



HAL
open science

Cordes et champs antisymétriques dans des espaces-temps courbes

Pedro Bordalo

► **To cite this version:**

Pedro Bordalo. Cordes et champs antisymétriques dans des espaces-temps courbes. Physique mathématique [math-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2004. Français. NNT: . tel-00008396

HAL Id: tel-00008396

<https://theses.hal.science/tel-00008396>

Submitted on 8 Feb 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LABORATOIRE DE PHYSIQUE THÉORIQUE ET HAUTES ÉNERGIES

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI

Spécialité : **PHYSIQUE THÉORIQUE**

présentée par

Pedro Maria DA COSTA SANTOS BORDALO

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris VI

Sujet :

*Cordes et champs antisymétriques
dans des espaces-temps courbes*

Soutenue le 30 septembre 2004 devant le jury composé de :

MM. Costas Bachas,
Laurent Baulieu, directeur de thèse,
Ruben Minasian, rapporteur,
Volker Schomerus,
Christoph Schweigert,
& Paul Windey.

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier Laurent Baulieu de m'avoir reçu dans le Laboratoire qu'il dirige pour que je puisse y mener mes travaux de recherche. Je lui suis très reconnaissant, ainsi qu'à Christoph Schweigert, d'avoir accepté de diriger ma thèse à différents moments.

Je remercie vivement les rapporteurs, Ruben Minasian et Augusto Sagnotti, d'avoir accepté de lire ce mémoire ainsi qu'aux membres du jury de leur intérêt pour cette thèse.

Je suis également reconnaissant aux personnes avec qui j'ai pu discuter, et même collaborer au cours de cette thèse, notamment Giuseppe d'Appollonio, Lorenzo Cornalba, Nicolas Couchoud, Kevin Graham, Dan Israel, Boris Pioline, Sylvain Ribault, Ingo Runkel, Raoul Santachiara, Ricardo Schiappa, et Albrecht Wurtz. Je voudrais remercier tout particulièrement Sylvain Ribault pour nos discussions et ses encouragements.

Je remercie aussi tous les membres du LPTHE de m'avoir accueilli, notamment Bruno Machet et Olivier Babelon, et aussi Marco Picco et Marc Bellon qui ont bien voulu me donner leurs avis sur cette thèse. Je voudrais aussi mentionner le soutien de Marie-Christine Lévy-Noël, Sylvie Dalla-Foglia, Annie Richard et Denis Bernia qui ont bien géré toutes les complications administratives survenues.

Enfin, je suis heureux de remercier ma famille, mes amis et bien spécialement Ana pour m'avoir soutenu dans cette entreprise.

Si le Tout-Puissant m'avait consulté
avant d'embarquer dans la Création,
j'aurais recommandé quelque chose de plus simple.

Attribué à Alphonso X, Le Sage
(Roi de Castille, 1226-1284)

Introduction

Le but de cette thèse est d'étudier les théories des champs conformes à deux dimensions et leur interprétation géométrique. Les travaux présentés sont motivés par la théorie des cordes dans des espaces-temps courbes et y trouvent leur application.

Pourquoi les cordes : Le siècle dernier nous a légué une description de la Physique basée sur deux piliers complémentaires et cependant incompatibles. D'un côté, la relativité générale qui décrit l'interaction gravitationnelle à l'aide d'une théorie classique pour les champs de la matière et de la métrique sur un espace-temps. De l'autre côté, le modèle standard qui décrit les interactions fortes et électrofaibles à l'aide des théories quantiques des champs de jauge comme le photon, mais où l'espace-temps et sa métrique sont fixés. Dans les deux cas, ces théories sont en excellent accord avec les expériences dans leurs domaines d'application, qui sont hélas disjoints : respectivement, le très grand et peu énergétique pour la relativité et le très petit et très énergétique pour le modèle standard. Cependant, il existe même dans l'univers actuel des objets très denses qui nécessitent une théorie quantique de la gravitation – les trous noirs. Idéalement, une théorie quantique de la gravitation unifiera la relativité générale et le modèle standard, qui serviront de phares dans la recherche de cette théorie fondamentale de la Nature.

La relativité générale n'est pourtant pas directement quantifiable ; la raison vient du fait que les interactions quantiques entre deux points de l'espace-temps divergeraient à très courtes distances, échappant à toute régularisation (contrairement au modèle standard où ces divergences peuvent être régularisées). La quantification de la gravitation semble en effet prôner l'introduction d'une distance minimale entre les points de l' "espace", ce qui n'est pas compatible avec une théorie de la géométrie de l'espace, comme l'est la relativité générale. Une façon d'introduire cette taille minimale est de prendre pour objets fondamentaux de la théorie, non pas des particules ponctuelles, mais des cordes ayant une certaine longueur.

La théorie des cordes est donc un essai d'unification de l'interaction gravitationnelle et des interactions de jauge, dans le sens où elle prétend décrire, dans une certaine approximation, la gravitation et les autres interactions. Il s'avère que, comme nous le verrons dans le chapitre 1, sa dynamique est dictée par la théorie des champs qui décrit le plongement de la corde dans l'espace. Il s'agit d'une théorie des champs à deux dimensions sur la surface bidimensionnelle balayée par la corde, dite sa surface d'univers. Le pas suivant est donc de quantifier ce système, ce qui mène à des théories quantiques conformes à deux dimensions.

L'image de la corde va néanmoins beaucoup plus loin. Elle nous permet de penser tout de suite à des cordes fermées (comme des cercles) ou ouvertes (comme des bouts de ficelle), ainsi qu'à des processus dynamiques reliant les deux. En particulier, toute interaction entre cordes est facilement visualisée en termes des surfaces d'univers se rejoignant et se séparant, généralisant les diagrammes de Feynman. Ceci permet une approche perturbative à la théorie des cordes en "deuxième quantification" : pour prendre en compte toutes les auto-interactions des cordes, la perturbation se fait dans le nombre de boucles de cordes (plus précisément dans la caractéristique d'Euler des surfaces d'univers) ce qui oblige à considérer des surfaces d'univers avec toute sorte de topologies. Cependant, il est clair de par cette image qu'il existe une interaction "de base", soit l'interaction à trois cordes. En plus, et contrairement à la particule ponctuelle, la corde étant unidimensionnelle est sensible à la topologie de l'espace – elle peut notamment s'enrouler, décrire des noeuds, etc. L'utilité de cette image est que tous ces faits intuitifs sont formalisés par les théories conformes définies sur la surface d'univers.

Les propriétés des théories conformes des champs à deux dimensions font de cette formulation perturbative de la théorie des cordes un formalisme plein de mérites pour

un physicien théoricien. La symétrie conforme contraint fortement l'espace-cible du modèle sigma, en fixant notamment sa dimension (à $D = 10$ si la théorie est supersymétrique et $D = 26$ si la théorie n'a pas de fermions), et y impose dans l'approximation appropriée la relativité générale. Si une corde est ouverte, ses extrémités sont confinées à des sous-variétés de l'espace-temps – les D-branes – qui sont, tout comme les cordes, des objets dynamiques de la théorie. Sur les D-branes sont définis des champs de jauge qui généralisent ceux du modèle standard, par exemple le champ électromagnétique. En effet, il existe cinq théories des cordes différentes à dix dimensions, qui sont reliées entre elles par des relations appelées dualités. Certaines de ces dualités peuvent être décrites au sein des théories conformes, et se traduisent par des transformations des cordes, des D-branes et des champs d'espace-temps. Dans cette thèse, il nous suffira de souligner qu'il existe dans ce sens une unique théorie des cordes à dix dimensions, et nous nous intéresserons seulement à son secteur bosonique.

Compactifications et dynamique : La théorie des cordes n'arrive pas pour autant à prédire le modèle standard, ni explicitement ni de manière unique. Comme nous l'avons mentionné, la taille des cordes a une borne supérieure, la longueur de Planck ; ceci permet de compactifier l'espace-temps dans des dimensions ayant cette longueur pour taille minimale, pour réduire le nombre de dimensions (presque) plates de 10 aux 3+1 dimensions observées. Or la symétrie conforme, ayant fixé la dimension de l'espace-temps à $D = 10$, impose aussi des contraintes importantes à ces compactifications. Si la forme exacte de ces contraintes n'est pas connue en toute généralité, beaucoup de familles de solutions ont néanmoins été trouvées, notamment les compactifications sur des tores ou sur des variétés de groupes, les modèles dits de Wess, Zumino et Witten. Dans chacune de ces solutions, une multitude de configurations de D-branes est possible. À l'échelle de (basses) énergies typiques du modèle standard, ces configurations de D-branes mènent à autant de théories des champs différentes dans l'espace-temps. Ceci rend impossible en pratique sinon en principe de chercher au cas par cas la bonne compactification, qui décrirait l'univers observé. Il est donc mieux de chercher plutôt un principe pour cette sélection. Pour acquérir une meilleure compréhension de ce problème, il est néanmoins utile de comprendre un grand nombre de compactifications possibles, et d'enquêter sur les transitions possibles entre diverses compactifications.

Il faut donc considérer les cordes dans des espaces courbes (le cas de l'espace plat étant résolu et ayant moins d'intérêt du point de vue phénoménologique ou pour les théories conformes elles-mêmes). Au-delà de la métrique, qui est un tenseur symétrique

à deux indices $g_{\mu\nu}$, la symétrie conforme du modèle sigma implique alors l'existence d'autres champs d'espace-temps comme un champ antisymétrique à trois indices, $H_{\mu\nu\sigma}$. Ces compactifications sont alors définies non seulement par la géométrie de l'espace-temps mais aussi par les champs antisymétriques sur l'espace-temps et sur les éventuelles D-branes. Les champs antisymétriques étant étroitement liés à la topologie de l'espace, un riche éventail d'interactions entre des aspects mathématiques de ces compactifications et la théorie des cordes est ainsi assuré.

Cette formulation perturbative de la théorie des cordes spécifie donc au départ la configuration classique de ces champs d'espace-temps. Pourtant, une théorie de la gravitation quantique devrait par elle-même produire la dynamique qui, aux énergies typiques du modèle standard, sélectionne la compactification observée. Pour étudier cette dynamique, il est important de rappeler que la notion d'espace-temps continu est incompatible avec la nature quantique des champs physiques, et doit donc émerger en tant que concept effectif à basse énergie, c'est-à-dire dans la limite classique des modèles sigma. Au niveau quantique, nous devons cependant nous attendre à des phénomènes comme l'effet tunnel, décrivant des transitions quantiques entre différents espaces. L'étude de ces transitions est le sujet de la théorie des champs de cordes ; de ce point de vue, il est important de mieux connaître et les espaces de compactification possibles, et les transitions possibles entre ces espaces. Des progrès peuvent être faits en considérant des cordes et des branes dans des espaces-temps courbes.

Plan de cette thèse : Les travaux présentés dans cette thèse portent sur le rôle des champs antisymétriques dans des espaces courbes et leur origine dans les théories conformes sur les surfaces d'univers. Ce programme admet naturellement deux approches complémentaires, l'une qui cherche à classifier les configurations de champs possibles à l'aide des théories conformes exactes, et l'autre qui cherche à étudier la dynamique de ces champs en déterminant avec précision les contraintes venues de la symétrie conforme sur la surface d'univers.

Cette thèse présente des contributions dans ces deux directions de recherche, dont les bases sont présentées dans un premier chapitre introductif. Nous y introduisons les modèles sigma non-linéaires, qui décrivent le plongement de la corde dans un espace cible, et rappelons la symétrie conforme du système, ainsi que l'anomalie de Weyl. Nous rappelons aussi comment l'invariance d'échelle du système permet de dériver des actions effectives pour les champs d'espace temps. Ces concepts seront présents dans l'ensemble de la thèse.

La suite de l'exposé se concentre d'abord sur l'étude des théories conformes à deux dimensions et leur interprétation géométrique en termes de cordes dans des espaces courbes. Dans le chapitre 2 la construction algébrique des théories conformes rationnelles (qui y est rappelée) sera mise en oeuvre pour construire des familles de modèles particulièrement intéressants. Il s'agit de modèles dont la limite semi-classique est bien définie et qui doivent donc avoir une description en termes de modèles-sigma. Nous montrons ainsi comment construire des théories conformes dont les espaces cibles sont des quotients généraux de variétés de groupes compacts par des sous-groupes abéliens finis. Cette construction est très générale et nous explorons l'intérêt du cas particulier des quotients de $SU(2)$ pour la théorie des cordes. Certains modèles correspondent à des quotients avec des singularités ; toutefois, dans le cas général où les quotients sont réguliers, leur riche topologie nous oblige à mieux définir le modèle sigma, car les subtilités de la définition des champs antisymétriques jouent un rôle fondamental. Ceci généralise aux espaces-cibles courbes la torsion discrète de Vafa.

Ces aspects topologiques sont aussi essentiels pour le cas des cordes ouvertes, explorées dans le chapitre 3. Cette fois-ci il s'agit d'étudier les D-branes, et les champs de jauge définis sur elles, dans les modèles construits dans le chapitre précédent. Nous commençons par le cas le plus simple des variétés de groupe, où les états de bord sont bien compris et leur géométrie connue. Nous proposons une forme générale pour le champ électromagnétique F sur les D-branes ; à l'aide de l'action effective de Born-Infeld nous étudions leur la position (quantifiée), leur stabilité et leur spectre. Il s'avère alors que ces résultats sont en accord avec la théorie conforme exacte. Forts de ces résultats, nous considérons les D-branes dans les quotients de groupes, où nous trouvons des D-branes plus générales que celles étudiées précédemment. En particulier, les états de bord construits dans la formulation algébrique incluent des D-branes dites fractionnaires, dont nous étudions la géométrie et les propriétés de l'action effective. Ces D-branes apparaissent en groupes qui partagent la même géométrie ; toutefois elles sont différentiables par leurs différents champs antisymétriques. Finalement, nous utilisons le fait que certaines de nos théories sont liées par la dualité T pour y construire un autre type de D-branes, dites de type B. Comme nous le montrons, ces D-branes ont des propriétés très différentes de celles déjà considérées, notamment elles peuvent avoir des bords et la même dimension que l'espace cible. Leur étude en termes d'une théorie effective de l'espace-temps est donc problématique. Il est alors temps de reconsidérer l'action effective d'espace temps.

Dans le chapitre 4 nous quittons donc les théories conformes exactes au profit des actions effectives, le but étant de considérer des D-branes de dimension maximale dans un espace courbe général. La stratégie est de calculer les contraintes imposées par l'invariance d'échelle sur le champ électromagnétique F sur une telle D-brane, c'est-à-dire la fonction β_F , au deuxième ordre dans la théorie de perturbations. Nous développons la méthode générale et présentons le résultat dans le cas où l'espace cible est parallélisable (ce qui est le cas des groupes et de leurs quotients). L'importance de ce résultat réside dans le fait qu'il est valable à tous les ordres en F . En prenant la limite F grand les bords des cordes deviennent coincés sur des points de la D-brane, soit sur des D0-branes. Or, en prenant la limite F grand de la fonction β_F , nous trouvons les équations du mouvement de ces D0-branes, ce qui munit la D-brane d'une structure non-commutative. En particulier, nous pourrions ainsi déterminer les premières corrections à l'effet diélectrique dues à une courbure non-négligeable de l'espace-cible.

Le chapitre 5 contient les conclusions et précise quelques directions futures de recherche ouvertes par les travaux présentés dans cette thèse.

Le travail de thèse présenté dans ce mémoire a donné lieu aux publications suivantes :

- [BorRS01] Pedro Bordalo, Sylvain Ribault, Christoph Schweigert, *Flux stabilization in compact groups*, JHEP **10** (2001), 036.
- [BorW03] Pedro Bordalo, Albrecht Wurtz, *D-branes in lens spaces*, Phys.Lett.**B568** (2003) 270.
- [Bor03] Pedro Bordalo, *Discrete Torsion and WZW orbifolds*, Phys.Lett.**B582** (2004) 86.
- [BorCS04] Pedro Bordalo, Lorenzo Cornalba, Ricardo Schiappa, *Towards Quantum Dielectric Branes : Curvature Corrections in Abelian Beta Function and Nonabelian Born-Infeld Action*, hep-th/0409017

Table des matières

1	Des théories conformes à la théorie des cordes	13
1.1	Les modèles sigma non-linéaires	14
1.1.1	L'invariance conforme	17
1.1.2	Spectre et fonctions de partition	20
1.1.3	Cordes fermées, cordes ouvertes	21
1.2	Des cordes dans l'espace-temps	23
1.2.1	Compactifications et Dualités	25
1.2.2	D-branes	27
1.3	Dynamique des cordes et renormalisation	29
1.3.1	L'action de Born-Infeld	31
1.3.2	D-branes non-commutatives	33
1.4	Commentaires finaux	35
2	Champ H et cordes fermées dans des espaces compacts	37
2.1	Modèles sigma sur des espaces courbes	38
2.1.1	Les modèles sur les variétés de groupes	38
2.1.2	Les modèles sur des espaces courbes généraux	44
2.2	Fonctions de partition et torsion discrète	48
2.2.1	Fonctions de partition et courants simples	48
2.2.2	Groupes, espaces quotients et torsion discrète	52
2.3	Les quotients G/Γ des variétés de groupe	55
2.3.1	La géométrie de la torsion discrète	58
3	Champ F et cordes ouvertes dans des espaces compacts	65
3.1	Modèle sigma de corde ouverte	66
3.2	Cordes ouvertes dans les variétés de groupes	68
3.3	États de bord et torsion discrète	70

3.3.1	États de bord du type courants simples	73
3.3.2	États de bord dans les quotients de groupes	74
3.4	A-branes, B-branes et branes fractionnaires dans G/Γ	79
3.5	Action de Born-Infeld et stabilisation par le flux de F	82
3.5.1	Les solutions classiques et la quantification de F	84
4	Champs F, H et les cordes dans des espaces courbes généraux	89
4.1	Théorie de perturbations sur la surface d'univers	92
4.1.1	Le propagateur	93
4.1.2	Les vertex	95
4.1.3	Les diagrammes	97
4.1.4	La méthode de calcul	98
4.2	La fonction bêta à deux boucles	106
4.2.1	Le calcul des diagrammes	107
4.2.2	La fonction $\beta_\mu^{\mathcal{F}}$ à deux boucles – termes de courbure	110
4.3	Champs antisymétriques et géométrie non-commutative	112
4.3.1	Action de Born-Infeld non-abelienne	112
4.3.2	Classification des corrections de courbure	114
5	Conclusions et perspectives	119
A	Flux stabilization in compact groups	127
B	D-branes in lens spaces	143
C	Discrete Torsion and WZW orbifolds	159
D	Towards Quantum Dielectric Branes	173

Chapitre 1

Des théories conformes à la théorie des cordes

Les théories quantiques bidimensionnelles des champs avec symétrie conforme, ou théories conformes en bref, sont étudiées intensivement depuis plus de vingt ans. L'émergence de ces théories est liée au domaine de la physique statistique, où des théories conformes sont utilisées pour décrire des systèmes physiques à deux dimensions dans leurs points critiques. Il s'agit de systèmes dont les fonctions de corrélation sont covariantes sous des transformations de coordonnées $x^a \rightarrow y^a(x)$ dont l'effet sur la métrique est un changement local d'échelle

$$\gamma_{ab}(\vec{x}) \rightarrow \gamma_{ab}(\vec{y}) = e^{\sigma(\vec{x})} \gamma_{ab}(\vec{x}) \quad (1.0.1)$$

Ces reparamétrisations, des difféomorphismes qui préservent les angles et donc partiellement les formes sur la surface où le système est défini, sont appelées les *transformations conformes*.

À deux dimensions, il existe une infinité de générateurs de telles transformations, ce qui contraint les théories conformes de telle sorte qu'elles sont exactement solubles. Ce fait est à la base de l'utilité des théories conformes bidimensionnelles en physique et de l'intérêt qui leur est porté par les mathématiciens. En effet, les théories conformes permettent de décrire des phénomènes critiques en physique statistique, mais aussi des systèmes quantiques en 1+1 dimensions (l'effet Hall quantique fractionnaire et l'effet Kondo); elles sont aussi liés à des sujets mathématiques comme la théorie des noeuds (théories topologiques, donc invariantes conformes) ou encore, comme nous le verrons dans cette thèse, à la géométrie non-commutative.

Toutefois, l'intérêt majeur des théories conformes bidimensionnelles est pour nous

leur rôle dans la formulation perturbative de la théorie des cordes ; dans ce cas, loin d'être vérifiée "expérimentalement", la symétrie conforme est un prérequis à la cohérence même de cette formulation de la théorie. Elle n'en est pas moins riche en conséquences, et est largement à l'origine de notre compréhension de la physique des cordes. Dans ce premier chapitre nous rappelons des aspects des théories conformes bi-dimensionnelles pertinants pour les travaux de cette thèse, en particulier leur rôle dans la formulation perturbative des théories des cordes.

Notre exposé se centrera notamment sur la limite classique de certaines théories conformes et sur son interprétation géométrique. Nous commencerons donc par étudier la symétrie conforme dans des théories classiques des champs, suivi par les théories quantiques dont nous analyserons les spectres. La deuxième partie du chapitre décrit l'interprétation géométrique de ces théories, ainsi que certaines de ses conséquences comme la nécessité de la compactification et l'émergence des D-branes. Le chapitre finit avec quelques remarques sur le lien entre la renormalisation des théories à deux dimensions et la dynamique de la théorie des cordes.

Finalement, un mot sur les références. Les sujets traités dans ce chapitre sont bien documentés ; une introduction exhaustive aux théories conformes, avec références et notes historiques, peut être trouvée dans le livre de Di Francesco et collaborateurs [DiF96]. Le lien avec la théorie des cordes est traité par exemple dans le livre de Polchinski [Pol98]. Pour certains résultats moins standard ou plus récents, nous référons aux articles originaux.

1.1 Les modèles sigma non-linéaires

Nous commençons par l'étude d'une corde test qui se propage dans l'espace-temps. Si les cordes doivent être les objets fondamentaux de notre théorie, elles se doivent d'être compatibles avec et la relativité générale et le modèle standard. De la compatibilité avec la relativité générale à 4 dimensions, nous apprenons que les cordes doivent avoir une masse de l'ordre de la masse de Planck, $M_P = 1.22 \times 10^{19} \text{GeV}$,^{†1} soit en d'autres mots être très petites, de l'ordre de la longueur de Planck $L_P = 1.6 \times 10^{-33} \text{cm}$.^{†2}

Ceci nous assure d'abord que les cordes ne sont pas visibles à l'oeil nu, mais surtout

^{†1}Nous utilisons des unités telles que $\hbar = 1$, $c = 1$.

^{†2}Ceci s'applique aux seules cordes fermées dont le spectre inclut le graviton. Des solutions de cordes "macroscopiques" peuvent aussi être utiles [BraVa89].

qu'il existe un hiatus assez large entre les énergies typiques du modèle standard (de l'ordre de 10^3GeV) et celles des cordes. Malheureusement, cela veut aussi dire que les effets typiques des cordes sont pour l'instant hors de portée expérimentale et renforce notre motivation d'explorer les phénomènes de "basse énergie" (basse par rapport à l'échelle des cordes), dont l'interprétation géométrique de l'espace-temps. Finalement, notons que cette longueur des cordes, notée ℓ_s , est en quelque sorte la longueur minimale de notre théorie, au dessous de laquelle il n'a plus de sens de parler de géométrie. Ceci est en fait un prérequis pour une théorie de la gravitation quantique.

Au cours du temps la corde balaye une surface bidimensionnelle Σ , appelée la surface d'univers. Cette surface peut se "coupler" à des champs d'espace-temps à deux indices, tels que la métrique $g_{\mu\nu}$. Pour étudier les propriétés de ces espace-temps, il est utile d'y étudier la propagation des cordes en négligeant l'effet que le passage de celles-ci produit sur l'espace ambiant (par exemple en le courbant). En d'autres mots, nous souhaitons considérer les cordes comme des "particules test", ce qui implique que la constante de couplage de la théorie, dénotée g_s , soit très faible (nous serons plus précis sur ce point plus bas).

La dynamique de la corde test est donnée en termes de son plongement $X^\mu(\sigma^i)$ dans l'espace-temps, où σ^i sont des coordonnées sur Σ . L'action qui décrit le plongement dépend alors des champs scalaires $X^\mu(\sigma^i)$ et d'une métrique $\gamma_{ab}(\sigma^i)$ sur Σ . En tant que fonctionnelle génératrice d'observables physiques, l'action doit réaliser le principe d'équivalence, c'est-à-dire qu'elle doit être invariante sous des reparamétrisations locales de l'espace-temps. Ceci pose des restrictions à sa forme ; en particulier le lagrangien doit être un scalaire que ce soit du point de vue de l'espace-temps ou du point de vue de la surface d'univers. Si l'on demande en plus que l'action soit invariante sous le groupe de transformations de Poincaré dans l'espace-temps, on aboutit au *modèle sigma non-linéaire*, aussi dit action de Polyakov

$$S_P(X^\mu, \gamma_{ij}) = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma^i \sqrt{-\det \gamma} (\gamma^{ij} g_{\mu\nu}(X) + \epsilon^{ij} B_{\mu\nu}(X)) \partial_i X^\mu \partial_j X^\nu + \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma^i \sqrt{-\det \gamma} \Phi(X) R^{(2)}(\gamma) \quad (1.1.2)$$

Le modèle a un seul paramètre libre, α' , qui par analyse dimensionnelle vérifie $\alpha' \sim \ell_s^2$. Nous avons introduit ici d'autres champs d'espace-temps, un champ antisymétrique $B_{\mu\nu}(X)$ (i.e. une forme de rang deux que l'on suppose fermée pour le moment) et un champ scalaire $\Phi(X)$ nommé le dilaton. Ces champs apparaissent dans une extension

de la relativité générale, la *supergravité* (qui en est en fait la seule extension possible) et il est tout à fait naturel de les inclure ici.

L'action S_P mérite plusieurs remarques. L'action S_P définit un modèle non-linéaire à cause de la dépendance des "couplages" g , B et Φ des champs de "position" X^μ . Pour des champs B , Φ nuls, l'action S_P mesure la surface balayée par la corde, et en ce sens c'est la généralisation directe à deux dimensions de l'action qui décrit la trajectoire d'une particule test qui se déplace dans un espace-temps donné. En présence du champ B , cependant, la surface balayée par la corde est mesurée avec la métrique dotée d'une connexion Γ^B avec un terme de torsion d'espace-temps

$$\Gamma_{\mu\nu}^{B,\gamma} = \Gamma_{\mu\nu}^\gamma - \frac{1}{2} (\nabla B)_{\mu\nu}^\gamma \quad (1.1.3)$$

Le dilaton, par contre, est couplé à la courbure intrinsèque $R^{(2)}(\gamma)$ de la surface Σ . Ce terme est donc lié à la topologie de Σ ; en particulier quand le dilaton est constant, ce terme en mesure la caractéristique d'Euler χ

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma^i \sqrt{-\det \gamma} R^{(2)}(\gamma) \quad (1.1.4)$$

Dans l'intégrale de chemin, le dilaton définit les poids relatifs des interactions des cordes à différentes topologies : il est relié à la constante de couplage des cordes par $g_s = e^\Phi$. Dans notre régime de cordes test nous négligerons le dilaton dans la suite.

Nous avons aussi supposé que la surface d'univers Σ est orientée (et sans bord). Des surfaces non-orientables jouent aussi un rôle dans la théorie des cordes et sont intéressantes du point de vue de la théorie conforme, mais ne sont pas du domaine de cette thèse. Par contre, les surfaces avec bord, qui décrivent la propagation des cordes ouvertes, seront le sujet du chapitre 3 (avec une introduction dans la section 1.1.3).

Dans ce qui suit, nous supposerons aussi que la métrique γ est euclidienne, et non pas minkowskienne comme nos motivations physiques (et ces formules) peuvent laisser supposer. Les raisons sont techniques : les théories conformes sont développées pour des surfaces euclidiennes et en particulier la seule variété de Riemann compacte qui admette une métrique minkowskienne est le tore [BE81]. En tout cas, la théorie des cordes résultante (qui implique l'intégration fonctionnelle sur l'espace des métriques) est censée être équivalente [Pol98].

D'autres tenseurs antisymétriques d'espace-temps peuvent aussi apparaître dans les théories de supergravité, par exemple quand le champ B n'est pas fermé $dB = H$; c'est

le cas des espaces-temps courbes, qui nous intéresseront tout au long de la thèse. Il existe aussi d'autres champs de degré plus élevé (que 3), par exemple les champs dits de Ramon-Ramond, qui n'ont aucun couplage naturel à la surface d'univers Σ . Toutefois, ces champs peuvent être considérés nuls sans incohérence ; c'est le cas de la théorie des cordes bosoniques, qui est le domaine de cette thèse.

1.1.1 L'invariance conforme

Il est facile de constater que l'action S_P est invariante par la transformation dynamique (1.0.1), dite de Weyl, de la métrique. Nous rappelons maintenant comment ce fait collabore avec la symétrie par reparamétrisations de la surface d'univers pour que le modèle sigma soit classiquement invariant par des transformations conformes, et ceci pour toute valeur des couplages g, B, Φ .

Les difféomorphismes (reparamétrisations) sur la surface d'univers éliminent deux degrés de liberté du système, et permettent de choisir des coordonnées τ, σ (appelées isothermales) sur Σ telles que la métrique soit de la forme $\gamma_{ab}(\sigma^i) = e^{\omega(\sigma^i)} \delta_{ab}$. La symétrie de Weyl implique que cette métrique est équivalente à la métrique δ_{ab} , et n'est plus un champ dynamique de l'action. Il nous reste alors les champs scalaires $X^\mu(\sigma^i)$ qui décrivent le plongement de la surface d'univers dans l'espace cible. Nous avons cependant une symétrie résiduelle qui consiste dans les difféomorphismes qui préservent la métrique à un facteur d'échelle près, c'est-à-dire les transformations conformes sur Σ . Nous aboutissons donc à une théorie de champs scalaires avec invariance conforme. Ainsi au niveau classique, et à deux dimensions, l'invariance par reparamétrisation et l'invariance de Weyl impliquent l'invariance conforme. Par contre, au niveau quantique l'invariance conforme sera formulée à partir de l'*algèbre de Virasoro* (1.1.9) dont la réalisation ne connaît pas toujours de limite classique. Surtout, la symétrie conforme imposera des contraintes sur les "couplages" g, B et Φ . Ainsi, même si notre corde test ne change pas les champs d'espace-temps, son existence implique des contraintes fortes sur ces derniers, comme nous le verrons dans la section 1.2, .

Pour introduire le formalisme d'opérateurs, nous considérons le tenseur d'énergie-impulsion qui mesure la dépendance du système par rapport à des variations de la métrique,^{‡3}

$$T^{ab}(\vec{x}) = -2 \frac{\delta S}{\delta \gamma_{ab}(\vec{x})} \quad (1.1.5)$$

^{‡3}Dorénavant, nous écrirons S pour l'action de Polyakov.

Les équations de mouvement impliquent que $T_{ab} = 0$, et en plus le système est invariant par des transformations de Weyl (1.0.1) si et seulement si la trace T_a^a vaut zéro. Il est maintenant utile d'introduire des coordonnées $z = \sigma + i\tau$ et $\bar{z} = \sigma - i\tau$, dans lesquelles la trace s'écrit $2T_{z\bar{z}}$. Les deux composantes non-nulles $T = T_{zz}$ et $\bar{T} = T_{\bar{z}\bar{z}}$ sont contraintes par la conservation du tenseur énergie-impulsion, $\partial T = 0$ et $\bar{\partial}\bar{T} = 0$. La symétrie conforme est donc associée à une infinité de courants conservés, à savoir les modes L_n du tenseur holomorphe $T(z)$

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z^{n+2}} L_n \quad (1.1.6)$$

et les \bar{L}_n du tenseur antiholomorphe $\bar{T}(\bar{z})$.^{†4} L'algèbre engendrée par les L_n peut être calculée dans le cas d'un espace cible plat. En effet, les coordonnées z, \bar{z} réalisent les deux structures complexes de la surface Σ , et les générateurs L_n (respectivement \bar{L}_n) agissent comme des générateurs de transformations holomorphes (respectivement antiholomorphes) sur les champs scalaires,

$$L_m = -z^{m+1} \partial, \quad \bar{L}_m = -\bar{z}^{m+1} \bar{\partial}, \quad \text{avec } m \in \mathbb{Z} \quad (1.1.7)$$

Alors les L_m vérifient les relations de commutation

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} \quad (1.1.8)$$

qui définissent l'algèbre de Wit. Cette algèbre n'admet pas de représentations irréductibles de plus haut poids, et il n'y a donc pas d'intérêt de la promouvoir telle quelle comme l'algèbre de symétrie d'une théorie quantique. Cependant, la quantification canonique de la théorie apporte des changements cruciaux à cette situation.

La symétrie conforme au niveau quantique. Toujours dans le cas plat, après quantification canonique, les courants L_m vérifient une version étendue de l'algèbre de Wit, à savoir l'algèbre *Vir* de Virasoro

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12} m(m^2 - 1) \delta_{m+n} \quad (1.1.9)$$

Le symbole c est un générateur central de l'algèbre, que par abus de notation nous identifierons toujours avec sa valeur (un nombre réel appelé la *charge centrale*) dans la représentation concernée. Une valeur non-nulle de la charge centrale implique une

^{†4}Nous avons choisi de développer T autour de $z = 0$; en quantification radiale, ceci correspond à localiser l'état initial à $z = 0$.

brisure "douce" de l'invariance de Weyl, dans le sens où $T_a^a = \frac{c}{12}R^{(2)}$, où $R^{(2)}$ est la courbure intrinsèque de Σ . Nous prendrons toujours des algèbres de symétrie gauche et droite isomorphes, ce qui impliquera en pratique que $c = \bar{c}$.^{‡5} Cette brisure douce, appelé aussi anomalie de Weyl, ne peut être conservée dans la théorie des cordes complète à cause des interactions, et nous verrons dans la section 1.2 comment l'éviter sans retomber sur les problèmes posés par l'algèbre de Wit.

L'algèbre de symétrie de Virasoro est la structure fondamentale des théories conformes. Ici nous l'avons dérivée à partir de certaines reparamétrisations de notre modèle sigma non-linéaire avec espace-cible plat, mais l'algèbre apparaît aussi dans des systèmes statistiques classiques (le modèle d'Ising et autres modèles statistiques) où il n'y a pas de surface d'univers ; et dans la section 1.2.1 nous trouverons Vir à partir d'une algèbre de courants correspondant à des isométries sur une variété de groupe. Contrairement à l'algèbre de Wit, Vir a une riche structure de représentations que nous rappelons ici brièvement. Les représentations irréductibles de plus haut poids sont définies par deux valeurs, la charge centrale c et la valeur propre sous le générateur L_0 , appelé le *poids conforme* h . L'état de plus haut poids, noté $|h\rangle_c$, donne origine sous l'action des opérateurs de "descente" L_{-m} , avec $m > 0$, à toute une famille d'états, dits descendants, qui forment le module de Verma $V_{h,c}$ de $|h\rangle_c$. Les états accessibles au système sont donc de la forme

$$|h\rangle_c \otimes |\bar{h}\rangle_{\bar{c}} \in Vir \otimes Vir \quad (1.1.10)$$

où l'on considère $c = \bar{c}$. Pour nos propos, il suffit de considérer les états de plus haut poids, dits aussi états primaires, et nous identifierons souvent $|h\rangle_c$ avec le module de Verma correspondant. Notons, cependant, que l'espace de Fock \mathcal{H} inclut tous les descendants. L'hamiltonien dans cet espace est $H = L_0 + \bar{L}_0$.

La factorisation (1.1.10) du spectre, en quelque sorte une hypothèse de quantification d'une théorie conforme complète pour des cordes fermées, implique une factorisation dans la fonction de partition d'une théorie de cordes fermées. Toutefois, toute combinaison de couplages gauche-droit d'états dans l'espace de Fock ne donnent pas une fonction de partition "physique". La formulation des contraintes physiques et la classification de toutes les fonctions de partition d'algèbre donnée (avec une charge centrale donnée) qui les satisfont est donc un sujet d'intérêt évident. Vu les travaux

^{‡5}Il existe des théories dites hétérotiques où les algèbres chirales ne sont pas isomorphes.

présentés dans cette thèse, nous nous concentrons maintenant sur les résultats concernant cette classification, évitant les considérations sur les fonctions de corrélation dans ces théories.

1.1.2 Spectre et fonctions de partition

Une théorie conforme est considérée physique, ou naturelle [MS88], si elle est locale et si elle peut être définie sur toute surface de Riemann Σ . Le principe de localité est une contrainte sur la structure des divergences à courte distance entre deux opérateurs ; ces contraintes ne nous intéresseront pas beaucoup parce qu'en général une seule solution au maximum en est connue pour un spectre donné. En supposant cette condition satisfaite, ou de façon équivalente que la théorie est bien définie sur la sphère $\Sigma = S^2$, nous pouvons considérer la surface suivante, qui est le tore $\Sigma = \mathbb{T}^2$. Pour que la théorie soit bien définie sur le tore, il faut que toute amplitude soit invariante par les transformations conformes du tore.

Commençons par l'amplitude la plus simple, celle du vide qui n'a aucune insertion de champs. Cette amplitude peut se calculer en faisant se propager une corde fermée un certain temps après lequel la corde se referme sur elle-même : ceci correspond à prendre la trace de l'opérateur d'évolution (l'hamiltonien H) sur le spectre, soit au calcul de la fonction de partition de la théorie. Étant donnée la forme (1.1.10) du spectre, la fonction de partition s'écrit

$$\mathcal{Z} = \text{Tr}_{\mathcal{H}} \left[q^{L_0 - c/24} \bar{q}^{\bar{L}_0 - c/24} \right], \quad q = e^{2\pi i \tau}, \quad \bar{q} = e^{2\pi i \bar{\tau}}. \quad (1.1.11)$$

Le nombre complexe τ définit la structure complexe du tore. Les transformations conformes définies globalement sur \mathbb{T}^2 donnent les transformations modulaires $PSL(2, \mathbb{Z})$ sur τ

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \text{avec } ad - bc = 1 \text{ et } a, b, c, d \in \mathbb{N} \quad (1.1.12)$$

L'amplitude du tore (1.1.11) doit donc être *invariante modulaire*. Le fait très puissant démontré par Moore et Seiberg [MS88] est que, pour des théories ayant un nombre fini d'états (dites *rationnelles*), la localité et l'invariance modulaire de (1.1.11) assurent non seulement la bonne définition de la théorie sur le tore mais aussi sur toute autre surface de Riemann. Ainsi motivé, l'effort de classification des fonctions de partition invariantes modulaires ne s'est plus arrêté, et nous en rappellerons quelques résultats dans la section 2.2.1.

Entretemps, plusieurs remarques sont en ordre. Tout d'abord, le groupe modulaire $PSL(2, \mathbb{Z})$ a deux générateurs

$$T : \tau \rightarrow \tau + 1 \quad \text{et} \quad S : \tau \rightarrow -\frac{1}{\tau} \quad (1.1.13)$$

L'invariance sous le générateur T implique que les couplages gauche-droite dans (1.1.11) vérifient $h = \bar{h} \bmod 1$ pour $c = \bar{c}$. L'invariance sous S est plus difficile à imposer. Il est très utile d'introduire le *caractère* d'un module de Verma $V_{h,c}$

$$\chi_{h,c}(\tau) = \text{Tr}_{V_{h,c}} q^{L_0 - c/24} \quad (1.1.14)$$

La première exigence est donc que l'action de S sur l'espace des caractères soit fermée. Comme nous le verrons dans le chapitre 2, cette action est connue dans le cas des théories rationnelles, c'est-à-dire où le nombre de champs primaires est fini, et fait l'objet d'intenses études dans le cas des théories conformes non-rationnelles les plus simples. Finalement, les caractères dépendent explicitement de la charge centrale. Ceci vient de la transformation du plan au cylindre du tenseur T qui, vue la brisure douce de la symétrie de Weyl, n'est pas un champ primaire.

Jusqu'ici nous avons considéré seulement des cordes fermées. Il est temps de voir ce qui se passe avec les cordes ouvertes.

1.1.3 Cordes fermées, cordes ouvertes

En incluant un bord $\partial\Sigma$ à la surface d'univers Σ , la théorie conforme devient plus compliquée et plus intéressante. Du point de vue classique, les transformations conformes sont alors contraintes de préserver le bord, ce qui s'avère être équivalent à la condition $T = \bar{T}$ sur le tenseur énergie-impulsion au bord. En termes des générateurs L_n, \bar{L}_n cela devient

$$L_n = \bar{L}_n \quad \text{sur} \quad \partial\Sigma \quad (1.1.15)$$

Physiquement cette condition revient à dire qu'aucune énergie ne passe à travers le bord. En tout cas, cette condition implique que l'algèbre de symétrie de la théorie n'est plus $Vir \otimes Vir$ mais la sous-algèbre de Virasoro diagonale. En même temps, Σ n'est plus une surface de Riemann et à la rigueur il n'y a plus de champs holomorphes ou anti-holomorphes. Pour un traitement rigoureux des théories conformes rationnelles sur des surfaces d'univers arbitraires, voir [FRS02].

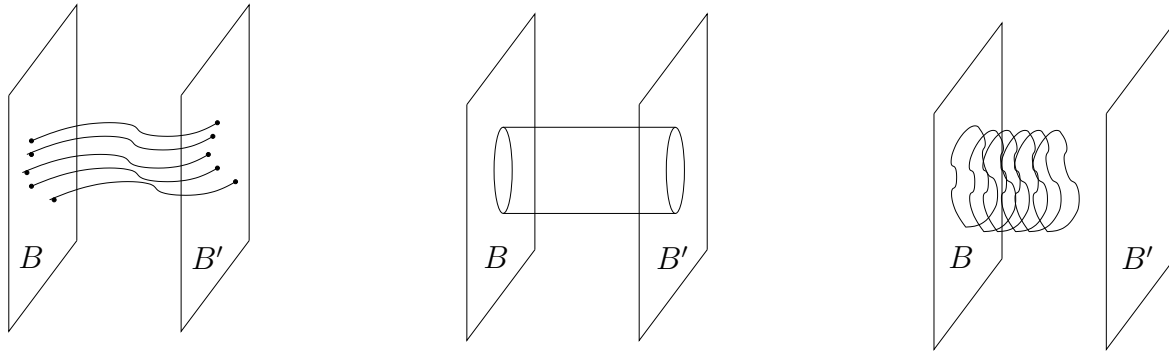


FIG. 1.1 – Dualité corde ouverte – corde fermée.

L'image de la corde nous est utile encore une fois pour constater qu'une théorie de cordes ouvertes inclut nécessairement des cordes fermées. Considérons une corde ouverte qui se propage et se referme sur elle même. Moyennant une transformation de coordonnées sur Σ , ceci peut se voir aussi comme la propagation d'une corde fermée, voir figure 1.1. Nous avons introduit ici des surfaces B, B' qui représentent les conditions aux bords de la corde ouverte. Ces surfaces sont les fameuses D-branes, dont nous reparlerons dans la section 1.2.2.

Les conditions aux bords sont formalisées par des "états de bord" \mathcal{B} qui agissent sur les champs sur l'intérieur de la corde, des éléments de l'espace de Hilbert \mathcal{H} ,

$$\mathcal{B} : \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C} \quad (1.1.16)$$

Les états de bord sont en pratique définis par les fonctions de corrélation des états de \mathcal{H} en leur présence. La théorie est alors définie à l'aide de la fonction de partition qui décrit les états de l'intérieur de la corde qui se propagent entre les états de bord \mathcal{B}_a et \mathcal{B}_b

$$\mathcal{A}_{ab}^{\text{ouv}} = \text{Tr}_{\mathcal{H}_{ab}} q^{L_0 - c/12} \quad (1.1.17)$$

Ceci est l'amplitude pour l'anneau décrit par la figure 1.1. La cohérence de la théorie sous la dualité corde ouverte – corde fermée impose alors des conditions sur cette amplitude. Ainsi, tout état de bord vérifiant (1.1.15) n'est pas admissible pour une certaine théorie de l'intérieur de la surface d'univers. Les contraintes sur ces états ont été formulées par J. Cardy [Car89] pour les états de bord symétriques dans des théories rationnelles, comme nous le rappelons dans le chapitre 3.

L'étude des spectres de cordes fermée \mathcal{Z} (1.1.11) et ouverte $\mathcal{A}_{ab}^{\text{ouv}}$ (1.1.17) nous occupera les chapitres 2 et 3, notamment leur lien à l'interprétation géométrique des

théories conformes. Retournons donc maintenant au modèle sigma non-linéaire et à son interprétation géométrique.

1.2 Des cordes dans l'espace-temps

Quel rapport entre les propriétés algébriques des théories conformes bidimensionnelles (algèbre de symétrie $Vir \otimes Vir$, invariance modulaire de la fonction de partition) et une théorie de l'espace-temps? Pour esquisser une réponse, revenons à la formulation des théories conformes par des modèles sigma non-linéaires (1.1.2) et prenons la limite semi-classique $\alpha' \rightarrow 0$.^{‡6} Dans cette limite, nous retrouvons l'interprétation géométrique de la corde test plongée dans une configuration donnée de champs de fond $g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}$. À ces champs de fond sont associés des champs de la théorie conforme, comme $g_{\mu\nu} \partial \hat{X}^\mu \bar{\partial} \hat{X}^\nu(z) e^{ik_\mu X^\mu}$, où $\hat{X}(z)$ sont les fluctuations quantiques des champs $X(z)$ du modèle sigma. Par la correspondance entre champs de la CFT et états de son espace de Hilbert, le spectre de notre CFT inclut naturellement des états d'oscillations de tous les champs apparaissant dans le modèle sigma, et en particulier celles de la métrique. Il y correspond une théorie d'espace-temps, qui comprend alors une particule qui a toutes les propriétés d'un graviton et est donc dans ce sens une théorie quantique de la gravitation. Heureusement, la dynamique effective de cette théorie accomode la théorie de la relativité générale, comme nous le verrons dans la suite du chapitre.

Rappelons entretemps que la théorie conforme comporte des tours d'états descendants, en nombre N croissant de dérivées de \hat{X} auxquels on peut attribuer une masse d'espace-temps $m^2 \sim (N-2)/\alpha'$. Par conséquent, les états massifs devenant trop lourds dans la limite semi-classique $\alpha' \rightarrow 0$, seuls les états de masse nulle nous intéresseront par la suite de la thèse; ils correspondent précisément aux champs qui apparaissent dans le modèle sigma bosonique, et sont appelés par la suite de *champs de fond*.

Voyons maintenant sous quelles conditions le modèle sigma (1.1.2) définit une théorie quantique avec symétrie conforme. Nous avons vu que la symétrie conforme implique l'annulation de la trace du tenseur d'énergie-impulsion; celle-ci peut être calculée en termes des champs de fond

$$T_a^a = \bar{\beta}_{\mu\nu}^g \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu + \bar{\beta}_{\mu\nu}^B \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu + \bar{\beta}_\Phi R^{(2)} \quad (1.2.18)$$

^{‡6}Toutes les théories conformes n'ont pas de limite classique naturelle; certaines, à l'image des modèles minimaux, n'ont pas de formulation lagrangienne naturelle (sauf en termes de cosets, voir plus loin) et sont formulées de façon purement algébrique.

où les $\bar{\beta}^{\text{champs}}$ sont les coefficients de Weyl des couplages du modèle sigma. Ce sont des tenseurs dans l'espace-temps que l'on calcule perturbativement en α' , voir le chapitre 4. Les générateurs L_n de l'algèbre de Virasoro peuvent ainsi être exprimés en termes des champs de fond [CMPF85]; la symétrie conforme (1.1.9), éventuellement avec une charge centrale non nulle, pose alors des conditions sur les configurations de ces derniers. En particulier, l'annulation de l'anomalie de Weyl (à dilaton constant) détermine la dimension de l'espace-temps à $D = 26$ dans le cas bosonique ou $D = 10$ dans le cas où la théorie d'espace-temps correspondante n'a pas de modes instables, ou tachyons. Les équations de la relativité générale, elles, proviennent des conditions $\bar{\beta}_{\mu\nu}^g = \bar{\beta}_{\mu\nu}^B = 0$ à une boucle. Plus précisément ces conditions dépendent aussi du champ H et du dilaton. Toujours à dilaton constant, on a

$$\beta_{\mu\nu}^g = \mathbf{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{4}H_{\mu\lambda\sigma}H_{\nu}^{\lambda\sigma} + O(\alpha'), \quad \beta_{\mu\nu}^B = \nabla_\lambda H_{\mu\nu}^\lambda + O(\alpha'). \quad (1.2.19)$$

où $\mathbf{R}_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci de la métrique $g_{\mu\nu}$. Le calcul des fonctions β (1.2.18) pose de nombreux problèmes, et nous le ferons en toute généralité au chapitre 4 à l'ordre de α' , soit deux boucles.

La détermination de la configuration de champs de fond qui décrivent l'univers observé est bien sûr un des buts centraux de la théorie des cordes. Le fait que la supergravité soit retrouvée comme une approximation à basse énergie de la théorie des cordes est un indicateur que cela doit être possible, au moins approximativement. Toutefois, à ce jour, aucun principe n'a été trouvé qui permette de choisir une configuration de champs de fond, ou un *vide*, parmi les autres sinon que celui ci doit être compatible avec la physique déjà connue. Nous sommes en tout cas amenés à compactifier 6 (ou 22) dimensions de l'espace-cible de notre modèle sigma pour en rester aux 3+1 dimensions presque plates observées (voir néanmoins [KaRa01]).

tout en vérifiant les conditions $\bar{\beta} = 0$ de façon exacte. Or, non seulement ces conditions ne sont pas connues à toutes les ordres en α' comme la donne d'une solution g, B ne suffirait pas à décrire le spectre et les interactions des cordes dans cette compactification. Heureusement, il existe une large catégorie d'exemples de théories conformes exactes avec une formulation lagrangienne, et donc une limite semi-classique, dont l'espace-cible est courbe : ce sont les théories avec des symétries étendues par rapport à $Vir \times Vir$, dont les modèles de Wess-Zumino-Witten sont un exemple. Ces théories sont un des principaux outils dans l'étude des compactifications de la théorie des cordes, qui font le sujet de la section suivante.

1.2.1 Compactifications et Dualités

Le tore, états vrillés et torsion discrète à la Vafa. La compactification la plus simple est celle sur un tore $T^\ell = U(1)^\ell$, obtenue en imposant des conditions de périodicité sur les coordonnées $X^\mu = X^\mu + 2\pi R^\mu$ pour $\mu = 1, \dots, \ell$. Cette compactification fournit aussi le premier exemple de la relation entre le spectre de la théorie conforme et les champs antisymétriques de l'espace-temps, voire sa topologie. Commençons par le modèle sigma non-linéaire défini sur le cercle $T^1 = S^1$, avec la métrique plate et un champ B nul ; c'est une théorie conforme exacte avec charge centrale $c = 1$ et fonction de partition

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} q^{(n/R+mR/2)^2/2} \bar{q}^{(n/R-mR/2)^2/2} \quad (1.2.20)$$

Cette expression mérite des remarques importantes. Chaque état est caractérisé par deux entiers $m, n \in \mathbb{Z}$. La direction périodique de S^1 rend possible un effet propre à la théorie des cordes, à savoir l'existence d'*états d'enroulement* de la corde dans ces directions. Ces états peuvent être compris comme la généralisation des conditions périodiques des champs de plongement, car en effet nous pouvons avoir une multitude de conditions aux bords $X(\sigma+2\pi) \sim X(\sigma) + 2\pi Rm$. Le champ $X(z)$ n'est alors périodique qu'à m tours près, et m est appelé nombre d'enroulement (tandis que n est le nombre quantique d'impulsion). Les états avec $m \neq 0$ sont l'exemple le plus simple d'*états vrillés*. Du point de vue de la CFT, un état vrillé $|h\rangle \otimes |\bar{h}\rangle$ est caractérisé par le fait que la représentation gauche $|h\rangle$ n'est identique à la droite $|\bar{h}\rangle$ qu'à une transformation de symétrie près. Certaines symétries de l'espace-temps sont ainsi corrélées à des symétries du spectre, comprises en termes de théorie des représentations de l'algèbre étendue, et sont ainsi de vraies symétries de la théorie. Nous verrons dans le chapitre 2 comment profiter de ces symétries pour construire d'autres théories conformes ayant l'espace quotient souhaité.

En général, les théories conformes ont d'autres symétries qui ne sont pas évidentes du point de vue de l'espace-temps, mais qui peuvent néanmoins avoir une interprétation géométrique dans la limite semi-classique. Par exemple, la fonction de partition du tore (1.2.20) est invariante sous l'échange des états d'enroulement et d'impulsion ! Cet échange est un cas particulier de la *dualité T*. L'action de cette dualité sur les champs $X(z)$ de la CFT implique une action sur les champs d'espace-cible, qui revient essentiellement à échanger R et α'/R . La dualité implique en particulier que le système a une taille minimale, de l'ordre de $R \sim \sqrt{\alpha'} \sim \ell_s$, comme on l'a annoncé plus haut.

Quand le rayon du cercle S^1 est de la forme $R^2 = p/q$, avec $p, q \in \mathbb{Z}$, les symétries de Virasoro sont étendues par des nouveaux courants $J = i\partial X$ et $E^\pm = e^{\pm i\sqrt{R}X}$ (et de même pour les courants droits); les champs primaires de Vir s'organisent alors dans un ensemble *fini* de champs primaires pour l'algèbre étendue : la théorie devient donc rationnelle. Les bosons compactifiés aux points rationnels seront très utiles dans la formulation des théories quotients construites dans le chapitre 2.

Il s'avère que pour des compactifications sur des tores avec rang $\ell \geq 2$ on peut définir plusieurs invariants modulaires du type de (1.2.20), qui diffèrent précisément dans leur contenu en états vrillés. Vafa a montré que les différents choix d'états vrillés correspondent aux choix du champ de fond $B_{\mu\nu}$, compatibles avec la topologie du tore T^ℓ , ce qu'il a nommé *torsion discrète* [Va86]. Voici un premier exemple de l'importance des champs antisymétriques dans les espaces cibles de théories conformes; la surface d'univers étant de dimension 2, la corde interagit avec les formes de rang 2 d'espace-temps, ainsi qu'avec les formes de rang 1 pour les cordes ouvertes. En particulier, plusieurs théories conformes sont possibles pour une même géométrie. Dans le chapitre 2, nous généraliserons l'effet de torsion discrète au cas des espaces courbes.

Les cordes dans les espaces courbes. Nous avons vu que dans les espaces courbes, l'annulation des fonctions bêta (1.2.19) à dilaton constant impliquent que le champ B n'est plus fermée et un champ antisymétrique $H = dB$ de degré 3 apparaît. La façon dont H se couple à la corde via un modèle sigma fera l'objet de la section 2.1. Un tel espace-cible rend la quantification du modèle en général très difficile; il existe cependant une classe d'exemples où l'espace-cible a assez de symétries pour qu'un plongement approprié de la corde garantisse la symétrie conforme de la théorie. Ces modèles, nommés de Wess-Zumino-Witten (WZW), décrivent la propagation des cordes dans des variétés de groupes. Un groupe G agit sur lui même à droite et à gauche, donnant lieu à une large famille de symétries, qui forment une algèbre isomorphe à $\mathfrak{g}_L \times \mathfrak{g}_R$ où $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$. Avec des champs de fond g, H assez naturels ces modèles sont exactement invariants conformes [KniZa84][Wit84][GW86]. Nous nous bornons à indiquer ici comment la symétrie conforme de ces modèles est assurée algébriquement. À l'algèbre de symétrie \mathfrak{g} , avec générateurs J^a , correspond une algèbre affine dont les générateurs sont les courants J_n^a définies sur la feuille d'univers par

$$J^a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-1} J_n^a$$

et un générateur central k qui vérifient

$$[J_m^a, J_n^b] = i f_c^{ab} J_{m+n}^c + k m \delta_{ab} \delta_{m+n,0}. \quad (1.2.21)$$

où f_c^{ab} sont les constantes de structure de \mathfrak{g} . En particulier, \mathfrak{g} coïncide avec la sous-algèbre "horizontale" générée par les J_0^a . Dans des représentations irréductibles de plus haut poids, le générateur k prend des valeurs entières et positives, appelés le *niveau* des représentations. L'algèbre de Virasoro est alors obtenue par la construction de Sugawara

$$L_n = \frac{1}{2(k + g^\vee)} \sum_{m,a} : J_m^a J_{n-m}^a : \quad (1.2.22)$$

et en particulier la charge centrale c dépend du niveau k comme

$$c = \frac{k \dim(\mathfrak{g})}{k + g^\vee} \quad (1.2.23)$$

où g^\vee est un entier caractéristique du groupe nommé le nombre dual de Coxeter (e.g. $g^\vee = N$ pour $SU(N)$).

Les modèles WZW sont étudiés moins dans l'espoir de trouver une compactification réaliste de la théorie des cordes que pour étudier les effets de la courbure de l'espace-temps dans la théorie des cordes. Nous pouvons en particulier nous demander s'il existe une généralisation de la dualité T à ces modèles et comment elle opère dans l'espace-cible. Nous pouvons aussi jauger certaines des symétries de ces modèles pour créer d'autres espace-cibles pour la propagation des cordes. Toutes ces questions seront abordées dans le chapitre 2.

1.2.2 D-branes

Retournons maintenant aux cordes ouvertes. La surface d'univers a maintenant un bord $\partial\Sigma$, et il faut ajouter un terme correspondant à notre modèle sigma (1.1.2) de la forme

$$S_P^{\text{ouv}}(X^\mu(\sigma, \tau)) = \oint_{\partial\Sigma} A_\mu(X) \partial_\tau X^\mu d\tau \quad (1.2.24)$$

où A_μ est une forme de rang 1 dans l'espace (remarquez l'absence de facteur α' .) Rigoureusement, cette formule n'est valable que pour une corde se propageant dans un espace-cible plat. Explorons pour l'instant ce cas déjà assez utile, et laissons les

définitions générales pour le chapitre 3. Les conditions au bord associées à l'action $S_P^{\text{ouv}} + S_P$ sont

$$g_{\mu\nu}\partial_\sigma X^\nu + i(B_{\mu\nu} + 2\pi\alpha'F_{\mu\nu})\partial_\tau X^\nu = 0, \quad \text{sur } \partial\Sigma. \quad (1.2.25)$$

Ici $F = dA$ est le champ associé au potentiel A_μ . Ainsi le champ de jauge F fait son apparition dans la théorie des cordes. Nous l'avons pris ici implicitement comme un champ de jauge $U(1)$ mais, en général, ce groupe de jauge peut être quelconque; ces degrés de liberté supplémentaires sont connus sous le nom de facteurs de Chan-Paton. Notons que c'est la combinaison

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + 2\pi\alpha'F_{\mu\nu} \quad (1.2.26)$$

qui joue un rôle dans les conditions au bord. Il faudra en particulier qu'elle soit invariante par des transformations de jauge associées au champ B dans des espaces courbes.

Dans le cas plat, les conditions au bord (1.2.25) peuvent donner deux cas extrêmes, les conditions de Neumann avec $\mathcal{F} = 0$ et $\partial_\sigma X = 0$ et les conditions de Dirichlet avec $\mathcal{F} \rightarrow \infty$ et donc $\partial_\tau X = 0$. Ces dernières impliquent que les bords de la corde sont fixés dans une hypersurface localement parallèle à ∂X . Ces hypersurfaces dans l'espace-temps sont précisément les D-branes de la figure 1.1 - "D" de Dirichlet et "brane" de membrane.

Du point de vue de l'espace temps, les D-branes sont définies par leur géométrie, soit leur *univers branaire*, et aussi par les champs d'espace-temps définis dessus, comme le champ F (pour la corde bosonique). Autrement dit, les D-branes correspondent à des configurations de champs localisées dans un espace-temps donné : il fut sur cette forme, de solitons de la théorie de la supergravité, qu'elles furent d'abord remarquées. Nous laissons pour le chapitre 3 le lien avec les états de bord \mathcal{B}_a de la théorie conforme sur Σ . Pour l'instant, notons que la dualité T , qui agit sur des champs X en échangeant les modes d'enroulement et ceux d'impulsion, échange aussi les conditions de Dirichlet et de Neumann sur le bord. La géométrie des D-branes, en particulier leur dimension, en est changée, tout comme les champs de jauge. Dans le cas de D-branes plates dans la présence d'un champ B fermé, l'action de la dualité T est décrite par les règles de Buscher qui mélangent la métrique g et le champ B [Busch88]. Toutefois, la généralisation de ces règles pour le cas des espaces cibles courbes n'est pas connue. Soit la description exacte des D-branes présentée dans le chapitre 3 soit la description perturbative des D-branes obtenue dans le chapitre 4 dans la limite semi-classique pourraient servir à mettre des contraintes sur ces règles.

Du temps et des espaces non-compacts. Comme il se doit pour des théories d'espace-temps, les théories des cordes ont une dimension non compacte de temps, décrivant une variété minkowskienne à 10 dimensions. Pendant des décennies on étudia les compactifications des 6 dimensions supplémentaires, et leurs conséquences sur la physique de l'univers minkowskien $\mathbb{R}^{(1,3)}$. De nos jours, beaucoup d'effort est consacré à l'étude de la théorie des cordes dans des configurations de champs de fond qui dépendent du temps de façon moins triviale, notamment pour des scénarios de cosmologie. L'univers minkowskien $\mathbb{R}^{(1,3)}$ est remplacé par des modèles de WZW sur des groupes de Lie non-compacts, comme $SL(2, \mathbb{R})$ [GRS03] ou le groupe de Heisenberg (les ondes planes) [EGKR02], ou encore des quotients de ces espaces [KuLo92]. Une telle généralisation à des espaces minkowskiens courbes implique maintes difficultés techniques car les théories conformes qui décrivent la propagation des cordes dans des espaces non-compacts sont non-rationnelles, et admettent des ensembles continus d'états (comme on pourra le voir déjà au niveau de l'espace des fonctions (2.1.13)). Dans une théorie avec cordes ouvertes, on peut ajouter une dépendance des conditions aux bords par rapport au temps [Ba02] tout en gardant l'espace-temps plat, mais là encore il s'agit d'un modèle jouet difficilement généralisable à des espaces courbes.

Dans cette thèse, nous nous soucierons seulement des espaces-cibles compacts et euclidiens. Nous verrons dans la section suivante comment ceci nous permet tout de même d'étudier la dynamique de la théorie des cordes dans un sens de la théorie des champs de cordes.

1.3 Dynamique des cordes et renormalisation

La formulation perturbative de la théorie des cordes présentée jusqu'ici a deux insuffisances importantes. La première est qu'une description exacte en termes de théories conformes n'est disponible pour le moment que pour des familles de géométries assez restreintes – les variétés de groupes, compactes ou non, et certains de leurs quotients (une contribution à cette dernière famille est l'objet du chapitre 2). Il est vrai que, comme nous venons de le mentionner, certaines de ces géométries peuvent néanmoins jouer un rôle important dans des solutions de cordes, voire dans la cosmologie des cordes.

Toutefois, et ceci nous mène à la deuxième insuffisance, l'invariance conforme de la théorie sur la surface d'univers est une condition nécessaire à la propagation *classique* des cordes dans un espace donné; en d'autres mots, les théories conformes corres-

pondent à des points stationnaires – i.e. des “états du vide” – d’une certaine théorie des champs de cordes, et analoguement les états excités des cordes correspondent à des fluctuations quantiques des champs de cordes autour de ces configurations du vide. Or, nous sommes intéressés par la dynamique de la théorie des cordes en dehors de ces configurations du vide, par exemple par la probabilité de transition entre deux états stables (points conformes) différents. Ces informations semblent être au delà des capacités de notre formulation perturbative de la théorie des cordes, puisque celle-ci est confinée aux points où la théorie sur la surface d’univers est conforme. Cette tautologie n’est néanmoins pas tout à fait exacte : il faut clarifier ce que nous entendons par dynamique de la théorie des cordes, et ce qu’on peut en comprendre du point de vue de la théorie sur la surface d’univers.

Nous avons vu que les “équations du mouvement” $\bar{\beta}^{\text{champ}} = 0$ pour les champs de fond nous assurent que la théorie est conforme et n’a pas d’anomalie de Weyl, c’est-à-dire que sa charge centrale c vaut zéro. Bien que l’annihilation de l’anomalie de Weyl soit nécessaire pour la théorie des cordes, nous voulons imposer ici la seule invariance conforme, laissant la valeur de $c \geq 1$ arbitraire. Pour des applications à la théorie des cordes, nous pouvons nous borner ultérieurement à des théories avec $c = 10$ ou $c = 26$.

Dans des conditions assez générales, l’invariance de la théorie sous des variations rigides d’échelle est équivalente à son invariance conforme [Pol88]. À la place des équations $\bar{\beta} = 0$ nous considérons donc l’annulation des fonctions bêta des champs de fond $C(X^\mu)$

$$\beta^C = \Lambda \frac{\partial C(X)}{\partial \Lambda} = 0 \quad (1.3.27)$$

où par cohérence les β^C dépendent seulement des couplages renormalisés et non pas de l’échelle Λ (voir (4.0.3)). Les conditions précises sous lesquelles $\beta^C = 0$ impliquent l’invariance conforme, et leur relation avec les coefficients de Weyl $\bar{\beta}$ peuvent être trouvées dans [Ts86], [Ts87], [Ts93] et [BorCS04]. Dans cette thèse nous considérons les équations $\beta = 0$ comme les équations du mouvement de la théorie des cordes.

Toutefois, par leur définition même, les fonctions bêta sont calculées dans une configuration de champs de fond donnée. Néanmoins, pour avoir une formulation de la théorie indépendante du choix du vide nous pouvons chercher la théorie des champs de corde d’où découlent ces équations du mouvement. Il s’agit de dériver une *action effective* pour les champs d’espace-temps dans le sens où l’infinité de champs massifs de la théorie des cordes, qui ont un spin supérieur à 2 et qui ne sont pas pris en compte

dans le modèle sigma, sont mis à zéro. En effet, déjà à une boucle les fonctions bêta des champs bosoniques de corde fermée sont en accord avec les équations de mouvement correspondantes de la supergravité. Regardons de plus près le cas de la corde ouverte.

Dans ce cas, la configuration de champs de corde fermée est fixée et l'espace des modules est l'espace de champs au bord de la surface d'univers. Prenant des coordonnées locales λ_i de cet espace, que l'on suppose de dimension finie, la proposition pour étendre l'action d'espace-temps hors de couche de masse, dans le voisinage des points conformes [HMT04] est

$$\frac{\delta S}{\delta \lambda^j} = \beta^i K_{ij} \quad (1.3.28)$$

où K_{ij} est une métrique, dite de Zamolodchikov, sur l'espace des champs de bord. Ainsi, les fonctions bêta décrivent non seulement les solutions classiques de la théorie des champs de cordes mais, du moins infinitésimalement, décrivent par le flot du groupe de renormalisation l'évolution du système hors de la couche de masse dans le voisinage des points conformes. Il est naturel de se demander si (1.3.28) peut avoir un domaine de validité plus vaste, pour des trajectoires de longueur finie entre deux points conformes dans l'espace de modules. Ainsi, les fonctions bêta codifieraient et les points stationnaires de l'action et les paires de points reliés par des processus dynamiques de la théorie d'espace-temps. Ceci est en gros la proposition de A. Sen [Sen99] selon laquelle les processus dynamiques en théorie des champs de cordes (ouvertes) correspondent à des processus de renormalisation dans la théorie sur (le bord de) la surface d'univers de la corde. Il est donc souhaitable de déterminer les fonctions β^i avec une grande précision. Ceci est le sujet du chapitre 4 de cette thèse. Dans la section suivante, nous examinons en plus grand détail la fonction β^F du champ de jauge des cordes ouvertes et nous verrons comment ceci peut aider dans l'étude de la dynamique (au sens de hors de couche de masse) des D-branes.

1.3.1 L'action de Born-Infeld

Revenons donc aux équations de mouvement $T_a^a = 0$ (1.2.18). Dans la présence d'un bord, où l'on impose la condition d'invariance conforme $T = \bar{T}$, il faut ajouter à cette trace un terme $\beta_\mu^F \partial_\tau X^\mu(z)$ qui dépend du champ de jauge $A_\mu(X)$ sur la D-brane (1.2.24). La fonction $\beta_\mu^F(X)$ dépend en général de la configuration des champs de fond de corde fermée, g, B . Elle fut calculée dans plusieurs configurations de champs de fond : dans le cas plat, avec $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ et $B_{\mu\nu} = 0$, l'équation de mouvement corres-

pondante n'est autre que l'équation de Maxwell, $\beta_\mu^F = \nabla^\nu F_{\mu\nu} = 0$. Plus généralement, quand le champ B n'est pas constant et l'espace cible est légèrement courbé, les équations du mouvement pour le potentiel A deviennent (toujours avec un dilaton constant [ACNY87])

$$\beta_\mu^F = G^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \mathcal{F}_{\beta\mu} + \mathcal{F}_{\alpha\beta} H_\gamma^{\alpha\beta} \mathcal{F}_\mu^\gamma = 0, \quad (1.3.29)$$

où $H = dB$ et $G^{\alpha\beta}$ est l'inverse de la *métrique de corde ouverte*, définie par

$$G^{\alpha\beta} = \left(\frac{1}{g + \mathcal{F}} \right)_{\text{sym}}^{\alpha\beta}. \quad (1.3.30)$$

Ici \mathcal{F} est la combinaison des champs antisymétriques donné par (1.2.26) et les indices montent avec la métrique (de corde fermée) $g_{\mu\nu}$. Évidemment, le champ F étant définie sur la D-brane, l'action effective que l'on recherche l'est aussi. Pour écrire cette action il faut donc partir d'un univers branaire donné D et considérer son plongement $p : D \rightarrow M$ dans l'espace-temps M comme un champ de la théorie. Avec ces considérations, l'action effective qui correspond aux équations de mouvement (1.3.29) est la généralisation suivante de l'action de Born et Infeld

$$S_{BI}(p, \mathcal{F}) = \int_D \sqrt{\det(p^*g + p^*B + 2\pi F)} \quad (1.3.31)$$

On reconnaîtra ici une généralisation de la mesure du volume de D , qui inclut aussi la combinaison $\mathcal{F} = p^*B + 2\pi\alpha'F$. Nous montrerons dans le chapitre 3 que, malgré son origine à une boucle, l'action S_{BI} décrit de façon très précise les D-branes dans les modèles WZW, même dans le régime de grande courbure. Ces études illustreront en particulier comment la présence du flux de \mathcal{F} permet l'existence de D-branes qui ne sont pas des surfaces minimales.

Il existe cependant deux directions dans lesquelles l'action S_{BI} doit être généralisée : pour décrire des D-branes dans un espace courbe général, et pour décrire des D-branes sur des géométries non commutatives. Dans cette thèse nous nous concentrons sur la première direction de généralisation. Toutefois, comme nous le verrons à la fin du chapitre 4, ces généralisations sont en fait liées par une application de type Seiberg-Witten. Dans la section suivante nous illustrons comment la version non-commutative de l'action Born-Infeld peut être utilisé pour obtenir de l'information sur la dynamique des D-branes.

1.3.2 D-branes non-commutatives

Dans [SW99], Seiberg et Witten ont considéré la théorie des cordes ouvertes dans un espace-temps doté d'une métrique g plate et d'un champ \mathcal{F} constant. Ils ont fait correspondre à la théorie classique, c'est à dire la théorie conforme sur un disque, une théorie effective des champs sur un espace non-commutatif dont la multiplication est définie par le produit $*_M$ de Moyal

$$f(x) *_M g(x) = e^{\frac{i}{2}\Theta^{\mu\nu}\partial_{y^\mu}\partial_{z^\nu}} f(x+y)g(x+y)|_{y,z=0} \quad (1.3.32)$$

où le paramètre de non-commutativité Θ est la contrepartie antisymétrique de la métrique de corde ouverte (1.3.30)

$$\Theta^{\mu\nu} = 2\pi\alpha' \left(\frac{1}{g + \mathcal{F}} \right)_{\text{antisym}}^{\mu\nu} \quad (1.3.33)$$

En particulier, les coordonnées sur cet espace vérifient les relations de commutation $[x^\mu, x^\nu] = i\Theta^{\mu\nu}$.

Étant perturbative en α' , cette correspondance est particulièrement utile dans la limite où $\alpha' \sim \sqrt{\eta}$ avec $\eta \rightarrow 0$. Toutefois, pour assurer que les tenseurs G, Θ (et donc l'espace non-commutatif) aient une limite non triviale, il faut plutôt prendre une double limite en faisant au même temps $\mathcal{F} \sim 1/\eta$, tout en gardant la métrique g fixée. Dans cette limite, le spectre et les interactions de la théorie conforme sur le disque s'écrivent facilement en termes de fonctions et intégrales sur un espace non-commutatif ayant $\Theta \sim \mathcal{F}^{-1}$.

Nous pouvons nous demander ce qu'il advient des conditions au bord (1.2.25) dans cette correspondance. La double limite conspire pour qu'elles deviennent des conditions de Dirichlet dans toutes les directions, décrivant ainsi des D0-branes. Il est intéressant d'étudier leur dynamique, faisant usage de l'action de Born–Infeld, ou plus précisément de sa version non-abélienne définie sur l'espace non-commutatif. Notre idée, explorée dans le chapitre 4, est que dans la limite de grand \mathcal{F} les équations de Born–Infeld peuvent se réécrire essentiellement en termes du tenseur Θ et ont ainsi une interprétation naturelle en termes de D0-branes non-commutatives. Par exemple, les équations de Maxwell (i.e., les équations (1.3.29) avec $H = 0$) deviennent

$$\nabla^\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} = 0 \quad \rightarrow \quad [x_\mu, [x^\mu, x^\nu]] = 0 \quad (1.3.34)$$

(la variation de l'action S_{BI} est relié aux fonctions bêta par $\delta S_{BI}/\delta A_\nu = \Theta^{\mu\nu}\beta_\mu^F$, et les indices dans l'espace non-commutatif montent et descendent avec Θ). Ces considérations tiennent encore quand le champ B (et donc la combinaison \mathcal{F}) est fermé mais

non-constant, dans lequel cas le produit de Moyal doit être remplacé par le produit de Kontsevich (4.3.75) pour prendre en compte les variations de Θ [Kon97] [CF00][CS02]. En particulier, les relations de commutation des x^μ deviennent dépendantes de la position.

Il est intéressant de suivre le même raisonnement à partir de configurations de corde fermée plus générales, notamment des espaces courbes. Tout comme pour l'action de Born et Infeld, ceci ne peut se faire que perturbativement dans la magnitude de ces champs. Par exemple, nous verrons dans le chapitre 4 que les équations de mouvement (1.3.29), valables dans la limite de $H = dB$ petit et courbure négligeable, deviennent

$$[x_\mu, [x^\mu, x^\nu] - iH_\gamma^{\mu\nu} x^\gamma] = 0 \quad (1.3.35)$$

ce qui admet deux solutions, l'une triviale $[x^\mu, x^\nu] = 0$, et l'autre non-triviale $[x^\mu, x^\nu] = iH_\gamma^{\mu\nu} x^\gamma$. Dans le cas des variétés de groupe G le régime souhaité est donné par la double limite, géométrique $\alpha' \rightarrow 0$ et de grand rayon $\alpha'k \rightarrow \infty$. Dans cette limite le champ H est petit et l'équation (1.2.19) implique que la courbure est négligeable par rapport à H . Or, nous verrons dans le chapitre 2 que H est donné par les constantes de structure de l'algèbre $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$; dans cette solution les positions des D0-branes ne sont donc pas indépendantes mais forment des représentations de \mathfrak{g} , les mêmes représentations qui paramétrisent les D-branes symétriques que nous étudierons dans le chapitre 3. On peut vérifier en plus que cette solution est moins énergétique que la solution que nous avons appelée triviale. L'interprétation physique est que, dans la présence d'un petit champ H , il apparaît un tachyon de corde ouverte qui pousse les D0-branes à se condenser dans une version "floue" d'une D-brane de dimension supérieure.

Ce mécanisme, appelé d'*effet diélectrique*, a été exploré d'abord par Myers [Mye99] et par Alekseev, Recknagel et Schomerus [ARS00]. Ici, le lien entre le champ H et les constantes de structure de l'algèbre est essentiel dans la dérivation et de l'état final de la condensation et de la stabilité de cet état. Toutefois, la condensation de D-branes induite par présence d'un champ de flux est un effet assez général, et a été illustré à la suite de ces travaux dans des configurations de supercordes où des D_p -branes se condensent dans des $D(p+2)$ -branes [CCH01]. Dans le chapitre 4 nous trouvons des corrections à l'effet Myers pour des espaces-temps courbes.

1.4 Commentaires finaux

Nous terminons ce chapitre introductif par quelques commentaires visant à récapituler le contexte de cette thèse et en cadrer les résultats.

Nous avons vu que, à l'image des extensions supersymétriques de la Relativité Générale, la théorie des cordes prévoit l'existence de champs antisymétriques d'espace temps. Nous considérons dans cette thèse ceux qui se couplent aux cordes via le modèle sigma non-linéaire bosonique, soit le champ B ou plus généralement le champ $H = dB$, ainsi qu'un champ électromagnétique F pour les cordes ouvertes.

Notre but est donc d'étudier la description microscopique de ces champs, donnée par le modèle sigma, ou plus généralement des théories conformes bidimensionnelles. Cette description nous réserve quelques surprises, des phénomènes inhérents à la théorie des cordes, comme la torsion discrète à la Vafa (section 1.2.1) qui illustre l'existence de plusieurs choix possibles de champ B , et donc de théories différentes, dans un même espace-temps; et l'effet diélectrique (section 1.3) qui décrit l'espace-temps non-commutatif effectivement vu par des D0-branes, et dont le paramètre de non-commutativité est relié au champ $\mathcal{F} = B + F$. Nous étudions et généralisons ces deux phénomènes dans cette thèse, respectivement dans les chapitres 2 et 4. Le chapitre 3 est dédié à l'étude des D-branes dans la présence du champ H et leur dépendance du choix de torsion discrète. Nous étudions aussi le couplage des branes au champ \mathcal{F} , qui jouera un rôle important dans leur interprétation géométrique.

Il faut toutefois se rappeler ces champs antisymétriques ne sont que des concepts utiles dans un régime perturbatif donné de la théorie des cordes. Par exemple, nous avons vu que la dualité T mélange le champ $B_{\mu\nu}$ avec la métrique dans la théorie des cordes bosoniques. Cette dualité agit néanmoins au niveau des théories conformes, ce qui dans le cadre de la théorie des cordes veut dire perturbativement dans le couplage g_s . Toutefois, il existe d'autres dualités non-perturbatives, qui échangent les régimes de faible et forte couplage et qui n'ont pas de réalisation en termes de théories conformes. On connaît néanmoins leur action sur certaines configurations de champs de fond; c'est le cas de la dualité S qui échange branes de différentes dimensions, et les champs de la corde bosonique avec ceux de Ramond-Ramond. Il serait intéressant d'étudier comment les différents phénomènes décrits ici se transforment sous ces dualités, perturbatives ou non-perturbatives.

Chapitre 2

Champ H et cordes fermées dans des espaces compacts

Le chapitre précédent a expliqué comment la théorie des cordes nous incite à changer de paradigme dans l'étude de la physique de l'espace-temps, faisant des théories conformes sur la surface d'univers de la corde l'objet principal d'étude. Nous avons vu aussi l'importance d'étudier les théories conformes avec une limite semi-classique, dont l'interprétation géométrique est la description des cordes test qui se propagent dans un espace-cible courbe et compact. Dans ce chapitre nous étudierons donc les cordes fermées sur les variétés de groupes compacts et en construirons des généralisations, comme des espaces quotients. Le but en est double : d'un côté étudier les propriétés de la propagation de cordes dans des espaces courbes, de l'autre déterminer l'interprétation géométrique d'une large famille de théories conformes.

Une conséquence de ce nouveau paradigme est que les symétries de la théorie de l'espace-temps correspondent à des symétries dans la théorie conforme bidimensionnelle qui décrit la propagation des cordes dans cet espace. Dans ce chapitre, nous précisons cette idée ; notamment nous montrerons comment l'identification de telles "vraies" symétries d'espace-temps sert aussi dans la construction de nouveaux espaces-cibles, obtenus en jaugeant lesdites symétries.

Ainsi motivé par la théorie de cordes et son interprétation d'espace-temps, le quotient d'une théorie conforme (dans le cas de quotients par des symétries discrètes, les "orbifolds") est en fait une opération naturelle, indépendamment d'une éventuelle limite classique et d'une interprétation géométrique postérieure. Bien que notre intérêt soit dans cas où et les symétries à jaugeer et les théories quotientées ont une interprétation géométrique, notons au passage qu'il existe (et nous en rencontrerons des

exemples) une large classe de théories qui n'ont pas de limite semi-classique. Ces théories peuvent tout de même jouer un rôle dans la construction de configurations de la théorie des cordes.

À cause de ce nouveau paradigme, nous sommes menés à la question de la classification des théories conformes bidimensionnelles. Dans cette thèse il sera question seulement des théories conformes rationnelles, celles dont le nombre d'états primaires est fini (éventuellement pour une algèbre étendue par rapport à l'algèbre de Virasoro). Dans ce chapitre, section 2.2, nous rappellerons les résultats existants sur la classification dans ce cas, notamment le *formalisme des courants simples* et l'appliquerons à la construction des modèles des cordes dans des variétés de groupes (modèles WZW). Dans la section 2.3 nous considérons des orbifolds de ces modèles. Pour ce faire, il est utile de faire un survol des modèles sigma sur des espaces courbes généraux, et c'est par là que nous commençons. Tout ceci concerne les cordes fermées, les cordes ouvertes faisant l'objet du chapitre 3.

Le sujet étant très vaste et la littérature assez complète, ce rappel sera nécessairement sommaire et portera sur les seules notions dont nous aurons besoin par la suite, avec des fréquents renvois aux références.

2.1 Modèles sigma sur des espaces courbes

Dans cette section nous compléterons notre présentation des modèles de WZW introduits dans la section 1.2.1, en présentant l'action, les courants conservés et le spectre. Nous ferons attention à la quantification de la constante de couplage et montrerons aussi comment en tirer la limite semi-classique et l'interprétation géométrique. Ensuite, nous élargirons nos considérations à des espaces-cibles plus généraux, en étudiant les contraintes topologiques qu'il faut prendre en compte.

2.1.1 Les modèles sur les variétés de groupes

Considérons d'abord le cas d'un groupe G compact, simple et simplement connexe. L'action S^{WZW} du modèle WZW sur G est telle que les courants J^a qui génèrent l'algèbre $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ sont des symétries du système. Les champs de fond du modèle, comme la métrique $g_{\mu\nu}$, doivent donc être invariants sous l'action du groupe à gauche comme à droite, et aussi non-dégénérés – en effet, l'existence d'une métrique non-dégénérée est une condition nécessaire à la propagation des cordes [FOS94]. Pour des

groupes simples, ces conditions spécifient à un facteur multiplicatif près la métrique définie à l'origine de G par la forme de Killing sur \mathfrak{g}

$$K(X, Y) = \frac{1}{8\pi g^\vee} \text{Tr}_f(Ad_X, Ad_Y) \quad (2.1.1)$$

(où la trace est dans la représentation fondamentale de \mathfrak{g} et g^\vee est son nombre dual de Coxeter). Notons cependant que pour les groupes non-semi simples il existe d'autres choix possibles, menant à des modèles WZW différents [FOS94]. La métrique est prolongée à tout élément g du groupe par translation, et nous adopterons la normalisation suivante

$$g_{\mu\nu}(X_g^\mu, Y_g^\nu) = \langle X_g, Y_g \rangle = k K(g^{-1}X_g, g^{-1}Y_g) \quad (2.1.2)$$

où k est une constante sur laquelle nous reviendrons plus loin. Cette métrique sert aussi pour définir une base orthonormée de l'algèbre \mathfrak{g} . La courbure mesuré par la métrique (2.1.2) vérifie, dans une base quelconque de champs de vecteurs

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} = \frac{1}{4} H_{\mu\nu\gamma} H_{\sigma\rho}^\gamma \quad (2.1.3)$$

où $H_{\mu\nu\sigma}$ est une forme de rang 3 sur G (dont les indices montent et descendent avec la métrique), invariante à gauche et à droite, et définie par la forme de rang 3 naturelle sur l'algèbre

$$H(X, Y, Z) = -\langle X, [Y, Z] \rangle \quad (2.1.4)$$

En particulier, à l'origine de G le champ $H_{\mu\nu\sigma}$ coïncide avec les constantes de structure de l'algèbre pour des coordonnées orthonormées. Muni de cette configuration de champs, le groupe est donc solution aux équations de mouvement (1.3.27) à une boucle. C'est en effet une variété *parallélisable*, car en plus de (2.1.3) on a aussi $\nabla^\mu H_{\mu\nu\sigma} = 0$. Ajoutons que les variétés parallélisables sont conjecturalement des solutions à toutes les ordres en α' des équations de mouvement $\beta = 0$ [BCZ85]. Toutefois, ceci ne nous assure pas qu'un modèle sigma avec une telle configuration est en fait une théorie conforme exacte. Pour le prouver, il faut plutôt retrouver l'algèbre de Virasoro au niveau quantique.

Les champs du modèle sigma prennent leurs valeurs dans G , ce sont des éléments $g(z, \bar{z})$ du groupe. En utilisant la métrique (2.1.1), nous pouvons écrire

$$S^{\text{WZW}} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} d\sigma d\tau \langle g \partial_i g, g \partial^i g \rangle + \frac{1}{3\pi} \int_{\mathcal{M}} \langle g^{-1} dg, [g^{-1} dg, g^{-1} dg] \rangle. \quad (2.1.5)$$

L'action S^{WZW} fait intervenir deux termes : le premier, usuel, est l'intégrale du terme cinétique sur la surface d'univers Σ ; le deuxième terme, dit de Wess-Zumino (WZ) et qui généralise le terme antisymétrique du modèle sigma (1.1.2), est l'intégrale du champ H sur une variété \mathcal{M} de dimension 3. Quelle est cette variété \mathcal{M} et quels champs g y sont définis ?

La seule contrainte sur \mathcal{M} est que son bord coïncide avec le plongement de Σ dans G , soit $\partial\mathcal{M} = g(\Sigma)$. Quant aux champs g , il s'agit simplement de l'extension des coordonnées du bord $g(\Sigma)$ vers l'intérieur de \mathcal{M} . Selon la topologie de G , un certain nombre de sous-variétés \mathcal{M} feront l'affaire – menant à une ambiguïté de S^{WZW} de la forme

$$\int_{\Delta\mathcal{M}} H = \int_{\mathcal{M}_1} H - \int_{\mathcal{M}_2} H \quad (2.1.6)$$

où $\Delta\mathcal{M}$ est une sphère S^3 . La définition correcte du modèle quantique de WZW (2.1.5), au moyen de l'exponentielle de l'action $e^{iS^{WZW}}$, implique donc que l'intégrale de la forme H de rang 3 sur toute sphère de G soit un multiple de 2π , c'est-à-dire que H soit un élément du troisième groupe de cohomologie de G .

$$H \in H^3(G, \mathbb{Z}) \quad (2.1.7)$$

Donc k est quantifié, et une analyse des facteurs numériques implique que $k \in \mathbb{Z}$. On appelle k le *niveau* de la théorie. En comparant S^{WZW} avec le modèle sigma S_P cette analyse implique aussi que k est relié au rayon du groupe G par $k = R^2/\alpha'$; donc, à rayon fixé, la limite semi-classique $\alpha' \rightarrow 0$ du modèle sigma devient $k \rightarrow \infty$.

La condition (2.1.7) est la première contrainte topologique à la propagation des cordes sur des espaces courbes que nous rencontrons. Naturellement, ces contraintes s'expriment en termes des groupes de cohomologie, d'abord par la cohomologie de de Rham (2.1.7) qui est directement liée aux formes différentielles sur l'espace-cible ; mais aussi par la cohomologie de Čech qui inclut aussi des formes locales, dont nous expliquerons la pertinence plus tard. Ces constructions sont résumées dans [Bor03].

Les équations de mouvement de l'action S^{WZW} ont des solutions de la forme $g = a(z)b(\bar{z})$ où a, b sont des fonctions holomorphes arbitraires. Ces solutions admettent les courants conservés

$$J(z) = -k\partial g g^{-1}(z), \quad \bar{J}(\bar{z}) = kg^{-1}\bar{\partial}g(\bar{z}) \quad (2.1.8)$$

Il est utile d'écrire les courants en termes d'une base $\{t^a\}$ de l'algèbre \mathfrak{g} , $J(z) = \sum J^a(z)t^a$ et de façon analogue pour $\bar{J}(\bar{z})$. Les modes des J^a , définis par $J^a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-1} J_n^a$ forment alors une représentation de l'algèbre affine \mathfrak{g}_k (1.2.21) de niveau k : l'algèbre de symétrie du modèle WZW sur G est donc $\mathfrak{g}_k \otimes \mathfrak{g}_k$. La symétrie conforme est assurée par la construction de Sugawara (1.2.22), dont nous rappelons ici la relation entre la charge centrale et le niveau

$$c = \frac{k \dim(\mathfrak{g})}{k + g^\vee} \quad (2.1.9)$$

Remarquons que dans la limite géométrique $k \rightarrow \infty$, la charge centrale tend vers la dimension du groupe $\dim(\mathfrak{g})$; c'est pourquoi en théorie des cordes nous sommes intéressés seulement par les groupes dont la dimension est inférieure ou égale à 10, comme $SU(2)$ et $SL_2(\mathbb{R})$. Il est important de ne pas confondre la symétrie \mathfrak{g}_k du système et la dimension de l'espace-cible, car cette dernière n'est pas sans ambiguïtés dans le régime quantique ; un exemple est le cas du modèle WZW sur $SU(2)$ au niveau $k = 1$ où $c = 1$ – cette théorie est en effet le boson compactifié sur un cercle de rayon $R = \sqrt{\alpha'}$, et l'espace-cible a donc dimension 1 (pour les niveaux intermédiaires il n'y a pas d'interprétation géométrique).

Tout comme pour l'algèbre de Virasoro, nous pouvons définir des états primaires correspondant aux représentations irréductibles de plus haut poids $|\lambda\rangle$ de \mathfrak{g}_k . Un détour par la théorie des représentations de \mathfrak{g}_k est maintenant nécessaire pour décrire le spectre ; pour un exposé détaillé voir [DiF96].

Un aperçu de représentations. La forme de Killing, restreinte à la sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g}_k (générée par k et par les éléments de Cartan $\{H_0^i$ de \mathfrak{g} , avec $i = 1, \dots, r$ où $r = \text{rang}(\mathfrak{g})$), fournit un isomorphisme entre celle-ci et l'espace des poids de \mathfrak{g}_k . Les poids affines peuvent donc être écrits dans la base $\{\omega_i\}$ des poids fondamentaux duaux aux co-racines de \mathfrak{g}_k

$$\lambda = \sum_{i=0}^r \lambda_i \omega_i \equiv [\lambda_i] \quad (2.1.10)$$

Nous nous intéressons aux poids dont les coefficients λ_i sont des entiers non-négatifs – les plus hauts poids, formant un ensemble noté P_+^k . Or, d'après les relations de commutation (1.2.21) on peut montrer que $k = \sum_{i=0}^r \lambda_i a_i^\vee$, où a_i^\vee sont des coefficients entiers qui ne dépendent pas de k . Dans les cas les plus simples, comme pour $G = SU(N)$, on a $a_i^\vee = 1$; nous nous plaçons dans ce cas par la suite.

Étant donnée cette contrainte sur les λ_i , nous concluons que P_+^k est un *ensemble fini*. Les représentations de plus haut poids de \mathfrak{g}_k sont donc, contrairement au cas de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} , en nombre fini. Le modèle de WZW d'un groupe compact a alors un nombre fini d'états primaires, ce qui en fait une théorie rationnelle. La construction de Sugawara assure que ces états sont aussi primaires par rapport à l'algèbre de Virasoro, avec des poids conformes

$$h_\lambda = \frac{(\lambda, \lambda + 2\rho)}{2(k + g^\vee)} \quad (2.1.11)$$

Ici $\rho = [1; 1, \dots, 1]$ est un élément important de P_+^k , appelé le vecteur de Weyl. L'ensemble P_+^k est un domaine fondamental pour l'ensemble des poids entiers de \mathfrak{g}_k ; tout autre poids entier a une image en P_+^k par l'action du groupe de Weyl. Il se peut que deux états aient le même poids conforme, dans lequel cas ils sont *conjugués* et dénotés λ et λ^c . Dans plusieurs cas, comme pour $\mathfrak{g} = so(4N)$, tous les états sont auto-conjugués.

Nous pouvons maintenant écrire la fonction de partition du modèle de WZW sur \mathfrak{g}_k . Le spectre inclut tous les états dans P_+^k couplés aux états conjugués. En termes des caractères de \mathfrak{g}_k ,

$$\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}_k}^{WZW} = \sum_{\lambda \in P_+^k} \chi_\lambda \cdot \bar{\chi}_{\lambda^c}(\tau) \quad (2.1.12)$$

Cette fonction de partition est dite de *conjugaison de charge*; dans les cas où la conjugaison de charge est non-triviale, il existe un invariant modulaire différent où les états sont couplés diagonalement, $Z = \sum \chi_\lambda \cdot \bar{\chi}_\lambda$. Ceux-ci sont appelés invariants modulaires diagonaux. Ces deux cas sont les exemples d'invariants modulaires les plus simples que nous rencontrerons par la suite. Leur invariance modulaire découle du fait que les matrices S, T décrivant les transformations modulaires des caractères χ_λ sont unitaires et que l'action de la conjugaison de charge consiste à en prendre le complexe conjugué. Nous retournerons à la classification des invariants modulaires avec symétries \mathfrak{g}_k dans la prochaine section.

Limite semi-classique et interprétation géométrique. Avant de continuer, deux remarques sont utiles. L'une est que, comme pour toute théorie quantique, la description de la théorie (2.1.12) par l'action S^{WZW} est valable seulement dans la limite semi-classique $k \rightarrow \infty^{\dagger 1}$. Dans cette limite, les oscillations quantiques qui forment le

^{†1}Plus précisément, il s'agit de la limite d'une suite dénombrable (car k est quantifié) de théories conformes.

spectre (2.1.12) doivent être reproduites par des champs scalaires sur G , c'est-à-dire par des fonctions sur G . C'est en effet ce qui se passe, selon le théorème de Peter-Weyl, qui exprime les fonctions sur un groupe en termes de ses représentations irréductibles de plus haut poids

$$Fonct(G) \sim \bigoplus_{R \in Rep} R \otimes R^c \quad (2.1.13)$$

Plus généralement, l'espace des fonctions sur l'espace-cible d'une théorie conforme forme (une partie de) son spectre dans la limite semi-classique. Nous disons une partie puisque l'espace des fonctions ne peut pas inclure les états vrillés. Cette caractérisation peut parfois être utile dans la mesure où souvent l'ensemble des états non-vrillés présents dans la théorie suffit à déterminer le spectre complet par des conditions de cohérence que nous rappellerons bientôt.

Par contre, comme nous l'avons vu avec l'exemple du modèle $SU(2)_1$, dans le régime où k est petit, c'est l'interprétation même de l'espace-cible qui est mise en cause – ce qui convient à la théorie des cordes, pour laquelle un tel régime correspond à la gravitation quantique.

Les groupes compacts, non simplement connexes : le cas de $SO(3)$. Comme illustration de ces idées, prenons le cas de $G = SO(3)$. Ce groupe n'est pas simplement connexe, étant défini comme le quotient de $SU(2)$ par l'action à gauche de son centre $\mathbb{Z}_2 = \{e, -e\}$. L'espace des fonctions sur $SO(3)$ est formé de ces fonctions sur $SU(2)$ qui sont invariantes par l'action du \mathbb{Z}_2 , $f(g) = f(-g)$. Ces fonctions correspondent aux représentations de $su(2)_k$ dont les poids sont divisibles par deux ; en particulier, le niveau k doit être pair pour que cette théorie existe.

Le fait que k soit pair a aussi une autre interprétation géométrique. Pour que le modèle sigma puisse être défini sur l'espace quotient, non seulement la métrique et le champ H doivent être bien définis (ce qui est le cas puisqu'ils sont bi-invariants), mais la quantification de la trois-forme doit aussi être respectée, ce qui implique que k doit être pair. Ce raisonnement s'applique à tous les groupes simples et non simplement connexes. Par exemple, pour un modèle WZW sur $PSO(N+1)$ le niveau se doit d'être multiple de N , car $PSO(N+1) = SU(N)/\mathbb{Z}_N$.

On peut aussi considérer des quotients par des groupes finis plus grands que le centre. En effet, $SO(3)$ est un cas particulier d'une famille de modèles qui (en général) ne sont plus des variétés de groupes mais pour lesquels on a néanmoins obtenu une

description exacte [MMS01],[BorW03] et utilisée en théorie des cordes [GPS93] : il s'agit des espaces de lentilles

$$L_n = SU(2)/\mathbb{Z}_n \quad (2.1.14)$$

Dans la section suivante nous construisons le terme de Wess–Zumino pour ce type de quotients de variétés de groupes. Nous montrerons ensuite que ces constructions correspondent effectivement à des théories conformes exactes.

Avant de continuer, un mot sur les modèles de WZW sur des groupes non-compacts. Le caractère fini de l'espace $Fonct(G)$ en haut, et la rationalité de la théorie conforme correspondante, sont dus à la compacité de G . Nos considérations semi-classiques nous indiquent donc que pour un groupe non-compact le spectre aura au moins une partie continue. Les théories conformes non rationnelles, correspondant à des groupes non-compacts, sont beaucoup plus compliquées que les théories rationnelles dont il est question ici ; les plus simples d'entre elles, comme $SL(2, \mathbb{R})$, font aujourd'hui l'objet d'un travail intense, largement parce que ce groupe en particulier a une très grande importance en théorie des cordes.

2.1.2 Les modèles sur des espaces courbes généraux

Nous avons remarqué, lors de la présentation du modèle de WZW (2.1.5) sur des groupes compacts simples, le rôle de la topologie de l'espace-cible dans la définition du terme de Wess-Zumino, notamment pour la quantification du niveau. Les contraintes résultantes de la bonne définition de ce terme, crucial pour la symétrie conforme du modèle, sont de nature différente selon que l'espace-cible est un groupe simplement connexe, non simplement connexe voire non-compact. Ici nous nous intéressons à la définition du terme de WZ dans des espaces compacts et leur quotients. Nous verrons ensuite que pour un même espace cible ce terme n'est pas en général défini de façon unique.

Considérons d'abord une variété quelconque M munie d'une métrique g . Comme l'indiquent les équations du mouvement du modèle sigma (2.1.5), si le tenseur de Ricci de g est non-nul, il faut introduire d'autres champs sur M pour que M puisse être l'espace cible d'une théorie conforme. Dans le cadre de la corde bosonique, il existe plusieurs possibilités pour le choix de ces champs, soit l'introduction d'une forme H de rang 3, soit du dilaton, soit d'une combinaison des deux. Nous étudierons ces solutions

perturbatives dans le chapitre 4 mais pour faire le contact avec les constructions exactes de la section précédente nous considérons ici des variétés M munies aussi d'une forme H , laquelle par les arguments standard est quantifiée, $H \in H^3(M, \mathbb{Z})$.

Toutefois, les arguments standard assez rapides du premier chapitre ont ignoré un certain nombre de subtilités d'origine topologique et ils ne sont plus corrects dans des variétés dont la topologie est plus compliquée. En effet, l'objet "forme H de rang 3" désigne un ensemble de données connu en Mathématiques sous le nom technique de *classe de cohomologie de Deligne de degré trois*. Un nom plus commun en physique est celui de *gerbe*. Le problème se résume à ce que le terme de Wess-Zumino, qui s'écrit schématiquement

$$e^{i \int_{\Sigma} X^*(d^{-1}H)} \quad (2.1.15)$$

où $X : \Sigma \rightarrow M$ est le plongement de la surface d'univers dans M , implique la spécification d'une deux-forme potentiel " $B = d^{-1}H$ " dont la forme induite par $X^{\mu}(z)$ serait intégrée sur Σ ; pour les cordes ouvertes il faut aussi spécifier une forme A de rang 1 telle que, " $A = d^{-1}B$ ", sur $X(\partial\Sigma)$. Hormis quelques cas simples les formes B et A ne sont pas définies sans ambiguïtés par la seule forme H . Ceci rappelle de l'effet Bohm-Aharonov en électrodynamique quantique.

Pour donner un sens au terme de Wess-Zumino (2.1.15) il faut donc regarder cette structure de plus près. En généralisant le cas d'un fibré ligne, on définit des formes B_i de rang 2 sur des ouverts $\{O_i\}$ formant un recouvrement suffisamment fin de M , telles que $dB_i = H$ dans O_i et que $B_i - B_j = dA_{ij}$ sont des formes exactes de rang 2 sur $O_{ij} = O_i \cup O_j$. Les formes A_{ij} de rang 1 doivent encore être bien définies sur les triples intersections O_{ijk} , c'est-à-dire $A_{jk} - A_{ik} + A_{ij} = ig_{ijk}^{-1}dg_{ijk}$ pour des fonctions de transition g_{ijk} à des valeurs dans $U(1)$ telles que $g_{jkl}g_{ikl}^{-1}g_{ijl}g_{ijk}^{-1} = 1$. La donnée de (g_{ijk}, A_{ij}, B_i) , pour un atlas $\{O_i\}$, définit la gerbe associée à H .

L'ingrédient essentiel pour la définition du terme de Wess-Zumino est la relation d'équivalence entre plusieurs choix de triplets (g_{ijk}, A_{ij}, B_i) . Cette relation d'équivalence agit sur B comme $B_i \sim B_i + d\Pi_i$ pour des formes Π_i de rang 1; ceci est accompagné par des modifications sur les autres éléments A_{ij} et g_{ijk} du triplet. À l'aide d'un choix de triangulation de Σ le terme de WZ peut alors être défini de façon compatible avec cette relation d'équivalence et indépendante de la triangulation choisie [A185]. Comme le modèle sigma dépend du choix de la classe d'équivalence $[g_{ijk}, A_{ij}, B_i]$, il nous importe de les classifier.

Suivant [GaRe02] notons l'ensemble de ces classes par $W(M, H)$. Si H n'est pas quantifiée cet ensemble est trivial, mais dans le cas où H l'est on peut montrer que $W(M, H)$ admet une action libre et transitive du groupe de cohomologie $H^2(M, U(1))$.^{‡2} En particulier, il y aura autant de termes de WZ, et donc de modèles-sigma, différents que d'éléments dans $H^2(M, U(1))$. Cette action s'écrit en général

$$(g_{ijk}, A_{ij}, B_i) \rightarrow (u_{ijk}g_{ijk}, A_{ij}, B_i)$$

où u_{ijk} sont des fonctions à valeurs dans $U(1)$.

Soulignons que tout groupe de cohomologie ici doit être pris au sens de cohomologie de Čech, et en général inclut des éléments d'ordre fini, c'est-à-dire de torsion. Seuls les sous-groupes d'ordre infini peuvent être identifiés à la cohomologie de de Rham, soit des formes sur M . Pour tout quotient d'un groupe de Lie G il s'avère que le groupe de cohomologie $H^3(M, \mathbb{Z})$ n'a pas de torsion ; dans ce cas l'action de $H^2(M, U(1))$ sur $W(M, H)$ devient formellement une transformation de jauge globale

$$(g_{ijk}, A_{ij}, B_i) \rightarrow (g_{ijk}, A_{ij}, B_i + F) \quad (2.1.16)$$

où F représente une forme fermée de rang 2 sur M . L'action sur le terme de WZ est donc

$$e^{iS_{WZ}} \rightarrow e^{i \int_C F_{ij} \partial X^i \bar{\partial} X^j} e^{iS_{WZ}} \quad (2.1.17)$$

où C est le 2-cycle de M enveloppé par $X(\Sigma)$. L'expression (2.1.16) est plutôt formelle, car $H^2(M, U(1))$ a en général des éléments de torsion. L'expression (2.1.17) est toutefois bien définie, une fois que tout élément de $H^2(M, U(1))$ évalué sur un 2-cycle C donné peut être écrit sous la forme d'une phase, comme dans (2.1.17), pour une forme F locale. Nous appelons le choix de classe en $W(M, H)$ de *torsion discrète*.

Le rôle de $H^2(M, U(1))$ dans des variétés M quelconques a été étudié par Sharpe (voir e.g. [Sh00]) dans le but de généraliser la notion de torsion discrète (géométrique) introduite par Vafa sur le tore et mentionnée dans la section 1.2.1. En effet, les variétés ayant un groupe $H^2(M, U(1))$ non-trivial ne sont pas (jusqu'à maintenant) habituelles en théorie des cordes, mais des exemples sont faciles à construire, comme nous le verrons en étudiant des quotients de variétés courbes par des sous-groupes discrets. Ici notre

^{‡2}On dira, par abus de langage, que $H^2(M, U(1))$ *paramétrise* $W(M, H)$. En termes techniques précis, $W(M, H)$ est un *torseur* sur $H^2(M, U(1))$.

but est précisément de montrer comment ces subtilités sont capturées et généralisées par la théorie conforme exacte sous-jacente lorsqu'on traite des quotients de variétés de groupe compacts.

Pour ce faire, il suffit en effet de considérer des quotients de groupes simples, simplement connexes et compacts G , puisque tout groupe compact est le quotient du produit d'un tel groupe avec un tore (qui, étant plat, ne soutient pas une trois forme H). Soit donc M le quotient d'un tel G par un sous-groupe discret (et donc fini) Γ sous une action que nous nommons p mais ne précisons pas pour l'instant. Ce quotient sera noté $M = G/p\Gamma$. Étant discret et fini, Γ est de la forme $\Gamma = \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r}$ où $r \leq \text{rang}(G)$. La métrique et le champ H sont invariants par translations sur G et sont donc hérités par le quotient, ce qui lui permet d'être l'espace-cible d'un modèle sigma avec symétrie conforme tant que la quantification de H est préservée. Si à l'origine H est quantifié par multiples de k , soit $H \in H^3(G, k\mathbb{Z})$, ceci implique que l'ordre n_i de chaque facteur de Γ doit être un diviseur de k ; toutefois, ceci n'est pas véritablement une contrainte vu que nous pouvons prendre k arbitrairement grand (notamment dans la limite géométrique de la théorie conforme). Pour être concret, nous nous concentrons sur $G = SU(N+1)$, la généralisation pour d'autres groupes simples, simplement connexes et compacts étant sans difficultés.

Le calcul de $H^2(G/p\Gamma, U(1))$. Nous allons d'abord déterminer le groupe $H^2(G/p\Gamma, U(1))$ paramétrisant la torsion discrète géométrique pour $G/p\Gamma$. Nous utiliserons plusieurs résultats de cohomologie des groupes, et de cohomologie singulière, pour laquelle une bonne référence est [Bro82]. Notons que pour G simplement connexe, et une fois que $\pi_2(G) = 0$, nous avons

$$H^2(G/p\Gamma, U(1)) = H^2(\Gamma, U(1)),$$

même quand l'action de Γ n'est pas libre, auquel cas le membre de gauche est la cohomologie Γ -équivariante. Notons que le membre de droite est indépendant de p . En tout cas, ceci nous permet de travailler exclusivement avec la cohomologie des groupes finis. En outre, on peut montrer que pour un tel groupe on a

$$H^\ell(\Gamma, U(1)) = H^{\ell+1}(\Gamma, \mathbb{Z}) \tag{2.1.18}$$

pour tout entier ℓ positif. Rappelons que Γ est de la forme $\Gamma = \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_N}$, puisque c'est un sous-groupe abélien discret de $SU(N+1)$. Heureusement, la cohomologie d'un produit direct de groupes $X \times Y$ est liée à la cohomologie des groupes X et Y via la

formule de Künneth. Un calcul par récurrence, exposé dans [Bor03], permet alors de déterminer $H^\ell(\Gamma, \mathbb{Z})$ avec le résultat suivant pour la torsion discrète géométrique

$$H^2(\Gamma, U(1)) = H^3(\Gamma, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{i < j} \mathbb{Z}_{gcd(n_i, n_j)}, \quad (2.1.19)$$

où gcd dénote le plus grand dénominateur commun. Le nombre de modèles sigma différents ayant G/p Γ pour espace-cible est donc $\sum_{i < j} gcd(n_i, n_j)$. Nous avons vu dans cette section les ambiguïtés impliqués dans la définition d'un modèle sigma avec espace-cible courbe. Nous allons nous tourner maintenant vers la description algébrique de ces théories conformes.

2.2 Fonctions de partition et torsion discrète

Nous avons vu dans le chapitre 1 que la théorie conforme associée à un modèle sigma a comme algèbre de symétrie le produit tensoriel de deux algèbres chirales $\mathfrak{g}_G \times \mathfrak{g}_D$, où $\mathfrak{g}_{G,D}$ contiennent l'algèbre de Virasoro. Une telle théorie est dite *théorie conforme complète*, construite à partir des algèbres chirales $\mathfrak{g}_{G,D}$. Des théories conformes *chirales*, avec pour algèbre de symétrie une algèbre chirale \mathfrak{g} , peuvent aussi être définies; c'est le cas par exemple de la théorie qui décrit l'effet Hall quantique. Toute théorie conforme chirale donne lieu à une théorie conforme complète (avec $\mathfrak{g}_G = \mathfrak{g}_D = \mathfrak{g}$).

L'étude des théories conformes complètes se divise alors en deux parties, d'abord l'étude des données chirales et ensuite l'analyse des couplages des secteurs gauche et droit. Dans la section précédente nous avons donné un aperçu de la théorie des représentations des algèbres chirales affines \mathfrak{g}_k ; dans cette section nous considérons les fonctions de partition possibles, pour des théories dont les algèbres chirales sont isomorphes, $\mathfrak{g}_G \simeq \mathfrak{g}_D$. A l'image de ce que nous avons présenté pour les modèles de WZW, nous prétendons déduire l'interprétation géométrique de ces théories à partir de la limite semi-classique de leur spectre.

2.2.1 Fonctions de partition et courants simples

Les objets principaux de notre étude sont donc les fonctions de partition (2.2.30), et cette section est dédiée a leur classification. Les fonctions de partition des théories conformes rationnelles sont de la forme

$$\mathcal{Z} = \sum_{\lambda, \lambda' \in P_+^k} Z_{\lambda\lambda'} \chi_\lambda(\tau) \bar{\chi}_{\lambda'}(\tau), \quad (2.2.20)$$

où $Z_{\lambda\lambda'}$ sont des entiers positifs. Il s'agit de déterminer des conditions sur les $Z_{\lambda,\lambda'}$ qui assurent que \mathcal{Z} soit ‘‘physique’’. Nous nous concentrons sur la condition que \mathcal{Z} doit être invariant modulaire, c'est-à-dire que $Z_{\lambda\lambda'}$ commute avec les transformations modulaires S et T .

Ce sujet a été développé longuement par plusieurs auteurs (voir [SY90],[GRS91] et leurs références) et rend compte de deux cas de figure : la plupart des invariants modulaires sont du type dit de *courants simples*; les autres sont appelés exceptionnels. Comme le nom l'indique, ceux-ci sont en nombre très réduit par rapport aux autres – en effet, les invariants modulaires exceptionnels sont un phénomène de niveau k fini et, n'ayant donc pas de limite semi-classique, ne nous intéresseront pas par la suite. Le but de cette section est donc de décrire le formalisme des courants simples. Nous commençons par rappeler des structures algébriques associées aux spectres des théories conformes rationnelles.

Rappelons que le caractère locale de notre théorie nous assure que la divergence de courte distance entre deux opérateurs est déterminée par un développement du produit d'opérateurs (l'OPE) de la forme

$$\Phi_{\lambda_1}(z)\Phi_{\lambda_2}(w) \sim \sum_{\lambda_3} (z-w)^{h_3-(h_1+h_2)} \Phi_{\lambda_3}. \quad (2.2.21)$$

Les OPEs définissent donc un produit, dit de *fusion*, dans l'ensemble des états primaires

$$\Phi_{\lambda_1} \star \Phi_{\lambda_2} = \sum_{\lambda_3} \mathcal{N}_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3} \Phi_{\lambda_3}, \quad (2.2.22)$$

où les *règles de fusion* $\mathcal{N}_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3}$ sont des entiers positifs qui comptent la multiplicité de l'opérateur Φ_{λ_3} dans l'OPE de Φ_{λ_1} et Φ_{λ_2} . Cet ensemble d'opérateurs a en plus un élément distingué, l'état du vide (correspondant à la représentation triviale). Cet opérateur agit comme l'identité des règles de fusion, et nous le noterons parfois par $\mathbf{1}$. Avec cet élément, les états primaires forment un anneau sous la fusion, et cet anneau est commutatif et associatif.

Il peut exister, en plus de l'identité, des champs primaires ayant des inverses sous le produit de fusion. Ce sont précisément les *courants simples*. Un tel champ, noté J , est tout aussi bien caractérisé par le fait que sa fusion avec tout autre champ λ contient un seul élément,

$$\Phi_J \star \Phi_\lambda = \Phi_{J\lambda}. \quad (2.2.23)$$

Les champs primaires s'organisent donc en orbites des courants simples. Ceux ci engendrent un groupe abélien, appelé le centre de la théorie, qui est associé à des symétries accidentelles de la théorie comme le montre une analyse des règles de fusion

$$\mathcal{N}_{\lambda_1, J\lambda_2}^{J\lambda_3} = \mathcal{N}_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3}. \quad (2.2.24)$$

D'après (2.2.23), on peut leur associer des charges de monodromie (définies modulo des entiers)

$$Q_J(\mu) = h_j + h_\mu - h_{J\mu} \quad (2.2.25)$$

qui décrivent la transformation de la matrice modulaire S (1.1.13) le long de l'orbite de J

$$S_{J\lambda, \mu} = e^{2\pi i Q_J(\mu)} S_{\lambda, \mu}. \quad (2.2.26)$$

La charge de monodromie est conservée dans le sens où $Q_J(\mu_1 * \mu_2) = Q_J(\mu_1) + Q_J(\mu_2)$ mod 1. Ceci montre que le générateur de la symétrie associée à J est $\exp(2\pi i Q_J)$. On peut aussi définir l'ordre n_J de J , soit le plus petit entier positif tel que $J^{n_J} = 1$. Tout courant simple vérifie $2n_J h_J \in \mathbb{Z}$. Ceux qui en plus vérifient $n_J h_J \in \mathbb{Z}$ sont en quelque sorte bosoniques et constituent le *centre effectif* Z de la théorie. Rappelons encore que la matrice S détermine les règles de fusion via la formule de Verlinde

$$\mathcal{N}_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3} = \sum_{\alpha} \frac{S_{\lambda_1, \alpha} S_{\lambda_2, \alpha} S_{\lambda_3, \alpha}^*}{S_{0\alpha}}, \quad (2.2.27)$$

d'où on retrouve les symétries (2.2.24). Comme exemples de courants simples, rappelons que dans le cas des modèles WZW, le groupe \mathcal{G} est isomorphe au centre du groupe de Lie.

De par ces liens entre les courants simples et les matrices modulaires nous pouvons nous attendre à pouvoir construire des invariants modulaires (2.2.20) à partir des courants simples. Armés du centre effectif de la théorie, nous considérons le cas général des fonctions de partition où les champs gauches et droits sont reliés par l'action de courants simples

$$Z_{\lambda, \lambda^c} \neq 0 \text{ seulement si } \exists J : \lambda = J\lambda' \quad (2.2.28)$$

Les invariants modulaires de ce type portent le nom d'*invariants modulaires de type courant simple*. Ils généralisent les invariants modulaires de type conjugaison de charge

et ont été classifiés par Schellekens et collaborateurs [SK90],[SY90],[GRS91] avec les résultats que nous rappelons maintenant.

Il faut tout d'abord choisir le sous-groupe des courants simples $\mathcal{G} \subset Z$ qui interviennent dans (2.2.28). Ce groupe, étant fini et abélien, est de la forme

$$\mathcal{G} = \mathbb{Z}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_q} \quad (2.2.29)$$

Il nous sera nécessaire de choisir une base pour ce groupe, c'est-à-dire des générateurs J_i d'ordre n_i , par rapport à laquelle un élément général du groupe s'écrit $J^{\vec{s}} = \prod_i J_i^{s_i}$.

D'après l'interprétation des courants simples comme des symétries de la théorie, on pourrait penser que la fonction de partition est physique quand le champ Φ_λ est couplé au champ $\Phi_{J\lambda}$ seulement si λ a une monodromie triviale sous J , soit

$$\exp(Q_J(\lambda)) = 1$$

Ceci est en effet le cas quand J a spin entier; l'invariant modulaire résultant est dit de type *extension* car les algèbres chirales sont étendues pour englober les symétries J . Par contre, la formule de Verlinde suggère que des automorphismes $A_{\lambda\lambda'}$ des règles de fusion mènent aussi à des invariants modulaires avec $Z_{\lambda\lambda'} = A_{\lambda\lambda'}$ (dont la fonction de partition diagonale).

Pour le cas général, les auteurs de [SK90] ont introduit la matrice R des monodromies relatives des courants. Il s'agit d'une matrice symétrique $q \times q$ définie par $R_{ij} = Q_{J_i}(J_j) = h(J_i) + h(J_j) - h(J_i \star J_j)$. La condition sur la monodromie se réécrit alors comme

$$Q_{J_i}(\lambda) + \frac{1}{2} \sum_j R_{ij} s_j \in \mathbb{Z}.$$

Cette expression est appropriée dans la presque totalité des cas^{‡3}; nous devons cependant nous demander s'il existe des modifications de cette condition qui préservent toujours l'invariance conforme et les autres conditions que doit respecter notre fonction de partition.

Ces modifications peuvent en effet se calculer explicitement; elles s'obtiennent en remplaçant la matrice R par une matrice X de même dimension dont la partie symé-

^{‡3}Il existe des cas à niveau fini où il faut introduire la torsion discrète pour obtenir l'invariance conforme.

trique est fixée par la condition^{‡4}

$$X + X^t = R.$$

On peut alors montrer que la forme générale d'un invariant modulaire physique de type courant simple est

$$Z = \sum_{\lambda} \sum_{J^s \in \mathcal{G}} \left(\prod_{i=1}^q \delta_{\mathbb{Z}}(Q_{J_i}(\lambda) + X_{ij} s_j) \right) \chi_{\lambda} \bar{\chi}_{J^s \lambda} \quad (2.2.30)$$

où $\delta_{\mathbb{Z}}(a) = 1$ si $a \in \mathbb{Z}$ et vaut zéro le cas échéant, tel que la partie antisymétrique de X obéit aux conditions

$$X_{ij} = \frac{x_{ij}}{n_{ij}}, \quad x_{ij} \in \mathbb{Z}, \quad \text{avec} \quad n_{ij} = \gcd(n_{i,j}). \quad (2.2.31)$$

Tout comme pour la matrice R , les éléments de la matrice X sont définis modulo des entiers. La partie antisymétrique de la matrice X est appelée *la torsion discrète algébrique* et sera l'objet principal de notre étude dans ce chapitre.

L'expression (2.2.30) mérite quelques commentaires de plus. Il est évident que le choix de torsion discrète affecte seulement les couplages non diagonaux, avec $s_i \neq 0$, dans l'invariant modulaire. Nous trouvons ainsi que les théories conformes de type courant simple se groupent en familles de théories qui partagent les mêmes secteurs non-vrillés, et dont les éléments se distinguent par les secteurs vrillés, c'est-à-dire par la torsion discrète. En plus, l'algèbre chirale peut être étendue de façon différente à gauche et à droite; ces extensions sont en effet déterminées, respectivement, par les noyaux gauche et droit de la matrice X . D'après la sommation sur tout le spectre et tout le groupe \mathcal{G} de courants simples, la formule (2.2.30) ne dépend évidemment pas du choix des générateurs J_i . Finalement, il convient de rappeler qu'à ce jour tout invariant modulaire physique connu de théories conformes rationnelles est de cette forme, avec l'exception des dits invariants exceptionnels qui n'ont pas de limite semi-classique.

Nous illustrons ce formalisme dans le cas le plus simple, celui des modèles WZW.

2.2.2 Groupes, espaces quotients et torsion discrète

Le modèle de WZW G_k (2.1.12) est l'exemple le plus simple d'une théorie définie par une fonction de partition de type conjugaison de charge, pour l'algèbre chirale

^{‡4}Les éléments diagonaux de R sont en effet définies modulo 2 par une contrainte aditionnelle [SY90], et donc tous les éléments de X sont définis modulo 1.

\mathfrak{g}_k . Toutefois, par rapport à une sous-algèbre $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{g}_k$ la fonction de partition (2.1.12) ne sera plus diagonale mais encore de type courant simple (plus précisément de type extension). Dans cette section, nous appliquons le formalisme des courants simples pour construire ces fonctions de partition, et nous en profitons pour noter quelques aspects de l'interprétation géométrique de la torsion discrète.

Nous considérons donc ici les modèles G_k du point de vue des sous-algèbres chirales $u(1)_k^r$ où r est le rang de G (comme auparavant, G est un groupe simple, simplement connexe et compact). $u(1)^r$ est la sous algèbre commutative maximale de $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$. La charge centrale associée est $c = r$ et les champs primaires sont notés $\phi_{\vec{n}}$, avec $\vec{n} = (n_1, \dots, n_r)$ où les étiquettes prennent les valeurs $n_i = 0, \dots, 2k - 1$. Le poids conforme du champ $\phi_{\vec{n}}$ est

$$h(\phi_{\vec{n}}) = \sum_{i=1}^r \frac{n_i^2}{4k} \quad (2.2.32)$$

Les règles de fusion sont aussi très simples

$$\phi_m \star \phi_n = \phi_{m+n} \quad (2.2.33)$$

où $m + n$ est défini modulo $2k$. La base de la construction est la décomposition des représentation irréductibles de l'algèbre \mathfrak{g}_k en celles de l'algèbre $u(1)_k^r$. En termes de caractères, on a

$$\chi_{\Lambda}^{\mathfrak{g}_k}(\tau) = \sum_{\mu \in P/kQ^\vee} \chi_{\Lambda, \mu}(\tau) \chi_{\mu}^{u(1)^r}(\tau), \quad (2.2.34)$$

où P est le réseau des poids de l'algèbre de Lie (horizontale) \mathfrak{g} et Q^\vee est le réseau de ses co-racines. Les fonctions de branchement $\chi_{\Lambda, \mu}(\tau)$ introduites ici peuvent être considérées comme des caractères d'une autre théorie, la théorie du coset^{‡5} $G/U(1)^r$, que nous appellerons aussi des parafermions [FZ85]. Les principales propriétés des cosetes dont nous aurons besoin sont déjà évidentes dans formule (2.2.34) et la théorie de représentations des algèbres affines. En particulier, les champs primaires des cosetes ont deux étiquettes (Λ, μ) soumis aux règles de sélection $\Lambda - \mu \in Q$ et leurs poids conformes sont

$$h(\phi_{\Lambda, \mu}) = h(\Phi_{\Lambda}) - h(\phi_{\mu}).$$

Nous pouvons ainsi montrer que la fonction de partition de type conjugaison de charge du modèle G_k est de type courant simple par rapport à l'algèbre $\mathfrak{g}/u(1)^r \times u(1)^r$ avec le groupe de courants simples $\mathcal{G} \cong Q/kQ$.

^{‡5}Nous garderons ce mot anglais pour indiquer le quotient d'un espace par l'action d'un groupe continu.

Par souci d'être concret, et pour suivre la section précédente, nous considérons le cas de $\mathfrak{g} = su(N+1)$, dont la sous-algèbre abélienne maximale est $u(1)^N$. Le but est donc de formuler le modèle $SU(N+1)_k$, pour un niveau k quelconque, en tant que modèle de l'algèbre chirale $su(N+1)_k/u(1)^N \times u(1)^N$. Le choix d'une base $\{\vec{\lambda}_i\}$ pour le réseau P des poids de $su(N+1)_k$ donne une base pour le réseau P' des poids de $u(1)^N$, que par abus de notation nous identifions avec $\{\vec{\lambda}_i\}$.

Les champs primaires de $su(N+1)_k$ ont donc pour étiquette le vecteur $\vec{j} = \sum_{i=1}^N j_i \vec{\lambda}_i$, tandis que les champs primaires de $u(1)^N$ s'écrivent $\vec{m} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{\lambda}_i$, avec les règles de sélection $m_i = j_i \bmod 2$. Le champ primaire parafermionique a donc l'étiquette général (\vec{j}, \vec{m}) , quoique, à cause de l'automorphisme extérieur de $su(N+1)_k$, il existe une redondance dans l'étiquettage des champs primaires. Cet automorphisme est explicitement

$$\omega(\vec{j}) = \left(k - \sum_i j_i \right) \vec{\lambda}_1 + j_1 \vec{\lambda}_2 + \dots + j_{N-1} \vec{\lambda}_N \quad (2.2.35)$$

et l'identification de étiquettes qui s'en déduit est $(\vec{j}, \vec{m}) \sim (\omega\vec{j}, \vec{m} + k\vec{\lambda}_1)$. Avec ces caveats, les champs primaires de notre algèbre chirale $\mathfrak{g}_k/u(1)^r \otimes u(1)^r$ s'écrivent $(\vec{j}, \vec{m}; \vec{m}')$.

Dans cette notation, en utilisant la décomposition des caractères (2.2.34), notre fonction de partition (2.1.12) est une somme de termes de la forme

$$\chi_{\vec{j}, \vec{m}; \vec{m}'} \cdot \bar{X}_{\vec{j}, \vec{m}'; \vec{m}'} \quad (2.2.36)$$

On voit immédiatement, à l'aide de (2.2.33), que les courants simples J_i présents agissent simultanément comme $m_i \rightarrow m_i + 2$ et comme $m'_i \rightarrow m'_i + 2$; leur forme explicite est $J_i = (\vec{0}, 2\vec{\lambda}_i; 2\vec{\lambda}_i)$ où les coefficients non-nuls sont dans la position i . Le groupe de courants simples associé à (2.2.36) est donc $\mathcal{G} \cong \mathbb{Z}_k^N$. Comme le réseau des racines est $Q = \mathbb{Z}^N$, nous retrouvons le résultat $\mathcal{G} \cong Q/kQ$.

Cependant, pour définir la fonction de partition obtenue par ce choix de \mathcal{G} , il faut encore spécifier la matrice X de torsion discrète (2.2.31). Il s'agit d'une matrice de taille $N \times N$ et pour $N > 1$, c'est-à-dire pour des groupes plus grands que $SU(2)$, il existe un choix de la partie antisymétrique dont les éléments sont de la forme x_{ij}/k . Comme la fonction de partition (2.1.12) est symétrique, la torsion discrète correspondante vaut zéro, $x_{ij} = 0$. La limite de k grand est alors bien définie, et le spectre de la théorie approche l'espace de fonctions sur le groupe $SU(N+1)$. Nous retrouvons ainsi l'interprétation géométrie de ce modèle WZW comme la description de la propagation des cordes dans l'espace-cible $SU(N+1)$.

Évidemment, d'autres choix de torsion discrète sont tout aussi valables, et conduisent à des fonctions de partition plus compliquées. Cependant, une fois que le couplage gauche-droit dépend explicitement du niveau, pour prendre la limite semi-classique il faut choisir la façon dont la torsion discrète croît avec k , tout en respectant sa quantification (2.2.31). Nous délaissions ce problème au profit de l'étude de théories avec groupes de courants simples plus généraux.

2.3 Les quotients G/Γ des variétés de groupe

La construction précédente préserve explicitement la symétrie $u(1)^N$ du modèle, correspondant aux champs primaires $\phi_{\vec{m}}$. Nous pouvons en profiter pour jauger des symétries de la théorie $u(1)^N$. Ces symétries sont engendrées par l'action de groupes discrets, soit du type rotation (sans point fixes) $\phi_{\vec{m}} \rightarrow \phi_{\vec{m}+\vec{\lambda}}$, soit du type réflexion $\phi_{\vec{m}} \rightarrow \phi_{-\vec{m}}$. Les premières sont engendrées par l'action de courants simples, tandis que la deuxième peut être vue comme une T-dualité. Considérons d'abord la possibilité de jauger les symétries engendrées par les courants simples (nous reviendrons aux T-dualités dans la section 2.3.1).

Tout d'abord, nous devons connaître l'ensemble des courants simples, plus précisément le centre effectif Z . Dans le cas de $su(N+1)_k/u(1)^N \times u(1)^N$, nous avons $Z = \mathbb{Z}_k^N \times \mathbb{Z}_k^N$, où le premier facteur est le centre effectif des parafermions et le deuxième celui des bosons. Pour jauger un sous-groupe discret Γ des symétries $u(1)^N$ dans la théorie, notre groupe de courants simples doit être isomorphe à Γ , agissant seulement sur les bosons.

Il serait particulièrement intéressant, notamment en vue d'une application à la théorie des cordes, de combiner cela avec nos résultats de la section précédente. Nous considérons ainsi le groupe de courants simples

$$\mathcal{G} \cong \mathbb{Z}_k^N \times \Gamma \tag{2.3.37}$$

où le premier facteur agit, comme pour le modèle WZW sur $SU(N+1)$, diagonalement sur les parafermions et les bosons, et où Γ agit seulement sur les bosons. La prédiction naïve de l'interprétation géométrique d'une telle opération est que la théorie résultante décrit la propagation des cordes fermées dans une certaine géométrie quotient G/Γ . De tels espaces sont importants en cosmologie ainsi qu'en théorie des cordes, en particulier les espaces de lentilles $SU(2)/\mathbb{Z}_n$.

La principale question abordée dans ce chapitre est donc : *existe-t-il une interprétation géométrique pour chaque élément de la famille de théories dont le groupe de courants simples est $\mathbb{Z}_k^N \times \Gamma$?* Autrement dit, il s'agit de trouver une interprétation géométrique pour la torsion discrète. Cette question est résolue en trois temps. Le premier pas a été abordée dans la section 2.1, où nous avons étudié la définition des modèles WZW sur des quotients discrets de groupes; ici nous étudierons en détail les fonctions de partition de cette famille de théories et finalement dans la section 2.3.1 nous relierons les deux approches en trouvant l'interprétation géométrique pour (la plupart de) ces modèles.

Évidemment, il est très intéressant d'étudier comment certaines propriétés de ces théories dépendent du choix de torsion discrète. Cela a été fait notamment dans [FHSSW00] en ce qui concerne les états de bord possibles, et nous en parlerons en détail dans le chapitre 3.

Penchons-nous d'abord sur le groupe Γ de courants simples. Étant un groupe discret et abélien (c'est un sous-groupe de Z), il est de la forme $\Gamma \cong \mathbb{Z}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_N}$ où n_i sont des diviseurs de k et certains facteurs \mathbb{Z}_i peuvent être triviaux. Il peut y avoir plusieurs sous-groupes de Z isomorphes à Γ mais nous pouvons admettre, sans perte de généralité, que les générateurs de Γ s'écrivent naturellement dans la base $\{\vec{\lambda}_i\}$; c'est-à-dire que les générateurs W_i de Γ agissent sur la i -ème sous-algèbre $u(1)$ (orthogonale aux autres pour la forme de Killing), comme $m'_i \rightarrow m'_i + 2k/n_i$, pour $i = 1, \dots, N$. De façon plus concise, $W_i = (\vec{0}, \vec{0}; \frac{2k}{n_i} \vec{\lambda}_i)$ (où les deux premières étiquettes dénotent les parafermions).

Le groupe \mathcal{G} étant déterminé, quels sont alors les choix de torsion discrète ? Un coup d'oeil aux conditions (2.2.31) révèle la structure suivante pour la matrice X . La matrice est écrite dans la base (J_i, W_j) avec $i, j = 1, \dots, N$ et la notation est la suivante : nous voulons maintenir la même indexation pour les courants J_i (les générateurs de \mathbb{Z}_k^N) et de W_i (les générateurs de Γ), puisque tous les deux agissent sur la même sous-algèbre $u(1)^{(i)}$. Les éléments de matrice qui mélangent les J_i sont donc notés x_{ij} , ceux mélangeant les J_i et les W_i s'écrivent y_{ij} et ceux mélangeant les W_i sont appelés z_{ij} .

D'après la définition de la matrice X (2.2.31) et des poids conformes des états bosoniques (2.2.32) nous avons donc

$$X(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & \frac{x_{12}}{k} & \dots & & -\frac{2-y_{11}}{n_1} & \frac{y_{21}}{n_2} & \dots & \\ -\frac{x_{12}}{k} & 0 & & \vdots & \frac{y_{12}}{n_1} & -\frac{2-y_{22}}{n_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \frac{x_{N-1,N}}{k} & \vdots & & \ddots & \frac{y_{N-1,N}}{n_N} \\ -\frac{x_{1N}}{k} & \dots & & 0 & -\frac{y_{1N}}{n_1} & \dots & & -\frac{2-y_{NN}}{n_N} \\ \hline & & & & 0 & \frac{z_{12}}{n_{12}} & \dots & \\ & & & & -\frac{z_{12}}{n_{12}} & 0 & & \vdots \\ & & & & \vdots & & \ddots & \frac{z_{N-1,N}}{n_{N-1,N}} \\ & & & & -\frac{z_{1N}}{n_{1N}} & \dots & & 0 \end{array} \right]. \quad (2.3.38)$$

Étant données les contraintes que doit satisfaire X , nous voyons que le groupe qui “paramétrise” le choix de torsion discrète est

$$\mathcal{D}(\mathcal{G}) = \mathbb{Z}_k^{\frac{N(N-1)}{2}} \oplus \bigoplus_{i=1}^N \mathbb{Z}_{n_i}^N \oplus \bigoplus_{i<j} \mathbb{Z}_{\gcd(n_i, n_j)}, \quad (2.3.39)$$

où les trois termes paramétrisent les choix de x_{ij} , y_{ij} et z_{ij} respectivement.

Rappelons que notre but est de déterminer l’interprétation géométrique de la torsion discrète algébrique. La comparaison des degrés de liberté correspondants dans $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ avec les choix possibles pour la torsion discrète géométrique

$$H^2(\Gamma, U(1)) = \bigoplus \bigoplus_{i<j} \mathbb{Z}_{\gcd(n_i, n_j)} \quad (2.3.40)$$

suggère que le choix de la connexion B (2.1.19) est pris en compte par le troisième terme en $\mathcal{D}(\mathcal{G})$. Une fois que ce choix prend en compte toutes les transformations possibles de l’espace-cible, donné par le triplet (M, g, H) , nous devons nous attendre à ce que le deuxième terme $\bigoplus_{i=1}^N \mathbb{Z}_{n_i}^N$ en $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ corresponde à un changement d’espace cible. C’est en effet ce que nous allons montrer. Quant au premier terme en $\mathcal{D}(\mathcal{G})$, nous maintiendrons les paramètres x_{ij} à zéro, pour les raisons évoquées à la fin de la section 2.2.2.

La fonction de partition (2.2.30) pour des valeurs arbitraires des paramètres y_{ij} , z_{ij} s’écrit alors

$$Z(y_{ij}, z_{ij}) = \sum_{\vec{j}} \sum_{\vec{s}} \left(\sum_{\substack{\vec{m}, \vec{m}'(\vec{s}) \\ \vec{w}, \vec{w}'(\vec{s})}} \chi_{\vec{j}\vec{m}(\vec{s})} \chi_{\vec{m}'(\vec{s})} \bar{\chi}_{\vec{j}, \vec{w}(\vec{s})} \bar{\chi}_{\vec{w}'(\vec{s})} \right), \quad (2.3.41)$$

où nous avons noté un courant simple général comme $J^{\vec{s}} = (\Pi_i J_i^{s_i}) (\Pi_i W_i^{\bar{s}_i})$ avec $\vec{s} = (s_1, \dots, s_N, \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_N)$. Les règles de selection sont

$$m_i - m'_i = \sum_j (y_{ij} + \delta_{i,j}) \frac{k}{n_j} \bar{s}_j \pmod{k}, \quad (2.3.42)$$

$$m'_i = (y_{ii} - 1)s_i - \frac{k}{n_i} \bar{s}_i + \sum_{j \neq i} \frac{z_{ij}}{n_{ij}} \frac{k}{n_i} \bar{s}_j \pmod{\frac{k}{n_i}}, \quad (2.3.43)$$

avec $w_i = m_i + 2s_i$, $w'_i = m'_i + 2s_i + 2\frac{k}{n_i} \bar{s}_i$. Nous avons aussi adopté la notation $\chi_{\vec{m}'(s)} = \Pi_i \chi_{m'_i(s)}^{u(1)(i)}$ pour le produit de caractères de $u(1)$ et nous rappelons que $n_{ij} = \gcd(n_i, n_j)$.

Notons que le choix $y_{ii} = -1$ implique $m_i = m'_i \pmod{k}$, ce qui, avec l'identification des champs par l'automorphisme (3.1.3) et la décomposition de représentations (2.2.34), indique que ce choix préserve l'algèbre chirale gauche $su(N+1)_k$. Nous verrons dans la section 2.3.1 que cela correspond à quotienter le groupe $SU(N+1)$ par l'action de Γ à droite. Mais pour comprendre l'interprétation géométrique du modèle (2.3.41) pour un choix quelconque de torsion discrète, nous considérons d'abord une famille particulièrement intéressante de quotients de $SU(2)$.

2.3.1 La géométrie de la torsion discrète

SU(2) et les espaces de lentilles. Un espace de lentille (généralisé) $L_{(n,p)}$ est un quotient du groupe $SU(2)$ par la relation d'équivalence

$$g \sim \omega^{\frac{p+1}{2}} g \omega^{\frac{p-1}{2}}, \quad (2.3.44)$$

où $\omega \in \mathbb{Z}_n \subset SU(2)$ est un élément d'ordre n . Dans la notation de la section précédente nous pourrions écrire $L_{(n,p)} = SU(2)/_p \mathbb{Z}_n$. Ici p est défini modulo n , car $\omega^{n/2}$ est un élément central d'ordre 2, et nous avons donc n espaces de lentilles généralisés pour un sous-groupe \mathbb{Z}_n (le choix du générateur ω n'étant pas pertinent). Les espaces de lentilles usuels correspondent au quotient par l'action droite ou gauche de \mathbb{Z}_n , soit $p = 1$ ou $p = -1$ respectivement. En termes de coordonnées d'Euler $g(\chi, \theta, \phi) = e^{i\frac{\chi}{2}\sigma_3} e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_1} e^{i\frac{\phi}{2}\sigma_3}$ la relation d'équivalence devient

$$\chi \sim \chi + 2\pi \frac{p+1}{n}, \quad \phi \sim \phi - 2\pi \frac{p-1}{n}. \quad (2.3.45)$$

Si n et p ne sont pas premiers entre eux le quotient a des points fixes. Sinon, les espaces $L_{(n,p)}$ sont réguliers et leurs topologies sont très similaires, dépendant seulement de n – en particulier, leur groupe fondamentale est $\pi_1(L_{(n,p)}) = \mathbb{Z}_n$. Mais tous les $L_{(n,p)}$

ont aussi la cohomologie (et l'homologie) de la trois-sphère S^3 , $H^{1,2}(L_{(n,p)}, \mathbb{Z}) = 0$ et $H^3(L_{(n,p)}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$; ils ont donc fourni à Poincaré un contre-exemple à sa première conjecture sur la caractérisation de la sphère d'après sa seule homologie. En fait, il faut recourir à la théorie des noeuds pour distinguer géométriquement les espaces de lentilles réguliers [A19]. Il est assez amusant, et peut être pas un hasard, que la théorie conforme accomplisse la même tâche.

Finalement, le groupe $H^2(L_{(n,p)}, U(1))$ de torsion discrète géométrique est trivial et donc il existe sur $L_{(n,p)}$ une seule classe de connections B pour un champ H quantifié. Les espaces de lentilles nous permettent donc de nous concentrer sur le deuxième terme \mathbb{Z}_n de la torsion discrète algébrique (2.3.39).

Notre stratégie sera d'abord de construire les opérateurs de vertex généraux dans le quotient (2.3.44) et ensuite de chercher une fonction de partition invariante modulaire avec des termes de cette forme. La classification des invariants modulaires nous permettra alors d'identifier cette fonction de partition et d'identifier l'interprétation géométrique de la torsion discrète algébrique qui y apparaît.

Le quotient (2.3.44) brise la symétrie $su(2)_L \times su(2)_R$ pour en préserver seulement une symétrie $u(1)_L \times u(1)_R$; nous retrouvons l'algèbre chirale $su(2)_k/u(1)_{2k} \times u(1)_{2k}$ où k est un multiple de n . Rappelons la décomposition (2.2.34) des caractères de $su(2)_k$ dans ceux de $u(1)_{2k}$

$$\chi_j^{su(2)_k} = \sum_{\substack{m=0 \\ m=j \pmod{2}}}^{2k-1} \chi_{jm}^{PF} \chi_m^{u(1)_{2k}}.$$

Les courants générant l'algèbre $u(1)_L \times u(1)_R$ subissent aussi l'action (2.3.44)

$$J_L = g^{-1}dg \sim \omega^{\frac{p+1}{2}} J_L \omega^{-\frac{p+1}{2}}, \quad \bar{J}_R = \bar{d}g g^{-1} \sim \omega^{-\frac{p-1}{2}} \bar{J}_R \omega^{\frac{p-1}{2}}, \quad (2.3.46)$$

ce qui induit une relation d'équivalence dans l'ensemble des champs primaires du facteur $u(1)_{2k}$ de la théorie

$$\chi_m \sim \chi_{m-(p-1)\frac{k}{n}}, \quad \bar{\chi}_m \sim \bar{\chi}_{m-(p+1)\frac{k}{n}}. \quad (2.3.47)$$

Notons la différence de signe entre le secteur gauche et le secteur droit. Ici le fait que p est défini modulo n est lié à l'identification des champs parafermioniques $V_{jm} \sim V_{k-j, m+k}$.

Partant de la fonction de partition de $SU(2)_k$, où les champs sont couplés avec leurs conjugués, et imposant l'identification (2.3.47) nous trouvons la forme du terme

général de la fonction de partition de l'espace de lentilles $L_{(n,p)}$

$$\chi_{jm} \chi_{m-(p-1)\frac{k}{n}\bar{s}_1} \cdot \bar{\chi}_{jw} \bar{\chi}_{w-(p+1)\frac{k}{n}\bar{s}_1}, \quad (2.3.48)$$

où \bar{s}_1 est un entier défini modulo n et qui peut être interprété comme un nombre d'enroulement. En faisant appel aux règles de fusion de $u(1)$ (2.2.33), remarquons que les secteurs gauche et droit dans ces termes sont reliés par des courants simples. Un calcul simple révèle alors que le groupe de courants simples exigé est le groupe fini et abélien $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_n$, ce qui est de la forme (2.3.37).

Pour trouver un invariant modulaire, nous pourrions commencer par imposer aux termes (2.3.48) l'invariance sous le générateur T des transformations modulaires (en d'autres mots que $h_L = h_R \pmod{\mathbb{Z}}$) et ensuite trouver une combinaison linéaire (à coefficients entiers positifs) de ces termes qui soit invariante sous le générateur S . Il faudrait alors vérifier plusieurs conditions, comme l'unicité de l'identité et ainsi de suite, pour qu'un tel invariant modulaire soit déclaré une fonction de partition d'une théorie conforme.

Cependant, comme nous l'avons vu, tout cela est pris en compte par la classification des fonctions de partition de type courants simples. Nous savons qu'il existe exactement une telle fonction de partition physique dont les termes sont tous de la forme (2.3.48). C'est

$$Z(L_{(n,p)}) = \sum_{j=0}^k \sum_{s_1, \bar{s}_1} \left(\sum_{\substack{m-m'=(p+1)\frac{k}{n}\bar{s}_1 \\ m+m'=(p-1)(\frac{k}{n}\bar{s}_1+s_1) \pmod{2n}}} \bar{\chi}_{jm}^{PF_k} \bar{\chi}_{m'}^{U(1)_k} \chi_{j,m+2s_1}^{PF_k} \chi_{m'+2s_1+2\frac{k}{n}\bar{s}_1}^{U(1)_k} \right) \quad (2.3.49)$$

Ceci coïncide avec la fonction de partition générique (2.3.41) ayant ce même groupe de courants simples, moyennant l'identification des paramètres

$$p = y_{11}$$

Le choix de p , qui détermine le quotient $G/p \Gamma$, est donc paramétré par le groupe de torsion discrète $\mathcal{D}(\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_n$. L'égalité des fonctions de partition en tant que fonctions explicites des caractères implique que les théories conformes sont identiques. Nous avons donc montré que les différents choix de torsion discrète algébrique de type y correspondent géométriquement à des espaces-cibles différents obtenus par les quotients (2.3.44). En particulier, pour $p = -1$ nous retrouvons la théorie sur l'espace lentille

usuel $L_n = SU(2)/\mathbb{Z}_n$, où la symétrie $SU(2)_L$ est préservée

$$Z(L_n) = \sum_{j=0}^k \chi_j^{SU(2)_k} \left(\sum_{\substack{m-m'=0 \pmod{2\frac{k}{n}} \\ m+m'=0 \pmod{2n}}} \bar{\chi}_{jm}^{PF_k} \bar{\chi}_{m'}^{U(1)_k} \right) \quad (2.3.50)$$

Configurations T-duales. Les caractères de $u(1)_{2k}$ sont, en tant que fonctions du paramètre modulaire τ , explicitement donnés par

$$\chi_n^{u(1)_{2k}}(q) = \frac{1}{\eta(q)} \sum_{r \in \mathbb{Z} + n/2k} q^{kr^2}, \quad q = e^{2\pi i \tau},$$

et vérifient donc $\chi_n(\tau) = \chi_{-n}(\tau)$. Ainsi, la fonction de partition $Z(L_n)$ est invariante sous la transformation $m' \rightarrow -m'$, ou en d'autres mots

$$Z(L_n) = Z\left(L_{\frac{k}{n}}\right) \quad (2.3.51)$$

L'involution $m' \rightarrow -m'$ est une conjugaison de charge dans le facteur $u(1)_L$, et peut s'interpréter comme une T-dualité. En particulier nous concluons que le modèle $SU(2)_k$ est T-dual au modèle $SU(2)_k/\mathbb{Z}_k$.

Par contre, il n'est pas facile d'identifier les modèles T-duaux aux espaces lentilles généralisés $L_{(n,p)}$. S'il est certain que cette involution ne préserve en général pas le choix de torsion discrète, on s'attend à ce que les modèles duaux soient toujours des espaces lentilles généralisés.

Le cas général. Après les quotients de $SU(2)$, passons maintenant au cas général d'un groupe compact, simple et simplement connexe G et un sous-groupe discret abélien $\Gamma \cong \mathbb{Z}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_N}$ dont certains facteurs \mathbb{Z}_{n_i} peuvent être triviaux. Prenons de nouveau le cas de $G = SU(N+1)$ pour comparer avec la section précédente. Notre expérience avec les espaces lentilles généralisés suggère que les paramètres de torsion discrète y_{ij} sont liés au choix de la relation d'équivalence, appelons-la $p(y_{ij})$, qui définit l'espace-cible $G/p \Gamma$ de la théorie.

Nous construisons la relation d'équivalence $p(y_{ij})$ explicitement en suivant le chemin inverse de celui parcouru plus haut : ici nous partons des termes dans la fonction de partition (2.3.41) pour en arriver à l'action p définissant le quotient. Par inspection des règles de sélection (2.3.42, 2.3.43) pour les secteurs gauche et droit, la forme générale des caractères de la théorie $su(N+1)/u(1) \times u(1)$ avec $\mathcal{G} \cong \mathbb{Z}_k^N \times \Gamma$ est

$$\chi_{\vec{j}, \vec{m}(\vec{s})} \chi_{\vec{m}'(\vec{s})} \bar{\chi}_{\vec{j}, \vec{w}(\vec{s})} \bar{\chi}_{\vec{w}'(\vec{s})} \quad (2.3.52)$$

avec les règles de sélection

$$m_i - m'_i = \sum_j (y_{ij} + \delta_{i,j}) \frac{k}{n_j} \bar{s}_j \pmod{k} \quad (2.3.53)$$

$$w_i - w'_i = \sum_j (y_{ij} - \delta_{i,j}) \frac{k}{n_j} \bar{s}_j \pmod{k} \quad (2.3.54)$$

Nous sommes donc en train d'imposer une identification entre les champs primaires de $u(1)^N$ gauches et droits respectivement ; nous avons simultanément

$$\chi_m \sim \chi_{m+\sum_j (y_{ij}+\delta_{i,j})\frac{k}{n_j}}, \quad \bar{\chi}_m \sim \bar{\chi}_{m+\sum_j (y_{ij}-\delta_{i,j})\frac{k}{n_j}}, \quad (2.3.55)$$

Tout comme en (2.3.46), ces équivalences déterminent l'action de Γ sur les courants J_L, J_R de l'algèbre $u(1)_L \times u(1)_R$ conservée. De cette action nous dérivons l'action de Γ sur $SU(N+1)$. Le résultat est

$$g \sim h_i^L g h_i^R, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.3.56)$$

où les générateurs h_i^L, h_i^R sont donnés par

$$h_i^L = \omega_i^{\frac{y_{ii}+1}{2}} \prod_{j \neq i} \omega_j^{y_{ij}/2}, \quad h_i^R = \omega_i^{\frac{y_{ii}-1}{2}} \prod_{j \neq i} \omega_j^{-y_{ij}/2} \quad (2.3.57)$$

Ici, les ω_i sont des éléments d'ordre n_i le long de N directions du tore maximal de $SU(N+1)$. Cette structure généralise la relation (2.3.44) et fournit l'interprétation géométrique des paramètres y_{ij} . De nouveau, si y_{ij} et n_j ne sont pas premiers entre eux l'action (2.3.56) aura des points fixes et la structure de ces derniers sera assez compliquée.

La généralisation de la torsion discrète à la Vafa. Ayant déterminé les espaces-cibles est $G/p \Gamma$,

Dû aux résultats de la section 2.1, nous savons qu'il existe plusieurs théories conformes dont l'espace-cible est $G/p \Gamma$, pour autant de choix de connexion B pour la trois-forme H . Rappelons que ce choix est paramétré par la deuxième cohomologie $H^2(G/p \Gamma, U(1))$ dont l'action sur le modèle sigma fut donnée en (2.1.17), et que nous reprenons ici

$$e^{iS} \rightarrow e^{i \int_C F_{ij} \partial X^i \bar{\partial} X^j} e^{iS}$$

où les X^i avec $i = 1, \dots, N$ sont maintenant des bosons libres sur les sous-groupes $U(1)^{(i)}$ du tore maximal de $SU(N+1)$. Nous avons aussi déterminé que le groupe de torsion discrète géométrique est de pure torsion (2.1.19). Cette phase, notons-la $\epsilon(C)$,

est donc une racine de l'unité, qui dépend seulement de la classe de homologie du cycle C , soit de la classe du plongement de Σ dans l'espace-cible. Il faut comprendre comment ce choix peut affecter le spectre de notre théorie.

On s'intéresse donc à l'amplitude du tore $\Sigma = T^2$. Dans le formalisme d'intégrale de chemin, la fonction de partition devient une somme sur les différents secteurs topologiques $[X(T^2)]$, pèsés par des phases $\epsilon(X(T^2))$. Ces mêmes phases apparaissent dans la fonction de partition de type courant simple \mathcal{Z} (2.3.41). Pour identifier le choix de torsion discrète avec le choix de connexion B il resterait à identifier les secteurs topologiques dans la somme \mathcal{Z} . Cette comparaison directe est toutefois assez difficile, puisque la factorisation gauche-droite du spectre n'est pas explicite dans le formalisme d'intégrale de chemin. Il est plus utile en revanche d'étudier les courants J_L^i , J_R^i de la théorie. Celles-ci sont définies à partir du lagrangien \mathcal{L} du modèle sigma selon l'expression

$$J^i = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial X^i)}, \quad \bar{J}^i = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\bar{\partial} X^i)}. \quad (2.3.58)$$

Ces courants vont être modifiés simultanément dans les directions i, j telles que F_{ij} n'est pas nul

$$J_L^i \rightarrow J_L^i + \sum_a F_{ai} \partial X^a, \quad J_R^i \rightarrow J_R^i - \sum_a F_{ai} \partial X^a \quad (2.3.59)$$

Ceci implique que les champs primaires respectifs vont voir leur charge varier de

$$\begin{aligned} m'_i &\rightarrow m'_i + F_{ai} \frac{k}{n_i} \bar{s}_a \\ w'_i &\rightarrow w'_i - F_{ai} \frac{k}{n_i} \bar{s}_a \end{aligned} \quad (2.3.60)$$

où \bar{s}_a est le nombre d'enroulement de $\iota(\Sigma)$ sur le 2-cycle C . La phase en (2.1.17) étant une n_{ij} -ème racine de l'unité, nous avons $F_{ij} = z_{ij}/n_{ij}$ pour un certain entier z_{ij} . Par inspection, nous montrons alors que l'action de $H^2(G/p \Gamma, U(1)) \cong \bigoplus_{i < j} \mathbb{Z}_{gcd(n_i, n_j)}$ sur le spectre correspond à changer le choix du paramètre z_{ij} de torsion discrète algébrique (2.3.38). Les coordonnées \vec{s} des courants simples peuvent être considérées comme des nombres d'enroulement. Ceci généralise les résultats de Vafa obtenus pour le tore à tous les groupes et leurs quotients du type (2.3.56).

Sommarisons les résultats de ce chapitre : tout espace $G/p \Gamma$, où Γ est un groupe abélien et fini dont l'action p sur G est de la forme (2.3.56) est l'espace-cible d'une théorie conforme. L'action p , ainsi que le choix de connexion B du gerbe définit par

H , correspondent au choix de torsion discrète algébrique dans la théorie conforme. Nous discuterons des applications à la théorie des cordes, notamment des espaces de lentilles $L_{(n,p)}$, dans le chapitre 5.

Chapitre 3

Champ F et cordes ouvertes dans des espaces compacts

Dans le chapitre précédent nous avons considéré des cordes fermées et orientées, plus précisément des modèles sigma définis sur des variétés Σ sans bord et avec une orientation donnée. Dans ce chapitre nous étudions les cordes ouvertes, décrites par des modèles sigma sur des surfaces Σ avec bord, dans les espaces quotients construits dans le chapitre précédent.

Nous commençons par rappeler la définition de ces modèles dans le cas général où Σ est plongée dans un espace-cible courbe, ainsi que le rôle joué par la topologie de cet espace et par les champs g, H qui y sont définis. De nouveau, on considérera le cas des modèles avec des algèbres de courants (les modèles WZW et les généralisations construites dans le chapitre précédent) où des conditions aux bords de Σ préservant la symétrie conforme au niveau quantique sont connues, voir section 3.2. Ces conditions sont étudiées du point de vue algébrique dans la section 3.3 pour le cas général des théories conformes de type courant simple, menant à la construction d'états de bord (symétriques) de la théorie. Cette construction permettra de trouver, dans la section 3.4, l'interprétation géométrique de ces états de bord, soit l'univers branaire des D-branes correspondantes. Ceci est le premier but des travaux présentés dans ce chapitre.

Rappelons que plusieurs des modèles quotients construits dans le chapitre 2 sont reliées par la dualité T (2.3.51). Nous montrons comment cette dualité agit sur les conditions aux bord et donc sur les D-branes. Nous déterminons ainsi des D-branes, dites de type B , en particulier dans tous les groupes compacts simples et simplement connexes. Ces branes présentent des propriétés assez remarquables, comme la possibilité d'avoir la dimensions maximale et, par conséquent, des bords. Nous apportons quelques

précisions à leur interprétation géométrique par rapport aux résultats de Maldacena, Moore et Seiberg [MMS01].

Les D-branes jouent un rôle crucial dans notre compréhension de la théorie des cordes ; en raison de leur description en termes d'états de bord de théories conformes, nous verrons qu'elles en sont des objets dynamiques de plein droit (pour ce sujet, une bonne référence est [AS02]). Tout comme le modèle sigma pour les cordes, il existe une action d'espace-temps qui décrit la dynamique des D-branes et qui doit être quantifiée. À ce stade, cette action n'est accessible qu'indirectement par des calculs de théorie conforme, comme nous le verrons dans le chapitre 4. Pour les cas les plus simples, il s'agit de l'action de Born et Infeld S_{BI} (1.3.31). L'interprétation géométrique des D-branes pose alors plusieurs questions intéressantes : quel champ de jauge y est défini ? ces configurations sont-elles stables sous cette action ? Autant de questions auxquelles nous donnerons réponse (du moins pour les branes symétriques) dans la section 3.5. L'étude des actions effectives de basse énergie pour des configurations plus générales est poursuivie dans le chapitre 4, notamment en ce qui concerne la géométrie non-commutative sur les D-branes et la condensation des tachyons de cordes ouvertes.

3.1 Modèle sigma de corde ouverte

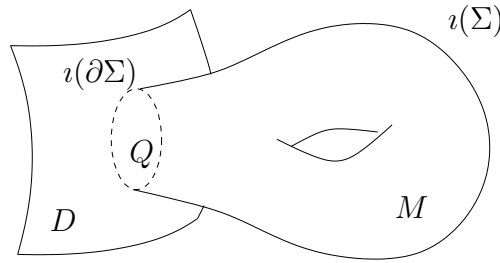
Du point de vue du modèle sigma classique, la présence d'un bord $\partial\Sigma$ implique que le plongement $X(\Sigma)$ n'est plus, en général, le bord d'une sous-variété M de dimension trois dans l'espace-cible, ce qui appelle à une redéfinition du terme de Wess-Zumino $\int_M H$ (2.1.15). Écrivant le bord d'une variété M de dimension 3 comme $\partial M = X(\Sigma) \cup Q$, la situation peut être corrigée en remplaçant le terme $\int H$ de Wess-Zumino (2.1.15) par

$$\int_M H - \int_Q \mathcal{F} \quad (3.1.1)$$

où \mathcal{F} est une forme de rang 2 sur une variété D englobant Q telle que $d\mathcal{F} = H|_D$ [KS96]. Par définition, le bord $X(\partial\Sigma)$ est collé avec le disque $Q \subset D$ (avec des orientations opposées) pour tout choix de plongement X , et donc la variété D codifie l'information géométrique des conditions aux bords de notre corde ; nous l'appellerons ici l'*univers branaire* de la D-brane, ou brane tout court, voir la figure 3.1.^{‡1}

Pour que le modèle sigma soit bien défini dans la formulation d'intégrale fonctionnelle de la théorie, l'expression (3.1.1) doit être définie modulo $2\pi k$ pour un certain

^{‡1}Dans cette thèse, le terme D-brane dénote ceux des états de bord qui ont une limite semi-classique.

FIG. 3.1 – Une corde ouverte sur une D-brane \mathcal{B} .

$k \in \mathbb{Z}$; comme pour le terme de Wess–Zumino, ceci mènera à des conditions topologiques sur l’espace-temps. Une première considération est que pour une même configuration de champs de corde fermée (g, H) il y aura plusieurs solutions (Q, \mathcal{F}) de D-branes, car le modèle-sigma admet différentes conditions de bord qui préservent la symétrie conforme. Une classification partielle des conditions au bord conformes fera l’objet de la section 3.3.

Une autre conséquence immédiate de la formule (3.1.1) est que, si le champ H est nul alors \mathcal{F} peut être définie globalement et au niveau classique il n’y aura aucune contrainte sur la géométrie des D-branes D . En plus, par le lemme de Dolbeault \mathcal{F} est localement exacte, soit $\mathcal{F} = dA$ pour une forme A_μ de rang 1 définie sur Q . Nous retrouvons le terme de bord S_P^{ouv} (1.2.24)

$$\int_M H - \int_Q \mathcal{F} = \oint_{\partial\Sigma} Ad\tau. \quad (3.1.2)$$

C’est le cas notamment des espace-temps (Ricci-) plats, allant des tores et des ondes planes aux variétés de Calabi-Yau. Les seules restrictions aux univers branaires D dans ces cas sont d’ordre topologique dans le sens où les branes doivent s’enrouler autour de cycles non-triviaux.

Par contre, si le champ H est non-trivial alors \mathcal{F} est défini seulement localement et peut s’écrire à l’aide de la connexion B (voir la section 2.1). Ceci implique que les D-branes D sont des sous-variétés de M de dimension inférieure, faute de quoi H serait exact. Les conditions topologiques précises pour la bonne définition (classique) de D pour tout plongement X sont plus contraignantes; elles sont exprimées en termes de cohomologie relative de H et \mathcal{F} [FOS94].

Avant d’examiner les conditions aux bords et les D-branes correspondantes dans les modèles de WZW, une remarque générale sur la 2-forme \mathcal{F} est utile. Comme suggéré

par (3.1.2), \mathcal{F} peut s'écrire sur la D-brane comme la somme

$$\mathcal{F} = B|_D + 2\pi\alpha'F \quad (3.1.3)$$

où F est une forme de rang 2 fermée définie sur la D-brane. Une fois que c'est \mathcal{F} qui est couplé à la D-brane dans le modèle sigma, il se doit d'être invariant sous les transformations de jauge du champ B ; le champ F est donc défini à une telle transformation de jauge près.

3.2 Cordes ouvertes dans les variétés de groupes

Nous retournons maintenant aux modèles WZW, soit les théories conformes décrivant des cordes dans des groupes compacts. Les théories de cordes fermées sont, comme nous l'avons vu au chapitre 2, définies à l'aide des courants gauches J^a et droits \bar{J}^a , générateurs de l'algèbre de symétrie $\mathfrak{g}_G \times \mathfrak{g}_D$, sur la surface d'univers Σ ; pour les cordes ouvertes il faut imposer des conditions aux bords $\partial\Sigma$ et il est naturel de le faire en termes des courants. Nous pouvons considérer par exemple la condition de "collage" suivante

$$J^a = \bar{J}^a \quad \text{sur } \partial\Sigma \quad (3.2.4)$$

Le mérite de ces conditions aux bords est qu'elles préservent une sous-algèbre \mathfrak{g} diagonale dans l'algèbre de symétrie originale $\mathfrak{g}_G \times \mathfrak{g}_D$. Le fait que cette algèbre de symétrie de dimension infinie soit préservée non seulement assure l'invariance conforme de ces conditions aux bords, car la construction de Sugawara assure que $L_n = \bar{L}_n$ au bord; elle fait aussi espérer que, comme pour le cas des cordes fermées, il soit possible de résoudre la théorie quantique. Effectivement, la condition (3.2.4) caractérise complètement un ensemble d'états de bord de la théorie quantique; ces états de bord, dits symétriques, sont obtenus par la construction de Cardy que nous rappelons dans la section 3.3.

Dans cette section nous présentons quelques considérations semi-classiques sur les D-branes dans les groupes. En effet, le fait que la condition de collage (3.2.4) soit décrite au niveau de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} et non pas d'une algèbre des courants \mathfrak{g}_k implique que le collage est bien défini dans la limite semi-classique $k \rightarrow \infty$ et qu'une interprétation géométrique est donc possible. De plus, nous verrons dans la section 3.5 que l'analyse semi-classique, valable a priori dans ce seul domaine, mène dans le cas des modèles WZW à des résultats exacts. Tout ceci fait des états de bord dans des variétés de

groupes le laboratoire idéal pour étudier les D-branes soit du point de vue de la théorie conforme per se soit du point de vue de la théorie des cordes.

Toutes ces considérations sont aisément adaptées pour des conditions de collage de la forme

$$J^a = \omega \bar{J}^a \quad \text{sur } \partial\Sigma \quad (3.2.5)$$

où ω est un automorphisme de l'algèbre \mathfrak{g} . Nous verrons à partir de l'équation (3.2.7) que le cas d'automorphisme extérieur est significativement différent du cas d'automorphisme intérieur (qui est essentiellement le cas symétrique (3.2.4)).

Soulignons qu'une théorie conforme sur une surface avec bord est définie par deux structures : la théorie conforme sur l'intérieur de la corde (l'algèbre de symétrie, le spectre, les produits d'opérateurs) et la symétrie préservée par le bord. La difficulté de ces conditions de collage "minimales" $L_n = \bar{L}_n$ réside dans le fait que, du point de vue de l'algèbre de Virasoro, les théories que nous avons considéré jusqu'ici sont irrationnelles et non-diagonales et la construction de Cardy ne s'applique plus. En effet, dans l'ensemble des théories conformes qui ont une limite semi-classique, des états de bord "minimaux" ont été construits seulement pour le cas du boson libre (et compactifié), en déformant les états de bords symétriques [GRW02]. La construction des états de bord généraux pour les modèles de WZW reste donc un problème ouvert bien que quelque progrès ait été fait dans ce sens [FRS02].

Toutefois, des états de bord qui brisent la symétrie de \mathfrak{g} peuvent aisément être construits en imposant des conditions de collage symétriques à des courants générant des sous-algèbres $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Nous ferons usage de cette construction dans la section 3.3.2.

D-branes symétriques et classes de conjugaison. Commençons par voir ce que nous disent les conditions de collage (3.2.5) sur la géométrie des D-branes. Partant de la définition des courants (2.3.46), la condition $J = \omega \bar{J}$ se réécrit

$$(1 - \omega \circ Ad_g)g^{-1}\partial_\sigma g = (1 + \omega \circ Ad_g)g^{-1}\partial_\tau g, \quad (3.2.6)$$

où $Ad_g(h) = ghg^{-1}$ dénote l'action adjointe du groupe sur lui-même, et nous avons repris les coordonnées σ, τ sur Σ dont le bord est choisi à $\sigma = 0$. La dérivée $\partial_\tau g$ du champ g le long du bord de la surface d'univers est un vecteur tangent à l'univers branaire de la D-brane correspondante. Or, (3.2.6) implique que $g^{-1}d_\tau g$ est dans l'image de $(1 - \omega \circ Ad_g)$ (vu que $(1 + \omega \circ Ad_g)$ est inversible et commute avec $(1 - \omega \circ Ad_g)$). Cela

veut dire que $\partial_\tau g$ est un vecteur tangent à la sous-variété $\omega \circ Ad_g$. L'univers branaire correspondant à (3.2.6) est donc la *classe de conjugaison* (vrillée par ω) de g , donné par

$$\mathcal{C}_g^\omega = \{hg\omega(h)^{-1}, \forall h \in G\} \quad (3.2.7)$$

Nous avons dit que les conditions de collage symétriques caractérisaient une certaine famille de D-branes et nous avons montré comment en déduire des univers branaires; nous montrons maintenant comment, de façon cohérente avec les résultats de [KS96], la condition (3.2.6) permet de spécifier aussi des deux-formes \mathcal{F}_g sur ces univers branaires. En effet, sur une classe de conjugaison (vrillée) donnée, l'opérateur $(1 - \omega \circ Ad_g)$ est inversible et (3.2.6) devient une application linéaire de \mathfrak{g} dans \mathfrak{g} . Utilisant la métrique (de Killing)

$$g(u, v) = \langle g^{-1}u, g^{-1}v \rangle \quad (3.2.8)$$

nous pouvons faire correspondre à cette application une forme de rang 2 sur \mathcal{C}_g^ω qui à deux vecteurs (u, v) tangents à la classe de conjugaison associe le nombre

$$\mathcal{F}_g(u, v) = \left\langle g^{-1}u, \frac{1 + \omega \circ Ad_g}{1 - \omega \circ Ad_g} g^{-1}v \right\rangle \quad (3.2.9)$$

Nous pouvons vérifier que $d\mathcal{F}_g = H$, mais seulement sur l'univers branaire \mathcal{C}_g et non pas dans des directions qui y sont orthogonales, conformément à (3.1.3).

Toutes ces considérations étant d'ordre semi-classique, il est temps que nous nous tournions vers la description exacte des états de bord dans les théories quantiques. Le but est de décrire les D-branes symétriques pour l'ensemble des théories considérées dans le chapitre 2.

Soulignons toutefois la structure de la théorie classique, car elle sera préservée dans le cas quantique : la définition du modèle sigma de corde fermée est indépendante des termes de bord, ce qui nous permet de d'abord fixer la configuration de corde fermée et ensuite déterminer les D-branes possibles dans cette configuration. En d'autres mots, dans le régime de corde test (g_s très petite) nous pouvons ignorer la réaction inverse des D-branes dans l'espace-cible de la théorie conforme.

3.3 États de bord et torsion discrète

La présence d'un bord sur la surface Σ introduit dans le système une échelle macroscopique, notamment la distance au bord. Si la distance au bord devient un paramètre

physique de la théorie, elle joue un rôle dans les fonctions de corrélation ; en effet, si par exemple sur le plan complexe la symétrie de dilatation implique l'annulation des fonctions à un point, celles-ci auront des valeurs non-nulles dans la présence d'un bord, où cette symétrie est brisée. Cette valeur $\langle \lambda(z) \rangle_{\mathcal{B}}$ dépend de la distance du point d'insertion z au bord et des conditions au bord ; plus précisément, la donnée de l'ensemble des fonctions à un point d'une théorie définit son *état de bord* \mathcal{B} .

Une théorie conforme dans une surface avec bords est donc définie non seulement par sa fonction de partition \mathcal{Z} mais aussi par les états de chaque bord et encore par les champs qui y sont confinés.

Les fonctions à un point définissent une action des états de bord sur les champs de la théorie qui sont définis à l'intérieur de Σ . Il est utile de trouver une base pour cette action, dans la forme des *blocs conformes* $|i\rangle\rangle$, dans laquelle les états de bord s'écrivent

$$\mathcal{B}_a = \sum_i B_a^i |i\rangle\rangle. \quad (3.3.10)$$

Cette expression mérite plusieurs explications. Les étiquettes i des blocs conformes, ainsi que leur action sur l'espace de Hilbert, sont déterminés par la symétrie préservée par le bord ; par exemple, pour les conditions au bord symétriques des modèles WZW les blocs conformes vérifient

$$(J_n - \omega \bar{J}_n) |i\rangle\rangle = 0. \quad (3.3.11)$$

Pour déterminer les blocs conformes, aussi connus comme états d'Ishibashi, il convient de se souvenir de la méthode des images de l'électromagnétisme. On peut considérer la fonction $\langle \lambda(z) \rangle$ sur, disons, le demi-plan complexe supérieur $\Sigma = \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \geq 0\}$, comme une fonction à deux points sur le plan complexe \mathbb{C} avec des insertions $\lambda(z)$ et $\lambda^c(\bar{z})$. Les blocs conformes sont donc en correspondance avec ces états dans le spectre qui sont couplés à leur conjugué (on voit bien que une telle construction est impossible pour les états vrillés.) Les états de Ishibashi peuvent, comme nous l'avons vu, briser certaines symétries de la théorie de la masse, du moment que la symétrie conforme $L_n = \bar{L}_n$ soit préservée sur le bord.

Quant aux états de bord, leurs étiquettes a (et en particulier leur nombre), sont plutôt déterminés à partir de contraintes de cohérence de la théorie, dites contraintes "de couture" [Lew92],[PSS96] ; la première d'entre ces contraintes est la compatibilité du spectre de la corde ouverte avec la dualité corde ouverte – corde fermée illustrée dans la figure 1.1.

Les champs définis sur de bord sont des champs primaires de l'algèbre préservée par les conditions au bord (3.3.10). Leur spectre est donné par la fonction de partition de corde ouverte, c'est-à-dire l'amplitude de l'anneau (1.1), qui décrit la propagation de la corde ouverte le long d'une boucle. Avec des conditions $\mathcal{B}_{a,b}$ aux bords, celle-ci s'écrit pour une théorie rationnelle

$$\mathcal{A}_{ab}^{ov}(q) = \langle \mathcal{B}_a | e^{2\pi t(L_0 - c/12)} | \mathcal{B}_b \rangle = \sum_i n_{ab}^i \chi_i(q), \quad (3.3.12)$$

où les coefficients de l'anneau n_{ab}^i comptent le nombre (entier non-négatif) de copies du champ λ_i dans le spectre, et $q = e^{2\pi t}$ où t est le paramètre modulaire de l'anneau. Une insertion d'un champ λ_i sur le bord implique donc un changement de la condition de bord a vers la condition b si n_{ab}^i est non nul ; un coefficient plus grand que 1 indique une dégénérescence des champs de bord, c'est-à-dire qu'il existe plus d'un champ de bord interpolant entre \mathcal{B}_a et \mathcal{B}_b qui est dans la même représentation de l'algèbre chirale. Il existent alors d'autres nombres quantiques qui soulèvent cette dégénérescence, mais ils ne nous seront pas utiles par la suite.

À l'aide d'une transformation modulaire $t \rightarrow -1/t$, cette amplitude décrit la propagation d'une corde fermée avec conditions initiale \mathcal{B}_a et finale \mathcal{B}_b (figure 1.1). Cette amplitude s'écrit

$$A_{ab}^f(t) = \langle \mathcal{B}_a | e^{-\frac{2\pi}{t}(L_0 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \bar{L}_0 - c/12)} | \mathcal{B}_b \rangle. \quad (3.3.13)$$

La condition de cohérence, dite de Cardy, qui s'impose due à la dualité corde ouverte – corde fermée est que

$$\mathcal{A}_{ab}^{ov}(t) = A_{ab}^f(t). \quad (3.3.14)$$

Étant donnée la transformation modulaire nécessaire pour passer d'une interprétation à l'autre, la condition de Cardy remplace pour les cordes ouvertes la condition de l'invariance modulaire pour les cordes fermées.

L'ingrédient fondamental pour ces calculs, plutôt qu'une expression explicite pour les états de Ishibashi qui en général n'est pas connue, est l'identité suivante qui donne les blocs conformes à deux points en termes de caractères

$$\langle \langle \mu | e^{2\pi i t(L_0 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \bar{L}_0 - c/12)} | \mu \rangle \rangle = \chi_\mu(2t) \quad (3.3.15)$$

Dans les cas qui nous intéressent, les théories conformes rationnelles de type courant simple, ces contraintes nous permettent déjà de déterminer les *coefficients de bord* B_a^i

reliant les états de bord aux états d'Ishibashi (3.3.10). Ceci dit, c'est un fait hautement non trivial, quand il est démontré, que le nombre d'états de bord égale celui de blocs conformes (ce qui est une condition nécessaire pour la cohérence de la formulation (3.3.10), compte tenu de la linéarité de l'action des blocs conformes).

3.3.1 États de bord du type courants simples

Le cas le plus simple, celui d'une théorie conforme avec fonction de partition de conjugaison de charge, a été étudié par Cardy [Car89] : dans ce cas, tous les états dans le spectre sont 'diagonaux' et les états de Ishibashi sont donc en correspondance avec le spectre ; en particulier les états de bord et les états de Ishibashi sont paramétrés par les mêmes étiquettes. C'est le cas des conditions aux bords (3.2.4) des modèles WZW considérées dans la section précédente.

De la même façon que les fonctions de partition de type courant simple généralisent la fonction de partition de conjugaison de charge, nous nous attendons à ce que la construction de Cardy admette une généralisation par l'utilisation des courants simples. Plutôt qu'à des états diagonaux λ_i , nous devons nous intéresser à des orbites d'états sous le groupe de courants simples \mathcal{G} et notamment à la possibilité d'avoir des points fixes, codifiés par les sous-groupes stabilisateurs $\mathcal{S}_i = \{F \in \mathcal{G} : F \star \lambda_i = \lambda_i\}$. En effet, les états de Ishibashi seront en correspondance avec les paires (λ_i, F) où λ_i sont des états diagonaux de la symétrie préservée par le bord, et les courants simples $F \in \mathcal{S}_i$ vérifient

$$Q_J(\lambda_i) + X(J, F) \in \mathbb{Z}, \quad \forall J \in \mathcal{G}. \quad (3.3.16)$$

Remarquons la dépendance de cette condition par rapport à la torsion discrète X . Ceci est en fait une ansatz qui reproduit les résultats connus et émerge assez naturellement de la formulation plus axiomatique des théories conformes rationnelles présentée par Fuchs, Runkel et Schweigert [FRS02].

Quant aux états de bord, ils sont en correspondance avec les orbites de \mathcal{G} dans l'espace des états primaires ; et de nouveau il faut résoudre la dégénérescence introduite par des points fixes. Pour cette résolution, il faut en général raffiner la notion de stabilisateur \mathcal{S}_i et introduire son sous-groupe le *centre effectif* \mathcal{C}_i . Cependant, pour les théories dont il est question ici il s'avère que $\mathcal{C}_i = \mathcal{S}_i$, et nous laissons tomber ces subtilités, renvoyant le lecteur intéressé à [FHSSW00]. Les états de bord ont alors des

étiquettes $a = [\lambda_i, \psi]$ où λ_i sont des représentants des orbites de \mathcal{G} et ψ est un caractère de \mathcal{C}_i (qui évidemment ne dépend que de l'orbite λ_i). Il est montré dans [FRS02] que le nombre d'états de bord ainsi obtenus coïncide avec celui des états d'Ishibashi.

Nous pouvons maintenant présenter la formule pour les coefficients de bord, qui consiste à nouveau d'un ansatz,

$$B_{(i,F)[i,\psi]} = \sqrt{\frac{|\mathcal{G}|}{|\mathcal{S}_i||\mathcal{C}_i|}} \frac{\alpha_F S_{ij}^F}{\sqrt{S_{0,i}}} \psi(F)^*, \quad (3.3.17)$$

où α_F est une phase et la matrice S^F généralise les transformations modulaires pour les secteurs avec points fixes. L'amplitude de l'anneau (3.3.12) devient

$$\mathcal{A}_{ab}^{ov} = \sum_{\nu} A_{[a,\psi_a]}^{\nu [b,\psi_b]} \chi_{\nu} \quad (3.3.18)$$

où la notation $A_{[a,\psi_a]}^{\nu [b,\psi_b]}$ généralise les coefficients n_{ab}^i avec les étiquettes correctes,

$$A_{[a,\psi_a]}^{\nu [b,\psi_b]} = \sum_{(\mu,J)} B_{(\mu,J)[a,\psi_a]} B_{(\mu,J^c)[b,\psi_b]}^* S_{\mu}^{\nu}. \quad (3.3.19)$$

En introduisant les coefficients de bord (3.3.17) dans cette expression, on peut montrer que les coefficients $A_{[a,\psi_a]}^{\nu [b,\psi_b]}$ de l'anneau sont résolument des entiers positifs. Étant donné que pour les états de bord symétriques les coefficients n_{ab}^i égalent les règles de fusion \mathcal{N}_{ab}^i (2.2.22), ceci qui généralise la formule de Verlinde (2.2.27).

L'intérêt de présenter ce formalisme est bien sur de l'appliquer à la construction des états de bord symétriques dans les théories conformes décrites au chapitre 2. Dans notre cas, il s'agit de construire dans les variétés $G/p\Gamma$ des états de bord qui préservent l'algèbre de symétrie $\mathfrak{g}/u(1)^r \times u(1)^r$.

3.3.2 États de bord dans les quotients de groupes

Nous commençons par utiliser ce formalisme pour étudier les états de bord dans les espaces de lentilles généralisés $L_{n,p}$; en effet, ceux-ci présentent déjà la plupart des phénomènes pertinents, comme l'existence de points fixes (des branes fractionnaires) et la possibilité de construire par dualité T des états qui brisent la symétrie $\mathfrak{g}/u(1)^r \times u(1)^r$ (des B-branes). La généralisation à de quotients d'autres groupes ne pose pas de problèmes supplémentaires.

Rappelons de la section 2.3.1 les notations de la théorie décrivant la propagation des cordes dans les espaces lentilles. L'algèbre de symétrie est $su(2)_k/u(1) \times u(1)$,

avec des champs primaires de la forme $(j, m; n)$; le groupe des courants simples est $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_n$ engendré par J_1, J_2 tels que $J_1(j, m; n) = (j, m+2; n+2)$ et $J_2(j, m; n) = (j, m; n+2k/n)$; et le spectre, qui dépend du choix de torsion discrète, est donné en (2.3.49). Il existe des points fixes si et seulement si n , et par conséquent k qui en est un multiple, est pair. Les points fixes sont de la forme $(k/2, m; n)$ dont les stabilisateurs sont $\{\Omega, K\} \sim \mathbb{Z}_2$ avec Ω l'identité et $K = (0, k; 0)$ (où il faut rappeler l'identification des champs $(j, m; n) \sim (k-j, m+k; n)$ dans le secteur parafermionique).

Blocs conformes. Les blocs conformes sont alors étiquetés par

$$(\mu, \Omega) \text{ avec } \mu = (j, rn, rn) \text{ et } \Omega = (0, 0, 0), \quad (3.3.20)$$

avec $0 \leq r < 2k/n$ et $0 \leq j \leq k$; et pour les points fixes nous avons de plus

$$(\mu, K) \text{ avec } \mu = (k/2, k/2 + rn, k/2 + rn) \text{ et } K = (0, k, 0), \quad (3.3.21)$$

avec $0 \leq r < 2k/2$. En somme, le nombre d'états d'Ishibashi est

$$\#I = \begin{cases} (k+4)k/n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ (k+1)k/n & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.3.22)$$

Remarquons que même si le nombre d'états d'Ishibashi ne dépend pas de la torsion discrète, les étiquettes de ces états, et leurs propriétés, en dépendent. Nous écrivons ces états sous la forme $|A; j, r, F\rangle = |A; j, rn\rangle^{PF_k} |A; rn\rangle^{U(1)_k}$ et choisissons la normalisation

$$\langle\langle A; j', r', F' | q^{L_0 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \bar{L}_0 - c/12} | A; j, r, F \rangle\rangle = \delta_{jj'} \delta_{rr'} \delta_{FF'} \chi_{j, rn}^{PF_k}(q^2) \chi_{rn}^{U(1)_k}(q^2). \quad (3.3.23)$$

États de bord symétriques. Passons maintenant aux états de bord, qui sont étiquetés par les orbites de \mathcal{G} dans l'ensemble des états primaires. Il est facile de voir qu'un ensemble représentatif de ces orbites est donné par

$$\rho = (j, \ell, \ell + s) \text{ avec } 0 \leq j \leq [k/2] \quad (3.3.24)$$

où $[k/2]$ est la partie entière de $k/2$ (l'indice muet ℓ sert à assurer les règles de sélection des parafermions, c'est-à-dire que $j - n$ soit pair). Nous notons donc les états de bord par $|A, [\rho, \psi_\rho]\rangle$. On peut vérifier que leur nombre égale le nombre (3.3.22) d'états d'Ishibashi.

Déterminons maintenant les coefficients de bord (3.3.17), d'abord pour le cas sans points fixes, c'est-à-dire avec n impair. Dans ce cas les stabilisateurs sont triviaux et leur caractère est $\psi \equiv 1$. La matrice S de la théorie $su(2)_k/u(1) \times u(1)$ se décompose comme suit

$$S_{(jmn),(j'm'n')}^{PF \otimes U(1)} = 2 S_{j,j'}^{SU(2)} S_{n,n'}^{U(1)} (S_{m,m'}^{U(1)})^*, \quad (3.3.25)$$

avec

$$S_{n,n'}^{U(1)} = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-\frac{i\pi n n'}{k}}, \quad S_{j,j'}^{SU(2)} = \sqrt{\frac{2}{k+2}} \sin\left(\frac{(j'+1)(j+1)}{k+2}\pi\right). \quad (3.3.26)$$

Pour les états de bord de type A réguliers, nous trouvons le résultat

$$|A, j', s\rangle = \sqrt{n} \sum_{\substack{j=0,1,\dots,k \\ r=0,1,\dots,2k/n-1 \\ 2|(j+rn)}} \frac{S_{j,j'}^{SU(2)}}{\sqrt{S_{0,j}^{SU(2)}}} e^{-\frac{i\pi r n s'}{k}} |A; j, r, \Omega\rangle. \quad (3.3.27)$$

Examinons maintenant le cas n pair, où il existe des stabilisateurs non-triviaux et il faut prendre en compte le caractère ψ du centre effectif dans les coefficients de bord (3.3.17.). Ceux-ci affectent seulement les états de bord avec $j = k/2$ (les autres étant de la forme (3.3.27)) auquel cas nous trouvons les états de bord fractionnaires

$$|A, k/2, s, \psi\rangle = \frac{\sqrt{kn}}{2} \left(\sum_{\substack{j=0,2,\dots,k \\ r=0,1,\dots,2k/n-1}} \frac{S_{(j, rn, rn), (k/2, n, n+s)}}{\sqrt{S_{\Omega, (j, rn, rn)}}} |A; j, r, \Omega\rangle \right. \\ \left. + \sum_{r=0,1,\dots,2k/n-1} \frac{\alpha_K \psi(K) S_{(k/2, k/2+rn, k/2+rn), (k/2, n, n+s)}^K}{\sqrt{S_{\Omega, (k/2, k/2+rn, k/2+rn)}}} |A, k/2, r, K\rangle \right), \quad (3.3.28)$$

où la matrice S généralisée est

$$S_{(k/2, n', m'), (k/2, n, m)}^K = \frac{1}{k} S_{k/2, k/2}^{K, SU(2)} e^{\frac{i\pi}{k}(n'n - m'm)} = \frac{1}{k} D e^{\frac{i\pi}{k}(n'n - m'm)} \quad (3.3.29)$$

avec $D = e^{-3\pi i k/8}$ [BorW03].

États de bord T-duaux. Rappelons du chapitre 2 qu'ayant construit les théories conformes décrivant la propagation des cordes fermées sur le quotient $SU(2)_k/\mathbb{Z}_n$ (où la symétrie $SU(2)$ gauche est préservée) nous avons aussi déterminé les théories T-duales, soit $SU(2)_k/\mathbb{Z}_{k/n}$. Nous venons maintenant de construire les états de bord dans chacune de ces théories, et la question se pose de savoir ce qu'il arrive aux états de bord par la dualité T. Une simple analyse des dimensions des D-branes (tout comme une

énumération des états de bord (3.3.22)) nous révèle que ces états, que nous appellerons maintenant de type A, ne peuvent être en correspondance par la dualité – il doit donc exister de nouveaux états de bord dans ces théories, que nous appellerons de type B. Suivant [MMS01] nous pouvons déterminer ces nouveaux états à l'aide du fait qu'il doit exister une correspondance entre les fonctions à un point des deux cotés de la dualité, dont nous connaissons les spectres. Comme la dualité T agit sur la partie $u(1)$ droite de l'algèbre de symétrie par un changement de signe, nous trouvons que les blocs conformes de type A de la théorie $SU(2)_k/\mathbb{Z}_n$ sont transformés en blocs conformes de type B de la théorie $SU(2)_k/\mathbb{Z}_{\frac{k}{n}}$

$$|B; j, rk/n, rk/n, \Omega\rangle^{\mathcal{L}_{k,n}} = |A; j, rk/n\rangle^{PF_k} |B; rk/n\rangle^{U(1)_k}, \quad (3.3.30)$$

où le B sert à nous rappeler que nous avons changé le signe de la partie gauche du bloc conforme $u(1)$,

$$|B; rk/n\rangle^{U(1)_k} := |-rk/n, rk/n\rangle^{U(1)_k}.$$

Clairement, ces blocs conformes sont non-nuls seulement quand $-rk/n = rk/n \pmod{2k}$, soit $r = 0 \pmod{n}$. Les états de bord de type B sur $SU(2)_k/\mathbb{Z}_n$ qui correspondent aux états de bord de type A non-fractionnaires sur $SU(2)_k/\mathbb{Z}_{\frac{k}{n}}$ sont alors

$$|B; j', s'\rangle^{\mathcal{L}_{k,n}} = \sqrt{k/n} \sum_{\substack{j=0,1,\dots,k \\ r=0,1,\dots,2n-1 \\ 2|(j+rk/n)}} \frac{S_{j,j'}^{SU(2)}}{\sqrt{S_{0,j}^{SU(2)}}} e^{-\frac{i\pi rk/ns'}{k}} |A; j, rk/n\rangle^{PF_k} |B; rk/n\rangle^{U(1)_k},$$

où les coefficients de bord, et la normalisation des blocs conformes, sont préservés par la dualité T . Le même raisonnement s'applique aux états de bord de type B fractionnaires

$$|B; k/2, s, \psi\rangle^{\mathcal{L}_{k,n}} = \frac{\sqrt{k^2/n}}{2} \left(\sum_{\substack{j=0,2,\dots,k \\ r=0,1,\dots,2n-1}} \frac{S_{(j, rk/n, rk/n), (k/2, n, n+s)}}{\sqrt{S_{\Omega, (j, rk/n, rk/n)}}} |A; j, rk/n\rangle^{PF_k} |B; rk/n\rangle^{U(1)_k} \right. \\ \left. + \sum_{r=0,1,\dots,2n-1} \frac{\alpha_K \psi(K) S_{(k/2, k/2+rk/n, k/2+rk/n), (k/2, n, n+s)}^K}{\sqrt{S_{\Omega, (k/2, k/2+rk/n, k/2+rk/n)}}} |A; \frac{k}{2}+rk/n\rangle^{PF_k} |B; \frac{k}{2}+rk/n\rangle^{U(1)_k} \right).$$

Rappelons que les notations $\alpha_K, \psi(K)$ furent définis après la formule (3.3.17). Nous reviendrons aux états fractionnaires de $SU(2)_k$ en plus de détail pour en déterminer l'interprétation géométrique.

La fonction de partition de l'anneau. Dans ce paragraphe nous déterminons les spectres de corde ouverte avec les états de bord construits en haut, et étudions leur

dépendance dans la torsion discrète. Ici nous vérifions que la formule générale pour le spectre (3.3.19) donne bien des coefficients entiers positifs. En particulier, quand n est impair nous trouvons, en utilisant les propriétés d'unitarité de la matrice modulaire S , que

$$A_{[j_a, s_a]}^{(j', n', m') [j_b, s_b]} = \delta^{2k/n} (s_a - s_b + n' - m') N_{j_a j_b}^{j'}, \quad (3.3.31)$$

où $N_{j_a j_b}^{j'}$ sont les règles de fusion de $SU(2)_k$, données par

$$N_{j_a j_b}^{j'} = \begin{cases} 1 & \text{si } |j_a - j_b| \leq j' \leq \min\{j_a + j_b, 2k - j_a - j_b\} \\ & \text{et } j_a + j_b + j' = 0 \pmod{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.3.32)$$

Par contre, quand n est pair il existe de points fixes. Pour le cas de deux états de bord dont aucun n'est fractionnaire, nous trouvons

$$A_{[j_a, s_a]}^{(j', n', m') [j_b, s_b]} = \delta^{2k/n} (s_a - s_b + n' - m') \left(N_{j_a j_b}^{j'} + N_{j_a j_b}^{k/2 - j'} \right). \quad (3.3.33)$$

Si un, et seulement un, des états de bord est un point fixe le calcul est très similaire parce que les éléments non triviaux de la matrice S^K de résolution de points fixes s'annulent et nous trouvons $A_{[k/2, s_a, \psi_a]}^{(j', n', m') [j_b, s_b]} = \delta^{2k/n} (s_a - s_b + n' - m') N_{k/2, j_b}^{j'}$. Finalement, si nous considérons deux conditions aux bords dont les orbites ont des points fixes, il faut prendre en compte les caractères ψ_i des centres effectifs $\mathcal{C}_i = \mathbb{Z}_2$. Le résultat est

$$A_{[\frac{k}{2}, s_a, \psi_a]}^{(j', n', m') [\frac{k}{2}, s_b, \psi_b]} = \frac{1}{2} \delta^{2k/n} (s_a - s_b + n' - m') \left(N_{\frac{k}{2}, \frac{k}{2}}^{j'} + i^{s_a - s_b + n' - m'} \psi_a \psi_b \sin\left(\left(j' + \frac{1}{2}\right)\pi\right) \right).$$

Remarquons qu'en dépit du facteur $1/2$ ceci est toujours un entier (positif), car le facteur $N_{\frac{k}{2}, \frac{k}{2}}^{j'}$ est non nul exactement quand $\sin\left(\left(j' + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$ l'est, et aussi que $s_a - s_b + n' - m'$ est pair à cause du delta de Kronecker dans le pré-facteur. Pour conclure, les coefficients de cette amplitude sont donc

$$A_a^{\nu b} = \begin{cases} \delta \times N_{j_a j_b}^{j'} & \text{si } 2 \nmid n \\ \delta \times \left(N_{j_a j_b}^{j'} + N_{j_a j_b}^{k/2 - j'} \right) & \text{si } 2 \mid n \text{ et } j_a, j_b \neq k/2 \\ \delta \times N_{k/2, j_b}^{j'} & \text{si } 2 \mid n \text{ et } j_b \neq k/2, j_a = k/2 \\ \delta \times \frac{1}{2} \delta^1(j') \left(1 + \psi_a \psi_b (-1)^{j' + \frac{1}{2}(s_a - s_b + n' - m')} \right) & \text{si } 2 \mid n \text{ et } j_a, j_b = k/2 \end{cases}$$

avec les notations $\delta \equiv \delta^{2k/n} (s_a - s_b + n' - m')$, et $\ell \mid k$ signifie " ℓ divise k ". Notons que toutes les amplitudes dépendent seulement de la différence $s_a - s_b$, ce qui est essentiel pour l'interprétation que nous allons donner à ce nombre quantique, à savoir que les branes avec $s \neq 0$ correspondent à des moyennes pour l'action du groupe \mathbb{Z}_n de branes symétriques vrillées dans l'espace de recouvrement.

3.4 A-branes, B-branes et branes fractionnaires dans G/Γ

La construction algébrique de la section précédente nous assure l'existence des états de bord \mathcal{B}_j^k donnés par (3.3.17). La question se pose sur la limite semi-classique $k \rightarrow \infty$ de ces états et de leur éventuelle interprétation géométrique. Nous comprenons l'interprétation géométrique dans le sens le plus large, incluant non seulement la géométrie de l'univers branaire mais aussi les champs définis dessus, voir section 3.1. Ce problème a été étudié pendant la dernière décennie par des groupes variés avec des méthodes que nous utiliserons dans la suite. Dans cette section, nous déterminerons la géométrie des univers branaires correspondant aux états de bord symétriques, laissant pour la dernière section de ce chapitre l'étude des champs définis sur la brane et leur dynamique.

A-branes dans les variétés de groupe. Pour étudier l'interprétation géométrique des états de bord, il importe de rappeler que ces états sont des combinaisons linéaires de blocs conformes. L'action linéaire des blocs conformes sur l'espace des représentations de l'algèbre affine \mathfrak{g}_k avec un niveau k fixe se restreint naturellement aux représentations correspondantes de la sous-algèbre horizontale $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ et donc, par le théorème de Peter-Weyl (2.1.13), à la troncation de l'espace des fonctions sur G compatibles avec ce niveau. Dans la limite semi-classique $k \rightarrow \infty$ l'espace des blocs conformes peut ainsi s'identifier avec l'espace des fonctions sur G ; d'après les considérations classiques de la section 3.2 sur des conditions au bord et les classes de conjugaison, nous nous attendons à ce qu'un état de bord symétrique d'un modèle WZW corresponde à une fonction localisée dans une classe de conjugaison. Nous rappelons cette démonstration de [FFFS00] ici et généralisons cet étude à toutes les D-branes, de type A, B, fractionnaires ou non, construites dans la section précédente.

Prenons le cas du modèle $SU(2)_k$ à niveau k fixé. Le bloc conforme $B_{j'}$ correspond à la fonction $\tilde{B}_{j'}(g)$ donnée par

$$\tilde{B}_{j'}(g) = \sum_{j, m_L, m_R} \sqrt{\frac{j+1}{V}} B_{j'}(v_{m_L}^j \otimes \tilde{v}_{m_R}^j) \langle v_{m_L}^j | R^j(g) | \tilde{v}_{m_R}^j \rangle, \quad (3.4.34)$$

où les v_m^j forment une base des états de la représentation de $SU(2)$ de plus haut poids j et V est le volume de $SU(2)$.

Avant de continuer, notons que tout dans la définition (3.3.10) des états de bord, des étiquettes des blocs conformes aux valeurs des coefficients de bord, dépend du niveau

k . Rappelons que j' est aussi un plus haut poids de l'algèbre \mathfrak{g}_k , dont la projection $y_{j'}$ sur $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ est associée à un élément de G par $g_{j'} = e^{2\pi i y_{j'}}$. Toutefois, la projection dépend du niveau selon $y_{j'} = \frac{j'+\rho}{k+g^\vee}$. Il faut donc définir comment, dans la limite de grand niveau, l'étiquette j' de $B_{j'}$ varie avec k . En vue d'une interprétation géométrique nous choisissons de maintenir $y_{j'}$ fixé, et donc j' croît avec k .

Le support de la fonction $\tilde{B}_{j'}(g)$, qui est ce que nous souhaiterions appeler l'univers branaire, est en fait l'espace entier. Toutefois, dans la limite $k \rightarrow \infty$, la fonction $\tilde{B}_{j'}(g)$ devient localisée autour de la classe de conjugaison $\mathcal{C}_{g_{j'}}$ [FFFS00], et nous confirmons l'interprétation géométrique prévue dans (3.2.7) des D-branes dans des variétés de groupes en termes de classes de conjugaison. Le nombre fini de valeurs de l'étiquette j' mène à une quantification de la position des D-branes dans G ,

$$\exp^{-1} g_{j'} \in L = \bigoplus_{\alpha=1}^n \frac{2\pi i}{k_\alpha + g^\vee} (L_\alpha^w + \rho), \quad (3.4.35)$$

où L_α^w est le réseau des plus hauts poids associés à la racine simple α .

A-Branes et B-branes dans des quotients de groupes. Prenons maintenant le cas des espaces de lentilles réguliers. Les fonctions (3.4.34), définies sur $SU(2)$, sont projetées sur le quotient $L_n = SU(2)/\mathbb{Z}_n$ si et seulement si elles sont invariantes par l'identification $g \sim g e^{\frac{2\pi i}{n}H}$ où H est le générateur du tore maximal qui englobe le sous-groupe \mathbb{Z}_n par lequel on quotiente ; alors $f(v_{m_L}^j \otimes \tilde{v}_{m_R}^j) \neq 0$ seulement pour $m_R = 0 \bmod n$. Encore faut-il, pour utiliser les blocs conformes $B_{jmn} = B_{jm}^{PF} B_n^{U(1)}$ de la théorie L_n , décomposer les fonctions sur $SU(2)$ en des fonctions sur l'espace $SU(2)/U(1) \times U(1)$, ce que nous faisons en écrivant $v_n^j \otimes \tilde{v}_m^j = w_{(m+n)/2}^j e_{n,-m}$. Nous prenons des normalisations dans l'espace des fonctions telles que $B_q^{U(1)}(e_{n,-m}) = \delta_{q,n} \delta_{q,m}$ et que

$$B_{j',rk_1}^{PF}(w_{(m_L+m_R)/2}^j) = \delta_{j,j'} \delta_{2rk_1, m_L+m_R}^{4k} + \delta_{j,k-j'} \delta_{2rk_1-2k, m_L+m_R}^{4k}. \quad (3.4.36)$$

Les états de bord de type A non-fractionnaires (3.3.27) sont donc localisés sur l'espace lentille par les fonctions

$$\tilde{\mathcal{B}}_{j,s}(g) = \sqrt{n} \sum_{\substack{j'=0,1,\dots,k \\ r=-k/n, -k/n+1, \dots, k/n-1 \\ 2|(j'+rk_1)}} \hat{S}_{j,j'} D_{rk_1, rk_1}^{j'}(g_s) = \tilde{\mathcal{B}}_{j,0}(g_s), \quad (3.4.37)$$

où nous avons utilisé les notations

$$\hat{S}_{j,j'} := S_{j,j'}^{SU(2)} \sqrt{\frac{j'+1}{S_{0,j'}^{SU(2)} V}}, \quad g_s := e^{-\frac{i\pi s}{k}H} g, \quad \text{et} \quad D_{m,n}^j(g) := \langle v_m^j | R^j(g) | \tilde{v}_n^j \rangle,$$

avec la convention que les éléments de la matrice D^j sont nuls si $|m|, |n| > j$. En particulier, pour $SU(2)$, nous retrouvons les classes de conjugaison $\tilde{\mathcal{B}}_{j,s}(g) = \sum_{j'} \hat{S}_{j,j'} \chi_{j'}(g_s)$. Dans des espaces de lentilles généraux ces A-branes sont donc les projections de combinaisons invariantes de D-branes dans le $SU(2)$ de recouvrement. Ces branes pré-images sont vrillées par un automorphisme intérieur qui se manifeste dans la rotation $g \rightarrow g_s$ (ne pas confondre avec la constante de couplage de la théorie des cordes).

Pour les états de bord fractionnaires de type A, un calcul analogue nous révèle que

$$\tilde{\mathcal{B}}_{s,\psi}(g) = \frac{\sqrt{k k_1}}{2} \sum_{\substack{j'=0,2,\dots,k \\ r=-k/n, -k/n+1, \dots, k/n-1}} \hat{S}_{j,j'} D_{rk_1, rk_1}^{j'}(g_s) + \sqrt{\frac{n}{V}} e^{-3\pi i \frac{k}{8}} \left(\frac{k+2}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \psi \delta_{k/n,0}^2 \sum_{r=\pm k/2} D_{r,r}^{k/2}(g_s),$$

Les deux branes (correspondant aux choix $\psi = \pm 1$) ont le même profil pour tout k sauf si k/n est pair, à cause du terme en $\delta_{k/n,0}^2$. Toutefois, dans la limite géométrique, ce terme est sous-dominant; nous établissons ainsi un fait important, à savoir que les branes fractionnaires ont le même univers branaires. Ces univers branaires sont cependant distingués par le choix de la connexion B du champ H , comme nous le verrons plus bas.

Il est plus intéressant d'étudier ces nouvelles branes de type B, obtenues par la dualité T. Nous avons vu dans la section précédente que les blocs conformes de type B sont de la forme $B_{rk_2}^B(e_{n,-m}) = \delta_{rk_2,n} \delta_{-rk_2,m}$. Alors le profil des B-branes non fractionnaires est donné par

$$\tilde{\mathcal{B}}_{j,s}^B(g) = \sqrt{k/n} \sum_{\substack{j'=0,1,\dots,k \\ r=0,n \quad 2|(j'+rk_2)}} \hat{S}_{k/2,j'} D_{rk_2, rk_2}^{j'}(g_s) = \tilde{\mathcal{B}}_{j,0}^B(g_s), \quad (3.4.38)$$

avec $s = 0, \dots, 2n-1$, ou $s = 0, \dots, n-1$ dans le cas où $2|n, 2 \nmid k/n$. Pour les branes de type B dans $SU(2)$ nous trouvons

$$\tilde{\mathcal{B}}_{j,s}^B(g) = \sqrt{k} \sum_{j'=0,2,\dots,2[k/2]} \hat{S}_{j,j'} D_{0,0}^{j'}(g_s) + \sqrt{k} \hat{S}_{j,k} D_{k,k}^k(g_s) \quad (3.4.39)$$

La brane de type B fractionnaire (qui apparaît quand k/n est pair) a la forme

$$\tilde{\mathcal{B}}_{s,\psi}^B(g) = \frac{\sqrt{k/n}}{2} \sum_{\substack{j'=0,2,\dots,k \\ r=0,n}} \hat{S}_{k/2,j'} D_{rk_2, rk_2}^{j'}(g_s) + \delta_{n,0}^2 \psi e^{-\frac{3\pi i}{8}} D_{0,0}^{k/2}(g_s) \sqrt{\frac{k/n}{V}} \left(\frac{k+2}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (3.4.40)$$

De nouveau, par comptage de puissances en k nous constatons que le terme en ψ qui diffère entre les branes fractionnaires disparaît dans la limite semi classique. De nouveau, toutes les branes fractionnaires ont donc le même univers branair.

Remarques. Rappelons que du point de l'espace-cible, les D-branes sont définies par leur univers branaire D et aussi par le champ \mathcal{F} qui y vit. Comme pour le choix de connexion B étudié dans le chapitre 2, le champ subit une action du groupe $H^2(G/\Gamma, U(1))$, ou plus précisément de sa restriction sur D , $H^2(D, U(1))$. Or, il s'avère que ce groupe est trivial sauf si l'univers branaire D est invariant par Γ [GaRe02], c'est-à-dire précisément le cas de branes fractionnaires. Donc, les branes fractionnaires se distinguent par les champs électromagnétiques qu'elles portent. Ces champs ont été construits explicitement dans le cas des branes fractionnaires équatoriales de $SO(3)$ [C02].

Les résultats obtenus ici pour les branes dans les espaces lentilles généralisés peuvent être transposés au cas général des quotients $G/p\Gamma$. Les D-branes dans ces espaces sont les projections des ensembles invariants sous Γ de D-branes (vrillées) dans G .

3.5 Action de Born-Infeld et stabilisation par le flux de F

Les résultats de la section précédente posent un problème : les univers branaires des branes de type A dans les variétés de groupes sont des classes de conjugaison et donc des sous-variétés contractiles dans les groupes et leurs quotients. La question se pose du point de vue de la théorie d'espace-temps si ces D-branes sont stables et par quel mécanisme. Ce problème a été résolu pour le cas de $SU(2)$ dans [BDS00] avec la proposition du mécanisme de stabilisation par le flux du champ électromagnétique ; dans cette section nous généralisons ce mécanisme à tous les quotients de groupe construits en haut. Nous rentrons ainsi dans le sujet qui nous occupera pendant le reste de cette thèse, à savoir les action effectives qui régissent la dynamique des D-branes dans leur interprétation d'espace-temps : l'action de Born-Infeld et ses généralisations.

Nous dérivons l'action de Born-Infeld (1.3.31) et en calculons certaines corrections dans le chapitre 4, selon les idées déjà exposées dans la section 1.3. Ici nous reprenons cette action (à dilaton nul)

$$S_{BI}(p, \mathcal{F}) = \int_D \sqrt{\det(p^*g + p^*B + 2\pi F)} \quad (3.5.41)$$

et l'utilisons comme le principe dynamique qui contrôle les D-branes symétriques, dans la limite semi-classique $k \rightarrow \infty$. Que cette application soit avisée, même dans cette

limite, n'est pas évident puisque S_{BI} a été trouvée comme l'action effective pour des D-branes dans l'espace plat. Le résultat central de cette section (généralisant [BDS00]) est que l'action S_{BI} reproduit néanmoins exactement les résultats de la théorie conforme pour tout k (à un décalage et une troncation du niveau k près).

Les variables dynamiques qui entrent dans la description (3.5.41) des univers branaires sont le plongement $p(D)$ de cet univers dans l'espace-temps (et non pas la surface D en soi) et le champ F défini sur D . Pour adapter l'action de Born-Infeld aux branes symétriques dans les groupes compacts, dont les univers branaires sont des classes de conjugaison (3.2.7), nous avons besoin de mieux connaître la géométrie de celles-ci. Par les arguments standard (les classes de conjugaison d'un groupe abélien étant toutes triviales) il suffit de se pencher sur les groupes compacts, simples et simplement connexes. Pour la plupart des éléments g dans G , ceux dits réguliers, il s'avère qu'il existe un seul tore maximal T contenant g , qui forme aussi le commutant $C(g)$ de g (le sous-groupe de G des éléments qui commutent avec g). Le tore maximal est de la forme $T \cong U(1)^r$ où r est le rang de G . Les classes de conjugaison des éléments réguliers sont donc difféomorphes à G/T . Pour les éléments restants, qui appartiennent à plusieurs tores maximaux, les classes de conjugaison seront plus petites. Ces résultats sont résumés dans le fait que pour un groupe compact l'application

$$\begin{aligned} q : G/T \times T &\rightarrow G \\ q(gT, h) &\rightarrow ghg^{-1} \end{aligned} \tag{3.5.42}$$

est surjective. Cette application n'est toutefois pas injective, car les classes de conjugaison intersectent en général un tore maximal en plus d'un point. Pour arriver à une paramétrisation correcte des classes de conjugaison il faut prendre en compte le sous-groupe de G qui laisse T globalement invariant par l'action adjointe, soit le normalisateur $N(T)$ de T . Or, non seulement est T un sous-groupe de $N(T)$, il faut souligner qu'il s'agit même d'un sous-groupe d'ordre fini ; le quotient est le groupe de Weyl

$$W = N(T)/T \tag{3.5.43}$$

Le groupe de Weyl ne dépend pas du choix du tore puisque dans un groupe compact tous les tores sont conjugués. Les classes de conjugaison sont donc paramétrées par le quotient T/W . Puisant dans l'interprétation géométrique des D-branes de la section précédente, nous nous concentrerons sur les D-branes régulières et nous remplaçons D dans l'action de Born-Infeld par $\mathcal{C}_h \cong q_h(G/T_r)$.

Il faut encore spécifier les champs dynamiques F_h sur les classes de conjugaison \mathcal{C}_h . Nous connaissons déjà la forme $\mathcal{F} = B + 2\pi F$ (1.2.26) construite à l'aide des conditions aux bord $J = \bar{J}$. Toutefois, le champ F peut être absorbé par une transformation de jauge pour le champ B ; les données de \mathcal{F} et H ne suffisent donc pas à déterminer F . Nous devons donc faire une ansatz pour F . Heureusement, il existe une forme de rang 2 canonique définie sur chaque classe de conjugaison : la deux-forme dite de Kirillov [Kir99]. Cette forme est en effet fermée et non singulière, et définit la structure symplectique de la classe de conjugaison (dont la dimension est, d'après (3.5.42), toujours paire). Nous l'écrivons comme une famille de formes F_h sur G/T_r paramétrée par $h \in T_r/W$

$$2\pi F_h(u, v) := 2\langle \exp^{-1}h, [g^{-1}u, g^{-1}v] \rangle, \quad (3.5.44)$$

où $g \in G$ est un représentant quelconque de l'élément gT de G/T à qui les vecteurs u, v sont tangents. Le choix de pré-image de h par l'exponentielle correspond à différents choix de F_h ; toutefois, ces choix correspondent précisément à des grandes transformations de jauge de la connexion B , telles que la somme \mathcal{F} (3.1.3) en est indépendante. Nous pouvons vérifier que chaque F_h est fermée et non dégénérée pour h constant. Mais pour considérer des fluctuations du plongement $p(D)$ il faut définir F dans le voisinage de chaque classe de conjugaison régulière. Ceci est accompli en étendant F_h sur G/T vers une forme de rang 2 sur $G/T \times T_r$ qui vaut zéro dans des directions tangentes à T_r . Ainsi nous pouvons aussi déterminer la connexion B en inversant la relation (1.2.26), et le résultat vérifie évidemment $dB = H$ sur G_r . Cet ansatz (3.5.44) pour F sera justifié par l'accord de ses résultats avec la théorie conforme. Pour l'instant nous constatons que la condition que F_h soit un champ de force sur la D-brane implique que F soit quantifié

$$F_h \in H^2(G/T, \mathbb{Z}). \quad (3.5.45)$$

Ceci implique à son tour une quantification de la position h de la D-brane, comme nous le verrons dans la prochaine section.

3.5.1 Les solutions classiques et la quantification de F

Solutions classiques. Pour vérifier que nos configurations $(G/T, F_h)$ sont en effet des solutions classiques stables des équations du mouvement de l'action de Born-Infeld, nous calculons les fluctuations linéaires et quadratiques de l'action sous des variations

du champ de jauge A_μ sur la brane et de son plongement dans G . Commençons par les fluctuations linéaires de l'action. Avec la notation $M_h = q_h^*G + q_h^*B + 2\pi F_h$, où $h \in T$ paramétrise les classes de conjugaison, nous pouvons écrire

$$\delta^{(1)}S_{BI}(q_h, F_h) = \frac{1}{2} \int_{G/T} \sqrt{\det(M_h)} \operatorname{Tr}(M_h^{-1} \delta M_h). \quad (3.5.46)$$

En ce qui concerne les variations du plongement p , on peut montrer que toute fluctuation $\delta_p M_h$ vérifie $\operatorname{Tr}(M_h^{-1} \delta_p M_h) = 0$; cette identité dépend du choix de F et implique que $\delta_p^{(1)}S_{BI} = 0$. Pour ce qui est des variations δA du champ de jauge, la variation de l'action s'écrit

$$\begin{aligned} \delta_F^{(1)}S_{BI}(q_h, F_h) &= \int_{G/T} \sqrt{\det(M_h)} \operatorname{Tr}(M_h^{-1} d(\delta A)) \\ &= - \int_{G/T} \operatorname{Tr}\left(\delta A d\left(\sqrt{\det(M_h)} M_h^{-1}\right)\right). \end{aligned}$$

De nouveau, en utilisant explicitement la configuration G/T et F_h on peut montrer que le facteur $d\left(\sqrt{\det(M_h)} M_h^{-1}\right)$ s'annule, ce qui implique que la fluctuation de l'action due à la variation du champ de jauge est nulle. Nous avons donc bien trouvé des solutions des équations du mouvement. Avant de vérifier que ces solutions sont stables, il convient de trouver quelles sont finalement les positions des branes permises par la quantification (3.5.45) du champ F .

Quantification de la position des branes. La condition (3.5.45) se traduit par le fait que, pour toute sphère S^2 dans l'univers branaire G/T , l'intégral $\int_{S^2} F_h$ doit être un entier. L'ensemble des sphères S^2 dans G/T est paramétré par la deuxième homologie $H_2(G/T)$. Heureusement, il est facile de trouver une base pour $H_2(G/T)$, comme suit : à toute racine α de l'algèbre $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie}(G)$ nous pouvons associer la sous-algèbre $su(2)_\alpha$ générée par la co-racine H^α et des combinaisons linéaires des opérateurs $E^{\pm\alpha}$. L'image de cette sous-algèbre dans G par l'application exponentielle est isomorphe soit à $SU(2)$ soit à $SO(3)$. Dans les deux cas, le quotient à droite par T donne des deux-sphères S_α dans G/T . En plus, les sphères ainsi obtenues engendrent $H_2(G/T)$, d'où nous concluons qu'il suffit d'étudier le cas de $SU(2)$.

Dans ce cas, la quantification 3.5.45 implique que $\exp^{-1}h$ soit de la forme $2\pi\lambda/k$ où λ est un poids intégral de $su(2)$. Pour un groupe quelconque nous trouvons alors que les positions des branes peuvent s'écrire en fonction du réseau des poids

$$\exp^{-1}h \in L = \bigoplus_{\alpha=1}^n \frac{2\pi}{k_\alpha} L_\alpha^w \quad (3.5.47)$$

où les L_α^w sont les réseaux des poids de chaque sous-algèbre $su(2)_\alpha$. Remarquons que, comme avant, nous devons quotienter le réseau L par l'action du group de Weyl affine \hat{W} (une extension du groupe de Weyl (3.5.43) qui prend aussi en compte le générateur de l'algèbre affine correspondant au niveau), ce qui nous mène à un nombre fini de branes sur G .

Nous pouvons maintenant comparer ce résultat avec le résultat exact de la théorie conforme. Le réseau (3.5.47) coïncide avec le résultat exact (3.4.35) à deux décalages près : une dans le niveau k par le nombre dual de Coxeter, et une dans les poids par le vecteur de Weyl. En particulier, si une brane ponctuelle, correspondant au poids zéro, paraît une autorisée par notre analyse géométrique, elle ne l'est pas du point de vue de la théorie conforme. Soulignons que, modulo ces modifications assez naturelles, les résultats géométriques et les résultats exacts sont en accord pour toute valeur de k (et non seulement dans la limite semi-classique $k \rightarrow \infty$, comme attendu). Cet accord se propage aussi au spectre des cordes ouvertes avec ces conditions aux bords, comme nous allons le voir.

Spectre des fluctuations et stabilité des solutions. Pour calculer les fluctuations quadratiques de l'action de Born-Infeld, il nous faudra considérer l'espace de fonctions sur G/T . Pour cela, nous considérons d'abord des coordonnées x_i sur G/T et ensuite construisons les champs de vecteurs $e_i(x)$ tangents à G/T comme la projection orthogonale du vecteur $m_i(x) = (\partial_{x_i} h) h^{-1}$ sur l'espace $Im(1 - Ad_{hth^{-1}})$, où h est un représentant dans G de l'orbite hT dans G/T et t est un élément quelconque du tore maximal (dont évidemment ces quantités ne dépendent pas). Alors nous introduisons une métrique γ sur G/T à l'aide de la forme de Killing sur G , par

$$\gamma_{ij}(x) = \langle e_i(x), e_j(x) \rangle \quad (3.5.48)$$

À cette métrique correspond la dérivée covariante, donnée en termes des coordonnées x_i par

$$\nabla^i = \frac{1}{\sqrt{\det \gamma}} \partial_j \sqrt{\det \gamma} \gamma^{ij} \quad (3.5.49)$$

Le Laplacien de cette dérivée, $\square = \nabla^i \partial_i$, peut aussi être obtenu comme l'opérateur de Casimir quadratique de l'action à gauche du groupe G sur l'espace de fonctions sur G/T . On peut montrer [BorRS01] que les équations du mouvement correspondant à l'annulation des fluctuations quadratiques de S_{BI} sont

$$\square f = 0 \quad (3.5.50)$$

où f est une fonction quelconque de G/T dans \mathfrak{g} . Pour interpréter les solutions comme des oscillations de la D-brane, il faut ajouter une direction temporelle au système, $G \times \mathbb{R}$. Sur G/T_0^ω , l'équation (3.5.50) devient alors une équation aux valeurs propres du Laplacien \square de la métrique de corde ouverte. Nos solutions sont donc stables dans la mesure où ces valeurs propres sont positives, de façon à annuler la contribution négative venant des oscillations selon \mathbb{R} . En fait, il a été constaté dans [FFFS00] que ce spectre est bien la limite semi-classique du spectre obtenu pour les D-branes par des méthodes de théorie conforme.

Plus précisément, d'après le théorème de Peter et Weyl, les solutions f sont dans la représentation adjointe R_{ad} de G et l'opérateur de Casimir est bien évidemment un scalaire. La solution générale de (3.5.50) est donc de la forme $R_{ad} \otimes R_0$ où R_0 est une représentation quelconque avec Casimir nul. La condition de jauge enlève une représentation isomorphe à R_0 du produit $R_{ad} \otimes R_0$.

Comme annoncé, les résultats pour les positions et le spectre des D-branes coïncident donc avec la théorie conforme pour tout k , à quelques détails près. Les détails sont de nouveau le décalage du niveau par le nombre dual de Coxeter, $k \rightarrow k + g^\vee$, le décalage des poids λ par le vecteur de Weyl ρ et la troncation du spectre pour que les représentations soient unitaires du point de vue de l'algèbre affine $\hat{\mathfrak{g}}$. Nous montrons maintenant comment cet accord s'étend aussi aux quotients des modèles WZW.

Application aux branes dans les quotients de groupe. Ce mécanisme de stabilisation des branes de type A dans les groupes simples et compacts peut être utilisé pour établir des résultats similaires pour les branes dans les quotients de ces groupes, du moins dans le cas où ce quotient n'est pas singulier.

Nous avons vu dans la section 3.4 que (l'univers branaire d') une A-brane non fractionnaire dans l'espace quotient $G/\bar{p} \Gamma$ est la projection dans cet espace d'une union de classes de conjugaison (éventuellement vrillées) dans G . Dans la limite de grand niveau, l'univers branaire des branes fractionnaires peut aussi être vu comme une telle projection et la discussion qui suit s'applique aussi dans ce cas.

Le mécanisme de stabilisation est valable pour chaque pré-image des branes de l'espace-quotient, tandis que les champs F dont les flux stabilisent les D-branes dépendent du choix de la pré-image seulement par un facteur multiplicatif, comme on peut le voir d'après (3.5.45).

Le problème variationnel dans l'espace quotient peut maintenant être repris comme

un problème variationnel dans G . L'action de Born–Infeld pour la brane dans l'espace quotient est proportionnelle à la somme des termes de Born–Infeld décrivant chaque brane dans l'espace de recouvrement. Chacune de ces branes images dans G est une solution stable du problème variationnel de Born–Infeld, et en particulier la valeur de l'action est stable par les fluctuations qui survivent à la projection dans l'espace quotient. Donc, les branes de type A construites dans la section 3.4 dans les espaces G/Γ sont des solutions aux équations de mouvement de Born–Infeld. Dans le cas particulier de $SO(3) = SU(2)/\mathbb{Z}_2$, ces résultats ont été obtenus en [C02].

Cette analyse avec l'action de Born–Infeld a aussi été appliquée au cas des branes de type B dans les théories parafermioniques [MMS01], avec des résultats également satisfaisants : pourtant, pour des B-branes de dimension supérieure, il n'est pas clair quelle ansatz prendre pour un champ F stabilisateur de l'action de Born–Infeld. En effet, vu que ces branes ont en général des bords et ne sont donc pas des sous-variétés de l'espace ambiant, il se pose aussi le problème de définir la contribution du bord de la brane. En dépit des résultats obtenus pour les théories parafermioniques, donc, la définition de l'action effective pour les branes de type B n'est pas encore tout à fait comprise.

Dans le chapitre suivant nous étudions des corrections aux équations de mouvement de Born–Infeld pour des D-branes de dimension maximale dans des espaces courbes assez généraux (incluant notamment les quotients des groupes). Le but cependant ne sera pas d'en étudier la stabilité, comme nous l'avons fait ici, mais d'explorer le lien avec des univers branaires non-commutatifs.

Chapitre 4

Champs F, H et les cordes dans des espaces courbes généraux

Dans ce chapitre nous reprenons le raisonnement de la fin du chapitre 1 (section 1.3), qui rappelle le lien entre les fonctions bêta du modèle sigma sur la surface d'univers et les équations de mouvement des champs d'espace-temps. Dans le but de déterminer des corrections aux équations de mouvement du champ F , nous calculons ici des corrections à la fonction β^F (1.3.29) dues à la courbure de l'espace-cible.

Rappelons que la fonction bêta est définie comme la variation du couplage renormalisé A_μ par rapport à l'échelle d'énergie Λ de la théorie (1.3.27). Le couplage renormalisé est déterminé perturbativement en termes de Λ et du couplage nu

$$A_\mu = \sum_m \Gamma_m[A_\mu^0](\ln \Lambda)^m \quad (4.0.1)$$

La fonction bêta s'écrit alors

$$\beta_\mu(A_\mu) = \sum_m m \Gamma_m[A_\mu^0](\ln \Lambda)^{m-1} \quad (4.0.2)$$

où par cohérence le côté droit ne doit pas dépendre de Λ . Inversant la relation (4.0.1) on trouve que

$$\beta_\mu(A_\mu) = \Gamma_1[A_\mu] \quad (4.0.3)$$

et les termes suivants Γ_i , $i > 1$ sont déterminés itérativement à partir de Γ_1 [OD86]. Notre tâche est donc de calculer Γ_1 , c'est-à-dire les divergences en $\ln \Lambda$ des contretermes au couplage A_μ .

Avant d'embarquer dans ce calcul, il convient de prendre en compte certaines limitations qui y sont inhérentes.

- les fonctions bêta sont perturbatives dans la constante de couplage α' , que comptabilise le nombre de boucles ;
- à plusieurs boucles, les contretermes (et donc les fonctions bêta) ne sont pas définis uniquement, mais dépendent du schéma de régularisation ;
- le calcul se fait en perturbant une solution connue, c'est-à-dire que les fonctions bêta sont dépendantes de la configuration de champs de corde fermée de départ.

Tandis que la première propriété est évidente du contexte perturbative où nous nous trouvons, les deux autres peuvent apparaître comme des obstacles importants à tout progrès dans cette direction. Il est utile de souligner dans ce sens que non seulement les fonctions bêta mais aussi la classe de leurs solutions dépend du schéma de régularisation. Nous verrons dans la section 4.2 que ces propriétés pourront cependant être tournées à notre avantage ; la dépendance du schéma de régularisation se traduira comme le possibilité de redéfinir les degrés de liberté d'espace-temps.

La fonction bêta de F fait donc intervenir les champs de corde fermée par le plongement de la D-brane dans l'espace-temps. Ainsi, β^F dépend du choix des champs de corde fermée (g, H, Φ) ; ceux-ci doivent être solutions des équations de mouvement respectives, à l'ordre pertinente en α' .

Le plongement introduit néanmoins des difficultés additionnelles qui peuvent être négligées dans un premier abord. Ici nous considérerons donc le cas d'un plongement trivial, c'est-à-dire une seule D-brane maximale dans l'espace-temps. Une D-brane maximale est telle que son univers branaire couvre tout l'espace-temps. On pourrait objecter que les conditions de quantification du champ H ne sont pas compatibles avec une telle D-brane. En effet, comme nous l'avons vu dans le chapitre 2 la quantification de H mène à des D-branes de dimension inférieure dont la position est quantifiée. Néanmoins, ces effets topologiques sont visibles seulement dans la théorie exacte, à tous les ordres en α' . Par contre, nos calculs sont perturbatifs en H , ce qui est en quelque sorte incompatible avec un champ H quantifié. Il va de même que notre D-brane ne doit pas se conformer aux restrictions topologiques et peut donc être maximal. Notons aussi que ce raisonnement est à la base de la dérivation de l'action de Born-Infeld dans les articles pionniers sur le sujet [ACNY87][CLNY87][AT88].

Nous commençons par exposer la théorie de perturbations avec la méthode de dé-

veloppement autour d'une configuration de champs de fond^{†1}. Notre étude est restreint à la classe d'espaces-cibles *parallélisables*. Une variété M est parallélisable si elle admet un choix de connection, éventuellement avec torsion, tel que le transport parallèle est trivial. En d'autres mots, M admet une métrique g et une 3-forme H fermée telles que le tenseur de Riemann avec torsion

$$\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{i}{2}\nabla_\rho H_{\sigma\mu\nu} - \frac{i}{2}\nabla_\sigma H_{\rho\mu\nu} + \frac{1}{4}H_{\mu\rho\lambda}H^\lambda{}_{\nu\sigma} - \frac{1}{4}H_{\mu\sigma\lambda}H^\lambda{}_{\nu\rho} \quad (4.0.4)$$

est nul. Une variété parallélisée (on dira aussi parallélisable, par abus de langage) est donc munie de champs g, H vérifiant

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{1}{4}H_{\mu\nu\lambda}H^\lambda{}_{\rho\sigma} = 0, \quad \nabla_\mu H_{\nu\rho\sigma} = 0, \quad H_{\lambda[\mu\nu}H_{\rho\sigma]}{}^\lambda = 0 \quad (4.0.5)$$

où ∇_μ est la dérivative covariante par rapport à la métrique. Comme exemples de variétés parallélisables, citons les espaces plats ($\mathbb{R}^N, \mathbb{T}^N$) où $H = 0$, et aussi les variétés de groupes et leurs quotients construits dans le chapitre 2 où la métrique est donné par la forme de Killing (2.1.1) et le champ H est déterminé à partir des constantes de structure du groupe (2.1.4).

Il a été montré dans [BCZ85] qu'une variété parallélisable munie d'un champ de dilaton constant est une solution des équations de mouvement de la corde bosonique fermée à l'ordre de deux boucles. De plus, on estime que ces configurations sont des solutions exactes des équations du mouvement – ce qui est en effet le cas des exemples mentionnés dans le paragraphe précédant, les modèles de WZW et leurs quotients. Toutefois, pour notre but de calculer la fonction bêta à deux boucles, le résultat de [BCZ85] est suffisant.

Dans les sections 4.1 et 4.2 nous présentons une méthode de calcul qui nous permet de calculer la fonction bêta de façon *exacte* en F . Nous complétons ce calcul à l'ordre de deux boucles pour le cas des espaces parallélisables. Notons cependant que, à quelques détails techniques près, cette méthode est applicable à toute configuration de corde fermée et pour toute nombre de boucles. L'intérêt des espaces parallélisables reside dans le lien avec la théorie de Born-Infeld non-commutative et l'effet diélectrique (1.3.35). Pour d'autres résultats dans la littérature concernant des corrections à S_{BI} (par exemple en calculant des amplitudes de diffusion en théorie des cordes) voir [BBG99][Fot01].

^{†1}En anglais, *background field expansion*.

Dans la section 4.3, nous passons à la théorie non-abelienne, suivant le raisonnement exposé dans le chapitre 1. Nous classifions les termes pouvant exister dans l'action non-abelienne à cet ordre de théorie de perturbations; toutefois, par des raisons que l'on exposera à la fin de la section 4.1, nous ne serons pas en mesure de déterminer les coefficients de ces termes.

4.1 Théorie de perturbations sur la surface d'univers

Considérons une corde ouverte libre, dont la topologie est celle d'un disque \mathbb{D} avec un choix d'origine; le disque est muni de coordonnées complexes $z = re^{i\theta}$, où $r \in [0, 1]$ est la coordonnée radiale et θ paramétrise le bord $\partial\mathbb{D} = S^1$. Nous pouvons aussi fixer la métrique euclidienne, qui dans ces coordonnées s'écrit $g_{z\bar{z}} = \frac{1}{2}dzd\bar{z}$. Le choix d'une surface d'univers compacte comme le disque est très utile, essentiellement car le spectre des fluctuations sur le bord (compact) est discret.

Étant donnée cette configuration classique des champs $x^\mu(z, \bar{z})$ sur la corde, nous nous intéressons maintenant à des petites déviations à cette configuration. Pour cela, nous utilisons la *méthode d'expansion autour d'une configuration de cordes* [BCZ85] qui consiste à réécrire le champ quantique X^μ comme une perturbation du champ classique x^μ par une fluctuation quantique ξ^μ , comme $X(z)^\mu = x^\mu(z) + \xi^\mu(z)$. Plus précisément, les nouveaux champs quantiques seront les champs de vecteurs géodésiques ζ^μ qui relient les points \bar{x}^μ aux points $\bar{x}(z) + \bar{\xi}(z)$ dans l'espace-temps. La théorie de perturbation du modèle sigma (1.1.2) qui en résulte est une expansion en puissances de ζ^μ et de ses dérivées,

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} S^{(i)}, \quad \text{avec} \quad S^{(n)} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{ds^n} S[\rho(s)]|_{s=0} \quad (4.1.6)$$

où $\rho(s)$ est la géodésique qui relie les points $x(z)$ et $x(z) + \xi(z)$, et dont le vecteur tangente est $\zeta(z)$. Le terme $S^{(N)}$ est d'ordre $\mathcal{O}(\zeta^N)$. Ceci nous assure aussi que toutes les couplages entre les ζ^μ seront aussi des tenseurs d'espace-temps définis au point \bar{x} . En effet il s'avèrera, au moins à l'ordre $\mathcal{O}(\zeta^4)$, que ces couplages peuvent être écrites au moyen de certains tenseurs d'espace-temps bien connus, comme le tenseur de Riemann généralisé $\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\sigma}$ ou la combinaison de champs

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + 2\pi\alpha' F_{\mu\nu}. \quad (4.1.7)$$

Ce dernier fait est une vérification non triviale de la cohérence du développement. En effet, nous avons constaté dans le chapitre précédent que cette combinaison est la seule invariante sous les transformations de jauge pour le champ B . Les espaces-cibles qui nous intéressent, les variétés parallélisables, ont $\mathcal{R} = 0$, ce qui simplifie beaucoup le développement (4.1.6).

Pour obtenir les équations de mouvement sur les champs classiques x^μ , nous calculons le premier terme dans le développement

$$S^{(1)} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} (-2g_{\mu\nu}\zeta^\mu(\mathcal{D}_a\partial^a x^\nu)) + \frac{1}{2\pi\alpha'} \oint_{\partial\Sigma} (g_{\mu\nu}\partial_\sigma x^\nu - i\mathcal{F}_{\mu\nu}\partial_\theta x^\nu)\zeta^\mu \quad (4.1.8)$$

De cette expression, nous déduisons les équations du mouvement pour $x^\mu(z, \bar{z})$

$$\mathcal{D}_a\partial^a \vec{x} = 0 \quad (4.1.9)$$

$$(g_{\mu\nu}\partial_\sigma x^\nu - i\mathcal{F}_{\mu\nu}\partial_\theta x^\nu)|_{\partial\Sigma} = 0 \quad (4.1.10)$$

où \mathcal{D}_a est la dérivée covariante agissant sur des vecteurs ζ d'espace-temps par rapport à la connexion avec torsion

$$(\mathcal{D}_a\zeta)^\mu = (D_a\zeta)^\mu - \frac{i}{2}H^\mu{}_{\nu\lambda}\zeta^\lambda\epsilon_{ab}\partial^b x^\nu \quad (4.1.11)$$

$$(D_a\zeta)^\mu = \partial_a\zeta^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu\zeta^\rho\partial_a x^\nu \quad (4.1.12)$$

Considérons maintenant les ingrédients nécessaires à notre calcul perturbatif, à commencer par le propagateur.

4.1.1 Le propagateur

Le terme quadratique $S^{(2)}$, dont est déduit le propagateur, s'écrit (voir l'Appendice A de [BorCS04])

$$S^{(2)}[\zeta] = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} g_{\mu\nu}\mathcal{D}_a\zeta^\mu\mathcal{D}^a\zeta^\nu + \frac{i}{4\pi\alpha'} \oint_{\partial\Sigma} (\nabla_\sigma\mathcal{F}_{\mu\nu}\partial_\theta x^\nu\zeta^\sigma\zeta^\mu + \mathcal{F}_{\mu\nu}\zeta^\mu D_\theta\zeta^\nu),$$

Ceci présente deux problèmes. Premièrement, les couplages sont des fonctions sur l'espace-temps. Pour en arriver à un terme cinétique standard nous introduisons des vielbeine, c'est-à-dire des champs classiques $e_\nu^j(x)$ définis localement et vérifiant

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu^A(x)e_\nu^B(x)\delta_{AB}, \quad e_\mu^A(x)e^{\mu B}(x) = \delta^{AB}. \quad (4.1.13)$$

Il s'avère que, quand l'espace est parallélisable, on peut choisir les vielbeins e_μ^A tels que [BCZ85]

$$e_\mu^A\mathcal{D}_a\zeta^\mu = \partial_a\zeta^A \quad (4.1.14)$$

où nous avons paramétrisé les fluctuations quantiques par le “champ” $\zeta^A(x, z)$ donné par

$$\zeta^A(x, z) = e_\mu^A(x)\zeta^\mu(z). \quad (4.1.15)$$

Plus généralement, pour un champ tensoriel quelconque sur un espace parallélisable on a

$$e_{\mu_1}^{A_1} \cdots e_{\mu_m}^{A_m} e_{B_1}^{\nu_1} \cdots e_{B_m}^{\nu_m} \mathcal{D}_a T_{\nu_1, \dots, \nu_m}^{\mu_1, \dots, \mu_m} = \partial_a T_{B_1, \dots, B_m}^{A_1, \dots, A_m} \quad (4.1.16)$$

En particulier, d’après (4.1.10), (4.1.11) et (4.1.12) on a sur le bord $\partial\Sigma$ de la surface d’univers

$$D_\theta \zeta^\mu|_{\partial\Sigma} = e_A^\mu \left(\partial_\theta \zeta^A - \frac{1}{2} H_{BC}^A \zeta^A \mathcal{F}_D^C \partial_\theta x^D \right) |_{\partial\Sigma} \quad (4.1.17)$$

Le terme quadratique peut donc se réécrire

$$\begin{aligned} & \frac{g_{AB}}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma \partial_a \zeta^A \partial^a \zeta^B + \frac{i}{4\pi\alpha'} \oint_{\partial\Sigma} \mathcal{F}_{AB} \zeta^A \partial_\theta \zeta^B \\ & + \frac{i}{4\pi\alpha'} \oint_{\partial\Sigma} (\nabla_A \mathcal{F}_{BC} + \mathcal{F}_{AD} H_B^{DE} \mathcal{F}_{EC}) \zeta^A \zeta^B \partial_\theta x^C \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

Nous retrouvons ainsi le terme cinétique habituel, au prix d’introduire plusieurs vertex à deux points, ce qui nous mène au deuxième problème. Ces vertex doivent être considérés des vertex d’interaction vu que les champs \mathcal{F} et H dépendent de la position sur la surface d’univers. Notons cependant que pour \mathcal{F} constant, il aurait été possible d’inclure le deuxième terme de la première ligne, $\mathcal{F}_{AB} \zeta^A d_\theta \zeta^B$, dans un terme cinétique de la forme

$$\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma (g_{AB} \delta^{ab} + \mathcal{F}_{AB} \epsilon^{ab}) \partial_a \zeta^A \partial_b \zeta^B \quad (4.1.19)$$

Poursuivons cette remarque, puisqu’elle sera pertinente pour notre calcul. Le propagateur $\Pi^{AB} = \langle \zeta^A(z) \zeta^B(w) \rangle$ de cette théorie a donc une partie symétrique et une partie antisymétrique. Nous retrouvons ainsi la métrique de corde ouverte (1.3.30),

$$G^{AB} = \left(\frac{1}{g + \mathcal{F}} \right)^{(A,B)} = \left(\frac{1}{g + \mathcal{F}} g \frac{1}{g - \mathcal{F}} \right)^{AB} \quad (4.1.20)$$

et son contre-part antisymétrique (1.3.33)

$$\Theta = -2\pi\alpha' \left(\frac{1}{g + \mathcal{F}} \right)^{[A,B]} = -2\pi\alpha' \left(\frac{1}{g + \mathcal{F}} \mathcal{F} \frac{1}{g - \mathcal{F}} \right)^{AB} \quad (4.1.21)$$

Le propagateur dans le disque est alors (voir [BorCS04])^{‡2}

$$\frac{1}{\alpha'} \Pi^{AB}(z, w) = \Theta^{AB} \mathcal{A}(z, w) + G^{AB} \mathcal{B}(z, w) + g^{AB} [\mathcal{C}(z, w) + \mathcal{D}(z, w)] \quad (4.1.22)$$

où z, w sont des coordonnées (complexes) sur le disque, et

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(z, w) &= \ln \left(\frac{1 - z\bar{w}}{1 - \bar{z}w} \right), & \mathcal{B}(z, w) &= -2 \ln |1 - z\bar{w}| \\ \mathcal{C}(z, w) &= \ln \left| \frac{z - w}{1 - z\bar{w}} \right|, & \mathcal{D}(z, w) &= \frac{1}{2} (z\bar{z} + w\bar{w}). \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

Ce propagateur satisfait aussi aux conditions au bord

$$(g_{AB} \partial_\sigma \Pi^{BC} + i \mathcal{F}_{AB} \partial_\theta \Pi^{BC})|_{\partial\Sigma} = 0, \quad (4.1.24)$$

Bien que \mathcal{F} ne soit pas constant, nous verrons dans la section 4.1.4 que cette construction donne lieu à une sorte de propagateur effectif. Pour l'instant, nous considérons seulement le terme g_{AB} pour la partie cinétique de l'action libre, ce qui revient à mettre $\Theta^{AB} = 0$ et $G = g^{AB}$ dans les expressions ci-dessus.

4.1.2 Les vertex

Pour trouver tous les vertex qui peuvent former des diagrammes à deux boucles, nous devons mener le développement de l'action jusqu'à l'ordre $S^{(4)}$. Nous avons inclus ce calcul dans l'Appendice A de [BorCS04]. Dans la section précédente nous avons déjà identifié les vertex à deux points. Pour les vertex à 3 et 4 points, il suffit de consulter les résultats de cet Appendice et utiliser les équations (4.1.10–4.1.12) pour les écrire en termes des champs quantiques ζ^A .

Rappelons cependant que les contre-termes à $\oint_{\partial\Sigma} A_\mu \partial_\theta x^\mu$ incluent des vertex ayant *au maximum* un facteur de $\partial_\theta x$. Listons maintenant les vertex de notre théorie qui vérifient cette contrainte. Tous les vertex ont un signe -1 car la métrique sur Σ est euclidienne et le poids dans l'intégrale fonctionnelle s'écrit e^{-S} .

Vertex dans l'intérieur de la surface d'univers. Il existe deux vertex dans l'intérieur de Σ , dont aucun n'a une insertion de $\partial_\theta x$.

^{‡2}Le jacobien du changement de variables (4.1.15) est égale à 1, et donc la mesure d'intégration de l'intégrale de chemin n'est pas modifiée.

$$-\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} T_{IJK} \epsilon^{ab} \zeta^I \partial_a \zeta^J \partial_b \zeta^K, \quad (4.1.25)$$

$$-\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{1}{4} \int_{\Sigma} T_{IJKL} \zeta^I \zeta^J \partial_a \zeta^K \partial^a \zeta^L. \quad (4.1.26)$$

Ces vertex ont les structures tensorielles suivantes

$$T_{IJK} = \frac{i}{3} H_{IJK}, \quad (4.1.27)$$

$$T_{IJKL} = \frac{1}{12} (H_{IKM} H_{JL}^M + H_{JKM} H_{IL}^M) \quad (4.1.28)$$

$$= -\frac{1}{3} (R_{IJKM} + R_{JKIL}). \quad (4.1.29)$$

Notons que T_{IJK} est totalement antisymétrique, tandis que T_{IJKL} est explicitement symétrique dans les indices I, J et K, J .

Vertex sur le bord de la surface d'univers. Il existe deux types de vertex sur le bord, selon qu'ils aient ou non une insertion de $\partial_{\theta}x$. Nous listons d'abord ceux sans $\partial_{\theta}x$.

$$-\frac{1}{2\pi\alpha'} \oint_{\partial\Sigma} M_{IJ} \zeta^I \partial_{\theta} \zeta^J, \quad (4.1.30)$$

$$-\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{1}{2!} \oint_{\partial\Sigma} M_{IJK} \zeta^I \zeta^J \partial_{\theta} \zeta^K, \quad (4.1.31)$$

$$-\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{1}{3!} \oint_{\partial\Sigma} M_{IJKL} \zeta^I \zeta^J \zeta^K \partial_{\theta} \zeta^L, \quad (4.1.32)$$

qui ont les structures tensorielles

$$M_{IJ} = \frac{i}{2} \mathcal{F}_{AB}, \quad (4.1.33)$$

$$M_{IJK} = \frac{i}{3} (\nabla_I \mathcal{F}_{JK} + \nabla_J \mathcal{F}_{IK}), \quad (4.1.34)$$

$$M_{IJKL} = \frac{i}{8} \left(\nabla_I \nabla_J \mathcal{F}_{KL} - \frac{1}{12} \mathcal{F}_{IM} H_{JN}^M H_{KL}^N + \text{sym}_{IJK} \right). \quad (4.1.35)$$

Tous les vertex $M_{I_1 \dots I_n}$ sont explicitement symétriques dans les indices I_1, \dots, I_{n-1} . Les

vertex sur le bord ayant une insertion de $\partial_\theta x$ sont

$$-\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{1}{2!} \oint_{\partial\Sigma} N_{IJ} \zeta^I \zeta^J, \quad (4.1.36)$$

$$-\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{1}{3!} \oint_{\partial\Sigma} N_{IJK} \zeta^I \zeta^J \zeta^K, \quad (4.1.37)$$

$$-\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{1}{4!} \oint_{\partial\Sigma} N_{IJKL} \zeta^I \zeta^J \zeta^K \zeta^L. \quad (4.1.38)$$

Les tenseurs $N_{I_1 \dots I_n}$ sont explicitement symétriques dans tous les indices I_1, \dots, I_n . Ils sont donnés par

$$\begin{aligned} N_{IJ} &= \frac{i}{2} (\nabla_I \mathcal{F}_{JK} + \nabla_J \mathcal{F}_{IK} + \mathcal{F}_{IM} H_J^{MN} \mathcal{F}_{KN} + \mathcal{F}_{JM} H_I^{MN} \mathcal{F}_{KN}) \partial_\theta x^K, \\ N_{IJK} &= \frac{i}{3!} \left(\nabla_I \nabla_J \mathcal{F}_{KL} - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{IM} H_{JN}^M H_{KL}^N + \nabla_I \mathcal{F}_{JM} H_{KN}^M \mathcal{F}_L^N + \text{sym}_{IJK} \right) \partial_\theta x^L, \\ N_{IJKL} &= \frac{i}{4!} \left(\nabla_I \nabla_J \nabla_K \mathcal{F}_{LM} - \frac{3}{4} \nabla_I \mathcal{F}_{JA} H_{KB}^A H_{LM}^B + \frac{3}{2} \nabla_I \nabla_J \mathcal{F}_{KA} H_{LB}^A \mathcal{F}_M^B \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} \mathcal{F}_{IA} H_{JB}^A H_{KC}^B H_{LD}^C \mathcal{F}_M^D + \text{sym}_{IJKL} \right) \partial_\theta x^M. \end{aligned} \quad (4.1.39)$$

Avec les vertex T , M et N , et le propagateur libre déterminé plus haut, nous pouvons maintenant former tous les diagrammes qui contribuent à la fonction bêta de F à deux boucles, dans des espaces parallélisables.

4.1.3 Les diagrammes

Avant de présenter les diagrammes à deux boucles qui contribuent pour la fonction bêta, quelques mots s'imposent sur les possibles contributions. Il s'agit de calculer tous les contre-termes à deux boucles, c'est-à-dire les diagrammes du vide (sans insertions extérieures) et irréductibles à une particule (i.e. ceux qui ne se factorisent pas en diagrammes à une boucle, dont les divergences sont comprises dans le calcul de la fonction bêta à une boucle). De plus, nous n'aurons pas besoin de considérer les diagrammes à deux boucles construits avec des contre-termes à une boucle, puisque ils seront des puissances supérieures de $\ln \Gamma$ (4.0.2).

Deuxièmement, nous verrons dans le paragraphe suivant que même les diagrammes sans aucun facteur explicite de ∂x peuvent cacher des divergences susceptibles de contribuer à la fonction bêta. Nous appellerons ces diagrammes de *type- δ'* , tandis que les diagrammes avec une insertion de ∂x seront appelés de *type- δ* (cette notation deviendra claire après l'équation (4.1.41)).

À une boucle nous trouvons un diagramme de type- δ et un de type- δ'

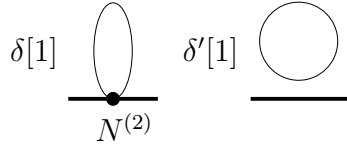
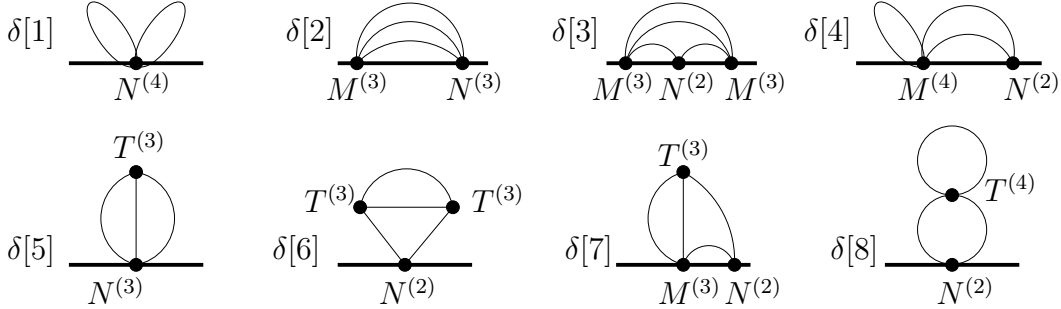


FIG. 4.1 – Diagrammes à une boucle.

FIG. 4.2 – Diagrammes à deux boucles de type δ .

La notation est prise du cas où la surface d'univers est le demi-plan supérieur ; en particulier, le bord $\partial\Sigma$ est la ligne horizontale foncée.

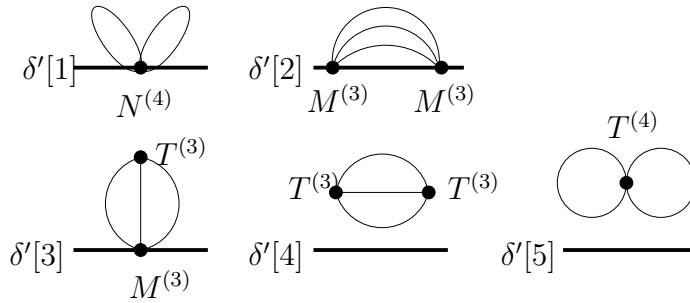
Diagrammes de type- δ à deux boucles. Les diagrammes de type- δ ont une insertion explicite de $\partial_\theta x$ qui dans le cas des espaces parallélisables vient toujours d'un vertex N sur le bord. Tous les diagrammes de ce type à deux boucles sont présentés dans la figure 4.2. Nous verrons que seuls les diagrammes 3, 4, 6, 7 et 8 contribuent à la fonction bêta.

Diagrammes de type- δ' à deux boucles. Tous les diagrammes de type- δ' sont dessinés dans la figure 4.3. Ces diagrammes de n'ont pas d'insertion de ∂x . Nous verrons qu'ils peuvent néanmoins avoir des divergences ultralocales qui contribuent à la fonction bêta. C'est le cas des diagrammes 1, 2 et 3.

Pour voir comment régulariser et calculer ces diagrammes, nous devons maintenant analyser plus en détail la structure de leurs divergences.

4.1.4 La méthode de calcul

Nous commençons par les diagrammes de type- δ qui sont plus simples conceptuellement. Nous décrivons la méthode de calcul et, après avoir obtenu le propagateur effectif exact en F , nous illustrons la méthode par le calcul de deux diagrammes de type- δ .


 FIG. 4.3 – Diagrammes à deux boucles de type δ' .

Comme le nom l'indique, la méthode de développement autour des champs de fond que nous avons utilisé sépare les fluctuations quantiques ζ^A des champs de fond, qui eux dépendent toujours de la position dans l'espace-cible. Ceci implique que la forme générale d'un diagramme est schématiquement (rappelons que les diagrammes de type- δ ont exactement un vertex de type N)

$$\int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{d\theta_1}{2\pi} \cdots \frac{d\theta_n}{2\pi} N[x(\theta)] O_1[x(\theta_1)] \cdots O_n[x(\theta_n)] \times C(\theta, \theta_1 \cdots \theta_n) \quad (4.1.40)$$

où les O_i sont des vertex quelconques (de type M ou T) dans des positions θ_i sur le bord (pour simplifier les notations nous omettons les coordonnées radiales ainsi que les indices d'espace-cible) et le vertex de bord de type N est dans la position θ . Le facteur crucial est le $C(\theta, \theta_1 \cdots \theta_n)$, qui est le corrélateur des champs $\zeta^A(\theta, r)$ du diagramme en question. Or, par des arguments standard de théorie des champs (voir par exemple [AT88]), les contretermes à des couplages du modèle sigma sont des fonctions locales dans l'espace-cible. En particulier, la divergence dans le corrélateur C est donc une fonction locale dans les coordonnées θ, θ_i et par analyse dimensionnelle doit être de la forme

$$c \ln \epsilon (2\pi)^n \Pi_i \delta(\theta - \theta_i) \quad (4.1.41)$$

où c est un certain tenseur d'espace-temps qui ne dépend pas des coordonnées sur la surface d'univers. La forme de la divergence justifie le nom de diagramme de type- δ . La façon la plus simple de le calculer est de considérer l'intégrale

$$\int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{d\theta_1}{2\pi} \cdots \frac{d\theta_n}{2\pi} C(\theta, \theta_1 \cdots \theta_n) = c \ln \epsilon (2\pi)^n \Pi_i \delta(\theta - \theta_i) + \text{termes réguliers} \quad (4.1.42)$$

Alors, en dépit du fait que les diagrammes sont hautement non-locaux dans l'espace-temps, leur divergence est locale et donnée par

$$c \ln \epsilon \int \frac{d\theta}{2\pi} N O_1 \cdots O_n(\theta)$$

ce qui donne la contribution suivante à la fonction bêta

$$\Delta\beta_m \partial_\theta x^M = cNO_1 \cdots O_n$$

Sur le disque, le calcul de c (4.1.42) est plus facile dans l'espace des impulsions.

Les vertex dans l'espace des impulsions. Analysons un à un les différents types de vertex. Dans le passage à l'espace des impulsions sur le disque, nous devons prendre les couplages (qui ne dépendent que de x^μ) pour des constantes. Un vertex général de type M s'écrit ainsi

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{(n-1)!} M_{I_1 \dots I_n} \oint \frac{d\theta}{2\pi} \zeta^{I_1} \dots \zeta^{I_{n-1}} \partial_\theta \zeta^{I_n}(\theta) = \\ & = \sum_{m_i} \frac{1}{n!} (m_n M_{I_1 \dots I_n} + \text{cyc}_{I_1 \dots I_n}) \zeta_{m_1}^{I_1} \dots \zeta_{m_n}^{I_n} \delta_{\sum_i m_i} \end{aligned} \quad (4.1.43)$$

où $\text{cyc}_{I_1 \dots I_n}$ dénote la somme sous les permutations cycliques des indices. Les vertex M dans l'espace des impulsions sont donc

$$\sum_{m_i} \frac{1}{n!} (m_n M_{I_1 \dots I_n} + \text{cyc}_{I_1 \dots I_n}) \delta_{\sum_i m_i} \quad (4.1.44)$$

En particulier, le vertex à deux points $M^{(2)}$, c'est-à-dire $\mathcal{F}_{AB} \zeta^A \partial_\theta \zeta^B$, prend la forme $i(m_1 - m_2) M_{AB} \delta_{m_1 + m_2}$.

Analoguement, les vertex de type N , n'ayant pas de dérivées, sont donnés par $-N_{I_1 \dots I_n} \delta_{\sum_i m_i}$. Les vertex de type T sont légèrement plus compliqués à cause de la dépendance dans la coordonnée radiale, et leur forme dans l'espace des impulsions peut être trouvé dans [BorCS04].

Le propagateur habillé. Nous sommes maintenant en mesure de calculer le propagateur effectif. Rappelons que le propagateur libre est

$$\Pi^{AB}(z, w)_0 = g^{AB} (\mathcal{B}(z, w) + \mathcal{C}(z, w) + \mathcal{D}(z, w)) \quad (4.1.45)$$

où les fonctions $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ ont été donnés dans (4.1.23). Or, la fonction \mathcal{D} ne dépend que des modules des coordonnées radiales $z\bar{z}$ et $w\bar{w}$, ce qui dans l'espace des impulsions revient à un terme à impulsion zéro. \mathcal{D} ne contribue donc pas aux divergences associées aux grandes impulsions. \mathcal{D} ne contribue donc pas aux divergences associées aux grandes impulsions. D'un autre côté, la fonction \mathcal{C} s'annule quand un des vertex est sur le bord. Cette fonction contribue donc seulement à des propagateurs entre des vertex de type T , soit un propagateur de T vers lui-même. Toutefois, nous

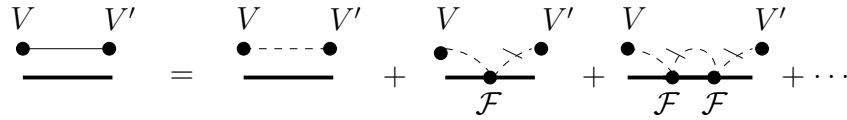


FIG. 4.4 – Le propagateur habillé.

avons vu que les divergences sont locales, et à l'évidence localisées sur le bord puisque nous habillons le propagateur avec des insertions de $M^{(2)}$. Donc, dans le but de calculer la fonction bêta nous considérons le propagateur libre

$$\Pi_0^{AB}(z, w) = \alpha' g^{AB} \mathcal{B}(z, w) \quad (4.1.46)$$

ou, dans l'espace des impulsions

$$\Pi_0^{AB}(xe^{i\alpha}, ye^{i\beta}) = \alpha' g^{AB} \sum_{n \neq 0} \frac{(xy)^{|n|}}{|n|} e^{-in(\alpha-\beta)}. \quad (4.1.47)$$

Maintenant nous voulons calculer la contribution des diagrammes de façon exacte en F . Pour cela, la stratégie est d'«habiller» le propagateur libre avec toutes les insertions possibles du vertex de bord $M^{(2)}$. Nous représentons graphiquement le propagateur libre par une ligne coupée et le propagateur habillé par une ligne continue, voir la figure 4.1.4. Dans cette notation diagrammatique, nous avons croisé les propagateurs où agit la dérivée ∂_θ dans le vertex \mathcal{F} . Dans le terme $(\ell + 1)$, il existe 2^ℓ choix de contractions; toutefois, toute choix de contraction donnant le même résultat, il émerge ce facteur combinatoire qui s'annulera contre le facteur de symétrie associé aux vertex \mathcal{F} .

Par cette procédure, chaque diagramme dans les figures 4.1 à 4.2 donne origine à une suite de diagrammes dont chaque terme, évalué avec le propagateur (4.1.47), est divergent. Pour régulariser ces divergences, nous introduisons un régulateur exponentiel $e^{-\epsilon|n|}$ dans le propagateur libre pour tronquer les grandes impulsions,

$$\Pi_0^{AB}(xe^{i\alpha}, ye^{i\beta}) \rightarrow \alpha' \sum_{n \neq 0} \frac{1}{|n|} (xy)^{|n|} e^{-in(\alpha-\beta)} e^{-\epsilon|n|}. \quad (4.1.48)$$

Pour tout ϵ positif, les diagrammes seront à présent écrits en termes de séries uniformément convergentes. Cette régularisation suffit à calculer la fonction bêta à une boucle, où la coupure ϵ pour les grandes impulsions a remplacé la coupure Γ à courtes distances.

La fonction bêta à une boucle. En guise d'exercice, nous calculons maintenant la fonction bêta du champ \mathcal{F} à une boucle. Ceci permettra d'illustrer certains aspects de la méthode présentée en haut, notamment la localité des divergences et l'habillement du propagateur. Les mêmes résultats ont déjà été obtenus dans [ACNY87] et liés aux équations de mouvement de l'action de Born – Infeld dans la présence d'un champ H faible.

Nous commençons par le diagramme $\delta[1]$, donné par $\frac{i}{4\pi\alpha'} \oint_{\partial\Sigma} N_{IJ} \langle \zeta^I \zeta^J \rangle$. Ceci est illustré diagrammatiquement dans la figure 4.1.4.

$$\frac{\text{Loop with dot}}{N^{(2)}} = \frac{\text{Loop with dot}}{N^{(2)}} + \frac{\text{Loop with dot and one F insertion}}{N^{(2)} \mathcal{F}} + \frac{\text{Loop with dot and two F insertions}}{N^{(2)} \mathcal{F} \mathcal{F}} + \dots$$

FIG. 4.5 – Le calcul exact en F du diagramme $\delta[1]$.

Dû à la localité des divergences et à l'antisymétrie de \mathcal{F} tous les diagrammes avec un même nombre, disons a , d'insertions de \mathcal{F} contribuent également. Ceci compense le facteur combinatoire qui apparaît due aux choix d'ordre pour les insertions de \mathcal{F} . Les diagrammes avec a impair s'annulent par antisymétrie de \mathcal{F} , tandis que pour les diagrammes avec a pair il reste une seule somme

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\epsilon|n|a} \sim -\ln \epsilon, \quad (4.1.49)$$

telle que la divergence en $\ln \epsilon$ ne dépend pas du nombre a d'insertions. Nous pouvons donc sommer toutes les insertions de \mathcal{F} dans le propagateur comme

$$\sum_n \delta^{I_1} \mathcal{F}_{I_1 I_2} \cdots \mathcal{F}_{I_{n-1} I_n} \delta^{I_n J} = \left(\frac{1}{g + \mathcal{F}} g \frac{1}{g - \mathcal{F}} \right)^{IJ} = G^{IJ}. \quad (4.1.50)$$

Nous retrouvons ainsi la métrique de corde ouverte G (1.3.30) et (4.1.20).

Tournons nous maintenant vers le diagramme $\delta'[1]$,

$$\frac{\text{Circle}}{\text{Line}} = \frac{\text{Circle with one F insertion}}{\mathcal{F}} + \frac{\text{Circle with two F insertions}}{\mathcal{F} \mathcal{F}} + \frac{\text{Circle with three F insertions}}{\mathcal{F} \mathcal{F} \mathcal{F}} + \dots$$

FIG. 4.6 – Le calcul exact en F du diagramme $\delta'[1]$.

Il n'est pas difficile de vérifier que chaque terme s'annule par symétrie des vertex. Toutefois, la détermination du propagateur habillé est plus subtile que pour le diagramme de type- δ . Nous reviendrons à ce problème dans la section prochaine, où nous déterminerons une forme générale du propagateur habillé effectif pour un diagramme arbitraire. Pour conclure, le résultat de ce paragraphe est d'avoir retrouvé la fonction bêta à une boucle $\beta_K \partial_\theta x^K = N_{IJ} G^{IJ}$, soit

$$\beta_K = \frac{iG^{IJ}}{2} (\nabla_I \mathcal{F}_{JK} + \nabla_J \mathcal{F}_{IK} + \mathcal{F}_{IM} H_J^{MN} \mathcal{F}_{KN} + \mathcal{F}_{JM} H_I^{MN} \mathcal{F}_{KN}) \quad (4.1.51)$$

L'annulation de β_K est équivalent aux équations de mouvement de Born–Infeld (1.3.29). Toutefois, cette régularisation s'avère trop naïve pour les diagrammes à deux boucles. Dans le prochain paragraphe, nous développerons donc une méthode de régularisation qui sera applicable à tout diagramme, et en effet à tout nombre de boucles.

La procédure de régularisation. Pour voir ce qui échoue avec cette régularisation, considérons un diagramme de type ∞ . Comme avant, en intégrant les insertions de \mathcal{F} le long des deux propagateurs, les insertions deviennent localisées sur un même point sur le bord. Si nous avons a insertions de \mathcal{F} dans la boucle avec impulsion n , et b dans l'autre, nous obtenons des sommes du type

$$\sum_{n,m} \frac{1}{n^2} e^{-\epsilon(|n|a+|m|b)} \sim -\frac{a}{b} \ln \epsilon \quad (4.1.52)$$

car chaque insertion augmente de 1 le coefficient du régularisateur ϵ . Les expressions pour les diagrammes de type θ sont similaires, une fois la conservation de l'impulsion prise en compte. Notons que, contrairement à l'équation (4.1.49), les divergences ici dépendent explicitement des nombres a, b d'insertions de \mathcal{F} . La sommation de tous ces termes serait donc de la forme $\sum_{a,b \geq 1} (\mathcal{F}^a)^{IJ} (\mathcal{F}^b)^{KL} \frac{a}{b}$ qui n'ont pas d'expression fermée en termes des tenseurs de corde ouverte G, Θ . En effet, ces sommes sont des sommes infinies de fonctions ϕ de Lerch, pour lesquelles nous ne connaissons pas d'expression analytique. Cette situation est malheureuse puisqu'il sera pour nous un point central de pouvoir prendre la limite de grand \mathcal{F} .

Toutefois, les calculs à deux boucles sont dépendants de la régularisation. Nous pouvons donc chercher une procédure de régularisation dont le propagateur effectif soit écrit en termes des tenseurs de corde ouverte G, Θ . Il en résulte une nouvelle fonction bêta, et des changements correspondants dans l'espace des solutions des équations du mouvement $\beta^{\mathcal{F}} = 0$. Du point de vue de l'espace-temps, les différentes régularisations

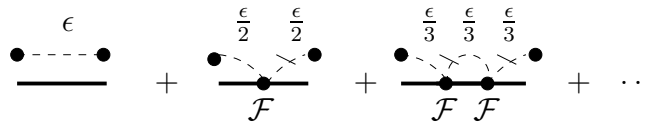


FIG. 4.7 – La procédure de régularisation.

correspondent à une redéfinition des champs [Ts93]. Nous reviendrons à ce point à la fin de cette section.

En regardant l'équation (4.1.52), on voit que le problème vient du fait que, pour $a \neq b$, chaque propagateur a en effet une régularisation différente des impulsions. L'idée pour résoudre ce problème est d'imposer que le régularisateur de chaque propagateur avec n unités d'impulsion reste constante à $e^{-|n|\epsilon}$, indépendamment du nombre d'insertions de \mathcal{F} , comme illustré dans la figure 4.7. Ceci est cohérent avec le fait que tous les vertex sont à impulsion zéro et en particulier que le vertex \mathcal{F} ne change pas l'impulsion dans le propagateur. Clairement, ceci régularise la théorie, même si chaque terme du développement dans la figure 4.7 est traité de façon légèrement différente. En plus, cette procédure est applicable à tout diagramme, indépendamment du nombre de boucles ; en particulier, elle reproduit les résultats des diagrammes à une boucle.

Avec cette régularisation, nous arrivons à une expression analytique pour le propagateur habillé effectif, à toutes les ordres en \mathcal{F} . Les termes avec un nombre pair $2a$ d'insertions de \mathcal{F} donnent origine à la métrique de corde ouverte, comme pour le diagramme $\delta[1]$ (4.1.50).

Prenons maintenant les termes avec un nombre impair $2a + 1$ d'insertions de \mathcal{F} et intégrons les amplitudes correspondantes sur les positions de celles-ci, sauf l'insertion du milieu. En sommant sur a et utilisant la localisation des divergences et l'antisymétrie de \mathcal{F} , nous retrouvons le tenseur antisymétrique de corde ouverte (1.3.33), (4.1.21)

$$\left(\frac{1}{g + \mathcal{F}}\right)^{IM} \mathcal{F}_{MN} \left(\frac{1}{g - \mathcal{F}}\right)^{NJ} \equiv \Theta^{IJ} \quad (4.1.53)$$

Le nombre impair de dérivées assure que cette partie du propagateur est impair dans l'impulsion n , de façon consistante avec l'antisymétrie de Θ . Ainsi, nous retrouvons perturbativement le propagateur habillé (4.1.55).

Il existe une façon plus expédite de voir que le propagateur effectif est donné par (4.1.55). En effet, étant donné que dans l'espace des impulsions nos couplages sont des

tenseurs constants, nous pouvons inclure le vertex $\mathcal{F}_{AB}\zeta^A\partial_\theta\zeta^B$ dans le terme cinétique usuel, menant à un propagateur de la forme

$$\left(\frac{1}{|n|g_{AB} - 2inM_{AB}}\right) = \left(\frac{1}{|n|g_{AB} + n\mathcal{F}_{AB}}\right) \quad (4.1.54)$$

En termes des tenseurs de corde ouverte G, Θ (4.1.20,4.1.21), nous avons finalement

$$\Pi^{AB}(xe^{i\alpha}, ye^{i\beta}) = \sum_{n \neq 0} \left(G^{AB} \frac{(xy)^{|n|}}{|n|} + \Theta^{AB} \frac{(xy)^{|n|}}{n} \right) e^{-in(\alpha-\beta)} e^{-\epsilon|n|} \quad (4.1.55)$$

Il convient de souligner que ce propagateur n'est valable que pour calculer les divergences des diagrammes (car il fait usage du fait que pour ce but on peut considérer les couplages constants) et en ce sens c'est un propagateur effectif. La méthode de développement utilisée permet donc d'obtenir un résultat exact en F , et le prix à payer est l'introduction d'autres vertex de bord, avec des dérivées de F . Le résultat est donc valable pour un champ F qui n'oscille pas excessivement.

Ce que nous avons dit jusqu'à ce point est suffisant pour traiter les diagrammes de type- δ . Nous examinons maintenant le cas des diagrammes de type- δ' .

Les diagrammes de type- δ' . Ces diagrammes ne contiennent pas de facteur N et donc pas de insertion explicite de $\partial_\theta x$. De forme schématique, ils s'écrivent

$$\int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{d\theta_1}{2\pi} \cdots \frac{d\theta_n}{2\pi} \mathcal{O}[x(\theta)] \mathcal{O}_1[x(\theta_1)] \cdots \mathcal{O}_n[x(\theta_n)] \times C(\theta, \theta_1 \cdots \theta_n) \quad (4.1.56)$$

où nous avons choisi l'opérateur \mathcal{O} arbitrairement parmi les insertions de vertex, et comme avant nous supprimons la dépendance radiale et les structures tensorielles des vertex. Nous voulons comprendre la structure des divergences ultra-violettes du corrélateur $C(\theta, \theta_1 \cdots \theta_n)$. La divergence de C en $\ln \epsilon$ est similaire au cas (4.1.41) des diagrammes de type- δ

$$\ln \epsilon \sum_i c_i D_i \quad (4.1.57)$$

avec $i = 1, \dots, n$, et les c_i étant toujours des tenseurs constants; mais par analyse dimensionnelle les D_i sont de la forme

$$D_i(\theta, \theta_i) = (2\pi)^n \delta'(\theta - \theta_i) \prod_{j \neq i} \delta(\theta - \theta_j) \quad (4.1.58)$$

La présence du facteur δ' justifie le nom de ces diagrammes. La contribution à la fonction bêta est donc

$$\Delta\beta_M \partial_\theta x^M = \sum_i c_i O O_1 \cdots \partial_\theta O_i \cdots O_n \quad (4.1.59)$$

Notons que la fonction bêta ne dépend pas du choix arbitraire de O , car différents choix changent le résultat (4.1.59) par une forme exacte de rang 1 qui peut être absorbé par un choix de jauge de \mathcal{F} . Essayons plutôt de mieux comprendre les facteurs $\partial_\theta O_i$. Supposons par simplicité que O_i est donné par un tenseur S_M^N ; d'après (4.1.10) et (4.1.11) nous avons alors

$$\begin{aligned} \partial_\theta S_M^N &= e_\mu^M e_N^\nu \partial_\theta S_\nu^\mu \\ &= e_\mu^M e_N^\nu \left(D_\theta S_\nu^\mu + \frac{1}{2} H_{\alpha\sigma}^\mu \mathcal{F}_\lambda^\sigma \partial_\theta x^\lambda S_\nu^\alpha - \frac{1}{2} H_{\nu\sigma}^\alpha \mathcal{F}_\lambda^\sigma \partial_\theta x^\lambda S_\alpha^\nu \right) \end{aligned} \quad (4.1.60)$$

Étant donné que $D_\theta \equiv d_\theta x^\lambda \nabla_\lambda$, nous arrivons à l'expression finale qui est explicitement covariante dans l'espace-temps

$$\partial_\theta S_M^N = \left(\nabla_L S_N^M + \frac{1}{2} H_{PA}^M \mathcal{F}_L^A S_N^P - \frac{1}{2} H_{NA}^P \mathcal{F}_L^A S_P^M \right) \partial_\theta x^\lambda \quad (4.1.61)$$

Ce résultat peut être facilement étendu à des tenseurs O_i arbitraires. Notons que dû au facteur δ' dans la divergence de C nous retrouvons le facteur $\partial_\theta x^\lambda$ dans la divergence du diagramme.

Il nous reste de trouver les tenseurs c_i . Ceux-ci peuvent se calculer par l'expression

$$\int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{d\theta_1}{2\pi} \cdots \frac{d\theta_n}{2\pi} C(\theta, \theta_1 \cdots \theta_n) \sin(\theta_i - \theta) = c_i \ln \epsilon + \text{termes réguliers} \quad (4.1.62)$$

L'insertion du facteur $\sin(\theta_i - \theta)$ implique que les diagrammes peuvent être calculés comme avant aux modifications suivantes près. Les vertex O_j pour $j \neq i$ sont toujours à impulsion zéro, mais le vertex correspondant à O_i a une impulsion totale égale à 1, et sa structure tensorielle M ou T est remplacée par ∂M ou ∂T , respectivement. Par contre, le vertex correspondant à O a une impulsion totale égale à -1 . Finalement, la procédure de régularisation adoptée en haut est encore valable pour ces diagrammes.

Nous avons maintenant tous les outils nécessaires pour calculer la fonction $\beta^{\mathcal{F}}$ à deux boucles.

4.2 La fonction bêta à deux boucles

Nous arrivons maintenant au coeur de ce chapitre, après avoir présenté les principaux outils dans cette longue introduction. Dans les paragraphes suivants nous illus-

trons les procédures exposés par le calcul de deux diagrammes de type- δ et deux de type- δ' à deux boucles, suivis du résultat final pour $\beta^{\mathcal{F}}$. L'étude détaillé de tous les diagrammes (4.2) et (4.3) est inclus dans l'appendice C de la référence [BorCS04].

4.2.1 Le calcul des diagrammes

Des diagrammes de type- δ . Commençons par un diagramme de type ∞ , disons le diagramme $\delta[4]$. Supposons que les vertex sont aux points $e^{i\theta}$ et $e^{i\theta'}$ sur le bord. Le diagramme s'écrit

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \oint \oint d\theta d\theta' M_{IJKL} N_{RS} \langle \zeta^I \zeta^J \zeta^K \partial_\phi \zeta^L(\theta) \zeta^R \zeta^S(\theta') \rangle \quad (4.2.63)$$

Graphiquement, les contractions possibles sont (le trace dénote une dérivé agissant sur un propagateur)

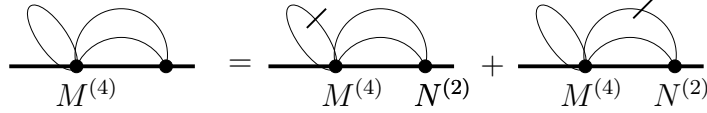


FIG. 4.8 – Le calcul du diagramme $\delta[4]$.

Il est utile de définir le *propagateur partiel* Π_n^{ab} comme la partie du propagateur Π^{ab} (4.1.55) avec impulsion fixée n

$$\Pi_n^{IJ} = \left(\frac{1}{|n|} G^{IJ} + \frac{1}{n} \Theta^{IJ} \right) e^{-|n|\epsilon} \quad (4.2.64)$$

Avec toutes ces considérations, la première contraction en (4.8) s'écrit

$$\begin{aligned} \sum_{m,n} m \Pi_n^{IR} \Pi_{-n}^{JS} \Pi_m^{KL} &= 4 [G^{IR} G^{JS} - \Theta^{IR} \Theta^{JS}] \Theta^{KL} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\epsilon(2n+m)} \\ &\sim 8 [G^{IR} G^{JS} - \Theta^{IR} \Theta^{JS}] \Theta^{KL} \ln \epsilon \end{aligned}$$

où le prime sur la somme sert à nous rappeler d'omettre les termes singuliers. Dans la deuxième contraction dans (4.8), les indices symétrisés RS sont contractés avec les indices antisymétrisés K, L – cette contraction vaut donc zéro.

En incluant tous les facteurs numériques, la contribution $\Delta\beta_M^{\mathcal{F}}[4]$ du diagramme $\delta[4]$ à la fonction bêta est donnée par

$$\Delta\beta_M^{\mathcal{F}}[4] \partial_\theta x^M = \frac{8(\alpha')^3}{(2\pi)^3} N_{RS} M_{IJKL} \Theta^{IJ} (GG + \Theta\Theta)^{LR,KS}. \quad (4.2.65)$$

Considérons maintenant la contribution d'un diagramme de type θ , par exemple le diagramme $\delta[3]$,

$$\delta[3] = \oint d\phi N_{I'J'K'} \int d\theta N_{IJK} \oint d\phi' N_{RS} \langle \zeta^I \zeta^J \partial_\theta \zeta^K \cdot \zeta^{I'} \zeta^{J'} \partial_\phi \zeta^{K'} \cdot \zeta^R \partial_{\phi'} \lambda^S \rangle.$$

Pour écrire les contractions d'une forme plus compacte, nous introduisons la notation suivante

$$\widehat{\Pi}_n^{IJ} = \left(\frac{1}{|n|g_{IJ} + n\mathcal{F}_{IJ} - N_{IJ}} \right) \sim \Pi_n^{IJ} + \Pi_n^{IK} N_{KL} \Pi_n^{LJ} + \dots \quad (4.2.66)$$

Le corrélateur s'écrit

$$\frac{1}{4} M_{IJK} M_{I'J'K'} \sum_{m,n,p} \left(p^2 \widehat{\Pi}_n^{II'} \widehat{\Pi}_m^{JJ'} \widehat{\Pi}_p^{KK'} + 2mp \widehat{\Pi}_n^{II'} \widehat{\Pi}_m^{JK'} \widehat{\Pi}_p^{KJ'} \right) \delta_{m+n+p}. \quad (4.2.67)$$

La conservation d'impulsion est imposé par les fonctions δ : m, n, p sont les impulsions des trois propagateurs qui sortent du vertex M_{IJK} , pour un total de $m+n+p$. De cette expression nous gardons seulement les termes qui ont un seul facteur de $\partial_\theta x^\mu$. Ceci veut dire que nous développons cette expression en remplaçant tour à tour exactement un $\widehat{\Pi}_n$ par un $\Pi_n N \Pi_n$ dans toutes les positions possibles, soit explicitement

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} M_{ABC} M_{RST} \sum_{m,n,p} \left(p^2 (\Pi N \Pi)_n^{AR} \Pi_m^{BS} \Pi_p^{CT} + mp (\Pi N \Pi)_n^{AR} \Pi_m^{BT} \Pi_p^{CS} \right) \delta_{m+n+p} \\ & -\frac{1}{4} M_{ABC} M_{RST} \sum_{m,n,p} p^2 \Pi_n^{AR} \Pi_m^{BS} (\Pi N \Pi)_p^{CT} \delta_{m+n+p} \\ & -\frac{1}{2} M_{ABC} M_{RST} \sum_{m,n,p} mp \left(\Pi_n^{AR} (\Pi N \Pi)_m^{BT} \Pi_p^{CS} + \Pi_n^{AR} \Pi_m^{BT} (\Pi N \Pi)_p^{CS} \right) \delta_{m+n+p}. \end{aligned} \quad (4.2.68)$$

Esquissons maintenant la méthode de calcul pour ce type de diagrammes. Commençons par la première ligne : en développant les propagateurs Π_n à impulsion fixée (4.2.64) en termes des tenseurs G, Θ , on trouve les structures tensorielles présentées dans les tables plus bas. Ces structures sont associées à des sommes de la forme

$$S \sim \sum \frac{p}{n^2 m} \delta_{m+n+p}, \quad R \sim \sum \frac{1}{n^2} \delta_{m+n+p},$$

respectivement pour le premier et le deuxième termes. Nous divisons le domaine de sommation en des sous-domaines I , où n, m sont positifs ; II , où n, p sont positifs, et III où m, p sont positifs. Les sommes partielles sont alors

$$\begin{aligned} S_I & \sim -\ln \epsilon, & S_{II} & \sim -\ln \epsilon, & S_{III} & \sim \ln \epsilon, \\ R_I & \sim \ln \epsilon, & R_{II} & \sim \ln \epsilon, & R_{III} & \sim -\ln \epsilon. \end{aligned}$$

dans les sommes de l'expression (4.2.68). Écrivant l'expression (4.2.68) en termes de ces sommes élémentaires, qui peuvent apparaître avec un facteur ± 1 , on trouve les coefficients suivants pour les diverses structures tensorielles : pour le premier terme

AR,BS,CT	I	II	III	
$(GNG)GG$	-	-	+	$3 \ln \epsilon$
$(\Theta N\Theta)\Theta\Theta$	+	+	+	$-\ln \epsilon$
$(GNG)\Theta\Theta$	+	+	+	$-\ln \epsilon$
$(\Theta N\Theta)GG$	-	-	+	$3 \ln \epsilon$
$(GN\Theta)G\Theta$	+	-	-	$-\ln \epsilon$
$(\Theta NG)\Theta G$	-	+	-	$-\ln \epsilon$
$(GN\Theta)\Theta G$	-	+	-	$-\ln \epsilon$
$(\Theta NG)G\Theta$	+	-	-	$-\ln \epsilon$

et pour le deuxième terme

AR,BT,CS	I	II	III	
$(GNG)GG$	+	+	+	$\ln \epsilon$
$(\Theta N\Theta)\Theta\Theta$	+	+	+	$\ln \epsilon$
$(GNG)\Theta\Theta$	+	+	+	$\ln \epsilon$
$(\Theta N\Theta)GG$	+	+	+	$\ln \epsilon$
$(GN\Theta)G\Theta$	+	+	-	$3 \ln \epsilon$
$(\Theta NG)\Theta G$	+	+	-	$3 \ln \epsilon$
$(GN\Theta)\Theta G$	+	+	-	$3 \ln \epsilon$
$(\Theta NG)G\Theta$	+	+	-	$3 \ln \epsilon$

Passons maintenant aux deuxième et troisième lignes du diagramme (4.2.67). Les sommes qui y apparaissent sont de la forme

$$\sum_{n,m} \frac{e^{-\epsilon(|n|+|m|)}}{nm} \sim \ln^2 \epsilon \quad (4.2.69)$$

et ne contribuent donc pas pour la fonction bêta à deux boucles. La contribution du diagramme $\delta[3]$ pour la fonction bêta est ainsi donnée par l'expression assez longue

$$\begin{aligned} \Delta\beta_M^{\mathcal{F}}[3] \partial_\theta x^M &= -M_{ABC} (3M_{RST} + M_{RTS}) [(GNG + \Theta N\Theta)GG]^{AR,BS,CT} \\ &+ M_{ABC} (M_{RST} - M_{RTS}) [(GNG + \Theta N\Theta)\Theta\Theta]^{AR,BS,CT} \\ &+ M_{ABC} (M_{RST} - 3M_{RTS}) [(GN\Theta + \Theta NG)(G\Theta + \Theta G)]^{AR,BS,CT} . \end{aligned}$$

Un diagramme de type- δ' . Nous passons maintenant aux diagrammes de type- δ' , voir figure 4.3. Considérons comme exemple le diagramme $\delta'[2]$. Nous obtenons

$$\frac{1}{4W} i (M_{ABCD}(-m) + M_{BCDA}(n-W) + M_{CDAB}(-n) + M_{DABC}m) \\ i(2n-W) dM_{RS} \Pi_{n-W}^{AR} \Pi_n^{SB} \Pi_m^{CD} + (W \leftrightarrow -W)$$

où l'on prend $W = 1$. Ceci donne origine à deux types de termes, l'un qui dépend explicitement de ϵ

$$\epsilon \frac{|n|}{4} (m(M_{ABCD} - M_{DABC}) + n(M_{CDAB} - M_{BCDA})) (\Pi dM \Pi)_n^{AB} \Pi_m^{CD},$$

et l'autre qui n'en dépend pas

$$\frac{1}{4} (m(M_{ABCD} - M_{DABC}) + n(M_{BCDA} + M_{CDAB})) (\Pi dM \Pi)_n^{AB} \Pi_m^{CD}.$$

Une analyse détaillé de ces expressions révèle que la contribution du diagramme $\delta'[1]$ à la fonction bêta est

$$\Delta \beta_M^{\mathcal{F}} [1'] \partial_\theta x^M = (M_{ABCD} - M_{BCDA}) (G dN \Theta + \Theta dNG)^{AD} G^{BC}. \quad (4.2.70)$$

4.2.2 La fonction $\beta_\mu^{\mathcal{F}}$ à deux boucles – termes de courbure

Ayant exposé les méthodes de calcul des divergences des diagrammes de type δ et de type δ' , nous exposons ici les résultats. Les calculs peuvent être consultés dans la référence [BorCS04]. Les diagrammes qui ne contribuent pas sont

$$\delta[1] = \delta[2] = \delta[5] = 0, \quad \text{et} \quad \delta'[3] = \delta'[4] = 0$$

Parmi les diagrammes qui contribuent à la fonction bêta, nous retrouvons les diagrammes déjà trouvés dans [AT88] dans le cas plat (où $H = 0$) et à l'ordre F^2 – c'est-à-dire $\delta[3]$, $\delta[4]$ et $\delta'[3]$; et nous avons aussi de nouveaux diagrammes qui émergent soit à une ordre en F plus élevée ($\delta'[1]$), soit qui dépendent de la courbure de l'espace, comme $\delta[6]$, $\delta[7]$, $\delta[8]$ et $\delta'[2]$. Ces derniers dépendent de puissances plus élevés de la

trois-forme H . Explicitement, la contribution des diagrammes de type δ est

$$\begin{aligned}
\delta [3] &= -M_{ABC} (3M_{RST} + M_{RTS}) [(GNG + \Theta N\Theta) GG]^{AR,BS,CT} \\
&\quad + M_{ABC} (M_{RST} - M_{RTS}) [(GNG + \Theta N\Theta) \Theta\Theta]^{AR,BS,CT} \\
&\quad + M_{ABC} (M_{RST} - 3M_{RTS}) [(GN\Theta + \Theta NG) (G\Theta + \Theta G)]^{AR,BS,CT} \\
\delta [4] &= 2i M_{ABCD} (GNG + \Theta N\Theta)^{AB} \Theta^{CD} \\
\delta [6] &= -T_{ABC} T_{A'B'C'} [(GNG + \Theta N\Theta) (3GG + \Theta\Theta)]^{AA',BB',CC'} \\
&\quad + 2T_{ABC} T_{A'B'C'} [(GN\Theta + \Theta NG) (G\Theta + \Theta G)]^{AA',BB',CC'} \\
\delta [7] &= 4T_{ABC} M_{A'B'C'} [2(\Theta N\Theta + GNG) \Theta\Theta - (GN\Theta + \Theta NG) (G\Theta + \Theta G)]^{AA',BB',CC'} \\
\delta [8] &= T_{ABCD} (GNG + \Theta N\Theta)^{AB} G^{CD}
\end{aligned} \tag{4.2.71}$$

tandis que la contribution des diagrammes de type δ' est

$$\begin{aligned}
\delta' [1] &= (M_{ABCD} - M_{BCDA}) (GdM\Theta + \Theta dMG)^{AD} G^{BC} \\
\delta' [2] &= \frac{1}{6} M_{A_1 A_2 A_3} dM_{B_1 B_2 B_3} [-2\Theta\Theta\Theta + 3\Theta GG + 3G\Theta G - 4GG\Theta]^{A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3} + \\
&\quad + \frac{1}{3} M_{A_1 A_2 A_3} dM_{B_2 B_3 B_1} [\Theta\Theta\Theta + 2\Theta GG - 5G\Theta G + 2GG\Theta]^{A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3} \\
\delta' [3] &= 6i M_{ABC} T_{A'B'C'} \\
&\quad [(GdM\Theta + \Theta dMG) \Theta G - (GdMG + \Theta dM\Theta) \Theta\Theta]^{AA',BB',CC'}
\end{aligned} \tag{4.2.72}$$

Le résultat de cette section est que dans un espace parallélisable (tel que les équations de mouvement pour les champs de corde fermée fonctions bêta pour les couplages de corde fermée sont nulles à deux boucles), la fonction bêta pour le champ \mathcal{F} de corde ouverte est donnée par

$$\beta_{(2)}^{\mathcal{F}} = \sum_i \delta[i] + \sum_j \delta'[j] \tag{4.2.73}$$

Nous rappelons que ce résultat est exact en F et est valable pour le schéma particulier de régularisation que nous avons adopté. Il est connu que un changement de schéma de régularisation équivaut à une redéfinition des champs d'espace-temps de la théorie des cordes [Ts93]. Ce qui est invariant sous ces redéfinitions sont les coefficients de Weyl $\bar{\beta}$ (1.2.18), dont l'annulation n'est pas nécessairement équivalente à $\beta = 0$ [Ts87]. En tout cas, nous avons souligné que notre intérêt est dans les solutions avec symétrie conforme (avec brisure douce de l'invariance de Weyl), et pour ce cas les fonctions bêta sont l'objet pertinent [Pol88]. En particulier elles permettent de contraindre la structure des corrections à l'action Born-Infeld non-abelienne, comme nous montrons dans la prochaine section.

4.3 Champs antisymétriques et géométrie non-commutative

4.3.1 Action de Born-Infeld non-abelienne

L'idée que relie les équations de mouvement du champ F , exactes en F , aux équations de mouvement des D0-branes dans un espace non-commutatif est très simple. Rappelons du chapitre 1 que dans la limite de F très large^{‡3}, les conditions au bord (1.2.25) deviennent des conditions de Dirichlet $\partial_\theta X^\mu = 0$ dans toutes les directions X^μ et décrivent donc des D0-branes. D'autre part, les équations de mouvement de F sont écrites en termes des champs de corde ouverte G, Θ, \mathcal{F} ainsi que les champs de corde fermée g, H . Dans cette limite, nous avons par exemple pour les tenseurs de corde ouverte

$$\begin{aligned} \lim_{F \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{G} \right)^{\mu\nu} &= -\frac{1}{(2\pi\alpha')^2} \left(\frac{1}{F} g \frac{1}{F} \right)^{\mu\nu} + \dots = -\frac{1}{(2\pi\alpha')^2} \theta^{\mu\lambda} \theta^{\lambda\nu} + \dots, \\ \lim_{F \rightarrow \infty} \Theta^{\mu\nu} &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \left(\frac{1}{F} \right)^{\mu\nu} + \dots = \frac{1}{2\pi\alpha'} \theta^{\mu\nu} + \dots. \end{aligned} \quad (4.3.74)$$

où nous avons écrit $\theta^{\mu\nu} = \left(\frac{1}{F} \right)^{\mu\nu}$. Dans le contexte de l'application de Seiberg et Witten aux cordes ouvertes dans l'espace plat, où F est constant, c'est ce θ qui définit le produit de Moyal (1.3.32) dans l'espace non-commutatif. Même quand F n'est plus constant, on peut montrer que θ définit toujours une forme sympléctique. Le produit non-commutatif associé est alors le produit de Kontsevich [Kon97], dont les premiers termes incluent déjà des corrections dans des dérivées de θ au produit de Moyal

$$\begin{aligned} f \star g &= fg + \frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_\mu f \partial_\nu g - \frac{1}{8} \theta^{\mu\rho} \theta^{\nu\lambda} \partial_\mu \partial_\nu f \partial_\rho \partial_\sigma g - \\ &\quad \frac{1}{12} \theta^{\mu\lambda} \partial_\lambda \theta^{\nu\sigma} (\partial_\mu \partial_\nu f \partial_\sigma g - \partial_\nu f \partial_\mu \partial_\sigma g) + \mathcal{O}(\theta^3) \end{aligned} \quad (4.3.75)$$

En particulier, les coordonnées vérifient les relations de commutation $[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$. Moyenant une expansion perturbative du type de (4.3.74) en termes de θ , les équations du mouvement de F peuvent donc être réécrites perturbativement en termes de polynômes dans les positions x^μ des D0-branes et le champ H . La difficulté technique qui se pose de ce côté est de bien établir cette expansion perturbative.

Inversement, ces équations de mouvement pour les D0-branes doivent découler d'une généralisation de l'action de Born-Infeld non-abelienne, et présentent donc un moyen

^{‡3}La définition précise de large dans l'espace des matrices n'est pas très pertinente ici, nous pouvons prendre comme mesure par exemple le déterminant.

d'étudier cette généralisation. L'action de Born-Infeld non-abélienne est donnée par (voir par exemple [Cor00])

$$S = -\frac{1}{4(\alpha')^2} \text{Tr} ([x^\mu, x^\nu][x^\mu, x^\nu]) \quad (4.3.76)$$

où la multiplication est donnée par le produit de Moyal. Les équations de mouvement correspondantes ont été mentionnées (1.3.34) dans le chapitre 1

$$(\alpha')^{-2} [x^\mu, [x^\mu, x^\nu]] = 0 \quad (4.3.77)$$

Nous partons de l'hypothèse que l'action non-abelienne correspondante au cas des cordes ouvertes dans un espace courbe est toujours définie sur un espace plat dont le produit non-commutatif est donné par (4.3.75); et que les équations de mouvement sont données en termes de monômes dans des coordonnées x^μ , leur commutants et possiblement dans le champ H (la métrique plate est implicite).

Pour trouver ces équations, nous pouvons ainsi considérer tous les monômes possibles dans x^μ et H et essayer d'en déterminer les coefficients par comparaison avec la limite de grand F des équations du mouvement de F .

Trois difficultés techniques se posent à ce programme. La première, déjà mentionnée dans la section précédente, est que les équations $\beta^F = 0$ que nous y avons déterminés ne sont pas les équations du mouvement complètes de F . Les coefficients de certains monômes pourraient donc être incorrectes. Une deuxième difficulté est liée au passage entre monômes en x^μ et tenseurs en θ ; en effet, ceci fait usage du produit non-commutatif, que nous utilisons perturbativement en θ . Nous verrons que la précision à garder dans ce produit dépend du nombre de boucles que nous considérons. Troisièmement, le passage entre les tenseurs en θ , soit la limite de grand F des équations du mouvement, et la version complète de ces équations n'est pas sans ambiguïtés.

Malgré ces difficultés, nous jugeons digne d'intérêt de classifier les monômes pertinents en x^μ, H , dans l'attente de résultats définitifs en ce qui concerne les équations du mouvement. Comme nous le verrons, la classification est particulièrement simple et peut déjà donner de l'information sur la structure de la généralisation de l'action de Born-Infeld non-abelienne.

4.3.2 Classification des corrections de courbure

Il faut tout d'abord bien établir l'expansion perturbative des équations du mouvement. Ceci s'écrit

$$\beta = (\alpha')^{-1}\beta^{(1)} + (\alpha')^0\beta^{(2)} + \dots + (\alpha')^{\ell-2}\beta^{(\ell)} + \dots \quad (4.3.78)$$

où ℓ dénote le nombre de boucles. Dans ces notations, α' a dimension de longueur L^2 , tandis que g, B sont sans dimensions et F a dimensions de longueur L^{-2} . En particulier H a dimension L^{-1} et θ a dimension L^2 comme attendu. Une fois que chacune des fonctions $\beta^{(\ell)}$ est exacte en F , on peut maintenant en prendre la limite $\alpha'F$ très large. On obtient

$$\beta^{(\ell)} = \sum_N \frac{\beta_N^{(\ell)}}{(\alpha')^N},$$

où chacun des $\beta_N^{(\ell)}$ ne dépend pas de α' .

Du côté de la théorie non-abelienne, une analyse dimensionnelle nous révèle qu'il existe deux expansions perturbatives : d'une part le monôme générique a la forme

$$\left(\sqrt{\alpha'}\right)^{n-m} x^m H^n \quad (4.3.79)$$

D'autre part, dans la limite géométrique que nous considérons ici, le champ H varie avec la taille de l'espace cible, $H \sim R^{-1}$. Pour voir comment le monôme $x^m H^n$ varie, regardons le cas des modèles de WZW ; alors $R \sim l_s \sqrt{k}$ où l_s est la longueur typique des cordes et l'échelle typique d'une classe de conjugaison (l'univers branaire des branes symétriques) varie comme $x \sim N \frac{R}{k} \sim N \frac{l_s}{\sqrt{k}}$ à N fixé. Donc, nous trouvons que dans le cas des modèles de WZW

$$x^m H^n \sim \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^{m+n} \quad (4.3.80)$$

Cette double expansion en α' et en k n'est pas inattendue, car nous avons vu en effet que la limite de petite courbure que nous considérons ici est double, $\alpha' \rightarrow 0$ et $\alpha'k \rightarrow \infty$.

Il faut maintenant comprendre quels monômes $x^n H^m$ peuvent contribuer à quels termes dans l'expansion (4.3.78). Pour commencer nous examinons le cas du terme $[x^\mu, x^\nu][x^\mu, x^\nu]$ dans (4.3.76). Les équations de mouvement correspondantes se réécrivent

$$(\alpha')^{-2}[x^\mu, [x^\mu, x^\nu]] = i(\alpha')^{-2}[x^\mu, \theta^{\mu\nu}] = -(\alpha')^{-2}\theta^{\mu\lambda}\partial_\lambda\theta^{\mu\nu} + \dots$$

Avec la relation $\theta = F^{-1}$, ceci devient

$$(\alpha')^{-2}\theta^{\nu\alpha} \left(\frac{1}{F}\right)^{\rho\mu} \left(\frac{1}{F}\right)^{\mu\sigma} \partial_\rho F_{\sigma\alpha} = 0 \quad (4.3.81)$$

ce qui coïncide avec la limite de grand F de l'équation du mouvement $\beta^{(1)} = 0$ à une boucle avec $H = 0$ (1.3.29), comme on peut le vérifier en utilisant (4.3.74). Par contre, le terme en H des équations $\beta^{(1)} = 0$ (1.3.29), de la forme $\mathcal{F}H\mathcal{F}$, se réécrit comme $\theta^{\gamma\beta}H_\beta^{\gamma\mu}$ ce qui donne le deuxième terme des équations de matrices avec H non nul (1.3.35) menant à l'effet diélectrique. Nous voyons donc que l'équation du mouvement à une boucle correspond aux termes $x^m H^n$ dans l'action non-abelienne avec $m+n=4$. Un simple comptage de puissances nous mène alors à l'hypothèse que les corrections à ℓ boucles commencent avec les monômes $x^m H^n$ avec $m+n=2\ell+2$. Avec cette hypothèse, la contribution des $\beta^{(\ell)}$ à l'action non-abelienne s'organise dans le tableau suivant

	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
H^0	×	×	$\ell=1$	×	$\ell=2$
H^1	×	$\ell=1$	×	$\ell=2$	×
H^2	rien	×	$\ell=2$	×	...
H^3	×	$\ell=2$	×	...	×
H^4	$\ell=2$	×	...	×	...

(4.3.82)

Les β^ℓ contribuent bien sur aux monômes à droite de la diagonale $m+n=2\ell+2$, avec les termes sous-dominants en F . Toutefois ces monômes reçoivent aussi des contributions de boucles supérieures, et les résultats que nous trouverions ainsi ne seraient pas pertinents et ont donc été notés avec un "...". Les β^ℓ peuvent contribuer aussi aux termes à gauche de la diagonale, si dans le passage entre leur limite de grand F et les monômes l'on utilise de termes du produit de Kontsevich (4.3.75) quadratiques ou plus en θ . Toutefois, nous nous attendons à que ces monômes ne soient pas nouveaux, dans le sens où ils seraient absorbés dans la correction, ordre par ordre, du produit de Moyal vers le produit de Kontsevich dans ces expressions à gauche de la diagonale. Finalement, les × dénotent des monômes qui ne peuvent pas apparaître dans l'action. Une analyse plus détaillée de ce tableau peut être trouvée dans [BorCS04].

Il existe une autre difficulté dans la correspondance entre les actions abélienne et non-abelienne, qui réside dans les ambiguïtés même des définitions de chacune de ces actions. Nous avons vu qu'à deux boucles les fonctions bêta dépendent du schéma de

régularisation, ce qui se traduit pour les équations de mouvement dans des possibles redéfinitions des champs. Du côté non-abélien, la redéfinition des champs revient à un changement de coordonnées, i.e. un difféomorphisme $x^\mu \rightarrow x^\mu + \chi^\mu(x)$. On réduit ainsi le nombre de monômes indépendants à considérer. En particulier, on voudrait imposer que l'action non-abelienne soit explicitement invariante par translation. Avec toutes ces contraintes, le nombre de monômes pertinents est réduit à 5, par exemple trois monômes du type $x^6 H^0$, deux monômes du type $x^3 H^3$ et un monôme du type $x^5 H$, dépendant des structures que l'on choisit d'éliminer sous la redéfinition des champs. En tout cas ces cinq coefficients déterminent sans ambiguïté l'action de Born et Infeld non-abelienne à l'ordre de deux boucles, et donc la généralisation de l'effet diélectrique à cette ordre. En effet, l'action dans l'espace plat est connue à deux boucles,

$$S = -\frac{1}{4\alpha'^2} \text{Tr}([x^\mu, x^\nu][x^\mu, x^\nu]) - \frac{1}{6\pi^2\alpha'^3} \text{Tr}([x^\mu, x^\nu][x^\nu, x^\sigma][x^\sigma, x^\mu]) \quad (4.3.83)$$

Ceci fixe les coefficients des termes $x^6 H^0$, un seul étant non nul. Les autres monômes sont explicitement

$$H^2 H_{\mu\nu\rho} \text{Tr}([x^\mu, x^\nu]x^\rho), \quad H_{\mu\nu\lambda} H_{\lambda\alpha\beta} H_{\alpha\beta\rho} \text{Tr}([x^\mu, x^\nu]x^\rho), \quad \frac{1}{(\alpha')^2} H_{\mu\nu\rho} \text{Tr}([x^\mu, x^\nu][x^\rho, x^\sigma]x^\sigma)$$

Pour le cas particulier d'une variété à trois dimensions, comme $SU(2)$, nous avons $H_{\mu\nu\sigma} = H\epsilon_{\mu\nu\sigma}$ et les équations de mouvement sont

$$(1 + \alpha'\kappa_1 H^2)[X^i, [X^i, X^a]] + \frac{i}{2}\alpha'(H + \alpha'\kappa_2 H^3)\epsilon_{aij}[X^i, X^j] - \frac{1}{2\pi\alpha'}[X^i, [[X^i, X^j], [X^j, X^a]]] = 0$$

où les incognites se résument aux deux coefficients κ_1, κ_2 . Néanmoins, cette équation permet d'écrire la correction à l'effet Myers (1.3.35), perturbativement en α'

$$[X^i, X^j] = -\frac{i\alpha'}{2} \left(H + \alpha' H^3 \left(\kappa_1 - \kappa_2 - \frac{1}{8\pi^2} \right) \right) \epsilon^{ijk} X^k \quad (4.3.84)$$

La structure algébrique de la solution est ainsi préservée.

Faisant le chemin inverse à celui présenté au début de cette section, ces termes permettent de déterminer à leur tour la limite de F grand des équations de mouvement pour F . Toutefois, il existe beaucoup d'extensions à F fini de cette limite ; par exemple pour l'équation de mouvement du premier terme

$$\begin{aligned} H^2 H_{\mu\nu\rho} \text{Tr}[x^\mu, x^\nu] &= 2\pi i\alpha' \Theta^{\rho\rho'} \left(H^2 \mathcal{F}_{\rho'\beta} H_{\mu\nu}^\beta \Theta^{\mu\nu} \right) + \dots \\ &= 2\pi i\alpha' \Theta^{\rho\rho'} \left(H^2 \mathcal{F}_{\rho'\beta} H_\nu^{\beta\gamma} \left(\frac{1}{G} \right)^{\nu\alpha} \mathcal{F}^{\alpha\gamma} \right) + \dots \\ &= 2\pi i\alpha' \Theta^{\rho\rho'} \left(H^2 H^{\mu\nu\alpha} \mathcal{F}_{\rho'\mu} \mathcal{F}_{\sigma\nu} \mathcal{F}_{\gamma\alpha} \left(\frac{1}{G} \right)^{\sigma\lambda} \Theta^{\lambda\gamma} \right) + \dots \end{aligned} \quad (4.3.85)$$

Donc, même si tous les coefficients identifiés par cette classification étaient connus, nous n'aurions pas pour autant achevé la détermination des équations du mouvement de F dans toute généralité. Ce problème majeur de la théorie des cordes résiste donc, encore et toujours, à l'invasisseur.

Chapitre 5

Conclusions et perspectives

À la fin de cette thèse, je souhaiterais revenir aux principaux résultats et leur application à certains problèmes en théorie des cordes.

Cordes fermées dans des espaces compacts : Tout le long de la thèse nous nous sommes mis dans le cadre de la formulation perturbative de la théorie des cordes à partir de théories conformes sur la surface d'univers d'une corde test. Nous avons souligné l'importance de trouver l'interprétation géométrique de ces théories conformes, prenant pour exemple les modèles WZW sur les variétés de groupe. Dans le deuxième chapitre nous avons donc exploré quelles géométries sont passibles d'être des espaces-cibles de théories conformes rationnelles de type courants simples. Nous avons ainsi retrouvé les variétés quotient $G/p\Gamma$, où G est un groupe de Lie compact et Γ est un sousgroupe abélien dont l'action p sur G est relié à des paramètres de la théorie conforme, la torsion discrète. Cette même torsion discrète détermine encore le choix de champ de fond B sur $G/p\Gamma$. En plus d'illustrer les liens assez remarquables entre théorie conforme et topologie (puisque de tels espaces sont distinguibles seulement par des invariants topologiques assez évolués), cette classification met à notre disposition un ensemble d'espaces qui pourraient jouer un rôle important dans les compactifications de cordes : les espaces de lentilles généralisés $L_{n,p}$.

Les espaces lentilles canoniques $L_{n,1} = SU(2)/\mathbb{Z}_n$ apparaissent déjà en plusieurs contextes en théorie des cordes, par exemple dans une configuration de trou-noir [GPS93]. Ils apparaissent aussi dans une configuration où n objets 6-dimensionnelles appelés NS5-branes sont mises sur le quotient \mathbb{C}/\mathbb{Z}_n [DG98]. Des calculs préliminaires indiquent que les espaces de lentilles généralisés correspondent à une configuration de

n NS5-branes sur le quotient \mathbb{C}/\mathbb{Z}_n défini par

$$z_1 \rightarrow \omega z_1, \quad z_2 \rightarrow \omega^p z_2. \quad (5.0.1)$$

On peut voir de plusieurs façons qu'une telle configuration brise la supersymétrie de l'espace temps, menant à des tachyons (de corde fermée) d'espace-temps. Toutefois, la théorie sur la surface d'univers a la même supersymétrie que celle correspondant à $L_{n,1}$. On peut perturber cette théorie par l'opérateur pertinent correspondant au tachyon, et en étudier l'évolution sous le groupe de renormalisation. Ceci fournit donc une méthode d'étudier la condensation de tachyons de corde fermée dans des solutions courbes de la théorie des cordes.

Cordes ouvertes dans des espaces compacts : Il est plus facile, pourtant, d'étudier la condensation des tachyons de corde ouverte sur des D-branes. Dans le troisième chapitre, nous avons donc procédé à la classification des D-branes dans les espaces $G/p\Gamma$ et à leur interprétation géométrique. Ceci illustre géométriquement des phénomènes intéressants des états de bord, comme la résolution des états fractionnaires (ou dégénérés), et les états de bord de type B , obtenus par dualité T.

Nous avons aussi étudié la description effective de ces D-branes en termes de l'action de Born-Infeld. L'étude a révélé le mérite de cette description pour des espaces de la forme $G/p\Gamma$, qui est en excellent accord avec les résultats exacts de la théorie conforme. En outre, la version non-abelienne de Born-Infeld permet d'étudier la condensation de D-branes dans un espace non-commutatif (l'effet diélectrique). Pour comprendre ce phénomène dans un espace-temps (commutatif) général, nous avons calculé dans le quatrième chapitre des corrections aux équations de mouvement de Born-Infeld dues à la courbure de l'espace (à deux boucles). Notre méthode permet plus précisément de déterminer les équations bêta à tous les ordres en α' dans un espace-temps arbitraire (pas nécessairement compact). Nous avons aussi classifié les contributions possibles à ces équations du côté de la théorie non-abelienne. Toutefois le lien entre les versions abeliennes et non-abeliennes de l'action effective n'est pas bien contrôlé à deux boucles en théorie de perturbations. Nous espérons résoudre ce lien dans le futur, obtenant ainsi une meilleure compréhension de la condensation des D-branes dans des espaces-cibles courbes.

Références

- [ACNY87] A. Abouelsaood, C. G. Callan, C. R. Nappi et S. A. Yost, *Open Strings in Background Gauge Fields*, Nucl. Phys. **B280** (1987) 599.
- [ARS99] A. Alekseev, A. Recknagel et V. Schomerus, *Noncommutative Worldvolume Geometries : Branes on $SU(2)$ and Fuzzy Spheres*, JHEP **9909** (1999) 023, [hep-th/9908040](#).
- [ARS00] A. Alekseev, A. Recknagel et V. Schomerus, *Brane Dynamics in Background Fluxes and Noncommutative Geometry*, JHEP **0005** (2000) 010, [hep-th/0003187](#).
- [AS00] A. Alekseev et V. Schomerus, *RR Charges of D2-Branes in the WZW Model*, [hep-th/0007096](#).
- [ARS00B] A. Alekseev, A. Recknagel, V. Schomerus, *Brane dynamics in background fluxes and non-commutative geometry*, JHEP **05** (2000), 010.
- [AS99] A. Alekseev et V. Schomerus, *D-branes in the wzw model*, Phys. Rev. **D60** (1999), 061901.
- [Al85] O. Alvarez, *Topological quantization and cohomology*, Commun. Math. Phys. **100** (1985), 279
- [AT88] O. D. Andreev et A. A. Tseytlin, *Two Loop Beta Function in the Open String Sigma Model and Equivalence with String Effective Equations of Motion*, Mod. Phys. Lett. **A3** (1988) 1349.
- [A19] J. Alexander, *Note on two three-dimensional manifolds with the same group*, Trans. Amer. Math. Soc. **20**(1919) 339.
- [AS02] C. Angelantonj et A. Sagnotti, *Open strings*, Phys. Rept. **371** (2002), 1–150.
- [Ba02] C. Bachas, *Relativistic string in a pulse*, Annals Phys. 305 (2003) 286
- [BBG99] C. Bachas, P. Bain, et M. Green, *Curvature terms in d-brane actions and their m-theory origin*, JHEP **05** (1999), 011.
- [BDS00] C. Bachas, M. Douglas, et C. Schweigert, *Flux stabilization of d-branes*, JHEP **05** (2000), 048.
- [BE81] K. Beem, P. E. Ehrlich, *Global Lorentzian geometry*, Marcel Dekker NY, 1981.
- [BorRS01] P. Bordalo, S. Ribault, et C. Schweigert, *Flux stabilization in compact groups*, JHEP **10** (2001), 036.

- [BorW03] P. Bordalo, A. Wurtz, *D-branes in lens spaces*, Phys.Lett.**B568** (2003) 270.
- [Bor03] P. Bordalo, *Discrete Torsion and WZW orbifolds*, Phys.Lett.**B582** (2004) 86.
- [BorCS04] P. Bordalo, L. Cornalba, R. Schiappa, *Quantum Dielectric Branes*, (in preparation)
- [BI34] M. Born, L. Infeld, Proc. R. Soc. 144 (1934) 425.
- [BCZ85] E. Braaten, T. Curtright, et C. Zachos, *Torsion and geometrostatics in nonlinear sigma models*, Nucl. Phys. **B260** (1985), 630.
- [BraVa89] R. Brandenberger, C. Vafa, *Superstrings In The Early Universe*, Nucl.Phys. B316 (1989) 391
- [Bro82] K. Brown, *Cohomology of groups*, Springer, 1982.
- [Busch88] T. H. Buscher, *Path integral derivation of quantum duality in nonlinear sigma models*, Phys. Lett. **B201** (1988), 466
- [CLNY87] C. G. Callan, C. Lovelace, C. R. Nappi et S. A. Yost, *String Loop Corrections to Beta Functions*, Nucl. Phys. **B288** (1987) 525.
- [CMPF85] C. G. Callan, E. J. Martinec, M. J. Perry, D. Friedan, *Strings in background fields*, Nucl. Phys. **B262** (1985), 593.
- [Car89] J. Cardy, *Boundary conditions, fusion rules and the verlinde formula*, Nucl. Phys. **B324** (1989), 581.
- [CF00] A. S. Cattaneo et G. Felder, *A Path Integral Approach to the Kontsevich Quantization Formula*, Comm. Math. Phys. **212** (2000) 591, math.QA/9902090.
- [CDS98] A. Connes, M. R. Douglas et A. Schwarz, *Noncommutative Geometry and Matrix Theory : Compactification on Tori*, JHEP **9802** (1998) 003, hep-th/9711162.
- [CS02] L. Cornalba et R. Schiappa, *Nonassociative star product deformations for d-brane worldvolumes in curved backgrounds*, Commun. Math. Phys. **225** (2002), 33–66.
- [CS99] ———, *Matrix Theory Star Products from the Born–Infeld Action*, Adv. Theor. Math. Phys. **4** (2000) 249, hep-th/9907211.
- [Cor99] L. Cornalba, *Corrections to the Abelian Born–Infeld Action Arising from Noncommutative Geometry*, JHEP **0009** (2000) 017, hep-th/9912293.
- [Cor00] ———, *On the General Structure of the Nonabelian Born–Infeld Action*, Adv. Theor. Math. Phys. **4** (2002) 1259, hep-th/0006018.
- [CCH01] L. Cornalba, M. Costa, C. Herdeiro, *Flux branes and the dielectric effect in string theory*, Nucl. Phys. **B619** (2001) 155.
- [C02] N. Couchoud, *D-branes and orientifolds of SO(3)*, JHEP 0203 (2002) 026.
- [DiF96] Ph. Di Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*, Springer edts. 1996

- [DG98] D. Diaconescu, J. Gomis, *Neveu-Schwartz five-branes at orbifold singularities and holography*, Nucl. Phys. **B548** (1999) 258.
- [DVV92] R. Dijkgraaf, H. Verlinde, et E. Verlinde, *String propagation in a black hole geometry*, Nucl. Phys. **B371** (1992), 269–314.
- [DVVV89] R. Dijkgraaf, C. Vafa, E. Verlinde, H. Verlinde, *The Operator Algebra of Orbifold Models*, Commun.Math.Phys.123 (1989) 485
- [DHVW85] L. Dixon, J. Harvey, C. Vafa, E. Witten, *Strings on Orbifolds*, Nucl.Phys. B261 (1985) 678, et *Strings on Orbifolds (II)*, Nucl.Phys.B274 (1986) 285
- [DO86] H. Dorn et J. Otto, *Open Bosonic Strings in General Background Fields*, Z. Phys. **C32** (1986) 599.
- [Dou97] M. R. Douglas, *D-Branes and Matrix Theory in Curved Space*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **B68** (1998) 381, hep-th/9707228.
- [EGKR02] S. Elitzur, A. Giveon, D. Kutasov, E. Rabinovici, *From big bang to big crunch and beyond*, JHEP 0206 (2002) 017.
- [EGK⁺00] S. Elitzur, A. Giveon, D. Kutasov, E. Rabinovici, et G. Sarkissian, *D-branes in the background of NS fivebranes*, JHEP **08** (2000), 046.
- [FZ85] V. Fateev, A. B. Zamolodchikov, *Parafermionic currents in the two dimensional conformal quantum field theory and selfdual critical points in $Z(N)$ invariant statistical systems*, Sov. Phys. JETP 62 (1985) 215.
- [FFFS00] G. Felder, J. Frohlich, J. Fuchs, et C. Schweigert, *The geometry of wzw branes*, J. Geom. Phys. **34** (2000), 162–190.
- [FOS94] J. Figueroa-O’Farrill et S. Stanciu, *Nonsemisimple sugawara constructions*, Phys. Lett. **B327** (1994), 40–46.
- [Fot01] A. Fotopoulos, *On $(\alpha')^{*2}$ corrections to the d-brane action for non-geodesic world-volume embeddings*, JHEP **09** (2001), 005.
- [FS00] S. Fredenhagen et V. Schomerus, *Branes on Group Manifolds, Gluon Condensates, and Twisted K-Theory*, JHEP **0104** (2001) 007, hep-th/0012164.
- [FHSSW00] J. Fuchs, L. Huiszoon, A. Schellekens, C. Schweigert, J. Walcher, *Boundaries, crosscaps and simple currents*, Phys. Lett. **B495** (2000) 427.
- [FRS02] J. Fuchs, I. Runkel, C. Schweigert, *TFT construction of RCFT correlators I: Partition functions*, Nucl. Phys. **B646** (2002) 353; et *TFT construction of RCFT correlators III: Simple Currents*, hep-th/0403157.
- [GRW02] M. R. Gaberdiel, A. Recknagel, et G. M. T. Watts, *The conformal boundary states for $su(2)$ at level 1*, Nucl. Phys. **B626** (2002), 344–362.
- [GRS91] B. Gato-Rivera, A.N. Schellekens, *Classification of simple current invariants*, hep-th/9109035.
- [GaRe02] K. Gawedzki, N. Reis, *WZW branes and gerbes*, Rev. Math. Phys. 14 (2002) 1281.
- [GW86] D. Gepner et E. Witten, *String theory on group manifolds*, Nucl. Phys. **B278** (1986), 493.

- [GPS93] S. Giddings, J. Polchinski, A. Strominger, *Four dimensional black holes in string theory*, Phys. Rev. D48 (1993) 5784.
- [GRS03] A. Giveon, E. Rabinovici, A. Sever, *Strings in singular time dependent backgrounds*, Fortsch. Phys. 51 (2003) 805.
- [HMT04] M. Headrick, Sh. Minwalla, T. Takayanagi, *Closed string tachyon condensation : an overview*, Class. Quant. Grav 21 (2004) S1539.
- [HKK01] M. Herbst, A. Kling et M. Kreuzer, *Star Products from Open Strings in Curved Backgrounds*, JHEP **0109** (2001) 014, hep-th/0106159.
- [HKK02] M. Herbst, A. Kling et M. Kreuzer, *Noncommutative Tachyon Action and D-Brane Geometry*, JHEP **0208** (2002) 010, hep-th/0203077.
- [KaRa01] A. Karch et L. Randall, *Localized Gravity in String Theory*, Phys.Rev.Lett. 87 (2001) 061601
- [Kir99] A. A. Kirillov, *Merits and demerits of the orbit method*, Bull. Amer. Math. Soc. **36** (1999), 433.
- [KK94] E. Kiritsis et C. Kounnas, *Dynamical topology change in string theory*, Phys. Lett. **B331** (1994), 51–62.
- [KS96] C. Klimcik, P. Severa, *Open strings and D-branes in WZNW model*, Nucl. Phys. **B488** (1997) 653
- [KniZa84] V. Knizhnik, A. B. Zamolodchikov, *Current algebra and Wess-Zumino model in two dimensions*, Nucl. Phys. **B247** (1984) 83.
- [Kon97] M. Kontsevich, *Deformation Quantization of Poisson Manifolds I*, q-alg/9709040.
- [KuLo92] C. Kounnas, D. Lüst, *Cosmological string backgrounds from gauged WZW models*, Phys. Lett. B289 (1992) 56.
- [Lew92] D. C. Lewellen, *Sewing constraints for conformal field theories on surfaces with boundaries*, Nucl. Phys. **B372** (1992), 654–682.
- [MMS01] J. M. Maldacena, G. W. Moore et N. Seiberg, *Geometrical interpretation of d-branes in gauged wzw models*, JHEP **07** (2001), 046.
- [MS88] G. Moore, N. Seiberg, *Polynomial equations for rational conformal field theories*, Phys. Lett. **B212** (1988) 451; *Naturality in conformal field theory*, Nucl. Phys. **B313**, (1989) 16.
- [Mye99] R. C. Myers, *Dielectric-branes*, JHEP **12** (1999), 022.
- [OV96] H. Ooguri et C. Vafa, *Two-dimensional black hole and singularities of CY manifolds*, Nucl. Phys. **B463** (1996), 55–72.
- [OD86] H.-J. Otto, H. Dorn, *Open bosonic strings in general background fields*, Z. Phys. C32 (1986) 599.
- [PS01] J. Pawelczyk et H. Steinacker, *Matrix Description of D-Branes on 3-Spheres*, JHEP **0112** (2001) 018, hep-th/0107265.
- [PS02] J. Pawelczyk et H. Steinacker, *A Quantum Algebraic Description of D-Branes on Group Manifolds*, Nucl. Phys. **B638** (2002) 433, hep-th/0203110.

- [PS03] J. Pawelczyk et H. Steinacker, *Algebraic Brane Dynamics on $SU(2)$: Excitation Spectra*, hep-th/0305226.
- [Pel00] O. Pelc, *On the quantization constraints for a $d3$ brane in the geometry of $NS5$ branes*, JHEP **08** (2000), 030.
- [Pol88] J. Polchinski, *Scale and conformal invariance in quantum field theory*, Nucl. Phys. **B303** (1988) 226
- [Pol98] J. Polchinski, *String theory*, Cambridge University Press, 1998.
- [PSS96] G. Pradisi, A. Sagnotti, et Ya. S. Stanev, *Completeness conditions for boundary operators in 2d conformal field theory*, Phys. Lett. **B381** (1996), 97–104.
- [QS03] T. Quella et V. Schomerus, *Asymmetric cosets*, JHEP **02** (2003), 030.
- [SK90] A.N. Schellekens, M. Kreuzer, *Simple currents versus orbifolds with discrete torsion – a complete classification*, Nucl.Phys. B411 (1994) 97, hep-th/9306145.
- [SY90] A.N. Schellekens, S. Yankielowicz, *Simple currents modular invariants and fixed points*, Int. J. Mod. Phys. A5 (1990) 2903.
- [Sch02] V. Schomerus, *Lectures on branes in curved backgrounds*, Class. Quant. Grav. **19** (2002), 5781–5847.
- [Sch99] V. Schomerus, *D-Branes and Deformation Quantization*, JHEP **9906** (1999) 030, hep-th/9903205.
- [Sh00] E. Sharpe, *Recent developments in discrete torsion*, Phys.Lett. B498 (2001) 104-110
- [SW99] N. Seiberg et E. Witten, *String theory and noncommutative geometry*, JHEP **09** (1999), 032.
- [Sen99] A. Sen, *Tachyon condensation in string field theory*, JHEP 0003 (2000) 002.
- [Sfe99] K. Sfetsos, *Branes for higgs phases and exact conformal field theories*, JHEP **01** (1999), 015.
- [Sta00] S. Stanciu, *A note on d -branes in group manifolds : Flux quantization and $d0$ -charge*, JHEP **10** (2000), 015.
- [Sta01] ———, *An illustrated guide to d -branes in $su(3)$* .
- [Ts86] A. A. Tseytlin, *Ambiguity in the Effective Action in String Theories*, Phys. Lett. **B176** (1986) 92.
- [Ts87] A. A. Tseytlin, *Sigma Model Weyl Invariance Conditions and String Equations of Motion*, Nucl. Phys. **B294** (1987) 383.
- [Ts93] A. A. Tseytlin, *On Field Redefinitions and Exact Solutions in String Theory*, Phys. Lett. **B317** (1993) 559, hep-th/9308042.
- [Va86] C. Vafa, *Modular invariance and discrete torsion on orbifolds*, Nucl. Phys. **B273** (1986), 592.

- [Wij03] M. Wijnholt, *On Curvature Squared Corrections for D-brane Actions*, hep-th/0301029.
- [Wit84] E. Witten, *Nonabelian bosonization in two dimensions*, Commun. Math. Phys. 92 (1984) 455.
- [Wyl00] N. Wyllard, *Derivative Corrections to D-Brane Actions with Constant Background Fields*, Nucl. Phys. **B598** (2001) 247, hep-th/0008125, N. Wyllard, *Derivative Corrections to the D-Brane Born-Infeld Action : Non-Geodesic Embeddings and the Seiberg-Witten Map*, JHEP **0108** (2001) 027, hep-th/0107185.

Annexe A

Flux stabilization in compact groups
JHEP 10 (2001), 036

Annexe B

D-branes in lens spaces

Phys.Lett.B568 (2003) 270

Annexe C

Discrete Torsion and WZW orbifolds
Phys.Lett.B582 (2004) 86

Annexe D

Towards Quantum Dielectric Branes : Curvature Corrections in Abelian Beta Function and Nonabelian Born-Infeld Action

hep-th/0409017

