



**HAL**  
open science

# Analyses multirésolutions et problèmes de bords: applications au traitement d'images et à la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles

Jean Baccou

► **To cite this version:**

Jean Baccou. Analyses multirésolutions et problèmes de bords: applications au traitement d'images et à la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles. Mathématiques [math]. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2004. Français. NNT: . tel-00008618

**HAL Id: tel-00008618**

**<https://theses.hal.science/tel-00008618>**

Submitted on 1 Mar 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE PROVENCE (AIX-MARSEILLE I)  
U.F.R Mathématiques, Informatique et Mécanique

N° d'ordre :

## THESE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE PROVENCE**

Discipline : MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Ecole Doctorale de Mathématiques et Informatique de Marseille

présentée par

**Jean Baccou**

*Analyses Multirésolutions et problèmes de bord :  
applications au Traitement d'Images et  
à la Résolution numérique d'Equations  
aux Dérivées Partielles*

Soutenue publiquement le 8 Décembre 2004 devant le jury composé de :

Mme	I. DAUBECHIES	Rapporteur
Mr	F. ARANDIGA	
Mr	A. COHEN	Président du jury
Mr	J.M GHIDAGLIA	Rapporteur
Mr	J. LIANDRAT	Directeur de thèse
Mr	J. F. MAITRE	



A mes parents,  
A Sunita.



# Remerciements

Je tiens avant tout à remercier Jacques Liandrat pour sa simplicité, sa gentillesse et la confiance qu'il m'a témoignée au cours de ces années. Cela a été pour moi un grand plaisir d'effectuer cette thèse sous sa direction.

Je tiens à remercier également Mme Ingrid Daubechies et Mr Jean-Michel Ghidaglia qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de mon travail. Mes remerciements s'adressent aussi aux membres du jury, Messieurs Albert Cohen, Jean-François Maître et Francesc Arandiga avec une reconnaissance particulière pour Francesc Arandiga qui m'a apporté tout son savoir-faire en toute simplicité.

Que soient également remerciés les membres du LATP, Clothilde, Marie-Christine, Sylvie, Bruno, les membres de l'EGIM et plus particulièrement Guillaume. Je remercie vivement la "fine équipe", Isabelle, Karine, Steph, Aymeric, Hugo, Florent, Damian, Peter, Juan-Carlos, Sergio et surtout Anne-Sophie qui m'a toujours été de précieux conseils pendant ces trois années.

Mes remerciements s'adressent aussi à Yan, Aymeric, Benja, Antoine, Fredo, Pierre, Vincent, Laurent A., Laurent B., Laurent R., Cricri et Florent qui m'ont toujours montré le vrai sens de la vie avec une profonde gratitude à Frédéric et Christophe avec qui j'ai partagé des moments inoubliables.

Enfin, j'adresse un grand merci à toute ma famille et plus particulièrement, à mes parents et à Sunita qui m'ont toujours soutenu dans mes choix et ont contribué à l'aboutissement de ces travaux.



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Généralités sur les analyses multiéchelles</b>	<b>7</b>
<b>1</b>	<b>Analyses Multirésolutions et Ondelettes</b>	<b>13</b>
1.1	Rappels sur les Analyses Multirésolutions de $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	14
1.1.1	Définition . . . . .	14
1.1.2	Analyses multirésolutions orthonormales . . . . .	16
1.1.3	Analyses multirésolutions biorthogonales . . . . .	22
1.2	Opérateurs aux dérivées partielles et bases d'ondelettes . . . . .	24
1.2.1	Action d'un opérateur sur une base d'ondelettes : cas général . . . . .	25
1.2.2	Un exemple d'opérateur $L$ . . . . .	27
1.3	Deux exemples d'analyses multirésolutions . . . . .	30
1.3.1	Analyses multirésolutions orthogonales splines . . . . .	30
1.3.2	Analyses multirésolutions de $L^2([0, 1])$ . . . . .	33
1.4	Conclusion . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Le formalisme de Harten</b>	<b>37</b>
2.1	Formalisme à la Harten . . . . .	38
2.1.1	Le cas monodimensionnel . . . . .	38
2.1.2	Généralisation au cas bi-dimensionnel . . . . .	46
2.2	Algorithme de prédiction interpolant invariant par translation, lien avec les analyses multirésolutions interpolantes . . . . .	47
2.2.1	Convergence de l'algorithme de prédiction interpolant . . . . .	47
2.2.2	Lien avec les analyses multirésolutions interpolantes . . . . .	55
2.3	Etude de l'algorithme de prédiction $B^N$ -spline invariant par translation, lien avec les analyses multirésolutions biorthogonales . . . . .	56
2.3.1	Convergence de l'algorithme de prédiction $B^N$ -spline . . . . .	56
2.3.2	Propriétés des fonctions limites et lien avec les analyses multirésolutions . . . . .	59
2.4	Conclusion . . . . .	61
<b>II</b>	<b>Couplage ondelettes/domaines fictifs pour la résolution</b>	

<b>3 Formulations, discrétisations et approximations</b>	<b>69</b>
3.1 Formulations et discrétisations . . . . .	69
3.1.1 Discrétisation en temps . . . . .	69
3.1.2 Discrétisation spatiale . . . . .	74
3.2 Existence et unicité des solutions . . . . .	77
3.3 Estimation d'erreur . . . . .	84
3.3.1 Erreur de discrétisation temporelle . . . . .	85
3.3.2 Erreur de discrétisation spatiale . . . . .	86
3.3.3 Erreur globale . . . . .	89
<b>4 Implémentation de la méthode</b>	<b>91</b>
4.1 Formulation vectorielle . . . . .	91
4.2 Conditionnement de $(DC)^t DC$ et préconditionnement . . . . .	92
4.2.1 Conditionnement . . . . .	92
4.2.2 Préconditionnement . . . . .	97
4.3 Implémentation du problème . . . . .	98
4.3.1 Représentation de $\gamma$ à l'aide de courbes de Bezier . . . . .	98
4.3.2 Implémentation des différents termes du problème vec- toriel (4.1) . . . . .	100
<b>5 Résultats numériques</b>	<b>107</b>
5.1 Vérification de la borne d'erreur . . . . .	108
5.1.1 Erreur en temps . . . . .	108
5.1.2 Erreur en espace . . . . .	109
5.2 Connection entre la solution sur $\Omega$ et les multiplicateurs de Lagrange . . . . .	109
5.3 Solution numérique, décomposition en ondelettes et condition- nement de la matrice d'itération d'Uzawa . . . . .	111
5.3.1 Solution numérique . . . . .	111
5.3.2 Conditionnement . . . . .	112
5.4 Deux applications de l'algorithme de résolution . . . . .	113
5.4.1 Application à la résolution d'un problème défini sur un domaine non polygonal . . . . .	113
5.4.2 Application à la résolution d'un problème avec frontière mobile . . . . .	115

### III Ondelettes et compression de signaux/images 127

<b>6 Algorithmes multiéchelles dépendant de la position, lien avec   les analyses multirésolutions et applications en dimension</b>	<b>1135</b>
---	-------------

6.1	Algorithme de prédiction interpolant dépendant de la position : lien avec les analyses interpolantes dépendant de la position . . . . .	136
6.1.1	Algorithme de prédiction dépendant de la position . . .	136
6.1.2	Convergence de l'algorithme de prédiction interpolant dépendant de la position . . . . .	138
6.1.3	Lien avec les analyses multirésolutions . . . . .	148
6.2	Généralisation aux algorithmes de prédiction B-spline dépendant de la position : lien avec les analyses multirésolutions biorthogonales dépendant de la position . . . . .	152
6.2.1	Convergence de l'algorithme de prédiction $B^N$ -spline dépendant de la position . . . . .	152
6.2.2	Construction des analyses multirésolutions biorthogonales . . . . .	155
6.3	Quelques applications de l'approche dépendant de la position .	166
6.3.1	Le phénomène de Gibbs . . . . .	167
6.3.2	Compression d'un signal localement discontinu . . . . .	168
6.4	Preuves des théorèmes et propositions . . . . .	173
6.4.1	Preuve de la proposition 6.1.1 : étude de la convergence de $API^+$ . . . . .	173
6.4.2	Preuve de la proposition 6.2.1 : étude de la convergence de l'algorithme de prédiction $B^N$ -spline . . . . .	177
6.4.3	Preuve de la proposition 6.2.3 : analyse des espaces $\tilde{V}_j^N$	179
6.4.4	Preuve de la proposition 6.2.4 : construction des ondelettes $\{\tilde{\psi}_k^N\}_{k \in \mathbb{Z}}$ . . . . .	183
6.5	Conclusion . . . . .	186
<b>7</b>	<b>Généralisation à la compression d'images</b>	<b>187</b>
7.1	Construction d'une transformation multiéchelle dépendant d'une carte . . . . .	188
7.1.1	Définition d'une carte de contours . . . . .	188
7.1.2	Prédiction multi-directionnelle dépendant de la carte .	190
7.1.3	Un exemple de construction de carte . . . . .	196
7.2	Quantification et codage de l'information compressée . . . . .	198
7.2.1	Opérateurs de quantification . . . . .	199
7.2.2	Codage de l'information quantifiée . . . . .	199
7.3	Applications numériques à la compression d'images . . . . .	201
7.3.1	Prédiction de l'image . . . . .	202
7.3.2	Compression de l'image . . . . .	202
7.4	Conclusion . . . . .	207

<b>A</b>	<b>Annexes</b>	<b>217</b>
A.1	Filtres et symboles d'une analyse multirésolution orthonormale 1-périodique de $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ . . . . .	217
A.2	Construction des analyses multirésolutions de $L^2([0, 1])$ , estimation des coefficients d'échelle . . . . .	218
A.2.1	Construction des analyses . . . . .	218
A.2.2	Estimation des coefficients d'échelle . . . . .	219
A.3	Résolution de l'équation d'évolution de la frontière pour un problème avec frontière mobile . . . . .	220

# Notations

## Notations générales

### Grille – Discrétisation

- $j$  Niveau de résolution dans une analyse multiéchelle
- $J_0$  Niveau de résolution le plus grossier
- $J_{max}$  Niveau de résolution le plus fin
- $X^j$  Grille dyadique de pas  $2^{-j}$   
 $X^j = \{x_k^j = k2^{-j}, k \in \mathbb{Z}\}$

### Opérateurs

- $\hat{f}$  Transformée de Fourier dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\omega x} dx$

## Ondelettes et résolution d'équations aux dérivées partielles

### Domaines – Discrétisation

- $\Omega$  Rectangle de  $\mathbb{R}^2$  de dimension  $L \times L'$
- $\omega$  Ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , tel que  $\bar{\omega} \subset \Omega$
- $\gamma$  Frontière de  $\omega$
- $h$  Pas de discrétisation spatial
- $j'$  Paramètre d'échelle associé à une analyse multirésolution sur  $\gamma$
- $h'$  Pas de discrétisation sur  $\gamma$
- $\delta t$  Pas de discrétisation en temps

### Opérateurs

- $L$  Opérateur différentiel elliptique
- $\Delta$  Opérateur Laplacien  $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$
- $\gamma_0$  Opérateur trace de  $H^1(\omega)$  sur  $H^{1/2}(\gamma)$
- $R_\omega$  Opérateur de restriction de  $H^1(\Omega)$  à  $H^1(\omega)$
- $R_{\Omega \setminus \bar{\omega}}$  Opérateur de restriction de  $H^1(\Omega)$  à  $H^1(\Omega \setminus \bar{\omega})$
- $T_{\gamma_0}$  Opérateur trace de  $H^1(\Omega)$  sur  $H^{1/2}(\gamma)$   
 $\forall V \in H^1(\Omega), T_{\gamma_0} V = \gamma_0(R_\omega V)$

## Analyses multirésolutions orthogonales de $L^2(\mathbb{R})$

$\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$	Analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$
$\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$	Suite d'espaces d'ondelettes
$P_{V_j}$	Opérateur de projection orthogonale sur $V_j$
$P_{W_j}$	Opérateur de projection orthogonale sur $W_j$
$d$	Ordre de l'analyse multirésolution
$m$	Régularité de l'analyse multirésolution
$\left\{ \begin{array}{ll} \phi & \text{Fonction d'échelle d'une analyse multirésolution} \\ m_0 & \text{Symbole associé à } \phi \\ \mathbf{h} = \{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}} & \text{Filtre associé à } \phi \\ \{c_{j,k}(f)\}_{k \in \mathbb{Z}} & \text{Coefficients d'échelle d'une fonction } f, \\ & P_{V_j}f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k}(f)\phi_{j,k} \end{array} \right.$	
$\left\{ \begin{array}{ll} \psi & \text{Ondelette d'une analyse multirésolution} \\ m_1 & \text{Symbole associé à } \psi \\ \mathbf{g} = \{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}} & \text{Filtre associé à } \psi \\ \{d_{j,k}(f)\}_{k \in \mathbb{Z}} & \text{Coefficients de détail d'une fonction } f \\ & P_{W_j}f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k}(f)\psi_{j,k} \end{array} \right.$	

## Analyses multirésolutions orthogonales périodiques de $L^2(\Omega)$

$K_j \quad \{\alpha = (j, k_1, k_2)/(k_1, k_2) \in \{0, \dots, 2^j - 1\}\}$  avec  $|\alpha| = j$   
 $A_j \quad K_j \times \{1, 2, 3\}$

$\left\{ \begin{array}{l} U_h^\Omega \text{ ou } U_j^\Omega \\ \{\Phi_\alpha^\Omega\}_{\alpha \in K_j} \\ \{\Psi_\alpha^{\Omega,i}\}_{(\alpha,i) \in A_j} \\ \{c_\alpha^\Omega(f)\}_{\alpha \in K_j} \\ \{d_\alpha^{\Omega,i}(f)\}_{(\alpha,i) \in A_j} \\ P_{U_h^\Omega}, h = 2^{-j} \end{array} \right.$	<p>Espace d'une analyse multirésolution de <math>L^2(\Omega)</math> construite par produit tensoriel de deux analyses multirésolutions monodimensionnelles de régularité <math>m</math></p> <p>Fonction d'échelle de l'analyse multirésolution</p> <p>Ondelettes de l'analyse multirésolution</p> <p>Coefficients d'échelle d'une fonction <math>f</math></p> <p>Coefficients d'ondelettes d'une fonction <math>f</math></p> <p>Opérateur de projection orthogonale sur <math>U_h^\Omega</math></p>
--	---

$$\left\{ \begin{array}{ll} V_h^\Omega \text{ ou } V_j^\Omega & \text{Image de } U_h^\Omega \text{ par l'opérateur } (I - \nu\delta t\Delta)^{-1}, \\ & V_h^\Omega = (I - \nu\delta t\Delta)^{-1}U_h^\Omega \\ \{\Theta_\alpha^{\Omega,i}\}_{(\alpha,i)\in A_j} & \text{Vaguelettes engendrant l'espace } V_h^\Omega, \\ & \Theta_\alpha^{\Omega,i} = 2^{2j}(I - \nu\delta t\Delta)^{-1}\Psi_\alpha^{\Omega,i} \\ \{\tilde{\Theta}_\alpha^{\Omega,i}\}_{(\alpha,i)\in A_j} & \text{Vaguelettes biorthogonales à } \{\Theta_\alpha^{\Omega,i}\}_{(\alpha,i)\in A_j}, \\ & \tilde{\Theta}_\alpha^{\Omega,i} = 2^{-2j}(I - \nu\delta t\Delta)\Psi_\alpha^{\Omega,i} \\ \{\Xi_\alpha^\Omega\}_{\alpha\in K_j} & \Xi_\alpha^\Omega = (I - \nu\delta t\Delta)^{-1}\Phi_\alpha^\Omega \\ P_{V_h^\Omega} & \text{Opérateur de projection biorthogonale sur } V_h^\Omega \end{array} \right.$$

### Analyses multirésolutions orthogonales de $L^2(\gamma)$

$$K_{j'} \quad \{\alpha' = (j, k')/k' \in \{0, \dots, 2^j - 1\}\}$$

$$Q_{h'}^\gamma \text{ ou } Q_{j'}^\gamma \quad \text{Espace d'une analyse multirésolution de } L^2(\gamma) \text{ de régularité } m'$$

$$\{\phi^\gamma\}_{\alpha' \in K_{j'}} \quad \text{Fonctions d'échelle de l'analyse multirésolution}$$

$$\{\psi^\gamma\}_{\alpha' \in K_{j'}} \quad \text{Ondelettes de l'analyse multirésolution}$$

$$P_{Q_{h'}^\gamma} \quad \text{Opérateur de projection orthogonale sur } Q_{h'}^\gamma$$

### Approximation de l'équation de la chaleur

- Inconnues des différentes formulations

$$u \quad \text{Solution de l'équation de la chaleur (formulation forte)}$$

$$u^n \quad \text{Approximation de } u(t_n, \cdot)$$

$$(U^n, \lambda^n) \quad \text{Couple de solution du problème de point selle au temps } t_n$$

$$(U_h^n, \lambda_{h'}^n) \quad \text{Couple de solution du problème de point selle complètement discrétisé,} \\ U_h^n \in U_h^\Omega, \lambda_{h'}^n \in Q_{h'}^\gamma$$

- Formulation vectorielle du problème – Implémentation

{	$\{(\mathbf{U}_h^n)_\alpha\}_{\alpha \in K_j}$	Vecteur de $\mathbb{R}^{4^j}$ : coordonnées de la solution approchée $U_h^n$ dans une base de $U_h^\Omega$
	$\{(\mathbf{A}_h^n)_{\alpha'}\}_{\alpha' \in K_{j'}}$	Vecteur de $\mathbb{R}^{2^{j'}}$ : coordonnées de la solution approchée $\lambda_h^n$ dans une base de $Q_{h'}^\gamma$
	$\{(\mathbf{F}_h^n)_\alpha\}_{\alpha \in K_j}$	Vecteur de $\mathbb{R}^{4^j}$ défini par, $(\mathbf{F}_h^n)_\alpha = \langle U_h^n, \Xi_\alpha^\Omega \rangle_{L^2(\Omega)}$
	$\{(\mathbf{G}_{h'}^n)_{\alpha'}\}_{\alpha' \in K_{j'}}$	Vecteur de $\mathbb{R}^{2^{j'}}$ défini par, $(\mathbf{G}_{h'}^n)_{\alpha'} = \langle g^n, \phi_{\alpha'}^\gamma \rangle_{L^2(\gamma)}$ où $g$ est la condition aux bords
	$C$	Matrice de taille $4^j \times 2^{j'}$ définie par, $C_{\alpha, \alpha'} = \langle T_{\gamma_0}(\Xi_\alpha^\Omega), \phi_{\alpha'}^\gamma \rangle_{L^2(\gamma)}$
$D$	Matrice de taille $2^{j'} \times 4^j$ définie par, $D_{\alpha', \alpha} = \langle T_{\gamma_0}(\Phi_\alpha^\Omega), \phi_{\alpha'}^\gamma \rangle_{L^2(\gamma)}$	

$cond_2(A)$  Conditionnement de la matrice  $A$  au sens de la norme matricielle  $\| \cdot \|_2$

$\mathcal{B}_L$  Courbe de Bezier associée à  $L$  points de contrôle

$\mathcal{D}$  Fonction de Level Set

## Formalisme de Harten et application à la compression de signaux et d'images

### Opérateurs

$P_j^{j+1}$	Opérateur de prédiction entre les niveaux de résolution $j$ et $j + 1$
$D_{j+1}^j$	Opérateur de décimation entre les niveaux de résolution $j + 1$ et $j$
$R_j$	Opérateur de reconstruction associé au niveau de résolution $j$
$D_j$	Opérateur de discrétisation associé au niveau de résolution $j$
$S$	Opérateur ou Schéma de subdivision
$S_p$	Opérateur ou Schéma de subdivision associé aux différences d'ordre $p$

{	$P_j^{I,j+1}$	Opérateur de prédiction associé à une discrétisation par valeur aux points
	$D_{j+1}^{I,j}$	Opérateur de décimation associé à une discrétisation par valeur aux points
	$D_j^I$	Opérateur de discrétisation associé à une discrétisation par valeur aux points
	$R_j^{I,\infty}$	Opérateur de reconstruction hiérarchique associé à une discrétisation par valeur aux points
{	$P_j^{N,j+1}$	Opérateur de prédiction associé à une discrétisation $B^N$ – spline
	$D_{j+1}^{N,j}$	Opérateur de décimation associé à une discrétisation $B^N$ – spline
	$D_j^N$	Opérateur de discrétisation associé à une discrétisation $B^N$ – spline
	$R_j^{N,\infty}$	Opérateur de reconstruction hiérarchique associé à une discrétisation $B^N$ – spline

$Tr$  Opérateur de seuillage associé à un seuil  $\epsilon$

$Q$  Opérateur de quantification

$C$  Opérateur de codage

### Décomposition/représentation d'une fonction

- Grandeurs 1D

$\{f_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}}$  Discrétisation d'une fonction monodimensionnelle  $f \in F$  dans l'espace  $V^j$  :  $f^j = D_j f$ ,

$\{d_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}}$  Détails après décomposition multiéchelle 1D de Harten

$\{d_{\epsilon,k}^j\}_{k \in \mathbb{Z}}$  Détails seuillés avec un seuil  $\epsilon$

{	$\{f_k^{I,j}\}_{k \in \mathbb{Z}}$	Discrétisation par valeurs aux points d'une fonction monodimensionnelle
	$\{f_k^{I,j}\}_{k \in \mathbb{Z}}$	Valeurs prédites au niveau $j$ par une prédiction interpolante
		$l_{j,2k-1}, r_{j,2k-1}$ : Nombre de points à gauche et à droite dans le stencil d'interpolation pour le calcul de $f_{2k-1}^{I,j}$ , $l_{j,2k-1} + r_{j,2k-1} = D_{j,2k-1} + 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{f_k^{N,j}\}_{k \in \mathbb{Z}} \quad \text{Discrétisation } B^N\text{-spline d'une fonction monodimensionnelle} \\ \{f_k^{N,j}\}_{k \in \mathbb{Z}} \quad \text{Valeurs prédites au niveau } j \text{ par une prédiction } B^N\text{-spline} \end{array} \right.$$

- Grandeurs 2D

$$[map^j(m, n)]_{0 \leq m, n \leq 2^j} \quad \text{Carte des contours d'une image associée à l'échelle } j$$

$$\{f_{m,n}^j\}_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \quad \text{Discrétisation d'une fonction bi-dimensionnelle, } f$$

### Analyses multirésolutions et formalisme de Harten

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\tilde{\phi}_k^I\}_{k \in \mathbb{Z}} \quad \text{Fonctions limite du schéma de prédiction interpolant de Harten} \\ \{\tilde{V}_j^I\}_{j \in \mathbb{Z}} \quad \text{Analyse multirésolution interpolante,} \\ \quad \tilde{V}_j^I = \text{vect}(\{\tilde{\phi}_k^I(2^j x)\}_{k \in \mathbb{Z}}) \\ \{\tilde{W}_j^I\}_{j \in \mathbb{Z}} \quad \text{Espaces de détail d'une analyse multirésolution interpolante,} \\ \quad \tilde{W}_j^I = \text{vect}(\{\tilde{\psi}_k^I(2^j x)\}_{k \in \mathbb{Z}}) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\tilde{\phi}_k^N\}_{k \in \mathbb{Z}} \quad \text{Fonctions limite du schéma de prédiction } B^N\text{-spline} \\ \quad \text{de Harten} \\ (\{V_j^N\}_{j \in \mathbb{Z}}, \{\tilde{V}_j^N\}_{j \in \mathbb{Z}}) \quad \text{Analyse multirésolution biorthogonale spline d'ordre } N, \\ \quad V_j^N = \text{vect}\{B^N(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}\} \\ \quad \tilde{V}_j^N = \text{vect}\{\tilde{\phi}_k^N(2^j x), k \in \mathbb{Z}\} \\ (\{W_j^N\}_{j \in \mathbb{Z}}, \{\tilde{W}_j^N\}_{j \in \mathbb{Z}}) \quad \text{Espaces de détail d'une analyse multirésolution} \\ \quad \text{biorthogonale spline d'ordre } N, \\ \quad W_j^N = \text{vect}\{\psi_k^N(2^j x), k \in \mathbb{Z}\} \\ \quad \tilde{W}_j^N = \text{vect}\{\tilde{\psi}_k^N(2^j x), k \in \mathbb{Z}\} \end{array} \right.$$

# Introduction générale

Les travaux présentés dans ce mémoire sont dédiés au développement de méthodes numériques multiéchelles et adaptatives pour le traitement d'images et la résolution d'équations aux dérivées partielles.

Dans le cadre des équations aux dérivées partielles, l'objectif est de produire un algorithme de **résolution** qui fournit une solution approchée de façon rapide et utilisant un espace d'approximation de dimension aussi petite que possible. Dans le cadre du traitement d'images, il s'agit de construire des algorithmes de **compression** qui permettent de réduire la taille mémoire occupée par une image lors de son stockage ou de sa transmission. Il apparait que les méthodes numériques efficaces pour la résolution d'équations aux dérivées partielles ou pour la compression d'images partagent plusieurs propriétés qui réalisent l'unité des travaux présentés dans cette thèse.

La première propriété est le caractère **multiéchelle** de ces méthodes. Les méthodes de résolution numériques performantes utilisent, en effet, plusieurs niveaux d'approximation pour les solutions ou les opérateurs de l'équation aux dérivées partielles afin de capturer, de façon efficace, des phénomènes qui apparaissent à des échelles différentes. De même, une compression multiéchelle est nécessaire puisqu'une image est constituée de larges zones homogènes où l'intensité lumineuse varie de façon régulière entrecoupées de lignes de "discontinuités", c'est à dire de changements brutaux d'intensité très localisés, qui correspondent aux contours d'un objet par exemple.

La seconde propriété concerne le caractère **nécessairement rapide** des algorithmes numériques associés à ces méthodes. La prise en compte de plusieurs échelles pour la résolution ou la compression augmente le temps de calcul des algorithmes numériques. Il s'agit donc de construire des algorithmes qui intensifient leurs efforts d'approximation uniquement dans les zones non régulières tout en les diminuant dans les zones régulières.

Les **analyses multiéchelles** fournissent un cadre intéressant pour la construction de méthodes numériques satisfaisant la première propriété puis-

qu'elles définissent une succession d'espaces d'approximation emboîtés, chacun correspondant à une échelle de représentation. On parle alors d'espace **grossier** pour l'échelle la plus grossière et d'espace **fin** pour l'échelle la plus fine. Le passage entre un espace grossier et un espace fin se fait par l'intermédiaire de transformations de passage qui rajoutent des **détails**, c'est à dire des informations supplémentaires, quand les données du niveau fin ne peuvent pas être directement prédites à partir des données du niveau grossier.

La construction des analyses multiéchelles linéaires suppose l'introduction de fonctions de base. Un choix possible est de considérer les **ondelettes** ([19], [26], [47], [50]).

Il est maintenant bien connu que ce sont de bons candidats pour satisfaire la seconde propriété. En effet, la série d'ondelettes d'une fonction a ses termes dominant localisés autour de ses singularités. Il s'en suit qu'un algorithme de résolution ou de compression qui utilise les ondelettes est compétitif en terme de temps de calcul puisqu'il opère généralement sur des "séries creuses". De plus, la bonne localisation spectrale des ondelettes permet une approximation efficace des opérateurs différentiels.

Sur un plan théorique, les ondelettes semblent donc d'excellents outils pour construire des méthodes numériques efficaces. Cependant, dans la pratique, elles possèdent un certain nombre de limitations essentiellement liées aux **problèmes de bords**.

### Equations aux dérivées partielles et problèmes de bords

Ici, les problèmes de bords correspondent aux difficultés rencontrées quand on considère des problèmes définis sur des domaines quelconques avec conditions aux limites sur la frontière. Les méthodes à base d'ondelettes s'avèrent limitées pour ce type de problèmes puisque la construction de bases d'ondelettes sur un domaine à géométrie complexe n'est pas clairement établie ou du moins difficile à implémenter et la prise en compte de conditions aux bords nécessite la construction d'ondelettes particulières ([15]) plus difficiles à manipuler. De nombreuses approches ont été introduites pour contourner ces difficultés que l'on rencontre aussi avec d'autres méthodes, en particulier, les méthodes spectrales. Parmi ces approches, nous pouvons citer,

- Les méthodes de **décomposition de domaines** : elles consistent à décomposer le problème initial défini sur un domaine quelconque en une

succession de sous-problèmes locaux posés sur chaque sous-domaine. On peut alors choisir les méthodes ondelettes pour résoudre les sous-problèmes définis sur des sous-domaines carrés ou cubiques et les éléments finis pour les sous-domaines à géométrie plus complexe. La difficulté technique réside dans le raccord au niveau des interfaces entre les sous-domaines.

Parmi les méthodes de décomposition de domaine, nous pouvons citer la méthode de Mortar ([8], [7]) qui introduit un espace de multiplicateurs pour imposer la continuité au sens faible de la solution à travers les interfaces des sous-domaines.

- Les méthodes de **pénalisation** ([6]) : elles s’appliquent sur la formulation forte d’un problème aux dérivées partielles défini sur un domaine quelconque  $\omega$ . L’idée de ces méthodes est d’immerger le domaine  $\omega$  dans un domaine  $\Omega$ , plus gros et à géométrie simple. Le problème initial est alors transformé en un problème défini sur  $\Omega$  en rajoutant à l’équation initiale un terme dit de pénalisation qui a pour but de forcer la nouvelle solution à vérifier les conditions sur le bord de  $\omega$ .

Par exemple, pour un problème initial ayant des conditions aux bords du type Dirichlet, i.e.  $u|_{\gamma} = g$ , le terme de pénalisation s’écrit,  $(U - g) \frac{\chi_{\Omega \setminus \bar{\omega}}}{\eta}$  où  $U$  est l’inconnue sur  $\Omega$ ,  $\chi_{\Omega \setminus \bar{\omega}}$  est une fonction masque qui vaut 1 dans  $\Omega \setminus \bar{\omega}$  et 0 ailleurs et  $\eta$  est un paramètre de pénalisation qui tend vers 0.

Ce type de méthodes a été principalement développées pour étudier l’écoulement de fluides autour d’obstacles ([3], [59]). Dans ce cas, la partie  $\Omega \setminus \bar{\omega}$  est modélisée comme un milieu poreux et le paramètre  $\eta$  est interprété comme sa perméabilité.

- Les méthodes de **domaines fictifs** ([35], [40], [43]) : contrairement aux méthodes de pénalisation, ces méthodes s’appliquent sur la formulation faible d’un problème elliptique défini sur un domaine  $\omega$ . L’idée de ces méthodes est toujours d’immerger le domaine  $\omega$  dans un domaine  $\Omega$ , plus gros et à géométrie simple mais cette fois-ci, la condition sur le bord du domaine  $\omega$  est imposée au sens faible par l’introduction d’un multiplicateur de Lagrange  $\lambda$ . Le problème initial est alors transformé en un système d’équations définies sur un domaine  $\Omega$  et vérifiées par un couple d’inconnues  $(U, \lambda)$ . Nous citons ici deux méthodes de domaines fictifs. La première est une méthode de domaines fictifs avec multiplicateurs de surface, elle correspond au cas où  $\lambda$  est défini sur le bord de  $\omega$ . La seconde méthode est une méthode de domaines fictifs avec multiplicateurs de volume ; dans ce cas,  $\lambda$  est défini sur  $\omega$ .

Il nous a alors semblé intéressant de coupler les méthodes d’ondelettes et l’approche domaines fictifs. Ces travaux font l’objet de la seconde partie de la thèse. Le problème considéré est un problème parabolique avec condi-

tions de Dirichlet sur la frontière du domaine. L'approche domaines fictifs introduit une prise en compte efficace des conditions aux bords en vue de l'implémentation par une méthode ondelettes, cependant, un certain nombre de difficultés propres à la reformulation dans le cadre des domaines fictifs restent à résoudre. Il s'agit principalement de,

- La construction et l'analyse d'un schéma général d'approximation. Peu de résultats sont disponibles sur l'approximation par les ondelettes d'un problème formulé dans les domaines fictifs ([24]). Les différentes étapes de construction du schéma d'approximation d'une équation parabolique dans les domaines fictifs doivent être décrites et une analyse complète à chaque étape doit être fournie (existence et unicité de la solution, calcul de bornes d'erreur...).
- L'analyse et l'implémentation de l'algorithme de résolution : aucune étude concernant le conditionnement des matrices qui interviennent dans l'implémentation d'une méthode ondelettes/domaines fictifs n'existe. De plus, des problèmes techniques doivent être résolus notamment concernant l'extension de certaines quantités de  $\omega$  au grand domaine  $\Omega$  et dans l'estimation de termes faisant intervenir la trace de fonctions sur le bord du domaine  $\omega$ .

### Traitement d'images et problèmes de bords

Dans le cadre du traitement d'images, les problèmes de bord sont les problèmes dus à la non optimalité des algorithmes de compression en ondelettes au voisinage des zones de discontinuités ou de fort gradient que constituent les contours d'une image.

En effet, les méthodes numériques à base d'ondelettes ne conduisent pas à des algorithmes adaptées à la position des contours d'une image à compresser. De plus, la transformation bi-dimensionnelle en ondelettes tensorielles est trop rigide pour tenir compte de l'orientation des contours d'une image. Pour réduire ces difficultés, plusieurs travaux récents ont produit des nouvelles méthodes numériques pour la compression. Parmi ces méthodes, nous pouvons citer,

- L'approche **Bandelets** : les Bandelets, développées par S. Mallat et E. Le Pennec dans [54], définissent une nouvelle base orthonormale de fonctions qui vivent le long des contours d'une image. Cette construction utilise la notion de flux géométrique de l'image, c'est à dire un champ de vecteurs donnant en chaque point la direction dans laquelle

l'image a des variations régulières dans le voisinage du point. Les Bandelets sont alors construites à partir d'une base d'ondelettes bi-dimensionnelles à laquelle est appliqué un opérateur de déformation qui conduit à l'introduction d'une nouvelle base se déformant le long du flot géométrique.

- L'approche **Ridgelets/Curvelets** : les Ridgelets/Curvelets ont été introduites dans les travaux de D. Donoho et E. Candès ([13] et [12]). Ce sont des approches anisotropiques mais, contrairement aux Bandelets, elles sont non adaptées aux contours de l'image. Les Ridgelets sont des fonctions de la forme  $\psi_{a,b,\theta}(x,y)$  qui sont obtenues en appliquant des translations, des dilatations et des rotations à une fonction mère  $\psi$ . Cette construction offre donc le choix supplémentaire d'un paramètre de rotation, par rapport aux ondelettes classiques, ce qui évite de privilégier les directions verticales et horizontales comme on le fait classiquement avec des ondelettes bi-dimensionnelles construites à partir de deux ondelettes monodimensionnelles.

Les Curvelets sont ensuite construites à partir des Ridgelets en localisant leur action par des troncatures en espace et en fréquence.

- L'approche **ENO** (Essentially Non Oscillatory)([1] et [23]) : elle est basée sur une technique qui a été introduite à l'origine pour la simulation numérique d'onde de choc ([39]). Dans cette approche, une image est représentée par une matrice de données qui correspond à la discrétisation d'une fonction bi-dimensionnelle sur une grille dyadique. Contrairement aux deux approches précédentes, le point de départ de la construction de l'algorithme de compression correspondant n'est pas la définition d'une famille de fonctions de base mais l'introduction d'un opérateur d'interpolation de données numériques qui intègre la présence de discontinuités (ou de contours) via un mécanisme de détection. Une sélection adaptée du stencil d'interpolation permet alors de limiter les oscillations dus au phénomène de Gibbs près des contours.

A l'heure actuelle, nous pouvons citer deux méthodes numériques qui ont été construites par cette approche. La première est la méthode ENO-2D séparable décrite dans [1]. Elle consiste à appliquer un opérateur d'interpolation monodimensionnel d'abord aux lignes de l'image puis à ses colonnes, la sélection du stencil d'interpolation se faisant grâce à une étape de détection opérant sur des données déjà reconstruites.

Plus récemment, A. Cohen et B. Matei proposent dans [23] la méthode ENO-EA qui améliore la méthode ENO-2D grâce à une détection bien meilleure et à une incorporation plus efficace des informations sur la géométrie de l'image. Nous reviendrons en détail sur la description de ces deux méthodes dans la partie III.

Suivant le même but, nous avons construit, dans la partie III, une méthode

numérique pour la compression qui intègre certaines informations sur la position et l'orientation des contours de l'image à compresser. Cette méthode est basée sur l'introduction d'analyses multiéchelles adaptées et donc d'ondelettes adaptées, d'abord monodimensionnelles puis généralisées au cas bi-dimensionnel. L'algorithme de compression correspondant combine détection de contours et interpolation de données dans la même philosophie que l'approche ENO-EA mais en effectuant l'étape de détection sur les données exactes et non reconstruites à chaque niveau comme dans le cas ENO-EA.

L'objectif de notre travail est d'améliorer les algorithmes existant sur deux points. Le premier point est la **stabilité** de l'algorithme de compression correspondant, c'est à dire la possibilité de "contrôler" le comportement de l'algorithme quand des perturbations sont introduites dans les données. Le second point concerne le **gain de performance** de la méthode. Ici, nos comparaisons seront faites avec une méthode utilisant les ondelettes classiques, notamment pour la compression d'images réelles.

Ce mémoire est alors organisé de la façon suivante,

La **première partie** est consacrée à des rappels sur la construction d'analyses multiéchelles. On rappelle en particulier le concept d'analyses multirésolution, terme que nous réservons pour les analyses multiéchelles associées aux ondelettes ([26], [51], [48]). Puis, une seconde construction est décrite ; elle est basée sur le formalisme de Harten ([37]). Le lien entre ces deux constructions est détaillé.

La **seconde partie** présente la construction d'une méthode numérique pour la résolution d'équations aux dérivées partielles qui couple les approches à base d'ondelettes et de domaines fictifs. La méthode est d'abord analysée sur un plan théorique (existence et unicité des solutions, borne d'erreur) puis sur un plan pratique (implémentation de l'algorithme de résolution, conditionnement des matrices du problème, vérification numérique de l'analyse théorique, applications à la résolution d'équations définies sur des domaines complexes).

La **troisième partie** de ce mémoire concerne tout d'abord la définition d'analyses multiéchelles monodimensionnelles adaptées aux caractéristiques d'une fonction non régulière dans le formalisme de Harten. Ensuite, ces analyses sont généralisées au cas bi-dimensionnel pour la construction d'un algorithme de compression que l'on compare avec certains algorithmes de la littérature.

Première partie

Généralités sur les analyses  
multiéchelles



# Introduction

Cette partie est consacrée à des rappels ou à des clarifications sur la construction d'analyses multiéchelles.

Les analyses multiéchelles considérées ici sont associées à un facteur de dilatation dyadique, c'est à dire de la forme  $2^{-j}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ . On définit alors une analyse multiéchelle par une suite d'espaces fonctionnels  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  et une suite d'opérateurs surjectifs,  $\{P_{V_j}\}_{j \in \mathbb{Z}}$  d'un espace fonctionnel  $F$  dans  $V_j$ , vérifiant les trois propriétés suivantes,

- 1) Emboîtement des espaces,

$$\forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j+1}.$$

- 2) Passage entre deux niveaux successifs par dilatation dyadique,

$$f(2^j x) \in V_j \Rightarrow f(2^{j+1} x) \in V_{j+1}$$

- 3) Propriété d'emboîtement des opérateurs  $P_{V_j}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  :

$$\forall f \in F, P_{V_j} f = 0 \Rightarrow P_{V_{j-1}} f = 0$$

En choisissant, pour chaque  $j$ , une **base** de  $V_j$ , on introduit  $\{V^j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ , la famille d'espaces séparables correspondant aux suites des coordonnées de  $P_{V_j} f$ ,  $f \in F$ , dans cette base. Notons que la famille d'espaces  $\{V^j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  est en bijection avec la famille  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ . De la même façon que l'on a introduit la famille d'opérateurs  $\{P_{V_j}\}_{j \in \mathbb{Z}}$ , connectant un espace fonctionnel  $F$  à  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ , on peut donc définir une famille d'opérateurs  $\{D_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  reliant  $F$  à  $\{V^j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  et qui vérifie aussi la propriété d'emboîtement.

A la famille  $(V^j, D_j)$ , sont associées deux familles d'opérateurs inter-échelles pour décrire la connection entre deux espaces successifs  $V^j$  et  $V^{j+1}$ .

- Le premier opérateur est un opérateur de **décimation** . Il agit de  $V^{j+1}$  dans  $V^j$  et associe à tout élément  $D_{j+1} f \in V^{j+1}$ , l'élément  $D_j f \in V^j$ .

- Le second opérateur est un opérateur de **prédiction**. Il agit de  $V^j$  dans  $V^{j+1}$ . La prédiction associe à tout élément,  $D_j f \in V^j$ , un élément de  $V^{j+1}$  qui, en général, n'est pas  $D_{j+1} f$ . Pour retrouver  $D_{j+1} f$  à partir de  $D_j f$ , il faut donc introduire des **détails** qu'il convient de rajouter à la prédiction. Une décomposition à deux échelles de  $D_{j+1} f$  est alors constituée de  $D_j f$  et de détails. En itérant, on construit une **décomposition multiéchelle**.

L'opérateur de prédiction occupe donc un rôle prépondérant dans la construction de la transformation multiéchelle puisqu'il contrôle le "volume" de détails à rajouter et donc à stocker pour changer d'échelle d'approximation. Dans cette partie, notamment dans le chapitre 2, une attention particulière est portée à cet opérateur. Il convient de rapprocher sa construction de la construction de **schémas de subdivision** ([32]). On définit un schéma de subdivision,  $S$ , comme tout opérateur de  $V^j$  dans  $V^{j+1}$  qui s'écrit,

$$S : \{f_m^j\}_{m \in \mathbb{Z}} \rightarrow \{f_k^{j+1}\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ avec } f_k^{j+1} = (Sf^j)_k = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{k-2m}^{j+1,k} f_m^j,$$

où la famille finie  $a^{j+1,k} = \{a_m^{j+1,k}\}_{-M_{j+1,k}^* \leq m \leq M_{j+1,k}} \in \mathbb{R}^{M_{j+1,k} + M_{j+1,k}^* + 1}$

s'appelle le masque du schéma de subdivision associé à la donnée  $f_k^{j+1}$ . La dépendance de  $a^{j+1,k}$  par rapport à  $j$ ,  $k$  ou  $f^j$  permet de classier les schémas de subdivision.

Si  $a^{j+1,k}$  ne dépend pas des données  $\{f_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , le schéma est dit **linéaire**. On parle de **stationnarité** d'un schéma de subdivision si la famille  $a^{j+1,k}$  dépend de l'échelle  $j$  et d'**uniformité** si elle est dépendante de l'indice  $k$ .

Deux exemples de construction d'analyses multiéchelles sont présentés dans cette partie.

Dans le **chapitre 1**, nous présentons la construction des analyses multirésolutions associées aux bases d'ondelettes ([26], [51], [48]). Nous rappelons d'abord les définitions classiques relatives à cette construction pour des analyses de  $L^2(\mathbb{R})$ , ainsi que quelques résultats importants, utiles pour la partie II. En particulier, nous rappelons que la relation d'échelle entre les fonctions de base de l'analyse conduit à des schémas de subdivision stationnaires et uniformes si on étend la définition précédente à des suites  $\{a_m^{j,k}\}_{m \in \mathbb{Z}}$  dont les termes sont à décroissance rapide. Un résultat sur la représentation d'un opérateur elliptique dans une base d'ondelettes est fourni. Enfin, nous terminons par deux exemples d'analyses multirésolutions qui sont utilisés dans la

partie II.

Le deuxième exemple de construction, décrit dans le **chapitre 2**, est basé sur le formalisme de Harten ([37]). À l'inverse des analyses multirésolutions associées aux ondelettes, le formalisme de Harten est purement discret et consiste à définir deux opérateurs inter-échelle (un opérateur de prédiction et un opérateur de décimation), sans a priori définir d'espaces fonctionnels, ni d'ondelettes. Néanmoins, un lien très étroit relie cette construction avec les analyses multirésolutions classiques.

Après avoir introduit le formalisme de Harten, nous présentons deux exemples d'opérateurs de prédiction. Ils conduisent à la définition de schémas de subdivision qui peuvent être non uniformes et non stationnaires. La convergence de ces schémas de subdivision est ensuite étudiée et permet dans le cas stationnaire et uniforme de clarifier complètement le lien avec les ondelettes biorthogonales classiques.



# Chapitre 1

## Analyses Multirésolutions et Ondelettes

Ce premier chapitre introduit une première façon de construire des analyses multiéchelles. Il reprend la construction classique des analyses multirésolutions conduisant aux bases d'ondelettes ([26], [51], [48]).

La **section 1.1** rappelle d'abord la construction des analyses multirésolutions de  $L^2(\mathbb{R})$  qui s'articule autour de deux points essentiels,

- l'introduction d'un couple de famille d'espaces  $(\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}, \{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}})$  : les espaces  $V_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  sont les espaces d'une analyse multiéchelle de  $L^2(\mathbb{R})$  alors que les espaces  $W_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  sont des espaces dits de détail, complémentaires des  $V_j$  et engendrés par des ondelettes,
- la construction de deux familles d'opérateurs de projection sur les deux familles d'espaces, notées  $\{P_{V_j}\}_{j \in \mathbb{Z}}$  et  $\{P_{W_j}\}_{j \in \mathbb{Z}}$ .

On rappelle ensuite certaines propriétés concernant l'approximation dans les espaces d'une analyse multirésolution ([19]) et la possibilité de construire des algorithmes multiéchelles rapides de décomposition et de reconstruction ([47]). L'étape de prédiction sur laquelle sont basés ces algorithmes définit un schéma de subdivision stationnaire et uniforme si l'on étend la construction des schémas de subdivision à des masques dont les coefficients sont à décroissance rapide. La section 1.1.2 se termine par le rappel des constructions classiques ([55] et [50]) des analyses périodiques de  $L^2(\mathbb{R})$  et des analyses de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $n > 1$  qui s'obtiennent à partir de celles de  $L^2(\mathbb{R})$  et que nous utilisons dans nos travaux.

La **section 1.2** est consacrée à l'approximation d'une équation elliptique sur une base d'ondelettes ; on s'intéresse notamment à l'action d'un opérateur elliptique  $L$  à coefficients constants sur une famille d'ondelettes. Les fonctions résultantes ne constituent plus une famille d'ondelettes ; il s'agit d'une famille de vaguelettes qui partagent la plupart des propriétés des ondelettes

à l'exception de l'invariance par translation et dilatation ([51] et [57]). Enfin, la **section 1.3** présente deux exemples d'analyses multirésolutions : celles associées aux ondelettes splines ([26]) et celles associées aux ondelettes à support compact ([20] et [15]).

## 1.1 Rappels sur les Analyses Multirésolutions de $L^2(\mathbb{R})$

### 1.1.1 Définition

Une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$  est une suite  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  de sous-espaces fermés de  $L^2(\mathbb{R})$ , vérifiant les propriétés suivantes :

$$\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_j \subset V_{j+1}, \quad (1.1)$$

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}, \quad (1.2)$$

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}), \quad (1.3)$$

$$f(2^j x) \in V_j \Leftrightarrow f(2^{j+1} x) \in V_{j+1}, \quad (1.4)$$

$$f(x) \in V_j \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, f(x - k2^{-j}) \in V_j, \quad (1.5)$$

il existe  $\phi \in V_0$  **appelée fonction d'échelle telle que**

$$\{\phi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ est une base de Riesz de } V_0. \quad (1.6)$$

On rappelle qu'une base de Riesz de  $V_0$  est une famille de fonctions totale dans  $V_0$  telle que,

$$\exists A > 0, \exists B < \infty, \text{ tels que, } \forall \{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})^1,$$

$$A \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi(x - k) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq B \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2. \quad (1.7)$$

On peut imposer  $\int_{\mathbb{R}} \phi = 1$ .

---

<sup>1</sup> $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$  si et seulement si  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |f_k|^2 < +\infty$ .

On dit qu'une analyse multirésolution est  $m$ -régulière si et seulement si

$$\phi \in C^{m-1} \text{ et } \forall k \leq m, \forall r, \exists c, \text{ tel que, } \frac{\partial^k}{\partial x^k} \phi \leq \frac{c}{(1 + |x|^r)}. \quad (1.8)$$

La connection entre deux espaces associés à deux échelles consécutives nécessite l'introduction d'un deuxième type d'espaces : les espaces de détail.

On écrit,

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad (1.9)$$

où

$$\begin{aligned} V_j &= \text{vect}\{2^{j/2}\phi(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}\}, \\ &= \text{vect}\{\phi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

et

$$\begin{aligned} W_j &= \text{vect}\{2^{j/2}\psi(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}\}, \\ &= \text{vect}\{\psi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

$W_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  définit un espace de détail et  $\psi$  s'appelle une **ondelette**.

De plus,  $\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  vérifie les propriétés suivantes,

- $\overline{\cup_{j \in \mathbb{Z}} W_j} = L^2(\mathbb{R})$ ,
- $f(x) \in W_0 \Leftrightarrow f(2^j x) \in W_j$ .

On définit aussi, pour toute fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , deux opérateurs de projection sur les espaces  $V_j$  et  $W_j$  par,

$$P_{V_j}(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k}(f) \phi_{j,k}, \quad (1.12)$$

$$P_{W_j}(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k}(f) \psi_{j,k}, \quad (1.13)$$

où  $\{c_{j,k}(f)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  (resp.  $\{d_{j,k}(f)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ) s'appellent les coefficients d'échelle (resp. les coefficients d'ondelettes ou de détail) de  $f$  associés au niveau de résolution  $j$ .

Par construction de l'analyse multirésolution, toute fonction de  $f \in L^2(\mathbb{R})$  s'écrit comme la somme d'une approximation grossière et d'une suite de détails de plus en plus fins,

$$f = P_{V_{j_0}}(f) + \sum_{j=j_0}^{\infty} P_{W_j}(f). \quad (1.14)$$

Dans la suite de ce chapitre, nous présentons deux choix possibles pour les espaces  $V_j$  et  $W_j$ , ainsi que pour les opérateurs de projection  $P_{V_j}$  et  $P_{W_j}$ . Ils conduisent à la construction d'analyses multirésolutions orthonormales et biorthogonales.

### 1.1.2 Analyses multirésolutions orthonormales

Ici, les familles  $\{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  et  $\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  engendrant les espaces  $V_j$  et  $W_j$  sont orthonormalisées et les opérateurs de projection sont donc des opérateurs de projection orthogonale qui s'écrivent, pour tout  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,

$$P_{V_j}(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \phi_{j,k}, \quad (1.15)$$

$$P_{W_j}(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \psi_{j,k}, \quad (1.16)$$

et

$$\langle P_{V_j}f, P_{W_j}f \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = 0 \quad (1.17)$$

#### Construction des bases

– **Construction de  $\phi$  :**

Puisque  $V_0 \subset V_1$ , la fonction d'échelle  $\phi$  vérifie la **relation d'échelle** suivante,

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2x - k), \quad (1.18)$$

où  $h_k = \langle \phi, \phi_{1,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \phi(2x - k) dx$ .

En utilisant la transformée de Fourier sur  $L^2(\mathbb{R})$ ,

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \forall \omega \in \mathbb{R}, \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\omega x} dx, \quad (1.19)$$

la relation (1.18) peut être reformulée par,

$$\hat{\phi}(\omega) = m_0\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (1.20)$$

où  $m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega}$  est une fonction de carré intégrale  $2\pi$ -périodique et s'appelle le **symbole** de l'analyse multirésolution.

En itérant la relation (1.20), nous obtenons une expression de  $\phi$  en fonction du symbole, sachant que  $\hat{\phi}(0) = 1$ ,

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right). \quad (1.21)$$

– **Construction de  $\psi$  :**

De la même manière, comme  $\psi \in V_1$ , on peut définir un symbole  $m_1$  tel que,

$$\hat{\psi}(\omega) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (1.22)$$

qui s'écrit, en passant à la variable d'espace,  $x$ , sous la forme d'une **relation de détails**,

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi(2x - k), \quad (1.23)$$

où  $g_k = (1)^{k-1} h_{-k-1}$ .

Nous présentons maintenant deux séries de résultats qui motivent le choix des ondelettes pour notre travail.

La première série porte sur la qualité d'approximation dans les bases d'ondelettes. La seconde concerne la construction d'algorithmes rapides de calcul dans les analyses multirésolutions.

### Qualité d'approximation dans une base d'ondelettes

Nous commençons par introduire la notion d'ordre d'approximation d'une analyse multirésolution. L'ordre dépend de la capacité de l'analyse multirésolution à reproduire les polynômes jusqu'à un certain degré. Plus précisément, on dit que l'analyse multirésolution est d'**ordre**  $d$  si elle reproduit les polynômes jusqu'au degré  $d - 1$ .

Cette condition se traduit, d'après [36], en terme de zéro d'ordre  $d$  de  $\hat{\phi}(\omega)$  aux points  $\{\omega = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}^*\}$ . La proposition suivante reformule alors cette condition en utilisant l'expression (1.21),

**Proposition 1.1.1**

*Si  $m_0$  a un zéro d'ordre  $d$  au point  $\pi$ , i.e*

$$\partial^k m_0(\pi) = 0, \quad k = 0, \dots, d-1, \quad (1.24)$$

*alors l'analyse multirésolution est d'ordre  $d$ .*

L'ordre de l'analyse multirésolution entraîne un résultat essentiel sur le nombre de moments nuls de l'ondelette et la décroissance des coefficients d'ondelettes,

**Proposition 1.1.2**

*Si l'analyse multirésolution est d'ordre  $d$  alors,*

*– l'ondelette a  $d$  moments nuls, i.e*

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \psi(x) dx, \quad k = 0, \dots, d-1. \quad (1.25)$$

*– De plus,  $f \in C^p$ ,  $0 < p \leq d$  si il existe une constante  $K$  tel que,*

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f \psi_{j,k} \right| \leq K 2^{-j(p+1/2)} \quad (1.26)$$

La proposition précédente est particulièrement intéressante puisqu'elle nous dit que si la fonction  $f$  est très lisse, entrecoupées de forts gradients, sa décomposition dans la base d'ondelettes est creuse et les plus gros coefficients de détail sont localisés autour des zones à fort gradient. Un tel résultat justifie alors l'introduction de bases d'ondelettes adaptées comme dans [16] pour la résolution numérique d'équations et la construction d'algorithmes de compression de données utilisant les ondelettes pour des données ayant des singularités.

La proposition suivante établit le lien entre la qualité d'approximation d'une analyse multirésolution et son ordre.

**Proposition 1.1.3**

$\forall f \in H^s(\mathbb{R}), \quad 0 < s \leq d,$

$$\| f - P_{V_j} f \|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_{J,\phi} 2^{-js} \| f \|_{H^s(\mathbb{R})}. \quad (1.27)$$

*où  $C_{J,\phi}$  est une constante qui dépend uniquement de l'analyse multirésolution choisie.*

La proposition suivante donne un résultat sur la régularité des fonctions de  $V_j$  et de  $W_j$  ([19]),

**Proposition 1.1.4**

*Si l'analyse multirésolution est  $m$ -régulière alors pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,*

1) si  $f \in \text{vect}\{\psi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$ ,

$$\forall s \leq m, f \in H^s(\mathbb{R}) \Rightarrow \|f\|_{H^s(\mathbb{R})} \sim 2^{sj} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad (1.28)$$

2) si  $f \in \text{vect}\{\phi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$ ,

$$\forall s < 0, f \in H^s(\mathbb{R}) \Rightarrow \|f\|_{H^s(\mathbb{R})} \geq C_{B,\phi} 2^{sj} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad (1.29)$$

$$\forall s > 0, f \in H^s(\mathbb{R}) \Rightarrow \|f\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq C_{B,\phi} 2^{sj} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad (1.30)$$

où  $C_{B,\phi}$  est une constante qui dépend de l'analyse multirésolution choisie.

Remarquons que dans le cas  $s > 0$ , on retrouve l'inégalité classique de Bernstein([19]).

Le deuxième aspect de l'approche ondelettes qui justifie son utilisation dans la résolution de problèmes numériques et dans la compression de données est la possibilité de construire des algorithmes multiéchelles rapides de calculs des coefficients  $\{c_{j,k}(f)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  et  $\{d_{j,k}(f)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ .

**Algorithme de calcul des coefficients**

D'après la relation (1.9), on définit deux transformations appelées décomposition et reconstruction ([47]).

- La **décomposition** est basée sur le lien entre  $c_{j,k}(f)$  et le couple  $\{c_{j-1,l}(f), d_{j-1,l}(f)\}$ . En effet, d'après les relations d'échelle et de détails, on a,

$$c_{j-1,k}(f) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{j,l}(f) h_{l-2k}, \quad (1.31)$$

$$d_{j-1,k}(f) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{j,l}(f) g_{l-2k}. \quad (1.32)$$

En itérant, on construit un algorithme de décomposition,

$$\{c_{j,k}(f)\}_{k \in \mathbb{Z}} \rightarrow \left\{ \{c_{J_0,l}(f)\}_{l \in \mathbb{Z}}, \{d_{J_0,l}(f)\}_{l \in \mathbb{Z}}, \dots, \{d_{j-1,l}(f)\}_{l \in \mathbb{Z}} \right\}, \quad (1.33)$$

où  $J_0 < j$ .

- La **reconstruction** fournit  $c_{j,k}(f)$  à partir de  $\{c_{j-1,l}(f), d_{j-1,l}(f)\}$ . Elle s'écrit,

$$c_{j,k}(f) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{j-1,l}(f) \overline{h_{k-2l}} + \sum_{l \in \mathbb{Z}} d_{j-1,l}(f) \overline{g_{k-2l}}. \quad (1.34)$$

En itérant la relation (1.34), on obtient l'algorithme de reconstruction,

$$\left\{ \{c_{J_0,l}(f)\}_{l \in \mathbb{Z}}, \{d_{J_0,l}(f)\}_{l \in \mathbb{Z}}, \dots, \{d_{j-1,l}(f)\}_{l \in \mathbb{Z}} \right\} \rightarrow \{c_{j,k}(f)\}_{k \in \mathbb{Z}}. \quad (1.35)$$

La complexité de ces deux transformations dépend du nombre de coefficients d'échelle et de détails non nuls. Néanmoins, la structure en arbre de ces algorithmes garantit leur rapidité.

Dans le cadre de la résolution d'équations aux dérivées partielles, ces deux transformations permettent de passer efficacement de la projection de la fonction  $f$  dans  $V_j$  à sa représentation dans les espaces de détail qui est celle utilisée pour la résolution numérique.

Ces deux transformations sont aussi utilisées dans la première étape d'un algorithme de compression de données et dans l'étape de reconstruction à partir de l'information compressée.

**Remarque 1.1.1**

*La relation (1.34), avec  $\forall l \in \mathbb{Z}, d_{j-1,l}(f) = 0$ , définit une relation du type schéma de subdivision. Cependant, le masque du schéma,  $\{h_l\}_{l \in \mathbb{Z}}$ , n'a pas un nombre fini de termes. On parle quand même de schéma de subdivision puisque, grâce à l'hypothèse de  $m$ -régularité (1.8), les termes de la suite  $\{h_l\}_{l \in \mathbb{Z}}$  décroissent rapidement. Dans ce cas, le schéma de subdivision est stationnaire et uniforme puisque le masque,  $\{h_l\}_{l \in \mathbb{Z}}$  est indépendant de l'échelle  $j$  et de l'indice de position  $k$  du coefficient d'échelle à calculer.*

Il est classique de construire, à partir d'une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$ , des analyses multirésolutions de  $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  et de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  ( $n \geq 1$ ).

**Analyses multirésolutions orthonormales 1-périodiques de  $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$**

Une analyse multirésolution orthonormale 1-périodique de  $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  est construite à partir d'une analyse multirésolution orthonormale de  $L^2(\mathbb{R})$ , en

introduisant les familles d'espace complémentaires  $\{[V_j]\}_{j \in \mathbb{Z}}$  et  $\{[W_j]\}_{j \in \mathbb{Z}}$  engendrés respectivement par les fonctions  $[\phi_{j,k}]$  et  $[\psi_{j,k}]$ ,  $0 \leq k \leq 2^j - 1$  où,

$[\ ]$  est l'opérateur de périodisation défini par,

$$\begin{aligned} [\ ] : L^2(\mathbb{R}) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \\ f &\mapsto [f] = \sum_{l \in \mathbb{Z}} f(\cdot + l). \end{aligned} \quad (1.36)$$

Nous fournissons en annexe A.1 le calcul détaillé des filtres et symboles de cette analyse, ainsi que les formules de décomposition et de reconstruction des deux algorithmes multiéchelles correspondant.

### Analyses multirésolutions orthonormales de $L^2(\mathbb{R}^n)$

La définition des analyses multirésolutions de  $L^2(\mathbb{R})$  (section 1.1.1) se généralise simplement aux analyses de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , en réécrivant les propriétés (1.1) à (1.6) dans le cas n-dimensionnel.

On introduit alors la famille d'espaces  $\{\mathcal{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  d'une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  et telle que,

$$\mathcal{V}_j = \text{vect}\{\Phi_{j,k_1,k_2,\dots,k_n}, (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n\}$$

où pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,

$\{\Phi_{j,k_1,k_2,\dots,k_n}\}_{(k_1,k_2,\dots,k_n) \in \mathbb{Z}^n}$  est une base orthonormée de fonctions d'échelles de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Nous rappelons ici une construction par produit tensoriel pour  $n = 2$ . La fonction d'échelle  $\Phi_{j,k_1,k_2}$ ,  $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ , s'exprime à l'aide de La fonction d'échelle,  $\phi$ , d'une analyse multirésolution monodimensionnelle, de la façon suivante,

$$\Phi_{j,k_1,k_2}(x, y) = 2^j \phi(2^j x - k_1) \phi(2^j y - k_2), \quad (1.37)$$

Si  $\psi$  est l'ondelette de l'analyse monodimensionnelle associée à  $\phi$ , alors, l'espace de détail  $\mathcal{W}_j$  vérifie,

$$\mathcal{W}_j = \text{vect}\{\Psi_{j,k_1,k_2}^i, (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2, i = 1, 2, 3\} \quad (1.38)$$

avec,

$$\Psi_{j,k_1,k_2}^1(x,y) = 2^j \phi(2^j x - k_1) \psi(2^j y - k_2), \quad (1.39)$$

$$\Psi_{j,k_1,k_2}^2(x,y) = 2^j \psi(2^j x - k_1) \phi(2^j y - k_2), \quad (1.40)$$

$$\Psi_{j,k_1,k_2}^3(x,y) = 2^j \psi(2^j x - k_1) \psi(2^j y - k_2). \quad (1.41)$$

Le deuxième type d'analyses multirésolution que nous allons utiliser correspond aux analyses multirésolutions biorthogonales. La section suivante rappelle les définitions et propriétés de ces analyses. Elles reprennent celles qui ont déjà été présentées dans le cas des analyses orthogonales. Nous nous référons à [48] pour plus de détails.

### 1.1.3 Analyses multirésolutions biorthogonales

Contrairement à la section précédente, les espaces  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  et  $\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  ne sont pas ici orthogonaux et les opérateurs de projection sont des opérateurs de projection oblique. Pour cela, on introduit deux autres familles d'espaces  $\{\tilde{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  et  $\{\tilde{W}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ , d'une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$  et donc deux autres familles de bases  $\{\tilde{\phi}_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  et  $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ . On suppose que les relations suivantes, dites conditions de biorthogonalité, sont vérifiées,

$$\langle \phi_{j,k}, \tilde{\phi}_{j,k'} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \delta_{k,k'} \quad (1.42)$$

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j,k'} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \delta_{k,k'}. \quad (1.43)$$

L'espace d'approximation  $V_{j+1}$  (resp  $\tilde{V}_{j+1}$ ) est alors partagé en deux sous-espaces,  $V_j$  (resp  $\tilde{V}_j$ ) et  $W_j$  (resp  $\tilde{W}_j$ ) qui sont en somme directe et tels que :

$$W_j \perp \tilde{V}_j, \quad (1.44)$$

$$\tilde{W}_j \perp V_j. \quad (1.45)$$

On écrit alors,

$$P_{V_j}(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\phi}_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \phi_{j,k}, \quad (1.46)$$

$$P_{W_j}(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \psi_{j,k}, \quad (1.47)$$

On a aussi, comme dans le cas orthogonal,

$$\hat{\phi}(\omega) = m_0(\omega/2) \hat{\phi}(\omega/2), \quad (1.48)$$

$$\hat{\tilde{\phi}}(\omega) = \tilde{m}_0(\omega/2) \hat{\tilde{\phi}}(\omega/2), \quad (1.49)$$

$$\hat{\psi}(\omega) = m_1(\omega/2) \hat{\phi}(\omega/2), \quad (1.50)$$

$$\hat{\tilde{\psi}}(\omega) = \tilde{m}_1(\omega/2) \hat{\tilde{\phi}}(\omega/2), \quad (1.51)$$

ce qui fournit deux relations d'échelle du type (1.18) et deux relations de détails du type (1.23).

Deux transformations (une décomposition et une reconstruction) peuvent aussi être construits dans le même esprit que ceux de la section 1.1.2.

Un moyen pour obtenir des analyses multirésolutions biorthogonales est d'appliquer, en dimension 1, un opérateur de différentiation homogène. Ce résultat fait l'objet de la proposition suivante ([45], [57]).

**Proposition 1.1.5**

*Soient  $(\phi, \tilde{\phi})$ , une paire de fonctions d'échelle d'une analyse multirésolution biorthogonale et soient  $(m_0, \tilde{m}_0)$ , les deux symboles associés. Introduisant les deux symboles suivants,*

$$m_0^{[1]}(\omega) = 2 \frac{m_0(\omega)}{1 + e^{i\omega}}, \quad (1.52)$$

$$\tilde{m}_0^{[-1]}(\omega) = \frac{1}{2} \tilde{m}_0(\omega)(1 + e^{-i\omega}), \quad (1.53)$$

*on construit alors une nouvelle paire de fonctions d'échelles biorthogonales  $(\phi^{[1]}, \tilde{\phi}^{[-1]})$  qui vérifient,*

$$\widehat{\phi^{[1]}}(\omega) = \widehat{\phi}(\omega) \frac{i\omega}{e^{i\omega} - 1} \quad (1.54)$$

$$\widehat{\tilde{\phi}^{[-1]}}(\omega) = \widehat{\tilde{\phi}}(\omega) \frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega}. \quad (1.55)$$

*Ces relations s'écrivent aussi,*

$$\frac{d}{dx} \phi(x) = \phi^{[1]}(x+1) - \phi^{[1]}(x) \quad (1.56)$$

$$\frac{d}{dx} \tilde{\phi}^{[-1]}(x) = \tilde{\phi}(x) - \tilde{\phi}(x-1). \quad (1.57)$$

*De la même façon, à partir de la paire d'ondelettes biorthogonales  $(\psi, \tilde{\psi})$  et des symboles associés  $(m_1, \tilde{m}_1)$ , deux nouveaux symboles sont construits par différentiation et intégration suivant,*

$$m_1^{[1]}(\omega) = \frac{1}{2} m_1(\omega)(1 - e^{i\omega}), \quad (1.58)$$

$$\tilde{m}_1^{[-1]}(\omega) = 2 \frac{\tilde{m}_1(\omega)}{1 - e^{-i\omega}}, \quad (1.59)$$

et une nouvelle paire d'ondelettes biorthogonales  $(\psi^{[1]}, \tilde{\psi}^{[-1]})$  est construite à partir de ces symboles. Elles vérifient,

$$\psi^{[1]} = -\frac{1}{2} \frac{d\psi}{dx}, \quad (1.60)$$

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{2} \frac{d\tilde{\psi}^{[-1]}}{dx}. \quad (1.61)$$

Les relations (1.52), (1.53), (1.58) et (1.59) s'appellent les **formules de commutation de Lemarié**.

### Remarque 1.1.2

Ces formules sont également présentes dans le chapitre 2 quand on décrit des analyses multirésolutions biorthogonales splines. Les expressions (1.56) et (1.57) peuvent être reformulées dans une version discrète qui est aussi utilisée dans le chapitre 2,

Si on note,  $\{c_{j,k}(f)\}_k$ ,  $\{\tilde{c}_{j,k}(f)\}_k$ ,  $\{c_{j,k}^{[1]}(f)\}_k$ ,  $\{\tilde{c}_{j,k}^{[-1]}(f)\}_k$ , les coefficients d'échelle associés aux fonctions d'échelle  $\phi$ ,  $\tilde{\phi}$ ,  $\phi^{[1]}$ ,  $\tilde{\phi}^{[-1]}$ , les relations (1.56) et (1.57) s'écrivent,

$$c_{j,k} \left( \frac{df}{dx} \right) = 2^j (c_{j,k}^{[1]}(f) - c_{j,k-1}^{[1]}(f)) \quad (1.62)$$

$$\tilde{c}_{j,k}^{[-1]} \left( \frac{df}{dx} \right) = 2^j (\tilde{c}_{j,k+1}(f) - \tilde{c}_{j,k}(f)) \quad (1.63)$$

## 1.2 Opérateurs aux dérivées partielles et bases d'ondelettes

Soit  $L$ , un opérateur aux dérivées partielles d'ordre  $q$  à coefficients constants, tel que,

$$\begin{aligned} L : H^q(\mathbb{R}^n) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto \sum_{v=(v_1, \dots, v_n), |v| \leq q} a_v D^v f \end{aligned} \quad (1.64)$$

$$\text{avec } D^v = \frac{\partial^{v_1}}{(i\partial x_1)^{v_1}} \cdots \frac{\partial^{v_n}}{(i\partial x_n)^{v_n}},$$

**Définition 1.2.1**

$L$  l'opérateur  $L : H^q(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  est elliptique s'il existe une constante  $K_{ell}$  tel que,

$$\forall u \in H^q(\mathbb{R}^n), \quad \langle Lu, u \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \geq K_{ell} \|u\|_{H^q(\mathbb{R}^n)}^2 \quad (1.65)$$

Soit l'équation aux dérivées partielles,

Trouver  $u \in H^q(\mathbb{R}^n)$ , tel que,

$$Lu = f, \quad (1.66)$$

La reformulation de ce type de problème à l'aide des ondelettes consiste à chercher  $u$  sous la forme d'une combinaison linéaire d'ondelettes, c'est à dire sous la forme,

$$u = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{i \in \{1, \dots, 2^n - 1\}, \alpha \in K_j^\infty} u_\alpha \Psi_\alpha^i \quad (1.67)$$

où  $K_j^\infty = \{\alpha = (j, k_1, k_2, \dots, k_n) / (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n\}$ .

Revenant à l'expression (1.66), on est donc amené à étudier l'action d'un opérateur aux dérivées partielles sur une ondelette. Nous donnons tout d'abord des résultats généraux, puis nous étudions le cas particulier de l'opérateur  $I - a_1 \Delta$  ( $a_1 > 0$ ) où  $\Delta$  désigne l'opérateur laplacien, qui est celui utilisé dans la partie II.

### 1.2.1 Action d'un opérateur sur une base d'ondelettes : cas général

L'image d'une ondelette sous l'action d'un opérateur  $L$  n'est généralement plus une ondelette. Cependant, à un facteur multiplicatif près, elle s'exprime à l'aide de vaguelettes ([51]) qui sont des fonctions proches des ondelettes. Nous commençons par rappeler la définition d'une vaguelette.

**Définition 1.2.2**

On appelle vaguelette d'ordre  $d$  et de régularité  $m$ , toute famille de fonctions  $\Theta_{j,k}$  de  $\mathbb{R}^n$  vérifiant,

1)  $\forall \zeta \in \mathbb{R}^n, |\zeta| \leq m$  et  $\forall N \geq 1, \exists C_N$  tel que,

$$\left| \frac{\partial^\zeta \Theta_{j,k}}{\partial x^\zeta} \right| \leq C_N \frac{2^{j(\frac{n}{2} + |\zeta|)}}{(1 + |2^j x - k|)^N} \quad (1.68)$$

2)

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^k \Theta_{j,k}(x) dx = 0, \quad 0 \leq k \leq d, \quad (1.69)$$

La proposition suivante montre que l'on peut construire des vaguelettes à l'aide de l'opérateur  $L$  ([57]).

### **Théorème 1.2.1**

Soit  $\phi$  et  $\psi$  la fonction d'échelle et l'ondelette mère d'une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$ ,  $m$ -régulière, et d'ordre  $d$ .

Soit  $\Psi^i$ ,  $i = 1, \dots, 2^n - 1$ , les  $2^n - 1$  ondelettes orthogonales d'une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  construites à partir de  $\phi$  et  $\psi$  par la méthode du produit tensoriel.

Si  $L$  est un opérateur elliptique d'ordre  $q > 0$ , tel que,

$$\begin{aligned} m &\geq q + 1, \\ d &\geq q + 1, \end{aligned}$$

Si on définit les fonctions  $\Theta_\alpha^i$  et  $\tilde{\Theta}_\alpha^i$  par

$$\begin{cases} \tilde{\Theta}_\alpha^i(x) = 2^{\frac{in}{2}} 2^{-jq} L[\Psi^i(2^j x - k)], \\ \Theta_\alpha^i(x) = 2^{\frac{in}{2}} 2^{jq} L^{-1}[\Psi^i(2^j x - k)], \end{cases}$$

alors,

1)  $\tilde{\Theta}_\alpha^i \in H^{m-q}(\mathbb{R}^n)$  et  $\Theta_\alpha^i \in H^{m+q}(\mathbb{R}^n)$ ,

2) La fonction  $\Theta_\alpha^i$  (resp.  $\tilde{\Theta}_\alpha^i$ ) est une vaguelette d'ordre  $d$  et de régularité  $m + q - 1$  (resp.  $m - q$ ).

De plus,  $\langle \Theta_\alpha^i, \tilde{\Theta}_{\alpha'}^{i'} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \delta_{\alpha, \alpha'} \delta_{i, i'}$ .

### **Remarque 1.2.1**

Une des conséquences du théorème 1.2.1 est que les vaguelettes

$\{\Theta_\alpha^i\}_{i \in \{1,2,3\}, \alpha \in K_j^\infty}$  sont bien localisées dans le domaine de Fourier. Plus précisément, suivant [16], on a,

$\forall \epsilon, \exists p > j$ , tel que  $\forall \alpha \in K_j^\infty, \forall i \in \{1, 2, 3\}$ ,

$$\left( \sum_{\alpha_1 \in K_{j_1}^\infty, j_1 \geq p, i_1 \in \{1, 2, 3\}} | \langle \Theta_\alpha^i, \Psi_{\alpha_1}^{i_1} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} |^2 \right)^{1/2} \leq \epsilon, \quad (1.70)$$

ce qui traduit qu'à la précision  $\epsilon$ ,

$$\{\Theta_\alpha^i\}_{i \in \{1, 2, 3\}, \alpha \in K_j^\infty} \in \mathcal{V}_{j+p}, \quad (1.71)$$

où  $p > 0$  dépend de l'opérateur  $L$  et de l'ondelette  $\Psi$ .

Ce résultat est très important pour l'implémentation de l'algorithme de résolution de la partie II puisqu'on en déduit une transformation rapide entre une décomposition en vaguelettes et une décomposition en ondelettes.

### 1.2.2 Un exemple d'opérateur $L$

On considère ici l'opérateur d'ordre 2 qui s'écrit,

$$\begin{aligned} L : H^2(\mathbb{R}^2) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto 1 - a_1 \left( \frac{\partial f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (1.72)$$

avec  $a_1 > 0$ .

#### Un résultat d'approximation

Puisque les fonctions  $\tilde{\Theta}_\alpha^i$  et  $\Theta_\alpha^i$  sont proches des ondelettes, nous établissons une inégalité d'approximation du type Jackson (expression (1.27)) qui quantifie l'erreur d'approximation quand on approche une fonction  $f \in H^s(\mathbb{R}^2)$ ,  $s > 2$  par sa projection dans les espaces engendrés par la famille  $\{\Theta_\alpha^i\}_{i \in \{1, 2, 3\}, \alpha \in K_l^\infty}$ ,  $0 \leq l \leq j - 1$ . Cette estimation est utilisée pour les calculs de bornes d'erreur entre solution exacte et approchée dans la partie II.

#### **Proposition 1.2.1**

Sous les hypothèses du théorème 1.2.1, pour toute fonction  $f \in H^s(\mathbb{R}^2)$ ,  $m \geq s > 2$ , on a l'estimation suivante,

$$\| f - \sum_{l=0}^{j-1} \sum_{i \in \{1, 2, 3\}, \alpha \in K_l^\infty} \langle f, \tilde{\Theta}_\alpha^i \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} \Theta_\alpha^i \|_{H^2(\mathbb{R}^2)} \leq C_{J,\Theta} 2^{-j(s-2)} \| f \|_{H^s(\mathbb{R}^2)}, \quad (1.73)$$

où  $C_{J,\Theta}$  est une constante qui dépend de l'analyse multirésolution choisie et des constantes de l'opérateur  $L$ .

**Preuve:**

On peut écrire pour tout  $f \in H^s(\mathbb{R}^2)$  avec  $2 < s \leq m$ ,

$$\begin{aligned}
 \| f - \sum_{l=0}^{j-1} \sum_{i \in \{1,2,3\}, \alpha \in K_l^\infty} \langle f, \tilde{\Theta}_\alpha^i \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} \Theta_\alpha^i \|_{H^2(\mathbb{R}^2)} \\
 &= \| L^{-1} \left( Lf - \sum_{l=0}^{j-1} \sum_{i \in \{1,2,3\}, \alpha \in K_l^\infty} \langle Lf, \Psi_\alpha^i \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} \Psi_\alpha^i \right) \|_{H^2(\mathbb{R}^2)} \\
 &\leq \frac{1}{\min(1, a_1)} \| Lf - \sum_{l=0}^{j-1} \sum_{i \in \{1,2,3\}, \alpha \in K_l^\infty} \langle Lf, \Psi_\alpha^i \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} \Psi_\alpha^i \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.
 \end{aligned} \tag{1.74}$$

Puisque  $Lf \in H^{s-2}(\mathbb{R})$  et  $\| Lf \|_{H^{s-2}(\mathbb{R})} \leq \max(1, a_1) \| f \|_{H^s(\mathbb{R}^2)}$ , l'inégalité (1.27) permet d'écrire,

$$\| f - \sum_{l=0}^{j-1} \sum_{i \in \{1,2,3\}, \alpha \in K_l^\infty} \langle f, \tilde{\Theta}_\alpha^i \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} \Theta_\alpha^i \|_{H^2(\mathbb{R}^2)} \leq C_{J,\Theta} 2^{-j(s-2)} \| f \|_{H^s(\mathbb{R}^2)}, \tag{1.75}$$

où  $C_{J,\Theta} = \frac{\max(1, a_1)}{\min(1, a_1)} C_{J,\Phi}$ , ce qui conclut la preuve. ■

Dans le cadre de la résolution numérique du système aux dérivées partielles (1.66) formulé dans une base d'ondelettes, on est amené à remplacer l'espace  $H^2(\mathbb{R}^2)$  par un espace de dimension fini et donc à chercher la solution approchée sous la forme d'une combinaison finie d'ondelettes de la forme

$$u_j = \sum_{l=0}^{j-1} \sum_{i \in \{1,2,3\}, \alpha \in K_l} u_\alpha \Psi_\alpha^i, \tag{1.76}$$

où  $K_l = \{ \alpha = (l, k_1, k_2) / (k_1, k_2) \in \{0, \dots, 2^l - 1\}^2 \}$ .

L'action de l'opérateur  $L$  sur la famille finie d'ondelettes définit une matrice

de taille  $2^{2j} \times 2^{2j}$ , notée  $\mathcal{L}$ . La fin de cette section est consacrée à l'étude de cette matrice. Nous montrons notamment que  $\mathcal{L}$  est mal conditionnée ce qui peut limiter l'efficacité des algorithmes de résolution et justifie l'approche introduite dans la partie II.

**Conditionnement et préconditionnement de la matrice associée à l'opérateur  $L$**

Après avoir brièvement rappelé la définition du conditionnement, nous étudions le conditionnement de la matrice associée à l'opérateur  $L$ . Enfin, nous proposons une façon de préconditionner cette matrice à l'aide des ondelettes.

La norme que nous utilisons pour définir le conditionnement est la norme 2. Alors,  $cond_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$  avec,

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} \tag{1.77}$$

où  $\rho$  est le rayon spectral, i.e,  $\rho(A) = \max\{|\lambda_i(A)|, 0 \leq i \leq 2^{2j} - 1\}$  avec  $\{\lambda_i(A)\}_{0 \leq i \leq 2^{2j} - 1}$ , le spectre de  $A$ .

Le conditionnement s'écrit alors classiquement,  $cond_2(A) = \sqrt{\frac{\lambda_{max}(A^T A)}{\lambda_{min}(A^T A)}}$ .

Quarteroni et Valli rappellent dans [58] un théorème pratique pour majorer le conditionnement d'une matrice.

**Théorème 1.2.2**

*Soient  $A$  et  $M$  deux matrices symétriques définies positives telles que,*

$$\exists 0 < K_1, K_2 < +\infty \text{ tel que } \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^N$$

$$K_1 \langle M\mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{l^2} \leq \langle A\mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{l^2} \leq K_2 \langle M\mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{l^2}, \tag{1.78}$$

$$\text{où } \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^N, \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{l^2} = \sum_{i=0}^{N-1} |\mathbf{w}_i|^2,$$

*alors*

$$cond_2(M^{-1}A) \leq \frac{K_2}{K_1}. \tag{1.79}$$

Le théorème suivant donne une estimation classique du conditionnement de  $\mathcal{L}$  ([41]).

**Théorème 1.2.3**

$\exists 0 < K_1, K_2 < +\infty$  tel que  $\forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^N$

$$K_1 < \mathbf{w}, \mathbf{w} >_{l^2} \leq \langle \mathcal{L}\mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{l^2} \leq 2^{2j} K_2 < \mathbf{w}, \mathbf{w} >_{l^2}, \quad (1.80)$$

En utilisant le théorème 1.2.2, on déduit que  $\text{cond}_2(\mathcal{L}) \leq \frac{K_2}{K_1} 2^{2j}$ .

**Preuve:**

L'action de l'opérateur,  $L$ , sur l'ondelette  $\Psi_\alpha^i$  se factorise sous la forme,

$$L\Psi_\alpha^i = \tilde{T}\mathcal{A}_j^2\Psi_\alpha^i \quad (1.81)$$

où  $\mathcal{A}_j$  est défini par  $\mathcal{A}_j\Psi_\alpha^i = 2^j\Psi_\alpha^i$  et  $\tilde{T}$  est un opérateur de changement de base tel que  $\tilde{T}\Psi_\alpha^i = \tilde{\Theta}_\alpha^i$ .

$\tilde{T}$  étant un opérateur continu (puisque c'est un opérateur de changement de base de Riesz) et l'opérateur  $\mathcal{A}_j$  ayant une représentation diagonale dans la base d'ondelettes  $\{\Psi_\alpha^i\}_{\alpha \in K_l}$ ,  $0 \leq l \leq j-1$ , on déduit l'inégalité (1.80). ■

Le conditionnement évolue donc en  $2^{2j}$  et on dit que la matrice  $\mathcal{L}$  est mal conditionnée puisque son conditionnement va augmenter avec la taille de la matrice.

On cherche alors à la préconditionner, c'est à dire à construire une matrice  $P$  tel que le conditionnement de la matrice  $P^{-1}\mathcal{L}$  est borné uniformément par rapport à  $j$ .

Dans le cadre des ondelettes ([41], [42]), un simple préconditionneur diagonal du type  $D_{2^j} = 2^{2j}I_{2^j}$  où  $I_{2^j}$  est la matrice identité de taille  $2^{2j} \times 2^{2j}$  suffit pour préconditionner  $\mathcal{L}$ .

## 1.3 Deux exemples d'analyses multirésolutions

### 1.3.1 Analyses multirésolutions orthogonales splines

Ici, l'espace  $V_0$  est l'ensemble des fonctions splines d'ordre  $N$  associé aux noeuds entiers  $\{k, k \in \mathbb{N}\}$ .

Nous rappelons deux caractérisations des fonctions B-spline d'ordre  $N$  dont les translatés et dilatés forment une base de Riesz de  $V_0$ . La première utilise la transformée de Fourier.

**Définition 1.3.1**

La transformée de Fourier de la fonction B-spline d'ordre  $N \geq 1$  s'écrit,

$$\hat{B}^N(\omega) = e^{-iN\omega/2} \left( \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right)^N. \quad (1.82)$$

La seconde caractérisation définit la fonction B-spline d'ordre  $N$  par récurrence ([17]). Elle fait l'objet de la proposition suivante,

**Proposition 1.3.1**

Pour tout  $N \geq 1$ , la fonction B-spline d'ordre  $N$  est définie point par point par,

$$\begin{cases} B^1(x) = \chi_{[0,1]}, \\ B^N(x) = \frac{x}{N-1} B^{N-1}(x) + \frac{N-x}{N-1} B^{N-1}(x-1). \end{cases} \quad (1.83)$$

Chacune des deux caractérisations présente des avantages. La première donne l'expression exacte de la transformée de Fourier, ce qui est très utile si on cherche le filtre associée à l'analyse multirésolution orthogonale spline. Quant à la seconde caractérisation, elle fournit la valeur de la fonction en n'importe quel point arbitraire  $x \in \mathbb{R}$  et peut être utilisée dans l'évaluation d'intégrales faisant intervenir les B-splines, par des formules de quadrature.

La proposition suivante montre que les B-splines définissent une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$ . Les preuves de ces propriétés sont détaillées dans [17].

**Proposition 1.3.2**

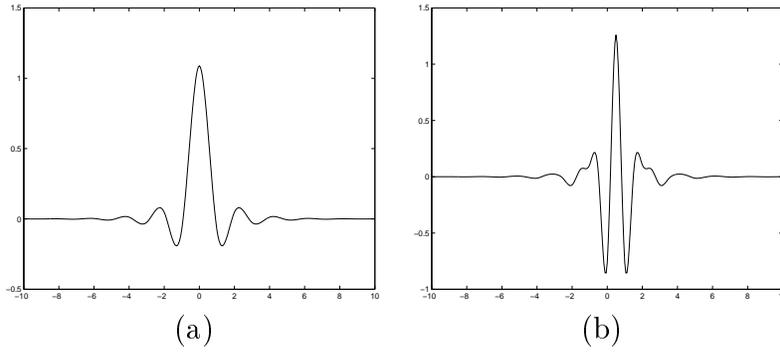
La famille des translatés  $\{B^N(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  vérifie,  
 $\forall k \in \mathbb{Z}, \int_{\mathbb{R}} B^N(x-k) dx = 1$  et  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} B^N(x-k) = 1, x \in \mathbb{R}$ .

Introduisant, pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , l'espace  $V_j^N = \text{vect}\{2^{j/2} B^N(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $\{B^N(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  forme une base de Riesz de  $V_0^N$ .

De plus,

- $\forall j \in \mathbb{Z}, V_j^N \subset V_{j+1}^N$ ,
- $\overline{\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j^N} = L^2(\mathbb{R})$ ,
- $\cap_{j \in \mathbb{Z}} V_j^N = \{0\}$ .

P.G Lemarié et G. Battle introduisent dans [44] une analyse multirésolution spline orthonormale pour des B-splines d'ordre pair. Cette technique d'orthonormalisation ainsi que les propriétés de l'analyse construite font l'objet de la fin de cette section.

FIG. 1.1 – Exemples de fonctions  $\phi$  et  $\psi$  pour  $N = 4$ 

### Analyse multirésolution spline orthonormale

Le point de départ de cette construction est l'orthonormalisation des B-splines par un procédé d'orthonormalisation de Gramm ([26]). En utilisant l'expression de la transformée de Fourier (1.82), les fonctions génératrices de cette analyse sont données par :

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{B^N(\omega)}{[P_{N-1}(\sin^2(\omega/2))]^{1/2}}. \quad (1.84)$$

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{e^{-i\omega/2}}{(\omega/4)^N} \left( \frac{P_{N-1}(\cos^2(\omega/4))}{P_{N-1}(\sin^2(\omega/2))P_{N-1}(\sin^2(\omega/4))} \right)^{1/2} \sin^{2N}\left(\frac{\omega}{4}\right), \quad (1.85)$$

où  $P_N$  est un polynôme de degré  $N$  vérifiant

$$\frac{P_{N-1}(\sin^2 z)}{(\sin z)^{2N}} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z + l/2)^{2N}}. \quad (1.86)$$

Le calcul des coefficients de  $P_N$  est fait dans [55].

La figure 1.1 donne un exemple de fonction d'échelle et d'ondelette mère quand  $N = 4$ .

Remarquons que la relation (1.84) implique une relation linéaire entre les fonctions B-splines et leur orthonormalisée. En effet, le symbole qui relie  $\hat{\phi}(\omega)$  et  $\hat{B}^N(\omega)$  est  $2\pi$ -périodique. On peut donc écrire,

$$\frac{1}{[P_{N-1}(\sin^2(\omega/2))]^{1/2}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^\phi e^{-ik\omega}, \quad (1.87)$$

soit en repassant dans le domaine physique,

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^\phi B^N(x - k). \quad (1.88)$$

L'intérêt de cette relation est qu'elle permet d'obtenir la valeur de  $\phi$  en n'importe quel point arbitraire  $x \in \mathbb{R}$  en calculant d'abord la valeur de  $B^N(x - k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  par la proposition 1.3.1. Ce résultat est utilisé dans la partie II quand on a besoin des valeurs aux points de  $\phi$  pour évaluer des intégrales par une formule de quadrature.

La proposition suivante présente quelques propriétés importantes des ondelettes splines orthonormales.

### Proposition 1.3.3

*Les fonctions génératrices d'une analyse spline orthonormale vérifient les propriétés suivantes :*

- $\phi$  et  $\psi$  ne sont pas à support compact mais elles sont à décroissance exponentielle.
- $\phi$  et  $\psi$  sont  $C^{N-2}(\mathbb{R})$ .
- $\phi$  vérifie  $\int_{\mathbb{R}} \phi(x) = 1$  et  $\int_{\mathbb{R}} x^k \phi(x) = 0$ ,  $k = 1, \dots, 2N - 1$ .
- $\psi$  possède  $N$  moments nuls i.e  $\int_{\mathbb{R}} x^k \psi(x) = 0$ ,  $k = 0, \dots, N - 1$ .

### 1.3.2 Analyses multirésolutions de $L^2([0, 1])$

La construction des analyses multirésolutions de  $L^2([0, 1])$  a été faite par A. Cohen, I. Daubechies et P. Vial dans [21]. Elle utilise les analyses multirésolutions à support compact définies sur  $\mathbb{R}$  introduites dans [25].

Une description rapide de la construction de ces analyses est fournie en annexe A.2.

L'intérêt de cette construction est qu'elle définit une analyse multirésolution qui garde le même ordre que l'analyse à support compact à partir de laquelle elle est construite. De plus, cette analyse de  $L^2([0, 1])$  présente deux avantages essentiels qui justifient son utilisation dans l'implémentation de notre algorithme de résolution de la partie II :

- 1) Sa construction fournit un moyen très simple et rapide pour approcher la valeur des coefficients d'échelle  $c_{j,k}^{[0,1]}(f)$  d'une fonction  $f \in L^2([0, 1]) \cap C^0([0, 1])$  dans cette analyse à partir de l'estimation des moments de la fonction d'échelle  $\phi^{[0,1]}$ . Les détails de cette estimation sont donnés en annexe A.2.

2) Les analyses de  $L^2([0, 1])$  peuvent être transportées sur une courbe  $\gamma$ .

Soit  $\mathcal{H}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , une transformation  $C^1$  par morceaux, telle que

$$\gamma = \mathcal{H}([0, 1]), \quad (1.89)$$

alors la fonction,

$$\forall s \in \gamma, \phi^\gamma(s) = \phi^{[0,1]}(\mathcal{H}^{-1}(s)), \quad (1.90)$$

est la fonction d'échelle d'une analyse multirésolution de  $L^2(\gamma)$ .

On peut ainsi définir une analyse multirésolution sur la frontière  $\gamma$  d'un ouvert  $\omega$  de  $\mathbb{R}^2$ .

On dispose alors d'une façon simple d'évaluer les coefficients d'échelle d'une fonction  $f \in L^2(\gamma)$ , notés  $c_{j,k}^\gamma(f)$ , dans cette analyse multirésolution. Cette évaluation se fait en deux étapes,

- une première étape qui consiste à transformer l'intégrale sur  $\gamma$  en intégrale sur  $[0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(s) \phi_{j,k}^\gamma(s) ds &= \int_{[0,1]} f(\tau) \phi_{j,k}^{[0,1]}(\tau) |J\mathcal{H}|(\tau) d\tau \\ &= c_{j,k}^{[0,1]}(f|J\mathcal{H}|), \end{aligned} \quad (1.91)$$

où  $|J\mathcal{H}|$  désigne le Jacobien de la transformation  $\mathcal{H}$ .

- une seconde étape qui consiste à évaluer  $c_{j,k}^{[0,1]}(f|J\mathcal{H}|)$ .

### Remarque 1.3.1

Les translatés et dilatés de la fonction d'échelle  $\phi^\gamma$  construite par la formule (1.90) ne constituent plus une famille orthonormale de  $L^2(\gamma)$  au sens du produit scalaire usuel mais au sens du produit scalaire pondéré, noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2_{\mathcal{H}}(\gamma)}$  et tel que,

$$\forall (f, g) \in L^2(\gamma), \langle f, g \rangle_{L^2_{\mathcal{H}}(\gamma)} = \int_\gamma f(s) \bar{g}(s) |J\mathcal{H}^{-1}|(s) ds. \quad (1.92)$$

En effet, par une formule de changement de variable, il vient, puisque la famille  $\{\phi_{j,k}^{[0,1]}\}_{k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}}$  est orthonormale,

$$\forall (k, k') \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^2,$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \phi_{j,k}^{\gamma}(s) \phi_{j,k'}^{\gamma}(s) |J_{\mathcal{H}^{-1}}|(s) ds &= \int_{[0,1]} \phi_{j,k}^{[0,1]}(\tau) \phi_{j,k'}^{[0,1]}(\tau) d\tau \\ &= \delta_{k,k'} \end{aligned} \quad (1.93)$$

## 1.4 Conclusion

Le formalisme en ondelettes permet de construire des analyses multiéchelles efficaces pour l'approximation de fonctions ou d'opérateurs puisqu'il fournit,

- Des approximations d'ordre élevé.
- Des représentations creuses quand les quantités considérées sont régulières.
- Deux algorithmes en arbre rapides qui permettent le passage entre l'approximation d'une fonction dans l'espace d'une analyse multirésolution  $V_j$  à son approximation multiéchelle dans les espaces de détail,  $W_l$ ,  $l \leq j - 1$ .
- Une "bonne" approximation des opérateurs aux dérivées partielles puisque l'action d'un opérateur elliptique sur une base d'ondelettes définit une fonction proche d'une ondelette.
- Un préconditionneur simple (diagonal) pour les opérateurs différentiels.
- Une généralisation simple au cas multi-dimensionnels par la technique du produit tensoriel.

Cependant, certaines limitations sont à considérer,

- L'implémentation des méthodes ondelettes requiert des domaines à géométrie simple.
- Les algorithmes de décomposition et de reconstruction ne sont pas adaptés à la nature de la fonction qu'on approche puisque leur construction dépend uniquement de l'ondelette choisie et définit donc un schéma de subdivision stationnaire et uniforme.

Le chapitre suivant aborde les analyses multirésolutions d'un autre point de vue du à A. Harten ([37]). Au lieu de construire d'abord les espaces fonctionnels d'une analyse multirésolution puis d'en déduire les algorithmes de passage à partir des ondelettes et des relations d'échelle, le point de départ est constitué des deux opérateurs de passage (décimation et prédiction) entre deux niveaux de résolution successifs. Nous clarifions cependant le lien avec les ondelettes et les analyses multirésolutions présentées dans ce chapitre.



# Chapitre 2

## Le formalisme de Harten

L'approche que nous décrivons ici a été introduite par A. Harten ([37]) dans les années 80 et, à l'inverse du formalisme en ondelettes, a comme point de départ deux algorithmes multiéchelles : ils sont basés sur l'introduction d'un opérateur de prédiction et d'un opérateur de décimation.

Nous commençons dans la **section 2.1** par définir le formalisme “à la Harten” ([4] et [5]). Il consiste d'abord à préciser le cadre discret dans lequel on travaille : une famille d'espaces d'approximation séparables,  $\{V^j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  est introduite et un opérateur de discrétisation qui définit comment une fonction d'un espace fonctionnel  $F$  est représentée dans  $V^j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  est construit. Un opérateur de reconstruction de  $V^j$  dans  $F$  est alors introduit. L'opérateur de discrétisation et de reconstruction permettent ensuite de construire deux opérateurs inter-échelles, un de prédiction et un de décimation.

Après un bref rappel sur la connection qu'on peut déjà établir entre le formalisme de Harten et les analyses multirésolutions du chapitre 1, deux exemples de construction d'opérateurs de prédiction sont proposés. A ces deux prédictions sont associées deux schémas de subdivision qui peuvent être non uniformes et non stationnaires et conduisent notamment à la construction d'algorithmes de décomposition et de reconstruction adaptés aux caractéristiques des données. Cette section se termine par l'extension du formalisme de Harten au cas bi-dimensionnel ([1]) puisque nous sommes amenés à appliquer cette approche à la compression d'images dans la partie III.

Notre but, dans les **sections 2.2 et 2.3** est de clarifier le lien entre l'approche de Harten et l'approche ondelettes classiques du chapitre précédent dans le cas dit invariant par translation. Ce lien est établi à partir de l'étude de la convergence du schéma de prédiction et conduit à l'introduction de fonctions d'échelle et d'ondelettes d'une analyse multirésolution ([31] et [20]).

## 2.1 Formalisme à la Harten

Le formalisme à la Harten est d'abord introduit dans le cas monodimensionnel puis nous présentons deux extensions de cette technique au cas bi-dimensionnel.

### 2.1.1 Le cas monodimensionnel

Les définitions et les notations de cette section sont celles de [4] et [5].

#### Définition des opérateurs

Le formalisme de Harten est une approche initialement purement discrète. Elle est d'abord basée sur l'introduction d'une suite d'espaces séparables  $\{V^j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  associés au niveau de résolution  $2^{-j}$ . La représentation de données dans ces espaces nécessite la construction d'une suite d'opérateurs surjectifs dits de **discrétisation**. Plus précisément, les opérateurs de discrétisation définissent une famille d'opérateurs linéaires surjectifs emboîtés (i.e  $\forall j, \forall f \in F, D_j f = 0 \Rightarrow D_{j-1} f = 0$ ) qui à tout élément  $f$  d'une espace fonctionnel  $F$  lui associe une séquence  $\{f_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}} \in V^j$ .

Nous considérons dans la suite de ce chapitre deux types d'opérateurs de discrétisation qui sont ceux utilisés le plus souvent dans la représentation des données pour la compression de signaux ou d'images,

- $F = C^0(\mathbb{R})$  et  $(D_j f)_k = f(x_k^j)$  où  $x_k^j = k2^{-j}$ .  $D_j$  est alors un opérateur d'échantillonnage associé à la grille dyadique  $X^j = \{x_k^j, k \in \mathbb{Z}\}$  ou **opérateur de discrétisation par valeur aux points**.
- $F = L^2(\mathbb{R})$  et  $(D_j f)_k = \langle f, 2^j \omega(2^j x - k) \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$ , où  $\omega$  est une fonction à support compact de moyenne non nulle. La fonction B-spline d'ordre  $N$  (expression (1.82)),  $B^N$ , est un exemple classique pour  $\omega$ . Dans ce cas,  $D_j$  est un **opérateur de discrétisation B<sup>N</sup>-spline**.

La connection entre l'espace  $V^{j-1}$  et l'espace  $V^j$  se fait par l'intermédiaire d'un opérateur de prédiction  $P_{j-1}^j$  et d'un opérateur de décimation  $D_j^{j-1}$  (figure 2.1).

La façon la plus simple pour construire les valeurs après décimation  $\{(D_j^{j-1} f^j)_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in V^{j-1}$  à partir de la famille  $\{f_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}} \in V^j$  est d'abord de reconstruire une fonction à partir des données de  $V^j$  puis de la discrétiser par l'opérateur  $D_{j-1}$  pour récupérer des données dans  $V^{j-1}$ . Ceci suppose l'introduction d'une famille d'opérateur de **reconstruction**  $\{R_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  telle que, pour chaque  $j$ ,

$$D_j R_j = I_{V^j}, \tag{2.1}$$

où  $I_V$  représente l'opérateur identité dans  $V$ .

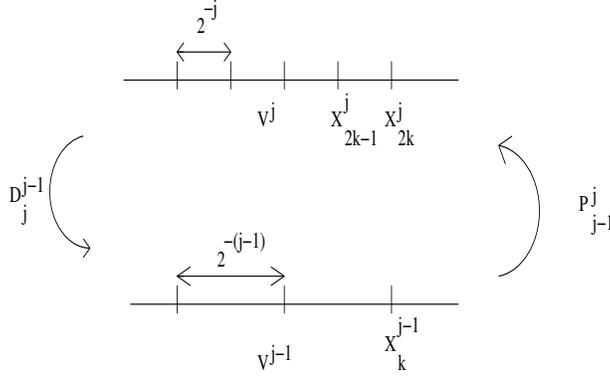


FIG. 2.1 – *Multirésolution à la Harten*

L'opérateur de décimation s'exprime de la façon suivante,

$$D_j^{j-1} = D_{j-1} R_j. \tag{2.2}$$

Remarquons que la propriété d'emboîtement des opérateurs de discrétisation entraîne que la construction de  $D_j^{j-1}$  ne dépend pas de l'opérateur de reconstruction,  $R_j$ , choisi.

L'opérateur de prédiction est construit comme un inverse à droite de  $D_j^{j-1}$  dans  $V^{j-1}$ , i.e,  $D_j^{j-1} P_{j-1}^j = I_{V^{j-1}}$ . Il s'exprime aussi à l'aide des opérateurs de discrétisation et de reconstruction de la façon suivante,

$$P_{j-1}^j = D_j R_{j-1}. \tag{2.3}$$

Découpler la discrétisation de la reconstruction permet alors, pour une discrétisation donnée, une plus grande flexibilité dans la construction de l'opérateur de prédiction puisqu'elle va dépendre du choix de l'opérateur de reconstruction. Ce point important du formalisme de Harten est exploité dans la partie III quand on est amené à introduire des transformations multiéchelles adaptées aux caractéristiques des données.

Pour toute suite,  $\{f_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}} \in V^j$ , on peut alors définir une suite de coefficients de détail  $\{d_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}}$  tels que,

$$\forall k \in \mathbb{Z}, d_k^{j-1} = f_k^j - (P_{j-1}^j f^{j-1})_k. \quad (2.4)$$

En itérant la relation (2.4), deux algorithmes multiéchelles sont alors construits : le premier réalise la décomposition de la suite  $\{f_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}}$  sous la forme suivante,

$$(f^j \rightarrow \{f^{J_0}, d^{J_0}, \dots, d^{j-1}\}), \quad (2.5)$$

alors que le second la reconstruit,

$$(\{f^{J_0}, d^{J_0}, \dots, d^{j-1}\} \rightarrow f^j). \quad (2.6)$$

Quand ces deux transformations sont utilisées pour la compression de signaux/images, on est amené à seuiliser les détails, pour réduire l'information à stocker, c'est à dire à considérer comme nuls les détails inférieurs à un seuil  $\epsilon$ . Plus précisément, étant donné  $\epsilon > 0$ , on définit un opérateur de seuillage  $Tr_\epsilon$  tel que, pour toute séquence de détails,  $\{d_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ,

$$d_{\epsilon,k}^j = Tr_\epsilon(d_k^j) = \begin{cases} 0 & |d_k^j| \leq \epsilon, \\ d_k^j & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.7)$$

Notre but étant par la suite de faire le lien entre le formalisme de Harten et le formalisme en ondelettes classiques, il est intéressant de noter que l'on peut associer à cette description purement discrète une structure fonctionnelle du type analyse multirésolution qui est décrite en détail dans [4]. Cette analogie est utilisée dans la suite pour construire des analyses interpolantes, ainsi que des analyses biorthogonales splines de  $L^2(\mathbb{R})$  non invariantes par translation dans la partie III.

### Lien avec les analyses multirésolutions du chapitre 1

Le lien avec les analyses multirésolutions est établi quand la famille d'opérateurs  $\{R_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  est **hiérarchique**.

#### **Définition 2.1.1**

*La famille  $\{R_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  est dite hiérarchique par rapport à la famille  $\{D_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  si et seulement si,*

$$(R_j D_j) R_{j-1} = R_{j-1} \quad (2.8)$$

L'expression (2.4) qui traduit une relation de passage entre deux niveaux de résolution successifs est alors le point clé pour faire le lien avec les analyses multirésolutions classiques. En effet, en utilisant l'expression de l'opérateur de prédiction (2.3), on obtient, pour tout  $f \in F$  et tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,

$$D_j f = D_j R_{j-1} D_{j-1} f + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^{j-1} u_k^j \quad (2.9)$$

où  $\{u_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base du noyau de l'opérateur de décimation  $\text{Ker}(D_j^{j-1})$ .

En multipliant l'expression (2.9) par  $R_j$ , il vient, puisque la famille  $\{R_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  est hiérarchique (définition 2.1.1),

$$\begin{aligned} R_j D_j f &= R_j D_j R_{j-1} D_{j-1} f + R_j \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^{j-1} u_k^j \\ &= R_{j-1} D_{j-1} f + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^{j-1} \psi_k^{j-1} \end{aligned} \quad (2.10)$$

où

$$\psi_k^{j-1} = R_j u_k^j. \quad (2.11)$$

La quantité  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^{j-1} \psi_k^{j-1}$  représente donc la différence d'information entre les deux approximations de  $f$  à deux niveaux de résolution successifs que sont  $R_{j-1} D_{j-1} f$  et  $R_j D_j f$ .

Introduisant, pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , la famille dénombrable,  $\{w_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , de vecteurs de base de  $V^j$ , on construit les deux espaces fonctionnels suivants,

$$V_j = R_j D_j F = \text{vect}(\{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}), \quad (2.12)$$

$$W_j = \text{vect}(\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}), \quad (2.13)$$

avec

$$\phi_{j,k} = R_j w_k^j. \quad (2.14)$$

L'opérateur  $R_j D_j$  est alors un opérateur de projection sur  $V_j$  puisque

$$(R_j D_j)^2 = R_j (D_j R_j) D_j = R_j D_j, \quad (2.15)$$

et, par construction, pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $V_{j-1} \subset V_j$ ,  $W_{j-1} \subset V_j$  et  $W_{j-1} \cap V_{j-1} = \{0\}$  (voir [4] pour plus de détails).

L'expression (2.10) s'écrit alors,

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1} \quad (2.16)$$

D'après l'expression (2.4), c'est l'opérateur de prédiction qui contrôle l'efficacité de la décomposition et la qualité de la reconstruction des algorithmes multiéchelles de Harten, c'est la raison pour laquelle, une attention spéciale est faite à la construction de cet opérateur. Dans ce qui suit, nous présentons la construction de l'opérateur de prédiction d'abord pour une discrétisation par valeurs aux points, puis pour une discrétisation B-spline.

### Construction de l'opérateur de prédiction par valeur aux points

Toutes les quantités introduites dans ce cas sont notées avec l'exposant  $I$  (pour Interpolant). Nous rappelons que,

$$\forall f \in C^0(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{Z}, \left( D_j^I f \right)_k = f_k^{I,j} = f(k2^{-j}).$$

La construction de l'opérateur de prédiction est faite suivant l'expression (2.3) en introduisant un opérateur de reconstruction  $R_j^I$ . Puisqu'il doit vérifier la relation (2.1), le choix le plus simple pour  $R_j^I$  est de la définir comme un opérateur d'interpolation.

Si on choisit une interpolation de Lagrange locale, on introduit,

$$\{x_{-l_j, 2k-1}^{j-1}, \dots, x_{r_j, 2k-1}^{j-1}\}, \quad r_{j, 2k-1} \geq k+1, \quad l_{j, 2k-1} \geq -k+1, \quad (2.17)$$

le stencil d'interpolation de  $r_{j, 2k-1} + l_{j, 2k-1} = D_{j, 2k-1} + 1$  points associé à la prédiction  $f_{2k-1}^{I,j} = \left( P_{j-1}^{I,j} f^{I, j-1} \right)_{2k-1}$  et un algorithme de prédiction interpolant est défini comme suit,

#### Algorithme 2.1.1

$$\left\| \begin{array}{l} \text{for } k \in \mathbb{Z}, \\ f_{2k}^{I, j+1} = \left( P_j^{I, j+1} f^{I, j} \right)_{2k} = f_k^{I, j}, \\ f_{2k-1}^{I, j+1} = \left( P_j^{I, j+1} f^{I, j} \right)_{2k-1} = \sum_{m=-l_{j+1, 2k-1}}^{r_{j+1, 2k-1}-1} L_m^{l_{j+1, 2k-1}, r_{j+1, 2k-1}}(-1/2) f_{k+m}^{I, j}, \\ \text{end,} \end{array} \right. \quad (2.18)$$

où

$$L_m^{l_{j,2k-1}, r_{j,2k-1}}(x) = \prod_{n=-l_{j,2k-1}, n \neq m}^{r_{j,2k-1}-1} \frac{x-n}{m-n}, \quad (2.19)$$

est le polynôme de degré  $D_{j,2k-1}$  réalisant l'interpolation.

Le masque du schéma de subdivision défini par cet algorithme de prédiction s'écrit alors, en fonction de la parité de l'indice  $k$ ,

$$\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2,$$

$$\{a_m^{j,2k}\}_{m \in \mathbb{Z}} \begin{cases} a_0^{j,2k} = 1, \\ a_m^{j,2k} = 0, \text{ si } m \neq 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

et,

$$\{a_m^{j,2k-1}\}_{m \in \mathbb{Z}} \begin{cases} a_{-2m-1}^{j,2k-1} = L_m^{l_{j,2k-1}, r_{j,2k-1}}(-1/2) \text{ pour } m = -l_{j,2k-1}, \dots, r_{j,2k-1} - 1, \\ a_m^{j,2k-1} = 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad (2.21)$$

et donc,

$$M_{j,2k} = M_{j,2k}^* = 0, \quad (2.22)$$

$$M_{j,2k-1} = 2l_{j,2k-1} - 1 \text{ et } M_{j,2k-1}^* = 2r_{j,2k-1} - 1. \quad (2.23)$$

Trois stratégies sont envisagées pour définir  $(D_{j,2k-1}, l_{j,2k-1}, r_{j,2k-1})$ .

- La première est  $D_{j,2k-1} = D$ ,  $l_{j,2k-1} = l$ ,  $r_{j,2k-1} = r$  (et donc  $L_m^{l_{j,2k-1}, r_{j,2k-1}} = L_m^{l,r}$ ) qui définit un stencil **invariant par translation**. Le schéma de subdivision associé est alors stationnaire et uniforme (donc linéaire) et correspond au schéma de subdivision interpolant de Deslauriers et Dubuc ([30]) quand  $l = r$ .
- La seconde stratégie est  $D_{j,2k-1} = D$  mais  $(l_{j,2k-1}, r_{j,2k-1})$  fonctions de  $f^{l,j-1}$ . Le stencil est alors dit **dépendant des données** et conduit à un schéma de subdivision non linéaire ([22]).
- La troisième stratégie est  $D_{j,2k-1} = D$  mais  $(l_{j,2k-1}, r_{j,2k-1})$  fonctions de la position d'une famille de points a priori définis sur l'axe réel. Le stencil est alors **dépendant de la position** et le schéma de subdivision est linéaire, non uniforme et non stationnaire.

### Remarque 2.1.1

*L'intérêt de l'approche de Harten est visiblement ici de fournir une grande*

*flexibilité dans la construction du schéma de subdivision puisque, contrairement au formalisme en ondelettes classique, les schémas associés au formalisme de Harten peuvent être non stationnaires et non uniformes, voire non linéaires.*

### Construction de l'opérateur de prédiction $B^N$ -spline

Nous décrivons ici la prédiction associée à une discrétisation  $B^N$ -spline qui s'écrit,

$$\forall N \geq 1, \forall k \in \mathbb{Z}, \left( D_j^N f \right)_k = f_k^{N,j} = 2^j \langle f(x), B^N(2^j x - k) \rangle_{L^2(\mathbb{R})} .$$

Par convention  $D_j^0 = D_j^I$ .

L'opérateur de prédiction pour une discrétisation  $B^N$ -spline, est construit à partir de l'opérateur de prédiction interpolant  $P_j^{I,j+1}$  en utilisant l'une des formules de commutation de Lemarié (proposition 1.1.5).

En effet, l'expression de la transformée de Fourier (1.82) des B-splines donne,  $\forall N \geq 1$ ,

$$\hat{B}^N(\omega) = \frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega} \hat{B}^{N-1}(\omega) \quad (2.24)$$

qui est une relation du type (1.55) et conduit, d'après la relation (1.63) à,

$$\forall k \in \mathbb{Z}, f_k^{N,j} = 2^j \left( F_{1,k+1}^{N-1,j} - F_{1,k}^{N-1,j} \right), \quad (2.25)$$

avec  $F_1(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$  et  $F_{1,k}^{N-1,j} = 2^j \langle F_1(x), B^{N-1}(2^j x - k) \rangle$  où  $\langle , \rangle$  représente indifféremment le produit scalaire  $L^2$  ou le crochet de dualité.

Cette relation est utilisée pour construire l'algorithme de prédiction associé au cas  $B^N$ -spline de la façon suivante,

Considérons tout d'abord le cas  $N = 1$ .

Les trois étapes de construction de la prédiction  $B^1$ -spline font l'objet de la proposition suivante.

**Proposition 2.1.1**

Partant de la séquence initiale  $\{f_k^{1,j}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , la famille  $\{f_k'^{1,j+1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  des valeurs prédites au niveau  $j + 1$ , s'obtient en trois étapes :

1) à partir de  $\{f_k^{1,j}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  et en utilisant la formule (2.25) pour  $N = 1$ ,  $\{F_{1,k}^{0,j}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est obtenue par la procédure suivante :

$$\begin{cases} F_{1,0}^{0,j} = c, \\ F_{1,k+1}^{0,j} = F_{1,k}^{0,j} + 2^{-j} f_k^{1,j} \text{ sinon.} \end{cases} \quad (2.26)$$

où  $c$  est une constante arbitraire <sup>1</sup>.

2) En appliquant l'algorithme (2.18) à  $\{F_{1,k}^{0,j}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , on obtient  $\{F_{1,k}'^{0,j+1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ .

3) Enfin,  $\{f_k'^{1,j+1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  s'obtient à partir de la relation,

$$\forall k \in \mathbb{Z}, f_k'^{1,j+1} = 2^j (F_{1,k+1}'^{0,j+1} - F_{1,k}'^{0,j+1}), \quad (2.27)$$

Nous généralisons au cas  $N > 1$  en itérant l'expression (2.25),

$$\forall k \in \mathbb{Z}, f_k^{N,j} = \{DF^N (F_{N,m}^{0,j})\}_k \quad (2.28)$$

où  $DF^N$  est l'opérateur de différences finies d'ordre  $N$  et  $\{F_{N,m}^{0,j}\}_{m \in \mathbb{Z}}$  est la séquence associée à la discrétisation par valeurs aux points d'une primitive d'ordre  $N$  de  $f$  à l'échelle  $j$ .

L'expression (2.28) et la généralisation de la proposition 2.1.1 au cas  $N > 1$  permettent alors de construire un opérateur de prédiction  $B^N$ -spline à partir de n'importe quelle prédiction interpolante. On définit,

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{Z}, f_k'^{N,j+1} &= (P_j^{N,j+1} f'^{N,j})_k = (DF^N \{F_{N,m}'^{0,j+1}\})_k \\ &= (DF^N \{F_{N,m}'^{I,j+1}\})_k, \end{aligned} \quad (2.29)$$

avec  $F_{N+1,m}'^{I,j+1} = (P_j^{I,j+1} F_{N+1,m}'^{I,j})_m$ .

---

<sup>1</sup>l'algorithme de prédiction interpolant étant un schéma linéaire, la constante  $c$  que nous devons choisir disparaît dans la troisième étape, c'est pourquoi, dans ce qui suit, on prend  $c=0$

Ainsi, n'importe quelle procédure interpolante du type de celle définie par l'algorithme (2.18) conduit à la construction d'un algorithme de prédiction pour une discrétisation  $B^N$ -spline. On peut alors lui associer un schéma de subdivision construit à partir du schéma de subdivision défini par l'algorithme de prédiction interpolant. On peut donc aussi parler de stationnarité et d'uniformité du schéma de subdivision en fonction de la stratégie adoptée pour la construction de l'algorithme de prédiction interpolant.

### 2.1.2 Généralisation au as bi-dimensionnel

Les données sont ici une matrice de valeurs  $\{f_{m,n}^j\}_{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$  et peuvent être interprétées comme la discrétisation par valeurs aux points ou B-spline d'une fonction de deux variables,  $f(x, y)$ , sur la grille dyadique  $X^j \times Y^j$ .

Une généralisation naturelle de l'approche monodimensionnelle consiste à construire un opérateur de prédiction bi-dimensionnel à partir d'un opérateur de prédiction monodimensionnel appliqué alternativement aux lignes puis aux colonnes de la matrice de données. Dans le cas d'une discrétisation par valeur aux points, l'algorithme de prédiction s'écrit,

#### Algorithme 2.1.2

$$\begin{aligned}
 & \text{for } (m, n) \in \mathbb{Z}^2, \\
 & \quad f_{2m,2n}^{I,j+1} = f_{m,n}^{I,j}, \\
 & \quad f_{2m+1,2n}^{I,j+1} = \sum_{i=-l_{j+1,2m+1,2n}^{j+1}}^{r_{j+1,2m+1,2n}^{j+1}-1} L_i^{l_{j+1,2m+1,2n}^{j+1}, r_{j+1,2m+1,2n}^{j+1}} (-1/2) f_{m+i+1,n}^{I,j}, \\
 & \quad f_{2m,2n+1}^{I,j+1} = \sum_{i=-l_{j+1,2m,2n+1}^{j+1}}^{r_{j+1,2m,2n+1}^{j+1}-1} L_i^{l_{j+1,2m,2n+1}^{j+1}, r_{j+1,2m,2n+1}^{j+1}} (-1/2) f_{m,n+i+1}^{I,j}, \\
 & \quad f_{2m+1,2n+1}^{I,j+1} = \sum_{i=-l_{j+1,2m+1,2n+1}^{j+1}}^{r_{j+1,2m+1,2n+1}^{j+1}-1} L_i^{l_{j+1,2m+1,2n+1}^{j+1}, r_{j+1,2m+1,2n+1}^{j+1}} (-1/2) f_{2m+2i+2,2n+1}^{I,j+1}, \\
 & \text{end,}
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

où le nombre de points à gauche et à droite dans le stencil d'interpolation peuvent être fonctions ou non des données ou de la position d'une famille de points a priori définis dans  $\mathbb{R}^2$ . Dans la suite (en particulier dans la partie III), nous appelons cette généralisation, l'approche **bi-directionnelle**.

Remarquons que quand,  $\forall (j, m, n) \in \mathbb{Z}^3$ ,

$$l_{j,2m+1,n} = l_{j,m,2n+1} = l_{j,2m+1,2n+1} = l,$$

et

$$r_{j,2m+1,n} = r_{j,m,2n+1} = r_{j,2m+1,2n+1} = r,$$

L'algorithme 2.1.2 est le produit tensoriel classique décrit dans [1].

Une fois que l'opérateur de prédiction est construit, comme dans le cas monodimensionnel, on construit deux transformations de passage (une décomposition et une reconstruction) qui font intervenir trois familles de détails.

Nous revenons à présent sur les deux algorithmes de prédiction monodimensionnels (section 2.1.1). Parmi les trois stratégies envisagées, nous choisissons de nous concentrer sur des stratégies linéaires (stratégies 1 et 3). L'analyse de la stratégie 2, dépendant des données, a été faite récemment par A.Cohen, N.Dyn et B.Matei dans [22].

Dans la suite de ce chapitre, nous clarifions le lien entre l'approche de Harten et le formalisme en ondelettes classiques dans le cas invariant par translation, le cas dépendant de la position étant décrit dans la partie III. Nous commençons par étudier l'algorithme de prédiction interpolant invariant par translation puis nous poursuivons par le cas B-spline.

## 2.2 Algorithme de prédiction interpolant invariant par translation, lien avec les analyses multirésolutions interpolantes

La stratégie est ici  $\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $D_{j,2k-1} = D$ ,  $l_{j,2k-1} = l$  et  $r_{j,2k-1} = r$ . Nous établissons d'abord la convergence du schéma de subdivision associé à l'algorithme de prédiction interpolant invariant par translation. La fonction limite de ce schéma permet alors de définir des espaces d'une analyse multirésolution interpolante invariante par translation grâce à l'analogie, proposée dans la section 2.1.1, entre l'approche de Harten et les analyses multirésolutions classiques.

### 2.2.1 Convergence de l'algorithme de prédiction interpolant

Nous rappelons que le masque du schéma de subdivision associé à l'algorithme de prédiction s'écrit, dans le cas invariant par translation,

$$\{a_m\}_{m \in \mathbb{Z}} \begin{cases} a_0 = 1, \\ a_{-2m-1} = L_m^{l,r}(-1/2) \text{ pour } m = -l, \dots, r-1 \\ a_m = 0, \text{ sinon} \end{cases} \quad (2.31)$$

et donc  $\forall (j, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ,  $M_{j,k} = M = 2l - 1$  et  $M_{j,k}^* = M^* = 2r - 1$ .

Nous commençons par rappeler quelques outils pour établir la convergence d'un schéma de subdivision. Puis, nous utilisons ces outils pour l'étude de la convergence de l'algorithme de prédiction interpolant associé à un stencil à quatre points.

La définition suivante introduit la notion de convergence  $L^\infty$  des schémas de subdivision.

### Définition 2.2.1

Un schéma de subdivision  $S$  est dit  $L^\infty$ -convergent si pour n'importe quelle séquence  $\{f_k^0\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , il existe une fonction continue  $f$  telle que :

$\forall \epsilon, \exists J$  t.q  $\forall j \geq J$  :

$$\| S^j f_k^0 - f \left( \frac{\cdot}{2^j} \right) \|_\infty \leq \epsilon, \quad (2.32)$$

où  $S^j$  représente le schéma de subdivision  $S$  appliqué  $j$  fois.

Dans la suite, nous nous limitons à l'étude de schémas de subdivision linéaires, stationnaires et uniformes. Dans ce cas, la convergence du schéma s'obtient, comme dans [32], à partir de la convergence de la suite  $\{S^j f_k^0\}_{k \in \mathbb{Z}}$  où le schéma de subdivision est appliqué à la séquence initiale  $\{f_k^0\}_{k \in \mathbb{Z}}$  avec  $f_k^0 = \delta_{0,k}$ . En effet, si ce schéma converge vers une fonction  $\phi$  alors pour n'importe quelle séquence initiale  $\{f_k^0\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , la fonction limite  $f$  existe et  $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k^0 \phi(x - k)$ .

Nous énonçons plusieurs résultats, provenant de [32], relatifs à la convergence des schémas de subdivision uniformes et stationnaires. Ils montrent notamment que l'étude de la convergence se fait à partir de l'étude du masque du schéma de subdivision.

### Définition 2.2.2

Pour tout schéma de subdivision,  $S$ , stationnaire et uniforme, on a,

$$\| S \|_{L^\infty} = \sup \left( \sum_{m \in \mathbb{Z}} |a_{2m}|, \sum_{m \in \mathbb{Z}} |a_{2m+1}| \right) \quad (2.33)$$

La définition suivante introduit la notion de polynôme de Laurent.

**Définition 2.2.3**

On appelle polynôme de Laurent, associé à un schéma de subdivision stationnaire et uniforme  $S$ , le polynôme de la forme :

$$a(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m z^m, \quad (2.34)$$

avec  $\{a_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ , le masque du schéma de subdivision.

L'étude de la convergence nécessite aussi la définition d'un schéma de subdivision associée aux différences.

**Proposition 2.2.1**

Soit  $S$  un schéma de subdivision stationnaire et uniforme reproduisant les constantes, c'est à dire tel que,

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{2m+1} = 1, \quad (2.35)$$

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{2m} = 1, \quad (2.36)$$

alors, il existe un schéma  $S_1$  tel que :

$$DF^1 f^j = S_1 DF^1 f^{j-1}, \quad (2.37)$$

avec  $f^j = S^j f^0$  et  $DF^1$ , l'opérateur de différences finies d'ordre 1 qui s'écrit  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,  $(DF^1 f^j)_k = 2^j (f_{k+1}^j - f_k^j)$ .

De plus, le polynôme de Laurent associé à  $S_1$  est :

$$a_1(z) = \frac{2z}{z+1} a(z), \quad (2.38)$$

où  $a(z)$  est le polynôme de Laurent associé à  $S$ .

Le théorème de convergence s'énonce alors,

**Théorème 2.2.1**

Soit  $S$  un schéma de subdivision stationnaire et uniforme, alors :

$S$  est uniformément convergent (i.e. convergent pour un schéma d'interpolation) si et seulement si  $\frac{1}{2}S_1$  converge uniformément vers 0, c'est à dire si  $\exists L \geq 1$  telle que,

$$\left\| \left( \frac{1}{2} S_1 \right)^L \right\|_{L^\infty} < 1. \quad (2.39)$$

Le théorème suivant concerne la régularité de la fonction limite d'un schéma de subdivision. Il est emprunté à [32] et s'écrit,

**Théorème 2.2.2**

*Soit un schéma de subdivision avec un polynôme caractéristique de Laurent de la forme :*

$$a(z) = \left( \frac{1+z}{2z} \right)^p q(z), \quad (2.40)$$

*où  $q$  est un polynôme de Laurent.*

*Alors, si le schéma de subdivision  $S_p$  associé au polynôme  $q$  converge uniformément, le schéma de subdivision  $S$  converge aussi uniformément vers une fonction  $\phi$  telle que,*

$$\phi \in C^p. \quad (2.41)$$

**Remarque 2.2.1**

*Il est intéressant de remarquer que le résultat (2.41) est basé sur l'une des formules de commutation de Lemarié ([45]).*

*Nous fournissons ici le raisonnement pour retrouver la propriété (2.41) dans le cas  $p = 1$  à partir des formules de commutation de Lemarié :*

*Si le schéma de subdivision  $S_1$  converge vers une fonction  $\phi^{[1]}$  et si l'on note  $\{a_k^{[1]}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  son masque, alors, par construction,  $\phi^{[1]}$  vérifie la relation d'échelle suivante,*

$$\phi^{[1]}(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m^{[1]} \phi^{[1]}(2x - m). \quad (2.42)$$

*On associe donc à  $\phi^{[1]}$ , le symbole,*

$$\begin{aligned} m_0^{[1]}(\omega) &= \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m^{[1]} e^{-im\omega}, \\ &= \frac{1}{2} q(e^{-i\omega}). \end{aligned} \quad (2.43)$$

*De la même façon, si le schéma de subdivision  $S$  converge alors, on associe à sa fonction limite  $\phi$ , un symbole  $m_0$  qui s'écrit,*

$$\begin{aligned}
m_0(\omega) &= \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m e^{-im\omega}, \\
&= \frac{1}{2} a(e^{-i\omega}).
\end{aligned} \tag{2.44}$$

La relation (2.40) donne alors,

$$\begin{aligned}
m_0^{[1]}(\omega) &= \frac{2e^{-i\omega}}{1 + e^{-i\omega}} m_0(\omega), \\
&= \frac{2}{1 + e^{i\omega}} m_0(\omega).
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Cette relation est bien du type de la formule de commutation de Lemarié (1.52). Elle conduit donc à une relation entre  $\phi$  et  $\phi^{[1]}$  qui s'écrit d'après l'expression (1.56),

$$\frac{d}{dx} \phi(x) = \phi^{[1]}(x+1) - \phi^{[1]}(x). \tag{2.46}$$

Sachant que  $\phi^{[1]} \in C^0(\mathbb{R})$  puisque  $S_1$  converge, on en déduit que,

$$\phi \in C^1(\mathbb{R}). \tag{2.47}$$

Le même raisonnement s'applique pour  $p > 1$ . Il aboutit à une relation du type (2.46) entre  $\phi^{[k-1]}$  et  $\phi^{[k]}$  pour  $2 \leq k \leq p$ . On en déduit alors, par récurrence que  $\phi \in C^p(\mathbb{R})$ .

Nous appliquons maintenant ces résultats à l'étude de la convergence de l'algorithme de prédiction interpolant invariant par translation. La fonction limite du schéma de subdivision homogène et uniforme associé est notée ici  $\tilde{\phi}_0^I$  puisqu'elle fait référence au cas interpolant. A titre d'exemple, nous considérons l'algorithme de prédiction interpolant utilisant un stencil à 4 points dans le cas centré (i.e  $l = 2$ ,  $r = 2$ ) et décentré à gauche (i.e  $l = 3$ ,  $r = 1$ ).

– Stencil centré :

L'opérateur de prédiction s'écrit,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{cases} \left( P_j^{I,j+1} f^{I,j} \right)_{2k} = f_k^{I,j}, \\ \left( P_j^{I,j+1} f^{I,j} \right)_{2k-1} = \sum_{m=-2}^1 L_m^{2,2}(-1/2) f_{k+m}^{I,j}. \end{cases} \tag{2.48}$$

Le polynôme de Laurent associé à ce schéma se factorise sous la forme :

$$a(z) = -\frac{1}{16} \frac{(z+1)^4}{z^3} (z^2 - 4z + 1). \quad (2.49)$$

Le polynôme de Laurent associé à  $\frac{1}{2}S_1$  est d'après la proposition 2.2.1,

$$\frac{1}{2}a_1(z) = -\frac{1}{16}z^3 + \frac{1}{16}z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}z^{-1} - \frac{1}{16}z^{-2}, \quad (2.50)$$

et un simple calcul conduit à

$$\left\| \frac{1}{2}S_1 \right\|_{\infty} < 1. \quad (2.51)$$

Comme précédemment, à partir du polynôme de Laurent associé à  $S_1$ , on déduit celui associé à  $\frac{1}{2}S_2$ ,

$$\frac{1}{2}a_2(z) = -\frac{1}{8} \frac{(z+1)^2}{z} (z^2 - 4z + 1). \quad (2.52)$$

La norme  $L^{\infty}$  de ce schéma est égale à 1 et nous ne pouvons rien conclure pour l'instant. Il faut alors étudier le schéma  $\left(\frac{1}{2}S_2\right)^2$  puis  $\left(\frac{1}{2}S_2\right)^3$ ,

son polynôme de Laurent est égal à  $\frac{1}{8}a_2(z)a_2(z^2)a_2(z^3)$  et on trouve,

$$\left\| \left(\frac{1}{2}S_2\right)^3 \right\|_{\infty} < 1. \quad (2.53)$$

Comme  $\left\| \left(\frac{1}{2}S_3\right)^2 \right\|_{L^{\infty}} > 1$ , on en déduit que le schéma de prédiction centré est convergent et sa fonction limite  $\tilde{\phi}_0^I \in C^1(\mathbb{R})$  (figure 2.2 (a)).

– Stencil décentré à gauche :

Dans ce cas, le schéma de prédiction s'écrit,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{cases} (P_j^{j+1} f^j)_{2k} = f_k^j, \\ (P_j^{j+1} f^j)_{2k-1} = \sum_{-3}^0 L_m^{3,1}(-1/2) f_{k+m}^j. \end{cases} \quad (2.54)$$

Son polynôme de Laurent est,

$$a(z) = \frac{3}{48}z^5 - \frac{5}{16}z^3 + \frac{15}{16}z + \frac{15}{48}z^{-1} + 1. \quad (2.55)$$

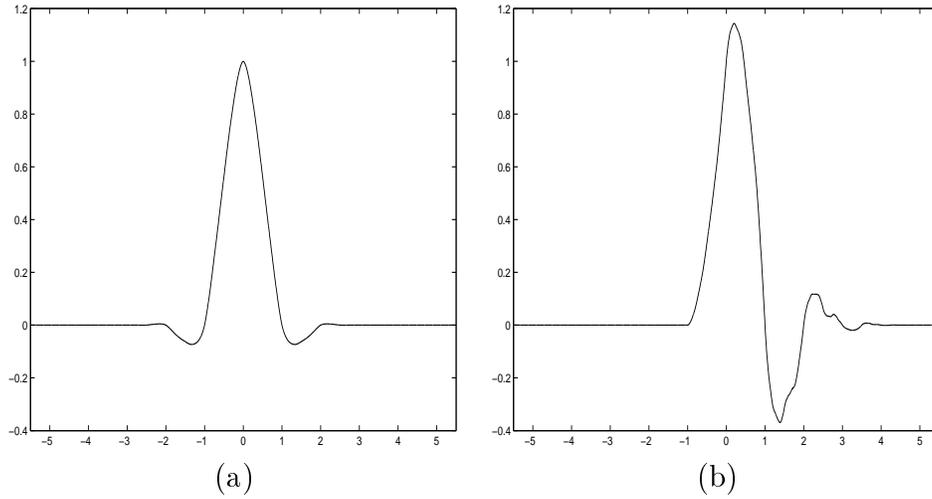


FIG. 2.2 – Exemples de fonctions limites associées à l’algorithme de prédiction interpolant invariant par translation, (a)  $D = 3$ ,  $l = 2$ ,  $r = 2$ , (b)  $D = 3$ ,  $l = 3$ ,  $r = 1$

On en déduit le polynôme de Laurent associé à  $\frac{1}{2}S_1$ ,

$$\frac{1}{2}a_1(z) = \frac{1}{16}z^5 - \frac{1}{16}z^4 - \frac{1}{4}z^3 + \frac{1}{4}z^2 + \frac{11}{16}z + \frac{5}{16}, \quad (2.56)$$

et un rapide calcul conduit à  $\|\frac{1}{2}S_1\|_{L^\infty} = 1$  mais

$$\left\| \left( \frac{1}{2}S_1 \right)^2 \right\|_{L^\infty} < 1 \quad (2.57)$$

Faisant le même type de calcul pour  $\frac{1}{2}S_2$ , il vient,

$$\left\| \left( \frac{1}{2}S_2 \right)^2 \right\|_{L^\infty} > 1, \quad (2.58)$$

donc le schéma décentré converge et sa fonction limite  $\tilde{\phi}_0^I \in C^0(\mathbb{R})$ .  
On a tracé cette fonction limite sur la figure 2.2 (b).

### Remarque 2.2.2

A notre connaissance, aucun résultat général sur la convergence de l’algorithme de prédiction interpolant et sur la régularité de la fonction limite n’est disponible pour l’instant. Le seul cas pour lequel l’étude de convergence et de régularité a été faite correspond à l’algorithme de prédiction interpolant associé à un stencil centré (i.e  $l = r$ ) puisque l’on retrouve dans ce cas là le schéma symétrique d’interpolation de Deslauriers et Dubuc ([30]).

Nous terminons cette section par quelques propriétés de la fonction limite quand elle existe. Elles permettent de clarifier le lien entre la fonction limite et la fonction d'échelle d'une analyse multirésolution.

### Propriétés de la fonction limite

– Relation d'échelle et symbole :

Supposant que la fonction limite  $\tilde{\phi}_0^I$  existe, on déduit directement de l'algorithme (2.18) invariant par translation que  $\tilde{\phi}_0^I$  vérifie la relation d'échelle suivante,

$$\tilde{\phi}_0^I(x) = \tilde{\phi}_0^I(2x) + \sum_{m=-l}^{r-1} L_m^{l,r}(-1/2)\tilde{\phi}_0^I(2x + 2m + 1) = \sum_{m=-M^*}^M a_m \tilde{\phi}_0^I(2x - m), \quad (2.59)$$

où  $\{a_m, -M^* \leq m \leq M\}$  est le masque du schéma de subdivision défini par le système (2.31).

Par transformation de Fourier, la relation d'échelle (2.59) s'écrit, si on suppose  $\tilde{\phi}_0^I \in L^2(\mathbb{R})$  (ce qui est généralement le cas car  $\tilde{\phi}_0^I \in C^0(\mathbb{R})$  et est à support compact),

$$\widehat{\tilde{\phi}}_0^I(\omega) = P(e^{-i\omega/2}) \widehat{\tilde{\phi}}_0^I(\omega/2), \quad (2.60)$$

avec  $P$ , le polynôme de Laurent tel que  $P(z) = \frac{1}{2} \sum_{m=-M^*}^M a_m z^m$  et en itérant, on trouve,

$$\widehat{\tilde{\phi}}_0^I(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} P(e^{-i\omega/2^k}) \widehat{\tilde{\phi}}_0^I(0). \quad (2.61)$$

La fonction  $2\pi$ -périodique,

$$m_0^I(\omega) = P(e^{-i\omega}) \quad (2.62)$$

s'appelle le symbole de l'algorithme de prédiction interpolant.

– Support de  $\tilde{\phi}_0^I$  :

Comme on peut le voir sur la figure (2.2), la fonction limite est à support compact. A partir de la relation d'échelle (2.59), on obtient,

$$\text{supp}(\tilde{\phi}_0^I) = [-2r + 1, 2l - 1] \quad (2.63)$$

– Reproduction des polynômes :

Par construction, l'algorithme de prédiction interpolant à  $D+1$  points invariant par translation reproduit les polynômes de degré inférieur ou égal à  $D$  puisque,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^m \tilde{\phi}_0^I(x - k) = x^m, \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ et } m \leq D. \quad (2.64)$$

La fonction limite,  $\tilde{\phi}_0^I$ , est maintenant le point départ de la construction d'analyses multirésolutions interpolantes.

## 2.2.2 Lien avec les analyses multirésolutions interpolantes

Le lien avec les analyses multirésolutions interpolantes se fait en suivant l'analogie avec les analyses multirésolutions classiques de la section 2.1.1.

Cette analogie n'est valide que dans le cas d'une famille d'opérateurs  $\{R_j^I\}_{j \in \mathbb{Z}}$  hiérarchiques. Nous commençons donc par introduire l'opérateur de reconstruction suivant, construit à partir de la fonction limite de l'algorithme de prédiction interpolant, et qui définit une famille d'opérateurs hiérarchiques. Il s'écrit,  $\forall \{f_k^{I,j}\}_{k \in \mathbb{Z}} \in V^j$ ,

$$R_j^{I,\infty} f^{I,j} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k^{I,j} \tilde{\phi}_0^I(2^j \cdot - k). \quad (2.65)$$

Par construction, on vérifie aisément que l'opérateur  $D_j^I R_j^{I,\infty}$  définit bien la prédiction interpolante introduite dans la section 2.1 et que la famille  $\{R_j^{I,\infty}\}_{j \in \mathbb{Z}}$  est hiérarchique.

Il s'en suit alors, d'après l'expression (2.14), que la fonction  $\tilde{\phi}_0^I$  est la fonction d'échelle d'une analyse multirésolution puisque,

$$\tilde{\phi}_0^I = R_0^{I,\infty} w_0^{I,0} \quad (2.66)$$

avec  $\forall m \in \mathbb{Z}$ ,  $w_{0,m}^{I,0} = \delta_{0,m}$ , vecteur de base de  $V^0$ .

Remarquant que, par construction de l'opérateur de décimation  $D_{j+1}^{I,j}$ , la famille de vecteurs  $\{u_k^{I,j+1}\}_{k \in \mathbb{Z}} \in V^{j+1}$  (avec  $\forall m \in \mathbb{Z}$ ,  $u_{k,m}^{I,j+1} = \delta_{m,2k+1}$   $k \in \mathbb{Z}$ ) est une base de  $\text{Ker} D_{j+1}^{I,j}$ , nous construisons ensuite les ondelettes associées d'après l'expression (2.11). Elles s'écrivent,

$$\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2, \tilde{\psi}_{j,k}^I = \tilde{\phi}_0^I(2^{j+1} \cdot -2k - 1). \quad (2.67)$$

### Remarque 2.2.3

On retrouve par cette construction les analyses interpolantes de  $C_0(\mathbb{R})$ <sup>2</sup> introduites par Donoho dans [31].

## 2.3 Etude de l'algorithme de prédiction $B^N$ -spline invariant par translation, lien avec les analyses multirésolutions biorthogonales

Nous généralisons, dans cette section, les résultats précédents en considérant une discrétisation  $B^N$ -spline. Nous supposons que la fonction limite associée à l'algorithme de prédiction interpolant existe. Nous commençons d'abord par établir la convergence du schéma de prédiction  $B^N$ -spline. Nous montrons ensuite que la fonction limite de ce schéma de prédiction forme avec la fonction  $B^N$ -spline un couple de fonctions d'échelle de deux analyses multirésolutions biorthogonales au sens donné dans le chapitre précédent (section 1.1.3).

### 2.3.1 Convergence de l'algorithme de prédiction $B^N$ -spline

Comme dans la section précédente, nous étudions la convergence du schéma de subdivision associé, pour la séquence initiale  $\{f_m^{N,0}\}_{m \in \mathbb{Z}} \in V^0$  telle que  $f_m^{N,0} = \delta_{m,k}(k \in \mathbb{Z})$ .

Nous énonçons alors le résultat de convergence suivant,

#### Proposition 2.3.1

Pour tout  $N \geq 1$ , si on suppose que  $\tilde{\phi}_0^I$  est dans  $C^N$  et à support compact, alors, la fonction limite de l'algorithme de prédiction  $B^N$ -spline invariant par translation,  $\{\tilde{\phi}_k^N\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , vérifie,

$$\text{si } N=1, \tilde{\phi}_k^1(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n_0 \geq 1} \tilde{\phi}_0^I(x - n_0 - k), \quad (2.68)$$

---

<sup>2</sup> $C_0(\mathbb{R})$  représente l'espace des fonctions continues s'annulant à l'infini

$$\text{si } N > 1, \tilde{\phi}_k^N(x) = \frac{d^N}{dx^N} \sum_{n_{N-1} \geq 1} \dots \sum_{n_2 \geq 1} \sum_{n_1 \geq 1} \sum_{n_0 \geq 1} \tilde{\phi}_0^I(x - n_{N-1} - \dots - n_0 - k). \quad (2.69)$$

**Preuve:**

Nous fournissons ici la preuve dans le cas  $N = 1$  puisque la généralisation au cas  $N > 1$  s'obtient facilement par récurrence.

Partant d'une séquence initiale  $\{f_m^{1,0}\}_{m \in \mathbb{Z}}$  avec  $f_m^{1,0} = \delta_{k,m}$ , notre but est de montrer, suivant la définition 2.2.1, que,

$$\|f^{1,j} - \frac{d}{dx} \sum_{n_0 \geq 1} \tilde{\phi}_0^I(\frac{\cdot}{2^j} - n_0 - k)\|_\infty \rightarrow 0 \text{ quand } j \rightarrow +\infty. \quad (2.70)$$

La preuve s'appuie sur la construction des valeurs prédites  $\{f_m^{1,j}\}_{m \in \mathbb{Z}}$  donnée par la proposition 2.1.1.

D'après les étapes 1) et 2) de la proposition 2.1.1, calculer les valeurs prédites  $\{f_m^{1,j}\}_{m \in \mathbb{Z}}$  revient d'abord à appliquer l'algorithme de prédiction interpolant à la famille  $\{F_m^{I,0}\}_{m \in \mathbb{Z}}$  telle que,

$$\forall m \in \mathbb{Z}, F_m^{I,0} = \sum_{n \geq k+1} \delta_{m,n}. \quad (2.71)$$

L'algorithme de prédiction interpolant étant supposé convergent, la famille  $\{F_m^{I,j}\}_{m \in \mathbb{Z}}$  vérifie par construction (section 2.2),

$$\forall m \in \mathbb{Z}, F_m^{I,j} = \sum_{n \geq k+1} \tilde{\phi}_0^I(\frac{m}{2^j} - n). \quad (2.72)$$

Les valeurs de  $\{f_m^{1,j}\}_{m \in \mathbb{Z}}$  s'obtiennent alors à partir de la famille  $\{F_m^{I,j}\}_{m \in \mathbb{Z}}$  en suivant l'étape 3) de la proposition 2.1.1 et s'écrivent,

$$\forall m \in \mathbb{Z}, f_m^{1,j} = 2^j \left( \sum_{n \geq k+1} \tilde{\phi}_0^I(\frac{m+1}{2^j} - n) - \sum_{n \geq k+1} \tilde{\phi}_0^I(\frac{m}{2^j} - n) \right) \quad (2.73)$$

Puisque, par hypothèse, la fonction limite  $\tilde{\phi}_0^I$  est  $C^1$  et est à support compact, on peut écrire, en utilisant l'expression (2.73),

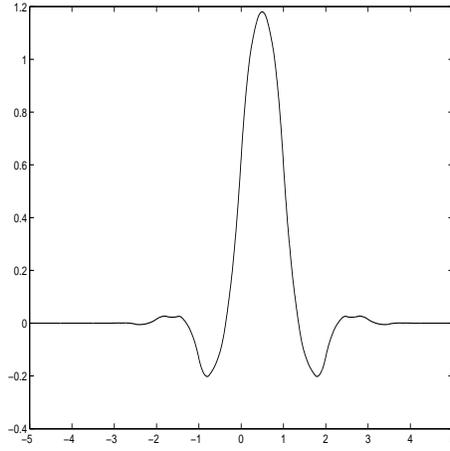


FIG. 2.3 – Exemple de fonction limite associée à l'algorithme de prédiction  $B^1$ -spline invariant par translation,  $D = 5$ ,  $l = 3$ ,  $r = 3$

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \left| f_m^{1,j} - \left( D_j^I \frac{d}{dx} \sum_{n_0 \geq 1} \tilde{\phi}_0^I \left( \frac{\cdot}{2^j} - n_0 - k \right) \right)_m \right| \rightarrow 0, \quad \text{quand } j \rightarrow +\infty, \quad (2.74)$$

ce qui donne exactement le résultat de convergence (2.70).

Comme,

$$\frac{d}{dx} \sum_{n_0 \geq 1} \tilde{\phi}_0^I \left( \frac{\cdot}{2^j} - n_0 - k \right) \in C^0(\mathbb{R}), \quad (2.75)$$

puisque  $\tilde{\phi}_0^I \in C^1(\mathbb{R})$  et à support compact, on en déduit alors la convergence de l'algorithme de prédiction  $B^1$ -spline vers la fonction limite,

$$\tilde{\phi}_k^1(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n_0 \geq 1} \tilde{\phi}_0^I \left( \frac{x}{2^j} - n_0 - k \right), \quad (2.76)$$

et  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,  $\tilde{\phi}_k^N \in C^0(\mathbb{R})$ . Ceci conclut la preuve. ■

La figure 2.3 donne un exemple de fonction limite associée à l'algorithme de prédiction  $B^1$ -spline.

### 2.3.2 Propriétés des fonctions limites et lien avec les analyses multirésolutions

Observons d'abord que par construction (expression (2.29)), l'algorithme de prédiction  $B^N$ -spline reproduit les polynômes de degré inférieur ou égal à  $D - N$ , i.e.,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^m \tilde{\phi}_0^N(x - k) = x^m, \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ et } m \leq D - N. \quad (2.77)$$

De plus, comme pour les fonctions d'échelles d'une analyse multirésolution, un symbole associé à la fonction limite  $\tilde{\phi}_0^N$  peut être construit. D'après la proposition 2.3.1, la transformée de Fourier de l'expression (2.69) fournit,

$$\widehat{\tilde{\phi}_0^N}(\omega) = (i\omega)^N \sum_{n_{N-1} \geq 1} \dots \sum_{n_2 \geq 1} \sum_{n_1 \geq 1} \sum_{n_0 \geq 1} e^{-i\omega(n_0 + n_1 + \dots + n_{N-1})} \widehat{\phi}_0^I(\omega) \quad (2.78)$$

en utilisant le symbole  $m_0^I$  (expression (2.62)), il vient,

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{\tilde{\phi}_0^N}(\omega)}{\widehat{\tilde{\phi}_0^N}(\omega/2)} &= 2^N \frac{\sum_{n_{N-1} \geq 1} e^{-i\omega n_{N-1}}}{\sum_{n_{N-1} \geq 1} e^{-i\omega n_{N-1}/2}} \dots \frac{\sum_{n_{N-1} \geq 1} e^{-i\omega n_{N-1}}}{\sum_{n_0 \geq 1} e^{-i\omega n_0/2}} m_0^I(\omega/2), \\ &= 2^N \left( \frac{\sum_{n \geq 1} e^{-i\omega n}}{\sum_{n \geq 1} e^{-i\omega n/2}} \right)^N m_0^I(\omega/2), \\ &= 2^N \left( \frac{e^{-i\omega/2}}{e^{i\omega/2} - e^{-i\omega/2}} \right)^N \left( \frac{e^{i\omega/4} - e^{-i\omega/4}}{e^{-i\omega/4}} \right)^N m_0^I(\omega/2), \\ &= 2^N e^{-iN\omega/4} \left( \frac{\sin(\omega/4)}{\sin(\omega/2)} \right)^N m_0^I(\omega/2), \\ &= 2^N e^{-iN\omega/4} \left( \frac{\sin(\omega/4)}{\sin(\omega/2)} \right)^N m_0^I(\omega/2), \\ &= \frac{e^{-iN\omega/4}}{\cos(\omega/4)} m_0^I(\omega/2), \end{aligned} \quad (2.79)$$

et le symbole de l'algorithme de prédiction  $B^N$ -spline est défini par la fonction  $2\pi$ -périodique suivante,

$$m_0^N(\omega) = \frac{e^{-iN\omega/2} m_0^I(\omega)}{(\cos(\omega/2))^N}, \quad (2.80)$$

La proposition suivante clarifie le lien avec les analyses multirésolutions. Elle est basée sur la formule de commutation de Lemarié (proposition 1.1.5 et [45]),

**Proposition 2.3.2**

Si pour toute séquence initiale  $\{f_m^{N,0}\}_{m \in \mathbb{Z}}$  telle que  $f_m^{N,0} = \delta_{k,m}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), l'algorithme de prédiction  $B^N$ -spline invariant par translation converge, au sens des schémas de subdivision, vers une fonction  $\tilde{\phi}_k^N(x) = \tilde{\phi}_0^N(x - k)$  alors,

- le couple  $(B^N(x), \tilde{\phi}_0^N(x))$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , définit un couple de fonctions d'échelle d'une analyse multirésolution biorthogonale invariante par translation.
- on construit, par récurrence, le couple d'ondelettes mères associées,  $(\psi_0^N, \tilde{\psi}_0^N)$ .

Elles s'écrivent formellement,

$$\psi_0^N(x) = \int_{-\infty}^x \psi_0^{N-1}(t) dt, \quad (2.81)$$

avec

$$\psi_0^0(x) = \delta(2^{j+1}x - (2k + 1)) - \sum_{m=-l}^{r-1} L_m^{l,r}(-1/2) \delta(2^{j+1}x - 2(k + m + 1)).$$

et

$$\tilde{\psi}_0^N(x) = \frac{d}{dx} \tilde{\psi}_0^{N-1}(x). \quad (2.82)$$

avec  $\tilde{\psi}_0^0(x) = \tilde{\psi}_0^I(x)$ .

Nous terminons ce chapitre par deux remarques.

**Remarque 2.3.1**

- Notons d'abord que la construction de l'algorithme de prédiction interpolant est à l'origine de tous les résultats sur l'algorithme de prédiction  $B^N$ -spline. En effet, la fonction d'échelle  $\tilde{\phi}_0^N$  (expression (2.69)) et l'ondelette  $\tilde{\psi}_0^N$  (expression (2.82)) se déduisent de la fonction d'échelle  $\tilde{\phi}_0^I$  et de l'ondelette  $\tilde{\psi}_0^I$  de l'analyse interpolante. De plus, la construction de l'ondelette biorthogonale  $\psi_0^N$  (expression (2.81)) dépend du choix du stencil d'interpolation dans la procédure interpolante.

- Il est important aussi de remarquer que la construction proposée ici permet de retrouver les analyses splines biorthogonales de Cohen, Daubechies, Feauveau dans le cas  $l = r$  ([20]).

- Enfin, comme on l'a fait pour les analyses interpolantes, on peut montrer que la construction des fonctions d'échelle  $\tilde{\phi}_{j,k}^N$  et des ondelettes  $\tilde{\psi}_{j,k}^N$  est équivalente à celle proposée dans l'analogie avec le formalisme en ondelettes de la section 2.1.1 quand un opérateur de reconstruction hiérarchique est défini par,  $\forall \{f_k^{N,j}\}_{k \in \mathbb{Z}} \in V^j$ ,

$$R_j^{N,\infty} f^{N,j} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k^{N,j} \tilde{\phi}_0^N(2^j \cdot - k). \quad (2.83)$$

## 2.4 Conclusion

Une autre approche que le formalisme en ondelettes a été introduite pour construire des analyses multiéchelles. Elle utilise le formalisme de Harten. Contrairement aux ondelettes, elle repose directement sur la construction de deux opérateurs discrets : un opérateur de prédiction et un opérateur de décimation connectant deux niveaux de résolution successifs.

Le formalisme de Harten a d'abord été présenté et une attention spéciale a été portée à la construction de l'opérateur de prédiction qui contrôle l'efficacité des mécanismes de décomposition et de reconstruction multiéchelles. Après un bref rappel sur le lien entre l'approche purement discrète de Harten et un cadre fonctionnel du type ondelettes, deux exemples de prédiction ont été décrits dans les cas interpolant et B-spline. Les deux opérateurs correspondant ne dépendent pas, a priori, d'une ondelette puisque leur construction est basée sur l'utilisation d'un opérateur d'interpolation. L'avantage majeur de cette approche par rapport aux schémas de prédiction utilisant les ondelettes classiques est alors la possibilité de définir à partir de l'opérateur de prédiction de Harten des schémas de subdivision non stationnaires et non uniformes grâce à la flexibilité dans le choix du stencil d'interpolation.

Nous avons ensuite clarifié le lien entre l'approche de Harten et l'approche en ondelettes classiques. Plusieurs résultats déjà connus ont été rappelés dans le cas de schémas de prédiction invariants par translation (c'est à dire non adaptés à la nature des données) : nous avons montré notamment comment la convergence du schéma de subdivision associé à l'opérateur de prédiction conduit à la construction d'une fonction d'échelle puis d'une ondelette et donc à la définition d'une analyse multirésolution. Dans le cas interpolant, l'approche de Harten a permis de retrouver les analyses interpolantes introduites par Donoho ([31]). Dans le cas B-spline, elle a permis de retrouver les analyses biorthogonales de Cohen, Daubechies et Feauvau ([20]) grâce à l'utilisation d'une formule de commutation de Lemarié ([45]).

Cependant, l'intérêt de l'approche de Harten est la possibilité de construire des algorithmes multiéchelles non invariants par translation (c'est à dire dépendant des caractéristiques des données). Tous les nouveaux résultats associés sont décrits dans la partie III.



## Deuxième partie

# Couplage ondelettes/domaines fictifs pour la résolution d'Equations aux Dérivées Partielles



# Introduction

Dans cette partie, nous nous intéressons aux méthodes domaines fictifs avec multiplicateurs de surface et à leur couplage avec les ondelettes pour la résolution d'un problème parabolique à coefficients constants.

Le problème initial a la forme suivante,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \text{ tel que,} \\ \frac{\partial u}{\partial t} + Au = f \text{ dans } \omega \times [0, T], \\ u|_{\gamma} = g \text{ et } u(t = 0, x) = u_0(x), \end{array} \right. \quad (2.84)$$

où  $\omega$  est un ouvert quelconque,  $\gamma$  sa frontière et  $A$  est un opérateur aux dérivées partielles elliptique.

Pour ramener le problème à une séquence de problèmes elliptiques, le système (2.84) est discrétisé en temps par un schéma aux différences finis associé à une segmentation  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n < \dots < t_M = T$  de  $[0, T]$ . Si  $u^n$  représente l'approximation de  $u(t_n, x)$ , le problème semi-discretisé en temps s'écrit, pour un schéma d'Euler par exemple,

$$\forall n \in [0, M - 1] \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^{n+1} \text{ tel que,} \\ L(\delta t_n)u^{n+1} = L_1(\delta t_n)u^n + F^n \text{ dans } \omega, \\ u^{n+1}|_{\gamma} = g(t_{n+1}, \cdot) \text{ et } u^0(x) = u_0(x), \end{array} \right. \quad (2.85)$$

où  $\delta t_n = t_{n+1} - t_n$ .  $L$  et  $L_1$  sont ici deux opérateurs aux dérivées partielles et  $L$  est elliptique.

A chaque temps  $t_n$ , supposant que  $u^n$  est connu, le système (2.85) est alors un problème elliptique sur  $\omega$  avec des conditions de Dirichlet sur la frontière  $\gamma$ .

Après réécriture sous forme faible, on reformule le problème (2.85) en utilisant l'approche des domaines fictifs avec multiplicateurs de surface ([63]). Le

problème initial défini sur  $\omega$  est alors interprété comme un problème d'optimisation d'une fonctionnelle convexe sous contrainte (ici la condition de Dirichlet sur la frontière) défini sur un domaine plus grand et plus simple  $\Omega \supset \bar{\omega}$ . Introduisant  $(U^n, \lambda^n)$ , le couple de solution à l'instant  $t_n$ , la reformulation du problème (2.85) prend la forme du problème de point selle suivant,

$$\forall n \in [0, M - 1] \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U^{n+1} \in H(\Omega) \text{ et } \lambda^{n+1} \in G(\gamma) \text{ tel que,} \\ a_{\Omega}(U^{n+1}, v) - \nu \delta t b(v, \lambda^{n+1}) = l_{\Omega, n}(v) \quad \forall v \in H(\Omega), \\ b(U^{n+1}, \mu) = \langle g^{n+1} \mu \rangle_{\gamma} \quad \forall \mu \in G(\gamma), \end{array} \right. \quad (2.86)$$

où  $H(\Omega)$  et  $G(\gamma)$  sont des espaces fonctionnels adéquats et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\gamma}$  représente le crochet de dualité associé à  $G(\gamma)$  et à son dual.

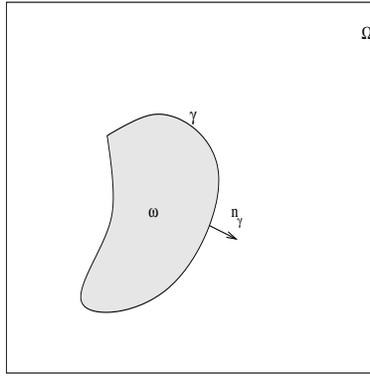


FIG. 2.4 – Domaines et frontières dans l'approche des domaines fictifs

En introduisant deux approximations multi-niveaux de  $H(\Omega)$  et  $G(\gamma)$ , la discrétisation complète du système (2.86) correspond classiquement à un système linéaire dont la solution donne les coordonnées d'une approximation de  $U^{n+1}$  et d'une approximation de  $\lambda^{n+1}$  dans des bases particulières.

L'approche domaine fictif s'accompagne de quelques limitations essentiellement dues au passage du domaine  $\omega$  au grand domaine  $\Omega$  puis de  $\Omega$  à la frontière  $\gamma$  de  $\omega$  et qui sont discutées dans les chapitres suivants. En particulier,

- L'existence et l'unicité de la solution du problème de point selle requiert une condition Inf-Sup qui relie les espaces d'approximation de  $H(\Omega)$  et  $G(\gamma)$ .

- La régularité de  $U^n$  sur  $\Omega$  ne dépend pas uniquement du problème initial ; elle dépend aussi de l'opérateur de prolongement de  $\omega$  sur  $\Omega$  qu'il faut définir.
- La matrice du système linéaire final est généralement mal conditionnée.
- Des difficultés techniques peuvent être rencontrées dans l'implémentation, notamment pour l'extension de la solution initiale  $u_0$  de  $\omega$  à  $\Omega$  ou pour l'évaluation de la trace sur  $\gamma$ .

Notre travail consiste à présenter les différentes étapes de discrétisation qui conduisent au système linéaire et à en étudier l'implémentation. Dans la suite de cette partie,  $A = -\nu\Delta$  ( $\nu > 0$ ) et  $f = 0$ , ce qui correspond à l'équation de la chaleur sans source, définie sur  $\omega \subset \mathbb{R}^2$  avec des conditions de Dirichlet sur la frontière.

Le **chapitre 3** présente les différentes étapes de la discrétisation qui conduisent au système linéaire. A chaque étape, nous donnons un résultat d'existence et d'unicité des solutions. Une estimation d'erreur est fournie pour le problème de point selle.

Le **chapitre 4** est consacré à l'implémentation numérique de la méthode. On s'intéresse notamment au conditionnement des matrices du problème, ainsi qu'à l'évaluation par des formules de quadrature des projections des traces des fonctions de base de  $H(\Omega)$  dans  $G(\gamma)$ .

Finalement, le **chapitre 5** concerne quelques applications numériques et présente les solutions de problèmes avec géométries complexes et une extension numérique de cette approche à un problème à frontière mobile.



# Chapitre 3

## Formulations, discrétisations et approximations

Le problème initial est,

Soit  $g \in C^0(0, T, C^0(\gamma))$  et  $u_0 \in C^0(\omega)$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in C^1(0, T, C^2(\omega)), \text{ tel que,} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \Delta u \text{ dans } \omega \times [0, T], \\ u|_{\gamma} = g \text{ sur } \gamma \times [0, T], \\ u(0, x) = u_0(x) \text{ dans } \omega. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

### 3.1 Formulations et discrétisations

#### 3.1.1 Discrétisation en temps

Le système (3.1) est d'abord discrétisée en temps en utilisant un schéma aux différences finies associé à une segmentation régulière de  $[0, T]$ . Par exemple, dans le cas du schéma d'Euler implicite et d'une segmentation régulière de pas  $\delta t$ , on obtient le problème suivant,

$\forall n \geq 0$ , si  $u^n$  désigne l'approximation de  $u(t_n, \cdot)$  et  $g^n = g(t_n, \cdot)$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^{n+1} \in C^2(\omega) \text{ tel que,} \\ (I - \nu \delta t \Delta) u^{n+1} = u^n \text{ dans } \omega, \\ u^{n+1}|_{\gamma} = g^{n+1} \text{ sur } \gamma, \\ u^0 = u_0 \text{ dans } \omega, \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Il est utile par la suite d'introduire un relèvement,  $u_g \in C^1(0, T, C^2(\omega))$ , tel que  $\forall t$ ,  $u_g|_{\gamma}(t, \cdot) = g(t, \cdot)$  et d'écrire  $u = u_g + w$ . Nous définissons aussi  $w^n$  tel que  $w^n = u^n - u_g(t_n, \cdot)$ .

Classiquement, le problème (3.2) est reformulé au sens faible. On est donc amené à introduire un opérateur trace  $\gamma_0 : H^1(\omega) \rightarrow H^{1/2}(\gamma)$ . On fait l'hypothèse classique que  $\gamma$  est suffisamment régulière pour pouvoir définir les opérateurs de prolongement et de trace.

Le théorème suivant rappelle deux inégalités vérifiées par l'opérateur trace et qui sont utilisées dans la suite du chapitre.

**Théorème 3.1.1** *Théorème de trace et de relèvement*

Pour chaque  $f \in H^s(\omega)$  et  $s > \frac{1}{2}$ , on a,

$$\|\gamma_0(f)\|_{H^{s-1/2}(\gamma)} \leq c_{T_1} \|f\|_{H^s(\omega)}. \quad (3.3)$$

Inversement, pour chaque  $q \in H^{s-1/2}(\gamma)$ , il existe  $f \in H^s(\omega)$  tel que  $\gamma_0(f) = q$  et

$$\|f\|_{H^s(\omega)} \leq c_{T_2} \|q\|_{H^{s-1/2}(\gamma)}. \quad (3.4)$$

Introduisant le convexe  $K_{g^n} = \{u \in H^1(\omega) / \gamma_0(u) = g^n\}$ , la formulation faible du problème (3.2) s'écrit alors,

$\forall n \geq 0$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^{n+1} \in K_{g^{n+1}}, \text{ tel que } \forall (v, w) \in K_{g^{n+1}} \times K_{g^{n+1}}, \\ a_{\omega}(u^{n+1}, v - w) = l_{\omega, n}(v - w), \end{array} \right. \quad (3.5)$$

avec

$$\begin{aligned}
a_\omega : H^1(\omega) \times H^1(\omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\
(u, v) &\mapsto \int_\omega (\nu \delta t \nabla u \nabla v + uv) \, dx dy, \quad (3.6)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
l_{\omega, n} : H_0^1(\omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\
v &\mapsto \int_\omega u^n v \, dx dy. \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Nous rappelons les résultats classiques relatifs aux solutions des problèmes (3.2) et (3.5).

### Théorème 3.1.2

- Pour tout  $n \geq 0$ , le problème (3.5) a une unique solution  $u^{n+1}$ . De plus, si pour  $k > 0$ ,  $\gamma$  est une variété  $C^{k+2}$ , si  $u^n \in H^k(\omega)$  et  $g^{n+1} \in H^{k+\frac{3}{2}}(\gamma)$ , alors  $u^{n+1} \in H^{k+2}(\omega)$ .
- Pour tout  $n \geq 0$ , le système (3.2) est équivalent au problème (3.5) si  $g \in C^0(0, T, C^0(\gamma))$  et  $u_0 \in C^0(\omega)$ .

Nous continuons la discrétisation du système (3.1), en transformant, pour chaque  $n$ , le problème elliptique (3.5) en un problème de point selle. Définissant  $\Omega$  comme un rectangle de  $\mathbb{R}^2$  de taille  $L \times L'$  avec  $\Omega \supset \bar{\omega}$ , nous introduisons l'opérateur de restriction  $R_\omega$ , resp.  $R_{\Omega \setminus \bar{\omega}}$ , opérateur de restriction de  $H^1(\Omega)$  dans  $H^1(\omega)$ , resp. dans  $H^1(\Omega \setminus \bar{\omega})$ .

D'après [40], le problème (3.5) peut être reformulé dans le cadre des domaines fictifs dès que l'on peut définir  $U^0 \in H^1(\Omega)$  tel que  $R_\omega(U^0) = u^0$ , sous la forme,

Soit  $g \in L^2(0, T, H^{1/2}(\gamma))$  et  $U^0 \in H^1(\Omega)$ ,  
 $\forall n \geq 0$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l}
\text{Trouver } (U^{n+1}, \lambda^{n+1}) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\gamma) \text{ tel que,} \\
a_\Omega(U^{n+1}, V) - \nu \delta t b(V, \lambda^{n+1}) = l_{\Omega, n}(V) \quad \forall V \in H^1(\Omega), \\
b(U^{n+1}, \mu) = \int_\gamma g^{n+1} \mu \, d\sigma \quad \forall \mu \in H^{-1/2}(\gamma),
\end{array} \right. \quad (3.8)$$

où  $a_\Omega$  (resp.  $l_{\Omega, n}$ ) s'obtient en remplaçant  $\omega$  par  $\Omega$  (resp.  $\omega$  par  $\Omega$  et  $u^n$  par  $U^n$ ) dans l'expression (3.6) (resp. dans l'expression (3.7)),

$$\begin{aligned} b : H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\gamma) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (V, \mu) &\mapsto \langle T_{\gamma_0}(V), \mu \rangle_{\gamma}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} T_{\gamma_0} : H^1(\Omega) &\rightarrow H^{1/2}(\gamma), \\ V &\mapsto \gamma_0(R_{\omega}V), \end{aligned} \quad (3.10)$$

et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\gamma}$  est le produit de dualité défini sur  $H^{-1/2}(\gamma) \times H^{1/2}(\gamma)$ .

Le théorème de trace et de relèvement 3.1.1 peut s'étendre aux cas des fonctions de  $H^1(\Omega)$  grâce à l'opérateur de restriction,  $R_{\omega}$ , en supposant assez de régularité pour la frontière  $\gamma$  ([29]). Ceci constitue un résultat essentiel dans la preuve de l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.8) totalement discrétisé puisqu'il relie les fonctions de  $H^1(\Omega)$  aux fonctions de  $H^{1/2}(\gamma)$ .

### Théorème 3.1.3

Pour tout  $f_1 \in H^s(\Omega)$ ,  $s > \frac{1}{2}$ , on a,

$$\|T_{\gamma_0}(f_1)\|_{H^{s-1/2}(\gamma)} \leq c_{T_1} \|f_1\|_{H^s(\Omega)}. \quad (3.11)$$

Inversement, pour chaque  $q \in H^{s-1/2}(\gamma)$ , il existe  $f_1 \in H^s(\Omega)$  tel que  $T_{\gamma_0}(f_1) = q$  et

$$\|f_1\|_{H^s(\Omega)} \leq c_{T_2} \|q\|_{H^{s-1/2}(\gamma)}, \quad (3.12)$$

### Remarque 3.1.1

Il est utile pour la suite de noter que  $a_{\Omega}$  (resp.  $l_{\Omega,n}$ ) vérifie les mêmes propriétés que  $a_{\omega}$  (resp.  $l_{\omega,n}$ ) i.e. elliptique et continue (resp. continue) dans  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$  (resp. dans  $H^1(\Omega)$ ). On note  $C_a = \max(1, \nu \delta t)$  (resp.  $c_a = \min(1, \nu \delta t)$ ) la constante de continuité (resp. la constante d'ellipticité) de  $a_{\Omega}$ . De même,  $b$  est une forme bilinéaire continue et nous notons  $C_b$  sa constante de continuité.

Le théorème suivant établit un résultat sur l'existence et l'unicité de la solution du système (3.8).

### Théorème 3.1.4

Le problème semi-discrétisé (3.8) a une unique solution,  $(U^{n+1}, \lambda^{n+1})$ , et la restriction de  $U^{n+1}$  à  $\omega$  est la solution du système (3.5), i.e.  $\forall n$ ,  $R_{\omega}U^{n+1} = u^{n+1}$ .

**Preuve:**

La preuve classique est empruntée à [63].

D'après [11], la seule propriété restant à vérifier pour avoir l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.8) est une condition inf-sup qui s'écrit :

$\exists \beta > 0$ , tel que,

$$\inf_{\mu \in H^{-1/2}(\gamma)} \sup_{v \in H^1(\Omega)} \frac{b(v, \mu)}{\|\mu\|_{H^{-1/2}(\gamma)} \|v\|_{H^1(\Omega)}} \geq \beta. \quad (3.13)$$

Cette condition est satisfaite en utilisant le théorème 3.1.3.

En effet, d'après l'inégalité (3.12) (pour  $s = 1$ ) et puisque  $T_{\gamma_0}$  est un opérateur surjectif, on peut écrire,

$$\forall \mu' \in H^{1/2}(\gamma), \exists v \in H^1(\Omega), \text{ tel que, } \forall \mu \in H^{-1/2}(\gamma) \\ \frac{\langle \mu, \mu' \rangle_{\gamma}}{\|\mu'\|_{H^{1/2}(\gamma)}} \leq c_{T_2} \frac{\langle \mu, T_{\gamma_0} v \rangle_{\gamma}}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}, \quad (3.14)$$

d'où

$$\sup_{\mu' \in H^{1/2}(\gamma)} \frac{\langle \mu, \mu' \rangle_{\gamma}}{\|\mu'\|_{H^{1/2}(\gamma)}} \leq c_{T_2} \sup_{v \in H^1(\Omega)} \frac{\langle \mu, T_{\gamma_0} v \rangle_{\gamma}}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}. \quad (3.15)$$

Puisque,  $\|\mu\|_{H^{-1/2}(\gamma)} = \sup_{\mu' \in H^{1/2}(\gamma)} \frac{\langle \mu, \mu' \rangle_{\gamma}}{\|\mu'\|_{H^{1/2}(\gamma)}}$ , il vient finalement,

$$\inf_{\mu \in H^{-1/2}(\gamma)} \sup_{v \in H^1(\Omega)} \frac{b(v, \mu)}{\|\mu\|_{H^{-1/2}(\gamma)} \|v\|_{H^1(\Omega)}} \geq \frac{1}{c_{T_2}}. \quad (3.16)$$

Pour tout  $n \geq 0$ , il y a donc existence et unicité de la solution  $(U^{n+1}, \lambda^{n+1})$  du problème (3.8).

Reste alors à montrer que pour tout  $n \geq 0$ ,  $R_{\omega} U^{n+1} = u^{n+1}$ .

Remarquons d'abord que la seconde équation du problème (3.8) fournit pour tout  $n \geq 0$ ,  $T_{\gamma_0} U^{n+1} = \gamma_0(R_{\omega} U^{n+1}) = g^{n+1}$ . Puisque par définition des opérateurs de restriction,  $R_{\omega} U^{n+1} \in H^1(\omega)$ , on en déduit que

$$R_{\omega} U^{n+1} \in K_{g^{n+1}}. \quad (3.17)$$

De plus, pour tout  $v \in H_0^1(\omega)$ , introduisant,

$$V = \begin{cases} v & \text{dans } \omega, \\ 0 & \text{dans } \Omega \setminus \bar{\omega}, \end{cases} \quad (3.18)$$

$V \in H^1(\Omega)$  et la première équation du système (3.8) donne, sachant que  $T_{\gamma_0}V = 0$ ,

$$a_\Omega(U^{n+1}, V) = l_{\Omega, n}(V), \quad (3.19)$$

La construction de  $V$  et les expressions de  $a_\Omega$  et  $l_{\Omega, n}$  conduisent alors à,

$$\forall v \in H_0^1(\omega), \quad a_\omega(R_\omega U^{n+1}, v) = l_{\omega, n}(v), \quad (3.20)$$

qui est exactement l'équation du problème (3.5) et montre donc, en combinant avec l'expression (3.17), que pour tout  $n \geq 0$ ,  $R_\omega U^{n+1} = u^{n+1}$ . ■

### 3.1.2 Discrétisation spatiale

La discrétisation complète s'obtient, classiquement, en remplaçant dans la formulation (3.8) les espaces de Sobolev par des sous-espaces de dimension finie. Dans [43], une méthode type ondelettes/Galerkin a été construite pour la résolution de problème similaire. Ici, nous choisissons une discrétisation du type Petrov-Galerkin. Son principal avantage est décrit dans la remarque 4.1.1 et apparait quand on formule le problème complètement discrétisé sous sa forme vectorielle avant son implémentation.

Introduisant trois espaces d'approximation  $U_h^\Omega \subset H^1(\Omega)$ ,  $V_h^\Omega \subset H^1(\Omega)$  et  $Q_{h'}^\gamma \subset H^{-1/2}(\gamma)$ , le système (3.8) est approché par,

$$\forall n \geq 0,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (U_h^{n+1}, \lambda_{h'}^{n+1}) \in U_h^\Omega \times Q_{h'}^\gamma \text{ tel que,} \\ a_\Omega(U_h^{n+1}, V_h) - \nu \delta t b(V_h, \lambda_{h'}^{n+1}) = l_{\Omega, n}(V_h) \quad \forall V_h \in V_h^\Omega, \\ b(U_h^{n+1}, \mu_{h'}) = \int_\gamma g_{h'}^{n+1} \mu_{h'} \, d\sigma \quad \forall \mu_{h'} \in Q_{h'}^\gamma. \end{array} \right. \quad (3.21)$$

Supposant que  $V_h^\Omega \subset H^2(\Omega)$  et utilisant une formule de Green, le système (3.21) s'écrit,

$\forall n \geq 0,$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (U_h^{n+1}, \lambda_{h'}^{n+1}) \in U_h^\Omega \times Q_{h'}^\gamma \text{ tel que,} \\ \int_\Omega U_h^{n+1} (V_h - \nu \delta t \Delta V_h) dx dy - \nu \delta t \int_\gamma \lambda_{h'}^{n+1} T_{\gamma_0}(V_h) d\sigma = \int_\Omega U_h^n V_h dx dy \quad \forall V_h \in V_h^\Omega, \\ \int_\gamma T_{\gamma_0}(U_h^{n+1}) \mu_{h'} d\sigma = \int_\gamma g_{h'}^{n+1} \mu_{h'} d\sigma \quad \forall \mu_{h'} \in Q_{h'}^\gamma. \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Nous précisons, dans ce qui suit, les espaces que nous utilisons, ainsi que les opérateurs de projection associés.

### Approximation de $H^1(\Omega)$

Les espaces  $\{U_j^\Omega\}_{j \in \mathbb{Z}}$  ( $h = 2^{-j}$ ) d'une analyse multirésolution bi-dimensionnelle, construite à partir d'une analyse multirésolution monodimensionnelle ortho-normale  $m$ -régulière (section 1.1), suivant la technique du produit tensoriel (section 1.1.2), sont de bons candidats pour  $U_h^\Omega$ . D'après [16] et supposant assez de régularité pour l'analyse multirésolution générant  $U_h^\Omega$ , i.e.  $m > 2$ , nous construisons  $V_h^\Omega$  comme l'image de  $U_h^\Omega$  par l'opérateur  $(I - \nu \delta t \Delta)^{-1}$ , i.e.

$$V_j^\Omega = (I - \nu \delta t \Delta)^{-1} U_j^\Omega. \quad (3.23)$$

Nous rappelons que de tels espaces admettent comme fonctions de base des "vaguelettes" biorthogonales (section 1.2.1) et partagent plusieurs propriétés avec les analyses multirésolutions classiques.

Les définitions suivantes introduisent les notations relatives à la construction de ces deux espaces d'approximation.

Pour chaque  $j \in \mathbb{N}$ , nous définissons les deux ensembles d'indices suivants,

$$\begin{aligned} K_j &= \{ \alpha = (j, k_1, k_2), k_1 = 0, \dots, 2^j - 1; k_2 = 0, \dots, 2^j - 1 \}, |\alpha| = j, \\ A_j &= K_j \times \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

On a alors,

#### **Définition 3.1.1**

- L'espace d'approximation  $U_j^\Omega$  est défini de la façon suivante,

$$U_j^\Omega = \text{vect} \left\{ \Phi_\alpha^\Omega, \alpha \in K_j \right\} \quad (3.24)$$

$$= \text{vect} \left\{ \Psi_\alpha^{\Omega,i}, (\alpha, i) \in A_l, 0 \leq l \leq j-1 \right\} \quad (3.25)$$

où  $\Phi_\alpha^\Omega$  (resp.  $\Psi_\alpha^{\Omega,i}$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ ) sont les fonctions d'échelle (resp. les ondelettes) d'une analyse multirésolution  $m$ -régulière construite par produit tensoriel. On note  $\forall U \in H^1(\Omega)$ ,  $\{c_\alpha^\Omega(U)\}_{\alpha \in K_j}$  (resp.  $\{d_\alpha^{\Omega,i}(U)\}_{(\alpha,i) \in A_l}$ ,  $0 \leq l \leq j-1$ ) les coefficients d'échelles (resp. de détails) associés.

- L'espace d'approximation  $V_j^\Omega$  est construit comme suit,

$$V_j^\Omega = \text{vect} \left\{ \Theta_\alpha^{\Omega,i}, (\alpha, i) \in A_l, 0 \leq l \leq j-1 \right\} \quad (3.26)$$

avec  $\forall \alpha \in K_l$ ,  $\Theta_\alpha^{\Omega,i} \in L^2(\Omega)$  et  $\Theta_\alpha^{\Omega,i} = 2^{2j} (I - \nu \delta t \Delta)^{-1} \Psi_\alpha^{\Omega,i}$ .

Comme dans la section 1.2.1, on introduit aussi  $\tilde{\Theta}_\alpha^{\Omega,i} = 2^{-2j} (I - \nu \delta t \Delta) \Psi_\alpha^{\Omega,i}$ .

### Définition 3.1.2

On appelle  $P_{U_h^\Omega}$ , l'opérateur de projection orthogonale sur  $U_h^\Omega$ , qui s'écrit,

$$\begin{aligned} P_{U_h^\Omega} : H^1(\Omega) &\rightarrow U_h^\Omega \\ U &\mapsto \sum_{l=0}^{j-1} \sum_{(\alpha,i) \in A_l} \langle U, \Psi_\alpha^{\Omega,i} \rangle_{L^2(\Omega)} \Psi_\alpha^{\Omega,i}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

et  $P_{V_h^\Omega}$ , l'opérateur de projection biorthogonale sur  $V_h^\Omega$ , qui s'écrit,

$$\begin{aligned} P_{V_h^\Omega} : H^1(\Omega) &\rightarrow V_h^\Omega \\ V &\mapsto \sum_{l=0}^{j-1} \sum_{(\alpha,i) \in A_l} \langle V, \tilde{\Theta}_\alpha^{\Omega,i} \rangle_{L^2(\Omega)} \Theta_\alpha^{\Omega,i}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

### Approximation de $H^{-1/2}(\gamma)$

Nous choisissons pour  $Q_{h'}^\gamma$ , les espaces  $\{Q_{j'}^\gamma\}_{j' \in \mathbb{Z}}$  ( $h' = 2^{-j'}$ ) d'une analyse multirésolution de  $L^2(\gamma)$  de régularité  $m' \geq 1$ .

Pour chaque  $j' \in \mathbb{N}$ , introduisant

$$K_{j'} = \left\{ \alpha' = (j', l'), l' = 0, \dots, 2^{j'} - 1 \right\}, |\alpha'| = j',$$

on a,

**Définition 3.1.3**

l'espace  $Q_{j'}^\gamma$  est défini par,

$$Q_{j'}^\gamma = \text{vect} \left\{ \phi_{\alpha'}^\gamma, \alpha' \in K_{j'}' \right\} \quad (3.29)$$

$$= \text{vect} \left\{ \psi_{\alpha'}^\gamma, \alpha' \in K_{l'}', 0 \leq l' \leq j' - 1 \right\} \quad (3.30)$$

où  $\phi_{\alpha'}^\gamma$  sont les fonctions d'échelle et  $\psi_{\alpha'}^\gamma$  sont les ondelettes et on note  $\forall \lambda \in L^2(\gamma)$ ,  $\{c_{\alpha'}^\gamma(\lambda)\}_{\alpha' \in K_{j'}'}$  (resp.  $\{d_{\alpha'}^\gamma(\lambda)\}_{\alpha' \in K_{j'}'}$ ) les coefficients d'échelles (resp. de détails) associés.

**Définition 3.1.4**

L'opérateur de projection orthogonale sur  $Q_{h'}^\gamma$ ,  $P_{Q_{h'}^\gamma}$ , s'écrit,

$$\begin{aligned} P_{Q_{h'}^\gamma} : H^{-1/2}(\gamma) &\rightarrow Q_{h'}^\gamma \\ \lambda &\mapsto \sum_{l'=0}^{j'-1} \sum_{\alpha' \in K_{l'}'} \langle \lambda, \psi_{\alpha'}^\gamma \rangle_{L^2(\gamma)} \psi_{\alpha'}^\gamma. \end{aligned} \quad (3.31)$$

## 3.2 Existence et unicité des solutions

Classiquement, le point clé pour montrer l'existence et l'unicité des solutions est une condition Inf-Sup reliant et éventuellement contraignant les différents espaces d'approximation. Plus précisément, nous prouvons le théorème suivant qui est une généralisation au cas Petrov-Galerkin d'un théorème classique ([58] p 249).

**Théorème 3.2.1**

Soit  $U_h^\Omega \subset H^1(\Omega)$ ,  $V_h^\Omega \subset H^1(\Omega)$  et  $Q_{h'}^\gamma \subset H^{-1/2}(\gamma)$  trois espaces d'approximation.

Supposons qu'il existe deux constantes  $K$  et  $\xi$  telles que la forme bilinéaire  $a_\Omega$  vérifie,

$$|a_\Omega(U_h, V_h)| \leq K \|U_h\|_{H^1(\Omega)} \|V_h\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall U_h \in U_h^\Omega, V_h \in V_h^\Omega, \quad (3.32)$$

$$\sup_{V_h \in V_h^\Omega, V_h \neq 0} \frac{a_\Omega(U_h, V_h)}{\|V_h\|_{H^1(\Omega)}} \geq \xi \|U_h\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall U_h \in U_h^\Omega, \quad (3.33)$$

$$\sup_{U_h \in U_h^\Omega} a_\Omega(U_h, V_h) > 0, \quad \forall V_h \in V_h^\Omega, V_h \neq 0. \quad (3.34)$$

Supposons qu'il existe aussi deux constantes positives  $\beta_1$  and  $\beta_2$  telles que la forme bilinéaire  $b$  vérifie,

$$\sup_{V_h \in V_h^\Omega, V_h \neq 0} \frac{b(V_h, \mu_{h'})}{\|V_h\|_{H^1(\Omega)}} \geq \beta_1 \|\mu_{h'}\|_{H^{-1/2}(\gamma)}, \quad \forall \mu_{h'} \in Q_{h'}^\gamma, \quad (3.35)$$

$$\sup_{U_h \in U_h^\Omega, U_h \neq 0} \frac{b(U_h, \mu_{h'})}{\|U_h\|_{H^1(\Omega)}} \geq \beta_2 \|\mu_{h'}\|_{H^{-1/2}(\gamma)}, \quad \forall \mu_{h'} \in Q_{h'}^\gamma, \quad (3.36)$$

alors, pour tout  $n \geq 0$ , il y a existence et unicité de la solution  $(U_h^{n+1}, \lambda_{h'}^{n+1})$  du problème (3.21).

**Preuve:**

La preuve est similaire à celle présentée dans [58]. On commence par montrer, en utilisant les inégalités (3.35) et (3.36), que le problème (3.21) est équivalent au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U_h^n \in U_{g,h}^\Omega = \{U_h \in U_h^\Omega, T_{\gamma_0}(U_h) = g\}, \text{ tel que} \\ a_\Omega(U_h^n, V_h) = l_{\Omega,n}(V_h), \quad \forall V_h \in V_{0,h}^\Omega \end{array} \right. \quad (3.37)$$

avec  $V_{0,h}^\Omega = \{V_h \in V_h^\Omega, T_{\gamma_0}(V_h) = 0\}$ .

D'après les inégalités (3.32), (3.33) et (3.34), le lemme de Necas ([52]) garantit alors l'existence et l'unicité de la solution de cette nouvelle formulation et donc du problème (3.21). ■

Pour pouvoir appliquer le théorème 3.2.1, nous devons vérifier les propriétés (3.32) à (3.36) quand  $U_h^\Omega$ ,  $V_h^\Omega$  et  $Q_{h'}^\gamma$  sont construits en suivant la section précédente.

Nous commençons par la proposition suivante qui concerne la forme bilinéaire  $a_\Omega$ .

**Proposition 3.2.1**

*Si  $U_h^\Omega$  et  $V_h^\Omega$  sont construits comme dans la définition 3.1.1, alors la forme bilinéaire  $a_\Omega$  du problème (3.21) satisfait les conditions (3.32), (3.33) et (3.34).*

**Preuve:**

a) La propriété (3.32) est immédiate d'après la continuité de  $a_\Omega$  avec  $K = C_a$  (voir remarque 3.1.1).

b) **Propriété (3.33)**

Pour prouver l'inégalité (3.33), nous utilisons l'ellipticité de  $a_\Omega$ .

En utilisant l'opérateur de projection sur  $V_h^\Omega$ ,  $P_{V_h^\Omega}$  (défini par l'expression (3.28)), on peut écrire

$$\sup_{V_h \in V_h^\Omega, V_h \neq 0} \frac{a_\Omega(U_h, V_h)}{\|V_h\|_{H^1(\Omega)}} \geq \sup_{V \in H^1(\Omega), V \neq 0} \frac{a_\Omega(U_h, P_{V_h^\Omega} V)}{\|P_{V_h^\Omega} V\|_{H^1(\Omega)}} \quad \forall U_h \in U_h^\Omega, \quad (3.38)$$

d'après les expressions (3.6), (3.28) et les définitions de  $\Theta_\alpha^{\Omega, i}$  et  $\tilde{\Theta}_\alpha^{\Omega, i}$ , il vient,

$$\forall (U_h, V) \in U_h^\Omega \times H^1(\Omega), \quad a_\Omega(U_h, P_{V_h^\Omega} V) = a_\Omega(U_h, V), \quad (3.39)$$

et donc, l'inégalité (3.38) devient

$$\sup_{V_h \in V_h^\Omega, V_h \neq 0} \frac{a_\Omega(U_h, V_h)}{\|V_h\|_{H^1(\Omega)}} \geq \sup_{V \in H^1(\Omega), V \neq 0} \frac{a_\Omega(U_h, V)}{\|P_{V_h^\Omega} V\|_{H^1(\Omega)}} \quad \forall U_h \in U_h^\Omega. \quad (3.40)$$

Puisque  $P_{V_h^\Omega}$  est un opérateur de projection biorthogonal,  $\|P_{V_h^\Omega} V\|_{H^1(\Omega)} \leq c_{V_h^\Omega} \|V\|_{H^1(\Omega)}$ .

En utilisant l'ellipticité de  $a_\Omega$  (voir remarque 3.1.1), nous obtenons finalement

$$\sup_{V_h \in V_h^\Omega, V_h \neq 0} \frac{a_\Omega(U_h, V_h)}{\|V_h\|_{H^1(\Omega)}} \geq \frac{c_a}{c_{V_h^\Omega}} \|U_h\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall U_h \in U_h^\Omega, \quad (3.41)$$

et la propriété (3.33) en découle avec  $\xi = \frac{c_a}{c_{V_h^\Omega}}$ .

c) **Propriété (3.34)**

Ecrivant tout  $V_h \in V_h^\Omega$  sous la forme,

$$V_h = \sum_{l=0}^{j-1} \sum_{(\alpha, i) \in A_l} \langle V_h, \tilde{\Theta}_\alpha^{\Omega, i} \rangle_{L^2(\Omega)} \Theta_\alpha^{\Omega, i}, \quad (3.42)$$

il vient immédiatement en prenant,

$$U_h = \sum_{l=0}^{j-1} \sum_{(\alpha,i) \in A_l} \langle V_h, \tilde{\Theta}_\alpha^{\Omega,i} \rangle_{L^2(\Omega)} \Psi_\alpha^{\Omega,i}, \quad (3.43)$$

que

$$a_\Omega(U_h, V_h) = \|U_h\|_{L^2(\Omega)}^2 > 0$$

et donc la propriété (3.34) est vérifiée.

Ceci conclut la preuve. ■

La proposition suivante concerne les conditions à vérifier pour la forme bilinéaire  $b$ . Elle s'inspire de [24] et s'écrit

**Proposition 3.2.2**

Si  $U_h^\Omega$ ,  $V_h^\Omega$  et  $Q_{h'}^\gamma$  sont construits comme précédemment et si  $Q_{h'}^\gamma \in H^{s'-1/2}(\gamma)$  avec  $s' > 2$  alors la forme bilinéaire  $b$  du problème (3.21) satisfait

$$\sup_{U_h \in U_h^\Omega, U_h \neq 0} \frac{b(U_h, \mu_{h'})}{\|U_h\|_{H^1(\Omega)}} \geq \beta_2 \|\mu_{h'}\|_{H^{-1/2}(\gamma)}, \quad \forall \mu_{h'} \in Q_{h'}^\gamma, \quad (3.44)$$

$$\sup_{V_h \in V_h^\Omega, V_h \neq 0} \frac{b(V_h, \mu_{h'})}{\|V_h\|_{H^1(\Omega)}} \geq \beta_1 \|\mu_{h'}\|_{H^{-1/2}(\gamma)}, \quad \forall \mu_{h'} \in Q_{h'}^\gamma, \quad (3.45)$$

à condition d'avoir

$$j(s' - 2) - j'(s' - 1) \geq B \quad (3.46)$$

où  $B$  est une constante qui dépend du problème.

La preuve des expressions (3.44) et (3.45) s'appuie sur les deux lemmes suivants.

Le premier est emprunté à [24]; il établit une inégalité de Cauchy Schwarz inverse quand on travaille dans l'espace  $Q_{h'}^\gamma$ .

**Lemme 3.2.1**

Pour tout  $\mu_{h'} \in Q_{h'}^\gamma$ , il existe  $\mu_{h'}^* \in Q_{h'}^\gamma \cap H^{s'-1/2}(\gamma)$ ,  $s' \geq 1$ , tel que,

$$\|\mu_{h'}\|_{H^{-1/2}(\gamma)} \|\mu_{h'}^*\|_{H^{1/2}(\gamma)} \leq K \int_\gamma \mu_{h'} \mu_{h'}^* d\sigma \quad (3.47)$$

où  $K$  est une constante qui dépend des constantes du problème.

La preuve de ce lemme est détaillée dans [24] et n'est donc pas rappelée ici. Elle utilise les propriétés d'une analyse multirésolution orthonormale.

Le second lemme fournit un résultat d'approximation pour la trace des fonctions de  $U_h^\Omega$  et  $V_h^\Omega$ .

**Lemme 3.2.2**

1) Si  $Q_{h'}^\gamma \in H^{s'-1/2}(\gamma)$ ,  $s' > 1$ , il existe pour tout  $\mu_{h'} \in Q_{h'}^\gamma$ , un élément  $U_h^* \in U_h^\Omega$  tel que,

$$\|\mu_{h'} - T_{\gamma_0} U_h^*\|_{H^{1/2}(\gamma)} \leq c_{T_1} c_{T_2} C_{J,\Phi^\Omega} C_{B,\phi^\gamma} 2^{-(j-j')(s'-1)} \|\mu_{h'}\|_{H^{1/2}(\gamma)}, \quad (3.48)$$

et

$$\|U_h^*\|_{H^1(\Omega)} \leq c_{T_2} \|\mu_{h'}\|_{H^{1/2}(\gamma)} \left( C_{B,\phi^\gamma} C_{J,\Phi^\Omega} 2^{-(j-j')(s'-1)} + 1 \right). \quad (3.49)$$

2) De plus, si  $Q_{h'}^\gamma \in H^{s'-1/2}(\gamma)$ ,  $s' > 2$ , il existe pour tout  $\mu_{h'} \in Q_{h'}^\gamma$ , un élément  $V_h^* \in V_h^\Omega$  tel que,

$$\|\mu_{h'} - T_{\gamma_0} V_h^*\|_{H^{1/2}(\gamma)} \leq c_{T_1} c_{T_2} C_{J,\Theta^\Omega} C_{B,\phi^\gamma} 2^{-j(s'-2)+j'(s'-1)} \|\mu_{h'}\|_{H^{1/2}(\gamma)}, \quad (3.50)$$

et

$$\|V_h^*\|_{H^1(\Omega)} \leq c_{T_2} \|\mu_{h'}\|_{H^{1/2}(\gamma)} \left( C_{B,\phi^\gamma} C_{J,\Theta^\Omega} 2^{-j(s'-2)+j'(s'-1)} + 1 \right). \quad (3.51)$$

**Preuve:**

La preuve de 1) a déjà été faite dans [24], elle utilise les inégalités de Jackson (1.27) et celles du type Bernstein (inégalités (1.29) et (1.30)) dans  $\{Q_{j'}^\gamma\}_{j' \in \mathbb{Z}}$  et dans  $\{U_j^\Omega\}_{j \in \mathbb{Z}}$ .

Reste à montrer 2) :

Puisque  $Q_{h'}^\gamma \subset H^{s'-1/2}(\gamma)$ ,  $s' > 2$ , le théorème 3.1.3 garantit, pour tout  $\mu_{h'} \in Q_{h'}^\gamma$ , l'existence d'une extension  $E\mu_{h'} \in H^{s'}(\Omega)$  telle que,

$$T_{\gamma_0} E\mu_{h'} = \mu_{h'}, \quad (3.52)$$

et

$$\|E\mu_{h'}\|_{H^{s'}(\Omega)} \leq c_{T_2} \|\mu_{h'}\|_{H^{s'-1/2}(\gamma)}. \quad (3.53)$$

Pour tout  $\mu_{h'} \in Q_{h'}^\gamma$ , prenons  $V_h^* \in V_h^\Omega$  tel que,

$$\|E\mu_{h'} - V_h^*\|_{H^1(\Omega)} = \min_{V_h \in V_h^\Omega} \|E\mu_{h'} - V_h\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.54)$$

D'après les expressions (3.11) et (3.52), on peut écrire,

$$\begin{aligned} \|E\mu_{h'} - V_h^*\|_{H^1(\Omega)} &\geq \frac{1}{c_{T_1}} \|T_{\gamma_0}(E\mu_{h'} - V_h^*)\|_{H^{1/2}(\gamma)}, \\ \|E\mu_{h'} - V_h^*\|_{H^1(\Omega)} &\geq \frac{1}{c_{T_1}} \|\mu_{h'} - T_{\gamma_0}V_h^*\|_{H^{1/2}(\gamma)}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

En utilisant l'inégalité (1.73) et puisque  $E\mu_{h'} \in H^{s'}(\Omega)$ ,  $s' > 2$ , il vient,

$$\|\mu_{h'} - T_{\gamma_0}V_h^*\|_{H^{1/2}(\gamma)} \leq c_{T_1} C_{J,\Theta^\Omega} 2^{-j(s'-2)} \|E\mu_{h'}\|_{H^{s'}(\Omega)}. \quad (3.56)$$

Combinant (3.56) avec (3.53) et l'inégalité (1.30) pour les espaces  $\{Q_{j'}^\gamma\}_{j' \in \mathbb{Z}}$ , on obtient,

$$\|\mu_{h'} - T_{\gamma_0}V_h^*\|_{H^{1/2}(\gamma)} \leq c_{T_1} c_{T_2} C_{J,\Theta^\Omega} C_{B,\phi^\gamma} 2^{-j(s'-2)+j'(s'-1)} \|\mu_{h'}\|_{H^{1/2}(\gamma)}, \quad (3.57)$$

qui est l'inégalité (3.50).

De plus, écrivant  $\|V_h^*\|_{H^1(\Omega)} = \|V_h^* - E\mu_{h'}\|_{H^1(\Omega)} + \|E\mu_{h'}\|_{H^1(\Omega)}$ , les expressions (3.53) (pour  $s' = 1$ ), (1.73) et (1.30) donnent,

$$\begin{aligned} \|V_h^*\|_{H^1(\Omega)} &\leq c_{T_2} C_{J,\Theta^\Omega} C_{B,\phi^\gamma} 2^{-j(s'-2)+j'(s'-1)} \|\mu_{h'}\|_{H^{1/2}(\gamma)} + c_{T_2} \|\mu_{h'}\|_{H^{1/2}(\gamma)}, \\ &\leq c_{T_2} \|\mu_{h'}\|_{H^{1/2}(\gamma)} \left( C_{J,\Theta^\Omega} C_{B,\phi^\gamma} 2^{-j(s'-2)+j'(s'-1)} + 1 \right), \end{aligned} \quad (3.58)$$

qui est l'inégalité (3.51), ce qui conclut la preuve ■

En combinant les lemmes 3.2.1 et 3.2.2, nous prouvons la proposition 3.2.2.

**Preuve:**

Comme précédemment, nous ne nous intéressons qu'à la preuve de l'inégalité (3.45) puisque W. Dahmen et A. Kunoth fournissent, dans [24], la preuve de la condition (3.44) en utilisant les inégalités (3.47), (3.48) et (3.49). Ils aboutissent à la vérification de la condition Inf-Sup dès que  $j(s'-1) - j'(s'-1) \geq B$  où  $B$  dépend des paramètres du problème.

Suivant la même démarche, nous cherchons la condition qui garantit la condition Inf-Sup (3.45).

D'après le lemme 3.2.1, pour tout  $\mu_{h'} \in Q_{h'}^\gamma \subset H^{s'-1/2}(\gamma)$  avec  $s' > 2$ , il existe  $\mu_{h'}^*$  tel que,

$$\begin{aligned} \|\mu_{h'}\|_{H^{-1/2}(\gamma)} \|\mu_{h'}^*\|_{H^{1/2}(\gamma)} &\leq K \int_{\gamma} \mu_{h'} \mu_{h'}^* d\sigma, \\ &\leq K \int_{\gamma} \mu_{h'} (\mu_{h'}^* - T_{\gamma_0} V_h) d\sigma + K \int_{\gamma} \mu_{h'} T_{\gamma_0} V_h d\sigma, \end{aligned} \quad (3.59)$$

pour tout  $V_h \in V_h^\Omega$ .

Choisissant alors pour  $V_h$ , l'élément  $V_h^*$  qui vérifie les inégalités (3.50) et (3.51), l'expression (3.59) donne,

$$\begin{aligned} \|\mu_{h'}\|_{H^{-1/2}(\gamma)} \|\mu_{h'}^*\|_{H^{1/2}(\gamma)} &\leq K \|\mu_{h'}\|_{H^{-1/2}(\gamma)} \|\mu_{h'}^* - T_{\gamma_0} V_h^*\|_{H^{1/2}(\gamma)} + K \int_{\gamma} \mu_{h'} T_{\gamma_0} V_h^* d\sigma, \\ &\leq c_{T_1} c_{T_2} K C_{J,\Theta\Omega} C_{B,\phi\gamma} 2^{-j(s'-2)+j'(s'-1)} \|\mu_{h'}^*\|_{H^{1/2}(\gamma)} \|\mu_{h'}\|_{H^{-1/2}(\gamma)}, \\ &\quad + K \int_{\gamma} \mu_{h'} T_{\gamma_0} V_h^* d\sigma. \end{aligned} \quad (3.60)$$

L'inégalité (3.60) s'écrit,

$$\|\mu_{h'}\|_{H^{-1/2}(\gamma)} \|\mu_{h'}^*\|_{H^{1/2}(\gamma)} \left(1 - c_{T_1} c_{T_2} K C_{J,\Theta\Omega} C_{B,\phi\gamma} 2^{-j(s'-2)+j'(s'-1)}\right) \leq K \int_{\gamma} \mu_{h'} T_{\gamma_0} V_h^* d\sigma, \quad (3.61)$$

Supposant  $1 - c_{T_1} c_{T_2} K C_{J,\Theta\Omega} C_{B,\phi\gamma} 2^{-j(s'-2)+j'(s'-1)} > 0$ , i.e  $j(s'-2) - j'(s'-1) > B$  où  $B = \frac{\ln(c_{T_1} c_{T_2} K C_{J,\Theta\Omega} C_{B,\phi\gamma})}{\ln 2}$ , l'inégalité (3.51) permet de réécrire (3.61),

$$\|\mu_{h'}\|_{H^{-1/2}(\gamma)} \|V_h^*\|_{H^1(\Omega)} \frac{1 - K c_{T_1} c_{T_2} C_{J,\Theta\Omega} C_{B,\phi\gamma} 2^{-j(s'-2)+j'(s'-1)}}{c_{T_2} K (C_{B,\phi\gamma} C_{J,\Theta\Omega} 2^{-j(s'-2)+j'(s'-1)} + 1)} \leq \int_{\gamma} \mu_{h'} T_{\gamma_0} V_h^* d\sigma, \quad (3.62)$$

et on a,  $\forall \mu_{h'} \in Q_{h'}^\gamma$ ,

$$\frac{1 - c_{T_1} c_{T_2} K C_{J,\Theta^\Omega} C_{B,\phi^\gamma} 2^{-j(s'-2)+j'(s'-1)}}{c_{T_2} K \left( C_{B,\phi^\gamma} C_{J,\Theta^\Omega} 2^{-j(s'-2)+j'(s'-1)} + 1 \right)} \leq \sup_{V_h \in V_h^\Omega} \frac{b(V_h, \mu_{h'})}{\|\mu_{h'}\|_{H^{-1/2}(\gamma)} \|V_h\|_{H^1(\Omega)}}, \quad (3.63)$$

Puisque  $j(s' - 2) - j'(s' - 1) > B$ , le terme de gauche de l'inégalité peut être minorée indépendamment de  $j$  et  $j'$ , ce qui conduit à la condition Inf-Sup (3.45) et donc conclut la preuve.  $\blacksquare$

D'après le théorème 3.2.1, les propositions 3.2.1 et 3.2.2, l'existence et l'unicité de la solution du système (3.21) sont prouvées.

### Remarque 3.2.1

- Remarquons que la condition imposée sur  $(j, j')$  par la proposition 3.2.2 (i.e  $j(s' - 2) - j'(s' - 1) \geq B$ ) n'est pas très restrictive puisqu'en pratique, il est toujours possible de construire  $\{Q_{j'}^\gamma\}_{j' \in \mathbb{Z}} \in H^{s' - \frac{1}{2}}(\gamma)$  avec  $s' > 2$  simplement en augmentant l'ordre de l'analyse multirésolution.

- L'expression (3.63) entraîne aussi, à condition d'avoir  $j(s' - 2) - j'(s' - 1) > B$ ,

$$\forall \mu_{h'} \in Q_{h'}^\gamma, \quad \sup_{V_h \in V_h^\Omega} \frac{b(V_h, \mu_{h'})}{\|\mu_{h'}\|_{H^{-1/2}(\gamma)} \|V_h\|_{H^2(\Omega)}} > 0. \quad (3.64)$$

Ce résultat est utilisé dans le calcul de borne d'erreur de la section suivante.

## 3.3 Estimation d'erreur

En revenant à la succession de formulations introduites dans la discrétisation et l'approximation du problème (3.1), nous nous intéressons à la connection entre les différentes solutions. Plus précisément, nous présentons les estimations d'erreur associées à chaque problème. Elles conduisent à l'estimation globale pour  $\|u(\cdot, t_n) - R_\omega U_h^n\|_{L^2(\omega)}$ .

Ecrivant pour tout  $n$ ,

$$\forall n, \quad \|u(t_n, \cdot) - R_\omega U_h^n\|_{L^2(\omega)} \leq \|u(t_n, \cdot) - u^n\|_{L^2(\omega)} + \|u^n - R_\omega U_h^n\|_{L^2(\omega)}, \quad (3.65)$$

l'estimation de la borne d'erreur se fait en deux étapes : estimation de l'erreur de discrétisation temporelle ( $1^{ier}$  terme) puis de l'erreur de discrétisation spatiale ( $2^{nd}$  terme).

### 3.3.1 Erreur de discrétisation temporelle

Utilisant la décomposition  $u = u_g + w$  introduite au début de ce chapitre, nous énonçons la proposition suivante pour  $w$  et  $w^n$ .

#### Proposition 3.3.1

Il existe  $c$  indépendante de  $\delta t$  tel que

$$\| w(t_{n+1}, \cdot) - w^{n+1} \|_{L^2(\omega)} \leq \| w(t_0, \cdot) - w^0 \|_{L^2(\omega)} + cT\delta t. \quad (3.66)$$

Puisque  $u = u_g + w$ , la proposition 3.3.1 fournit la même estimation d'erreur pour  $\| u(t_{n+1}, \cdot) - u^{n+1} \|_{L^2(\omega)}$ .

**Preuve:**

Il est classique de réécrire la première équation du problème (3.1) comme

Trouver  $w \in C^1(0, T, C^2(\omega))$  tel que,

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{du_g}{dt} + \nu\Delta w + \nu\Delta u_g, \quad (3.67)$$

et de réécrire la première équation du problème (3.2) comme

Trouver  $w^{n+1} \in C^2(\omega)$  tel que,

$$\begin{aligned} \frac{w^{n+1} - w^n}{\delta t} = & - \frac{u_g(t_{n+1}, \cdot) - u_g(t_n, \cdot)}{\delta t} \\ & + \nu\Delta w^{n+1} + \nu\Delta u_g(t_{n+1}, \cdot). \end{aligned} \quad (3.68)$$

Soustrayant l'expression (3.67) à l'expression (3.68) et utilisant un développement de Taylor, nous obtenons en prenant  $t = t_{n+1}$  et en introduisant  $\forall n, e_n = w(t_n, \cdot) - w^n$

$$\| e_{n+1} \|_{L^2(\omega)} \leq \| e_n \|_{L^2(\omega)} + c\delta t^2. \quad (3.69)$$

En itérant l'inégalité (3.69),

$$\| e_{n+1} \|_{L^2(\omega)} \leq \| e_0 \|_{L^2(\omega)} + cT\delta t, \quad (3.70)$$

ce qui conclut la preuve. ■

### 3.3.2 Erreur de discrétisation spatiale

D'après le théorème 3.1.4,  $u^n = R_\omega U^n$ .  $R_\omega$  étant un opérateur linéaire borné, l'erreur de discrétisation spatiale est obtenue en majorant  $\| U^n - U_h^n \|_{L^2(\Omega)}$ .

Nous établissons l'estimation suivante

#### Proposition 3.3.2

Soit  $U^n$  (resp.  $U_h^n$ ) l'unique solution du problème (3.8) (resp. du problème (3.21)), alors on a

si  $\forall k \leq n+1$ ,  $U^k \in H^s(\Omega)$ ,  $s \leq m$  et  $\lambda^k \in H^{s'}(\gamma)$ ,  $s' \leq m'$ , alors

$$\| U_h^{n+1} - U^{n+1} \|_{L^2(\Omega)} \leq \| U_h^0 - U^0 \|_{L^2(\Omega)} + \frac{c'T}{\delta t} \left( 2^{-js} + 2^{-j's'} \right), \quad (3.71)$$

où  $c'$  est une constante indépendante de  $\delta x = 2^{-j}$ ,  $\delta y = 2^{-j}$  et de  $\delta t$ .

**Preuve:**

Combinant la première équation des problèmes (3.8) et (3.21), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \forall (U_h, V_h, \mu_{h'}) \in U_h^\Omega \times V_h^\Omega \times Q_{h'}^\gamma, \\ a_\Omega(U_h^{n+1} - U_h, V_h) - \nu \delta t b(V_h, \lambda_{h'}^{n+1} - \mu_{h'}) = a_\Omega(U^{n+1} - U_h, V_h) - \nu \delta t b(V_h, \lambda^{n+1} - \mu_{h'}) \\ + \langle U_h^n - U^n, V_h \rangle_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

De plus, d'après la continuité de l'opérateur trace (théorème 3.1.3), il vient,

$$\begin{aligned} \| T_{\gamma_0}(V_h) \|_{H^{1/2}(\gamma)} &\leq c_{T_1} \| V_h \|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \frac{c_{T_1}}{\min(1, \nu \delta t)} \| (I - \nu \delta t \Delta) V_h \|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Combinant ce résultat avec l'expression (3.72) et utilisant les définitions de  $a_\Omega$ , de  $b$  et l'inégalité de Hölder, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{a_\Omega(U_h^{n+1} - U_h, V_h)}{\| (I - \nu\delta t\Delta)V_h \|_{L^2(\Omega)}} + \frac{b(V_h, \nu\delta t(\mu_{h'} - \lambda_{h'}^{n+1}))}{\| (I - \nu\delta t\Delta)V_h \|_{L^2(\Omega)}} &\leq \| U^{n+1} - U_h \|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \frac{c_{T_1}\nu\delta t}{\min(1, \nu\delta t)} \| \mu_{h'} - \lambda^{n+1} \|_{H^{-1/2}(\gamma)} \\ &+ \| U_h^n - U^n \|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (3.74)$$

et donc,

$$\begin{aligned} \frac{a_\Omega(U_h^{n+1} - U_h, V_h)}{\| (I - \nu\delta t\Delta)V_h \|_{L^2(\Omega)}} + \frac{b(V_h, \nu\delta t(\mu_{h'} - \lambda_{h'}^{n+1}))}{\| (I - \nu\delta t\Delta)V_h \|_{L^2(\Omega)}} &\leq \| U_h^n - U^n \|_{L^2(\Omega)} \\ &+ C_{1,\delta t} \left( \| U^{n+1} - U_h \|_{L^2(\Omega)} + \| \mu_{h'} - \lambda^{n+1} \|_{H^{-1/2}(\gamma)} \right), \end{aligned} \quad (3.75)$$

avec  $C_{1,\delta t} = \max\left(\frac{c_{T_1}\nu\delta t}{\min(1, \nu\delta t)}, 1\right)$ .

Remarquant que  $\| V_h \|_{H^2(\Omega)} \sim \| (I - \nu\delta t\Delta)V_h \|_{L^2(\Omega)}$ , l'expression (3.75) devient, en utilisant l'inégalité (3.64),

$$\begin{aligned} \sup_{V_h \in V_h^\Omega} \frac{a_\Omega(U_h^{n+1} - U_h, V_h)}{\| (I - \nu\delta t\Delta)V_h \|_{L^2(\Omega)}} &\leq C_{1,\delta t} \left( \| U^{n+1} - U_h \|_{L^2(\Omega)} + \| \mu_{h'} - \lambda^{n+1} \|_{H^{-1/2}(\gamma)} \right) \\ &+ \| U_h^n - U^n \|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Définissons maintenant  $V_h = (I - \nu\delta t\Delta)^{-1} (U_h^{n+1} - U_h)$ . Par construction,  $V_h \in V_h^\Omega$  et l'expression (3.76) donne alors

$$\begin{aligned} \frac{a_\Omega(U_h^{n+1} - U_h, (1 - \nu\delta t\Delta)^{-1} (U_h^{n+1} - U_h))}{\| U_h^{n+1} - U_h \|_{L^2(\Omega)}} &\leq C_{1,\delta t} \| U^{n+1} - U_h \|_{L^2(\Omega)} \\ &+ C_{1,\delta t} \| \mu_{h'} - \lambda^{n+1} \|_{H^{-1/2}(\gamma)} \\ &+ \| U_h^n - U^n \|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Remarquant que

$$\frac{a_\Omega(U_h^{n+1} - U_h, (1 - \nu\delta t\Delta)^{-1} (U_h^{n+1} - U_h))}{\| U_h^{n+1} - U_h \|_{L^2(\Omega)}} = \| U_h^{n+1} - U_h \|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.78)$$

l'expression (3.77) fournit,  $\forall (U_h, \mu_{h'}) \in U_h^\Omega \times Q_{h'}^\gamma$ ,

$$\begin{aligned} \|U_h^{n+1} - U_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_{1,\delta t} \left( \|U^{n+1} - U_h\|_{L^2(\Omega)} + \|\mu_{h'} - \lambda^{n+1}\|_{H^{-1/2}(\gamma)} \right) \\ &+ \|U_h^n - U^n\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Ecrivaint

$$\|U_h^{n+1} - U^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|U_h^{n+1} - U_h\|_{L^2(\Omega)} + \|U_h - U^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.80)$$

nous trouvons finalement,

$$\begin{aligned} \|U_h^{n+1} - U^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} &\leq (C_{1,\delta t} + 1) \inf_{U_h \in U_h} \|U^{n+1} - U_h\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ (C_{1,\delta t} + 1) \inf_{\mu_{h'} \in Q_{h'}^\gamma} \|\mu_{h'} - \lambda^{n+1}\|_{H^{-1/2}(\gamma)} \\ &+ \|U_h^n - U^n\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

En itérant l'inégalité (3.81), il vient, si on introduit la quantité

$$r_k = \inf_{U_h \in U_h^\Omega} \|U^k - U_h\|_{L^2(\Omega)} + \inf_{\mu_{h'} \in Q_{h'}^\gamma} \|\mu_{h'} - \lambda^k\|_{H^{-1/2}(\gamma)}$$

$$\|U_h^{n+1} - U^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|U_h^0 - U^0\|_{L^2(\Omega)} + (C_{1,\delta t} + 1) \sum_{k=1}^{n+1} r_k. \quad (3.82)$$

D'après l'inégalité de Jackson (1.27),  $\forall s \leq m$  tel que  $U^k \in H^s(\Omega)$  pour tout  $k$ , et  $\forall s' \leq m'$  tel que  $\lambda^k \in H^{s'}(\gamma)$  pour tout  $k$ , on a

$$\inf_{U_h \in U_h^\Omega} \|U^k - U_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{J,\phi\Omega} 2^{-js} \|U^k\|_{H^s(\Omega)}, \quad (3.83)$$

$$\inf_{\mu_{h'} \in Q_{h'}^\gamma} \|\lambda^k - \mu_{h'}\|_{H^{-1/2}(\gamma)} \leq C_{J,\phi\gamma} 2^{-j's'} \|\lambda^k\|_{H^{s'}(\gamma)}, \quad (3.84)$$

et l'expression (3.82) devient

$$\|U_h^{n+1} - U^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|U_h^0 - U^0\|_{L^2(\Omega)} + \frac{c'_{\delta t} T}{\delta t} \left( 2^{-js} + 2^{-j's'} \right), \quad (3.85)$$

où  $c'_{\delta t} = \max(C_{J,\phi\Omega} \sup_{k \leq n+1} \|U^k\|_{H^s(\Omega)}, C_{J,\phi\gamma} \sup_{k \leq n+1} \|\lambda^k\|_{H^{s'}(\gamma)})(C_{1,\delta t} + 1)$ .

Pour  $\delta t$  assez petit,  $C_{1,\delta t}$  ne dépend pas de  $\delta t$ . Il en est donc de même pour  $c'_{\delta t}$  que l'on note  $c'$  et on obtient alors l'inégalité (3.71).  $\blacksquare$

### 3.3.3 Erreur globale

Finalement, l'estimation globale de l'erreur est déduite des propositions 3.3.1 et 3.3.2 et de l'inégalité (3.65) en s'assurant que les hypothèses sur la régularité sont vérifiées.

#### Proposition 3.3.3

Soit  $u$  (resp.  $U_h^n$ ) l'unique solution du problème (3.1) (resp. du problème (3.21)), alors

$$\begin{aligned} \| u(t_{n+1}, \cdot) - R_\omega U_h^{n+1} \|_{L^2(\omega)} &\leq \| u(\cdot, t_0) - u^0 \|_{L^2(\omega)} + \| U_h^0 - U^0 \|_{L^2(\Omega)} \\ &+ cT\delta t + \frac{c'T}{\delta t} (2^{-js} + 2^{-j's'}), \end{aligned} \quad (3.86)$$

où  $c$  et  $c'$  sont deux constantes indépendantes de  $\delta x, \delta y$  et  $\delta t$ .

Nous terminons cette section par quatre remarques :

#### Remarque 3.3.1

- Si nous choisissons un schéma d'approximation en temps d'ordre  $p$ , le troisième terme de la borne d'erreur (3.86) doit être remplacé par  $cT\delta t^p$ .
- A partir de l'estimation de l'erreur spatiale, on déduit une estimation d'erreur pour les multiplicateurs de Lagrange, utilisant la condition Inf-Sup (3.45),

$$\begin{aligned} \| \lambda(t_{n+1}, \cdot) - \lambda_h^{n+1} \|_{H^{-1/2}(\gamma)} &\leq \frac{K}{\delta t} \| U_h^0 - U^0 \|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \frac{K'}{\delta t^2} (2^{-js} + 2^{-j's'}), \end{aligned} \quad (3.87)$$

où  $K$  et  $K'$  sont deux constantes indépendantes de  $\delta x, \delta y$  et  $\delta t$ . L'estimation de  $\lambda(t_{n+1}, \cdot)$ ,  $n \geq 0$  est donc moins bonne que celle de  $u(t_{n+1}, \cdot)$ ,  $n \geq 0$  à cause du terme en  $\frac{1}{\delta t^2}$ .

#### Remarque 3.3.2

C'est un résultat classique ([40] par exemple) que  $\lambda^n = -[\frac{\partial U^n}{\partial n_\gamma}]_\gamma$  où  $[\cdot]_\gamma$  est le saut suivant la normale extérieure,  $n_\gamma$ , à  $\gamma$ . Ainsi, des multiplicateurs de Lagrange non nuls réduisent la régularité de  $U^n$ , plus précisément,  $U^n \in H^{\frac{3}{2}-\epsilon}(\Omega)$  avec  $\epsilon > 0$ . Cette perte de régularité a pour conséquence de limiter l'exposant  $s$  dans la borne d'erreur à  $s < \frac{3}{2}$ .

**Remarque 3.3.3**

Le lien entre  $\lambda^k$ ,  $R_\omega U^k$  et  $R_{\Omega \setminus \bar{\omega}} U^k$  implique que, pour tout  $k$ ,  $\|\lambda^k\|_{H^{s'}(\gamma)}$  est contrôlée par  $\|U^k\|_{H^s(\Omega)}$ . De plus, par construction,  $\|U^k\|_{H^s(\Omega)}$  est contrôlée pour tout  $k$  par  $\|U^0\|_{H^s(\Omega)}$ . Ainsi, la constante  $c'_{\delta t}$  est indépendante de  $n$  et dépend seulement de  $U^0$ .

**Remarque 3.3.4**

Observons que si  $\forall n, \lambda^n = 0$ , le problème de point selle n'est rien d'autre que la formulation faible classique d'un problème elliptique associé à la résolution de l'équation de la chaleur dans le domaine  $\Omega$ . Dans ce cas, la borne d'erreur s'écrit,

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t_{n+1}) - R_\omega U_h^{n+1}\|_{L^2(\omega)} &\leq \|u(\cdot, t_0) - u^0\|_{L^2(\omega)} + \|U_h^0 - U^0\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + cT\delta t + \frac{c'T}{\delta t} 2^{-jm}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Cette estimation est améliorée dans [14]-[16] sous la forme,

$$\|P_{U_h^\Omega} U^{n+1} - U_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|P_{U_h^\Omega} U^0 - U_h^0\|_{L^2(\Omega)} + c_1 \delta t + \frac{c_2}{\delta t} 2^{-2jm}, \quad (3.89)$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont deux constantes indépendantes de  $\delta x, \delta y$  et  $\delta t$ .

La formulation (3.89) est celle qui est utilisée dans la vérification numérique de l'erreur dans la chapitre 5.

Son avantage est que la norme  $\|P_{U_h^\Omega} U^{n+1} - U_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}$  se calcule de façon exacte à partir des coefficients d'échelle des fonctions  $P_{U_h^\Omega} U^{n+1}$  et  $U_h^{n+1}$ , qui sont des quantités auxquelles on a accès exactement, soit en sortie de l'algorithme de résolution, soit par une formule exacte de calcul. La norme de l'erreur s'obtient alors par la formule,

$$\|P_{U_h^\Omega} U^{n+1} - U_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\sum_{\alpha \in K_j} |c_\alpha^\Omega(U^{n+1}) - c_\alpha^\Omega(U_h^{n+1})|^2}. \quad (3.90)$$

On limite de ce fait toute source d'erreur d'approximation de la norme qui peut venir perturber la vérification de la borne d'erreur.

# Chapitre 4

## Implémentation de la méthode

Avant de décrire l'implémentation du problème (3.22) et le choix des espaces  $V_h^\Omega$ ,  $U_h^\Omega$  et  $Q_{h'}^\gamma$ , nous réécrivons le problème sous une forme vectorielle et analysons son conditionnement.

### 4.1 Formulation vectorielle

Par souci de simplicité, nous fournissons la formulation vectorielle du problème (3.22) dans le cas non adaptatif, i.e. quand on utilise les bases  $\{\Phi_\alpha^\Omega\}_{\alpha \in K_j}$  et  $\{\phi_{\alpha'}^\gamma\}_{\alpha' \in K_{j'}}$ .

Soit  $\mathbf{U}_h^n$  et  $\mathbf{\Lambda}_{h'}^n$ , les vecteurs des coordonnées de la solution approchée dans ces bases, on obtient,

$$\text{Si } \mathbf{U}_h^0 = \left( \langle U^0, \phi_\alpha^\Omega \rangle_{L^2(\Omega)} \right)_{\alpha \in K_j}, \\ \forall n \geq 0,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{U}_h^{n+1} \in \mathbb{R}^{4^j} \text{ et } \mathbf{\Lambda}_{h'}^{n+1} \in \mathbb{R}^{2^{j'}}, \text{ tel que,} \\ \mathbf{U}_h^{n+1} + C\mathbf{\Lambda}_{h'}^{n+1} = \mathbf{F}_h^n, \\ D\mathbf{U}_h^{n+1} = \mathbf{G}_{h'}^{n+1}, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où,

$$(\mathbf{F}_h^n)_\alpha = \langle U_h^n, \Xi_\alpha^\Omega \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad (4.2)$$

$$(\mathbf{G}_{h'}^n)_{\alpha'} = \langle g^n, \phi_{\alpha'}^\gamma \rangle_{L^2(\gamma)}, \quad (4.3)$$

$$C_{\alpha, \alpha'} = \langle T_{\gamma_0}(\Xi_\alpha^\Omega), \phi_{\alpha'}^\gamma \rangle_{L^2(\gamma)}, \quad (4.4)$$

$$D_{\alpha', \alpha} = \langle T_{\gamma_0}(\Phi_\alpha^\Omega), \phi_{\alpha'}^\gamma \rangle_{L^2(\gamma)}, \quad (4.5)$$

avec

$$\Xi_\alpha^\Omega = (1 - \nu\delta t\Delta)^{-1} \Phi_\alpha^\Omega. \quad (4.6)$$

La résolution de la formulation vectorielle (4.1) se fait à l'aide d'un algorithme d'Uzawa ([58]). Cet algorithme peut être défini comme un algorithme de descente sur l'équation,

$$(DC)^t DC \Lambda_{\mathbf{h}'}^{\mathbf{n}+1} = (DC)^t D\mathbf{F}_{\mathbf{h}}^{\mathbf{n}} - (DC)^t \mathbf{G}_{\mathbf{h}}^{\mathbf{n}+1}, \quad (4.7)$$

où l'exposant  $t$  désigne la transposée et complété par l'équation  $\mathbf{U}_{\mathbf{h}}^{\mathbf{n}+1} = \mathbf{F}_{\mathbf{h}}^{\mathbf{n}} - C\Lambda_{\mathbf{h}'}^{\mathbf{n}+1}$ .

Par construction, la matrice  $(DC)^t DC$  est symétrique, positive. D'après le résultat d'existence et d'unicité de la section 3.2, elle est aussi définie.

La vitesse de convergence d'un algorithme de descente pour la résolution d'un système linéaire est contrôlée par le conditionnement (section 1.2.2). C'est pourquoi, nous analysons dans la suite de ce chapitre le conditionnement de  $(DC)^t DC$  et nous construisons un préconditionneur qui conduit à un conditionnement indépendant de  $j$  et  $j'$ .

### Remarque 4.1.1

*Le choix d'une discrétisation du type Petrov-Galerkin permet d'éviter "l'inversion" d'une matrice de masse qui apparaît classiquement dans la première équation de la formulation vectorielle quand on choisit une discrétisation du type Galerkin ([43]). Il réduit, de ce fait, les causes de mauvais conditionnement du problème.*

## 4.2 Conditionnement de $(DC)^t DC$ et préconditionnement

### 4.2.1 Conditionnement

Nous commençons par établir le théorème suivant,

#### Théorème 4.2.1

*La matrice  $(DC)^t DC$  de taille  $(2^{j'} \times 2^{j'})$  satisfait l'estimation suivante,*

$$\begin{aligned} \exists 0 < K_1, K_2 < +\infty \text{ tel que } \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{2^{j'}} \\ 2^{-2j'} 2^{-2j} K_1 < \mathbf{w}, \mathbf{w} >_{l^2} \leq (DC)^t DC \mathbf{w}, \mathbf{w} >_{l^2} \leq 2^{2j} K_2 < \mathbf{w}, \mathbf{w} >_{l^2}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

*où les constantes  $K_1$  et  $K_2$  dépendent du problème et du choix des espaces  $U_h^\Omega$ ,  $V_h^\Omega$  et  $Q_{h'}^\gamma$ .*

*On a donc,  $\text{cond}_2 \left( (DC)^t DC \right) \leq \frac{K_2}{K_1} 4^{j'+2j}$ .*

**Preuve:**

Pour établir l'encadrement(4.8), nous montrons des encadrements similaires pour  $C^t C$  et  $D^t D$ . Puis, combinant ces deux estimations, nous obtenons l'estimation pour  $(DC)^t DC$ .

– Estimation pour  $C^t C$ .

D'après l'expression (4.4) de  $C_{\alpha, \alpha'}$ , il vient

$$\forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{2^{j'}}, \langle C^t C \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{l^2} = \sum_{\alpha \in K_j} \left| \int_{\gamma} T_{\gamma_0}(\Xi_{\alpha}^{\Omega}) \sum_{\alpha' \in K'_{j'}} \mathbf{w}_{\alpha'} \phi_{\alpha'}^{\gamma} \right|^2. \quad (4.9)$$

Nous commençons par établir la minoration de  $\langle C^t C \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{l^2}$ .

Ecrivant  $V_h = \sum_{\alpha \in K_j} \mathbf{z}_{\alpha} \Xi_{\alpha}^{\Omega}$  avec  $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_{\alpha})^t \in \mathbb{R}^{4^j}$  et  $\mu_{h'} = \sum_{\alpha' \in K'_{j'}} \mathbf{w}_{\alpha'} \phi_{\alpha'}^{\gamma}$ , la condition Inf-Sup (3.45) donne

$$\forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{2^{j'}}, \sup_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{4^j}} \frac{\int_{\gamma} \sum_{\alpha \in K_j} \mathbf{z}_{\alpha} T_{\gamma_0}(\Xi_{\alpha}^{\Omega}) \sum_{\alpha' \in K'_{j'}} \mathbf{w}_{\alpha'} \phi_{\alpha'}^{\gamma}}{\| \sum_{\alpha \in K_j} \mathbf{z}_{\alpha} \Xi_{\alpha}^{\Omega} \|_{H^1(\Omega)}} \geq \beta_1 \left\| \sum_{\alpha' \in K'_{j'}} \mathbf{w}_{\alpha'} \phi_{\alpha'}^{\gamma} \right\|_{H^{-1/2}(\gamma)}. \quad (4.10)$$

Utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz discrète, on a :

$$\int_{\gamma} \sum_{\alpha \in K_j} \mathbf{z}_{\alpha} T_{\gamma_0}(\Xi_{\alpha}^{\Omega}) \sum_{\alpha' \in K'_{j'}} \mathbf{w}_{\alpha'} \phi_{\alpha'}^{\gamma} \leq \left( \sum_{\alpha \in K_j} \mathbf{z}_{\alpha}^2 \right)^{1/2} \langle C^t C \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{l^2}^{1/2}, \quad (4.11)$$

ce qui donne

$$\frac{\int_{\gamma} \sum_{\alpha \in K_j} \mathbf{z}_{\alpha} T_{\gamma_0}(\Xi_{\alpha}^{\Omega}) \sum_{\alpha' \in K'_{j'}} \mathbf{w}_{\alpha'} \phi_{\alpha'}^{\gamma}}{\| \sum_{\alpha \in K_j} \mathbf{z}_{\alpha} \Xi_{\alpha}^{\Omega} \|_{H^1(\Omega)}} \leq \frac{\left( \sum_{\alpha \in K_j} \mathbf{z}_{\alpha}^2 \right)^{1/2}}{\| \sum_{\alpha \in K_j} \mathbf{z}_{\alpha} \Xi_{\alpha}^{\Omega} \|_{H^1(\Omega)}} \langle C^t C \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{l^2}^{1/2}. \quad (4.12)$$

Puisque,

$$\left\| \sum_{\alpha \in K_j} \mathbf{z}_{\alpha} \Xi_{\alpha}^{\Omega} \right\|_{H^1(\Omega)} = \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{1 + \omega^2}{(1 + \nu \delta t \omega^2)^2} \left( \sum_{\alpha \in K_j} \mathbf{z}_{\alpha} \widehat{\Phi}_{\alpha}^{\Omega} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad (4.13)$$

il vient,

$$\begin{aligned}
\| \sum_{\alpha \in K_j} \mathbf{z}_\alpha \Xi_\alpha^\Omega \|_{H^1(\Omega)} &\geq \frac{1}{\max(1, \nu \delta t)} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + \omega^2} \left( \sum_{\alpha \in K_j} \mathbf{z}_\alpha \widehat{\Phi}_\alpha^\Omega \right)^2 \right)^{1/2}, \\
&\geq \frac{1}{\max(1, \nu \delta t)} \| \sum_{\alpha \in K_j} \mathbf{z}_\alpha \Phi_\alpha^\Omega \|_{H^{-1}(\Omega)}, \\
&\geq \frac{1}{\max(1, \nu \delta t)} C_{B, \Phi^\Omega} 2^{-j} \| \sum_{\alpha \in K_j} \mathbf{z}_\alpha \Phi_\alpha^\Omega \|_{L^2(\Omega)}, \\
&= \frac{1}{\max(1, \nu \delta t)} C_{B, \Phi^\Omega} 2^{-j} \left( \sum_{\alpha \in K_j} z_\alpha^2 \right)^{1/2} \quad (4.14)
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité (1.29) ( $s = -1$ ) pour obtenir la dernière inégalité.

Les inégalités (4.10), (4.12) et (4.14) donnent,

$$\forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{2^{j'}} , \langle C^t C \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{l^2} \geq 2^{-j'} 2^{-2j} K_{1,C} \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{l^2} . \quad (4.15)$$

Nous établissons maintenant la majoration de  $\langle C^t C \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{l^2}$ .

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz continue et la continuité de l'opérateur trace (théorème 3.1.3), il vient

$$\forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{4^j} \text{ et } \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{2^{j'}} ,$$

$$\int_{\gamma} \sum_{\alpha \in K_j} \mathbf{z}_\alpha T_{\gamma_0}(\Xi_\alpha^\Omega) \sum_{\alpha' \in K'_{j'}} \mathbf{w}_{\alpha'} \phi_{\alpha'}^\gamma \leq c_{T_1} \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{l^2}^{1/2} \| \sum_{\alpha \in K_j} \mathbf{z}_\alpha \Xi_\alpha^\Omega \|_{H^2(\Omega)}, \quad (4.16)$$

et l'expression (4.16) conduit à :

$$\int_{\gamma} \sum_{\alpha \in K_j} \mathbf{z}_\alpha T_{\gamma_0}(\Xi_\alpha^\Omega) \sum_{\alpha' \in K'_{j'}} \mathbf{w}_{\alpha'} \phi_{\alpha'}^\gamma \leq K_{2,C} \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{l^2}^{1/2} \left( \sum_{\alpha \in K_j} z_\alpha^2 \right)^{1/2} . \quad (4.17)$$

Choisissant

$$\mathbf{z}_\alpha = \int_{\gamma} T_{\gamma_0}(\Xi_\alpha^\Omega) \sum_{\alpha' \in K'_{j'}} \mathbf{w}_{\alpha'} \phi_{\alpha'}^\gamma, \quad (4.18)$$

et se souvenant de l'expression (4.9), nous obtenons finalement :

$$\forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{2^{j'}} , \langle C^t C \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{l^2} \leq K_{2,C} \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{l^2} . \quad (4.19)$$

Les expressions (4.15) et (4.19) fournissent alors une estimation pour  $C^t C$ ,

$$\forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{2^{j'}} , 2^{-j'} 2^{-2j} K_{1,C} \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{l^2} \leq \langle C^t C \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{l^2} \leq K_{2,C} \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{l^2} . \quad (4.20)$$

– Estimation pour  $D^t D$  :

Par construction de  $D_{\alpha',\alpha}$  (voir expression (4.5)), on peut écrire

$$\forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{4^j} , \langle D^t D \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle_{l^2} = \sum_{\alpha' \in K'_{j'}} \left| \int_{\gamma} \phi_{\alpha'}^{\gamma} \sum_{\alpha \in K_j} \mathbf{z}_{\alpha} T_{\gamma_0}(\Phi_{\alpha}^{\Omega}) \right|^2 . \quad (4.21)$$

Comme précédemment, la minoration de  $\langle D^t D \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle_{l^2}$  est d'abord établie.

D'après la proposition 7.4.1 de [58] (p 248), la condition Inf-Sup (3.44) peut être reformulée par

$$\sup_{\mu_{h'} \in Q_{h'}^{\gamma}, \mu_{h'} \neq 0} \frac{\int_{\gamma} T_{\gamma_0}(U_h^{\perp}) \mu_{h'}}{\|\mu_{h'}\|_{H^{-1/2}(\gamma)}} \geq \beta_2 \|U_h^{\perp}\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall U_h^{\perp} \in (U_h^{0,\Omega})^{\perp}, \quad (4.22)$$

où  $U_h^{0,\Omega} = \{U_h \in U_h^{\Omega} / b(U_h, \mu_{h'}) = 0, \forall \mu_{h'} \in Q_{h'}^{\gamma}\}$  et  $\perp$  représente l'orthogonalité au sens de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .

Ecrivant,

$$U_h = \sum_{\alpha \in K_j} \mathbf{z}_{\alpha} \Phi_{\alpha}^{\Omega}, \quad (4.23)$$

$$\mu_{h'} = \sum_{\alpha' \in K'_{j'}} \mathbf{w}_{\alpha'} \phi_{\alpha'}^{\gamma}, \quad (4.24)$$

il vient

$$U_h^{0,\Omega} = \left\{ \sum_{\alpha \in K_j} \mathbf{z}_{\alpha} \Phi_{\alpha}^{\Omega} / \mathbf{z} \in Ker(D) \right\}. \quad (4.25)$$

La condition inf-sup (3.36) devient alors,

$$\forall \mathbf{z} \in (\text{Ker}(D))^\perp,$$

$$\sup_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{2j'}} \frac{\int_\gamma \sum_{\alpha \in K_j} \mathbf{z}_\alpha T_{\gamma_0}(\phi_\alpha^\Omega) \sum_{\alpha' \in K_{j'}} \mathbf{w}_{\alpha'} \phi_{\alpha'}^\gamma}{\| \sum_{\alpha' \in K_{j'}} \mathbf{w}_{\alpha'} \phi_{\alpha'}^\gamma \|_{H^{-1/2}(\gamma)}} \geq \beta_2 \left\| \sum_{\alpha \in K_j} \mathbf{z}_\alpha \phi_\alpha^\Omega \right\|_{H^1(\Omega)}. \quad (4.26)$$

Utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz discrète, on obtient :

$$\int_\gamma \sum_{\alpha \in K_j} \mathbf{z}_\alpha T_{\gamma_0}(\phi_\alpha^\Omega) \sum_{\alpha' \in K_{j'}} \mathbf{w}_{\alpha'} \phi_{\alpha'}^\gamma \leq \left( \sum_{\alpha' \in K_{j'}} \mathbf{w}_{\alpha'}^2 \right)^{1/2} \langle D^t D \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle_{l^2}^{1/2}. \quad (4.27)$$

La combinaison entre (4.27) et (4.26) conduit à, en utilisant l'inégalité (1.29) (pour  $s' = -\frac{1}{2}$ ),

$$\forall \mathbf{z} \in (\text{Ker}(D))^\perp, \langle D^t D \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle_{l^2} \geq 2^{-j'} K_{1,D} \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle_{l^2}. \quad (4.28)$$

Nous obtenons maintenant la majoration de  $\langle D^t D \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle_{l^2}$ , en suivant la même démarche que celle utilisée, pour établir la majoration de  $\langle C^t C \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{l^2}$ .

En effet, choisissant,

$$\mathbf{w}_{\alpha'} = \int_\gamma \phi_{\alpha'}^\gamma \sum_{\alpha \in K_j} \mathbf{z}_\alpha T_{\gamma_0}(\Phi_\alpha^\Omega), \quad (4.29)$$

l'inégalité de Cauchy-Schwarz continue, la continuité de l'opérateur trace et l'inégalité (1.30) ( $s=1$ ) donnent,

$$\forall \mathbf{z} \in (\text{Ker}(D))^\perp, \langle D^t D \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle_{l^2} \leq 2^{2j} K_{2,D} \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle_{l^2}. \quad (4.30)$$

Finalement, les expressions (4.28) et (4.30) fournissent une estimation pour  $D^t D$ ,

$$\forall \mathbf{z} \in (\text{Ker}(D))^\perp, 2^{-j'} K_{1,D} \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle_{l^2} \leq \langle D^t D \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle_{l^2} \leq 2^{2j} K_{2,D} \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle_{l^2}. \quad (4.31)$$

Nous regroupons alors les estimations (4.20) et (4.31) pour obtenir un encadrement pour  $(DC)^t DC$ .

– Estimation pour  $(DC)^t DC$

Pour chaque  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{2^{j'}}$ , nous définissons  $\mathbf{z} = C\mathbf{w}$ .

Si  $\mathbf{z} \in \text{Ker}(D)$ , alors  $\mathbf{w} \in \text{Ker}((DC)^t DC)$  et l'inversibilité de  $(DC)^t DC$  entraîne  $\mathbf{w} = 0$ . L'inégalité (4.8) est donc trivialement vérifiée.

Si  $\mathbf{z} \in (\text{Ker}(D))^\perp$ , l'estimation (4.31) donne :

$$2^{-j'} K_{1,D} \langle C\mathbf{w}, C\mathbf{w} \rangle_{l^2} \leq \langle D^t DC\mathbf{w}, C\mathbf{w} \rangle_{l^2} \leq 2^{2j} K_{2,D} \langle C\mathbf{w}, C\mathbf{w} \rangle_{l^2}, \quad (4.32)$$

et l'estimation (4.20) nous permet d'écrire :

$$2^{-2j'} 2^{-2j} K_{1,C} K_{1,D} \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{l^2} \leq \langle D^t DC\mathbf{w}, C\mathbf{w} \rangle_{l^2} \leq 2^{2j} K_{2,D} K_{2,C} \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{l^2}. \quad (4.33)$$

qui est bien l'estimation énoncée avec  $K_1 = K_{1,C} K_{1,D}$  et  $K_2 = K_{2,C} K_{2,D}$ .

D'après les théorèmes 1.2.2 et 4.2.1, on obtient,

$$\text{cond}_2 \left( (DC)^t DC \right) \leq \frac{K_2}{K_1} 4^{j'+2j} \quad (4.34)$$

■

## 4.2.2 Préconditionnement

Les bases d'ondelettes de  $Q_{j'}^\gamma$  et  $U_j^\Omega$  peuvent alors être utilisées pour construire un préconditionneur de  $(DC)^t DC$  (section 1.2.2).

En suivant la preuve du théorème 4.2.1, on montre que, si  $\tilde{C}$  et  $\tilde{D}$  sont définies par,

$$\tilde{C}_{\alpha,\alpha'} = 2^{-\frac{|\alpha'|}{2}} 2^{-|\alpha|} \langle T_{\gamma_0}(\Xi_\alpha^\Omega), \psi_{\alpha'}^\gamma \rangle_{L^2(\gamma)} \quad (4.35)$$

$$\tilde{D}_{\alpha',\alpha} = 2^{-\frac{|\alpha'|}{2}} 2^{-|\alpha|} \langle T_{\gamma_0}(\Phi_\alpha^\Omega), \psi_{\alpha'}^\gamma \rangle_{L^2(\gamma)}, \quad (4.36)$$

alors le conditionnement de  $(\tilde{D}\tilde{C})^t \tilde{D}\tilde{C}$  satisfait, uniformément en  $j$  et  $j'$ ,

$$\text{cond}_2 \left( (\tilde{D}\tilde{C})^t \tilde{D}\tilde{C} \right) \leq K. \quad (4.37)$$

Nous terminons ce chapitre en décrivant l'implémentation de la formulation vectorielle (4.1).

### 4.3 Implémentation du problème

Nous commençons par décrire les analyses multirésolutions que nous avons choisies pour l'implémentation.

- L'analyse multirésolution associée à  $\Omega$  est une analyse orthogonale périodique spline bi-dimensionnelle (section 1.1.2 et 1.3.1) construite suivant la technique du produit tensoriel (section 1.1.2). Nous notons  $\{B_\alpha^N\}_{\alpha \in K_j}$ , la famille de  $B^N$ -spline bi-dimensionnelle servant à construire la famille  $\{\Phi_\alpha^\Omega\}_{\alpha \in K_j}$  en utilisant la formule d'orthonormalisation (1.84). La solution numérique que nous cherchons appartient alors à l'ensemble des fonctions périodiques de  $H^1(\Omega)$ . Nous supposons que l'analyse précédente de la méthode (existence, unicité, borne d'erreur, conditionnement) reste valide avec les hypothèses de périodicité.

- L'analyse multirésolution associée à  $\gamma$  est construite en transportant sur  $\gamma$ , par une transformation  $C^1$  par morceaux, une analyse de  $L^2([0, 1])$  (section 1.3.2). Suivant la remarque 1.3.1, les fonctions de base de l'analyse multirésolution correspondante ne définissent plus une famille orthogonale au sens du produit scalaire dans  $L^2$  usuel mais au sens du produit scalaire  $L^2$  pondéré par le Jacobien de la transformation qui permet de passer de l'intervalle  $[0, 1]$  à la frontière  $\gamma$  (expression (1.92)). Puisque le Jacobien de la transformation est borné, on admet que les résultats précédents, démontrés pour une analyse multirésolution orthogonale de  $L^2(\gamma)$ , sont aussi valides ici.

Nous revenons tout d'abord sur la construction de la transformation qui permet de passer de l'intervalle  $[0, 1]$  à la frontière  $\gamma$ . Puis, nous abordons l'implémentation des différents termes du problème vectoriel (4.1).

#### 4.3.1 Représentation de $\gamma$ à l'aide de courbes de Bezier

La définition suivante ([34]) précise la notion de courbes de Bezier.

##### Définition 4.3.1

*La courbe de Bezier associée aux points de contrôle  $\{P_i\}_{0 \leq i \leq L}$  est la courbe paramétrique polynomiale de degré  $L$  définie par,*

$$\forall \tau \in [0, 1],$$

$$\begin{cases} X(\tau) = \sum_{i=0}^L Be_i^L(\tau) X_{P_i}, \\ Y(\tau) = \sum_{i=0}^L Be_i^L(\tau) Y_{P_i}. \end{cases} \quad (4.38)$$

$$\text{où } Be_i^L(\tau) = \frac{L!}{i!(L-i)!} \tau^i (1-\tau)^{L-i}.$$

La figure 4.1 donne un exemple de courbe de Bezier associée à trois points de contrôle.

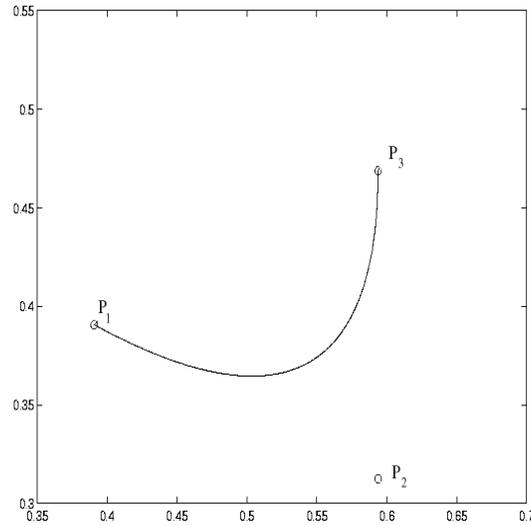


FIG. 4.1 – Exemple de courbe de Bezier associée à 3 points de contrôle

Nous utilisons la transformation  $\mathcal{B}_L$  pour transporter l'analyse multirésolution de  $L^2([0, 1])$  sur  $\gamma$ .

Dans la section 4.3.2, on est amené à estimer les coefficients d'échelle d'une fonction  $f$  associée à l'analyse multirésolution sur  $\gamma$ , en suivant le calcul effectué dans la section 1.3.2. On a donc besoin du Jacobien de la transformation  $\mathcal{B}_L$ . Son expression est donnée par la proposition suivante.

**Proposition 4.3.1**

Soient  $\{P_i\}_{0 \leq i \leq L}$  une famille de points de contrôle, le Jacobien de  $\mathcal{B}_L(P_0, \dots, P_L; \tau)$ , noté  $|J_{\mathcal{B}_L}|$  s'écrit  $|J_{\mathcal{B}_L}| = \sqrt{X'(\tau)^2 + Y'(\tau)^2}$  avec,

$$\forall \tau \in [0, 1],$$

$$\begin{cases} X'(\tau) = L \sum_{i=0}^{L-1} B e_i^{L-1}(\tau)(X_{P_{i+1}} - X_{P_i}), \\ Y'(\tau) = L \sum_{i=0}^{L-1} B e_i^{L-1}(\tau)(Y_{P_{i+1}} - Y_{P_i}). \end{cases} \quad (4.39)$$

Les courbes de Bezier présentent plusieurs avantages,

- Elles permettent de définir des courbes de régularité quelconque à partir seulement de quelques points et conduisent donc à la construction

de frontière suffisamment régulière pour pouvoir définir les opérateurs classiques tels que l'opérateur trace.

- Par définition, elles fournissent explicitement la fonction  $C^1$  qui transforme  $[0, 1]$  en une partie de  $\gamma$ .

### 4.3.2 Implémentation des différents termes du problème vectoriel (4.1)

#### Pré-calculs

##### Evaluation des matrices $D$ et $C$ :

Nous commençons par décrire l'algorithme de calcul des termes de la matrice  $D$ .

Nous rappelons (voir expression (4.5)) que les coefficients de  $D$  s'écrivent,

$$\forall (\alpha, \alpha') \in K_j \times K'_{j'},$$

$$D_{\alpha', \alpha} = \int_{\gamma} \Phi_{\alpha}^{\Omega}(\sigma) \phi_{\alpha'}^{\gamma}(\sigma) d\sigma, \quad (4.40)$$

En utilisant la transformation  $\mathcal{B}_L$  et en suivant le même type de calcul que dans la section 1.3.2, on peut écrire,

$$D_{\alpha', \alpha} = \int_{[0,1]} \Phi_{\alpha}^{\Omega}(\mathcal{B}_L(\tau)) \phi_{\alpha'}^{[0,1]}(\tau) |J_{\mathcal{B}_L}| d\tau, \quad (4.41)$$

$$= c_{\alpha'}^{[0,1]} \left( |J_{\mathcal{B}_L}| \Phi_{\alpha}^{\Omega} \circ \mathcal{B}_L \right), \quad (\alpha, \alpha') \in K_j \times K'_{j'}. \quad (4.42)$$

où  $\{\phi_{\alpha'}^{[0,1]}\}_{\alpha' \in K'_{j'}}$  est la famille de fonctions d'échelle de l'analyse multirésolution de  $L^2([0, 1])$  décrite dans la section 1.3.2.

L'estimation du coefficient  $c_{\alpha'}^{[0,1]} \left( |J_{\mathcal{B}_L}| \Phi_{\alpha}^{\Omega} \circ \mathcal{B}_L \right)$  se fait suivant la démarche proposée dans la section 1.3.2 et décrite en annexe A.2. Elle suppose donc l'évaluation de la fonction  $|J_{\mathcal{B}_L}| \Phi_{\alpha}^{\Omega} \circ \mathcal{B}_L$  sur la grille dyadique  $X^{j'}$  ou sur toute grille de la forme  $X^{j'+l}$ ,  $l \geq 0$ . Pour des raisons de précision, nous avons pris  $l = 2$ .

L'estimation de  $D_{\alpha', \alpha}$  se fait alors en deux étapes : on commence d'abord par évaluer  $D_{\alpha', \alpha}$  pour  $\alpha' \in K'_{j'+2}$  par une formule de quadrature du type (A.18), (A.19) et (A.20) où les points de la formule de quadrature appartiennent à la grille  $X^{j'+2}$ . L'algorithme de passage (1.31) permet ensuite de

calculer  $D_{\alpha',\alpha}$  pour  $\alpha' \in K'_{j'}$ .

Nous revenons maintenant sur la première étape de l'estimation, c'est à dire l'évaluation des valeurs aux points de la grille  $X^{j'+2}$  de la fonction  $|J_{\mathcal{B}_L}| \Phi_\alpha^\Omega \circ \mathcal{B}_L$ .

Le calcul des valeurs aux points se fait aussi en deux étapes :

- évaluation des valeurs aux points de la grille de la fonction  $|J_{\mathcal{B}_L}| B_\alpha^N \circ \mathcal{B}_L$ ,  $\alpha \in K_j$  :

Remarquant que,  $\forall k' \in \{0, \dots, 2^{j'+2} - 1\}$ ,

$$|J_{\mathcal{B}_L}| \left(\frac{k'}{2^{j'+2}}\right) \cdot (B_\alpha^N \circ \mathcal{B}_L) \left(\frac{k'}{2^{j'+2}}\right) = |J_{\mathcal{B}_L}| \left(\frac{k'}{2^{j'+2}}\right) \cdot B_\alpha^N(X_m, Y_m) \quad (4.43)$$

où  $(X_m, Y_m)$  est l'image de  $\frac{k'}{2^{j'+2}}$  par  $\mathcal{B}_L$  (système (4.38)), la proposition 1.3.1 permet d'obtenir la valeur de  $B_\alpha^N(X_m, Y_m)$  et le système (4.39) conduit à la valeur de  $|J_{\mathcal{B}_L}| \left(\frac{k'}{2^{j'+2}}\right)$ .

- Passage des valeurs aux points de  $|J_{\mathcal{B}_L}| \left(\frac{k'}{2^{j'+2}}\right) | B_\alpha^N(X_m, Y_m)$  aux valeurs aux points de  $|J_{\mathcal{B}_L}| \left(\frac{k'}{2^{j'+2}}\right) | \Phi_\alpha^\Omega(X_m, Y_m)$  par la relation (1.88).

Nous terminons par le calcul des termes de la matrice  $C$ .

Sachant que les coefficients de  $C$  s'écrivent (voir expression (4.4)),

$$\forall (\alpha, \alpha') \in K_j \times K'_{j'},$$

$$C_{\alpha,\alpha'} = \int_\gamma \Xi_\alpha^\Omega(\sigma) \phi_{\alpha'}^\gamma(\sigma) d\sigma, \quad (4.44)$$

la démarche est la même que pour le calcul de  $D_{\alpha,\alpha'}$ . On commence par mettre (4.44) sous la forme,

$$C_{\alpha,\alpha'} = c_{\alpha'}^{[0,1]} \left( |J_{\mathcal{B}_L}| \Xi_\alpha^\Omega \circ \mathcal{B}_L \right), \quad (\alpha, \alpha') \in K_j \times K'_{j'}. \quad (4.45)$$

L'estimation du coefficient (4.45) se fait en suivant la même démarche que pour l'estimation de la quantité (4.42). Elle suppose donc en particulier la connaissance des valeurs aux points de la fonction  $\Xi_\alpha^\Omega$ ,  $\alpha \in K_j$ , en n'importe quel point arbitraire  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Ces valeurs sont approchées, en suivant la remarque 1.2.1, à partir des valeurs aux points des fonctions  $\Phi_\alpha^\Omega$ ,  $\alpha \in K_p$  où  $p > j$ . Ici,  $p = j + 3$  ([16]). L'estimation complète combine alors formule de

quadrature définie sur la grille  $X^{j+3}$  et algorithme en arbre.

### Initialisation de l'algorithme d'Uzawa

L'algorithme de résolution est initialisé en évaluant,

$$(\mathbf{U}_h^0)_\alpha = \langle U^0, \Phi_\alpha^\Omega \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \alpha \in K_j. \quad (4.46)$$

Cette évaluation nécessite d'abord la construction d'un prolongement,  $U^0$ , de la solution initiale  $u_0$  de  $\omega$  à  $\Omega$ . Cette étape joue un rôle clé qui contrôle la régularité de la solution autour de la frontière  $\gamma$  quand on itère le problème de point selle. Cependant, la construction d'un prolongement optimal n'est pas étudiée ici. Nous mentionnons simplement que des développements en série de Fourier ([33]) ou des analyses multirésolutions sur l'intervalle fournissent des outils intéressants pour la construction de ce prolongement (nous revenons en détail sur ce point dans la conclusion générale de ce mémoire). Dans la suite, des prolongements peu coûteux sont utilisés.

Trois approches sont ensuite considérées pour le calcul du produit scalaire (4.46), en remarquant que  $\forall \alpha \in K_j$ ,  $(\mathbf{U}_h^0)_\alpha = c_\alpha^\Omega(U^0)$

- la première ([14]) consiste à utiliser une formule de projection orthogonale dans l'espace  $U_h^\Omega$ . A cet effet, on rappelle que la projection orthogonale de  $U^0$  dans  $U_h^\Omega$  s'écrit, en remplaçant  $\alpha$  par le triplet  $(j, k_1, k_2)$ ,

$$P_{U_h^\Omega} U^0 = \sum_{(k_1, k_2) \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^2} c_{j, k_1, k_2}^\Omega(U^0) \Phi_{j, k_1, k_2}^\Omega. \quad (4.47)$$

Dans l'espace de Fourier, l'expression (4.47) devient,

$$\forall (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2, \quad P_{U_h^\Omega} \widehat{U^0}(\omega_1, \omega_2) = m_j(U^0)(\omega_1, \omega_2) \widehat{\Phi}_{j, 0, 0}^\Omega(\omega_1, \omega_2), \quad (4.48)$$

où  $\widehat{\Phi}_{j, 0, 0}^\Omega(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2^j} \widehat{\Phi}_{0, 0, 0}^\Omega(\frac{\omega_1}{2^j}, \frac{\omega_2}{2^j})$  et  $m_j(U^0)$  est le symbole  $2^{j+1}\pi$ -périodique tel que,

$$m_j(U^0)(\omega_1, \omega_2) = \sum_{(z_1, z_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} \widehat{U^0}(\omega_1 + z_1 2^{j+1} \pi, \omega_2 + z_2 2^{j+1} \pi) \widehat{\Phi}_{j, 0, 0}^\Omega(\omega_1 + z_1 2^{j+1} \pi, \omega_2 + z_2 2^{j+1} \pi). \quad (4.49)$$

Pour obtenir les produits scalaires  $\{\langle U^0, \Phi_\alpha^\Omega \rangle_{L^2(\Omega)}\}$ ,  $\alpha \in K_j$ , il suffit alors par identification d'appliquer la transformée de Fourier inverse à  $2^j \times 2^j$  points à la suite de valeurs  $\{m_j(U^0)(k_1, k_2), (k_1, k_2) \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^2\}$ .

Le calcul de  $m_j(U^0)$  se fait en tronquant la somme infinie car les termes deviennent rapidement négligeables puisque les fonctions  $\Phi_{j,0,0}^\Omega$  sont à décroissance exponentielle (proposition 1.3.3).

Remarquons que cette approche est précise mais suppose que l'on connaisse la transformée de Fourier du prolongement  $U^0$ , ce qui n'est pas toujours le cas. Elle est utilisée dans la vérification de l'estimation d'erreur.

- La seconde méthode ([55]) fait intervenir un filtre d'interpolation qui permet de passer des valeurs aux points d'une fonction à ses coefficients d'échelle.

Plus précisément, à partir des valeurs aux points  $\{U^0(l2^{-j}, k2^{-j})\}_{(l,k) \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^2}$ , les coefficients  $\{c_\alpha^\Omega(U^0)\}_{\alpha \in K_j}$  s'obtiennent par la relation suivante, en repassant à la notation  $\alpha = (j, k_1, k_2)$ ,

$$\forall (k_1, k_2) \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^2,$$

$$c_{j,k_1,k_2}^\Omega(U^0) = \sum_{(l,k) \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^2} U^0(l2^{-j}, k2^{-j}) L_j(k_1 - l) L_j(k_2 - k), \quad (4.50)$$

où le filtre  $L_j$  est connu, dans le cas des analyses multirésolutions splines d'ordre  $m$  pair, à travers sa transformée de Fourier qui s'écrit,

$$\forall k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}, \hat{L}_j(k) = \frac{1}{2^{\frac{3j}{2}}} L\left(\frac{k\pi}{2^j}\right), \quad (4.51)$$

avec,

$$L(x) = \frac{[P_{m-1}(\sin^2(x))]^{1/2}}{P_{m/2-1}(\sin^2(x))}. \quad (4.52)$$

Le calcul des coefficients du polynôme  $P_m$  est fait dans [55].

La quantité (4.50) est alors calculée en remarquant que c'est un produit de convolution discret.

- La troisième façon ([14]) repose sur l'existence de  $2m - 1$  moments nuls de  $\Phi_{0,0,0}^\Omega$  et utilise l'estimation suivante,

si  $U^0 \in C^s(\Omega)$ ,  $s \leq 2m - 1$  et  $s$  fois dérivable alors  $\forall \alpha \in K_j$ ,

$$2^j c_\alpha^\Omega(U^0) = U^0(k_1 2^{-j}, k_2 2^{-j}) + O(2^{-sj}), \quad (4.53)$$

Le choix du prolongement joue donc un rôle important dans la qualité d'approximation de  $c_\alpha^\Omega(U^0)$  à l'aide des valeurs aux points puisqu'il va contrôler la valeur de l'exposant  $s$ .

### Calcul à chaque itération

Pour tout  $n \geq 0$ , connaissant le vecteur  $\{(\mathbf{U}_h^n)_\alpha\}_{\alpha \in K_j}$ ,  $(\mathbf{F}_h^n)_\alpha$ ,  $\alpha \in K_j$  (expression (4.2)) est calculé par la formule,

$$(\mathbf{F}_h^n)_\alpha = \langle U_h^n, \Xi_\alpha^\Omega \rangle_{L^2(\Omega)} = \sum_{\alpha_1 \in K_j} (\mathbf{U}_h^n)_{\alpha_1} \langle \Phi_{\alpha_1}^\Omega, \Xi_\alpha^\Omega \rangle_{L^2(\Omega)} \quad (4.54)$$

Si l'on revient aux notations  $\alpha = (j, k_1, k_2)$  et  $\alpha_1 = (j, l, k)$ , l'expression (4.54) s'écrit,

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}_h^n)_{j,k_1,k_2} &= \sum_{(l,k) \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^2} (\mathbf{U}_h^n)_{j,l,k} \langle \Phi_{j,l,k}^\Omega, \Xi_{j,k_1,k_2}^\Omega \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \sum_{(l,k) \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^2} (\mathbf{U}_h^n)_{j,l,k} \langle \Phi_{j,l-k_1,k-k_2}^\Omega, \Xi_{j,0,0}^\Omega \rangle_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \quad (4.55)$$

L'expression (4.55) est alors évaluée en remarquant que c'est un produit de convolution discret. Le calcul est effectué dans le domaine de Fourier, les produits scalaires  $\{\langle \Phi_\alpha^\Omega, \Xi_{j,0,0}^\Omega \rangle_{L^2(\Omega)}\}$ ,  $\alpha \in K_j$  étant calculés une fois pour toute à l'aide du symbole (4.49) pour la fonction  $\Xi_\alpha^\Omega$ ,  $\alpha \in K_j$ .

Enfin, connaissant  $\forall n \geq 0$ ,  $g(t_{n+1}, \cdot)$ , l'estimation du vecteur  $\{(\mathbf{G}_h^{n+1})_{\alpha'}\}_{\alpha' \in K'_j}$  (expression (4.3)) se fait en combinant formule de quadrature et algorithme en arbre pour garantir une estimation satisfaisante de cette quantité.

L'implémentation de l'algorithme global d'approximation se résume de la façon suivante,

**Algorithme de résolution**

- Choix des paramètres :  $m, m', j, j', \delta t, T$

**Pré-calculs**

- Evaluation des matrices  $D$  et  $C$ .
- Calcul des produits scalaires  $\{\langle \Phi_\alpha^\Omega, \Xi_{j,0,0}^\Omega \rangle_{L^2(\Omega)}\}, \alpha \in K_j$ .
- Prolongement de  $u_0$  sur  $\Omega \setminus \bar{\omega}$  puis évaluation de  $\mathbf{U}_h^0$ .

**Résolution à chaque itération,  $n \geq 0$ ,**

- Evaluation de  $\mathbf{F}_h^n$  et  $\mathbf{G}_{h'}^{n+1}$ .
- Calcul de  $\mathbf{\Lambda}_{h'}^{n+1}$  en résolvant par l'algorithme d'Uzawa,

$$(DC)^t DC \mathbf{\Lambda}_{h'}^{n+1} = (DC)^t D \mathbf{F}_h^n - (DC)^t \mathbf{G}_{h'}^{n+1},$$

- Calcul de  $\mathbf{U}_h^{n+1}$  par,

$$\mathbf{U}_h^{n+1} = \mathbf{F}_h^n - C \mathbf{\Lambda}_{h'}^{n+1}.$$



# Chapitre 5

## Résultats numériques

Dans ce chapitre, nous donnons quelques résultats numériques pour l'équation de la chaleur introduite au chapitre 3 avec  $\Omega = [0, 1]^2$ , en utilisant l'algorithme implémenté au chapitre 4.

Les trois premiers tests présentés ici sont des tests de validation numérique de l'analyse théorique de la méthode fournie dans les chapitres précédents. Ils correspondent à différents domaines  $\omega$ , différentes extensions de  $u_0$  à  $\Omega \setminus \bar{\omega}$  et différentes conditions aux bords.

Dans les deux premières tests (section 5.1 et 5.2),  $\nu$  est fixé à  $\frac{1}{4\pi^2}$  et  $\omega = ]0; 1[ \times ]0; 0.5[$ . La condition initiale est  $\forall (x, y) \in \omega, u_0(x, y) = \sin(2\pi y)$  et la condition aux bords est  $\forall (x, y) \in \gamma, g(t, x, y) = e^{-t} \sin(2\pi y)$ . Nous nous intéressons d'abord à la validation numérique de la borne d'erreur obtenue au chapitre 3 puis à la vérification de la connection entre les multiplicateurs de Lagrange et la solution dans  $\Omega$  (remarque 3.3.2). Le troisième test (section 5.3) est réalisé sur un problème ayant comme domaine  $\omega = ]0.35; 0.62[ \times ]0.35; 0.62[$ . Nous fixons  $\nu = \frac{1}{64\pi^2}$ , la solution initiale est  $u_0(x, y) = \sin(8\pi y)$  et la condition aux bords est  $\forall (x, y) \in \gamma, g(t, x, y) = e^{-t} \sin(8\pi y)$ . Nous nous concentrons sur l'évaluation du conditionnement de la matrice d'itération d'Uzawa  $(DC)^t DC$ .

Les deux derniers tests (section 5.4) correspondent à deux applications de notre algorithme de résolution. La première application concerne la résolution de problèmes définis sur des domaines non polygonaux, ici, un cercle. La deuxième application est consacrée à la résolution de problèmes définis sur un domaine initial carré avec une frontière dont l'évolution est contrôlée par une équation que l'on précisera.

## 5.1 Vérification de la borne d'erreur

Ici,  $u_0$  est prolongé sur  $\Omega$  par  $U^0(x, y) = \sin(2\pi y)$ , i.e par un prolongement  $C^\infty$   $\Omega$ -périodique.

La solution du problème de point selle est  $\forall n, \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, U^n(x, y) = e^{-n\delta t} \sin(2\pi y)$ , ce qui entraîne, d'après la remarque 3.3.2,  $\forall n, \lambda^n = 0$ .

Conformément à la remarque 3.3.4, le calcul de  $\| P_{U_h^\Omega} U^{n+1} - U_h^{n+1} \|_{L^2(\Omega)}$  par la formule (3.90) nécessite le calcul des coefficients d'échelle  $\{c_\alpha^\Omega(U^{n+1})\}_{\alpha \in K_j}$  et  $\{c_\alpha^\Omega(U_h^{n+1})\}_{\alpha \in K_j}$ .

Puisque la transformée de Fourier de  $U^{n+1}$ ,  $n \geq 0$  est connue, la première quantité est alors obtenue par une formule de projection orthogonale du type (4.48) en remplaçant  $U^0$  par  $U^{n+1}$ . Quant à la seconde quantité, elle est directement donnée par construction, par le vecteur  $\{\mathbf{U}_h^{n+1}\}_{\alpha \in K_j}$ .

### 5.1.1 Erreur en temps

Ici, nous fixons  $m = m' = 4$  et  $j = 6$ . La figure 5.1 présente sur une échelle logarithmique l'erreur quand  $\delta t$  varie de  $10^{-9}$  à  $10^{-5}$ .

On vérifie un comportement de l'erreur en accord avec les estimations de la proposition 3.3.3, c'est à dire, une pente (-1) pour des faibles  $\delta t$  et une pente (+1) pour des  $\delta t$  grands. La valeur optimale théorique de  $\delta t$  est de l'ordre de  $6.10^{-8}$ .

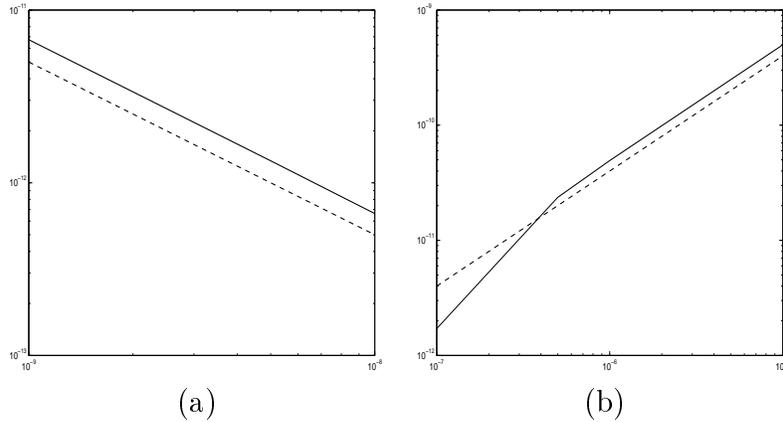


FIG. 5.1 – Erreur de discrétisation en temps, --- : comportement théorique, — : estimation numérique, (a)  $T = 10^{-6}$  (b)  $T = 10^{-4}$ .

### 5.1.2 Erreur en espace

Sur la figure 5.2, nous traçons l'erreur numérique quand  $m = m' = 4$ ,  $\delta t = 10^{-8}$  en fonction de l'échelle  $j$  avec  $4 \leq j \leq 6$  dans une échelle semi-logarithmique.

Nous pouvons encore noter la concordance satisfaisante entre l'erreur théorique et son estimation numérique, c'est à dire, dans une échelle semi-logarithmique, une décroissance de l'erreur en fonction de  $j$  avec une pente  $-2m = -8$  (d'après la remarque 3.3.4).

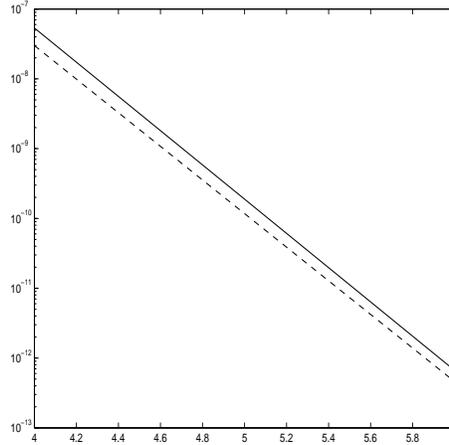


FIG. 5.2 – Erreur en espace, --- : comportement théorique, — : estimation numérique.

## 5.2 Connection entre la solution sur $\Omega$ et les multiplicateurs de Lagrange

Ici,  $u_0$  est prolongé sur  $\Omega$  par,  $U^0(x, y) = -\sin(2\pi y)$  dans  $\Omega \setminus \bar{\omega}$ .

Observons que c'est une extension  $C^0$   $\Omega$ -périodique avec une discontinuité dans la dérivée normale à  $\gamma$ .

On vérifie facilement que, pour chaque  $n \geq 0$ , la solution  $U_h^n$  est l'approximation de

$$\begin{cases} U^n(x, y) = e^{-n\delta t} \sin(2\pi y) \text{ dans } \omega, \\ U^n(x, y) = -e^{-n\delta t} \sin(2\pi y) \text{ dans } \Omega \setminus \bar{\omega}. \end{cases} \quad (5.1)$$

La solution numérique est tracée sur la figure 5.3 et le tableau 5.1 fournit une comparaison entre l'estimation numérique des multiplicateurs  $\lambda^n$  et la valeur théorique de  $[\frac{\partial U^n}{\partial n_\gamma}]_\gamma$  pour différentes valeurs de  $n$ .

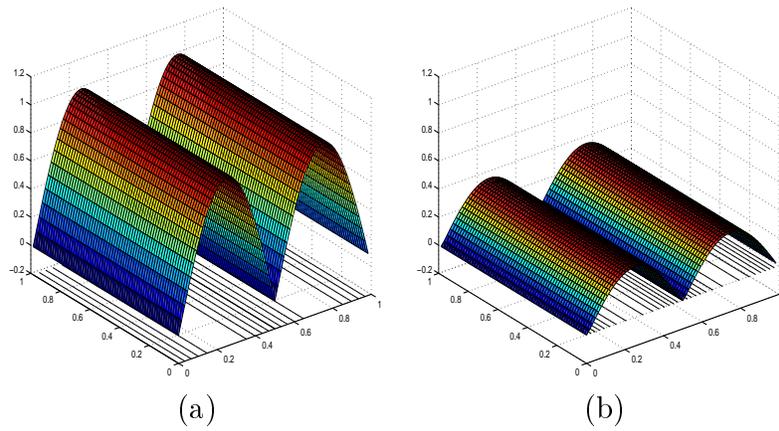


FIG. 5.3 – *Solution numérique* :  $j = 6$ ,  $j' = 4$ ,  $m = m' = 4$ ,  $\delta t = 0.01$  (a)  $T = 0$ , (b)  $T = 1$  .

$n$	$[\frac{\partial U^n}{\partial n_\gamma}]_\gamma$	$\lambda_h^n$
20	10.2885	-10.4632
50	7.6219	-7.6814
100	4.6229	-4.6219

TAB. 5.1 – Multiplicateurs de Lagrange sur la ligne  $y = 0.5$  pour différentes valeurs de  $n$ ,  $\delta t = 0.01$ ,  $j = 6$ ,  $j' = 4$ .

Comme on peut le voir sur la figure 5.3, les multiplicateurs de Lagrange non nuls traduisent la non régularité de la solution (remarque 3.3.2) et donc réduisent l'efficacité des espaces d'approximation. Pour contourner cette difficulté liée aux multiplicateurs de Lagrange, un raffinement local de l'espace d'approximation de  $U^n$  est nécessaire. Cette procédure est classique quand on travaille avec des méthodes à base d'ondelettes. Observons que la technique de raffinement peut aussi être utilisée pour renforcer les conditions Inf-Sup car ces conditions sont également locales puisqu'elles concernent uniquement les fonctions de base sur  $\Omega$  qui coupent la frontière.

## 5.3 Solution numérique, décomposition en ondelettes et conditionnement de la matrice d'itération d'Uzawa

### 5.3.1 Solution numérique

La figure 5.4 représente le prolongement initial  $U^0$  (obtenu en étendant  $u_0$  en dehors de  $\omega$  par une constante dans la direction de la normale à  $\gamma$ ) et la solution numérique à  $T = 2$ . Les constantes du problème sont  $j = 6$ ,  $j' = 4$ ,  $m = m' = 4$  et  $\delta t = 10^{-2}$ .

Il est intéressant de noter la forte variation de  $\frac{\partial U^n}{\partial y}$  (ou de  $\frac{\partial U^n}{\partial x}$ ) aux bords du domaine ( $\{y = 0.35\}$ ,  $\{y = 0.62\}$ ,  $\{x = 0.35\}$  et  $\{x = 0.62\}$ ) (figures 5.4 (b)), en accord avec la remarque 3.3.2, puisque le choix d'un prolongement  $C^0$  conduit à des multiplicateurs de Lagrange non nuls. Cependant, la restriction de la solution à  $\omega$  (figures 5.4 (c) et (d)) reste une "bonne" approximation de  $U(t, x, y) = e^{-t} \sin(8\pi y)$ .

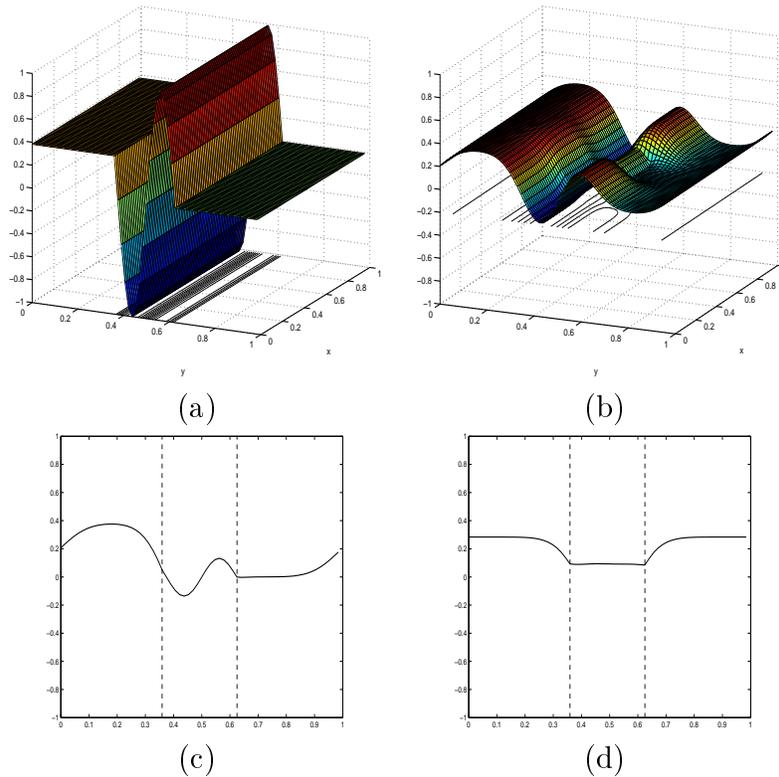


FIG. 5.4 – Solution numérique (a)  $T=0$ , (b)  $T = 2$ , (c) coupe de la solution suivant  $x=0.54$ , (d) coupe de la solution suivant  $y=0.6$ .

Sur la figure 5.5, nous avons représenté les positions  $(k_1 2^{-j}, k_2 2^{-j})$  associées aux coefficients d'ondelettes non nuls de  $U^n$  après un seuillage de paramètre  $\epsilon$ , c'est à dire, pour  $0 \leq l \leq j-1$ , les positions associées aux coefficients  $\{d_\alpha^{\Omega, i}(U^n)\}_{(\alpha, i) \in A_l}$  tels que  $|d_\alpha^{\Omega, i}(U^n)| \geq \epsilon$ , pour  $n\delta t = 2$  et  $\epsilon = 3.10^{-5}$ . Cette représentation justifie alors clairement l'utilisation d'espaces adaptés pour l'approximation de  $U^n$  puisque les coefficients d'ondelettes de petite échelle (i.e. pour  $j$  grand) sont principalement localisés au voisinage de la frontière du domaine  $\omega$ .

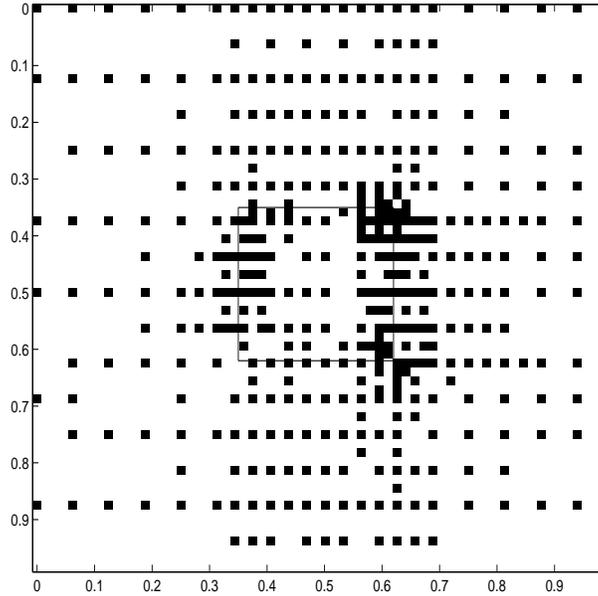


FIG. 5.5 – Décomposition en ondelettes de la solution à  $T = 2$ . Tous les coefficients d'ondelettes  $\langle U^n, \psi_\alpha^{\Omega, i} \rangle_{L^2(\Omega)}$  ayant un module plus grand que  $\epsilon = 3.10^{-5}$  sont représentés par un carré noir. Les lignes en pointillé représentent le domaine carré  $\omega$ .

### 5.3.2 Conditionnement

Le tableau 5.2 et la figure 5.6 présentent l'évolution du conditionnement de la matrice d'itération  $(DC)^t DC$  en fonction de  $j$  (avec  $j' = 4$ ,  $m = m' = 4$  et  $\delta t = 10^{-2}$ ) et en fonction de  $j'$  (avec  $j = 9$ ,  $m = m' = 4$ , et  $\delta t = 10^{-2}$ ). La ligne en pointillé sur la figure 5.6 représente l'estimation théorique obtenue dans la section 4.2.1, c'est à dire la quantité  $4^{j'}$  dans une échelle semi-logarithmique.

La concordance entre le calcul et l'estimation est satisfaisante pour la dépendance en  $j'$  du conditionnement (à partir de  $j' \geq 6$ ). Cependant, la

dépendance en  $j$  n'est pas vérifiée ici puisque, comme dans [43], le conditionnement ne semble pas dépendre de façon significative de  $j$ . Nous n'avons pas d'explication pour l'instant.

$j$	$cond_2((DC)^t DC)$
6	1.78
7	1.64
8	1.5
9	1.6

TAB. 5.2 – Conditionnement de la matrice d'itération en fonction de  $j$ .

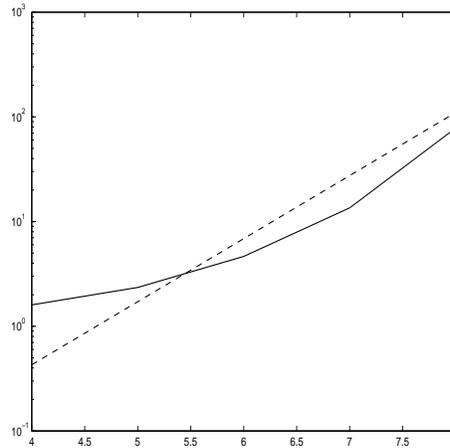


FIG. 5.6 – Conditionnement de la matrice d'itération en fonction de  $j'$ ,  $--$  : comportement théorique,  $—$  : estimation numérique.

## 5.4 Deux applications de l'algorithme de résolution

### 5.4.1 Application à la résolution d'un problème défini sur un domaine non polygonal

Ici,  $\omega$  est le cercle centré au point  $(0.5; 0.5)$  et de rayon  $R = 0.2$ . Nous fixons  $\nu = \frac{1}{6\pi^2}$  et la condition initiale est  $\forall (x, y) \in \omega$ ,  $u_0(x, y) = \frac{\pi}{t_0} e^{-\frac{3}{2}\pi^2 \frac{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2}{t_0}}$ . La condition aux bords est  $g = 0$ . La condition initiale est prolongée dans  $\Omega \setminus \bar{\omega}$  par  $U_0(x, y) = 0$ .

Les paramètres de résolution sont  $j = 6$ ,  $m = m' = 4$ ,  $\delta t = 10^{-2}$  et  $t_0 = 0.01$ .

La figure 5.7 représente la solution à différents temps (figure 5.7 (a) à (c)), ainsi qu'une superposition (figure 5.7 (d)) entre une coupe de la solution de ce problème (fonction en trait plein sur la figure) et une coupe de la solution du problème qui consisterait à ne pas imposer 0 à l'extérieur du domaine. On résoudrait alors une équation de la chaleur sur  $\Omega$  et la solution serait une gaussienne de la forme  $\forall (x, y) \in \Omega$ ,  $U^n(t, x, y) = \frac{\pi}{t_0+t} e^{-\frac{3}{2}\pi^2 \frac{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2}{(t_0+t)}}$  (fonction en pointillé sur la figure).

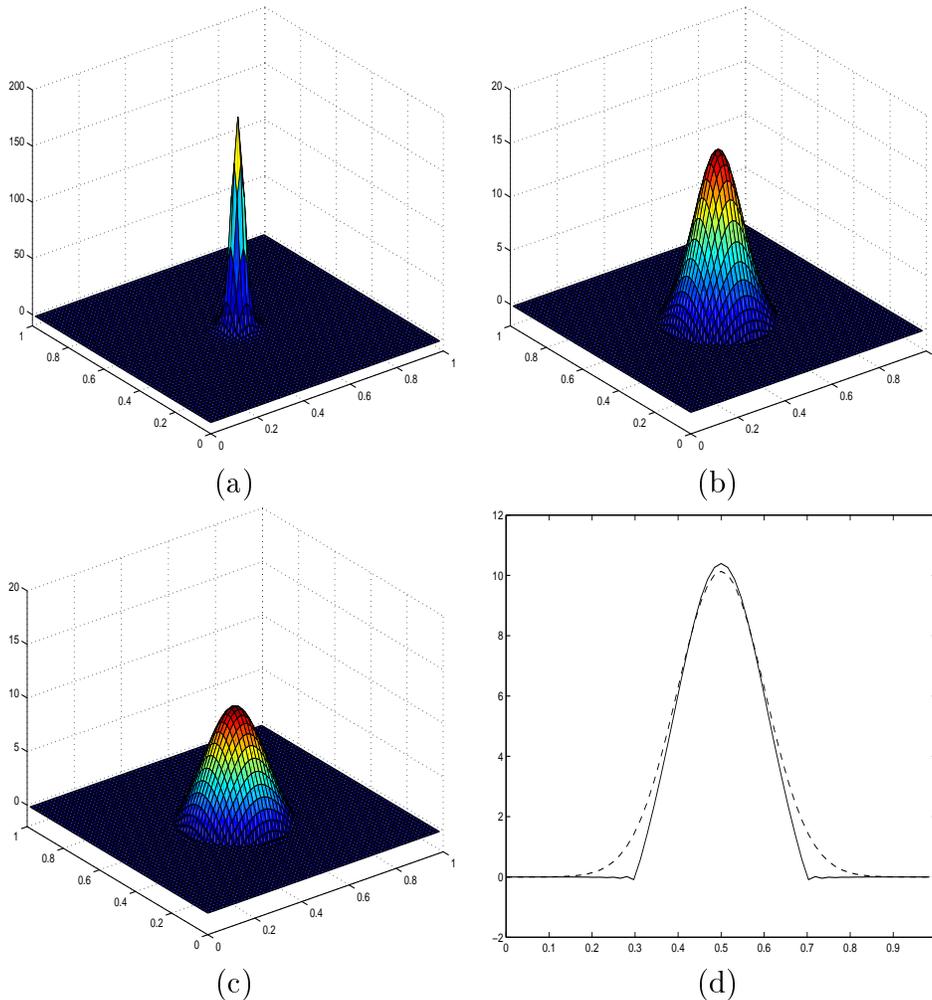


FIG. 5.7 – Solution numérique pour un problème défini sur un cercle (a)  $T = t_0 + 0.01$ , (b)  $T = t_0 + 0.2$ , (c)  $T = t_0 + 0.3$ , (d) coupe de la solution à  $T = t_0 + 0.3$  suivant  $x=0.5$ , la courbe en trait plein est la solution du problème, la courbe en pointillé représente la solution de l'équation de la chaleur sur  $\Omega$  sans imposer 0 sur la frontière.

## 5.4.2 Application à la résolution d'un problème avec frontière mobile

Nous proposons ici une application de notre algorithme à la résolution de problèmes avec frontière évolutive au cours du temps. La frontière à l'instant  $t$  est notée  $\gamma(t)$  et on suppose que, pour tout  $t$ , elle est suffisamment régulière pour définir l'opérateur trace. Elle définit un nouveau domaine  $\omega(t)$  que nous notons aussi  $\omega_n$  quand  $t = t_n$ .

Le problème que nous considérons ici est un problème couplé. Plus précisément, il consiste à coupler, à l'équation de la chaleur sur  $\omega(t)$ , une équation d'évolution de la frontière qui impose à  $\gamma(t)$  de se déplacer en fonction d'une vitesse,  $V(u)$ , qui dépend de la solution de l'équation de la chaleur dans  $\omega(t)$ . Cette équation s'écrit,

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + V(u) \cdot n_\gamma = 0 \quad (5.2)$$

où on rappelle que  $n_\gamma$  est la normale extérieure à  $\gamma$ .

Dans ce qui suit, nous commençons par présenter la méthode de résolution de ce type de problème dans le cas général puis nous fournissons un exemple de problème de couplage qui correspond à la fonte d'un glaçon séparant deux milieux.

### 1) Résolution du problème de couplage : cas général

La résolution de ce type de problème nécessite de résoudre à chaque temps,  $t$ , chacune des équations couplées. Cette section est consacrée à la résolution numérique de l'équation d'évolution (5.2), l'équation de la chaleur ayant fait l'objet des chapitres précédents.

Nous commençons par reformuler l'équation (5.2) sous une forme plus pratique qui est utilisée pour la résolution. Cette reformulation consiste à transformer l'équation (5.2) en une équation vérifiée par une fonction de **Level Set**.

#### **Reformulation de l'équation (5.2) par l'approche Level Set**

Les méthodes de Level Set pour suivre une interface  $\gamma(t)$  se déplaçant à une vitesse  $V$  ont été introduites par Osher et Sethian dans [53]. L'idée est d'introduire une fonction de Level Set, notée  $\mathcal{D}$ , telle que, pour tout  $t$ , le zéro de la fonction indique la position de l'interface. Cette fonction s'écrit à l'instant  $t = 0$ , avec les notations de notre problème,

$$\forall (x, y) \in \Omega,$$

$$\mathcal{D}(0, x, y) = f(x, y), \quad (5.3)$$

où

$$f(x, y) > 0, \text{ si } (x, y) \in \Omega \setminus \bar{\omega}_0, \quad (5.4)$$

$$f(x, y) = 0, \text{ si } (x, y) \in \gamma(t = 0), \quad (5.5)$$

$$f(x, y) < 0, \text{ si } (x, y) \in \omega_0. \quad (5.6)$$

La connaissance de la fonction  $f$  fournit non seulement la position de l'interface à  $t = 0$  mais aussi la localisation d'un côté ou de l'autre de  $\gamma(t = 0)$  d'un point quelconque  $(x, y)$ .

Nous cherchons alors l'équation que doit vérifier  $\mathcal{D}$  sachant que l'interface, se déplace à la vitesse  $V$  et que le zéro de la fonction ligne de niveau doit, pour tout  $t$ , indiquer la position de l'interface, i.e  $\mathcal{D}(t, x, y) = 0$  si  $(x, y) \in \gamma(t)$ . Puisque l'interface se déplace à la vitesse  $V$ , toute paramétrisation de l'interface  $X_\gamma$  vérifie l'équation différentielle suivante,

$$\frac{dX_\gamma(\sigma, t)}{dt} = V(X_\gamma(\sigma, t), t) \quad (5.7)$$

où  $\sigma$  désigne l'abscisse curviligne.

De plus, on impose d'avoir  $\forall t$ ,  $\mathcal{D}(t, X_\gamma(\sigma, t)) = 0$ . En différentiant cette relation et en utilisant l'égalité (5.7), il vient,

$$\frac{d\mathcal{D}(t, X_\gamma)}{dt} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \frac{dX_\gamma}{dt} \cdot \nabla \mathcal{D} \quad (5.8)$$

$$= \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + V \cdot \nabla \mathcal{D} = 0, \quad (5.9)$$

La reformulation de l'équation (5.2) s'écrit donc,

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + V(u) \cdot \nabla \mathcal{D} = 0. \quad (5.10)$$

### Résolution numérique de l'équation d'évolution (5.10)

Nous supposons ici que la vitesse,  $V(u)$ , est connue pour tout  $t$  et nous notons  $\forall t$ ,  $V_x(t)$  (resp.  $V_y(t)$ ) sa composante horizontale (resp. verticale).

La résolution numérique de l'équation (5.10) utilise un schéma TVD (Total Variation Diminishing) à limiteurs de flux ([46]). Ce type de schéma a été construit pour avoir un schéma d'approximation d'ordre 2 en espace sur les parties régulières de la solution tout en supprimant les oscillations que ce type de schéma engendre quand on est près d'une discontinuité (ici près de la frontière). Ce résultat est essentiel puisque la position de la frontière est définie par le passage à 0 de la fonction de Level Set,  $\mathcal{D}$ , et donc des oscillations trop importantes conduisent à une fausse détection

Nous commençons par discrétiser l'équation (5.10) par un schéma d'Euler explicite en temps de pas  $\delta t_{fr}$  et un schéma Upwind en espace de pas  $\delta x = \delta y = 2^{-j}$ . Introduisant  $\mathcal{D}_{k_1, k_2}^{n_{fr}}$ , l'approximation de  $\mathcal{D}(n_{fr}\delta t_{fr}, k_1 2^{-j}, k_2 2^{-j})$  et notant  $V_x^{n_{fr}} = V_x(n_{fr}\delta t_{fr})$  (resp.  $V_y^{n_{fr}} = V_y(n_{fr}\delta t_{fr})$ ), la discrétisation de l'équation (5.10) s'écrit,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{k_1, k_2}^{n_{fr}+1} = \mathcal{D}_{k_1, k_2}^{n_{fr}} & - V_x^{n_{fr}} \frac{\delta t_{fr}}{\delta x} (A_x^+ \mathcal{D}_{k_1-1/2, k_2}^{n_{fr}} + A_x^- \mathcal{D}_{k_1+1/2, k_2}^{n_{fr}}) \\ & - V_y^{n_{fr}} \frac{\delta t_{fr}}{\delta y} (A_y^+ \mathcal{D}_{k_1, k_2-1/2}^{n_{fr}} + A_y^- \mathcal{D}_{k_1, k_2+1/2}^{n_{fr}}), \end{aligned} \quad (5.11)$$

où

$$A_x^+ \mathcal{D}_{k_1-1/2, k_2}^{n_{fr}} = \begin{cases} \mathcal{D}_{k_1, k_2}^{n_{fr}} - \mathcal{D}_{k_1-1, k_2}^{n_{fr}}, & \text{si } V_x^{n_{fr}} > 0, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.12)$$

$$A_x^- \mathcal{D}_{k_1+1/2, k_2}^{n_{fr}} = \begin{cases} \mathcal{D}_{k_1+1, k_2}^{n_{fr}} - \mathcal{D}_{k_1, k_2}^{n_{fr}}, & \text{si } V_x^{n_{fr}} < 0, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.13)$$

et

$$A_y^+ \mathcal{D}_{k_1, k_2-1/2}^{n_{fr}} = \begin{cases} \mathcal{D}_{k_1, k_2}^{n_{fr}} - \mathcal{D}_{k_1, k_2-1}^{n_{fr}}, & \text{si } V_y^{n_{fr}} > 0, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.14)$$

$$A_y^- \mathcal{D}_{k_1, k_2+1/2}^{n_{fr}} = \begin{cases} \mathcal{D}_{k_1, k_2+1}^{n_{fr}} - \mathcal{D}_{k_1, k_2}^{n_{fr}}, & \text{si } V_y^{n_{fr}} < 0, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.15)$$

On rajoute alors dans l'équation (5.11) un terme correcteur de flux qui garantit un schéma d'approximation TVD.

Ce schéma s'écrit,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{k_1, k_2}^{n_{fr}+1} = \mathcal{D}_{k_1, k_2}^{n_{fr}} & - V_x^{n_{fr}} \frac{\delta t_{fr}}{\delta x} (A_x^+ \mathcal{D}_{k_1-1/2, k_2}^{n_{fr}} + A_x^- \mathcal{D}_{k_1+1/2, k_2}^{n_{fr}}) \\
& - \frac{\delta t_{fr}}{\delta x} (F_{k_1+1/2, k_2}^{n_{fr}} - F_{k_1-1/2, k_2}^{n_{fr}}) \\
& - V_y^{n_{fr}} \frac{\delta t_{fr}}{\delta y} (A_y^+ \mathcal{D}_{k_1, k_2-1/2}^{n_{fr}} + A_y^- \mathcal{D}_{k_1, k_2+1/2}^{n_{fr}}) \\
& - \frac{\delta t_{fr}}{\delta y} (F_{k_1, k_2+1/2}^{n_{fr}} - F_{k_1, k_2-1/2}^{n_{fr}}), \tag{5.16}
\end{aligned}$$

où les expressions des flux  $F_{k_1-1/2, k_2}^{n_{fr}}$  et  $F_{k_1, k_2-1/2}^{n_{fr}}$  sont rappelées en annexe A.3.

#### Remarque 5.4.1

*Le pas de temps  $\delta t_{fr}$  ne peut pas être choisi arbitrairement. En effet, la stabilité du schéma requiert une condition, dite de CFL qui relie  $\delta t_{fr}$  et les pas d'espace  $\delta x$  et  $\delta y$ . Elle s'écrit, pour chaque  $n_{fr} \geq 0$ ,*

$$\delta t_{fr} < \max \left( \frac{\delta x}{|V_x^{n_{fr}}|}, \frac{\delta y}{|V_y^{n_{fr}}|} \right). \tag{5.17}$$

*A chaque itération du schéma de résolution (5.16), on doit donc s'assurer que la condition (5.17) est vérifiée, sinon, on adapte le pas de temps  $\delta t_{fr}$  pour que cette condition soit satisfaite.*

## 2) Un exemple de problème de couplage

L'exemple que nous considérons ici correspond à un modèle simplifié de glaçon séparant deux milieux. Le "glaçon" est représenté par le domaine initial  $\omega_0$  sur lequel est défini un profil de température qui évolue selon l'équation de la chaleur. Les deux milieux qui l'entourent sont à température constante  $T_0$  et  $T_1$ .

La fonte du "glaçon", qui correspond à l'évolution de  $\gamma$ , est contrôlée par le flux thermique à la frontière, c'est à dire  $\nabla u|_{\gamma} \cdot n_\gamma$ . L'équation (5.2) s'écrit donc ici,

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \alpha_0 \nabla u|_{\gamma} \cdot n_\gamma = 0 \tag{5.18}$$

où  $\alpha_0$  est un paramètre fonction des grandeurs caractéristiques du problème (masse volumique, conductivité...).

Nous présentons la résolution de ce modèle sur un exemple simple :

Les paramètres utilisés sont  $\omega_0 = ]y_0; Y_0[ \times ]0; 1[$  et  $\nu = \frac{1}{80}$ . La condition initiale est  $\forall (x, y) \in \omega_0, u_0(x, y) = T_g$  (où  $T_g$  est une constante), et est prolongée par  $T_0$  sur  $]0; y_0[ \times ]0; 1[$  et  $T_1$  sur  $]Y_0; 1[ \times ]0; 1[$  (figure 5.8).

On impose pour tout  $t$  d'avoir  $T_0$  (resp.  $T_1$ ) sur la frontière entre le glaçon et le milieu à température  $T_0$  (resp. entre le glaçon et le milieu à température  $T_1$ ).

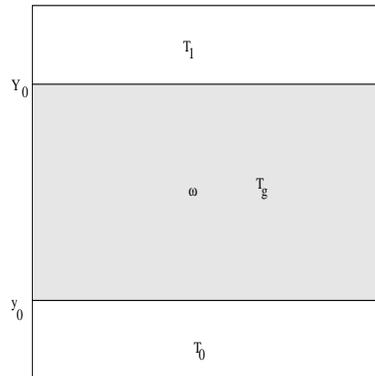


FIG. 5.8 – Domaines et frontières pour le problème du "glaçon"

Dans cet exemple, seule la partie de la frontière  $\{y = y_0\}$  évolue et puisque le gradient de température ne varie que dans la direction verticale, le déplacement de la frontière ne se fait que dans cette direction.

Nous décrivons maintenant l'implémentation de l'algorithme de résolution de ce problème de couplage.

L'implémentation se compose de trois étapes qui, à partir de la solution approchée de l'équation de la chaleur  $\mathbf{U}_h^n$  et de la position de la frontière  $y_n$ , au temps  $n\delta t$  ( $n \geq 0$ ) aboutissent à la solution  $\mathbf{U}_h^{n+1}$  et à la position  $y_{n+1}$  au temps  $(n+1)\delta t$ .

Les deux premières sont consacrées au calcul de la position de la nouvelle frontière  $y_n$  par la résolution de l'équation (5.18).

Puisque l'équation (5.18) fait intervenir le gradient de la solution à l'interface, on est d'abord amené à évaluer le gradient de la solution dans la

direction de la normale à  $\gamma$ , c'est à dire ici, la composante du gradient selon  $y$  que nous notons  $\nabla_y u|_\gamma^n$ .

- Evaluation du vecteur vitesse à l'interface :

Le gradient est estimé à partir des valeurs aux points de la solution,  $U_h^n$ .

Remarquant que  $\forall \alpha \in K_j$ ,  $(\mathbf{U}_h^n)_\alpha = c_\alpha^\Omega(U_h^n)$ , nous commençons donc par estimer les valeurs aux points de  $U_h^n$  en utilisant le filtre d'interpolation introduit dans la section 4.3.2. Il permet de passer des coefficients d'échelle aux valeurs aux points en inversant la relation (4.50) où  $U^0$  est remplacé par  $U_h^n$ .

Le gradient vertical est estimé par différences finies, par exemple de la façon suivante,

Puisque  $\nabla_y u|_\gamma^n$  est constant le long de l'interface, si  $(k_1, k_2)$  est tel que  $]k_1, k_1 + 1[ \times ]k_2, k_2 + 1[ \cap \{y = y_n\} \neq \emptyset$ , alors,

$$\nabla_y u|_\gamma^n = \frac{T_0 - U_h^n(k_1 2^{-j}, (k_2 + 1) 2^{-j})}{2^{-j}} \quad (5.19)$$

Le gradient de la solution à l'interface étant estimé, on peut calculer la position de la nouvelle frontière.

- Calcul de la nouvelle position de la frontière :

Cette étape permet de déterminer  $y_{n+1}$  la position de la nouvelle frontière à partir de l'ancienne position  $y_n$  et du gradient de la solution à l'interface. Elle consiste à résoudre numériquement l'équation (5.18) à l'aide du schéma (5.16) avec  $\forall n_{fr} \geq 0$ ,  $V_x^{n_{fr}} = 0$  et  $V_y^{n_{fr}} = \alpha_0 \nabla_y u|_\gamma^n$ ,  $n \geq 0$ .

La résolution numérique produit donc sur les points de la grille dyadique, une approximation de la fonction  $\mathcal{D}$  au temps  $n_{fr} \delta t_{fr}$ . Le signe de cette fonction, au temps  $n_{fr} \delta t_{fr} = \delta t$ , fournit la nouvelle position,  $y_{n+1}$ , de la frontière. Plus précisément,

Si il existe  $k_{2,0}$  tel que,  $\mathcal{D}_{k_1, k_{2,0}}^{n_{fr}} \mathcal{D}_{k_1, (k_{2,0}+1)}^{n_{fr}} \leq 0$ ,  $k_1 \in \{0, \dots, 2^j - 1\}$ , alors  $y_{n+1} = \frac{(2k_{2,0}+1)2^{-j}}{2}$ .

Pour alléger les notations dans la présentation de l'algorithme de résolution de la fin de cette section, on fait référence à l'étape de résolution de l'équation (5.18) par la procédure *FRONT* telle que,

$$y_{n+1} = FRONT(y_n, V_y^n, \delta t_{fr}, j, n_{fr}), \quad (5.20)$$

### Remarque 5.4.2

*L'initialisation de l'algorithme de résolution de l'équation (5.18) nécessite la définition de la fonction  $f$  dans l'expression (5.3). Cette fonction doit être redéfinie chaque fois que l'on résout l'équation d'évolution de la frontière. Connaissant la position de la frontière  $y_n$ , on choisit, dans notre implémentation,  $\forall (x, y) \in \Omega$ ,  $f(x, y) = th(100(y - y_n))$  où  $y \rightarrow th(y)$  est la fonction tangente hyperbolique.*

La dernière étape de l'implémentation est de résoudre l'équation de la chaleur sur le domaine  $\omega_{n+1} = ]y_{n+1}, Y_0[ \times ]0, 1[$ .

– Résolution de l'équation de la chaleur :

Cette étape consiste, comme dans le cas de l'algorithme de résolution sur un domaine fixe (voir section 4.3.2), à calculer les matrices  $C$  et  $D$  quand le domaine est  $\omega_{n+1} = ]y_{n+1}, Y_0[ \times ]0, 1[$  en plus des quantités classiques  $\mathbf{F}_h^n$  et  $\mathbf{G}_h^{n+1}$  puis d'appliquer l'algorithme d'Uzawa pour obtenir  $\mathbf{U}_h^{n+1}$ .

Dans la description de l'algorithme, on résume les calculs de cette étape sous la procédure *CHALEUR* et on écrit,

$$\mathbf{U}_h^{n+1} = CHALEUR(y_{n+1}, \mathbf{U}_h^n, \delta t, j, j', m, m', n). \quad (5.21)$$

l'algorithme de résolution complet se résume alors de la façon suivante,

**Algorithme de résolution**

- Choix des paramètres :  $m, m', j, j', \delta t, \delta t_{fr}, T, y_0$

**Pré-calculs**

- Calcul des produits scalaires  $\{\langle \Phi_\alpha^\Omega, \Xi_{j,0,0}^\Omega \rangle_{L^2(\Omega)}\}, \alpha \in K_j$ .
- Prolongement de  $u_0$  sur  $\Omega \setminus \bar{\omega}_0$  par  $T_0$  et  $T_1$  puis évaluation de  $\mathbf{U}_h^0$ .

**Résolution à chaque itération,  $n \geq 0$** 

- Evaluation des valeurs aux points de  $U_h^n$ .
- Evaluation du gradient de la solution à l'interface à partir des valeurs aux points.

$$\Rightarrow V_y^n$$

- Résolution de l'équation d'évolution de la frontière,

$$y_{n+1} = FRONT(y_n, V_y^n, \delta t_{fr}, j, n_{fr})$$

- Résolution de l'équation de la chaleur sur le nouveau domaine,

$$\mathbf{U}_h^{n+1} = CHALEUR(y_{n+1}, \mathbf{U}_h^n, \delta t, j, j', m, m', n)$$

La figure 5.9 représente la solution de ce type de problème quand  $y_0 = 0.3$ ,  $Y_0 = 0.8$ ,  $T_0 = 2$ ,  $T_g = -3$ ,  $T_1 = 10$  et  $\alpha_0 = \frac{1}{80}$ . Les paramètres de résolution sont  $j = 6$ ,  $j' = 4$ ,  $m = m' = 4$ ,  $\delta t = 10^{-3}$ .

**Remarque 5.4.3**

*Cet algorithme fournit un moyen rapide et efficace de calculer la nouvelle solution quand la frontière a bougé. En effet, en mettant de côté le calcul de la nouvelle frontière, la reconstruction des matrices  $C$  et  $D$  est la seule étape supplémentaire par rapport à l'algorithme de résolution classique de l'équation de la chaleur sur un domaine fixe (section 4.3.2).*

*Cependant, plusieurs points sont à améliorer,*

- *L'approximation par des différences finies d'ordre 1 conduit à une estimation grossière du gradient de la solution à l'interface. On a donc intérêt à utiliser des approximations d'ordre supérieur utilisant plus de points à l'intérieur du domaine.*
- *La généralisation de cet algorithme à des problèmes ayant des domaines plus complexes nécessite de construire une nouvelle procédure FRONT.*

*Elle doit marquer les points de la grille dyadique appartenant au nouveau domaine grâce à la fonction de Level Set mais aussi être capable d'en sélectionner un certain nombre pour définir des points de contrôle et construire une approximation de  $\gamma$  (par une courbe de Bezier). On est donc amené à se poser les deux questions suivantes : combien de points de contrôle prendre et comment faut-il qu'ils soient répartis ? La réponse à ces deux questions nécessite l'introduction d'un critère de comparaison entre l'approximation de  $\omega$  obtenue à partir des points dyadiques marqués par la fonction de Level Set et celle obtenue quand  $\gamma$  est construite à l'aide d'une courbe de Bezier.*

- Sur un plan plus théorique, nous n'avons pas étudié la régularité de  $\omega(t)$ . Ce point est pourtant essentiel pour notre méthode car la formulation dans les domaines fictifs suppose que pour tout temps,  $\gamma(t)$  soit assez régulière pour pouvoir en particulier définir les opérateurs traces.*

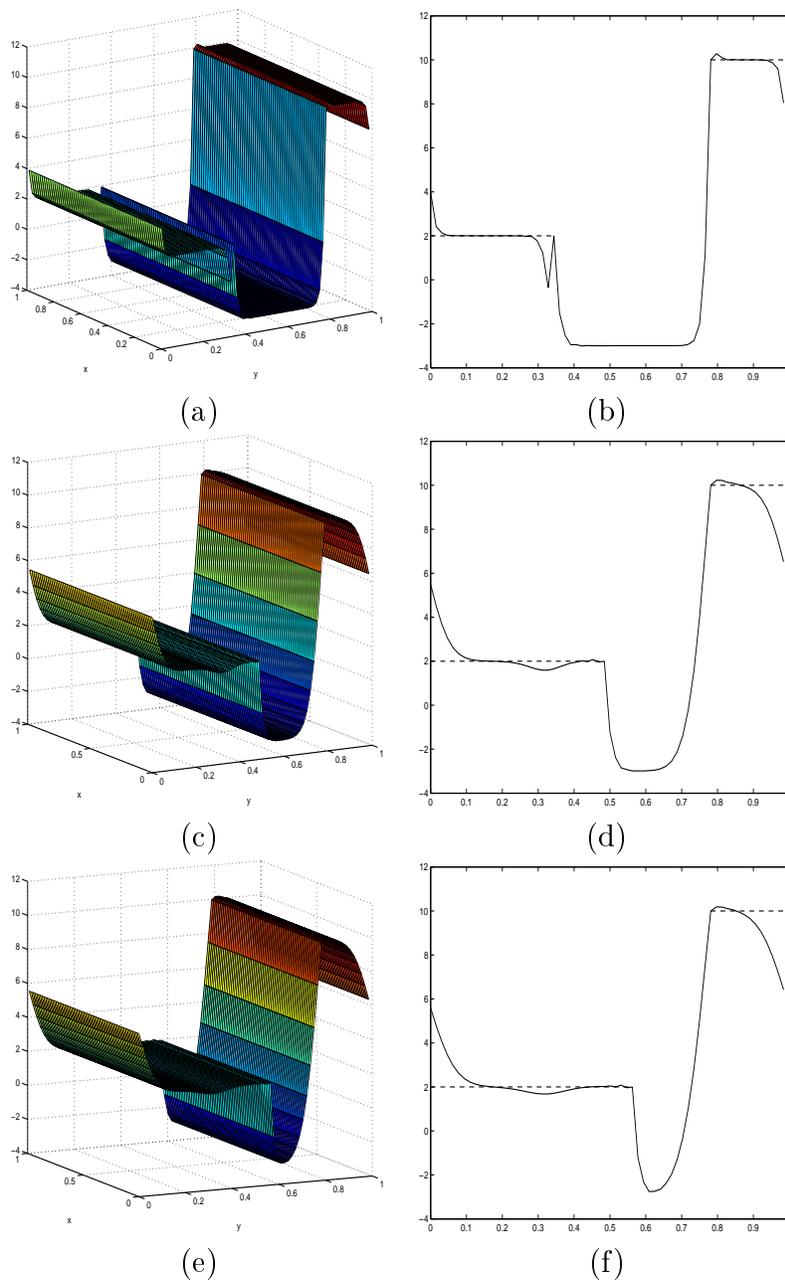


FIG. 5.9 – Solutions d'un problème avec frontière mobile pour un problème du type "glçon". Les lignes en pointillé représentent la solution "physique", c'est à dire une température constante, à l'extérieur du domaine. (a)  $T = \delta t$ , (b) coupe de la solution selon  $x = 0.5$  (c)  $T = 10\delta t$ , (d) coupe de la solution selon  $x = 0.5$  (e)  $T = 15\delta t$ , (f) coupe de la solution selon  $x = 0.5$

# Conclusion

Une nouvelle méthode numérique a été construite en couplant les approximations à base d'ondelettes aux approches domaines fictifs pour la résolution de l'équation de la chaleur bi-dimensionnelle sur un domaine quelconque  $\omega$  avec des conditions aux bords du type Dirichlet. Le problème parabolique initial est d'abord approché par une séquence de problèmes elliptiques en discrétisant en temps l'équation de la chaleur par un schéma aux différences finies. Ensuite, à chaque pas de temps, la formulation faible correspondante est transformée en utilisant les domaines fictifs. Dans cette dernière étape, le problème elliptique classique est interprété comme un problème d'optimisation d'une fonctionnelle, définie sur un espace  $\Omega$  contenant  $\omega$  et à géométrie simple, sous une contrainte qui est la condition de Dirichlet sur le bord. Cette reformulation aboutit à un problème de point selle, c'est à dire, un système de deux équations vérifiées par deux inconnues, la solution  $U^n$  sur  $\Omega$  telle que sa restriction à  $\omega$  est la solution du problème elliptique classique et un multiplicateur de Lagrange,  $\lambda^n$ , qui est introduit pour imposer la condition de Dirichlet sur le bord au sens faible. La discrétisation complète du problème est ensuite réalisée en choisissant une discrétisation du type Petrov-Galerkin pour la discrétisation spatiale du problème de point selle.

A chaque étape, un résultat d'existence et d'unicité de la solution des différents problèmes a été fourni, ainsi qu'une estimation d'erreur pour le problème de point selle.

La dernière formulation obtenue conduit à un système linéaire dont l'implémentation a ensuite été décrite (évaluation de chaque terme du système linéaire puis résolution par l'algorithme d'Uzawa) et analysée (estimation du conditionnement de la matrice d'itération d'Uzawa).

Enfin, quelques résultats numériques ont été fournis. Nous avons d'abord cherché à vérifier les comportements théoriques des multiplicateurs de Lagrange, de l'erreur d'approximation et du conditionnement de la matrice d'itération. Nous nous sommes intéressés ensuite à des exemples d'équations de la chaleur sur des domaines complexes puis couplées avec une équation d'évolution de la frontière.



## Troisième partie

# Ondelettes et compression de signaux/images



# Introduction

Cette partie est consacrée à la construction d'analyses et de transformations multiéchelles et à leur application à la compression de signaux et d'images.

Si  $f^{J_{max}}$  représente la discrétisation à l'échelle  $J_{max}$  d'une fonction monodimensionnelle (signal) ou bi-dimensionnelle (image), un schéma de compression de  $f^{J_{max}}$  peut être représenté de la façon suivante,

$$f^{J_{max}} \longrightarrow Mf^{J_{max}} = (f^{J_0}, d^{J_0}, \dots, d^{J_{max}-1}) \longrightarrow \dots \quad (5.22)$$

$$\longrightarrow Tr_\epsilon Mf^{J_{max}} = (f^{J_0}, d_\epsilon^{J_0}, \dots, d_\epsilon^{J_{max}-1}) \longrightarrow \dots \quad (5.23)$$

$$\longrightarrow QTr_\epsilon Mf^{J_{max}} = (\tilde{f}_\epsilon^{J_0}, \tilde{d}_\epsilon^{J_0}, \dots, \tilde{d}_\epsilon^{J_{max}-1}) \longrightarrow \dots \quad (5.24)$$

$$\longrightarrow CQTr_\epsilon Mf^{J_{max}} \quad (5.25)$$

$Mf^{J_{max}}$  est la transformée multiéchelle de  $f^{J_{max}}$ . Elle est composée des données discrétisées à un niveau grossier  $f^{J_0}$ , ainsi que des détails  $d^j$ ,  $j = J_0, \dots, J_{max} - 1$  qui sont les informations intermédiaires à rajouter pour retrouver  $f^{J_{max}}$ .  $Mf^{J_{max}}$  est ensuite seuillée (en fonction d'un seuil  $\epsilon$ ) et est donc remplacée par  $Tr_\epsilon Mf^{J_{max}}$ . L'opérateur  $Q$  effectue une quantification et l'opérateur  $C$  est un opérateur de codage. La quantité  $CQTr_\epsilon Mf^{J_{max}}$  est destinée à être transmise ou stockée avant d'être décompressée. Nous nous intéressons ici principalement à l'opérateur de transformation multiéchelle  $M$  ainsi qu'à son inverse.

Une des propriétés cruciales que l'on exige de la transformation multiéchelle  $M$  est sa stabilité puisqu'une inversion de  $CQTr_\epsilon M$  doit conduire à un signal ou une image dont la distance à  $f^{J_{max}}$  doit être contrôlée par  $\epsilon$  et par l'erreur de quantification. L'étude générale de la stabilité de la transformation,  $M$ , consiste à analyser son comportement quand une perturbation est introduite dans les données. On dit alors que la transformation est stable si l'on peut contrôler la norme de l'erreur de reconstruction par la norme de la perturbation introduite. En pratique, plusieurs sources de perturbations sont possibles : elles sont liées aux étapes de seuillage et de quantification mais peuvent aussi être introduites si un problème de transmission survient

au moment du transfert des données.

Le formalisme en ondelettes classiques ([26]) introduit au chapitre 1 peut être un premier choix pour construire une transformation multiéchelle pour la compression ([48]) puisqu'il définit un cadre fonctionnel particulièrement intéressant pour la représentation de fonctions. Dans ce qui suit, nous rappelons brièvement les avantages et les limitations du formalisme en ondelettes classiques pour la compression.

Les ondelettes sont intéressantes puisqu'elles fournissent,

- Des représentations creuses de signaux ou d'images où les coefficients d'ondelettes significatifs (donc invariants par l'opérateur  $Tr_\epsilon$ ) sont situés autour des singularités (resp. des contours) d'un signal (resp. d'une image),
- Des algorithmes multiéchelles rapides et stables pour l'implémentation des opérateurs  $M$  et  $M^{-1}$ .
- Une structure en arbre des coefficients d'ondelettes qui peut être exploitée par les algorithmes de quantification et de codage ([60] ou [62]) correspondant aux opérateurs  $Q$  et  $C$ .

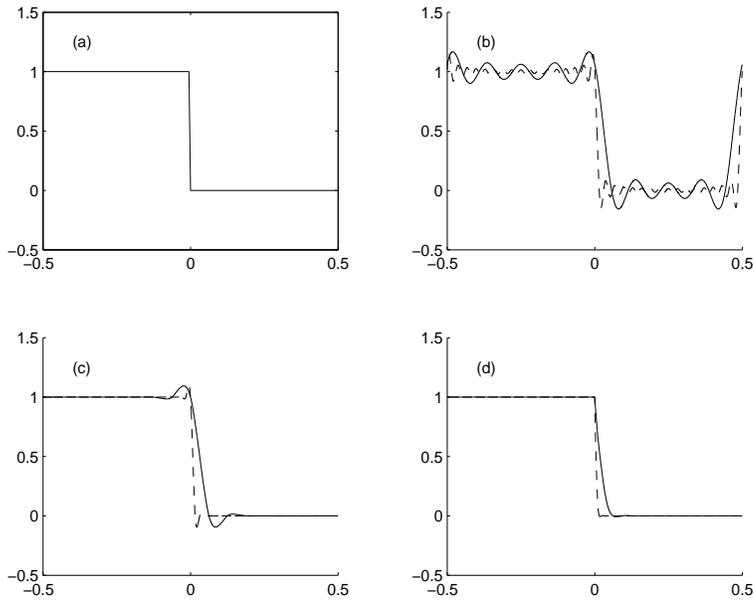
Cependant, la principale limitation quand on utilise les méthodes à base d'ondelettes est le manque de flexibilité de la notion de détail ou, en d'autres termes, l'impossibilité de modifier localement l'opérateur inter-échelle de prédiction.

Cette limitation se traduit déjà en dimension 1 par des oscillations quand on représente l'action de l'opérateur  $M^{-1}Tr_\epsilon MD_j^I$  sur une fonction discontinue. Sur la figure 5.10, nous comparons les résultats obtenus pour différentes transformations multiéchelles : la transformation multiéchelle spectrale associée à une décomposition en fréquence (figure 5.10 (b)), la transformation en ondelettes splines (figure 5.10 (c)) et une transformation spline adaptée en  $y_0 = 0$  (figure 5.10 (d)).

En dimension 2, cette limitation se traduit par la détérioration des performances de compression des algorithmes en ondelettes quand une simple ligne de discontinuité s'incline par rapport à un des axes de coordonnées (figure 5.11).

L'objet de cette partie est d'explorer une des pistes possible pour contourner cette limitation.

Comme mentionnées dans l'introduction générale de cette thèse, plusieurs approches sont actuellement proposées avec ce même objectif ([54], [13], [12],



(a) *Fonction en escalier*  
 (b) *Transformation multiéchelle spectrale (avec conditions périodiques),*  
 (c) *Transformation multiéchelle spline sur l'intervalle (sans conditions périodiques),*  
 (d) *Transformation multiéchelle spline adaptée,*

FIG. 5.10 - La fonction en escalier,  $f^{J_{max}}$ , et ses approximations  $M^{-1}Tr_{\epsilon}Mf^{J_{max}}$  pour différentes transformations multiéchelles  $M$ ,  $J_{max} = 12$ ,  $\epsilon = 0$ ,  $-$  :  $J_0 = 4$ ,  $- - -$  :  $J_0 = 6$ .

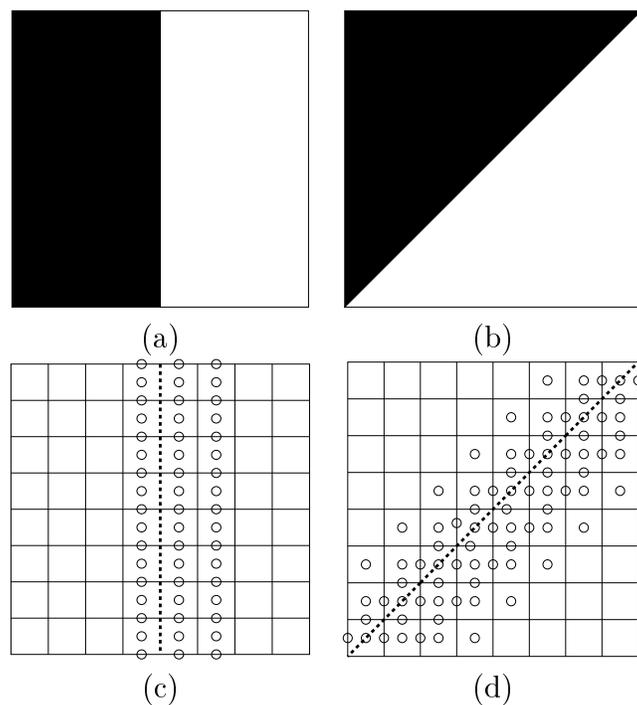


FIG. 5.11 – Contour et ligne de discontinuité, (a) ligne de discontinuité verticale, (b) ligne de discontinuité inclinée, (c)-(d) Coefficients de détails non nuls après transformation multiéchelle spline de (a) et (b),  $J_0 = 3$ ,  $J_{max} = 4$ , la ligne en pointillé représente les lignes de discontinuité.

[1], [23])). Nous choisissons ici de revenir sur la description de l'approche ENO puisque l'algorithme de décomposition multiéchelle que nous proposons dans cette partie est construit en suivant le même formalisme.

Les méthodes ENO-2D séparable et ENO-EA sont toutes les deux basées sur l'introduction d'un opérateur de prédiction qui intègre la présence de discontinuités (ou de contours) via un mécanisme de détection opérant sur les données reconstruites. Il s'agit d'un opérateur d'interpolation, construit en utilisant le formalisme de Harten introduit au chapitre 2. Le mécanisme de détection consiste à minimiser une fonction coût qui permet de choisir un stencil d'interpolation dans la zone la plus régulière dans le voisinage du point à interpoler.

La méthode ENO-2D séparable ([1]) est construite à partir d'une détection et d'une prédiction monodimensionnelles appliquées successivement aux lignes puis aux colonnes de l'image. L'intérêt de cette approche est qu'elle conduit à une construction très simple d'un algorithme multiéchelle, à partir de deux algorithmes monodimensionnels, qui est adapté aux contours de l'image tout en gardant une structure en arbre pour les coefficients de détails. Cependant, cette approche est limitée quand il s'agit de reconstruire des contours non horizontaux et non verticaux. De plus, elle ne conduit pas à un algorithme multiéchelle stable puisque la détection se fait sur les données reconstruites ; l'effet d'une perturbation sur les données peut alors modifier la prédiction en sélectionnant des stencils différents de ceux initialement choisis dans le modèle non perturbé. La construction d'un algorithme stable nécessite l'utilisation du procédé de stabilisation monodimensionnel dit de contrôle d'erreur ([1]). Ce procédé consiste à entre-mêler les étapes de décomposition et de seuillage pour intégrer au fur et à mesure les perturbations effectuées sur les coefficients de détail.

L'approche ENO-EA ([23]) généralise l'approche ENO-2D séparable. La détection utilise toujours d'abord un mécanisme de détection monodimensionnel où la minimisation d'une fonction coût monodimensionnelle appliquée aux lignes puis aux colonnes permet de marquer les cellules de l'image proches d'un contour vertical, horizontal ou diagonal. Puis, la détection est améliorée par un mécanisme de sélection supplémentaire basé sur le modèle simplifié des fonctions que l'on cherche à reconstruire exactement ; cela permet d'éliminer les cellules marquées ayant des configurations "pathologiques" qui ne correspondent pas au modèle.

Plusieurs stratégies de construction de la prédiction sont alors envisagées en fonction de la position des cellules marquées par la détection. Contrairement au cas ENO-2D séparable, l'opérateur de prédiction est bi-dimensionnel puisqu'il utilise directement des stencils bi-dimensionnels. Plus précisément, la

prédiction dans les zones régulières (c'est à dire sans cellules marquées) utilise un stencil d'interpolation centré alors que celle des zones proches des contours combine extrapolation et interpolation bi-dimensionnelles avec minimisation d'une fonctionnelle coût bi-dimensionnelle.

L'avantage de cette approche est qu'elle est directement bi-dimensionnelle, elle permet donc une reconstruction efficace de contours non verticaux ou non horizontaux tout en gardant une structure en arbre pour les coefficients de détail. Cependant, puisqu'elle est basée sur la technique ENO, elle ne définit pas un algorithme multiéchelle stable. B. Matei introduit alors dans [49] une généralisation de l'algorithme de contrôle d'erreur utilisé pour ENO-2D séparable afin de garantir la stabilité de cet algorithme.

Suivant le même but, nous construisons et analysons dans cette partie des méthodes multiéchelles monodimensionnelles ou bi-dimensionnelles adaptées aux discontinuités d'un signal ou aux contours d'une image. Elles utilisent aussi le formalisme de Harten et reposent sur la construction d'opérateurs de prédiction stables mais dépendant d'une famille de points (ou de contours) qui conduisent, dans le cas bi-dimensionnel, à des décomposition et reconstruction multi-directionnelles tenant compte de l'orientation des contours de l'image.

Cette partie est organisée de la façon suivante.

Le **chapitre 6** est consacré à la description d'une analyse multiéchelle du type Harten, dépendant d'une famille de points et dite, par conséquent, dépendant de la position. Après avoir rappelé et précisé d'abord la construction de l'algorithme de prédiction dépendant de la position dans le cas monodimensionnel, Le lien avec des analyses multirésolutions dépendant de la position est établi. On montre alors que ces analyses conduisent à des décompositions multiéchelles efficaces pour la représentation de signaux présentant des discontinuités.

Cette approche est ensuite généralisée au cas bi-dimensionnel dans le **chapitre 7** et un algorithme de compression multi-directionnel dépendant des contours de l'image est introduit. Il utilise une carte des contours obtenue préalablement. Plusieurs comparaisons entre cette approche et une approche non adaptée à la géométrie de l'image sont ensuite présentées pour la compression de différents types d'images.

# Chapitre 6

## Algorithmes multiéchelles dépendant de la position, lien avec les analyses multirésolutions et applications en dimension 1

Dans ce chapitre, nous utilisons le formalisme de Harten introduit au chapitre 2 pour définir des analyses multirésolutions dépendant de la position. Comme dans la chapitre 2, nous commençons, dans la **section 6.1**, par rappeler l'algorithme de prédiction interpolant en précisant la notion de stencil dépendant de la position. Nous fournissons ensuite un théorème de convergence de cet algorithme sous certaines conditions en utilisant un théorème de perturbation emprunté à [28] puis faisons le lien avec des analyses multirésolutions interpolantes dépendant de la position. Nous construisons et caractérisons alors des bases d'ondelettes interpolantes qui ne sont pas des translatées et dilatées d'une fonction mère mais dépendent d'une famille de points.

Nous généralisons ensuite, dans la **section 6.2**, le cas interpolant en construisant d'abord un algorithme de prédiction B-spline dépendant de la position. L'étude de sa convergence conduit à l'introduction d'une fonction limite de  $L^2(\mathbb{R})$  qui est le point de départ de la construction d'analyses multirésolutions biorthogonales. Une paire d'espaces biorthogonaux d'une analyse multirésolution biorthogonale dépendant de la position est alors introduite.

Dans la **section 6.3**, une série de tests est présentée pour étudier l'efficacité des analyses multirésolutions dépendant de la position dans la réduction du phénomène de Gibbs pour l'approximation de fonctions discontinues et dans la compression de signaux présentant des discontinuités.

## 6.1 Algorithme de prédiction interpolant dépendant de la position : lien avec les analyses interpolantes dépendant de la position

### 6.1.1 Algorithme de prédiction dépendant de la position

Nous rappelons (voir section 2.1.1) qu'un algorithme de prédiction interpolant dépendant de la position est défini par,

#### Algorithme 6.1.1

$$\left\| \begin{array}{l} \text{for } k \in \mathbb{Z}, \\ f'_{2k}{}^{I,j+1} = \left( P_j^{I,j+1} f'^{I,j} \right)_{2k} = f_k^{I,j}, \\ f'_{2k-1}{}^{I,j+1} = \left( P_j^{I,j+1} f'^{I,j} \right)_{2k-1} = \sum_{m=-l_{j+1,2k-1}}^{r_{j+1,2k-1}-1} L_m^{l_{j+1,2k-1}, r_{j+1,2k-1}}(-1/2) f_{k+m}^{I,j}, \\ \text{end,} \end{array} \right. \quad (6.1)$$

où pour chaque prédiction, les limites à gauche,  $l_{j+1,2k-1}$ , et à droite,  $r_{j+1,2k-1}$ , du stencil d'interpolation sont fonctions de la position, c'est à dire de  $j$  et de  $k$ . On se place dans le cas où cette dépendance est en fait contrôlée par une famille de points qui réalise une segmentation de l'axe réel. Plus précisément, on a la définition suivante.

#### Définition 6.1.1

La sélection du stencil dépendant de la position est contrôlée par les 3 éléments suivants :

- Une suite finie de points de segmentation  $(S_s)_{s \in [s_-, s_+]}$ .
- Un triplet  $(D, l, r)$ ,  $l > 0$ ,  $r \geq 1$  et  $l+r = D+1$  tel que  $(D_{j,2k-1}, l_{j,2k-1}, r_{j,2k-1}) = (D, l, r)$  quand  $[x_{-l+k}^{j-1}, x_{r-1+k}^{j-1}] \cap \{S_s\} = \emptyset$ .
- Une règle pour la sélection de  $(D_{j,2k-1}, l_{j,2k-1}, r_{j,2k-1})$  quand  $[x_{-l+k}^{j-1}, x_{r-1+k}^{j-1}] \cap \{S_s\} \neq \emptyset$ .

Il s'en suit qu'ici, le stencil est adapté seulement au voisinage des points de segmentation. Nous donnons un exemple de sélection de stencil qui suit la définition 6.1.1 et qui est utilisée pour l'approximation ou la compression de signaux discontinus (section 6.3) :

Pour un seul point de segmentation, i.e  $s_- = s_+ = 0$  et  $S_0 = \{y_0\}$  et pour  $(D, l, r)$  donné, on définit la règle de sélection suivante <sup>1</sup> pour le triplet  $(D_{j,2k-1}, l_{j,2k-1}, r_{j,2k-1})$  :

<sup>1</sup>Dans la suite, nous appelons cette procédure la règle 1

on note  $k_{j-1}$ , l'entier tel que  $y_0 \in [x_{k_{j-1}-1}^{j-1}, x_{k_{j-1}}^{j-1}]$ . Alors, pour chaque  $j$  et  $k$  tel que  $y_0 \in [x_{-l+k}^{j-1}, x_{r-1+k}^{j-1}]$ ,  $r_{j,2k-1}$  et  $l_{j,2k-1}$  sont calculés de la façon suivante :

$$\begin{cases} \text{Si } k \leq k_{j-1} - 1 \text{ alors } r_{j,2k-1} = k_{j-1} - k \text{ et } l_{j,2k-1} = k - k_{j-1} + 1 + D \\ \text{Si } k = k_{j-1} \text{ alors } r_{j,2k-1} = D \text{ et } l_{j,2k-1} = 1 \\ \text{Si } k \geq k_{j-1} + 1 \text{ alors } r_{j,2k-1} = k_{j-1} - k + D + 1 \text{ et } l_{j,2k-1} = k - k_{j-1} \end{cases} \quad (6.2)$$

Les figures 6.1 et 6.2 montrent les 5 différents stencils à considérer quand on utilise cette stratégie avec  $(D, l, r) = (5, 3, 3)$ .

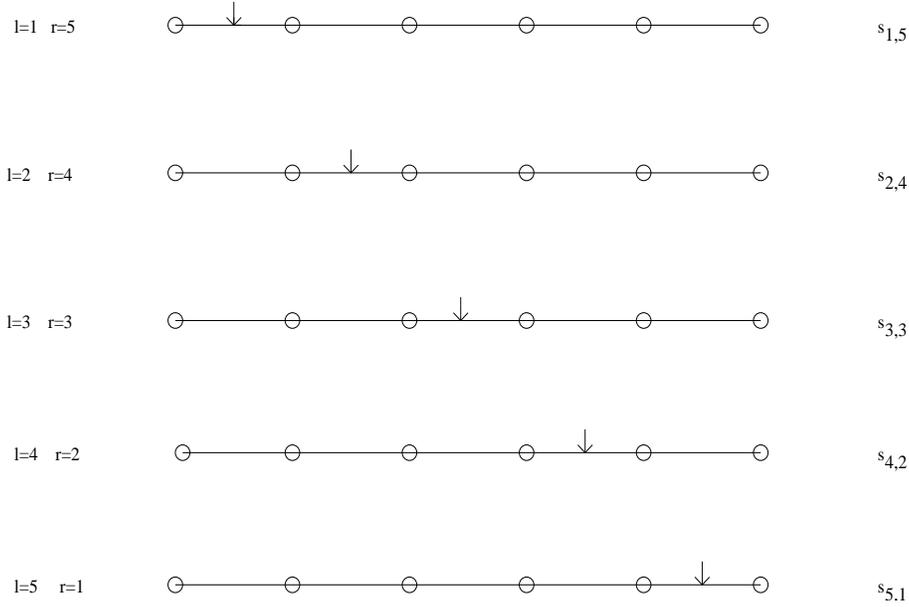


FIG. 6.1 – Les 5 stencils possibles à 6 points d'une procédure de sélection suivant la règle 1, la flèche indique l'intervalle où se trouve le point à prédire

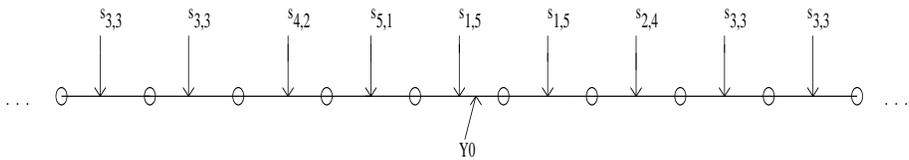


FIG. 6.2 – Sélection du stencil

Comme dans le chapitre 2, nous commençons par analyser la convergence du schéma de subdivision associé à l'algorithme de prédiction interpolant dépendant de la position. La notion de fonctions limites permet ensuite de faire le lien avec des analyses multirésolutions interpolantes dépendant de la

position.

Nous nous limitons ici à l'étude de l'algorithme de prédiction interpolant dépendant de la position associé à un **unique point de segmentation dyadique**  $\{y_0\}$ . En effet, notre objectif est de généraliser cette technique monodimensionnelle au cas bi-dimensionnel pour la compression d'image. Dans ce contexte, les points de segmentation (qui définissent les contours) sont dyadiques (puisque'ils sont définis à partir de l'image originale) et on suppose qu'ils sont suffisamment espacés pour que les stratégies associées à chaque point n'interfèrent pas entre elles.

Il suffit alors d'étudier la convergence de l'algorithme de prédiction associé à l'unique point de segmentation  $y_0 = 0$  pour obtenir des résultats généraux quand le point de segmentation est dyadique. En effet, si  $y_0$  est un point dyadique alors il existe un niveau de résolution  $J$  tel que  $y_0 \in X^J$ . L'analyse qui suit s'applique alors après dilatation et translation.

### 6.1.2 Convergence de l'algorithme de prédiction interpolant dépendant de la position

Les résultats que nous fournissons ici concernent l'algorithme de prédiction suivant la règle 1. Cet algorithme définit un schéma de subdivision stationnaire, non uniforme et on note dans ce cas  $l_{j,2k-1} = l_{2k-1}$  et  $r_{j,2k-1} = r_{2k-1}$ . Son masque s'écrit,

$$\forall k \in \mathbb{Z},$$

$$\{a_m^{2k}\}_{m \in \mathbb{Z}} \begin{cases} a_0^{2k} = 1, \\ a_m^{2k} = 0, \text{ si } m \neq 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

et,

$$\{a_m^{2k-1}\}_{m \in \mathbb{Z}} \begin{cases} a_{-2m-1}^{2k-1} = L_m^{l_{2k-1}, r_{2k-1}}(-1/2) \text{ pour } m = -l_{2k-1}, \dots, r_{2k-1} - 1, \\ a_m^{2k-1} = 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad (6.4)$$

$$\text{et donc } M_{j,2k-1} = M_{2k-1} = 2l_{2k-1} - 1 \text{ et } M_{j,2k-1}^* = M_{2k-1}^* = 2r_{2k-1} - 1.$$

Comme dans le cas invariant par translation, la convergence de ce schéma linéaire se fait en étudiant la convergence de la suite construite en appliquant le schéma de subdivision à la séquence initiale  $\{f_k^{I,0}\}_{k \in \mathbb{Z}} \in V^0$  avec  $f_k^{I,0} = \delta_{m,k}$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ) et si elle existe, on note  $\tilde{\phi}_m^I$  la fonction limite obtenue.

D'après la définition 6.1.1, nous fixons les 3 éléments définissant la stratégie dépendant de la position et supposons que le schéma invariant par translation associé aux paramètres  $(D, l, r)$  est convergent. Dans ce qui suit, nous démontrons la convergence de l'algorithme de prédiction interpolant dès que  $|r - l| \leq 2$  (voir remarque 6.1.1).

L'analyse de la convergence utilise un théorème de perturbation établi par I. Daubechies, O. Runborg et W. Sweldens dans [28] que l'on utilise sous la forme réduite suivante,

### **Théorème 6.1.1**

*Soit  $S^{ref}$  un schéma de subdivision convergent et soit la famille  $\{f^j\}_{j \geq 0}$  satisfaisant,*

$$\|f^{j+1} - S^{ref} f^j\|_{\infty} \leq C 2^{-\nu j}, \quad \forall j \geq 0, \quad (6.5)$$

*où  $\nu$  est un nombre réel positif, alors,*

*si  $\phi_j(t)$  est la fonction linéaire par morceaux interpolant  $\{f_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}}$  aux points  $t = k 2^{-j}$  pour tout  $j, k$ , il existe une fonction continue  $\phi$  tel que  $\phi_j \rightarrow \phi$  uniformément quand  $j \rightarrow +\infty$ . Le schéma de subdivision qui produit les  $\{f^j\}_{j \geq 0}$  est donc convergent.*

Par souci de clarté dans l'étude de la convergence, nous faisons référence à partir de maintenant et jusqu'à la fin de cette section, à l'algorithme de prédiction interpolant par le terme *API*. De plus, nous supprimons l'exposant  $I$  faisant référence au cas interpolant puisqu'aucune confusion avec la prédiction  $B^N$ -spline ne peut être faite dans cette section.

Pour analyser la convergence de l'*API*, nous remarquons que l'on peut séparer le schéma en deux parties indépendantes l'une de l'autre. Nous introduisons alors  $API^-$  (resp.  $API^+$ ), le schéma de prédiction défini sur la demi-droite  $\mathbb{R}^-$  (resp. sur la demi-droite  $\mathbb{R}^+$ ) (figure 6.3) et nous notons  $\{P_j^{-I, j+1}\}_{j \in \mathbb{Z}}$  (resp.  $\{P_j^{+I, j+1}\}_{j \in \mathbb{Z}}$ ), les deux familles d'opérateurs de prédiction correspondant.

Notre approche consiste à étudier successivement ces deux schémas puis d'en déduire la convergence de l'*API*.

### **Analyse de la convergence de $API^-$**

Nous utilisons le corollaire suivant du théorème 6.1.1 qui nécessite de contrôler uniquement l'évolution des perturbations pour obtenir la convergence.

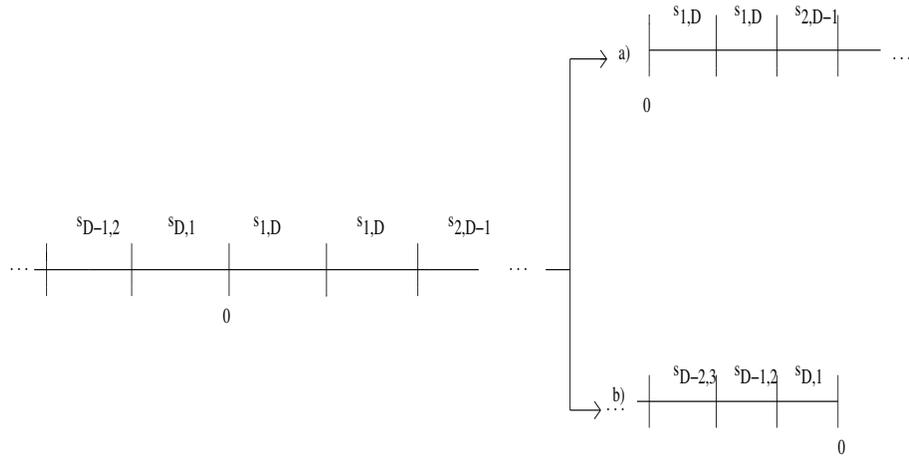


FIG. 6.3 – Séparation de l’algorithme de prédiction,  $s_{l,r}$  représente le stencil à  $l$  points à gauche et  $r$  points à droite : a)  $API^+$ , b)  $API^-$

**Corollaire 6.1.1**

Si  $S^{ref}$  est un schéma de subdivision linéaire et convergent, le schéma de subdivision suivant,

$$f^{j+1} = S^{ref} (f^j + \Delta f^j), \tag{6.6}$$

avec

$$\frac{\|\Delta f^{j+1}\|_\infty}{\|\Delta f^j\|_\infty} \|\infty\| \leq \mu < 1, \tag{6.7}$$

est convergent.

**Preuve:**

Puisque  $S^{ref}$  est un schéma de subdivision linéaire, il vient d’après l’inégalité (6.7),

$$\| f^{j+1} - S^{ref} f^j \|_\infty \leq C 2^{j \log_2(\mu)}, \tag{6.8}$$

avec  $C = \| S_{ref} \|_\infty \| \Delta f^0 \|_\infty$ .

L’inégalité (6.8) est bien du type (6.5) avec  $\nu = -\log_2(\mu)$ , ce qui garantit la convergence du schéma. ■

Afin d’étudier plus facilement la convergence de  $API^-$  sur  $] - \infty, 0]$ , nous commençons par prolonger la séquence initiale sur  $]0, +\infty[$  puis nous

définissons sur  $] -\infty, +\infty[$ , un schéma de subdivision équivalent à  $API^-$  sur  $] -\infty, 0]$ . Plus précisément, on a,

**Définition 6.1.2** *Prolongement sur  $]0, +\infty[$*

Etant donnée la famille  $\{f_k^0\}_{k \leq 0}$ , on définit la séquence de points prolongée à droite,  $\{\tilde{f}_k^0\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , par,

$$\begin{cases} \tilde{f}_k^0 = f_k^0 & \text{si } k \leq 0, \\ \tilde{f}_k^0 = P_0(k) & \text{si } k > 0, \end{cases} \quad (6.9)$$

où  $P_0$  est le polynôme de Lagrange de degré  $D$  interpolant les points  $\{f_{-D}^0, \dots, f_{-2}^0, f_{-1}^0, f_0^0\}$ .

**Définition 6.1.3** *Schéma équivalent sur  $] -\infty, +\infty[$*

La séquence  $\{\tilde{f}_k^0\}_{k \in \mathbb{Z}}$  étant construite par prolongement de  $\{f_k^0\}_{k \leq 0}$ , on définit  $\{\tilde{f}_k^{j+1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ,  $j \geq 0$ , par la procédure suivante, sachant que  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,  $\tilde{f}_k^0 = \tilde{f}_k^0$ ,

$$\left\| \begin{array}{l} \text{for } k \in \mathbb{Z}, \\ \tilde{f}_k^{j+1} = \left( P_j^{-l, j+1} \tilde{f}^j \right)_k = \left( S^{l, r} \tilde{f}^j \right)_k \quad \text{if } k \leq 0, \\ \tilde{f}_k^{j+1} = P_j(k 2^{-(j+1)}) \quad \text{if } k > 0, \\ \text{end.} \end{array} \right. \quad (6.10)$$

où  $S^{l, r}$  est le schéma de subdivision invariant par translation associé aux paramètres  $(D, l, r)$  et  $P_j$  est le polynôme de Lagrange de degré  $D$  interpolant les points  $\{f_{-D}^j, \dots, f_{-2}^j, f_{-1}^j, f_0^j\}$ .

Dans la suite, nous appelons  $\tilde{S}_-$ , le schéma de subdivision qui permet de passer de la famille  $\{\tilde{f}_m^j\}_{m \in \mathbb{Z}}$  à  $\{\tilde{f}_k^{j+1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  par la procédure (6.10). Par construction,  $\tilde{S}_-$  est bien équivalent à  $API^-$  sur  $] -\infty, 0]$ .

On définit alors un schéma de subdivision de référence  $\tilde{S}_-^{ref}$  de la façon suivante,

**Définition 6.1.4** *Définition de  $\tilde{S}_-^{ref}$*

$\{\tilde{f}_k^0\}_{k \in \mathbb{Z}}$  étant construite comme précédemment, on définit la séquence  $\{\tilde{f}_k^{j+1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  par la procédure suivante,

$$\left\| \begin{array}{l} \text{for } k \in \mathbb{Z}, \\ \tilde{f}_k^{j+1} = (S^{l,r} \tilde{f}^j)_k \text{ if } k \leq 0, \\ \tilde{f}_k^{j+1} = P_0(k2^{-(j+1)}) \text{ if } k > 0, \\ \text{end.} \end{array} \right. \quad (6.11)$$

La convergence de  $\tilde{S}_-^{ref}$  est immédiate puisque, pour toute séquence  $\{\tilde{f}_k^0\}_{k \in \mathbb{Z}}$  prolongée selon la définition 6.1.2,  $\tilde{S}_-^{ref} \tilde{f}^0 = S^{l,r} \tilde{f}^0$ .

Le théorème suivant présente le schéma  $\tilde{S}_-$  comme une perturbation du schéma  $\tilde{S}_-^{ref}$ .

### Théorème 6.1.2

Si  $r - l + 1 \geq -1$  alors on a pour  $k \leq 0$ ,

$$\forall j \geq 0, \tilde{f}_k^{j+1} = (\tilde{S}_- \tilde{f}^j)_k = (\tilde{S}_-^{ref}(\tilde{f}^j + \Delta \tilde{f}^j))_k, \quad (6.12)$$

où

- si  $r - l + 1 = -1$ , alors,  $\Delta \tilde{f}^0 = 0$ , et  $\forall j > 0$ ,  $\|\Delta \tilde{f}^{j+1}\| = \mu \|\Delta \tilde{f}^j\|_\infty$  avec  $\mu = |L_{-l}^{l,r}(1/2)L_{-l}^{l,r}(-l-1)| < 1$ , où  $L_{-l}^{l,r}$  est défini par l'expression (2.19).
- Si  $r - l + 1 \geq 0$ , alors,  $\forall j \geq 0$ ,  $\Delta \tilde{f}^j = 0$ .

Utilisant le corollaire 6.1.1 et la convergence de  $\tilde{S}_-^{ref}$ , on en déduit alors la convergence de  $\tilde{S}_-$  et donc de  $API^-$ .

#### Preuve:

- **Nous commençons par le cas  $r - l + 1 = -1$ .**

Nous donnons d'abord la preuve pour  $l = 5$ ,  $r = 3$  et  $D = 7$ , puis, nous la généralisons pour tout  $l$  et  $r$  tel que  $r - l + 1 = -1$ .

Remarquons que par construction de  $\{\tilde{f}_k^1\}_{k \in \mathbb{Z}}$  par la procédure (6.10), il vient immédiatement  $\tilde{f}^1 = \tilde{S}_-^{ref} \tilde{f}^0$  et donc  $\Delta \tilde{f}^0 = 0$ .

Nous nous intéressons maintenant au cas  $j > 0$  et commençons par exprimer la perturbation  $\Delta \tilde{f}^1$ .

Introduisons  $P_1$ , le polynôme de Lagrange de degré  $D=7$  interpolant  $\{\tilde{f}_{-7}^1, \tilde{f}_{-6}^1, \tilde{f}_{-5}^1, \tilde{f}_{-4}^1, \tilde{f}_{-3}^1, \tilde{f}_{-2}^1, \tilde{f}_{-1}^1, \tilde{f}_0^1\}$ .

Par construction (figure 6.4),  $\tilde{f}_{-7}^1 \neq P_0(-\frac{7}{2})$  et donc les polynômes  $P_1$  et  $P_0$  sont différents. Il s'en suit que les séquences  $\{\tilde{f}_k^2\}_{k \in \mathbb{Z}}$  et  $\{(\tilde{S}_-^{ref} f^1)_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  ne sont pas identiques. Comme on peut le voir sur la figure 6.4, les différences entre ces deux familles pour  $k \leq 0$  sont contrôlées par les deux perturbations qui correspondent à la différence de valeurs des polynômes  $P_0$  et  $P_1$  aux points  $x = \frac{1}{2}$  et  $x = 1$ .

Plus précisément, on peut écrire, pour tout  $k \leq 0$ ,

$$\tilde{f}_k^2 = \left( \tilde{S}_-^{ref} \left( \tilde{f}^1 + \Delta \tilde{f}^1 \right) \right)_k, \quad (6.13)$$

où

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \Delta \tilde{f}_m^1 = \left( P_1\left(\frac{1}{2}\right) - P_0\left(\frac{1}{2}\right) \right) \delta_{m,1} + (P_1(1) - P_0(1)) \delta_{m,2}. \quad (6.14)$$

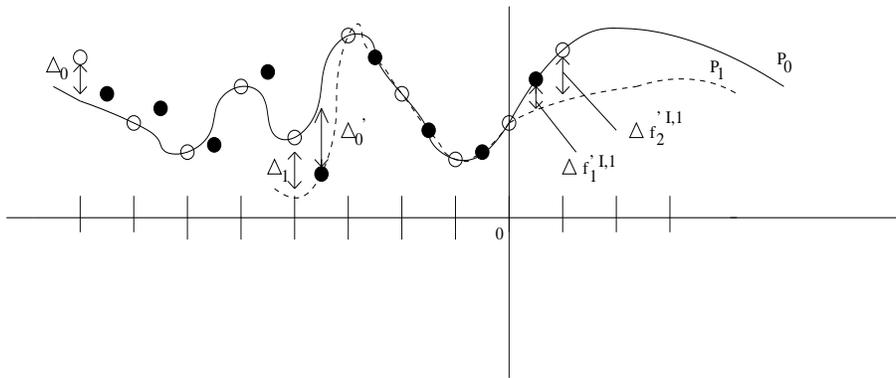


FIG. 6.4 – Construction de  $\tilde{S}_-$

Définissant  $\Delta_0 = \tilde{f}_{-8}^0 - P_0(-8)$  et  $\Delta_0' = P_1(-\frac{7}{2}) - P_0(-\frac{7}{2})$  (figure 6.4), nous obtenons par construction,

$$P_1\left(\frac{1}{2}\right) - P_0\left(\frac{1}{2}\right) = L_{-5}^{5,3}(3)\Delta_0', \quad (6.15)$$

$$P_1(1) - P_0(1) = L_{-5}^{5,3}(4)\Delta_0', \quad (6.16)$$

$$\Delta_0' = L_{-5}^{5,3}(-1/2)\Delta_0, \quad (6.17)$$

et donc, l'expression (6.14) devient,

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \Delta \tilde{f}_m^1 = L_{-5}^{5,3}(3)L_{-5}^{5,3}(-1/2)\Delta_0\delta_{m,1} + L_{-5}^{5,3}(4)L_{-5}^{5,3}(-1/2)\Delta_0\delta_{m,2}. \quad (6.18)$$

Nous cherchons maintenant à vérifier que  $\|\Delta \tilde{f}'^2\| = \mu \|\Delta \tilde{f}'^1\|_\infty$  avec  $\mu = |L_{-5}^{5,3}(1/2)L_{-5}^{5,3}(-6)| < 1$ .

En suivant la même démarche que précédemment, la perturbation qui contrôle la différence entre les séquences  $\{\tilde{f}'^3_k\}_{k \leq 0}$  et  $\{(\tilde{S}^{ref} f'^2)_k\}_{k \leq 0}$ , s'exprime en fonction de la quantité  $\Delta_1 = \tilde{f}'^1_{-8} - P_1(-8/2)$  (figure 6.4) et s'écrit,

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \Delta \tilde{f}'^2_m = L_{-5}^{5,3}(3)L_{-5}^{5,3}(-1/2)\Delta_1\delta_{m,1} + L_{-5}^{5,3}(4)L_{-5}^{5,3}(-1/2)\Delta_1\delta_{m,2}. \quad (6.19)$$

D'après les expressions (6.18) et (6.19), le rapport  $\frac{\|\Delta \tilde{f}'^2\|_\infty}{\|\Delta \tilde{f}'^1\|_\infty}$  ne dépend donc que du rapport  $\frac{|\Delta_1|}{|\Delta_0|}$ .

Par construction (figure 6.4),  $\Delta_1 = L_{-5}^{5,3}(-6)\Delta'_0$  et grâce à l'expression (6.17), nous obtenons,

$$\frac{|\Delta_1|}{|\Delta_0|} = |L_{-5}^{5,3}(-6)L_{-5}^{5,3}(-1/2)|. \quad (6.20)$$

ce qui montre que  $\|\Delta \tilde{f}'^2\|_\infty = |L_{-5}^{5,3}(-6)L_{-5}^{5,3}(-1/2)| \|\Delta \tilde{f}'^1\|_\infty$  et un rapide calcul en utilisant l'expression (2.19) conduit à  $|L_{-5}^{5,3}(-6)L_{-5}^{5,3}(-1/2)| < 1$ .

Le résultat  $\|\Delta \tilde{f}'^{j+1}\| = |L_{-5}^{5,3}(1/2)L_{-5}^{5,3}(-6)| \|\Delta \tilde{f}'^j\|_\infty$  pour tout  $j > 1$ , s'obtient, en suivant les mêmes étapes de calcul que pour  $j = 1$ . De la même façon que l'on a exprimé le rapport des perturbations  $\frac{\|\Delta \tilde{f}'^2\|_\infty}{\|\Delta \tilde{f}'^1\|_\infty}$  en fonction du rapport  $\frac{|\Delta_1|}{|\Delta_0|}$ , on aboutit ici à,

$$\frac{\|\Delta \tilde{f}'^{j+1}\|_\infty}{\|\Delta \tilde{f}'^j\|_\infty} = \frac{|\Delta_j|}{|\Delta_{j-1}|}, \quad (6.21)$$

où  $\forall j, \Delta_j = \tilde{f}'^j_{-8} - P_j(-8/2^j)$ .

Puisque tous les stencils utilisés ne dépendent pas du niveau  $j$ , on a encore,  $\frac{|\Delta_j|}{|\Delta_{j-1}|} = |L_{-5}^{5,3}(-6)L_{-5}^{5,3}(-1/2)|$ , ce qui termine la preuve dans le cas  $l = 5, r = 3, D = 7$ .

**Nous généralisons maintenant le résultat précédent pour tout  $(D, l, r)$  tel que  $r - l + 1 = -1$  :**

Un calcul similaire au cas  $l = 5, r = 3, D = 7$  conduit à,

$$\forall j > 0, \frac{\|\Delta \tilde{f}^{j+1}\|_\infty}{\|\Delta \tilde{f}^j\|_\infty} = |L_{-l}^{l,r}(1/2)L_{-l}^{l,r}(-l-1)|. \quad (6.22)$$

Reste alors à vérifier que  $|L_{-l}^{l,r}(-1/2)L_{-l}^{l,r}(-l-1)| < 1$ .

D'après l'expression (2.19), il vient

$$L_{-l}^{l,r}(-1/2) = \frac{1}{2^D D!} (2r-1)(2r-3)\dots(-2l+3), \quad (6.23)$$

$$L_{-l}^{l,r}(-l-1) = D+1. \quad (6.24)$$

Comme  $l+r = D+1$ , les expressions (6.23) et (6.24) donnent

$$L_{-l}^{l,r}(-1/2)L_{-l}^{l,r}(-l-1) = \frac{D+1}{2^D D!} G(r), \quad (6.25)$$

où  $G(r) = (2r-1)(2r-3)\dots(2r-2D+1)$ .

On peut toujours supposer  $r \geq 2$  car sinon l'étude est sans intérêt. Avec  $r+l = D+1$  et  $r-l+1 = -1$ , il vient  $r = \frac{D+1}{2}$  et  $D \geq 5$ . L'expression (6.25) donne alors,

$$\begin{aligned} |L_{-l}^{l,r}(-1/2)L_{-l}^{l,r}(-l-1)| &= \frac{D+1}{2^D D!} D(D-2)^2(D-4)^2\dots, \\ |L_{-l}^{l,r}(-1/2)L_{-l}^{l,r}(-l-1)| &= \frac{D+1}{2^D} \frac{D-2}{D-1} \frac{D-4}{D-3} \dots, \\ |L_{-l}^{l,r}(-1/2)L_{-l}^{l,r}(-l-1)| &\leq \frac{D+1}{2^D}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Comme la fonction  $h(D) = \frac{D+1}{2^D} \geq 0$  est décroissante et que  $h(5) < 1$ , il vient finalement,

$$|L_{-l}^{l,r}(-1/2)L_{-l}^{l,r}(-l-1)| < 1. \quad (6.27)$$

- **Nous terminons par le cas  $r-l+1 \geq 0$**

Suivant la même construction que précédemment, on a ici,  $P_0 = P_j$ ,  $\forall j \geq 0$  et donc  $\tilde{S}_-$  coïncide avec  $\tilde{S}_-^{ref}$  et fournit alors  $\Delta \tilde{f}^j = 0, \forall j \geq 0$ , ce qui conclut la preuve. ■

### Analyse de la convergence de $API^+$

Remarquons que d'après la règle de sélection (6.2),  $API^-$  et  $API^+$  ne sont pas symétriques par rapport à 0.

Notre démarche pour analyser la convergence de  $API^+$  est toutefois proche de celle utilisée pour l'étude de  $API^-$  puisqu'elle est basée aussi sur le théorème 6.1.1 en utilisant le symétrique du schéma  $API^-$  comme schéma de référence. Par souci de lisibilité, l'analyse détaillée de la convergence est reportée à la fin de ce chapitre dans la section 6.4.1. Nous fournissons uniquement, dans la proposition suivante, le résultat obtenu qui donne, pour  $l - r + 1 \geq -1$ , un critère de convergence de  $API^+$ .

#### **Proposition 6.1.1**

*Si  $l - r + 1 \geq -1$ , alors le schéma  $API^+$  est convergent si,*

- *pour  $l+r$  pair,*

$$\left| \sum_{i=0}^{\frac{l+r}{2}-2} L_{r-(2i+1)}^{l,r}(r) L_{r-1}^{l,r} \left( -\frac{2i+1}{2} - \frac{l-r}{2} - 1 \right) \right| < 1, \quad (6.28)$$

- *pour  $l+r$  impair,*

$$\left| \sum_{i=0}^{\frac{l+r-1}{2}-2} L_{r-(2i+1)-1}^{l,r}(r) L_{r-1}^{l,r} \left( -\frac{2i+1}{2} - \frac{l-r+1}{2} - 1 \right) \right| < 1. \quad (6.29)$$

#### **Remarque 6.1.1**

- *L'analyse complète de la convergence a été fournie dans le cas  $|r-l| \leq 2$ . Quand  $r-l+1 < -1$  (resp.  $l-r+1 < -1$ ), l'analyse de la convergence de  $API^+$  (resp. de  $API^-$ ) à l'aide du théorème de perturbation devient très technique car le nombre de perturbations  $\Delta_j$  augmente avec  $|l-r+1|$ . Un résultat général de convergence n'a pu être prouvé pour le moment.*

- *Par construction, l'API dépendant de la position reproduit les polynômes jusqu'à un degré  $D$ , i.e.*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^m \tilde{\phi}_k^I(x) = x^m, \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ et } m \leq D. \quad (6.30)$$

- *La régularité des fonctions limites des schémas dépendant de la position ne*

peut pas être directement étudiée par les méthodes utilisées dans le cas invariant par translation. La version complète du théorème de perturbation 6.1.1 dans [28] permet d'analyser la régularité des fonctions limites des schémas  $API^-$  et  $API^+$ . Cependant, aucun résultat ne fournit la régularité au point de segmentation  $y_0$ .

- Contrairement au cas invariant par translation, ce type de construction ne permet pas de définir un symbole de l' $API$  puisque les fonctions limite ont perdu l'invariance par translation. Ceci constitue un point essentiel quand on cherche à généraliser cette construction aux cas des analyses splines puisque la construction des analyses splines invariantes par translation proposée dans la section 2.3.2 et utilisant une des formules de commutation de Lemarié ne peut être appliquée ici.

Nous terminons cette section en donnant un exemple de fonctions limites dépendant de la position.

### Un exemple de fonctions limites dépendant de la position

Nous considérons l'exemple d'un  $API$  associé aux paramètres  $l = 3$ ,  $r = 3$ ,  $D = 5$ .

Comme  $r - l + 1 \geq -1$ , le théorème 6.1.2 garantit la convergence de  $API^-$ . Pour obtenir la convergence de  $API^+$ , puisque  $l - r + 1 \geq -1$ , il reste à vérifier, d'après la proposition 6.1.1 que

$$|L_2^{3,3}(-5/2)L_0^{3,3}(3) + L_2^{3,3}(-3/2)L_2^{3,3}(3)| < 1. \quad (6.31)$$

Utilisant l'expression (2.19), on obtient,

$$|L_2^{3,3}(-5/2)L_0^{3,3}(3) + L_2^{3,3}(-3/2)L_2^{3,3}(3)| = \frac{55}{128} < 1, \quad (6.32)$$

et donc la convergence de  $API^+$ .

La convergence des deux schémas  $API^+$  et  $API^-$  entraîne alors celle du schéma  $API$ .

Nous avons tracé quelques fonctions limites sur la figure 6.5. Remarquons que toutes les fonctions limites sont à support compact car le masque du schéma de subdivision associé à l' $API$  est de longueur finie. De plus, toutes les fonctions sauf une ont un support qui ne traversent pas le point de segmentation  $y_0 = 0$  puisque la règle 1 de sélection du stencil impose d'avoir un seul stencil contenant le point de segmentation. Enfin, la fonction limite de la figure 6.5 (c) n'est pas symétrique puisque l' $API^+$  et l' $API^-$  ne sont pas

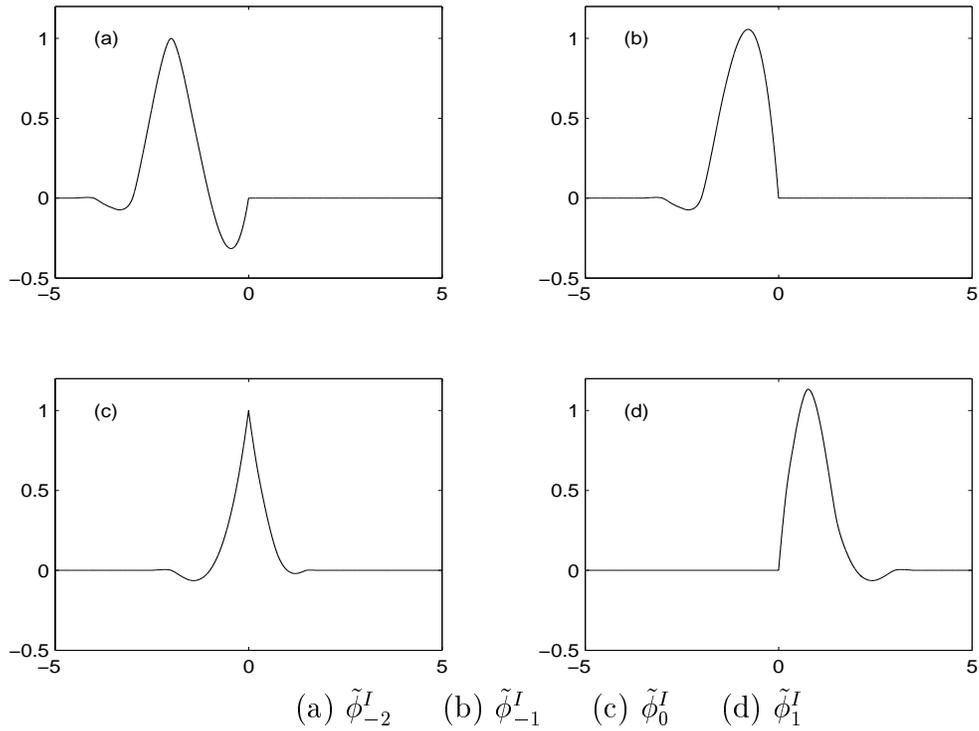


FIG. 6.5 – Fonctions limites dépendant de la position suivant la règle 1,  $y_0 = 0$ ,  $D = 5$ ,  $l = 3$ ,  $r = 3$

symétriques.

La figure 6.5 nous montre aussi que, dans cet exemple, la dérivée de la fonction limite en  $y_0 = 0$  n'est pas continue. Ce résultat était prévisible puisque la stratégie choisie suit la règle 1 (figure 6.2) et que l'interpolation de Lagrange n'impose aucune condition sur la dérivée de l'interpolée. Une façon d'augmenter la régularité de la fonction limite pourrait être d'utiliser une interpolation du type Hermite au voisinage de  $y_0$ .

Les fonctions limites dépendant de la position sont le point de départ de la construction d'analyses multirésolutions interpolantes dépendant de la position.

### 6.1.3 Lien avec les analyses multirésolutions

La construction d'analyses multirésolutions interpolantes dépendant de la position à partir des fonctions limites suit la même démarche que dans le cas invariant par translation, c'est à dire en utilisant l'analogie entre le formalisme de Harten et les analyses multirésolutions classiques (section 2.1.1).

Une fois la convergence établie, on introduit l'opérateur de reconstruction

hiérarchique  $R_j^{I,\infty}$  suivant,  $\forall \{f_k^{I,j}\}_{k \in \mathbb{Z}} \in V^j$ ,

$$R_j^{I,\infty} f^{I,j} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k^{I,j} \tilde{\phi}_k^I(2^j \cdot). \quad (6.33)$$

Il s'en suit alors, d'après l'expression (2.14), que les fonctions  $\{\tilde{\phi}_k^I\}_{k \in \mathbb{Z}}$  sont les fonctions d'échelle d'une analyse multirésolution puisque,

$$\tilde{\phi}_k^I = R_0^{I,\infty} w_k^{I,0} \quad (6.34)$$

avec  $\forall m \in \mathbb{Z}$ ,  $w_{k,m}^{I,0} = \delta_{k,m}$ , vecteur de base de  $V^0$  et on note  $\{\tilde{V}_j^I\}_{j \in \mathbb{Z}}$ , les espaces de cette analyse tels que  $\tilde{V}_j^I = \text{vect}\{\tilde{\phi}_k^I(2^j x), k \in \mathbb{Z}\}$ .

On définit ensuite la famille d'ondelettes  $\{\tilde{\psi}_{j,k}^I\}_{k \in \mathbb{Z}}$  générant un espace de détail  $\tilde{W}_j^I$ , à partir d'une base de  $\text{Ker} D_{j+1}^{I,j}$  (expression (2.11)) et on obtient,

$$\tilde{\psi}_{j,k}^I = \tilde{\phi}_{2k+1}^I(2^{j+1} \cdot). \quad (6.35)$$

Afin de faciliter la généralisation aux analyses splines, nous définissons formellement dans la proposition suivante une analyse multirésolution biorthogonale à l'analyse interpolante que nous venons de construire. Plus précisément, on définit formellement la suite d'espaces  $\{V_j^I\}_{j \in \mathbb{Z}}$  avec  $V_j^I = \text{vect}\{\delta(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}\}$  où  $\delta_{x_0}$  est la distribution de Dirac au point  $x_0$  avec  $\forall f \in C^0(\mathbb{R})$ ,  $\langle f, \delta_{x_0} \rangle = f(x_0)$ .

### Proposition 6.1.2

Si on introduit,  $\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2$ ,

$$\psi_{j,k}^I(x) = \delta(2^{j+1}x - (2k+1)) - \sum_{m=-l_{2k+1}}^{r_{2k+1}-1} L_m^{l_{2k+1}, r_{2k+1}}(-1/2) \delta(2^{j+1}x - 2(k+m+1)), \quad (6.36)$$

avec  $r_{2k+1} + l_{2k+1} = D + 1$  et  $W_j^I = \text{vect}\{\psi_{j,k}^I, k \in \mathbb{Z}\}$ , alors

$$\forall j \in \mathbb{Z}, V_j^I \subset V_{j+1}^I, \quad (6.37)$$

$$\forall j \in \mathbb{Z}, V_{j+1}^I = W_j^I \oplus V_j^I, \quad (6.38)$$

et

$$\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2, \forall f \in \tilde{V}_j^I, \langle f, \psi_{j,k}^I \rangle = 0. \quad (6.39)$$

**Preuve:**

La propriété (6.37) s'obtient immédiatement d'après la construction de  $V_j^I$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ .

Nous commençons donc par montrer que  $V_{j+1}^I = W_j^I \oplus V_j^I$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ .

Tout élément  $v_{j+1}^I \in V_{j+1}^I$  vérifie,

$$v_{j+1}^I(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_k \delta(2^{j+1}x - k), \quad (6.40)$$

que l'on peut réécrire

$$v_{j+1}^I(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_{2k} \delta(2^j x - k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_{2k+1} \delta(2^{j+1}x - (2k+1)). \quad (6.41)$$

Ecrivant  $\delta(2^{j+1}x - (2k+1)) = \psi_{j,k}^I(x) + v_{j,k}$  où  $v_{j,k}(x) = \sum_{m=-l_{2k+1}^{r_{2k+1}-1}} L_m^{l_{2k+1}, r_{2k+1}}(-1/2) \delta(2^j x - (k+m+1))$ , nous obtenons,

$$v_{j+1}^I(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_{2k} \delta(2^j x - k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_{2k+1} (\psi_{j,k}^I(x) + v_{j,k}). \quad (6.42)$$

Comme  $v_{j,k} \in V_j^I$ , nous trouvons finalement,

$$v_{j+1}^I(x) = \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_{2k} \delta(2^j x - k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_{2k+1} v_{j,k} \right) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_{2k+1} \psi_{j,k}^I(x), \quad (6.43)$$

avec  $(\sum_{k \in \mathbb{Z}} v_{2k} \delta(2^j x - k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_{2k+1} v_{j,k}) \in V_j^I$  et  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} v_{2k+1} \psi_{j,k}^I(x) \in W_j^I$ .

L'expression (6.43) donne alors

$$V_{j+1}^I = V_j^I + W_j^I. \quad (6.44)$$

De plus, si  $u \in V_j^I \cap W_j^I$ , on a,

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \psi_{j,k}^I(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \delta(2^j x - k). \quad (6.45)$$

Puisque  $\psi_{j,k}^I(x_{2^{k'+1}}^{j+1}) = \delta_{k,k'}$ , il vient directement que  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,  $b_k = 0$  et donc  $u = 0$  et

$$V_j^I \cap W_j^I = \{0\}. \quad (6.46)$$

Combinant ce résultat et l'expression (6.44), on en déduit,

$$V_{j+1}^I = V_j^I \oplus W_j^I. \quad (6.47)$$

Pour prouver que  $\forall f \in \tilde{V}_j^I$ ,  $\langle f, \psi_{j,k}^I \rangle = 0$ ,  $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$ , nous considérons  $\langle \tilde{\phi}_{j,n}^I, \psi_{j,k}^I \rangle$  pour chaque  $(k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Il vient

$$\langle \tilde{\phi}_{j,n}^I, \psi_{j,k}^I \rangle = \tilde{\phi}_{j,n}^I(x_{2^{k+1}}^{j+1}) - \sum_{m=-l_{2^{k+1}}}^{r_{2^{k+1}}-1} L_m^{l_{2^{k+1}}, r_{2^{k+1}}}(-1/2) \tilde{\phi}_{j,n}^I(x_{k+m+1}^j). \quad (6.48)$$

Par construction de l'algorithme de prédiction interpolant, l'expression (6.48) donne,

$$\forall (k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad \langle \tilde{\phi}_{j,n}^I, \psi_{j,k}^I \rangle = 0, \quad (6.49)$$

ce qui conclut la preuve. ■

### Remarque 6.1.2

- La construction qui vient d'être proposée peut être considérée comme une généralisation au cas dépendant de la position des analyses multirésolutions interpolantes décrites par Donoho dans [31].

- Un inconvénient des ondelettes interpolantes est qu'elles ne sont pas d'intégrales nulle. Pour augmenter le nombre de moments nuls, W.Sweldens dans [61] introduit le "lifting scheme". Dans notre étude, nous ne nous intéressons pas à cette solution mais nous construisons des ondelettes avec plus de moments nuls en utilisant une discrétisation B-spline.

## 6.2 Généralisation aux algorithmes de prédiction B-spline dépendant de la position : lien avec les analyses multirésolutions biorthogonales dépendant de la position

A ce niveau de la construction, nous disposons de fonctions d'échelles  $\{\tilde{\phi}_k^I\}_{k \in \mathbb{Z}}$  et d'ondelettes  $\{\tilde{\psi}_k^I\}_{k \in \mathbb{Z}}$  (expression (6.35)) interpolantes non invariantes par translation (adaptées à un point  $y_0 = 0$ ). L'analyse multirésolution associée est biorthogonale à une autre analyse multirésolution construite à partir de distributions définissant les espaces  $V_j^I$  et  $W_j^I$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ . Pour généraliser cette construction au cas où  $V_j$  est un espace de  $B^N$ -splines associés à la segmentation dyadique  $\{k2^{-j}, k \in \mathbb{Z}\}$ , nous allons essentiellement utiliser des formules de commutation qui généralisent au cas non invariant par translation les formules de commutation de Lemarié ([45]). S'il est maintenant clair, dans le cas invariant par translation (section 2.3), que les fonctions d'échelles de l'analyse multirésolution biorthogonale à l'analyse spline d'ordre  $N$ , sont les fonctions limites de l'algorithme de prédiction  $B^N$ -spline (défini par l'expression (2.29)), une difficulté supplémentaire ici vient du fait que les fonctions obtenues par application de ces nouvelles formules de commutation ne sont pas généralement continues. On ne peut donc pas démontrer, a posteriori, que ce sont des fonctions limites classiques d'un schéma de subdivision. C'est pour cela que l'on est amené à définir la convergence  $L^2$  de l'algorithme de prédiction  $B^N$ -spline. On montre alors que les fonctions obtenues sont les bases d'une analyse multirésolution biorthogonale à l'analyse spline d'ordre  $N$ .

### 6.2.1 Convergence de l'algorithme de prédiction $B^N$ -spline dépendant de la position

Nous commençons par donner deux définitions utiles pour l'étude de la convergence  $L^2$  de l'algorithme de prédiction.

#### Notations et définitions

La première définition est empruntée à [4]. Elle s'écrit,

##### **Définition 6.2.1**

Pour n'importe quelle séquence  $\{f_k^{N,j}\}_{k \in \mathbb{Z}} \in V^j$  et n'importe quel opérateur de reconstruction,  $R_L^N$ , compatible avec la discrétisation  $B^N$ -spline, nous définissons l'opérateur de projection  $\Pi_j^{N,L}$  avec  $L > j$  par,

$$\Pi_j^{N,L} f^{N,j} = R_L^N P_{L-1}^{N,L} \dots P_j^{N,j+1} f^{N,j}. \quad (6.50)$$

Il est alors possible de parler de convergence au sens  $L^2$  pour l'algorithme de prédiction  $B^N$ -spline, c'est ce qui fait l'objet de la seconde définition,

**Définition 6.2.2**

L'algorithme de prédiction  $B^N$ -spline est dit convergent au sens de  $L^2$  si il existe une séquence d'opérateurs  $\{\Pi_0^{N,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  tel que, pour n'importe quelle séquence  $\{f_k^{N,0}\}_{k \in \mathbb{Z}} \in V^0 \cap l^2(\mathbb{Z})$ ,

$$\forall j > 0, \Pi_0^{N,j} f^{N,0} \in L^2(\mathbb{R}). \quad (6.51)$$

et il existe  $f \in L^2(\mathbb{R})$  tel que,

$$\forall \epsilon > 0, \exists J > 0, \forall j \geq J \quad \|\Pi_0^{N,j} f^{N,0} - f\|_{L^2} \leq \epsilon. \quad (6.52)$$

Dans ce qui suit, nous analysons la convergence au sens  $L^2$  de l'algorithme de prédiction  $B^N$ -spline quand la séquence initiale est  $f_k^{N,0} = \delta_{k,m}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

**Etude de la convergence**

A partir de maintenant, nous supposons l'existence (au sens  $L^\infty$ , voir section 6.1.2) des fonctions limites,  $\tilde{\phi}_k^I$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , de l'algorithme de prédiction interpolant dépendant de la position.

La proposition suivante introduit l'expression des fonctions limites de l'algorithme de prédiction  $B^N$ -spline.

**Proposition 6.2.1**

Pour tout  $N \geq 1$ , si on suppose que  $\tilde{\phi}_k^I$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  est  $C^{N-1}$ ,  $C^N$  par morceaux et à support compact, alors les fonctions limites au sens  $L^2$ ,  $\{\tilde{\phi}_k^N\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , de l'algorithme de prédiction  $B^N$ -spline dépendant de la position vérifient,

$$\text{si } N=1, \tilde{\phi}_k^1(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n_0 \geq k+1} \tilde{\phi}_{n_0}^I(x), \quad (6.53)$$

$$\text{si } N>1, \tilde{\phi}_k^N(x) = \frac{d^N}{dx^N} \sum_{n_{N-1} \geq 1} \dots \sum_{n_2 \geq 1} \sum_{n_1 \geq 1} \sum_{n_0 \geq k+1} \tilde{\phi}_{n_{N-1}+\dots+n_0}^I(x), \quad (6.54)$$

**Remarque 6.2.1**

La notation  $\frac{d^N}{dx^N}$  dans la proposition 6.2.1 ne peut pas être interprétée comme la dérivée  $N$ -ième au sens usuel puisque la fonction  $\tilde{\phi}_k^I$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  n'est que  $C^N$  par morceaux. La dérivée  $N$ -ième de  $\tilde{\phi}_k^I$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  est donc obtenue en dérivant la fonction  $N - 1$  fois au sens usuel puis une fois au sens de la dérivée par morceaux sur chaque partie de la fonction qui est  $C^1$ .

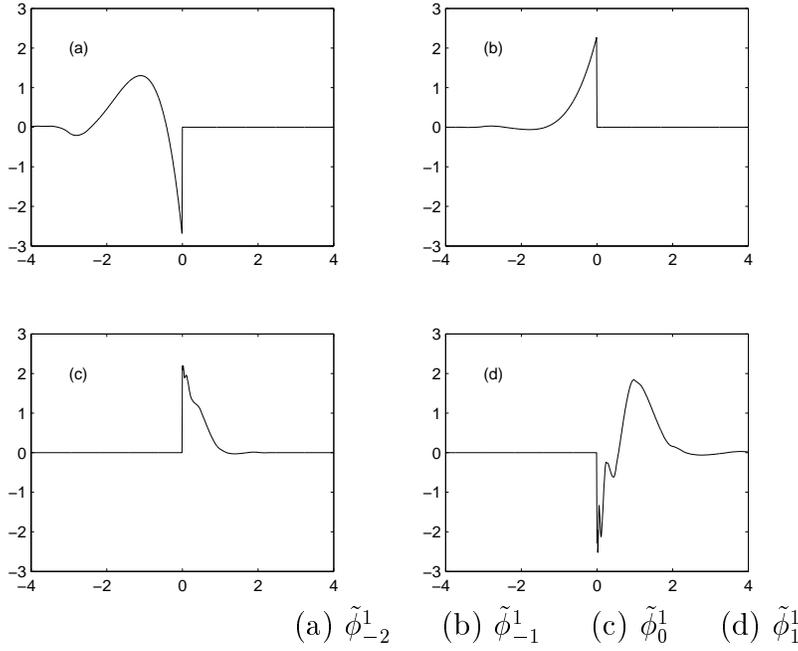


FIG. 6.6 – Fonctions limites de l’algorithme de prédiction  $B^1$ -spline avec la règle 1,  $y_0 = 0$ ,  $D=5$ ,  $l=3$ ,  $r=3$

Par souci de clarté dans la présentation, la preuve de cette proposition est fournie à la fin de ce chapitre dans la section 6.4.2.

La figure 6.6 donne quelques exemples de  $\tilde{\phi}_k^1$  pour une sélection du stencil suivant la règle 1 (section 6.1) associée à un point de segmentation  $y_0 = 0$ .

Avant de terminer cette section, plusieurs remarques doivent être formulées.

### Remarque 6.2.2

- Si l’algorithme de prédiction  $B^N$ -spline est convergent au sens de  $L^2$ , alors on peut définir l’opérateur de reconstruction hiérarchique,  $R_j^{N,\infty}$ , par,

$$\forall \left\{ f_k^{N,j} \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \in V^j,$$

$$R_j^{N,\infty} f^{N,j} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k^{N,j} \tilde{\phi}_k^N(2^j \cdot). \quad (6.55)$$

- Par construction, on a, en suposant  $D \geq N$ ,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^m \tilde{\phi}_k^N(x) = x^m \text{ si } m \leq D - N. \quad (6.56)$$

- Il est intéressant de noter que nous obtenons formellement la même relation

entre  $\tilde{\phi}_k^N$  et  $\{\tilde{\phi}_k^I\}_{k \in \mathbb{Z}}$  que dans le cas invariant par translation (proposition 2.3.1). Cependant, la proposition 3.3.2 établit l'existence des fonctions limites dans  $L^2(\mathbb{R})$  et non dans  $C^0(\mathbb{R})$  comme c'est classiquement le cas dans l'étude des schémas de subdivision. C'est un des avantages de l'approche de Harten.

- Remarquons que la proposition 6.2.1 requiert une forte régularité des fonctions limites dépendant de la position  $\tilde{\phi}_k^I$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Ainsi, la stratégie suivant la règle 1 ne permet pas de parler de convergence au sens  $L^2$  de l'algorithme de prédiction  $B^N$ -spline pour  $N > 1$  car  $\tilde{\phi}_k^1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  est déjà discontinue (voir figure 6.6). Cependant, il est possible de définir d'autres règles de sélection qui conduisent à des fonction limites interpolantes plus régulières et autorisent ainsi la construction de  $\{\tilde{\phi}_k^N\}_{k \in \mathbb{Z}} \in L^2(\mathbb{R})$  pour  $N > 1$ .

Les fonctions limites de l'algorithme de prédiction  $B^N$ -spline sont maintenant le point de départ de la construction d'analyses multirésolutions biorthogonales de  $L^2(\mathbb{R})$ .

## 6.2.2 Construction des analyses multirésolutions biorthogonales

Nous supposons dans cette partie que les fonctions limites (au sens de  $L^2$ ) de l'algorithme de prédiction  $B^N$ -spline ( $N \geq 1$ ) dépendant de la position existent. La construction des analyses multirésolutions splines, réalisée dans le cas invariant par translation et basée sur les formules de commutation de Lemarié ([45]), ne peut pas être appliquée directement dans le cas dépendant de la position puisqu'on ne peut pas définir de symbole pour l'analyse interpolante. Dans la suite de cette section, nous fournissons donc étape après étape la construction d'analyses splines dépendant de la position.

Nous commençons par introduire la famille d'espaces  $\{\tilde{V}_j^N\}_{j \in \mathbb{Z}}$  tels que,

$$\tilde{V}_j^N = \text{vect}\{2^{j/2} \tilde{\phi}_k^N(2^j x), k \in \mathbb{Z}\}. \quad (6.57)$$

Observons que, par construction,  $\tilde{V}_{j+1}^N \subset \tilde{V}_j^N$  et qu'il existe une condition de biorthogonalité entre les fonctions limites  $\{\tilde{\phi}_k^N\}_{k \in \mathbb{Z}}$  et les translatés de la fonction  $B^N$ -spline, i.e.

$$\forall (k, m) \in \mathbb{Z}^2, \langle \tilde{\phi}_k^N, B^N(x - m) \rangle = \delta_{k,m}. \quad (6.58)$$

Notre but est d'abord de montrer que les espaces  $\{\tilde{V}_j^N\}_{j \in \mathbb{Z}}$  associés aux espaces  $\{V_j^N\}_{j \in \mathbb{Z}}$  définis dans la proposition 1.3.2 forment une famille de

paires d'espaces d'approximation d'une analyse multirésolution biorthogonale de  $L^2(\mathbb{R})$ .

D'après la proposition 1.3.2, la famille  $\{V_j^N\}_{j \in \mathbb{Z}}$  vérifie les propriétés des espaces d'une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$ . Reste alors à montrer que ces propriétés sont encore vraies pour la famille  $\{\tilde{V}_j^N\}_{j \in \mathbb{Z}}$ .

On construit, ensuite, deux familles d'ondelettes  $\{\psi_{j,k}^N\}_{k \in \mathbb{Z}}$  avec  $\psi_{j,k}^N = 2^{j/2} \psi_k^N(2^j x)$  (resp.  $\{\tilde{\psi}_{j,k}^N\}_{k \in \mathbb{Z}}$  avec  $\tilde{\psi}_{j,k}^N = 2^{j/2} \tilde{\psi}_k^N(2^j x)$ ) qui génèrent  $W_j^N$  (resp.  $\tilde{W}_j^N$ ), le complément de  $V_j^N$  (resp.  $\tilde{V}_j^N$ ) dans  $V_{j+1}^N$  (resp.  $\tilde{V}_{j+1}^N$ ) et telles que,

$$V_{j+1}^N = V_j^N \oplus W_j^N \quad (\text{resp. } \tilde{V}_{j+1}^N = \tilde{V}_j^N \oplus \tilde{W}_j^N),$$

et

$$V_j^N \perp \tilde{W}_j^N \quad (\text{resp. } \tilde{V}_j^N \perp W_j^N).$$

### 1) Analyse des espaces $\tilde{V}_j^N$ , $j \in \mathbb{Z}$

– Densité des espaces dans  $L^2(\mathbb{R})$  :

la proposition suivante établit la propriété de densité dans  $L^2(\mathbb{R})$  de la famille  $\{\tilde{V}_j^N\}_{j \in \mathbb{Z}}$ . Elle s'écrit,

#### **Proposition 6.2.2**

Si  $\tilde{V}_j^N = \text{vect}\{2^{j/2} \tilde{\phi}_k^N(2^j x), k \in \mathbb{Z}\}$ , alors

$$\overline{\cup_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{V}_j^N} = L^2(\mathbb{R}). \quad (6.59)$$

**Preuve:**

Supposant  $f \in L^2(\mathbb{R})$  et utilisant  $P_{\tilde{V}_j^N}(f)$ , sa projection dans  $\tilde{V}_j^N$  (expression (1.12)), nous allons montrer que

$$\|P_{\tilde{V}_j^N} f - f\|_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \quad \text{quand } j \rightarrow \infty. \quad (6.60)$$

Remarquons d'abord que la condition de biorthogonalité entre  $\{B^N(x - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$  et  $\{\tilde{\phi}_k^N(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  permet d'écrire,

$$P_{\tilde{V}_j^N}(f) = 2^{j/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, 2^{j/2} B^N(2^j x - k) \rangle \tilde{\phi}_k^N(2^j x). \quad (6.61)$$

Cette preuve suit celle faite par C. Chui dans [17] (p 218), c'est pourquoi, nous n'en donnons que les points principaux.

Puisque  $\tilde{\phi}_k^N$  (resp.  $B^N(x-k)$ ),  $k \in \mathbb{Z}$  sont à support compact, il vient pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\tilde{\phi}_k^N(x) = O\left(\frac{1}{1+|x-k|^L}\right) \text{ pour chaque } L \geq 0, \quad (6.62)$$

$$B^N(x-k) = O\left(\frac{1}{1+|x-k|^L}\right) \text{ pour chaque } L \geq 0. \quad (6.63)$$

De plus, introduisant le noyau,

$$K(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\phi}_k^N(x) B^N(y-k), \quad (6.64)$$

comme  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\phi}_k^N(x) = 1$  (remarque 6.2.2) et  $\int_{\mathbb{R}} B^N(y-k) dy = 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (proposition 1.3.2), on peut écrire

$$\left(P_{\tilde{V}_j^N}(f)\right)(x) = 2^j \int_{\mathbb{R}} K(2^j x, 2^j y) f(y) dy, \quad (6.65)$$

$$\int_{\mathbb{R}} K(x, y) dy = 1, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (6.66)$$

D'après les expressions (6.65) et (6.66), il vient,

$$\|P_{\tilde{V}_j^N}(f) - f\|_{L^2(\mathbb{R})} = 2^j \left\| \int_{\mathbb{R}} K(2^j \cdot, 2^j y) (f(y) - f(\cdot)) dy \right\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (6.67)$$

Combinant cette expression avec les égalités (6.62) et (6.63), un rapide calcul mène à,

$$\|P_{\tilde{V}_j^N}(f) - f\|_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \text{ quand } j \rightarrow \infty. \quad (6.68)$$

Finalement, l'expression (6.68) nous permet de conclure,

$$\overline{\cup_j \tilde{V}_j^N} = L^2(\mathbb{R}). \quad (6.69)$$

Suivant la proposition 5.3.1 de [26] (p 141), la seconde propriété  $\cap_j \tilde{V}_j^N = \{0\}$  est vérifiée à condition que la famille  $\{\tilde{\phi}_k^N\}_{k \in \mathbb{Z}}$  soit une base de Riesz de  $\tilde{V}_0^N$ . Ce résultat fait l'objet du paragraphe suivant.

– Base de Riesz :

Nous prouvons la proposition suivante.

**Proposition 6.2.3**

La famille de fonctions  $\{\tilde{\phi}_k^N\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base de Riesz de  $\tilde{V}_0^N$  i.e.  $\exists \tilde{A} > 0$ ,  $\exists \tilde{B} < \infty$ , tels que, pour toute séquence  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ ,

$$\tilde{A} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \leq \| \tilde{f}_j \|_{L^2}^2 \leq \tilde{B} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2. \quad (6.70)$$

où  $\tilde{f}_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \tilde{\phi}_k^N(x)$ .

Par souci de lisibilité, la preuve de cette proposition est fournie à la fin du chapitre dans la section 6.4.3.

La famille  $\{\tilde{V}_j^N\}_{j \in \mathbb{Z}}$  vérifie donc les propriétés des espaces d'une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$ . Il reste alors à construire les ondelettes associées à l'analyse multirésolution biorthogonale définie par les deux familles espaces  $\{V_j^N\}_{j \in \mathbb{Z}}$  et  $\{\tilde{V}_j^N\}_{j \in \mathbb{Z}}$ .

La construction des ondelettes que nous proposons généralise la construction invariante par translation qui utilise les formules de commutation de Lemarié au cas dépendant de la position.

Nous nous concentrons sur la caractérisation des ondelettes à l'échelle  $j = 0$ , i.e,  $\psi_k^N(x)$  et  $\tilde{\psi}_k(x)$ .

**2) Construction et analyse des espaces de détail  $\tilde{W}_j^N$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  et des ondelettes  $\{\tilde{\psi}_k^N\}_{k \in \mathbb{Z}}$**

Cette construction utilise l'analogie Harten/ondelettes de la section 2.1.1. Remarquons d'abord que  $\tilde{V}_j^N$  est bien un espace du type de celui introduit par la formule (2.12) puisque, par construction,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\tilde{\phi}_k^N = R_0^{N,\infty} w_k^{N,0} \quad (6.71)$$

où l'opérateur de reconstruction,  $R_j^{N,\infty}$ , est défini par la relation (6.55) et  $\forall m \in \mathbb{Z}$ ,  $w_{k,m}^{N,0} = \delta_{m,k}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Nous proposons alors de définir  $\tilde{\psi}_k^N$  par,

$$\tilde{\psi}_k^N = R_1^{N,\infty} u_k^{N,1}, \quad (6.72)$$

où  $\{u_k^{N,1}\}_{k \in \mathbb{Z}} \in V^1$  est une base du noyau de  $D_1^{N,0}$  (l'opérateur de décimation défini par l'expression (2.2)).

La construction est faite par récurrence sur  $N$ .

Nous commençons donc par construire  $\tilde{\psi}_k^N$  quand  $N = 1$ .

Par construction, l'ondelette  $\tilde{\psi}_k^N$  est complètement caractérisée par une base du noyau de l'opérateur de décimation  $D_1^{1,0}$ . Nous cherchons donc d'abord une base du noyau de cet opérateur.

En utilisant la relation d'échelle vérifiée par la fonction  $B^1$ -spline,

$$B^1(x) = 2 \left( \frac{1}{2} B^1(2x) + \frac{1}{2} B^1(2x - 1) \right), \quad (6.73)$$

on déduit que pour tout  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad (D_j^1 f)_k = \frac{1}{2} (D_{j+1}^1 f)_{2k} + \frac{1}{2} (D_{j+1}^1 f)_{2k+1}. \quad (6.74)$$

Nous obtenons alors pour tout  $\{f_k^{1,j+1}\}_{k \in \mathbb{Z}} \in V^{j+1}$ ,

$$\begin{aligned} (D_{j+1}^{1,j} f^{1,j+1})_k &= (D_j^1 R_{j+1}^{1,\infty} f^{1,j+1})_k = \frac{1}{2} (D_{j+1}^1 R_{j+1}^{1,\infty} f^{1,j+1})_{2k} + \frac{1}{2} (D_{j+1}^1 R_{j+1}^{1,\infty} f^{1,j+1})_{2k+1}, \\ &= \frac{1}{2} f_{2k}^{1,j+1} + \frac{1}{2} f_{2k+1}^{1,j+1}, \end{aligned} \quad (6.75)$$

et donc,

$$(D_{j+1}^{1,j})_{k,2k} = 1/2, \quad (6.76)$$

$$(D_{j+1}^{1,j})_{k,2k+1} = 1/2. \quad (6.77)$$

La résolution de l'équation du noyau fournit un choix possible pour le vecteur  $\{u_{k,m}^{1,1}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  :

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad u_{k,m}^{1,1} = \delta_{m,2k} - \delta_{m,2k+1}. \quad (6.78)$$

La fonction  $\tilde{\psi}_k^1$  s'écrit alors,

$$\tilde{\psi}_k^1(x) = \tilde{\phi}_{2k}^1(2x) - \tilde{\phi}_{2k+1}^1(2x). \quad (6.79)$$

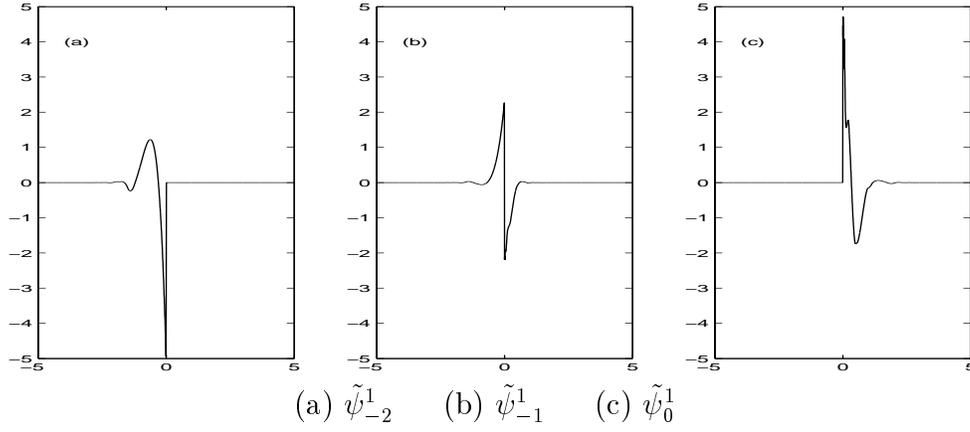


FIG. 6.7 – Ondelettes  $\tilde{\psi}_k^1$  associées à une analyse multirésolution spline d'ordre 1, dépendant de la position suivant la règle 1,  $D=5$ ,  $l=3$ ,  $r=3$ ,  $y_0 = 0$

D'après l'expression (6.53),

$$\tilde{\psi}_k^1(x) = \frac{d}{dx} \sum_{l>0} \tilde{\phi}_{2k+l}^I(2x) - \frac{d}{dx} \sum_{l>0} \tilde{\phi}_{2k+1+l}^I(2x), \quad (6.80)$$

ce qui donne finalement (Figure 6.7) :

$$\tilde{\psi}_k^1(x) = \frac{d}{dx} \tilde{\phi}_{2k+1}^I(2x) = \frac{d}{dx} \tilde{\psi}_k^I(x), \quad (6.81)$$

où nous rappelons que  $\{\tilde{\psi}_k^I\}_{k \in \mathbb{Z}}$  sont les ondelettes des analyses multirésolutions interpolantes introduites dans la section 6.1.3.

Par récurrence, nous pouvons caractériser l'ondelette  $\tilde{\psi}_k^N$ . Connaissant une base du noyau de  $D_1^{N,0}$ ,  $\{u_k^{N,1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , la proposition suivante construit une base du noyau de  $D_1^{N+1,0}$ .

#### Proposition 6.2.4

Si  $\{u_k^{N,1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base du noyau de  $D_1^{N,0}$ , alors la famille de vecteurs  $\{v_k^{N+1,1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  définie par,

$$\forall m \in \mathbb{Z}, v_{k,m}^{N+1,1} = u_{k,m+1}^{N,1} - u_{k,m}^{N,1}, \quad (6.82)$$

est une base de  $\text{Ker}(D_1^{N+1,0})$ .

Par souci de lisibilité, la preuve de cette proposition est donnée dans la section 6.4.4.

Par récurrence, connaissant une base de  $\ker(D_1^{N,0})$ , on peut alors construire l'ondelette  $\tilde{\psi}_k^{N+1}$  à partir de la famille  $\{v_k^{N+1,1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ,

$$\tilde{\psi}_k^{N+1}(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} v_{k,m}^{N+1,1} \tilde{\phi}_m^{N+1}(2x). \quad (6.83)$$

D'après les expressions (6.54) et (6.82),

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_k^{N+1}(x) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} u_{k,m}^{N,1} \left( \frac{d}{dx} \sum_{n_0 > m-1} \tilde{\phi}_{n_0}^N(2x) - \frac{d}{dx} \sum_{n_0 > m} \tilde{\phi}_{n_0}^N(2x) \right), \\ &= \frac{d}{dx} \sum_{m \in \mathbb{Z}} u_{k,m}^{N,1} \tilde{\phi}_m^N(2x) \\ &= \frac{d}{dx} \tilde{\psi}_k^N(x), \end{aligned} \quad (6.84)$$

ce qui donne finalement,

$$\forall N \geq 0, \tilde{\psi}_k^{N+1} = \frac{d^{N+1}}{dx^{N+1}} \tilde{\psi}_k^I, \quad (6.85)$$

où  $\tilde{\psi}_k^I$  est définie par la formule (6.35).

L'analogie entre le formalisme de Harten et l'approche ondelettes classiques (formule (2.16) de la section 2.1.1) fournit la propriété suivante,

$$\forall N \geq 1, \forall j \in \mathbb{Z}, \tilde{V}_{j+1}^N = \tilde{V}_j^N \oplus \tilde{W}_j^N, \quad (6.86)$$

et par construction de l'ondelette (expression (6.72)), on a

$$\forall (k, m) \in \mathbb{Z}^2, \langle \tilde{\psi}_k^N, B^N(x-m) \rangle = 0, \quad (6.87)$$

et donc,

$$\forall N \geq 1, \forall j \in \mathbb{Z}, \tilde{W}_j^N \perp V_j^N. \quad (6.88)$$

**Remarque 6.2.3**

Puisque les fonctions limites  $\{\tilde{\phi}_k^I\}_{k \in \mathbb{Z}}$  sont à support compact (section 6.1.2) et que la convergence de l'algorithme de prédiction  $B^N$ -spline impose  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,  $\tilde{\phi}_k^I \in C^{N-1}(\mathbb{R})$  et  $C^N$  par morceaux (proposition 6.2.1), les expressions (6.35) et (6.85) montrent que  $\tilde{\psi}_k^N(x)$  est bien dans  $L^2(\mathbb{R})$  et est à support compact. On vérifie alors  $\{\tilde{W}_j^N\}_{j \in \mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ .

### 3) Construction et analyse des espaces de détail $W_j^N$ , $j \in \mathbb{Z}$ et des ondelettes $\{\psi_k^N\}_{k \in \mathbb{Z}}$

Cette construction se fait aussi par récurrence. Nous commençons par le cas  $N = 1$  puis établissons le lien entre  $\psi_k^N$  et  $\psi_k^{N+1}$ ,  $\forall N \geq 1$ .

**Proposition 6.2.5**

Si nous définissons, en suivant le cas invariant par translation (proposition 2.3.2), l'ondelette,

$\psi_k^1(x) = \int_{-\infty}^x \psi_k^0(t) dt = \int_{-\infty}^x \psi_k^I(t) dt^2$  où  $\psi_k^I$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  a été introduite dans la proposition 6.1.2, alors

$$V_1^1 = V_0^1 \oplus W_0^1, \quad (6.89)$$

et,

$$W_0^1 \perp \tilde{V}_0^1. \quad (6.90)$$

**Remarque 6.2.4**

Remarquons que par définition de  $\psi_k^I$  (proposition 6.1.2),

$$\psi_k^1(x) = H(2x - (2k + 1)) - \sum_{m=-l_{2k+1}}^{r_{2k+1}-1} L_m^{l_{2k+1}, r_{2k+1}}(-1/2) H(2x - 2(k + m + 1)) \quad (6.91)$$

avec  $H = \chi_{[0, +\infty[}$  et  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,  $r_{2k+1} + l_{2k+1} = D + 1$ .

Comme  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,  $\sum_{m=l_{2k+1}}^{r_{2k+1}-1} L_m^{l_{2k+1}, r_{2k+1}}(x) = 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , on déduit que,

$$\text{supp}(\psi_k^1) = [k - l_{2k+1} + 1, k + r_{2k+1}], \quad (6.92)$$

---

<sup>2</sup>au sens des distributions i.e  $\langle \frac{d}{dx} \psi_k^1, g \rangle = - \langle \psi_k^1, \frac{dg}{dx} \rangle \quad \forall g \in C_c^\infty$ .

et donc  $\psi_k^1 \in L^2(\mathbb{R})$  et est à support compact.

Il est alors correct d'écrire  $W_0^1 \perp \tilde{V}_0^1$  au sens de  $L^2$ .

Nous revenons maintenant à la preuve de la proposition 6.2.5.

**Preuve:**

Commençons par montrer que  $V_1^1 = V_0^1 \oplus W_0^1$

Ecrivons d'abord tout  $v_1^1 \in V_1^1$  comme,

$$v_1^1(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_{1,k}^1 B^1(2x - k). \quad (6.93)$$

En prenant la transformée de Fourier de l'expression précédente et en utilisant la relation (1.82), il vient,

$$\hat{v}_1^1(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_{1,k}^1 e^{-i\omega k/2} \frac{1}{i\omega} (1 - e^{-i\omega/2}) \hat{\delta}(\omega/2). \quad (6.94)$$

De plus, la proposition 6.1.2 a fourni  $V_1^I = V_0^I + W_0^I$ , et donc, l'expression (6.94) donne,

$$\hat{v}_1^1(\omega) = \frac{1}{i\omega} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (a_{1,k} + a_{2,k}) e^{-ik\omega} \hat{\delta}(\omega) + \frac{1}{i\omega} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (b_{1,k} + b_{2,k}) \hat{\psi}_k^I(\omega), \quad (6.95)$$

car

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_{1,k}^1 e^{-i\omega k/2} \hat{\delta}(\omega/2) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{1,k} e^{-ik\omega} \hat{\delta}(\omega) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{1,k} \hat{\psi}_k^I(\omega), \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_{1,k}^1 e^{-i\omega(k+1)/2} \hat{\delta}(\omega/2) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{2,k} e^{-ik\omega} \hat{\delta}(\omega) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{2,k} \hat{\psi}_k^I(\omega). \end{aligned}$$

D'après la relation (1.82),

$$\hat{v}_1^1(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (a_{1,k} + a_{2,k}) e^{-ik\omega} \frac{1}{1 - e^{-\omega}} \hat{B}^1(\omega) + \frac{1}{i\omega} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (b_{1,k} + b_{2,k}) \hat{\psi}_k^I(\omega), \quad (6.96)$$

ce qui donne en repassant dans le domaine physique,

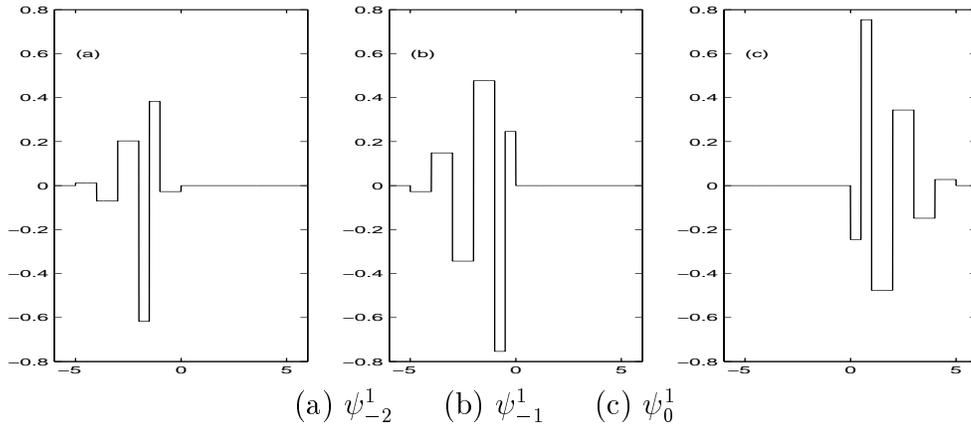


FIG. 6.8 – Ondelettes  $\psi_k^1$  associées à une analyse multirésolution spline d'ordre 1, dépendant de la position suivant la règle 1,  $D=5$ ,  $l=3$ ,  $r=3$ ,  $y_0 = 0$

$$v_1^1(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m \geq 0} (a_{1,k} + a_{2,k}) B^1(x - (k + m)) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} (b_{1,k} + b_{2,k}) \int_{-\infty}^x \tilde{\psi}_k^I(t) dt, \quad (6.97)$$

et conduit à  $V_1^1 = V_0^1 + W_0^1$ .

De plus,  $V_1^1 = V_0^1 \oplus W_0^1$  car  $V_1^I = V_0^I \oplus W_0^I$ .

Nous montrons maintenant que  $W_0^1 \perp \tilde{V}_0^1$  :

Combinant l'expression (6.53) et  $\psi_k^1(x) = \int_{-\infty}^x \psi_k^I(t) dt$ , il vient,

$\forall (k, m) \in \mathbb{Z}^2$ ,

$$\langle \psi_k^1(x), \tilde{\phi}_m^1(x) \rangle = - \langle \hat{\psi}_k^I(\omega), \sum_{n_0 > m} \hat{\phi}_{n_0}^I(\omega) \rangle = 0. \quad (6.98)$$

d'après la proposition 6.1.2, ce qui conclut la preuve. ■

La figure 6.8 donne un exemple d'ondelette  $\psi_k^1$ .

On construit alors par récurrence l'ondelette  $\psi_k^{N+1}$  à partir de  $\psi_k^N$ ,  $N \geq 1$ , en suivant la même démarche que précédemment. On obtient,

$$\psi_k^{N+1}(x) = \int_{-\infty}^x \psi_k^N(t) dt, \quad (6.99)$$

et il vient aussi par récurrence  $V_1^N = V_0^N \oplus W_0^N$  et  $W_0^N \perp \tilde{V}_0^N$ .

**Remarque 6.2.5**

- On vérifie que la famille d'ondelettes  $\{\psi_k^N\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ,  $N \geq 1$ , est bien dans  $L^2(\mathbb{R})$  et donc que  $\{W_j^N\}_{j \in \mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ .

Ce résultat est déjà démontré pour  $N = 1$  (remarque 6.2.4). Dans le cas  $N > 1$ , ce résultat est aussi vérifié puisque l'ondelette  $\psi_k^N$ ,  $N > 1$  est à support compact et au moins  $C^0(\mathbb{R})$ .

La première propriété s'obtient par récurrence à partir de la relation (6.99).

En effet, sachant que l'interpolation de Lagrange à  $D + 1$  points reproduit les polynômes de degré inférieur ou égal à  $D$ , on déduit que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \langle x^m, \psi_k^I \rangle = 0 \text{ pour } m \leq D \text{ et } x \in \mathbb{R} \quad (6.100)$$

et il vient donc d'après la relation (6.99) ( $N=1$ ),

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_k^1(x) dx = 0. \quad (6.101)$$

Combinant ce résultat avec le fait que  $\psi_k^1$  est à support compact (remarque 6.2.4) suffit à montrer que  $\psi_k^2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  est à support compact.

En procédant de la même façon, on montre par récurrence que  $\forall N > 2$ ,  $\psi_k^N$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  est à support compact.

La régularité de  $\psi_k^N$  est aussi une conséquence directe de la relation (6.99) connaissant la régularité de  $\psi_k^I$ .

- Les ondelettes et les fonctions d'échelle qui viennent d'être construites peuvent être interprétées comme une version dépendant de la position des fonctions introduites par A. Cohen, I. Daubechies et J.C Feauveau dans [20].

- Une autre généralisation de la formule de commutation de Lemarié a été réalisée dans le cas de B-splines irréguliers par I. Daubechies, I. Guskov and W. Sweldens dans [27].

**Ondelettes et moments nuls**

Comme l'invariance par translation est perdue, nous devons étudier les moments nuls de  $\psi_k^N$  et  $\tilde{\psi}_k^N$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .

L'expression (6.85) fournit que  $\forall N \geq 1$ ,  $\tilde{\psi}_k^N$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  a  $N$  moments nuls puisque l'ondelette interpolante  $\tilde{\psi}_k^I$  n'a aucun moment nul et est à support compact.

Concernant  $\psi_k^N$ , sachant que  $\langle x^m, \psi_k^I \rangle = 0$  pour  $m \leq D$  pour une interpolation à  $D+1$  points et utilisant la relation (6.99), il vient,

$$\int_{\mathbb{R}} x^p \psi_k^N(x) dx = 0 \text{ pour } p = 0, \dots, D - N \quad (6.102)$$

ce qui montre que  $\psi_k^N$  a  $D - N + 1$  moments nuls.

Nous terminons cette section par deux tableaux récapitulatifs des analyses multirésolutions construites en rappelant les fonctions de base des différents espaces.

	$V_j^N$	$W_j^N$
$N = 0$	$\delta(x - k)$	$\delta(2x - (2k + 1)) - \sum_{m=-l_{2k+1}}^{r_{2k+1}-1} L_m^{l_{2k+1}, r_{2k+1}}(-1/2)\delta(2x - 2(k + m + 1))$
$N \geq 1$	$B^N(x - k)$	$\int_{-\infty}^x \psi_k^{N-1}(t)dt$

TAB. 6.1 – Analyse multirésolution associée aux espaces  $(V_j^N, W_j^N)$ .

	$\tilde{V}_j^N$	$\tilde{W}_j^N$
$N = 0$	$\tilde{\phi}_k^I(x)$	$\tilde{\phi}_{2k+1}^I(2x)$
$N \geq 1$	$\frac{d^N}{dx^N} \sum_{n_{N-1} \geq 1} \cdots \sum_{n_2 \geq 1} \sum_{n_1 \geq 1} \sum_{n_0 \geq k+1} \tilde{\phi}_{n_{N-1} + \dots + n_0}^I(x)$	$\frac{d\tilde{\psi}_k^{N-1}}{dx}$

TAB. 6.2 – Analyse multirésolution associée aux espaces  $(\tilde{V}_j^N, \tilde{W}_j^N)$ .

Dans la fin de ce chapitre, nous présentons une série d'applications de la technique dépendant de la position en termes de réduction du phénomène de Gibbs et de compression de signaux localement discontinus.

### 6.3 Quelques applications de l'approche dépendant de la position

Dans cette section, nous utilisons les analyses multirésolutions interpolantes pour la représentation de fonctions localement discontinues. D'une

part, de telles fonctions sont connues pour générer le phénomène de Gibbs quand on construit leur approximation avec des analyses multirésolutions classiques (voir figure 5.10). D'autre part, l'amélioration des algorithmes de compression de fonctions (ou signaux) discontinus nécessite un traitement spécial des discontinuités.

Nous commençons par étendre à de telles fonctions la définition d'un opérateur de discrétisation par valeurs aux points en introduisant, pour toute fonction  $f$  continue sauf au point  $x = x_0$ , la quantité  $D_j^I f$  telle que,

$$\begin{cases} (D_j^I f)_k = f(x_k^j) & \text{pour } x_k^j \neq x_0, \\ (D_j^I f)_k = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) & \text{si } x_k^j = x_0. \end{cases} \quad (6.103)$$

### 6.3.1 Le phénomène de Gibbs

Nous analysons ici les approximations de la fonction en escalier (figure 5.10 (a)) quand on utilise les analyses interpolantes invariantes par translation (section 2.2.2) ou les analyses dépendant de la position avec une sélection de stencil suivant la règle 1 et associée à un seul point de segmentation  $S_s = \{0\}$ .

#### Approximation dans les analyses interpolantes invariantes par translation

Dans cette partie,  $\tilde{\phi}_k^I$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  désigne la fonction limite **invariante par translation** (section 2.2.1) et on a  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\tilde{\phi}_k^I(x) = \tilde{\phi}_0^I(x - k)$ .

Partant d'un niveau initial  $J_0$  avec  $\{f_k^{I, J_0}\}_{k \in \mathbb{Z}} \in V^{J_0}$  tel que

$$\begin{cases} f_k^{I, J_0} = f(k2^{-J_0}) = 1 & \text{si } k \leq 0, \\ f_k^{I, J_0} = 0 & \text{si } k > 0, \end{cases} \quad (6.104)$$

l'approximation de  $f$  dans  $\tilde{V}_{J_0}^I$  s'écrit,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \tilde{f}_{J_0}^I(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k^{I, J_0} \tilde{\phi}_0^I(2^{J_0}x - k), \\ &= \sum_{k=-\infty}^0 \tilde{\phi}_0^I(2^{J_0}x - k). \end{aligned} \quad (6.105)$$

Puisque, d'après la section 2.2.1,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\phi}_0^I(2^{J_0}x - k) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (6.106)$$

et

$$\text{supp}(\tilde{\phi}_0^I(2^{J_0}x)) = [(-2r+1)2^{-J_0}, (2l-1)2^{-J_0}], \quad (6.107)$$

il vient,

$$\text{supp}\left(\sum_{k=-\infty}^0 \tilde{\phi}_0^I(2^{J_0}x - k) - f\right) \subset [(-2r+2)2^{-J_0}, (2l-1)2^{-J_0}], \quad (6.108)$$

et donc, le phénomène de Gibbs apparaît sur l'intervalle  $[(-2r+2)2^{-J_0}, (2l-1)2^{-J_0}]$ . La figure 5.10 (c) montre  $f_{J_0}^I$  quand  $l = 3$  et  $r = 3$ .

### Approximation dans les analyses interpolantes dépendant de la position

Si on note ici,  $\tilde{\phi}_k^I$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , la fonction limite **dépendant de la position** (section 6.1.2), en définissant  $\text{supp}(\tilde{\phi}_k^I(x)) = [N_{\tilde{\phi}_k^I}, M_{\tilde{\phi}_k^I}]$ , on montre comme précédemment que,

$$\text{supp}\left(\sum_{k=-\infty}^0 \tilde{\phi}_k^I(2^{J_0}x) - f\right) \subset [\inf_{k \geq 1} N_{\tilde{\phi}_k^I} 2^{-J_0}, \sup_{k \leq 0} M_{\tilde{\phi}_k^I} 2^{-J_0}], \quad (6.109)$$

Le phénomène de Gibbs apparaît donc sur l'intervalle  $[\inf_{k \geq 1} N_{\tilde{\phi}_k^I} 2^{-J_0}, \sup_{k \leq 0} M_{\tilde{\phi}_k^I} 2^{-J_0}]$ . La figure 5.10 (d) montre  $f_{J_0}^I$  pour  $l = 3$  et  $r = 3$ . Il apparaît clairement que le phénomène de Gibbs a son support et son amplitude notablement réduits.

#### **Remarque 6.3.1**

*On pourrait même ici faire disparaître le phénomène de Gibbs en utilisant une autre règle avec de l'extrapolation.*

### **6.3.2 Compression d'un signal localement discontinu**

Dans le cadre de la compression de signaux ou d'images, l'effet du phénomène de Gibbs limite l'efficacité de la transformation multiéchelle qui est utilisée dans la première étape d'un algorithme de compression puisqu'il augmente la quantité d'information à garder, c'est à dire le nombre de détails non

négligeables. Il est aussi responsable d'une mauvaise reconstruction des signaux/images autour des discontinuités/contours. On a donc intérêt, d'après ce qui précède, à choisir des transformations dépendant de la position.

Cependant, quand on utilise une approche dépendant de la position, une difficulté supplémentaire réside dans la détection de la position des discontinuités. Ceci constitue un deuxième facteur qui peut réduire l'efficacité de la prédiction dépendant de la position et donc limiter les performances de la transformation multiéchelle associée puisque l'opérateur de prédiction est construit à partir des points de segmentation obtenus par cette détection. La transformation multiéchelle complète associant détection et prédiction définit des analyses multirésolutions dépendant des données (donc non linéaires) comparables à l'approche développée par F.Arandiga, R.Donat et A.Harten dans [5], S.Amat, F.Arandiga, A.Cohen et R.Donat dans [1] ou S.Amat, F.Arandiga, A.Cohen, R.Donat, G.Garcia et M.von Oehsen dans [2] avec la philosophie ENO ([39], [38]).

Dans ce qui suit, nous évaluons qualitativement les effets du phénomène de Gibbs, ainsi que l'influence d'une mauvaise détection des discontinuités, sur la décomposition et la reconstruction d'un signal discontinu quand on utilise une analyse multirésolution dépendant de la position.

Deux séries de tests sont proposées. Elles ont pour but de comparer une procédure dépendant de la position suivant la règle 1 associée aux paramètres  $r=3$ ,  $l=3$  et  $S_s = y_0$  et notée (DP-6,  $y_0$ ) avec une procédure invariante par translation associée à un stencil centré à 6 points et notée IT-6.

Dans tous les cas, les tests sont réalisés sur le signal (figure 6.10 (a)),

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin \left( \pi \left( x + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{6} \right) \chi_{]-\infty, 0]} + \left( \frac{1}{2} - \sin \left( \pi \left( x + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{6} \right) \right) \chi_{[0, +\infty[}, \quad (6.110)$$

avec une discontinuité en  $x_0 = 0$ .

- Dans la première série, le point de segmentation utilisé pour construire la prédiction dépendant de la position coïncide avec la discontinuité du signal (i.e  $y_0 = x_0 = 0$ ). Nous comparons alors les procédures IT-6 et (DP-6,0).
- Dans la seconde série, nous supposons une erreur dans la détection de la discontinuité (i.e  $y_0 \neq 0$ ). Nous envisageons alors les procédures (DP-6, 0.001), (DP-6, -0.001), (DP-6, -0.025) et (DP-6, 0.025) qui correspondent respectivement aux points de segmentation  $y_0 = 0.001$ ,  $y_0 = -0.001$ ,  $y_0 = 0.025$  et  $y_0 = -0.025$ .

Les performances de la décomposition sont évaluées en terme de nombre de coefficients de détail non nuls (noté  $\text{nnz}$ ) et celles de la reconstruction sont mesurées en terme de qualité de la fonction reconstruite (en évaluant l'erreur en norme discrète  $l^2$  entre le signal exact,  $f^{I, J_{max}}$ , et le signal,  $f_{\epsilon}^{I, J_{max}}$ , reconstruit après seuillage des coefficients de détails pour un nombre de coefficients de détails fixé).

Dans tous les tests,  $J_0 = 4$  et  $J_{max} = 13$ .

Méthode	$\epsilon$	Erreurs $\  f^{I, J_{max}} - f_{\epsilon}^{I, J_{max}} \ _h, h=L^2, L^1, L^{\infty}$	$\text{nnz}$
IT-6	$9 \cdot 10^{-8}$	$6.7 \cdot 10^{-8}, 3.3 \cdot 10^{-8}, 3 \cdot 10^{-7}$	65
	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$7.4 \cdot 10^{-8}, 3.6 \cdot 10^{-8}, 2.1 \cdot 10^{-7}$	49
	$2 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-7}, 6.4 \cdot 10^{-8}, 5.7 \cdot 10^{-7}$	45
(DP-6,0)	$9 \cdot 10^{-8}$	$6.7 \cdot 10^{-8}, 3.3 \cdot 10^{-8}, 3 \cdot 10^{-7}$	33
	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$7.4 \cdot 10^{-8}, 3.4 \cdot 10^{-8}, 2.1 \cdot 10^{-7}$	17
	$2 \cdot 10^{-3}$	$2.7 \cdot 10^{-7}, 1.3 \cdot 10^{-7}, 7.4 \cdot 10^{-7}$	9

TAB. 6.3 – Evaluation des performances des étapes de décomposition et de reconstruction pour les approches invariante par translation et dépendant de la position.

#### Analyse des résultats :

- D'après le tableau 6.3, si le point de segmentation coïncide avec la discontinuité du signal, la décomposition dépendant de la position améliore la compression invariante par translation du signal discontinu (en terme de nombre de détails non nuls après seuillage) : pour une même erreur de reconstruction, l'approche dépendant de la position réduit au moins de moitié le nombre de détails non nuls à garder par rapport à une technique invariante par translation.
- Même si l'erreur de reconstruction n'augmente pas beaucoup quand la détection de la discontinuité n'est pas exacte (i.e  $y_0 \neq 0$ ), nous pouvons noter une perte d'efficacité de l'approche dépendant de la position avec plus de détails à garder (tableau 6.4). Pour la grande majorité des tests, ce nombre de détails non nuls reste toutefois inférieur à celui obtenu par une approche invariante par translation puisqu'il dépend du support des ondelettes traversant le point  $x_0 = 0$ . Enfin, la figure 6.9 montre qu'une erreur dans la détection de la discontinuité réduit la qualité de la fonction reconstruite par la méthode dépendant de la position puisqu'elle augmente l'erreur de reconstruction que l'on obtiendrait avec une détection exacte.

Il est aussi intéressant de représenter la "position" des coefficients de

Méthode	$\epsilon$	Erreurs $\  f^{I,J_{max}} - f_{\epsilon}^{I,J_{max}} \ _h, h=L^2, L^1, L^{\infty}$	nnz
(DP-6,0)	$9 \cdot 10^{-8}$	$6.7 \cdot 10^{-8}, 3.3 \cdot 10^{-8}, 3 \cdot 10^{-7}$	33
	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$7.4 \cdot 10^{-8}, 3.4 \cdot 10^{-8}, 2.1 \cdot 10^{-7}$	17
	$2 \cdot 10^{-3}$	$2.7 \cdot 10^{-7}, 1.3 \cdot 10^{-7}, 7.4 \cdot 10^{-7}$	9
(DP-6,0.001)	$9 \cdot 10^{-8}$	$6.7 \cdot 10^{-8}, 3.3 \cdot 10^{-8}, 3 \cdot 10^{-7}$	45
	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$7.4 \cdot 10^{-8}, 3.7 \cdot 10^{-8}, 2.1 \cdot 10^{-7}$	29
	$2 \cdot 10^{-3}$	$2.7 \cdot 10^{-7}, 1.3 \cdot 10^{-7}, 7.4 \cdot 10^{-7}$	21
(DP-6,-0.001)	$9 \cdot 10^{-8}$	$6.1 \cdot 10^{-8}, 3 \cdot 10^{-8}, 3 \cdot 10^{-7}$	58
	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$6.9 \cdot 10^{-8}, 3.4 \cdot 10^{-8}, 2.1 \cdot 10^{-7}$	42
	$2 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-7}, 1.1 \cdot 10^{-7}, 1.2 \cdot 10^{-6}$	35
(DP-6,0.025)	$9 \cdot 10^{-8}$	$6.8 \cdot 10^{-8}, 3.4 \cdot 10^{-8}, 3 \cdot 10^{-7}$	60
	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$7.5 \cdot 10^{-8}, 3.7 \cdot 10^{-8}, 2.1 \cdot 10^{-7}$	44
	$2 \cdot 10^{-3}$	$2.8 \cdot 10^{-7}, 1.3 \cdot 10^{-7}, 7.7 \cdot 10^{-7}$	36
(DP-6,-0.025)	$9 \cdot 10^{-8}$	$6 \cdot 10^{-8}, 3 \cdot 10^{-8}, 3 \cdot 10^{-7}$	66
	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$6.8 \cdot 10^{-8}, 3.3 \cdot 10^{-8}, 2.1 \cdot 10^{-7}$	50
	$2 \cdot 10^{-3}$	$2.3 \cdot 10^{-7}, 9.7 \cdot 10^{-8}, 8 \cdot 10^{-7}$	43

TAB. 6.4 – Effet d’une erreur de détection sur l’efficacité de la décomposition et de la reconstruction dépendant de la position

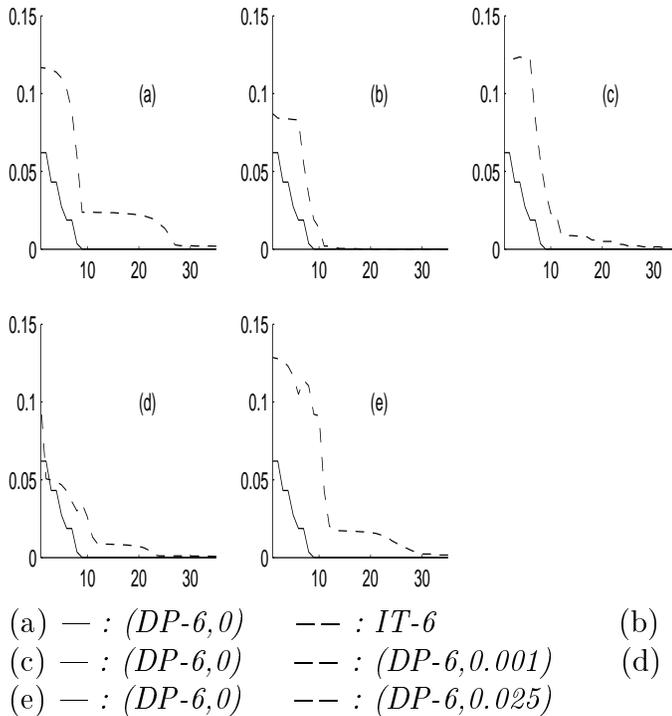


FIG. 6.9 –  $\| f^{I,J_{max}} - f_{\epsilon}^{I,J_{max}} \|_{l^2}$  en fonction de nombre de coefficients de détails retenus

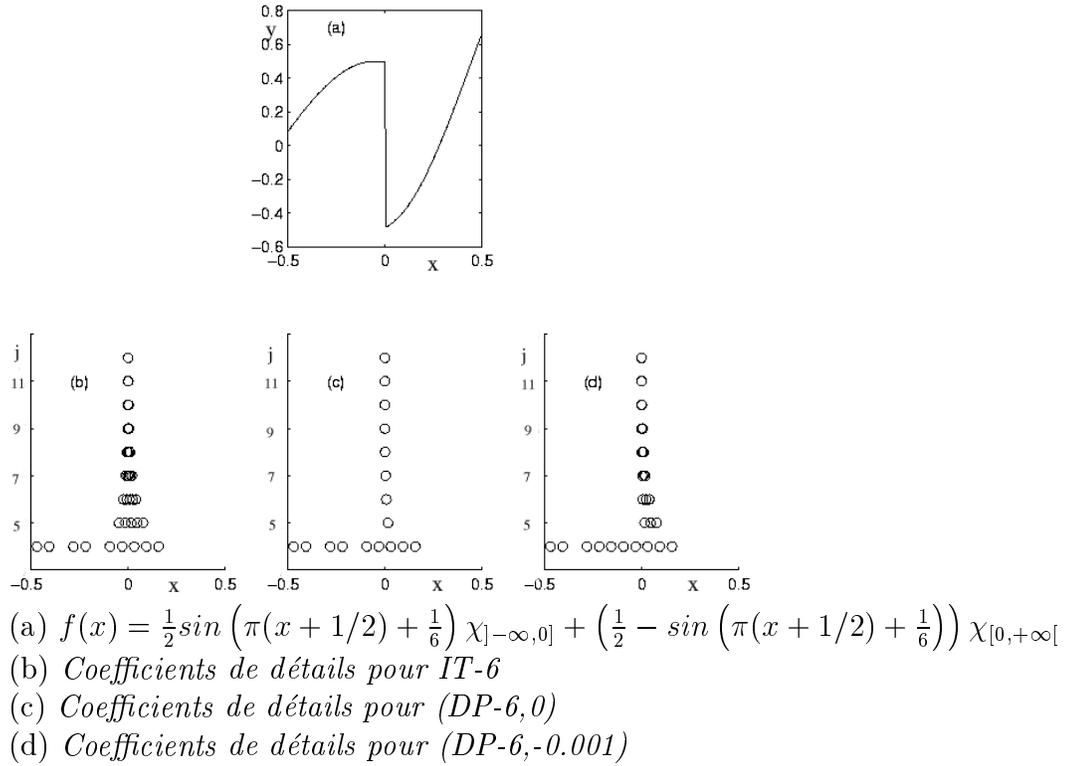


FIG. 6.10 – Coefficients de détails après seuillage pour un signal discontinu,  $\epsilon = 1.2e - 7$ ,  $J_0 = 4$ ,  $J_{max} = 13$

détails après décomposition du signal discontinu. Sur la figure 6.10, un cercle est dessiné en position  $(k2^{-j}, j)$  quand  $|d_k^{I,j}| > \epsilon$ .

### Analyse des figures

- Dans le cas dépendant de la position, la sélection du stencil est faite de telle façon que seulement une ondelette par échelle a un support qui traverse la discontinuité. Ainsi, sur la figure 6.10 (c), les détails significatifs sont localisés sur une ligne verticale près de  $x = 0$ , contrairement à une procédure invariante par translation dont la représentation 6.10 (b) a la structure classique de cône avec 5 détails non nuls par échelle.
- Quand une erreur apparaît dans la détection de la discontinuité (figure 6.10 (d)), la sélection du stencil n'est plus "adaptée" à la discontinuité, et donc la figure 6.10 (d) présente deux cercles de plus par échelle, représentant les deux ondelettes supplémentaires dont le support traverse  $x = 0$ .

## 6.4 Preuves des théorèmes et propositions

Cette section est consacrée aux preuves des théorèmes et propositions de ce chapitre qui, par souci de lisibilité, n'ont pas été données en cours de chapitre.

### 6.4.1 Preuve de la proposition 6.1.1 : étude de la convergence de $API^+$

Nous rappelons la proposition à démontrer.

#### Proposition 6.1.1

Soit  $l - r + 1 \geq -1$ , alors le schéma  $API^+$  est convergent si,

- pour  $l+r$  pair,

$$\left| \sum_{i=0}^{\frac{l+r}{2}-2} L_{r-(2i+1)}^{l,r}(r) L_{r-1}^{l,r} \left( -\frac{2i+1}{2} - \frac{l-r}{2} - 1 \right) \right| < 1, \quad (6.111)$$

- pour  $l+r$  impair,

$$\left| \sum_{i=0}^{\frac{l+r-1}{2}-2} L_{r-(2i+1)-1}^{l,r}(r) L_{r-1}^{l,r} \left( -\frac{2i+1}{2} - \frac{l-r+1}{2} - 1 \right) \right| < 1. \quad (6.112)$$

La preuve de cette proposition utilise le théorème de perturbation 6.1.1. Elle nécessite donc l'introduction d'un schéma de subdivision de référence.

Nous proposons de prendre comme schéma de référence, noté  $S_+^{ref}$ , le schéma symétrique du schéma de subdivision associé à  $API^-$  (voir section 6.1.2). Le théorème de convergence 6.1.2 garantit donc la convergence de  $S_+^{ref}$  à condition d'avoir  $l - r + 1 \geq -1$ .

Nous pouvons énoncer le théorème suivant,

#### Théorème 6.4.1

Si  $l - r + 1 \geq -1$ , alors le schéma de subdivision  $S_+$  associé à la procédure  $API^+$  vérifie, pour  $k \geq 0$ ,

$$\forall j \geq 0, f_k^{j+1} = (S_+ f'^j)_k = (S_+ f'^j + \Delta f'^j)_k, \quad (6.113)$$

où

- si  $l+r$  est pair,

$$\forall j \geq 0, \frac{\|\Delta f'^{j+1}\|_\infty}{\|\Delta f'^j\|_\infty} = \left| \sum_{i=0}^{\frac{l+r}{2}-2} L_{r-(2i+1)}^{l,r}(r) L_{r-1}^{l,r} \left( -\frac{2i+1}{2} - \frac{l-r}{2} - 1 \right) \right|, \quad (6.114)$$

- si  $l+r$  est impair,

$$\forall j \geq 0, \frac{\|\Delta f'^{j+1}\|_\infty}{\|\Delta f'^j\|_\infty} = \left| \sum_{i=0}^{\frac{l+r-1}{2}-2} L_{r-(2i+1)-1}^{l,r}(r) L_{r-1}^{l,r} \left( -\frac{2i+1}{2} - \frac{l-r+1}{2} - 1 \right) \right|. \quad (6.115)$$

Le théorème 6.4.1 combiné avec le théorème de perturbation 6.1.1 conduit donc à la proposition 6.1.1.

Reste alors à prouver le théorème 6.4.1.

**Preuve:**

La preuve est d'abord donnée dans le cas  $l = 3, r = 5$ . Puis, la généralisation pour  $l - r + 1 \geq -1$  se déduit de ce cas particulier .

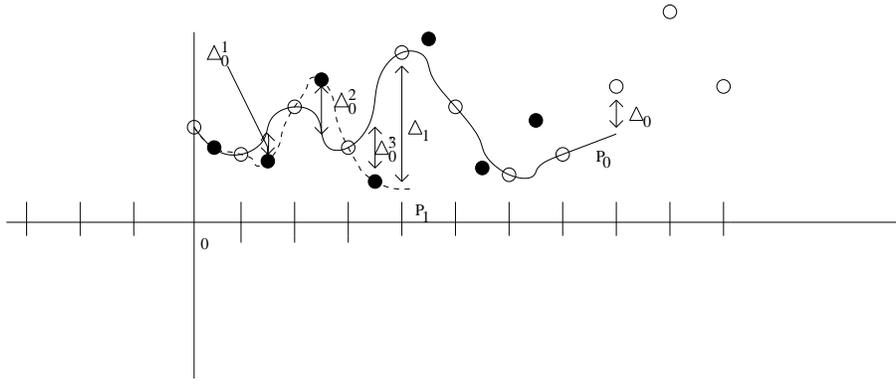
Nous commençons par construire la perturbation  $\Delta f'^0$ . Nous introduisons d'abord la famille  $\{\Delta_0^k\}_{1 \leq k \leq 3}$  (figure 6.11) telle que,

$$\Delta_0^1 = f_3'^1 - P_0\left(\frac{3}{2}\right), \quad (6.116)$$

$$\Delta_0^2 = f_5'^1 - P_0\left(\frac{5}{2}\right), \quad (6.117)$$

$$\Delta_0^3 = f_7'^1 - P_0\left(\frac{7}{2}\right). \quad (6.118)$$

Par construction, les séquences  $\{(S_+^{ref} f'^0)_k\}_{k \geq 0}$  et  $\{(S_+ f'^0)_k\}_{k \geq 0}$  sont identiques à partir de  $k \geq 7$ . Pour  $k < 7$ , les différences entre ces deux familles sont contrôlées par les deux perturbations  $\Delta_0^1$  et  $\Delta_0^2$  (figure 6.11). On peut alors écrire,

FIG. 6.11 – Construction de  $S_+$ 

$$\forall k \geq 0, f_k^{11} = \left( S_+^{ref} f^{00} \right)_k + \Delta_0^1 \delta_{k,3} + \Delta_0^2 \delta_{k,5}. \quad (6.119)$$

Introduisant  $\Delta_0 = f_8^{00} - P_0(8)$  (figure 6.11), les expressions (6.116) et (6.117) peuvent s'écrire,

$$\Delta_0^1 = L_4^{3,5}(-5/2)\Delta_0, \quad (6.120)$$

$$\Delta_0^2 = L_4^{3,5}(-3/2)\Delta_0, \quad (6.121)$$

et l'expression (6.119) devient,

$$\forall k \geq 0, f_k^{11} = \left( S_+^{ref} f^{00} \right)_k + L_4^{3,5}(-5/2)\Delta_0 \delta_{k,3} + L_4^{3,5}(-3/2)\Delta_0 \delta_{k,5}, \quad (6.122)$$

et donc  $\forall k \geq 0, \Delta f_k^{00} = L_4^{3,5}(-5/2)\Delta_0 \delta_{k,3} + L_4^{3,5}(-3/2)\Delta_0 \delta_{k,5}$ .

Un raisonnement similaire permet d'exprimer la perturbation  $\Delta f^{11}$  en fonction de  $\Delta_1 = f_8^{11} - P_1(8/2)$ . Elle s'écrit,

$$\forall k \geq 0, \Delta f_k^{11} = L_4^{3,5}(-5/2)\Delta_1 \delta_{k,3} + L_4^{3,5}(-3/2)\Delta_1 \delta_{k,5}, \quad (6.123)$$

Il s'en suit alors que le rapport  $\frac{\|\Delta f^{11}\|_\infty}{\|\Delta f^{00}\|_\infty}$  dépend uniquement du rapport  $\frac{|\Delta_1|}{|\Delta_0|}$ .

Il reste donc à exprimer le rapport  $\frac{|\Delta_1|}{|\Delta_0|}$ .

Par construction (figure 6.11), il vient,

$$\Delta_1 = L_0^{3,5}(5)\Delta_0^1 + L_2^{3,5}(5)\Delta_0^2 + L_4^{3,5}(5)\Delta_0^3, \quad (6.124)$$

D'après les expressions (6.120) et (6.121) et remarquant que, par construction,  $\Delta_0^3 = L_4^{3,5}(-1/2)\Delta_0$ , l'expression (6.124) devient,

$$\Delta_1 = L_0^{3,5}(5)L_4^{3,5}(-5/2)\Delta_0 + L_2^{3,5}(5)L_4^{3,5}(-3/2)\Delta_0 + L_4^{3,5}(5)L_4^{3,5}(-1/2)\Delta_0, \quad (6.125)$$

et donc,

$$\frac{\|\Delta f'^1\|_\infty}{\|\Delta f'^0\|_\infty} = | L_0^{3,5}(5)L_4^{3,5}(-5/2) + L_2^{3,5}(5)L_4^{3,5}(-3/2) + L_4^{3,5}(5)L_4^{3,5}(-1/2) |, \quad (6.126)$$

De la même façon, introduisant  $\forall j \geq 0$ ,  $\Delta_j = f'_8{}^j - P_1(\frac{8}{27})$ , le rapport des perturbations  $\frac{\|\Delta f'^{j+1}\|_\infty}{\|\Delta f'^j\|_\infty}$  est contrôlé par le rapport  $\frac{|\Delta_{j+1}|}{|\Delta_j|}$  et on obtient,

$$\frac{\|\Delta f'^{j+1}\|_\infty}{\|\Delta f'^j\|_\infty} = | L_0^{3,5}(5)L_4^{3,5}(-5/2) + L_2^{3,5}(5)L_4^{3,5}(-3/2) + L_4^{3,5}(5)L_4^{3,5}(-1/2) |, \quad (6.127)$$

qui est exactement la formule (6.114) quand  $l = 3$ ,  $r = 5$ .

Nous généralisons maintenant ce résultat pour tout  $l$  et  $r$  tel que  $l - r + 1 \geq -1$ . Nous nous limitons au cas  $l + r$  pair puisque le cas  $l + r$  impair se déduit immédiatement du cas pair.

Nous exprimons d'abord le rapport des perturbations  $\frac{\|\Delta f'^1\|_\infty}{\|\Delta f'^0\|_\infty}$ .

En suivant la même construction que pour  $l = 3$ ,  $r = 5$ , on déduit facilement que,

$$\frac{\|\Delta f'^1\|_\infty}{\|\Delta f'^0\|_\infty} = \frac{|\Delta_1|}{|\Delta_0|}. \quad (6.128)$$

Il suffit donc d'exprimer le rapport  $\frac{|\Delta_1|}{|\Delta_0|}$ .

Introduisant la famille  $\{\Delta_0^i\}_{i \geq 1}$  telle que  $\Delta_0^i = f'_{2i+1}{}^1 - P_0(\frac{2i+1}{2})$ , le même raisonnement que pour  $l = 3$ ,  $r = 5$  conduit à,

$$\Delta_1 = L_{-l+3}^{l,r}(r)\Delta_0^1 + L_{-l+5}^{l,r}(r)\Delta_0^2 + \dots + L_{r-1}^{l,r}(r)\Delta_0^{\frac{r+l}{2}-1}, \quad (6.129)$$

Il reste alors à exprimer les quantités  $\Delta_0^i$ ,  $1 \leq i \leq \frac{r+l}{2} - 1$  en fonction de  $\Delta_0$ . Par construction, elles s'écrivent,

$$\forall 1 \leq i \leq \frac{r+l}{2} - 1, \quad \Delta_0^i = L_{r-1}^{l,r}(-l + \frac{2i-1}{2})\Delta_0. \quad (6.130)$$

On obtient finalement, à partir des expressions (6.129) et (6.130), une formule du type (6.114) pour  $j = 0$  en réarrangeant l'ordre d'indexation, puis pour tout  $j \geq 0$  puisque la même démarche peut être appliquée pour tout  $j$ . ■

### 6.4.2 Preuve de la proposition 6.2.1 : étude de la convergence de l'algorithme de prédiction $B^N$ -spline

La proposition à prouver s'écrit,

#### Proposition 6.2.1

Pour tout  $N \geq 1$ , si on suppose que  $\tilde{\phi}_k^I$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  est  $C^{N-1}$ ,  $C^N$  par morceaux et à support compact, alors les fonctions limites au sens  $L^2$ ,  $\{\tilde{\phi}_k^N\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , de l'algorithme de prédiction  $B^N$ -spline dépendant de la position vérifient,

$$\text{si } N=1, \quad \tilde{\phi}_k^1(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n_0 \geq k+1} \tilde{\phi}_{n_0}^I(x), \quad (6.131)$$

$$\text{si } N>1, \quad \tilde{\phi}_k^N(x) = \frac{d^N}{dx^N} \sum_{n_{N-1} \geq 1} \dots \sum_{n_2 \geq 1} \sum_{n_1 \geq 1} \sum_{n_0 \geq k+1} \tilde{\phi}_{n_{N-1}+\dots+n_0}^I(x), \quad (6.132)$$

La preuve est faite par récurrence sur  $N$ .

Commençons par  $N = 1$ ,

Nous définissons l'opérateur de reconstruction suivant, pour n'importe quelle séquence  $\{f_k^{1,j}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ,

$$R_j^{1,j} f^{1,j} = \frac{d}{dx} R_j^{I,\infty} F_1^{I,j}, \quad (6.133)$$

où  $R_j^{I,\infty}$  est l'opérateur de reconstruction défini par l'expression (6.33) et la famille  $\{F_{1,k}^{I,j}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  vérifie la relation (2.25) (quand  $N = 1$ ).

Notre démarche est la suivante : nous allons d'abord vérifier que cet opérateur de reconstruction est compatible avec la prédiction  $B^1$ -spline, puis nous montrons que  $R_j^{1,j}$  est un opérateur hiérarchique. Ce résultat suffit alors pour avoir la convergence de l'algorithme de prédiction  $B^1$ -spline vers les fonctions  $\frac{d}{dx} \sum_{n_0 \geq k+1} \tilde{\phi}_{n_0}^I(x)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

En effet, d'après les hypothèses de régularité sur  $\tilde{\phi}_k^I$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , on a bien,

$$\frac{d}{dx} \sum_{n_0 \geq k+1} \tilde{\phi}_{n_0}^I(x) \in L^2(\mathbb{R}),$$

et l'opérateur  $\Pi_0^{1,j}$ , construit à partir de  $R_j^{1,j}$  vérifie,

$$\forall j \geq 0, \Pi_0^{1,j} f^{1,0} = \frac{d}{dx} \sum_{n_0 \geq k+1} \tilde{\phi}_{n_0}^I,$$

où  $f^{1,0} = \{f_m^{1,0}\}_{m \in \mathbb{Z}}$  avec  $f_m^{1,0} = \delta_{k,m}$ , car  $R_j^{1,j}$  est hiérarchique. La convergence au sens de la définition 6.2.2 est alors trivialement obtenue ici.

Vérifions que  $R_j^{1,j}$  est compatible avec la prédiction  $B^1$ -spline, c'est à dire que  $\forall j \in \mathbb{Z}$ ,  $D_{j+1}^1 R_j^{1,j} = P_j^{1,j+1}$  où  $P_j^{1,j+1}$  est l'opérateur de prédiction  $B^1$ -spline construit dans la proposition 2.1.1.

Par définition, on peut écrire, pour tout  $m \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} \left( D_{j+1}^1 R_j^{1,j} f^{1,j} \right)_m &= 2^j \left\langle \frac{d}{dx} \sum_{k \in \mathbb{Z}} F_{1,k}^{I,j} \tilde{\phi}_k^I(2^j x), B^1(2^{j+1}x - m) \right\rangle, \\ &= -2^j \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} F_{1,k}^{I,j} \tilde{\phi}_k^I(2^j x), \frac{d}{dx} B^1(2^{j+1}x - m) \right\rangle, \\ &= 2^j \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} F_{1,k}^{I,j} \tilde{\phi}_k^I(2^j x), \delta(2^{j+1}x - m - 1) \right\rangle \\ &\quad - 2^j \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} F_{1,k}^{I,j} \tilde{\phi}_k^I(2^j x), \delta(2^{j+1}x - m) \right\rangle \end{aligned} \quad (6.134)$$

Revenant aux différentes étapes pour obtenir  $\left\{ (P_j^{1,j+1} f^{1,j})_m \right\}_{m \in \mathbb{Z}}$  (proposition 2.1.1), l'expression (6.134) conduit finalement à,

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \left( D_{j+1}^1 R_j^1 f^{1,j} \right)_m = \left( P_j^{1,j+1} f^{1,j} \right)_m, \quad (6.135)$$

Montrons maintenant que l'opérateur  $R_j^1$  est hiérarchique, c'est à dire que  $\forall j \in \mathbb{Z}, R_{j+1}^1 P_j^{1,j+1} = R_j^1$  (définition (2.1.1)). Cette propriété est immédiate à partir des différentes étapes de construction de la prédiction  $B^1$ -spline (proposition 2.1.1) et sachant que l'opérateur  $R_j^{l,\infty}$  est hiérarchique.

Cette démarche se généralise facilement au cas  $N > 1$  en introduisant l'opérateur de reconstruction défini pour n'importe quelle séquence  $\{f_k^{N,j}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  par,

$$R_j^{N,j} f^{N,j} = \frac{d}{dx} R_j^{N-1,\infty} F_1^{N-1,j}, \quad (6.136)$$

avec  $R_j^{N-1,\infty}$ , l'opérateur hiérarchique tel que,

$$R_j^{N-1,\infty} F_1^{N-1,j}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} F_{1,k}^{N-1,j} \tilde{\phi}_k^{N-1}(2^j x).$$

### 6.4.3 Preuve de la proposition 6.2.3 : analyse des espaces $\tilde{V}_j^N$

Cette proposition s'énonce,

#### Proposition 6.2.3

La famille de fonctions  $\{\tilde{\phi}_k^N\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base de Riesz de  $\tilde{V}_0^N$  i.e.  $\exists \tilde{A} > 0, \exists \tilde{B} < \infty$ , tels que, pour toute séquence  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ ,

$$\tilde{A} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \leq \| \tilde{f}_j \|_{L^2}^2 \leq \tilde{B} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2. \quad (6.137)$$

où  $\tilde{f}_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \tilde{\phi}_k^N(x)$ .

Commençons par montrer qu'il existe  $\tilde{A} > 0$  tel que,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \leq \frac{1}{\tilde{A}} \| \tilde{f}_j \|_{L^2}^2. \quad (6.138)$$

Utilisant la condition de biorthogonalité i.e, pour tout  $(m, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ,  $\langle \tilde{\phi}_m^N, B^N(x-k) \rangle = \delta_{k,m}$ , il vient  $\forall k \in \mathbb{Z}, \langle \tilde{f}_j, B^N(x-k) \rangle = c_k$ . Montrer l'inégalité (6.138) revient donc à prouver qu'il existe  $\tilde{A} > 0$  tel que,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \tilde{f}_j, B^N(x-k) \rangle|^2 \leq \frac{1}{A} \|\tilde{f}_j\|_{L^2}^2. \quad (6.139)$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \tilde{f}_j, B^N(x-k) \rangle|^2 \leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{N_{B^N+k}}^{M_{B^N+k}} |\tilde{f}_j(x)|^2 dx, \quad (6.140)$$

où  $[N_{B^N+k}, M_{B^N+k}]$  est le support compact de  $B^N(x-k)$  et  $C = \|B^N\|_{L^2}^2$ .

Ecrivant,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\int_{N_{B^N+k}}^{M_{B^N+k}} |\tilde{f}_j(x)|^2 dx = \int_{N_{B^N+k}}^{N_{B^N+k+1}} |\tilde{f}_j(x)|^2 dx + \int_{N_{B^N+k+1}}^{N_{B^N+k+2}} |\tilde{f}_j(x)|^2 dx + \dots + \int_{M_{B^N+k-1}}^{M_{B^N+k}} |\tilde{f}_j(x)|^2 dx,$$

l'expression (6.140) devient,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \tilde{f}_j, B^N(x-k) \rangle|^2 \leq C(M_{B^N} - N_{B^N}) \|\tilde{f}_j\|_{L^2}^2, \quad (6.141)$$

avec  $C(M_{B^N} - N_{B^N}) > 0$ .

L'expression (6.141) fournit donc une inégalité du type (6.139) avec  $\tilde{A} = \frac{1}{C(M_{B^N} - N_{B^N})}$ .

Pour terminer cette preuve, il reste alors à montrer qu'il existe  $\tilde{B}$  tel que,

$$\|\tilde{f}_j\|_{L^2}^2 \leq \tilde{B} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2. \quad (6.142)$$

Revenant à l'expression de  $\tilde{f}_j$ , on peut écrire,

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}_j\|_{L^2}^2 &\leq \int_{\mathbb{R}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k \tilde{\phi}_k^N(x)| \sum_{m \in \mathbb{Z}} |c_m \tilde{\phi}_m^N(x)| dx, \\ &\leq \sum_{k,m} |c_k c_m| \int_{\mathbb{R}} |\tilde{\phi}_k^N(x)| |\tilde{\phi}_m^N(x)| dx. \end{aligned} \quad (6.143)$$

Puisque le nombre de points de segmentation est fini et puisque le stencil est adapté uniquement autour des points de segmentation (définition 6.1.1),

il n'y a qu'un nombre fini de fonctions limites  $\tilde{\phi}_k^I$  qui ne sont pas obtenues par la procédure invariante par translation associée aux paramètres  $(D, l, r)$ . Introduisant  $I_{dp}$  (resp.  $I_{it}$ ), l'ensemble d'indexation correspondant au nombre fini de fonctions limites dépendant de la position (resp.  $I_{it} = \mathbb{Z}/I_{dp}$ ), l'expression (6.143) devient,

$$\| \tilde{f}_j \|_{L^2}^2 \leq (1) + (2) + (3),$$

où

$$\begin{aligned} (1) &= \sum_{(k,m) \in I_{dp} \times I_{dp}} |c_k c_m| \int_{\mathbb{R}} | \tilde{\phi}_k^N(x) | | \tilde{\phi}_m^N(x) | dx, \\ (2) &= \sum_{(k,m) \in I_{it} \times I_{it}} |c_k c_m| \int_{\mathbb{R}} | \tilde{\phi}_k^N(x) | | \tilde{\phi}_m^N(x) | dx, \\ (3) &= 2 \sum_{(k,m) \in I_{dp} \times I_{it}} |c_k c_m| \int_{\mathbb{R}} | \tilde{\phi}_k^N(x) | | \tilde{\phi}_m^N(x) | dx. \end{aligned}$$

Nous majorons maintenant chaque terme séparément.

**Terme 1 :**

Comme  $\{ \tilde{\phi}_k^N \}_{k \in \mathbb{Z}} \in L^2(\mathbb{R})$  et  $\text{card}(I_{dp}) < +\infty$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} (1) &\leq \sum_{(k,m) \in I_{dp} \times I_{dp}} |c_k c_m| \frac{1}{2} \left( \| \tilde{\phi}_k^N \|_{L^2}^2 + \| \tilde{\phi}_m^N \|_{L^2}^2 \right), \\ &\leq \max_{k \in I_{dp}} \left( \| \tilde{\phi}_k^N \|_{L^2}^2 \right) \sum_{(k,m) \in I_{dp} \times I_{dp}} |c_k c_m|, \\ &\leq \max_{k \in I_{dp}} \left( \| \tilde{\phi}_k^N \|_{L^2}^2 \right) \text{card}(I_{dp}) \sum_{k \in I_{dp}} |c_k|^2, \\ &\leq \max_{k \in I_{dp}} \left( \| \tilde{\phi}_k^N \|_{L^2}^2 \right) \text{card}(I_{dp}) \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2. \end{aligned} \quad (6.144)$$

**Terme 2 :**

Dans ce cas, les fonctions limites sont invariantes par translation (section 2.3.1). Définissant  $[N_{\tilde{\phi}_0^N}, M_{\tilde{\phi}_0^N}]$ , le support compact de  $\tilde{\phi}_0^N$ , il vient,

$$(2) = \sum_{k \in I_{it}} \sum_{m=N_{\tilde{\phi}_0^N}-M_{\tilde{\phi}_0^N}+k}^{M_{\tilde{\phi}_0^N}-N_{\tilde{\phi}_0^N}+k} |c_k c_m| \int_{\mathbb{R}} | \tilde{\phi}_0^N(x-k) | | \tilde{\phi}_0^N(x-m) | dx,$$

$$\leq \|\tilde{\phi}_0^N\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \sum_{k \in I_{it}} \sum_{m=N_{\tilde{\phi}_0^N} - M_{\tilde{\phi}_0^N} + k}^{M_{\tilde{\phi}_0^N} - N_{\tilde{\phi}_0^N} + k} |c_k c_m|. \quad (6.145)$$

En utilisant  $|c_k c_m| \leq \frac{1}{2} |c_k|^2 + \frac{1}{2} |c_m|^2$ , il vient,

$$\begin{aligned} (2) &\leq \|\tilde{\phi}_0^N\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 (M_{\tilde{\phi}_0^N} - N_{\tilde{\phi}_0^N}) \sum_{k \in I_{it}} |c_k|^2 + \frac{\|\tilde{\phi}_0^N\|_{L^2(\mathbb{R})}^2}{2} \sum_{k \in I_{it}} \sum_{m=N_{\tilde{\phi}_0^N} - M_{\tilde{\phi}_0^N} + k}^{M_{\tilde{\phi}_0^N} - N_{\tilde{\phi}_0^N} + k} |c_m|^2, \\ &\leq \|\tilde{\phi}_0^N\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 (M_{\tilde{\phi}_0^N} - N_{\tilde{\phi}_0^N}) \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 + \frac{\|\tilde{\phi}_0^N\|_{L^2(\mathbb{R})}^2}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m=N_{\tilde{\phi}_0^N} - M_{\tilde{\phi}_0^N} + k}^{M_{\tilde{\phi}_0^N} - N_{\tilde{\phi}_0^N} + k} |c_m|^2. \end{aligned} \quad (6.146)$$

Finalement, écrivant  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{m=N_{\tilde{\phi}_0^N} - M_{\tilde{\phi}_0^N} + k}^{M_{\tilde{\phi}_0^N} - N_{\tilde{\phi}_0^N} + k} |c_m|^2 &= \sum_{m=N_{\tilde{\phi}_0^N} - M_{\tilde{\phi}_0^N} + k + 1}^{N_{\tilde{\phi}_0^N} - M_{\tilde{\phi}_0^N} + k + 1} |c_m|^2 + \sum_{m=N_{\tilde{\phi}_0^N} - M_{\tilde{\phi}_0^N} + k + 2}^{N_{\tilde{\phi}_0^N} - M_{\tilde{\phi}_0^N} + k + 2} |c_m|^2 \\ &+ \dots + \sum_{m=M_{\tilde{\phi}_0^N} - N_{\tilde{\phi}_0^N} + k - 1}^{M_{\tilde{\phi}_0^N} - N_{\tilde{\phi}_0^N} + k} |c_m|^2, \end{aligned}$$

on obtient d'après l'expression (6.146) :

$$(2) \leq 2 \|\tilde{\phi}_0^N\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 (M_{\tilde{\phi}_0^N} - N_{\tilde{\phi}_0^N}) \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2. \quad (6.147)$$

**Terme 3 :**

Puisque  $\text{card}(I_{dp}) < +\infty$  et que  $\tilde{\phi}_k^N$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  a un support compact, l'ensemble d'indexation

$$I_{it \cap dp} = \left\{ k \in I_{it} / \int_{\mathbb{R}} |\tilde{\phi}_k^N(x)| |\tilde{\phi}_m^N(x)| dx \neq 0, \forall m \in I_{dp} \right\} < +\infty, \quad (6.148)$$

et on a,

$$\begin{aligned} (3) &\leq 2 \sum_{(k,m) \in I_{dp} \times I_{it \cap dp}} |c_k c_m| \int_{\mathbb{R}} |\tilde{\phi}_k^N(x)| |\tilde{\phi}_m^N(x)| dx, \\ &\leq 2 \max_{k \in \mathbb{Z}} \|\tilde{\phi}_k^N\|_{L^2}^2 (\text{card}(I_{it \cap dp}) + \text{card}(I_{dp})) \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2. \end{aligned} \quad (6.149)$$

D'après les inégalités (6.144), (6.147) et (6.149), on obtient donc finalement,

$$\|f_j\|_{L^2}^2 \leq \tilde{B} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2, \quad (6.150)$$

avec  
 $\tilde{B} = C' \left( \text{card}(I_{dp}) + 2(M_{\tilde{\phi}_0^N} - N_{\tilde{\phi}_0^N}) + 2\text{card}(I_{dp}) + 2\text{card}(I_{it \cap dp}) \right)$  et  
 $C' = \max_{k \in \mathbb{Z}} (\|\tilde{\phi}_k^N\|^2)$ .

Ceci conclut la preuve.

#### 6.4.4 Preuve de la proposition 6.2.4 : construction des ondelettes $\{\tilde{\psi}_k^N\}_{k \in \mathbb{Z}}$

Cette proposition s'écrit,

##### Proposition 6.2.4

Si  $\{u_k^{N,1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base du noyau de  $D_1^{N,0}$ , alors la famille de vecteurs  $\{v_k^{N+1,1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  définie par,

$$\forall m \in \mathbb{Z}, v_{k,m}^{N+1,1} = u_{k,m+1}^{N,1} - u_{k,m}^{N,1}, \quad (6.151)$$

est une base de  $\text{Ker}(D_1^{N+1,0})$ .

Montrons d'abord que  $\{v_k^{N+1,1}\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \text{Ker}(D_1^{N+1,0})$  i.e :  
pour tout  $(k, n) \in \mathbb{Z}^2$ ,

$$\begin{aligned} \left( D_1^{N+1,0} v_k^{N+1,1} \right)_n &= \left( D_0^{N+1} R_1^{N+1,\infty} v_k^{N+1,1} \right)_n \\ &= \left\langle \sum_{m \in \mathbb{Z}} v_{k,m}^{N+1,1} \tilde{\phi}_m^{N+1}(2x), B^{N+1}(x-n) \right\rangle = 0. \end{aligned} \quad (6.152)$$

Utilisant la relation (6.151), il vient,

$$\begin{aligned} \left( D_1^{N+1,0} v_k^{N+1,1} \right)_n &= \left\langle \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left( u_{k,m+1}^{N,1} - u_{k,m}^{N,1} \right) \tilde{\phi}_m^{N+1}(2x), B^{N+1}(x-n) \right\rangle, \\ &= \left\langle \sum_{m \in \mathbb{Z}} u_{k,m}^{N,1} \left( \tilde{\phi}_{m-1}^{N+1}(2x) - \tilde{\phi}_m^{N+1}(2x) \right), B^{N+1}(x-n) \right\rangle, \\ &= \left\langle C, B^{N+1}(x-n) \right\rangle. \end{aligned} \quad (6.153)$$

D'après l'expression (6.132),

$$C = \sum_{m \in \mathbb{Z}} u_{k,m}^{N,1} \left( \frac{d}{dx} \sum_{n_0 > m-1} \tilde{\phi}_{n_0}^N(2x) - \frac{d}{dx} \sum_{n_0 > m} \tilde{\phi}_{n_0}^N(2x) \right), \quad (6.154)$$

et

$$\left( D_1^{N+1,0} v_k^{N+1,1} \right)_n = \left\langle \sum_{m \in \mathbb{Z}} u_{k,m}^{N,1} \frac{d}{dx} \tilde{\phi}_m^N(2x), B^{N+1}(x-n) \right\rangle. \quad (6.155)$$

L'expression (6.155) devient

$$\left( D_1^{N+1,0} v_k^{N+1,1} \right)_n = \left\langle i\omega \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} u_{k,m}^{N,1} \hat{\phi}_m^N \left( \frac{\omega}{2} \right), e^{-in\omega} \hat{B}^{N+1}(\omega) \right\rangle. \quad (6.156)$$

D'après la relation (1.82),

$$\left( D_1^{N+1,0} v_k^{N+1,1} \right)_n = \left\langle i\omega \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} u_{k,m}^{N,1} \hat{\phi}_m^N \left( \frac{\omega}{2} \right), e^{-in\omega} \frac{1}{i\omega} (1 - e^{-i\omega}) \hat{B}^N(\omega) \right\rangle, \quad (6.157)$$

et donc,

$$\left( D_1^{N+1,0} v_k^{N+1,1} \right)_n = \left\langle \sum_{m \in \mathbb{Z}} u_{k,m}^{N,1} \tilde{\phi}_m^N(2x), B^N(x-(n+1)) - B^N(x-n) \right\rangle, \quad (6.158)$$

qui s'écrit,

$$\begin{aligned} \left( D_1^{N+1,0} v_k^{N+1,1} \right)_n &= \left( D_0^N R_1^{N,\infty} u_k^{N,1} \right)_{n+1} - \left( D_0^N R_1^{N,\infty} u_k^{N,1} \right)_n, \\ &= \left( D_1^{N,0} u_k^{N,1} \right)_{n+1} - \left( D_1^{N,0} u_k^{N,1} \right)_n = 0, \end{aligned} \quad (6.159)$$

car  $\{u_k^{N,1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est dans  $\ker(D_1^{N,0})$ , ce qui prouve que  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,  $v_k^{N+1,1}$  appartient à  $\ker(D_1^{N+1,0})$ .

Reste à montrer que la famille de vecteurs  $\{v_k^{N+1,1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  forme une base de  $D_1^{N+1,0}$ .

Remarquons d'abord que la relation (6.151) peut s'écrire

$$\forall k \in \mathbb{Z}, v_k^{N+1,1} = Au_k^{N,1}, \quad (6.160)$$

où  $A$  est une matrice inversible.

La famille  $\{u_k^{N,1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  étant une base de  $\ker(D_1^{N,0})$ , l'égalité (6.160) implique que la famille  $\{v_k^{N+1,1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une famille libre (car  $A$  est inversible) qui appartient à  $\ker(D_1^{N+1,0})$  (d'après l'étape précédente), c'est donc une base de  $\ker(D_1^{N+1,0})$ .

Ceci conclut la preuve de cette proposition.

## 6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, des analyses multirésolutions splines dépendant de la position ont été construites en utilisant le formalisme de Harten. Ces analyses ont été complètement caractérisées à partir des analyses multirésolutions interpolantes dépendant de la position associées à un opérateur de prédiction interpolant. Nous avons donc commencé par établir la convergence du schéma de subdivision qui est défini par l'algorithme de prédiction interpolant utilisant un stencil dépendant de la position. Un théorème de convergence a été fourni pour une règle particulière de sélection de stencil et une contrainte  $|r - l| \leq 2$ . Il est basé sur un théorème de perturbation emprunté à [28]. Les fonctions limites du schéma de subdivision permettent alors de construire des analyses multirésolutions interpolantes dépendant de la position grâce à l'analogie entre le formalisme de Harten et le formalisme en ondelettes présentée dans la section 2.1.1. Cette construction généralise les travaux de Donoho ([31]) au cas dépendant de la position.

Généralisant au cas d'une discrétisation  $B^N$ -spline, des analyses multirésolutions biorthogonales splines de  $L^2(\mathbb{R})$  dépendant de la position ont été construites. Les fonctions d'échelle et les ondelettes correspondantes ont été déduites du cas interpolant grâce à des formules de commutation discrètes et à l'analogie Harten/ondelettes classiques. Puisque ce sont des analyses de  $L^2(\mathbb{R})$ , leur construction a nécessité l'introduction de la notion de convergence au sens  $L^2$  des schémas de prédiction. Cette construction peut alors être interprétée comme un autre type de généralisation que celle proposée dans [27] ou [18] des constructions standard rappelées dans le chapitre 2 et utilisant la formule de commutation de Lemarié ([45]).

Enfin, deux applications naturelles de cette construction pour l'approximation de fonctions discontinues ont été présentées. Nous avons analysé successivement le contrôle du phénomène de Gibbs par des analyses multirésolutions dépendant de la position et l'amélioration de la compression de signaux discontinus à l'aide de transformations multiéchelles dépendant de la position.

L'intérêt des approches dépendant de la position est qu'elles permettent la construction de transformations multiéchelles adaptés aux caractéristiques du signal à compresser et stables puisque l'algorithme de prédiction est linéaire. Elles conduisent aussi à une représentation structurée du signal comme pour les ondelettes classiques. Cependant, l'efficacité de ces méthodes dépend de la qualité de détection des discontinuités du signal. On est donc amené pour la construction d'un algorithme de compression d'image à associer à la prédiction dépendant de la position, une étape de détection de contours. La construction de l'algorithme complet (détection et analyse dépendant de la position associée) en dimension 2 fait l'objet du chapitre suivant.

# Chapitre 7

## Généralisation à la compression d'images

Nous présentons ici une généralisation de l'algorithme de prédiction dépendant de la position au cas bi-dimensionnel avec comme objectif, la construction d'un algorithme de compression d'images tenant compte des contours de l'image. Ce travail a été réalisé en collaboration avec F. Arandiga et M. Doblàs de l'Université de Valencia (Espagne).

Conformément à ce qui a été dit dans l'introduction de cette partie, la construction de l'algorithme de compression nécessite la définition de 3 opérateurs : un opérateur de transformation multiéchelle (appelé  $M$  dans l'étape (5.22)), un opérateur de quantification ( $Q$  dans l'étape (5.24)) et un opérateur de codage ( $C$  dans l'étape (5.25)).

Notre objectif est ici la construction d'un opérateur  $M$ . Comme dans le cas monodimensionnel, l'opérateur  $M$  dépend d'une famille de points de segmentation qui constitue une **carte des contours** qu'il faut préalablement définir.

Nous proposons dans ce chapitre une implémentation complète de l'opérateur  $M$  comprenant alors deux étapes,

- 1) Une étape de construction de la carte des contours : elle est basée sur l'utilisation de détecteurs de contours et produit une carte des contours de l'image.

- 2) Une étape de prédiction stable dépendant de la carte qui s'inspire du cas monodimensionnel.

Les données en sortie après les étapes de décomposition, seuillage et quantification sont alors un échantillonnage grossier de l'image, des coefficients de détails ayant une structure en arbre et une carte des contours nécessaire à la reconstruction.

Cette construction est à rapprocher de celle de l'algorithme ENO-EA, proposée par A. Cohen et B. Matei dans [23]. Cependant, au lieu d'appliquer la détection de contours à chaque échelle sur les données reconstruites, comme le fait ENO-EA, nous découplons volontairement la détection de la prédiction en construisant la carte des contours, une fois pour toute, à partir de la détection sur les données exactes. L'algorithme de compression reste alors stable pour des perturbations introduites par le seuillage ou la quantification mais le prix à payer est le stockage de la carte des contours.

Ce chapitre s'organise de la façon suivante,

La **section 7.1** est consacrée à la construction d'une transformation multiéchelle dépendant des contours. Après avoir défini la notion de carte de contours, une prédiction dépendant de la carte est introduite. Un algorithme de construction de carte est ensuite décrit.

La **section 7.2** donne une brève description des opérateurs de quantification et de codage que nous avons utilisés pour les tests numériques. L'optimisation de ces opérateurs sort du cadre de travail de cette thèse.

Enfin, la **section 7.3** fournit quelques résultats numériques qui évaluent les performances de l'algorithme de compression dépendant de la carte en terme de nombre de bits pour coder l'information compressée et en terme de qualité de l'image reconstruite. Ces performances sont comparées avec celles d'un algorithme de compression basé sur une approche invariante par translation.

## 7.1 Construction d'une transformation multiéchelle dépendant d'une carte

Dans ce qui suit, nous commençons par introduire la notion de carte de contours et présentons la construction d'une prédiction dépendant de la carte en supposant que les contours utilisés sont exactement les courbes de discontinuités d'une fonction bi-dimensionnelle. Nous donnons ensuite un exemple de construction de carte basée sur l'utilisation du détecteur de Sobel ([56]). L'échantillonnage de l'image utilise ici uniquement une discrétisation par valeurs aux points, c'est la raison pour laquelle, l'indice I qui différencie les cas interpolant et  $B^N$ -spline dans le chapitre précédent est supprimé pour alléger les notations.

### 7.1.1 Définition d'une carte de contours

La construction de la carte des contours est effectuée à partir des courbes de discontinuités  $\{C_i, i = 1, \dots, K\}$  supposées connues. Elle est décrite par la

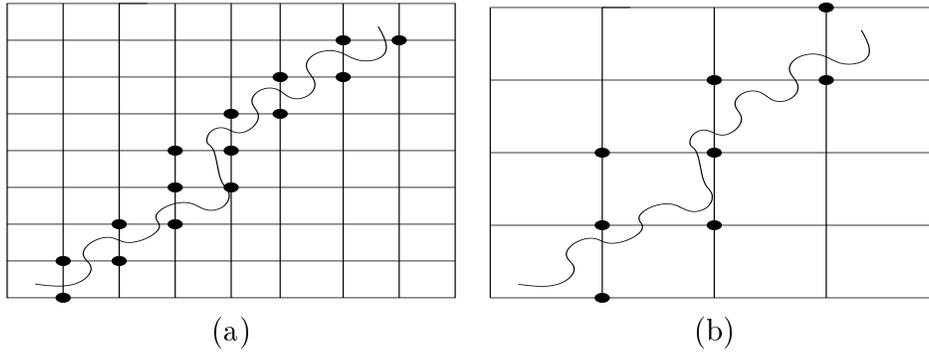


FIG. 7.1 – Exemple de construction de carte, les points noirs représentent les pixels appartenant à la carte. (a) carte associée à un niveau  $j$ , (b) carte associée au niveau  $j - 1$ .

définition suivante,

**Définition 7.1.1** *Construction de la carte des contours*

La carte des contours au niveau de résolution  $j$  est la matrice binaire  $[map^j(m, n)]_{0 \leq m, n \leq 2^j}$ , construite selon la procédure suivante,

- S'il existe  $i \in \{1, \dots, K\}$ , tel que  $C_i \cap [x_m^j, x_{m+1}^j] \times \{y_n^j\} \neq \emptyset$ , alors,  $map^j(m, n) = 1$  et  $map^j(m + 1, n) = 1$ .
- S'il existe  $i \in \{1, \dots, K\}$  tel que  $C_i \cap \{x_m^j\} \times [y_n^j, y_{n+1}^j] \neq \emptyset$ , alors,  $map^j(m, n) = 1$  et  $map^j(m, n + 1) = 1$ .

La figure 7.1 (a) fournit un exemple de construction de carte à partir d'un contour  $C_i$ .

Dans notre algorithme de compression, la carte n'est pas connue exactement. On en calcule une approximation  $map^{J_{max}}$ , une fois pour toute, au niveau de résolution  $J_{max}$ . Il est alors nécessaire de transférer l'information donnée par  $map^{J_{max}}$  à chaque niveau de résolution  $j < J_{max}$  afin de l'utiliser pour la prédiction.

La proposition suivante décrit une transformation qui construit  $[map^j(m, n)]_{0 \leq m, n \leq 2^{j-1}}$  à partir de la carte  $[map^{j+1}(m, n)]_{0 \leq m, n \leq 2^j}$ . Elle consiste simplement à transporter l'information du niveau  $j + 1$  sur les pixels qui existent au niveau  $j$  (figure 7.1 (b)).

**Proposition 7.1.1**

Pour chaque indice  $m$  pair, si  $map^{j+1}(m, n) = 1$  et  $map^{j+1}(m, n + 1) = 1$  alors,

- Si  $n$  est pair,  $map^j(m, \frac{n}{2}) = 1$  et  $map^j(m, \frac{n}{2} + 1) = 1$ ,

- Si  $n$  est impair,  $\text{map}^j(m, \frac{n+1}{2} - 1) = 1$  et  $\text{map}^j(m, \frac{n+1}{2}) = 1$ .

La même procédure est définie pour chaque indice  $n$  pair quand  $\text{map}^{j+1}(m, n) = 1$  et  $\text{map}^{j+1}(m+1, n) = 1$ , en échangeant  $m$  et  $n$  dans la construction précédente.

Cette transformation, par récurrence, permet de garder à tous les niveaux de résolution, l'information contenue dans le niveau le plus fin.

Connaissant  $[\text{map}^{j+1}(m, n)]_{m,n}$  et  $[\text{map}^j(m, n)]_{m,n}$ , une prédiction dépendant de la carte entre les niveaux de résolution  $j$  et  $j+1$  est maintenant construite.

### 7.1.2 Prédiction multi-directionnelle dépendant de la carte

Cette prédiction est construite comme une généralisation de la prédiction bi-directionnelle décrite dans la section 2.1.2 par l'algorithme 2.1.2 puisqu'elle ne privilégie pas systématiquement les directions de prédiction verticales et horizontales. C'est pourquoi, dans la suite, on parle de **prédiction multi-directionnelle**.

Notre démarche est la suivante : si le point à prédire est dans une zone régulière de l'image, la prédiction est basée sur le produit tensoriel (voir section 2.1.2). Par contre, quand le point est proche d'un contour, la répartition des pixels marqués autour de ce point doit être utilisée pour définir une prédiction tenant en compte l'orientation locale de la carte.

Nous nous limitons dans la construction de notre prédiction à quatre directions de prédiction (verticale, horizontale, diagonale et anti-diagonale). Puisque les points de la forme  $f'_{2m,2n+1}{}^{j+1}$  ou  $f'_{2m+1,2n}{}^{j+1}$  ne peuvent pas s'obtenir par une procédure diagonale ou anti-diagonale utilisant des points du niveau  $j$ , nous envisageons uniquement des stratégies verticales ou horizontales dépendant de la position pour ces points là. Pour les points du type  $f'_{2m+1,2n+1}{}^{j+1}$ , une prédiction suivant une direction non verticale ou non horizontale peut être envisagée en fonction de l'orientation des contours donnée par la carte  $\text{map}^j$ .

Dans la suite, nous décrivons en détail la prédiction de ces deux catégories de points dans le cas d'un stencil à 4 points, en supposant que la carte est idéale, au sens où seuls les pixels définissant des cellules traversées par un contour appartiennent à la carte.

### Prédiction de la première catégorie de points

Nous nous concentrons sur la construction de  $f'_{2m,2n+1}{}^{j+1}$  sachant que les points  $f'_{2m+1,2n}{}^{j+1}$  s'obtiennent par la même procédure en échangeant  $m$  et  $n$ .

Puisque la carte est supposée idéale, il n'existe qu'un nombre fini de configurations pour les pixels marqués autour du point à prédire.

Plus précisément, deux cas sont à envisager.

**Premier cas :**  $map^j(m, n) + map^j(m, n + 1) \neq 2$ ,

c'est à dire, le segment  $[x_{m,n}^j, x_{m,n+1}^j]$  contenant le point à prédire n'est pas traversé par un contour :

- si  $map^j(m, n) = 0$  et  $map^j(m, n + 1) = 1$ ,  $f'_{2m,2n+1}{}^{j+1}$  s'obtient par une interpolation avec un stencil décentré à gauche,

$$f'_{2m,2n+1}{}^{j+1} = \sum_{i=-3}^0 L_i^{3,1}(-1/2) f_{m,n+i+1}^j, \quad (7.1)$$

- si  $map^j(m, n) = 1$  et  $map^j(m, n + 1) = 0$ ,  $f'_{2m,2n+1}{}^{j+1}$  s'obtient par une interpolation avec un stencil décentré à droite,

$$f'_{2m,2n+1}{}^{j+1} = \sum_{i=-1}^2 L_i^{1,3}(-1/2) f_{m,n+i+1}^j \quad (7.2)$$

La figure 7.2 représente les deux configurations possibles pour le premier cas.

**Second cas :**  $map^j(m, n) + map^j(m, n + 1) = 2$ ,

nous cherchons alors plus d'informations au niveau  $j + 1$ .

- Si  $map^{j+1}(2m, 2n) + map^{j+1}(2m, 2n + 2) = 0$  (figure 7.3), une interpolation centrée à deux points permet d'éviter de traverser le contour, i.e.

$$f'_{2m,2n+1}{}^{j+1} = \frac{f_{m,n}^j + f_{m,n+1}^j}{2} \quad (7.3)$$

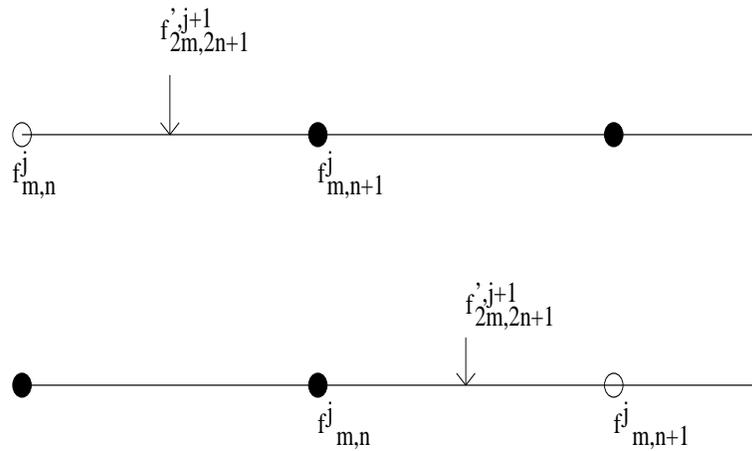


FIG. 7.2 – Les deux configurations possibles du premier cas pour la prédiction des points de la première catégorie (les points noirs représentent les points de la carte du niveau  $j$  alors que les blancs n'appartiennent pas à la carte).

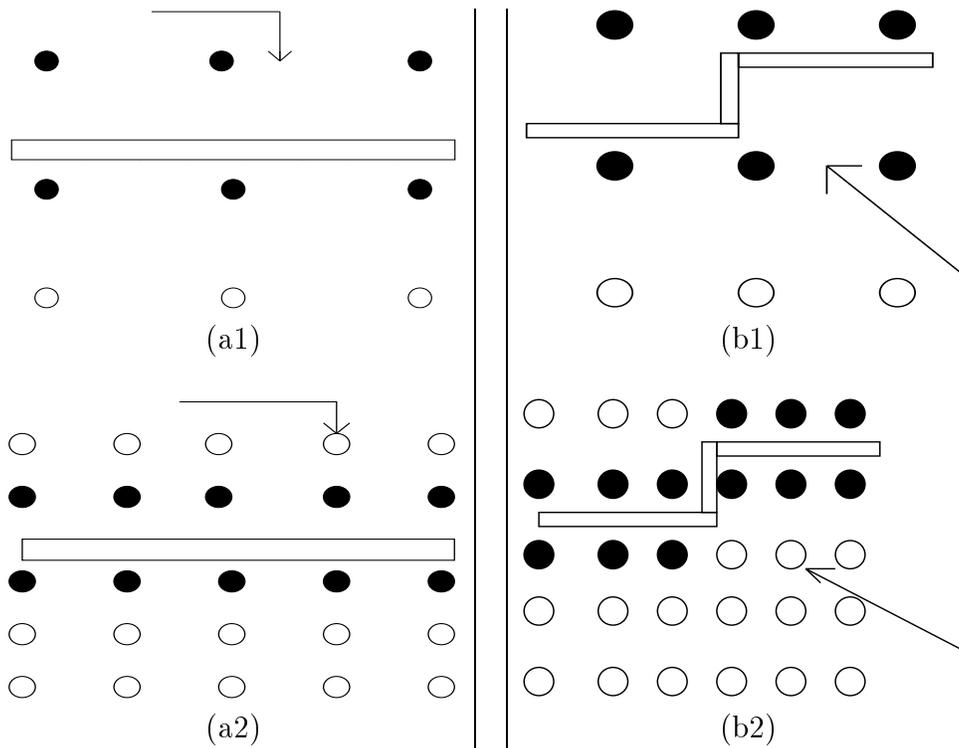


FIG. 7.3 – Exemples de configurations correspondant à  $map^{j+1}(2m, 2n) = 0$  et  $map^{j+1}(2m, 2n + 2) = 0$ , la flèche indique soit le segment contenant le point à prédire soit le point à prédire, le rectangle représente le contour. (a1)-(a2) : point près d'un contour horizontal, (b1)-(b2) : près d'un coin

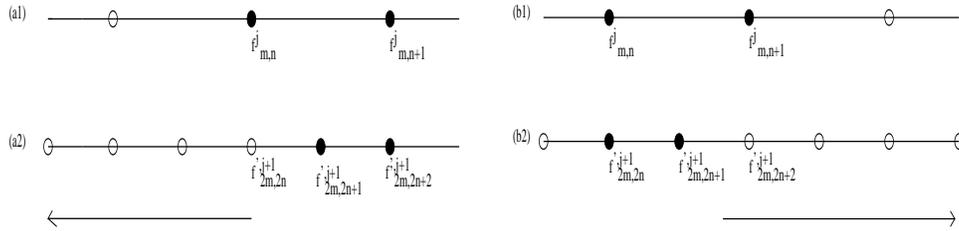


FIG. 7.4 – Les deux configurations possibles du second cas pour la prédiction des points de la première catégorie de points quand  $\text{map}^{j+1}(2m, 2n + 2) + \text{map}^{j+1}(2m, 2n) = 1$ . La flèche indique la direction de prédiction.  
 (a1)-(b1)  $\text{map}^j$ , (a2)-(b2)  $\text{map}^{j+1}$

– Si  $\text{map}^{j+1}(2m, 2n) + \text{map}^{j+1}(2m, 2n + 2) = 1$  :

- si  $\text{map}^{j+1}(2m, 2n + 2) = 0$  et  $\text{map}^{j+1}(2m, 2n) = 1$  (figure 7.4 (b1)-(b2)) alors  $\text{map}^{j+1}(2m, 2n + 1) = 1$  et une extrapolation à droite est utilisée,

$$f'_{2m,2n+1}{}^{j+1} = \sum_{i=0}^3 L_i^{0,4}(-1/2) f_{m,n+i+1}^j. \quad (7.4)$$

- Si  $\text{map}^{j+1}(2m, 2n) = 0$  et  $\text{map}^{j+1}(2m, 2n + 2) = 1$  (figure 7.4 (a1)-(a2)) alors  $\text{map}^{j+1}(2m, 2n + 1) = 1$  et une extrapolation à gauche est utilisée,

$$f'_{2m,2n+1}{}^{j+1} = \sum_{i=-4}^{-1} L_i^{4,0}(-1/2) f_{m,n+i+1}^j. \quad (7.5)$$

– Si  $\text{map}^{j+1}(2m, 2n) + \text{map}^{j+1}(2m, 2n + 2) = 2$  :

- le point à prédire peut être dans un coin.

La carte étant supposée idéale, il n'y a que deux configurations de coins possibles : la figure 7.5 (a) donne simplement une configuration puisque la seconde s'obtient par une rotation d'angle  $\pi$ .

L'information donnée par la carte dans le voisinage du point permet de privilégier un sens dans la prédiction. Plus précisément, si  $\text{map}^{j+1}(2m - 1, 2n + 2) = 0$  et  $\text{map}^{j+1}(2m + 1, 2n) = 0$ , alors les quantités suivantes sont évaluées,

$$S_R = \text{map}^{j+1}(2m, 2n+2) + \text{map}^{j+1}(2m-1, 2n+2) + \text{map}^{j+1}(2m-1, 2n+1)$$

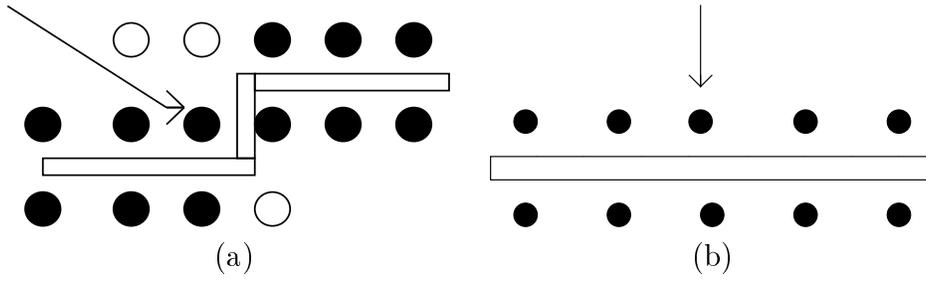


FIG. 7.5 – Exemples de configurations quand le point à prédire est (a) dans un coin ou (b) près d'un contour horizontal.

$$S_L = \text{map}^{j+1}(2m, 2n) + \text{map}^{j+1}(2m + 1, 2n) + \text{map}^{j+1}(2m + 1, 2n + 1)$$

Nous pouvons alors sélectionner le voisinage le plus régulier :

si  $S_R > S_L$  (resp.  $S_L > S_R$ ), l'extrapolation à gauche (7.5) (resp. l'extrapolation à droite (7.4)) est utilisée <sup>1</sup>.

De la même façon, si  $\text{map}^{j+1}(2m - 1, 2n) = 0$  et  $\text{map}^{j+1}(2m + 1, 2n + 2) = 0$ , nous évaluons les quantités suivantes :

$$S_R = \text{map}^{j+1}(2m, 2n+2) + \text{map}^{j+1}(2m+1, 2n+2) + \text{map}^{j+1}(2m+1, 2n+1)$$

$$S_L = \text{map}^{j+1}(2m, 2n) + \text{map}^{j+1}(2m - 1, 2n) + \text{map}^{j+1}(2m - 1, 2n + 1)$$

et sélectionnons le voisinage le plus régulier :

si  $S_R > S_L$  (resp.  $S_L > S_R$ ), nous utilisons l'extrapolation à gauche (7.5) (resp. l'extrapolation à droite (7.4)).

- Si le point à prédire n'est pas dans un coin (figure 7.5 (b)),  $f'_{2m,2n+1}{}^{j+1}$  s'obtient par,

$$f'_{2m,2n+1}{}^{j+1} = \frac{f_{m,n}^j + f_{m,n+1}^j}{2} \quad (7.6)$$

### Prédiction de la seconde catégorie de points

Cette prédiction tient compte de l'orientation des contours. A nouveau, deux cas sont à envisager.

<sup>1</sup>Dans le cas  $S_R = S_L$ , il est nécessaire de chercher l'information dans un voisinage plus grand, ce qui n'est pas envisagé ici.

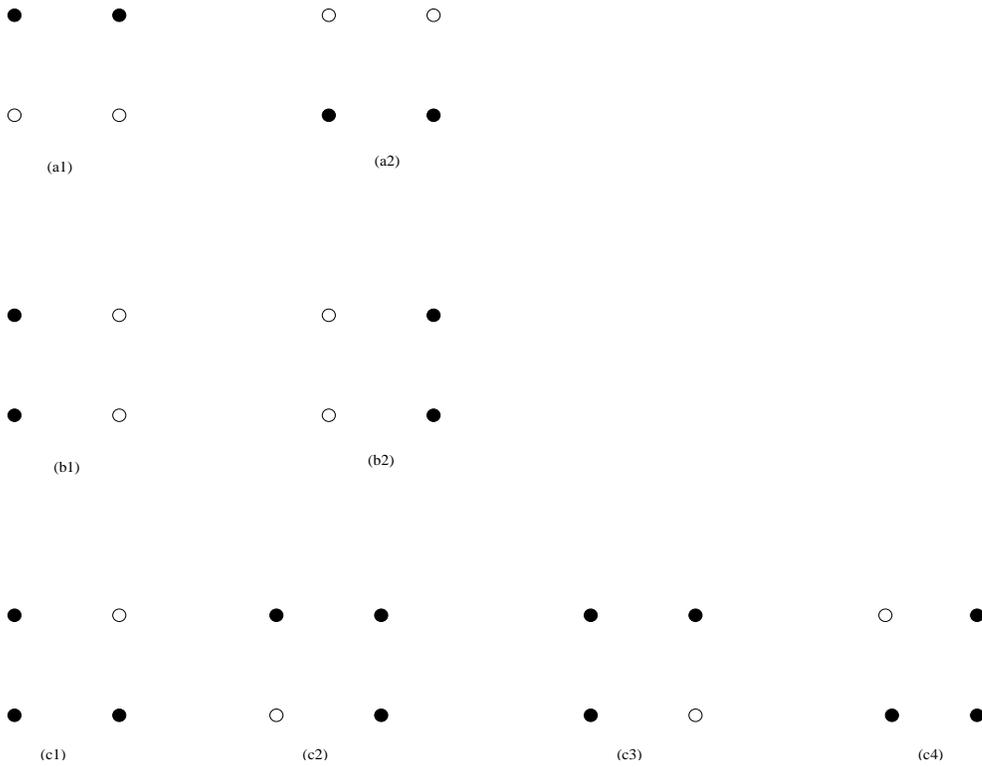


FIG. 7.6 – Les 8 configurations possibles pour la prédiction des points de la seconde catégorie

**Premier cas :**  $map^j(2m, 2n) + map^j(2m, 2n + 2) + map^j(2m + 2, 2n) + map^j(2m + 2, 2n + 2) \neq 4$  :

La distribution des points marqués autour du point à prédire fournit une information sur l'orientation du contour dans le voisinage du point. Plus précisément, huit configurations sont possibles. Deux d'entre elles correspondent à un contour horizontal (figures 7.6 (a1)-(a2)), deux à un contour vertical (figures 7.6 (b1)-(b2)) et quatre à un contour diagonal ou anti-diagonal (figure 7.6 (c1)-(c2)-(c3)-(c4)).

A partir de ces huit configurations,  $f'_{2m+1,2n+1}{}^{j+1}$  est évalué de la façon suivante :

$$\text{Configuration (a1),(a2)} : f'_{2m+1,2n+1}{}^{j+1} = \frac{f'_{2m+1,2n}{}^{j+1} + f'_{2m+1,2n+2}{}^{j+1}}{2} \quad (7.7)$$

$$\text{Configuration (b1),(b2)} : f'_{2m+1,2n+1}{}^{j+1} = \frac{f'_{2m,2n+1}{}^{j+1} + f'_{2m+2,2n+1}{}^{j+1}}{2} \quad (7.8)$$

$$\text{Configuration (c1),(c2)} : f'_{2m+1,2n+1}{}^{j+1} = \frac{f'_{2m,2n+2}{}^{j+1} + f'_{2m+2,2n}{}^{j+1}}{2} \quad (7.9)$$

$$\text{Configuration (c3),(c4)} : f'_{2m+1,2n+1}{}^{j+1} = \frac{f'_{2m,2n}{}^{j+1} + f'_{2m+2,2n+2}{}^{j+1}}{2} \quad (7.10)$$

**Second cas :**  $map^j(2m, 2n) + map^j(2m, 2n + 2) + map^j(2m + 2, 2n) + map^j(2m + 2, 2n + 2) = 4$  :

cette configuration ne donne aucune information sur l'orientation. Une prédiction bi-directionnelle, comme pour la première catégorie de points est alors appliquée en privilégiant la direction verticale.

La section suivante est consacrée à un exemple de construction de carte.

### 7.1.3 Un exemple de construction de carte

La construction de la carte suivant la définition 7.1.1 suppose de connaître la position des contours de l'image. Nous décrivons donc, dans ce qui suit, un détecteur de contour qui est utilisé dans les tests numériques.

Cet algorithme de détection a été développé en collaboration avec F. Arandiga et M. Doblás de l'Université de Valencia (Espagne).

Sa construction, basée sur l'utilisation du filtre de Sobel ([56]), se compose de trois étapes

1) Détection à l'aide du filtre de Sobel :

- Une mesure des gradients directionnels pour chaque pixel de l'image originale est obtenue par convolution avec les 4 masques directionnels  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{d_+}$ ,  $M_{d_-}$  définis sur la figure 7.7.

- La sélection des pixels proches d'un contour est effectuée si,

$$\max(M_x \star f^{J_{max}}, M_y \star f^{J_{max}}, M_{d_+} \star f^{J_{max}}, M_{d_-} \star f^{J_{max}}) \geq \alpha(M - m) \quad (7.11)$$

où  $\star$  désigne le produit de convolution,  $M$  (resp.  $m$ ) est le maximum (resp. le minimum) de l'image et  $\alpha$  est une constante déterminée empiriquement (on utilise  $\alpha = 0.5$  ici).

Observons que cette détection permet de construire une carte préliminaire des contours où un pixel au voisinage d'un fort gradient (resp. d'un faible

$$M_x = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_y = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M_{d_+} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, M_{d_-} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

FIG. 7.7 – Masques directionnels du filtre de Sobel

gradient) au sens du critère (7.11) est marqué par 1 (resp. par 0). Elle fournit aussi une matrice des orientations du gradient de l'image en chaque pixel (horizontal, vertical, diagonal ou anti-diagonal) à partir du maximum des quatre gradients directionnels locaux.

### 2) Réduction de l'épaisseur des zones détectées :

La sortie de l'étape précédente fournit une carte "épaisse" au sens où plusieurs pixels consécutifs peuvent être détectés. On cherche ici à réduire la longueur des séquences de pixels détectés. Cette longueur est définie soit horizontalement, soit verticalement.

Par exemple, si une séquence verticale de longueur  $m_2 - m_1$ ,  $\{X_{m,n}^{J_{max}}\}_{m_1 \leq m \leq m_2}$ , ayant des orientations horizontales et diagonales (resp. anti-diagonales) est détectée, les différences divisées suivantes sont évaluées,

$$|f_{m-1,n}^{J_{max}} - 2f_{m,n}^{J_{max}} + f_{m+1,n}^{J_{max}}|, \quad m_1 \leq m \leq m_2$$

Si  $m'_1 \leq m'_2$  correspondent aux deux valeurs maximales de ces différences, la famille de pixels détectés est réduite à  $\{X_{m,n}^{J_{max}}\}_{m'_1 \leq m \leq m'_2}$ .

La même procédure est appliquée pour des séquences horizontales de pixels détectés.

### 3) Elimination des pixels détectés isolés et chaînage :

Les pixels détectés voisins sont chaînés entre eux. Toute chaîne de longueur (en terme de nombre de pixels chaînés) inférieure à une longueur fixée, notée  $L_{chaîne}$ , n'est pas considérée comme un contour et les pixels appartenant à cette chaîne sont éliminés. Les pixels restant marqués constituent la carte des contours.

Remarquons que l'étape de chaînage fournit une autre représentation des contours d'une image. Au lieu de décrire un contour par les positions dya-

diques des pixels détectés, chaque contour peut être codé par une chaîne qui contient la position dyadique du pixel de début de contour puis une série de directions permettant de retrouver le pixel détecté voisin.

Les figures 7.8 et 7.9 donnent la carte pour une image géométrique et une image réelle quand on utilise l'algorithme de détection que l'on vient de décrire.

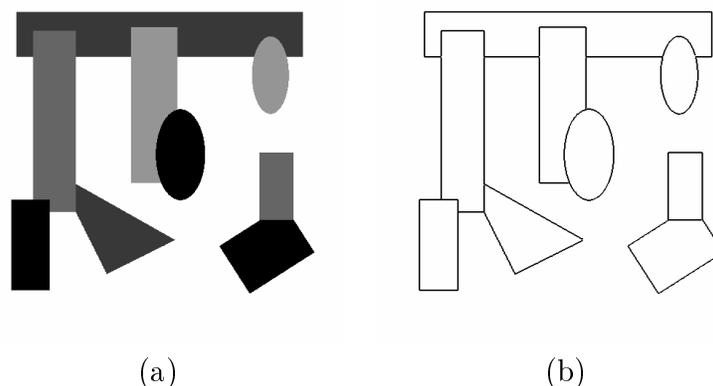


FIG. 7.8 – Carte des contours pour une image géométrique, (a) image originale, (b) carte des contours

Comme on peut le voir sur les figures 7.8 et 7.9, cette détection en trois étapes conduit à la construction d'une carte qui ne contient que des contours réels de l'image. Pour l'image géométrique, un simple détecteur de Sobel (étape 1) aurait suffi pour obtenir ce résultat. Par contre, la détection des contours de l'image réelle est plus complexe et les étapes 2 et 3 de la détection s'avèrent très efficaces puisqu'elles réduisent considérablement le nombre de points détectés.

Notons que la longueur  $L_{chaîne}$  et le seuil  $\alpha$  utilisés dans l'algorithme de détection sont deux paramètres supplémentaires qui dépendent de l'image et qui doivent être adaptés en fonction de l'image à considérer.

## 7.2 Quantification et codage de l'information compressée

Nous décrivons brièvement le choix des opérateurs de quantification et de codage utilisés dans l'algorithme de compression.

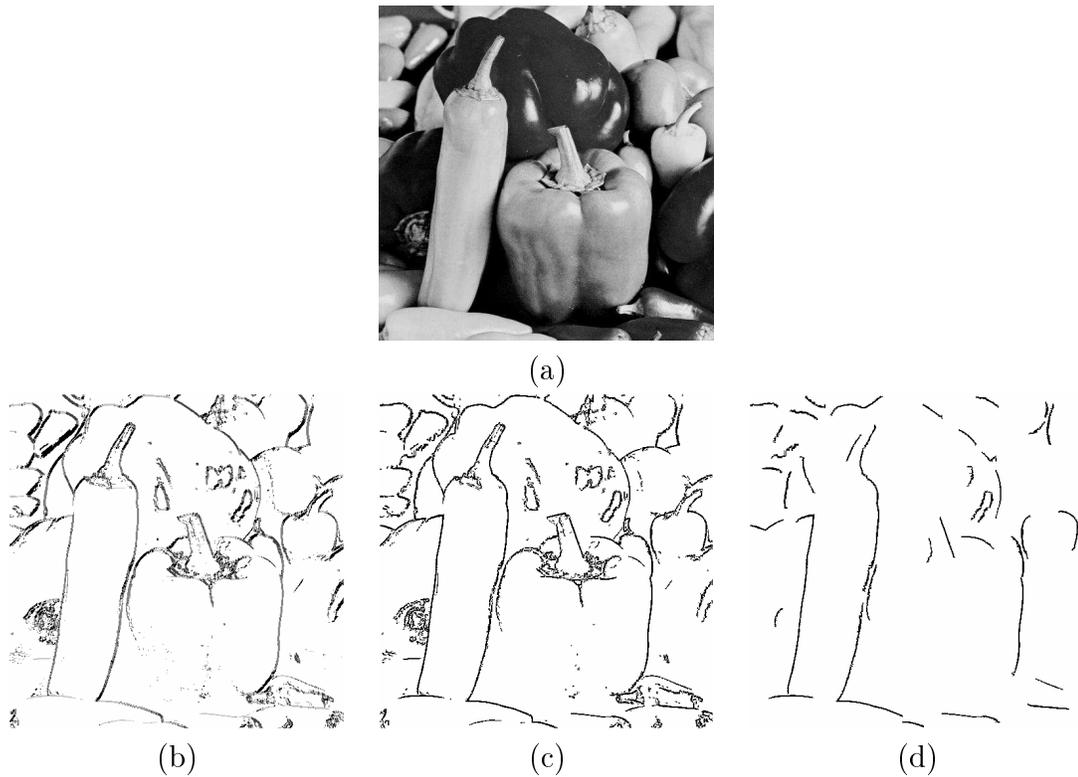


FIG. 7.9 – Carte des contours pour une image réelle, (a) image originale, (b) carte après la première étape (nombre de points marqués : 25263), (c) carte après la deuxième étape (nombre de points marqués : 18384), (d) carte après la troisième étape (nombre de points marqués : 6824)

### 7.2.1 Opérateurs de quantification

La quantification a pour but de réduire le nombre de bits nécessaires pour la représentation des coefficients. Il existe deux types de quantifications : la quantification scalaire qui traite chaque coefficient indépendamment et la quantification vectorielle qui agit sur des blocs de coefficients. Ici, nous ne considérons que la quantification scalaire. Elle consiste, ici, à arrondir systématiquement les coefficients de détails seuillés au plus proche entier.

### 7.2.2 Codage de l'information quantifiée

Nous rappelons que l'information compressée à coder contient la carte des contours de l'image en plus des données classiques que sont l'image à basse résolution et les coefficients de détails seuillés et quantifiés.

La représentation de la carte des contours choisie pour le codage est celle décrite dans la troisième étape de la construction de la carte (section 7.1.3).

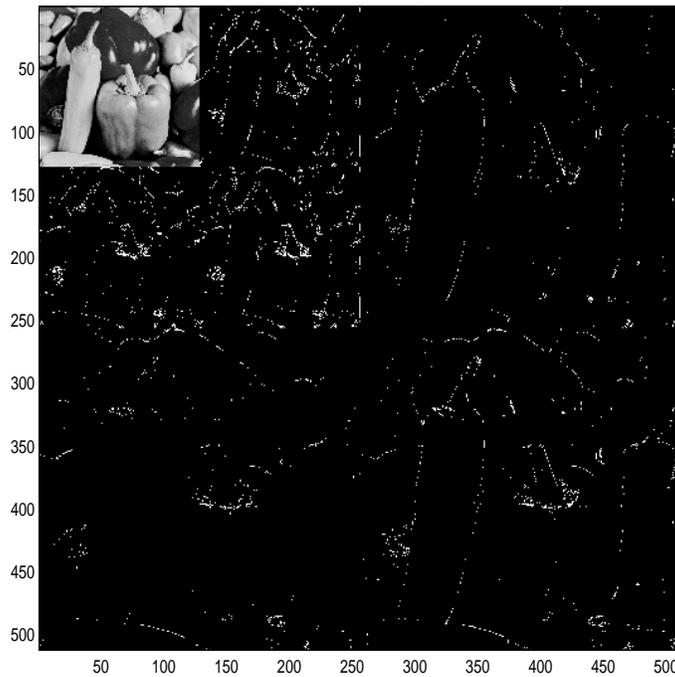


FIG. 7.10 – Représentation de l'image basse résolution et des coefficients de détail obtenue par décomposition dépendant de la carte d'une image réelle puis  $\epsilon$ -seuillage des détails. Les points blancs représentent les détails non nuls.  $J_0 = 7$ ,  $J_{max} = 9$ ,  $\epsilon = 30$ .

Elle consiste à représenter un contour par une chaîne composée d'un pixel de départ et d'une suite de directions qui permettent de retrouver tous les pixels de la chaîne.

La représentation, pour l'image à basse résolution, et pour les détails, est celle qui est classiquement choisie dans [48], par exemple, et qui utilise la structure en arbre des coefficients de détail (figure 7.10).

Dans ces travaux, nous avons volontairement privilégié la construction de transformations multiéchelles plutôt que le développement d'un codeur optimal pour les informations dont on dispose. Le codeur qui est utilisé ici n'est pas le mieux adapté à la nature de l'information à compresser ; il s'agit du codeur PPMZ décrit dans [10]. Son algorithme est basé sur la méthode PPM (Prediction by Partial Matching) qui tient compte de la statistique du fichier de données à compresser. Il intègre non seulement la fréquence d'apparition des caractères mais aussi la probabilité d'apparition d'un caractère particulier après un caractère donné, par un mécanisme de prédiction. Ce type de codeur s'avère donc efficace quand les données contiennent plusieurs caractères qui se répètent, ce qui est le cas pour la carte des contours. Par

contre, il ne tient pas compte de la dépendance inter-échelle des coefficients de détail provenant de leur structure naturelle en arbre (figure 7.10) et qui est classiquement exploitée par des algorithmes du type EZW (Embedded image coding using Zerotrees of Wavelet coefficients, [60]) ou EBCOT (Embedded Block Coding with Optimized Truncation, [62]).

L'utilisation de ces codeurs est en cours de développement en collaboration avec F. Arandiga et M. Doblas de l'Université de Valencia.

## 7.3 Applications numériques à la compression d'images

Nous terminons ce chapitre par une série d'applications numériques de l'approche dépendant de la carte à la compression d'images.

Nous fournissons ici plusieurs tests numériques qui ont pour but d'évaluer les performances de l'approche dépendant de la carte et de les comparer avec celles d'une approche invariante par translation.

Deux séries de tests sont proposées :

- la première série se focalise sur les schémas de subdivision (c'est à dire, la prédiction sans ajout de coefficients de détails) en mettant de côté le problème de la détection de la carte. La prédiction dépendant de la position (via la carte) est celle de la section 7.1.2 que l'on note DP-4 et la prédiction invariante par translation est construite en utilisant un produit tensoriel (voir section 2.1.2) avec un stencil à 4 points et est notée IT-4.

- La seconde série est consacrée à la comparaison entre les algorithmes de compression utilisant IT-4 et DP-4. Dans le cas de l'algorithme dépendant de la carte, la carte des contours est construite comme dans la section 7.1.3 et le codeur utilisé dans les deux algorithmes est basé sur l'algorithme PPMZ (section 7.2.2).

Les performances de chaque algorithme sont mesurées en termes de taux de compression pour coder l'information mais aussi en terme de qualité de l'image reconstruite.

Le taux de compression est évalué, comme dans [49], par le débit moyen de bits par pixels (dont l'unité est notée bpp). Sachant que les images tests sont de taille  $512 \times 512$  et que chaque pixel est codé sur 8 bits, le débit moyen s'écrit, si  $N$  est le nombre de bits utilisés pour coder l'image,

$$d = 8 \frac{N}{2^{21}}. \quad (7.12)$$

Concernant la qualité d'une image, elle est le plus souvent mesurée par le PSNR (Peak Signal to Noise Ratio) qui est défini par,

$$PSNR = 10 \log_{10} \left( \frac{256^2}{MSE} \right) \quad (7.13)$$

où  $MSE = 2^{-2J_{max}} \|f^{J_{max}} - f_c^{J_{max}}\|_l^2$ .

Cependant, cette mesure de l'erreur n'est pas forcément l'erreur que l'on perçoit visuellement, c'est la raison pour laquelle, dans chaque test, on s'intéresse aussi à la qualité visuelle des images reconstruites.

Deux types d'images tests sont utilisées : une image synthétique géométrique et une image réelle.

### 7.3.1 Prédiction de l'image

La carte est ici supposée connue. Les tests sont réalisés sur une image géométrique.

La figure (7.11) représente les image prédites par IT-4 (figure 7.11 (b)) et DP-4 (figure 7.11 (c)).

L'approche invariante par translation (figure 7.11 (b)) conduit à une mauvaise prédiction au voisinage des contours de l'image à cause du phénomène de Gibbs. Par contre, nous pouvons noter le très bon comportement de la prédiction dépendant de la carte (figure 7.11 (c)) sur les contours géométriques. Les seules parties de l'image où la prédiction DP-4 échoue se situent près des contours anguleux (figure 7.11 (d)) puisque n'importe quel stencil choisi est traversé par un contour.

### 7.3.2 Compression de l'image

Nous comparons ici les algorithmes de compression utilisant les prédictions IT-4 et DP-4.

#### Image géométrique

Le tableau 7.1 et la figure 7.12 représentent le débit moyen de bits par pixels correspondant au codage de l'image compressée en fonction du PSNR

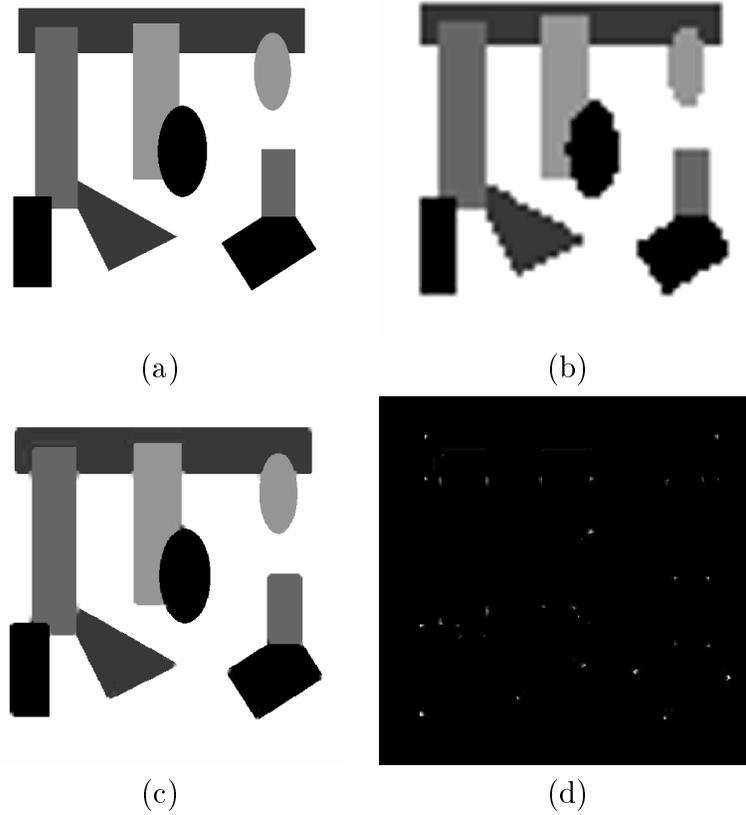


FIG. 7.11 – Prédiction d'une image géométrique entre  $J_0 = 6$  et  $J_{max} = 9$ , (a) image originale, (b) image prédite avec IT-4, (c) image prédite avec DP-4, (d) différence entre l'image prédite (c) et l'image originale.

de l'image reconstruite pour les approches invariante par translation et dépendant de la carte.

Prédiction	carte	détails	carte	détails	d	PSNR
	(coeff. non nuls)	(coeff. non nuls)	(bits)	(bits)	(bpp)	
IT-4	0	13475	0	65984	0.26	40.66
	0	7176	0	58648	0.23	33.78
	0	5633	0	48096	0.19	31.36
	0	4444	0	38176	0.16	29.16
	0	1360	0	16480	0.07	22.04
DP-4	6871	251	3488	5320	0.044	59.33
	6871	177	3488	4440	0.040	50.91
	6871	111	3488	2976	0.035	42.90
	6871	66	3488	1952	0.031	38.38
	6871	11	3488	904	0.027	34.30

TAB. 7.1 – Débit moyen de bits par pixels et PSNR, cas d'une image géométrique.

L'utilisation d'une compression dépendant de la carte est très efficace dans le cas de l'image géométrique puisque pour une même qualité d'image, le débit moyen de bits par pixels est divisé par 10 par rapport à une compression invariante par translation. Le très bon comportement de l'algorithme dépendant de la carte, dans le cas d'une image géométrique, s'explique par,

- La bonne adaptation de la prédiction aux contours de l'image : la détection fournit une carte idéale et exacte des contours et la prédiction conduit alors à une représentation de l'image très creuse en termes de nombre de détails non nuls (troisième colonne du tableau 7.1).
- L'efficacité du codage de la carte : même si, pour l'algorithme dépendant de la carte, la carte est une donnée supplémentaire à conserver, elle est codée très efficacement. En effet, peu de chaînes sont nécessaires pour coder les contours et les directions de déplacement dans la chaîne requièrent peu de bits pour les coder.

L'avantage évident de cette technique se retrouve quand on s'intéresse à la qualité visuelle de l'image reconstruite (figure 7.13).

### Image réelle

Comme dans le cas de l'image géométrique, nous fournissons, dans le tableau 7.2, et traçons sur la figure 7.14, le débit moyen de bits par pixels en

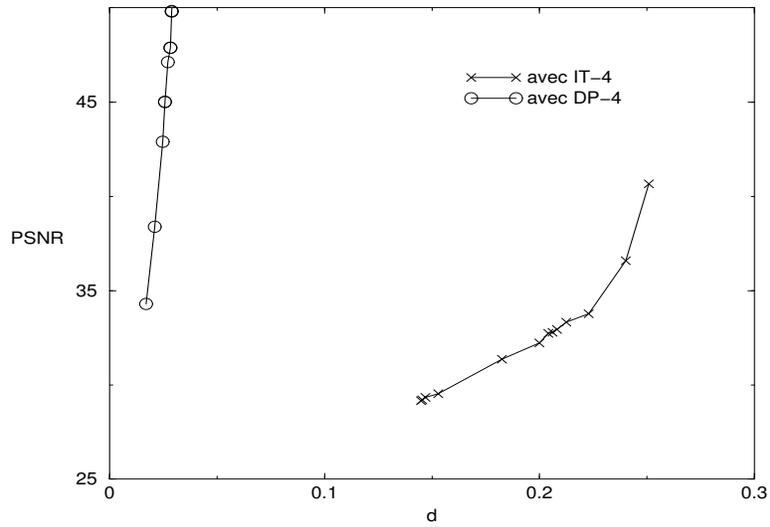


FIG. 7.12 – PSNR en fonction du débit moyen de bits par pixels, cas d'une image géométrique.

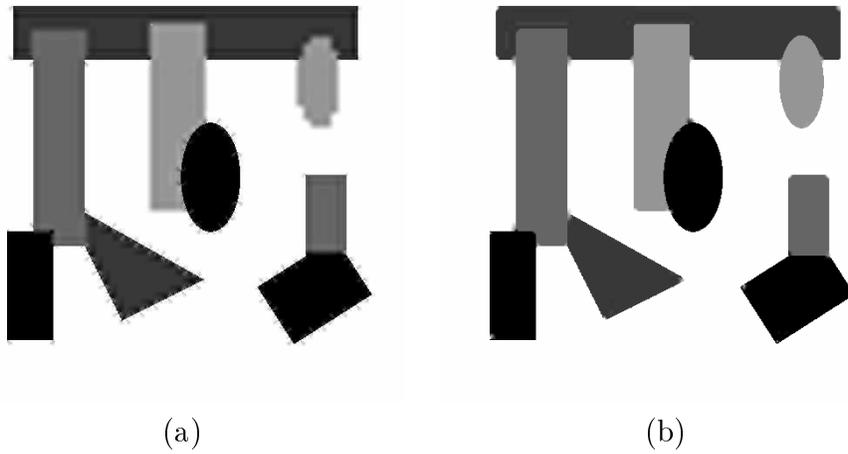


FIG. 7.13 – Reconstruction de l'image géométrique,  $J_0 = 6$ ,  $J_{max} = 9$ , (a) avec IT-4,  $d=0.16$  bpp, PSNR=29.16, (b) avec DP-4,  $d=0.027$  bpp, PSNR=34.30

fonction du PSNR pour les deux approches.

Prédiction	carte	détails	carte	détails	d	PSNR
	(coeff. non nuls)	(coeff. non nuls)	(bits)	(bits)	(bpp)	
IT-4	0	5133	0	84352	0.42	28.55
	0	3972	0	67072	0.35	27.77
	0	3099	0	53848	0.30	27.11
	0	2450	0	43648	0.27	26.48
	0	1948	0	35344	0.23	25.93
DP-4	6824	4149	9448	71528	0.41	28.72
	6824	3115	9448	55040	0.35	28.02
	6824	2386	9448	43736	0.30	27.44
	6824	1838	9448	34848	0.27	26.92
	6824	1461	9448	28824	0.25	26.45

TAB. 7.2 – Débit moyen de bits par pixels et PSNR, cas d'une image réelle.

Il apparait que pour une image réelle, l'amélioration de performance de l'approche dépendant de la carte est réduite puisque le débit moyen de bits par pixels pour coder l'image compressée est du même ordre de grandeur que dans le cas invariant par translation (tableau 7.2). L'algorithme utilisant DP-4 fournit toutefois un meilleur taux de compression à PSNR identique que l'algorithme basé sur IT-4 (figure 7.14).

Cette situation contrasté par rapport aux tests sur une image géométrique est due à,

- Une détection qui n'est pas optimale pour une image réelle : même si la représentation des contours est satisfaisante, le mécanisme de détection supprime la continuité de certains contours. Le codage de la carte par chaînage nécessite alors plus d'une chaîne pour décrire un contour. Ainsi comme le montrent les deuxièmes et quatrièmes colonnes des tableaux 7.1 et 7.2, la codage de la carte pour l'image réelle requiert trois fois plus de bits que dans le cas d'une image géométrique, même si le nombre de coefficients non nuls des deux cartes est du même ordre de grandeur,
- Une prédiction qui n'est pas complètement adaptée au modèle d'une image réelle : la prédiction dépendant de la carte a été construite en supposant que la carte est idéale et en envisageant un nombre fini de configurations qui sont celles rencontrées pour une image géométrique.

Cependant comme le montre la figure 7.15, la technique dépendant de

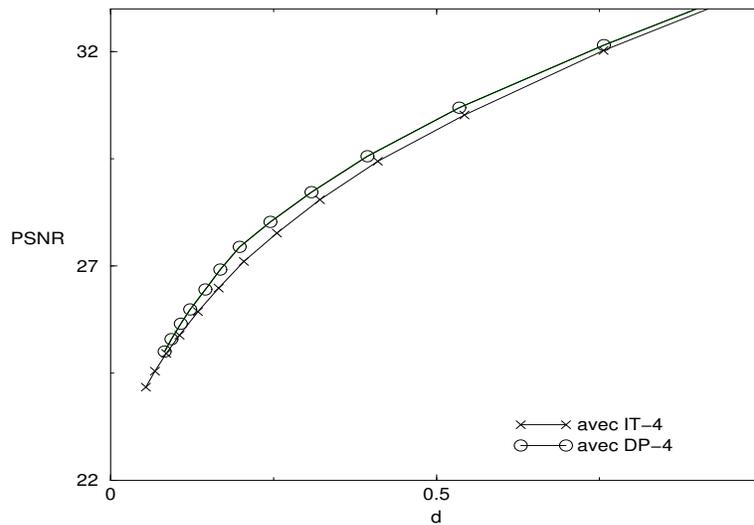


FIG. 7.14 – PSNR en fonction du débit moyen de bits par pixels, cas d’une image réelle.

la carte conduit à une meilleure reconstruction des contours (et donc à une qualité visuelle meilleure) même si le PSNR est inférieur à celui d’une image reconstruite sans tenir compte de la carte.

## 7.4 Conclusion

Dans ce chapitre, un nouvel algorithme de compression adapté aux caractéristiques des données à compresser a été introduit.

Une attention particulière a d’abord été portée à la construction de la transformation multiéchelle qui intervient dans la première étape de cet algorithme. Cette construction, qui utilise le formalisme de Harten est une généralisation de l’approche dépendant de la position présentée au chapitre 6. En effet, elle est basée sur l’introduction d’un opérateur de prédiction dépendant d’une carte des contours de l’image obtenue grâce à une étape de détection de contours réalisée au préalable. Cet opérateur tient donc non seulement compte de la carte (comme en dimension 1) mais aussi de son orientation.

Un algorithme de construction de carte a ensuite été présentée. Il produit une carte en trois étapes : d’abord une étape de détection de contours basée sur l’utilisation du détecteur de Sobel, puis, une étape de réduction de l’épaisseur des zones détectées en mesurant les différences divisées d’ordre 2 pour chaque pixel marqué et enfin, une étape d’élimination par une technique de chaînage.

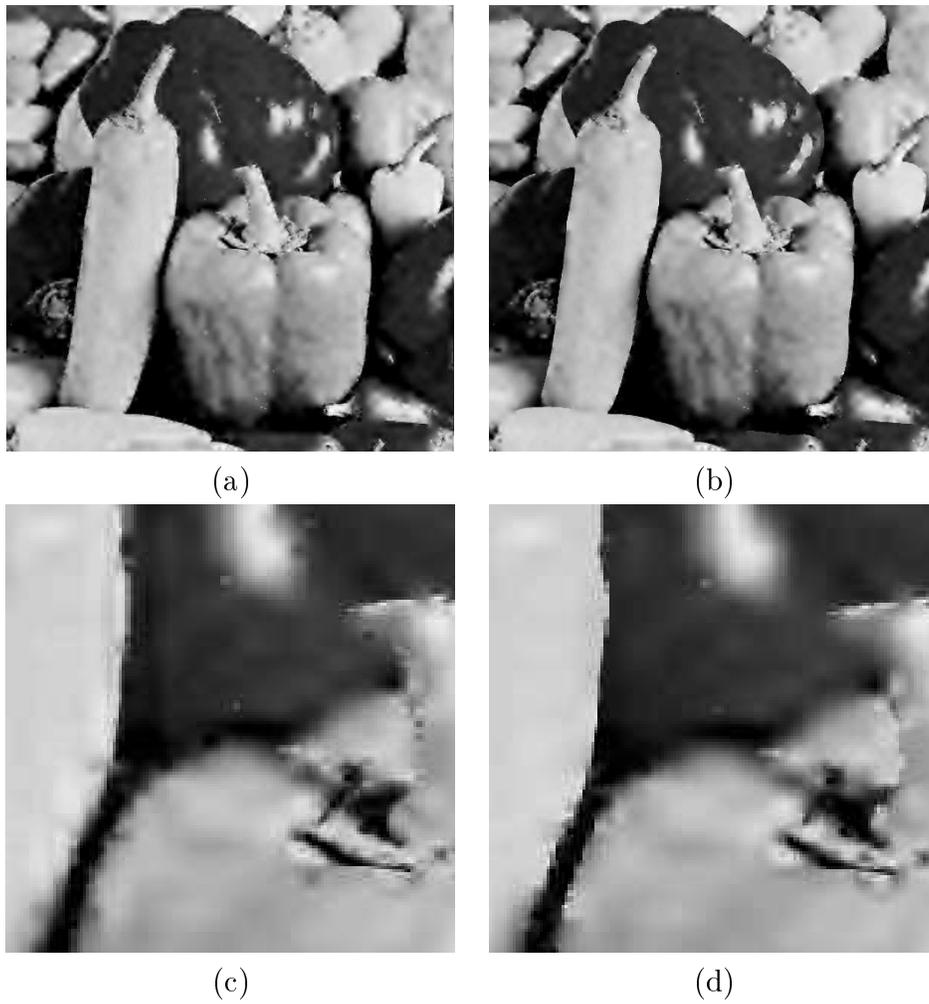


FIG. 7.15 – Reconstruction de l'image réelle,  $J_0 = 6$ ,  $J_{max} = 9$ ,  
(a)-(c) avec IT-4,  $d=0.30$  bpp, PSNR=27.11, (b)-(d) avec DP-4,  $d=0.25$  bpp,  
PSNR=26.45.

Après avoir décrit les opérateurs de quantification et de codage utilisés, plusieurs tests numériques ont été effectués pour évaluer les performances de l'algorithme de compression dépendant de la carte et les comparer avec celles d'un algorithme invariant par translation basé sur le produit tensoriel classique ([1]).



# Conclusion générale et perspectives

Les travaux présentés dans ce mémoire décrivent la construction de méthodes numériques multiéchelles pour le traitement d'images et la résolution d'équations aux dérivées partielles. Ils se concentrent en particulier sur les difficultés associées, pour les équations aux dérivées partielles, à la résolution de problèmes définis sur des ouverts et, pour le traitement d'images, à l'adaptation de la compression à des contours.

Pour la résolution de problèmes paraboliques à géométrie complexe, une méthode de couplage de type Petrov-Galerkin ondelettes/domaines fictifs a été introduite. Elle consiste à approcher tout d'abord le problème initial par une cascade de problèmes elliptiques puis à les transformer, par l'introduction de domaines fictifs, en des problèmes définis sur un domaine plus grand,  $\Omega$ , à géométrie simple avec des conditions périodiques sur le bord. Ces nouveaux problèmes sont enfin résolus par une méthode ondelette. La dernière reformulation nécessite l'introduction et l'approximation d'une seconde variable,  $\lambda$ , qui est un multiplicateur de Lagrange de surface et qui impose la condition sur la frontière  $\gamma$  de  $\omega$  au sens faible.

L'intérêt de cette approche se résume en trois points,

- La **qualité d'approximation** dans les espaces générés par les ondelettes : le calcul de borne d'erreur a montré que la qualité d'approximation dans les espaces générés par les ondelettes est contrôlée par la régularité de la solution approchée sur  $\Omega$  et le nombre de moments nuls des ondelettes des deux analyses multirésolutions associées à  $\Omega$  et  $\gamma$ . Même si des multiplicateurs de Lagrange non nuls réduisent la régularité de la solution  $U^n$  (i.e  $U^n \in H^{3/2-\epsilon}(\Omega)$ ,  $\epsilon > 0$ ), des approximations précises pour  $U^n$  et  $\lambda^n$  peuvent être construites simplement en choi-

issant des analyses multirésolutions d'ordre élevé sur  $\Omega$  et  $\gamma$  et en les couplant avec des stratégies de raffinement dans le voisinage de la frontière  $\gamma$ . Cette stratégie de raffinement local peut être aussi utilisée pour satisfaire les contraintes Inf-Sup imposées pour assurer l'existence et l'unicité de la solution.

- **L'efficacité numérique** : le choix d'une discrétisation du type Petrov/Galerkin permet d'éviter "l'inversion" de matrice de masse qui apparaît classiquement dans la formulation de ce même type de problème quand on choisit une discrétisation du type Galerkin ([43]). De plus, à partir de l'estimation du conditionnement, un simple préconditionneur diagonal suffit pour préconditionner la matrice d'itération grâce à l'utilisation des analyses multirésolutions de  $H^1(\Omega)$  et  $H^{-1/2}(\gamma)$ ,
- La **flexibilité de l'implémentation** : une évaluation efficace et rapide des différentes quantités du problème à implémenter a été fournie. Elle combine des formules de quadrature d'ordre élevé avec des algorithmes rapides de calcul (tel que l'algorithme en arbre associé aux analyses multirésolutions ou l'algorithme de calcul de valeurs aux points associé aux analyses splines et à la représentation de la frontière par une courbe de Bezier). Elle permet alors une adaptation efficace de la méthode à des problèmes définis sur des domaines non polygonaux ou avec frontière mobile.

Cependant, quelques limitations importantes de cette méthode sont à considérer et à améliorer. Elles concernent,

- **L'adaptation de l'algorithme de résolution à des équations paraboliques ayant des conditions aux bords autres que celles du type Dirichlet** : la formulation dans les domaines fictifs proposée est valide uniquement pour des conditions aux bords du type Dirichlet. L'algorithme construit ne s'adapte pas directement à des problèmes avec des conditions aux bords générales.
- **L'extension de cette approche en dimension plus grande que 2** : aucune extension de notre méthode à des problèmes multi-dimensionnels n'est disponible pour l'instant. En effet, dans le cas tri-dimensionnel, par exemple, la frontière du domaine de résolution est maintenant une surface et la construction de l'algorithme de résolution nécessite alors la définition d'une analyse multirésolution associée à cette surface. On est donc ramené à la construction d'analyses multirésolutions sur des domaines bi-dimensionnels qui peuvent être à géométrie complexe.

Plusieurs développements sont actuellement en cours, ils sont consacrés à,

- **La construction d’opérateurs de prolongement régulier** sur  $\Omega \setminus \bar{\omega}$ . Ces opérateurs sont nécessaires pour prolonger la condition initiale et peuvent être très utiles dans le cas de problèmes couplés à frontière mobile. Plusieurs méthodes de construction de prolongement régulier sont envisagées : une première consiste à adapter aux analyses multirésolutions classiques associées aux ondelettes, l’approche développée par M. Elghaoui et R. Pasquetti dans [33] pour les approximations spectrales. L’intérêt de cette adaptation réside bien sur dans la localisation des ondelettes en variable d’espace. Une deuxième construction, en cours d’étude, utilise le lien entre les ondelettes à support compact sur l’intervalle et les ondelettes à support compact sur la droite. En dimension 1, il permet de prolonger de façon continue tout élément de  $H^1(I)$  ( $I$  désigne ici un intervalle de  $\mathbb{R}$ ) en un élément de  $H^1(\mathbb{R})$ . Plusieurs difficultés sont à surmonter pour obtenir un prolongement efficace de  $H^1(\omega)$  dans  $H^1(\Omega)$ .
- **La construction d’une méthode ondelettes/domaines fictifs pour des problèmes paraboliques avec des conditions du type Neumann sur la frontière** : une formulation d’un problème elliptique avec des conditions aux bords du type Neumann a déjà été introduite dans [40]. Dans le cas des domaines fictifs avec multiplicateurs de surface, elle est basée sur la formulation faible du problème dans l’espace  $H(\text{div}, \omega) = \{Q / \text{div } Q \in L^2(\Omega)\}$ . Son approximation par les ondelettes suppose donc l’utilisation de bases d’ondelettes de  $H(\text{div}, \omega)$  dont une construction possible est décrite dans [64].
- **La généralisation à des équations paraboliques à coefficients non constants ou à des équations non linéaires** afin de comparer cette approche, en particulier, avec les méthodes de pénalisation ([3], [59]) qui sont très utilisées en mécanique des fluides numériques.

Afin de contourner les limitations des méthodes ondelettes classiques pour la compression d’image, une nouvelle méthode numérique qui intègre certaines informations sur la géométrie de l’image a été introduite. Elle utilise le formalisme de Harten ([37]) et est basée sur la construction d’un nouveau type d’ondelettes monodimensionnelles. Ce sont des ondelettes qui ont perdu leur propriété d’invariance par translation puisqu’elles dépendent d’une famille de points de segmentation définie sur la ligne et d’une règle de construction. En choisissant convenablement la famille de points de segmentation, on peut alors construire des ondelettes adaptées au signal à traiter. La généralisation de cette approche au cas bi-dimensionnel a ensuite été

présentée. Puisque cette construction suppose la connaissance des contours de l'image, la transformation multiéchelle bi-dimensionnelle proposée est composée de deux étapes : une étape de détection des contours opérant sur l'image originale et conduisant à une carte des contours puis une étape de décomposition utilisant une prédiction inter-échelle dépendant de la carte et de son orientation.

Les avantages de cette méthode pour la compression sont les suivants,

- La transformation multiéchelle construite **prend en compte une partie de l'information sur la géométrie de l'image** . Elle conduit donc à une représentation plus creuse de l'image que celle obtenue avec des ondelettes classiques, à condition que la détection des contours soit efficace.
- En mettant de côté le problème de la détection, la prédiction dépendant de la carte définit un opérateur linéaire et donc **stable** sur un nombre fini d'échelles. La transformation multiéchelle est alors également stable face à des perturbations introduites par le seuillage ou la quantification.
- Le mécanisme de détection de contours proposé permet la construction d'une carte où les **"véritables" contours sont bien localisés** et où la plupart des **détections non souhaitables dues au bruit et à la texture sont éliminées** .

Il produit une carte qui est une donnée supplémentaire à coder mais la représentation des contours à l'aide de chaînes et l'utilisation d'un codeur du type PPMZ fournissent **un codage efficace des données de la carte** .

- L'algorithme global de compression construit atteint **des performances intéressantes même dans le cas de la compression d'une image réelle** . En effet, les performances de cet algorithme dépassent celles d'un algorithme invariant par translation, en terme de codage de l'information compressée à qualité égale d'image reconstruite. Si cette amélioration n'est pas très importante quand la qualité de l'image est mesurée en terme de PSNR, elle est beaucoup plus nette quand on s'intéresse à la qualité de reconstruction des contours et donc à la qualité visuelle de l'image.

Plusieurs développements sont actuellement en cours, ils concernent,

- **La construction d'un algorithme de compression qui évite le codage de la carte** : si on s'intéresse à la qualité d'images reconstruites après une très forte compression, la nécessité de stockage de la carte est un handicap pour notre algorithme. Un algorithme de reconstruction de la carte à partir de l'image basse résolution et des

coefficients de détails est en cours d'étude.

- **L'amélioration de l'adaptation de la prédiction à la carte** : les configurations envisagées dans le modèle de prédiction correspondent à une représentation idéale de la carte des contours. Un des travaux en cours est donc d'intégrer dans le mécanisme de prédiction des configurations supplémentaires qui permettront de mieux traiter des contours d'images réelles.
- **L'amélioration du codage des données** : nous testons actuellement un codeur de l'image basse resolution et des coefficients de détail mieux adapté à la structure des données. Plus précisément, comme dans [49], le codeur EBCOT qui exploite la dépendance inter-échelle des coefficients de détail est utilisé, combiné au codeur PPMZ pour la carte.
- **L'analyse théorique de la transformation bi-dimensionnelle : l'existence** d'ondelettes bi-dimensionnelles dépendant de contours plus complexes qu'une ligne verticale ou horizontale croisant toute l'image (cas du produit tensoriel) reste à prouver.



# Chapitre A

## Annexes

### A.1 Filtres et symboles d'une analyse multirésolution orthonormale 1-périodique de $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$

Pour tout  $j$ ,  $[V_{j-1}] \subset [V_j]$ , si  $[h^j] = \{[h_k^j], 0 \leq k \leq 2^j - 1\}$ , alors,

$$[\phi_{j-1,0}](\cdot) = \sum_{k=0}^{2^j-1} [h_k^j][\phi_{j,k}](\cdot). \quad (\text{A.1})$$

La suite  $[h_k^j]$ ,  $0 \leq k \leq 2^j - 1$  est construite à partir de la suite  $h_k^j$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , de la façon suivante,

$$[h_k^j] = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{k-2^j l}. \quad (\text{A.2})$$

De la même façon,

$$[\psi_{j-1,0}](\cdot) = \sum_{k=0}^{2^j-1} [g_k^j][\psi_{j,k}](\cdot), \quad (\text{A.3})$$

avec  $[g_k^j] = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{k-2^j l}$ .

On définit aussi un symbole  $[m_0^j]$ , à l'échelle  $j$ , associé au filtre  $\{[h_k^j]\}_{0 \leq k \leq 2^j-1}$  par,

$$[m_0^j](\omega) = \sum_{k=0}^{2^j-1} [h_k^j] e^{-2i\pi \frac{k\omega}{2^j}}, \quad (\text{A.4})$$

qui s'exprime en fonction du symbole de l'analyse non périodique,

$$[m_0^j](\omega) = \sqrt{2} m_0\left(\frac{2\pi\omega}{2^j}\right). \quad (\text{A.5})$$

On peut définir identiquement le symbole  $[m_1^j]$ , à l'échelle  $j$ , associé au filtre  $\{[g_k^j]\}_{0 \leq k \leq 2^j-1}$ .

Enfin, comme dans le cas non périodique, deux algorithmes multiéchelles peuvent être définis et s'écrivent,

$$c_{j-1,k}(f) = \sum_{l=0}^{2^j-1} [h_{l-2k}^j] c_{j,l}(f) \quad d_{j-1,k}(f) = \sum_{l=0}^{2^j-1} [g_{l-2k}^j] c_{j,l}(f), \quad (\text{A.6})$$

$$\text{et } c_{j,k}(f) = \sum_{l=0}^{2^{j-1}-1} [h_{k-2l}^{j-1}] c_{j-1,l}(f) + \sum_{l=0}^{2^{j-1}-1} [g_{k-2l}^{j-1}] d_{j-1,l}(f). \quad (\text{A.7})$$

## A.2 Construction des analyses multirésolutions de $L^2([0, 1])$ , estimation des coefficients d'échelle

### A.2.1 Construction des analyses

Dans le cas d'une analyse multirésolution à support compact d'ordre  $d$ , admettant  $\phi$  et  $\psi$  comme fonction d'échelle et ondelettes, A. Cohen *et al* introduisent trois sous-espaces ,

$$V_j^{E,0} = \text{vect}\{\phi_{j,k}^{E,0}, k = 0, \dots, d-1\}, \quad (\text{A.8})$$

$$V_j^C = \text{vect}\{\phi_{j,k}, k = d, \dots, 2^j - d - 1\}, \quad (\text{A.9})$$

$$V_j^{E,1} = \text{vect}\{\phi_{j,k}^{E,1}, k = 2^j - d, \dots, 2^j - 1\}, \quad (\text{A.10})$$

où  $\phi_{j,k}^{E,0}$  et  $\phi_{j,k}^{E,1}$  sont construits à partir des translatées dilatées de la fonction  $\phi$  restreintes à  $[0, 1]$ . Par exemple,

$$\phi_{j,k}^{E,0} = 2^{j/2} \sum_{n=k}^{2d-2} C_n^k \phi(2^j x + n - d + 1) \chi_{[0,1]}, \quad (\text{A.11})$$

$$\text{avec } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

L'espace  $V_j^{[0,1]}$  d'une analyse multirésolution de  $L^2([0, 1])$  est défini par

$$V_j^{[0,1]} = V_j^{E,0} \cup V_j^C \cup V_j^{E,1}, \quad (\text{A.12})$$

et après orthonormalisation au sens de Gramm-Schmidt, on obtient une famille  $\{\phi_{j,k}^{[0,1]}\}_{k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}}$  de fonctions d'échelle associées. Par exemple, pour  $k = 0, \dots, d - 1$ ,  $\phi_{j,k}^{[0,1]} = \phi_{j,k}^{\perp E,0}$  avec  $\phi_{j,k}^{\perp E,0}$  connue par la relation d'échelle,

$$\phi_{j,k}^{\perp E,0} = \sum_{n=0}^{d-1} h_{k,n}^0 \phi_{j+1,n}^{\perp E,0} + \sum_{n=d}^{d+2k} h_{k,n}^0 \phi_{j+1,n}, \quad (\text{A.13})$$

où le calcul des coefficients  $\{h_{k,n}^0\}_n$  est fait dans [9].

De la même façon, les espaces de détail sont construits en conservant  $2^j - 2d$  fonctions  $\{\psi_{j,k}, k = d, \dots, 2^j - d - 1\}$  auquel on ajoute  $d$  fonctions à chaque bord obtenues à partir des fonctions d'échelle du bord. On note  $\psi_{j,k}^{[0,1]}$  l'ondelette correspondante. Par exemple, sur le bord 0, après orthonormalisation,  $\psi_{j,k}^{[0,1]} = \psi_{j,k}^{\perp E,0}$  avec  $\psi_{j,k}^{\perp E,0}$  connue par la relation d'échelle,

$$\psi_{j,k}^{\perp E,0} = \sum_{n=0}^{d-1} g_{k,n}^0 \phi_{j+1,n}^{\perp E,0} + \sum_{n=d}^{d+2k} g_{k,n}^0 \phi_{j+1,n}, \quad (\text{A.14})$$

où le calcul des coefficients  $\{g_{k,n}^0\}_n$  est fait dans [9].

## A.2.2 Estimation des coefficients d'échelle

Cette description est empruntée à ([15]).

Puisque l'analyse multirésolution est d'ordre  $d$ , on commence par approcher chaque coefficient d'échelle quand  $j = 0$  par une formule de quadrature à  $d$  points,

$$\forall k = 0, \dots, d - 1, \int_{[0,1]} f \phi_{0,k}^{\perp E,0} = \sum_{i=0}^{d-1} \omega_{i,k}^{E,0} f(a_{i,k}^{E,0}), \quad (\text{A.15})$$

$$\forall k = d, \dots, 2^j - d - 1, \int_{[0,1]} f \phi_{0,k} = \sum_{i=0}^{d-1} \omega_{i,k} f(a_{i,k}), \quad (\text{A.16})$$

$$\forall k = 2^j - d, \dots, 2^j - 1, \int_{[0,1]} f \phi_{0,k}^{\perp E,1} = \sum_{i=0}^{d-1} \omega_{i,k}^{E,1} f(a_{i,k}^{E,1}), \quad (\text{A.17})$$

où les familles  $\{\omega_{i,k}^{E,0}\}_i$ ,  $\{\omega_{i,k}\}_i$  et  $\{\omega_{i,k}^{E,1}\}_i$  sont les poids des formules de quadrature et  $\{a_{i,k}^{E,0}\}_i$ ,  $\{a_{i,k}\}_i$  et  $\{a_{i,k}^{E,1}\}_i$  désignent trois familles de points

qui, en pratique, sont composées des  $d$  premiers entiers contenus dans le support de  $\phi_{0,k}^{\perp E,0}$ ,  $\phi_{0,k}$  et  $\phi_{0,k}^{\perp E,1}$ . Les poids des formules de quadrature restant inchangés par dilatation de  $2^j$ , on déduit facilement des formules de quadrature précédentes, une estimation pour les coefficients d'échelle quand  $j \neq 0$ . Les trois familles de points où on évalue les formules de quadrature sont alors composées des  $d$  premiers points dyadiques contenus dans le support de  $\phi_{j,k}^{\perp E,0}$ ,  $\phi_{j,k}$  et  $\phi_{j,k}^{\perp E,1}$ .

La détermination des poids se fait en remarquant qu'ils sont solutions des systèmes linéaires suivants,

$$\forall k = 0, \dots, d-1, \int_{[0,1]} x^l \phi_{0,k}^{\perp E,0} = \sum_{i=0}^{d-1} \omega_{i,k}^{E,0} (a_{i,k}^{E,0})^l, \quad l = 0, \dots, d-1, \quad (\text{A.18})$$

$$\forall k = d, \dots, 2^j - d - 1, \int_{[0,1]} x^l \phi_{0,k} = \sum_{i=0}^{d-1} \omega_{i,k} (a_{i,k})^l, \quad l = 0, \dots, d-1, \quad (\text{A.19})$$

$$\forall k = 2^j - d, \dots, 2^j - 1, \int_{[0,1]} x^l \phi_{0,k}^{\perp E,1} = \sum_{i=0}^{d-1} \omega_{i,k}^{E,1} (a_{i,k}^{E,1})^l, \quad l = 0, \dots, d-1, \quad (\text{A.20})$$

On est donc amené à estimer les  $d$  premiers moments des fonctions d'échelles. Dans le cas des fonctions du centre, i.e.  $\phi$ , l'estimation utilise la relation classique donnée dans [21]. Pour évaluer les moments des fonctions du bord 0 par exemple, on commence par multiplier l'expression de  $\phi^{\perp E,0}$  par  $x^l$ , ce qui conduit à un système linéaire dont l'inconnue est  $\int_{[0,1]} x^l \phi_{0,k}^{\perp E,0}$ .

### A.3 Résolution de l'équation d'évolution de la frontière pour un problème avec frontière mobile

Soit l'équation d'évolution suivante,

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + V \cdot \nabla \mathcal{D} = 0. \quad (\text{A.21})$$

Introduisant  $\mathcal{D}_{k_1, k_2}^{n_{fr}}$ , l'approximation de  $\mathcal{D}(n_{fr}\delta t_{fr}, k_1 2^{-j}, k_2 2^{-j})$  et notant  $V_x^{n_{fr}}$  (resp.  $V_y^{n_{fr}}$ ), la composante selon  $x$  de la vitesse au temps  $n_{fr}\delta t_{fr}$  (resp. la composante selon  $y$  de la vitesse au temps  $n_{fr}\delta t_{fr}$ ), la discrétisation de l'équation (A.21) par un schéma TVD à limiteur de flux s'écrit ([46]),

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{k_1, k_2}^{n_{fr}+1} = \mathcal{D}_{k_1, k_2}^{n_{fr}} & - V_x^{n_{fr}} \frac{\delta t_{fr}}{\delta x} (A_x^+ \mathcal{D}_{k_1-1/2, k_2}^{n_{fr}} + A_x^- \mathcal{D}_{k_1+1/2, k_2}^{n_{fr}}) \\ & - \frac{\delta t_{fr}}{\delta x} (F_{k_1+1/2, k_2}^{n_{fr}} - F_{k_1-1/2, k_2}^{n_{fr}}) \\ & - V_y^{n_{fr}} \frac{\delta t_{fr}}{\delta y} (A_y^+ \mathcal{D}_{k_1, k_2-1/2}^{n_{fr}} + A_y^- \mathcal{D}_{k_1, k_2+1/2}^{n_{fr}}) \\ & - \frac{\delta t_{fr}}{\delta y} (F_{k_1, k_2+1/2}^{n_{fr}} - F_{k_1, k_2-1/2}^{n_{fr}}), \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

où

$$A_x^+ \mathcal{D}_{k_1-1/2, k_2}^{n_{fr}} = \begin{cases} \mathcal{D}_{k_1, k_2}^{n_{fr}} - \mathcal{D}_{k_1-1, k_2}^{n_{fr}}, & \text{si } V_x^{n_{fr}} > 0, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

$$A_x^- \mathcal{D}_{k_1+1/2, k_2}^{n_{fr}} = \begin{cases} \mathcal{D}_{k_1+1, k_2}^{n_{fr}} - \mathcal{D}_{k_1, k_2}^{n_{fr}}, & \text{si } V_x^{n_{fr}} < 0, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

et

$$A_y^+ \mathcal{D}_{k_1, k_2-1/2}^{n_{fr}} = \begin{cases} \mathcal{D}_{k_1, k_2}^{n_{fr}} - \mathcal{D}_{k_1, k_2-1}^{n_{fr}}, & \text{si } V_y^{n_{fr}} > 0, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

$$A_y^- \mathcal{D}_{k_1, k_2+1/2}^{n_{fr}} = \begin{cases} \mathcal{D}_{k_1, k_2+1}^{n_{fr}} - \mathcal{D}_{k_1, k_2}^{n_{fr}}, & \text{si } V_y^{n_{fr}} < 0. \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

Les flux  $F_{k_1-1/2, k_2}^{n_{fr}}$  et  $F_{k_1, k_2-1/2}^{n_{fr}}$  s'obtiennent par,

$$F_{k_1-1/2, k_2}^{n_{fr}} = \frac{1}{2} |V_x^{n_{fr}}| \left(1 - \frac{\delta t_{fr}}{\delta x} |V_x^{n_{fr}}|\right) W_{k_1-1/2, k_2}^{n_{fr}}, \quad (\text{A.27})$$

$$F_{k_1, k_2-1/2}^{n_{fr}} = \frac{1}{2} |V_y^{n_{fr}}| \left(1 - \frac{\delta t_{fr}}{\delta y} |V_y^{n_{fr}}|\right) W_{k_1, k_2-1/2}^{n_{fr}}. \quad (\text{A.28})$$

De façon générale,  $W_{k_1-1/2, k_2}^{n_{fr}}$  et  $W_{k_1, k_2-1/2}^{n_{fr}}$  ont la forme suivante,

$$W_{k_1-1/2, k_2}^{n_{fr}} = g(q_{k_1-1/2, k_2}^{n_{fr}})(\mathcal{D}_{k_1, k_2}^{n_{fr}} - \mathcal{D}_{k_1-1, k_2}^{n_{fr}}) \quad (\text{A.29})$$

$$W_{k_1, k_2-1/2}^{n_{fr}} = g(q_{k_1, k_2-1/2}^{n_{fr}})(\mathcal{D}_{k_1, k_2}^{n_{fr}} - \mathcal{D}_{k_1, k_2-1}^{n_{fr}}) \quad (\text{A.30})$$

avec

$$q_{k_1-1/2, k_2}^{n_{fr}} = \begin{cases} \frac{\mathcal{D}_{k_1-1, k_2}^{n_{fr}} - \mathcal{D}_{k_1-2, k_2}^{n_{fr}}}{\mathcal{D}_{k_1, k_2}^{n_{fr}} - \mathcal{D}_{k_1-1, k_2}^{n_{fr}}}, & \text{si } V_x^{n_{fr}} > 0, \\ \frac{\mathcal{D}_{k_1+1, k_2}^{n_{fr}} - \mathcal{D}_{k_1, k_2}^{n_{fr}}}{\mathcal{D}_{k_1, k_2}^{n_{fr}} - \mathcal{D}_{k_1-1, k_2}^{n_{fr}}}, & \text{si } V_x^{n_{fr}} < 0, \end{cases} \quad (\text{A.31})$$

$$q_{k_1, k_2-1/2}^{n_{fr}} = \begin{cases} \frac{\mathcal{D}_{k_1, k_2-1}^{n_{fr}} - \mathcal{D}_{k_1, k_2-2}^{n_{fr}}}{\mathcal{D}_{k_1, k_2}^{n_{fr}} - \mathcal{D}_{k_1, k_2-1}^{n_{fr}}}, & \text{si } V_y^{n_{fr}} > 0, \\ \frac{\mathcal{D}_{k_1, k_2+1}^{n_{fr}} - \mathcal{D}_{k_1, k_2}^{n_{fr}}}{\mathcal{D}_{k_1, k_2}^{n_{fr}} - \mathcal{D}_{k_1, k_2-1}^{n_{fr}}}, & \text{si } V_y^{n_{fr}} < 0, \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

et

$g$ , la fonction,

$$g(q) = \begin{cases} 1 & \text{si } q \geq 1, \\ q & \text{si } 0 < q < 1 \\ 0 & \text{si } q \leq 0 \end{cases} \quad (\text{A.33})$$

# Bibliographie

- [1] S. Amat, F. Arandiga, A. Cohen, and R. Donat. Tensor product multi-resolution analysis with error control for compact image representation. *Signal Processing*, 4 :587–608, 2002.
- [2] S. Amat, F. Arandiga, A. Cohen, R. Donat, G. Garcia, and M. von Oehsen. Data compression with ENO schemes : a case study. *Appl. Comp. Harm. Anal.*, 11 :273–288, 2001.
- [3] Ph. Angot, Ch-H. Bruneau, and P. Fabrie. A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flow. *Numer. Math.*, 81(4) :497–520, 1999.
- [4] F. Arandiga, R. Donat, and A. Harten. Multiresolution based on weighted averages of the hat function I : linear reconstruction techniques. *SIAM J. Sci. Comput.*, 36(1) :160–203, 1999.
- [5] F. Arandiga, R. Donat, and A. Harten. Multiresolution based on weighted averages of the hat function II : non-linear reconstruction techniques. *SIAM J. Sci. Comput.*, 20(3) :1053–1093, 1999.
- [6] E. Arquis and J.P Caltagirone. Sur les conditions hydrodynamiques au voisinage d’une interface milieu fluide-milieu poreux : application à la convection naturelle. *C. R. Acad. Sci. Paris II*, 299 :1–4, 1984.
- [7] C. Bernardi, Y. Maday, and A.T. Patera. Domain decomposition by the mortar element method. *Asymp. and Numer. Meth. for Part. Diff. Equa. with Critic. Param.*, H.G. Kaper and M. Garbey eds., N.A.T.O. ASI Series C, 384 :269–286, 1993.
- [8] S. Bertoluzza and V. Perrier. The mortar method in the wavelet context. *A paraître dans Math. Model. and Numer. Anal.*, 1999.
- [9] G. Beylkin. On the fast algorithms for multiplication of functions in the wavelet basis. In S. Roques Y. Meyer, editor, *Wavelet analysis and applications*, pages 53–61. Frontières edt., 1992.
- [10] C. Bloom. Solving the problems of context modeling. <http://www.cbloom.com/papers/>, 1998.
- [11] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer-Verlag, 1991.

- [12] E.J Candès and D.L. Donoho. Curvelets - a surprisingly effective non-adaptive representation for objects with edges. *Curves and Surfaces, L. L. Schumaker et al. (eds), Vanderbilt University Press, Nashville, TN, 1999.*
- [13] E.J Candès and D.L. Donoho. Ridgelets : a key to higher-dimensional intermittency? *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.*, 9 :2495–2509, 1999.
- [14] G. Chiavassa. *Algorithmes adaptatifs en ondelettes pour la résolution d'équations aux dérivées partielles.* Thèse, Université d'Aix-Marseille II, Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre (Marseille), June 1997.
- [15] G. Chiavassa and J. Liandrat. On the effective construction of compactly supported wavelets satisfying homogeneous boundary conditions on the interval. *Appl. Comp. Harm. Anal.*, 4 :62–73, 1997.
- [16] G. Chiavassa and J. Liandrat. A fully adaptive wavelet algorithm for parabolic partial differential equations. *Appl. Numer. math.*, 36 :333–358, 2001.
- [17] C. Chui. *An Introduction to Wavelets.* Academic Press, 1992.
- [18] C. Chui, W. He, and J. Stockler. Nonstationary tight wavelet frames on bounded intervals. *A paraître dans Appl. Comp. Anal.*, 2004.
- [19] A. Cohen. *Wavelets Methods in Numerical Analysis.* in Handbook of Numerical Analysis, Editors P.G Ciarlet and J.L Lions, Elsevier Science Publishers, North Holland, 2000.
- [20] A. Cohen, I. Daubechies, and J.-C. Feauveau. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.*, 45(5) :485–560, Jun. 1992.
- [21] A. Cohen, I. Daubechies, and P. Vial. Wavelets on the interval and fast wavelet transforms. *Appl. Comp. Harm. Anal.*, 1 :54–81, 1994.
- [22] A. Cohen, N. Dyn, and B. Matei. Quasilinear subdivision schemes with applications to ENO interpolation. *A paraître dans Appl. Comp. Harm. Anal.*, 15 :89–116, 2003.
- [23] A. Cohen and B. Matei. Compact representations of images by edge adapted multiscale transforms. *IEEE ICIP conference, Tessaloniki, 2001.*
- [24] W. Dahmen and A. Kunoth. Appending boundary conditions by lagrange multipliers : Analysis of the LBB condition. *Numer. Math.*, 88 :9–42, 2001.
- [25] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.*, 41 :909–996, 1988.
- [26] I. Daubechies. *Ten lectures on wavelets.* SIAM, Philadelphia, 1992.

- [27] I. Daubechies, I. Guskov, and W. Sweldens. Commutation for irregular subdivision. *Constr. Approx.*, **15(3)** :381–426, 2001.
- [28] I. Daubechies, O. Runborg, and W. Sweldens. Normal multiresolution approximation of curves. *A paraître dans Const. Approx.*, 2004.
- [29] R. Dautray and J.L Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, vol. 3*. Masson, 1984.
- [30] G. Deslauriers and S. Dubuc. Interpolation dyadique. In *Fractals, dimensions non entières et applications*, pages 44–45. Masson, Paris, 1987.
- [31] D.L. Donoho. Interpolating wavelet transforms. *Technical report, Department of statistics, Stanford University*, 1992.
- [32] N. Dyn. Subdivision schemes in computer-aided geometric design. In W.A Light, editor, *Advances in Numerical analysis II, Wavelets, Subdivision algorithms and Radial Basis functions*. Clarendon Press, Oxford, 1992.
- [33] M. Elghaoui and R. Pasquetti. A spectral embedding method applied to the advection-diffusion equation. *J. of Comp. Phys.*, 125 :464–476, 1996.
- [34] G. Farin. *Curves and surfaces for computer aided geometric design : a practical guide*. 4ème édition, London Academic Press, 1997.
- [35] V. Girault and R. Glowinski. Error analysis of a fictitious domain method applied to a dirichlet problem. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 12, 1995.
- [36] G.Strang. Wavelet and dilatation equations : a brief introduction. *SIAM Review*, 31 :614–627, 1989.
- [37] A. Harten. Discrete multiresolution analysis and generalized wavelets. *Appl. Num. Math.*, 12(3) :153–193, 1993.
- [38] A. Harten, B. Engquist, S. Osher, and S.R. Chakravarthy. Some results on uniformly high-order accurate essentially non oscillatory schemes. *Appl.Num.Math.*, 2 :347–377, 1987.
- [39] A. Harten, B. Engquist, S. Osher, and S.R. Chakravarthy. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes III. *J. of Comp. Phys.*, 71 :231–303, 1987.
- [40] J. Haslinger, J.F. Maitre, and L. Tomas. Fictitious domain methods with distributed lagrange multipliers. part 1 : application to elliptic elliptic state problems. *Math. Models. Meth. Appl. Sci.*, 11 :521–547, 2001.
- [41] S. Jaffard. Wavelet methods for fast resolution of elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29(4) :965–986, 1992.
- [42] A. Kunoth. *Multilevel preconditionning*. Thèse, Freie Universitat Berlin, January 1994.

- [43] A. Kunoht. Wavelet techniques for the fictitious domain-lagrange multiplier approach. *Numer. Algor.*, 27 :297–316, 2001.
- [44] P.G. Lemarié. Ondelettes à localisation exponentielles. *J. de Math. Pures et Appl.*, , 1989.
- [45] P.G. Lemarié-Rieusset. Analyses multirésolutions nonorthogonales, commutation entre projecteurs et dérivation et ondelettes à divergence nulle. *Rev. Mat. Iberoamer.*, 8 :221–236, 1992.
- [46] R. J. Leveque. *Finite volume methods for hyperbolic problems*. Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, 2002.
- [47] S. Mallat. Multiresolution approximation and wavelets. *Trans Amer. Math. Soc.*, 315 :69–88, 1989.
- [48] S. Mallat. *A Wavelet Tour of signal processing*. Academic Press, USA, 1998.
- [49] B. Matei. *Méthodes multiéchelles non-linéaires et applications au traitement d'images*. Thèse, Université Paris X, 2003.
- [50] Y. Meyer. *Ondelettes et Opérateurs I : Ondelettes*. Hermann, Paris, 1990.
- [51] Y. Meyer. *Ondelettes et Opérateurs II : Opérateurs de Calderón-Zygmund*. Hermann, Paris, 1990.
- [52] J. Necas. Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique, voisine de la variationnelle. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 16 :305–326, 1962.
- [53] S. Osher and J.A Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *J. of Comp. Phys.*, 79 :12–49, 1988.
- [54] E. Le Pennec and S. Mallat. Sparse geometric image representations with bandelets. *soumis dans IEEE Trans. on Image Processing*, 2003.
- [55] V. Perrier and C. Basdevant. La décomposition en ondelettes périodiques, un outil pour l'analyse de champs inhomogènes. théorie et algorithmes. *la Recherche Aérospatiale*, 3 :57–67, 1989.
- [56] A. Peyronne. Utilisation de methodes adaptatives pour l'agrandissement d'images. *GrAN Reports– Univ. of Valencia*, 2001.
- [57] Pj. Ponenti. *Algorithmes en Ondelettes pour la Résolution d'Équations aux Dérivées Partielles*. Thèse, Université d'Aix-Marseille II, Centre de Physique Théorique de Marseille, October 1994.
- [58] A. Quarteroni and A. Valli. *Numerical approximation of partial differential equations*. Springer Series in Computational Mathematics, 1997.

- [59] K. Schneider and M. Farge. Adaptive wavelet simulation of a flow around an impulsively started cylinder using penalisation. *Appl. Comp. Harm. Anal.*, 12 :374–380, 2002.
- [60] J. Shapiro. Embedded image coding using zerotrees of wavelet coefficients. *IEEE-Signal Processing*, 12 :3445–3462, 1993.
- [61] W. Sweldens. The lifting scheme : A custom-design construction of biorthogonal wavelets. *Appl. Comp. Harm. Anal.*, 3(2) :186–200, 1996.
- [62] D. Taubman. Embedded block coding with optimized truncation. *Signal Processing : Image Communication*, 17 :Elseviers, 1998.
- [63] L. Tomas. *Optimisation de forme et domaines fictifs : Analyse de nouvelles formulations et aspects algorithmiques*. Thèse, Ecole Centrale de Lyon, Juin, 1997.
- [64] K. Urban. Wavelet bases in  $h(\text{div})$  and  $h(\text{curl})$ . *Math. Comp.*, 70 :739–766, 2001.



**Résumé** : Ces travaux sont dédiés au développement de méthodes numériques à base d'ondelettes pour la résolution d'équations aux dérivées partielles et pour le traitement d'images.

La première partie est consacrée à la construction d'une nouvelle méthode couplant ondelettes et domaines fictifs pour la résolution d'équations paraboliques 2D définies sur un domaine quelconque. Une analyse complète de la méthode est fournie; elle montre l'efficacité de cette approche en terme de qualité des résultats (borne d'erreur, raffinement local), d'efficacité numérique (conditionnement, préconditionnement simple) et de flexibilité de l'implémentation (implémentation rapide et efficace). Deux applications numériques à la résolution de l'équation de la chaleur définie sur des domaines non polygonaux ou à frontière mobile (problème de Stefan) sont présentées. La seconde partie est consacrée à la construction d'un nouvel algorithme de compression d'images adapté aux contours. On commence par introduire des analyses multi-échelles 1D du type Harten, dépendant d'une famille de points. Ces analyses conduisent à des décompositions multi-échelles efficaces pour la représentation de signaux discontinus. Cette approche est ensuite généralisée au cas bi-dimensionnel et un algorithme de compression multi-directionnel dépendant des contours de l'image est introduit. Il utilise une carte des contours obtenue préalablement. Plusieurs comparaisons avec d'autres approches sont ensuite présentées.

**Mots-clés** : Ondelettes, analyses multirésolutions dépendant de la position, formalisme de Harten, domaines fictifs, équations aux dérivées partielles, compression d'images.

*Multi-resolution analyses and boundary problems : applications to image compression and to the numerical resolution of Partial Differential Equations*

**Abstract** : This work is devoted to the construction of new numerical wavelet-based methods for the resolution of Partial Differential Equations and for image compression.

In the first part, we define and analyse a numerical algorithm that couples wavelet approximations with fictitious domain approach for the approximation of parabolic equations on a general 2D domain. We provide a mathematical analysis that proves the efficiency of this approach in terms of quality of results (error bound, local refinement), numerical efficiency (condition number, simple diagonal preconditioning) and tractability (fast and efficient computation). Two applications to the resolution of the heat equation defined on non-polygonal domains or evolving-in-time domains are presented. The second part deals with the construction of a new compression algorithm adapted to the geometry of the image. We start by introducing 1D multi-scale analyses of Harten's type depending on a family of points. These analyses lead to efficient multi-scale decompositions for discontinuous signals. This approach is then generalized to the 2D case and a compression algorithm depending on the edges of the image is introduced. It uses a map of edges previously obtained. Several comparisons between this new approach and other approaches are then presented.

**Discipline – Spécialité doctorale** : Mathématiques Appliquées.

**Adresse** : Laboratoire d'Analyse, de Topologie et de Probabilités, CMI, Technopôle de Château-Gombert, 39 rue Joliot Curie, 13453 Marseille, cedex 13.