



**HAL**  
open science

# Familles de surfaces de Klein et fonctions rationnelles réel-étales

Mathilde Lahaye-Hitier

► **To cite this version:**

Mathilde Lahaye-Hitier. Familles de surfaces de Klein et fonctions rationnelles réel-étales. Mathématiques [math]. Université Rennes 1, 2004. Français. NNT : . tel-00008289

**HAL Id: tel-00008289**

**<https://theses.hal.science/tel-00008289>**

Submitted on 31 Jan 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

*Présentée devant*

**L'UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE**

*pour obtenir le grade de*

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE**

Mention Mathématiques

*par*

**Mathilde LAHAYE-HITIER**

Laboratoire de Mathématiques

École Doctorale Sciences de la Matière de L'Information et du Vivant  
(ED SMIV 0373).

U.F.R. Sciences et Techniques

TITRE DE LA THÈSE :

***Familles de surfaces de Klein et fonctions rationnelles réel-étales***

Soutenue le 16 Décembre 2004 devant la Commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY :

M. E. Bujalance (rapporteur)  
M. R. Silhol (rapporteur)  
M. M. Coste  
M. P. Baird  
M. G. Dethloff  
M. J. Huisman (directeur de thèse)



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
Organisation de la thèse . . . . .	9
<b>Remerciements</b>	<b>11</b>
<b>Thèse</b>	<b>13</b>
<b>1 Familles de surfaces de Riemann</b>	<b>13</b>
1.1 Mise en place . . . . .	13
1.1.1 Famille de fonctions holomorphes . . . . .	13
1.1.2 Plan complexe et surface de Riemann au-dessus de $\mathcal{B}$ . . . . .	15
1.1.3 Morphismes . . . . .	16
1.2 Foncteur de changement de base . . . . .	17
1.2.1 Pour le plan complexe . . . . .	17
1.2.2 Pull-back pour les familles de surfaces de Riemann . . . . .	18
1.2.3 Applications . . . . .	20
1.3 Exemple : surfaces de Riemann de genre 1 . . . . .	20
1.3.1 Avec les $\mathbb{R}$ -bases de $\mathbb{C}$ . . . . .	20
1.3.2 Avec le demi-plan de Poincaré . . . . .	22
<b>2 Familles de surfaces de Klein</b>	<b>23</b>
2.1 Actions de $\Sigma$ . . . . .	24
2.1.1 Sur le plan complexe au-dessus de $\mathcal{B}$ . . . . .	24
2.1.2 Sur les familles de surfaces de Riemann . . . . .	25
2.2 Familles de surfaces de Klein. . . . .	26
2.2.1 Surfaces de Klein . . . . .	26
2.2.2 Morphismes . . . . .	27
2.3 Complexifié d'une famille de surfaces de Klein . . . . .	28
2.3.1 Au niveau des plans complexes et demi-plans de Klein . . . . .	28
2.3.2 Pour les familles de surfaces de Klein . . . . .	29
2.3.3 Application pour le pull-back . . . . .	31
<b>3 Petit détour topologique</b>	<b>33</b>
3.1 Famille de surfaces topologiques . . . . .	33
3.1.1 Les familles . . . . .	33
3.1.2 Orientation relative . . . . .	34
3.2 Famille de surfaces à bord . . . . .	35
3.2.1 Les familles . . . . .	35
3.2.2 Action de $\Sigma$ sur des familles de surfaces topologiques . . . . .	36
3.2.3 Double d'une famille de surfaces à bord . . . . .	37

<b>4</b>	<b>Revêtements et existence de Riemann en famille</b>	<b>41</b>
4.1	Introduction des revêtements ramifiés en famille . . . . .	41
4.1.1	Notions utiles pour la suite . . . . .	41
4.1.2	Revêtements de familles de surfaces . . . . .	42
4.1.3	Equivariance et double . . . . .	44
4.2	Théorèmes d'existence de Riemann . . . . .	48
4.2.1	Pour les familles de surfaces de Riemann . . . . .	49
4.2.2	Pour les familles munies d'une action de $\Sigma$ . . . . .	50
4.2.3	Pour les familles de surfaces de Klein . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Endomorphismes réel-étales de <math>\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1</math></b>	<b>53</b>
5.1	Morphismes réel-étale . . . . .	53
5.1.1	$\mathbb{P}^1$ et revêtements . . . . .	53
5.1.2	Isotopie et équivalences . . . . .	54
5.2	Revêtements de $\mathbb{P}^1$ et graphes . . . . .	55
5.2.1	Graphe associé et graphe admissible . . . . .	55
5.2.2	Découpages et recollements . . . . .	57
5.2.3	Existence d'un morphisme associé à un graphe . . . . .	60
5.3	Pour les endomorphismes de $\mathbb{P}^1$ . . . . .	61
5.3.1	Le graphe associé est un arbre . . . . .	61
5.3.2	Ensemble d'indices pour un arbre admissible . . . . .	63
5.3.3	Construction . . . . .	65
<b>6</b>	<b>Classification des endomorphismes réel-étales de <math>\mathbb{P}^1</math></b>	<b>71</b>
6.1	Influences des relations sur les arbres . . . . .	71
6.1.1	Arbre signé . . . . .	71
6.1.2	Sur les arbres . . . . .	72
6.2	Quand deux morphismes ont même arbre . . . . .	72
6.2.1	Revêtements génériques et systèmes de Hurwitz . . . . .	73
6.2.2	Mise en forme du système de Hurwitz . . . . .	78
6.2.3	Équivalence et isotopie des revêtements . . . . .	82
<b>7</b>	<b>Applications</b>	<b>85</b>
7.1	$M$ -surface de Klein et endomorphismes de $\mathbb{P}^1$ . . . . .	85
7.1.1	Espace de modules . . . . .	85
7.1.2	Endomorphismes de $\mathbb{P}^1$ . . . . .	86
7.1.3	Associations . . . . .	87
7.2	Du point de vue analytique . . . . .	89
7.2.1	Familles généralisées de surfaces de Riemann et de Klein . . . . .	89
7.2.2	Structures analytiques . . . . .	91
7.2.3	Applications analytiques . . . . .	94
7.3	$M$ -surface de Klein de genre 1 . . . . .	97
7.3.1	Module de triplets . . . . .	97
7.3.2	Fonctions rationnelles de degré 3 . . . . .	102
7.3.3	Triplets de genre un et morphismes de degré trois . . . . .	104
<b>Annexe</b>		<b>107</b>
<b>Graphes</b>		<b>107</b>
A.1	Les graphes, leurs arêtes, leurs sommets . . . . .	107
A.2	Chemins, cycles et arbres . . . . .	109
A.3	D'autres graphes . . . . .	109
<b>Bibliographie</b>		<b>111</b>

# Table des figures

1	Exemples d'image réciproque de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ par des endomorphismes de $\mathbb{P}^1$ . . . . .	5
2	Exemple de fonction rationnelle réel-étale et d'arbre signé associé . . . . .	6
3	Endomorphismes de même arbre signé . . . . .	7
4	$M$ -endomorphisme de degré 5 . . . . .	8
5.1	Exemple de découpage et recollement de graphe admissible . . . . .	58
5.2	Exemple de recollement de revêtements et de graphes . . . . .	59
5.3	Exemple d'arbre admissible de niveau 3 . . . . .	61
5.4	Recollements de surfaces . . . . .	63
5.5	Exemple d'indices possibles . . . . .	64
5.6	Arbres admissibles de niveau 0 . . . . .	65
	Algorithme ARBRES . . . . .	66
5.7	Arbres admissibles de degré 3 . . . . .	68
5.8	Arbres admissibles de degré 4 . . . . .	68
5.9	Arbres admissibles de degré 5 . . . . .	68
5.10	Arbres admissibles de degré 6 . . . . .	68
5.11	Arbres admissibles de degré 7 . . . . .	70
6.1	Chemins $r_i$ et cercles $c_i$ . . . . .	75
6.2	Manipulations (6.4) et (6.5) . . . . .	77
6.3	Fibre au dessus de $y_0$ . . . . .	78
6.4	Exemple 6.2.2 . . . . .	82
7.1	$M$ -arbres de degré 3 à 7 . . . . .	87
7.2	Morphisme et $M$ -surface de Klein de genre 1. . . . .	88
7.3	$\Delta F_{p,q} = 0$ . . . . .	104
A.1	Exemple de graphes . . . . .	108
A.2	Exemple de graphes isomorphes . . . . .	108
A.3	Exemple de graphe ouvert . . . . .	110



# Introduction

Cette thèse a pour objet la classification des fonctions rationnelles réel-étales de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 = \mathbb{P}^1$ .

Une fonction rationnelle réelle est une fonction qui s'écrit comme fraction de deux polynômes à coefficients réels. Une telle fonction est dite réel-étale si elle n'a pas de ramification au-dessus des points réels. Comme nous le verrons plus bas, ces fonctions sont intéressantes à cause de leur lien avec les  $M$ -surfaces. Ces dernières sont étudiées en géométrie algébrique réelle, en particulier dans la recherche sur le 16<sup>e</sup> problème de Hilbert (voir par exemple [Vir79, Ris80]). Notre étude fait aussi le pendant de l'article [EG02] de A. Eremenko et A. Gabrielov dans lequel ils résolvent une conjecture de B. et M. Shapiro en dimension 1. Pour cela, ils étudient les fonctions rationnelles sur  $\mathbb{P}^1$  dont tous les points de ramification sont réels.

Si on regardait les fonctions rationnelles réel-étales à homotopie près, on pourrait passer par des fonctions rationnelles ramifiées au-dessus des points réels. Cette classification est trop grossière. C'est pourquoi nous étudierons plutôt les fonctions rationnelles réel-étales à isotopie près. Deux fonctions rationnelles réel-étales sont *isotopes* si l'on peut passer de l'une à l'autre par déformation continue dans l'ensemble des fonctions rationnelles réel-étales de même degré.

Les fonctions rationnelles seront vues comme des morphismes non-constants de surfaces de Klein. Ces dernières sont obtenues comme quotient de surface de Riemann munies d'une action du groupe de Galois  $\Sigma = \text{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ . Par exemple,  $\mathbb{P}^1$  est le quotient de la sphère de Riemann  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  pour l'action de  $\Sigma$  par conjugaison complexe. D'après l'article de J. P. Serre [Ser56], la catégorie des surfaces de Klein compactes est équivalente à celle des courbes algébriques réelles projectives. En particulier, les endomorphismes de  $\mathbb{P}^1$  coïncident avec les fonctions rationnelles sur  $\mathbb{P}^1$ . Topologiquement, un endomorphisme de  $\mathbb{P}^1$  est un revêtement ramifié du disque fermé par lui-même. Une fonction rationnelle  $f$  sur  $\mathbb{P}^1$  est réel-étale si et seulement si l'image réciproque  $f^{-1}(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$  des points réels est la réunion disjointe de cercles topologiques dans  $\mathbb{C}$ .

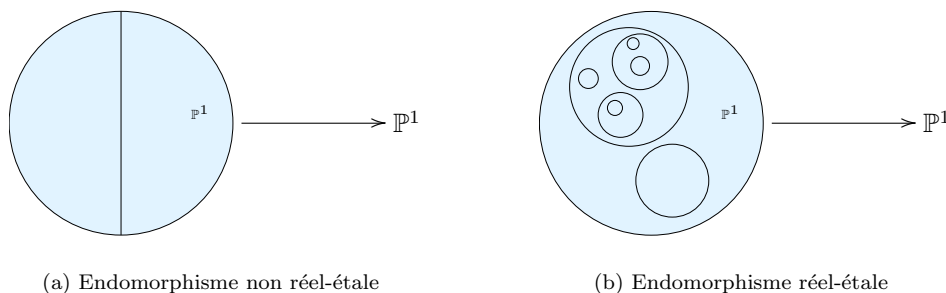


FIG. 1 – Exemples d'image réciproque de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  par des endomorphismes de  $\mathbb{P}^1$

Classiquement, les surfaces de Klein sont définies à l'aide de cartes et d'atlas. Cependant, nous avons préféré l'utilisation des espaces localement annelés. Si on se réfère à l'ouvrage [AG71] de N. Alling et N. Greenleaf qui, comme son nom l'indique, donne les fondements de la théorie de ces surfaces, la définition des morphismes nécessite l'introduction, un peu artificielle mais nécessaire, d'une application "pliage". Le point de vue des espaces localement annelés permet de définir les morphismes de surfaces de Klein simplement comme morphismes d'espaces localement annelés.

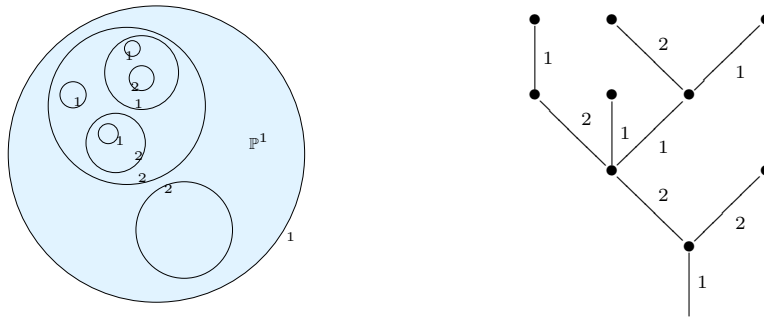


D'autre part, nous souhaitons aussi étudier des familles continues et des familles analytiques réelles de surfaces de Klein. Les premières permettent d'obtenir une "bonne" définition pour l'isotopie. Les deuxièmes interviennent dans notre étude des  $M$ -courbes. Le point de vue des espaces localement annelés facilite le travail en famille.

Les principaux objets qui interviennent dans la classification sont les *arbres signés* associés à une fonction rationnelle réel-étale

$$f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1.$$

Nous avons vu que l'image réciproque  $f^{-1}(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$  des points réels de  $\mathbb{P}^1$  est la réunion disjointe de cercles topologiques, comme sur les figures 1(b) ou 2(a). Ces cercles sont les arêtes de l'arbre. Les sommets de l'arbre sont les composantes connexes de  $f^{-1}(\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$ . Un sommet  $s$  est l'extrémité d'une arête  $e$  si le cercle topologique  $e$  est inclus dans l'adhérence de  $s$  dans  $\mathbb{P}^1$ . Par exemple, l'arbre de la figure 2(b) correspond au dessin de la figure 2(a).



(a) Image réciproque de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  par  $f$ .  
Les entiers sont les degrés des restrictions de  $f$  aux composantes connexes de  $f^{-1}(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$

(b) Arbre associé à  $f$

FIG. 2 – Exemple de fonction rationnelle réel-étale et d'arbre signé associé

L'arbre est pondéré. C'est-à-dire qu'à chaque arête est associé un entier naturel strictement positif. Si  $e$  est une arête, alors l'entier associé à  $e$  est le degré topologique de  $f$  restreint à  $e$  (voir figure 2). Ce nombre est bien défini puisque  $f$  étant réel-étale, la restriction de  $f$  au cercle topologique  $e$  est un revêtement topologique.

De plus, une orientation sur  $\mathbb{P}^1$  induit une orientation sur ses points réels. On ajoute alors au pied de l'arbre de  $f$  un signe " + " ou " - " selon que  $f$  préserve ou inverse respectivement l'orientation sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ . Ceci donne l'*arbre signé* de  $f$ .

Réciproquement, on montre que tout arbre signé peut être associé à une fonction rationnelle réel-étale.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat au coeur de cette thèse :

**Théorème de classification des fonctions rationnelles réel-étales de  $\mathbb{P}^1$ .** *Deux fonctions rationnelles réel-étales sont isotopes si et seulement si elles ont même arbre signé.*

*Esquisse de démonstration.* La partie la plus délicate de la démonstration consiste à montrer la réciproque, c'est à dire obtenir une isotopie entre deux fonctions rationnelles réel-étales  $f$  et  $f'$  ayant même arbre signé. Elle repose sur les trois idées suivantes.

**Idée 1** Quitte à perturber un peu  $f$  et  $f'$ , on peut supposer qu'il s'agit de revêtements ramifiés génériques, c'est à dire tels que chaque fibre pour  $f$  ou  $f'$  admette au plus un point de ramification et tels que tous ces points de ramification soient des points doubles.

**Idée 2** On sait que tout homéomorphisme de  $\mathbb{P}^1$  préservant l'orientation est isotope à l'identité. Ceci permet d'affirmer que tout couple d'homéomorphismes  $h_1$  et  $h_2$  de  $\mathbb{P}^1$  faisant commuter

le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{h_2} & \mathbb{P}^1 \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{h_1} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

induit une isotopie entre  $f$  et  $f'$ .

**Idée 3** C'est la partie la plus technique de la démonstration. L'idée consiste à couper  $\mathbb{P}^1$  le long des composantes connexes de  $f^{-1}(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$  d'une part et le long des composantes connexes de  $f'^{-1}(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$  d'autre part.

Le fait que les deux fonctions  $f$  et  $f'$  aient même arbre signé donne une bijection entre l'ensemble des composantes connexes de  $f^{-1}(\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$  et l'ensemble des composantes connexes de  $f'^{-1}(\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$ . Soit  $s$  un sommet de l'arbre signé de  $f$  et  $f'$ . Soit  $D_s$  l'adhérence de la composante connexe de  $f^{-1}(\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$  correspondant à  $s$  et  $D'_s$  l'adhérence de la composante connexe de  $f'^{-1}(\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$  correspondant à  $s$ .

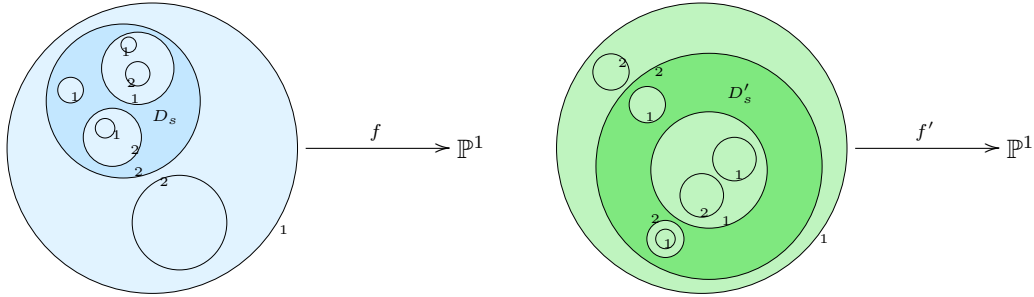


FIG. 3 – Endomorphismes de même arbre signé

Par restriction de  $f$  à  $D_s$  et de  $f'$  à  $D'_s$ , on se ramène à des revêtements réel-étales génériques de  $\mathbb{P}^1$  par des variétés homéomorphes à un disque fermé privé de disques ouverts disjoints. Une étude des systèmes de Hurwitz associés à de tels revêtements va permettre de trouver un homéomorphisme préservant l'orientation

$$h_1 : \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1$$

qui se relève en des homéomorphismes

$$h_s : D_s \xrightarrow{\sim} D'_s$$

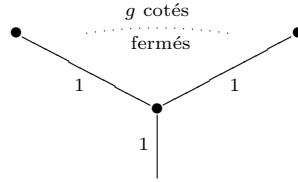
entre les domaines correspondant pour  $f$  et  $f'$  à un même sommet  $s$  de leur arbre. Tout est fait en sorte que les homéomorphismes  $h_s$  puissent se recoller pour former l'homéomorphisme  $h_2$  de  $\mathbb{P}^1$  cherché précédemment (voir idée 2).

La démonstration de l'implication directe du théorème est une conséquence des définitions.  $\square$

**Exemple.** Grâce au théorème précédent, en comptant les arbres signés, on obtient 13 classes d'isotopie pour les fonctions rationnelles réel-étales de degré 7. La liste de leurs arbres est donnée à la page 70, figure 5.11.

Le théorème de classification des fonctions rationnelles réel-étale de  $\mathbb{P}^1$  s'applique à l'étude de l'espace de module des  $M$ -courbes algébriques réelles de genre  $g$  ou, pour rester dans la catégorie des surfaces de Klein, des  $M$ -surfaces de genre  $g$ . En effet, il se trouve que cet espace plutôt mystérieux est caché dans l'espace des fonctions rationnelles réel-étales de degré  $2g + 1$ .

En effet, soit  $f$  une fonction rationnelle réel-étale de degré  $d = 2g + 1$  sur  $\mathbb{P}^1$ , dont l'arbre est de la forme



c'est à dire pour lequel tous les côtés ont pour poids 1 et qui a le maximum de sommets rencontrant une seule branche. Un tel arbre est appelé  $M$ -arbre et  $f$  est appelé un  $M$ -endomorphisme. On peut associer de façon naturelle à  $f$  une  $M$ -surface  $X_0$  de genre  $g$  qui, topologiquement, est l'adhérence de la composante connexe de  $f^{-1}(\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$  contenant  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ .

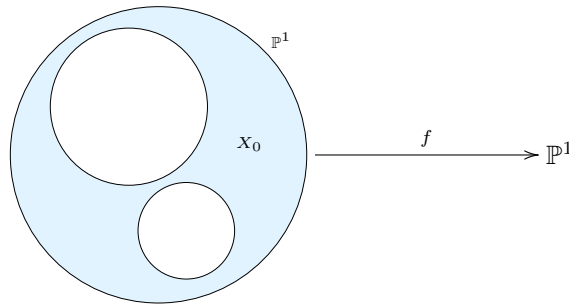


FIG. 4 –  $M$ -endomorphisme de degré 5

La  $M$ -surface  $X_0$  vient avec un morphisme réel-étale  $f|_{X_0}$  de degré  $g + 1$  et le choix particulier d'une composante connexe de son bord qui est  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ . Ainsi, on peut associer à un  $M$ -endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{P}^1$  un triplet

$$(X_0, f|_{X_0}, \mathbb{P}^1(\mathbb{R})).$$

Soit  $\mathcal{F}_{2g+1, M}^{\text{rét}, 0}$  l'ensemble des fonctions rationnelles réel-étales de degré  $2g + 1$  modulo l'action des automorphismes de  $\mathbb{P}^1$  par composition à droite. Cet espace admet une structure naturelle de variété analytique réelle. Soit  $\mathcal{M}_{g, M}^{\text{rét}, 1}$  l'ensemble des classes d'isomorphismes de triplets  $(X, f, B)$  tels que  $X$  soit une  $M$ -surface de genre  $g$ ,  $f$  une fonction rationnelle réel-étale de degré  $g + 1$  sur  $X$  et  $B$  une composante connexe du bord de  $X$ . On démontre que  $\mathcal{M}_{g, M}^{\text{rét}, 1}$  admet une structure naturelle de variété à priori semi-analytique.

**Théorème.** *L'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{2g+1, M}^{\text{rét}, 0} &\longrightarrow \mathcal{M}_{g, M}^{\text{rét}, 1} \\ f &\longmapsto (X_0, f|_{X_0}, \mathbb{P}^1(\mathbb{R})) \end{aligned}$$

*est un isomorphisme analytique réel.*

*En particulier,  $\mathcal{M}_{g, M}^{\text{rét}, 1}$  admet une structure naturelle de variété analytique réelle.*

Dans le cas particulier des  $M$ -surfaces de genre 1, une étude plus concrète montre que si cet isomorphisme est naturel, il n'est pas trivial.

La démonstration du théorème précédent passe par des espaces de Teichmüller de triplets et de  $M$ -endomorphismes. Les familles analytiques réelles de surfaces de Klein interviennent aussi de manière essentielle.

Le théorème de classification des fonctions rationnelles réel-étales de  $\mathbb{P}^1$  donne une démonstration nouvelle de la connexité de l'espace des modules de  $M$ -surfaces de genre  $g$ , montrée par M. Seppälä et R. Silhol [SS89]. En effet,  $\mathcal{F}_{2g+1, M}^{\text{rét}, 0}$  est connexe d'après le théorème de classification des fonctions rationnelles réel-étale de  $\mathbb{P}^1$  ci-dessus, et le morphisme oublié

$$(X, f, B) \longmapsto X$$

de  $\mathcal{M}_{g, M}^{\text{rét}, 1}$  sur l'espace des modules de  $M$ -surface de genre  $g$  est une surjection analytique réelle.

---

## Organisation de la thèse

Nous commençons, chapitre 1, par l'étude des familles continues de surfaces de Riemann pour lesquelles nous donnons quelques exemples (section 1.3).

Cette étude mène à celle des familles continues de surfaces de Klein au chapitre 2. Nous y expliquons en particulier le lien avec les familles de surfaces de Riemann.

Le chapitre 3 est surtout topologique. Il introduit des familles continues de surfaces topologiques et de surfaces à bord. Celles-ci seront utilisées dans le chapitre suivant.

Dans ce chapitre 4, on commence par étudier les revêtements de familles continues de surfaces topologiques et de surfaces à bords. Ceci permet de généraliser ensuite le théorème d'existence de Riemann au cas des familles continues de surfaces de Riemann (section 4.2.1) et des familles continues de surfaces de Klein (section 4.2.3). Le théorème d'existence de Riemann pour les surfaces de Klein est l'ingrédient principal permettant de montrer (section 5.2.3) que tout arbre signé est l'arbre associé à une fonction rationnelle réel-étale.

Le chapitre 5 donne les ingrédients utiles au chapitre suivant. L'arbre associé à un endomorphisme réel-étale de  $\mathbb{P}^1$  y est défini. On introduit aussi la notion d'isotopie pour les revêtements réel-étales. Le chapitre 6 est le chapitre central de cette thèse. On y démontre, en utilisant les résultats des chapitres précédents, le théorème de classification des fonctions rationnelles réel-étales énoncé précédemment. Nous menons à la section 6.2 une étude des systèmes de Hurwitz de revêtements réel-étales d'un disque fermé par un disque fermé privé de disques ouverts.

Les résultats du chapitre 6 sont appliqués dans le chapitre 7 à l'étude des espaces des modules de  $M$ -surfaces de genre  $g$ .

A la fin de cette thèse, le lecteur trouvera une annexe contenant des rappels succints sur les graphes.



# Remerciements

*Je veux remercier ici toutes les personnes qui, à divers degrés, ont partagé avec moi un bout de chemin mathématique.*

Je tiens avant tout à exprimer ma reconnaissance envers Johannes Huisman, mon directeur de thèse. Il m'a accordé sa confiance dès le stage de DEA et a su m'accompagner avec patience tout au long de ces années. À partir de ce qui m'intéressait, il m'a amené à découvrir des mathématiques belles et variées. Sans lui, ce mémoire n'existerait pas.

Merci à Emilio Bujalance et Robert Silhol qui ont accepté d'être les rapporteurs de ce travail. Malgré des délais assez serrés, ils ont lu avec attention la version préliminaire quelque peu exhaustive de ce mémoire. Grâce aux remarques de Robert Silhol et aux conseils précieux de mon directeur de thèse, j'espère être parvenue à un texte plus concis. Les encouragements d'Emilio Bujalance m'ont donné un nouveau souffle pour finir de mener à bien cette thèse. Je remercie aussi les autres membres du jury pour l'intérêt qu'ils portent à mon travail : Paul Baird, Michel Coste qui est d'une très grande humanité et Gerd Dethloff qui m'a donné de bons conseils, en particulier concernant la soutenance.

Durant ce travail de thèse, j'ai été accueillie dans divers universités et instituts. L'équipe de géométrie algébrique et de calcul formel de l'Université de Rennes I a accompagné mes premiers pas. Puis le laboratoire de mathématiques de Brest m'a permis de suivre mon directeur de thèse. Cette année, l'équipe de mathématiques du site de Rennes de l'IUFM de Bretagne m'a initiée à la didactique de la discipline. Merci aux personnes que j'ai eu le plaisir de rencontrer dans ces trois endroits pour leur accueil et les discussions que nous avons eues. Je n'ose pas donner de noms car ils sont nombreux et je pourrais en oublier. Mais je ne peux m'empêcher de citer Danielle Lanneau, Claude Boschet, Karine Falc'hon, Annick Nicolle, Jacqueline Nicolleau et Michèle Kerleroux qui, par leur disponibilité et leur professionnalisme, ont rendus plus faciles les à-côtés administratifs de la thèse. Merci aussi à l'équipe de la bibliothèque de l'IRMAR et du laboratoire de mathématiques de Brest.

N'oublions pas non plus mes compagnons de route. Les "anciens" comme Franck, Vincent ou Benoit qui ont un peu chapeauté la jeune thésarde que j'étais. Les contemporains, Fred, Greg, Nelly, David, pour ne citer qu'eux, avec qui j'ai partagé repas au RU et délires et qui suivent maintenant chacun leur chemin dans l'après thèse. Et puis les nouveaux, dont certains soutiennent bientôt, Gwéno, Erwan, Elise, Vincent, Glenn, et j'en oublie. Merci aussi à Solen avec qui je partage les joies de l'enseignement du notionnel et Bert, soutient topologique. Je remercie aussi tous les amis qui m'ont gardé leur amitié au delà du peu de temps que je leur ai consacré durant ces années.

Ces dernières lignes sont bien peu pour exprimer ma gratitude envers mes proches. Merci tout d'abord à mes parents qui suivent et encouragent mes choix depuis le début, à mes frères et soeurs et toute ma (belle) famille. Et surtout, merci infiniment à mon mari et ma fille qui ont su me supporter dans tous les sens du terme. Je leur dédie ce travail...



# Chapitre 1

## Familles de surfaces de Riemann

*Le but de ce chapitre est de définir et étudier les familles continues de surfaces de Riemann. Pour cela, nous prendrons le point de vue des espaces localement annelés.*

*Dans toute cette partie,  $\mathcal{B}$  désigne une variété topologique localement homéomorphe à  $\mathbb{R}^r$ . On notera  $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$  le faisceau des germes de fonctions complexes continues sur  $\mathcal{B}$ . C'est un faisceau en  $\mathbb{C}$ -algèbres.*

*Pour tout ouvert  $W \subseteq \mathcal{B} \times \mathbb{C}$  et tout point  $(b_0, z_0) \in W$ , on note*

$$W_{b_0} = \{z \in \mathbb{C} \mid (b_0, z) \in W\} \quad \text{et} \quad W^{z_0} = \{b \in \mathcal{B} \mid (b, z_0) \in W\}.$$

### 1.1 Mise en place

#### 1.1.1 Famille de fonctions holomorphes

**Définition 1.1.1 (Famille continue de fonctions holomorphes).** Soit  $W \subseteq \mathcal{B} \times \mathbb{C}$  un ouvert. Une *famille continue de fonctions holomorphes* au-dessus de  $\mathcal{B}$  définie sur  $W$  est une application continue

$$f : W \longrightarrow \mathbb{C}$$

vérifiant la propriété suivante :

Pour tout  $(b_0, z_0) \in W$ , il existe un voisinage ouvert  $U \subseteq \mathcal{B}$  de  $b_0$ ,  $R > 0$  et des fonctions continues  $a_k \in \mathcal{C}_{\mathcal{B}}(U)$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , tels que

$$f(b, z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(b)(z - z_0)^k, \quad (1.1)$$

pour tout  $(b, z) \in U \times D(z_0, R) \subseteq W$ , où  $D(z_0, R) \subseteq \mathbb{C}$  est le disque ouvert de centre  $z_0$  et de rayon  $R$ .

On pourra aussi parler de famille de fonctions holomorphes.

*Remarque 1.1.1.* Si  $f$  est une famille de fonctions holomorphes définie sur  $W$  au-dessus de  $\mathcal{B}$ , pour tout  $b_0 \in W$ , l'application

$$\begin{aligned} f(b_0, \cdot) : W_{b_0} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f(b_0, z), \end{aligned}$$

est une fonction holomorphe.



**Exemple 1.1.1.** Soit  $d \geq 0$  et  $a_0, \dots, a_d$  des fonctions continues sur  $\mathcal{B}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . Alors

$$\begin{aligned} f : \mathcal{B} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (b, z) &\longmapsto a_0 + a_1 z + \dots + a_d z^d \end{aligned}$$

est une famille de fonctions holomorphes définie sur  $\mathcal{B} \times \mathbb{C}$ .

**Proposition 1.1.1.** Soit  $W \subseteq \mathcal{B} \times \mathbb{C}$  un ouvert et  $f : W \longrightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue. La fonction  $f$  est une famille de fonctions holomorphes si et seulement si pour tout  $(b_0, z_0) \in W$  la fonction

$$\begin{aligned} f(b_0, \cdot) : W_{b_0} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f(b_0, z) \end{aligned}$$

est holomorphe et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les fonctions

$$\begin{aligned} \frac{d^n f}{dz^n}(\cdot, z_0) : W^{z_0} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ b &\longmapsto \frac{d^n f}{dz^n}(b, z_0) \end{aligned}$$

sont continues.

*Démonstration.* Soit  $U_0 \subseteq \mathcal{B}$  un voisinage ouvert de  $b_0$ ,  $V \subseteq \mathbb{C}$  un voisinage ouvert de  $z_0$ ,  $a_k \in \mathcal{C}_{\mathcal{B}}(U_0)$ , pour  $k \in \mathbb{N}$ , des fonctions continues et  $R > 0$  donnés par la définition 1.1.1.

En dérivant successivement, on obtient pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $(b, z) \in U \times V$

$$\frac{d^n f}{dz^n}(b, z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k(b) (z - z_0)^{k-n}$$

la série ayant pour rayon de convergence  $R(b) \geq R$ . Ainsi

$$\frac{d^n f}{dz^n}(\cdot, z_0) = (n!) a_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{B}}(V).$$

Réciproquement, il existe  $R > 0$ , un disque ouvert  $D(z_0, 2R)$  de centre  $z_0$  et de rayon  $2R$  et un voisinage ouvert  $U \subseteq \mathcal{B}$  de  $b_0$  tels que  $U \times D(z_0, 2R) \subseteq W$ . Pour tout  $b \in U$ , la fonction complexe  $f(\cdot, b)$  est holomorphe sur  $D(z_0, 2R)$ , donc sur le disque fermé  $\overline{D}(z_0, R)$ . D'après un théorème de développement en séries (voir par exemple [Lan99, V, §1] ou [Rem91]), on a pour tout  $z \in D(z_0, R)$

$$f(b, z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(b) (z - z_0)^k,$$

et le rayon de convergence  $R(b)$  de la série  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(b) z^k$  vérifie  $R(b) \geq R > 0$ .

En dérivant successivement, on obtient comme précédemment pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $(b, z) \in U \times D(z_0, R)$

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dz^n}(\cdot, z_0) \in \mathcal{C}_{\mathcal{B}}(V).$$

Ainsi  $a_n$  est continue pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . □

**Proposition 1.1.2.** Soit  $W \subseteq \mathcal{B} \times \mathbb{C}$  et  $f : W \longrightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue. La fonction  $f$  est une famille de fonctions holomorphes si et seulement si pour tout  $b_0 \in \mathcal{B}$  la fonction

$$\begin{aligned} f(b_0, \cdot) : W_{b_0} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f(b_0, z) \end{aligned}$$

est holomorphe.

*Démonstration.* Par définition, si  $f$  est une famille de fonctions holomorphes, pour tout  $b_0 \in \mathcal{B}$  la fonction  $f(b_0, \cdot)$  est holomorphe.

D'après la proposition 1.1.1 et la remarque 1.1.1, il suffit de montrer que pour tout  $z_0 \in \mathbb{C}$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $\frac{d^n f}{dz^n}(\cdot, z_0)$  est continue. Pour cela, nous allons montrer que  $\frac{d^n f}{dz^n}$  est continue sur  $W$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Comme c'est une propriété locale, on peut supposer  $(b_0, z_0) \in W \subseteq \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}$ . Il existe  $R > 0$  et un voisinage ouvert  $U \subseteq \mathcal{B}$  de  $b_0$  tels que  $U \times D(z_0, 2R) \subseteq W$ . On note  $C = \partial D(z_0, R)$  le cercle de centre  $z_0$  et de rayon  $R$ . D'après la formule de Cauchy sur le disque fermé  $\overline{D}(z_0, R)$ , pour tout  $b \in U$  et tout  $z \in D(z_0, R)$ , on a

$$\frac{d^n}{dz^n} f(b, z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_C \frac{f(b, w)}{(w-z)^{n+1}} dw = \frac{n!}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(b, z_0 + Re^{i\theta}) Re^{i\theta}}{(z_0 - z + Re^{i\theta})^{n+1}} d\theta.$$

La fonction

$$((b, z), \theta) \mapsto \frac{f(z_0 + Re^{i\theta}, b) Re^{i\theta}}{(z_0 - z + Re^{i\theta})^{n+1}}$$

est continue sur  $U \times D(z_0, R) \times [0, 2\pi]$ . D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, la fonction  $\frac{d^n}{dz^n} f$  est continue sur  $U \times D(z_0, R)$ , donc en  $(z_0, b_0)$ .  $\square$

On en déduit les deux corollaires immédiats suivant.

**Corollaire 1.1.3.** *Soit  $W \subseteq \mathcal{B} \times \mathbb{C}$ . Si  $f : W \rightarrow \mathbb{C}$  est une famille de fonctions holomorphes, alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $\frac{d^n f}{dz^n}$  est une famille de fonctions holomorphes.*

**Corollaire 1.1.4.** *Soit  $f_1 : W_1 \rightarrow \mathbb{C}$  et  $f_2 : W_2 \rightarrow \mathbb{C}$  deux familles de fonctions holomorphes au-dessus de  $\mathcal{B}$  définies respectivement sur des ouverts  $W_1$  et  $W_2$  de  $\mathcal{B} \times \mathbb{C}$ . Si  $f_1(W_1) \subseteq W_2$ , alors la fonction*

$$f : W_1 \rightarrow \mathbb{C} \\ (b, z) \mapsto f_2(b, f_1(b, z))$$

*est une famille de fonctions holomorphes au-dessus de  $\mathcal{B}$ .*

### 1.1.2 Plan complexe et surface de Riemann au-dessus de $\mathcal{B}$

**Définition 1.1.2 (Plan complexe au-dessus de  $\mathcal{B}$ ).** Le plan complexe au-dessus de  $\mathcal{B}$  est la variété topologique  $\mathcal{B} \times \mathbb{C}$  munie du faisceau des germes de familles continues de fonctions holomorphes au-dessus de  $\mathcal{B}$ . D'après la proposition 1.1.2, ce dernier est un faisceau en  $\mathbb{C}$ -algèbres locales.

Ainsi le plan complexe au-dessus de  $\mathcal{B}$  est l'espace localement annelé

$$(\mathcal{B} \times \mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}})$$

tel que pour tout ouvert  $W \in \mathcal{B} \times \mathbb{C}$ , les éléments  $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}(W)$  sont les familles de fonctions holomorphes  $f : W \rightarrow \mathbb{C}$  au-dessus de  $\mathcal{B}$  définies sur  $W$ .

*Remarque 1.1.2.* L'application

$$\text{pr}_1 : (\mathcal{B} \times \mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}) \rightarrow (\mathcal{B}, \mathcal{C}_{\mathcal{B}}) \\ (b, z) \mapsto b$$

est un morphisme d'espaces localement annelés.

**Définition 1.1.3 (Famille de surfaces de Riemann).** Une famille continue de surfaces de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}$  est un morphisme d'espaces localement annelés

$$p : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (\mathcal{B}, \mathcal{C}_{\mathcal{B}}),$$

tel que  $(X, \mathcal{O}_X)$  soit localement isomorphe au plan complexe au-dessus de  $\mathcal{B}$  l'isomorphisme local respectant la projection.

En d'autres termes,  $p$  doit vérifier :

- (i)  $(X, \mathcal{O}_X)$  est un espace localement annelé dont le faisceau est un faisceau muni d'une structure de  $\mathbb{C}$ -algèbre,
- (ii)  $p : X \rightarrow \mathcal{B}$  est une application continue,
- (iii)  $\forall x \in X, \exists W \ni x$  voisinage ouvert,  $\exists W' \subseteq \mathcal{B} \times \mathbb{C}$  ouvert et un isomorphisme

$$\varphi : (W, \mathcal{O}_X|_W) \xrightarrow{\sim} (W', \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}|_{W'})$$

faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (W, \mathcal{O}_X|_W) & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & (W', \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}|_{W'}) \\ & \searrow p & \swarrow \text{pr}_2 \\ & (\mathcal{B}, \mathcal{C}_{\mathcal{B}}) & \end{array}$$

On parlera aussi de *surface de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}$*  qui pourra être notée  $(X, p)$ .

On appelle les morphismes

$$\varphi : (W, \mathcal{O}_X|_W) \xrightarrow{\sim} (W', \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}|_{W'})$$

des *morphismes de structure de Riemann*.

La variété topologique  $\mathcal{B}$  est la *base de la famille de surfaces de Riemann* et le morphisme  $p$  la *projection de la famille sur la base*.

### 1.1.3 Morphismes

**Définition 1.1.4 (Morphisme).** Soit  $(X, p)$  et  $(Y, q)$  deux surfaces de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}$ . Un *morphisme de familles de surfaces de Riemann* est un morphisme d'espaces localement annelés

$$\varphi : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{O}_X) & \xrightarrow{\varphi} & (Y, \mathcal{O}_Y) \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & (\mathcal{B}, \mathcal{C}_{\mathcal{B}}) & \end{array}$$

On notera  $\text{Hom}(X, Y)$  l'ensemble des morphismes de surfaces de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}$  de  $(X, p)$  dans  $(Y, q)$ .

**Proposition 1.1.5.** On note  $\text{pr}_2 : (b, z) \mapsto z$ . Pour tout ouvert  $W \subseteq \mathcal{B} \times \mathbb{C}$ , l'application

$$\begin{aligned} \text{Hom}(W, \mathcal{B} \times \mathbb{C}) &\rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}(W) \\ F &\mapsto F^\sharp(\text{pr}_2), \end{aligned}$$

est une bijection.

*Démonstration.* L'application  $\text{pr}_2$  étant une section globale du faisceau  $\mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}$ , si  $F \in \text{Hom}(W, \mathcal{B} \times \mathbb{C})$ , alors  $F^\sharp(\text{pr}_2)$  est une section globale sur  $W$ . En particulier  $F$  s'écrit

$$\begin{aligned} F : W &\rightarrow \mathcal{B} \times \mathbb{C} \\ (b, z) &\mapsto (b, F^\sharp(\text{pr}_2)(b, z)) \end{aligned}$$

Réciproquement, soit une famille de fonctions holomorphes  $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}(W)$ . On peut lui associer le morphisme de familles de surfaces de Riemann

$$\begin{aligned} F : W &\rightarrow \mathcal{B} \times \mathbb{C} \\ (b, z) &\mapsto (b, f(b, z)) \end{aligned}$$

qui vérifie  $F^\sharp(\text{pr}_2) = f$ . □

## 1.2 Foncteur de changement de base

Dans toute cette partie,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  désigneront des variétés topologiques localement homéomorphes à  $\mathbb{R}^r$  et  $\mathbb{R}^{r'}$  respectivement. On notera  $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$  (resp.  $\mathcal{C}_{\mathcal{B}'}$ ) le faisceau des germes de fonctions complexes continues sur  $\mathcal{B}$  (resp.  $\mathcal{B}'$ ).

### 1.2.1 Pour le plan complexe

Considérons le plan complexe au-dessus de  $\mathcal{B}$  et une fonction continue

$$\beta : \mathcal{B}' \longrightarrow \mathcal{B}.$$

Dans la catégorie des espaces topologiques, le produit fibré de  $\mathcal{B} \times \mathbb{C}$  par  $\mathcal{B}'$  au-dessus de  $\mathcal{B}$  n'est autre que  $\mathcal{B}' \times \mathbb{C}$ . Si l'on munit  $\mathcal{B}' \times \mathbb{C}$  de sa structure de surfaces de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}'$ , on obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{B}' \times \mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}' \times \mathbb{C}}) & \xrightarrow{\widehat{\beta}} & (\mathcal{B} \times \mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}) \\ \text{pr}_2 \downarrow & & \downarrow \text{pr}_2 \\ (\mathcal{B}', \mathcal{C}_{\mathcal{B}'}) & \xrightarrow{\beta} & (\mathcal{B}, \mathcal{C}_{\mathcal{B}}) \end{array}$$

où  $\widehat{\beta} : (\mathcal{B}' \times \mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}' \times \mathbb{C}}) \longrightarrow (\mathcal{B} \times \mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}})$  est donné par :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\beta} : \mathcal{B}' \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathbb{C} & \text{et} & \widehat{\beta}^\#(W) : \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}(W) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{B}' \times \mathbb{C}}(\widehat{\beta}^{-1}(W)) \\ (b', z) \longmapsto (\beta(b'), z) & & f \longmapsto f \circ \widehat{\beta} \end{array}$$

pour tout  $W$  ouvert de  $\mathcal{B} \times \mathbb{C}$ .

Ainsi, le morphisme

$$\beta : (\mathcal{B}', \mathcal{C}_{\mathcal{B}'}) \longrightarrow (\mathcal{B}, \mathcal{C}_{\mathcal{B}})$$

permet un changement de base pour le plan complexe et induit un morphisme d'espaces localement annelés entre  $(\mathcal{B}' \times \mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}' \times \mathbb{C}})$  et  $(\mathcal{B} \times \mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}})$ .

Soit un morphisme de surfaces de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}$

$$\varphi : \mathcal{B} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathbb{C}.$$

La propriété universelle pour les produits fibrés donne une unique application continue

$$\beta^* \varphi : \mathcal{B}' \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{B}' \times \mathbb{C}$$

faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{B}' \times \mathbb{C} & \xrightarrow{\widehat{\beta}} & \mathcal{B} \times \mathbb{C} & & \\ \downarrow \beta^* \varphi & \swarrow \text{pr}_1 & \downarrow \varphi & & \\ & \mathcal{B}' & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{B} & \\ & \swarrow \text{pr}_1 & & \swarrow \text{pr}_1 & \\ \mathcal{B}' \times \mathbb{C} & \xrightarrow{\widehat{\beta}} & \mathcal{B} \times \mathbb{C} & & \end{array}$$

Elle s'écrit

$$\begin{array}{ccc} \beta^* \varphi : \mathcal{B}' \times \mathbb{C} \longmapsto \mathcal{B}' \times \mathbb{C} \\ (b', z) \longmapsto (b', \varphi_{\beta(b')}(z)) \end{array}$$

où  $\varphi_b(z) = \text{pr}_2(\varphi(b, z))$  pour tout  $b \in \mathcal{B}$ .

Soit  $W \in \mathcal{B}' \times \mathbb{C}$  un ouvert. A tout  $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{B}' \times \mathbb{C}}(W)$  on associe l'application

$$f \circ \beta^* \varphi : (\beta^* \varphi)^{-1}(W) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Alors avec le corollaire 1.1.4, il est clair que  $f \circ \beta^* \varphi \in \mathcal{O}_{\mathcal{B}' \times \mathbb{C}}((\beta^* \varphi)^{-1}(W))$ .

Ainsi  $\beta^* \varphi$  est un morphisme de surfaces de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}'$ .

**Définition 1.2.1 (Morphisme induit ou pull-back).** Le morphisme  $\beta^* \varphi$  est le *morphisme induit par  $\beta$  à partir de  $\varphi$  ou pull-back de  $\varphi$  par  $\beta$* .

*Remarque 1.2.1.* Par construction, si  $\varphi_1, \varphi_2 : \mathcal{B} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{B} \times \mathbb{C}$  sont deux morphismes de surfaces de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}$ , on a :

$$\beta^*(\varphi_2 \circ \varphi_1) = \beta^* \varphi_2 \circ \beta^* \varphi_1.$$

## 1.2.2 Pull-back pour les familles de surfaces de Riemann

**Espace topologique.** Considérons  $(X, \mathcal{O}_X, p)$  une surface de Riemann sur  $\mathcal{B}$  et  $\beta : \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}$  une fonction continue. On note

$$\beta^* X = \mathcal{B}' \times_{\mathcal{B}} X$$

le produit fibré de  $X$  par  $\mathcal{B}'$  au-dessus de  $\mathcal{B}$  dans la catégorie des espaces topologiques. On a alors des applications continues

$$p' : \beta^* X \longrightarrow \mathcal{B}' \quad \text{et} \quad \widehat{\beta} : \beta^* X \longrightarrow X$$

faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \beta^* X & \xrightarrow{\widehat{\beta}} & X \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ \mathcal{B}' & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{B} \end{array}$$

Nous allons munir  $\beta^* X$  d'un faisceau  $\beta^* \mathcal{O}_X$  qui fasse de  $(\beta^* X, \beta^* \mathcal{O}_X)$  une surface de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}'$ .

**Faisceau sur des ouverts.** Soit  $x'_0 \in \beta^* X$  et  $x_0 = \widehat{\beta}(x'_0)$ . On considère un morphisme de structure de Riemann

$$h : (U, \mathcal{O}_U) \xrightarrow{\sim} (V, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}|_V)$$

pour  $(X, p)$ . Le produit fibré  $U' = \mathcal{B}' \times_{\mathcal{B}} U$  est un voisinage ouvert de  $x'_0$  dans  $\beta^* X$  et le produit fibré  $V' = \mathcal{B}' \times_{\mathcal{B}} V$  est un ouvert de  $\mathcal{B}' \times \mathbb{C}$ . On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} V' & \xrightarrow{\widehat{\beta}_{\mathbb{C}}} & & \longrightarrow & V \\ & \searrow \text{pr}_1 & & & \uparrow \\ & & \mathcal{B}' & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{B} \\ & \nearrow p' & & & \downarrow p \\ U' & \xrightarrow{\widehat{\beta}} & & \longrightarrow & U \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \wr \\ \downarrow h \end{array}$$

Par propriété universelle du produit fibré, on obtient un morphisme  $h' = \beta^* h : U' \rightarrow V'$  ainsi qu'un morphisme réciproque et le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 V' & \xrightarrow{\widehat{\beta}_c} & V \\
 \uparrow h' \wr & \swarrow \text{pr}_1 & \swarrow \text{pr}_1 \\
 & \mathcal{B}' & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{B} & \searrow \text{pr}_1 \\
 \uparrow & \nearrow p' & & \searrow p & \uparrow h \\
 U' & & \xrightarrow{\widehat{\beta}} & & U
 \end{array}$$

L'isomorphisme  $h'$  permet alors de munir  $U'$  d'un faisceau  $\mathcal{O}_{U'}$  qui fait de celui-ci une surface de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}'$ .

**Recollement.** Supposons que l'on ait deux morphismes de structure de Riemann

$$h_i : (U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i}) \xrightarrow{\sim} (V_i, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}|_{V_i}),$$

$i = 1, 2$ , pour  $(X, p)$  au voisinage de  $x_0$ . Ils induisent deux isomorphismes

$$h'_i : (U'_i, \mathcal{O}_{U'_i}) \xrightarrow{\sim} (V'_i, \mathcal{O}_{\mathcal{B}' \times \mathbb{C}}|_{V'_i}).$$

Notons  $W'_i = h'_i(U'_1 \cap U'_2) \subseteq V'_i$ . Les restrictions  $g_i = h'_i|_{U'_1 \cap U'_2}$  sont des isomorphismes de  $U'_1 \cap U'_2$  sur  $W'_i$  et on a :

$$\begin{array}{ccc}
 & U'_1 \cap U'_2 & \\
 g_1 \swarrow \sim & \downarrow p' & \searrow \sim g_2 \\
 W'_1 & & W'_2 \\
 \text{pr}_1 \swarrow & & \swarrow \text{pr}_1 \\
 & \mathcal{B}' &
 \end{array}$$

Ainsi  $g = g_1 \circ g_2^{-1}$  définit un isomorphisme de  $W'_2$  sur  $W'_1$  qui commute avec les projections sur  $\mathcal{B}'$ . Ceci permet de recoller les faisceaux  $(U'_i, \mathcal{O}_{U'_i})$  le long de  $U'_1 \cap U'_2$ .

**Pull-back.** On obtient ainsi sur  $\beta^* X$  un faisceau  $\beta^* \mathcal{O}_X$  qui fait de  $\beta^* p = p' : (\beta^* X, \beta^* \mathcal{O}_X) \rightarrow (\mathcal{B}', \mathcal{C}_{\mathcal{B}'})$  une famille de surface de Riemann. Elle vient avec un morphisme d'espaces localement annelés

$$\widehat{\beta} : (\beta^* X, \beta^* \mathcal{O}_X) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$

qui commute avec les projections sur  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}$

**Définition 1.2.2 (Surface induite par pull-back).** La famille de surfaces de Riemann

$$\beta^*(X, \mathcal{O}_X, p) = (\beta^* X, \beta^* \mathcal{O}_X, \beta^* p)$$

au-dessus de  $\mathcal{B}'$  est la *surface de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}'$  induite par  $\beta$*  ou *pull-back de la famille de surfaces de Riemann  $(X, \mathcal{O}_X, p)$  par  $\beta$* .

**Morphisme induit.** Soit un morphisme de surfaces de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}$

$$\varphi : (X, p) \longrightarrow (Y, q).$$

La propriété universelle pour les produits fibrés donne une unique application continue

$$\beta^* \varphi : \beta^* X \longrightarrow \beta^* Y$$

faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 \beta^* X & \xrightarrow{\widehat{\beta}_X} & & & X \\
 \downarrow \beta^* \varphi & \searrow \beta^* p & & & \downarrow \varphi \\
 & & \mathcal{B}' & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{B} \\
 & \nearrow \beta^* q & & & \nearrow q \\
 \beta^* Y & \xrightarrow{\widehat{\beta}_Y} & & & Y
 \end{array}$$

Cette application continue définit en fait un morphisme de surfaces de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}'$ . Ceci se voit localement. Pour cela, on utilise des morphismes de structure de Riemann pour  $(X, p)$  au voisinage de  $x_0$  et pour  $(Y, q)$  au voisinage de  $y_0$  ainsi que les morphismes de structure pour  $\beta^*(X, p)$  et  $\beta^*(Y, q)$  obtenus comme dans la section 1.2.2. L'unicité dans la propriété universelle du produit fibré permet de conclure.

**Définition 1.2.3 (Morphisme induit ou pull-back).** Le morphisme  $\beta^* \varphi$  est le *morphisme induit par  $\beta$  à partir de  $\varphi$  ou pull-back de  $\varphi$  par  $\beta$* .

*Remarque 1.2.2.* Comme pour le cas des plan complexe, par construction, si  $\varphi_1 : X_0 \rightarrow X_1$  et  $\varphi_2 : X_1 \rightarrow X_2$  sont deux morphismes de surfaces de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}$ , on a :

$$\beta^*(\varphi_2 \circ \varphi_1) = \beta^* \varphi_2 \circ \beta^* \varphi_1.$$

### 1.2.3 Applications

**Restriction de la base.** Soit  $(X, p)$  une surface de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  un ouvert de  $\mathcal{B}$ . La surface de Riemann sur  $\mathcal{B}'$  induite par l'inclusion  $i : \mathcal{B}' \hookrightarrow \mathcal{B}$  n'est autre que la famille

$$p|_{\mathcal{B}'} : (X|_{p^{-1}(\mathcal{B}')} , \mathcal{O}_X|_{p^{-1}(\mathcal{B}')} ) \longrightarrow (\mathcal{B}' , \mathcal{C}_{\mathcal{B}'})$$

**Famille de surfaces de Riemann.** Soit  $(X, p)$  une famille de surfaces de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}$  et  $*$  un point.

Pour tout point  $b \in \mathcal{B}$ , il existe une fonction continue

$$\iota_b : * \longrightarrow \mathcal{B}$$

telle que  $\iota_b(*) = b$ . Par pull-back, on obtient une famille de surfaces de Riemann au-dessus de  $(*, \mathbb{C})$ , c'est-à-dire une surface de Riemann  $X_b$ , la fibre de  $X$  au-dessus de  $b$ .

**Famille de surfaces constante** Soit  $(S, \mathcal{O}_S)$  une surface de Riemann. Une famille de surfaces de Riemann sur  $\mathcal{B}$  est dite *constante engendrée par  $S$*  si elle est isomorphe à la famille  $\pi^* S$  induite par l'application constante

$$\pi : \mathcal{B} \longrightarrow *,$$

où  $S$  est la famille de surface de Riemann  $p : S \rightarrow *$  au-dessus d'un point  $*$ .

**Exemple 1.2.1.** Le plan complexe au-dessus de  $\mathcal{B}$  est la famille de surfaces de Riemann constante  $\pi^*(\mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}})$ , où  $(\mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}})$  est le plan complexe muni de son faisceau de fonctions holomorphes à valeur dans  $\mathbb{C}$ .

## 1.3 Exemple : surfaces de Riemann de genre 1

### 1.3.1 Avec les $\mathbb{R}$ -bases de $\mathbb{C}$

Soit  $(\omega, \omega')$ , une  $\mathbb{R}$ -base de  $\mathbb{C}$ . Le quotient de  $\mathbb{C}$  par le réseau  $\omega\mathbb{Z} + \omega'\mathbb{Z}$  est une surface de Riemann de genre 1

$$\mathbb{C}/(\omega\mathbb{Z} + \omega'\mathbb{Z}).$$

En faisant varier la  $\mathbb{R}$ -base  $(\omega, \omega')$ , nous allons obtenir une famille de surfaces de Riemann.

**Base.** On peut identifier l'ensemble des  $\mathbb{R}$ -bases de  $\mathbb{C}$  au groupe topologique  $\text{Gl}_2(\mathbb{R})$ , celui-ci étant muni de la topologie des fonctions continues à valeur dans  $\mathbb{C}$ . Pour tout  $B \in \text{Gl}_2(\mathbb{R})$ , on note  $(\omega_B, \omega'_B)$  la  $\mathbb{R}$ -base de  $\mathbb{C}$  associée à  $B$ . On note aussi  $X_B = \mathbb{C}/(\omega_B\mathbb{Z} + \omega'_B\mathbb{Z})$  la surface de Riemann de genre 1 correspondante et

$$q_B : \mathbb{C} \longrightarrow X_B$$

l'application quotient.

L'espace topologique  $\text{Gl}_2(\mathbb{R})$  sera la base de la famille de surfaces de Riemann.

**Espace total.** L'ensemble

$$\mathcal{E} = \{(B, x) \mid B \in \text{Gl}_2(\mathbb{R}) \text{ et } x \in X_B\}$$

sera l'ensemble des points de la famille. Cet ensemble vient avec la projection

$$\begin{aligned} p = \text{pr}_1 : \mathcal{E} &\longrightarrow \text{Gl}_2(\mathbb{R}) \\ (B, x) &\longmapsto B. \end{aligned}$$

Il faut maintenant munir  $\mathcal{E}$  d'une topologie et d'un faisceau en  $\mathbb{C}$ -algèbres.

**Action de groupe.** On a une action de  $\mathbb{Z}^2$  sur le plan complexe  $\text{Gl}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{C}$  au-dessus de  $\text{Gl}_2(\mathbb{R})$ . Elle est donnée par

$$(B, z) \cdot (m, n) = (B, z + m\omega_B + n\omega'_B)$$

pour tout  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$  et tout  $(B, z) \in \text{Gl}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{C}$ . La fonction

$$\begin{aligned} \text{Gl}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathcal{E} \\ (B, z) &\longmapsto (B, q_B(z)) \end{aligned}$$

est une application quotient pour l'action de  $\mathbb{Z}^2$  sur  $\text{Gl}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{C}$  et induit donc une bijection naturelle entre  $\mathcal{E}$  et  $(\text{Gl}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{C})/\mathbb{Z}^2$ . Elle va nous permettre de munir  $\mathcal{E}$  d'une structure naturelle de famille de surfaces de Riemann au-dessus de  $\text{Gl}_2(\mathbb{R})$ .

**Proposition 1.3.1.** *L'action de  $\mathbb{Z}^2$  sur  $\text{Gl}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{C}$  est une action proprement discontinue et sans point fixe.*

*Démonstration.* Il est clair que cette action est sans point fixe.

Pour tout  $B \in \text{Gl}_2(\mathbb{R})$  et tout  $z \in \mathbb{C}$ , on note  $P_B(z)$  l'intérieur du parallélogramme de cotés  $\omega_B$  et  $\omega'_B$  centré en  $z$ . Autrement dit,

$$P_B(z) = \left\{ z + \lambda\omega_B + \lambda'\omega'_B \mid \lambda, \lambda' \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ \right\}.$$

On note aussi

$$P(z) = \bigcup_{B \in \text{Gl}_2(\mathbb{R})} P_B(z).$$

$P(z)$  est alors un voisinage ouvert non vide de  $z$  dans  $\text{Gl}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{C}$ .

Il est connu que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $P_B(z)$  est un domaine fondamental pour l'action de  $\mathbb{Z}^2$  sur  $\mathbb{C}$  donnée par  $z \cdot (m, n) = z + m\omega_B + n\omega'_B$  pour tout  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$  et tout  $z \in \mathbb{C}$ . En regardant ce qui se passe fibre par fibre au-dessus de  $\text{Gl}_2(\mathbb{R})$ , on voit que pour tout  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$  on a

$$(P(z) \cdot (m, n)) \cap P(z) \neq \emptyset \iff (m, n) = (0, 0).$$

□

On en déduit le résultat suivant.

**Corollaire 1.3.2.** *Il existe sur le quotient  $\mathcal{E} = (\text{Gl}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{C})/\mathbb{Z}^2$  une unique structure topologique et un unique faisceau  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$  faisant de  $(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}}, p_{\mathcal{E}})$  une famille de surfaces de Riemann au-dessus de  $\text{Gl}_2(\mathbb{R})$ , la projection  $p_{\mathcal{E}}$  étant définie par  $p_{\mathcal{E}}(B, x) = B$ .*

*Remarque 1.3.1.* Sachant que deux courbes elliptiques ne sont pas forcément isomorphes, ceci donne un exemple de famille de surfaces de Riemann non constante.



### 1.3.2 Avec le demi-plan de Poincaré

Cette fois, les courbes elliptiques vont former une famille de surfaces de Riemann  $\mathcal{E}_{\mathbb{H}^\circ}$  au-dessus de  $\mathbb{H}^\circ = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ , l'intérieur du demi-plan de Poincaré. Cela va nous permettre d'obtenir un exemple de pull-back.

A tout point  $\tau \in \mathbb{H}^\circ$ , on associe la surface de Riemann de genre 1,  $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ . On définit alors l'ensemble

$$\mathcal{E}_{\mathbb{H}^\circ} = \{(x, \tau) \mid \tau \in \mathbb{H}^\circ \text{ et } x \in \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})\}$$

et l'application

$$p_{\mathbb{H}^\circ} : \begin{array}{ccc} \mathcal{E}_{\mathbb{H}^\circ} & \longrightarrow & \mathbb{H}^\circ \\ (x, \tau) & \longmapsto & \tau \end{array}$$

Nous allons munir l'ensemble  $\mathcal{E}_{\mathbb{H}^\circ}$  d'une structure de famille de surfaces de Riemann au-dessus de  $\mathbb{H}^\circ$ .

L'intérieur du demi-plan de Poincaré est homéomorphe au sous-espace des matrices de  $\text{Gl}_2^+(\mathbb{R})$  de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } a_2 > 0.$$

On obtient ainsi une fonction continue

$$h : \mathbb{H}^\circ \longrightarrow \text{Gl}_2(\mathbb{R}).$$

Par pull-back, on obtient une famille de surfaces de Riemann  $h^*(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}}, p_{\mathcal{E}})$  au-dessus de  $\mathbb{H}^\circ$ . On voit que  $h^*\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathbb{H}^\circ}$ .

**Retour au-dessus de  $\text{Gl}_2(\mathbb{R})$ .** On considère l'application continue

$$\beta : \text{Gl}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{H}^\circ$$

$$B \longmapsto \tau = \begin{cases} \frac{\omega_B}{\omega'_B} & B \in \text{Gl}_2^+(\mathbb{R}) \\ \frac{\omega'_B}{\omega_B} & B \in \text{Gl}_2^-(\mathbb{R}) \end{cases}.$$

*Remarque 1.3.2.* On a  $h \circ \beta = \text{id}_{\mathbb{H}^\circ}$  et  $\beta|_{\text{Gl}_2^+(\mathbb{R})} \circ h = \text{id}_{\text{Gl}_2^+(\mathbb{R})}$ .

Par pull-back, on obtient une famille de surfaces de Riemann  $\beta^*(\mathcal{E}_{\mathbb{H}^\circ}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathbb{H}^\circ}}, p_{\mathbb{H}^\circ})$  au-dessus de  $\text{Gl}_2(\mathbb{R})$ . On voit que  $(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}}, p_{\mathcal{E}})$  est isomorphe à  $\beta^*(\mathcal{E}_{\mathbb{H}^\circ}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathbb{H}^\circ}}, p_{\mathbb{H}^\circ})$  par l'isomorphisme

$$\mathcal{E} \longrightarrow \beta^*\mathcal{E}_{\mathbb{H}^\circ}$$

$$(B, x) \longmapsto \begin{cases} (B, \frac{x}{\omega_B}) & B \in \text{Gl}_2^+(\mathbb{R}) \\ (B, \frac{x}{\omega'_B}) & B \in \text{Gl}_2^-(\mathbb{R}) \end{cases}$$

## Chapitre 2

# Familles de surfaces de Klein

### Notations

On note  $\Sigma = \{Id, \sigma\}$  le groupe de Galois  $Gal(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ . Si  $\Sigma$  agit sur un espace  $\mathcal{E}$ , on notera  $\check{\mathcal{E}} = \mathcal{E}/\Sigma$  l'espace quotient (sauf s'il y a risque de confusion) et  $\Pi_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow \check{\mathcal{E}}$ , l'application quotient (ou simplement  $\Pi$  s'il n'y a pas de confusion possible).

Si  $\Sigma$  agit sur deux espaces  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$ , un morphisme  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  sera dit *équivariant* si  $\varphi \circ \sigma = \sigma' \circ \varphi$ . Il induit alors un morphisme  $\check{\varphi} : \check{\mathcal{E}} \rightarrow \check{\mathcal{E}'}$  tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{E}' \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi' \\ \check{\mathcal{E}} & \xrightarrow{\check{\varphi}} & \check{\mathcal{E}'} \end{array}$$

Dans le cas particulier où  $\mathcal{E} = \mathbb{C}$ , on a une action de  $\Sigma$  par conjugaison complexe. On notera

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \bar{z}. \end{aligned}$$

et  $\mathbb{H}$  le quotient

$$\mathbb{H} = \check{\mathbb{C}} = \mathbb{C}/\Sigma = \{\{z, \bar{z}\} \mid \text{Im } z \geq 0\}.$$

La section

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \{z, \bar{z}\} &\longmapsto z \end{aligned}$$

du passage au quotient  $\Pi_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$  permet d'identifier  $\mathbb{H}$  avec le demi-plan de Poincaré

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z \geq 0\}$$

et le bord  $\partial\mathbb{H}$  de  $\mathbb{H}$  avec  $\mathbb{R}$ . On notera  $\bar{\mathbb{H}}$  l'image de la section

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{h}} : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \{z, \bar{z}\} &\longmapsto \bar{z} \end{aligned}$$

du passage au quotient  $\Pi_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$ .

Dans tout ce qui suit,  $\mathcal{B}$  désigne une variété topologique localement homéomorphe à  $\mathbb{R}^r$ , On la munira ou bien de son faisceau  $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$  de germes de fonctions continues à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , ou bien de son faisceau  $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$  de germes de fonctions continues à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Les surfaces de Riemann peuvent être définies comme des variétés analytiques ou bien comme espaces localement annelés. De même, les surfaces de Klein, traditionnellement définies en tant que variétés dianalytiques, vont pouvoir être définies comme espaces localement annelés (voir [Hui02]). C'est cette approche que nous allons utiliser pour définir les familles continues de surfaces de Klein.

La définition des familles de surfaces de Klein suit le même processus que la définition des familles de surfaces de Riemann. Ainsi, de même que le plan complexe au-dessus de  $\mathcal{B}$  sert de modèle local aux familles de surfaces de Riemann, le demi-plan de Klein au-dessus de  $\mathcal{B}$ , obtenu comme quotient du plan complexe pour l'action de  $\Sigma$  par conjugaison complexe, servira de modèle local aux familles de surfaces de Klein.

## 2.1 Actions de $\Sigma$

### 2.1.1 Sur le plan complexe au-dessus de $\mathcal{B}$

Le groupe de Galois  $\Sigma$  agit sur  $\mathcal{B} \times \mathbb{C}$  en posant pour tout  $(b, z) \in \mathcal{B} \times \mathbb{C}$

$$\sigma \cdot (b, z) = (b, \bar{z}).$$

Le quotient  $(\mathcal{B} \times \mathbb{C})/\Sigma$  n'est autre que l'espace topologique  $\mathcal{B} \times \mathbb{H}$ . On note

$$\Pi_{\mathbb{C}} : \mathcal{B} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathbb{H}$$

l'application continue de passage au quotient.

On obtient alors une action sur le plan complexe  $(\mathcal{B} \times \mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}})$  au-dessus de  $\mathcal{B}$  donnée pour tout ouvert  $U \in \mathcal{B} \times \mathbb{C}$  et toute section  $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}(U)$  par

$$\begin{aligned} \sigma \cdot f : U &\longrightarrow \mathbb{C}. \\ (b, z) &\longmapsto \overline{f(b, \bar{z})} \end{aligned}$$

On a  $\sigma \cdot f \in \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}(\sigma \cdot U)$ .

**Définition 2.1.1 (Demi-plan de Klein au-dessus de  $\mathcal{B}$ ).** Le *demi-plan de Klein au-dessus de  $\mathcal{B}$*  est l'espace localement annelé :

$$(\mathcal{B} \times \mathbb{H}, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{H}}) = \left( (\mathcal{B} \times \mathbb{C})/\Sigma, (\Pi_{\mathbb{C}*} \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}})^{\Sigma} \right).$$

La projection

$$\begin{aligned} \text{pr}_1 : (\mathcal{B} \times \mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}) &\longrightarrow (\mathcal{B}, \mathcal{C}_{\mathcal{B}}) \\ (b, z) &\longmapsto b \end{aligned}$$

est un morphisme d'espaces localement annelés qui respecte la structure de  $\mathbb{C}$ -algèbre sur les faisceaux. Par passage au quotient, il induit un morphisme d'espaces localement annelés

$$\begin{aligned} \text{pr}_1 : (\mathcal{B} \times \mathbb{H}, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{H}}) &\longrightarrow (\mathcal{B}, \mathcal{R}_{\mathcal{B}}) \\ (b, z) &\longmapsto b \end{aligned}$$

qui respecte la structure de  $\mathbb{R}$ -algèbre des faisceaux.

Soit  $W \subseteq \mathcal{B} \times \mathbb{C}$  un ouvert invariant pour l'action de  $\Sigma$ . Alors  $\Sigma$  agit de façon naturelle sur  $\text{Hom}(W, \mathcal{B} \times \mathbb{C})$  par conjugaison en posant pour tout  $F \in \text{Hom}(W, \mathcal{B} \times \mathbb{C})$

$$\sigma \cdot F = \sigma_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}} \circ F \circ \sigma_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}} : W \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathbb{C}.$$

Comme précédemment, il agit aussi sur  $\mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}(W)$ . La proposition suivante précise alors la proposition 1.1.5.

**Proposition 2.1.1.** *Pour tout ouvert  $W \subseteq \mathcal{B} \times \mathbb{C}$  tel que  $W = \sigma(W)$ , la bijection*

$$\begin{aligned} \text{Hom}(W, \mathcal{B} \times \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}(W) \\ F &\longmapsto F^\sharp(\text{pr}_2), \end{aligned}$$

*est équivariante pour l'action de  $\Sigma$  sur  $\text{Hom}(W, \mathcal{B} \times \mathbb{C})$  et  $\mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}(W)$ . En particulier, elle fait correspondre sections invariantes pour l'action de  $\Sigma$  et morphismes équivariants.*

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate de la proposition 1.1.5 et des définitions de l'action de  $\Sigma$  sur  $\text{Hom}(W, \mathcal{B} \times \mathbb{C})$  et  $\mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}(W)$ .  $\square$

## 2.1.2 Sur les familles de surfaces de Riemann

**Définition 2.1.2 (Faisceau et famille de surfaces de Riemann conjugués).** Soit  $(X, \mathcal{O}_X)$  une surface de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}$ . Le *faisceau conjugué*  $\overline{\mathcal{O}}_X$  de  $\mathcal{O}_X$  est le faisceau défini sur tout ouvert  $U$  de  $X$  par

$$\overline{\mathcal{O}}_X(U) = \overline{\mathcal{O}_X(U)} = \{\bar{f} : U \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \in \mathcal{O}_X(U)\}.$$

Il fait de  $(X, \overline{\mathcal{O}}_X, p)$  une famille de surfaces de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}$  appelée *conjuguée* de  $(X, \mathcal{O}_X, p)$ . Le conjugué du plan complexe au-dessus de  $\mathcal{B}$  est appelé *plan complexe conjugué au-dessus de  $\mathcal{B}$* .

Au niveau des morphismes, on obtient la proposition suivante.

**Proposition 2.1.2.** *Soit  $(X, \mathcal{O}_X, p)$  et  $(Y, \mathcal{O}_Y, q)$  deux familles de surfaces de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}$ . Si*

$$F : (X, \mathcal{O}_X, p) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y, q)$$

*est un morphisme de familles de surfaces de Riemann, alors*

$$F : (X, \overline{\mathcal{O}}_X, p) \longrightarrow (Y, \overline{\mathcal{O}}_Y, q)$$

*est un morphisme de familles de surfaces de Riemann.*

*Démonstration.* Comme  $q \circ F = p$ , il suffit de vérifier que  $F : (X, \overline{\mathcal{O}}_X) \rightarrow (Y, \overline{\mathcal{O}}_Y)$  est un morphisme d'espaces localement annelés.

Soit  $V \subseteq Y$  un ouvert et  $f \in \overline{\mathcal{O}}_Y(V)$ . Alors  $\bar{f} \in \mathcal{O}_Y(V)$  et comme  $F$  est un morphisme d'espaces localement annelés, on a

$$\overline{f \circ F|_{F^{-1}(V)}} = \bar{f} \circ F|_{F^{-1}(V)} \in \mathcal{O}_X(F^{-1}(V)).$$

Donc  $f \circ F \in \overline{\mathcal{O}}_X(F^{-1}(V))$ .  $\square$

*Remarque 2.1.1.*

$$\sigma_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}} : (\mathcal{B} \times \mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}) \longrightarrow (\mathcal{B} \times \mathbb{C}, \overline{\mathcal{O}}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}})$$

est un isomorphisme de familles de surface de Riemann.

**Définition 2.1.3 (Action de  $\Sigma$ ).** Une *action de Klein* de  $\Sigma$  sur une famille de surfaces de Riemann  $(X, \mathcal{O}_X, p)$  au-dessus de  $\mathcal{B}$  est la donnée d'une involution continue

$$\sigma_X : X \longrightarrow X$$

telle que dans la définition 1.1.3, on puisse choisir les isomorphismes de structure

$$\varphi : (U, \mathcal{O}_X|_U) \xrightarrow{\sim} (V, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}|_V)$$

équivariants.

Par la suite, sauf précision, toute action de  $\Sigma$  sur une famille de surfaces de Riemann sera supposée être une action de Klein.

**Proposition 2.1.3.** Si  $\sigma_X : X \rightarrow X$  donne une action de  $\Sigma$  sur  $(X, \mathcal{O}_X, p)$ , alors

$$\sigma_X : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (X, \overline{\mathcal{O}}_X)$$

est un isomorphisme de familles de surfaces de Riemann.

*Démonstration.* Cela vient du fait que pour le plan complexe,

$$\sigma_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}} : (\mathcal{B} \times \mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}) \longrightarrow (\mathcal{B} \times \mathbb{C}, \overline{\mathcal{O}}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}})$$

est un isomorphisme de familles de surfaces de Riemann (voir remarque 2.1.1).  $\square$

Par équivariance des morphismes de structure, le quotient  $\check{X} = X/\Sigma$  est une variété topologique localement homéomorphe à  $\mathcal{B} \times \mathbb{H}$ .

$\Sigma$  agit sur le faisceau  $\mathcal{O}_X$  de la façon suivante :

$$\sigma \cdot f = \sigma_{\mathbb{C}} \circ f \circ \sigma_X,$$

pour tout ouvert  $U \subseteq X$  et toute section  $f \in \mathcal{O}_X(U)$ . Comme  $f \circ \sigma_X \in \overline{\mathcal{O}}_X(\sigma_X(U))$  (proposition 2.1.3), on a  $\sigma_{\mathbb{C}} \circ f \circ \sigma_X \in \mathcal{O}_X(\sigma_X(U))$ . Ceci permet de construire l'espace localement annelé :

$$(\check{X}, \check{\mathcal{O}}_X) = \left( X/\Sigma, (\Pi_{X*} \mathcal{O}_X)^{\Sigma} \right).$$

Si  $(X, \mathcal{O}_X, p)$  et  $(Y, \mathcal{O}_Y, q)$  sont deux familles de surfaces de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}$ , un morphisme équivariant

$$f : (X, \mathcal{O}_X, p) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y, q)$$

induit un morphisme d'espace localement annelé

$$\check{f} : \left( X/\Sigma, (\Pi_{X*} \mathcal{O}_X)^{\Sigma} \right) \longrightarrow \left( Y/\Sigma, (\Pi_{Y*} \mathcal{O}_Y)^{\Sigma} \right).$$

## 2.2 Familles de surfaces de Klein.

### 2.2.1 Surfaces de Klein

**Définition 2.2.1 (Famille de surfaces de Klein).** Une famille continue de surfaces de Klein au-dessus de  $\mathcal{B}$  est un morphisme d'espaces localement annelés

$$p : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (\mathcal{B}, \mathcal{R}_{\mathcal{B}}),$$

tel que  $(X, \mathcal{O}_X)$  soit localement isomorphe au demi-plan de Klein au-dessus de  $\mathcal{B}$ , l'isomorphisme local respectant la projection.

En d'autres termes,  $p$  doit vérifier :

- (i)  $(X, \mathcal{O}_X)$  est un espace localement annelé où  $\mathcal{O}_X$  est un faisceau en  $\mathbb{R}$ -algèbres locales,
- (ii)  $p : X \rightarrow \mathcal{B}$  est une fonction continue,
- (iii)  $\forall x \in X, \exists U \ni x$  voisinage ouvert,  $\exists V \subseteq \mathcal{B} \times \mathbb{H}$  ouvert et un isomorphisme

$$\varphi : (U, \mathcal{O}_X|_U) \xrightarrow{\sim} (V, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{H}}|_V)$$

respectant la structure de  $\mathbb{R}$ -algèbres et faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (U, \mathcal{O}_X|_U) & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & (V, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{H}}|_V) \\ & \searrow p & \swarrow p \circ \text{pr}_1 \\ & & (\mathcal{B}, \mathcal{R}_{\mathcal{B}}) \end{array}$$

On parlera aussi de *surface de Klein au-dessus de  $\mathcal{B}$*  qui pourra être notée  $(X, p)$ .

Les isomorphismes

$$\varphi : (U, \mathcal{O}_X|_U) \xrightarrow{\sim} (V, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{H}}|_V)$$

sont appelés *morphismes de structure de Klein*. La variété topologique  $\mathcal{B}$  est la *base de la famille de surfaces de Klein* et le morphisme  $p$  la *projection de la famille sur la base*.

**Proposition 2.2.1.** *Soit  $(X, \mathcal{O}_X, p)$  une surface de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}$  munie d'une action de  $\Sigma$ . Alors*

$$(\check{X}, \check{\mathcal{O}}_X, \check{p}) = \left( X/\Sigma, (\Pi_{X*} \mathcal{O}_X)^\Sigma, \check{p} \right),$$

où  $\check{p}$  est l'application continue obtenue à partir de  $p$  par passage au quotient, est une surface de Klein au-dessus de  $\mathcal{B}$ .

*Démonstration.* Soit  $x \in \check{X}$  et  $\tilde{x} \in X$  tel que  $\Pi_X(\tilde{x}) = x$ . Il existe un voisinage ouvert  $U \subseteq X$  de  $\tilde{x}$  et un isomorphisme

$$\varphi : (U, \mathcal{O}_X|_U) \xrightarrow{\sim} (V, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}|_V)$$

tel que

$$\varphi \circ \sigma_X = \sigma_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}} \circ \varphi.$$

En particulier  $\sigma_X(U) = U$  et  $\sigma_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}(V) = V$ .

Par équivariance,  $\varphi$  induit un homéomorphisme

$$\check{\varphi} : U/\Sigma = \check{U} \subseteq \check{X} \xrightarrow{\sim} V/\Sigma = \check{V} \subseteq \mathcal{B} \times \mathbb{H}.$$

Cet homéomorphisme est un isomorphisme d'espaces localement annelés entre

$$(\check{U}, \check{\mathcal{O}}_X|_{\check{U}}) \quad \text{et} \quad (\check{V}, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{H}}|_{\check{V}}).$$

□

## 2.2.2 Morphismes

**Définition 2.2.2 (Morphisme).** Soit  $(X, \mathcal{O}_X, p)$  et  $(Y, \mathcal{O}_Y, q)$  deux familles de surfaces de Klein au-dessus de  $\mathcal{B}$ . Un *morphisme de familles de surfaces de Klein* ou *morphisme de surfaces de Klein au-dessus de  $\mathcal{B}$*  est un morphisme d'espaces localement annelés

$$f : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{O}_X) & \xrightarrow{f} & (Y, \mathcal{O}_Y) \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & & (\mathcal{B}, \mathcal{R}_{\mathcal{B}}) \end{array}$$

On note  $\text{Hom}(X, Y)$  l'ensemble des morphismes de surfaces de Klein de  $(X, \mathcal{O}_X)$  dans  $(Y, \mathcal{O}_Y)$ .

**Proposition 2.2.2.** *Soit  $(X, \mathcal{O}_X, p)$  et  $(Y, \mathcal{O}_Y, q)$  deux familles de surfaces de Riemann munies chacune d'une action de  $\Sigma$ . Un morphisme de familles de surfaces de Riemann*

$$f : (X, \mathcal{O}_X, p) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y, q)$$

*équivariant induit un morphisme*

$$\check{f} : (\check{X}, \check{\mathcal{O}}_X, \check{p}) = \left( X/\Sigma, (\Pi_{X*} \mathcal{O}_X)^\Sigma, \check{p} \right) \longrightarrow (\check{Y}, \check{\mathcal{O}}_Y, \check{q}) = \left( Y/\Sigma, (\Pi_{Y*} \mathcal{O}_Y)^\Sigma, \check{q} \right)$$

*qui est un morphisme de surfaces de Klein au-dessus de  $\mathcal{B}$ .*

*Démonstration.* Par passage au quotient, le morphisme  $f$  induit un morphisme d'espaces localement annelés

$$\check{f} : (\check{X}, \check{\mathcal{O}}_X) \longrightarrow (\check{Y}, \check{\mathcal{O}}_Y).$$

Celui-ci vérifie

$$\check{q} \circ \check{f} = \check{p}$$

puisque

$$p = p \circ \sigma_X = q \circ f \circ \sigma_X = q \circ \sigma_Y \circ f = q \circ f.$$

□

## 2.3 Complexifié d'une famille de surfaces de Klein

Nous avons vu (propositions 2.2.1 et 2.2.2) que les familles de surfaces de Klein et leurs morphismes pouvaient être obtenus en utilisant une action de  $\Sigma$  sur des familles de surfaces de Riemann. Le but de cette section est de montrer que toute famille de surfaces de Klein et tout morphisme de familles de surfaces de Klein provient d'une telle action.

### 2.3.1 Au niveau des plans complexes et demi-plans de Klein

*Remarque 2.3.1.* Par définition,  $\mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{H}} = (\Pi_{\mathbb{C}*} \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}})^{\Sigma}$ . Réciproquement, on a

$$\mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \Pi_{\mathbb{C}}^{-1} \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{H}}.$$

**Proposition 2.3.1.** *Soit  $U$  un ouvert de  $\mathcal{B} \times \mathbb{C}$  tel que  $U \cap \sigma_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}(U) = \emptyset$  et*

$$F : (U, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}|_U) \longrightarrow (\mathcal{B} \times \mathbb{H}, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{H}})$$

*un morphisme d'espaces localement annelés tel que  $\text{pr}_1 \circ F = \text{pr}_1$ . Alors il existe un unique morphisme de familles de surfaces de Riemann*

$$\hat{F} : (U, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}|_U) \longrightarrow (\mathcal{B} \times \mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}})$$

*tel que  $F = \Pi_{\mathbb{C}} \circ \hat{F}$ .*

*Démonstration.* Comme  $\text{pr}_2 \in \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{H}}$  et  $F$  est un morphisme, alors  $F^{\sharp}(\text{pr}_2)$  est une section de  $\mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}$ . D'après la proposition 1.1.5, cette section correspond à un unique morphisme

$$\hat{F} : (U, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}|_U) \longrightarrow (\mathcal{B} \times \mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}).$$

Par construction, ce morphisme vérifie  $F = \Pi_{\mathbb{C}} \circ \hat{F}$ .

Supposons qu'il existe un autre morphisme  $F'$  vérifiant  $F = \Pi_{\mathbb{C}} \circ F'$ . Alors si  $F'$  est distinct de  $\hat{F}$ , il existe un point  $(b_0, z_0) \in U \setminus (\mathcal{B} \times \mathbb{R})$  tel que  $\hat{F}(b_0, z_0) = F' \circ \sigma_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}(b_0, z_0)$ . Par continuité, il existe un voisinage  $U'$  de  $(b_0, z_0)$  sur lequel  $\hat{F} = F' \circ \sigma_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}$  ce qui est impossible. □

**Corollaire 2.3.2.** *Soit  $U$  un ouvert de  $\mathcal{B} \times \mathbb{H}$  et*

$$F : (U, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{H}}|_U) \longrightarrow (\mathcal{B} \times \mathbb{H}, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{H}})$$

*un morphisme de surfaces de Klein au-dessus de  $\mathcal{B}$ . Il existe un unique morphisme équivariant de surfaces de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}$*

$$\tilde{F} : (\Pi_{\mathbb{C}}^{-1}(U), \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}|_{\Pi_{\mathbb{C}}^{-1}(U)}) \longrightarrow (\mathcal{B} \times \mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}})$$

*faisant commuter le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \Pi_{\mathbb{C}}^{-1}(U) & \xrightarrow{\tilde{F}} & \mathcal{B} \times \mathbb{C} \\ \Pi_{\mathbb{C}} \downarrow & & \downarrow \Pi_{\mathbb{C}} \\ U & \xrightarrow{F} & \mathcal{B} \times \mathbb{H}. \end{array} \quad (2.1)$$

*Démonstration.* On applique la proposition 2.3.1 au morphisme

$$F \circ \Pi_{\mathbb{C}} : \Pi_{\mathbb{C}}^{-1}(U) \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathbb{H}.$$

On obtient un unique morphisme

$$\tilde{F} : \Pi_{\mathbb{C}}^{-1}(U) \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathbb{C}$$

faisant commuter le diagramme 2.1. En particulier, le morphisme  $\tilde{F}$  doit être équivariant.  $\square$

Comme la proposition 1.1.5 dans le cas des familles de surfaces de Riemann, la proposition suivante fait le lien entre les sections globales sur un ouvert  $U \subseteq \mathcal{B} \times \mathbb{H}$  et les morphismes de  $U$  dans  $\mathcal{B} \times \mathbb{H}$ .

**Proposition 2.3.3.** *Pour tout ouvert  $W \subseteq \mathcal{B} \times \mathbb{H}$ , l'application*

$$\begin{aligned} \text{Hom}(W, \mathcal{B} \times \mathbb{H}) &\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{H}}(W) \\ F &\longmapsto F^{\sharp}(\text{pr}_2) \end{aligned}$$

*est une bijection.*

*Démonstration.* Le corollaire 2.3.2 donne une bijection entre  $\text{Hom}(W, \mathcal{B} \times \mathbb{C})$  et l'ensemble des éléments équivariants de  $\text{Hom}(\Pi_{\mathbb{C}}^{-1}(W), \mathcal{B} \times \mathbb{C})$ . D'autre part, la proposition 2.1.1 donne une bijection entre ce dernier et les sections de  $\mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}(\Pi_{\mathbb{C}}^{-1}(W))$  invariantes pour l'action de  $\Sigma$ , c'est-à-dire  $\mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{H}}(W)$ .  $\square$

### 2.3.2 Pour les familles de surfaces de Klein

**Proposition 2.3.4.** *Soit  $X$  une surface de Klein au-dessus de  $\mathcal{B}$ . Il existe une surface de Riemann  $\tilde{X}$  au-dessus de  $\mathcal{B}$  et un morphisme*

$$\Pi : \tilde{X} \longrightarrow X$$

*d'espaces localement annelés au-dessus de  $\mathcal{B}$  et une action de  $\Sigma$  sur  $\tilde{X}$  tels que  $\Pi$  soit le morphisme quotient pour l'action de  $\Sigma$ . De plus, si*

$$\rho : Y \longrightarrow X$$

*est un autre morphisme d'une surface de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}$  dans  $X$ , alors il existe un unique morphisme de surfaces de Riemann*

$$f : Y \longrightarrow \tilde{X}$$

*au-dessus de  $\mathcal{B}$  tel que  $\Pi \circ f = \rho$ .*

*Démonstration.* Il existe des morphismes de structure de Klein

$$\varphi_i : (U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i}) \xrightarrow{\sim} (V_i, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{H}}|_{V_i}),$$

avec  $i \in I$ , tels que  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  soit un recouvrement ouvert de  $X$ . Pour tout  $i, j \in I$ , on note

$$\begin{aligned} U_{i,j} &= U_{j,i} = U_i \cap U_j & V_{i,j} &= \varphi_i(U_{i,j}) \\ \tilde{V}_i &= \Pi_{\mathbb{C}}^{-1}(\tilde{V}_i) & \tilde{V}_{i,j} &= \Pi_{\mathbb{C}}^{-1}(V_{i,j}) \end{aligned}$$

D'après le corollaire 2.3.2, pour tout  $i, j \in I$ , l'isomorphisme de familles de surfaces de Klein

$$\varphi_{i,j} = \varphi_j \circ (\varphi_i|_{U_{i,j}})^{-1} : (V_{i,j}, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{H}}|_{V_{i,j}}) \xrightarrow{\sim} (V_{j,i}, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{H}}|_{V_{j,i}})$$

se relève de façon unique en un isomorphisme équivariant de familles de surfaces de Riemann

$$\tilde{\varphi}_{i,j} : (\tilde{V}_{i,j}, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}|_{\tilde{V}_{i,j}}) \xrightarrow{\sim} (\tilde{V}_{j,i}, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}|_{\tilde{V}_{j,i}}).$$



On note  $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}}_X)$  l'espace localement annelé obtenu en recollant les espaces localement annelés  $(\tilde{V}_i, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}|_{\tilde{V}_i})$  grâce aux isomorphismes  $\tilde{\varphi}_{i,j}$ . Les projections

$$\begin{aligned} \text{pr}_1|_{\tilde{V}_i} : \tilde{V}_i &\longrightarrow \mathcal{B} \\ (b, z) &\longmapsto b \end{aligned}$$

se recollent alors en un morphisme d'espaces localement annelés

$$\tilde{p} : (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}}_X) \longrightarrow (\mathcal{B}, \mathcal{C}_{\mathcal{B}}).$$

On obtient ainsi une famille de surfaces de Riemann  $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}}_X, \tilde{p})$  au-dessus de  $\mathcal{B}$  qui vient avec une action de  $\Sigma$  donnée pour tout  $i \in I$  sur  $\tilde{U}_i$  par  $\sigma_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}|_{\tilde{U}_i}$ . Par construction, le quotient de  $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}}_X, \tilde{p})$  pour cette action est  $(X, \mathcal{O}_X, p)$

Soit  $y \in Y$  et  $x = f(y) \in X$ . Il existe des morphismes de structure de Riemann et de Klein

$$\psi : (V, \mathcal{O}_Y|_V) \xrightarrow{\sim} (V', \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}|_{V'}) \quad \text{et} \quad \varphi : (U, \mathcal{O}_X|_U) \xrightarrow{\sim} (U', \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}|_{U'})$$

au voisinage de  $y$  et  $x$  respectivement. On peut supposer que  $V' \cap \sigma_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}(V') = \emptyset$ . Alors, d'après le corollaire 2.3.2, il existe un unique morphisme

$$F'_y : (V', \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}|_{V'}) \longrightarrow (\Pi_{\mathbb{C}}^{-1}(U'), \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}|_{\Pi_{\mathbb{C}}^{-1}(U')})$$

tel que  $\Pi_{\mathbb{C}} \circ F'_y = \varphi \circ f \circ \psi^{-1}$ . Celui-ci donne un morphisme

$$F_y : (V, \mathcal{O}_Y|_V) \longrightarrow (\Pi_X^{-1}(U), \tilde{\mathcal{O}}_X|_{\Pi_X^{-1}(U)}).$$

Par unicité de  $F'_y$ , celui-ci ne dépend pas du choix des morphismes de structure  $\varphi$  et  $\psi$ . Le morphisme  $F$  cherché vient alors du recollement des morphismes locaux  $F_y$ .  $\square$

**Définition 2.3.1 (Complexifié d'une famille de surfaces de Klein).** Le *complexifié d'une famille de surfaces de Klein*  $(X, \mathcal{O}_X, p)$  est un quadruplet  $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}}_X, \tilde{p}, \sigma_X)$ , où  $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}}_X, \tilde{p})$  est la surface de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}$  de la proposition 2.3.4 et  $\sigma_X$  donne l'action de  $\Sigma$  sur  $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}}_X, \tilde{p})$  pour laquelle on obtient  $(X, \mathcal{O}_X, p)$  par passage au quotient.

*Remarque 2.3.2.* Comme dans le cas du plan complexe et du demi-plan de Klein au-dessus de  $\mathcal{B}$ , le faisceau  $\tilde{\mathcal{O}}_X$  s'obtient à partir du faisceau  $\mathcal{O}_X$  comme

$$\tilde{\mathcal{O}}_X = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \Pi^{-1} \mathcal{O}_X.$$

**Corollaire 2.3.5.** *Pour tout morphisme de familles de surfaces de Klein*

$$f : (X, \mathcal{O}_X, p) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y, q)$$

*il existe un unique morphisme équivariant*

$$\tilde{f} : (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}}_X, \tilde{p}) \longrightarrow (\tilde{Y}, \tilde{\mathcal{O}}_Y, \tilde{q})$$

*faisant commuter le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{Y} \\ \Pi_X \downarrow & & \downarrow \Pi_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer la propriété universelle du complexifié au morphisme

$$f \circ \Pi_X : (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y).$$

$\square$

**Définition 2.3.2 (Morphisme complexifié).** Le morphisme de familles de surfaces de Riemann

$$\tilde{f} : (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}}_X, \tilde{p}) \longrightarrow (\tilde{Y}, \tilde{\mathcal{O}}_Y, \tilde{q})$$

entre les complexifiés obtenus dans le corollaire 2.3.5 précédent est le *morphisme complexifié* du morphisme de familles de surfaces de Klein

$$f : (X, \mathcal{O}_X, p) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y, q).$$

Les liens entre complexifié d'une famille de surfaces de Klein et quotient d'une famille de surfaces de Riemann muni d'une action de  $\Sigma$  permettent d'obtenir une équivalence entre la catégorie des familles de surfaces de Klein au-dessus d'un espace de  $\mathcal{B}$  et celle des familles de surfaces de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}$  munies d'une action de  $\Sigma$  avec les morphismes équivariants. Ceci permet en particulier de voir toute surface de Klein comme une famille de surface de Klein au-dessus de  $(*, \mathbb{R})$ .

### 2.3.3 Application pour le pull-back

On pourrait définir le pull-back d'une famille de surfaces de Klein de manière analogue au pull-back d'une famille de surfaces de Riemann. Alors, le pull-back du complexifié s'identifie au complexifié du pull-back. Ainsi, on peut utiliser la complexification pour définir le pull-back d'une famille de surfaces de Klein comme le quotient par  $\Sigma$  du pull-back de son complexifié.

Comme dans le cas des familles de surfaces de Riemann, cela permet de définir des *familles constantes de surfaces de Klein*.

**Exemple 2.3.1.** Le demi-plan au-dessus de  $\mathcal{B}$  est la famille de surfaces de Klein constante engendrée par  $\mathbb{H}$  au-dessus de  $\mathcal{B}$ .



# Chapitre 3

## Petit détour topologique

Dans le chapitre 4 nous démontrons un théorème d'existence de Riemann dans le cas des familles continues de surfaces de Riemann et des familles continues de surfaces de Klein. Pour cela, nous avons besoin des notions de famille continue de surfaces topologiques et famille continue de surfaces à bord respectivement, ainsi que de revêtement ramifié de telles familles.

Dans ce chapitre  $\mathcal{B}$  désignera une variété topologique localement homéomorphe à  $\mathbb{R}^r$ .

### 3.1 Famille de surfaces topologiques

#### 3.1.1 Les familles

**Définition 3.1.1 (Plan topologique au-dessus de  $\mathcal{B}$ ).** Le plan topologique au-dessus de  $\mathcal{B}$  est l'espace topologique  $\mathcal{B} \times \mathbb{C}$  muni de la projection sur le premier facteur,

$$\begin{aligned} \text{pr}_1 : \mathcal{B} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathcal{B} \\ (b, z) &\longmapsto b \end{aligned}$$

**Définitions 3.1.2 (Famille de surfaces topologiques).** Une famille de surfaces topologiques au-dessus de  $\mathcal{B}$  est une application continue

$$p : X \longrightarrow \mathcal{B}$$

telle que  $X$  soit une variété topologique localement homéomorphe au plan topologique au-dessus de  $\mathcal{B}$ , l'homéomorphisme local respectant la projection. En d'autres termes,  $p$  doit vérifier :

$\forall x \in X, \exists U \ni x$  voisinage ouvert,  $\exists V \subseteq \mathcal{B} \times \mathbb{C}$  ouvert et un homéomorphisme  $\varphi : U \xrightarrow{\sim} V$  faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & V \\ & \searrow p & \swarrow \text{pr}_1 \\ & & \mathcal{B} \end{array}$$

On parlera aussi de *surface topologique au-dessus de  $\mathcal{B}$*  qui pourra être notée  $(X, p)$ .

On appelle les homéomorphismes

$$\varphi : U \xrightarrow{\sim} V$$

des *morphismes de structure topologique*. La variété topologique  $\mathcal{B}$  est appelé *base de la famille topologique* et l'application continue  $p$  la *projection sur la base*.

**Exemple 3.1.1.** Si  $(X, \mathcal{O}_X, p)$  est une famille de surfaces de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}$ , alors

$$p : X \longrightarrow \mathcal{B}$$

est une famille de surfaces topologiques au-dessus de  $\mathcal{B}$

**Définition 3.1.3 (Morphisme de familles de surfaces topologiques).** Soit  $(X, p)$  et  $(Y, q)$  deux surfaces topologiques au-dessus de  $\mathcal{B}$ . Un *morphisme de familles de surfaces topologiques* ou *morphisme de surfaces topologiques au-dessus de  $\mathcal{B}$*  est une application continue

$$f : X \longrightarrow Y$$

faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & & \mathcal{B} \end{array}$$

**Exemple 3.1.2.** Tout morphisme de familles de surfaces de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}$  est un morphisme de surfaces topologiques au-dessus de  $\mathcal{B}$ .

### 3.1.2 Orientation relative

*Les surfaces de Riemann sont des surfaces orientables. Par contre, l'espace total d'une famille continue de surfaces de Riemann au-dessus d'une variété topologique  $\mathcal{B}$  ne l'est pas forcément. Par exemple si  $\mathcal{B}$  n'est pas orientable, le plan complexe au-dessus de  $\mathcal{B}$  ne l'est pas non plus. Dans cette section, nous introduisons la notion de famille de surfaces relativement orientable, dont les familles continues de surfaces de Riemann sont un exemple.*

Si  $V \subseteq \mathcal{B} \times \mathbb{C}$  est un ouvert, pour tout  $b \in \text{pr}_1(V) \subseteq \mathcal{B}$ , on note  $V_b \subseteq \mathbb{C}$  l'ouvert

$$V_b = \{z \in \mathbb{C} \mid (b, z) \in V\} \simeq \text{pr}_1^{-1}(b) \cap V.$$

**Définition 3.1.4 (Ensemble relativement connexe).** Soit  $\mathcal{E}$  un sous-ensemble d'une variété topologique  $X$  et  $f : X \rightarrow Y$  une application continue. On dira que  $\mathcal{E}$  est *relativement connexe par rapport à  $f$*  si pour tout  $y \in Y$  l'ensemble  $f^{-1}(y) \cap \mathcal{E}$  est connexe.

Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur l'application  $f$ , on parlera de *sous-ensemble connexe relativement à  $Y$* .

**Définition 3.1.5.** Soit  $V$  et  $V'$  des ouverts de  $\mathcal{B} \times \mathbb{C}$ . Un isomorphisme local

$$f : (V, \text{pr}_1) \longrightarrow (V', \text{pr}_1)$$

de familles de surfaces topologiques au-dessus de  $\mathcal{B}$  *préserve (resp. inverse) l'orientation relative de  $\mathcal{B} \times \mathbb{C}$*  si pour tout  $b \in \text{pr}_1(V) = \text{pr}_1(V')$  l'homéomorphisme local  $f_b$  préserve (resp. inverse) l'orientation naturelle de  $\mathbb{C}$ .

*Remarque 3.1.1.* Soit  $V$  et  $V'$  des ouverts de  $\mathcal{B} \times \mathbb{C}$  tels que  $V$  soit connexe et relativement connexe par rapport à  $\text{pr}_1$  et

$$f : (V, \text{pr}_1) \longrightarrow (V', \text{pr}_1)$$

un isomorphisme local de familles de surfaces topologiques au-dessus de  $\mathcal{B}$ . Alors  $f$  préserve l'orientation relative si et seulement si il existe  $b_0 \in \text{pr}_1(V) = \text{pr}_1(V')$  tel que l'homéomorphisme  $f_{b_0}$  préserve l'orientation naturelle de  $\mathbb{C}$ .

**Définition 3.1.6 (Famille relativement orientable, orientation relative).** Une famille de surfaces topologiques  $(X, p)$  au-dessus de  $\mathcal{B}$  est *relativement orientable* si on peut choisir les homéomorphismes de structure

$$\varphi_U : U \xrightarrow{\sim} V,$$

où  $U \subseteq X$  et  $V \subseteq \mathcal{B} \times \mathbb{C}$ , de sorte que les isomorphismes

$$\varphi_{U_2} \circ (\varphi_{U_1}|_{U_1 \cap U_2})^{-1} : \varphi_{U_1}(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\sim} \varphi_{U_2}(U_1 \cap U_2)$$

préservent l'orientation relative.

Une *orientation relative* pour une famille de surfaces relativement orientable est la donnée d'homéomorphismes de structure comme précédemment. On dit alors que la famille de surfaces est *relativement orientée*, les homéomorphismes de structure étant appelés *homéomorphismes d'orientation*.

**Définition 3.1.7.** Soit un isomorphisme local

$$f : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$$

entre familles de surfaces au-dessus de  $\mathcal{B}$  relativement orientées. On dira que  $f$  *préserve (resp. inverse) l'orientation relative* si pour tous morphismes d'orientation

$$\varphi : U \xrightarrow{\sim} V \quad \text{et} \quad \psi : U' \xrightarrow{\sim} V',$$

avec  $U \subseteq X$ ,  $V \subseteq \mathcal{B} \times \mathbb{C}$ ,  $U' \subseteq Y$  et  $V' \subseteq \mathcal{B} \times \mathbb{C}$ , l'isomorphisme local  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  de familles de surfaces au-dessus de  $\mathcal{B}$  préserve (resp. inverse) l'orientation relative partout où il est défini.

**Exemples 3.1.3.** Un isomorphisme de surfaces de Riemann entre ouverts du plan complexe au-dessus de  $\mathcal{B}$  préserve l'orientation relative. On en déduit qu'une famille continue de surfaces de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}$  est une famille de surfaces au-dessus de  $\mathcal{B}$  relativement orientable et qu'un isomorphisme local de surfaces de Riemann préserve l'orientation relative induite par les morphismes de structure de Riemann.

## 3.2 Famille de surfaces à bord

### 3.2.1 Les familles

**Définitions 3.2.1 (Demi-plan topologique au-dessus de  $\mathcal{B}$ ).** Le *demi-plan topologique au-dessus de  $\mathcal{B}$*  est l'espace topologique  $\mathcal{B} \times \mathbb{H}$  muni de la projection sur le premier facteur :

$$\begin{aligned} \text{pr}_1 : \mathcal{B} \times \mathbb{H} &\longrightarrow \mathcal{B}. \\ (b, z) &\longmapsto b \end{aligned}$$

Le *bord du demi-plan topologique au-dessus de  $\mathcal{B}$*  est

$$\partial(\mathcal{B} \times \mathbb{H}) = \{(b, z) \in \mathcal{B} \times \mathbb{H} \mid z \in \mathbb{R}\} \simeq \mathcal{B} \times \mathbb{R}.$$

L'*intérieur du demi-plan topologique au-dessus de  $\mathcal{B}$*  est le complémentaire du bord du demi-plan topologique au-dessus de  $\mathcal{B}$ . En d'autres termes

$$\text{Int}(\mathcal{B} \times \mathbb{H}) = \{(b, z) \in \mathcal{B} \times \mathbb{H} \mid \text{Im } z > 0\}.$$

**Définitions 3.2.2 (Famille de surfaces à bord).** Une *famille de surfaces à bord au-dessus de  $\mathcal{B}$*  est une application continue

$$p : X \longrightarrow \mathcal{B}$$

telle que  $X$  soit une variété à bord localement homéomorphe au demi-plan topologique au-dessus de  $\mathcal{B}$ , l'homéomorphisme local respectant la projection. En d'autres termes,  $p$  doit vérifier :

$\forall x \in X, \exists U \ni x$  voisinage ouvert,  $\exists V \subseteq \mathcal{B} \times \mathbb{H}$  ouvert et un homéomorphisme  $\varphi : U \xrightarrow{\sim} V$  faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & V \\ & \searrow p & \swarrow \text{pr}_1 \\ & \mathcal{B} & \end{array}$$

On parlera aussi de *surface à bord au-dessus de  $\mathcal{B}$*  qui pourra être notée  $(X, p)$ .

La variété topologique  $\mathcal{B}$  est appelée *base de la famille topologique à bord* et l'application continue  $p$  la *projection sur la base*. L'*intérieur de  $X$*  est l'ensemble des points  $x \in X$  admettant un voisinage ouvert homéomorphe à l'intérieur du demi-plan topologique  $\text{Int}(\mathcal{B} \times \mathbb{H})$ . On le note  $\text{Int } X$ . Le *bord de  $X$*  est le complémentaire de l'intérieur de  $X$ , noté  $\partial X$ .

*Remarque 3.2.1.* Une famille de surfaces à bord est une famille de surfaces topologiques si et seulement si son bord est vide.

**Exemple 3.2.1.** Si  $(X, \mathcal{O}_X, p)$  est une famille de surfaces de Klein au-dessus de  $\mathcal{B}$ , alors  $(X, p)$  est une famille de surfaces à bord au-dessus de  $\mathcal{B}$ .

**Définition 3.2.3 (Morphisme de familles de surfaces à bord).** Soit  $(X, p)$  et  $(Y, q)$  deux surfaces à bord au-dessus de  $\mathcal{B}$ . Un *morphisme de familles de surfaces à bord* ou *morphisme de surfaces à bord au-dessus de  $\mathcal{B}$*  est une application continue

$$f : X \longrightarrow Y$$

faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & \mathcal{B} & \end{array}$$

**Exemple 3.2.2.** Un morphisme de familles de surfaces de Klein est un morphisme de familles de surfaces à bord.

**Définition 3.2.4.** Soit  $(X, p)$  une famille de surfaces topologique et  $(Y, q)$  une famille de surfaces à bord au-dessus de  $\mathcal{B}$ . Un morphisme  $f : X \rightarrow Y$  au-dessus de  $\mathcal{B}$ , est *localement isomorphe à  $\Pi_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}$*  si pour tout point  $x$  de  $X$ , il existe des homéomorphismes de structure  $\varphi : U \xrightarrow{\sim} U'$  pour  $X$  au voisinage de  $x$  et  $\psi : V \xrightarrow{\sim} V'$  pour  $Y$  au voisinage de  $y$  tels que

$$f|_U = \psi^{-1} \circ \Pi_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}} \circ \varphi.$$

### 3.2.2 Action de $\Sigma$ sur des familles de surfaces topologiques

Dans cette section, le plan topologique au-dessus de  $\mathcal{B}$  est supposé muni de l'action naturelle de  $\Sigma$  donnée par  $\sigma_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}(b, z) = (b, \bar{z})$ .

**Définition 3.2.5 (Action de  $\Sigma$ ).** Soit  $(X, p)$  une famille de surfaces topologiques au-dessus de  $\mathcal{B}$ . Une *action de  $\Sigma$  sur  $(X, p)$*  est la donnée d'une involution continue

$$\sigma_X : X \longrightarrow X$$

telle que dans la définition 3.1.2, on puisse choisir les homéomorphismes de structure équivariants.

*Remarque 3.2.2.* La projection  $p$  induit une application continue

$$\check{p} : X/\Sigma \longrightarrow \mathcal{B}.$$

**Exemple 3.2.3.** Toute famille continue de surfaces de Riemann munie d'une action de  $\Sigma$  peut être vue comme une famille de surfaces topologiques munie d'une action de  $\Sigma$ .

**Proposition 3.2.1.** *Soit  $(X, p)$  une famille de surfaces topologiques au-dessus de  $\mathcal{B}$  munie d'une action de  $\Sigma$ . Alors, l'application induite*

$$\check{p} : X/\Sigma \longrightarrow \mathcal{B}$$

*est une famille de surfaces à bord dont le bord est l'image des points fixes de  $X$  pour  $\sigma_X$  par l'application quotient*

$$\Pi_X : X \longrightarrow X/\Sigma.$$

*De plus, un morphisme équivariant*

$$f : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$$

*entre famille de surfaces topologiques au-dessus de  $\mathcal{B}$  munies d'une action de  $\Sigma$  induit par passage au quotient une application continue*

$$\check{f} : X/\Sigma \longrightarrow Y/\Sigma$$

*qui est un morphisme de familles de surfaces à bord au-dessus de  $\mathcal{B}$ .*

*Démonstration.* Par équivariance des morphismes de structure, le quotient  $X/\Sigma$  est une variété topologique localement homéomorphe à  $\mathcal{B} \times \mathbb{H}$ . Pour tout morphisme de structure équivariant

$$\varphi : U \xrightarrow{\sim} V,$$

on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 U & \xrightarrow{\varphi} & & \xrightarrow{\sim} & V \\
 \downarrow \Pi_X|_U & \searrow p & & \swarrow \text{pr}_1 & \downarrow \pi_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}|_V \\
 & & \mathcal{B} & & \\
 & \swarrow \check{p} & & \searrow \text{pr}_1 & \\
 U/\Sigma & \xrightarrow{\check{\varphi}} & & \xrightarrow{\sim} & V/\Sigma
 \end{array}$$

où

$$\check{\varphi} : U/\Sigma \xrightarrow{\sim} V/\Sigma$$

est le morphisme induit par équivariance de  $\varphi$ .

Les homéomorphismes  $\check{\varphi}$  font de  $(X/\Sigma, \check{p})$  une famille de surfaces à bord. Le résultat sur les points fixes et le bord est donné par le diagramme commutatif précédent.

Pour les morphismes équivariants, il suffit de montrer que  $\check{p} = \check{q} \circ \check{f}$ . Ceci s'obtient par passage au quotient puisque  $p = q \circ f$ .  $\square$

### 3.2.3 Double d'une famille de surfaces à bord

*Le but de cette section est de montrer une réciproque de la proposition 3.2.1 dans le cas des familles relativement orientables.*

L'application de passage au quotient pour l'action naturelle de  $\Sigma$  sur  $\mathcal{B} \times \mathbb{C}$  est notée

$$\Pi_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}} : \mathcal{B} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathbb{H}.$$

**Lemme 3.2.2.** *Soit  $U$  et  $V$  des ouverts connexes de  $\mathcal{B} \times \mathbb{H}$  qui sont connexes relativement à  $\mathcal{B}$  et un isomorphisme de familles de surfaces à bord*

$$h : (U, \text{pr}_1) \xrightarrow{\sim} (V, \text{pr}_1).$$

*Celui-ci se relève en un unique isomorphisme équivariant de familles de surfaces topologiques*

$$\tilde{h} : \tilde{U} = \Pi_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} \tilde{V} = \Pi_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}^{-1}(V)$$

*préservant l'orientation relative et redonnant  $h$  par passage au quotient.*



*Démonstration.* Comme  $U$  est connexe et que  $\Pi_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}$  est un revêtement double ramifié le long de  $\mathcal{B} \times \mathbb{R}$ , il n'y a que deux façons de relever  $h$  en un homéomorphisme équivariant de  $\tilde{U}$  sur  $\tilde{V}$ . De plus, ces homéomorphismes commutent avec  $\text{pr}_1$ , donc sont des isomorphismes de familles de surfaces topologiques. D'après la section 3.1.2, l'un d'entre eux préserve l'orientation relative alors que l'autre l'inverse.  $\square$

**Proposition 3.2.3.** *Pour toute famille de surfaces à bord  $(X, p)$  au-dessus de  $\mathcal{B}$ , il existe une famille de surfaces topologiques  $(\tilde{X}, \tilde{p})$  au-dessus de  $\mathcal{B}$  qui est relativement orientée, un morphisme de famille de surfaces à bord*

$$\Pi : \tilde{X} \longrightarrow X$$

*et une action de  $\Sigma$  sur  $\tilde{X}$  tels que  $\Pi$  soit le morphisme quotient pour l'action de  $\Sigma$ .*

*De plus, si  $Y$  est une famille de surfaces topologiques relativement orientée et*

$$f : Y \longrightarrow X$$

*est un morphisme au-dessus de  $\mathcal{B}$  qui est localement isomorphe à  $\Pi_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}$ , il existe un unique isomorphisme local*

$$\hat{f} : Y \longrightarrow \tilde{X}$$

*de familles de surfaces topologiques préservant l'orientation relative tel que  $\Pi \circ \hat{f} = f$ .*

*Démonstration.* Soit  $U = (U_i)_{i \in I}$  un recouvrement de  $X$  par des ouverts connexes relativement à  $\mathcal{B}$  et connexes tel qu'il existe, pour tout  $i \in I$ , un isomorphisme de structure

$$\varphi_i : U_i \xrightarrow{\sim} V_i.$$

D'après le lemme 3.2.2, pour tout  $i, j \in I$  tels que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , l'isomorphisme

$$\varphi_{i,j} = \varphi_j \circ \left( \varphi_i|_{U_i \cap U_j} \right)^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\sim} \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

se relève en un unique isomorphisme équivariant

$$\tilde{\varphi}_{i,j} : \Pi_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}^{-1}(\varphi_i(U_i \cap U_j)) \xrightarrow{\sim} \Pi_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}^{-1}(\varphi_j(U_i \cap U_j))$$

qui préserve l'orientation relative et redonne  $\varphi_{i,j}$  par passage au quotient. Ceci permet de recoller les ouverts  $\tilde{V}_i = \Pi_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}^{-1}(V_i)$  et  $\Pi_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}^{-1}(V_j)$ . On obtient ainsi une famille de surface topologique relativement orientée,  $\tilde{X}$ . Elle vient avec un morphisme  $\Pi : \tilde{X} \rightarrow X$ , localement donné sur  $\tilde{V}_i$  par  $\varphi_i^{-1} \circ \Pi_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}|_{\tilde{V}_i}$  qui est le morphisme quotient pour l'action de  $\Sigma$  induite sur  $\tilde{X}$  par l'action de  $\Sigma$  sur les ouverts  $\tilde{V}_i$ .

Soit  $y \in Y$  et  $x = f(y)$ . Il existe un homéomorphisme d'orientation

$$\psi : W \xrightarrow{\sim} Z$$

pour  $Y$  au voisinage de  $y$  et un homéomorphisme de structure

$$\varphi : U \xrightarrow{\sim} V$$

pour  $X$  au voisinage de  $x$ , tels que  $f|_W = \varphi^{-1} \circ \Pi_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}} \circ \psi$ . On peut supposer les ouverts  $W$  et  $U$  connexes relativement à  $\mathcal{B}$  et connexes. Ainsi il existe un homéomorphisme d'orientation pour  $\tilde{X}$

$$\tilde{\varphi} : \Pi^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} \Pi_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}^{-1}(V),$$

tel que  $\varphi^{-1} \circ \Pi_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}} = \Pi \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ . L'isomorphisme local  $\hat{f}_y = \tilde{\varphi}^{-1} \circ \psi$  est le seul qui préserve l'orientation relative et vérifie  $f|_W = \Pi \circ \hat{f}_y$ . Les morphismes  $\hat{f}_y$  se recollent donc en un unique isomorphisme local  $\hat{f}$  préservant l'orientation relative et tel que  $\Pi \circ \hat{f} = f$ .  $\square$

**Définition 3.2.6 (Double).** Le *double d'une famille surface à bord  $(X, p)$*  est le triplet  $(\tilde{X}, \tilde{p}, \sigma_X)$  où  $(\tilde{X}, \tilde{p})$  est la surface relativement orientée au-dessus de  $\mathcal{B}$  de la proposition 3.2.3 et  $\sigma_X$  donne l'action de  $\Sigma$  sur  $(\tilde{X}, \tilde{p})$  pour laquelle on obtient  $(X, p)$  par passage au quotient.

*Remarque 3.2.3.* Le bord  $\partial X$  de la surface à bord  $(X, p)$  au-dessus de  $\mathcal{B}$  est l'image de l'ensemble des points fixes de  $\tilde{X}$  pour  $\sigma_{\tilde{X}}$  par le morphisme de passage au quotient  $\Pi_X : \tilde{X} \rightarrow X$ .

**Corollaire 3.2.4.** *Pour tout morphisme de familles de surfaces à bord*

$$f : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$$

*qui est localement un isomorphisme ou isomorphe à  $\Pi_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}$ , il existe un unique isomorphisme local*

$$\tilde{f} : (\tilde{X}, \tilde{p}) \longrightarrow (\tilde{Y}, \tilde{q})$$

*préservant l'orientation relative et faisant commuter le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{Y} \\ \Pi_X \downarrow & & \downarrow \Pi_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer la proposition 3.2.3 au morphisme

$$f \circ \Pi_X : \tilde{X} \longrightarrow Y.$$

□

**Exemple 3.2.4.** Le plan topologique  $\mathcal{B} \times \mathbb{C}$  est le double du demi-plan topologique au-dessus de  $\mathcal{B}$ . Plus généralement, soit  $(X, \mathcal{O}_X, p)$  une famille de surfaces de Klein au-dessus de  $\mathcal{B}$  et  $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}}_X, \tilde{p}, \sigma_X)$  son complexifié. Alors  $(\tilde{X}, \tilde{p}, \sigma_X)$  est le double de la famille de surfaces à bord  $(X, p)$ .

*Remarque 3.2.4.* Soit  $(X, \mathcal{O}_X, p)$  une famille de surfaces de Klein au-dessus de  $\mathcal{B}$ . Nous aurions pu montrer l'existence du complexifié de cette famille en munissant le double  $(\tilde{X}, \tilde{p}, \sigma_X)$  de  $(X, p)$  du faisceau  $\tilde{\mathcal{O}}_X = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_X$ .



## Chapitre 4

# Revêtements et existence de Riemann en famille

### 4.1 Introduction des revêtements ramifiés en famille

#### 4.1.1 Notions utiles pour la suite

Ici  $f : X \rightarrow Y$  désigne une application continue entre variétés topologiques à bord et  $\mathcal{E} \subseteq X$  un sous-ensemble.

**Définition 4.1.1 (Ensemble relativement discret).** On dira que  $\mathcal{E}$  est relativement discret par rapport à  $f : X \rightarrow Y$  si pour tout  $y \in Y$  l'ensemble  $f^{-1}(y) \cap \mathcal{E}$  est discret. Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur l'application  $f$ , on parlera de *sous-ensemble discret relativement à  $Y$* .

**Exemple 4.1.1.** Les fibres d'un revêtement topologique  $f : X \rightarrow Y$  étant discrètes, tout sous-ensemble de  $X$  est relativement discret par rapport à  $Y$ .

**Définition 4.1.2 (Ensemble relativement fini).** On dira que  $\mathcal{E}$  est relativement fini par rapport à  $f : X \rightarrow Y$  si pour tout  $y \in Y$  l'ensemble  $f^{-1}(y) \cap \mathcal{E}$  est fini. Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur l'application  $f$ , on parlera de *sous-ensemble fini relativement à  $Y$* .

*Remarque 4.1.1.* Un sous-ensemble relativement fini par rapport à  $Y$  est un sous-ensemble relativement discret par rapport à  $Y$ .

*Remarque 4.1.2.* Si  $f$  est propre, alors tout sous ensemble de  $X$  relativement discret par rapport à  $Y$  est relativement fini par rapport à  $Y$ .

**Exemple 4.1.2.** Les fibres d'un revêtement topologiques fini  $f : X \rightarrow Y$  étant finies, tout sous-ensemble de  $X$  est relativement fini par rapport à  $Y$ .

**Définition 4.1.3 (Pliage).** Une application continue de variétés à bord

$$f : X \rightarrow Y$$

est un *pliage* si  $\partial Y \neq \emptyset$  et s'il existe deux ouverts disjoints  $X_1$  et  $X_2$  de  $X$  tels que

- $X \setminus f^{-1}(\partial Y) = X_1 \sqcup X_2$ ,
- pour  $i = 1, 2$ , l'application

$$f|_{\overline{X}_i} : \overline{X}_i = X_i \cup f^{-1}(\partial Y) \xrightarrow{\sim} Y,$$

est un homéomorphisme.

Si  $X$  et  $Y$  sont des variétés à bord, on dira que  $Y$  est un *pliage de  $Y$*  si il existe un pliage

$$f : X \rightarrow Y.$$

*Remarque 4.1.3.* La composée d'un pliage et d'un homéomorphisme est un pliage.

**Exemple 4.1.3.** Considérons l'action du groupe de Galois  $\Sigma = \mathcal{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R})$  sur  $\mathbb{R}^n$  donnée par

$$\begin{aligned} \sigma : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n. \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) \end{aligned}$$

L'application quotient pour cette action,

$$\begin{aligned} \mathfrak{f} : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}_+^n, \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, |x_n|) \end{aligned}$$

est un pliage.

**Définitions 4.1.4 (Revêtement de variétés à bord).** Une application continue

$$f : X \longrightarrow Y$$

entre variétés à bord est un *revêtement de variétés à bord* si pour tout  $y \in Y$ , il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $y$  tel que

$$f^{-1}(V) = \bigsqcup_{i \in I_y} V_i,$$

soit la réunion disjointes d'ouverts  $V_i$  vérifiant que pour tout  $i \in I_y$ ,

$$f|_{V_i} : V_i \longrightarrow V$$

est ou bien un homéomorphisme, ou bien un pliage.

Si pour tout  $y \in Y$ , l'ensemble  $I_y$  est fini, le revêtement  $f$  sera dit *localement fini*. Le revêtement  $f$  est *fini* si l'application  $I : y \mapsto \text{card } I_y$ , où  $\text{card } I_y$  désigne le cardinal de  $I_y$ , est bornée sur  $Y$ .

*Remarque 4.1.4.* Si  $f : X \rightarrow Y$  est un revêtement de variété à bord, alors  $f$  est surjective et la fibre au-dessus de chaque point de  $Y$  est discrète.

*Remarque 4.1.5.* Si  $f : X \rightarrow Y$  est un revêtement de variété à bord, alors

$$f|_{f^{-1}(\text{Int}(Y))} : f^{-1}(\text{Int}(Y)) \longrightarrow \text{Int}(X)$$

est un revêtement topologique.

**Exemple 4.1.4.** Si  $X$  et  $Y$  sont des variétés topologiques, alors  $f : X \rightarrow Y$  est un revêtement de variété à bord si et seulement si  $f$  est un revêtement topologique.

## 4.1.2 Revêtements de familles de surfaces

**Définition 4.1.5 (Revêtement ramifié de familles de surfaces topologiques).** Soit  $(X, p)$  et  $(Y, q)$  des familles de surfaces topologiques au-dessus de  $\mathcal{B}$ . Un morphisme

$$f : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$$

est un *revêtement ramifié au-dessus de  $\mathcal{B}$*  si il existe un sous-ensemble  $S \subseteq Y$  discret relativement à  $\mathcal{B}$  tel que

$$f|_{f^{-1}(Y \setminus S)} : f^{-1}(Y \setminus S) \longrightarrow Y \setminus S$$

soit un revêtement topologique.

*Remarque 4.1.6.* Soit un revêtement ramifié de familles de surfaces topologiques

$$f : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$$

au-dessus de  $\mathcal{B}$ . L'ensemble  $\mathcal{R} \subseteq X$  des points  $x \in X$  en lesquels  $f$  ne réalise pas un homéomorphisme local est le plus petit des sous-ensembles  $X' \subseteq X$  tel que tout point  $x \in X$  a un voisinage  $U$  faisant de

$$f|_{U \setminus X'} : U \setminus X' \longrightarrow f(U \setminus X')$$

un revêtement topologique.

**Définitions 4.1.6 (Lieux de ramification et lieu singulier).** On appelle  $\mathcal{R}$  le *lieu de ramification du revêtement*  $f$ . Son image

$$\mathcal{S} = f(\mathcal{R}) \subseteq S \subset Y$$

est le *lieu singulier du revêtement*  $f$  et le sous-ensemble de  $X$ ,

$$\overline{\mathcal{R}} = f^{-1}(\mathcal{S}) \supseteq \mathcal{R}$$

est le *lieu de ramification étendu du revêtement*  $f$ .

Lorsque  $\mathcal{R} = \emptyset$ , le revêtement est dit *non ramifié*.

*Remarque 4.1.7.* Un revêtement ramifié  $f : (X, p) \rightarrow (Y, q)$  de familles de surfaces topologiques au-dessus de  $\mathcal{B}$  vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tout  $b \in \mathcal{B}$ , l'application continue  $f_b$  induite sur les fibres au-dessus de  $b$  est un revêtement ramifié de surfaces.
2. La fibre  $f^{-1}(y)$  est discrète pour tout  $y \in Y$ .
3. L'application  $f$  est surjective.

**Exemple 4.1.5.** Un morphisme surjectif de familles de surfaces de Riemann est un revêtement ramifié de familles de surfaces topologiques.

**Définition 4.1.7 (Revêtement ramifié de familles de surfaces à bord).** Soit  $(X, p)$  et  $(Y, q)$  des familles de surfaces à bord au-dessus de  $\mathcal{B}$ . Un morphisme

$$f : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$$

est un *revêtement ramifié au-dessus de*  $\mathcal{B}$  si il existe un sous-ensemble  $S \subseteq Y$  discret relativement à  $\mathcal{B}$  tel que

$$f|_{f^{-1}(Y \setminus S)} : f^{-1}(Y \setminus S) \longrightarrow Y \setminus S$$

soit un revêtement de variétés à bord.

*Remarque 4.1.8.* Soit un revêtement ramifié de surfaces à bord au-dessus de  $\mathcal{B}$ ,

$$f : (X, p) \longrightarrow (Y, q).$$

L'ensemble  $\mathcal{R} \subseteq X$  des points  $x \in X$  au voisinage desquels  $f$  ne réalise ni un pliage ni un homéomorphisme est le plus petit des sous-ensembles  $X' \subseteq X$  tel que tout point  $x \in X$  a un voisinage  $U$  faisant de

$$f|_{U \setminus X'} : U \setminus X' \longrightarrow f(U \setminus X')$$

un revêtement de variétés à bord.

De même que pour les revêtements ramifiés de familles de surfaces topologiques, on définit les lieu de ramification, lieu singulier et lieu de ramification étendu. La remarque 4.1.7 reste valable pour les revêtements ramifiés de familles de surfaces à bord.

**Exemple 4.1.6.** Un morphisme de familles de surfaces topologiques est un revêtement ramifié de familles de surfaces topologiques si et seulement si c'est un revêtement ramifié de familles de surfaces à bord.

**Exemple 4.1.7.** Un morphisme surjectif de familles de surfaces de Klein est un revêtement ramifié de familles de surfaces à bord.

### 4.1.3 Equivariance et double

#### Revêtements équivariants

Soit  $(X, p)$  et  $(Y, q)$  des familles de surfaces topologiques au-dessus de  $\mathcal{B}$  munies chacune d'une action de  $\Sigma$  donnée par  $\sigma_X$  et  $\sigma_Y$  respectivement. On note  $(\tilde{X}, \tilde{p})$  et  $(\tilde{Y}, \tilde{q})$  les familles de surfaces à bord obtenues par passage au quotient à partir de  $(X, p)$  et  $(Y, q)$  respectivement et

$$\Pi_X : X \longrightarrow \tilde{X} \quad \text{et} \quad \Pi_Y : Y \longrightarrow \tilde{Y}$$

les applications de passage au quotient.

On considère aussi

$$f : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$$

un revêtement ramifié de famille de surfaces topologiques équivariant. Par passage au quotient, il donne un morphisme

$$\tilde{f} : (\tilde{X}, \tilde{p}) \longrightarrow (\tilde{Y}, \tilde{q}).$$

**Proposition 4.1.1.** *Les lieux de ramification  $\mathcal{R}$ , de ramification étendu  $\overline{\mathcal{R}}$  et lieu singulier  $\mathcal{S}$  de  $f$  sont invariants pour l'action de  $\Sigma$  sur  $X$  et  $Y$  respectivement.*

*Démonstration.* Soit  $x \in X \setminus \mathcal{R}$ ,  $U \subseteq X$  un voisinage ouvert de  $x$  et  $V \subseteq Y$  tels que

$$f|_U : U \xrightarrow{\sim} V$$

soit un homéomorphisme. Alors  $f|_{\sigma_X(U)} = \sigma_Y \circ f \circ \sigma_X|_{\sigma_X(U)}$  est un homéomorphisme au voisinage de  $\sigma_X(x)$ . Ainsi  $x \in X \setminus \mathcal{R}$  si et seulement si  $\sigma_X(x) \in X \setminus \mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}$  est invariant pour l'action de  $\Sigma$ . Alors

$$\sigma_Y(\mathcal{S}) = \sigma_Y \circ f(\mathcal{R}) = f \circ \sigma_X(\mathcal{R}) = f(\mathcal{R}) = \mathcal{S}$$

et

$$\sigma_X(\overline{\mathcal{R}}) = \sigma_X(f^{-1}(\mathcal{S})) = \sigma_X(f^{-1}(\sigma_Y(\mathcal{S}))) = f^{-1}(\mathcal{S}) = \overline{\mathcal{R}},$$

□

On note

$$\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R}/\Sigma = \Pi_X(\mathcal{R}) \subseteq \tilde{X}, \quad \tilde{\overline{\mathcal{R}}} = \overline{\mathcal{R}}/\Sigma = \Pi_X(\overline{\mathcal{R}}) \subseteq \tilde{X} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S}/\Sigma = \Pi_Y(\mathcal{S}) \subseteq \tilde{Y}.$$

Ce sont des sous-ensembles relativement discret de  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y}$  respectivement.

**Lemme 4.1.2.** *Soit  $U$  et  $V$  des ouverts connexes de  $\mathbb{R}^r \times \mathbb{C}$  tels que*

$$U \cap \sigma_{\mathbb{R}^r \times \mathbb{C}}(U) = \emptyset \quad \text{et} \quad V = \sigma_{\mathbb{R}^r \times \mathbb{C}}(V).$$

*Soit*

$$f : (U, \text{pr}_1) \longrightarrow (V, \text{pr}_1),$$

*un isomorphisme de familles de surfaces topologiques. En prolongeant  $f$  à  $\sigma_{\mathbb{R}^r \times \mathbb{C}}(U)$  par conjugaison par  $\sigma_{\mathbb{R}^r \times \mathbb{C}}$ , on obtient par passage au quotient un morphisme*

$$\tilde{f} : (\Pi_{\mathbb{R}^r \times \mathbb{C}}(U), \text{pr}_1) \longrightarrow (\Pi_{\mathbb{R}^r \times \mathbb{C}}(V), \text{pr}_1)$$

*qui est un pliage.*

*Démonstration.* Comme  $U \cap \sigma_{\mathbb{R}^r \times \mathbb{C}}(U) = \emptyset$ , l'ouvert  $U$  est homéomorphe par  $\Pi_{\mathbb{R}^r \times \mathbb{C}}$  à son image  $\tilde{U} = \Pi_{\mathbb{R}^r \times \mathbb{C}}(U)$ . Comme  $V$  est connexe et  $V = \sigma_{\mathbb{R}^r \times \mathbb{C}}(V)$ , l'application  $\Pi_{\mathbb{R}^r \times \mathbb{C}}|_V$  est un pliage sur son image  $\tilde{V} = \Pi_{\mathbb{R}^r \times \mathbb{C}}(V)$ . Ainsi  $\tilde{f}$  est la composée d'un pliage  $\Pi_{\mathbb{R}^r \times \mathbb{C}}|_V$  et des homéomorphismes  $(\Pi_{\mathbb{R}^r \times \mathbb{C}}|_U)^{-1}$  et  $f$ . C'est donc un pliage d'après la remarque 4.1.3. □

**Proposition 4.1.3.** *Pour tout revêtement non ramifié équivariant de familles de surfaces topologiques au-dessus de  $\mathcal{B}$*

$$f : (X, p) \longrightarrow (Y, q),$$

le morphisme induit

$$\check{f} : \check{X} \longrightarrow \check{Y}$$

est un revêtement non ramifié de familles de surfaces à bord au-dessus de  $\mathcal{B}$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{V} = (V_i)_{i \in I}$  un recouvrement de  $Y$  par des ouverts connexes relativement à  $\mathcal{B}$  et connexes tel que pour tout  $i \in I$ ,

$$f^{-1}(V_i) = \bigsqcup_{j \in J_i} U_i^j$$

est la réunion disjointes d'ouverts homéomorphes à  $V_i$  par  $f$ . On peut supposer que pour tout  $i \in I$ , l'ouvert  $V_i$  vérifie l'une des deux conditions suivantes

$$\sigma_Y(V_i) \cap V_i = \emptyset \quad \text{et} \quad \sigma_X(f^{-1}(V_i)) \cap f^{-1}(V_i) = \emptyset \quad (4.1)$$

$$\sigma_Y(V_i) = V_i \quad \text{et} \quad \sigma_X(f^{-1}(V_i)) = f^{-1}(V_i) \quad (4.2)$$

En supposant les ouverts  $V_i$  et  $U_i^j$  assez petit et en utilisant des homéomorphismes de structure équivariants, on se ramène au cas où  $X$  et  $Y$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}^r \times \mathbb{C}$ .

1. Dans le cas où  $V_i$  vérifie (4.1), sachant qu'un revêtement non ramifié de familles de surfaces topologiques est un revêtement non ramifié de familles de surfaces à bord, le résultat est immédiat. En effet,  $\Pi_Y$  est alors un isomorphisme de familles de surfaces à bord de  $V_i$  sur  $\Pi_Y(V_i)$  et de  $f^{-1}(V_i)$  sur  $\Pi_X(f^{-1}(V_i))$ .
2. Si  $V_i$  vérifie (4.2), on distingue deux cas pour les  $U_i^j$ .

- (a) Si  $\sigma_X(U_i^j) = U_i^j$ , alors

$$f|_{U_i^j} : (U_i^j, p|_{U_i^j}) \longrightarrow (V_i, q|_{V_i})$$

est un isomorphisme équivariant de famille de surfaces topologiques. Donc par passage au quotient,

$$\check{f}|_{\Pi_X(U_i^j)} : (\Pi_X(U_i^j), \check{p}|_{\Pi_X(U_i^j)}) \longrightarrow (\Pi_Y(V_i), \check{q}|_{\Pi_Y(V_i)})$$

est un homéomorphisme.

- (b) Sinon,  $\sigma_X(U_i^j) \cap U_i^j = \emptyset$ . Alors d'après le lemme 4.1.2,

$$\check{f}|_{\Pi_X(U_i^j)} : (\Pi_X(U_i^j), \check{p}|_{\Pi_X(U_i^j)}) \longrightarrow (\Pi_Y(V_i), \check{q}|_{\Pi_Y(V_i)})$$

est un pliage. □

**Corollaire 4.1.4.** *Soit  $(X, p)$  et  $(Y, q)$  deux familles de surfaces topologiques au-dessus de  $\mathcal{B}$  munies chacune d'une action de  $\Sigma$ . Si*

$$f : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$$

est un revêtement ramifié équivariant de familles de surfaces topologiques, le morphisme

$$\check{f} : (\check{X}, \check{p}) \longrightarrow (\check{Y}, \check{q})$$

induit par passage au quotient est un revêtement ramifié de surfaces à bord au-dessus de  $\mathcal{B}$ .

De plus le lieu singulier et le lieu de ramification de  $\check{f}$  sont inclus dans  $\check{\mathcal{S}}$  et  $\check{\mathcal{R}}$  respectivement.

*Démonstration.* D'après la proposition 4.1.1, le lieu singulier  $\mathcal{S}$  est invariant pour l'action de  $\Sigma$  sur  $Y$ . On obtient donc un revêtement non ramifié équivariant

$$f' = f|_{X'} : X' \longrightarrow Y'$$



où  $X' = f^{-1}(Y \setminus \mathcal{S}) = X \setminus \overline{\mathcal{R}}$  et  $Y' = Y \setminus \mathcal{S}$ . D'après la proposition 4.1.3, le morphisme  $\check{f}' : \check{X}' \rightarrow \check{Y}'$  est un revêtement non ramifié de famille de surfaces à bord. Or on a

$$\check{Y}' = \check{Y} \setminus \check{\mathcal{S}} \quad \check{X}' = \check{f}^{-1}(\check{Y}')$$

Ceci montre aussi que le lieu singulier de  $\check{f}$  est inclus dans  $\check{\mathcal{S}}$ .

Pour le lieu de ramification, soit  $x \in X \setminus \mathcal{R}$ . Il existe un voisinage  $U$  de  $x$ , stable par  $\sigma_X$  sur lequel  $f$  est un isomorphisme. En particulier,  $f|_U$  est un revêtement non ramifié de famille de surfaces topologiques sur son image. D'après la proposition 4.1.3, le morphisme induit par passage au quotient,  $\check{f}|_{\Pi_X(U)}$  est un revêtement non ramifié de familles de surfaces à bord sur son image. En particulier,  $\check{f}$  doit être un pliage ou un homéomorphisme au voisinage de  $\Pi_X(x)$ .  $\square$

### Avec les doubles

Soit  $(X, p)$  et  $(Y, q)$  des familles de surfaces à bord au-dessus de  $\mathcal{B}$  de doubles  $(\tilde{X}, \tilde{p}, \sigma_X)$  et  $(\tilde{Y}, \tilde{q}, \sigma_Y)$  respectivement. On note

$$\Pi_X : \tilde{X} \longrightarrow X \quad \text{et} \quad \Pi_Y : \tilde{Y} \longrightarrow Y$$

les applications de passage au quotient pour l'action de  $\Sigma$  sur  $(\tilde{X}, \tilde{p})$  et  $(\tilde{Y}, \tilde{q})$  respectivement.

**Lemme 4.1.5.** *Soit  $(X, p)$  et  $(Y, q)$  des familles de surfaces à bord au-dessus de  $\mathcal{B}$ . Un morphisme  $f : X \rightarrow Y$  qui est un pliage est localement isomorphe à  $\Pi_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}$ .*

*En particulier, tout revêtement ramifié de familles de surfaces à bord*

$$F : X \longrightarrow Y$$

*se relève en un unique morphisme*

$$F : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{Y}$$

*préservant l'orientation relative des doubles.*

*Démonstration.* Au voisinage de tout point  $x \in X \setminus f^{-1}(\partial Y)$ , le morphisme  $f$  est un isomorphisme local, donc localement isomorphe à  $\Pi_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}$ .

Soit  $x \in f^{-1}(\partial X)$  et  $y = f(x) \in \partial Y$ . On note  $X_1$  et  $X_2$  des ouverts disjoints de  $X$  qui apparaissent dans la définition de pliage. Comme le résultat à montrer est local, quitte à réduire  $X$  et  $Y$ , on peut supposer que les ouverts  $X_i$  sont connexes et que  $Y$  est connexe relativement à  $\mathcal{B}$  et connexe. On peut aussi supposer qu'il existe un ouvert  $V \subseteq \mathcal{B} \times \mathbb{H}$  et un morphisme de structure

$$\psi : Y \xrightarrow{\sim} V.$$

Alors  $\psi$  induit un homéomorphisme de  $\partial Y$  sur  $\mathcal{B} \times \mathbb{R}$  et des isomorphismes  $\varphi_i$  de  $X_i$  sur  $V' = V \setminus (\mathcal{B} \times \mathbb{R})$ . De plus,  $\Pi_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}^{-1}(V')$  est la réunion de deux ouverts disjoints  $U_1$  et  $U_2$  isomorphes à  $V'$  par  $\Pi_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}|_{U_1}$  et  $\Pi_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}|_{U_2}$  respectivement. Ceci permet d'obtenir des isomorphismes  $\varphi'_i : X_i \xrightarrow{\sim} U_i$ . Sachant que  $\overline{X}_i = X_i \cup f^{-1}(\partial Y)$  et  $\overline{U}_i = U_i \cup \Pi_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}^{-1}(V \cap \mathcal{B} \times \mathbb{R})$ , les isomorphismes  $\varphi_i$  se prolongent en un isomorphisme

$$\varphi : X \xrightarrow{\sim} \Pi_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}^{-1}(V).$$

Par construction, on a  $f = \psi^{-1} \circ \Pi_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}} \circ \varphi$ .

Soit  $\mathcal{S}$  le lieu singulier du revêtement  $F$  et  $\overline{\mathcal{R}}$  son lieu de ramification étendu. On note  $F' = F|_{X \setminus \overline{\mathcal{R}}} : X \setminus \overline{\mathcal{R}} \rightarrow Y \setminus \mathcal{S}$ . D'après ce qui précède, le revêtement non ramifié de famille de surfaces à bord

$$F' \circ \Pi_X|_{\tilde{X} \setminus \Pi_X^{-1}(\overline{\mathcal{R}})} : \tilde{X} \setminus \Pi_X^{-1}(\overline{\mathcal{R}}) \longrightarrow Y \setminus \mathcal{S}$$

est localement isomorphe à  $\Pi_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}$ . En lui appliquant la proposition 3.2.3, on obtient un unique morphisme

$$\tilde{F}' : \tilde{X} \setminus \Pi_X^{-1}(\overline{\mathcal{R}}) \longrightarrow \tilde{Y} \setminus \Pi_Y^{-1}(\mathcal{S})$$

préservant l'orientation relative des doubles et vérifiant  $\Pi_Y \circ \tilde{F}' = F' \circ \Pi_X|_{\tilde{X} \setminus \Pi_X^{-1}(\overline{\mathcal{R}})}$ .

Comme les ensembles  $\Pi_X^{-1}(\overline{\mathcal{R}}) \subseteq X$  et  $\Pi_Y^{-1}(\mathcal{S}) \subseteq Y$  sont des sous-ensembles relativement discrets, le morphisme  $F'$  se prolonge par continuité en un unique morphisme  $\tilde{F} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$  vérifiant  $\Pi_Y \circ \tilde{F} = F \circ \Pi_X$ .  $\square$

**Lemme 4.1.6.** Soit  $U$  et  $V$  des ouverts connexes de  $\mathbb{R}^r \times \mathbb{C}$  et

$$f : (U, \text{pr}_1) \longrightarrow (V, \text{pr}_1),$$

morphisme de familles de surfaces à bord au dessus de  $\mathcal{B}$  qui est un pliage. Le morphisme de familles de surfaces topologiques préservant l'orientation relative

$$\tilde{f} : (\tilde{U}, \text{pr}_1) \longrightarrow (\tilde{V}, \text{pr}_1)$$

induit par  $f$  est un isomorphisme de chacune des composantes connexes de  $\tilde{U}$  sur  $\tilde{V}$ .

*Démonstration.* Comme  $f$  est un pliage, on a  $V \cap (\mathcal{B} \times \mathbb{R}) \neq \emptyset$ . On note  $U_1$  et  $U_2$  les deux composantes connexes de  $U \setminus f^{-1}(\mathcal{B} \times \mathbb{R})$ . Pour  $i = 1, 2$ , la restriction  $f_i$  de  $f$  à  $U_i$  est un isomorphisme sur  $\text{Int } V$ . D'après le lemme 3.2.2, il se relève en un isomorphisme

$$\tilde{f}_i = \tilde{f}|_{\tilde{U}_i} : \tilde{U}_i = \Pi_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}^{-1}(U_i) \longrightarrow \tilde{V} \setminus \mathcal{B} \times \mathbb{R}.$$

Ceci donne un revêtement de degré 2

$$\tilde{f}_1 \cup \tilde{f}_2 : \tilde{U} \setminus \tilde{f}^{-1}(\mathcal{B} \times \mathbb{R}) \longrightarrow \tilde{V} \setminus \mathcal{B} \times \mathbb{R}$$

qui par continuité se prolonge à  $\tilde{f}$  qui est donc un isomorphisme de chacune des deux composantes connexes de  $\tilde{U}$  sur  $\tilde{V}$ .  $\square$

**Proposition 4.1.7.** Soit un revêtement non ramifié équivariant de familles de surfaces à bord au-dessus de  $\mathcal{B}$

$$f : (X, p) \longrightarrow (Y, q).$$

Le morphisme induit

$$\tilde{f} : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{Y}$$

est un revêtement non ramifié de familles de surfaces topologiques au-dessus de  $\mathcal{B}$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{V} = (V_i)_{i \in I}$  un recouvrement de  $Y$  par des ouverts connexes relativement à  $\mathcal{B}$  et connexes tel que pour tout  $i \in I$ ,

$$f^{-1}(V_i) = \bigsqcup_{j \in J_i} U_i^j$$

est la réunion disjointes d'ouverts tels que la restriction de  $f$  à  $U_i^j$  soit un pliage ou un homéomorphisme sur  $V_i$ . Deux cas se présentent selon que  $\pi_Y^{-1}(V_i)$  est ou non connexe.

- Si  $\pi_Y^{-1}(V_i)$  a deux composantes connexes, alors  $\pi_X^{-1}(U_i^j)$  doit avoir deux composantes connexes pour tout  $j$ . De plus  $f|_{U_i^j}$  est un homéomorphisme et par unicité dans le corollaire 3.2.4,  $f|_{U_i^j}$  se relève en un isomorphisme

$$\tilde{f}|_{\tilde{U}_i^j} : \tilde{U}_i^j = \Pi_X^{-1}(U_i^j) \longrightarrow \tilde{V}_i = \Pi_Y^{-1}(V_i).$$

- Si  $\pi_Y^{-1}(V_i)$  est connexe, en supposant les ouverts  $V_i$  et  $U_i^j$  assez petits et en utilisant des homéomorphismes de structure, on se ramène au cas où  $X$  et  $Y$  sont des ouverts de  $\mathcal{B} \times \mathbb{H}$  et  $\Pi_X = \Pi_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}|_X$ ,  $\Pi_Y = \Pi_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}|_Y$ . Si  $f|_{U_i^j}$  est un pliage, d'après le lemme 4.1.6, pour tout  $i \in I$  et tout  $j \in J_i$ , le morphisme induit,

$$\tilde{f}|_{\tilde{U}_i^j} : \tilde{U}_i^j = \Pi_X^{-1}(U_i^j) \longrightarrow \tilde{V}_i = \Pi_Y^{-1}(V_i)$$

est un isomorphisme de chacune des composantes connexes de  $\tilde{U}_i^j$  sur  $\tilde{V}_i$ . Si  $f|_{U_i^j}$  est un homéomorphisme, par unicité dans le corollaire 3.2.4, il se relève en un isomorphisme

$$\tilde{f}|_{\tilde{U}_i^j} : \tilde{U}_i^j = \Pi_X^{-1}(U_i^j) \longrightarrow \tilde{V}_i = \Pi_Y^{-1}(V_i).$$

Ainsi  $\tilde{V}_i$  est la réunion disjointe d'ouverts homéomorphes à  $\tilde{V}_i$  par  $\tilde{f}$ .  $\square$

**Corollaire 4.1.8.** *Soit un revêtement ramifié de familles de surfaces à bord au-dessus de  $\mathcal{B}$*

$$f : (X, p) \longrightarrow (Y, q).$$

*Le morphisme préservant l'orientation relative*

$$\tilde{f} : (\tilde{X}, \tilde{p}) \longrightarrow (\tilde{Y}, \tilde{q})$$

*est un revêtement ramifié de familles de surfaces topologiques au-dessus de  $\mathcal{B}$ .*

*De plus le lieu singulier de  $\tilde{f}$  est inclus dans  $\tilde{\mathcal{S}} = \Pi_{\tilde{X}}^{-1}(\mathcal{S})$  et son lieu de ramification dans  $\tilde{\mathcal{R}} = \Pi_{\tilde{X}}^{-1}(\mathcal{R})$ , où  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{R}$  sont respectivement les lieux singulier et de ramification de  $f$ .*

*Démonstration.* On a un revêtement non ramifié

$$f' = f|_{X'} : X' \longrightarrow Y'$$

où  $X' = f^{-1}(Y \setminus \mathcal{S}) = X \setminus \overline{\mathcal{R}}$  et  $Y' = Y \setminus \mathcal{S}$ . D'après la proposition 4.1.7, le morphisme  $\tilde{f}' : \tilde{X}' \rightarrow \tilde{Y}'$  est un revêtement non ramifié de familles de surfaces topologiques. Or on a

$$\tilde{Y}' = \tilde{Y} \setminus \tilde{\mathcal{S}} \qquad \tilde{X}' = \tilde{f}^{-1}(\tilde{Y}')$$

$$\tilde{f}' = \tilde{f}|_{\tilde{X}'}$$

Ceci montre aussi que le lieu singulier de  $\tilde{f}$  est inclus dans  $\tilde{\mathcal{S}}$ .

Pour le lieu de ramification, soit  $x \in X \setminus \mathcal{R}$ . Comme c'est un résultat local, on peut supposer  $X, Y \subseteq \mathcal{B} \times \mathbb{H}$ . Il existe un voisinage  $U$  de  $x$  sur lequel  $f$  est revêtement non ramifié de familles de surfaces à bord. D'après la proposition 4.1.7,  $\tilde{f}|_{\Pi_X^{-1}(U)}$  est un revêtement non ramifié de famille de surfaces topologiques. En particulier,  $\tilde{f}$  est un homéomorphisme au voisinage de chaque point de la fibre  $\Pi_X^{-1}(x)$ .  $\square$

On déduit des corollaires 4.1.4 et 4.1.8 les résultats suivants.

**Proposition 4.1.9.** *Soit un revêtement équivariant de familles de surfaces topologiques munies d'une action de  $\Sigma$ ,  $f : (X, p) \rightarrow (Y, q)$ , de lieu de ramification  $\mathcal{R}$  et de lieu singulier  $\mathcal{S}$ . Alors les lieu de ramification et lieu singulier du revêtement ramifié induit  $\check{f} : (\check{X}, \check{p}) \rightarrow (\check{Y}, \check{q})$  sont  $\check{\mathcal{R}} = \Pi_X(\mathcal{R})$  et  $\check{\mathcal{S}} = \Pi_Y(\mathcal{S})$  respectivement.*

*Soit un revêtement de famille de surfaces à bord  $f : (X, p) \rightarrow (Y, q)$ , de lieu de ramification  $\mathcal{R}$  et de lieu singulier  $\mathcal{S}$ . Alors les lieu de ramification et lieu singulier du revêtement ramifié équivariant induit  $\tilde{f} : (\tilde{X}, \tilde{p}) \rightarrow (\tilde{Y}, \tilde{q})$  sont  $\tilde{\mathcal{R}} = \Pi_X^{-1}(\mathcal{R})$  et  $\tilde{\mathcal{S}} = \Pi_Y^{-1}(\mathcal{S})$  respectivement.*

*Démonstration.* Supposons que le premier résultat ne soit pas vérifié. Dans ce cas, le lieu de ramification ou le lieu singulier de  $\check{f}$  est strictement inclus dans  $\check{\mathcal{R}}$  ou  $\check{\mathcal{S}}$  respectivement. Ainsi le lieu de ramification ou le lieu singulier de  $\tilde{f} = f$  est strictement inclus dans  $\mathcal{R} = \Pi_X^{-1}(\check{\mathcal{R}})$  ou  $\mathcal{S} = \Pi_Y^{-1}(\check{\mathcal{S}})$ , ce qui est impossible.

On obtient de la même façon le cas des revêtements de familles de surfaces à bord.  $\square$

## 4.2 Théorèmes d'existence de Riemann

Le lecteur pourra trouver le théorème d'existence de Riemann pour les surfaces dans [AS60] ou [Ful95]. Nous montrons ici trois théorèmes d'existence de Riemann en famille :

1. Le premier (théorème 4.2.1) traite les revêtements de familles de surfaces de Riemann par une famille de surfaces topologiques.
2. Pour le deuxième (proposition 4.2.3), nous nous plaçons dans le cas particulier où les familles sont munies d'une action de  $\Sigma$ .
3. Le troisième (théorème 4.2.5) considère le cas des revêtements de familles de surfaces de Klein par une famille de surfaces à bord.

Dans toute cette section,  $\mathcal{B}$  est une variété topologique localement homéomorphe à  $\mathbb{R}^r$ .

### 4.2.1 Pour les familles de surfaces de Riemann

**Théorème 4.2.1 (Existence de Riemann en famille).** *Soit  $(X, p)$  une famille de surfaces topologiques,  $(Y, \mathcal{O}_Y, q)$  une famille de surfaces de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}$  et*

$$f : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$$

*un revêtement ramifié de familles de surfaces topologiques au-dessus de  $\mathcal{B}$ .*

*Il existe un unique faisceau d'anneaux  $\mathcal{O}_X$  sur  $X$  faisant de  $(X, \mathcal{O}_X, p)$  une famille de surfaces de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}$  telle que*

$$f : (X, \mathcal{O}_X, p) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y, q)$$

*soit un morphisme de familles de surfaces de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{S}$  le lieu singulier,  $\mathcal{R}$  le lieu de ramification et  $\overline{\mathcal{R}}$  le lieu de ramification étendu de  $f$ . Alors

$$f|_{X \setminus \overline{\mathcal{R}}} : X \setminus \overline{\mathcal{R}} \longrightarrow Y \setminus \mathcal{S}$$

est un revêtement topologique non ramifié. Le faisceau en  $\mathbb{C}$ -algèbre  $\mathcal{O}_Y|_{Y \setminus \mathcal{S}}$  induit un unique faisceau en  $\mathbb{C}$ -algèbre  $\mathcal{O}_{X \setminus \overline{\mathcal{R}}}$  sur  $X \setminus \overline{\mathcal{R}}$  qui fait de l'application

$$f|_{X \setminus \overline{\mathcal{R}}} : (X \setminus \overline{\mathcal{R}}, \mathcal{O}_{X \setminus \overline{\mathcal{R}}}) \longrightarrow (Y \setminus \mathcal{S}, \mathcal{O}_Y|_{Y \setminus \mathcal{S}})$$

un morphisme d'espaces localement annelés qui respecte la structure de  $\mathbb{C}$ -algèbre, donc un morphisme de familles de surfaces de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}$ .

Nous allons prolonger le faisceau  $\mathcal{O}_{X \setminus \overline{\mathcal{R}}}$  à  $\overline{\mathcal{R}}$ . Le résultat étant local, on peut supposer que  $f$  est un revêtement topologique ramifié au-dessus de  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{B} \times \mathbb{R}^2$  sur  $\mathcal{B} \times \mathbb{C}$ . Pour montrer le résultat cherché, il suffit de montrer qu'une famille d'applications continues à valeur complexe  $\varphi$  sur un ouvert  $U \subseteq \mathcal{B} \times \mathbb{C}$  qui est une famille continue d'applications holomorphes en dehors d'un ensemble  $\overline{\mathcal{R}}$  discret relativement à  $\mathcal{B}$  est une famille d'applications holomorphes sur  $U$  tout entier.

Pour tout  $b \in \text{pr}_1(U)$ , l'application induite par  $\varphi$  sur la fibre au-dessus de  $b$ ,

$$\varphi_b = \varphi(b, \cdot) : U_b \longrightarrow \mathbb{C}$$

est une application continue qui est analytique en dehors de l'ensemble discret  $U_b \cap \overline{\mathcal{R}}_b$ . Donc  $\varphi_b$  est analytique sur  $U_b$  tout entier et c'est la seule application analytique qui prolonge  $\varphi_b|_{U_b \setminus \overline{\mathcal{R}}_b}$ .

On en déduit que le faisceau  $\mathcal{O}_{X \setminus \overline{\mathcal{R}}}$  se prolonge de façon unique à  $X$  tout entier en un faisceau  $\mathcal{O}_X$  qui fait de  $(X, \mathcal{O}_X, p)$  une famille de surfaces de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}$  et de  $f$  un morphisme de familles de surfaces de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}$ .  $\square$

Le théorème d'existence de Riemann pour les surfaces s'obtient alors comme corollaire du théorème précédent.

**Corollaire 4.2.2 (Théorème d'existence de Riemann).** *Soit  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  une surface de Riemann et un revêtement ramifié de surface*

$$f : X \longrightarrow Y.$$

*Il existe un unique faisceau d'anneaux  $\mathcal{O}_X$  sur  $X$  faisant de  $(X, \mathcal{O}_X)$  une surface de Riemann et tel que*

$$f : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

*soit analytique.*

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer le théorème 4.2.1 au revêtement  $f : (X, p) \rightarrow (Y, q)$  de la famille de surfaces de Riemann  $(Y, \mathcal{O}_Y, q)$  au-dessus de  $(*, \mathbb{C})$  par la famille de surfaces topologiques  $(X, p)$  au-dessus d'un point  $*$ .  $\square$

### 4.2.2 Pour les familles munies d'une action de $\Sigma$

Soit  $(Y, \mathcal{O}_Y, p)$  une famille de surfaces de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}$  et  $(X, p)$  une famille de surfaces topologiques au-dessus de  $\mathcal{B}$  munies chacune d'une action de  $\Sigma$  donnée par  $\sigma_Y$  et  $\sigma_X$  respectivement. Considérons  $f : (X, p) \rightarrow (Y, q)$  un revêtement topologique ramifié au-dessus de  $\mathcal{B}$  équivariant pour les actions de  $\Sigma$ . Rappelons que suivant la proposition 4.1.1, les lieu de ramification  $\mathcal{R} \subseteq X$  et lieu singulier  $\mathcal{S} \subseteq Y$  du revêtement  $f$  sont invariants pour l'action de  $\Sigma$  sur  $X$  et  $Y$  respectivement.

**Proposition 4.2.3.** *Dans le théorème 4.2.1, si de plus les familles  $(Y, \mathcal{O}_Y, q)$  et  $(X, p)$  sont munies d'une action de  $\Sigma$  faisant de*

$$f : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$$

*une application équivariante, alors l'action de  $\Sigma$  sur la famille de surfaces topologiques  $(X, p)$  est une action de  $\Sigma$  sur la famille de surfaces de Riemann  $(X, \mathcal{O}_X, p)$ .*

**Lemme 4.2.4.** *Avec les hypothèses de la proposition 4.2.3, l'action de  $\Sigma$  sur  $(X, p)$  étant donnée par  $\sigma_X$ , l'application*

$$\sigma_X : (X, \mathcal{O}_X, p) \longrightarrow (X, \overline{\mathcal{O}}_X, p)$$

*est un isomorphisme de familles de surfaces de Riemann.*

*Démonstration.* L'application continue est un revêtement de familles de surfaces topologiques. D'après le théorème 4.2.1, il existe un unique faisceau d'anneaux  $\mathcal{O}'_X$  sur  $X$  faisant de  $(X, \mathcal{O}'_X)$  une famille de surfaces de Riemann telle que

$$\sigma_X : (X, \mathcal{O}'_X, p) \longrightarrow (X, \overline{\mathcal{O}}_X, p)$$

soit un morphisme de surfaces de Riemann au-dessus de  $\mathcal{B}$ .

En dehors du lieu de ramification, grâce à l'équivariance de  $f$ ,

$$\sigma_X : (X, \mathcal{O}_X, p) \longrightarrow (X, \overline{\mathcal{O}}_X, p)$$

est un isomorphisme de familles de surfaces de Riemann. On en déduit que

$$\mathcal{O}_X|_{X \setminus \mathcal{R}} = \mathcal{O}'_X|_{X \setminus \mathcal{R}}$$

Or dans la preuve du théorème 4.2.1, on montre que si deux faisceaux faisant de  $(X, p)$  une famille de surfaces de Riemann coïncident en dehors d'un sous-ensemble discret relativement à  $p$ , alors ils sont égaux. Ainsi  $\mathcal{O}'_X = \mathcal{O}_X$  et

$$\sigma_X : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (X, \overline{\mathcal{O}}_X)$$

est un morphisme de familles de surfaces de Riemann. On montre de même que

$$\sigma_X^{-1} = \sigma_X : (X, \overline{\mathcal{O}}_X) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$

est un morphisme de familles de surfaces de Riemann. □

*Démonstration de la proposition 4.2.3.* Soit  $x \in X$ . Nous allons distinguer plusieurs cas pour trouver des morphismes de structure équivariants. Les deux premiers cas sont immédiats et permettent d'obtenir le troisième en comblant les trous.

1. Si  $\sigma_X(x) \neq x$ , il existe un morphisme de structure pour  $X$  au voisinage de  $x$

$$\varphi_x : (U_x, \mathcal{O}_X|_{U_x}) \xrightarrow{\sim} (U'_x, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathcal{C}}|_{U'_x})$$

tels que

$$U_x \cap \sigma_X(U_x) = \emptyset \quad \text{et} \quad U'_x \cap \sigma_{\mathcal{B} \times \mathcal{C}}(U'_x) = \emptyset.$$

En prolongeant  $\varphi_x$  à  $\sigma_X(U_x)$  par  $\sigma_{\mathcal{B} \times \mathcal{C}} \circ \varphi_x \circ \sigma_X$ , on obtient, suivant le lemme 4.2.4, un morphisme de structure équivariant pour  $(X, \mathcal{O}_X, p)$  au voisinage de  $x \in X$ .

2. Si  $x \notin \mathcal{R}$ , alors  $f$  est un homéomorphisme local au voisinage de  $x$  et il existe un voisinage ouvert  $U_x$  de  $x$ , stable pour l'action de  $\Sigma$ , tel que

$$f|_{U_x} : (U_x, \mathcal{O}_X|_{U_x}) \xrightarrow{\sim} (V_x, \mathcal{O}_Y|_{V_x}),$$

où  $V_x = f(U_x)$ . Quitte à restreindre  $U_x$ , il existe un morphisme équivariant de structure pour  $(Y, \mathcal{O}_Y, q)$

$$\psi_y : (V_x, \mathcal{O}_Y|_{V_x}) \xrightarrow{\sim} (V'_x, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}|_{V'_x}).$$

Alors

$$\varphi_x = \psi_y \circ f|_{U_x} : (U_x, \mathcal{O}_X|_{U_x}) \xrightarrow{\sim} (V'_x, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}|_{V'_x})$$

est un isomorphisme de structure pour  $(X, \mathcal{O}_X, p)$  au voisinage de  $x$  qui est équivariant.

3. Le seul cas non traité précédemment est celui où  $x \in X$  est un point de  $\mathcal{R}$  fixe pour l'action de  $\Sigma$  sur  $X$ . Ces points forment un ensemble discret relativement à  $\mathcal{B}$ . Considérons  $U_x$  un voisinage ouvert de  $x$  stable pour l'action de  $\Sigma$  et un morphisme de structure pour  $(X, p)$

$$\varphi_x : U_x = \sigma_X(U_x) \xrightarrow{\sim} U'_x = \sigma_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}(U'_x)$$

qui est équivariant. Si le morphisme de structure  $\varphi_x$  induit un morphisme de structure équivariant

$$\varphi_x|_{U_x \setminus \mathcal{R}} : (U_x \setminus \mathcal{R}, \mathcal{O}_X|_{U_x \setminus \mathcal{R}}) \xrightarrow{\sim} (f(U_x \setminus \mathcal{R}), \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}|_{f(U_x \setminus \mathcal{R})})$$

pour  $(X, \mathcal{O}_X, p)$ , alors suivant la preuve du théorème 4.2.1, l'homéomorphisme  $\varphi_x$  est un isomorphisme de structure pour  $(X, \mathcal{O}_X, p)$  au voisinage de  $x$  qui est équivariant.  $\square$

### 4.2.3 Pour les familles de surfaces de Klein

**Théorème 4.2.5 (Existence de Riemann pour les familles de surfaces de Klein).** *Soit  $(X, p)$  une famille de surfaces à bord,  $(Y, \mathcal{O}_Y, q)$  une famille de surfaces de Klein au-dessus de  $\mathcal{B}$  et*

$$f : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$$

*un revêtement ramifié de famille de surfaces à bord au-dessus de  $\mathcal{B}$ .*

*Il existe un unique faisceau d'anneaux  $\mathcal{O}_X$  sur  $X$  faisant de  $(X, \mathcal{O}_X, p)$  une famille de surfaces de Klein au-dessus de  $\mathcal{B}$  telle que*

$$f : (X, \mathcal{O}_X, p) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y, q)$$

*soit un morphisme de familles de surfaces de Klein au-dessus de  $\mathcal{B}$ .*

Ce théorème est en réalité un corollaire de la proposition 4.2.3

*Démonstration.* On note  $(\tilde{X}, \tilde{p}, \sigma_X)$  le double de  $(X, p)$  et  $(\tilde{Y}, \tilde{\mathcal{O}}_Y, \tilde{q}, \sigma_Y)$  le complexifié de  $(Y, \mathcal{O}_Y, q)$ . D'après le corollaire 4.1.8, sachant que  $(\tilde{Y}, \tilde{q}, \sigma_Y)$  est le double de  $(Y, q)$ , le revêtement  $f$  induit un unique revêtement ramifié équivariant de familles de surfaces au-dessus de  $\mathcal{B}$

$$\tilde{f} : (\tilde{X}, \tilde{p}) \longrightarrow (\tilde{Y}, \tilde{q})$$

qui respecte l'orientation le long des fibres. En appliquant le théorème 4.2.1 d'existence de Riemann en famille au revêtement  $\tilde{f}$ , on obtient un unique faisceau  $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$  sur  $\tilde{X}$  faisant de  $(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}, \tilde{p})$  une famille de surfaces de Riemann et de

$$\tilde{f} : (\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}, \tilde{p}) \longrightarrow (\tilde{Y}, \tilde{\mathcal{O}}_Y, \tilde{q})$$

un morphisme de familles de surfaces de Riemann. De plus, d'après la proposition 4.2.3, l'action de  $\Sigma$  sur  $(\tilde{X}, \tilde{p})$  est une action de  $\Sigma$  sur  $(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}, \tilde{p})$ .

Le faisceau sur  $X$  cherché est obtenu par passage au quotient pour l'action de  $\Sigma$  sur  $(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}, \tilde{p})$ . Il est unique d'après la proposition 2.3.4.  $\square$

**Corollaire 4.2.6 (Existence de Riemann pour les surfaces de Klein).** *Soit  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  une surface de Klein et un revêtement ramifié de surface à bord*

$$f : X \longrightarrow Y.$$

*Il existe un unique faisceau d'anneaux  $\mathcal{O}_X$  sur  $X$  tel que*

$$f : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

*soit un morphisme de surfaces de Klein.*

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer le théorème 4.2.5 au revêtement  $f : (X, p) \rightarrow (Y, q)$  de la famille de surfaces de Klein  $(Y, \mathcal{O}_Y, q)$  au-dessus de  $(*, \mathbb{R})$  par la famille de surfaces à bord  $(X, p)$  au-dessus d'un point  $*$ .  $\square$

# Chapitre 5

## Endomorphismes réel-étales de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$

Dans ce chapitre, les surfaces de Klein sont supposées compactes connexes.

Nous allons étudier les morphismes réel-étales non constants dans  $(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1})$  qui est la surface de Klein obtenue comme quotient de la sphère de Riemann  $(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1})$  par l'action naturelle de  $\Sigma$ . La variété topologique  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  est homéomorphe à une demi-sphère, donc au disque unité  $\mathbb{D}$  de  $\mathbb{C}$ .

Dans la suite,  $(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$  désignera  $(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1})$ . Son bord, homéomorphe au cercle unité de  $\mathbb{C}$ , sera noté  $\partial\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  et son intérieur  $\text{Int } \mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1 \setminus \partial\mathbb{P}^1$ .

### 5.1 Morphismes réel-étale

#### 5.1.1 $\mathbb{P}^1$ et revêtements

**Proposition 5.1.1.** *Il n'existe sur  $\mathbb{P}^1$  qu'une unique structure de surface de Klein à isomorphisme près.*

*Démonstration.* Soit  $(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$  la surface de Klein obtenue comme quotient de la sphère de Riemann  $(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1})$  pour l'action de  $\Sigma$  par conjugaison complexe notée  $\sigma_{\mathbb{C}}$ . Soit  $(P_1, \mathcal{O}_{P_1})$  une surface de Klein telle que  $P_1$  soit homéomorphe à  $\mathbb{P}^1$  et  $(\tilde{P}_1, \tilde{\mathcal{O}}_{P_1}, \sigma_1)$  son complexifié. Alors  $\tilde{P}_1$  est homéomorphe à  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  qui n'admet qu'une unique structure de surface de Riemann à isomorphisme près. On peut donc supposer que  $(\tilde{P}_1, \tilde{\mathcal{O}}_{P_1}) = (\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1})$ . L'ensemble des points fixes  $(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1)^{\Sigma_1}$  de  $\sigma_1$  est une courbe de Jordan analytique. À isomorphisme près, on peut supposer que  $(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1)^{\Sigma_1} = (\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1)^{\Sigma} = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R})$  et que  $\sigma_1(\infty) = \sigma_{\mathbb{C}}(\infty) = \infty$  et  $\sigma_1(0) = \sigma_{\mathbb{C}}(0) = 0$ . Pour  $i = 1, 2$ , on note  $U_i = \{[z_1 : z_2] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \mid z_i \neq 0\}$  ainsi que les morphismes de structure usuels pour  $(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1})$

$$\begin{array}{ccc} \varphi_1 : U_2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ [z_1 : z_2] & \longmapsto & \frac{z_1}{z_2} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \varphi_2 : U_2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ [z_1 : z_2] & \longmapsto & \frac{z_2}{z_1} \end{array}$$

Alors pour  $i = 1, 2$ , les applications  $\overline{\varphi_i^{-1} \circ \sigma_1 \circ \varphi_i}$  et  $\overline{\varphi_i^{-1} \circ \sigma_{\mathbb{C}} \circ \varphi_i}$  sont des automorphismes analytiques de  $\mathbb{C}$  qui coïncident sur  $\mathbb{R}$ , donc sur  $\mathbb{C}$ . On en déduit que  $(P_1, \mathcal{O}_{P_1})$  et  $(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$  doivent être isomorphes.  $\square$

*Remarque 5.1.1.* Un morphisme non constant de surfaces de Klein est surjectif.

Sachant qu'un morphisme non constant de surfaces de Klein induit un revêtement ramifié de surfaces à bord, les définitions se rapportant aux revêtements pourront être appliquées aux morphismes.



**Définition 5.1.1 (Revêtement réel-étale).** Un revêtement ramifié de surfaces à bord  $f : X \rightarrow Y$  est *réel-étale* si le lieu singulier  $\mathcal{S} \subseteq Y$  de  $f$  ne rencontre pas le bord  $\partial Y$  de  $Y$ . Dans ce cas,  $f$  induit un revêtement topologique  $f|_{f^{-1}(\partial Y)}$  au-dessus du bord de  $Y$ .

**Définition 5.1.2 (Revêtement stricte).** Un revêtement ramifié de surface à bord,  $f : X \rightarrow Y$ , est *stricte* s'il vérifie

$$f^{-1}(\partial Y) = \partial X.$$

*Remarque 5.1.2.* Un revêtement stricte est un revêtement réel-étale, mais la réciproque n'est pas vraie.

## 5.1.2 Isotopie et équivalences

Soit  $X$  et  $Y$  des surfaces à bord et

$$f_0 : X \longrightarrow Y, \quad f_1 : X \longrightarrow Y$$

deux revêtements ramifiés. Pour  $\varepsilon > 0$ , on note  $I_\varepsilon$  l'intervalle  $] -\varepsilon, 1 + \varepsilon[$ .

**Définition 5.1.3 (Isotopie de revêtements topologiques).** On dira que  $f_0$  et  $f_1$  sont *isotopes* s'il existe un revêtement ramifié de surfaces à bord au-dessus de  $I_\varepsilon$ ,

$$H : I_\varepsilon \times X \longrightarrow I_\varepsilon \times Y,$$

tel que les morphismes

$$\begin{array}{ccc} H_0 : X \longrightarrow Y & \text{et} & H_1 : X \longrightarrow Y \\ x \longmapsto \text{pr}_2(H(0, x)) & & x \longmapsto \text{pr}_2(H(1, x)) \end{array}$$

vérifient  $H_0 = f_0$  et  $H_1 = f_1$ .

Le morphisme  $H$  est appelé *isotopie entre  $f_0$  et  $f_1$* . Sauf précision ultérieure, lorsque les revêtements  $f_0$  et  $f_1$  sont réel-étales, une isotopie  $H$  entre  $f_0$  et  $f_1$  devra aussi être un revêtement réel-étale.

*Remarque 5.1.3.* L'isotopie définit une relation d'équivalence entre les revêtements.

*Remarque 5.1.4.* La notion d'isotopie ne dépend pas du choix du réel  $\varepsilon > 0$ .

**Proposition 5.1.2.** *Une isotopie*

$$H : I_\varepsilon \times X \longrightarrow I_\varepsilon \times Y$$

entre deux revêtements ramifiés  $f_0 : X \longrightarrow Y$  et  $f_1 : X \longrightarrow Y$  induit une homotopie

$$h = \text{pr}_2 \circ H|_{[0,1] \times X} : [0, 1] \times X \longrightarrow Y$$

entre les applications  $f_0$  et  $f_1$  telle que pour tout  $t \in [0, 1]$ , l'application

$$\begin{array}{ccc} f_t : X \longrightarrow Y \\ x \longmapsto h(t, x) \end{array}$$

soit un revêtement de degré  $d = \deg f_0$ .

*Démonstration.* Cela découle directement de la définition 5.1.3 et en particulier du fait que  $H$  soit un revêtement ramifié au-dessus de  $I_\varepsilon$ .  $\square$

**Corollaire 5.1.3.** *Dans le cas où  $f_0$  et  $f_1$  sont deux homéomorphismes la notion d'isotopie de la définition 5.1.3 correspond avec la définition usuelle.*

*Démonstration.* Supposons les homéomorphismes  $f_0$  et  $f_1$  isotopes selon la définition 5.1.3. Avec les notations de la proposition 5.1.2, les revêtements  $f_t : X \rightarrow Y$  sont de degré 1. Donc  $h$  est une isotopie.

Réciproquement, supposons qu'il existe une isotopie  $h : [0, 1] \times X \rightarrow Y$  suivant la définition usuelle entre  $f_0$  et  $f_1$ . Alors l'application continue

$$H : I_\varepsilon \times X \longrightarrow I_\varepsilon \times Y$$

$$(t, x) \longmapsto \begin{cases} (t, f_0(x)) & t \in ]-\varepsilon, 0] \\ (t, h(t, x)) & t \in [0, 1] \\ (t, f_1(x)) & t \in [1, 1 + \varepsilon] \end{cases}$$

est une isotopie entre  $f_0$  et  $f_1$  selon la définition 5.1.3. □

**Proposition 5.1.4 (Théorème d'isotopie des disques).** *Tout homéomorphisme  $f : \mathbb{D} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$  préservant l'orientation est isotope à l'identité.*

*Démonstration.* La démonstration utilise l'astuce d'Alexander. Voir par exemple [Moi77] □

**Définition 5.1.4 (équivalence).** Soit  $X$  et  $Y$  des surfaces à bord. Deux revêtements

$$f : X \longrightarrow Y \quad \text{et} \quad f' : X \longrightarrow Y$$

sont *équivalents* s'il existe des homéomorphismes  $g : X \xrightarrow{\sim} X$  et  $h : Y \xrightarrow{\sim} Y$  tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow[\sim]{g} & X \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \xrightarrow[\sim]{h} & Y \end{array}$$

**Définition 5.1.5 (quasi-équivalence).** Deux revêtements

$$f : X \longrightarrow Y \quad \text{et} \quad f' : X \longrightarrow Y$$

sont *quasi-équivalents* s'il existe des homéomorphismes  $g : X \xrightarrow{\sim} X$  et  $h : Y \xrightarrow{\sim} Y$  tels que  $h \circ f$  et  $f' \circ g$  soient isotopes.

## 5.2 Revêtements de $\mathbb{P}^1$ et graphes

*Le lecteur trouvera des définitions concernant les graphes dans l'annexe.*

### 5.2.1 Graphe associé et graphe admissible

**Définition 5.2.1 (Graphe associé).** Soit un revêtement réel-étale  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ . Le *graphe associé au revêtement  $f$*  est défini de la façon suivante :

- les sommets sont les composantes connexes de  $f^{-1}(\text{Int } \mathbb{P}^1)$ ;
- les arêtes sont les composantes connexes de  $f^{-1}(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$ ;
- chaque composante connexe de  $f^{-1}(\text{Int } \mathbb{P}^1)$  est une extrémité de ses bords.

Plus précisément,

$$E = \pi_0 \left( f^{-1}(\mathbb{P}^1(\mathbb{R})) \right)$$

est l'ensemble des arêtes du graphe,

$$S = \pi_0 \left( f^{-1}(\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{R})) \right)$$

est l'ensemble des sommets du graphe et pour tout  $e \in E$  et tout  $s \in S$ , on a

$$s \text{ est un sommet de } e \iff s \cap \bar{e} \neq \emptyset,$$

où  $\bar{e}$  désigne l'adhérence de  $e$ .

*Remarque 5.2.1.* La plupart du temps, on identifiera les arêtes du graphe avec leur adhérence.

*Remarque 5.2.2.* Les arêtes ouvertes du graphe associé à  $f$  sont les composantes connexes du bord de  $X$ . En particulier, le graphe associé à  $f$  est fermé si et seulement si  $\partial X = \emptyset$ .

**Exemple 5.2.1.** Le graphe associé au revêtement de  $\mathbb{P}^1$  obtenu par action de  $\Sigma$  sur la sphère de Riemann  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  est



**Lemme 5.2.1.** Soit  $G$  le graphe associé à un revêtement réel-étale  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ . A tout chemin  $\gamma$  dans  $X$  dont les extrémités ne sont pas dans  $f^{-1}(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$  est associée naturellement une unique chaîne dans  $G$ . Cette dernière relie les sommets correspondants aux composantes connexes de  $f^{-1}(\text{Int } \mathbb{P}^1)$  contenant les extrémités de  $\gamma$ .

Réciproquement, pour toute chaîne  $c$  dans  $G$ , on peut choisir un chemin  $\gamma$  dans  $X$  dont les extrémités ne sont pas dans  $f^{-1}(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$  de telle sorte que la chaîne induite par  $\gamma$  soit la chaîne  $c$ .

*Démonstration.* À un chemin  $\gamma$  dans  $X$ , on associe la chaîne  $c$  dans  $G$  définie par

- la suite des arêtes de  $c$  est la suite des composantes connexes de  $f^{-1}(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$  coupées par  $\gamma$ ,
- la suite des sommets de  $c$  est la suite des composantes connexes de  $f^{-1}(\text{Int } \mathbb{P}^1)$  traversées par  $\gamma$ ,

ces éléments étant pris selon l'ordre dans lequel  $\gamma$  les rencontre.

Réciproquement, si  $c$  est une chaîne reliant les sommets  $s_1$  et  $s_2$ , on peut choisir un point  $P_1$  dans  $s_1$  et un point  $P_2$  dans  $s_2$  qui seront les extrémités du chemin. On choisit alors dans  $s_1$  un chemin qui relie  $P_1$  à la composante connexe du bord de  $s_1$  correspondant à la première arête de la chaîne incidente à  $s_1$ . Puis, tout en restant dans la composante connexe de  $f^{-1}(\text{Int } \mathbb{P}^1)$  correspondant au deuxième sommet de la chaîne, le chemin relie cette première composante connexe de  $f^{-1}(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$  à celle correspondant à l'arête suivante. On continue ainsi jusqu'à relier la composante connexe de  $f^{-1}(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$  correspondant à la dernière arête de la chaîne incidente à  $P_2$ . Par construction, la chaîne induite par ce chemin est la chaîne  $c$  donnée au départ.  $\square$

*Remarque 5.2.3.* Dans le cas où le chemin  $\gamma$  dans  $X$  a l'une ou l'autre de ses extrémités dans  $f^{-1}(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$ , on peut aussi lui associer une chaîne unique. Cette dernière étant la plus grande chaîne obtenue lorsque l'on réduit  $\gamma$  en un chemin  $\gamma'$  dont les extrémités ne sont pas dans  $f^{-1}(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$ .

**Définition 5.2.2 (Chaîne associée à un chemin).** La chaîne obtenue dans le lemme 5.2.1 ou la remarque 5.2.3 sera appelée *chaîne associée* au chemin  $\gamma$ .

**Proposition 5.2.2.** Le graphe associé à un revêtement réel-étale  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  est un graphe ouvert connexe fini ayant au moins un sommet et une arête.

*Démonstration.* Le revêtement étant réel-étale, chaque composante connexe de  $f^{-1}(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$  est homéomorphe à un cercle et borde au moins une et au plus deux composantes connexes de  $f^{-1}(\text{Int } \mathbb{P}^1)$ . Ainsi chaque arête a au moins une et au plus deux extrémités.

Comme  $X$  est supposé connexe et compacte, le revêtement  $f$  est fini, en particulier le graphe associé à  $f$  ne peut avoir qu'un nombre fini d'arêtes et donc de sommets.

Considérons deux sommets  $s_1$  et  $s_2$  distincts du graphe associé à  $f$  correspondant chacun à l'adhérence d'une composante connexe de  $f^{-1}(\text{Int } \mathbb{P}^1)$ . Pour toute paire de points  $(P_1, P_2) \in s_1 \times s_2$  il existe un chemin  $\gamma$  reliant  $P_1$  à  $P_2$  dans  $X$ . La chaîne associée à  $\gamma$  relie les sommets  $s_1$  et  $s_2$  dans le graphe associé à  $f$ .  $\square$

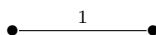
Deux revêtements réel-étales de  $\mathbb{P}^1$  par une même surface  $X$  peuvent avoir même graphe associé et être de degrés distincts. Dans ce cas, ils ne sont ni isotopes ni équivalents. C'est pourquoi nous allons faire intervenir des degrés.

**Définition 5.2.3 (Graphe pondéré associé à un revêtement).** Soit un revêtement réel-étale

$$f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1.$$

On munit chaque arête  $e$  du graphe associé à  $f$  d'un entier  $d(e)$  égal au degré du revêtement topologique  $f|_e$ . L'arbre pondéré obtenu est le *graphe pondéré associé au revêtement réel-étale  $f$* . L'entier  $d(e)$  est le degré ou *poids* de l'arête  $e$ .

**Exemple 5.2.2.** En reprenant l'exemple 5.2.1, on obtient le graphe pondéré



*Remarque 5.2.4.* Les degrés de  $f$  sur les arêtes du graphe pondéré induisent les degrés de  $f$  sur les sommets du graphe. Plus précisément, le degré de  $f$  en un sommet de son graphe pondéré associé est la somme des poids des arêtes incidentes à ce sommet.

**Proposition 5.2.3.** *Considérons un revêtement réel-étale  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ . On note  $k(e) \in \{1, 2\}$  le nombre d'extrémités d'une arête  $e$  du graphe associé à  $f$ . Alors le degré de  $f$  est donné par*

$$d = \sum_{e \in \pi_0(f^{-1}(\partial\mathbb{P}^1))} k(e)d(e).$$

*Démonstration.* Le degré de  $f$  est la somme des degrés de  $f$  sur chaque sommet du graphe. Le résultat est alors une conséquence directe de la remarque 5.2.4.  $\square$

**Définition 5.2.4 (Graphe pondéré admissible).** Nous appellerons *graphe pondéré admissible* ou plus simplement *graphe admissible* tout graphe ouvert connexe fini pondéré dont les poids sont des entiers strictement positifs et ayant au moins un sommet et une arête.

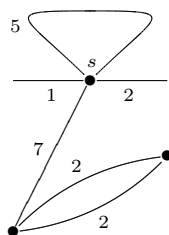
*Remarque 5.2.5.* D'après la proposition 5.2.2, le graphe associé à un revêtement réel-étale est un graphe admissible.

**Définition 5.2.5 (Graphe admissible stricte).** Un graphe pondéré admissible sera dit *stricte* s'il ne possède que des arêtes ouvertes. En particulier, il ne peut avoir qu'un seul sommet.

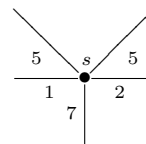
*Remarque 5.2.6.* Le graphe pondéré associé à un revêtement réel-étale stricte est stricte.

**Définition 5.2.6 (Sous-graphe stricte issu d'un sommet).** Soit  $G$  est un graphe admissible et  $s$  un sommet de  $G$ . Le *sous-graphe stricte issu du sommet  $s$*  est le graphe admissible stricte de sommet  $s$  dont les arêtes ouvertes sont les arêtes incidentes à  $s$  dans  $G$  privées de leur éventuelle deuxième extrémité. Les boucles du graphe  $G$  incidentes à  $s$  induisent deux arêtes ouvertes.

**Exemple 5.2.3.** Le sous-graphe stricte issu du sommet  $s$  du graphe admissible



est le graphe admissible stricte



## 5.2.2 Découpages et recollements

**Définition 5.2.7 (Découpage d'un graphe admissible).** *Découper un graphe admissible au niveau d'une de ses arêtes fermées* de sommets  $s_1$  et  $s_2$  revient à remplacer cette par deux arêtes ouvertes de sommets respectifs  $s_1$  et  $s_2$  et à associer à chacune des deux arêtes ouvertes obtenues le même poids que l'arête de départ.

*Remarque 5.2.7.* Le sous-graphe stricte issu d'un sommet  $s$  d'un graphe admissible est obtenu en gardant la composante connexe contenant  $s$  après avoir coupé le graphe admissible de départ au niveau de toutes les arêtes fermées incidentes à  $s$ .

**Exemple 5.2.4.** En coupant successivement le graphe admissible de l'exemple 5.2.3 au niveau des arêtes fermées de poids 5 et 7 incidentes au sommet  $s$ , on obtient deux graphes admissibles dont l'un est le sous-graphe stricte issu de  $s$  (voir figure 5.1).

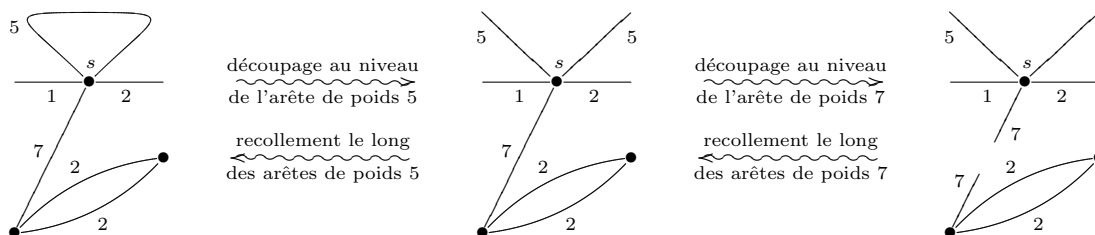


FIG. 5.1 – Exemple de découpage et recollement de graphe admissible

**Définition 5.2.8 (Recollement de graphes admissibles).** Le recollement de graphes admissibles le long de deux arêtes ouvertes de même poids consiste à identifier les deux arêtes ouvertes pour obtenir une arête fermée dont le poids est celui de chacune des arêtes recollées. Les deux extrémités de l'arête fermée obtenue sont les extrémités des arêtes ouvertes de départ.

*Remarque 5.2.8.* Tout graphe admissible s'obtient comme recollement des sous-graphes strictes issus de ses sommets.

### Recollement pour les revêtements

Considérons deux revêtements réel-étales

$$f_1 : X_1 \longrightarrow \mathbb{P}^1 \quad \text{et} \quad f_2 : X_2 \longrightarrow \mathbb{P}^1.$$

On suppose qu'il existe une composante connexe  $B_1$  du bord  $\partial X_1$  de  $X_1$  et une composante connexe  $B_2$  du bord  $\partial X_2$  de  $X_2$  telles que les revêtements topologiques  $f_1|_{B_1}$  et  $f_2|_{B_2}$  induits par  $f_1$  et  $f_2$  respectivement soient de même degré  $d$ . Il est alors possible de recoller les surfaces  $X_1$  et  $X_2$  le long de leur bord  $B_1$  et  $B_2$  en une surface  $X$  de sorte que les applications  $f_1$  et  $f_2$  se recollent en une application continue

$$f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

vérifiant  $f|_{X_1} = f_1$  et  $f|_{X_2} = f_2$ .

**Proposition 5.2.4.** *L'application  $f$  est un revêtement réel-étale.*

*Si de plus  $X_1$  et  $X_2$  sont chacune munie d'un faisceau  $\mathcal{O}_{X_1}$  et  $\mathcal{O}_{X_2}$  respectivement faisant de*

$$f_1 : (X_1, \mathcal{O}_{X_1}) \longrightarrow (\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) \quad \text{et} \quad f_2 : (X_2, \mathcal{O}_{X_2}) \longrightarrow (\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$$

*des morphismes de surfaces de Klein, alors la surface  $X$  définie hérite de  $X_1$  et  $X_2$  d'une structure de surface de Klein  $(X, \mathcal{O}_X)$  telle que*

$$\mathcal{O}_X|_{X_1} = \mathcal{O}_{X_1} \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_X|_{X_2} = \mathcal{O}_{X_2}$$

*et faisant de  $f$  un morphisme de surfaces de Klein.*

*Démonstration.* L'application continue  $f$  est un revêtement en dehors de  $f^{-1}(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$ .

Soit  $y \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ . Comme  $f_1$  et  $f_2$  sont des revêtements réel-étales, il existe un voisinage ouvert connexe  $V$  de  $y$  dans  $\mathbb{P}^1$  tel que  $f_1^{-1}(V)$  et  $f_2^{-1}(V)$  soient la réunion disjointe d'ouverts connexes  $U_i^1$  de  $X_1$  et  $U_j^2$  de  $X_2$  respectivement et tels que

$$f_1|_{U_i^1} : U_i^1 \longrightarrow V \quad \text{et} \quad f_2|_{U_j^2} : U_j^2 \longrightarrow V$$

soient des homéomorphismes ou des pliages. Alors  $f^{-1}(V)$  est la réunion disjointe d'ouverts connexes  $U_k$  qui sont ou bien des  $U_i^j \subseteq X_j$ ,  $j = 1, 2$  ou bien des réunion  $U_i^1 \cup U_j^2$  quand  $U_i^1 \cap U_j^2 \neq \emptyset$ . Dans le premiers cas, la restriction  $f|_{U_k}$  est un homéomorphisme ou un pliage. Dans le dernier cas, on doit avoir  $U_i^1 \cap U_j^2 \subseteq B_1 = B_2$  et les restrictions  $f|_{U_i^j} = f_j|_{U_i^j}$  sont des homéomorphismes pour  $j = 1, 2$ . On en déduit que

$$f|_{U_k} : U_i^1 \cup U_j^2 \longrightarrow V$$

est un pliage. Ainsi  $f$  est un revêtement réel-étale.

Dans le cas où  $X_1$  et  $X_2$  sont munies de structure de surface de Klein, d'après le théorème d'existence de Riemann pour les surfaces de Klein (corollaire 4.2.6), il existe un unique faisceau d'anneau  $\mathcal{O}_X$  sur  $X$  faisant de

$$f : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$$

un morphisme de surfaces de Klein. Sachant que  $f|_{X_1} = f_1$  et que

$$f_1 : (X_1, \mathcal{O}_{X_1}) \longrightarrow (\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$$

est un morphisme de surfaces de Klein, par unicité dans ce même théorème,  $\mathcal{O}_X|_{X_1} = \mathcal{O}_{X_1}$ . De même pour  $X_2$ ,  $f_2$  et  $\mathcal{O}_{X_2}$ .  $\square$

*Remarque 5.2.9.* Soit  $f_0 : X_0 \rightarrow \mathbb{P}^1$  un revêtement réel étale. Si  $B_1$  et  $B_2$  sont deux composantes connexes distinctes du bord de  $X$  sur lesquelles  $f_0$  est de même degré, un recollement comme le précédent permet aussi de recoller  $X_0$  le long de  $B_1$  et  $B_2$ .

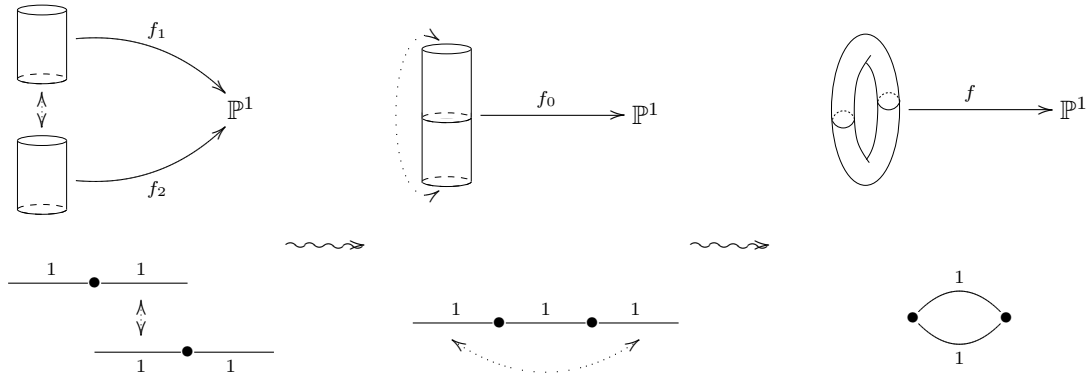


FIG. 5.2 – Exemple de recollement de revêtements et de graphes

*Remarque 5.2.10.* Les recollements précédents le long de composantes connexes  $B_1$  et  $B_2$  correspondent aux recollement de graphes des revêtements  $f_1$  et  $f_2$ , ou du revêtement  $f_0$ , le long des arêtes  $B_1$  et  $B_2$ .

**Proposition 5.2.5.** Soit un revêtement réel-étale  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  et  $X_0$  l'adhérence d'une arête du graphe associé. Alors le revêtement  $f_0 = f|_{X_0}$  est un revêtement réel-étale stricte.

Supposons de plus  $X$  munie d'un faisceau  $\mathcal{O}_X$  faisant de  $f$  un morphisme de surfaces de Klein. Alors  $\mathcal{O}_X$  induit sur  $X_0$  un faisceau faisant de  $f_0$  un morphisme réel-étale stricte.

*Démonstration.* Par définition de  $X_0$ , on a

$$f_0^{-1}(\mathbb{P}^1(\mathbb{R})) = \partial X_0. \quad (5.1)$$

Donc  $f_0$  est continue et stricte. Elle induit un revêtement ramifié de surfaces  $f_0|_{\text{Int } X_0} = f|_{\text{Int } X_0}$  et un revêtement topologique  $f_0|_{\partial X_0}$ . On en déduit que  $f_0$  est un revêtement réel-étale.

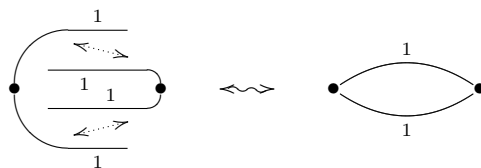
D'après le théorème d'existence de Riemann pour les surfaces de Klein (corollaire 4.2.6), il existe à isomorphisme près un unique faisceau  $\mathcal{O}_{X_0}$  faisant de

$$f_0 : (X_0, \mathcal{O}_{X_0}) \longrightarrow (\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$$

un morphisme de surfaces de Klein.  $\square$

**Corollaire 5.2.6.** *Tout revêtement réel-étale s'obtient comme recollement des revêtements réel-étales strictes.*

**Exemple 5.2.5.** Le revêtement de  $\mathbb{P}^1$  par le tore  $\mathbb{T}$  de la figure 5.2 peut s'obtenir en recollant les deux revêtements strictes de degré 2 de  $\mathbb{P}^1$  par un cylindre. Ce qui donne pour les graphes :



**Corollaire 5.2.7.** *Soit un revêtement réel-étale  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ . On considère une sous-variété à bord  $X'$  obtenue à partir de  $X$  de la façon suivante :*

- *On coupe  $X$  le long d'une ou plusieurs composantes connexes de  $f^{-1}(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$ .*
- *On prends l'adhérence de la surface découpée.*
- *On garde une composante connexe.*

Alors  $f' = f|_{X'} : X' \rightarrow \mathbb{P}^1$  est un revêtement réel-étale.

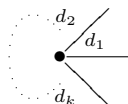
Si de plus  $X$  est munie d'un faisceau  $\mathcal{O}_X$  faisant de  $f$  un morphisme de surfaces de Klein, alors  $X'$  hérite d'un faisceau  $\mathcal{O}_{X'}$  faisant de  $f'$  un morphisme de surfaces de Klein.

*Démonstration.* La surface  $X'$  est obtenue comme recollement des adhérences des composantes connexes de  $f^{-1}(\text{Int } \mathbb{P}^1)$  qui la composent.  $\square$

### 5.2.3 Existence d'un morphisme associé à un graphe

**Lemme 5.2.8.** *Pour tout graphe admissible stricte  $G$ , il existe une surface à bord  $X$  et un revêtement réel-étale  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ , dont le graphe associé est  $G$ .*

*Démonstration.* Le graphe pondéré  $G$  est de la forme



où  $k \geq 1$  est le nombre d'arêtes du graphe. A chacune est associé un entier  $d_i > 0$ .

Soit  $z_1, \dots, z_k$  des nombres complexes distincts et  $P \in \mathbb{C}[X]$  défini par

$$P(X) = \prod_{i=1}^k (X - z_i)^{d_i}.$$

Le polynôme  $P(X)$  induit un revêtement ramifié de surfaces  $F : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ .

Soit  $\mathcal{D}$  un disque ouvert de  $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$  contenant 0. La surface à bord  $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{D}$  est homéomorphe à  $\mathbb{P}^1$ . Pour  $\mathcal{D}$  assez petit, l'image réciproque de  $\mathcal{D}$  par  $F$  est

$$F^{-1}(\mathcal{D}) = \bigsqcup_{i=1}^k \mathcal{D}_i,$$

où chacune des  $k$  composantes connexes  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_k$  est homéomorphe au disque ouvert  $\text{Int } \mathbb{D}$  et vérifie  $z_i \in \mathcal{D}_i$  pour tout  $i = 1 \dots k$ . En notant

$$X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus F^{-1}(\mathcal{D}),$$

le revêtement  $F$  induit un revêtement réel-étale stricte de surfaces dont le graphe pondéré est le graphe admissible stricte  $G$ .  $\square$

**Proposition 5.2.9.** *Pour tout graphe admissible  $G$ , il existe une surface à bord  $X$  et un revêtement réel-étale,  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ , dont le graphe associé est  $G$ .*

*Démonstration.* Selon la remarque 5.2.8, le graphe admissible  $G$  s'obtient comme recollement des sous-graphes admissibles strictes issus de ses sommets. Le lemme 5.2.8 permet d'associer à tout graphe stricte  $G_s$  issu d'un sommet  $s$  de  $G$  un revêtement ramifié stricte

$$f_s : X_s \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

de graphe associé  $G_s$ .

En effectuant les recollements des revêtements réel-étales  $f_s$  correspondant aux recollements de leurs graphes associés  $G_s$  pour obtenir le graphe  $G$ , on construit une surface à bord  $X$  et un revêtement réel-étale  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  de graphe associé  $G$ .  $\square$

**Corollaire 5.2.10.** *Pour tout graphe admissible  $G$ , il existe une surface de Klein  $(X, \mathcal{O}_X)$  et un morphisme réel-étale*

$$f : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$$

dont le graphe pondéré associé est  $G$ .

*Démonstration.* Soit  $G$  un graphe admissible. D'après la proposition 5.2.9, il existe une surface à bord  $X$  et un revêtement réel-étale  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  de graphe associé  $G$ . D'après le théorème d'existence de Riemann pour les surfaces de Klein (corollaire 4.2.6), il existe un faisceau d'anneaux  $\mathcal{O}_X$  sur  $X$  faisant de  $(X, \mathcal{O}_X)$  une surface de Klein et de  $f$  un morphisme.  $\square$

## 5.3 Pour les endomorphismes de $\mathbb{P}^1$

### 5.3.1 Le graphe associé est un arbre

**Proposition 5.3.1.** *Le graphe associé à un revêtement réel-étale  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  est un arbre qui admet une unique arête ouverte.*

*Démonstration.* Comme le bord de  $\mathbb{P}^1$  a une unique composante connexe, le graphe associé à  $f$  admet une seule arête ouverte.

Supposons que  $G$  ne soit pas un arbre. Il est alors possible de couper  $G$  au niveau d'une de ses arêtes fermées de sorte que le graphe obtenu soit toujours connexe. D'après la section 5.2.2, le découpage de cette arête correspond au découpage de  $\mathbb{P}^1$  le long d'une composante connexe de  $f^{-1}(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$ . Le graphe obtenu par découpage étant connexe, il doit en être de même pour la surface obtenue par découpage  $\mathbb{P}^1$ , ce qui est impossible. Ainsi le graphe associé à  $f$  est un arbre.  $\square$

**Définition 5.3.1 (Arbre admissible).** Un graphe admissible qui est un arbre ayant une seule arête ouverte est appelé *arbre admissible*. L'arête ouverte est le *tronc de l'arbre* et son extrémité le *noeud principal*.

Le *niveau d'un arbre admissible* est la longueur de la plus grande chaîne simple reliant un noeud de l'arbre à son noeud principal. Un arbre n'ayant qu'un seul sommet est dit de *niveau 0*

*Remarque 5.3.1.* Nous identifierons les arbres admissibles isomorphes en tant qu'arbres pondérés.

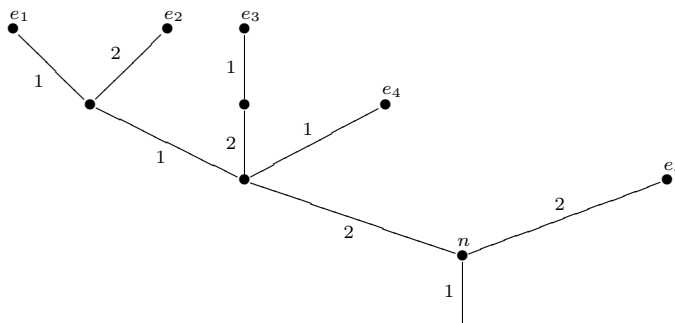


FIG. 5.3 – Exemple d'arbre admissible de niveau 3



**Définition 5.3.2 (Branches et extrémités).** Les *extrémités d'un arbre admissible* sont les sommets incidents à une unique arête. Toute chemin simple reliant le noeud principal à une extrémité de l'arbre est appelée *branche de l'arbre*. Cette dernière est l'*extrémité de la branche*.

*Remarque 5.3.2.* Le niveau d'un arbre admissible est la longueur de sa plus grande branche.

**Exemple 5.3.1.** L'arbre de la figure 5.3 a 5 extrémités, les sommets  $e_1$  à  $e_5$ .

**Définition 5.3.3 (Hauteur dans l'arbre).** La *hauteur d'un sommet dans l'arbre* est la longueur de la plus grande chaîne simple le reliant au noeud principal de l'arbre. Le noeud principal est de *hauteur nulle*.

**Exemple 5.3.2.** L'arbre de la figure 5.3 est un arbre admissible de niveau 3. Ses extrémités  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$  sont de hauteur 3, son extrémité  $e_4$  de hauteur 2 et son extrémité  $e_5$  de hauteur 1.

**Proposition 5.3.2.** *Pour tout arbre admissible  $\mathcal{A}$ , il existe un revêtement réel-étale,  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  dont l'arbre associé est  $\mathcal{A}$ .*

*Démonstration.* Il suffit de vérifier que la surface  $X$  obtenue dans la démonstration de la proposition 5.2.9 est homéomorphe à  $\mathbb{P}^1$  quand le graphe admissible est un arbre admissible. La démonstration se fait par récurrence sur le niveau  $n$  de l'arbre admissible  $\mathcal{A}$ .

Niveau 0 : D'après la démonstration de la proposition 5.2.9, la surface  $X$  obtenue est homéomorphe à la sphère privée d'un disque ouvert, donc homéomorphe à  $\mathbb{P}^1$ .

Niveau  $n > 0$  : En découpant l'arbre au niveau des arêtes fermées incidentes à son noeud principal, on obtient un arbre admissible  $\mathcal{A}_i$  par arête coupée et le sous-graphe stricte issu du noeud principal.

Les arbres admissibles  $\mathcal{A}_i$  doivent être de niveau strictement inférieur à  $n$ . Par hypothèse de récurrence, il existe des revêtements réel-étales

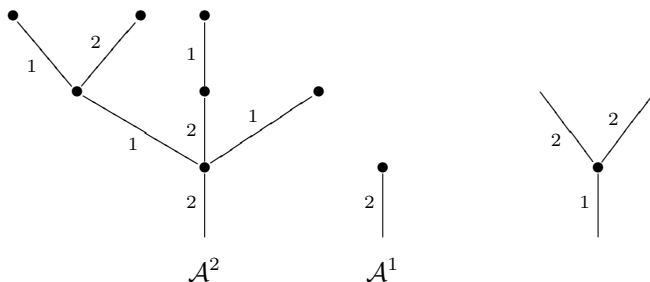
$$f_i : X_i \rightarrow \mathbb{P}^1$$

dont le graphe associé est l'arbre admissible  $\mathcal{A}_i$  et tels que  $X_i$  soit homéomorphe à  $\mathbb{P}^1$ , donc à un disque fermé. D'autre part, suivant la démonstration de la proposition 5.2.9, le sous-graphe stricte issu du noeud principal de  $\mathcal{A}$  est le graphe associé à un revêtement réel-étale

$$f_0 : X_0 \rightarrow \mathbb{P}^1$$

où  $X_0$  est homéomorphe à la sphère privée d'un disque ouvert par branche de sous-graphe stricte, donc à un disque fermé privé d'un disque ouvert par branche initialement coupée sur l'arbre  $\mathcal{A}$ . Le recollement du sous-graphe stricte et des arbres admissibles  $\mathcal{A}_i$  correspond au recollement des disques  $X_i$  sur la surface  $X_0$ . On obtient ainsi une surface  $X$  homéomorphe à un disque fermé, donc à  $\mathbb{P}^1$ .  $\square$

**Exemple 5.3.3 (Découpages et recollement de la démonstration précédente).** Pour l'arbre de niveau 3 de la figure 5.3, on obtient par découpage au niveau des arêtes incidentes au noeud principal, deux arbres admissibles  $\mathcal{A}^1$  et  $\mathcal{A}^2$  ainsi que le sous-graphe stricte issu du noeud principal :



Le Recollement des surfaces est donné par la figure 5.4.

**Corollaire 5.3.3.** *Si  $\mathcal{A}$  est un arbre admissible, alors il existe morphisme de surfaces de Klein réel-étale  $f : (\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) \rightarrow (\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$  dont l'arbre associé est  $\mathcal{A}$ .*

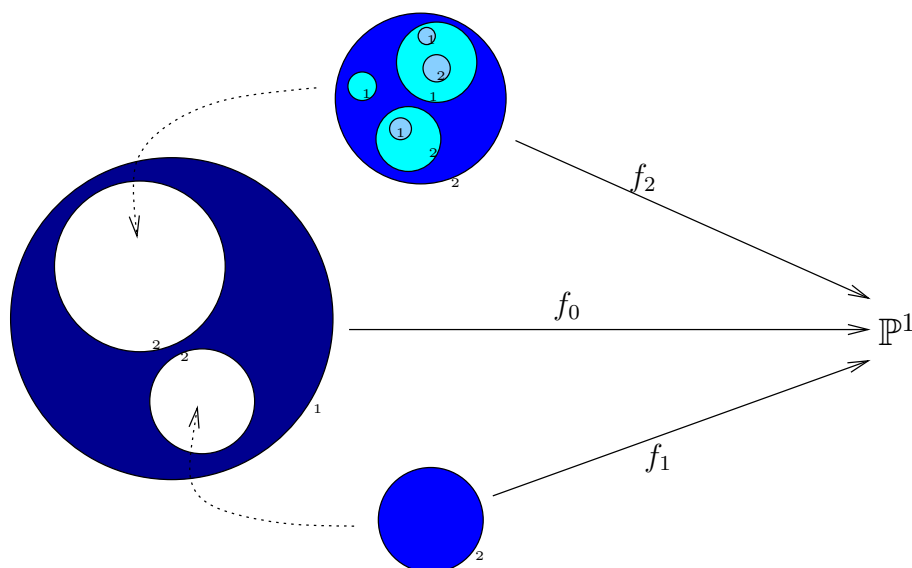


FIG. 5.4 – Recollements de surfaces

### 5.3.2 Ensemble d'indices pour un arbre admissible

**Définition 5.3.4.** Étant donné un arbre admissible  $\mathcal{A}$ , on note  $B_{(0)}(\mathcal{A})$  son tronc,  $b_{(0)}(\mathcal{A})$  le poids associé,  $D_{(0)}(\mathcal{A})$  son noeud principal et  $n_{(0)}(\mathcal{A})$  le nombre de noeuds de hauteur 1. Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on notera simplement  $B_{(0)}$ ,  $b_{(0)}$ ,  $D_{(0)}$  et  $n_{(0)}$  respectivement.

Pour faciliter le travail avec les arbres, nous avons besoin d'associer à tout arbre admissible un ensemble d'indices vérifiant les propriétés suivantes

- (I-1) L'indice associé au tronc et au noeud principal est  $(0)$  ;
- (I-2) les indices des sommets de hauteur  $p \geq 1$  sont des  $p$ -uplets distincts ;
- (I-3) les sommets d'une arête fermée d'indice  $(I, i)$  ont pour indice  $(I)$  et  $(I, i)$ .

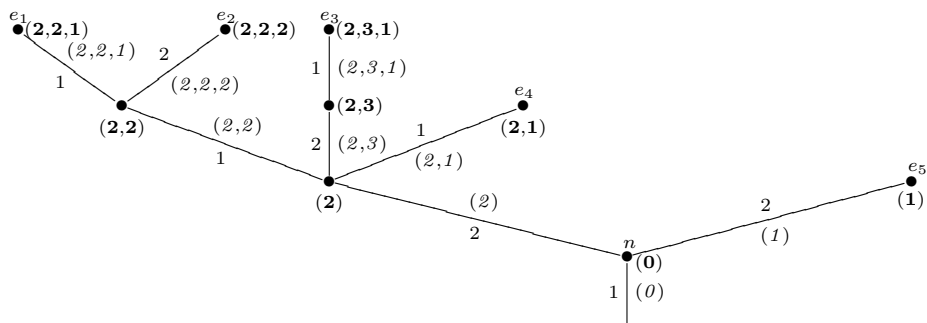
**Définition 5.3.5 (Ensemble d'indices possible).** Un *ensemble d'indices possible* pour un arbre admissible  $\mathcal{A}$  est la donnée, pour chaque sommet et chaque arête de  $\mathcal{A}$ , d'un  $p$ -uplet choisi récursivement de la façon suivante :

- L'indice associé au tronc et au noeud principal est  $(0)$ .
- Aux  $n_{(0)}$  arêtes fermées adjacentes au noeud principal sont associés les indices  $(1)$  à  $(n_0)$  et chacun des  $n_{(0)}$  sommets de hauteur 1 a même indice que l'arête qui le relie au noeud principal.
- Pour  $i = 1$  à  $n_{(0)}$ , aux  $n_{(i)}$  arêtes reliant le noeud  $(i)$  à un sommet de hauteur 2 sont associés les indices  $(i, 1)$  à  $(i, n_i)$  et chacun des sommets de hauteur 2 a même indice que l'arête qui le relie à un sommet de hauteur 1.
- Supposons que pour tout sommet et toute arête entre les sommets de hauteur  $p$  et le tronc ait été choisi un indice vérifiant les propriétés 1 à 3. Étant donné un sommet  $s$  de hauteur  $p$ , soit  $(I)$  son indice. Aux  $n_{(I)}$  arêtes reliant le noeud  $s$  à un sommet de hauteur  $p + 1$  sont associés les indices  $(I, 1)$  à  $(I, n_{(I)})$ . Chacun des sommets de hauteur  $p + 1$  a même indice que l'arête qui le relie à un sommet de hauteur  $p$ .

Pour simplifier la rédaction, on pourra noter  $(0, I)$  ou  $(I, 0)$  l'indice  $(I)$ .

Étant donné un arbre admissible  $\mathcal{A}$  et un ensemble  $\mathcal{I}$  d'indices possibles pour  $\mathcal{A}$ , on note  $D_{(I)}$  le sommet d'indice  $(I)$ ,  $B_{(I)}$  l'arête d'indice  $(I)$  et  $b_{(I)}$  son poids.

Soit un revêtement réel-étale  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  d'arbre associé  $\mathcal{A}$ . Un ensemble  $\mathcal{I}$  d'indices possible pour  $\mathcal{A}$  permet d'associer des indices aux composantes connexes de  $f^{-1}(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$  et aux adhérences des composantes connexes de  $f^{-1}(\text{Int } \mathbb{P}^1)$ .



(a) Indices possibles pour l'arbre

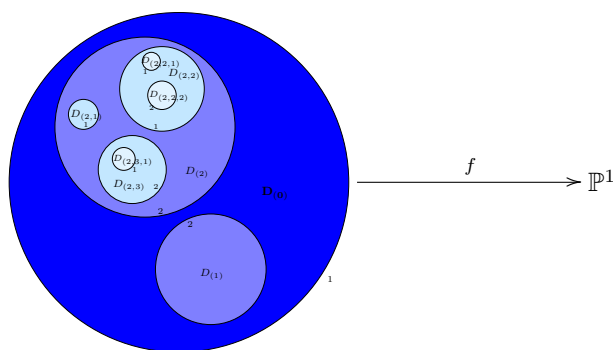

 (b) Composantes connexes  $D_{(I)}$ 

FIG. 5.5 – Exemple d'indices possibles

En identifiant l'indice (0) avec (0,0), pour tout  $I \in \mathcal{I}$  le bord de  $D_{(I)}$  est  $\partial D_{(I)} = \bigsqcup_{i=0}^{n_{(I)}} B_{(I,i)}$ .

Le degré du revêtement réel-étale  $f|_{D_{(I)}}$  est  $d_{(I)} = \sum_{i=0}^{n_{(I)}} b_{(I,i)}$ . De plus  $f$  et son arbre admissible ont pour degré

$$d = b_{(0)} + 2 \sum_{(I) \in \mathcal{I} \setminus \{(0)\}} b_{(I)} \quad (5.2)$$

(Voir proposition 5.2.3). En particulier,

$$d \equiv b_{(0)} \pmod{2} \quad (5.3)$$

**Exemple 5.3.4.** Le revêtement réel-étale et l'arbre de la figure 5.5 sont de degré

$$d = 1 + 2(2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 1) = 25.$$

**Définition 5.3.6 (Indices induits).** Soit  $\mathcal{A}$  un arbre admissible et  $\mathcal{I}$  un ensemble d'indices possibles pour  $\mathcal{A}$ . En coupant  $\mathcal{A}$  au niveau des  $n_{(0)}$  arêtes fermées incidentes au noeud principal, on obtient le sous-graphe stricte issu de  $D_{(0)}$  et  $n_{(0)}$  arbres  $\mathcal{A}^i$  dont le tronc  $B_{(0)}(\mathcal{A}^i)$  est l'arête obtenue en coupant  $B_{(i)}(\mathcal{A})$ . L'ensemble d'indices possibles pour  $\mathcal{A}^i$  induit par  $\mathcal{I}$  est défini par la propriété suivante : Pour tout  $(i, I) \in \mathcal{I}$ , on a  $B_{(i,I)}(\mathcal{A}) = B_{(I)}(\mathcal{A}^i)$ ,  $b_{(i,I)}(\mathcal{A}) = b_{(I)}(\mathcal{A}^i)$  et  $D_{(i,I)}(\mathcal{A}) = D_{(I)}(\mathcal{A}^i)$ .

Réciproquement, soit  $n$  arbres admissibles  $\mathcal{A}^1, \dots, \mathcal{A}^n$  avec des ensembles d'indices possibles  $\mathcal{I}^1, \dots, \mathcal{I}^n$  respectivement et un arbre  $\mathcal{A}$  obtenu en recollant les arbres  $\mathcal{A}^i$  le long d'arêtes  $a_i$

d'un graphe stricte. L'ensemble d'indices possibles pour  $\mathcal{A}$  induit par  $\mathcal{I}^1, \dots, \mathcal{I}^n$  est défini par la propriété suivante : Pour tout  $(I) \in \mathcal{I}^i$ , on a  $B_{(i,I)}(\mathcal{A}) = B_{(I)}(\mathcal{A}^i)$ ,  $b_{(i,I)}(\mathcal{A}) = b_{(I)}(\mathcal{A}^i)$  et  $D_{(i,I)}(\mathcal{A}) = D_{(I)}(\mathcal{A}^i)$ .

### 5.3.3 Construction

*Remarque 5.3.3.* Pour tout  $d \in \mathbb{N}^*$ , il existe un seul arbre admissible de degré  $d$  et de niveau 0, l'arbre de la figure 5.6(c).

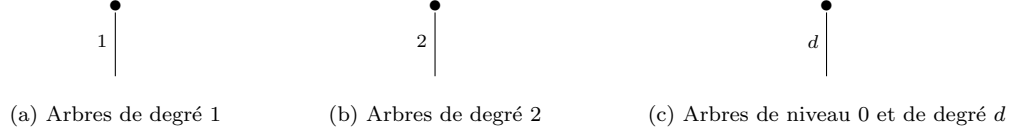


FIG. 5.6 – Arbres admissibles de niveau 0

**Proposition 5.3.4.** *Tout arbre admissible de degré  $d > 1$  peut s'obtenir à partir d'arbres admissibles de degrés strictement plus petits.*

*Démonstration.* La construction se fait par récurrence sur le degré  $d$ .

**$d = 1$  :** Le seul arbre admissible possible est l'arbre de niveau 0 et de degré 1 (figure 5.6(a)).

**Si  $d = 2n \geq 2$  est pair :** Supposons construits les arbres admissibles de degré  $2n - 1$ .

- Si  $\mathcal{A}_d$  est un arbre admissible de degré pair  $d = 2n \geq 2$ , alors en enlevant 1 à l'entier pair  $b_{(0)}(\mathcal{A}_d) \geq 2$ , on obtient un arbre admissible de degré  $2n - 1$ .
- Réciproquement, si  $\mathcal{A}_{d-1}$  est un arbre admissible de degré impair  $2n - 1 \geq 1$ , alors en ajoutant 1 à l'entier impair  $b_{(0)}(\mathcal{A}_{d-1}) \geq 1$ , on retrouve un arbre admissible de degré  $d = 2n \geq 2$ .

Ainsi tous les arbres admissibles de degré impair  $d = 2n$  s'obtiennent à partir des arbres admissibles de degré  $2n - 1$  en ajoutant 1 au poids  $b_{(0)}$  de leur tronc.

**Si  $d = 2n + 1 > 1$  est impair :** Supposons construits les arbres admissibles de degré  $d' \leq 2n$ .

1. Lorsque  $b_{(0)} > 1$ .
  - Si  $\mathcal{A}_d$  est un arbre admissible de degré impair  $d = 2n + 1 > 1$  avec  $b_{(0)}(\mathcal{A}_d) \geq 3$ , alors en enlevant 1 à  $b_{(0)}(\mathcal{A}_d)$ , on obtient un arbre admissible de degré  $2n - 1$ .
  - Réciproquement, si  $\mathcal{A}_{d-1}$  est un arbre admissible de degré pair  $2n \geq 2$ , alors en ajoutant 1 à l'entier  $b_{(0)}(\mathcal{A}_{d-1}) \geq 2$ , on retrouve un arbre admissible  $\mathcal{A}_d$  de degré  $d = 2n + 1$  avec  $b_{(0)}(\mathcal{A}_d) \geq 3$ .
2. Lorsque  $b_{(0)} = 1$ , le niveau de l'arbre  $\mathcal{A}_d$  de degré  $d = 2n + 1 > b_{(0)}$  est strictement positif. Soit  $\mathcal{I}$  un ensemble d'indices possibles pour  $\mathcal{A}_d$ .
  - Si on coupe l'arbre admissible  $\mathcal{A}_d$  au niveau des arêtes fermées incidentes à son noeud principal, on obtient le sous-graphe stricte issu du noeud principal et des arbres admissibles  $\mathcal{A}_d^s$ , pour  $s = 1 \dots n_{(0)}(\mathcal{A}_d)$ . Ces derniers viennent avec des ensembles d'indices possibles  $\mathcal{I}^s$  induits par  $\mathcal{I}$ . Si on note  $d_s$  le degré de  $\mathcal{A}_d^s$  et  $N = n_{(0)}(\mathcal{A}_d)$ , d'après (5.2),

$$d = 2n + 1 = 1 + 2 \sum_{s=1}^N \sum_{(I) \in \mathcal{I}^s} b_{(I)}(\mathcal{A}_d^s) = 1 + \sum_{s=1}^N (d_s + b_{(0)}(\mathcal{A}_d^s)) \quad (5.4)$$

- Réciproquement, soit  $N$  arbres admissibles  $\mathcal{A}^1, \dots, \mathcal{A}^N$  de degrés respectifs  $d_1, \dots, d_N$  vérifiant l'équation (5.4). On note  $G$  le graphe admissible stricte à  $N + 1$  arêtes ouvertes  $B_{(0)}, B_1, \dots, B_N$  de poids respectifs  $b_{(0)} = 1, b_1 = b_{(0)}(\mathcal{A}^1), \dots, b_s = b_{(0)}(\mathcal{A}^s), \dots, b_N = b_{(0)}(\mathcal{A}^N)$ .

En recollant le tronc de chacun des arbres admissibles  $\mathcal{A}^s$  le long de l'arête ouverte  $B_s$  de  $G$ , on obtient un arbre admissible  $\mathcal{A}_d$  de degré  $d = 2n + 1$  tel que  $b_{(0)}(\mathcal{A}) = 1$ .  $\square$

**Algorithme** La démonstration de la proposition 5.3.4 donne un algorithme de construction de tout arbre admissible de degré  $d$  à partir d'arbres admissibles de degrés strictement plus petits. On peut l'utiliser pour compter les arbres admissibles de degré  $d$ . Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe autant d'arbres admissibles de degré  $2n + 1$  distincts que d'arbres admissibles de degré  $2n + 2$  distincts.

Pour tout  $d \in \mathbb{N}^*$ , on désigne par  $\mathcal{A}_d^0$  l'arbre de niveau 0 et de degré  $d$  (figure 5.6(c)) et par  $E(x)$  la partie entière d'un réel  $x$ . Pour écrire un algorithme simple, nous commençons par définir des applications sur les arbres.

**L'application *shift* :**

$$\mathbf{SH} : \mathcal{A}_d \mapsto \mathcal{A}_{d+1}$$

Si  $\mathcal{A}_d$  est un arbre admissible de degré  $d$ , alors  $\mathcal{A}_{d+1} = SH(\mathcal{A}_d)$  est l'arbre admissible de degré  $d + 1$  obtenu en augmentant de 1 le poids  $b_{(0)}(\mathcal{A}_d)$  du tronc de  $\mathcal{A}_d$ . Si  $L$  est un ensemble d'arbre admissible,  $SH(L) = \{SH(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \in L\}$ .

**L'application *degré pondéré* :**

$$\mathbf{DP} : \mathcal{A} \mapsto \mathbf{d}(\mathcal{A}) + \mathbf{b}_{(0)}(\mathcal{A})$$

Le *degré pondéré* d'un arbre admissible  $\mathcal{A}$  est la somme de son degré  $d(\mathcal{A})$  et de l'entier  $b_{(0)}(\mathcal{A})$  associé à son tronc. D'après l'équation (5.3), c'est un entier pair.

**L'application *greffe***

$$\mathbf{GF} : (\mathcal{A}^1, \dots, \mathcal{A}^s) \mapsto \mathcal{A}$$

Si  $\mathcal{A}^1, \dots, \mathcal{A}^N$  sont des arbres admissibles,  $GF(\mathcal{A}^1, \dots, \mathcal{A}^N) = \mathcal{A}$  est l'arbre admissible de degré

$$d(\mathcal{A}) = 1 + \sum_{s=1}^N DP(\mathcal{A}^s)$$

obtenu en recollant le tronc de chacun des arbres admissibles  $\mathcal{A}^s$  le long de l'arête ouverte  $B_s$  du graphe admissible stricte à  $N + 1$  arêtes ouvertes  $B_{(0)}, B_1, \dots, B_N$  de poids respectifs  $b_{(0)} = 1, b_1 = b_{(0)}(\mathcal{A}^1), \dots, b_N = b_{(0)}(\mathcal{A}^N)$ .

**Algorithme ARBRES** pour obtenir l'ensemble des arbres admissibles de degré donné  $d$ .

---

**ARBRES( $d$ )**

---

**Require:**  $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

**if**  $d = 1$  **then** (Cas  $d = 1$ )

$$ARBRES(d) = \{\mathcal{A}_1^0\}$$

**else** (Cas général ( $d > 1$ ))

$$ARBRES(d) = SH(ARBRES(d - 1))$$

**if**  $d$  impair **then** (cas impair, arbres admissibles avec  $b_{(0)} = 1$ )

$$L = \bigcup_{i=1}^{d-2} ARBRES(i) \quad \text{(arbres admissibles de degré } i < d - 1)$$

**for**  $p = 2q$ ,  $q = 1$  à  $\frac{d-1}{2}$  **do**

$$L_p = \{\mathcal{A} \in L \mid DP(\mathcal{A}) = p\} \quad \text{(tri des arbres admissibles par degré pondéré)}$$

**end for**

**for all**  $2p_1 + \dots + 2p_s = d - 1$ , décomposition de  $d - 1$  comme somme d'entiers pairs  $p_i > 0$  **do**

**for all**  $(\mathcal{A}^1, \dots, \mathcal{A}^s) \in L_{2p_1} \times \dots \times L_{2p_s}$  **do**

$$ARBRES(d) = ARBRES(d) \cup \{GF(\mathcal{A}^1, \dots, \mathcal{A}^s)\}$$

**end for**

**end for**

**end if**

**end if**

---

**Construction des arbres de degré 1 à 8**
 **$d = 1$  et  $d = 2$** 

(Figures 5.6 (a) et (b) respectivement)

Voir remarque 5.3.3.

**Arbres admissibles de degrés  $d = 3$  et  $d = 4$** 

(Figures 5.7 et 5.8 respectivement)

$d = 3$  : Les arbres admissibles tels que  $b_{(0)} \geq 3$  sont obtenus comme shift des arbres admissibles de degrés 2, ce qui donne un arbre admissible,  $\mathcal{A}_3^0$ .

Il n'existe qu'un arbre admissible de degré strictement inférieur à  $d - 1 = 2$ , l'arbre  $\mathcal{A}_1^0$  de degré pondéré  $DP(\mathcal{A}_1^0) = 2$ . Comme 2 n'a qu'une seule décomposition comme somme d'entiers strictement positifs pairs,  $\mathcal{A}_3^1 = GF(\mathcal{A}_1^0, 1)$  est le seul arbre admissible de degré 3 avec  $b_{(0)} = 1$ .

$$ARBRES(3) = \{\mathcal{A}_3^0, \mathcal{A}_3^1\}$$

$d = 4$  :

$$ARBRES(4) = \{\mathcal{A}_4^0 = SH(\mathcal{A}_3^0), \mathcal{A}_4^1 = SH(\mathcal{A}_3^1)\}.$$

**Arbres admissibles de degrés  $d = 5$  et  $d = 6$** 

(Figures 5.9 et 5.10 respectivement)

$d = 5$  : Les arbres admissibles tels que  $b_{(0)} \geq 3$  sont obtenus comme shift des arbres admissibles de degrés 4, ce qui donne deux arbres admissibles,  $\mathcal{A}_5^0$  et  $\mathcal{A}_5^1 = SH(\mathcal{A}_4^1)$ .

L'ensemble des arbres admissibles de degré strictement inférieur à  $d - 1 = 4$  est

$$L = \{\mathcal{A}_1^0, \mathcal{A}_2^0, \mathcal{A}_3^0, \mathcal{A}_3^1\}$$

de degrés pondérés :

$$DP(\mathcal{A}_1^0) = 2 \quad DP(\mathcal{A}_2^0) = 4 \quad DP(\mathcal{A}_3^0) = 6 \quad DP(\mathcal{A}_3^1) = 4$$

Il y a exactement deux façons de décomposer 4 comme somme d'entiers pairs strictement positifs :

$$4 = 4 \quad \text{et} \quad 4 = 2 + 2.$$

Pour la première décomposition, nous pouvons utiliser les arbres admissibles  $\mathcal{A}_2^0$  et  $\mathcal{A}_3^1$ , ce qui donne deux arbres admissibles  $\mathcal{A}_5^{1,2} = GF(\mathcal{A}_2^0)$  et  $\mathcal{A}_5^{1,3} = GF(\mathcal{A}_3^1)$ .

Pour la deuxième décomposition, nous devons utiliser  $\mathcal{A}_1^0$ , seul arbre admissible de degré inférieur à 3 et de degré pondéré 2, ce qui donne un arbre admissible  $\mathcal{A}_5^{1,1} = GF(\mathcal{A}_1^0, \mathcal{A}_1^0)$ .

Ainsi

$$ARBRES(5) = \{\mathcal{A}_5^0, \mathcal{A}_5^1, \mathcal{A}_5^{1,2}, \mathcal{A}_5^{1,3}, \mathcal{A}_5^{2,1}\}.$$

$d = 6$  : En notant  $\mathcal{A}_6^1 = SH(\mathcal{A}_5^1)$ ,

$$ARBRES(6) = \{\mathcal{A}_6^0, \mathcal{A}_6^1, \mathcal{A}_6^{1,2}, \mathcal{A}_6^{1,3}, \mathcal{A}_6^{2,1}\}.$$

**Arbres admissibles de degrés  $d = 7$  et  $d = 8$** 

(degré 7 : Figure 5.11)

$d = 7$  : Les arbres admissibles tels que  $b_{(0)} \geq 3$  sont obtenus comme shift des arbres admissibles de degrés 6. On obtient ainsi 5 arbres admissibles,

$$\{\mathcal{A}_7^0 = SH(\mathcal{A}_6^0), \mathcal{A}_7^1 = SH(\mathcal{A}_6^1), \mathcal{A}_7^{1,2} = SH(\mathcal{A}_6^{1,2}), \mathcal{A}_7^{1,3} = SH(\mathcal{A}_6^{1,3}), \mathcal{A}_7^{2,1} = SH(\mathcal{A}_6^{2,1})\}.$$

Les arbres admissibles de degré strictement inférieur à  $d - 1 = 6$  ont été construits précédemment. Leur classement par degré pondéré donne :

$$L_2 = \{\mathcal{A}_1^0\} \quad L_4 = \{\mathcal{A}_2^0, \mathcal{A}_3^1\} \quad L_6 = \{\mathcal{A}_3^0, \mathcal{A}_4^1, \mathcal{A}_5^{1,2}, \mathcal{A}_5^{1,3}, \mathcal{A}_5^{2,1}\}$$

Il y a exactement trois façons de décomposer 6 comme somme d'entiers pairs strictement positifs :

$$6 = 6 \quad 6 = 4 + 2 \quad 6 = 2 + 2 + 2.$$

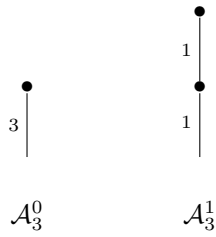


FIG. 5.7 – Arbres admissibles de degré 3

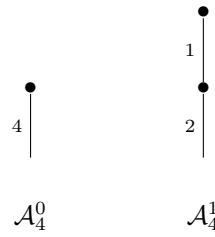


FIG. 5.8 – Arbres admissibles de degré 4

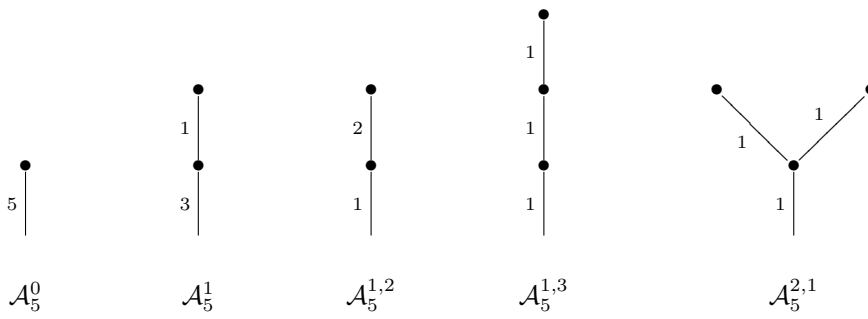


FIG. 5.9 – Arbres admissibles de degré 5

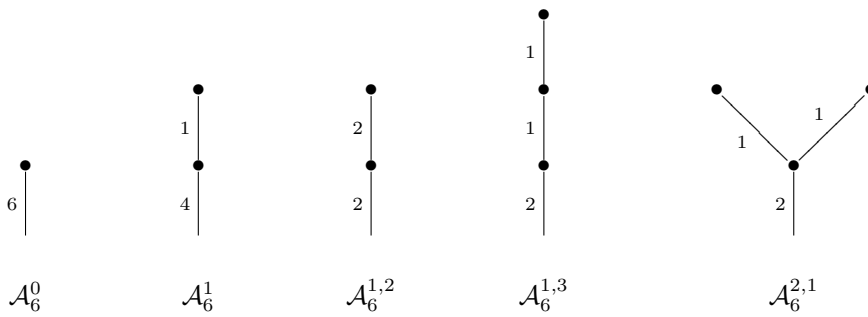


FIG. 5.10 – Arbres admissibles de degré 6

- Pour la première décomposition, nous pouvons utiliser les arbres admissibles  $\mathcal{A}_3^0$ ,  $\mathcal{A}_4^1$ ,  $\mathcal{A}_5^2$ ,  $\mathcal{A}_5^3$  et  $\mathcal{A}_5^{1,1}$ . Ceci nous donne 5 arbres admissibles

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_7^{1,0,3} &= GF(\mathcal{A}_3^0), & \mathcal{A}_7^{1,1,4} &= GF(\mathcal{A}_4^1), \\ \mathcal{A}_7^{1,2,5} &= GF(\mathcal{A}_5^2), & \mathcal{A}_7^{1,3,5} &= GF(\mathcal{A}_5^3), & \mathcal{A}_7^{1,1,5} &= GF(\mathcal{A}_5^{1,1}).\end{aligned}$$

- Pour la deuxième décomposition, nous devons utiliser  $\mathcal{A}_1^0$  comme arbre admissible de poids 2 et nous pouvons prendre  $\mathcal{A}_2^0$  ou  $\mathcal{A}_3^1$  comme arbre admissible de poids 4. Nous obtenons ainsi deux arbres admissibles supplémentaires

$$\mathcal{A}_7^{2,2} = GF(\mathcal{A}_1^0, \mathcal{A}_2^0), \quad \mathcal{A}_7^{2,3} = GF(\mathcal{A}_1^0, \mathcal{A}_3^1)$$

- Pour la troisième décomposition, nous devons utiliser  $\mathcal{A}_1^0$ , seul arbre admissible de poids 2. Nous obtenons un arbre admissible

$$\mathcal{A}_7^{3,1} = GF(\mathcal{A}_1^0, \mathcal{A}_1^0, \mathcal{A}_1^0).$$

$$ARBRES(7) = \{\mathcal{A}_7^0, \mathcal{A}_7^1, \mathcal{A}_7^2, \mathcal{A}_7^3, \mathcal{A}_7^{1,1}, \mathcal{A}_7^{1,0,3}, \mathcal{A}_7^{1,1,4}, \mathcal{A}_7^{1,2,5}, \mathcal{A}_7^{1,3,5}, \mathcal{A}_7^{1,1,5}, \mathcal{A}_7^{2,2}, \mathcal{A}_7^{2,3}, \mathcal{A}_7^{3,1}\}.$$

$d = 8$  : En notant  $\mathcal{A}_8^l = SH(\mathcal{A}_7^l)$ ,

$$ARBRES(8) = \{\mathcal{A}_8^0, \mathcal{A}_8^1, \mathcal{A}_8^2, \mathcal{A}_8^3, \mathcal{A}_8^{1,1}, \mathcal{A}_8^{1,0,3}, \mathcal{A}_8^{1,1,4}, \mathcal{A}_8^{1,2,5}, \mathcal{A}_8^{1,3,5}, \mathcal{A}_8^{1,1,5}, \mathcal{A}_8^{2,2}, \mathcal{A}_8^{2,3}, \mathcal{A}_8^{3,1}\}.$$



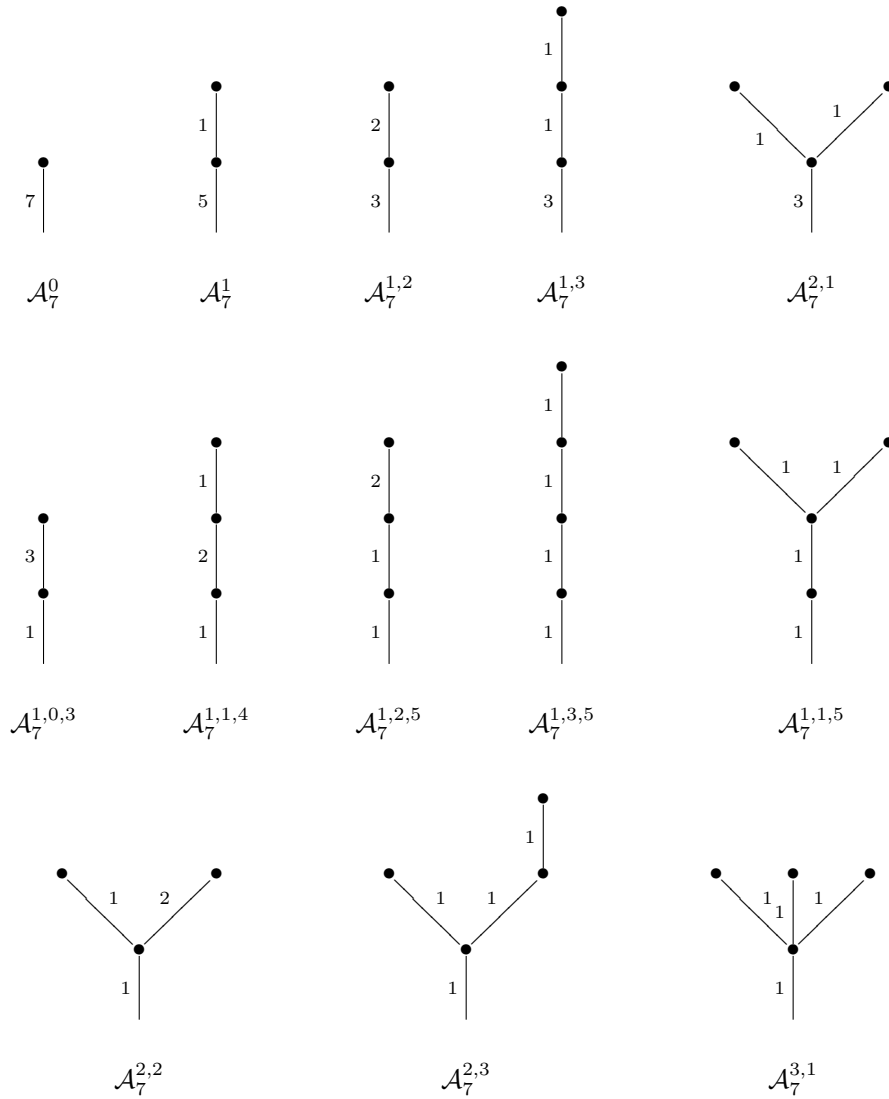


FIG. 5.11 – Arbres admissibles de degré 7

# Chapitre 6

## Classification des endomorphismes réel-étales de $\mathbb{P}^1$

### 6.1 Influences des relations sur les arbres

#### 6.1.1 Arbre signé

On munit  $\mathbb{P}^1$  d'une orientation. Celle-ci induit une orientation sur son bord  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ .

Soit un revêtement réel-étale  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  d'arbre associé  $\mathcal{A}$ . On choisit un ensemble d'indices possibles  $\mathcal{I}$  pour  $\mathcal{A}$ . Pour tout indice  $(I) \in \mathcal{I}$ , on munit  $D_{(I)}$  de l'orientation induite par celle de  $\mathbb{P}^1$  et on note  $f_{(I)} = f|_{D_{(I)}}$ . L'action des revêtements  $f_{(I)}$  sur l'orientation est entièrement déterminée par la longueur de l'indice  $(I)$  et l'action de  $f|_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}$  sur l'orientation.

En effet, pour tout indice  $(I) \in \mathcal{I}$  et tout  $i = 1$  à  $n_{(I)}$ , les revêtements  $f_{(I)}$  et  $f_{(I,i)}$  agissent de façon opposée sur l'orientation. Sachant que l'action de  $f|_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}$  sur l'orientation est identique à l'action de  $f_{(0)}$  sur l'orientation. Par récurrence sur la longueur de l'indice  $(I) \in \mathcal{I}$ , l'action de  $f_{(I)}$  sur l'orientation est la même que celle de  $f|_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}$  si et seulement si la longueur de  $(I)$  est paire.

**Définitions 6.1.1 (Arbres signés).** Un *arbre signé* est un arbre admissible  $\mathcal{A}$  auquel on attribue un signe  $o = +$  ou  $o = -$ , appelé *signe de l'arbre  $\mathcal{A}$* . Celui-ci est noté comme deuxième noeuds au tronc de l'arbre qui devient une arête fermée.

L'arbre signé associé à un revêtement réel-étale  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  est un arbre signé obtenu en munissant son arbre associé du signe  $o$  tel que

$$\begin{aligned} o = + & \quad \text{Si } f|_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})} \text{ préserve l'orientation} \\ o = - & \quad \text{Sinon.} \end{aligned}$$

**Exemple 6.1.1.** Considérons le morphisme de surfaces de Klein donnée en coordonnées homogènes par

$$f : \begin{aligned} \mathbb{P}^1 & \longrightarrow \mathbb{P}^1. \\ [z_1 : z_2] & \longmapsto [z_1^3 + 2z_1^2z_2 - 2z_1z_2^2 - z_2^3 : z_1z_2(z_1 + z_2)] \end{aligned}$$

C'est un revêtement réel-étale de degré 3 tel que  $f|_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}$  préserve l'orientation. L'image réciproque du bord  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  de  $\mathbb{P}^1$  par  $f$  a deux composantes connexes sur chacune desquelles  $f$  est degré 1. On en déduit l'arbre signé de  $f$  (voir ci-contre).



**Proposition 6.1.1.** Soit  $\mathcal{A}$  arbre signé. Il existe un morphisme réel-étale  $f : (\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) \rightarrow (\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$  dont l'arbre signé est  $\mathcal{A}$ .

*Démonstration.* L'application donnée en coordonnées homogènes par

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{P}^1 & \longrightarrow \mathbb{P}^1 \\ [z_1 : z_2] & \longmapsto [-\bar{z}_1 : \bar{z}_2] \end{aligned}$$

est un isomorphisme de surfaces de Klein qui inverse l'orientation de  $\mathbb{P}^1$  donc de son bord. Le corollaire 5.3.3 donne l'existence d'un morphisme réel-étale de surfaces de Klein dont l'arbre associé est  $\mathcal{A}$  privé de son signe. En composant éventuellement avec l'isomorphisme  $\sigma$ , on obtient un morphisme dont l'arbre signé associé est  $\mathcal{A}$ .  $\square$

## 6.1.2 Sur les arbres

**Proposition 6.1.2.** *Deux revêtements réel-étales isotopes  $f_0 : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  et  $f_1 : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  ont même arbre signé.*

*Démonstration.* Soit  $H : I_\varepsilon \times \mathbb{P}^1 \rightarrow I_\varepsilon \times \mathbb{P}^1$ , une isotopie entre  $f_0$  et  $f_1$ . On note  $\mathcal{A}_0$  l'arbre signé associé à  $f_0$  et  $\mathcal{A}_1$  l'arbre signé associé à  $f_1$ .

Le revêtement  $H$  étant réel-étale, les revêtements topologiques  $f_0|_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})} = \text{pr}_2 \circ H(0, \cdot)|_{I_\varepsilon \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})}$  et  $f_1|_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})} = \text{pr}_2 \circ H(1, \cdot)|_{I_\varepsilon \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})}$  doivent avoir le même comportement vis-à-vis de l'orientation, Donc les signes des arbres sont identiques.

Comme  $H|_{H^{-1}(I_\varepsilon \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}))}$  est un revêtement topologique,  $H^{-1}(I_\varepsilon \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$  est la réunion disjointes de composantes connexes homéomorphes à  $I_\varepsilon \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ . On obtient alors une bijection  $\varphi$  entre les arêtes de  $\mathcal{A}_0$  et les arêtes de  $\mathcal{A}_1$  faisant correspondre les arêtes appartenant à la même composante connexe de  $H^{-1}(I_\varepsilon \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$ . De plus, le degré de  $f_0$  sur une arête  $B$  de  $\mathcal{A}_0$  étant le degré de  $H$  sur la composante connexe de  $H^{-1}(I_\varepsilon \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$  à laquelle elle appartient, est égal au degré de  $f_1$  sur l'arête  $\varphi(B)$  de  $\mathcal{A}_1$ . Comme la bijection  $\varphi$  s'étend aux sommets des arbres en faisant correspondre ceux qui appartiennent à la même composante connexe de  $H^{-1}(I_\varepsilon \times \text{Int } \mathbb{P}^1)$ , elle induit un isomorphisme entre les arbres admissibles  $\mathcal{A}_0$  et  $\mathcal{A}_1$ .  $\square$

**Proposition 6.1.3.** *Deux revêtements réel-étales  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  et  $f' : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  équivalents ont même arbre associé.*

*Démonstration.* On note  $g : \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1$  et  $h : \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1$  des homéomorphismes tels que  $h \circ f = f' \circ g$ . Les applications  $f$  et  $h \circ f$  doivent avoir le même arbre puisque  $h$  induit une bijection continue de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  sur lui-même. On se ramène donc à étudier les liens entre les arbres d'applications  $f$  et  $f'$  faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \xrightarrow[g]{\sim} & \mathbb{P}^1 \\ & \searrow f & \swarrow f' \\ & \mathbb{P}^1 & \end{array} \quad (6.1)$$

où  $g : \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1$  est un homéomorphisme. On note  $\mathcal{A}$  l'arbre associé à  $f$  et  $\mathcal{A}'$  l'arbre associé à  $f'$ .

D'après le diagramme commutatif (6.1), l'homéomorphisme  $g$  induit un homéomorphisme

$$g|_{f^{-1}(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))} : f^{-1}(\mathbb{P}^1(\mathbb{R})) \xrightarrow{\sim} f'^{-1}(\mathbb{P}^1(\mathbb{R})).$$

En particulier, si  $B$  est une composante connexe de  $f^{-1}(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$ , le degré de  $f$  sur  $B$  et le degré de  $f'$  sur  $B' = g(B)$  doivent être identiques. De plus, si  $B$  est l'intersection de l'adhérence de deux composantes connexes  $D^1$  et  $D^2$  de  $f^{-1}(\text{Int } \mathbb{P}^1)$ , alors  $g(B)$  est l'intersection de l'adhérence des deux composantes connexes images  $g(D^1)$  et  $g(D^2)$  de  $f'^{-1}(\text{Int } \mathbb{P}^1)$ . Ainsi,  $g$  induit un isomorphisme entre les arbres admissibles  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$ .  $\square$

**Corollaire 6.1.4.** *Deux revêtements réel-étales quasi-équivalents ont même arbre associé.*

## 6.2 Quand deux morphismes ont même arbre

*Le but de cette section est de montrer que deux endomorphismes réel-étales de  $\mathbb{P}^1$  qui ont même arbre sont quasi-équivalents et même isotopes s'ils ont même arbre signé.*

*Pour cela, nous nous ramenons à des revêtements génériques (Définition 6.2.1). Le résultat pour ces revêtements s'appuie sur une étude des systèmes de Hurwitz de revêtements ramifiés génériques strictes du disque (section 6.2.2). Celle-ci s'inspire des méthodes de l'article de I. Bernstein et A. Edmonds [BE84]. Le cas général s'en déduira.*

### 6.2.1 Revêtements génériques et systèmes de Hurwitz

**Définition 6.2.1 (Revêtement ramifié générique).** Soit  $X$  et  $Y$  des surfaces topologiques. Un revêtement ramifié  $f : X \rightarrow Y$  de degré  $d \geq 2$  est *générique* si pour tout point  $y \in Y$ , la fibre  $f^{-1}(y)$  comporte toujours au moins  $d - 1$  points.

Soit  $X$  une surface à bord. Un revêtement réel-étale  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  de degré  $d \geq 2$  est *générique* si le revêtement ramifié  $f|_{f^{-1}(\text{Int } \mathbb{P}^1)}$  est un revêtement générique de surfaces topologiques.

**Lemme 6.2.1.** *Le revêtement ramifié du disque unité  $\mathbb{D}$  de  $\mathbb{C}$ ,*

$$\begin{aligned} \rho_d : \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{D} \\ z &\longmapsto z^d \end{aligned}$$

*est isotope à un revêtement,  $f_d : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ , réel-étale générique de degré  $d$  par une isotopie  $H$  vérifiant*

$$H|_{I_\varepsilon \times \partial \mathbb{D}} : (t, e^{i\theta}) \longmapsto (t, e^{di\theta}) = (t, \rho_d(e^{i\theta})).$$

*Démonstration.* Une fois défini le revêtement  $f_d$ , l'astuce d'Alexander est utilisée pour construire l'isotopie.

1. L'application polynomiale de degré  $d$  et préservant l'orientation,

$$\begin{aligned} P_d : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{1}{d-1} (dz - 2^{d-1}z^d), \end{aligned}$$

est un revêtement ramifié générique d'ensemble de ramification

$$\mathcal{R} = \left\{ r_k = \frac{1}{2} e^{\frac{2ik\pi}{d-1}}, \quad k = 1 \text{ à } d-1 \right\} \subseteq \mathbb{D}.$$

L'image de  $\mathbb{D}$  par  $P_d$  est homéomorphe à  $\mathbb{D}$ . Donc  $P_d$  induit un revêtement ramifié générique  $g_d : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  qui préserve l'orientation et dont on peut supposer que  $g_d(0) = 0$ . Comme les restrictions  $g_d|_{\partial \mathbb{D}}$  et  $\rho_d|_{\partial \mathbb{D}}$  sont des revêtements topologiques de degré  $d$  qui préservent l'orientation au-dessus de  $S^1 = \partial \mathbb{D}$ , il existe un homéomorphisme  $h^\delta : \partial \mathbb{D} \xrightarrow{\sim} \partial \mathbb{D}$  tel que  $h^\delta \circ g_d|_{\partial \mathbb{D}} = \rho_d|_{\partial \mathbb{D}}$ . Ce dernier se prolonge en un homéomorphisme

$$h : \mathbb{D} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$$

du disque tout entier et le revêtement

$$f_d = h \circ g_d : \mathbb{D} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$$

tel que  $f_d(0) = 0$  et qui vérifie les conditions cherchées.

2. Pour  $t \in ]0, 1]$ , notons

$$\begin{aligned} G_t : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto tz \end{aligned}$$

l'homothétie de centre 0 et de rapport  $t$ . On construit une application continue  $H : I_\varepsilon \times \mathbb{D} \rightarrow I_\varepsilon \times \mathbb{D}$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} H|_{]-\varepsilon, 0] \times \mathbb{D}} : ]-\varepsilon, 0] \times \mathbb{D} &\longrightarrow ]-\varepsilon, 0] \times \mathbb{D} \\ (t, z) &\longmapsto (t, \rho_d(z)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H|_{[0, 1] \times \mathbb{D}} : [0, 1] \times \mathbb{D} &\longrightarrow [0, 1] \times \mathbb{D} \\ (t, z) &\longmapsto \begin{cases} (t, G_t \circ f_d \circ G_t^{-1}(z)) & \text{si } |z| \leq t \\ (t, \rho_d(z)) & \text{si } |z| \geq t \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H|_{[1, 1+\varepsilon[ \times \mathbb{D}} : [1, 1+\varepsilon[ \times \mathbb{D} &\longrightarrow [1, 1+\varepsilon[ \times \mathbb{D} \\ (t, z) &\longmapsto (t, \rho_d(z)) \end{aligned}$$

Par construction, l'application  $H$  est une isotopie entre  $\rho_d$  et  $f_d$ . □

**Proposition 6.2.2.** *Soit  $X$  et  $Y$  des surfaces topologiques. Tout revêtement ramifié  $f : X \rightarrow Y$  de degré  $d \geq 2$  est isotope à un revêtement ramifié générique de même degré.*

*Démonstration.* Dans un premier temps, on obtient des points de ramification de multiplicité 2, c'est-à-dire au voisinage desquels  $f$  est de degré 2. Ensuite on s'assure qu'il n'y ait pas deux tels points dans une fibre au-dessus d'un point singulier  $y \in Y$ .

1. Soit  $x$  un point de ramification de multiplicité  $m > 2$  pour  $f$ . Il existe un voisinage fermé  $D$  de  $x$  et des homéomorphismes  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{D}$  et  $\psi : f(D) \rightarrow \mathbb{D}$  faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{D} \\ f|_D \downarrow & \sim & \downarrow \rho_m \\ f(D) & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{D} \end{array}$$

D'après le lemme 6.2.1,  $\rho_m$  est isotope à un revêtement ramifié générique  $f_m$  de degré  $m$  par une isotopie n'agissant pas sur le bord de  $\mathbb{D}$ . On en déduit qu'il existe une isotopie entre  $f|_D$  et le revêtement générique  $\psi^{-1} \circ f_m \circ \varphi$  qui n'agit pas sur le bord de  $D$  et donc se prolonge, par l'identité, en une isotopie non ramifiée le long du bord.

En répétant ce procédé pour chaque point de ramification de multiplicité strictement supérieure à 2, on obtient une isotopie entre  $f$  et un revêtement  $f'$  n'ayant que des points de ramification de multiplicité 2.

2. Supposons qu'il existe un point singulier  $y \in Y$  de  $f'$  dont la fibre contient deux points de ramification  $x$  et  $x'$ . Soit  $D$  un voisinage fermé de  $x$  dont l'intersection avec le lieu de ramification étendu de  $f$  est réduite à  $x$ . Pour  $D$  assez petit, il existe des homéomorphismes  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{D}$  et  $\psi : f(D) \rightarrow \mathbb{D}$  faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{D} \\ f|_D \downarrow & \sim & \downarrow \rho_2 \\ f(D) & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{D} \end{array}$$

En particulier  $\varphi(x) = \psi(y) = 0$ . Il existe un homéomorphisme  $h$  de  $\mathbb{D}$  tel que  $h|_{\partial\mathbb{D}} = \text{id}_{\partial\mathbb{D}}$  et  $h(0) = \frac{1}{2}$ . L'homéomorphisme  $h$  est isotope à l'identité par une isotopie du disque n'agissant pas sur le bord. On en déduit que  $\rho_2$  est isotope à  $h \circ \rho_2$ .

Ainsi  $f|_D$  est isotope à  $g = \psi^{-1} \circ h \circ \rho_2 \circ \varphi$  qui est une application vérifiant

$$g|_{\partial D} = f|_{\partial D} \quad \text{et} \quad g(x) = \psi^{-1} \circ h \circ \rho_2(0) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \neq y.$$

On peut donc prolonger l'isotopie entre  $f|_D$  et  $g$  en une isotopie entre  $f$  et un revêtement ramifié ayant des points de ramification de multiplicité 2 et un point singulier de plus que  $f$ . En répétant ce procédé, on obtient un revêtement générique isotope à  $f'$  donc à  $f$ .  $\square$

**Corollaire 6.2.3.** *Soit  $X$  une surface à bord. Tout revêtement réel-étale  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  de degré  $d \geq 2$  est isotope à un revêtement réel-étale générique de même degré.*

**Système de Hurwitz :** Soit  $\mathcal{D}$  une surface à bord homéomorphe au disque  $\mathbb{D}$  privé de  $n$  disques ouverts d'adhérences disjointes. Le bord de  $\mathcal{D}$  comporte  $n + 1$  composantes connexes  $B_0 = \partial\mathbb{D}, B_1, \dots, B_n$ , chacune homéomorphe au cercle  $S^1$ . Soit un revêtement réel-étale stricte de degré  $d$

$$f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{D}.$$

Si on note  $\mathcal{S}$  son lieu singulier et  $\overline{\mathcal{R}}$  son lieu de ramification étendu, alors  $f$  est entièrement déterminé par le revêtement non ramifié associé

$$f|_{\mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{R}}} : \mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{R}} \longrightarrow \mathbb{D} \setminus \mathcal{S}.$$

Le nombre  $k$  de points singuliers du revêtement est donné par la formule de Riemann-Hurwitz :

$$1 - n = d - k. \quad (6.2)$$

Soit  $y_0 \in \mathbb{D} \setminus \mathcal{S}$  un point de base. Numéroter la fibre  $f^{-1}(y_0) = \{x_1, \dots, x_d\}$  équivaut à donner une bijection de celle-ci sur  $\{1, \dots, d\}$ . Tout lacet  $\alpha$  de  $\mathbb{D} \setminus \mathcal{S}$  commençant en  $y_0$  se relève à partir d'un point  $x_i \in f^{-1}(y_0)$  en un chemin dont l'autre extrémité est un  $x_{\tau(i)}$ . Ainsi  $\alpha$  détermine une permutation  $\tau$  de  $\{1, \dots, d\}$ . Alors le revêtement  $f$  est déterminé par un morphisme de groupes

$$\rho : \pi_1(\mathbb{D} \setminus \overline{\mathcal{R}}, y_0) \longrightarrow \mathfrak{S}_d,$$

où  $\mathfrak{S}_d$  le groupe symétrique à  $d$  éléments.

*Remarque 6.2.1.* La représentation  $\rho$  est déterminée à endomorphisme intérieur de  $\mathfrak{S}_d$  près par le choix de la bijection

$$f^{-1}(y_0) \longrightarrow \{1, \dots, d\}.$$

Notons  $s_1, \dots, s_k$ , les  $k$  points singuliers de  $f$ . Chacun est contenu dans l'intérieur d'un petit disque ne rencontrant pas ceux qui entourent les autres points et dont on oriente le bord  $c_i$  dans le sens des aiguilles d'une montre. On choisit  $k$  chemins  $r_1, \dots, r_k$  d'intérieurs disjoints et reliant  $y_0$  à chacun des  $k$  cercles  $c_i$  ainsi qu'un chemin  $r_0$  d'intérieur disjoint de l'intérieur des  $r_i$  reliant  $y_0$  au bord  $c_0 = \partial\mathbb{D}$  de  $\mathbb{D}$ . L'indexation des  $r_i$  se fait de sorte que les chemins partent de  $y_0$  dans le sens des aiguilles d'une montre (voir figure 6.1).

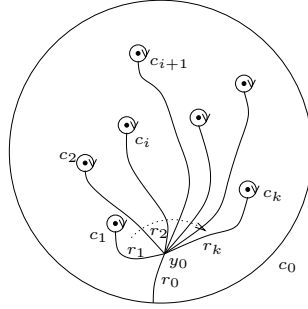


FIG. 6.1 – Chemins  $r_i$  et cercles  $c_i$

Pour  $i = 0$  à  $k$ , on note

$$\gamma_i = r_i c_i r_i^{-1}, \quad \tau = \rho(\gamma_0), \quad \sigma_i = \rho(\gamma_i) \quad \text{pour } i \neq 0.$$

Ainsi le groupe fondamental de  $\mathbb{D} \setminus \mathcal{S}$  basé en  $y_0$  est le groupe libre

$$\Pi_1(\mathbb{D} \setminus \mathcal{S}, y_0) = \langle \gamma_0, \dots, \gamma_r \mid \gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_k = 1 \rangle.$$

La représentation  $\rho$  induit, et est déterminée par, la suite de permutations de  $\mathfrak{S}_d$

$$(\sigma_1, \dots, \sigma_k; \tau) \quad \text{vérifiant} \quad \tau \sigma_1 \dots \sigma_k = \text{id},$$

la multiplication se faisant de gauche à droite, comme pour les chemins.

**Définition 6.2.2 (Système de Hurwitz).** Soit un revêtement réel-étale stricte de degré  $d$   $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ . Un *système de Hurwitz pour  $f$*  est une suite de permutations de  $\mathfrak{S}_d$ ,

$$(\sigma_1, \dots, \sigma_k; \tau)$$

correspondant à une représentation  $\rho$  et à un ensemble de lacets  $\gamma_i$  construits comme précédemment.

*Remarque 6.2.2.* Le revêtement  $f$  est un revêtement générique si et seulement si les  $\sigma_i$  pour  $i = 1$  à  $k$  sont des transpositions.

*Remarque 6.2.3.* La surface  $\mathcal{D}$  étant connexe par arcs, le sous-groupe  $\rho(\pi_1(\mathbb{D} \setminus \mathcal{S}, y_0))$  de  $\mathfrak{S}_d$  agit transitivement sur  $\{1, \dots, d\}$ .

*Remarque 6.2.4.* Conjuguer chacune des permutations du système par une même permutation  $\mu \in \mathfrak{S}_d$  équivaut à faire agir  $\mu$  sur la fibre  $f^{-1}(y_0)$  comme une renumérotation.

**Proposition 6.2.4.** *Soit deux ensembles de cercles et chemins  $((c_i, r_i))_{i=0 \text{ à } k}$  et  $((c'_i, r'_i))_{i=0 \text{ à } k}$  soumis aux mêmes contraintes de construction que précédemment et tels que  $r_0 = r'_0$ . Alors il existe un homéomorphisme  $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  tel que  $h|_{\partial\mathbb{D}} = \text{id}_{\partial\mathbb{D}}$  qui envoie  $c_i$  sur  $c'_i$  et  $r_i$  sur  $r'_i$ .*

*Si de plus les deux ensembles de cercles et chemins induisent le même système de Hurwitz, alors il existe un homéomorphisme  $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  tel que  $g|_{\partial\mathcal{D}} = \text{id}_{\partial\mathcal{D}}$  faisant commuter le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xrightarrow[\sim]{g} & \mathcal{D} \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ \mathbb{D} & \xrightarrow[\sim]{h} & \mathbb{D} \end{array} . \quad (6.3)$$

*Démonstration.* On note  $\varrho_0$  la réunion de  $r_0$  et de  $\partial\mathbb{D}$  ainsi que  $h_0 = \text{id}_{\varrho_0}$ . Pour  $i = 1, \dots, k$ , on peut prolonger chaque chemin  $r_i$  par un rayon de  $c_i$  en un chemin  $\varrho_i$  reliant le point de base  $y_0$  au point singulier situé  $S_i$  dans le disque de bord  $c_i$ . De même pour les chemins  $r'_i$ . Pour  $i = 0, \dots, k$ , il existe des homéomorphismes

$$h_i : \varrho_i \longrightarrow \varrho'_i$$

préservant l'orientation et tels que

$$h_i(y_0) = y_0 \quad \text{et} \quad h_i(S_i) = S'_i.$$

Par construction, le seul point commun des chemins  $\varrho_i$  (resp.  $\varrho'_i$ ) est  $y_0$ . Ainsi, l'adhérence du disque  $\mathbb{D}$  coupé le long des chemins  $\varrho_i$  (resp.  $\varrho'_i$ ),  $i = 0, \dots, k$  est homéomorphe à un disque  $D$  (resp.  $D'$ ) et les homéomorphismes  $h_i$  induisent alors un homéomorphisme

$$h' : \partial D \longrightarrow \partial D'$$

tel que  $h'|_{\varrho_0} = \text{id}_{\varrho_0}$ . Un homéomorphisme du bord pouvant se prolonger en un homéomorphisme du disque tout entier,  $h'$  induit un homéomorphisme, toujours noté  $h'$ ,

$$h' : D \xrightarrow{\sim} D'$$

compatible avec les découpages de  $\mathbb{D}$  effectués précédemment. Il induit donc un homéomorphisme

$$h : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$$

préservant l'orientation et tel que

$$h|_{\partial\mathbb{D}} = \text{id} \quad \text{et} \quad h(\varrho_i) = \varrho'_i.$$

Supposons les systèmes de Hurwitz identiques. Par construction, l'image par l'homéomorphisme  $h$  d'un lacet  $\gamma_i$  est dans la même classe d'homotopie dans  $(\mathbb{D} \setminus \mathcal{S}', y_0)$  que le lacet  $\gamma'_i$ . L'homéomorphisme  $h$  induit donc une bijection

$$h_* : \pi_1(\mathbb{D} \setminus \mathcal{S}, y_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathbb{D} \setminus \mathcal{S}, y_0).$$

En utilisant le théorème de relèvement des morphismes, celui-ci se relève en un homéomorphisme

$$g : \mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{R}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{R}}$$

qui se prolonge par continuité en un endomorphisme de  $\mathcal{D}$  faisant commuter le diagramme (6.3). Comme  $h|_{\partial\mathbb{D}} = \text{id}_{\partial\mathbb{D}}$ , l'homéomorphisme  $g$  agit sur chaque fibre au-dessus des points du bord de  $\mathbb{D}$ . Sachant que les systèmes de Hurwitz sont identiques, cette action est triviale.  $\square$

**Changements dans le système de Hurwitz :** Les notations étant les mêmes que précédemment, soit un revêtement ramifié générique  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{D}$ , un point de base  $y_0 \in \mathbb{D}$  et un système de Hurwitz pour  $f$ ,  $\mathcal{H} = (\sigma_1, \dots, \sigma_k; \tau)$ .

Nous allons donner des méthodes pour modifier  $\mathcal{H}$  de façon à obtenir un nouveau système de Hurwitz pour  $f$  sans changer la représentation  $\rho$ , simplement en agissant sur les chemins  $\gamma_i$ . Les deux manipulations suivantes sont à la base de ces changements dans un système de Hurwitz de  $f$ .

$$(\sigma_i, \sigma_{i+1}) \rightsquigarrow (\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i, \sigma_i) \quad (6.4)$$

$$(\sigma_i, \sigma_{i+1}) \rightsquigarrow (\sigma_{i+1}, \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}) \quad (6.5)$$

La première peut s'obtenir en remplaçant le lacet  $\gamma_{i+1}$  par un lacet homotope à  $\gamma_i \gamma_{i+1} \gamma_i^{-1}$  dans le système de lacets induisant le système de Hurwitz. Cette manipulation revient à remplacer le chemin  $r_{i+1}$  par un lacet qui contourne le lacet  $\gamma_i$  (voir figure 6.2). La deuxième est la manipulation inverse de la précédente : on remplace  $r_i$  par un lacet qui contourne  $\gamma_{i+1}$ . Aucune de ces deux manipulations ne modifie le produit des deux transpositions successives.

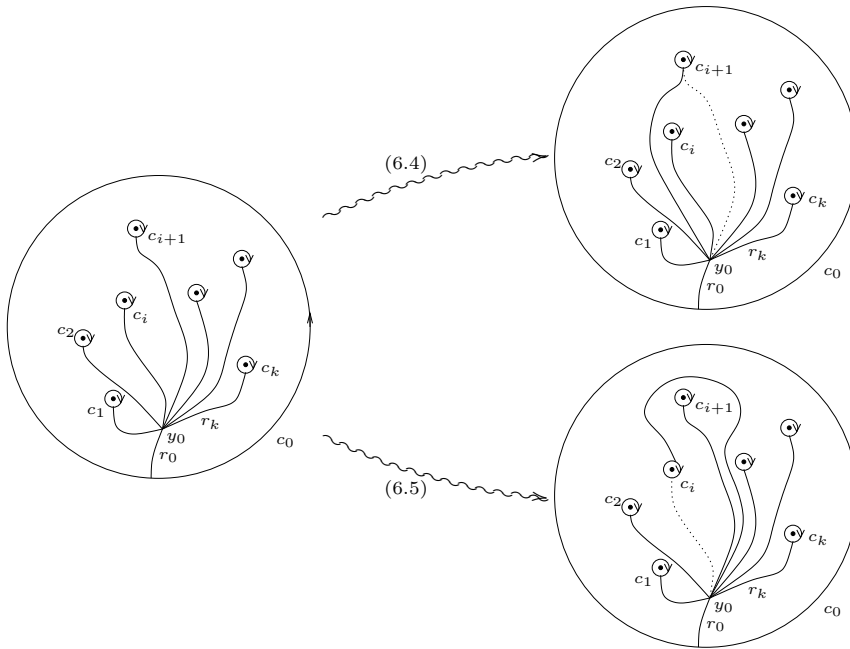


FIG. 6.2 – Manipulations (6.4) et (6.5)

*Remarque 6.2.5.* Les manipulations (6.4) et (6.5) permettent de changer de position n'importe quelle transposition  $\sigma_i$  dans le système à condition de conjuguer par  $\sigma_i$  les transpositions rencontrées.

**Lemme 6.2.5.** *Il est possible d'effectuer les changements suivants dans un système de Hurwitz pour  $f$  sans changer la représentation  $\rho$  :*

$$\begin{aligned} (\dots, \sigma, \sigma, \dots, \tau, \dots) &\rightsquigarrow (\dots, \tau \sigma \tau, \tau \sigma \tau, \dots, \tau, \dots) \\ (\dots, \tau, \dots, \sigma, \sigma, \dots) &\rightsquigarrow (\dots, \tau, \dots, \tau \sigma \tau, \tau \sigma \tau, \dots) \end{aligned} \quad (6.6)$$

où  $\sigma$  et  $\tau$  sont des transpositions de  $\mathfrak{S}_d$ .

*Démonstration.* Le principe est le même pour les deux changements. On peut supposer que la paire  $(\sigma, \sigma)$  est juste à côté de la transposition  $\tau$  puisque son déplacement grâce à (6.4) et (6.5) selon la remarque 6.2.5 va conjuguer deux fois par  $\tau$  les transpositions rencontrées. En appliquant plusieurs



fois (6.5), on obtient

$$\begin{aligned} (\sigma, \sigma, \tau) &\rightsquigarrow (\sigma, \tau, \tau\sigma\tau) \rightsquigarrow (\tau, \tau\sigma\tau, \tau\sigma\tau) \rightsquigarrow (\tau\sigma\tau, \tau\sigma\tau\tau\sigma\tau, \tau\sigma\tau) \\ &\rightsquigarrow (\tau\sigma\tau, \tau\sigma\tau, \tau\sigma\tau\tau\sigma\tau\tau\sigma\tau\tau\sigma\tau) = (\tau\sigma\tau, \tau\sigma\tau, \tau) \end{aligned}$$

On peut ensuite ramener  $\tau$  à sa place d'origine de la même façon qu'on début en utilisant la remarque 6.2.5.

On fait de même pour l'autre changement □

### 6.2.2 Mise en forme du système de Hurwitz

Soit  $\mathcal{D}$ , le disque fermé  $\mathbb{D}$  privé de  $n$  disques ouverts d'adhérences disjointes contenues dans son intérieur. On note  $\mathcal{B}_0 = \partial\mathbb{D}, \dots, \mathcal{B}_n$  les composantes connexes du bord de  $\mathcal{D}$ . Par abus de langage, on pourra parler du "bord"  $\mathcal{B}_i$ . On considère un revêtement réel-étale stricte,

$$f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{D}$$

de degré  $d$ . On note  $b_i$  le degré de  $f$  sur le bord  $\mathcal{B}_i$  et  $b_i^- = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ \sum_{j < i} b_j & i = 1 \text{ à } n \\ d & i = n + 1 \end{cases}$ .

Le revêtement  $f$  a  $k = d + n - 1$  points singuliers,  $S_1, \dots, S_k$ , (formule (6.2)). Soit  $y \in \partial\mathbb{D}$  et  $U$  un voisinage ouvert connexe de  $y$  dans  $\mathbb{D}$  tel que  $\varphi^{-1}(U)$  soit la réunion de  $d$  ouverts disjoints de  $\mathbb{D}$ . On choisit un point  $y_0 \in U$  qui sera le point de base pour le groupe fondamental de  $\mathbb{D}$ .

**Définition 6.2.3 (Fibre liée à un bord).** Soit  $x$  un point de la fibre  $f^{-1}(y_0)$  et  $V$  la composante connexe de  $f^{-1}(U)$  contenant  $x$ . Si  $\mathcal{B}_i$  est le bord tel que  $\mathcal{B}_i \cap V \neq \emptyset$ , on dira que  $x$  est *lié au bord*  $\mathcal{B}_i$  *relativement à l'ouvert*  $U$ . On pourra aussi simplement dire que  $x$  est lié au bord  $\mathcal{B}_i$ .

On appelle fibre liée au bord  $\mathcal{B}_i$  l'ensemble des points de la fibre  $f^{-1}(y_0)$  liés au bord  $\mathcal{B}_i$ . Elle est notée  $f^{-1}(y_0)_{\mathcal{B}_i}$  ou, s'il n'y a pas risque de confusion,  $f^{-1}(y_0)_i$ .

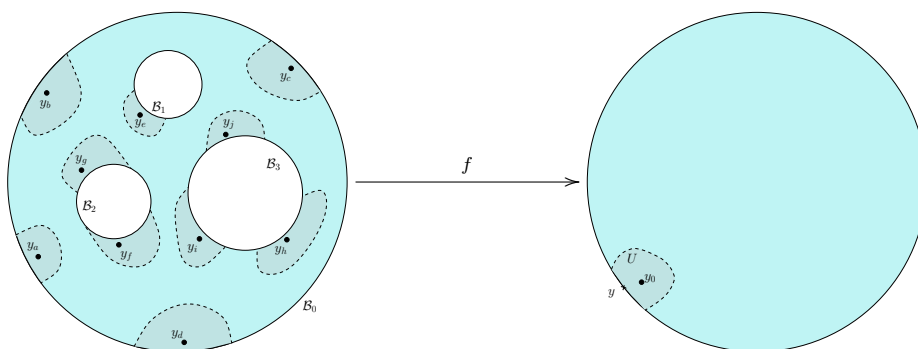


FIG. 6.3 – Fibre au dessus de  $y_0$

**Exemple 6.2.1.** Sur la figure 6.3,

$$\begin{aligned} \{y_a, y_b, y_c, y_d\} &\text{ est la fibre liée au bord } \mathcal{B}_0 & \{y_e\} &\text{ est la fibre liée au bord } \mathcal{B}_1 \\ \{y_f, y_g\} &\text{ est la fibre liée au bord } \mathcal{B}_2 & \{y_h, y_i, y_j\} &\text{ est la fibre liée au bord } \mathcal{B}_3. \end{aligned}$$

*Remarque 6.2.6.* Les fibres liées à un bord forment une partition de la fibre au-dessus de  $y_0$

$$f^{-1}(y_0) = f^{-1}(y_0)_0 \sqcup \dots \sqcup f^{-1}(y_0)_n$$

en  $n$  ensembles  $f^{-1}(y_0)_i$  de cardinal  $b_i$  pour  $i = 0$  à  $n$ .

Dans chaque fibre  $f^{-1}(y_0)_i$  liée à un bord  $\mathcal{B}_i$  de  $\mathcal{D}$ , on choisit un point  $x_{b_i^-+1}$  qui sera le point de base pour la fibre liée au bord  $\mathcal{B}_i$ . Le disque  $\mathbb{D}$  étant orienté de sorte que son bord soit orienté dans le sens trigonométrique, le revêtement  $f$  induit une orientation sur  $\mathcal{D}$  et donc une orientation sur son bord  $\partial\mathcal{D} = \bigsqcup_{i=0}^n \mathcal{B}_i$ . La fibre liée au bord  $\mathcal{B}_i$  pour  $i \geq 0$  est numérotée à partir du point de base  $x_{b_i^-+1}$  de sorte qu'en parcourant le bord  $\mathcal{B}_i$  selon l'orientation à partir de la composante connexe de  $f^{-1}(U)$  contenant  $x_{b_i^-+1}$ , on rencontre les composantes connexes de  $f^{-1}(U)$  contenant  $x_{b_i^-+2}$  puis  $x_{b_i^-+3}$  dans l'ordre croissant jusqu'à  $x_{b_i^-+b_i} = x_{b_{i+1}^-}$ . On obtient ainsi une numérotation de la fibre  $f^{-1}(y_0)$  au-dessus de  $y_0$ .

Les notations pour obtenir un système de Hurwitz pour  $f$  sont celles de la section 6.2.1. On choisit les chemins  $r_i$  de sorte que  $r_0$  soit inclu dans l'ouvert  $U$ . Alors

$$\rho(\gamma_0) = (1, 2, \dots, b_0)(b_1^- + 1, \dots, b_2^-) \dots (b_n^- + 1, \dots, d) = \tau$$

est le produit de  $n$  cycles disjoints, chacun agissant sur une fibre  $f^{-1}(y_0)_i$  liée à un bord  $\mathcal{B}_i$  en envoyant  $x_{b_i^-+j}$  sur  $x_{b_i^-+j+1}$  pour  $j = 1$  à  $b_i - 1$  et envoyant  $x_{b_{i+1}^-}$  sur  $x_{b_i^-+1}$ .

**Lemme 6.2.6.** *On note  $N(i, j)$  une suite  $((i, j), \dots, (i, j))$  de  $N$  transpositions  $(i, j) \in \mathfrak{S}_d$ , pour  $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{D}$  un revêtement réel-étale stricte. Avec les notations précédentes, en utilisant les opérations (6.4) et (6.5) sur les transpositions d'un système de Hurwitz pour  $f$ , on obtient un système de la forme suivante :*

$$\begin{aligned} (N_1(1, 2), N_2(2, 3), \dots, N_{b_1^- - 1}(b_1^- - 1, b_1^-), N_{b_1^-}(b_1^-, j_1), N_{b_1^- + 1}(b_1^- + 1, b_1^- + 2), \dots \\ \dots, N_{b_p^- - 1}(b_p^- - 1, b_p^-), N_{b_p^-}(b_p^-, j_p), N_{b_p^- + 1}(b_p^- + 1, b_p^- + 2), \dots \\ \dots, N_{b_{d-1}^-}(d - 1, d); \tau). \end{aligned}$$

avec  $b_p^- < j_p$  pour  $p = 1$  à  $n$ . En d'autres termes, les éléments de cette suite sont de la forme  $N_i(i, j)$ , où  $j = i + 1$  pour  $i \neq b_p^-$  et  $i < j$  pour  $i = b_p^-$  avec  $p = 1$  à  $n - 1$ .

De plus les entiers  $N_i$  vérifient  $N_i \geq 1$  et  $N_i$  est pair si il existe  $p$  tel que  $i = b_p^-$ , impair sinon.

*Démonstration.* Si  $\mathcal{H}$  est un système de Hurwitz pour  $f$ , on note  $\mathcal{H}_0$  la sous-suite des transpositions de  $\mathcal{H} : \mathcal{H} = (\mathcal{H}_0; \tau)$ .

Le résultat est obtenu par récurrence sur l'entier  $i$  avec l'hypothèse suivante :

*Il existe un système de Hurwitz  $\mathcal{H}$  pour  $f$  tel que la suite  $\mathcal{H}_0$  s'écrive comme la concaténation de deux sous-suites  $\mathcal{H}_i$  et  $\mathcal{H}'_i$  telles que  $\mathcal{H}'_i$  ne fasse plus intervenir les éléments 1 à  $i$  et  $\mathcal{H}_i$  soit de la forme :*

$$\begin{aligned} (N_1(1, 2), N_2(2, 3), \dots, N_{b_1^- - 1}(b_1^- - 1, b_1^-), N_{b_1^-}(b_1^-, j_1), N_{b_1^- + 1}(b_1^- + 1, b_1^- + 2), \dots \\ \dots, N_{b_p^- - 1}(b_p^- - 1, b_p^-), N_{b_p^-}(b_p^-, j_p), N_{b_p^- + 1}(b_p^- + 1, b_p^- + 2), \dots, N_i(i, j)). \end{aligned}$$

où pour  $p \geq 1$  on a  $b_p^- < j_p$ ,  $j = i + 1$  pour  $i \neq b_p^-$  et  $i < j$  pour  $i = b_p^-$ .

De plus les entiers  $N$  vérifient les conditions de parité voulues.

Rappelons que le produit des transpositions ne se fait pas ici comme les compositions de fonctions, mais de gauche à droite, comme pour les chemins.

$i = 0$  : Soit  $\mathcal{H}$  un système de Hurwitz pour  $f$ . Parmi toutes les suites pouvant être obtenues à partir de  $\mathcal{H}_0$  en effectuant uniquement les opérations (6.4) et (6.5), on en choisit une  $\mathcal{H}_1 \mathcal{H}'_1$  qui s'écrit comme la concaténation de deux sous-suites  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}'_1$  telles que  $\mathcal{H}'_1$  ne fasse pas intervenir 1 et est la plus grande possible à vérifier cette condition. Alors la suite  $\mathcal{H}_1$  doit être de la forme

$$\mathcal{H}_1 = N(1, j), \quad \text{pour un } j > 1.$$

En effet, toute transposition de  $\mathcal{H}_1$  doit agir sur 1. Sinon, si  $\sigma$  est une transposition de  $\mathcal{H}_1$  n'agissant pas sur 1, en utilisant (6.4) on peut la déplacer tout à la fin  $\mathcal{H}_1$  ce qui contredit la maximalité de  $\mathcal{H}'_1$ .

Supposons que  $\mathcal{H}_1$  contienne deux transpositions distinctes  $(1, j_1)$  et  $(1, j_2)$ . En utilisant (6.5), on peut supposer que celles-ci sont adjacentes dans la suite  $\mathcal{H}_1$ . En appliquant (6.5) à nouveau, on obtient

$$((1, j_1), (1, j_2)) \rightsquigarrow ((1, j_1), (1, j_1)(1, j_2)(1, j_1)) = ((1, j_1), (j_1, j_2))$$

ce qui contredit à nouveau la maximalité de  $\mathcal{H}'_1$ .

Maintenant, deux cas se présentent :

$b_0 = 1$  : Dans ce cas la fibre au-dessus de  $y_0$  liée à  $\mathcal{B}_0$  n'a qu'un seul élément  $y_1$  et  $\tau$  n'agit donc pas sur 1. Le système commence alors bien par  $N_1(1, j)$  avec  $j > 1$ . Comme le produit des transpositions du système de Hurwitz doit valoir  $\tau^{-1}$ , on en déduit que  $N_1$  doit être pair

$b_0 \neq 1$  : Comme le produit des transpositions du système de Hurwitz doit valoir  $\tau^{-1}$  et que 1 n'intervient pas dans  $\mathcal{H}'_1$ , on doit forcément avoir  $N_1$  impair et  $j = 2$  puisque 2 est envoyé sur 1 par  $\tau^{-1}$ .

$i > 1$  Soit  $\mathcal{H}$  un système de Hurwitz pour  $f$  vérifiant l'hypothèse de récurrence au rang  $i - 1$ . Parmi toutes les suites pouvant être obtenues à partir de  $\mathcal{H}'_{i-1}$  en effectuant uniquement les opérations (6.4) et (6.5), on en choisit une  $\mathcal{H}''_i \mathcal{H}'_i$  qui s'écrit comme la concaténation de deux sous-suites  $\mathcal{H}''_i$  et  $\mathcal{H}'_i$  telles que  $\mathcal{H}'_i$  ne fasse pas intervenir  $i$  et est la plus grande possible à vérifier cette condition. Alors la suite  $\mathcal{H}''_i$  doit être de la forme

$$\mathcal{H}''_i = N(i, j), \quad \text{pour un } j > i.$$

En effet, toute transposition de  $\mathcal{H}''_i$  doit agir sur  $i$ . Sinon, si  $\sigma$  est une transposition de  $\mathcal{H}''_i$  n'agissant pas sur  $i$ , en utilisant (6.4) on peut la déplacer tout à la fin  $\mathcal{H}''_i$  ce qui contredit la maximalité de  $\mathcal{H}''_i$ .

Supposons que  $\mathcal{H}''_i$  contienne deux transpositions distinctes  $(i, j_1)$  et  $(i, j_2)$ . En utilisant (6.5), on peut supposer que celles-ci sont adjacentes dans la suite  $\mathcal{H}_1$ . En appliquant (6.5) à nouveau, on obtient

$$((i, j_1), (i, j_2)) \rightsquigarrow ((i, j_1), (i, j_1)(i, j_2)(i, j_1)) = ((i, j_1), (j_1, j_2))$$

ce qui contredit à nouveau la maximalité de  $\mathcal{H}'_i$ .

On pose alors  $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_{i-1} \mathcal{H}''_i$ . Deux cas se présentent :

$\exists p \geq 1, i = b_p^-$  : Les éléments du cycles  $(b_{p-1}^- + 1, b_{p-1}^- + 2, \dots, b_p^-)$  n'interviennent pas dans  $\mathcal{H}'_i$ . Comme le produit des transpositions du système de Hurwitz doit valoir  $\tau^{-1}$ , et que  $j > b_p^-$ , on en déduit que  $N_i$  doit être pair.

$\nexists p, i = b_p^-$  : Comme le produit des transpositions du système de Hurwitz doit valoir  $\tau^{-1}$  et que  $i$  n'intervient pas dans  $\mathcal{H}'_i$ , on doit forcément avoir  $N_i$  impair et  $j = i + 1$  puisque  $i + 1$  est envoyé sur  $i$  par  $\tau^{-1}$ .

Ainsi l'hypothèse de récurrence est bien vérifiée au rang  $i$ .

De plus,  $\mathcal{D}$  est connexe par arcs, donc d'après la remarque 6.2.3, le sous-groupe engendré par les transpositions du système de Hurwitz agit transitivement. En particulier, on doit avoir  $N_i \geq 1$  pour tout  $i = 0$  à  $d$ .  $\square$

**Théorème 6.2.7 (Classification des revêtements ramifiés génériques strictes du disque).**

Avec les notations précédentes, tout revêtement réel-étale générique stricte,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{D}$  admet un système de Hurwitz de la forme

$$\begin{aligned} & ((1, 2), (2, 3), \dots, (b_1^- - 1, b_1^-), (b_1^-, b_1^- + 1), (b_1^-, b_1^- + 1), (b_1^- + 1, b_1^- + 2), \dots \\ & \quad \dots, (b_i^- - 1, b_i^-), (b_i^-, b_i^- + 1), (b_i^-, b_i^- + 1), (b_i^- + 1, b_i^- + 2), \dots \\ & \quad \dots, (d - 1, d); \tau). \end{aligned}$$

C'est-à-dire une suite de transpositions  $(p, p + 1)$  pour  $p = 1$  à  $d - 1$  apparaissant deux fois si  $p = b_i^-$  pour un  $i = 1$  à  $n$  et une seule fois sinon, cette suite étant suivie par la permutation

$$\tau = \rho(\gamma_0) = (1, 2, \dots, b_0)(b_1^- + 1, \dots, b_2^-) \dots (b_n^- + 1, \dots, d).$$

*Démonstration.* On choisit un système de Hurwitz  $\mathcal{H}$  pour  $f$  donné par le lemme 6.2.6. Les notations sont celles utilisées précédemment.

1. D'après la formule de Riemann-Hurwitz (6.2), les entiers  $n$ ,  $d$  et  $k$  doivent vérifier

$$1 - n = d - k, \quad \text{ce qui s'écrit encore} \quad k + 1 = d + n. \quad (6.7)$$

D'autre part,  $k$  étant le nombre total de points singuliers de  $f$ , on a d'après la forme du système de Hurwitz de  $f$  :

$$k + 1 = \sum_{i=1}^{d-1} N_i \geq \sum_{i=0}^n (b_i - 1) + 2n = d - n + 2n$$

donc

$$k + 1 \geq d + n \quad (6.8)$$

Pour que (6.7) et (6.8) soient vérifiées simultanément, il faut que les  $N_i$  soient les plus petits possible, c'est-à-dire :

$$N_i = 2 \quad \text{si } \exists p, i = b_p^- \quad \text{et} \quad N_i = 1 \quad \text{sinon.}$$

2. Montrons par récurrence sur  $p$  que, si pour tout  $q > p$ , on a  $j_q = b_q^- + 1$ , alors  $j_p = b_p^- + 1$   $p = n$  : D'après ce qui précède, la fin de la suite de permutations du système de Hurwitz de  $f$  s'écrit :

$$((b_n^-, j_n), (b_n^-, j_n), (b_n^- + 1, b_n^- + 2), (b_n^- + 2, b_n^- + 3), \dots, (d - 1, d); \tau),$$

avec  $j_p > b_n^-$ . En appliquant successivement le lemme 6.2.5 à la paire  $((b_n^-, j_n), (b_n^-, j_n))$  et aux transpositions  $(j_n - 1, j_n)$  puis  $(j_n - 2, j_n - 1)$  jusqu'à  $(b_n^- + 1, b_n^- + 2)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} ((b_n^-, j_n), (b_n^-, j_n)) &\rightsquigarrow ((j_n - 1, j_n)(b_n^-, j_n)(j_n - 1, j_n), \\ &\quad (j_n - 1, j_n)(b_n^-, j_n)(j_n - 1, j_n)) \\ &= ((b_n^-, j_n - 1), (b_n^-, j_n - 1)) \\ &\rightsquigarrow ((j_n - 2, j_n - 1)(b_n^-, j_n - 1)(j_n - 2, j_n - 1), \\ &\quad (j_n - 2, j_n - 1)(b_n^-, j_n - 1)(j_n - 2, j_n - 1)) \\ &= ((b_n^-, j_n - 2), (b_n^-, j_n - 2)) \\ &\rightsquigarrow \dots \\ &\rightsquigarrow ((b_n^- + 1, b_n^- + 1)(b_n^-, b_n^- + 2)(b_n^- + 1, b_n^- + 2), \\ &\quad (b_n^- + 1, b_n^- + 2)(b_n^-, b_n^- + 2)(b_n^- + 1, b_n^- + 2)) \\ &= ((b_n^-, b_n^- + 1), (b_n^-, b_n^- + 1)) \end{aligned}$$

$p < n$  : On utilise exactement le même raisonnement que pour  $p = n$  sachant que  $j_p > b_p^-$  et, par hypothèse de récurrence, que toute permutation de la forme  $(i, i + 1)$  avec  $i > b_p^-$  apparaît au moins une fois entre le couple  $((b_p^-, j_p), (b_p^-, j_p))$  et la fin de la suite. Alors par applications successives du lemme 6.2.5, on obtient le résultat cherché.  $\square$

**Exemple 6.2.2.** Prenons par exemple un revêtement réel-étale générique stricte de la figure 6.4. D'après la formule de Riemann Hurwitz, il admet  $k = d + n - 1 = 8 + 3 - 1 = 10$  points singuliers. Avec les notations précédentes, on a

$$f^{-1}(y_0)_0 = \{y_1, y_2\} \quad f^{-1}(y_0)_1 = \{y_3\} \quad f^{-1}(y_0)_2 = \{y_4, y_5\} \quad f^{-1}(y_0)_3 = \{y_6, y_7, y_8\}$$

Le revêtement  $f$  admet alors un système de Hurwitz de la forme :

$$((1, 2), (2, 3), (2, 3), (3, 4), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (5, 6), (6, 7), (7, 8); (1, 2)(4, 5)(6, 7, 8)).$$

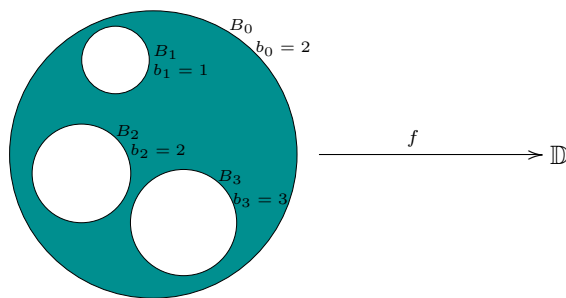


FIG. 6.4 – Exemple 6.2.2

### 6.2.3 Équivalence et isotopie des revêtements

**Notations :** On considère deux revêtements réel-étales génériques de même arbre associé  $\mathcal{A}$ ,

$$f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D} \quad \text{et} \quad f' : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}.$$

Soit  $\mathcal{I}$  un ensemble d'indices possibles pour  $\mathcal{A}$ . Les notations sont celles introduites lors de la construction des arbres à la section 5.3. Le ' permettra de distinguer les éléments associés à  $f'$  de ceux concernant  $f$ .

Pour tout indice  $(I) \in \mathcal{I}$ , on note  $f_{(I)} = f|_{D_{(I)}}$  et  $f'_{(I)} = f'|_{D'_{(I)}}$ . Ce sont des revêtements réel-étales génériques strictes de degré  $d_{(I)}$  du disque par une surface homéomorphe à  $\mathbb{D}$  privé de  $n_{(I)}$  disques ouverts d'adhérences disjointes contenues dans son intérieur. Nous allons préciser les choix particuliers de numérotation des chemins et fibres des sections précédentes, dans le cas des revêtements  $f_{(I)}$  et  $f'_{(I)}$ . Ici  $D_{(I)}$  et  $D'_{(I)}$  joueront le rôle de  $\mathcal{D}$  et l'indice  $(I, i)$  celui de l'indice  $i$  pour  $i = 0$  à  $n_{(I)}$ .

Soit  $y \in \partial\mathbb{D}$ . On choisit le voisinage ouvert connexe  $U$  de  $y$  dans  $\mathbb{D}$  de sorte que  $f^{-1}(U)$  et  $f'^{-1}(U)$  soient la réunion disjointe d'ouverts qui sont ou bien homéomorphes à  $U$  ou bien des pliages sur  $U$ . On choisit un point de base  $y_0$  dans  $U \setminus \partial\mathbb{D}$  qui sera commun à tous les revêtements considérés ici. On choisit aussi un point de base dans la fibre liée à  $B_{(0)} = \partial\mathbb{D}$  pour  $f_{(0)}$  et un point de base dans la fibre liée à  $B'_{(0)} = \partial\mathbb{D}$  pour  $f'_{(0)}$ . Chaque composante connexe de  $f^{-1}(U)$  rencontre un unique  $B_{(I)}$ . Pour chaque indice  $(I, i)$  avec  $(I) \in \mathcal{I}$ , on choisit une de ces composantes connexe  $U_{(I,i)}$  rencontrant  $B_{(I,i)}$ . Alors  $U_{(I,i)}$  contient exactement deux points de  $f^{-1}(y_0)$ , l'un dans la fibre  $f_{(I)}^{-1}(y_0)_i = f_{(I)}^{-1}(y_0)_{B_{(I,i)}}$ , l'autre dans la fibre  $f_{(I,i)}^{-1}(y_0)_0 = f_{(I,i)}^{-1}(y_0)_{B_{(I,i)}}$ . Ce seront les points de bases pour ces fibres liées à  $B_{(I,i)}$ . On agit de même pour le choix de points de base pour les revêtements  $f'_{(I)}$ .

A partir de là, la numérotation de la fibre et des fibres liées au-dessus de  $y_0$  pour  $f_{(I)}$  se fait exactement de la même façon que dans la section 6.2.2,  $x_{(I)i}$  remplaçant  $x_i$  pour distinguer les fibres pour  $f_{(I)}$  de celles pour  $f_{(J)}$  si  $(J) \neq (I)$ . De même pour  $f'_{(I)}$ .

*Remarque 6.2.7.* Avec ce choix de points de base, les éléments  $x_{(I)i}$  et  $x_{(I,i)0}$  appartiennent à la même composante connexe de  $f^{-1}(U)$ . De même, les éléments  $x'_{(I)i}$  et  $x'_{(I,i)0}$  appartiennent à la même composante connexe de  $f'^{-1}(U)$ .

**Relations d'ordre :** Pour préciser les chemins  $\gamma_{(I)i}$  (resp.  $\gamma'_{(I)i}$ ), c'est-à-dire les chemins  $\gamma_i$  pour  $f_{(I)}$  (resp.  $\gamma'_i$  pour  $f'_{(I)}$ ), nous avons besoin d'une relation d'ordre total sur  $\mathcal{I}$ . On munit donc  $\mathcal{I}$  de l'ordre lexicographique. Ceci induit une relation d'ordre totale sur les paires  $(I)i$  :

$$(I)i \leq (J)j$$

si et seulement si

$$(I) \leq (J) \quad \text{et} \quad ((I) = (J) \implies i \leq j).$$

**Contraintes sur les chemins de départ :** Les notations pour obtenir un premier système de Hurwitz pour les  $f_{(I)}$  et  $f'_{(I)}$  sont toujours celles de la section 6.2.1 avec les contraintes suivantes :

- On choisit le chemin  $r_0$  reliant  $y_0$  au bord de  $\mathbb{D}$  de sorte qu'il reste dans  $U$ . Ce chemin sera commun aux  $f_{(I)}$  et  $f'_{(I)}$ .
- Tous les cercles  $c_i$ , notés  $c_{(I)i}$  pour  $f_{(I)}$  (resp.  $c'_{(I)i}$  pour  $f'_{(I)}$ ) sont le bord de disques ouverts contenant un unique point du lieu singulier  $\mathcal{S}$  de  $f$  (resp.  $\mathcal{S}'$  de  $f'$ ).
- L'intérieur d'un chemin  $\gamma_{(I)i}$  (resp.  $\gamma'_{(I)i}$ ) ne rencontre aucun autre chemin  $\gamma_{(J)j}$  (resp.  $\gamma'_{(J)j}$ ).
- Lorsqu'on tourne autour de  $y_0$  dans le sens des aiguilles d'une montre à partir de  $\gamma_0$ , on rencontre le départ des chemins  $\gamma_{(I)i}$  (resp.  $\gamma'_{(I)i}$ ) dans l'ordre des indices  $(I)i$  croissant.

**Système de Hurwitz :** Sachant que  $f$  et  $f'$  ont même arbre et suivant les choix fait ci-dessus, le théorème 6.2.7 induit que pour tout  $(I) \in \mathcal{I}_0(\mathcal{A})$ , les revêtements  $f_{(I)}$  et  $f'_{(I)}$  admettent un même système de Hurwitz

$$(1, 2), (2, 3), \dots, (b_{(I)} - 1, b_{(I)}), (b_{(I)}, b_{(I)} + 1), (b_{(I)}, b_{(I)} + 1), (b_{(I)} + 1, b_{(I)} + 2), \dots \\ \dots, (b_{(I)} + b_{I1} - 1, b_{(I)} + b_{I1}), \dots; \tau_{(I)}).$$

Ce système n'est obtenu à partir des systèmes de départ qu'avec des manipulations (6.4) et (6.5). En particulier, les chemins induisant ce système peuvent respecter les mêmes contraintes (voir ci-dessus) que ceux choisis au départ.

**Résultat :** On déduit de ce qui précède la classification des revêtements réel-étales générique de  $\mathbb{D}$  par lui-même.

**Proposition 6.2.8.** *Deux revêtements réels-étales génériques  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  et  $f' : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  sont équivalents si et seulement si ils ont même arbre associé.*

*Démonstration.* La réciproque résulte de la proposition 6.1.3.

D'après la proposition 6.2.4, il existe un homéomorphisme  $h : \mathbb{D} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$ , tel que pour tout  $(I) \in \mathcal{I}$  et  $i = 0, \dots, n_{(I)}$ , on ait  $h(S_{(I)i}) = S'_{(I)i}$  et tel que l'homéomorphisme  $h$  induise un homéomorphisme de  $r_{(I)i}$  sur  $r'_{(I)i}$  avec  $h|_{\partial\mathbb{D}} = \text{id}_{\partial\mathbb{D}}$ . Toujours d'après la proposition 6.2.4, pour tout  $(I) \in \mathcal{I}$ ,  $h$  se relève en un homéomorphisme  $g_{(I)}$  faisant commuter

$$\begin{array}{ccc} D_{(I)} & \xrightarrow[\sim]{g_{(I)}} & D'_{(I)} \\ f_{(I)} \downarrow & & \downarrow f'_{(I)} \\ \mathbb{D} & \xrightarrow[\sim]{h} & \mathbb{D} \end{array}$$

De plus pour tout  $l = 1$  à  $d_{(I)}$ , on a  $g_{(I)}(y_{(I)l}) = y'_{(I)l}$ . La remarque 6.2.7 induit alors que l'homéomorphisme  $g_{(I)}$  doit coïncider avec l'homéomorphisme  $g_{(I,i)}$  le long de  $B_{(I,i)}$  pour tout  $I \in \mathcal{I}_0(\mathcal{A})$  et tout  $i = 1$  à  $n_{(I)}$ . Ainsi les homéomorphisme  $g_{(I)}$  se recollent en un homéomorphisme  $g$  faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \xrightarrow[\sim]{g} & \mathbb{D} \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ \mathbb{D} & \xrightarrow[\sim]{h} & \mathbb{D} \end{array}$$

□

**Corollaire 6.2.9.** *Deux revêtements réel-étales génériques  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  et  $f' : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  sont isotopes si et seulement si ils ont même arbre signé.*

*Démonstration.* La réciproque résulte de la proposition 6.1.2.

D'après la proposition 6.2.8, les deux revêtements sont équivalents. Notons  $g : \mathbb{D} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$  et  $h : \mathbb{D} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$  des homéomorphismes tels que  $h \circ f = f' \circ g$ . Comme de plus  $h|_{\partial\mathbb{D}} = \text{id}_{\partial\mathbb{D}}$ ,

l'homéomorphisme  $h$  préserve l'orientation. De même pour  $g$  puisque  $f$  et  $f'$  ont même arbre signé. D'après la proposition 5.1.4,  $g$  et  $h$  sont isotopes à l'identité. On note

$$H : I_\varepsilon \times \mathbb{D} \longrightarrow I_\varepsilon \times \mathbb{D} \quad \text{et} \quad G : I_\varepsilon \times \mathbb{D} \longrightarrow I_\varepsilon \times \mathbb{D}$$

des isotopies entre l'identité et  $h$  et entre  $g$  et l'identité respectivement. Alors  $H$  induit l'isotopie

$$\begin{aligned} H \circ (\text{id}, f) : I_\varepsilon \times \mathbb{D} &\longrightarrow I_\varepsilon \times \mathbb{D} \\ (t, x) &\longmapsto H(t, f(x)) \end{aligned}$$

entre  $f$  et  $h \circ f = g \circ f'$ . D'autre part  $G$  induit l'isotopie

$$(\text{id}, g) \circ G : I_\varepsilon \times \mathbb{D} \longrightarrow I_\varepsilon \times \mathbb{D}$$

entre  $g \circ f' = h \circ f$  et  $f'$ .

On en déduit que  $f$  est isotope à  $f'$ . □

On déduit des résultats précédents les théorèmes d'isotopie et d'équivalence des revêtements réel-étales du disque (théorèmes 6.2.10 et 6.2.11).

**Théorème 6.2.10 (Équivalence des revêtements réel-étales du disque).** *Deux revêtements réel-étales  $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$  et  $f' : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$  sont quasi-équivalents si et seulement si ils ont même arbre associé.*

*Démonstration.* L'implication directe est donnée par le corollaire 6.1.4.

Réciproquement, supposons que les deux revêtements aient même arbre. D'après le corollaire 6.2.3, ils sont chacun isotopes à un revêtement générique,  $g : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$  et  $g' : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$  respectivement ayant le même arbre que  $f$  et  $f'$ . On note  $H_1$  une isotopie entre  $f$  et  $g$  et  $H_2$  une isotopie entre  $g'$  et  $f'$ . D'après la proposition 6.2.8, les deux revêtements génériques  $g$  et  $g'$  sont équivalents. Soit donc  $h_1$  et  $h_2$  des homéomorphismes du disque tels que  $h_1 \circ g = g' \circ h_2$ . Alors  $H_1 \circ (\text{id}, h_1)$  est une isotopie entre  $h_1 \circ f$  et  $h_1 \circ g = g' \circ h_2$  et  $(\text{id}, h_2) \circ H_2$  est une isotopie entre  $h_1 \circ g = g' \circ h_2$  et  $(\text{id}, h_2) \circ H_2$  et  $f' \circ h_2$ . Ainsi  $h_1 \circ f$  est isotope à  $f' \circ h_2$  et  $f$  est quasi-équivalent à  $f'$ . □

**Théorème 6.2.11 (Isotopie des revêtements réel-étales du disque).** *Deux revêtements réel-étales  $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$  et  $f' : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$  sont isotopes si et seulement si ils ont même arbre signé.*

*Démonstration.* L'implication directe est donnée par la proposition 6.1.2.

Réciproquement, supposons que les deux revêtements aient même arbre signé. D'après le corollaire 6.2.3, ils sont chacun isotopes à un revêtement générique,

$$g : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D} \quad \text{et} \quad g' : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$$

respectivement ayant le même arbre signé que  $f$  et  $f'$  respectivement. D'après le corollaire 6.2.9, les deux revêtements  $g$  et  $g'$  sont isotopes. On en déduit qu'il en est de même pour  $f$  et  $f'$ . □

Sachant que  $\mathbb{P}^1$  est homéomorphe au disque et que les endomorphismes du disque induisent des revêtements ramifiés de celui-ci, on en déduit immédiatement les corollaires suivants.

**Corollaire 6.2.12.** *Deux endomorphismes réel-étales de  $\mathbb{P}^1$  sont quasi-équivalents si et seulement si ils ont même arbre associé.*

**Corollaire 6.2.13 (Théorème de classification des fonctions rationnelles réel-étales de  $\mathbb{P}^1$ ).** *Deux endomorphismes réel-étales de  $\mathbb{P}^1$  sont isotopes si et seulement si ils ont même arbre signé.*

# Chapitre 7

## Applications

### 7.1 $M$ -surface de Klein et endomorphismes de $\mathbb{P}^1$

#### 7.1.1 Espace de modules

**Définition 7.1.1 (M-surface de Klein).** Nous appellerons  $M$ -surface de Klein de genre  $g$  une surface de Klein compacte connexe dont le complexifié est une surface de Riemann compacte de genre  $g$  et dont le nombre de composantes connexes du bord est maximum, c'est-à-dire  $g + 1$ .

*Remarque 7.1.1.* L'espace topologique sous-jacent d'une  $M$ -surface de Klein de genre  $g$  est homéomorphe à un disque topologique fermé  $D$  privé de  $g$  disques ouverts dont les adhérences sont disjointes et contenues dans l'intérieur de  $D$ .

Réciproquement, tout disque topologique fermé  $D$  privé de  $g$  disques ouverts dont les adhérences sont disjointes et contenues dans l'intérieur de  $D$  est l'espace topologique sous-jacent d'une  $M$ -surface de Klein.

*Remarque 7.1.2.* La catégorie des surfaces de Klein étant équivalente à la catégorie des surfaces de Riemann munies d'une action de  $\Sigma$  et celle-ci étant équivalente à la catégorie des courbes algébriques réelles projectives et lisses, la notion de  $M$ -surface de Klein donnée ici équivaut à la définition de  $M$ -courbe classiquement donnée en géométrie algébrique réelle.

**Définition 7.1.2 (Espace de modules de  $M$ -surfaces de Klein).** On note  $\mathcal{M}_{g,M}$  l'espace de modules des  $M$ -surfaces de Klein de genre  $g$ , c'est-à-dire l'ensemble des classes d'isomorphismes de  $M$ -surfaces de Klein de genre  $g$ .

*Remarque 7.1.3.* L'espace de modules  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{g,M}$  des  $M$ -surfaces de Klein de genre  $g$  admet une structure naturelle de variété semi-analytique (voir [SS89, Hui99]). C'est alors une variété connexe qui est de dimension  $3g - 3$  si  $g > 1$ , de dimension 1 si  $g = 1$  et de dimension 0 si  $g = 0$ .

Pour le voir, on utilise l'espace de Teichmüller  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{g,M}$  des  $M$ -surfaces de Klein de genre  $g$ . Cet espace admet une structure naturelle de variété analytique réelle. Le groupe modulaire  $\Gamma = \Gamma_{g,M}$  agit sur  $\mathcal{T}$  par automorphismes analytiques réels. Cette action étant proprement discontinue, le quotient  $\mathcal{T}/\Gamma$  a une structure de variété semi-analytique. Comme l'ensemble  $\mathcal{M}$  s'identifie naturellement à  $\mathcal{T}/\Gamma$ , il acquiert une structure naturelle de variété semi-analytique.

Par la suite, nous aurons besoin d'une description plus précise de  $\mathcal{T}$  que voici. On se fixe une  $M$ -surface de Klein  $X_0$  de genre  $g$ . Les éléments de  $\mathcal{T}$  sont des couples  $(X, h)$  avec  $X$  une  $M$ -surface de Klein de genre  $g$  et

$$h : X_0 \longrightarrow X$$

un homéomorphisme. Deux tels couples  $(X, h)$  et  $(X', h')$  représentent le même élément de  $\mathcal{T}$  si et seulement si, il existe un isomorphisme

$$\alpha : X \longrightarrow X'$$

tel que les homéomorphismes  $\alpha \circ h$  et  $h'$  soient isotopes. Pour simplifier les notations, on pourra écrire  $X$  au lieu de  $(X, h)$  pour les éléments de  $\mathcal{T}$ .



Soit  $\text{Homeo}(X_0)$  le groupe des homéomorphismes de  $X_0$  et  $\text{Homeo}^0(X_0) \subseteq \text{Homeo}(X_0)$  le sous-groupe distingué des automorphismes isotopes à l'identité. Le groupe quotient

$$\Gamma = \text{Homeo}(X_0)/\text{Homeo}^0(X_0)$$

est le *groupe modulaire*  $\Gamma$ . Celui-ci agit à droite sur  $\mathcal{T}$  par

$$(X, h) \cdot \gamma = (X, h \circ \gamma) \quad \forall (X, h) \in \mathcal{T} \text{ et } \forall \gamma \in \Gamma.$$

Alors l'application oubliée

$$(X, h) \in \mathcal{T} \longrightarrow [X] \in \mathcal{M}$$

est une application quotient pour l'action de  $\Gamma$ .

### 7.1.2 Endomorphismes de $\mathbb{P}^1$

On note  $\mathcal{F}_d$  l'ensemble des fonctions rationnelles sur  $\mathbb{P}^1$  de degré  $d > 0$ , c'est-à-dire des endomorphismes  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ , de degré  $d$  et  $\mathcal{F}_d^{\text{rét}} \subset \mathcal{F}_d$  est le sous-ensemble formé des endomorphismes réel-étales.

Les éléments de  $\mathcal{F}_d$  peuvent être représentés par le quotient de deux polynômes premiers entre eux de  $\mathbb{R}[X]$ , de degré au plus  $d$  dont l'un au moins est de degré  $d$ . Ceci permet d'identifier  $\mathcal{F}_d$  à un ouvert de  $\mathbb{P}^{2d+1}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{F}_d$  hérite donc d'une structure naturelle de variété analytique réelle. Pour cette structure,  $\mathcal{F}_d^{\text{rét}}$  est un ouvert de  $\mathcal{F}_d$ . Ainsi il admet lui-aussi une structure naturelle de variété analytique réelle.

**Théorème 7.1.1.** *Deux éléments  $f$  et  $f'$  de  $\mathcal{F}_d^{\text{rét}}$  sont dans la même composante connexe de  $\mathcal{F}_d^{\text{rét}}$  si et seulement si ils ont même arbre signé.*

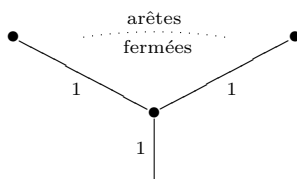
*Démonstration.* On muni l'ensemble des arbres signés admissibles de degré  $d$  de la topologie discrète. Alors l'application qui à une fonction rationnelle réel-étale associe son arbre signé est continue. En effet, soit  $\mathcal{A}$  un arbre signé admissible de degré  $d$ ,  $\mathcal{I}$  un ensemble d'indices possibles pour  $\mathcal{A}$  et  $f_0 \in \mathcal{F}_d^{\text{rét}}$  d'arbre  $\mathcal{A}$ . L'image réciproque  $f_0^{-1}(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$  est la réunion disjointes des composantes connexes  $B_{(I)}$  pour  $(I) \in \mathcal{I}$ . Il existe des voisinages tubulaires  $V_{(I)}$  de chacune des composantes connexes  $B_{(I)}$  dans  $\mathbb{P}^1$  tels que  $V_{(I)} \cap V_{(I')} = \emptyset$  pour tous indices  $(I) \neq (I')$  et tels que  $f|_{V_{(I)}}$  soit non ramifiée de degré  $2b_{(I)}$ . Comme les racines d'un polynôme sont des fonctions continues de ses coefficients, pour tout  $(I) \in \mathcal{I}$ , il existe un voisinage  $U_{(I)}$  connexe de  $f_0$  dans  $\mathcal{F}_d$  tel que pour tout  $f \in U_{(I)}$ ,  $f$  soit réel-étale et on ait  $(f|_{V_{(I)}})^{-1}(\mathbb{P}^1) \subseteq V_{(I)}$  avec  $\deg f|_{V_{(I)}} = b_{(I)}$ . Alors tout  $f \in \bigcap_{(I) \in \mathcal{I}} U_{(I)}$  a pour arbre signé  $\mathcal{A}$ .

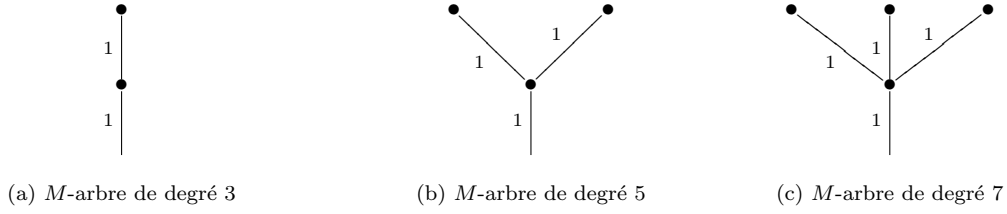
Ainsi, si deux fonctions rationnelles  $f$  et  $f'$  de degré  $d$  réel-étales appartiennent à la même composante connexe de  $\mathcal{F}_d^{\text{rét}}$ , elles doivent avoir même arbre signé.

Réciproquement, soit  $f, f' \in \mathcal{F}_d^{\text{rét}}$  de même arbre signé. D'après le théorème 6.2.11, il existe une isotopie entre  $f$  et  $f'$ . Celle-ci induit un chemin dans  $\mathcal{F}_d^{\text{rét}}$  entre  $f$  et  $f'$ . Donc  $f$  et  $f'$  appartiennent à la même composante connexe de  $\mathcal{F}_d^{\text{rét}}$ .  $\square$

En identifiant de façon canonique  $\text{PGL}_2(\mathbb{R})$  et l'ensemble des automorphismes de  $\mathbb{P}^1$ , on obtient une action analytique de  $\text{PGL}_2(\mathbb{R})$  à droite sur  $\mathcal{F}_d^{\text{rét}}$  qui préserve les arbres : si  $f \in \mathcal{F}_d^{\text{rét}}$  et  $\alpha \in \text{PGL}_2(\mathbb{R})$ , alors  $f$  et  $f \cdot \alpha$  ont même arbre.

**Définition 7.1.3 (M-arbre).** Un *M-arbre* est un arbre admissible de niveau 1 ayant un maximum d'arêtes fermées à degré fixé. C'est donc un arbre de la forme




 FIG. 7.1 –  $M$ -arbres de degré 3 à 7

*Remarque 7.1.4.* Il n'existe que des  $M$ -arbres de degré impair.

**Définition 7.1.4.** Pour  $d = 2g + 1$ , on note  $\mathcal{F}_{d,M}^{\text{rét}} \subseteq \mathcal{F}_d^{\text{rét}} \subset \mathcal{F}_d$  le sous-espace formé des endomorphismes réel-étales de degré  $d$  dont l'arbre est le  $M$ -arbre de degré  $d$ .

Un automorphisme  $\alpha \in PGL_2(\mathbb{R})$  est uniquement déterminé par l'image de trois points. Comme les éléments de  $\mathcal{F}_{d,M}^{\text{rét}}$  sont de degré 1 sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ , chaque classe de  $\mathcal{F}_{d,M}^{\text{rét}}$  pour l'action à droite de  $PGL_2(\mathbb{R})$  peut donc être représentée par un unique morphisme  $f \in \mathcal{F}_{d,M}^{\text{rét}}$  admettant 0, 1 et  $\infty$  comme points fixes.

**Définition 7.1.5.** On peut ainsi identifier  $\mathcal{F}_{d,M}^{\text{rét}}/PGL_2(\mathbb{R})$  et l'ensemble

$$\mathcal{F}_{d,M}^{\text{rét},0} = \{f \in \mathcal{F}_{d,M}^{\text{rét}} \mid f(0) = 0, f(1) = 1, f(\infty) = \infty\}.$$

*Remarque 7.1.5.* Les conditions  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$  et  $f(\infty) = \infty$  pour un élément  $f \in \mathcal{F}_{d,M}^{\text{rét}}$  se traduisent par des équations algébriques sur les coefficients de la fraction rationnelle représentant  $f$ . Ainsi,  $\mathcal{F}_{d,M}^{\text{rét},0}$  admet une structure naturelle de variété analytique réelle.

### 7.1.3 Associations

*Nous allons faire le lien entre les éléments de  $\mathcal{F}_{2g+1,M}^{\text{rét},0}$  et les  $M$ -surfaces de Klein de genre  $g$ . Celles-ci seront munies d'un morphisme réel-étale stricte de degré  $g + 1$  et du choix d'une composante connexe de leur bord. C'est ce que nous appellerons triplet.*

#### À partir d'un endomorphisme $f \in \mathcal{F}_{2g+1,M}^{\text{rét}}$

Soit  $\mathcal{A}$  l'arbre de  $f$  et  $D_0$  l'adhérence de la composante connexe de  $f^{-1}(\text{Int } \mathbb{P}^1)$  qui est le noeud principal de  $\mathcal{A}$ . Elle vérifie  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \subset D_0$  et est homéomorphe à l'espace topologique sous-jacent d'une  $M$ -surface de genre  $g$ . La restriction  $f|_{D_0}$  étant un revêtement ramifié de surfaces à bord, on peut utiliser le théorème d'existence de Riemann pour les surfaces de Klein afin de munir  $D_0$  d'un faisceau  $\mathcal{O}_{D_0}$  faisant de  $(D_0, \mathcal{O}_{D_0})$  une surface de Klein et de  $f|_{D_0}$  un morphisme. Il est aussi possible ici de construire  $\mathcal{O}_{D_0}$  "à la main".

**Construction de  $\mathcal{O}_{D_0}$  :** Pour tout ouvert  $U$  de  $D_0$  ne rencontrant pas les arêtes fermées de  $\mathcal{A}$ , on prend  $\mathcal{O}_{D_0}(U) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(U)$ .

Soit  $P \in f^{-1}(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$ . Comme  $f$  est réel-étale, il existe un voisinage ouvert connexe  $U$  de  $P$  dans  $\mathbb{P}^1$  tel que  $f|_U$  soit un pliage. Pour  $U_0 = U \cap D_0$ , on pose alors

$$\mathcal{O}_{D_0}(U_0) = (f|_U)^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(f(U)) = \{\varphi \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(U) \mid f^\# \varphi \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(f(U))\}.$$

L'espace localement annelé  $(D_0, \mathcal{O}_{D_0})$  ainsi défini est une surface de Klein dont les morphismes de structure sont

- les morphismes de structure pour  $\mathbb{P}^1$  définis sur les ouverts  $U \subset \mathbb{P}^1$  inclus dans  $D_0$  ;

- les morphismes de la forme  $\Phi \circ f|_{U_0} : U_0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}$ , où  $U_0 = U \cap D_0$  avec  $U$  ouvert de  $\mathbb{P}^1$  sur lequel  $f$  est un pliage et  $\Phi : f(U) \xrightarrow{\sim} V$  est un morphisme de structure pour  $\mathbb{P}^1$ .

**Définitions 7.1.6.** Pour  $f \in \mathcal{F}_{d,M}^{\text{rét}}$ , on note  $C(f)$  la surface de Klein  $(D_0, \mathcal{O}_{D_0})$  obtenue précédemment et

$$\psi(f) = f|_{C(f)} : C(f) \longrightarrow \mathbb{P}^1.$$

le morphisme de surfaces de Klein obtenu par restriction de  $f$ .

*Remarque 7.1.6.* Pour tout  $f \in \mathcal{F}_{d,M}^{\text{rét}}$ , la surface de Klein  $C(f)$  est une  $M$ -surface de Klein de genre  $g$  où  $d = 2g + 1$  et  $\psi(f)$  est un morphisme de surfaces de Klein réel-étale de degré  $g + 1$ .

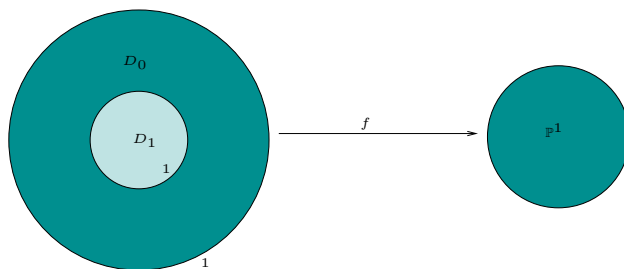


FIG. 7.2 – Morphisme et  $M$ -surface de Klein de genre 1.

### Obtenir un élément de $\mathcal{F}_{d,M}^{\text{rét}}$

**Définition 7.1.7.** Soit  $X$  une  $M$ -surface de Klein de genre  $g$ . On note  $\mathcal{R}_{g+1}^{\text{rét}}(X)$  l'ensemble des fonctions rationnelles réel-étales strictes de degré  $g + 1$  sur  $X$ .

*Remarque 7.1.7.* Pour toute  $M$ -surface de Klein  $X$  de genre  $g$ , on a  $\mathcal{R}_{g+1}^{\text{rét}}(X) \neq \emptyset$  (voir [Ahl50]). En fait, il existe un diviseur effectif  $D$  sur  $X$  de degré  $g + 1$  dont le degré est 1 sur chaque composante connexe du bord de  $X$  tel que  $f$  soit le morphisme associés à  $D$  (voir [Hui01]).

Choisissons une composante connexe  $B$  du bord de  $X$ . En rebouchant les  $g$  trous de  $X$  qui ne bordent pas  $B$ , on obtient une surface de Klein  $\bar{X}$  de genre 0.

**Bouchage de trous le long de chaque composante connexe  $B' \neq B$  du bord de  $X$  :** Le complexifié  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  de  $\mathbb{P}^1$  est formé de deux copies de  $\mathbb{P}^1$  recollées le long de leur bord  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ . On identifie  $\mathbb{P}^1$  à l'une d'elle et on note  $\mathbb{P}^{1-}$  la seconde. Le morphisme réel-étale  $f$  induit un isomorphisme d'un voisinage ouvert  $U$  de  $B'$  dans  $X$  sur un voisinage ouvert  $V$  de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{P}^1$ . On recolle la surface de Klein  $\mathbb{P}^{1-} \cup V$  à  $X$  en identifiant  $U$  à  $V$  par  $f$  ce qui donne une surface de Klein correspondant à  $X$  dont le trou bordé par  $B'$  a été rebouché à l'aide d'une copie de  $\mathbb{P}^1$ . De plus  $f$  se prolonge alors sur  $\mathbb{P}^{1-} \cup V$  de façon unique en un morphisme de surfaces de Klein.

Nous obtenons ainsi une surface de Klein  $\bar{X}$  de genre 0 et un morphisme  $\bar{f} : \bar{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$  qui prolonge  $f$ . En particulier, il existe un isomorphisme

$$\delta : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \bar{X}.$$

Celui-ci est unique si on demande de plus que  $\delta$  vérifie

$$\bar{f} \circ \delta(0) = 0 \quad \bar{f} \circ \delta(1) = 1 \quad \bar{f} \circ \delta(\infty) = \infty. \quad (7.1)$$

Dans ce cas, la fonction rationnelle  $\bar{f} \circ \delta$  de  $\mathbb{P}^1$  est un élément de  $\mathcal{F}_{2g+1,M}^{\text{rét},0}$ .

Dans la construction précédente, le choix d'une composante connexe du bord de  $X$  donne des endomorphismes de  $\mathbb{P}^1$  en général distincts. Nous allons donc considérer des triplets composés d'une  $M$ -surface de Klein de genre  $g$ , un morphisme de degré  $g + 1$  sur  $\mathbb{P}^1$  et une composante connexe du bord de  $X$ .

**Définition 7.1.8 (Triplets).** Pour  $g \geq 1$ , les éléments de  $\mathcal{M}_{g,M}^{\text{rét},1}$  sont des triplets  $(X, f, B)$  formés d'une  $M$ -surface de Klein  $X$  de genre  $g$ , d'un morphisme  $f \in \mathcal{R}_{g+1}^{\text{rét}}(X)$  et du choix d'une composante connexe  $B$  du bord de  $X$ . Deux tels triplets  $(X_1, f_1, B_1)$  et  $(X_2, f_2, B_2)$  représentent le même élément de  $\mathcal{M}_{g,M}^{\text{rét},1}$  si et seulement si il existe un isomorphisme  $h : X_1 \rightarrow X_2$  induisant un homéomorphisme  $h|_{B_1} : B_1 \rightarrow B_2$  et faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow[h]{\sim} & X_2 \\ & \searrow f_1 & \swarrow f_2 \\ & & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

**Triplets et endomorphismes de  $\mathbb{P}^1$**

**Proposition 7.1.2.** Avec les constructions précédentes, les applications obtenues

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{F}_{2g+1,M}^{\text{rét},0} &\longrightarrow \mathcal{M}_{g,M}^{\text{rét},1} & \text{et} & & \Phi : \mathcal{M}_{g,M}^{\text{rét},1} &\longrightarrow \mathcal{F}_{2g+1,M}^{\text{rét},0} \\ f &\longmapsto (C(f), \psi(f), \mathbb{P}^1(\mathbb{R})) & & & (X, f, B) &\longmapsto \bar{f} \circ \delta \end{aligned}$$

sont des bijections telles que  $\Psi \circ \Phi = \text{id}$  et  $\Phi \circ \Psi = \text{id}$ .

*Démonstration.* Soit  $(X, f, B) \in \mathcal{M}_{2g+1,M}^{\text{rét},1}$ . Par construction, la restriction

$$\delta_0 = \delta|_{C(\Phi(X, f, B))} : C(\Phi(X, f, B)) \longrightarrow X$$

est un isomorphisme qui est un homéomorphisme de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  sur la composante connexe  $B$  du bord de  $X$ . De plus,  $\psi(\Phi(X, f, B)) = f \circ \delta_0$ . Ainsi les triplets  $(X, f, B)$  et

$$\Psi \circ \Phi(X, f, B) = (C(\Phi(X, f, B)), \psi(\Phi(X, f, B)), \mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$$

sont équivalents par  $\delta_0$ , donc représentent le même élément de  $\mathcal{M}_{g,M}^{\text{rét},1}$ .

Réciproquement, soit  $f \in \mathcal{F}_{2g+1,M}^{\text{rét},0}$ . L'opération de rebouchage de trous pour  $C(f)$  est exactement l'opération inverse de celle qui permet d'obtenir la surface de Klein  $C(f)$  à partir du domaine  $D_0$  de  $\mathbb{P}^1$ . En d'autres termes,  $C(f) = \mathbb{P}^1$  et  $\overline{\psi(f)} = f$ . Ainsi  $\delta$  obtenu pour la construction de l'endomorphisme  $\Phi(\Psi(f))$  est un automorphisme de  $\mathbb{P}^1$ . Il doit de plus vérifier (7.1), c'est-à-dire

$$\overline{\psi(f)} \circ \delta(0) = 0 \quad \overline{\psi(f)} \circ \delta(1) = 1 \quad \overline{\psi(f)} \circ \delta(\infty) = \infty.$$

Sachant que  $f \in \mathcal{F}_{2g+1,M}^{\text{rét},0}$  admet 0, 1 et  $\infty$  pour points fixes, il doit donc en être de même pour  $\delta$ . Donc  $\delta = \text{id}$  et  $\Phi \circ \Psi(f) = \overline{\psi(f)} \circ \delta = f \circ \text{id} = f$ .  $\square$

## 7.2 Du point de vue analytique

### 7.2.1 Familles généralisées de surfaces de Riemann et de Klein

*Dans la suite de la section 7.2, nous utiliserons des familles analytiques réelles de surfaces de Klein. Pour les définir, nous allons étendre ici rapidement les notions de familles continues de surfaces de Riemann et de Klein à des familles au-dessus d'espaces localement annelés  $(\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}})$ .*

**Familles de surfaces de Riemann au-dessus de  $(\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}})$**

**Définition 7.2.1 (Espace de base complexe).** Un *espace de base complexe* est un espace localement annelé,  $(\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}})$ , où  $\mathcal{B}$  est une variété topologique localement homéomorphe à  $\mathbb{R}^r$  et  $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$  est un sous-faisceau de  $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$  contenant les fonctions constantes.

**Définition 7.2.2 (Famille généralisée de fonctions holomorphes).** Soit  $(\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}})$  un espace de base complexe et  $W \subseteq \mathcal{B} \times \mathbb{C}$  un ouvert. Une *famille généralisée de fonctions holomorphes* au-dessus de  $(\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}})$  définie sur  $W$  est une famille continue de fonctions holomorphes au-dessus de  $\mathcal{B}$  telle que dans la définition 1.1.1, on ait  $a_k \in \mathcal{O}_{\mathcal{B}}(U)$ .

**Proposition 7.2.1.** Soit un ouvert  $W \subseteq \mathcal{B} \times \mathbb{C}$  et  $f : W \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue. La fonction  $f$  est une famille généralisée de fonctions holomorphes si et seulement si pour tout  $(b_0, z_0) \in W$  la fonction

$$\begin{aligned} f(b_0, \cdot) : W_{b_0} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f(b_0, z) \end{aligned}$$

est holomorphe et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les fonctions

$$\begin{aligned} \frac{d^n f}{dz^n}(\cdot, z_0) : W^{z_0} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ b &\longmapsto \frac{d^n f}{dz^n}(b, z_0) \end{aligned}$$

sont des sections de  $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}(W^{z_0})$ .

*Démonstration.* La démonstration est essentiellement la même que celle de la proposition 1.1.1 dans le cas continu.  $\square$

**Exemple 7.2.1.** Soit  $(\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}})$  une variété analytique complexe. Dans ce cas,  $\mathcal{B} \times \mathbb{C}$  admet une structure naturelle de variété analytique complexe. Alors toute fonction analytique définie sur un ouvert  $W \subset \mathcal{B} \times \mathbb{C}$  est une famille de fonctions holomorphes au-dessus de  $(\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}})$ .

**Définition 7.2.3 (Plan complexe au-dessus de  $(\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}})$ ).** Le *plan complexe au-dessus de  $(\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}})$*  est la variété topologique  $\mathcal{B} \times \mathbb{C}$  munie du faisceau des germes de familles généralisées de fonctions holomorphes au-dessus de  $(\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}})$ .

**Définition 7.2.4 (Famille généralisée de surfaces de Riemann).** Une *famille généralisée de surfaces de Riemann au-dessus de  $(\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}})$*  est un morphisme d'espaces localement annelés

$$p : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}}),$$

tel que  $(X, \mathcal{O}_X)$  soit localement isomorphe au plan complexe au-dessus de  $(\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}})$ , l'isomorphisme local respectant la projection. On pourra aussi parler de surface de Riemann au-dessus de  $(\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}})$  et la noter  $(X, p)$ .

L'espace localement annelé  $(\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}})$  est la *base de la famille de surfaces de Riemann* et le morphisme  $p$  la *projection de la famille sur la base*.

**Définition 7.2.5 (Morphisme).** Soit  $(X, p)$  et  $(Y, q)$  deux surfaces de Riemann au-dessus de  $(\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}})$ . Un *morphisme de familles généralisées de surfaces de Riemann* ou *morphisme de surfaces de Riemann au-dessus de  $(\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}})$*  est un morphisme d'espaces localement annelés

$$\varphi : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

tel que  $p = q \circ \varphi$

**Familles généralisées de surfaces de Klein au-dessus de  $(\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}})$**

**Définition 7.2.6 (Espace de base réel).** Un *espace de base réel* est un espace localement annelé,  $(\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}})$ , où  $\mathcal{B}$  est une variété topologique localement homéomorphe à  $\mathbb{R}^r$  et  $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$  est un sous-faisceau de  $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$  contenant les fonctions constantes.

Si  $(\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}})$  est un espace de base réel, l'espace localement annelé  $(\mathcal{B}, \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_{\mathcal{B}})$  est un espace de base complexe. Ce dernier est muni d'une action naturelle de  $\Sigma$  qui est triviale sur  $\mathcal{B}$  et définie pour toute section  $f \in \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_{\mathcal{B}}(U)$  sur un ouvert  $U \subseteq \mathcal{B}$  par  $\sigma \cdot f = \overline{f}$ . Le quotient de  $(\mathcal{B}, \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_{\mathcal{B}})$  pour cette action est  $(\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}})$ .

Comme dans le cas des familles continues,  $\Sigma$  agit sur  $\mathcal{B} \times \mathbb{C}$ . On note  $\Pi_{\mathbb{C}} : \mathcal{B} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{B} \times \mathbb{H}$  l'application continue de passage au quotient. On a aussi une action de  $\Sigma$  sur le plan complexe au-dessus de  $(\mathcal{B}, \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_{\mathcal{B}})$  donnée pour tout ouvert  $U \in \mathcal{B} \times \mathbb{C}$  et toute section  $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}(U)$  par

$$\begin{aligned} \sigma \cdot f : U &\longrightarrow \mathbb{C}. \\ (b, z) &\longmapsto \overline{f(b, \overline{z})} \end{aligned}$$

Alors  $\sigma \cdot f \in \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}}(\sigma \cdot U)$ .

**Définition 7.2.7 (Demi-plan au-dessus de  $(\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}})$ ).** Le *demi-plan au-dessus de  $(\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}})$*  est l'espace localement annelé

$$(\mathcal{B} \times \mathbb{H}, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{H}}) = \left( (\mathcal{B} \times \mathbb{C}) / \Sigma, (\Pi_{\mathbb{C}*} \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}})^{\Sigma} \right).$$

L'application  $\text{pr}_1 : \mathcal{B} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{B}$  est équivariante pour l'action de  $\Sigma$  sur  $(\mathcal{B} \times \mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{B} \times \mathbb{C}})$  et sur  $(\mathcal{B}, \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_{\mathcal{B}})$ . Par passage au quotient,

$$\text{pr}_1 : \mathcal{B} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{B}$$

est un morphisme d'espaces localement annelés.

**Définition 7.2.8 (Famille généralisée de surfaces de Klein).** Une *famille généralisée de surfaces de Klein au-dessus de  $(\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}})$*  est un morphisme d'espaces localement annelés

$$p : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}}),$$

tel que  $(X, \mathcal{O}_X)$  soit localement isomorphe au demi-plan au-dessus de  $(\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}})$ , l'isomorphisme local respectant la projection. On pourra aussi parler de surface de Klein au-dessus de  $(\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}})$  et la noter  $(X, p)$ .

L'espace localement annelé  $(\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}})$  est la *base de la famille de surfaces de Riemann* et le morphisme  $p$  la *projection de la famille sur la base*.

**Définition 7.2.9 (Morphisme).** Soit  $(X, p)$  et  $(Y, q)$  deux surfaces de Klein au-dessus de  $(\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}})$ . Un *morphisme de familles généralisées de surfaces de Klein* ou *morphisme de surfaces de Klein au-dessus de  $(\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}})$*  est un morphisme d'espaces localement annelés

$$\varphi : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

tel que  $p = q \circ \varphi$

## 7.2.2 Structures analytiques

### Fibrations analytiques réelles localement triviales

*Le but de cette section est de montrer un résultat technique général dont nous aurons besoin par la suite.*

Soit  $\mathcal{X}$  une famille analytique réelle de surfaces de Klein au-dessus d'une variété analytique réelle  $\mathcal{B}$ . Par définition d'une telle famille, l'espace total des points réels  $\mathcal{C}(\mathbb{R})$  est une variété analytique réelle. De plus, il est muni d'un morphisme analytique réel  $p : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{B}$ . Il suit encore de la définition d'une famille de surfaces de Klein que  $p$  est une submersion.

**Lemme 7.2.2.** *Soit  $\mathcal{C}$  une famille analytique réelle de  $M$ -surfaces de Klein au-dessus d'une variété analytique réelle  $\mathcal{B}$ . Soit  $p : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{B}$  le morphisme analytique réel induit. Alors  $p$  est une fibration analytique réelle localement triviale.*

*Démonstration.* Soit  $b \in \mathcal{B}$ . on va montrer que  $p$  est une fibration analytique réelle localement triviale au voisinage de  $b$ .

On note  $\mathcal{C}_b$  la fibre de  $\mathcal{C}$  au-dessus de  $b$ . Pour  $i = 1$  à  $n$ , soient  $x_i \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$  tels que chaque composante connexe de  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$  contienne un unique point  $P_i$ . Comme  $p$  est une submersion analytique réelle, il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $b$  dans  $\mathcal{B}$ , et des sections analytiques réelles  $\sigma_i$ , pour  $i = 1$  à  $n$ , de  $p$  au-dessus de  $U$  telles que  $\sigma_i(b) = P_i$ .

Comme l'énoncé à démontrer concerne une propriété locale de  $\mathcal{B}$  au voisinage de  $b$ , on peut supposer que  $U = \mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}$  connexe.

Soit  $D$  le diviseur relatif de  $\mathcal{C}$  au-dessus de  $\mathcal{B}$  défini par

$$D = \sum_{i=1}^n \sigma_i(\mathcal{B}).$$

Soit  $\mathcal{L}(D)$  le fibré en droites sur  $\mathcal{C}$  au-dessus de  $\mathcal{B}$  associé à  $D$ . D'après le théorème de Riemann-Roch,  $\mathcal{L} = p_*\mathcal{L}(D)$  est un fibré vectoriel analytique réel sur  $\mathcal{B}$ . De plus, son rang est égal à  $\dim H^0(\mathcal{C}_b, \mathcal{L}(D_b))$ , où  $D_b$  est le diviseur  $\sum_{i=1}^n P_i$  sur la surface de Klein  $\mathcal{C}_b$ . Comme d'après [Hui01], le système linéaire associé à un tel diviseur est de dimension 2,  $\mathcal{L}$  est un fibré vectoriel analytique en plans.

Quitte à remplacer  $\mathcal{B}$  par un voisinage ouvert de  $b$  dans  $\mathcal{B}$ , on peut supposer le fibré vectoriel  $\mathcal{L}$  trivial. Soient alors  $s_0$  et  $s_1$  deux sections analytiques de  $\mathcal{L}$  telles que, en tout point  $b' \in \mathcal{B}$ ,  $\{s_0(b'), s_1(b')\}$  soit une base de la fibre de  $\mathcal{L}$  en  $b'$ . Soit

$$f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \times \mathbb{P}^1$$

le morphisme de familles de surfaces de Klein au-dessus de  $\mathcal{B}$  défini par  $f = [s_0 : s_1]$ . Par construction, au-dessus de chaque point  $b'$  de  $\mathcal{B}$ , le morphisme de surfaces de Klein  $f_{b'} : \mathcal{C}_{b'} \rightarrow \mathbb{P}^1$  envoie chaque composante connexe du bord  $\mathcal{C}_{b'}(\mathbb{R})$  de  $\mathcal{C}_{b'}$  isomorphiquement sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ . D'après ce qui précède, le morphisme analytique réel

$$f(\mathbb{R}) : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{B} \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$

induit par  $f$ , est un isomorphisme analytique réel. □

### Structure semi-analytique naturelle sur $\mathcal{M}_{g,M}^{\text{réét},1}$

On considère  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{g,M}$  la famille universelle au-dessus de l'espace de Teichmüller  $\mathcal{T}$  (voir section 7.1.1). C'est une famille analytique réelle de  $M$ -surfaces de Klein au-dessus de  $\mathcal{T}$ . D'après le lemme 7.2.2,  $\mathcal{X}(\mathbb{R})$  est localement trivial au-dessus de  $\mathcal{T}$ . Ainsi, la réunion disjointe

$$\pi_0 = \pi_0(\mathcal{X}/\mathcal{T}) = \coprod_{(X,h) \in \mathcal{T}} \pi_0(\mathcal{X}(\mathbb{R}))$$

admet une topologie naturelle faisant de l'application induite  $p' : \pi_0 \rightarrow \mathcal{T}$  un revêtement topologique.

Comme  $\mathcal{T}$  est connexe et simplement connexe et  $p'$  de degré  $g+1$ , l'application  $\pi_0$  a exactement  $g+1$  composantes connexes  $\mathcal{B}_0, \dots, \mathcal{B}_g$ . De plus, la restriction de  $p'$  à chaque composante connexe  $\mathcal{B}_i$  pour  $i = 0$  à  $g$ , est un homéomorphisme sur  $\mathcal{T}$ . Pour  $i = 0$  à  $g$ , on note  $B_i \in \mathcal{B}_i$  l'unique point au-dessus de  $(X_0, \text{id}) \in \mathcal{T}$ . L'unique point de  $\mathcal{B}_i$  au-dessus de  $(X, h) \in \mathcal{T}$  est alors la composante connexe  $h(B_i)$  du bord  $X(\mathbb{R})$  de  $X$ . En d'autres termes

$$\mathcal{B}_i = \{h(B_i) \mid (X, h) \in \mathcal{T}\}.$$

En particulier, pour tout  $i = 0$  à  $g$ ,  $\bigcup \mathcal{B}_i$  est une composante connexe de  $\mathcal{X}(\mathbb{R})$ . Plus précisément, les composantes connexes de  $\mathcal{X}(\mathbb{R})$  sont

$$\bigcup \mathcal{B}_0, \dots, \bigcup \mathcal{B}_g.$$

Ainsi, chacune des  $\bigcup \mathcal{B}_i$  est une variété analytique réelle. De plus, d'après le lemme 7.2.2, le morphisme induit  $p_i : \bigcup \mathcal{B}_i \rightarrow \mathcal{T}$  est une fibration analytique réelle localement triviale. Dans la suite, on écrira abusivement  $\mathcal{B}_i$  pour  $\bigcup \mathcal{B}_i$  afin d'alléger la notation.

Soit

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \times_{\mathcal{T}} \mathcal{B}_1 \times_{\mathcal{T}} \dots \times_{\mathcal{T}} \mathcal{B}_g$$

le produit fibré de  $\mathcal{B}_0, \dots, \mathcal{B}_g$  au-dessus de  $\mathcal{T}$ . Un élément de  $\mathcal{B}$  est une paire  $(X, P)$  avec  $X \in \mathcal{T}$  et  $P = (P_0, \dots, P_g)$  où  $P_i \in \mathcal{B}_i$  pour tout  $i = 0$  à  $g$ . On note

$$\beta = \beta_{g,M} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{T}$$

le morphisme analytique réel induit. Le lemme 7.2.2 entraîne le résultat suivant.

**Corollaire 7.2.3.** *Le morphisme  $\beta_{g,M}$  est une fibration analytique localement triviale.*

Soit  $\mathcal{D}$  le diviseur sur la famille de surfaces de Klein  $\beta^*\mathcal{X}$  au-dessus de  $\mathcal{B}$  défini fibre par fibre par

$$\mathcal{D}_{X,P} = \sum_{i=0}^g P_i.$$

Comme  $\beta$  est une fibration analytique réelle localement triviale,  $\mathcal{D}$  est bien un diviseur sur  $\beta^*\mathcal{X}$  au-dessus de  $\mathcal{B}$ .

Soit  $\mathcal{L}(\mathcal{D})$  le fibré en droites associé à  $\mathcal{D}$ . Comme dans la démonstration du lemme 7.2.2,  $\mathcal{L} = p_*\mathcal{L}(\mathcal{D})$  est un fibré analytique réel en plans sur  $\mathcal{B}$ . On considère son faisceau de sections analytiques réelles comme sous-faisceau du faisceau  $\mathcal{K}$  des fonctions méromorphes sur  $\beta^*\mathcal{X}$  au-dessus de  $\mathcal{B}$ . Alors la fonction méromorphe constante 1 est une section globale de  $\mathcal{L}$ . Soit  $\mathcal{T}^{\text{rét},3} = \mathcal{T}_{g,M}^{\text{rét},3}$  l'ensemble des éléments  $(X, P, f) \in \mathcal{L}$  tels que  $f \notin \text{Vect}(1)$ . Il est clair que  $\mathcal{T}^{\text{rét},3}$  est une variété analytique réelle. De plus, elle est munie d'un morphisme

$$\pi = \pi_{g,M} : \mathcal{T}^{\text{rét},3} \longrightarrow \mathcal{B}$$

qui est une fibration analytique réelle localement constante. Notons que, pour un élément  $(X, P, f) \in \mathcal{T}^{\text{rét},3}$ , les points  $P_0, \dots, P_g$  du bord de  $X$  sont déterminés par  $f$ . En se rappelant que l'on cherche une structure analytique naturelle sur les triplets de  $\mathcal{M}_{g,M}^{\text{rét},1}$ , on pourra donc représenter un élément  $(X, P, f)$  de  $\mathcal{T}^{\text{rét},3}$  de manière univoque par  $(X, f, B)$  où  $B$  est la composante connexe  $h(B_0)$  du bord de  $X$ .

**Définition 7.2.10 (Espace de Teichmüller des triplets).** On appelle la variété analytique réelle  $\mathcal{T}^{\text{rét},3}$  l'espace de Teichmüller des triplets  $((X, h), f, B)$  où

- (i)  $X$  est une  $M$ -surface de Klein de genre  $g$ ,
- (ii)  $h : X_0 \rightarrow X$  est un homéomorphisme tel que  $B = h(B_0)$ ,
- (iii)  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  est un morphisme réel-étale de degré  $g + 1$ .

Deux tels triplets  $((X, h), f, B)$  et  $((X', h'), f', B')$  représentent le même élément de  $\mathcal{T}^{\text{rét},3}$  si et seulement si il existe un isomorphisme  $\alpha : X \rightarrow X'$  tel que

1.  $\alpha \circ h$  et  $h'$  sont isotopes,
2.  $f' \circ \alpha = f$

En particulier, on a  $\alpha(B) = B'$  et si on note  $0_X, 1_X, \infty_X$  (resp.  $0_{X'}, 1_{X'}, \infty_{X'}$ ) les images réciproques respectives dans  $B$  (resp.  $B'$ ) de 0, 1 et  $\infty$  par  $f$  (resp.  $f'$ ), alors  $\alpha(0_X) = 0_{X'}$ ,  $\alpha(1_X) = 1_{X'}$  et  $\alpha(\infty_X) = \infty_{X'}$ .



Soit  $\Gamma_0$  le sous-groupe du groupe modulaire  $\Gamma$  des éléments  $\gamma \in \Gamma$  tels que  $\gamma(B_0) = B_0$ . Il agit sur  $\mathcal{J}^{\text{rét},3}$  par automorphismes analytiques réels en posant

$$((X, h), f, B) \cdot \gamma = ((X, h \circ \gamma), f, B).$$

Cette action étant proprement discontinue, le quotient  $\mathcal{J}^{\text{rét},3}/\Gamma_0$  est une variété semi-analytique. Soit

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{g,M} : \mathcal{J}_{g,M}^{\text{rét},3} &\longrightarrow \mathcal{M}_{g,M}^{\text{rét},1} \\ ((X, h), f, B) &\longmapsto (X, f, B) \end{aligned}$$

On voit que  $\mathfrak{p}$  est une application quotient pour l'action de  $\Gamma_0$ . Elle induit donc une bijection entre  $\mathcal{J}^{\text{rét},3}/\Gamma_0$  et  $\mathcal{M}_{g,M}^{\text{rét},1}$ . Ainsi  $\mathcal{M}_{g,M}^{\text{rét},1}$  acquiert donc une structure naturelle de variété semi-analytique. En particulier, l'application oubliée

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{g,M}^{\text{rét},1} &\longrightarrow \mathcal{M}_{g,M} \\ (X, f, B) &\longmapsto X \end{aligned}$$

est un morphisme analytique réel. En tant que morphisme d'orbifolds analytiques réels, c'est une fibration analytique réelle localement triviale.

### Espace de Teichmüller de morphismes

Rappelons que  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{2g+1,M}^{\text{rét},0}$  est l'ensemble des fonctions rationnelles réelles de degré  $2g+1$  qui sont réel-étales, dont l'arbre est une  $M$ -arbre et qui admettent  $0, 1$  et  $\infty$  comme points fixes.

Soit  $f_0 \in \mathcal{F}$  tel que la  $M$ -surface de Klein  $C(f_0)$  soit  $X_0$  et que  $B_0$  soit  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ . On note  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{2g+1,M}^{\text{rét}}$  l'ensemble des couples  $(f, h)$  tels que

- (i)  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  est un endomorphisme réel-étale de degré  $2g+1$  dont l'arbre est un  $M$ -arbre et qui admet  $0, 1$  et  $\infty$  pour points fixes,
- (ii)  $h : X_0 \rightarrow C(f)$  est un homéomorphisme tel que  $h(\mathbb{P}^1(\mathbb{R})) = \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ ,

où  $C(f)$  est la  $M$ -surface de Klein associée à  $f$  (définition 7.1.6). Deux tels couples  $(f, h)$  et  $(f', h')$  représentent le même élément de  $\mathcal{S}$  si et seulement si  $f = f'$  et  $h$  et  $h'$  sont homotopes. Ceci a un sens puisque si  $f = f'$ , alors  $C(f) = C(f')$ .

Rappelons que  $\Gamma$  est le groupe quotient  $\text{Homeo}(X_0)/\text{Homeo}^0(X_0)$ , et que  $\Gamma_0 \subset \Gamma$  est le sous-groupe des éléments  $\gamma \in \Gamma$  tels que  $\gamma(\mathbb{P}^1(\mathbb{R})) = \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ . Le groupe  $\Gamma_0$  agit à droite sur  $\mathcal{S}$  par

$$(f, h) \cdot \gamma = (f, h \circ \gamma).$$

On voit que l'application oubliée

$$\begin{aligned} \mathfrak{q} : \mathcal{S}_{2g+1,M}^{\text{rét}} &\longrightarrow \mathcal{F}_{2g+1,M}^{\text{rét},0} \\ (f, h) &\longmapsto f \end{aligned}$$

est une application quotient pour l'action de  $\Gamma_0$  sur  $\mathcal{S}$ . Il existe alors une unique structure de variété analytique réelle sur  $\mathcal{S}$  telle que l'application  $\mathfrak{q} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{F}$  soit un revêtement analytique réel.

**Définition 7.2.11 (Espace de Teichmüller des endomorphismes de  $\mathcal{F}_{2g+1,M}^{\text{rét},0}$ ).** On appelle  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{2g+1,M}^{\text{rét}}$  l'espace de Teichmüller des endomorphismes de degré  $2g+1$  réel-étales dont l'arbre est un  $M$ -arbre et admettant  $0, 1$  et  $\infty$  pour points fixes. Le groupe  $\Gamma_0$  est son groupe modulaire.

### 7.2.3 Applications analytiques

*Le but de cette section est de montrer le théorème suivant qui est le résultat principal de ce chapitre.*

**Théorème 7.2.4.** *Les bijections réciproques*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{M}_{g,M}^{\text{rét},1} &\longrightarrow \mathcal{J}_{2g+1,M}^{\text{rét},0} & \text{et} & & \Psi : \mathcal{J}_{2g+1,M}^{\text{rét},0} &\longrightarrow \mathcal{M}_{g,M}^{\text{rét},1}, \\ (X, f, B) &\longmapsto \bar{f} \circ \delta & & & f &\longmapsto (C(f), \psi(f), \mathbb{P}^1(\mathbb{R})) \end{aligned}$$

définies à la section 7.1.3, sont analytiques.

Les applications  $\Phi$  et  $\Psi$  se relèvent en des applications

$$\tilde{\Phi} : \mathcal{J}_{g,M}^{\text{rét},3} \longrightarrow \mathcal{S}_{2g+1,M}^{\text{rét}} \quad \text{et} \quad \tilde{\Psi} : \mathcal{S}_{2g+1,M}^{\text{rét}} \longrightarrow \mathcal{J}_{g,M}^{\text{rét},3}$$

au niveau des espaces de Teichmüller. On définit  $\tilde{\Phi}$  par

$$\tilde{\Phi}((X, h), f, B) = (\bar{f} \circ \delta, (\delta^0)^{-1} \circ h),$$

où  $\bar{f} : \bar{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$  et  $\delta : \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} \bar{X}$  sont définis comme dans la section 7.1.3, en particulier  $f = \bar{f}|_X$  et  $\Phi(X, f, B) = \bar{f} \circ \delta$ , et  $\delta^0 = \delta|_{\delta^{-1}(X)} : \delta^{-1}(X) \rightarrow X$ . On définit  $\tilde{\Psi}$  par

$$\tilde{\Psi}(f, h) = \left( (C(f), h), \psi(f), \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \right).$$

Ceci nous donne les deux diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}_{g,M}^{\text{rét},3} & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & \mathcal{S}_{2g+1,M}^{\text{rét}} \\ \text{p} \downarrow & & \downarrow \text{q} \\ \mathcal{M}_{g,M}^{\text{rét},1} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{J}_{2g+1,M}^{\text{rét},0} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_{2g+1,M}^{\text{rét}} & \xrightarrow{\tilde{\Psi}} & \mathcal{J}_{g,M}^{\text{rét},3} \\ \text{q} \downarrow & & \downarrow \text{p} \\ \mathcal{J}_{2g+1,M}^{\text{rét},0} & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{M}_{g,M}^{\text{rét},1} \end{array}$$

Comme les applications oubliées  $\text{p}$  et  $\text{q}$  sont des morphismes quotients, il suffit de montrer que  $\tilde{\Phi}$  et  $\tilde{\Psi}$  sont analytiques réelles pour obtenir le théorème 7.2.4. Pour cela nous allons utiliser les familles universelles au-dessus des espaces de Teichmüller  $\mathcal{J}_{g,M}^{\text{rét},3}$  et  $\mathcal{S}_{2g+1,M}^{\text{rét}}$ .

**La famille universelle au-dessus de  $\mathcal{J}_{g,M}^{\text{rét},3}$**  est un triplet  $(\mathcal{Y}, F, \mathcal{B})$  où  $\mathcal{Y}$  est le pull-back de la famille universelle  $\mathcal{X}$  des  $M$ -surfaces de Klein au-dessus de l'espace de Teichmüller  $\mathcal{J}$  par le morphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{g,M}^{\text{rét},3} &\longrightarrow \mathcal{J}, \\ ((X, h), f, B) &\longmapsto (X, h) \end{aligned}$$

$\mathcal{B}$  est la composante connexe de  $\mathcal{Y}(\mathbb{R})$  contenant  $B_0$  et

$$F : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{J}_{g,M}^{\text{rét},3} \times \mathbb{P}^1$$

est le morphisme de familles de surfaces de Klein donné fibre par fibre par

$$F_{((X,h),f,B)} = f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1.$$

$F$  est donc réel-étale de degré  $g + 1$ .

**Proposition 7.2.5.** *La famille  $(\mathcal{Y}, F, \mathcal{B})$  est la famille universelle au-dessus de  $\mathcal{J}_{g,M}^{\text{rét},3}$ .*

*Démonstration.* Soit  $(\mathcal{Y}', F', \mathcal{B}') \longrightarrow \mathcal{S}$  une famille de triplets au-dessus d'une variété analytique réelle connexe  $\mathcal{S}$ , où  $\mathcal{Y}'$  est une famille analytique d'éléments  $(Y, h) \in \mathcal{J}$ ,  $F' : \mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{S} \times \mathbb{P}^1$  est un morphisme réel-étale de surfaces de Klein au-dessus de  $\mathcal{S}$  de degré  $g + 1$  et  $\mathcal{B}'$  est la composante

connexe du bord de  $\mathcal{Y}$  donnée par  $\mathcal{B}' = \bigcup_{(X,h) \in \mathcal{Y}'} h^{-1}(B_0)$ . Si  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}_{g,M}^{\text{rét},3}$  est une application vérifiant  $f^*(\mathcal{Y}, F, \mathcal{B}) = (\mathcal{Y}', F', \mathcal{B}')$ , alors forcément,  $f$  est définie par

$$f(s) = (\mathcal{Y}'_s, F'_s, \mathcal{B}'_s).$$

L'analyticité de  $f$  étant un résultat local, on peut supposer  $\mathcal{S}$  connexe et simplement connexe. La famille  $\mathcal{Y}'$  au-dessus de  $\mathcal{S}$  est une famille analytique d'éléments de  $\mathcal{T}$ . Il existe donc une unique application analytique  $f' : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$  telle que  $f'^*\mathcal{T} = \mathcal{Y}'$ . Il est clair que  $f' = \pi' \circ f$ , où

$$\pi' = \beta \circ \pi : \mathcal{T}_{g,M}^{\text{rét},3} \rightarrow \mathcal{T}.$$

D'après la section 7.2.2, le fibré analytique  $\pi'$  est localement trivial.

On a une application

$$\beta' : \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{S},$$

où

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B}'_0 \times_{\mathcal{S}} \mathcal{B}'_1 \times_{\mathcal{S}} \dots \times_{\mathcal{S}} \mathcal{B}'_g$$

est le produit fibré au-dessus de  $\mathcal{S}$  des composantes connexes de  $\mathcal{Y}'$ . De la même façon que pour  $\beta$  à la section 7.2.2, on munit  $\mathcal{B}'$  d'une structure naturelle de variété analytique réelle. D'après le lemme 7.2.2,  $\beta'$  est alors un fibré analytique localement trivial. Par construction,  $f'$  se relève en une application analytique

$$f'' : \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}.$$

Comme  $F'$  est un morphisme réel-étale de surfaces de Klein au-dessus de  $\mathcal{S}$ , L'application

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{S} &\rightarrow \mathcal{B}' \\ s &\mapsto (F_s^{-1}(0), s) \end{aligned}$$

est une section analytique réelle de  $\beta'$ . Ainsi, l'application  $f'' \circ \sigma : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{B}$  est analytique réelle.

Le fibré analytique réel  $\pi : \mathcal{T}_{g,M}^{\text{rét},3} \rightarrow \mathcal{B}$  est localement constant et

$$\pi \circ f = f'' \circ \sigma$$

est analytique réelle. Ceci implique que  $f$  est analytique réelle.  $\square$

**La famille universelle au-dessus de  $\mathcal{S}_{2g+1,M}^{\text{rét}}$**  provient de la famille universelle au-dessus de  $\mathcal{F}_{2g+1,M}^{\text{rét},0}$ . Cette dernière est le morphisme de surfaces de Klein au-dessus de  $\mathcal{F}$  défini par

$$\begin{aligned} G_0 : \mathcal{F}_{2g+1,M}^{\text{rét},0} \times \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathcal{F}_{2g+1,M}^{\text{rét},0} \times \mathbb{P}^1 \\ (f, z) &\mapsto (f, f(z)) \end{aligned}$$

Le pull-back de  $G_0$  par  $\mathfrak{q} : \mathcal{S}_{2g+1,M}^{\text{rét}} \rightarrow \mathcal{F}_{2g+1,M}^{\text{rét},0}$  est un morphisme de familles de surfaces de Klein

$$G : \mathcal{S}_{2g+1,M}^{\text{rét}} \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{S}_{2g+1,M}^{\text{rét}} \times \mathbb{P}^1.$$

Par le même procédé que celui utilisé dans la section 7.1.3, on associe à  $G$  une famille de surfaces de Klein  $C(G)$  au-dessus de  $\mathcal{S}_{2g+1,M}^{\text{rét}}$  dont la fibre au-dessus de  $(f, h) \in \mathcal{S}_{2g+1,M}^{\text{rét}}$  est la  $M$ -surfaces de Klein  $C(f)$  de genre  $g$  associées à  $G_{f,h} = f$ . Cette famille vient avec une famille d'épinglages

$$H : \mathcal{S}_{2g+1,M}^{\text{rét}} \times C(f_0) \rightarrow C(G)$$

de sorte que  $H$  induise au-dessus de  $(f, h)$  un homéomorphisme  $H_{(f,h)} : C(f_0) \rightarrow C(f) = C(G)_{(f,h)}$  homotope à  $h$ . La famille  $H$  est une famille localement constante, donc analytique.

**Proposition 7.2.6.** *La famille universelle au-dessus de  $\mathcal{S}_{2g+1,M}^{\text{rét}}$  est le couple  $(G, H)$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{S}$  un espace de base analytique réel et  $G' : \mathcal{S} \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{S} \times \mathbb{P}^1$  un morphisme réel-étale au-dessus de  $\mathcal{S}$ , de degré  $2g+1$  tel que  $G'_s$  ait pour arbre un  $M$ -arbre quel que soit  $s \in \mathcal{S}$ . On suppose  $G'$  associé à une famille localement constante d'épinglages

$$H' : \mathcal{S}_{2g+1,M}^{\text{rét}} \times C(f_0) \longrightarrow C(G'),$$

où  $C(G')$  est la famille de surfaces de Klein associée à  $G'$ , par le même procédé que celui utilisé dans la section 7.1.3. Si  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}_{2g+1,M}^{\text{rét},0}$  est une application telle que  $f^*(G, H) = (G', H')$ , alors forcément on doit avoir  $f(s) = (G'_s, H'_s)$ . L'analyticité étant une propriété locale, on se place au voisinage d'un point  $s \in \mathcal{S}$ . Comme  $H'$  est localement constante, on peut supposer  $H'$  constante sur  $\mathcal{S}$ . Par universalité de la famille  $G_0$ , l'application  $f' : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{F}_{2g+1,M}^{\text{rét},0} : s \mapsto G'_s$  est analytique. On en déduit que  $f = \{H_s\} \times f$  est analytique.  $\square$

**$\tilde{\Psi}$ , donc  $\Psi$ , est analytique réelle :** Le couple  $(C(G), H)$  est une famille analytique réelle de surfaces de Klein au-dessus de  $\mathcal{S}_{2g+1,M}^{\text{rét}}$  munie d'épinglages donnés par  $H : C(f_0) \rightarrow \mathcal{S}_{2g+1,M}^{\text{rét}}$ . En notant  $\mathcal{B}_G$  l'image réciproque de la composante connexe  $\mathcal{S}_{2g+1,M}^{\text{rét}} \times B_0$  de  $(\mathcal{S}_{2g+1,M}^{\text{rét}} \times C(f_0))(\mathbb{R})$  par  $H$ , on obtient un triplet

$$\left( (C(G), H), G|_{C(G)}, \mathcal{B}_G \right)$$

au-dessus de  $\mathcal{S}_{2g+1,M}^{\text{rét}}$ . D'après la propriété universelle de la famille  $(\mathcal{Y}, F, \mathcal{B})$  au-dessus de  $\mathcal{T}_{g,M}^{\text{rét},3}$ , il existe un unique morphisme  $\Psi' : \mathcal{S}_{2g+1,M}^{\text{rét}} \rightarrow \mathcal{T}_{g,M}^{\text{rét},3}$  tel que

$$(\Psi')^*(\mathcal{Y}, F, \mathcal{B}) \cong \left( (C(G), H), G|_{C(G)}, \mathcal{B}_G \right).$$

En regardant fibre par fibre, on voit que  $\Psi' = \tilde{\Psi}$ . Ainsi  $\tilde{\Psi}$ , donc  $\Psi$ , est analytique réelle.

**$\tilde{\Phi}$ , donc  $\Phi$ , est analytique réelle :** Par un procédé analogue à celui utilisé à la section 7.1.3, il est possible de reboucher les trous de  $\mathcal{Y}$  qui ne sont pas bordés par  $\mathcal{B}$  en recollant des copies de  $\mathcal{T}_{g,M}^{\text{rét},3} \times \mathbb{P}^1$ . On obtient ainsi une famille analytique réelle de surfaces de Klein  $\mathcal{Y}'$  au-dessus de  $\mathcal{T}_{g,M}^{\text{rét},3}$  dont chaque fibre est connexe et simplement connexe, donc isomorphe à  $\mathbb{P}^1$ . La construction donne aussi un unique prolongement de  $F$  en un morphisme  $\bar{F} : \mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{T}_{g,M}^{\text{rét},3} \times \mathbb{P}^1$ . Pour chaque fibre  $\mathcal{Y}'_{(X,h),f,B}$ , il existe un unique isomorphisme  $\alpha_{(X,h),f,B} : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{Y}'_{(X,h),f,B}$  tel que  $f \circ \alpha$  admette 0, 1 et  $\infty$  pour points fixes. On en déduit un unique isomorphisme  $A : \mathcal{T}_{g,M}^{\text{rét},3} \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{Y}'$  tel que  $\mathcal{T}_{g,M}^{\text{rét},3} \times \{0\}$ ,  $\mathcal{T}_{g,M}^{\text{rét},3} \times \{1\}$  et  $\mathcal{T}_{g,M}^{\text{rét},3} \times \{\infty\}$  soient chacun stable par  $F \circ A$ . On obtient ainsi un couple

$$(F \circ A, H_{\mathcal{Y}'})$$

au-dessus de  $\mathcal{T}_{g,M}^{\text{rét},3}$  formé d'une famille de morphisme dont chaque fibre est dans  $\mathcal{F}_{2g+1,M}^{\text{rét},0}$  et d'épinglages provenant des épinglages sur  $\mathcal{Y}$ . D'après la propriété universelle de la famille  $(G, H)$  au-dessus de  $\mathcal{S}_{2g+1,M}^{\text{rét}}$ , il existe un unique morphisme  $\Phi' : \mathcal{T}_{g,M}^{\text{rét},3} \rightarrow \mathcal{S}_{2g+1,M}^{\text{rét}}$  tel que

$$(\Phi')^*(F \circ A, H_{\mathcal{Y}'}) \cong (G, H).$$

En regardant fibre par fibre, on voit que  $\Phi' = \tilde{\Phi}$ . Ainsi  $\tilde{\Phi}$ , donc  $\Phi$ , est analytique réelle.

## 7.3 $M$ -surface de Klein de genre 1

### 7.3.1 Module de triplets

*Rappelons (définition 7.1.8) que deux triplets  $((X_1, \mathcal{O}_{X_1}), f_1, B_1)$  et  $((X_2, \mathcal{O}_{X_2}), f_2, B_2)$  sont équivalents si et seulement si il existe un isomorphisme  $h : (X_1, \mathcal{O}_{X_1}) \rightarrow (X_2, \mathcal{O}_{X_2})$  tel que  $f_1 = f_2 \circ h$  et induisant un homéomorphisme  $h|_{B_1} : B_1 \xrightarrow{\sim} B_2$ .*

Pour étudier l'espace de modules  $\mathcal{M}_{1,M}^{\text{rét},1}$  des triplets de genre 1, nous commencerons par des rappels sur l'espace de modules des  $M$ -surfaces de Klein de genre 1. Ensuite, nous aurons besoin de résultats sur les automorphismes de ces courbes. Ceci nous permettra d'obtenir une paramétrisation de l'espace de modules des triplets de genre 1.

Pour plus de détails sur les  $M$ -surfaces de Klein de genre 1, et plus généralement sur les surfaces de Klein de genre 1, le lecteur pourra se référer à l'ouvrage de N. Alling [All81]

### Modules de $M$ -surfaces de Klein de genre 1

Le complexifié d'une  $M$ -surface de Klein de genre 1 est un tore complexe,  $\mathbb{C}/L$  avec  $L = [\omega_1, \omega_2]$  un réseau dans le plan complexe  $\mathbb{C}$  engendré par  $(\omega_1, \omega_2) \in (\mathbb{C}^*)^2$  avec  $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$ . Le résultat suivant est un résultat classique de la théorie des surfaces de Riemann de genre 1.

**Théorème 7.3.1.** *La classe d'isomorphisme d'une surface de Riemann de genre 1 admet un unique représentant de la forme  $\mathbb{C}/L_\tau$  où  $L_\tau = [1, \tau]$  est le réseau engendré par  $(1, \tau)$  pour*

$$\tau \in \mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{H} \mid -\frac{1}{2} < \operatorname{Re} z < 0 \text{ et } |z| > 1 \right\} \cup \left\{ z \in \mathbb{H} \mid 0 \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2} \text{ et } |z| \geq 1 \right\}.$$

Dans le cas où la surface de Riemann  $\mathbb{C}/L_\tau$  est munie d'une action antianalytique de  $\Sigma$ , on a le résultat suivant (voir par exemple [AG71] ou [All81]).

**Proposition 7.3.2.** *Soit  $\mathbb{C}/L_\tau$  une surface de Riemann de genre 1 munie d'une action de  $\Sigma$ . La surface de Klein  $(\mathbb{C}/L_\tau)/\Sigma$  est une  $M$ -surface de Klein si et seulement si  $\tau = ui$  avec  $u \geq 1$ .*

*Dans ce cas, l'involution antianalytique  $\sigma$  se relève en l'automorphisme antianalytique*

$$\begin{array}{ccc} \sigma_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} & \text{ou} & -\sigma_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \bar{z} & \text{ou} & \mathbb{C} \longmapsto \bar{z} \end{array}$$

*Remarque 7.3.1.* Dans le cas où  $\tau = i$  les deux automorphismes de la proposition 7.3.2 donnent deux  $M$ -surfaces de Klein isomorphes. Dans les autres cas, les  $M$ -surfaces de Klein sont dans des classes d'isomorphismes distinctes.

Ceci permet une paramétrisation de l'espace de modules des  $M$ -surfaces de Klein de genre 1.

**Corollaire 7.3.3.** *Toute  $M$ -surface de Klein de genre 1 est isomorphe à une unique  $M$ -surface de Klein de double  $\mathbb{C}/L_{it}$  avec  $t \in \mathbb{R}_+^*$  munie de l'action de  $\Sigma$  induite par la conjugaison complexe sur  $\mathbb{C}$ .*

*Démonstration.* D'après la proposition 7.3.2 et le théorème 7.3.1, une  $M$ -surface de Klein est isomorphe à une surface de Klein dont le double est de la forme  $\mathbb{C}/L_\tau$  avec  $\tau = ui$  et  $u \geq 1$ . Supposons que l'involution  $\sigma$  induite ne provient pas de la conjugaison complexe  $\sigma_{\mathbb{C}}$ . L'isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} h_\tau : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \frac{-1}{\tau} z = \frac{i}{u} z \end{array}$$

est un isomorphisme entre les réseaux  $L_\tau$  et  $L_{\frac{-1}{\tau}}$  qui vérifie  $h_\tau \circ (-\sigma_{\mathbb{C}}) \circ h_\tau^{-1} = \sigma_{\mathbb{C}}$ . Par passage au quotient, il donne un isomorphisme entre les tores complexes  $\mathbb{C}/L_\tau$  et  $\mathbb{C}/L_{\frac{-1}{\tau}}$  puis un isomorphisme entre les  $M$ -surfaces de Klein  $(\mathbb{C}/L_\tau)/\Sigma$  et  $(\mathbb{C}/L_{\frac{-1}{\tau}})/\Sigma$  où l'action de  $\Sigma$  sur  $\mathbb{C}/L_\tau$  est celle induite par  $-\sigma_{\mathbb{C}}$  et l'action de  $\Sigma$  sur  $\mathbb{C}/L_{\frac{-1}{\tau}}$  est induite par  $\sigma_{\mathbb{C}}$ .  $\square$

Soit une  $M$ -surface de Klein  $C_t = (\mathbb{C}/L_{it})/\Sigma$  avec  $t \in \mathbb{R}_+^*$  et l'action de  $\Sigma$  induite par la conjugaison complexe. Un domaine fondamentale pour l'action de  $L_{it}$  sur  $\mathbb{C}$  est le rectangle  $R_t = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq t\}$ . L'image réciproque sur  $R_t$  du bord de  $C_t$  est l'ensemble des points  $z = x + iy \in R(t)$  tels que  $\bar{z} \equiv z \pmod{L_{it}}$ . On doit donc avoir  $x = x \pmod{1}$  et  $y = -1 \pmod{t}$ . On en déduit que  $z = x$  ou  $z = x + i\frac{t}{2}$ . Ainsi, le rectangle  $A_t = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{t}{2}\}$  est un domaine fondamental pour l'action successive de  $L_t$  et  $\Sigma$  sur  $\mathbb{C}$ .

### Automorphismes

L'ensemble des classes d'isomorphismes des  $M$ -surfaces de Klein de genre 1 étant paramétré par un réel  $t \in \mathbb{R}_+^*$ , nous nous ramenons à l'étude des classes d'équivalence de triplets  $(C_t, f, B) \in \mathcal{M}_{1,M}^{\text{rét},1}$ , où  $C_t = (\mathbb{C}/L_{it})/\Sigma$  avec  $t \in \mathbb{R}_+^*$  et l'action de  $\Sigma$  induite par la conjugaison complexe. Deux tels triplets  $(C_t, f, B)$  et  $(C_{t'}, f', B')$  ne pourront donc être équivalents que si  $t = t'$  et dans ce cas, l'équivalence est donnée par un automorphisme  $h : C_t \xrightarrow{\sim} C_t$ .

Soit une  $M$ -surface de Klein  $C_t$  avec  $t \in \mathbb{R}_+^*$  et l'action de  $\Sigma$  induite par la conjugaison complexe. Celle-ci étant orientable, on peut distinguer le sous-groupe  $Aut^+(C_t) = Aut_t^+$  des automorphismes  $h \in Aut(C_t) = Aut_t$  de  $C_t$  qui préservent l'orientation.

Les automorphismes de  $C_t$  proviennent d'automorphismes de  $\mathbb{C}/L_{it}$  équivariants pour l'action de  $\Sigma$ , donc des automorphismes  $h$  de  $\mathbb{C}$  stables pour l'action de  $L_{it}$  et tels que  $\overline{h(\bar{z})} \equiv z \pmod{L_{it}}$ .

**Exemple 7.3.1.** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la translation

$$\begin{aligned} T_x : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z + x \end{aligned}$$

induit un automorphisme  $\theta_x$  de  $C_t$  qui préserve l'orientation. Deux telles translations  $T_x$  et  $T_{x'}$  induisent alors le même automorphisme si et seulement si  $x \equiv x' \pmod{1}$ .

**Exemple 7.3.2.** La symétrie par rapport à la droite  $\{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y = \frac{t}{4}\}$ ,

$$\begin{aligned} S : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto i\frac{t}{2} - z \end{aligned}$$

induit un automorphisme  $\varsigma$  de  $C_t$  d'ordre 2 qui inverse l'orientation et échange les deux composantes connexes de son bord.

**Exemple 7.3.3.** La dilatation

$$\begin{aligned} D : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto -z \end{aligned}$$

et la symétrie par rapport à la droite  $\{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x = \frac{1}{2}\}$  induisent le même automorphisme  $\lambda$  de  $C_t$  d'ordre 2 qui inverse l'orientation.

**Exemple 7.3.4.** Le composé  $R = S \circ T = T \circ S$  et la symétrie de centre  $\frac{2+it}{4}$  induisent un automorphisme  $\rho$  de  $C_t$  d'ordre 2 qui préserve l'orientation et échange les deux composantes connexes de son bord.

Les automorphismes de  $\mathbb{C}$  sont engendrés par les translations  $T_v : z \longmapsto z + v$  avec  $v \in \mathbb{C}$  et les dilatations  $D_a : a \longmapsto az$  avec  $a \in \mathbb{C}^*$ .

Une translation  $T_v$  induit un automorphisme  $\theta_v$  de  $C_t$  si et seulement si  $T_v(\bar{z}) \equiv \overline{T_v(z)} \pmod{L_{it}}$ , donc si et seulement si  $v = x + in\frac{t}{2}$  avec  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Deux telles translations  $T_v$  et  $T_{v'}$  pour  $v = x + in\frac{t}{2}$  et  $v' = x' + in'\frac{t}{2}$  respectivement induisent alors le même automorphisme si et seulement si  $n \equiv n' \pmod{2}$ .

Pour qu'une dilatation  $D_a$  induise un automorphisme  $\lambda_a$  de  $C_t$ , il faut que l'image d'un domaine fondamental pour l'action de  $L_{it}$  sur  $\mathbb{C}$  reste un domaine fondamental. En particulier,  $|a| = 1$ . De plus, on doit avoir  $D_a(\bar{z}) \equiv \overline{D_a(z)} \pmod{L_{it}}$ . Donc  $a \in \mathbb{R}$  et alors  $a \in \{-1, 1\}$ .

On a ainsi obtenu le résultat suivant.

**Proposition 7.3.4.** *Un élément  $h \in Aut^+(C_t)$  induit un homéomorphisme sur chacune des composantes connexes du bord de  $C_t$  si et seulement si il est de la forme  $\theta_x$  avec  $x \in \mathbb{R}$ , donc provient d'une translation  $T_x : z \mapsto z + x$ . Plus précisément  $Aut^+(C_t)$  est le produit semi-direct du groupe  $\Theta = \{\theta_x \mid 0 \leq x < 1\}$  et du groupe  $\{1, \rho\}$ . C'est un sous-groupe d'ordre 2 du groupe  $Aut(C_t)$  des automorphismes de  $C_t$ .*

*Démonstration.* Regardons les propriétés des automorphismes  $\theta_v$  et  $\lambda_a$  (voir ci-dessus) qui sont les générateurs de  $\text{Aut}(C_t)$ .

Les automorphismes  $\theta_x$  pour  $x \in \mathbb{R}$  préservent l'orientation et induisent un homéomorphisme sur chacune des composantes connexes du bord de  $C_t$ . Les automorphismes  $\theta_{x+i\frac{t}{2}}$  échangent les composantes connexes du bord de  $C_t$  et inversent l'orientation. De plus, pour  $(x, x') \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$\theta_{x+i\frac{t}{2}}\theta_{x'+i\frac{t}{2}} = \theta_{x+x'} \quad \text{et} \quad \theta_{x+i\frac{t}{2}}\theta_{x'} = \theta_{x+x'+i\frac{t}{2}}.$$

On en déduit que l'ensemble des automorphismes de la forme  $\theta_v$  est le produit semi-direct de  $\Theta$  et  $\{1, \theta_{i\frac{t}{2}}\}$ .

L'automorphisme  $\lambda_1$  est l'identité, l'automorphisme  $\lambda = \lambda_{-1}$  est d'ordre 2 et inverse l'orientation et induit un homéomorphisme sur chacune des composantes connexes du bord de  $C_t$ . Le composé  $\rho = \lambda\theta_{i\frac{t}{2}}$  est un automorphisme d'ordre 2 qui préserve l'orientation et échange les composantes connexes du bord.

Ainsi  $\text{Aut}^+(C_t)$  est le produit semi-direct du groupe  $\Theta = \{\theta_x \mid 0 \leq x < 1\}$  et du groupe  $\{1, \rho\}$  et seuls les éléments de  $\Theta$  induisent un homéomorphisme sur chacune des composantes connexes du bord de  $C_t$ . Comme  $\text{Aut}(C_t)$  admet des éléments qui inversent l'orientation et que la composé de deux automorphismes inversant l'orientation est dans  $\text{Aut}^+(C_t)$ , alors ce dernier un sous-groupe d'ordre 2 de  $\text{Aut}(C_t)$ .  $\square$

**Corollaire 7.3.5.** *Tout triplet  $(C_t, f, B)$  est équivalent à un triplet  $(C_t, f', B')$  et à un triplet  $(C_t, f'', B')$  tel que  $\partial C_t = B \sqcup B'$  avec  $f'$  préserve l'orientation et  $f''$  inverse l'orientation le long du bord  $B'$ .*

*Démonstration.* Il suffit de composer  $f$  avec  $\rho$  ou  $\theta_{i\frac{t}{2}}$  pour avoir chacun des deux cas.  $\square$

**Corollaire 7.3.6.** *Deux triplets  $(C_t, f, B)$  et  $(C_t, f', B)$  où  $f$  et  $f'$  préservent l'orientation le long de  $B$  son équivalents si et seulement si il existe  $\theta_x \in \Theta$  tel que  $f = f' \circ \theta_x$ .*

*Démonstration.* Si  $f = f' \circ \theta_x$ , les deux triplets  $(C_t, f, B)$  et  $(C_t, f', B)$  sont équivalents.

Réciproquement, si les deux triplets  $(C_t, f, B)$  et  $(C_t, f', B)$  sont équivalents, il existe un automorphisme  $h$  de  $C_t$  tel que  $f = f' \circ h$  et  $h$  induit un homéomorphisme sur  $B$ . Comme  $f$  et  $f'$  préservent l'orientation le long de  $B$ , l'automorphisme  $h$  doit préserver l'orientation. Donc selon la proposition 7.3.4, l'automorphisme  $h$  est de la forme  $\theta_x$  ou  $\theta_x \circ \rho$  avec  $\theta_x \in \Theta$ . Les éléments de  $\Theta$  induisent un homéomorphisme de  $B$  et  $\rho$  inverse les composantes connexes du bord de  $C_t$ , ainsi on doit avoir  $h = \theta_x \in \Theta$ .  $\square$

## Triplets

*Il reste à comprendre comment sont obtenus les morphismes strictes réel-étales de  $C_t$ , pour  $t \in \mathbb{R}_+^*$ , sur  $\mathbb{P}^1$ , donc les fonctions rationnelles réel-étales de degré 2.*

*Pour cela, nous allons commencer par de brefs rappels sur les fonctions  $\mathfrak{P}$  de Weierstraß.*

*Pour plus de détails, le lecteur pourra se reporter aux ouvrages sur les fonctions ou les courbes elliptiques comme [Lan73, DV73].*

Dans toute cette partie,  $L_{it} = \mathbb{Z} \oplus it\mathbb{Z}$  est le réseau de  $\mathbb{C}$  de base  $(1, it)$  pour  $t \in \mathbb{R}_+^*$  et  $C_t = (\mathbb{C}/L_{it})/\Sigma$  la  $M$ -surface de Klein obtenue à partir de l'action de  $\Sigma$  sur la surface de Riemann  $\mathbb{C}/L_{it}$  induite par la conjugaison complexe sur  $\mathbb{C}$ . Une fonction rationnelle sur  $C_t$  provient alors d'une fonction méromorphe sur  $\mathbb{C}$ , doublement périodique de périodes  $(1, it)$  et qui est équivariante pour la conjugaison complexe.

**Définition 7.3.1 (Fonction elliptique).** Une fonction méromorphe sur  $\mathbb{C}$  doublement périodique de période  $(1, \tau)$ , pour  $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  est appelée *fonction elliptique* pour  $L_\tau$ . Lorsque  $\tau = it$  où  $t \in \mathbb{R}_+^*$ , le réseau  $L_{it}$  est stable par conjugaison complexe. Une fonction elliptique pour  $L_{it}$  est dite elliptique réelle si elle est équivariante pour la conjugaison complexe.

*Remarque 7.3.2.* Une fonction elliptique pour  $L_\tau$ ,  $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  induit une fonction rationnelle sur  $\mathbb{C}/\tau$  et une fonction elliptique réelle pour  $L_{it}$ ,  $t \in \mathbb{R}_+^*$ , induit une fonction rationnelle sur  $C_t$ .

**Définition 7.3.2 (Ordre).** L'ordre d'une fonction elliptique  $f$  est le degré de la fonction rationnelle induite sur  $\mathbb{C}/\tau$ .

*Remarque 7.3.3.* L'ordre d'une fonction elliptique est au moins deux.

*Remarque 7.3.4.* Sachant qu'une fonction holomorphe bornée sur  $\mathbb{C}$  est constante, le quotient de deux fonctions elliptiques pour le même réseau  $L_\tau$  qui ont les mêmes pôles et mêmes zéros comptés avec multiplicité est constant.

**Définition 7.3.3 (Fonction  $\mathfrak{P}$  de Weierstraß).**

$$\mathfrak{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L_\tau} \left( \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

**Proposition 7.3.7.** La fonction  $\mathfrak{P}$  de Weierstraß a les propriétés suivantes.

1. La fonction  $\mathfrak{P}$  est une fonction elliptique paire d'ordre 2 pour  $L_\tau$ .
2. Ses pôles sont des pôles d'ordre 2 situés aux points du réseau  $L_\tau$ .
3. Lorsque  $\tau = it$ ,  $t \in \mathbb{R}_+^*$ , la fonction elliptique  $\mathfrak{P}$  est une fonction elliptique réelle qui vérifie en particulier  $\mathfrak{P}(i\frac{t}{2}) \in \mathbb{R}$ .
4. Sa dérivée  $\mathfrak{P}'$  est une fonction elliptique impaire d'ordre 3 pour  $L_\tau$  qui est réelle lorsque  $\tau = it$ ,  $t \in \mathbb{R}_+^*$  et dont les pôles sont des pôles d'ordre 3 situés aux points du réseau  $L_\tau$ .

Les fonctions  $\mathfrak{P}$  et  $\mathfrak{P}'$  de Weierstraß ne fournissent pas seulement un exemple de fonction elliptique réelle, mais elles vérifient de plus le théorème :

**Théorème 7.3.8.** Le corps des fonctions elliptiques pour  $L_\tau$ ,  $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  est engendrée par  $\mathfrak{P}$  et  $\mathfrak{P}'$  sur  $\mathbb{C}$ . Le corps des fonctions elliptiques réelles pour  $L_{it}$  avec  $t \in \mathbb{R}^*$  est engendrée par  $\mathfrak{P}$  et  $\mathfrak{P}'$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Théorème 7.3.9.** Soit  $t \in \mathbb{R}_+^*$ . On note  $B_0$  la composante connexe du bord de  $C_t$  image de  $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ . Tout triplet  $(C_t, f, B)$  pour  $t \in \mathbb{R}_+^*$  admet un unique équivalent  $(C_t, f_0, B_0)$ , où  $f_0$  préserve l'orientation le long du bord  $B_0$  et est induite par une fonction elliptique

$$F_0(z) = \lambda \frac{\mathfrak{P}(z - i\frac{t}{4}) - \mathfrak{P}(i\frac{t}{4} + \gamma_1)}{\mathfrak{P}(z - i\frac{t}{4}) - \mathfrak{P}(i\frac{t}{4} + \gamma_2)}$$

telle que  $\lambda = F_0(i\frac{t}{4}) \in \mathbb{C}^*$ ,  $\gamma_1 \in ]0, \frac{1}{2}[$  et  $\gamma_2 \in ]0, \frac{1}{2}[\setminus \{\gamma_1\}$  et  $B_0$

*Démonstration.* D'après le corollaire 7.3.5, on peut trouver un triplet équivalent de la forme  $(C_t, f_0, B_0)$ , où  $f_0$  préserve l'orientation le long du bord  $B_0$ . On note  $F_0 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction elliptique réelle d'ordre 2 donnant  $f_0$  par passage au quotient.

Comme  $f_0$  est de degré 1 sur les bords de  $C_t$ , les pôles de  $F_0$  sont d'ordre 1 en des points  $z_1 + L_\tau$  et  $z_2 + L_\tau$ . De plus, la fonction  $F_0$  étant réelle et  $f_0$  réel-étale, on peut choisir  $z_1 \in \mathbb{R}$  et  $z_2$  avec  $\text{Im } z_2 = i\frac{t}{2}$ , tous deux étant définis modulo  $L_{it}$ . Si  $z_0$  et  $\beta$  vérifient  $2z_0 \equiv z_1 + z_2 \pmod{L_\tau}$  et  $2\beta \equiv z_2 - z_1 \pmod{L_\tau}$ , alors  $z_1 \equiv z_0 - \beta \pmod{L_\tau}$  et  $z_2 \equiv z_0 + \beta \pmod{L_\tau}$ . En particulier, on peut choisir  $\text{Im } z_0 = i\frac{t}{4}$  et le corollaire 7.3.6 nous permet de prendre  $z_0 = i\frac{t}{4}$ .

D'autre part, les zéros de  $F_0$  sont de la forme  $z_0 - \alpha + L_\tau$  et  $z_0 + \alpha + L_\tau$  pour un certain  $\alpha \neq \beta \in \mathbb{C}$  (voir par exemple [DV73, Théorème 1.5.]). En prenant  $z_1 \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ , on obtient

$$\alpha = i\frac{t}{4} + \gamma_1 \equiv i\frac{t}{4} - z_1 \pmod{\frac{1}{2}\mathbb{Z} \oplus i\frac{t}{2}\mathbb{Z}}$$

avec  $\gamma_1 \in ]0, \frac{1}{2}[$ . Comme les zéros de  $F_0$  doivent être réels d'ordre 1, on en déduit que l'on doit avoir alors  $\beta = i\frac{t}{4} + \gamma_2$  avec  $\gamma_2 \in ]0, \frac{1}{2}[\setminus \{\gamma_1\}$ .

La fonction  $\frac{\mathfrak{P}(z - i\frac{t}{4}) - \mathfrak{P}(i\frac{t}{4} + \gamma_1)}{\mathfrak{P}(z - i\frac{t}{4}) - \mathfrak{P}(i\frac{t}{4} + \gamma_2)}$  a les mêmes zéros et pôles de  $F_0$ , donc il existe  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  tel que

$$f(z) = \lambda \frac{\mathfrak{P}(z - i\frac{t}{4}) - \mathfrak{P}(i\frac{t}{4} + \gamma_1)}{\mathfrak{P}(z - i\frac{t}{4}) - \mathfrak{P}(i\frac{t}{4} + \gamma_2)}.$$

On obtient bien  $F_0$  de la forme souhaitée et  $\lambda = F_0(i\frac{t}{4})$ . L'unicité est alors une conséquence directe du corollaire 7.3.6.  $\square$



**Corollaire 7.3.10.** *L'espace de modules  $\mathcal{M}_{1,M}^{\text{rét},1}$  de triplets de genre 1, est paramétré par un système de coordonnées*

$$(t, \gamma_1, \gamma_2, \mu) \in \mathbb{R}_+^* \times \left( ]0, \frac{1}{2}[^2 \setminus \{(x, x) \mid x \in ]0, \frac{1}{2}[ \} \right) \times \mathbb{R}^*.$$

*Démonstration.* Soit  $(C, f, B)$  un triplet de genre 1. D'après le corollaire 7.3.3 et le théorème 7.3.9, il existe un unique triplet  $(C_t, f_0, B_0)$  équivalent à  $(C, f, B)$  où  $t \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $B_0$  est l'image de  $\mathbb{R}$  dans la  $M$ -surface de Klein  $C_t$  et  $f_0$  préservant l'orientation le long de  $B_0$  est induite par une fonction elliptique

$$F_0(z) = \lambda \frac{\mathfrak{P}(z - i\frac{t}{4}) - \mathfrak{P}(i\frac{t}{4} + \gamma_1)}{\mathfrak{P}(z - i\frac{t}{4}) - \mathfrak{P}(i\frac{t}{4} + \gamma_2)}$$

pour  $\lambda = F_0(i\frac{t}{4}) \in \mathbb{C}^*$ ,  $\gamma_1 \in ]0, \frac{1}{2}[$  et  $\gamma_2 \in ]0, \frac{1}{2}[ \setminus \{\gamma_1\}$ . D'où les paramètres

$$(t, \gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{R}_+^* \times \left( ]0, \frac{1}{2}[^2 \setminus \{(x, x) \mid x \in ]0, \frac{1}{2}[ \} \right).$$

Le dernier paramètre  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  est donné par son module  $\mu$  et son argument complexe  $\varphi$ . Ce dernier est déterminé modulo  $\pi$  par le fait que  $F_0$  est réelle. En effet

$$\bar{\lambda} = \overline{F_0(i\frac{t}{4})} = F_0(-i\frac{t}{4}) = \lambda \frac{\mathfrak{P}(i\frac{t}{4} + \gamma_1)}{\mathfrak{P}(i\frac{t}{4} + \gamma_2)},$$

donc  $\varphi$  dépend uniquement et continûment de  $t$ ,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ . De plus, si  $F_0$  préserve l'orientation sur  $\mathbb{R}$ , alors  $-F_0$  l'inverse, donc  $\theta$  est fixé modulo  $2\pi$ . Le réel  $\mu$  peut alors prendre toute valeur strictement positive.  $\square$

### 7.3.2 Fonctions rationnelles de degré 3

En identifiant  $\mathbb{P}^1$  avec  $\overline{\mathbb{H}} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y = \text{Im } z \geq 0\} \cup \{\infty\}$ , une fonction rationnelle de degré 3 est donnée par

$$\begin{aligned} f : \overline{\mathbb{H}} &\longrightarrow \overline{\mathbb{H}} \\ z &\longmapsto \frac{P(z)}{Q(z)} \end{aligned} \tag{7.2}$$

où

$$\begin{aligned} P(X) &= a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}[X] \\ Q(X) &= b_3 X^3 + b_2 X^2 + b_1 X + b_0 \in \mathbb{R}[X] \end{aligned}$$

sont premiers entre eux et vérifient  $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ . Le groupe des automorphismes de  $\overline{\mathbb{H}}$  s'identifiant de façon naturelle avec  $\text{PGL}_2(\mathbb{R})$ , on a de plus une action à droite de  $\text{PGL}_2(\mathbb{R})$  sur l'ensemble  $\mathcal{F}_3$  des fonctions rationnelles de degré 3. Elle est donnée par  $f \cdot \alpha = f \circ \alpha$  pour tout  $f \in \mathcal{F}_3$  et  $\alpha \in \text{PGL}_2(\mathbb{R})$  vu comme automorphisme de  $\overline{\mathbb{H}}$ .

Le but de cette section est d'obtenir le théorème suivant.

**Théorème 7.3.11.** *Chaque classe d'équivalence de  $\mathcal{F}_{3,M}^{\text{rét}}$  pour l'action à droite de  $\text{PGL}_2(\mathbb{R})$  est représentée par une fonction rationnelle de la forme*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ z &\longmapsto \lambda \frac{z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{z^2 + 1} \end{aligned}$$

avec  $(\lambda, a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^3$  et l'ensemble des triplets  $(a_0, a_1, a_2)$  parcourt le cylindre de  $\mathbb{R}^3$  de base dans le plan  $a_2 = 0$  l'ensemble

$$\{(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < a_0 < 9 \text{ et } 27a_0^2 < a_1(a_1 - 9)^2\} \setminus \{(1, 0)\}$$

et d'axe  $(1, 0, 1)$ .

Pour cela, après avoir choisi un représentant de chaque classe pour l'action à droite de  $\text{PGL}_2(\mathbb{R})$  sur  $\mathcal{F}_{3,M}^{\text{rét}}$ , nous allons utiliser une action à gauche de  $\text{PGL}_2(\mathbb{R})$  sur  $\mathcal{F}_{3,M}^{\text{rét}}$  et regarder les conditions de non ramification au-dessus de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  pour les morphismes représentant une classe d'équivalence pour cette action.

**Classes pour l'action de  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$  à droite :** Soit  $f = \frac{P}{Q} \in \mathcal{F}_{3,M}^{\text{ét}}$  donnée par (7.2). Nous nous intéressons aux fonctions rationnelles à action de  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$  près et qui sont de degré 1 sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ . On peut donc supposer que  $f$  préserve l'orientation le long du bord et  $Q(X) = X^2 + 1$ . Alors  $\deg P = 3$  et  $P(i) \neq 0$ . Ainsi, pour une fonction rationnelle  $f$  réel-étale dont l'arbre est le  $M$ -arbre en genre 1, on obtient un unique représentant de la classe de  $f$  de la forme

$$f : z \mapsto \lambda \frac{z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{z^2 + 1}, \text{ avec } \begin{cases} \lambda \in \mathbb{R}_+^* \\ (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3, (1 - a_1)^2 + (a_2 - a_0)^2 \neq 0. \end{cases} \quad (7.3)$$

**Action à gauche :** Le groupe des automorphismes de  $\mathbb{P}^1$ , canoniquement identifié à  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ , agit aussi sur les fonctions rationnelles de  $\mathbb{P}^1$  par composition à gauche. Cette action induit une action du stabilisateur de l'infini

$$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})_\infty \simeq \left\{ \begin{array}{l} h : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} \\ z \mapsto \alpha(z + \beta) \end{array} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \right\}$$

sur l'ensemble des représentants des classes de fonctions rationnelles réel-étales de degré 3 sur  $\mathbb{P}^1$  choisis précédemment. Comme c'est une action à stabilisateur fini, elle diminue de 2 la dimension de l'espace des paramètres, ce qui permet une représentation dans le plan (figure 7.3).

Soit  $f \in \mathcal{F}_{3,M}^{\text{ét}}$  donnée par l'équation (7.3). Si  $h : z \mapsto \alpha(z + \beta)$  est un élément de  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})_\infty$ , pour tout  $z \in \mathbb{H}$ , on a

$$h \cdot f(z) = \alpha \left( \lambda \frac{z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{z^2 + 1} + \beta \right) = \alpha \lambda \frac{z^3 + (a_2 + \frac{\beta}{\lambda})z^2 + a_1 z + a_0 + \frac{\beta}{\lambda}}{z^2 + 1}.$$

Comme  $\lambda \neq 0$ , en prenant  $\alpha = \frac{1}{\lambda}$  et  $\beta = -a_2 \lambda$ , on obtient un unique représentant de la classe de  $[f] \in \mathcal{F}_{3,M}^{\text{ét}}/\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$  pour l'action à gauche de  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$  de la forme

$$f_{p,q} : z \mapsto \frac{z^3 + pz + q}{z^2 + 1}, \text{ avec } (p, q) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}. \quad (7.4)$$

On note

$$D = \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\} \mid f_{p,q} \text{ réel-étale}\}.$$

**Conditions de non ramification :** Nous allons montrer que

$$D = (]0, 9[ \times \mathbb{R}) \setminus \left( \{(1, 0)\} \cup \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 \mid 27q^2 \geq p(p - 9)^2\} \right).$$

La fonction rationnelle  $f_{p,q}$  n'étant pas ramifiée en l'infini, elle sera réel-étale si et seulement si sa dérivée ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ . En d'autres termes, le polynôme

$$F_{p,q}(X) = X^4 + (3 - p)X^2 - 2qX + p \in \mathbb{R}[X]$$

ne doit admettre aucune racine réelle. Un rapide calcul montre que si  $F_{p,q}$  admet deux racines doubles complexes conjuguées, alors on doit avoir  $p = 1$  et  $q = 0$ . Donc les racines de  $F_{p,q}$  doivent aussi être distinctes. Or ses racines sont distinctes et de même nature (toutes réelles ou toutes non réelles) si et seulement si son discriminant

$$\Delta F_{p,q} = 16((p - 1)^2 + q^2)(p(p - 9)^2 - 27q^2).$$

est strictement positif. D'où la condition suivante sur  $p$  et  $q$  :

$$p(p - 9)^2 - 27q^2 > 0. \quad (7.5)$$

En particulier, on doit avoir  $p > 0$ .

De plus,  $D$  est un ouvert connexe puisque, d'après le théorème 7.1.1,  $\mathcal{F}_{3,M}^{\text{ét}}$  est un ouvert connexe. Il est donc inclus dans l'une des composantes connexes de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}$  privé de la courbe  $\Delta F_{p,q} = 0$ . Pour  $(p, q) \in D$ , le polynôme  $F_{p,q}$  admet pour racines deux paires de nombres complexes

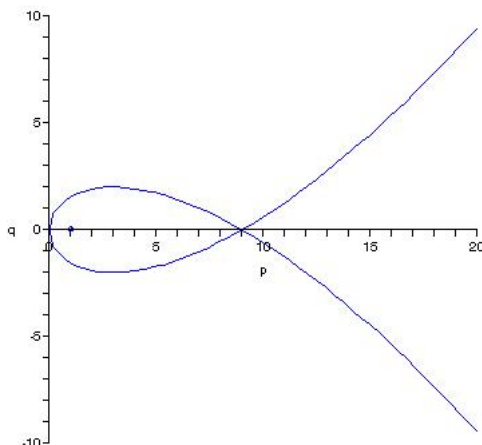


FIG. 7.3 –  $\Delta F_{p,q} = 0$ .

conjugués. Comme les racines d'un polynôme dépendent continûment de ses coefficients, les racines d'un polynôme  $F_{p,q}$  tel que  $(p, q) \in \partial D$  sont deux à deux conjuguées. Comme  $(p, q) \notin D$ , une au moins de ces racines est réelle, donc double. Ainsi  $\Delta F_{p,q} = 0$ . On en déduit que  $D$  est exactement une des composantes connexes de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}$  privé de la courbe  $\Delta F_{p,q} = 0$ .

La courbe  $\Delta F_{p,q} = 0$  sépare l'espace des paramètres  $(p, q)$  en trois composantes connexes (voir figure 7.3) :

- La première, non bornée, contenant le demi-plan  $p < 0$  correspond au domaine  $\Delta F_{p,q} < 0$ . Son intersection avec  $D$  est vide.
- La deuxième composante connexe est non bornée. Elle ne contient que des éléments  $(p, q)$  avec  $p > 9$ .
- La troisième est la seule composante connexe bornée. Elle ne contient que des éléments  $(p, q)$  avec  $0 < p < 10$ , donc le point  $(p, q) = (1, 0)$ .

Les deux dernières composantes connexes étant dans le domaine  $\Delta F_{p,q} > 0$  sont les deux seules candidates possibles pour  $D$ . Or  $F_{3,0}(X) = X^4 + 3$  n'a que des racines complexes donc  $(p, q) = (3, 0) \in D$ .

Ceci termine la démonstration du théorème 7.3.11.

### 7.3.3 Triplets de genre un et morphismes de degré trois

Les résultats des sections précédentes donnent un isomorphisme non trivial entre  $M$ -surfaces de genre 1 et morphisme de degré 3 dont l'arbre est un  $M$ -arbre.

**Proposition 7.3.12.** *La  $M$ -surface de genre 1 associée à une fonction rationnelle réel-étale  $f_{p,q}$  avec  $(p, q) \in D$  n'est pas un anneau. En d'autres termes, la composante connexe non-réelle de  $f^{-1}(\mathbb{R})$  n'est pas un vrai cercle.*

On en déduit immédiatement le corollaire suivant :

**Corollaire 7.3.13.** *La  $M$ -surface de genre 1 associée à une fonction rationnelle réel-étale*

$$f : z \mapsto \lambda \frac{z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{z^2 + 1}$$

avec  $(\lambda, a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^3$  donnés par le théorème 7.3.11, n'est pas un anneau.

*Démonstration de la proposition 7.3.12.* Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} f_{p,q}(x + iy) &= \frac{x^3 - 3xy^2 + px + q + i(3x^2y + py - y^3)}{x^2 - y^2 + 1 + 2ixy} \\ &= \frac{x^5 + 2x^3y^2 + (p+1)x^3 + qx^2 + xy^4 + (p-3)xy^2 + px - qy^2 + q}{x^4 + 2x^2y^2 + 2x^2 + y^4 - 2y^2 + 1} \\ &\quad + iy \frac{x^4 + 2y^2x^2 + y^4 + (3-p)x^2 - (p+1)y^2 - 2qx + p}{x^4 + 2x^2y^2 + 2x^2 + y^4 - 2y^2 + 1} \end{aligned}$$

On en déduit que  $f_{p,q}(x + iy) \in \mathbb{R}$  si  $x^4 + 2y^2x^2 + y^4 + (3-p)x^2 - (p+1)y^2 - 2qx + p = 0$  ou si  $y = 0$ . Comme nous nous intéressons aux composantes connexes non réelles de  $f_{p,q}^{-1}(\mathbb{R})$ , on obtient la condition

$$x^4 + 2y^2x^2 + y^4 + (3-p)x^2 - (p+1)y^2 - 2qx + p = 0 \quad (7.6)$$

sur les points  $x + iy$  non réels de  $f_{p,q}^{-1}(\mathbb{R})$ . Pour montrer que la  $M$ -surface de genre 1 associée à  $f_{p,q}$  n'est pas un anneau, il suffit de montrer que l'équation (7.6) ne peut se mettre sous la forme

$$((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2)((x - x_0)^2 + (y + y_0)^2 - R^2) = 0 \quad (7.7)$$

pour des réels  $x_0, y_0$  et  $R$ . En comparant les équations (7.6) et (7.7), on obtient les conditions suivantes

$$\begin{array}{lll} x_0 = 0 & q = 0 & B^2 = 1 \\ y_0^2 = 1 & p = (R^2 - B^2)^2 & R^2(R^2 - 4) = 0 \end{array}$$

Or ces conditions sont réalisées simultanément si et seulement si  $q = 0$  et  $p = 1$ , ce qui est exclu.  $\square$



# Annexe

## Graphes

Nous faisons ici quelques brefs rappels sur les graphes. Pour plus de détails sur la théorie des graphes, le lecteur pourra se référer par exemple au livre de R. Diestel [Die97] ou de B. Bollobás [Bol98].

### A.1 Les graphes, leurs arêtes, leurs sommets

**Définition A.1.1 (Graphe simple).** Un *graphe simple* est un couple disjoint  $G = (V, E)$  d'ensembles tel que  $E$  soit un ensemble de paires ou de singletons d'éléments de  $V$ . Les éléments de  $V$  sont les *sommets du graphe* et les éléments de  $E$  les *arêtes du graphe*.

Si  $G$  est un graphe simple, on note  $V = V(G)$  l'ensemble des sommets et  $E = E(G)$  l'ensemble des arêtes de  $G$ .

Une arête  $e = \{x, y\}$  *relie* les sommets  $x$  et  $y$  du graphe simple  $G$  ou que  $e$  est *incidente* aux sommets  $x$  et  $y$ . Les sommets  $x$  et  $y$  sont alors les *extrémités* de  $e$  et les sommets  $x$  et  $y$  sont dit *adjacents*.

*Remarque A.1.1.* Les extrémités d'une arête ne sont pas forcément distinctes. Dans ce cas, l'arête forme une *boucle*.

La façon la plus simple de se représenter un graphe est de dessiner un ensemble de points représentant les sommets du graphe et de relier entre eux par un trait les extrémités d'une même arête. Bien entendu, la représentation d'une arête ne rencontre pas d'autres sommets que son ou ses extrémités. La façon dont sont tracés points et lignes n'est pas importante, seule compte quel couple de sommets forme une arête.

**Exemple A.1.1.** La figure A.1(a) représente un graphe simple  $G$  dont l'ensemble des sommets est  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  et d'ensemble des arêtes est  $\{\{2\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}\}$ . Le sommet 4 est adjacent au sommet 6, le sommet 3 au sommet 5 et le sommet 2 est adjacent à lui même.

**Définition A.1.2 (Graphe fermé).** Un *graphe fermé*  $G$  est un graphe simple dont les arêtes sont munies d'une *multiplicité*. Cette dernière est un entier strictement positif. En d'autres termes,  $G = (V, E)$  est un couple disjoint d'ensembles tel que les éléments de  $E$  soient de la forme  $m\{x, y\}$  avec  $x$  et  $y$  des éléments de  $V$  et  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . On demande de plus qu'une paire  $\{x, y\}$  n'apparaisse pas avec deux multiplicités différentes.

Comme dans le cas des graphes simples, les éléments de  $V$  sont les *sommets du graphe* et les éléments de  $E$  les *arêtes du graphe*. et si  $G$  est un graphe fermé, on note  $V = V(G)$  l'ensemble des sommets et  $E = E(G)$  l'ensemble des arêtes de  $G$ .

*Remarque A.1.2.* Par abus de notation, une arête,  $1\{x, y\}$ , de multiplicité 1 d'un graphe fermé  $G$  pourra être notée simplement  $\{x, y\}$ . Alors un graphe simple devient un graphe fermé dont toutes les arêtes sont de multiplicité 1.



FIG. A.1 – Exemple de graphes

Comme pour les graphes simples, on peut représenter un graphe fermé par un ensemble de points représentant les sommets du graphe et relier entre eux les extrémités d’une même arête par un nombre de traits donné par sa multiplicité.

**Exemple A.1.2.** La figure A.1(b) représente un graphe  $G$  d’ensemble de sommets  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  et d’ensemble d’arêtes  $\{1\{2\}, 1\{2, 6\}, 1\{3, 5\}, 2\{4, 6\}\}$ . L’arête  $\{4, 6\}$  a pour multiplicité 2, les autres arêtes ont pour multiplicité 1.

À partir de maintenant nous désignerons par ”graphe” les graphes fermés. Un graphe simple sera un graphe fermé dont toutes les arêtes sont de multiplicité 1.

**Définition A.1.3 (Ordre et taille d’un graphe).** L’ordre d’un graphe  $G$  est le nombre de ses sommets noté  $|G|$ . La taille d’un graphe  $G$  est le nombre de ses arêtes compté avec leur multiplicité. Un graphe d’ordre et de taille finie est dit *fini*.

**Exemple A.1.3.** Les graphes de la figure A.1 sont des graphes finis d’ordre 6. Le graphe de la figure A.1(a) est de taille 4 et celui de la figure A.1(b) de taille 5.

**Définition A.1.4 (Isomorphisme).** Deux graphes  $G = (V, E)$  et  $G' = (V', E')$  sont *isomorphes* s’il existe des bijections

$$\varphi : V \longrightarrow V' \quad \text{et} \quad \psi : E \longrightarrow E'$$

telles que pour tout  $m\{x, y\} \in E$ ,

$$\psi(m\{x, y\}) = m\{\varphi(x), \varphi(y)\}.$$

On note alors  $G \cong G'$  ou plus simplement  $G = G'$ . On identifiera généralement deux graphes isomorphes.

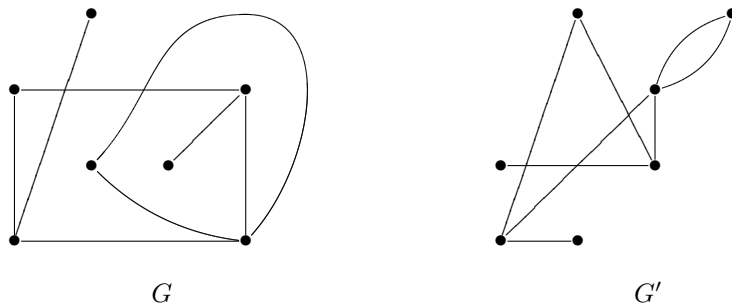
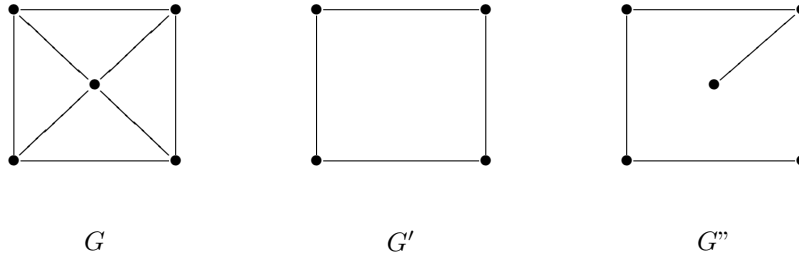


FIG. A.2 – Exemple de graphes isomorphes

**Définition A.1.5 (Sous-graphe).** Un graphe  $G' = (V', E')$  est un *sous-graphe* du graphe  $G = (V, E)$  si  $V' \subseteq V$  et pour tout élément  $m'\{x', y'\}$  de  $E'$ , il existe un entier  $m \geq m'$  tel que  $m\{x', y'\} \subseteq E$ . Si de plus  $E'$  contient toutes les arêtes de  $G$  dont les extrémités sont dans  $V'$  avec la même multiplicité dans  $E$  et  $E'$ , on dira que  $G'$  est le *sous-graphe de  $G$  induit par  $V'$* .

**Exemple A.1.4.**



Les graphes  $G'$  et  $G''$  sont des sous-graphes de  $G$ . Le graphe  $G'$  est le graphe induit par les quatre sommets extérieurs du carré. Le graphe  $G''$  n'est pas un graphe induit.

## A.2 Chemins, cycles et arbres

**Définition A.2.1 (Chaîne).** Une *chaîne*  $W$  dans un graphe  $G$  est une suite alternée finie de sommets et d'arêtes de  $G$ ,

$$x_0, e_1, x_1, e_2, \dots, e_l, x_l,$$

telle que  $e_i = \{x_{i-1}, x_i\}$  pour tout  $i = 1$  à  $l$ . Les sommets  $x_0$  et  $x_l$  sont les *extrémités* de la chaîne et on dira que celle-ci *relie* les sommets  $x_0$  et  $x_l$ . La *longueur* d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la composent.

**Définitions A.2.2 (Chaîne simple, chaîne élémentaire, cycle).** Une *chaîne simple* est une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête.

Une *chemin* est une chaîne munie d'un sens de parcours.

Un *cycle* est une chaîne de longueur au moins trois dont les extrémités sont identiques. Ainsi un cycle est une chaîne qui relie un sommet à lui-même. Un *cycle simple* est un cycle qui est une chaîne simple.

**Définition A.2.3 (Graphe connexe).** Un graphe est *connexe* si pour tous sommet  $x_1$  et  $x_2$  de  $G$  il existe une chaîne dans  $G$  qui relie  $x_1$  et  $x_2$ .

**Définition A.2.4 (Arbre).** Un *arbre* est un graphe connexe simple sans cycle simple et sans boucle.

## A.3 D'autres graphes

**Définition A.3.1 (Graphe pondéré).** Un *graphe pondéré* est un graphe aux arêtes duquel on associe autant de réels positifs que la valeur de la multiplicité de l'arête. Ces réels sont appelés *poids* de l'arête.

**Définition A.3.2 (Isomorphisme).** Deux graphes pondérés sont *isomorphes* si ce sont des graphes isomorphes par un isomorphisme tel que toute arête a mêmes poids que son image.

**Définition A.3.3 (Degré pondéré).** Le *degré pondéré* d'un sommet d'un graphe pondéré est la somme des poids des arêtes incidentes à ce sommet.

**Définition A.3.4 (Graphe ouvert).** Un *graphe ouvert* est un graphe pour lequel on permet des arêtes avec une seule extrémité. Plus précisément, c'est un couple  $G = (V, E)$  tel que  $(V \cup \{\infty\}, E)$  soit un graphe avec  $\infty \notin V$  et tel que  $\{\infty\}$  ne soit pas une arête. On appelle  $(V \cup \{\infty\}, E)$  le *graphe fermé associé à  $G$* .  $V$  est l'ensemble des sommets de  $G$  et  $E$  l'ensemble de ses arêtes. On considérera qu'une arête de la forme  $\{x, \infty\}$  admet pour unique extrémité le sommet  $x$ . De telles arêtes sont dites *ouvertes* et se distinguent des autres arêtes dites *fermées*.



*Remarque A.3.1.* Un graphe ouvert peut se dessiner de la même façon qu'un graphe fermé. Ses arêtes ouvertes sont représentées par un trait partant de leur extrémité et ne joignant aucun autre sommet.

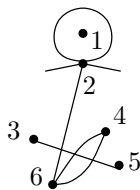


FIG. A.3 – Exemple de graphe ouvert

**Exemple A.3.1.** La figure A.3 représente un graphe  $G$  d'ensemble de sommets  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  et d'ensemble d'arêtes  $\{1\{2, 2\}, 2\{2, \infty\}, 1\{2, 6\}, 1\{3, 5\}, 2\{4, 6\}\}$ . Ce graphe a une arête ouverte de multiplicité 2.

**Définition A.3.5 (Sous-graphe fermé).** Le *sous-graphe fermé* d'un graphe ouvert  $G = (V, E)$  est le graphe dont les sommets sont ceux de  $G$  et les arêtes sont les arêtes fermées de  $G$ . C'est donc le plus grand sous-graphe du graphe fermé  $(V \cup \{\infty\}, E)$  associé à  $G$ .

**Exemple A.3.2.** Le sous-graphe fermé du graphe ouvert de la figure A.3 est le graphe de la figure A.1(b)

**Définition A.3.6 (Isomorphisme).** Deux graphes ouverts  $G = (V, E)$  et  $G' = (V', E')$  sont *isomorphes* si leurs graphes fermés associés  $(V \cup \{\infty\}, E)$  et  $(V' \cup \{\infty'\}, E')$  sont isomorphes par un isomorphisme  $\varphi$  tel que  $\varphi(\infty) = \infty'$ .

Les autres notions concernant les graphes peuvent être étendues sans peine aux graphes ouverts.

# Bibliographie

- [AG71] Norman L. Alling and Newcomb Greenleaf. *Foundations of the theory of Klein surfaces*, volume 219 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1971.
- [Ahl50] Lars L. Ahlfors. Open Riemann surfaces and extremal problems on compact subregions. *Comment. Math. Helv.*, 24 :100–134, 1950.
- [All81] Norman L. Alling. *Real elliptic curves*, volume 54 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1981. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 81.
- [AS60] Lars V. Ahlfors and Leo Sario. *Riemann surfaces*, volume 26 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, 1960.
- [BE79] Israel Bernstein and Allan L. Edmonds. On the construction of branched coverings of low-dimensional manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 247 :87–124, 1979.
- [BE84] Israel Bernstein and Allan L. Edmonds. On the classification of generic branched coverings of surfaces. *Ill. J. Math.*, 28(1) :64–82, 1984.
- [BEGG90] Emilio Bujalance, José J. Etayo, José M. Gamboa, and Grzegorz Gromadzki. *Automorphism Groups of Compact Bordered Klein Surfaces*, volume 1439 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1990.
- [Bol98] Béla Bollobás. *Modern graph theory*, volume 184 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [Die97] Reinhard Diestel. *Graph theory*, volume 173 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997. Translated from the 1996 German original.
- [DS98] V. I. Danilov and V. V. Shokurov. *Algebraic curves, algebraic manifolds and schemes*. Springer-Verlag, Berlin, 1998. Translated from the 1988 Russian original by D. Coray and V. N. Shokurov, Reprint of the original English edition [*Algebraic geometry. I*, Encyclopaedia Math. Sci., 23, Springer, Berlin, 1994].
- [DV73] Patrick Du Val. *Elliptic functions and elliptic curves*. Number 9 in London Mathematical Society Lecture Note Series. 1973.
- [EG02] A. Eremenko and A. Gabrielov. Rational functions with real critical points and the B. and M. Shapiro conjecture in real enumerative geometry. *Ann. of Math. (2)*, 155(1) :105–129, 2002.
- [FG02] Klaus Fritzsche and Hans Grauert. *From holomorphic functions to complex manifolds*, volume 213 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 2002.
- [FK92] H. M. Farkas and I. Kra. *Riemann surfaces*, volume 71 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, second edition, 1992.
- [For51] Lester R. Ford. *Automorphic functions*. Chelsea publishing company, New York, second edition, 1951.
- [Fox62] Ralph. H. Fox. A quick trip through knot theory. In *Topology of 3-manifolds and related topics (Proc. The Univ. of Georgia Institute, 1961)*, pages 120–167. Prentice-Hall, 1962.
- [Ful95] William Fulton. *Algebraic topology – A first course*, volume 153 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1995.

- [GH81] Marvin J. Greenberg and John R. Harper. *Algebraic topology – A first course*, volume 58 of *Mathematics Lecture Note Series*. Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc. Advanced Book Program, 1981.
- [GK87] David Gabai and William H. Kazez. The classification of maps of surfaces. *Invent. Math.*, 90(2) :219–242, 1987.
- [God58] Roger Godement. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Actualités Sci. Ind. No. 1252. Publ. Math. Univ. Strasbourg. No. 13. Hermann, Paris, 1958.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer-Verlag, 1977. Graduate Texts in Mathematics.
- [Hub76] John Hamal Hubbard. Sur les sections analytiques de la courbe universelle de Teichmüller. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 4(166), 1976.
- [Hui99] Johannes Huisman. Real quotient singularities and nonsingular real algebraic curves in the boundary of the moduli space. *Compositio Math.*, 118(1) :43–60, 1999.
- [Hui01] Johannes Huisman. On the geometry of algebraic curves having many real components. *Rev. Mat. Complut.*, 14(1) :83–92, 2001.
- [Hui02] Johannes Huisman. The exponential sequence in real algebraic geometry and Harnack’s inequality for proper reduced real schemes. *Comm. Algebra*, 30(10) :4711–4730, 2002.
- [Lan73] Serge Lang. *Elliptic functions*. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1973.
- [Lan99] Serge Lang. *Complex analysis*, volume 103 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, fourth edition, 1999.
- [Mas88] Bernard Maskit. *Kleinian groups*, volume 287 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, 1988.
- [Moi77] Edwin E. Moise. *Geometric Topology in Dimension 2 and 3*, volume 47 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1977.
- [Mun84] James R. Munkres. *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley Publishing Company, 1984.
- [Rem91] Reinhold Remmert. *Theory of complex functions*, volume 122 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. Translated from the second German edition by Robert B. Burckel, Readings in Mathematics.
- [Ris80] Jean-Jacques Risler. Sur le 16ème problème de Hilbert : un résumé et quelques questions. In *Seminar on Real Algebraic Geometry (Paris, 1977/1978 and Paris, 1978/1979)*, number 9 in Publ. Math. Univ. Paris VII, pages 11–25. Univ. Paris VII, 1980.
- [Ser56] Jean-Pierre Serre. Géométrie algébrique et géométrie analytique. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 6 :1–42, 1955–1956.
- [SS89] M. Seppälä and R. Silhol. Moduli spaces for real algebraic curves and real abelian varieties. *Math. Z.*, 201(2) :151–165, 1989.
- [Vir79] O. Ja. Viro. Construction of  $M$ -surfaces. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 13(3) :71–72, 1979.