Pincement spectral en courbure positive

Jerome Bertrand

N° D'ORDRE : 7276

UNIVERSITÉ PARIS XI

UFR SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THÈSE

présentée

pour obtenir

LE GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

Spécialité : Mathématiques

par

Jérôme BERTRAND

Sujet : **Pincement spectral en courbure positive**

Soutenue le : 19 septembre 2003.

M. Alano Ancona	Examinateur
M. Gérard Besson	Examinateur
M. Jean-Pierre Bourguignon	Examinateur
M. Gilles Courtois	Directeur de thèse
M. François Labourie	Examinateur
M. Jacques Lafontaine	Examinateur

Au vu des rapports de Tobias Colding et Jozef Dodziuk.

Remerciements

Tout d'abord, je voudrais adresser mes remerciements les plus sincères à mon directeur de thèse, Gilles Courtois. Il a toujours su se rendre disponible et m'a encouragé lorsque cela était nécessaire.

Je tiens également à remercier Tobias Colding et Jozef Dodziuk d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse. Je remercie également Peter Li qui a accepté de lire et de commenter ce travail.

Je remercie aussi tout particulièrement Gérard Besson, qui m'a invité à deux reprises à Grenoble, me permettant ainsi de travailler avec lui et avec d'autres membres de l'Institut Fourier, il m'a également fait le plaisir d'accepter de faire partie du jury. Je remercie également Sylvain Gallot de m'avoir exposé son point de vue sur le théorème de la sphère.

Merci également à Jacques Lafontaine pour la discussion que nous avons eue sur la géométrie conforme et pour avoir accepté de faire partie du jury.

Alano Ancona, Jean-Pierre Bourguignon et François Labourie m'on fait l'honneur de participer au jury, qu'ils en soient ici remerciés.

Je remercie également les membres du centre de Mathématiques de l'école Polytechnique, en particulier Andrei Moroianu et Christophe Margerin pour les discussions que nous avont eues. Je n'oublierai pas les bons moments que j'ai passés avec les autres thésards du centre, Alexandru, Barbara, Frédéric, Mildred, Taoufik... Et puis aussi un "special thanks" aux membres du bureau 14 à Orsay pour l'ambiance qui y règne (à la fois studieuse et décontractée...) et à Magalie pour nos (longues) conversations.

Enfin, je remercie ma famille et mes proches qui, par leur soutien, m'ont aidé à réaliser ce travail et Élodie d'avoir été à mes côtés durant ces années de thèse.

Table des matières

Introduction

Parmi les variétés à courbure de Ricci positive (on normalise par $Ric \geq (n-1)g$ en dimension n et on note $\mathcal{M}_\mathrm{n}$ l'ensemble des variétés riemanniennes complètes, de dimension n, vérifiant cette condition de courbure), la sphère réalise l'extrémum de plusieurs invariants riemanniens :

Théorème 0.0.1 $\forall (M,g) \in \mathcal{M}_n$ *:*

$$\mathrm{vol}\,(M,g) \leq \mathrm{vol}\,(\mathbb{S}^n, can),$$
$$\mathrm{Diam(M,g)} \leq \mathrm{Diam}(\mathbb{S}^\mathrm{n}, \mathrm{can}),$$
$$\lambda_1(M,g) \geq \lambda_1(\mathbb{S}^n, can) = n.$$

De plus, en cas d'égalité dans l'une de ces inégalités, (M,g) est isométrique à $(\mathbb{S}^n, can)$*.*

Remarque 0.0.1 *L'inégalité sur le diamètre implique que toutes les variétés de* $\mathcal{M}_\mathrm{n}$ *sont compactes.*
$\lambda_1(M)$ *désigne la première valeur propre non nulle du Laplacien sur la variété* (M,g)*.*

Ces résultats sont respectivement dus à R.L. Bishop, S.B. Myers, A. Lichnerowicz et le cas d'égalité est une conséquence d'un résultat de M. Obata ([34]).

Dans ce travail, nous nous intéressons aux résultats de stabilité associés au théorème 0.0.1 :

Une variété riemannienne appartenant à $\mathcal{M}_\mathrm{n}$, dont l'un des invariants ci-dessus est presque extrémal, ressemble-t-elle à la sphère ?
Notamment, une telle variété est-elle homéomorphe à la sphère ou métriquement proche de la sphère canonique ?

Plus précisément, cette thèse est consacrée à l'étude des variétés appartenant à $\mathcal{M}_\mathrm{n}$, dont le début du spectre du laplacien est presque minimal, c'est-à-dire proche de la valeur n.

Le premier résultat de stabilité sous l' (la seule) hypothèse de courbure de Ricci positive concerne les variétés riemanniennnes dont le volume est presque maximal, il est dû à G. Perelman ([36]) :

Théorème 0.0.2 (Perelman) *Il existe* $\epsilon(n) > 0$ *tel que toute variété riemannienne* $(M,g) \in \mathcal{M}_\mathrm{n}$ *dont le volume vérifie :* $\mathrm{vol}\,(M,g) \geq \mathrm{vol}\,(\mathbb{S}^n) - \epsilon(n)$ *est homéomorphe à* $\mathbb{S}^n$*.*

Un tel théorème est faux si l'on substitue à l'hypothèse "volume presque maximal", l'hypothèse "diamètre presque maximal". Plusieurs contre-exemples ont été trouvés, notamment par M. Anderson ([1]), qui construit sur l'espace projectif complexe, une famille de métriques vérifiant l'hypothèse sur la courbure de Ricci et dont le diamètre tend vers π.

Sous l'hypothèse de première valeur propre non nulle, presque minimale, il n'y a pas non plus de résultat de rigidité topologique. En effet, sous l'hypothèse (M, g) appartenant à $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$, la première valeur propre non nulle de M est proche de n si et seulement si le diamètre de M est proche de π.

Au second chapitre, essentiellement consacré à des résultats techniques, nous présentons un autre critère pour mesurer la ressemblance entre deux variétés : la distance de Gromov-Hausdorff. Cette notion a été introduite par M. Gromov dans son célèbre "livre vert" ([26]). Dans ce livre, M. Gromov montre en particulier que les classes d'isométrie des variétés appartenant à $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$, munies de la distance de Gromov-Hausdorff, est un espace métrique précompact.

En général, deux variétés peuvent être Gromov-Hausdorff proches sans être difféomorphes mais J. Cheeger et T. Colding ont montré que, pour des variétés à courbure de Ricci minorée, deux variétés riemanniennes, de même dimension, suffisamment proches pour la distance de Gromov-Hausdorff, sont difféomorphes :

Théorème 0.0.3 (Cheeger-Colding) *Soit $(M_i, g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variétés compactes, de dimension n convergeant, pour la distance de Gromov-Hausdorff, vers une variété riemannienne (compacte) (M, g) de dimension n. Supposons que*

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad Ric_{(M_i,g_i)} \geq -(n-1)g_i,$$

alors, pour i assez grand, M_i est difféomorphe à M.

Nous terminons ce chapitre en présentant un lemme de "Toponogov L^2", qui a permis à T. Colding d'établir ([19],[18]) :

Théorème 0.0.4 (Colding) *Soit $(M, g) \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}$, alors on a l'équivalence*

$$\mathrm{vol}\,(M, g) \simeq \mathrm{vol}\,(\mathbb{S}^n, can) \Leftrightarrow d_{GH}(M, \mathbb{S}^n) \simeq 0.$$

Est-il possible d'obtenir des résultats de stabilité, pour la distance de Gromov-Hausdorff, pour des variétés riemanniennes appartenant à $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$, dont le début du spectre est presque minimal ?

Au chapitre trois, nous présentons plusieurs résultats de ce type.
Le premier est un résultat de J. Cheeger et T. Colding ([14]), qui prouve qu'une variété (M, g) appartenant à $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$ dont la première valeur propre non nulle est proche de n, à défaut d'être proche de la sphère canonique (les exemples construits par M. Anderson ne sont pas proches de la sphère, pour la distance de Gromov-Hausdorff) est nécessairement

proche d'un élément d'une famille d'espaces modèles appelés "sinus produits tordus" (voir le chapitre 2 pour une définition et le théorème 3.0.6 pour un énoncé précis).

Le deuxième résultat est dû à P. Petersen ([37]). Rappelons que la première valeur propre non nulle de la sphère canonique est de multiplicité $n+1$. P. Petersen prouve :

Théorème 0.0.5 (Petersen) *Soit $(M,g) \in \mathcal{M}_{\rm n}$, alors on a l'équivalence*

$$\lambda_{n+1}(M) \simeq n \Leftrightarrow d_{GH}(M, \mathbb{S}^n) \simeq 0.$$

Que se passe-t-il entre l'hypothèse $\lambda_{n+1}(M) \simeq n$, qui implique la proximité avec la sphère canonique pour la distance de Gromov-Hausdorff et la rigidité à difféomorphisme près (conséquence du théorème 0.0.3) et l'hypothèse $\lambda_1(M) \simeq n$ où il n'y a ni rigidité topologique, ni proximité pour la distance de Gromov-Hausdorff avec la sphère ?

Dans le chapitre trois, nous démontrons :

Théorème 0.0.6 *Soit $k \in \{2, .., n+1\}$ et $(M,g) \in \mathcal{M}_{\rm n}$, alors on a l'équivalence*

$$\lambda_k(M) \simeq n \Leftrightarrow \exists A \subset M; \;\; d_{GH}(A, \mathbb{S}^{k-1}) \simeq 0.$$

En particulier, nous retrouvons, dans le cas $k = n+1$, le résultat de P. Petersen (i.e. $A = M$).

Au chapitre quatre, nous revenons sur les exemples construits par M. Anderson.
Suite au résultat de P. Petersen, les exemples construits par M. Anderson en dimension n ont au plus n valeurs propres proches de n. Nous montrons que ces exemples ont exactement une valeur propre proche de n.

Au chapitre cinq, nous nous intéressons à une généralisation de l'inégalité de Lichnerowicz :

$$\forall (M,g) \in \mathcal{M}_{\rm n}\,, \;\; \lambda_1(M) \geq n,$$

à la première valeur propre de Dirichlet d'un domaine régulier d'une variété riemannienne appartenant à $\mathcal{M}_{\rm n}$. P. Bérard et D. Meyer ont prouvé ([6]) :

Théorème 0.0.7 (Bérard-Meyer) *Soit (M,g) une variété riemannienne de dimension n. On suppose que la courbure de Ricci de (M,g) vérifie $Ric \geq (n-1)g$. Soit Ω un domaine régulier de M et Ω^*, le domaine symétrisé de Ω, c'est-à-dire une boule géodésique de la sphère canonique $(\mathbb{S}^n, can)$ vérifiant $\frac{\mathrm{vol}\,(\Omega)}{\mathrm{vol}\,(M)} = \frac{\mathrm{vol}\,(\Omega^*)}{\mathrm{vol}\,(\mathbb{S}^n)}$. Alors, on a l'inégalité*

$$\lambda_1^D(\Omega) \geq \lambda_1^D(\Omega^*),$$

où λ_1^D désigne la première valeur propre de Dirichlet du domaine sur l'espace correspondant. De plus, l'égalité a lieu si et seulement si le triplet (Ω, M, g) est isométrique au triplet $(\Omega^*, \mathbb{S}^n, can)$.

Considérons un domaine de la sphère canonique formé d'un hémisphère auquel on retire des petites boules géodésiques. La première valeur propre de Dirichlet de ce domaine est proche de celle de l'hémisphère (voir [38] et [12]). Il n'y a donc pas, pour le domaine, de rigidité topologique associée au résultat de P. Bérard et D. Meyer. Cependant, ce domaine est proche, pour la distance de Hausdorff, de l'hémisphère.

Nous montrons, à l'aide des exemples construits par M. Anderson, qu'il n'y a pas non plus de résultat de stabilité pour la distance de Gromov-Hausdorff avec la sphère canonique :

Proposition 0.0.1 *Soit un entier $n \geq 2$. Pour tout $\eta > 0$ et tout $\beta \in]0,1[$, il existe ϵ_0 dépendant de n et de β tel que, pour $\epsilon < \epsilon_0$, l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ muni de la métrique g_ϵ, construite par Anderson, admet un domaine Ω de volume relatif $\frac{\mathrm{vol}\,(\Omega)}{\mathrm{vol}\,(\mathbb{C}P^n)} = \beta$ non homéomorphe à une boule euclidienne, vérifiant*

$$\lambda_1^D(\Omega) \leq \lambda_1^D(\Omega^*) + \eta$$

et tel que $(\Omega, \mathbb{C}P^n, g_\epsilon)$ n'est pas proche, pour la distance de Gromov-Hausdorff, de $(\Omega^*, \mathbb{S}^n, can)$.
De plus, pour $\beta < \frac{1}{2}$, on peut supposer Ω à bord convexe.

Nous établissons cependant un théorème de stabilité, pour la distance de Gromov-Hausdorff, associé à "l'hémisphère" d'un sinus produit tordu, dans le cas où la courbure moyenne du bord est positive ou nulle ou dans le cas où le domaine est convexe.

Théorème 0.0.8 *Il existe des fonctions $\tau(\epsilon)$ et $\tau'(\epsilon)$ telles que, pour toute variété riemannienne (M,g) appartenant à $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$ contenant un domaine Ω régulier dont la courbure moyenne H en tout point du bord est positive ou nulle, de volume* $\mathrm{vol}\,\Omega \leq \frac{1}{2}\,\mathrm{vol}\,M$ *et dont la première valeur propre de Dirichlet vérifie*

$$\lambda_1^D(\Omega) \leq n + \epsilon\,,$$

alors, il existe un espace métrique (N,δ) et une application ϕ de M à valeurs dans la sinus suspension $((0,\pi) \times N, d)$ qui est une $\tau(\epsilon)$-presque isométrie ; de plus il existe un ouvert $\Omega' \subset \Omega$ tel que $\frac{\mathrm{vol}\,(\Omega\backslash\Omega')}{\mathrm{vol}\,(M)} \leq \tau'(\epsilon)$ et tel que l'image par ϕ de Ω' est $\tau(\epsilon)$-Hausdorff proche d'un hémisphère de la sinus suspension.

Nous renvoyons au chapitre 2 pour la définition d'une presque isométrie. Nous montrons ensuite

Théorème 0.0.9 *Il existe une fonction $\tau(\epsilon)$ telle que, pour toute variété riemannienne (M,g) appartenant à $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$ contenant un domaine Ω régulier convexe de volume* $\mathrm{vol}\,\Omega \leq \frac{1}{2}\,\mathrm{vol}\,M$ *et dont la première valeur propre de Dirichlet vérifie :*

$$\lambda_1^D(\Omega) \leq n + \epsilon\,,$$

alors il existe un espace métrique (N,δ) et une application ϕ de M à valeurs dans la sinus suspension : $((0,\pi) \times N, d)$ qui est une $\tau(\epsilon)$-presque isométrie, de plus l'image par ϕ de Ω est $\tau(\epsilon)$-Hausdorff proche d'un hémisphère de la sinus suspension.

Ce théorème généralise, dans le cas de l'hémisphère, un résultat de A. Avila ([4]) sur certains domaines convexes de la sphère $\mathbb{S}^2$:

Théorème 0.0.10 (Avila) *Soit Ω un domaine régulier convexe contenu dans un hémisphère de $\mathbb{S}^2$. Soit B une boule de même volume que Ω. Supposons que*

$$\lambda_1^D(\Omega) \leq \lambda_1^D(B) + \epsilon\,,$$

alors il existe une fonction $\tau(\epsilon)$ dépendant de $\mathrm{vol}\,(\Omega)$, $\mathrm{vol}\,(\partial\Omega)$ et du rayon de B telle que Ω est $\tau(\epsilon)$-Hausdorff proche de B.

Chapitre 1

Spectre du laplacien

Dans ce court chapitre, nous rappelons les premières propriétés du spectre du laplacien sur une variété compacte. Dans une seconde partie, nous décrivons le spectre du laplacien de la sphère canonique.

1.1 Définition et propriétés du spectre

1.1.1 Le spectre du laplacien est discret

Considérons (M^n, g), une variété riemannienne compacte, éventuellement à bord lisse ∂M.

Définition 1.1.1 *Soit $f \in C^2(M)$. On appelle laplacien de f, la fonction :*

$$\Delta f = -Tr(\mathrm{Hess}\, f).$$

Une conséquence de la formule de Stokes, est la :

Proposition 1.1.1 (Formule de Green) *Soit $f, h \in C^2(M)$.*

$$\int_M \Delta f h = \int_M < \nabla f, \nabla h > - \int_{\partial M} h \frac{\partial f}{\partial \eta},$$

avec $\eta(x)$ la normale unitaire sortante en $x \in \partial M$.

Définition 1.1.2 (Spectre du laplacien) *Si $\partial M = \emptyset$, on appelle spectre du laplacien, l'ensemble des réels λ pour lesquels, il existe une fonction $f \in C^\infty(M)$ non nulle, telle que :*

$$\Delta f = \lambda f, \tag{1.1}$$

$$f \in C^\infty(M) \backslash \{0\}.$$

Si $\partial M \neq \emptyset$, on appelle spectre de Dirichlet du laplacien, l'ensemble des réels λ pour lesquels, il existe une fonction $f \in C^\infty(\overline{M})$ non nulle, telle que :

$$\Delta f = \lambda f, f = 0 \text{ sur } \partial M, \tag{1.2}$$

$$f \in C^\infty(\overline{M}) \backslash \{0\}.$$

Dans chacun des cas, on appelle espace propre associé à λ, l'espace vectoriel constitué des fonctions pour lesquelles λ est une valeur propre, auxquelles on ajoute la fonction nulle. La dimension de l'espace propre est appelée multiplicité de la valeur propre.

Remarque 1.1.1 *Il est également possible de définir sur une variété à bord, le spectre de Neumann du laplacien.*

Définition 1.1.3 *On appelle espace des fonctions admissibles ou fonctions "tests", l'espace $H^1(M)$ définit par :*
Si $\partial M = \emptyset$, $H^1(M)$ est la complétion de $C^\infty(M)$ pour la norme :

$$||f||^2_{H^1(M)} = ||f||^2_{L^2(M)} + ||\,|df|\,||^2_{L^2(M)}.$$

Si $\partial M \neq \emptyset$, $H^1(M)$ est la complétion des fonctions lisses à support compact dans M : $C_0^\infty(M)$, pour la norme :

$$||f||^2_{H^1(M)} = ||f||^2_{L^2(M)} + ||\,|df|\,||^2_{L^2(M)}.$$

Remarque 1.1.2 *La norme $||.||_{H^1(M)}$ est issue du produit scalaire :*

$$\forall u, v \in H^1(M) < u, v >_{H^1(M)} = \int_M uv + g(\nabla u, \nabla v).$$

Soit f une fonction vérifiant (1.1) ou (1.2). À l'aide de la formule de Green et au sens des distributions, on montre :

$$\forall h \in H^1(M), \quad \int_M < \nabla f, \nabla h > = \lambda \int_M fh. \tag{1.3}$$

En réalité, (1.3) peut être employé comme définition du spectre du laplacien et du spectre de Dirichlet. En effet, on a :

Théorème 1.1.1 *Toute solution de (1.3) vérifie :*
si $\partial M = \emptyset$, $f \in C^\infty(M)$ et

$$\Delta f = \lambda f,$$

si $\partial M \neq \emptyset$, $f \in C^\infty(\overline{M})$ et

$$\Delta f = \lambda f \text{ et } f = 0 \text{ sur } \partial M.$$

Ce théorème découle du fait que Δ est un opérateur elliptique. Pour une définition des opérateurs elliptiques et la démonstration de ce théorème, nous renvoyons au livre de D. Gilbarg et N.S. Trudinger ([25]).

À l'aide de (1.3) et par des méthodes d'analyse fonctionnelle, on montre :

Théorème 1.1.2 *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte, éventuellement à bord ∂M lisse.*

Le spectre (respectivement spectre de Dirichlet) du laplacien est constitué d'une suite croissante de nombres positifs ou nuls (respectivement positifs) notés $(\lambda_i(M))_{i\in\mathbb{N}}$ (respectivement $(\lambda_i^D(M))_{i\in\mathbb{N}^*}$). Chaque espace propre est de dimension finie et $L^2(M)$ se décompose comme la somme directe orthogonale, pour la norme $L^2(M)$, de tous les espaces propres.

Remarque 1.1.3 *Dans le cas sans bord, la première valeur propre d'une variété compacte est toujours 0 et l'espace propre associé est constitué des fonctions constantes.*

Ce théorème découle d'une caractérisation variationnelle des valeurs propres. Cette caractérisation se révèle souvent utile pour obtenir des estimations du spectre (ce qui justifie l'appellation de fonctions "tests" pour les fonctions de $H^1(M)$).

Définition 1.1.4 *On appelle quotient de Rayleigh d'une fonction f appartenant à $H^1(M)$, la quantité $QR(f)$ définie par :*

$$QR(f) = \frac{\int_M |\nabla f|^2}{\int_M f^2}.$$

Notons $E_k = \{E\backslash\{0\}, E \text{ s.e.v. de } H^1(M); \mathrm{dimE = k}\}$.

La caractérisation variationnelle est la suivante :

Théorème 1.1.3 (Théorème du min-max) *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte éventuellement à bord ∂M lisse.*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lambda_k(M) = \inf_{E\in E_{k+1}} \sup_{f\in E} QR(f),$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda_k^D(M) = \inf_{E\in E_k} \sup_{f\in E} QR(f).$$

Théorème 1.1.4 (Théorème du max-min) *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte éventuellement à bord ∂M lisse.*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda_k(M) = \sup_{E\in E_k} \inf_{f\perp_{H^1} E} QR(f),$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2, \ \lambda_k^D(M) = \sup_{E\in E_{k-1}} \inf_{f\perp_{H^1} E} QR(f).$$

Pour la démonstration des théorèmes 1.1.2, 1.1.3 et 1.1.4, nous renvoyons au livre de P. Bérard ([5]).

1.1.2 Théorème de Courant

L'objet de ce paragraphe est d'énoncer un théorème de R. Courant, qui donne un majorant du nombre de domaines nodaux d'une fonction propre.
La définition d'un domaine nodal est la suivante :

Définition 1.1.5 *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte, éventuellement à bord ∂M lisse.*
Soit $f : M \to \mathbb{R} \; \in C^0(M)$. On appelle ensemble nodal, l'ensemble $f^{-1}\{0\}$ et domaine nodal toute composante connexe de $\overline{M} \backslash f^{-1}\{0\}$.

Le théorème est le suivant :

Théorème 1.1.5 (Courant) *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte éventuellement à bord ∂M lisse et k un entier.*

Soit f une fonction propre sur M, associée à la $k^{\grave{e}me}$ valeur propre, comptée sans multiplicité. Soit n_k la dimension de la somme directe des $k-1$ premiers espaces propres. Alors, f admet au plus $n_k + 1$ domaines nodaux.

Pour la preuve du théorème, nous renvoyons au livre de I. Chavel ([13]).

Corollaire 1.1.1 *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte à bord ∂M lisse. Alors, la première valeur propre $\lambda_1^D(M)$ de M est simple (i.e. de multiplicité 1) et toute fonction propre associée à cette valeur propre ne s'annule pas sur M.*

1.2 Spectre de $(\mathbb{S}^n, can)$

Le spectre de la sphère canonique est complètement déterminé ainsi que les fonctions propres. Après avoir rappelé comment il se calcule, nous nous concentrerons sur l'espace propre associé à la première valeur propre non nulle.
Décomposons le laplacien usuel de $\mathbb{R}^{n+1}$ en coordonnées radiales :

$$\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} f = -\frac{\partial}{\partial t^2} f - \frac{n}{t}\frac{\partial}{\partial t} f + \frac{1}{t^2}\Delta_{\mathbb{S}^n} f_t$$

avec $f_t(x) = f(t, x)$.
Dans le cas particulier où $f = P$ est un polynôme homogène harmonique de degré k, la formule ci-dessus donne en restriction à $\mathbb{S}^n$:

$$0 = -k(k-1)P - nkP + \Delta_{\mathbb{S}^n} P_1.$$

La restriction d'un polynôme homogène harmonique de degré k à la sphère canonique est donc une fonction propre de $\mathbb{S}^n$ de valeur propre $k(k+n-1)$. En réalité, toutes les fonctions propres de $\mathbb{S}^n$ s'obtiennent de cette manière :

Théorème 1.2.1 *Le spectre de $(\mathbb{S}^n, can)$ est l'ensemble des $\lambda_k = k(n+k-1)$ avec $k \in \mathbb{N}$. L'espace propre associée à la valeur propre λ_k est engendré par la restriction à $\mathbb{S}^n$ des polynômes homogènes harmoniques de degré k et sa dimension est $C_n^k - C_{n-2}^{k-2}$.*

Pour la preuve, nous renvoyons au livre de Berger-Gauduchon-Mazet ([10]).

1.2.1 Début du spectre de $(\mathbb{S}^n, can)$

En particulier, le théorème 1.2.1 prouve que la première valeur propre non nulle de $(\mathbb{S}^n, can)$ est :

$$\lambda_1(\mathbb{S}^n, can) = n$$

et qu'une base de fonctions propres est donnée (pour $\mathbb{S}^n$ plongé dans $\mathbb{R}^{n+1}$) par les fonctions coordonnées :

$$X_1, X_2, .., X_{n+1}.$$

La multiplicité de $\lambda_1(\mathbb{S}^n, can)$ est $n+1$.
Cette base de fonctions propres vérifie :

$$\frac{1}{\mathrm{vol}\,(\mathbb{S}^n, can)} \int_{\mathbb{S}^n} X_i^2 dv_{can} = \frac{1}{n+1}. \tag{1.4}$$

Une manière plus intrinsèque de décrire ces fonctions propres est de remarquer, en notant $<,>$ le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^{n+1}$, qu'on a l'égalité :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{S}^n \quad < x, y >= \cos d_{\mathbb{S}^n}(x, y), \tag{1.5}$$

par conséquent, toute fonction propre de la sphère, normalisée par (1.4), associée à la valeur propre n s'écrit : $\cos d_{\mathbb{S}^n}(x, .)$ pour un point $x \in \mathbb{S}^n$ convenable (x est le point réalisant le maximum de la fonction propre).
Une autre façon de formuler la remarque précédente est :

Lemme 1.2.1 *Soit $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base orthogonale de fonctions propres de la sphère, normalisées par (1.4) et soit x un point de $\mathbb{S}^n$.*
Alors, le développement en série de Fourier de la fonction $\cos d_{\mathbb{S}^n}(x, .)$ par rapport aux fonctions $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ n'a qu'un nombre fini de termes non nuls et il vérifie :

$$\cos d_{\mathbb{S}^n}(x, .) = \sum_{i=1}^{n+1} f_i(x) f_i.$$

Preuve : L'équation (1.5) donne pour tout $y \in \mathbb{S}^n$:

$$\cos d_{\mathbb{S}^n}(x, y) = \sum_{i=1}^{n+1} f_i(x) f_i(y)$$

d'où le résultat. ∎

Une autre propriété remarquable des fonctions propres de $\mathbb{S}^n$, associées à la valeur propre n, est donnée par le

Lemme 1.2.2 *Soit f une fonction propre de $\mathbb{S}^n$ de valeur propre n, alors :*

$$\mathrm{Hess}\, f + f g = 0$$

Preuve : Supposons f normalisée par (1.4). Dans un système de coordonnées convenable de $\mathbb{R}^{n+1}$, on peut supposer :

$$f = X_1.$$

Soit γ une géodésique de $(\mathbb{S}^n, can)$, paramétrée par longueur d'arc, alors γ s'écrit :

$$\gamma(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$$

avec $a, b \in \mathbb{S}^n$, vérifiant $< a, b >= 0$.
Par conséquent :

$$\mathrm{Hess}\, f(\gamma'(0), \gamma'(0)) = (f \circ \gamma)''(0) = -f(\gamma(0)).$$

■

Cette équation sur le hessien des premières fonctions propres de la sphère est caractéristique de $(\mathbb{S}^n, can)$, en effet M. Obata a démontré ([34]) :

Théorème 1.2.2 (Obata) *Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète, de dimension n. Supposons qu'il existe une fonction (propre) lisse sur M telle que :*

$$\mathrm{Hess}\, f + fg = 0,$$

alors (M, g) est isométrique à $(\mathbb{S}^n, can)$.

Pour la preuve, nous renvoyons au livre de Berger-Gauduchon-Mazet ([10], pages 180 et suivantes).

Remarque 1.2.1 *En prenant la trace de l'équation ci-dessus, on obtient $\Delta f = nf$ qui est aussi une équation caractéristique de la sphère parmi les variétés compactes de dimension n et dont la courbure de Ricci vérifie : $Ric \geq (n-1)g$, nous reviendrons sur ce fait dans le chapitre 2, paragraphe 2.3.*

Chapitre 2

Variétés à courbure de Ricci positive

Dans ce chapitre, toutes les variétés riemanniennes seront supposées lisses, complètes et sans bord.
On notera $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$, l'ensemble des variétés riemanniennes compactes, de dimension n, vérifiant la condition de courbure : $Ric \geq (n-1)g$.
Enfin, dans ce chapitre et les suivants, nous utiliserons comme convention :
Soit $p \geq 1$ un réel et $h \in L^p(M)$:

$$||h||_{L^p(M)} \ := \left(\frac{1}{\text{vol } M} \int_M h^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} .$$

On notera $\tau(\epsilon), r(\epsilon)$, etc.. , de manière générique, toute quantité positive, ne dépendant que de ϵ et de la dimension n de la variété, vérifiant :

$$\lim_{\epsilon \to 0} \tau(\epsilon) = 0.$$

Dans ce chapitre, nous avons regroupé les différents "outils" qui nous seront utiles pour démontrer les résultats des chapitres suivants.

Tout d'abord la distance de Gromov-Hausdorff, que nous utiliserons pour mesurer la ressemblance entre deux espaces métriques.

Dans une seconde partie, à l'aide d'une estimation de Sobolev uniforme sur $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$, nous établirons :

Proposition 2.0.1 (Gallot) *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte de dimension n, dont la courbure de Ricci vérifie : Ric $\geq (n-1)g$.*
Soit $\overline{f}$ une combinaison linéaire de fonctions propres du laplacien sur (M,g) :

$$\overline{f} = \sum_{i=1}^{k} a_i f_i,$$

avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $\Delta f_i = \lambda_i f_i$ pour tout $i \in \{1, .., k\}$.
Supposons que pour tout $i \in \{1, .., k\}$,

$$\lambda_i \leq n + \epsilon$$

avec $\epsilon > 0$, alors, il existe une fonction croissante $\tau(\epsilon)$ ne dépendant que de la dimension n de (M, g) telle que :

$$||\overline{f}^2 + |d\overline{f}|^2||_\infty \leq (1 + \tau(\epsilon))(n + \epsilon + 1)||\overline{f}||_2^2$$

Dans la dernière partie, nous introduirons un lemme de Toponogov L^2, dû à J. Cheeger et T. Colding. Ce lemme interviendra de manière cruciale pour prouver la proximité, pour la distance de Gromov-Hausdorff, des espaces que nous considèrerons.

2.1 Distance de Gromov-Hausdorff

Commençons par rappeler la définition de la distance de Hausdorff sur les parties compactes d'un espace métrique.

Définition 2.1.1 *Soit (Z, d) un espace métrique et X, Y deux parties compactes de Z.*
On appelle distance de Hausdorff de X et Y :

$$d_H(X, Y) = \inf \{\epsilon > 0; \{z \in Z; d(z, X) \leq \epsilon\} \supset Y \text{ et } \{z \in Z; d(z, Y) \leq \epsilon\} \supset X\}.$$

On montre :

Proposition 2.1.1 *Notons Λ l'ensemble des parties compactes d'un espace métrique (Z, d). Alors (Λ, d_H) est un espace métrique.*

À l'aide de la distance de Hausdorff, M. Gromov définit dans [26], une "distance" sur les espaces métriques compacts.

Définition 2.1.2 *Soit X, Y deux espaces métriques compacts. La distance de Gromov-Hausdorff de X et Y est définie par :*

$$d_{GH}(X, Y) := \inf_{f,h,Z} d_H(f(X), h(Y)),$$

où la borne inférieure est prise sur tous les espaces métriques Z et tous les plongements isométriques $f : X \longrightarrow Z$ et $h : Y \longrightarrow Z$.

L'ensemble des classes d'isométrie d'espaces métriques compacts, muni de la distance de Gromov-Hausdorff, est un espace métrique :

Proposition 2.1.2 *Soit X, Y deux espaces métriques compacts, alors on a :*

$$d_{GH}(X, Y) = 0 \Longleftrightarrow X \text{ et } Y \text{ sont isométriques}.$$

Pour la preuve, nous renvoyons au livre de M. Gromov ([26]).

2.1.1 Applications aux variétés de $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$

Dans [26], M. Gromov généralise également une inégalité de comparaison de volumes, due à R.L. Bishop :

Théorème 2.1.1 (Bishop-Gromov) *Soit* $(M,g) \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}$. *Alors pour tous les* r, R *tels que* $0 < r < R$, *on a,* $\forall x \in M$:

$$\frac{\text{vol } B(x,r)}{V(r)} \geq \frac{\text{vol } B(x,R)}{V(R)}$$

où $V(s)$ *désigne le volume d'une boule géodésique de rayon* s *dans* $\mathbb{S}^n$.

En particulier, pour tout $r \geq 0$ *et tout* $x \in M$:

$$\text{vol}\,(B(x,r)) \leq V(r). \tag{2.1}$$

Remarque 2.1.1 *(2.1) est une inégalité due à R.L. Bishop.*

Une conséquence de ce théorème, est le

Corollaire 2.1.1 *Pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $\eta > 0$ *tel que, pour tout* $(M,g) \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}$, *toute propriété vraie sur un ensemble* $\mathcal{P}$ *de mesure relative grande (* $\text{vol } \mathcal{P} \geq (1-\eta) \text{ vol } M$*), est vraie sur un ensemble* ϵ*-dense (* $\forall x \in M, \exists\, y \in \mathcal{P}$, *avec* $d(y,x) < \epsilon$*).*

Définition 2.1.3 *Soit* (M,g) *une variété riemannienne. On note* (M,d), *l'espace métrique obtenu en considérant la distance* d, *induite par la métrique riemannienne* g :

$$\forall x, y \in M \;\; d(x,y) := \inf_c L(c),$$

$d(x,y)$ *est la borne inférieure de la longueur des courbes* c, C^1 *par morceaux, reliant* x *à* y.

Proposition 2.1.3 *Soit (M,g) une variété riemannienne, alors :*

$$(M,g) \text{ géodésiquement complète} \iff (M,d) \text{ complet.}$$

Pour la preuve, nous renvoyons à [22].

Définition 2.1.4 *Soit* (M,g) *une variété riemannienne et* A *un ouvert de* M.

On appelle distance extrinsèque et on note d, *la restriction de la distance* d *induite par la métrique* g, *à* A.

On appelle distance intrinsèque et on note d_A, *la distance définie par :*

$$\forall x, y \in M \;\; d_A(x,y) := \inf_c L(c),$$

$d_A(x,y)$ *est la borne inférieure de la longueur des courbes* c, C^1 *par morceaux, contenues dans* A *et reliant* x *à* y.

Définition 2.1.5 *On note $\mathcal{M}_{\mathrm{n}} \,/ \sim$, les classes d'isométrie des éléments de $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$.*

À l'aide du théorème 2.1.1, M. Gromov montre ([26]) :

Théorème 2.1.2 (Gromov) *$(\mathcal{M}_{\mathrm{n}} \,/ \sim, d_{GH})$ est un espace métrique précompact.*

Remarque 2.1.2 *Quitte à rajouter une borne D sur le diamètre des variétés considérées, ce théorème reste valable sur l'ensemble des variétés complètes de dimension fixée, dont la courbure de Ricci est minorée par une constante (éventuellement négative) multipliée par la métrique.*

Récemment, J. Cheeger et T. Colding ont démontré qu'il était possible de déduire des informations topologiques à partir d'informations sur la distance de Gromov-Hausdorff entre deux variétés ([15]) :

Théorème 2.1.3 (Cheeger-Colding) *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte de dimension n, telle qu'il existe une suite $(M_i^n, g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de variétés riemanniennes de même dimension, vérifiant :*

$$\forall i \in \mathbb{N}, \;\; Ric(M_i, g_i) \geq -(n-1)g_i$$

et qui converge, pour la distance de Gromov-Hausdorff, vers (M, g). Alors M_i est difféomorphe à M, pour i assez grand.

2.1.2 Estimation de la distance de Gromov-Hausdorff

De par sa définition, il est souvent peu pratique d'estimer la distance de Gromov-Hausdorff entre deux espaces métriques.

S.V. Ivanov a introduit dans [31], la notion de “presque isométrie” qui permet une estimation plus aisée de la distance de Gromov-Hausdorff.

Définition 2.1.6 *On appelle $\eta-$presque isométrie de (X_1, d_1) sur (X_2, d_2), toute application ϕ (non nécessairement continue), $\phi : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ vérifiant :*
-Une condition de “presque surjectivité” :

$$\forall y \in X_2, \exists x \in X_1 \text{ tel que } d_2(y, \phi(x)) < \eta$$

-Une condition de “proximité métrique” :

$$\forall x, y \in X_1 : |d_2(\phi(x), \phi(y)) - d_1(x, y)| < \eta$$

À partir de cette définition, on montre :

Lemme 2.1.1 *Soit (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espaces métriques compacts et $\eta > 0$.*
Si $d_{GH}(X_1, X_2) < \eta$, alors il existe une 2η-presque isométrie de X_1 sur X_2.
Réciproquement, s'il existe une η-presque isométrie de X_1 sur X_2, alors $d_{GH}(X_1, X_2) < 2\eta$.

Preuve : Supposons $d_{GH}(X_1, X_2) < \eta$.

Soit (Z, d) un espace métrique, des plongements isométriques $f : X_1 \to Z$ et $h : X_2 \to Z$ tels que :

$$d_H(f(X_1), h(X_2)) < \eta.$$

Notons $X = f(X_1)$ et $Y = h(X_2)$.

Comme X est isométrique à X_1 et Y est isométrique à X_2, il suffit de déterminer une 2η-presque isométrie de X sur Y.

Par définition de la distance de Hausdorff :

$$\forall x \in X, \exists y \in Y; \;\; d(y, x) < \eta.$$

Pour tout $x \in X$, on choisit un tel y, noté : y_x et on définit :

$$\begin{array}{rcl} \phi : X & \to & Y \\ x & \mapsto & y_x \end{array}$$

Montrons que ϕ est une 2η-presque isométrie. Par définition, ϕ est η-presque surjective. De plus,

$$d(\phi(x), \phi(x')) \leq d(\phi(x), x) + d(x, x') + d(\phi(x'), x'),$$

c'est-à-dire, par définition de ϕ :

$$d(\phi(x), \phi(x')) \leq d(x, x') + 2\eta.$$

L'inégalité inverse se prouve de manière similaire et ϕ est une 2η-presque isométrie.

Réciproquement, supposons qu'il existe une η-presque isométrie ϕ de X_1 sur X_2. Nous allons construire une distance d sur $X_1 \sqcup X_2$ telle que :

$$\text{pour } i \in \{1, 2\}, \;\; (X_i, d_i) \hookrightarrow (X_1 \sqcup X_2, d)$$

soit un plongement isométrique et $d_H(X_1, X_2) \leq 2\eta$ dans l'espace $X_1 \sqcup X_2$.

On définit d par :

$$\text{pour } i \in \{1, 2\}, d|_{X_i \times X_i} = d_i$$

et

$$\forall x_1 \in X_1, \forall x_2 \in X_2, \; d(x_2, x_1) = d(x_1, x_2) := \inf_{z \in X_1} \left(d_1(x_1, z) + d_2(x_2, \phi(z))\right) + \eta.$$

On vérifie facilement que d est une distance sur $X_1 \sqcup X_2$. D'autre part,

$$\forall x \in X_1, \; d(x, \phi(x)) = \eta$$

et

$$\forall y \in X_2, \exists x \in X_1; \; d_2(\phi(x), y) < \eta.$$

d'où :

$$d(x, y) \leq d_2(\phi(x), y) + \eta < 2\eta.$$

■

2.1.3 Produits tordus

Considérons, à partir de la sphère canonique en coordonnées géodésiques par rapport à un point, l'espace obtenu en remplaçant l'équateur par une sphère de même dimension et de rayon $\epsilon << 1$, c'est-à-dire :

$$(]0,\pi[\times\mathbb{S}^{n-1}, dr^2+\sin^2(r)\,\epsilon^2\, can_{\mathbb{S}^{n-1}}).$$

Cet espace est une variété riemannienne admettant des singularités en 0 et π.

En lissant la métrique aux voisinages de 0 et π, cet espace s'obtient comme limite, pour la distance de Gromov-Hausdorff, d'une suite de variétés riemanniennes appartenant à $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$ (voir le chapitre 4 pour plus de détails sur un exemple plus sophistiqué).

Cet exemple est un cas particulier de variétés appelés "produits tordus" (riemanniens) :

Définition 2.1.7 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ continue, avec $f > 0$ sur $]a,b[$ et (N^{n-1},h) une variété riemannienne.*

On appelle produit tordu par f (ou f produit tordu), la variété riemannienne (à bord ou éventuellement avec des singularités en a ou b) :

$$]a,b[\times N,$$

munie de la métrique :

$$g=dr^2+f^2(r)h.$$

J. Cheeger et T. Colding ont donné dans [14], une généralisation de la notion de produit tordu dans le cas où N est simplement un espace métrique.

Pour définir ces "produits tordus généralisés", J. Cheeger et T. Colding font la remarque suivante :

Lemme 2.1.2 (Cheeger-Colding) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ continue, avec $f > 0$ sur $]a,b[$ et (N^{n-1},h) une variété riemannienne.*

Notons $M=]a,b[\times N$, $g=dr^2+f^2(r)h$, δ la distance sur N, induite par h et d la distance sur M, induite par g. Alors, il existe une application ϕ_f, dépendant de f mais indépendante de N, telle que :

$$\forall (s,x),(t,y)\in M,\ d((s,x),(t,y))=\phi_f(s,t,\delta(x,y)).$$

Remarque 2.1.3 *En considérant le cas particulier où $(N,h)=(\mathbb{R},can)$, on en déduit que ϕ_f est définie sur : $]a,b[^2\times\mathbb{R}^+$.*

Preuve : Soit

$$\begin{array}{rccc} k: & [0,1] & \to & [a,b], \\ c: & [0,1] & \to & N, \end{array}$$

deux fonctions C^1 par morceaux, vérifiant $k(0)=t, k(1)=s, c(0)=x$ et $c(1)=y$.

On note $L((k,c))$, la longueur de la courbe (k,c) pour la métrique riemannienne g :

$$L((k,c)) = \int_0^1 \sqrt{(k'(t))^2 + f^2(k(t))h(c'(t),c'(t))}dt.$$

Quitte à modifier de manière arbitrairement petite $L((k,c))$, on peut supposer :

$$\forall t \in [0,1], \;\; c'(t) \neq 0.$$

En reparamétrant k et c de sorte que $c'(t) = 1$ pour tout t (on conserve, par abus, la notation k et c), on obtient :

$$L((k,c)) = \int_0^{L(c)} \sqrt{(k'(t))^2 + f^2(k(t))}dt,$$

avec $L(c)$ la longueur de la courbe c pour la métrique h. Par conséquent :

$$d((t,x),(s,y)) = \inf_k \int_0^{\delta(x,y)} \sqrt{(k'(t))^2 + f^2(k(t))}dt,$$

où la borne inférieure est prise sur les fonctions $k : [0,\delta(x,y)] \to [a,b]$, C^1 par morceaux et vérifiant : $k(0) = t$ et $k(\delta(x,y)) = s$. ■

À l'aide de ce lemme, la notion de produit tordu s'étend naturellement aux espaces métriques :

Définition 2.1.8 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ continue, avec $f > 0$ sur $]a,b[$ et ϕ_f la fonction introduite dans le lemme 2.1.2. Soit (N,δ) un espace métrique.*

On appelle produit tordu (métrique) par f (ou f produit tordu), l'espace métrique :

$$]a,b[\times N,$$

munie de la distance :

$$\forall (s,x),(t,y) \in]a,b[\times N, \;\; d((s,x),(t,y)) = \phi_f(s,t,\delta(x,y)).$$

Dans le cas particulier où $f = \sin$ et $[a,b] = [0,\pi]$, que l'on appellera par la suite, “sinus produit tordu”, la distance “produit tordu” d vérifie :

$$\cos d((t,x),(s,y)) = \cos s \cos t + \sin s \sin t \cos \delta(x,y).$$

(Il suffit de considérer $(N,h) = (\mathbb{S}^{n-1}, can)$).

Les espaces métriques “sinus produit tordu” apparaissent comme une famille d'espaces modèles dans les théorèmes 3.0.6, 5.3.1 et 5.3.2.

2.2 Estimation de Sobolev uniforme

L'objet de cette partie est d'établir la proposition :

Proposition 2.2.1 (Gallot) *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte de dimension n, dont la courbure de Ricci vérifie : $Ric \geq (n-1)g$.*
Soit $\overline{f}$ une combinaison linéaire de fonctions propres du laplacien sur (M, g) :

$$\overline{f} = \sum_{i=1}^{k} a_i f_i,$$

avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $\Delta f_i = \lambda_i f_i$ pour tout $i \in \{1, .., k\}$.
Supposons que pour tout $i \in \{1, .., k\}$,

$$\lambda_i \leq n + \epsilon$$

avec $\epsilon > 0$, alors, il existe une fonction croissante $\tau(\epsilon)$, telle que pour tout $(M, g) \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}$ vérifiant les hypothèses ci-dessus,

$$||\overline{f}^2 + |d\overline{f}|^2||_\infty \leq (1 + \tau(\epsilon))(n + \epsilon + 1)||\overline{f}||_2^2.$$

La preuve essentiellement classique, repose sur une inégalité de Sobolev et le procédé d'itération de Moser.

La première étape consiste à établir une inégalité de Sobolev du type :

$$||f||_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \leq A||\nabla f||_{L^2} + B||f||_{L^2},$$

avec des coefficients A et B valables pour toute variété (M, g) de $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$.
La première inégalité de ce type est due à S. Gallot ([23]). Par la suite, S. Ilias a obtenu une inégalité similaire avec des coefficients plus simples ([30]) :

Théorème 2.2.1 (Ilias) *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte, de dimension $n \geq 3$, dont la courbure de Ricci vérifie : $Ric \geq (n-1)g$, alors :*
$\forall f \in H^1(M)$,

$$||f||^2_{\frac{2n}{n-2}} \leq \frac{4}{n(n-2)}||\nabla f||_2^2 + ||f||_2^2.$$

Remarque 2.2.1 *Nous rappelons que nous avons choisi comme convention :*

$$||f||^p_{L^p} = \frac{1}{\mathrm{vol}\,(M)} \int_M f^p(x) dv_g(x) \text{ pour } p < \infty.$$

L'idée de la preuve consiste à se ramener à une inégalité de Sobolev sur $\mathbb{S}^n$, due à T. Aubin ([2]) :
$\forall f \in H^1(\mathbb{S}^n)$,

$$||f||^2_{\frac{2n}{n-2}} \leq \frac{4}{n(n-2)}||\nabla f||_2^2 + ||f||_2^2.$$

Pour se ramener à des inégalités sur la sphère, S. Ilias utilise un principe de symétrisation dû à Faber-Krahn et généralisé par Bérard-Meyer aux variétés de $\mathcal{M}_{\rm n}$ (voir le chapitre 5 pour plus de détails) qui à une fonction f sur (M, g) associe une fonction f^* radiale sur $\mathbb{S}^n$ vérifiant :

$$||\nabla f||_{L^p} \geq ||\nabla f^*||_{L^p} \text{ pour } p \text{ réel } \geq 1$$

et

$$||f||_{L^p} = ||f^*||_{L^p} \text{ pour } p \text{ réel } \geq 1.$$

Pour la preuve, nous renvoyons à [30].

Iteration de Moser

Commençons par rappeler une formule dûe à Bochner.

Lemme 2.2.1 (Formule de Bochner) *Soit (M, g) une variété compacte et f une fonction lisse sur M.*

$$g(d(\Delta f), df) = |\operatorname{Hess} f|^2 + Ric(\nabla f, \nabla f) + \frac{1}{2}\Delta(|df|^2).$$

Pour une preuve, nous renvoyons à [22].

À l'aide de ce lemme et du théorème 2.2.1, nous sommes en mesure de démontrer la proposition 2.2.1.
La méthode de démonstration que nous allons utiliser à été introduite par J. Moser (voir [25], pages 179,180), puis adaptée à ce contexte par S. Gallot ([24]). Elle peut être utilisée dans des cas divers et nous renvoyons à [7] pour un exposé plus complet.
Pour la preuve, nous suivons une démonstration due à E. Aubry ([3]).

Preuve : L'idée de la preuve est de plonger isométriquement M dans une variété M' en s'inspirant du plongement canonique de $\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$. En prolongeant convenablement les fonctions propres $(f_i)_{1\leq i\leq k}$, on définit un fibré sur le fibré tangent de M' que l'on peut restreindre à un fibré au dessus de M. On utilise ensuite la formule de Bochner et la méthode introduite par Moser.

Le plongement que l'on considère a été introduit par S. Gallot ([21]), nous renvoyons à son article pour une démonstration des propriétés de (M', g') :
On plonge isométriquement la variété (M, g) dans une variété $M' = M \times [0, +\infty[$ munie de la métrique $g' = dr^2 + r^2 g$.
En identifiant TM' à $TM \oplus \mathbb{R}\frac{\partial}{\partial r}$, la connection de Levi-Civita D' de M' vérifie les relations suivantes :

$$\forall ((X,0),(Y,0)) \in TM'^2 \quad \begin{aligned} &D'_X Y = D_X Y - rg(X,Y)\tfrac{\partial}{\partial r}, \\ &D'_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial r} = 0, \\ &D'_{\frac{\partial}{\partial r}} X = D'_X \frac{\partial}{\partial r} = \tfrac{X}{r}. \end{aligned}$$

De plus, comme $Ric \geq (n-1)g$, on a l'inégalité :

$$Ric(M', g') \geq 0.$$

On prolonge les fonctions de M à M' par :

$$\begin{array}{rcl} F & : & (M', g') \to \mathbb{R} \\ & & (x, r) \mapsto rf(x) \end{array}$$

Si f est une fonction propre de (M, g) de valeur propre λ, alors :

$$\Delta' F = \frac{\lambda - n}{r^2} F. \tag{2.2}$$

On remarque également que $\Delta'|d'F|^2 = \Delta|d'F|^2$ en restriction à $M \times \{1\}$ car $|d'F|^2$ ne dépend pas de r.

La restriction du fibré T^*M' à $M \times \{1\}$ peut être vue comme un fibré ξ au-dessus de M. L'espace vectoriel $E = \mathrm{Vect}\{\mathrm{d'F_i}\}_{1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{k}}$ est alors un sous-espace de l'ensemble des sections de ξ.
Si $(f_i)_{1 \leq i \leq k}$ est une famille H^1-orthonormale de (M, g), alors la famille $(d'F_i)_{1 \leq i \leq k}$ est une famille de sections L^2-orthonormales de ξ.

Notons $\overline{F}$ le prolongement de $\overline{f}$ à M' comme ci-dessus.

$$|d'\overline{F}|^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i f_i\right)^2 + \left|\sum_{i=1}^{k} a_i df_i\right|^2$$

On estime $|||d'\overline{F}|^2||_\infty$ à l'aide du processus d'itération de Moser.
La formule de Bochner appliquée à $\overline{F}$ donne :

$$g'(d'(\Delta'\overline{F}), d'\overline{F}) = \frac{1}{2}\Delta'|d'\overline{F}|^2 + |D'd'\overline{F}|^2 + Ric(\nabla'\overline{F}, \nabla'\overline{F}),$$

soit en restriction à $M \times \{1\}$:

$$\frac{1}{2}\Delta|d'\overline{F}|^2 + |D'd'\overline{F}|^2 \leq |d'(\Delta'\overline{F})||d'\overline{F}|.$$

Or, l'équation (2.2) implique :

$$\Delta'\overline{F} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i - n}{r^2} a_i F_i,$$

d'où, en restriction à $M \times \{1\}$:

$$\begin{array}{rcl} |d'\Delta'\overline{F}| & = & |\sum_{i=1}^k (\lambda_i - n) a_i (d'F_i - 2f_i dr)| \\ & \leq & |\sum_{i=1}^k (\lambda_i - n) a_i d'F_i| + 2|\sum_{i=1}^k (\lambda_i - n) a_i f_i dr| \\ & \leq & 3|\sum_{i=1}^k (\lambda_i - n) a_i d'F_i|. \end{array}$$

On en déduit :

$$\frac{1}{2}\Delta|d'\overline{F}|^2 + |D'd'\overline{F}|^2 \leq 3|\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i - n)a_i d'F_i| \times |d'\overline{F}|. \tag{2.3}$$

Pour tout r $\in [1, +\infty]$, on pose

$$A_r = \sup_{s \in E} \frac{||S||_r}{||S||_2}.$$

Soit S ($S = \sum_{i=1}^{k} a_i d'F_i$) un élément quelconque de E, posons $u = \sqrt{|S|^2 + \epsilon^2}$ pour $\epsilon > 0$. La fonction u est alors C^∞ et l'inégalité de Cauchy-Schwartz ainsi que l'inégalité de Kato implique :

$$\left|d\left(\sqrt{|S|^2 + \epsilon^2}\right)\right|^2 \leq \frac{|D'S|^2|S|^2}{|S|^2 + \epsilon^2} \leq |D'S|^2.$$

On en déduit par (2.3) :

$$u\Delta u = \frac{1}{2}\Delta(u^2) + |du|^2 \leq \frac{1}{2}\Delta(|S|^2) + |D'S|^2 \leq 3\left|\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i - n)a_i d'F_i\right| \times u. \tag{2.4}$$

Comme u est une fonction strictement positive, on obtient pour $p > \frac{1}{2}$:

$$\int_M |d(u^p)|^2 = \int_M p^2 u^{2p-2}|du|^2 = \frac{p^2}{2p-1}\int_M < d(u^{2p-1}), du >,$$

puis, (2.4) donne :

$$\int_M |d(u^p)|^2 = \frac{p^2}{2p-1}\int_M \Delta u u^{2p-1} \leq \frac{3p^2}{2p-1}\int_M \left|\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i - n)a_i d'F_i\right| \times u^{2p-1},$$

c'est-à-dire, d'après l'inégalité de Hölder :

$$||d(u^p)||_2 \leq \frac{\sqrt{3}p}{\sqrt{2p-1}}\sqrt{||\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i - n)a_i d'F_i||_{2p}||u||_{2p}^{2p-1}}.$$

En appliquant à la fonction u^p, l'inégalité de Sobolev du théorème 2.2.1, on obtient :

$$||u^p||^2_{\frac{2n}{n-2}} \leq C(n)\frac{3p^2}{2p-1}||\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i - n)a_i d'F_i||_{2p}||u||_{2p}^{2p-1} + ||u^p||_2^2.$$

or, $||u^p||_2^2 = ||u||_{2p}^{2p}$ et $||u^p||^2_{\frac{2n}{n-2}} = ||u||^{2p}_{\frac{2pn}{n-2}}$, d'où en faisant tendre ϵ vers 0, il vient :

$$||S||^{2p}_{\frac{2pn}{n-2}} \leq \left(\sqrt{\frac{3C(n)p^2}{2p-1}}\sqrt{||\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i - n)a_i d'F_i||_{2p}||S||_{2p}^{2p-1}} + ||S||_{2p}^{p}\right)^2$$

$$||S||^p_{\frac{2pn}{n-2}} \leq p\sqrt{\frac{3C(n)}{2p-1}}\sqrt{||\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i - n)a_i d'F_i||_{2p}||S||^{2p-1}_{2p}} + ||S||^p_{2p}.$$

Par définition de A_{2p} :

$$\begin{array}{rcl} ||\sum_{i=1}^k(\lambda_i - n)a_i d'F_i||_{2p} & \leq & A_{2p}||\sum_{i=1}^k(\lambda_i - n)a_i d'F_i||_2 \\ & \leq & A_{2p}\,\epsilon\,||S||_2 \end{array}$$

d'où :

$$||S||^p_{\frac{2pn}{n-2}} \leq p\sqrt{\frac{3C(n)}{2p-1}}\sqrt{\epsilon\, A^{2p}_{2p}||S||^{2p}_2} + A^p_{2p}||S||^p_2,$$

$$||S||_{\frac{2pn}{n-2}} \leq \left(1 + \frac{C'(n)p\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{2p-1}}\right)^{\frac{1}{p}} A_{2p}||S||_2.$$

L'inégalité étant valable pour tout élément S de E, on en déduit :

$$A_{\frac{2pn}{n-2}} \leq \left(1 + \frac{C'(n)p\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{2p-1}}\right)^{\frac{1}{p}} A_{2p}.$$

Si on pose successivement $p = \beta^j$ avec $\beta = \frac{n}{n-2} > 1$ dans cette inégalité, on trouve pour $m \geq 1$:

$$A_{2\beta^m} \leq \prod_{j=0}^{m-1}\left(1 + C'(n)\beta^{\frac{j}{2}}\sqrt{\epsilon}\right)^{\frac{1}{\beta^j}}.$$

M étant compacte, $A_r \to A_\infty$ lorsque $r \to +\infty$, donc :

$$A_\infty \leq (1 + \tau(\epsilon)).$$

■

Remarque 2.2.2 *Les fonctions propres de la sphère $\mathbb{S}^n$ associées à la valeur propre n sont les fonctions $\cos d_x$, $x \in \mathbb{S}^n$, par conséquent elles vérifient :*

$$f^2 + |df|^2 = 1.$$

Le fait de disposer sur $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$ d'une inégalité de Sobolev :

$$||f||_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \leq A(n)||\nabla f||_{L^2} + B(n)||f||_{L^2}$$

avec $B(n) = 1$, nous a permis d'établir une majoration "presque optimale". Cette presque optimalité nous sera utile dans ce qui suit (voir par exemple la preuve du lemme 3.1.1).

2.3 Lemme de Toponogov L^2

Commençons par énoncer une première propriété des variétés de $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$, dont le début du spectre est presque “minimal”.

Proposition 2.3.1 *Soit (M,g) une variété riemannienne de dimension n, dont la courbure de Ricci vérifie : $Ric \geq (n-1)g$. Notons $\lambda_1(M)$ la première valeur propre non nulle du laplacien de (M,g) et f une fonction propre associée à $\lambda_1(M)$.*
Alors :

$$\lambda_1(M) \geq n.$$

De plus, si l'on suppose :

$$\lambda_1(M) \leq n + \epsilon,$$

alors, il existe une constante positive $C(n)$, telle que, pour tout $(M,g) \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}$:

$$||\,\mathrm{Hess}\, f + fg||_{L^2(M)} \leq C(n)\, \epsilon^{\frac{1}{2}}\, ||f||_{L^2(M)}.$$

Remarque 2.3.1 *L'inégalité $\lambda_1(M) \geq n$ est dû à A. Lichnerowicz ([33]).*

Est-il possible de déduire des informations plus géométriques de cette estimation du hessien ?
La réponse est positive et elle est due à J. Cheeger et T. Colding ([14]) :

Lemme 2.3.1 (Toponogov L^2) *Soit $(M,g) \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}$. Il existe des constantes ne dépendant que de n : $C_{2.3.1}(n)$ et $\tilde{C}_{2.3.1}(n)$ telles que, pour x_1 et x_2 appartenant à M et $r_1, r_2 > 0$ (on note $B_i := B(x_i, r_i)$) et pour toute fonction continue f sur M, on aît :*

$$\frac{1}{\mathrm{vol}\,(B_1 \times B_2)} \int_{B_1 \times B_2} \left(\oint_{\gamma_{xy}} f^2 \right) dxdy \leq C_{2.3.1}(n) \left(\frac{1}{\mathrm{vol}\ B_1} + \frac{1}{\mathrm{vol}\ B_2} \right) \int_M f^2(x)dx.$$

On obtient en particulier pour $r_1 = r_2 = r$:

$$\frac{1}{\mathrm{vol}\,(B_1 \times B_2)} \int_{B_1 \times B_2} \left(\oint_{\gamma_{xy}} f^2 \right) dxdy \leq \frac{\tilde{C}_{2.3.1}(n)}{V(r)} \frac{1}{\mathrm{vol}\,(M)} \int_M f^2(x)dx.$$

Remarque 2.3.2 *La notation $V(r)$ désigne le volume d'une boule géodésique de $\mathbb{S}^n$ de rayon r.*
La notation $B_1 \times B_2$ désigne en réalité le sous-ensemble de mesure pleine de ce produit, constitué par les couples admettant une unique géodésique minimisante les reliant (notée γ_{xy}).

En appliquant ce lemme à la fonction $|\operatorname{Hess} f + fg|$ et en remarquant que, pour une géodésique paramétrée par longueur d'arc :

$$|(f\circ\gamma_{xy})''(t) + f\circ\gamma_{xy}(t)|^2 \leq |\operatorname{Hess} f + fg|^2,$$

on en déduit, avec les notations du lemme 2.3.1 :

$$\frac{1}{\operatorname{vol}(B_1\times B_2)}\int_{B_1\times B_2}\int_0^{d(x,y)} |(f\circ\gamma_{xy})''(t) + f\circ\gamma_{xy}(t)|^2 dt dx dy \leq$$
$$C_{2.3.1}(n)\left(\frac{1}{\operatorname{vol} B_1}+\frac{1}{\operatorname{vol} B_2}\right)\int_M |\operatorname{Hess} f + fg|^2(x)dx. \quad (2.5)$$

D'où, en utilisant la proposition 2.3.1 :

Lemme 2.3.2 *Il existe des fonctions $r(\epsilon)$ et $\tau'(\epsilon)$ telles, que pour toute variété riemannienne (M,g) de dimension n, dont la courbure de Ricci vérifie : Ric $\geq (n-1)g$ et dont la première valeur propre non nulle du laplacien de (M,g) vérifie :*

$$\lambda_1(M) \leq n+\epsilon,$$

alors, pour tout $u,v\in M$, on a l'inégalité :

$$\frac{1}{\operatorname{vol}(B(u,r(\epsilon))\times B(v,r(\epsilon)))}\int_{B(u,r(\epsilon))\times B(v,r(\epsilon))}\left(\int_0^{d(x,y)} |(f\circ\gamma_{xy})''(t) + f\circ\gamma_{xy}(t)|^2 dt\right) dx dy \leq \tau'(\epsilon),$$

où f désigne une fonction propre associée à $\lambda_1(M)$ et normalisée par $||f||^2_{L^2(M)} = \frac{1}{n+1}$.

Preuve : D'après le lemme de Toponogov L^2, dans le cas où les boules ont même rayon, il suffit de considérer $r(\epsilon)$ tel que :

$$\frac{\tau(\epsilon)}{V(r(\epsilon))} \leq \sqrt{\tau(\epsilon)}.$$

$\tau'(\epsilon) := \sqrt{\tau(\epsilon)}$ convient. ■

En utilisant l'inégalité de Bienaimé-Tchebitchev, on en déduit l'énoncé suivant, auquel nous ferons souvent appel :

Lemme 2.3.3 *Il existe des fonctions $r(\epsilon)$ et $\tau'(\epsilon)$ telles, que pour toute variété riemannienne (M,g) de dimension n, dont la courbure de Ricci vérifie : Ric $\geq (n-1)g$ et dont la première valeur propre non nulle du laplacien de (M,g) vérifie :*

$$\lambda_1(M) \leq n+\epsilon,$$

alors $\forall\, u,v \in M$, $\exists\, \tilde u,\tilde v \in M$, tels que :
- il existe une unique géodésique minimisante γ entre $\tilde u$ et $\tilde v$,
- $d(u,\tilde u)\leq r(\epsilon)$, $d(v,\tilde v)\leq r(\epsilon)$ et

$$\int_0^{d(\tilde u,\tilde v)} |(f\circ\gamma)''(t) + f\circ\gamma(t)|^2 dt \leq \tau'(\epsilon),$$

où f désigne une fonction propre associée à $\lambda_1(M)$ et normalisée par $||f||^2_{L^2(M)} = \frac{1}{n+1}$.

Ce lemme signifie que pour deux points quelconques d'une variété appartenant à $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$, il existe deux points proches (indépendamment de la variété) reliés par une unique géodésique minimisante telle que, le long de cette géodésique, la fonction propre vérifie presque la même équation différentielle que dans la situation analogue sur la sphère.
Plus précisément, il existe un sous-ensemble de mesure relative grande du produit des boules, tel que tout couple de points appartenant à ce sous-ensemble vérifie les conditions ci-dessus ; il est donc possible d'exiger simultanément de telles conditions pour plusieurs fonctions propres dont la valeur propre est inférieure à $n+\epsilon$.

Passons à la démonstration de la proposition 2.3.1 :
Preuve : On applique la formule de Bochner (lemme 2.2.1) à la fonction propre f :

$$-\frac{1}{2}\Delta|df|^2 = Ric(\nabla f,\nabla f) + |\,\mathrm{Hess}\, f|^2 - < d(\Delta f), df > .$$

On obtient après intégration et utilisation de l'hypothèse sur la courbure :

$$0 \geq (n-1-\lambda)\ \frac{1}{\mathrm{vol\ M}}\int_{\mathrm{M}}|df|^2 + \frac{1}{\mathrm{vol\ M}}\int_{\mathrm{M}}|\,\mathrm{Hess}\, f|^2.$$

Or $\mathrm{Hess}\, f = (\mathrm{Hess}\, f + \frac{\lambda}{n} fg) - \frac{\lambda}{n} fg$, donc, le premier terme étant de trace nulle, on obtient :

$$|\,\mathrm{Hess}\, f|^2 = |\,\mathrm{Hess}\, f + \frac{\lambda}{n} fg|^2 + \frac{\lambda^2}{n} f^2.$$

On en déduit :

$$0 \geq ((n-1-\lambda)\lambda + \frac{\lambda^2}{n})\ \frac{1}{\mathrm{vol\ M}}\int_{\mathrm{M}} f^2 + \frac{1}{\mathrm{vol\ M}}\int_{\mathrm{M}}|\,\mathrm{Hess}\, f + \frac{\lambda}{n} fg|^2.$$

D'où :

$$\frac{1}{\mathrm{vol\ M}}\int_{\mathrm{M}}|\,\mathrm{Hess}\, f + \frac{\lambda}{n} fg|^2 \leq ((n-1)\lambda + \lambda^2(\frac{1}{n}-1))\ \frac{1}{\mathrm{vol\ M}}\int_{\mathrm{M}} f^2,$$

$$\frac{1}{\mathrm{vol\ M}}\int_{\mathrm{M}}|\,\mathrm{Hess}\, f + \frac{\lambda}{n} fg|^2 \leq (n-1)\frac{\lambda}{n}(\lambda-n)\ \frac{1}{\mathrm{vol\ M}}\int_{\mathrm{M}} f^2.$$

On conclut, en remarquant que :

$$|\,\mathrm{Hess}\, f + fg| \leq |\,\mathrm{Hess}\, f + \frac{\lambda}{n} fg| + |\frac{\lambda}{n} - 1||fg|$$

$$|\,\mathrm{Hess}\, f + fg|^2 \leq 2(|\,\mathrm{Hess}\, f + \frac{\lambda}{n} fg|^2 + \frac{\epsilon^2}{n} f^2).$$

D'où le résultat. ■

Remarque 2.3.3 *Dans le cas où* $\lambda_1(M) = n$*, la démonstration prouve que :*

$$\operatorname{Hess} f + fg = 0,$$

ce qui implique, par un théorème de M. Obata ([34]) que (M, g) *est isométrique à* $(\mathbb{S}^n, can)$.

Démontrons maintenant le lemme de Toponogov L^2 :

Preuve : Notons $\pi(\vec{u})$ la projection sur le point base de $\vec{u}$. Notons $\theta(s,\vec{u})$ (respectivement $\bar{\theta}(s)$), la densité de la forme volume le long de la géodésique issue de $\pi(\vec{u})$ et de vitesse initiale $\vec{u}$ sur M (respectivement sur $\mathbb{S}^n$). Notons $\overline{xy} := d(x,y)$. Pour des raisons de symétrie, il suffit de majorer :

$$\frac{1}{\operatorname{vol}(B_1 \times B_2)} \int_{B_1 \times B_2} \int_{\frac{\overline{xy}}{2}}^{\overline{xy}} f^2(\gamma_{xy}(s))ds.$$

On omet dans le reste de la preuve l'indice de γ.

Sous ces hypothèses de courbure, on a pour $s \geq \frac{\overline{xy}}{2}$, l'inégalité (voir [22], pour une preuve) :

$$\theta(\overline{xy}, \vec{u}) \leq \theta(s, \vec{u}) \times \sup_{\{s; \frac{\overline{xy}}{2} \leq s \leq \overline{xy}\}} \frac{\bar{\theta}(\overline{xy})}{\bar{\theta}(s)}.$$

Notons :
$I(\vec{u}) := \{t \in [0, \overline{xy}]\ ; \gamma(t) \in B_2$ et $\gamma|_{[0,t]}$ est minimisante $\}$,
$T(\vec{u}) := \sup\{t\ ; \gamma|_{[0,t]}$ est minimisante$\}$.

Ce qui donne :

$$\theta(\overline{xy}, \vec{u}) \int_{\frac{\overline{xy}}{2}}^{\overline{xy}} f^2(\gamma(s))ds \leq \left(\sup_{\{s; \frac{\overline{xy}}{2} \leq s \leq \overline{xy}\}} \frac{\bar{\theta}(\overline{xy})}{\bar{\theta}(s)} \right) \int_{\frac{\overline{xy}}{2}}^{\overline{xy}} f^2(\gamma(s))\theta(s,\vec{u})ds$$

$$\int_{I(\vec{u})} \theta(\overline{xy}, \vec{u}) \int_{\frac{\overline{xy}}{2}}^{\overline{xy}} f^2(\gamma(s))ds \leq \left(\sup_{\{s,l; 0 \leq \frac{l}{2} \leq s \leq l \leq \pi\}} \frac{\bar{\theta}(l)}{\bar{\theta}(s)} \right) \pi \int_0^{T(\vec{u})} f^2(\gamma(s))\theta(s,\vec{u})ds$$

On note $C(n) = \sup_{\{s,l; 0 \leq \frac{l}{2} \leq s \leq l \leq \pi\}} \frac{\bar{\theta}(l)}{\bar{\theta}(s)}$.

$$\frac{1}{\operatorname{vol} B_1} \int_{SB_1} \int_{I(\vec{u})} \theta(\overline{xy}, \vec{u}) \int_{\frac{\overline{xy}}{2}}^{\overline{xy}} f^2(\gamma(s))ds \leq C(n)\pi \int_M f^2(x)dx$$

On intègre en réalité sur tout les points de B_2 admettant un point de B_1 pour lequel il n'y a qu'une seule géodésique minimisante les reliant, d'où :

$$\frac{1}{\operatorname{vol}(B_1 \times B_2)} \int_{B_1 \times B_2} \int_{\frac{\overline{xy}}{2}}^{\overline{xy}} f^2(\gamma_{xy}(s))ds \leq \frac{1}{\operatorname{vol}(B_2)} C(n)\pi \int_M f^2(x)dx.$$

Ce qui donne la première inégalité.
On obtient la seconde, en utilisant de nouveau le théorème de Bishop-Gromov avec $B(x_i, r)$ et M. ∎

2.3.1 Utilisation du lemme de Toponogov L^2

Nous allons rappeler un lemme de comparaison d'équations différentielles puis en déduire un premier exemple d'utilisation du lemme de Toponogov L^2 ; d'autres exemples seront présentés dans le prochain chapitre (en particulier le lemme 3.1.2).

un lemme de comparaison

On note $\tilde{u}_{a,b}$ (respectivement $u_{a,b}$) la solution de $u" + u = 0$ sur $[0, l]$ pour $l < \pi$, vérifiant les conditions initiales $u(0) = a$ et $u(l) = b$ (respectivement $u'(0) = b$).

Lemme 2.3.4 *Soit $v(t)$ et $Z(t)$ deux fonctions définies sur $[0, l]$. On suppose que $\int_0^l Z^2(t)dt < \epsilon^2$ et que v est solution de $v" + v = Z$ avec $|v(0) - a| < \eta$ et $|v'(0) - b| < \eta$. Alors, il existe une constante C telle que :*
$\forall t \in [0, l]$,

$$|v(t) - u_{a,b}(t)| < C(\epsilon + \eta)$$

et

$$|v'(t) - u'_{a,b}(t)| < C(\epsilon + \eta).$$

Preuve : Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, l]$.
On note $F(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{bmatrix}$ et

$$||F(t)||_\infty = \max\{|f(t)|, |f'(t)|\}.$$

L'équation

$$u" + u = Z \tag{2.6}$$

se résout explicitement par la méthode de la variation de la constante.
On obtient la solution générale suivante :

$$u(t) = \int_0^t \sin(t - s)Z(s)ds + \cos(t)u(0) + \sin(t)u'(0).$$

d'où :

$$u'(t) = \int_0^t \cos(t - s)Z(s)ds - \sin(t)u(0) + \cos(t)u'(0).$$

$v - u_{a,b}$ est solution de l'équation (2.6), on en déduit par l'inégalité de Holder :

$\forall t \in [0, l]$,

$$||V(t) - U_{a,b}(t)||_\infty \leq l^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^l Z^2(t)dt \right)^{\frac{1}{2}} + 2\eta$$

∎

Nous aurons besoin par la suite d'une version de ce lemme où nous disposons d'informations aux extrémités de la fonction (i.e $v(0)$ et $v(l)$). Dans ce cas, la solution de l'équation différentielle perturbée est proche d'une solution de l'équation initiale seulement si on impose une condition supplémentaire sur la longueur l de l'intervalle.

Lemme 2.3.5 *Soit $v(t)$ et $Z(t)$ deux fonctions définies sur $[0,l]$. On suppose que $\int_0^l Z^2(t)dt < \epsilon^2$ et que v est solution de $v" + v = Z$ avec $|v(0)-a| < \eta$ et $|v(l)-b| < \eta$. Il existe une constante C telle que :*
$\forall t \in [0,l]$,

$$|v(t) - \tilde{u}_{a,b}(t)| < \frac{C}{\sin(l)}(\epsilon + \eta)$$

et

$$|v'(t) - \tilde{u}'_{a,b}(t)| < \frac{C}{\sin(l)}(\epsilon + \eta).$$

Preuve : On conserve les notations de la démonstration du lemme (2.3.4).
La solution générale de l'équation

$$u" + u = Z \tag{2.7}$$

est :

$$u(t) = \int_0^t \sin(t-s)Z(s)ds + \cos(t)u(0) + \sin(t)u'(0).$$

$v - u_{v(0),v'(0)}$ est solution de (2.7) et par l'inégalité de Hölder :

$$||V - U_{v(0),v'(0)}(t)||_\infty \leq l^{\frac{1}{2}}\,\epsilon\,.$$

v est aussi solution de (2.7), donc, en particulier :

$$v(l) = \int_0^l \sin(l-s)Z(s)ds + \cos(l)v(0) + \sin(l)v'(0).$$

Soit $\tilde{u}_{v(0),v(l)}(t) = v(0)\cos(t) + \frac{v(l)-v(0)\cos(l)}{\sin(l)}\sin(t)$.
On a l'estimation :
$\forall t \in [0,l]$,

$$||U_{v(0),v'(0)}(t) - \tilde{U}_{v(0),v(l)}(t)||_\infty \leq \frac{l^{\frac{1}{2}}}{\sin(l)}\,\epsilon\,.$$

D'autre part :

$$\tilde{u}_{v(0),v(l)}(t) - \tilde{u}_{a,b}(t) = (v(0)-a)\cos(t) + \frac{(v(l)-b)-(v(0)-a)\cos(l)}{\sin(l)}\sin(t)$$

d'où, $\forall t \in [0,l]$,

$$||\tilde{U}_{v(0),v(l)}(t) - \tilde{U}_{a,b}(t)||_\infty \leq \left(\eta + \frac{2\eta}{\sin(l)}\right).$$

Par conséquent, comme :
$\forall t \in [0,l]$,

$$||V(t)-\tilde{U}_{a,b}(t)||_\infty \leq ||V(t)-U_{v(0),v'(0)}(t)||_\infty + \\ ||U_{v(0),v'(0)}(t)-\tilde{U}_{v(0),v(l)}(t)||_\infty + ||\tilde{U}_{v(0),v(l)}(t)-\tilde{U}_{a,b}(t)||_\infty,$$

on en déduit :

$$||V(t)-\tilde{U}_{a,b}(t)||_\infty \leq \frac{C}{\sin(l)}(\epsilon+\eta).$$

■

Exemple d'utilisation

Dans ce paragraphe, on fixe un élément $(M,g) \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}$ et une fonction propre f de (M,g) dont la valeur propre vérifie :

$$\lambda \leq n+\epsilon\,.$$

On normalise f par :

$$\frac{1}{\mathrm{vol}\,(M)}\int_M f^2 = \frac{1}{n+1}.$$

On conserve les notations $r(\epsilon)$ et $\tau'(\epsilon)$ introduites dans le lemme 2.3.3.
Soit u et v deux points de M.
On cherche à obtenir une estimation (indépendante de (M,g)) de f le long d'une géodésique adéquate dont les extrémités sont proches des points u et v.
Cette estimation sera valable pour des points ni trop proches, ni trop éloignés.
Le résultat est le suivant :

Lemme 2.3.6 *Il existe des fonctions $r(\epsilon), \tau'(\epsilon)$ et $\tau''(\epsilon)$ telles que, sous les hypothèses ci-dessus, si l'on suppose de plus :*

$$\arcsin\Big(\sqrt{\sqrt{\tau'(\epsilon)}+r(\epsilon)}\Big)+2r(\epsilon) \leq d(u,v) \leq \pi - \arcsin\Big(\sqrt{\sqrt{\tau'(\epsilon)}+r(\epsilon)}\Big)-2r(\epsilon), \quad (2.8)$$

alors il existe deux points $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$, reliés par une unique géodésique minimisante γ, vérifiant $d(u,\tilde{u}) \leq r(\epsilon)$, $d(v,\tilde{v}) \leq r(\epsilon)$ et tels que :

$$\left| f(\gamma(t)) - \left(f(u)\cos(t) + \frac{f(v)-f(u)\cos d(u,v)}{\sin d(u,v)}\sin(t)\right)\right| \leq \tau(\epsilon)$$

et

$$\left| (f\circ\gamma)'(t) - \left(-f(u)\sin(t) + \frac{f(v)-f(u)\cos d(u,v)}{\sin d(u,v)}\cos(t)\right)\right| \leq \tau(\epsilon).$$

Preuve : D'après le lemme 2.3.3, il existe des fonctions $r(\epsilon)$ et $\tau'(\epsilon)$ pour lesquelles il existe $x \in B(u, r(\epsilon))$ et $y \in B(v, r(\epsilon))$ tels que :

$$\int_0^{d(x,y)} |(f \circ \gamma_{xy})''(t) + f \circ \gamma_{xy}(t)|^2 dt \leq \tau'(\epsilon).$$

Par hypothèse sur $d(u, v)$, on a :

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{r(\epsilon) + \sqrt{\tau'(\epsilon)}}{\sin(d(x, y))} = 0.$$

D'après la proposition 2.2.1, il existe une constante $C(n)$, telle que :

$$|| \, |\nabla f| \, ||_{L^\infty} \leq C(n).$$

Par conséquent, le lemme 2.3.5 implique l'existence d'une fonction $\tau''(\epsilon)$, telle que : $\forall t \in [0, l]$,

$$\left| f \circ \gamma_{xy}(t) - \left(f(u) \cos(t) + \frac{f(v) - f(u) \cos d(u, v)}{\sin d(u, v)} \sin(t) \right) \right| \leq \tau''(\epsilon)$$

et

$$\left| (f \circ \gamma_{xy})'(t) - \left(-f(u) \sin(t) + \frac{f(v) - f(u) \cos d(u, v)}{\sin d(u, v)} \cos(t) \right) \right| \leq \tau''(\epsilon).$$

Donc $\tilde{u} := x$ et $\tilde{v} := y$ conviennent. ∎

Chapitre 3

Pincement du spectre du laplacien

Dans ce chapitre, toutes les variétés seront compactes, sans bord, de dimension $n \geq 2$ fixée, munie d'une métrique Riemanienne complète g, dont la courbure de Ricci vérifie l'inégalité : $Ric \geq (n-1)g$. On note $\mathcal{M}_n$ l'ensemble de ces variétés.
Rappelons le théorème 0.0.1 :

Théorème 3.0.1 $\forall (M,g) \in \mathcal{M}_n$ *:*

$$\mathrm{vol}\,(M,g) \leq \mathrm{vol}\,(\mathbb{S}^n, can),$$
$$\mathrm{Diam(M,g)} \leq \mathrm{Diam}(\mathbb{S}^{\mathrm{n}}, \mathrm{can}),$$
$$\lambda_1(M,g) \geq \lambda_1(\mathbb{S}^n, can).$$

De plus, en cas d'égalité dans l'une de ces inégalités, (M,g) est isométrique à $(\mathbb{S}^n, can)$*.*

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux variétés de $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$ dont le début du spectre est presque minimal.

Commençons par remarquer que la première valeur propre non nulle du laplacien d'une variété de $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$ est presque minimale si et seulement si le diamètre de cette variété est presque égal à π :

Théorème 3.0.2 (Cheng, [17]) *Pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe* $\eta > 0$ *tel que, pour toute variété riemannienne* $(M,g) \in \mathcal{M}_n$*,*

$$Diam(M,g) > \pi - \eta \Rightarrow \lambda_1(M,g) \leq n + \epsilon\,.$$

C. Croke prouva la réciproque de ce résulta en 1982 :

Théorème 3.0.3 (Croke, [20]) *Pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe* $\eta > 0$ *tel que, pour toute variété riemannienne* $(M,g) \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}$*,*

$$\lambda_1(M) \leq n + \eta \Rightarrow Diam(M,g) \geq \pi - \epsilon\,.$$

Résultats de stabilités

En 1996, T. Colding démontra une première version "L^2" du théorème de Toponogov (voir, par exemple [16], pour un énoncé). À l'aide de ce résultat et du théorème 0.0.2, il prouva un résultat de proximité, pour la distance de Gromov-Hausdorff, avec la sphère ([19], [18]).

Théorème 3.0.4 (Colding) *Il existe une fonction $\tau(\epsilon)$ ne dépendant que de la dimension n, telle que pour toute variété riemannienne $(M,g) \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}$:*

$$\mathrm{vol}\,(M,g) \geq \mathrm{vol}\,(\mathbb{S}^n) - \epsilon \Rightarrow d_{GH}(M,\mathbb{S}^n) \leq \tau(\epsilon).$$

Réciproquement :

$$d_{GH}(M,\mathbb{S}^n) \leq \epsilon \Rightarrow \mathrm{vol}\,(M,g) \geq \mathrm{vol}\,(\mathbb{S}^n) - \tau(\epsilon).$$

À l'aide d'un théorème de J. Cheeger et T. Colding (théorème 0.0.3 ou [15], théorème A.1.10), on en déduit alors le :

Théorème 3.0.5 (Cheeger-Colding) *Il existe $\epsilon(n) > 0$ tel que, toute variété riemannienne $(M,g) \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}$ dont le volume vérifie :* $\mathrm{vol}\,(M,g) \geq \mathrm{vol}\,(\mathbb{S}^n) - \epsilon(n)$ *est difféomorphe à $\mathbb{S}^n$.*

Par un théorème de comparaison de Bishop (voir le théorème 2.1.1 pour un énoncé plus précis), on montre qu'une variété appartenant à $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$, de volume presque maximal est de diamètre presque égal à π.

L'hypothèse de diamètre presque maximal (ou de manière équivalente, de première valeur propre non nulle du laplacien presque minimale) est effectivement plus faible puisqu'il existe (voir l'introduction ou le chapitre 4) une suite de variétés $(M_i, g_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}$, dont le diamètre tend vers π et telle que :

-M_i n'est pas homéomorphe à $\mathbb{S}^n$,

-(M_i, g) n'est pas proche, pour la distance de Gromov-Hausdorff, de $(\mathbb{S}^n, can)$.

Il existe, malgré tout, un résultat de proximité pour la distance de Gromov-Hausdorff, pour les variétés $(M,g) \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}$ dont le diamètre est presque maximal. Ce résultat est dû à J. Cheeger et T. Colding ([14]) :

Théorème 3.0.6 (Cheeger-Colding) *Il existe une fonction $\tau(\epsilon)$ telle que, toute variété riemannienne (M,g) de dimension n, dont la courbure de Ricci vérifie : $Ric \geq (n-1)g$ et telle que : $diam(M,g) > \pi - \epsilon$, vérifie la propriété suivante :*

Soit $x, y \in M$ tels que $d(x,y) > \pi - \epsilon$, alors il existe une sphère géodésique de M de centre x notée N et une distance d sur N telle que, en notant :
$[0,\pi] \times N$ l'espace métrique muni d'une structure de sinus produit tordu ;
p la projection de M sur N :

$$\begin{array}{ccc} (M,g) & \longrightarrow & N \\ z & \longmapsto & p(z) \end{array}$$

avec $p(z)$ tel que : $d(z,p(z)) = d(z,N)$;

l'application ϕ :

$$\begin{array}{ccc} (M,g) & \longrightarrow & [0,\pi]\times N \\ z & \longmapsto & (d(x,z),p(z)) \end{array}$$

est une $\tau(\epsilon)$-presque isométrie.

Remarque 3.0.4 *L'espace métrique (N,d) n'est pas unique, cependant les espaces métriques qui conviennent pour l'application ϕ, sont tous Gromov-Hausdorff proches.*

Quitte à pincer davantage de valeurs propres, il est possible d'obtenir des résultats de stabilité, pour la distance de Gromov-Hausdorff, avec la sphère canonique.
En 99, P. Petersen, en s'inspirant des résultats de T. Colding, a démontré ([37]) :

Théorème 3.0.7 (Petersen) *Pour toute variété riemannienne $(M,g) \in \mathcal{M}_{\rm n}$:*

$$\lambda_{n+1}(M) \simeq n \Leftrightarrow d_{GH}(M,S^n) \simeq 0.$$

Remarque 3.0.5 *P. Petersen démontre également les équivalences suivantes :*

$$\lambda_{n+1}(M) \simeq n \Leftrightarrow \operatorname{vol}(M,g) \simeq \operatorname{vol}(\mathbb{S}^n, can) \Leftrightarrow rad(M,g) \simeq \pi,$$

où $rad(M,g) := \inf_{x\in M}(\sup_{y\in M} d(x,y))$.

Remarque 3.0.6 *Nous avons rappelé au chapitre 2, que la première valeur propre non nulle de $(\mathbb{S}^n, can)$: n est de multiplicité $n+1$.*

En réinterprétant, les résultats de S.Y. Cheng et de C. Croke, on a l'équivalence :
Pour toute variété riemannienne $(M,g) \in \mathcal{M}_{\rm n}$:

$$diam(M) \simeq \pi \;\Leftrightarrow\; \exists\{p,q\} \subset M;\; d_{GH}(\{p,q\}, S^0) \simeq 0.$$

En comparant cette équivalence, à celle démontrée par P. Petersen, il est alors naturel de se demander si il n'existe pas un résultat intermédiaire entre ces deux-ci, qui établirait l'équivalence suivante :

$$\lambda_k(M) \simeq n \Leftrightarrow \exists A \subset M;\; d_{GH}(A, S^{k-1}) \simeq 0.$$

L'objet de ce chapite est la démonstration de ce résultat.
Nous allons démontrer, d'une part le

Théorème 3.0.8 *Soit $k \in \{2,..,n+1\}$. Il existe une fonction $\tau(\epsilon)$ telle que, toute variété riemannienne (M^n,g), dont la courbure de Ricci vérifie : $Ric \geq (n-1)g$ et telle que $\lambda_k(M) \leq n+\epsilon$, possède un sous-ensemble $A \subset M$, tel que $d_{GH}(A,S^{k-1}) \leq \tau(\epsilon)$.*

Puis :

Théorème 3.0.9 *Soit $k \in \{2, .., n+1\}$. Il existe une fonction $\tau(\eta)$ telle que, pour toute variété riemannienne (M^n, g), dont la courbure de Ricci vérifie : $Ric \geq (n-1)g$ et telle qu'il existe un sous-ensemble $A \subset M$ vérifiant $d_{GH}(A, S^{k-1}) \leq \eta$, alors*

$$\lambda_k(M) \leq n + \tau(\eta).$$

Les méthodes employées permettent de donner une nouvelle démonstration du résultat de P. Petersen :

Théorème 3.0.10 *Pour toute variété riemannienne $(M^n, g) \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}$:*

$$\lambda_{n+1}(M) \simeq n \Leftrightarrow d_{GH}(M, S^n) \simeq 0.$$

Organisation du chapitre

Soit $(M, g) \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}$ et f une fonction propre non constante sur M. Pour le reste de ce chapitre, on normalise f par :

$$||f||^2_{L^2(M)} = \frac{1}{\text{vol M}} \int_{\mathrm{M}} f^2 = \frac{1}{n+1}. \tag{3.1}$$

Pour démontrer le théorème 3.0.8, il suffit, d'après les résultats du chapitre 2 sur la distance de Gromov-Hausdorff, de définir une partie A de M et de construire une application $\Phi : A \to \mathbb{S}^{k-1}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{S}^{k-1}, \exists\, y \in A \text{ tel que } d_{\mathbb{S}^{k-1}}(x, \Phi(y)) < \tau(\epsilon) \tag{3.2}$$

et

$$\forall x, y \in A : |d(x, y) - d_{\mathbb{S}^{k-1}}(\Phi(x), \Phi(y))| < \tau(\epsilon). \tag{3.3}$$

Remarque 3.0.7 *On note d la distance sur A. Il s'agit a priori, de la restriction à $A \times A$ de la distance induite par la métrique riemannienne sur $M \times M$. Nous verrons dans la démonstration, qu'il est cependant possible de munir A de la distance intrinsèque d'une partie $A' \supset A$ et presque "égale" à A.*

Nous appellerons "propriété de $\tau(\epsilon)$ presque surjectivité", la propriété (3.2) et "propriété de $\tau(\epsilon)$ proximité métrique", la propriété (3.3).

Dans le cas de $(\mathbb{S}^n, can)$, les fonctions coordonnées (qui sont des fonctions propres de valeur propre n) fournissent un plongement isométrique d'une partie de $(\mathbb{S}^n, can)$ sur $\mathbb{S}^{k-1} \subset \mathbb{R}^k$:

$$\begin{array}{ccc} \{x \in \mathbb{S}^n ; X_1^2 + .. + X_k^2 = 1\} & \longrightarrow & \mathbb{S}^{k-1} \\ x & \longmapsto & (X_1, .., X_k)(x) \end{array}$$

Sous les hypothèses du théorème 3.0.8, en notant $(f_i)_{1\leq i\leq k}$ une base orthogonale de fonctions propres, on définit :

$$F = (f_1, .., f_k) \text{ et } \Phi = \frac{1}{\sqrt{f_1^2 + .. + f_k^2}} F. \tag{3.4}$$

Nous allons montrer qu'il existe une partie A de M telle que :

$$\Phi \text{ est une } \tau(\epsilon) \text{ presque isométrie de } A \text{ sur } \mathbb{S}^{k-1}.$$

Par analogie avec la sphère, nous allons montrer que pour $\tau(\epsilon)$ convenable, $A = \{x \in M; |(f_1^2 + .. + f_k^2)(x) - 1| < \tau(\epsilon)\}$ convient.

Le chapitre est organisé comme suit :

Dans une première partie, nous démontrerons qu'une fonction propre sur $(M, g) \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}$, correctement normalisée, dont la valeur propre est proche de n, est proche en norme L^∞ d'une fonction propre de la sphère de valeur propre n, transplantée sur M.

Dans une seconde partie, nous en déduirons que l'application Φ définie ci-dessus, vérifie sur une partie A convenable, la propriété de “presque surjectivité”.

Dans une troisième partie, nous montrerons que sur des variétés, appartenant à $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$, ayant un diamètre proche de π, certaines fonctions $\cos d_p$ $(p \in M)$ sont proches, en norme L^∞, de combinaisons linéaires de fonctions propres de M, ayant des valeurs propres proches de n.

Dans la quatrième partie, nous déduirons des propriétés de ces fonctions $\cos d_p$ que l'application Φ vérifie la propriété de “proximité métrique”, ce qui terminera la preuve du théorème 3.0.8. Nous expliquerons également comment obtenir une nouvelle preuve du théorème 3.0.10.

Dans la dernière partie, nous démontrerons, à l'aide des propriétés des fonctions $\cos d_p$ démontrées dans la troisième partie, le théorème 3.0.9. Nous terminerons la preuve du théorème 3.0.10.

3.1 Fonctions propres associées à une “petite” valeur propre

Nous allons montrer en utilisant le lemme de Toponogov L^2, qu'une fonction propre normalisée par (3.1), dont la valeur propre est approximativement égale à n est proche en norme L^∞ d'une fonction $\cos d_x, x \in M$.

Pour contrôler les conditions initiales de l'équation différentielle sous-jacente, nous aurons besoin d'une estimation due à P. Li et S.T. Yau ([32]), qui prouve que le gradient d'une fonction propre sur une variété de $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$ reste petit en norme, au voisinage des points réalisant les extréma de la fonction propre. Ce résultat ne peut découler directement d'une estimation sur le hessien de la fonction propre car on montre, en considérant des sphères rondes de rayon arbitrairement petit, que la norme L^∞ du hessien d'une fonction propre de norme 1, tend vers l'infini.

Proposition 3.1.1 (Li-Yau) *Soit (M^n, g) une variété riemannienne de dimension n, dont la courbure de Ricci vérifie : $Ric \geq (n-1)g$. Soit f une fonction propre de valeur propre λ, on suppose f normalisée par (3.1).*
On a alors l'estimation :

$$\forall x \in M \quad |\nabla f|^2(x) \leq \frac{2\lambda \sup_M f}{\sup_M f - \inf_M f}(\sup_M f - f(x))(f(x) - \inf_M f)$$

Preuve : On note $k := -\inf_M f$ et $K = \sup_M f$.
Soit $\eta > 0$ un réel.
Posons

$$v := \frac{f - \frac{K-k}{2}}{(1+\eta)(\frac{k+K}{2})},$$

cette fonction vérifie : $\Delta v = \lambda(v+a)$ où $a = \frac{K-k}{(1+\eta)(K+k)}$.
De plus, $\sup_M v = \frac{1}{1+\eta}$ et $\inf_M v = -\frac{1}{1+\eta}$.

On définit la fonction F sur M, par :

$$F = \frac{|\nabla v\ |^2}{1-v^2}.$$

Soit x_0 un point de M réalisant le maximum de F. Par le principe du maximum, on a :

$$\nabla F(x_0) = 0 \tag{3.5}$$

et

$$\Delta F(x_0) \geq 0. \tag{3.6}$$

Calculons le laplacien de F en fonction de v :

$$dF = \frac{1}{1-v^2} d(|\nabla v|^2) + \frac{2v|\nabla v|^2}{(1-v^2)^2} dv.$$

$$\begin{aligned} DdF = {} & \frac{4v}{(1-v^2)^2} dv \otimes d(|\nabla v|^2) + \frac{1}{1-v^2} \operatorname{Hess}(|\nabla v|^2) \\ & + |\nabla v|^2 \left(\frac{2dv \otimes dv}{(1-v^2)^2} + \frac{2v \operatorname{Hess} v}{(1-v^2)^2} + \frac{8v^2 dv \otimes dv}{(1-v^2)^3} \right). \end{aligned}$$

d'où :

$$\Delta F = \frac{-4v}{(1-v^2)^2}(g(d(|\nabla v|^2), dv)) + \frac{\Delta(|\nabla v|^2)}{1-v^2} + |\nabla v|^2 \left(-\frac{2|\nabla v|^2}{(1-v^2)^2} + \frac{2v\Delta v}{(1-v^2)^2} - \frac{8v^2|\nabla v|^2}{(1-v^2)^3} \right).$$

En remarquant que : (3.5) $\Leftrightarrow d(|\nabla v|^2) = -\frac{2v|\nabla v|^2}{1-v^2}dv$ en x_0, on en déduit :

$$g(d(|\nabla v|^2, dv)(x_0) = -\frac{2v|\nabla v|^4}{1-v^2}(x_0). \tag{3.7}$$

D'où :

$$\Delta F(x_0) = \frac{\Delta(|\nabla v|^2)}{1-v^2}(x_0) + |\nabla v|^2(x_0)\left(-\frac{2|\nabla v|^2}{(1-v^2)^2} + \frac{2v\Delta v}{(1-v^2)^2}\right)(x_0).$$

On utilise alors la formule de Bochner :

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla v|^2) = g(d(\Delta v), dv) - |\operatorname{Hess} v|^2 - Ric(\nabla v, \nabla v). \tag{3.8}$$

Ce qui donne en x_0 :

$$\Delta F = \frac{2}{1-v^2}\left(g(d(\Delta v), dv) - |\operatorname{Hess} v|^2 - Ric(\nabla v, \nabla v) - \frac{|\nabla v|^4}{1-v^2} + \frac{v\Delta v|\nabla v|^2}{1-v^2}\right).$$

Comme $\operatorname{Ric}(\nabla v, \nabla v) \geq 0$, (3.6) implique en x_0 :

$$\lambda|\nabla v|^2 - |\operatorname{Hess} v|^2 - \frac{|\nabla v|^4}{1-v^2} + \frac{v\Delta v|\nabla v|^2}{1-v^2} \geq 0. \tag{3.9}$$

Par Cauchy-Schwartz :

$$|g(d(|\nabla v|^2, dv)| \leq |d(|\nabla v|^2)||dv|.$$

Comme $d(|\nabla v|^2) = 2|\nabla v|d(|\nabla v|)$ et $d(|\nabla v|) \leq |\operatorname{Hess} v|$, on obtient à l'aide de (3.7) :

$$|\operatorname{Hess} v|^2(x_0) \geq \frac{|\nabla v|^4 v^2}{(1-v^2)^2}(x_0).$$

Ce qui donne en remplaçant dans (3.9), toujours au point x_0 :

$$\frac{|\nabla v|^4 v^2}{(1-v^2)^2} - \lambda|\nabla v|^2 \leq \frac{-|\nabla v|^4 + v\Delta v|\nabla v|^2}{1-v^2},$$

d'où, comme $\Delta v = \lambda(v+a)$,

$$\frac{|\nabla v|^2 v^2}{1-v^2} - \lambda(1-v^2) \leq -|\nabla v|^2 + \lambda v(v+a),$$

d'où,

$$\frac{|\nabla v|^2}{1-v^2}(x_0) \leq \lambda(1+a) \quad \text{(car } v \leq 1)$$
$$\Leftrightarrow F(x_0) \leq \lambda(1+a).$$

Par conséquent, on en déduit :

$$\forall x \in M, \quad F(x) \leq \lambda(1+a). \tag{3.10}$$

En substituant dans l'équation (3.10) :

$$v = \frac{f - \frac{K-k}{2}}{(1+\eta)(\frac{K+k}{2})} \text{ et } a = \frac{K-k}{(1+\eta)(K+k)},$$

puis en faisant tendre η vers 0, on obtient le résultat.

■

Remarque 3.1.1 *Soit f une fonction propre, de valeur propre non nulle $\lambda \leq n+\epsilon$, normalisée par :*

$$\frac{1}{\text{vol M}} \int_{\text{M}} f^2 = \frac{1}{n+1}.$$

Alors, pour ϵ assez petit, la proposition 2.2.1 implique l'existence d'une constante telle que :

$$\forall x \in M, f^2(x) + |df|^2(x) \leq C(n).$$

En particulier,

$$\sup_M f \leq \sqrt{C(n)}.$$

A l'aide du résultat précédent, nous allons montrer que la borne supérieure d'une fonction propre de valeur propre proche de n, normalisée par (3.1), est proche de 1, qui est la borne supérieure des fonctions propres de la sphère de valeur propre n et normalisées de la même façon (i.e. les fonctions coordonnées d'après (1.4)).

Lemme 3.1.1 *Il existe une fonction $\tau(\epsilon)$ ne dépendant que de n, telle que, pour toute variété riemannienne $(M^n, g) \in \mathcal{M}_{\text{n}}$ et toute fonction propre f sur M de valeur propre non nulle $\lambda \leq n+\epsilon$, normalisée par $\frac{1}{\text{vol M}} \int_{\text{M}} f^2 = \frac{1}{n+1}$, on a l'estimation :*

$$|\sup_M f - 1| \leq \tau(\epsilon).$$

Preuve : Par la minoration de Lichnerowicz de la première valeur propre non nulle, λ vérifie :

$$n \leq \lambda \leq n+\epsilon,$$

donc, par choix de la normalisation de f :

$$1 \leq \frac{1}{\text{vol M}} \int_{\text{M}} f^2 + |df|^2 \leq 1 + \frac{\epsilon}{n+1}. \tag{3.11}$$

Or, d'après la proposition 2.2.1, f vérifie :

$$\forall x \in M \quad f^2(x) + |df|^2(x) \leq (1+\tau(\epsilon))(n+\epsilon+1)||f||_2^2.$$

c'est-à-dire :
$$\forall x \in M \;\; f^2(x) + |df|^2(x) \leq 1 + \tau(\epsilon).$$
Ainsi, $f^2 + |df|^2$ est majorée par une quantité environ égale à sa moyenne, par conséquent $f^2 + |df|^2$ est L^1 proche de sa moyenne :
$$\forall x \in M \quad - f^2(x) - |df|^2(x) + \frac{1}{\text{vol M}} \int_{\text{M}} f^2 + |df|^2 + \tau(\epsilon) \geq 0$$
et
$$\frac{1}{\text{vol M}} \int_{\text{M}} \left(-f^2(x) - |df|^2(x) + \frac{1}{\text{vol M}} \int_{\text{M}} f^2 + |df|^2 + \tau(\epsilon) \right) \leq \tau(\epsilon).$$
D'où par (3.11) :
$$\frac{1}{\text{vol M}} \int_{\text{M}} |1 - f^2(x) - |df|^2(x)| \leq \tau(\epsilon).$$

Soit x vérifiant $f(x) = \sup_M f$. D'après le corollaire 2.1.1 du théorème de Bishop-Gromov, il existe $R(\epsilon)$, $\tau'(\epsilon)$ ne dépendant que de n et $\tilde{x}$ vérifiant $d(x, \tilde{x}) \leq R(\epsilon)$, tels que :
$$|f^2(\tilde{x}) + |df|^2(\tilde{x}) - 1| \leq \tau'(\epsilon).$$

D'après la proposition 3.1.1 :
$$|df|^2(\tilde{x}) \leq \tau(\epsilon),$$
d'où :
$$|f(\tilde{x}) - 1| \leq \tau(\epsilon).$$
Ce qui donne l'estimation sur $f(x)$ puisque d'après la proposition 2.2.1 :
$$|| \, |\nabla f| \, ||_\infty \leq C(n),$$
avec $C(n)$ une constante ne dépendant que de n. ■

Montrons maintenant la proximité d'une fonction propre de petite valeur propre avec une fonction propre de la sphère.

Lemme 3.1.2 *Il existe des fonction $\tau(\epsilon)$ et $\psi(\epsilon)$ telles que, pour toute variété riemannienne $(M, g) \in \mathcal{M}_{\text{n}}$ et toute fonction propre f de valeur propre non nulle $\lambda \leq n + \epsilon$, normalisée par (3.1), on a l'estimation :*
$$||cosd_x - f||_\infty \leq \tau_{3.1.2}(\epsilon),$$
avec $x \in M$ tel que $f(x) = \sup_M f$.

De plus, x admet une "presque antipode" y vérifiant $f(y) = \inf_M f$:
$$d(x, y) > \pi - \psi_{3.1.2}(\epsilon).$$

Preuve : Ce lemme découle du lemme de Toponogov L^2 introduit dans le paragraphe 2.3.

De l'hypothèse sur la valeur propre, on déduit (proposition 2.3.1) :

$$|| \operatorname{Hess} f + fg||_{L^2} \le \tau(\epsilon).$$

Puis, en appliquant le lemme 2.3.3, avec x, comme dans l'énoncé, fixé :

$\forall\, u\, \in M,\ \exists\, \tilde{u}, \tilde{x}\ \in M$, tels que :
- il existe une unique géodésique minimisante γ reliant $\tilde{x}$ à $\tilde{u}$,
- $d(u,\tilde{u}) \le r(\epsilon)$, $d(x,\tilde{x}) \le r(\epsilon)$ et

$$\int_0^{d(\tilde{x},\tilde{u})} |(f\circ\gamma)''(t) + f\circ\gamma(t)|^2 dt \le \tau(\epsilon). \tag{3.12}$$

Nous allons maintenant estimer les conditions initiales $f\circ\gamma(0)$ et $(f\circ\gamma)'(0)$ afin d'appliquer le lemme de comparaison de solutions d'équations différentielles 2.3.4.
Par le lemme 3.1.1 :

$$|\sup_M f - 1| \le \tau_2(\epsilon).$$

De plus, par la proposition 2.2.1, il existe une constante $C(n)$ ne dépendant que de n telle que :

$$||\nabla f||_\infty \le C(n),$$

donc comme $\tilde{x}$ est proche de x, on en déduit l'existence d'une fonction $\tau_3(\epsilon)$ telle que :

$$|f\circ\gamma(0) - 1| \le \tau_3(\epsilon). \tag{3.13}$$

D'autre part, par la proposition 3.1.1, il existe une fonction $\tau_4(\epsilon)$ telle que :

$$|\nabla f|(\tilde{x}) \le \tau_4(\epsilon),$$

d'où :

$$|(f\circ\gamma)'(0)| \le \tau_4(\epsilon). \tag{3.14}$$

Grâce à (3.12), (3.13) et (3.14), le lemme 2.3.4 appliqué à $f\circ\gamma$ et cos, implique l'existence d'une fonction $\tau_5(\epsilon)$ telle que :

$$\forall t \in [0, d(\tilde{x},\tilde{u})]\ \ |f\circ\gamma(t) - \cos(t)| \le \tau_5(\epsilon). \tag{3.15}$$

$$\forall t \in [0, d(\tilde{x},\tilde{u})]\ \ |(f\circ\gamma)'(t) + \sin(t)| \le \tau_5(\epsilon). \tag{3.16}$$

En particulier,

$$|f(\tilde{u}) - \cos(d(\tilde{x},\tilde{u}))| \le \tau_5(\epsilon).$$

Or, comme $\tilde{x}$ est proche de x, $\tilde{u}$ est proche de u et le gradient de f vérifie :

$$||\nabla f||_\infty \le C(n),$$

on en déduit l'existence d'une fonction $\tau_6(\epsilon)$ telle que :

$$||f - \cos d(x,.)||_\infty \leq \tau_6(\epsilon).$$

Montrons maintenant la deuxième partie de l'énoncé.
Soit y vérifiant $f(y) = \inf_M f$ et soit $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ comme ci-dessus.
D'après (3.16) :

$$|(f \circ \gamma)'(d(\tilde{x},\tilde{y})) + \sin(d(\tilde{x},\tilde{y}))| \leq \tau_5(\epsilon).$$

Mais $\tilde{y}$ est proche de y qui est un point réalisant le minimum de f, donc par la proposition 3.1.1 apliquée à $\tilde{y}$:

$$|\nabla f|(\tilde{y}) \leq \tau_4(\epsilon),$$

par conséquent $(f \circ \gamma)'(d(\tilde{x},\tilde{y}))$ est petit et donc, il existe une fonction $\tau_7(\epsilon)$, telle que :

$$|\sin(d(\tilde{x},\tilde{y}))| \leq \tau_7(\epsilon).$$

Or par le lemme 3.1.1 (et comme $\inf_M f \leq 0$) :

$$\sup_M f - \inf_M f \geq 1 - \tau_{3.1.1}(\epsilon).$$

Donc, comme :

$$||\nabla f||_\infty \leq C(n),$$

il existe une constante $C'(n) > 0$ telle que, pour ϵ assez petit :

$$d(x,y) > C'(n).$$

Les points x et y sont nécessairement à distance presque π. ■

3.2 Propriété de " presque surjectivité"

Avant de démontrer la propriété de "presque surjectivité" pour Φ, nous allons établir, grâce au lemme 3.1.2, un résultat intermédiaire :

Proposition 3.2.1 *Soit $k \in \{2,..,n+1\}$. Il existe une fonction $\tau_{3.2.1}(\epsilon)$ telle que, pour toute variété riemannienne $(M,g) \in \mathcal{M}_\mathrm{n}$, vérifiant $\lambda_k(M) \leq n+\epsilon$, il existe des points de M : $x_1,..,x_k$ et $y_1,..,y_k$ tels que :*
$\forall i \in \{1..k\}$,

$$|d(x_i,y_i) - \pi| \leq \tau_{3.2.1}(\epsilon),$$

$\forall\, i,j \in \{1,..,k\}, i \neq j$,

$$|d(x_i,x_j) - \frac{\pi}{2}| \leq \tau_{3.2.1}(\epsilon),$$

$$|d(x_i,y_j) - \frac{\pi}{2}| \leq \tau_{3.2.1}(\epsilon),$$

$$|d(y_i,y_j) - \frac{\pi}{2}| \leq \tau_{3.2.1}(\epsilon).$$

De plus, ces points vérifient : $f_i(x_i) = \sup_M f_i$ et $f_i(y_i) = \inf_M f_i$ avec $(f_i)_{1\leq i\leq k}$ une famille orthogonale de fonctions propres associées à $(\lambda_i(M))_{1\leq i\leq k}$ et normalisées par (3.1).

Ces couples de points correspondent, dans le cas modèle, aux couples formés de k vecteurs orthogonaux $(e_i)_{1\leq i\leq k}$ d'une sous-variété $\mathbb{S}^{k-1}$ de $\mathbb{S}^n$ et des k vecteurs opposés $(-e_i)_{1\leq i\leq k}$.

Cette proposition implique le résultat suivant (que nous n'utiliserons pas dans ce chapitre) qui nous sera utile dans le chapitre 5, il est dû à S. Gallot ([24]).

Corollaire 3.2.1 (Gallot) *Il existe une constante $C(n) > 0$ telle que :*

$$\forall\,(M,g) \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}\,,\ \ \lambda_{n+2}(M) \geq n + C(n).$$

Preuve : Dans [24], S. Gallot déduit ce résultat de la proposition 2.2.1. Nous proposons une autre démonstration, plus géométrique, qui utilise également la proposition 2.2.1.

Supposons l'énoncé du corollaire 3.2.1 faux, alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $(M,g) \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}$ telle que $\lambda_{n+2}(M) < n+\epsilon$.
Or, par le théorème 3.0.10, il existe une fonction $\tau(\epsilon)$ telle que, toute variété riemannienne (M,g) de $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$, pour laquelle $\lambda_{n+1}(M) \leq n+\epsilon$, vérifie :

$$d_{GH}(M,\mathbb{S}^n) \leq \tau(\epsilon).$$

À l'aide de ce résultat et de la proposition 3.2.1, on obtient l'existence d'une fonction $\tau_2(\epsilon)$ et de $n+2$ couples de points $(x_1,y_1),..,(x_{n+2},y_{n+2}) \in (\mathbb{S}^n)^2$ tels que :
$\forall i,j \in \{1,..,n+2\}, i \neq j,\ \ |d(x_i,y_i)-\pi| \leq \tau_2(\epsilon),\ |d(x_i,x_j)-\frac{\pi}{2}| \leq \tau_2(\epsilon)$ etc..
Ce qui est absurde pour ϵ assez petit. ■

3.2.1 Démonstration de la proposition 3.2.1

Preuve : Soit $(x_i)_{1\leq i\leq k}$ et $(y_i)_{1\leq i\leq k}$ définis par :

$$f_i(x_i) = \sup_M f_i \text{ et } f_i(y_i) = \inf_M f_i,$$

avec $(f_i)_{1\leq i\leq k}$ définis comme ci-dessus.
D'après le lemme 3.1.2,

$$\forall i \in \{1..k\},\ \ d(x_i,y_i) > \pi - \psi_{3.1.2}(\epsilon).$$

Nous allons montrer l'existence d'une fonction $\tau(\epsilon)$, telle que :

$$\forall\, i,j \in \{1,..,k\}, i\neq j,\ \ |d(x_i,x_j) - \frac{\pi}{2}| \leq \tau(\epsilon). \tag{3.17}$$

Admettons provisoirement ce résultat, on en déduit les autres estimations à l'aide d'un lemme sur la fonction "excess", dû à K. Grove et P. Petersen ([27]) :

Lemme 3.2.1 (Grove-Petersen) *: Il existe une fonction $\tau_{3.2.1}(\epsilon)$ telle que, pour toute variété riemannienne $(M,g) \in \mathcal{M}_{\rm n}$ et pour tout $p,q \in M$, vérifiant :*

$$d(p,q) \geq \pi - \epsilon,$$

on ait :

$$e_{p,q}(M) := \sup_{x\in M}(d(p,x) + d(q,x) - d(p,q)) \leq \tau_{3.2.1}(\epsilon).$$

D'après ce lemme, il existe une fonction $\tau_2(\epsilon)$, telle que :

$$\forall\, i,j \in \{1,..,k\}, i \neq j \quad |d(x_j,y_j) - d(x_i,x_j) - d(x_i,y_j)| \leq \tau_2(\epsilon),$$

donc par (3.17), il existe une fonction $\tau_3(\epsilon)$ telle que :

$$|d(x_i,y_j) - \frac{\pi}{2}| \leq \tau_3(\epsilon).$$

On déduit de manière similaire l'estimation sur $d(y_i,y_j)$.

Démontrons maintenant l'estimation (3.17) :
Fixons $i,j \in \{1,..,k\}, i \neq j$.
Notons

$$h := f_i f_j + < df_i, df_j > .$$

Par hypothèse sur les fonctions $(f_i)_{1\leq i\leq k}$:

$$\frac{1}{\text{vol M}} \int_{\rm M} h = 0.$$

Calculons la différentielle de h :

$$dh = f_j df_i + f_i df_j + \text{Hess}\, f_i(\nabla f_j, .) + \text{Hess}\, f_j(\nabla f_i, .),$$

$$dh = (\text{Hess}\, f_i + f_i g)(\nabla f_j, .) + (\text{Hess}\, f_j + f_j g)(\nabla f_i, .).$$

Donc

$$|dh|^2 \leq 2\left(||\,\text{Hess}\, f_i + f_i g||^2 \times ||\nabla f_j||^2 + ||\,\text{Hess}\, f_j + f_j g||^2 \times ||\nabla f_i||^2\right).$$

Or, par la proposition 2.3.1, il existe une fonction $\tau_4(\epsilon)$, telle que :

$$\forall s \in \{1,..,k\}, \quad ||\,\text{Hess}\, f_s + f_s g||_{L^2(M)} \leq \tau_4(\epsilon).$$

D'autre part, par la proposition 2.2.1, il existe une constante $C(n)$ telle que :

$$\forall s \in \{1,..,k\}, \quad ||\,|\nabla f_s|\,||_\infty \leq C(n). \tag{3.18}$$

Donc, on en déduit, l'existence d'une fonction $\tau_5(\epsilon)$ telle que :

$$\frac{1}{\text{vol M}} \int_{\rm M} |dh|^2 \leq \tau_5(\epsilon).$$

Nous allons en déduire que pour beaucoup de points x, $|h(x)|$ est petit.

En appliquant l'inégalité de Poincaré à la fonction h de moyenne nulle, on obtient puisque $\lambda_1(M) \geq n$, l'existence d'une fonction $\tau_6(\epsilon)$ telle que :

$$\frac{1}{\text{vol M}} \int_{\text{M}} h^2 \leq \tau_6(\epsilon).$$

Par conséquent, d'après le corollaire 2.1.1 du théorème de Bishop-Gromov :

$$\exists \tau_7(\epsilon), \exists R(\epsilon);\ \forall x \in M, \exists \tilde{x} \text{ tel que } d(x,\tilde{x}) < R(\epsilon) \text{ et } |h(\tilde{x})| \leq \tau_7(\epsilon).$$

Pour $x = x_j$, on remarque, d'après la proposition 3.1.1, qu'il existe une constante $C'(n)$ telle que :

$$|\nabla f_j|(\tilde{x}_j) \leq C'(n)R(\epsilon),$$

puisque $f_j(x_j) = \sup_M f_j$.

D'autre part, avec les notation de (3.18) :

$$\forall s \in \{1,..,k\} \ \ ||\,|\nabla f_s|\,||_\infty \leq C(n).$$

On en déduit qu'il existe une fonction $\tau_8(\epsilon)$ telle que :

$$|h(\tilde{x}_j) - f_i(\tilde{x}_j) f_j(\tilde{x}_j)| \leq \tau_8(\epsilon).$$

Mais, par le lemme 3.1.2 :

$$||\cos d_{x_j} - f_j||_\infty \leq \tau_{3.1.2}(\epsilon),$$

d'où :

$$|f_j(\tilde{x}_j) - 1| \leq C(n)R(\epsilon) + \tau_{3.1.2}(\epsilon).$$

Par conséquent, il existe une fonction $\tau_9(\epsilon)$, telle que :

$$|f_i(\tilde{x}_j)| \leq \tau_9(\epsilon).$$

D'où le résultat, en appliquant de nouveau le lemme 3.1.2.

■

3.2.2 Démonstration de la "presque surjectivité"

Soit $(M,g) \in \mathcal{M}_{\text{n}}$, s un entier et $\eta > 0$ un réel.
Soit $f_1,..,f_s$ une famille orthogonale de fonctions propres sur M, normalisées par (3.1), on note :

$$A^s_\eta := \{x \in M;\ |f_1^2(x) + .. + f_s^2(x) - 1| < \eta\}.$$

Proposition 3.2.2 *Soit $k \in \{2,..,n+1\}$. Il existe des fonctions $\eta(\epsilon)$ et $\tau_{3.2.2}(\epsilon)$ telles que, pour tout $(M,g) \in \mathcal{M}_{\text{n}}$, vérifiant $\lambda_k(M) \leq n + \epsilon$, on a la propriété suivante :*

$$\forall X \in \mathbb{S}^{k-1},\ \exists x \in A^k_{\eta(\epsilon)} \text{ vérifiant } ||\Phi(x) - X||_{\mathbb{R}^k} \leq \tau_{3.2.2}(\epsilon).$$

Preuve : Soit $f_1,..,f_k$ une famille orthogonale de fonctions propres, normalisées par :

$$\forall i\in\{1,..,k\}\quad \frac{1}{\text{vol M}}\int_{\text{M}} f_i^2=\frac{1}{n+1},$$

et vérifiant :

$$\Delta f_i=\lambda_i(M)f_i.$$

Φ est défini par :

$$\Phi=\frac{1}{\sqrt{f_1^2+..+f_k^2}}F$$

et

$$F=(f_1,..,f_k).$$

Donc pour tout $x\in A^k_{\eta(\epsilon)}$:

$$||\Phi(x)-F(x)||_{\mathbb{R}^k}\leq\frac{\max\{1-\sqrt{1-\eta(\epsilon)},\sqrt{1+\eta(\epsilon)}-1\}}{\sqrt{1-\eta(\epsilon)}}.$$

Par conséquent, il suffit de démontrer la proposition 3.2.2 pour F.
La preuve repose sur une récurrence finie.
Soit $s\in\{2,..,k-1\}$.
Dans la suite, on identifie $\{x\in\mathbb{S}^{k-1};x=(a_1,..,a_s,0,..,0)\}$ avec $\mathbb{S}^{s-1}$.
Nous allons d'abord montrer qu'il existe des fonctions $\eta_2(\epsilon)$ et $\psi_2(\epsilon)$ telles que :

$$\forall X\in\mathbb{S}^1,\ \exists x\in A^2_{\eta_2(\epsilon)}\text{ vérifiant }||(f_1,f_2)(x)-X||_{\mathbb{R}^2}\leq\psi_2(\epsilon).\tag{3.19}$$

Nous montrerons ensuite :

Lemme 3.2.2 *Supposons qu'il existe des fonctions $\eta_s(\epsilon)$ et $\psi_s(\epsilon)$ telles que :*

$$\forall X\in\mathbb{S}^{s-1},\ \exists x\in A^s_{\eta_s(\epsilon)}\ \textit{vérifiant}\ ||(f_1,..,f_s)(x)-X||_{\mathbb{R}^s}\leq\psi_s(\epsilon)$$

alors il existe des fonctions $\eta_{s+1}(\epsilon)$ et $\psi_{s+1}(\epsilon)$ telles que :

$$\forall X\in\mathbb{S}^s,\ \exists x\in A^{s+1}_{\eta_{s+1}(\epsilon)}\ \textit{vérifiant}\ ||(f_1,..,f_{s+1})(x)-X||_{\mathbb{R}^{s+1}}\leq\psi_{s+1}(\epsilon).$$

Commençons par la preuve de (3.19).
Soit $(x_1,y_1),..,(x_k,y_k)$ les points introduits dans la proposition 3.2.1.
Montrons d'abord que x_1,y_1,x_2,y_2 appartiennent à A^2_η pour η dépendant de ϵ convenable. c'est-à-dire que : $(f_1,f_2)(x_1)\simeq(1,0),(f_1,f_2)(x_2)\simeq(0,1)$ etc...

Par les lemmes 3.1.1 et 3.1.2, il existe une fonction $\tau(\epsilon)$ telle que :
$\forall i\in\{1,..,k\}$,

$$|f_i(x_i)-1|\leq\tau(\epsilon)$$

et

$$|f_i(y_i)+1|\leq\tau(\epsilon).$$

Par la proposition 3.2.1, il existe une fonction $\tau_2(\epsilon)$ telle que :
$\forall i, j \in \{1, .., k\}$, $i \neq j$,

$$|d(x_i, x_j) - \frac{\pi}{2}| \leq \tau_2(\epsilon)$$

et

$$|d(x_i, y_j) - \frac{\pi}{2}| \leq \tau_2(\epsilon),$$

d'où, par le lemme 3.1.2, l'existence d'une fonction $\tau_3(\epsilon)$ telle que :
$\forall i, j \in \{1, .., k\}$, $i \neq j$,

$$|f_i(x_j)| \leq \tau_3(\epsilon)$$

et

$$|f_i(y_j)| \leq \tau_3(\epsilon).$$

On en déduit qu'il existe une fonction $\eta(\epsilon)$ telle que $x_1, y_1, x_2, y_2 \in A^2_{\eta(\epsilon)}$.
Montrons maintenant qu'il existe des fonctions $\eta_2(\epsilon)$ et $\psi_2(\epsilon)$ telles que :

$$\forall X \in \mathbb{S}^1,\ \exists x \in A^2_{\eta_2(\epsilon)} \text{ vérifiant } ||(f_1, f_2)(x) - X||_{\mathbb{R}^2} \leq \psi_2(\epsilon).$$

Pour celà, on considère des géodésiques minimisantes entre les couples de points :
$(x_1, x_2), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (y_1, y_2)$ et on montre que leur image par (f_1, f_2) est presque surjective sur le sous-ensemble $\mathbb{S}^1$ ci-dessus.
La preuve est identique pour les quatre couples de points, nous n'en traiterons qu'un.

Soit c une géodésique minimisante de x_1 à x_2.
Par le lemme 3.1.2 :

$$||\cos d_{x_i} - f_i||_\infty \leq \tau_{3.1.2}(\epsilon) \quad \text{pour } i \in \{1, 2\}.$$

D'où :

$$\forall t \in [0, d(x_1, x_2)], \quad |\cos t - f_1(c(t))| \leq \tau_{3.1.2}(\epsilon).$$

Comme $d_{x_1}(c(t)) + d_{x_2}(c(t)) = d(x_1, x_2)$, on a par la proposition 3.2.1 :

$$\left| d_{x_2}(c(t)) - \left(\frac{\pi}{2} - d_{x_1}(c(t)) \right) \right| \leq \tau_2(\epsilon),$$

en appliquant le théorème des accroissements finis, on obtient :

$$\forall t \in [0, d(x_1, x_2)], \quad |\cos d_{x_2}(c(t)) - \sin t| \leq \tau_2(\epsilon).$$

Par conséquent, on en déduit :
$\forall t \in [0; \frac{\pi}{2} - \tau_2(\epsilon)]$,

$$||(f_1, f_2)(c(t)) - (\cos t, \sin t)||_{\mathbb{R}^2} \leq ((\tau_{3.1.2}(\epsilon))^2 + (\tau_{3.1.2}(\epsilon) + \tau_2(\epsilon))^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On note $\tau_4(\epsilon) = ((\tau_{3.1.2}(\epsilon))^2 + (\tau_{3.1.2}(\epsilon) + \tau_{3.2.1}(\epsilon))^2)^{\frac{1}{2}}$.
Quitte à augmenter légèrement $\tau_4(\epsilon)$, on a donc démontré l'existence d'une fonction $\psi_2(\epsilon)$, telle que :

$$\forall t \in [0; \frac{\pi}{2}],\ \exists y \in c([0, d(x_1, x_2)]);\ ||(f_1, f_2)(y) - (\cos t, \sin t)||_{\mathbb{R}^2} \leq \psi_2(\epsilon).$$

Par l'inégalité triangulaire, $\eta_2(\epsilon) = \tau_4(\epsilon)(2 + \tau_4(\epsilon))$ convient.

Preuve du lemme 3.2.2

Commençons par démontrer le résultat suivant :
Pour toute fonction $\eta(\epsilon)$, il existe une fonction $\theta(\epsilon)$ telle que, pour tout $s \in \{2,..,k-1\}$:

$$A^s_{\eta(\epsilon)} \subset A^{s+1}_{\theta(\epsilon)}. \tag{3.20}$$

Ce résultat est une conséquence d'un lemme démontré par P. Petersen ([37]) :

Lemme 3.2.3 (Petersen) *Il existe une fonction $\tau_{3.2.3}(\epsilon)$ telle que, pour toute variété riemannienne $(M,g) \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}$, vérifiant $\lambda_k(M) \leq n+\epsilon$, on a l'estimation :*

$$\forall x \in M, \quad f_1^2(x) + .. + f_k^2(x) \leq 1 + \tau_{3.2.3}(\epsilon),$$

avec $(f_i)_{\{1 \leq i \leq k\}}$ une famille orthogonale de fonctions propres de M, de valeurs propres $\lambda_i(M)$ et normalisées par :

$$\forall i \in \{1,..,k\} \quad \frac{1}{\text{vol M}} \int_{\mathrm{M}} f_i^2 = \frac{1}{n+1}.$$

En effet, soit $x \in A^s_{\eta(\epsilon)}$, alors :

$$f_1^2(x) + .. + f_s^2(x) \geq 1 - \eta(\epsilon),$$

par le lemme 3.2.3, on en déduit :

$$f_{s+1}^2(x) \leq \tau_{3.2.3}(\epsilon) + \eta(\epsilon). \tag{3.21}$$

Par conséquent, par l'inégalité triangulaire :

$$|f_1^2(x) + .. + f_{s+1}^2(x) - 1| \leq 2\eta(\epsilon) + \tau_{3.2.3}(\epsilon)$$

et x appartient à $A^{s+1}_{2\eta(\epsilon)+\tau_{3.2.3}(\epsilon)}$.

Démontrons maintenant le lemme 3.2.3 :
Preuve : Fixons un point x_0 de M. Il suffit d'appliquer la proposition 2.2.1 en choisissant comme coefficients : $a_i = \frac{f_i(x_0)}{\sqrt{\sum_{i=1}^k f_i^2(x_0)}}$. Pour ce choix, on a $\sum_{i=1}^k {a_i}^2 = 1$ et on obtient le résultat en prenant $x = x_0$ dans l'estimation du lemme. ■

Fixons $s \in \{2,..,k-1\}$ et supposons qu'il existe des fonctions $\eta_s(\epsilon)$ et $\psi_s(\epsilon)$ telles que :

$$\forall X \in \mathbb{S}^{s-1}, \exists x \in A^s_{\eta_s(\epsilon)} \text{ vérifiant } ||(f_1,..,f_s)(x) - X||_{\mathbb{R}^s} \leq \psi_s(\epsilon).$$

Soit $Y = (\cos s_1, .., \cos s_{s+1}) \in \mathbb{S}^s$.
Il faut distinguer deux cas :
-soit $|\sin s_{s+1}| < \mu(\epsilon)$,
-soit $|\sin s_{s+1}| \geq \mu(\epsilon)$,

avec $\mu(\epsilon)$ petit, qui sera définit plus loin.

Si $|\sin s_{s+1}| < \mu(\epsilon)$, comme pour tout $i \in \{1, .., s\}$: $d(x_i, x_{s+1}) \simeq \frac{\pi}{2}$ et $d(x_i, y_{s+1}) \simeq \frac{\pi}{2}$, le lemme 3.1.2 implique l'existence d'une fonction $\tau_5(\epsilon)$ telle que :

$$||(f_1, .., f_{s+1})(\alpha) - Y||_{\mathbb{R}^{s+1}} \leq \tau_5(\epsilon),$$

avec $\alpha = x_{s+1}$ si $s_{s+1} \simeq 0$ et $\alpha = y_{s+1}$ sinon.

On suppose maintenant que : $|\sin s_{s+1}| \geq \mu(\epsilon)$.

On définit :

$$X = (\frac{\cos s_1}{\sin s_{s+1}}, .., \frac{\cos s_s}{\sin s_{s+1}}) \in \mathbb{S}^{s-1}.$$

Par hypothèse de récurrence, il existe $x_0 \in A^s_{\eta_s(\epsilon)}$ telle que :

$$||(f_1, .., f_s)(x_0) - X||_{\mathbb{R}^s} \leq \psi_s(\epsilon). \tag{3.22}$$

D'après (3.20), $A^s_{\eta_s(\epsilon)} \subset A^{s+1}_{\theta(\epsilon)}$.

D'après le lemme 3.1.2, $f_{s+1} \simeq \cos d_{x_{s+1}}$ donc, comme $x_0 \in A^s_{\eta_s(\epsilon)}$, (3.21) implique l'existence d'une fonction $\tau_6(\epsilon)$ telle que :

$$|\cos d_{x_{s+1}}(x_0)| \leq \tau_6(\epsilon).$$

Par conséquent, par l'inégalité des accroissements finis :

$$|\frac{\pi}{2} - d_{x_{s+1}}(x_0)| \leq \tau_6(\epsilon). \tag{3.23}$$

Nous allons maintenant utiliser le lemme de Toponogov L^2, aux voisinages des points x_0 et x_{s+1}. En appliquant le lemme 2.3.3 aux fonctions f_i pour $i \in \{1, .., s+1\}$, on en déduit :

il existe $\tilde{x}_0$ avec $d(\tilde{x}_0, x_0) < r(\epsilon)$ et $\tilde{x}_{s+1}$ avec $d(x_{s+1}, \tilde{x}_{s+1}) < r(\epsilon)$ tels que, si on note γ l'unique géodésique minimisante reliant $\tilde{x}_{s+1}$ à $\tilde{x}_0$ et $u_i := f_i \circ \gamma$ pour $i \in \{1, .., s+1\}$ alors :

$$\int_0^{d(\tilde{x}_0, \tilde{x}_{s+1})} |u_i''(t) + u_i(t)|^2 dt \leq \tau'(\epsilon).$$

Pour $i \in \{1, .., s\}$, les conditions aux extrémités sont :

$$u_i(0) = f_i(\tilde{x}_{s+1}) \tag{3.24}$$

et

$$u_i(d(\tilde{x}_{s+1}, \tilde{x}_0)) = f_i(\tilde{x}_0). \tag{3.25}$$

Or, d'une part :

$$|f_i(\tilde{x}_{s+1})| \leq |f_i(\tilde{x}_{s+1}) - f_i(x_{s+1})| + ||f_i - \cos d_{x_i}||_\infty + |\cos d_{x_i}(x_{s+1})|,$$

donc
$$|f_i(\tilde{x}_{s+1})| \le C_{2.2.1}(n)r(\epsilon) + \tau_{3.1.2}(\epsilon) + \tau_{3.2.1}(\epsilon)$$
et d'autre part :
$$\left| f_i(\tilde{x}_0) - \frac{\cos s_i}{\sin s_{s+1}} \right| \le |f_i(\tilde{x}_0) - f_i(x_0)| + \left| f_i(x_0) - \frac{\cos s_i}{\sin s_{s+1}} \right|$$
donc
$$|f_i(\tilde{x}_0) - \frac{\cos s_i}{\sin s_{s+1}}| \le C_{2.2.1}(n)r(\epsilon) + \psi_s(\epsilon).$$
Notons $\overline{u}_i(t) = \frac{\cos s_i}{\sin s_{s+1}} \sin(t)$.
Alors, en utilisant (3.23) :
$$|\overline{u}_i(\frac{\pi}{2}) - \overline{u}_i(d(\tilde{x}_{s+1}, \tilde{x}_0))| \le \frac{\tau_6(\epsilon) + 2r(\epsilon)}{\mu(\epsilon)}.$$
On fixe $\mu(\epsilon) = \sqrt{\tau_6(\epsilon) + 2r(\epsilon)}$.

D'après (3.24) et (3.25), il existe une fonction $\tau_7(\epsilon)$ telle que :
$$|u_i(0) - \overline{u_i}(0)| \le \tau_7(\epsilon)$$
et
$$|u_i(d(\tilde{x}_{s+1}, \tilde{x}_0)) - \overline{u_i}(d(\tilde{x}_{s+1}, \tilde{x}_0))| \le \tau_7(\epsilon).$$
D'après (3.23), on peut supposer ϵ assez petit pour que $l = d(\tilde{x}_{s+1}, \tilde{x}_0)$ vérifie l'hypothèse du lemme 2.3.6, par conséquent en appliquant ce lemme aux fonctions u_i et $\overline{u}_i$, on obtient l'existence d'une fonction $\tau_8(\epsilon)$ telle que :
$$\forall i \in \{1, s\}, \forall t \in [0; d(\tilde{x}_{s+1}, \tilde{x}_0)] \;\; |f_i \circ \gamma(t) - \frac{\cos s_i}{\sin s_{s+1}} \sin(t)| \le \tau_8(\epsilon).$$
Le lemme 3.1.2 permet d'estimer f_{s+1} :
$$|f_{s+1}(\gamma(t)) - \cos t| \le \tau_{3.1.2}(\epsilon) + r(\epsilon).$$
En combinant ces résultats, on obtient l'existence d'une fonction $\tau_9(\epsilon)$, telle que :
$\forall t \in [0, d(\tilde{x}_{s+1}, \tilde{x}_0)]$,
$$||(f_1, .., f_{s+1})(\gamma(t)) - \left((\cos s_1, .., \cos s_s, 0)\frac{\sin t}{\sin s_{s+1}} + (0, .., 0, \cos t) \right) ||_{\mathbb{R}^{s+1}} \le \tau_9(\epsilon).$$
D'où, si on suppose $s_{s+1} \le \frac{\pi}{2}$, on obtient pour $T = \min\{d(\tilde{x}_{s+1}, \tilde{x}_0), s_{s+1}\}$:
$$\begin{aligned} &||(f_1, .., f_{s+1})(\gamma(T)) - (\cos s_1, .., \cos s_s, \cos s_{s+1})||_{\mathbb{R}^{s+1}} \\ &\quad \le \tau_9(\epsilon) + \left|\left| \left((\cos s_1, .., \cos s_s, 0) \left(\frac{\sin T}{\sin s_{s+1}} - 1 \right) + \right.\right.\right. \\ &\qquad\qquad \left.\left.\left. (0, .., 0, 1)(\cos T - \cos s_{s+1}) \right) \right|\right|_{\mathbb{R}^{s+1}} . \end{aligned}$$

Or, comme par (3.23) :

$$d(\tilde{x}_{s+1}, \tilde{x}_0) \geq \frac{\pi}{2} - \tau_6(\epsilon) - 2r(\epsilon),$$

la proposition est démontrée dans ce cas.

Si $s_{s+1} \geq \frac{\pi}{2}$, il suffit de remplacer dans tout ce qui précède x_{s+1} par y_{s+1}.

■

3.3 Propriétés des fonctions $\cos d_p$

Sur la sphère canonique, toute fonction (propre) $\cos d_p$ est une combinaison linéaire d'une base de fonctions propres associées à la valeur propre n (voir le paragraphe 1.2.1). Précisément, si $(x_i)_{1\leq i\leq n+1}$ est une base orthonormée de l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\forall p \in \mathbb{S}^n,\ \cos d_p = \sum_{i=1}^{n+1} \cos d(p, x_i) \cos d_{x_i}. \tag{3.26}$$

En particulier si p appartient à $\mathbb{S}^{k-1}$ (en identifiant $\mathbb{S}^{k-1}$ à la partie de $\mathbb{S}^n$ dont seules les k premières coordonnées sont non nulles), seuls les p premiers termes de la somme ci-dessus sont non nuls.

Dans la section 3.1, nous avons montré qu'une fonction propre sur $(M, g) \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}$ associée à une valeur propre presque égale à n, était proche en norme L^∞ d'une fonction cosinus de la distance à un point convenable. L'objet de cette section est de prouver une "réciproque " à ce résultat, en prouvant que toute fonction cosinus de la distance à un point qui admet une "presque antipode" (i.e. un point qui est à distance presque π) est proche en norme L^∞ d'une combinaison linéaire de fonctions propres de (M, g) dont les valeurs propres sont presques égales à n.

Dans [19], T. Colding a utilisé le fait que la moyenne, sur une variété $(M, g) \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}$, de fonctions trigonométriques appliquées à une fonction distance à un point, admettant une presque antipode, était presque égale à la moyenne de la fonction correspondante sur $(\mathbb{S}^n, can)$. En utilisant Bishop-Gromov et la formule de la coaire, E. Aubry montre que celà est vrai pour toute fonction régulière ([3]) :

Lemme 3.3.1 (Aubry) *Il existe une constante $C_{3.3.1}(n)$ telle, que pour toute variété riemannienne $(M^n, g) \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}$, admettant deux points p et q, vérifiant $d(p, q) > \pi - \eta$ et pour toute fonction $u\ : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ de classe C^1, on a :*

$$\left| \frac{1}{\mathrm{vol\ M}} \int_{\mathrm{M}} u \circ d_p\, dv - \frac{1}{\mathrm{vol}\ \mathbb{S}^{\mathrm{n}}} \int_{\mathbb{S}^{\mathrm{n}}} u \circ d_{\mathbb{S}^n}(\overline{p}, .)\, dx \right| \leq C_{3.3.1}(n)\eta \int_0^\pi |u'(r)| dr.$$

Remarque 3.3.1 *On obtient en particulier que $\frac{1}{\mathrm{vol}\,(M)} \int_M \cos^2 d_p \simeq \frac{1}{n+1}$ pour $d(p, q) \simeq \pi$.*

Preuve : Nous suivrons la preuve de [3].

Notons : $L(r) = \text{vol}_{n-1}(S(p,r))$ le volume de la sphère géodésique de centre p et de rayon r et $V(r) = \text{vol}(B(p,r))$. On note $\overline{L}(r)$ et $\overline{V}(r)$ les volumes correspondants sur $\mathbb{S}^n$.

En appliquant la formule de la co-aire (voir [11], pour un énoncé), on en déduit que la fonction $r \to V(r)$ est lipschitzienne, de dérivée presque partout égale à L.

Comme $diam(M) \leq \pi$ (c.f. théorème 3.0.1), une intégration par parties donne :

$$u(\pi)\ \text{vol}(M) = \int_0^\pi u(r)L(r)dr + \int_0^\pi u'(r)V(r)dr.$$

En appliquant cette formule sur $\mathbb{S}^n$, puis en la retranchant à celle-ci, on obtient :

$$\left| \frac{1}{\text{vol M}} \int_{\text{M}} u \circ d(p,x)dv_g - \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{S}^n)} \int_{\mathbb{S}^n} u \circ d_{\mathbb{S}^n}(\overline{p},x)dv_{can} \right| \leq \int_0^\pi |u'(r)| \left(\frac{V(r)}{\text{vol}(M)} - \frac{\overline{V}(r)}{\text{vol}(\mathbb{S}^n)} \right) dr.$$

Or, par hypothèse $d(p,q) > \pi - \eta$, donc, pour $r \in [0, \pi - \eta]$:

$$\text{vol}(M) \geq V(r) + \text{vol}(B(q, \pi - \eta - r)),$$

d'où, en appliquant le théorème 2.1.1 de Bishop-Gromov :

$$\frac{\overline{V}(r)}{\text{vol}(\mathbb{S}^n)} \leq \frac{V(r)}{\text{vol}(M)} \leq 1 - \frac{\overline{V}(\pi - r - \eta)}{\text{vol}(\mathbb{S}^n)} \leq \frac{\overline{V}(r+\eta)}{\text{vol}(\mathbb{S}^n)}.$$

La fonction $\overline{V}$ est continue sur $[0,\pi]$ et on a la majoration :

$$\forall r \in [0,\pi], \quad \frac{\overline{V}(r+\eta) - \overline{V}(r)}{\text{vol}(\mathbb{S}^n)} \leq \frac{\int_0^{\frac{\eta}{2}} \cos^{n-1}(t)dt}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}(t)dt}.$$

■

De ce résultat, nous allons déduire la propriété annoncée sur les fonctions $\cos d_p$ pour p admettant une presque antipode. Ce lemme n'est qu'une légère modification d'un lemme démontré par P. Petersen (voir [37], lemme 4.3).

Lemme 3.3.2 *Il existe une fonction $\tau_{3.3.2}(t)$ tendant vers 0 avec t, telle que pour tout ϵ, η avec $\epsilon \gg \eta > 0$ et pour toute variété riemannienne $(M,g) \in \mathcal{M}_{\text{n}}$ vérifiant pour $k = max\{i; \lambda_i(M) \leq n + \epsilon\}$, $k \geq 1$ et $diam(M,g) > \pi - \eta$, alors en notant p, q deux points de M tels que $d(p,q) > \pi - \eta$, on a :*

$$|| \cos d_p - \sum_{i=1}^k a_i(p) f_i ||_{L^\infty} \leq \tau_{3.3.2}(\frac{\eta}{\epsilon}), \tag{3.27}$$

où les $a_i(p)$ sont les coefficients de Fourier de la fonction $\cos d_p$ *par rapport à une base orthogonale $(f_i)_{i\geq 0}$ de fonctions propres normalisées par (3.1) : $a_i(p) = \frac{n+1}{\mathrm{vol}\, M}\int_M \cos d_p f_i$. De plus, les coefficients $a_i(p)$ vérifient pour ϵ assez petit :*

$$|\sum_{i=1}^{k} {a_i}^2 - 1| \leq C(n)\frac{\eta}{\epsilon}.$$

Preuve : En appliquant le lemme 3.3.1 à $u = \cos^2$, $u = \sin^2$ et $u = \cos$, on obtient :

$$\left| ||\nabla \cos d_p||^2_{L^2(M)} - n||\cos d_p||^2_{L^2(M)} \right| \leq C(n)\eta,$$

$$|a_0| = \left| \frac{\sqrt{1+n}}{\mathrm{vol}\,(M)} \int_M \cos d_p \right| \leq C(n)\eta.$$

Ce qui implique, en écrivant le développement en série de Fourier :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i\, {a_i}^2 ||f_i||^2_{L^2} \leq n \sum_{i=1}^{+\infty} {a_i}^2 ||f_i||^2_{L^2} + C'(n)\eta.$$

C'est à dire, d'après la normalisation (3.1) des fonctions propres :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i\, {a_i}^2 \leq n \sum_{i=1}^{+\infty} {a_i}^2 + C''(n)\eta.$$

Or $\lambda_1(M) \geq n$, donc on peut "oublier" les k premiers termes :

$$\sum_{i=k+1}^{+\infty} (\lambda_i - n){a_i}^2 \leq C''(n)\eta.$$

On en déduit, par définition de k :

$$||\cos d_p - \sum_{i=1}^{k} a_i f_i||^2_{L^2} \leq C''(n)\frac{\eta}{\epsilon} \tag{3.28}$$

et comme $\frac{1}{\mathrm{vol\ M}} \int_{\mathrm{M}} \cos^2 d_p \simeq \frac{1}{n+1}$, la formule de Parseval donne :

$$|\sum_{i=1}^{k} {a_i}^2 - 1| \leq \overline{C}(n)\frac{\eta}{\epsilon}.$$

Pour obtenir une estimation L^∞ à partir de l'estimation L^2, il suffit de remarquer que puisque les coefficients $(a_i)_{\{1\leq i\leq k\}}$ sont bornés et que $\lambda_k(M) \leq n + \epsilon$, on obtient par la proposition 2.2.1, l'existence d'une constante $D(n)$ telle que la fonction $h := \cos d_p - \sum_{i=1}^{k} a_i f_i$ vérifie :

$$||h||_{L^\infty} \leq D(n)$$

et
$$||dh||_{L^\infty} \leq D(n).$$
Or, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on déduit de (3.28) :
$$||h||_{L^1} \leq \left(C''(n)\frac{\eta}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}}.$$
Puis, on applique le théorème des accroissements finis :

Soit x_0 tel que $|h(x_0)| = ||h||_{L^\infty}$ et $r > 0$, alors,
$$\left(C''(n)\frac{\eta}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{vol}\,(M) \geq \int_{B(x_0,r)} |h(x)|dx \geq (||h||_{L^\infty} - D(n)r)\ \mathrm{vol}\,(B(x_0,r)).$$
On en déduit, en appliquant le théorème de Bishop-Gromov :
$$\left(C''(n)\frac{\eta}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{V(r)}{V(\pi)}(||h||_{L^\infty} - D(n)r).$$
D'où le résultat, en choisissant $r = r(\frac{\eta}{\epsilon})$ convenable.

■

3.4 Propriété de "proximité métrique"

Soit $k \in \{2, .., n+1\}$. On conserve la notation $A^k_{\eta(\epsilon)}$ pour la partie introduite dans la proposition 3.2.2.

Le but de cette partie est de démontrer que l'application $\Phi = \frac{1}{\sqrt{f_1^2+..+f_k^2}}(f_1, .., f_k)$, avec (f_i) une base orthogonale de fonctions propres associées à $\lambda_i(M)$ et normalisées par :
$$\forall i \in \{1, .., k\}, \quad \frac{1}{\mathrm{vol\ M}}\int_{\mathrm{M}} f_i^2 = \frac{1}{n+1}, \tag{3.29}$$
vérifie la propriété de proximité métrique :
Il existe une fonction $\tau(\epsilon)$ telle que, pour toute variété riemannienne $(M, g) \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}$:
$$\lambda_k(M) \leq n+\epsilon \Rightarrow \forall x, y \in A^k_{\eta(\epsilon)}\ \ |d(x,y) - d_{\mathbb{S}^{k-1}}(\Phi(x), \Phi(y))| \leq \tau(\epsilon). \tag{3.30}$$
Ce qui terminera la preuve du théorème 3.0.8.

Nous démontrerons également une implication du théorème 3.0.10 :
Il existe une fonction $\tau(\epsilon)$ telle que, pour toute variété riemannienne $(M, g) \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}$:
$$\lambda_{n+1}(M) \leq n+\epsilon \Rightarrow d_{GH}(M, \mathbb{S}^n) \leq \tau(\epsilon). \tag{3.31}$$
Enfin nous démontrerons que la partie $A^k_{\eta(\epsilon)}$ est "presque convexe" :

Proposition 3.4.1 *Il existe des fonctions $\eta'(\epsilon)$ ($\eta' \geq \eta$) et $\tau(\epsilon)$, telles que pour toute variété riemannienne $(M,g) \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}$, vérifiant $\lambda_k(M) \leq n+\epsilon$, alors :*

$$\forall x, y \in A^k_{\eta(\epsilon)}, \;\; d_{A^k_{\eta'(\epsilon)}}(x,y) \leq d(x,y) + \tau(\epsilon).$$

Commençons par montrer comment (3.31) se ramène à la démonstration que nous allons donner de (3.30).

Supposons $\lambda_{n+1}(M) \leq n+\epsilon$, alors par la proposition 3.2.2 et en utilisant l'application Φ avec $k = n+1$, M contient une partie qui est $\tau_{3.2.2}(\epsilon)$ presque surjective sur $\mathbb{S}^n$. Il suffit donc de prouver que cette application vérifie la propriété de “proximité métrique”, pour une fonction $\tau(\epsilon)$ convenable.

Or, d'après le lemme 3.2.3 appliqué avec $k = n+1$:

$$\forall x \in M; \;\; f_1^2(x) + ... + f_{n+1}^2(x) \leq 1 + \tau(\epsilon),$$

pour une fonction $\tau(\epsilon)$ convenable, ne dépendant que de la dimension n.

Notons $h = f_1^2 + ... + f_{n+1}^2 - 1$. D'après ce qui précède : $h \leq \tau(\epsilon)$.

Par choix de la normalisation (3.29) :

$$\int_M h = 0.$$

et

$$|dh| \leq C(n).$$

Montrons qu'il existe une fonction $\tau_2(\epsilon)$ telle que :

$$||h||_\infty \leq \tau_2(\epsilon).$$

En effet :
$0 = \int_M h = \int_{h<0} h + \int_{h \geq 0} h$.
Notons y, un élément de M tel que $h(y) = \inf_M h$. Si $h(y) \geq 0$, c'est terminé.

Supposons donc $h(y) < 0$.
On définit alors $r = \frac{|h(y)|}{2C(n)}$ avec $C(n)$, la constante ci-dessus.
Par l'inégalité des accroissements finis :

$$-\int_{h \geq 0} h = \int_{h<0} h \leq \frac{h(y)}{2} \operatorname{vol}(B(y,r)).$$

On en déduit, à l'aide de la majoration de h :

$$\operatorname{vol}(B(y,r)) \frac{|h(y)|}{2} \leq \tau(\epsilon) \operatorname{vol} M.$$

On obtient alors, à l'aide du théorème de Bishop-Gromov :

$$V(r) \frac{|h(y)|}{2} \leq \tau(\epsilon) V(\pi)$$

Ce qui conclut.

Par conséquent, il existe une fonction $R(\epsilon)$, telle que :

$$M = A^{n+1}_{R(\epsilon)},$$

avec $R(\epsilon) \geq \eta(\epsilon)$ ($\eta(\epsilon)$ a été introduit dans la proposition 3.2.2).

Pour démontrer (3.31), il suffit donc de démontrer la propriété de “proximité métrique” (3.30) pour toute partie $A^k_{R(\epsilon)}$ avec $R(\epsilon) \geq \eta(\epsilon)$.

Plan de la preuve de (3.30)

Par uniforme continuité de la fonction arccos, il suffit de démontrer qu'il existe une fonction $\tau_2(\epsilon)$ telle que :

$$\forall x, y \in A^k_{R(\epsilon)}, \quad |\cos d(x,y) - < \Phi(x), \Phi(y) >_{\mathbb{R}^k} | \leq \tau_2(\epsilon). \tag{3.32}$$

Remarque 3.4.1 *Comme pour la propriété de “presque surjectivité”, on montre facilement que, par définition de $A^k_{R(\epsilon)}$, il suffit de prouver (3.32) pour la fonction $F = (f_1, .., f_k)$.*

Admettons que tout point de $A^k_{R(\epsilon)}$ possède une “presque antipode”, le lemme 3.3.2 donne :

$$\forall x, y \in A^k_{R(\epsilon)}, \quad \cos d(x,y) \simeq \sum_{i=1}^{k} a_i(x) f_i(y),$$

avec $(a_i(x))$, les coefficients de Fourier de $\cos d_x$.

On montrera ensuite que :

$$a_i(x) \simeq f_i(x)$$

(il y a égalité dans le cas de la sphère), ce qui permettra de conclure.

3.4.1 Propriétés des ensembles $A^k_{R(\epsilon)}$

Soit $k \in \{2, .., n+1\}$ et $A^k_{R(\epsilon)}$ avec

$$R(\epsilon) \geq \eta(\epsilon), \tag{3.33}$$

fixé.

Sur la sphère canonique, l'ensemble $\{x \in \mathbb{S}^n\ ; X_1^2(x) + .. + X_k^2(x) = 1\}$, où (X_i) sont les k premières fonctions coordonnées, est un hémisphère de dimension k-1. La fonction $X_1^2 + .. + X_k^2$ définie sur $\mathbb{S}^n$, atteint son maximum sur cet hémisphère, son gradient est donc nul sur cet ensemble.

Le lemme suivant est une généralisation de ce fait au “presque équateur” $A^k_{R(\epsilon)}$, dans le cas où la variété (M, g) admet k petites valeurs propres.

Lemme 3.4.1 *Il existe une fonction $\tau_{3.4.1}(\epsilon)$ telle que, pour toute fonction $\theta(\epsilon)$ et pour toute variété riemannienne $(M,g) \in \mathcal{M}_{\rm n}$ vérifiant $\lambda_k(M) \leq n+\epsilon$, on a l'estimation :*
$\forall x \in A^k_{\theta(\epsilon)}$,

$$|\nabla(\sum_{i=1}^{k} f_i^2)|(x) \leq 4(1+\theta(\epsilon))(\tau_{3.4.1}(\epsilon)+\theta(\epsilon)),$$

avec $(f_i)_{1\leq i\leq k}$ une famille orthogonale de fonctions propres normalisées par (3.29).

Preuve : Soit $f = \sum_{i=1}^k a_i f_i$ une combinaison linéaire de telles fonctions propres.
Le lemme 2.2.1, appliqué à cette combinaison linéaire donne :

$$\forall x \in M, \quad f^2(x) + |\nabla f|^2(x) \leq (1+\tau(\epsilon)) \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2\right).$$

En développant le terme $|\nabla f|^2$, on obtient :

$$|\nabla f|^2(x) = \sum_{1\leq i,j\leq k} a_i a_j < \nabla f_i(x), \nabla f_j(x) > .$$

Fixons un point x_0 de $A^k_{\theta(\epsilon)}$ et considérons les coefficients $a_i = \frac{f_i(x_0)}{\sqrt{\sum_{i=1}^k f_i^2(x_0)}}$, le lemme 2.2.1, appliqué au point x_0, donne :

$$\sum_{i=1}^{k} f_i^2(x_0) + \frac{1}{4\sum_{i=1}^k f_i^2(x_0)} |\nabla(\sum_{i=1}^{k} f_i^2)(x_0)|^2 \leq 1+\tau(\epsilon).$$

Or $x \in A_{\theta(\epsilon)}$ entraine $1+\theta(\epsilon) \geq \sum_{i=1}^k f_i^2(x_0) \geq 1-\theta(\epsilon)$, d'où le résultat. ∎

Ce lemme permet de démontrer que tout point de $A^k_{R(\epsilon)}$ admet une presque antipode :

Lemme 3.4.2 *Il existe $\delta(\epsilon)$ (vérifiant $\delta(\epsilon) >> \epsilon$) telle que, pour toute variété riemannienne $(M,g) \in \mathcal{M}_{\rm n}$, vérifiant $\lambda_k(M) \leq n+\epsilon$, on a :*

$$\forall x \in A^k_{R(\epsilon)}, \exists\, y \in A^k_{R(\epsilon)} \text{ avec } d(x,y) > \pi - \delta(\epsilon).$$

Preuve : Dans le cas de la sphère, le point antipodal d'un point X de $\mathbb{S}^n$ est $-X$, ce qui suggère le "candidat" à être une presque antipode de $x \in A^k_{R(\epsilon)}$:
Soit $x \in A^k_{R(\epsilon)}$, notons $\alpha = ||(f_1,..,f_k)(x)||_{\mathbb{R}^k}$, l'hypothèse $x \in A^k_{R(\epsilon)}$ implique :

$$(1-R(\epsilon))^{\frac{1}{2}} \leq \alpha \leq (1+R(\epsilon))^{\frac{1}{2}}.$$

Par la proposition 3.2.2 de presque surjectivité, il existe $y \in A^k_{\eta(\epsilon)}$ tel que :

$$||(f_1,..,f_k)(y) + \frac{1}{\alpha}(f_1,..,f_k)(x)|| \leq \tau_{3.2.2}(\epsilon).$$

En appliquant le lemme 2.3.3 aux fonctions (f_i), on en déduit l'existence de $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ vérifiant $d(x,\tilde{x}) \leq r(\epsilon)$, $d(y,\tilde{y}) \leq r(\epsilon)$ tels que, si on note $\gamma_{\tilde{x}\tilde{y}}$, l'unique géodésique minimisante reliant $\tilde{x}$ à $\tilde{y}$, on a :

$$\forall i \in \{1..k\}, \quad \int_0^{d(\tilde{x},\tilde{y})} |(f_i \circ \gamma)''(t) + (f_i \circ \gamma)(t)|^2 dt \leq \tau'(\epsilon). \tag{3.34}$$

D'autre part, par le lemme 3.4.1 :

$$|\nabla(f_1^2 + .. + f_k^2)|(\tilde{x}) \leq \tau(\epsilon). \tag{3.35}$$

Notons $a_i = f_i(\tilde{x})$, $b_i = (f_i \circ \gamma_{\tilde{x}\tilde{y}})'(0)$ et $l = d(\tilde{x},\tilde{y})$.
D'après l'équation (3.34), en appliquant le lemme 2.3.4 de comparaison d'équations différentielles, on en déduit l'existence d'une fonction $\tau_2(\epsilon)$ telle que :
$\forall i \in \{1,..,k\}, \forall t \in [0,l]$,

$$|(f_i \circ \gamma_{\tilde{x}\tilde{y}})(t) - (a_i \cos t + b_i \sin t)| \leq \tau_2(\epsilon), \tag{3.36}$$

$$|(f_i \circ \gamma_{\tilde{x}\tilde{y}})'(t) - (-a_i \sin t + b_i \cos t)| \leq \tau_2(\epsilon).$$

En appliquant Cauchy-Schwartz, on obtient à l'aide de (3.35) :

$$|\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(f_i^2 \circ \gamma_{\tilde{x}\tilde{y}})'(0)| = |\sum_{i=1}^{k} a_i b_i| \leq \frac{\tau_{3.4.1}(\epsilon)}{2}. \tag{3.37}$$

Or, par définition de y et comme $d(y,\tilde{y}) \leq r(\epsilon)$:
$f_i(\tilde{y}) + a_i = (f_i(\tilde{y}) - f_i(y)) + (f_i(y) + \frac{f_i(x)}{\alpha}) + (-\frac{f_i(x)}{\alpha} + f_i(x)) + (-f_i(x) + f_i(\tilde{x}))$.
d'où :

$$|f_i(\tilde{y})+a_i| \leq 2C_{2.2.1}(n)r(\epsilon)+\tau_{3.2.2}(\epsilon)+C_{2.2.1}(n)\max\{-(1+R(\epsilon))^{-\frac{1}{2}}+1; -1+(1-R(\epsilon))^{-\frac{1}{2}}\}.$$

En appliquant (3.36) avec $t = l$, on obtient :

$$a_i \cos l + b_i \sin l = -a_i + \delta_i, \tag{3.38}$$

avec $|\delta_i| \leq \tau_3(\epsilon)$.

En multipliant (3.38) par b_i et en sommant par rapport à i, on obtient :

$$(\sum_{i=1}^{k} a_i b_i)\cos l + (\sum_{i=1}^{k} b_i^2)\sin l + \sum_{i=1}^{k} a_i b_i \leq (\sum_{i=1}^{k} b_i^2)^{\frac{1}{2}}\delta'.$$

Or, $|b_i| \leq |\nabla f_i|$, donc la proposition 2.2.1 implique que $\sum_{i=1}^{k} b_i^2$ est bornée par une constante $C(n)$. D'autre part, $|\delta'| \leq n^{\frac{1}{2}}\tau_3(\epsilon)$, par conséquent, il existe une fonction $\tau_4(\epsilon)$ telle que :

$$\left|(\sum_{i=1}^{k} b_i^2)\sin l\right| \leq \tau_4(\epsilon).$$

Deux cas sont possibles,

-soit $|\sin l| \leq (\tau_4(\epsilon))^{\frac{1}{2}}$.

Dans ce cas, comme $||(f_1,..,f_k)(x)||_{\mathbb{R}^k} \simeq 1$, on en déduit que $(f_1,..,f_k)(x) \simeq -(f_1,..,f_k)(y)$.
Donc, comme :

$$\forall i \in \{1,..,k\}, \;\; ||\nabla f_i||_\infty \leq C(n),$$

il existe une constante $C'(n) > 0$ telle que :

$$d(x,y) > C'(n),$$

alors, $|\sin l| \leq (\tau_4(\epsilon))^{\frac{1}{2}}$ implique :

$$l \simeq \pi.$$

-soit $\sum_{i=1}^k b_i^2 \leq (\tau_4(\epsilon))^{\frac{1}{2}}$.

Dans ce cas, par (3.36), il existe une fonction $\tau_5(\epsilon)$ telle que :

$$\forall k \in \{1,..,k\}, \forall t \in [0,l], \;\; |(f_i \circ \gamma_{\tilde{x}\tilde{y}})(t)) - a_i \cos t| \leq \tau_5(\epsilon),$$

en appliquant cette formule avec $t = l$, on obtient par définition de y et comme $d(\tilde{y}, y) < r(\epsilon)$:

$$\cos l \simeq -1,$$

d'où le résultat.

■

À l'aide d'une légère modification de la preuve ci-dessus, nous sommes en mesure de démontrer la propriété de “presque convexité” de l'ensemble $A^k_{\eta(\epsilon)}$:

Proposition 3.4.2 *Il existe des fonctions $\eta'(\epsilon)$ ($\eta' \geq \eta$) et $\tau(\epsilon)$, telles que pour toute variété riemannienne $(M,g) \in \mathcal{M}_\mathrm{n}$, vérifiant $\lambda_k(M) \leq n + \epsilon$, alors :*

$$\forall x, y \in A^k_{\eta(\epsilon)}, \;\; d_{A^k_{\eta'(\epsilon)}}(x,y) \leq d(x,y) + \tau(\epsilon).$$

Preuve : Le début de la preuve est identique à celle du lemme 3.4.2.

Soit $x, y \in A^k_{\eta(\epsilon)}$.

En appliquant le lemme 2.3.3 aux fonctions (f_i), on en déduit l'existence de $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ vérifiant $d(x,\tilde{x}) \leq r(\epsilon)$, $d(y,\tilde{y}) \leq r(\epsilon)$ tels que, si on note $\gamma_{\tilde{x}\tilde{y}}$, l'unique géodésique minimisante reliant $\tilde{x}$ à $\tilde{y}$, on a :

$$\forall i \in \{1..k\}, \;\; \int_0^{d(\tilde{x},\tilde{y})} |(f_i \circ \gamma)''(t) + (f_i \circ \gamma)(t)|^2 dt \leq \tau'(\epsilon). \tag{3.39}$$

Notons $a_i = f_i(\tilde{x})$, $b_i = (f_i \circ \gamma_{\tilde{x}\tilde{y}})'(0)$ et $l = d(\tilde{x},\tilde{y})$.

Alors, on en déduit :

$\forall t \in [0,l]$,

$$|(f_i \circ \gamma_{\tilde{x}\tilde{y}})(t)) - (a_i \cos t + b_i \sin t)| \leq \tau_2(\epsilon). \tag{3.40}$$

De plus, d'après (3.37) :
$$|\sum_{i=1}^{k} a_i b_i| \leq \frac{\tau_{3.4.1}(\epsilon)}{2}. \tag{3.41}$$
Or,
$$|d(x,y) - d(\tilde{x},\tilde{y})| \leq 2r(\epsilon).$$
Montrons qu'il existe $\eta'(\epsilon)$ et $\psi(\epsilon)$, telles que :
$$d_{A^k_{\eta'(\epsilon)}}(\tilde{x},\tilde{y}) \leq d(\tilde{x},\tilde{y}) + \psi(\epsilon).$$
Ce qui permettra de conclure, puisque :
$$d(\tilde{x},x) \leq r(\epsilon), d(\tilde{y},y) \leq r(\epsilon)$$
et
$$|| \, |\nabla(\sum_{i=1}^{k} f_i^2)| \, ||_{L^\infty} \leq C(n).$$
Par construction, il existe une fonction $\eta_2(\epsilon)$ telle que $\tilde{y} \in A^k_{\eta_2(\epsilon)}$, c'est-à-dire :
$$\left| \sum_{i=1}^{k} f_i^2 \circ \gamma_{\tilde{x}\tilde{y}}(l) - 1 \right| \leq \eta_2(\epsilon). \tag{3.42}$$
Par conséquent, grâce à (3.40) et (3.41), il existe une fonction $\tau(\epsilon)$ telle que :
$$\left| \sum_{i=1}^{k} f_i^2 \circ \gamma_{\tilde{x}\tilde{y}}(l) - \left(\left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2 \right) \cos^2 l + \left(\sum_{i=1}^{k} b_i^2 \right) \sin^2 l \right) \right| \leq \tau(\epsilon). \tag{3.43}$$
Or, comme $a_i = f_i(\tilde{x})$ et $\tilde{x} \in A^k_{\eta_2(\epsilon)}$, (3.42) et (3.43) implique l'existence d'une fonction $\tau_2(\epsilon)$ telle que :
$$\left| \left(\sum_{i=1}^{k} b_i^2 - 1 \right) \sin^2 l \right| \leq \tau_2(\epsilon).$$
Deux cas sont possibles :

Soit $\left| \sum_{i=1}^{k} b_i^2 - 1 \right| \leq \sqrt{\tau_2(\epsilon)}$.
Dans ce cas, on obtient, en utilisant (3.40) et (3.41), l'existence d'une fonction $\tau_3(\epsilon)$ telle que :
$$\forall t \in [0,l], \quad \left| \sum_{i=1}^{k} f_i^2 \circ \gamma_{\tilde{x}\tilde{y}}(t) - 1 \right| \leq \tau_3(\epsilon).$$
La proposition est démontrée dans ce cas.

Soit $\sin^2 l \leq \sqrt{\tau_2(\epsilon)}$. Ce qui signifie que $d(\tilde{x},\tilde{y}) \simeq 0$ ou que $d(\tilde{x},\tilde{y}) \simeq \pi$.

Si $d(\tilde{x},\tilde{y}) \simeq 0$, alors la géodésique $\gamma_{\tilde{x}\tilde{y}}$ est contenu dans $A^k_{\eta_3(\epsilon)}$ pour $\eta_3(\epsilon)$ convenable.
Si $d(\tilde{x},\tilde{y}) \simeq \pi$, alors nécessairement, avec les notations de la proposition 3.2.1, il existe $i_0 \in \{1,..,k\}$ et $\tilde{x}_{i_0}$ vérifiant $d(\tilde{x}_{i_0}, x_{i_0}) \le r(\epsilon)$ tels que :

$$\sin^2 d(\tilde{x}_{i_0}, \tilde{x}) > \sqrt{\tau_2(\epsilon)}$$

et

$$\sin^2 d(\tilde{x}_{i_0}, \tilde{y}) > \sqrt{\tau_2(\epsilon)}.$$

Par conséquent, d'après le premier cas, la courbe c formée de l'union des deux géodésiques minimisantes reliant $\tilde{x}$ à $\tilde{x}_{i_0}$ et $\tilde{x}_{i_0}$ à $\tilde{y}$ est contenue dans $A^k_{\tau_3(\epsilon)}$.
Or, d'après le lemme 3.2.1 sur la fonction "excess", comme $d(\tilde{x},\tilde{y}) \simeq \pi$ et en notant $L(c)$ la longueur de la courbe c, il existe une fonction $\tau_4(\epsilon)$ telle que :

$$|d(\tilde{x},\tilde{y}) - L(c)| \le \tau_4(\epsilon).$$

La proposition est vérifiée dans ce deuxième cas. ■

3.4.2 Preuve de la "proximité métrique"

Nous allons maintenant terminer la preuve du théorème 3.0.8, en démontrant :

$$\forall\, x, y \in A^k_{R(\epsilon)} \; | < (F(x), F(y) >_{\mathbb{R}^k} - \cos d(x,y))| \le \tau(\epsilon) \tag{3.44}$$

Preuve : Nous venons de voir que tout point de $A^k_{R(\epsilon)}$ admet une presque antipode. L'idée de la preuve consiste à utiliser la propriété des fonctions $\cos d_p$ pour p admettant une presque antipode, établie dans le lemme 3.3.2. Cependant, on ne peut pas appliquer directement le lemme 3.3.2 avec la fonction $\delta(\epsilon)$ introduite dans le lemme 3.4.2, puisqu'on voit facilement (par exemple dans le lemme 2.3.3) que les fonctions $\tau(\epsilon)$, utilisées dans la preuve du lemme 3.4.2, sont supérieures à ϵ et donc $\frac{\delta(\epsilon)}{\epsilon}$ ne tend pas vers zero avec ϵ.
On pose :

$$\overline{k} = \max\{i \; ; \lambda_i \le n + \sqrt{\delta(\epsilon)}\}.$$

Comme $1 > \delta(\epsilon) \ge \epsilon \Rightarrow \sqrt{\delta(\epsilon)} \ge \epsilon$, on a donc $\overline{k} \ge k$. Le lemme 3.3.2 appliqué avec $\delta(\epsilon)$ et $\sqrt{\delta(\epsilon)}$ permet d'en déduire que les fonctions $\cos d_x, x \in A^k_{R(\epsilon)}$ sont proches en norme L^∞ de combinaisons linéaires de fonctions propres de petites valeurs propres :
D'après les lemmes 3.3.2 et 3.4.2, il existe une fonction $\tau(\epsilon)$ telle que :
pour tout $x \in A^k_{R(\epsilon)}$, il existe $(\alpha_i(x))_{i=1}^{\overline{k}}$ pour lesquels :

$$||\cos d_x - \sum_{i=1}^{\overline{k}} \alpha_i(x) f_i||_\infty \le \tau(\epsilon), \tag{3.45}$$

avec

$$|\sum_{i=1}^{\overline{k}} \alpha_i^2(x) - 1| \le \tau(\epsilon).$$

Montrons que $\sum_{i=1}^{\bar{k}} |f_i(x) - \alpha_i(x)|^2$ est petit :

$$\sum_{i=1}^{\bar{k}} |f_i(x) - \alpha_i(x)|^2 = \sum_{i=1}^{\bar{k}} f_i^2(x) + \sum_{i=1}^{\bar{k}} \alpha_i^2(x) - 2\sum_{i=1}^{\bar{k}} \alpha_i(x) f_i(x).$$

Or, le lemme 3.2.3 implique

$$\sum_{i=1}^{\bar{k}} f_i^2(x) \leq 1 + \tau_{3.2.3}(\sqrt{\delta(\epsilon)}) \tag{3.46}$$

Par ce qui précède :

$$\sum_{i=1}^{\bar{k}} \alpha_i^2(x) \leq 1 + \tau(\epsilon).$$

Enfin, en appliquant (3.45) au point x, on trouve :

$$|\sum_{i=1}^{\bar{k}} \alpha_i(x) f_i(x) - 1| \leq \tau(\epsilon).$$

On obtient finalement :

$$\sum_{i=1}^{\bar{k}} |f_i(x) - \alpha_i(x)|^2 \leq 3\tau(\epsilon) + \tau_{3.2.3}(\sqrt{\delta(\epsilon)}). \tag{3.47}$$

En appliquant (3.45), au point y :

$$|< F(x), F(y) >_{\mathbb{R}^k} - \cos d(x,y)| \leq \left| \sum_{i=1}^{k} f_i(x) f_i(y) - \sum_{i=1}^{\bar{k}} \alpha_i(x) f_i(y) \right| + \tau(\epsilon)$$

$$\leq \left| \sum_{i=1}^{\bar{k}} \left(f_i(x) - \alpha_i(x)\right) f_i(y) \right| + \left| \sum_{i=k+1}^{\bar{k}} f_i(x) f_i(y) \right| + \tau(\epsilon).$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz puis (3.47) et (3.46), on obtient :

$$\left| \sum_{i=1}^{\bar{k}} \left(f_i(x) - \alpha_i(x)\right) f_i(y) \right| \leq \left(\left(3\tau(\epsilon) + \tau_{3.2.3}(\sqrt{\delta(\epsilon)})\right) \left(1 + \tau_{3.2.3}(\sqrt{\delta(\epsilon)})\right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Il ne reste plus qu'à estimer le terme : $| \sum_{i=k+1}^{\bar{k}} f_i(x) f_i(y)|$.
Or, pour tout élément z de $A^k_{R(\epsilon)}$, on a :

$$\sum_{i=1}^{k} f_i^2(z) \geq 1 - R(\epsilon),$$

donc, en utilisant de nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwartz et (3.46), on obtient :

$$|\sum_{i=k+1}^{\bar{k}} f_i(x)f_i(y)| \leq R(\epsilon) + \tau_{3.2.3}(\sqrt{\delta(\epsilon)}),$$

ce qui conclut.

■

3.5 Démonstration du théorème 3.0.9

Nous allons maintenant démontrer le :

Théorème 3.5.1 *Soit $k \in \{2, .., n+1\}$. Il existe une fonction $\tau(\eta)$ telle que, pour toute variété riemannienne $(M, g) \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}$, pour laquelle il existe une partie A de M, munie de la restriction à A de la distance sur M, induite par la métrique riemannienne et telle que :*

$$d_{GH}(A, \mathbb{S}^{k-1}) < \eta$$

alors

$$\lambda_k(M) \leq n + \tau(\eta).$$

En particulier, on a le

Corollaire 3.5.1 *Il existe une fonction $\tau(\epsilon)$ telle que, pour toute variété riemannienne $(M, g) \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}$, vérifiant $d_{GH}(M, \mathbb{S}^n) < \epsilon$, alors*

$$\lambda_{n+1}(M) \leq \tau(\epsilon).$$

Démontrons le théorème 3.5.1 :

Preuve :

Soit $k \in \{2, .., n+1\}$ et A une partie de M telle que $d_{GH}(A, \mathbb{S}^{k-1}) < \eta$.
Par conséquent :

$$\forall x \in A, \exists y \in A \text{ tel que } d(x, y) \geq \pi - 2\eta.$$

En particulier :

$$diam(M) \geq \pi - 2\eta.$$

On en déduit, d'après le théorème 3.0.2 :

$$\lambda_1(M) \simeq n.$$

Plus précisément, on a le

Lemme 3.5.1 *Il existe une constante $C(n)$ telle que, pour toute variété riemannienne $(M,g) \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}$ vérifiant diam$(M) > \pi - \eta$, alors :*

$$\lambda_1(M) \leq n + C(n)\eta.$$

Preuve : D'après le lemme 3.3.1 :

$$\left| \frac{\frac{1}{\mathrm{vol\ M}} \int_{\mathrm{M}} \nabla \cos^2 d_p}{\frac{1}{\mathrm{vol\ M}} \int_{\mathrm{M}} \cos^2 d_p} - n \right| \leq C(n)\eta \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{vol\ M}} \int_{\mathrm{M}} \cos^2 d_p}$$

et

$$\left| \frac{1}{\mathrm{vol\ M}} \int_{\mathrm{M}} \cos^2 d_p - \frac{1}{n+1} \right| \leq C(n)\eta,$$

d'où le résultat. ■

Notons

$$\epsilon = \sqrt{\eta}$$

et

$$k_\epsilon := \max\{k \in \mathbb{N}; \lambda_k(M) \leq n + \epsilon\}.$$

Par le lemme 3.5.1, pour η assez petit :

$$k_\epsilon \geq 1.$$

Par ailleurs, d'après le lemme 3.3.2, il existe une fonction $\tau(\eta)$ telle que :

$$\forall x \in A,\ ||\cos d_x - \sum_{i=1}^{k_\epsilon} a_i(x) f_i||_{L^\infty} \leq \tau(\eta) \tag{3.48}$$

et

$$|\sum_{i=1}^{k_\epsilon} a_i^2(x) - 1| \leq \tau(\eta). \tag{3.49}$$

Comme $d_{GH}(A, \mathbb{S}^{k-1}) < \eta$, il existe $x_1, .., x_k$ appartenant à A tels que :

$$\forall i, j \in \{1, .., k\}, i \neq j,\ \ |d(x_i, x_j) - \frac{\pi}{2}| \leq 2\eta.$$

Notons $F = Vect_{L^2(M)}\{f_1, .., f_{k_\epsilon}\}$ et P_F la projection orthogonale de $L^2(M)$ sur F. D'après (3.49) :

$$\forall j \in \{1, .., k\},\ \ |\sum_{i=1}^{k_\epsilon} a_i^2(x_j) - 1| \leq \tau(\eta),$$

donc pour η assez petit,

$$\forall j \in \{1, .., k\},\ \ P_F(\cos d_{x_j}) \neq 0.$$

Supposons $k_\epsilon < k$.
Dans ce cas, la famille $[P_F(\cos(d_{x_j})]_{j=1}^k$ est liée :
$\exists\ (b_j)_{j\in\{1,..,k\}}$ avec $\sum_{j=1}^k b_j^2 = 1$, tels que :

$$\sum_{j=1}^k b_j P_F(\cos d_{x_j}) = 0.$$

Alors, (3.48) implique :

$$||\sum_{i=1}^k b_i \cos d_{x_i} - \sum_{i=1}^k b_i P_F(\cos d_{x_i})||_{L^\infty} \leq k^{\frac{1}{2}}\tau(\eta).$$

C'est à dire :

$$||\sum_{i=1}^k b_i \cos d_{x_i}||_{L^\infty} \leq k^{\frac{1}{2}}\tau(\eta). \tag{3.50}$$

On peut supposer $|b_k| > \frac{1}{\sqrt{k}}$ (car $\sum_{i=1}^k b_i^2 = 1$).
Pour η assez petit, on obtient alors une absurdité dans l'estimation (3.50) en l'appliquant au point $x = x_k$. ■

Chapitre 4

Exemples d'Anderson

Sous l'hypothèse de courbure sectionnelle minorée par 1, les variétés dont le diamètre est presque maximal sont toutes homéomorphes à la sphère :

Théorème 4.0.2 (Grove-Shiohama, [28]) *Soit (M^n, g) une variété riemannienne, de dimension n, de courbure sectionnelle $K_M \geq 1$. Si le diamètre de (M, g) vérifie diam(M) $> \frac{\pi}{2}$ alors M est homéomorphe à $\mathbb{S}^n$.*

Que subsiste t-il de ce résultat si on remplace l'hypothèse "$K_M \geq 1$"par "Ric $\geq (n-1)g$", précisément :

Existe-il $\epsilon(n) > 0$ tel que toute variété riemannienne compacte (M, g) de dimension n vérifiant $Ric \geq (n-1)g$ et $\mathrm{diam}(M^n) \geq \pi - \epsilon(n)$ est nécessairement homéomorphe à $\mathbb{S}^n$?

Anderson a répondu par la négative à cette question, en construisant une suite de métriques sur $\mathbb{C}P^2$ et $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ vérifiant toutes la condition de courbure : $Ric \geq 3g$ et dont le diamètre tend vers π.

Remarque 4.0.1 *M. Anderson répond ainsi également à la question équivalente (après les résultats de S.Y. Cheng et de C. Croke (théorèmes 3.0.2 et 3.0.3)), consistant à substituer à l'hypothèse "diam$(M, g) \geq \pi - \epsilon(n)$", l'hypothèse "$\lambda_1(M, g) \leq n + \epsilon(n)$".*

Remarque 4.0.2 *La méthode employée par M. Anderson fournit en réalité des contre-exemples sur $\mathbb{C}P^n$ pour tout $n \geq 2$ (voir la fin de son article ([1])), nous nous limiterons cependant dans la suite au cas $n = 2$. D'autre part, Y. Otsu ([35]) a également construit des contre-exemples sur des produits de sphères de dimension $n \geq 5$. En dimension 3, la question est, à ma connaissance, toujours ouverte (voir cependant le début de l'article d'Otsu ([35])).*

L'objet de ce chapitre est de montrer que les exemples d'Anderson admettent une seule valeur propre proche de n. Dans la suite, nous nous sommes limités au cas $n = 4$ mais la méthode employée reste valable en dimension supérieure (voir [9], page 195 pour s'en convaincre).

La preuve consiste à donner un minorant explicite de la seconde valeur propre de cette famille de variétés.

Signalons qu'une autre preuve consiste à montrer que les exemples d'Anderson ne contiennent pas de partie Gromov-Hausdorff proche de $\mathbb{S}^1$, puis d'utiliser le théorème 3.0.8.

Ces exemples seront également utiles dans un prochain chapitre.

4.1 Construction des exemples

Le point de départ est de remarquer que si l'on retire une boule à l'espace projectif $\mathbb{C}P^2$, l'espace obtenu est difféomorphe à un fibré en disque dont le bord est la fibration de Hopf :

$$\pi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{C}P^1.$$

Définition 4.1.1 *Soit* $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \backslash \{0\}$. *On note* $[z_1, z_2, z_3] = \{(zz_1, zz_2, zz_3); z \in \mathbb{C}^*\}$ *les coordonnées homogènes sur l'espace projectif* $\mathbb{C}P^2$.

Considérons dans $\mathbb{C}P^2$, la boule de rayon $\frac{\pi}{4}$ et de centre $[0,0,1]$. Pour décrire les éléments de cette boule, on utilise la caractérisation suivante des géodésiques horizontales de l'espace projectif complexe :

Lemme 4.1.1 *Soit* c *une géodésique de* $\mathbb{C}P^n$. *Soit* π *l'application canonique de* $\mathbb{S}^{2n+1}$ *dans* $\mathbb{C}P^n$. *Il existe une géodésique* γ *de* $\mathbb{S}^{2n+1}$, *vérifiant* $\gamma'(0) \perp \gamma(0)$ *et* $\gamma'(0) \perp i\gamma(0)$ *telle que* $\pi \circ \gamma = c$.

On déduit de ce lemme, la caractérisation suivante de notre boule :

$$B([0,0,1], \tfrac{\pi}{4}) = \{[z_1, z_2, \mathrm{cotgt}\,(\mathrm{t})]; |\mathrm{z}_1|^2 + |\mathrm{z}_2|^2 = 1, 0 < \mathrm{t} < \tfrac{\pi}{4}\} \cup \{[0,0,1]\}.$$

Notons $N = S^3 \times I/\sim$, où $(x,t) \sim (y,s)$ ssi $s = t = 0$ et $\pi(x) = \pi(y)$,
avec $I = [0,1]$.
Le difféomorphisme est, pour ce choix d'intervalle :

$$\begin{array}{ccc} N & \Longrightarrow & \mathbb{CP}^2 \backslash B([0,0,1], \frac{\pi}{4}) \\ ((z_1, z_2), t) & \longmapsto & [z_1, z_2, t] \end{array}$$

M. Anderson munit N d'une métrique de la forme $g = dt^2 + u^2(t)\sigma_Z^2 + r^2(t)(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$, avec $I = [0, \frac{\pi}{2} - \delta]$ pour δ petit, dépendant d'un paramètre ϵ et $\sigma_X, \sigma_Y, \sigma_Z$ les covecteurs invariants à gauche de S^3.
Pour obtenir une métrique sur N, il est nécessaire de supposer : $u(0) = 0$ et $r(0) > 0$. De plus, pour que cette métrique soit lisse il est nécessaire et suffisant que :
- u vérifie $u^{(2k)}(0) = 0\, \forall k \in \mathbb{N}$ et $u'(0) = 1$.
- r vérifie $r^{(2k+1)}(0) = 0\, \forall k \in \mathbb{N}$.

Nous renvoyons à L. Bérard Bergery ([8]) pour une démonstration de cette équivalence.

Les coefficients de la métrique g sont :

$$\begin{array}{lll} \text{pour t} \in [0, \frac{\epsilon}{\mathrm{k}}] : & u(t) = \frac{\sin at}{a}, & r(t) = \epsilon + \frac{bt^2}{2\,\epsilon} \\ \text{pour t} \in [\frac{\epsilon}{\mathrm{k}}, \frac{\pi}{2} - \delta] : & u(t) = c_1(\epsilon)\sin(t+\delta), & r(t) = c_2(\epsilon)\sin(t+\delta) \end{array}$$

On remarque, que par choix de la métrique, l'hypersurface $\{\frac{\pi}{2} - \delta\} \times \mathbb{S}^3$ est totalement géodésique.
M. Anderson choisit $a, b, k, \delta(\epsilon), c_1(\epsilon), c_2(\epsilon)$ de sorte que la métrique soit suffisamment régulière en $t = \frac{\epsilon}{k}$ et que la condition sur la courbure : $Ric \geq 3g$ soit satisfaite (voir [1] pour plus de détails).
Les valeurs de ces paramètres sont :

$$b = \frac{1}{2}$$
$$k = 2$$
$$\frac{1}{m}\tan(\frac{m}{2}) = \frac{17}{4}\ (m \simeq 3)$$
$$a = \frac{m}{\epsilon}$$

Pour ϵ assez petit, ce que nous supposerons par la suite :

$$c_1(\epsilon) \leq 2\cos(\frac{m}{2}) \text{ et } c_2(\epsilon) \leq \frac{1}{2}, \tag{4.1}$$

$$\delta(\epsilon) = O(\epsilon). \tag{4.2}$$

Le bord de N étant totalement géodésique, il suffit pour obtenir une métrique sur $\mathbb{C}P^2$ de recoller une boule B de $\mathbb{R}^4$, munie d'une métrique semblable à g : $\tilde{g} = dt^2 + \tilde{u}^2(t)\sigma_Z^2 + \tilde{r}^2(t)(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$, avec $\tilde{u} = u$ et $\tilde{r} = r$ pour t suffisamment grand et vérifiant les conditions suivantes en 0 :
- $\tilde{u}^{(2k)}(0) = 0$ et $\tilde{r}^{(2k)}(0) = 0\ \forall k \in \mathbb{N}$,
- $\tilde{u}'(0) = \tilde{r}'(0) = 1$.

Notons (M_A, g) la variété obtenue en recollant (N, g) avec la boule $(B, \tilde{g})$, c'est-à-dire $M_A = I \times \mathbb{S}^3/\sim$, où $(t, y) \sim (s, y)$ ssi $s = t = 0$ et $\pi(x) = \pi(y)$ ou $s = t = \pi - 2\delta$, avec $I = [0, \pi - 2\delta]$.
Par construction M_A est difféomorphe à $\mathbb{C}P^2$.

Par choix de la métrique g, les courbes $t \to (t, x)$, $x \in \mathbb{S}^3$ sont des géodésiques, par conséquent :

$$diam(M_A, g) \geq \pi - 2\delta.$$

On constate également que les exemples construits par M. Anderson ne sont pas Gromov-Hausdorff proches de $(\mathbb{S}^4, can)$ puisque le diamètre de l'hypersurface totalement géodésique $\{\frac{\pi}{2} - \delta\} \times \mathbb{S}^3$ est petit .
Passons maintenant à l'estimation des premières valeurs propres de (M_A, g).

4.2 Estimations de valeurs propres

L'objet de cette partie est de prouver que les exemples d'Anderson possèdent pour ϵ assez petit, exactement une valeur propre petite (i.e. proche de 4).
Nous allons commencer par calculer la première valeur propre de l'hypersurface $\{\frac{\pi}{2}-\delta\}\times\mathbb{S}^3$ munie de la métrique induite.
Notons $h = c_1(\epsilon)\sigma_Z^2 + c_2(\epsilon)(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)$ la métrique g restreinte à $\{\frac{\pi}{2}-\delta\}\times\mathbb{S}^3$.

4.2.1 Calcul de $\lambda_1(\mathbb{S}^3, h)$

h est une métrique homothétique à une métrique de Berger sur $\mathbb{S}^3$.
L. Bérard Bergery et J.P. Bourguignon ont calculé la première valeur propre de $\mathbb{S}^3$ munie d'une métrique de Berger (voir [9]).
Commençons par quelques remarques sur les coefficients $c_1(\epsilon)$ et $c_2(\epsilon)$ de la métrique h.

$$\begin{aligned} c_1(\epsilon) &= \tfrac{\cos(\frac{m}{2})}{\cos(\frac{\epsilon}{2}+\delta)} \\ c_2(\epsilon) &= \tfrac{1}{4\cos(\frac{\epsilon}{2}+\delta)} \end{aligned}$$

On remarque que le rapport $\frac{c_1}{c_2}$ est constant, égal à $4\cos(\frac{m}{2})$.
Par conséquent la métrique de Berger est fixée, égale à $h_B = 4\cos(\frac{m}{2})\sigma_Z^2 + (\sigma_X^2+\sigma_Y^2)$, seul le rapport d'homothétie c_2 dépend de ϵ.
Numériquement $4\cos(\frac{m}{2}) \simeq 0,32$ et donc par le corollaire 6.3 de [9] :

$$\lambda_1(\mathbb{S}^3, 4\cos(\frac{m}{2})\sigma_Z^2 + (\sigma_X^2+\sigma_Y^2)) = \lambda_1(\mathbb{S}^2(\frac{1}{2}), can) = 8$$

En supposant ϵ assez petit (pour que $\cos(\epsilon+\delta) \geq \frac{1}{2}$), on en déduit comme :

$$\lambda_1(\mathbb{S}^3, h) = \frac{1}{c_2^2}\lambda_1(\mathbb{S}^3, 4\cos(\frac{m}{2})\sigma_Z^2 + (\sigma_X^2+\sigma_Y^2))$$

que :

$$\lambda_1(\mathbb{S}^3, h) \geq 32. \tag{4.3}$$

4.2.2 Estimations de volumes et application

Nous allons montrer que le volume de la partie de M_A où la métrique g n'est pas un produit tordu (que nous appellerons les "extrémités" de M_A) tend vers zéro avec ϵ.
Cette estimation de volume nous permettra d'en déduire une minoration du quotient de Rayleigh de fonctions, dont la moyenne sur chaque hypersurface $\{t\}\times\mathbb{S}^3$ est nulle.

Commençons par estimer le volume de $\int_0^{\epsilon/2}\int_{\mathbb{S}^3}\theta(t)dtdx$.
Par définition de la forme volume, pour $t \in [0, \epsilon/2]$:

$$\theta(t) = \frac{\sin(at)}{a} \times \left(\epsilon + \frac{t^2}{4\,\epsilon}\right)^2,$$

d'où la majoration sur $[0, \epsilon/2]$:

$$\theta(t) \leq 2t\epsilon^2 \tag{4.4}$$

d'où, comme $can_{\mathbb{S}^3} = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + \sigma_Z^2$:

$$\int_0^{\frac{\epsilon}{2}} \int_{\mathbb{S}^3} \theta(t) dt dx \leq \int_0^{\frac{\epsilon}{2}} 2t\epsilon^2 dt \ \mathrm{vol}\,(\mathbb{S}^3, can).$$

Pour $t \geq \frac{\pi}{2} - \delta$, on a d'après l'inégalité sur les formes volumes de Bishop (voir [22], page 162 pour un énoncé) :

$$\forall t \in [\frac{\pi}{2} - \delta, \pi - 2\delta], \ \ \theta(t) \leq \sin(\pi - 2\delta - t). \tag{4.5}$$

Par conséquent, on en déduit :

Lemme 4.2.1 *Il existe une fonction $\tau(\epsilon)$ telle que :*

$$\mathrm{vol}\,\{(t,x) \in M_A ; t \in [0, \epsilon/2] \cup [\pi - 2\delta - \epsilon/2, \pi - 2\delta]\} \leq \tau(\epsilon). \tag{4.6}$$

On en déduit également :

Lemme 4.2.2 *Il existe une constante C telle que, pour ϵ assez petit :*

$$\forall t \in I, \ \ \int_{\{t\} \times \mathbb{S}^3} dv_g(t,x) \leq C. \tag{4.7}$$

Preuve : Pour $t \in [0, \epsilon/2]$, c'est une conséquence de (4.4), pour $t \in [\frac{\epsilon}{2}, \frac{\pi}{2} - \delta]$, c'est une conséquence des estimations (4.1) et pour $t \in [\frac{\pi}{2} - \delta, \pi - 2\delta]$, c'est une conséquence de (4.5). ■

On déduit de ces estimations le résultat suivant :

Lemme 4.2.3 *Soit C une constante positive. Il existe une fonction $\tau(\epsilon)$ telle que, pour toute fonction $f \in C^\infty(M_A)$, vérifiant $||f||_\infty \leq C$ et*

$$\forall t \in [0, \pi - 2\delta], \ \ \int_{\mathbb{S}^3} f(t,x) dx = 0,$$

on a la minoration :

$$QR(f) \geq \lambda_1(\mathbb{S}^3, h) \left(1 - \frac{\tau(\epsilon)}{\int_{M_A} f^2 dv_g} \right).$$

Preuve : Notons $I_\epsilon := [\frac{\epsilon}{2}, \pi - 2\delta - \frac{\epsilon}{2}]$.
Sur I_ϵ, toute hypersurface de la forme $\{t\} \times \mathbb{S}^3$ est une sphère "plus petite" que la sphère "équatoriale" $\{\frac{\pi}{2} - \delta\} \times \mathbb{S}^3$, par conséquent la première valeur propre du laplacien de ces hypersurfaces est supérieure à celle de la sphère "équatoriale".

Précisons cette remarque :
Sur le sous-intervalle I_ϵ de I,

$$\theta(t) = c_1(\epsilon)c_2^2(\epsilon)\sin^3(t+\delta)$$

et

$$\forall x \in \mathbb{S}^3, \quad g(df, df)(t,x) = \frac{1}{\sin^2(t+\delta)} h(df, df)(t,x).$$

Pour tout t de I_ϵ, $\int_{\mathbb{S}^3} f(t,x)dx = 0$, on en déduit la minoration suivante :

$$\frac{\int_0^{\pi-2\delta}\int_{\mathbb{S}^3} g(df,df)(t,x)dv_g(t,x)}{\int_{M_A} f^2(t,x)dv_g(t,x)} \geq \lambda_1(\mathbb{S}^3, h)\frac{\int_{\frac{\epsilon}{2}}^{\pi-2\delta-\frac{\epsilon}{2}}\int_{\mathbb{S}^3} f^2(t,x)c_1(\epsilon)c_2^2(\epsilon)\sin^3(t+\delta)dtdx}{\int_{M_A} f^2(t,x)dv_g(t,x)},$$

en utilisant le fait que $\sin(t) \geq \sin^3(t)$ sur $[0,\pi]$.

Grâce à l'estimation (4.6) du volume des extrémités de (M_A, g) et comme $||f||_\infty \leq C$, on en déduit l'existence d'une fonction $\tau(\epsilon)$ telle que :

$$\frac{\int_{\frac{\epsilon}{2}}^{\pi-2\delta-\frac{\epsilon}{2}}\int_{\mathbb{S}^3} f^2(t,x)c_1(\epsilon)c_2^2(\epsilon)\sin^3(t+\delta)dtdx}{\int_{M_A} f^2(t,x)dv_g(t,x)} \geq 1 - \frac{\tau(\epsilon)}{\int_{M_A} f^2(t,x)dv_g(t,x)}.$$

■

4.2.3 Estimation de la première valeur propre $\lambda_1(M_A, g)$ non nulle de (M_A, g)

Il s'agit ici d'obtenir d'une part, une majoration de la forme :

$$\lambda_1(M_A, g) \leq 4 + \tau(\epsilon)$$

et d'autre part, de montrer que l'on peut supposer la première fonction propre radiale.
Le diamètre de (M_A, g) est supérieure ou égal à $\pi - 2\delta$, par conséquent, d'après un théorème de S.Y. Cheng (théorème 3.0.3), il existe une fonction $\tau(\epsilon)$ telle que :

$$\lambda_1(M_A, g) \leq 4 + \tau(\epsilon). \tag{4.8}$$

Par choix de la métrique, la forme volume sur (M_A, g) vérifie

$$dv_g = \theta(t)dtdx$$

où dx est la mesure riemannienne associée à la métrique canonique de $\mathbb{S}^3$.
Le fait que sur M_A, la forme volume θ soit une fonction de la variable t uniquement, nous permet d'en déduire le résultat de commutativité suivant :

Lemme 4.2.4 *Notons* Δ *le laplacien sur* (M_A, g)*,* $\Delta_t^{\mathbb{S}^3}$ *le laplacien sur* $\mathbb{S}^3$ *munie de la restriction de* g *à* $\{t\} \times \mathbb{S}^3$ *et* $\tilde{f}(t,x)$*, la restriction de* f *à* $\{t\} \times \mathbb{S}^3$*. Alors :*

$$\Delta f(t,x) = -\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\theta'(t)}{\theta(t)}\frac{\partial f}{\partial t} + \Delta_t^{\mathbb{S}^3} \tilde{f}(t,x)$$

Ce qui permet d'en déduire :

$$\Delta \int_{\mathbb{S}^3} f(t,x)dx = \int_{\mathbb{S}^3} \Delta f(t,x)dx$$

Preuve : La preuve de la première formule se déduit immédiatement de l'expression du laplacien en coordonnées. On en déduit la seconde en intégrant la première et en utilisant la formule de Green. ■

Lemme 4.2.5 *Pour* ϵ *assez petit, la première valeur propre non nulle de* (M_A, g) *admet une fonction propre radiale.*

Preuve : Soit f_1 une fonction propre associée à la valeur propre $\lambda_1(M_A, g)$, normalisée par $\int_{M_A} f_1^2 dv_g = 1$. D'après le lemme 4.2.4, $a(t) := \int_{\mathbb{S}^3} f_1(t,x)dx$ vérifie $\Delta a = \lambda_1(M_A, g)a$. Montrons que a n'est pas nulle sur I.

Si $a \equiv 0$, comme d'après la proposition 2.2.1, il existe une constante C telle que $||f_1||_\infty \leq C$, f_1 vérifie les hypothèses du lemme 4.2.3. Par conséquent, pour ϵ assez petit, on déduit du lemme 4.2.3 et de l'estimation (4.3) :

$$\lambda_1(M_A, g) \geq 16,$$

ce qui contredit, pour ϵ assez petit, l'estimation (4.8).

Par conséquent, a est une fonction propre radiale de valeur propre $\lambda_1(M_A, g)$. ■

4.2.4 Estimation de la seconde valeur propre $\lambda_2(M_A, g)$ non nulle de (M_A, g)

La famille d'exemples construite par M. Anderson est approximativement un produit tordu par la fonction sinus, excepté près des extrémités 0 et $\pi - 2\delta$. D'autre part, la métrique induite sur l'hypersurface $\{\frac{\pi}{2} - \delta\} \times \mathbb{S}^3$ est homothétique à une métrique de Berger fixée et le rapport d'homothétie tend vers $\frac{1}{4}$ lorsque ϵ tend vers 0.

La preuve consiste à décomposer une fonction propre associée à $\lambda_2(M_A, g)$ en la somme d'une fonction radiale b et d'une fonction $\tilde{f}$ de moyenne nulle sur chacune des hypersurfaces $\{t\} \times \mathbb{S}^3$. On minore ensuite $\lambda_2(M_A, g)$ par une combinaison convexe des quotients de Rayleigh de b et de $\tilde{f}$. Les propriétés de la métrique g permettent alors de minorer le quotient de Rayleigh de $\tilde{f}$ à l'aide de $\lambda_1(\mathbb{S}^3, h)$ et de minorer celui de b à l'aide de la deuxième valeur propre de $\mathbb{S}^4$: 10 (en transplantant de manière convenable b sur $\mathbb{S}^4$).

Proposition 4.2.1 *Il existe des constantes μ ($\mu \geq \frac{9}{2}$) et $\epsilon_0 > 0$ telles que, pour $\epsilon < \epsilon_0$:*

$$\lambda_2(M_A, g) \geq \mu.$$

Preuve :
Notons a(t) la première fonction propre radiale. On la suppose normalisée par

$$\int_0^{\pi-2\delta} a^2(t)\theta(t)dt = \frac{1}{\mathrm{vol}\,(\mathbb{S}^3, can)}. \tag{4.9}$$

Soit $f(t,x)$, une fonction propre associée à la valeur propre $\lambda_2(M_A, g)$.
Supposons f normalisée par

$$\int_{M_A} f^2(t,x)dv_g(t,x) = 1. \tag{4.10}$$

On décompose f sous la forme :

$$f(t,x) = b(t) + \tilde{f}(t,x) \text{ avec } \int_{\mathbb{S}^3} \tilde{f}(t,x)dx = 0, \ \ \forall t \in [0, \pi - 2\delta].$$

Calculons le gradient de f pour la métrique g.

$$\nabla f(t,x) = \left(b'(t) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(t,x)\right)\frac{\partial}{\partial t} + \nabla^{\mathbb{S}^3}\tilde{f}(t,x),$$

avec $\nabla^{\mathbb{S}^3}\tilde{f}$ le gradient de la restriction de $\tilde{f}$ sur $\{t\} \times \mathbb{S}^3$ munie de la métrique induite.
Par choix de la décomposition de f, on a pour tout t de I :

$$\int_{\mathbb{S}^3} b(t)\tilde{f}(t,x)dx = 0, \tag{4.11}$$

$$\int_{\mathbb{S}^3} b'(t)\frac{\partial}{\partial t}\tilde{f}(t,x)dx = 0, \tag{4.12}$$

$$\int_{\mathbb{S}^3} a'(t)\frac{\partial}{\partial t}\tilde{f}(t,x)dx = 0. \tag{4.13}$$

De plus, l'orthogonalité de a et de f se traduit par :

$$\int_0^{\pi-2\delta} a(t)b(t)\theta(t)dt = 0, \tag{4.14}$$

$$\int_0^{\pi-2\delta} a'(t)b'(t)\theta(t)dt = 0. \tag{4.15}$$

Enfin, l'orthogonalité de a et f par rapport aux constantes, se traduit par :

$$\int_0^{\pi-2\delta} a(t)\theta(t)dt = 0 \text{ et } \int_0^{\pi-2\delta} b(t)\theta(t)dt = 0. \tag{4.16}$$

La première étape de la preuve consiste à montrer qu'en restriction aux tranches où la métrique est un produit tordu (i.e. $t \in [\epsilon/2, \pi - 2\delta - \epsilon/2]$), les intégrandes dans les équations précédentes ((4.14) ... (4.16)) intégrées sur ces tranches : $t \in [\epsilon/2, \pi - 2\delta - \epsilon/2]$ sont bornées en valeur absolue par une fonction $\tau(\epsilon)$.
Pour cela, compte-tenu du lemme 4.2.1 sur le volume des extrémités de (M_A, g), il suffit de montrer que les fonctions $a(t), a'(t), b(t), b'(t), \tilde{f}(t,x)$ et $\frac{\partial}{\partial t}\tilde{f}(t,x)$ sont bornées en norme L^∞ par une constante indépendante de ϵ.

Un résultat de S.Y. Cheng ([17]) montre l'existence d'une constante C telle que :

$$\lambda_2(M_A, g) \leq C.$$

En effet on a le :

Théorème 4.2.1 (Cheng) *Soit* $(M, g) \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}$.

$$\lambda_k(M, g) \leq \lambda_1(B(\frac{d}{2k})),$$

avec B *une boule de rayon* $\frac{d}{2k}$ *de la sphère unité canonique de dimension* n *et* d *le diamètre de* (M, g).

Par conséquent, d'après la proposition 2.2.1, les fonctions propres a et f sont bornées en norme L^∞ par une constante, ainsi que leurs gradients :
$\exists\, C_1 > 0;$

$$||a||_{L^\infty} \leq C_1 \text{ et } ||a'||_{L^\infty} \leq C_1, \tag{4.17}$$

$$||f||_{L^\infty} \leq C_1 \text{ et } ||\,|\nabla f|\,||_{L^\infty} \leq C_1. \tag{4.18}$$

D'où :

$$|b(t)| = \left|\int_{\mathbb{S}^3} f(t,x)dx\right| \leq C_1 \text{ vol}\,(\mathbb{S}^3, can) \;\; \forall t \in [0, \pi - 2\delta]$$

$$|b'(t)| = \left|\int_{\mathbb{S}^3} \frac{\partial}{\partial t} f(t,x)dx\right| \leq C_1 \text{ vol}\,(\mathbb{S}^3, can) \;\; \forall t \in [0, \pi - 2\delta].$$

Donc, en notant $C_2 = C_1 \text{ vol}\,(\mathbb{S}^3, can)$:

$$||b||_{L^\infty} \leq C_2 \text{ et } ||b'||_{L^\infty} \leq C_2. \tag{4.19}$$

Comme $\tilde{f} = f - b$, on en déduit un résultat similaire pour $\tilde{f}$:

$$||\tilde{f}||_\infty \leq C_3 \text{ et } ||\nabla \tilde{f}||_\infty \leq C_3. \tag{4.20}$$

On déduit des majorations (4.17), (4.18), (4.19), (4.20) et de l'estimation (4.6) du volume des extrémités de (M_A, g) que les égalités (4.14), (4.15) et (4.16) implique l'existence d'une fonction $\tau_1(\epsilon)$ telle que :

$$\left|\int_{\frac{\epsilon}{2}}^{\pi - 2\delta - \frac{\epsilon}{2}} a(t)b(t)\theta(t)dt\right| \leq \tau_1(\epsilon), \tag{4.21}$$

$$\left| \int_{\frac{\epsilon}{2}}^{\pi-2\delta-\frac{\epsilon}{2}} a'(t)b'(t)\theta(t)dt \right| \leq \tau_1(\epsilon), \tag{4.22}$$

$$\left| \int_{\frac{\epsilon}{2}}^{\pi-2\delta-\frac{\epsilon}{2}} a(t)\theta(t)dt \right| \leq \tau_1(\epsilon) \text{ et } \left| \int_{\frac{\epsilon}{2}}^{\pi-2\delta-\frac{\epsilon}{2}} b(t)\theta(t)dt \right| \leq \tau_1(\epsilon). \tag{4.23}$$

La suite de la preuve consiste à minorer le quotient de Rayleigh de f (noté $QR(f)$) par une combinaison convexe du quotient de Rayleigh de la fonction radiale b et de celui de la fonction $\tilde{f}$.
D'après (4.12) :

$$\int_{M_A} |\nabla f|^2 dv_g = \int_0^{\pi-2\delta} \int_{\mathbb{S}^3} (b'(t))^2 + \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(t,x)\right)^2 + |\nabla^{\mathbb{S}^3} \tilde{f}(t,x)|^2 dv_g(t,x).$$

En utilisant (4.10), on obtient :

$$QR(f) \geq \int_0^{\pi-2\delta} \int_{\mathbb{S}^3} (b'(t))^2 dv_g(t,x) + \int_0^{\pi-2\delta} \int_{\mathbb{S}^3} |\nabla^{\mathbb{S}^3} \tilde{f}(t,x)|^2 dv_g(t,x).$$

Notons $\alpha := \int_{M_A} b^2(t) dv_g(t,x)$, à l'aide de (4.11), on en déduit :

$$QR(f) \geq \alpha \frac{\int_0^{\pi-2\delta} \int_{\mathbb{S}^3} (b'(t))^2 dv_g(t,x)}{\int_{M_A} b^2(t) dv_g(t,x)} + (1-\alpha) \frac{\int_0^{\pi-2\delta} \int_{\mathbb{S}^3} |\nabla^{\mathbb{S}^3} \tilde{f}(t,x)|^2 dv_g(t,x)}{\int_{M_A} \tilde{f}^2(t,x) dv_g(t,x)}. \tag{4.24}$$

Comme $||\tilde{f}||_\infty \leq C_3$ et pour tout t appartenant à I, $\int_{\mathbb{S}^3} \tilde{f}(t,x)dx = 0$, le lemme 4.2.3 appliqué à $\tilde{f}$ implique l'existence d'une fonction $\tau_2(\epsilon)$ telle que :

$$QR(f) \geq \alpha \frac{\int_0^{\pi-2\delta} \int_{\mathbb{S}^3} (b'(t))^2 dv_g(t,x)}{\int_{M_A} b^2(t) dv_g(t,x)} + (1-\alpha)\lambda_1(\mathbb{S}^3, h) \left(1 - \frac{\tau_2(\epsilon)}{1-\alpha}\right). \tag{4.25}$$

Deux cas se présentent.
Soit α est petit (on suppose $\alpha \leq \frac{1}{2}$ pour fixer les idées), on déduit alors de la minoration (4.3) de $\lambda_1(\mathbb{S}^3, h)$:

$$QR(f) \geq 16 \times (1 - 2\tau_2(\epsilon)).$$

Ce qui prouve que la seconde valeur propre des exemples construits par Anderson est “grande”.
Soit $\alpha > \frac{1}{2}$ et dans ce cas il faut minorer convenablement le terme $\frac{\int_0^{\pi-2\delta} \int_{\mathbb{S}^3} (b'(t))^2 dv_g(t,x)}{\int_{M_A} b^2(t) dv_g(t,x)}$ pour obtenir le résultat.
On suppose dorénavant que $\alpha > \frac{1}{2}$.
La suite de la preuve consiste à prolonger les fonctions a et b en des fonctions radiales de $(\mathbb{S}^4, can)$ en conservant approximativement les relations d'orthogonalité liant a et b ainsi que leurs quotients de Rayleigh. Le quotient de Rayleigh de la fonction a prolongée sera

donc approximativement égale à la première valeur propre de $(\mathbb{S}^4, can)$. On obtiendra un minorant du quotient de Rayleigh de la fonction b prolongée, en remarquant que le quotient de Rayleigh de la deuxième fonction propre radiale de $(\mathbb{S}^4, can)$ est égale à la deuxième valeur propre de la sphère canonique (comptée sans multiplicité) soit 10 en dimension 4.

On prolonge $a(t)$ et $b(t)$ de manière affine sur $[0,\pi] \setminus [\frac{\epsilon}{2}, \pi - 2\delta - \frac{\epsilon}{2}]$, de sorte que ces fonctions soient nulles aux extrémités 0 et π. On obtient alors deux fonctions radiales appartenant à $H^1(\mathbb{S}^4, can)$ que l'on notera $\overline{a}(t)$ et $\overline{b}(t)$.
On obtient, en tenant compte de la translation $t+\delta$ dans la forme volume :

$$\overline{a}(t) = \begin{cases} \frac{a(\frac{\epsilon}{2})}{\frac{\epsilon}{2}+\delta} t & \text{si } t \in [0, \frac{\epsilon}{2}+\delta] \\ a(t-\delta) & \text{si } t \in [\frac{\epsilon}{2}+\delta, \pi-\delta-\frac{\epsilon}{2}] \\ \frac{a(\pi-2\delta-\frac{\epsilon}{2})}{\frac{\epsilon}{2}+\delta}(\pi - t) & \text{si } t \in [\pi-\delta-\frac{\epsilon}{2}, \pi] \end{cases}$$

On définit de manière similaire $\overline{b}$.
Estimons maintenant les quotients de Rayleigh de $\overline{a}$ et $\overline{b}$ sur $(\mathbb{S}^4, can)$.

$$\int_0^\pi \overline{a}(t)\sin^3(t)dt = \int_0^{\frac{\epsilon}{2}+\delta} \left(\frac{a(\frac{\epsilon}{2})}{\frac{\epsilon}{2}+\delta} t\right)^2 \sin^3(t)dt + \int_{\frac{\epsilon}{2}}^{\pi-\frac{\epsilon}{2}-2\delta} a^2(t)\sin^3(t+\delta)dt + \int_{\pi-\frac{\epsilon}{2}-\delta}^{\pi} \left(\frac{a(\pi-2\delta-\frac{\epsilon}{2})}{\frac{\epsilon}{2}+\delta}(\pi-t)\right)^2 \sin^3(t)dt \quad (4.26)$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{\partial \overline{a}}{\partial t}(t)\right)^2 \sin^3(t)dt = \int_0^{\frac{\epsilon}{2}+\delta} \left(\frac{a(\frac{\epsilon}{2})}{\frac{\epsilon}{2}+\delta}\right)^2 \sin^3(t)dt + \int_{\frac{\epsilon}{2}}^{\pi-\frac{\epsilon}{2}-2\delta} \left(\frac{\partial a}{\partial t}(t)\right)^2 \sin^3(t+\delta)dt + \int_{\pi-\frac{\epsilon}{2}-\delta}^{\pi} \left(\frac{a(\pi-\frac{\epsilon}{2})}{\frac{\epsilon}{2}+\delta}\right)^2 \sin^3(t)dt \quad (4.27)$$

Or, d'après la normalisation (4.9) choisie pour a, l'estimation (4.17) sur $||a||_{L^\infty}$ et l'estimation (4.6) du volume des extrémités de (M_A, g), il existe une fonction $\tau_3(\epsilon)$ telle que :

$$\int_{\frac{\epsilon}{2}}^{\pi-\frac{\epsilon}{2}-2\delta} a^2(t)\theta(t)dt \geq \frac{1}{\mathrm{vol}\,(\mathbb{S}^3, can)} - \tau_3(\epsilon), \quad (4.28)$$

par conséquent, (4.26) et (4.27) implique que le quotient de Rayleigh de $\overline{a}$ sur $(\mathbb{S}^4, can)$ vérifie :

$$\left| \mathrm{QR}(\overline{\mathrm{a}}) - \frac{\int_{\frac{\epsilon}{2}}^{\pi-\frac{\epsilon}{2}-2\delta} \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\mathrm{a}\right)^2(\mathrm{t})\theta(\mathrm{t})\mathrm{dt}}{\int_{\frac{\epsilon}{2}}^{\pi-\frac{\epsilon}{2}-2\delta} \mathrm{a}^2(\mathrm{t})\theta(\mathrm{t})\mathrm{dt}} \right| \leq \tau_4(\epsilon).$$

En utilisant de nouveau l'estimation (4.17) sur $||a||_{L^\infty}$ et l'estimation (4.6) du volume des extrémités de (M_A, g), on en déduit l'existence d'une fonction $\tau_5(\epsilon)$, telle que :

$$\left| \int_{M_A} a^2 dv_g - \mathrm{vol}\,(\mathbb{S}^3, can) \times \int_{\frac{\epsilon}{2}}^{\pi-\frac{\epsilon}{2}-2\delta} a^2(t)\theta(t)dt \right| \leq \tau_5(\epsilon),$$

et

$$\left|\int_{M_A}\left(\frac{\partial}{\partial t}a\right)^2 dv_g - \text{ vol}\,(\mathbb{S}^3, can)\times\int_{\frac{\epsilon}{2}}^{\pi-\frac{\epsilon}{2}-2\delta}\left(\frac{\partial}{\partial t}a\right)^2(t)\theta(t)dt\right| \leq \tau_5(\epsilon).$$

Par conséquent, (4.28) implique l'existence d'une fonction $\tau_6(\epsilon)$, telle que :

$$\left|\mathrm{QR(a)} - \frac{\int_{\frac{\epsilon}{2}}^{\pi-\frac{\epsilon}{2}-2\delta}\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\mathrm{a}\right)^2(\mathrm{t})\theta(\mathrm{t})\mathrm{dt}}{\int_{\frac{\epsilon}{2}}^{\pi-\frac{\epsilon}{2}-2\delta}\mathrm{a}^2(\mathrm{t})\theta(\mathrm{t})\mathrm{dt}}\right| \leq \tau_6(\epsilon)$$

d'où :

$$|\mathrm{QR}(\overline{\mathrm{a}}) - \mathrm{QR(a)}| \leq \tau_4(\epsilon) + \tau_6(\epsilon).$$

Or, d'après (4.8) :

$$\mathrm{QR(a)} \leq 4 + \tau(\epsilon). \tag{4.29}$$

Donc, il existe une fonction $\tau_7(\epsilon)$ telle que :

$$|\mathrm{QR}(\overline{\mathrm{a}}) - 4| \leq \tau_7(\epsilon). \tag{4.30}$$

Comme $\alpha > \frac{1}{2}$:

$$\int_0^{\pi-2\delta} b^2(t)\theta(t)dt \geq \frac{1}{2\text{ vol}\,(\mathbb{S}^3, can)}, \tag{4.31}$$

on note $D = \frac{1}{2\text{ vol}\,(\mathbb{S}^3,can)} > 0$.
On en déduit alors, de manière similaire, l'existence d'une fonction $\tau_8(\epsilon)$ telle que :

$$\left|\mathrm{QR}(\overline{\mathrm{b}}) - \mathrm{QR(b)}\right| \leq \tau_8(\epsilon). \tag{4.32}$$

D'autre part, par construction du prolongement et par (4.17) et (4.19), les équations (4.21), (4.22), (4.23) restent valables pour les fonctions $\overline{a}$ et $\overline{b}$:

$$\left|\int_0^{\pi}\overline{a}(t)\overline{b}(t)\sin^3(t)dt\right| \leq \tau_9(\epsilon), \tag{4.33}$$

$$\left|\int_0^{\pi}\overline{a}'(t)\overline{b}'(t)\sin^3(t)dt\right| \leq \tau_9(\epsilon), \tag{4.34}$$

$$\left|\int_0^{\pi}\overline{a}(t)\sin^3(t)dt\right| \leq \tau_9(\epsilon) \text{ et } \left|\int_0^{\pi}\overline{b}(t)\sin^3(t)dt\right| \leq \tau_9(\epsilon). \tag{4.35}$$

La normalisation (4.9) choisie pour a donne :

$$\left|\int_0^{\pi}\overline{a}^2(t)\sin^3(t)dt - \frac{1}{\text{vol}\,(\mathbb{S}^3, can)}\right| \leq \tau_9(\epsilon) \tag{4.36}$$

et (4.31) implique :

$$\int_0^{\pi}\overline{b}^2(t)\sin^3(t)dt \geq D - \tau_9(\epsilon). \tag{4.37}$$

Montrons maintenant le

Lemme 4.2.6 *Il existe une fonction propre radiale u de valeur propre 4 sur* $(\mathbb{S}^4, can)$ *et une fonction* $\tau(\epsilon)$ *telle que :*

$$||\overline{a} - u||_{H^1(\mathbb{S}^4, can)} \leq \tau(\epsilon).$$

Preuve : Notons $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée de fonctions propres radiales de $H^1(\mathbb{S}^4, can)$. Notons :

$$\overline{a} = \beta_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i u_i,$$

la décomposition de Fourier de $\overline{a}$ dans cette base.
D'après (4.35) :

$$|\beta_0| \leq \tau_2(\epsilon).$$

Notons $u = \beta_1 u_1$ et montrons que u est proche dans $H^1(\mathbb{S}^4)$ de $\overline{a}$.
Notons $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ les valeurs propres associées aux fonctions propres radiales de $(\mathbb{S}^4, can)$: $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 10$ ... .

$$\mathrm{QR}(\overline{\mathrm{a}}) \geq \frac{\lambda_1(\sum_{\mathrm{i}=1}^{+\infty} \beta_{\mathrm{i}}^2) + (\lambda_2 - \lambda_1)\sum_{\mathrm{i}=2}^{+\infty} \beta_{\mathrm{i}}^2}{\beta_0^2 + \beta_1^2 + \sum_{\mathrm{i}=2}^{+\infty} \beta_{\mathrm{i}}^2}$$

Or par (4.29) :

$$\mathrm{QR}(\overline{\mathrm{a}}) \leq 4 + \tau(\epsilon)$$

d'où, puisque d'après (4.36), $|\sum_{i=0}^{+\infty} \beta_i^2 - 1| \leq \tau_3(\epsilon)$ et comme $|\beta_0| \leq \tau_2(\epsilon)$, il existe une fonction $\tau'(\epsilon)$ telle que :

$$\lambda_1(1 - \tau'(\epsilon)) + (\lambda_2 - \lambda_1)(1 - \tau'(\epsilon) - \beta_1^2) \leq 4 + \tau(\epsilon).$$

Ce qui donne après simplifications, $\beta_1^2 \simeq 1 \simeq \sum_{i=0}^{+\infty} \beta_i^2$, d'où la proximité L^2 entre $\overline{a}$ et u :

$$||\overline{a} - u||_{L^2} \leq \tau(\epsilon).$$

La proximité intégrale des gradients de u et $\overline{a}$ s'obtient en développant la différence, puis en utilisant la proximité des quotients de Rayleigh des deux fonctions :

$$\int_{\mathbb{S}^4} |\nabla\overline{a} - \nabla u|^2 dv_{can} = \int_{\mathbb{S}^4} |\nabla\overline{a}|^2 dv_{can} + \int_{\mathbb{S}^4} |\nabla u|^2 dv_{can} - 2\int_{\mathbb{S}^4} can(\nabla\overline{a}, \nabla u) dv_{can}$$

Or : $\int_{\mathbb{S}^4} |\nabla u|^2 dv_{can} = 4\int_{\mathbb{S}^4} u^2 dv_{can}$ et par la formule de Green et la proximité L^2 de $\overline{a}$ et u :

$$\left|\int_{\mathbb{S}^4} can(\nabla\overline{a}, \nabla u) dv_{can} - 4\int_{\mathbb{S}^4} u^2 dv_{can}\right| \leq \tau(\epsilon)$$

d'où :

$$\int_{\mathbb{S}^4} |\nabla\overline{a} - \nabla u|^2 dv_{can} \leq \mathrm{QR}(\overline{\mathrm{a}})\int_{\mathbb{S}^4} \overline{\mathrm{a}}^2 \mathrm{dv_{can}} - 4\int_{\mathbb{S}^4} \mathrm{u}^2 \mathrm{dv_{can}} + \tau(\epsilon).$$

La proximité L^2 des deux fonctions et la proximité du quotient de Rayleigh de $\overline{a}$ avec 4 permet de conclure.

On a montré en particulier que $u \simeq u_1$, donc quitte à modifier $\tau(\epsilon)$, on considèrera que $u = u_1$ dans la suite. ■

En conséquence, on peut, dans les équations exprimant la presque orthogonalité de $\overline{a}$ et $\overline{b}$, remplacer $\overline{a}$ par u_1, quitte à modifier $\tau_9(\epsilon)$.
En particulier, on peut supposer :

$$\left|\int_0^\pi u_1(t)\overline{b}(t)\sin^3(t)dt\right| \leq \tau(\epsilon). \tag{4.38}$$

Passons maintenant à la minoration de $\int_0^\pi (\overline{b}'(t))^2 \sin^3(t)dt$.
Notons $\overline{b} = \sum_{i=0}^{+\infty} \gamma_i u_i$ la décomposition de Fourier de $\overline{b}$.

$$\int_0^\pi (\overline{b}'(t))^2 \sin^3(t)dt = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i \gamma_i^2 \geq \lambda_2 \sum_{i=2}^{+\infty} \gamma_i^2. \tag{4.39}$$

Or d'après (4.38) et (4.35) :
$|\gamma_0| \leq \tau(\epsilon)$ et $|\gamma_1| \leq \tau(\epsilon)$.
D'où, comme par (4.37) : $\int_0^\pi \overline{b}^2(t)\sin^3(t)dt \geq D - \tau_9(\epsilon) \geq \frac{D}{2} > 0$ pour ϵ assez petit, on en déduit :

$$\left|\frac{\sum_{i=2}^{+\infty}\gamma_i^2}{\int_0^\pi \overline{b}^2(t)\sin^3(t)dt} - 1\right| = \frac{1}{\int_0^\pi \overline{b}^2(t)\sin^3(t)dt}\left|\sum_{i=2}^{+\infty}\gamma_i^2 - \sum_{i=0}^{+\infty}\gamma_i^2\right| \leq \frac{2}{D}\tau(\epsilon).$$

Par conséquent par (4.39), il existe une fonction $\tau''(\epsilon)$ telle que le quotient de Rayleigh de $\overline{b}$ sur $(\mathbb{S}^4, can)$ vérifie :

$$\mathrm{QR}(\overline{\mathrm{b}}) \geq 10(1-\tau''(\epsilon)).$$

On en déduit, d'après (4.32) et (4.25), la minoration suivante :

$$QR(f) \geq \alpha 10(1-\tau''(\epsilon)) > 5(1-\tau''(\epsilon)).$$

Ce qui conclut.

∎

Chapitre 5

Pincement du spectre de Dirichlet

Pour les variétés riemanniennes de dimension n, à courbure de Ricci : $Ric \geq (n-1)g$, A. Lichnerowicz et M. Obata ont prouvé ([33],[34]) que la première valeur propre non nulle de (M, g) vérifie :

$$\lambda_1(M, g) \geq \lambda_1(\mathbb{S}^n, can),$$

de plus, seule la sphère canonique réalise le cas d'égalité. P. Bérard et D. Meyer ont étendu cette propriété de minimalité du début du spectre de la sphère, au cas des domaines des variétés à courbure de Ricci : $Ric \geq (n-1)g$ ([6]) :

Théorème 5.0.2 (Bérard-Meyer) *Soit (M,g) une variété riemannienne de dimension n. On suppose que la courbure de Ricci de (M, g) vérifie $Ric \geq (n-1)g$. Soit Ω un domaine régulier de M et Ω^*, le domaine symétrisé de Ω, c'est-à-dire une boule géodésique de la sphère canonique $(\mathbb{S}^n, can)$ vérifiant $\frac{\mathrm{vol}\,(\Omega)}{\mathrm{vol}\,(M)} = \frac{\mathrm{vol}\,(\Omega^*)}{\mathrm{vol}\,(\mathbb{S}^n)}$. Alors, on a l'inégalité :*

$$\lambda_1^D(\Omega) \geq \lambda_1^D(\Omega^*),$$

où λ_1^D désigne la première valeur propre de Dirichlet du domaine sur l'espace correspondant. De plus, l'égalité a lieu si et seulement si le triplet (Ω, M, g) est isométrique au triplet $(\Omega^*, \mathbb{S}^n, can)$.

L'objet de ce chapitre est de fournir des réponses partielles à la question suivante, analogue à celle posée dans le cas du spectre des variétés fermées :

Un domaine régulier d'une variété de dimension n, à courbure de Ricci : $Ric \geq (n-1)g$ dont la première valeur propre de Dirichlet est presque minimale (i.e. $\lambda_1^D(\Omega^*) \leq \lambda_1^D(\Omega) \leq \lambda_1^D(\Omega^*) + \epsilon$ où Ω^* est le domaine symétrisé de Ω) ressemble t-il à une boule géodésique de la sphère canonique et en quel sens ?
Peut-on, comme dans le cas d'égalité du théorème de Bérard-Meyer, en déduire des informations sur la variété ambiante ?

Remarque 5.0.1 *Nous avons rappelé dans l'introduction qu'un tel domaine n'est pas nécessairement homéomorphe à une boule euclidienne.*

5.1 Quelques rappels sur le problème de Dirichlet

Définition 5.1.1 *Soit (M, g) une variété riemannienne. Un domaine (respectivement régulier) de M, noté Ω, est un ouvert connexe, d'adhérence compacte de M (respectivement dont le bord $\partial\Omega$ est une hypersurface lisse de M).*

Rappelons la définition du spectre de Dirichlet :

Définition 5.1.2 *Le spectre de Dirichlet du laplacien Δ sur un domaine régulier Ω est l'ensemble des valeurs λ pour lesquelles il existe une fonction $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, non nulle, telle que :*

$$\Delta f = \lambda f \text{ sur } \Omega,$$
$$f = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Nous avons vu dans le chapitre 1, théorème 1.1.3, que le spectre de Dirichlet du laplacien est discret :

Théorème 5.1.1 *Le spectre du laplacien de Dirichlet sur un domaine régulier Ω est constitué d'une suite croissante de nombres positifs notés $(\lambda_i^D(\Omega))_{i\geq 1}$. Chaque espace propre est de dimension finie. $L^2(M)$ est la somme directe orthogonale, pour la norme $L^2(M)$, de tous les espaces propres.*

Rappelons également un corollaire du théorème de Courant sur les domaines nodaux (corollaire 1.1.1).

Corollaire 5.1.1 *Soit Ω un domaine régulier de (M, g). Alors la première valeur propre de Dirichlet de Ω est simple et toute fonction propre, associée à cette valeur propre, ne s'annule pas sur Ω.*

Le spectre de Dirichlet est décroissant pour l'inclusion. En particulier, la première valeur propre vérifie :

Lemme 5.1.1 *Soit Ω et Ω' deux domaines réguliers d'une variété riemannienne compacte, sans bord, (M, g). Supposons $\Omega \subset \Omega'$, alors on a l'inégalité :*

$$\lambda_1^D(\Omega) \geq \lambda_1^D(\Omega').$$

De plus, si l'on suppose que $\Omega' \backslash \Omega$ est un ouvert, l'inégalité est stricte.

Preuve : Soit f_Ω une fonction propre sur Ω, associée à $\lambda_1^D(\Omega)$. Prolongeons f_Ω par 0 sur $\Omega' \backslash \Omega$, la fonction obtenue appartient à $H^1(\Omega')$ et par le théorème du min-max :

$$\lambda_1^D(\Omega) \geq \lambda_1^D(\Omega').$$

Supposons que $\Omega' \backslash \Omega$ est un ouvert et que $\lambda_1^D(\Omega) = \lambda_1^D(\Omega')$. Par le corollaire 5.1.1, $\lambda_1^D(\Omega')$ est simple, par conséquent, en notant $f_{\Omega'}$ une fonction propre associée à $\lambda_1^D(\Omega')$, on en déduit l'existence d'un réel a tel que :

$$f_{\Omega'} = a f_\Omega,$$

Ce qui implique que $f_{\Omega'}$ s'annule sur Ω' et contredit le le corollaire 5.1.1. ∎

Soit f une fonction propre associée à la première valeur propre $\lambda_1(M)$ de (M, g). Notons Ω un domaine nodal de f. Dans ce cas particulier, le début du spectre de Dirichlet coincide avec le début du spectre de (M, g) :

Lemme 5.1.2 *Avec les hypothèses ci-dessus, supposons que Ω soit un domaine régulier, alors :*

$$\lambda_1^D(\Omega) = \lambda_1(M),$$

avec $\lambda_1(M)$, la première valeur propre non nulle de (M, g).

Remarque 5.1.1 *Dans le cas où le domaine nodal n'est pas supposé régulier, il est possible de définir une première valeur propre généralisée du probleme de Dirichlet sur Ω (appelée note fondamentale) à l'aide du principe du min-max. Sous ces hypothèses, la conclusion du lemme reste valable. Nous renvoyons à ([13], page 21) pour plus de détails.*

Pour la preuve, qui découle du principe du min-max, nous renvoyons au livre de I. Chavel ([13], pages 21 et suivantes).

5.2 Principe de Symétrisation de Faber-Krahn

5.2.1 Introduction

Dans les années 20, G. Faber et E. Krahn ont prouvé (indépendamment), pour des domaines de $\mathbb{R}^n$, la minoration suivante de la première valeur propre de Dirichlet :

Théorème 5.2.1 (Faber-Krahn) *Soit Ω un domaine régulier de $\mathbb{R}^n$ et B une boule de $\mathbb{R}^n$ de même volume. Alors on a l'inégalité :*

$$\lambda_1^D(\Omega) \geq \lambda_1^D(B).$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si Ω est une boule.

Ce théorème apparait comme un équivalent spectral de l'inégalité isopérimétrique :

$$\mathrm{vol}\,(\partial\Omega) \geq \ \mathrm{vol}\,(\partial B). \tag{5.1}$$

La démonstration du théorème de Faber-Krahn découle en réalité de l'inégalité isopérimétrique (5.1).
La preuve repose sur un principe de symétrisation (qui porte désormais le nom des auteurs) dont le schéma est le suivant :
Il s'agit d'associer à une fonction propre f sur Ω, de valeur propre $\lambda_1^D(\Omega)$, une fonction f^*, radiale, sur une boule B de même volume que Ω (B est appelé domaine symétrisé de Ω), nulle sur le bord ∂B et dont le quotient de Rayleigh est inférieur ou égal à celui de f.
L'inégalité isopérimétrique (5.1) permet de comparer le volume de lignes de niveaux correspondantes de f et de f^*, l'estimation des quotients de Rayleigh se déduit alors de la

formule de la co-aire (voir, par exemple, Burago-Zalgaller ([11])).

Le théorème de Faber-Krahn a été étendu par E. Sperner ([40]) au cas des domaines de $(\mathbb{S}^n, can)$. Ce dernier a été lui même généralisé par un théorème de P. Bérard et D. Meyer, qui fait l'objet du paragraphe suivant.

5.2.2 Théorème de Bérard-Meyer

Au début des années 80, P. Bérard et D. Meyer montrent ([6]) :

Théorème 5.2.2 (Bérard-Meyer) *Soit (M,g) une variété riemannienne de dimension n. On suppose que la courbure de Ricci de (M,g) vérifie $Ric \geq (n-1)g$. Soit Ω un domaine régulier de M et Ω^*, le domaine symétrisé de Ω, c'est-à-dire une boule géodésique de la sphère canonique $(\mathbb{S}^n, can)$ vérifiant $\frac{\mathrm{vol}\,(\Omega)}{\mathrm{vol}\,(M)} = \frac{\mathrm{vol}\,(\Omega^*)}{\mathrm{vol}\,(\mathbb{S}^n)}$. Alors,on a l'inégalité :*

$$\lambda_1^D(\Omega) \geq \lambda_1^D(\Omega^*),$$

où λ_1^D désigne la première valeur propre de Dirichlet du domaine sur l'espace correspondant. De plus, l'égalité a lieu si et seulement si le triplet (Ω, M, g) est isométrique au triplet $(\Omega^*, \mathbb{S}^n, can)$.

Remarque 5.2.1 *Comme corollaire au théorème de Bérard-Meyer, on peut redémontrer l'inégalité de Lichnerowicz :*

$$\lambda_1(M) \geq n,$$

ainsi que le cas d'égalité.
Ce théorème est donc, d'une certaine manière, une généralisation de l'inégalité de Lichnerowicz. Nous renvoyons à [6], pour une démonstration de ce corollaire.

Pour la preuve de ce théorème, nous renvoyons à [6] ou au livre de I. Chavel ([13], pages 87 et suivantes). Signalons cependant que celle-ci repose aussi sur le principe de symétrisation de Faber-Krahn où l'inégalité isopérimétrique standard a été remplacée par une inégalité isopérimétrique démontrée par M. Gromov ([26]) :

Théorème 5.2.3 (Gromov) *Soit (M^n, g) une variété riemannienne dont la courbure de Ricci vérifie : Ricci $\geq (n-1)g$. Soit Ω un domaine régulier de M. Soit B une boule géodésique de $\mathbb{S}^n$ dont le volume vérifie : $\frac{\mathrm{vol}\,B}{\mathrm{vol}\,\mathbb{S}^n} = \frac{\mathrm{vol}\,\Omega}{\mathrm{vol}\,M}$. Alors, on a l'inégalité isopérimétrique :*

$$\mathrm{vol}\,(\partial\Omega) \geq \mathrm{vol}\,(\partial B)$$

et l'égalité a lieu si et seulement si (M, g) est isométrique à $(\mathbb{S}^n, can)$ et Ω est une boule géodésique.

Remarque 5.2.2 *Le cas d'égalité est une conséquence du théorème de rigidité d'Obata (théorème 3.0.1). En effet, M. Gromov montre, en utilisant l'inégalité de Heintze-Karcher ([29]), que le cas d'égalité ne peut avoir lieu que si le diamètre de (M, g) est π.*

Remarque 5.2.3 *Ce type d'inégalité sur la première valeur propre de Dirichlet est vérifié dès que l'on dispose d'une inégalité isopérimétrique adaptée sur la variété (ou la famille de variétés) considérée (voir la preuve de I. Chavel ([13]) pour une illustration de ce principe).*

Dans le prochain paragraphe, nous allons formuler quelques propriétés du début du spectre de Dirichlet des boules géodésiques de $(\mathbb{S}^n, can)$ qui serviront d'espaces "modèles" pour les domaines dont la première valeur propre est "presque minimale".

5.2.3 Début du spectre de Dirichlet des boules géodésiques de $(\mathbb{S}^n, can)$

Les symétries d'une boule géodésique de $\mathbb{S}^n$ implique, en particulier, la propriété suivante de la première fonction propre de Dirichlet associée :

Lemme 5.2.1 *La première fonction propre du spectre de Dirichlet d'une boule géodésique $B_{\mathbb{S}^n}(r)$ de $\mathbb{S}^n$ est une fonction radiale T vérifiant l'équation différentielle :*

$$-T''(t) - (n-1)\cot(t)T'(t) = \lambda_1^D(B_{\mathbb{S}^n}(r))T(t) \text{ pour } t \in [0, r]$$

avec les conditions initiales :

$$T'(0) = 0 \text{ et } T(r) = 0.$$

Pour la preuve, nous renvoyons à [13].

On ne connait pas explicitement la première valeur propre de Dirichlet des boules géodésiques de la sphère (sauf dans le cas de l'hémisphère sur lequel nous reviendrons plus loin). Cependant, on connait la variation de cette valeur propre en fonction du rayon de la boule géodésique :

Lemme 5.2.2 *La fonction de la variable réelle qui au rayon d'une boule géodésique associe sa première valeur propre de Dirichlet :*

$$\begin{array}{rcl}]0, \pi[& \to & \mathbb{R}^+ \\ r & \to & \lambda_1^D(B_{\mathbb{S}^n}(r)) \end{array}$$

est une fonction strictement décroissante vérifiant :

$$\lim_{r \to 0} \lambda_1^D(B_{\mathbb{S}^n}(r)) = +\infty$$

et

$$\lim_{r \to \pi} \lambda_1^D(B_{\mathbb{S}^n}(r)) = 0.$$

Preuve : La stricte décroissance de la fonction est une application directe du lemme 5.1.1 . La valeur de la limite en 0 se déduit du fait qu'une métrique riemannienne est asymptotiquement euclidienne, ce qui implique :

$$\lambda_1^D(B_{\mathbb{S}^n}(r)) \underset{0}{\sim} \frac{C}{r^2},$$

avec C une constante.
Nous renvoyons au livre de P. Bérard ([5], page 46) pour plus de détails.
La limite en $+\infty$ s'obtient, d'après le théorème du min-max, en choisissant une fonction test convenable dont le quotient de Rayleigh tend vers 0 quand r tend vers π :

$$\phi(t) = 1 - \left(\frac{\pi - r}{\pi - t}\right)^{n-2},$$

convient en dimension $n \geq 3$ (nous renvoyons au livre de I. Chavel ([13], page 50) pour des calculs explicites). ■

Cas de l'hémisphère

Sur la sphère canonique, une base orthonormée du premier espace propre associée à la valeur propre n (en dimension n) est donnée par les fonctions coordonnées (voir le paragraphe 1.2.1).
Par conséquent, un hémisphère de $\mathbb{S}^n$ (noté $\mathbb{S}^{n+}$) est un domaine nodal d'une fonction propre de valeur propre n. Donc, d'après le lemme 5.1.2, la première valeur propre de Dirichlet d'un hémisphère est $\lambda_1^D(\mathbb{S}^{n+}) = n$ et sa première fonction propre est la restriction de la fonction propre correspondante de la sphère, en particulier, elle vérifie l'équation :

$$\operatorname{Hess} f + fg = 0.$$

5.3 Domaines dont la première valeur propre de Dirichlet est presque minimale

Dans cette partie, nous nous intéressons aux domaines des variétés appartenant à $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$, dont la première valeur propre de Dirichlet vérifie :

$$\lambda_1^D(\Omega^*) \leq \lambda_1^D(\Omega) \leq \lambda_1^D(\Omega^*) + \epsilon,$$

où Ω^* est le domaine symétrisé de Ω.

Remarque 5.3.1 *Il existe, à priori, un énoncé plus général pour la presque minimalité, qui consiste à remplacer l'hypothèse spectrale ci-dessus par :*

$$\lambda_1^D(B_{\mathbb{S}^n}(r)) \leq \lambda_1^D(\Omega) \leq \lambda_1^D(B_{\mathbb{S}^n}(r)) + \epsilon, \tag{5.2}$$

sans supposer aucun lien entre $B_{\mathbb{S}^n}(r)$ et le domaine symétrisé.
Cependant, (5.2) n'est pas invariant par homothéties et en particulier, toute petite sphère de rayon $R << 1$ (et donc de courbure de Ricci adéquat) admet d'après le lemme 5.2.2 une boule géodésique de rayon $r' >> r$ vérifiant l'inégalité (5.2).

Pour éviter ce phénomène, on est alors amené à imposer une borne sur le volume relatif :

$$\frac{\mathrm{vol}\,(\Omega)}{\mathrm{vol}\,(M)} \leq \frac{\mathrm{vol}\,(B_{\mathbb{S}^n}(r))}{\mathrm{vol}\,(\mathbb{S}^n)}.$$

L'énoncé se ramène dans ce cas, à notre hypothèse initiale.
Dans la suite, nous préfèrerons cette formulation faisant intervenir une borne sur le volume relatif car elle explicite le rayon de la boule géodésique à laquelle on souhaite comparer Ω.

Dans le prochain paragraphe, nous montrons qu'il existe des domaines sur l'espace projectif complexe muni de la métrique d'Anderson, dont la première valeur propre de Dirichlet est presque minimale et qui ne sont pas Gromov-Hausdorff proches de leurs domaines symétrisés.

Dans le paragraphe suivant, nous montrons un résultat de stabilité pour la distance de Gromov-Hausdorff, avec un "hémisphère" d'un sinus produit tordu.

5.3.1 Étude de la stabilité avec la sphère canonique

Dans ce paragraphe, nous montrons :

Proposition 5.3.1 *Soit un entier $n \geq 2$. Pour tout $\eta > 0$ et tout $\beta \in]0,1[$, il existe ϵ_0 dépendant de n et de β, tel que pour $\epsilon < \epsilon_0$, l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ munie de la métrique g_ϵ construite par Anderson, admet un domaine Ω, de volume relatif $\frac{\mathrm{vol}\,(\Omega)}{\mathrm{vol}\,(\mathbb{C}P^n)} = \beta$, non homéomorphe à une boule euclidienne, vérifiant :*

$$\lambda_1^D(\Omega) \leq \lambda_1^D(\Omega^*) + \eta$$

et tel que $(\Omega, \mathbb{C}P^n, g_\epsilon)$ n'est pas proche, pour la distance de Gromov-Hausdorff, de $(\Omega^*, \mathbb{S}^n, can)$. De plus, pour $\beta < \frac{1}{2}$, on peut supposer Ω à bord convexe.

Schéma de la preuve

Fixons $\beta \in]0,1[$ et r tel que $V_{\mathbb{S}^{2n}}(r) = \beta\ \mathrm{vol}\,(\mathbb{S}^{2n})$.
Considérons l'ensemble des points de $\mathbb{C}P^n$ à distance inférieure à r de $\mathbb{C}P^{n-1}$ pour les coordonnées choisies par M. Anderson, notons $B_{\mathbb{C}P^{n-1}}(r)$, cet ensemble.
Par construction, $B_{\mathbb{C}P^{n-1}}(r)$ n'est pas homéomorphe à une boule euclidienne.
La preuve consiste d'abord à montrer que le volume des extrémités de $(\mathbb{C}P^n, g_\epsilon)$ (i.e. là où g_ϵ n'est pas un produit tordu) tend vers zéro avec ϵ. On en déduit une estimation du volume relatif de $B_{\mathbb{C}P^{n-1}}(r)$:

$$\frac{\mathrm{vol}\,(B_{\mathbb{C}P^{n-1}}(r))}{\mathrm{vol}\,(\mathbb{C}P^n)} \simeq \frac{\mathrm{vol}\,(B_{\mathbb{S}^{2n}}(r))}{\mathrm{vol}\,(\mathbb{S}^{2n})}.$$

Ensuite, en transplantant la première fonction propre T de Dirichlet de la boule géodésique de rayon r de la sphère de dimension $2n$ sur l'espace projectif dans les coordonnées d'Anderson, on obtient par le théorème du min-max une estimation de $\lambda_1^D(B_{\mathbb{C}P^{n-1}}(r))$.

On montre que le quotient de Rayleigh de T transplanté sur $\mathbb{C}P^n$ est environ égal à $\lambda_1^D(B_{\mathbb{S}^{2n}}(r))$, à cause de la petitesse du volume des extrémités de $(\mathbb{C}P^n, g_\epsilon)$.

Métrique d'Anderson en dimension n

On conserve les notations du chapitre 4 sur ces exemples.
N désigne maintenant $\mathbb{C}P^n$ privé d'une boule.
N est difféomorphe au produit $\mathbb{S}^{2n-1} \times I/\sim$ et munie d'une métrique de la forme :

$$g = dt^2 + u^2(t)\sigma_Z^2 + r^2(t)(\sigma_{X_1^2} + .. + \sigma_{X_{2n-2}^2}).$$

Les coefficients de la métrique sont inchangés, seuls les paramètres diffèrent :

$$\begin{array}{lll} \text{pour t} \in [0, \frac{\epsilon}{\mathrm{k}}] : & u(t) = \frac{\sin at}{a}, & r(t) = \epsilon + \frac{bt^2}{2\,\epsilon} \\ \text{pour t} \in [\frac{\epsilon}{\mathrm{k}}, \frac{\pi}{2} - \delta] : & u(t) = c_1(\epsilon)\sin(t+\delta), & r(t) = c_2(\epsilon)\sin(t+\delta) \end{array}$$

Remarque 5.3.2 *Par choix de la métrique, pour tout $r < \frac{\pi}{2}$ et ϵ assez petit, la deuxième forme fondamentale de $\{r\} \times \mathbb{S}^{2n-1}$:*

$$\Pi = \cot(r + \delta(\epsilon))g$$

est définie positive : le bord de $B_{\mathbb{C}P^{n-1}}(r)$ est convexe.

Les valeurs de ces paramètres sont :

$$b = \frac{1}{2}$$

$$k = (2n)^{\frac{1}{2}}$$

$$\tan(m) = \frac{m}{2} + 4nm$$

$$a = \frac{m(2n)^{\frac{1}{2}}}{\epsilon}$$

$$\delta(\epsilon) = O(\epsilon)$$

Les coefficients $c_1(\epsilon)$ et $c_2(\epsilon)$ vérifient (pour que la métrique soit C^1 en $\frac{\epsilon}{k}$) :

$$\cos(\frac{\epsilon}{k})c_1(\epsilon) = \cos m$$

$$\cos(\frac{\epsilon}{k})c_2(\epsilon) = \frac{1}{2(2n)^{\frac{1}{2}}}.$$

Par conséquent, pour ϵ assez petit :

$$\cos(m) \leq c_1(\epsilon) \leq 2\cos(m), \tag{5.3}$$

$$\frac{1}{2(2n)^{\frac{1}{2}}} \leq c_2(\epsilon) \leq \frac{1}{(2n)^{\frac{1}{2}}}. \tag{5.4}$$

La forme volume vérifie :

$$dv_g = \theta(t)dtdx,$$

avec, pour tout $t \in I$:

$$\theta(t) = u(t)r^{2n-2}(t).$$

Le bord de N étant totalement géodésique, M. Anderson construit une métrique sur une boule de $\mathbb{R}^{2n}$ semblable à g dont les coefficients sont égaux à ceux de g pour $t > \frac{\epsilon}{k}$.
On note $(\mathbb{C}P^n, g_\epsilon)$, la variété riemannienne obtenue en recollant N à cette boule. Venons en maintenant aux :

Estimations de volumes

Fixons $\beta \in]0,1[$ et r tel que $V_{\mathbb{S}^{2n}}(r) = \beta \operatorname{vol}(\mathbb{S}^{2n})$.
On suppose désormais ϵ assez petit pour que :

$$\frac{\epsilon}{k} < r < \pi - 2\delta - \frac{\epsilon}{k}$$

Lemme 5.3.1 *Sous les hypothèses de la proposition 5.3.1, il existe une constante $C(n)$ dépendant de la dimension n, telle que :*
pour $t \in [0, \frac{\epsilon}{k}]$:

$$\theta(t) \leq C(n)t\, \epsilon^{2n-2}.$$

Preuve : Pour $t \in [0, \frac{\epsilon}{k}]$:

$$u(t) \leq t$$

$$r(t) \leq C(n)\, \epsilon$$

d'où la majoration :

$$\theta(t) \leq C(n)t\, \epsilon^{2n-2}.$$

■

Démonstration de la proposition 5.3.1

Commençons par le

Lemme 5.3.2 *Sous les hypothèses de la proposition 5.3.1, il existe une fonction $\tau(\epsilon\,|n, \beta)$ telle que :*

$$\lambda_1^D(B_{\mathbb{C}P^{n-1}}(r)) \leq \lambda_1^D(B_{\mathbb{S}^{2n}}(r)) + \tau(\epsilon\,|n, \beta).$$

Preuve : Notons T la première fonction propre de la boule de rayon r de $\mathbb{S}^{2n}$.
On la suppose normalisé par :

$$\int_0^r T^2(t)\sin^{2n-1}(t)dt = 1. \tag{5.5}$$

D'après les résultats généraux sur le spectre de Dirichlet, $T \in C^\infty([0,r])$.
Par conséquent, soit $C(r,n)$ dépendant de r et de n, tel que :

$$||T||_\infty \leq C(r,n) \text{ et } ||T'||_\infty \leq C(r,n). \tag{5.6}$$

Définissons à l'aide de T, une fonction test $\tilde{T}$ sur $B_{\mathbb{C}P^{n-1}}(r)$:

$$\tilde{T}(t) = \begin{cases} \frac{kt}{\epsilon}T(\frac{\epsilon}{k}+\delta) & \text{si } t \in [0,\frac{\epsilon}{k}] \\ T(t+\delta) & \text{si } t \in [\frac{\epsilon}{k}, r-\delta] \\ 0 & \text{si } t \in [r-\delta, r] \end{cases}$$

Notons $QR_{B_{\mathbb{C}P^{n-1}(r)}}(\tilde{T})$, le quotient de Rayleigh de $\tilde{T}$ sur $B_{\mathbb{C}P^{n-1}}(r)$ et $QR_{B_{\mathbb{S}^{2n}(r)}}(T)$, le quotient de Rayleigh de T sur $B_{\mathbb{S}^{2n}}(r)$.
Montrons que :

$$\left| QR_{B_{\mathbb{C}P^{n-1}(r)}}(\tilde{T}) - \frac{\int_{\frac{\epsilon}{k}+\delta}^r (T')^2(t)\sin^{2n-1}(t)dt}{\int_{\frac{\epsilon}{k}+\delta}^r T^2(t)\sin^{2n-1}(t)dt} \right| \leq \tau(\epsilon\,|r,n)$$

et

$$\left| QR_{B_{\mathbb{S}^{2n}(r)}}(T) - \frac{\int_{\frac{\epsilon}{k}+\delta}^r (T')^2(t)\sin^{2n-1}(t)dt}{\int_{\frac{\epsilon}{k}+\delta}^r T^2(t)\sin^{2n-1}(t)dt} \right| \leq \tau(\epsilon\,|r,n).$$

D'après le lemme 5.3.1 et les estimations (5.6) :

$$\left| \int_{B_{\mathbb{C}P^{n-1}(r)}} \tilde{T}^2\theta(t)dtdx - \int_{\frac{\epsilon}{k}+\delta}^r \int_{\mathbb{S}^{2n-1}} T^2(t)\sin^{2n-1}(t)c_1(\epsilon)c_2^{2n-2}(\epsilon)dtdx \right| \leq \tau(\epsilon\,|r,n)$$

et

$$\left| \int_{B_{\mathbb{C}P^{n-1}(r)}} (\tilde{T}')^2\theta(t)dtdx - \int_{\frac{\epsilon}{k}+\delta}^r \int_{\mathbb{S}^{2n-1}} (T')^2(t)\sin^{2n-1}(t)c_1(\epsilon)c_2^{2n-2}(\epsilon)dtdx \right| \leq \tau(\epsilon\,|r,n).$$

De même sur $\mathbb{S}^{2n}$, en utilisant les estimations (5.6) :

$$\left| \int_{B_{\mathbb{S}^{2n}(r)}} T^2\sin^{2n-1}(t)dtdx - \int_{\frac{\epsilon}{k}+\delta}^r \int_{\mathbb{S}^{2n-1}} T^2(t)\sin^{2n-1}(t)dtdx \right| \leq \tau(\epsilon\,|r,n)$$

et

$$\left| \int_{B_{\mathbb{S}^{2n}(r)}} (T')^2\sin^{2n-1}(t)dtdx - \int_{\frac{\epsilon}{k}+\delta}^r \int_{\mathbb{S}^{2n-1}} (T')^2(t)\sin^{2n-1}(t)dtdx \right| \leq \tau(\epsilon\,|r,n).$$

Pour conclure à la proximité des quotients de Rayleigh, il reste à minorer, pour ϵ assez petit, par une constante positive $C(n,r)$ indépendante de ϵ, les quantités :

$$\int_{\frac{\epsilon}{k}+\delta}^{r}\int_{\mathbb{S}^{2n-1}} T^2(t)\sin^{2n-1}(t)dtdx > C(n,r)$$

et

$$\int_{\frac{\epsilon}{k}+\delta}^{r}\int_{\mathbb{S}^{2n-1}} T^2(t)\sin^{2n-1}(t)c_1(\epsilon)c_2^{2n-2}(\epsilon)dtdx > C(n,r).$$

La première inégalité est une conséquence directe de la normalisation (5.5) et de (5.6). Pour la seconde, on utilise en plus les minorations (5.3) :

$$c_1(\epsilon) \geq \cos(m) \text{ et } c_2(\epsilon) \geq \frac{1}{2(2n)^{\frac{1}{2}}}.$$

Par conséquent :

$$\left| QR_{B_{\mathbb{C}P^{n-1}(r)}}(\tilde{T}) - QR_{B_{\mathbb{S}^{2n}(r)}}(T) \right| \leq \tau(\epsilon\,|r,n).$$

D'où, comme T est la première fonction propre de la boule de rayon r de $\mathbb{S}^{2n}$:

$$\lambda_1^D(B_{\mathbb{C}P^{n-1}}(r)) \leq \lambda_1^D(B_{\mathbb{S}^{2n}}(r)) + \tau(\epsilon\,|n,\beta),$$

par le théorème du min-max. ■

5.3.2 Stabilité métrique associée au théorème de Bérard-Meyer

Dans cette partie, nous établissons des résultats de stabilité pour la distance de Gromov-Hausdorff associé à un "hémisphère" d'un sinus produit tordu. Ces résultats ne sont valables que pour des domaines vérifiant certaines hypothèses de convexité.

Commençons par donner quelques définitions :

Définition 5.3.1 *On appelle deuxième forme fondamentale du bord d'un domaine régulier Ω, le tenseur défini sur $T\,\partial\Omega$ par :*
pour u, v appartenant à $T_x\,\partial\Omega$,

$$\Pi(u,v) = -g(D_u\eta, v),$$

où η est la normale unitaire rentrante en $x \in \partial\Omega$.
La courbure moyenne en un point $x \in \partial\Omega$ est la trace de la deuxième forme fondamentale :

$$H(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \Pi(e_i,e_i) \text{ avec } (e_i)_{1\leq i\leq n-1} \text{ une base orthonormée de } T_x\partial\Omega.$$

Un tel domaine est à bord convexe, si Π est définie positive en tout point du bord :

$$\Pi(X,X) > 0 \ \ \forall x \in \partial\Omega,\ \forall X \in T_x\,\partial\Omega\backslash\{0\}.$$

Définition 5.3.2 *Un domaine régulier Ω d'une variété riemannienne (M,g) est convexe si pour deux points quelconques de Ω, toute géodésique minimisante les reliant, est contenue dans Ω.*

Le premier résultat est :

Théorème 5.3.1 *Il existe des fonctions $\tau(\epsilon)$ et $\tau'(\epsilon)$ telles que, pour toute variété riemannienne (M,g) appartenant à $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$ contenant un domaine Ω régulier, dont la courbure moyenne H en tout point du bord est positive ou nulle, de volume $\mathrm{vol}\,\Omega \leq \frac{1}{2}\,\mathrm{vol}\,M$ et dont la première valeur propre de Dirichlet vérifie :*

$$\lambda_1^D(\Omega) \leq n + \epsilon,$$

alors, il existe un espace métrique (N,δ) et une application ϕ de M à valeurs dans la sinus suspension : $((0,\pi)\times N, d)$ qui est une $\tau(\epsilon)$-presque isométrie, de plus il existe un ouvert $\Omega' \subset \Omega$ tel que $\frac{\mathrm{vol}\,(\Omega\backslash\Omega')}{\mathrm{vol}\,(M)} \leq \tau'(\epsilon)$ et tel que l'image par ϕ de Ω' est $\tau(\epsilon)$ Hausdorff proche d'un hémisphère de la sinus suspension.

Remarque 5.3.3 *L'hypothèse sur la courbure moyenne est peut-être superflue. Pour s'en convaincre, considérons un hémisphère de la sphère canonique auquel on aurait retranché et ajouté des "cheveux" (i.e. des petits voisinages tubulaires de sous-variétés de codimension au moins deux), la première valeur propre de Dirichlet de ce domaine est proche de celle de l'hémisphère sans que le domaine soit Hausdorff proche de celui-ci. Ce domaine contient malgré tout un sous-ensemble Hausdorff proche de l'hémisphère (obtenu en "coupant" les "cheveux" que l'on a rajoutés).*

Nous montrons également :

Théorème 5.3.2 *Il existe une fonction $\tau(\epsilon)$ telle que, pour toute variété riemannienne (M,g) appartenant à $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$ contenant un domaine Ω régulier convexe, de volume $\mathrm{vol}\,\Omega \leq \frac{1}{2}\,\mathrm{vol}\,M$ et dont la première valeur propre de Dirichlet vérifie :*

$$\lambda_1^D(\Omega) \leq n + \epsilon,$$

alors, il existe un espace métrique (N,δ) et une application ϕ de M à valeurs dans la sinus suspension : $((0,\pi)\times N, d)$ qui est une $\tau(\epsilon)$-presque isométrie, de plus l'image par ϕ de Ω est $\tau(\epsilon)$ Hausdorff proche d'un hémisphère de la sinus suspension.

Ce théorème généralise dans le cas de l'hémisphère, un résultat de A. Avila ([4]) sur certains domaines convexes de la sphère $\mathbb{S}^2$:

Théorème 5.3.3 (Avila) *Soit Ω un domaine régulier convexe contenu dans un hémisphère de $\mathbb{S}^2$. Soit B une boule de même volume que Ω.*
Supposons que :

$$\lambda_1^D(\Omega) \leq \lambda_1^D(B) + \epsilon,$$

alors, il existe une fonction $\tau(\epsilon)$ dépendant de $\mathrm{vol}\,(\Omega)$, $\mathrm{vol}\,(\partial\Omega)$ et du rayon de B telle que Ω est $\tau(\epsilon)$-Hausdorff proche de B.

Plan de la démonstration des théorèmes 5.3.1 et 5.3.2

Commençons par le théorème 5.3.1.
Le schéma de la preuve est le même que dans le cas sans bord.
Un hémisphère de $\mathbb{S}^n$ est un domaine nodal d'une fonction propre de valeur propre n.
Dans le cas de presque minimalité, l'idée consiste à montrer que le hessien de la première fonction propre de Dirichlet du domaine vérifie la même estimation que celui de l'hémisphère :

$$|| \operatorname{Hess} f + fg||_{L^2(\Omega)} \leq \tau(\epsilon), \tag{5.7}$$

puis d'utiliser le lemme de Toponogov L^2.
Pour tirer des informations du lemme de Toponogov L^2, il est nécessaire de contrôler les conditions initiales de l'équation différentielle sous-jacente.
Dans ce but, on montre que le gradient de la première fonction propre reste petit au voisinage d'un point réalisant le maximum et qu'il est borné en norme L^∞ par une constante ne dépendant que de la dimension n.

L'étape suivante consiste à établir que Ω contient une boule de rayon presque $\frac{\pi}{2}$, donc de rayon presque maximal étant donné l'hypothèse sur le volume relatif. Pour celà, on prouve que la fonction propre est proche en norme L^∞ d'une fonction cos de la distance à un point convenable, sur un sous ensemble de Ω.

On remarque ensuite que Ω ne peut contenir une boule de rayon presque $\frac{\pi}{2}$ que si le diamètre de (M, g) est environ égal à π. Ceci fournit, par un théorème de J. Cheeger et T. Colding (théorème 3.0.6), une approximation de Gromov-Hausdorff de M avec un sinus produit tordu.

Le dernier point consiste à prouver que le domaine Ω admet un sous-ensemble de volume relatif presque maximal dont l'image par cette approximation est Hausdorff proche de l'hémisphère, ce qui découle du fait que Ω contient une boule de rayon presque $\frac{\pi}{2}$ qui est presque géodésiquement convexe (i.e. la distance restreinte à Ω et la distance extrinsèque de cette boule sont presque égales).

La preuve du théorème 5.3.2 découle en partie de la preuve précédente puisque le bord d'un domaine convexe est à courbure moyenne positive ou nulle. On montre pour conclure qu'un domaine vérifiant les hypothèses du théorème 5.3.2 est contenu dans une boule adéquate de rayon environ égal à $\frac{\pi}{2}$.

Remarque 5.3.4 *Soit V une boule géodésique de la sphère canonique, différente de l'hémisphère. L'équation vérifiée par le hessien de la première fonction propre f de Dirichlet, sur ce domaine, est de la forme :*

$$\operatorname{Hess} f = Ag + Bdf \otimes df,$$

avec A, B des expressions dépendant de f (c'est une conséquence de l'équation différentielle du lemme 5.2.1).
Nous n'avons pas réussi, à ce jour, à adapter la méthode de démonstration à ces autres cas, en particulier parce qu'il semble plus difficile de caractériser le cas d'égalité avec la formule de Bochner.

Dorénavant, on supposera la première fonction propre f de Ω normalisée, par analogie avec l'hémisphère, par :

$$f > 0 \text{ sur } \Omega \textbf{ et } \sup_{\Omega} f = 1. \tag{5.8}$$

Estimation L^2 du hessien de la première fonction propre

L'estimation (5.7) sur le hessien est une conséquence d'une formule due à R. Reilly ([39]) qui est une version intégrée de la formule de Bochner, dans le cas des variétés à bord :

Lemme 5.3.3 (Formule de Reilly) *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte à bord lisse ∂M. Pour toute fonction appartenant à $C^\infty(\overline{M})$, on a :*

$$\begin{aligned}\int_M |\operatorname{Hess} f|^2 - \int_M (\Delta f)^2 + \int_M \operatorname{Ric}(\nabla \mathrm{f}, \nabla \mathrm{f}) \\ = 2\int_{\partial M} < \nabla^{\partial M}(\frac{\partial f}{\partial \nu}), \nabla^{\partial M} f > - \int_{\partial M} H \left(\frac{\partial f}{\partial \nu}\right)^2 - \int_{\partial M} \Pi(\nabla^{\partial M} f, \nabla^{\partial M} f)\end{aligned} \tag{5.9}$$

où $\nabla^{\partial M}$ désigne le gradient pour la métrique induite de la restriction à ∂M d'une fonction régulière de M.

En appliquant cette formule à la première fonction propre de Dirichlet du domaine Ω, on obtient :

Lemme 5.3.4 *Il existe une constante $C(n)$ telle que, pour toute variété (M, g) appartenant à $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$ et admettant un domaine régulier Ω dont la courbure moyenne en tout point du bord est positive ou nulle et vérifiant $n \leq \lambda_1^D(\Omega) \leq n + \epsilon$, alors, en notant f la première fonction propre du problème de Dirichlet sur Ω, normalisée par (5.8), on a l'estimation :*

$$\frac{1}{\operatorname{vol} \Omega} \int_\Omega |\operatorname{Hess} f + fg|^2 \leq C(n)\, \epsilon$$

Preuve : D'après le corollaire 5.1.1, $\{f = 0\} = \partial\Omega$.
La formule de Reilly appliquée à f donne :

$$\int_\Omega |\operatorname{Hess} f|^2 - \int_\Omega (\Delta f)^2 + \int_\Omega \operatorname{Ric}(\nabla \mathrm{f}, \nabla \mathrm{f}) = - \int_{\partial\Omega} \mathrm{H} \left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \nu}\right)^2$$

En utilisant l'hypothèse sur la courbure de Ricci et sur la courbure moyenne du bord $\partial\Omega$, il vient :

$$\int_\Omega |\operatorname{Hess} f|^2 + \big((n-1)\lambda - \lambda^2\big) \int_\Omega f^2 \leq 0$$

Or $\operatorname{Hess} f = (\operatorname{Hess} f + \frac{\lambda}{n} fg) - \frac{\lambda}{n} fg$ donc, le premier terme étant de trace nulle, on obtient :

$$|\operatorname{Hess} f|^2 = |\operatorname{Hess} f + \frac{\lambda}{n} fg|^2 + \frac{\lambda^2}{n} f^2$$

On en déduit :

$$\left((n-1-\lambda)\lambda + \frac{\lambda^2}{n}\right) \frac{1}{\operatorname{vol}\,\Omega} \int_\Omega f^2 + \frac{1}{\operatorname{vol}\,\Omega} \int_\Omega |\operatorname{Hess} f + \frac{\lambda}{n} fg|^2 \leq 0$$

D'où, par choix de la normalisation pour f :

$$\frac{1}{\operatorname{vol}\,\Omega} \int_\Omega |\operatorname{Hess} f + \frac{\lambda}{n} fg|^2 \leq -\left((n-1)\lambda + \lambda^2(\frac{1}{n} - 1)\right)$$

$$\frac{1}{\operatorname{vol}\,\Omega} \int_\Omega |\operatorname{Hess} f + \frac{\lambda}{n} fg|^2 \leq (n-1)\frac{\lambda}{n}(\lambda - n)$$

On conclut, en remarquant que :

$$|\operatorname{Hess} f + fg| \leq |\operatorname{Hess} f + \frac{\lambda}{n} fg| + |\frac{\lambda}{n} - 1||fg|$$

$$|\operatorname{Hess} f + fg|^2 \leq 2(|\operatorname{Hess} f + \frac{\lambda}{n} fg|^2 + \frac{\epsilon^2}{n} f^2)$$

D'où le résultat. ■

Bornes L^∞ de la première fonction propre de Dirichlet et de son gradient

L'étape suivante est de montrer que le gradient de la fonction propre f reste petit au voisinage d'un point réalisant le maximum de f. Ce lemme est inspiré d'un résultat dû à P. Li et S.T. Yau ([32]).

Lemme 5.3.5 (Li-Yau) *Soit (M^n, g) une variété riemannienne de dimension n, dont la courbure de Ricci vérifie : $Ric \geq (n-1)g$ et Ω un domaine régulier de M dont la courbure moyenne en tout point du bord $\partial\Omega$ est positive ou nulle.*
Soit f la première fonction propre de Dirichlet sur Ω, que l'on suppose normalisée par (5.8). Alors, pour tout $x \in \Omega$:

$$|\nabla f|^2(x) \leq \lambda_1^D(\Omega)(1 - f^2(x)),$$

en particulier :

$$||\nabla f||_{L^\infty} \leq \sqrt{\lambda_1^D(\Omega)}.$$

Preuve : Commençons par quelques remarques sur f.
On note $\eta(x)$ la normale intérieure unitaire en $x \in \partial\Omega$.
En appliquant le principe du maximum fort à $-f$, on en déduit :

$$\frac{\partial f}{\partial \eta}(x) > 0 \ \ \forall x \in \ \partial\Omega.$$

Par conséquent en tout point $x \in \partial\Omega$:

$$|\nabla f|(x) > 0 \tag{5.10}$$

et

$$\eta(x) = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}(x).$$

Donc pour $X, Y \in T_x\,\partial\Omega$:

$$\Pi(X,Y) = \frac{-1}{|\nabla f|(x)} \operatorname{Hess} f(X,Y)$$

Remarque 5.3.5 *Une fonction propre pour le problème de Dirichlet sur un domaine Ω est une fonction appartenant à $C^\infty(\overline{\Omega})$, cette fonction est donc la restriction d'une fonction lisse définie sur un ouvert contenant $\overline{\Omega}$ et le hessien de f est bien défini sur $\partial\Omega$.*

Par conséquent, on en déduit l'expression suivante de la courbure moyenne :

$$H(x) = \frac{-1}{|\nabla f|(x)} \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{Hess} f(e_i, e_i),$$

avec $(e_i)_{1\leq i\leq n-1}$ une base orthonormée locale de $T_x\partial\Omega$.
Par continuité, pour $x \in \ \partial\Omega$, $\Delta f(x) = \lambda f(x) = 0$, d'où :

$$H(x) = \frac{1}{|\nabla f|(x)} \operatorname{Hess} f(x)(\eta,\eta).$$

En particulier, pour tout $x \in \partial\Omega$:

$$\operatorname{Hess} f(x)(\eta,\eta) \geq 0. \tag{5.11}$$

Passons maintenant à la démonstration du lemme :
On introduit la fonction :

$$F = \frac{|\nabla f|^2}{\beta - f^2} \text{ où } \beta > 1.$$

Par compacité, il existe x_0 tel que $F(x_0) = \sup_{\overline{\Omega}} F$.
Supposons tout d'abord que x_0 appartient à $\partial\Omega$. Dans ce cas, par le principe du maximum, on doit avoir l'estimation :

$$\frac{\partial F}{\partial \eta}(x_0) \leq 0.$$

Calculons $\frac{\partial F}{\partial \eta}(x_0)$.

$$\frac{\partial F}{\partial \eta}(y) = \frac{2 < D_{\frac{\partial}{\partial \eta}} \nabla f, \nabla f >}{\beta - f^2} + \frac{2f|\nabla f|^2 \frac{\partial f}{\partial \eta}(y)}{(\beta - f^2)^2}.$$

Or,

$$\frac{2f|\nabla f|^2 \frac{\partial f}{\partial \eta}}{(\beta - f^2)^2} = 0 \text{ en } x_0,$$

puisque f vérifie les conditions de Dirichlet sur le bord.
Montrons que le premier terme est positif ou nul en x_0.

$$< D_{\frac{\partial}{\partial \eta}} \nabla f, \nabla f >= \operatorname{Hess} f(\frac{\partial}{\partial \eta}, \nabla f)$$

$$< D_{\frac{\partial}{\partial \eta}} \nabla f, \nabla f >= |\nabla f| \operatorname{Hess} f(\frac{\partial}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial \eta}).$$

Donc, par (5.11) :

$$< D_{\frac{\partial}{\partial \eta}} \nabla f, \nabla f > (x_0) \geq 0,$$

et par conséquent,

$$\frac{\partial F}{\partial \eta}(x_0) = 0. \tag{5.12}$$

On déduit de (5.12), l'inégalité :

$$\Delta F(x_0) \geq 0.$$

En effet, si $\Delta F(x_0) < 0$, alors il existe un voisinage U de x_0 dans $\overline{\Omega}$ tel que :

$$\forall y \in U, \Delta F(y) < 0.$$

On en déduit alors, par le principe du maximum fort :

$$\frac{\partial F}{\partial \eta}(x_0) < 0,$$

ce qui contredit (5.12).

Calculons maintenant le laplacien de F.

$$dF = \frac{d(|\nabla f|^2)}{\beta - f^2} + \frac{2f|\nabla f|^2 df}{(\beta - f^2)^2}.$$

D'où :

$$\begin{aligned}\operatorname{Hess} F = \frac{\operatorname{Hess}(|\nabla f|^2)}{\beta - f^2} + \frac{4f}{(\beta - f^2)^2} d(|\nabla f|^2) \otimes df \\ + \frac{2|\nabla f|^2}{(\beta - f^2)^2} df \otimes df + \frac{8f|\nabla f|^2}{(\beta - f^2)^3} df \otimes df + \frac{2f|\nabla f|^2}{(\beta - f^2)^2} \operatorname{Hess} f.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\Delta F = \frac{\Delta(|\nabla f|^2)}{\beta - f^2} - \frac{4f}{(\beta - f^2)^2} g(d(|\nabla f|^2), df) - \frac{2|\nabla f|^4}{(\beta - f^2)^2} - \frac{8f|\nabla f|^4}{(\beta - f^2)^3} + \frac{2f|\nabla f|^2 \Delta f}{(\beta - f^2)^2}.$$

En particulier, en un point $y \in \partial\Omega$:

$$\Delta F(y) = \frac{\Delta(|\nabla f|^2)(y)}{\beta} - \frac{2|\nabla f(y)|^4}{\beta^2}.$$

Or, d'après la formule de Bochner :

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) = -|\operatorname{Hess} f|^2 - Ric(\nabla f, \nabla f) + \lambda_1^D(\Omega)|\nabla f|^2,$$

puisque f est une fonction propre associée à $\lambda_1^D(\Omega)$.
On en déduit, comme $Ric \geq (n-1)g$, l'inégalité :

$$\Delta(|\nabla f|^2) \leq 2\lambda_1^D(\Omega)|\nabla f|^2,$$

ce qui implique :

$$\Delta F(y) \leq 2\left(\lambda_1^D(\Omega)\frac{|\nabla f|^2}{\beta} - \frac{|\nabla f|^4}{\beta^2}\right). \tag{5.13}$$

En appliquant (5.13) au point x_0, on en déduit, comme $F(x_0) \geq 0$:

$$F(x_0) \leq \lambda_1^D(\Omega),$$

d'où l'estimation en faisant tendre β vers 1.

On suppose dorénavant que F atteint son maximum en un point $x_0 \in \Omega$.
La suite de la démonstration est similaire au cas sans bord.
En x_0 :

$$\nabla F(x_0) = 0, \tag{5.14}$$

et par le principe du maximum :

$$\Delta F(x_0) \geq 0 \tag{5.15}$$

(5.14) donne :

$$d(|\nabla f|^2)(x_0) = -\frac{2f|\nabla f|^2}{\beta - f^2} df(x_0) \tag{5.16}$$

Ce qui implique,

$$< d(|\nabla f|^2, df > (x_0) = -\frac{8f^2|\nabla f|^4}{\beta - f^2}(x_0) \tag{5.17}$$

et de (5.15), on déduit :

$$\frac{-4f}{(\beta - f^2)^2}(g(d(|\nabla f|^2), df)) + \frac{\Delta(|\nabla f|^2)}{\beta - f^2} + |\nabla f|^2\left(-\frac{2|\nabla f|^2}{(\beta - f^2)^2} + \frac{2f\Delta f}{(\beta - f^2)^2} - \frac{8f^2|\nabla|^2}{(\beta - f^2)^3}\right) \geq 0.$$

D'où par (5.17) :

$$\frac{\Delta(|\nabla f|^2)}{\beta - f^2} + |\nabla f|^2 \left(\frac{2|\nabla f|^2}{(\beta - f^2)^2} + \frac{2f\Delta f}{(\beta - f^2)^2} \right) \geq 0.$$

En utilisant la formule de Bochner appliquée à f, il vient :

$$\lambda_1^D(\Omega)|\nabla f|^2 - |\operatorname{Hess} f|^2 - \frac{|\nabla f|^4}{\beta - f^2} + \lambda_1^D(\Omega) f^2 \frac{|\nabla f|^2}{\beta - f^2} \geq 0. \tag{5.18}$$

On cherche maintenant à obtenir une minoration du terme $|\operatorname{Hess} f|^2$.
Par Cauchy-Schwartz :

$$| < d(|\nabla f|^2, df > | \leq |d(|\nabla f|^2)|.|df|$$

Or, $d(|\nabla f|^2) = 2|\nabla f| d(|\nabla f|)$, d'où, par la première inégalité de Kato :

$$|d(|\nabla f|)| \leq |D\nabla f|,$$

il vient :

$$| < d(|\nabla f|^2, df > | \leq 2|\nabla f|^2 |\operatorname{Hess} f|$$

On obtient alors, à l'aide de (5.17), une minoration de $|\operatorname{Hess} f|^2(x_0)$:

$$|\operatorname{Hess} f|^2(x_0) \geq \frac{f^2|\nabla f|^4}{\beta - f^2},$$

que l'on injecte dans (5.18) :
en x_0 :

$$\lambda_1^D(\Omega)|\nabla f|^2 - |\nabla f|^4 \left(\frac{f^2}{(\beta - f^2)^2} - \frac{1}{\beta - f^2} \right) + |\nabla f|^2 \frac{\lambda_1^D(\Omega) f^2}{\beta - f^2} \geq 0,$$

en multipliant par $\frac{\beta - f^2}{|\nabla f|^2}$, on obtient en x_0 :

$$\lambda_1^D(\Omega)(\beta - f^2) - |\nabla f|^2 \frac{f^2}{\beta - f^2} + \lambda_1^D(\Omega) f^2 - |\nabla f|^2 \geq 0,$$

d'où

$$\lambda_1^D(\Omega)\beta - |\nabla f|^2 \geq \frac{f^2}{\beta - f^2}|\nabla f|^2,$$

ce qui donne après simplifications :

$$F(x_0) \leq \lambda_1^D(\Omega).$$

Il ne reste qu'à faire tendre β vers 1, pour obtenir le résultat. ∎

Ω contient une boule de rayon presque égal à $\frac{\pi}{2}$

Soit Ω un domaine régulier de (M,g) vérifiant les hypothèses du théorème 5.3.1.
Soit x un point de Ω tel que $f(x)=1$ avec f la première fonction propre de Dirichlet normalisée par (5.8).
Notons d la distance de x au bord : $d=d(x,\partial\Omega)$.
Par définition de d :

$$B(x,d)\subset\Omega.$$

L'hypothèse :

$$\frac{\text{vol }\Omega}{\text{vol }M}\leq\frac{1}{2}$$

implique, par Bishop-Gromov :

$$\frac{\text{vol }B_{\mathbb{S}^n}(d)}{\text{vol }(\mathbb{S}^n)}\leq\frac{\text{vol }B(x,d)}{\text{vol }(M)}\leq\frac{1}{2}.$$

D'où :

$$d\leq\frac{\pi}{2}.$$

Nous allons montrer que l'hypothèse $\lambda_1^D(\Omega)\leq n+\epsilon$ implique que d est presque égal à $\frac{\pi}{2}$.

Lemme 5.3.6 *Soit Ω un domaine régulier de (M,g) vérifiant les hypothèses du théorème 5.3.1. Soit f la fonction propre associée à $\lambda_1^D(\Omega)$, que l'on suppose normalisée par (5.8) et soit x, un point de Ω tel que $f(x)=1$.*
Alors, il existe une fonction $\tau(\epsilon)$, dépendant de la dimension n, telle que, pour tout domaine Ω et tout (M,g) vérifiant les hypothèses ci-dessus, on a :

$$B\left(x,\frac{\pi}{2}-\tau_{5.3.6}(\epsilon)\right)\subset\Omega.$$

Preuve : Notons d la distance de x au bord : $d=d(x,\partial\Omega)$.
La méthode consiste à appliquer le lemme de Toponogov L^2 (lemme 2.3.1) sur des boules telles, qu'une géodésique minimisante ayant ces extrémités dans celles-ci, soit contenue dans Ω.

Soit $y\in\partial\Omega$ tel que : $d(x,y)=d(x,\partial\,\Omega)$ et γ une géodésique minimisante reliant x à y.
D'après le lemme 5.3.4 :

$$||\,\text{Hess}\,f+fg||_{L^2(\Omega)}\leq\tau(\epsilon).$$

Soit $r(\epsilon)$, un rayon tel que le membre de droite dans l'inégalité de Toponogov L^2, soit petit :

$$\frac{\tilde{C}_{2.3.1}(n)}{V(r(\epsilon))}\frac{1}{\text{vol}\,(\Omega)}\int_\Omega|\,\text{Hess}\,f+fg|^2\leq\sqrt{\tau(\epsilon)}.$$

Considérons $z \in \gamma$ tel que $d(y,z) = 3r(\epsilon)$ et :

$$B_1 = B(x, r(\epsilon)), B_2 = B(z, r(\epsilon)).$$

Vérifions que pour ce choix, toute géodésique minimisante ayant ces extrémités dans B_1 et B_2 est nécessairement contenue dans Ω.
Soit $u \in B_1$.

$$d(u, \partial\Omega) \geq d(x, \partial\Omega) - d(u, x) > d - r(\epsilon).$$

D'autre part, on vérifie, grâce à l'inégalité triangulaire, que :

$$\forall v \ \in B_2, \ d(u,v) \leq d - r(\epsilon).$$

Par hypothèse :

$$f(x) = 1$$

et, d'après le lemme 5.3.5 :

$$\forall u \in \Omega, \ \ |\nabla f|^2(u) \leq \lambda_1^D(\Omega)(1 - f^2(u)),$$

en particulier, pour $\epsilon \leq 1$:

$$||\nabla f||_{L^\infty} \leq \sqrt{n+1}. \tag{5.19}$$

Par conséquent en appliquant le lemme de Toponogov L^2, on obtient, comme dans la preuve du lemme 3.1.2, l'existence d'une fonction $\tau(\epsilon)$ telle que :

$$\forall v \ \in B_2, \ |f(v) - \cos d(x,v)| \leq \tau(\epsilon). \tag{5.20}$$

En particulier, cette estimation est valable pour le point z.
D'autre part, par construction, et en utilisant (5.19), il existe une fonction $\tau''(\epsilon)$ telle que :

$$|f(z) - f(y)| = |f(z)| \leq \tau''(\epsilon).$$

Or $d(x,z) = d - 3r(\epsilon)$, (5.20) implique alors l'existence d'une fonction $\tau_2(\epsilon)$ telle que :

$$d \geq \frac{\pi}{2} - \tau_2(\epsilon),$$

ce qui conclut. ■

Démonstration du théorème 5.3.1

A l'aide du lemme 5.3.6 et d'un théorème de Cheeger-Colding (théorème 3.0.6), nous allons montrer dans un premier temps, que (M, g) est Gromov-Hausdorff proche d'un sinus produit tordu à l'aide d'une approximation explicite, puis montrer que l'image par cette approximation d'un ensemble de volume presque maximal de Ω est Hausdorff proche d'un "hémisphère" de ce sinus produit tordu.

Lemme 5.3.7 *Sous les hypothèses du théorème 5.3.1, notons* $d_x = \sup_M d(x,y)$ *avec* x *tel que* $f(x) = 1$.
Alors :

$$\lambda_1^D(\Omega) \leq n + \epsilon \Rightarrow d_x \geq \pi - \tau(\epsilon).$$

Preuve : Par définition de d_x, $\mathrm{vol}\,(B, x, d_x) = \mathrm{vol}\,(M)$.
D'après le lemme 5.3.6, $\Omega \supset B(x, \frac{\pi}{2} - \tau(\epsilon))$, par conséquent, par hypothèse sur le volume relatif de Ω et en utilisant le théorème de Bishop-Gromov (théorème 2.1.1) :

$$\frac{V(\frac{\pi}{2} - \tau(\epsilon))}{V(d_x)} \leq \frac{\mathrm{vol}\,(B(x, \frac{\pi}{2} - \tau(\epsilon)))}{\mathrm{vol}\,(B(x, d_x))} \leq \frac{1}{2}$$

d'où

$$V(d_x) \geq 2V(\frac{\pi}{2} - \tau(\epsilon)).$$

Ce qui conclut. ■

Corollaire 5.3.1 *Avec les notations du lemme 5.3.7, il existe une fonction* $\tau(\epsilon)$ *telle que :*

$$\forall r \in [0, d_x], \quad \left| \frac{\mathrm{vol}\,(B(x,r))}{\mathrm{vol}\,(M)} - \frac{V(r)}{\mathrm{vol}\,(\mathbb{S}^n)} \right| \leq \tau(\epsilon).$$

Preuve : C'est une conséquence du théorème de Bishop-Gromov. Nous renvoyons à la preuve du lemme 3.3.1 pour plus de détails. ■

En particulier, une boule de centre x et de rayon environ égal à $\frac{\pi}{2}$ est de volume relatif environ égal à $\frac{1}{2}$.

D'après le lemme 5.3.7, une variété riemannienne vérifiant les hypothèses du théorème 5.3.1 est de diamètre presque maximal, par conséquent par un théorème de J. Cheeger et T. Colding (théorème 3.0.6), on en déduit :

Théorème 5.3.4 *Il existe une fonction* $\tau(\epsilon)$ *telle que, toute variété riemannienne* (M, g) *appartenant à* $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$ *et admettant un domaine* Ω *régulier vérifiant :*

$$\forall u \in \partial\Omega, \quad H(u) \geq 0,$$

$$\frac{\mathrm{vol}\,(\Omega)}{\mathrm{vol}\,(M)} \leq \frac{1}{2},$$

$$\lambda_1^D(\Omega) \leq n + \epsilon,$$

vérifie la propriété suivante :

Il existe $x, y \in M$ *tels que* $d(x,y) > \pi - \tau(\epsilon)$, *il existe une sphère géodésique de* M *de centre* x *notée* N *et une distance* d *sur* N *tels que, en notant :*

$[0,\pi]\times N$ l'espace métrique muni d'une structure de sinus produit tordu ;
p la projection de M sur N :

$$\begin{array}{ccc} (M,g) & \longrightarrow & N \\ z & \longmapsto & p(z) \end{array}$$

avec $p(z)$ tel que : $d(z,p(z)) = d(z,N)$;

l'application ϕ :

$$\begin{array}{ccc} (M,g) & \longrightarrow & [0,\pi]\times N \\ z & \longmapsto & (d(x,z),p(z)) \end{array}$$

est une $\tau(\epsilon)$-presque isométrie.

Nous allons maintenant montrer qu'il existe un rayon $r(\epsilon)$ pour lequel la boule $B(x,\frac{\pi}{2}-r(\epsilon))$ est contenue dans Ω et l'image par ϕ de cette boule, munie de la distance d_Ω, est Hausdorff proche d'un hémisphère du produit tordu, ce qui terminera la preuve du théorème 5.3.1.

Il suffit de prouver que $d_M(u,v)\simeq d_\Omega(u,v)$ sur $B(x,\frac{\pi}{2}-r(\epsilon))$, la presque surjectivité découle ensuite de la définition de ϕ.
C'est l'objet du lemme suivant :

Proposition 5.3.2 *Sous les hypothèses du théorème 5.3.1, il existe des fonctions $r(\epsilon)$ et $\tau(\epsilon)$ telles que : $\forall\, u,v\in B(x,\frac{\pi}{2}-r(\epsilon))$,*

$$d_\Omega(u,v)\le d_M(u,v)+\tau(\epsilon),$$

où d_M désigne la distance riemannienne sur M et d_Ω désigne la distance intrinsèque sur Ω.

Preuve : D'après le lemme 5.3.6, $\Omega\supset B(x,\frac{\pi}{2}-r(\epsilon))$. Par conséquent, pour s'assurer qu'une géodésique γ, paramétrée sur $[0,1]$, de (M,g) est contenue dans Ω, il suffit de vérifier :

$$\forall\, t\in\ [0,1],\quad d(x,\gamma(t))\le\frac{\pi}{2}-r(\epsilon). \tag{5.21}$$

Pour obtenir une telle estimation, nous allons utiliser le fait que x admet un point à distance presque π et que, par conséquent, d'après le lemme 3.3.2, $\cos d_x$ est proche, en norme L^∞, d'une combinaison linéaire de fonctions propres de (M,g), de valeurs propres environ égales à n.
D'après le lemme de Toponogov L^2, le long de presque toutes les géodésiques de (M,g), cette combinaison linéaire de fonctions propres est presque une combinaison linéaire de cosinus et de sinus, on en déduit l'estimation souhaitée.

Commençons par le résultat suivant :
Conservons les notations du lemme 5.3.7 :

$$d_x\ge\pi-\tau(\epsilon),$$

d'où, en notant $k = \max\{i \in \mathbb{N}; \lambda_i(M) \leq n + \sqrt{\tau(\epsilon)}\}$, on obtient, par le lemme 3.3.2, l'existence d'une fonction $\tau'(\epsilon)$ telle que,

$$|| \cos d_x - \sum_{i=1}^{k} a_i(x) f_i ||_{L^\infty} \leq \tau'(\epsilon) \text{ et } | \sum_{i=1}^{k} a_i^2(x) - 1 | \leq \tau'(\epsilon). \tag{5.22}$$

avec $(f_i)_{1\leq i\leq k}$ une famille orthogonale de fonctions propres associées à $(\lambda_i(M))_{1\leq i\leq k}$ et normalisées par $\frac{1}{\operatorname{vol}(M)} \int_M f_i^2 = \frac{1}{n+1}$.

Remarque 5.3.6 *D'après le corollaire 3.2.1, on peut supposer $k \leq n+1$.*

Par définition de k et en utilisant la proposition 2.3.1, il existe une fonction $\tau''(\epsilon)$ telle que,

$$|| \operatorname{Hess} (\sum_{i=1}^{k} a_i(x) f_i) + (\sum_{i=1}^{k} a_i(x) f_i) g ||_{L^2(M)} \leq \tau''(\epsilon). \tag{5.23}$$

Notons $\overline{f} = \sum_{i=1}^{k} a_i(x) f_i$.

Par conséquent, d'après le lemme 2.3.6, il existe des fonctions $r(\epsilon)$, $R(\epsilon)$ et $\tau_1(\epsilon)$ tels que :
$\forall\ u, v \in\ M; R(\epsilon) \leq d(u,v) \leq \pi - R(\epsilon), \exists\ \tilde{u}, \tilde{v}$ admettant une unique géodésique minimisante γ les reliant et vérifiant $d(u,\tilde{u}) < r(\epsilon)$, $d(v,\tilde{v}) < r(\epsilon)$, tels que :

$$\left| \overline{f}(\gamma(t)) - \left(\cos d(x,\tilde{u}) \frac{\sin(l-t)}{\sin(l)} + \cos d(x,\tilde{v}) \frac{\sin(t)}{\sin(l)} \right) \right| \leq \tau_1(\epsilon)$$

pour tout $t \in [0,l]$, avec $l = d(\tilde{u},\tilde{v})$.

L'inégalité (5.22) permet alors d'en déduire (on suppose $d(x,\tilde{u}) \leq \frac{\pi}{2}$ et $d(x,\tilde{v}) \leq \frac{\pi}{2}$) :

$$\cos d(x,\gamma(t)) \geq \left(\cos d(x,\tilde{u}) \frac{\sin(l-t)}{\sin(l)} + \cos d(x,\tilde{v}) \frac{\sin(t)}{\sin(l)} \right) - \tau_2(\epsilon).$$

Puis, en remarquant que : $\frac{\sin(l-t)}{\sin(l)} + \frac{\sin(t)}{\sin(l)} \geq 1$ $(l < \pi)$, on en déduit :

$$\cos d(x,\gamma(t)) \geq \ \min\ (\cos d(x,\tilde{u}), \cos d(x,\tilde{v})) - \tau_2(\epsilon),$$

pour tout $t \in\ [0,l]$.
Par conséquent, en prenant u et v suffisamment loin du bord (i.e. appartenant à une boule $B(x, \frac{\pi}{2} - r(\epsilon))$ pour $r(\epsilon)$ convenable), il existe une géodésique minimisante dont les extrémités $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ sont proches de u et v, qui est contenue dans l'ouvert Ω.
Pour de tels points u et v, on a donc :

$$d_\Omega(u,v) \leq d_M(u,v) + \tau_3(\epsilon).$$

■

Démonstration du théorème 5.3.2

Remarquons d'abord que la seconde forme fondamentale (et par conséquent la courbure moyenne) du bord d'un domaine convexe est positive ou nulle :

Lemme 5.3.8 *Soit Ω un domaine régulier convexe d'une variété compacte (M, g). Alors la deuxième forme fondamentale Π du bord de Ω vérifie :*

$$\forall x \in \partial\Omega, \forall X \in T_x\partial\Omega, \quad \Pi(X, X) \geq 0.$$

Preuve : Soit x appartenant à $\partial\Omega$ et $B(x, r)$ une petite boule telle que pour deux points quelconques de cette boule, il existe une unique géodésique minimisante les reliant. On note η, la normale intérieure de Ω en un point du bord.
Notons B_r l'image par $\exp_x^{-1}$ de $B(x, r)$ et V l'hypersurface $\exp_x^{-1}(\partial\Omega \cap B(x, r))$. On munit B_r de la métrique "pull-back", de sorte que les géodésiques issues de 0 sont des segments. Notons H l'hyperplan tangent à V en 0. Notons Ω' l'image par $\exp_{\mathrm{x}}^{-1}$ de $B(x, r) \cap \Omega$.
Notons H_1 (respectivement H_2) l'intersection du demi-espace ouvert déterminé par H ne contenant pas (respectivement contenant) le vecteur $d\exp_x^{-1}(\eta(x))$ et de B_r. Montrons que H_1 est contenu dans le complémentaire Ω'^c de Ω' dans B_r.
Supposons qu'il existe $y \in H_1 \cap \Omega'$. Soit S le segment géodésique passant par 0 et y. Comme $0 \in V$, il existe un point z du segment S appartenant à $\Omega' \cap H_2$, ce qui contredit la convexité de Ω puisque y et z sont reliés par une unique géodésique minimisante et que celle-ci rencontre transversalement le bord. Par conséquent, $H_1 \subset \Omega'^c$.
On en déduit la propriété sur la seconde forme fondamentale, puisque quitte à diminuer r, on peut supposer que V est une ligne de niveau $\{f = 0\}$ d'une fonction f sans point critique, définie sur B_r. On a alors (avec les identifications convenables) :

$$\eta = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \quad \text{(si on suppose } f > 0 \text{ sur } \Omega'\text{)}$$

et donc, en restriction à H :

$$\operatorname{Hess} f = -|\nabla f|\Pi.$$

Or, nous venons de montrer que $f(0) = 0$ ($0 \in H$) est un maximum local de $f|_H$, ce qui implique le résultat.

■

On en déduit la preuve du théorème 5.3.2, à l'aide du lemme suivant :

Proposition 5.3.3 *Il existe une fonction $R(\epsilon)$ telle que, pour tout domaine régulier convexe d'une variété (M, g) appartenant à $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$, vérifiant :*

$$\frac{\mathrm{vol}\,(\Omega)}{\mathrm{vol}\,(M)} \leq \frac{1}{2},$$

$$\lambda_1^D(\Omega) \leq n + \epsilon,$$

alors, en notant x le point introduit dans le lemme 5.3.6, on a :

$$\Omega \subset B(x, \frac{\pi}{2} + R(\epsilon)).$$

Preuve : Fixons quelques notations :

Notons $y \in \partial\Omega$ tel que $d(y,x) = d(x, \partial\Omega)$ avec x un point de Ω tel que $f(x) = 1$ où f est la première fonction propre de Dirichlet sur Ω, normalisée par $\sup_\Omega f = 1$. On note $d = d(y,x)$, d'après le lemme 5.3.6 :

$$\frac{\pi}{2} \geq d \geq \frac{\pi}{2} - \tau_1(\epsilon). \tag{5.24}$$

D'autre part, comme $\lambda_1^D(\Omega) \leq n + \epsilon$:

$$\frac{1}{\mathrm{vol}\,(\Omega)} \int_\Omega |\operatorname{Hess} f + fg|^2 \leq C(n)\,\epsilon\,.$$

On a également (voir la proposition 5.3.2) :

$$||\cos d_x - \sum_{i=1}^{k} a_i(x) f_i||_{L^\infty} \leq \tau'(\epsilon), \tag{5.25}$$

$$|\sum_{i=1}^{k} a_i^2(x) - 1| \leq \tau'(\epsilon)$$

et

$$||\operatorname{Hess}(\sum_{i=1}^{k} a_i(x) f_i) + (\sum_{i=1}^{k} a_i(x) f_i) g||_{L^2(M)} \leq \tau''(\epsilon). \tag{5.26}$$

On fixe $r(\epsilon)$ tel que :

$$\frac{1}{V(r(\epsilon))} \frac{1}{\mathrm{vol}\,(\Omega)} \int_\Omega |\operatorname{Hess} f + fg|^2 \leq \sqrt{\epsilon}$$

et

$$\frac{1}{V(r(\epsilon))} \tau''(\epsilon) \leq \sqrt{\tau''(\epsilon)}.$$

Nous allons utiliser une version plus précise du théorème de Bishop-Gromov :

Théorème 5.3.5 (Bishop-Gromov) *Soit (M,g) appartenant à $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$. Soit s, S, r, R des réels vérifiant $0 < s < S$, $0 < r < R$, $s < r$, $S < R$ et $p \in M$. Soit Γ une partie mesurable de $S_p(M)$ le fibré unitaire tangent en p. On note $A^\Gamma_{s,S}(p) = \{\gamma_{\vec{u}}(t); \vec{u} \in \Gamma$ et $t \in [s,S]\}$ et $\overline{A}^\Gamma_{s,S}$ l'ensemble correspondant sur la sphère. Alors :*

$$\frac{\mathrm{vol}\,(A^\Gamma_{s,S}(p))}{\mathrm{vol}\,(A^\Gamma_{r,R}(p))} \geq \frac{\mathrm{vol}\,(\overline{A}^\Gamma_{s,S})}{\mathrm{vol}\,(\overline{A}^\Gamma_{r,R})}.$$

Nous renvoyons à [41] pour une démonstration (dans l'énoncé les conditions sur s, S, r, R sont inexactes, cependant S. Zhu prouve le résultat que nous énonçons).

Soit γ une géodésique minimisante reliant x à y. Soit $y' \in \gamma$ tel que :

$$d(y', y) = 5r(\epsilon).$$

Comme $d(y, x) = d(x, \partial\Omega)$, on a :

$$B(y', 4r(\epsilon)) \subset \Omega.$$

Soit $z \in \partial\Omega$. Soit γ_2 une géodésique minimisante reliant x à z, contenue dans Ω sauf en z. Soit $z' \in \gamma_2$ tel que $d(z, z') = r(\epsilon)$.

Notons $d_1 = d(z', y')$, $d_2 = d(x, z)$ et supposons :

$$d_2 \geq \frac{\pi}{2} + \theta(\epsilon), \tag{5.27}$$

avec $\theta(\epsilon) \geq \max\{\sqrt{r(\epsilon)}, \sqrt{\tau_1(\epsilon)}\}$.

Quitte à augmenter encore un peu $\theta(\epsilon)$, nous allons obtenir une contradiction.

À l'aide de l'inégalité triangulaire, on montre :

$$B(y', r(\epsilon)) \subset A^{\Gamma}_{d_1 - r(\epsilon), d_1 + r(\epsilon)}(z') \subset B(y', 3r(\epsilon)), \tag{5.28}$$

avec Γ la trace sur $S_{z'}\Omega$ de $B(y', r(\epsilon))$.
Par construction de y' :

$$B(y', 3r(\epsilon)) \subset \Omega.$$

Or par l'inégalité triangulaire :

$$d_1 \geq d(x, z') - d(x, y')$$

d'où :

$$d_1 \geq d_2 - d + 4r(\epsilon)$$

c'est-à-dire par (5.27) et comme $d \leq \frac{\pi}{2}$:

$$d_1 \geq \theta(\epsilon) + 4r(\epsilon) \geq \theta(\epsilon) \gg r(\epsilon).$$

Par le théorème de Bishop-Gromov :

$$\mathrm{vol}\, A^{\Gamma}_{\frac{d_1}{2} - r(\epsilon), \frac{d_1}{2} + r(\epsilon)}(z') \geq \mathrm{vol}\,(A^{\Gamma}_{d_1 - r(\epsilon), d_1 + r(\epsilon)}(z')) \times \frac{\mathrm{vol}\,(\overline{A}^{\Gamma}_{\frac{d_1}{2} - r(\epsilon), \frac{d_1}{2} + r(\epsilon)})}{\mathrm{vol}\,(\overline{A}^{\Gamma}_{d_1 - r(\epsilon), d_1 + r(\epsilon)})}. \tag{5.29}$$

Comme Ω est convexe, on en déduit puisque $z' \in \Omega$ et par (5.28) :

$$A^{\Gamma}_{\frac{d_1}{2} - r(\epsilon), \frac{d_1}{2} + r(\epsilon)}(z') \subset \Omega.$$

Sur la sphère :

$$\frac{\overline{A}^{\Gamma}_{\frac{d_1}{2}-r(\epsilon),\frac{d_1}{2}+r(\epsilon)}}{\overline{A}^{\Gamma}_{d_1-r(\epsilon),d_1+r(\epsilon)}}=\frac{\int_{\frac{d_1}{2}-r(\epsilon)}^{\frac{d_1}{2}+r(\epsilon)}(\sin(t))^{n-1}dt}{\int_{d_1-r(\epsilon)}^{d_1+r(\epsilon)}(\sin(t))^{n-1}dt}.$$

Par conséquent, en remarquant que pour tout $t\in[0,\pi]$:

$$\frac{(\sin(\frac{t}{2}))^{n-1}}{(\sin(t))^{n-1}}\geq\frac{1}{2^{n-1}}, \tag{5.30}$$

on en déduit par (5.28), (5.29) et $d_1\gg r(\epsilon)$, l'existence d'une constante $D(n)>0$ telle que :

$$\mathrm{vol}\; A^{\Gamma}_{\frac{d_1}{2}-r(\epsilon),\frac{d_1}{2}+r(\epsilon)}(z')\geq D(n)\;\mathrm{vol}\,(B(y',r(\epsilon))).$$

D'où, par choix de $r(\epsilon)$, le lemme de Toponogov L^2 s'applique avec $B(x,r(\epsilon))$ et $A^{\Gamma}_{\frac{d_1}{2}-r(\epsilon),\frac{d_1}{2}+r(\epsilon)}(z')$, deux parties de Ω.

Par conséquent, puisque f atteint son maximum en x, on en déduit, comme dans le lemme 5.3.6, l'existence d'une fonction $\tau_2(\epsilon)$ et de points $v\in A^{\Gamma}_{\frac{d_1}{2}-r(\epsilon),\frac{d_1}{2}+r(\epsilon)}(z')$ tels que :

$$|f(v)-\cos d(x,v)|\leq\tau_2(\epsilon). \tag{5.31}$$

Nous allons maintenant estimer $\cos d(x,v)$ en utilisant l'existence d'une fonction $\tau_3(\epsilon)$ telle que (M,g) est $\tau_3(\epsilon)$ Gromov-Hausdorff proche d'un sinus produit tordu (théorème 5.3.4). Notons $\overline{x},\overline{y},\overline{z}$ et $\overline{v}$ l'image des points x,y',z' et v dans le produit tordu, ces points vérifient à $\tau_3(\epsilon)$ près les mêmes relations que x,y',z' et v, on suppose dorénavant que $\theta(\epsilon)\gg\tau_3(\epsilon)$ de sorte que ces erreurs soient négligeables. Maintenant, pour estimer la distance de $\overline{x}$ à $\overline{v}$ on peut supposer que l'on est sur la sphère puisque la structure de presque produit tordu de M est par rapport au point x (voir la remarque 1.47, page 196 de [14]). Or sur la sphère, un calcul montre qu'il existe un réel $C>0$ tel que :

$$d(\overline{x},\overline{v})\geq\frac{\pi}{2}+C\theta(\epsilon).$$

Par conséquent :

$$d(x,v)\geq\frac{\pi}{2}+C\theta(\epsilon)-\tau_3(\epsilon).$$

À l'aide de (5.31), on en déduit :

$$f(v)\leq\cos\,(\frac{\pi}{2}+C\theta(\epsilon)-\tau_3(\epsilon))+\tau_2(\epsilon),$$

et donc, quitte à supposer $\theta(\epsilon)$ assez grand :

$$f(v)<0,$$

ce qui est absurde, d'où :

$$\forall z\in\partial\Omega,\;\; d(x,z)\leq\frac{\pi}{2}+\theta(\epsilon),$$

Ce qui conclut.

■

Bibliographie

[1] Michael T. Anderson. Metrics of positive Ricci curvature with large diameter. *Manuscripta Math.*, 68(4) :405–415, 1990.

[2] Thierry Aubin. Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 55(3) :269–296, 1976.

[3] Erwann Aubry. Théorème de la sphère. In *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, Vol. 18, Année 1999–2000*, volume 18 of *Sémin. Théor. Spectr. Géom.*, pages 125–155. Univ. Grenoble I, Saint, 2000.

[4] Andrés I. Ávila. Stability results for the first eigenvalue of the Laplacian on domains in space forms. *J. Math. Anal. Appl.*, 267(2) :760–774, 2002.

[5] P. Bérard. *Analysis on Riemannian manifolds and geometric applications : an introduction*, volume 42 of *Monografías de Matemática [Mathematical Monographs]*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1986.

[6] Pierre Bérard and Daniel Meyer. Inégalités isopérimétriques et applications. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 15(3) :513–541, 1982.

[7] Pierre H. Bérard. From vanishing theorems to estimating theorems : the Bochner technique revisited. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 19(2) :371–406, 1988.

[8] Lionel Bérard-Bergery. Sur de nouvelles variétés riemanniennes d'Einstein. In *Institut Élie Cartan, 6*, volume 6 of *Inst. Élie Cartan*, pages 1–60. Univ. Nancy, Nancy, 1982.

[9] Lionel Bérard-Bergery and Jean-Pierre Bourguignon. Laplacians and Riemannian submersions with totally geodesic fibres. *Illinois J. Math.*, 26(2) :181–200, 1982.

[10] Marcel Berger, Paul Gauduchon, and Edmond Mazet. *Le spectre d'une variété riemannienne.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 194. Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[11] Yu. D. Burago and V. A. Zalgaller. *Geometric inequalities*, volume 285 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1988. Translated from the Russian by A. B. Sosinskiĭ, Springer Series in Soviet Mathematics.

[12] I. Chavel and E. A. Feldman. Spectra of domains in compact manifolds. *J. Funct. Anal.*, 30(2) :198–222, 1978.

[13] Isaac Chavel. *Eigenvalues in Riemannian geometry*, volume 115 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Orlando, FL, 1984. Including a chapter by Burton Randol, With an appendix by Jozef Dodziuk.

[14] Jeff Cheeger and Tobias H. Colding. Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products. *Ann. of Math. (2)*, 144(1) :189–237, 1996.

[15] Jeff Cheeger and Tobias H. Colding. On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I. *J. Differential Geom.*, 46(3) :406–480, 1997.

[16] Jeff Cheeger and David G. Ebin. *Comparison theorems in Riemannian geometry.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1975. North-Holland Mathematical Library, Vol. 9.

[17] Shiu Yuen Cheng. Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications. *Math. Z.*, 143(3) :289–297, 1975.

[18] Tobias H. Colding. Large manifolds with positive Ricci curvature. *Invent. Math.*, 124(1-3) :193–214, 1996.

[19] Tobias H. Colding. Shape of manifolds with positive Ricci curvature. *Invent. Math.*, 124(1-3) :175–191, 1996.

[20] Christopher B. Croke. An eigenvalue pinching theorem. *Invent. Math.*, 68(2) :253–256, 1982.

[21] S. Gallot. Équations différentielles caractéristiques de la sphère. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 12(2) :235–267, 1979.

[22] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. *Riemannian geometry.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[23] Sylvestre Gallot. Estimées de Sobolev quantitatives sur les variétés riemanniennes et applications. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 292(6) :375–377, 1981.

[24] Sylvestre Gallot. Inégalités isopérimétriques, courbure de Ricci et invariants géométriques. II. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 296(8) :365–368, 1983.

[25] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*, volume 224 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences].* Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1983.

[26] Misha Gromov. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, volume 152 of *Progress in Mathematics.* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1999. Based on the 1981 French original [MR 85e :53051], With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes, Translated from the French by Sean Michael Bates.

[27] Karsten Grove and Peter Petersen, V. A pinching theorem for homotopy spheres. *J. Amer. Math. Soc.*, 3(3) :671–677, 1990.

[28] Karsten Grove and Katsuhiro Shiohama. A generalized sphere theorem. *Ann. Math. (2)*, 106(2) :201–211, 1977.

[29] Ernst Heintze and Hermann Karcher. A general comparison theorem with applications to volume estimates for submanifolds. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 11(4) :451–470, 1978.

[30] Saïd Ilias. Constantes explicites pour les inégalités de Sobolev sur les variétés riemanniennes compactes. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 33(2) :151–165, 1983.

[31] S. V. Ivanov. Gromov-Hausdorff convergence and volumes of manifolds. *Algebra i Analiz*, 9(5) :65–83, 1997.

[32] Peter Li and Shing Tung Yau. Estimates of eigenvalues of a compact Riemannian manifold. In *Geometry of the Laplace operator (Proc. Sympos. Pure Math., Univ. Hawaii, Honolulu, Hawaii, 1979)*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXVI, pages 205–239. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1980.

[33] André Lichnerowicz. *Géométrie des groupes de transformations*. Travaux et Recherches Mathématiques, III. Dunod, Paris, 1958.

[34] Morio Obata. Certain conditions for a Riemannian manifold to be iosometric with a sphere. *J. Math. Soc. Japan*, 14 :333–340, 1962.

[35] Yukio Otsu. On manifolds of positive Ricci curvature with large diameter. *Math. Z.*, 206(2) :255–264, 1991.

[36] G. Perelman. Manifolds of positive Ricci curvature with almost maximal volume. *J. Amer. Math. Soc.*, 7(2) :299–305, 1994.

[37] Peter Petersen. On eigenvalue pinching in positive Ricci curvature. *Invent. Math.*, 138(1) :1–21, 1999.

[38] Jeffrey Rauch and Michael Taylor. Potential and scattering theory on wildly perturbed domains. *J. Funct. Anal.*, 18 :27–59, 1975.

[39] Robert C. Reilly. Applications of the Hessian operator in a Riemannian manifold. *Indiana Univ. Math. J.*, 26(3) :459–472, 1977.

[40] Emanuel Sperner, Jr. Zur Symmetrisierung von Funktionen auf Sphären. *Math. Z.*, 134 :317–327, 1973.

[41] Shunhui Zhu. The comparison geometry of Ricci curvature. In *Comparison geometry (Berkeley, CA, 1993–94)*, volume 30 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 221–262. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

Résumé :

Sur l'ensemble des variétés riemanniennes compactes à courbure de Ricci positive (on normalise par $Ric \geq (n-1)g$), la première valeur propre non nulle du laplacien agissant sur les fonctions atteint son minimum uniquement pour la sphère canonique. Dans cette thèse, nous caractérisons, à l'aide de la distance de Gromov-Hausdorff, les variétés riemanniennes à courbure positive dont les premières valeurs propres du laplacien sont proches de celles de la sphère canonique.

Cette propriété de minimimalité du spectre de la sphère s'étend par un procédé de symétrisation, au spectre de Dirichlet des boules géodésiques de la sphère parmi les domaines de variétés à courbure de Ricci positive. Nous étudions les domaines de variétés à courbure de Ricci positive dont la première valeur propre de Dirichlet est presque minimimale. En particulier, nous montrons qu'un domaine convexe dont la première valeur propre de Dirichlet est proche de celle d'un hémisphère est Gromov-Hausdorff proche d'un hémisphère d'un sinus produit tordu.

Mots-clés : Géométrie riemannienne, inégalité de Lichnerowicz-Obata, pincement du spectre du laplacien, géométrie métrique, distance de Gromov-Hausdorff, inégalité de Faber-Krahn, domaines convexes.

Codes AMS : 53C20,53C24,58C40,51K.