Calcul stochastique généralisé et applications au mouvement brownien fractionnaire ; Estimation non-paramétrique de la volatilité et test d'adéquation

Ivan Nourdin

UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale IAEM+Lorraine
Université Henri Poincaré - Nancy I
D.F.D. Mathématiques

Thèse

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy-I

en Mathématiques

par

Ivan NOURDIN

Calcul stochastique généralisé et applications au mouvement brownien fractionnaire;

Estimation non-paramétrique de la volatilité et test d'adéquation

Soutenue publiquement le 30 juin 2004

Membres du jury :

Denis Feyel	Examinateur	Professeur, Évry
Bernard Roynette	Examinateur	Professeur, Nancy I
Francesco Russo	Examinateur	Professeur, Paris XIII
Pierre Vallois	Directeur de Thèse	Professeur, Nancy I

Rapporteurs :

Peter Imkeller	Professeur, Berlin
Marc Yor	Professeur, Paris VI

Institut Élie Cartan Nancy, Laboratoire de Mathématiques, B.P. 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex

Table des matières

Remerciements

Il m'est agréable, avant de commencer la partie purement mathématique de cette thèse, d'adresser quelques remerciements. Je demande par avance à celles ou ceux que je vais oublier de bien vouloir me le pardonner.

Mon premier ira à Pierre Vallois, à qui j'ai demandé il y a trois ans d'encadrer ma thèse. Il a accepté de bon coeur et déjà pour ça je l'en remercie. Il m'a proposé un sujet riche et fertile et est à l'origine d'un certain nombre d'idées contenues dans cette thèse. De plus, c'est entre autres lui, grâce à ses qualités pédagogiques et à la clarté de ses différents cours, qui m'a donné l'envie de me lancer dans les probabilités et d'en faire mon métier.

Peter Imkeller et Marc Yor ont accepté la lourde tâche d'être rapporteurs de cette thèse. L'un comme l'autre sont de grandes figures dans le monde probabiliste et je suis conscient de l'honneur qu'ils me font en me permettant d'associer leurs noms à ma modeste contribution scientifique. En un seul mot: Merci! (ou plutôt en deux pour Peter: Danke Schön!)

Mon sujet de thèse m'a naturellement amené à faire la connaissance de Francesco Russo. J'ai trouvé notre premier contact, aux journées de probabilités à La Rochelle, très agréable. Quelques entretiens téléphoniques mis à part, c'est à Marrakech que nous nous sommes retrouvés pour la seconde fois pendant le mois de décembre 2003. J'ai eu la bonne idée de lui proposer de courir avec moi, en me disant que je n'allais pas aller trop vite pour ne pas lui en mettre plein la vue, vu qu'il participera sans doute à mon jury... Sauf qu'à mon grand désarroi, je me suis retrouvé face à un champion de cross-country (n'aurait-il pas quelques gênes kényans?) et c'est finalement moi qui ai eu beaucoup de mal à le suivre! Voilà donc un grand probabiliste, un très bon sportif et de surcroît une personne avec qui on passe à coup sûr un bon moment. Bref, quelqu'un qui a toute mon admiration et mon estime. J'espère que nous serons à nouveau amenés à travailler ensembles.

Je suis très fier que Bernard Roynette ait accepté de faire partie de mon jury. Car même si je n'ai pas (encore?) travaillé avec lui, le nombre impressionnant d'idées qu'il développe et de sujets qu'il maîtrise font qu'il m'a été très précieux pendant ma thèse. Je le remercie entre autres pour les questions, toujours pertinentes et constructives, qu'il m'a posées à l'issue de mes différents exposés.

J'aimerais aussi adresser un petit mot à Denis Feyel, le dernier membre de mon jury. Je suis admiratif devant le nombre d'idées nouvelles qu'il a proposées avec son co-auteur, dans l'étude de diverses questions relatives au mouvement brownien fractionnaire. Je n'oublie pas non plus que c'est grâce à lui que je commence à comprendre la théorie des rough paths, la difficulté des traités antérieurs sur le sujet ayant eu raison de ma patience et de

mon envie d'aller plus loin.

En général, au début de sa thèse, on est un peu perdu. Pour ma part, je crois avoir eu beaucoup de chance en travaillant d'emblée avec Mihai Gradinaru. Car trouver une personne qui, malgré son emploi du temps chargé, se propose de vous montrer l'attirail du chercheur et comment on s'en sert, tout le monde n'a pas ce privilège. Bien entendu, son rôle ne s'est pas arrêté là. Nous avons beaucoup travaillé ensemble et c'est d'ailleurs avec lui que j'ai construit une bonne partie du contenu de cette thèse. Nous avons souvent été complémentaires, l'un revenant à la charge quand l'autre se décourageait et inversement. Enfin, en y repensant, je me demande aussi comment j'aurais fait pour apprendre à rédiger mes articles en anglais s'il n'avait pas été là!

Pendant la préparation de cette thèse, j'ai aussi eu l'occasion de monter, avec Marco Dozzi, un groupe de travail sur le mouvement brownien fractionnaire. J'en profite ici pour le remercier de m'avoir associé à ce projet.

Je n'oublie pas non plus Agnès Volpi avec qui j'ai fait fort: nous avons démontré un résultat qui s'est révélé être déjà connu depuis près de cinquante ans (qui dit mieux?)!

Je tiens aussi à remercier Thomas Simon avec qui j'ai eu - et j'ai encore - le plaisir de travailler. J'ai été impressionné par sa vitesse de compréhension et par sa faculté à ne pas s'enliser quand la démonstration que l'on propose semble marcher mais ne mène finalement à rien.

Merci aussi à Samy Tindel avec qui je travaille en ce moment. J'aimais bien l'avoir comme voisin de bureau, mais il a préféré déménager dans celui du partant Rémi Léandre. J'espère pour lui que les fantômes qui hantent l'endroit lui seront profitables!

Enfin, je n'ai pas abordé le cas de mes proches. Quand on dit qu'on est en train de préparer une thèse en mathématiques, cela procure en général chez son interlocuteur un sentiment ambigu. Tout d'abord, je pense ne pas manquer de modestie en disant que souvent ça impressionne. Et puis, immanquablement on a droit à la question “Mais à quoi ça sert la recherche en maths?”. Il y a alors deux stratégies: la première consiste à répondre “à rien pardi!” et à passer à autre chose, la seconde à tenter d'expliquer mais au risque de se gâcher la soirée. J'avoue que je n'ai pas toujours eu le courage d'utiliser la deuxième. Pourtant (enfin, je m'avance peut-être en écrivant ces lignes) ça n'a pas empêché mes amis et mes proches de venir assister à ma soutenance. Ils n'auront rien compris, j'en suis sûr, mais n'est-ce pas un bon moyen de tester les liens du sang ou d'amitiés?

Plus nommément, je voudrais déjà en premier lieu remercier Delphine, qui m'a souvent remonté le moral lors de mes baisses de régime et de motivation récurrentes. On finit ensemble nos études cette année et je la felicite pour sa brillante réussite.

Ensuite, j'adresse un vif remerciement à ma mère, sans qui je ne serais pas là où j'en suis aujourd'hui, à mon père, à ma soeur (et toute sa smala), à mon frère, qui doit être l'un des seuls lycéens à avoir “appris” ce qu'était la formule d'Itô avant de connaître l'intégrale classique de terminale, à mon beau-père et à ma belle-mère. Ils m'ont tous, avec leurs moyens, soutenu et donné la force d'aller toujours plus loin.

Enfin, j'ai une pensée pour Christiane et Gérard, qui ont toujours montré un grand intérêt pour ce que je faisais.

Ouaf!: ça, c'était pour Merise... Elle comprendra!

Chapitre 1

Introduction

1.1 Intégrales d'ordre m et formules d'Itô

Dans cette première partie, nous présentons des résultats nouveaux reliés à la théorie du calcul stochastique généralisé développé par Russo et Vallois à partir de 1993.

Nous commencerons par des rappels puis détaillerons les résultats nouveaux que nous avons obtenus.

1.1.1 Rappels

En 1993, F. Russo et P. Vallois ont jeté les premières bases d'un calcul stochastique, généralisant ceux plus classiques d'Itô et de Stratonovich et dont un des intérêts est qu'il permet de donner un sens à des intégrales contre des processus qui ne sont pas forcément des semimartingales.

Les processus gaussiens fournissent de nombreux exemples de processus qui ne sont pas des semimartingales. Parmi les processus gaussiens, le mouvement brownien fractionnaire est très utilisé, sa fonction de covariance étant particulièrement simple. C'est pourquoi, dans la suite, ce processus sera utilisé pour tester les résultats généraux que nous établirons.

a) Rappels concernant le mouvement brownien fractionnaire

Proposition 1.1.1. *1. Soit $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ un processus gaussien centré, autosimilaire d'indice $H > 0$ (i.e. vérifiant: pour tout $c > 0$, $\{X_{ct}, t \in \mathbb{R}_+\}$ et $\{c^H X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ ont la même loi) et stationnaire (i.e. vérifiant: pour tout $h > 0$, $\{X_{t+h} - X_h, t \in \mathbb{R}_+\}$ et $\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ ont la même loi). Alors, nécessairement $H \in (0,1]$ et la covariance de X est de la forme:*

$$K^H(s,t) := \mathrm{Cov}(X_t,X_s) = \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right)\,;\ s,t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.1}$$

2. Pour tout $H \in (0,1]$, la fonction K^H définie par (1.1) est une fonction symétrique de type positif.

Définition 1.1.2. *Soit $H \in (0,1]$. Un mouvement brownien fractionnaire (mbf en abrégé) d'indice de Hurst H est un processus gaussien continu centré, noté $B^H = \{B_t^H, t \in \mathbb{R}_+\}$, de fonction de covariance K^H définie par (1.1) et normalisé de telle sorte que* $\mathrm{Var}(B_1^H) = 1$.

Remarquons que le mbf d'indice de Hurst $H = 1$ est donné par $B_t^1 = G\,t$ avec G une variable aléatoire normale centrée réduite. C'est pourquoi, quand on étudie le mbf d'indice H, on écarte en général ce cas peu intéressant et on suppose (ce que l'on fera dorénavant) que $H \in (0,1)$. Quand $H = \frac{1}{2}$, un calcul immédiat implique que $B^{\frac{1}{2}}$ n'est rien d'autre que le mouvement brownien standard. Concernant la régularité des trajectoires d'un mbf, on a la:

Proposition 1.1.3. *Soient $H \in (0,1)$ et B^H un mbf d'indice H. On a, pour tous $s,t \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{E}[(B_t^H - B_s^H)^2] = |t-s|^{2H}$. Par conséquent, les trajectoires de B^H sont presque toutes höldériennes d'exposant $H - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.*

La proposition suivante montre que, pour intégrer contre un mbf d'indice $H \in (0,\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2},1)$, on ne peut pas utiliser le cadre classique d'Itô ou de Stratonovich:

Proposition 1.1.4. *Soient $H \in (0,1)$ et B^H un mbf d'indice H. Alors:*

$$B^H \text{ est une semimartingale si et seulement si } H = \frac{1}{2},$$

$$B^H \text{ est un processus de Markov si et seulement si } H = \frac{1}{2}.$$

b) Rappels concernant les résultats de Russo-Vallois

Définition 1.1.5. *Si $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ et $Y = \{Y_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ sont deux processus continus, nous posons, quand la limite existe,*

$$\int_0^{\bullet} Y_s d^- X_s = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{ucp} \int_0^{\bullet} Y_s \frac{X_{s+\varepsilon} - X_s}{\varepsilon} ds \text{ "intégrale forward"},$$

$$\int_0^{\bullet} Y_s d^+ X_s = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{ucp} \int_0^{\bullet} Y_{s+\varepsilon} \frac{X_{s+\varepsilon} - X_s}{\varepsilon} ds \text{ "intégrale backward"},$$

$$\int_0^{\bullet} Y_s d^\circ X_s = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{ucp} \int_0^{\bullet} (Y_{s+\varepsilon} + Y_s) \frac{X_{s+\varepsilon} - X_s}{2\varepsilon} ds \text{ "intégrale symétrique"},$$

$$[X,X] = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{ucp} \int_0^{\bullet} \frac{(X_{s+\varepsilon} - X_s)^2}{\varepsilon} ds \text{ "variation quadratique"}.$$

Dans ces quatre définitions, "ucp" signifie convergence uniforme sur les compacts, en probabilité. Rappelons qu'une famille $(X^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ de processus converge en probabilité vers X quand $\varepsilon \to 0$, uniformément sur les compacts, si:

$$\forall T > 0, \forall \delta > 0 : \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{P}\left(\sup_{t \in [0,T]} |X_t^\varepsilon - X_t| > \delta \right) = 0.$$

Le premier résultat important dans la théorie est que l'intégrale forward (resp. l'intégrale symétrique, la variation quadratique) généralise l'intégrale d'Itô (resp. de Stratonovich, le crochet) quand Y est adapté et X est une semimartingale (resp. X et Y sont deux semimartingales, X est une semimartingale): voir [41] pour plus de détails.

Ces intégrales sont le bon outil car, comme dans le cadre classique, elles permettent d'écrire une formule de type Itô:

Proposition 1.1.6. *Soit $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ un processus continu. L'intégrale forward $\int_0^\bullet f'(X_s)d^-X_s$ existe pour toute fonction $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ si et seulement si X admet une variation quadratique. Dans ce cas, on a:*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)d^-X_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d[X,X]_s, t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.2}$$

Cette proposition met en évidence un phénomène que nous allons retrouver tout au long de notre étude: l'existence des intégrales $\int_0^\bullet f'(X_s)d^\pm X_s$ ou $\int_0^\bullet f'(X_s)d^\circ X_s$ est équivalente à l'obtention d'une formule d'Itô.

Lorsque $X = B^H$, nous avons:

Proposition 1.1.7. *Soit B^H un mbf d'indice $H \in (0,1)$. Alors B^H admet une variation quadratique si et seulement si $H \geq \frac{1}{2}$. Dans ce cas, elle vaut l'identité si $H = \frac{1}{2}$ et est identiquement nulle si $H > \frac{1}{2}$.*

On en déduit que l'intégrale forward $\int_0^t f'(B_s^H)d^-B_s^H$ existe pour toute fonction $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ si et seulement si $H \geq \frac{1}{2}$, et que, dans ce cas:

$$f(B_t^H) = f(B_0^H) + \int_0^t f'(B_s^H)d^-B_s^H + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s^H)d[B^H,B^H]_s, t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.3}$$

D'une manière analogue, on peut démontrer que si $H \geq \frac{1}{2}$, l'intégrale symétrique $\int_0^t f'(B_s^H)d^\circ B_s^H$ existe pour toute fonction $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ (la réciproque n'est par contre pas vraie, voir juste après) et que, dans ce cas:

$$f(B_t^H) = f(B_0^H) + \int_0^t f'(B_s^H)d^\circ B_s^H, t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.4}$$

M. Gradinaru, F. Russo et P. Vallois [26] ont montré que cette dernière formule est encore vraie pour $H \geq \frac{1}{4}$ et $f \in \mathrm{C}^4(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Les auteurs ne montrent pas directement l'existence de l'intégrale de Stratonovich mais introduisent des intégrales dites d'ordre 3:

Définition 1.1.8. *Si $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ et $Y = \{Y_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ sont deux processus continus, on pose, quand la limite existe,*

$$\int_0^t Y_s d^{-(3)}X_s = \lim_{\varepsilon\to 0}\text{prob}\int_0^t Y_s\frac{(X_{s+\varepsilon}-X_s)^3}{\varepsilon}ds \text{ "intégrale forward d'ordre 3"},$$

$$\int_0^t Y_s d^{+(3)}X_s = \lim_{\varepsilon\to 0}\text{prob}\int_0^t Y_{s+\varepsilon}\frac{(X_{s+\varepsilon}-X_s)^3}{\varepsilon}ds \text{ "intégrale backward d'ordre 3"},$$

$$\int_0^t Y_s d^{\circ(3)}X_s = \lim_{\varepsilon\to 0}\text{prob}\int_0^t (Y_{s+\varepsilon}+Y_s)\frac{(X_{s+\varepsilon}-X_s)^3}{2\varepsilon}ds \text{ "intégrale symétrique d'ordre 3"}.$$

Ils prouvent que, pour les fonctions localement bornées f, $\int_0^t f(B_s^H)d^{\pm(3)}B_s^H$ existe si $H \geq \frac{1}{4}$. Plus précisément, si $H > \frac{1}{4}$, $\int_0^t f(B_s^H)d^{\pm(3)}B_s^H$ existe et vaut 0 et si $H = \frac{1}{4}$, l'intégrale $\int_0^t f(B_s^{\frac{1}{4}})d^{-(3)}B_s^{\frac{1}{4}}$ (resp. $\int_0^t f(B_s^{\frac{1}{4}})d^{+(3)}B_s^{\frac{1}{4}}$) existe mais ne vaut pas 0 en général: si f est de classe C^1, nous avons

$$\int_0^t f(B_s^{\frac{1}{4}})d^{-(3)}B_s^{\frac{1}{4}} = -\int_0^t f(B_s^{\frac{1}{4}})d^{+(3)}B_s^{\frac{1}{4}} = -\frac{3}{2}\int_0^t f'(B_s^{\frac{1}{4}})ds. \tag{1.5}$$

Par contre, puisque

$$\int_0^t f(B_s^H)d^{\circ(3)}B_s^H = \frac{1}{2}\left(\int_0^t f(B_s^H)d^{-(3)}B_s^H + \int_0^t f(B_s^H)d^{+(3)}B_s^H\right)$$

l'intégrale symétrique d'ordre 3 existe et vaut 0 pour $H \geq \frac{1}{4}$. Ils en déduisent finalement que la formule d'Itô-Stratonovich (1.4) a lieu pour toute fonction $f \in \mathrm{C}^4(\mathbb{R})$ si $H \geq 1/4$ (voir [26] pour les détails).

1.1.2 La formule d'Itô-Stratonovich a lieu si et seulement si $H > \frac{1}{6}$

Nous venons d'expliquer que la formule d'Itô (1.3) a lieu si et seulement si $H \geq 1/2$ et que la formule d'Itô-Stratonovich (1.4) a lieu si $H \geq 1/4$. Il nous a donc paru naturel de chercher l'ensemble *exact* des H pour lequel la formule d'Itô-Stratonovich (1.4) a lieu. Cet ensemble est en fait $]1/6,1[$, ce qui constitue un des résultats importants de cette thèse.

Expliquons tout d'abord pourquoi la formule d'Itô-Stratonovich ne peut avoir lieu si $H \leq 1/6$. On a, pour $s \geq 0$ et $\varepsilon > 0$:

$$(B_{s+\varepsilon}^H)^3 = (B_s^H)^3 + 3\frac{(B_{s+\varepsilon}^H)^2 + (B_s^H)^2}{2}(B_{s+\varepsilon}^H - B_s^H) - \frac{(B_{s+\varepsilon}^H - B_s^H)^3}{2}.$$

En intégrant pour $s \in [0,t]$ et en divisant par ε, nous obtenons:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t [(B_{s+\varepsilon}^H)^3 - (B_s^H)^3]ds &= \frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon}(B_{s+\varepsilon}^H)^3 ds - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon (B_s^H)^3 ds \\ = \frac{3}{\varepsilon}\int_0^t \frac{(B_{s+\varepsilon}^H)^2 + (B_s^H)^2}{2}&(B_{s+\varepsilon}^H - B_s^H)ds - \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t (B_{s+\varepsilon}^H - B_s^H)^3\, ds.\end{aligned}$$

En faisant $\varepsilon \to 0$, on en déduit que l'intégrale symétrique $\int_0^t (B_s^H)^2 d^\circ B_s^H$ existe si et seulement si la variation cubique $[B^H,B^H,B^H]$ (dans un sens évident) existe, et que dans ce cas:

$$(B_t^H)^3 = (B_0^H)^3 + 3\int_0^t (B_s^H)^2 d^\circ B_s^H - \frac{[B^H,B^H,B^H]_t}{2}.$$

Par conséquent, pour que la formule d'Itô-Stratonovich (1.4) ait lieu pour la fonction $f(x) = x^3$, il est nécessaire que l'intégrale symétrique $\int_0^t (B_s^H)^2 d^\circ B_s^H$ existe et donc que la variation cubique $[B^H,B^H,B^H]$ existe.

Or, avec M. Gradinaru [23], nous avons montré le:

Théorème 1.1.9. *Soit $m \geq 3$ un entier impair et supposons que $H \in (0,\frac{1}{2}]$. On a*

$$\{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t \left(\frac{B_{s+\varepsilon}^H - B_s^H}{\varepsilon^H}\right)^m ds : t \geq 0\} \xrightarrow{(loi)} \{\sqrt{c_{m,H}}\beta_t : t \geq 0\}, \varepsilon \to 0.$$

Ici $\{\beta_t : t \geq 0\}$ désigne un mouvement brownien standard issu de 0 et la constante strictement positive $c_{m,H}$ est explicite (nous ne la donnons pas pour simplifier).

En particulier, on en déduit que la variation cubique $[B^H,B^H,B^H]$ n'existe pas si $H < 1/6$. En effet, en supposant que $\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (B_{u+\varepsilon}^H - B_u^H)^3 du$ converge en probabilité, quand $\varepsilon \to 0$, vers une variable aléatoire Z, on en déduit que

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}-3H}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (B_{u+\varepsilon}^H - B_u^H)^3 du \xrightarrow{\text{(loi)}} 0 \text{ quand } \varepsilon \to 0.$$

Mais cette quantité est aussi égale à $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t \left(\frac{B_{u+\varepsilon}^H - B_u^H}{\varepsilon^H}\right)^3 du$, et converge donc en loi, d'après le théorème précédent, vers $\sqrt{c_{3,H}t}\, N$. Nous obtenons une contradiction.

Par conséquent, la formule d'Itô-Stratonovich ne peut avoir lieu si $H < 1/6$. Regardons maintenant si elle a lieu pour $H > 1/6$ (le cas limite $H = 1/6$ se traitant à part) . Avec M. Gradinaru, F. Russo et P. Vallois [25], nous avons montré que l'intégrale symétrique d'ordre 3: $\int_0^t f(B_s^H) d^{\circ(3)} B_s^H$ existe pour toute fonction suffisamment régulière f si $H > \frac{1}{6}$ et que dans ce cas, elle est nulle. Signalons que la démonstration est longue et plutôt technique (voir Chapitre 2, §2.4). Nous avons aussi montré que l'intégrale symétrique d'ordre 5: $\int_0^t f(B_s^H) d^{\circ(5)} B_s^H$ existe pour toute fonction f suffisamment régulière si $H > \frac{1}{10}$ et que dans ce cas, elle est nulle. Or, à l'aide de la formule de Taylor valable pour $f \in \mathrm{C}^6(\mathbb{R};\mathbb{R})$:

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(b) + f'(a)}{2}(b-a) - \frac{f^{(3)}(b) + f^{(3)}(a)}{12}(b-a)^3$$
$$+\frac{f^{(5)}(b) + f^{(5)}(a)}{120}(b-a)^5 + o((b-a)^6), a,b \in \mathbb{R},$$

nous en déduisons, en posant $a = B_s^H$, $b = B_{s+\varepsilon}^H$, en intégrant pour $s \in [0,t]$, en divisant par ε et en faisant $\varepsilon \to 0$ que, si $H > \frac{1}{6}$:

$$f(B_t^H) = f(0) + \int_0^t f'(B_s^H) d^\circ B_s^H - \frac{1}{12}\int_0^t f^{(3)}(B_s^H) d^{\circ(3)} B_s^H + \frac{1}{120}\int_0^t f^{(5)}(B_s^H) d^{\circ(5)} B_s^H.$$

Puisque les intégrales symétriques d'ordres 3 et 5 sont nulles, la formule précédente se réduit en fait à (1.4). Par conséquent, nous avons montré que la formule d'Itô-Stratonovich (1.4) a lieu pour toute fonction f suffisamment régulière (précisément, de classe C^6) si $H > \frac{1}{6}$.

Notons que ce résultat a été démontré simultanément et indépendamment par P. Cheredito et D. Nualart [12], en utilisant des techniques liées au calcul de Malliavin.

1.1.3 Que faire si $H \leq 1/6$?

Un des buts de ma thèse est aussi d'obtenir des formules de type Itô-Stratonovich dans le cadre $H \leq 1/6$. Ce travail a été mené conjointement avec M. Gradinaru, F. Russo et P. Vallois [25].

Comme nous venons de le voir dans la section précédente, l'intégrale symétrique ne peut pas être utilisée quand $H \leq 1/6$. Il faut donc définir une nouvelle classe d'intégrales. En fait, nous définissons ces intégrales dans un cadre général. Nous reviendrons ensuite au cas du mbf. Soit X un processus continu. Un entier $m \geq 1$ et une mesure de probabilité ν sur [0,1] étant donnés, nous définissons la ν-intégrale d'ordre m de $f(X)$ contre X par

$$\int_0^t f(X_u)d^{\nu,m}X_u := \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\text{prob}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t du(X_{u+\varepsilon}-X_u)^m\int_0^1 f(X_u+\alpha(X_{u+\varepsilon}-X_u))\nu(d\alpha).$$

Ces intégrales prolongent celles introduites par M. Yor [52] dans le cadre des semimartingales X et quand $m = 1$.

Le premier mérite de cette définition est d'unifier les différentes intégrales que nous avons rencontrées plus haut. En effet, l'intégrale forward (resp. backward, symétrique) d'ordre m de $f(X)$ contre X est en fait une ν-intégrale d'ordre m, à savoir celle correspondant à $\nu = \delta_0$ (resp. $\nu = \delta_1$, $\nu = \frac{\delta_0+\delta_1}{2}$) où δ_a désigne comme d'habitude la mesure de Dirac au point a.

Les ν-intégrales d'ordre m où ν est symétrique (i.e. ν est invariante par la transformation $t \mapsto 1-t$) forment une généralisation naturelle de l'intégrale symétrique d'ordre m précédemment introduite. En fait, nous caractérisons, tout au moins de manière formelle, ces intégrales en terme de somme de $\delta_{1/2}$-intégrales:

Proposition 1.1.10. *Soit $(k,m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ vérifiant $k+m \geq 2n$. Supposons que X admette une $(2n)$-variation $[X,\dots,X]$ et que $g \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$ soit une fonction de classe C^k. Si ν est une mesure de probabilité symétrique alors, à condition que toutes les intégrales en jeu sauf éventuellement une existent, cette dernière existe et nous avons*

$$\int_0^t g(X_u)d^{\nu,m}X_u = \sum_{i=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\frac{m^0_{2i}}{(2i)!}\int_0^t g^{(2i)}(X_u)d^{\delta_{1/2},m+2i}X_u + R_t,$$

avec $m^0_j = \int_0^1\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^j\nu(d\alpha)$ et

$$R_t = \begin{cases} 0 & si\ k+m > 2n \\ \frac{(-1)^k m^k_0}{k!}\int_0^t g^{(k)}(X_u)d[X,X,\dots,X]_u & si\ k+m = 2n. \end{cases}$$

L'intérêt des ν-intégrales est qu'elles permettent d'énoncer une formule d'Itô générale:

Théorème 1.1.11. *Soient n et ℓ deux entiers strictement positifs. Supposons que ν soit une mesure de probabilité symétrique sur [0,1] telle que*

$$m_{2j} := \int_0^1 \alpha^{2j}\nu(d\alpha) = \frac{1}{2j+1}\ pour\ j = 1,\cdots,\ell-1.$$

Si $f \in \mathrm{C}^{2n}(\mathbb{R})$ et si X est un processus continu admettant une $(2n)$-variation, à condition que toutes les intégrales en jeu sauf éventuellement une existent, cette dernière existe et nous avons la formule d'Itô:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_u)d^{\nu,1}X_u + \sum_{j=\ell}^{n-1} k^{\nu}_{\ell,j} \int_0^t f^{(2j+1)}(X_u)d^{\delta_{1/2},2j+1}X_u,$$

où la somme est nulle par convention si $\ell > n-1$. Ici, les $k^{\nu}_{\ell,j}$ sont des constantes universelles.

Explorons maintenant l'existence et la non-existence de $\int_0^t g(X_u)d^{\nu,m}X_u$ quand $X = B^H$ est un mbf d'indice de Hurst $H \in (0,1)$ et ν une mesure de probabilité sur $[0,1]$. Nous désignons par μ_{2n} le moment d'ordre $2n$ de la loi normale centrée et réduite. Le théorème suivant donne une description complète des différents cas possibles:

Théorème 1.1.12. *Soient $m \geq 2$ un entier et ν une mesure de probabilité sur $[0,1]$.*

1. *Supposons que $m = 2n$ soit pair et que g soit une fonction localement bornée. Alors*
   (a) *si $2nH \geq 1$ alors $\int_0^t g(B^H_u)d^{\nu,2n}B^H_u$ existe et*
   $$\int_0^t g(B^H_u)d^{\nu,2n}B^H_u = \int_0^t g(B^H_u)d[B^H]^{(2n)}_u = \mu_{2n} \begin{cases} \int_0^t g(B^H_u)du & si\ 2nH = 1 \\ 0 & si\ 2nH > 1; \end{cases}$$
   (b) *si $2nH < 1$ alors $\int_0^t g(B^H_u)d^{\nu,2n}B^H_u$ n'existe pas en général.*
2. *Supposons que $m = 2n+1$ soit impair, que g soit une fonction de classe C^{2n+1} et que ν soit symétrique. Alors*
   (a) *si $(2n+1)H > \frac{1}{2}$ alors $\int_0^t g(B^H_u)d^{\nu,2n+1}B^H_u$ existe et s'annule;*
   (b) *si $(2n+1)H < \frac{1}{2}$ alors $\int_0^t g(B^H_u)d^{\nu,2n+1}B^H_u$ n'existe pas en général.*

De ce théorème, nous déduisons le:

Corollaire 1.1.13. *Soient $n \geq 1$ un entier, g une fonction continue et $t \geq 0$. Alors, si $(2n+1)H > \frac{1}{2}$, pour tout entier $\ell \geq n$, les intégrales $\int_0^t g(B^H_u)d^{\delta_{1/2},2\ell+1}B^H_u$ existent et s'annulent.*

Par exemple:

- si $H > \frac{1}{6}$, les intégrales $\int_0^t g(B^H_u)d^{\delta_{1/2},\ell}B^H_u$ existent et sont nulles pour tout entier impair $\ell \geq 3$.
- si $\frac{1}{10} < H \leq \frac{1}{6}$, les intégrales $\int_0^t g(B^H_u)d^{\delta_{1/2},3}B^H_u$ n'existent pas en général tandis que les intégrales $\int_0^t g(B^H_u)d^{\delta_{1/2},\ell}B^H_u$ existent et sont nulles pour tout entier impair $\ell \geq 5$.

Revenons maintenant à la formule d'Itô pour le mbf. Du Théorème 1.1.11 et du Corollaire 1.1.13, nous tirons l'important:

Théorème 1.1.14. *1. Si $H > \frac{1}{6}$ et si $f \in \mathrm{C}^6(\mathbb{R})$ alors l'intégrale $\int_0^t f'(B^H_u)d^{\nu,1}B^H_u$ existe pour n'importe quelle mesure symétrique ν et nous avons*

$$f(B^H_t) = f(0) + \int_0^t f'(B^H_u)d^{\nu,1}B^H_u.$$

2. *Soit $r \geq 2$ un entier. Si $(2r+1)H > \frac{1}{2}$ et si $f \in C^{4r+2}(\mathbb{R})$ alors l'intégrale $\int_0^t f'(B_u^H) d^{\nu,1} B_u^H$ existe pour toute mesure de probabilité symétrique ν vérifiant*

$$m_{2j} := \int_0^1 \alpha^{2j} \nu(d\alpha) = \frac{1}{2j+1} \text{ pour } j = 1, \cdots, r-1. \tag{1.6}$$

De plus, nous avons:

$$f(B_t^H) = f(B_0^H) + \int_0^t f'(B_u^H) d^{\nu,1} B_u^H. \tag{1.7}$$

Signalons qu'un exemple de mesure de probabilité satisfaisant (1.6) au sens strict (i.e. vérifiant (1.6) pour r mais pas pour $r+1$) est donné par

$$\nu = \sum_{j=0}^{2(r-1)} \gamma_j \, \delta_{j/(2r-2)} \text{ avec } \gamma_j = \int_0^1 \prod_{k \neq j} \frac{2(r-1)u - k}{j-k} du.$$

Les intégrales associées à ces mesures particulières seront appelées intégrales de Newton-Côtes dans la suite (leur définition étant intimement liée à la formule de Newton-Côtes bien connue en analyse numérique).

Dans la littérature, il existe une seule autre construction (à notre connaissance) d'intégrale contre le mouvement brownien fractionnaire permettant de traiter, comme ici, le cas de tous les indices de Hurst $H \in (0,1)$. Elle est due à Christian Bender [6] et utilise entre autres les notions de S-transformations, de produits de Wick et d'intégrales de Pettis sur l'espace des distributions d'Hida. Je remercie Peter Imkeller de me l'avoir signalée. Notons toutefois une différence importante: la formule de changements de variables obtenue par Bender, à savoir

$$f(B_t^H) = f(0) + \int_0^t f'(B_u) dB_u^H + H \int_0^t u^{2H-1} f''(B_u^H) du$$

est de type Itô alors que la nôtre (1.7) est plutôt de type Stratonovich.

1.2 Approximations aux premier et second ordres des intégrales d'ordre m

Une seconde partie de ma thèse a consisté à étudier, avec M. Gradinaru [23], la convergence aux premier et second ordres des intégrales d'ordre m. Nous avons déjà vu un des intérêts de cette étude dans la section précédente (rappelons que nous avons déduit du Théorème 1.1.9 que la formule d'Itô-Stratonovich (1.4) ne pouvait avoir lieu si $H \leq 1/6$).

1.2.1 Approximation au premier ordre: convergence presque sûre

Dans les définitions 1.1.5 et 1.1.8, les limites définissant les intégrales sont en probabilité. Cela pose la question naturelle: est-il possible de montrer que, sous certaines conditions, les ε-intégrales: $\varepsilon^{-1}\int_0^t Y_s(B^H_{s+\varepsilon}-B^H_s)^m ds$ convergent presque-sûrement? Pour $Y\equiv 1$, on a:

$$\mathrm{E}\left[\varepsilon^{-1}\int_0^t (B^H_{s+\varepsilon}-B^H_s)^m ds\right] = \begin{cases} \varepsilon^{-1+2nH}\frac{(2n)!}{2^n n!}\,t \text{ si } m=2n \text{ est pair;} \\ 0 \text{ si } m \text{ est impair.}\end{cases}$$

Quand m est pair, ce calcul immédiat semble indiquer que la bonne quantité à étudier est plutôt $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t Y_s\left(\frac{B^H_{s+\varepsilon}-B^H_s}{\varepsilon^H}\right)^m ds$. En fait, nous prouvons (voir le théorème 3.1.1 plus bas pour un énoncé précis) que si f appartient à une classe de fonctions suffisamment large (incluant le cas des fonctions polynômes) et si Y est un processus continu alors, pour tout $T>0$, on a:

$$\int_0^t Y_s\, f\Big(\frac{B^H_{s+\varepsilon}-B^H_s}{\varepsilon^H}\Big)ds \to_{\varepsilon\to 0} \mathrm{E}\left[f(N)\right]\int_0^t Y_s ds, \text{p.s.} \tag{1.8}$$

uniformément en $t\in[0,T]$ (avec N une variable aléatoire normale centrée et réduite).

- Commençons par prendre $f(x)=x^{2n}$ avec $n\geq 1$. D'après (1.8), nous avons:

$$\text{p.s. : } \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t Y_s(B^H_{s+\varepsilon}-B^H_s)^{2n}ds \sim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{2nH-1}\frac{(2n)!}{2^n n!}\int_0^t Y_s ds \text{ si } \int_0^t Y_s ds \neq 0.$$

  En particulier, on en déduit qu'une condition nécessaire et suffisante assurant l'existence de $\int_0^t Y_s d^{-(2n)}B^H_s ds$ est que $2nH-1\geq 0$, c'est-à-dire $H\geq \frac{1}{2n}$. Dans ce cas, on a

$$\int_0^t Y_s d^{-(2n)}B^H_s ds = \begin{cases} \frac{(2n)!}{2^n n!}\int_0^t Y_s ds & \text{si } H=\frac{1}{2n} \\ 0 & \text{si } H>\frac{1}{2n}.\end{cases} \tag{1.9}$$

  Notons que si on fait $Y\equiv 1$, on retrouve que $[B^H]^{(2n)}_t$ existe si et seulement si $H\geq\frac{1}{2n}$ et que

$$[B^H]^{(2n)}_t = \begin{cases} \frac{(2n)!}{2^n n!}\,t & \text{si } H=\frac{1}{2n} \\ 0 & \text{si } H>\frac{1}{2n}.\end{cases}$$

  (voir (2.11)).
- Si f est une fonction impaire alors $\mathrm{E}[f(N)]=0$ et la limite dans (1.8) est nulle. Ceci suggère que la normalisation retenue n'est pas la bonne. Prenons par exemple les fonctions $f(x)=x^{2n+1}$ avec $n\in\mathbb{N}$. Nous étudions dans la section suivante §1.2.2 le cas $n\geq 1$. Le cas $n=0$ est singulier. En effet, nous avons la:

  Proposition 1.2.1.

  1) *Supposons que $g\in C^1(\mathbb{R})$ et que $H\in[\frac{1}{2},1)$. Alors, presque sûrement, uniformément sur tout intervalle compact,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t g(B^H_s)\frac{B^H_{s+\varepsilon}-B^H_s}{\varepsilon}ds = \int_0^t g(B^H_s)d^-B^H_s.$$

Par conséquent, pour $H \in [\frac{1}{2},1)$, l'intégrale forward $\int_0^t g(B_s^H)d^-B_s^H$ peut être définie trajectoire par trajectoire.

2) *Supposons que $g \in C^2(\mathbb{R})$ et que $H \in [\frac{1}{3},1)$. Alors, presque sûrement, uniformément sur tout intervalle compact,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t (g(B_{s+\varepsilon}^H) + g(B_s^H)) \frac{B_{s+\varepsilon}^H - B_s^H}{2\varepsilon} ds = \int_0^t g(B_s^H) d^\circ B_s^H.$$

Par conséquent, pour $H \in [\frac{1}{3},1)$, l'intégrale symétrique $\int_0^t g(B_s^H)d^\circ B_s^H$ peut être définie trajectoire par trajectoire.

Remarque 1.2.2. 1. Dans [3], il est prouvé, pour g suffisamment régulière, que

$$\int_0^t g(B_s^H)d^\circ B_s^H = \int_0^t g(B_s^H)\delta B_s^H + \mathrm{Tr}Dg(B^H)_t, \tag{1.10}$$

où $\int_0^t g(B_s^H)\delta B_s^H$ désigne l'intégrale sous forme divergence et $\mathrm{Tr}Dg(B^H)_t$ est défini comme la limite en probabilité, quand $\varepsilon \to 0$, de

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t g'(B_s^H) \left[R(s,(s+\varepsilon) \wedge t) - R(s,(s-\varepsilon) \vee 0)\right] ds$$

avec $R(s,t) = \mathrm{Cov}(B_s^H,B_t^H)$.
Pour tout $H \in (0,1)$, il est aisé de voir que la limite précédente existe presque sûrement est qu'elle vaut $H \int_0^t g'(B_s^H)s^{2H-1}ds$. Par conséquent, en utilisant (1.10) et la partie 2 de la proposition précédente, nous voyons que l'intégrale sous forme divergence $\int_0^t g(B_s^H)\delta B_s^H$ peut être définie trajectoire par trajectoire si $H \in [\frac{1}{3},1)$.

2. Zähle [54] introduit une intégrale stochastique trajectorielle par rapport à B^H, quand l'intégrand a une régularité höldérienne d'ordre $\gamma > 1-H$. Quand il est de la forme $g(B_t^H)$, cette condition sur γ n'est assurée que pour des indices de Hurst $H > \frac{1}{2}$ (voir [54] p. 354). Par conséquent, on peut voir les deux premières parties de la proposition précédente comme une amélioration de certains des résultats de [54].

3. Rappelons que l'intégrale forward $\int_0^t g(B_s^H)d^-B_s^H$ existe si et seulement si $H \geq 1/2$. Par conséquent, si $H < 1/2$, il ne peut y avoir de convergence p.s. des ε-intégrales forward: $\varepsilon^{-1}\int_0^t g(B_s^H)(B_{s+\varepsilon}^H - B_s^H)ds$. Par contre, bien que l'intégrale symétrique $\int_0^t g(B_s^H)d^\circ B_s^H$ existe si et seulement si $H > \frac{1}{6}$ (comme nous l'avons vu dans la section 1.1.2), nous n'avons pas réussi à démontrer la convergence p.s. des ε-intégrales symétriques: $(2\varepsilon)^{-1}\int_0^t[g(B_{s+\varepsilon}^H) + g(B_s^H)](B_{s+\varepsilon}^H - B_s^H)ds$ quand $H \in (\frac{1}{6},\frac{1}{3})$. Cette question reste donc ouverte et semble très compliquée. □

L'approche que nous avons développée fournit des approximations de certaines intégrales stochastiques. Plus précisément, soit Z une martingale locale de la forme $Z_t =$

$Z_0 + \int_0^t J_s dB_s$. Nous montrons, sous certaines hypothèses (voir le théorème 3.1.2 pour un énoncé précis) que si Y est un processus continu alors, presque sûrement, pour tout $T > 0$,

$$\int_0^t Y_s f(\frac{Z_{s+\varepsilon} - Z_s}{\sqrt{\varepsilon}}) ds \to_{\varepsilon \to 0} \int_0^t \mathrm{E}\left[f(J_s N)|\mathcal{F}_s\right] Y_s ds, \tag{1.11}$$

uniformément en $t \in [0,T]$ (avec N toujours une variable aléatoire normale centrée et réduite, indépendante de J et $\{\mathcal{F}_s\}_{s\in[0,1]}$ la filtration naturelle associée à Z).

1.2.2 Approximation au second ordre: convergence en loi

Nous ne considérons que le cas $Y \equiv 1$ et $f(x) = x^m$, avec $m \geq 3$ un entier impair. Nous avons déjà remarqué que

$$\text{p.s.: } \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^\bullet \left(\frac{B^H_{s+\varepsilon} - B^H_s}{\varepsilon^H}\right)^m ds = 0, \text{ uniformément sur tout compact.}$$

En changeant la normalisation, il est possible d'obtenir une limite non nulle. Mais la convergence a lieu en loi et non plus presque sûrement, ce qui présente une analogie avec la loi des grands nombres et le théorème central limite relatifs à des variables aléatoires centrées. Plus précisément, nous prouvons, lorsque $H < 1/2$:

$$\{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t \left(\frac{B^H_{s+\varepsilon} - B^H_s}{\varepsilon^H}\right)^m ds : t \geq 0\} \xrightarrow{(loi)} \text{cste}\, \{\beta_t : t \geq 0\}, \text{ quand } \varepsilon \to 0,$$

avec β un mouvement brownien standard.

À nouveau, notre approche permet de considérer le cas où le mbf B^H est remplacé par une martingale de la forme $Z_t = Z_0 + \int_0^t \sigma(B_s) dB_s$. Nous exprimons alors le processus limite en terme d'un mouvement brownien standard bidimensionnel. Plus précisément:

$$\{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t \left(\frac{Z_{s+\varepsilon} - Z_s}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^m ds : t \geq 0\} \xrightarrow{(loi)} \{\int_0^t \sigma(\beta^{(1)}_s)^m d(\kappa_1 \beta^{(1)}_s + \kappa_2 \beta^{(2)}_s) : t \geq 0\},$$

quand $\varepsilon \to 0$, avec κ_i, $i = 1,2$ deux constantes et $\beta^{(i)}$, $i = 1,2$, deux mouvements browniens indépendants.

1.3 Équations différentielles unidimensionnelles dirigées par une fonction höldérienne

Dans cette troisième partie de la thèse, nous avons cherché à utiliser le calcul stochastique généralisé défini dans la section §1.1 pour étudier des équations différentielles stochastiques unidimensionnelles dirigées par le mbf.

En fait, notre approche peut être développée dans un cadre plus général. Nous étudions des équations différentielles dirigées par une fonction höldérienne $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ d'indice $\alpha \in (0,1)$, c'est-à-dire vérifiant:

$$\exists L > 0 : \forall s,t \in [0,1], |g_t - g_s| \leq L|t-s|^{\alpha},$$

et telle que $g_0 = 0$ (les trajectoires d'un mouvement brownien (multi)fractionnaire sont un cas particulier de telles fonctions). Plus précisément, nous avons considéré les équations différentielles unidimensionnelles du type:

$$\begin{cases} dx_t = \sigma(x_t)dg_t + b(x_t)dt, t \in [0,1], \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.12}$$

où x_0 est un réel et σ et b sont deux fonctions continues.

Les équations différentielles dirigées par une fonction höldérienne ont déjà fait l'objet de nombreux travaux, notamment probabilistes. On rencontre en effet ce type d'équations dans l'étude des équations différentielles *stochastiques* dirigées par un mouvement brownien ou plus généralement par un mbf.

Zähle [54] définit une intégrale $\int_a^b f dg$ pour des fonctions f et g satisfaisant certaines conditions de différentiabilité fractionnaire dans les espaces L^p. Dans [55], elle utilise ces intégrales pour étudier des équations différentielles dirigées par une fonction höldérienne d'indice strictement plus grand que 1/2.

Ruzmaikina [45] revisite l'intégrale de Young [53] en montrant que $\int_a^b f dg$ est définie pour des fonctions höldériennes f et g d'indices respectifs α et β vérifiant $\alpha + \beta > 1$. Elle utilise aussi son approche pour étudier des équations différentielles dirigées par une fonction höldérienne d'indice strictement plus grand que 1/2.

Partant de l'approche de Zähle, Nualart et Răşcanu [39] montrent l'existence et l'unicité de solutions d'équations différentielles stochastiques multidimensionnelles, dépendant du temps et dirigées par un mbf d'indice $H > 1/2$.

Feyel et de La Pradelle [19] ont repris l'approche des trajectoires rugueuses - "rough paths" en anglais - initiée par Lyons [35] et utilisée par Coutin et Qian [14] dans le cas du mbf d'indice $H > 1/4$. Ils définissent une intégrale $\int_\gamma w$ pour des formes différentielles w régulières et des courbes $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ höldériennes d'indice quelconque, mais à condition que certaines quantités - appelées aires de Lévy - existent *a priori*. Là encore, cette approche leur permet d'étudier des équations différentielles stochastiques dirigées par un mbf d'indice $H > 1/4$.

Dans ce travail, nous considérons des équations différentielles unidimensionnelles dirigées par une fonction höldérienne d'indice *quelconque* dans (0,1). Ensuite, nous appliquons notre théorie à l'étude des équations différentielles stochastiques unidimensionnelles dirigées par un mbf. L'intérêt de notre approche est que nous n'avons pas de restriction sur l'indice de Hurst du mbf. Par contre, nous ne pouvons considérer que des équations différentielles stochastiques *unidimensionnelles*.

Avant toute chose, nous devons préciser le sens donné à (1.12). En l'écrivant sous une forme intégrale, tout revient à donner un sens à l'intégrale $\int_0^t \sigma(x_s)dg_s$. Comme nous l'avons déjà souligné, nous ne pouvons pas utiliser l'intégrale classique de Stieltjes considérée par Young [53], g étant seulement supposée höldérienne d'indice $\alpha \in (0,1)$. C'est l'intégrale de Newton-Côtes introduite dans la section 1.1.3 (voir le commentaire juste après le théorème 1.1.14 pour une définition précise) qui va nous permettre de traiter le cas de tous les indices α. Toutefois, elle ne peut prendre en compte que des intégrands de la forme $f(g_t,a_t)$ avec $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction régulière et a une fonction à variation bornée. C'est pourquoi nous devons définir une "bonne" notion de solution avant de commencer l'étude proprement dite de (1.12). Quelques détails techniques mis à part, on dira que $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ est solution de (1.12) si

$$x_t = f(g_t,a_t), t \in [0,1], \tag{1.13}$$

avec $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^2)$ et $a : [0,1] \to \mathbb{R}$ à variation bornée et si, pour tout $t \in [0,1]$, nous avons

$$x_t = x_0 + \int_0^t \sigma(x_s) \diamond dg_s + \int_0^t b(x_s)ds, \tag{1.14}$$

où $\int_0^t \sigma(x_s) \diamond dg_s$ est l'intégrale de Newton-Côtes et $\int_0^t b(x_s)ds$ l'intégrale de Stieltjes.

La forme particulière (1.13) que nous imposons à x conduit naturellement à considérer une solution du type de celle définie par Doss [16] et Sussman [47]. Avec la règle du changement de variables (voir le Théorème 4.1.7 pour un énoncé précis), à savoir:

$$f(g_t,a_t) = f(0,a_0) + \int_0^t \partial_1 f(g_s,a_s) \diamond dg_s + \int_0^t \partial_2 f(g_s,a_s) da_s,$$

il est facile de montrer que x définie par

$$x_t = u(g_t,y_t), t \in [0,1], \tag{1.15}$$

avec u donnée par

$$\partial_1 u = \sigma(u) \text{ et } \forall y \in \mathbb{R},\ u(0,y) = y$$

et y donnée par

$$dy_t = (\partial_2 u(g_t,y_t))^{-1}\, b \circ u(g_t,y_t)dt \text{ et } y_0 = x_0$$

vérifie (1.14). Nous donnons aussi un théorème d'unicité (voir le Théorème 4.3.3 pour un énoncé précis), valable sous l'hypothèse supplémentaire que σ est analytique. Plus précisément, nous démontrons que si $\tilde{x}$ est une autre solution de (1.12) de la forme $\tilde{x}_t = \tilde{f}(g_t,\tilde{a}_t)$ alors nécessairement $f = \tilde{f}$ et $a = \tilde{a}$, c'est-à-dire $x = \tilde{x}$.

Pour finir, nous nous intéressons à deux approximations de la solution x donnée par (1.15). La première est un résultat du type Wong-Zakai et consiste à remarquer que si $\{g^{(k)}\}$ est une suite de fonctions à variation bornée qui converge uniformément vers g et si $x^{(k)}$ est l'unique solution de

$$x_t^{(k)} = x_0 + \int_0^t \sigma(x_s^{(k)}) dg_s^{(k)} + \int_0^t b(x_s^{(k)})ds, t \in [0,1],$$

alors la suite $\{x^{(k)}\}$ converge vers la solution x donnée par (1.15). Ce résultat, classique quand on résout les équations différentielles par la méthode de Doss-Sussman, est intéressant du point de vue théorique mais n'est pas très utile en pratique. En effet, en général, il est impossible de calculer $x^{(k)}$ explicitement. C'est pourquoi, nous avons aussi étudié une deuxième approximation de la solution, à savoir celle donnée par les schémas classiques d'Euler et Milshtein. Soit $\widehat{x}^{(n)}$ l'approximation obtenue en appliquant le schéma d'Euler classique de pas $1/n$:

$$\begin{cases} \widehat{x}_0^{(n)} = x_0 \\ \widehat{x}_t^{(n)} = \widehat{x}_{k/n}^{(n)} + \sigma(\widehat{x}_{k/n}^{(n)})(g_t - g_{k/n}) + b(\widehat{x}_{k/n}^{(n)})(t - k/n), t \in [k/n,(k+1)/n]\,, \end{cases}$$

$k = 0,1,...,n-1$. Nous montrons la convergence du schéma d'Euler pour $\alpha > 1/2$ avec une vitesse explicite donnée par

$$\sup\nolimits_{t\in[0,1]}|x_t - \widehat{x}^{(n)}(t)| = O\left(\frac{1}{n^{2\alpha-1}}\right), \tag{1.16}$$

où x est la solution définie par (1.15).

Quand $\alpha \leq 1/2$, nous introduisons le schéma de type Milshtein de pas $1/n$ et d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} \check{x}_0^{(n)} = x_0 \\ \check{x}_t^{(n)} = \check{x}_{k/n}^{(n)} + \sum_{j=1}^{2m} \frac{1}{j!} P_j(\sigma,\sigma',...,\sigma^{(j-1)})(\check{x}_{k/n}^{(n)})(g_t - g_{k/n})^j \\ \qquad\qquad +b(\check{x}_{k/n}^{(n)})(t - k/n), t \in [k/n,(k+1)/n]\,, \end{cases}$$

$k = 0,1,...,n-1$, où les P_j sont des fonctions polynômes explicites (*cf.* chapitre 4, section 4.2). La vitesse de convergence de ce nouveau schéma est donnée par:

$$\sup\nolimits_{t\in[0,1]}|x_t - \check{x}^{(n)}(t)| = O\left(\frac{1}{n^{\beta}}\right) \tag{1.17}$$

avec $\beta = \inf\{\alpha,(2m+1)\alpha - 1\}$. En pratique, on choisit l'entier m le plus petit possible tel que $(2m+1)\alpha - 1 \geq \alpha$ pour obtenir la vitesse optimale $\beta = \alpha$ avec le schéma le plus simple.

Quand g est une trajectoire d'un mbf B^H d'indice de Hurst H quelconque dans (0,1), tous les résultats précédents s'appliquent au sens presque sûr. Rappelons en effet que presque toutes les trajectoires d'un mbf d'indice H sont höldériennes d'indice $\alpha < H$. Quand $H > \frac{1}{2}$, Lin [34] définit une intégrale contre le mbf pour des intégrands *déterministes.* Il démontre d'une part qu'une équation du type (1.12), où $\sigma(x_t)$ est remplacé par $\sigma(t)$, admet une unique solution dans l'ensemble des fonctions continues de [0,1] dans $\mathbb{R}$ (*cf.* [34], Théorème 4.1) et, d'autre part, que le schéma classique d'Euler associé converge uniformément en probabilité vers la solution (*cf.* [34], Théorème 4.3). Nos résultats s'appliquent dans un cadre plus général et précisent les vitesses de convergence. Ils peuvent aussi être utilisés quand g est une trajectoire d'un mouvement brownien multifractionnaire de fonction de Hurst h quelconque.

Il est intéressant de remarquer que les approximations obtenues par les schémas d'Euler et de Milshtein sont intrinsèques et convergent vers x donnée par (1.15), qui est *une* solution de (1.14). Ceci met en évidence le rôle important joué par cette solution.

En pratique, les schémas d'Euler et de Milshtein sont très faciles à mettre en place pour obtenir des approximations de solutions d'équations différentielles stochastiques dirigées par un mbf. Illustrons ceci sur un exemple. Fixons $H = 0.6$, $n = 500$ et considérons l'équation différentielle stochastique:

$$X_t = 1 + \int_0^t X_s \diamond dB_s^{0.6}, t \in [0,1],$$

dont la solution donnée par (1.15) est $X_t = \exp\{B_t^{0.6}\}$. La figure 1.1 ci-après est un exemple de trajectoire $\widehat{X}^{(n)}$ obtenue en appliquant le schéma d'Euler (l'autre trajectoire correspond à X). D'après (1.16), l'erreur est en $O(\frac{1}{n^{0.2}})$. Pour améliorer cette erreur - la meilleure que

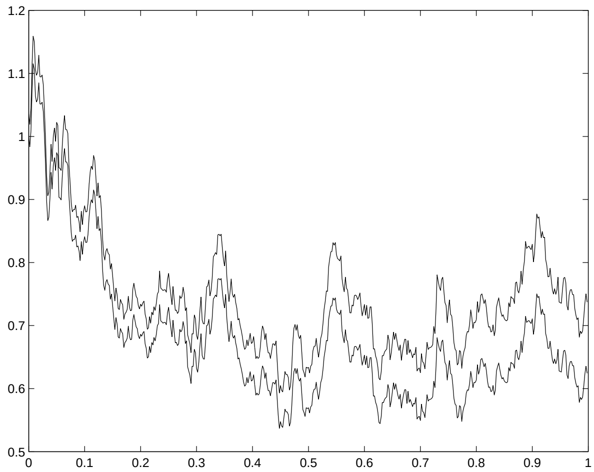

FIG. 1.1 – *schéma d'Euler*

l'on peut obtenir étant $O(\frac{1}{n^{0.6}})$ d'après (1.17) - il faut utiliser le schéma de Milshtein d'ordre 1. La figure 1.2 ci-après est un exemple de trajectoire $\check{X}^{(n)}$ obtenue, l'autre correspondant encore une fois à X. Pour simuler $\{B_{k/n}^H, k = 0, \ldots, n\}$, nous avons utilisé la procédure Matlab proposé par Coeurjolly [13].

Signalons qu'on ne peut pas appliquer *a priori* nos deux théories à cet exemple puisque $\sigma(x) = x$ s'annule en 0 (et nous supposons au début de la section 4.4.2 que $\inf_{x\in\mathbb{R}} |\sigma(x)| > 0$). Toutefois, les simulations semblent indiquer que cette hypothèse n'est pas nécessaire.

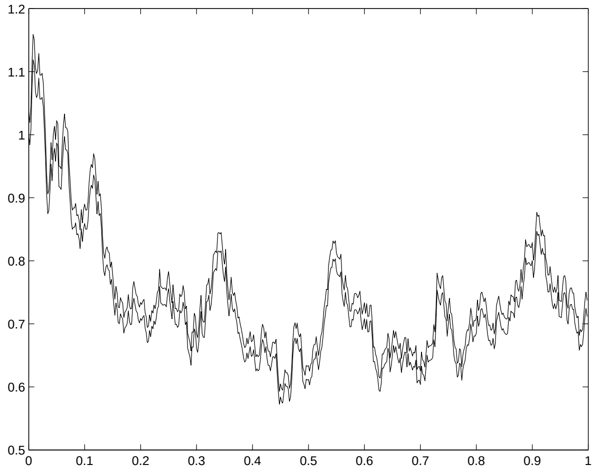

FIG. 1.2 – *schéma de Milshtein*

1.4 Absolue continuité dans les é.d.s. unidimensionnelles dirigées par un mbf

Dans cette quatrième partie de la thèse, fruit d'un travail en cours avec T. Simon, nous étudions l'absolue continuité de la solution au temps $t \in]0,1]$ d'une é.d.s. du type:

$$X_t \;=\; x_0 \;+\; \int_0^t \sigma(X_s) \diamond dB_s^H + \int_0^t b(X_s)\, ds \;, t \in [0,1] \tag{1.18}$$

où b,σ sont des fonctions réelles et B^H un mbf d'indice de Hurst H *quelconque* dans (0,1).

Comme nous l'avons dit dans la section 1.3, la solution X de (1.18) est donnée par (1.15).

Nous montrons tout d'abord que X_t a une densité *strictement positive* pour tout $t \in]0,1]$ dès que σ ne s'annule pas. L'argument principal de la preuve est simple: par une transformation de Girsanov convenable, on se ramène au cas $b \equiv 0$. Alors $X_t = u(B_t^H,x_0)$ et il est facile de conclure.

Clairement, cette condition sur σ n'est pas optimale. Par exemple, dans le cas du mouvement brownien classique (correspondant à $H = 1/2$), il existe un critère optimal dû à Bouleau et Hirsch. Plus précisément, considérons l'équation déterministe

$$x_t = x_0 \;+\; \int_0^t b\,(x_s)\, ds \tag{1.19}$$

et le temps déterministe:

$$t_x \;=\; \sup\{t \in [0,1],\; \int_0^t |\sigma(x_s)| ds = 0\} \text{ avec la convention } \sup\{\emptyset\} = 0.$$

Alors, quand $H = 1/2$, la loi de X_t est absolument continue si et seulement si $t > t_x$ (voir le théorème 6.3. dans [10]).

Dans le cas $H \neq 1/2$, nous montrons que le même critère a lieu quand $H > 1/2$ ou quand $H < 1/2$ et σ est analytique.

Remarquons que lorsque σ est analytique, t_x vaut en général 0 ou 1. En effet, si $\sigma(x_0) \neq 0$ alors $t_x = 0$. Si $\sigma(x_0) = 0$ et que σ n'est pas identiquement nulle, alors il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 tel que $\sigma(x) \neq 0$ pour tout $x \in V_{x_0} \setminus \{x_0\}$. Si de plus $b(x_0) \neq 0$ alors $t_x = 0$ (sinon, il existerait $t \in]0,1]$ tel que $\sigma(x_s) = 0$ pour tout $s \in [0,t[$ et on aurait $x_s = x_0$ pour tout s proche de 0; (1.19) impliquerait alors $b(x_0) = 0$). Il reste le cas où $\sigma(x_0) = 0$ et b est nulle dans un voisinage de x_0. Dans ce cas, il existe $\varepsilon > 0$ tel que x est constante pour $t \in [0,\varepsilon)$ et $t_x \geq \varepsilon$.

La preuve du critère de Bouleau-Hirsch dans le cas du mbf consiste tout d'abord à calculer la dérivée de Malliavin de X_t et ensuite d'utiliser le critère de Nualart-Zakai relatif à l'absolue continuité des processus gaussiens.

1.5 Approximation du coefficient de volatilité et test d'adéquation

La cinquième et dernière partie de la thèse a été réalisée en commun avec M. Gradinaru. Notons qu'elle est totalement indépendante des sections précédentes.

Soit X le processus de diffusion unidimensionnel défini par:

$$X_t = x_0 + \int_0^t \theta(s,X_s)dB_s + \int_0^t b(s,X_s)ds, t \in [0,1], \tag{1.20}$$

où $x_0 \in \mathbb{R}$ et B est un mouvement brownien standard unidimensionnel. Supposons que b et θ soient des fonctions inconnues et qu'on observe X aux moments $\left\{k2^{-N}, k = 0,\ldots,2^N\right\}$ de l'intervalle $[0,1]$. Les deux questions suivantes paraissent naturelles:

1. Est-il possible de construire un estimateur pour le coefficient de diffusion?
2. ϑ étant une fonction donnée, est-il possible de décider si $\vartheta = \theta$ ou non?

Il s'agit de deux questions classiques en statistique des processus.

Florens-Zmirou [20] est la première à répondre à la première question. Dans le cas où $\theta(s,x) = \theta(x)$ est une fonction régulière, elle propose un estimateur pour $\theta(x)^2$ (quand la trajectoire de la diffusion visite le point x), basé sur une approximation discrète du temps local. Elle obtient comme vitesse de convergence approximativement $2^{N/3}$. Quand θ a seulement une régularité de type Besov, des estimateurs asymptotiquement minimax peuvent être construits en utilisant des bases d'ondelettes (*cf.* Hoffmann [29]) et les vitesses de convergence sont alors en $2^{Ns/(1+2s)}$ (si $\theta \in B_{spq}$).

Dans le cas plus simple où le coefficient de diffusion ne dépend pas de X_t mais seulement de t, Genon-Catalot, Laredo et Picard [21] ont construit un estimateur non-paramétrique pour $\theta(s,x) = \theta(s)$. Les auteurs procèdent en deux temps: tout d'abord, ils considèrent l'estimateur de $\int_0^1 h(s)\theta(s)^2 ds$ (h étant une fonction régulière quelconque) donné par

$$\sum_{i=0}^{2^N-1} h(i2^{-N}) \left(X_{(i+1)2^{-N}} - X_{i2^{-N}}\right)^2, N \in \mathbb{N}^*, \tag{1.21}$$

et, ensuite, la fonction θ^2 est reconstruite en utilisant une base d'ondelettes. La vitesse de convergence obtenue est en $2^{N/2}$ (voir aussi Hoffmann [28] pour une étude dans les espaces de Besov).

Quelle(s) sorte(s) de résultat(s) peut-on obtenir en utilisant l'estimateur (1.21) dans la situation générale (1.20)? Nous répondons à cette question dans ce travail. En se basant sur l'observation de X en des moments discrets, nous estimons le processus primitive de $\theta(t,X_t)$

$$I(t) := \int_0^t \theta(s,X_s)^2 ds, t \in [0,1]. \tag{1.22}$$

Pour cela, nous considérons la famille d'estimateurs donnés par (1.21) avec $h = \mathbf{1}_{[0,t]}$. Précisément, nous posons:

$$\widehat{I_N}(t) := \sum_{i=0}^{[2^N t]-1} \left(X_{(i+1)2^{-N}} - X_{i2^{-N}}\right)^2, t \in [0,1], N \in \mathbb{N}^*. \tag{1.23}$$

Il est classique que, pour tout $t \geq 0$, $\widehat{I_N}(t)$ converge presque sûrement vers $I(t)$ (voir, par exemple, Berman [7], Théorème 4.1). Nous montrons plus généralement que la suite de processus $\{\widehat{I_N}(t), t \in [0,1]\}$ converge p.s. vers le processus $\{I(t), t \in [0,1]\}$, uniformément. Nous sommes également capables de montrer que, sous une probabilité Q équivalente à la probabilité P initiale, la suite $2^{N/2}\{\widehat{I_N}(t) - I(t), t \in [0,1]\}$ converge en loi vers un processus explicite qui s'exprime en terme d'un mouvement brownien bidimensionnel (voir les Corollaire 6.1.3 et Proposition 6.1.4). Nos résultats étendent ceux obtenus dans Genon, Laredo and Picard [21]. Notons toutefois que notre méthode ne permet pas d'estimer $\theta^2(t,X_t)$, mais seulement $I(t)$.

Quant à la construction d'un test d'adéquation, nous introduisons une statistique de décision T_N qui permet de tester l'hypothèse H_0: $\theta^2 = \vartheta^2$ contre l'hypothèse H_1: $\theta^2 \neq \vartheta^2$ où ϑ est une fonction connue. Nous évaluons l'erreur de première espèce et prouvons que, sous H_1, $T_N \to \infty$ presque sûrement, quand $N \to \infty$ (voir la Proposition 6.2.2).

1.6 Références

Le contenu de cette thèse a fait l'objet des publications et prépublications suivantes:

Gradinaru, M., Nourdin, I. (2003) *Approximation at first and second order of m-order integrals of the fractional Brownian motion and of certain semimartingales.* Electron. J. Probab. **8**, no 18.

Gradinaru, M., Nourdin, I. (2003) *Stochastic volatility: approximation and goodness-of-fit test.* Preprint IECN 2003-53.

Gradinaru, M., Nourdin, I., Russo, F., Vallois, P. (2004) *m-order integrals and Itô's formula for non-semimartingale processes; the case of a fractional Brownian motion with any*

Hurst index. À paraître aux Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.

Nourdin, I. (2004) *Discrete approximation of differential equations driven by an Hölder continuous function*. À soumettre aux C.R. Math. Acad. Sci. Paris.

Chapitre 2

Intégrales d'ordre m et formules d'Itô

Ce travail, réalisé en collaboration avec M. Gradinaru, F. Russo et P. Vallois, a été accepté pour publication aux Annales de l'Institut Henri Poincaré Probabalités et Statistiques.

2.1 Notations et rappels de résultats préliminaires

Commençons par rappeler quelques définitions et résultats établis par Russo-Vallois dans [41, 42, 43, 44]. Dans la suite, X (resp. Y) désigne un processus continu (resp. localement borné). Nous munissons l'espace des processus continus $\mathcal{C}$ de la topologie de la convergence uniforme en probabilité sur les intervalles compacts (ucp), ce qui en fait un espace de Fréchet. L'espace $\mathrm{L}^0(\Omega)$ des variables aléatoires est aussi un espace de Fréchet, s'il est muni de la topologie de la convergence en probabilité.

L'intégrale forward et la covariation sont définies respectivement par

$$\int_0^t Y_u d^- X_u := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathrm{ucp} \, \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t Y_u (X_{u+\varepsilon} - X_u) du \tag{2.1}$$

et

$$[X,Y]_t := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathrm{ucp} \, \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (X_{u+\varepsilon} - X_u)(Y_{u+\varepsilon} - Y_u) du. \tag{2.2}$$

L'intégrale symétrique est définie par

$$\int_0^t Y_u d^\circ X_u := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathrm{ucp} \, \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \frac{Y_{u+\varepsilon} + Y_u}{2} (X_{u+\varepsilon} - X_u) du. \tag{2.3}$$

L'égalité fondamentale suivante a lieu

$$\int_0^t Y_u d^\circ X_u = \int_0^t Y_u d^- X_u + \frac{1}{2} [X,Y]_t, \tag{2.4}$$

à condition qu'au moins deux quantités sur les trois existent. Notons toutefois (nous le reverrons dans la section suivante) que l'intégrale symétrique peut exister sans que l'intégrale forward et la covariation existent.

Si X est tel que $[X,X]$ existe, on dit que X est un processus à variation quadratique finie. Si de plus $[X,X] = 0$, on dit que X est un processus à variation quadratique nulle. Si X est un processus à variation quadratique finie et si $f \in C^2(\mathbb{R})$, nous avons la formule d'Itô:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_u)d^-X_u + \frac{1}{2}[f'(X),X]_t. \tag{2.5}$$

Rappelons que l'ensemble des processus à variation quadratique finie est stable par les transformations de classe C^1. En particulier, si $f,g \in C^1$ et si le vecteur (X,Y) est tel que toutes ses covariations mutuelles $[X,X]$, $[X,Y]$ et $[Y,Y]$ existent, alors $[f(X),g(Y)]_t = \int_0^t f'(X_s)g'(Y_s)d[X,Y]_s$. Par conséquent, les formules (2.4) et (2.5) donnent:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_u)d^\circ X_u. \tag{2.6}$$

Remarque 2.1.1. 1. Si X est une semimartingale continue et si Y est un processus prévisible alors $\int_0^\cdot Y_u d^-X_u$ est l'intégrale d'Itô classique (pour les détails, voir Russo-Vallois [41]).

2. Si X et Y sont des semimartingales continues alors $\int_0^\cdot Y_u d^\circ X_u$ est l'intégrale de Fisk-Stratonovich et $[X,Y]$ est le crochet ordinaire.
3. Si $X = B^H$ est le mouvement brownien fractionnaire d'indice $H \in (0,1)$, presque sûrement ses trajectoires sont höldériennes d'indice $\delta < H$. Par conséquent, il est facile de voir, si $H > \frac{1}{2}$, que B^H est un processus à variation quadratique nulle. Quand $H = \frac{1}{2}$, $B = B^{\frac{1}{2}}$ est le mouvement brownien standard et donc $[B^{\frac{1}{2}},B^{\frac{1}{2}}]_t = t$. En particulier, la formule d'Itô (2.6) a déjà lieu pour $H \geq \frac{1}{2}$.

Puisque la variation quadratique de B^H est infinie quand $H < \frac{1}{2}$, nous introduisons le concept d'α-variation forte (voir Russo-Vallois [44]). Il s'agit du processus continu et croissant donné par:

$$[X]_t^{(\alpha)} := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \text{ucp} \int_0^t \frac{|X_{u+\varepsilon} - X_u|^\alpha}{\varepsilon} du. \tag{2.7}$$

Notons que, dans Errami-Russo [18], les auteurs ont étudié le cas où l'intégrateur X n'est pas un processus à variation quadratique finie. Pour un entier $n \geq 1$, ils définissent la n-covariation $[X^1, \ldots, X^n]$ d'un vecteur continu $(X^1, \ldots, X^n)$ de la manière suivante:

$$[X^1, \ldots, X^n]_t := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \text{ucp} \int_0^t \frac{(X^1_{u+\varepsilon} - X^1_u) \ldots (X^n_{u+\varepsilon} - X^n_u)}{\varepsilon} du. \tag{2.8}$$

Clairement, si $n = 2$, la 2-covariation $[X^1,X^2]$ est la covariation définie précédemment. D'autre part, si, dans (2.8), les X^i sont tous égaux à X, nous obtenons

$$\underbrace{[X, \ldots, X]}_{n \text{ fois}}(t) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \text{ucp} \int_0^t \frac{(X_{u+\varepsilon} - X_u)^n}{\varepsilon} du, \tag{2.9}$$

et nous parlons alors de n-variation du processus X. Notons que, de manière évidente, pour un entier pair $2n$, nous avons $[X]^{(2n)} = \underbrace{[X,\dots,X]}_{2n\text{ fois}}$. Pour cette raison, dans la suite, quand on supposera que la $2n$-variation de X existe, on aura automatiquement que la $2n$-variation *forte* existe.

Les propriétés suivantes ont été établies dans Errami-Russo [18]:

Remarque 2.1.2.

1. Si la n-variation forte de X existe, alors, pour tout $m > n$, $[X]^{(m)}$ et $\underbrace{[X,\dots,X]}_{m\text{ fois}}$ existent et valent 0.
2. Si $\underbrace{[X,\dots,X]}_{n\text{ fois}}$ et $[X]^{(n)}$ existent alors, pour $g \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$,
$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \text{ucp} \int_0^t g(X_u)\frac{(X_{u+\varepsilon} - X_u)^n}{\varepsilon}du = \int_0^t g(X_u)d[X,\dots,X]_u. \tag{2.10}$$
De plus, si $f_1,\dots,f_n \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$ alors
$$[f_1(X),\dots,f_n(X)]_t = \int_0^t f_1'(X_u)\dots f_n'(X_u)d\underbrace{[X,\dots,X]}_{n\text{ fois}}(u).$$
3. Revenons au processus $X = B^H$. Il admet une 3-variation forte si et seulement si $H \geq \frac{1}{3}$. Dans ce cas, même pour le cas limite $H = \frac{1}{3}$, sa 3-variation $[B^H,B^H,B^H]$ existe et vaut 0.

Remarque 2.1.3.

1. Dans Gradinaru *et al* [26], il est prouvé que, si $H > \frac{1}{6}$, la 3-variation $[B^H,B^H,B^H]$ existe et vaut 0. En particulier, un processus peut avoir une n-variation sans avoir une n-variation forte.
2. Dans Russo-Vallois [44], proposition 3.14, p. 22, il est prouvé que, pour tout $H \in (0,1)$, la $1/H$-variation forte de B^H existe et qu'elle vaut $\mu_{1/H}t$, où $\mu_a = \mathrm{E}[|G|^a]$, avec G une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite. Ainsi,
$$[B^H]_t^{(2n)} = \begin{cases} \mu_{2n}\, t & \text{si } H = \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{si } H > \frac{1}{2n}. \end{cases} \tag{2.11}$$

Proposition 2.1.4. *Soit $n \geq 1$ un entier. Si B^H est un mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst $H \in (0,1)$ alors*

$$\underbrace{[g(B^H),B^H,\dots,B^H]}_{2n}{}_t = \mu_{2n}\begin{cases} \int_0^t g'(B_s^H)ds & \text{si} \quad H = \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{si} \quad H > \frac{1}{2n} \end{cases}.$$

Preuve. C'est une conséquence immédiate des remarques 2.1.2 2) et 2.1.3 2).■

Une extension naturelle de (2.1) et (2.3) est la suivante:

Définition 2.1.5. *Soient X (resp. Y) un processus continu (resp. localement borné), $m \geq 1$ un entier et $t \geq 0$ un réel.*
L'intégrale symétrique d'ordre m de Y par rapport à X est donnée par

$$\int_0^t Y_u d^{\circ(m)} X_u = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \text{prob} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \frac{Y_u + Y_{u+\varepsilon}}{2} (X_{u+\varepsilon} - X_u)^m du; \tag{2.12}$$

à condition que la limite existe.

De même, on définit la notion d'intégrale forward (resp. backward) d'ordre m:

$$\int_0^t Y_u d^{-(m)} X_u = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \text{prob} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t Y_u (X_{u+\varepsilon} - X_u)^m du; \tag{2.13}$$

(resp.

$$\int_0^t Y_u d^{+(m)} X_u = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \text{prob} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t Y_{u+\varepsilon} (X_{u+\varepsilon} - X_u)^m du \,). \tag{2.14}$$

Remarque 2.1.6. a) Nous avons

$$\int_0^t Y_u d^{\circ(1)} X_u = \int_0^t Y_u d^{\circ} X_u, \quad \int_0^t Y_u d^{-(1)} X_u = \int_0^t Y_u d^{-} X_u.$$

b) Si X est un processus à variation quadratique finie alors $\int_0^t Y_u d^{\circ(2)} X_u = \int_0^t Y_u d[X]_u$.
c) Si $X = B^H, H \geq \frac{1}{4}, g \in C(\mathbb{R})$ alors $\int_0^t g(B_u^H) d^{\circ(3)} B_u^H = 0$.

Le point a) est un jeu d'écriture, le point b) est de démonstration immédiate (voir Russo-Vallois [41]) tandis que la preuve du point c) est beaucoup plus compliquée et est obtenue dans Gradinaru *et al* [26] en montrant séparément l'existence des intégrales forward et backward d'ordre 3 puis en faisant la moyenne: voir (1.5).

Remarque 2.1.7. Soient $n,m \geq 1$ deux entiers. À condition que deux quantités au moins sur les trois existent, la troisième existe et nous avons:

a) $[\underbrace{Y,X,\ldots,X}_{2n}]_t = \displaystyle\int_0^t Y_u d^{+(2n-1)} X_u - \int_0^t Y_u d^{-(2n-1)} X_u,$

b) $\displaystyle\int_0^t Y_u d^{\circ(m)} X_u = \frac{1}{2} \left[\int_0^t Y_u d^{+(m)} X_u + \int_0^t Y_u d^{-(m)} X_u \right].$

Notons, qu'en général, les intégrales forward et backward $\int_0^t Y_u d^{\pm(m)} X_u$ peuvent ne pas exister tandis que l'intégrale $\int_0^t Y_u d^{\circ(m)} X_u$ existe.

2.2 ν-integrales d'ordre m et formules d'Itô

Commençons par préciser le concept de ν-intégrale d'ordre m, introduit dans un cas particulier par Yor [52] p.521. Comme précédemment, X désigne un processus continu.

Nous nous donnons également une mesure de probabilité ν sur [0,1] et nous notons $m_k := \int_0^1 \alpha^k \nu(d\alpha)$ le k-ième moment de ν.

Définition 2.2.1. *Soit $m \geq 1$ un entier. Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction localement bornée, la ν-intégrale d'ordre m de $g(X)$ par rapport à X est donnée par*

$$\int_0^t g(X_u) d^{\nu,m} X_u = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \text{prob} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t du (X_{u+\varepsilon} - X_u)^m \int_0^1 g(X_u + \alpha(X_{u+\varepsilon} - X_u)) \nu(d\alpha) \quad (2.1)$$

Remarque 2.2.2. Cette intégrale par rapport à X n'est définie que pour les intégrands de la forme $g(X)$. Néanmoins, dans certains cas (voir par exemple *b), c), d)* plus bas), nous pouvons choisir n'importe quel intégrand Y.

Exemple 2.2.3. *a)* Si $g \equiv 1$ alors, pour toute mesure de probabilité ν, l'intégrale $\int_0^t d^{\nu,m} X_u$ est la m-variation de X (voir (2.9)).

b) Si $\nu = \delta_0$ et si $m \in \mathbb{N}^*$ alors $\int_0^t g(X_u) d^{\nu,m} X_u$ est l'intégrale forward d'ordre m (voir la définition 2.1.5).

c) Si $\nu = \delta_1$ et si $m \in \mathbb{N}^*$ alors $\int_0^t g(X_u) d^{\nu,m} X_u$ est l'intégrale backward d'ordre m (voir la définition 2.1.5).

d) Si $\nu = \frac{\delta_0 + \delta_1}{2}$ et si $m \in \mathbb{N}^*$ alors $\int_0^t g(X_u) d^{\nu,m} X_u$ est l'intégrale symétrique d'ordre m (voir la définition 2.1.5).

Dans la suite, nous continuerons à utiliser les notations

$$\int_0^t g(X_u) d^{-(m)} X_u \text{ (resp. } \int_0^t g(X_u) d^{+(m)} X_u, \int_0^t g(X_u) d^{\circ(m)} X_u)$$

au lieu de

$$\int_0^t g(X_u) d^{\delta_0,m} X_u \text{ (resp. } \int_0^t g(X_u) d^{\delta_1,m} X_u, \int_0^t g(X_u) d^{\frac{\delta_0+\delta_1}{2},m} X_u).$$

La mesure de probabilité ν est dite symétrique si elle est invariante par rapport à la transformation $t \mapsto 1 - t$ de [0,1]. Par exemple, les mesures $\delta_{1/2}$, $\frac{\delta_0+\delta_1}{2}$ ou encore la mesure de Lebesgue sur [0,1] sont symétriques.

La mesure $\delta_{1/2}$ joue un rôle central par rapport aux autres mesures de probabilité symétriques:

Proposition 2.2.4. *Soit $(k,m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vérifiant $k + m \geq 2n$. Supposons que X admette une $(2n)$-variation $[X, \ldots, X]$ et que $g \in C(\mathbb{R})$ soit une fonction de classe C^k. Si ν est une mesure de probabilité symétrique alors, à condition que toutes les intégrales en jeu sauf éventuellement une existent, cette dernière existe et nous avons*

$$\int_0^t g(X_u) d^{\nu,m} X_u = \sum_{i=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \frac{m_{2i}^0}{(2i)!} \int_0^t g^{(2i)}(X_u) d^{\delta_{1/2}, m+2i} X_u + R_t, \quad (2.2)$$

avec $m_j^0 = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)^j \nu(d\alpha)$ et

$$R_t = \begin{cases} 0 & si\ k + m > 2n \\ \frac{(-1)^k m_0^k}{k!} \int_0^t g^{(k)}(X_u) d[X,X,\ldots,X]_u & si\ k + m = 2n. \end{cases} \quad (2.3)$$

Remarque 2.2.5. 1. Si $k = 0$, la somme dans (2.2) vaut 0 par convention.

2. Notons que, si j est impair, m_j^0 vaut 0 grâce à la symétrie de ν.

Preuve de la proposition 2.2.4.

a) Tout d'abord, nous prouvons (2.2) dans le cas où $k = 0$, $m \geq 2n+1$ et g est bornée. Précisément, nous prouvons que les intégrales $\int_0^t g(X_u) d^{\nu,m} X_u$ existent et s'annulent. En effet, nous avons, dans ce cas, en utilisant la partie 1 de la remarque 2.1.2,

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t du (X_{u+\varepsilon} - X_u)^m \int_0^1 g(X_u + \alpha(X_{u+\varepsilon} - X_u))\nu(d\alpha)\right|$$

$$\leq \frac{\text{cst}}{\varepsilon}\int_0^t |X_{u+\varepsilon} - X_u|^m du \to 0,$$

quand $\varepsilon \downarrow 0$. La convergence en probabilité suit.

b) Ensuite, nous prouvons que les intégrales $\int_0^t g(X_u) d^{\nu,m} X_u$ existent et s'annulent quand $k = 0$ et $m \geq 2n+1$ mais avec g seulement *localement* bornée. Dans ce cas, nous mettons en place l'argument de localisation suivant, argument que nous utiliserons plusieurs fois dans la suite sans plus de justification. Soit $\beta > 0$. Nous allons montrer que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathrm{P}\left(\left|\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t du (X_{u+\varepsilon} - X_u)^m \int_0^1 g(X_u + \alpha(X_{u+\varepsilon} - X_u))\nu(d\alpha)\right| \geq \beta\right) = 0.$$

Soient $M > 0$ et $\Omega_M = \{\omega : |X_u(\omega)| \leq M; \forall u \in [0,t+1]\}$. Sur Ω_M, nous avons

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t du (X_{u+\varepsilon} - X_u)^m \int_0^1 g(X_u + \alpha(X_{u+\varepsilon} - X_u))\nu(d\alpha)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t du (X_{u+\varepsilon} - X_u)^m \int_0^1 g_M(X_u + \alpha(X_{u+\varepsilon} - X_u))\nu(d\alpha)$$

où $g_M = g 1_{[-M,M]}$.

Nous pouvons écrire

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t du (X_{u+\varepsilon} - X_u)^m \int_0^1 g(X_u + \alpha(X_{u+\varepsilon} - X_u))\nu(d\alpha)\right| \geq \beta\right)$$

$$\leq \mathrm{P}\left(\left|\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t du (X_{u+\varepsilon} - X_u)^m \int_0^1 g_M(X_u + \alpha(X_{u+\varepsilon} - X_u))\nu(d\alpha)\right| \geq \beta\right) + \mathrm{P}(\Omega_M^c).$$

Fixons $\delta > 0$ et choisissons M suffisamment grand pour que $P(\Omega_M^c) < \frac{\delta}{2}$. De la convergence en probabilité pour la fonction g_M, nous tirons l'existence de $\eta > 0$ tel que le premier terme dans l'inégalité précédente soit inférieur à $\frac{\delta}{2}$ pour tout $\varepsilon < \eta$.

Finalement, nous avons montré que, pour tous $\beta > 0$ et $\delta > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, si $\varepsilon < \eta$, la probabilité

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t du (X_{u+\varepsilon} - X_u)^m \int_0^1 g(X_u + \alpha(X_{u+\varepsilon} - X_u))\nu(d\alpha)\right| \geq \beta\right)$$

soit inférieure à δ. En d'autres termes, nous avons obtenu l'existence et la nullité de $\int_0^t g(X_u)d^{\nu,m}X_u$.

c) Pour le cas général, en utilisant un développement de Taylor, nous pouvons écrire:

$$g(X_u + \alpha(X_{u+\varepsilon} - X_u)) = g\left(\frac{X_{u+\varepsilon} + X_u}{2} - (\frac{1}{2} - \alpha)(X_{u+\varepsilon} - X_u)\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)^i}{i!} g^{(i)}(\frac{X_{u+\varepsilon} + X_u}{2})(X_{u+\varepsilon} - X_u)^i + (-1)^k \frac{\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)^k}{k!} g^{(k)}(\theta_\alpha)(X_{u+\varepsilon} - X_u)^k$$

avec θ_α entre X_u et $X_{u+\varepsilon}$. Puisque $m_{2i+1}^0 = 0$ pour tout $i \geq 1$ (voir la remarque 2.2.5), nous en déduisons que

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left(\int_0^1 g(X_u + \alpha(X_{u+\varepsilon} - X_u))\nu(d\alpha)\right)(X_{u+\varepsilon} - X_u)^m du$$

$$= \sum_{i=0}^{[\frac{k-1}{2}]} \frac{m_{2i}^0}{(2i)!}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t g^{(2i)}(\frac{X_{u+\varepsilon} + X_u}{2})(X_{u+\varepsilon} - X_u)^{m+2i} du$$

$$+(-1)^k \frac{1}{k!}\int_0^t \left(\int_0^1 g^{(k)}(\theta_\alpha)(\frac{1}{2} - \alpha)^k \nu(d\alpha)\right)\frac{(X_{u+\varepsilon} - X_u)^{k+m}}{\varepsilon} du.$$

Nous pouvons supposer que $g^{(k)}$ est bornée, toujours par un argument de localisation. Par conséquent, le dernier terme du membre de droite converge uniformément sur les compacts en probabilité vers R (voir la remarque 2.1.2). La preuve de la proposition est maintenant établie.

□

Nous pouvons immédiatement énoncer une formule d'Itô (qui n'est toutefois pas très utile en pratique!) sous des hypothèses très faibles:

Proposition 2.2.6. *Choisissons pour ν la mesure de Lebesgue sur* $[0,1]$. *Si $f \in C^1(\mathbb{R})$ et si X est un processus continu alors l'intégrale $\int_0^t f'(X_u)d^{\nu,1}X_u$ existe et nous avons:*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_u)d^{\nu,1}X_u. \tag{2.4}$$

Preuve. Puisque f est de classe C^1, nous avons, par une formule de Taylor classique:

$$f(X_{u+\varepsilon}) = f(X_u) + (X_{u+\varepsilon} - X_u)\int_0^1 f'(X_u + \alpha(X_{u+\varepsilon} - X_u))d\alpha.$$

En intégrant en u sur $[0,t]$ et en divisant par ε, nous obtenons:

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} f(X_u)du - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon f(X_u)du$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t du(X_{u+\varepsilon}-X_u)\int_0^1 f'(X_u+\alpha(X_{u+\varepsilon}-X_u))d\alpha.$$

Le membre de gauche converge, quand $\varepsilon \downarrow 0$, vers $f(X_t)-f(X_0)$. Par conséquent, le membre de droite est obligé de converger en probabilité vers $\int_0^t f'(X_u)d^{\nu,1}X_u$. □

Nous sommes maintenant en position d'établir le résultat principal de cette section:

Théorème 2.2.7. *(Formule d'Itô)*
Soient n et ℓ deux entiers strictement positifs. Supposons que ν soit une mesure de probabilité symétrique sur $[0,1]$ *telle que*

$$m_{2j} := \int_0^1 \alpha^{2j}\nu(d\alpha) = \frac{1}{2j+1} \text{ pour } j = 1,\cdots,\ell-1. \tag{2.5}$$

Si $f \in \mathrm{C}^{2n}(\mathbb{R})$ et si X est un processus continu admettant une $(2n)$-variation (forte), à condition que toutes les intégrales en jeu sauf éventuellement une existent, cette dernière existe et nous avons la formule d'Itô:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_u)d^{\nu,1}X_u + \sum_{j=\ell}^{n-1} k_{\ell,j}^{\nu}\int_0^t f^{(2j+1)}(X_u)d^{\delta_{1/2},2j+1}X_u, \tag{2.6}$$

où la somme est nulle par convention si $\ell > n-1$. Ici, les $k_{\ell,j}^{\nu}$ sont des constantes universelles.

Remarque 2.2.8. Une application significative a lieu quand $\nu = \frac{\delta_0+\delta_1}{2}$. Nous obtenons dans ce cas, si $f \in \mathrm{C}^{2n}(\mathbb{R})$ et si X est un processus continu admettant une $(2n)$-variation,

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_u)d^{\circ}X_u + \sum_{j=1}^{n-1} k_{1,j}^{\delta_{1/2}}\int_0^t f^{(2j+1)}(X_u)d^{\delta_{1/2},2j+1}X_u, \tag{2.7}$$

toujours à condition que toutes les intégrales en jeu (sauf éventuellement une) existent.

Preuve du théorème 2.6. Remarquons tout d'abord que les identités (2.5) impliquent

$$m_j = \frac{1}{j+1} \text{ pour tout } j = 1,\cdots,2\ell-1. \tag{2.8}$$

En effet, nous avons

$$m_{2j+1} = \int_0^1 \alpha^{2j+1}\nu(d\alpha) = \int_0^1 (1-\alpha)^{2j+1}\nu(d\alpha) = \sum_{k=0}^{2j+1}(-1)^k C_{2j+1}^k m_k,$$

et, par récurrence,

$$2m_{2j+1} = \sum_{k=0}^{2j}(-1)^k C_{2j+1}^k \frac{1}{k+1} = \frac{1}{j+1}.$$

Pour démontrer le théorème, il suffit de prouver que, pour tous $a,b \in \mathbb{R}$,

$$f(b) = f(a) + (b-a)\int_0^1 f'(a+\alpha(b-a))\nu(d\alpha) \tag{2.9}$$

$$+\sum_{j=\ell}^{n-1} k_{\ell,j}^{\nu} f^{(2j+1)}(\frac{a+b}{2})(b-a)^{2j+1} + (b-a)^{2n}C(a,b),$$

où $C \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^2)$ vérifie $C(a,a) = 0$. En effet, admettons un instant cette formule et posons $a = X_u$, $b = X_{u+\varepsilon}$, intégrons en u sur $[0,t]$ et divisons par ε. Nous obtenons:

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (f(X_{u+\varepsilon}) - f(X_u))du = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (X_{u+\varepsilon} - X_u)\left(\int_0^1 f'(X_u + \alpha(X_{u+\varepsilon} - X_u))\nu(d\alpha)\right) du$$

$$+\sum_{j=\ell}^{n-1} k_{\ell,j}^{\nu}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t f^{(2j+1)}(\frac{X_u + X_{u+\varepsilon}}{2})(X_{u+\varepsilon} - X_u)^{2j+1}du$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t C(X_u,X_{u+\varepsilon})(X_{u+\varepsilon} - X_u)^{2n}du.$$

Par un simple changement de variable, nous pouvons transformer le membre de gauche en

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} f(X_u)du - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} f(X_u)du,$$

qui tend, quand $\varepsilon \downarrow 0$, vers $f(X_t) - f(X_0)$. Par l'existence de la $(2n)$-variation de X, et puisque $\sup_{u\in[0,t]} C(X_u,X_{u+\varepsilon})$ tend vers zéro, le dernier terme du membre de droite dans l'égalité précédente tend aussi vers zéro. La convergence de tous les termes du membre de droite (sauf éventuellement un) est assurée par hypothèse. Ainsi, le terme qui reste dans le membre de droite est forcé de converger en probabilité et nous obtenons (2.6).

Revenons à la démonstration de la formule (2.9). Grâce à des développements de Taylor, nous pouvons écrire:

$$f(b) - f(a) - (b-a)\int_0^1 f'(a+\alpha(b-a))\nu(d\alpha)$$

$$= \sum_{i=1}^{2n-1} f^{(i)}(\frac{a+b}{2})(b-a)^i\left[\frac{1+(-1)^{i+1}}{i!\,2^i} - \frac{1}{(i-1)!}\int_0^1\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^{i-1}\nu(d\alpha)\right] + O(b-a)^{2n}.$$

De plus, puisque ν est symétrique, chaque intégrale $\int_0^1 \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^{2k+1}\nu(d\alpha)$ s'annule pour $k = 0,\ldots,n-1$. D'autre part, en utilisant (2.8), des calculs faciles permettent d'obtenir que

$$\frac{1}{(2j)!}\int_0^1\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^{2j}\nu(d\alpha) = \frac{1}{2^{2j}(2j+1)!}, j = 0,\ldots,\ell-1.$$

Finalement, la formule (2.9) suit et la preuve du théorème est terminée. $\square$

2.3 Le cas du mouvement brownien fractionnaire

Dans cette section, nous explorons l'existence et la non-existence de $\int_0^t g(X_u) d^{\nu,m} X_u$ quand $X = B^H$ est un mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst $H \in (0,1)$ et ν une mesure de probabilité sur [0,1]. Nous désignons toujours par μ_{2n} le moment d'ordre $2n$ de la loi normale centrée et réduite. Le théorème suivant donne une description complète des différents cas possibles:

Théorème 2.3.1. *Soient $m \geq 2$ un entier et ν une mesure de probabilité sur* [0,1].

1. *Supposons que $m = 2n$ soit pair et que g soit une fonction localement bornée. Alors*
   (a) *si $2nH \geq 1$ alors $\int_0^t g(B_u^H) d^{\nu,2n} B_u^H$ existe et*
   $$\int_0^t g(B_u^H) d^{\nu,2n} B_u^H = \int_0^t g(B_u^H) d[B^H]_u^{(2n)} = \mu_{2n} \begin{cases} \int_0^t g(B_u^H) du & \text{si } 2nH = 1 \\ 0 & \text{si } 2nH > 1; \end{cases} \tag{2.1}$$
   (b) *si $2nH < 1$ alors $\int_0^t g(B_u^H) d^{\nu,2n} B_u^H$ n'existe pas en général.*
2. *Supposons que $m = 2n+1$ soit impair et que g soit une fonction localement bornée. Alors*
   (a) *si $(2n+1)H > \frac{1}{2}$ alors $\int_0^t g(B_u^H) d^{\delta_{1/2},2n+1} B_u^H$ existe et vaut 0;*
   (b) *si $(2n+1)H = \frac{1}{2}$ alors $\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (B_{u+\varepsilon}^H - B_u^H)^{2n+1} du$ converge en loi vers une loi gaussienne centrée, quand $\varepsilon \downarrow 0$;*
   (c) *si $(2n+1)H < \frac{1}{2}$ alors $\int_0^t g(B_u^H) d^{\delta_{1/2},2n+1} B_u^H$ n'existe pas en général.*
3. *Supposons que $m = 2n+1$ soit impair, que g soit une fonction de classe C^{2n+1} et que ν soit symétrique. Alors*
   (a) *si $(2n+1)H > \frac{1}{2}$ alors $\int_0^t g(B_u^H) d^{\nu,2n+1} B_u^H$ existe et s'annule;*
   (b) *si $(2n+1)H < \frac{1}{2}$ alors $\int_0^t g(B_u^H) d^{\nu,2n+1} B_u^H$ n'existe pas en général.*

La preuve de ce théorème, longue et technique, est repoussée dans la section 7. Pour l'instant, contentons-nous de l'utiliser dans des cas particuliers. Nous avons tout d'abord le:

Corollaire 2.3.2. *Soient $n \geq 1$ un entier, g une fonction continue et $t \geq 0$. Alors, si $(2n+1)H > \frac{1}{2}$, pour tout entier $\ell \geq n$, les intégrales $\int_0^t g(B_u^H) d^{\delta_{1/2},2\ell+1} B_u^H$ existent et s'annulent.*

Par exemple:

- si $H > \frac{1}{6}$, les intégrales $\int_0^t g(B_u^H) d^{\delta_{1/2},\ell} B_u^H$ existent et sont nulles pour tout entier impair $\ell \geq 3$.
- si $\frac{1}{10} < H \leq \frac{1}{6}$, les intégrales $\int_0^t g(B_u^H) d^{\delta_{1/2},3} B_u^H$ n'existent pas en général tandis que les intégrales $\int_0^t g(B_u^H) d^{\delta_{1/2},\ell} B_u^H$ existent et sont nulles pour tout entier impair $\ell \geq 5$.

Du théorème 2.3.1 découle aussi la généralisation de (1.5) suivante:

Corollaire 2.3.3. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $g \in C^{2n-1}(\mathbb{R})$. Supposons que B^H admette une $(2n)$-variation c'est-à-dire que $2nH \geq 1$. Alors, les intégrales forward et backward d'ordre $2n-1$*

existent et nous avons:

$$\int_0^t g(B_u^H)d^{-(2n-1)}B_u^H = -\int_0^t g(B_u^H)d^{+(2n-1)}B_u^H \tag{2.2}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 2nH > 1 \\ -\frac{\mu_{2n}}{2}\displaystyle\int_0^t g'(B_u^H)du & \text{si} \quad 2nH = 1 \end{cases},$$

où μ_{2n} désigne le moment d'ordre $2n$ d'une loi normale centrée réduite.

Preuve. Choisissons $\nu = \frac{\delta_0+\delta_1}{2}$ dans le théorème 2.3.1. Puisque $g \in C^{2n-1}(\mathbb{R})$ et $(2n-1)H > \frac{1}{2}$, nous en déduisons que $\int_0^t g(B_u^H)d^{\circ(2n-1)}B_u^H = 0$. L'égalité (2.2) est donc une conséquence de la remarque 2.1.7 a), b) et de la proposition 2.1.4.

□

Revenons maintenant à la formule d'Itô pour le mouvement brownien fractionnaire. Du théorème 2.2.7 et du corollaire 2.3.2, nous tirons le résultat principal de cette section:

Théorème 2.3.4. *1. Si $H > \frac{1}{6}$ et si $f \in C^6(\mathbb{R})$ alors l'intégrale $\int_0^t f'(B_u^H)d^{\nu,1}B_u^H$ existe pour n'importe quelle mesure symétrique ν et nous avons*

$$f(B_t^H) = f(0) + \int_0^t f'(B_u^H)d^{\nu,1}B_u^H. \tag{2.3}$$

2. Soit $r \geq 2$ un entier. Si $(2r+1)H > \frac{1}{2}$ et si $f \in C^{4r+2}(\mathbb{R})$ alors l'intégrale $\int_0^t f'(B_u^H)d^{\nu,1}B_u^H$ existe pour toute mesure de probabilité symétrique ν vérifiant

$$m_{2j} := \int_0^1 \alpha^{2j}\nu(d\alpha) = \frac{1}{2j+1} \text{ pour } j = 1,\cdots,r-1. \tag{2.4}$$

De plus, nous avons:

$$f(B_t^H) = f(B_0^H) + \int_0^t f'(B_u^H)d^{\nu,1}B_u^H. \tag{2.5}$$

Preuve. Si $H > \frac{1}{6}$, les intégrales $\int_0^t f^{(3)}(B_u^H)d^{\delta_{1/2},3}B_u^H$ et $\int_0^t f^{(5)}(B_u^H)d^{\delta_{1/2},5}B_u^H$ existent et s'annulent (voir le corollaire 2.3.2). Le théorème 2.2.7 appliqué à $n = 3$ et $\ell = 1$ donne alors (2.3).

Toujours grâce au corollaire 2.3.2, si $H > \frac{1}{4r+2}$, les intégrales $\int_0^t f^{(2\ell+1)}(B_u^H)d^{\delta_{1/2},2\ell+1}B_u^H$ existent et s'annulent pour $\ell \geq r$. Le théorème 2.2.7 appliqué à $n = 2r+1$ et $\ell = r$ donne alors (2.5).

□

Remarque 2.3.5. 1. La mesure de probabilité symétrique $\frac{\delta_0+\delta_1}{2}$ vérifie $m_{2j} = \frac{1}{2}$ pour tout entier $j \geq 1$. Par conséquent, la deuxième partie du théorème précédent ne s'applique pas. Toutefois, de la première partie, nous tirons que pour $H > \frac{1}{6}$ et $f \in C^6(\mathbb{R})$,

$$f(B_t^H) = f(0) + \int_0^t f'(B_u^H)d^{\circ}B_u^H. \tag{2.6}$$

Vu ce que nous avons rappelé dans l'introduction, nous obtenons donc que $H = \frac{1}{6}$ est la barrière pour la validité de la formule d'Itô-Stratonovich, ce qui constitue un des résultat important de notre travail. En particulier, nous avons obtenu l'extension maximale du résultat de Gradinaru *et al* [26] qui montrait la validité de (2.6) pour $H \geq \dfrac{1}{4}$.

2. Un exemple de mesure de probabilité satisfaisant (2.4) est donné par

$$\nu = \sum_{j=0}^{2(r-1)} \gamma_j \, \delta_{j/(2r-2)} \text{ avec } \gamma_j = \int_0^1 \prod_{k \neq j} \frac{2(r-1)u - k}{j-k} du. \tag{2.7}$$

En effet, on peut écrire, grâce à la formule de Newton-Côtes (voir par exemple [46], p. 118):

$$P(1) = P(0) + \int_0^1 P'(x)\nu(dx) \text{ avec } P \in \mathbb{R}_{2r-1}[X].$$

En choisissant $P(X) = X^{2j+1}$ pour $j \in \{1,...,r-1\}$, nous obtenons $1 = (2j+1)m_{2j}$, autrement dit la condition (2.4). Les intégrales associées à ces mesures particulières seront appelées intégrales de Newton-Côtes dans la suite.

2.4 Preuve du théorème 2.3.1

Premier pas: preuves des points immédiats du théorème.

Dans la suite, N désigne une variable aléatoire normale et centrée.

– (preuve de 1) Dans le théorème 3.2, il est prouvé que, si C est un processus continu, quand $\varepsilon \downarrow 0$:

$$\int_0^t C_u \left(\frac{B^H_{u+\varepsilon} - B^H_u}{\varepsilon^H} \right)^{2n} du \to \mu_{2n} \int_0^t C_u du$$

presque sûrement uniformément sur chaque intervalle compact. En utilisant ce résultat, nous obtenons facilement, quand $\varepsilon \downarrow 0$:

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t du (B^H_{u+\varepsilon} - B^H_u)^{2n} \int_0^1 g(B^H_u + \alpha(B^H_{u+\varepsilon} - B^H_u))\nu(d\alpha) \sim \varepsilon^{2nH-1} \mu_{2n} \int_0^t g(B^H_u) du,$$

presque sûrement uniformément (en t) sur chaque intervalle compact. Le premier point du théorème 2.3.1 en découle.

– (preuve de 2.b) Soit $m \geq 3$ un entier impair et supposons que $H = \frac{1}{2m}$. Fixons $t \geq 0$. Grâce au théorème 3.6, nous savons que, quand $\varepsilon \to 0$,

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \left(B^{\frac{1}{2m}}_{u+\varepsilon} - B^{\frac{1}{2m}}_u \right)^m du = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t \left(\frac{B^{\frac{1}{2m}}_{u+\varepsilon} - B^{\frac{1}{2m}}_u}{\varepsilon^{\frac{1}{2m}}} \right)^m du \xrightarrow{\text{(loi)}} \sqrt{c_{m,H}\, t} N$$

(voir aussi la proposition 2.3 et la remarque 2.4 dans Gradinaru *et al* [26]).

– (preuve de 2.c) En supposant que $\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (B^H_{u+\varepsilon}-B^H_u)^m du$ converge en probabilité, quand $\varepsilon \to 0$, vers une variable aléatoire Z, nous en déduisons que

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}-mH}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (B^H_{u+\varepsilon}-B^H_u)^m du \overset{\text{(loi)}}{\longrightarrow} 0 \text{ quand } \varepsilon \to 0.$$

Mais cette quantité est aussi égale à $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t \left(\frac{B^H_{u+\varepsilon}-B^H_u}{\varepsilon^H}\right)^m du$ et converge donc en loi, vu le théorème 3.2.1, vers $\sqrt{c_{m,H}t}\,N$. Nous obtenons une contradiction.

– (preuve de 3) Dès que le point 2.a) du théorème sera prouvé, 3) sera une conséquence directe de la proposition 2.2.4.

Nous procédons maintenant à la preuve du point 2.a)

Deuxième pas: première réduction.

– Par un argument de localisation (voir par exemple la preuve de la proposition 2.2.4), nous pouvons supposer que g est bornée.
– Pour simplifier, nous fixons $t=1$.
– Nous pouvons supposer que $H \le \frac{1}{m} < \frac{1}{2}$. En effet, grâce à l'inégalité suivante

$$\mathrm{E}\left|\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 g(\frac{B^H_u+B^H_{u+\varepsilon}}{2})(B^H_{u+\varepsilon}-B^H_u)^m du\right| \le \frac{\text{cst}}{\varepsilon}\int_0^1 \mathrm{E}|B^H_{u+\varepsilon}-B^H_u|^m du = \text{cst}\,\varepsilon^{mH-1},$$

nous obtenons facilement que l'intégrale $\int_0^1 g(B^H_u)d^{\delta_{1/2},m}B^H_u$ existe et s'annule si $H > \frac{1}{m}$.
– Par conséquent, il suffit de démontrer le:

Lemme 2.4.1. *Soit $m \ge 3$ un entier impair. Si $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction bornée, alors l'intégrale $\int_0^1 g(B^H_u)d^{\delta_{1/2},m}B^H_u$ existe et s'annule pour $\frac{1}{2m} < H \le \frac{1}{m} < \frac{1}{2}$.*

– Pour prouver le lemme 2.4.1, nous considérons

$$J^{(m)}_\varepsilon(g) := \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 g(\frac{B^H_{u+\varepsilon}+B^H_u}{2})(B^H_{u+\varepsilon}-B^H_u)^m du$$

et nous prouvons que

$$E\{J^{(m)}_\varepsilon(g)^2\} \tag{2.8}$$
$$= \frac{1}{2\varepsilon^2}\iint\limits_{D_0} E\left\{g(\frac{B^H_{u+\varepsilon}+B^H_u}{2})g(\frac{B^H_{v+\varepsilon}+B^H_v}{2})(B^H_{u+\varepsilon}-B^H_u)^m(B^H_{v+\varepsilon}-B^H_v)^m\right\}dudv$$

tend vers zéro quand $\varepsilon \downarrow 0$. Ici, $D_0 := \{0<u<v<1\}$.

– Il suffit d'analyser l'intégrale dans (2.8) seulement sur

$$D_\varepsilon := \{\varepsilon^{1-\rho} < u < v < 1, \varepsilon^{1-\rho} < v - u < 1\}, \text{ avec } \rho > 0 \text{ assez petit.}$$

En effet, en utilisant l'hypothèse sur g, la valeur absolue de

$$\mathcal{J}'(\varepsilon) := \frac{1}{2\varepsilon^2} \iint_{D_0 \setminus D_\varepsilon} E\{g(\frac{B^H_{u+\varepsilon} + B^H_u}{2}) g(\frac{B^H_{v+\varepsilon} + B^H_v}{2})(B^H_{u+\varepsilon} - B^H_u)^m (B^H_{v+\varepsilon} - B^H_v)^m\} dudv$$

peut être bornée par

$$\begin{aligned}\frac{\text{cst}}{\varepsilon^2} \iint_{D_0 \setminus D_\varepsilon} E\left[|B^H_{u+\varepsilon} - B^H_u|^m |B^H_{v+\varepsilon} - B^H_v|^m\right] dudv &\leq \text{cst}\, \varepsilon^{2mH-2} \text{mes}(D_0 \setminus D_\varepsilon) \\ &\leq \text{cst}\, \varepsilon^{2mH-1-\rho}.\end{aligned}$$

En choisissant $0 < \rho < 2mH - 1$, nous voyons que $\mathcal{J}'(\varepsilon)$ converge vers 0, quand $\varepsilon \downarrow 0$. Ainsi, il suffit de prouver que

$$\mathcal{J}(\varepsilon) := \frac{1}{2\varepsilon^2} \iint_{D_\varepsilon} E\{g(\frac{B^H_{u+\varepsilon} + B^H_u}{2}) g(\frac{B^H_{v+\varepsilon} + B^H_v}{2})(B^H_{u+\varepsilon} - B^H_u)^m (B^H_{v+\varepsilon} - B^H_v)^m\} dudv$$

tend vers zéro quand $\varepsilon \downarrow 0$.

Troisième pas: régression linéaire.

Pour simplifier les notations, nous otons dans la suite l'indice H de B^H. Fixons $\varepsilon > 0$ et $(u,v) \in D_\varepsilon$. Considérons le vecteur gaussien centré (G_1,G_2,G_3,G_4) où

$$(G_1,G_2,G_3,G_4) := (B_{u+\varepsilon} + B_u, B_{v+\varepsilon} + B_v, B_{u+\varepsilon} - B_u, B_{v+\varepsilon} - B_v).$$

Sa matrice de covariance est donnée par blocs par

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda^\star_{21} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix},$$

où Λ_{11} (resp. Λ_{22}) est la matrice de covariance de (G_1,G_2) (resp. (G_3,G_4)) et

$$\Lambda_{21} = \begin{pmatrix} \text{Cov}(G_3,G_1) & \text{Cov}(G_3,G_2) \\ \text{Cov}(G_4,G_1) & \text{Cov}(G_4,G_2) \end{pmatrix}.$$

Une régression linéaire implique que

$$\begin{pmatrix} G_3 \\ G_4 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix},$$

où (Z_3,Z_4) est un vecteur gaussien centré indépendant de (G_1,G_2) et

$$A = \Lambda_{21}\Lambda_{11}^{-1}.$$

Nous avons

$$\Lambda_{11} = 2\begin{pmatrix} K^\varepsilon(u,u) & K^\varepsilon(u,v) \\ K^\varepsilon(u,v) & K^\varepsilon(v,v) \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

avec

$$K^\varepsilon(u,v) := \frac{1}{2}((u+\varepsilon)^{2H} + (v+\varepsilon)^{2H} + u^{2H} + v^{2H} - |v-u|^{2H} - \frac{1}{2}|v-u-\varepsilon|^{2H} - \frac{1}{2}|v-u+\varepsilon|^{2H}). \tag{2.10}$$

Notons que $\lim_{\varepsilon\to 0} K^\varepsilon(u,v) = K_H(u,v)$, la covariance de B_u et B_v. Nous avons

$$\Lambda_{21} = \begin{pmatrix} \alpha(\varepsilon,u) & \alpha(\varepsilon,u) + \frac{1}{2}\alpha(\varepsilon,v-u) - \frac{1}{2}\alpha(-\varepsilon,v-u) \\ \alpha(\varepsilon,v) + \frac{1}{2}\alpha(\varepsilon,v-u) - \frac{1}{2}\alpha(-\varepsilon,v-u) & \alpha(\varepsilon,v) \end{pmatrix},$$

avec

$$\alpha(\varepsilon,u) = (u+\varepsilon)^{2H} - u^{2H} = \varepsilon u^{2H-1}\Psi(\frac{\varepsilon}{u}), \tag{2.11}$$

où $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée, donnée par $\Psi(x) = \frac{(1+x)^{2H}-1}{x}$.
Puisque Λ_{11} est une matrice symétrique définie positive, nous pouvons décomposer Λ_{11} en $MM^\star$, M étant la matrice de Cholesky de Λ_{11}, c'est-à-dire

$$M := \sqrt{2}\begin{pmatrix} \sqrt{K^\varepsilon(u,u)} & 0 \\ \frac{K^\varepsilon(u,v)}{\sqrt{K^\varepsilon(u,u)}} & \sqrt{K^\varepsilon(v,v) - \frac{K^\varepsilon(u,v)^2}{K^\varepsilon(u,u)}} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, si nous définissons le vecteur gaussien centré (N_1,N_2) par

$$\begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix},$$

les variables aléatoires N_1 et N_2 sont indépendantes et nous avons

$$\begin{pmatrix} G_3 \\ G_4 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

avec $R = \Lambda_{21}M^{\star\,-1} = \{r_{ij}\}_{1\le i,j\le 2}$. Par commodité, nous posons

$$\begin{pmatrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_4 \end{pmatrix} := A\begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11}N_1 + r_{12}N_2 \\ r_{21}N_1 + r_{22}N_2 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Quatrième pas: découpage de $\mathcal{J}(\varepsilon)$ en trois termes.

Nous avons

$$\mathcal{J}(\varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon^2}\iint_{D_\varepsilon} E\{g(\frac{G_1}{2})g(\frac{G_2}{2})G_3^m G_4^m\}dudv$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon^2} \iint_{D_\varepsilon} E\{g(\frac{G_1}{2})g(\frac{G_2}{2})(\Gamma_3 + Z_3)^m(\Gamma_4 + Z_4)^m\}dudv = \mathcal{J}_1(\varepsilon) + \mathcal{J}_2(\varepsilon) + \mathcal{J}_3(\varepsilon),$$

où

$$\mathcal{J}_1(\varepsilon) := \frac{1}{2\varepsilon^2} \iint_{D_\varepsilon} E\{g(\frac{G_1}{2})g(\frac{G_2}{2})Z_3^m Z_4^m\}dudv,$$

$$\mathcal{J}_2(\varepsilon) := \frac{m}{2\varepsilon^2} \iint_{D_\varepsilon} E\{g(\frac{G_1}{2})g(\frac{G_2}{2})(\Gamma_3 Z_3^{m-1} Z_4^m + \Gamma_4 Z_3^m Z_4^{m-1})\}dudv$$

et

$$\mathcal{J}_3(\varepsilon) := \frac{1}{2\varepsilon^2} \iint_{D_\varepsilon} E\{g(\frac{G_1}{2})g(\frac{G_2}{2}) \sum_{j=0}^m \sum_{k=2}^m C_m^j C_m^k (\Gamma_3^j Z_3^{m-j} \Gamma_4^k Z_4^{m-k} + \Gamma_3^k Z_3^{m-k} \Gamma_4^j Z_4^{m-j})\}dudv.$$

• Remarquons que $\mathcal{J}_2(\varepsilon) = 0$.
En effet, par l'indépendance de (G_1,G_2) et (Z_3,Z_4), nous pouvons écrire

$$E\{g(\frac{G_1}{2})g(\frac{G_2}{2})(\Gamma_3 Z_3^{m-1} Z_4^m + \Gamma_4 Z_3^m Z_4^{m-1})\} = E\{g(\frac{G_1}{2})g(\frac{G_2}{2})\Gamma_3\}E\{Z_3^{m-1} Z_4^m\}$$

$$+E\{g(\frac{G_1}{2})g(\frac{G_2}{2})\Gamma_4\}E\{Z_3^m Z_4^{m-1}\} = 0,$$

comme nous le voyons en appliquant la première partie du

Lemme 2.4.2. *Soit (Z_3,Z_4) un vecteur gaussien centré et $m \geq 1$ un entier. Alors*

$$E\{Z_3^{m-1} Z_4^m\} = 0 \tag{2.14}$$

et

$$E\{Z_3^m Z_4^m\} = \sum_{j=0}^{[\frac{m-1}{2}]} c_j E\{Z_3 Z_4\}^{m-2j} \mathrm{Var}(Z_3)^j \mathrm{Var}(Z_4)^j, \tag{2.15}$$

avec c_j des constantes universelles.

La preuve de ce résultat est repoussée au cinquième pas.

• Nous allons prouver que chaque terme dans $\mathcal{J}_3(\varepsilon)$ tend vers zéro.
L'égalité (2.13) implique

$$E\{Z_\ell^2\} = E\{G_\ell^2\} - E\{\Gamma_\ell^2\} \leq E\{G_\ell^2\} = \varepsilon^{2H}, \ell = 3,4. \tag{2.16}$$

Soient $j \neq 0$ et $k \geq 2$. Puisque g est bornée, nous pouvons écrire

$$\frac{1}{2\varepsilon^2} \iint_{D_\varepsilon} \left| E\{g(\frac{G_1}{2})g(\frac{G_2}{2})\Gamma_3^j Z_3^{m-j} \Gamma_4^k Z_4^{m-k}\} \right| dudv \leq \frac{\mathrm{cst}}{\varepsilon^2} \iint_{D_\varepsilon} E\{|\Gamma_3^j Z_3^{m-j} \Gamma_4^k Z_4^{m-k}|\}dudv.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le terme précédent est majoré par

$$\frac{\text{cst}}{\varepsilon^2}\iint\limits_{D_\varepsilon}[E\{\Gamma_3^{2j}Z_3^{2m-2j}\}]^{\frac{1}{2}}[E\{\Gamma_4^{2k}Z_4^{2m-2k}\}]^{\frac{1}{2}}dudv.$$

En utilisant l'indépendance de (G_1,G_2) et (Z_3,Z_4), il vaut aussi

$$\frac{\text{cst}}{\varepsilon^2}\iint\limits_{D_\varepsilon}[E\{\Gamma_3^{2j}\}E\{Z_3^{2m-2j}\}]^{\frac{1}{2}}[E\{\Gamma_4^{2k}\}E\{Z_4^{2m-2k}\}]^{\frac{1}{2}}dudv.$$

Encore par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il est inférieur ou égal à

$$\frac{\text{cst}}{\varepsilon^2}\left(\iint\limits_{D_\varepsilon}E\{\Gamma_3^{2j}\}E\{Z_3^{2m-2j}\}dudv\right)^{\frac{1}{2}}\left(\iint\limits_{D_\varepsilon}E\{\Gamma_4^{2k}\}E\{Z_4^{2m-2k}\}dudv\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Par (2.16) et parce que $H>\frac{1}{2m}$, nous obtenons la borne suivante:

$$\text{cst}\,\varepsilon^{(2m-j-k)H-2}\left(\iint\limits_{D_\varepsilon}E\{\Gamma_3^{2j}\}dudv\right)^{\frac{1}{2}}\left(\iint\limits_{D_\varepsilon}E\{\Gamma_4^{2k}\}dudv\right)^{\frac{1}{2}}\le\text{cst}\,\varepsilon^{2mH-1}.$$

La dernière inégalité est une conséquence du résultat technique suivant, dont la preuve est repoussée elle aussi au cinquième pas:

Lemme 2.4.3. *Soit $k\in\{2,\dots,m\}$ un entier. Alors, pour tout $\eta>0$ assez petit, il existe* $\text{cst}(\eta)>0$ *telle que*

$$\iint\limits_{D_\varepsilon}E\{|\Gamma_\ell|^k\}dudv\le\text{cst}(\eta)\,\varepsilon^{1+kH-\eta},\ell=3,4.$$

Si $j=0$, $k\in\{2,\dots.m\}$ et $\eta>0$, nous avons

$$\frac{1}{2\varepsilon^2}\iint\limits_{D_\varepsilon}\left|E\{g(\frac{G_1}{2})g(\frac{G_2}{2})Z_3^m\Gamma_4^kZ_4^{m-k}\}\right|dudv\le\frac{\text{cst}}{\varepsilon^2}\iint\limits_{D_\varepsilon}E\{|Z_3^m\Gamma_4^kZ_4^{m-k}|\}dudv$$

$$=\frac{\text{cst}}{\varepsilon^2}\iint\limits_{D_\varepsilon}E\{|\Gamma_4|^k\}E\{|Z_3^mZ_4^{m-k}|\}dudv\le\frac{\text{cst}}{\varepsilon^2}\iint\limits_{D_\varepsilon}[E\{Z_3^{2m}\}]^{\frac{1}{2}}[E\{Z_4^{2m-2k}\}]^{\frac{1}{2}}E\{|\Gamma_4|^k\}dudv$$

$$\le\text{cst}\,\varepsilon^{(2m-k)H-2}\iint\limits_{D_\varepsilon}E\{|\Gamma_4|^k\}dudv\le\text{cst}(\eta)\,\varepsilon^{2mH-1-\eta}.$$

Ainsi, $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathcal{J}_3(\varepsilon)=0$ en choisissant $\eta>0$ suffisamment petit.

• Démontrons que $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathcal{J}_1(\varepsilon)=0$.
Par indépendance de (G_1,G_2) et (Z_3,Z_4), nous pouvons écrire

$$\mathcal{J}_1(\varepsilon)=\frac{1}{2\varepsilon^2}\iint\limits_{D_\varepsilon} E\{g(\frac{G_1}{2})g(\frac{G_2}{2})\}E\{Z_3^mZ_4^m\}dudv$$

et, puisque g est bornée, nous avons

$$|\mathcal{J}_1(\varepsilon)|\leq\frac{\text{cst}}{\varepsilon^2}\iint\limits_{D_\varepsilon}|E\{Z_3^mZ_4^m\}|dudv.$$

Nous énonçons le résultat suivant dont la preuve est repoussée encore une fois au cinquième pas:
Lemme 2.4.4. *Pour tout $j\in\{0,...,\frac{m-1}{2}\}$, nous avons*

$$\iint\limits_{D_\varepsilon}|E\{Z_3Z_4\}|^{m-2j}dudv\leq\text{cst}\,\varepsilon^{1+2(m-2j)H}.$$

Maintenant, nous pouvons montrer que $\mathcal{J}_1(\varepsilon)$ tend vers zéro quand $\varepsilon\downarrow 0$ comme suit. Nous savons que $\text{Var}(Z_i)\leq\varepsilon^{2H}$, $i=3,4$. En utilisant (2.15) et le lemme 2.4.4, nous pouvons écrire

$$|\mathcal{J}_1(\varepsilon)|\leq\frac{\text{cst}}{\varepsilon^2}\sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}}\int_{2\varepsilon}^1 dv\int_\varepsilon^{v-\varepsilon}du|E\{Z_3Z_4\}|^{m-2j}\text{Var}(Z_3)^j\text{Var}(Z_4)^j$$

$$\leq\frac{\text{cst}}{\varepsilon^2}\sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}}\varepsilon^{4jH}\int_{2\varepsilon}^1 dv\int_\varepsilon^{v-\varepsilon}du|E\{Z_3Z_4\}|^{m-2j}\leq\text{cst}\,\varepsilon^{2mH-1}$$

et $\mathcal{J}_1(\varepsilon)$ tend vers zéro quand $\varepsilon\to 0$ puisque $H>\frac{1}{2m}$.

Cinquième pas: preuves des lemmes 2.4.2, 2.4.3 et 2.4.4.

Preuve du lemme 2.4.2.
i) (2.14) découle immédiatement du fait que les vecteurs aléatoires (Z_3,Z_4) et $(-Z_3,-Z_4)$ ont la même loi.
ii) Notons $\theta=E\{Z_3Z_4\}$ et $\sigma_i^2=\text{Var}(Z_i)$, $i=3,4$. À l'aide d'une régression linéaire, nous pouvons écrire

$$Z_4=\frac{\theta}{\sigma_3^2}Z_3+\left(\frac{\sigma_3^2\sigma_4^2-\theta^2}{\sigma_3^2}\right)^{\frac{1}{2}}N$$

avec N une variable aléatoire normale centrée réduite indépendante de Z_3. Notons μ_{2k} le moment d'ordre $2k$ de N. Nous avons

$$E\{Z_3^m Z_4^m\} = \sum_{k=0}^{\frac{m-1}{2}} C_m^{2k} \left(\frac{\theta}{\sigma_3^2}\right)^{m-2k} E\{Z_3^{2(m-k)}\} \left(\frac{\sigma_3^2\sigma_4^2 - \theta^2}{\sigma_3^2}\right)^k \mu_{2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{m-1}{2}} \mu_{2k}\mu_{2(m-k)} C_m^{2k} \theta^{m-2k} \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^\ell C_k^\ell \theta^{2\ell} \sigma_3^{2(k-\ell)} \sigma_4^{2(k-\ell)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{m-1}{2}} \sum_{\ell=0}^{k} c_{k,\ell}\, \theta^{m-2(k-\ell)} \sigma_3^{2(k-\ell)} \sigma_4^{2(k-\ell)} = \sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}} c_j\, \theta^{m-2j} \sigma_3^{2j} \sigma_4^{2j}.$$

Le lemme 2.4.2 est donc prouvé.

□

Preuve du lemme 2.4.3.
Nous avons, par (2.13),

$$E\left\{\iint_{D_\varepsilon} |\Gamma_3|^k dudv\right\} \leq \text{cst}\left(\iint_{D_\varepsilon} |r_{11}|^k E\{|N_1|^k\} dudv + \iint_{D_\varepsilon} |r_{12}|^k E\{|N_2|^k\} dudv\right)$$

$$= \text{cst}\left(\iint_{D_\varepsilon} |r_{11}|^k dudv + \iint_{D_\varepsilon} |r_{12}|^k dudv\right)$$

et

$$E\left\{\iint_{D_\varepsilon} |\Gamma_4|^k dudv\right\} \leq \text{cst}\left(\iint_{D_\varepsilon} |r_{21}|^k E\{|N_1|^k\} dudv + \iint_{D_\varepsilon} |r_{22}|^k E\{|N_2|^k\} dudv\right)$$

$$= \text{cst}\left(\iint_{D_\varepsilon} |r_{21}|^k dudv + \iint_{D_\varepsilon} |r_{22}|^k dudv\right).$$

La preuve sera terminée une fois que nous montrerons

$$\iint_{D_\varepsilon} |r_{ij}|^k dudv \leq \text{cst}\, \varepsilon^{1+kH} \tag{2.17}$$

pour $i,j \in \{1,2\}$. Rappelons que

$$R = \Lambda_{21} M^{\star\,-1} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix},$$

avec

$$M^{\star -1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{K^\varepsilon(u,u)}} & -\frac{K^\varepsilon(u,v)}{\sqrt{K^\varepsilon(u,u)\Delta^\varepsilon(u,v)}} \\ 0 & \sqrt{\frac{K^\varepsilon(u,u)}{\Delta^\varepsilon(u,v)}} \end{pmatrix},$$

et

$$\Delta^\varepsilon(u,v) := K^\varepsilon(u,u)K^\varepsilon(v,v) - K^\varepsilon(u,v)^2, \text{ avec } K^\varepsilon(u,v) \text{ donné par (2.10).}$$

De plus, par (2.11),

$$\Lambda_{21}[1,1] = \varepsilon\, u^{2H-1}\Psi(\frac{\varepsilon}{u}),$$

$$\Lambda_{21}[1,2] = \varepsilon\, u^{2H-1}\Psi(\frac{\varepsilon}{u}) + \frac{\varepsilon}{2}(v-u)^{2H-1}\Psi(\frac{\varepsilon}{v-u}) + \frac{\varepsilon}{2}(v-u)^{2H-1}\Psi(-\frac{\varepsilon}{v-u}),$$

$$\Lambda_{21}[2,1] = \varepsilon\, v^{2H-1}\Psi(\frac{\varepsilon}{v}) + \frac{\varepsilon}{2}(v-u)^{2H-1}\Psi(\frac{\varepsilon}{v-u}) + \frac{\varepsilon}{2}(v-u)^{2H-1}\Psi(-\frac{\varepsilon}{v-u}),$$

$$\Lambda_{21}[2,2] = \varepsilon\, v^{2H-1}\Psi(\frac{\varepsilon}{v}).$$

À ce niveau, nous devons établir les estimations suivantes:

Lemme 2.4.5. *Il existe des constantes strictement positives c_1 et c_2 telles que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $(u,v) \in D_\varepsilon$, nous ayons*

$$c_1\, u^{2H} \leq K^\varepsilon(u,u) \leq c_2\, u^{2H}, K^\varepsilon(u,v) \leq c_2 u^H v^H \tag{2.18}$$

$$\Delta^\varepsilon(u,v) \geq c_1\, u^{2H}(v-u)^{2H}. \tag{2.19}$$

Grâce au lemme 2.4.5 et au caractère borné de Ψ, nous en déduisons

$$|r_{11}| \leq \text{cst}\, \varepsilon u^{H-1}, \tag{2.20}$$

$$|r_{21}| \leq \text{cst}\, \varepsilon \left(\frac{v^{2H-1}}{u^H} + \frac{(v-u)^{2H-1}}{u^H} \right), \tag{2.21}$$

$$|r_{12}| \leq \text{cst}\, \varepsilon \left(\frac{u^{H-1}v^H}{(v-u)^H} + \frac{u^{2H-1}}{(v-u)^H} + (v-u)^{H-1} \right), \tag{2.22}$$

$$|r_{22}| \leq \text{cst}\, \varepsilon \left(\frac{v^{3H-1}}{u^H(v-u)^H} + \frac{v^{2H-1}}{(v-u)^H} + \frac{v^H(v-u)^{H-1}}{u^H} \right). \tag{2.23}$$

L'inégalité (2.17) est maintenant une conséquence directe des quatre dernières inégalités, ce qui termine la preuve du lemme 2.4.3. Illustrons, par exemple, pourquoi (2.17) a lieu pour $i = j = 2$, ce cas étant représentatif de la difficulté. Grâce à (2.23), nous pouvons écrire

$$|r_{22}|^k \leq \text{cst}\, \varepsilon^k \left[\frac{1}{u^{kH}(v-u)^{kH}v^{k(1-3H)}} + \frac{1}{v^{k(1-2H)}(v-u)^{kH}} + \frac{1}{(v-u)^{k(1-H)}u^{kH}} \right],$$

pour $(u,v) \in D_\varepsilon$. Soit $\mu > 0$ fixé. Posons

$$M = M(\mu) = \iint_{D_0} \frac{dudv}{u^{1-\mu}(v-u)^{1-\mu}v^{1-\mu}} + \iint_{D_0} \frac{dudv}{(v-u)^{1-\mu}v^{1-\mu}} + \iint_{D_0} \frac{dudv}{u^{1-\mu}(v-u)^{1-\mu}} < \infty.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\iint_{D_\varepsilon} \frac{dudv}{u^{1-\mu}(v-u)^{1-\mu}v^{1-\mu}} + \iint_{D_\varepsilon} \frac{dudv}{(v-u)^{1-\mu}v^{1-\mu}} + \iint_{D_\varepsilon} \frac{dudv}{u^{1-\mu}(v-u)^{1-\mu}} \leq M(\mu).$$

En utilisant le fait que $\varepsilon^{1-\rho} \geq \varepsilon$, il vient:

$$\iint_{D_\varepsilon} |r_{22}|^k dudv \leq \text{cst} \left[\varepsilon^{kH+3-3\mu} + \varepsilon^{kH+2-2\mu} + \varepsilon^{2-2\mu}\right]. \tag{2.24}$$

Il est clair, pour μ assez petit, que $kH+3-3\mu \geq 1+kH-\eta$ et $2-2\mu+kH \geq 1+kH-\eta$. On a aussi $2-2\mu \geq 1+kH-\eta$ car (*cf.* les hypothèses du Lemme 2.4.1), $H \leq \frac{1}{m} \leq \frac{1}{k}$. Ainsi, (2.24) implique (2.23).

□

Preuve du lemme 2.4.5.
Puisque $0 < 2H < 1$, nous avons, pour tous $x,y > 0$,

$$(x+y)^{2H} \geq 2^{2H-1}(x^{2H}+y^{2H}) \geq \frac{1}{2}(x^{2H}+y^{2H}).$$

Nous en déduisons

$$K^\varepsilon(u,u) = (u+\varepsilon)^{2H} + u^{2H} - \frac{\varepsilon^{2H}}{2} \geq \frac{3}{2}u^{2H}$$

et

$$K^\varepsilon(u,u) \leq 2(2^H+1)u^{2H},$$

puisque $u > \varepsilon^{1-\rho} > \varepsilon$.
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$2K^\varepsilon(u,v) = E\{G_1G_2\} \leq \mathrm{Var}(\mathrm{G}_1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{Var}(\mathrm{G}_2)^{\frac{1}{2}} = 2K^\varepsilon(u,u)^{\frac{1}{2}}K^\varepsilon(v,v)^{\frac{1}{2}} \leq 4(2^H+1)u^Hv^H.$$

Il reste à justifier la minoration pour Δ^ε. Posons

$$\frac{\Delta^\varepsilon(u,v)}{u^{2H}(v-u)^{2H}} = \varphi(\frac{\varepsilon}{u},\frac{v}{u})$$

avec $\varphi : [0,1]\times]1,+\infty[$ définie par

$$4\varphi(\delta,x) := \frac{x^{2H}(x-1-\delta)^{2H}}{(x-1)^{2H}} + 2\frac{(1+\delta)^{2H}x^{2H}}{(x-1)^{2H}} + 2x^{2H} + 2(1+\delta)^{2H} + 2(x+\delta)^{2H} - \frac{1}{(x-1)^{2H}}$$
$$-(x-1)^{2H} - \frac{x^{4H}}{(x-1)^{2H}} + \frac{(1+\delta)^{2H}(x-1+\delta)^{2H}}{(x-1)^{2H}} - \frac{1}{4}\frac{(x-1+\delta)^{4H}}{(x-1)^{2H}} - 2\frac{\delta^{2H}(x+\delta)^{2H}}{(x-1)^{2H}}$$
$$-\frac{1}{2}\frac{(x-1-\delta)^{2H}(x-1+\delta)^{2H}}{(x-1)^{2H}} - 2\frac{(1+\delta)^{2H}\delta^{2H}}{(x-1)^{2H}} - (x-1+\delta)^{2H} - (x-1-\delta)^{2H} - 2\frac{(1+\delta)^{2H}}{(x-1)^{2H}}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{x^{2H}(x-1+\delta)^{2H}}{(x-1)^{2H}}+\frac{(x+\delta)^{2H}(x-1-\delta)^{2H}}{(x-1)^{2H}}-2\frac{(x+\delta)^{2H}x^{2H}}{(x-1)^{2H}}-2\frac{\delta^{2H}x^{2H}}{(x-1)^{2H}}\\
&+\frac{(x+\delta)^{2H}(x-1+\delta)^{2H}}{(x-1)^{2H}}-\frac{(1+\delta)^{4H}}{(x-1)^{2H}}+\frac{(1+\delta)^{2H}(x-1-\delta)^{2H}}{(x-1)^{2H}}+\frac{(x-1-\delta)^{2H}}{(x-1)^{2H}}+2\\
&-\frac{1}{4}\frac{(x-1-\delta)^{4H}}{(x-1)^{2H}}+2\frac{(x+\delta)^{2H}}{(x-1)^{2H}}-2\frac{\delta^{2H}}{(x-1)^{2H}}+\frac{(x-1+\delta)^{2H}}{(x-1)^{2H}}+\frac{\delta^{4H}}{(x-1)^{2H}}\\
&+2\frac{(1+\delta)^{2H}(x+\delta)^{2H}}{(x-1)^{2H}}+2\frac{x^{2H}}{(x-1)^{2H}}-\frac{(x+\delta)^{4H}}{(x-1)^{2H}}.
\end{aligned}
$$

Remarquons que

$$4\varphi(0,x)=2\left(\frac{x}{x-1}\right)^{2H}-\left(\frac{1}{x-1}\right)^{2H}-(x-1)^{2H}+2+2x^{2H}-\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^{2H}.$$

En fait, si $v>u$, $\varphi(0,\frac{v}{u})u^{2H}(v-u)^{2H}=\Delta^0(u,v)$ est le déterminant de la matrice de covariance de (B_u,B_v). Par conséquent,

$$\forall x>1, \varphi(0,x)>0.$$

Il n'est pas difficile de voir que

$$\lim_{x\downarrow 1}\varphi(0,x)=\lim_{x\uparrow\infty}\varphi(0,x)=4.$$

Nous en déduisons que l'infimum de $\varphi(0,\cdot)$ est atteint et est strictement positif. Précisément, il existe une constante $c_1>0$ telle que, pour tout $v>u$

$$\varphi(0,\frac{v}{u})\geq 2c_1.$$

Nous obtiendrons la borne inférieure (2.19) en prouvant

$$\exists c,\alpha>0, \forall\varepsilon>0, \forall(u,v)\in D_\varepsilon:\ \left|\varphi(\frac{\varepsilon}{u},\frac{v}{u})-\varphi(0,\frac{v}{u})\right|\leq c\,\varepsilon^\alpha. \tag{2.25}$$

En effet, si $\varepsilon>0$ est assez petit et si $(u,v)\in D_\varepsilon$ alors (2.19) a lieu. Pour montrer (2.25), nous prouvons

$$\exists c,\alpha>0, \forall\delta>0, \forall x\geq 1+\delta^{1-\rho}:\ |\varphi(\delta,x)-\varphi(0,x)|\leq c\,\delta^\alpha. \tag{2.26}$$

En effet, si (2.26) a lieu, nous avons, en posant $x=\frac{v}{u}$ et $\delta=\frac{\varepsilon}{u}$,

$$\forall\varepsilon>0, \forall(u,v)\in D_\varepsilon:\ \left|\varphi(\frac{\varepsilon}{u},\frac{v}{u})-\varphi(0,\frac{v}{u})\right|\leq c\left(\frac{\varepsilon}{u}\right)^\alpha\leq c\,\varepsilon^{\rho\alpha}.$$

Pour montrer (2.26), il suffit de prouver que chaque terme dans la définition de $\varphi(\delta,x)$ vérifie une inégalité du type (2.26). Illustrons-le par exemple pour le premier terme. Nous avons

$$\left|\frac{x^{2H}(x-1-\delta)^{2H}}{(x-1)^{2H}}-\frac{x^{2H}(x-1)^{2H}}{(x-1)^{2H}}\right|\leq\frac{x^{2H}}{(x-1)^{2H}}[(x-1-\delta)^{2H}-(x-1)^{2H}]$$

$$\leq \mathrm{cst}\,\delta^{2H}\frac{x^{2H}}{(x-1)^{2H}} = \mathrm{cst}\,\delta^{2H}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{2H}$$

$$\leq \mathrm{cst}\begin{cases}\delta^{2H}, & \text{si } x>2\\ \frac{\delta^{2H}}{\delta^{(1-\rho)2H}}, & \text{si } \delta^{1-\rho}\leq x-1\leq 1\end{cases} \leq \mathrm{cst}\,\delta^{2\rho H}.$$

Dans la troisième inégalité précédente, nous avons utilisé le fait suivant:

$$y\geq\delta>0 \Rightarrow |(y\pm\delta)^{2H}-y^{2H}|\leq 2H\delta^{2H}.$$

Les autres termes se traîtent de même. La preuve du lemme 2.4.5 est donc terminée. □

Preuve du lemme 2.4.4.
Puisque

$$D_\varepsilon \subset \{\varepsilon<u<v<1, \varepsilon<v-u<1\},$$

il suffit de prouver que

$$\int_{2\varepsilon}^1 dv\int_\varepsilon^{v-\varepsilon} du|E\{Z_3Z_4\}|^{m-2j} \leq \mathrm{cst}\,\varepsilon^{1+2(m-2j)H}.$$

Puisque (G_1,G_2) et (Z_3,Z_4) sont indépendants, nous avons

$$E\{G_3G_4\} = E\{(\Gamma_3+Z_3)(\Gamma_4+Z_4)\} = E\{\Gamma_3\Gamma_4\}+E\{Z_3Z_4\}$$

et

$$|E\{Z_3Z_4\}|^{m-2j} \leq \mathrm{cst}(|E\{G_3G_4\}|^{m-2j}+|E\{\Gamma_3\Gamma_4\}|^{m-2j}).$$

i) Nous pouvons écrire

$$\int_{2\varepsilon}^1 dv\int_\varepsilon^{v-\varepsilon} du|E\{\Gamma_3\Gamma_4\}|^{m-2j} \leq \int_{2\varepsilon}^1 dv\int_\varepsilon^{v-\varepsilon} duE\{\Gamma_3^2\}^{\frac{m-2j}{2}}E\{\Gamma_4^2\}^{\frac{m-2j}{2}}$$

$$\leq \left(\int_{2\varepsilon}^1 dv\int_\varepsilon^{v-\varepsilon} duE\{\Gamma_3^2\}^{m-2j}\right)^{\frac12}\left(\int_{2\varepsilon}^1 dv\int_\varepsilon^{v-\varepsilon} duE\{\Gamma_4^2\}^{m-2j}\right)^{\frac12}$$

$$\leq \mathrm{cst}\left(\int_{2\varepsilon}^1 dv\int_\varepsilon^{v-\varepsilon} duE\{\Gamma_3^{2(m-2j)}\}\right)^{\frac12}\left(\int_{2\varepsilon}^1 dv\int_\varepsilon^{v-\varepsilon} duE\{\Gamma_4^{2(m-2j)}\}\right)^{\frac12} \leq \mathrm{cst}\,\varepsilon^{1+2(m-2j)H},$$

où la dernière inégalité est obtenue en utilisant le lemme 2.4.3.
ii) Nous avons

$$E\{G_3G_4\} = \frac12(v-u+\varepsilon)^{2H}+\frac12(v-u-\varepsilon)^{2H}-(v-u)^{2H} = \varepsilon^2(v-u)^{2H-2}\Phi(\frac{\varepsilon}{v-u}),$$

où $\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction bornée donnée par $\Phi(x)=\frac{(1+x)^{2H}+(1-x)^{2H}-2}{2x^2}$. Nous en déduisons que

$$\int_{2\varepsilon}^1 dv\int_\varepsilon^{v-\varepsilon} du|E\{G_3G_4\}|^{m-2j} \leq \mathrm{cst}\,\varepsilon^{2(m-2j)}\int_{2\varepsilon}^1 dv\int_0^{v-\varepsilon} du(v-u)^{(2H-2)(m-2j)}$$

$$\leq \mathrm{cst}\, \varepsilon^{2(m-2j)} \int_{2\varepsilon}^{1} dv \int_{2\varepsilon}^{1} dv \int_{\varepsilon}^{v} u^{(2H-2)(m-2j)} du \leq \mathrm{cst}\, \varepsilon^{2(m-2j)} \int_{\varepsilon}^{1} u^{(2H-2)(m-2j)} du$$
$$\leq \mathrm{cst}\, [\varepsilon^{1+2(m-2j)H} + \varepsilon^{2(m-2j)}].$$

Puisque $H < \frac{1}{2}$ et $m-2j \geq 1$, nous avons $1+2H(m-2j) \leq 1+m-2j \leq 2(m-2j)$. Par conséquent,

$$\int_{2\varepsilon}^{1} dv \int_{\varepsilon}^{v-\varepsilon} du |E\{G_3 G_4\}|^{m-2j} \leq \mathrm{cst}\, \varepsilon^{1+2(m-2j)H}$$

et la preuve du lemme 2.4.4 est achevée. $\square$

Chapitre 3

Approximations aux premier et second ordres des intégrales d'ordre m

Ce travail, réalisé en collaboration avec M. Gradinaru, a fait l'objet d'un article publié à *Electronic Journal of Probability* (2003) **8**, no 18.

3.1 Convergence presque sûre

Dans la suite, N désigne une variable aléatoire normale centrée et réduite, indépendante de tous les processus apparaîssant. D'autre part, nous notons B^H un mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst H et $B = B^{\frac{1}{2}}$ un mouvement brownien.

Théorème 3.1.1. *Supposons que $H \in (0,1)$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant, pour tous $x,y \in \mathbb{R}$,*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|^a(1+x^2+y^2)^b, (L > 0, 0 < a \leq 1, b > 0) \tag{3.1}$$

et soit $\{Y_t : t \geq 0\}$ un processus stochastique continu. Alors, presque sûrement, quand $\varepsilon \to 0$,

$$\int_0^t Y_s f(\frac{B^H_{s+\varepsilon} - B^H_s}{\varepsilon^H})ds \to \mathrm{E}\,[f(N)] \int_0^t Y_s ds, \tag{3.2}$$

uniformément sur tout intervalle compact.

Le résultat suivant contient un énoncé du même type, mais pour les martingales continues:

Théorème 3.1.2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale. Supposons que $\{Y_t : t \geq 0\}$ soit un processus continu et que $\{J_t : t \geq 0\}$ soit un processus adapté ayant toutes ses trajectoires localement höldériennes. Soit $\{Z_t : t \geq 0\}$ une martingale continue donnée par $Z_t = Z_0 + \int_0^t J_s dB_s$. Alors, presque sûrement, quand $\varepsilon \to 0$,*

$$\int_0^t Y_s f(\frac{Z_{s+\varepsilon} - Z_s}{\sqrt{\varepsilon}})ds \to \int_0^t Y_s \,\mathrm{E}\,[f(J_s N) | \mathcal{F}_s]\, ds, \tag{3.3}$$

uniformément sur tout intervalle compact. Ici, $\{\mathcal{F}_s, s \geq 0\}$ *désigne la filtration naturelle associée à* Z.

Remarque: 1. Par exemple, si $f(x) = x^m$ alors le membre de droite de (3.3) est égal à $\mathrm{E}\,[N^m] \int_0^t Y_s\, J_s^m\, ds$.
2. Le même résultat a lieu pour les semimartingales continues du type $Z_t = Z_0 + \int_0^t J_s dB_s + \int_0^t K_s ds$. En effet, il n'est pas difficile de se convaincre que la partie variation finie $\int_0^t K_s ds$ n'a pas de contribution sur la limite.

Nota. Je remercie Marc Yor de m'avoir signalé les travaux d'Azaïs et Wschebor [4, 5] et de Wschebor [51], qui ont des liens très étroits avec les théorèmes 3.1.2 et 3.1.1 de cette thèse. Dans le corollaire 2.1 de [5], les auteurs prouvent que, pour $x \in \mathbb{R}$, λ la mesure de Lebesgue, M une martingale continue de la forme $M_t = \int_0^t J_s dB_s$, $(\mathcal{F}_t)$ la filtration naturelle associée à M et $N \sim N(0,1)$ une v.a. indépendante de M:

$$\text{p.s.}, \lim_{\varepsilon \to 0} \lambda \left(\{u \in [0,1];\ \frac{M_{u+\varepsilon} - M_u}{\sqrt{\varepsilon}} \leq x\} \right) = \int_0^1 \mathrm{P}(J_u N \leq x | \mathcal{F}_u) du \tag{3.4}$$

(en fait, dans la version originale [5], les auteurs écrivent $\mathrm{P}(J_u N \leq x)$ au lieu de $\mathrm{P}(J_u N \leq x|\mathcal{F}_u)$; ils ont en effet considéré qu'on pouvait faire comme si le crochet était déterministe, leur résultat étant de nature presque sûre.) Formellement, si on choisit $Y \equiv 1$, $t = 1$ et $f = \mathbf{1}_{]-\infty,x]}$ dans (3.3), on retrouve exactement le résultat du corollaire 2.1 de [5], c'est-à-dire (3.4). Avec les mêmes choix de Y, t et f, le résultat (3.2) correspond à celui donné dans [4]. Signalons toutefois qu'une différence importante entre nos résultats et ceux d'Azaïs et Wschebor est que la convergence dans les théorèmes 3.1.2 et 3.1.1 a lieu en tant que processus (c'est-à-dire uniformément en t), à l'inverse de ceux contenus dans [4, 5] où la convergence a lieu à t fixé.

3.2 Convergence en loi

Soit m un entier impair. Il est bien connu que le monome x^m peut s'écrire en termes de polynômes d'Hermite:

$$x^m = \sum_{k=1}^{m} a_{k,m} H_k(x), \text{ avec } H_k(x) = (-1)^k e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^k}{dx^k} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right), k = 0,1,2, \dots \tag{3.5}$$

Notons que la somme commence avec $k = 1$ puisque m est impair (par exemple $x = H_1(x)$, $x^3 = 3H_1(x) + H_3(x)$ et ainsi de suite).

Théorème 3.2.1. *Soit* $m \geq 3$ *un entier impair et supposons que* $H \in (0,\frac{1}{2}]$. *Alors, quand* $\varepsilon \to 0$,

$$\{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t \left(\frac{B^H_{s+\varepsilon} - B^H_s}{\varepsilon^H} \right)^m ds : t \geq 0\} \xrightarrow{\mathcal{L}} \{\sqrt{c_{m,H}}\beta_t : t \geq 0\}. \tag{3.6}$$

Ici $\{\beta_t : t \geq 0\}$ désigne un mouvement brownien standard issu de 0 et la constante positive $c_{m,H}$ est donnée par

$$c_{m,H} := 2\sum_{k=1}^{m} \frac{a_{k,m}^2}{k!} \int_0^\infty \left[(x+1)^{2H} + |x-1|^{2H} - 2x^{2H}\right]^k dx,$$

où les coefficient $a_{k,m}$ sont donnés par (3.5).

Remarque 3.2.2. Notons que si $H \neq \frac{1}{2}$,

$$(x+1)^{2H} + |x-1|^{2H} - 2x^{2H} \sim H(2H-1)x^{-2(1-H)}, \text{ quand } x \to \infty,$$

et si $H = \frac{1}{2}$,

$$(x+1)^{2H} + |x-1|^{2H} - 2x^{2H} = 0, \text{ quand } x \geq 1.$$

Par conséquent, $c_{m,H} < \infty$ si et seulement si $0 < H \leq \frac{1}{2}$. □

Finalement, énonçons le résultat concernant les martingales:

Théorème 3.2.3. *Soit $m \geq 3$ un entier impair et supposons que $\sigma \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Soit $\{Z_t : t \geq 0\}$ la martingale continue donnée par $Z_t = Z_0 + \int_0^t \sigma(B_s)dB_s$. Alors, quand $\varepsilon \to 0$,*

$$\{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t \left(\frac{Z_{s+\varepsilon}-Z_s}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^m ds : t \geq 0\} \xrightarrow{\mathcal{L}} \{\int_0^t \sigma(\beta_s^{(1)})^m d(\kappa_1\beta_s^{(1)} + \kappa_2\beta_s^{(2)}) : t \geq 0\}. \quad (3.7)$$

Ici $\{(\beta_t^{(1)},\beta_t^{(2)}) : t \geq 0\}$ désigne un mouvement brownien standard bidimensionnel issu de (0,0) tandis que κ_i, $i = 1{,}2$ sont des constantes.

Nota. Je remercie Marc Yor de m'avoir signalé le travail de Berzin-Joseph, León et Ortega [8] dans lequel la convergence en loi de $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t \left[g\left(\frac{B_{s+\varepsilon}-B_s}{\sqrt{\varepsilon}}\right) - E(g(N))\right] ds$ vers un mouvement brownien indépendant de B est énoncée.

3.3 Preuves des théorèmes 3.1.1, 3.1.2 et de la proposition 1.2.1

La démonstration va consister tout d'abord à vérifier la convergence dans L^2 et ensuite combiner un argument de type Borel-Cantelli avec la régularité des trajectoires (voir le lemme 3.3.1 plus bas).

Pour commencer, rappelons une définition classique: l'indice de Hölder γ_0 d'un processus continu $\{W_t : t \geq 0\}$ est le supremum des exposants γ vérifiant, pour tout $T > 0$:

$$\mathrm{P}\left(\{\omega : \exists\, L(\omega) > 0,\, \forall s,t \in [0,T],\, |W_t(\omega) - W_s(\omega)| \leq L(\omega)|t-s|^\gamma\}\right) = 1. \quad (3.8)$$

Nous pouvons maintenant énoncer le critère de convergence presque sûre suivant, que nous utiliserons dans les preuves des théorèmes 3.1.1 et 3.1.2:

Lemme 3.3.1. *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant (3.1), $\{W_t : t \geq 0\}$ un processus continu à trajectoires localement höldériennes d'indice γ_0 et $\{V_t : t \geq 0\}$ un processus continu à variation bornée. Posons*

$$W_\varepsilon^{(f)}(t) := \int_0^t f(\frac{W_{s+\varepsilon} - W_s}{\varepsilon^{\gamma_0}})ds, t \geq 0, \varepsilon > 0, \tag{3.9}$$

et supposons que, pour tout $t \geq 0$, quand $\varepsilon \to 0$,

$$\left\| W_\varepsilon^{(f)}(t) - V_t \right\|_{\mathrm{L}^2}^2 = O(\varepsilon^\alpha), \text{ pour un certain } \alpha > 0. \tag{3.10}$$

Alors, pour tout $t \geq 0$, $\lim_{\varepsilon \to 0} W_\varepsilon^{(f)}(t) = V_t$ presque sûrement et si f est positive, pour tout processus continu $\{Y_t : t \geq 0\}$, alors, presque sûrement, quand $\varepsilon \to 0$,

$$\int_0^t Y_s dW_\varepsilon^{(f)}(s) \to \int_0^t Y_s dV_s \tag{3.11}$$

uniformément sur tout intervalle compact.

Preuve. Nous la découpons en plusieurs pas.

Premier pas. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon_n := n^{-2/\alpha}$. Pour tout $\delta > 0$, nous avons

$$\mathrm{P}\left(|W_{\varepsilon_n}^{(f)}(t) - V_t| > \delta \right) \leq \frac{1}{\delta^2} \mathrm{E}\left[(W_{\varepsilon_n}^{(f)}(t) - V_t)^2 \right] \leq \frac{\mathrm{cst}}{\delta^2} \varepsilon_n^\alpha.$$

Puisque $\sum \varepsilon_n^\alpha < +\infty$, nous en déduisons, par le lemme de Borel-Cantelli, que, pour tout $t \geq 0$,

$$\lim_{n \to \infty} W_{\varepsilon_n}^{(f)}(t) = V(t) \text{ presque sûrement.}$$

Deuxième pas. Fixons $\varepsilon > 0$ et considérons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon \leq \varepsilon_n$. Fixons aussi $\omega \in \Omega$. Notons, pour tout $t \geq 0$,

$$W_\varepsilon^{(f)}(t)(\omega) = W_{\varepsilon_n}^{(f)}(t)(\omega) + \xi_n(t)(\omega) + \zeta_n(t)(\omega),$$

avec

$$\xi_n(t)(\omega) := \int_0^t \left[f(\frac{W_{s+\varepsilon}^{(f)}(\omega) - W_s^{(f)}(\omega)}{\varepsilon^{\gamma_0}}) - f(\frac{W_{s+\varepsilon_n}^{(f)}(\omega) - W_s^{(f)}(\omega)}{\varepsilon^{\gamma_0}}) \right] ds,$$

$$\zeta_n(t)(\omega) := \int_0^t \left[f(\frac{W_{s+\varepsilon_n}^{(f)}(\omega) - W_s^{(f)}(\omega)}{\varepsilon^{\gamma_0}}) - f(\frac{W_{s+\varepsilon_n}^{(f)}(\omega) - W_s^{(f)}(\omega)}{\varepsilon_n^{\gamma_0}}) \right] ds.$$

Pour obtenir, pour tout $t \geq 0$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} W_\varepsilon^{(f)}(t) = V(t) \text{ presque sûrement,}$$

il suffit donc de prouver que $\xi_n(t)(\omega)$ et $\zeta_n(t)(\omega)$ tendent vers zéro quand $n \to \infty$. Pour simplifier les notations, ne précisons plus la dépendance en ω et en f dans la suite. Nous pouvons écrire, pour $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}|\xi_n(t)| &\leq \frac{\text{cst}}{\varepsilon^{a\gamma_0}} \int_0^t |W_{s+\varepsilon} - W_{s+\varepsilon_n}|^a \left[1 + \left(\frac{W_{s+\varepsilon} - W_s}{\varepsilon^{\gamma_0}}\right)^2 + \left(\frac{W_{s+\varepsilon_n} - W_s}{\varepsilon^{\gamma_0}}\right)^2\right]^b ds \\ &\leq \frac{\text{cst}}{\varepsilon_{n+1}^{(a+2b)\gamma_0}} |\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}|^{a(\gamma_0-\delta)} \varepsilon_n^{2b(\gamma_0-\delta)}\, t.\end{aligned}$$

Puisque $\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} = O(n^{-1-2/\alpha})$, nous avons $|\xi_n(t)| = O(n^{-a\gamma_0+\delta(a+\frac{2a+4b}{\alpha})})$ quand $n \to \infty$. Ainsi, $\lim_{n\to\infty} \xi_n(t) = 0$ en choisissant δ assez petit. D'une manière similaire, nous avons

$$\begin{aligned}|\zeta_n(t)| &\leq \text{cst} \left(\frac{1}{\varepsilon^{\gamma_0}} - \frac{1}{\varepsilon_n^{\gamma_0}}\right)^a \int_0^t |W_{s+\varepsilon_n} - W_s|^a \left[1 + \left(\frac{W_{u+\varepsilon} - W_u}{\varepsilon^{\gamma_0}}\right)^2 + \left(\frac{W_{s+\varepsilon_n} - W_s}{\varepsilon^{\gamma_0}}\right)^2\right]^b ds \\ &\leq \frac{\text{cst}}{\varepsilon_{n+1}^{2b\gamma_0}} \left(\frac{1}{\varepsilon_{n+1}^{\gamma_0}} - \frac{1}{\varepsilon_n^{\gamma_0}}\right)^a \varepsilon_n^{(a+2b)(\gamma_0-\delta)}\, t.\end{aligned}$$

Puisque $\varepsilon_n^{-\gamma_0} - \varepsilon_{n+1}^{-\gamma_0} = O(n^{-1-2\gamma_0/\alpha})$, nous avons $|\zeta_n(t)| = O(n^{-a+\delta(a+\frac{2a+4b}{\alpha})})$ quand $n \to \infty$. Encore une fois, nous obtenons $\lim_{n\to\infty} \zeta_n(t) = 0$ en choisissant δ suffisamment petit.

Troisième pas. Nous montrons que l'ensemble de probabilité 1 où nous avons la convergence presque sûre de $W_\varepsilon^{(f)}(t)$ vers $V(t)$ peut être choisi indépendamment de t. Soit Ω^* l'ensemble de probabilité 1 tel que, pour tout $\omega \in \Omega^*$ et tout $t \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+$, on ait $\lim_{\varepsilon\to 0} W_\varepsilon^{(f)}(t)(\omega) = V_t(\omega)$. Fixons un tel ω. Soit $t \in \mathbb{R}^+$ et supposons que $\{s_n\}$ et $\{t_n\}$ soient deux suites de rationnels telles que $s_n \uparrow t$ et $t_n \downarrow t$. Clairement, nous avons

$$W_\varepsilon^{(f)}(s_n)(\omega) \leq W_\varepsilon^{(f)}(t)(\omega) \leq W_\varepsilon^{(f)}(t_n)(\omega).$$

Tout d'abord, en laissant tendre ε vers zéro, nous obtenons

$$V_{s_n}(\omega) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} W_\varepsilon^{(f)}(t)(\omega) \leq \limsup_{\varepsilon\to 0} W_\varepsilon^{(f)}(t)(\omega) \leq V_{t_n}(\omega),$$

et ensuite, en laissant tendre n vers l'infini, nous en déduisons

$$\lim_{\varepsilon\to 0} W_\varepsilon^{(f)}(t)(\omega) = V_t(\omega).$$

Quatrième pas. Si f est positive, nous pouvons appliquer le théorème de Dini pour obtenir que, presque sûrement, $W_\varepsilon^{(f)}(t)$ converge uniformément sur tout intervalle compact vers V_t.

Cinquième pas. Nous allons raisonner trajectoire par trajectoire. Nous fixons donc ω (nous ne préciserons plus la dépendance) et nous écrivons des lettres minuscules au lieu des lettres majuscules. Puisque $w_\varepsilon^{(f)}$ converge simplement vers v, la fonction de répartition de la mesure $dw_\varepsilon^{(f)}$ converge en loi vers la fonction de répartition de la mesure dv. Ainsi, $dw_\varepsilon^{(f)}$ converge faiblement vers dv. Clairement, la mesure dv ne charge pas les points et la fonction $s \mapsto y_s \mathbf{1}_{[0,t]}(s)$ est dv-presque partout continue. Par conséquent,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^\infty y_s \, \mathbf{1}_{[0,t]}(s) \, dw_\varepsilon^{(f)}(s) = \int_0^t y_s \, dv_s.$$

La preuve du critère de convergence presque sûre est terminée. □

Preuve du théorème 3.1.1.

Tout d'abord, notons que si f satisfait (3.1) alors il en est de même pour sa partie positive f_+ et sa partie négative f_-. Ainsi, par linéarité, nous pouvons supposer que f est positive. Nous allons utiliser le lemme 3.3.1 avec $W = B^H$, le mouvement brownien fractionnaire. À l'aide du critère classique de Kolmogorov (voir [40], p. 25), nous savons que B^H admet H pour exposant de Hölder local. Par conséquent, il ne nous reste plus qu'à vérifier le contrôle (3.10). Notons tout d'abord que

$$\mathrm{Var}(B_{u+\varepsilon}^H - B_u^H) = \varepsilon^{2H}$$

et, si $u + \varepsilon \leq u + \sqrt{\varepsilon} < v$,

$$\mathrm{Cov}(B_{u+\varepsilon}^H - B_u^H, B_{v+\varepsilon}^H - B_v^H) = (v-u-\varepsilon)^{2H} + (v-u+\varepsilon)^{2H} - 2(v-u)^{2H} \leq \frac{\mathrm{cst}\varepsilon^2}{(v-u)^{2-2H}} \leq \mathrm{cst}\varepsilon^{1+H},$$

comme nous pouvons le voir en utilisant un développement de Taylor. Ainsi, à l'aide d'une régression linéaire classique, nous obtenons, pour $u + \sqrt{\varepsilon} < v$,

$$\frac{B_{v+\varepsilon}^H - B_v^H}{\varepsilon^H} = O(\varepsilon^{1+H}) N_{u,\varepsilon} + \left(1 + O(\varepsilon^{2(1+H)})\right) M_{u,\varepsilon}, \tag{3.12}$$

uniformément par rapport à u, où $N_{u,\varepsilon} = \frac{B_{u+\varepsilon}^H - B_u^H}{\varepsilon^H}$ et $M_{u,\varepsilon}$ sont deux variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes. Nous pouvons écrire

$$\mathrm{E}\left\{\left[\int_0^t \left(f(\frac{B_{s+\varepsilon}^H - B_s^H}{\varepsilon^H}) - \mathrm{E}\,[f(N)]\right) ds\right]^2\right\} = T_1(\varepsilon) + T_2(\varepsilon) + T_3, \tag{3.13}$$

où

$$T_1(\varepsilon) := 2 \iint_{[0,t]^2} \mathbf{1}_{u<v<u+\sqrt{\varepsilon}} \mathrm{E}\left[f(\frac{B_{u+\varepsilon}^H - B_u^H}{\varepsilon^H}) f(\frac{B_{v+\varepsilon}^H - B_v^H}{\varepsilon^H})\right] dudv,$$

$$T_2(\varepsilon) := 2 \iint_{[0,t]^2} \mathbf{1}_{u+\sqrt{\varepsilon}<v} \mathrm{E}\left[f(\frac{B_{u+\varepsilon}^H - B_u^H}{\varepsilon^H}) f(\frac{B_{v+\varepsilon}^H - B_v^H}{\varepsilon^H})\right] dudv \;\text{ et }\; T_3 := -\mathrm{E}\,[f(N)]^2 \, t^2.$$

En utilisant (3.1) (qui implique en particulier que $|f(x)| \leq \mathrm{cst}(1+|x|^a(1+x^2)^b))$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons que $T_1(\varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon})$. En utilisant encore (3.1) et (3.12), nous en déduisons que $T_2(\varepsilon) = \mathrm{E}\,[f(N)]^2 \, t^2 + O(\varepsilon^{a(1+H)})$. En remplaçant dans (3.13), nous voyons que (3.10) est vérifiée et donc que le lemme 3.3.1 s'applique. La preuve de (3.2) est achevée. □

Preuve du théorème 3.1.2.

Par linéarité, il suffit de démontrer le résultat seulement pour $f(x) = x^m$. D'autre part, par un argument classique de localisation (voir par exemple la preuve de la proposition 2.2.4)), nous pouvons supposer que J est borné.

Grâce au théorème 3.1.1, la convergence (3.3) est valide pour le mouvement brownien $B = B^{\frac{1}{2}}$. Plus précisément, presque sûrement, quand $\varepsilon \to 0$,

$$\int_0^t J_s^m \left(\frac{B_{s+\varepsilon} - B_s}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^m ds \to \mu_m \int_0^t J_s^m ds \tag{3.14}$$

uniformément sur tout intervalle compact.

À ce stade, nous devons établir le lemme technique mais simple suivant:

Lemme 3.3.2. *Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des suites finies δ à valeurs dans $\{1,2\}$. Pour $\delta \in \mathcal{P}$, nous désignons par $k = k(\delta)$ la longueur du support de la suite δ et par $n(\delta) := \sum_{j=1}^{k(\delta)} \delta(j)$. Soient M une martingale, $a < b$ deux réels et notons*

$$I_{a,b,\delta}^{(M)} := \int_a^b dM_{t_1}^{(\delta(1))} \int_a^{t_1} dM_{t_2}^{(\delta(2))} \dots \int_a^{t_{k-1}} dM_{t_k}^{(\delta(k))}, \tag{3.15}$$

avec la convention que $dM^{(1)} = dM$ (différentielle d'Itô) et que $dM^{(2)} = d[M,M]$ (différentielle de Riemann-Stieltjes). Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(M_b - M_a)^n = \sum_{\delta \in \mathcal{P}, n(\delta) = n} c_n(\delta) I_{a,b,\delta}^{(M)}, \tag{3.16}$$

où $c_n(\delta)$ est une constante dont la valeur dépend seulement de δ et de n.

Preuve. Nous faisons une récurrence sur n. Si $n = 1$, nous avons $M_b - M_a = \int_a^b dM_s$. Supposons que (3.16) soit vraie pour l'entier $n \geq 1$ et vérifions-la pour l'entier $n + 1$:

$$(M_b - M_a)^{n+1} = (n+1) \int_a^b (M_s - M_a)^n dM_s + \frac{n(n+1)}{2} \int_a^b (M_s - M_a)^{n-1} d[M,M]_s$$

$$= (n+1) \int_a^b \left(\sum_{\delta \in \mathcal{P}, n(\delta) = n} c_n(\delta) I_{a,s,\delta}^{(M)} \right) dM_s + \frac{n(n+1)}{2} \int_a^b \left(\sum_{\delta \in \mathcal{P}, n(\delta) = n-1} c_n(\delta) I_{a,s,\delta}^{(M)} \right) d[M,M]_s$$

$$= \sum_{\delta \in \mathcal{P}, n(\delta) = n+1} c_{n+1}(\delta) I_{a,b,\delta}^{(M)}.$$

Par conséquent, l'hypothèse de récurrence se transmet et lemme est prouvé. □

Nous pouvons terminer la preuve du théorème 3.1.2. Grâce à l'égalité (3.16), nous pouvons écrire

$$J_s^m (B_{s+\varepsilon} - B_s)^m - (Z_{s+\varepsilon} - Z_s)^m = \sum_{\delta \in \mathcal{P}, n(\delta) = m} c(\delta) (J_s^m I_{s,s+\varepsilon,\delta}^{(B)} - I_{s,s+\varepsilon,\delta}^{(Z)}),$$

où

$$J_s^m I_{s,s+\varepsilon,\delta}^{(B)} - I_{s,s+\varepsilon,\delta}^{(Z)} = \sum_{j=1}^{k} \int_s^{s+\varepsilon} J_s^{\delta(1)} dB^{(\delta(1))}(t_1) \ldots \int_s^{t_{j-2}} J_s^{\delta(j-1)} dB^{(\delta(j-1))}(t_{j-1})$$

$$\times \int_s^{t_{j-1}} (J_s^{\delta(j)} - J_{t_j}^{\delta(j)}) dB^{(\delta(j))}(t_j) \int_s^{t_j} J_{t_{j+1}}^{\delta(j+1)} dB^{(\delta(j+1))}(t_{j+1}) \ldots \int_s^{t_{k-1}} J_{t_k}^{\delta(k)} dB^{(\delta(k))}(t_k).$$

Par hypothèse, les trajectoires de J sont localement höldériennes et, en utilisant la propriété d'isométrie de l'intégrale d'Itô, nous en déduisons (3.10): quand $\varepsilon \to 0$,

$$\mathrm{E}\left\{\left[\int_0^t J_s^m \left(\frac{B_{s+\varepsilon} - B_s}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^m ds - \int_0^t \left(\frac{Z_{s+\varepsilon} - Z_s}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^m ds\right]^2\right\} = O(\varepsilon^\alpha) \text{ pour un certain } \alpha > 0.$$

Énonçons maintenant une modification simple du lemme 3.3.1:

Lemme 3.3.3. *Faisons les mêmes hypothèses sur la fonction f et sur le processus W que dans le lemme 3.3.1. Supposons de plus que $\{\tilde{W}_t : t \geq 0\}$ est un autre processus continu ayant le même indice de Hölder local γ_0 que W. Notons $\tilde{W}_\varepsilon^{(f)}(t)$ le processus associé à $\tilde{W}$ comme dans (3.9). Si f est positive et si, pour tout $t \geq 0$, quand $\varepsilon \to 0$,*

$$\left\|W_\varepsilon^{(f)}(t) - \tilde{W}_\varepsilon^{(f)}(t)\right\|_{\mathrm{L}^2}^2 = O(\varepsilon^\alpha) \text{ pour un certain } \alpha > 0, \tag{3.17}$$

alors nous avons, presque sûrement,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(W_\varepsilon^{(f)}(t) - \tilde{W}_\varepsilon^{(f)}(t)\right) = 0, \tag{3.18}$$

uniformément sur tout intervalle compact.

La preuve est similaire à celle du lemme 3.3.1 et nous la laissons au lecteur. En utilisant ce résultat, nous obtenons que, presque sûrement,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_0^t J_s^m \left(\frac{B_{s+\varepsilon} - B_s}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^m ds - \int_0^t \left(\frac{Z_{s+\varepsilon} - Z_s}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^m ds\right] = 0, \tag{3.19}$$

uniformément sur tout intervalle compact. En combinant (3.19) avec (3.14), nous obtenons finalement (3.3).

□

Preuve de la proposition 1.2.1. Pour démontrer la première partie, nous posons $Y_s = g'(B_s^H)$ et $f(x) = x^2$ dans (3.2). Ainsi, nous obtenons l'existence presque sûre de

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t g'(B_s^H) \frac{(B_{s+\varepsilon}^H - B_s^H)^2}{\varepsilon} ds, \text{ uniformément sur tout intervalle compact.}$$

D'autre part, nous pouvons écrire, pour $a,b \in \mathbb{R}$,

$$G(b) = G(a) + g(a)(b-a) + \frac{g'(\theta_{a,b})}{2}(b-a)^2,$$

avec G une primitive de g et $\theta_{a,b} \in (a,b)$. En posant $a = B_s^H$ et $b = B_{s+\varepsilon}^H$, en intégrant en s sur $[0,t]$ et en divisant par ε, nous obtenons:

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (G(B_{s+\varepsilon}^H) - G(B_s^H))ds = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t g(B_s^H)(B_{s+\varepsilon}^H - B_s^H)ds + \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t g'(\theta_{B_s^H, B_{s+\varepsilon}^H})(B_{s+\varepsilon}^H - B_s^H)^2.$$

Par un changement de variable immédiat, nous pouvons transformer le membre de gauche en

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} G(B_s^H)ds - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} G(B_s^H)ds,$$

qui tend, presque sûrement, quand $\varepsilon \to 0$, vers $G(B_t^H) - G(0)$ uniformément sur tout intervalle compact. Presque sûrement, le dernier terme du membre de droite dans l'égalité précédente converge uniformément sur tout intervalle compact. Par conséquent, le terme qui reste dans le membre de droite est forcé d'avoir une limite presque sure, uniformément sur tout intervalle compact.

Montrons la seconde partie. En posant $Y_s = g''(B_s^H)$ et $f(x) = x^3$ dans (3.2), nous obtenons l'existence presque sûre de

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t g''(B_s^H)\frac{(B_{s+\varepsilon}^H - B_s^H)^3}{\varepsilon}ds, \text{ uniformément sur tout intervalle compact.}$$

D'autre part, en posant $Y_s \equiv 1$ et $f(x) = |x|^3$ dans (3.2), nous obtenons que, presque sûrement,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t \frac{|B_{s+\varepsilon}^H - B_s^H|^3}{\varepsilon}ds < +\infty, \forall t > 0.$$

Par conséquent, il suffit d'utiliser la formule de Taylor

$$G(b) = G(a) + \frac{g(a)+g(b)}{2}(b-a) - \frac{g''(\theta_{a,b})}{12}(b-a)^3, \theta_{a,b} \in (a,b),$$

et le théorème de convergence dominée pour conclure comme précédemment. □

3.4 Preuves des théorèmes 3.2.1 et 3.2.3

Preuve du théorème 3.2.1. Tout d'abord, expliquons les idées principales de la preuve dans la situation plus simple du mouvement brownien ($H = \frac{1}{2}$) et quand $m = 3$. Dans ce cas, nous étudions $M_T(t) = T^{-1/2}\int_0^{tT}(B_{s+1} - B_s)^3\,ds$ et nous pouvons l'écrire, en appliquant successivement la formule d'Itô et la version stochastique du théorème de Fubini, comme $\int_0^{tT} R_T(s)dB_s$ plus un reste qui tend vers zéro dans L^2. Ensuite, nous montrons que $\int_0^{tT} R_T(s)^2 ds$ converge vers cst t. À l'aide du théorème de Dubins-Schwarz, nous obtenons que $M_T \to \sqrt{\text{cst}}\beta$, dans le sens de la convergence des marginales de type fini. Finalement, nous prouvons la tension.

Dans le cas du mouvement brownien fractionnaire (d'indice $0 < H < \frac{1}{2}$), nous devons faire face à des difficultés techniques. En effet, le noyau K apparaîssant dans la représentation du mouvement brownien fractionnaire en moyenne mobile $B_t^H = \int_0^t K(t,s)dB_s$ admet une singularité aux points $s = 0$ et $s = t$.

Encore une fois, nous découpons la preuve en plusieurs pas.

Premier pas. Grâce à la propriété d'autosimilarité du mouvement brownien fractionnaire, c'est-à-dire $\{B_{ct}^H : t \geq 0\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{c^H B_t^H : t \geq 0\}$ pour tout $c > 0$, nous pouvons voir que

$$\{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t \left(\frac{B_{s+\varepsilon}^H - B_s^H}{\varepsilon^H}\right)^m ds : t \geq 0\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{\sqrt{\varepsilon}\int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} \left(B_{s+1}^H - B_s^H\right)^m ds : t \geq 0\} = \{M_{\frac{1}{\varepsilon}}(t) : t \geq 0\},$$

où

$$M_T(t) := \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^{tT} \left(B_{s+1}^H - B_s^H\right)^m ds, t \geq 0. \tag{3.20}$$

Ainsi, pour obtenir (3.6), il suffit de démontrer que

$$\{M_T(t) : t \geq 0\} \xrightarrow{\mathcal{L}} \{\sqrt{c_{m,H}}\,\beta_t : t \geq 0\}, \text{ quand } T \to \infty. \tag{3.21}$$

Nous allons montrer cette convergence en deux temps:

i) quand $T \to \infty$,

$$\{M_T(t) : t \geq 0\} \to \{\sqrt{c_{m,H}}\,\beta_t : t \geq 0\} \text{ en loi, dans le sens des marginales de rang fini;} \tag{3.22}$$

ii) pour $T \geq 1$,

$$\text{la famille de processus } M_T \text{ est tendue.} \tag{3.23}$$

Deuxième pas. Avant de procéder à la preuve de (3.21), montrons comment la constante $c_{m,H}$ apparaît dans la limite. Nous prouvons que, pour tout $t \geq 0$,

$$\lim_{T\to\infty} \mathrm{E}\left[M_T(t)^2\right] = c_{m,H}t. \tag{3.24}$$

Posons $G_1 = B_{u+1}^H - B_u^H$, $G_2 = B_{v+1}^H - B_v^H$ et $\theta(u,v) = \mathrm{Cov}(G_1,G_2)$. Nous devons calculer l'espérance du produit $G_1^m G_2^m$. Grâce à (3.5), nous avons

$$\mathrm{E}[G_1^m G_2^m] = \sum_{1\leq k,\ell\leq m} a_{k,m}a_{\ell,m}\mathrm{E}[H_k(G_1)H_\ell(G_2)] = \sum_{k=1}^m \frac{a_{k,m}^2}{k!}\theta(u,v)^k.$$

En remplaçant ceci dans l'expression du second moment de $M_T(t)$, nous obtenons, en notant aussi que $\theta(u,v) = \frac{1}{2}(|v-u+1|^{2H} + |v-u-1|^{2H} - 2|v-u|^{2H})$,

$$\mathrm{E}\left[M_T(t)^2\right] = \frac{2}{T}\iint_{0\leq u<v\leq tT} dudv \sum_{k=1}^m \frac{a_{k,m}^2}{k!}\theta(u,v)^k$$

$$= 2\int_0^t dy \sum_{k=1}^m \frac{a_{k,m}^2}{k!} \int_0^{T(t-y)} \left[(x+1)^{2H} + |x-1|^{2H} - 2x^{2H}\right]^k dx,$$

par le changement de variables $x = v - u, y = u/T$. En laissant tendre T vers l'infini, nous obtenons $c_{m,H}t$ dans le membre de droite de l'égalité précédente.

Troisième pas. Nous introduisons maintenant la première notation technique, qui sera utile dans le prochain pas. Choisissons un $\varrho > 0$ arbitraire mais fixé. Notons d'autre part, que, par (3.24), nous pouvons choisir $b > 0$ assez petit tel que

$$\lim_{T\to\infty} \mathrm{E}\left[M_T(b)^2\right] \leq \varrho \tag{3.25}$$

et $M_T(t) = M_T(b) + M_T^{(b)}(t)$, où

$$M_T^{(b)}(t) := \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{bT}^{tT} \left(B_{s+1}^H - B_s^H\right)^m ds, t \geq 0. \tag{3.26}$$

Quatrième pas. Rappelons (voir, par exemple, [2], p. 122) que le mouvement brownien fractionnaire peut s'écrire sous la forme

$$B_t^H = A_t + \check{B}_t^H = \gamma_H \int_{-\infty}^0 [(t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}}]dB_s + \gamma_H \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s, t \geq 0, \tag{3.27}$$

où, ici et dans le reste de la démonstration, nous notons γ_H la constante $\Gamma(H+\frac{1}{2})^{-1}$. Dans cette décomposition, notons que le processus A a des trajectoires absolument continues et que A et $\check{B}$ sont indépendants. Nous pouvons écrire $M_T^{(b)}(t) = \check{M}_T^{(b)}(t) + D_T^{(b)}(t)$, où

$$\check{M}_T^{(b)}(t) := \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{bT}^{tT} \left(\check{B}_{s+1}^H - \check{B}_s^H\right)^m ds, t \geq 0 \tag{3.28}$$

et, pour tout $t \geq 0$,

$$\lim_{T\to\infty} \mathrm{E}\left[D_T^{(b)}(t)^2\right] = \lim_{T\to\infty} \mathrm{E}\left[(M_T^{(b)}(t) - \check{M}_T^{(b)}(t))^2\right] = 0. \tag{3.29}$$

En effet, nous avons, grâce au changement de variable $s \mapsto \frac{s}{T}$,

$$D_T^{(b)}(t) = \sqrt{T} \int_b^t \left[\left(B_{sT+1}^H - B_{sT}^H\right)^m - \left(\check{B}_{sT+1}^H - \check{B}_{sT}^H\right)^m\right] ds$$

$$= \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \sqrt{T} \int_b^t \left(A_{sT+1} - A_{sT}\right)^k \left(\check{B}_{sT+1}^H - \check{B}_{sT}^H\right)^{m-k} ds$$

et il suffit d'estimer le second moment de chaque terme. Clairement, par l'indépendance de A et $\check{B}$, nous avons $\mathrm{E}[(\check{B}_{sT+1}^H - \check{B}_{sT}^H)^2] \leq 1$, puisque la variable aléatoire gaussienne centrée $B^H_{s+1} - B^H_s$ a pour variance 1. Ainsi, grâce à l'inégalité de Jensen et en utilisant l'indépendance de A et $\check{B}$, nous pouvons écrire

$$\mathrm{E}\left[\left(\sqrt{T}\int_b^t \left(A_{sT+1} - A_{sT}\right)^k \left(\check{B}^H_{sT+1} - \check{B}^H_{sT}\right)^{m-k} ds\right)^2\right] \leq \mathrm{cst}T\,\mathrm{E}\left[\int_b^t \left(A_{sT+1} - A_{sT}\right)^{2k} ds\right]$$

et, par autosimilarité,

$$= \mathrm{cst}T^{2kH+1}\mathrm{E}\left[\int_b^t \left(A_{s+\frac{1}{T}} - A_s\right)^{2k} ds\right] = \frac{\mathrm{cst}}{T^{2k(1-H)-1}}\mathrm{E}\left[\int_b^t \left(\frac{A_{s+\frac{1}{T}} - A_s}{\frac{1}{T}}\right)^{2k} ds\right],$$

avec $2k(1-H)-1 > 0$ pour tout $k \geq 1$ (rappelons que $H < \frac{1}{2}$). Il suffit de prouver que le second facteur est borné. Puisque A est absolument continu, nous pouvons écrire

$$\lim_{T\to\infty} \mathrm{E}\left[\int_b^t \left(\frac{A_{s+\frac{1}{T}} - A_s}{\frac{1}{T}}\right)^{2k} ds\right] = \mathrm{E}[\int_b^t (A'_s)^{2k}\, ds] = \mathrm{cst}\int_b^t ds\,\mathrm{E}[(\int_{-\infty}^0 (s-u)^{H-\frac{3}{2}}dB_u)^{2k}]$$

$$= \mathrm{cst}\int_b^t ds\,(\int_{-\infty}^0 (s-u)^{2H-3}du)^k = \mathrm{cst}\int_b^t s^{-2k(1-H)}ds < \infty.$$

Par conséquent,(3.29) est vérifiée.

Cinquième pas. Rappelons que, par (3.27) et (3.28), nous avons

$$\check{M}^{(b)}_T(t) = \frac{\gamma_H}{\sqrt{T}}\int_{bT}^{tT}\left(\int_0^{s+1}(s+1-u)^{H-\frac{1}{2}}dB_u - \int_0^s (s-u)^{H-\frac{1}{2}}dB_u\right)^m ds \tag{3.30}$$

$$= \frac{\gamma_H}{\sqrt{T}}\int_{bT}^{tT} ds\left(\int_0^s [(s+1-u)^{H-\frac{1}{2}} - (s-u)^{H-\frac{1}{2}}]dB_u + \int_s^{s+1}(s+1-u)^{H-\frac{1}{2}}dB_u\right)^m, t\geq 0.$$

À ce stade, nous devons introduire une seconde notation technique. Notons:

$$\check{N}^{(b,c)}_T(t) := \frac{\gamma_H}{\sqrt{T}}\int_{bT}^{tT} ds\left(\int_{(s-c)\vee 0}^s [(s+1-u)^{H-\frac{1}{2}} - (s-u)^{H-\frac{1}{2}}]dB_u \right. \tag{3.31}$$

$$\left. + \int_s^{s+1}(s+1-u)^{H-\frac{1}{2}}dB_u\right)^m, t\geq 0,$$

où la constante positive c est fixée et sa valeur sera précisée plus loin dans le point *a)*. Nous allons démontrer successivement les points suivants:

a) pour tout $t \geq 0$, il existe $c > 0$ assez grand tel que

$$\limsup_{T\to\infty} \mathrm{E}\left[(\check{M}^{(b)}_T(t) - \check{N}^{(b,c)}_T(t))^2\right] \leq \mathrm{cst}\varrho; \tag{3.32}$$

b) il existe deux familles de processus $\{R_T(t) : t \geq 0\}$ et $\{S_T(t) : t \geq 0\}$ telles que, pour tout $t \geq 0$,

$$\check{N}_T^{(b,c)}(t) = \int_0^{tT} R_T(s) dB_s + S_T(t), \text{ avec } \lim_{T \to \infty} \mathrm{E}[S_T(t)^2] = 0; \tag{3.33}$$

c) pour tout $t \geq 0$,

$$\lim_{T \to \infty} \mathrm{Var}\left(\int_0^{tT} R_T(s)^2 ds \right) = 0. \tag{3.34}$$

Sixième pas. Supposons un instant que nous ayons démontré *a)*, *b)*, *c)* et finissons la preuve de la convergence en loi dans le sens des marginales de rang fini (3.22). Tout d'abord, nous pouvons écrire

$$\int_0^{tT} R_T(s)^2 ds - c_{m,H}\, t = \{\int_0^{tT} R_T(s)^2 ds - \mathrm{E}[\int_0^{tT} R_T(s)^2 ds]\} + \{\mathrm{E}[\Big(\int_0^{tT} R_T(s) dB_s\Big)^2]$$

$$-\mathrm{E}[\check{M}_T^{(b)}(t)^2]\} + \{\mathrm{E}[\check{M}_T^{(b)}(t)^2 - M_T^{(b)}(t)^2]\} + \{\mathrm{E}[M_T^{(b)}(t)^2 - M_T(t)^2]\} + \{\mathrm{E}\left[M_T(t)^2\right] - c_{m,H}\, t\}.$$

En utilisant (3.34) pour le premier terme, (3.32)-(3.33) pour le second, (3.29) pour le troisième, (3.25) pour le quatrième et (3.24) pour le cinquième, nous obtenons

$$\limsup_{T \to \infty} \mathrm{E}[(\int_0^{tT} R_T(s)^2 ds - c_{m,H}\, t)^2] \leq \mathrm{cst}\varrho,$$

ou, de manière équivalente, pour tout $t \geq 0$,

$$\limsup_{T \to \infty} \mathrm{E}[(a_{(T)}(t) - a(t))^2] \leq \mathrm{cst}\varrho, \tag{3.35}$$

où nous avons noté $a_{(T)}(t) := \int_0^{tT} R_T(s)^2 ds$ et $a(t) := c_{m,H} t$.
Ensuite, fixons $d \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_d$ et posons, pour chaque $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \bullet f := \sum_{j=1}^d u_j f(t_j)$. Nous considérons les fonctions caractéristiques:

$$|\mathrm{E}\left[\exp(i\mathbf{u} \bullet M_T)\right] - \mathrm{E}\left[\exp(i\mathbf{u} \bullet (\beta \circ a))\right]| \leq \mathrm{E}\left[|\exp(i\mathbf{u} \bullet (M_T - M_T^{(b)})) - 1|\right]$$

$$+\mathrm{E}\left[|\exp(i\mathbf{u} \bullet (M_T^{(b)} - \check{M}_T^{(b)})) - 1|\right] + \mathrm{E}\left[|\exp(i\mathbf{u} \bullet (\check{M}_T^{(b)} - \check{N}_T^{(b,c)})) - 1|\right]$$

$$+\mathrm{E}\left[|\exp(i\mathbf{u} \bullet S_T) - 1|\right] + |\mathrm{E}[\exp(i\mathbf{u} \bullet \int_0^{\cdot T} R_T(s) dB_s)] - \mathrm{E}[\exp(i\mathbf{u} \bullet (\beta \circ a))]|.$$

Par (3.25), (3.29), (3.32), (3.33) et en utilisant l'inégalité classique $|e^{ix} - 1| \leq |x|$, nous obtenons, pour T assez grand,

$$|\mathrm{E}\left[\exp(i\mathbf{u} \bullet M_T)\right] - \mathrm{E}\left[\exp(i\mathbf{u} \bullet (\beta \circ a))\right]| \leq \mathrm{cst}\varrho \tag{3.36}$$

$$+|\mathrm{E}[\exp(i\mathbf{u} \bullet \int_0^{\cdot T} R_T(s) dB_s)] - \mathrm{E}[\exp(i\mathbf{u} \bullet (\beta \circ a))]|.$$

À l'aide du théorème de Dubins-Schwarz, nous pouvons écrire, pour tout T, $\int_0^{\cdot T} R_T(s)dB_s = \beta_{(T)} \circ a_{(T)}$, avec $\beta_{(T)}$ un mouvement brownien unidimensionnel standard issu de 0. Par conséquent, nous avons

$$|\mathrm{E}[\exp(i\mathbf{u} \bullet \int_0^{\cdot T} R_T(s)dB_s)] - \mathrm{E}[\exp(i\mathbf{u} \bullet (\beta \circ a))]| \tag{3.37}$$

$$\leq 2\mathrm{P}(\|a_{(T)} - a\| > \delta) + \mathrm{E}\left[|\exp(i\mathbf{u} \bullet (\beta_{(T)} \circ a_{(T)})) - \exp(i\mathbf{u} \bullet \beta_{(T)} \circ a))| : \|a_{(T)} - a\| \leq \delta\right]$$

$$\leq \frac{2}{\delta^2}\mathrm{E}\left[\|a_{(T)} - a\|^2\right] + \|\mathbf{u}\|\,\mathrm{E}[\sup_{\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|\leq\delta} \|(\beta_{v_1}, \ldots, \beta_{v_d}) - (\beta_{w_1}, \ldots, \beta_{w_d})\|].$$

En combinant (3.36), (3.37) et en faisant $\varrho \to 0$, la convergence (3.22) suit.

Septième pas. Nous montrons (3.23), c'est-à-dire la tension de la famille M_T. Il suffit de vérifier le critère classique de Kolmogorov (voir [40], p. 489):

$$\sup_{T\geq 1} \mathrm{E}\left[(M_T(t) - M_T(s))^4\right] \leq c_R|t-s|^2, \forall 0 \leq s,t \leq R. \tag{3.38}$$

Soient $s,t \in [0,R]$. Par (3.20), nous avons

$$\mathrm{E}\left[(M_T(t) - M_T(s))^4\right]$$

$$= \frac{1}{T^2}\iiiint_{[sT,tT]^4} \mathrm{E}\left[(B^H_{u_1+1} - B^H_{u_1})^m(B^H_{u_2+1} - B^H_{u_2})^m(B^H_{u_3+1} - B^H_{u_3})^m\right.$$

$$\left.\times\, (B^H_{u_4+1} - B^H_{u_4})^m\right] du_1du_2du_3du_4 = \frac{1}{T^2}\iiiint_{[sT,tT]^4} \mathrm{E}\left[G_1^mG_2^mG_3^mG_4^m\right] du_1du_2du_3du_4$$

où, comme dans le deuxième pas, nous notons $G_i = B^H_{u_i+1} - B^H_{u_i}$, $i = 1,2,3,4$. Posons également $\theta_{ij} = \mathrm{Cov}(G_i,G_j)$, $i,j = 1,\ldots,4$. Nous devons calculer l'espérance du produit $G_1^mG_2^mG_3^mG_4^m$. Rappelons que le monôme x^m peut se développer en terme des polynômes d'Hermite

$$H_k(x) = (-1)^k e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^k}{dx^k}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right), k = 0,1,2,\ldots$$

en $x^m = \sum_{k=1}^N a_kH_k(x)$, avec $a_k = \frac{1}{k!}\mathrm{E}\left[G^mH_k(G)\right]$ et G une variable aléatoire normale centrée réduite. Ainsi,

$$\mathrm{E}\left[G_1^mG_2^mG_3^mG_4^m\right] = \sum_{k_1,k_2,k_3,k_4\geq 1} a_{k_1}a_{k_2}a_{k_3}a_{k_4}\mathrm{E}\left[H_{k_1}(G_1)H_{k_2}(G_2)H_{k_3}(G_3)H_{k_4}(G_4)\right]$$

et nous devons estimer $\mathrm{E}[H_{k_1}(G_1)H_{k_2}(G_2)H_{k_3}(G_3)H_{k_4}(G_4)]$. En utilisant le résultat de [48], p. 210, nous pouvons écrire

$$\mathrm{E}\left[H_{k_1}(G_1)H_{k_2}(G_2)H_{k_3}(G_3)H_{k_4}(G_4)\right] \tag{3.39}$$

$$= \begin{cases} \frac{k_1!k_2!k_3!k_4!}{2^q q!}\sum_1 \theta_{i_1j_1}\ldots\theta_{i_qj_q}, & \text{si } k_1+k_2+k_3+k_4 = 2q \text{ et } 0 \leq k_1,k_2,k_3,k_4 \leq q \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\sum_1$ est la somme portant sur tous les indices $i_1,j_1,\dots,i_q,j_q \in \{1,2,3,4\}$ tels que $i_1 \neq j_1,\dots,i_q \neq j_q$ et il y a k_1 indices 1, ..., k_4 indices 4. Par exemple

$$\mathrm{E}\left[H_1(G_1)H_1(G_2)H_1(G_3)H_1(G_4)\right] = \frac{1}{8}(\theta_{12}\theta_{34} + \theta_{13}\theta_{24} + \theta_{14}\theta_{23}).$$

D'une manière similaire, nous pouvons calculer

$$\mathrm{E}\left[H_3(G_1)H_3(G_2)H_3(G_3)H_3(G_4)\right]$$

en termes des θ_{ij}, etc. Puisque les G_i ont pour variance 1, nous en déduisons, en utilisant les conditions sur les indices apparaîssant dans (3.39), que

$$\mathrm{E}\left|H_{k_1}(G_1)H_{k_2}(G_2)H_{k_3}(G_3)H_{k_4}(G_4)\right| \leq \mathrm{cst} \sum_{\{i,j\}\neq\{k,\ell\}} |\theta_{ij}|\,|\theta_{k\ell}|.$$

Par conséquent, pour obtenir (3.38), nous devons considérer les deux types de termes suivants: $\{i,j\} \cap \{k,\ell\} = \emptyset$, par exemple $i = 1,j = 2,k = 3,\ell = 4$, ou $\{i,j\} \cap \{k,\ell\} \neq \emptyset$, par exemple $i = 1,j = 2,k = 1,\ell = 3$. Clairement, par un changement de variables simple, nous pouvons écrire

$$\frac{1}{T^2}\iiiint_{[sT,tT]^4} |\theta_{12}|\,|\theta_{34}|du_1du_2du_3du_4 = \left(\frac{1}{T}\iint_{[sT,tT]^2} |\theta_{12}|du_1du_2\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{2T}\iint_{[sT,tT]^2} \left||u_2-u_1+1|^{2H} + |u_2-u_1-1|^{2H} - 2|u_2-u_1|^{2H}\right| du_1du_2\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{2T}\int_{sT}^{tT} du_1 \int_0^{(t-s)T} \left|(x+1)^{2H} + |x-1|^{2H} - 2x^{2H}\right| dx\right)^2$$

$$\leq (t-s)^2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left|(x+1)^{2H} + |x-1|^{2H} - 2x^{2H}\right| dx\right)^2$$

et

$$\frac{1}{T^2}\iiiint_{[sT,tT]^4} |\theta_{12}|\,|\theta_{13}|du_1du_2du_3du_4$$

$$= \frac{t-s}{4T}\iiint_{[sT,tT]^3} \left||u_2-u_1+1|^{2H} + |u_2-u_1-1|^{2H} - 2|u_2-u_1|^{2H}\right|$$

$$\times \left||u_3-u_1+1|^{2H} + |u_3-u_1-1|^{2H} - 2|u_3-u_1|^{2H}\right| du_1du_2du_3$$

$$= \frac{t-s}{4T}\int_{sT}^{tT} du_1 \int_0^{(t-s)T} \left|(x+1)^{2H} + |x-1|^{2H} - 2x^{2H}\right| dx$$

$$\times \int_0^{(t-s)T} \left|(y+1)^{2H} + |y-1|^{2H} - 2y^{2H}\right| dy$$

$$\leq (t-s)^2 \left(\frac{1}{2} \int_0^\infty \left| (x+1)^{2H} + |x-1|^{2H} - 2x^{2H} \right| dx \right)^2.$$

Ainsi, (3.38) est vérifiée et la famille M_T est bien tendue.

La preuve du théorème 3.2.1 sera donc terminée une fois que nous aurons prouvé les points *a)-c)* du quatrième pas.

Huitième pas. Nous prouvons (3.32) et, par conséquent, nous précisons le choix de la constante c. Pour simplifier les écritures, nous otons dans la suite les dépendances "(b)" ou "(b,c)". En utilisant encore une fois (3.30) et (3.31), nous pouvons écrire

$$\check{M}_T(t) - \check{N}_T(t) = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \check{P}_T^{(k)}(t), \tag{3.40}$$

avec

$$\begin{aligned}\check{P}_T^{(k)}(t) &= \frac{\gamma_H}{\sqrt{T}} \int_{bT}^{tT} ds \left(\int_0^{(s-c)\vee 0} [(s+1-u)^{H-\frac{1}{2}} - (s-u)^{H-\frac{1}{2}}] dB_u \right)^k \\ &\times \left(\int_{(s-c)\vee 0}^{s} [(s+1-u)^{H-\frac{1}{2}} - (s-u)^{H-\frac{1}{2}}] dB_u + \int_s^{s+1} (s+1-u)^{H-\frac{1}{2}} dB_u \right)^{m-k} \\ &= \frac{\gamma_H}{\sqrt{T}} \int_{bT}^{tT} ds \left[\int_0^{(s-c)\vee 0} \mathcal{K}(s,u) dB_u \right]^k \left[\int_{(s-c)\vee 0}^{s+1} \mathcal{K}(s,u) dB_u \right]^{m-k},\end{aligned}$$

où nous avons noté

$$\mathcal{K}(s,u) := \begin{cases} (s+1-u)^{H-\frac{1}{2}} - (s-u)^{H-\frac{1}{2}}, & \text{si } 0 \leq u \leq s \\ (s+1-u)^{H-\frac{1}{2}}, & \text{si } s \leq u \leq s+1 \end{cases}. \tag{3.41}$$

Nous allons démontrer que le moment d'ordre 2 de chaque terme peut être rendu aussi petit que l'on veut et (3.32) suivra.

Neuvième pas. Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[\check{P}_T^{(k)}(t)^2\right] &= \frac{2\gamma_H^2}{T} \iint_{bT<s<s'<tT} ds ds' \mathrm{E} \left\{ \left[\int_0^{(s-c)\vee 0} \mathcal{K}(s,u) dB_u \right]^k \left[\int_0^{(s'-c)\vee 0} \mathcal{K}(s',u) dB_u \right]^k \right. \\ &\quad \left. \times \left[\int_{(s-c)\vee 0}^{s+1} \mathcal{K}(s,u) dB_u \right]^{m-k} \left[\int_{(s'-c)\vee 0}^{s'+1} \mathcal{K}(s',u) dB_u \right]^{m-k} \right\} \\ &= \frac{2\gamma_H^2}{T} \iint_{bT<s<s'<s+c+1} ds ds' \ldots + \frac{2\gamma_H^2}{T} \iint_{bT<s,s+c+1<s'<tT} ds ds' \ldots \end{aligned} \tag{3.42}$$

et nous allons étudier chaque terme. À cet égard, nous aurons besoin du:

Lemme 3.4.1. *Il existe une constante positive κ telle que, pour tout $s \geq 0$,*

$$\mathrm{E}\left[\left(\int_0^{s+1} \mathcal{K}(s,u) dB_u \right)^2 \right] = \int_0^{s+1} \mathcal{K}(s,u)^2 du \leq \kappa. \tag{3.43}$$

Preuve. Par (3.41) et un changement de variable, nous avons

$$\int_0^{s+1} \mathcal{K}(s,u)^2 du = \int_0^s [(s+1-u)^{H-\frac{1}{2}} - (s-u)^{H-\frac{1}{2}}]^2 du + \int_s^{s+1} (s+1-u)^{2H-1} du =$$

$$\int_0^s [(v+1)^{H-\frac{1}{2}} - v^{H-\frac{1}{2}}]^2 dv + \int_0^1 v^{2H-1} dv \leq \int_0^\infty [(v+1)^{H-\frac{1}{2}} - v^{H-\frac{1}{2}}]^2 dv + \int_0^1 v^{2H-1} dv = \kappa < \infty.$$

□

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et à (3.43), nous pouvons écrire, pour $bT < s < s' < (s+c+1) \wedge tT$,

$$\mathrm{E}\left\{\left[\int_0^{(s-c)\vee 0} \mathcal{K}(s,u) dB_u\right]^k \left[\int_0^{(s'-c)\vee 0} \mathcal{K}(s',u) dB_u\right]^k \left[\int_{(s-c)\vee 0}^{s+1} \mathcal{K}(s,u) dB_u\right]^{m-k}\right.$$

$$\left. \times \left[\int_{(s'-c)\vee 0}^{s'+1} \mathcal{K}(s',u) dB_u\right]^{m-k}\right\} \leq \mathrm{cst}\mathrm{E}\left\{\left[\int_0^{(s-c)\vee 0} \mathcal{K}(s,u) dB_u\right]^{2k}\right.$$

$$\left. \times \left[\int_0^{(s'-c)\vee 0} \mathcal{K}(s',u) dB_u\right]^{2k}\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \mathrm{cst} \left[\int_0^{(s-c)\vee 0} \mathcal{K}(s,u)^2 du\right]^{\frac{k}{2}} \left[\int_0^{(s'-c)\vee 0} \mathcal{K}(s',u)^2 du\right]^{\frac{k}{2}}$$

par le changement de variables $v = s - u$ et $v' = s' - u$,

$$= \mathrm{cst} \left\{\int_{c\vee s}^{s} [(v+1)^{H-\frac{1}{2}} - v^{H-\frac{1}{2}}]^2 dv\right\}^{\frac{k}{2}} \left\{\int_{c\vee s'}^{s'} [(v'+1)^{H-\frac{1}{2}} - v'^{H-\frac{1}{2}}]^2 dv'\right\}^{\frac{k}{2}} \leq \mathrm{cst} f(c)^k.$$

Ici, nous avons posé

$$f(c) := \int_c^\infty [(v+1)^{H-\frac{1}{2}} - v^{H-\frac{1}{2}}]^2 dv, c > 0.$$

La fonction f' est bornée par $\mathrm{cst}c^{2H-3}$. Par conséquent, nous avons $f(c) \leq \mathrm{cst}c^{2H-2}$ pour tout $c > 0$. En remplaçant cette estimation dans le premier terme de (3.42), nous obtenons l'existence de $c > 0$ suffisamment grande pour que

$$\frac{2\gamma_H^2}{T} \iint_{bT<s<s'<s+c+1} ds ds' \ldots \leq \mathrm{cst}c^{1-2k(1-H)} \leq \mathrm{cst}\varrho,$$

ceci car $1 - 2k(1-H) < 0$ pour tout $k \geq 1$ (rappelons que $H < \frac{1}{2}$).

Considérons maintenant le second terme dans (3.42). Puisque m est un entier impair, l'espérance vaut zéro pour chaque entier pair k, par non-corrélation des intégrales stochastiques sur des intervalles disjoints. Par conséquent, nous pouvons ne considérer que les entiers k impairs. Nous pouvons écrire, pour $bT < s, s + c + 1 < s' < tT$,

$$\mathrm{E}\left\{\left[\int_0^{(s-c)\vee 0} \mathcal{K}(s,u) dB_u\right]^k \left[\int_0^{(s'-c)\vee 0} \mathcal{K}(s',u) dB_u\right]^k \left[\int_{(s-c)\vee 0}^{s+1} \mathcal{K}(s,u) dB_u\right]^{m-k}\right.$$

$$\times\left[\int_{(s'-c)\vee 0}^{s'+1}\mathcal{K}(s',u)dB_u\right]^{m-k}\Bigg\} = \mathrm{E}\left\{\left[\int_0^{(s-c)\vee 0}\mathcal{K}(s,u)dB_u\right]^k\left[\int_0^{(s'-c)\vee 0}\mathcal{K}(s',u)dB_u\right]^k\right.$$

$$\left.\times\left[\int_{(s-c)\vee 0}^{s+1}\mathcal{K}(s,u)dB_u\right]^{m-k}\right\}\mathrm{E}\left\{\left[\int_{(s'-c)\vee 0}^{s'+1}\mathcal{K}(s',u)dB_u\right]^{m-k}\right\}$$

$$\leq \mathrm{cst}\mathrm{E}\left\{X_1^k(X_2+Y_1)^kY_2^{m-k}\right\}$$

par indépendance et (3.43), où

$$X_1 := \int_0^{(s-c)\vee 0}\mathcal{K}(s,u)dB_u, X_2 := \int_0^{(s-c)\vee 0}\mathcal{K}(s',u)dB_u$$

et

$$Y_1 := \int_{(s-c)\vee 0}^{s'-c}\mathcal{K}(s',u)dB_u, Y_2 := \int_{(s-c)\vee 0}^{s+1}\mathcal{K}(s,u)dB_u.$$

Nous prouvons le:

Lemme 3.4.2. *Soient m et k deux entiers impairs et supposons que (X_1,X_2) et (Y_1,Y_2) soient deux vecteurs gaussiens centrés et indépendants. Alors*

$$\left|\mathrm{E}\left[X_1^k(X_2+Y_1)^kY_2^{m-k}\right]\right| \leq \mathrm{cst}\left(|\theta|+\ldots+|\theta|^k\right),$$

avec $\theta = \mathrm{Cov}(X_1,X_2)$.

Preuve. Clairement, nous avons

$$\left|\mathrm{E}\left[X_1^k(X_2+Y_1)^kY_2^{m-k}\right]\right| \leq \sum_{j=0}^k\binom{k}{j}\left|\mathrm{E}\left[X_1^kX_2^j\right]\right|\mathrm{E}\left|Y_1^{k-j}Y_2^{m-k}\right| \leq \mathrm{cst}\sum_{j=0}^k\binom{k}{j}\left|\mathrm{E}\left[X_1^kX_2^j\right]\right|.$$

À l'aide d'une régression linéaire, nous avons $X_2 = \frac{\theta}{\sigma_1^2}X_1 + Z$, avec $\sigma_1^2 = \mathrm{E}[X_1^2]$ et Z une variable aléatoire gaussienne indépendante de X_1. Par conséquent, il vient

$$\left|\mathrm{E}\left[X_1^kX_2^j\right]\right| = \left|\sum_{\ell=0}^j\binom{j}{\ell}\theta^\ell\frac{\mathrm{E}[X_1^{k+\ell}]}{\sigma_1^{2\ell}}\mathrm{E}[Z^{j-\ell}]\right| \leq \mathrm{cst}\left(|\theta|+\ldots+|\theta|^j\right).$$

En effet, le terme correspondant à $\ell = 0$ est nul puisque k est impair. Le lemme est donc prouvé.

□

Revenons à l'étude du second terme dans (3.42). En utilisant le lemme précédent, nous pouvons le majorer comme suit:

$$\frac{2\gamma_H^2}{T}\iint_{bT<s,s+c+1<s'<tT}dsds'\ldots \leq \frac{\mathrm{cst}}{T}\iint_{bT<s,s+c+1<s'<tT}dsds'\left(|\theta|+\ldots+|\theta|^k\right),$$

avec

$$\theta := \int_0^{(s-c)\vee 0} du[(s+1-u)^{H-\frac{1}{2}} - (s-u)^{H-\frac{1}{2}}][(s'+1-u)^{H-\frac{1}{2}} - (s'-u)^{H-\frac{1}{2}}]$$
$$= \int_{c\wedge s}^{s} dv[(v+1)^{H-\frac{1}{2}} - v^{H-\frac{1}{2}}][(v+1+s'-s)^{H-\frac{1}{2}} - (v+s'-s)^{H-\frac{1}{2}}].$$

Il suffit donc de montrer qu'il existe $c > 0$ suffisamment large tel que

$$\frac{1}{T}\iint_{bT<s,s+c+1<s'<tT} |\theta|^j ds ds' \leq \mathrm{cst}_{\varrho}, j = 1,\ldots,k. \tag{3.44}$$

Si $j = 1$, en faisant successivement les changements de variables $y = \frac{s}{T}$ et $x = s' - yT$, nous obtenons

$$\frac{1}{T}\int_{bT}^{tT} ds \int_{s+c+1}^{tT} |\theta| ds' = \int_b^t dy \int_{c+1}^{(t-y)T} dx$$
$$\times \left| \int_{c\vee yT}^{yT} dv[(v+1)^{H-\frac{1}{2}} - v^{H-\frac{1}{2}}][(x+v+1)^{H-\frac{1}{2}} - (x+v)^{H-\frac{1}{2}}] \right|$$
$$\leq \mathrm{cst} \int_0^\infty dx \int_c^\infty dv[v^{H-\frac{1}{2}} - (v+1)^{H-\frac{1}{2}}][(x+v)^{H-\frac{1}{2}} - (x+v+1)^{H-\frac{1}{2}}],$$

où

$$\int_0^\infty [v^{H-\frac{1}{2}} - (v+1)^{H-\frac{1}{2}}] dv \int_0^\infty [(x+v)^{H-\frac{1}{2}} - (x+v+1)^{H-\frac{1}{2}}] dx$$
$$= \mathrm{cst} \int_0^\infty dv[v^{H-\frac{1}{2}} - (v+1)^{H-\frac{1}{2}}] \cdot [(v+1)^{H+\frac{1}{2}} - v^{H+\frac{1}{2}}] < \infty,$$

puisque $[v^{H-\frac{1}{2}} - (v+1)^{H-\frac{1}{2}}] \cdot [(v+1)^{H+\frac{1}{2}} - v^{H+\frac{1}{2}}] \sim v^{2H-2}$, quand $v \uparrow \infty$. Si $j \geq 2$, par un raisonnement similaire, nous pouvons écrire

$$\frac{1}{T}\int_{bT}^{tT} ds \int_{s+c+1}^{tT} |\theta|^j ds' \leq \mathrm{cst} \int_0^\infty dx$$
$$\times \left| \int_c^\infty dv[(v+1)^{H-\frac{1}{2}} - v^{H-\frac{1}{2}}][(x+v+1)^{H-\frac{1}{2}} - (x+v)^{H-\frac{1}{2}}] \right|^j,$$

et, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_0^\infty dx \left| \int_0^\infty dv[(v+1)^{H-\frac{1}{2}} - v^{H-\frac{1}{2}}][(x+v+1)^{H-\frac{1}{2}} - (x+v)^{H-\frac{1}{2}}] \right|^j$$
$$\leq \int_0^\infty dx \left\{ \int_0^\infty [(v+1)^{H-\frac{1}{2}} - v^{H-\frac{1}{2}}]^2 dv \right\}^{\frac{j}{2}} \left\{ \int_0^\infty [(x+v+1)^{H-\frac{1}{2}} - (x+v)^{H-\frac{1}{2}}]^2 dv \right\}^{\frac{j}{2}} < \infty,$$

puisque $\int_1^\infty v^{2H-3}dv < \infty$ et

$$\int_0^\infty dx \left\{ \int_0^\infty dv (v+x)^{2H-3} \right\}^{\frac{j}{2}} = \int_0^\infty x^{-j(1-H)} dx < \infty, \text{ pour } j \geq 2 \text{ et } H < \frac{1}{2}.$$

Ainsi, (3.44) est vérifiée et (3.32) suit.

Dixième pas. Nous prouvons maintenant le point *b)* du cinquième pas, c'est-à-dire (3.33). Encore une fois, nous otons la dépendance "(b,c)" dans la preuve. En utilisant (3.41), (3.31) peut s'écrire:

$$\check{N}_T(t) = \frac{\gamma_H}{\sqrt{T}} \int_{bT}^{tT} ds \left(\int_{(s-c)\vee 0}^{s+1} \mathcal{K}(s,u) dB_u \right)^m.$$

Tout d'abord, nous supposons que $m = 3$. Par la formule d'Itô classique, nous pouvons écrire

$$\left(\int_{(s-c)\vee 0}^{s+1} \mathcal{K}(s,u) dB_u \right)^3 = 6 \int_{(s-c)\vee 0}^{s+1} \mathcal{K}(s,u) dB_u \int_{(s-c)\vee 0}^{u} \mathcal{K}(s,v) dB_v \int_{(s-c)\vee 0}^{v} \mathcal{K}(s,w) dB_w$$

$$+3 \int_{(s-c)\vee 0}^{s+1} \mathcal{K}(s,u) dB_u \int_{(s-c)\vee 0}^{u} \mathcal{K}(s,v)^2 dv + 3 \int_{(s-c)\vee 0}^{s+1} \mathcal{K}(s,u)^2 du \int_{(s-c)\vee 0}^{u} \mathcal{K}(s,v) dB_v.$$

Par conséquent, en utilisant la version stochastique du théorème de Fubini, nous obtenons

$$\check{N}_T(t) = \frac{6\gamma_H}{\sqrt{T}} \int_0^{tT+1} dB_u \int_{(u-1-c)\vee 0}^{u} dB_v \int_{(u-1-c)\vee 0}^{v} dB_w \int_{(u-1)\vee bT}^{(w+c)\wedge tT} ds \mathcal{K}(s,u)\mathcal{K}(s,v)\mathcal{K}(s,w)$$

$$+\frac{3\gamma_H}{\sqrt{T}} \int_0^{tT+1} dB_u \int_{(u-1-c)\vee 0}^{u} dv \int_{(u-1)\vee bT}^{(v+c)\wedge tT} ds \mathcal{K}(s,u)\mathcal{K}(s,v)^2$$

$$+\frac{3\gamma_H}{\sqrt{T}} \int_0^{tT+1} dB_v \int_v^{v+c+1} du \int_{(u-1)\vee bT}^{(v+c)\wedge tT} ds \mathcal{K}(s,u)^2 \mathcal{K}(s,v) = \int_0^{tT} R_T(u) dB_u + S_T(t),$$

où

$$R_T(u) := \frac{6\gamma_H}{\sqrt{T}} \int_{(u-1-c)\vee 0}^{u} dB_v \int_{(u-1-c)\vee 0}^{v} dB_w \int_{(u-1)\vee bT}^{(w+c)\wedge tT} ds \mathcal{K}(s,u)\mathcal{K}(s,v)\mathcal{K}(s,w) \tag{3.45}$$

$$+\frac{3\gamma_H}{\sqrt{T}} \int_{(u-1-c)\vee 0}^{u} dv \int_{(u-1)\vee bT}^{(v+c)\wedge tT} ds \mathcal{K}(s,u)\mathcal{K}(s,v)^2 + \frac{3\gamma_H}{\sqrt{T}} \int_u^{u+c+1} dv \int_{(v-1)\vee bT}^{(u+c)\wedge tT} ds \mathcal{K}(s,v)^2 \mathcal{K}(s,u)$$

et

$$S_T(t) := \frac{6\gamma_H}{\sqrt{T}} \int_{tT}^{tT+1} dB_u \int_{(u-1-c)\vee 0}^{u} dB_v \int_{(u-1-c)\vee 0}^{v} dB_w \int_{(u-1)\vee bT}^{(w+c)\wedge tT} ds \mathcal{K}(s,u)\mathcal{K}(s,v)\mathcal{K}(s,w) \tag{3.46}$$

$$+\frac{3\gamma_H}{\sqrt{T}}\int_{tT}^{tT+1} dB_u \int_{(u-1-c)\vee 0}^{u} dv \int_{(u-1)\vee bT}^{(v+c)\wedge tT} ds\mathcal{K}(s,u)\mathcal{K}(s,v)^2$$
$$+\frac{3\gamma_H}{\sqrt{T}}\int_{tT}^{tT+1} dB_v \int_{v}^{v+c+1} du \int_{(u-1)\vee bT}^{(v+c)\wedge tT} ds\mathcal{K}(s,u)^2\mathcal{K}(s,v).$$

Clairement,

$$\mathrm{E}\left[S_T(t)^2\right] \leq \frac{\mathrm{cst}}{T}\int_{tT}^{tT+1} du \int_{(u-1-c)\vee 0}^{u} dv \int_{(u-1-c)\vee 0}^{v} dw \int_{(u-1)\vee bT}^{(w+c)\wedge tT} ds\mathcal{K}(s,u)^2\mathcal{K}(s,v)^2\mathcal{K}(s,w)^2$$
$$+\frac{\mathrm{cst}}{T}\int_{tT}^{tT+1} du \left[\int_{(u-1-c)\vee 0}^{u} dv \int_{(u-1)\vee bT}^{(v+c)\wedge tT} ds\mathcal{K}(s,u)\mathcal{K}(s,v)^2\right]^2$$
$$+\frac{\mathrm{cst}}{T}\int_{tT}^{tT+1} dv \left[\int_{v}^{v+c+1} du \int_{(u-1)\vee bT}^{(v+c)\wedge tT} ds\mathcal{K}(s,u)^2\mathcal{K}(s,v)\right]^2$$

en utilisant le théorème de Fubini,

$$= \frac{\mathrm{cst}}{T}\int_{(tT-1)\vee bT}^{tT} ds \int_{tT}^{s+1} \mathcal{K}(s,u)^2 du \int_{(u-1-c)\vee 0}^{u} \mathcal{K}(s,v)^2 dv \int_{(u-1-c)\vee 0}^{v} \mathcal{K}(s,w)^2 dw$$
$$+\frac{\mathrm{cst}}{T}\int_{tT}^{tT+1} du \left[\int_{(u-1)\vee bT}^{(u+c)\wedge tT} \mathcal{K}(s,u) ds \int_{(s-c)\vee 0}^{u} \mathcal{K}(s,v)^2 dv\right]^2$$
$$+\frac{\mathrm{cst}}{T}\int_{tT}^{tT+1} dv \left[\int_{(v-1)\vee bT}^{(v+c)\wedge tT} \mathcal{K}(s,v) ds \int_{v}^{s+1} \mathcal{K}(s,u)^2 du\right]^2 \leq \frac{\mathrm{cst}}{T}$$
$$+\frac{\mathrm{cst}}{T}\int_{tT}^{tT+1} du \int_{(u-1)\vee bT}^{(u+c)\wedge tT} \mathcal{K}(s,u)^2 ds + \frac{\mathrm{cst}}{T}\int_{tT}^{tT+1} dv \int_{(v-1)\vee bT}^{(v+c)\wedge tT} \mathcal{K}(s,v)^2 ds \leq \frac{\mathrm{cst}}{T} \to 0$$

quand $T \to \infty$. Ici, nous avons successivement utilisé (3.43), l'inégalité de Jensen et à nouveau (3.43).

Dans le cas où m est un entier impair strictement supérieur à 3, nous devons utiliser le lemme 3.3.2 et un raisonnement similaire donne le résultat.

Onzième pas. Pour finir la preuve du théorème 3.2.1, il nous reste à vérifier le point *c)* du cinquième pas, c'est-à-dire (3.34). Supposons que $m = 3$, le cas général se traitant de la même manière via le lemme 3.3.2. Posons

$$\mathfrak{B}(u,v) = 6\gamma_H \int_{(u-1-c)\vee 0}^{v} dB_w \int_{(u-1)\vee bT}^{(w+c)\wedge tT} ds\mathcal{K}(s,u)\mathcal{K}(s,v)\mathcal{K}(s,w) = \int_{(u-1-c)\vee 0}^{v} \mathfrak{D}(u,v,w) dB_w$$

et

$$\mathfrak{C}(u) = 3\gamma_H \int_{(u-1-c)\vee 0}^{u} dv \int_{(u-1)\vee bT}^{(v+c)\wedge tT} ds\mathcal{K}(s,u)\mathcal{K}(s,v)^2$$

$$+3\gamma_H \int_u^{u+c+1} dv \int_{(v-1)\vee bT}^{(u+c)\wedge tT} ds \mathcal{K}(s,v)^2 \mathcal{K}(s,u).$$

Alors, par (3.45), nous avons

$$R_T(u) = \frac{1}{\sqrt{T}} \left\{ \int_{(u-1-c)\vee 0}^{u} \mathfrak{B}(u,v) dB_v + \mathfrak{C}(u) \right\}.$$

Grâce à la formule d'Itô, nous pouvons écrire

$$\int_0^{tT} R_T(u)^2 du - \mathrm{E}\left[\int_0^{tT} R_T(u)^2 du\right] = \frac{2}{T}\left[\int_0^{tT} du \int_{(u-1-c)\vee 0}^{u} \mathfrak{B}(u,v) dB_v \right.$$

$$\left. \times \int_{(u-1-c)\vee 0}^{v} \mathfrak{B}(u,z) dB_z + \int_0^{tT} du \mathfrak{C}(u) \int_{(u-1-c)\vee 0}^{u} \mathfrak{B}(u,v) dB_v \right],$$

puisque $\mathfrak{C}$ est une fonction déterministe. Appliquons la version stochastique du théorème de Fubini à chaque terme de l'égalité précédente. Le deuxième terme devient

$$\int_0^{tT} dB_v \int_v^{(v+c+1)\wedge tT} du \mathfrak{B}(u,v) \mathfrak{C}(u)$$

$$= \int_0^{tT} dB_v \int_v^{(v+c+1)\wedge tT} du \mathfrak{C}(u) \int_{(u-1-c)\vee 0}^{v} \mathfrak{D}(u,v,w) dB_w$$

$$= \int_0^{tT} dB_v \int_{(v-1-c)\vee 0}^{v} dB_w \int_v^{(w+c+1)\wedge tT} du \mathfrak{C}(u) \mathfrak{D}(u,v,w) =: \int_0^{tT} \mathfrak{E}(v) dB_v,$$

tandis que le premier est transformé en

$$\int_0^{tT} dB_v \int_{(v-1-c)\vee 0}^{v} dB_z \int_v^{(z+c+1)\wedge tT} du \int_{(u-1-c)\vee 0}^{v} \mathfrak{D}(u,v,w) dB_w \int_{(u-1-c)\vee 0}^{z} \mathfrak{D}(u,z,y) dB_y =$$

$$\int_0^{tT} dB_v \int_{(v-1-c)\vee 0}^{v} dB_z \int_v^{(z+c+1)\wedge tT} du \left\{ \int_{(u-1-c)\vee 0}^{v} \mathfrak{D}(u,v,w) dB_w \int_{(u-1-c)\vee 0}^{w} \mathfrak{D}(u,w,y) dB_y \right.$$

$$\left. + \int_{(u-1-c)\vee 0}^{z} \mathfrak{D}(u,z,y) dB_y \int_{(u-1-c)\vee 0}^{y} \mathfrak{D}(u,y,w) dB_w \right\} = \int_0^{tT} dB_v \int_{(v-1-c)\vee 0}^{v} dB_z$$

$$\times \left\{ \int_{(v-1-c)\vee 0}^{v} dB_w \int_{(v-1-c)\vee 0}^{w} dB_y \int_v^{(w+c+1)\wedge(z+c+1)\wedge tT} du \mathfrak{D}(u,v,w) \mathfrak{D}(u,w,y) + \right.$$

$$\left. \int_{(v-1-c)\vee 0}^{z} dB_y \int_{(v-1-c)\vee 0}^{y} dB_w \int_v^{(y+c+1)\wedge(z+c+1)\wedge tT} du \mathfrak{D}(u,y,w) \mathfrak{D}(u,z,y) \right\} =: \int_0^{tT} \mathfrak{F}(v) dB_v.$$

Autrement dit, nous avons

$$\int_0^{tT} R_T(u)^2 du - \mathrm{E}\left[\int_0^{tT} R_T(u)^2 du\right] = \frac{2}{T}\int_0^{tT} (\mathfrak{E}(v) + \mathfrak{F}(v)) dB_v,$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{Var}\left[\int_0^{tT} R_T(u)^2 du\right] \le \frac{\mathrm{cst}}{T^2}\int_0^{tT} dv \mathrm{E}\left[\mathfrak{E}(v)^2 + \mathfrak{F}(v)^2\right].$$

Par la formule d'isométrie, nous obtenons

$$\frac{1}{T^2}\int_0^{tT} \mathrm{E}\left[\mathfrak{E}(v)^2\right] dv = \frac{1}{T^2}\int_0^{tT} dv \int_{(v-1-c)\vee 0}^{v} dw \left[\int_v^{(w+c+1)\wedge tT} du \mathfrak{C}(u)\mathfrak{D}(u,v,w)\right]^2.$$

En utilisant le théorème de Fubini, nous pouvons écrire

$$\frac{1}{3\gamma_H}\mathfrak{C}(u) = \int_{(u-1)\vee bT}^{(u+c)\wedge tT} \mathcal{K}(s,u) ds \int_{(s-c)\vee 0}^{u} \mathcal{K}(s,v)^2 dv \le \kappa \int_{(u-1)\vee bT}^{(u+c)\wedge tT} \mathcal{K}(s,u) ds =: \mathfrak{G}(u)$$

par (3.43). Ainsi, en utilisant cette inégalité et aussi celle de Jensen, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T^2}\int_0^{tT} \mathrm{E}\left[\mathfrak{E}(v)^2\right] dv &\le \frac{\mathrm{cst}}{T^2}\int_0^{tT} dv \int_{(v-1-c)\vee 0}^{v} dw \left[\int_v^{(w+c+1)\wedge tT} du \mathfrak{G}(u)\mathfrak{D}(u,v,w)\right]^2 \\
&\le \frac{\mathrm{cst}}{T^2}\int_0^{tT} dv \int_{(v-1-c)\vee 0}^{v} dw \int_v^{(w+c+1)\wedge tT} du \mathfrak{G}(u)^2 \mathfrak{D}(u,v,w)^2 du \\
&\le \frac{\mathrm{cst}}{T^2}\int_0^{tT} dv \int_{(v-1-c)\vee 0}^{v} dw \int_v^{(w+c+1)\wedge tT} du \int_{(u-1)\vee bT}^{(u+c)\wedge tT} \mathcal{K}(\sigma,u)^2 d\sigma \\
&\times \int_{(u-1)\vee bT}^{(w+c)\wedge tT} ds \mathcal{K}(s,u)^2 \mathcal{K}(s,v)^2 \mathcal{K}(s,w)^2 \le \frac{\mathrm{cst}}{T^2}\int_0^{tT} dv \int_{(v-1-c)\vee 0}^{v} dw \\
&\int_v^{(w+c+1)\wedge tT} du \int_{(u-1)\vee bT}^{(w+c)\wedge tT} ds \mathcal{K}(s,u)^2 \mathcal{K}(s,v)^2 \mathcal{K}(s,w)^2 \le \frac{\mathrm{cst}}{T}
\end{aligned}$$

par (3.43), le théorème de Fubini et à nouveau (3.43) (voir également la méthode utilisée dans le dixième pas). Nous devons exhiber une borne similaire pour le terme contenant $\mathrm{E}[\mathfrak{F}(v)^2]$. Nous voyons que $\mathfrak{F}(v)$ est composé de deux termes, disons $\mathfrak{F}_1(v)$ et $\mathfrak{F}_2(v)$. Toutefois, nous illustrons le raisonnement seulement sur l'un d'entre eux. À nouveau, par la formule d'isométrie et l'inégalité de Jensen, nous avons

$$\frac{1}{T^2}\int_0^{tT} \mathrm{E}\left[\mathfrak{F}_1(v)^2\right] dv = \frac{1}{T^2}\int_0^{tT} dv \int_{(v-1-c)\vee 0}^{v} dz \int_{(v-1-c)\vee 0}^{v} dw \int_{(v-1-c)\vee 0}^{w} dy$$

$$\times\left[\int_v^{(w+c+1)\wedge(z+c+1)\wedge tT} du\mathfrak{D}(u,v,w)\mathfrak{D}(u,w,y)\right]^2 \leq \frac{\text{cst}}{T^2}\int_0^{tT} dv \int_{(v-1-c)\vee 0}^{v} dz \int_{(v-1-c)\vee 0}^{v} dw$$

$$\times \int_{(v-1-c)\vee 0}^{w} dy \int_v^{(w+c+1)\wedge(z+c+1)\wedge tT} du\mathfrak{D}(u,v,w)^2\mathfrak{D}(u,w,y)^2.$$

En utilisant les mêmes outils (à savoir l'inégalité de Jensen, le théorème de Fubini et (3.43)), nous obtenons la même borne $\frac{\text{cst}}{T}$. Finalement, la convergence dans le point *c)* est terminée.

La preuve du théorème 3.2.1 est maintenant complète pour $0 < H < \frac{1}{2}$.

Pour $H = \frac{1}{2}$, la preuve peut-être reprise d'une manière similaire mais avec de nombreuses simplifications d'ordre technique (par exemple, il n'y a plus de singularité aux extremités 0 et t, donc il est inutile d'introduire les paramètre b et c; le processus $\breve{B}$ est lui aussi inutile; il n'y a plus d'estimations compliquées; etc.). Clairement, nous utilisons les mêmes idées que celles du début de la preuve et les détails sont laissés au lecteur.

□

Preuve du théorème 3.2.3. Encore une fois, nous découpons la preuve en plusieurs pas. Comme d'habitude, par localisation, nous supposons que σ,σ',σ'' sont bornées.

Premier pas. Introduisons les processus suivants:

$$\mathcal{X}_\varepsilon(t) := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t \sigma(B_s)^m\left(\frac{B_{s+\varepsilon}-B_s}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^m ds, t\geq 0 \tag{3.47}$$

et

$$\mathcal{Y}_\varepsilon(t) := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[\int_0^t\left(\frac{Z_{s+\varepsilon}-Z_s}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^m ds - \int_0^t \sigma(B_s)^m\left(\frac{B_{s+\varepsilon}-B_s}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^m ds\right], t\geq 0. \tag{3.48}$$

Nous allons démontrer que, quand $\varepsilon \to 0$,

$$\{\mathcal{X}_\varepsilon(t) : t\geq 0\} \xrightarrow{\mathcal{L}} \left\{\sqrt{c_{m,\frac{1}{2}}}\int_0^t \sigma(\beta_s^{(1)})^m d\beta_s^{(2)} : t\geq 0\right\} \tag{3.49}$$

et, pour tout $T\in(0,\infty)$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{E}[\sup_{t\in[0,T]} |\mathcal{Y}_\varepsilon(t)|^2] = 0. \tag{3.50}$$

Admettons ces deux faits un instant. Nous en déduisons alors (3.7) en utilisant le résultat classique (et simple) suivant concernant la convergence en loi de la somme de deux familles de processus stochastiques:

Lemme 3.4.3. *Soient $\{\mathcal{X}_\varepsilon(t) : t\geq 0\}$ et $\{\mathcal{Y}_\varepsilon(t) : t\geq 0\}$ deux familles de processus stochastiques continus réels, issu de 0 et tels que, quand $\varepsilon\to 0$, $\mathcal{X}_\varepsilon$ converge en loi comme processus vers $\mathcal{X}$ et, pour tout $T\in(0,\infty)$, $\mathrm{E}[\sup_{t\in[0,T]}|\mathcal{Y}_\varepsilon(t)|^2]\to 0$. Alors, quand $\varepsilon\to 0$, $\mathcal{X}_\varepsilon+\mathcal{Y}_\varepsilon$ converge en loi comme processus vers $\mathcal{X}$.*

Preuve. Il est classique de démontrer que, quand $\varepsilon \to 0$, $\mathcal{X}_\varepsilon+\mathcal{Y}_\varepsilon$ converge en loi vers $\mathcal{X}$ dans le sens des marginales de rang fini. Par conséquent, il nous reste à vérifier la tension pour la famille de processus $\{\mathcal{X}_\varepsilon+\mathcal{Y}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$. Pour une fonction continue $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, notons $\rho^T(g;\delta) := \sup\{|g(t)-g(s)| : 0\le s,t\le T \text{ avec } |s-t|\le\delta\}$ son module de continuité. Puisque le processus $\mathcal{X}_\varepsilon$ est issu de 0, pour montrer sa convergence en loi, il faut et il suffit de vérifier le critère de Prohorov suivant:

$$\text{pour tout } \eta,T>0,\ \lim_{\delta\to 0}\limsup_{\varepsilon\to 0}\mathrm{P}\left(\rho^T(\mathcal{X}_\varepsilon;\delta)>\eta\right)=0. \tag{3.51}$$

Clairement, par l'inégalité de Markov, nous avons

$$\mathrm{P}\left(\rho^T(\mathcal{X}_\varepsilon+\mathcal{Y}_\varepsilon;\delta)>\eta\right)\le \mathrm{P}(\rho^T(\mathcal{X}_\varepsilon;\delta)>\frac{\eta}{2})+\frac{16}{\eta^2}\mathrm{E}[\sup_{t\in[0,T]}|\mathcal{Y}_\varepsilon(t)|^2].$$

La conclusion suit en utilisant à nouveau (3.51) et la convergence vers zéro dans L^2 de $\mathcal{Y}_\varepsilon$. □

Deuxième pas. Nous prouvons ici (3.49). Par le théorème 3.2.1, (3.7) est vraie pour la martingale $Z=B$. Cela signifie que, pour tout entier impair $m\ge 3$,

$$\{\mathtt{N}_\varepsilon(t):t\ge 0\} := \left\{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t\left(\frac{B_{s+\varepsilon}-B_s}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^m ds : t\ge 0\right\}\xrightarrow{\mathcal{L}}\{\sqrt{c_{m,\frac12}}\,\beta_t : t\ge 0\}. \tag{3.52}$$

Nous allons montrer que nous pouvons écrire $\mathtt{N}_\varepsilon(t)=\mathtt{M}_\varepsilon(t)+\kappa_1 B_t+S_\varepsilon(t)$, $t\ge 0$, avec κ_1 une constante réelle explicite, $\mathtt{M}_\varepsilon$ une martingale et S_ε vérifiant, pour tout $t\ge 0$, $\lim_{\varepsilon\to\infty}\mathrm{E}[S_\varepsilon(t)^2]=0$. De plus, nous allons prouver que:

(i) pour tout $t\ge 0$, $\lim_{\varepsilon\to 0}[\mathtt{M}_\varepsilon,\mathtt{M}_\varepsilon](t)=\kappa_2^2 t$ dans L^2 et donc en probabilité (avec κ_2 une constante positive);

(ii) pour tout $t\ge 0$, $\lim_{\varepsilon\to 0}[B,\mathtt{M}_\varepsilon](t)=0$ en probabilité;

(iii) pour tout $t\ge 0$, $\lim_{\varepsilon\to 0}[B,\mathtt{M}_\varepsilon]\left([\mathtt{M}_\varepsilon,\mathtt{M}_\varepsilon]^{-1}(t)\right)=0$ en probabilité.

Avant de démontrer *(i)-(iii)*, finissons la preuve de (3.7). Notons β_ε le mouvement brownien associé à $\mathtt{M}_\varepsilon$ par le théorème de Dubins-Schwarz. Les points *(i)-(iii)* et la version asymptotique du théorème de Knight (voir [40], pp. 495-496) implique alors que, quand $\varepsilon\to 0$,

$$\{(B_t,\beta_\varepsilon(t)):t\ge 0\}\xrightarrow{\mathcal{L}}\{(\beta_t^{(1)},\beta_t^{(2)}):t\ge 0\}.$$

Par *(i)*, nous en déduisons que

$$\{(B_t,\mathtt{M}_\varepsilon(t)):t\ge 0\}\xrightarrow{\mathcal{L}}\{(\beta_t^{(1)},\kappa_2\beta_t^{(2)}):t\ge 0\},$$

où $\{(\beta_t^{(1)},\beta_t^{(2)}):t\ge 0\}$ désigne un mouvement brownien bidimensionnel issu de (0,0). Puisque σ est continue, nous en déduisons, quand $\varepsilon\to 0$,

$$\{(\sigma(B_t)^m,\mathtt{M}_\varepsilon(t)+\kappa_1 B_t):t\ge 0\}\xrightarrow{\mathcal{L}}\{(\sigma(\beta_t^{(1)})^m,\kappa_1\beta_t^{(1)}+\kappa_2\beta_t^{(2)}):t\ge 0\},$$

et, grâce au lemme 3.4.3, quand $\varepsilon \to 0$,

$$\{(\sigma(B_t)^m, \mathtt{N}_\varepsilon(t)) : t \geq 0\} \xrightarrow{\mathcal{L}} \{(\sigma(\beta_t^{(1)})^m, \kappa_1\beta_t^{(1)} + \kappa_2\beta_t^{(2)}) : t \geq 0\}.$$

De plus, $\forall t \geq 0, \forall J$ processus prévisible borné par 1, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\left|\int_0^t J_s d\mathtt{N}_\varepsilon(s)\right| > R\right) &\leq \frac{1}{R^2}\mathrm{E}\left\{\left|\int_0^t J_s d\mathtt{N}_\varepsilon(s)\right|^2\right\} = \frac{1}{R^2}\frac{1}{\varepsilon^{m+1}}\mathrm{E}\left\{\left|\int_0^t J_s(B_{s+\varepsilon}-B_s)^m ds\right|^2\right\} \\
&= \frac{2}{R^2}\frac{1}{\varepsilon^{m+1}}\iint_{0<s<s'<t} dsds'\mathrm{E}\left[J_sJ_{s'}(B_{s+\varepsilon}-B_s)^m(B_{s'+\varepsilon}-B_{s'})^m\right] \\
&\leq \frac{\mathrm{cst}}{R^2}\frac{1}{\varepsilon^{m+1}}\iint_{0<s<s'<s+\varepsilon<t} dsds'\mathrm{E}\left[(B_{s+\varepsilon}-B_s)^{2m}(B_{s'+\varepsilon}-B_{s'})^{2m}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&+\frac{2}{R^2}\frac{1}{\varepsilon^{m+1}}\iint_{0<s<s+\varepsilon<s'<t} dsds'\mathrm{E}\left[J_sJ_{s'}(B_{s+\varepsilon}-B_s)^m\right]\mathrm{E}\left[(B_{s'+\varepsilon}-B_{s'})^m\right],
\end{aligned}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le premier terme et par indépendance pour le second terme,

$$\leq \frac{\mathrm{cst}}{R^2}\frac{1}{\varepsilon}\iint_{0<s<s'<s+\varepsilon<t} dsds' + 0 \leq \frac{\mathrm{cst}}{R^2}.$$

D'où, en utilisant le résultat concernant la convergence en loi des intégrales stochastiques (voir [32], p. 125), nous obtenons

$$\left\{\int_0^t \sigma(B_s)^m d\mathtt{N}_\varepsilon(s) : t \geq 0\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}} \left\{\int_0^t \sigma(\beta_s^{(1)})^m(\kappa_1 d\beta_s^{(1)} + \kappa_2 d\beta_s^{(2)}) : t \geq 0\right\},$$

autrement dit (3.49).

Troisième pas. Nous prouvons la décomposition de $\mathtt{N}_\varepsilon$ et les points *(i)-(ii)-(iii)*. Comme précédemment, nous faisons la preuve seulement pour $m = 3$, le cas général étant similaire. En utilisant la formule d'Itô et la version stochastique du théorème de Fubini, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\mathtt{N}_\varepsilon(t) &= \frac{3}{\varepsilon^2}\int_0^t ds\left[2\int_s^{s+\varepsilon} dB_u\int_s^u dB_v\int_s^v dB_w + \int_s^{s+\varepsilon} dB_u\int_s^u dv + \int_s^{s+\varepsilon} dv\int_s^v dB_v\right] \\
&= \frac{3}{\varepsilon^2}\int_0^{t+\varepsilon} dB_u\left[2\int_{(u-\varepsilon)\vee 0}^u dB_v\int_{(u-\varepsilon)\vee 0}^v dB_w\int_{(u-\varepsilon)\vee 0}^{w\wedge t} ds + \int_{(u-\varepsilon)\vee 0}^u dv\int_{(u-\varepsilon)\vee 0}^{v\wedge t} ds\right. \\
&\qquad\left. + \int_u^{u+\varepsilon} dv\int_{(v-\varepsilon)\vee 0}^{u\wedge t} ds\right] =: \mathtt{M}_\varepsilon(t) + \kappa_1 B_t + S_\varepsilon(t),
\end{aligned}$$

avec

$$\mathtt{M}_\varepsilon(t) = \frac{6}{\varepsilon^2}\int_0^t dB_u\int_{(u-\varepsilon)\vee 0}^u dB_v\int_{(u-\varepsilon)\vee 0}^v dB_w\int_{(u-\varepsilon)\vee 0}^w ds =: \int_0^t R_\varepsilon(u)dB_u,$$

vérifiant $\mathrm{E}[\mathtt{M}_\varepsilon(t)^2] = 3t + O(\varepsilon)$, quand $\varepsilon \to 0$. Pour vérifier la convergence dans L^2 de S_ε, nous procédons comme dans le dixième pas de la preuve du théorème 3.6. Pour vérifier *(i)*, nous écrivons

$$\int_0^t R_\varepsilon(u)^2 du - \kappa_2^2 t = \{\int_0^t R_\varepsilon(u)^2 du - \mathrm{E}[\int_0^t R_\varepsilon(u)^2 du]\} + \{\mathrm{E}[\mathtt{M}_\varepsilon(t)^2] - \kappa_2^2 t\}.$$

Ici, nous choisissons $\kappa_2 = \sqrt{3}$ pour que le second terme tende vers zéro quand $\varepsilon \to 0$. D'autre part, le premier terme est égal à $\mathrm{Var}\left(\int_0^t R_\varepsilon(u)^2 du\right)$ et tend vers zéro quand $\varepsilon \to 0$, comme nous pouvons le voir en utilisant un raisonnement similaire à celui de la preuve (3.34).

Clairement, nous avons

$$\begin{aligned}[B,\mathtt{M}_\varepsilon](t) &= \frac{6}{\varepsilon^2}\int_0^t du \int_{(u-\varepsilon)\vee 0}^u dB_v \int_{(u-\varepsilon)\vee 0}^v dB_w \int_{(u-\varepsilon)\vee 0}^w ds \\ &= \frac{6}{\varepsilon^2}\int_0^t dB_v \int_{(v-\varepsilon)\vee 0}^v dB_w \int_w^t du \int_{(u-\varepsilon)\vee 0}^w ds.\end{aligned}$$

Ainsi, par la formule d'isométrie et l'inégalité de Jensen,

$$\mathrm{E}\left([B,\mathtt{M}_\varepsilon]^2(t)\right) \le \frac{\mathrm{cst}}{\varepsilon^2}\int_0^t dv \int_{(v-\varepsilon)\vee 0}^v dw \int_w^t du \int_{(u-\varepsilon)\vee 0}^w ds \le \mathrm{cst}\,\varepsilon,$$

et la convergence en probabilité *(ii)* suit. De plus, puisque $\lim_{\varepsilon\to 0}[\mathtt{M}_\varepsilon,\mathtt{M}_\varepsilon](t) = \mathrm{cst}\,t$, nous obtenons *(iii)*.

Quatrième pas. Nous procédons maintenant à la preuve de (3.50). À nouveau, suivant le lemme 3.3.2, nous découpons

$$\mathcal{Y}_\varepsilon(t) := \frac{1}{\varepsilon^{\frac{m+1}{2}}}\int_0^t ds \sum_{\delta\in\mathcal{P},n(\delta)=m} c(\delta)\left[I^{(Z)}_{s,s+\varepsilon,\delta} - \sigma(B_s)^m I^{(B)}_{s,s+\varepsilon,\delta}\right] =: \sum_{\delta\in\mathcal{P},n(\delta)=m} \mathcal{Y}^{(\delta)}_\varepsilon(t).$$

De plus, nous pouvons écrire $\mathcal{Y}^{(\delta)}_\varepsilon(t) = \sum_{j=1}^{k(\delta)} \mathcal{Y}^{(\delta,j)}_\varepsilon(t)$, où

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}^{(\delta,j)}_\varepsilon(t) := \frac{1}{\varepsilon^{\frac{m+1}{2}}}\int_0^t ds \int_s^{s+\varepsilon} \sigma(B_s)^{\delta(1)} dB^{(\delta(1))}(t_1) \ldots \int_s^{t_{j-2}} \sigma(B_s)^{\delta(j-1)} dB^{(\delta(j-1))}(t_{j-1}) \\ \times \int_s^{t_{j-1}} [\sigma(B_s)^{\delta(j)} - \sigma(B_{t_j})^{\delta(j)}] dB^{(\delta(j))}(t_j) \\ \times \int_s^{t_j} \sigma(B_{t_{j+1}})^{\delta(j+1)} dB^{(\delta(j+1))}(t_{j+1}) \ldots \int_s^{t_{k-1}} \sigma(B_{t_k})^{\delta(k)} dB^{(\delta(k))}(t_k).\end{aligned}$$

Fixons $\delta \in \mathcal{P}$ tel que $n(\delta) = m$ et posons $i_0 = \inf\{k \ge 1 : \delta(k) = 1\}$. Nous devons démontrer que, pour tout $j \in \{1,\ldots,k(\delta)\}$, pour tout $T \in (0,\infty)$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{E}[\sup_{t\in[0,T]} |\mathcal{Y}^{(\delta,j)}_\varepsilon(t)|^2] = 0. \tag{3.53}$$

Dans la suite, nous allons distinguer quatre types de termes.

Cinquième pas. Supposons que $i_0 = 1$. Nous illustrons la preuve de (3.53) pour $m = 3$, $\delta = (1,2)$ et $j = 1$, le cas général étant similaire. Dans ce cas,

$$\mathcal{Y}_\varepsilon^{((1,2),1)}(t) = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t ds \int_s^{s+\varepsilon} [\sigma(B_u) - \sigma(B_s)]dB_u \int_s^u \sigma(B_v)^2 dv.$$

Grâce à la version stochastique du théorème de Fubini et aussi en utilisant les inégalités de Jensen et de Burkholder-Davis-Gundy, nous avons

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\sup_{t\in[0,T]} |\mathcal{Y}_\varepsilon^{((1,2),1)}(t)|^2] &\leq \frac{\mathrm{cst}}{\varepsilon^4}\int_0^{T+1} du \mathrm{E}\left\{[\int_{(u-\varepsilon)\vee 0}^u dv\sigma(B_v)^2 \int_{(u-\varepsilon)\vee 0}^{v\wedge t} ds(\sigma(B_u) - \sigma(B_s))]^2\right\} \\ &\leq \mathrm{cst}\mathrm{E}\left[\sup_{s,s'\in[0,T+1],|s-s'|<\varepsilon} |\sigma(B_s) - \sigma(B_{s'})|^2\right],\end{aligned}$$

puisque σ est bornée. Par conséquent, (3.53) est une conséquence du:

Lemme 3.4.4. *Sous les hypothèses du théorème 3.2.3,*

$$\mathrm{E}\left[\sup_{s,s'\in[0,T+1],|s-s'|<\varepsilon} |\sigma(B_s) - \sigma(B_{s'})|^2\right] \leq \mathrm{cst}\varepsilon.$$

Preuve. Nous avons $|\sigma(B_s) - \sigma(B_{s'})|^2 \leq \|\sigma'\|_\infty^2 |B_s - B_{s'}|^2 \leq \mathrm{cst}|B_s - B_{s'}|^2$. De plus, par l'inégalité de Doob, $\mathrm{E}\left[\sup_{s,s'} |\sigma(B_s) - \sigma(B_{s'})|^2\right] \leq \mathrm{cst}\mathrm{E}\left[\sup_{s,s'} |B_s - B_{s'}|^2\right] \leq \mathrm{cst}\varepsilon$. □

Sixième pas. Supposons que $1 < i_0 < j$. Nous faisons la preuve de (3.53) pour $m = 5$, $\delta = (2,1,2)$ et $j = 3$. Clairement,

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_\varepsilon^{((2,1,2),3)}(t) &= \frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^t ds \int_s^{s+\varepsilon} \sigma(B_u)^2 du \int_s^u \sigma(B_v)dB_v \int_s^v [\sigma(B_w)^2 - \sigma(B_s)^2]dw \\ &= \mathcal{Y}_{\varepsilon,1}^{((2,1,2),3)}(t) + \mathcal{Y}_{\varepsilon,2}^{((2,1,2),3)}(t),\end{aligned}$$

où

$$\mathcal{Y}_{\varepsilon,1}^{((2,1,2),3)}(t) := \frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^t ds \int_s^{s+\varepsilon} \sigma(B_s)^2 du \int_s^u \sigma(B_v)dB_v \int_s^v [\sigma(B_w)^2 - \sigma(B_s)^2]dw,$$

et

$$\mathcal{Y}_{\varepsilon,2}^{((2,1,2),3)}(t) := \frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^t ds \int_s^{s+\varepsilon} [\sigma(B_u)^2 - \sigma(B_s)^2]du \int_s^u \sigma(B_v)dB_v \int_s^v [\sigma(B_w)^2 - \sigma(B_s)^2]dw.$$

Par la version stochastique du théorème de Fubini, nous obtenons

$$\mathcal{Y}_{\varepsilon,1}^{((2,1,2),3)}(t) = \frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^{t+\varepsilon} \sigma(B_v)dB_v \int_{(v-\varepsilon)\vee 0}^v dw \int_v^{(w\wedge t)+\varepsilon} du$$

$$\times \int_{(u-\varepsilon)\vee 0}^{w\wedge t} ds\, \sigma(B_s)^2[\sigma(B_w)^2 - \sigma(B_s)^2]$$

et

$$\mathrm{E}[\sup_{t\in[0,T]} |\mathcal{Y}_{\varepsilon,1}^{((2,1,2),3)}(t)|^2] \leq \frac{\mathrm{cst}}{\varepsilon^6} \int_0^{T+1} dv \mathrm{E}\left\{ \sigma(B_v)^2 \left[\int_{(v-\varepsilon)\vee 0}^{v} dw \int_v^{(w\wedge t)+\varepsilon} du \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \int_{(u-\varepsilon)\vee 0}^{w\wedge t} ds\, \sigma(B_s)^2[\sigma(B_w)^2 - \sigma(B_s)^2] \right]^3 \right\} \leq \mathrm{cst}\mathrm{E}\left[\sup_{s,s'\in[0,T+1],|s-s'|<\varepsilon} |\sigma(B_s) - \sigma(B_{s'})|^2 \right],$$

qui tend vers zéro, quand $\varepsilon \to 0$, grâce au lemme 3.4.4. D'une manière similaire, nous prouvons que, quand $\varepsilon \to 0$, $\mathrm{E}[\sup_{t\in[0,T]} |\mathcal{Y}_{\varepsilon,2}^{((2,1,2),3)}(t)|^2] \to 0$.

Septième pas. Supposons que $i_0 = j > 1$ et prouvons (3.53) pour $m = 3$, $\delta = (2,1)$ et $j = 2$, le cas général étant similaire. Dans ce cas,

$$\mathcal{Y}_{\varepsilon}^{((2,1),2)}(t) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t ds \int_s^{s+\varepsilon} \sigma(B_u)^2 du \int_s^u [\sigma(B_v) - \sigma(B_s)] dB_v = \mathcal{Y}_{\varepsilon,1}^{((2,1),2)}(t) + \mathcal{Y}_{\varepsilon,2}^{((2,1),2)}(t),$$

où

$$\mathcal{Y}_{\varepsilon,1}^{((2,1),2)}(t) := \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t ds \int_s^{s+\varepsilon} \sigma(B_s)^2 du \int_s^u [\sigma(B_v) - \sigma(B_s)] dB_v$$

et

$$\mathcal{Y}_{\varepsilon,2}^{((2,1),2)}(t) := \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t ds \int_s^{s+\varepsilon} [\sigma(B_u)^2 - \sigma(B_s)^2] du \int_s^u [\sigma(B_v) - \sigma(B_s)] dB_v.$$

Comme précédemment,

$$\mathcal{Y}_{\varepsilon,1}^{((2,1),2)}(t) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^{t+\varepsilon} dB_v \int_v^{(v\wedge t)+\varepsilon} du \int_{(u-\varepsilon)\vee 0}^{v\wedge t} ds\, \sigma(B_s)^2[\sigma(B_v) - \sigma(B_s)],$$

et, grâce au lemme 3.4.4, nous montrons que chaque terme tend vers zéro quand $\varepsilon \to 0$.

Huitième pas. Finalement, si $i_0 > j$, nous illustrons la preuve pour $m = 3$, $\delta = (2,1)$ et $j = 1$. Nous écrivons

$$\mathcal{Y}_{\varepsilon}^{((2,1),1)}(t) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t ds \int_s^{s+\varepsilon} [\sigma(B_u)^2 - \sigma(B_s)^2] du \int_s^u \sigma(B_v) dB_v = \mathcal{Y}_{\varepsilon,1}^{((2,1),1)}(t) + \mathcal{Y}_{\varepsilon,2}^{((2,1),1)}(t),$$

avec

$$\mathcal{Y}_{\varepsilon,1}^{((2,1),1)}(t) := \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t ds \int_s^{s+\varepsilon} du \int_s^u 2(\sigma\sigma')(B_w) dB_w \int_s^u \sigma(B_v) dB_v$$

et

$$\mathcal{Y}_{\varepsilon,2}^{((2,1),1)}(t) := \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t ds \int_s^{s+\varepsilon} du \int_s^u (\sigma\sigma')'(B_w) dw \int_s^u \sigma(B_v) dB_v.$$

$\mathcal{Y}_{\varepsilon,2}^{((2,1),1)}(t)$ tend vers zéro quand $\varepsilon \to 0$ en utilisant encore une fois le lemme 3.4.4, tandis que, par la formule d'Itô,

$$\mathcal{Y}_{\varepsilon,1}^{((2,1),1)}(t) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t ds \int_s^{s+\varepsilon} du \int_s^u 2(\sigma\sigma')(B_w) dB_w \int_s^w \sigma(B_v) dB_v$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t ds \int_s^{s+\varepsilon} du \int_s^u \sigma(B_v)dB_v \int_s^v 2(\sigma\sigma')(B_w)dB_w$$

et chaque terme tend vers zéro en utilisant les mêmes outils. $\square$

Chapitre 4

Équations différentielles unidimensionnelles dirigées par une fonction höldérienne

Dans ce chapitre, nous étudions les équations différentielles unidimensionnelles dirigées par une fonction höldérienne $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ d'indice $\alpha \in (0,1)$, c'est-à-dire vérifiant:

$$\exists L > 0 : \forall s,t \in [0,1], |g_t - g_s| \leq L|t-s|^\alpha, \tag{4.1}$$

et telle que $g(0) = 0$. Plus précisément, nous sommes intéressés par les équations différentielles formellement données par

$$\begin{cases} dx_t = \sigma(x_t)dg_t + b(x_t)dt, t \in [0,1], \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4.2}$$

où x_0 est un réel et σ et b sont deux fonctions continues.

4.1 Intégrale de Newton-Côtes: rappels

Pour $\alpha \in]0,1[$, C^α désigne l'ensemble des fonctions $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ vérifiant (4.1) et telles que $g(0) = 0$. Si $n \geq 1$ est un entier, $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^n. Soit $g \in \mathrm{C}^\alpha$ avec $\alpha > 1/2$. Pour $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, on a:

$$\forall a,b \in \mathbb{R} : f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + O\left((b-a)^2\right), \tag{4.3}$$

où, quand $n \in \mathbb{N}^*$, $O\left((b-a)^n\right)$ désigne une fonction s'écrivant sous la forme $(b-a)^n R(a,b)$ avec R une fonction bornée lorsque a et b restent dans un compact. Nous utiliserons cette notation commode plusieurs fois dans la suite.

Dans (4.3), posons $a = g_s$, $b = g_{s+\varepsilon}$, intégrons sur $[0,t]$ et divisons par ε. On obtient:

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left[f(g_{s+\varepsilon}) - f(g_s)\right] ds = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t f'(g_s)(g_{s+\varepsilon} - g_s)ds + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t O\left((g_{s+\varepsilon} - g_s)^2\right) ds.$$

La fonction g vérifiant (4.1), on en déduit:

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} f(g_s)ds - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} f(g_s)ds = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t f'(g_s)(g_{s+\varepsilon}-g_s)ds + O\left(\varepsilon^{2\alpha-1}\right).$$

Si $\varepsilon \to 0$, alors $\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} f(g_s)ds \to f(0)$ et $\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} f(g_s)ds \to f(g_t)$ uniformément en $t \in [0,1]$. D'où

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t f'(g_s)(g_{s+\varepsilon}-g_s)ds \text{ existe et vaut } f(g_t)-f(0).$$

On vient de démontrer la:

Proposition 4.1.1. *Si $g \in \mathrm{C}^\alpha$ avec $\alpha > 1/2$ et si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ alors $\int_0^\bullet f'(g_s)d^-g_s$ existe et on a*

$$\forall t \in [0,1]:\ f(g_t) = f(0) + \int_0^t f'(g_s)d^-g_s.$$

Rappelons que l'intégrale forward $\int_0^t f'(g_s)d^-g_s$ a été définie dans le chapitre 2, section 2.1.

Lorsque $\alpha \leq 1/2$, l'approche précédente ne s'applique pas, car le développement de Taylor (4.3) n'est pas adéquat. Pour $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$, on a:

$$\forall a,b \in \mathbb{R}:\ f(b) = f(a) + \frac{f'(a)+f'(b)}{2}(b-a) + O\left((b-a)^3\right). \tag{4.4}$$

De la même manière que précédemment, on obtient la:

Proposition 4.1.2. *Si $g \in \mathrm{C}^\alpha$ avec $\alpha > 1/3$ et si $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ alors $\int_0^\bullet f'(g_s)d^\circ g_s$ existe et on a*

$$\forall t \in [0,1]:\ f(g_t) = f(0) + \int_0^t f'(g_s)d^\circ g_s.$$

Rappelons que l'intégrale symétrique $\int_0^t f'(g_s)d^\circ g_s$ a été définie dans le chapitre 2, section 2.1.

À nouveau, si $\alpha \leq 1/3$, l'approche précédente ne convient pas. Lorsque $\alpha > 1/5$ et $f \in \mathcal{C}^5(\mathbb{R})$, il faut remplacer (4.4) par la formule de Simpson (qui est un cas particulier des formules de Newton-Côtes):

$$\forall a,b \in \mathbb{R}:\ f(b) = f(a) + \frac{f'(a)+4f'(\frac{a+b}{2})+f'(b)}{6}(b-a) + O\left((b-a)^5\right). \tag{4.5}$$

Remarquons que cette formule peut être écrite sous la forme suivante:

$$\forall a,b \in \mathbb{R}:\ f(b) = f(a) + (b-a)\int_0^1 f'(a+\beta(b-a))\nu_2(d\beta) + O\left((b-a)^5\right),$$

avec $\nu_2 = \frac{1}{6}\left\{\delta_0 + 4\delta_{1/2} + \delta_1\right\}$.

Pour étudier le cas général, il faut d'une part généraliser (4.3)-(4.5) et d'autre part définir de nouvelles intégrales stochastiques.

Commençons par l'extension de (4.5). Si $f \in \mathcal{C}^{2N+1}(\mathbb{R})$, on a la formule de Newton-Côtes:

$$\forall a,b \in \mathbb{R}: \ f(b) = f(a) + (b-a)\int_0^1 f'(a+\beta(b-a))\nu_N(d\beta) + O\left((b-a)^{2N+1}\right), \quad (4.6)$$

avec

$$\nu_N = \sum_{j=0}^{2(N-1)} \left(\int_0^1 \prod_{k\neq j} \frac{2(N-1)u-k}{j-k}\,du\right)\delta_{j/(2N-2)}. \quad (4.7)$$

Comme précédemment, elle permet d'obtenir la:

Proposition 4.1.3. *Si $g \in \mathrm{C}^\alpha$ avec $\alpha > 1/(2N+1)$ et si $f \in \mathcal{C}^{2N+1}(\mathbb{R})$ alors $\int_0^\bullet f'(g_s)\diamond_N dg_s$ existe et on a*

$$\forall t \in [0,1]: \ f(g_t) = f(0) + \int_0^t f'(g_s)\diamond_N dg_s.$$

La bonne notion d'intégrale associée à (4.7) est l'intégrale de Newton-Côtes d'ordre N notée $\int_0^t f(g_s)\diamond_N dg_s$. Rappelons que cette intégrale a déjà été définie dans le chapitre 2 par le deuxième point de la Remarque 2.3.5, seulement pour des intégrands du type $f(g_s)$ avec $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ régulière. Dans la suite, nous aurons besoin de considérer des intégrands plus généraux du type $f(g_s,a_s)$ avec $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ régulière et a à variation bornée. C'est pourquoi nous devons définir de nouvelles intégrales. Notons BV l'ensemble des fonctions continues définies sur $[0,1]$ et à variation bornée.

Définition 4.1.4. *Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $a \in BV$ et $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ continue. Sous réserve que la limite existe, l'intégrale de Newton-Côtes d'ordre N: $\int_0^t f(g_s,a_s)\diamond_N dg_s$ est définie par*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left(\int_0^1 f(g_s+\beta(g_{(s+\varepsilon)\wedge 1}-g_s),a_s)\nu_N(d\beta)\right)(g_{(s+\varepsilon)\wedge 1}-g_s)ds,$$

la limite étant uniforme en $t\in[0,1]$, où $\nu_1 = \frac{1}{2}(\delta_0+\delta_1)$ et ν_N est la probabilité sur $[0,1]$ définie par (4.7) si $N\geq 2$.

Remarquons qu'il n'existe *a priori* aucune raison pour que l'intégrale de Newton-Côtes d'ordre N existe. Nous verrons un résultat d'existence dans le Corollaire 4.1.8 plus bas.

Exemple 4.1.5.

- L'intégrale de Newton-Côtes d'ordre 1: $\int_0^\bullet f(g_s,a_s)\diamond_1 dg_s$ est donnée par

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^\bullet \left(f(g_s,a_s)+f(g_{(s+\varepsilon)\wedge 1},a_s)\right)(g_{(s+\varepsilon)\wedge 1}-g_s)ds.$$

  Elle coïncide avec l'intégrale symétrique $\int_0^\bullet f(g_s,a_s)d^\circ g_s$ déjà rencontrée.

- Nous avons $\nu_2 = \frac{1}{6}\left(\delta_0+4\delta_{1/2}+\delta_1\right)$. Par conséquent, l'intégrale de Newton-Côtes d'ordre 2: $\int_0^\bullet f(g_s,a_s)\diamond_2 dg_s$ est donnée par

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{6\varepsilon}\int_0^\bullet \left(f(g_s,a_s)+4f(\frac{g_s+g_{(s+\varepsilon)\wedge 1}}{2},a_s)+f(g_{(s+\varepsilon)\wedge 1},a_s)\right)(g_{(s+\varepsilon)\wedge 1}-g_s)ds.$$

Remarque 4.1.6. 1. Si $N \neq 1$, nous définissons $\int_0^t y_s \diamond_N dg_s$ seulement pour des intégrands y de la forme $s \mapsto f(g_s,a_s)$ avec f régulière et a dans BV. Signalons que cette notation commode cache le fait que l'intégrale $\int_0^t y_s \diamond_N dg_s$ dépend de la représentation $y_s = f(g_s,a_s)$ choisie. Autrement dit, si $f_1(g_s,a_s^1) = f_2(g_s,a_s^2)$ pour tout $s \in [0,1]$, rien n'assure *a priori* que $\int_0^t f_1(g_s,a_s^1) \diamond_N dg_s = \int_0^t f_2(g_s,a_s^2) \diamond_N dg_s$. Par contre, cette intégrale ne dépend pas de N. En effet, en utilisant le Théorème 4.1.7 juste après, on obtient:

$$\int_0^t f(g_s,a_s) \diamond_N dg_s = F(g_t,a_t) - F(0,a_0) - \int_0^t \partial_2 F(g_s,a_s) da_s$$

où F est telle que $\partial_1 F = f$. En fait, l'entier N ne sert qu'à s'assurer que l'intégrale existe (voir le Corollaire 4.1.8 plus bas).

Nous sommes à présent capables de généraliser les résultats des Propositions 4.1.1 et 4.1.2:

Théorème 4.1.7. *(formule du changement de variables généralisée) Soient $\alpha \in (0,1)$, $g \in \mathrm{C}^\alpha$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha > 1/(2N+1)$. Si $a \in BV$ et si $f \in \mathcal{C}^{2N+1,1}(\mathbb{R}^2)$, alors l'intégrale $\int_0^\bullet \partial_1 f(g_s,a_s) \diamond_N dg_s$ existe et nous avons, pour tout $t \in [0,1]$,*

$$f(g_t,a_t) = f(0,a_0) + \int_0^t \partial_1 f(g_s,a_s) \diamond_N dg_s + \int_0^t \partial_2 f(g_s,a_s) da_s. \tag{4.8}$$

Corollaire 4.1.8. *Fixons $\alpha \in (0,1)$ et soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha > 1/(2N+1)$. Si $a \in BV$ et si $h \in \mathcal{C}^{2N,1}(\mathbb{R}^2)$, alors l'intégrale $\int_0^\bullet h(g_s,a_s) \diamond_N dg_s$ existe.*

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème précédent à f telle que $\partial_1 f = h$. □

4.2 Définition de la notion solution pour (4.2)

Hypothèse. Dans la suite, nous fixons $\alpha \in (0,1)$, $g \in \mathrm{C}^\alpha$, $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha > 1/(2N+1)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\sigma,b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et nous écrivons $\diamond\, dg_t$ au lieu de $\diamond_N dg_t$.

Définition 4.2.1. *Une solution à l'équation différentielle (4.2) est une fonction continue $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ vérifiant*

- *$x_t = f(g_t,a_t), t \in [0,1]$, pour une certaine $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ et un certain $a \in BV$;*
- *$\sigma \circ f$ est suffisamment régulière pour que l'intégrale*

$$\int_0^\bullet \sigma(x_s) \diamond dg_s = \int_0^\bullet \sigma \circ f(g_s,a_s) \diamond dg_s$$

  existe,
- *pour tout $t \in [0,1]$, nous avons*

$$x_t = x_0 + \int_0^t \sigma(x_s) \diamond dg_s + \int_0^t b(x_s) ds. \tag{4.9}$$

4.3 Existence et unicité dans (4.2)

Nous commençons par établir l'existence d'une solution à (4.2):

Théorème 4.3.1. *(existence) Supposons que $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit lipschitzienne et que $\sigma \in \mathcal{C}^{2N}(\mathbb{R})$ ait des dérivées premières et secondes bornées. Notons $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'unique solution de*

$$\partial_1 u = \sigma(u);\ u(0,y) = y, y \in \mathbb{R}. \tag{4.10}$$

Alors l'équation différentielle (4.2) a au moins une solution donnée par

$$x_t = u(g_t,y_t), t \in [0,1], \tag{4.11}$$

où $y \in BV$ est l'(unique) solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{dy_t}{dt} = (\partial_2 u(g_t,y_t))^{-1}\,(b \circ u)(g_t,y_t);\ y_0 = x_0. \tag{4.12}$$

Preuve. L'approche est classique et basée sur les transformations de type Doss [16] et Sussman [47].

- Tout d'abord, remarquons qu'on a existence et unicité dans (4.10) puisque σ est lipschitzienne. De plus, puisque σ' et σ'' sont bornées, $(\partial_2 u)^{-1}$ et $b \circ u$ sont dans l'ensemble des fonctions h vérifiant:

$$|h(\mathbf{x},\mathbf{y}_1) - h(\mathbf{x},\mathbf{y}_2)| \le L_n|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|;\ -n \le \mathbf{x},\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2 \le n, \tag{4.13}$$

$$|h(\mathbf{x},\mathbf{y})| \le K_1 + H_n|\mathbf{y}|;\ |\mathbf{x}| \le n, y \in \mathbb{R},$$

  et on a existence et unicité dans (4.12) (voir Karatzas-Shreve [33] p. 296).
- Le deuxième point de la définition 4.2.1 est vérifié. En effet, puisque $\sigma \in \mathcal{C}^{2N}(\mathbb{R})$, $u \in \mathcal{C}^{2N+1,1}(\mathbb{R}^2)$ et le corollaire 4.1.8 s'applique.
- Il reste à prouver le troisième point de la définition. Par la formule du changement de variables généralisée, nous avons, pour $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} x_t = u(g_t,y_t) &= u(g_0,y_0) + \int_0^t \partial_1 u(g_s,y_s) \diamond dg_s + \int_0^t \partial_2 u(g_s,y_s) dy_s \\ &= x_0 + \int_0^t \sigma(x_s) \diamond dg_s + \int_0^t b(x_s) ds. \end{aligned}$$

□

Exemple 4.3.2. (équations différentielles linéaires) Supposons que $\sigma(x) = \gamma_1 x + \beta_1$ ($\gamma_1 \neq 0$) et que $b(x) = \gamma_2 x + \beta_2$. Dans ce cas, u se calcule explicitement:

$$u(x,y) = \left(y + \frac{\beta_1}{\gamma_1}\right) \mathrm{e}^{\gamma_1 x} - \frac{\beta_1}{\gamma_1},$$

et y également:

$$y_t = \left(x_0 + \int_0^t \left[\frac{\gamma_2 \beta_1}{\gamma_1} + \left(\beta_2 - \frac{\gamma_2 \beta_1}{\gamma_1} \right) \mathrm{e}^{-\gamma_1 \, g_s} \right] \mathrm{e}^{-\gamma_2 \, s} \, ds \right) \mathrm{e}^{\gamma_2 \, t}.$$

Par conséquent,

$$x_t = \left\{ \left(x_0 + \int_0^t \left[\frac{\gamma_2 \beta_1}{\gamma_1} + \left(\beta_2 - \frac{\gamma_2 \beta_1}{\gamma_1} \right) \mathrm{e}^{-\gamma_1 \, g_s} \right] \mathrm{e}^{-\gamma_2 \, s} \, ds \right) \mathrm{e}^{\gamma_2 \, t} + \frac{\beta_1}{\gamma_1} \right\} \mathrm{e}^{\gamma_1 g_t} - \frac{\beta_1}{\gamma_1}$$

vérifie

$$dx_t = (\gamma_1 \, x_t + \beta_1) \diamond dg_t + (\gamma_2 x_t + \beta_2) dt; \; x(0) = x_0.$$

Maintenant, intéressons-nous à un résultat d'unicité pour (4.2):

Théorème 4.3.3. *(unicité) Supposons que g ne soit à variation bornée dans aucun intervalle non trivial et que $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit lipschitzienne.*

1. *Si σ est analytique à dérivées première et seconde bornées, alors la fonction x définie par (4.11) est l'unique solution de (4.2) dans la classe des fonctions de la forme $t \mapsto f(g_t,a_t)$ avec $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ analytique en la première variable vérifiant $f(0,y) = y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $a \in BV$.*
2. *Si $\sigma \in \mathcal{C}^{2N}(\mathbb{R})$ avec des dérivées première et seconde bornées, alors la fonction x définie par (4.11) est l'unique solution de (4.2) dans la classe des fonctions de la forme $t \mapsto u(g_t,a_t)$ avec $a \in BV$ et u donnée par (4.10).*

Preuve. Commençons par la preuve du premier point.

– Soit x une solution de (4.2) de la forme $x_t = f(g_t,a_t)$. D'une part, nous avons

$$x_t = x_0 + \int_0^t \sigma(x_s) \diamond dg_s + \int_0^t b(x_s) ds \tag{4.14}$$

$$= x_0 + \int_0^t \sigma \circ f(g_s,a_s) \diamond dg_s + \int_0^t b \circ f(g_s,a_s) ds.$$

D'autre part, grâce à la formule du changement de variables (4.8), nous pouvons écrire

$$x_t = x_0 + \int_0^t \partial_1 f(g_s,a_s) \diamond dg_s + \int_0^t \partial_2 f(g_s,a_s) da_s. \tag{4.15}$$

De (4.14) et (4.15), nous en déduisons que $t \mapsto \int_0^t \varphi(g_s,a_s) \diamond dg_s$ appartient à BV où $\varphi := \partial_1 f - \sigma \circ f$. Une application de la formule du changement de variables implique que $t \mapsto \psi(g_t,a_t)$ appartient à BV où ψ est telle que $\partial_1 \psi = \varphi$. Fixons $t_0 \in [0,1]$. Posons $(z_0,y_0) := (g_{t_0},a_{t_0}) \in \mathbb{R}^2$. Si $\varphi(z_0,y_0) \neq 0$, le théorème des fonctions implicites assure l'existence d'un voisinage V de (z_0,y_0) et d'une fonction ψ^{-1} tels que $\psi^{-1}(\psi(x,y),y) = x$ pour tout $(x,y) \in V$. Nous en déduisons, pour $|t - t_0|$ assez petit, que g_t est égal à $\psi^{-1}(\psi(g_t,a_t),a_t)$. Ainsi, g est à variation bornée dans un voisinage de t_0: absurde! Nous avons prouvé

$$\forall t \in]0,1[, \varphi(g_t,a_t) = 0. \tag{4.16}$$

– Nous pouvons obtenir, par un raisonnement similaire,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in]0,1[, \partial_1^k \varphi(g_t,a_t) = 0.$$

Puisque σ et $f(.,y)$ sont analytiques, $\varphi(.,y)$ est analytique et, nous en déduisons

$$\forall t \in]0,1[, \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x,a_t) = \partial_1 f(x,a_t) - \sigma \circ f(x,a_t) = 0. \tag{4.17}$$

– Rappelons que $f(0,a_t) = u(0,a_t) = a_t$ et que $\partial_1 u = \sigma \circ u$. Par unicité du problème de Cauchy, nous en déduisons:

$$\forall t \in [0,1], \forall x \in \mathbb{R}, f(x,a_t) = u(x,a_t).$$

En particulier, nous obtenons

$$\forall t \in [0,1], x_t = f(g_t,a_t) = u(g_t,a_t). \tag{4.18}$$

L'identité (4.14) peut donc se réécrire:

$$x_t = x_0 + \int_0^t \sigma \circ u(g_s,a_s) \diamond dg_s + \int_0^t b \circ u(g_s,a_s) ds,$$

tandis que la formule du changement de variables appliqué à $u(g_t,a_t)$ donne:

$$x_t = x_0 + \int_0^t \partial_1 u(g_s,a_s) \diamond dg_s + \int_0^t \partial_2 u(g_s,a_s) da_s.$$

Nous en déduisons

$$\forall t \in [0,1] : \frac{da_t}{dt} = \partial_2 u(g_t,a_t)^{-1} \, b \circ u(g_t,a_t). \tag{4.19}$$

Comme $a_0 = f(0,a_0) = x_0 = y_0$, a et y vérifient le même problème de Cauchy (voir (4.12) et (4.19)). Donc a est égal à y. Finalement, nous avons $x_t = u(g_t,y_t)$ pour tout $t \in [0,1]$, ce qui achève la démonstration de la première partie.

La preuve de la deuxième partie est facile.

□

4.4 Approximations de la solution donnée par le théorème 4.3.1

4.4.1 Approximation par des fonctions à variation bornée

Supposons que $\{g^{(k)}\}$ soit une suite de fonction de BV qui converge, dans un sens approprié, vers la fonction g. Supposons, de plus, que $\{x^{(k)}\}$ soit la suite correspondante des solutions des equations intégrales ordinaires

$$x_t^{(k)} = x_0 + \int_0^t \sigma(x_s^{(k)}) dg_s^{(k)} + \int_0^t b(w_s^{(k)}) ds, t \in [0,1], \tag{4.20}$$

où la première intégrale est au sens de Riemann-Stieltjes. Nous obtenons que $\{x^{(k)}\}$ converge vers x donnée par (4.11). Rappelons que x est *une* solution de:

$$x_t = x_0 + \int_0^t \sigma(x_s) \diamond dg_s + \int_0^t b(x_s)ds, t \in [0,1]. \tag{4.21}$$

Plus précisément, nous énonçons le théorème de type Wong-Zakai:

Théorème 4.4.1. *Supposons que $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit lipschitzienne, que $\sigma \in \mathcal{C}^{2N}(\mathbb{R})$ ait ses dérivées première et seconde bornées et que $\{g^{(k)}\}_{k\geq 1}$ soit une suite de BV telle que*

$$\lim_{k\to+\infty} \sup_{0\leq s\leq 1} |g_s^{(k)} - g_s| = 0.$$

Soit $x^{(k)}$ l'unique solution de (4.20). Alors la suite $\{x^{(k)}\}_{k\geq 1}$ converge uniformément vers la solution x donnée par (4.11) de l'équation différentielle (4.2).

Preuve. Nous suivons la preuve classique de la Proposition 2.24 de Karatzas-Shreve [33]. Posons $z = (\partial_2 u)^{-1}\, b \circ u$ où u est donnée par (4.10). Soit $y^{(k)}$ l'unique solution de l'équation différentielle ordinaire

$$dy_t^{(k)} = z(g_t^{(k)},y_t^{(k)})dt;\ y_0^{(k)} = x_0.$$

Le calcul intégral ordinaire implique que $x_t^{(k)} = u(g_t^{(k)},y_t^{(k)})$ est l'unique solution de (4.20). Comme x est donnée par $x_t = u(g_t,y_t)$ avec y vérifiant (4.12), le théorème sera prouvé si nous montrons que

$$\lim_{k\to\infty} \sup\nolimits_{0\leq s\leq 1} \left|y_s^{(k)} - y_s\right| = 0. \tag{4.22}$$

Fixons $t \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon \in (0,\mathrm{e}^{-L_n t})$ où L_n est la constante de Lipschitz associée à $z(\mathbf{x},.)$ et vérifiant (4.13). Posons

$$\tau_n = t \wedge \inf\{0 \leq s \leq t :\ |y_s| \geq n-1 \text{ ou } |g_s| \geq n-1\},$$

et

$$\tau_n^{(k)} = t \wedge \inf\left\{0 \leq s \leq t :\ |y_s^{(k)}| \geq n\right\}.$$

On peut choisir k assez grand pour que

$$\forall s \in [0,\tau_n \wedge \tau_n^{(k)}] :\ |z(g_s^{(k)},y_s) - z(g_s,y_s)| \leq \varepsilon^2 \text{ et } |g_s^{(k)}| \leq n.$$

Par conséquent, pour $s \in [0,\tau_n \wedge \tau_n^{(k)}]$,

$$\left|\frac{d}{ds}\left(y_s^{(k)} - y_s\right)\right| \leq |z(g_s^{(k)},y_s^{(k)}) - z(g_s^{(k)},y_s)| + |z(g_s^{(k)},y_s) - z(g_s,y_s)| \leq L_n|y_s^{(k)} - y_s| + \varepsilon^2.$$

Le lemme de Gronwall implique

$$\forall s \in [0,\tau_n \wedge \tau_n^{(k)}] :\ |y_s^{(k)} - y_s| \leq \varepsilon^2 \mathrm{e}^{L_n t} < \varepsilon.$$

En particulier, nous en déduisons que $\tau_n \leq \tau_n^{(k)}$. En laissant déjà tendre $k \to +\infty$ puis $\varepsilon \to 0$, on conclut que:

$$\lim_{k\to+\infty} \sup_{0\leq s\leq \tau_n} |y_s^{(k)} - y_s| = 0.$$

Pour n assez grand, nous avons $\tau_n = t$ et (4.22) suit. La preuve du théorème est donc terminée.

$\square$

4.4.2 Schémas d'Euler et de type Milshtein

Dans cette section, nous supposons que $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne et que $\sigma \in \mathcal{C}^{2N}(\mathbb{R})$. Nous supposons en outre que $\inf_{x\in\mathbb{R}} |\sigma(x)| > 0$, bien que nous pensons que cette hypothèse est en fait superflue et est seulement d'ordre technique. Notons x la solution de (4.2) donnée par le théorème 4.3.1. Soit $\widehat{x}^{(n)}$ l'approximation de x obtenue en appliquant le schéma d'Euler classique de pas $1/n$:

$$\begin{cases} \widehat{x}_0^{(n)} = x_0 \\ \widehat{x}_t^{(n)} = \widehat{x}_{k/n}^{(n)} + \sigma(\widehat{x}_{k/n}^{(n)})(g_t - g_{k/n}) + b(\widehat{x}_{k/n}^{(n)})(t - k/n), t \in [k/n,(k+1)/n], \end{cases}$$

$k = 0,1,...,n-1$. Nous avons le:

Théorème 4.4.2. *Quand* $n \to +\infty$*:*

$$\sup_{t\in[0,1]}|x_t - \widehat{x}^{(n)}(t)| = O\left(\frac{1}{n^{2\alpha-1}}\right). \tag{4.23}$$

En particulier, remarquons que le schéma d'Euler converge toujours pour $\alpha > \frac{1}{2}$. On peut améliorer la vitesse obtenue dans ce schéma en utilisant un schéma de type Milshtein de pas $1/n$ et d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} \check{x}_0^{(n)} = x_0 \\ \check{x}_t^{(n)} = \check{x}_{k/n}^{(n)} + \sum_{j=1}^{2m} \frac{1}{j!} P_j(\sigma,\sigma',...,\sigma^{(j-1)})(\check{x}_{k/n}^{(n)})(g_t - g_{k/n})^j \\ \qquad\qquad + b(\check{x}_{k/n}^{(n)})(t - k/n), t \in [k/n,(k+1)/n], \end{cases}$$

$k = 0,1,...,n-1$. Les P_j sont les fonctions polynomiales données par l'identité formelle suivante:

$$g' = f \circ g \Rightarrow \forall j \in \mathbb{N}^*, g^{(j)} = P_j(f,f',...,f^{(j-1)}) \circ g \text{ avec } P_j \in \mathbb{R}[X_0,...,X_{j-1}].$$

Par exemple, nous avons:

$$\begin{aligned} &g' = f \circ g \Rightarrow P_1 = X_0 \in \mathbb{R}[X_0] \\ &g'' = g' \times (f' \circ g) = (ff') \circ g \Rightarrow P_2 = X_0X_1 \in \mathbb{R}[X_0,X_1] \\ &g''' = g' \times [(f'^2 + ff'') \circ g] = (ff'^2 + f^2f'') \circ g \Rightarrow P_3 = X_0X_1^2 + X_0^2X_2 \in \mathbb{R}[X_0,X_1,X_2] \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

La vitesse de convergence de ce nouveau schéma est donnée par:

Théorème 4.4.3. *Quand* $n \to +\infty$*:*

$$\sup_{t\in[0,1]}|x_t - \check{x}^{(n)}(t)| = O\left(\frac{1}{n^{\beta}}\right) \tag{4.24}$$

avec $\beta = \inf\{\alpha,(2m+1)\alpha - 1\}$.

En pratique, il conviendra donc de choisir l'entier m le plus petit possible tel que $(2m+1)\alpha - 1 \geq \alpha$ pour obtenir la vitesse optimale avec le schéma le plus simple.

Nous faisons seulement la preuve du théorème 4.4.3, celle du théorème 4.4.2 se faisant de même avec des arguments plus simples.

Preuve. Pour simplifier, nous ne faisons la preuve que pour $m=1$.

– On a le:

Lemme 4.4.4. *Pour tout $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, on a:*

$$\breve{x}^{(n)}_{(k+1)/n} = \breve{x}^{(n)}_{k/n} + \frac{1}{2}\left\{\sigma(\breve{x}^{(n)}_{(k+1)/n}) + \sigma(\breve{x}^{(n)}_{k/n})\right\}(g_{(k+1)/n} - g_{k/n}) + b(\breve{x}^{(n)}_{k/n})1/n + O(\frac{1}{n^{\beta+1}}), \tag{4.25}$$

le $O(\frac{1}{n^{\beta+1}})$ étant uniforme par rapport à k.

Nous repoussons plus loin la preuve de ce lemme et continuons la démonstration du théorème.

– On sait que $x_t = u(g_t,y_t)$ avec u (resp. y) donné par (4.10) (resp. (4.12)). Posons

$$U(x,y) := (u(x,y),y),\ V(x,y) := U^{-1}(x,y) =: (v(x,y),y).$$

L'existence de V est une conséquence du théorème d'Hadamard-Lévy (voir, par exemple, [1] p. 130). Ainsi, on a $g_t = v(x_t,y_t)$ pour tout t. Posons $\breve{g}^{(n)}_t = v(\breve{x}^{(n)}_t,y_t)$. On a alors $\breve{x}^{(n)}_t = u(\breve{g}^{(n)}_t,y_t)$ et

$$\breve{x}^{(n)}_{(k+1)/n} = \breve{x}^{(n)}_{k/n} + \left[u(\breve{g}^{(n)}_{(k+1)/n},y_{k/n}) - u(\breve{g}^{(n)}_{k/n},y_{k/n})\right] + \left[u(\breve{g}^{(n)}_{(k+1)/n},y_{(k+1)/n}) - u(\breve{g}^{(n)}_{(k+1)/n},y_{k/n})\right].$$

Appliquons d'une part la formule (4.4) à la fonction $z \mapsto u(z,y_{k/n})$ et d'autre part l'égalité des accroissements finis à la fonction $t \mapsto u(\breve{g}^{(n)}_{(k+1)/n},y_t)$. Il vient:

$$\breve{x}^{(n)}_{(k+1)/n} = \breve{x}^{(n)}_{k/n} + \frac{1}{2}\left\{\partial_1 u(\breve{g}^{(n)}_{k/n},y_{k/n}) + \partial_1 u(\breve{g}^{(n)}_{(k+1)/n},y_{k/n})\right\}(\breve{g}^{(n)}_{(k+1)/n} - \breve{g}^{(n)}_{k/n})$$

$$+O((\breve{g}^{(n)}_{(k+1)/n} - \breve{g}^{(n)}_{k/n})^3) + \partial_2 u(\breve{g}^{(n)}_{(k+1)/n},y_\theta)y'_\theta\frac{1}{n} \text{ avec } \theta \in]k/n,(k+1)/n[.$$

Or, il est facile de voir qu'on a successivement: $\breve{g}^{(n)}_{(k+1)/n} - \breve{g}^{(n)}_{k/n} = O(\frac{1}{n^\alpha})$,

$$\partial_2 u(\breve{g}^{(n)}_{(k+1)/n},y_\theta)y'_\theta\frac{1}{n} = \partial_2 u(\breve{g}^{(n)}_{k/n},y_{k/n})y'_{k/n}\frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^{1+\alpha}}),$$

et

$$\partial_1 u(\breve{g}^{(n)}_{k/n},y_{k/n}) + \partial_1 u(\breve{g}^{(n)}_{(k+1)/n},y_{k/n}) = \partial_1 u(\breve{g}^{(n)}_{k/n},y_{k/n}) + \partial_1 u(\breve{g}^{(n)}_{(k+1)/n},y_{(k+1)/n}) + O(\frac{1}{n}).$$

Comme $\partial_1 u = \sigma(u)$, on en déduit (rappelons que $\beta = \inf\{\alpha, 3\alpha - 1\}$):

$$\breve{x}^{(n)}_{(k+1)/n} = \breve{x}^{(n)}_{k/n} + \frac{1}{2}\left\{\sigma(\breve{x}^{(n)}_{(k+1)/n}) + \sigma(\breve{x}^{(n)}_{k/n})\right\}(\breve{g}^{(n)}_{(k+1)/n} - \breve{g}^{(n)}_{k/n}) + \partial_2 u(\breve{g}^{(n)}_{k/n},y_{k/n})y'_{k/n}\frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^{\beta+1}}), \tag{4.26}$$

le $O(\frac{1}{n^{\beta+1}})$ étant uniforme par rapport à k. En faisant la différence entre (4.25) et (4.26), il vient, en posant $f_t^{(n)} = g_t - \breve{g}_t^{(n)}$ et en se souvenant que $\inf_{x\in\mathbb{R}} |\sigma(x)| > 0$:

$$f_{(k+1)/n}^{(n)} - f_{k/n}^{(n)} = \frac{\frac{1}{n}\partial_2 u(\breve{g}_{k/n}^{(n)},y_{k/n})y'_{k/n} - \frac{1}{n}b(\breve{x}_{k/n}^{(n)})}{\frac{1}{2}\left\{\sigma(\breve{x}_{(k+1)/n}^{(n)}) + \sigma(\breve{x}_{k/n}^{(n)})\right\}} + O(\frac{1}{n^{\beta+1}}). \tag{4.27}$$

On a

$$\partial_2 u(\breve{g}_{k/n}^{(n)},y_{k/n})y'_{k/n} = \partial_2 u(g_{k/n},y_{k/n})y'_{k/n} + O(|f_{k/n}^{(n)}|).$$

D'après (4.12), $\partial_2 u(g_t,y_t)y'_t = b \circ u(g_t,y_t)$. On a donc

$$\partial_2 u(\breve{g}_{k/n}^{(n)},y_{k/n})y'_{k/n} - b(\breve{x}_{k/n}^{(n)}) = b(x_{k/n}) - b(\breve{x}_{k/n}^{(n)}) + O(|f_{k/n}^{(n)}|).$$

Mais

$$b(x_{k/n}) - b(\breve{x}_{k/n}^{(n)}) = b \circ u(g_{k/n},y_{k/n}) - b \circ u(\breve{g}_{k/n}^{(n)},y_{k/n}) = O(|f_{k/n}^{(n)}|),$$

donc

$$\partial_2 u(\breve{g}_{k/n}^{(n)},y_{k/n})y'_{k/n} - b(\breve{x}_{k/n}^{(n)}) = O(|f_{k/n}^{(n)}|),$$

les O étant uniformes par rapport à k.
Posons $z_k = \sup_{\ell=0,\dots,k}\left|f_{\ell/n}^{(n)}\right|$. En faisant la somme dans l'égalité (4.27), il vient

$$z_k \leq \frac{\text{cst}}{n}\sum_{\ell=0}^{k-1} z_\ell + O(\frac{1}{n^\beta}).$$

En particulier, on en déduit, en posant $\overline{z}_t = \sup_{0\leq s\leq t}|f_s^{(n)}|$, que

$$\overline{z}_t \leq z_{([nt]+1)/n} \leq \frac{\text{cst}}{n}\sum_{\ell=0}^{[nt]} z_\ell + O(\frac{1}{n^\beta})$$

$$\leq \text{cst}\int_0^{([nt]+1)/n} \overline{z}_u du + O(\frac{1}{n^\beta}) \leq \text{cst}\int_0^t \overline{z}_u du + O(\frac{1}{n^\beta}),$$

car $t \mapsto \overline{z}_t$ est croissant et $\int_t^{([nt]+1)/n} \overline{z}_u du = O(\frac{1}{n})$.
Par le lemme de Gronwall, on obtient $\overline{z}_1 = \sup_{0\leq t\leq 1}|\breve{g}_t^{(n)} - g_t| = O(\frac{1}{n^\beta})$. Ainsi:

$$\sup_{0\leq t\leq 1}\left|\breve{x}_t^{(n)} - x_t\right| = \sup_{0\leq t\leq 1}\left|u(\breve{g}_t^{(n)},y_t) - u(g_t,y_t)\right| \leq \|\sigma\|_\infty \overline{z}_1 = O(\frac{1}{n^\beta})$$

et la preuve du théorème est terminée.

□

Preuve du lemme 4.4.4. Rappelons que, si $m = 1$, le schéma de Milshtein est le suivant:

$$\breve{x}^{(n)}_{(k+1)/n} = \breve{x}^{(n)}_{k/n} + \sigma(\breve{x}^{(n)}_{k/n})(g_{(k+1)/n} - g_{k/n}) + \frac{1}{2}(\sigma\sigma')(\breve{x}^{(n)}_{k/n})(g_{(k+1)/n} - g_{k/n})^2 + b(\breve{x}^{(n)}_{k/n})\frac{1}{n}.$$

On en déduit:

$$\begin{aligned}\sigma(\breve{x}^{(n)}_{(k+1)/n}) &= \sigma\left(\breve{x}^{(n)}_{k/n} + \sigma(\breve{x}^{(n)}_{k/n})(g_{(k+1)/n} - g_{k/n}) + O(\frac{1}{n^{\inf\{1,2\alpha\}}})\right) \\ &= \sigma(\breve{x}^{(n)}_{k/n}) + (\sigma\sigma')(\breve{x}^{(n)}_{k/n})(g_{(k+1)/n} - g_{k/n}) + O(\frac{1}{n^{\inf\{1,2\alpha\}}}).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{2}\left[\sigma(\breve{x}^{(n)}_{k/n}) + \sigma(\breve{x}^{(n)}_{(k+1)/n})\right] = \sigma(\breve{x}^{(n)}_{k/n}) + \frac{1}{2}(\sigma\sigma')(\breve{x}^{(n)}_{k/n})(g_{(k+1)/n} - g_{k/n}) + O(\frac{1}{n^{\inf\{1,2\alpha\}}}),$$

et la conclusion du lemme s'en déduit facilement puisque $1 + \inf\{1{,}2\alpha\} \geq \beta + 1$. $\square$

Chapitre 5

Absolue continuité dans les é.d.s. unidimensionnelles dirigées par un mbf

5.1 Introduction

Dans ce travail commun avec T. Simon, nous étudions l'absolue continuité de la solution au temps $t \in]0,1]$ de l'é.d.s. unidimensionnelle:

$$X_t \;=\; x_0 \;+\; \int_0^t \sigma(X_s) \diamond dB_s^H + \int_0^t b(X_s)\, ds \;, t \in [0,1] \tag{5.1}$$

où b,σ sont des fonctions réelles et B^H un mbf d'indice de Hurst H *quelconque* dans $(0,1)$.

Dans (5.1), $\int_0^t \sigma(X_s) \diamond dB_s^H$ est l'intégrale de Newton-Côtes considérée dans le chapitre précédent. Dans la suite, nous prendrons pour solution de (5.1) celle donnée par (4.11), c'est-à-dire:

$$X_t = u(B_t^H, Y_t), t \in [0,1], \tag{5.2}$$

avec $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\partial_1 u = \sigma(u) \text{ et } \forall y \in \mathbb{R},\; u(0,y) = y$$

et $Y : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ donné par

$$dY_t = \left(\partial_2 u(B_t^H, Y_t)\right)^{-1} b \circ u(B_t^H, Y_t) dt \text{ et } Y_0 = x_0.$$

Le but de ce qui suit est d'étudier l'absolue continuité par rapport à la mesure de Lebesgue de X_t pour $t \in]0,1]$.

Nous montrons tout d'abord que X_t a une densité strictement positive pour tout $t \in]0,1]$ dès que σ ne s'annule pas. L'argument principal de la preuve est simple: par une transformation de Girsanov convenable, on se ramène au cas $b \equiv 0$. Alors $X_t = u(B_t^H, x_0)$ et il est facile de conclure.

Clairement, cette condition sur σ n'est pas optimale. Par exemple, dans le cas du mouvement brownien classique (correspondant à $H = 1/2$), il existe un critère optimal dû à Bouleau et Hirsch. Plus précisément, considérons l'équation déterministe

$$x_t = x_0 + \int_0^t b(x_s)\, ds \tag{5.3}$$

et le temps déterministe:

$$t_x = \sup\{t \in [0,1], \int_0^t |\sigma(x_s)| ds = 0\} \text{ avec la convention } \sup\{\emptyset\} = 0.$$

Alors, quand $H = 1/2$, la loi de X_t est absolument continue si et seulement si $t > t_x$ (voir le théorème 6.3. dans [10]).

Dans le cas $H \neq 1/2$, nous montrons que le même critère a lieu quand $H > 1/2$ ou quand $H < 1/2$ et σ est analytique.

Remarquons que lorsque σ est analytique, t_x vaut en général 0 ou 1. En effet, si $\sigma(x_0) \neq 0$ alors $t_x = 0$. Si $\sigma(x_0) = 0$ et que σ n'est pas identiquement nulle, alors il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 tel que $\sigma(x) \neq 0$ pour tout $x \in V_{x_0} \setminus \{x_0\}$. Si de plus $b(x_0) \neq 0$ alors $t_x = 0$ (sinon, il existerait $t \in]0,1]$ tel que $\sigma(x_s) = 0$ pour tout $s \in [0,t[$ et on aurait $x_s = x_0$ pour tout s proche de 0; (5.3) impliquerait alors $b(x_0) = 0$). Il reste le cas où $\sigma(x_0) = 0$ et b est nulle dans un voisinage de x_0. Dans ce cas, il existe $\varepsilon > 0$ tel que x est constante pour $t \in [0,\varepsilon)$ et $t_x \geq \varepsilon$.

La preuve du critère de Bouleau-Hirsch dans le cas du mbf consiste tout d'abord à calculer la dérivée de Malliavin de X_t et ensuite d'utiliser le critère de Nualart-Zakai relatif à l'absolue continuité des processus gaussiens.

5.2 Quelques rappels concernant le mouvement brownien fractionnaire

Dans ce paragraphe, nous allons rappeler quelques faits concernant la structure gaussienne du mbf et sa dérivée de Malliavin. Nous suivons la section 3.1 de [38] et le chapitre 1.2 de [37].

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions étagées [0,1]. Considérons l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ défini comme la fermeture de $\mathcal{E}$ par rapport au produit scalaire

$$\left(\mathbf{1}_{[0,t]}, \mathbf{1}_{[0,s]}\right)_{\mathcal{H}} = R_H(t,s) \stackrel{def}{=} (t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})/2.$$

Plus précisément, posons

$$K_H(t,s) = \Gamma(H+1/2)^{-1}(t-s)^{H-1/2} F(H-1/2, 1/2-H; H+1/2, 1-t/s),$$

où F désigne la fonction hypergéométrique standard. Définissons l'opérateur linéaire K_H^* de $\mathcal{E}$ vers $L^2([0,1])$ par

$$(K_H^*\phi)(s) = K_H(1,s)\phi(s) + \int_s^1 (\phi(r) - \phi(s)) \frac{\partial K_H}{\partial r}(r,s)\, dr.$$

K_H^* définit une isométrie entre $\mathcal{H}$ et $L^2([0,1])$ et on a l'égalité

$$(\phi,\psi)_{\mathcal{H}} \;=\; \int_0^1 (K_H^*\phi)(s)(K_H^*\psi)(s)\,ds. \tag{5.4}$$

Le mouvement brownien fractionnaire $\{B_t^H,\, t\in[0,1]\}$ est le processus gaussien centré de fonction de covariance $\mathbb{E}[B_s^H B_t^H] = R_H(t,s)$, donc son espace gaussien associé est isométrique à $\mathcal{H}$ via l'application $\mathbf{1}_{[0,t]} \mapsto B_t^H$.

Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une fonction régulière à support compact et considérons la variable aléatoire $F = f(B_{t_1}^H,\ldots,B_{t_n}^H)$ (on dit alors que F est une variable aléatoire régulière). La dérivée de Malliavin de F est l'élément de $L^2(\Omega,\mathcal{H})$ défini par

$$D_sF \;=\; \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(B_{t_1}^H,\ldots,B_{t_n}^H)\mathbf{1}_{[0,t_i]}(s).$$

En particulier $D_sB_t^H \;=\; \mathbf{1}_{[0,t]}(s)$. Comme d'habitude, nous notons $\mathbb{D}^{1,1}$ la fermeture des variables aléatoires régulières par rapport à la norme

$$||F||_{1,1} \;=\; \mathbb{E}\,[|F|] + \mathbb{E}\,[||D.F||_{\mathcal{H}}]\,.$$

et $\mathbb{D}_{loc}^{1,1}$ est son domaine local associé, c'est-à-dire l'ensemble des variables aléatoires F telles qu'il existe une suite $\{(\Omega_n,F_n),\, n\ge 1\}\subset\mathcal{F}\times\mathbb{D}^{1,1}$ vérifiant $\Omega_n\uparrow\Omega$ p.s. et $F=F_n$ p.s. sur Ω_n (voir [37] p. 45 pour plus de détails). Finalement, rappelons le critère suivant qui est dû à Nualart-Zakai (voir le théorème 2.1.3 dans [37]) :

Théorème 5.2.1. *[Nualart-Zakai] Si $F\in\mathbb{D}_{loc}^{1,1}$ et si p.s. $||D.F||_{\mathcal{H}}>0$, alors F admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.*

5.3 Un critère de non-nullité sur le coefficient de diffusion

Le théorème suivant donne un critère simple et naturel sur σ assurant que X_t a une densité strictement positive sur $\mathbb{R}$ pour $t\in]0,1]$:

Théorème 5.3.1. *Si σ ne s'annule pas, alors X_t a une densité strictement positive sur $\mathbb{R}$ pour tout $t\in]0,1]$.*

Preuve. 1) En considérant $-B^H$ au lieu de B^H si nécessaire, on peut supposer que $\sigma>0$. En se rappelant que $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est le flot associé à σ, il est clair que pour tout $y\in\mathbb{R}$ fixé, $x\mapsto u(x,y)$ est une bijection sur $\mathbb{R}$. En effet, $u(\cdot,y)$ est clairement croissante et $\ell=\lim_{x\to+\infty}u(x,y)$ existe dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Si $\ell\ne+\infty$, alors $\lim_{x\to\infty}\partial_1u(x,y)=\sigma(\ell)>0$ et $\lim_{x\to+\infty}u(x,y)=+\infty$. D'une manière similaire, nous pouvons montrer que $\lim_{x\to-\infty}u(x,y)=-\infty$, ce qui implique la propriété désirée. Notons $v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ l'inverse de u, i.e. $v(x,y)$ est l'unique solution de $u(v(x,y),y)=x$.

2) Quand $b \equiv 0$, nous avons facilement $X_t = u(B_t^H, x_0)$ pour tout $t \in [0,1]$ et nous pouvons écrire, pour tout borélien A,

$$\mathbb{P}(X_t \in A) = \mathbb{P}(B_t^H \in v(A,x_0)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t^{2H}}} \int_{v(A,x_0)} \exp\left(-\frac{z^2}{2t^{2H}}\right) dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t^{2H}}} \int_A \exp\left(-\frac{u(z,x_0)^2}{2t^{2H}}\right) |\sigma(u(z,x_0))| dz.$$

Ainsi, X_t a une densité strictement positive explicite donnée par:

$$f_t(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t^{2H}}} \exp\left(-\frac{u(z,x_0)^2}{2t^{2H}}\right) |\sigma(u(z,x_0))|.$$

3) Quand $b \not\equiv 0$, nous avons, pour tout $t \in [0,1]$,

$$X_t = u(B_t^H, Y_t) = u(B_t^H, u(v(Y_t,x_0),x_0)) = u(B_t^H + v(Y_t,x_0), x_0),$$

la dernière égalité venant de la propriété de flot de u. Ainsi, grâce au théorème de Girsanov pour le mbf (voir le théorème 3.1 dans [38]), nous pouvons écrire

$$X_t = u(\tilde{B}_t^H, x_0),$$

avec $\tilde{B}^H$ un mbf sous une probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$ vérifiant $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \xi$ avec $\xi > 0$ p.s. Ainsi, nous sommes réduits au cas où $b \equiv 0$. Grâce à l'étude précédente, nous pouvons conclure que, sous $\mathbb{Q}$, X_t a, pour tout $t \in]0,1]$, une densité strictement positive sur $\mathbb{R}$. On déduit du théorème de Radon-Nykodym que X_t admet, sous $\mathbb{P}$, une densité f_t pour tout $t \in]0,1]$. Il reste à voir que cette densité est strictement positive presque partout. Soit $A_t = \{x \in \mathbb{R} : f_t(x) = 0\}$. Supposons, par l'absurde, que $\lambda(A_t) > 0$. Alors $\mathbb{Q}(X_t \in A_t) > 0$. De plus, on a:

$$\mathbb{P}(X_t \in A_t) = \mathrm{E}_{\mathbb{P}}(\mathbf{1}_{\{X_t \in A_t\}}) = \mathrm{E}_{\mathbb{Q}}(\xi^{-1}\, \mathbf{1}_{\{X_t \in A_t\}}) > 0.$$

Donc $\mathbb{P}(X_t \in A_t) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{A_t}(x) f_t(x) dx > 0$, ce qui est absurde. La preuve du théorème est donc terminée.

□

Remarque 5.3.2. Il est clair que notre hypothèse sur σ n'est pas nécessaire (pensons par exemple à l'équation $dX_t = X_t \diamond dB_t^H$, dont la solution est $X_t = x_0 \exp B_t^H$). Dans la section suivante, nous donnons un critère optimal sur σ.

5.4 Extension d'un résultat de Bouleau et Hirsch

Considérons l'équation déterministe

$$x_t = x_0 + \int_0^t b(x_s)\, ds \tag{5.5}$$

et le temps déterministe:

$$t_x = \sup\{t \geq 0, \int_0^t |\sigma(x_s)|ds = 0\}$$

où σ et b sont les mêmes que dans (5.1). Quand $H = 1/2$, il a été prouvé par Bouleau et Hirsch (voir par exemple le théorème 6.3. dans [10]) que X_t admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue si et seulement si $t > t_x$. En particulier, X_t a une densité pour tout t dès que $\sigma(x_0) \neq 0$ (on peut aussi voir ce fait comme une conséquence de la condition d'Hörmander). Notre but est d'étendre ce résultat au cas du mbf:

Théorème 5.4.1. *Supposons soit $H > 1/2$, soit $H < 1/2$ et σ analytique. Soit $\{x_t, t \geq 0\}$, $\{X_t, t \geq 0\}$ et t_x définis comme précédemment. Alors la loi de X_t est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue si et seulement si $t > t_x$.*

Remarque 5.4.2. L'hypothèse $H > 1/2$ ou $H < 1/2$ et σ analytique ne sert qu'à assurer que l'on a un théorème d'unicité lié aux équations différentielles stochatiques dirigées par B^H. Mais, si on remplace l'intégrale de Newton-Côtes par l'intégrale liée aux trajectoires rugueuses - *rough paths* en anglais - étudiée par Coutin et Qian [14] dans le cadre des é.d.s. dirigée par le mbf (et reprise par Feyel et de La Pradelle [19]), la même démonstration permettrait d'obtenir le théorème pour $H \in (1/4,1/2)$, et ceci sans condition supplémentaire sur σ.

5.4.1 Preuve du Théorème 5.4.1

Avant de prouver le théorème, nous commençons par énoncer un lemme qui étend la proposition 2.1.2 dans [11], chapitre IV, au mbf:

Lemme 5.4.3. *Supposons soit $H > 1/2$, soit $H < 1/2$ et σ analytique. Avec les notations précédentes, nous avons:*

$$p.s., t_x = \inf\{t \in]0,1], \ \sigma(X_t) \neq 0\}, \tag{5.6}$$

avec la convention $\inf \emptyset = 1$.

Preuve. Fixons $\omega \in \Omega$ et posons $\tau(\omega) = \inf\{t > 0, \ \sigma(X_t)(\omega) \neq 0\}$.

1. Si $t < \tau(\omega)$ alors $\int_0^t \sigma(X_s)(\omega) \diamond dB_s^H(\omega) = 0$ (rappelons que l'intégrale de Newton-Côtes est définie trajectoire par trajectoire). Ainsi, si $t < \tau(\omega)$, $X_t(\omega) = x_0 + \int_0^t b(X_s(\omega))ds$ et, par unicité, $X_t(\omega) = x_t$. Par conséquent, pour tout $t < \tau(\omega)$, $\int_0^t |\sigma(x_s)|ds = 0$, i.e. $t_x \geq \tau(\omega)$.
2. Nous avons
$$\sigma(x_s) = 0 \text{ pour tout } s \in [0,t_x). \tag{5.7}$$
Soit $t < t_x$. Donc $x_t = x_0 + \int_0^t b(x_s)ds + \int_0^t \sigma(x_s) \diamond dB_s^H(\omega)$.
   - Cas où $H > 1/2$. Dans ce cas, l'intégrale de Newton-Côtes coïncide avec l'intégrale classique de Stieltjes et le Théorème d'unicité 4 dans [45] (par exemple) implique que $x_t = X_t(\omega)$.

– Cas où $H < 1/2$ et σ analytique. Puisque x est à variation bornée, le théorème d'unicité 4.3.3 du chapitre précédent s'applique. En effet, on peut écrire $x_t = f(B_t^H(\omega),x_t)$ avec $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ analytique en la première variable donnée par $f(a,b) = b$. Donc $x_t = X_t(\omega)$.

Par continuité de σ et de x, nous déduisons de (5.7) que $\sigma(X_t(\omega)) = 0$ pour tout $t < t_x$, i.e. $\tau(\omega) \geq t_x$.

$\square$

Preuve du théorème 5.4.1.

1. Commençons par introduire des notations que nous garderons tout au long de la preuve. Soit $t > 0$ fixé. Rappelons que $X_t = u(B_t^H,Y_t)$, où u est le flot associé à σ :

$$u(x,y) \;=\; y + \int_0^x \sigma(u(z,y))\,dz. \tag{5.8}$$

D'autre part, Y est l'unique solution de

$$Y_t \;=\; x_0 \;+\; \int_0^t L_s^{-1} b(X_s)\,ds, \tag{5.9}$$

où nous avons posé, pour tout $s \geq 0$,

$$L_s \;=\; \partial_2 u(B_s^H,Y_s) \;=\; \exp\left[\int_0^{B_s^H} \sigma'(u(z,Y_s))\,dz\right], \tag{5.10}$$

la seconde égalité étant une conséquence immédiate de (5.8):

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_{12}u(x,y) = \partial_2 u(x,y)\,\sigma'(u(x,y)) \\ \partial_2 u(0,y) = 1 \end{array}\right. \quad\Longrightarrow\; \partial_2 u(x,y) = \exp\int_0^x \sigma'(u(z,y))dz. \tag{5.11}$$

Notons que $L_s > 0$ p.s. pour tout $s \geq 0$.
Introduisons le processus $M_s \;=\; \partial_{22}u(B_s^H,Y_s)$. Nous avons, grâce à (5.11):

$$M_s = L_s \int_0^{B_s^H} \sigma''(u(z,Y_s))\partial_2 u(z,Y_s)dz.$$

2. Maintenant, nous allons dériver au sens de Malliavin les variables aléatoires X_s, pour $s \leq t$. Dans la suite, $r \in [0,t]$ désigne un réel fixé. Comme $X_s = u(B_s^H,Y_s)$, la règle des dérivées composées (voir la proposition 1.2.2 dans [37]) donne

$$D_r X_s \;=\; (\sigma(X_s) + L_s D_r Y_s)\,\mathbf{1}_{[0,s]}(r).$$

En particulier, en posant $N_s = L_s^{-1} D_r X_s$ pour tout $s \leq t$, nous obtenons

$$N_t \;=\; L_t^{-1}\sigma(X_t) + D_r Y_t. \tag{5.12}$$

D'après (5.10), la formule du changement de variables (voir le théorème 4.1.7) implique

$$L_t = 1 + \int_0^t L_s \sigma'(X_s) \diamond dB_s^H + \int_0^t M_s \, dY_s.$$

On écrit $L_t^{-1}\sigma(X_t) = f(B_t^H, Y_t)$ avec $f(x,y) = \sigma(u(x,y)) \exp\{-\int_0^x \sigma'(u(z,y))dz\}$. Puisque $\partial_1 f(B_t^H, Y_t) = 0$ et

$$\partial_2 f(B_t^H, Y_t) = \left[\partial_2 u(B_t^H, Y_t)\sigma'(u(B_t^H, Y_t)) - \sigma(u(B_t^H, Y_t)) \int_0^{B_t^H} \sigma''(u(z,Y_t))\partial_2 u(z,Y_t)dz\right]$$

$$\times \exp\{-\int_0^{B_t^H} \sigma'(u(z,Y_t))dz\} = \left[L_t\sigma'(X_t) - \sigma(X_t)L_t^{-1}M_t\right] L_t^{-1},$$

la formule du changement de variables fournit:

$$L_t^{-1}\sigma(X_t) = L_r^{-1}\sigma(X_r) \ + \int_r^t \left(\sigma'(X_s) - L_s^{-2}M_s\sigma(X_s)\right) \, dY_s. \tag{5.13}$$

D'autre part, en appliquant D_r de part et d'autre de (5.9), nous obtenons

$$D_r Y_t = \int_0^t D_r(L_s^{-1}b(X_s))ds = \int_0^t L_s^{-1}D_r(b(X_s))ds + \int_0^t D_r(L_s^{-1})b(X_s)ds.$$

Mais $N_s = L_s^{-1}D_r X_s$ et $b(X_s)ds = L_s dY_s$, donc:

$$D_r Y_t = \int_r^t N_s b'(X_s) \, ds + \int_r^t D_r(L_s^{-1})L_s dY_s.$$

Mais $L_s^{-1} = \exp\{-\int_0^{B_s^H} \sigma'(u(z,Y_s))dz\}$, d'où:

$$D_r Y_t = \int_r^t N_s b'(X_s) \, ds - \int_r^t \left(\sigma'(X_s) + L_s^{-1}M_s D_r(Y_s)\right) dY_s.$$

D'après (5.12), on a:

$$D_r Y_t = \int_r^t N_s b'(X_s) \, ds \ - \int_r^t \left(\sigma'(X_s) - L_s^{-2}M_s\sigma(X_s) + L_s^{-1}M_s N_s\right) dY_s. \tag{5.14}$$

D'après (5.12), (5.13) et (5.14), nous obtenons

$$\begin{aligned} N_t &= L_t^{-1}\sigma(X_t) + D_r Y_t \\ &= L_r^{-1}\sigma(X_r) \ + \int_r^t \left(b'(X_s) - L_s^{-2}M_s b(X_s)\right) N_s \, ds. \end{aligned}$$

N vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre qui se résout:

$$N_t = L_r^{-1}\sigma(X_r) \exp\left[\int_r^t \left(b'(X_s) - L_s^{-2}M_s b(X_s)\right) \, ds\right].$$

Puisque $N_t = L_t^{-1} D_r X_t$, on obtient:

$$D_r X_t \quad = \quad \sigma(X_r) \exp\left[\int_r^t b'(X_s)\,ds\right] \frac{L_t}{L_r} \exp\left[-\int_r^t L_s^{-1} M_s\,dY_s\right].$$

Si on applique la formule du changement de variables à $\int_0^{B_s^H} \sigma'(u(z,Y_s))dz$, on obtient, grâce à (5.10):

$$\begin{aligned} L_s &= \exp\left[\int_0^s \sigma'(X_u) \diamond dB_u^H + \int_0^s \left(\int_0^{B_u^H} \sigma''(u(z,Y_u))\partial_2 u(z,Y_u)\,dw\right) dY_u\right] \\ &= \exp\left[\int_0^s \sigma'(X_u) \diamond dB_u^H + \int_0^s L_u^{-1} M_u\,dY_u\right]. \end{aligned}$$

Donc

$$D_r X_t = \sigma(X_r) \exp\left[\int_r^t b'(X_s)\,ds + \int_r^t \sigma'(X_s) \diamond dB_s^H\right]. \tag{5.15}$$

3. Fixons $t > t_x$. Le lemme 5.4.3 et la continuité p.s. de $r \mapsto \sigma(X_r)$ assurent qu'il existe un intervalle non trivial de $[0,t]$ dans lequel la fonction $r \mapsto D_r X_t$ ne s'annule pas. Avec les notations de la section 5.2, nous en déduisons $||D.X_t||_{\mathcal{H}} > 0$ p.s.. Grâce au théorème 5.2.1, nous pouvons conclure que X_t a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.
4. Fixons $t \leq t_x$. Par unicité, il suit que $X_t = x_t$ p.s. où x_t est déterministe, donc X_t ne peut pas avoir de densité.

La preuve du théorème 5.4.1 est donc terminée.

□

Chapitre 6

Approximation du coefficient de volatilité et test d'adéquation

Ce travail a été réalisé en collaboration avec M. Gradinaru et est totalement indépendant des chapitres précédents.

Dans la première section, nous énonçons les résultats concernant les vitesses de convergence. La deuxième section contient la construction des tests d'adéquation. Les preuves sont données dans la troisième section.

6.1 Convergence en loi des approximations distribution

6.1.1 Modèle semimartingale

Soit Y la semimartingale donnée par

$$Y(t) = x_0 + \int_0^t \sigma(s,B_s)dB_s + \int_0^t M_s ds, t \in [0,1], \tag{6.1}$$

où $\sigma \in \mathrm{C}^{1,2}([0,1] \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ a des dérivées bornées par rapport à la seconde variable et M est un processus continu adapté. Nous notons $\widehat{J_N}$ et J les processus sur $[0,1]$ donnés respectivement par

$$\widehat{J_N}(t) := \sum_{i=0}^{[2^N t]-1} \left(Y_{(i+1)2^{-N}} - Y_{i2^{-N}}\right)^2, N \in \mathbb{N}^*, \text{ et } J(t) := \int_0^t \sigma(s,B_s)^2 ds. \tag{6.2}$$

Notons que, pour t fixé, $\widehat{J_N}(t)$ est une approximation presque sûre de $J(t)$. Par exemple, quand Y est un mouvement brownien standard, une élégante démonstration de ce fait peut être trouvée dans le cours de 3ème cycle de Jacques Neveu de 1972 “Intégrales stochastiques et applications” (je remercie Marc Yor de m'en avoir fourni une copie). Une amélioration de ce résultat est que, presque sûrement, $\widehat{J_N}$ converge, comme processus, uniformément vers J quand $N \to \infty$. En effet, il suffit d'utiliser des techniques similaires à celles développées dans la section 2.5 du chapitre 1. Signalons que, si Y est un mouvement brownien standard (i.e. $\sigma \equiv 1$ et $M \equiv 0$), la convergence presque sûre de la variation quadratique définie d'une manière plus générale que par (6.2) (avec d'autres subdivisions que les dyadiques) est étudiée de manière complète par Dudley [17] et De La Vega [50].

Concernant la convergence en loi, nous avons le:

Théorème 6.1.1. *Quand $N \to \infty$,*

$$2^{N/2}(\widehat{J_N} - J) \xrightarrow{\mathcal{L}} \sqrt{2} \int_0^\bullet \sigma(s,\beta^{(1)}(s))^2 d\beta^{(2)}(s), \tag{6.3}$$

où $\beta^{(1)}$ et $\beta^{(2)}$ sont deux mouvements browniens indépendants standards.

Remarquons que la fonction inconnue σ apparaît dans la limite (6.3). Pour éviter ce problème, on peut utiliser la:

Proposition 6.1.2. *Posons*

$$\widehat{V_N}(t) := 2^N \sum_{i=0}^{[2^N t]-1} \left(Y_{(i+1)2^{-N}} - Y_{i2^{-N}}\right)^4, t \in [0,1], N \in \mathbb{N}^*. \tag{6.4}$$

Alors, nous avons, pour $t \in]0,1]$ fixé, quand $N \to \infty$,

$$2^{N/2} \left(\widehat{V_N}(t)\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\widehat{J_N}(t) - J(t)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \sqrt{\frac{2}{3}} \mathcal{N}(0,1). \tag{6.5}$$

Signalons que, dans une prépublication non publiée de Jacod [31], des résultats similaires au Théorème 6.1.1 et à la Proposition 6.1.2 sont démontrés. Nous remercions son auteur de nous avoir fait part de son travail, après que nous lui ayons envoyé une version du nôtre.

6.1.2 Modèle de diffusion

Tournons-nous maintenant vers l'étude de la solution forte de l'équation différentielle stochastique (1.20). Ici et dans toute la suite, nous notons $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ l'espace de probabilité. Nous supposons que $\theta \in \mathrm{C}^{1,2}([0,1] \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ a des dérivées bornées par rapport à la seconde variable et que $b \in \mathrm{C}^{1,1}([0,1] \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Encore une fois, notons que $\widehat{I_N}$, donné par (1.23), converge presque sûrement vers le processus continu I donné par (1.22) (voir par exemple Berman [7], Théorème 4.1).

Pour étudier la convergence en loi, nous devons supposer de plus que θ est uniformément elliptique: $\inf_{x\in\mathbb{R}} |\theta(x)| > 0$. Posons

$$g(s,x) := \int_{x_0}^x \frac{dy}{\theta(s,y)}, G(s,x) := (s,g(s,x)), F(s,x) := G^{-1}(s,x) =: (s,f(s,x)). \tag{6.6}$$

L'existence de F est une conséquence du théorème d'Hadamard-Lévy (voir, par exemple, [1] p. 130). Posons $\breve{B}_t := g(t,X_t)$ ou, de manière équivalente, $X_t = f(t,\breve{B}_t)$. Grâce à la formule d'Itô, par (1.20), nous pouvons écrire

$$\breve{B}_t = \int_0^t \partial_s g(s,X_s)ds + \int_0^t \partial_x g(s,X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \partial_{xx} g(s,X_s)d[X,X]_s = B_t - \int_0^t C_s ds,$$

avec $C_s := -(\frac{b}{\theta} - \frac{\partial_x \theta}{2} + \partial_s g)(s,X_s)$. Par conséquent, en appliquant le théorème de Girsanov (le critère de Novikov étant facilement vérifié vu les hypothèses sur θ), nous en déduisons que $\check{B}$ est mouvement brownien sous la probabilité Q donnée par

$$dQ = \exp(\int_0^1 C_s \, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^1 C_s^2 ds) dP =: \exp(Z) dP. \tag{6.7}$$

Ainsi, nous pouvons écrire

$$dX_t = \theta(t,X_t) dB_t + b(t,X_t) dt = \theta(t,f(t,\check{B}_t)) d\check{B}_t + M_t dt, \tag{6.8}$$

et X est relié, par un changement de probabilité, à Y donné par (6.1). Ainsi, en utilisant le théorème 6.1.1 et la proposition 6.1.2, nous obtenons:

Corollaire 6.1.3. *1. Quand $N \to \infty$,*

$$2^{N/2}(\widehat{I_N} - I) \xrightarrow{\mathcal{L}} \sqrt{2} \int_0^\bullet \theta(s,f(s,\beta^{(1)}(s)))^2 \, d\beta^{(2)}(s), \text{ sous Q}. \tag{6.9}$$

Ici, $\beta^{(i)}$; $i = 1,2$, sont deux mouvements browniens standards indépendants sous Q et f est donnée par la dernière égalité dans (6.6).

2. Posons

$$\widehat{U_N}(t) := 2^N \sum_{i=0}^{[2^N t]-1} \left(X_{(i+1)2^{-N}} - X_{i2^{-N}}\right)^4, t \in [0,1], N \in \mathbb{N}^*. \tag{6.10}$$

Nous avons alors, pour $t \in]0,1]$ fixé, quand $N \to \infty$,

$$2^{N/2} \left(\widehat{U_N}(t)\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\widehat{I_N}(t) - I(t)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \sqrt{\frac{2}{3}} \mathcal{N}(0,1), \text{ sous Q}. \tag{6.11}$$

Si on veut continuer d'utiliser la probabilité initiale P, la proposition suivante précise la vitesse de convergence (en gros, $2^{N/2}$) et permet de construire des intervalles de confiance asymptotiques pour $I(t)$:

Proposition 6.1.4. *1. Soit $\gamma > \frac{1}{2}$. Nous avons, pour $t \in]0,1]$ fixé:*

$$\forall R > 0 : \lim_{N\to\infty} P\left(2^{\gamma N}\left(\widehat{U_N}(t)\right)^{-\frac{1}{2}} \left|\widehat{I_N}(t) - I(t)\right| \geq R\right) = 1.$$

2. Soit $\kappa > 0$ tel que $E_P(Z^2) \leq \kappa^2$ avec Z donné par (6.7). Soit $\phi_\kappa : [0,1] \to [0,e^{-\kappa}]$ la bijection continue donnée par $\phi_\kappa(x) = x\, e^{-\frac{\kappa}{\sqrt{x}}}$. Nous avons, pour $t \in]0,1]$ fixé et pour tout $\eta > 0$:

$$\limsup_{N\to\infty} P\left(2^{N/2}\left(\widehat{U_N}(t)\right)^{-\frac{1}{2}} \left|\widehat{I_N}(t) - I(t)\right| \geq \eta\right) \leq \phi_\kappa^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x| \geq \sqrt{\frac{3}{2}}\eta} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right).$$

Signalons que nous avons appris, après avoir soumis notre travail, l'existence d'un papier de Delattre et Jacod [15], avec des résultats semblables aux nôtres, dans le cas des équations différentielles stochastiques du type que nous avons étudié.

6.2 Test d'adéquation

6.2.1 Modèle de semimartingale

Notons $\mathcal{C}_{b,0}$ l'ensemble des fonctions analytiques réelles non constantes ψ, ayant des dérivées première et seconde bornées et telles que $\psi(0) = 0$.

Nous observons une semimartingale de la forme $Y_t = \varphi(B_t)$, $t \in [0,1]$, avec $\varphi \in \mathcal{C}_{b,0}$ inconnue. Si $\psi \in \mathcal{C}_{b,0}$ est connue, nous sommes intéressés par tester l'hypothèse $H_0 : \varphi(|\cdot|) = \psi(|\cdot|)$ contre l'alternative $H_1 : \varphi(|\cdot|) \neq \psi(|\cdot|)$. Plus précisément, nous étudions les deux situations suivantes: ψ est une bijection strictement monotone **ou** ψ vérifie $\psi'^2 = F(\psi)$, avec F une fonction réelle de classe C^1.

Remarquons que si ψ est une bijection strictement monotone alors il est classique de tester si $\psi^{-1}(Y_t)$ est un mouvement brownien standard. En effet, il suffit de décider si $\big(2^{N/2}\psi^{-1}(Y_{2^{-N}}),2^{N/2}(\psi^{-1}(Y_{2\times 2^{-N}}) - \psi^{-1}(Y_{2^{-N}})),\ldots,2^{N/2}(\psi^{-1}(Y_1) - \psi^{-1}(Y_{1-2^{-N}}))\big)$ est un échantilllon d'une loi normale centrée réduite. Ici, nous proposons une procédure alternative qui peut s'appliquer aussi si ψ n'est pas une bijection.

Si au moins une des valeurs observées $\{Y_{i2^{-N}}, i = 0,\ldots,[2^N t]-1\}$ n'est pas dans l'image de la fonction ψ, H_0 est bien entendu rejetée. Sinon, nous posons, pour $t \in [0,1]$ et $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\widehat{\mathrm{int}}_N(t) := \begin{cases} 2^{-N} \displaystyle\sum_{i=0}^{[2^N t]-1} (\psi' \circ \psi^{-1})(Y_{i2^{-N}})^2, \text{ si } \psi \text{ est une bijection strictement monotone} \\ \\ 2^{-N} \displaystyle\sum_{i=0}^{[2^N t]-1} F(Y_{i2^{-N}}), \text{ si } \psi \text{ vérifie } \psi'^2 = F(\psi) \text{ avec } F \text{ une fonction } \mathrm{C}^1. \end{cases} \tag{6.12}$$

Si ψ est une bijection strictement monotone qui vérifie aussi une équation du type $\psi'^2 = F(\psi)$, on a $(\psi'\circ\psi^{-1})^2 = F$ et $\widehat{\mathrm{int}}_N$ est bien défini. Un exemple de bijection strictement monotone (resp. de fonction vérifiant $\psi'^2 = F(\psi)$) auquel on pourra appliquer notre test est $\arctan x$ (resp. $\sin x$).

Rappelons que $\widehat{J_N}$ est donné par (6.2) et $\widehat{V_N}$ par (6.4).

Proposition 6.2.1. *Introduisons la statistique de décision:*

$$T_N(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} 2^{N/2} \left(\widehat{V_N}(t)\right)^{-\frac{1}{2}} \left|\widehat{J_N}(t) - \widehat{int_N}(t)\right|, t \in [0,1], N \in \mathbb{N}^*. \tag{6.13}$$

1. *Supposons que H_0 ait lieu. Alors, pour tout $t \in]0,1]$:*

$$T_N(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} |G|, \text{ quand } N \to \infty, \tag{6.14}$$

où G est une variable aléatoire normale centrée réduite.

2. *Supposons que H_1 ait lieu. Alors, pour tout $t \in]0,1]$:*

$$T_N(t) \xrightarrow{p.s.} \infty, \text{ quand } N \to \infty. \tag{6.15}$$

Exemple. Décrivons un exemple d'application de ce test. Tous les calculs peuvent être fait en utilisant, par exemple, une procédure Matlab. Nous observons une trajectoire Y donnée par la figure 6.1. Notons que $Y(t) \in [-1{,}1]$ quand $t \in [0{,}1]$. Ainsi, si nous suspectons

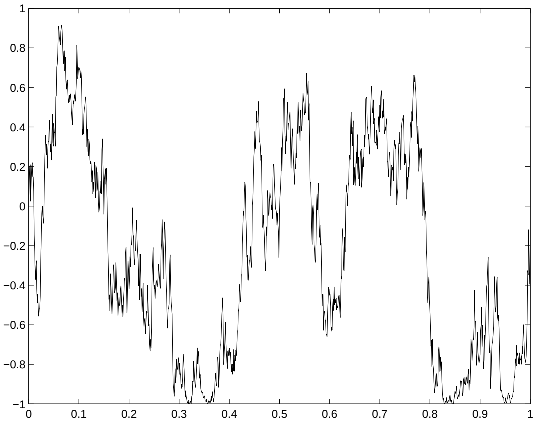

FIG. 6.1 – *Semimartingale observée*

que $Y_t = \varphi(B_t)$, nous recherchons une fonction φ dont l'image est contenue dans $[-1{,}1]$. Par exemple, on peut tester H_0 avec la bijection strictement monotone $\psi(x) = \frac{2}{\pi} \arctan x$. Dans ce cas, nous obtenons

$$T_N(1)(\omega) = \sqrt{\frac{3}{2}} 2^{N/2} \left(\widehat{V_N}(1)(\omega)\right)^{-\frac{1}{2}} \left|\widehat{J_N}(1)(\omega) - \widehat{\mathrm{int}_N}(1)(\omega)\right| = 36{,}9889\,.$$

Puisque $\mathrm{P}(|G| > 36{,}9889) < 10^{-2}$, nous pouvons rejeter H_0 en utilisant (6.14).

Testons maintenant H_0 avec $\psi(x) = \sin x$ qui vérifie $\psi'^2 = F(\psi)$ avec $F(x) = 1 - x^2$. Nous obtenons

$$T_N(1)(\omega) = \sqrt{\frac{3}{2}} 2^{N/2} \left(\widehat{V_N}(1)(\omega)\right)^{-\frac{1}{2}} \left|\widehat{J_N}(1)(\omega) - \widehat{\mathrm{int}_N}(1)(\omega)\right| = 0{,}6759\,.$$

Puisque $\mathrm{P}(|G| > 0{,}6759) = 0{,}5$, nous ne pouvons pas rejeter H_0.

6.2.2 Le modèle de diffusion

Notons $\mathcal{C}_{b,\pm}$ l'ensemble des fonctions analytiques réelles non constantes avec des dérivées première et seconde bornées, qui ne s'annulent pas.

Supposons que nous observons une diffusion X sous la forme (1.20) avec $\theta \in \mathcal{C}_{b,\pm}$ inconnue et $b \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$ connue ou inconnue.

Si $\vartheta \in \mathcal{C}_{b,\pm}$ est connue, nous sommes intéressés par tester l'hypothèse $H_0 : \vartheta^2 = \theta^2$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \vartheta^2 \neq \theta^2$.

Posons

$$\widehat{\mathrm{int}_N}(t) := 2^{-N} \sum_{i=0}^{[2^N t]-1} \vartheta(X_{i2^{-N}})^2, t \in [0{,}1], N \in \mathbb{N}^*, \tag{6.16}$$

et rappelons que $\widehat{I_N}$ et $\widehat{U_N}$ sont donnés par (1.23) et (6.10) respectivement.
Proposition 6.2.2. *Introduisons la statistique de décision T_N donnée par:*

$$T_N(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} 2^{N/2} \left(\widehat{U_N}(t)\right)^{-\frac{1}{2}} \left|\widehat{I_N}(t) - \widehat{\mathrm{int}_N}(t)\right|, t \in]0,1], N \in \mathbb{N}^*. \tag{6.17}$$

1. *Supposons que H_0 ait lieu. Alors, pour tout $\eta > 0$ et pour $t \in]0,1]$ fixé:*

$$\limsup_{N\to\infty} \mathrm{P}\left(T_N(t) \geq \eta\right) \leq \phi_\kappa^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|\geq\eta} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right). \tag{6.18}$$

2. *Supposons que H_1 ait lieu. Alors, pour tout $t \in]0,1]$:*

$$T_N(t) \xrightarrow{p.s.} \infty, \text{ quand } N \to \infty. \tag{6.19}$$

Exemple. Décrivons un exemple d'application de ce test. Encore une fois, tous les calculs peuvent être réalisés en utilisant une procédure Matlab par exemple. Nous observons une trajectoire X donnée par la figure 6.2. Remarquons que considérer la diffusion sur

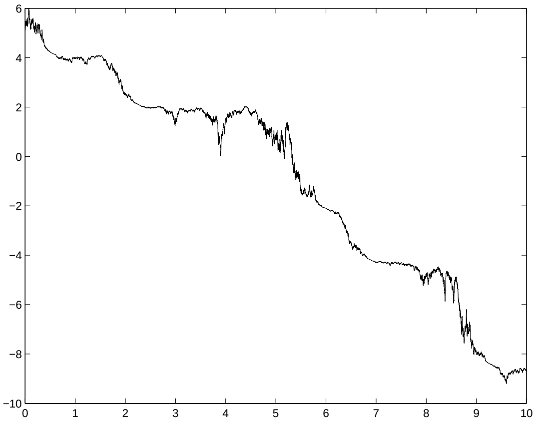

FIG. 6.2 – *Diffusion observée*

l'intervalle de temps [0,10] au lieu de [0,1] n'est pas une contrainte. Nous testons H_0 avec $\vartheta(x) = 1 + 2\cos x$, c'est-à-dire nous suspectons que X vérifie

$$X_0 = 5 \text{ et } dX_t = (1 + 2\cos X_t)dB_t - dt, t \in [0,10].$$

Dans ce cas, nous obtenons

$$T_N(10)(\omega) = \sqrt{\frac{3}{2}} 2^{N/2} \left(\widehat{U_N}(10)(\omega)\right)^{-\frac{1}{2}} \left|\widehat{I_N}(10)(\omega) - \widehat{\mathrm{int}_N}(10)(\omega)\right| = 115{,}2572$$

et nous avons (voir (6.7)):

$$Z = \int_0^{10} C_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^{10} C_s^2 ds, \text{ avec } |C_s| = \left|\frac{1}{2+\sin(X_s)} + \frac{\cos X_s}{2}\right| \leq \frac{3}{2}.$$

Ceci implique que $\mathrm{E_P}(Z^2) \leq \frac{82440}{32}$ et nous pouvons choisir $\kappa = 51$.
Puisque $\phi_\kappa^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|\geq 115{,}2572} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right) < 10^{-2}$, nous pouvons rejeter H_0.

6.3 Preuves

Preuve du théorème 6.1.1. Tout d'abord, en utilisant un argument de localisation, il n'est pas difficile de prouver que la partie variation finie de Y n'a aucune contribution sur la limite. Par conséquent, dans la suite, nous supposerons que $M \equiv 0$ dans (6.1).

Nous pouvons écrire

$$\widehat{J_N}(t) - J(t) = j_N(t) + r_N(t)$$

avec

$$j_N(t) := 2 \sum_{i=0}^{[2^N t]-1} \sigma(i2^{-N}, B_{i2^{-N}})^2 \int_{i2^{-N}}^{(i+1)2^{-N}} dB_s \int_{i2^{-N}}^{s} dB_u,$$

et

$$r_N(t) := 2 \sum_{i=0}^{[2^N t]-1} \left(\int_{i2^{-N}}^{(i+1)2^{-N}} (\sigma(s,B_s) - \sigma(i2^{-N}, B_{i2^{-N}}))dB_s \int_{i2^{-N}}^{s} \sigma(i2^{-N}, B_{i2^{-N}})dB_u \right.$$

$$\left. + \int_{i2^{-N}}^{(i+1)2^{-N}} \sigma(s,B_s)dB_s \int_{i2^{-N}}^{s} (\sigma(u,B_u) - \sigma(i2^{-N}, B_{i2^{-N}}))dB_u \right) - \int_{[2^N t]2^{-N}}^{t} \sigma(s,B_s)^2 ds.$$

Grâce à l'inégalité classique de Burkhölder-Davis-Gundy et en utilisant le fait que σ a des dérivées bornées par rapport à la deuxième variable, nous pouvons prouver que

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{E}\{ \sup_{t\in[0,1]} |2^{N/2} r_N(t)|^2 \} = 0.$$

Par conséquent, pour obtenir la convergence (6.3), il suffit de montrer que $2^{N/2} j_N$ converge en loi vers $\sqrt{2}\int_0^\bullet \sigma(s,\beta^{(1)}(s))^2\, d\beta^{(2)}(s)$, comme nous pouvons le voir en utilisant le lemme classique suivant (voir aussi le lemme 3.4.3):

Lemme 6.3.1. *Considérons $\{\mathcal{X}_N(t) : t \in [0,1]\}$ et $\{\mathcal{Y}_N(t) : t \in [0,1]\}$ deux suites de processus stochastiques réels continus, issu de 0, tels que, quand $N \to \infty$, $\mathcal{X}_N$ converge en loi vers $\mathcal{X}$ comme processus et $\mathrm{E}\{\sup_{t\in[0,1]} |\mathcal{Y}_N(t)|^2\} \to 0$. Alors, quand $N \to \infty$, $\mathcal{X}_N + \mathcal{Y}_N$ converge vers $\mathcal{X}$ en loi, comme processus.*

Introduisons, pour $N \in \mathbb{N}^*$, le processus Z_N donné par:

$$Z_N(t) = 2{\times}2^{N/2} \sum_{i=0}^{[2^N t]-1} \int_{i2^{-N}}^{(i+1)2^{-N}} dB_s \int_{i2^{-N}}^{s} dB_u = 2^{N/2} \sum_{i=0}^{[2^N t]-1} \left[\left(B_{(i+1)2^{-N}} - B_{i2^{-N}}\right)^2 - 2^{-N} \right]. \tag{6.20}$$

Nous découpons la preuve de la convergence de $2^{N/2} j_N = \int_0^\bullet \sigma(s,B_s)dZ_N(s)$ en plusieurs pas:

a) Convergence dans le cas particulier où $\sigma \equiv 1$.

Soit $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de variables aléatoires i.i.d. de loi normale centrée réduite. Nous avons, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$2^{N/2} \sum_{i=0}^{[2^N t]-1} \left[\left(B_{(i+1)2^{-N}} - B_{i2^{-N}} \right)^2 - 2^{-N} \right] \stackrel{\mathcal{L}}{=} 2^{-N/2} \sum_{i=0}^{[2^N t]-1} (G_i^2 - 1).$$

La convergence en loi dans le cas particulier où $\sigma \equiv 1$ découle donc directement du théorème central limite standard fonctionnel.

b) Convergence en loi pour toute fonction σ.
i) Nous pouvons écrire $Z_N(t) = \tilde{Z}_N(t) - R_N(t)$, où la martingale $\tilde{Z}_N$ est donnée par:

$$\tilde{Z}_N(t) := 2 \int_0^t dB_s \int_0^s dB_u f_N(s,u), \quad f_N(s,u) = 2^{N/2} \sum_{i=0}^{2^N-1} \mathbf{1}_{[i2^{-N},(i+1)2^{-N})}(s) \mathbf{1}_{[i2^{-N},1]}(u),$$

et le reste par $R_N(t) := 2 \times 2^{N/2} \int_{[2^N t]2^{-N}}^t dB_s \int_{[2^N t]2^{-N}}^s dB_u$. Il n'est pas difficile de montrer que $\lim_{N\to\infty} \mathrm{E}\{\sup_{t\in[0,1]} |R_N(t)|^2\} = 0$. Encore une fois, par le lemme 6.3.1, il suffit d'étudier la convergence en loi de $\tilde{Z}_N$. Fixons $t \in [0,1]$. En appliquant successivement la formule d'Itô et la version stochastique du théorème de Fubini, la variation quadratique de $\tilde{Z}_N$ vérifie

$$[\tilde{Z}_N,\tilde{Z}_N](t) = 8 \int_0^t dB_u \int_0^u dB_v \int_u^t ds\, f_N(s,u)\, f_N(s,v) + 4 \int_0^t ds \int_0^s du\, f_N(s,u)^2.$$

D'une part, notons que

$$4 \int_0^t ds \int_0^s du f_N(s,u)^2 = 2\, [2^N t] 2^{-N} + 2 \left(t - [2^N t] 2^{-N} \right)^2 \to 2\, t, \text{ quand } N \to \infty.$$

Grâce à la formule d'isométrie, nous avons, d'autre part,

$$\mathrm{E} \left\{ \left[\int_0^t dB_u \int_0^u dB_v \int_u^t ds\, f_N(s,u)\, f_N(s,v) \right]^2 \right\}$$

$$= 2 \times 2^{2N} \sum_{i=0}^{[2^N t]-1} \int_{i2^{-N}}^{(i+1)2^{-N}} du \int_{i2^{-N}}^u dv \int_u^{(i+1)2^{-N}} ds \int_u^s dw$$

$$+ 2 \times 2^{2N} \int_{[2^N t]2^{-N}}^t du \int_{[2^N t]2^{-N}}^u dv \int_u^t ds \int_u^s dw = O(2^{-N}),$$

quand $N \to \infty$. Ainsi, nous en déduisons que $\mathrm{L}^2 - \lim_{N\to\infty} [\tilde{Z}_N,\tilde{Z}_N](t) = 2\, t$.

ii) En utilisant la version stochastique du théorème de Fubini, la covariation entre $\tilde{Z}_N$ et B vérifie

$$[\tilde{Z}_N,B](t) = 2 \times 2^{N/2} \left(\sum_{i=0}^{[2^N t]-1} \int_{i2^{-N}}^{(i+1)2^{-N}} dB_u \int_u^{(i+1)2^{-N}} ds + \int_{[2^N t]2^{-N}}^t dB_u \int_u^t ds \right).$$

Nous en déduisons que

$$\mathrm{E}\left\{[\tilde{Z}_N,B](t)^2\right\} = 4 \times 2^N \left[\sum_{i=0}^{[2^N t]-1} \int_{i2^{-N}}^{(i+1)2^{-N}} du \left(\int_u^{(i+1)2^{-N}} ds\right)^2 + \int_{[2^N t]2^{-N}}^t (t-u)^2 du\right]$$

est un $O(2^{-N})$ et tend vers 0 quand $N \to \infty$.

iii) Par un raisonnement similaire, nous pouvons prouver que

$$\mathrm{L}^2 - \lim_{N\to\infty} [\tilde{Z}_N,B]([\tilde{Z}_N,\tilde{Z}_N]^{-1}(t)) = 0.$$

iv) Notons β_N le mouvement brownien associé à $\tilde{Z}_N$ quand on applique le théorème de Dubins-Schwarz. Par les pas *i)-iii)* et par la version asymptotique du théorème de Knight (voir, par exemple, [40] pp. 495-496), nous en déduisons, quand $N \to \infty$, $(B,\beta_N) \xrightarrow{\mathcal{L}} (\beta^{(1)},\beta^{(2)})$, où $\beta^{(1)}$ et $\beta^{(2)}$ sont deux mouvement browniens standards indépendants. Puisque $\mathrm{L}^2 - \lim_{N\to\infty}[\tilde{Z}_N,\tilde{Z}_N](t) = 2t$, il vient, quand $N \to \infty$, $(B,\tilde{Z}_N) \xrightarrow{\mathcal{L}} (\beta^{(1)},\sqrt{2}\,\beta^{(2)})$. Posons $\iota_t = t$, $t \in [0,1]$. Alors, $(\iota,B,\tilde{Z}_N) \xrightarrow{\mathcal{L}} (\iota,\beta^{(1)},\sqrt{2}\,\beta^{(2)})$, quand $N \to \infty$ et, grâce au lemme 6.3.1,

$$(\iota,B,Z_N) \xrightarrow{\mathcal{L}} (\iota,\beta^{(1)},\sqrt{2}\,\beta^{(2)}), \text{ quand } N \to \infty. \tag{6.21}$$

Puisque σ est une fonction continue, nous avons $(\sigma(\iota,B)^2,Z_N) \xrightarrow{\mathcal{L}} (\sigma(\iota,\beta^{(1)})^2,\sqrt{2}\,\beta^{(2)})$, quand $N \to \infty$. En utilisant le résultat concernant la convergence en loi des intégrales stochastique (voir Jakubowski *et al.* [32] p. 125), nous obtenons, quand $N \to \infty$,

$$2^{N/2} j_N = \int_0^\bullet \sigma(s,B_s)^2\, dZ_N(s) \xrightarrow{\mathcal{L}} \sqrt{2} \int_0^\bullet \sigma(s,\beta^{(1)}(s))^2\, d\beta^{(2)}(s).$$

En effet, nous vérifions la condition suivante: $\forall t \geq 0$, $\forall A$ processus prévisible borné par 1, $\forall N \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{P}\left(\left|\int_0^t A_s\, dZ_N(s)\right| > R\right) \leq \frac{1}{R^2}\mathrm{E}\left\{\left(2 \times 2^{N/2} \sum_{i=0}^{[2^N t]-1} A_{i2^{-N}} \int_{i2^{-N}}^{(i+1)2^{-N}} dB_s \int_{i2^{-N}}^s dB_u\right)^2\right\} \leq \frac{\mathrm{cst}}{R^2}.$$

Par conséquent, la preuve de (6.3) est terminée. □

Preuve de la proposition 6.1.2. Notons S_N le processus donné par

$$S_N(t) = 2^N \sum_{i=0}^{[2^N t]-1} \left(B_{(i+1)2^{-N}} - B_{i2^{-N}}\right)^4, t \in [0,1], N \in \mathbb{N}^*.$$

À ce stade, nous avons besoin du:

Lemme 6.3.2. *Pour tout $t \in [0,1]$, $S_N(t)$ converge vers $3t$ en probabilité, quand $N \to \infty$.*

Finissons d'abord la preuve de la proposition 6.1.2 avant de démontrer le lemme. Puisque $S_N(t)$ converge en probabilité vers une limite déterministe, nous pouvons en déduire, en utilisant (6.21), que, lorsque $N \to \infty$,

$$(\iota, B, Z_N, S_N) \xrightarrow{\mathcal{L}} (\iota, \beta^{(1)}, \sqrt{2}\,\beta^{(2)}, 3\,\iota),$$

avec $\beta^{(1)}$ et $\beta^{(2)}$ toujours deux mouvements browniens standards indépendants et $\iota(t) = t$, $t \in [0,1]$. De plus, par un raisonnement similaire à celui du pas *iv)* de la preuve du théorème 6.1.1, pour $t \in [0,1]$ fixé, nous obtenons tout d'abord, quand $N \to \infty$,

$$\left(\int_0^t \sigma(s,B_s)^2 \, dZ_N(s), \int_0^t \sigma(s,B_s)^4 \, dS_N(s) \right) \xrightarrow{\mathcal{L}}$$

$$\left(\sqrt{2} \int_0^t \sigma(s,\beta^{(1)}(s))^2 d\beta^{(2)}(s), 3 \int_0^t \sigma(s,\beta^{(1)}(s))^4 ds \right)$$

et ensuite, quand $N \to \infty$,

$$\left(2^{N/2}(\widehat{J_N}(t) - J(t)), \widehat{V_N}(t) \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \left(\sqrt{2} \int_0^t \sigma(s,\beta^{(1)}(s))^2 d\beta^{(2)}(s), 3 \int_0^t \sigma(s,\beta^{(1)}(s))^4 ds \right).$$

Finalement, puisque la fonction $(x,y) \mapsto \frac{x}{\sqrt{y}}$ est contine sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, nous en déduisons que, lorsque $N \to \infty$,

$$2^{N/2} \left(\widehat{V_N}(t) \right)^{-\frac{1}{2}} (\widehat{J_N}(t) - J(t)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\int_0^t \sigma(s,\beta^{(1)}(s))^2 d\beta^{(2)}(s)}{\left(\int_0^t \sigma(s,\beta^{(1)}(s))^4 ds \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Grâce à l'indépendance entre $\beta^{(1)}$ et $\beta^{(2)}$, il est facile de voir que, pour tout $t \in]0,1]$ fixé,

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\int_0^t \sigma(s,\beta^{(1)}(s))^2 d\beta^{(2)}(s)}{\left(\int_0^t \sigma(s,\beta^{(1)}(s))^4 ds \right)^{\frac{1}{2}}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sqrt{\frac{2}{3}} \mathcal{N}(0,1).$$

La preuve de (6.5) est terminée.

□

Preuve du lemme 6.3.2. Pour $t \geq 0$ fixé, $S_N(t)$ a la même loi que $2^{-N} \sum_{i=0}^{[2^N t]-1} G_i^4$ avec les G_i des v.a.r. i.i.d. de loi $N(0,1)$. Par la loi des grands nombres, $S_N(t)$ converge donc en loi vers $3t$. La limite étant déterministe, elle converge aussi en probabilité.

□

Preuve de la proposition 6.1.4. Commençons par énoncer le:

Lemme 6.3.3. *Soit ϕ_κ comme dans la proposition 6.1.4. Nous avons, pour tout événement $A \in \mathcal{F}$,*

$$\mathrm{Q}(A) \geq \phi_\kappa(\mathrm{P}(A)) \iff \mathrm{P}(A) \leq \phi_\kappa^{-1}(\mathrm{Q}(A)). \tag{6.22}$$

En particulier, si (A_n) est une suite d'événements de $\mathcal{F}$ telle que $\mathrm{Q}(A_n) \to 0$ (resp. $\to 1$), alors $\mathrm{P}(A_n) \to 0$ (resp. $\to 1$), quand $n \to \infty$.

Finissons la preuve de la proposition 6.1.4. Fixons $t \in]0,1]$. Soit $R > 0$. Nous pouvons écrire, pour tout $N_0 \in \mathbb{N}$ et $N \geq N_0$,

$$\mathrm{Q}\left(2^{\gamma N}\left(\widehat{U_N}(t)\right)^{-\frac{1}{2}}\left|\widehat{I_N}(t) - I(t)\right| \geq R\right) \geq \mathrm{Q}\left(2^{N/2}\left(\widehat{U_N}(t)\right)^{-\frac{1}{2}}\left|\widehat{I_N}(t) - I(t)\right| \geq \frac{R}{2^{(\gamma-1/2)N_0}}\right)$$

$$\longrightarrow_{N\to\infty} \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}|G| \geq \frac{R}{2^{(\gamma-1/2)N_0}}\right) \longrightarrow_{N_0\to\infty} 1.$$

Ici et dans la suite de la preuve, nous notons G une variable aléatoire de loi normale centrée réduite sous Q. Par conséquent, en utilisant le lemme 6.3.3, nous obtenons la première partie de la proposition 6.1.4. Pour la seconde partie, en utilisant successivement le lemme 6.3.3 et (6.11), nous voyons que

$$\limsup_{N\to\infty} \mathrm{P}\left(\left(\widehat{U_N}(t)\right)^{-\frac{1}{2}}\left|\widehat{I_N}(t) - I(t)\right| \geq \beta 2^{-N/2}\right)$$

$$\leq \limsup_{N\to\infty} \phi_\kappa^{-1}\left(\mathrm{Q}\left(\left(\widehat{U_N}(t)\right)^{-\frac{1}{2}}\left|\widehat{I_N}(t) - I(t)\right| \geq \beta 2^{-N/2}\right)\right) = \phi_\kappa^{-1}\left(\mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}|G| \geq \beta\right)\right).$$

□

Preuve du lemme 6.3.3. Nous avons, en utilisant successivement les inégalités de Jensen et de Cauchy-Schwarz,

$$\mathrm{Q}(A) = \mathrm{E}_{\mathrm{P}}(\mathrm{e}^{Z}\mathbf{1}_A) \geq \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{P}(A)}\int_A Z(\omega)d\mathrm{P}(\omega)}\mathrm{P}(A) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{E}_{\mathrm{P}}(Z\mathbf{1}_A)}{\mathrm{P}(A)}}\mathrm{P}(A) \geq \phi_\kappa(\mathrm{P}(A)).$$

□

Preuve de la proposition 6.2.1. La première partie est une simple conséquence de la proposition 6.1.2 (et aussi du lemme 6.3.1). Nous prouvons la seconde partie en considérant les deux situations:

i) Cas où ψ est une bijection monotone. Nous avons, pour $t \in]0,1]$ fixé,

$$\left|\widehat{J_N}(t) - \widehat{\mathrm{int}_N}(t)\right| \xrightarrow{a.s.} \left|\int_0^t (\varphi'(B_u)^2 - (\psi' \circ \psi^{-1} \circ \varphi)(B_u)^2)du\right|, \text{ quand } N \to \infty.$$

Supposons que

$$\mathrm{P}\left(\int_0^t (\varphi'(B_u)^2 - (\psi' \circ \psi^{-1} \circ \varphi)(B_u)^2)du = 0\right) > 0.$$

Il suit que la loi de la variable aléatoire $\int_0^t (\varphi'(B_u)^2 - (\psi' \circ \psi^{-1} \circ \varphi)(B_u)^2)du$ n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. À ce stade, nous avons besoin du:

Lemme 6.3.4. *Soit h une fonction réelle analytique et soit $T \in]0,1]$. La loi de $\int_0^T h(B_u)du$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue si et seulement si $h \not\equiv$ cst.*

Admettons un instant ce résultat (sa preuve est repoussée à la fin de cette section). Nous en déduisons que $\varphi'^2 - (\psi' \circ \psi^{-1} \circ \varphi)^2 = c$, $c \in \mathbb{R}$. De plus, $c = 0$ nécessairement parce que

$$0 < \mathrm{P}\left(\int_0^t (\varphi'(B_u)^2 - (\psi' \circ \psi^{-1} \circ \varphi)(B_u)^2)du = 0\right) = \mathrm{P}(c\,t = 0).$$

Par conséquent, $\varphi'^2 = (\psi' \circ \psi^{-1} \circ \varphi)^2$. Par un argument de connexité, nous obtenons que $\varphi' = \varepsilon\, \psi' \circ \psi^{-1} \circ \varphi$, avec $\varepsilon \in \{\pm 1\}$. Ainsi, φ est injective et nous avons $\varphi' \circ \varphi^{-1} = \varepsilon\, \psi' \circ \psi^{-1}$ ou, de manière équivalente, $(\varphi^{-1})' = \varepsilon(\psi^{-1})'$. Nous obtenons finalement que $\varphi^{-1}(x) = \varepsilon\, \psi^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ou de manière équivalente que $\varphi(x) = \psi(\varepsilon x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. C'est en contradiction avec H_1 ! Par conséquent, presque sûrement $\int_0^t (\varphi'(B_u)^2 - (\psi' \circ \psi^{-1} \circ \varphi)(B_u)^2)du$ ne s'annule pas et (6.15) a lieu.

ii) Cas où $\psi'^2 = F(\psi)$. Dans ce cas:

$$\left|\widehat{J_N}(t) - \widehat{\mathrm{int}_N}(t)\right| \xrightarrow{a.s.} \left|\int_0^t (\varphi'(B_u)^2 - F(\varphi)(B_u)^2)du\right|, \text{ quand } N \to \infty.$$

Supposons que

$$\mathrm{P}\left(\int_0^t (\varphi'(B_u)^2 - F(\varphi)(B_u)^2)du = 0\right) > 0.$$

Encore une fois, il suit que la loi de la variable aléatoire $\int_0^t (\varphi'(B_u)^2 - F(\varphi)(B_u)^2)du$ n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. En utilisant encore une fois le lemme 6.3.4, nous obtenons que $\varphi'^2 = F(\varphi)$ et donc que $2\varphi'\varphi'' = \varphi' F'(\varphi)$. D'une part, par l'analycité de φ, l'ensemble $\{x : \varphi'(x) \neq 0\}$ est dense dans $\mathbb{R}$, ce qui nous permet de simplifier: $2\varphi'' = F'(\varphi)$. D'autre part, nous avons $\varphi'^2(0) = F(0) = \psi'^2(0)$ et $\varphi(0) = \psi(0)$. Par unicité dans le problème de Cauchy, nous en déduisons $\varphi(|\cdot|) = \psi(|\cdot|)$, qui est en contradiction avec H_1.

□

Preuve de la proposition 6.2.2. Si nous supposons que H_0 a lieu, alors (6.18) est une conséquence de la proposition 6.1.4. Supposons que H_1 ait lieu. Nous avons, pour $t \in]0,1]$

fixé,

$$\left|\widehat{I_N}(t) - \widehat{\mathrm{int}_N}(t)\right| \xrightarrow{p.s.} \left|\int_0^t (\theta(X_u)^2 - \vartheta(X_u)^2)du\right|, \text{ quand } N \to \infty.$$

Supposons que

$$\mathrm{P}\left(\int_0^t (\theta(X_u)^2 - \vartheta(X_u)^2)du = 0\right) > 0.$$

Encore une fois, il vient que la loi de la variable aléatoire $\int_0^t (\theta(X_u)^2 - \vartheta(X_u)^2)du$ n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Utilisons un résultat similaire au lemme 6.3.4:

Lemme 6.3.5. *Soit h une fonction analytique réelle et soit $T \in]0,1]$. La loi de $\int_0^T h(X_u)du$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue si et seulement si $h \not\equiv$ cst.*

De ce résultat, on en déduit que $\vartheta^2 - \theta^2 = c$, $c \in \mathbb{R}$. De plus, $c = 0$ nécessairement parce que

$$0 < \mathrm{P}\left(\int_0^t (\theta(X_u)^2 - \vartheta(X_u)^2)du = 0\right) = \mathrm{P}(c\,t = 0).$$

C'est en contradiction avec H_1 !

$\square$

Preuve des lemmes 6.3.4 et 6.3.5. Nous utilisons le calcul de Malliavin. Le théorème 2.1.3 dans Nualart [37] p. 87 nous apprend que si $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ et si $\int_0^T (D_t F)^2 dt > 0$ presque sûrement alors la loi de F est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Tout d'abord, si $F = \int_0^T h(B_u)du$, alors $D_t F = \int_0^T D_t(h(B_u))du = \int_t^T h'(B_u)du$. Nous avons $\mathrm{P}(\forall t, D_t F = 0) = \mathrm{P}(\forall t, h'(B_t) = 0)$. Si nous supposons que $\mathrm{P}(\forall t, h'(B_t) = 0) > 0$ alors, en particulier, $\mathrm{P}(h'(B_T) = 0) > 0$. Puisque h est analytique et que la loi de la variable aléatoire B_T est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, nous en déduisons que $h' \equiv 0$. La conclusion du lemme 6.3.4 suit immédiatement.

Ensuite, si $F = \int_0^T h(X_u)du$ avec X donnée par (1.20), alors

$$D_t F = \int_0^T D_t(h(X_u))du = \theta(X_t)\int_t^T h'(X_u)\exp(\int_0^u \theta'(X_v)dB_v + \int_0^u (b' - \frac{1}{2}\theta'^2)(X_v)dv)du$$

et la conclusion du lemme 6.3.5 suit comme précédemment.

$\square$

Bibliographie

[1] Abraham, R.H., Marsden, J.E., Ratiu, T.S. (1988). *Manifolds, tensor analysis, and applications.* 2nd edition, Springer-Verlag.

[2] Alos, E., Mazet, O., Nualart, D. (2000). *Stochastic calculus with respect to fractional Brownian motion with Hurst parameter lesser than* $\frac{1}{2}$ Stoch. Proc. Appl. **86**, 121-139.

[3] Alos, E., Léon, J. L., Nualart, D. (2001). *Stratonovich calculus for fractional Brownian motion with Hurst parameter less than* $\frac{1}{2}$. Taiwanese J. Math. **5**, 609-632.

[4] Azaïs, J.-M., Wschebor, M. (1996). *Almost sure oscillation of certain random processes.* Bernoulli **2** (3), 257-270.

[5] Azaïs, J.-M., Wschebor, M. (1997). *Oscillation presque sûre de martingales continues.* Lecture Notes in Math. **1655**, 69-76.

[6] Bender, C. (2003). *An Itô formula for generalized functionals of a fractional Brownian motion with arbitrary Hurst index.* Stoch. Proc. and their Appl. **104**, 81-106.

[7] Berman, S. (1965). *Sign-invariant random variables and stochastic processes with sign-invariant increments.* Trans. Amer. Math. Soc. **119**, 216-243.

[8] Berzin-Joseph, C., León, J.R., Ortega, J. (1998). *Increments and crossings for the Brownian bridge: weak convergence.* C. R. Acad. Sci. Paris **327**, série I, 587-592.

[9] Bickel, P.J., Doksum, K.A. (1977). *Mathematical Statistics.* Prentice Hall, Inc.

[10] Bouleau, N., Hirsch, F (1986). *Formes de Dirichlet générales et densité des variables aléatoires réelles sur l'espace de Wiener.* J. Funct. Analysis **69** (2), 229-259.

[11] Bouleau, N., Hirsch, F. (1991). *Dirichlet Forms and Analysis on Wiener Space.* Walter de Gruyter, Berlin.

[12] Cheredito, P., Nualart, D. (2003). *Stochastic integral of divergence type with respect to fractional Brownian motion with Hurst parameter* $H \in (0,1/2)$. Preprint Barcelona.

[13] Coeurjolly, J.-F. (2000). *Simulation and identification of the fractional Brownian motion: a bibliographical and comparative study.* Journal of Statistical Software **5**, Issue 7.

[14] Coutin, L., Qian, Z. (2002). *Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions.* Probab. Theory Related Fields **122**, no. 1, 108-140.

[15] Delattre, S., Jacod, J. (1997). *A central limit theorem for normalized functions of the increments of a diffusion process, in the presence of round-off errors.* Bernoulli **3**, no. 1, 1-28.

[16] Doss, H. (1977). *Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires.* Ann. IHP **13**, 99-125.

[17] Dudley, R.M. (1973). *Sample functions of the Gaussian process.* Ann. Probability **1**, 66-103.

[18] Errami, M., Russo, F. (2003). *n-covariation and symmetric SDEs driven by finite cubic variation process.* Stoch. Processes and their applications **104**, 259-299.

[19] Feyel, D., De La Pradelle, A. (2003). *Curvilinear integrals along rough paths.* Preprint Université d'Évry.

[20] Florens-Zmirou, D. (1993). *On estimating the diffusion coefficient from discrete observations.* J. Appl. Prob **30**, 790-804.

[21] Genon-Catalot, V., Laredo, C., Picard, D. (1992). *Non-parametric estimation of the diffusion coefficient by wavelets methods.* Scand. J. Statist. **19**, 317-335.

[22] Giraitis, L., Surgailis, D. (1985). *CLT and other limit theorems for functionals of Gaussian processes.* Z. Wahrsch. verw. Gebiete **70**, 191-212.

[23] Gradinaru, M., Nourdin, I. (2003). *Approximation at first and second order of m-order integrals of the fractional Brownian motion and of certain semimartingales.* Electron. J. Probab. **8**, no 18.

[24] Gradinaru, M., Nourdin, I. (2003). *Stochastic volatility: approximation and goodness-of-fit test.* Preprint IECN 2003-53.

[25] Gradinaru, M., Nourdin, I., Russo, F., Vallois, P. (2004). *m-order integrals and Itô's formula for non-semimartingale processes; the case of a fractional Brownian motion with any Hurst index.* À paraître aux Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.

[26] Gradinaru, M., Russo, F., Vallois, P. (2001). Generalized covariations, local time and Stratonovich Itô's formula for fractional Brownian motion with Hurst index $H \geq \frac{1}{4}$. Ann. Probab. **31**, 1772-1820.

[27] Guyon, X., Léon, J. (1989). *Convergence en loi des H-variations d'un processus gaussien stationnaire sur $\mathbb{R}$.* Ann. Inst. Henri Poincaré **25**, 265-282.

[28] Hoffmann, M. (1997). *Minimax estimation of the diffusion coefficient through irregular samplings.* Stat. Probab. Letters **32**, 11-24.

[29] Hoffmann, M. (1999). *L_p estimation of the diffusion coefficient.* Bernoulli **5**, 447-481.

[30] Istas, J., Lang, G. (1997). *Quadratic variations and estimation of the local Hölder index of a Gaussian process.* Ann. Inst. Henri Poincaré **33**, 407-436.

[31] Jacod, J. (1992). *Limit of random measures associated with the increments of a Brownian semimartingale.* Prépublication Paris VI.

[32] Jakubowski, A., Mémin, J., Pagès, G. (1989). *Convergence en loi des suites d'intégrales stochastiques sur l'espace $\mathbb{D}^1$ de Skorokhod.* Probab. Theory Related Fields **81**, 111-137.

[33] Karatzas, I., Shreve, S. (1991). *Brownian motion and stochastic calculus.* Springer, 2nd edition.

[34] Lin, S.J. (1995). *Stochastic analysis of fractional Brownian motion.* Stochastics and Stochastics Reports **55**, 121-140.

[35] Lyons, T.J. (1998). *Differential equations driven by rough signals.* Rev. Math. Iberoamer. **14**, 215-310.

[36] Nourdin, I. (2004) *Discrete approximation of differential equations driven by an Hölder continuous function.* À soumettre aux C.R. Math. Acad. Sci. Paris.

[37] Nualart, D. (1995). *The Malliavin calculus and related topics.* Springer-Verlag.

[38] Nualart, D., Ouknine, Y. (2003). *Stochastic differential equations with additive fractional noise and locally unbounded drift.* Preprint Barcelona.

[39] Nualart, D., Răşcanu, A. (2002). *Differential equations driven by fractional Brownian motion.* Collect. Math. **53**, no. 1, 55–81.

[40] Revuz, D., Yor, M. (1994). *Continuous martingales and Brownian motion.* 2nd edition, Springer-Verlag.

[41] Russo, F., Vallois, P. (1993). *Forward, backward and symmetric stochastic integration.* Probab. Theory Relat. Fields **97**, 403-421.

[42] Russo, F., Vallois, P. (1995). *The generalized covariation process and Itô formula.* Stochastic Processes and their applications **59**, 81-104.

[43] Russo, F., Vallois, P. (1996). *Itô formula for C^1−functions of semimartingales.* Probab. Theory Relat. Fields **104**, 27-41.

[44] Russo, F., Vallois, P. (2000). *Stochastic calculus with respect to a finite quadratic variation process.* Stochastics and Stochastics Reports **70**, 1-40.

[45] Ruzmaikina, A. (2000). *Stieltjes integrals of Hölder continuous functions with applications to fractional Brownian motion.* Journal of Statist. Physics **100**, no 5/6, 1049-1069.

[46] Stoer, J., Bulirsch, R., Bartels, R., Gautschi, W.,Witzgall, C. (1983). *Introduction to numerical analysis.* Springer-Verlag.

[47] Sussman, H.J. (1977). *An interpretation of stochastic differential equations as ordinary differential equations which depend on a sample point.* Bull. Amer. Math. Soc. **83**, 296-298.

[48] Taqqu, M.S. (1977). *Law of the iterated logarithm for sums of non-linear functions of Gaussian variables that exibit a long range dependence* Z. Wahrsch. verw. Gebiete **40**, 203-238.

[49] Taqqu, M.S. (1979). *Convergence of integrated processes of arbitrary Hermite rank.* Z. Wahrsch. verw. Gebiete **50**, 53-83.

[50] De La Vega, W. F. (1974) *On almost sure convergence of quadratic Brownian motion.* Annals of Probability **2** (3), 551-552.

[51] Wschebor, M. (1992) *Sur les accroissements du processus de Wiener.* C. R. Acad. Sci. Paris **315**, série I, 1293-1296.

[52] Yor, M. (1975). *Sur quelques approximations d'intégrales stochastiques.* Séminaire de Probabilités XI 1975/76, Lect. Notes in Math. **581**, 518-528, Springer-Verlag.

[53] Young, L. C. (1936). *An inequality of the Hölder type connected with Stieltjes integration.* Acta Math. **67**, 251-282.

[54] Zähle, M. (1998). *Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus I.* Prob. Theory Rel. Fields **111**, 333-374.

[55] Zähle, M. (2001). *Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus II.* Math. Nachr. **225**, 145-183.