de jeu en régime permanent est estimée à 0,1 cent de la valeur théorique, et le signal synthétisé contient plus de 99% de l'énergie d'un signal calculé avec

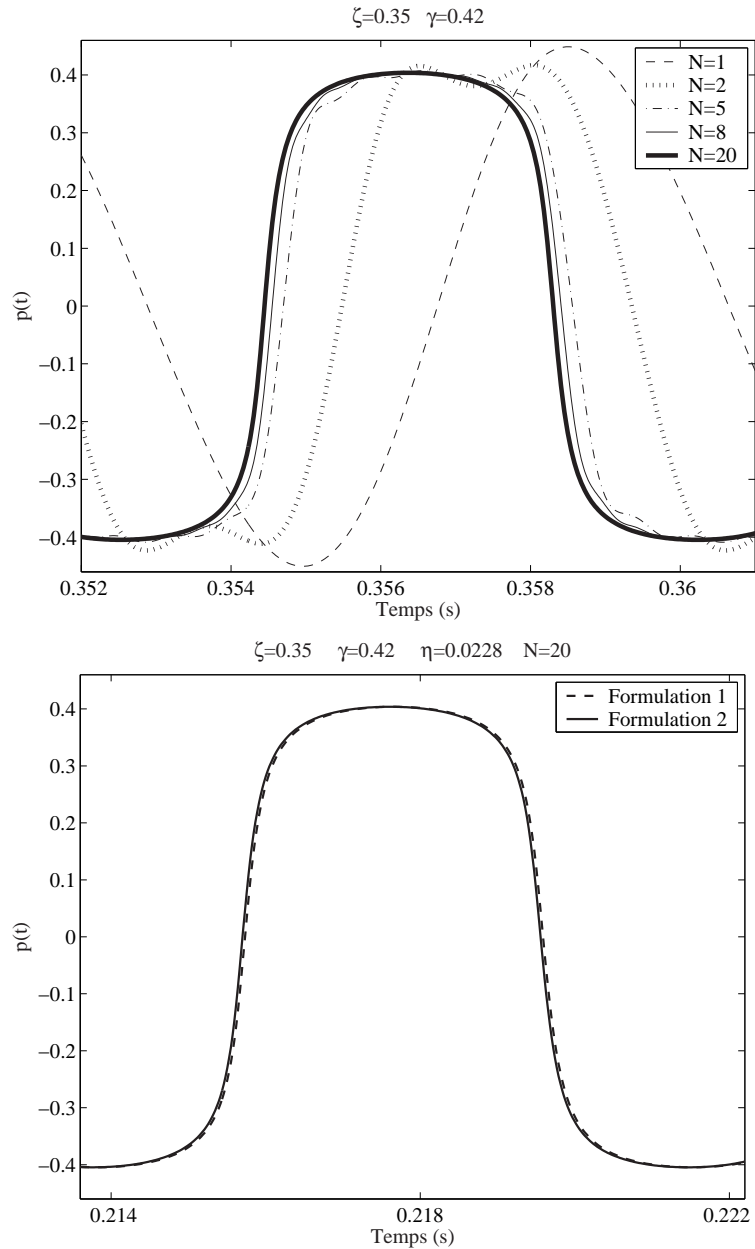


FIG. 3.17 – Début du régime permanent.  $\zeta = 0,35, \gamma = 0,42, \eta = 0,0228$ . Haut : évolution des formes temporelles des solutions pour  $N$  croissant - formulation avec condition de Neumann à l'entrée. On considère que la solution obtenue pour  $N=20$  est la solution de référence. On constate la rapide convergence de l'allure des solutions. Bas : formes d'ondes obtenues pour les deux formulations pour  $N=20$ . On appelle formulation 1 celle avec condition de Neumann à l'entrée, et formulation 2, celle avec condition absorbante.



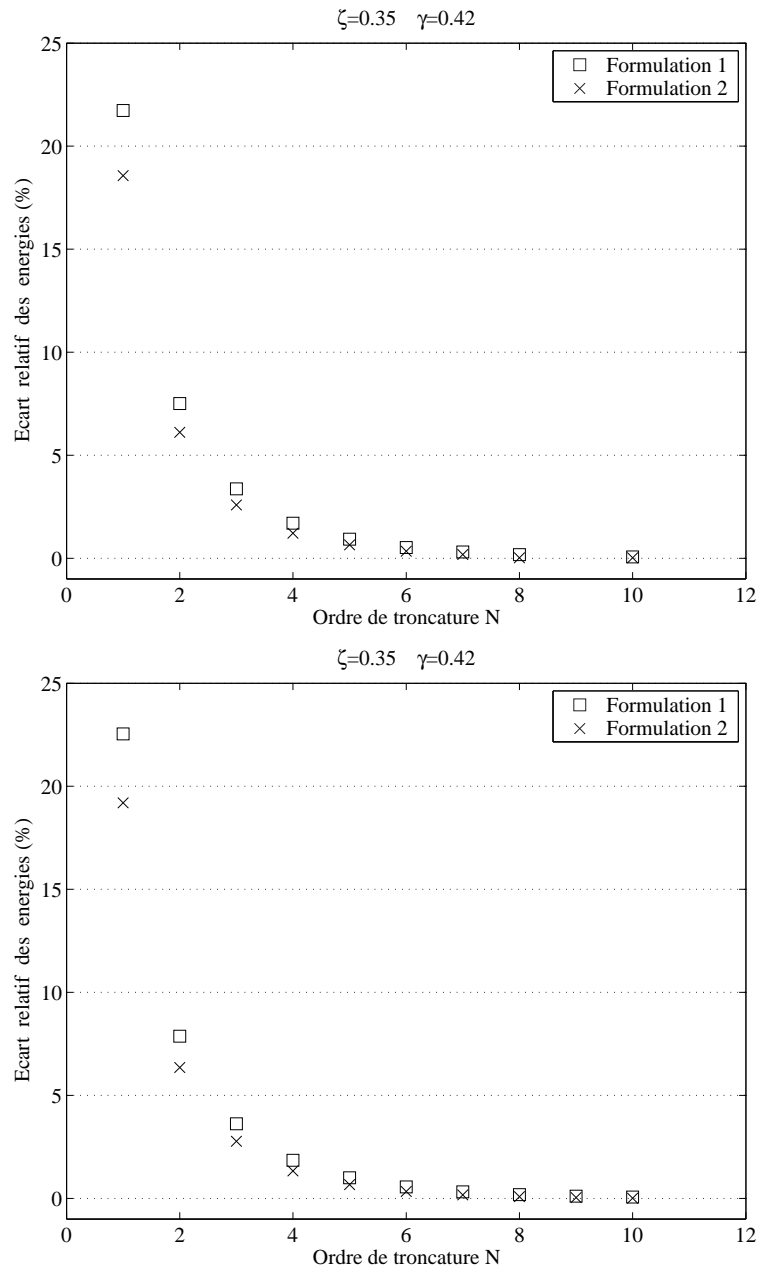


FIG. 3.18 – Convergence des deux formulations en fonction de l'ordre de troncature des décompositions.  $\zeta = 0,35$ ;  $\gamma = 0,42$   $\eta = 0,02$ . On appelle formulation 1 celle avec condition de Neumann à l'entrée, et formulation 2, celle avec condition absorbante. Haut: régimes transitoires. Signaux de 0,34 s de son. Le signal de référence comporte 20 composantes (le cas  $N=9$  n'a pas été calculé). Bas: régime transitoire et régime permanent. Signaux de 1,48 s de son. On constate que les vitesses de convergence sont semblables en régime transitoire et en régime permanent. On note qu'à partir de  $N=5$ , les différences d'énergie pour les signaux calculés et les signaux de référence sont inférieures à 1%.

vingt composantes. Pour s'assurer que les deux formulations conduisent à des résultats identiques, on présente, figure 3.17, les signaux temporels obtenus par les deux formulations, pour  $N=20$ . Enfin, à l'écoute, le son synthétisé est proche d'un son de clarinette.

### Comparaison avec l'équilibrage harmonique

Une fois déterminé l'ordre à partir duquel il y a convergence pour chacune des méthodes, il reste à valider la décomposition en comparant les résultats obtenus par les deux formulations à ceux calculés, dans le domaine fréquentiel, par équilibrage harmonique. Nous comparons ici nos résultats à ceux présentés par Kergomard et coll. dans [53] qui, pour valider une méthode de calcul du spectre d'un son de clarinette, traitent numériquement le problème formé par les équations (1.1) et (1.2). Leurs résultats sont obtenus par équilibrage harmonique en prenant en compte un nombre élevé d'harmoniques (entre 10 et 60), qui est ajusté selon la vitesse de convergence de l'algorithme. Le modèle utilisé est identique au nôtre : l'anche est supposée sans masse et la relation non-linéaire est le polynôme de degré trois donné par (2.46). Pour les calculs, on a  $\zeta = 0,2$ ,  $\eta = 0,02$  et  $\ell = 0,85 m$ .

La figure 3.19 compare les prévisions des deux méthodes pour l'amplitude du fondamental  $P_1$  et le rapport de l'harmonique 3 et du fondamental, noté  $P_3/P_1$ , en fonction du paramètre  $\gamma$ . La bifurcation observée est de type direct [39] et on constate que l'accord entre les résultats fournis par les deux formulations et par équilibrage harmonique est correct. On note un écart maximum de 1dB dans l'ensemble de la plage des pressions testées. Finalement, on arrive à la conclusion que la méthode proposée conduit à des solutions identiques à celles obtenues par équilibrage harmonique ce qui permet de valider, en régime permanent, les décompositions proposées.

### 3.3.3 Discussions

Finalement, on peut conclure cette section par les points suivants :

- si toutes les composantes sont présentes au moment de l'attaque de la note, seulement quelques unes commencent à croître pendant le transitoire. Les composantes *maîtres* dominent les autres qui sont ensuite réexcitées par couplage. En régime permanent, toutes les composantes participent à l'oscillation ;
- si la méthode de calcul des oscillations proposée n'est manifestement pas une décomposition en série de Fourier, il existe un lien étroit entre les harmoniques impairs du signal et les composantes élémentaires du champ ;
- la convergence de la méthode est à relier aux paramètres de contrôle. Pour des valeurs de  $\gamma$  et/ou  $\zeta$  élevées, les sons contiennent un nombre important d'harmoniques : il est nécessaire de prendre un ordre de troncature élevé pour que la méthode converge ; pour  $N \geq 8$  et  $\zeta = 0,35$  ;  $\gamma = 0,42$ , la convergence des deux méthodes est assurée et les deux décompositions conduisent aux mêmes résultats que ceux calculés par l'équilibrage harmonique ;
- si les évolutions générales de la fréquence de jeu à la figure 3.20 sont identiques entre les deux formulations pour un ordre de troncature élevé ( $N=8$ ), on constate qu'elles diffèrent pour la réduction à une seule composante ( $N=1$ ) ce qui marque la différence entre les deux formulations (voir figure 3.20 pour le cas  $N=1$  et les équations (2.7) et (2.28)). Malgré tout, il ressort de l'étude que les composantes des deux formulations, et donc que les deux décompositions sont très proches ;
- une évolution de la fréquence de jeu est mise en évidence entre le régime transitoire et le régime permanent : on l'explique par un phénomène de *blocage de phase* pour

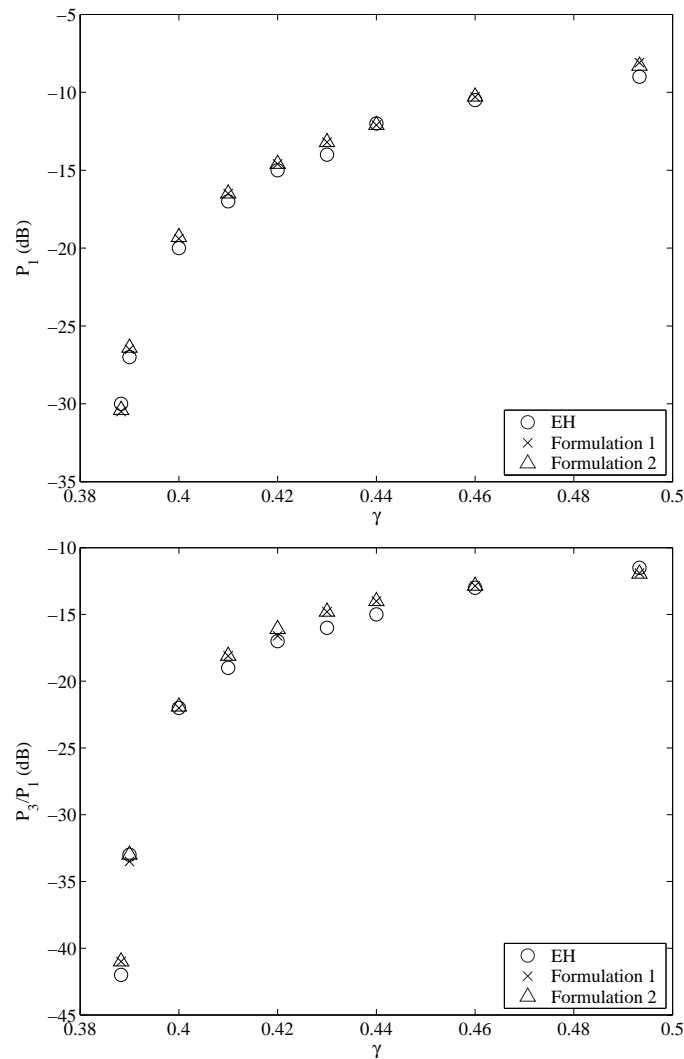


FIG. 3.19 – Régime permanent. Comparaison avec les résultats fournis par équilibrage harmonique (EH), pris dans [53].  $\ell = 0,85 \text{ m}$ ,  $\zeta = 0,2$ ,  $\eta = 0,02$ ,  $N=8$ . On appelle formulation 1 celle avec condition de Neumann à l'entrée, et formulation 2, celle avec condition absorbante. Haut : amplitude du premier harmonique. Bas : rapport  $P_3/P_1$  où  $P_1$  et  $P_3$  sont respectivement l'amplitude du fondamental et de l'harmonique 3.

que le régime d'oscillations se mette en place. A la figure 3.20 pour le cas  $N=8$ , on note une variation de 1 cent. Si cet effet est faible, on constate qu'il dépend des paramètres de contrôle du modèle. Pour  $(\zeta = 0,5, \gamma = 0,48, N = 20)$ , on note une variation de 10 cents. Compte tenu que ce phénomène se déroule sur un intervalle de temps de l'ordre de  $50\text{ ms}$ , il est perceptible ce qui peut agir sur notre perception de la hauteur de la note pendant le transitoire. Cependant, cette observation provient d'un modèle pour lequel des hypothèses et simplifications ont été retenues. En particulier, le fait d'avoir posé  $\alpha_v = 0$  au chapitre 1 (§.1.2) surestime la variation de fréquence entre le régime linéaire et le régime non-linéaire : en effet, c'est la différence  $(\alpha - \alpha_v)$  (au lieu de  $\alpha$ ) qui devrait intervenir dans la condition aux limites (2.17). De plus, le modèle d'instrument oublie l'effet de l'anche qui est important pendant le transitoire et qui modifie la nature de l'oscillation [20] : au stade où nous en sommes, il n'est pas évident de prévoir cet effet sur la variation de fréquence observée. Enfin, le choix des conditions initiales qui prévoit un brutal changement des paramètres d'excitation à l'instant initial, n'est certainement pas très représentatif d'une situation de jeu réelle.

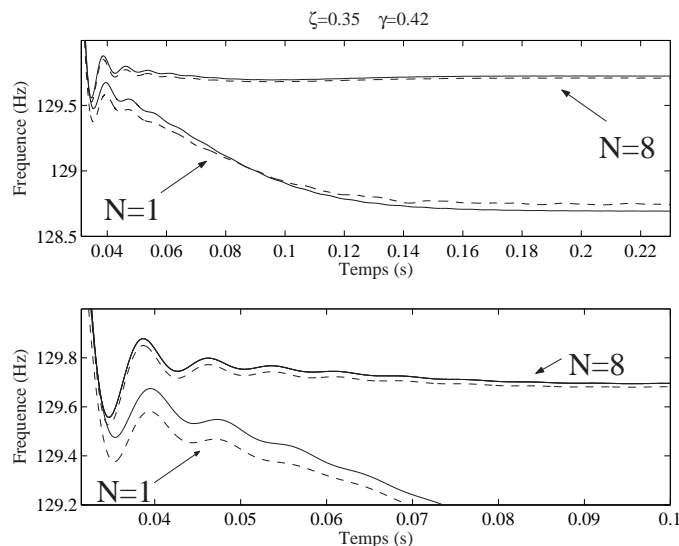


FIG. 3.20 – Evolution de la fréquence de jeu après l'attaque de la note. Comparaison des résultats obtenus par les deux formulations pour deux ordres de troncature différents :  $N=1$  et  $N=8$ . (—) formulation avec condition de Neumann. (—) formulation avec condition absorbante. On rappelle que les oscillations à l'attaque de la note ( $t \lesssim 50\text{ ms}$ ) proviennent d'un biais de la méthode d'analyse. On observe une variation de la fréquence de jeu entre les régimes transitoire et permanent. Puisque les pics d'impédance forment une série harmonique, la fréquence de jeu calculée en régime permanent, est  $f = c/4l = 129.7\text{ Hz}$  pour  $N=8$ . La comparaison des cas  $N=1$  et  $N=8$  confirme que plusieurs pics d'impédance interviennent dans la détermination de la fréquence de jeu. Enfin, en prolongeant les courbes du zoom pour des temps proches de l'instant initial, on observe, pour  $N=1$ , une différence d'environ 1 cent pour les fréquences de jeu des deux formulations, comme le prédisent les équations (2.7) et (2.28) après l'attaque de la note.



## Chapitre 4

# Conclusions - perspectives

Ce travail de thèse concernait deux études d'un instrument de musique de type clarinette et s'est donc déroulé en deux parties distinctes : à partir de modèles simplifiés d'instrument, nous nous sommes successivement intéressés à la justesse d'un instrument réel et au comportement dynamique d'un modèle élémentaire, partant de conditions initiales pour arriver au régime permanent.

Si l'on reprend les points essentiels de ce travail, on constate tout d'abord l'importance donnée aux fréquences de résonance du modèle [excitateur/résonateur]. Leur détermination est apparue comme une étape clé de la reformulation des auto-oscillations par méthode modale, et l'étude de leur variation avec la fréquence sous l'effet de petites perturbations, était le point de départ de l'analyse de la justesse de la clarinette. Sur ce point, les deux parties sont complémentaires, les résultats de la première permettant de préciser ceux de la seconde dans le cas d'un résonateur avec trous latéraux.

On remarque aussi que nous nous sommes attachés autant que possible à présenter les résultats sous forme analytique pour conduire à des raisonnements physiques. Ils permettent par exemple d'identifier, pour une perturbation, les paramètres effectifs qui contrôlent la justesse et l'harmonicité des fréquences de résonance, ou bien d'expliquer le démarrage du son dans l'instrument.

Suite aux résultats de la première partie, il ressort qu'une étude précise de la justesse d'un instrument ne peut se limiter à une analyse du modèle au stade linéaire. Outre le fait qu'une telle étude exige une description détaillée de l'instrument et l'usage de modèles élaborés des éléments qui le composent, il est nécessaire d'inclure les paramètres de jeu que contrôlent le musicien, comme le conduit vocal dont l'influence sur les fréquences de jeu est l'objet de la thèse de Claudia Fritz [37], et encore les paramètres d'embouchure. L'étude systématique de l'influence, sur les fréquences de résonance, de petites perturbations et l'usage de méthodes d'optimisation présentent une approche un peu moins empirique de la facture instrumentale qui s'avère efficace au regard des mesures que nous avons faites et de certains choix des facteurs. Cependant, si l'on souhaite des collaborations futures avec des musiciens et des facteurs, il semble que ce soit au niveau du système excitateur que nos études devront porter à l'avenir [29], ce qui confirme que les limites de l'approche linéaire du modèle sont proches lorsque l'on s'intéresse aux fréquences de jeu. Enfin, cette étude indique qu'il serait intéressant d'analyser l'évolution de la fréquence de jeu ainsi que la perception que l'on peut en avoir après l'attaque de la note comme le suggère aussi la seconde partie de ce travail.

L'approche des auto-oscillations par décomposition modale est apparue comme une méthode efficace pour décrire la nature des oscillations pour les instruments à anche. Les résultats sont validés par la méthode d'équilibrage harmonique et les sons calculés sont proches des sons produits par une clarinette. La méthode est complémentaire aux méthodes fréquentielles, donnant les évolutions temporelles des solutions. Les points principaux qui ressortent de cette étude sont les suivants :

- le contenu harmonique du son s'enrichit au cours du temps et les harmoniques arrivent un à un dans le son ;
- on assiste à une variation de la fréquence de jeu à l'attaque de la note qui peut avoir des implications sur la perception de la hauteur pendant le transitoire ;
- pour atteindre un régime d'oscillation stable dans notre modèle, on assiste à un phénomène de blocage de phase entre composantes à la fin du transitoire ;
- le modèle d'un résonateur à un seul pic est insuffisant pour décrire correctement les auto-oscillations du modèle : la nature de l'oscillation résulte de l'interaction entre plusieurs pics de résonance ;
- la convergence de la méthode en termes d'énergie est assurée pour un résonateur comportant huit pics d'impédance.

Ces conclusions sont bien entendu à mettre en regard avec les hypothèses et le modèle d'instrument retenus. Au stade où nous en sommes, il est difficile d'évaluer l'influence de l'anche sur la variation de la fréquence pendant le transitoire, ni celle d'un jeu de conditions initiales autre qu'un échelon de débit à l'entrée. En revanche, il est sûr que le modèle d'amortissement pour la condition aux frontières surestime la variation de fréquence.

Concernant l'étude analytique du problème et les deux approches présentées, on constate que la seconde formulation n'a qu'un intérêt limité pour l'application considérée ici. Néanmoins, elle explique l'origine des phénomènes observés et permet de les interpréter : elle donne accès à une expression analytique du démarrage du son permettant de distinguer les composantes *maîtres* des composantes *esclaves*, et elle met en évidence, par le calcul, la variation de la fréquence de jeu en transitoire.

Suite à cette présentation des auto-oscillations par décomposition modale, une première prolongation essentielle est d'inclure la dynamique de l'anche. En effet, l'anche participe à l'oscillation et intervient dans la définition de la fréquence de jeu, pouvant modifier certaines de nos observations. La prise en compte d'un seul de ses modes de vibration ne fait qu'ajouter une équation aux systèmes (2.50) et (2.58), la fonction non-linéaire devenant une fonction de la pression acoustique et de l'ouverture de l'anche. Aussi, pour une description plus précise des phénomènes, il serait intéressant d'ajouter la dispersion et donc de traiter le cas d'un résonateur inharmonique. L'importance relative des harmoniques pairs et impairs dans le son serait modifiée et une dissymétrie dans les signaux synthétisés apparaîtrait.

La perspective la plus directe de ce travail est l'application de la méthode à d'autres formes de résonateur. Faisant usage de la formulation avec condition de Neumann à l'entrée, l'extension de la démarche générale n'exige que la connaissance (théorique) de l'impédance d'entrée. On imagine facilement des applications à d'autres instruments à anche comme le saxophone et le hautbois. Concernant l'approche analytique, il serait intéressant de poursuivre notre étude sans se limiter à un résonateur à un seul pic d'impédance. On pourrait appréhender plus précisément la stabilité du modèle de clarinette et aussi interpréter l'influence des paramètres de contrôle du modèle sur son comportement.

Pour des applications orientées synthèse sonore, une perspective importante est le calcul du champ externe. La méthode donnant accès aux formes d'ondes des composantes en tous points du résonateur, il est possible de connaître le champ interne au niveau de toutes les sources que sont les trous latéraux. Ensuite, à partir de la fonction de transfert pression

interne-pression externe [54, 27], on en déduit le champ externe. De plus, pour donner plus de réalisme à nos simulations, une amélioration de la méthode serait de prendre en compte la dépendance temporelle des paramètres de contrôle que l'on fera à partir de la formulation avec condition de Neumann à l'entrée.

Enfin, au niveau expérimental, l'idée de mesurer les variations de la fréquence en régime transitoire peut, peut-être, donner des informations sur les paramètres de jeu qu'utilisent les musiciens lors de l'attaque d'une note. De telles mesures présentent l'avantage d'être faciles à mettre en oeuvre et pourraient être riches d'informations pour expliquer le problème de perception de hauteur et pour initialiser nos modèles.





# Annexes



## Annexe A

# Exact calculation of length corrections

The aim of the appendix **A** is to give some precise definitions and exact formulae for some elements often encountered on wind instruments. Exact formulae can be useful for the computation of resonance frequencies by using an iterative procedure. The geometries of the different elements are shown in table **1.2**.

### Abrupt change in cross section

Looking for an equivalent system of section  $S$ , one can write at the discontinuity

$$-jY'_c \tan k\ell = -jY_c \tan k(\ell + \Delta\ell)$$

where  $Y'_c = S'/\rho c$  and  $Y_c = S/\rho c$ . Manipulating the above expression results in

$$k\Delta\ell = \text{Arctan} \left( \frac{\frac{1}{2}(\alpha - 1) \sin 2k\ell}{1 + (\alpha - 1) \sin^2 k\ell} \right), \quad (\text{A.1})$$

where  $\alpha = S'/S$  is the ratio of cross sections of the tubes located upstream and downstream the discontinuity.

### Localized enlargement/contraction at the input of the instrument

Considering a localized enlargement or contraction of length  $\ell'$  and cross section area  $S'$  located at point  $\ell$  and denoting  $\alpha = S'/S$  the change in diameter where  $S$  is the cross section area of the main tube, it can be written:

$$\begin{cases} Y_{up1} = -jY_c \tan k\ell & \text{at point } \ell \\ Y_{down2} = -jY_c \tan k(\ell + \ell' + \Delta\ell) & \text{at point } \ell + \ell' \end{cases}$$

which results in after some algebra

$$k\Delta\ell = \text{Arctan} \left( \tan k\ell' \frac{TT_2 - \alpha(1 + TT_2) + \alpha^2}{-T \tan k\ell' + \alpha(1 + TT_2) + \alpha^2 \tan k\ell' T_2} \right),$$

where  $T = \tan k\ell$  and  $T_2 = \tan k(\ell + \ell')$ .

Denoting  $\alpha = 1 + X$ , the expression of the length correction becomes

$$k\Delta\ell = \text{Arctan} \left( X \sin k\ell' \frac{\cos k(2\ell + \ell') + X \cos k\ell \cos k(\ell + \ell')}{1 + X \cos^2 k\ell' + X(X + 2) \sin k\ell' \cos k\ell \sin k(\ell + \ell')} \right). \quad (\text{A.2})$$

In the limit that  $\alpha$  is close to the unity, an approximation of equation **(A.2)** is given by equation **(1.31)**.

### Truncated cone at the input

This paragraph deals with the case of a perturbation in taper of length  $\ell_c$  located at distance  $\ell$  from the reed tip. Calculations for a positive and a negative taper are identical. The unique difference is that the sign of both quantities  $X$  and  $X'$  has to be inverted. Assuming the quantities  $x_i$  to be positive and  $x_2 > x_1$ , and noting that the two inductances  $L$  located at points  $\ell$  and  $\ell + \ell_c$  are positive and negative respectively, the following system is derived :

$$\begin{cases} Y_{up2} = Y_2 + Y_{down2} & \text{at point } \ell + \ell_c \text{ (} x_2 > 0 \text{) and } L > 0 , \\ Y_{up1} = -Y_1 + Y_{down1} & \text{at point } \ell \text{ (} x_1 > 0 \text{) and } L < 0 , \\ Y_{down1} = -jY_c \tan k(\ell + \ell_c + \Delta\ell) , \end{cases}$$

where  $\Delta\ell$  is the global length correction.

Denoting  $X = \frac{\ell}{x_1}$  and  $X' = \frac{\ell + \ell_c}{x_2}$ , the result is

$$k\Delta\ell = \text{Arctan } \Lambda , \quad (\text{A.3})$$

where

$$\Lambda = \left( \frac{X \frac{\cos^2 k(\ell + \ell_c)}{k(\ell + \ell_c)} - X' \frac{\cos^2 k\ell}{k\ell} + X X' \frac{\cos k\ell}{k\ell} \frac{\cos k(\ell + \ell_c)}{k(\ell + \ell_c)} \sin k\ell_c}{1 - \frac{1}{2} X' \frac{\sin 2k\ell}{k\ell} + \frac{1}{2} X \frac{\sin 2k(\ell + \ell_c)}{k(\ell + \ell_c)} + X X' \frac{\cos k\ell}{k\ell} \frac{\sin k(\ell + \ell_c)}{k(\ell + \ell_c)} \tan k(\ell + \ell_c) \sin k\ell_c} \right) .$$

In the limit of small perturbation, the length correction for a truncated cone is the sum of the length correction associated with both changes in taper.

## Annexe B

# Effect of the resistive term in the hole impedance on resonance frequencies

The aim of this appendix is to give an analytic expression of the playing frequency in term of the resistive part  $\mathcal{R}$  of the hole impedance. This can be interesting especially when resistive effects are large and can occur at high level when nonlinear effects appear, especially for narrow holes, like the register hole. This appendix describes the calculations which lead to the following expression for the frequency of the played tone

$$f = \frac{f_o + \mathcal{A}f_c}{1 + \mathcal{A}} \quad (\text{B.1})$$

where  $f_o$  and  $f_c$  are the frequencies obtained when the resistance term is zero and infinite respectively (when  $\mathcal{R}$  is infinite, the effect of the hole disappears as it was closed), and  $\mathcal{A}$  is a dimensionless factor given by

$$\mathcal{A} = \left( \frac{2\mathcal{R}}{\pi} \right)^2 \frac{1}{(\ell_{hole} + \ell_d)} \frac{L\ell}{\ell_d + \Delta\ell} ,$$

with  $L$  the total length of the resonator,  $\ell$  the hole location,  $\ell_d$  the distance from the open end,  $\ell_{hole} = h'S/S_h$  and  $\Delta\ell$  the equivalent length of the hole. The series impedances  $Z_a$  are assumed to be small (see section 1.3.3) and thus, are neglected in this appendix.

Using dimensionless impedance quantities, the impedance equivalent  $Z_{eq}$  to the tone hole impedance and to the tube downstream the discontinuity can be written at the discontinuity point as

$$Z_{eq} = Z_h // Z_{down} ,$$

where  $Z_h = \mathcal{R} + jX$  is the tone hole impedance and  $Z_{down}$  the impedance of the tube downstream the discontinuity. Then, the input impedance  $Z_{in}$  of the system can be derived as follows:

$$Z_{in} = \frac{-t + jZ_h T \left( \frac{1+t^2}{T-t} \right)}{Z_h \left( \frac{1+t^2}{T-t} \right) + j} , \quad (\text{B.2})$$

where

- $Z_{in}$  is the input impedance of the system ;

- $Z_h = \mathcal{R} + jX$  is the tone hole impedance ;
- $t = \tan k\ell$  ;
- $T = \tan kL$  .

For the resonance frequencies, the imaginary part of the input impedance vanishes, i.e

$$\text{Im}(Z_{in}) = 0 \iff \left( \frac{T-t}{1+t^2} + X \right) \left( t \frac{T-t}{1+t^2} + XT \right) + T\mathcal{R}^2 = 0 . \quad (\text{B.3})$$

Denoting

$$\begin{aligned} A &= \sin k(L-2\ell) + \sin kL + 2\chi \cos kL , \\ B &= \cos k(L-2\ell) - \cos kL + 2\chi \sin kL , \\ C &= 2\mathcal{R}^2 \sin 2kL , \end{aligned}$$

where  $\chi = k\ell_{hole}$ , equation (B.3) can be rewritten in the form

$$AB + C = 0 . \quad (\text{B.4})$$

By writing  $kL = k_1L + \epsilon_1$  where  $k_1$  is the wavenumber of the fundamental frequency of the played tone defined as  $A = 0$  (when  $\mathcal{R}$  vanishes):

$$\sin k_1(L-2\ell) + \sin k_1L + 2\chi \cos k_1L = 0 , \quad (\text{B.5})$$

the use of Taylor's formula to the first order for the A and B quantities results in:

$$A = \epsilon_1 [(L-2\ell) \cos k_1(L-2\ell) + L \cos k_1L + 2\ell_{hole} \cos k_1L - 2\chi_0 L \sin k_1L] , \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} B &= \cos k_1(L-2\ell) - \cos k_1L + 2\chi_0 \sin k_1L \\ &+ \epsilon_1 [L \sin k_1L - (L-2\ell) \sin k_1(L-2\ell) + 2\ell_{hole} \sin k_1L \\ &+ 2\chi_0 L \cos k_1L] . \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

where  $\chi_0 = k_1\ell_{hole}$ .

Neglecting terms of second order in  $\epsilon_1$  and using equation (B.5), the quantity  $AB$  becomes:

$$AB = \epsilon_1 \frac{1}{\cos k_1L} (L(1 + \cos 2k_1\ell) + 2\ell_{hole} \cos^2 k_1L - 2\ell \cos k_1(L-2\ell) \cos k_1L) \left( \frac{\cos 2k_1\ell_d - 1}{\cos k_1L} \right) . \quad (\text{B.8})$$

In the limit of  $k_1\ell_d \ll 1$  (i.e  $\frac{\ell_d}{\ell}$  and  $\frac{\Delta\ell}{\ell}$  are smaller than unity) and noting  $k_1 = \frac{\pi}{2(\ell + \Delta\ell)}$ , we have:

$$\begin{aligned} \cos k_1L &= -\frac{\pi}{2} \frac{\ell_d^2}{\ell(\ell_{hole} + \ell_d)} + o\left(\frac{\ell_d}{\ell}\right) \\ \cos 2k_1\ell_d &= 1 - \frac{\pi^2 \ell_d^2}{2\ell^2} + o\left(\frac{\ell_d}{\ell}\right) \\ \cos k_1(L-2\ell) &= \sin \frac{\pi}{2} \frac{\Delta\ell + \ell_d}{\ell} = \frac{\pi}{2} \frac{\Delta\ell + \ell_d}{\ell} + o\left(\frac{\ell_d}{\ell}\right) \\ \cos 2k_1\ell &= -1 + o\left(\frac{\ell_d}{\ell}\right) . \end{aligned}$$

Substituting these results in equation (B.4) leads to the following equation

$$\left( \pi^2 (\ell_{hole} + \ell_d) \frac{\ell_d + \Delta\ell}{\ell} \right) \epsilon_1 + 2\mathcal{R}^2 \sin 2kL = 0 .$$

Noting  $kL = k_c L + \epsilon_2$  where  $k_c L = \frac{\pi}{2}$  ( $k_c$  is the wavenumber when the hole is closed), it can be written :

$$\pi^2 (\ell_{hole} + \ell_d) \frac{\ell_d + \Delta\ell}{\ell} (k - k_1) + 4\mathcal{R}^2 L (k - k_c) = 0 , \quad (\text{B.9})$$

therefore,

$$f = \frac{f_o + \mathcal{A}f_c}{1 + \mathcal{A}} , \quad (\text{B.10})$$

where

$$\mathcal{A} = \left( \frac{2\mathcal{R}}{\pi} \right)^2 \frac{1}{(\ell_{hole} + \ell_d)} \frac{L\ell}{\ell_d + \Delta\ell} , \quad (\text{B.11})$$

$f_o$  is the frequency of the tone with no resistance, and  $f_c$  is the frequency of the tone with an infinite resistance term.

A careful limiting process shows that (B.10) gives the expected behaviour for the two extreme cases i.e when  $\mathcal{R} \rightarrow 0$  and  $\mathcal{R} \rightarrow \infty$ . In the limit that  $\mathcal{R}$  goes to zero, the frequency  $f$  tends to  $f_o$ , the frequency of the tone when the hole is open. In the opposite limit when  $\mathcal{R}$  tends to infinity, the frequency  $f$  becomes  $f_c$ . Figure B.1 shows that the playing frequencies given by equation (B.10) coincide quite well with the playing frequencies obtained by the zero values of the imaginary part of the input admittance. This result is similar to the one obtain by Dalmont et al. [26]. Moreover, in the limit that  $\mathcal{R}$  is much smaller than unity,

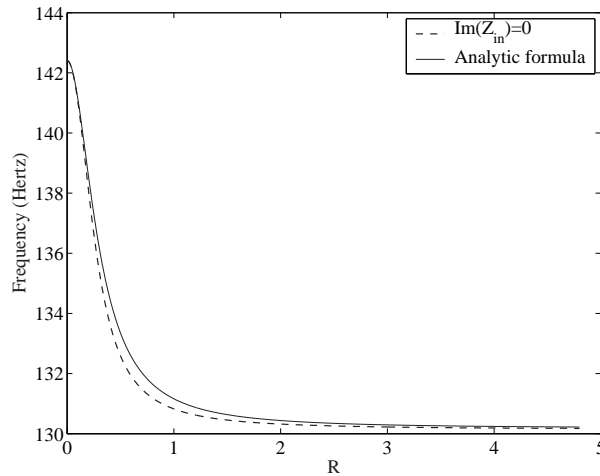


FIG. B.1 – *Playing frequency as a function of the real part of the tone hole impedance* ( $R = 7.5 \text{ mm}$ ,  $r = 4.25 \text{ mm}$ ,  $h = 6 \text{ mm}$ ,  $\ell_d = 80 \text{ mm}$ ,  $L = 0.650 \text{ m}$ ). *In the limit that  $\mathcal{R} \rightarrow 0$ , the frequency of the played tone tends to  $f_o$ , the frequency obtained when the hole is open. In the limit that  $\mathcal{R} \rightarrow \infty$ , the frequency of the played tone approaches  $f_c$ , the frequency when the hole being closed.*

it follows

$$f = f_o + \mathcal{A}(f_c - f_o) . \quad (\text{B.12})$$

For a hole of radius  $r = 4.25 \text{ mm}$ , height  $h = 6 \text{ mm}$ , located at a distance  $\ell_d = 80 \text{ mm}$  from the open end of a tube of length  $L = 0.650 \text{ m}$  (this represents about a 12% decrease



## 12 Effect of the resistive term in the hole impedance on resonance frequencies

for the total length when the hole is open or more than a semitone for the frequency shift) and for a resistive term  $\mathcal{R} = 0.05$ , we obtain a 5-cent decrease in pitch with equation (B.12) and the numerical simulation from (B.3). Consequently, when the resistive term is not zero i.e at high sound intensity, a frequency dependence is observed. We notice that a 5-cent decrease in pitch is audible and this result suggests a way for future work to explain why musicians observe a decrease in pitch for fortissimo levels (see appendix D).

## Annexe C

# Calculs d’inharmonicité : comparaison des résultats obtenus par calcul de corrections de longueur et par matrices de transfert

Cette annexe présente une comparaison des inharmonicités calculées par matrices de transfert et par correction de longueur. Reprenant une à une les perturbations présentées dans la première partie, on présente les inharmonicités obtenues par les deux méthodes et on commente les différences observées.

Les calculs par matrices de transfert proviennent d’un code MATLAB “maison” que l’on a validé avec l’application IMPED [83], une version “actualisée” de Resonans [74] fournie par Franck Laloë. On signale une différence d’environ 3 cents pour certains doigtés comme cela est montré, figure C.1, dans le cas d’une clarinette supposée parfaitement cylindrique (pour les géométries et positions des trous, voir la table 1.1). Une explication à cet écart est l’usage d’expressions différentes pour certains éléments, notre programme utilisant les équations présentées dans l’article *Analysis and optimisation of the tuning of the twelfths for a clarinet resonator* tandis que le logiciel IMPED utilise les références [48, 19, 45, 49].

Au regard des figures présentées dans cette annexe, les points principaux qui ressortent de cette comparaison sont les suivants :

- on remarque un bon accord entre les deux méthodes pour l’ensemble des éléments et phénomènes : ceci permet de confirmer les résultats de la figure 1.11 et de valider le calcul par corrections de longueur;
- pour l’estimation de l’effet des trous ouverts, on constate un écart important entre les deux méthodes surtout pour les notes aigues. On donne deux explications à cette différence
  - il n’est pas évident d’isoler l’effet d’une perturbation avec le calcul matriciel. En particulier, pour les trous ouverts, le calcul par correction de longueur estime l’influence d’un tube (parfaitement) cylindrique en aval du premier trou ouvert (voir §.1.3.5) alors que le calcul par matrices de transfert prend également en compte les effets de proximité entre trous de note (interaction entre trous de note ouverts/fermés). Le calcul par matrice de transfert surestime donc l’effet des trous ouverts, d’autant plus pour les notes du haut du registre pour lesquelles

- on remarque, au voisinage du premier trou ouvert, un nombre important de trous de notes proches les uns des autres.
- on constate l'insuffisance de (1.24) et de notre méthode (voir §.1.3.5) pour certains doigtés. On rappelle que l'équation (1.24) est obtenue après les développements de Taylor des fonctions tan et cot en supposant respectivement  $k\Delta\ell \ll 1$  et  $k\ell_d \ll 1$ . Or, pour les hautes fréquences, la correction de longueur  $\Delta\ell$  associée au trou ouvert devient grande et l'approximation de la tangente par son argument n'est plus correcte ; de plus, pour certains trous, l'hypothèse  $k\ell_d \ll 1$  n'est pas vérifiée à hautes fréquences (en particulier pour les doigtés  $c'\#$ ,  $f'$  et  $g'\#$ ) et l'approximation de la fonction cot par son développement de Taylor n'est plus valide.

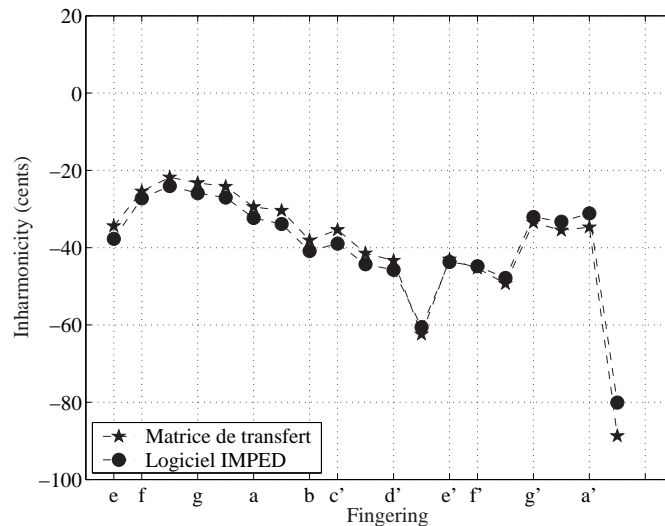


FIG. C.1 – Comparaison des inharmonicités inter-résonance obtenues par le code MATLAB “maison” et le logiciel IMPED. La perce de l’instrument est supposée parfaitement cylindrique et les caractéristiques des trous sont données à la table 1.1. On constate le bon accord entre les résultats fournis par les deux programmes. Pour certains doigtés, on observe une différence d’environ 3 cents que l’on explique par l’usage de formules différentes dans les deux programmes.

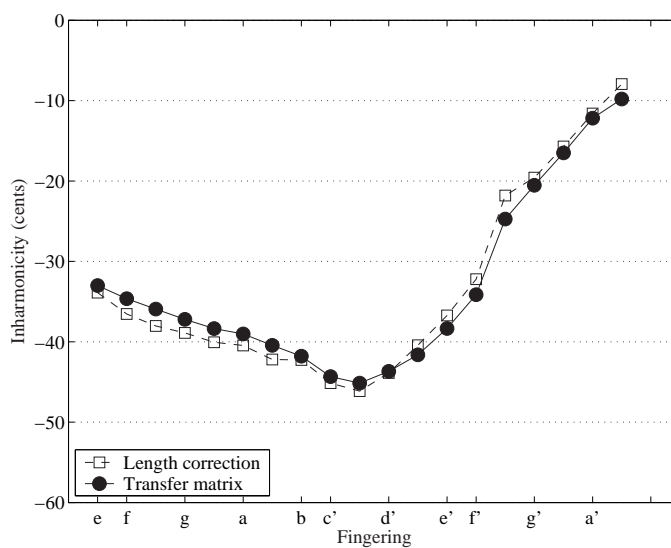


FIG. C.2 – *Effet des cavités*: “Inter-resonance inharmonicity” ou inharmonicité entre fréquences de résonance. On note un écart inférieur à 2 cents sur l’ensemble du registre.

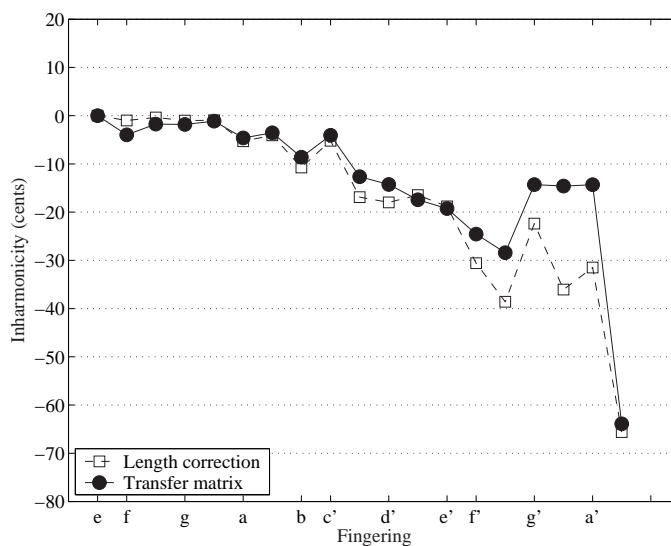


FIG. C.3 – *Effet des trous ouverts*: “Inter-resonance inharmonicity” ou inharmonicité entre fréquences de résonance. On constate que l’estimation pour les notes aiguës est insuffisante. Pour expliquer les différences, on signale qu’il n’est pas évident d’estimer l’effet des trous ouverts par le calcul matriciel. On remarque que l’on retrouve les écarts de la figure 1.10 pour les doigts  $c^\#$ ,  $f'$  et  $g^\#$ .

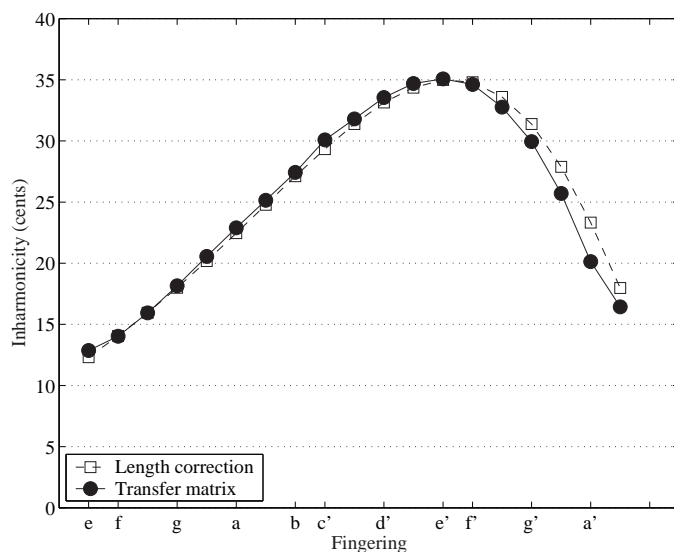


FIG. C.4 – *Effet de la partie en amont du trou de registre (barillet + portion conique convergente jusqu'au trou de registre (voir table 1.1)) : “Inter-résonance inharmonicity” ou inharmonicité entre fréquences de résonance. L'accord entre les deux méthodes est satisfaisant pour les notes du bas du registre. On note une différence inférieure à 3 cents pour les notes les plus aigues.*

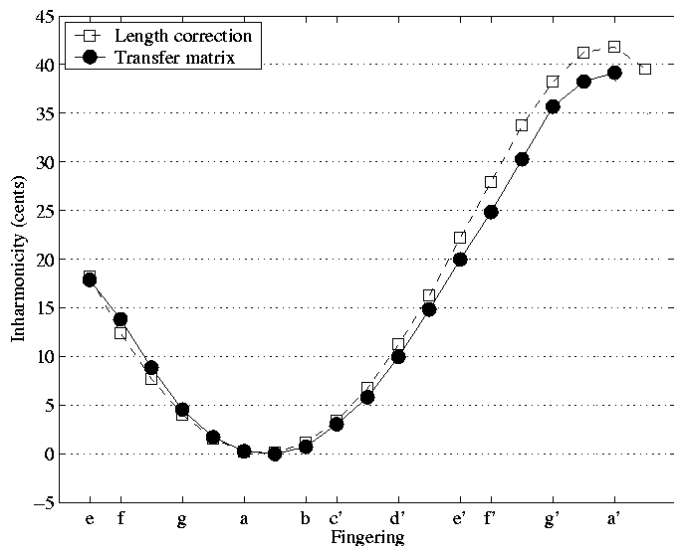


FIG. C.5 – *Effet du trou de registre : “Inter-résonance inharmonicity” ou inharmonicité entre fréquences de résonance. On signale que l'inharmonicité pour le doigté a'♯ n'a pas été calculée par la méthode des matrices de transfert, le trou de registre étant ouvert pour la fondamentale et pour sa douzième.*

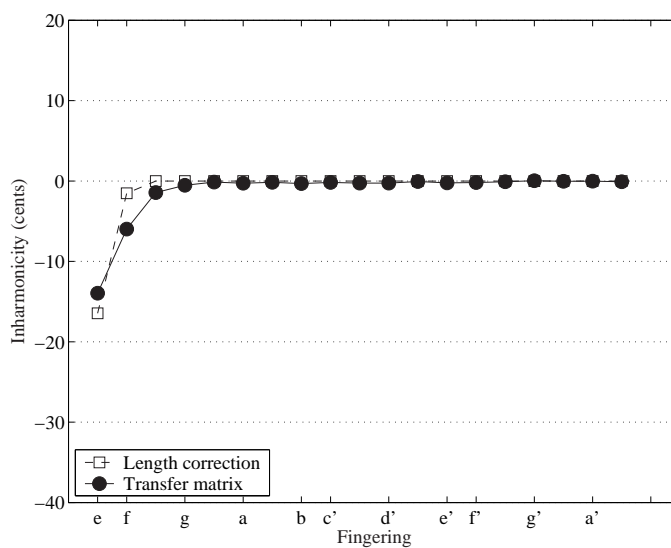


FIG. C.6 – *Effet de l'évasement*: “Inter-resonance inharmonicity” ou inharmonicité entre fréquences de résonance. On note une différence de 8 cents entre les deux méthodes. On signale que la forme de l'évasement est approchée par l'association de deux cônes tronqués dans le calcul par matrices de transfert tandis que le calcul par correction de longueur prend en compte la forme de cathénoïde de l'évasement.

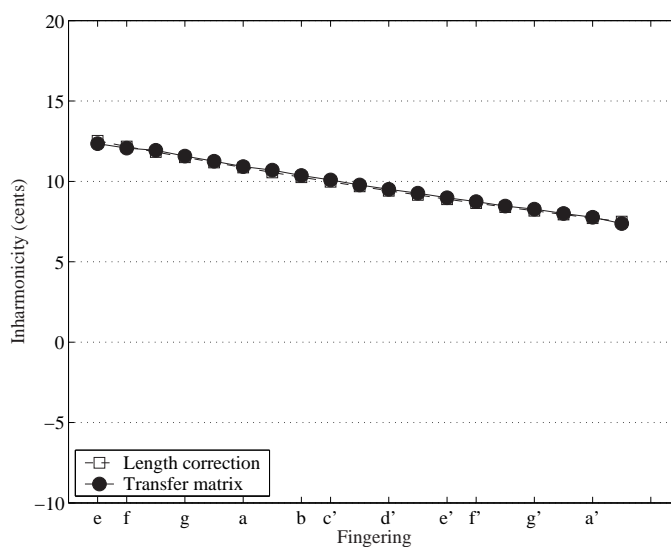


FIG. C.7 – *Effet de la dispersion*: “Inter-resonance inharmonicity” ou inharmonicité entre fréquences de résonance. On constate le très bon accord entre les deux formulations.



## Annexe D

# Compte rendu d'interview de clarinettistes

Cette annexe est une synthèse d'interviews de quatre clarinettistes professionnels: Guy Deplus (professeur CNSM Paris), Dominique Vidal (musique spectrale, quart de ton), Claude Desurmond et Robert Fontaine (soliste de l'orchestre philharmonique de Radio France).

**Problème de justesse** Tous sont d'accord sur un fait : la clarinette n'est pas un instrument parfaitement juste ou plus exactement elle est juste comme le sont d'autres instruments ! Ainsi toutes les clarinettes ont des défauts de justesse et bien souvent on retrouve les mêmes défauts d'une clarinette à l'autre et ce quelle que soit la marque. Cependant, ce ne sont pas toujours les mêmes notes qui causent problème : les facteurs déplacent les défauts et tentent de les rendre le moins perceptible possible.

En ce qui concerne les défauts de justesse, tous sont d'accord pour dire que le grave de la clarinette est bas, nuancé par le fait que cela dépend du niveau sonore (contexte musical) : la clarinette est juste lorsque l'on joue pianissimo mais particulièrement basse lorsque l'on joue fortissimo. La justesse des douzièmes est à relier avec ce problème : le grave étant bas (surtout mi et fa) et leurs douzièmes étant justes, l'intervalle entre les deux notes (le rapport de douzième *inter-register*) est grand.

“Le grave est bas et les douzièmes sont hautes” -Deplus-

“Les clarinettes françaises ont des douzièmes fausses” -Fontaine-

“C'est le gros gros gros problème de la clarinette car les fondamentales sont basses et les douzièmes justes” -Vidal-

“Il y a un problème d'accord entre les fondamentales et les douzièmes” -Desurmond-

Enfin, il faut mettre un bémol à ce problème d'intervalle de douzième car, comme le fait remarquer Dominique Vidal, la psychologie et la qualité du souffleur entrent en jeu. Pour sa part, il considère que le rapport entre douzième et fondamentale est à peu près constant sur l'ensemble du registre.

**Evolution de la justesse** Un autre point sur lequel les quatre clarinettistes sont d'accord est que la justesse de la clarinette a évolué et s'est améliorée au fil du temps. Deux



explications à cela : un besoin des musiciens de jouer juste et une amélioration de la facture instrumentale, les deux étant liés. L'évolution de la facture a amélioré la justesse grâce à une plus grande fiabilité des processus de fabrication et une meilleure maîtrise des outils, et le musicien, avec l'apparition des accordeurs électroniques, se doit désormais d'avoir une meilleure justesse et en particulier une meilleure maîtrise des douzièmes. L'instrument est désormais plus homogène et l'émission plus stable mais les défauts énoncés ci-dessus persistent.

Aujourd'hui, il y a peu d'évolution. Les fabricants n'apportent pas d'améliorations essentielles et ce sont plutôt des intérêts économiques qui font "qu'ils ressortent tous les vingt ans, les mêmes instruments" -Fontaine-. Pour Marc Fontaine, cela est dû à un manque de concurrence du fait du monopôle des trois grands : Selmer, Buffet-Crampon et Leblanc. Cependant des "petits" facteurs innovent pour améliorer la justesse et le confort de jeu de l'instrument mais bien souvent leurs avancées restent au stade artisanal. En particulier, on note un facteur de Genève qui insère deux trous de registre sur ses instruments (amélioration de la justesse des douzièmes mais de nombreux problèmes mécaniques...) ainsi qu'un facteur allemand qui a mis au point une clarinette système Boehm avec une perce allemande (perce plus large que la clarinette française et moins évasée). Cette clarinette semble avoir de nombreux avantages comparée aux clarinettes de facture française qui sont connues pour être *nasales* ; cependant, cette clarinette possède d'autres défauts...

**Quelles solutions pour les clarinettes ?** Même si la clarinette présente des défauts de justesse, les clarinettes se doivent de jouer juste. Pour ce faire, plusieurs solutions se présentent à eux. La première est l'utilisation de doigtés de corrections. Le musicien adapte donc le doigté à la justesse: il abaisse des clés supplémentaires, il fait des demi-trous, il utilise différents doigtés pour une même note (quatre pour le sib au-dessus de la clé de sol) qu'il choisit selon le contexte musical.

"on a des doigtés, on bricole, on rajoute des clés" -Vidal-

La seconde solution, est l'emploi de corrections par l'embouchure. Tous emploient la même terminologie comme "on serre", "on ouvre", "on relâche" ce qui résume bien Robert Fontaine avec

"on se tord la bouche pour jouer juste" -Fontaine-

Une autre solution utilisée par tous est la modification et l'ajustement de leur instrument avec l'aide d'un facteur. Claude Desurmond a fait ajouter un petit trou dans le pavillon pour le mi grave, Robert Fontaine et Dominique Vidal ont fait ajouter une clé pour le fa grave (idem que Buffet Crampon avec son modèle Tosca). Enfin Guy Deplus parle également de jouer sur les harmoniques d'un doigté pour jouer une note particulière.

En guise de remarque d'ordre général, même si les clarinettes interrogés sont d'accord sur le fait que la clarinette possède quelques défauts de justesse, tous disent que l'instrument est satisfaisant et que les problèmes de justesse ne sont pas si importants. Ils reprochent surtout un manque d'homogénéité dans le son ("ça gueule" -Vidal-), essentiellement pour les notes de la main droite et regrettent de ne pas avoir plus de stabilité au niveau des anches. Enfin, ils insistent sur le fait qu'il faut bien définir la justesse dans un contexte musical et que parfois il faut faire "chanter des notes".

## Annexe E

# Resonance modes in a 1D medium with purely absorbing boundaries conditions

Cette annexe reproduit la référence [52] qui est un article *en cours de soumission* pour le *Journal of the Acoustical Society of America*. Il présente en détail la méthode générale utilisée au chapitre 2 pour aboutir à l'expression de la fonction de Green sous la forme d'un développement sur les modes de résonance (voir §.2.3).

**Auteurs : J. Kergomard, V. Debut**

**Résumé** Studying the problem of wave propagation in dissipative media can be made by searching for "resonance modes" or free oscillations regimes. In the present article, a simple case is investigated, which allows to enlighten the respective interest of different, classical methods, without any approximation, some of them being rather delicate. This case is the 1D propagation in a homogeneous medium having two purely resistive terminations, the calculation of the Green function being done by using three methods. The first one is the straightforward use of the "compact" solution in the frequency domain, then the rules of residues. The second one is the expansion in orthogonal modes in the frequency domain, the modes having eigenfrequencies depending on the frequency. Calculating the derivative of the eigenfrequencies with respect to frequency allows to get the same result than the first method. Finally the method of separation of variables (space and time) leads to a solution depending on the initial conditions, and can be applied to the Green function. The (complex) resonance modes are non orthogonal for the most common product, but an interpretation can be made if the resistive terminations are regarded as transitions to other media with different densities. The cause of the non-orthogonality is therefore found in the bounded character of the considered medium. Moreover another choice of product of the modes leads to a true orthogonality relationship. The results of the three methods generalize or/and correct some results already existing in the literature. Finally the extension of the problem to a dissipative medium is investigated.

## E.1 Introduction

Studying the problem of wave propagation in dissipative media can be made by searching for "resonance modes" [32], or free oscillations regimes. These modes can be non orthogonal for a certain choice of their product, entailing some difficulties depending on the mathematical treatment, made either in the time or frequency domain. Two classical methods exist for such a problem:

i) in the frequency domain, the complex dependence of dissipation with respect to frequency does not make impossible the use of orthogonal decomposition, but leads to eigenmodes and eigenfrequencies *depending on frequency*. It is the case for the classical theory of room acoustics (see e.g. Morse and Ingard [62]). To return to time domain in order to deduce the resonance modes is a rather delicate task, especially because of the derivation of eigenfrequencies with respect to frequency.

ii) in the time domain, the use of time and space variable as separate variables leads directly to the basis of modes, but they are non orthogonal for the most common product, entailing difficulties when searching the coefficients depending for instance on the initial conditions. Nevertheless Guyader [40] has solved the problem for a particular case.

The present article is devoted to the study of a special, simple case for which, thanks to the 1D property, a straightforward solution exists, by applying the rule of residues to the compact form or the Fourier domain solution: as discussed by Levine [56], this compact solution, avoiding the sum of a series, is "relatively poorly, if not entirely, unknown to the general acoustics community". For the studied case all calculations can be carried out analytically without any approximations, exhibiting the properties of the different methods. This case corresponds to the onedimensional propagation in a homogeneous medium bounded by two other semi-infinite media with different characteristic impedances, dissipation being therefore due to radiation at infinity. This case is especially interesting because of its physical significance (it is probably the simplest radiation problem), and also because it realizes a possible transition between Neumann and Dirichlet boundary conditions.

In section E.2, the equations to be solved are stated, with some possible physical interpretations. As a first step, the classical, compact solution in the frequency domain is established (section E.3), with its inverse Fourier Transform, corresponding to the successive reflections (section E.4). The second step is the use of the rule of residues in order to determine the resonance modes (section E.5, the main result being given by equation E.37). Then the results are compared to those of the two aforementioned methods, i.e. the method of the eigenmodes in the frequency domain (section E.6), and the method of separation of variables (section E.7), which gives the result for given initial conditions (the corresponding equations being E.66, E.77 and E.79). Finally an extension to the case where absorption is coupled to propagation is given, with some approximated formulae and numerical results, which are compared to the time domain solutions with successive reflections (section E.8).

## E.2 Statement of the problem, physical interpretation

The Green function  $g(x,t | x_0,t_0)$  for the wave equation is solution of the following equation:

$$\left[ \partial_{xx}^2 - \frac{1}{c^2} \partial_{tt}^2 \right] g(x,t | x_0,t_0) = -\delta(x - x_0)\delta(t - t_0), \quad (\text{E.1})$$

where  $x$  and  $x_0$  are the spatial coordinates of the receiver and source, respectively (or

vice-versa),  $t$  and  $t_0$  the times of observation and pulse, respectively,  $c$  the speed of sound.  $\delta(x)$  is the Dirac function.

For sake of simplicity,  $x_0$  and  $t_0$  are considered to be fixed, and the following notation is used:  $g(x,t) = g(x,t | x_0,t_0)$ . Moreover in the whole paper, the choice of  $t_0 = 0$  is made, except for the final results. For negative  $t$ , the function is zero, as well as its first derivative. The Green function satisfies the following boundary conditions:

$$\partial_x g(x,t) = \frac{1}{c\zeta} \partial_t g(x,t) \quad \text{at } x = 0, \quad (\text{E.2})$$

and

$$\partial_x g(x,t) = -\frac{1}{c\zeta_\ell} \partial_t g(x,t) \quad \text{at } x = \ell. \quad (\text{E.3})$$

where  $\zeta = Z/\rho c$ ,  $\rho$  is the density of the fluid, and  $Z$  the impedance at  $x = 0$ , which is assumed to be a real quantity, independent of the frequency. Possible corresponding physical problems are discussed hereafter. Similarly,  $\zeta_\ell = Z_\ell/\rho c$ , where  $Z_\ell$  is the impedance at  $x = \ell$  ( $\ell$  being positive).

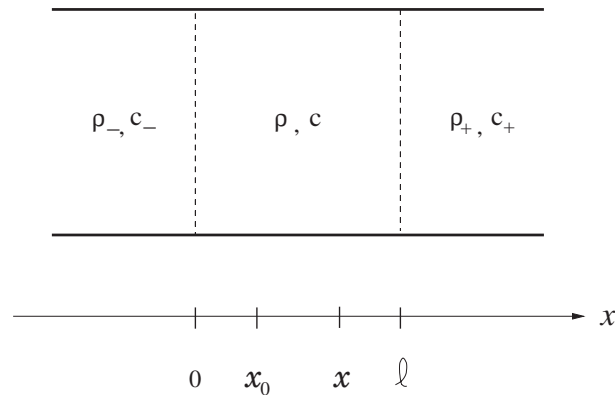


FIG. E.1 – 1D medium bounded with two other media.

An obvious physical interpretation for the quantities  $\zeta$  and  $\zeta_\ell$  is the following: consider for  $x < 0$  and  $x > \ell$  (see figure 1) two media with characteristic impedances  $\rho_- c_-$  and  $\rho_+ c_+$ , respectively. If the media are non dissipative, the impedances are real, and can be larger or smaller than the impedance of the central medium,  $\rho c$ . Moreover, they are positive, because they correspond to waves outgoing from the central medium. Therefore the problem is this of planar pressure waves in a stratified medium, the direction of propagation being normal to the interfaces. A generalization to more complex stratified media would be possible, at least numerically. In this problem, the Green function corresponds to the acoustic pressure: of course, it has not the dimension of a pressure, but the solution for a "concrete" problem with source can be easily solved, as explained in standard textbooks, and discussed in a recent paper by Levine [56].

Other problems can correspond to the previous equations:

i) in an approximate way, ignoring higher order duct modes, the problem of planar waves in a duct terminating in two semi-infinite ducts with different cross sections areas, the quantities  $\zeta$  and  $\zeta_\ell$  being the ratios of the areas. The approximation is good at low frequencies.

ii) the problem of absorbing termination: the terminal impedances  $Z$  and  $Z_\ell$  can be the impedances of absorbing media (at low frequencies, a porous medium open to a large space can be an approximation of a pure resistance, due to viscous effects).

In all the previous problems, the quantities  $\zeta$  and  $\zeta_\ell$  are real and positive, the terminations being passive. If the termination is active, they can be negative. An example is the start of self-sustained oscillations of musical instruments: a nonlinear excitor, like a reed for a clarinet, can be linearized as a pure resistance. When the main control parameter, i.e. the pressure in the mouth of the musician, increases, the resistance becomes negative and the static regime becomes unstable, and an oscillation starts as an increasing exponential (see e.g. [51]).

### E.3 Compact solution for the Fourier Transform

The Fourier Transform of  $g(x,t)$  is denoted  $G(x,\omega)$ . It is equal to:

$$G(x,\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,t)e^{-i\omega t} dt, \quad (\text{E.4})$$

where

$$g(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (\text{E.5})$$

The Fourier Transform of equation (E.1), is found to be:

$$\left(\partial_{xx}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) G(x,\omega) = -\frac{1}{2\pi}\delta(x - x_0), \quad (\text{E.6})$$

and similarly for the boundary conditions (E.2) and (E.3):

$$\partial_x G(x,\omega) = \frac{i\omega}{c\zeta} G(x,\omega) \text{ at } x = 0 \quad (\text{E.7})$$

$$\partial_x G(x,\omega) = -\frac{i\omega}{c\zeta_\ell} G(x,\omega) \text{ at } x = \ell. \quad (\text{E.8})$$

We notice the difficulty of the problem treated by the present article: while the terminal impedances are independent of frequency, the boundary conditions are frequency dependent. Nevertheless a classical, compact, solution is well known, as explained hereafter. If  $x \neq x_0$  the solutions of equation (E.6) can be written as

$$G(x,\omega) = A^- \cosh \left[ \frac{i\omega x}{c} + \eta \right] \text{ if } x < x_0 \quad (\text{E.9})$$

and

$$G(x,\omega) = A^+ \cosh \left[ \frac{i\omega(\ell - x)}{c} + \eta_\ell \right] \text{ if } x > x_0, \quad (\text{E.10})$$

in order to satisfy the boundary conditions, if

$$\zeta = \coth \eta ; \zeta_\ell = \coth \eta_\ell \quad (\text{E.11})$$

(as we will see later, the quantities  $\eta$  and  $\eta_\ell$  can be either real or complex, depending on the values of  $\zeta$  and  $\zeta_\ell$ ).

At  $x = x_0$ , writing the continuity of the function and the jump of its first derivative, the following result is obtained :

$$G(x,\omega) = \frac{c}{2\pi i\omega} \frac{\cosh[\eta + i\omega x_0/c] \cosh[\eta_\ell + i\omega(\ell - x)/c]}{\sinh(i\omega\ell/c + \eta + \eta_\ell)} \text{ if } x > x_0 \quad (\text{E.12})$$

and a similar result if  $x < x_0$ , by interchanging  $x$  and  $x_0$ .

The case  $\zeta = 1$  (semi-infinite tube or medium) corresponds to  $\eta = \infty$ : it is discussed in the next subsection.

## E.4 Solution in the time domain (successive reflections)

Equation (E.12) can be transformed in the time domain, leading to a solution corresponding to the successive reflections of the Green function in infinite space at the two boundaries. The second factor of the denominator can be written as

$$\frac{1}{\sinh(i\omega\ell/c + \eta + \eta_\ell)} = \frac{2e^{-\eta-\eta_\ell-i\omega\ell/c}}{1 - e^{-2\eta-2\eta_\ell-2i\omega\ell/c}}, \quad (\text{E.13})$$

and, if the modulus of the exponential at the denominator is less than unity (this is discussed hereafter), as:

$$\frac{1}{\sinh(i\omega\ell/c + \eta + \eta_\ell)} = 2e^{-\eta-\eta_\ell-i\omega\ell/c} [1 + F(\omega) + F^2(\omega) + F^3(\omega) + \dots], \quad (\text{E.14})$$

where

$$F(\omega) = e^{-2\eta-2\eta_\ell-2i\omega\ell/c} \quad (\text{E.15})$$

is the function corresponding to a complete round trip of a wave in the tube, of duration  $2\ell/c$ . The quantities  $r = e^{-2\eta}$  and  $r_\ell = e^{-2\eta_\ell}$  are the reflection coefficients at the boundaries and are equal to

$$r = e^{-2\eta} = (\zeta - 1)/(\zeta + 1); \quad r_\ell = e^{-2\eta_\ell} = (\zeta_\ell - 1)/(\zeta_\ell + 1). \quad (\text{E.16})$$

Concerning the numerator of (E.12), it can be written as follows:

$$\cosh\left[\eta + \frac{i\omega x}{c}\right] \cosh\left[\eta_\ell + i\omega \frac{\ell - x_0}{c}\right] = \frac{1}{4} e^{+\eta+\eta_\ell+i\omega\ell/c} g_p(x,\omega), \quad (\text{E.17})$$

where

$$G_p(x,\omega) = e^{-i\omega(x-x_0)/c} + r e^{-i\omega(x+x_0)/c} + r_\ell e^{-i\omega(2\ell-x-x_0)/c} + r r_\ell e^{-i\omega(2\ell-x+x_0)/c}. \quad (\text{E.18})$$

Therefore the Green function in the frequency domain is:

$$G(x,\omega) = \frac{c}{4\pi i\omega} G_p(x,\omega) [1 + F(\omega) + F^2(\omega) + F^3(\omega) + \dots]. \quad (\text{E.19})$$

The factor  $g_p(x,\omega)/i\omega$  corresponds to the four "primary" waves arriving during the first cycle of duration  $2\ell/c$ , and this packet is simply reproduced at every time  $2\ell/c$ ,  $4\ell/c$ ,  $6\ell/c$ ,

etc... (see for a detailed explanation e.g. Kergomard [51]). The inverse Fourier Transform of the function  $G(x,\omega)/i\omega$  is now easily obtained as

$$\partial_t g(x,t) = \frac{1}{2} c g_p(x,t) * [\delta(t) + f(t) + f(t) * f(t) + f(t) * f(t) * f(t) + \dots] \quad (\text{E.20})$$

where

$$g_p(x,t) = \delta(t - (x - x_0)/c) + r(t) * \delta(t - (x + x_0)/c) + r_\ell(t) * \delta(t - (2\ell - x - x_0)/c) + r(t) * r_\ell(t) * \delta(t - (2\ell - x + x_0)/c) \quad (\text{E.21})$$

with

$$r(t) = r\delta(t) ; r_\ell(t) = r_\ell\delta(t) \quad (\text{E.22})$$

and

$$f(t) = r(t) * r_\ell(t) * \delta(t - 2\ell/c). \quad (\text{E.23})$$

Finally, calculating the integral  $h_p(x,t)$  of the function  $g_p(x,t)$ , with the condition for negative times, the final result is found to be, whatever the sign of  $(x - x_0)$ :

$$g(x,t) = \frac{c}{2} h_p(x,t) * [\delta(t) + f(t) + f(t) * f(t) + f(t) * f(t) * f(t) + \dots], \quad (\text{E.24})$$

where

$$h_p(x,t) = H[t - |x - x_0|/c] + rH[t - (x + x_0)/c] + rH[t - (2\ell - x - x_0)/c] + rr_\ell H[t - (2\ell - |x - x_0|)/c] \quad (\text{E.25})$$

and

$$f(t) = rr_\ell\delta(t - 2\ell/c), \quad (\text{E.26})$$

$H(t)$  being the step function. The condition of validity of the expansion (E.14) is  $|rr_\ell| < 1$ . We notice that if  $\zeta$  is real and positive,  $|r| < 1$ , and similarly for  $\zeta_\ell$ . Therefore the condition is satisfied when the two boundaries are absorbing, or, more precisely, if the combination of the two reflections is absorbing. What happens in the case  $|rr_\ell| > 1$ ? It is possible to replace equation (E.13) by an equivalent expression with  $1 - e^{2\eta+2\eta_\ell+2i\omega\ell/c}$  at the denominator, but this would correspond to an infinite series of non causal functions in the time domain: the question will be discussed in section E.5.3.

Otherwise if  $r$  is positive ( $|\zeta| > 1$ ),  $\eta$  is real, and if  $r$  is negative ( $|\zeta| < 1$ ),  $\eta = \mu + i\pi/2$ , where  $\mu$  is real; a similar remark can be made for the end  $\ell$ . The most of the following calculations are valid for all cases,  $\eta$  and  $\eta_\ell$  being real or complex.

Finally, if  $\zeta$  (respectively  $\zeta_\ell$ ) is unity, the reflection coefficient  $r$  (respectively  $r_\ell$ ) vanishes, as well as  $f(t)$ : the first term of the Green function is the Green function of an infinite medium, the first two terms correspond to this of a semi-infinite medium, etc... For these cases, no modes can be found, because either  $\eta$  or  $\eta_\ell$  tends to infinity.

## E.5 Expansion in resonance modes using the inverse Fourier Transform

Putting the expression in the frequency domain (E.12) in the equation (E.5) leads to the modal expansion of the time domain expression. The tool is the rule of residues. If all the poles of the expression (E.12) are simple and located on or above the real axis, the following equation can be used:

$$g(x,t) = 2\pi i \Sigma \quad \text{if } t > 0 \quad \text{and } 0 \quad \text{if } t < 0, \quad (\text{E.27})$$

where  $\Sigma$  is the sum of the residues (see e.g. Morse and Ingard [62] p 17, changing  $i$  in  $-i$ ).

### E.5.1 Calculation of the poles

The poles corresponding to the zeros of function *sinh* satisfy:

$$\sinh \left[ \frac{i\omega_n \ell}{c} + \eta + \eta_\ell \right] = 0, \quad (\text{E.28})$$

or

$$\frac{i\omega_n \ell}{c} + \eta + \eta_\ell = in\pi, \quad (\text{E.29})$$

where  $n$  is an integer. In order for the poles to be above the real axis, the condition is  $\text{Re}(\eta + \eta_\ell) > 0$ . It is equivalent to the condition previously obtained for the successive reflections expansion:  $|rr_\ell| < 1$ .

Depending on the values of  $\zeta$  and  $\zeta_\ell$ , different cases can be distinguished :

i) if  $|\zeta| > 1$  and  $|\zeta_\ell| > 1$  (real  $\eta$  and  $\eta_\ell$ ):

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{\ell} + i \frac{(\eta + \eta_\ell)c}{\ell}; \quad n = -\infty, \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots + \infty. \quad (\text{E.30})$$

As already remarked by Filippi[32] or Guyader [40], the imaginary part of the complex frequency is independent of  $n$ , and the real part is independent of the absorption, corresponding to the values for pure Neumann conditions (infinite  $\zeta$  and  $\zeta_\ell$ ).

ii) if  $|\zeta| < 1$  and  $|\zeta_\ell| < 1$  (complex  $\eta$  and  $\eta_\ell$ :  $\eta = \mu + i\pi/2$ ;  $\eta_\ell = \mu_\ell + i\pi/2$ ):

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{\ell} + i \frac{(\mu + \mu_\ell)c}{\ell}; \quad n = -\infty, \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots + \infty. \quad (\text{E.31})$$

Again the imaginary part is independent of  $n$ , and the real part independent of the absorption, corresponding to the values for pure Dirichlet conditions (zero  $\zeta$  and  $\zeta_\ell$ ).

iii) if  $|\zeta| > 1$  and  $|\zeta_\ell| < 1$  (real  $\eta$  and complex  $\eta_\ell$ :  $\eta_\ell = \mu_\ell + i\pi/2$ )

For this mixed case

$$\omega_n = \frac{m\pi c}{2\ell} + i \frac{(\eta + \mu_\ell)c}{\ell}; \quad m = -\infty, \dots - 3, -1, 1, 3, \dots + \infty, \quad (\text{E.32})$$

where  $m = 2n - 1$  is an odd integer. The real part corresponds to a problem with Neumann and Dirichlet conditions at  $x = 0$  at  $x = \ell$ , respectively. The last (mixed) case ( $|\zeta| < 1$  and  $|\zeta_\ell| > 1$ ) is obvious, and is not treated here.



### E.5.2 Calculation of the residues

In all cases, the Taylor expansion of the function  $\sinh$  in equation (E.12) at the first order of the quantity  $(\omega - \omega_n)$  can be determined. The result is:

$$\sinh \left[ i \frac{\omega \ell}{c} + \eta + \eta_\ell \right] = i(-1)^n (\omega - \omega_n) \frac{\ell}{c}. \quad (\text{E.33})$$

Thus, for  $\omega$  close to the pole  $\omega_n$ :

$$G(x, \omega) = -\frac{c^2}{2\pi\omega_n \ell} \frac{\cosh [\eta + i\omega_n x_0/c] \cosh [\eta_\ell + i\omega_n(\ell - x)/c]}{(-1)^n (\omega - \omega_n)}, \quad (\text{E.34})$$

or, using equation (E.29)

$$G(x, \omega) = -\frac{c^2}{2\pi\omega_n \ell} \frac{\cosh [\eta + i\omega_n x_0/c] \cosh [\eta + i\omega_n x/c]}{(\omega - \omega_n)}. \quad (\text{E.35})$$

The residue corresponding to the pole  $\omega = 0$ , remains to be calculated. For small  $\omega$ ,

$$G(x, \omega) = \frac{c}{2\pi i \omega} \frac{\cosh \eta \cosh \eta_\ell}{\sinh(\eta + \eta_\ell)} = \frac{c}{2\pi i \omega} \frac{1}{\tanh \eta + \tanh \eta_\ell} = \frac{c}{2\pi i \omega} \frac{1}{\zeta^{-1} + \zeta_\ell^{-1}}. \quad (\text{E.36})$$

Finally, using equation (E.27), the inverse FT of  $G(x, \omega)$  is obtained, as follows:

$$g(x, t) = H(t) \frac{c^2}{\ell} \sum_n \frac{f_n(x) f_n(x_0)}{i\omega_n} e^{i\omega_n t} + H(t) \frac{c}{\zeta^{-1} + \zeta_\ell^{-1}}, \quad (\text{E.37})$$

where

$$f_n(x) = \cosh(\eta + i\omega_n x/c) = (-1)^n \cosh(i\omega_n(\ell - x)/c + \eta_\ell). \quad (\text{E.38})$$

This formula is valid for all aforementioned cases, which are detailed in Appendix E.11. Some comments can be made:

- the mode shapes  $f_n(x)$  are complex functions of the space variable, and the question of their orthogonality will be discussed in section E.7;
- the decreasing of the modes is identical for all the non constant modes;
- there are two non oscillating modes, corresponding to the poles  $\omega = \omega_0$  and  $\omega = 0$ ;
- if one of the impedances  $\zeta$  or  $\zeta_\ell$  is zero, the constant mode disappears, as it is intuitive, in order to satisfy a Dirichlet condition;
- for the three considered cases in Appendix E.11, we notice that

$$\omega_{-n} = -\omega_n^* \text{ and } f_n(x) = f_{-n}^*(x). \quad (\text{E.39})$$

As a consequence, the solution  $g(x, t)$  is real. It could be possible to transform the sum by adding the two terms corresponding to  $n$  and  $-n$ , as it is usually done for non absorbing boundaries (pure Neumann or Dirichlet conditions). Nevertheless it appears that the formulas become intricate.

- when the boundaries tend to non absorbing boundaries, the result tends to the classical result. A particular case occurs when both  $\zeta$  and  $\zeta_\ell$  tend to infinity ( $\eta$  and  $\eta_\ell$  tend to zero): the combination of the mode of frequency  $\omega_0$  and the constant mode results in a mode increasing linearly with time, equal to  $H(t) tc^2/\ell$ .

- equations (E.35) and (E.36) lead directly to the Fourier Transform of the result given by (E.37).

An example of comparison of the successive reflections method and modal expansion is shown in figure 2. We notice that it is satisfactory and that the Gibbs phenomenon appears, because of the truncated series of modes.

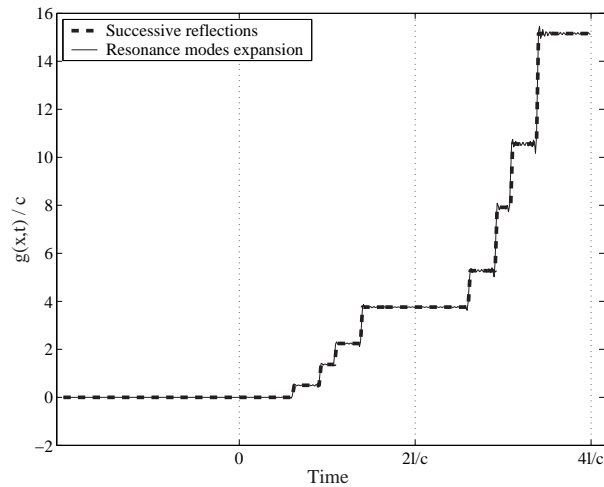


FIG. E.2 – Green function as a function of time with active boundary conditions  $\zeta_i = \zeta_\ell = -3.6975$ . Comparison between the successive reflections method and modal expansion (102 modes, i.e. maximum  $n = 50$ ). Locations of the source and receiver are  $x_0 = 0.1m$  and  $x = 0.5m$ , respectively. Notice that constant mode is equal to  $-1.8485$ .

### E.5.3 The case of active boundaries

What happens when the combination of boundaries is active, i.e. when  $|rr_\ell| > 1$ , or  $\text{Re}(\eta + \eta_\ell) < 0$  (at least one of the impedances  $\zeta$  or  $\zeta_\ell$  is negative)? An equation similar to equation (E.27) can be used, leading to a non causal solution, as well as the solution with successive reflections, as discussed in section E.4. This solution is easy to find, by replacing  $(t - t_0)$  by  $-(t - t_0)$ ,  $\zeta$  by  $-\zeta$ ,  $\zeta_\ell$  by  $-\zeta_\ell$  in the equations (E.1 to E.3), but it is not the Green function. On the contrary, it is possible to prove that equations (E.24) and (E.37) **remain valid for active boundary conditions**. The detailed solution given in appendix E.11 exhibits that if a new function  $\tilde{g}(x, t) = g(x, t) \exp(-\tilde{\eta}t)$ , where  $\tilde{\eta} > -\text{Re}(\eta + \eta_\ell) > 0$  can be substituted in the initial problem, equation (E.1) becomes

$$\partial_{xx}^2 \tilde{g}(x, t) - \frac{1}{c^2} [\partial_t + \tilde{\eta}]^2 \tilde{g}(x, t) = -\delta(x - x_0) e^{-\tilde{\eta}t} \delta(t)$$

and similarly for equations (E.2) and (E.3). Going in the frequency domain leads to equations (E.6 to E.8), where  $G(x, \omega)$  is replaced by  $\tilde{G}(x, \omega)$  and  $i\omega$  by  $(i\omega + \tilde{\eta})$ , and a similar result for equation (E.12). The analysis of both successive reflections and poles and residues leads to the result  $\tilde{g}(x, t) = g(x, t) \exp(-\tilde{\eta}t)$ , where  $g(x, t)$  is given by equations (E.24) and (E.37), respectively, and the proof is achieved. We do not repeat here the complete procedures.

## E.6 Eigenmodes expansion in the frequency domain, and its inverse Fourier Transform

### E.6.1 Eigenmodes expansion in the frequency domain

In order to calculate the inverse Fourier Transform of  $G(x, \omega)$ , another solution is possible: the expansion of  $G(x, \omega)$  in (orthogonal) eigenmodes. This is done for a particular case by Filippi ([32]) (this author considers another type of excitation instead of the Dirac

function, thus uses the Laplace Transform instead of the Fourier Transform). We will see how this method leads to the same poles and residues that the direct method using the compact expression (E.12). We are searching for the following expansion :

$$G(x,\omega) = \sum_n G_n(x,\omega) \tag{E.40}$$

where the eigenmodes  $G_n(x,\omega)$  are solutions of the equation

$$\left[ \partial_{xx}^2 + \frac{\theta_n^2(\omega)}{c^2} \right] G_n(x,\omega) = 0, \tag{E.41}$$

and satisfy the boundary conditions (E.7 and E.8).  $\theta_n(\omega)$  are the eigenvalues. The key point is that the eigenmodes  $G_n(x,\omega)$  and eigenvalues  $\theta_n(\omega)$  depend on the frequency  $\omega$  because of the boundary conditions. The solutions of equation (E.41) can be written as follows :

$$G_n(x,\omega) = \cosh(i\theta_n(\omega)x/c + \varphi_n(\omega)) \tag{E.42}$$

where  $\theta_n(\omega)$  and  $\varphi_n(\omega)$  are given by the boundary conditions. Thus they satisfy:

$$\theta_n(\omega) \tanh \varphi_n(\omega) = \frac{\omega}{\zeta} \tag{E.43}$$

and

$$\theta_n(\omega) \tanh(i\theta_n(\omega)\ell/c + \varphi_n(\omega)) = -\frac{\omega}{\zeta_\ell}. \tag{E.44}$$

Eliminating the quantity  $\varphi_n(\omega)$ , the eigenvalues are found to satisfy the following equation :

$$\tanh(i\theta_n(\omega)\ell/c) \left[ \theta_n(\omega) + \frac{\omega^2}{\theta_n(\omega)\zeta\zeta_\ell} \right] = -\omega \left[ \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta_\ell} \right]. \tag{E.45}$$

When  $\theta_n(\omega)$  and  $\omega$  are not simultaneously zero, this equation can be rewritten as:

$$e^{2i\theta_n\ell/c} = \frac{\theta_n\zeta - \omega}{\theta_n\zeta + \omega} \frac{\left[ \frac{\theta_n\zeta_\ell - \omega}{\theta_n\zeta_\ell + \omega} \right]}{\left[ \frac{\theta_n\zeta_\ell - \omega}{\theta_n\zeta_\ell + \omega} \right]}. \tag{E.46}$$

The calculation of all solutions of this equation is not necessary, only a few number of them being useful in the following. We notice that orthogonality of the eigenmodes is ensured, and the norm of the modes is equal to:

$$\Lambda_n = \int_0^\ell G_n^2(x,\omega) dx = \frac{\ell}{2} + \frac{c}{4i\theta_n} [\sinh 2(i\theta_n\ell/c + \varphi_n) - \sinh 2\varphi_n]. \tag{E.47}$$

Therefore the solution of equation (E.6) can be written as follows:

$$G(x,\omega) = \frac{c^2}{2\pi} \sum_n \frac{G_n(x,\omega)G_n(x_0,\omega)}{\Lambda_n(\theta_n^2(\omega) - \omega^2)}. \tag{E.48}$$

### E.6.2 Calculation of poles and residues

In order to calculate the inverse Fourier Transform, the rule of residues will be used again. The only terms of the series contributing to poles verify:

$$\theta_n(\omega) = \pm\omega. \quad (\text{E.49})$$

Looking at equation (E.46), it can be seen that these two solutions lead to the same equation for  $\omega$ . Rewriting this equation by using equations (E.43) and (E.44), equation (E.28) is obtained:

$$\sinh \left[ \frac{i\omega\ell}{c} + \eta + \eta_\ell \right] = 0.$$

The solutions  $\omega_p$  of this equation are the non zero poles of the integral in the inverse FT. Nevertheless the pole  $\omega = 0$  exists again, because the zero value satisfies equation (E.49), the eigenvalue  $\theta_n(\omega) = 0$  satisfying equation (E.45)!

It remains to calculate the residues. Starting with the poles  $\omega_p \neq 0$ , we need to select in the series (E.48) the terms involving poles. For a given  $\omega_p$ , there are two terms. However it appears that the modes corresponding to  $\theta_n$  and  $-\theta_n$  are identical. As a consequence, only one term of the series contributes to the inverse FT: it will be denoted  $\theta_p(\omega)$ . The corresponding residue is found by expanding equation (E.48) for  $\omega$  close to  $\omega_p$ , as follows:

$$G(x, \omega) = \frac{c^2}{2\pi} \frac{G_p(x, \omega_p) G_p(x_0, \omega_p)}{\Lambda_p(2\omega_p)(\omega_p - \omega)(1 - [\frac{d}{d\omega}\theta_p(\omega)]_{\omega=\omega_p})}. \quad (\text{E.50})$$

Similar expression can be found in Filippi [32], which points out that Morse and Ingard forgot the derivative (reference [62], p. 559). An interesting remark is that the derivative of  $\theta_p(\omega)$ , denoted  $\theta'_p(\omega)$  can be calculated analytically, as follows. Taking the derivative of equation (E.46) with respect to  $\omega$ , or more conveniently, taking the logarithmic derivative of equations (E.43) and (E.44), the following results are obtained:

$$\frac{\theta'_p}{\theta_p} + \frac{2\varphi'_p}{\sinh 2\varphi_p} = \frac{1}{i\omega_p} \quad (\text{E.51})$$

and

$$\frac{\theta'_p}{\theta_p} + \frac{2(i\theta'_p\ell/c + \varphi'_p)}{\sinh 2(i\theta_p\ell/c + \varphi_p)} = \frac{1}{i\omega_p}. \quad (\text{E.52})$$

Thus, eliminating the derivative  $\varphi'_p$ ,

$$D_p \left[ \frac{\theta'_p}{\theta_p} - \frac{1}{i\omega_p} \right] = \frac{2i\theta'_p\ell}{c}, \quad \text{where } D_p = [\sinh 2\varphi_p - \sinh 2(i\theta_p\ell/c + \varphi_p)]. \quad (\text{E.53})$$

Therefore, since  $\theta_p = \omega_p$ ,

$$1 - \theta'_p = \frac{1}{1 - cD_p/2\ell i\theta_p}. \quad (\text{E.54})$$

Using equation (E.47), the norm is deduced:

$$\Lambda_p = \frac{\ell}{2} \left[ 1 - \frac{c}{2\ell i\theta_p} D_p \right]. \quad (\text{E.55})$$

For  $\omega$  close to  $\omega_p$ , the following equation is obtained :

$$G(x,\omega) = -\frac{c^2}{2\pi\ell} \frac{G_p(x,\omega_p)G_p(x_0,\omega_p)}{\omega_p(\omega - \omega_p)}, \quad (\text{E.56})$$

which is in accordance with equation (E.35).

Finally, for  $\omega$  close to 0, the solution  $\theta(\omega)$  which is close to 0, solution of equation (E.49), satisfies the following equation, deduced from (E.45) :

$$\left[1 - \frac{1}{3}\Theta^2 + O(\Theta^4)\right] \left[\Theta^2 + \frac{\Omega^2}{\zeta\zeta_\ell}\right] = i\Omega \left[\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta_\ell}\right]$$

where  $\Theta = \theta\ell/c$  and  $\Omega = \omega\ell/c$ . Therefore  $\Theta^2$  is of order  $\Omega$ , and

$$\theta^2 = i\omega\frac{c}{\ell} \left[\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta_\ell}\right] + O(\omega^2). \quad (\text{E.57})$$

Using equation (E.48), the residue for the pole  $\omega = 0$  is obtained, and equation (E.36) is confirmed. We conclude that the method of the expansion in orthogonal modes in the Fourier domain leads to the same result (equation E.37) than the "direct" method. Nevertheless the derivation is more delicate.

## E.7 Method of separation of variables

Guyader[40] has treated a particular case of the problem (zero  $\zeta$ , large  $\zeta_\ell$ ) using the method of separation of variables. He get non orthogonal modes. We will see that the method is valid whatever the values of the boundary conditions, and that the derivation can be largely simplified. Finally the expression of the Green function is checked and orthogonality of the modes is discussed.

### E.7.1 Solutions with separated variables

We are searching the solutions  $p(x,t)$  of homogeneous equation (E.1) (without second member), with the boundary conditions (E.2 and E.3), and with known initial conditions. Assuming that the general solution of the problem is a superposition of solutions with separate variables (this will be proven, at least for the case of the Green function, if the results are identical to the previous ones), the solutions with separate variables are written in the following form:

$$p(x,t) = f(x)h(t), \quad (\text{E.58})$$

where

$$h(t) = B^+ e^{i\omega t} + B^- e^{-i\omega t} \quad (\text{E.59})$$

and

$$f(x) = \cosh(i\omega x/c + \varphi). \quad (\text{E.60})$$

The decomposition (E.58) differs from the Fourier transform, because a priori  $\omega$  is a complex quantity, obtained by using the boundary conditions. Considering first the solution  $B^+ e^{i\omega t}$ , this leads to:

$$\omega \sinh \varphi = \frac{\omega}{\zeta} \cosh \varphi \quad (\text{E.61})$$

and

$$\omega \sinh(i\omega\ell/c + \varphi) = -\frac{\omega}{\zeta_\ell} \cosh(i\omega\ell/c + \varphi). \quad (\text{E.62})$$

$\omega = 0$  is a solution, corresponding to the constant mode. The other modes are given by equation (E.61):

$$\sinh(\varphi - \eta) = 0 \quad (\text{E.63})$$

thus

$$f(x) = \cosh(i\omega x/c + \eta). \quad (\text{E.64})$$

Actually there is a sign  $\pm$  in the right-hand side member of equation (E.64), but it is without importance, because it can be included in the coefficient  $B^+$  of the solution. The eigenvalues equation is deduced from equations (E.63) and (E.62), as follows:

$$\sinh(i\omega\ell/c + \eta + \eta_\ell) = 0, \quad (\text{E.65})$$

which is identical to (E.28), the solutions of which being already studied. The solution in time  $B^- e^{-i\omega t}$  does not lead to new solutions for  $f(x)$ , therefore the general solution of the problem can be written as:

$$p(x,t) = \sum_n A_n \phi_n(x,t) + A = \sum_n A_n f_n(x) e^{i\omega_n t} + A, \quad (\text{E.66})$$

where  $\omega_n$  and  $f_n(x)$  are given by equations (E.29) and (E.38), respectively, and the coefficients  $A_n$  and  $A$  depend on the initial conditions, and can be determined using the orthogonality relation of the modes.

### E.7.2 Orthogonality relation of the modes

In order to derive an orthogonality relation of the modes the following bilinear form is calculated:

$$A_{np} = \int_0^\ell f_n(x) f_p(x) dx. \quad (\text{E.67})$$

Because  $f_n(x) = f_{-n}^*(x)$ , the calculation of the quantities defined in equation (E.67) for all values of the index  $n$  is equivalent to the calculation of the quantities defined when replacing  $f_p(x)$  by its conjugate.

Writing

$$\int_0^\ell \left[ f_n(x) \frac{d^2 f_p(x)}{dx^2} - f_p(x) \frac{d^2 f_n(x)}{dx^2} \right] dx = \left[ f_n(x) \frac{df_p(x)}{dx} - f_p(x) \frac{df_n(x)}{dx} \right]_0^\ell$$

and using equation (E.38), the following result is obtained:

$$\frac{(\omega_p^2 - \omega_n^2)}{c^2} A_{np} = i(\omega_p - \omega_n) \left[ \frac{f_n(0) f_p(0)}{\zeta} + \frac{f_n(\ell) f_p(\ell)}{\zeta_\ell} \right].$$

For  $\omega_p \neq \omega_n$ , because  $\omega_p + \omega_n \neq 0$ , the result is deduced. For  $\omega_p = \omega_n$ , the calculation is straightforward. The general formula is found to be:

$$A_{np} = \frac{ci}{\omega_p + \omega_n} \left[ \frac{f_n(0) f_p(0)}{\zeta} + \frac{f_n(\ell) f_p(\ell)}{\zeta_\ell} \right] + \frac{1}{2} \ell \delta_{np} \quad (\text{E.68})$$

where  $\delta_{np}$  is the Kronecker symbol. The modes are found to be non orthogonal for the product defined by (E.67), but, as shown by Guyader[40], it is possible to solve the problem from the knowledge of initial conditions. A discussion on orthogonality is given in the subsection E.7.5. When the absorption tends to zero ( $\eta$  and  $\eta_\ell$  tend to zero), the first term does not vanish, tending to  $\frac{1}{2}\ell\delta_{n(-p)}$ . It is due to the choice of considering separately the modes  $\omega_n$  and  $\omega_{-n}$ . We notice that for  $\omega_p \neq \omega_n$ , this formula remains valid when one of the modes is the constant mode  $f(x) = 1$ . Finally, the two following formulas are obtained:

$$A_{np} = -\frac{c \sinh 2\eta + (-1)^{n+p} \sinh 2\eta_\ell}{2i(\omega_p + \omega_n)} + \frac{1}{2}\ell\delta_{np}, \quad (\text{E.69})$$

for the non constant modes, and for one non constant mode with the constant one,

$$A_n = \int_0^\ell f_n(x)dx = -\frac{c}{i\omega_n}(\sinh \eta + (-1)^n \sinh \eta_\ell). \quad (\text{E.70})$$

### E.7.3 Solution with respect to initial conditions

According to equation (E.66), the initial conditions can be written as:

$$p(x,0) = \sum_n A_n \cosh(i\omega_n x/c + \eta) + A \quad (\text{E.71})$$

and

$$\partial_t p(x,0) = \sum_n A_n i\omega_n \cosh(i\omega_n x/c + \eta) \quad (\text{E.72})$$

where we denote  $\partial_t = \partial/\partial t$ .

Using equation (E.69) for a non constant mode  $p$ , the following results are obtained:

$$\int_0^\ell p(x,0) f_p(x) dx = \sum_n A_n A_{np} + A A_p \quad (\text{E.73})$$

and

$$\int_0^\ell \partial_t p(x,0) f_p(x) dx = \sum_n A_n i\omega_n A_{np}. \quad (\text{E.74})$$

Multiplying equation (E.73) by  $i\omega_p$ , then adding equation (E.74), leads to:

$$\begin{aligned} & \int_0^\ell [i\omega_p p(x,0) + \partial_t p(x,0)] f_p(x) dx \\ &= i \sum_n A_n (\omega_p + \omega_n) A_{np} + i A \omega_p A_p \\ &= -c \sum_n A_n \left[ \frac{f_n(0) f_p(0)}{\zeta} + \frac{f_n(\ell) f_p(\ell)}{\zeta_\ell} \right] + i A_p \ell \omega_p \end{aligned} \quad (\text{E.75})$$

$$= -c \left[ \frac{f_p(0) p(0,0)}{\zeta} + \frac{f_p(\ell) p(\ell,0)}{\zeta_\ell} \right] + i A_p \ell \omega_p \quad (\text{E.76})$$

The series in equation (E.75) involves the constant mode. As noticed by Guyader[40], this series is related to the initial conditions at the two ends  $x = 0$  and  $x = \ell$ . Thus

$$A_p \ell i \omega_p = \int_0^\ell [i\omega_p p(x,0) + \partial_t p(x,0)] f_p(x) dx + c p(0,0) \sinh \eta + c p(\ell,0) \varepsilon_p \sinh \eta_\ell \quad (\text{E.77})$$

is the result for a non constant mode. Using (E.39), the following property is deduced :

$$A_{-p} = A_p^*. \quad (\text{E.78})$$

The coefficient  $A$  remains to be determined. Using a similar calculation starting from  $\int_0^\ell \partial_t p(x,0) dx$  the following result being obtained:

$$A = \frac{c^{-1} \int_0^\ell \partial_t p(x,0) dx + p(0,0) \tanh \eta + p(\ell,0) \tanh \eta_\ell}{\tanh \eta + \tanh \eta_\ell}. \quad (\text{E.79})$$

What is the condition for which this coefficient vanishes? If for instance at  $x = 0$ ,  $\zeta$  is zero,  $\eta$  is infinite, and, according to the boundary condition,  $p(0,0)$  vanishes, thus  $A$  vanishes too. This confirms the remark concerning result (E.37).

#### E.7.4 Deduction of the Green function

How is it possible to check the accordance between formula (E.37) and the previous results? Using an integral formulation (in the time domain) in order to deduce the solution of the problem with initial conditions from the knowledge of the Green function leads to heavy calculations. We prefer to check that, for the particular case of the Green function, the results of the present section are valid. For this purpose, we use the knowledge of the time domain solution for the Green function (equation E.24).

We will first determine the integrals involved in equation (E.77). On one hand, for  $t \rightarrow 0^+$ ,  $g(x,t)$  is equivalent to the Green function in infinite space,

$$\frac{c}{2} H \left( t - \frac{|x - x_0|}{c} \right)$$

therefore the integral  $\int_0^\ell g(x,t) f_p(x) dx$  tends to 0. On the other hand, the integral  $\int_0^\ell \partial_t g(x,t) f_p(x) dx$  is equivalent to

$$\begin{aligned} \frac{c}{2} \int_0^\ell \left[ \delta \left[ t - \frac{x - x_0}{c} \right] + \delta \left[ t + \frac{x - x_0}{c} \right] \right] f_p(x) dx \\ = \frac{c^2}{2} [f_p(ct + x_0) + f_p(-ct + x_0)]. \end{aligned}$$

Thus it tends to  $c^2 f_p(x_0)$ . The initial quantities  $p(0,0)$  et  $p(\ell,0)$  being zero, the result (E.37) is verified from the positive times. Similarly, concerning the constant mode (equation E.79), the integral  $\int_0^\ell \partial_t g(x,t) dx$  tends to  $c^2$ , and the result is also verified.

#### E.7.5 Discussion on the orthogonality

Two remarks can be made concerning the non orthogonality found in equations (E.69) and (E.70) from the product defined in (E.67): i) can be interpreted by taking into account that the studied system produces energy outside of the interval  $[0, \ell]$ , using the first interpretation of the problem to be solved (see figure 1). ii) another product can be defined, leading to a true orthogonality condition. These remarks are examined hereafter.



### Influence of the energy outside the studied medium

We consider the problem extended to the two outside media, between  $-\infty$  and  $0$ , and between  $\ell$  and  $+\infty$ . The complete medium is viewed as an inhomogeneous medium, with two jumps in density  $\rho$  or/and sound velocity  $c$ . In order to solve this new problem, the different methods can be applied, and we choose the separation of variables. When using this method, neither the time dependence  $\omega_n$  of the solutions, nor the functions  $f_n(x)$  are changed in the interval  $[0, \ell]$ . In order to deduce the solutions outside of this interval, the continuity at  $x = 0$  (a similar reasoning is done at  $x = \ell$ , but not given here) of pressure  $p$  and velocity, i.e. the spatial derivative of the pressure divided by the density,  $\partial_x p / \rho$  is used:

$$p_- = p \text{ and } \partial_x p_- / \rho^- = \partial_x p / \rho. \quad (\text{E.80})$$

. In order to obtain orthogonal modes, it is necessary to ensure the continuity of the wronskian  $f_n(x)\partial_x f_p(x) - f_p(x)\partial_x f_n(x)$  at these abscissae. It means that it is necessary to change the function solution of the homogeneous equation (E.1). Replacing  $p(x, t)$  by  $q(x, t) = p(x, t) [\rho / \rho(x)]^{1/2}$ , the following continuity conditions at  $x = 0$  are obtained:

$$q^-(x, t)(\rho_- / \rho)^{1/2} = q(x, t) \text{ and } \partial_x q^-(x, t) / (\rho^- / \rho)^{1/2} = \partial_x q(x, t). \quad (\text{E.81})$$

This change of function, keeping the function unchanged in the interval  $[0, \ell]$ , ensures the nullity of the wronskian, and is equivalent, for a continuous inhomogeneity, to the reduction of the Sturm-Liouville equation  $\left[ \partial_{xx}^2 - \frac{\partial_x \rho}{\rho} \partial_x - \frac{1}{c^2} \partial_{tt}^2 \right] p(x, t) = 0$  in its canonical form, without term involving derivative of first order, by changing  $p(x, t)$  in  $q(x, t) = p(x, t) / \rho^{1/2}(x)$ .

It remains to calculate the solution of the wave equation for negative  $x$ : using, for the absorbing case ( $\text{Re}(\eta + \eta_\ell) > 0$ ), the condition of vanishing field when  $x$  tends to  $-\infty$ , and the continuity condition, the result for the modes of  $q(x, t)$  is

$$f_n(x) = (\rho / \rho_-)^{1/2} \cosh(\eta) \exp(-i\omega_n x / c_-) \text{ for } x < 0 \quad (\text{E.82})$$

and for the "constant" mode

$$f(x) = (\rho / \rho^-)^{1/2}.$$

The orthogonality integral is given by:

$$\int_{-\infty}^0 f_n(x) f_p(x) dx = \frac{\rho}{\rho_-} \cosh^2(\eta) \int_{-\infty}^0 \exp(-i(\omega_n + \omega_p)x / c_-) dx$$

or

$$\int_{-\infty}^0 f_n(x) f_p(x) dx = -\frac{1}{2} \frac{\rho}{\rho^-} \zeta \sinh(2\eta) \frac{c_-}{i(\omega_n + \omega_p)} = -\frac{c_-^2}{2c} \frac{\sinh 2\eta}{i(\omega_n + \omega_p)} \quad (\text{E.83})$$

and for the constant mode

$$\int_{-\infty}^0 f_n(x) f(x) dx = -\frac{c_-^2}{c} \frac{\sinh \eta}{i\omega_n}. \quad (\text{E.84})$$

If  $\eta_\ell$  is zero, the integrals given by the last two equations correspond to the terms responsible for the non orthogonality in equations (E.69) and (E.70), respectively, provided that  $c_- = c$ . If  $\eta_\ell$  is not zero, a similar calculation can be done for  $\ell < x < +\infty$ . We conclude that an interpretation of the non orthogonality can be done by interpreting the jump in characteristic impedances in  $0$  and  $\ell$  as a jump in densities  $\rho_-$  and  $\rho_+$ , respectively, in the two outside media: considering the entire space, orthogonality is ensured.

### Change in scalar product

For vibrating systems, the product defined by (E.67) correspond to the product with respect to the mass. It is interesting to calculate the product related to the stiffness (ref???):

$$\Lambda'_{np} = \int_0^\ell \frac{d}{dx} f_n(x) \frac{d}{dx} f_p(x) dx \quad (\text{E.85})$$

Integrating par parts, and using equation (E.68) it is found, for  $n \neq p$ , to be equal to:

$$\Lambda'_{np} = \left[ f_n(x) \frac{d}{dx} f_p(x) \right]_0^\ell + \frac{\omega_p^2}{c^2} \Lambda_{np} = -\frac{\omega_n \omega_p}{c^2} \Lambda_{np}. \quad (\text{E.86})$$

Therefore the modes become orthogonal if we define a new product for the modes  $\phi_n(x,t) = f_n(x)h_n(t)$ , as follows:

$$\Lambda''_{np} = \int_0^\ell \left[ \frac{\partial}{\partial x} \phi_n(x,t) \frac{\partial}{\partial x} \phi_p(x,t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi_n(x,t) \frac{\partial}{\partial t} \phi_p(x,t) \right] dx = \frac{\omega_n^2}{c^2} \ell \delta_{np}. \quad (\text{E.87})$$

For the calculation of the solution from the initial conditions, using equation (E.66) at  $t = 0$ , the following result is obtained:

$$\int_0^\ell \left[ \frac{d}{dx} f_p(x) \frac{\partial}{\partial x} p(x,0) - \frac{i\omega_p}{c^2} f_p(x) \frac{\partial}{\partial t} p(x,0) \right] dx = A_p \frac{\omega_p^2}{c^2} \ell. \quad (\text{E.88})$$

As a consequence, the initial conditions need to be written by using the derivatives of the function  $p(x,t)$  with respect to the abscissa and time. Results (E.77) and (E.79) can be checked by integrating the first term of the integral by parts. Nevertheless, the scalar product (E.87) is not useful for the constant mode.

## E.8 Generalization when adding absorption to propagation

### E.8.1 Statement of the problem

Returning to the initial problem in a bounded medium, we will now consider absorption in the medium. In general absorption is frequency-dependent (see e.g. Pierce [69]), but for simplicity we assume a coefficient,  $\alpha$ , independent of the frequency, and we assume arbitrarily the following form for a traveling wave in the frequency domain:  $\exp(-\alpha x) \exp(i\omega x/c)$ . For frequency-dependent absorption, it can be assumed that the obtained formulas can be regarded to be valid by replacing  $\alpha$  by its value for the frequency corresponding to a given mode. This is in general satisfactory for small losses, but is not discussed further hereafter.

Therefore, in the frequency domain, equation (6) is replaced by the following :

$$\left[ \partial_{xx}^2 - \left( i\frac{\omega}{c} + \alpha \right)^2 \right] G(x,\omega) = -\frac{1}{2\pi} \delta(x - x_0), \quad (\text{E.89})$$

the boundary conditions being unchanged. After elementary algebra, equation (E.12) is replaced by the following :

$$G(x,\omega) = \frac{1}{2\pi z} \frac{\cosh[\chi + zx_0] \cosh[\chi_\ell + z(\ell - x)]}{\sinh(z\ell + \chi + \chi_\ell)} \quad \text{if } x > x_0 \quad (\text{E.90})$$

where

$$z = \frac{i\omega}{c} + \alpha; \quad \coth \chi = \zeta \frac{z}{z - \alpha}; \quad \coth \chi_\ell = \zeta_\ell \frac{z}{z - \alpha}. \quad (\text{E.91})$$

### E.8.2 Calculation of the poles

The poles corresponding to the function  $\sinh$  are solutions of

$$z\ell + \chi(z) + \chi_\ell(z) = in\pi. \quad (\text{E.92})$$

For  $n \neq 0$ , the modulus of the solutions  $z$  are expected to be large, thus this of  $\alpha/z$  is small, and a perturbation method can be used. At the zeroth order of  $\alpha/z$ , the solution is given by equation (E.28):

$$z^{(0)\ell} = -\eta - \eta_\ell + in\pi. \quad (\text{E.93})$$

Writing the unknown  $\chi^{(2)} = \eta + \varepsilon$ , and calculating the quantity  $\tanh(\chi^{(2)})$  by using equations (E.91), the following (exact) result is obtained

$$\tanh \varepsilon = -\frac{\alpha}{z} \frac{\zeta}{\zeta^2 - 1} \left[ 1 - \frac{\alpha}{z} \frac{1}{\zeta^2 - 1} \right]. \quad (\text{E.94})$$

Therefore the quantity  $\varepsilon$  is of order  $\alpha/z$ , and at the second order in  $\varepsilon$ , we get:

$$\chi^{(2)} = \eta - \frac{\alpha}{z^{(0)}} \frac{\zeta}{\zeta^2 - 1} \left[ 1 - \frac{\alpha}{z^{(0)}} \frac{1}{\zeta^2 - 1} \right] + O\left(\left(\alpha/z^{(0)}\right)^2\right), \quad (\text{E.95})$$

which, with a similar result for  $\chi_\ell^{(2)}$ , leads to the value of  $z^{(2)}$ , deduced from equation (E.92). This method can be iterated, in order to converge to the exact result. Some comments can be made:

- because of the term  $(\zeta^2 - 1)$  at the denominator, the perturbation method is not appropriate when one of the boundaries is close to the anechoic termination, therefore we have tried to determine the limit of the method. Numerical calculations have been done and presented in section E.8.5;

- such a perturbation method does not allow to know the exact number of solutions of equation (E.92); we assume that if  $(\zeta^2 - 1)$  is not too small, the number of solutions remains the same as for the case of zero  $\alpha$ ;

- we notice that if  $(\zeta^2 - 1)$  is not small, the real part of  $z^{(0)}$  is small, whatever the considered case ( $\eta$  and  $\eta_\ell$  being real or complex), compared to the imaginary part, because  $n \neq 0$ : as a consequence, the perturbation is significant for the real part of the frequencies  $\omega_n$ , and negligible for its imaginary part, i.e. the attenuation rate. Moreover the effect of losses decreases when  $n$  increases, which is obvious when looking at equation (E.89). The result at the first order of the perturbation can be written as follows:

$$i\frac{\omega_n \ell}{c} = -\alpha\ell - \eta - \eta_\ell + in\pi - \varepsilon - \varepsilon_\ell$$

or

$$i\frac{\omega_n \ell}{c} = -\alpha\ell - \eta - \eta_\ell + in\pi + \frac{\alpha\ell}{in\pi - \eta - \eta_\ell} \left[ \frac{\zeta}{\zeta^2 - 1} + \frac{\zeta_\ell}{\zeta_\ell^2 - 1} \right]. \quad (\text{E.96})$$

The question of the poles corresponding to the case  $n = 0$ , for which a real solution can be expected is not treated in general, but for an example in section E.8.5. Obviously, it remains also the pole  $z = 0$ .

### E.8.3 Calculation of the residues

As done in section E.5.2, the Taylor expansion of the function  $\sinh(z\ell + \chi + \chi_\ell)$  at the first order in  $(\omega - \omega_n)$  has to be determined to calculate the residues. We get

$$\sinh(z\ell + \chi + \chi_\ell) = (\omega - \omega_n)(-1)^n \Gamma_n, \quad (\text{E.97})$$

having denoted the term

$$\Gamma_n = \left[ \frac{i\ell}{c} - \frac{1}{\omega_n} \left( \frac{\zeta - \coth \chi_n}{\coth^2 \chi_n - 1} + \frac{\zeta_\ell - \coth \chi_{\ell n}}{\coth^2 \chi_{\ell n} - 1} \right) \right], \quad (\text{E.98})$$

where  $\chi_n = \chi(z_n)$  and  $\chi_{\ell n} = \chi_\ell(z_n)$ , Therefore the residue of  $G(x, \omega)$  at  $\omega = \omega_n$ , for  $n \neq 0$ , is given by

$$G(x, \omega) = \frac{1}{2\pi z_n} \frac{\cosh[\chi_n + z_n x_0] \cosh[\chi_{\ell n} + z_n(\ell - x)]}{(\omega - \omega_n)(-1)^n \Gamma_n}, \quad (\text{E.99})$$

and with the use of (E.92), results in

$$G(x, \omega) = \frac{c}{2\pi z_n} \frac{\cosh[\chi_n + z_n x_0] \cosh[\chi_n + z_n x]}{(\omega - \omega_n) \Gamma_n}. \quad (\text{E.100})$$

### E.8.4 Successive reflections

Using the same procedure as for the lossless case (see section E.4), the transformation of equation (E.90) leads to the solution in the time domain. The addition of losses has implication in the expression of the Green function of the primary waves (see eq.(E.18)) with the appearing of an exponentially damped factor  $e^{-\alpha ct}$ . It also modifies the characterization of the reflections at the boundaries which are no longer described by constant values but by functions depending on time. As a consequence, products in equations (E.25) and (E.26) have to be replaced by convolution products. Finally, the Green function in the time domain becomes

$$g(x, t) = \frac{c}{2} g_p(x, t) * [\delta(t) + f(t) + f(t) * f(t) + f(t) * f(t) * f(t) + \dots] \quad (\text{E.101})$$

where the factor corresponding to the primary waves  $g_p$  is given by

$$g_p(x, t) = e^{-\alpha ct} [H[t - |x - x_0|/c] + r(t) * H[t - (x + x_0)/c] + r_\ell(t) * H[t - (2\ell - x - x_0)/c] + r(t) * r_\ell(t) * H[t - (2\ell - |x - x_0|)/c]] \quad (\text{E.102})$$

the function  $f(t)$  is

$$f(t) = e^{-2\alpha \ell} r(t) * r_\ell(t) * \delta(t - 2\ell/c)$$

and, from equations (E.91), the reflections functions are found to be

$$r(t) = e^{-2\eta} \delta(t) + H(t) \frac{4\pi \zeta \alpha c}{(\zeta + 1)^2} e^{-\frac{\alpha c \zeta}{\zeta + 1} t}, \quad \text{and} \quad (\text{E.103})$$

$$r_\ell(t) = e^{-2\eta_\ell} \delta(t) + H(t) \frac{4\pi \zeta_\ell \alpha c}{(\zeta_\ell + 1)^2} e^{-\frac{\alpha c \zeta_\ell}{\zeta_\ell + 1} t}. \quad (\text{E.104})$$

### E.8.5 An example for $\zeta_\ell = 0$ (Dirichlet condition at $x=\ell$ )

We consider the case of a Dirichlet condition at  $x = \ell$  ( $\zeta_\ell = 0$ ,  $\chi_\ell = i\pi/2$ ). The poles are given by the equation

$$z\ell + \chi(z) = im\pi/2, \quad (\text{E.105})$$

where  $m = (2n - 1)$  is a (non zero) odd integer. It is easy to check that  $z = 0$  is not a pole of  $G(x,\omega)$ , because both the numerator and the denominator vanish. If  $|\zeta| > 1$ , it can be shown that no real solution exists, so that the perturbation method can be applied for all poles, which are given at the first order by

$$i\frac{\omega_n\ell}{c} = -\alpha\ell - \eta + im\frac{\pi}{2} + \frac{2\alpha\ell}{im\pi - 2\eta} \frac{\zeta}{\zeta^2 - 1}. \quad (\text{E.106})$$

When  $|\zeta| < 1$ ,  $\zeta = \tanh \mu$ , where  $\mu = \eta - i\pi/2$ , and equation (E.105) can be replaced by

$$z\ell + \kappa(z) = in\pi,$$

where  $n$  is an integer, and  $\kappa(z) = \chi(z) - i\pi/2$ . The first order solution is given by the formula:

$$i\frac{\omega_n\ell}{c} = -\alpha\ell - \mu + in\pi - \frac{\alpha\ell}{in\pi - \mu} \frac{\zeta}{1 - \zeta^2}. \quad (\text{E.107})$$

For  $n = 0$ , we recognize a particular case, because the perturbation method cannot be applied if  $\mu$  is small. Nevertheless, using equations (E.91) and (E.92), the unknown  $z$  is found to be solution of

$$\cot anhz\ell = -\left(1 - \frac{\alpha}{z}\right) \cot anh\mu. \quad (\text{E.108})$$

If  $\mu$  is small,  $z\ell$  is expected to be small as well, and a series expansion of the  $\cot anh$  function leads to the following result:

$$i\frac{\omega_0\ell}{c} = -\tanh(\mu) \left[1 + \frac{(\alpha - \tanh \mu)^2}{3}\right] = -\mu - \mu\frac{\alpha^2\ell^2}{3} + O(\mu^2). \quad (\text{E.109})$$

We notice that at the first order of  $\mu$ , the two expressions (E.107) and (E.109) are identical. This means that for small  $\zeta$ , the first order approximation is good, while the second order one is not: in equation (E.95), there is a factor  $\zeta$  at the numerator of the first order term, but not in the bracket involving the second order term.

Figure E.3 shows the variation of the real part of the frequencies with respect to parameter  $\zeta$ , chosen to be positive. When  $\zeta$  is not close to unity, the variation of frequency is small, and the first order of the iteration computation (equations E.106 and E.107) is satisfactory. For  $\zeta$  approaching unity, the iterative computation converges, but it is not true for  $\zeta$  very close to unity.

For large  $\zeta$  the real part of the frequencies are close to the frequencies of the Neumann-Dirichlet problem, and for small  $\zeta$ , the frequencies are close to the frequencies of the Dirichlet-Dirichlet problem. According to equations (E.106) and (E.107), because  $\zeta$  is positive, the frequencies are smaller than the frequencies for zero  $\alpha$  if  $\zeta$  is larger than unity, and larger if  $\zeta$  is smaller than unity. For  $\zeta$  smaller than 0.5 the relative effect of the losses on the real part of the first frequency is less than 0.03%, while when it is larger than 2.0, this effect is smaller than 0.25%.

Figure E.4 shows the result of the same calculation for the imaginary part of the first frequency ( $m = 1$  for  $\zeta > 1$ ;  $n = 1$  for  $\zeta < 1$ ), corresponding to the attenuation. The first order approximation is excellent. Obviously it is a fortiori true for higher order frequencies.

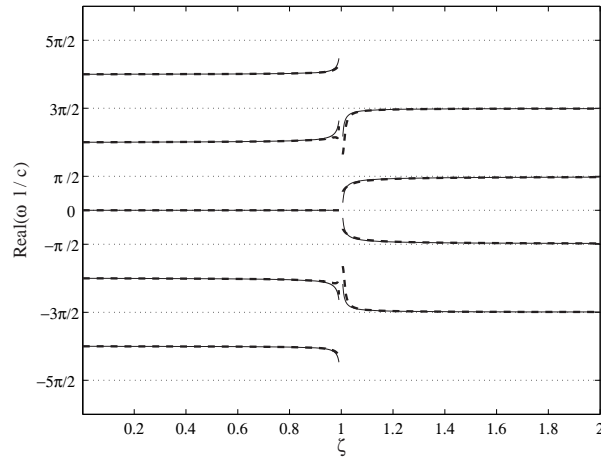


FIG. E.3 – real part of the frequencies as a function of  $\zeta$  obtained with the perturbation method when losses are taken into account  $\alpha l = 0.1$ ,  $\zeta_\ell = 0$ . Comparison between numerical, iterative solution (dotted) and first order approximation solution (dashed-dot) (equations E.106 and E.107 for  $\zeta > 1$  and  $\zeta < 1$ , respectively).

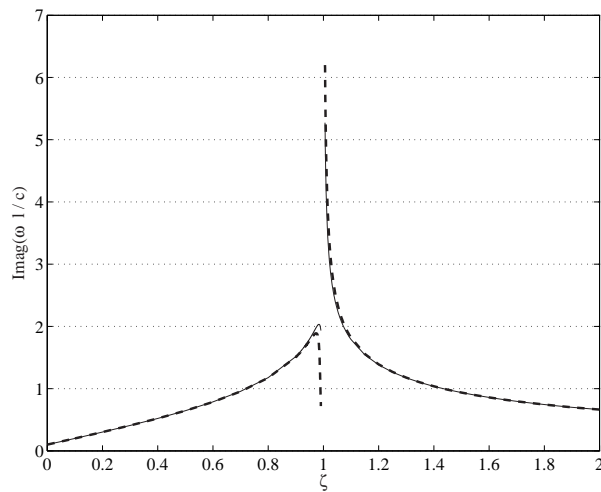


FIG. E.4 – Imaginary part of the first frequency as a function of  $\zeta$ , obtained with the perturbation method when losses are taken into account  $\alpha l = 0.1$ ,  $\zeta_\ell = 0$ . Comparison between numerical, iterative solution (dotted) and first order approximation solution (dashed-dot) (equation E.106 and E.107 for  $\zeta > 1$  and  $\zeta < 1$ , respectively.)

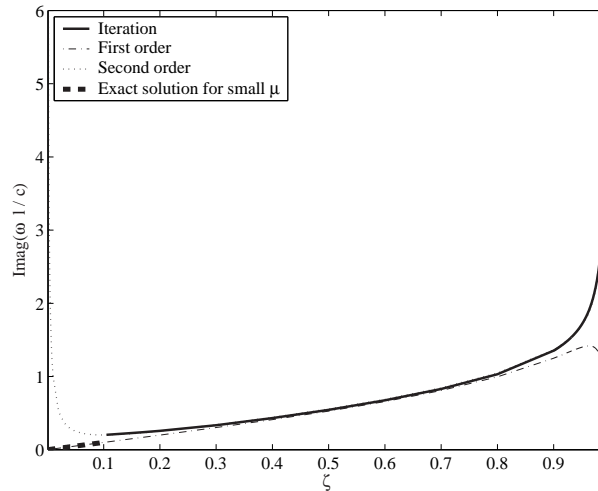


FIG. E.5 – Imaginary part of the frequency  $\omega_0$  as a function of  $\zeta$ , when  $\zeta < 1$ , obtained with the perturbation method when losses are taken into account.  $\alpha l = 0.1$ ,  $\zeta_l = 0$ . Comparison between several results: first order approximation (E.107) is satisfactory till  $\zeta = 0.8$ ; second order approximation (from equation E.95) as well as numerical, iterative method are satisfactory from  $\zeta = 0.4$ .

Figure E.5 shows the result for  $n = 0$  when  $\zeta < 1$ . Equation (E.109) is very satisfactory for small  $\zeta$ , while the numerical, iterative method fails.

Examples of numerical calculation of the Green function can now be computed. Figures E.6 and E.7 show the results for the modal expansion method and for the successive reflections method, for two cases with negative  $\zeta$  (active termination) and with positive  $\zeta$  (passive termination), respectively. For both cases  $|\zeta| > 1$ . The agreement is satisfactory for a number of 100 modes ( $m = -101$  to  $m = 101$ ).

## E.9 Conclusion

The simple problem we have studied, which can be regarded in particular as a radiation problem, exhibits interesting properties for the resonance modes: they are complex, and non orthogonal for the simple product (E.67) because of the bounded character of the considered medium. When losses are ignored in the propagation, their frequencies are independent of the parameters for boundary conditions on the same type, i.e. for terminating impedances involved in either interval  $[0,1]$  or interval  $[1, +\infty]$ . Otherwise an another choice of the product of the modes make them orthogonal.

When losses are taken into account, the variation of the imaginary part of the frequencies (i.e. attenuation), and, to a smaller extent, the real part of them, is small when the boundary impedances vary, except near unity, when the medium tends to be (semi-)infinite. Approximation formulas are excellent.

Thanks to the simplicity of the problem, the analytical treatment is possible with several methods, enlightening the relationship between them, which can be useful for more intricate problems.

We would like to thank Sergio Bellizzi, Michel Bruneau, Paul Filippi, Dominique Ha-

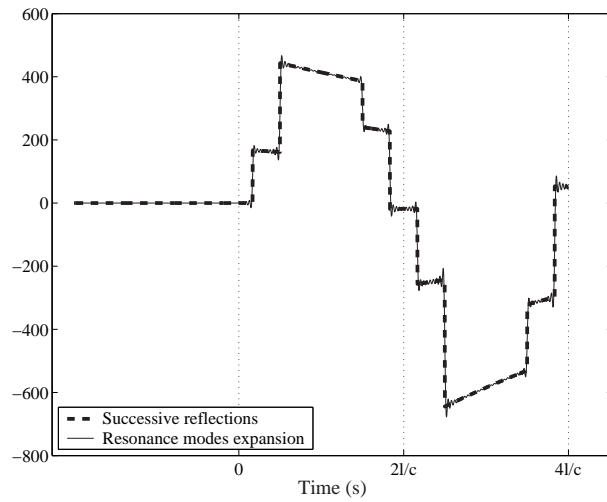


FIG. E.6 – Green function calculated using modal expansion and successive reflections method. Case of active boundary at  $x = 0$ ,  $\zeta = -3.6975$ , and Dirichlet boundary condition  $\zeta_\ell = 0$ .  $\alpha\ell = 0.1$ , 100 modes. Location of the source and receiver are  $x_0 = 0.1\text{m}$  and  $x = 0.2\text{m}$ , respectively.

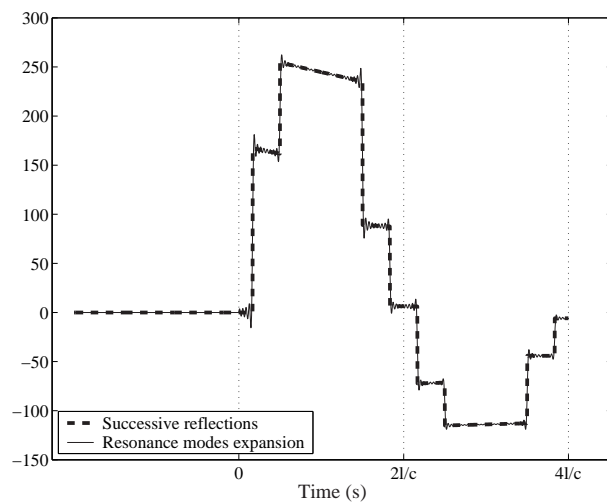


FIG. E.7 – Green function calculated using modal expansion and successive reflections method. Case of passive boundary at  $x = 0$ ,  $\zeta = 3.6975$ , and Dirichlet boundary condition  $\zeta_\ell = 0$ .  $\alpha\ell = 0.1$ , 100 modes. Locations of the source and receiver are  $x_0 = 0.1\text{m}$  and  $x = 0.2\text{m}$ , respectively.



bault, Pierre-Olivier Mattei and Vincent Pagneux for very fruitful discussions.

## E.10 Appendix

### E.11 Main result for the different cases

i)  $|\zeta| > 1$  and  $|\zeta_\ell| > 1$  (real  $\eta$  and  $\eta_\ell$ ):

The modes and Green function are:

$$f_n(x) = \cosh [\eta(1 - x/\ell) - \eta_\ell x/\ell + in\pi x/\ell];$$

$$g(x,t) = H(t)c e^{-(\eta+\eta_\ell)ct/\ell} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{f_n(x)f_n(x_0)}{in\pi - \eta - \eta_\ell} e^{in\pi ct/\ell} + H(t) \frac{c}{\zeta^{-1} + \zeta_\ell^{-1}}.$$

ii) if  $|\zeta| < 1$  and  $|\zeta_\ell| < 1$  (complex  $\eta$  and  $\eta_\ell$ :  $\eta = \mu + i\pi/2$ ;  $\eta_\ell = \mu_\ell + i\pi/2$ ):

The modes and Green function are:

$$f_n(x) = \sinh [\mu(1 - x/\ell) - \mu_\ell x/\ell + in\pi x/\ell],$$

$$g(x,t) = -H(t)c e^{-(\mu+\mu_\ell)ct/\ell} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{f_n(x)f_n(x_0)}{in\pi - \mu - \mu_\ell} e^{in\pi ct/\ell} + H(t) \frac{c}{\zeta^{-1} + \zeta_\ell^{-1}}.$$

iii) if  $|\zeta| > 1$  and  $|\zeta_\ell| < 1$  (real  $\eta$  and complex  $\eta_\ell$ :  $\eta_\ell = \mu_\ell + i\pi/2$ )

For this mixed case, the modes and Green function are,

$$f_n(x) = \cosh [\eta(1 - x/\ell) - \mu_\ell x/\ell + im\pi x/2\ell],$$

$$g(x,t) = H(t)c e^{-(\eta+\mu_\ell)ct/\ell}$$

$$\sum_{m \text{ odd}=-\infty} \frac{f_m(x)f_m(x_0)}{im\pi/2 - \eta - \mu_\ell} e^{im\pi ct/2\ell} + H(t) \frac{c}{\zeta^{-1} + \zeta_\ell^{-1}}.$$

# Bibliographie

- [1] J.M. Adrien. *Simulation numérique de systèmes vibrants complexes, application à la synthèse sonore par modélisation physique*. PhD thesis, Université Paris 6, 1989.
- [2] J. Agulló and A. Barjau. The reflection function  $r(t)$ : matrix approach versus  $FFT^{-1}$ . *J. Sound Vibration*, 2:193–201, 1986.
- [3] J. Antunes, M. G. Tafasca, and L. L. Henrique. Simulation of the bowed-string dynamics-part 1- a nonlinear modal approach. In SFA, editor, *Actes du 5ème congrès français d'acoustique*, pages 285–288. SFA, 2000.
- [4] J. Backus. Vibrations of the reed and the air column in the clarinet. *J. Acoust. Soc. Am.*, 6:806–809, 1961.
- [5] J. Backus. Small-Vibration Theory of the Clarinet. *J. Acoust. Soc. Am.*, 35(3):305–313, 1963.
- [6] A. Baines. *Woodwind instruments and their history*. Faber and Faber limited, Londres, 1977.
- [7] N. Bak and P. Domler. The relation between blowing pressure and blowing frequency in clarinet playing. *Acustica*, 63:238–241, 1987.
- [8] A. Barjau, V. Gibiat, and N. Grand. Study of woodwind-like systems through nonlinear differential equations. part i. simple geometry. *J. Acoust. Soc. Am.*, 102:3023–3031, 1997.
- [9] A. H. Benade. On the mathematical theory of woodwind finger holes. *J. Acoust. Soc. Am.*, 32(12):1591–1608, 1960.
- [10] A. H. Benade. *Fundamentals of Musical Acoustics*. Oxford University Press, Londres, 1976.
- [11] A. H. Benade. *Fundamentals of Musical Acoustics*, chapter 20, pages 394–395. Oxford University Press, Londres, 1976.
- [12] A. H. Benade. Equivalent circuits for conical waveguides. *J. Acoust. Soc. Am.*, 88(5):1764–1769, 1988.
- [13] A. H. Benade and D. J. Gans. Sound production in wind instruments. *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, 155:247–263, 1968.
- [14] J. Bensoam. *Représentation intégrale appliquée à la synthèse sonore par modélisation physique*. PhD thesis, Université du Maine, 2003.
- [15] P. Bergé, Y. Pomeau, and C. Vidal. *L'ordre dans le chaos : vers une approche déterministe de la turbulence*. Hermann, Paris, 1998.
- [16] M. Bruneau. *Manuel d'Acoustique Fondamentale*. Etudes en mécanique des matériaux et des structures. Hermès, Paris, 1998.
- [17] J. Brymer. *Clarinette*. Collection Yehudi Menuhin. Hatier, Paris, 1976.
- [18] M. Campbell and C. Greated. *The musician's guide to acoustics*, chapter 3, page 95. J.M Dent and Sons Ltd, London, 1987.

- [19] R. Caussé, J. Kergomard, and X. Lurton. Input impedance of brass musical instruments - Comparison between experiment and numerical models. *J. Acoust. Soc. Am.*, 75(1):241–254, 1984.
- [20] Y. M. Chang. Reed stability. *Journal of Fluids and Structures*, 8:771–783, 1994.
- [21] J. P. Dalmont and A-M. Bruneau. Acoustic impedance measurement: plane-wave mode and first helical mode contribution. *J. Acoust. Soc. Am.*, 91(5):3026–3033, 1992.
- [22] J. P. Dalmont, B. Gazengel, J. Gilbert, and J. Kergomard. Some aspects of tuning and clean intonation in reed instruments. *Applied Acoustics*, 46:19–60, 1995.
- [23] J. P. Dalmont, J. Gilbert, and J. Kergomard. Reed instruments, from small to large amplitude periodic oscillations and the Helmholtz motion analogy. *Acta Acustica*, 86:671–684, 2000.
- [24] J. P. Dalmont, C. J. Nederveen, V. Dubos, S. Ollivier, V. Méserette, and E. te Sligte. Experimental determination of the equivalent circuit of an open side hole : linear and non linear behaviour. *Acta Acustica*, 88:567–575, 2002.
- [25] J. P. Dalmont, K. Nederveen, and N. Joly. Radiation impedance of tubes with different flanges: numerical and experimental investigation. *Journal of Sound and Vibration*, 244(3):505–534, 2001.
- [26] J.P. Dalmont, E. Ducasse, and S. Ollivier. Practical consequences of tone holes non-linear behaviour. In *Proceedings of the International Symposium of Musical Acoustics*, pages 153–156, Perugia, 2001.
- [27] J.P. Dalmont and C.J. Nederveen. Why a saxophone is louder than a clarinet? In *Proceedings of the International Symposium of Musical Acoustics*, pages 267–272, Edingbourg, 1997.
- [28] V. Debut. *Deux études d'un instrument de musique de type clarinette : analyse des fréquences propres du résonateur et calcul des auto-oscillations par décomposition modale- Annexe D*. PhD thesis, Université de la méditerranée, 2004.
- [29] G. Deplus, C. Desurmont, R. Fontaine, and D. Vidal. Private communications, 2004. See appendix of ref.[25].
- [30] V. Dubos, J. Kergomard, A. Khettabi, J. P. Dalmont, D. H. Keefe, and C.J Nederveen. Theory of sound propagation in a duct with a branched tube using modal decomposition. *Acta Acustica*, 85:153–169, 1999.
- [31] M. L. Facchinetti, X. Boutillon, and Constantinescu A. Numerical and experimental modal analysis of the reed and the pipe of a clarinet. *J. Acoust. Soc. Am.*, 113(5):2874–2883, 2003.
- [32] P. Filippi, D. Habault, J.P Lefebvre, and A. Bergassoli. *Acoustics: basic physics, theory and methods*, chapter 2. Academic Press, Londres, 1999.
- [33] N. H. Fletcher. Mode locking in nonlinearity excited inharmonic musical oscillators. *J. Acoust. Soc. Am.*, 64:1566–1569, 1978.
- [34] N. H. Fletcher. Excitation Mechanisms in Woodwind and Brass Instruments. *Acustica*, 43:63–72, 1979.
- [35] N. H. Fletcher and T. D. Rossing. *The Physics of Musical Instruments*. Springer-Verlag, New-York, 1991.
- [36] C. W. Fobes. <http://www.clarkwfobes.com/articles.htm>, 1999.
- [37] C. Fritz. *Influence du conduit vocal du musicien sur le jeu de la clarinette*. PhD thesis, Université du Paris 6, 2004.
- [38] J. Gilbert and J. Kergomard. Calculation of the steady-state oscillations of a clarinet using the harmonic balance technique. *J. Acoust. Soc. Am.*, 86(1):34–41, 1989.

- [39] N. Grand, J. Gilbert, and F. Laloe. Oscillation threshold of woodwind instruments. *Acustica*, 82:137–151, 1996.
- [40] J.L. Guyader. *Vibrations des milieux continus*. Hermes, 2002.
- [41] J.K. Hale and H. Koçak. *Dynamics and bifurcations*. Springer-Verlag, 1991.
- [42] J.K. Hale and H. Koçak. *Dynamics and bifurcations*, page 344. Springer-Verlag, 1991.
- [43] A. Hirschberg. Aero-acoustics of wind instruments. In A. Hirschberg/ J. Kergomard/ G. Weinreich, editor, *Mechanics of musical instruments*, volume 335 of *CISM Courses and Lectures*, pages 291–369. Springer-Verlag, Wien- New York, 1995.
- [44] P. L. Hoekje. A brief summary of A.H. Benade’s wind instrument adjustment principles. *Catgut. Acoust. Soc. Am.*, 2(7):16–24, 1995.
- [45] F. C. Karal. The analogous acoustical impedance for discontinuities and constrictions of circular cross section. *J. Acoust. Soc. Am.*, 25:327–334, 1953.
- [46] W Kausel. Optimization of brass instruments and its application in bore reconstruction. *Journal of New Music Research*, 30:69–82, 2001.
- [47] D. H. Keefe. Experiments on the single woodwind tone hole. *J. Acoust. Soc. Am.*, 72(3):688–699, 1982.
- [48] D. H. Keefe. Theory on the single woodwind tone hole. *J. Acoust. Soc. Am.*, 72(3):676–687, 1982.
- [49] J. Kergomard. notes manuscrites.
- [50] J. Kergomard. Ondes quasi-stationnaires dans les pavillons avec pertes viscothermiques aux parois: calcul de l’impédance. *Acustica*, 48(1):31–43, 1981.
- [51] J. Kergomard. Elementary considerations on reed-instrument oscillations. In A. Hirschberg/ J. Kergomard/ G. Weinreich, editor, *Mechanics of musical instruments*, volume 335 of *CISM Courses and Lectures*, pages 229–290. Springer-Verlag, Wien- New York, 1995.
- [52] J. Kergomard and V. Debut. Resonance modes in a 1D medium with purely absorbing boundaries. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2004. En préparation.
- [53] J. Kergomard, S. Ollivier, and J. Gilbert. Calculation of the spectrum of the self-sustained oscillators using a variable truncation method: application to cylindrical reed instruments. *Acta Acustica*, 86:685–703, 2000.
- [54] J. Kergomard, J. Gilbert. Analyse de quelques aspects du rôle de l’anche d’un instrument vent cylindrique. In *Actes du 5ème congrès d’acoustique*, pages 294–297, 2000.
- [55] E. Leipp. *Acoustique et Musique*. Masson, Paris, 1976.
- [56] H. Levine. Acoustical cavity excitation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 109:2555–2565, 2001.
- [57] P. Manneville. Système dynamique et chaos, 1999. Cours disponible à l’URL suivant : <http://www.lpthe.jussieu.fr/DEA/manneville.html>.
- [58] M. E. McIntyre, R. T. Schumacher, and J. Woodhouse. On the oscillations of musical instruments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 74(5):1325–1345, 1983.
- [59] X. Meynial. *Systèmes micro-intervalles pour instruments à vent à trous latéraux- Oscillation d’une anche simple couplée à un résonateur de forme simple*. PhD thesis, Université du Maine, 1987.
- [60] X. Meynial and J. Kergomard. Systèmes micro-intervalles pour les instruments de musique à vent avec trous latéraux. *J. Acoustique 1.*, pages 255–270, 1988.
- [61] V. Migouline, V. Medvedev, and V. Moustel, E.and Paryguine. *Fondements de la théorie des oscillations*. Edition Mir, Moscou, 1991.

- [62] P. M. Morse and K.U. Ingard. *Theoretical Acoustics*. Mc Graw Hill, 1968.
- [63] A.H. Nayfeh. *Nonlinear Interactions: Analytical, Computational, and Experimental Methods*. Wiley-Interscience, NY, 2000.
- [64] A.H. Nayfeh. *Nonlinear Interactions: Analytical, Computational, and Experimental Methods*, pages 209–212. Wiley-Interscience, NY, 2000.
- [65] C. J. Nederveen. *Acoustical aspects of woodwind instruments*. Northern Illinois University Press, Illinois, 1969.
- [66] C. J. Nederveen, J. K. M. Jansen, and R. R. Van Hassel. Corrections for woodwind tone-hole calculations. *Acta Acustica*, 84:957–966, 1998.
- [67] D. Noreland. Gradient based optimisation of brass instruments. In Roberto Bresin, editor, *Proceedings of SMAC 03*, pages 221–223. SFA, 2003.
- [68] S. Ollivier. *Contribution à l'étude des oscillations des instruments à vent à anche simple: validation d'un modèle élémentaire*. PhD thesis, Université du Maine, 2002.
- [69] A. D. Pierce. *Acoustics: an introduction to its physical principles and applications*. Acoustical Society of America, New-York, 1991.
- [70] S. Press, W. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. Flannery. *Numerical recipes in C: the art of scientific computing*. Cambridge University Press, second edition, 1992.
- [71] Lord Rayleigh. *The Theory of sound*, volume 2. Dover Publications, Inc., New York, 1877. Second edition, 1945 re-issue.
- [72] F. G. Rendall. *The clarinet: some notes on its history and construction*. Instrument of the orchestra. Ernest Benn Limited, London, 1971.
- [73] F. G. Rendall. *The clarinet: some notes on its history and construction*, chapter 4, page 34. Instrument of the orchestra. Ernest Benn Limited, London, 1971.
- [74] Resonans. Logiciel d'aide à la conception d'instruments à vent.
- [75] R. T. Schumacher. Ab Initio Calculations of the Oscillations of a Clarinet. *Acustica*, 48(2):71–85, 1981.
- [76] L. Simon. Introduction à l'analyse des signaux non-stationnaires, 2002. Cours de DEA d'acoustique Appliquée.
- [77] O. Thomas. *Analyse et modélisation de vibrations non-linéaires de milieux minces élastiques: application aux instruments de percussion*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2001.
- [78] C. Touzé. *Analyse et modélisation de signaux vibratoires et acoustiques chaotiques : application aux instruments de percussion non-linéaires*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2000.
- [79] J. Van den Berg. The influence of the register hole of a clarinet on its tuning. Technical report, Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, 2001.
- [80] C. Vergez, A. Almeida, R. Caussé, and X. Rodet. Toward a simple physical model of double-reed musical instruments : influence of aero-dynamical losses in the embouchure on the coupling between the reed and the bore of the resonator. *Acta Acustica*, 89(6):964–973, 2003.
- [81] T. A. Wilson and G. S. Beavers. Operating modes of the clarinet. *J. Acoust. Soc. Am.*, 56(2):653–658, 1974.
- [82] W.E. Worman. *Self-sustained non-linear oscillations of medium amplitude in clarinet like-systems*. PhD thesis, Case Western Reserve University Cleveland, 1971.
- [83] P. Zinn-Justin. Imped : Programme de calcul d'impédances.
- [84] G. Zwicker and C. Kosten. *Sound absorbing materials*. Elsevier, Amsterdam, 1949.

## Résumé

Les instruments de musique à anche simple sont des systèmes auto-oscillants pour lesquels les fréquences de l'oscillation (ou fréquence de jeu) sont influencées à la fois par le résonateur et l'excitateur. Dans cette étude, on s'intéresse au rôle du résonateur et aux fréquences de résonance et modes qui lui sont associés. Deux parties constituent ce mémoire.

Une analyse détaillée des fréquences propres d'un résonateur de clarinette est présentée dans la première partie. L'usage de corrections de longueur dépendantes de la fréquence donnent, effet par effet, l'influence sur l'inharmonicité des fréquences de résonance, de petites perturbations (trous latéraux, irrégularités de perce, gradient de température...). Les prévisions théoriques sont comparées à des mesures d'impédance d'entrée mais les résultats ne permettent pas de conclure sur l'origine du défaut de justesse ressenti par les musiciens: on en conclut qu'il reste beaucoup à comprendre sur l'influence des paramètres de jeu. Ensuite, une position "optimale" du trou de registre est recherchée par méthodes d'optimisation retrouvant celle utilisée par les facteurs d'instruments.

La seconde partie est consacrée au calcul des auto-oscillations par méthode modale. L'établissement des équations est brièvement rappelé et conduit à deux formulations alternatives. Pour chacune d'elles, l'écriture de la fonction de Green décomposée sur les modes du tuyau conduit à une formulation originale des auto-oscillations dans le domaine temporel. La réduction à un mode aboutit à une équation de type Van der Pol permettant une approche analytique. Les résultats de simulations numériques pour un résonateur à plusieurs pics de résonances permettent une compréhension précise de la façon dont les différents modes sont excités: s'ils sont tous présents à l'attaque d'une note, un seul commence à croître et domine les autres, qui eux commencent par décroître avant d'être réexcités par couplage. Enfin, l'approche présentée est validée par la méthode d'équilibrage harmonique. En conclusion, la seconde partie ayant mis en évidence une variation de fréquence pendant le transitoire, suggère une voie d'études intéressante du problème de perception de la hauteur par les musiciens.

**Mots clés :** acoustique musicale, inharmonicité, correction de longueur, trou de registre, auto-oscillations, méthode modale, oscillateur de Van der Pol, condition de paroi absorbante.

## Abstract

Woodwind instruments are self-sustained oscillators resulting from the interaction between a linear resonator and a nonlinear excitor. This thesis is devoted to the study of the natural oscillations (the resonance frequencies and modes) of such systems, from two different points of view.

The first part deals with the analysis of the resonance frequencies. With the use of frequency dependent length corrections, we estimate systematically the effect on the resonance frequencies of different bore perturbations inserted in cylindrical instruments. Applications to a clarinet resonator and comparisons with impedance measurements are then presented. A relatively good overall compensation between tone holes, bore taper and bell is highlighted and the origin of the tuning default between the first two registers of the clarinet is discussed. Then, we focus on the effect of the register hole only using an elementary model. Performing optimization on the register hole location results in an "optimal" location, close to the one chosen by clarinet makers; then attempts are made numerically to improve the situation by introducing small perturbations in the higher part of the resonator.

The second part is devoted to the study of the self-sustained oscillations with the help of modal analysis. The foundations of the modelling procedure are briefly reviewed (unidimensional dissipative system) resulting in two equivalent formulations. The decomposition of the Green function on the modes of the resonator leads to an original description of the dynamics similar to a Van der Pol equation when only one mode is considered. The reduction to one mode is investigated analytically giving information about stability. Then, a numerical study is performed with emphasis to a multimodes resonator. Even if the dynamic is ensured by a few number of components, all of them participate in the oscillation by nonlinear coupling. A variation in the playing frequency is also highlighted during initial transients. Finally, the decomposition is validated with the harmonic balance technique.

**Keywords :** musical acoustics, inharmonicity, length correction, register hole, self-sustained oscillations, modal analysis, Van der Pol oscillator, purely absorbing boundaries.