Systèmes de Hopf-Galois : exemples et applications aux représentations des groupes quantiques

Julien Bichon

Systèmes de Hopf-Galois : exemples et applications aux représentations des groupes quantiques

Julien Bichon

Laboratoire de Mathématiques Appliquées
Université de Pau et des Pays de l'Adour,
IPRA, Avenue de l'université,
64000 Pau, France.
E-mail: Julien.Bichon@univ-pau.fr

Document de synthèse en vue de l'habilitation à diriger des recherches

Julien Bichon

Systèmes de Hopf-Galois : exemples et applications aux représentations des groupes quantiques

Résumé. La théorie des groupes quantiques, apparue à la fois en liaison avec des problèmes de physique théorique et la volonté de généraliser la dualité de Pontryagin aux groupes non abéliens, est encore relativement jeune. Les travaux résumés dans ce mémoire s'intéressent à trois grands types de problèmes. 1. Construire des exemples. 2. Décrire les représentations des exemples en question. 3. Obtenir des résultats de classification.

L'introduction de la notion de système de Hopf-Galois est l'une des principales contributions : d'une part elle est extrêmement utile en théorie des représentations, et par conséquent pour les résultats de classification, et d'autre part elle incarne parfaitement les méthodes à la "Galois-Tannaka-Grothendieck", essentielles pour la construction d'exemples. Le concept de système de Hopf-Galois est une reformulation de la notion plus classique d'extension de Hopf-Galois, la principale nouveauté étant l'introduction d'un antipode généralisé. Après une étude générale, la construction de systèmes de Hopf-Galois appropriés nous a permis d'obtenir les résultats suivants.

• La description complète de la catégorie des représentations du groupe quantique d'une forme bilinéaire non dégénérée en termes de celle du groupe quantique $SL_q(2)$, sans restriction sur la caractéristique de corps de base ni sur le paramètre q. La classification à isomorphisme près de ces groupes quantiques ; la détermination de leur groupe d'automorphismes (en caractéristique nulle). On obtient comme conséquence la classification complète des SL_2-déformations, c'est-à-dire des algèbres de Hopf cosemisimples ayant un semi-anneau de (co)représentations isomorphe à celui de SL_2 (en caractéristique nulle).
• L'existence d'algèbres de Hopf cosemisimples possédant un antipode d'ordre fini pair arbitraire.
• La théorie des corepresentations des algèbres de Hopf cosouveraines universelles. Leur classification à isomorphisme près ; la détermination de leurs groupe d'automorphismes (dans le cas générique et en caractéristique nulle).
• La théorie des représentations du groupe quantique des automorphismes d'une algèbre matricielle munie d'une mesure non traciale.
• Un analogue quantique libre des premiers théorèmes fondamentaux de la théorie des invariants, impossible à obtenir pour les groupes ou même les algèbres de Hopf cotressées.

On présente également un théorème de reconstruction galoisienne pour les groupes quantiques finis, ainsi que de nouveaux exemples d'algèbres de Hopf : déformations par des 2-cocycles du groupe symétrique, groupes quantiques d'automorphismes des graphes finis, algèbres de Hopf cosouveraines universelles, construction FRT dans un cadre catégorique minimal.

Remerciements

Cette page est naturellement dédiée à tous ceux qui, par le biais de leurs travaux ou d'échanges directs, ont permis de construire puis de perfectionner mes connaissances mathématiques. Ils sont certainement trop nombreux pour être tous cités, et le risque d'oublis étant très grand, je vais me concentrer sur ceux qui ont participé de manière plus directe à cette habilitation.

Christian Kassel, après avoir déjà participé à l'élaboration de ma thèse de doctorat par divers conseils pertinents et en tant que rapporteur, a bien voulu écrire une lettre de présentation et ainsi faire office de directeur pour mon habilitation. Je le remercie très sincèrement de son intérêt et de sa confiance.

Je remercie très vivement les trois rapporteurs, Nicolas Andruskiewitsch, Bodo Pareigis et Leonid Vainerman, d'avoir accepté de consacrer une partie de leur temps à l'analyse de mon travail. Cela me flatte d'autant plus que leurs travaux respectifs ont étés, et sont encore, une grande source d'inspiration pour moi.

Je suis extrèmement reconnaissant envers l'ensemble des membres extérieurs du jury d'avoir accepté de faire un long voyage pour venir siéger à Pau. Leur présence est un grand honneur pour moi. C'est en particulier un très grand plaisir que de voir Guy Laffaille, mon directeur de thèse à Montpellier, et Andréa Solotar, après sa visite à Pau l'an dernier, faire partie du jury.

Je remercie également Jean-Paul Penot, qui m'a accueilli dans l'équipe d'optimisation, pour sa participation au jury.

Finalement je remercie les divers responsables des mathématiques à Pau, et en particulier Mohamed Amara, directeur du laboratoire de mathématiques appliquées, pour leur soutien et pour me permettre d'effectuer mon travail dans de bonnes conditions matérielles.

Introduction

La théorie des groupes quantiques [1] , apparue à la fois en liaison avec des problèmes de physique théorique [30] et la volonté de généraliser la dualité de Pontryagin aux groupes non abéliens [90, 91], est encore relativement jeune. Les travaux résumés dans ce mémoire s'intéressent à trois grands types de problèmes.

I - Construire des exemples.

II - Décrire les représentations des exemples en question.

III - Obtenir des résultats de classification.

Nous avons choisi de mettre en avant la notion de système de Hopf-Galois introduite dans [18] : d'une part elle est extrèmement utile en théorie des représentations, et par conséquent pour les résultats de classification, et d'autre part elle incarne parfaitement les méthodes à la "Galois-Tannaka-Grothendieck", essentielles pour la construction d'exemples.

Le concept d'extension de Hopf-Galois a été introduit par Kreimer et Takeuchi [52]. Il généralise à la fois les très classiques extensions galoisiennes de corps et les torseurs pour les groupes algébriques. Le point de vue qui nous intéresse le plus ici est celui des torseurs : un théorème tannakien de Saavedra Rivano et Deligne [76, 27] assure que la catégorie des foncteurs fibre sur la catégorie des représentations d'un groupe algébrique est équivalente à la catégorie des torseurs sur ce groupe algébrique. Ce résultat a été généralisé par Ulbrich au cadre des algèbres de Hopf non commutatives [83, 84], puis mis sous sa forme la plus utile par Schauenburg [79] : les catégories de comodules de deux algèbres de Hopf sont monoïdalement équivalentes si et seulement si il existe une extension bigaloisienne entre ces deux algèbres de Hopf.

La notion de système de Hopf-Galois que nous proposons n'est autre qu'une reformulation de celle d'extension de Hopf-Galois ou d'extension bigaloisienne. Elle fait apparaitre les extensions de Hopf-Galois comme des généralisations directes des algèbres de Hopf, la principale nouveauté étant l'introduction et l'utilisation d'un antipode généralisé. L'axiomatique semble plus compliquée que celle d'extension de Hopf-Galois, mais nous pensons qu'elle est en fait beaucoup plus naturelle et facile à manipuler, et permet une meilleure compréhension, comme semblent l'attester les exemples que nous avons contruits. Expliquons cela de manière plus détaillée et plus technique. Soient A et B des algèbres de Hopf (sur un corps k). On dit qu'une algèbre non nulle Z est une extension A-B-bigaloisienne [79] si Z est une algèbre A-B-cobimodule telle que deux applications linéaires $\kappa_l : Z \otimes Z \longrightarrow A \otimes Z$ et $\kappa_r : Z \otimes Z \longrightarrow Z \otimes B$ soient bijectives. En fait la manière la plus simple et la plus naturelle pour montrer que ces applications κ_l et κ_r sont bijectives semble être de montrer que l'on a un système de Hopf-Galois. Voici une situation plus familière. Considérons une bigèbre A. Alors A est une algèbre de Hopf si et seulement si l'application

$$\kappa_l : A \otimes A \xrightarrow{\Delta \otimes 1_A} A \otimes A \otimes A \xrightarrow{1_A \otimes m} A \otimes A$$

[1] Précisons dès maintenant que dans notre cadre, un groupe quantique est identifié avec une algèbre de Hopf qui joue le rôle d'une algèbre de fonctions, et que par conséquent une représentation est un comodule.

est bijective. Pour les exemples concrets, il est bien plus agréable de demander l'existence d'un antipode, bien que l'axiomatique devienne à première vue légèrement plus compliquée. C'est exactement cette philosophie que nous avons adopté pour les extensions de Hopf-Galois. Un système de Hopf-Galois est un quadruplet (A, B, Z, T) d'algèbres non nulles où A et B sont des algèbres de Hopf, et où Z est une algèbre A-B-cobimodule. On se donne également des morphismes d'algèbres $\gamma : A \longrightarrow Z \otimes T$ et $\delta : B \longrightarrow T \otimes Z$ avec des contraintes d'associativité, et une application linéaire $S : T \longrightarrow Z$ jouant le rôle de l'antipode (voir le paragraphe 1 ou [18] pour les détails). En fait la façon la plus simple de comprendre les axiomes d'un système de Hopf-Galois est de le voir comme un cogroupoïde connexe à deux objets, et en fait un système de Hopf-Galois provient toujours d'une paire d'objets du groupoïde des foncteurs fibre sur les comodules d'une algèbre de Hopf.

Nous avons construit dans [17, 18, 22] des exemples de systèmes de Hopf-Galois qui indiquent à quel point cette notion est facile à manipuler. Il est important de noter que parmi ces exemples figurent pour la première fois des exemples explicites d'extension de Hopf-Galois non "fendues" [2] , c'est-à-dire ne provenant pas d'un 2-cocycle. Via le théorème de Ulbrich [84], cela correspond à l'existence de foncteurs fibre ne préservant pas les dimensions des espaces vectoriels. L'existence de tels foncteurs fibre (sur la catégorie des représentations de SL_2) était cependant connue grâce à des résultats de Bruguières [26].

Les conséquences principales de nos considérations et constructions sont les résultats suivants. On peut les considérer comme nos résultats principaux.

• La description complète de la catégorie des représentations du groupe quantique d'une forme bilinéaire non dégénérée en termes de celle du groupe quantique $SL_q(2)$, sans restriction sur la caractéristique de corps de base ni sur le paramètre q [17].

• La classification à isomorphisme près des groupes quantiques associés à une forme bilinéaire non dégénérée ; la détermination de leur groupe d'automorphismes (en caractéristique nulle) [17].

• La classification complète des SL_2-déformations, c'est-à-dire des algèbres de Hopf cosemisimples ayant un semi-anneau de (co)représentations isomorphe à celui de SL_2 (en caractéristique nulle) [17].

• L'existence d'algèbres de Hopf cosemisimples possédant un antipode d'ordre fini pair arbitraire [15].

• La théorie des coreprésentations des algèbres de Hopf cosouveraines universelles introduites dans [14], dans le cas générique et en caractéristique nulle [22].

• La classification à isomorphisme près des algèbres de Hopf cosouveraines universelles ; la détermination de leurs groupe d'automorphismes (dans le cas générique et en caractéristique nulle) [22].

• La théorie des représentations du groupe quantique des automorphismes d'une algèbre matricielle munie d'une mesure non traciale (introduit dans [12]) [22].

• Un analogue quantique libre des premiers théorèmes fondamentaux de la théorie des invariants [21], impossible à obtenir pour les groupes ou même les algèbres de Hopf cotressées.

[2] "fendu" est une traduction littérale de l'anglais "cleft"

Passons maintenant à une description plus détaillée de l'ensemble de nos résultats, en suivant, autant que possible, les trois grands types de problèmes mentionnés au début de cette introduction.

I - Construction de groupes quantiques

Dans ce paragraphe, nous passons en revue les nouveaux exemples de groupes quantiques que nous avons construits. Commençons par quelques rappels sur les méthodes tannakiennes, qui ont également joué leur rôle pour formaliser la notion de système de Hopf-Galois.

Méthodes tannakiennes : rappels (voir [43] et [77]). Soit $\mathcal{C}$ une (petite) catégorie monoïdale rigide et soit $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Vect}_f(k)$ un foncteur monoïdal. Un théorème de Ulbrich [85] assure que le "coend" du foncteur F utilisé dans [76], noté ici $\mathsf{End}^{\vee}(F)$, est une algèbre de Hopf. Le foncteur F se factorise alors en un foncteur monoïdal à valeurs dans les $\mathsf{End}^{\vee}(F)$-comodules suivi du foncteur oubli, et l'algèbre de Hopf $\mathsf{End}^{\vee}(F)$ est universelle pour cette propriété. Toute algèbre de Hopf peut être obtenue de cette façon, en prenant pour $\mathcal{C}$ la catégorie de ses comodules à droite et pour F le foncteur oubli (Les versions compactes de ces résultats tannakiens ont étés montrées par Woronowicz [92]). En pratique, la catégorie $\mathcal{C}$ est souvent la sous-catégorie monoïdale de $\mathrm{Vect}_f(k)$ engendrée par un ou deux objets et une famille finie de morphismes : l'algèbre de Hopf obtenue est alors, de par sa propriété universelle, vue comme un groupe quantique d'automorphismes du foncteur oubli. Les exemples les plus fameux sont la construction FRT [74], les groupes quantiques $SU(N)$ de Woronowicz [92], les duaux restreints d'algèbres enveloppantes quantiques [75]...

En considérant un deuxième foncteur monoïdal $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Vect}_f(k)$, on obtient, en utilisant la construction "cohom" (voir [43]), un quadruplet d'algèbres $(\mathsf{End}^{\vee}(F), \mathsf{End}^{\vee}(G), \mathsf{Hom}^{\vee}(G,F), \mathsf{Hom}^{\vee}(F,G))$ qui n'est autre qu'un système de Hopf-Galois : nous avons montré cela dans [18].

Reconstruction galoisienne des groupes quantiques. Rappelons tout d'abord que la théorie des catégories tannakiennes, développée dans la thèse de Saavedra Rivano [76], était alors essentiellement vue comme une "version linéaire" de la théorie de Galois de Grothendieck [40]. Dans le but d'obtenir une version quantique de la théorie de Galois de Grothendieck, on a démontré dans [12] un théorème de reconstruction galoisienne qui permet en outre de construire des exemples intéressants de groupes quantiques. La situation est la suivante : on se donne un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{M}alg_f$, où $\mathcal{C}$ est une petite catégorie (sur laquelle on ne suppose l'existence d'absolument aucune structure) et $\mathcal{M}alg_f$ est la catégorie des algèbres mesurées (algèbres de Frobenius avec choix d'une mesure). Alors il existe une algèbre de Hopf $A_{\mathrm{aut}}(F)$ telle que le foncteur F se factorise en un foncteur à valeurs dans les algèbres $A_{\mathrm{aut}}(F)$-comodules mesurées suivi du foncteur oubli, et universelle pour cette propriété. L'algèbre de Hopf $A_{\mathrm{aut}}(F)$ est l'analogue quantique du groupe des automorphismes d'un foncteur à valeurs dans la catégorie des ensembles finis, qui apparait dans la théorie de Galois de Grothendieck.

En particulier, Lorsque $\mathcal{C} = \{*\}$ est la catégorie triviale et que $F(*) = (Z, \phi)$ où (Z, ϕ) est une algèbre mesurée, on obtient l'algèbre de Hopf $A_{\mathrm{aut}}(Z, \phi)$ du groupe quantique des automorphismes de (Z, ϕ). On obtient par conséquent, lorsque la catégorie de base est triviale, essentiellement les mêmes objets que ceux construits par Wang [88] dans le cas compact. Notons que les résultats de Wang avaient montré la nécessité de l'usage des mesures.

Si A est une algèbre de Hopf de dimension finie, si $\mathcal{C}$ est la catégorie des algèbres A-comodules mesurées et si F est le foncteur oubli, alors $A_{\text{aut}}(F) \cong A$: c'est l'analogue quantique de la reconstruction d'un groupe fini G à partir des G-ensembles finis [12].

Groupes quantiques d'automorphismes des graphes finis. La construction générale de [12] permet d'obtenir des analogues algébriques des groupes quantiques d'automorphismes des algèbres semi-simples de dimension finie (mesurées) construits par Wang dans [88]. Parmi ces objets, le plus fascinant est sans doute celui que Wang a appelé "le groupe quantique des permutations", qui correspond au cas où l'algèbre Z est égale à l'algèbre diagonale $\mathbb{C}^n$, c'est-à-dire l'algèbre des fonctions sur l'espace X_n à n points (la mesure étant la mesure de comptage habituel). Notons $A_{\text{aut}}(X_n)$ l'algèbre de Hopf correspondante : c'est l'algèbre universelle engendrée par les coefficients d'une matrice de permutation, et on peut donc la voir comme l'algèbre des fonctions sur le groupe symétrique S_n, où l'on aurait oublié les relations de commutativité. Si $n \geq 4$, elle est non-commutative est de dimension infinie. Dans le but de construire des sous-groupes quantiques non triviaux, nous avons défini et construit dans [16] le groupe des automorphismes quantiques d'un graphe fini. Le groupe quantique des automorphismes est un invariant plus fin pour les graphes finis que le groupe usuel des automorphismes : par exemple, pour le graphe à n points et sans arêtes, on obtient le groupe quantique des quantiques alors que pour le graphe complet, on obtient le groupe symétrique *usuel*. Plus généralement, on obtient de nouveaux exemples intéressants en considérant les groupes quantiques d'automorphismes de sommes disjointes de graphes connexes. Dans le cas classique, les produits en couronne permettent de décrire cette situation : ceci nous a mené à définir dans [20] le produit en couronne libre par le groupe quantique des permutations. Cette construction nous a permis de simplifier et mieux comprendre les groupes d'automorphismes quantiques des graphes finis, et permet en outre de construire de façon indépendante de nouveaux exemples de groupes quantiques.

Algèbres de Hopf cosouveraines universelles. Une catégorie monoïdale souveraine [94] est une catégorie monoïdale rigide muni d'un isomorphisme monoïdal entre le foncteur identité et le foncteur bidualité. De telles catégories sont apparues en liaison avec la construction d'invariants quantiques des noeuds et des variétés. Nous avons défini et étudié dans [14] la notion correspondante au niveau des algèbres de Hopf : les algèbres de Hopf cosouveraines. En particulier nous avons construit les algèbres de Hopf cosouveraines universelles. Au vu de leur propriété universelle, les groupes quantiques correspondant peuvent être légitimement vus comme les analogues des groupes linéaires en théorie des groupes quantiques [3]. Au niveau des algèbres de Hopf, on a une généralisation des CQG-algèbres correspondant aux groupes quantiques compacts universels de Van Daele et Wang [86].

[3] Il nous semble que le moins que l'on puisse demander à un groupe quantique est que chaque représentation soit isomorphe à sa représentation biduale. Certains auteurs demanderont aussi que la catégorie des représentations soit tressée : ce n'est pas notre cas.

Construction FRT dans un cadre catégorique minimal. La construction FRT [74] associe à un operateur R défini sur le carré tensoriel d'un objet d'une catégorie monoïdale une bigèbre universelle $A(R)$. Le cadre catégorique habituel pour cette construction est celui des catégories tressées (cela est nécessaire pour parler de bigèbre). Dans [23] (travail en collaboration avec Ross Street), inspirés par les travaux de Militaru [63] sur la D-équation, nous avons proposé une construction de type FRT dans un cadre catégorique minimal, c'est-à-dire pour des catégories non tressées. Nous obtenons des cogèbres à la place des bigèbres de la construction habituelle. Cela nous a permis d'obtenir des généralisations des résultats de Militaru. Nous avons aussi étudié la D-équation en utilisant la construction FRT habituelle, ce qui est naturel car certains D-opérateurs, associés à des algèbres de Frobenius, sont des morphismes de la catégorie des représentations du groupe quantique des automorphismes correspondant. Ces considérations nous ont permis de construire de nouveaux exemples de D-opérateurs. Militaru avait expliqué dans [64] que la D-équation est une partie de la condition d'intégrabilité des équations de Knizhnick-Zamolodchikov (voir [47]).

Algèbres de Hopf cosemisimples à antipode d'ordre fini. L'antipode d'une algèbre de Hopf est l'analogue de l'inversion dans un groupe, mais n'est pas nécessairement d'ordre 2. L'ordre de l'antipode a donc été un sujet privilégié depuis le début de l'étude purement algébrique des algèbres de Hopf dans les années 60. En dimension finie (et en caractéristique nulle), les résultats principaux sont les suivants : l'antipode est d'ordre fini (Radford [72]), il existe des algèbres de Hopf à antipode d'ordre fini pair quelconque (Taft [80]), et une algèbre de Hopf est cosemisimple si et seulement si son antipode est d'ordre 2 (Larson-Radford [54, 55]). Dans [15], nous avons montré l'existence d'algèbres de Hopf *cosemisimples* possédant un antipode d'ordre fini pair quelconque. Les algèbres de Hopf en question avaient été introduites par Dubois-Violette et Launer [32].

Déformations d'algèbres de Hopf par des 2-cocycles. La méthode de déformation d'une algèbre de Hopf par un 2-cocycle est issue d'une idée de Drinfeld [31]. Nous avons, en utilisant la méthode de construction de 2-cocycles induits par des sous-groupes abéliens de Enock-Vainerman [36], construit des familles de déformations du groupe symétrique dans [13] et [18]. Cela généralise une construction précédente de Nikshych [66].

L'algèbre de Hopf des N-complexes. Un résultat de Pareigis [68], antérieur à l'ère des groupes quantiques, assure que la catégorie des complexes est monoïdalement équivalente à la catégorie des comodules d'une algèbre de Hopf non commutative et non cocommutative. On a généralisé dans [19] le résultat de Pareigis au cas des N-complexes, avec N un entier supérieur ou égal à 2. L'algèbre de Hopf obtenue possède des relations étroites avec les algèbres quantiques associées à l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2)$.

II - Représentations des groupes quantiques

Généralités sur les techniques utilisées pour déterminer les représentations d'un groupes quantique. Lorsque l'algèbre de Hopf des fonctions sur un groupe quantique G est définie comme une sous-algèbre du dual restreint d'une algèbre enveloppante quantique

$U_q(\mathfrak{g})$ [75], les représentations de G sont les $U_q(\mathfrak{g})$-modules. Quand l'algèbre de Hopf est définie directement (par générateurs et relations) on ne dispose pas nécessairement d'une algèbre enveloppante quantique, et déterminer les coreprésentations directement s'avère à priori difficile. On dispose cependant, dans le cas compact, d'un outil fort utile, à savoir la dualité de Tannaka-Krein de Woronowicz [92]. Cette technique de détermination des (co)représentations par reconstruction avait été utilisée avec beaucoup de succès par Woronowicz lui même [92] pour les groupes quantiques $SU(N)$ puis par Banica [2, 3, 4, 5] dans sa série d'articles sur les représentations des groupes quantiques compacts universels. Dans le cas cosemisimple non compact, la technique de reconstruction de Woronowicz ne fonctionne plus [4] , même si on peut encore dans des cas particuliers et au prix de plus d'efforts, utiliser des techniques de reconstruction : voir le travail de Phung Ho Hai sur les groupes quantiques de type A_n [42].

La technique que nous avons utilisé pour determiner les coreprésentations d'une algèbre de Hopf donnée est, via l'introduction d'un système de Hopf-Galois approprié et un théorème de Schauenburg [79], de ramener l'étude des coreprésentations à celle d'une algèbre de Hopf à priori plus simple. Bien sûr, cela laisse encore un certain travail sur l'algèbre de Hopf "simplifiée", mais présente l'avantage de fonctionner dans le cas semi-simple non compact, mais aussi dans le cas non semi-simple.

Représentations du groupe quantique d'une forme bilinéaire non dégénérée. Soit $E \in GL(n)$ une matrice inversible. Considérons alors $\mathcal{B}(E)$, l'algèbre de Hopf du groupe quantique associé á la forme bilinéaire non dégénérée définie par E, introduite par Dubois-Violette et Launer [32]. Ces algèbres de Hopf généralisent les groupes quantiques $SL_q(2)$: pour $q \in k^*$, on a $\mathcal{O}(SL_q(2)) = \mathcal{B}(E_q)$ pour une certaine matrice $E_q \in GL(2)$. Pour $E \in GL(n)$ ($n \geq 2$), nous avons établi dans [17] l'existence d'une équivalence de catégories monoïdales

$$\mathrm{Comod}(\mathcal{B}(E)) \cong^{\otimes} \mathrm{Comod}(\mathcal{O}(SL_q(2)))$$

pour $q \in k^*$ vérifiant $q^2 + \mathrm{tr}(E^tE^{-1})q + 1 = 0$. Ce résultat généralise un précédent théorème de Banica [2], qui avait déterminé les coreprésentations irréductibles des formes compactes de $\mathcal{B}(E)$ introduites par Van Daele et Wang [86]. Il est en outre parfaitement valable aux racines de l'unité et en caractéristique quelconque.

Coreprésentations des algèbres de Hopf cosouveraines universelles. Soit $F \in GL(n)$ et considérons $H(F)$, l'algèbre de Hopf cosouveraine universelle associée à F [14]. Nous avons montré dans [22] que si $E \in GL(m)$ ($m, n \geq 2$) est une autre matrice telle que $\mathrm{tr}(E) = \mathrm{tr}(F)$ et $\mathrm{tr}(E^{-1}) = \mathrm{tr}(F^{-1})$, alors on a une équivalence de catégories monoïdales $\mathrm{Comod}(H(F)) \cong^{\otimes} \mathrm{Comod}(H(E))$. Celle-ci nous a permis de montrer, en caractéristique zéro, que $H(F)$ est cosemisimple si et seulement si F est générique, et nous avons dans ce cas déterminé les coreprésentions irréductibles. Ces résultats généralisent ceux de Banica [3] pour les groupes quantiques compacts universels de Van Daele et Wang, et en outre notre preuve évite l'usage des probabilités non commutatives dans [3].

[4] La raison technique est fort simple : l'algèbre des endomorphismes d'une représentation unitaire d'un groupe quantique compact est une C^*-algèbre, et donc on sait automatiquement qu'elle est semi-simple.

Représentations du groupe quantique des automorphismes d'une algèbre matricielle muni d'une mesure non nécessairement traciale. Nous avons aussi, dans [22], ramené la théorie des représentations du groupe quantique des automorphismes d'une algèbre matricielle muni d'une mesure non traciale à celle du groupe quantique $SO(3)$. Cela généralise une nouvelle fois un résultat de Banica [5], qui ne traitait que le cas tracial (mais par contre traitait toutes les algèbres semi-simples).

Coreprésentations de l'algèbre de Hopf libre engendrée par une cogèbre matricielle. L'algèbre de Hopf libre engendrée par une cogèbre a été construite par Takeuchi [81]. Notons $H(n)$ l'algèbre de Hopf engendré par la cogèbre matricielle M_n^*. Nous avons montré dans [18] que pour $n \geq 2$, alors on a une équivalence de catégories monoïdales $\mathrm{Comod}(H(n)) \cong^{\otimes} \mathrm{Comod}(H(2))$.

Applications en théorie des invariants. La description des coreprésentations des algèbres de Hopf cosouveraines universelles nous a permis de proposer un analogue quantique libre des premiers théorème fondamentaux de la théorie des invariants, c'est-à-dire en remplaçant les algèbres (commutatives) de polynômes par des algèbres libres [21]. Il n'était pas possible d'obtenir un tel résultat dans le cadre des groupes ou même des algèbres de Hopf cotressées.

Nous avons aussi obtenu une généralisation d'un résultat classique de théorie des invariants pour le groupe symétrique [13].

III - Résultats de classification

La connaissance de la théorie des représentations permet d'obtenir des résultats de classification pour les groupes quantiques. On suppose dans ce paragraphe que le corps de base est de caractéristique nulle.

Classification des groupes quantiques associés aux formes bilinéaires non dégénérées. Soient $E \in GL(m)$ et $F \in GL(n)$. On a montré [17] que les algèbres de Hopf $\mathcal{B}(E)$ et $\mathcal{B}(F)$ de Dublois-Violette et Launer sont isomorphes si et seulement si $m = n$ et s'il existe $M \in GL(m)$ telle que $F = {}^tMEM$, ou en d'autres termes si et seulement si les formes bilinéaires associées à E et F sont équivalentes. On a aussi déterminé le groupe des automorphismes (d'algèbre de Hopf) de $\mathcal{B}(E)$: il s'identifie avec le groupe des automorphismes de la forme bilinéaire associé à E.

Classification des $SL(2)$-déformations. On a également classifié les $SL(2)$-déformations dans [17], à savoir les algèbres de Hopf cosemisimples ayant un semi-anneau de représentations isomorphe à celui de $SL(2)$: ce sont exactement les $\mathcal{B}(E)$ pour lesquelles les solutions de l'équation $q^2 + \mathrm{tr}(E^tE^{-1})q + 1 = 0$ sont génériques. Cela était connu e seulement en imposant que la dimension de la représentation fondamentale soit de dimension 2 (voir [71]), ou dans le cas compact [2].

Classification des algèbres de Hopf cosouveraines universelles dans le cas générique. Nous avons classifié les algèbres de Hopf cosouveraines universelles et déterminé leur groupe d'automorphismes [22], dans le cas générique.

Les pages qui suivent constituent une exposition beaucoup plus détaillée de nos résultats. Voici notre plan.

Plan

Dans la suite la lettre k désigne un corps commutatif.

1 Systèmes de Hopf-Galois

La notion d'extension galoisienne pour une algèbre de Hopf, introduite par Kreimer et Takeuchi [52], est une généralisation non commutative naturelle de celle de torseur pour un groupe algébrique. Généralisant la correspondance tannakienne classique entre torseurs et foncteurs fibre pour les groupes algébriques, Ulbrich [84] a construit une équivalence de catégories entre extensions galoisiennes pour une algèbre de Hopf et foncteurs fibre sur sa catégorie de comodules. L'utilisation des extensions galoisiennes en théorie des représentations est alors mise en évidence par un théorème de Schauenburg [79] : deux algèbres de Hopf A et B ont des catégories de comodules monoïdalement équivalentes si et seulement si il existe une extension A-B-bigaloisienne.

Commençons par quelques rappels sur la notion d'extension de Hopf-Galois. On consultera par exemple [65] pour plus de détails, en particulier pour pour le lien avec les extensions galoisiennes classiques. Soit A une algèbre de Hopf. Une extension A-Galoisienne (de k) à gauche est une algèbre A-comodule à gauche Z telle que l'application linéaire κ_l définie comme la composition des applications suivantes

$$\kappa_l : Z \otimes Z \xrightarrow{\alpha \otimes 1_Z} A \otimes Z \otimes Z \xrightarrow{1_A \otimes m_Z} A \otimes Z$$

où α est la co-action de A et m_Z est la multiplication de Z, soit bijective.

De même, une extension A-Galoisienne à droite est une algèbre A-comodule à droite Z telle que l'application linéaire κ_r definie comme la composition des applications suivantes

$$\kappa_r : Z \otimes Z \xrightarrow{1_Z \otimes \beta} Z \otimes Z \otimes A \xrightarrow{m_Z \otimes 1_A} Z \otimes A$$

où β est la co-action de A, soit bijective.

Soient A and B des algèbres de Hopf. On dit qu'une algèbre Z est une extension A-B-bigaloisienne [79] si Z est à la fois une extension A-galoisienne à gauche et une extension B-galoisienne à droite, et si Z est un A-B-cobimodule.

Voici notre définition des systèmes de Hopf-Galois.

Définition 1.1 ([18]) *Un système de Hopf-Galois est un quadruplet d'algèbres non nulles (A, B, Z, T), satisfaisant aux axiomes suivants.*
(HG1) *Les algèbres A et B sont des algèbres de Hopf.*

(HG2) *L'algèbre Z est une algèbre A-B-cobimodule.*

(HG3) *On a des morphismes d'algèbres $\gamma : A \longrightarrow Z \otimes T$ et $\delta : B \longrightarrow T \otimes Z$ tels que les diagrammes suivant commutent :*

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\alpha} & A \otimes Z \\ {\scriptstyle\beta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\gamma\otimes 1_Z} \\ Z \otimes B & \xrightarrow{1_Z \otimes \delta} & Z \otimes T \otimes Z \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Delta_A} & A \otimes A \\ {\scriptstyle\gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_A\otimes\gamma} \\ Z \otimes T & \xrightarrow{\alpha \otimes 1_T} & A \otimes Z \otimes T \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\Delta_B} & B \otimes B \\ {\scriptstyle\delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\delta\otimes 1_B} \\ T \otimes Z & \xrightarrow{1_T \otimes \beta} & T \otimes Z \otimes B \end{array}$$

(HG4) *On a une application linéaire $S : T \longrightarrow Z$ qui fait commuter les diagrammes suivants :*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varepsilon_A"] \arrow[d, "\gamma"] & k \arrow[r, "u_Z"] & Z \\ Z \otimes T \arrow[rr, "1_Z \otimes S"] & & Z \otimes Z \arrow[u, "m_Z"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "\varepsilon_B"] \arrow[d, "\delta"] & k \arrow[r, "u_Z"] & Z \\ T \otimes Z \arrow[rr, "S \otimes 1_Z"] & & Z \otimes Z \arrow[u, "m_Z"'] \end{tikzcd}$$

On peut noter tout de suite que si $A = B = Z = T$ et $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \Delta$, on a exactement les axiomes d'une algèbre de Hopf, l'application linéaire S étant l'antipode. L'axiome HG3 est assez proche des axiomes de donnée de pré-équivalence de Takeuchi [82], mais on ne demande pas de structure de B-A-cobimodule sur T.

La manière la plus simple de comprendre les axiomes d'un système de Hopf-Galois est de le voir comme l'objet dual d'un groupoïde connexe à deux objets, et en fait on peut montrer, par dualité tannakienne, que la donnée d'un système de Hopf-Galois est équivalente à celle d'un cogroupoïde connexe à deux objets.

Une algèbre de Hopf A est une extension A-A-bigaloisienne. C'est en fait un cas particulier du résultat suivant.

Théorème 1.2 ([18]) *Soit (A, B, Z, T) un système de Hopf-Galois. Alors Z est une extension A-B-bigaloisienne.*

En combinant ce théorème avec un théorème de Schauenburg (théorème 5.5 de [79]), on obtient le résultat suivant, qui est probablement le plus important concernant les systèmes de Hopf-Galois.

Corollaire 1.3 ([18]) *Soit (A, B, Z, T) un système de Hopf-Galois. Alors les catégories* $\mathrm{Comod}(A)$ *et* $\mathrm{Comod}(B)$ *sont monoïdalement équivalentes.*

La définition d'un système de Hopf-Galois semble plus compliquée que celle d'une extension galoisienne ou bigaloisienne. On a montré dans [18] qu'elle est en fait équivalente, et les exemples que nous avons construits semblent montrer qu'elle est en fin de compte beaucoup plus naturelle et facile à manipuler.

Théorème 1.4 ([18]) *Soit A une algèbre de Hopf et soit Z une extension A-Galoisienne à gauche. Alors il existe une algèbre de Hopf B et une algèbre T telles que le quadruplet (A, B, Z, T) soit un système de Hopf-Galois.*

La reconstruction tannakienne qui permet de montrer ce dernier théorème mène également à un résultat d'anti-multiplicativité de l'antipode d'un système de Hopf-Galois. Ce résultat peut aussi se montrer en associant une algèbre de Hopf faible [24] ou un groupoïde quantique [60] à un système de Hopf-Galois (travail en cours avec Cyril Grunspan).

Proposition 1.5 ([18]) *Soit (A, B, Z, T) un système de Hopf-Galois. Alors l'antipode $S : T \longrightarrow Z$ est un antimorphisme d'algèbres.*

Terminons ce paragraphe par la description des systèmes de Hopf-Galois "universels". L'algèbre de Hopf libre engendrée par une cogèbre a été construite par Takeuchi [81]. Nous en donnons une généralisation pour les systèmes de Hopf-Galois, dans le cas de cogèbres matricielles.

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. L'algèbre $H(m,n)$ [18] est l'algèbre universelle engendrée par des éléments $x_{ij}^{(\alpha)}$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, $\alpha \in \mathbb{N}$, soumis aux relations :

$$x^{(\alpha)}\,{}^t x^{(\alpha+1)} = I_m \ , \ {}^t x^{(\alpha+1)} x^{(\alpha)} = I_n \ , \ \alpha \in \mathbb{N}$$

où x^α est la matrice (x_{ij}^α). Quand $m = n$, $H(m) = H(m,m)$ n'est autre que l'algèbre de Hopf libre engendrée par une coalgèbre matricielle $M_n(k)^*$ [81]. En fait la structure d'algèbre de Hopf est un cas particulier du résulat suivant :

Proposition 1.6 ([18]) *Soient $m, n \geq 2$. Alors $(H(m), H(n), H(m,n), H(n,m))$ est un système de Hopf-Galois.*

Le fait que $H(m,n)$ est une algèbre non nulle est une conséquence des résultats de [17], et les morphismes structurels du système de Hopf-Galois se définissent ainsi. Soient $m, n, p \in \mathbb{N}^*$. Alors on a des morphismes d'algèbres

$$\begin{aligned} \Delta_{m,n}^p : H(m,n) &\longrightarrow H(m,p) \otimes H(p,n) \\ x_{ij}^\alpha &\longmapsto \sum_{k=1}^p x_{ik}^\alpha \otimes x_{kj}^\alpha \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{mn} : H(n,m) &\longrightarrow H(m,n)^{\mathrm{op}} \\ x^{(\alpha)} &\longmapsto {}^t x^{(\alpha+1)} \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} \varepsilon_m : H(m) &\longrightarrow k \\ x_{ij}^\alpha &\longmapsto \delta_{ij} \end{aligned}$$

qui munissent $(H(m), H(n), H(m,n), H(n,m))$ d'une structure évidente de système de Hopf-Galois. Notons que les formules pour les morphismes structurels de tous les systèmes de Hopf-Galois se définissent de manière analogue. On obtient donc le résultat suivant.

Théorème 1.7 ([18]) *Soit $m \geq 2$. Alors les catégories* $\mathrm{Comod}(H(m))$ *et* $\mathrm{Comod}(H(2))$ *sont monoïdalement équivalentes.*

Il semble qu'il reste quand même bien difficile de décrire complètement la catégorie des $H(2)$-comodules (liste des objets simples, indécomposables).

Signalons enfin un problème intéressant : construire les systèmes de Hopf-Galois libres engendrés par des contextes de Morita-Takeuchi [82] généraux.

2 Déformation par des 2-cocycles

Des extensions bigaloisienne sont associées à des 2-cocycles par Schauenburg dans [79] : ce sont des produits croisés, et sont en fait exactement les extensions de Hopf-Galois fendues (voir [65]). On réécrit dans ce paragraphe ces constructions dans le cadre des systèmes de Hopf-Galois. Ensuite nous présenterons un exemple concret avec l'algèbre des fonctions sur le groupe symétrique [13, 18].

Soit A une algèbre de Hopf. On utilise les notations de Sweedler $\Delta(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)}$. Un 2-cocycle sur A (voir par exemple [29]) est une application linéaire inversible pour la convolution $\sigma : A \otimes A \longrightarrow k$ telle que

$$\sigma(a_{(1)}, b_{(1)})\sigma(a_{(2)}b_{(2)}, c) = \sigma(b_{(1)}, c_{(1)})\sigma(a, b_{(2)}c_{(2)})$$

et $\sigma(a, 1) = \sigma(1, a) = \varepsilon(a)$, pour tous $a, b, c \in A$. L'inverse de σ pour la convolution, noté $\bar{\sigma}$, vérifie

$$\bar{\sigma}(a_{(1)}b_{(1)}, c)\bar{\sigma}(a_{(2)}, b_{(2)}) = \bar{\sigma}(a, b_{(1)}c_{(1)})\bar{\sigma}(b_{(2)}, c_{(2)})$$

et $\bar{\sigma}(a, 1) = \bar{\sigma}(1, a) = \varepsilon(a)$, pour tous $a, b, c \in A$.

Doi [29] et Schauenburg [79] associent diverses algèbres à un 2-cocycle. Considérons tout d'abord l'algèbre ${}_\sigma A$. En tant qu'espace vectoriel on a ${}_\sigma A = A$ et le produit de ${}_\sigma A$ est défini par

$$a {}_{\sigma}\!. b = \sigma(a_{(1)}, b_{(1)})a_{(2)}b_{(2)}, \quad a, b \in A.$$

On a aussi l'algèbre $A_{\bar{\sigma}}$. En tant qu'espace vectoriel $A_{\bar{\sigma}} = A$ et le produit de $A_{\bar{\sigma}}$ est défini par

$$a ._{\bar{\sigma}} b = \bar{\sigma}(a_{(2)}, b_{(2)})a_{(1)}b_{(1)}, \quad a, b \in A.$$

Alors $A_{\bar{\sigma}}$ est une algèbre A-comodule dont la co-action α est définie par $\alpha = \Delta$. Finalement il y a l'algèbre de Hopf ${}_\sigma A_{\bar{\sigma}}$ (notée A^σ dans [29]). En tant que coalgèbre ${}_\sigma A_{\bar{\sigma}} = A$. Le produit de ${}_\sigma A_{\bar{\sigma}}$ est donné par

$$a.b = \sigma(a_{(1)}, b_{(1)})\bar{\sigma}(a_{(3)}, b_{(3)})a_{(2)}b_{(2)}, \quad a, b \in A,$$

et on a la formule suivante pour l'antipode de ${}_\sigma A_{\bar{\sigma}}$:

$$S^\sigma(a) = \sigma(a_{(1)}, S(a_{(2)}))\bar{\sigma}(S(a_{(4)}), a_{(5)})S(a_{(3)}).$$

L'algèbre $A_{\bar{\sigma}}$ est une algèbre ${}_\sigma A_{\bar{\sigma}}$-comodule à droite, avec co-action donnée par $\beta = \Delta$. Ainsi $A_{\bar{\sigma}}$ est une algèbre A-${}_\sigma A_{\bar{\sigma}}$-cobimodule. C'est même une extension bigaloisienne, comme le montre le résultat suivant.

Proposition 2.1 ([18]) *Soit A une algèbre de Hopf et soit $\sigma : A \otimes A \longrightarrow k$ un 2-cocycle. Alors $(A, {}_\sigma A_{\bar{\sigma}}, A_{\bar{\sigma}}, {}_\sigma A)$ est un système de Hopf-Galois.*

Étudions maintenant un exemple explicite, pour l'algèbre de Hopf des fonctions sur le groupe symétrique. Fixons quelques notations. Jusqu'à la fin de ce paragraphe k sera un corps de caracteristique nulle. Soient $m, n \in \mathbb{Z}^*$ avec $m, n \geq 2$ et soit ξ une racine primitive m-ième de l'unité contenue dans k. On va s'intéresser au groupe symétrique S_{mn}. Pour un nombre réel x, posons $E^+(x) = n$ où $n \in \mathbb{Z}$ est tel que $x \in]n-1, n]$. Pour $i \in \{1, \ldots, mn\}$, on pose $i^* := E^+(\frac{i}{m}) \in \{1, \ldots, n\}$.

On dira qu'une matrice $\mathbf{p} = (p_{ij}) \in M_n(k)$ est une matrice AST (d'après Artin-Schelter-Tate [1]) si $p_{ii} = 1$ et $p_{ij}p_{ji} = 1$ pour tous i et j. Une matrice AST est dite d'ordre m if $p_{ij}^m = 1$ pour tous i et j. La matrice AST triviale (i.e. $p_{ij} = 1$ pour tous i et j) est notée $\mathbf{1}$.

Soit $\mathbf{p} \in M_n(k)$ une matrice AST d'ordre m. Soient $i, j, k, l \in \{1, \ldots, mn\}$. On pose

$$R_{ij}^{lk}(\mathbf{p}) := \delta_{i^*k^*}\delta_{j^*l^*} \sum_{r,s=0}^{m-1} \xi^{r(i-k)+s(j-l)} p_{j^*i^*}^{rs}.$$

Définition 2.2 ([18]) *Soient $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in M_n(k)$ des matrices AST d'ordre m. L'algèbre $\mathcal{O}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(S_{mn})$ est l'algèbre universelle engendrée par des éléments $(x_{ij})_{1 \leq i,j \leq mn}$ satisfaisant aux relations :*

$$x_{ij}x_{ik} = \delta_{jk}x_{ij} \quad ; \quad x_{ji}x_{ki} = \delta_{jk}x_{ji} \quad ; \quad \sum_{l=1}^{mn} x_{il} = 1 = \sum_{l=1}^{mn} x_{li} \quad , \ 1 \leq i, j, k \leq n. \tag{1}$$

$$\sum_{k,l} R_{ij}^{lk}(\mathbf{p}) x_{\alpha l} x_{\beta k} = \sum_{k,l} R_{lk}^{\alpha\beta}(\mathbf{q}) x_{li} x_{kj} \ , \ 1 \leq i, j, \alpha, \beta \leq n. \tag{2}$$

Quand $\mathbf{p} = \mathbf{q}$, alors $\mathcal{O}_{\mathbf{p}}(S_{mn}) := \mathcal{O}_{\mathbf{p},\mathbf{p}}(S_{mn})$ est un algèbre de Hopf, avec coproduit défini par $\Delta(x_{ij}) = \sum_k x_{ik} \otimes x_{kj}$, counité définie par $\varepsilon(x_{ij}) = \delta_{ij}$ et antipode défini par $S(x_{ij}) = x_{ji}$. Si $\mathbf{p} = \mathbf{1}$, alors $\mathcal{O}_{\mathbf{1}}(S_{mn})$ n'est autre que l'algèbre $\mathcal{O}(S_{mn})$ des fonctions sur S_{mn}. Notons que les relations (2) sont précisément les relations FRT de [74]. Si $m = 2$, ces algèbres de Hopf sont exactement les algèbres $\mathcal{O}_{\mathbf{p}}(S_{2n})$ de [13].

Proposition 2.3 ([18]) *Soient $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in M_n(k)$ des matrices AST d'ordre m. Alors $(\mathcal{O}_{\mathbf{q}}(S_{mn}), \mathcal{O}_{\mathbf{p}}(S_{mn}), \mathcal{O}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(S_{mn}), \mathcal{O}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(S_{mn}))$ est un système de Hopf-Galois.*

Les morphismes structurels se définissent comme des généralisations naturelles des morphismes structurels de l'algèbre de Hopf $\mathcal{O}_{\mathbf{p}}(S_{mn})$. Il s'agit alors de montrer que $\mathcal{O}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(S_{mn})$ est une algèbre non nulle. On peut faire cela en utilisant un 2-cocycle : on commence par construire, à la manière d'Artin-Schelter-Tate, un 2-cocycle sur un sous-groupe $H \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n$ de S_{mn}, que l'on prolonge en un 2-cocycle $\sigma_{\mathbf{p}}$ sur l'algèbre de Hopf $\mathcal{O}(S_{mn})$ en utilisant la méthode d'Enock-Vainerman [36]. On montre alors que $\mathcal{O}_{\mathbf{p},\mathbf{1}}(S_{mn})$ s'identifie à ${}_{\sigma_{\mathbf{p}}}\mathcal{O}(S_{mn})$, et on conclut facilement : voir [18] pour les détails. On obtient donc le résultat suivant.

Théorème 2.4 ([18]) *Soit $\mathbf{p} \in M_n(k)$ une matrice AST d'ordre m. Alors la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathbf{p}}(S_{mn})$-comodules est monoïdalement équivalente à la catégorie des représentations du groupe symétrique S_{mn}.*

Il serait fort intéressant de classifier à isomorphisme près les algèbres de Hopf obtenues, ce qui n'est pas évident à priori. En effet des cocycles non cohomologues peuvent donner des algèbres de Hopf isomorphes. Nous avons tout de même vérifié dans [13] que pour le groupe symétrique S_{2n}, on obtient au moins n algèbres de Hopf non deux à deux isomorphes.

On peut utiliser le théorème 2.4 pour généraliser un résultat classique de théorie des invariants pour le groupe symétrique, à savoir la description par générateurs et relations de l'algèbre des polynômes symétriques : cela est fait dans [13].

3 Le groupe quantique d'une forme bilinéaire non dégénérée

Le groupe quantique d'une forme bilinéaire non dégénérée a été introduit par Dubois-Violette et Launer [32]. On décrit dans ce paragraphe la catégorie des représentations de ces groupes quantiques en montrant qu'elle se réduit à celle du groupe quantique $SL_q(2)$, et on présente plusieurs applications. Le point clé est l'introduction de systèmes de Hopf-Galois appropriés.

Définition 3.1 ([17]) *Soient $E \in GL(m)$ et $F \in GL(n)$. L'algèbre $\mathcal{B}(E,F)$ est l'algèbre universelle engendrée par des éléments z_{ij}, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, soumis aux relations*

$$F^{-1}{}^tzEz = I_n \; ; \; zF^{-1}{}^tzE = I_m.$$

Quand $E = F$, on a $\mathcal{B}(E,E) = \mathcal{B}(E)$, l'algèbre de Hopf des fonctions sur le groupe des symétries quantiques de la forme bilinéaire associée à E, introduite par Dubois-Violette et Launer [32]. On consultera [32] et [17] pour la propriété universelle précise de $\mathcal{B}(E)$. Notons que pour $q \in k^*$ et pour la matrice $E_q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q^{-1} & 0 \end{pmatrix} \in GL(2)$, alors $\mathcal{B}(E_q)$ s'identifie à $\mathcal{O}(SL_q(2))$. En fait la structure d'algèbre de Hopf de $\mathcal{B}(E)$ est un cas particulier du résultat suivant de [17].

Proposition 3.2 ([17, 18]) *Soient $E \in GL(m)$ et $F \in GL(n)$ $(m,n \geq 2)$ telles que $\mathrm{tr}(E^tE^{-1}) = \mathrm{tr}(F^tF^{-1})$. Alors $(\mathcal{B}(E), \mathcal{B}(F), \mathcal{B}(E,F), \mathcal{B}(F,E))$ est un système de Hopf-Galois.*

Les morphismes structurels se définissent comme des généralisations naturelles des morphismes structurels de l'algèbre de Hopf $\mathcal{B}(E)$. La difficulté technique essentielle est de montrer que l'algèbre $\mathcal{B}(E,F)$ est non nulle quand $\mathrm{tr}(E^tE^{-1}) = \mathrm{tr}(F^tF^{-1})$. Cela est fait dans [17] en utilisant le lemme du diamant de Bergman [10].

On obtient donc le résultat suivant.

Théorème 3.3 ([17]) *1) Soient $E \in GL(m)$ et $F \in GL(n)$ $(m,n \geq 2)$ telles que $\mathrm{tr}(E^tE^{-1}) = \mathrm{tr}(F^tF^{-1})$. Alors on a une équivalence de catégories monoïdales*

$$\mathrm{Comod}(\mathcal{B}(E)) \cong^{\otimes} \mathrm{Comod}(\mathcal{B}(F)).$$

2) Supposons k algébriquement clos. Soit $E \in GL(m)$ $(m \geq 2)$ et soit $q \in k^*$ tel que $q^2 + \mathrm{tr}(E^tE^{-1})q + 1 = 0$. Alors on a une équivalence de catégories monoïdales

$$\mathrm{Comod}(\mathcal{B}(E)) \cong^{\otimes} \mathrm{Comod}(\mathcal{O}(SL_q(2))).$$

Banica avait donné dans [2] un résultat assez similaire, à savoir la description du semi-anneau de représentations des formes compactes de $\mathcal{B}(E)$, mais sans une telle équivalence monoïdale. Notre résultat traite le cas cosemisimple non compact, mais aussi le cas non

non cosemisimple (i.e. quand q est une racine de l'unité d'ordre supérieur ou égal à 3 ou que la caractéristique est positive).

Notons également un résultat assez voisin de Phung Ho Hai [42] pour GL en caractéristique nulle et lorsque q n'est pas une racine de l'unité. Phung Ho Hai montre dans [42] que la catégorie des comodules de l'algèbre de Hopf universelle associée à une q-symétrie de Hecke paire de rang N est monoïdalement équivalente à celle des représentations de $GL_q(N)$, avec q non racine de l'unité. Dans le cas $N = 2$, un résultat de classification de Gurevich [41] assure que les symétries de Hecke de rang 2 proviennent toutes de (une ou plusieurs) formes bilinéaires non dégénérées, et il est beaucoup plus simple de travailler directement avec une forme bilinéaire : cela évite de parler de déterminant quantique.

Le théorème 3.3 a un certain nombre de conséquences intéressantes en caractéristique zéro. On suppose, et ce jusqu'à la fin du paragraphe, que k est un corps algébriquement clos de caractéristique zéro.

Tout d'abord on a le résultat de classification suivant [17]. Il signifie que les groupes quantiques associés à deux formes bilinéaires non dégénérées sont isomorphes si et seulement si les formes bilinéaires considérées sont équivalentes.

Théorème 3.4 ([17]) *Soient $E \in GL(m)$ et $F \in GL(n)$. Les algèbres de Hopf $\mathcal{B}(E)$ et $\mathcal{B}(F)$ sont isomorphes si et seulement si $m = n$ et s'il existe $M \in GL(m)$ telle que $F = {}^tMEM$.*

On montre de façon identique que le groupe des automorphismes de l'algèbre de Hopf $\mathcal{B}(E)$ s'identifie au groupe des automorphismes de la forme bilinéaire associée à E.

Théorème 3.5 ([17]) *Soit $E \in GL(m)$. Alors*

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{B}(E)) \cong \{P \in GL(m) \mid {}^tPEP = E\}/\{\pm I\}.$$

On peut aussi utiliser le théorème 3.3 pour trouver les algèbres de Hopf cosemisimples ayant un semi-anneau de representation isomorphe à celui de $SL(2)$ (le semi-anneau de représentation d'une algèbre de Hopf cosemisimple est le semi-anneau de Grothendieck de sa catégorie de comodules de dimension finie). L'autre ingrédient principal est la théorie des représentations de $SL_q(2)$, y compris le cas des racines de l'unité (voir [51]). Rappelons qu'un élément $q \in k^*$ est dit générique s'il n'est pas une racine de l'unité d'ordre $N \geq 3$.

Théorème 3.6 ([17]) *Soit A une algèbre de Hopf cosemisimple dont le semi-anneau de représentations est isomorphe à celui de $SL(2)$. Alors il existe $E \in GL(n)$ $(n \geq 2)$ telle que A soit isomorphe à $\mathcal{B}(E)$, et telle que les solutions de l'équation $q^2 + \mathrm{tr}(E^tE^{-1})q + 1 = 0$ soient génériques.*

En combinant les théorèmes 3.4 et 3.6, on a donc la classification complète des "déformations" de $SL(2)$. Cela était connu en imposant que la représentation fondamentale soit de dimension 2 [71], et sans restriction de dimension dans le cas compact [2]. On envisage bien sûr d'utiliser les systèmes de Hopf-Galois pour obtenir d'autres résultats de ce type, les cas $SL(3)$ et $SO(3)$ semblant être atteignables (le cas $SL(3)$, en imposant que la représentation fondamentale soit de dimension 3, a été traité par Ohn [67]). En dimension supérieure, la classification "à isomorphisme près" semble plus difficile, mais un résultat du type du théorème 3.6 pour $SL(N)$ semble envisageable, grâce au théorème de Kazhdan-Wenzl [49] et aux résultats de Phung Ho Hai [42] (néanmoins il reste un peu de travail).

L'ordre de l'antipode d'une algèbre de Hopf, c'est-à-dire l'analogue de l'inversion pour les groupes, a été un sujet d'étude important depuis le début de la théorie dans les années 60. Rappelons quelques-uns des résultats historiques principaux.
- Tout d'abord, on a le résultat bien connu : l'antipode d'une algèbre de Hopf commutative ou cocommutative est involutif.
- En 1971, Taft [80] a construit des algèbres de Hopf de dimension finie avec un antipode d'ordre pair arbitraire. Les algèbres de Taft ne sont pas cosemisimples.
- En 1975, Kaplansky [45] a conjecturé que l'antipode d'une algèbre de Hopf cosemisimple de dimension finie est involutif.
- Radford ([72], 1976) a montré que l'ordre de l'antipode d'une algèbre de Hopf de dimension finie est fini.
- La conjecture de Kaplansky a été démontrée en caractéristique zéro par Larson-Radford ([54, 55], 1987). La conjecture reste ouverte en général, bien qu'elle ait été démontrée sous l'hypothèse additionelle de semi-simplicité par Etingof-Gelaki ([37], 1998) en caractéristique positive.

Il semble que les exemples d'algèbres de Hopf cosemisimples connus aient un antipode d'ordre 2 ou infini. En utilisant les algèbres de Hopf $\mathcal{B}(E)$ et les résultats précédents, on obtient le résultat suivant.

Théorème 3.7 ([15]) *Soit $m \geq 1$ un entier. Alors il existe une algèbre de Hopf cosemisimple dont l'antipode est d'ordre $2m$.*

Notons également que les algèbres de Hopf $\mathcal{B}(E)$ permettent de répondre par la négative à une question posée dans [38] (Question 7.4) concernant les valeurs propres du carré de l'antipode d'une algèbre de Hopf cotriangulaire : voir [15].

Les algèbres de Hopf $\mathcal{B}(E)$ fournissent également des objets d'expérimentation idéaux pour l'étude de l'indicateur de Schur. On a généralisé dans [15] le théorème classique de Frobenius-Schur sur les valeurs possibles de l'indicateur de Schur au cas des algèbres de Hopf cosemisimples à antipode involutif, ce qui avait été fait précédemment par Linchenko-Montgomery [58] en dimension finie. Soit G un groupe compact et soit V une représentation (complexe) de dimension finie de G. L'indicateur de Schur de V est alors défini par la formule

$$\nu_2(V) = \int_G \chi_V(g^2)dg.$$

Le théorème de Frobenius-Schur (voir [25]) assure que pour une representation irréductible V, alors $\nu_2(V) = 0, 1$ ou -1, avec $\nu_2(V) \neq 0$ si et seulement si la représentation V est auto-duale. Le cas $\nu_2(V) = 1$ correspond à l'existence d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée G-invariante sur V, alors que le cas $\nu_2(V) = -1$ correspond à l'existence d'une forme bilinéaire anti-symétrique non dégénérée G-invariante sur V.

Soit A une algèbre de Hopf cosemisimple, soit h sa mesure de Haar et soit V un A-comodule de dimension finie. En dualisant [58], on définit l'indicateur de Schur de V par la formule

$$\nu_2(V) := h(\chi_{V(1)}\chi_{V(2)}),$$

où $\chi_V \in A$ est le caractère de V.

Théorème 3.8 ([15]) *Soit A une algèbre de Hopf cosemisimple et soit V un A-comodule irréductible.*
1) Le A-comodule V n'est pas auto-dual si et seulement si $\nu_2(V) = 0$.
Supposons maintenant que V est auto-dual.
2) Soit $\beta : V \otimes V \longrightarrow k$ une forme bilinéaire non dégénérée A-colinéaire. Soit E la matrice de β dans une base quelconque de V. Alors

$$\nu_2(V) = \frac{\dim(V)}{\mathrm{tr}(E^t E^{-1})}.$$

3) Supposons que $S^2 = \mathrm{id}$. Alors $\nu_2(V) = \pm 1$. Le cas $\nu_2(V) = 1$ correspond à l'existence d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée A-colinéaire sur V, alors que le cas $\nu_2(V) = -1$ correspond à l'existence d'une forme bilinéaire anti-symétrique non dégénérée A-colinéaire sur V.

Le théorème de Frobenius-Schur de Linchenko-Montgomery est donc via le théorème de Larson-Radford [54, 55], un cas particulier de notre résultat.

Les algèbres de Hopf $\mathcal{B}(E)$ permettent de montrer que l'on ne peut envisager de généraliser plus le théorème de Frobenius-Schur, même pour les algèbres de Hopf cosemisimples à antipode d'ordre fini : en effet, pour tout entier impair $n \geq 3$, il existe une algèbre de Hopf cosemisimple à antipode d'ordre 4 possédant un comodule irréductible V tel que $\nu_2(V) = n$. ([15]).

4 Algèbres de Hopf cosouveraines

La notion de catégorie monoïdale souveraine, introduite par Freyd et Yetter (voir [94, 61]), est apparue en liaison avec la construction d'invariants quantiques des noeuds et des 3-variétés. Rappelons qu'une telle catégorie est une catégorie monoïdale rigide à droite et à gauche et munie d'un isomorphisme fonctoriel et monoïdal entre les foncteurs dualité à droite et à gauche. Dans [14] on a introduit et étudié la notion correspondante pour les algèbres de Hopf.

Définition 4.1 ([14]) *Soit A une algèbre de Hopf. Un caractère souverain sur A est un morphisme d'algèbre $\Phi : A \longrightarrow k$ tel que $S^2 = \Phi * \mathrm{id} * \Phi^{-1}$. Une algèbre de Hopf cosouveraine est une paire (A, Φ) où A est une algèbre de Hopf et Φ est un caractère souverain sur A.*

Comme à l'accoutumée dans ce genre de situations, une algèbre de Hopf cosouveraine (A, Φ) est souvent simplement notée A. Les méthodes tannakiennes permettent de montrer le résultat suivant, qui justifie notre terminologie.

Proposition 4.2 ([14]) *Soit A une algèbre de Hopf. La donnée d'une structure souveraine sur $\mathrm{Comod}_f(A)$ est équivalente à celle d'un caractère souverain sur A.*

Rappelons [94] qu'une catégorie tressée [44] rigide possède un twist si et seulement si elle possède une structure souveraine. La notion correspondant à celle de twist pour les algèbres de Hopf est une simple forme linéaire, et ainsi il est plus facile de construire un caractère souverain. On obtient ainsi une simplification technique si l'on veut utiliser les algèbres de Hopf en théorie des noeuds (voir [47]). Notons aussi que Barrett et Westbury [6, 7] ont construit des invariants de 3-variétés en utilisant des catégories souveraines (ou plutôt sphériques) non munies de tressages.

On a construit dans [14] les algèbres de Hopf cosouveraines universelles, la terminologie étant justifiée par la propriété universelle énoncée dans le théorème qui suit.

Définition 4.3 ([14]) *Soit $F \in GL(n)$. L'algèbre $H(F)$ est l'algèbre universelle engendrée par des éléments $(u_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, $(v_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ soumis aux relations :*

$$u{}^tv = {}^tvu = 1 \quad ; \quad vF{}^tuF^{-1} = F{}^tuF^{-1}v = 1$$

Théorème 4.4 ([14]) *Soit $F \in GL(n)$. Alors $H(F)$ est une algèbre de Hopf :*

$$\begin{aligned} \text{avec comultiplication } \Delta(u_{ij}) &= \sum_k u_{ik} \otimes u_{kj} \quad ; \quad \Delta(v_{ij}) = \sum_k v_{ik} \otimes v_{kj}, \\ \text{avec counite } \varepsilon(u_{ij}) &= \delta_{ij} = \varepsilon(v_{ij}), \\ \text{avec antipode } S(u) &= {}^tv \quad ; \quad S(v) = F{}^tuF^{-1}. \end{aligned}$$

Il existe un caractère souverain Φ_F sur $H(F)$ tel que $\Phi_F(u) = {}^tF^{-1}$ et $\Phi_F(v) = F$ et par conséquent $(H(F), \Phi_F)$ est une algèbre de Hopf cosouveraine.

Si A est une algèbre de Hopf et si V est A-comodule de dimension finie avec co-action $\alpha_V : V \longrightarrow V \otimes A$ tel que $V \cong V^{**}$, alors il existe une matrice $F \in GL(n)$ ($n = \dim(V)$), une co-action $\beta_V : V \longrightarrow V \otimes H(F)$ et un morphisme d'algèbres de Hopf $\pi : H(F) \longrightarrow A$ tels que $(1_V \otimes \pi) \circ \beta_V = \alpha_V$. En particulier toute algèbre de Hopf cosouveraine de type fini est quotient d'une algèbre de Hopf $H(F)$ pour une matrice $F \in GL_n(k)$.

La propriété universelle énoncée permet de voir les algèbres de Hopf cosouveraines universelles commes les analogues naturels des groupes linéaires en théorie des groupes quantiques, pour peu que l'on impose à une représentation d'un groupe quantique d'être isomorphe à son bidual. Il est donc important d'en déterminer les coreprésentations.

Quand le corps de base est $k = \mathbb{C}$ et si la matrice F est positive, on retrouve les CQG-algèbres associées aux groupes quantiques compacts universels de Van daele et Wang [86]. La théorie des représentations des groupes quantiques compacts universels a été décrite par Banica [3]. On a, en utilisant des systèmes de Hopf-Galois appropriés, généralisé ses résultats dans [22].

Définition 4.5 ([18]) *Soient $E \in GL(m)$ et $F \in GL(n)$. L'algèbre $H(E, F)$ est l'algèbre universelle engendrée par des éléments u_{ij}, v_{ij}, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, soumis aux relations*

$$u{}^t\!v = I_m = vF{}^t\!uE^{-1} \quad ; \quad {}^t\!vu = I_n = F{}^t\!uE^{-1}v.$$

Proposition 4.6 ([22]) *Soient $E \in GL(m)$ et $F \in GL(n)$ telles que $\mathrm{tr}(E) = \mathrm{tr}(F)$ et $\mathrm{tr}(E^{-1}) = \mathrm{tr}(F^{-1})$. Alors $(H(E), H(F), H(E, F), H(F, E))$ est un système de Hopf-Galois.*

Là encore, les morphismes structurels du système de Hopf-Galois se définissent comme des généralisations naturelles des morphismes structurels de l'algèbre de Hopf $H(F)$, la difficulté technique principale étant une nouvelle fois de montrer que que l'algèbre $H(E, F)$ est non nulle si $\mathrm{tr}(E) = \mathrm{tr}(F)$ et $\mathrm{tr}(E^{-1}) = \mathrm{tr}(F^{-1})$. Comme dans [17], on utilise le lemme du diamant.

Pour décrire les coreprésentations de $H(F)$, introduisons quelques notations et conventions. Soit $q \in k^*$. On note $H(q)$ l'algèbre de Hopf $H(F_q)$, où F_q est la matrice $F_q = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \in GL(2)$. On dira qu'une matrice $F \in GL(m)$ est normalisée si $\mathrm{tr}(F) = \mathrm{tr}(F^{-1})$. On dira que F is normalisable s'il existe $\lambda \in k^*$ tel que $\mathrm{tr}(\lambda F) = \mathrm{tr}((\lambda F)^{-1})$. Sur un corps algébriquement clos, toute matrice est normalisable à moins que $\mathrm{tr}(F) = 0 \neq \mathrm{tr}(F^{-1})$ ou $\mathrm{tr}(F) \neq 0 = \mathrm{tr}(F^{-1})$. Le théorème suivant est un conséquence de la proposition 4.6.

Théorème 4.7 ([22]) *1) Soient $E \in GL(m)$ et $F \in GL(n)$ ($m, n \geq 2$) telles que $\mathrm{tr}(E) = \mathrm{tr}(F)$ et $\mathrm{tr}(E^{-1}) = \mathrm{tr}(F^{-1})$. Alors on a une équivalence de catégories monoïdales*

$$\mathrm{Comod}(H(E)) \cong^{\otimes} \mathrm{Comod}(H(F)).$$

2) Supposons que k est algébriquement clos et que F est normalisable. Alors il existe $q \in k^*$ tel que l'on ait une équivalence de catégories monoïdales :

$$\mathrm{Comod}(H(F)) \cong^{\otimes} \mathrm{Comod}(H(q)).$$

Si F is normalisée, alors q est une solution de l'équation $q^2 - \mathrm{tr}(F)q + 1 = 0$.
3) Supposons que F n'est pas normalisable. Soit $E \in GL(3,k)$ une matrice telle que $\mathrm{tr}(E) = 0$ et $\mathrm{tr}(E^{-1}) \neq 0$. Alors on a une équivalence de catégories monoïdales :

$$\mathrm{Comod}(H(F)) \cong^{\otimes} \mathrm{Comod}(H(E)).$$

On suppose, et ce jusqu'à la fin du paragraphe, que k est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. On dira qu'une matrice F est générique si les solutions de l'équation $q^2 - \mathrm{tr}(F)q + 1 = 0$ sont génériques. Le théorème suivant [22] généralise le théorème de classification des représentations des groupes quantiques universels de Banica [3]. Nous avons encore besoin de quelques notations. Considérons le monoïde $\mathbb{N} * \mathbb{N}$: c'est le monoïde libre engendré par deux éléments α et β. On a un unique morphisme antimultiplicatif $^{-} : \mathbb{N}*\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}*\mathbb{N}$ tel $\bar{e} = e$, $\bar{\alpha} = \beta$ et $\bar{\beta} = \alpha$ (e est l'unité $\mathbb{N}*\mathbb{N}$). D'autre part le comodule associé aux éléments u_{ij} (respectivement v_{ij}) est noté U (respectivement V).

Théorème 4.8 ([22]) *Soit $F \in GL(n)$ ($n \geq 2$) une matrice normalisée.*
1) $H(F)$ est cosemisimple si et seulement si F est générique.
2) Supposons que F est générique. À chaque $x \in \mathbb{N} * \mathbb{N}$ correspond un $H(F)$-comodule simple U_x, avec $U_e = k$, $U_\alpha = U$ et $U_\beta = V$. Tout $H(F)$-comodule simple est isomorphe à un des U_x, et $U_x \cong U_y$ si et seulement si $x = y$. Pour $x, y \in \mathbb{N} * \mathbb{N}$, on a $U_x^* \cong U_{\bar{x}}$ et

$$U_x \otimes U_y \cong \bigoplus_{\{a,b,g \in \mathbb{N}*\mathbb{N} \mid x = ag, y = \bar{g}b\}} U_{ab} \ .$$

Le théorème 4.7 ramène le théorème 4.8 au cas de $H(q)$. On construit alors un plongement de $H(q)$ dans le produit libre $k[z, z^{-1}] * \mathcal{O}(SL_q(2))$. On conclut alors en utilisant la théorie des corepresentations d'un produit libre de Wang [87] et le produit $\odot$ de Banica sur l'algèbre libre à deux générateurs [3].

On peut utiliser le théorème 4.7 pour obtenir une classification complète des algèbres de Hopf $H(F)$ pour des matrices génériques. Le cas compact (c'est-à-dire pour F positive) a été traité par Wang [89].

Théorème 4.9 ([22]) *Soient $E \in GL(m)$, $F \in GL(n)$ ($m, n \geq 2$) des matrices génériques. Les algèbres de Hopf $H(E)$ et $H(F)$ sont isomorphes si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est réalisée.*
i) $m = n$ et il existe $P \in GL(n)$ telle que $F = \pm PEP^{-1}$.
ii) $m = n$ et il existe $P \in GL(n)$ telle que ${}^tF^{-1} = \pm PEP^{-1}$.

On peux aussi décrire le groupe des automorphismes de $H(F)$. Soit $F \in GL(n)$. Posons

$$X_0(F) = \{K \in GL(n) \mid KFK^{-1} = F\} \ , \ Y(F) = \{K \in GL(n) \mid KFK^{-1} = {}^tF^{-1}\},$$

et $X(F) = X_0(F)/k^*$. Alors $X(F)$ est un groupe. Pour $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, Le groupe cyclique group d'ordre N est noté C_N.

Théorème 4.10 ([22]) *soit $F \in GL(n)$ $(n \geq 2)$ une matrice générique.*
a) Supposons que $Y(F) = \emptyset$. Alors $X(F) \cong \mathrm{Aut}_{\mathrm{Hopf}}(H(F))$.
b) Supposons que $Y(F) \neq \emptyset$. Soit $K \in Y(F)$, et soit $N = \min\{p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \mid (F^{-1}{}^tK^{-1}K)^p \in k^*\}$. Alors on a une suite exacte de groupes :

$$1 \longrightarrow C_N \longrightarrow X(F) \rtimes C_{2N} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{Hopf}}(H(F)) \longrightarrow 1$$

En particulier, s'il existe $K \in GL(n,k)$ telle que $F = {}^tK^{-1}K$, alors $K \in Y(F)$, on peut prendre $N = 1$ et on a un isomorphisme $X(F) \rtimes C_2 \cong \mathrm{Aut}_{\mathrm{Hopf}}(H(F))$.

On a aussi, en s'inspirant de la définition de Woronowicz du groupe quantique $SU(N)$ [92], construit dans [14] des généralisations naturelles des algèbres de Hopf $SL_q(N)$ et $\mathcal{B}(E)$. Sous certaines conditions, on peut montrer que ces algèbres de Hopf sont cosouveraines, et aussi en utilisant un critère de réductivité de [11], qu'elles sont cosemisimples.

5 Analogue quantique libre des premiers théorèmes fondamentaux de la théorie des invariants

Dans [21], nous avons formulé et montré un analogue des premiers théorèmes fondamentaux de la théorie des invariants, en remplaçant les algèbres de polynômes par des algèbres libres. Pour comprendre notre résultat, il faut d'abord rappeler la situation classique.

Fixons des entiers positifs $m, n, t > 0$. Pour des entiers $u, v > 0$, notons $M_{u,v}$ l'ensemble des matrices $u \times v$ à coefficients dans k. Le groupe linéaire $GL(t)$ opère sur la variété $V = M_{m,t} \times M_{t,n}$, l'opération étant donnée par la formule :

$$\begin{aligned} GL(t) \times V &\longrightarrow V \\ (g,(A,B)) &\longmapsto (Ag^{-1}, gB). \end{aligned}$$

Ainsi $GL(t)$ opère sur l'algèbre $\mathcal{O}(V) \cong \mathcal{O}(M_{m,t}) \otimes \mathcal{O}(M_{t,n})$. Les premiers théorèmes fondamentaux de la théorie des invariants décrivent l'algèbre $\mathcal{O}(V)^{GL(t)}$ des invariants pour cette opération de la manière suivante. On considère la multiplication

$$\begin{aligned} \theta : M_{m,t} \times M_{t,n} &\longrightarrow M_{m,n} \\ (A,B) &\longmapsto AB \end{aligned}$$

et on note $\theta^* : \mathcal{O}(M_{m,n}) \longrightarrow \mathcal{O}(M_{m,t}) \otimes \mathcal{O}(M_{t,n})$ le morphisme d'algèbres induit.

• L'algèbre des invariants $\mathcal{O}(V)^{GL(t)}$ coïncide avec $\mathrm{Im}\theta^*$.

• Soient X_{ij} $(1 \leq i \leq m\ ,\ 1 \leq j \leq n)$ les fonctions coordonnées sur $M_{m,n}$. Soit $\mathcal{T}_{t+1}$ l'idéal de $\mathcal{O}(M_{m,n})$ engendré par les mineurs $(t+1) \times (t+1)$ de la matrice (X_{ij}) (cet idéal est nul si $t \geq \min\{m, n\}$). Alors $\mathrm{Ker}\theta^* = \mathcal{T}_{t+1}$.

Ces deux théorèmes sont connus respectivement comme étant le premier et deuxième théorème fondamentaux de la théorie des invariants (pour $GL(t)$) : voir [28]. Ils décrivent totalement l'algèbre $\mathcal{O}(V)^{GL(t)}$. Ces théorèmes ont étés généralisés au cas des algèbres quantifiées par Goodearl, Lenagan et Rigal [39]. C'est d'ailleurs leur travail qui nous a donné l'idée de proposer un analogue libre de ces théorèmes.

Notons $A(m,n)$, $A(m,t)$ and $A(t,n)$ les algèbres libres engendrées par mn, mt and tn générateurs respectivement, dont les générateurs respectifs sont notés x_{ij}, y_{ij} et z_{ij}. L'analogue de la comultiplication θ^* est le morphisme d'algèbres

$$\begin{aligned} \theta : A(m,n) &\longrightarrow A(m,t) \otimes A(t,n) \\ x_{ij} &\longmapsto \sum_{k=1}^{t} y_{ik} \otimes z_{kj}. \end{aligned}$$

Il est facile de montrer que θ est injectif. Il est alors naturel de se poser la question suivante : existe-t-il un groupe quantique G opérant sur $A(m,t) \otimes A(t,n)$ et tel que $\mathrm{Im}\theta = (A(m,t) \otimes A(t,n))^G$? Nous avons tout d'abord besoin de reformuler un peu plus précisément notre question. Soit H une algèbre de Hopf et soit $u = (u_{ij}) \in M_t(H)$ une matrice multiplicative, ce qui signifie que pour tous $i, j \in \{1, \ldots, t\}$, on a $\Delta(u_{ij}) = \sum_k u_{ik} \otimes u_{kj}$ et $\varepsilon(u_{ij}) = \delta_{ij}$. Alors $A(m,t)$ est un H-comodule à gauche, avec co-action

$$\begin{aligned} \rho : A(m,t) &\longrightarrow H \otimes A(m,t) \\ y_{ij} &\longmapsto \sum_{k=1}^{t} v_{jk} \otimes y_{ik}. \end{aligned}$$

De même $A(t,n)$ est une algèbre H-comodule à gauche, avec co-action

$$\begin{aligned} \lambda : A(t,n) &\longrightarrow H \otimes A(t,n) \\ z_{ij} &\longmapsto \sum_{k=1}^{t} u_{ik} \otimes z_{kj}. \end{aligned}$$

Par conséquent $A(m,t) \otimes A(t,n)$ est un H-comodule, et d'autre part les coinvariants $(A(m,t) \otimes A(t,n))^{\mathrm{co}H}$ forment une sous-algèbre de $(A(m,t) \otimes A(t,n))$ qui contient $\mathrm{Im}\theta$ (voir [39] et [21]). On cherche alors une algèbre de Hopf H pour laquelle on aurait $\mathrm{Im}\theta = (A(m,t) \otimes A(t,n))^{\mathrm{co}H}$. Pour une matrice $F \in GL(t)$, considérons l'algèbre de Hopf cosouveraine universelle $H(F)$ [14] : les considérations précédentes s'appliquent, et on a le résultat suivant, qui est notre analogue quantique libre des premiers théorèmes fondamentaux de la théorie des invariants.

Théorème 5.1 *Soient $m, n, t > 0$ des entiers positifs et soit $F \in GL(t)$. Alors le morphisme d'algèbres*

$$\theta : A(m,n) \longrightarrow (A(m,t) \otimes A(t,n))^{\mathrm{co}H(F)}$$

est un isomorphisme.

L'ingrédient essentiel pour la preuve du théorème est la théorie des coreprésentations de $H(F)$ [22].

6 Reconstruction galoisienne des groupes quantiques

On passe en revue ici les résultats et constructions de [12]. On commence par les observations classiques suivantes, dont on va proposer des analogues quantiques.

(1) Soit $\mathcal{C}$ une (petite) catégorie et soit $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ens}_f$ un foncteur à valeurs dans la catégorie des ensembles finis. Notons $\mathrm{Aut}(F)$ le groupe des automorphismes du foncteur F. Alors F se factorise en un foncteur $\overline{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Aut}(F) - \mathrm{Ens}_f$ (la catégorie des $\mathrm{Aut}(F)$-ensembles finis) suivi du foncteur oubli :

$$\begin{tikzcd} F : \mathcal{C} \arrow[rr] \arrow[dr, dashed, "\overline{F}"'] & & \mathrm{Ens}_f \\ & \mathrm{Aut}(F) - \mathrm{Ens}_f \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(2) Soit $\mathcal{C} = G - \mathrm{Ens}_f$ où G est un groupe fini et soit $\omega = F$ le foncteur oubli. Alors les groupes $\mathrm{Aut}(\omega)$ et G sont isomorphes.

Ces deux résultats, faciles à montrer, sont d'un grand intérêt : en effet ils sont les observations préliminaires essentielles à la théorie de Galois axiomatique de Grothendieck [40]. On se propose donc, dans le but d'obtenir une généralisation quantique de la théorie de Galois de Grothendieck, d'établir des analogues quantiques de ces résultats. L'astuce technique essentielle pour notre construction, inspiré par le résultat de Wang [88] sur la non-existence du groupe quantique compact des automorphismes d'une C^*-algèbre de dimension finie, est de considérer un foncteur à valeurs dans les espaces quantiques mesurés plutôt que les espaces quantiques. Rappelons qu'une mesure sur une algèbre Z est une forme linéaire sur Z telle que la forme bilinéaire $Z \times Z \longrightarrow k$, $(a, b) \longmapsto \phi(ab)$, soit non dégénérée. Une algèbre mesurée est une paire (Z, ϕ) où Z est une algèbre et où ϕ est une mesure sur Z [5]. On note $\mathcal{M}alg_f$ la catégorie des algèbre mesurées de dimension finie : c'est une sous-catégorie pleine de la catégorie des algèbres de dimension finie. Pour une algèbre de Hopf A, on note $\mathcal{M}alg_f(A)$ la catégorie des algèbres A-comodules mesurées de dimension finie, c'est-à-dire des algèbres A-comodules de dimension finie munies d'une mesure qui soit un morphisme de comodules.

Théorème 6.1 ([12]) *Soit $\mathcal{C}$ une (petite) catégorie et soit $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{M}alg_f$ un foncteur. Alors il existe une algèbre de Hopf $A_{aut}(F)$ telle que F se factorise en un foncteur $\overline{F}$: $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{M}alg_f(A_{aut}(F))$ suivi par le foncteur oubli :*

$$\begin{tikzcd} F : \mathcal{C} \arrow[rr] \arrow[dr, dashed, "\overline{F}"'] & & \mathcal{M}alg_f \\ & \mathcal{M}alg_f(A_{aut}(F)) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

[5] En dimension finie, une algèbre mesurée n'est donc autre qu'une algèbre de Frobenius munie du choix d'une mesure.

L'algèbre de Hopf $A_{aut}(F)$ a la propriété universelle suivante :

Si B est une algèbre de Hopf telle F se factorise en un foncteur à valeurs dans $\mathcal{M}alg_f(B)$, alors il existe un unique morphisme d'algèbres de Hopf $\pi : A_{aut}(F) \longrightarrow B$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & & F \otimes A_{aut}(F) \arrow[dl, "1_F \otimes \pi"] \\ & F \otimes B & \end{tikzcd}$$

où α et β sont les co-actions de $A_{aut}(F)$ et B respectivement.

L'ingrédient essentiel pour montrer ce théorème galoisien non commutatif est la dualité tannakienne non commutative. Puisque l'on ne suppose l'existence d'aucune structure sur la catégorie $\mathcal{C}$ de départ, le théorème fournit sans difficulté des exemples d'algèbres de Hopf. Par exemple si $\mathcal{C} = \{*\}$ est la catégorie triviale à un objet et un morphisme et si (Z, ϕ) est une algèbre mesurée de dimension finie, on peut considérer le foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{M}alg_f$ tel que $F(*) = (Z, \phi)$. L'algèbre de Hopf $A_{aut}(F)$ est alors notée $A_{aut}(Z, \phi)$, et on obtient un analogue algébrique du groupe quantique compact des automorphismes d'une C^*-algèbre de dimension finie munie d'une trace de Wang [88]. Les représentations de ces objets sont décrites par Banica [5], et sont similaires à celles de $SO(3)$. Pour les algèbres de matrices, on a généralisé le résultat de Banica au cas de mesures non traciales. Soit $F \in GL(n)$ et soit $\mathrm{tr}_F = \mathrm{tr}({}^tF^{-1} -) : M_n(k) \longrightarrow k$: c'est une mesure sur l'algèbre des matrices $M_n(k)$. On a montré le résultat suivant dans [22], toujours en utilisant des systèmes de Hopf-Galois.

Théorème 6.2 ([22]) *Soient $E \in GL(m)$ et $F \in GL(n)$ $(m, n \geq 2)$ avec $\mathrm{tr}(E) = \mathrm{tr}(F)$ et $\mathrm{tr}(E^{-1}) = \mathrm{tr}(F^{-1})$. Alors les catégories de comodules de $A_{aut}(M_m(k), \mathrm{tr}_E)$ et de $A_{aut}(M_n(k), \mathrm{tr}_F)$ sont monoïdalement équivalentes. En particulier, si $\mathrm{tr}(F) = \mathrm{tr}(F^{-1})$ et s'il existe $q \in k^*$ tel que $q^2 - \mathrm{tr}(F)q + 1 = 0$, alors les catégories de comodules de $A_{aut}(M_n(k), \mathrm{tr}_F)$ et de $\mathcal{O}(SO_{q^{1/2}}(3))$ sont monoïdalement équivalentes.*

On peut également utiliser le théorème 6.1 pour définir les groupes quantiques d'automorphismes des graphes finis de [16] (dont la construction était antérieure au théorème 6.1).

Finalement, on peut utiliser le théorème 6.1 pour reconstruire une algèbre de Hopf de dimension finie à partir de ses algèbres comodules, c'est-à-dire que l'on obtient l'analogue quantique de l'observation **(2)**. Les autres ingrédients de la preuve sont des résultats classiques, à savoir l'existence d'une mesure de Haar sur une algèbre de Hopf de dimension finie, et le théorème fondamental des modules de Hopf [56]. On suppose ici que le corps k est infini.

Théorème 6.3 ([12]) *Soit A une algèbre de Hopf de dimension finie. Soit $\mathcal{C} = \mathcal{M}alg_f(A)$ la catégorie des algèbres A-comodules mesurées de dimension finie et soit $\omega : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{M}alg_f$ le foncteur oubli. Alors les algèbres de Hopf A and $A_{aut}(\omega)$ sont isomorphes.*

7 Groupes quantiques d'automorphismes des graphes finis

Ce paragraphe reprend les résulats des articles [16] et [20], écrits dans le cadre C^*-algébrique des groupes quantiques compacts [91, 93]. Pour garder une certaine unité à ce document, on se place simplement dans le cadre, équivalent pour les considérations faites ici, des CQG-algèbres ([50]), c'est-à-dire des $*$-algèbres de Hopf dont tous les comodules de dimension finie sont unitarisables. Ici le corps de base est donc $k = \mathbb{C}$.

Le point de départ est la description par Wang [88] du groupe quantiques des permutations d'un ensemble X_n à n points. Le groupe quantique correspondant, noté $A_{aut}(X_n)$, est le groupe quantique $A_{aut}(C(X_n), \phi)$ du paragraphe précédent, où $C(X_n)$ est l'algèbre des fonctions sur X_n et où ϕ est la forme linéaire correspondant à la mesure de comptage usuelle [6]. La description de $A_{aut}(X_n)$ est la suivante [88] : $A_{aut}(X_n)$ est l'algèbre universelle engendrée par des éléments $(x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ soumis aux relations

$$x_{ij}x_{ik} = \delta_{jk}x_{ij} \quad ; \quad x_{ji}x_{ki} = \delta_{jk}x_{ji} \quad ; \quad \sum_{l=1}^{n} x_{il} = 1 = \sum_{l=1}^{n} x_{li} \quad ; \quad 1 \leq i, j, k \leq n.$$

Alors $A_{aut}(X_n)$ est une CQG-algèbre dont les morphismes structuraux sont définis par les formules suivantes :

$$x_{ij}^* = x_{ij} \quad ; \quad \Delta(x_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} \otimes x_{kj} \quad ; \quad \varepsilon(x_{ij}) = \delta_{ij} \quad ; \quad S(x_{ij}) = x_{ji} \quad ; \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Pour $n \leq 3$, on obtient l'algèbre des fonctions sur le groupe symétrique, mais pour $n \geq 4$, l'algèbre de Hopf $A_{aut}(X_n)$ est de dimension infinie, et la théorie des coreprésentations est similaire à celle de $SO(3)$ [5].

Dans le but de construire des sous-groupes quantiques non triviaux de $A_{aut}(X_n)$, on a defini et étudié le groupe quantique des automorphismes d'un graphe fini dans [16]. Soit $\mathcal{G} = (S, A)$ un graphe fini : cela signifie ici que S et A sont des ensembles finis tels que $A \subset S \times S$. On consultera [16] pour la notion d'action d'un groupe quantique sur un graphe. On peut construire le groupe quantique des automorphismes de $\mathcal{G}$ de la manière suivante, en utilisant la construction de [12]. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie ayant deux objets $\{0, 1\}$ et deux morphismes non triviaux $i, j : 0 \rightrightarrows 1$. On définit alors un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{M}alg_f$ en posant

$$F(0) = (C(S), \phi_S) \ , \ F(1) = (C(A), \phi_A) \ , \ F(i) = s_* \ , \ F(j) = b_* \ ,$$

où ϕ_S et ϕ_A sont les fonctions d'intégration habituelles, et où s_* and b_* sont les morphismes d'algèbres induits par les applications source et but respectivement. Alors on peut définir le groupe quantique des automorphismes de $\mathcal{G}$ par $A_{aut}(\mathcal{G}) := A_{aut}(F)$. La description exacte est la suivante.

[6]En fait on n'a pas vraiment besoin de parler de mesure ici : voir [88]. On ne s'attardera pas sur ce point technique pourtant important.

Théorème 7.1 ([16]) *Soit $\mathcal{G} = (S, A)$ un graphe fini à n sommets et m arètes : $A = \{\gamma_1, ..., \gamma_m\}$. Alors $A_{aut}(\mathcal{G})$ est isomorphe à l'algèbre universelle engendrée par des éléments $(X_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ soumis aux relations :*

$$(1) \qquad X_{ij}X_{ik} = \delta_{jk}X_{ij} \; ; \; X_{ji}X_{ki} = \delta_{jk}X_{ji} \; ; \; \sum_{l=1}^{n} X_{il} = 1 = \sum_{l=1}^{n} X_{li} \; , \; 1 \leq i, j, k \leq n$$

$$(2) \qquad X_{s(\gamma_j)i}X_{t(\gamma_j)k} = X_{t(\gamma_j)k}X_{s(\gamma_j)i} = 0$$

$$X_{is(\gamma_j)}X_{kt(\gamma_j)} = X_{kt(\gamma_j)}X_{is(\gamma_j)} = 0 \quad , \quad \gamma_j \in E, \; (i,k) \notin E$$

$$(3) \qquad X_{s(\gamma_j)s(\gamma_l)}X_{t(\gamma_j)t(\gamma_l)} = X_{t(\gamma_j)t(\gamma_l)}X_{s(\gamma_j)s(\gamma_l)} \quad , \; \gamma_j, \gamma_l \in E$$

$$(4) \qquad \sum_{l=1}^{m} X_{s(\gamma_l)s(\gamma_j)}X_{t(\gamma_l)t(\gamma_j)} = 1 = \sum_{l=1}^{m} X_{s(\gamma_j)s(\gamma_l)}X_{t(\gamma_j)t(\gamma_l)} \quad , \quad \gamma_j \in E$$

Les morphismes structurels de la $*$-algèbre de Hopf $A_{aut}(\mathcal{G})$ sont définis par les formules :

$$X_{ij}^* = X_{ij} \; ; \; \Delta(X_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} X_{ik} \otimes X_{kj} \; ; \; \varepsilon(X_{ij}) = \delta_{ij} \; ; \; S(X_{ij}) = X_{ji} \; ; \; 1 \leq i, j \leq n$$

et $A_{aut}(\mathcal{G})$ est une CQG-algèbre.

On a constaté dans [16] que l'on obtient des groupes quantiques intéressants en considérant des graphes qui sont des réunions disjointes de copies d'un même graphe, comme par exemple le graphe 

Les groupes d'automorphismes usuels de tels graphes peuvent être avantageusement décrits en utilisant le produit en couronne [7] , ce qui nous a mené tout naturellement dans [20] à proposer un analogue quantique libre du produit en couronne. Décrivons maintenant cette construction générale. Rappelons d'abord que le produit libre de deux algèbres de Hopf est naturellement une algèbre de Hopf. Par conséquent si A est une algèbre de Hopf, on peut considérer l'algèbre de Hopf A^{*n}, produit libre de n copies de A. On notera $\nu_i : A \longrightarrow A^{*n}$ les morphismes canoniques. L'algèbre de Hopf A^{*n} est une algèbre $A_{aut}(X_n)$-comodule mais on ne peut, pour diverses raisons techniques, former en général un produit semi-direct de A^{*n} par $A_{aut}(X_n)$, sauf pour $n = 2$. Néanmoins on peut proposer la construction suivante.

[7]Soient H un groupe et $G \subset S_n$ un sous-groupe. Alors G opère par automorphismes sur H^n, et on peut donc former le produit semi-direct $H^n \rtimes G$: c'est le produit en couronne de H par G, souvent noté $H\mathrm{w}G$.

Définition 7.2 ([20]) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit A une algèbre de Hopf. Le produit en couronne libre de A par le groupe des permutations quantiques $A_{aut}(X_n)$ est le quotient de l'algèbre $A^{*n} * A_{aut}(X_n)$ par l'idéal engendré par les éléments :*

$$\nu_k(a)x_{ki} - x_{ki}\nu_k(a) \ , \quad 1 \leq i, k \leq n \ , \quad a \in A.$$

L'algèbre correspondante est notée $A*_{\mathrm{w}}A_{aut}(X_n)$.

La structure d'algèbre de Hopf du produit en couronne libre est décrite dans le résultat suivant.

Théorème 7.3 ([20]) *Le produit en couronne libre $A*_{\mathrm{w}}A_{aut}(X_n)$ est une algèbre de Hopf. Soit $a \in A$ et soient $i, j \in \{1 \ldots n\}$. La comultiplication Δ vérifie :*

$$\Delta(x_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} \otimes x_{kj} \quad ; \ \Delta(\nu_i(a)) = \sum_{k=1}^{n} \nu_i \otimes \nu_k(\Delta_{\mathcal{A}}(a))(x_{ik} \otimes 1) = \sum_{k=1}^{n} \nu_i(a_{(1)})x_{ik} \otimes \nu_k(a_{(2)}).$$

La co-unité ε vérifie $\varepsilon(x_{ij}) = \delta_{ij}$ et $\varepsilon(\nu_i(a)) = \varepsilon_A(a)$. L'antipode S vérifie :

$$S(x_{ij}) = x_{ji} \quad ; \ S(\nu_i(a)) = \sum_{k=1}^{n} \nu_k(S_{\mathcal{A}}(a))x_{ki}.$$

Si A est une $*$-algèbre de Hopf, il en est de même de $A*_{\mathrm{w}}A_{aut}(X_n)$ avec $x_{ij}^* = x_{ij}$ et $\nu_i(a)^* = \nu_i(a^*)$. Si A est une CQG-algèbre, alors $A*_{\mathrm{w}}A_{aut}(X_n)$ est également une CQG-algèbre.

On obtient donc une construction systématique d'algèbres de Hopf. Lorsque $A = \mathbb{C}[G]$ est l'algèbre d'un groupe G, on note $A_n(G)$ l'algèbre de Hopf $\mathbb{C}[G]*_{\mathrm{w}}A_{aut}(X_n)$. Une présentation explicite simple de $A_n(G)$ est donnée dans [20].

Revenons aux groupes d'automorphismes quantiques des graphes finis. Si $\mathcal{G}$ est un graphe fini connexe, notons $\mathcal{G}^{\amalg n}$ la réunion disjointe de n copies de $\mathcal{G}$. On a, pour les groupes d'automorphismes usuels, un isomorphisme $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}^{\amalg n}) \cong \mathrm{Aut}(\mathcal{G})\mathrm{w}S_n$. Au niveau des groupes quantiques, on le résultat suivant.

Théorème 7.4 ([20]) *Soit $\mathcal{G}$ un graphe fini connexe et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors on a un isomorphisme de CQG-algèbres :*

$$A_{aut}(\mathcal{G}^{\amalg n}) \cong A_{aut}(\mathcal{G})*_{\mathrm{w}}A_{aut}(X_n).$$

Ce théorème permet une description explicite simple dans un certain nombre de cas. Par exemple si $\mathcal{G}$ est un graphe connexe ayant un groupe d'automorphismes G qui est abélien, on a $A_{aut}(\mathcal{G}^{\amalg n}) \cong A_n(G)$. Le corollaire suivant assure quant à lui que le groupe quantique des automorphismes est presque toujours non trivial.

Corollaire 7.5 ([20]) *Soit $\mathcal{G}$ un graphe fini connexe possédant un groupe d'automorphismes non trivial et soit $n \geq 2$ un entier. Alors $A_{aut}(\mathcal{G}^{\amalg n})$ est une CQG-algèbre de dimension infinie non commutative et non cocommmutative.*

8 La D-équation de Militaru

Ce chapitre reprend les résultats de l'article [23], écrit en collaboration avec Ross Street. Le point de départ de ce travail est l'étude par Militaru de la D-équation [63], qui nous a menés en particulier à une construction de type FRT dans un cadre catégorique minimal.

Rappelons d'abord la construction FRT classique dans son cadre catégorique usuel. Soit $\mathcal{V}$ une catégorie monoïdale tressée dans laquelle les limites inductives existent et dont le produit tensoriel commute aux limites inductives. Soit M un objet de $\mathcal{V}$ ayant un dual à gauche et soit $R : M \otimes M \longrightarrow M \otimes M$ un morphisme.

(1) Il existe une bigèbre universelle $A(R)$ dans $\mathcal{V}$ telle que M soit un $A(R)$-comodule et telle que R soit un morphisme de $A(R)$-comodules. C'est la célèbre bigèbre FRT de Faddeev, Reshetikhin et Takhtajan [74].

Si de plus R satisfait à l'équation de Yang-Baxter quantique, on dispose d'informations supplémentaires sur $A(R)$.

(2) La bigèbre $A(R)$ est cotressée, et R provient du tressage de la catégorie des $A(R)$-comodules [57] [8].

(3) M est un $A(R)$-module de Yetter-Drinfeld, et R provient de la structure de module de Yetter-Drinfeld de M [73].

Soit $R : M \otimes M \longrightarrow M \otimes M$ un morphisme. On dit que R est une solution de la D-équation, ou un D-opérateur, si

$$(R \otimes 1_M) \circ (1_M \otimes R) = (1_M \otimes R) \circ (R \otimes 1_M).$$

Cette équation a été nommée et étudiée par Militaru [63]. Si R est un D-opérateur, Militaru a construit une bigèbre universelle $D(R)$ satisfaisant un analogue de **(3)** : M est un $D(R)$-dimodule de Long et R provient de la structure de dimodule de Long de M. Par contre $D(R)$ ne satisfait pas d'analogue de **(1)** et **(2)**. En fait il apparait que $D(R)$ est "l'algèbre tensorielle d'une certaine cogèbre" (Militaru travaille dans la catégorie des espaces vectoriels), et que la notion de dimodule de Long s'adapte sans difficulté aux cogèbres. Ce sont ces observations qui nous ont menés à une construction de type FRT valable dans un cadre minimal, c'est-à-dire sans supposer que la catégorie ambiante est tressée, ce qui était nécessaire pour pouvoir parler de bigèbre.

Soit donc $\mathcal{V}$ une catégorie monoïdale (non supposéee tressée) et soit C une cogèbre dans $\mathcal{V}$. Notons $\mathcal{C}$ la catégorie des C-comodules à droite. Alors $\mathcal{C}$ n'a pas de structure monoïdale naturelle. Néanmoins $\mathcal{C}$ est une $\mathcal{V}$-actégorie [8, 69, 70, 59] : on a un bifoncteur $\mathcal{V} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ muni de contraites d'associativité. En effet si X est un objet de $\mathcal{V}$ et si M est un C-comodule de co-action $\delta : M \longrightarrow M \otimes C$, alors $X \otimes M$ est un C-comodule de co-action $1_X \otimes \delta$.

[8] Les références originales que nous mentionnons ici donnaient ces résultats dans la catégorie des espaces vectoriels. Ils restent parfaitement valables dans le cadre plus général dans lequel nous nous plaçons : voir par exemple [78].

Soit maintenant M un C-comodule et $R : M \otimes M \longrightarrow M \otimes M$ un morphisme. L'objet $M \otimes M$ n'a pas de struture canonique de C-comodule et on ne peut donc demander à R d'être un morphisme de comodules. Par contre, si on note M_0 l'objet de $\mathcal{V}$ sous-jacent au comodule M, on peut, via la structure de $\mathcal{V}$-actégorie de $\mathcal{C}$, considérer le C-comodule $M_0 \otimes M$ et demander à $R : M_0 \otimes M \longrightarrow M_0 \otimes M$ d'être un morphisme de comodules. Ceci mène à notre théorème de type FRT, analogue de **(1)** dans un cadre non tressé.

Théorème 8.1 ([23]) *Soit $\mathcal{V}$ une catégorie monoïdale dans laquelle les conoyaux de doubles flèches existent. Soit M un objet de $\mathcal{V}$ ayant un dual à gauche et soit $R : M \otimes M \longrightarrow M \otimes M$ un morphisme de $\mathcal{V}$.*
a) Il existe une cogèbre $D(R)$ et un morphisme $\delta : M \longrightarrow M \otimes D(R)$ munissant M d'une structure de $D(R)$-comodule telle $R : M_0 \otimes M \longrightarrow M_0 \otimes M$ soit un morphisme de $D(R)$-comodule.
b) La cogèbre $D(R)$ possède la propriété universelle suivante. Soit C une cogèbre telle que M soit un C-comodule et telle que $R : M_0 \otimes M \longrightarrow M_0 \otimes M$ soit un morphisme de C-comodule. Alors il existe un unique morphisme de cogèbre $\gamma : D(R) \longrightarrow C$ tel que $(1_M \otimes \gamma) \circ \delta = \delta'$, où $\delta' : M \longrightarrow M \otimes C$ est la co-action de C sur M.

Revenons à la D-équation. Militaru [63] a utilisé les dimodules de Long d'une bigèbre pour étudier la D-équation. En fait la notion de comodule de Long d'une cogèbre est suffisante.

Définition 8.2 ([23]) *a) Un système de Long est un quadruplet $\mathcal{L} = (M, V, \delta, \mu)$ où M et V sont des objets de $\mathcal{V}$, et où $\delta : M \longrightarrow M \otimes V$ et $\mu : V \otimes M \longrightarrow M$ sont des morphismes tels que*

$$\delta \circ \mu = (\mu \otimes 1_V) \circ (1_V \otimes \delta).$$

b) Soit C une cogèbre. Un C-comodule de Long est un triplet (M, δ, μ) où (M, δ) est un C-comodule et où $\mu : C \otimes M \longrightarrow M$ est un morphisme tel que (M, C, δ, μ) soit un système de Long.

Le résultat qui suit généralise alors la proposition 3.4 de Militaru dans [63].

Proposition 8.3 ([23]) *Soit $\mathcal{L} = (M, V, \delta, \mu)$ un système de Long. Alors*

$$R = R_{\mathcal{L}} := (1_M \otimes \mu) \circ (\delta \otimes 1_M)$$

est une solution de la D-équation.

En fait la construction de cette proposition est universelle, comme le montre le théorème qui suit, qui est l'analogue du résultat principal de Militaru dans [63]. On a donc, pour la D-équation, des analogues de **(1)** et **(3)** à la fois.

Théorème 8.4 ([23]) *Soit $\mathcal{V}$ une catégorie monoïdale dans laquelle les conoyaux de doubles flèches existent. Soit M un objet de $\mathcal{V}$ ayant un dual à gauche et soit $R : M\otimes M \longrightarrow M\otimes M$ un D-morphisme. Considérons la cogèbre $D(R)$ du théorème 8.1 et la co-action $\delta : M \longrightarrow M \otimes D(R)$.*
a) Il existe un morphisme $\mu : D(R) \otimes M \longrightarrow M$ tel que (M, δ, μ) soit un $D(R)$-comodule de Long et tel que $R = R_{\mathcal{L}}$, où $\mathcal{L} = (M, D(R), \delta, \mu)$ est le système de Long correspondant.
b) La cogèbre $D(R)$ possède la propriété universelle suivante. Soit $\mathcal{L}' = (M, V, \delta', \mu')$ un système de Long tel que $R = R_{\mathcal{L}'}$: il existe alors un unique morphisme $\gamma : D(R) \longrightarrow V$ tel que $(1_M \otimes \gamma) \circ \delta = \delta'$ et $\mu' \circ (\gamma \otimes 1_M) = \mu$. Si de plus V est une cogèbre telle que (M, δ', μ') soit un V-comodule de Long, alors γ est un morphisme de cogèbres.

Nous avons aussi étudié dans [23] la D-équation en utilisant la construction FRT usuelle. En effet, on peut associer un D-opérateur à une algèbre de Frobenius en utilisant la proposition 8.3 [23]. Ce D-opérateur est un morphisme de la catégorie des représentations du groupe quantique des automorphismes de l'algèbre de Frobenius donnée [12], et donc au vu de **(1)**, il est naturel de considérer la construction FRT habituelle. On obtient alors un analogue de **(2)** pour les bigèbres FRT associées à un D-opérateur, c'est-à-dire une notion de D-bigèbre. On suppose désormais que la catégorie monoïdale $\mathcal{V}$ (d'unité monoïdale notée I) est tressée.

Définition 8.5 ([23]) *Soit A une bigèbre dans la catégorie monoïdale tressée $\mathcal{V}$. Un D-morphisme sur A est un morphisme $\phi : A \longrightarrow I$ tel que*

$$(\phi \otimes \phi) \circ (m \otimes m) \circ (1_A \otimes \Delta \otimes 1_A) = (\phi \otimes \phi) \circ (m \otimes m) \circ (1_A \otimes \Delta^{\mathrm{op}} \otimes 1_A),$$

$$(\phi \otimes 1_A) \circ \Delta = (1_A \otimes \phi) \circ \Delta \quad \text{et} \quad \phi \circ u = 1_I.$$

Une D-bigèbre est une paire (A, ϕ) où A est une bigèbre et où ϕ est un D-morphisme ϕ sur A.

Le théorème qui suit résume alors les résultats du paragraphe 5 de [23].

Théorème 8.6 ([23]) *a) Soit (A, ϕ) une D-bigèbre dans la catégorie monoïdale tressée $\mathcal{V}$. Soit M un A-comodule de co-action $\alpha_M : M \longrightarrow M \otimes A$. Soit*

$$R = (1_M \otimes 1_M \otimes (\phi \circ m)) \circ (1_M \otimes C_{A,M} \otimes 1_A) \circ (\alpha_M \otimes \alpha_M), \quad M \otimes M \longrightarrow M \otimes M.$$

Alors R est un D-opérateur.
b) Supposons que $\mathcal{V}$ est une catégorie monoïdale tressée dans laquelle les limides inductives existent et dont le produit tensoriel commute aux limites inductives. Soit M un objet de $\mathcal{V}$ ayant un dual à gauche et soit $R : M \otimes M \longrightarrow M \otimes M$ un D-opérateur. Alors il existe un D-morphisme ϕ sur la bigèbre FRT $A(R)$ tel que

$$R = (1_M \otimes 1_M \otimes (\phi \circ m)) \circ (1_M \otimes C_{A(R),M} \otimes 1_{A(R)}) \circ (\alpha_M \otimes \alpha_M).$$

Examinons, pour finir, un exemple plus concret. Soit G un groupe fini. Une D-fonction sur G est une fonction $\beta : G \longrightarrow k$ telle que :
a) $\sum_{x \in G} \beta(x) = 1$;
b) β est une trace sur G : $\beta(xy) = \beta(yx)\ \forall x, y \in G$;
c) Si $x, y \in G$ vérifient $xy \neq yx$, alors $\beta(x) = 0$ ou $\beta(y) = 0$.

On vérifie sans difficulté que les D-fonctions sur G correspondent bijectivement aux D-morphismes sur l'algèbre de Hopf $\mathcal{F}(G)$ des fonctions de G dans k. Soit alors β une D-fonction sur G et M une représentation de G. Le théorème 8.4 assure alors que l'opérateur

$$\begin{aligned} R : & M \otimes M \longrightarrow M \otimes M \\ & m \otimes n \longmapsto \sum_{g \in G} \beta(g) g.m \otimes g.n \end{aligned}$$

est une solution de la D-équation.

9 L'algèbre de Hopf des N-complexes

Un résultat de Pareigis [68], antérieur à l'ère des groupes quantiques, assure que la catégorie des complexes est monoïdalement équivalente à la catégorie des comodules d'une algèbre de Hopf non commutative et non cocommutative. On a généralisé dans [19] le résultat de Pareigis au cas des N-complexes, avec N un entier supérieur ou égal à 2. L'algèbre de Hopf obtenue possède des relations étroites avec les algèbres quantiques associées à l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2)$.

Un N-complexe est un module $\mathbb{Z}$-gradué $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$ muni d'un endomorphisme d de degré -1 tel que $d^N = 0$, appelé différentielle, le cas $N = 2$ correspondant au cas des complexes usuels. La catégorie des N-complexes est notée $\mathrm{Comp}_N(k)$: les morphismes sont les morphismes de k-modules $\mathbb{Z}$-gradués commutant aux différentielles. De tels objets ont été abondamment utilisés dans les travaux de Dubois-Violette [33, 34] et Kapranov [46] sur le calcul différentiel quantique. Ils ont également été exploités par Berger, Dubois-Violette et Wambst [9] dans leurs travaux sur les algèbres N-homogènes. L'algèbre homologique des N-complexes a été développée par Kapranov [46] puis Kassel et Wambst [48].

Dans la suite on suppose que k contient une racine primitive N-ième de l'unité q. Le produit tensoriel de N-complexes a été défini par Kapranov [46]. Soient (M, d_M) et (N, d_N) deux N-complexes. Leur q-produit tensoriel $(M \otimes_q N, d_{M\otimes_q N})$ est défini de la manière suivante. En tant que k-module $\mathbb{Z}$-gradué, on a

$$M \otimes_q N = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \Big(\bigoplus_{k+j=i} M_k \otimes M_j \Big),$$

et la différentielle est donnée par

$$d_{M\otimes_q N}(m \otimes n) = d_M(m) \otimes n + q^{-i} m \otimes d_N(n), \quad m \in M_i \ , \ n \in N_j.$$

On définit par ailleurs une algèbre de Hopf $A(q)$: l'algèbre $A(q)$ est le quotient de l'algèbre libre $K\{x, t, t^{-1}\}$ par l'idéal bilatère engendré par les relations :

$$tt^{-1} = 1 = t^{-1}t \quad , \quad xt = qtx \quad , \quad x^N = 0.$$

Le coproduit Δ est défini par $\Delta(x) = x \otimes 1 + t^{-1} \otimes x$ et $\Delta(t) = t \otimes t$; la co-unité ε est définie par $\varepsilon(x) = 0$ et $\varepsilon(t) = 1$; l'antipode S est défini par $S(x) = -tx$ et $S(t) = t^{-1}$. On a alors le résultat suivant.

Théorème 9.1 ([19]) *Le foncteur oubli* $\Omega : \mathrm{Comp}_N(k) \longrightarrow \mathrm{Mod}(k)$ *induit une équivalence de catégories monoïdales*

$$\widetilde{\Omega} : (\mathrm{Comp}_N(K), \otimes_q) \xrightarrow{\approx\otimes} \mathrm{Comod}(A(q)).$$

La preuve repose sur une adaptation de celle de Pareigis [68] et sur l'utilisation des q-coefficients binômiaux (voir [47]). Il faut noter qu'un résultat relativement proche est énoncé par Dubois-Violette dans [35] (appendice A) : la catégorie des $\mathbb{Z}_N$-complexes (qui peut être vue comme une sous-catégorie de celle des N-complexes) est monoïdalement équivalente à la catégories des modules sur une algèbre de Hopf (en fait une algèbre de Taft). Pour la catégorie entière des N-complexes, l'usage des comodules est nécessaire.

Il est naturel de se demander dans quelle mesure la structure monoïdale sur la catégorie des N-complexes dépend du choix du paramètre q. Le résultat qui suit répond à cette question. L'ingrédient essentiel est le fait que $A(q)$ est une algèbre de Hopf cosouveraine [14], et l'utilisation de la dimension souveraine associée sur la catégorie des comodules de $A(q)$ [61].

Proposition 9.2 ([19]) *Soient $q_1, q_2 \in k^*$ des racines primitives n-ièmes de l'unité. Les assertions suivantes sont équivalentes.*
1) Les catégories $(\mathrm{Comp}_N(k), \otimes_{q_1})$ *et* $(\mathrm{Comp}_N(k), \otimes_{q_2})$ *sont monoïdalement équivalentes.*
2) Les catégories $\mathrm{Comod}(A(q_1))$ *et* $\mathrm{Comod}(A(q_2))$ *sont monoïdalement équivalentes.*
3) $q_1 = q_2$.

Une autre conséquence du théorème 9.1 est la suivante. La catégorie des complexes est monoïdale symétrique, mais cela ne se généralise pas au cas général des N-complexes, même dans le cadre des tressages.

Proposition 9.3 ([19]) *Pour $N \geq 3$, la catégorie monoïdale* $(\mathrm{Comp}_N(K), \otimes_q)$ *n'admet pas de tressage.*

Références

[1] M. ARTIN, W. SCHELTER, J. TATE, Quantum deformations of GL_n, Commm. on Pure and Appl. Math. 44 (1991), 879-895.

[2] T. BANICA, Théorie des représentations du groupe quantique compact libre $O(n)$, C.R. Acad. Sci. Paris 322, Série I (1996), 241-244.

[3] T. BANICA, Le groupe quantique libre $U(n)$, Comm. Math. Phys. 190 (1997), 143-172.

[4] T. BANICA, A reconstruction result for the R-matrix quantizations of $SU(N)$, preprint 1998.

[5] T. BANICA, Symmetries of a generic coaction, Math. Ann. 314 (1999), 763-780.

[6] J. BARRETT, B. WESTBURY, Invariants of piecewise-linear 3-manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 348, No. 10 (1996), 3997-4022.

[7] J. BARRETT, B. WESTBURY, Spherical categories, Adv. Math. 143 (1999), 357-375.

[8] J. BENABOU, Introduction to bicategories, Lecture Notes in Math. 47, 1-77, Springer-Verlag, 1967.

[9] R. BERGER, M. DUBOIS-VIOLETTE, M. WAMBST, Homogeneous algebras, J. Algebra 261 (2003), 172-185.

[10] G.M. BERGMAN, The diamond lemma for ring theory, Adv. Math. 29 (1978), 178-218.

[11] J. BICHON, Mesure de Haar sur une algèbre de Hopf et groupes quantiques réels, Comm. Algebra 26, No.5 (1998), 1633-1649.

[12] J. BICHON, Galois reconstruction of finite quantum groups, J. Algebra 230 (2000), 683-693.

[13] J. BICHON, Quelques nouvelles déformations du groupe symétrique, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, 330, No.9 (2000), 761-764

[14] J. BICHON, Cosovereign Hopf algebras, J. Pure Appl. Algebra 157, No.2-3 (2001), 121-133.

[15] J. BICHON, Cosemisimple Hopf algebras with antipode of arbitrary finite order, New York J. Math. 8 (2002), 235-240.

[16] J. BICHON, Quantum automorphism groups of finite graphs, Proc. Amer. Math. Soc. 131(3) (2003), 665-673.

[17] J. BICHON, The representation category of the quantum group of a non-degenerate bilinear form, Comm. Algebra 31, No. 10 (2003), 4831-4851.

[18] J. BICHON, Hopf-Galois systems, J. Algebra 264 (2003), 565-581.

[19] J. BICHON, N-complexes et algèbres de Hopf, C. R. Acad. Sci. Paris 337 (2003), 441-444.

[20] J. BICHON, Free wreath product by the quantum permutation group, Algebr. Represent. Theory 7 (2004), 343-362

[21] J. BICHON, Free quantum analogues of the first fundamental theorems of invariant theory, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society 47 (2004), 293-303.

[22] J. BICHON, Corepresentation theory of universal cosovereign Hopf algebras, Preprint, 2002.

[23] J. BICHON, R. STREET, Militaru's D-equation in monoidal categories, Appl. Categ. Structures 11 (2003), 337-357.

[24] G. BÖHM, F. NILL, K. SZLACHANYI, Weak Hopf algebras I. Integral theory and C^*-structure, J. Algebra 221 (1999), 385-438.

[25] T. BRÖCKER T. T. DIECK, *Representations of compact Lie Groups*, GTM 98, Springer, 1985.

[26] A. BRUGUIÈRES, Dualité tannakienne pour les quasi-groupoïdes quantiques, Comm. Algebra 25, No.3 (1997), 737-767.

[27] P. DELIGNE, Catégories tannakiennes, in *The Grothendieck Festchrift*, Vol.II, 111-195, Birkhaüser, 1990.

[28] C. DE CONCINI, C. PROCESI, A characteristic free approach to invariant theory, Adv. Math. 21 (1976), 330-354.

[29] Y. DOI, Braided bialgebras and quadratic algebras, Comm. Algebra 21, No.5 (1993), 1731-1749.

[30] V.G. DRINFELD, Quantum groups, Proc. of the Int. Cong. Math., Berkeley 1986, Amer. Math. Soc., 1987, 798-820.

[31] V.G. DRINFELD, Quasi-Hopf algebras, Leningrad Math. J. 1, 1990, 1419-1457.

[32] M. DUBOIS-VIOLETTE, G. LAUNER, The quantum group of a non-degenerate bilinear form, Phys. Lett. B 245, No.2 (1990), 175-177.

[33] M. DUBOIS-VIOLETTE, Generalized differential spaces with $d^N = 0$ and the q-differential calculus, Czech J. Phys. 46 (1997) 1227-1233.

[34] M. DUBOIS-VIOLETTE, $d^N = 0$: generalized homology, K-Theory 14 (1998) 371-404.

[35] M. DUBOIS-VIOLETTE, Lectures on differentials, generalized differentials and on some examples related to theoretical physics, Contemp. Math. 204, 2002, 59-94.

[36] M. ENOCK, L. VAINERMAN, Deformation of a Kac algebra by an abelian subgroup, Comm. Math. Phys. 178 (1996), 571-596.

[37] P. ETINGOF, S. GELAKI, On finite-dimensional semisimple and cosemisimple Hopf algebras in positive characteristic, Int. Math. Res. Not. 16 (1998), 851-864.

[38] P. ETINGOF, S. GELAKI, On cotriangular Hopf algebras, Amer. J. Math 123, No. 4 (2001), 699-713.

[39] K.R. GOODEARL, T.H. LENAGAN, L. RIGAL, The first fundamental theorem of coinvariant theory for the quantum general linear group, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto 36 (2000), No.2, 269-296.

[40] A. GROTHENDIECK, "Revêtements étales et groupe fondamental", Lect. Notes in Math. 224, Springer-Verlag, 1971.

[41] D. GUREVICH, Algebraic aspects of the quantum Yang-Baxter equation, Leningrad Math. J. 2, No.4 (1991) 801-828.

[42] PHUNG HO HAI, On matrix quantum groups of type A_n, Intern. J. Math. 11, No.9 (2000), 1115-1146.

[43] A. JOYAL, R. STREET, An introduction to Tannaka duality and quantum groups, Lecture Notes in Math. 1488, pp 413-492, Springer, 1991.

[44] A. JOYAL, R. STREET, Braided tensor categories, Adv. Math. 102 (1993), 20-73.

[45] I. KAPLANSKY, Bialgebras, University of Chicago lecture notes, 1975.

[46] M.M. KAPRANOV, On the q-analog of homological algebra, preprint q-alg/9609012.

[47] C. KASSEL, *Quantum groups*, GTM 155, Springer, 1995.

[48] C. KASSEL, M. WAMBST, Algèbre homologique des N-complexes et homologie de Hochschild aux racines de l'unité, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto 34, 1998, 91-114.

[49] D. Kazhdan, H. Wenzl, Reconstructing monoidal categories, I.M. Gelfand Seminar, 111-136, Adv. Soviet Math. 16, Part 2, Amer. Math. Soc., 1993.

[50] A. Klimyk, K. Schmüdgen, *Quantum groups and their representations*, Texts and Monographs in Physics, Springer, 1997.

[51] P. Kondratowicz, P. Podleś, On representation theory of quantum $SL_q(2)$ at roots of unity, Banach Center Publ. 40 (1997), 223-248.

[52] H.F. Kreimer, M. Takeuchi, Hopf algebras and Galois extensions of an algebra, Indiana Univ. Math. J. 30 (1981), 675-692.

[53] R.G. Larson, Characters of Hopf algebras, J. Algebra 17 (1968), 352-368.

[54] R.G. Larson, D.E. Radford, Semisimple cosemisimple Hopf algebras, Amer. J. Math. 109 (1987), 187-195.

[55] R.G. Larson, D.E. Radford, Finite dimensional cosemisimple Hopf algebras in characteristic 0 are semisimple, J. Algebra 117 (1988), 267-289.

[56] R.G. Larson, M. Sweedler, An associative orthogonal bilinear form for Hopf algebras, Amer. J. Math. 91 (1969), 75-93.

[57] R.G. Larson, J. Towber, Two dual classes of bialgebras related to the concept of "quantum group" and "quantum Lie algebra", Comm. Algebra 19 (1991), 3295-3245.

[58] V. Linchenko, S. Montgomery, A Frobenius-Schur theorem for Hopf algebras, Algebr. Represent. Theory 3, No.4 (2000), 347-355.

[59] P. McCrudden, Categories of representations of coalgebroids, Thesis, Macquarie University, 1999.

[60] G. Maltsiniotis, Groupoïdes quantiques, C. R. Acad. Sci. Paris 314, série I (1992), 249-252.

[61] G. Maltsiniotis, Traces dans les catégories monoïdales, dualité et catégories monoïdales fibrées, Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques 36 (1995), 195-288.

[62] Y. Manin, *Quantum groups and noncommutative geometry*. Publications du CRM 1561, Univ. de Montréal, 1988.

[63] G. Militaru, The Long dimodules category and non-linear equations, Algebr. Represent. Theory 2 (1999), 177-200.

[64] G. Militaru, A class of non-symmetric solutions for the integrability condition of the Knizhnik-Zamolodchikov equation : a Hopf algebra approach, Comm. Algebra 27(5), 2393-2407, 1999.

[65] S. Montgomery, *Hopf algebras and their actions on rings*, Amer. Math. Soc., Providence, 1993.

[66] D. Nikshych, K_0-rings and twisting of finite dimensional semi-simple Hopf algebras, Comm. Algebra 26(1) (1998), 321-342.

[67] C. Ohn, Quantum $SL(3, \mathbb{C})$ with classical representation theory, J. Algebra 213, No.2 (1999), 721-756.

[68] B. Pareigis, A non-commutative non-cocommutative Hopf algebra in "nature", J. Algebra 70 (1981), 356-374.

[69] B. Pareigis, Non additive ring and module theory II. $\mathcal{C}$-categories, $\mathcal{C}$-functors and $\mathcal{C}$-morphisms. Publ. Math Debrecen 25 (1977) 351-361.

[70] B. Pareigis, Reconstruction of hidden symmetries, J. Algebra 183 (1996) 90-154.

[71] P. Podleś, E. Müller, Introduction to quantum groups, Rev. Math. Phys. 10 (1998), 511-551.

[72] D.E. Radford, The order of the antipode of a finite-dimensional Hopf algebra is finite, Amer. J. Math. 98 (1976), 333-355.

[73] D. Radford, Solutions to the quantum Yang-Baxter equation and the Drinfeld double, J. Algebra 161 (1993), 20-32.

[74] N. Yu Reshethikin, L.A. Takhtajan, L.D. Faddeev, Quantizations of Lie groups and Lie algebras, Leningrad Math. J. 1 (1990), 193-225.

[75] M. Rosso, Algèbres enveloppantes quantifiées, groupes quantiques compacts de matrices et calcul différentiel non commutatif, Duke Math. J. 61 (1990), 11-40.

[76] N. Saavedra Rivano, *Catégories tannakiennes*, Lecture Notes in Math. 265, Springer-Verlag, 1972.

[77] P. Schauenburg, *Tannaka duality for arbitrary Hopf algebras*, Algebra Berichte 66, Verlag Reinhard Fischer, Munich, 1992.

[78] P. Schauenburg, *On coquasitriangular Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation*, Algebra Berichte 67, Verlag Reinhard Fischer, Munich, 1992.

[79] P. Schauenburg, Hopf bigalois extensions, Comm. Algebra 24, No. 12 (1996), 3797-3825.

[80] E.J. Taft, The order of the antipode of finite-dimensional Hopf algebras, Proc. Nat. Acad of Sci. USA 68, No. 11 (1971), 2631-2633.

[81] M. Takeuchi, Free Hopf algebras generated by coalgebras, J. Math. Soc. Japan 23, No.4 (1971), 581-562.

[82] M. Takeuchi, Morita theorems for categories of comodules, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 24 (1977), 629-644.

[83] K.H. Ulbrich, Galois extensions as functors of comodules, Manuscripta Math. 59 (1987), 391–397.

[84] K.H. Ulbrich, Fibre functors on finite dimensional comodules, Manuscripta Math. 65 (1989), 39-46.

[85] K.H. Ulbrich, On Hopf algebras and rigid monoidal categories, Israel J. Math. 72 (1990), 252-256.

[86] A. Van Daele, S. Wang, Universal quantum groups, Intern. J. Math. 7 (1996), 255-263.

[87] S. Wang, Free products of compact quantum groups, Comm. Math. Phys. 167 (1995), 671-692.

[88] S. Wang, Quantum symmetry groups of finite spaces, Comm. Math. Phys. 195 (1998), 195-211.

[89] S. Wang, Structure and isomorphic classification of compact quantum groups $A_u(Q)$ and $B_u(Q)$, J. Oper. Theory 48, No. 3, suppl. (2002), 573-583.

[90] S.L. Woronowicz, Pseudospaces, pseudogroups and Pontryagin duality, Proc. of the Int. Conference on Math. Phys., Lausanne 1979, Lect. Notes in Phys. 116, Springer-Verlag, 1980, 407-412.

[91] S.L. Woronowicz, Compact matrix pseudogroups, Comm. Math. Phys. 111 (1987), 613–665.

[92] S.L. Woronowicz, Tannaka-Krein duality for compact matrix pseudogroups. Twisted $SU(N)$ groups, Invent. Math. 93 (1988), 35–76.

[93] S.L. WORONOWICZ, Compact quantum groups, in “Symétries quantiques” (Les Houches, 1995), North Holland, Amsterdam, 1998, 845-884.

[94] D.N. YETTER, Framed tangles and a theorem of Deligne on braided deformations of tannakian categories, in *Deformation theory and quantum groups with applications to mathematical physics*, Contemporary Mathematics 134, 325-345, American Mathematical Society, 1992.

Liste de travaux

Publications

13. Free quantum analogues of the first fundamental theorems of invariant theory.
Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society 47, ,297-303, 2004.

12. Free wreath product by the quantum permutation group.
Accepté dans : Algebras and representation theory, le 21/05/2003.

11. N-complexes et algèbres de Hopf.
Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 337, 441-444, 2003.

10. Hopf-Galois systems.
Journal of Algebra 264, 565-581, 2003.

9. The representation category of the quantum group of a non-degenerate bilinear form.
Communications in Algebra 31 (10), 4831-4851, 2003.

8. Militaru's D-equation in monoidal categories (avec R. Street).
Applied categorical structures 11 (4), 337-357, 2003.

7. Quantum automorphism groups of finite graphs.
Proceedings of the American Mathematical Society 131 (3), 665-673, 2003.

6. Cosemisimple Hopf algebras with antipode of arbitrary finite order.
New-York Journal of Mathematics 8, 235-240, 2002.

5. Cosovereign Hopf algebras.
Journal of Pure and Applied Algebra 157(2-3), 121-133, 2001.

4. Quelques nouvelles déformations du groupe symétrique.
Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 330 (9), 761-764, 2000.

3. Galois reconstruction of finite quantum groups.
Journal of Algebra 230, 683-693, 2000.

2. Trivialisations dans les catégories tannakiennes. (*)
Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques 39 (4), 243-270, 1998.

1. Mesure de Haar sur une algèbre de Hopf et groupes quantiques réels. (*)
Communications in Algebra 26 (5), 1633-1649, 1998.

(*) Publications extraites de ma thèse de doctorat (1997).

Prépublication

- Corepresentation theory of universal cosovereign Hopf algebras.
Prépublication du Laboratoire de mathématiques appliquées de Pau, 2002-13.
soumis à : International Journal of Mathematics (novembre 2002).