Département de Physique
École Normale Supérieure

Laboratoire Kastler Brossel

THÈSE de DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité : Physique Quantique

présentée par

Thomas BOURDEL

pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

Gaz de Fermi en interaction forte : Du condensat de molécules aux paires de Cooper

---

Soutenue le 2 décembre 2004
devant le jury composé de :

M.	**J. VIGUE**	Rapporteur
M.	**C. WESTBROOK**	Rapporteur
M.	**J. TREINER**	Président
M.	**C. COHEN-TANNOUDJI**	Examinateur
M.	**R. GRIMM**	Examinateur
M.	**C. SALOMON**	Directeur de thèse
M.	**G. SHLYAPNIKOV**	Membre invité

Remerciements

Mon travail de thèse s'est déroulé de Septembre 2001 à décembre 2004 au Laboratoire Kastler Brossel, dans le département de physique de l'Ecole normale supérieure. Je suis reconnaissant envers toutes les personnes qui rendent cet environnement scientifique si dynamique et stimulant, et notamment le directeur du laboratoire Franck Laloë.

Christophe Salomon, mon directeur de thèse, m'a proposé un projet qui s'est révélé extrêmement riche et intéressant. Christophe, par son dynamisme, sa gentillesse et son éternel optimisme, a certainement joué un grand rôle dans la réussite de nos expériences. J'ai apprécié la confiance qu'il donne à ses étudiants. Il nous laisse une grande autonomie tout en étant présent quand nous avons besoin de ses conseils.

Je tiens à remercier toutes les personnes avec qui j'ai eu personnellement l'occasion de travailler sur l'expérience, notamment les thésards et post-docs. J'ai apprécié de côtoyer au sein de notre équipe de recherche des personnes venues d'horizons divers : Allemagne, Italie, USA, Russie, Israël, Hollande, Chine, Espagne, Canada et même France. Je remercie tous ces personnes pour avoir su conserver pendant toutes la durée de ma thèse une ambiance chaleureuse et amicale dans notre équipe.

Il y a bien sûr les plus anciens, Gabriele Ferrari, Marc-Oliver Mewes puis un peu plus tard Florian Schreck, Kristan Corwin et Lev Khaykovich. Ils ont tous grandement participé à la construction de l'expérience et ils m'ont véritablement aidé, grâce à leur disponibilité et à leur patience, à prendre en main rapidement le dispositif expérimental. Mon principal collaborateur fut ensuite Julien Cubizolles qui a soutenu sa thèse en juin 2004. Ensemble, nous avons travaillé de façon détendue mais néanmoins efficace à la fois dans les périodes difficiles où rien ne marche et dans les moments plus agréables où tout fonctionne. Au cours de ma dernière année de thèse, l'arrivée au sein du groupe de Frédéric Chevy, Jing Zhang, Martin Teichmann, ainsi que le retour pour quelques mois de Lev Khaykovich constituèrent une aide précieuse. La nouvelle équipe est maintenant constitué de Frédéric et Martin auxquels se sont maintenant joint Leticia Tarruell et Jason McKeever. Je leur souhaite bonne chance pour la suite.

La compréhension de nos résultats a été facilité par une interaction étroite avec des nombreux théoriciens. Je voudrais citer en particulier Servaas Kokkelmans, qui a fait partie de notre équipe pendant deux ans. Il m'a notamment permis de beaucoup mieux comprendre le phénomène de résonance de Feshbach. J'ai aussi en mémoire de stimulantes discussions avec Gora Shlyapnikov, Dimitri Petrov, Yvan Castin, Lincoln Carr, Sandro

Stringari et Roland Combescot. Tous ont joué un rôle important dans la compréhension de nos résultats.

Je suis reconnaissant à Jacques Vigué, Chris Westbrook, Claude Cohen-Tannoudji, Jacques Treiner, Rudolf Grimm et Gora Shlyapnikov d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse, et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Je voudrais remercier l'ensemble du groupe "atomes ultra-froids". Les permanents, Claude Cohen-Tannoudji, Michèle Leduc, Jean Dalibard, Yvan Castin, David Guery-Odelin, Christophe Salomon, Frédéric Chevy sont très accessibles et facilitent ainsi grandement le déroulement des recherche au sein du groupe. L'excellente ambiance au sein du groupe doit beaucoup aux personnes de passages que sont les stagiaires, étudiants, post-docs et visiteurs des différentes équipes. Je les remercie pour l'aide et l'amitié qu'ils m'ont témoignées.

Je suis reconnaissant envers les services administratifs et techniques du laboratoire. Merci en particulier à Nicole Neveu, Vera Da Costa, Linda Krikorian et Tierry Tardieu pour le secrétariat, à Lionel Pérenes et Patrick Giron pour le service électronique, à Jean-Francois Point et Didier Courtade des services généraux, à Jean-Claude Paindorge et Jack Olejnik de l'atelier mécanique général, à Robert Dalais, Franck Bouchereau, Jean-Marc Jusseau et Philippe Rousseau du service électrique, à Yvan Cabirou et Benoît Lemaire de l'atelier mécanique du LKB, à Patricia Celton et Denis Jaggi du magasin électronique, à Bruno Fabre du magasin "matières premières", à Alain Launay, Daniel Lemoal et Zaïre Dissi du service informatique.

Un grand merci enfin à ma famille et à mes amis pour qui les fermions et et les bosons ne sont rien d'autre que des mots amusants et qui pensent parfois que la physique atomique a un lien direct avec le nucléaire. Merci à ceux qui m'ont aidé à la correction orthographique du manuscrit. Merci surtout à tous pour tous les bons moments passés en dehors du laboratoire.

Table des matières

Introduction

Dès 1803, J. Dalton, à partir de ses expériences sur les réactions chimiques, émis l'hypothèse que la matière est composée de particules indivisibles, les atomes. C'est la naissance de la physique atomique. A la fin du siècle, le proton est découvert par Goldstein et l'électron par Thompson. En 1911, Rutherford montre l'existence du noyau atomique à partir d'une expérience de diffusion de protons à travers une feuille d'or. Dans les années 1925-1927, sous l'impulsion de nombreux physiciens, Heisenberg, Schrödinger, Pauli, De Broglie, Bohr, Sommerfeld, Einstein, Born, Dirac, débute la révolution quantique. Les notions de principe d'incertitude (selon lequel on ne peut pas connaître à la fois l'impulsion et la position d'une particule) et de complémentarité (comportement à la fois ondulatoire et corpusculaire des particules) sont découverts. L'existence de deux types de particules, les bosons et les fermions fut découverte. Les bosons (resp. fermions) sont caractérisés par une fonction d'onde symétrique (antisymétrique) par échange de deux particules et obéissent à la statistique de Bose-Einstein [1,2] (Fermi-Dirac [3]). Le spin, un moment angulaire et magnétique quantifié, associé de façon intrinsèque aux particules, est découvert pendant la même période par Goudsmith et Uhlenbeck. Les atomes sont alors décrits de la façon suivante : un noyau chargé positivement crée un potentiel coulombien, et les électrons se distribuent sur les états quantiques associés à ce potentiel.

Les électrons peuvent passer d'un état quantique à un autre par absorption ou émission d'un photon et la technique du pompage optique [4] a permis de préparer un gaz d'atomes dans un état quantique bien déterminé. Le développement des lasers à partir des années 60 a grandement facilité le développement ultérieur de la physique atomique. On a ensuite cherché à contrôler non seulement l'état interne (état électronique et de spin) des atomes mais aussi leur état externe (position et vitesse). Les techniques de refroidissement laser, particulièrement efficaces dans les gaz d'atomes alcalins, ont valu à S. Chu, W. Philips et C. Cohen-Tannoudji le prix Nobel de physique en 1997 [5].

Le comportement de la dynamique interne des atomes est de nature intrinsèquement quantique. Au contraire, les propriétés statistiques d'un ensemble d'atomes en phase gazeuse sont en général bien décrites par la mécanique classique. L'approximation classique est valable tant que la densité dans l'espace des phases, c'est à dire la probabilité de trouver deux particules dans le même état quantique, est faible devant 1. Le régime quantique dans un gaz implique des températures extrêmement faibles de l'ordre du microkelvin. Néanmoins, on sait, depuis 1995 , et la première réalisation expérimentale de la condensation de Bose-Einstein [6, 7] qu'il est possible d'atteindre les conditions de température et de densité nécessaires au régime quantique dans un gaz d'atomes piégés dans une enceinte à ultravide. Le prix Nobel de physique fut attribué à E. Cornell, C. Wiemann et W. Ketterle pour ces travaux [8]. La condensation a maintenant été atteinte dans de nombreux gaz atomiques différents [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16] et comme nous le montrerons par la suite dans des gaz de molécules diatomiques [17, 18, 19, 20].

Les gaz dilués ultrafroids sont des systèmes quantiques très bien contrôlés. Le potentiel de piégeage vu par les atomes peut être modifié par des champs magnétiques et des moyens optiques [21]. Les interactions entre atomes sont décrites théoriquement de façon très précise et peuvent être modifiées au moyen de résonances de Feshbach [22,23,24], observées pour la première fois en 1998 [25]. Parmi les résultats les plus marquants de la physique des condensats, on peut citer : la compréhension du rôle des interactions [26], les laser à atomes [27], les vortex [28], l'amplification d'onde de matière (superradiance) [29], les quasi-condensats [30], les solitons d'onde de matière [31,32,33,34], le gaz de Tonks [35,36], la transition métal-isolant de Mott [37].

Les techniques de refroidissement des gaz atomiques ont pu être adaptées aux gaz de Fermi. Le régime quantique fermionique a été démontré pour la première fois en 1998 dans un gaz de potassium 40 [38]. Un gaz de fermions sans interaction ne subit pas de transition de phase à basse température. On passe continuement d'une distribution classique de Bolzmann à une distribution quantique de Fermi-Dirac. A température nulle, tous les niveaux de plus basse énergie sont occupés jusqu'à l'énergie de Fermi, $E_{\mathrm{F}} = k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{F}}$. Des effets quantiques tels que la pression quantique ou l'inhibition des collisions par le principe de Pauli ont été observés. En 2001, dans notre équipe, a été obtenu un gaz dégénéré de ^{6}Li en équilibre thermique avec un condensat de ^{7}Li à une température de l'ordre d'un cinquième de la température de Fermi [39]. Quelques autres équipes ont aussi atteint le régime quantique fermionique dans des gaz de ^{6}Li [40, 41, 42, 43] et de ^{40}K [44].

Pour un gaz de fermions en interactions attractives, on s'attend à une transition de phase à basse température. Pour des interactions faibles, c'est l'analogue de la transition supraconductrice pour un gaz d'électrons dans les métaux. Cette transition de phase, dite BCS du nom de ses inventeurs Bardeen, Cooper et Schrieffer [46, 47, 48], est due à la formation d'un condensat de paires de particules. Ces paires, dites de Cooper, ont une taille caractéristique grande devant la distance entre particules. Pour des interactions fortement attractives, on s'attend à former des molécules, c'est-à-dire des paires dont la taille est petite devant la distance moyenne entre atomes. Ces molécules consituées de deux fermions, sont des bosons, et à basse température, elles peuvent donc former un condensat de Bose-Einstein (BEC). C'est alors l'analogue d'un condensat d'atomes bosoniques constitués pourtant de fermions : protons, neutrons et électrons. La compréhension du régime intermédiaire correspondant à la transition entre un condensat de paires de Cooper et un condensat de paires de molécules est un problème important et non résolu de la physique à N-corps [49, 50]. La figure 1, présentée pour la première fois par M. Holland *et al*, montre la température de la transition de phase en fonction de l'énergie de liaison des paires pour

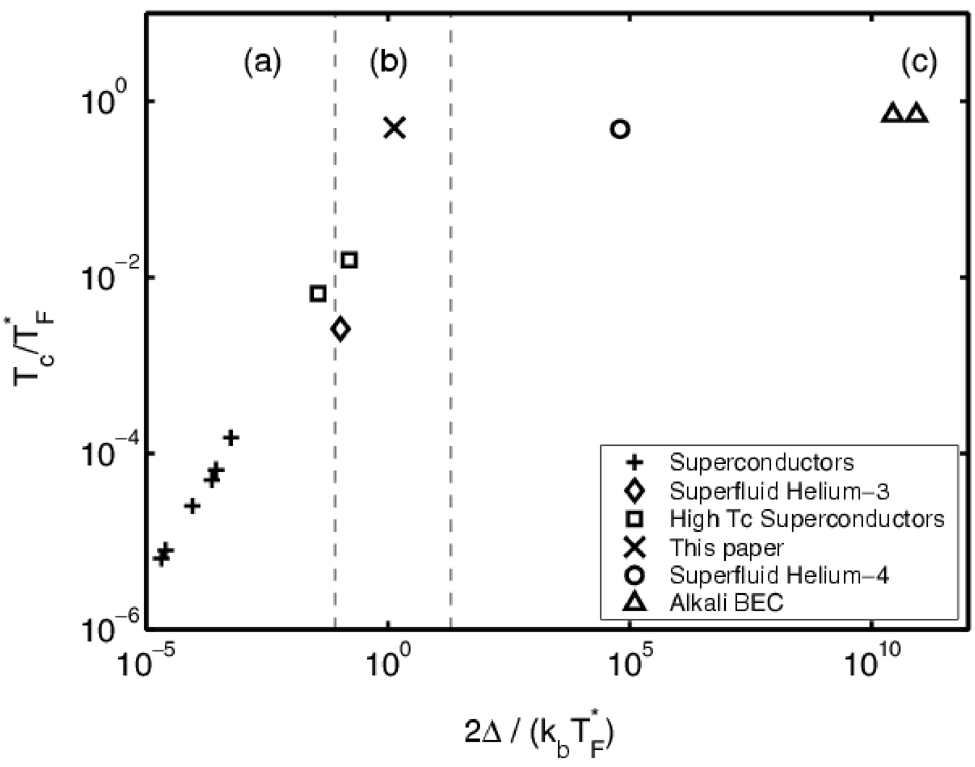

FIGURE 1 – *Température de la transition de phase superfluide T_{C} en fonction de l'énergie des paires Δ. T_{F} est la température de Fermi. Les symboles correspondent à différents systèmes expérimentaux. Le régime de la transition BEC-BCS est la zone délimitée par les pointillés. La croix correspond à un gaz de fermions à deux composantes au pic d'une résonance de Feshabch. Figure extraite de [45].*

différents systèmes physiques existants. Dans le régime BCS, la température de transition (en unité de la température de Fermi) et l'énergie de liaison des paires (en unité de l'énergie de Fermi) sont faibles et proportionnelles entre elles. Dans le régime BEC, la température de transition devient constante quelque soit l'énergie de liaison des consituants qui est, par définition, grande devant l'énergie de Fermi. Le régime intermédiaire est délimité par les pointillées sur la figure 1. La superfluidité de l'hélium 4 est expliquée par la condensation des atomes, tandis que celle de l'hélium 3 vient d'une transition de phase de type BCS avec des interactions en onde p. Les supraconducteurs à haute température critique [51], dont la description théorique fait encore l'objet de discussions, se trouvent proches de la zone de transition BEC-BCS.

Un des buts de notre expérience était l'observation de la transition de phase BCS dans un gaz de lithium 6 ultrafroid [52, 53, 54, 55]. Au cours de mon travail de thèse, une heureuse surprise fut de constater l'extraordinaire stabilité d'un gaz de ^{6}Li à deux composantes proche d'une résonance de Feshbach (contrairement au cas des bosons). Une telle résonance permet de faire varier le signe et l'amplitude de l'interaction effective entre atomes. De part et d'autre d'une telle résonance, on s'attend à être dans l'un ou l'autre des régimes décrits précédemment, et proche de résonance, c'est le régime de la transition BEC-BCS [56,50,45,57,58]. L'étude de ce régime dans un système bien contrôlé tel qu'un gaz d'atomes ultrafroids est évidemment intéressante. Les résultats majeurs présentés dans cette thèse sont la formation et la condensation de molécules consituées de deux fermions, la mesure de leur durée de vie, la mesure de l'interaction effective entre molécules, l'étude de l'expansion d'un gaz de fermions dans le régime de la transition BEC-BCS et la mesure d'un paramètre (β) entrant dans l'équation d'état des gaz de Fermi à la limite unitaire.

Le plan est le suivant :

Les chapitres 1 et 2 sont introductifs. Le dispositif expérimental qui nous a permis d'atteindre le régime quantique fermionique est décrit brièvement [39]. La physique des interactions à deux corps est présentée. Un modèle à deux canaux d'une résonance de Feshbach permet de comprendre à la fois l'évolution de la longueur de diffusion et l'apparition d'un état faiblement lié au voisinage du pic de la résonance.

Le chapitre 3 est relativement indépendant du reste de la thèse. Il est consacré à l'étude théorique de la limite, imposée par les pertes, au refroidissement d'un gaz de fermions froids. Deux situations sont étudiées plus particulièrement : le refroidissement par contact thermique avec un condensat [59] et l'évaporation d'un gaz de fermions à deux composantes.

Le chapitre 4 présente nos premières études de la résonance de Feshbach entre atomes de lithium 6. On s'intéresse notamment aux pertes qui ne sont pas centrées au pic de la résonance et à l'étude des expansions du nuage en temps de vol. Ces deux mesures constituent les premiers signes de formation de molécules piégées [60].

Les chapitres 5 et 6 regroupent les résultats concernant la formation puis la condensation des molécules. L'efficacité de formation des molécules est étudiée en fonction du champ magnétique et de la température [61]. Les mesures permettent de conclure à l'équilibre thermodynamique entre les gaz d'atomes et de molécules ; la traversée de la résonance qui permet la formation ou la dissociation des molécules de façon contrôlée est un processus réversible. Enfin, un condensat de molécule est formé et détecté de façon directe. Ce condensat est dans un régime d'interaction forte ce qui modifie ses propriétés.

Les chapitre 7 et 8 sont dédiés à la transition BEC-BCS. Un modèle théorique à deux canaux est décrit. Le concept de résonance large ou étroite est explicité. La physique de la transition BEC-BCS est introduite. Ensuite, notre étude expérimentale de l'expansion du nuage est décrite [20], puis les autres résultats importants dans la zone de transition sont répertoriés.

Enfin, nos résultats concernant les résonances de Feshbach en onde p sont discutés dans le chapitre 8. Les trois résonances dans les états $|F = 1/2\rangle$ du ^{6}Li sont localisées. Les pertes dans chacun des canaux sont étudiées dans chacun des canaux [62] et un modèle de pertes dipolaires via l'état lié en onde p est présenté [63].

Chapitre 1

Présentation de l'expérience

Ce chapitre est consacré à une présentation rapide de notre expérience sur les gaz quantiques de lithium ultrafroids. Une description plus approfondie peut être trouvée dans les thèses de Gabriele Ferrari [64] et Florian Schreck [65].

1.1 Refroidissement laser d'un gaz de lithium

1.1.1 Propriétés physiques du lithium, le four

Le lithium est le troisième élément de la table périodique. Un atome de lithium comporte donc trois protons et trois électrons. Il existe deux isotopes stables, le lithium 7, avec quatre neutrons, et le lithium 6, avec trois neutrons. L'abondance naturelle du ^{6}Li est de 7.5%. Les électrons, les protons et les neutrons ont un spin 1/2. Le lithium 7, et le lithium 6 ont respectivement un spin total entier, et demi entier ; d'après le théorème spin-statistique [66], le lithium 7 est un boson, le lithium 6 un fermion. La masse du ^{7}Li (^{6}Li) est $m_7 = 1,17\,10^{-26}$ ($m_6 = 1.00\,10^{-26}$).

Le lithium est un solide à température ambiante. C'est un métal. Son aspect noirâtre vient de sa grande facilité d'oxydation. Il devient liquide à la température de 180°C. Pour obtenir une vapeur de lithium, on utilise un four que l'on chauffe jusqu'à $T = 545$°C. On obtient alors un jet de lithium gazeux collimaté avec une vitesse de l'ordre de $\sqrt{k_\mathrm{B}T/m_7}$ soit environ 1000 m.s^{-1}.

1.1.2 Transition optique du lithium

Le lithium est un alcalin, c'est à dire qu'il a un seul électron sur la couche externe, ici la couche $n = 2$. Dans l'état fondamental, l'électron externe est dans l'état 2s. La transition vers l'état 2p est une transition optique à 671 nm, une longueur d'onde visible dans le rouge. Le refroidissement laser consiste à faire cycler les atomes sur cette transition en leur faisant absorber des photons contra-propageants. L'émission spontanée est ensuite isotrope, et la quantité de mouvement des atomes est donc en moyenne réduite.

Plus précisément les énergies de l'état fondamental et de l'état excité pour le ^{7}Li et le ^{6}Li sont représentées sur la figure 1.1. On remarque que la structure hyperfine dans

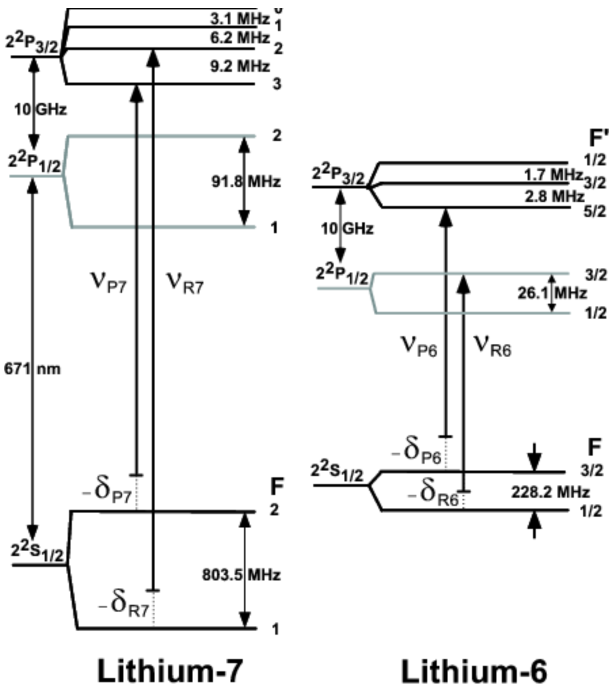

FIGURE 1.1 – *Niveaux d'énergie du ^{7}Li et du ^{6}Li . La longueur d'onde de la transition est environ 671 nm. ν_P et ν_R représentent les fréquences des lasers principaux et repompeurs.*

les états excités est de quelques MHz, ce qui est du même ordre de grandeur que la largeur naturelle de raie (6 MHz), ainsi que de la largeur spectrale de nos lasers après asservissement (3 MHz). Par conséquent, en utilisant la transition $F = 2 \rightarrow F' = 3$ ou $F = 3/2 \rightarrow F' = 5/2$, on peuple aussi des niveaux de spin total (m_{F}) non maximum, et on peut alors retomber dans $F = 1$ ou $F = 1/2$. Ce n'est donc pas un bon système à deux niveaux. Un laser repompeur est alors indispensable. Les transitions utilisées[1] sont représentées par des flèches sur la figure 1.1.

1.1.3 Refroidissement optique et système laser

A la sortie du four, les atomes ont une vitesse de l'ordre de 1000 m.s^{-1}. On commence d'abord par les ralentir à une dimension suivant l'axe du jet pour obtenir un jet d'atome lent. C'est le rôle du ralentisseur Zeeman : pour compenser l'effet Doppler et garder les atomes à résonance au fur et à mesure de leur décélération, on utilise l'effet Zeeman induit par un champ magnétique variable. On a alors un jet d'atomes à une vitesse d'environ

[1] En pratique, on utilise la raie D1 et non la raie D2 pour le ^{6}Li à cause d'une coïncidence entre la raie D2 du ^{6}Li avec la raie D1 du ^{7}Li .

30 m.s^{-1}. Ces atomes sont ensuite capturés par un piège magnéto-optique (MOT) qui est l'élément indispensable à toute expérience d'atomes ultra-froids [67].

Expérimentalement, pour chaque isotope, on a besoin d'un laser principal et d'un laser repompeur. Il faut donc au minimum quatre lasers. De plus, pour ne pas perturber le fonctionnement du MOT, les faisceaux du ralentisseur sont nécessairement décalés en fréquence. Il faut donc huit fréquences différentes. Notre système laser est basé sur l'utilisation de diodes laser. Pour générer toutes ces fréquences avec une puissance suffisante, on utilise un système à deux étages. D'abord, sur une table optique indépendante, on asservit par absorption saturée des lasers dits maîtres sur les transitions atomiques. En pratique, on a trois lasers maîtres, un sur la raie D2 du ^{7}Li , un sur la raie D2 du ^{6}Li, et un sur la raie D1 du ^{6}Li . Pour plus de détails, on pourra se reporter à la thèse de Gabriele Ferrari [64]. A l'aide de modulateurs acousto-optiques en double passage, on dérive alors les quatre fréquences nécessaires pour le MOT que l'on injecte dans quatre fibres optiques. A la sortie des fibres, chaque faisceau est divisé en deux, l'un injecte une diode laser esclave du MOT, l'autre est décalé en fréquence de 400 MHz pour injecter ensuite un esclave du ralentisseur. On a donc huit lasers esclaves aux huit fréquences nécessaires au refroidissement. Pour le MOT, on utilise un amplificateur optique (MOPA : master oscillator power amplifier) injecté simultanément par les quatre esclaves qui permet d'avoir encore plus de puissance et surtout d'obtenir un faisceau polarisé contenant quatre fréquences dans le même mode radial [68].

Les performances de cette première partie de piégeage et de ralentissement nous permettent d'obtenir $\sim 10^{10}$ atomes de ^{7}Li et $4\,10^8$ atomes de ^{6}Li à une température de $0.7\,\mathrm{mK}$ [69][2]. La densité dans l'espace des phases $n\lambda_{\mathrm{dB}}^3$, où n est la densité atomique et $\lambda_{\mathrm{dB}} = \sqrt{\hbar^2/mk_{\mathrm{B}}T}$ est la longueur d'onde thermique de de Broglie, est alors de l'ordre de 10^{-6} pour le ^{7}Li .

1.2 Piégeage magnétique et gaz dégénérés

1.2.1 Le lithium dans l'état fondamental

Après leur capture dans le MOT, les atomes sont transférés dans un piège magnétique, c'est-à-dire une zone où le champ magnétique admet un minimum (les maxima de champ magnétique n'existent que sur les conducteurs). Pour que les atomes soient effectivement piégés, il faut que leur énergie interne soit croissante avec le champ magnétique, c'est à dire que leur moment magnétique soit positif. Le hamiltonien des atomes dans l'état fondamental en présence d'un champ magnétique B est :

$$H = \mathcal{E}_{\mathrm{hf}}\mathbf{I}.\mathbf{S} + \mu_{\mathrm{B}}B(g_e S_z - g_n I z) \tag{1.1}$$

[2]La température Doppler est de $270\,\mu$K, mais à cause de la structure non résolue dans l'état excité, il est difficile de l'atteindre.

$\mathcal{E}_{\rm hf}$ est l'énergie hyperfine (803 MHz pour le ^{7}Li , 223 MHz pour le ^{6}Li). $\mathbf{S}$ et $\mathbf{I}$ sont les spins électroniques et nucléaires ($I = 1$ pour le ^{7}Li , $I = 3/2$ pour le ^{6}Li). g_e et g_n sont les facteurs gyromagnétiques de l'électron et du noyau. Les états d'énergie (figure 1.2) sont alors donnés par la formule de Breit-Rabi [70]. Dans la suite, on nommera les états quantiques dans la base $|F, m_F\rangle$ à bas champ, même si ce n'est pas une base propre pour $B \neq 0$.

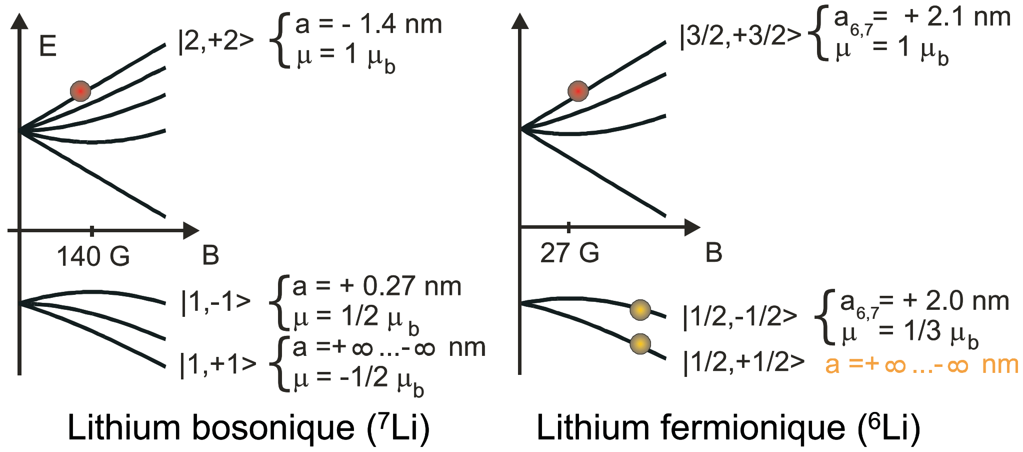

FIGURE 1.2 – *Energie en fonction du champ magnétique des états du ^{7}Li et du ^{6}Li . Les états sont nommés par leurs nombres quantiques dans la base $|F, m_F\rangle$. Seuls les états dont l'énergie augmente avec le champ magnétique sont magnétiquement piégeables.*

On remarque, sur la figure 1.2, que seuls trois états du ^{7}Li ($|2, 2\rangle$, $|2, 1\rangle$, $|1, -1\rangle$), et trois états du ^{6}Li ($|3/2, 3/2\rangle$, $|3/2, 1/2\rangle$, $|1/2, -1/2\rangle$) sont magnétiquement piégeables à bas champ. Les états $|2, 1\rangle$ et $|3/2, 1/2\rangle$ ne sont pas stables par relaxation de spin[3], et les états $|1, -1\rangle$ et $|1/2, -1/2\rangle$ ne sont piégeables que pour des faibles champs magnétiques, c'est-à-dire uniquement pour des énergies thermiques faibles [39]. On utilise donc les états $|2, 2\rangle$ et $|3/2, 3/2\rangle$ qui sont complètement polarisés de spin.

1.2.2 Piège magnétique

Dans le MOT, tous les sous-niveaux Zeeman de $F = 2$ et de $F = 1$ sont peuplés. Pour piéger magnétiquement un maximum d'atomes, on illumine ceux-ci avec un faisceau repompeur résonant juste après le coupure du MOT. Ceci permet de passer de $\sim$15% à $\sim$30% des atomes dans l'état $|2, 2\rangle$. On branche ensuite un piège quadrupolaire constitué par les bobines du MOT. Notre dispositif est ensuite relativement complexe et a pour but de transférer les atomes dans un petit appendice autour duquel un piège de Ioffe-Pritchard

[3] On pourra se reporter à la partie 2.1.1 pour une explication.

très confinant est installé[4]. Des schémas du piège magnétique et du circuit électrique sont présentés dans les figures 1.3 et 1.4. Pour charger le piège de Ioffe-Pritchard, on

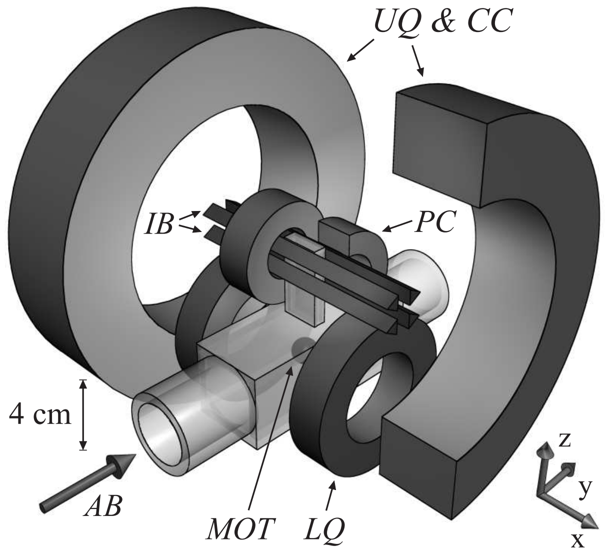

FIGURE 1.3 – *Schéma du dispositif magnétique. AB représente le flux d'atomes incident, MOT désigne la position du piège magnéto optique. LQ sont les bobines du MOT et du piège quadrupolaire en bas. UQ&CC sont les bobines quadrupolaires centrés sur l'appendice et les bobines de compensation du piège de Ioffe qui est constitué par les barres IB et les bobines de confinement axial PC.*

transfère les atomes du quadrupôle en bas vers un quadrupôle formé par les bobines de compensation (appelées aussi bobines de transfert). Malheureusement, seulement environ 10% des atomes passent effectivement dans l'appendice ; les autres trop chauds touchent l'appendice et sont perdus, c'est une sorte d'évaporation spatiale [5].

Ensuite, on allume les barres de Ioffe ainsi que les bobines de confinement axial (communément appelées "pinch"). Enfin, la dernière étape consiste à changer le sens du courant dans une des bobines de compensation pour mettre ces dernières en série avec les bobines de confinement axial. On a ainsi un champ résiduel axial faible mais une courbure axiale C_{ax}. Les deux couples de bobines étant en série, les fluctuations de courant n'influencent que peu le champ résiduel axial. Ce champ B_0 est ensuite ajusté finement à l'aide d'autres bobines ("pinch offset"). Le champ créé par les barres est un champ quadrupolaire 2D avec un gradient G. Le champ axial résiduel permet de supprimer le zéro de champ magnétique, et on a alors une courbure radiale $C_{\mathrm{rad}} \approx G^2/B_0$. Le piège de Ioffe-Pritchard est localement harmonique avec les fréquences f_i, où i désigne les différentes directions

[4]Un fort confinement est nécessaire pour que l'évaporation ne soit pas trop longue car la longueur de diffusion du lithium 7 dans l'état $|2,2\rangle$ est relativement faible $-27\,a_0$.

[5]Le dessin initial de l'expérience était optimisé pour une température du MOT plus basse.

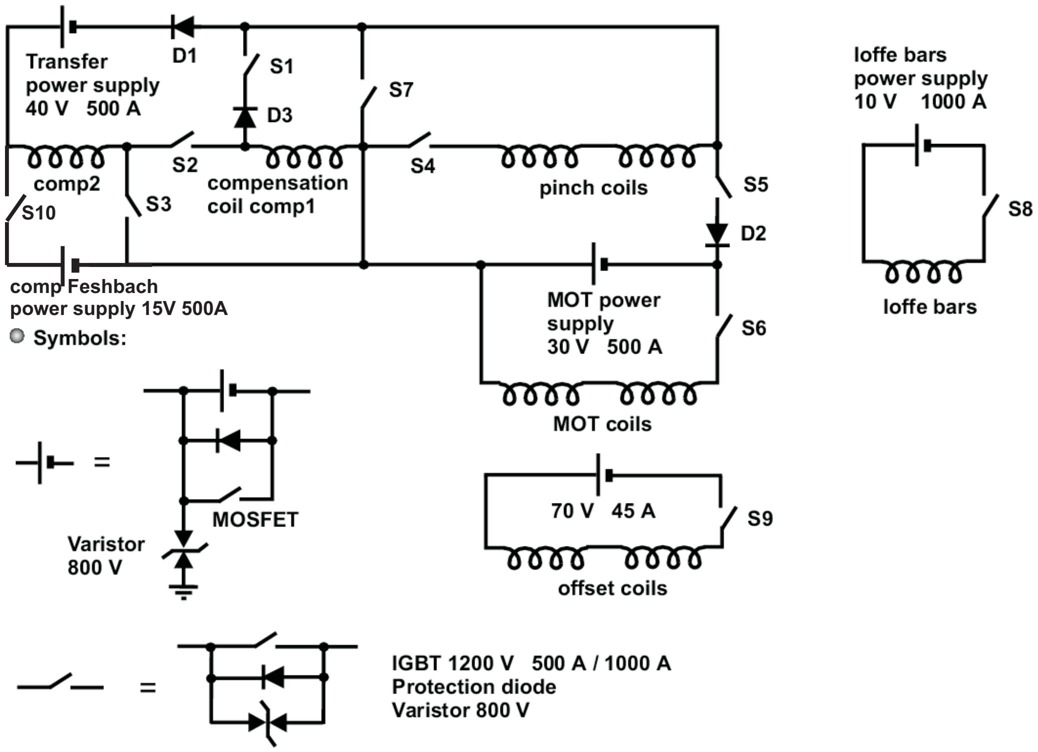

FIGURE 1.4 – *Schéma de l'alimentation des différentes bobines de champs magnétiques. En configuration MOT, seul S6 est fermé. En configuration piège quadrupolaire en haut, S1 et S3 sont fermés. En configuration piège de Ioffe-Pritchard, S2 et S4 sont fermés. Le champ magnétique de Feshbach est réalisé à l'aide des bobines "pinch" alimentées par l'alimentation MOT, S4 et S5 sont alors fermés. Pour pouvoir varier rapidement le champ Feshbach, il est possible de mettre simultanément un courant dans les bobines de compensation via S2 et S10.*

du piège :

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_B C_i}{m}} \tag{1.2}$$

Pour les valeurs typiques des courants utilisés, 200 A dans les bobines de confinement axial, 400 A dans les barres, et un champ résiduel de 2 G, les fréquences d'oscillation sont alors 70 Hz axialement et 4 kHz radialement (pour le ^{7}Li).

1.3 Gaz dégénérés de fermions et de bosons

1.3.1 Introduction

Dans le piège de Ioffe-Pritchard, les atomes sont évaporés jusqu'au régime de dégénérescence quantique. On entre dans ce régime quand la probabilité d'occupation d'un état quantique devient de l'ordre de 1. La statistique des atomes devient alors importante, bosons et fermions ont des comportements très différents. En dessous d'une température critique, dépendant du nombre N d'atomes pièges, $k_B T_C = \hbar\omega_x\omega_y\omega_z(\frac{N}{\zeta(3)})^{1/3} = \hbar\bar{\omega}(\frac{N}{\zeta(3)})^{1/3}$ pour un piège harmonique, les bosons subissent une transition de phase, la condensation de Bose-Einstein ; ils peuplent de façon macroscopique l'état fondamental du piège. Les fermions au contraire ne peuvent être qu'un seul par état quantique et minimisent leur énergie, à température nulle, en occupant tous les états quantiques jusqu'à l'énergie de Fermi $E_F = k_B T_F = \hbar\bar{\omega}(6N)^{1/3}$. T_C et T_F donnent la température typique d'entrée dans le régime quantique. La figure 1.5 [69] présente les distributions de position d'un mélange boson-fermion dans un piège harmonique. Les distributions sont très différentes ; le pic pour les bosons est caractéristique de la condensation, alors que les fermions occupent un volume plus grand à cause de la pression de Fermi.

1.3.2 Gaz piégés sans interactions

Plus généralement, la probabilité d'occupation d'un état quantique d'énergie ϵ pour un gaz sans interaction est donnée par la formule

$$f_{F,B}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} \pm 1} \text{ , avec } \beta = \frac{1}{k_B T} \tag{1.3}$$

où les indices F et B correspondent à fermions et bosons, μ est le potentiel chimique. Dans l'approximation de densité locale [6], la densité dans l'espace des phases $w(\mathbf{r},\mathbf{k})$ dans un piège harmonique est alors :

$$w_{F,B}(\mathbf{r},\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{e^{\beta(H(\mathbf{r},\mathbf{k})-\mu)} \pm 1} \text{ avec } H(\mathbf{r},\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m} + \frac{1}{2}\sum_j m\omega_j^2 r_j^2 \tag{1.4}$$

[6]Pour des bosons, les atomes condensés ne sont alors pas pris en compte.

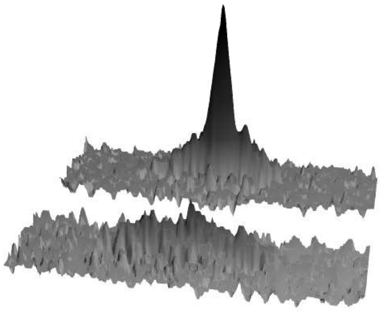

FIGURE 1.5 – *Distribution spatiale d'un nuage de boson (^{7}Li) et de fermions (^{6}Li) dans un piège harmonique allongé. Les deux nuages sont en équilibre thermique et les nombres d'atomes sont similaires. La distribution bimodale de la figure du haut est caractéristique d'un condensat de Bose-Einstein [39].*

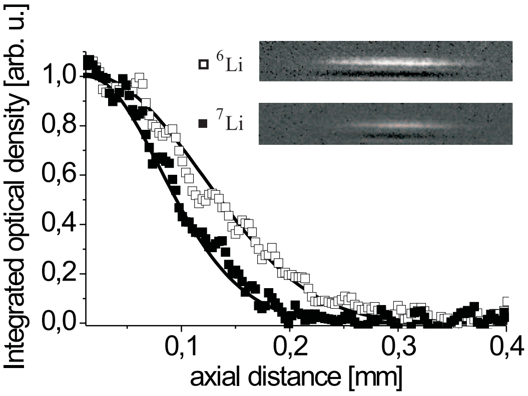

FIGURE 1.6 – *Distributions d'un nuage de bosons et d'un nuage de fermions en équilibre thermique à la température du seuil de condensation. La différence de largeur entre les deux distributions est une conséquence directe de la différence entre les deux statistiques [39, 40].*

Pour avoir la densité à 1D (en impulsion ou en position), qui est très souvent ce qu'on mesure expérimentalement, il faut alors intégrer cette distribution suivant 5 dimensions[7] :

$$n^{1D}_{\mathrm{F,B}}(r_i) = \sqrt{\frac{m\omega_i^2}{2k_{\mathrm{B}}T}}\left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\pi\hbar\bar{\omega}}\right)^3\int_0^\infty \frac{8\pi^2 v^4 \mathrm{d}v}{3}\frac{1}{\mathrm{e}^{v^2+\frac{m\omega_i^2 r_i^2}{k_{\mathrm{B}}T}-\beta\mu}\pm 1} \tag{1.5}$$

$$n^{1D}_{\mathrm{F,B}}(r_i) = \sqrt{\frac{m\omega_i^2}{2k_{\mathrm{B}}T}}\left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{Polylog}\left[\pm 5/2, \mp\mathrm{e}^{-\frac{m\omega_i^2 r_i^2}{k_{\mathrm{B}}T}+\beta\mu}\right] \tag{1.6}$$

$$\text{où la fonction Polylog est définie par } \mathrm{Polylog}(a,b) = \frac{\int_0^\infty \frac{x^{(a-1)}}{\mathrm{e}^x - b}\mathrm{d}x}{\Gamma[a]} \tag{1.7}$$

Cette dernière formule[8] montre explicitement la différence entre une distribution de fermions et de bosons même non condensés. Cette différence est directement due à la statistique et a été vue expérimentalement dans notre expérience [40, 39](figure 1.6).

En utilisant la densité d'état $\rho(E) = \frac{E^2}{2(\hbar\bar{\omega})^3}$ dans un piège harmonique, on peut aussi calculer le nombre d'atomes N, l'énergie E, et l'entropie [9] S d'un gaz idéal en fonction de

[7] Les 5 dimensions sont 3 directions d'impulsion et 2 directions d'espace.

[8] La fonction polylog correspond, suivant les signes utilisés, aux fonctions de g et f de Bose et de Fermi utilisées habituellement. Un développement en série est possible dans le cas où le potentiel chimique est négatif, ce qui n'est pas toujours le cas pour des fermions. La notation Polylog permet une notation plus compacte en réunissant les deux cas.

[9] On trouve facilement l'expression de l'entropie en utilisant le grand potentiel J et l'expression de

la température et du potentiel chimique [71, 72]. Ces formules seront utiles par la suite.

$$N_{\mathrm{F,B}} = \int \mathrm{d}\epsilon \rho(\epsilon) \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\epsilon-\mu)} \pm 1} = \mp (\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\hbar\bar{\omega}})^3 \mathrm{PolyLog}[3, \mp \mathrm{e}^{\mu/k_{\mathrm{B}}T}] \tag{1.8}$$

$$E_{\mathrm{F,B}} = \int \epsilon \mathrm{d}\epsilon \rho(\epsilon) \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\epsilon-\mu)} \pm 1} = \mp 3 k_{\mathrm{B}} T (\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\hbar\bar{\omega}})^3 \mathrm{PolyLog}[4, \mp \mathrm{e}^{\mu/k_{\mathrm{B}}T}] \tag{1.9}$$

$$S_{\mathrm{F,B}} = k_{\mathrm{B}} \int \mathrm{d}\epsilon \rho(\epsilon) \left[(1 \mp \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\epsilon-\mu)} \pm 1}) \ln(1 \mp \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\epsilon-\mu)} \pm 1}) \pm \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\epsilon-\mu)} \pm 1} \ln(\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\epsilon-\mu)} \pm 1}) \right] \tag{1.10}$$

$$S_{\mathrm{F,B}} = \pm k_{\mathrm{B}} \left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\hbar\bar{\omega}} \right)^3 \left(\frac{\mu}{k_{\mathrm{B}}T} \mathrm{PolyLog}[3, \mp \mathrm{e}^{\mu/k_{\mathrm{B}}T}] - 4 \mathrm{PolyLog}[4, \mp \mathrm{e}^{\mu/k_{\mathrm{B}}T}] \right) \tag{1.11}$$

l'entropie $S = -\frac{\partial J}{\partial T}|_{\mu}$

Chapitre 2

Collisions dans un gaz de lithium ultrafroid

2.1 Collisions dans les gaz dilués ultrafroids

2.1.1 Différents types de collision

Les gaz dilués ultrafroids sont toujours métastables. En effet, dans les conditions de température et de pression où on les étudie, l'équilibre thermodynamique correspond à un solide. Cependant, pour aller vers une phase solide, les atomes ont d'abord besoin de se regrouper et de former des molécules. Ce processus implique une collision mettant en jeu au moins trois atomes[1] dont le taux est en général faible aux densités auxquelles nous travaillons. Ainsi, il est possible de garder plusieurs minutes un gaz dilué piégé dans le vide[2]. Les interactions à deux corps jouent au contraire un rôle crucial dans nos expériences. On peut en distinguer de deux types différents, les collisions élastiques et inélastiques.

- Les collisions élastiques conservent l'énergie cinétique. Les deux atomes ne changent pas d'état interne lors de la collision. Seul la quantité de mouvement des deux atomes change. Les collisions élastiques permettent donc une redistribution de l'énergie cinétique entre les atomes. Elles sont responsables de la thermalisation du gaz. Les collisions élastiques vers l'avant ne changent pas la quantité de mouvement. Elles sont responsables de l'énergie de champ moyen entre atomes [73]. Un atome ressent un potentiel V_{cm} proportionnel à la densité des autres atomes. Plus précisément, on a $V_{\mathrm{cm}}(r) = gn(r)$ avec $g = 4\pi\hbar^2 a/m$, où $n(r)$ est la densité et a la longueur de diffusion qui sera défini dans la section suivante[3].

[1] La conservation de l'énergie et de l'impulsion interdit ce processus pour une collision à deux corps

[2] A une pression de $\sim 5\,10^{-11}$ torr, un atome ne subit une collision avec le gaz résiduel que toutes les minutes environ

[3] Dans le cas d'interaction entre bosons identiques, il faut rajouter un facteur 2 d'amplification bosonique.

– Les collisions inélastiques, au contraire, impliquent le changement d'état interne de l'un au moins des atomes. L'énergie totale est conservée, mais comme l'énergie interne des atomes change, l'énergie cinétique totale est modifiée. Ces collisions conduisent en général à des pertes, soit car les nouveaux états ne sont pas piégeables magnétiquement, soit à cause d'une énergie cinétique qui devient supérieure à la profondeur du piège. On distingue deux sortes de pertes à deux corps, les pertes par échange de spin et les pertes dipolaires. Les premières conservent la projection du moment cinétique de spin $m_{\mathrm{F}1} + m_{\mathrm{F}2}$ des états atomiques [74] (la conservation du moment cinétique total et du moment cinétique orbital dans un potentiel central implique la conservation du moment cinétique de spin). En pratique, on s'affranchit de ces pertes en se plaçant dans des états d'énergie minimum pour une certaine valeur de la projection du moment cinétique de spin. Les collisions dipolaires sont dues aux interactions magnétiques dipôle-dipôle entre les spins des électrons. Elles induisent des pertes plus faibles que les pertes par échange de spin. La seule façon de les éviter est de se placer dans l'état fondamental du système. Malheureusement, celui-ci n'est pas magnétiquement piégeable [4].

2.1.2 Théorie de la diffusion

Cette section est consacrée à quelques rappels sur la diffusion élastique, car c'est un élément indispensable pour comprendre l'ensemble des résultats présentés par la suite [76, 77, 74, 78]. Le potentiel d'interaction entre atomes peut-être calculé dans l'approximation de Born-Oppenheimer[5]. Si on néglige les interactions magnétiques spin-spin (responsables des pertes dipolaires), c'est un potentiel central $V(r)$. A longue portée, le potentiel est une interaction de Van-der-Waals entre dipôles induits en $-1/r^6$, tandis qu'à courte portée, les nuages d'électrons se repoussent, et le potentiel est très raide de type coeur dur (fig. 2.1). Le potentiel $V(r)$ peut se décomposer suivant l'état de spin des deux électrons de valence en un potentiel singulet $V_S(r)$ et un potentiel triplet $V_T(r)$.

$$V(r) = V_S(r)P_S + V_T(r)P_T \tag{2.1}$$

où P_S et P_T sont les projecteurs sur les états singulets et triplets de spin.

Problème de la diffusion

Intéressons nous au problème de la diffusion entre deux atomes distinguables de masse m_1 et m_2. Il faut alors résoudre l'équation de Schrödinger suivante pour le mouvement

[4] Ces pertes peuvent être très génantes pour avoir une évaporation efficace. C'est le cas du césium dans l'état $|F = 4, m_F = 4\rangle$, où ces pertes empèchent d'atteindre la condensation. Dans notre cas d'un gaz de ^{7}Li dans $|F = 2, m_F = 2\rangle$, les pertes dipolaires rendent l'évaporation peu efficace [69, 75].

[5] Cette approximation consiste à considérer les noyaux fixes et à calculer l'énergie d'interaction en fonction de la distance entre eux.

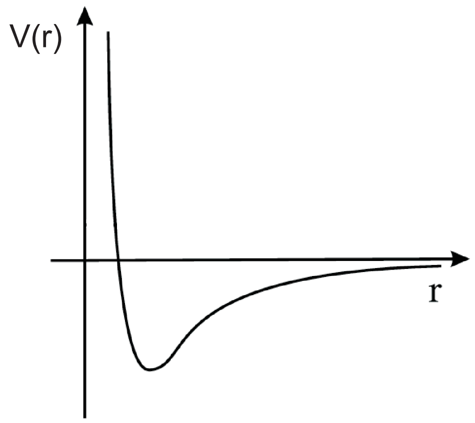

FIGURE 2.1 – *Potentiel d'interaction typique entre deux atomes. Dans le cas du lithium, le minimum des potentiels singulet et triplet se situe à* $\sim 30\, a_0$.

relatif avec une énergie E :

$$\left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m^*} + V(r) - E\right)\psi(\mathbf{r}) = 0, \text{ où } m^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ est la masse réduite} \tag{2.2}$$

On cherche alors une solution qui prend la forme asymptotique pour $r \to \infty$ suivante :

$$\psi(\mathbf{r}) = \mathrm{e}^{ikz} + f(\theta)\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}, \text{ avec } k = \sqrt{\frac{2m^*E}{\hbar^2}} \tag{2.3}$$

θ est l'angle entre $\mathbf{r}$ et l'axe z. La fonction $f(\theta)$ est l'amplitude de diffusion qui dépend en général de E.

Résolution de l'équation de Schrödinger

Pour résoudre l'équation de Schrödinger précédente, le potential à force centrale permet de développer les solutions suivant le moment cinétique orbital l, [78, 77, 76]

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)\frac{\xi_{kl}(r)}{kr} \tag{2.4}$$

où P_l sont les polynômes de Legendre. Il reste alors une équation de Schrödinger unidimensionnelle pour les fonctions d'onde radiales ξ_{kl} avec un potentiel centrifuge supplémentaire $\hbar^2 l(l+1)/2m^* r^2$ qui dépend du moment orbital l considéré. A longue distance, le potentiel d'interaction devient négligeable, et la solution est une sinusoïde avec un déphasage δ_l qui dépend du potentiel et de l. L'amplitude de diffusion est finalement une somme sur les différentes ondes partielles.

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\theta)(\mathrm{e}^{2i\delta_l} - 1) \tag{2.5}$$

Une étude de la limite basse énergie (pour $kd \ll 1$, où d est la portée du potentiel) montre que $\delta_l \propto k^{2l+1}$. Dans ce régime, les collisions en onde s ($l = 0$) dominent et l'expression correspondante de l'amplitude de diffusion $f(\theta)$ est donc indépendante de θ :

$$f(\theta) = \frac{-a}{1 + ika} \tag{2.6}$$

A basse énergie f, tend vers $-a$. La section efficace de collision totale σ est l'intégrale de $|f^2|$ sur la direction de diffusion, soit $\sigma = 4\pi a^2/(1+k^2a^2)$. On remarque que, pour $ka \geq 1$, on a une saturation de l'amplitude de diffusion vers $1/ik$. C'est ce qu'on appelle la limite unitaire. Pour les ondes de moment cinétique supérieur, l'amplitude de diffusion

$$f(\theta) \propto k^{2l} P_l(\cos\theta) \tag{2.7}$$

a une dépendance forte avec l'énergie de la collision. En onde p ($l = 1$), par exemple, la section efficace de collision devient proportionnelle au carré de l'énergie de collision. En pratique, les collisions en onde p ne jouent un rôle dans les gaz ultrafroids que lorsqu'elles sont résonnantes.

Effet de la statistique

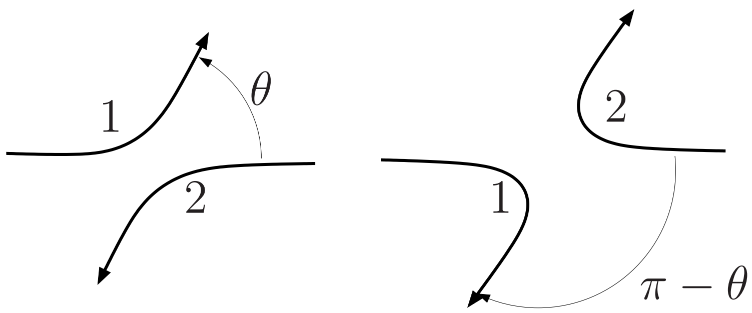

FIGURE 2.2 – *Diffusion de particules identiques. La diffusion sous les angles θ et $\pi - \theta$ sont indistinguables pour des particules identiques. Leurs amplitudes de diffusion doivent donc être ajoutées (resp. soustraites) pour des bosons (resp. fermions).*

On s'intéresse maintenant au cas de la diffusion de deux atomes indiscernables. On peut alors avoir une interférence entre deux processus (pour des angles de diffusion θ et $\pi - \theta$) qui mènent au même état final (fig. 2.2). Il faut alors tenir compte de la statistique considerée. Pour des bosons, la fonction d'onde est symétrique et les amplitudes de diffusion s'ajoutent. Pour des fermions, la fonction d'onde est antisymétrique, et les amplitudes de diffusion se soustraient. Compte tenu de la parité des polynômes de Legendre, pour des bosons (respectivement fermions), on a alors seulement des interactions en ondes paires (resp. impaires). Pour des bosons, la section efficace totale de collision en onde s est alors $\sigma = 8\pi a^2$. Pour deux fermions identiques, on n'a pas de collision en onde s, et donc plus de collision à très basse température. Cette absence de collision peut être utile dans des applications métrologiques [79] ou interférométriques [80].

	^{6}Li	^{7}Li	^{6}Li/^{7}Li
a_T	-2160 ± 250	-27.6 ± 0.5	40.9 ± 0.2
a_S	45.5 ± 2.5	33 ± 2	-20 ± 10

TABLE 2.1 – *Longueur de diffusion dans les potentiels triplet et singulet pour les deux isotopes du lithium d'après [81]. Les valeurs sont données en unité du rayon de Bohr* $a_0 = 0.53\,10^{-10}\,m$.

Pseudo-potentiel

Les paragraphes précédents montrent comment trouver la longueur de diffusion en onde s entre deux atomes. Pour construire des théories à N-corps on remplace très souvent le vrai potentiel interatomique par un pseudo-potentiel modèle de portée nulle qui redonne la même longueur de diffusion en onde s.

$$V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = g\delta(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial r}(r\psi(\mathbf{r})), \text{ avec } g = \frac{2\pi\hbar^2 a}{m^*} \tag{2.8}$$

Il est intéressant de noter que l'on peut remplacer de façon complètement équivalente, le pseudopotentiel par la condition limite suivante :

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r\psi(r)}\frac{\partial(r\psi(r))}{\partial r} = -\frac{1}{a} \tag{2.9}$$

2.1.3 Longueurs de diffusion du Lithium

Les potentiels du lithium sont en général très bien connus grâce à des expériences de photoassociation à deux photons vers les potentiels singulets et triplet d'interaction entre atomes dans l'état fondamental [82,81]. Les longueurs de diffusion peuvent donc être calculées (table 2.1). Dans le piège magnétique, les atomes sont polarisés de spin, et ils interagissent donc par le potentiel triplet. La longueur de diffusion 7-7, $-27\,a_0$ a différentes implications. Tout d'abord cette valeur est relativement faible (comparer au Rubidium par exemple), et donc le refroidissement évaporatif est lent. C'est pour compenser ce fait qu'on utilise un piège magnétique particulièrement confinant. Ensuite, cette longueur de diffusion négative rend les condensats de ^{7}Li instables vis à vis de l'effondrement (collapse) au-delà d'un certain nombre d'atomes. Pour notre piège magnétique très confinant, ce nombre critique est de l'ordre 300, ce qui est invisible sur nos images. La longueur de diffusion triplet 6-7 vaut $40.9\,a_0$. Elle assure la thermalisation entre les deux isotopes pendant l'évaporation. La longueur d'onde triplet 6-6 est grande et négative $-2160 \pm 250\,a_0$. Cela est dû à la présence d'un état lié virtuel très proche de la limite de dissociation dans ce potentiel. Dans le piège magnétique, cette valeur n'a pas d'importance car les

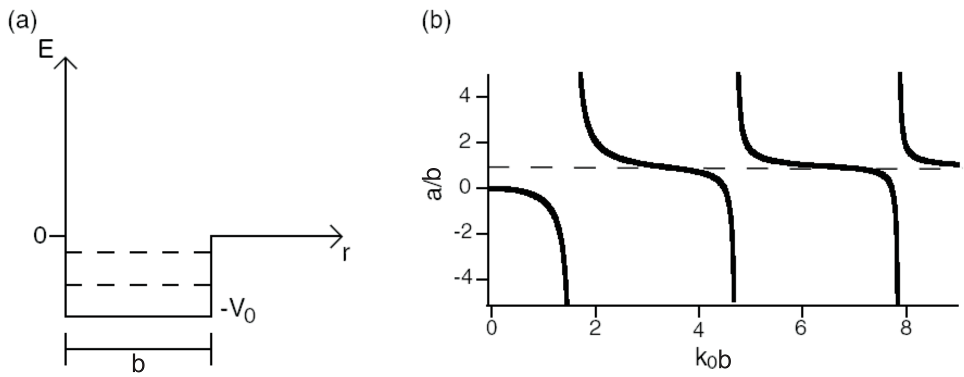

FIGURE 2.3 – *Résonance de forme pour un potentiel carré. (a) : potentiel d'interaction carré avec une profondeur $V_0 = \hbar^2 k_0^2/m$ et une portée b. (b) : longueur de diffusion en fonction de $k_0 b$. Figure extraite de [83].*

collisions sont interdites par le principe de Pauli. Cependant, pour un mélange d'état du ^{6}Li dans un piège optique, cette valeur importante donne lieu à des propriétés de collision particulière qui seront décrites plus en détail à la fin de ce chapitre.

2.2 Interaction résonnante

Les interactions dans un gaz ultrafroid se limitent souvent à des interactions en onde s qui peuvent être décrites très précisément à l'aide d'une seule quantité, la longueur de diffusion. Cette section montre comment il est possible de modifier cette longueur de diffusion.

2.2.1 Résonances de forme

Etudions la diffusion par un potentiel carré caractérisé par une profondeur $-V_0 = -\hbar^2 k_0^2/m$ et une portée b (fig. 2.3). La diffusion par un tel potentiel est exactement soluble [78], et on trouve :

$$a = b - \frac{\tan(k_0 b)}{k_0} \tag{2.10}$$

Lorsque l'on varie la profondeur V_0 du potentiel, pour $k_0 b = (n + 1/2)\pi$, a diverge, et on obtient ce qu'on appelle des résonances de diffusion. Ces valeurs correspondent en fait à l'entrée d'un nouvel état lié dans le potentiel. La conclusion est donc la suivante : lorsqu'on a un état lié (réel ou virtuel) dont l'énergie est proche du continuum, cet état lié domine le comportement de la longueur de diffusion. Si l'état lié est virtuel, alors a est négatif, si l'état lié est réel, alors a est positif. Si on n'est pas proche d'une résonance, la longueur de diffusion est de l'ordre de la portée de potentiel b.

Pour un potentiel d'interaction réel (fig. 2.1), les résultats qualitatifs précédents demeurent et la longueur de diffusion va dépendre fortement de l'énergie du dernier état lié du potentiel.

Il est intéressant de noter que le pseudo-potentiel est suffisant pour décrire cette physique, et permet d'obtenir simplement un lien entre l'énergie de liaison de l'état lié et la longueur de diffusion. Cherchons un état lié d'énergie $-\hbar^2\kappa^2/2m^*$ pour un pseudo-potentiel avec une longueur de diffusion a. La fonction d'onde de l'état lié, solution de l'équation de Schrödinger sans potentiel extérieur, est donc de la forme

$$\psi(r) \propto \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}}\mathrm{e}^{-\kappa r} \text{ , avec } \kappa > 0. \tag{2.11}$$

La condition aux limites imposée par le pseudo-potentiel (eq. 2.9) fixe la valeur $\kappa = 1/a$. On trouve donc un état lié d'énergie $-\hbar^2/2m^*a^2$, pour $a > 0$, alors que pour $a < 0$, il n'y a pas d'état lié, car il est alors impossible de normaliser la fonction d'onde. Quand l'état lié se rapproche du continuum, la longueur de diffusion diverge. Ce traitement n'est évidemment valable que si la portée du potentiel est faible devant la valeur de a. Sinon, la taille de l'état lié devient de l'ordre de la portée du potentiel et la régularisation du potentiel ne s'applique plus.

Il peut aussi arriver que l'énergie d'un état lié dans un potentiel avec un moment orbital non nul coincide avec l'énergie de deux atomes dans le continuum ; on a alors la possibilité d'avoir une résonance de forme en onde p, d, e ...

2.2.2 Résonance de Feshbach

Origine du phénomène de résonance

Le hamiltonien à deux atomes s'écrit en général comme la somme des hamiltoniens à 1 corps $H_1 + H_2$ (1.1) et du potentiel d'interaction $V(r) = V_S(r)P_S + V_T(r)P_T$. Le phénomène de résonance est dû au fait que les termes d'interactions hyperfines à un corps ($\mathcal{E}_{\mathrm{hf}}\mathbf{I}.\mathbf{S}$) ne commutent pas avec le spin total $\mathbf{S}^2 = (\mathbf{S_1} + \mathbf{S_2})^2$ dont dépend le potentiel d'interaction [24, 84]. Lors d'un processus de diffusion, l'interaction hyperfine peut donc induire des changements de configuration de spin et donc un couplage entre potentiels d'interaction. Prenons maintenant l'exemple d'une résonance pour laquelle les atomes sont complètement polarisés de spin électronique $m_z = -1/2$ dans un champ magnétique B. Ils interagissent donc par un potentiel triplet. Ce dernier est plus bas en énergie que le potentiel singulet à cause du terme Zeeman du hamiltonien. De manière analogue à la résonance de forme, il se produit une résonance de diffusion lorsque l'énergie du continuum de l'état triplet est proche de l'énergie d'un état moléculaire du potentiel singulet (fig. 2.4). On parle alors de résonance de Feshbach [22, 23]. La condition de résonance peut être atteinte en changeant le champ magnétique car l'énergie de deux atomes polarisés

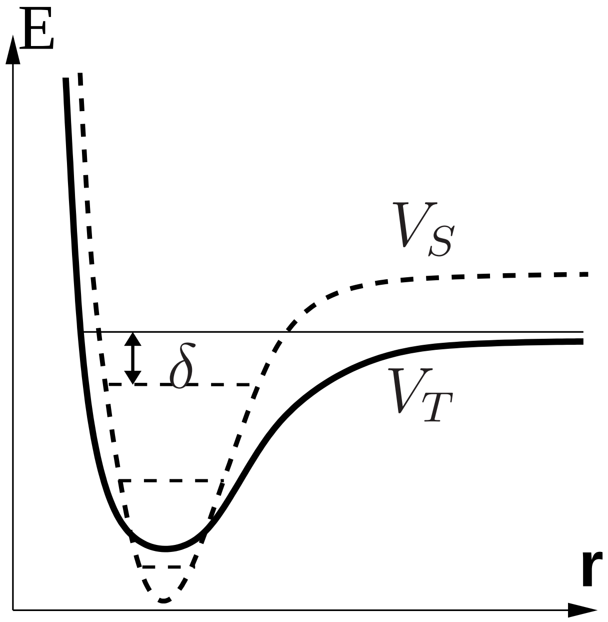

FIGURE 2.4 – *Schéma des potentiels pour un processus de Feshbach. Une résonance de Feshbach a lieu quand l'énergie d'un état lié du potentiel singlet est proche de l'énergie de deux atomes libres ($\delta \sim 0$).*

de spin dépend du champ magnétique alors que le potentiel singulet est indépendant de champ magnétique. Pour décrire la résonance [85], on peut, en général, se contenter d'un seul état moléculaire. Le couplage effectif g_k entre les canaux est alors proportionnel à un terme de couplage entre les états de spin par l'interaction hyperfine et à un terme de recouvrement spatial $\int \mathrm{d}^3 r \psi(\mathbf{r}) u_k(r)$ entre l'état de diffusion (d'impulsion k) du potentiel triplet $u_k(r)$ et l'état moléculaire du potentiel singulet $\psi(\mathbf{r})$. Ce terme de couplage g_k pour une interaction en onde s tend vers une constante g_0.

Hamiltonien effectif

On va maintenant utiliser un hamiltonien effectif à deux corps dans lequel on introduit explicitement un état moléculaire à courte portée dont le décalage en énergie δ par rapport au continuum dépend du champ magnétique [45]. Le couplage entre cet état moléculaire et le continuum est ajouté explicitement dans le hamiltonien. Les interactions directes sont omises et on se place dans le référentiel du centre de masse des deux particules. Le hamiltonien est alors un hamiltonien réduit à une particule :

$$H = \underbrace{\sum_k \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} a_k^\dagger a_k + \delta \ b^\dagger b}_{H_0} + \underbrace{\sum_k \frac{g_k}{\sqrt{\Omega}} (b^\dagger a_k + a_k^\dagger b)}_{V} \tag{2.12}$$

Ω est un volume de quantification, $a_k^\dagger$ et $b^\dagger$ sont respectivement l'opérateur de création d'une paire de particules d'impulsion relative $\hbar k$ et d'une molécule dans l'état lié du potentiel singulet. Ce type de hamiltonien est appelé hamiltonien à deux canaux, par opposition au hamiltonien à un canal où seul le couplage direct entre fermions est présent. Le hamiltonien à deux canaux reproduit la physique des interactions au niveau microscopique. Dans la suite, on montre qu'il permet de retrouver le comportement de la longueur de diffusion et de l'énergie de l'état faiblement lié proche de résonance[6].

Longueur de diffusion proche d'une résonance de Feshbach

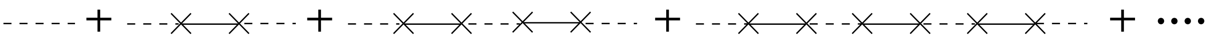

FIGURE 2.5 – *Diagrammes correspondant au propagateur d'une molécule. Les traits pointillés représentent l'état moléculaire $b^\dagger|0\rangle$, les traits continus les états atomiques $a_k^\dagger|0\rangle$. Les symboles $\times$ correspond à une interaction par le potentiel V.*

Le propagateur d'une molécule sans couplage s'écrit :

$$G^0(z) = \langle 0|b \, \frac{1}{z - H_0} \, b^\dagger|0\rangle = \frac{1}{z-\delta} \tag{2.13}$$

En ajoutant le couplage à tous les ordres, ce qui revient à sommer les diagrammes de la figure 2.5 [87], on a donc :

$$G(z) = \sum_n G^0(z)^{n+1}\Sigma(z)^n = \frac{G^0(z)}{1 - G^0(z)\Sigma(z)} \tag{2.14}$$

$$\text{avec la self énergie } \Sigma(z) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \frac{g_k^2}{z - \hbar^2k^2/2m^*} \tag{2.15}$$

L'amplitude de diffusion à énergie nulle f_0 s'écrit alors [87] :

$$f_0 = -a = -\frac{m^*}{2\pi\hbar^2}[g_0^2 G(0)] = \frac{m^*}{2\pi\hbar^2}\frac{g_0^2}{\Sigma(0)+\delta} = \frac{m^*}{2\pi\hbar^2}\frac{g_0^2}{\delta-\delta_0} \text{ , avec } \Sigma(0) = -\delta_0 \tag{2.16}$$

La longueur de diffusion présente donc une divergence pour une certaine valeur de δ et donc du champ magnétique B_0. En fonction de la différence de moment magnétique entre le canal ouvert et le canal fermé $\Delta\mu$, on peut developper $\delta - \delta_0$ autour de la résonance $\delta - \delta_0 = \Delta\mu(B - B_0)$. Si on inclut aussi la longueur de diffusion dans le canal ouvert a_{bg}, on peut alors écrire la longueur de diffusion sous la forme usuelle

$$a = a_{\mathrm{bg}}\left(1 - \frac{\Delta B}{B - B_0}\right) \text{ , avec } \Delta B = \frac{m^*}{2\pi\hbar^2}\frac{g_0^2}{a_{\mathrm{bg}}\Delta\mu} \tag{2.17}$$

où ΔB est la largeur de la résonance. Cette équation montre bien comment une résonance de Feshbach permet de varier la longueur de diffusion en fonction du champ magnétique. On peut donc changer la valeur et même le signe de la longueur de diffusion dans un nuage d'atomes froid, en agissant seulement sur le champ magnétique.

[6] Un traitement similaire, en première quantification, peut être trouvé dans l'annexe A, de la thèse de J. Cubizolles [86].

Etat lié proche d'une résonance de Feshbach

Cherchons maintenant les états liés correspondant au hamiltonien effectif précédent sous la forme générale $|\phi\rangle = \sum_k(\psi_k a_k^\dagger + \alpha b^\dagger)|0\rangle$. Il faut alors résoudre l'équation de Schrödinger :

$$H|\phi\rangle = E|\phi\rangle \text{ , avec } E < 0 \tag{2.18}$$

On trouve un état lié pour $\delta < \delta_0$, et son énergie est alors :[7]

$$E = E_0 - \delta + \delta_0 - \sqrt{(E_0 - \delta + \delta_0)^2 + (\delta - \delta_0)^2} \text{ , avec } E_0 = (\frac{m^{*3/2} g_0^2}{2\pi\hbar^3})^2 \tag{2.19}$$

Dans la limite où $|\delta - \delta_0| \gg E_0$, on a alors $E = -(\sqrt{\delta_0 - \delta} - \sqrt{E_0/2})^2$ qui correspond à un état lié presque uniquement dans le canal fermé. Dans la limite où $|\delta - \delta_0| \ll E_0$, on retrouve $E = -\hbar^2/2m^*a^2$ comme pour l'état lié d'un pseudo-potentiel. Cela correspond à un état lié essentiellement dans le canal ouvert. En effet, la fraction de la fonction d'onde dans le canal fermé est alors $(2|E|/E_0)^{1/2} \ll 1$. Dans ce cas, on trouve aussi $\psi_k \propto (1 + k^2a^2)^{-1}$ qui est la composante de vecteur d'onde k de la fonction d'onde moléculaire[8]. Ce calcul montre que la divergence de a, due à une résonance de Feshbach, correspond comme dans le cas d'une résonance de forme à l'apparition d'un état faiblement lié. La figure 2.6 montre à la fois le comportement de l'état lié et de la longueur de diffision au voisinage d'une résonance de Feshbach.

2.2.3 Un exemple : une résonance en onde s entre des états du ^{6}Li

A titre d'exemple, intéressons nous à la résonance en onde s entre deux atomes dans les deux états de plus basse énergie du ^{6}Li (voir figure 1.2). La figure 2.7 présente la longueur de diffusion en fonction du champ magnétique. La divergence autour de 830 G est caractéristique d'une résonance de Feshbach. Mise à part la résonance, il y a une évolution de la longueur de diffusion de 0 à bas champ, jusqu'à -100 nm à haut champ. Ce changement de la longueur de diffusion est dû à l'évolution entre un potentiel singulet+triplet et un potentiel purement triplet. La combinaison de ces deux effets donne lieu à une longueur de diffusion faiblement négative entre 0 G et 500 G. Vers 545 G, il y a une deuxième résonance d'une largeur de 0,2 G.

La figure 2.8 montre la dépendance en champ magnétique d'un état à deux corps dans le canal ouvert et celle des états liés. Proche de la résonance large, l'énergie de l'état lié se courbe jusqu'à tangenter l'énergie du continuum et disparaître exactement à résonance ; le moment magnétique de l'état lié est alors semblable au moment magnétique de deux atomes dans le canal ouvert. Au dessus de résonance, on n'a plus d'état lié.

Il est intéressant de noter qu'une résonance de Feshbach très similaire existe pour deux atomes de ^{7}Li dans l'état fondamental (figure 2.9). Pour le ^{7}Li, le potentiel triplet a une

[7] On peut aussi trouver directement l'énergie de l'état lié en cherchant le pôle du propagateur $G(z)$ des molécules.

[8] Ce résultat correspond bien à la transformée de Fourier d'une fonction d'onde en $\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-r/a}$

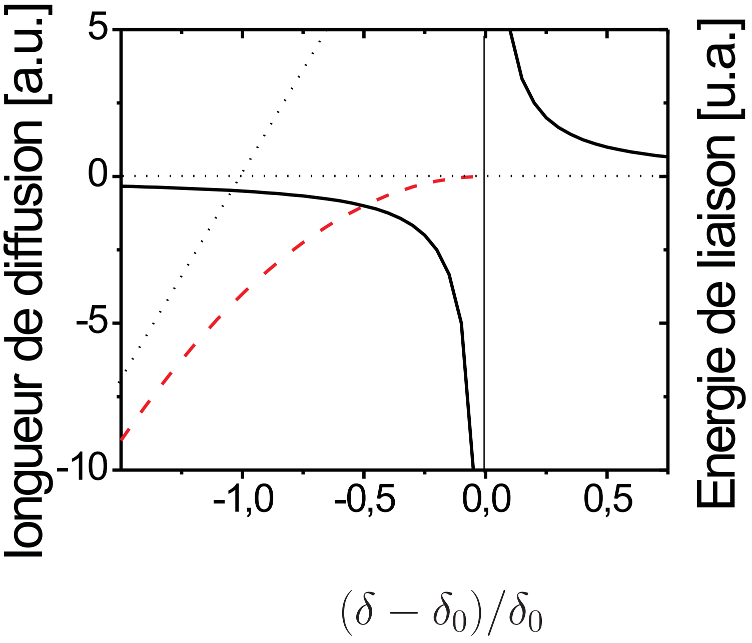

FIGURE 2.6 – *Longueur de diffusion (trait plein) et énergie de l'état faiblement lié (tirets) au voisinage d'une résonance de Feshbach. Les pointillés fins correspondent à l'énergie de deux atomes dans le canal ouvert qui est arbitrairement fixé à zéro, et à l'énergie de l'état moléculaire non couplé (ligne pointillé oblique). Le pic de la résonance de Feshbach est décalé de δ_0 par rapport à la coincidence des énergies en l'absence de couplage. La courbure de l'énergie de l'état lié provient d'une sorte d'anticroisement entre les états atomiques et l'état moléculaire lié.*

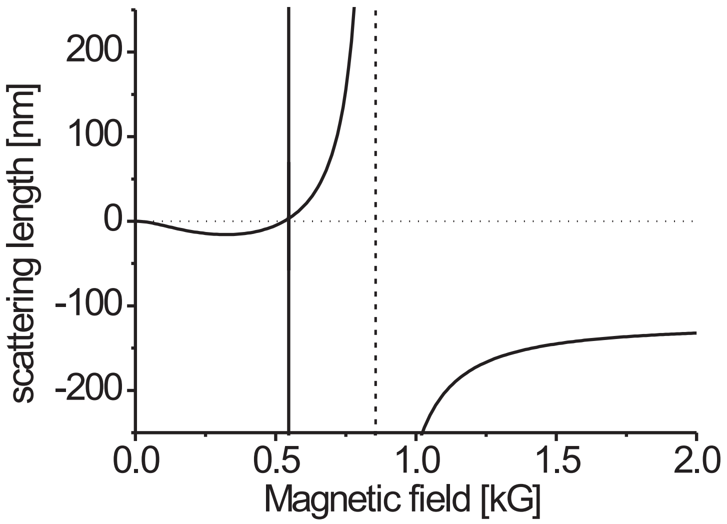

FIGURE 2.7 – *Longueur de diffusion entre deux atomes de ^{6}Li dans les états $|1/2, 1/2\rangle$ et $|1/2, -1/2\rangle$ en fonction du champ magnétique. On note la présence d'une résonance de Feshbach large vers 830 G et d'un résonance étroite vers 545 G.*

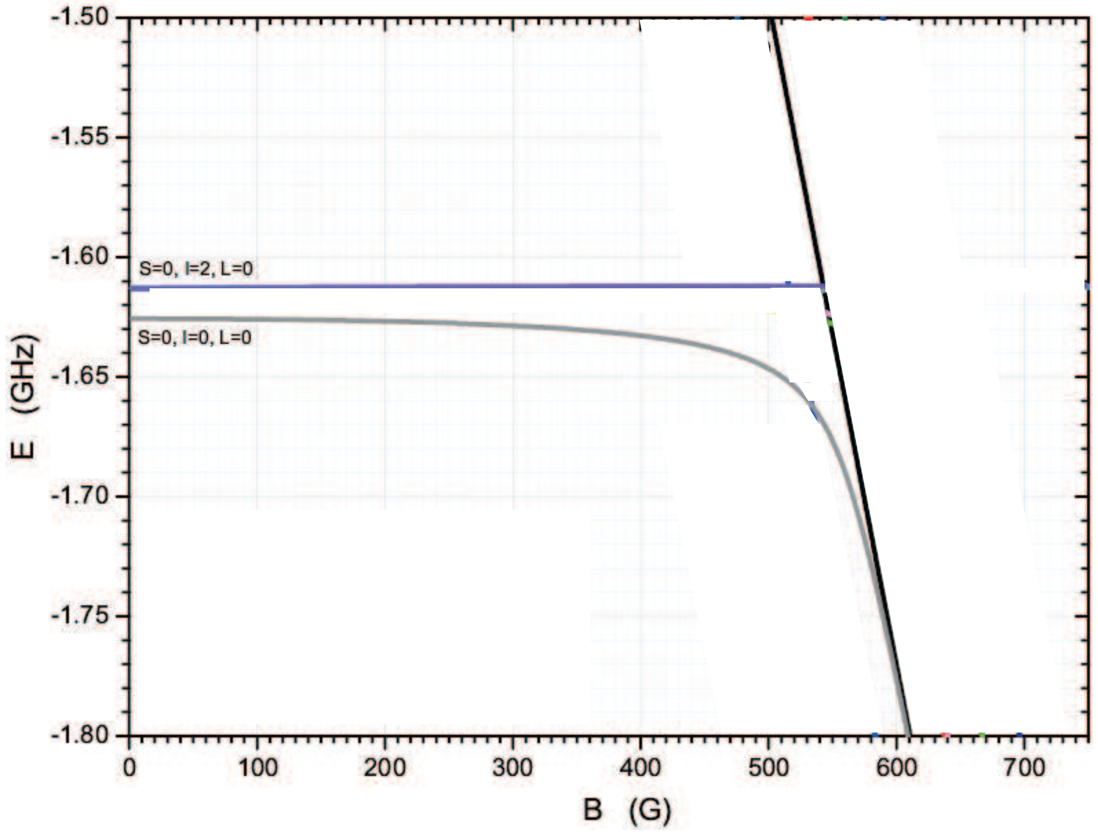

FIGURE 2.8 – *Energies en fonction du champ magnétique des états à deux corps responsables de la résonance de Feshbach du ^{6}Li. En trait plein : somme des énergies de deux atomes libres. En trait pointillé : niveaux d'énergie des états moléculaires du potentiel singulet. Le canal $S = 0, I = 0, l = 0$ est responsable de la résonance de Feshbach située autour de 830 G entre les états $|1/2, 1/2\rangle$ et $|1/2, -1/2\rangle$. Cette état moléculaire se courbe nettement avant de tangenter le continuum atomique et de disparaître à la résonance qui est situé hors de la figure. Le niveau défini par les nombres quantiques $S = 0, I = 2, l = 0$ donne lieu à la résonance étroite située vers 545 G. A cette échelle, le courbure de l'état lié est invisible.*

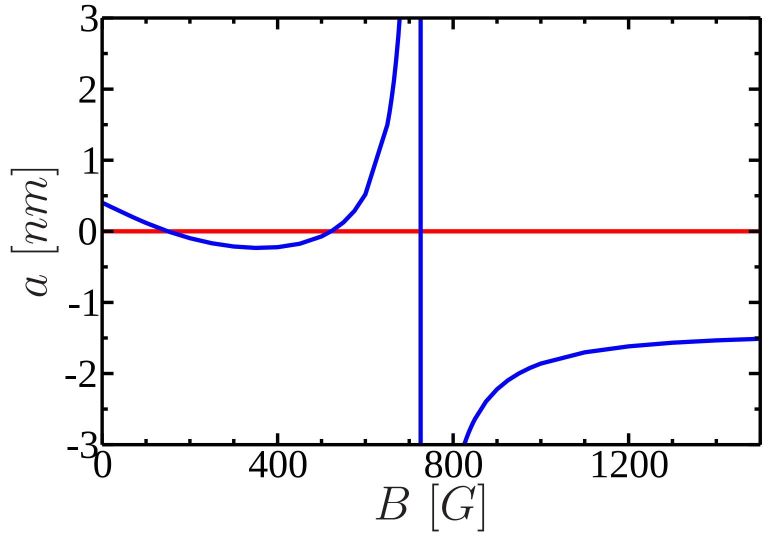

FIGURE 2.9 – *Longueur de diffusion entre atomes de ^7Li dans l'état $|1,1\rangle$ en fonction du champ magnétique B.*

longueur de diffusion de -2 nm et on a globalement les mêmes variations de la longueur de diffusion à une échelle réduite. Cette résonance a été étudiée et elle a permis de former, dans la région où a est faiblement négative ($a \sim -0.2$ nm), un soliton brillant d'onde de matière, c'est-à-dire un condensat dans un régime unidimensionnel où la dispersion est compensée par des interactions attractives [32, 33, 34].

Ces exemples montrent bien l'utilité des résonances de Feshbach qui permettent d'étudier des régimes d'interaction complètement différents. On peut faire varier la longueur de diffusion entre atomes sur plusieurs ordres de grandeur et même de changer son signe. Dans la suite, on s'intéressera surtout à la résonance de Feshbach entre les deux états de plus basse énergie du ^{6}Li. Cette résonance permet d'explorer le régime d'interaction forte dans un gaz de fermions, et de former un gaz de molécules bosoniques faiblement liées, stables et eventuellement condensées (chapitres 4, 5 et 6).

Chapitre 3

Refroidissement fermionique, effet des pertes

Après une introduction à notre technique de refroidissement sympathique du ^{6}Li par évaporation du ^{7}Li , ce chapitre est consacré à l'étude théorique de l'effet de chauffage induit par les pertes dans un gaz de Fermi dégénéré. Deux modèles sont présentés ; le refroidissement d'une mer de Fermi par un condensat pur et l'évaporation de deux mers de Fermi en interaction. Le premier modèle a fait l'objet d'un article en collaboration avec L. Carr et Y. Castin [59].

3.1 Refroidissement d'un gaz de fermions.

3.1.1 Principe du refroidissement

La technique du refroidissement évaporatif a, pour l'instant, toujours été nécessaire pour obtenir des gaz ultrafroids dans le régime de dégénérescence quantique [88]. Cette technique consiste à retirer du gaz les atomes les plus énergétiques tout en gardant le gaz toujours très proche de l'équilibre thermique. Les atomes restants thermalisent alors à une température plus basse [89, 90]. L'efficacité de l'évaporation dépend du rapport $\Gamma_{\mathrm{el}}/\Gamma_{\mathrm{inel}}$ entre le taux de pertes inélastiques et le taux de collisions élastiques assurant la thermalisation [91]. Pour être dans le régime d'emballement, il faut $\Gamma_{\mathrm{el}}/\Gamma_{\mathrm{inel}} \gtrsim 150$.

Pour des fermions polarisés, il n'y a pas de collision en onde s à basse température et il n'est donc pas possible d'évaporer un tel gaz. Pour avoir des collisions, on a besoin soit de deux états de spin différents [38, 41, 42], soit deux atomes différents. (en pratique, on prend alors un boson et un fermion) [39, 40, 43, 44, 92]. Dans la première catégorie, on peut citer les expériences de D. Jin [38] sur le ^{40}K dans un piège magnétique, et celles de J. Thomas [41] et R. Grimm [42] sur le ^{6}Li directement dans un piège optique. Les mélanges boson-fermion ayant permis d'atteindre le régime quantique sont : ^{7}Li -^{6}Li dans notre équipe [39] et dans celle de R. Hulet [40], ^{23}Na-^{6}Li dans l'équipe de W. Ketterle [43], et ^{87}Rb-^{40}K dans les équipes de M. Inguscio [44] et D. Jin [92].

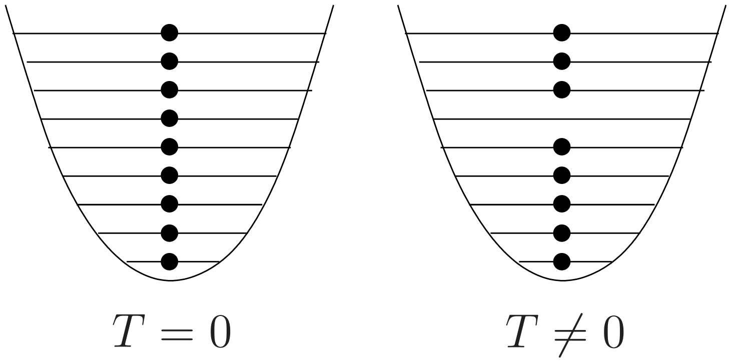

FIGURE 3.1 – *Effet de la perte d'un atome dans un nuage de fermions à température nulle. L'énergie à retirer du sytème pour revenir dans l'état fondamental est de l'ordre de E_{F}.*

Dans le cas d'un mélange entre deux états de spin différents, le mieux est d'évaporer les deux états de façon équivalente. Dans le cas d'un mélange fermions-bosons, le plus simple est d'évaporer le gaz de boson comme si il était seul, et le gaz de fermions est refroidi par contact thermique avec les bosons [1]. Cette méthode est particulièrement efficace si on peut se placer dans des conditions où on forme un condensat de bosons [43][2]. Une température de l'ordre de $0.05\,T_{\mathrm{F}}$ a été obtenue. Nous montrons dans la suite que, dans tous les cas, un effet de chauffage induit par les pertes de fermions limitera la température que l'on peut atteindre dans un tel gaz.

3.1.2 Chauffage induit par les pertes

L'effet de chauffage induit par les pertes dans un gaz de fermions fut décrit pour la première fois dans un article d'E. Timmermans [94]. L'argument est simple. Si on enlève une particule d'une mer de Fermi à $T = 0$, le système n'est plus dans son état fondamental, on a donc chauffé le gaz (fig. 3.1). Cet effet est spécifique d'un gaz de fermions dégenéré, il est absent pour un gaz classique ou un condensat de Bose-Einstein. Plus précisément, considérons un gaz de N fermions dans une boite à $T \ll T_{\mathrm{F}}$. L'énergie moyenne par particule est alors donnée par un développement de Sommerfeld :

$$\langle E \rangle = \frac{3}{5} E_F \left(1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + O\left(\left(\frac{T}{T_F} \right)^4 \right) \right). \qquad (3.1)$$

Ajoutons maintenant un taux de perte γ indépendant de l'énergie. Après un intervalle de temps δt, certains atomes sont perdus ; l'énergie moyenne par atome est alors conservée,

[1]Dans le groupe de R. Hulet, ils évaporent simultanement un mélange ^{7}Li -^{6}Li , ce qui apparemment améliore le nombre d'atomes au seuil de dégénérescence fermionique [93].

[2]Notons ici, les deux difficultés qui surviennent dans notre expérience avec un mélange ^{7}Li -^{6}Li. Premièrement, l'évaporation de ^{7}Li n'est pas très efficace à cause d'un taux de perte dipolaire importante [39, 75]. Deuxièmement, le condensat de ^{7}Li est instable à cause d'une longueur de diffusion négative.

mais l'énergie de Fermi définie à partir de la densité est réduite. A partir de l'équation 3.1, en supposant une thermalisation du gaz, on peut calculer l'augmentation de température en fonction du temps :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{8}{5\pi^2}\frac{T_{\mathrm{F}}^2}{T}\gamma \tag{3.2}$$

Cette augmentation de la température se comporte comme $1/T$ à basse température. Des pertes même faibles induisent donc un chauffage. Elles peuvent donc limiter l'efficacité d'un processus de refroidissement. Les deux parties suivantes sont consacrées à une étude précise de deux cas particuliers, le refroidissement d'un gaz de fermions par un condensat pur et l'évaporation forcée d'un gaz de fermions à deux composantes.

3.2 Limite du refroidissement par un condensat pur

3.2.1 Modèle théorique

On s'intéresse d'abord à la thermalisation d'un gaz de Fermi en contact thermique avec un condensat à $T = 0$. Les calculs sont effectués, pour simplifier, dans une boite de volume Ω. On se limite à une approche dans la limite thermodynamique, et on utilise la règle d'or de Fermi, pour déduire une équation de Bolzmann quantique. Un calcul plus détaillé de la théorie des perturbations, incluant éventuellement des états discrets, peut être trouvé dans l'article écrit avec L. Carr, et Y. Castin [95] [3].

Dans l'onde s, le potentiel d'interaction est en seconde quantification

$$V = g\frac{1}{\Omega}\sum_{k,k',q,q'} f_{k'}^{+} f_k b_{q'}^{+} b_q \delta^3(\mathbf{k}' + \mathbf{q}' - \mathbf{k} - \mathbf{q}) \text{ , avec } g = 2\pi\hbar^2 a\left(\frac{1}{m_{\mathrm{B}}} + \frac{1}{m_{\mathrm{F}}}\right) \tag{3.3}$$

où $f^\dagger$, f, $b^\dagger$, b sont les opérateurs de création et d'annihilation pour les fermions et les bosons respectivement, m_{B} (m_{F}) est la masse des bosons (fermions), a est la longueur de diffusion fermion-boson. Intéressons nous maintenant au taux de transition $\gamma(\mathbf{k} \to \mathbf{k}')$ d'un état initial $|\mathrm{ini}\rangle$, avec un fermion d'impulsion $\mathbf{k}$, vers un état final $|\mathrm{fin}\rangle$, avec un fermion d'impulsion $\mathbf{k}'$. Dans ce processus, un boson est diffusé en dehors du condensat. La règle d'or de Fermi donne :

$$\gamma(\mathbf{k} \to \mathbf{k}') = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle\mathrm{ini}|V|\mathrm{fin}\rangle|^2\delta(E_f - E_i) = \frac{4\pi}{\hbar^3\Omega}g^2 n_0 \delta(\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2}{m_{\mathrm{B}}} - \frac{\mathbf{k}^2}{m_{\mathrm{F}}} + \frac{\mathbf{k}'^2}{m_{\mathrm{F}}}) \tag{3.4}$$

où n_0 est la densité du condensat. Cette dernière est supposée indépendante du temps pour se focaliser sur l'effet des pertes fermioniques. Expérimentalement, cela correspond à la situation d'un nombre important d'atomes dans le condensat pour un petit nombre de fermions. A partir des taux de transition, on déduit une équation de Bolzmann quantique

[3] Du plus, nos approximations sont validées par une méthode Monte-Carlo quantique.

pour la population $N(\mathbf{k})$ de l'état d'impulsion $\mathbf{k}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial N(\mathbf{k})}{\partial t} &= -\gamma N(\mathbf{k}) \\
&- \int \frac{\Omega \mathrm{d}^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\gamma(\mathbf{k}\rightarrow\mathbf{k}')(1-N(\mathbf{k}'))N(\mathbf{k}) \\
&+ \int \frac{\Omega \mathrm{d}^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\gamma(\mathbf{k}'\rightarrow\mathbf{k})(1-N(\mathbf{k}))N(\mathbf{k}')
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Les différents termes correspondent respectivement à la probabilité de perte, de départ et d'arrivée vers un état d'impulsion $\mathbf{k}$. La statistique de Fermi est prise en compte par les facteurs $(1 - N(\mathbf{k}))$ dans les intégrales. Le problème étant à symétrie sphérique, on peut calculer les intégrales angulaires pour trouver une équation qui ne dépend plus que du module de $\mathbf{k}$. De plus, pour avoir une équation sans dimension, on normalise les impulsions par l'impulsion du niveau de Fermi initial k_F. Un temps caractéristique d'évolution est alors donné par le taux de collision classique d'une particule au niveau de Fermi avec le condensat, soit $\Gamma_F = n_0\sigma v_\mathrm{F}$, où v_F est la vitesse au niveau de Fermi. En utilisant les variables adimensionnées $\tilde{k} = k/k_F$, $\tilde{t} = \Gamma_F t$, $\tilde{\tau} = \gamma/\Gamma_F$, on trouve alors l'équation suivante pour l'évolution de $N(k)$

$$
\frac{\partial N(\tilde{k})}{\partial \tilde{t}} = -\tilde{\tau}N(\tilde{k}) \tag{3.6}
$$

$$
-\frac{(1+\alpha)^2}{2\alpha}\frac{1}{\tilde{k}}\int_{\frac{|\alpha-1|}{\alpha+1}\tilde{k}}^{\tilde{k}} \tilde{k}'\mathrm{d}\tilde{k}'(1-N(\tilde{k}'))N(\tilde{k}) \tag{3.7}
$$

$$
+\frac{(1+\alpha)^2}{2\alpha}\frac{1}{\tilde{k}}\int_{\tilde{k}}^{\frac{\alpha+1}{|\alpha-1|}\tilde{k}} \tilde{k}'\mathrm{d}\tilde{k}' N(\tilde{k}')(1-N(\tilde{k})) \tag{3.8}
$$

où $\alpha = m_\mathrm{B}/m_\mathrm{F}$. Cette équation est résolue numériquement.

3.2.2 Résultats des simulations numériques

L'évolution typique de la distribution est représentée sur la figure 3.2 pour deux cas expérimentalement pertinents, les mélanges ^{6}Li -^{7}Li et ^{6}Li -^{23}Na, qui se différencient par des rapports de masses différents. La distribution initiale est une fonction de Fermi avec $k_\mathrm{B}T/\mu = 0.7$. On peut essentiellement séparer l'évolution de la distribution en deux phases, d'abord la distribution prend une forme caractéristique, ensuite le nombre d'atomes diminue progressivement mais la distribution garde la même forme. A la fin de la première phase, la mémoire de la distribution initiale est perdue. Seul le nombre de fermions initial, et donc k_F, joue un role. Il est important de noter que même pendant la deuxième phase, quand un état de quasi-équilibre est atteint, la distribution n'est pas exactement une distribution de Fermi. On voit par exemple que la distribution va plus vite vers zéro pour $k > k_\mathrm{F}$ qu'elle ne va vers 1 pour $k < k_\mathrm{F}$. De plus, pour des masses différentes un trou dans la distribution apparaît proche de $k = 0$. La présence de ce

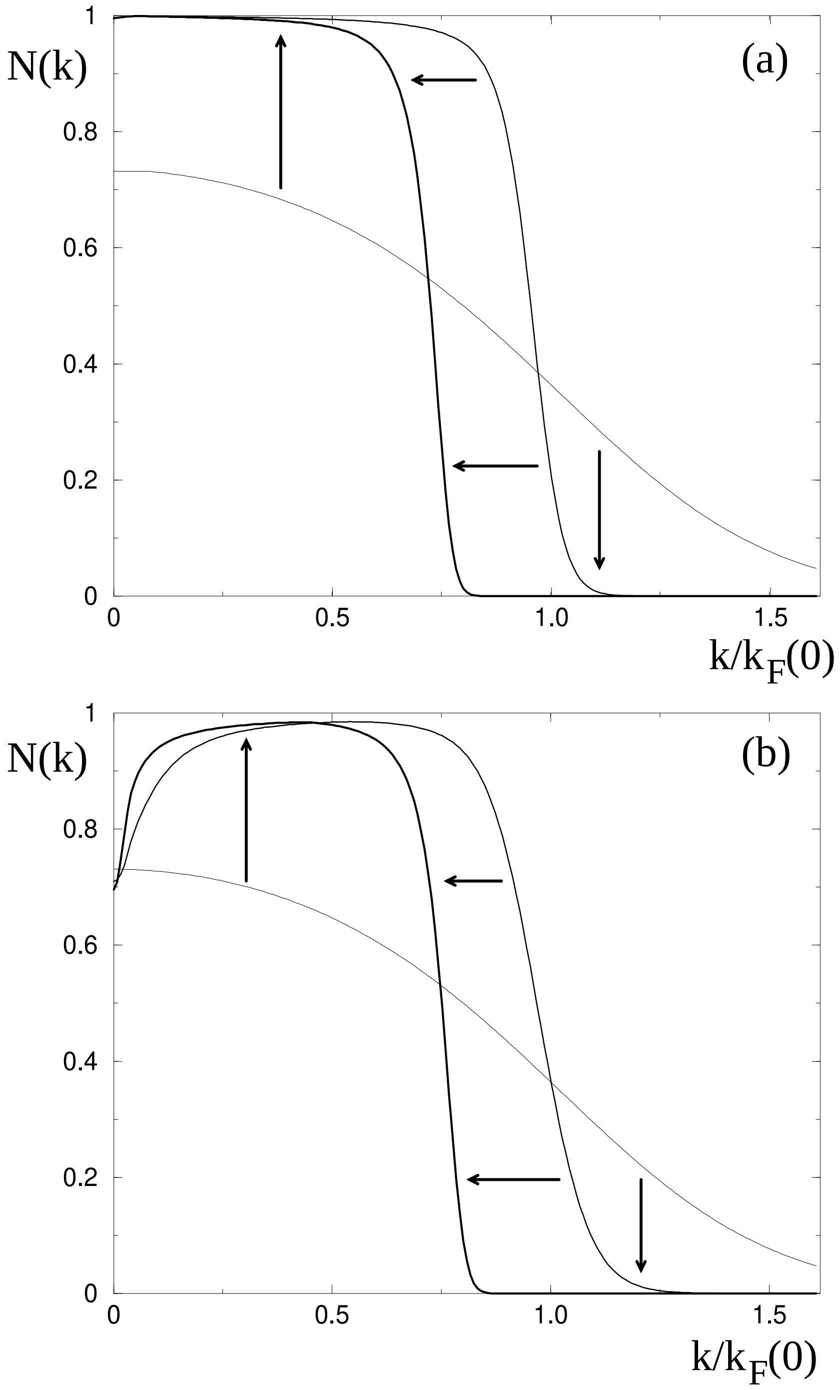

FIGURE 3.2 – *Evolution en temps de la distribution en impulsion d'un gaz de Fermi refroidi par un reservoir parfait de bosons condensés dans deux cas pratiques : (a)* ^{7}*Li-*^{6}*Li et (b) mélange* ^{23}Na-^{6}*Li . La courbe fine correspond à l'état initial* $(k_B T/\mu) = 0.7$. *La courbe moyenne correspond à la distribution quand le paramètre de dégénérescence est maximum. La courbe en trait gras représente la distribution après une évolution plus longue. Le trou à* $k = 0$ *est physique ; la thermalisation des états de basse énergie est peu efficace pour des masses différentes. Les paramètres sont* $\gamma/\Gamma_F \approx 8.27 \times 10^{-3}$ *pour (a) et* $\gamma/\Gamma_F \approx 1.25 \times 10^{-2}$ *pour (b).*

trou est due à une baisse du taux de termalisation à basse énergie [4]. Il n'influence que peu la dynamique du système car la densité d'état est proportionnelle à k et il y a donc très peu d'atomes dans cette zone. Comme l'équilibre thermodynamique n'est jamais atteint, la définition thermodynamique de la température ne s'applique pas. Dans la suite, j'appellerai température d'une distribution hors équilibre, la température qu'aurait une distribution de Fermi de même énergie totale et même nombre d'atomes. Le rapport T/μ, qui donne le degré de dégénérescence, est tracé en fonction du temps sur la figure 3.3. Pendant la première phase de simulation, ce rapport diminue pour atteindre une valeur minimum avant de remonter pendant la deuxième phase. Cette remontée s'explique par la diminution du nombre d'atomes, de l'énergie de Fermi et donc du taux de collision à l'énergie de Fermi. On constate que la dégénérescence maximum ne dépend que du

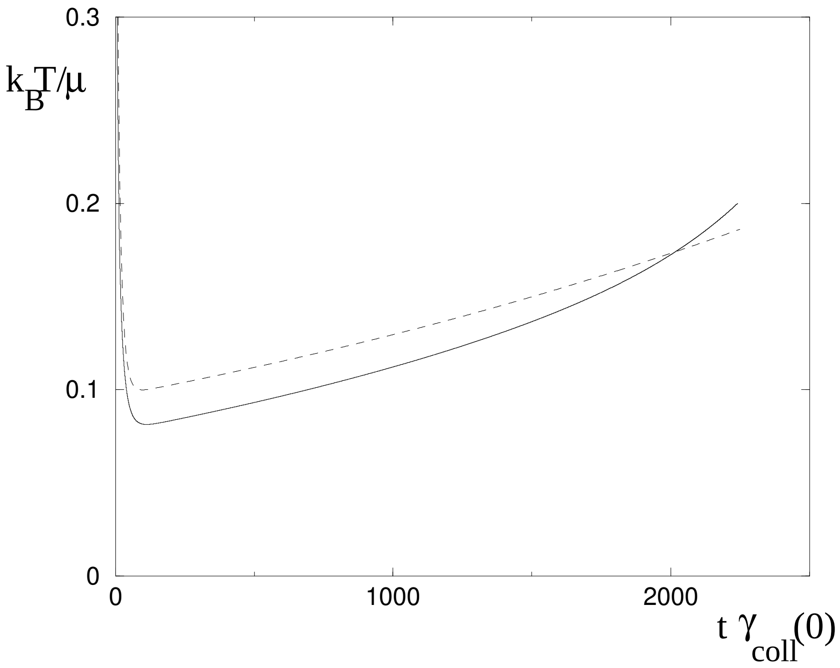

FIGURE 3.3 – *Evolution de la dégénérescence du gaz de Fermi en fonction du temps (ligne continue). Les paramètres sont $\gamma/\Gamma_{\mathrm{F}} = 8.27 \times 10^{-3}$ et $(k_{\mathrm{B}}T/\mu)(t = 0) = 0.7$. La ligne pointillée correspond à la prédiction analytique ci-dessous.*

paramètre γ/Γ_F, c'est-à-dire du taux de mauvaises collisions sur le taux de bonnes collisions (figure 3.4). Evidemment, plus ce rapport est petit, plus on peut atteindre des

[4]On le voit facilement car les bornes des intégrales de l'équation 3.6 se rapprochent l'une de l'autre à basse énergie.

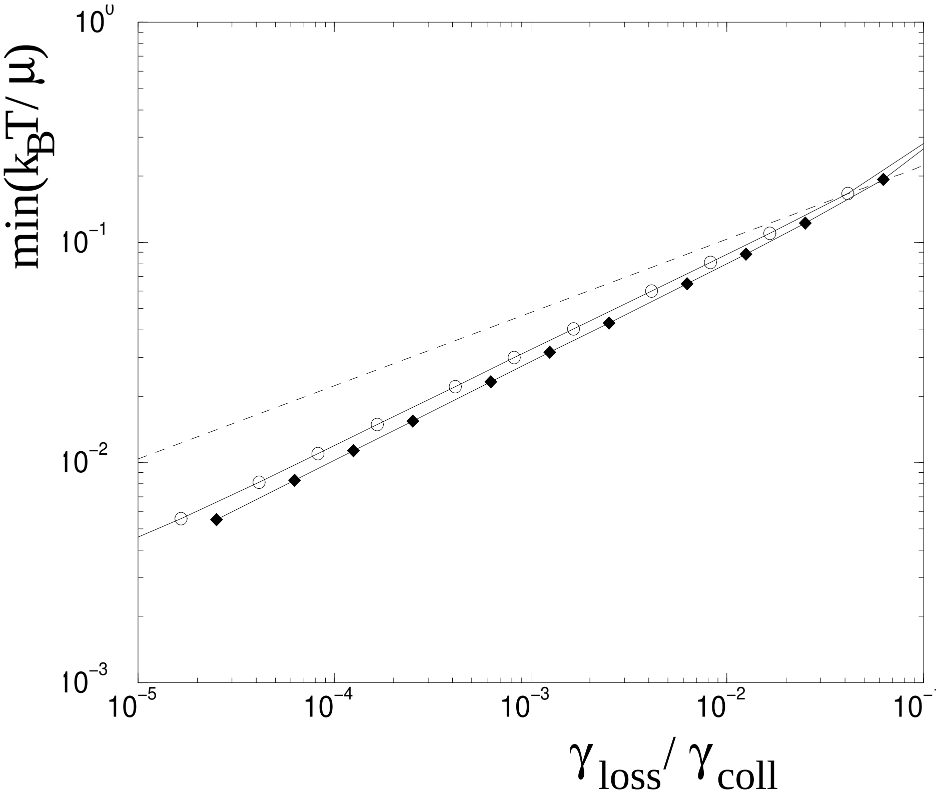

FIGURE 3.4 – *Détermination numérique du maximum de dégénérescence en fonction du paramètre* γ/Γ_F *obtenu dans le cas d'un mélange* ^{7}*Li-*^{6}*Li (cercles ouverts) et d'un mélange* ^{23}*Na-*^{6}*Li (disque). La ligne pointillé correspond à la prédiction analytique ci-dessous.*

températures faibles. On trouve deux lois de puissance très proches

$$\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\mu} = 0.659 \left(\frac{\gamma}{\Gamma_F}\right)^{0.436} \tag{3.9}$$

$$\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\mu} = 0.621 \left(\frac{\gamma}{\Gamma_F}\right)^{0.445} \tag{3.10}$$

pour les mélanges ^{6}Li -^{7}Li et ^{6}Li -^{23}Na respectivement.

3.2.3 Prédictions analytiques

Pour mieux comprendre les résultats précédents, cherchons maintenant une solution approchée à l'équation d'évolution 3.6. Pour cela, on suppose que la distribution reste proche d'une distribution de Fermi caractérisée seulement par deux paramètres, le potentiel chimique et la température. Pour simplifier, on suppose aussi $m_{\mathrm{F}} = m_{\mathrm{B}}$, et on prend la limite basse température $k_{\mathrm{B}}T \ll \mu$. A partir de l'équation d'évolution, on peut trouver une équation d'évolution de l'énergie :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\gamma E + \int \frac{\Omega \mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right) \frac{\partial N(k)}{\partial t} \tag{3.11}$$

En utilisant un développement de type Sommerfeld, on arrive alors à l'équation suivante pour la dérivée de l'énergie :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\gamma E - 3\zeta(3)\Gamma_F N E_F (T/\mu)^3 \tag{3.12}$$

Cette dernière quantité peut aussi être calculée à partir du développement à basse température de l'énergie (Eq. 3.1). On trouve donc une équation d'évolution pour le rapport $k_{\mathrm{B}}T/\mu$.

$$\frac{\mathrm{d}(T/\mu)^2}{\mathrm{d}t} = \frac{8}{5\pi^2}\gamma - \frac{12\zeta(3)}{\pi^2}\Gamma_F (T/\mu)^3 \tag{3.13}$$

Le membre de droite est la somme de deux termes, l'un de chauffage, l'autre de refroidissement. Le fait que le terme de refroidissement soit proportionnel à T^3 peut s'expliquer facilement. Le taux de collisions dans un gaz de Fermi à basse température est proportionnel à $\Gamma_F (k_{\mathrm{B}}T/\mu)^2$ à cause du blocage de Pauli [96]. De plus, l'énergie transférée à un boson dans une collision est de l'ordre $k_{\mathrm{B}}T$. Par conséquent, le terme de refroidissement est logiquement proportionnel à T^3.

Dans la limite où $\gamma \ll \Gamma_F$, ce qui correspond aux cas expérimentaux, on retrouve les deux étapes décrites dans la partie précédente (fig. 3.3). D'abord, le refroidissement domine et $k_{\mathrm{B}}T/\mu$ suit approximativement une loi de puissance.

$$\left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\mu}\right)(t) \sim \frac{1}{6\zeta(3)\pi^{-2}\Gamma_F(0)t + (\mu/k_{\mathrm{B}}T)(0)} \tag{3.14}$$

Après un certain temps $t_{\min}$, $k_{\mathrm{B}}T/\mu$ atteint ensuite une valeur minimum.

$$\left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\mu}\right)_{\min} = \left[\frac{2}{15\zeta(3)}\frac{\gamma}{\Gamma_F(0)}\right]^{1/3} \tag{3.15}$$

$$t_{\min} \approx \Gamma_F(0)^{-2/3}\gamma^{-1/3} \tag{3.16}$$

Comme $t_{\min}\gamma \ll 1$, on atteint donc le minimum en température en n'ayant quasiment pas perdu d'atomes. Enfin, dans une deuxième phase, le chauffage se manifeste comme une augmentation adiabatique de $k_{\mathrm{B}}T/\mu$, obtenue en négligeant le terme $\mathrm{d}(k_{\mathrm{B}}T/\mu)^2/\mathrm{d}t$ dans l'équation 3.13. La valeur de $k_{\mathrm{B}}T/\mu$ est alors obtenue en remplaçant $\Gamma_F(0)$ par $\Gamma_F(t) = \Gamma_F(0)\exp(-\gamma t/3)$ dans l'equation 3.15. La courbe en pointillé de la figure 3.3 correspond à la solution analytique. Elle reproduit bien le comportement trouvé numériquement.

La valeur minimum de $k_{\mathrm{B}}T/\mu$ est légèrement fausse, comme le montre la courbe pointillée de la figure 3.4. La différence entre les lois de puissance trouvées analytiquement (1/3) et numériquement (≈ 0.44) illustre le fait que la distribution n'est pas exactement une distribution de Fermi.

3.2.4 Comparaison avec les expériences

Le principal problème qui se pose pour pouvoir comparer quantitativement les résultats expérimentaux à notre modèle est la différence entre une boite cubique et un piège harmonique. Pour faire le calcul dans un piège harmonique, le problème est la séparation spatiale entre le nuage de fermions et le condensat ; ainsi, classiquement, certains fermions de moment cinétique non nul ne passent jamais au centre de piège et leur interaction avec un condensat est réduite. L'argument précédent montre bien que le couplage ne dépend plus seulement de l'énergie, et il faut donc traiter l'espace de Hilbert dans son ensemble. J'ai essayé de résoudre le problème numériquement dans la base $|n_x, n_y, n_z\rangle$ séparant les trois directions d'oscillation. Numériquement, le calcul était trop long, cependant, à partir de résultats préliminaires, il semble que la surface de Fermi n'est pas trop déformée et que la distribution dépend principalement de l'énergie. On peut donc s'attendre à ce que, pour un piège harmonique, les résultats précédents s'appliquent à des facteurs numériques près. Pour estimer le taux de thermalisation dans un piège harmonique, on peut prendre par exemple prendre $n_0 = 3N_{\mathrm{bosons}}/(4\pi R_{\mathrm{F}}^3)$, où R_{F} est le rayon de Fermi, pour la densité des bosons condensés. Cela revient à prendre la densité moyenne des bosons dans la région où il y a des fermions. Cela suppose que l'interaction de champ moyen entre les atomes n'est pas assez forte pour induire un collapse ou une séparation de phase du système.

Expérimentalement, au MIT le refroidissement dans un piège magnétique dans gaz de ^{6}Li par un condensat de ^{23}Na permet d'obtenir des températures $T \leq 0.05^{+0.03}_{-0.02}T_{\mathrm{F}}$ [97], avec $N_{\mathrm{fermions}} = 10^7$ et $N_{\mathrm{bosons}} = 6 \times 10^6$. Comme la longueur de diffusion entre ces deux espèces est prédite à $31a_0$, on trouve alors un facteur $\Gamma_F \approx 2\,\mathrm{s}^{-1}$. Compte tenu d'un temps de vie qui est de l'ordre de 100 s pour les fermions, cela correspond à un facteur $\gamma/\Gamma_F \approx 2 \times 10^{-3}$, correspondant alors à $T/T_{\mathrm{F}} \approx 0.04$ selon notre modèle. Cette valeur est de l'ordre de la valeur expérimentale, et on peut donc dire que le chauffage dû aux pertes avec le gaz résiduel empèchera de descendre beaucoup plus bas en température. Concernant notre expérience avec un mélange ^{6}Li -^{7}Li , nous ne sommes pas dans les conditions du modèle. En effet, le nombre d'atomes dans le condensat est limité à cause de son effondrement dû à une longueur de diffusion négative.

3.3 Evaporation de deux mers de Fermi en interaction

3.3.1 Modèle théorique

Intéressons nous maintenant à l'évaporation de deux gaz de Fermi dégénérés en interaction. Ce problème a été étudié en 2000, par M. Holland, B. DeMarco, et D. S. Jin dans un piège harmonique [98], cependant l'effet de chauffage dû aux pertes n'était pas discuté [5]. Les hypothèses sont à peu près les même que précédemment. On suppose de plus que les masses des fermions sont égales et que les distributions initiales des deux mers de Fermi sont identiques. Par symétrie, les distributions seront alors décrites, pour tout temps, par une seule fonction à une seule variable, la probabilité d'occupation $N(k)$ d'un état d'impulsion k. Le potentiel d'interaction est

$$V = g\frac{1}{\Omega}\sum_{k_1,k_2,k_1',k_2'} f^\dagger_{1,k_1'} f_{1,k_1} f^\dagger_{2,k_2'} f_{2,k_2}\delta^3(\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}-\mathbf{k_1'}-\mathbf{k_2'}) \text{ , avec } g=\frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \tag{3.17}$$

où $f_1, f_1^\dagger, f_2, f_2^\dagger$ sont les opérateurs de création et d'annihilation pour les deux fermions. On peut alors définir un taux de transition $\gamma(\mathbf{k_1},\mathbf{k_2}\rightarrow\mathbf{k_1'},\mathbf{k_2'})$ d'un état où deux fermions d'impulsion $\mathbf{k_1}$ et $\mathbf{k_2}$ entrent en collision et sont diffusés vers $\mathbf{k_1'}$ et $\mathbf{k_2'}$.

$$\gamma(\mathbf{k_1},\mathbf{k_2}\rightarrow\mathbf{k_1'},\mathbf{k_2'}) = \frac{2\pi}{\hbar}|<\mathrm{ini}|V|\mathrm{fin}>|^2\delta(E_f-E_i) = \frac{4m\pi}{\hbar^3\Omega^2}g^2\delta(\mathbf{k_1}^2+\mathbf{k_2}^2-\mathbf{k_1'}^2-\mathbf{k_2'}^2) \tag{3.18}$$

On en déduit ensuite une équation d'évolution de $N(k)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial N(k)}{\partial t} &= -\int\frac{\Omega \mathrm{d}^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\int\frac{\Omega\mathrm{d}^3\mathbf{k_2}}{(2\pi)^3}\gamma(\mathbf{k},\mathbf{k_2}\rightarrow\mathbf{q},\mathbf{k_2'})(1-N(q))(1-N(k_2'))N(k)N(k_2)\\ &+\int\frac{\Omega\mathrm{d}^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\int\frac{\Omega\mathrm{d}^3\mathbf{k_2'}}{(2\pi)^3}\gamma(\mathbf{q},\mathbf{k_2}\rightarrow\mathbf{k},\mathbf{k_2'})(1-N(k))(1-N(k_2'))N(q)N(k_2)+\tau N(k)\end{aligned} \tag{3.19}$$

Comme précédemment certaines intégrales angulaires peuvent être calculées directement. La symétrie sphérique permet de calculer deux intégrales angulaires, et autour de la direction de $\mathbf{k}$ la symétrie cylindrique permet de calculer encore une intégrale. Il reste alors une équation d'évolution faisant intervenir trois intégrales. En mettant l'équation sous une forme adimensionnée, on trouve un taux caractéristique d'évolution donné par

[5] En fait, cet article utilise une distribution de Fermi tronquée pour tout temps, et il semble que cette hypothèse permette un refroidissement jusqu'à la température nulle même en présence de pertes.

$\Gamma_F = \frac{mg^2}{3(2\pi\hbar)^3}k_F^4$. Ce taux a une interprétation claire, c'est le taux de collision classique pour une particule au niveau de Fermi ; $\Gamma_F = n(4\pi a^2)v_F$ où la densité est maintenant la densité de fermi $n = k_F^3/6\pi^2$ (dans une boite). L'équation d'évolution s'écrit alors en utilisant les même paramètres adimensionnés que précédemment :

$$\frac{\partial P(\tilde{k})}{\partial \tilde{t}} = -\int d\tilde{k_2}\tilde{u}\tilde{k_2}^2 \int dc_a \int dc_b (1 - P(\tilde{q}))(1 - P(\tilde{k_2'}))P(\tilde{k})P(\tilde{k_2})$$
$$+ \int d\tilde{k_2'}\tilde{u}\tilde{k'}_2^2 \int dc_a \int dc_b (1 - P(\tilde{k}))(1 - P(\tilde{k_2'}))P(\tilde{q})P(\tilde{k_2}) \quad (3.20)$$
$$-\tilde{\gamma}P(k) \quad (3.21)$$

où c_a et c_b correspondent au cosinus des angles $(\mathbf{k}, \mathbf{k_2})$ et $(\mathbf{k}-\mathbf{k_2}, \mathbf{q}-\mathbf{k_2'})$ respectivement, et où $\tilde{u} = |\mathbf{k} - \mathbf{k_2}|/2k_{\mathrm{F}}$. L'énergie moyenne par particule est conservée par l'évolution suivant cette équation. Pour avoir un refroidissement il faut inclure une évaporation forcée. Numériquement, l'équation est résolue en discrétisant l'évolution temporelle et, à chaque étape d'évaporation, la position de la coupure est optimisée pour obtenir un rapport (T/T_{F}) minimum, la température étant définie comme précédemment à partir de l'énergie[6]. Numériquement l'équation 3.21 est beaucoup plus lourde à résoudre que l'équation 3.6. En effet il y a trois intégrales à calculer au lieu d'une. Une méthode de calcul Monte-Carlo est alors efficace.

3.3.2 Résultats numériques

Une évolution typique de la distribution au cours de l'évaporation est présentée sur la figure 3.5. Pendant la plus grande partie de l'évaporation, la distribution est proche d'une distribution de Fermi tronquée. Cependant, quand la température diminue, la thermalisation devient de plus en plus difficile à cause du principe de Pauli et la coupure se rapproche de plus en plus de l'énergie de Fermi. Finalement, quand la probabilité d'occupation des niveaux d'impulsion faible ne grandit plus à cause de l'effet des pertes, il est avantageux du point de vue de l'optimisation de T/T_{F} de couper l'essentiel de la distribution et on aboutit alors à une fonction constante tronquée plus ou moins proche de 1. On atteint, à ce moment là, la valeur minimum de T/T_{F}. Ensuite, la thermalisation n'est plus efficace, la probabilité d'occupation diminue sous l'effet des pertes et T/T_{F} diminue. On a choisi une distribution de Fermi tronquée avec $T/T_{\mathrm{F}} = 0.5$ pour distribution initiale. On ne s'interesse donc ici qu'à une évaporation dans un régime dégénéré où on s'attend à avoir un effet important des pertes. Le seul paramètre libre est alors comme précédemment la valeur de γ/Γ_F. On peut alors tracer valeur de la probabilité d'occupation maximum à énergie nulle atteinte au cours de l'évaporation (fig. 3.6). Cette valeur est difficilement comparable aux valeurs expérimentales car la dernière coupure brutale de la distribution n'est alors pas effectuée. On peut définir un paramètre $(T/T_{\mathrm{F}})_{\mathrm{eff}}$ effectif qui correspond au

[6] On ne cherche pas du tout ici à conserver un maximum d'atomes comme on le ferait dans une expérience.

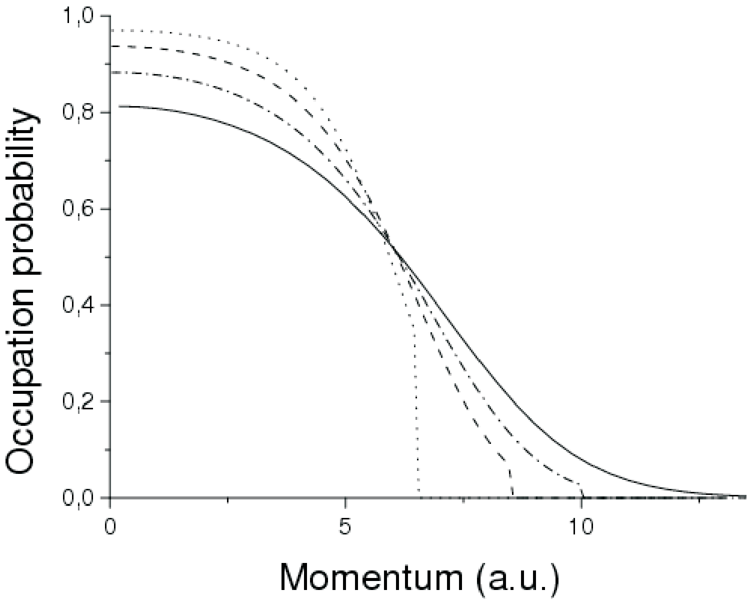

FIGURE 3.5 – *Evolution de la distribution au cours de l'évaporation forcée de deux nuages de fermions en interaction. La courbe en trait plein correspond à l'état initial, une distribution de Fermi à $T/T_{\mathrm{F}} = 0.5$. Les autres courbes correspondent à différents temps d'évaporation. La dernière courbe (trait pointillé fin) montre la distribution au moment où le maximum d'occupation du niveau $k = 0$ est atteint.*

rapport T/T_F qu'aurait une distribution de Fermi avec la même probabilité d'occupation à énergie nulle. Juste avant la coupure brutale finale de la distribution, la distribution est proche d'une distribution de Fermi tronquée avec ce même $(T/T_\mathrm{F})_\mathrm{eff}$.

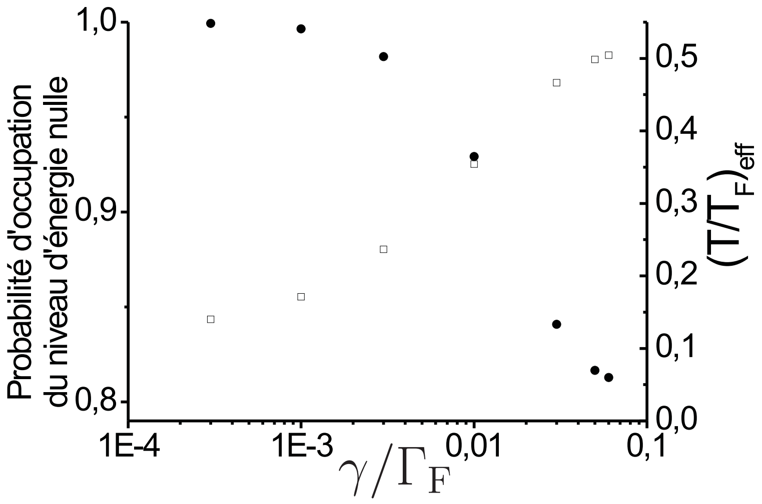

FIGURE 3.6 – *Probabilité d'occupation maximum à énergie nulle en fonction du paramètre γ/Γ_F (cercle). Sur l'échelle de droite, valeur de $(T/T_\mathrm{F})_\mathrm{eff}$ correspondante (carré). La distribution initiale est une distribution caractérisée par $T/T_\mathrm{F} = 1/2$.*

Pour des valeurs relativement élevés du paramètre $\gamma/\Gamma_F > 0.03$, le gain en dégénérescence est très faible. Les pertes sont si importantes qu'on ne peut pas vraiment gagner dans l'espace des phases par évaporation. Pour des valeurs plus faibles du taux de pertes, on arrive à augmenter la dégénéréscence du gaz. Cependant ce gain dépend de façon relativement faible de γ/Γ_F, et, de plus, cette dépendance à l'air d'être de plus en plus faible au fur et à mesure que diminue γ/Γ_F. Pour des valeurs de $\gamma/\Gamma_F \leq 10^{-4}$, l'évaporation devient extrêmement lente, et la résolution numérique n'a pas pu être suffisamment testée pour pouvoir donner des résultats fiables.

3.3.3 Comparaison avec les expériences

Comme pour la partie précédente, les expériences étant réalisées dans des pièges harmoniques, on ne peut comparer nos résultats qu'en ordre de grandeur. Au moment où ces calculs ont été effectués, la seule expérience travaillant avec un mélange de deux mers de Fermi était celle de D. S. Jin sur le potassium [38]. La dégénérescence maximum que cette équipe avait obtenue était initialement de l'ordre de $T/T_\mathrm{F} = 0.3$ Compte tenu du fait que le facteur $\tilde{\gamma}$ était plutôt de l'ordre de 10^{-5}, les pertes n'étaient pas responsables de cette limite en température. De nombreuses équipes utilisent maintenant un piège optique et une résonance des Feshbach entre deux fermions dans des états de spin différents [99,42,60,100,101,93]. L'évaporation est alors très efficace car la section efficace est très grande (on peut même travailler dans le régime unitaire), et les pertes sont faibles. On peut alors atteindre des valeurs $T/T_{\mathrm{F}} \leq 0.05 - 0.1$ dans dans gaz de ^{40}K et de ^{6}Li [7]. Pour ces expériences, la valeur de $\tilde{\gamma}$ est de l'ordre de $10^{-6} - 10^{-7}$. Dans ce régime, la simulation est trop lente, mais en prolongeant l'effet de saturation de la figure 3.6, on peut estimer qu'il est possible que la température soit limitée par la présence des pertes. Evidemment, une étude plus quantitative dans ce régime serait nécessaire pour être plus définitif sur ce point.

[7]En dessous de ces températures, la distribution ne dépend que très peu de la température et les ajustements deviennent de plus en plus difficiles

Chapitre 4

Résonance de Feshbach entre fermions

Ce chapitre est consacré aux premières études de la résonance de Feshbach entre les deux états de plus basse énergie du ^{6}Li . Les atomes sont placés dans un piège optique et un champ magnétique de l'ordre d'un kilogauss permet d'atteindre la résonance. Nos mesures de l'expansion du nuage en fonction du champ magnétique sont présentées.

4.1 Dispositif expérimental

4.1.1 Piège optique

Il existe une résonance de Feshbach pour la collision en onde s entre deux atomes de ^{6}Li dans les états $|1/2, 1/2\rangle$ et $|1/2, -1/2\rangle$ (voir partie 2.2.3). Cette résonance implique des états de spin qui ne sont pas magnétiquement piégeables et il est donc nécessaire d'utiliser un piège optique. Le principe d'un tel piège est simple, il s'agit de créer un potentiel attractif grâce à un laser décalé vers le rouge par rapport à la transition atomique. Classiquement, la polarisabilité dynamique des atomes est alors négative et ils subissent un potentiel attractif proportionnel à l'intensité du champ laser[1]. On peut donc piéger les atomes au niveau du col d'un faisceau focalisé (*waist*). Pour avoir des détails, quant à l'expression de la profondeur et des fréquences d'un tel piège, on pourra se reporter à la thèse de Florian Schreck [65] ou à celle de Julien Cubizolles [86]. Expérimentalement, nous utilisons un piège composé de deux faisceaux gaussiens (figure 4.1), l'un horizontal, l'autre vertical. Chaque faisceau est d'une puissance de l'ordre de 3 W et possède un waist de l'ordre de 25 μm. Cela conduit à une profondeur du potentiel de l'ordre de 100 μK et à des fréquences typiques de 5 kHz. Le piège est quasiment isotrope, et a donc une géométrie complètement différente d'un piège à un seul faisceau, de forme très allongée, utilisé par les équipes concurrentes. Une difficulté majeure de ce type de dispositif est l'alignement des faisceaux. En effet, il faut ajuster la position des faisceaux avec une

[1]On peut aussi comprendre cet effet en utilisant le modèle de l'atome habillé. L'énergie des états habillés dépend alors directement de l'intensité du champ laser.

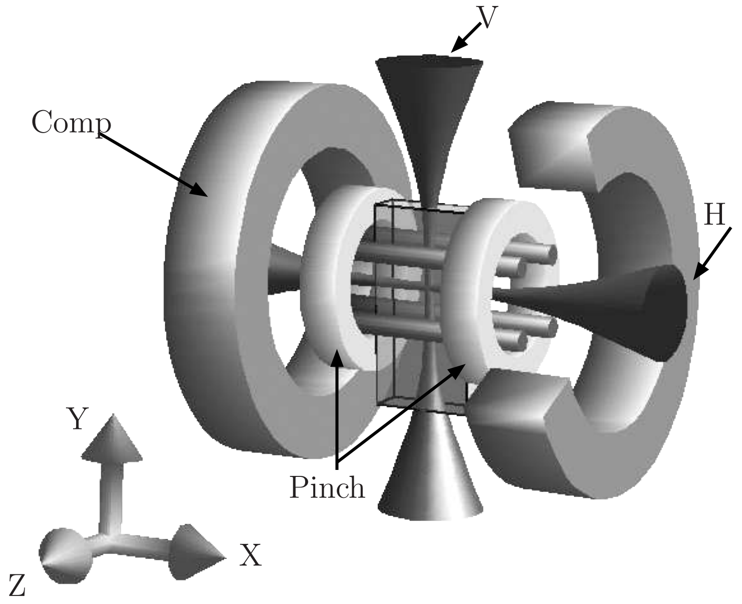

Figure 4.1 – *Schéma du piège optique croisé, aligné avec le piège magnétique Ioffe-Pritchard. H est le faisceau horizontal, V le vertical. "Comp" désigne les bobines de compensation du piège Ioffe Pritchard, "Pinch" les bobines responsables du confinement axial et du champ magnétique de Feshbach. La puissance de chaque faisceau est environ* 3 *W et les cols au point de focalisation environ* 25 μ*m.*

dizaine de microns de précision. En pratique, le plus difficile est d'obtenir un premier signal qu'il suffit ensuite d'optimiser. La technique que nous utilisons est la suivante. On aligne d'abord à l'oeil le mieux possible les faisceaux (Pour le faisceau horizontal, on peut s'aligner avec le faisceau de refroidissement Doppler. Pour le faisceau vertical, le plus simple est de se placer au centre de la cellule en utilisant une caméra). Ces derniers sont alors normalement à moins d'un millimètre du piège magnétique. Il faut alors à superposer les faisceaux sur le piège magnétique, plus ou moins à l'aveugle, en regardant le signal sur les atomes. Avec un temps de deux minutes entre chaque image cette procédure peut-être longue et fastidieuse. Pour pouvoir se permettre les pas les plus grands possibles pour la recherche, une bonne technique consiste à lâcher les atomes à partir d'un piège magnétique très faible en présence du laser. Le nuage d'atome est alors très froids et, après un temps de vol d'environ 5 ms, sa taille radiale (axiale) est d'environ 500 μm (1 mm). Si le piège optique passe dans ce nuage, une ligne de densité optique intense apparaît.

4.1.2 Quelles bobines pour le champ magnétique de Feshbach ?

Expérimentalement, les bobines de compensation du piège de Ioffe-Pritchard semble le choix le plus logique pour créer le champ magnétique de la résonance de Feshbach. En effet, ces bobines ont l'avantage d'être dans une configuration Helmholtz et n'induisent donc pas de courbure du champ. Cependant, en travaillant sur la résonance du ^{7}Li, nous nous sommes aperçus qu'au dessus de 200 A environ (soit $\sim$ 530 G) la coupure rapide de ces bobines causait des vibrations telles que l'imagerie du nuage n'était plus possible. Nous avons donc opté pour l'utilisation des bobines de confinement axial du piège de Ioffe-Pritchard, plus petites, et donc d'une moins grande inductance. La coupure du champ est alors devenue non seulement moins brutale, mais aussi plus rapide. A partir de 1000 G, il faut environ 10 μs pour avoir un champ proche de 0 et ainsi supprimer les interactions entre atomes (figure 2.7). 200 μs après la coupure du courant dans les bobines, le champ résiduel devient suffisamment faible pour pouvoir détecter les atomes correctement par absorption. Une détection optimale n'est obtenue qu'après 0.8 ms. Ces bobines ont un inconvénient majeur, elles créent une courbure de champ magnétique. Axialement, les atomes sont donc anti-piégés avec une "fréquence" égale à celle du piège magnétique. Plus précisément, celle-ci vaut 78 Hz pour le ^{6}Li à un courant de 200 A correspondant à 520 G[2]. Ce champ magnétique anti-piégeant oblige à utiliser la configuration à deux faisceaux croisés pour le piège optique. En effet notre accès optique ne nous permet pas d'avoir un waist inférieur à 20 μm, et la fréquence de piégeage axial d'un seul faisceau est donc trop faible pour compenser l'anti-piégeage magnétique.

[2]On peut extrapoler la fréquence d'anti-piégeage pour d'autre valeur de champ magnétique B et de courant en sachant qu'elle est proportionnelle à $\sqrt{B}$.

4.1.3 Séquence expérimentale

Dans le piège magnétique, le ^{6}Li est refroidi sympathiquement par évaporation du ^{7}Li [39, 65]. Après évaporation de tous les atomes de ^{7}Li , un gaz de $\sim 6 \times 10^5$ fermions froids dans l'état $|3/2, 3/2\rangle$ est obtenu à une température de $10\,\mu$K. La procédure pour charger le piège optique est la suivante. On allume les deux faisceaux du piège optique en augmentant linéairement leur intensité en 500 ms. Le piège magnétique est ensuite coupé en diminuant linéairement en 500 ms les courants dans les barres de Ioffe et dans les bobines de confinement axial [3]. L'efficacité du transfert dans le piège optique croisé est de l'ordre de 80 %. Les 20 % des atomes restants sont piégés dans le faisceau horizontal mais pas dans le faisceau vertical. Ils sont perdus dès que le champ magnétique de Feshbach est ajouté[4].

Il faut ensuite changer l'état de spin des atomes. Un premier passage adiabatique radio-fréquence (RF) entre 243 et 244 MHz à un champ magnétique de l'ordre de 5 G en 50 ms permet de passer dans l'état $|1/2, 1/2\rangle$. Pour étudier la résonance en onde s, il faut ensuite créer un mélange incohérent avec l'état $|1/2, -1/2\rangle$[5]. Ce mélange peut être fait soit à bas champ, soit à haut champ, suivant la façon dont on préfère aborder la résonance. Dans les deux cas, la technique reste la même : on varie une radio-fréquence autour de la fréquence de transition relativement rapidement pour ne pas être adiabatique. En jouant sur le temps de la rampe ou sur l'intensité du champ RF, on peut ajuster le taux de transfert à 50(10) %. La décohérence dans notre système est obtenue très rapidement à cause de la courbure du champ magnétique. Pour tester notre mélange, on utilise une méthode de Stern-Gerlach pendant le temps de vol, c'est à dire un gradient de champ pour séparer les états suivant leur susceptibilité magnétique. La séparation des atomes est alors proportionnelle au courant mis dans la bobine. Néanmoins, un champ trop intense ($\gtrsim 26$ G) rend la susceptibilité magnétique des deux états identiques (voir fig. 1.2) et il faut donc utiliser des bobines qui créent un gradient important mais un champ faible. En pratique, on utilise une bobine d'environ 50 tours de diamètre 1 cm, placée à 2 cm des atomes. Malgré l'utilisation de fort courants (jusqu'à 100 A), la bobine n'a pas besoin d'être refroidie car les impulsions Stern-Gerlach ne durent que 0.5 ms environ.

---

[3] Il faut absolument garder le rapport entre les courants constant pendant l'extinction pour éviter que la position du piège magnétique ne bouge.

[4] Le transfert du piège magnétique vers le piège optique, aussi lent soit-il, induit un chauffage. En fait, on est adiabatique vis à vis de toutes les fréquences du piège, mais les différentes directions de piégeage, sans collision entre les atomes, ne sont pas couplées. La compression étant plus importante suivant la direction axiale du piège magnétique, la température dans cette direction augmente plus (Pour un oscillateur harmonique à 1D, T/ω est la quantité conservée dans un transfert adiabatique). Dans le piège optique, on n'est donc pas à l'équilibre thermique, et l'énergie totale du nuage est plus grande que si le transfert avait été complètement adiabatique [86].

[5] Un gaz dans un état $|1/2\rangle + |-1/2\rangle$ suivant l'axe z est en fait polarisé suivant la direction x

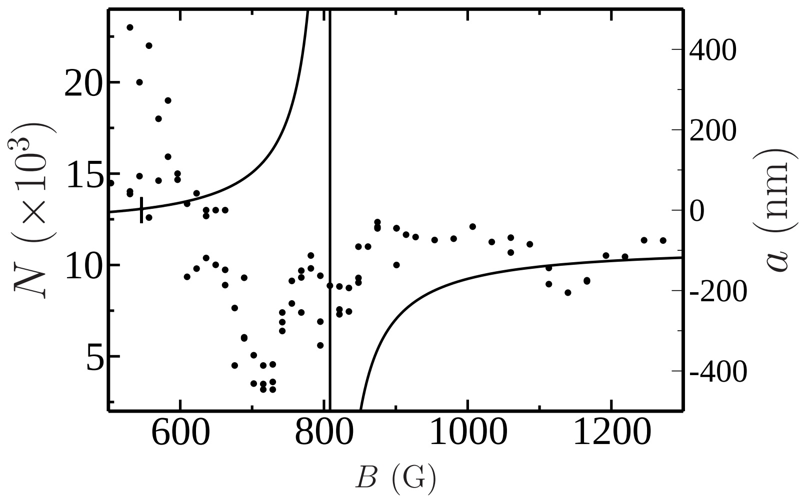

FIGURE 4.2 – *Pertes associées à la résonance du ^{6}Li. Le champ magnétique est varié (en 10 ms) de $\simeq 0$ G à la valeur de mesure où il maintenu pendant 500 ms avant d'être coupé en 1 ms. La courbe en traits continus représente la longueur de diffusion a. A droite de la résonance prédite, pour $B \geq 850$ G, la durée de vie est d'environ 30 s.*

4.2 Pertes proche de la résonance

4.2.1 Données expérimentales

A partir de la forme des potentiels du lithium, on peut calculer l'énergie des états moléculaires du potentiel singulet et donc connaître le champ magnétique d'éventuelles résonances de Feshbach. Une résonance large autour de 850 G a été prédite dès fin 1997 [54]. Les premiers groupes à avoir recherchée cette résonance expérimentalement furent celui de W. Ketterle au MIT [102] et le nôtre. La courbe de pertes que nous avons enregistrée en fonction du champ magnétique est tracée sur la figure 4.2. Notre pic de pertes est situé autour de 720 G. Au MIT, ils trouvèrent deux pics de pertes, l'un situé autour de 680 G, l'autre plus faible situé vers 550 G. Ce dernier est maintenant associé à une résonance de Feshbach fine [103]. Ces résultats furent une surprise car on s'attendait à un maximum de pertes à résonance comme observé pour des bosons lors de la première observation d'une résonance de Feshbach dans un nuage d'atomes froids [25]. De plus, la signature des pertes était de type deux corps [102], alors qu'on s'attendait à ne pas avoir de pertes de ce type ; ni les pertes par échange de spin (conservation de m_F), ni les pertes par collision dipolaire ne sont possibles entre ces deux états. Pour ces dernières, la raison est la suivante. Le hamiltonien dipolaire se décompose sur les harmoniques sphériques d'ordre 2 [104]. Comme les atomes interagissent dans l'onde s, la seule possibilité de couplage serait vers un canal de sortie en onde d, qui est symétrique. Comme le seul état de spin de sortie est un état complètement polarisé dans l'état fondamental qui est lui aussi symétrique, on aurait alors une fonction d'onde symétrique, ce qui n'est pas admis pour des fermions. Il n'y a donc pas de pertes dipolaires dans l'onde s pour un mélange entre les états $|1/2, 1/2\rangle$ et $|1/2, -1/2\rangle$. Peu après, deux expériences supplémentaires sur le ^{6}Li localisaient le champ magnétique pour lequel la longueur de diffusion s'annule vers 530 G [103, 42], en accord avec la théorie et donc aussi avec une résonance de Feshbach située vers 850 G, et non pas décalé à un champ magnétique plus faible.

4.2.2 Recombinaison à trois corps vers un état faiblement lié

Cherchons maintenant à expliquer les raisons de ce décalage des pertes par rapport au pic de la résonance. Proche de résonance, pour des fermions dans deux états de spin, les recombinaisons à trois corps se font principalement vers l'état lié de faible énergie [105]. En effet, à cause du principe de Pauli, il faut multiplier la probabilité de recombinaison vers un état d'énergie E par un facteur K/E où K est l'énergie cinétique relative des deux fermions dans le même état [106]. Le taux de recombinaison à trois corps vers l'état d'énergie $E = -\hbar^2/ma^2$ est ainsi proportionnel à a^6 (et non à a^4 comme pour des bosons [86]). Donc, plus on s'approche de la résonance, plus les molécules faiblement liées se forment rapidement. Ces molécules peuvent éventuellement être piégées car la polarisabilité dynamique des atomes dans une molécule faiblement liée n'est pas modifiée, et le potentiel de piégeage vu par la molécule est simplement deux fois le potentiel vu par les atomes. Comme la masse d'une molécule est double, les fréquences d'oscillations restent les mêmes. On peut penser à différents processus de pertes pour ces molécules. Lors d'un processus de recombinaison a trois corps, l'énergie de liaison est transformée en énergie cinétique. La molécule formée récupère deux tiers de cette énergie, l'atome un tiers. Une molécule formée avec une grande énergie de liaison et donc à un champ magnétique faible a donc une probabilité plus grande de s'échapper du piège. Les molécules peuvent aussi être détruites par recombinaison vers des états liés profonds, soit par collision avec un atome, soit par collision avec une autre molécule. Ces deux processus ont été étudiés par D. Petrov, C. Salomon et G. Shlyapnikov et sont tous les deux plus efficaces loin de résonance [107][6]. Le fait que le maximum de pertes soit situé à coté de la résonance est donc le résultat d'un compromis entre le taux de formation de molécules, plus grand proche de résonance, et les pertes moléculaires plus importantes loin de résonance[7].

4.3 Etude de l'anisotropie

Nous avons ensuite étudié l'expansion du nuage en fonction du champ magnétique [60], ce qui va nous permettre de confirmer que la résonance est bien située autour de 850 G et pas vers 700 G à l'endroit du maximum de pertes. Suivant la valeur du taux de collision,

[6]Les taux de relaxation atome-molécule et molécule-molécule varient respectivement en $(b/a)^{3.33}$ et $(b/a)^{2.55}$ dans la limite $a \gg b$, où b est la portée du potentiel.

[7]On peut aussi noter que loin de résonance, les molécules ne sont plus détectées comme des atomes (voir partie 5.1.2)

et donc de a, le nuage est plus ou moins profondément dans le régime hydrodynamique et cela modifie son expansion.

4.3.1 Régime hydrodynamique

Critère d'hydrodynamicité

Le régime hydrodynamique collisionnel est atteint lorsque qu'un atome en traversant le nuage a le temps de subir plusieurs collisions. Le libre parcours moyen est alors petit devant la taille du nuage. Dans ces conditions, on a un équilibre thermodynamique local à tout instant. Plus précisément, le libre parcours moyen λ_0 est de l'ordre de $\lambda_0 = (n_0\sigma)^{-1}$, où n_0 est la densité pic du nuage et σ la section efficace de collision. Si l'on compare cette longueur à la plus petite dimension du nuage, la dimension radiale r_{rad}, un critère d'hydrodynamicité est alors donné par le rapport de ces deux quantités :

$$R = \frac{\lambda_0}{r_{rad}} = \frac{(2\pi)^{3/2}}{N\sigma}\left(\frac{k_B T}{m\bar{\omega}^2}\right)\frac{\omega_{rad}}{\bar{\omega}} \text{ , dans le cas d'un gaz classique} \tag{4.1}$$

$R \ll 1$ correspond au régime hydrodynamique, $R \gg 1$ au régime sans collision.

Loi d'échelle

Intéressons nous à l'effet d'un changement des fréquences d'oscillation du piège (ou à sa coupure). Les solutions par changement d'échelle correspondent au cas particulier où la distribution ne change que par des facteurs de dilatation $b_{i\in\{x,y,z\}}(t)$ suivant les différentes directions de piégeage. On peut montrer qu'un gaz classique dans le régime hydrodynamique pour un confinement harmonique suit une loi d'échelle[8], et les coefficients $b_i(t)$ sont donnés par l'équation [108] :

$$\ddot{b}_i + \omega_i(t)^2 b_i = \frac{\omega_{0i}^2}{b_i\Lambda^{2/3}} \text{ ,avec } \Lambda = \prod_j b_j(t) = 0 \tag{4.3}$$

et où ω_{0i} correspond à la fréquence initiale dans la direction i. Le fait qu'il existe une solution par changement d'échelle n'est pas évident, et est spécifique du confinement

[8] La démonstration est la suivante [108]. Dans le régime hydrodynamique, on peut négliger la dissipation, et l'équation d'Euler est applicable,

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_j v_j \frac{\partial v_i}{\partial r_j} + \omega_i(t)^2 r_i + \frac{1}{mn(\mathbf{r},t)}\frac{\partial P(\mathbf{r},t)}{\partial r_i} = 0 \tag{4.2}$$

où $n(\mathbf{r},t)$ et $P(\mathbf{r},t)$ sont les profils de densité et de pression, et $v_i(\mathbf{r},t)$ est la $\mathrm{i}^{\text{ème}}$ composante du champ de vitesse. On cherche donc une solution de la forme $n(\mathbf{r},t) = \tilde{n}(\rho)/\Lambda(t)$, où $\tilde{n}$ est la densité initiale et $\rho_i = r_i/b_i(t)$. Pour vérifier l'équation de continuité, le champ de vitesse s'écrit $v_i = r_i[\dot{b}_i(t)/b_i(t)]$. L'évolution de la pression est connue si on suppose que l'évolution du gaz est isentropique. On peut alors appliquer la loi de Laplace ($PV^{5/3} = \mathrm{cst}$) à un petit élément de fluide, ce qui donne $P(\mathbf{r},t) = \tilde{P}(\rho)/\Lambda(t)^{5/3}$, où $\tilde{P}$ est le champ de pression initial. En tenant compte de l'équilibre statique initial, $m\tilde{n}(\rho)\omega_{0i}^2\rho_i + \partial\tilde{P}(\rho)/\partial\rho_i = 0$, l'équation d'Euler se réécrit exactement en terme des paramètres d'échelle, et on trouve l'équation 4.3.

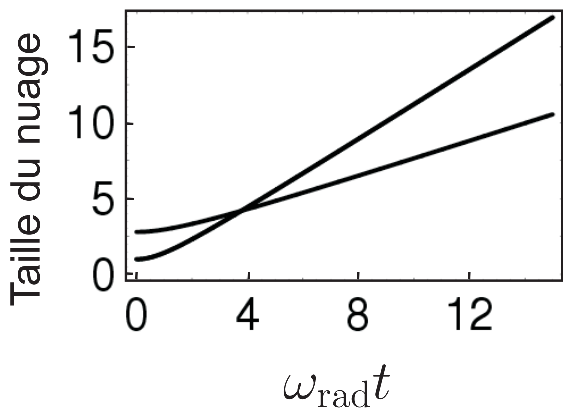

FIGURE 4.3 – *Expansion d'un nuage fermionique dans un régime hydrodynamique avec un rapport d'aspect initial de 2.8. La taille du nuage est donnée en unité de la taille radiale initiale. Le temps caractéristique d'expansion est donné par* $1/\omega_{\mathrm{rad}}$. *Pour des temps suffisamment longs, on a une inversion d'anisotropie.*

harmonique. Dans un régime intermédiaire entre le régime sans collision et le régime hydrodynamique une telle solution n'existe pas.

D'une façon plus générale, on peut montrer qu'il existe une loi d'échelle dès qu'on peut utiliser l'équation d'Euler et que l'équation d'état du gaz[9] est de la forme $\mu \propto n^\gamma$ [109]. L'équation d'Euler se réduit alors à une équation pour les b_i[10] :

$$\ddot{b_i} + \omega_i^2 b_i(t) = \frac{\omega_{0i}^2}{b_i \Lambda^\gamma} \tag{4.4}$$

Pour un gaz de Fermi dégénéré en interaction faible dans un régime superfluide ou hydrodynamique, les conditions précédentes sont remplies avec $\gamma = 2/3$ ($\mu = E_{\mathrm{F}} \propto n^{2/3}$), et on retrouve la même équation d'échelle que pour le gaz classique hydrodynamique. Les mêmes arguments s'appliquent aussi pour un gaz de Fermi à la limite unitaire, $\mu \propto E_{\mathrm{F}} \propto n^{2/3}$ (on pourra se reporter à la partie 7.2, pour avoir des détails sur le régime unitaire). Pour un condensat de Bose-Einstein dans un régime de Thomas-Fermi $\mu = gn$, $\gamma = 1$; il existe encore une équation d'échelle mais celle-ci est différente de celle du gaz classique hydrodynamique [110].

Expansion en temps de vol

Lorsqu'on étudie une expansion en temps de vol, on pose $\omega_i(t > 0) = 0$ et l'équation 4.3 se réduit à :

$$\ddot{b_i} = \frac{\omega_{0i}^2}{b_i \Lambda^\gamma} \tag{4.5}$$

[9] La relation de Gibbs-Duhem $\nabla P/n = \nabla \mu$ permet de réécrire l'équation d'Euler en terme du potentiel chimique.

[10] Dans cas où l'expansion se fait dans un potentiel expulsant, on peut en tenir compte en prenant des fréquences imaginaires

Cette équation est très facile à résoudre numériquement et des courbes d'évolution de la taille d'un nuage sont représentées sur la figure 4.3 pour $\gamma = 2/3$ et pour un piège cigare de rapport d'aspect 2.8. A cause du facteur ω_{0i}^2, l'expansion est plus rapide dans les directions de fort confinement. Pour des temps de vol suffisamment longs, on a une inversion d'ellipticité. On peut comprendre simplement cet effet par le fait qu'un atome s'échappe plus difficilement dans le direction où le nuage est plus épais car il subira alors plus de collisions. L'échelle de temps caractéristique de l'expansion est fixée par la fréquence maximum de confinement $\omega_{\rm rad}$. Pour des temps t tels que $\omega_{\rm rad} t \ll 1$, la taille du nuage est presque inchangée. Pour $\omega_{\rm rad} t \gg 1$, la vitesse des atomes ne change plus et l'expansion devient linéaire[11].

4.3.2 Conditions expérimentales

Dans nos expériences, le gaz n'est pas toujours dans un régime très hydrodynamique suivant la valeur de a. On explore un régime intermédiaire du régime sans collision au régime hydrodynamique. La distribution des atomes après expansion est alors plus ou moins elliptique suivant la valeur de R. Quand l'expansion est la plus anisotrope, cela signifie que le taux de collision est le plus important.

Deux séries de mesure

Expérimentalement, nous avons réalisé deux séries de mesures : l'une, au dessus de 790 G, dans la région où les pertes sont faibles, l'autre dans le région où les pertes sont importantes. Dans les deux cas le gaz est d'abord préparé dans l'état fondamental $|1/2, 1/2\rangle$. Pour la première série de mesures (fig. 4.4), le mélange Zeeman est effectué à 1060 G et on évite ainsi la zone de pertes en gardant un gaz polarisé. Le mélange est ensuite évaporé jusqu'à des fréquences $\omega_x/2\pi = 1.1\,$kHz, $\omega_y/2\pi = 3.0\,$kHz, $\omega_z/2\pi = 3.2\,$kHz et le piège a une géométrie de cigare avec un rapport d'aspect d'environ 2.8. On obtient un nombre total d'atomes de $N_{\rm tot} = 2N_\uparrow = 2N_\downarrow = 7\times10^4$ à une température de $T \simeq 3.5\,\mu$K$\simeq 0.6\,T_{\rm F}$. Une telle température correspond à un régime approximativement classique. En effet, les effets quantiques ne se manifeste vraiment qu'à partir du moment où le potentiel chimique devient positif, c'est à dire en dessous d'une température de $0.5\,T_{\rm F}$ environ [71]. Cela correspond au moment où la probabilité de peupler le premier état du piège vaut 1/2. Pour $T = 0.5\,T_{\rm F}$, la taille d'un nuage de fermions piégés est encore très semblable à celle d'un nuage classique [39]. Enfin, le champ magnétique est varié vers différentes valeurs finales en 50 ms. Le champ magnétique n'est pas descendu en dessous de 790 G pour ne pas avoir de pertes. Dans la deuxième série de mesures (fig. 4.5), le mélange est effectué à bas champ. On évapore le gaz vers 320 G, où la longueur de diffusion vaut $-8\,$nm jusqu'à une température de $2.4\,\mu$K. Les fréquences de piégeage sont alors $\omega_x/2\pi = 0.78\,$kHz,

[11] La vitesse relative entre atomes est alors faible devant leur vitesse absolue et les collisions ne jouent alors plus de rôle.

$\omega_y/\pi = 2.1\,\mathrm{kHz}$, $\omega_z/2\pi = 2.25\,\mathrm{kHz}$. Le rapport d'aspect vaut environ 2.8. On change alors le champ magnétique en 100 ms jusqu'à 550 G, où on s'attend à ce que la longueur de diffusion soit faible et positive. Enfin, on varie rapidement le champ magnétique en 10 ms vers différentes valeurs finales. Ce changement rapide de champ magnétique est nécessaire pour ne pas perdre tous les atomes proches du maximum de pertes.

Deux techniques d'imagerie

La nécessité de couper le champ magnétique pour l'imagerie suggère deux méthodes de mesures ; soit éteindre le champ magnétique en même temps que le piège optique, soit l'éteindre à la fin du temps de vol. Plus précisément, cette dernière méthode est la suivante. Le piège optique est coupé, le nuage commence à s'étendre. Pendant la plus grande partie de temps de vol (0.4 ms), on laisse le champ magnétique allumé et donc aussi les interactions entre atomes. C'est seulement 0.25 ms avant d'imager le nuage qu'on coupe le courant dans les bobines pour que le laser sonde soit résonnant avec la transition atomique ($B = 0$). Cette technique (temps de vol en champ) permet de garder les interactions entre atomes pendant la phase d'expansion où elles jouent un rôle important, c'est-à-dire pendant un temps supérieur à quelques $1/\omega_{\mathrm{rad}} = 75\,\mu$s. Ensuite, les atomes suivent simplement un mouvement balistique et couper les interactions ne modifient pas leur trajectoire. Ce procédé d'imagerie correspond aux figures 4.4b et 4.5b. Un autre procédé de mesures consiste à couper le champ magnétique et le piège optique au même instant[12] (temps de vol sans champ). Comme la longueur de diffusion est quasi-nulle à champ nul, les atomes n'interagissent plus et on a accès à la distribution d'impulsion initiale dans le piège. Celle-ci est toujours isotrope comme attendu pour des fermions (figures 4.4a et 4.5a).

4.3.3 Résultats

Les résultats des deux séries de mesures sont regroupés sur les figure 4.4 et 4.5. Les tailles mesurées sont issues d'ajustements gaussiens des distributions de densité après expansion. La figure 4.5c montre la perte d'atomes pour la deuxième série de mesures. Proche du maximum de pertes, les distributions sont plus larges. Les pertes sont donc associées à un chauffage important, ce qui est qualitativement en accord avec le phénomène de recombinaisons à trois corps. Pour avoir des informations sur le taux de collision, il faut étudier l'ellipticité des temps de vol en champ. Jusqu'à 700 G, la distribution est isotrope, on est dans un régime sans collision. Pour des champs magnétiques plus élevés, l'ellipticité augmente jusque vers 800 G. L'anisotropie maximum observée expérimentalement est de 1.4 autour de 800 G. Théoriquement, les équations de changement d'échelle prédisent 1.53. Cette différence montre que l'on atteint jamais le régime complètement hydrodynamique.

[12] En fait, il faut couper le champ plus rapidement que le temps caractéristique de l'évolution de la distribution, c'est-à-dire $1/\omega_{\mathrm{rad}}$

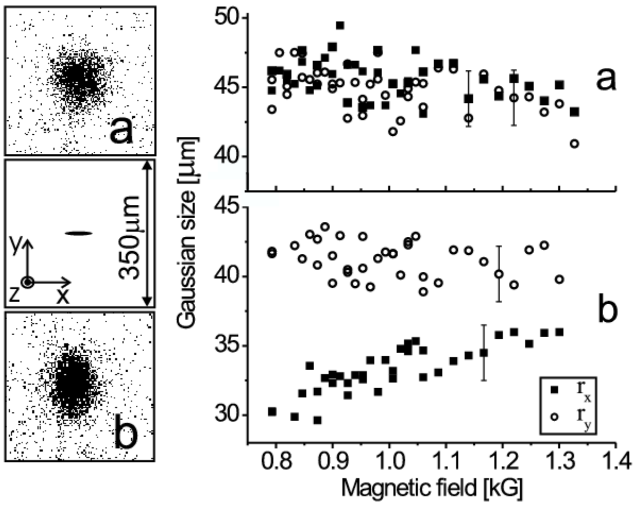

FIGURE 4.4 – *A gauche, géométrie du piège optique (au centre) et images après expansion sans champ magnétique (a), avec champ magnétique (b). A droite, tailles gaussiennes correspondantes suivant x (carrés) et y (cercles) en fonction du champ magnétique. (a) : temps de vol de 650 μs avec $B = 0$. (b) : 400 μs avec $B \neq 0$ puis 250 μs avec $B = 0$. Les expansions de gauche sont réalisées à 900 G. La géométrie du piège ainsi que l'échelle des images sont données par le cadre central. Le nombre d'atomes est constant, égal à $7\,10^4$.*

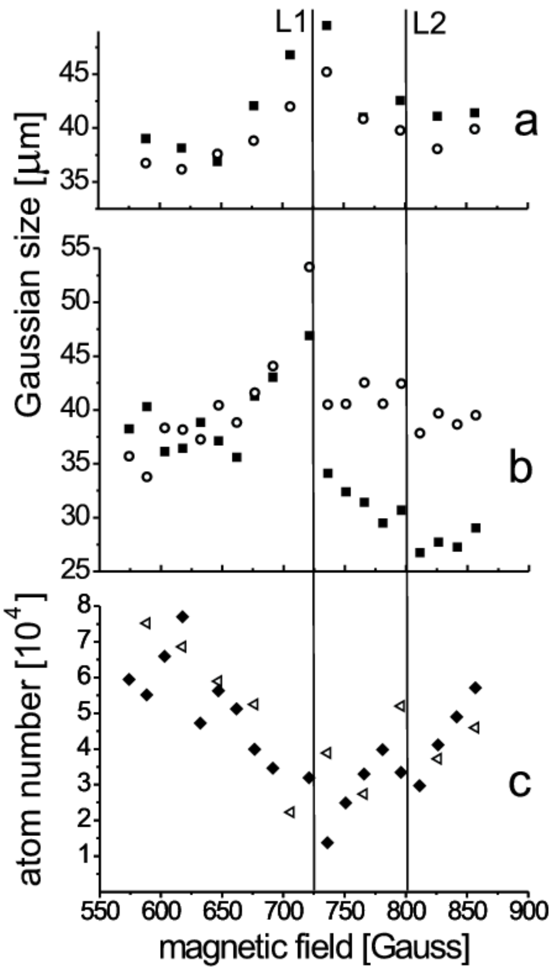

FIGURE 4.5 – *(a),(b) Tailles gaussiennes en fonction du champ magnétique. Les conditions d'expansion et les symboles sont les mêmes que ceux de la fig. 4.4. (c) Nombre d'atomes détectés en fonction du champ magnétique. Les triangles et les diamants correspondent respectivement à (a) et (b). L1 pointe le maximum de pertes, L2 la position du maximum de l'anisotropie qui correspond au pic de la résonance.*

A résonance, la limite unitaire établit une borne au taux de collisions et R (le nombre sans dimension caractéristique du caractère hydrodynamique dont la définition est donnée par l'équation 4.1) est de l'ordre de 0.06, ce qui est compatible avec un régime hydrodynamique [111, 112]. Au dessus d'environ 840 G, l'anisotropie du nuage diminue de nouveau. On en déduit que le taux de collisions maximum est obtenu pour une valeur de 800 ± 40 G. C'est la première détermination expérimentale de la position de la résonance de Feshbach et elle est en accord avec la valeur prédite théoriquement qui est 850(40) G. Le pic de la résonance a récemment été localisé très précisément à une valeur de 834.1 ± 1.5 G grâce à une technique de spectroscopie radiofréquence des états moléculaires [113]. Le maximum de perte est clairement décalé par rapport à la position de la résonance. A 720 G, notre maximum de perte, l'expansion est encore quasiment isotrope.

4.4 Mesure de l'énergie d'interaction

4.4.1 Méthode expérimentale

Dans le piège, en supposant qu'on ne forme pas de molécules, on peut séparer l'énergie du nuage en trois contributions, l'énergie cinétique E_{kin}, l'énergie de piégeage E_{trap}, et l'énergie d'interaction entre les atomes E_{int}.[13] Notre technique pour mesurer l'énergie d'interaction repose sur la comparaison entre les expansions avec et sans champ, c'est à dire avec ou sans interactions. Sans interaction, la distribution après temps de vol reflète la distribution en impulsion du nuage initial. L'énergie libérée est alors égale à l'énergie cinétique $E_{\mathrm{rel}} = E_{\mathrm{kin}}$. Avec interactions, non seulement le temps de vol est modifié par les collisions pendant le temps de vol mais il y a aussi une énergie de champ moyen entre atomes. Cette énergie est transformée en énergie cinétique quand la densité du nuage baisse. Le temps caractéristique de l'expansion étant $1/\omega_{\mathrm{rad}}$, si on coupe le champ après un temps plus long, la plupart de l'énergie d'interaction est déjà transférée en énergie cinétique. L'énergie relâchée pendant le temps de vol est alors égale à la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie d'interaction $E_{\mathrm{rel}} = E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{int}}$. En faisant le rapport des énergies relâchées dans les deux cas, on déduit le rapport $E_{\mathrm{int}}/E_{\mathrm{kin}}$. En pratique, les distribution après temps de vol sont ajustées par des gaussiennes, et on calcule l'énergie relâchée à partir de leur largeur. Ceci constitue évidemment une approximation[14] mais cela a l'avantage de moyenner très efficacement le bruit de mesure.

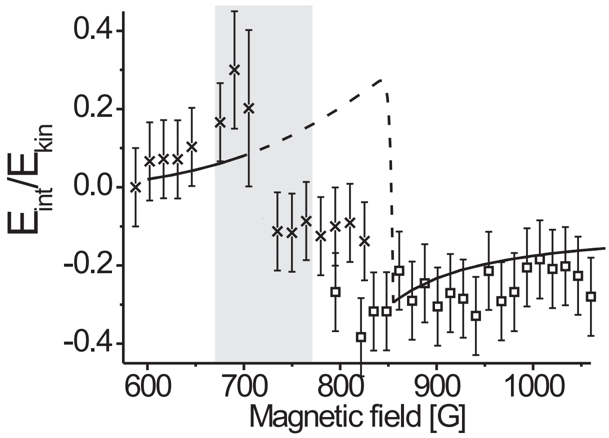

FIGURE 4.6 – *Rapport entre l'énergie d'interaction et l'énergie cinétique pour les données de la figure 4.4 (carrés) et de figure 4.5 (croix). La courbe est un calcul en champ moyen pour 7×10^4 atomes et une énergie cinétique de $E_{\rm kin}/k_{\rm B} = 5.25\,\mu K$. La partie grisée correspond à la région de fortes pertes.*

4.4.2 Résultats et interprétation

Le rapport de l'énergie d'interaction à l'énergie cinétique $E_{\rm int}/E_{\rm kin}$ est tracé sur la figure 4.6. Les deux séries de mesures, correspondant aux figures 4.5 et 4.4, sont regroupées sur un même schéma et la différence entre les deux séries de mesure dans la région où les points se recoupent est dû à des conditions expérimentales différentes. La ligne correspond à un calcul de champ moyen en tenant compte de la dépendance en énergie des interactions entre atomes. On peut noter que ces prédictions théoriques sans aucun paramètre ajustable correspondent bien aux valeurs expérimentales dans la région $B > 850\,$G, $a < 0$ et dans la région avant le pic de pertes $B < 720\,$G ($a > 0$ petit). Dans la région intermédiaire, la théorie ne correspond pas du tout aux points expérimentaux. Alors qu'on attend un champ moyen répulsif pour $a > 0$, on observe une énergie d'interaction négative. De plus, le changement de signe brutal de l'énergie d'interaction mesurée qui coïncide avec la maximum de pertes est surprenant.

Comme nous l'avons suggéré en conclusion dans notre article [60], l'ensemble des ces données s'expliquent en terme de création de molécules faiblement liées. Dans nos conditions expérimentales, au dessous de 720 G, on a des pertes liées à la création de dimères. Les produits de ces recombinaisons à trois corps induisent un chauffage et des pertes, mais les molécules sont produites avec une énergie cinétique supérieure à la profondeur du piège comme le montre l'accord avec une théorie de champ moyen omettant les

[13] Notons que l'énergie d'interaction a été omise dans la discussion de l'anisotropie, car il est difficile d'en tenir compte exactement [114]. De plus, l'effet de redistribution de l'énergie dans la direction de plus fort confinement dû à l'hydrodynamicité demeure valable en présence du champ moyen.

[14] On s'attend par exemple à une contribution lorentzienne si on casse non adiabatiquement un nuage de molécules. L'énergie relâchée est alors infinie, mais le fit gaussien trouve une énergie parfaitement finie.

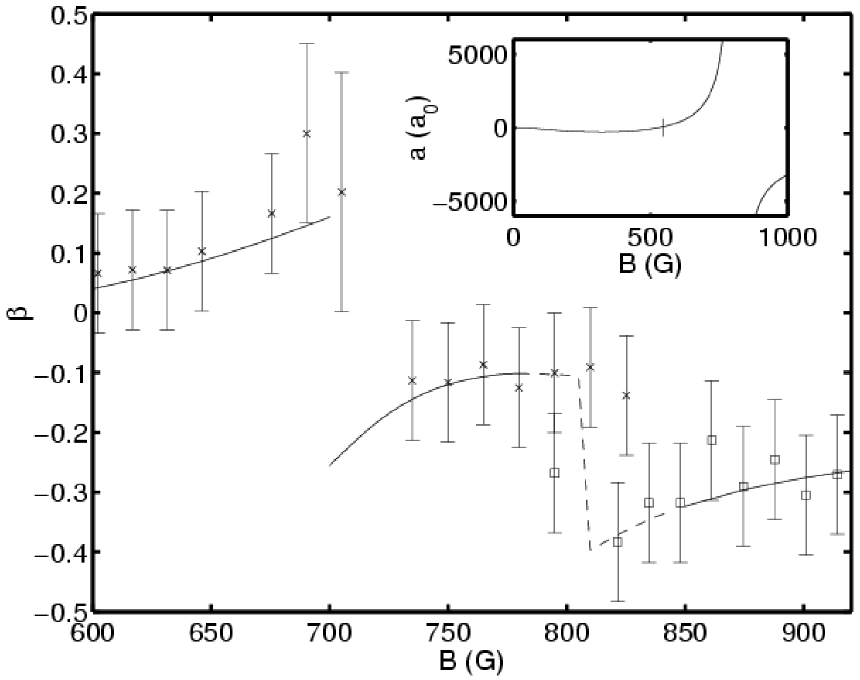

FIGURE 4.7 – *Courbe calculée du rapport énergie d'interaction sur énergie cinétique. Cette courbe reproduit bien nos données expérimentales. Ce calcul suppose la présence de molécules faiblement liées dans le piège pour 710 G$\leq B \leq$830 G. Le saut vers 810 G correspond au changement de conditions expérimentales (température, nombre, confinement). En insert, longueur de diffusion en fonction du champ magnétique.*

molécules. A un champ magnétique supérieur à 720 G, le signe de l'énergie d'interaction change brusquement, cela correspond au champ pour lequel les molécules commencent à être piégées. Les recombinaisons à trois corps induisent un chauffage important qui explique les pertes. Quand on coupe le champ magnétique brusquement, les molécules sont cassées. Il faut alors tenir compte de la distribution d'impulsion relative des deux atomes dans une molécule. Pour une molécule faiblement liée, cette distribution prend la forme du carrée d'une lorentzienne[15] de largeur $1/a$. Cet effet augmente l'énergie relâchée dans un temps de vol sans interaction. En prenant en compte, de façon précise, cet effet ainsi que les interactions entre atomes, on reproduit bien nos données expérimentales [115] (voir figure 4.7). Nos résultats sont donc en accord avec la création de molécules faiblement liées.

[15] C'est simplement lié à la transformée de Fourier de la fonction d'onde d'une molécule qui a une forme en $\frac{e^{-r/a}}{r}$

Chapitre 5

Création de molécules froides faiblement liées

Ce chapitre est consacré à la détection des dimères discutés au chapitre précédent, et à l'étude de l'efficacité de leur formation en fonction de la température et du champ magnétique. Expérimentalement, nous montrons que la formation et la dissociation des molécules sont des processus réversibles. Un modèle simple supposant l'équilibre thermodynamique entre les nuages atomique et moléculaire permet d'expliquer les résultats. Ces molécules sont particulièrement faiblement liées ; leur énergie de liaison est de l'ordre de $k_\mathrm{B} \times 10\,\mu\mathrm{K}$ soit $10^{-9}\,\mathrm{eV}$.

5.1 Détection des molécules

5.1.1 Technique de la double rampe

Le mélange entre les deux états Zeeman $|1/2, 1/2\rangle$, $|1/2, -1/2\rangle$ est réalisé au dessus de résonance à un champ magnétique de $1060\,\mathrm{G}$ (point 1 sur la fig. 5.1). A ce champ magnétique, il n'y a pas d'état lié dans le problème à deux corps. Une première technique de mesure consiste à couper directement le champ magnétique (point 1→point 4). On compte alors le nombre total d'atomes N_tot. Pour former des molécules, on varie le champ magnétique du point 1 au point 2 dans la région où a est positif. Il existe alors un état moléculaire d'énergie $E_b = -\hbar^2/ma^2 < 0$ qu'il est énergétiquement favorable de peupler[1]. Lors de la coupure du champ magnétique, les molécules deviennent fortement liées. Ces dernières ne sont donc pas résonantes avec le faisceau d'imagerie et on ne compte alors que les atomes qui ne sont pas impliqués dans la formation d'une molécule N_at. Pour être sûr que ce n'est pas simplement des pertes, une troisième technique de mesure consiste à simplement traverser en sens inverse la résonance (point 2→point 3), vers la région où il n'y a plus d'état lié ($a < 0$), pour dissocier les molécules en atomes. On compte alors

[1]On pourra se reporter à la figure 2.6.

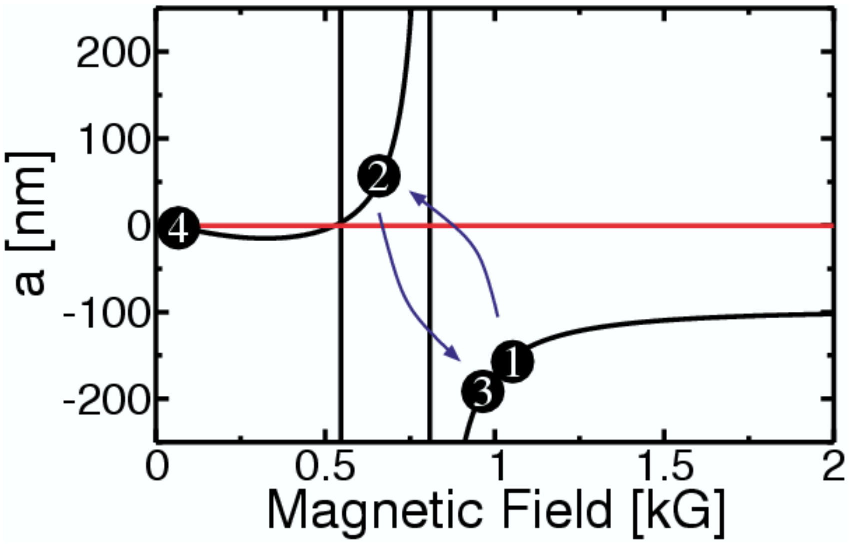

FIGURE 5.1 – *Longueur de diffusion en fonction du champ magnétique entre des atomes de* ^{6}*Li dans les états* $|1/2, 1/2\rangle$ *et* $|1/2, -1/2\rangle$*. On remarque deux résonances de Feshbach, l'une large au alentour de 830 G, l'autre fine vers 545 G.*

de nouveau l'ensemble des atomes, $\simeq N_{\text{tot}}$, y compris ceux qui formaient des dimères. On peut en déduire le nombre de molécules formées $2N_{\text{mol}} = N_{\text{tot}} - N_{\text{at}}$. Cette technique utilisée pour la première fois dans l'équipe de D. Jin sur le potassium [116] ne permet cependant pas d'avoir accès directement à la distribution en impulsion des molécules.

5.1.2 Suivi adiabatique de l'état moléculaire

Un élément très important pour que la technique de la double rampe soit efficace est le suivi adiabatique des molécules vers un état fortement lié lors de la coupure du champ magnétique. Plus précisément, un critère d'adiabaticité est donné par le rapport entre le taux de variation relatif de l'énergie de liaison $(\mathrm{d}E_b/\mathrm{d}t)/E_b$ par rapport à la pulsation d'oscillation de la molécule $E_b/\hbar$. On peut définir un nombre sans dimension :

$$\alpha = \frac{\hbar}{E_b^2}\frac{\mathrm{d}E_b}{\mathrm{d}t} \tag{5.1}$$

Si $\alpha \ll 1$ la molécule suit adiabatiquement vers un état de plus en plus lié. Au contraire, pour $\alpha \gg 1$, la molécule ne peut suivre adiabatiquement la rampe de champ magnétique et est dissociée. Cette hypothèse a pu être vérifiée expérimentalement en faisant varier la vitesse de coupure du champ magnétique. Pour notre vitesse de coupure habituelle d'environ 100 G/μs, les atomes sous forme moléculaire sont tous détectés pour $B \gtrsim 780$ G alors qu'ils ne le sont pas du tout pour $B \lesssim 700$ G. Entre ces deux valeurs la détection est partielle. A titre de comparaison, on trouve $\alpha = 1$ pour un champ égal à $\sim$700 G.

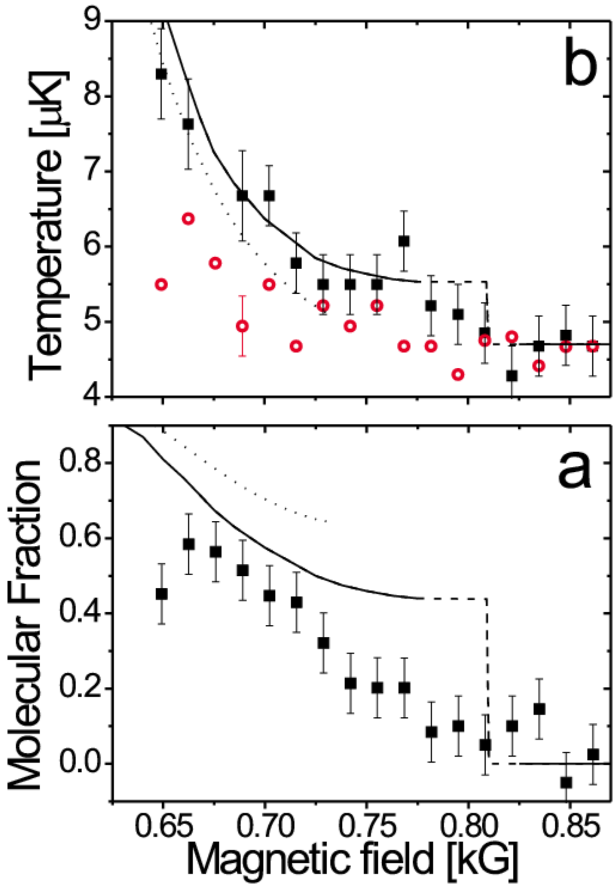

FIGURE 5.2 – *(a) Fraction des atomes sous forme moléculaire en fonction du champ magnétique au point 2. (b) températures des atomes correspondantes au point 2 (carrés) et au point 3 (cercles). La courbe en trait plein correspond au modèle thermodynamique présenté ci-dessous. La zone tiretée indiquent le régime d'interaction forte, pour lequel notre modèle n'est pas valable. La courbe en pointillé inclue les effets d'interactions faibles, dans un cadre similaire.*

5.2 Résultats expérimentaux

5.2.1 Création de molécules en fonction du champ magnétique

Un nuage de 1.5×10^5 atomes dans un mélange des deux états de spin est préparé à 1060 G à une température de 4.7 μK avec $T_\mathrm{F} = 11\,\mu$K. Les fréquences d'oscillations du piège optique sont $\omega_x/2\pi = 2.2(2)$ kHz, $\omega_y/2\pi = 4.6(4)$ kHz, $\omega_z/2\pi = 5.1(5)$ kHz. Le champ magnétique est ensuite varié linéairement en 50 ms vers la zone $a > 0$ où on s'attend à une création de dimères faiblement liés. Le champ magnétique au point 2 est varié entre 650 G et 870 G. La remontée du champ pour compter le nombre d'atome total s'effectue aussi en 50 ms. Les résultats sont représentés sur la figure 5.2 en fonction du champ magnétique au point 2. On reporte non seulement la fraction moléculaire $2N_\mathrm{mol}/N_\mathrm{tot}$ mais aussi la température des atomes restants du coté $a > 0$ (point 2) et celle de l'ensemble des atomes après la remontée du champ (point 3). La fraction moléculaire maximum est obtenue pour 660 G et atteint jusqu'à 60% à cette température. Pour des champs magnétiques faibles $B < 650\,\mathrm{G}$, l'augmentation des pertes (voir partie 6.2.2) conduit à un taux de formation effectif de molécules plus faible. La température augmente fortement dans la région où l'on crée une fraction de molécules importante. Ceci n'est pas surprenant car chaque recombinaison à trois corps libère une énergie cinétique E_b qui échauffe l'ensemble du nuage, atomes et molécules. De plus, proche de résonance, les taux de collisions élastiques atome-atome, atome-molécule, et molécule-molécule[2] sont grands (de l'ordre de $10^5\,\mathrm{s}^{-1}$) devant l'inverse du temps caractéristique de notre expérience et on s'attend donc à ce que l'équilibre thermique soit maintenu. Au contraire, la température après la double rampe de champ magnétique (point 1→point 2→point 3) est quasiment constante et égale à la température initiale du nuage. On revient à des conditions proches des conditions initiales. Le léger chauffage correspondant à des rampes vers les champs magnétiques les plus faibles peut s'expliquer par des pertes de molécules. Le processus dans son ensemble est donc *réversible*.

5.2.2 Dépendance en température

Varions maintenant la température intiale du nuage avant la rampe de champ magnétique. Pour cela, le piège optique est plus ou moins décomprimé. On mesure ensuite la fraction de molécules présentes à 690 G, ce qui correspond à $a = 78\,\mathrm{nm}$ et à $E_b/k_\mathrm{B} = 12\,\mu\mathrm{K}$. Quand on réduit l'intensité du laser de piègeage et donc la profondeur du piège, à la fois T et T_F diminuent, et la fraction moléculaire augmente (fig. 5.3). On peut alors atteindre des taux de formation de molécules supérieurs à 80%. A l'intensité la plus faible, on a probablement un effet important des pertes car la profondeur du piège devient de l'ordre de l'énergie de liaison des molécules. Des expérience complémentaires ont ensuite montrées que non seulement l'évaporation du gaz (réduction du facteur T/T_F) mais aussi l'ouverture adiabatique du piège (réduction de T et T_F par le même facteur) étaient favorable à l'obtention de fractions moléculaires importantes. Ainsi, pour $T_\mathrm{F} = 11\,\mu\mathrm{K}$, en réduisant la température de $0.5\,T_\mathrm{F}$ à $0.3\,T_\mathrm{F}$, la fraction moléculaire augmente de 40% à 65%. De la même manière, en gardant $T/T_\mathrm{F} = 0.3$ constant, quand la température varie de $4.5\,\mu\mathrm{K}$ à $1.8\,\mu\mathrm{K}$, la fraction moléculaire passe de 50% à 85%.

5.2.3 Durée de vie

La durée de vie des molécules est étudiée pour deux valeurs du champ magnétique 636 G et 690 G. La technique est simple, on crée des molécules à un champ magnétique

[2]Les longueurs de diffusion atome-molécule et molécule-molécule valent respectivement $1.2a$ [105] et $0.6a$, où a est la longueur de diffusion atomique [107]. Cette dernière valeur sera discutée plus en détails dans le chapitre suivant.

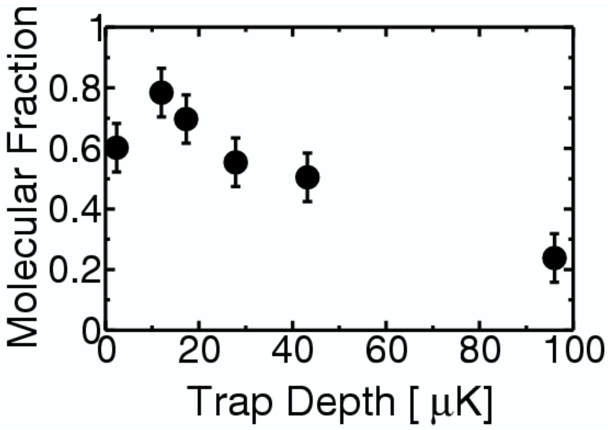

FIGURE 5.3 – *Fraction des atomes sous forme moléculaire en fonction de la profondeur du piège dipolaire pour $B = 690$ G, $a = 78$ nm et $E_b = 12\,\mu$K.*

donné et on attend pendant un temps variable avant de remonter le champ au delà de la résonance pour compter les atomes restant. On choisit des conditions telles que la fraction atomique est faible ($\lesssim 20\,\%$). Plus précisément, les fréquences d'oscillation du piège sont $\omega_x/2\pi = 950$ Hz, $\omega_y/2\pi = 2000$ Hz et $\omega_z/2\pi = 2140$ Hz et la température initiale à 1060 G vaut 1.1 μK=0.28 T_{F}. Les courbes de durée de vie obtenue sont représentée sur la figure 5.4. Les molécules sont plus stables à $B = 690$ G qu'à $B = 636$ G. A 690 G, le temps

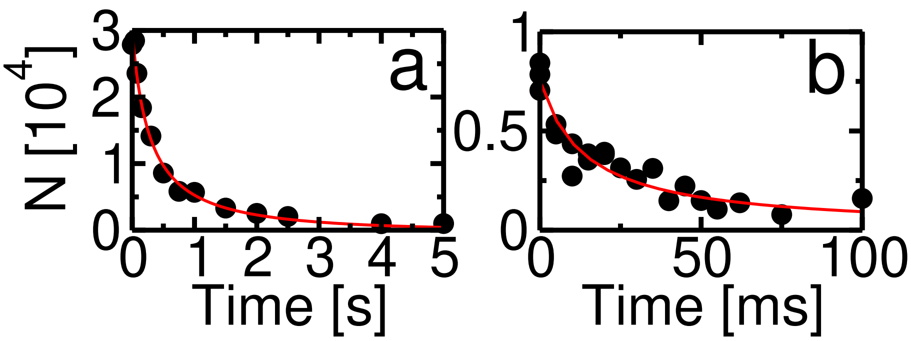

FIGURE 5.4 – *Durée de vie des molécules pour différentes valeurs de a. Nombre de molécules $(N_3 - N_2)/2$ en fonction du temps. a :$B = 690$ G, $a = 79$ nm. b :$B = 636$ G, $a = 35$ nm.*

de vie des molécules est de l'ordre de 500 ms. Le nuage de molécules faiblement liées est donc très stable. Ce résultat est en accord avec la prédiction de D. Petrov, C. Salomon et G.V. Shlyapnikov [107]. Proche de résonance, les molécules sont stabilisées par le principe de Pauli. La dépendance du temps de vie des molécules en fonction du champ magnétique sera étudiée dans le cas de condensats dans la partie 6.2.2.

5.2.4 Densité dans l'espace des phases

La remaquable stabilité des gaz de molécules fermioniques a permis d'envisager leur condensation de Bose-Einstein. En effet, ces molécules consituées de deux fermions sont des bosons. Evaluons maintenant la densité dans l'espace des phases pour les molécules. Pour le point à 690 G de la figure 5.2, il y a $1.8\,10^4$ molécules et $3.3\,10^4$ atomes. La température des atomes est mesuré à $6.7\,\mu$K, alors que la température critique calculée à partir de la formule sans interaction vaut $4.4\,\mu$K. Si on inclue l'effet des interactions en champ moyen on trouve alors une température de condensation[3] de $3.0\,\mu$K . On est donc très proche de la condensation des molécules. Il est intéressant de noter que ceci est le cas pour tous les points expérimentaux situés entre 675 et 750 G. De plus, le temps de collision élastique entre molécules est inférieur à $3\,\mu$s [60], alors que la durée de vie du nuage est de l'ordre de 500 ms ; on peut donc estimer que l'évaporation des molécules sera très efficace. L'observation de la condensation des molécules fait l'objet du chapitre suivant.

5.3 Modèle thermodynamique

5.3.1 Introduction

Le fait que les processus de création puis de dissociation des molécules soient réversibles prouve que l'évolution du système lors des rampes de champ magnétique est quasi-statique et que l'on reste proche d'un équilibre non seulement thermique (égalité des températures) mais aussi chimique (égalité des potentiels chimiques) entre atomes et molécules. Cette hypothèse est confirmée par le calcul de D. Petrov du le taux de formation à trois corps [105] qui est grand devant l'inverse du temps de la rampe de champ magnétique. On peut alors développer, pour nos conditions, un modèle d'évolution du mélange d'atomes et de molécules fondé sur la conservation de l'entropie. Pour simplifier, les interactions entre atomes sont négligées complètement, et on ne s'attend donc pas à ce que ce modèle soit exact proche de la résonance. Les calculs sont menés dans l'approximation de densité locale dans un piège harmonique. Le fond du piège pour les atomes est arbitrairement fixé à énergie nulle. Celui des molécules est alors décalé par l'énergie de liaison de la molécule E_b (fig. 5.5). On se place à l'équilibre thermodynamique, c'est à dire que les distributions atomiques et moléculaires seront caractérisées par une seule température et un seul potentiel chimique. Un modèle similaire a été développé par C. Chin et R. Grimm [117] dans le régime classique.

[3] Le modèle est présenté dans la partie 6.3.2

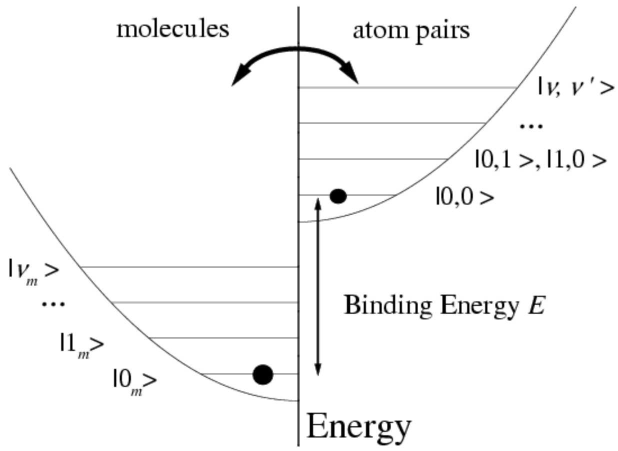

FIGURE 5.5 – *Représentation schématique des deux continuums atomiques et moléculaires. Ils sont décalés l'un par rapport à l'autre de l'énergie de liaison E_b. Figure extraite de [117].*

5.3.2 Equations thermodynamiques

Le fait d'utiliser un modèle sans interaction permet d'utiliser les expressions optenues dans la partie théorique (Eq. 1.8). En ajoutant la contribution d'un éventuel condensat de molécules, on obtient alors les équation suivantes pour les nombres d'atomes.

$$N_\uparrow = N_\downarrow = \left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3 \mathrm{PolyLog}[3, -\mathrm{e}^{\mu_{\mathrm{at}}/k_{\mathrm{B}}T}] \tag{5.2}$$

$$N_{\mathrm{mol}} = \left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3 \mathrm{PolyLog}[3, -\mathrm{e}^{(\mu_{\mathrm{mol}}-E_b)/k_{\mathrm{B}}T}] + \frac{1}{\exp(\frac{E_b-\mu_{mol}}{k_BT})-1} \tag{5.3}$$

où μ_{mol} et μ_{at} sont les potentiels chimiques des nuages respectivement moléculaires et atomiques. En tenant compte du fait qu'il y a deux atomes dans une molécule, on a $\mu_{\mathrm{mol}} = 2\mu_{\mathrm{at}}$. Le nombre total d'atome N_{tot} est alors $N_{\mathrm{tot}} = N_\uparrow + N_\downarrow + 2N_{mol}$. Des équations similaires peuvent être écrites pour l'entropie.

$$S_\uparrow = S_\downarrow = k_{\mathrm{B}} \left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3 \left(\frac{\mu_{\mathrm{at}}}{k_{\mathrm{B}}T}\mathrm{PolyLog}[3, -\mathrm{e}^{\mu_{\mathrm{at}}/k_{\mathrm{B}}T}] - 4\mathrm{PolyLog}[4, -\mathrm{e}^{\mu_{\mathrm{at}}/k_{\mathrm{B}}T}]\right) \tag{5.4}$$

$$S_{\mathrm{mol}} = -k_{\mathrm{B}} \left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3 \left(\frac{\mu_{\mathrm{mol}}-E_b}{k_{\mathrm{B}}T}\mathrm{PolyLog}[3, \mathrm{e}^{(\mu_{\mathrm{mol}}-E_b)/k_{\mathrm{B}}T}] - 4\mathrm{PolyLog}[4, \mathrm{e}^{(\mu_{\mathrm{mol}}-E_b)/k_{\mathrm{B}}T}]\right) \tag{5.5}$$

L'entropie totale du mélange est alors $S_{\mathrm{tot}} = S_\uparrow + S_\downarrow + S_{\mathrm{mol}}$. Les équations de conservation du nombre d'atome et de l'entropie permettent de calculer les deux inconnues que sont μ_{at} et T en fonction de la valeur de E_b et donc du champ magnétique.

5.3.3 Résultats et interprétation

Les équations précédentes peuvent être adimensionnées en utilisant l'énergie de Fermi $k_B T_F = \hbar\bar{\omega}(3N_{tot})^{1/3}$ comme échelle d'énergie. Les résultats numériques pour la température ainsi que pour les fractions moléculaire et moléculaire condensée sont représentés en fonction du rapport $E_b/k_B T_F$ sur les figures 5.6 et 5.7.

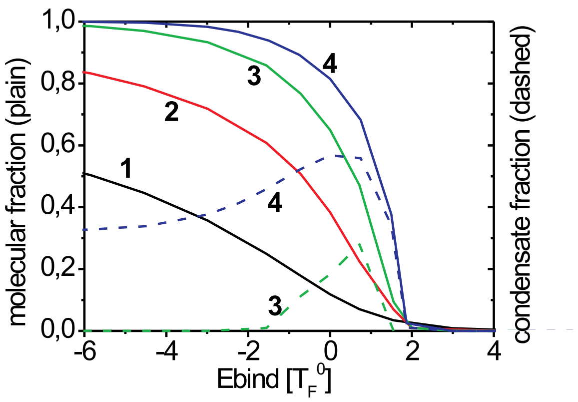

FIGURE 5.6 – *Fraction moléculaire (ligne continue) et fraction moléculaire condensée (ligne pointillée) en fonction de la valeur de l'énergie de liaison de la molécule. Les courbes, numérotées de 1 à 4, correspondent à des paramètres de dégénérescence initiaux T/T_F respectivement égaux à 1, 0.5, 0.25, et 0.125. Dans les deux premiers cas, la fraction condensée est toujours nulle.*

Intéressons nous d'abord à la région $E_b < 0$ qui est celle qui correspond à l'existence d'un état moléculaire. De façon simple, plus l'énergie de l'états moléculaire est inférieure à l'énergie du continuum des atomes libres, plus la fraction moléculaire augmente. Comme c'est le rapport E_b/T_F qui est la quantité pertinente, diminuer T_F à T/T_F initial constant est aussi favorable à l'obtention de fractions moléculaires importantes. De plus, une valeur de T/T_F initiale faible, correspondant à entropie faible, est aussi favorable. Qualitativement, le modèle reproduit donc bien les observations expérimentales. L'augmentation de la température avec la diminution de E_b est simple à expliquer. En effet, le processus de création d'une molécule relâche une énergie cinétique $-E_b > 0$ dans le système. On a donc un chauffage. Pour un système initialement très dégénéré, la température sature avec l'obtention d'un gaz moléculaire pur. Pour un système dans le régime classique, l'augmentation de température est linéaire avec la variation de E_b [117]. Dans le cadre de ce modèle, on obtient un condensat de molécule en partant de température $T \leq T_F/4$. Bizarrement, un condensat formé proche de résonance peut disparaître sous l'influence du chauffage. Ce n'est que pour des températures encore plus faibles qu'on conserve un condensat de molécules dans la limite $E_b \to -\infty$.

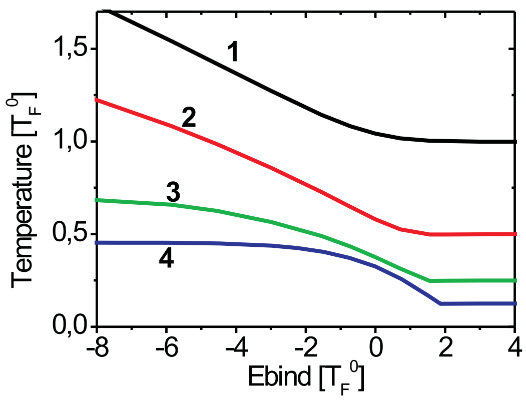

FIGURE 5.7 – *Température du mélange fermions-molécules en fonction de la valeur de l'énergie de liaison des molécules. Les quatre courbes correspondent respectivement à des paramètres de dégénérescence initiaux T/T_{F} égaux à 1, 0.5, 0.25, et 0.125.*

Dans le cadre du modèle, utiliser des énergies de liaison positives ne pose pas de problème, E_b représente seulement l'écart entre les deux continuum. Cependant l'interprétation physique d'un tel état est douteuse car il n'existe pas d'état moléculaire stable d'énergie positive dans le problème à deux corps. En réalité dans cette zone à température nulle, on est dans un état BCS, que le modèle sans interaction ne trouve évidemment pas [4]. Cependant, l'aspect conservation de l'entropie est un argument très général, même si le modèle est faux proche de résonance. Analytiquement, L. Carr, G. Shlyapnikov et Y. Castin ont montré qu'à partir d'un condensat de molécules caractérisé par T/T_{C}, où T_{C} est la température de condensation, on obtient par simple conservation de l'entropie un gaz de fermions extrêmement froid et dégénéré caractérisé par $T/T_{\mathrm{F}} \propto (T/T_{\mathrm{C}})^3$. [119]. Cette méthode est un moyen d'obtenir des gaz de Fermi très dégénérés de façon relativement facile. Ainsi, à partir d'un condensat de molécules à une température de $T = T_{\mathrm{C}}/3$ dans le régime $k_{\mathrm{F}}a \ll 1$, on obtient, en traversant de façon réversible la résonance, un gaz

[4] G Falco et H. Stoof ont proposé d'utiliser des états moléculaires de durée de vie finie à droite de résonance [118]. Pour trouver l'énergie d'un tel état, on peut chercher un pôle du propagateur d'une molécule. Ce pôle est alors complexe. La partie réelle correspond à l'énergie de cet état, la partie imaginaire correspond à sa largeur et donc à l'inverse de sa durée de vie. Proche de la résonance, cette durée de vie est relativement longue et on peut considérer cet état comme un état moléculaire avec une énergie positive $E_b = \hbar^2/ma^2$ pour $a < 0$. A basse température, les premières molécules sont alors créées quand $E_b/T_{\mathrm{F}} = 2$ (fig. 5.6). L'interprétation est simple, cela correspond au moment où l'énergie d'une molécule devient inférieure à l'énergie de deux atomes au niveaux de Fermi. Il devient alors énergétiquement favorable de créer des molécules. Ce modèle, extrêmement simplifié, semble alors reproduire les résultats concernant l'obtention d'un condensat par passage rapide à travers la résonance [118, 18]. Cependant, le fait de considérer les molécules sans interaction dans cette zone où les interactions sont très fortes est discutable.

de Fermi à une température de l'ordre de quelques pour cent de la température de Fermi.

5.3.4 Comparaison avec les résultats expérimentaux

Les résultats du modèle thermodynamique sont reportés sur la figure 5.2 (courbe en train plein). Au dessus de résonance, les courbes correspondent à un gaz de Fermi pur et proche de résonance, les tirets signifient qu'on n'attend pas un bon accord dans cette zone où les interactions sont fortes. Pour la fraction moléculaire, la différence importante entre le modèle et les résultats expérimentaux pour $720\,\mathrm{G} \leq B \leq 830\,\mathrm{G}$ s'explique par la non détection des molécules due à une coupure trop rapide du champ magnétique (voir partie 5.2.1). Le modèle reproduit donc bien les résultats expérimentaux à la fois pour la fraction moléculaire et pour la température, sans aucun paramètre ajustable. Dans le cadre d'un modèle similaire à celui présenté ici, si on introduit les interactions dans un régime faiblement interagissant, les résultats reproduisent un peu moins bien les données mais l'accord reste satisfaisant (courbe pointillé).

5.4 D'autres molécules ultrafroides

Les techniques de refroidissement par contact cryogénique d'un nuage de molécules piégées avec un gaz d'hélium froid [120] et de photoassociation d'un nuage d'atomes ultrafroids [121] n'ont pas permis l'obtention de gaz de molécules dans un régime dégénéré. Ce n'est qu'en utilisant des états moléculaires couplés au continuum atomique proche de résonances de Feshbach, que des gaz quantiques moléculaires ont récemment pu être obtenus.

5.4.1 Molécules constituées de deux bosons

La principale difficulté dans le cas des bosons est la présence de pertes importantes proche de résonance ; le taux de relaxation molécule-molécule vers les états liés profonds est proportionnel à a pour des bosons alors que pour des fermions il est en $a^{-2.55}$ [107]. La première expérience, qui a exploré le couplage entre atome et molécules proche d'une résonance de Feshbach, fut réalisée par le groupe de C. Wieman [122]. Elle a montré l'existence d'oscillations dans le nombre d'atomes condensés à la suite d'une rampe de champ magnétique rapide proche de la résonance de Feshbach. Ce résultat prouve que le couplage entre atomes et molécules est cohérent. Plus tard, à la suite des progrès effectués dans les gaz de fermions, des dimères de deux bosons formés par passage à travers des résonances de Feshbach seront directement observés. Ainsi des molécules de Rb_2 [123], de Cs_2 [124] et de Na_2 [125] ont été formées à partir de condensats atomiques avec une densité dans l'espace des phases supérieure à 1. Ces nuages ne sont cependant pas à l'équilibre thermodynamique car ils sont formés en temps de vol pour éviter les pertes. Le taux de conversion vers les états moléculaires est limité par la présence de fortes pertes à résonance et est de l'ordre de 10 % à 30 % maximum [126].

5.4.2 Molécules constituées de deux fermions

Le groupe de D. Jin fut le premier à publier l'observation de molécules froides constituées de deux fermions à partir de ^{40}K [127]. La dépendance de l'énergie de liaison en $-\hbar^2/ma^2$ fut vérifiée par dissociation radio-fréquence des molécules. Notre travail, présenté ci-dessus, fut la première observation de molécules froides à partir de ^{6}Li fermionique. Les dépendances en température et en champ magnétique de l'efficacité de production ces molécules sont étudiées. Nous avons aussi montré la réversibilité des processus de formation et de dissociation des molécules. Le groupe de R. Grimm a lui aussi créé des molécules à partir de ^{6}Li [128]. Ils ont obtenu des gaz purs de molécules en enlevant sélectivement les atomes du pièges par une technique de Stern-Gerlach dans le piège optique. Cette technique leur a aussi permis de mesurer l'évolution du moment magnétique des molécules en fonction du champ magnétique [5]. Enfin, le groupe de R. Hulet a observé la création de molécules de Li_2 autour de la résonance faible situé à 543 G.

Au contraire des bosons, les molécules composées de fermions sont remarquablement stables, dans un régime d'interaction forte ; c'est une conséquence du principe de Pauli. On peut ainsi traverser la résonance de Feshbach lentement ce qui permet de former les molécules de façon réversible. On va ainsi pouvoir obtenir de véritables condensats de molécules à l'équilibre thermodynamique.

[5] Le moment magnétique des molécules est égal à deux fois celui des atomes proches de résonance. Ensuite, il décroît jusqu'à être nul quand les molécules sont essentiellement dans le canal fermé, c'est à dire un état lié du potentiel singulet.

Chapitre 6

Condensat de molécules

Au chapitre précédent, l'obtention de dimères faiblement liés en variant le champ magnétique et en traversant la résonance de Feshbach a été décrite. Ces dimères, constitués de deux fermions sont des bosons, et peuvent donc condenser. Ce chapitre est consacré à l'étude des condensats de dimères faiblement liés. Les techniques de formation et d'observation de ce système physique nouveau sont décrites. La remarquable stabilité de ces condensats en interaction forte permet d'accéder à des régimes auparavant inaccessibles dans des gaz d'atomes ultrafroids.

6.1 Formation et observation du condensat

6.1.1 Techniques d'imagerie du condensat en temps de vol

Le principal problème réside dans la mise au point de méthodes pour l'observation et la caractérisation d'un condensat de molécules. En effet, la technique utilisée au chapitre précédent ne permet de connaître que le nombre de molécules présentes. On peut, dans un premier temps, étudier des signatures indirectes de condensation, tel qu'un nombre important de particules pièges dans un piège peu profond impliquant la présence d'un condensat [17]. Cependant, il est bien plus intéressant d'avoir accès directement à la distribution en impulsion ou position d'un nuage moléculaire pour laquelle la signature de condensation est évidente. Pour cela, deux techniques ont été développées dans les différents groupes travaillant dans le domaine : la détection résonnante des molécules et la dissociation des molécules pendant le temps de vol. La détection résonnante consiste à observer directement les molécules par absorption. Elle nécessite un laser accordé sur la transition entre l'état moléculaire et l'état excité à deux atomes. En fait, proche de la résonance de Feshbach, l'énergie de l'état lié est très proche du continuum, et un laser accordé sur la transition atomique à haut champ magnétique permet d'obtenir un signal d'absorption [129] [1].

[1] Cependant, à cause du mauvais recouvrement entre la fonction d'onde de l'état lié et celle des états excités atomiques, l'efficacité de détection est réduite.

La deuxième méthode consiste à dissocier les molécules à la fin du temps de vol pour permettre l'utilisation de l'imagerie par absorption habituelle à champ magnétique nul. Pour cela on peut, soit utiliser une impulsion de dissociation radio-fréquence [18], soit remonter le champ magnétique rapidement au dessus de la résonance [130, 20]. C'est cette dernière technique que nous avons utilisée. La séquence expérimentale du temps de vol est présentée sur la figure 6.1. Après la coupure du piège optique, pendant une première phase, la plus

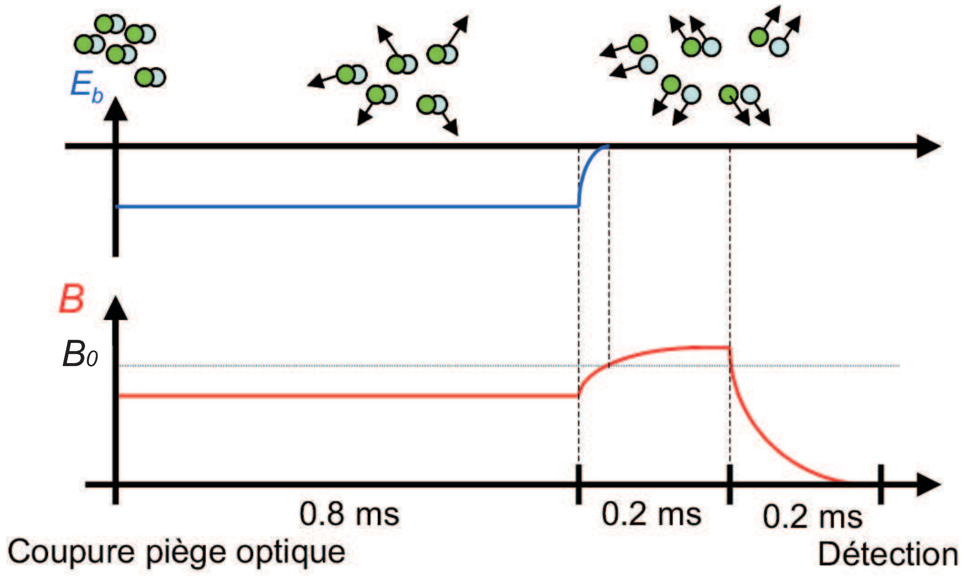

FIGURE 6.1 – *Séquence expérimentale utilisée pour sonder la distribution de vitesse des molécules. Après un temps de vol de 0.8 ms, le champ magnétique est remonté en coupant le courant dans les bobines de compensation du piège magnétique, ce qui permet de dissocier les molécules. 0.2 ms avant l'imagerie du nuage, le champ magnétique principal est coupé. B_0 indique la position de la résonance de Feshbach. Les molécules sont formées pour $B < B_0$ avec l'énergie de liaison E_b.*

longue (typiquement 0.8 ms), le champ magnétique est maintenu constant et le nuage de molécules s'étend alors comme un nuage de bosons en interaction. Si on a un condensat, la distribution spatiale devient alors bimodale avec une partie condensée étroite et elliptique si le piège est anisotrope. Ensuite, on augmente le champ magnétique relativement rapidement au-delà de la résonance, l'énergie de liaison des molécules se réduit jusqu'à zéro, et ces dernières sont dissociées. En pratique, pour que l'augmentation du champ soit suffisamment rapide, on coupe un courant, préalablement ajouté, de l'ordre de 40 A dans les bobines de compensation du piège magnétique (le temps caractéristique est de 50 μs)[2]. Finalement, on image le nuage atomique de façon standard en coupant complètement le

[2] Le sens du courant dans ces bobines est inversé par rapport aux bobines de confinement axial ("pinch") qui créent l'essentiel du champ magnétique, et on a donc un augmentation du champ magnétique total.

courant dans les bobines responsable du champ Feshbach. On obtient alors une image semblable à celle qu'on aurait obtenu en imageant directement les molécules. On peut s'inquiéter du fait que la dissociation rapide des molécules dépose de l'énergie dans le système, car le critère de suivi adiabatique (Eq. 5.1) n'est plus respecté pour des énergies de liaison faibles. Cependant, l'énergie de liaison des molécules est alors inférieure à $1\,\mu$K. Ce qui est déjà inférieur à l'énergie totale relâchée dans l'expansion. De plus, cette énergie n'est relâchée qu'à la fin du temps de vol, environ 0.4 ms avant la détection, un temps court par rapport au temps de vol total. La distribution de densité des molécules après temps de vol n'est donc que peu modifiée par l'effet de la coupure des paires.

6.1.2 Formation d'un condensat de molécules

Pour obtenir un condensat de molécules, d'après le modèle thermodynamique présenté au chapitre précédent, il suffit de refroidir le gaz de Fermi jusqu'à une température inférieure à $0.2\,T_{\mathrm{F}}$ avant de passer lentement sur la résonance [18, 20]. Evidemment, on peut aussi évaporer directement le gaz du coté $a > 0$. A haute température, le gaz est alors composé essentiellement d'atomes, et au fur et à mesure que le gaz est refroidi, il y a de plus en plus de molécules. Les atomes sont évaporés préférentiellement car la profondeur du piège est double pour les molécules. Finalement, le refroidissement d'un gaz de molécules permet d'obtenir un condensat [17, 19]. Laquelle de ces deux méthodes est la plus efficace n'est pas une question tranchée. Expérimentalement, les deux méthodes permettent de produire un condensat.

Pour éviter les pertes, on a choisi de faire l'essentiel de l'évaporation sur un gaz de fermions. Après la réalisation du mélange à 1060 G, on obtient $\sim 2 \times 10^5$ atomes à une température proche de la température de Fermi. Pour ces expériences, les fréquences du piège optique à pleine puissance sont $\omega_x/2\pi = 2.4(2)\,$kHz, $\omega_y/2\pi = 5(3)\,$kHz, and $\omega_z/2\pi = 5.5(4)\,$kHz, et sa profondeur est de $\sim 80\,\mu$K. On réduit ensuite la puissance des faisceaux avant de changer le champ magnétique à une valeur de 770 G en 200 ms. Si la profondeur du piège est réduite à une valeur en dessous de 15 % de la profondeur maximum, ce qui correspond à une température inférieure à $0.2\,T_{\mathrm{F}}$ du coté $a < 0$, une double structure est observée ce qui signifie que le gaz de molécules est condensé. Pour une telle évaporation, on n'observe plus d'atome libre ; ils sont tous sous forme moléculaire. Une faible évaporation supplémentaire des atomes a probablement lieu pendant le passage de la résonance, car le piège optique est deux fois moins profond pour les atomes que pour les molécules. Une image typique d'une distribution d'un gaz partiellement condensé de dimères après temps de vol est présentée sur la figure 6.2a. A titre de comparaison, un condensat de ^{7}Li est représenté sur la figure 6.2b. La différence de largeur entre les deux condensats montre, de façon nette, que les interactions sont plus importantes dans un gaz de dimères que dans le gaz atomique de ^{7}Li à 610 G. La largeur du condensat est pour le ^{7}Li à 610 G en accord avec la valeur de la longueur de diffusion théorique qui est de 0.6 nm. Pour la longueur de diffusion entre dimères, on s'attend donc à une valeur nettement plus

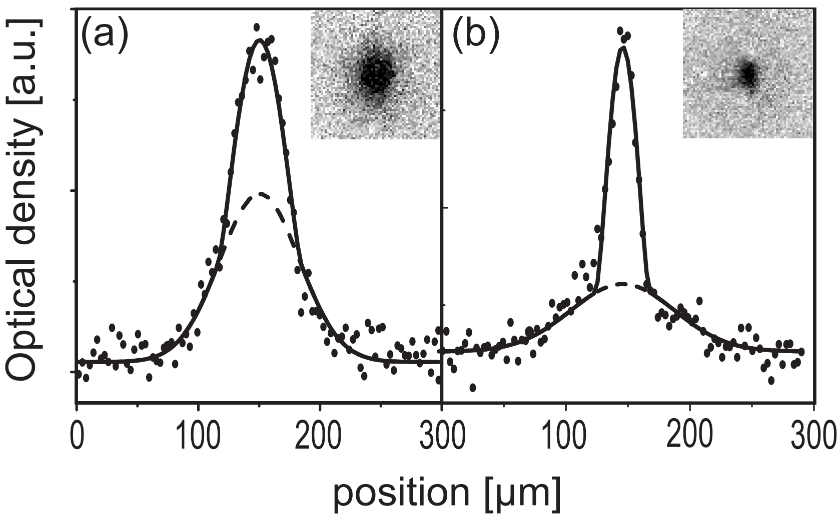

Figure 6.2 – *Condensats de 2.10^4 molécules de ^6Li à 770 G (a) et 2.10^4 atomes de ^7Li à $B = 610$ G (b) initialement confinés dans le même piège optique. Densité optique selon l'axe de faible confinement (x) du nuage après 1, 2 ms (a) et 1, 4 ms (b). La courbe continue est l'ajustement par la somme d'une gaussienne et de la distribution d'un condensat dans le régime Thomas-Fermi. Les courbes tiretées représentent la seule composante gaussienne. $\omega_x/2\pi = 0.59(4)$ kHz, $\omega_y/2\pi = 1.6(1)$ kHz, and $\omega_z/2\pi = 1.7(1)$ kHz pour (a). $\omega_x/2\pi = 0.55(4)$ kHz, $\omega_y/2\pi = 1.5(1)$ kHz, et $\omega_z/2\pi = 1.6(1)$ kHz pour (b). La fraction condensée est d'environ 44 % en (a) et 28 % en (b).*

grande, et pour avoir une bonne précision, il est préférable d'étudier des condensats purs. C'est l'objet de la section suivante.

6.2 Un condensat stable en interaction forte

6.2.1 Mesure de la longueur de diffusion à partir d'un condensat pur

Obtention d'un condensat pur

A partir d'un nuage partiellement condensé, on peut continuer l'évaporation pour obtenir un condensat pur. Une autre méthode consisterait à refroidir le gaz de fermions à des températures de l'ordre du pour cent de la température de Fermi pour obtenir, par passage lent sur la résonance, un condensat quasi pur de molécules. Cependant, notre démarche qui consiste à commencer l'évaporation du coté $a < 0$ dans une zone où les pertes sont faibles jusqu'à ce que le principe de Pauli devienne vraiment gênant pour la thermalisation et à terminer l'évaporation sur les molécules semble intuitivement plus efficace. Expérimentalement, comme notre piège optique n'est pas stabilisé en puissance, il est difficile de réduire de façon précise sa profondeur au-dessous de quelques pour cent de la profondeur maximum. Pour continuer l'évaporation, on utilise la spécificité de notre piège croisé qui nous permet de recomprimer un seul des deux faisceaux. Ainsi, la fréquence moyenne du piège et donc la température de condensation augmente alors que la température est limitée par évaporation suivant la direction de confinement faible. On a donc une évaporation supplémentaire. En pratique, le faisceau horizontal est maintenu à une puissance de 3.5 % de sa puissance maximum, ce qui correspond à une profondeur de U/k_{B}=5.6 μK, alors que le faisceau horizontal est rétabli à pleine puissance. Les fréquences du piège sont alors de 440 Hz axialement et 5 kHz radialement. Avec 2×10^5 molécules, cela correspond à une température de condensation T_{C}^0 de 2.7 μK. Si on suppose que le rapport $\eta = U/k_{\mathrm{B}}T$ entre la profondeur du piège et la température est supérieure à 6, on a alors une température inférieure à $0.3T_{\mathrm{C}}$. Si on étudie les profils de densité suivant les deux directions d'expansion, on peut très bien les ajuster par des profils de Thomas-Fermi pur (figure 6.3). On ne voit pas de fraction thermique détectable. Notons cependant que le condensat est très gros, et qu'il est donc difficile de voir une faible fraction non condensée. A ce titre, il est très encourageant de noter que l'anisotropie observée 2.0(1) correspond à celle, 1.98, attendue d'après les équations hydrodynamiques régissant l'expansion d'un condensat. L'ensemble de ces observations confirme que nous avons bien obtenu un condensat pur.

Mesure de la longueur de diffusion

Une propriété intéressante des condensats gazeux en interaction répulsive est que leur taille est gouvernée par l'interaction de champ moyen entre les particules. La distribution condensée dans le piège est une distribution de Thomas-Fermi en forme de parabole

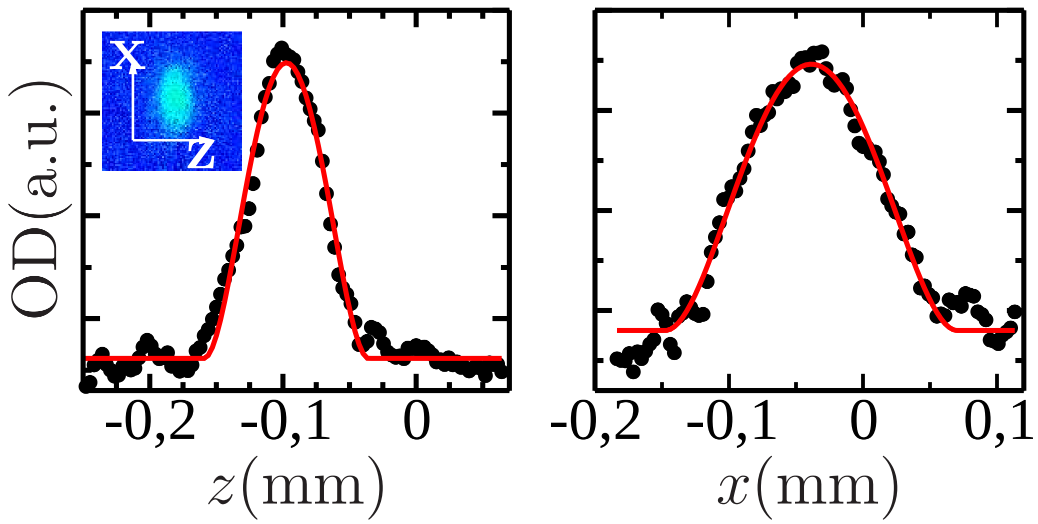

FIGURE 6.3 – *Condensat pur de* $2,3 \times 10^4$ *molécules* ^{6}*Li . Profils de densité optique selon la direction* z *(de faible confinement) et* x *après* $1,2$ *ms de temps de vol. Les courbes sont des ajustements par des distributions de Thomas-Fermi intégrées de rayons* $R_{\rm TF,z} = 51\ \mu m$ *et* $R_{\rm TF,x} = 103\ \mu m$.

inversée de rayons :

$$R_{x,y} = a_{\rm oh} \frac{\bar{\omega}}{\omega_{x,y}} \left(\frac{15 N_{\rm mol} a_{\rm m}}{a_{\rm oh}} \right)^{1/5} \tag{6.1}$$

où $a_{\rm m}$ est la longueur de diffusion en onde s entre molécules. Comme l'expansion correspond à un simple changement d'échelle (voir partie 4.3.1, on peut retrouver à partir des tailles observées après temps de vol les tailles $in-situ$ correspondantes, et donc calculer la valeur de la longueur de diffusion $a_{\rm m}$. On trouve $a_{\rm m} = 170^{+100}_{-60}$ à 770 G valeur où les condensats purs ont été formés. L'incertitude vient essentiellement de la calibration du nombre d'atomes connue à un facteur 2 près. Le résultat est très sensible aux mesures de taille à cause de la puissance 1/5 de la formule 6.1, cependant, ces mesures sont suffisamment précises et contribuent de façon négligeable à l'incertitude.

A cette même valeur de champ magnétique, un calcul multi-canaux de la longueur de diffusion entre atomes donne $a \simeq 300$ nm. On est donc en accord avec un calcul à quatre corps de D Petrov, C. Salomon et G. V. Shlyapnikov selon lequel $a_{\rm m} = 0.6\,a$ [107]. D'autres prédictions antérieures donnaient $a_{\rm m} = 2a$ [50] ce qui est incompatible avec nos données. Il faut noter que le gaz est dans un régime d'interaction très forte, $n^0_{\rm mol} a^3_{\rm m} = 0.3$. Il faut alors s'attendre à des corrections à l'approximation de Thomas-Fermi telles que des effets au-delà du champ moyen ou des effets dus à la nature composite des molécules (ces dernières peuvent être compris en terme de la transition BEC-BCS décrites au chapitre suivant).

Effets au-delà du champ moyen

Pour estimer la correction attendue à l'énergie relâchée, plaçons-nous à température nulle. La correction au potentiel chimique dans un système homogène prend alors la forme [131, 132] :

$$\mu = \frac{gn}{2}\left[1 + \frac{32}{3\sqrt{\pi}}(na^3)^{1/2}\right] \tag{6.2}$$

Pour $na_{\mathrm{mol}} \approx 0.3$, la correction est alors supérieure au terme d'ordre 0. Il n'est alors pas du tout évident que cette théorie au premier ordre s'applique. Néanmoins, continuons pour essayer d'estimer l'effet au-delà du champ moyen sur l'énergie relâchée. Dans l'approximation de densité locale, on peut trouver le profil de densité ainsi que les expressions du potentiel chimique et de l'énergie [26] pour un gaz piégé. Par suite, l'énergie relâchée dans une expansion en temps de vol, en incluant la correction au-delà du champ moyen est[3] :

$$E_{\mathrm{rel}} = \frac{2}{7}N\mu_{\mathrm{TF}}\left(1 + \frac{7}{32}\sqrt{\pi n(0)a^3}\right) \tag{6.3}$$

Le préfacteur de la correction au premier ordre est ici plus faible que pour le potentiel chimique. Pour $n^0_{\mathrm{mol}}a^3_{\mathrm{m}} = 0.3$, la correction à l'énergie relâchée (à température nulle) est alors d'environ 20%. La correction au premier ordre semble donc encore relativement modérée. On peut donc s'attendre à ce que notre estimation de la longueur de diffusion soit encore valable. A température non nulle, les corrections seront encore moins importantes. Ce calcul montre que les effets au-delà du champ moyen ne sont pas complètement négligeables, et il est envisageable d'étudier ces effets dans un gaz condensé de molécules faiblement liées[4].

6.2.2 Temps de vie des molécules en fonction de a

Comme on l'a vu au chapitre précédent, les molécules faiblement liées ont une particularité surprenante : quand a augmente, ce qui revient à augmenter les interactions effectives et à diminuer l'énergie de liaison des molécules, elles sont de plus en plus stables. Les temps de vie de condensats quasi-purs de molécules ont été mesurés pour différentes valeurs du champ magnétique et donc de a. La fonction d'ajustement pour trouver le taux de pertes à deux corps β dans le cas d'un condensat est donnée par [134] :

$$N_{\mathrm{mol}}(t) = \frac{N_{\mathrm{mol},0}}{(1+At)^{5/2}} \text{ avec } A = \beta N_{\mathrm{mol},0}^{2/5}\left[\frac{15^{2/5}}{35\pi}\left(\frac{m_{\mathrm{mol}}\bar{\omega}}{\hbar\sqrt{a_{\mathrm{m}}}}\right)^{6/5}\right] \tag{6.4}$$

[3] Il suffit de soustraire l'énergie de piégeage à l'énergie totale

[4] On peut aussi s'inquiéter d'éventuels effets de la nature composite des molécules, mais ceux-ci ne semblent pas jouer un rôle prépondérant dans la correction au champ moyen pour $k_{\mathrm{F}}a < 1$ (on pourra se reporter à l'insert de la figure 2 de [133] qui présente une simulation Monte-Carlo quantique de la transition BEC-BCS).

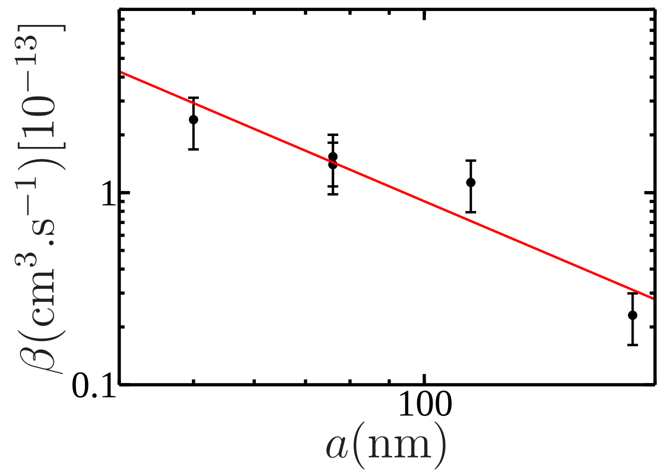

FIGURE 6.4 – *Taux de pertes β à deux corps en fonction de la longueur de diffusion interatomique a. La décroissance du taux quand on se rapproche de la résonance est bien décrite par une loi de puissance $\beta \propto a^{-1,9\pm0,8}$.*

Les résultats sont représentés sur la figure 6.4. Le taux de pertes décroît quand on se rapproche de la résonance. D. Petrov, C. Salomon et G. Shlyapnikov ont calculés la dépendance en a du taux de pertes à deux corps entre molécules dans le régime $na^3 \ll 1$ [107]. Une loi de puissance $\beta \propto a^{-2.55}$ est attendue[5]. Expérimentalement on obtient $\beta \propto a^{-1.9\pm0.8}$. Des mesures de pertes similaires ont été obtenues dans un gaz de molécules de potassium [135]. Notons que, dans le régime d'interaction forte, des effets à N-corps sont susceptibles de modifier la loi de puissance calculée dans [107].

6.3 Conséquences des interactions fortes

L'effet des interactions peut être estimé en comparant les énergies caractéristiques du système. A température nulle, l'énergie d'interaction par molécule est égale dans l'approximation de Thomas Fermi à $E_{\mathrm{cond}}/N_{\mathrm{mol}} = (2/7)\mu$ où $\mu = (1/2)\hbar\bar{\omega}\,(15Na/a_{\mathrm{oh}})^{2/5}$ est le potentiel chimique. Cette énergie d'interaction doit être comparée à l'énergie thermique $k_{\mathrm{B}}T$. Un nombre sans dimension qui révèle l'importance des interactions dans un système partiellement condensé est le rapport entre le potentiel chimique et la température critique [26].

$$\eta = \frac{\mu}{k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{C}}} = \frac{15^{2/5}}{2}(\zeta(3))^{1/3}(N_{\mathrm{mol}}^{1/6}\frac{a_{\mathrm{m}}}{a_{\mathrm{oh}}})^{2/5} \tag{6.5}$$

Ce facteur peut aussi s'exprimer en fonction de la densité pic à température nulle $\eta \approx 2.24[a^3 n_{T=0}(0)]^{1/6}$. Dans les expériences de condensation de Rubidium, le paramètre na^3 vaut typiquement 10^{-5}, ce qui correspond à $\eta \sim 0.3$. Les effets des interactions sont déjà

[5]Dans cet article, le taux de pertes à deux corps entre une molécule et un atome est aussi calculé. Une taux en $a^{-3.33}$ est prédit. On s'attend donc à ce que proche de résonance, les pertes molécule-molécule dominent.

visibles [26] mais ils restent relativement faibles, et un traitement perturbatif en fonction de η donne des résultats satisfaisants. Dans le cas des condensats de dimères proches de la résonance que l'on étudie, le paramètre $n_{\mathrm{mol}}a_{\mathrm{m}}^3$ prend des valeurs typiques de l'ordre de 0.1-0.3 ; on sort du régime perturbatif, les interactions jouent un rôle prépondérant. La distance moyenne entre molécules $n_{\mathrm{mol}}^{-1/3}$ devient de l'ordre de la taille typique d'une molécule qui est de l'ordre de a_{m}. Dans la suite, on s'intéresse à l'effet des interactions sur l'expansion d'un gaz partiellement condensé et sur la température critique de condensation.

6.3.1 Expansion d'un gaz partiellement condensé en interaction forte

Une expansion "anormale"

Revenons à l'étude de l'image présentée sur la figure 6.2, où l'on a représenté l'ajustement des distributions par un fonction bimodale composée d'une gaussienne pour la partie thermique et d'une parabole pour la partie condensée. Habituellement, la largeur de la gaussienne thermique permet de trouver la température : $1.6\,\mu$K pour le condensat de dimères (fig. 6.2a), $0.7\,\mu$K pour le condensat atomique de ^{7}Li (fig. 6.2b). Pour le condensat atomique, cette température correspond à $0.6\,T_{\mathrm{C}}$. Pour le condensat de molécules, la température critique $T_{\mathrm{C}} = 1.4\,\mu$K est inférieure à la température mesurée par l'ajustement gaussien du gaz thermique. La température mesurée est donc en contradiction avec le fait d'avoir un condensat. Comme le piège optique est identique dans les deux cas, on peut essayer aussi de comparer les deux températures. Pour le ^{7}Li , on sait que le rapport entre la profondeur du piège et la température est de 4 ou 5. Pour le condensat de dimères, étant donné un taux de collision bien supérieur, on s'attend plutôt à un facteur entre 7 et 10. Par comparaison avec le condensat atomique, en prenant en compte que la profondeur du piège pour les dimères est deux fois plus importante que pour les atomes, le température du condensat de dimères devrait donc être inférieure à $0.8\,\mu$K. L'ajustement gaussien de la partie thermique ne permet donc pas de connaître la température du gaz. Le piédestal thermique est élargi par les interactions. Il faut tenir compte de l'interaction de champ moyen non seulement pour le condensat, mais aussi pour la partie thermique.

Modèle de champ moyen complet

Considérons un modèle de champ moyen (approximation de Hartree) pour un gaz de bosons à température finie dans un piège harmonique. L'objectif est d'inclure de façon correcte non seulement les interactions entre les atomes du condensat qui dominent à la limite des faibles interactions mais aussi les interactions entre le condensat et le gaz thermique ainsi que les interactions entre les particules du gaz thermique. En revanche, les corrections au-delà du champ moyen ne sont pas prises en compte. Dans ce modèle, le gaz est séparé en deux parties, une fraction condensée et une fraction thermique, de densité respective n_{cond} et n_{th}. Dans l'approximation de densité locale, on peut écrire la densité du condensat en fonction du potentiel chimique et de la densité du gaz thermique[6].

$$g n_{\mathrm{cond}}(\mathbf{r}) = \mathrm{Max}\left(\mu - \sum_i \frac{1}{2} m_{\mathrm{mol}} \omega_i^2 r_i^2 - 2 g n_{\mathrm{th}}(\mathbf{r}), 0\right) \text{ , avec } g = \frac{4\pi\hbar^2 a_{\mathrm{m}}}{m_{\mathrm{mol}}} \tag{6.6}$$

Si le potentiel chimique local est négatif, il n'y a plus de condensat. Le potentiel $V(\mathbf{r})$ vu par le gaz thermique est alors la somme du potentiel extérieur et du potentiel de champ moyen créé par le condensat et le gaz thermique.

$$V(\mathbf{r}) = \mu + \left|\mu - \sum_i \frac{1}{2} m_{\mathrm{mol}} \omega_i^2 r_i^2 - 2 g n_{\mathrm{th}}\right| \tag{6.7}$$

Il faut maintenant calculer la densité du gaz thermique dans ce potentiel de façon auto-cohérente. Après intégration de la densité dans l'espace des phases (eq. 1.4) sur l'impulsion, on aboutit à l'équation implicite suivante pour la densité du gaz thermique :

$$n'_{\mathrm{th}}(r') = A\,\mathrm{Polylog}\left[\frac{3}{2}, \exp(-\beta\mu|1 - r'^2 - n'_{\mathrm{th}}(r')|)\right] \tag{6.8}$$

$$\text{avec } r'^2 = \sum_i \frac{m_{\mathrm{mol}} \omega_i^2 r_i^2}{2\mu} \tag{6.9}$$

$$n'_{\mathrm{th}}(r') = \frac{2 g n_{\mathrm{th}}(r')}{\mu} \tag{6.10}$$

$$A = \frac{2g}{\mu}\left(\frac{m_{\mathrm{mol}} k_{\mathrm{B}} T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \tag{6.11}$$

A partir du potentiel chimique μ, de la température T, et de la force des interactions g, on connait A et $\beta\mu$. Il suffit ensuite de résoudre numériquement l'équation 6.8 pour trouver la densité du gaz thermique, et donc aussi la densité du condensat grâce à l'équation 6.6. Considérons par exemple, les conditions de la figure 6.2a. La figure 6.5 montre alors la forme des distributions thermique et condensée. Le condensat et le gaz thermique se repoussent, et il y a une sorte de séparation de phase entre le condensat et le gaz thermique. Le gaz thermique prend la forme d'une sphère autour du condensat. Si on intègre la distribution suivant deux directions, on trouve que la densité intégrée du gaz thermique est aplatie dans la zone où le condensat est présent. Notons qu'on ne peut pas comparer directement ces images *in-situ* aux images mesurées après expansion car, pour un gaz partiellement condensé en interaction forte, les lois d'échelle ne s'appliquent pas.

Connaissant les distributions de la partie thermique et de la partie condensée, on peut calculer facilement, le nombre total de particules, l'énergie cinétique et les différents

[6]Le facteur 2 vient de l'amplification bosonique dans le cas du gaz thermique.

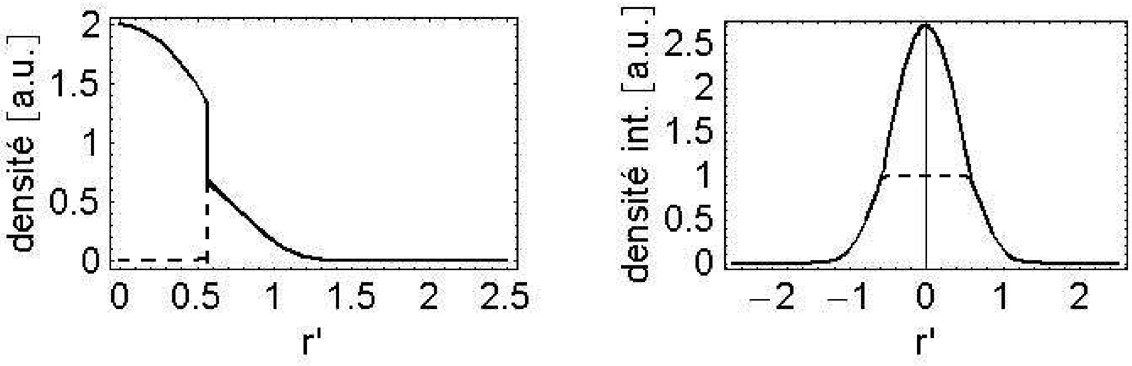

FIGURE 6.5 – *Distribution de la densité du gaz thermique (tirets) et de la densité totale (ligne continue). Gauche : densité en fonction de la position r'. Droite : densité intégrée suivant deux dimensions. Il y a une séparation de phase entre le condensat et le gaz thermique. le paramètre d'interaction est $Na/a_{\mathrm{oh}} = 1$, la fraction condensée vaut 44%.*

termes d'énergie d'interaction.

$$N_{\mathrm{th}} = \frac{\mu}{2g}\left(\frac{2\mu}{m_{\mathrm{mol}}\bar{\omega}^2}\right)^{3/2}\int \mathrm{d}^3r' n'_{\mathrm{th}}(r') \tag{6.12}$$

$$N_{\mathrm{cond}} = \frac{\mu}{g}\left(\frac{2\mu}{m_{\mathrm{mol}}\bar{\omega}^2}\right)^{3/2}\int \mathrm{d}^3r' \mathrm{Max}(1 - r'^2 - n'_{\mathrm{th}}(r'), 0) \tag{6.13}$$

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{3}{2}\left(\frac{\mu}{\pi\beta(\hbar\bar{\omega})^2}\right)^{3/2}\int \mathrm{d}^3r' \mathrm{Polylog}\left[\frac{5}{2}, \exp(-\beta\mu|1 - r'^2 - n'_{\mathrm{th}}(r')|)\right] \tag{6.14}$$

$$E_{\mathrm{int}}^{\mathrm{th-th}} = \frac{1}{4}\frac{\mu^2}{g}\left(\frac{2\mu}{m_{\mathrm{mol}}\bar{\omega}^2}\right)^{3/2}\int \mathrm{d}^3r' (n'_{\mathrm{th}}(r'))^2 \tag{6.15}$$

$$E_{\mathrm{int}}^{\mathrm{cond}} = \frac{\mu^2}{2g}\left(\frac{2\mu}{m_{\mathrm{mol}}\bar{\omega}^2}\right)^{3/2}\int \mathrm{d}^3r' \left(\mathrm{Max}(1 - r'^2 - n'_{\mathrm{th}}(r'), 0)\right)^2 \tag{6.16}$$

$$E_{\mathrm{int}}^{\mathrm{cond-th}} = \frac{\mu^2}{g}\left(\frac{2\mu}{m_{\mathrm{mol}}\bar{\omega}^2}\right)^{3/2}\int \mathrm{d}^3r' n'_{\mathrm{th}}(r') \mathrm{Max}(1 - r'^2 - n'_{\mathrm{th}}(r'), 0) \tag{6.17}$$

Ces équations peuvent être adimentionnées, en prenant la température critique T_{C} comme unité d'énergie. Le paramètre sans dimension caractérisant la force des interactions est alors η ou de façon équivalente $N^{1/6}a/a_{\mathrm{oh}}$. A partir de ce paramètre et du rapport T/T_{C}, on peut calculer la distribution du gaz, et donc la fraction condensée et l'énergie relâchée dans l'expansion.[7]

Résultats

L'énergie relâchée et la fraction condensée calculées dans le cadre du modèle précédent sont présentés sur les figures 6.6 et 6.7. Dans la limite $T \ll T_{\mathrm{C}}$, l'énergie relâchée corres-

[7]Il faut ajuster le potentiel chimique pour trouver le bon nombre d'atomes total

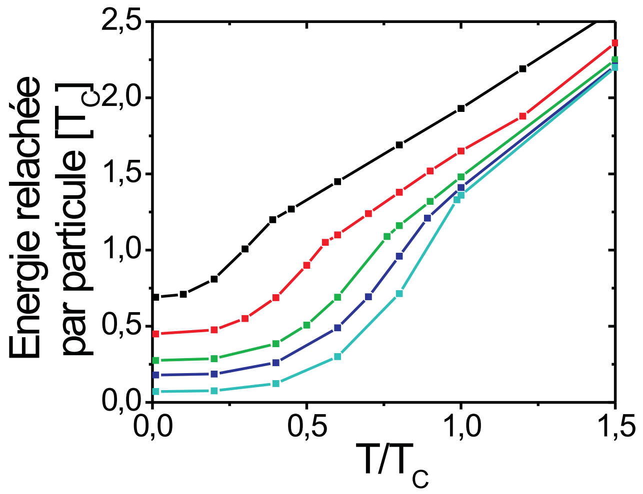

FIGURE 6.6 – *Energie relâchée dans une expansion en fonction de la température pour différents paramètres d'interaction. Les courbes de la droite vers la gauche correspondent respectivement à $N^{1/6}a/a_{\rm oh}$ égal à 0.01, 0.1, 0.3, 1 et 3.*

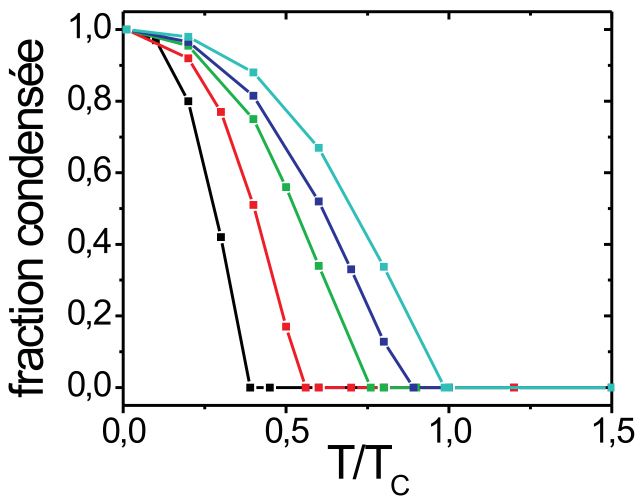

FIGURE 6.7 – *Fraction condensée en fonction de la température pour différents paramètres d'interaction. Les courbes de bas en haut correspondent respectivement à $N^{1/6}a/a_{\rm oh}$ égal à 0.01, 0.1, 0.3, 1 et 3. L'effet des interactions est de diminuer la fraction d'atomes condensés et la température critique.*

pond à celle calculée dans l'approximation de Thomas-Fermi [26]. A haute température, on retrouve un comportement en $3k_{\mathrm{B}}T/2$. Dans la limite des interactions faibles, on retrouve les résultats au premier ordre en a. On observe de plus une rupture de pente à la condensation. Dans le cas d'un gaz partiellement condensé, connaissant la valeur du paramètre $N^{1/6}a/a_{\mathrm{oh}}$ et de $E_{\mathrm{rel}}/T_{\mathrm{C}}$, on peut déterminer la valeur de la température. Appliquons ce procédé à l'expansion de la figure 6.2a. Les paramètres sont les suivants : $N^{1/6}a/a_{\mathrm{oh}} = 1$, $T_{\mathrm{C}} = 1.4\,\mu\mathrm{K}$, et l'énergie relâchée totale par molécule est $k_{\mathrm{B}} \times 1.05\,\mu\mathrm{K}$. On trouve alors une température de $0.65\,\mu\mathrm{K}$. Cette température correspond à une fraction condensée de 44 % (voir figure 6.7). De plus, il est intéressant de détailler les différentes contributions à l'énergie relâchée dans l'expansion. L'énergie cinétique E_{kin} et les énergies d'interactions $E_{\mathrm{int}}^{\mathrm{cond}}$, $E_{\mathrm{int}}^{\mathrm{th-th}}$, $E_{\mathrm{int}}^{\mathrm{cond-th}}$ représentent respectivement 37%, 22%, 39% et 2% de l'énergie relâchée. La contribution de l'énergie d'interaction entre les atomes du gaz thermique est donc importante. Un modèle de champ moyen négligeant ces interactions n'est donc pas très bon [20]. Le modèle présenté ci-dessus permet d'estimer la température du gaz à partir de la seule donnée de l'énergie relâchée dans l'expansion dans le régime d'interaction forte.

6.3.2 Effet des interactions sur la température de condensation

Les interactions modifient la température de condensation d'un gaz de bosons [26, 136, 137]. Dans un modèle de champ moyen, l'effet des interactions répulsives sur un gaz de bosons thermique dans un piège harmonique est de diminuer la densité du nuage. On comprend alors facilement que la température de condensation soit réduite. Le décalage de la température critique dû aux interactions est au premier ordre en a [26] :

$$\frac{\Delta T_{\mathrm{C}}}{T_{\mathrm{C}}} \approx -0.43\eta^{5/2} = -1.3\frac{a}{a_{\mathrm{oh}}}N^{1/6} \tag{6.18}$$

Cet effet a déjà été étudié expérimentalement dans des gaz de Bose atomiques [136]. Comme expliqué précédemment l'effet des interactions est alors faible et la correction au premier ordre suffit pour expliquer les résultats[8]. Avec des gaz de molécules, on est en général dans un régime beaucoup plus interagissant, et l'expression au premier ordre 6.18 n'est plus applicable. Il est même relativement difficile d'aller vers des régimes où les interactions sont moins fortes car la durée de vie du gaz est alors réduite aux densités où nous opérons normalement. Pour calculer le décalage de T_{C} en champ moyen, il suffit de reprendre la calcul précédent en se plaçant à la limite de condensation. Cela revient à prendre $n'(0) = 1$ ce qui correspond à $A = 1/\zeta(3/2)$ et donc aussi à $n(0)\lambda_{\mathrm{dB}}^3 = 1/\zeta(3/2)$. Le décalage de la température critique en fonction de $N^{1/6}a/a_{\mathrm{oh}}$ est tracé sur la figure 6.8. Les effets de tailles finis [26] et ainsi que les effets au-delà du champ moyen [137,26,136] ne sont pas pris en compte. Pour des interactions faibles, on retrouve le résultat au premier

[8]On peut noter qu'il faut tenir compte des effets de taille finie qui réduisent aussi la température critique [26]

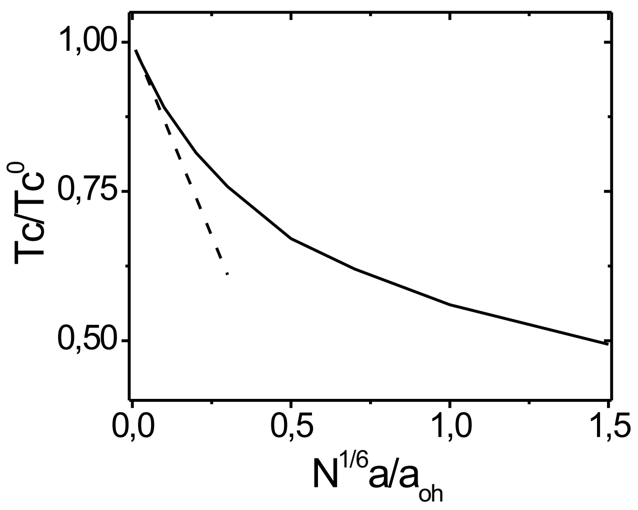

FIGURE 6.8 – *Température critique en fonction de la force des interactions dans un modèle de champ moyen. La ligne pointillée correspond au résultat au premier ordre.*

ordre. Pour des valeurs typiques réalisées avec les condensats de molécules, le décalage de la température critique peut être de l'ordre d'un facteur 2. Expérimentalement, utiliser un temps de vol des molécules à champ magnétique nul [130], où les interactions sont faibles, pourrait permettre à la fois une bonne mesure de la température (l'expansion de nuage donnerait directement la distribution de vitesse du gaz thermique) et du seuil de la condensation (le condensat sans interaction resterait très localisé et se détacherait ainsi bien du fond thermique).

Chapitre 7

Transition BEC-BCS : un peu de théorie

Ce chapitre est consacré à la présentation théorique de la transition entre les régimes BEC et BCS. Ce régime, étudié à partir des années 80 [138, 48, 56, 50], est caractérisé par une interaction effective forte entre atomes $na^3 > 1$. L'absence de petit paramètre explique que le traitement théorique de la zone de transition soit encore un problème ouvert qui suscite encore de nombreux travaux notamment sous l'impulsion des résultats expérimentaux récents [139,140,58,57,141,142,143,144,145,146,147,148,133,118,149,150, 151]. Les résultats théoriques présentés ici ne sont en aucun cas originaux, et sont tirés pour la plupart d'articles théoriques relativement anciens [138, 48, 56, 50]. Une dérivation variationnelle de l'état fondamental dans un modèle à deux canaux est présentée. Cela permet de bien comprendre le rôle de l'état lié donnant lieu à la résonance de Feshbach et d'expliciter les termes de résonance étroite ou large. Dans un deuxième temps, une extension à température finie est décrite et la différence entre la température de création de paires et la température de condensation est discutée.

7.0.3 Ansatz BCS dans le model à deux canaux à $T = 0$

Cette partie est consacrée à la présentation d'un modèle théorique qui décrit la transition BEC-BCS à température nulle. On cherche à minimiser l'énergie du système en utilisant un ansatz BCS pour la fonction d'onde [49]. J'utilise le modèle à deux canaux qui fait intervenir explicitement l'état moléculaire responsable de la résonance de Feshbach (cf. partie 2.2.2). Le hamiltonien est le même que celui utilisé dans la partie 2.2.2 pour comprendre la physique à deux corps proche d'une résonance de Feshbach. La seule différence est la possibilité de former des molécules d'impulsion non nulle.

$$H = \sum_k \left(\delta + \frac{\hbar^2 k^2}{4m}\right) b_k^\dagger b_k + \sum_{k,\sigma} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} c_{k,\sigma}^\dagger c_{k,\sigma} + \sum_{k,q} \frac{g_k}{\sqrt{\Omega}} \left(b_q^\dagger c_{k+q/2,\uparrow} c_{-k+q/2,\downarrow} + \text{h.c.}\right) \quad (7.1)$$

δ est le décalage entre l'énergie de l'état lié du potentiel singulet et l'énergie de deux atomes libres au repos, g_k est le terme de couplage entre les états atomiques et l'état moléculaire lié, Ω est le volume de quantification. Les deux premiers termes du hamiltonien correspondent aux hamiltoniens sans interaction pour les molécules dans le canal fermé et pour les atomes, le dernier terme est le couplage entre les atomes et les molécules. L'approximation BCS consiste à chercher la fonction d'onde sous la forme d'un condensat de paires au repos. On utilise dans la suite les mêmes notations que celles utilisées dans la théorie à deux corps (partie 2.2.2), c'est-à-dire qu'on utilise $a_k = c_{k,\uparrow}c_{k,\downarrow}$. La fonction d'onde à $2N$ fermions $|\phi_N\rangle$ correspond à un condensat de N paires de fermions et s'écrit :

$$|\phi_N\rangle = (\sum_k \phi_k a_k^\dagger + \alpha b^\dagger)^N |0\rangle \tag{7.2}$$

Par rapport à la théorie BCS standard dans un modèle à un canal, on ajoute ici une partie de la fonction d'onde d'une paire dans le canal fermé. Cette fonction d'onde n'est pas un état propre du hamiltonien. Dans les limites BCS et BEC, elle correspond respectivement à un condensat de paires d'atomes et à un condensat de molécules. Comme pour la théorie BCS habituelle, il faut utiliser un modèle grand canonique pour la résolution. La fonction d'onde prend alors la forme suivante :

$$|\phi\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\mathrm{e}^{\alpha b^\dagger} \prod_k (u_k + v_k a_k^\dagger)|0\rangle \tag{7.3}$$

On choisit $|u_k|^2+|v_k|^2 = 1$ de façon à normaliser $|\phi\rangle$. Cherchons maintenant les paramètres qui minimisent l'énergie libre $F = H - \mu N$ du système.

$$\langle F\rangle = \langle\phi|H-\mu N|\phi\rangle = \sum_k \left(\frac{\hbar^2 k^2}{m} - 2\mu\right)|v_k|^2 + |\alpha|^2(\delta - 2\mu) + \sum_k \frac{g_k}{\sqrt{\Omega}}(\alpha^* u_k v_k^* + \alpha u_k^* v_k) \tag{7.4}$$

La minimisation est alors très semblable à ce qui est fait dans la théorie BCS standard et on trouve :

$$\alpha = -\frac{\sum_k \frac{g_k}{\sqrt{\Omega}} u_k v_k}{\delta - 2\mu} \tag{7.5}$$

$$v_k = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\xi_k}{\sqrt{\xi_k^2 + \Delta_k^2}}\right)} \tag{7.6}$$

$$u_k = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\xi_k}{\sqrt{\xi_k^2 + \Delta_k^2}}\right)} \tag{7.7}$$

$$\text{avec } \xi_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu, \text{ et } \Delta_k = -\alpha\frac{g_k}{\sqrt{\Omega}} \tag{7.8}$$

Il reste alors deux inconnues, Δ_k qui correspond au gap de la théorie BCS et le potentiel chimique μ. L'expression 7.8 donne une première équation qu'on appelle équation du gap. Une deuxième est simplement l'équation donnant le nombre d'atomes.

$$N = \alpha^2 + \sum_k v_k^2 \tag{7.9}$$

Les deux termes correspondent respectivement aux nombres d'atomes sous la forme de molécules fortement liés (canal fermé) et sous la forme d'atomes libres (canal ouvert).

Equation du gap

En substituant α, u_k, et v_k par leur valeur, on obtient l'équation du gap :

$$\delta - 2\mu = \sum_k \frac{g_k^2}{2\Omega} \frac{1}{\sqrt{\xi_k^2 + \Delta_k^2}} \tag{7.10}$$

Si on utilise une valeur constante pour g_k, ce qui correspond à une interaction ponctuelle, la somme 7.10 est divergente et il faut utiliser une technique de renormalisation [141]. Une technique équivalente consiste à garder la dépendance en k et séparer la partie divergente.

$$\delta - 2\mu = \underbrace{\sum_k \frac{g_k^2}{2\Omega} \frac{2m}{\hbar^2 k^2}}_{\delta_0} + \sum_k \frac{g_k^2}{2\Omega} \left(\frac{1}{\sqrt{\xi_k^2 + \Delta_k^2}} - \frac{2m}{\hbar^2 k^2} \right) \tag{7.11}$$

La première somme est égale au décalage δ_0 de la position de la résonance dans le problème à deux corps. Dans la deuxième somme, si on suppose que les interactions ont lieu à courte distance par rapport à la distance entre particules, on peut supprimer la dépendance en k de g_k et donc considérer le gap Δ comme une constante. L'équation du gap devient donc :

$$\delta - \delta_0 - 2\mu = \frac{4}{\pi} \sqrt{E_0 |\mu|} I_{\mathrm{gap}}(\Delta/|\mu|) \text{ , avec } E_0 = \left(\frac{m^{*3/2} g_0^2}{2\pi\hbar^3} \right)^2 \tag{7.12}$$

$$\text{avec } I_{\mathrm{gap}}(x) = \int_0^\infty u^2 \mathrm{d}u \left(\frac{1}{\sqrt{(u^2 \pm 1)^2 + x^2}} - \frac{1}{u^2} \right) \tag{7.13}$$

Dans l'intégrale, on doit utiliser un $+$ quand $\mu < 0$ et un $-$ quand $\mu > 0$ [1].

Equation de conservation du nombre d'atomes

Après calcul, et en remplaçant la densité des atomes n dans un état de spin par $k_\mathrm{F}^3/6\pi^2$, l'équation prend la forme suivante :

$$1 = \frac{3\pi}{8} \left(\frac{\Delta^2}{E_0^{1/2} E_\mathrm{F}^{3/2}} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{|\mu|}{E_\mathrm{F}} \right)^{3/2} I_{\mathrm{nombre}}(\Delta/|\mu|) \tag{7.14}$$

$$\text{avec } I_{\mathrm{nombre}}(x) = \int_0^\infty u^2 \mathrm{d}u \left(1 - \frac{u^2 \pm 1}{\sqrt{(u^2 \pm 1)^2 + x^2}} \right) \tag{7.15}$$

Comme précédemment, dans l'intégrale, on doit utiliser un $+$ quand $\mu < 0$ et un $-$ quand $\mu > 0$. Les deux termes correspondent respectivement à la fraction des atomes dans le canal fermé et dans le canal ouvert.

[1] Il n'y a pas de discontinuité en $\mu = 0$ car les deux intégrales coïncident quand $\Delta/|\mu| \to \infty$.

7.0.4 Résolution

On a maintenant deux équations et deux inconnues μ et Δ et deux équations 7.12 et 7.14, on peut résoudre numériquement le problème.

Deux types de résonance

Avant cela, il est intéressant de noter quelles sont les différentes énergies caractéristiques du problème physique. On peut en dénombrer trois, l'énergie de Fermi E_{F}, l'énergie associée au couplage E_0, et le décalage par rapport à la résonance $\delta - \delta_0$. Ce dernier paramètre est celui en fonction duquel on veut étudier le système. Les deux autres énergies caractéristiques sont plus ou moins fixées. On a alors deux situations limites $E_0 \ll E_{\mathrm{F}}$ et $E_0 \gg E_{\mathrm{F}}$ qui correspondent respectivement à des résonances de Feshbach étroites et larges [146,152,153]. La valeur de E_0 peut être déterminée quand on connait le comportement de la longueur de diffusion en fonction du champ magnétique ainsi que la différence de moment magnétique $\Delta\mu$ entre les états atomiques et l'état moléculaire qui induit la résonance de Feshbach $a = a_{\mathrm{bg}} - \frac{\hbar\sqrt{2E_0}}{\sqrt{m}\Delta\mu(B-B_0)}$.

Dans le cas des résonances du ^{40}K utilisées dans le groupe de D. Jin, $E_0/k_{\mathrm{B}} \approx 1\,\mathrm{mK}$, qu'il faut comparer à une énergie de Fermi typique $E_{\mathrm{F}}/k_{\mathrm{B}} \approx 1\,\mu\mathrm{K}$. Ce sont donc des résonances larges. Dans le cas de la résonance à 834 G du ^{6}Li , on trouve $E_0/k_{\mathrm{B}} \approx 100\,\mathrm{K}$. Cette grande valeur est en partie due à la très grande longueur de diffusion triplet $\sim -110\,\mathrm{nm}$ dans le cas du ^{6}Li . Il faut, dans ce cas, considérer un système de deux résonances couplées [85] et l'analyse simple de la partie 2.2.2 ne s'applique alors pas directement. Néanmoins, on peut estimer que cette résonance est extrêmement large. Pour la résonance étroite du ^{6}Li située vers 545 G et utilisée par le groupe R. Hulet, $E_0/k_{\mathrm{B}} \approx 1\,\mu\mathrm{K}$ est de l'ordre de la température de Fermi des systèmes d'atomes ultrafroids.

Résonance étroite

Dans le cas d'une résonance étroite, dès que $|\mu|/E_0 \gg 1$, on peut négliger le terme intégral dans l'équation du gap et on obtient $2\mu = (\delta - \delta_0)$. L'équation du nombre permet ensuite de trouver la valeur du gap et donc de la fraction des atomes dans l'état moléculaire. Le résultat est le suivant. Pour $\delta - \delta_0 < 0$, à gauche de résonance, on a un condensat pur de molécules fortement liées. Pour $0 < \delta - \delta_0 < 2E_{\mathrm{F}}$, on a un mélange entre un gaz de Fermi dans un régime BCS caractérisé par un potentiel chimique $(\delta - \delta_0)/2$ et un condensat de molécules fortement liées. Pour $\delta - \delta_0 > 2E_{\mathrm{F}}$, il ne reste plus qu'un gaz BCS dans un régime d'interaction très faible. Ces résultats sont résumés sur le schéma de la figure 7.1.

Résonance large

Etudions maintenant les différents régimes correspondant à une résonance large. A gauche de résonance, dans la limite où $|\delta - \delta_0| \gg E_0$, on retrouve un condensat de molécules

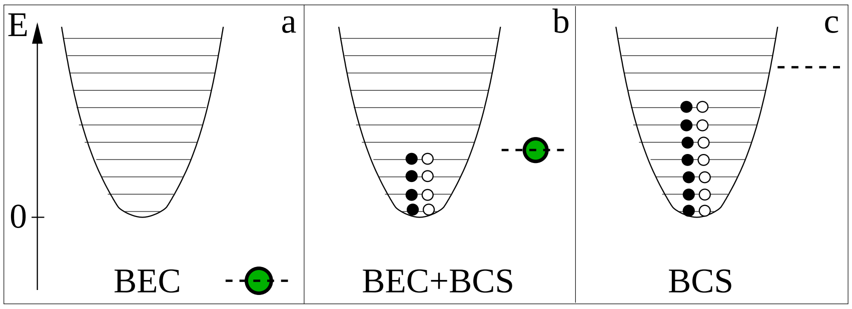

FIGURE 7.1 – *Balayage du champ magnétique à travers une résonance de Feshbach étroite. Les états dans le piège harmonique sont les états atomiques. La ligne pointillé représente l'état moléculaire fortement lié. Son décalage par rapport à l'énergie de deux atomes au repos est $\delta - \delta_0$. a : $\delta - \delta_0 < 0$, condensat de molécules fortement liées. b : $0 < \delta - \delta_0 < 2E_\mathrm{F}$, mélange entre un condensat de molécules fortement liées et une phase atomique BCS. c : $\delta - \delta_0 > 2E_\mathrm{F}$, phase de type BCS. Le système, en interaction très faible, occupe simplement tous les états de plus basses énergies disponibles. Les paires BCS ne se forment qu'au voisinage immédiat de E_F.*

fortement liées comme dans le cas d'une résonance étroite. Dans la limite inverse et pour des valeurs à droite de la résonance, la fraction moléculaire dans le canal fermé devient négligeable. On peut alors négliger le premier terme dans l'équation du nombre. De même, on a toujours $\mu \ll E_0$ et on peut négliger le deuxième terme dans l'équation du gap. Les deux équations se réduisent alors à :

$$\frac{\delta - \delta_0}{\sqrt{E_0}} = \sqrt{2}\frac{\hbar}{\sqrt{ma}} = \frac{4}{\pi}\sqrt{|\mu|}I_\mathrm{gap}(\Delta/|\mu|) \tag{7.16}$$

$$1 = \frac{3}{2}\left(\frac{|\mu|}{E_\mathrm{F}}\right)^{3/2} I_\mathrm{nombre}(\Delta/|\mu|) \tag{7.17}$$

En introduisant, la longueur de diffusion a, l'énergie caractéristique de la résonance E_0 n'apparaît plus dans les équations. On retrouve donc, à partir du modèle à deux canaux, les résultats connus dans un modèle à un canal de la transition BEC-BCS [49].

Pour $k_\mathrm{F}a \to 0^-$, on trouve une phase BCS caractérisée par les paramètres suivants :[2]

$$\mu \approx E_\mathrm{F} \tag{7.18}$$

$$\Delta \approx 8\mathrm{e}^{-2}\exp(-\pi/2k_\mathrm{F}|a|) \tag{7.19}$$

On retrouve donc l'expression classique de la valeur du gap dans la théorie BCS. Dans le cadre de cette théorie qui n'inclut pas la possibilité de fluctuation de densité, il est normal que l'on ne trouve pas les corrections dues à Gorkov et Melik-Barkhudarov [154].

[2]Pour trouver ces paramètres, il suffit de développer les intégrales pour $\mu > 0$ et $\Delta/\mu \to 0$. $I_\mathrm{gap}(x) \sim -\ln(8x) + 2$ et $I_\mathrm{den} \sim 2/3$.

Pour $k_\mathrm{F}a \to 0^+$, on trouve les paramètres suivants :[3]

$$\mu = -\frac{\hbar^2}{2ma^2} + \frac{2\pi\hbar^2 an}{m} \tag{7.20}$$

$$\Delta \approx \sqrt{\frac{16}{3\pi}}\frac{E_\mathrm{F}}{\sqrt{k_\mathrm{F}a}} \tag{7.21}$$

Le premier terme du potentiel chimique est simplement la moitié de l'énergie de liaison des dimères. Le deuxième terme est un terme de champ moyen. Cette énergie correspond à une longueur de diffusion entre molécules a_m égale à $2a$. On sait depuis le travail de D. Petrov, C. Salomon et G. Shlyapnikov [107], que la valeur exacte est $0.6a$ à 2 % près. Cette différence s'explique simplement par le fait que notre dérivation est approximative et suppose une fonction d'onde de type BCS. Cette hypothèse est fausse car elle ne tient compte que des corrélations à deux particules. Pour obtenir la bonne longueur de diffusion entre dimères, il faut inclure des corrélations d'ordre supérieures [143] [4].

La fraction de la fonction d'onde α^2 dans l'état moléculaire à courte portée est :

$$\alpha^2 = 2\sqrt{\frac{E_\mathrm{F}}{E_0}}\frac{1}{k_\mathrm{F}a} \tag{7.22}$$

Pour une résonance large ce nombre est petit. Cependant, pour $k_\mathrm{F}a = 1$ et $E_\mathrm{F}/E_0 = 10^{-3}$ correspondant au cas des résonances du ^{40}K, α^2 vaut déjà 6%, le système n'est donc pas complètement dans la limite d'une résonance large [5]. Cela pourrait éventuellement expliquer la durée de vie plus courte du gaz de molécules $^{40}K_2$ [135] proche de résonance comparé au gaz de $^6Li_2$ [61, 20] pour lequel la fraction de la fonction d'onde dans le canal fermé est plus faible.

Le régime où $k_\mathrm{F}|a| \gtrsim 1$ est la zone de transition entre les régime BEC et BCS. Le point important est que, dans ce modèle, la transition est continue entre les deux régimes. L'allure de la fonction v_k change progressivement avec la valeur de $\delta - \delta_0$. De la même façon, le gap et le potentiel chimique changent progressivement. Pour illustrer ce point, la figure 7.2 montre la distribution des paires v_k^2 pour différentes valeurs de k_Fa, et la figure 7.3 montre l'évolution du gap et du potentiel chimique en fonction de $k_\mathrm{F}a$. On retrouve les deux limites discutées auparavant quand $k_\mathrm{F}a \to 0^\pm$. Dans la zone de transition BEC-BCS, il faut cependant avoir conscience que le modèle présenté ci-dessus est qu'une approximation.

---

[3] Pour trouver ces paramètres, il suffit de développer les intégrales pour $\mu < 0$ et $\Delta/\mu \to 0$. $I_\mathrm{gap}(x) \sim -\pi/2 - \pi x^2/32$ et $I_\mathrm{den} \sim \pi x^2/8$.

[4] D'après cet article de M. Holland, C. Menotti, et L. Viverit, dans un modèle à deux canaux, il suffit d'inclure les corrélations entre un boson dans le canal fermé et les paires de fermions dans le canal ouvert pour retrouver la bonne longueur de diffusion entre dimères dans le régime BEC ainsi que les corrections au-delà du champ moyen dans le régime BCS [154]. Les mêmes auteurs sont maintenant en train de développer une théorie de la transition BEC-BCS incluant ces corrélations.

[5] On peut imaginer mesurer cette fraction en utilisant une transition radio-fréquence non résonante [155], qui est sensible aux corrélations à courte portée.

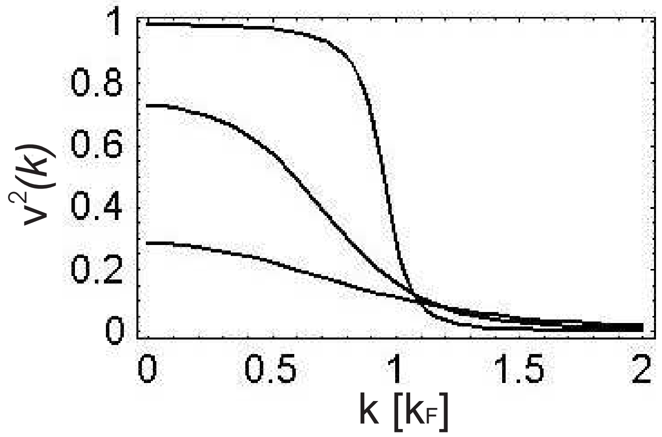

FIGURE 7.2 – *Probabilité d'occupation $v^2(k)$ d'une paire dans le modèle BCS pour 1 : $k_\mathrm{F}a = 1$, 2 : à résonance, et pour 3 : $k_\mathrm{F}a = -1$*

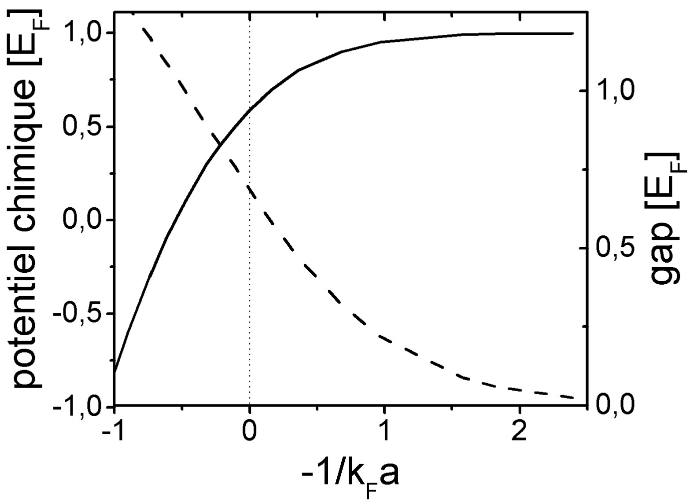

FIGURE 7.3 – *Potentiel chimique (trait continu) et gap (trait pointillé) dans la transition BEC-BCS, dans le cadre de l'approximation BCS à température nulle.*

7.1 Température critique

7.1.1 Hamiltonien en champ moyen

A température finie, on a besoin de connaître les excitations élémentaires. Pour cela, on peut faire une approximation de champ moyen, qui consiste à développer les opérateurs b_q et $c_{k+q/2,\uparrow}c_{-k+q/2,\downarrow}$ autour de leur valeur moyenne dans le hamiltonien 7.1. On suppose que seuls les opérateurs correspondant à des paires d'impulsion nulle ont une moyenne non nulle. A l'ordre 0, la valeur moyenne de b_0, α, est alors fixé par la minimisation de $H - \mu N$ et vaut [6] :

$$\alpha = -\frac{\sum_k \frac{g_k}{\sqrt{\Omega}}\langle c_{k,\uparrow}c_{-k,\downarrow}\rangle}{\delta - 2\mu} \tag{7.23}$$

En incluant les fluctuations à l'ordre 1 autour de la valeur moyenne des opérateurs, le hamiltonien devient alors :

$$H - \mu N = (\delta - 2\mu)|\alpha|^2 + \sum_{k,\sigma}\frac{\hbar^2k^2}{2m}c^\dagger_{k,\sigma}c_{k,\sigma} + \sum_k \frac{g_k}{\sqrt{\Omega}}(\alpha^* c_{k,\uparrow}c_{-k,\downarrow} + \text{h.c.}) \tag{7.24}$$

Le terme de fluctuation autour de α est nul à l'ordre 1. Ce hamiltonien peut alors se diagonaliser à l'aide d'une transformation de Bogoliubov.

7.1.2 Hamiltonien diagonalisé

La transformation de Bogoliubov consiste à remplacer les opérateurs $c_{k,\uparrow}$ et $c_{-k,\downarrow}$ par $\gamma_{k,0}$ et $\gamma_{k,1}$ qui sont des nouveaux opérateurs fermioniques définis par :

$$c_{k,\uparrow} = u_k^*\gamma_{k,0} + v_k\gamma^\dagger_{k,1} \tag{7.25}$$
$$c^\dagger_{-k,\downarrow} = -v_k^*\gamma_{k,0} + u_k\gamma^\dagger_{k,1} \tag{7.26}$$
$$\text{avec } |u_k|^2 + |v_k|^2 = 1 \tag{7.27}$$

Pour que le hamiltonien soit bien diagonal, il faut choisir u_k et v_k comme dans la partie précédente avec un gap qui vaut $\Delta_k = -\alpha g_k/\sqrt{\Omega}$. Le hamiltonien prend alors la forme diagonale suivante :

$$H - \mu N = (\delta - 2\mu)|\alpha|^2 + \sum_k\left(\xi_k - \sqrt{\xi_k^2 + \Delta_k^2}\right) + \sum_k\sqrt{\xi_k^2 + \Delta_k^2}(\gamma^\dagger_{k,0}\gamma_{k,0} + \gamma^\dagger_{k,1}\gamma_{k,1}) \tag{7.28}$$

Les deux premiers termes sont constants et correspondent seulement à l'énergie du système à température nulle. La signification physique des termes $\gamma^\dagger_{k,0}$ et $\gamma^\dagger_{k,1}$ est simple. Il s'agit des opérateurs de création de quasi-particules d'énergie $\sqrt{\xi_k^2 + \Delta_k^2}$. Cette énergie est toujours

[6] La notation α est ici un peu abusive. La valeur moyenne de b_0 dépend ici de la température et ne correspond au α donné précédemment qu'à température nulle.

supérieure à Δ ce qui justifie le nom du gap. A une température finie, la distribution de ces quasi-particules suit une distribution de Fermi.

$$\langle \gamma_{k,0}^\dagger \gamma_{k,0} \rangle = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\beta\sqrt{\xi_k^2+\Delta_k^2}}} \text{ , avec } \beta = \frac{1}{k_\mathrm{B}T} \tag{7.29}$$

7.1.3 Equation du gap à température finie

Il faut maintenant s'assurer de l'auto-cohérence de la solution car le gap dépend de α qui dépend de $\langle c_{k,\uparrow} c_{-k,\downarrow} \rangle$ qui dépend du gap.

$$\langle c_{k,\uparrow} c_{-k,\downarrow} \rangle = u_k^* v_k (1 - \langle \gamma_{k,0}^\dagger \gamma_{k,0} \rangle - \langle \gamma_{k,1}^\dagger \gamma_{k,1} \rangle) \tag{7.30}$$

En remplaçant $\langle c_{k,\uparrow} c_{-k,\downarrow} \rangle$ par sa valeur dans l'équation 7.23, on optient l'équation implicite suivant pour le gap :

$$\delta - 2\mu = \frac{1}{2}\sum_k \frac{g_k^2}{\Omega} \frac{\tanh(\beta\sqrt{\xi_k^2+\Delta_k^2}/2)}{\sqrt{\xi_k^2+\Delta_k^2}} \tag{7.31}$$

A température nulle, on retrouve l'expression 7.10 du gap, et la solution en champ moyen est la même que celle qu'on trouve avec l'ansatz BCS. Comme précédemment, la somme est divergente pour g_k constant et il faut extraire la partie divergente. On aboutit alors à :

$$\delta - \delta_0 - 2\mu = \frac{1}{2}\sum_k \frac{g_0^2}{\Omega} \left(\frac{\tanh(\beta\sqrt{\xi_k^2+\Delta_k^2}/2)}{\sqrt{\xi_k^2+\Delta_k^2}} - \frac{2m}{\hbar^2 k^2} \right) \tag{7.32}$$

7.1.4 Température de création de paires

Il est intéressant de connaître la température $T^* = 1/k_\mathrm{B}\beta^*$ à partir de laquelle le gap devient nul. Cela revient à résoudre :

$$\delta - \delta_0 - 2\mu = \frac{4}{\pi}\sqrt{E_0|\mu|}\,J(\beta^*\mu) \tag{7.33}$$

$$\text{avec } J(x) = \int_0^\infty u^2 \mathrm{d}u \left(\frac{\tanh(x|u^2 \pm 1|)}{|u^2 \pm 1|} - \frac{1}{u^2} \right) \tag{7.34}$$

Pour trouver β^* et μ, on a besoin d'une deuxième équation sur la densité. A la limite de la transition, dans le régime BCS, le gaz est dans une phase normale et l'occupation des états est donc donnée par une fonction de Fermi.

$$n = \frac{1}{2\pi^2}\int k^2 \mathrm{d}k \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\beta^*\xi_k}} \tag{7.35}$$

Dans la limite BCS ($k_\mathrm{F} a \to 0^-$), à partir des deux équations précédentes, on retrouve le résultat classique :

$$k_\mathrm{B}T^* = \frac{8\gamma}{\mathrm{e}^2\pi}\mathrm{e}^{-\pi/2k_\mathrm{F}|a|} \text{ , où } \gamma \text{ est la constante d'Euler} \tag{7.36}$$

Evidemment les corrections au-delà du champ moyen [154] ne sont pas incluses.

Dans la limite BEC, on trouve $T^* \approx |E_b|/2(\ln(|E_b|/E_\mathrm{F}))^{3/2}$, où $E_b = -\hbar^2/ma^2$, et la température T^* croît indéfiniment quand a tend vers 0^+. Cela n'est pas le comportement attendu pour la température de la transition de phase superfluide. En fait, cette température T^* correspond, non pas à la température de la transition de phase mais à la température typique de création des molécules. Quand la température devient faible devant $|E_b|$, il est énergétiquement favorable de former des molécules. Le facteur logarithmique correspond à un facteur entropique qui favorise les atomes libres par rapport aux molécules. Il n'y a pas de transition de phase pour $T = T^*$.

7.1.5 Température de la transition de phase superfluide

La température de transition T_C est en général difficile à calculer dans la zone de transition BEC-BCS. Dans la limite BCS, la température T_C est égale à T^* calculée précédemment car les paires se forment et condensent à la même température. Dans la limite BEC, la température de transition superfluide est la température de condensation d'un gaz de boson de densité n et de masse $2m$.

$$k_\mathrm{B}T_\mathrm{C} = \left(\frac{n}{\zeta(3/2)}\right)^{2/3} \frac{2\pi\hbar^2}{2m} = 0.218 E_\mathrm{F} \tag{7.37}$$

Au dessus de la température critique, on a un gaz de molécules non condensées, mais il faut augmenter la température jusqu'à environ T^* pour voir réapparaître des atomes libres.

Dans la zone de transition entre les régime BEC et BCS, la température de transition évolue de façon continue entre les deux limites présentées ci-dessus [56, 50, 138]. Sur la figure 7.4 est présentée l'allure de T_C et de T^* dans la zone de transition[7]. Entre les deux courbes, il existe des paires préformées qui ne sont pas condensées. A la température T_C, il apparaît une fraction de paires condensées, le gaz devient alors superfluide. Dans un piège harmonique les allures de T_0 et T_C sont légèrement modifiées [144].

7.2 Limite unitaire

Dans un traitement simplifié en champ moyen [53, 156], on trouve qu'un gaz de Fermi à température nulle doit s'effondrer sur lui-même dès que $k_\mathrm{F}a < -\pi/2$. En fait, ce n'est pas le cas car quand $k_\mathrm{F}a$ devient de l'ordre de 1, on entre dans le régime de la limite unitaire [157]. Dans la limite $k_\mathrm{F}|a| \gg 1$ ($k_\mathrm{F}|a| \gtrsim 1$ ne suffit pas), très proche du pic d'une résonance large, a n'est plus un paramètre pertinent du problème [158, 152, 159, 160]. La seule échelle d'énergie du problème est l'énergie de Fermi. On s'attend à ce que la

[7]Il est à noter que suivant les approximations utilisées, la courbe de T_C peut varier légèrement, il n'est pas sûr qu'on aie vraiment un maximum local comme c'est le cas ici.

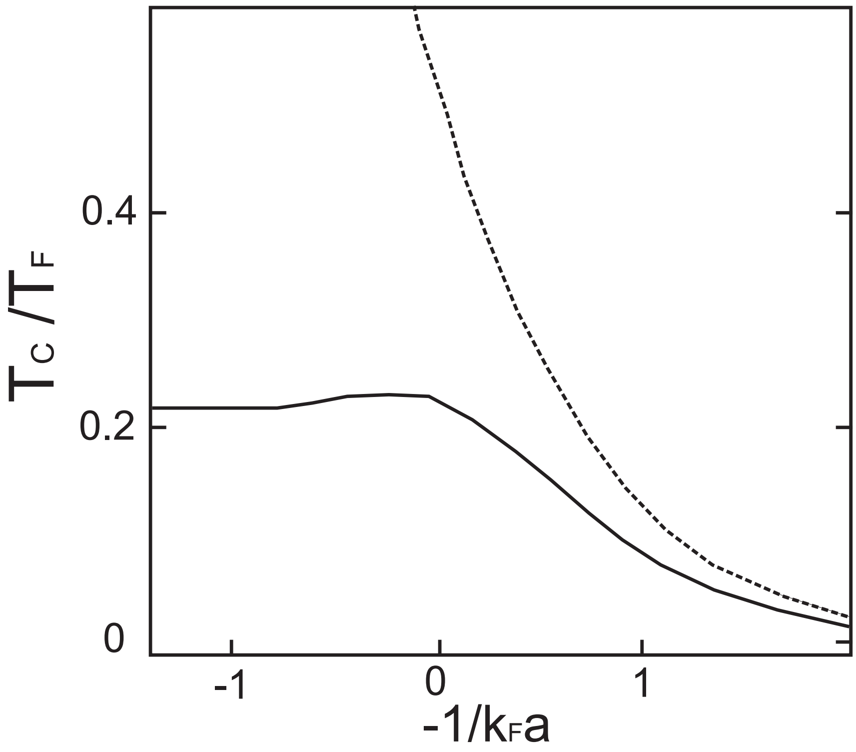

FIGURE 7.4 – *Température de la transition de phase superfluide (courbe continue) et température de création de paires (courbe pointillée) dans la transition BEC-BCS. Les deux limites $-1/k_{\mathrm{F}}a \to -\infty$ (BEC) et $-1/k_{\mathrm{F}}a \to \infty$ (BCS) sont bien comprises. La zone centrale $|1/k_{\mathrm{F}}a| \lesssim 1$ correspond au régime de la transition BEC-BCS. Figure extraite de [56].*

température de transition $k_\mathrm{B}T_\mathrm{C}$ et la température de création de paires $k_\mathrm{B}T^*$ aient un comportement universel (indépendant des détails du potentiel) et soient proportionnelles à l'énergie de Fermi. De même, le potentiel chimique à résonance et à température nulle (pour un système homogène) s'écrit sous la forme :

$$\mu_\mathrm{unitaire} = (1+\beta)E_\mathrm{F} \tag{7.38}$$

où β est un constante indépendante des détails du potentiel [161]. La théorie BCS, exactement à résonance[8], donne $(1+\beta) \approx 0.59$. Cette valeur est évidemment une limite supérieure car elle correspond à un calcul variationnel prenant pour ansatz la fonction d'onde BCS. Des simulations Monte-Carlo quantiques [162, 133] donnent $(1+\beta) = 0.42 \pm 0.01$ et confirment la stabilité d'un gaz de Fermi proche de résonance.

[8]Il suffit de résoudre l'équation 7.16 pour $\delta - \delta_0 = 0$

Chapitre 8

Transition BEC-BCS : Résultats expérimentaux

Ce chapitre est consacré à l'étude expérimentale de la transition entre un condensat de molécules et le régime BCS. Cette transition correspond au régime d'interaction forte, caractérisé par $na^3 > 1$. Notre étude de l'expansion du gaz dans ce régime est décrite [20]. Les résultats expérimentaux importants obtenues par les autres groupes travaillant sur le sujet sont discutés et des perspectives sont présentées.

8.1 Mesures en temps de vol

8.1.1 Expansion du gaz dans la région de transition BEC-BCS

A partir d'un condensat de Bose-Einstein de molécules faiblement liées, on peut augmenter le champ magnétique et donc traverser la zone de transition BEC-BCS. Plus précisément un condensat d'environ $3.5\,10^4$ molécules est préparé à 770 G, et le piège est recomprimé jusqu'à des fréquences de 2.5 kHz, 2.4 kHz, et 830 Hz. L'énergie de Fermi vaut alors $4.8\,\mu$K. Le champ magnétique est ensuite varié à un taux de 2 G/ms environ jusqu'à différentes valeurs du champ magnétique. Le but est de réaliser une évolution adiabatique. La technique d'imagerie du nuage après est la même que celle utilisée pour détecter les condensats de molécules, et on a donc accès à la distribution à 2 dimensions après un temps de vol (τ =1.4 ms). Cette technique d'imagerie permet de détecter à la fois les molécules et les atomes. Nos mesures sont complémentaires de celles du groupe de R. Grimm où les images sont prises directement dans le piège [129, 163]. La figure 8.1 présente les profils (intégrés sur la direction orthogonale) pour différentes valeurs du champ magnétique.

Quand la valeur du champ magnétique est diminuée en dessous de 750 G, le pic de densité optique diminue à cause de l'apparition de pertes, attendues par la théorie pour a petit. Ces pertes rendent l'observation d'une structure bimodale difficile quand on diminue les interactions. Quand le champ magnétique est augmenté au-delà de 770 G, la largeur

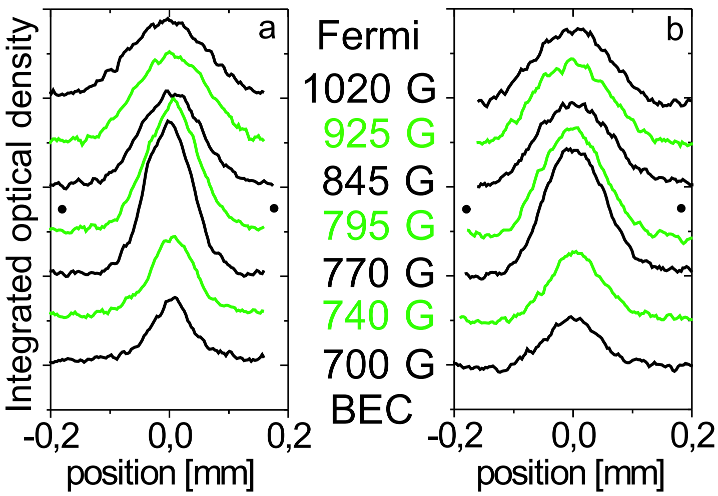

FIGURE 8.1 – *Profils de densité intégrés dans la région de transition BEC-BCS. 1.4 ms de temps d'expansion dans les directions axial (a) et radial (b).Le champ magnétique est varié de $a > 0$ pour $B < 822\,\mathrm{G}$ à $a < 0$ pour $B > 822\,\mathrm{G}$. • : pic de la résonance de Feshbach (834 G).*

du condensat grandit progressivement vers la largeur attendue pour un gaz de Fermi sans interaction. Il est particulièrement intéressant de noter que rien de particulier ne se passe à résonance alors que la longueur de diffusion diverge. Cela prouve expérimentalement qu'il n'y a pas d'effondrement d'un gaz de Fermi dans la limite unitaire [101, 129]. Proche de la résonance, les distributions sont étonnamment bien reproduites par des gaussiennes. Pour les champs les plus élevés ($B \geq 925\,\mathrm{G}$), les distributions sont mieux reproduites par une distribution de Fermi à température nulle. Les deux parties suivantes sont consacrées à l'étude plus détaillée de deux quantités, l'anisotropie et l'énergie relâchée dans l'expansion.

8.1.2 Anisotropie dans l'expansion

Etudions maintenant plus précisément l'anisotropie du nuage après expansion. Comme on ne connait pas précisément la forme des distributions attendues sauf dans les cas $a \to 0^-$, $a \to 0^+$ et à résonance pour $T = 0$, on a choisi d'utiliser des ajustements gaussiens suivant les deux directions d'observation. L'anisotropie η est alors définie par $\eta = \sigma_y/\sigma_x$, où σ_i est la taille rms dans la direction i. L'anisotropie donne une indication sur l'hydrodynamicité du gaz, qui peut être dû à un caractère superfluide ou à un régime très collisionnel (voir partie 4.3.1). La figure 8.2b présente l'anisotropie mesurée en fonction du champ magnétique. Dans le régime BEC, l'équation d'état est $\mu \propto n$ et les équations d'échelle prédisent $\eta = 1.75$. Dans le régime unitaire ou fermionique $\mu \propto n^{2/3}$, on attend $\eta = 1.7$. Dès qu'on est dans un régime hydrodynamique, on s'attend donc à une anisotropie de l'ordre de 1.7. Du coté BEC, pour 730 G, l'anisotropie mesurée est de 1.5(1),

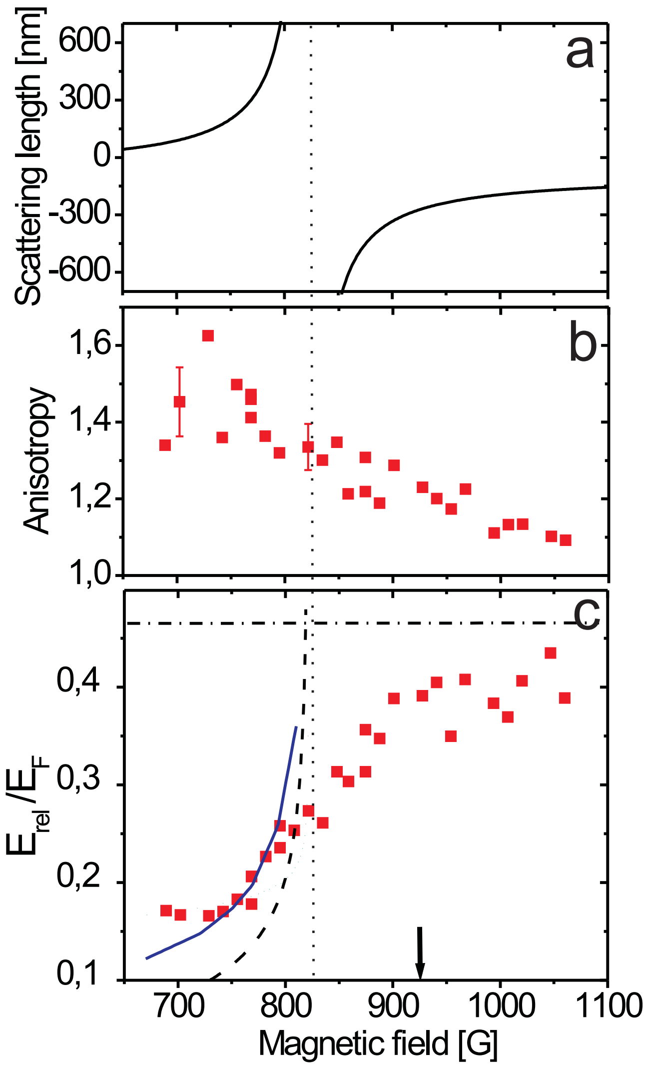

FIGURE 8.2 – *(a) : Longueur de diffusion entre les états* $|1/2, 1/2\rangle$ *et* $|1/2, -1/2\rangle$ *du* ^{6}*Li. La résonance est piquée à 834 G (ligne pointillé). (b) : Anisotropie du nuage après expansion (c) : Energie relâchée dans l'expansion dans la zone de transition BEC-BCS. La ligne pointillée court-long en (c) correspond à un gaz de Fermi idéal à* $T = 0$*. La courbe pointillée est la courbe correspondant à l'expansion d'un condensat pur dans l'approximation de Thomas-Fermi. La courbe pleine correspond à un modèle à température finie expliqué dans le texte. La flèche pointe le champ magnétique où* $k_{\mathrm{F}}a = 3$*, c'est-à-dire 940 G. Les deux points situés aux champs magnétiques les plus faibles* $B < 720$ G *correspondent à des nuages qui ont subi des pertes importantes.*

et on est donc proche de la valeur complètement hydrodynamique. Cela est attendu car un condensat est superfluide. La différence peut s'expliquer par une température finie et donc une fraction condensée réduite. Pour des champs magnétiques inférieurs, η diminue, mais cet effet est simplement lié à la perte des atomes du condensat. Quand on augmente le champ magnétique, η diminue progressivement. Elle vaut 1.35(5) à résonance et atteint 1.10(5) autour de 1060 G. On est alors dans un régime presque complètement non hydrodynamique, c'est-à-dire ni superfluide, ni dans un régime très collisonnel[1]. Dans la région de la résonance, une question importante est de savoir si l'anisotropie observée est due à un régime superfluide ou à un régime collisionnel. Comme l'anisotropie baisse entre 740 G et la résonance alors que la longueur de diffusion et donc le taux de collision augmente, l'hydrodynamicité, dans cette zone, est donc due, au moins en partie, au caractère superfluide du gaz. Pour la région $a < 0$, c'est moins évident. Néanmoins, la baisse progressive de la fraction superfluide pourrait expliquer la perte du caractère hydrodynamique dans l'expansion. On peut noter que dans le régime fermionique, nos mesures diffèrent des données prises dans des pièges à un seul faisceau. Dans une géométrie très allongée, le blocage de Pauli n'est pas efficace dans l'expansion[2] [100, 164], et on est alors toujours dans un régime hydrodynamique collisionnel. Dans nos conditions expérimentales, avec un piège faiblement anisotrope, un gaz de Fermi à basse température n'est pas dans ce régime, et l'étude de l'expansion du nuage donne des informations sur le caractère superfluide du nuage. On est limité pour l'instant par l'absence de réelle modélisation théorique de l'expansion d'un gaz de Fermi dans le régime BEC-BCS.

8.1.3 Energie relâchée

L'énergie relâchée est estimée à partir d'ajustement gaussien et en supposant une symétrie cylindrique $E_{\rm rel} = m(\sigma_x^2 + 2\sigma_y^2)/2\tau$. La taille initiale du nuage est négligeable. La figure 8.2c présente le rapport entre $E_{\rm rel}$ et l'énergie de Fermi calculée pour $3.5\,10^4$ atomes. Ce nombre correspond à la moitié du nombre d'atomes moyen observé, c'est-à-dire au nombre d'atomes par état de spin. L'évolution de l'énergie relâchée dans l'expansion en fonction du champ magnétique est continue et ne présente rien de particulier à résonance. Pour $B \leq 750\,G$, il y a une sorte de plateau qui correspond à la zone où les pertes jouent un rôle important. Pour $B \geq 750\,G$, l'énergie augmente en fonction du champ magnétique vers l'énergie d'un gaz de Fermi sans interaction. On reste néanmoins notablement en dessous de cette limite car même à 1060 G, la longueur de diffusion est encore grande et positive ($k_{\rm F}a \simeq 2$). Du coté BEC, l'énergie relâchée est légèrement supérieure à celle que l'on attendrait pour un condensat pur (ligne pointillée). Le modèle en champ moyen présenté dans la partie 6.3.1 permet d'estimer les paramètres du condensat à 770 G ; on

[1] On peut noter ici, qu'il faut inclure un facteur de suppression des collisions par le blocage de Pauli pour expliquer ce phénomène.

[2] A cause d'une déformation dans l'espace des vitesses durant l'expansion, même à température nulle, le blocage de Pauli n'est pas efficace.

trouve alors $T = 0.39\,T_C = 1.9\,\mu$K, $\mu = 7.5\,\mu$K, et une fraction condensée de 55%. En supposant la conservation de l'entropie, on peut calculer l'énergie relâchée en fonction du champ magnétique (courbe continue). Les points entre 750 G et 790 G correspondent bien à une évolution isentropique. En dessous de 750 G, la déviation peut s'expliquer par un chauffage lié à la présence de pertes. La valeur de l'entropie estimée du coté BEC correspond à une température inférieure à $0.1\,T_F$ dans la limite d'un gaz de Fermi faiblement interagissant.

A résonance, on atteint le régime universel de la limite unitaire (partie 7.2). Dans un piège harmonique et à température nulle l'énergie relâchée dans l'expansion est alors [3] :

$$E_{\mathrm{rel}}^{\mathrm{unitaire}} = \sqrt{1+\beta}E_{\mathrm{rel}}^{0} \tag{8.1}$$

A partir de notre mesure à résonance, on déduit $\beta = -0.64(15)$. En valeur algébrique, cette valeur est à priori une borne supérieure car on n'est pas exactement à température nulle. Néanmoins, elle est en accord avec la valeur $\beta = -0.56$ prédite par des simulations Monte-Carlo quantiques [162, 133]. Expérimentalement la valeur de β a aussi été mesuré par les équipes de R. Grimm [129] ($\beta = -0.68^{+0.13}_{-0.10}$) et de J. Thomas (leur valeur, manifestement trop faible, a récemment été réévaluée à $\beta = -0.49 \pm 0.04$) [161, 101, 165].

8.2 Autres mesures et perspectives

8.2.1 Autres mesures dans la zone de transition BEC-BCS

Cette partie est consacrée à une brève revue des résultats expérimentaux importants dans la zone de transition obtenues au MIT, au JILA, à Innsbruck et à Duke University.

Condensation de paires de fermions

L'expérience consiste à préparer un gaz de fermion dans un régime dégénéré dans la zone $a < 0$ et changer “rapidement” le champ magnétique vers $a > 0$ où la mesure en temps de vol de la distribution de vitesse est faite. On observe alors un pic correspondant à un condensat [166, 130]. Ce signal, donne une indication sur le fait qu'il y a des paires du coté $a < 0$. Toute la discussion est dans ce qu'on appelle rapidement. Si on coupe les interactions infiniment rapidement, il est clair qu'on mesure la distribution initiale en impulsion des fermions, qui ne présente alors pas de pic. Si on est adiabatique, le système a le temps de thermaliser et l'expérience ne donne alors aucune indication sur la présence de paires du coté $a < 0$. L'idée est donc d'être rapide par rapport à l'évolution du système à N corps mais lent par rapport à la physique à 2 corps, de telle sorte que les paires de

[3]Le résultat se comprend bien si on introduit une masse effective $m' = m/(1+\beta)$ et des fréquences effectives $\omega_i' = \omega_i\sqrt{1+\beta}$. On retrouve alors les mêmes expressions que celle du gaz sans interaction, pour une énergie de Fermi effective $E_F' = \sqrt{1+\beta}E_F$. Le calcul dans l'approximation de densité locale est détaillé dans l'annexe C de la thèse de J. Cubizolles [86]

fermions éventuellement condensées pour $a < 0$ conservent leur impulsion totale et se transforment adiabatiquement en un condensat de molécules. Ce condensat donne lieu à un pic dans la distribution en temps de vol. Une expérience d'oscillation du champ magnétique à travers la résonance [167] montre que le temps utilisé est bien plus rapide que le temps de relaxation du système à N corps. Pour ce qui est d'être adiabatique par rapport au système à 2 corps, on comprend bien ce que cela implique pour de véritables molécules avec $a > 0$ (voir partie 5.1.2), mais dans la région de la résonance et pour $a < 0$ l'argument est douteux. Notamment, quand la taille d'une paire devient très grande devant la distance moyenne entre particules, on imagine difficilement que les atomes d'une paire se rapprochent adiabatiquement lors d'une rampe rapide du champ magnétique. En fait, le recouvrement des fonctions d'onde entre des états de part et d'autre et assez proches de résonance peut être important [168]. Le condensat observé vient donc probablement d'une simple projection de la fonction d'onde à N corps [4]. L'apparition d'une partie condensée pour $a < 0$ est une indication que dans cette zone il reste des paires condensées. Ces paires sont hybrides entre une molécules et une paire de Cooper. Cette méthode de projection des paires sur un condensat moléculaire ne permettrait donc pas de détecter de véritables paires de Cooper à longue portée dont le recouvrement avec un condensat de molécule serait faible.

Modes d'oscillation

L'étude des modes d'oscillation peut apporter des informations sur la nature hydrodynamique ou non du gaz et sur l'équation d'état du gaz [169, 170, 171, 172]. Dans un régime superfluide à température nulle, S. Stringari a prédit une dépendance non monotone de la fréquence du mode radial dans la zone de transition [173]. Des mesures des modes d'oscillation axiale et radiale ont été effectuées dans les groupes de R. Grimm [174] et de J. Thomas [175, 176]. Pour le mode axial, les résultats sont conformes avec ce qu'on attend. On retrouve les rapports $\sqrt{5/2}$, $\sqrt{12/5}$ et 2 entre la fréquence du mode axial et la fréquence axiale du piège, dans les régime BEC, à résonance et sans collision dans un gaz de Fermi. L'amortissement est minimum proche de résonance et, quand on baisse la température, l'amortissement est réduit [175], mais l'interprétation en terme de transition superfluide n'est pas évidente. Dans le cas du mode radial, une première surprise vient du fait qu'exactement à résonance, on ne retrouve pas la fréquence attendue du mode hydrodynamique. Une deuxième surprise est la présence d'un brusque changement entre un régime hydrodynamique et un régime sans collision du coté $a < 0$ de la résonance. Ce processus s'accompagne d'une augmentation brutale du taux d'amortissement du mode radial. Une explication proposée par R. Combescot et X. Leyronas [177] est que la fréquence du mode radial correspond à une énergie de l'ordre du gap $\hbar\omega_{\mathrm{rad}} \sim \Delta$. Le mode radial se couple alors à la brisure des paires dans le nuage, et détruit la superfluidité. La fréquence

[4]La projection ne se fait jamais avec un état loin de résonance du coté BEC car dès que les molécules sont suffisamment liées (voir partie 5.1.2), elles suivent adiabatiquement l'état moléculaire.

du mode est ensuite en accord avec un régime sans collision. On a une énergie critique des excitations au-delà de laquelle la superfluidité est perdue. Notons que cette explication peut être transposée à ce qui se passe en expansion. La baisse de l'anisotropie peut alors être expliquée en terme de fragilité grandissante de la superfluidité, et non plus en terme de baisse de la fraction superfluide. Le fait de couper le piège correspond en effet à une excitation à une énergie de l'ordre de $\hbar\omega_{\mathrm{rad}}$, qui devient suffisante pour induire la cassure des paires. Un aspect particulièrement satisfaisant de cette explication est qu'elle implique le fait qu'un gaz BCS en interactions faibles, ne s'étend pas de façon anisotrope, comme le ferait normalement un superfluide. Une expansion anisotrope semble en effet particulièrement bizarre alors que la fraction des atomes qui forment véritablement des paires est extrêmement faible.

Mesures du gap d'excitation

Le gap correspond à l'énergie qu'il faut fournir pour casser une paire. Du coté BCS, les paires sont des paires de Cooper. Du coté BEC, les paires sont des molécules. Dans la région de transition, les paires sont hybrides. Dès les premières expériences de formation de molécules, l'énergie de liaison des molécules faiblement liées était mesurée par une technique de dissociation par couplage radio-fréquence vers un autre état de spin [116]. En utilisant le même type de mesure avec une précision accrue [178], ou une modulation du champ magnétique [179], il est possible de mesurer directement le gap dans la zone de transition BEC-BCS. On montre ainsi que le gap passe continuement de l'énergie de dissociation des molécules à l'énergie nécessaire pour briser une paire de Cooper. A résonance, le gap est trouvé proportionnel à l'énergie de Fermi ce qui est attendu à la limite unitaire ($\Delta \approx 0.2E_{\mathrm{F}}$). Ces mesures montrent de façon très claire la persistance d'un gap dans la zone $a < 0$. Elles ne donnent cependant aucune indication directe sur le passage de la transition de phase car on peut avoir des paires préformées dans la zone de transition. Néanmoins, compte tenu de la possibilité de réduire la température notablement en dessous de celle où apparaît le premier signal de paires liées, il semble clair que le système doit être au moins partiellement superfluide dans la zone de transition [149, 150]. Une étude systématique de la température T^* à laquelle apparaissent les premières paires en fonction de $k_{\mathrm{F}}a$ serait intéressante. Une des difficultés est de trouver une bonne méthode pour mesurer la température dans le régime fortement interagissant.

8.2.2 Perspectives

L'étude de la transition BEC-BCS dans les systèmes d'atomes froids est encore à ses débuts. Un des défits est maintenant de trouver des moyens expérimentaux pour caractériser de mieux en mieux la physique dans le régime de la transition BEC-BCS. La fin de ce chapitre présente quelques possibilités de développements futurs.

Superfluidité et transition de phase

L'ensemble des expériences décrites précédemment permettent de savoir que la transition de phase dans le régime $a < 0$ a été atteinte. Cependant, une preuve claire et indiscutable de superfluidité serait utile. On peut imaginer différentes signatures de superfluidité : l'absence de chauffage en balayant un laser qui déforme le potentiel dans le nuage [180], la création de vortex [28], ou encore l'étude des propriétés de transport dans un réseau optique [181]. Une autre défit est de localiser précisément la transition de phase, ce qui permettrait d'étudier en détail la température critique de condensation T_{C} en fonction de $k_{\mathrm{F}}a$. Les mesures de projections des paires de fermions [166, 130] semblent apporter un élément de réponse même si la description théorique de l'expérience n'est pas complète [168]. De plus, le groupe de J. Thomas a étudié la capacité calorifique d'un gaz de Fermi à résonance en fonction de la température [165]. Un léger changement de pente, observé autour de $0.3\,T_{\mathrm{F}}$, pourrait être une manifestation de la transition de phase[5]. La mesure des propriétés de cohérence à longue portée du paramètre d'ordre analogue à celles réalisées sur les condensats serait aussi très intéressante. Le paramètre d'ordre dans le régime BCS implique des corrélations de paires et une telle expérience semble difficile expérimentalement [182].

Mesure des distributions en impulsion

Les interactions, même dans le cas d'un gaz homogène, modifient la distribution fermionique qui n'est plus nécessairement exactement une fonction de Fermi. Du coté BCS, on sait que la distribution en impulsion à température nulle n'est plus une fonction de Fermi, elle est arrondie sur une échelle de l'ordre du gap. Du coté BEC, la distribution en impulsion est précisément la transformée de Fourier de l'état moléculaire, c'est donc une lorentzienne de largeur $1/a$. Dans la zone de transition la distribution en impulsion est aussi modifiée [183] (voir figure 7.2). Expérimentalement, pour avoir accès à la distribution en impulsion, il suffit de couper non adiabatiquement les interactions, c'est à dire le champ magnétique [6]. L'étude de la distribution en impulsion des fermions autour de la transition BEC-BCS serait intéressante et pourrait servir de test à différentes théories. De plus, si on est capable de mesurer les corrélations $(+\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ dans le nuage, on peut ainsi détecter la présence de paires BCS condensées, et donc être sensible à la transition de phase [184].

Autres systèmes atomiques proches des résonances de Feshbach

Suite à la réalisation de molécules constituées de deux fermions ou de deux bosons à l'aide de résonances de Feshbach, on peut imaginer créer des molécules différentes.

[5] On peut s'inquiéter sur deux points particuliers. Premièrement, les ajustements de la température par des fonctions de Fermi proches de résonance ne sont pas forcément bien justifiés. Deuxièmement, le changement de pente pourrait être dû à la formation des paires, plutôt qu'à la transition de phase.

[6] Pour des énergies de liaisons grandes, cela n'est pas forcément facile (voir partie 5.1.2).

On pourrait par exemple essayer de créer des molécules fermioniques en appariant un fermion et un boson. Dans cette direction, nous avons récemment localisé des résonances de Feshbach entre ^{6}Li et ^{7}Li [185,186]. De même des résonances ^{23}Na-^{6}Li [187] et ^{87}Rb-^{40}K [188] sont maintenant connues. La possibilité de formation de molécules n'a pas été étudiée pour l'instant [7]. Le cas des système boson-fermion pour $a < 0$ est aussi particulièrement intéressant car on peut imaginer étudier la transition superfluide due aux interactions entre fermions induites par les bosons [189, 190]. Il faudra probablement pour cela travailler au voisinage de l'effondrement observé dans l'équipe de M. Inguscio [191, 192].

Pour profiter de la réduction des pertes proche de résonance, il faut travailler avec deux fermions. Le cas de deux espèces atomiques différentes est intéressant, car les molécules seraient alors polaires. Elles présenteraient un moment dipolaire permanent. Les interactions entre molécules seraient des interactions à longue portée entre dipôles. Des expériences permettant des mélanges ^{40}K-^{6}Li sont en cours de montage à Munich et à Innsbruck. Une autre extension possible est l'utilisation de résonances de Feshbach en onde p. C'est l'objet du chapitre suivant.

[7] Les pertes, loin de résonance, seront faibles grâce à l'absence de collisions en onde s entre molécules fermioniques, mais, proches de résonance, pour des molécules à longue portée, les pertes ne sont à priori pas réduites.

Chapitre 9

Résonances de Feshbach en onde p

Ce chapitre est consacré à l'étude des résonances de Feshbach en onde p entre les états $|F = 1/2\rangle$ du ^{6}Li [62]. La compréhension des mécanismes de pertes proches d'une résonance de Feshbach en onde p est un prérequis pour l'étude de la formation et de la stabilité de molécules en onde p. Si on arrive à former des molécules suffisamment stables, on pourrait atteindre le seuil de condensation et éventuellement étudier la transition BEC-BCS avec un couplage en onde p dont les propriétés sont différentes de ce qui se passe en onde s [193, 194]. Cela serait particulièrement intéressant car le couplage en onde p correspond au cas de la superfluidité dans l'hélium 3 [195]. La supraconductivité à haute température correspond aussi à des paires de moment cinétique non nul ; les paires sont en onde d (l=2) [196]. Dans ce chapitre, une description théorique des résonances de Feshbach en onde p est présentée [63]. Les trois résonances sont localisées expérimentalement. Les pertes au voisinage des différentes résonances sont étudiées en fonction de la température à la fois expérimentalement et théoriquement. Enfin, un premier signal d'obtention de molécules en onde p est discuté.

9.1 Introduction

9.1.1 Théorie des résonances de Feshbach en onde p

Le modèle que nous présentons ici est très similaire à celui qui a été présenté dans la partie 2.2.2. On s'intéresse maintenant au couplage entre le continuum atomique et des molécules en onde p, c'est-à-dire des molécules de moment cinétique orbital 1. Le couplage entre les canaux ouvert et fermé est toujours assuré par l'interaction hyperfine.

Elément de matrice du couplage en onde p

Les fonctions d'onde des états liés en onde p sont de la forme suivante :

$$\psi_{m_l}(r) = f(r)Y_{l=1}^{m_l}(\theta, \phi) \quad (9.1)$$

où les Y_l^m sont les harmoniques sphériques. Dans le canal ouvert, considérons une onde plane de vecteur d'onde k et son développement en ondes partielles [197].

$$\phi_{\mathrm{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \mathrm{e}^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}} = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} j_l(kr) Y_l^{m_l=0}(\theta, \phi) \tag{9.2}$$

où Ω est le volume de quantification et j_l est la fonction de Bessel sphérique d'ordre l. Il faut maintenant évaluer l'intégrale de recouvrement $\int \phi_{\mathrm{k}}(\mathbf{r})\psi_{m_l}(r)\mathrm{d}^3r$ entre cette fonction d'onde $\phi_{\mathrm{k}}(\mathbf{r})$ et celle des états liés ψ_{m_l}. D'après les propriétés d'orthogonalité des harmoniques sphériques, seul le recouvrement avec l'état $m_l = 0$ (avec un axe de quantification selon $\mathbf{k}$) est non nul. Dans la limite d'un état lié à courte portée, $kb \ll 1$, où b est la portée du potentiel, le recouvrement spatial entre les fonctions d'onde n'est important qu'à courte distance ; on peut donc développer la fonction de Bessel au premier ordre. L'intégrale de recouvrement spatial entre les fonctions d'onde est alors proportionnel à k. Le couplage par l'interaction hyperfine entre entre les deux états se met donc sous la forme kA_k où A_k tend vers une valeur finie quand $k \to 0$. Le facteur k est caractéristique d'un couplage en onde p. Le hamiltonien est alors le même qu'en onde s (voir partie 2.2.2) à condition de remplacer le couplage g_k par kA_k. Cherchons maintenant, l'énergie de l'état moléculaire et la section efficace de diffusion proche d'une résonance de Feshbach en onde p. Ces deux quantités sont calculables à partir du propagateur des molécules comme dans le cas d'une résonance de Feshbach en onde s (voir partie 2.2.2).

Propagateur

En l'absence de couplage, le propagateur des molécules est $G^0(z) = 1/(z - \delta)$ où δ est le décalage en énergie de l'état lié en onde p du potentiel singulet responsable de la résonance par rapport au continuum atomique. Pour calculer le propagateur, il faut considérer l'interaction à tous les ordres en perturbation et donc sommer la contribution de tous les diagrammes (figure 2.5) comme dans le cas d'une résonance en onde s. La seule difficulté supplémentaire est la dépendance angulaire du couplage. Le couplage entre un état lié $m = 0$ et une onde plane suivant une direction faisant un angle α avec l'axe de quantification est multiplié par $\cos(\alpha)$. En sommant sur les dépendances angulaires, on trouve alors :

$$G(z) = \sum_n G^0(z)^{n+1}\Sigma(z)^n = \frac{G^0(z)}{1 - G^0(z)\Sigma_(z)} \tag{9.3}$$

$$\text{avec la self énergie } \Sigma(z) = \int \frac{k^4 \mathrm{d}k}{6\pi^2} \frac{|A_k|^2}{z - \hbar^2k^2/m} \tag{9.4}$$

De même qu'en onde s, l'intégrale est divergente si l'on remplace A_k par sa valeur en 0. Il faut isoler la partie divergente qui comporte deux termes, l'un constant, l'autre proportionel à z. On trouve alors l'expression de la self énergie :

$$\Sigma(z) = -\lambda - \mu z + \frac{|A_0|^2}{6\pi}\frac{m}{\hbar^2}\left(\frac{-mz}{\hbar^2}\right)^{3/2} \tag{9.5}$$

$$\text{avec } \lambda = \int \frac{mk^2 \mathrm{d}k}{6\pi^2\hbar^2}|A_k|^2 \tag{9.6}$$

$$\text{et } \mu = \int \frac{m^2 \mathrm{d}k}{6\pi^2\hbar^4}|A_k|^2 \tag{9.7}$$

Le propagateur est alors donné par l'équation 9.3 en remplaçant $\Sigma(z)$ par sa valeur. La position de la résonance à énergie nulle correspond à $\delta = \lambda$.

Energie de l'état moléculaire

Cherchons maintenant l'énergie de la molécule habillée, c'est-à-dire l'énergie du pôle du propagateur $G(z)$. Dans la limite basse énergie, on peut négliger le terme en $z^{3/2}$ devant le terme en z, et l'énergie de liaison E_b de la molécule est :

$$E_b = \frac{\delta - \lambda}{1+\mu} = \tilde{\delta} \tag{9.8}$$

Proche de résonance, l'énergie de liaison varie donc linéairement en fonction de δ, et donc aussi linéairement en fonction du champ magnétique. Ce comportement est différent de celui d'une résonance en onde s pour lequel la dépendance est quadratique. Cela reflète le fait que la fraction de la fonction d'onde moléculaire dans le canal fermé ne tend pas vers 0 à résonance mais est donnée par $(1+\mu)^{-1}$ [63].

Section efficace de diffusion

La matrice $T_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$ de diffusion entre les ondes planes dans les directions $\mathbf{k}$ et $\mathbf{k}'$ prend la forme suivante :

$$T_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = \frac{kA_k}{\sqrt{\Omega}} G(\hbar^2k^2/m) \frac{k'A_{k'}}{\sqrt{\Omega}} \cos(\widehat{\mathbf{k},\mathbf{k}'}) \tag{9.9}$$

Le facteur $\cos(\widehat{\mathbf{k},\mathbf{k}'})$ est caractéristique des interactions en onde p. A partir de la matrice T, on peut calculer l'amplitude de diffusion $f(\mathbf{k},\mathbf{k}') = m\Omega T_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}/4\pi\hbar^2$ puis la section efficace de diffusion élastique σ.

$$\sigma = |V_p|^2 k^4 \frac{4\pi/3}{\left(\frac{\hbar^2k^2}{m}\frac{1+\mu}{\delta-\lambda} - 1\right)^2 + \frac{4V_p^2k^6}{9}} \tag{9.10}$$

$$\text{où } V_p \text{ est le volume de diffusion } V_p = \frac{mA_0^2}{4\pi\hbar^2(\lambda-\delta)} \tag{9.11}$$

Si on se place dans la limite $k^3V_p \ll 1$, à une certaine énergie de collision $\hbar^2k^2/m$, la résonance de diffusion n'est plus exactement à résonance ($\delta = \lambda$) mais légèrement décalée à $\delta-\lambda=(1+\mu)\hbar^2k^2/m$. A la différence de l'onde s, en onde p, la position de la résonance dépend de l'énergie. Loin de résonance, on retrouve le fait que la section efficace de diffusion en onde p dépend comme le carré de l'énergie, une dépendance caractéristique des interactions en onde p.

9.1.2 Localisation des résonances en onde p dans $|F=1/2\rangle$

Nous nous sommes intéressés plus particulièrement aux résonances en onde p pour deux atomes de ^{6}Li dans $|F=1/2\rangle$. On attend trois résonances de Feshbach correspondant aux trois couples d'états possibles $|F=1/2,m_f\rangle+|F=1/2,m'_f\rangle$ qui sont notés de façon simplifiée (m_f,m'_f). Les trois résonances sont toutes les trois dues à un état $S=0,I=1,l=1$ du potentiel singulet. La figure 9.1 montre les énergies des états moléculaires en fonction du champ magnétique calculées dans un modèle multi-canaux à partir des potentiels déjà relativement bien connus du lithium. On retrouve le fait que l'énergie des états moléculaires se courbe légèrement proche de résonance, et que le moment magnétique des molécules habillées reste différent de celui des atomes libres (insert de la figure 9.1). Expérimentalement, la séquence est la suivante : les atomes de ^{6}Li sont placés dans le piège optique, dont les fréquences d'oscillation, à pleine puissance, valent respectivement $\omega_x/2\pi=2.4(2)\,\mathrm{kHz}$, $\omega_y/2\pi=5.0(3)\,\mathrm{kHz}$ et $\omega_z/2\pi=5.5(4)\,\mathrm{kHz}$. Des transferts radio-fréquences permettent ensuite d'obtenir les différents couples (m_f,m'_f). Ensuite, on veut se placer proche de résonance rapidement pendant un temps variable τ avant de couper le champ magnétique pour l'imagerie. Pour permettre des changements rapides de champ magnétique, celui-ci est constitué de deux composantes. La plus importante B_0 est réalisée par les bobines de confinement axial du piège de Ioffe-Pritchard. Un champ opposé faible B_1 de 8 G est crée grâce à un courant dans les bobines de compensation. Ce dispositif est le même que celui qui permet d'imager les molécules. Il a pour but de pouvoir couper rapidement B_1 pour se placer proche d'une résonance dont la position doit donc être proche de B_0. Le champ magnétique est ensuite couper complètement et les atomes sont détectés après un temps de vol de 0.35 ms. Pour modifier la température du gaz, on peut éventuellement ouvrir le piège et donc évaporer légèrement le gaz en 100 ms. Pour les gaz les plus froids de cette étude la température est de l'ordre de $0.5\,T_\mathrm{F}$ ce qui n'est pas encore un régime très dégénéré. On peut considérer en première approximation que le gaz est dans un régime classique. Les résonances sont localisées par la présence de fortes pertes après un temps d'attente $\tau=50\,\mathrm{ms}$ (figure 9.2) et dont les différentes positions expérimentales ainsi que théoriques sont répertoriées dans la table 9.1. L'accord avec les valeurs théoriques dont la précision est de l'ordre du Gauss est satisfaisant. Ces résonances ont été localisées aussi dans l'équipe de W. Ketterle au MIT à des valeurs similaires [198].

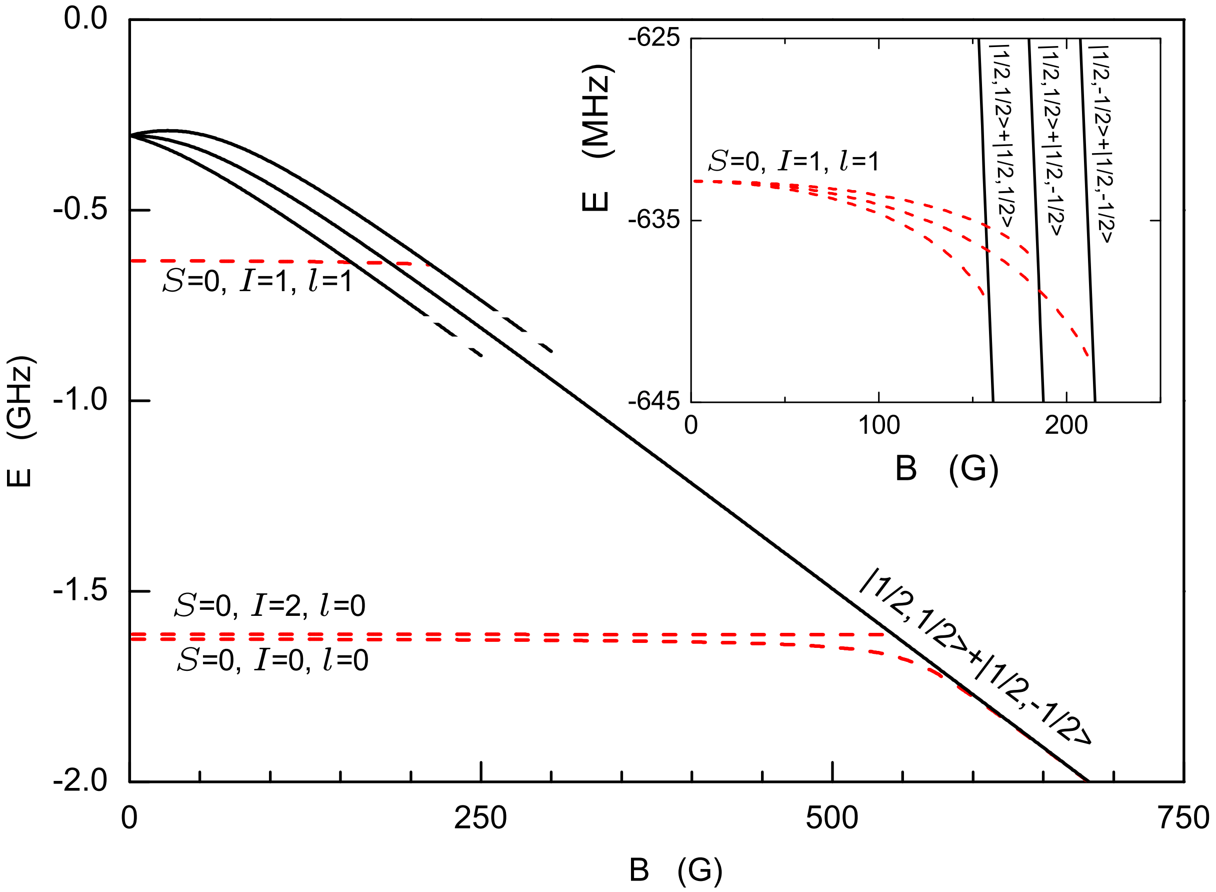

Figure 9.1 – *Energies des états moléculaires (courbes pointillées) et atomiques (courbes continues). Les nombres quantiques des états moléculaires responsables des différentes résonances de Feshbach sont indiqués. L'état $|S=0, I=1, l=1\rangle$ est responsable des trois résonances en onde p. Les états $|S=0, I=0, l=0\rangle$ et $|S=0, I=2, l=0\rangle$ sont responsables des résonances de Feshbach en onde s dans le canal $(1/2, -1/2)$. L'insert dilate l'échelle des énergies pour montrer l'allure de l'énergie des états proche des résonances en onde p.*

(m_{f_1}, m_{f_2})	Théorie (G)	Expérience (G)
(1/2,1/2)	159	160.2(6)
(1/2,-1/2)	185	186.2(6)
(-1/2,-1/2)	215	215.2(6)

Table 9.1 – *Valeurs théoriques et expérimentales des positions des résonances de Feshbach en onde p dans les différents canaux.*

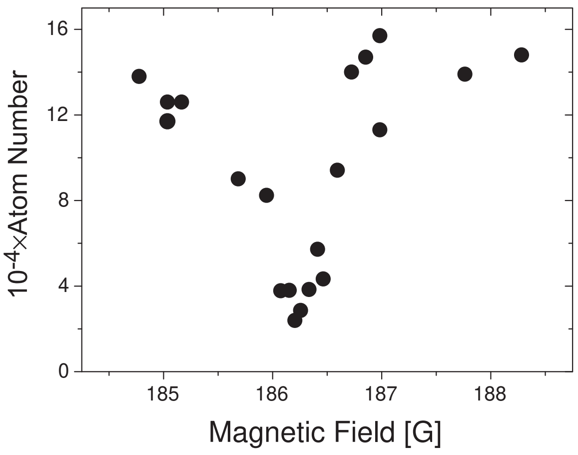

FIGURE 9.2 – *Nombre d'atomes en fonction du champ magnétique B_0 après 50 ms d'attente pour un mélange $(1/2, -1/2)$ à une température de 14 μK. Les pertes sont la signature d'une résonance de Feshbach en onde p.*

9.2 Etude des pertes

Les pertes, qui en onde p sont localisées proche de résonance à la différence de ce qui se passe en onde s, nous ont permis de localiser relativement facilement les trois résonances en onde p entre les états de $F = 1/2$. Les processus de pertes sont maintenant étudiés plus précisément dans cette section. Le cas des pertes dipolaires induites par une résonance de Feshbach sera décrit théoriquement [62, 63].

9.2.1 Deux comportements différents

Notre première mesure a consisté à se placer à un champ magnétique proche des maxima de pertes observés précédemment et à étudier le temps de vie des gaz. En tenant compte des processus à deux et trois corps, on attend l'équation de taux suivante pour la décroissance du nombre d'atomes :

$$\frac{\dot{N}}{N} = -G_2\langle n\rangle - L_3\langle n^2\rangle \tag{9.12}$$

G_2 et L_3 sont respectivement les coefficients de pertes à deux et trois corps, n est la densité du nuage, les crochets $\langle\rangle$ représente la valeur moyenne prise sur la distribution spaciale du nuage. On omet la contribution des pertes à un corps dont le temps caractéristique est de 30 s, alors qu'on mesure des temps de décroissance de l'ordre de 100 ms.

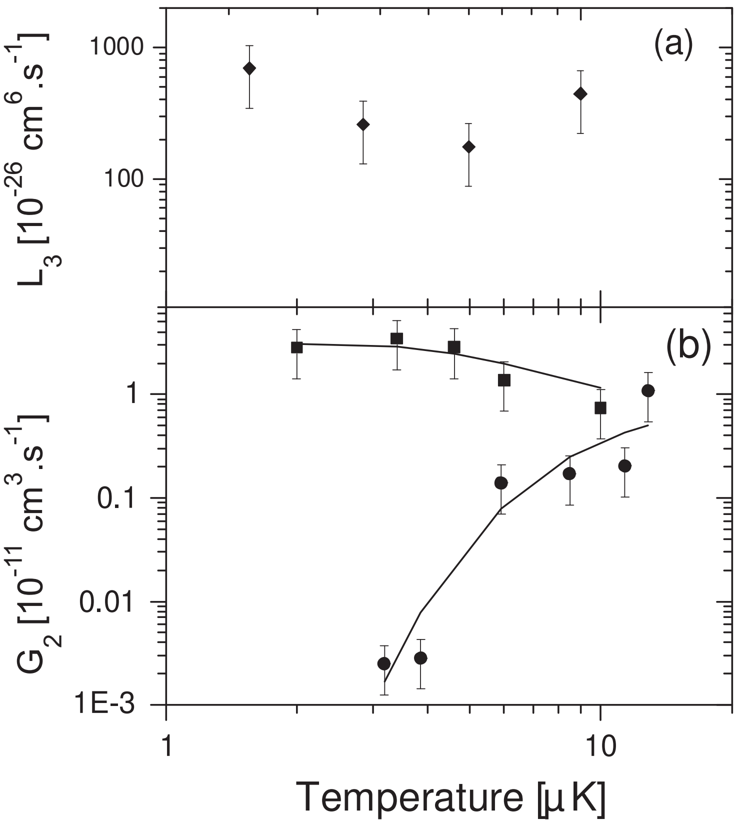

FIGURE 9.3 – *Taux de pertes à trois corps (a) et à deux corps (b) en fonction de la température au pic de pertes correspondant aux différentes résonances de Feshbach. (a) : atomes dans l'état fondamental $|1/2, 1/2\rangle$ (losanges). (b) : atomes dans l'état $|1/2, -1/2\rangle$ (carrés), et mélange des états $|1/2, 1/2\rangle + |1/2, -1/2\rangle$ (cerles). Les lignes sont les ajustements par la fonction 9.21 avec comme seul paramètre ajustable le décalage exact par rapport à la résonance.*

9.2.2 Canal $(1/2, 1/2)$: pertes à trois corps

Dans le canal $(1/2, 1/2)$, expérimentalement, on trouve que le processus de pertes à trois corps domine. Cela correspond à ce qu'on attendait car les pertes à deux corps sont interdites dans ce canal qui est dans l'état fondamental. La dépendance de L_3 a été étudiée en fonction de la température (figure 9.3a). On trouve que la dépendance en température est faible. Ce résultat semble à première vue en contradiction avec une prédiction théorique [106] selon laquelle pour des fermions indistinguables L_3 doit être proportionnel à T^λ avec $\lambda \geq 2$. Cependant ce calcul, basé sur la règle d'or de Fermi, est fait dans un régime perturbatif. Proche de résonance, on s'attend à ce que ce type de traitement ne soit plus valable. Nos résultats suggèrent que les processus de pertes à trois corps dans ce régime doivent être traités d'une façon plus élaborée analogue au traitement de la limite unitaire pour les onde s [199]. Pour confirmer cette hypothèse, nous avons comparé le taux de pertes à deux températures différentes ($T = 2\,\mu$K et $T = 8\,\mu$K) en fonction du champ magnétique (figure 9.4). Si la loi perturbative est valable, le rapport

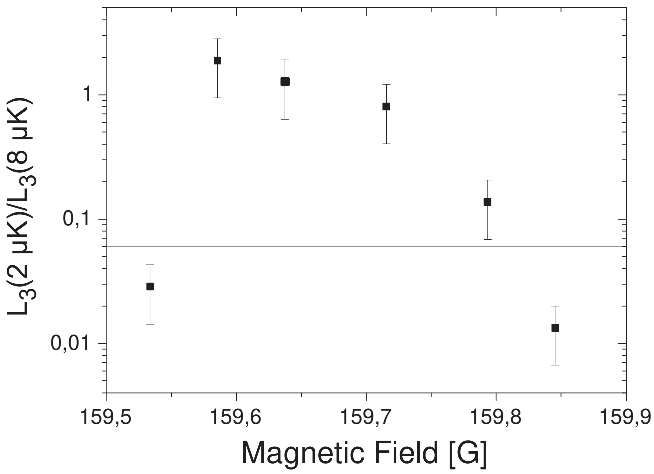

FIGURE 9.4 – *Rapport $L_3(T = 2\mu\text{K})/L_3(T = 8\ \mu\text{K})$ entre les taux de pertes à trois corps à deux températures différentes en fonction du champ magnétique pour un gaz polarisé dans l'état $|1/2, 1/2\rangle$. La ligne correspond à la limite supérieure autorisée par la loi $L_3 \sim T^\lambda$ avec $\lambda \geq 2$.*

des deux taux de pertes doit être inférieur à $(2/8)^2 = 1/16$. Cette valeur est représentée par la ligne sur la figure 9.4. Proche de résonance, on retrouve le fait que la dépendance en température de L_3 est faible alors que, plus loin de résonance, nos résultats sont alors en accord avec les prédictions de [106].

9.2.3 Pertes à deux corps

Dépendance en température

Les pertes dans les canaux $(1/2, -1/2)$ et $(-1/2, -1/2)$ sont dominées par un processus à deux corps[1]. Au contraire de l'onde s, en onde p, les pertes dipolaires à deux corps sont permise dans ces canaux. Comme dans le cas des pertes à trois corps, nous avons étudié la dépendance en température des taux de pertes (G_2). Au champ magnétique correspondant au maximum de pertes observé précédemment, la température est variée, en ouvrant plus ou moins le piège optique. Les résultats sont regroupés sur la figure 9.3b. De façon surprenante la dépendance en température est alors très différente pour les deux canaux étudiés. En fait, ces comportements peuvent s'expliquer par une très grande sensibilité à la position exacte du champ magnétique par rapport à la position de la résonance de Feshbach. Pour le comprendre, nous avons prolongé le modèle de résonance de Feshbach détaillé dans la section précédente.

Théorie des pertes dipolaires en onde p

Reprenons le modèle décrit au début de ce chapitre et ajoutons la possibilité d'un couplage entre l'état lié et un deuxième canal atomique de plus basse énergie [63]. Ce deuxième canal est couplé aux états moléculaires par l'interaction entre les dipôles magnétiques associés au spin électronique des deux atomes. De plus ce deuxième canal est décalé d'une énergie $\Delta < 0$ par rapport au canal ouvert de départ, car il correspond à des états atomiques de spins différents (figure 9.5). Dans le cas des résonance du lithium que l'on considère, ce décalage est $\Delta \sim 80\,\mathrm{MHz}$. Pour calculer le propagateur des molécules, il faut maintenant sommer sur le même type de diagramme qu'auparavant (figure 2.5), en considérant les deux canaux ouverts possibles. Le propagateur s'écrit sous la même forme qu'auparavant avec la self énergie [63],

$$\Sigma(z) = \Sigma_{\mathrm{HF}}(z) + \Sigma_{\mathrm{dip}}(z - \Delta) \tag{9.13}$$

où $= \Sigma_{\mathrm{HF}}(z)$ et $\Sigma_{\mathrm{dip}}(z - \Delta)$ sont de la forme de l'équation 9.5 et correspondent aux deux canaux couplés respectivement par l'interaction hyperfine et par l'interaction dipolaire magnétique. Cela correspond donc au propagateur suivant :

$$\frac{1}{G(z)} = (\lambda - \delta) + (1 + \mu)z + i\frac{g_{\mathrm{HF}}}{6\pi}\frac{m}{\hbar^2}\left(\frac{mz}{\hbar^2}\right)^{3/2} + i\frac{g_{\mathrm{dip}}}{6\pi}\frac{m}{\hbar^2}\left(\frac{m(z-\Delta)}{\hbar^2}\right)^{3/2} \tag{9.14}$$

$$\text{avec } \mu = \mu_{\mathrm{HF}} + \mu_{\mathrm{dip}} \tag{9.15}$$

$$\text{et } \lambda = \lambda_{\mathrm{HF}} + \lambda_{\mathrm{dip}} - \mu_{\mathrm{dip}}\Delta \tag{9.16}$$

Le pôle correspondant à l'énergie des molécules dans la limite des énergie de liaison faible est alors le même que précédemment mais il y a une partie imaginaire qui correspond à la

[1] Pour le canal $(+1/2, -1/2)$, l'analyse n'est pas évidente car il faut tenir compte d'un éventuel mauvais mélange (non 50-50) des deux états de spin.

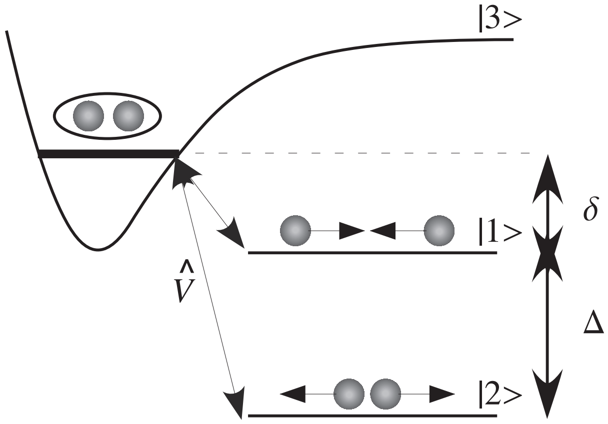

FIGURE 9.5 – *Schéma des différents états impliqués dans une résonance de Feshbach en onde p. L'état $|3\rangle$ est l'état lié du potentiel singulet responsable de la résonance. L'état $|1\rangle$ est le canal entrant ; il est couplé à l'état $|3\rangle$ par l'interaction hyperfine. L'état $|2\rangle$ est le canal de pertes dipolaires. Cet état est couplé à l'état $|3\rangle$ par l'interaction dipolaire magnétique entre les spins électroniques. Ce niveau est décalé d'une énergie Δ par rapport aux deux autres niveaux.*

durée de vie des molécules par couplage dipolaire. On peut ensuite calculer le coefficient $g_2(E)$ des pertes dipolaires et la section efficace de diffusion $\sigma(E)$ pour les collisions à énergie E. On trouve, dans la limite $E \ll \Delta$ et $g_{\rm dip} \ll g_{\rm HF}$:

$$g_2(E) = \frac{KE}{(E-\tilde{\delta})^2 + \hbar^2\gamma^2/4} \tag{9.17}$$

$$\sigma(E) == \frac{K'E^2}{(E-\tilde{\delta})^2 + \hbar^2\gamma^2/4} \tag{9.18}$$

$$\text{avec } \tilde{\delta} = \frac{\delta - \lambda}{1+\mu} \tag{9.19}$$

$$\text{et } \hbar\gamma/2 = \underbrace{\frac{1}{1+\mu}\frac{g_{\rm HF}}{6\pi}\frac{m}{\hbar^2}\left(\frac{mE}{\hbar^2}\right)^{3/2}}_{\hbar\gamma_{\rm el}/2} + \underbrace{\frac{1}{1+\mu}\frac{g_{\rm dip}}{6\pi}\frac{m}{\hbar^2}\left(\frac{m|\Delta|}{\hbar^2}\right)^{3/2}}_{\hbar\gamma_{\rm inel}/2} \tag{9.20}$$

où K et K' sont des constantes. On a une résonance quand l'énergie de la molécule habillée correspond à l'énergie de collision E. Comme E est toujours positif, la résonance n'apparaît que pour un état moléculaire habillé d'énergie positive. La largeur γ comporte deux termes, $\gamma_{\rm el}$ et $\gamma_{\rm inel}$ qui correspondent à la dissociation de la molécule habillée dans chacun des deux canaux ouverts. $\gamma_{\rm inel}$ est le taux de pertes moléculaires par dissociation dans le canal ouvert couplé par l'interaction dipolaire magnétique.

Un calcul multi-canaux complet incluant le terme d'interaction dipolaire est possible et on peut donc comparer les résultats avec notre modèle théorique simple. Les résultats correspondent de façon tout à fait remarquable (voir figure 9.6) ; on pourra se reporter à

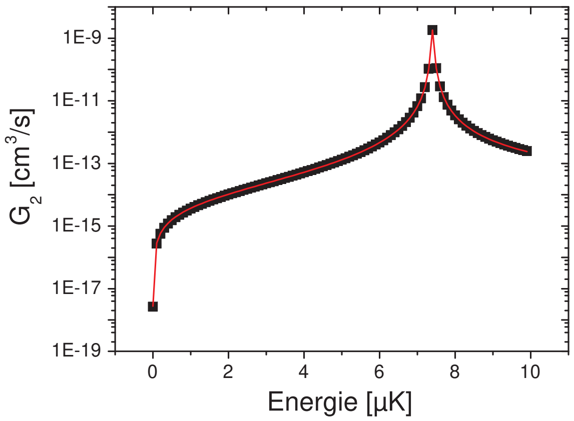

FIGURE 9.6 – *Taux de pertes dipolaires $g_2(E)$ au voisinage de la résonance en onde p dans le canal $(-1/2, -1/2)$ par couplage avec l'état moléculaire $m_l = 0$. Les points correspondent à un calcul multi-canaux. La courbe est un ajustement par la fonction 9.17 dont l'accord avec la théorie complète est remarquable. La position de la résonance en énergie 7.5 μK correspond à un décalage par rapport à la position de la résonance en champ magnétique de 70 mG.*

l'article [63] pour plus de détails [2]. Les valeurs de K, μ et γ à placer dans l'expression 9.17 sont répertoriées dans le tableau 9.2. La comparaison avec le calcul numérique multi-

(m_{f_1}, m_{f_2})	K $\mathrm{cm}^3 \cdot \mu\mathrm{K} \cdot \mathrm{s}^{-1}$	γ μK	μ sans unité
(1/2,-1/2)	1.21×10^{-13}	0.05	0.085
(-1/2,-1/2)	7.33×10^{-13}	0.08	0.144

TABLE 9.2 – Paramètres caractérisant les pertes dipolaires via le couplage dipolaire en onde p pour les canaux $(1/2, -1/2)$ et $(-1/2, -1/2)$.

canaux permet aussi de déterminer dans le cadre de ce modèle les taux de pertes γ_{inel} pour les molécules de m_l différent. Dans les deux canaux considérés, le temps de vie des molécules est environ 10 ms pour $m_l \in \{0, 1\}$ et 10^4 fois plus grand pour $m_l = -1$ [63]. Cette différence est due à la conservation du moment cinétique total qui rend impossible le couplage dipolaire en onde p vers le canal ouvert pour $m_l = -1$ (le premier terme non nul est alors le couplage en onde f). Le point important est que la durée de vie des molécules

[2]En fait, le couplage dipolaire est responsable d'une levée de dégénérescence entre les états moléculaires dans les différents m_l [200] et on trouve non pas une résonance mais trois. Pour chaque courbe, on trouve un très bon accord avec notre modèle. Compte tenu des températures typiques mises en jeu dans nos expériences, on peut considérer toutes ces résonances comme superposées.

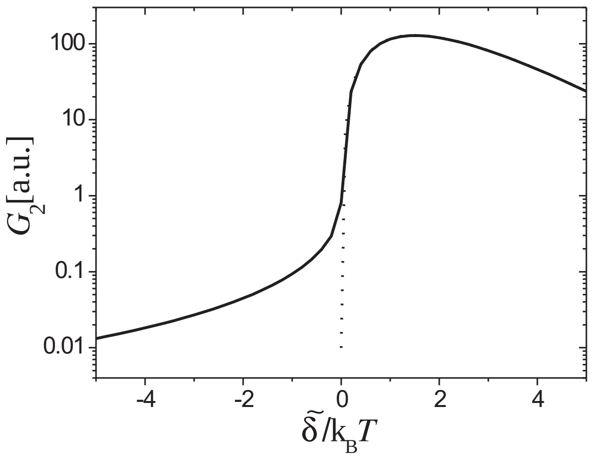

FIGURE 9.7 – *Coefficient de pertes dipolaires G_2 pour un gaz classique. Le maximum de pertes correspond à $\tilde{\delta} = 3k_{\mathrm{B}}T/2$. A gauche de résonance, pour $\tilde{\delta} < 0$, les pertes sont fortement réduites car il n'y plus d'énergie pour laquelle le processus de pertes est résonnant.*

limitée par la dissociaton vers le canal ouvert d'énergie inférieure semble suffisante pour permettre leur observation.

Comparaison avec les données expérimentales

Pour calculer le taux de pertes effectif G_2 dans un gaz, il faut alors faire la somme de $g_2(E)$ sur les différentes énergies de collisions dans le nuage. Dans la limite où $\tilde{\delta} \gg \hbar\gamma$, ce qui correspond bien aux conditions expérimentales, on peut considérer la résonance comme une fonction de Dirac, et on trouve alors facilement [62] :

$$G_2 \simeq 4\sqrt{\pi}\frac{K}{\hbar\gamma}\left(\frac{\tilde{\delta}}{k_{\mathrm{B}}T}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{-\tilde{\delta}/k_{\mathrm{B}}T} \tag{9.21}$$

C'est cette fonction dont on connait tous les paramètres qui est utilisée pour la comparaison avec les expériences (voir figure 9.7). La position du maximum de G_2 dépend de la température et correspond à $\tilde{\delta} = 3k_{\mathrm{B}}T/2$. De plus, la largeur du pic de pertes (en terme de $\tilde{\delta}$) est de quelques $k_{\mathrm{B}}T$. Dans les conditions où nous avons localisé les résonances par la présence de pertes, c'est à dire à une température $T = 15\,\mu\mathrm{K}$, on s'attend à trouver le maximum de pertes à $0.15\,\mathrm{G}$ de résonance et la largeur du pic de pertes doit être de l'ordre de quelques $0.1\,\mathrm{G}$. La largeur mesurée expérimentalement, $0.5\,\mathrm{G}$, est du bon ordre de grandeur (figure 9.2).

L'ajustement de la dépendance des pertes en fonction de la température est reporté sur la figure 9.3. Les paramètres K et μ utilisés ceux du tableau 9.2. Le seul paramètre ajustable est le décalage exact en champ magnétique par rapport à la position de la résonance

Feshbach. On arrive à reproduire les deux comportements observés, apparemment très différents, à partir de notre modèle. Le décalage par rapport à la résonance de Feshbach est ajusté à 0.04 G (resp. 0.3 G) dans le canal $(-1/2,-1/2)$ (resp. $(1/2,-1/2)$) et cette différence de quelques dixièmes de Gauss induit des comportements en température très différents. Ces décalages en champ magnétique sont tout-à-fait possibles compte-tenu de la largeur de la résonance observée expérimentalement $\simeq 0.5$ G (figure 9.2). Le comportement de G_2 en fonction du champ magnétique peut aussi être mesuré directement en changeant non pas la température du nuage mais le champ magnétique sur chacune des deux résonances.

9.3 Molécules en onde p

Nous avons ensuite essayé de produire des molécules en onde p. Notre technique de mesure est analogue à celle utilisée pour détecter les molécules en onde s [61,116] présentée dans le chapitre 6. On s'intéresse dans un premier temps à des molécules dans le canal $(1/2,-1/2)$ D'abord les molécules sont formées en variant le champ magnétique de 190 G, à 185 G à travers la résonance de Feshbach. Deux mesures sont ensuite comparées. Cas 1 : le champ magnétique est encore diminué jusqu'à 176 G en 2 ms, puis celui-ci est coupé complètement. Les molécules deviennent alors fortement liées et ne sont donc pas détectées par le laser d'imagerie qui est résonnant avec la transition atomique. Cette méthode permet de connaître le nombre d'atomes libres N_1. Cas 2 : Le champ magnétique est remonté en 2 ms jusqu'à 202 G au dessus de la résonance de Feshbach. Les molécules sont dissociées en atomes. Cette méthode permet donc de compter le nombre N_2 d'atomes aussi libres qu'impliqués dans une molécule. Le nombre de molécules dans le piège est donc $(N_2 - N_1)/2$. Après une moyenne sur 25 images, on trouve $N_1 = 7.1(5) \times 10^4$ et $N_2 = 9.1(7) \times 10^4$, ce qui correspond à une fraction moléculaire de 0.2(1). Cette fraction est faible mais semble significative. De façon surprenante, la même technique appliquée au canal $(1/2,1/2)$ ne montre pas de signal de création de molécules, alors que ce canal ne présente pas de pertes dipolaires. Cette différence pourrait s'expliquer par des taux de pertes différents dans les processus à deux corps molécule-molécule ou atome-molécule dans les deux canaux considérés. L'étude des possibilités de formation de molécules en onde p mérite d'être pousuivi. Cela permettrait de mieux comprendre les processus de relaxation des molécules. Si on arrive à condenser des molécules en onde p, les perspectives d'étude de la transition BEC-BCS en onde p sont encourageantes [193,194].

Conclusion

Les travaux présentés dans cette thèse regroupent des résultats concernant les gaz de Fermi ultrafroids en interaction au voisinage de résonances de Feshbach en onde s et p. Le dispositif expérimental permettant de refroidir et de piéger magnétiquement les atomes, puis de les transférer un piège optique nécessaire à nos expériences est décrit.

Notre compréhension du phénomène de résonance de Feshbach et de ses implications dans un système d'atomes froids a considérablement progressé pendant ma thèse. Nos expériences antérieures sur les solitons brillants d'onde de matière ne nécessitaient que la connaissance de la variation de la longueur de diffusion proche d'une résonance de Feshbach. L'importance de l'existence, pour $a > 0$, d'un état faiblement lié, c'est-à-dire un état moléculaire dans le système à 2 corps a ensuite été démontrée à la fois dans les gaz de bosons et de fermions. Ces deux aspects sont explicités à l'aide d'un modèle théorique à deux canaux qui inclut explicitement l'état moléculaire à courte portée responsable de la résonance. Expérimentalement, en traversant la résonance de Feshbach, nous avons produit des molécules faiblement liées $^6Li_2$, et observé leur remarquable stabilité proche du pic de résonance qui est une belle conséquence du principe de Pauli. Le taux de production de molécules ainsi que l'évolution de la température en fonction du champ magnétique est en accord avec un modèle où le nuage de molécules est en équilibre thermodynamique, c'est-à-dire à la fois équilibre thermique et chimique avec le gaz atomique. Nous avons aussi montré que la formation ainsi que la dissociation des molécules en variant le champ magnétique est un processus réversible.

La mesure de temps de vie de l'ordre de la seconde pour ces molécules proche du pic de résonance a ouvert la possibilité d'étudier leur condensation de Bose-Einstein. Un tel condensat est un système quantique nouveau et fascinant. La force des interactions entre molécules est ajustable et on peut accéder à des régimes d'interaction beaucoup plus forts qu'avec les condensats d'atomes bosoniques étudiés auparavant. Des techniques de mesures nouvelles pour identifier les molécules et réaliser une mesure de leur distribution de vitesse ont été mises au point.

Un aspect particulièrement intéressant est la possibilité de varier de nouveau le champ magnétique, à travers la résonance, à partir d'un condensat de Bose de molécules. On peut ainsi changer de façon réversible la force des interactions et étudier la transition dite BEC-BCS entre un condensat de molécules et un état BCS, caractérisé par l'existence de paires de Cooper. On s'intéresse ici à des propriétés à N-corps, qui ne sont pas encore bien comprises théoriquement dans le régime d'interaction forte. Expérimentalement, nous avons mesuré la distribution à 2D du gaz après expansion dans la zone de transition. Deux quantités sont particulièrement intéressantes, l'anisotropie et l'énergie relâchée dans l'expansion. Les différentes expériences réalisées dans le régime BEC-BCS confirment que la transition de phase superfluide a été atteinte dans le régime $a > 0$, et les défits dans ce domaine concernent des méthodes de caractérisation du gaz qui pourraient permettre de mieux comprendre la nature de ce système en interaction forte.

Enfin, nous avons étudié les résonances de Feshbach en ondes p entre les états de $|F = 1/2\rangle$. La nature des pertes, deux corps ou trois corps, proche des différentes résonances, est explicitée. Un modèle de couplage dipolaire simple reproduit une partie des résultats. La possibilité de former des molécules stables en onde p permettrait l'étude d'un autre type de transition BEC-BCS avec un couplage en onde p.

Les perspectives ouvertes à la suite de ces expériences sur les gaz de fermions en interaction forte sont multiples comme le montre le nombre important d'expériences de fermions ultrafroids qui sont en train d'être montées. Deux axes semblent particulièrement prometteurs : la formation de molécules associant deux atomes différents permettraient d'avoir des interactions dipolaires électriques. Les conséquences de ce type d'interaction anisotrope et à longue portée pourraient être étudiées [201,202,203,204,205,206,207]. Les fermions ou des mélanges fermion-boson en interaction dans les réseaux optiques [208] donnent lieu à des diagrammes des phases extrêmement riches [209,210,211,212,213]. Les atomes froids pourraient aider à la compréhension de problèmes non résolus de physique du solide.

Publications

PHYSICAL REVIEW A **69**, 033603 (2004)

Limits of sympathetic cooling of fermions by zero-temperature bosons due to particle losses

L. D. Carr,* T. Bourdel, and Y. Castin

Laboratoire Kastler Brossel, Ecole Normale Supérieure, 24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France

(Received 19 May 2003; revised manuscript received 26 June 2003; published 9 March 2004)

It has been suggested by Timmermans [Phys. Rev. Lett. **87**, 240403 (2001)] that loss of fermions in a degenerate system causes strong heating. We address the fundamental limit imposed by this loss on the temperature that may be obtained by sympathetic cooling of fermions by bosons. Both a quantum Boltzmann equation and a quantum Boltzmann *master* equation are used to study the evolution of the occupation number distribution. It is shown that, in the thermodynamic limit, the Fermi gas cools to a minimal temperature $k_B T/\mu \propto (\gamma_{\rm loss}/\gamma_{\rm coll})^{0.44}$, where $\gamma_{\rm loss}$ is a constant loss rate, $\gamma_{\rm coll}$ is the bare fermion-boson collision rate not including the reduction due to Fermi statistics, and $\mu \sim k_B T_F$ is the chemical potential. It is demonstrated that, beyond the thermodynamic limit, the discrete nature of the momentum spectrum of the system can block cooling. The unusual nonthermal nature of the number distribution is illustrated from several points of view: the Fermi surface is distorted, and in the region of zero momentum the number distribution can descend to values significantly less than unity. Our model explicitly depends on a constant evaporation rate, the value of which can strongly affect the minimum temperature.

DOI: 10.1103/PhysRevA.69.033603 PACS number(s): 03.75.Ss

I. INTRODUCTION

Evaporative cooling has proven able to obtain degenerate Fermi systems [1–8]. As polarized fermions cannot undergo s-wave collisions, it is necessary to sympathetically cool with another species or spin state. In contrast to the case of bosons [9], it has been suggested that Fermi systems are highly sensitive to loss [10]. In this paper, we will investigate this question for the case of sympathetic cooling by an ideal zero-temperature Bose gas, in order to identify the fundamental limit imposed by loss. Sympathetic cooling via a degenerate Bose gas is indeed used in several present experiments [2,3,5,8]. The lowest experimentally obtained temperature to date is $T/T_F \sim 0.05$ [8], where T_F is the Fermi temperature.

Various theoretical groups have considered improved cooling schemes [11], including optimizing the evaporation rate [12], using different trapping frequencies [13,14], or using laser rather than evaporative cooling [15–17]. We will restrict our investigation to a simple model of sympathetic cooling of a gas in a box, in which it will be shown that a minimum temperature arises naturally as a result of loss of particles. The discrete nature of the energy spectrum of the system can also be a limiting factor. It will be demonstrated, from several points of view, that the occupation number distribution is nonthermal in a nontrivial sense. "Temperature" and "chemical potential" will therefore be defined based on the total number and energy of the fermions, rather than on the equilibrium nature, or lack thereof, of their distribution.

Our presentation is organized as follows. In Sec. II, we physically motivate our idealized model in the context of present experiments. In Sec. III a quantum Boltzmann equation is derived under the assumption that the density operator is Gaussian in the fermionic field, which permits the use of Wick's theorem, to study the evolution of the mean number distribution and the temperature. In Sec. IV this equation is investigated numerically in a discrete system and both numerically and analytically in the thermodynamic limit. In Sec. V the probability distribution of the occupation numbers is examined without the assumption of Wick's theorem: a quantum Boltzmann *master* equation [18,19] based on the secular approximation [20,21] is derived and simulated via Monte Carlo methods. Finally, in Sec. VI we conclude.

II. A MODEL FOR SYMPATHETIC COOLING

In order to understand the limits of sympathetic cooling imposed by particle loss, we use an idealized theoretical model. This model contains the following assumptions. First, the bosons form a perfect reservoir: they are noninteracting at zero temperature, are not significantly reduced in number during the total observation time, and when excited to nonzero momentum states are removed from the system by evaporation. Second, the Fermi gas is noninteracting: the fermions are all in the same spin state so that there is no s-wave contribution to their interactions, and, in the low-temperature regime which will be considered, the p-wave contribution is negligible. Third, fermion-boson interactions are modeled by a contact potential proportional to the s-wave scattering length. Fourth, the system is enclosed in a three-dimensional box with periodic boundary conditions with sides of length L_x, L_y, L_z: the volume shall be denoted as $L^3 \equiv L_x L_y L_z$. Fifth, the evolution of the system is described by discrete evaporation time steps of duration t_e, the end points of which represent a full removal of the bosonic particles in the modes with nonzero momentum: $1/t_e$ may be interpreted as the evaporation rate. Sixth, a constant fermion loss rate is introduced.

In present experiments it is commonly assumed that the Fermi and Bose gases are cooled down while remaining ther-

*Present address: JILA, National Institute of Standards and Technology and Department of Physics, University of Colorado at Boulder, Boulder, CO 80309-0440, USA.

malized at a finite and common temperature. This requires a sufficiently large collision rate between bosons and fermions as well as between bosons, in comparison to the evaporation rate. In our model, each time an excited boson is created by interaction with the Fermi gas it is removed sufficiently rapidly so that, even if an *interacting* Bose gas was considered, the bosons would not have time to thermalize. Consequently, the Fermi and Bose gases are never at the same temperature. It is in fact advantageous to maintain the Bose gas at a temperature much smaller than that of the Fermi gas: it is only in this case that all collisions between fermions and bosons are efficient, in the sense that they decrease the energy of the fermions and therefore lead to cooling.

In this respect, our model is not intended to closely represent current experiments; rather, the goal of this study is to explore the fundamental cooling limits due to loss in an ideal system. However, we note that in an actual experiment the regime considered in our model may be obtained if thermalization of the bosons is avoided by a sufficiently strong evaporation rate. We also note that cooling of fermions by a nearly pure condensate was realized in a recent experiment [8].

III. THE QUANTUM BOLTZMANN EQUATION

Consider the Hamiltonian $H=H_0+V$, where H_0 is the kinetic energy of the Fermi-Bose mixture and V is the interaction energy, such that

$$H_0 \equiv \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar^2 k^2}{2m_F} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{q}} \frac{\hbar^2 q^2}{2m_B} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{q}}, \tag{1}$$

$$V \equiv \frac{g(t)}{L^3} \sum_{\mathbf{k}',\mathbf{k},\mathbf{q}' \neq \mathbf{q}} \hat{b}^\dagger_{\mathbf{q}'} \hat{b}_{\mathbf{q}} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}'} \hat{c}_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}',\mathbf{k}+\mathbf{q}}, \tag{2}$$

$$g(t) \equiv g_0 \sin^2(t\pi/t_e), \tag{3}$$

where $\hat{c}^\dagger$ ($\hat{b}^\dagger$) refers to the creation operator, subject to the usual Fermi (Bose) commutator relations, for a single fermion (boson) of momentum $\mathbf{k}$ ($\mathbf{q}$). The coefficient $g_0 \equiv 2\pi\hbar^2 a_s/m_r$, where a_s is the s-wave scattering length for fermion-boson interactions and m_r is the reduced mass. The choice of a continuous time dependence for the continuous interaction potential in Eq. (3) avoids strong nonadiabatic effects. In contrast, an abrupt switching on and off of the interaction potential is a source of heating, leading in particular to divergence of the mean kinetic energy in the rate equations to follow. A Feshbach resonance could be used to achieve a time-dependent coupling of the form suggested by Eq. (17) [22,23]. Note that the case $\mathbf{q}=\mathbf{q}'$ has been discarded in Eq. (2), as it gives a contribution $gN_B N_F/L^3$ which has no effect on the dynamics.

In order to apply perturbation theory, it is required that t_e be sufficiently small. For example, in the thermodynamic limit in the Fermi degenerate regime, it is necessary that

$$t_e \gamma_{\mathrm{coll}} T/T_F \ll 1, \tag{4}$$

where

$$\gamma_{\mathrm{coll}} \equiv \tfrac{3}{8} \sigma n_B v_F, \tag{5}$$

$\sigma \equiv 4\pi a_s^2$ is the cross section for scattering between a boson and a fermion, n_B is the bosonic density, and v_F is the Fermi velocity, where $v_F \equiv \hbar(6\pi n_F)^{1/3}/m_F$ in this spin-polarized system, with n_F being the density of fermions. The factor of T/T_F in Eq. (4) is due to Pauli blocking. The factor of 3/8 in Eq. (5) has been included to account for the reduced interaction strength due to the choice of the temporal profile of $g(t)$. Note that γ_{coll} is time dependent for a nonzero loss rate, since the density of fermions decreases. Consider the number operator

$$\zeta \equiv \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{k}}. \tag{6}$$

The mean value of ζ at time $(n+1)t_e$ may be written as

$$\langle \zeta \rangle [(n+1)t_e] = \mathrm{Tr}(\tilde{\rho}(nt_e)\Lambda(nt_e)), \tag{7}$$

where

$$\Lambda(t) \equiv \tilde{U}^\dagger[(n+1)t_e \leftarrow t]\zeta \tilde{U}[(n+1)t_e \leftarrow t], \tag{8}$$

and $\tilde{\rho}(nt_e)$ and $\tilde{U}$ are the density operator and the evolution operator in the interaction picture. The operator Λ satisfies the equation of motion

$$i\hbar \frac{d}{dt}\Lambda = [\tilde{V}(t), \Lambda(t)], \tag{9}$$

with the "final" condition $\Lambda[(n+1)t_e]=\zeta$. This is equivalent to the integral equation

$$\Lambda(t) = \zeta + \int_t^{(n+1)t_e} \frac{d\tau}{i\hbar} [\Lambda(\tau), \tilde{V}(\tau)]. \tag{10}$$

A perturbative development of Λ may then be obtained by iteration of Eq. (10) in powers of V as follows:

$$\Lambda(nt_e) \simeq \zeta + \int_{nt_e}^{(n+1)t_e} \frac{dt}{i\hbar}[\zeta, \tilde{V}(t)] + \int_{nt_e}^{(n+1)t_e} \frac{dt'}{i\hbar} \int_{t'}^{(n+1)t_e} \frac{dt}{i\hbar} [[\zeta, \tilde{V}(t)], \tilde{V}(t')]. \tag{11}$$

One must then calculate the expectation value of $\Lambda(nt_e)$ with respect to the state of the system after the evaporation step at time nt_e, which is defined in the interaction picture by

$$\tilde{\rho}(nt_e) = \tilde{\rho}_F(nt_e^-) \otimes |N_B{:}\mathbf{q}=\mathbf{0}\rangle\langle N_B{:}\mathbf{q}=\mathbf{0}|, \tag{12}$$

$$\tilde{\rho}_F(nt_e^-) \equiv \mathrm{Tr}_B(\tilde{\rho}(nt_e^-)). \tag{13}$$

The fact that, after evaporation, all remaining bosons are in $\mathbf{q}=\mathbf{0}$ was used. Note that the number of bosons has been assumed to remain approximately constant during the evaporation process, in keeping with the assumption of a perfect reservoir. Depletion of the reservoir can only decrease the cooling efficiency.

The mean occupation number of the single-particle state with momentum $\mathbf{k}$ is defined as

$$N_n(\mathbf{k}) = \mathrm{Tr}(\hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{k}}\tilde{\rho}(nt_e)). \tag{14}$$

As shown in Appendix A, the time development of Eq. (11) plus the use of an approximate Wick factorization leads to an approximate rate equation for the occupation numbers which iteratively describes the development of the system in evaporation steps of period t_e:

$$N_{n+1}(\mathbf{k}) = (1-\gamma_{\rm loss}\, t_e)N_n(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{k}'}\mathcal{P}(\mathbf{k}'\to\mathbf{k})N_n(\mathbf{k}')\times[1-N_n(\mathbf{k})] - \sum_{\mathbf{k}'}\mathcal{P}(\mathbf{k}\to\mathbf{k}')[1-N_n(\mathbf{k}')]N_n(\mathbf{k}), \tag{15}$$

where

$$\mathcal{P}(\mathbf{k}\to\mathbf{k}') \equiv \frac{N_{\rm B}}{\hbar^2 L^6}|g(\omega)|^2, \tag{16}$$

$$g(\omega) \equiv \int_0^{t_e} dt\, g(t)\exp(i\omega t) = \frac{e^{(i/2)\omega t_e} g_0 \sin\left(\frac{t_e\omega}{2}\right)}{\omega\left[1-\left(\frac{\omega t_e}{2\pi}\right)^2\right]}, \tag{17}$$

$$\hbar\omega \equiv \frac{\hbar^2 k'^2}{2m_{\rm F}} + \frac{\hbar^2(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2}{2m_{\rm B}} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\rm F}}, \tag{18}$$

and the integer n is the previous number of iterations. In the right-hand side of Eq. (15), the second term represents the sum of probabilities of moving a fermion into state $\mathbf{k}$ while the third term is the sum of probabilities of moving a fermion out of state $\mathbf{k}$. A loss term with a constant rate has also been introduced, under the assumption $\gamma_{\rm loss}t_e \ll 1$. This describes, for example, collisions with background gas particles present in experiments. Equation (15) is the central result of this section and the basis of further study in this paper. Its validity is subject to the necessary condition that the probability of departure from mode $\mathbf{k}$ after an evaporation cycle is

$$\sum_{\mathbf{k}'\neq\mathbf{k}}\mathcal{P}(\mathbf{k}\to\mathbf{k}')[1-N_n(\mathbf{k}')] \ll 1, \tag{19}$$

for all populated levels $\mathbf{k}$. A similar condition must hold for the probability of arrival.

When t is expressed in units of $\gamma_{\rm coll}^{-1}$, the evolution of $N_n(\mathbf{k})$ is ultimately governed by three continuous dimensionless parameters $\gamma_{\rm loss}/\gamma_{\rm coll}$, $t_e E_{\rm F}(0)/\hbar$, and $\hbar\pi t_e/(m_{\rm F}L^2)$, as well as the ratio of masses $\alpha \equiv m_{\rm B}/m{\rm F}$, which is fixed for a particular experiment. As the goal of this work is to study the ultimate limits of sympathetic cooling, the minimum temperature in units of the chemical potential shall be studied as a function of these parameters. Temperature and chemical potential are defined with respect to the total number of fermions and the total energy, as given by the standard sums over $\mathbf{k}$ of $N_n(\mathbf{k})$ and $(\hbar^2k^2/2m_{\rm F})N_n(\mathbf{k})$ [27], respectively, not with respect to the equilibrium nature, or lack thereof, of the number distribution.

One may ask if there are higher-order effects on Eq. (15) which are important. The third order term of Eq. (11) has a vanishing contribution; however, the fourth-order term contains several physical effects. First, it contains a correction to the Born approximation for the scattering of a single fermion with a single boson; this correction is small provided that $k_{\rm F}a \ll 1$. This is equivalent to the weakly interacting regime, since $k_{\rm F} \propto n_{\rm F}^{1/3}$. Second, a boson may interact with a fermion and leave the condensate, undergo a subsequent interaction with a second fermion, and enter a final momentum state $\mathbf{q}''$. There are then two possibilities: if $\mathbf{q}''=\mathbf{0}$, bosonic stimulation occurs, and the contribution is proportional to $[n_{\rm B}|g(\omega)|^2]^2$; in contrast, the sum over all final states $\mathbf{q}''\neq\mathbf{0}$ has a contribution proportional to $n_{\rm F}n_{\rm B}|g(\omega)|^4$. The former, which represents effective interactions between fermions mediated by the bosonic reservoir, has been studied elsewhere [28], and is here neglected. The latter is smaller than the former by a factor of $N_{\rm F}/N_{\rm B} \ll 1$.

IV. STUDY OF THE QUANTUM BOLTZMANN EQUATION

In the following, Eq. (15) is studied with three different approaches. In Sec. IV A the evolution is investigated in a discrete system via numerical integration. In Sec. IV B the thermodynamic limit is taken and a second numerical study is made. Finally, in Sec. IV C the thermodynamic limit is treated approximately and analytically under the assumption of an equilibrium Fermi distribution.

A. Time evolution for a finite system

We first consider the evolution of a discrete, finite system which evolves according to Eq. (15). There are two distinct regimes of t_e. When the half-width $2\pi/t_e$ of the function $g(\omega)$ in Eq. (17) is large compared to the spacing δE between the values of $\hbar\omega$ in Eq. (15), the discrete nature of the spectrum of the system does not play a significant role: this we term the *continuous regime*. A calculation of a typical δE is presented in Appendix B. Using the result of this calculation, the continuous regime may be defined explicitly by

$$\frac{\delta E t_e}{2\pi\hbar} \simeq \frac{8}{3}\left(\frac{E_F t_e}{\hbar N_F}\right)\frac{(\alpha+1)^2}{4\alpha^2} \ll 1, \tag{20}$$

where α is the mass ratio m_B/m_F. If, in addition, $N(\mathbf{k})$ varies slowly with respect to the momentum level spacing, one may furthermore take the thermodynamic limit, as shall be elucidated in Sec. IV B. For $\delta E t_e/2\pi\hbar \gg 1$, $g(\omega)$ is no longer well resolved and the discreteness plays a strong role: this we term the *discrete regime*.

Figure 1 shows a study of Eq. (15) under variation of the two central parameters $\gamma_{\rm loss}/\gamma_{\rm coll}(0)$ and $t_eE_{\rm F}(0)/\hbar$ for the case of a ^{7}Li-^{6}Li mixture, as in Refs. [2,3]. Typical experimental values of $\gamma_{\rm loss}/\gamma_{\rm coll}(0)$ are $8/3\times10^{-2}$ [Fig. 1(a)] to $8/3\times10^{-3}$ [Fig. 1(b)]. The value $\gamma_{\rm loss}/\gamma_{\rm coll}(0)=8/3\times10^{-4}$ [Fig. 1(c)], which could be reached by using a Feshbach resonance [22,23] to augment the scattering length a_s and

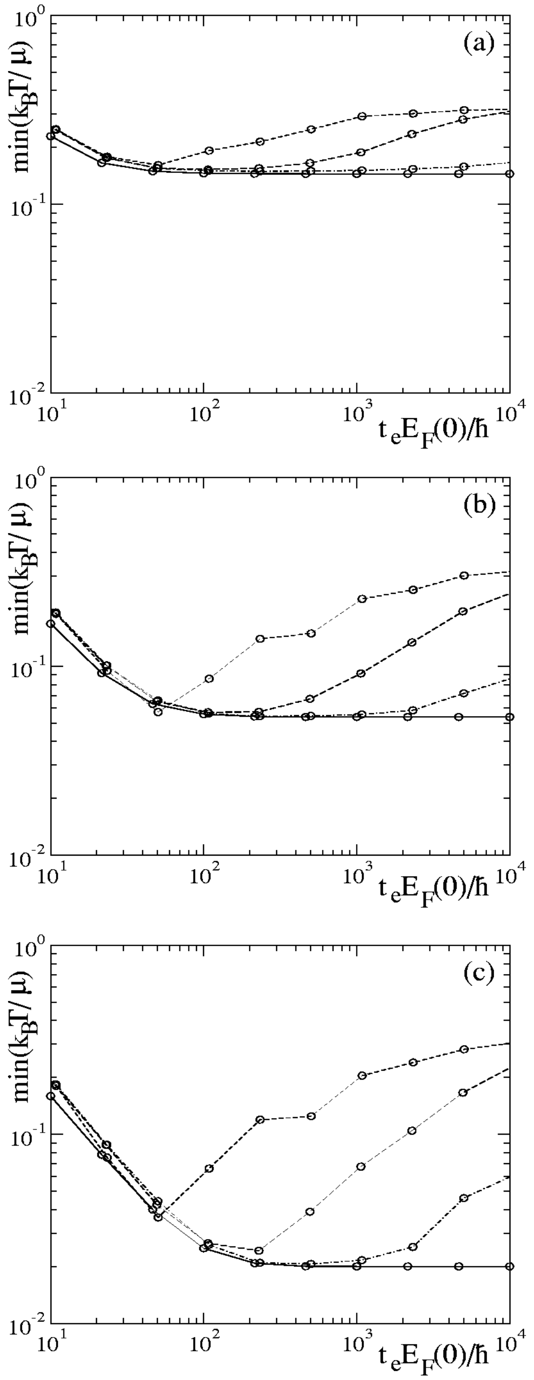

FIG. 1. Shown is the minimum value of $k_B T/\mu$ as a function of the time step $t_e E_F/\hbar$ for a ^{7}Li-^{6}Li mixture and $\hbar\gamma_{\rm coll}/E_F(0) = \frac{3}{8}\times 10^{-5}$. The ratio $\gamma_{\rm loss}/\gamma_{\rm coll}(0)$ is $\frac{8}{3}\times 10^{-2}$, $\frac{8}{3}\times 10^{-3}$, and $\frac{8}{3}\times 10^{-4}$ in panels (a), (b), and (c), respectively. The case of a finite system, Eq. (15), is shown for 10^2 (dashed line), 10^3 (long-dashed line), and 10^4 (dot-dashed line) fermions, and the thermodynamic limit, Eq. (23), is shown as a solid line. For the finite system, to the right side of the plot, in the discrete regime, the cooling is blocked; to the left, in the continuous regime, the minimum temperature is dominated by the evaporation rate, according to Eq. (25), and rises as $t_e E_F/\hbar$ decreases. The data obtained in the thermodynamic limit are independent of t_e except where the evaporation-limited temperature is larger than the loss-limited temperature. Note that the actual data points are represented by open circles [25].

thus the collision rate $\gamma_{\rm coll}\propto a_s^2$, was simulated as well. Simulations of $N_F=10^2$ (dashed curve) and $N_F=10^3$ (long-dashed curve) fermions were performed in a nearly cubic box with incommensurable sides; for computational reasons, a cube was used for $N_F=10^4$ (dot-dashed curve). One clearly observes the continuous regime to the left-hand side of each plot, where the temperature is dominated by the evaporation rate, as explained in Sec. IV B. The optimal temperature is achieved in the vicinity of $t_e E_F/\hbar \sim 10^2$. Towards the right-hand side of each plot, the minimum temperature rises due to the blocking of cooling by the discrete nature of the spectrum; this effect weakens for larger numbers of atoms for a given value of $E_F t_e$ as is apparent in Eq. (20). One may observe the blocking in Eq. (17), where, for values of the energy difference $\hbar\omega \gg \hbar/t_e$, $g(\omega)$ becomes small and the interaction is effectively reduced. Finally, for values of $t_e E_F/\hbar > 10^4$ perturbation theory is no longer applicable, as $\gamma_{\rm coll}\hbar/E_F(0)=\frac{8}{3}\times 10^{-5}$ was chosen, in keeping with typical experimental conditions [24].

Figure 2 shows the effect of t_e on the occupation number distribution in energy space. In the continuous regime the distribution clearly depends on energy alone, so that in the thermodynamic limit $N(\mathbf{k})=N(k)$. The distribution is not, however, an equilibrium one, as is more easily observed in the thermodynamic limit (see below). In contrast, in the discrete regime the distribution is fully $\mathbf{k}$ dependent. Careful observation of the figure shows regular holes in the energy spectrum: this is a natural result of the quantization of the box. We note that, in all regimes investigated, the essential feature of a Fermi surface, though distorted, persists.

B. Time evolution in the thermodynamic limit

In the thermodynamic limit, as defined explicitly in Sec. IV A, the sums in Eq. (15) may be approximated using the standard continuum limit

$$\sum_{\mathbf{k}} \to L^3 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}. \tag{21}$$

As illustrated in Fig. 2, in this limit

$$N(\mathbf{k}) = N(k). \tag{22}$$

The continuum iterative equation for the time evolution may then be written as

$$N_{n+1}(k) = (1-\gamma_{\rm loss}\, t_e)N_n(k) + \frac{n_B}{\hbar^2}\int_0^{+\infty} dk'\, k'^2 \times\left\{ N_n(k)[1-N_n(k')]\int_{-1}^{+1} du |g(\omega)|^2 - (k\leftrightarrow k')\right\}, \tag{23}$$

where $g(\omega)$ and ω are defined as in Eqs. (17) and (18) with

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}' = kk'u. \tag{24}$$

Two effects limiting the choice of t_e are implicit in Eq. (23). The first, which appears when t_e is small, is the width of the interaction function $g(\omega)$: as $k_B T$ approaches the width

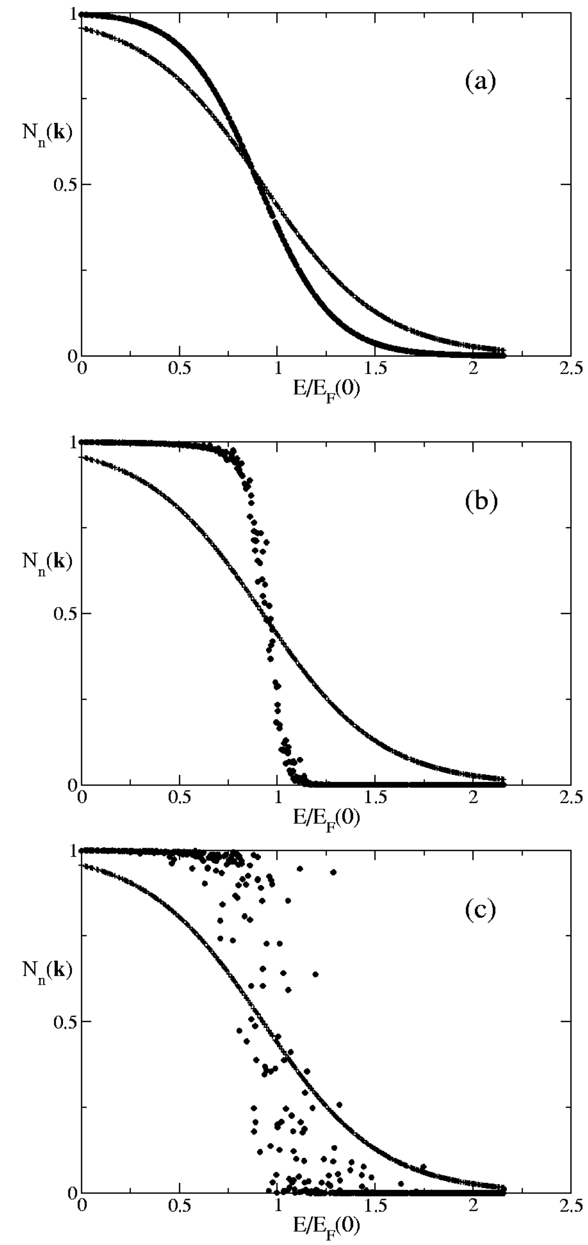

FIG. 2. Shown is the mean occupation number for $N_{\mathrm{F}}=1000$ ^{6}Li atoms in contact with a ^{7}Li reservoir in a finite system. The initial state (plus symbols) is a thermal distribution of $k_{\mathrm{B}}T/\mu=0.324$; $\hbar\gamma_{\mathrm{coll}}/E_{\mathrm{F}}(0)=\frac{3}{8}\times10^{-5}$. After an evolution time (solid circles) such that $k_{\mathrm{B}}T/\mu$ passes through a minimum according to Eq. (15) with the parameters $\gamma_{\mathrm{loss}}/\gamma_{\mathrm{coll}}(0)=\frac{8}{3}\times10^{-3}$ and (a) $t_eE_{\mathrm{F}}/\hbar=10^2$ (continuous regime), (b) $t_eE_{\mathrm{F}}/\hbar=10^3$, and (c) $t_eE_{\mathrm{F}}/\hbar=10^4$ (discrete regime), it is clear that in the continuous regime the distribution, though nonthermal, depends only on $|\mathbf{k}|$. In contrast, in the discrete regime the distribution is fully $\mathbf{k}$ dependent.

$4\pi\hbar/t_e$ in the course of cooling, the sharp decrease in $N_n(k)$ from unity to zero, typical of a Fermi or Fermi-like distribution, is no longer resolved, and the transfer of momentum from fermions to bosons ceases to have any effect on the temperature. This gives an absolute minimum temperature of

$$T_{\mathrm{min}}^{\mathrm{evap}} \sim \frac{\hbar}{t_e}. \tag{25}$$

The superscript "evap" refers to the fact that $1/t_e$ is the evaporation rate. The second effect, which occurs in the limit of large t_e, is the validity of perturbation theory, according to Eq. (4). Since this limitation is imposed by our use of perturbation theory it is not fundamental to sympathetic cooling [26]. Therefore, in practice, within the context of our model, one should choose an evaporation rate such that

$$\frac{T_{\mathrm{F}}}{T} \ll t_eE_{\mathrm{F}}/\hbar \ll \frac{T_{\mathrm{F}}}{T}\frac{E_{\mathrm{F}}}{\gamma_{\mathrm{coll}}\hbar}. \tag{26}$$

We have verified that the results are independent of values of t_e which satisfy Eq. (26), as illustrated by the plateau in Fig. 1.

It is convenient to begin with $N_0(k)$ in the form of a Fermi distribution (though other initial distributions were studied, with the same qualitative results). In the following simulations, $k_{\mathrm{B}}T/\mu=0.7$ was taken as a starting condition. In Fig. 3 is shown the evolution of the occupation number distribution resulting from Eq. (23) with a choice of t_e satisfying Eq. (26) and $\gamma_{\mathrm{loss}}/\gamma_{\mathrm{coll}}(0)=8.27\times10^{-3}$ and 1.25×10^{-2} for the experimentally relevant cases of ^{6}Li-^{7}Li and ^{6}Li-^{23}Na, as shown in panels (a) and (b), respectively. Close inspection of the figure shows that the distribution is nonequilibrium: the thermal tail is missing, and, as can be seen by making a fit to a Fermi distribution (not shown), the rise from $N_n(k)=0.5$ towards unity with decreasing k is less sharp than that of a Fermi distribution with the same total energy and number of fermions. There is also a hole near $k=0$, which is difficult to see in Fig. 3(a) but appears strongly in Fig. 3(b). One may observe the existence of this latter feature directly from Eq. (23) as follows.

The evolution of $N_n(k=0)$ may be approximated by assuming that $N_n(k)$ varies slowly near the origin, which allows one to replace $N_n(k')$ with $N_n(0)$ in Eq. (23). The condition that the value of $N_n(0)$ increases is then

$$\frac{\gamma_{\mathrm{loss}}}{\gamma_{\mathrm{coll}}} \lesssim \frac{4C}{3\pi}[1-N(0)]\left(\frac{\hbar}{\alpha E_F t_e}\right)^{1/2}(1+\alpha^2) \times\left[\frac{1}{|1-\alpha|^{3/2}}-\frac{1}{(1+\alpha)^{3/2}}\right], \tag{27}$$

where $\alpha\equiv m_{\mathrm{B}}/m_{\mathrm{F}}$ and $C\equiv1.860\,266\ldots$. It is therefore directly apparent that for sufficient loss rates the number distribution has a hole at $k=0$. Moreover, since a factor of $[1-N_n(0)]$ enters into the condition, the number distribution *never* reaches unity at $k=0$ and the distribution is never a Fermi distribution. It was observed numerically that this feature extends up to a finite k, the width of which varies dynamically and increases as $m_{\mathrm{B}}/m_{\mathrm{F}}$ takes a value largely different from unity. The deepest point occurs at $k=0$, and the maximum in time of $N_n(0)$ is given by replacing the less than or about equal to sign with an equal sign in Eq. (27). The evolution of the hole for a ^{23}Na-^{6}Li mixture is particu-

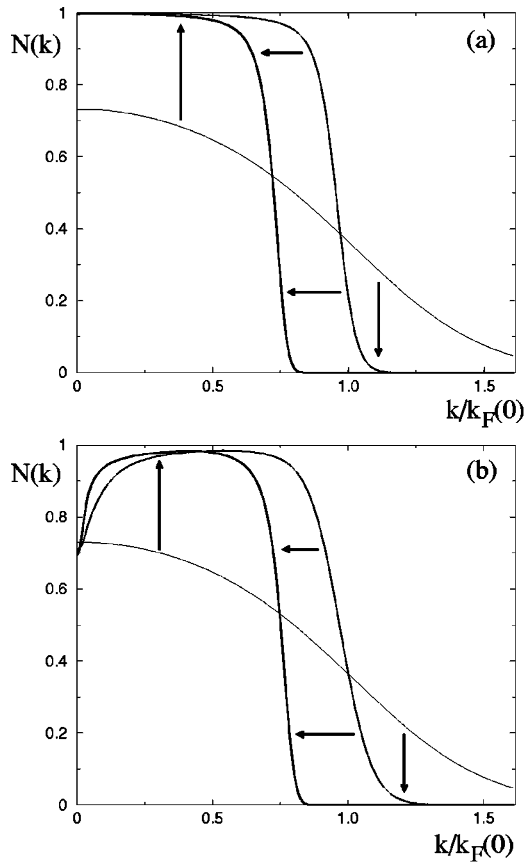

FIG. 3. Time evolution of the number distribution of a Fermi gas sympathetically cooled by a perfect Bose reservoir for two experimentally important cases in the thermodynamic limit: (a) ^{7}Li-^{6}Li and (b) ^{23}Na-^{6}Li. Shown are the initial state of $(k_BT/\mu)(0)=0.7$ (thin line), the state at which the temperature reaches a minimum (thicker line), and a later stage where the gas has heated (thickest line). The hole in the distribution near $k=0$ is particularly evident in panel (b), where the loss processes balance evaporative cooling, as described by Eq. (27). Here $[\gamma_{\rm loss}/\gamma_{\rm coll}(0),(k_BT/\mu)_{\rm min}]=[8.27\times10^{-3},0.081]$, and $[1.25\times10^{-2},0.089]$ for panels (a) and (b), respectively, and $\hbar\gamma_{\rm coll}/E_F(0)=\frac{3}{8}\times10^{-5}$.

larly apparent, since $\alpha\simeq 23/6$ is far from unity, which reduces the value of the right-hand side of Eq. (27) for a fixed value of $N_n(0)$, as illustrated in Fig. 3(b).

The effect of the choice of $\gamma_{\rm loss}/\gamma_{\rm coll}$ on the minimal temperature is shown in Fig. 4. The power laws

$$\left(\frac{k_BT}{\mu}\right)_{\rm min}=0.659\left(\frac{\gamma_{\rm loss}}{\gamma_{\rm coll}}\right)^{0.436}+5.6\times10^{-4}, \qquad (28)$$

$$\left(\frac{k_BT}{\mu}\right)_{\rm min}=0.621\left(\frac{\gamma_{\rm loss}}{\gamma_{\rm coll}}\right)^{0.445}+7.34\times10^{-8} \qquad (29)$$

for ^{7}Na-^{6}Li and ^{23}Na-^{6}Li, respectively, were found over the range $\frac{8}{3}\times10^{-5}\leqslant\gamma_{\rm loss}/\gamma_{\rm coll}\leqslant\frac{8}{3}\times10^{-2}$. Note that the constant offsets in the above are negligible over the fit domain. Although the distributions shown in Fig. 3 are not Fermi distributions, the steplike feature makes a temperature and chemical potential, as defined by the total number of particles and the total energy, a meaningful measure of the shape of $N_n(k)$. Moreover, as $N_F^{\rm tot}$ and $E_F^{\rm tot}$ are weighted by k^2 and k^4, respectively, the hole near $k=0$ has little effect on them.

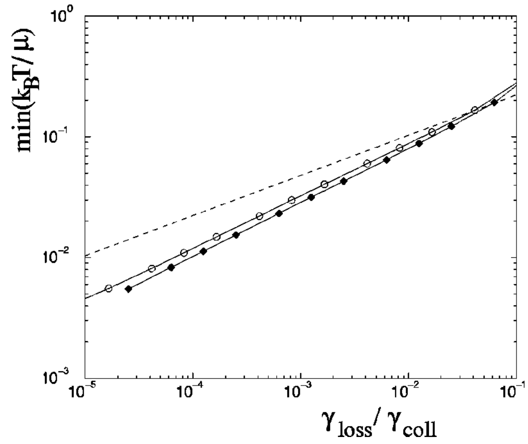

FIG. 4. The numerically determined maximum Fermi degeneracy as a function of loss rate for ^{7}Li-^{6}Li (open circles) and ^{23}Na-^{6}Li (black diamonds) mixtures in the thermodynamic limit, according to the quantum Boltzmann equation. One finds $(k_BT/\mu)_{\rm min}\propto[\gamma_{\rm loss}/\gamma_{\rm coll}(0)]^{0.44}$. The dashed line shows the analytic prediction of $(k_BT/\mu)_{\rm min}\propto[\gamma_{\rm loss}/\gamma_{\rm coll}(0)]^{1/3}$ based on the assumption of a Fermi distribution. The difference is due to the nonthermal nature of the quasistatic mean occupation number distribution, an example of which is illustrated in Fig. 3. Here $\hbar\gamma_{\rm coll}/E_F(0)=\frac{3}{8}\times10^{-5}$.

Finally, Fig. 5 illustrates the time evolution of k_BT/μ for the parameters $\gamma_{\rm loss}/\gamma_{\rm coll}(0)=8.27\times10^{-3}$ and $t_eE_F(0)\hbar=10^3$. The figure is divided into three time regions which show three phases of the evolution: cooling, the achievement of a minimal k_BT/μ, and heating. These three regions were observed in all simulations for which $\gamma_{\rm loss}/\gamma_{\rm coll}\leqslant1$, and were independent of $t_eE_F/\hbar$ within the constraints of Eq. (26).

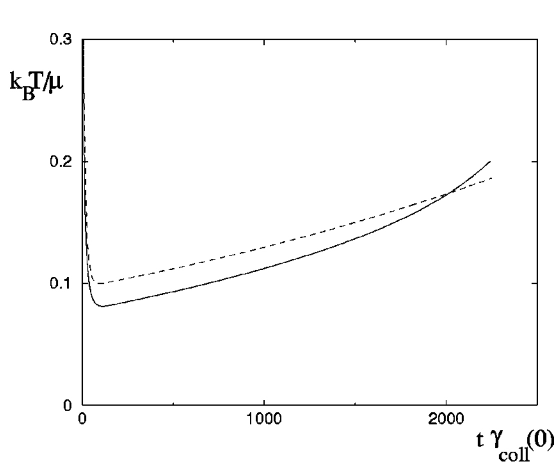

FIG. 5. Time evolution of the degeneracy in the thermodynamic limit as determined by numerical evolution of Eq. (23) (solid line), and the analytical prediction of Eq. (37) (dashed line) based on a Fermi ansatz. The parameters are $\gamma_{\rm loss}/\gamma_{\rm coll}(0)=8.27\times10^{-3}$, $(k_BT/\mu)(0)=0.7$, $t_eE_F(0)\hbar=10^3$, and $\hbar\gamma_{\rm coll}/E_F(0)=\frac{3}{8}\times10^{-5}$.

C. Analytical prediction of the degeneracy for a Fermi distribution ansatz

The following concerns the thermodynamic limit alone. In the limit in which

$$\hbar/t_e \ll k_B T, \tag{30}$$

one may use the approximation

$$|g(\omega)|^2 \sim \frac{3\pi}{4} g_0^2 t_e \delta(\omega), \tag{31}$$

where $\delta(\omega)$ is a Dirac delta distribution. Substituting Eq. (31) into Eq. (23), and defining time continuously according to

$$\dot{N}(k,t) \equiv \frac{N_{n+1} - N_n}{t_e}, \tag{32}$$

the iterative rate equation reduces to a first-order partial integrodifferential equation with an integration over k' alone:

$$\dot{N}(k,t) = -\gamma_{\rm loss} N(k,t) + \frac{3}{8}\frac{n_B g_0^2 m_B}{2\pi\hbar^3} \times \left\{ \int_k^{|(1+\alpha)/(1-\alpha)|k} dk' \frac{k'}{k} N(k',t)[1-N(k,t)] - \int_{|(1-\alpha)/(1+\alpha)|k}^{k} dk' \frac{k'}{k}[1-N(k',t)]N(k,t) \right\}, \tag{33}$$

where $\alpha \equiv m_B/m_F$. Here the functional form of the limits of integration was determined by integration of the δ distribution over the solid angle. Note that in the limit in which $k \to 0, \dot{N}(k) = -\gamma_{\rm loss} N_n(k)$, provided that $m_F \neq m_B$. In the limit as $m_B \to m_F \equiv m$, the limits of integration of Eq. (33) simplify to $[k,\infty]$ and $[0,k]$, respectively. In this case the $1/k$ in the integrand is not regulated and the expression diverges as $k \to 0$, save in the case where $[1-N(k)] \to 0$.

An analytical model of the time evolution of the temperature can be developed based on a Fermi distribution ansatz, namely,

$$N_a(k,t) \equiv \frac{1}{\exp\left\{\left[\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu(t)\right] \Big/ k_B T(t)\right\} + 1}. \tag{34}$$

For simplicity, the case $m \equiv m_F = m_B$ is considered. Two equations for the unknowns $T(t)$ and $\mu(t)$ are obtained by multiplying Eq. (33) by k^0 and k^2 and integrating over $\mathbf{k}$:

$$\frac{d}{dt} N_F^{\rm tot}(t) = -\gamma_{\rm loss} N_F^{\rm tot}, \tag{35}$$

$$\frac{d}{dt} E_F^{\rm tot}(t) = \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \dot{N}(k,t), \tag{36}$$

where $N_F^{\rm tot}$ and $E_F^{\rm tot}$ are the total number of fermions and total energy of the fermions, respectively. In the degenerate regime where $k_B T/\mu \ll 1$, one may obtain an approximate evolution of $k_B T/\mu$ from Eqs. (35) and (36). One neglects terms of order $\exp(-\mu/k_B T)$ in the right-hand side of Eq. (36), and uses the low-temperature expansions of $N_F^{\rm tot}$ and $E_F^{\rm tot}$ [27]. Details are given in Appendix C. One finds

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{k_B T}{\mu}\right)^2 = \frac{8}{5\pi^2}\gamma_{\rm loss} - \frac{12\zeta(3)}{\pi^2}\gamma_{\rm coll}(t)\left(\frac{k_B T}{\mu}\right)^3, \tag{37}$$

which clearly shows the separate contributions of heating due to losses and cooling due to elastic collisions. The fact that the cooling term is proportional to T^3 has a simple physical interpretation. Each collisional process occurs at a rate $\gamma_{\rm coll} k_B T/\mu$ due to Pauli blocking. It involves a fraction $k_B T/\mu$ of the total number of fermions. The energy transferred to a boson per collisional event is of order $k_B T$. Therefore the collisional term in dE/dt is proportional to T^3, from which follows Eq. (37).

In the limit $\gamma_{\rm loss}/\gamma_{\rm coll} \ll 1$, which is in fact the experimental case, one may distinguish three different stages in the evolution of $k_B T/\mu$. In the first stage, cooling dominates and it decreases according to the power law

$$\left(\frac{k_B T}{\mu}\right)(t) \sim \frac{1}{6\zeta(3)\pi^{-2}\gamma_{\rm coll}(0)t + (\mu/k_B T)(0)}. \tag{38}$$

Note that, in the case where $\gamma_{\rm loss}=0$, Eq. (38) holds indefinitely. In the second stage, after a time $t_{\rm min}$, $k_B T/\mu$ arrives at a minimum, given by

$$\left(\frac{k_B T}{\mu}\right)_{\rm min} = \left[\frac{2}{15\zeta(3)}\frac{\gamma_{\rm loss}}{\gamma_{\rm coll}(0)}\right]^{1/3}, \tag{39}$$

$$t_{\rm min} \simeq [\gamma_{\rm coll}(0)]^{-2/3}\gamma_{\rm loss}^{-1/3}. \tag{40}$$

Note that $\gamma_{\rm loss} t_{\rm min} \ll 1$, so that a very small fraction of the atoms has been lost when $k_B T/\mu$ achieves its minimum. In the third stage, heating manifests as an adiabatic increase in $k_B T/\mu$, obtained by neglecting $d(k_B T/\mu)^2/dt$ in Eq. (33) and thereby replacing $\gamma_{\rm coll}(0)$ by $\gamma_{\rm coll}(t) = \gamma_{\rm coll}(0)\exp(-\gamma_{\rm loss}t/3)$ in Eq. (39). The evolution of $k_B T/\mu$ continues to increase adiabatically up till a characteristic time given by

$$t_{\rm nonadiabatic} \sim \frac{3}{\gamma_{\rm loss}}\ln\left(\frac{\gamma_{\rm coll}}{\gamma_{\rm loss}}\right). \tag{41}$$

Note that, at this evolution time, $k_B T/\mu$ is on the order of unity, and the above analytical treatment ceases to be applicable.

The number ΔN_B of bosons lost from the reservoir during the first and second stages of cooling, i.e., up till the time at which the minimum $k_B T/\mu$ is achieved, may be estimated simply from Eq. (38). One integrates the rate of production of excited bosons $\propto N_F(0)(k_B T/\mu)^2\gamma_{\rm coll}(0)$ over time, and finds the approximate relation

$$\Delta N_B \propto N_F(0)\left(\frac{k_B T}{\mu}\right)(0). \tag{42}$$

This corresponds to the initial number of fermions active in the cooling process.

In Fig. 4 is shown the minimum temperature as a function of loss rate. The difference between the analytical prediction of Eq. (39) (dashed line) and the numerical results of Eq. (23) (solid line) highlights the nonequilibrium nature of the actual mean occupation number distribution. However, the qualitative features are the same for both the analytical model and the numerical simulation. Figure 5 shows the evolution for the parameters $\gamma_{\mathrm{loss}}/\gamma_{\mathrm{coll}}(0)=8.27\times 10^{-3}$ and $(k_{\mathrm{B}}T/\mu)(0)=0.7$. The three stages of cooling, achievement of a minimum temperature, and heating are clearly observable. As $\gamma_{\mathrm{loss}}/\gamma_{\mathrm{coll}}(0)\ll 1$, the time scale of the first stage is small compared to the third stage.

V. BEYOND THE BOLTZMANN APPROXIMATION: THE MASTER EQUATION

The quantum Boltzmann equation is a closed equation obtained after use of Wick's theorem to replace the mean value of occupation numbers with the product of their mean values. Such an approximation applies when the probability distribution of the density operator is nearly Gaussian [18,19], and neglects correlations between modes. In the following, the *exact* probability distribution of the occupation number shall be treated by deriving a master equation for the fermion density operator in the limit of weak coupling. Specifically, g_0 must be small enough so that the probability to have more than one boson excited out of the condensate during t_e is negligible. In the Fock basis, the density operator is characterized both by "populations" and "coherences," that is, by the diagonal and off-diagonal matrix elements, respectively. Subsequently, the *secular approximation* will be used to derive an equation for the evolution of the distribution probability of the occupation numbers. This approximation applies in the regime in which the evolution rate of the populations is much smaller than the Bohr frequency of the coherences [20], which allows one to derive closed equations for the populations.

A. Derivation of the quantum Boltzmann master equation

Just after a measurement of state of the bosons, but before excited bosons have been removed from the system via evaporation, the fermion density operator may be written as

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_{\mathrm{F}}[(n+1)t_e] &= \langle N_{\mathrm{B}}{:}\mathbf{0}|\tilde{\rho}[(n+1)t_e]|N_{\mathrm{B}}{:}\mathbf{0}\rangle \\ &\quad + \sum_{\mathbf{q}\neq\mathbf{0}} \langle N_{\mathrm{B}}-1{:}\mathbf{0};1{:}\mathbf{q}|\tilde{\rho}[(n+1)t_e] \\ &\quad \times |N_{\mathrm{B}}-1{:}\mathbf{0};1{:}\mathbf{q}\rangle, \end{aligned} \tag{43}$$

where a sum over bosonic Fock states has been taken. By choosing g_0 sufficiently small one may indeed neglect the possibility of exciting more than one boson out of the condensate. The first term in Eq. (43) represents zero excited bosons, and the second term a single excited boson of momentum $\hbar\mathbf{q}$. The combined bosonic and fermionic density operator $\tilde{\rho}[(n+1)t_e]$ is given by the action on Eq. (12) of the evolution operator $\tilde{U}(nt_e)$ from time nt_e to time $(n+1)t_e$:

$$\tilde{\rho}[(n+1)t_e] = \tilde{U}(nt_e)[\tilde{\rho}_{\mathrm{F}}(nt_e^-)\otimes|N_{\mathrm{B}}{:}\mathbf{q}=\mathbf{0}\rangle\langle N_{\mathrm{B}}{:}\mathbf{q}=\mathbf{0}|]\tilde{U}^{\dagger}(nt_e). \tag{44}$$

One then expands the evolution operator $\tilde{U}(nt_e)$ to second order in the interaction potential V using standard time-dependent perturbation theory, which results in the second-order expansion of Eq. (44), and thus Eq. (43).

One obtains the following operators which act on the fermions alone:

$$C_{\mathbf{q}}(nt_e) \equiv \int_{nt_e}^{(n+1)t_e} \frac{dt'}{i\hbar}\langle N_{\mathrm{B}}-1{:}\mathbf{0},1{:}\mathbf{q}|\tilde{V}(t')|N_{\mathrm{B}}{:}\mathbf{0}\rangle, \tag{45}$$

$$A(nt_e) \equiv \int_{nt_e}^{(n+1)t_e} \frac{dt'}{i\hbar}\int_{nt_e}^{t'} \frac{dt''}{i\hbar}\langle N_{\mathrm{B}}{:}\mathbf{0}|\tilde{V}(t')\tilde{V}(t'')|N_{\mathrm{B}}{:}\mathbf{0}\rangle. \tag{46}$$

$C_{\mathbf{q}}$ may be written explicitly as

$$C_{\mathbf{q}}(nt_e) = \frac{\sqrt{N_{\mathrm{B}}}}{i\hbar}\sum_{\mathbf{k}} g(\omega)e^{i\omega nt_e}c^{\dagger}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}c_{\mathbf{k}}, \tag{47}$$

$$\omega \equiv \frac{\hbar(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}{2m_{\mathrm{F}}} + \frac{\hbar q^2}{2m_{\mathrm{B}}} - \frac{\hbar k^2}{2m_{\mathrm{F}}}. \tag{48}$$

The explicit form of A is more complicated, but may be derived by substituting Eq. (2) into Eq. (46). $C_{\mathbf{q}}$ originates from the second term of Eq. (43) in which one boson is excited. It originates from a first-order perturbative expansion of $\tilde{U}$, but appears in two factors of Eq. (44) and therefore gives a contribution of order g_0^2 in the evolution of the density operator. A originates from the first term in Eq. (43) with the evolution operator expanded to second order in g_0. It contains, in particular, an effective interaction between fermions mediated by the bosons. This results in the master equation for the fermionic density operator,

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_{\mathrm{F}}[(n+1)t_e] &= \tilde{\rho}_{\mathrm{F}}(nt_e) + A(nt_e)\tilde{\rho}_{\mathrm{F}}(nt_e) + \tilde{\rho}_{\mathrm{F}}(nt_e)A^{\dagger}(nt_e) \\ &\quad + \sum_{\mathbf{q}\neq\mathbf{0}} C_{\mathbf{q}}(nt_e)\tilde{\rho}_{\mathrm{F}}(nt_e)C^{\dagger}_{\mathbf{q}}(nt_e). \end{aligned} \tag{49}$$

We now proceed to apply the secular approximation [20]. To illustrate the details, the contribution of $C_{\mathbf{q}}$ is described explicitly. Evaluating the last term in Eq. (49),

$$\begin{aligned}[C_{\mathbf{q}}\tilde{\rho}_{\mathrm{F}}C^{\dagger}_{\mathbf{q}}](nt_e) &= \frac{N_{\mathrm{B}}}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} e^{i(\omega_1-\omega_2)nt_e}g(\omega_1)g^{*}(\omega_2)c^{\dagger}_{\mathbf{k}_1-\mathbf{q}} \\ &\quad \times c_{\mathbf{k}_1}\tilde{\rho}_{\mathrm{F}}(nt_e)c^{\dagger}_{\mathbf{k}_2}c_{\mathbf{k}_2-\mathbf{q}}, \end{aligned} \tag{50}$$

where $\omega_{1,2}$ is defined as in Eq. (48), with $\mathbf{k}$ replaced by $\mathbf{k}_{1,2}$. The typical evolution rate γ_{evolve} of the fermionic density operator is proportional to g_0^2. In contrast, the Bohr frequencies $\omega_1-\omega_2$ do not depend on g_0. Therefore the oscillating exponential in Eq. (50) may be neglected for sufficiently small g_0, as its effects average to zero when averaged during $1/\gamma_{\mathrm{evolve}}$. An estimate for γ_{evolve} may be made based on the assumption of a thermal distribution in the thermodynamic limit, as defined by Eq. (20):

$$\gamma_{\mathrm{evolve}} = \frac{\delta N_{\mathrm{B}}}{t_e} \simeq \gamma_{\mathrm{coll}} N_{\mathrm{F}} \left(\frac{T}{T_{\mathrm{F}}}\right)^2, \tag{51}$$

where $\delta N_{\mathrm{B}} \ll 1$ is the mean number of excited bosons during one cycle of duration t_e. The minimal Bohr frequencies are given by

$$\min(|\omega_1 - \omega_2|) \simeq \frac{1}{\hbar \rho(E_{\mathrm{F}})} = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \frac{\hbar}{4\pi m k_{\mathrm{F}}}, \tag{52}$$

where $\rho(E_{\mathrm{F}})$ is the density of states at the Fermi surface. Therefore the condition for validity of the secular approximation is

$$\frac{\hbar \gamma_{\mathrm{coll}}}{E_{\mathrm{F}}} N_{\mathrm{F}}^2 \left(\frac{T}{T_{\mathrm{F}}}\right)^2 \ll 1, \tag{53}$$

for which, in Eq. (50), one keeps only the terms with $\omega_1 = \omega_2$. Assuming the box lengths squared to be incommensurable, one finds

$$q_\alpha = 0 \quad \text{or} \quad k_{1\alpha} = k_{2\alpha}, \tag{54}$$

for each $\alpha \in \{x,y,z\}$. We neglect the former case, which corresponds to the excitation of a boson in the plane orthogonal to α. The existence of this solution is a consequence of the separability of the degrees of motion along x,y,z in the box. One could consider an alternate model for the box in which this separability is lifted to justify its being neglected [15]. There therefore remains the sole condition $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$.

Having applied the secular approximation, if $\tilde{\rho}_{\mathrm{F}}$ is initially a statistical mixture of Fock states, then it remains one for all times. Defining the occupation number probability distribution $Q_n(\{n_{\mathbf{k}}\})$ by

$$\tilde{\rho}_{\mathrm{F}}(nt_e) = \sum_{\{n_{\mathbf{k}}\}} Q_n(\{n_{\mathbf{k}}\}) |\{n_{\mathbf{k}}\}\rangle\langle\{n_{\mathbf{k}}\}|, \tag{55}$$

where

$$|\{n_{\mathbf{k}}\}\rangle \equiv \prod_{\mathbf{k}} (\hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger)^{n_{\mathbf{k}}} |\mathrm{vac}\rangle, \tag{56}$$

and each $n_{\mathbf{k}} \in \{0,1\}$, one obtains the equation of motion for Q:

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(\{n_{\mathbf{k}}\}) - Q_n(\{n_{\mathbf{k}}\}) &= \sum_{\mathbf{k}_1 \neq \mathbf{k}_2} \frac{N_{\mathrm{B}} |g(\omega)|^2}{\hbar^2 L^6} \{ - n_{\mathbf{k}_1}(1 - n_{\mathbf{k}_2}) Q_n(\{n_{\mathbf{k}}\}) \\ &\quad + n_{\mathbf{k}_2}(1 - n_{\mathbf{k}_1}) Q_n(\{n_{\mathbf{k}} + \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} - \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}_2}\})\} \\ &\quad - \left(\sum_{\mathbf{k}_0} \gamma_{\mathrm{loss}} t_e n_{\mathbf{k}_0}\right) Q(\{n_{\mathbf{k}}\}) \\ &\quad + \left[\sum_{\mathbf{k}_0} \gamma_{\mathrm{loss}} t_e (1 - n_{\mathbf{k}_0})\right] Q(\{n_{\mathbf{k}} + \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}_0}\}), \end{aligned} \tag{57}$$

with

$$\hbar\omega \equiv \frac{\hbar^2 k_2^2}{2m_{\mathrm{F}}} + \frac{\hbar^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2}{2m_{\mathrm{B}}} - \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m_{\mathrm{F}}}. \tag{58}$$

Here the loss term has been added in by hand under the assumption that $\gamma_{\mathrm{loss}} t_e N_{\mathrm{F}} \ll 1$. The condition that the number of bosons excited during t_e be much smaller than unity may be written as

$$\sum_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} \mathcal{P}(\mathbf{k}_1 \to \mathbf{k}_2) n_{\mathbf{k}_1}(1 - n_{\mathbf{k}_2}) \ll 1, \tag{59}$$

for typical configurations $\{n_{\mathbf{k}}\}$, where $\mathcal{P}$ is defined as in Eq. (16). This is to be contrasted with the much weaker condition of Eq. (19) obtained in the quantum Boltzmann equation, where the sum is over only one momentum.

B. Monte Carlo numerical study

The continuous time version of Eq. (57), where $Q_{n+1} - Q_n \equiv t_e \dot{Q}$, was studied numerically via Monte Carlo simulation. All data for $N_{\mathrm{F}}(0) = 10^2$ and $N_{\mathrm{F}}(0) = 10^3$ in Fig. 1 were reevaluated, with a mean over 100 realizations of Q made for each data point. The qualitative features of the evolution of the mean number distribution were found to remain the same: its nonequilibrium nature, as illustrated for the finite system in Fig. 2 and for the thermodynamic limit in Fig. 3; and the three evolution stages of rapid cooling, achievement of a minimum, and slow heating with a quasistatic distribution, as illustrated for the thermodynamic limit in Fig. 5. Two examples of a single Monte Carlo realization are illustrated in Fig. 6. The minimum temperature for these simulations is achieved at $\gamma_{\mathrm{coll}}(0) t \sim 20$. Before this time the evolution of the energy is dominated by cooling, rather than losses: in Fig. 6(a) this is directly apparent, as the loss of individual fermions is marked by arrows; in Fig. 6(b), where the loss rate was higher, the slope is seen to be different from that which results from the mere evolution of the total number of fermions, the latter of which is determined according to $N_{\mathrm{F}}^{\mathrm{tot}} = N_{\mathrm{F}}^{\mathrm{tot}}(0) \exp(-\gamma_{\mathrm{loss}} t)$. After this time loss dominates, as is apparent in both panels: the greater part of the changes in the energy occur at the same time as loss of a fermion.

However, quantitatively the agreement between the results of the quantum Boltzmann equation and the quantum Boltzmann master equation depends both on the number of atoms and on the evaporation rate. For 100 atoms, the minimum temperature predicted by the master equation, as shown in Fig. 7, is as much as 50% higher as for the same parameters as in Fig. 1. This deviation is strongest for small loss rates, where the cooling efficiency is limited by the blocking mechanism due to the discrete nature of the spectrum, as discussed in Sec. IV A. For 1000 atoms, the agreement is very good for the loss rates of Figs. 1(a) and 1(b) while for Fig. 1(c) there is a 15% increase in the temperature. The power laws

$$\left(\frac{k_{\mathrm{B}} T}{\mu}\right)_{\min} = 0.861 \left(\frac{\gamma_{\mathrm{loss}}}{\gamma_{\mathrm{coll}}}\right)^{0.503} + 1.44 \times 10^{-2}, \tag{60}$$

$$\left(\frac{k_{\mathrm{B}} T}{\mu}\right)_{\min} = 0.855 \left(\frac{\gamma_{\mathrm{loss}}}{\gamma_{\mathrm{coll}}}\right)^{0.518} + 0.993 \times 10^{-2} \tag{61}$$

for ^{7}Li-^{6}Li and ^{23}Na-^{6}Li, respectively, were found over the full range of data shown in Fig. 7 for $N=1000$. Comparing to Eqs. (28) and (29), which were obtained in the thermodynamic limit with the quantum Boltzmann equation, one

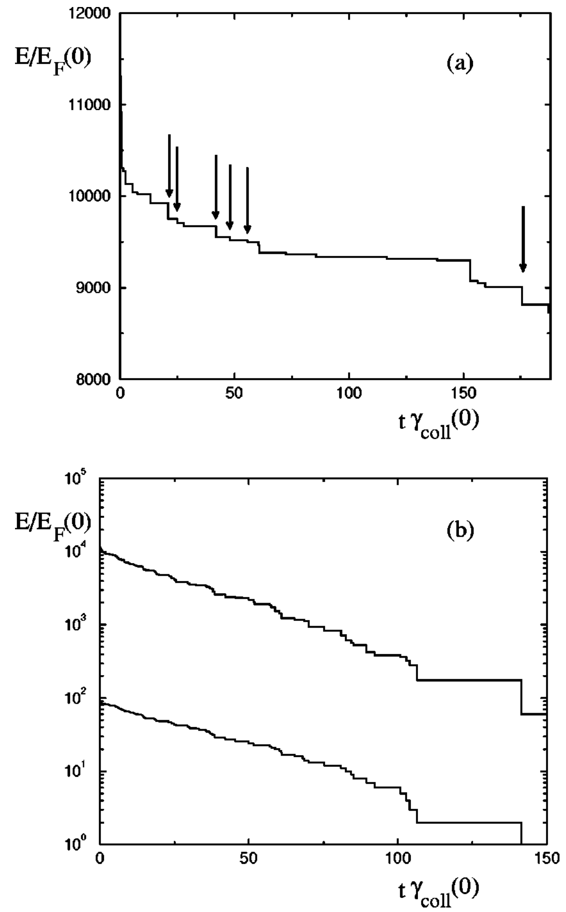

FIG. 6. Evolution of the total energy of the fermions for a finite system for one Monte Carlo realization of the *exact* occupation number distribution under the secular approximation (see text) according to Eq. (57). (a) $\gamma_{\mathrm{loss}}/\gamma_{\mathrm{coll}}(0)=8/3\times10^{-4}$: the loss events (in this case 6) are marked by arrows. Clearly cooling dominates the decrease in the energy at early times while loss plays a stronger role at later times. (b) $\gamma_{\mathrm{loss}}/\gamma_{\mathrm{coll}}(0)=8/3\times10^{-2}$: the upper curve shows the evolution of the energy and the lower curve shows the evolution of the number of atoms. At early times, the slope of the energy is compounded of the effect of cooling and a trivial decrease of the Fermi energy $\propto\exp(-2\gamma_{\mathrm{loss}}t/3)$ due to atom loss. In both (a) and (b), $(k_BT/\mu)(0)=0.324$, $N_F(0)=100$, and $t_eE_F/\hbar=10^3$.

observes that the exponents of the power law are similar, whereas the constant offset is substantially different. We recall that the data of Fig. 7 resulted from an optimization over t_e, which suggests that even in the absence of loss there is an absolute minimal temperature of $k_BT/\mu\sim10^{-2}$. This was validated for 1000 atoms by Monte Carlo simulations with a zero loss rate, as indicated by arrows drawn along the left-hand y axis of the figure: for ^{7}Li-^{6}Li, $\min(k_BT/\mu)=1.34\times10^{-2}$; for ^{23}Na-^{6}Li, $\min(k_BT/\mu)=0.98\times10^{-2}$.

Therefore, by taking the actual probability distribution for the occupation numbers into account, i.e., by not assuming near-thermal equilibrium according to Wick's theorem, it is found that the minimum temperature *increases* when loss does not dominate the cooling. This again highlights the nonthermal nature of this system. In contrast, when N_F is large and the loss rate is in the experimental range of

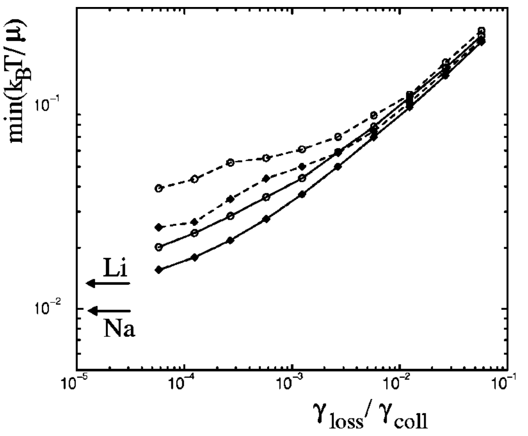

FIG. 7. The numerically determined maximum Fermi degeneracy as a function of loss rate for $N=100$ (dashed line) and $N=1000$ (solid line) ^{6}Li fermions in contact with ^{7}Li (open circles) or ^{23}Na (black diamonds), according to the quantum *master* Boltzmann equation. The value of $t_eE_F/\hbar$ which gives the minimal temperature has been chosen. Arrows indicate the long term cooling limits for $\gamma_{\mathrm{loss}}=0$ for ^{7}Li-^{6}Li and ^{23}Na-^{6}Li mixtures, respectively. The minimal temperature is much higher in comparison to that predicted by the quantum Boltzmann equation in the thermodynamic limit, as was shown in Fig. 4 (note scale change).

$10^{-2}-10^{-3}$ γ_{coll}, the secular approximation shows that Wick's theorem is a valid assumption and one may simply use the quantum Boltzmann equation.

VI. CONCLUSION

We have investigated the effect of heating caused by loss of atoms on the minimum temperature that may be achieved in a sympathetically cooled Fermi gas. The model of sympathetic cooling that we have used is cyclical and consists of a sequence of time intervals during which fermions are coupled to a zero-temperature ideal Bose gas via binary atomic interactions. At the end of each time interval the excited bosons are removed from the system by evaporation. The length of the time interval is short enough that the bosons do not come into thermal equilibrium with the fermions; this is in contrast to present experiments in which the bosons and fermions are always in equilibrium with one another. The cooling is balanced by a constant loss rate of fermions, which, for example, can be caused by collisions with background gas in the experimental apparatus, and can lead to heating, as shown in Ref. [10]. The combination of cooling and heating is modeled at several levels of theoretical approximation.

First, a quantum Boltzmann equation describing the evolution of the mean occupation number distribution was developed under the assumption that the fermion density operator is nearly Gaussian, i.e., that Wick's theorem may be applied. The overall minimum temperature, which was found to be best obtained in the thermodynamic limit, was observed to follow the power law $(k_BT/\mu)_{\min}\sim0.65(\gamma_{\mathrm{loss}}/\gamma_{\mathrm{coll}})^{0.44}$, so that $(k_BT/\mu)_{\min}\lesssim0.03$ for $\gamma_{\mathrm{loss}}/\gamma_{\mathrm{coll}}\leqslant10^{-3}$, where $\mu\sim k_BT_F$ is the chemical potential of the fermions, γ_{coll} is the bare fermion-boson collision rate not including the reduction due to Fermi statistics, and γ_{loss} is the constant fermion loss rate. This value of $\gamma_{\text{loss}}/\gamma_{\text{coll}}$ is easily achievable in present experiments, in particular by using a Feshbach resonance [23]. The number distribution was observed to have a distorted Fermi surface and a hole near $\mathbf{k}=\mathbf{0}$.

A second theoretical perspective was developed based on the secular approximation to a master equation, without the use of Wick's theorem. Monte Carlo simulations of the resulting quantum Boltzmann *master* equation showed that in the limit of experimentally reasonable values of $\gamma_{\text{loss}}/\gamma_{\text{coll}}$ and the number of fermions N_{F}, the first theoretical approach is indeed valid. However, for values of $\gamma_{\text{loss}}/\gamma_{\text{coll}}$ tending towards zero, the master equation shows a substantially higher temperature. In the most extreme case studied of 100 atoms and $\gamma_{\text{loss}}/\gamma_{\text{coll}}=3\times10^{-4}$, this increase is 50%.

A possible extension to this work is to add a harmonic trap and/or to include interactions between bosons. The assumption of a perfect Bose reservoir is reasonable when the speed of sound is much smaller than the Fermi velocity [29], as is the case for weakly interacting condensates. Although a harmonic trap may change the predicted minimal temperature, the qualitative results of this study are expected to be correct even for a nonuniform system such as is found in present experiments on Fermi-Bose mixtures.

ACKNOWLEDGMENTS

We would like to thank Jean Dalibard for proposing this project, Christophe Salomon for useful discussions, and Murray Holland for a very useful remark. This work was supported by NSF Grant No. MPS-DRF 0104447. Laboratoire Kastler Brossel is a research unit of l'École normale supérieure and of l'Université Pierre et Marie Curie, associated with CNRS. We acknowledge financial support from Région Ile de France.

APPENDIX A: EVOLUTION OF THE OCCUPATION NUMBERS

In the following, we will calculate an approximation to the variation of the expectation value of the number operator

$$\zeta_0=\hat{c}^\dagger_{\mathbf{k_0}}\hat{c}_{\mathbf{k_0}} \tag{A1}$$

from time nt_e to time $(n+1)t_e$, that is, during the time interval of duration t_e between two successive measurements of the state of the bosons.

One begins with the approximate evolution of the number operator obtained using second-order perturbation theory for Λ, Eq. (11). One takes the expectation of Eq. (11) with respect to the density operator Eq. (12). All the bosons at time nt_e are in the state with zero momentum. In order to take the expectation value first with respect to the bosons, it is convenient to rewrite the interaction potential V as

$$\tilde{V}(t)=\sum_{\mathbf{q}\neq\mathbf{q}'} W_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}(t)\hat{b}^\dagger_{\mathbf{q}'}\hat{b}_{\mathbf{q}}, \tag{A2}$$

where the W's are purely fermionic operators:

$$W_{\mathbf{q}'\mathbf{q}}(t)=\frac{g_0(t)}{L^3}\sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{k}'} e^{i\Omega_{\mathbf{k}'\mathbf{q}',\mathbf{k}\mathbf{q}}t}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}'}\hat{c}_{\mathbf{k}}\delta_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\mathbf{k}'+\mathbf{q}'}, \tag{A3}$$

with

$$\Omega_{\mathbf{k}'\mathbf{q}',\mathbf{k}\mathbf{q}}\equiv\frac{\hbar k'^2}{2m_{\text{F}}}+\frac{\hbar q'^2}{2m_{\text{B}}}-\frac{\hbar k^2}{2m_{\text{F}}}-\frac{\hbar q^2}{2m_{\text{B}}}. \tag{A4}$$

Expanding the commutators in Eq. (12) and using the fact that $\tilde{V}$ does not contain terms with $\mathbf{q}=\mathbf{q}'$, one obtains the following matrix elements and their expressions:

$$\langle N_{\text{B}}:\mathbf{0}|\tilde{V}(t)|N_{\text{B}}:\mathbf{0}\rangle=0, \tag{A5}$$

$$\langle N_{\text{B}}:\mathbf{0}|\tilde{V}(t)\cdots\tilde{V}(t')|N_{\text{B}}:\mathbf{0}\rangle=N_{\text{B}}\sum_{\mathbf{q}'\neq\mathbf{0}} W_{\mathbf{0},\mathbf{q}'}(t)\cdots W_{\mathbf{q}',\mathbf{0}}(t'), \tag{A6}$$

where $(\cdots)$ may contain an operator acting on the fermions alone. These results may be interpreted physically as follows. The action of $\tilde{V}$ on a pure Bose-Einstein condensate creates a state with $N_{\text{B}}-1$ ground-state bosons and a single excited boson with a nonvanishing momentum $\mathbf{q}'$, since the terms with $\mathbf{q}=\mathbf{q}'$ have been excluded from the expression of $\tilde{V}$, as apparent in Eq. (2). The resulting excited state of the bosons is orthogonal to the initial state, so that the term of Eq. (11) linear in V has a vanishing expectation value. A second action of $\tilde{V}$ gives a nonzero contribution to the expectation value only if the excited boson is scattered back into the condensate.

There are also terms where the factors involving the interaction potential appear in reverse chronological order, such as $\tilde{V}(t')\tilde{V}(t)$. These terms are Hermitian conjugates of the terms in chronological order so that the final result reads

$$\begin{aligned}\langle\zeta_0\rangle[(n+1)t_e]-\langle\zeta_0\rangle(nt_e)\\ =-\frac{N_{\text{B}}}{\hbar^2}\sum_{\mathbf{q}'\neq\mathbf{0}}\int_{nt_e}^{(n+1)t_e}dt'\\ \times\int_{t'}^{(n+1)t_e}dt\,\langle[\zeta_0,W_{\mathbf{0},\mathbf{q}'}(t)]W_{\mathbf{q}',\mathbf{0}}(t')\rangle+\text{c.c.},\end{aligned} \tag{A7}$$

where the expectation value in the right-hand side is taken with respect to the fermion density operator $\tilde{\rho}_{\text{F}}(nt_e)$.

Finally, one evaluates the commutator in Eq. (A7). The identity

$$[\hat{c}^\dagger_{\mathbf{k_0}}\hat{c}_{\mathbf{k_0}},\hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}'}\hat{c}_{\mathbf{k}}]=\delta_{\mathbf{k_0},\mathbf{k}'}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{k_0}}\hat{c}_{\mathbf{k}}-\delta_{\mathbf{k_0},\mathbf{k}}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}'}\hat{c}_{\mathbf{k_0}}, \tag{A8}$$

which is a direct consequence of the fermionic anticommutation relations, is used. Observing that the conservation of momentum imposes $\mathbf{k}'=\mathbf{k}+\mathbf{q}'$ in the expression for $W_{\mathbf{0},\mathbf{q}'}$, one obtains

$$[\zeta_0, W_{\mathbf{0},\mathbf{q}'}(t)] = \frac{g_0(t)}{L^3}(\hat{c}^\dagger_{\mathbf{k_0}}\hat{c}_{\mathbf{k_0}-\mathbf{q}'}e^{i\Omega_{\mathbf{k_0}\mathbf{0},\mathbf{k_0}-\mathbf{q}'\mathbf{q}'}t} - \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k_0}+\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{k_0}}e^{i\Omega_{\mathbf{k_0}+\mathbf{q}'\mathbf{0},\mathbf{k_0}\mathbf{q}'}t}). \quad (A9)$$

Multiplying this expression by $W_{\mathbf{q}',\mathbf{0}}$ gives fourth degree equation in the fermionic creation/annihilation operators: to obtain a closed equation for the occupation numbers one performs a crucial factorization approximation based on the Wick contraction rule. This constitutes the weak point of the present approach, which was explored by a more systematic treatment in Sec. V. As the system is spatially homogeneous, the mean value of the product of a creation operator and an annihilation operator of different momentum states vanishes. One is left with

$$\langle\hat{c}^\dagger_{\mathbf{k_0}}\hat{c}_{\mathbf{k_0}-\mathbf{q}'}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{k}}\rangle \simeq \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k_0}}N_n(\mathbf{k_0})[1-N_n(\mathbf{k_0}-\mathbf{q}')] \quad (A10)$$

$$\langle\hat{c}^\dagger_{\mathbf{k_0}+\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{k_0}}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}\hat{c}_{\mathbf{k}}\rangle \simeq \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k_0}+\mathbf{q}'}[1-N_n(\mathbf{k_0})]N_n(\mathbf{k_0}+\mathbf{q}'), \quad (A11)$$

where the occupation numbers $N_n(\mathbf{k})$ are defined by Eq. (14) and the fact that $\mathbf{q}'\neq\mathbf{0}$ has been used. Observing that

$$\int_{nt_e}^{(n+1)t_e} dt' \int_{t'}^{(n+1)t_e} dt\; g_0(t)g_0(t')e^{i\omega(t'-t)} + \text{c.c.} = |g(\omega)|^2, \quad (A12)$$

where $g(\omega)$ is defined in Eq. (17), one obtains the desired identity (15).

APPENDIX B: LEVEL SPACING IN THE QUANTUM BOLTZMANN EQUATION

Consider a given single-particle level of wave vector $\mathbf{k}$ in the box. In the quantum Boltzmann equation (15), this level is coupled to all the other levels $\mathbf{k}'$. We wish to estimate the mean distance between the values of the corresponding energy mismatches $\hbar\omega$ given by Eq. (18). One may then define the density of these values of $\hbar\omega$ by

$$\sigma(E) \equiv \sum_{\mathbf{k}'} \delta(\hbar\omega - E). \quad (B1)$$

Since $|g(\omega)|^2$ is centered in $\omega=0$, one can restrict the density of the $\hbar\omega$'s to $E=0$. Furthermore, we approximate the discrete sum in $\sigma(0)$ by an integral:

$$\sigma(0) \simeq \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int d^3\mathbf{k}'\; \delta(\hbar\omega). \quad (B2)$$

This integral can be calculated exactly by using spherical coordinates and integrating first on the polar angle, then on the modulus k':

$$\sigma(0) = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \frac{m_B k}{2\hbar^2}\left[1-\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)^2\right], \quad (B3)$$

where $\alpha=m_B/m_F$. Taking the typical value $k\simeq k_F$, using the relation $N_F=(L/2\pi)^3 4\pi k_F^3/3$, and setting $\delta E=1/\sigma(0)$, one obtains Eq. (20).

APPENDIX C: EVOLUTION OF THE TEMPERATURE

In the following, Eq. (37), which describes the time evolution of $k_B T/\mu$ under the assumptions

$$\hbar/t_e \ll k_B T, \quad (C1)$$

$$m \equiv m_F = m_B, \quad (C2)$$

$$(k_B T/\mu)^2 \ll 1, \quad (C3)$$

$$N(k,t) \equiv N_a(k,t), \quad (C4)$$

is derived from Eqs. (35) and (36). These four assumptions correspond to the use of Fermi's Golden rule, equal masses of fermions and bosons, high degeneracy, and an equilibrium Fermi distribution, respectively. Substituting Eq. (33) into the right-hand side of Eq. (36),

$$\dot{E}_F^{\text{tot}}(t) = -\gamma_{\text{loss}}E_F^{\text{tot}} + \Upsilon\int_0^\infty \frac{dx}{2} \times\left\{x[1-\tilde{N}_a(x,t)]\int_x^\infty \frac{dy}{2}\tilde{N}_a(y,t) - x\tilde{N}_a(x,t) \times\int_0^x \frac{dy}{2}[1-\tilde{N}_a(y,t)]\right\}, \quad (C5)$$

where

$$\Upsilon \equiv \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\left(\frac{3}{8}\frac{n_B g_0^2 m_B}{2\pi\hbar^3}\right)\left(\frac{2mk_B T}{\hbar^2}\right)^3 4\pi, \quad (C6)$$

the integration variables $x\equiv(\hbar^2k^2)/(2mk_BT)$, $y\equiv(\hbar^2k'^2)/(2mk_BT)$, and $\tilde{N}_a(x,t)\equiv N_a(k,t)$, $\tilde{N}_a(y,t)\equiv N_a(k',t)$. The last term in Eq. (C5),

$$I_2 \equiv -\frac{\Upsilon}{4}\int_0^\infty dx\, xN_a(x,t)\int_0^x dy[1-N_a(y,t)], \quad (C7)$$

may be integrated by parts:

$$I_2 = -\frac{\Upsilon}{4}\int_0^\infty dx[1-N_a(x,t)]\int_x^\infty dy\, yN_a(y,t). \quad (C8)$$

This reduces the integral in Eq. (C5) to

$$I \equiv \frac{\Upsilon}{4}\int_0^\infty dx\int_x^\infty dy[1-N_a(x,t)]N_a(y,t)(x-y). \quad (C9)$$

Making the substitutions $\chi\equiv x-\mu/(k_BT)$, $\psi\equiv y-\mu/(k_BT)$ and replacing N_a according to Eq. (34), one obtains

$$I = \frac{\Upsilon}{4}\int_{-\mu/k_BT}^\infty d\chi\int_\chi^\infty d\psi\frac{\chi-\psi}{(e^\psi+1)(e^{-\chi}+1)}. \quad (C10)$$

The key to resolving Eq. (C10) is to take $-\mu/(k_BT)\to-\infty$ in the lower limit of the first integral. Note that this is consistent with assumption (C3). In this case,

$$-\frac{1}{2}\frac{4}{\Upsilon}I = \zeta(3) = 1.202\,06\ldots, \qquad (C11)$$

where ζ is the Riemann zeta function [30].

What is the error involved in this approximation? Defining the neglected portion of Eq. (C10) as

$$J = \int_{-\infty}^{-(\mu/k_B T)} d\chi \int_{\chi}^{\infty} d\psi \frac{\chi - \psi}{(e^{\psi}+1)(e^{-\chi}+1)}, \qquad (C12)$$

it is apparent that the second integral is evaluated over $\psi \in [\chi \leqslant -\mu/(k_B T) \leqslant -1, \infty]$. The leading contribution of this integral therefore gives

$$\int_{\chi}^{\infty} d\psi \frac{\chi - \psi}{(e^{\psi}+1)} \sim -\frac{1}{2}\chi^2. \qquad (C13)$$

Substituting Eq. (C13) into Eq. (C12), the error is

$$J \sim -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mu}{k_B T}\right)^2 + 2\frac{\mu}{k_B T} + 2\right] e^{-(\mu/k_B T)}. \qquad (C14)$$

Therefore

$$\dot{E}_F^{\mathrm{tot}}(t) = -\gamma_{\mathrm{loss}} E_F^{\mathrm{tot}} - \tfrac{1}{2}\Upsilon\zeta(3) + O((\mu/k_B T)^2 e^{-(\mu/k_B T)}). \qquad (C15)$$

The high degeneracy expansions

$$N_F^{\mathrm{tot}} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 4\pi \frac{1}{2}\left(\frac{2m\mu}{\hbar^2}\right)^{3/2}\frac{2}{3} \times\left\{1 + \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{k_B T}{\mu}\right)^2 + O\left(\left(\frac{k_B T}{\mu}\right)^4\right)\right\}, \qquad (C16)$$

$$E_F^{\mathrm{tot}} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \frac{\hbar^2}{2m} 4\pi \frac{1}{2}\left(\frac{2m\mu}{\hbar^2}\right)^{5/2}\frac{2}{5} \times\left\{1 + \frac{5\pi^2}{8}\left(\frac{k_B T}{\mu}\right)^2 + O\left(\left(\frac{k_B T}{\mu}\right)^4\right)\right\} \qquad (C17)$$

may be easily developed from the treatment of Ref. [27]. Substituting Eq. (C16) into Eq. (35) and Eq. (C17) into Eq. (C15), one may solve Eq. (35) for $\mu(t)$ and substitute the resulting expression into Eq. (36) to obtain the final result, $(k_B T/\mu)(t)$, as shown in Eq. (37).

[1] B. Demarco and D. S. Jin, Science **285**, 1703 (1999).
[2] A. G. Truscott, K. E. Strecker, W. I. McAlexander, G. Partridge, and R. G. Hulet, Science **291**, 2570 (2001).
[3] F. Schreck, L. Khaykovich, K. L. Corwin, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, and C. Salomon, Phys. Rev. Lett. **87**, 080403 (2001).
[4] S. R. Granade, M. E. Gehm, K. M. O'Hara, and J. E. Thomas, Phys. Rev. Lett. **88**, 120405 (2002).
[5] G. Roati, F. Riboli, G. Modugno, and M. Inguscio, Phys. Rev. Lett. **89**, 150403 (2002).
[6] K. M. O'Hara, S. L. Hemmer, M. E. Gehm, S. R. Granade, and J. E. Thomas, Science **298**, 2179 (2002).
[7] Z. Hadzibabic, C. A. Stan, K. Dieckmann, S. Gupta, M. W. Zwierlein, A. Görlitz, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **88**, 160401 (2002).
[8] Z. Hadzibabic, S. Gupta, C. A. Stan, C. H. Schunck, M. W. Zwierlein, K. Dieckmann, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **91**, 160401 (2003).
[9] W. Ketterle, D. S. Durfee, and D. M. Stamper-Kurn, in *Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates*, Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course, CXL edited by M. Inguscio, S. Stringari, and C. Wieman (IOS Press, Amsterdam, 1999), pp. 67–176.
[10] E. Timmermans, Phys. Rev. Lett. **87**, 240403 (2001).
[11] M. J. Holland, B. DeMarco, and D. S. Jin, Phys. Rev. A **61**, 053610 (2000).
[12] M. Wouters, J. Tempere, and J. T. Devreese, Phys. Rev. A **66**, 043414 (2002).
[13] R. Onofrio and C. Presilla, Phys. Rev. Lett. **89**, 100401 (2002).
[14] C. Presilla and R. Onofrio, Phys. Rev. Lett. **90**, 030404 (2003).
[15] L. Santos and M. Lewenstein, Phys. Rev. A **60**, 3851 (1999).
[16] Z. Idziaszek, L. Santos, and M. Lewenstein, Phys. Rev. A **64**, 051402 (2001).
[17] Z. Idziaszek, L. Santos, M. Baranov, and M. Lewenstein, Phys. Rev. A **67**, 041403 (2003).
[18] C. W. Gardiner and P. Zoller, Phys. Rev. A **55**, 2902 (1997).
[19] D. Jaksch, C. W. Gardiner, and P. Zoller, Phys. Rev. A **56**, 575 (1997).
[20] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg, *Atom-Photon Interactions: Basic Processes and Applications* (Wiley, New York, 1998).
[21] J. I. Cirac, M. Lewenstein, and P. Zoller, Europhys. Lett. **35**, 647 (1996).
[22] J. M. Vogels, C. C. Tsai, R. S. Freeland, S. J. J. M. F. Kokkelmans, B. J. Verhaar, and D. J. Heinzen, Phys. Rev. A **56**, R1067 (1997).
[23] A. Simoni, F. Ferlaino, G. Roati, G. Modugno, and M. Inguscio, Phys. Rev. Lett. **90**, 163202 (2003).
[24] For instance, in the ^{7}Li-^{6}Li experiment of Schreck *et al.* [3], $E_F/\hbar \sim 5.5\ \mathrm{s}^{-1}$; $T_F \sim 4.2\ \mu$K; and thus $\hbar\gamma_{\mathrm{coll}}/E_F \sim 1.275 \times 10^{-6}$.
[25] Note that the simulation was performed in a box of length ratios $L_x{:}L_y{:}L_z = 1.103\,45{:}1.0{:}0.9205$, excepting the case of 10^4 atoms, for which the box was cubic.
[26] For the purposes of computational study, a finite upper limit k_{max} to the integration over k' must be chosen for Eq. (23). In order for the simulation to correctly reproduce the thermodynamic limit, it is necessary that at least several grid points lie within the width of $g(\omega)$. Given a choice of t_e according to Eq. (26), the momentum grid must then be chosen according to $\delta k/k_{\mathrm{max}} \leqslant \pi\hbar/(t_e E_F)$, where $k_{\mathrm{max}}/\delta k$ is the number of grid points. Additionally, the initial conditions $k_F(0)/k_{\mathrm{max}}$ and $(k_B T/\mu)(0)$ must be chosen such that truncation effects are avoided: i.e., the cut in the tail of the distribution due to k_{max}

must not affect the final results. $k_{\max}=2k_F(0)$ was found to be sufficient.

[27] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics, Part I* (Reed Educational and Professional Publishing Ltd., Boston, MA, 1980), Vol. 5.

[28] A. P. Albus, S. A. Gardiner, F. Illuminati, and M. Wilkens, Phys. Rev. A **65**, 053607 (2002).

[29] E. Timmermans and R. Côté, Phys. Rev. Lett. **80**, 3419 (1998).

[30] *Handbook of Mathematical Functions*, edited by M. Abramowitz and I. A. Stegun (National Bureau of Standards, Washington, D.C., 1964).

Quasipure Bose-Einstein Condensate Immersed in a Fermi Sea

F. Schreck, L. Khaykovich, K. L. Corwin, G. Ferrari,* T. Bourdel, J. Cubizolles, and C. Salomon
Laboratoire Kastler Brossel, Ecole Normale Supérieure, 24 rue Lhomond, 75231 Paris CEDEX 05, France
(Received 13 July 2001; published 7 August 2001)

We report the observation of coexisting Bose-Einstein condensate (BEC) and Fermi gas in a magnetic trap. With a very small fraction of thermal atoms, the ^{7}Li condensate is quasipure and in thermal contact with a ^{6}Li Fermi gas. The lowest common temperature is $0.28\ \mu K \simeq 0.2(1)T_C = 0.2(1)T_F$ where T_C is the BEC critical temperature and T_F the Fermi temperature. The ^{7}Li condensate has a one-dimensional character.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.080403 PACS numbers: 05.30.Fk, 03.75.–b, 05.30.Jp, 32.80.Pj

Bose-Einstein condensation (BEC) of atomic gases has been very actively studied in recent years [1,2]. The dilute character of the samples and the ability to control the atom-atom interactions allowed a detailed comparison with the theories of quantum gases. Atomic Fermi gases, on the other hand, have only been investigated experimentally for two years [3–5]. They are predicted to possess intriguing properties and may offer an interesting link with the behavior of electrons in metals and semiconductors, and the possibility of Cooper pairing [6] such as in superconductors and neutron stars. Mixtures of bosonic and fermionic quantum systems, with the prominent example of ^{4}He-^{3}He fluids, have also stimulated intense theoretical and experimental activity [7]. This has led to new physical effects including phase separation, influence of the superfluidity of the Bose system on the Fermi degeneracy, and to new applications such as the dilution refrigerator [7–9].

In this paper, we present a new mixture of bosonic and fermionic systems, a stable Bose-condensed gas of ^{7}Li atoms in the internal state $|F = 1, m_F = -1\rangle$ immersed in a Fermi sea of ^{6}Li atoms in $|F = 1/2, m_F = -1/2\rangle$ (Fig. 1). Confined in the same magnetic trap, both atomic species are in thermal equilibrium with a temperature of $0.2(1)T_F \ll T_C$. All previous experiments performed with ^{7}Li in $|F = 2, m_F = 2\rangle$ had condensate numbers limited to $N \leq 1400$ because of the negative scattering length, $a = -1.4$ nm, in this state [10,11]. Our condensate is produced in a state which has a positive, but small, scattering length, $a = +0.27$ nm [12]. The number of condensed atoms is typically 10^4, and BEC appears unambiguously both in the position distribution in the trap and in the standard time of flight images.

Because of the symmetrization postulate, colliding fermions have no s-wave scattering at low energy. In the low temperature domain of interest, the p-wave contribution vanishes. Our method for producing simultaneous quantum degeneracy for both isotopes of lithium is sympathetic cooling [4,5]; s-wave collisions between two different atomic isotopes are allowed and rf evaporation selectively removes from the trap high energy atoms of one species. Elastic collisions subsequently restore thermal equilibrium of the two-component gas at a lower temperature.

Our experimental setup has been described in detail in [4,13]. A mixture of ^{6}Li and ^{7}Li atoms is loaded from a magneto-optical trap into a strongly confining Ioffe-Pritchard trap at a temperature of about 2 mK. As depicted in Fig. 1, this relatively high temperature precludes direct magnetic trapping of the atoms in their lower hyperfine state because of the shallow magnetic trap depth, 2.4 mK for ^{7}Li in $|F = 1, m_F = -1\rangle$ and 0.2 mK for ^{6}Li in $|F = 1/2, m_F = -1/2\rangle$. Therefore we proceed in two steps. Both isotopes are first trapped and cooled in their upper hyperfine states. The ^{7}Li $|F = 2, m_F = 2\rangle$ and ^{6}Li $|F = 3/2, m_F = 3/2\rangle$ states have no energy maximum as a function of the magnetic field (Fig. 1). Thus the trap depth can be large. Evaporation is performed selectively on ^{7}Li using a microwave field near 803 MHz that couples $|F = 2, m_F = 2\rangle$ to $|F = 1, m_F = 1\rangle$. When both gases are cooled to a common temperature of about 9 μK, atoms are transferred using a combination of microwave and rf pulses into states $|F = 1, m_F = -1\rangle$ and $|F = 1/2, m_F = -1/2\rangle$ with an energy far below their respective trap depths. Evaporative cooling is then resumed until ^{7}Li reaches the BEC threshold.

In the first series of experiments, both Li isotopes are trapped in their higher hf states. ^{6}Li is sympathetically cooled to Fermi degeneracy by performing 30 s of

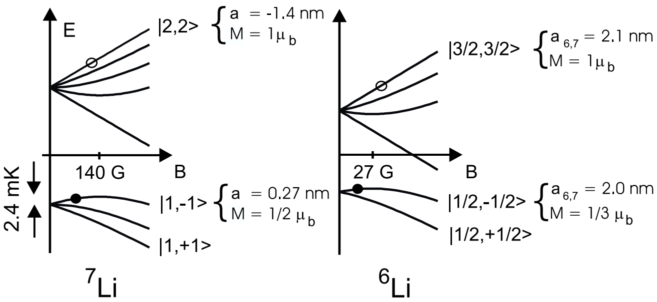

FIG. 1. Energy levels of ^{7}Li and ^{6}Li ground states in a magnetic field. Relevant scattering lengths, a, and magnetic moments, M, are given. μ_b is the Bohr magneton. The $|1, -1\rangle$ state (respectively, $|1/2, -1/2\rangle$) is trapped only in fields weaker than 140 G (respectively, 27 G). Open circles: first cooling stage; black circles: second cooling stage.

evaporative cooling on ^{7}Li [4]. Trap frequencies for ^{7}Li are $\omega_{\rm rad} = 2\pi \times 4000(10)$ s^{-1} and $\omega_{\rm ax} = 2\pi \times 75.0(1)$ s^{-1} with a bias field of 2 G. Absorption images of both isotopes are recorded on a single CCD camera with a resolution of 10 μm. Images are taken quasisimultaneously (only 1 ms apart) in the trap or after a time of flight expansion. Probe beams have an intensity below saturation and a common duration of 30 μs. Typical *in situ* absorption images in the quantum regime can be seen in Fig. 2. Here the temperature T is 1.4(1) μK and $T/T_{\rm F} = 0.33(5)$, where the Fermi temperature $T_{\rm F}$ is $(\hbar\bar{\omega}/k_{\rm B})(6N_{\rm F})^{1/3}$, with $\bar{\omega}$ the geometric mean of the three oscillation frequencies in the trap and $N_{\rm F}$ the number of fermions. For images recorded in the magnetic trap, the common temperature is measured from the spatial extent of the bosonic cloud in the axial direction since the shape of the Fermi cloud is much less sensitive to temperature changes when $T/T_{\rm F} < 1$ [14]. The spatial distributions of bosons and fermions are recorded after a 1 s thermalization stage at the end of the evaporation. As the measured thermalization time constant between the two gases, 0.15 s, is much shorter than 1 s, the two clouds are in thermal equilibrium [15]. Both isotopes experience the same trapping potential. Thus the striking difference between the sizes of the Fermi and Bose gases [5] is a direct consequence of Fermi pressure. The measured axial profiles in Fig. 2 are in excellent agreement with the calculated ones (solid lines) for a Bose distribution at the critical temperature $T_{\rm C}$. In our steepest traps, Fermi temperatures as high as 11 μK with a degeneracy of $T/T_{\rm F} = 0.36$ are obtained. This $T_{\rm F}$ is a factor of 3 larger than the single photon recoil temperature at 671 nm, opening interesting possibilities for light scattering experiments [16].

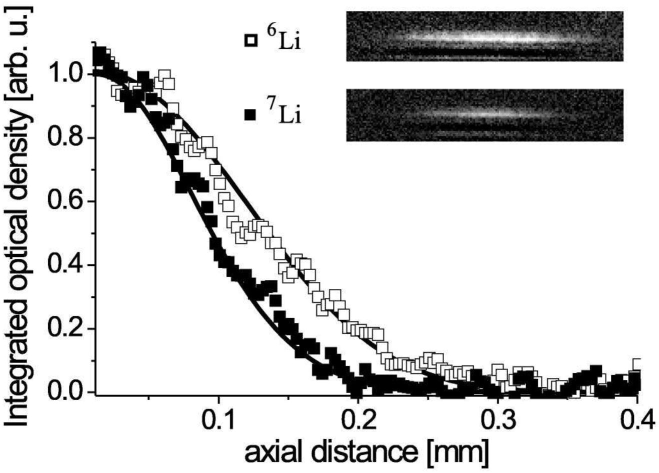

FIG. 2. Observation of Fermi pressure. Absorption images in the trap and spatial distributions integrated over the vertical direction of 8.1×10^4 ^{6}Li and 2.7×10^4 ^{7}Li atoms in their higher hyperfine states. The temperature is 1.4(1) μK $= 1.1(2)T_{\rm C}$ for the bosons and $0.33(5)T_{\rm F}$ for the fermions. Solid lines are the expected Bose and Fermi distributions.

Our highest Fermi degeneracy in ^{6}Li $|F = 3/2, m_F = 3/2\rangle$, achieved by cooling with ^{7}Li $|F = 2, m_F = 2\rangle$, is $T/T_{\rm F} = 0.25(5)$ with $T_{\rm F} = 4$ μK, very similar to Ref. [5]. We observe that the boson temperature cannot be lowered below $T_{\rm C}$. Indeed, because of the negative scattering length in ^{7}Li $|F = 2, m_F = 2\rangle$, for our trap parameters, collapse of the condensate occurs when its number reaches $\sim$300 [10]. Since sympathetic cooling stops when the heat capacity of the bosons becomes lower than that of the fermions, this limits the Fermi degeneracy to about 0.3 [5].

In order to explore the behavior of a Fermi sea in the presence of a BEC with a temperature well below $T_{\rm C}$, we perform another series of experiments with both isotopes trapped in their lower hf state where the positive ^{7}Li scattering length (Fig. 1) allows the formation of a stable BEC with high atom numbers. To avoid large dipolar relaxation, ^{6}Li must also be in its lower hf state [17]. First, sympathetic cooling down to $\sim$9 μK is performed on the ^{7}Li $|F = 2, m_F = 2\rangle$, ^{6}Li $|F = 3/2, m_F = 3/2\rangle$ mixture as before. Then, to facilitate state transfer, the trap is adiabatically opened to frequencies $\omega_{\rm rad} = 2\pi \times 100$ s^{-1} and $\omega_{\rm ax} = 2\pi \times 5$ s^{-1} (for ^{7}Li, $F = 2$).

The transfer of each isotope uses two radio frequency π pulses. The first pulse at 803 MHz for ^{7}Li (228 MHz for ^{6}Li) transfers the bosons from $|2,2\rangle$ to $|1,1\rangle$ (the fermions from $|3/2,3/2\rangle$ to $|1/2,1/2\rangle$). These states are magnetically untrapped states (see Fig. 1). The second π pulse at 1 MHz for ^{7}Li (1.3 MHz for ^{6}Li) transfers the bosons to $|1,-1\rangle$, a magnetically trapped state (the fermions to $|1/2,-1/2\rangle$). Adiabatic opening of the trap cools the cloud. It decreases the energy broadening of the resonance and gives more time for the passage through untrapped states. The durations of the π pulses are 17 and 13 μs and more than 70% of each isotope is transferred. Finally the trap is adiabatically recompressed to the steepest confinement giving $\omega_{\rm rad} = 2\pi \times 4970(10)$ s^{-1} and $\omega_{\rm ax} = 2\pi \times 83(1)$ s^{-1} for ^{7}Li $|F = 1, m_F = -1\rangle$, compensating for the reduced magnetic moment.

Because of the very large reduction of the ^{7}Li s-wave scattering cross section from the $F = 2$ to the $F = 1$ state (a factor $\sim$27 [17]), we were unable to reach runaway evaporation with ^{7}Li atoms alone in $F = 1$. In contrast, the ^{6}Li/^{7}Li cross section is $\sim$27 times higher than the ^{7}Li/^{7}Li one [12,17]. We therefore use ^{6}Li atoms as a mediating gas to increase the thermalization rate of both gases. Two different methods were used to perform the evaporation. The first consists of using two rf ramps on the hf transitions of ^{6}Li (from $|1/2,-1/2\rangle$ to $|3/2,-3/2\rangle$) and ^{7}Li (from $|1,-1\rangle$ to $|2,-2\rangle$), which we balanced to maintain roughly equal numbers of both isotopes. After 10 s of evaporative cooling, Bose-Einstein condensation of ^{7}Li occurs together with a ^{6}Li degenerate Fermi gas (Fig. 3). Surprisingly, a single 25 s ramp performed only on ^{6}Li achieved the same results. In this case the equal number condition was fulfilled because of the reduced lifetime of the ^{7}Li cloud that we attribute to dipolar collisional loss [17]. The duration of the rf evaporation was matched to

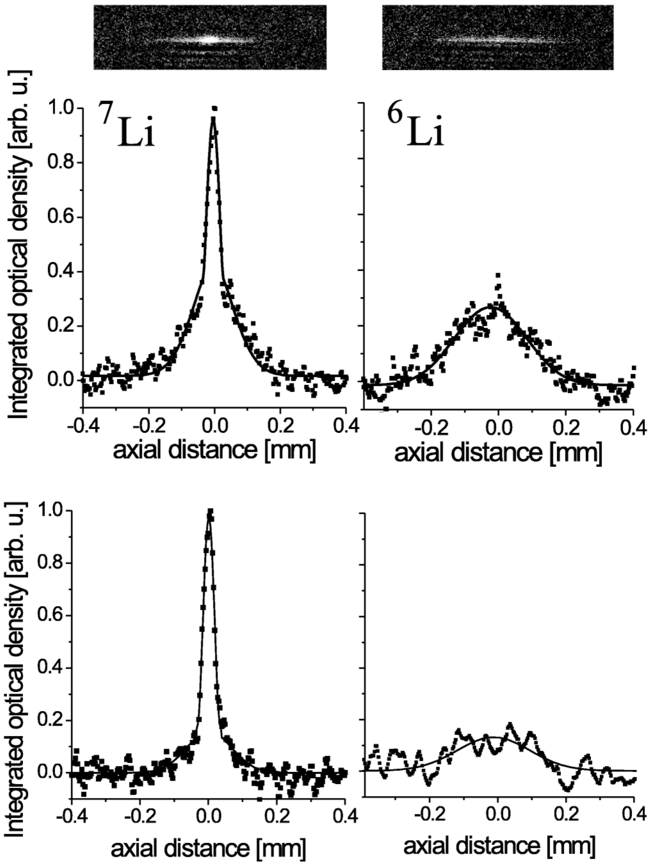

FIG. 3. Mixture of Bose and Fermi gases. Top: *In situ* spatial distributions after sympathetic cooling with $N_B = 3.5 \times 10^4$ and $N_F = 2.5 \times 10^4$. The Bose condensed peak (8.5×10^3 atoms) is surrounded by the thermal cloud which allows the determination of the common temperature: $T = 1.6\ \mu K = 0.87 T_C = 0.57 T_F$. The Fermi distribution is wider because of the smaller magnetic moment and Fermi pressure. Bottom: profiles with a *quasipure* condensate, with $N_B = 10^4$, $N_F = 4 \times 10^3$. The barely detectable thermal cloud indicates a temperature of $\simeq 0.28\ \mu K \simeq 0.2(1) T_C = 0.2(1) T_F$.

this loss rate. In the following we concentrate on this second, and simpler, evaporation scheme, sympathetic cooling of ^{7}Li by evaporative cooling of ^{6}Li.

In Fig. 3 *in situ* absorption images of bosons and fermions at the end of the evaporation are shown. The bosonic distribution shows the typical double structure: a strong and narrow peak forms the condensate at the center, surrounded by a much broader distribution, the thermal cloud. As the Fermi distribution is very insensitive to temperature, this thermal cloud is a very useful tool for the determination of the common temperature. Note that, as cooling was performed only on ^{6}Li atoms, the temperature measured on ^{7}Li cannot be lower than the temperature of the fermions. Measuring N_B, N_F, the condensate fraction N_0/N_B, and $\bar{\omega}$, we determine the quantum degeneracy of the Bose and Fermi gases. In Fig. 3 (top), the temperature is just below T_C, $T = 1.6\ \mu K = 0.87 T_C = 0.57 T_F$. In Fig. 3 (bottom) on the contrary, the condensate is quasipure; $N_0/N_B = 0.77$; the thermal fraction is near our detectivity limit, indicating a temperature of $\simeq 0.28\ \mu K \leq 0.2 T_C = 0.2(1) T_F$ with $N_B = 10^4$ bosons and 4×10^3 fermions. The condensate fraction N_0/N_B as a function of T/T_C is shown in Fig. 4(a), while the size of the fermi gas as a function of T/T_F is shown in Fig. 4(b). With the strong anisotropy ($\omega_{rad}/\omega_{ax} = 59$) of our trap, the theory including anisotropy and finite number effects differs significantly from the thermodynamic limit [2], in agreement with our measurements even though there is a 20% systematic uncertainty on our determination of T_C and T_F. We have also obtained samples colder than those presented in Fig. 4, for which the ^{7}Li thermal fraction is below our detectivity floor, indicating $T < 0.2 T_C \simeq 0.2 T_F$. Clearly a more sensitive thermal probe is required now to investigate this temperature domain. An elegant method relies on the measurement of thermalization rates with impurity atoms including Pauli blocking [18,19].

Because of the small scattering length, this ^{7}Li condensate has interesting properties. Time of flight images, performed after expansion times of 0–10 ms with $N_0 = 10^4$ condensed atoms, reveal that the condensate is one dimensional (1D). In contrast to condensates in the Thomas-Fermi (TF) regime, where the release of interaction energy

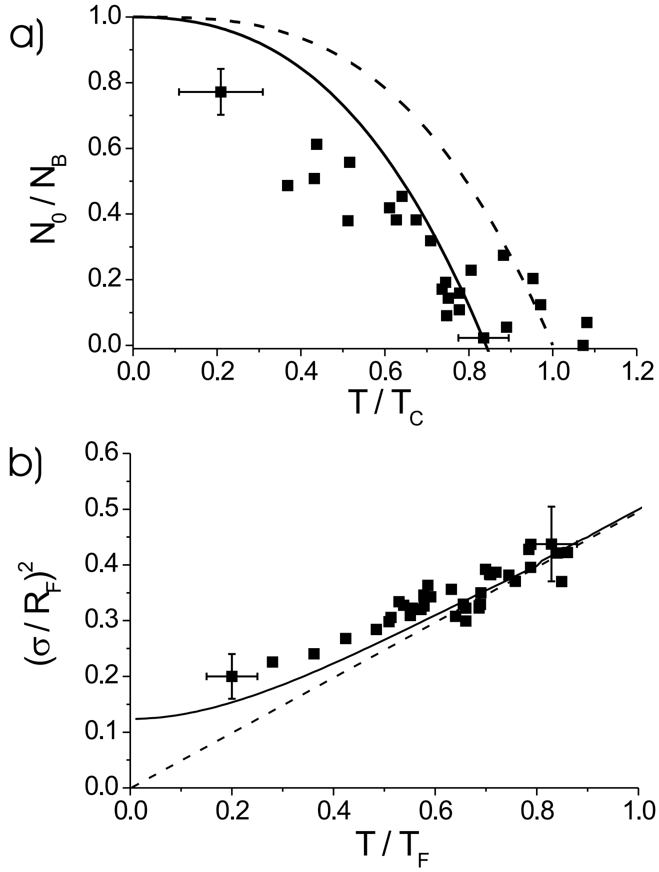

FIG. 4. Temperature dependence of mixtures of quantum gases: (a) normalized BEC fraction as a function of T/T_C. Dashed line: theory in the thermodynamic limit. Solid line: theory including finite size and trap anisotropy [2]; (b) fermion cloud size: variance of Gaussian fit divided by the square of Fermi radius $R_F^2 = 2 k_B T_F / M \omega_{ax}^2$ as a function of T/T_F. Solid line: theory. Dashed line: Boltzmann gas.

leads to a fast increase in radial size, our measurements agree to better than 5% with the time development of the radial ground state wave function in the harmonic magnetic trap (Fig. 5). This behavior is expected when the chemical potential μ satisfies $\mu < \hbar\omega_{\rm rad}$ [20]. Searching for the ground state energy of the many-body system with a Gaussian ansatz radially and TF shape axially [20], we find that the mean field interaction increases the size of the Gaussian by $\approx$3%. The calculated TF radius is 28 μm or 7 times the axial harmonic oscillator size and is in good agreement with the measured radius, 30 μm in Fig. 3. Thus with $\mu = 0.45\hbar\omega_{\rm rad}$, the gas is described as an ideal gas radially but is in the TF regime axially. This 1D situation has also been realized recently in sodium condensates [21].

What are the limits of this BEC-Fermi gas cooling scheme? First, the $1/e$ condensate lifetime of about 3 s in this steep trap will limit the available BEC-Fermi gas interaction time. Second, the boson-fermion mean field interaction can induce a spatial phase separation [8] that prevents thermal contact between ^{7}Li and ^{6}Li. Using the method of [8] developed for $T = 0$, we expect, for the parameters of Fig. 3 (top), that the density of fermions is only very slightly modified by the presence of the condensate in accordance with our observations. Third, because of the superfluidity of the condensate, impurity atoms (such as ^{6}Li), which move through the BEC slower than the sound velocity v_c, are no longer scattered [9,22]. When the Fermi velocity v_F becomes smaller than v_c, cooling occurs only through collisions with the bosonic thermal cloud, thus slowing down drastically. With 10^4 condensed atoms, $v_c \simeq 0.9$ cm/s. The corresponding temperature where superfluid decoupling should occur is $\simeq$100 nK, a factor of 14 lower than T_F.

In summary, we have produced a new mixture of Bose and Fermi quantum gases. Future work will explore the degeneracy limits of this mixture. Phase fluctuations of the 1D ^{7}Li condensate should also be detectable via density fluctuations in time of flight images, as recently reported

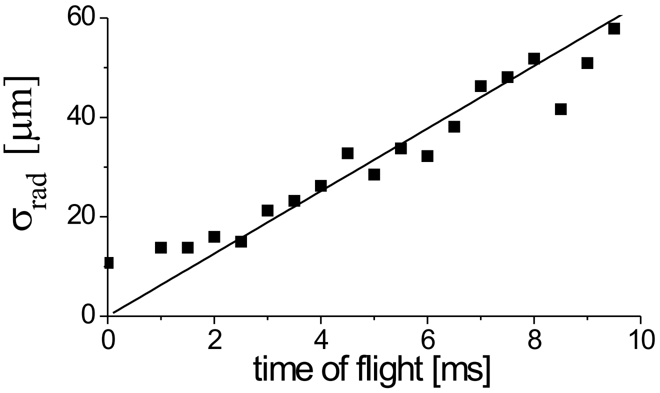

FIG. 5. Signature of 1D condensate. Radial size of expanding condensates with 10^4 atoms as a function of time of flight. The straight line is the expected behavior for the expansion of the ground state radial harmonic oscillator.

in [23]. The transfer of the BEC into $|F = 2, m_F = 2\rangle$ with negative a should allow the production of bright solitons and of large unstable condensates where interesting and still unexplained dynamics has been recently observed [11,24]. Finally, the large effective attractive interaction between ^{6}Li $|F = 1/2, m_F = +1/2\rangle$ and $|F = 1/2, m_F = -1/2\rangle$ makes this atom an attractive candidate for searching for BCS pairing at lower temperatures [6].

We are grateful to Y. Castin, J. Dalibard, C. Cohen-Tannoudji, and G. Shlyapnikov for useful discussions. F. S. and K. L. C. were supported by the DAAD and by MENRT. This work was supported by CNRS, Collège de France and Région Ile de France. Laboratoire Kastler Brossel is *Unité de recherche de l'Ecole Normale Supérieure et de l'Université Pierre et Marie Curie, associée au CNRS.*

*Present address: LENS-INFM, Largo E. Fermi 2, Firenze 50125 Italy.

[1] *Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases,* Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi," edited by M. Inguscio, S. Stringari, and C. E. Wieman (IOS Press, Amsterdam, 1999).
[2] F. Dalfovo *et al.,* Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999).
[3] B. DeMarco and D. S. Jin, Science **285**, 1703 (1999).
[4] F. Schreck *et al.,* Phys. Rev. A **64**, 011402R (2001).
[5] A. G. Truscott *et al.,* Science **291**, 2570 (2001).
[6] H. T. C. Stoof and M. Houbiers, in *Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases* (Ref. [1]), p. 537; R. Micnas *et al.,* Rev. Mod. Phys. **62**, 113 (1990).
[7] C. Ebner and D. O. Edwards, Phys. Rep. **2C**, 77 (1970).
[8] K. Mølmer, Phys. Rev. Lett. **80**, 1804 (1998).
[9] E. Timmermans and R. Côté, Phys. Rev. Lett. **80**, 3419 (1998).
[10] C. C. Bradley, C. A. Sackett, and R. G. Hulet, Phys. Rev. Lett. **78**, 985 (1997).
[11] J. M. Gerton *et al.,* Nature (London) **408**, 692 (2000).
[12] R. G. Hulet (private communication).
[13] M.-O. Mewes *et al.,* Phys. Rev. A **61**, 011403R (2000).
[14] D. A. Butts and D. S. Rokhsar, Phys. Rev. A **55**, 4346 (1997).
[15] In this measurement, we abruptly prepare an out of equilibrium ^{7}Li energy distribution in the trap using the microwave evaporation knife and measure the time needed to restore thermal equilibrium through the evolution of the axial size of the ^{7}Li and ^{6}Li clouds.
[16] T. Busch *et al.,* Europhys. Lett. **44**, 755 (1998); B. DeMarco and D. S. Jin, Phys. Rev. A **58**, 4267 (1998).
[17] F. A. Van Abeelen, B. J. Verhaar, and A. J. Moerdijk, Phys. Rev. A **55**, 4377 (1997).
[18] G. Ferrari, Phys. Rev. A **59**, R4125 (1999).
[19] B. DeMarco, S. B. Papp, and D. S. Jin, Phys. Rev. Lett. **86**, 5409 (2001).
[20] D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, and J. T. M. Walraven, Phys. Rev. Lett. **85**, 3745 (2000).
[21] A. Görlitz *et al.,* cond-mat/0104549.
[22] A. P. Chikkatur *et al.,* Phys. Rev. Lett. **85**, 483 (2000).
[23] S. Dettmer *et al.,* cond-mat/0105525.
[24] J. L. Roberts *et al.,* Phys. Rev. Lett. **86**, 4211 (2001).

tunnel framed by universally conserved basic amino acids (Fig. 6B). Because open complex formation occurs without breaking covalent bonds in the DNA, the RNAP claws must open at some point during the process of open complex formation to allow the template strand to slip into its channel. Subsequent closure of the claws would then establish the tunnel. This requirement for prior states (intermediates) during the steps of open complex formation with different conformations of the enzyme, combined with the good match between footprinting data and the complete open complex model, leads us to suggest that the complex represented in this holoenzyme/fork-junction structure closely resembles the final RP_o.

The RF structure, and the models derived from it, raise key questions that are central to understanding transcription initiation. How is RP_o generated from RP_c (Fig. 5A)? How do transcription activators interact with the complex to enhance the rate of transcription initiation? The structures and models presented here provide a basis for designing more decisive experiments probing these questions and more.

References and Notes

1. K. S. Murakami, S. Masuda, S. A. Darst, *Science* **296**, 1280 (2002).
2. P. L. deHaseth, M. L. Zupancic, M. T. J. Record, *J. Bacteriol.* **180**, 3019 (1998).
3. Y. Guo, J. D. Gralla, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **95**, 11655 (1998).
4. T. Gaal *et al.*, *Mol. Microbiol.* **42**, 939 (2001).
5. S. Keilty, M. Rosenberg, *J. Biol. Chem.* **262**, 6389 (1987).
6. L. Tsujikawa, O. Tsodikov, P. de Haseth, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **99**, 3493 (2002).
7. E. A. Campbell *et al.*, *Cell* **104**, 901 (2001).
8. G. Zhang *et al.*, *Cell* **98**, 811 (1999).
9. E. A. Campbell *et al.*, *Mol. Cell* **9**, 527 (2002).
10. In the crystal, two DNA fork junctions pack against each other at their blunt, upstream ends (Fig. 1A), forming a pseudo-continuous double-helix related by a crystallographic twofold symmetry axis perpendicular to the DNA helical axis. Thus, the double-stranded upstream ends of the symmetry-related fork junctions were placed with an end-to-end spacing of 3.4 Å (corresponding to base-pair stacking in double-stranded B-form DNA), with the symmetry axis in the middle.
11. M. L. Craig, W.-C. Suh, M. T. J. Record, *Biochemistry* **34**, 15624 (1995).
12. J. Mecsas, D. W. Cowing, C. A. Gross, *J. Mol. Biol.* **220**, 585 (1991).
13. W. Metzger, P. Schickor, H. Heumann, *EMBO J.* **8**, 2745 (1989).
14. P. Schickor, W. Metzger, W. Wladyslaw, H. Lederer, H. Heumann, *EMBO J.* **9**, 2215 (1990).
15. K. A. Barne, J. A. Bown, S. J. W. Busby, S. D. Minchin, *EMBO J.* **16**, 4034 (1997).
16. C. A. Gross *et al.*, *Cold Spring Harbor Symp. Quant. Biol.* **63**, 141 (1998).
17. S. A. Darst *et al.*, in *Nucleic Acids & Molecular Biology*, F. Ekstein, D. M. J. Lilley, Eds. (Springer, London, 1997), vol. 11, pp. 27–40.
18. B. A. Young *et al.*, *Cell* **105**, 935 (2001).
19. X. Huang, F. J. Lopez de Saro, J. D. Helmann, *Nucleic Acids Res.* **25**, 2603 (1997).
20. M. Tomsic *et al.*, *J. Biol. Chem.* **276**, 31891 (2001).
21. O. N. Ozoline, M. A. Tsyganov, *Nucleic Acids Res.* **23**, 4533 (1995).
22. M. Buckle, I. K. Pemberton, M.-A. Jacquet, H. Buc, *J. Mol. Biol.* **285**, 955 (1999).
23. D. W. Cowing, J. Mecsas, M. T. J. Record, C. A. Gross, *J. Mol. Biol.* **210**, 521 (1989).
24. R. T. Kovacic, *J. Biol. Chem.* **262**, 13654 (1987).
25. R. L. Gourse, W. Ross, T. Gaal, *Mol. Microbiol.* **37**, 687 (2000).
26. Y. H. Jeon *et al.*, *Science* **270**, 1495 (1995).
27. Y. H. Jeon, T. Yamazaki, T. Otomo, A. Ishihama, Y. Kyogoku, *J. Mol. Biol.* **267**, 953 (1997).
28. R. H. Ebright, S. Busby, *Curr. Opin. Genet. Devel.* **5**, 197 (1995).
29. W. Ross, A. Ernst, R. L. Gourse, *Genes Dev.* **15**, 491 (2001).
30. E. Nudler, E. Avetissova, V. Markovtsov, A. Goldfarb, *Science* **273**, 211 (1996).
31. S. A. Weston, A. Lahm, D. Suck, *J. Mol. Biol.* **226**, 1237 (1992).
32. T. M. Gruber, D. A. Bryant, *J. Bacteriol.* **179**, 1734 (1997).
33. M. Lonetto, M. Gribskov, C. A. Gross, *J. Bacteriol.* **174**, 3843 (1992).
34. Y. Harada *et al.*, *Nature* **409**, 113- (2001).
35. T. A. Jones, J.-Y. Zou, S. Cowan, M. Kjeldgaard, *Acta Crystallogr. A* **47**, 110 (1991).
36. A. Nicholls, K. A. Sharp, B. Honig, *Proteins Struct. Funct. Genet.* **11**, 281 (1991).
37. M. Carson, *J. Appl. Crystallogr.* **24**, 958 (1991).
38. R. Lavery, H. Sklenar, *J. Biomol. Struct. Dyn.* **6**, 63 (1988).
39. Z. Otwinowski, in *Proceedings of the CCP4 Study Weekend*, W. Wolf, P. R. Evans, A. G. W. Leslie, Eds. (SERC Daresbury Laboratory, Warrington, UK, 1991) pp. 80–86.
40. N. Casan-Pastor, P. Gomez-Romero, G. B. Jameson, L. C. W. Baker, *J. Am. Chem. Soc.* **113**, 5685 (1991).

41. We thank M. Pope for the gift of the W_{12} cluster, G. Schneider for the gift of Ta_6Br_{14}, and T. Gaal and R. Gourse for providing the full con promoter sequence before publication; D. Thiel and the staff at the Cornell High Energy Synchrotron Source and M. Becker and L. Berman at NSLS X25 for support during data collection; K. Kinosita and R. Landick for important discussion; and D. Jeruzalmi, S. Nair, and H. Yamaguchi for invaluable advice. Figure 1B was made using the program O (*35*). Figures 2, 4, 5, and 6 were made using the program GRASP (*36*). Figure 3 was made using the program RIBBONS (*37*). Supported by a Norman and Rosita Winston Postdoctoral Fellowship and a Human Frontiers Sciences Program Postdoctoral Fellowship (K.S.M.); National Research Service Award number NIH GM20470 (E.A.C.); and, in part, by NIH grants GM53759 and GM61898 (S.A.D.)

Supporting Online Material
(www.sciencemag.org/cgi/content/full/296/5571/1285/DC1)
Material and Methods
References and notes
fig. S1
table S1

7 January 2002; accepted 21 March 2002

Formation of a Matter-Wave Bright Soliton

L. Khaykovich,[1] F. Schreck,[1] G. Ferrari,[1,2] T. Bourdel,[1] J. Cubizolles,[1] L. D. Carr,[1] Y. Castin,[1] C. Salomon[1]*

We report the production of matter-wave solitons in an ultracold lithium-7 gas. The effective interaction between atoms in a Bose-Einstein condensate is tuned with a Feshbach resonance from repulsive to attractive before release in a one-dimensional optical waveguide. Propagation of the soliton without dispersion over a macroscopic distance of 1.1 millimeter is observed. A simple theoretical model explains the stability region of the soliton. These matter-wave solitons open possibilities for future applications in coherent atom optics, atom interferometry, and atom transport.

Solitons are localized waves that travel over long distances with neither attenuation nor change of shape, as their dispersion is compensated by nonlinear effects. Soliton research has been conducted in fields as diverse as particle physics, molecular biology, geology, oceanography, astrophysics, and nonlinear optics. Perhaps the most prominent application of solitons is in high-rate telecommunications with optical fibers (*1*).

We use a Bose-Einstein condensate (BEC) of a dilute atomic gas of lithium atoms as a macroscopic matter-wave to form a soliton. Nonlinearity is provided by binary atomic interactions leading to the mean-field potential $U(\vec{r}) = gn(\vec{r}) = 4\pi\hbar^2 an(\vec{r})/m$, where a is the scattering length, $n(\vec{r})$ the spatial density, and m the atomic mass. For $a < 0$ the effective interaction is attractive, and a trapped BEC is only stable for a number of atoms less than a critical number above which collapse occurs (*2–4*). When the BEC is confined in only two directions, matter-waves have dispersion in the free direction owing to their kinetic energy, $E_{\mathrm{kin}} \propto k^2$, where k is the atomic wave vector. The balance between this dispersion and the attractive mean-field energy can lead to the formation of bright solitons as shown theoretically (*5–7*). Until now, only dark solitons have been observed in BECs with repulsive interactions ($a > 0$)

[1]Laboratoire Kastler Brossel, Ecole Normale Supérieure, 24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France. [2]European Laboratory for Non-Linear Spectroscopy–Istituto Nazíonale per la Fisica della Materia, Largo E. Fermi 2, Firenze 50125, Italy.

*To whom correspondence should be addressed. E-mail: salomon@lkb.ens.fr

(*8*, *9*). These solitons are characterized by a notch in the BEC density profile with a phase step across the soliton center. They propagate within the BEC with a velocity less than the speed of sound, but so far are found to decay before reaching the edge of the condensate.

We report the formation of a matter-wave bright soliton, a freely propagating self-bound atomic gas. The soliton is produced from a ^{7}Li BEC in the internal atomic state $|F = 1, m_F = 1\rangle$. In this state a Feshbach resonance allows us to continuously tune the scattering length from a positive to negative value by means of an applied magnetic field (*10*, *11*), a requirement for the production of a bright soliton.

In our experimental setup (*12*–*14*), 4×10^8 ^{7}Li atoms are loaded from a magneto-optical trap into a strongly confining Ioffe-Pritchard (IP) magnetic trap. Atoms are in the $|F = 2, m_F = 2\rangle$ state for which the scattering length is $a = -1.4$ nm. Evaporative cooling lowers the temperature from 2 mK to 10 μK, after which $\sim 6 \times 10^5$ atoms remain. Atoms are then transferred into a far detuned optical dipole trap at the intersection of two Nd:YAG (yttrium-aluminum-garnet) Gaussian laser beams (Fig. 1) with common waists of 38(3) μm (*15*). The 9.5, W laser power is split between the two beams by means of two acousto-optic modulators.

The transfer from the magnetic trap to the optical trap is done in two steps. First, the power of the YAG beams is ramped over 200 ms to a value such that the radial oscillation frequency of the atoms is 1.8 kHz in the vertical beam and 3.3 kHz in the horizontal beam, which matches that of the IP trap. Second, the magnetic trap is slowly turned off over 200 ms, keeping only a 5-G bias field. The transfer efficiency is nearly 100%. Then, transfer from the state $|F = 2, m_F = 2\rangle$ to the state $|F = 1, m_F = 1\rangle$ is performed by rapid adiabatic passage with a microwave-frequency sweep scanning 1 MHz in 10 ms at ~820 MHz. The transfer efficiency is better than 95%. Among all ^{7}Li hyperfine states that can be trapped in the dipole trap, $|F = 1, m_F = 1\rangle$ is particularly useful as it is the lowest energy state in which two-body losses, which are relatively strong in the state $|F = 2, m_F = 2\rangle$ (*13*), are completely suppressed. Furthermore, this state is predicted to have a Feshbach resonance near 725 G (*11*), allowing magnetic tuning of the scattering length (Fig. 2). An adjustable magnetic field is produced by the pinch coils of our IP trap. Their inductance is small so that their current can be changed on a time scale shorter than ~200 μs. As in previous work on ^{23}Na and ^{85}Rb (*16*, *17*), we locate the ^{7}Li Feshbach resonance through observation of a dramatic loss of trapped atoms that we experimentally identify as being due to three-body recombination. The resonance position is found at 720(15) G, in good agreement with theory (725 G) (*11*).

We then produce a ^{7}Li BEC in the crossed dipole trap by forced evaporation achieved by lowering the depth of the optical trapping potential (*18*). Between $B = 0$ and $B = 590$ G, the scattering length is small ($|a| \leq 0.4$ nm), hindering efficient evaporative cooling (Fig. 2). Therefore, we operate at a magnetic field of 665 G in the wing of the Feshbach resonance where $a \cong +2.1$ nm and where three-body losses remain moderate. The horizontal (vertical) optical power is lowered from 5.5 W (1.5 W) to 1.15 W (0.9 W) in 100 ms, and then to 0.27 W (0.19 W) in 150 ms. A condensate with $N \sim 2 \times 10^4$ atoms, about half of the total number of atoms, is obtained in a nearly isotropic trap where atoms have oscillation frequencies of 710, 1000, and 710 Hz along *x*, *y*, and *z* axes. We then tune the scattering length to zero to reduce three-body losses.

To transform the BEC into a bright soliton, the trapping geometry is adiabatically deformed to a cylindrical geometry obtained by keeping only the horizontal trapping beam. To ensure adiabatic deformation of the condensate, the vertical beam power is ramped down to 3 mW in 200 ms, which reduces the axial oscillation frequency of the atoms to $\omega_z \cong 2\pi \times 50$ Hz while the radial oscillation frequency remains $\omega_\perp = 2\pi \times 710$ Hz. The effective interaction is then tuned through changes in the magnetic field in 50 ms. Finally, switching off the vertical beam with a mechanical shutter releases the BEC into the horizontal one-dimensional (1D) waveguide. In the axial direction, the coils that are used to provide the offset field produce a slightly expulsive harmonic potential for the state $|F = 1, m_F = 1\rangle$, which overcomes the dipole trap. The resulting axial force on the atoms is conveniently written as $-m\omega_z^2 z$, where the frequency ω_z is now imaginary. Typically, $\omega_z = 2i\pi \times 78$ Hz for $B = 520$ G. After an adjustable evolution time in the horizontal guide, the bias magnetic field is turned off, and 400 μs later an absorption image is recorded (Fig. 3; see supplemental movie on *Science* Online at www.sciencemag.org/cgi/content/full/296/5571/1290/DC1) where the formation of the soliton is seen.

We compare the evolution of an ideal gas (Fig. 3A), $a \cong 0$ for $B = 520$ G, with a gas with attractive interactions (Fig. 3B), $a = -0.21$ nm for $B = 425$ G. In both cases the cloud drifts toward the left because of a small offset, ≅50 μm, between the maximum of the expulsive potential and the initial position of the atoms. The width of the expanding cloud in the horizontal waveguide is considerably broader in the noninteracting case, while for all times of observation the soliton width remains equal to the resolution limit of our imaging system, 9(1) μm axially (*19*). The cloud contains $6(2) \times 10^3$ atoms and propagates over a distance of 1.1 mm without any detectable dispersion, a clear signature of a bright soliton (*20*). No decay of the soliton is observed in the 10 ms it remains in the detection region. A substantial fraction of

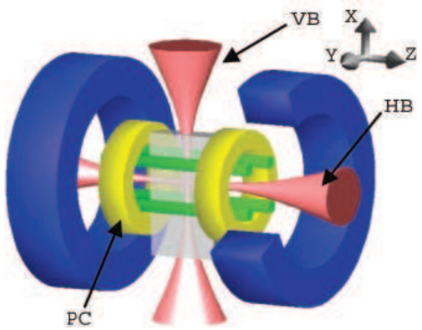

Fig. 1. Experimental setup for soliton production. ^{7}Li atoms are evaporatively cooled in a Ioffe-Pritchard magnetic trap and transferred into a crossed optical dipole trap in state $|F = 1, m_F = 1\rangle$ where they Bose condense. Magnetic tuning of the scattering length to positive, zero, and negative values is performed with the two pinch coils (PC). Switching-off the vertical trapping beam (VB) allows propagation of a soliton in the horizontal 1D waveguide (HB). Absorption images of solitons and BECs are recorded on a charge-coupled device camera in the *x*, *z* plane.

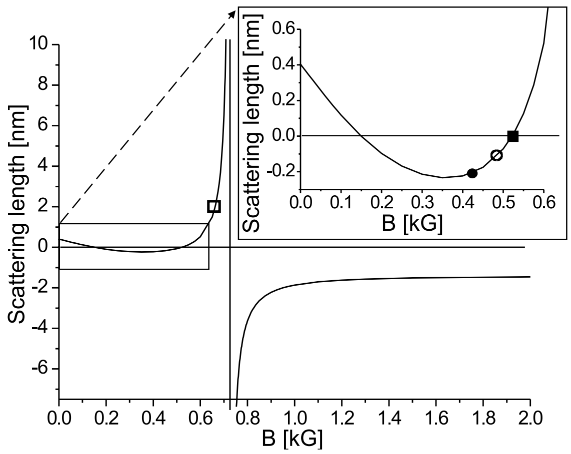

Fig. 2. Predicted magnetic field dependence of the scattering length *a* for ^{7}Li in state $|F = 1, m_F = 1\rangle$ (*11*). (**Inset**) Expanded view of the 0 to 0.6 kG interval with the various values of *a* used to study soliton formation. (□) Initial BEC; (■) ideal BEC gas; (○) attractive gas; (●) soliton.

atoms, ≅2/3, remains in a noncondensed pedestal around the soliton, clearly visible for intermediate propagation times in the guide.

We then made measurements of the wave-packet size versus propagation time for three values of the scattering length: $a \cong 0$, $a \cong -0.11$ nm, and $a \cong -0.21$ nm (Fig. 4). For $a \cong 0$ (Fig. 4A), the interaction between atoms is negligible, and the size of the cloud is governed by the expansion of the initial condensate distribution under the influence of the negative curvature of the axial potential. The measured size is in excellent agreement with the predicted size of a noninteracting gas subjected to an expulsive harmonic potential: Taking the curvature as a fit parameter (solid line in Fig. 4A), we find $\omega_z = 2i\pi \times 78(3)$ Hz, which agrees with the expected value of the curvature produced by the pinch coils (*14*). For $a = -0.11$ nm and $B = 487$ G, the size of the wave packet is consistently below that of a noninteracting gas (Fig. 4B, solid line). Attractive interactions reduce the size of the atomic cloud but are not strong enough to stabilize the soliton against the expulsive potential. When a is further decreased to -0.21 nm, the measured size of the wave packet no longer changes as a function of guiding time, indicating propagation without dispersion even in the presence of the expulsive potential (Fig. 4C).

To theoretically analyze the stability of the soliton, we introduce the 3D Gross-Pitaevskii energy functional

$$E_{GP} = \int d^3r\, \frac{\hbar^2}{2m}|\nabla\Psi(\vec{r})|^2 + \frac{Ng}{2}|\Psi(\vec{r})|^4 + \frac{1}{2}m\,[\omega_\perp^2(x^2+y^2) + \omega_z^2 z^2]|\Psi(\vec{r})|^2 \tag{1}$$

where the condensate wave function Ψ is normalized to 1. In Eq. 1 the first term is the kinetic energy responsible for dispersion; the second term is the interaction energy, which in the present case of attractive effective interactions ($g < 0$) causes the wave function to sharpen; and the third term is the external potential energy. We introduce the following two-parameter variational ansatz to estimate minimal-energy states of E_{GP}:

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\perp^2 l_z}}\frac{1}{\cosh(z/l_z)} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma_\perp^2}\right) \tag{2}$$

where $\sigma_\perp$ and l_z are the radial and axial widths of the wave function. The functional form of the well-known 1D soliton has been chosen for the longitudinal direction (*5*), while in the transverse direction a Gaussian ansatz is the optimal one for harmonic confinement. For each l_z we minimize the mean energy over $\sigma_\perp$; the resulting function of l_z is plotted (Fig. 5) for various values of the parameter $Na/a_\perp^{ho}$ where $a_\perp^{ho} = (\hbar/m\omega_\perp)^{1/2}$. For very small axial sizes, the interaction energy becomes on the order of $-\hbar\,\omega_\perp$ and the gas loses its quasi-1D nature and collapses (*3*, *4*). For very large axial sizes, the expulsive potential energy dominates and pulls the wave function apart. For intermediate sizes, attractive interactions balance both the dispersion and the effect of the expulsive potential; the energy presents a local minimum (solid line in Fig. 5). This minimum supports a macroscopic quantum bound state. However, it exists only within a narrow window of the parameter $Na/a_\perp^{ho}$. In our experiments $\omega_\perp = 2\pi \times 710$ Hz and $\omega_z = 2i\pi \times 70$ Hz for $B = 420$ G, so that $a_\perp^{ho} = 1.4$ μm; for $N|a|$ larger than $(N|a|)_c = 1.105$ μm, a collapse occurs (dashed curve in Fig. 5), while for $N|a|$ smaller than $(N|a|)_e = 0.88$ μm the expulsive potential causes the gas to explode axially (dotted curve in Fig. 5).

For our experimental conditions and $a = -0.21$ nm, the number of atoms that allows the soliton to be formed is $4.2 \times 10^3 \leq N \leq 5.2 \times 10^3$, in good agreement with our measured number $6(2) \times 10^3$. The expected axial size of the soliton is $l_z \cong 1.7$ μm, which is below the current resolution limit of our imaging system. To verify the presence of a critical value of $N|a|_e$ needed to stabilize the soliton, we have performed the measurements with the same a but with a reduced number of atoms, $N = 2 \times 10^3$. At 8 ms guiding time the axial size of the wave packet increased to 30 μm, indicating that no soliton was formed.

One may speculate as to the formation dynamics of the soliton in the elongated trap before its release in the optical waveguide. Because the atom number in the initial BEC, 2 ×

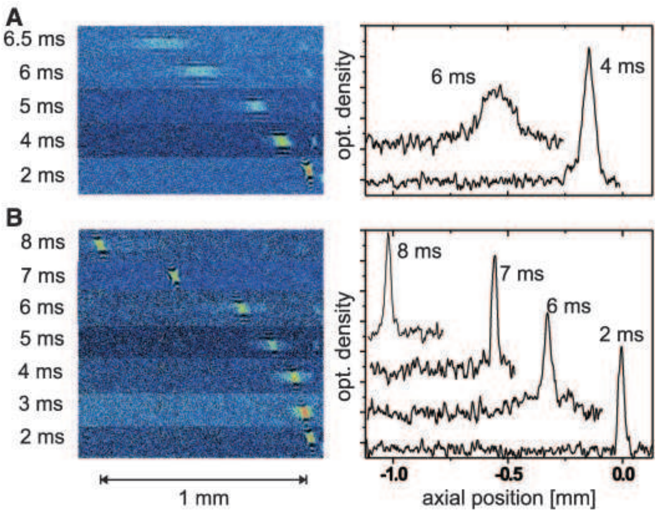

Fig. 3. Absorption images at variable delays after switching off the vertical trapping beam. Propagation of an ideal BEC gas (**A**) and of a soliton (**B**) in the horizontal 1D waveguide in the presence of an expulsive potential. Propagation without dispersion over 1.1 mm is a clear signature of a soliton. Corresponding axial profiles are integrated over the vertical direction.

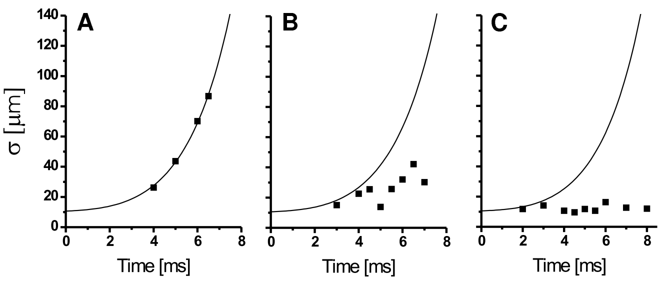

Fig. 4. Measured root mean square size of the atomic wave packet Gaussian fit as a function of propagation time in the waveguide. (**A**) $a = 0$, ideal gas case; (**B**) $a = -0.11$ nm; (**C**) $a = -0.21$ nm; solid lines: calculated expansion of a noninteracting gas in the expulsive potential.

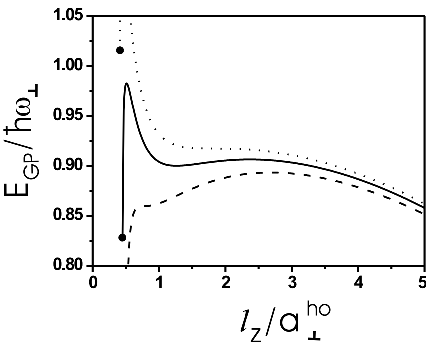

Fig. 5. Theoretical energy diagram of an attractive Bose gas subjected to an expulsive potential for $\omega_z/\omega_\perp = i \times 70/710$. The energy as a function of the axial size after minimization over the tranverse size is shown for three values of $N|a|$: within the stability window (solid curve), at the critical point for explosion $(N|a|)_e$ (dotted curve), and at the critical point for collapse $(N|a|)_c$ (dashed curve). End points of the curves indicate collapse, i.e., $\sigma_\perp = 0$.

10^4, is about three times as large as the measured atom number in the soliton, it is likely that during the 50 ms phase where a is changed from 0 to negative values, one or several collapses occur until the critical number for a stable BEC is reached. Indeed, the collapse time constant is predicted to be much less than 50 ms for our experimental conditions (*21*). During the transfer into the 1D waveguide, the BEC is transformed into a soliton and the noncondensed cloud is clearly observed at guiding times up to 6 ms as a broader background distribution. Nonadiabatic projection of the BEC from the confining onto the expulsive potential is expected to play a negligible role here, according to numerical simulations (*22*). At longer times, the noncondensed atoms spread apart and become undetectable. Thus, during the propagation phase the soliton decouples itself from the noncondensed fraction, resulting in a nearly pure soliton.

Finally, removal of the expulsive axial potential will allow us to extend the stability domain toward lower values of $N|a|$ and longer observation times. The soliton size could then be measured in situ, as well as its lifetime. The study of coherence properties of solitons and of binary collisions between solitons is an immediate extension of the present work.

References and Notes

1. See, for example, the recent special issue: *Chaos* **10**, 471 (2000).
2. P. A. Ruprecht, M. J. Holland, K. Burnett, M. Edwards, *Phys. Rev. A* **51**, 4704 (1995).
3. C. C. Bradley, C. A. Sackett, R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 985 (1997).
4. J. L. Roberts *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4211 (2001).
5. V. E. Zakharov, A. B. Shabat, *Sov. Phys. JETP* **34**, 62 (1972).
6. V. M. Pèrez-Garcìa, H. Michinel, H. Herrero, *Phys. Rev. A* **57**, 3837 (1998).
7. L. D. Carr, M. A. Leung, W. P. Reinhardt, *J. Phys. B* **33**, 3983 (2000).
8. S. Burger *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5198 (1999).
9. J. Denschlag *et al.*, *Science* **287**, 97 (2000).
10. E. Tiesinga, B. J. Verhaar, H. T. S. Stoof, *Phys. Rev. A* **47**, 4114 (1993).
11. V. Venturi, C. Williams, personal communication.
12. M.-O. Mewes, G. Ferrari, F. Schreck, A. Sinatra, C. Salomon, *Phys. Rev. A* **61**, 011403R (2000).
13. F. Schreck *et al.*, *Phys. Rev. A* **64**, 011402R (2001).
14. F. Schreck *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 080403 (2001).
15. See, for instance, R. Grimm, M. Weidemüller, Y. B. Ovchinnikov, *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* **42**, 95 (2000).
16. S. Inouye *et al.*, *Nature* **392**, 151 (1998).
17. J. L. Roberts, N. R. Claussen, S. L. Cornish, C. E. Wieman, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 728 (2000).
18. M. D. Barrett, J. A. Sauer, M. S. Chapman, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 010404 (2001).
19. In the vertical direction, a residual astigmatism of the imaging system gives a resolution limit of 16 μm.
20. Over this distance, the change in magnetic field due to the curvature is 0.1 G, and therefore the change in the scattering length is negligible (Fig. 2).
21. Y. Kagan, A. E. Muryshev, G. V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 933 (1998).
22. L. D. Carr, Y. Castin, in preparation.
23. We are grateful to K. Corwin, M. Olshanii, G. Shlyapnikov, C. Williams, V. Venturi, and B. Esry for important contributions to this work and to J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji for useful discussions. Supported by the DAAD (F.S.), the European Union network CT 2000-00165 CAUAC (G.F.), and the NSF MPS-DRF 0104447 (L.D.C.). This work was supported by CNRS, Collège de France and Région Ile de France. Laboratoire Kastler Brossel is Unité de recherche de l'Ecole Normale Supérieure et de l'Université Pierre et Marie Curie, associated with CNRS.

19 February 2002; accepted 5 April 2002

Electrochemistry and Electrogenerated Chemiluminescence from Silicon Nanocrystal Quantum Dots

Zhifeng Ding,[1] Bernadette M. Quinn,[1] Santosh K. Haram,[1] Lindsay E. Pell,[2] Brian A. Korgel,[2]* Allen J. Bard[1]*

Reversible electrochemical injection of discrete numbers of electrons into sterically stabilized silicon nanocrystals (NCs) (~2 to 4 nanometers in diameter) was observed by differential pulse voltammetry (DPV) in *N,N'*-dimethylformamide and acetonitrile. The electrochemical gap between the onset of electron injection and hole injection—related to the highest occupied and lowest unoccupied molecular orbitals—grew with decreasing nanocrystal size, and the DPV peak potentials above the onset for electron injection roughly correspond to expected Coulomb blockade or quantized double-layer charging energies. Electron transfer reactions between positively and negatively charged nanocrystals (or between charged nanocrystals and molecular redox-active coreactants) occurred that led to electron and hole annihilation, producing visible light. The electrogenerated chemiluminescence spectra exhibited a peak maximum at 640 nanometers, a significant red shift from the photoluminescence maximum (420 nanometers) of the same silicon NC solution. These results demonstrate that the chemical stability of silicon NCs could enable their use as redox-active macromolecular species with the combined optical and charging properties of semiconductor quantum dots.

In a bulk semiconductor, electrons and holes move freely throughout the crystal. However, in a nanocrystal, confinement of the electrons and holes leads to a variety of optical and electronic consequences, including size-dependent molecular-like optical properties, greater electron/hole overlap for enhanced photoluminescence (PL) efficiencies, and discrete single-electron/hole charging. Because of their enormous surface area–to–volume ratios, nanocrystals (NCs) are highly susceptible to heterogeneous redox chemistry with the surrounding environment. Depending on the semiconductor and the surface chemistry, this chemical reactivity can lead to either fatal chemical degradation or new useful properties, such as reversible photocatalytic and electrochromic properties and redox reactivity.

Semiconductor NCs have been prepared with narrow size distributions, controlled surface chemistry, and internal bulk crystal structure (*1*, *2*), and adsorbed capping ligands are often used to control size and prevent irreversible aggregation. Although the electrochemical properties of monolayer-protected metallic NCs have been well documented (*3*, *4*), reports concerning the electrochemical properties of semiconductor NCs remain scarce (*5–9*). Difficulties include the limited potential window available in aqueous solutions, the limited solubility of many NCs in nonaqueous solvents, and the need for highly pure, isolated, monodisperse dots. Compound semiconductor NCs, such as CdS, are also chemically unstable upon electron transfer. For example, CdS NCs are irreversibly oxidized and reduced when electron transfer occurs at an electrode (*9*). Elemental semiconductor NCs, such as Si and Ge, should be more stable. Here we show that monolayer-protected Si NCs are chemically stable upon electron and hole injection; furthermore, electron/hole annihilation through electron transfer reactions between NCs, or NCs with redox-active coreactants, leads to visible light production [electrogenerated chemiluminescence (ECL)].

We recently developed a new synthetic strategy to produce Si NCs terminated with a

[1]Department of Chemistry and Biochemistry, [2]Department of Chemical Engineering, Center for Nano- and Molecular Science and Technology, Texas Materials Institute, The University of Texas at Austin, Austin, TX 78712, USA.

*To whom correspondence should be addressed. E-mail: ajbard@mail.utexas.edu (A.J.B.); korgel@mail.che.utexas.edu (B.A.K.).

Measurement of the Interaction Energy near a Feshbach Resonance in a ^{6}Li Fermi Gas

T. Bourdel,[1] J. Cubizolles,[1] L. Khaykovich,[1] K. M. F. Magalhães,[1,*] S. J. J. M. F. Kokkelmans,[1]
G. V. Shlyapnikov,[1,2,3] and C. Salomon[1]
[1]*Laboratoire Kastler Brossel, Ecole Normale Supérieure, 24 rue Lhomond, 75231 Paris 05, France*
[2]*FOM Institute AMOLF, Kruislaan 407, 1098 SJ Amsterdam, The Netherlands*
[3]*Russian Research Center Kurchatov Institute, Kurchatov Square, 123182 Moscow, Russia*
(Received 5 March 2003; published 11 July 2003)

We investigate the strongly interacting regime in an optically trapped ^{6}Li Fermi mixture near a Feshbach resonance. The resonance is found at 800(40) G in good agreement with theory. Anisotropic expansion of the gas is interpreted by collisional hydrodynamics. We observe an unexpected and large shift (80 G) between the resonance peak and both the maximum of atom loss and the change of sign of the interaction energy.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.91.020402 PACS numbers: 03.75.Ss, 05.20.Dd, 05.30.Fk, 32.80.Pj

The achievement of Bose-Einstein condensation (BEC) in dilute atomic gases [1] has naturally triggered research on cooling of Fermi gases to quantum degeneracy. Several groups have now reached Fermi degeneracy in ^{40}K and ^{6}Li with temperatures down to about 0.1 to 0.2 of the Fermi temperature T_F [2–7]. One of the major goals of this research is to observe the transition to a superfluid phase [8], the analogue of the superconducting phase transition in metals [9]. Very low temperatures and strong attractive interactions in a two-component Fermi gas are favorable conditions to reach this superfluid state. The interactions in atomic gases at low temperature are usually described by a single parameter, the s-wave scattering length a. This quantity can be tuned near a Feshbach resonance where the sign and magnitude of a can be adjusted by means of an external magnetic field B [10,11]. Therefore, when entering the regime of strong interactions, dilute Fermi gases offer unique opportunities to test new theoretical approaches. For instance, near resonance, the critical temperature for superfluidity has been predicted to be as high as 0.25–0.5 T_F [12], a temperature range experimentally accessible.

Both ^{40}K and ^{6}Li possess Feshbach resonances at convenient magnetic fields [13,14]. In Fig. 1 is plotted the theoretical scattering length for the mixture of the two lowest spin states of ^{6}Li, $|F, m_F\rangle = |1/2, 1/2\rangle$, $|1/2, -1/2\rangle$, calculated from updated potentials consistent with the recently measured zero crossing of a at $B \simeq$ 530 G [15,16]. Beside the broad resonance near 855 G on which we concentrate in this work, there is a very sharp resonance at 545 G, and increased atom losses have been measured peaking around 545 and 680 G [5]. Recently, strong interactions in this Fermi mixture have been demonstrated at a fixed magnetic field of 930 G through anisotropic expansion of the gas [7]. In this Letter we study the atomic interactions through the entire range of the Feshbach resonance, from 600 G up to 1.3 kG. We measure three physical quantities (i) the interaction energy with positive and negative values, (ii) the anisotropy of the atomic cloud during the expansion, and (iii) the atom loss. We find the resonance at 800(40) G, where the trapped gas is most strongly interacting, with a ratio between the interaction energy and the kinetic energy reaching -0.3. Surprisingly, we observe a large shift ($\sim$ 80 G) between this position, and both the location of maximum loss in the gas and the change of sign of the interaction energy. Our results are in partial agreement with the physical picture of a Feshbach resonance in the region of strong interactions but also reveal unexpected effects. Finally, they point toward the best experimental conditions to search for the superfluid transition in ^{6}Li.

Our experimental approach to measure the interaction energy of a two-component Fermi gas is based on the analysis of time of flight (TOF) images of atoms released from an anisotropic trap. The energy of the trapped gas, prepared at any value of the B field, is the sum of potential, kinetic, and interaction energies, $E_{\rm pot} + E_{\rm kin} + E_{\rm int}$. Switching off abruptly the trapping potential ($E_{\rm pot} \rightarrow 0$), the gas is released and expands for a variable time before an absorption image is recorded. At long expansion time, the spatial distribution of the cloud reflects the velocity distribution. This procedure is done routinely for BEC studies [1] and has been recently investigated theoretically for Fermi gases in [17]. The novelty of our approach

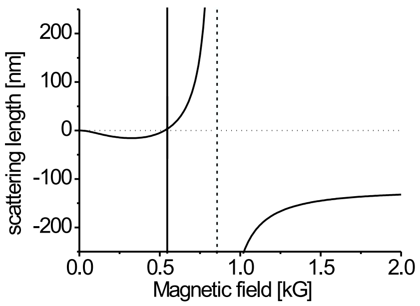

FIG. 1. Predicted scattering length versus magnetic field in ^{6}Li $|F, m_F\rangle = |1/2, 1/2\rangle, |1/2, -1/2\rangle$ mixture.

is in what follows. Because of the low inductance of the coils used to produce the magnetic field B, this field can be switched off rapidly ($\leq 20\ \mu$s) at any desired time during the expansion of the atomic cloud. For $B = 0$ the atoms have negligible interactions since $a \simeq 0$ (Fig. 1). As a consequence, the expansion of the gas can be recorded without atomic interactions during the time of flight period ($B = 0$), or with interactions during the TOF period ($B \neq 0$). Since expansions with $B = 0$ are ballistic, they reflect the kinetic energy of the initially trapped gas, $E_{\rm kin}$. On the other hand, for TOF with $B \neq 0$, the interaction energy is converted into kinetic energy during the early stage of the expansion ($\lesssim 150\ \mu$s). TOF images at long time reflect the released energy, $E_{\rm rel} = E_{\rm kin} + E_{\rm int}$ [18]. Comparisons between TOF images with $B = 0$ and $B \neq 0$ allow us to simply deduce the ratio $E_{\rm int}/E_{\rm kin}$. We operate at temperatures between $0.5\,T_F$ and T_F, where Fermi degeneracy does not play an important role. Even in this nearly classical regime, the gas is found to be strongly interacting. The observed expansions with $B \neq 0$ are anisotropic because of collisonal hydrodynamics, as predicted in [19,20], and observed in [7,21,22].

In our experiment, a gas of 3×10^5 ^{6}Li atoms is prepared in state $|1/2, 1/2\rangle$ in a Nd:YAG crossed beam optical dipole trap at a temperature of 10 μK [4,23]. The horizontal beam (respectively, vertical) propagates along x (y), has a maximum power of 2.5 W (2.5 W), and a waist of $\sim$25 μm ($\sim$ 30 μm). Using a radio frequency field, we drive the Zeeman transition between $|1/2, 1/2\rangle$ and $|1/2, -1/2\rangle$ to prepare a balanced mixture of the two states at any chosen value of B between 2 G and 1.3 kG. Using a Stern-Gerlach method we check that the populations in both states are equal to within 10%.

We observe that atom losses occur with very different rates below and above resonance. Near 720 G the lifetime of the gas is on the order of 10 ms, whereas near 900 G, the lifetime is in excess of 10 s. The latter is surprisingly large in comparison with similar situations for bosons near a Feshbach resonance [24]. Therefore, we performed two sets of experiments—one with the spin mixture prepared above resonance (1060 G) and the other below resonance (5 G). In the first set, evaporative cooling is performed by lowering the power of the vertical beam. It produces $2N = 7 \times 10^4$ atoms at $T \simeq 0.6\,T_F$ with $k_B T_F = \hbar\bar{\omega}(6N)^{1/3}$ and $\bar{\omega} = (\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3}$. The trap is nearly cigar shaped with frequencies $\omega_x/2\pi = 1.1$ kHz, $\omega_y/2\pi = 3.0$ kHz, and $\omega_z/2\pi = 3.2$ kHz. The magnetic field is adiabatically ramped in 50 ms to a final value where TOF expansion images are taken. The effect of strong interactions is illustrated in Fig. 2, where both typical images and a plot of the expanded cloud Gaussian sizes r_x and r_y are displayed. In Fig. 2(a), expansions with $B = 0$ reveal the initial momentum distribution of the cloud which is isotropic as expected. We deduce the total kinetic energy $E_{\rm kin}$ of the trapped gas mixture from Gaussian fits to this distribution. For our moderate quantum degeneracy, the temperature can be estimated from $k_B T = 2E_{\rm kin}/3$. We find $T \simeq 3.5\ \mu$K $\simeq 0.6\,T_F$, constant for fields between 0.8 and 1.3 kG.

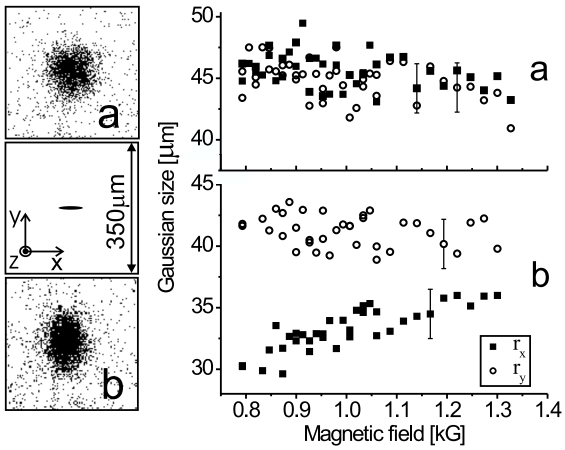

FIG. 2. Left: Geometry of the trapped atomic cloud (center) and expansion images without magnetic field (a) ($B = 0$), and with magnetic field (b) ($B \neq 0$). Right: Corresponding Gaussian sizes of the expanded clouds along x (squares) and y (open circles) versus magnetic field. (a) Time of flight images after 650 μs expansion with $B = 0$. (b) Images after 400 μs expansion with $B \neq 0$ and 250 μs with $B = 0$. Images shown on the left are for $B = 900$ G.

In Fig. 2(b), expansions with $B \neq 0$ are anisotropic. Little expansion is seen along the weak axis of the trap. The ellipticity of the cloud is inverted because of hydrodynamic behavior during the expansion [7]. Collisions then redistribute the gas energy in the direction of maximum density gradient. The anisotropy r_y/r_x ranges from 1.1 at large B field to 1.4 near 0.8 kG, whereas the hydrodynamic scaling equations [19] predict an anisotropy of 1.53 in the fully hydrodynamic regime. The usual criterion for hydrodynamicity is found from the ratio R of the mean free path $\lambda_0 = (n_0\sigma)^{-1}$, where n_0 is the peak density, over the radial size $r_{\rm rad}$ of the cloud. For a classical gas neglecting mean-field interactions we find

$$R = \frac{\lambda_0}{r_{\rm rad}} = \frac{(2\pi)^{3/2}}{N\sigma}\left(\frac{k_B T}{m\bar{\omega}^2}\right)\frac{\omega_{\rm rad}}{\bar{\omega}}.$$

$R \ll 1$ ($R \gg 1$) corresponds to the hydrodynamic (collisionless) regime. With the predicted value of $a = -185$ nm at 1060 kG, and $\sigma = 4\pi a^2$, $R = 0.03$. Therefore, in the early stages of the expansion, the gas is hydrodynamic as in [7,21,22]. Furthermore, with these large values of a and our typical temperatures, the scattering cross section is energy dependent. At $B = 1060$ G, $|ka| = 0.95$, where $k = \sqrt{mk_BT/2\hbar^2}$ is the typical relative momentum of two colliding atoms. σ becomes unitarity limited, $\sigma = 4\pi a^2/(1 + k^2a^2) \simeq 4\pi/k^2$ for $|ka| \gg 1$ [25]. Consequently, as the magnetic field is decreased below 1.3 kG, the gas gradually enters deeper in the unitarity regime.

This effect has an important consequence on the gas behavior during hydrodynamic expansion: since the relative momentum k of the colliding atoms decreases as $k \propto n^{1/3}$ (where n is the density) [26], σ increases. For a cigar-shaped cloud the expansion is mostly 2D, and R decreases as $n^{1/6}$. The gas becomes more hydrodynamic as the expansion proceeds until this model breaks down when relative momenta k become too small to remain in the unitarity limit [27]. Then R increases as $n^{-1/2}$. Consequently, the larger $|a|$, the longer the expansion remains hydrodynamic and the stronger the anisotropy is. When the B field is decreased in Fig. 2, the anisotropy increase indicates that the scattering length becomes more and more negative. Therefore, this puts an upper bound of $\simeq$ 800 G for the position of the Feshbach s-wave resonance.

In the second set of experiments, we focused on the lower magnetic field values between 550 and 820 G, the region where losses have been observed. The mixture is prepared at low magnetic field, and the field is ramped up to 320 G, where the scattering length versus B has a local minimum of $a = -8$ nm. Evaporative cooling is performed there, leading to $T = 2.4\ \mu$K and $\omega_x/2\pi = 0.78$ kHz, $\omega_y/\pi = 2.1$ kHz, and $\omega_z/2\pi = 2.25$ kHz. Finally, the B field is ramped to 555 G in 50 ms where $a \simeq 0$, and then in 10 ms to different values between 600 and 850 G where TOF expansions are recorded. The Gaussian widths and number of detected atoms versus B are plotted in Fig. 3. Comparing with the data of Fig. 2, we observe several new features. First, the number of detected atoms has a pronounced minimum near 725 G, a position compatible with previously published results [5]. These losses are associated with a strong heating of the cloud [Fig. 3(a)].

Second, in Fig. 3(b) for $B \leq 675$ G, the expansion is isotropic, consistent with a collisionless regime. Here a is predicted to be $0 \leq a \leq 55$ nm. Since $ka \leq 0.35$, the scattering cross section is independent of energy and the gas is not hydrodynamic ($R \geq 1$). Above 700 G, a pronounced asymmetry in TOF images appears abruptly. The gas enters the hydrodynamic regime (and unitarity limit) with the same inversion of ellipticity as in Fig. 2, a signature of strong interactions. The maximum anisotropy, which we measure at $B = 800(40)$ G, locates the peak of the Feshbach resonance, in agreement with the predicted position of 855(30) G. A unique feature of the resonance is the very large shift ($\simeq$ 80 G) between the resonance peak and the maximum of loss and heating. This can be qualitatively explained by the creation for $a \geq 0$ of weakly bound molecules by three-body recombination. According to [28], in this process the binding energy of the molecule $\hbar^2/ma^2$ for large a is dissipated into kinetic energy of the atom + molecule system. For large a, the binding energy is small and the heating associated with three-body recombination is negligible, and the molecules remain optically trapped. For small or intermediate values of a, the collision products are highly energetic, resulting in strong heating and loss. At the maximum of loss (720 G), $a = 102$ nm and $\hbar^2/k_B m a^2 = 7\ \mu$K is on the order of the trap depth in the weakest direction x.

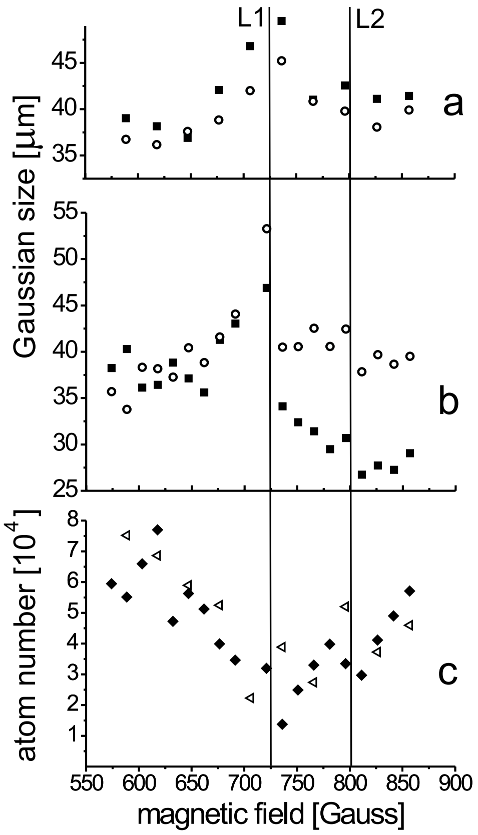

FIG. 3. (a),(b) Gaussian sizes along x and y versus magnetic field. The detection conditions and symbols are the same as in Fig. 2. (a) Expansion with $B = 0$, (b) expansion with $B \neq 0$, (c) number of detected atoms versus magnetic field. Open triangles and black diamonds correspond to graphs (a) and (b), respectively. Line L1 corresponds to the maximum of loss, and L2 to the resonance position.

As explained above, the interaction energy can be calculated directly from the difference of release energies, obtained from the Gaussian sizes of Figs. 2 and 3. In Fig. 4 is plotted $E_{\mathrm{int}}/E_{\mathrm{kin}}$ versus magnetic field. As B is increased above 550 G, E_{int} first goes up, due to increasing a, in accordance with mean-field theory. Near 720 G, E_{int} changes sign abruptly. The ratio $E_{\mathrm{int}}/E_{\mathrm{kin}}$ then exhibits a plateau near -0.12 up to 850 G. Note that for the data at low field (Fig. 3) the number of atoms and temperature changes with B. For the data at higher fields in Fig. 4, we find $E_{\mathrm{int}}/E_{\mathrm{kin}} = -0.3$ at resonance, a value comparable to the $T = 0$ calculation of [29]. The interaction energy becomes less and less negative above 800 G. The discrepancy between the two sets of data in the overlap region can be due to different temperature, confinement, and atom number. The solid/dashed curve in Fig. 4 shows

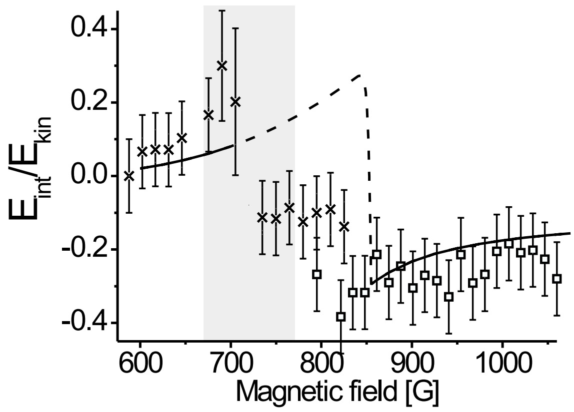

FIG. 4. Ratio of the interaction to kinetic energy versus magnetic field. Open squares: samples prepared above resonance as in Fig. 2. Crosses: average of three sets of data, recorded in conditions of Fig. 3. Solid/dashed curve: mean field calculation for 7×10^4 atoms and kinetic energy $E_{\mathrm{kin}}/k_B = 5.25\ \mu$K. The gray area indicates the region of losses.

the result of a mean-field calculation based on a full energy dependent phase shift for the atom-atom scattering. The interaction and kinetic energies are obtained from a self-consistent distribution function that contains the interparticle interaction and trapping potential. These calculations agree with experiment for $B \geq 850$ G where $a < 0$ and weakly bound molecular states do not exist, and for $B \leq 720$ G ($a > 0$) where such molecules escape from the trap after being formed. For $720 < B < 850$ G ($a > 0$) this approach also gives $E_{\mathrm{int}} > 0$ (dashed curve in Fig. 4). The observed negative ratio $E_{\mathrm{int}}/E_{\mathrm{kin}}$ in this region is obtained including the presence of weakly bound molecules in the gas, in analogy with a negative value of the second virial coefficient for a Boltzmann gas [30]. Details of our calculations will be published elsewhere.

In summary, we have studied a Fermi gas mixture in the strongly interacting regime near a Feshbach resonance. New features have been observed which may be the signature of richer physics, for instance molecule formation [31]. Anisotropic expansions are observed both for repulsive and attractive mean-field interactions, in a moderately degenerate Fermi gas. This is interpreted in terms of collisional hydrodynamics without invoking Fermi superfluidity.

We are grateful to L. Carr, Y. Castin, C. Cohen-Tannoudji, R. Combescot, J. Dalibard, and D. Guéry-Odelin for useful discussions. This work was supported by CNRS, Collège de France, Region Ile de France, EU (TMR network ERB FMRX-CT96- 0002), and CAPES. Laboratoire Kastler Brossel is *Unité de Recherche de l'Ecole Normale Supérieure et de l'Université Pierre et Marie Curie, associée au CNRS.*

*Present Address: Instituto de Física de São Carlos-USP, Caixa Postal 369 CEP 13560-970 São Carlos, Brasil.

[1] Proceedings of the CXL International School of Physics "Enrico Fermi," edited by M. Inguscio, S. Stringari, and C. Wieman (Italian Physical Society, Bologna, 1999).
[2] B. DeMarco and D. Jin, Science **285**, 1703 (1999).
[3] A. G. Truscott *et al.*, Science **291**, 2570 (2001).
[4] F. Schreck *et al.*, Phys. Rev. Lett. **87**, 080403 (2001).
[5] K. Dieckmann *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 203201 (2002).
[6] G. Modugno *et al.*, Science **297**, 2240 (2002).
[7] K. O'Hara*et al.*, Science **298**, 2179 (2002); M. E. Gehm *et al.*, Phys. Rev. A **68**, 011401 (2003).
[8] A. G. Leggett, J. Phys. (Paris) **C7**, 19 (1980).
[9] J. Bardeen, L. Cooper and J. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
[10] H. Feshbach, Ann. Phys. (N.Y.) **5**, 357 (1958); **19**, 287 (1962).
[11] E. Tiesinga, B. J. Verhaar, and H. T. C. Stoof, Phys. Rev. A **47**, 4114 (1993).
[12] M. Holland, S. J. J. M. F. Kokkelmans, M. L. Chiofalo, and R. Walser, Phys. Rev. Lett., **87**, 120406 (2001).
[13] M. Houbiers, H. T. C. Stoof, W. I. McAlexander, and R. G. Hulet, Phys. Rev. A **57**, R1497 (1998).
[14] T. Loftus *et al.*, Phys. Rev. Lett. **88**, 173201 (2002).
[15] K. O'Hara *et al.*, Phys. Rev. A, **66**, 041401(R) (2002).
[16] S. Jochim *et al.*, Phys. Rev. Lett., **89**, 273202 (2002).
[17] C. Menotti, P. Pedri, and S. Stringari, Phys. Rev. Lett. **89**, 250402 (2002).
[18] We derive E_{rel} as if the whole expansion had been ballistic. Simulations show that this approximation induces a maximum error of 3%.
[19] Y. Kagan, E. L. Surkov, and G. V. Shlyapnikov, Phys. Rev. A, **55**, R18 (1997).
[20] E. Arimondo, E. Cerboneschi, and H. Wu, in Ref. [1], p. 573.
[21] C. A. Regal and D. Jin, Phys. Rev. Lett. **90**, 053201 (2003).
[22] I. Shvarchuck *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 270404 (2002).
[23] L. Khaykovich *et al.*, Science **296**, 1290–1293 (2002).
[24] S. Inouye *et al.*, Nature (London) **392**, 151 (1998).
[25] Modification of this formula in the strongly degenerate regime; see R. Combescot, cond-mat/0302209.
[26] In an adiabatic transformation of the gas, the phase space density is constant during the time of flight.
[27] G. V. Shlyapnikov, in *Proceedings of the 18th International Conference on Atomic Physics*, edited by H. R. Sadeghpour, E. J. Heller, and D. E. Pritchard (World Scientific, Singapore, 2002).
[28] D. S. Petrov, Phys. Rev. A **67**, 010703 (2003); L. Pricoupenko, cond-mat/0006263.
[29] H. Heiselberg, Phys. Rev. A **63**, 043606 (2001).
[30] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics*, Part 1 (Pergamon Press, Oxford, 1980); L. P. Pitaevskii and S. Stringari (private communication).
[31] E. A. Donley, N. R. Claussen, S. T. Thompson, and W. E. Wieman, Nature (London) **417**, 529 (2002).

Production of Long-Lived Ultracold Li_2 Molecules from a Fermi Gas

J. Cubizolles,[1] T. Bourdel,[1] S. J. J. M. F. Kokkelmans,[1] G. V. Shlyapnikov,[1,2,3] and C. Salomon[1]
[1]*Laboratoire Kastler Brossel, Ecole Normale Supérieure, 24 rue Lhomond, 75231 Paris 05, France*
[2]*FOM Institute AMOLF, Kruislaan 407, 1098 SJ Amsterdam, The Netherlands*
[3]*Russian Research Center, Kurchatov Institute, Kurchatov Square, 123182 Moscow, Russia*
(Received 1 August 2003; published 8 December 2003)

We create weakly bound Li_2 molecules from a degenerate two component Fermi gas by sweeping a magnetic field across a Feshbach resonance. The atom-molecule transfer efficiency can reach 85% and is studied as a function of magnetic field and initial temperature. The bosonic molecules remain trapped for 0.5 s and their temperature is within a factor of 2 from the Bose-Einstein condensation temperature. A thermodynamical model reproduces qualitatively the experimental findings.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.91.240401 PACS numbers: 03.75.Ss, 05.30.Fk, 32.80.Pj, 34.50.–s

Feshbach resonances constitute a unique tool to tune the microscopic interactions in ultracold bosonic and fermionic gases [1–3]. These resonances arise when the total energy of a pair of colliding atoms matches the energy of a bound state of another hyperfine manifold, leading to the resonant occupation of this state during the collision. Thus, by means of an external magnetic field, one is able to change the magnitude and sign of the scattering length. In bosonic samples, the collapse of Bose-Einstein condensates (BEC) for negative scattering length [4], soliton formation [5,6], and coherent oscillations between an atomic condensate and molecules [7] have been observed. For fermions with attractive interaction, the superfluid transition temperature is predicted to be maximum near a Feshbach resonance [8–12].

In this Letter, we give another striking example of the control of interactions in a Fermi gas. We perform time-dependent experiments near a Feshbach resonance to produce in a reversible manner ultracold and trapped molecules from a quantum degenerate fermionic ^{6}Li gas. The production efficiency exceeds 80% and the observed molecule lifetime reaches half a second. The phase-space density of these bosonic molecules is on the order of 1, the highest value reported thus far. Using a similar method with fermionic ^{40}K atoms, the JILA group recently reported molecule production with a lifetime of 1 ms, atom to molecule conversion efficiency of 50% and direct measurement of the molecular binding energy [13]. Molecules have also recently been produced from ^{87}Rb and ^{133}Cs condensates [14,15], from a cold ^{133}Cs cloud [16]. Molecule formation has also been achieved through one-photon or two-photon photoassociation but with a considerably lower phase-space density than reported here [17]. Our work paves the way to Bose-Einstein condensation of molecules and to the study of the crossover between the regime of molecular BEC and the regime of superfluid BCS pairing in Fermi systems [8–12].

In ^{6}Li a broad ($\simeq$100 G) Feshbach resonance exists between the two Zeeman sublevels of the hyperfine ground state : $|1/2, -1/2\rangle$ and $|1/2, 1/2\rangle$ at 810 G, see Fig. 1 [18,19]. In a recent study of this Feshbach resonance, we have reported an anomalous negative value for the gas interaction energy between 700 G and 810 G, i.e., below resonance, where the scattering length a is positive [19]. We suggested that this could be due to the presence of weakly bound molecules confined simultaneously with the cloud of ultracold fermions, and a recent theoretical paper explains our results [20].

The method used here to produce molecules is illustrated in Fig. 1 and was suggested for Bose gases in [21–23]. It consists in scanning over a Feshbach resonance from the region of attractive interaction ($a < 0$) to region 2 in Fig. 1, where a is large and positive, and where a weakly bound molecular state exists with energy $E_b = -\hbar^2/ma^2$ (where m is the atomic mass). It is thus energetically favorable to populate this bound state. Having

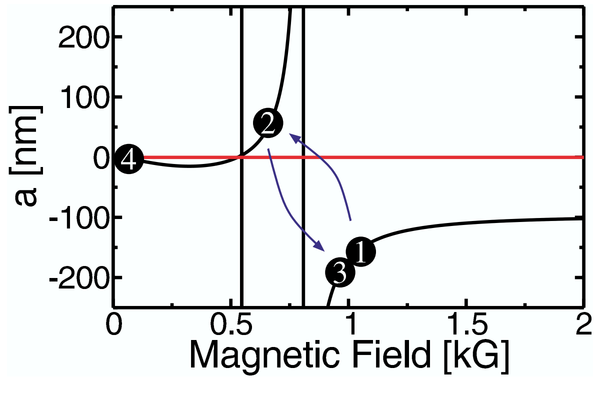

FIG. 1 (color online). Calculated scattering length a versus magnetic field for the ^{6}Li $|F, m_F\rangle = |1/2, 1/2\rangle$, $|1/2, -1/2\rangle$ mixture near the 810 G Feshbach resonance. Scanning over the resonance from 1 to 2 in 50 ms produces cold and trapped molecules with an efficiency up to 85%, resulting in an almost complete disappearance of the atomic signal at 2. Reversing then the scan to the initial position reestablishes the initial atomic signal. In all cases, atoms are detected and imaged at position 4 after abrupt switch-off of the B field.

twice the polarizability of individual atoms, the molecules are expected to be confined in an optical dipole trap with the same oscillation frequencies as atoms and twice the trap depth.

Using the setup described in [19], we prepare $N_1 = N_\uparrow + N_\downarrow = 1.5 \times 10^5$ atoms in a 50(10)% mixture of $|1/2, -1/2\rangle$ and $|1/2, 1/2\rangle$ in a crossed Nd:YAG dipole trap at $B = 1060$ G where the scattering length between $|1/2, -1/2\rangle$ and $|1/2, 1/2\rangle$ is large and negative $a = -150$ nm (position 1 in Fig. 1). For a power of 1.53 W (4.3 W) in the horizontal (vertical) trapping beam propagating along Ox (Oy), oscillation frequencies are $\omega_x/2\pi = 2.9(3)$ kHz, $\omega_y/2\pi = 5.9(5)$ kHz, and $\omega_z/2\pi = 6.5(6)$ kHz. By evaporation in the optical trap, the temperature T of the gas mixture can be tuned between 0.2 and $0.5T_F$, where T_F is the Fermi temperature defined by $T_F = \hbar\bar{\omega}(3N_1)^{1/3}/k_B$ and $\overline{\omega} = (\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3}$.

The Fermi gas quantum degeneracy is measured through analysis of absorption images after abrupt (20 μs) switch-off of the magnetic field and time of flight expansion of the cloud. Free ^{6}Li atoms are detected at zero magnetic field, for which $a \simeq 0$, using laser light tuned to the D2 line, position 4 in Fig. 1. Having prepared the degenerate Fermi gas at position 1, we sweep the magnetic field in 50 ms to position 2 where a is large and positive, the region where a weakly bound molecular state exists. Absorption images indeed reveal that the number of atoms N_2 as counted after B switch-off to position 4 as explained above, has dramatically decreased to $\simeq$20% of the initial number N_1. After letting the system at position 2 for a variable wait time t_w between 0 and 5 s, we sweep the magnetic field back to position 1 in 50 ms and count the number of atoms, N_3, after this round-trip through resonance.

Surprisingly, when position 2 is at 689 G and $t_w = 0$, we find $N_3 \simeq N_1$, indicating that no loss has occurred in 100 ms. This proves that the decrease in detected atom number at position 2 is not due to losses. We are thus led to conclude that (i) at position 2, 80% of the atoms were in a molecular bound state which is not detected using light resonant with the atoms at position 4; (ii) the atom-to-molecule formation process is reversible. $(N_3 - N_2)/2$ represents thus the number of molecules at position 2.

The relative fraction of atoms bound in a molecule, $(N_3 - N_2)/N_3$, and the temperature of the atoms at position 2 and position 3 are plotted in Fig. 2 as a function of the magnetic field at position 2. The initial parameters at 1060 G for this experiment are $T = 4.7$ μK, $T_F = 11$ μK, and $N_1 = 8\,10^4$. The frequencies of the trap are $\omega_x/2\pi = 2.2(2)$ kHz, $\omega_y/2\pi = 4.6(4)$ kHz, $\omega_z/2\pi = 5.1(5)$ kHz. One observes that very few molecules are detected above 0.77 kG. When decreasing the magnetic field, the fraction of molecules increases up to 60%. Below 650 G, losses become important and the molecular fraction decreases, an effect that we will study below.

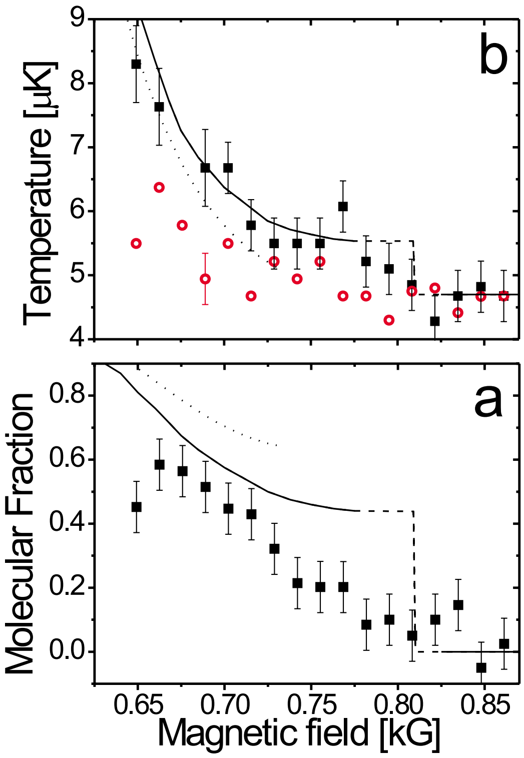

FIG. 2 (color online). (a) Fraction of atoms in the molecular bound state, $(N_3 - N_2)/N_3$, versus magnetic field at position 2 in Fig. 1. (b) Corresponding atom temperature at position 2 (squares) and position 3 (circles). Solid (dotted) line corresponds to the noninteracting (interacting) thermodynamical model described in the text.

A key parameter in our detection scheme is the switch-off time (20 μs) of the Feshbach magnetic field from position 2. Indeed, the molecules may or may not dissociate in this process. Molecules will dissociate if the relative rate of change of the binding energy $dE_b/E_b dt$ is greater than the oscillation pulsation $E_b/\hbar$. So, the dissociation of molecules is governed by the parameter $\alpha = \hbar dE_b/E_b^2 dt$. If $\alpha \gg 1$, they dissociate and appear as free atoms in the absorption image. Our detection scheme is unable to prove molecule formation. On the contrary, if the binding energy is sufficiently large at position 2 ($\alpha \ll 1$), the molecular state follows adiabatically the change of B to a deeper bound state which is off-resonant with the detection laser. In this case, $N_3 > N_2$ is the signature of molecule formation.

For $B = 700$ G, one has $\alpha \simeq 1$. Reducing the rate dB/dt by a factor of $\simeq 500$, the threshold for molecule detection is shifted to 800 G, as expected from the expression of α and the position of the Feshbach resonance at 810 G [19]. As a second consequence of the role of the switch-off time, we attribute the decrease of the molecular fraction above 720 G in Fig. 2(a) to the crossover between the adiabatic and nonadiabatic regimes.

The temperature of the atoms at position 2 and position 3 is plotted in Fig. 2(b). A decrease of the magnetic field increases the binding energy of the molecules. Therefore, the molecular fraction increases and so does the temperature. However, sweeping back the magnetic field to the initial position, the temperature returns close to its initial value, demonstrating the reversibility of the molecular formation process. According to [24], in our experiment three-body recombination to the weakly bound state occurs at a rate greater than 10^4 Hz (for $B > 665$ G) and is therefore responsible for molecule formation. Moreover, the atom-atom, atom-molecule, and molecule-molecule [25] collision rates are also large compared to the rate at which the resonance is scanned. Consequently, the system remains close to thermal equilibrium. During the formation of a molecule in a three-body recombination process, the binding energy is converted into kinetic energy. Therefore the increase of temperature in Fig. 2(b), as a decreases, is expected.

Interestingly, the efficiency of molecule formation strongly depends on the trap depth and reaches values up to 80 % in Fig. 3, the highest efficiency reported thus far. The trap depth is slowly (800 ms) reduced at $B = 1060$ G, before the magnetic field sweep through resonance. The gas temperature and the Fermi temperature decrease by evaporation and adiabatic cooling due to the reduction of the trap oscillation frequencies. At 689 G, $a = 78$ nm, $E_b/k_B = 12\ \mu$K. When reducing the trap depth, T and T_F become small compared to E_b and the molecular fraction increases towards 1. Other experiments show that both evaporation (reduction of the ratio T/T_F), and adiabatic cooling (reduction of T and T_F by the same factor) effectively lead to an increase of the molecular fraction. For instance, at constant $T_F = 11\ \mu$K, as the temperature is decreased from $0.5T_F$ to $0.3T_F$, we find that the molecular fraction at 689 G increases from 40% to 65%. Similarly, at constant $T/T_F = 0.3$, as T varies from 4.5 μK to 1.8 μK, it increases from 50% to 85%.

Our results can be understood within a thermodynamical model assuming that atoms and molecules are in equilibrium in a trap during the magnetic field sweep [20]. We assume an adiabatic sweep, entropy is then conserved and calculated for the initial situation where no molecules are present at $B = 1060$ G. The atom-atom, atom-molecule, and molecule-molecule interactions were either neglected (solid line in Fig. 2), or included via a mean field contribution proportional to a [24,25], in the regime where it is allowed (dotted line). The molecular fraction is then determined by a set of two parameters T/T_F and E_b/T_F. As the binding energy gets more negative, the fraction of molecules increases since the molecular state becomes energetically more favorable. Moreover, the temperature increases as each molecule formation event transfers the binding energy into kinetic energy. Both models agree fairly well with our data in the region where both the detection of molecules is efficient and losses are unimportant ($660 \lesssim B \lesssim 720$ G). In the interacting case, a perfect agreement is achieved if we allow for a 10% mismatch in the quality of the spin mixture. In the strongly interacting region where $na^3 \geq 1$, the noninteracting model is shown with a dashed line because we do not expect our model of separated gases of fermionic atoms and bosonic molecules to be valid. Those models also account qualitatively for the increase in the molecular fraction with the evaporation in Fig. 3. Indeed, as the trap depth is lowered, T decreases, the ratio E_b/T increases, and the bound state will then have a higher occupancy.

In order to investigate prospects for the formation of a molecular BEC, two questions immediately arise: What are the lifetime and degeneracy parameter of the produced molecular cloud? The decay of the molecules in the optical trap is found by measuring the quantity $(N_3 - N_2)/2$ as a function of the wait time t_w at position 2 before returning to 3 for the detection process. Figure 4 presents the number of remaining molecules as a function of the time elapsed at point 2 in a trap with frequencies $\omega_x/2\pi = 0.95(10)$ kHz, $\omega_y/2\pi = 2.0(2)$ kHz, $\omega_z/2\pi = 2.2(2)$ kHz. In Figs. 4(a) and 4(b), the initial temperatures at position 1 are the same, 1.1 μK $= 0.3T_F$. Figure 4(a) corresponds to $B = 689$ G, $a = 78$ nm, $E_b/k_B = 12\ \mu$K,

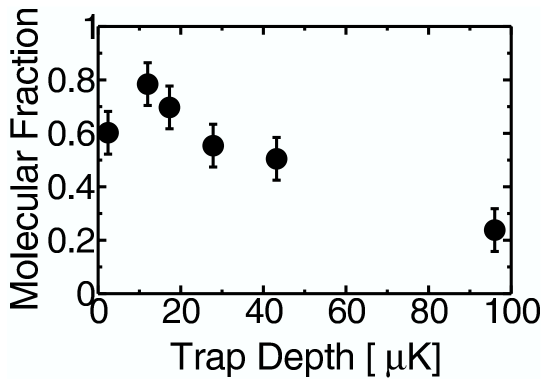

FIG. 3. Fraction of atoms bound in a molecule as a function of the depth of the dipole trap for $B = 689$ G, $a = 78$ nm, $E_b = 12\ \mu$K.

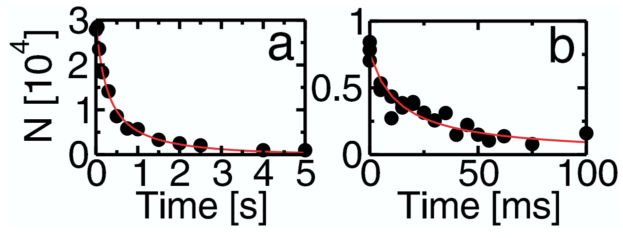

FIG. 4 (color online). Decay of Li_2 molecules in the optical trap for two values of the magnetic field: (a) $B = 689$ G, $a = 78$ nm; (b) $B = 636$ G, $a = 35$ nm. Note the difference in time scales. Solid lines are fits with two-body and one-body processes giving initial time constants of 500 ms in (a) and 20 ms in (b).

whereas Fig. 4(b) corresponds to $B = 636$ G, $a = 35$ nm, and $E_b/k_B = 60\ \mu$K. The initial fraction of unpaired atoms (not engaged in a molecule) is 17% in (a) and 25% in (b). For a change in a by the modest factor of 2.2, the two samples exhibit strikingly different lifetimes. Decays are well fitted by two-body and one-body loss processes with initial lifetimes of $\simeq 500$ ms in (a) (689 G) and 20 ms in (b) whereas the one-body decay exceeds 4 s.

A strong decrease in the lifetime of molecules with decreasing a is expected assuming collisional relaxation to deep bound states [25]. However, the observed factor of 25 in lifetimes is surprisingly large. At 689 G, we can evaluate the two-body loss rate to be $G = 2.4^{+3.2}_{-1.6} \times 10^{-13}$ cm^3 s^{-1}. At 636 G, we have initially $N_3 \simeq 0.3 N_1$. These fast losses indicate that very likely some evaporation is involved in the limited lifetime and that the system has not reached thermal equilibrium. Therefore, the two-body loss rate cannot be safely estimated.

Let us now evaluate the phase-space density of the trapped molecules. In Fig. 2, at 689 G, there are 1.8×10^4 molecules, confined with 3.3×10^4 atoms. The measured atom temperature is $T_{at} = 6.7\ \mu$K. Assuming thermal equilibrium between atoms and molecules, $T_{at} = T_m$ for magnetic fields above $\simeq 650$ G, we obtain the peak density of molecules $n_m \simeq 4 \times 10^{13}$ cm^{-3}. Then the critical temperature for molecule condensation is reduced due to the interactions and is 3.5 μK giving $T/T_C \simeq 2$. Since $n_m a_m^3 \simeq 5 \times 10^{-3} \ll 1$ with $a_m = 0.6a = 47$ nm [25], the molecular gas is in the dilute regime and the mean distance between molecules is larger than the typical size of a molecule a. In fact, for all data between 675 and 750 G, the phase-space density of the molecules is not far from the condensation point. Since, the lifetime of the molecules, 500 ms, is long when compared to the molecule-molecule elastic collision time $1/(n_m 8\pi a_m^2 v_m) \simeq 3\ \mu$s (for $a_m = 47$ nm), it should be possible to evaporate the molecules further to reach the Bose-Einstein condensation threshold.

In summary, we have produced long-lived and trapped Li_2 dimers. The atom-molecule conversion efficiency can approach 1 when the Fermi quantum degeneracy is strong. The lifetime of the trapped molecules strongly depends on the scattering length. Current research concentrates on evaporation towards molecular BEC. Prospects for producing superfluid Fermi mixtures and for investigating the transition between molecular condensates and superfluid Fermi gases are promising [11,12,25,26]. Long lifetimes in ^{6}Li [27,28] and ^{40}K [29] dimers have also been recently observed.

We are grateful to D. S. Petrov, S. Stringari, Y. Castin, R. Combescot, and J. Dalibard for useful discussions. This work was supported by CNRS, Collège de France, and Région Ile de France. S. Kokkelmans acknowledges a Marie Curie grant from the E.U. under Contract No. MCFI-2002-00968. Laboratoire Kastler Brossel is *Unité de Recherche de l'Ecole Normale Supérieure et de l'Université Pierre et Marie Curie, associée au CNRS.*

[1] H. Feshbach, Ann. Phys. (N.Y.) **5**, 357 (1958); **19**, 287 (1962).
[2] See, for instance, *Ultracold Matter*, Nature Insight 416 (Macmillan Publishers, England, 2002).
[3] S. Inouye *et al.*, Nature (London) **392**, 151 (1998).
[4] E. A. Donley *et al.*, Nature (London) **412**, 295 (2001).
[5] L. Khaykovich *et al.*, Science **296**, 1290 (2002).
[6] K. E. Strecker, G. B. Partridge, A. G. Truscott, and R. G. Hulet, Nature (London) **417**, 150 (2002).
[7] E. A. Donley, N. R. Claussen, S. T. Thompson, and C. E. Wieman, Nature (London) **417**, 529 (2002).
[8] P. Nozières and S. Schmitt-Rink, J. Low Temp. Phys. **59**, 195 (1985).
[9] C. A. R. Sá de Melo, M. Randeria, and J. R. Engelbrecht, Phys. Rev. Lett. **71**, 3202 (1993).
[10] M. Holland, S. J. J. M. F. Kokkelmans, M. L. Chiofalo, and R. Walser, Phys. Rev. Lett. **87**, 120406 (2001).
[11] Y. Ohashi and A. Griffin, Phys. Rev. Lett. **89**, 130402 (2002).
[12] J. N. Milstein, S. J. J. M. F. Kokkelmans, and M. J. Holland, Phys. Rev. A **66**, 043604 (2002).
[13] C. A. Regal, C. Ticknor, J. L. Bohn, and D. S. Jin, Nature (London) **424**, 47 (2003).
[14] S. Dürr, T. Volz, A. Marte, and G. Rempe, cond-mat/0307440.
[15] J. Herbig *et al.*, Science **301**, 1510 (2003).
[16] C. Chin, A. J. Kerman, V. Vuletic, and S. Chu, Phys. Rev. Lett. **90**, 033201 (2003).
[17] R. Wynar, R. Freeland, D. Han, C. Ryu, and D. Heinzen, Science **287**, 1016 (2000).
[18] S. Gupta *et al.*, Science **300**, 1723 (2003).
[19] T. Bourdel *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 020402 (2003).
[20] S. J. J. M. F. Kokkelmans, G. V. Shlyapnikov, and C. Salomon, cond-mat/0308384.
[21] E. Timmermans, P. Tommasini, R. Cote, M. Hussein, and A. J. Kerman, cond-mat/9805323.
[22] F. A. van Abeelen and B. J. Verhaar, Phys. Rev. Lett. **83**, 1550 (1999).
[23] F. H. Mies, E. Tiesinga, and P. S. Julienne, Phys. Rev. A **61**, 022721 (2000).
[24] D. S. Petrov, Phys. Rev. A **67**, 010703(R) (2003).
[25] D. S. Petrov C. Salomon, and G. V. Shlyapnikov, condmat/0309010.
[26] L. D. Carr, Y. Castin, and G. V. Shlyapnikov, cond-mat/0308306.
[27] K. E. Strecker, G. B. Partridge, and R. G. Hulet, Phys. Rev. Lett. **91**, 080406 (2003).
[28] S. Jochim *et al.*, following Letter, Phys. Rev. Lett. **91**, 240402 (2003).
[29] C. A. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin, cond-mat/0308606.

Experimental Study of the BEC-BCS Crossover Region in Lithium 6

T. Bourdel, L. Khaykovich, J. Cubizolles, J. Zhang, F. Chevy,
M. Teichmann, L. Tarruell, S. J. J. M. F. Kokkelmans, and C. Salomon
Laboratoire Kastler-Brossel, ENS, 24 rue Lhomond, 75005 Paris
(Dated: May 25, 2004)

We report Bose-Einstein condensation of weakly bound $^6Li_2$ molecules in a crossed optical trap near a Feshbach resonance. We measure a molecule-molecule scattering length of 170^{+100}_{-60} nm at 770 G, in good agreement with theory. We study the 2D expansion of the cloud and show deviation from hydrodynamic behavior in the BEC-BCS crossover region.

PACS numbers: 03.75.Ss, 05.30.Fk, 32.80.Pj, 34.50.-s

By applying a magnetic field to a gas of ultra-cold atoms, it is possible to tune the strength and the sign of the effective interaction between particles. This phenomenon, known as Feshbach resonance, offers in the case of fermions the unique possibility to study the crossover between situations governed by Bose-Einstein and Fermi-Dirac statistics. Indeed, when the scattering length a characterizing the 2-body interaction at low temperature is positive, the atoms are known to pair in a bound molecular state. When the temperature is low enough, these bosonic dimers can form a Bose-Einstein condensate (BEC) as observed very recently in ^{40}K [1] and ^{6}Li [2, 3]. On the side of the resonance where a is negative, one expects the well known Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) model for superconductivity to be valid. However, this simple picture of a BEC phase on one side of the resonance and a BCS phase on the other is valid only for small atom density n. When $n|a|^3 \gtrsim 1$ the system enters a strongly interacting regime that represents a challenge for many-body theories [4, 5, 6] and that now begins to be accessible to experiments [7, 8, 9].

In this letter, we report on Bose-Einstein condensation of ^{6}Li dimers in a crossed optical dipole trap and a study of the BEC-BCS crossover region. Unlike all previous observations of molecular BEC made in single beam dipole traps with very elongated geometries, our condensates are formed in nearly isotropic traps. Analyzing free expansions of pure condensates with up to 4×10^4 molecules, we measure the molecule-molecule scattering length $a_\mathrm{m} = 170^{+100}_{-60}$ nm at a magnetic field of 770 gauss. This measurement is in good agreement with the value deduced from the resonance position [9] and the relation $a_\mathrm{m} = 0.6\,a$ of ref. [10]. Combined with tight confinement, these large scattering lengths lead to a regime of strong interactions where the chemical potential μ is on the order of $k_\mathrm{B}T_\mathrm{C}$ where $T_\mathrm{C} \simeq 1.5\,\mu$K is the condensation temperature. As a consequence, we find an important modification of the thermal cloud time of flight expansion induced by the large condensate mean field. Moreover, the gas parameter $n_\mathrm{m}a_\mathrm{m}^3$ is no longer small but on the order of 0.3. In this regime, the validity of mean field theory becomes questionable [11, 12, 13]. We show, in particular, that the anisotropy and gas energy released during expansion varies monotonically across the Feshbach resonance.

Our experimental setup has been described previously [14, 15]. A gas of ^{6}Li atoms is prepared in the absolute ground state $|1/2, 1/2\rangle$ in a Nd-YAG crossed beam optical dipole trap. The horizontal beam (resp. vertical) propagates along x (y), has a maximum power of $P_o^h = 2$ W ($P_o^v = 3.3$ W) and a waist of $\sim 25\,\mu$m ($\sim 40\,\mu$m). At full power, the ^{6}Li trap oscillation frequencies are $\omega_x/2\pi = 2.4(2)$ kHz, $\omega_y/2\pi = 5.0(3)$ kHz, and $\omega_z/2\pi = 5.5(4)$ kHz, as measured by parametric excitation, and the trap depth is $\sim 80\,\mu$K. After sweeping the magnetic field B from 5 G to 1060 G, we drive the Zeeman transition between $|1/2, 1/2\rangle$ and $|1/2, -1/2\rangle$ with a 76 MHz RF field to prepare a balanced mixture of the two states. As measured very recently [9], the Feshbach resonance between these two states is peaked at 822(3) G, and for B=1060 G, $a = -167$ nm. After 100 ms the coherence between the two states is lost and plain evaporation provides $N_\uparrow = N_\downarrow = N_\mathrm{tot}/2 = 1.5 \times 10^5$ atoms at $10\,\mu$K$=0.8\,T_\mathrm{F}$, where $k_\mathrm{B}T_\mathrm{F} = \hbar^2 k_\mathrm{F}^2/2m = \hbar(3N_\mathrm{tot}\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3} = \hbar\bar{\omega}(3N_\mathrm{tot})^{1/3}$ is the Fermi energy. Lowering the intensity of the trapping laser to $0.1\,P_0$, the Fermi gas is evaporatively cooled to temperatures T at or below $0.2\,T_\mathrm{F}$ and $N_\mathrm{tot} \approx 7 \times 10^4$.

Then, sweeping the magnetic field to 770 G in 200 ms, the Feshbach resonance is slowly crossed. In this process atoms are reversibly transformed into cold molecules [14, 16] near the BEC critical temperature as presented in figure 1a. The onset of condensation is revealed by bimodal and anisotropic momentum distributions in time of flight expansions of the molecular gas. These images are recorded as follows. At a fixed magnetic field, the optical trap is first switched off. The cloud expands typically for 1 ms and then the magnetic field is increased by 100 G in 50 μs.This converts the molecules back into free atoms above resonance without releasing their binding energy [3]. Switching the field abruptly off in 10 μs, we detect free ^{6}Li atoms by light absorption near the D2 line. Using this method, expansion images are not altered by the adiabatic following of the molecular state to a deeper bound state during switch-off as observed in our previous work [14]. Furthermore, we check that there are no unpaired atoms before expansion. In figure 1b, a Bose-Einstein condensate of ^{7}Li atoms produced in the same optical trap is presented. The comparison between the condensate sizes after expansion reveals that the mean field interaction and scattering length are much larger for ^{6}Li$_2$ dimers (Fig. 1a) than for ^{7}Li atoms (Fig. 1b).

To measure the molecule-molecule scattering length, we produce pure molecular condensates by taking advantage of our crossed dipole trap. We recompress the horizontal beam to full power while keeping the vertical beam at the low power of $0.035\,P_0^v$ corresponding to a trap depth for molecules $U = 5.6\,\mu$K. Temperature is then limited to $T \leq 0.9\,\mu$K assuming a conservative $\eta = U/k_BT = 6$, whereas the critical temperature increases with the mean oscillation frequency. Consequently, with an axial (resp. radial) trap frequency of 440 Hz (resp. 5 kHz), we obtain $T/T_C^0 \leq 0.3$, where $T_C^0 = \hbar\bar{\omega}(0.82N_{\rm tot}/2)^{1/3}$ =2.7 μK is the non interacting BEC critical temperature. Thus, the condensate should be pure as confirmed by our images. After 1.2 ms of expansion, the radius of the condensate in the x (resp. y) direction is $R_x = 51$ μm ($R_y = 103$ μm). The resulting anisotropy $R_y/R_x = 2.0(1)$ is consistent with the value 1.98 [17] predicted the scaling equations [18, 19]. Moreover, this set of equation leads to an *in-trap* radius $R_x^0 = 26\mu$m (resp. $R_y^0 = 2.75\mu$m). We then deduce the molecule-molecule scattering length from the Thomas-Fermi formula $R_{x,y}^0 = a_{\rm ho}\bar{\omega}/\omega_{x,y}(15N_{\rm tot}a_{\rm m}/2a_{\rm ho})^{1/5}$, with $a_{\rm ho} = \sqrt{\hbar/2m\bar{\omega}}$. Averaging over several images, this yields $a_{\rm m}$ =170^{+100}_{-60} nm at 770 G,. Here, the statistical uncertainty is negligible compared to the systematic uncertainty due to the calibration of our atom number. At this field, we calculate an atomic scattering length of $a = 306$ nm. Combined with the prediction $a_{\rm m} = 0.6\,a$ of [10], we obtain $a_{\rm m} = 183$ nm in good agreement with our measurement. For ^{7}Li, we obtain with the same analysis a much smaller scattering length of a_7=0.65(10) nm at 610 G also in agreement with theory [20].

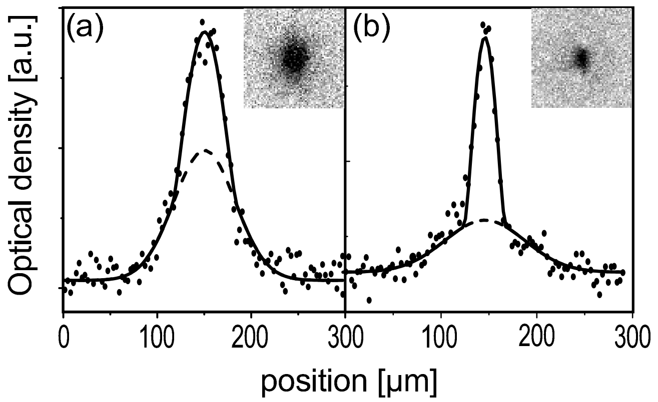

FIG. 1: Onset of Bose-Einstein condensation in a cloud of 2×10^4 ^{6}Li dimers at 770 G (a) and of 2×10^4 ^{7}Li atoms at 610 G (b) in the same optical trap. (a): 1.2 ms expansion profiles along the weak direction x of confinement. (b): 1.4 ms expansion. The different sizes of the condensates reflect the large difference in scattering length $a_{\rm m} = 170$ nm for ^{6}Li dimers and $a_7 = 0.55$ nm for ^{7}Li. Solid line: Gaussian+Thomas-Fermi fit. Dashed line: gaussian component. Condensate fractions are both 28 %. $\omega_x/2\pi = 0.59(4)$ kHz, $\omega_y/2\pi = 1.6(1)$ kHz, and $\omega_z/2\pi = 1.7(1)$ kHz in (a). $\omega_x/2\pi = 0.55(4)$ kHz, $\omega_y/2\pi = 1.5(1)$ kHz, and $\omega_z/2\pi = 1.6(1)$ kHz in (b).

Such large values of $a_{\rm m}$ bring our molecular condensates into a novel regime where the gas parameter $n_{\rm m}a_{\rm m}^3$ is no longer very small. Indeed, $a_{\rm m} = 170$ nm and $n_{\rm m} = 6\times10^{13}$cm^{-3} yield $n_{\rm m}a_{\rm m}^3 = 0.3$. As a first consequence, corrections due to beyond mean field effects [11, 21] or to the underlying fermionic nature of atoms may play a role, since the average spacing between molecules is then of the order of the molecule size $\sim a/2$. Second, even in a mean field approach, thermodynamics is expected to be modified. For instance, in the conditions of Fig. 1a, we expect a large shift of the BEC critical temperature [11, 12, 13]. The shift calculated to first order in $n^{1/3}a$ [12], $\Delta T_C/T_C^0 = -1.4$, is clearly inapplicable and a more refined approach is required [22]. Third, we observe that partially condensed cloud expansions are modified by interactions. Indeed, double structure fits lead to temperatures inconsistent with the presence of a condensate. In Fig. 1, we find $T = 1.6\,\mu$K, to be compared with $T_C^0 = 1.4\,\mu$K, whereas for the ^{7}Li condensate $T = 0.7\,\mu$K=$0.6T_C^0$.

This inconsistency results from the large mean field interaction which modifies the thermal cloud expansion. To get a better estimate of the temperature, we rely on a release energy calculation. We calculate the Bose distribution of thermal atoms in a mexican hat potential that is the sum of the external potential and the repulsive mean field potential created by the condensate. For simplicity we neglect the mean field resulting from the thermal component. The release energy is the sum of the thermal kinetic energy, condensate interaction energy, and Hartree-Fock interaction energy between the condensate and thermal cloud. The temperature and chemical potential are then adjusted to fit the measured atom number and release energy. For figure 1a, we obtain a condensate fraction of 28 % and $\mu = \hbar\bar{\omega}/2(15N_{tot}a_{\rm m}/2a_{\rm ho})^{2/5} = 0.45\,\mu$K. The temperature $T = 1.1\,\mu$K is then found below $T_C^0 = 1.4\,\mu$K.

The condensate lifetime is typically $\sim$300 ms at 715 G ($a_{\rm m} = 66$ nm) and $\sim$3 s at 770 G ($a_{\rm m} = 170$ nm), whereas for $a = -167$ nm at 1060 G, the lifetime exceeds 30 s. On the BEC side, the molecule-molecule loss rate constant is $G = 0.26^{+0.08}_{-0.06}\times10^{-13}$ cm^3/s at 770 G and $G = 1.75^{+0.5}_{-0.4}\times10^{-13}$ cm^3/s at 715 G with the fit procedure for condensates described in [23]. Combining similar results for four values of the magnetic field ranging from 700 G to 770 G, we find $G \propto a^{-1.9\pm0.8}$. Our data are in agreement with the theoretical prediction $G \propto a^{-2.55}$ of ref. [10] and with previous measurements of G in a thermal gas at 690 G [14] or in a BEC at 764 G [8]. A similar power law was also found for ^{40}K [24].

We now present an investigation of the crossover from a Bose-Einstein condensate to an interacting Fermi gas (Fig. 2 and 3). We prepare a nearly pure condensate with 3.5×10^4 molecules at 770 G and recompress the trap to frequencies of $\omega_x = 2\pi \times 830$ Hz, $\omega_y = 2\pi \times 2.4$ kHz, and $\omega_z = 2\pi \times 2.5$ kHz. The magnetic field is then slowly swept at a rate of 2 G/ms to various values across the Feshbach resonance. The 2D momentum distribution after a time of flight expansion of 1.4 ms is then detected as previously.

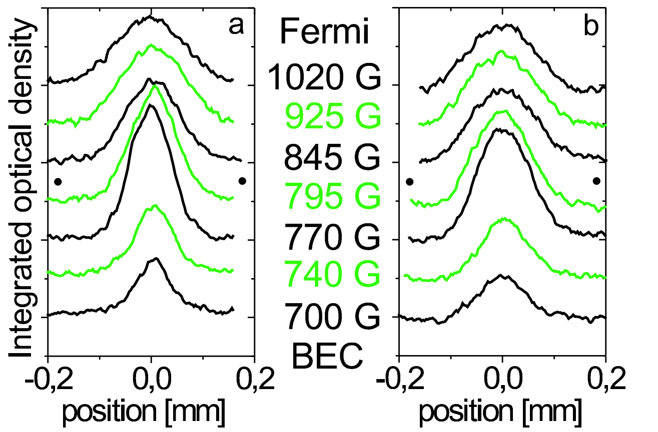

FIG. 2: Integrated density profiles across the BEC-BCS crossover region. 1.4 ms time of flight expansion in the axial (a) and radial (b) direction. The magnetic field is varied over the whole region of the Feshbach resonance from $a > 0$ ($B < 810$ G) to $a < 0$ ($B > 810$ G). •: Feshbach resonance peak.

Fig. 2 presents the observed profiles (integrated over the orthogonal direction) for different values of the magnetic field. At the lowest field values $B \leq 750$ G, $n_{\rm m}a_{\rm m}^3 \ll 1$, condensates number are relatively low because of the limited molecule lifetime. As B increases, the condensate width gradually increases towards the width of a non interacting Fermi gas, and nothing dramatic happens on resonance. At the highest fields (B$\geq$ 925 G), where $k_{\rm F}|a| \leq 3$, distributions are best fitted with zero temperature Fermi profiles. More quantitatively, Fig. 3b presents both the gas energy released after expansion $E_{\rm rel}$ and the anisotropy η across resonance. These are calculated from gaussian fits to the density after time of flight: $E_{\rm rel} = m(2\sigma_y^2 + \sigma_x^2)/2\tau^2$ and $\eta = \sigma_y/\sigma_x$, where σ_i is the rms width along i, and τ is the time of flight [17]. On the BEC side at 730 G, the measured anisotropy is $\eta \sim$1.6(1) , in agreement with the hydrodynamic prediction, 1.75. It then decreases monotonically to 1.1 at 1060 G on the BCS side. On resonance, at zero temperature, superfluid hydrodynamic expansion is expected [25] corresponding to $\eta = 1.7$. We find however $\eta = 1.35(5)$, indicating a partially hydrodynamic behavior that could be due to a reduced superfluid fraction. On the $a < 0$ side, the decreasing anisotropy would indicate a further decrease of the superfluid fraction that could correspond to the reduction of the condensed fraction of fermionic atom pairs away from resonance observed in [7, 9]. Interestingly, our results differ from that of ref.[26] where hydrodynamic expansion was observed at 910 G in a more elongated trap for $T/T_{\rm F} \simeq 0.1$.

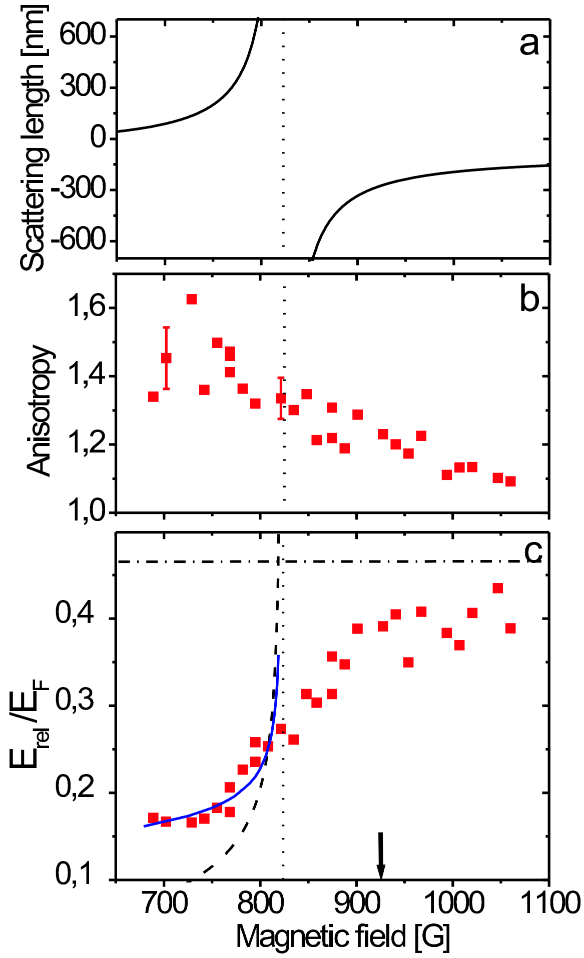

FIG. 3: (a): scattering length between the $|1/2, 1/2\rangle$ and $|1/2, -1/2\rangle$ ^{6}Li states. The Feshbach resonance peak is located at 820 G (dotted line). (b): anisotropy of the cloud,(c): release energy across the BEC-BCS crossover region. In (c), the dot-dashed line corresponds to a $T = 0$ ideal Fermi gas. The dashed curve is the release energy from a pure condensate in the Thomas-Fermi limit. The solid curve corresponds to a finite temperature mean field model described in the text with $T = 0.5\,T_{\rm C}^0$. Arrow: $k_{\rm F}|a| = 3$.

In the BEC-BCS crossover regime, the gas energy released after expansion $E_{\rm rel}$ is also smooth (Fig. 3c). $E_{\rm rel}$

presents a plateau for $B \leq 750\,\mathrm{G}$, and then increases monotonically towards that of a weakly interacting Fermi gas. The plateau is not reproduced by the mean field approach of a pure condensate (dashed line). This is a signature that the gas is not at $T = 0$. It can be understood with the mean field approach we used previously to describe the behavior of the thermal cloud. Since the magnetic field sweep is slow compared to the gas collision rate [14], we assume that this sweep is adiabatic and conserves entropy [27]. We then adjust this entropy to reproduce the release energy at a particular magnetic field, $B = 720\,\mathrm{G}$. The resulting curve as a function of B (solid line in Fig. 3c) agrees well with our data in the range $680\,\mathrm{G} \leq B \leq 800\,\mathrm{G}$, where the condensate fraction is 70%, and the temperature is $T \approx T_\mathrm{C}^0/2 = 1.2\,\mu\mathrm{K}$. This model is limited to $n_m a_\mathrm{m}^3 \lesssim 1$. Near resonance the calculated release energy diverges and clearly departs from the data. On the BCS side, the release energy of a $T = 0$ ideal Fermi gas gives an upper bound for the data (dot-dashed curve), as expected from negative interaction energy and a very cold sample. This low temperature is supported by our measurements on the BEC side and the assumption of entropy conservation through resonance which predicts $T = 0.1\,T_\mathrm{F}$ [27].

On resonance the gas is expected to reach a universal behavior, as the scattering length a is not a relevant parameter any more [5]. In this regime, the release energy scales as $E_\mathrm{rel} = \sqrt{1+\beta} E_\mathrm{rel}^0$, where E_rel^0 is the release energy of the non-interacting gas and β is a universal parameter. From our data at 820 G, we get $\beta = -0.64(15)$. This value is larger than the Duke result $\beta = -0.26 \pm 0.07$ at $910\,\mathrm{G}$ [26], but agrees with that of Innsbruck $\beta = -0.68^{+0.13}_{-0.10}$ at $850\,\mathrm{G}$ [8], and with the most recent theoretical prediction $\beta = -0.56$ [6]. Around $925\,\mathrm{G}$, where $a = -270\,\mathrm{nm}$ and $(k_\mathrm{F}|a|)^{-1} = 0.35$, the release energy curve displays a change of slope. This is a signature of the transition between the strongly and weakly interacting regimes. It is also observed near the same field in [8] through *in situ* measurement of the trapped cloud size. Interestingly, the onset of resonance condensation of fermionic atom pairs observed in ^{40}K [7] and ^{6}Li [9], corresponds to a similar value of $k_\mathrm{F}|a|$.

In summary, we have explored the whole region of the ^{6}Li Feshbach resonance, from a Bose-Einstein condensate of fermion dimers to an ultra-cold interacting Fermi gas. The extremely large scattering length between molecules, that we have measured leads to novel BEC conditions. We have observed hydrodynamic expansions on the BEC side and non-hydrodynamic expansions at and above resonance. We suggest that this effect results from a reduction of the superfluid fraction and we point to the need of a better understanding of the dynamics of an expanding Fermi gas.

We are grateful to Y. Castin, C. Cohen-Tannoudji, R. Combescot, J. Dalibard, G. Shlyapnikov, and S. Stringari for fruitful discussions. This work was supported by CNRS, Collège de France, and Région Ile de France. S. Kokkelmans acknowledges a Marie Curie grant from the E.U. under contract number MCFI-2002-00968. Laboratoire Kastler Brossel is *Unité de recherche de l'Ecole Normale Supérieure et de l'Université Pierre et Marie Curie, associée au CNRS.*

[1] M. Greiner, C. A. Regal, and D. S Jin, Nature **426**, 537 (2003).
[2] S. Jochim *et al.*, Science **302**, 2101 (2003).
[3] M. W. Zwierlein *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 250401 (2003).
[4] A.J. Leggett, J. Phys. C. (Paris) **41**,7 (1980); P. Nozières and S. Schmitt-Rink, J. Low Temp. Phys. **59** 195 (1985); C. Sá de Melo, M. Randeria, and J. Engelbrecht, Phys. Rev. Lett. **71**, 3202 (1993); M. Holland, S. Kokkelmans, M. Chiofalo, and R. Walser, Phys. Rev. Lett. **87** 120406 (2001); Y. Ohashi and A. Griffin, Phys. Rev. Lett. **89**, 130402 (2002); J. N. Milstein, S. J. J. M. F. Kokkelmans, and M. J. Holland, Phys. Rev. A **66**, 043604 (2002); R. Combescot, Phys. Rev. Lett. **91**, 120401 (2003); G. M. Falco and H. T. C. Stoof, cond-mat/0402579.
[5] H. Heiselberg, Phys. Rev. A **63**, 043606 (2001).
[6] J. Carlson, S-Y Chang, V. R. Pandharipande, and K. E. Schmidt, Phys. Rev. Lett. **91**, 050401 (2003).
[7] C. A Regal, M. Greiner, and D. S. Jin Phys. Rev. Lett. **92**, 040403 (2004).
[8] M. Bartenstein *et al.*, cond-mat/0401109.
[9] M. Zwierlein *et al.*, cond-mat/0403049.
[10] D. S. Petrov, C. Salomon, and G. V. Shlyapnikov, cond-mat/0309010 (2003).
[11] G. Baym *et al.*, EPJ B **24**, 107 (2001)
[12] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, Rev. of Mod. Phys. **91**, 463 (1999).
[13] F. Gerbier *et al.*, Phys. Rev. Lett. **92**, 030405 (2004).
[14] J. Cubizolles *et al*, Phys. Rev. Lett. **91** 240401 (2003).
[15] T. Bourdel *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 020402 (2003).
[16] C. A. Regal, C. Ticknor, J. L. Bohn, and D. S. Jin, Nature **424**, 47 (2003).
[17] We correct our data for the presence of a magnetic field curvature which leads to an anti-trapping frequency of 100 Hz at 800 G along x.
[18] Yu. Kagan, E. L. Surkov, and G. V. Shlyapnikov, Phys. Rev. A **54**, R1753 (1996).
[19] Y. Castin and R. Dum, Phys. Rev. Lett. **77**, 5315 (1996).
[20] L. Khaykovich *et al.*, Science **296**, 1290 (2002).
[21] L. Pitaevskii and S. Stringari, Phys. Rev. Lett. **81**, 4541(1998).
[22] A mean field self-consistent calculation of the molecular density profile in the trap at T_C leads to $T_\mathrm{C}^\mathrm{mf} = 0.58 T_\mathrm{C}^0 \approx 0.8\,\mu\mathrm{K}$. S. Kokkelmans, to be published.
[23] J. Söding, *et al*, Applied Physics **B69**, 257 (1999)
[24] C. Regal, M. Greiner and D. Jin, Phys. Rev. Lett. **92**, 083201 (2004).
[25] C. Menotti, P. Pedri, and S. Stringari, Phys. Rev. Lett. **89**, 250402 (2002).
[26] K. O'Hara *et al.*, Science **298**, 2179 (2002). M. Gehm *et al.*, Phys. Rev. A **68**, 011401 (2003).
[27] L. D. Carr, G. V. Shlyapnikov, and Y. Castin, cond-mat/0308306.

PHYSICAL REVIEW A **70**, 030702(R) (2004)

P-wave Feshbach resonances of ultracold ^{6}Li

J. Zhang,[1,2] E. G. M. van Kempen,[3] T. Bourdel,[1] L. Khaykovich,[1,4] J. Cubizolles,[1] F. Chevy,[1] M. Teichmann,[1] L. Tarruell,[1] S. J. J. M. F. Kokkelmans,[1,3] and C. Salomon[1]
[1]*Laboratoire Kastler-Brossel, ENS, 24 rue Lhomond, 75005 Paris, France*
[2]*SKLQOQOD, Institute of Opto-Electronics, Shanxi University, Taiyuan 030006, People's Republic of China*
[3]*Eindhoven University of Technology, P.O. Box 513, 5600 MB Eindhoven, The Netherlands*
[4]*Department of Physics, Bar Ilan University, Ramat Gan 52900, Israel*
(Received 18 June 2004; published 30 September 2004)

We report the observation of three p-wave Feshbach resonances of ^{6}Li atoms in the lowest hyperfine state $f=1/2$. The positions of the resonances are in good agreement with theory. We study the lifetime of the cloud in the vicinity of the Feshbach resonances and show that, depending on the spin states, two- or three-body mechanisms are at play. In the case of dipolar losses, we observe a nontrivial temperature dependence that is well explained by a simple model.

DOI: 10.1103/PhysRevA.70.030702 PACS number(s): 34.50.−s, 03.75.Ss, 05.30.Fk, 32.80.Pj

In the presence of a magnetic field, it is possible to obtain a quasidegeneracy between the relative energy of two colliding atoms and that of a weakly bound molecular state. This effect, known as a Feshbach resonance, is usually associated with the divergence of the scattering length and is the key ingredient that led to the recent observation of superfluids from fermion atom pairs of ^{6}Li [1–4] and ^{40}K [5]. Up to now these pairs were formed in s-wave channels but it is known from condensed matter physics that fermionic superfluidity can arise through higher angular momentum pairing: p-wave Cooper pairs have been observed in ^{3}He [6] and d-wave cooper pairs in high-T_c superconductivity [7]. Although Feshbach resonances involving p or higher partial waves have been found in cold atom systems [8–10], p-wave atom pairs have never been directly observed.

In this paper we report the observation of three narrow p-wave Feshbach resonances of ^{6}Li in the lowest hyperfine state $f=1/2$. We measure the position of the resonance as well as the lifetime of the atomic sample for all combinations $|f=1/2,m_f\rangle+|f=1/2,m_f'\rangle$, henceforth denoted (m_f,m_f'). We show that the position of the resonances are in good agreement with theory. In the case of atoms polarized in the ground state $(1/2,1/2)$, the atom losses are due to three-body processes. We show that the temperature dependence of the losses at resonance cannot be described by the threshold law predicted by [11] on the basis of the symmetrization principle for identical particles. In the case of atoms polarized in $(-1/2,-1/2)$ or that of a mixture $(1/2,-1/2)$, the losses are mainly due to two-body dipolar losses. These losses show a nontrivial temperature dependence that can nevertheless be understood by a simple theoretical model with only one adjustable parameter. In the $(1/2,-1/2)$ channel, we take advantage of a sharp decrease of the two-body loss rate below the Feshbach resonance to present a first evidence for the generation of p-wave molecules.

The p-wave resonances described in this paper have their origin in the same singlet $(S=0)$ bound state that leads to the s-wave Feshbach resonances located at 543 G and ~830 G. The latter has been used to generate stable molecular Bose-Einstein condensates [1–4]. In order to discuss the origin of these resonances, it is useful to introduce the molecular basis quantum numbers S,I, and l, which correspond to the total electron spin $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{s}_1+\boldsymbol{s}_2$, total nuclear spin $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{i}_1+\boldsymbol{i}_2$, and orbital angular momentum $\boldsymbol{l}$. Furthermore, the quantum numbers must fulfill the selection rule

$$S+I+l=\text{even}, \tag{1}$$

which is a result of the symmetrization requirements of the two-body wave function. Since the atomic nuclear spin quantum numbers are $i_1=i_2=1$, and $S=0$, there are two possibilities for the total nuclear spin in combination with an s-wave $(l=0)$ collision: $I=0$ and $I=2$. These two states give rise to the two aforementioned s-wave Feshbach resonances. For p-wave $(l=1)$ collisions only $I=1$ is possible. This bound state may then give rise to the three p-wave Feshbach resonances of Fig. 1. This threshold state does not suffer from exchange decay, and is therefore relatively stable. Our predicted resonance field values B_F (Table I) result from an analysis which takes into account the most recent experimental data available for ^{6}Li. The calculation has been performed for all spin channels (m_f,m_f') and a typical collision energy

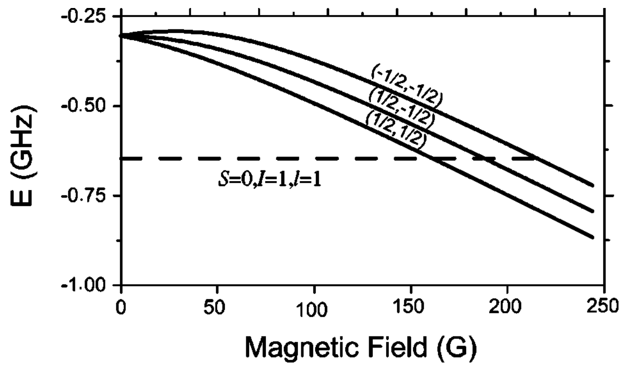

FIG. 1. Coupled channels calculation of p-wave binding energies, which give rise to Feshbach resonances at threshold. The two-atom states (full line) are indicated by their quantum number (m_{f_1},m_{f_2}), while the bound state (dashed line) is labeled by the molecular quantum numbers S,I, and l.

TABLE I. Theoretical and experimental values of the magnetic field B_F at the p-wave Feshbach resonance for ^{6}Li atoms in $|f_1=1/2,m_{f_1}\rangle$ and $|f_1=1/2,m_{f_2}\rangle$.

(m_{f_1},m_{f_2})	Theory (G)	Experiment (G)
$(1/2,1/2)$	159	160.2(6)
$(1/2,-1/2)$	185	186.2(6)
$(-1/2,-1/2)$	215	215.2(6)

of 15 μK. A more detailed analysis will be published elsewhere [12].

Experimentally, we probe these p-wave resonances using the setup described in previous papers [13,14]. After evaporative cooling in the magnetic trap, we transfer $\sim 5\times 10^5$ atoms of ^{6}Li in $|f=3/2,\ m_f=3/2\rangle$ in a far-detuned crossed optical trap at low magnetic field. The maximum power in each arm is $P_h^0=2$ W and $P_v^0=3.3$ W in the horizontal and vertical beam, respectively, and corresponds to a trap depth of $\sim 80\ \mu$K. The oscillation frequencies measured by parametric excitation are, respectively, $\omega_x=2\pi\times 2.4(2)$ kHz, $\omega_y=2\pi\times 5.0(3)$ kHz, $\omega_z=2\pi\times 5.5(4)$ kHz, where the $x(y)$ direction is chosen along the horizontal (vertical) beam. A first radio-frequency (rf) sweep brings the atoms to $|f=1/2,\ m_f=1/2\rangle$ and, if necessary, we perform a second rf transfer to prepare the mixture $(1/2,-1/2)$ or the pure $(-1/2,-1/2)$. The variable magnetic field B is the sum of two independent fields B_0 and B_1. B_0 offers a wide range of magnetic field while B_1 can be switched off rapidly. After the radio-frequency transfer stage, we ramp the magnetic field to $B_0\sim 220$ G with $B_1\sim 8$ G in 100 ms. When needed, we reduce in 100 ms the power of the trapping beams to further cool the atoms. For the coldest samples, we obtain at the end of this evaporation sequence $N\sim 10^5$ atoms at a temperature $\sim 5\ \mu$K. This corresponds to a ratio $T/T_F\sim 0.5$, where $k_BT_F=\hbar(6N\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3}$ is the Fermi energy of the system. To reach the Feshbach resonance, we reduce B_0 in 4 ms to its final value $B_{0,f}\sim B_F$, near the Feshbach resonance. At this stage, we abruptly switch off B_1 so that the total magnetic field is now close to resonance. After a waiting time in the trap $t_{\mathrm{wait}}=50$ ms, we switch off the trapping and the magnetic field and we measure the remaining atom number after a 0.35 ms time of flight.

We show in Fig. 2 the dependence of the atom number on the final value of $B_{0,f}$ in the case of the spin mixture $(1/2,-1/2)$ at a temperature $T\sim 14\ \mu$K. As expected from theory, we observe a sharp drop of the atom number for values of the magnetic field close to 186 G. The other two p-wave Feshbach resonances have a similar loss signature and Table I shows that for all spin channels, the resonance positions are in good agreement with predictions. Note that in Table I the uncertainty is mainly due to the magnetic field calibration while the short term stability is $\lesssim 50$ mG.

To evaluate the possibility of keeping p-wave molecules in our trap, we have studied the lifetime of the gas sample at the three Feshbach resonances. We have measured the number N of atoms remaining in the trap after a variable time t_{wait}. Accounting for two- and three-body processes only, N should follow the rate equation

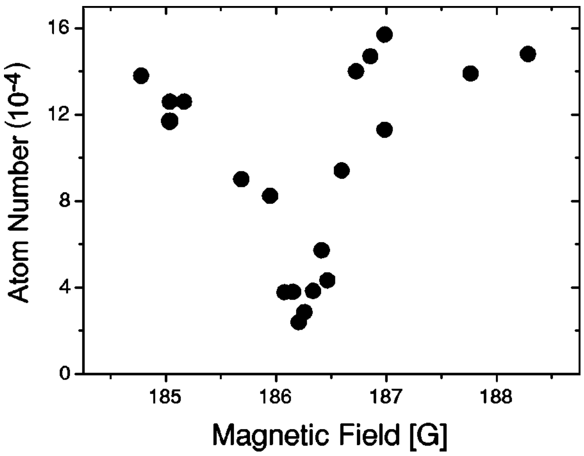

FIG. 2. Atom number vs magnetic field $B_{0,f}$ after a 50 ms wait for atoms in the spin mixture $(1/2,-1/2)$ at $T\sim 14\ \mu$K. The sharp drop close to $B_0\sim 186$ G over a range $\simeq 0.5$ G is the signature of the p-wave Feshbach resonance predicted by theory.

$$\frac{\dot{N}}{N}=-G_2\langle n\rangle - L_3\langle n^2\rangle, \tag{2}$$

where n is the atom density and $\langle n^a\rangle=\int d^3r\, n^{a+1}/N$ $(a=1,2)$ is calculated from the classical Boltzman distribution. In this equation, we can safely omit one-body losses since the measured decay time is ~ 100 ms, much smaller than the one-body lifetime ~ 30 s.

In the $(1/2,1/2)$ channel, we find that three-body losses are dominant. The dependence of L_3 with temperature is very weak [Fig. 3(a)]. A theoretical calculation of the temperature dependence of three-body loss rate has been performed in [11] and it predicts that in the case of indistinguishable fermions L_3 should be proportional to T^λ, with $\lambda\geqslant 2$. Although this prediction seems in disagreement with our experimental

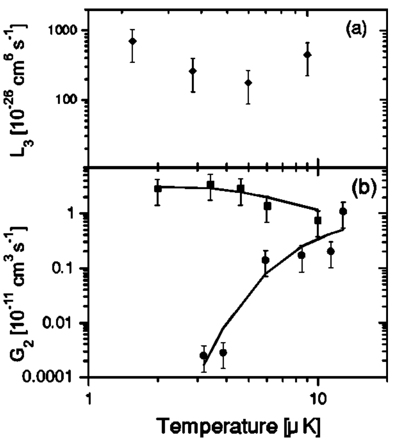

FIG. 3. Variations of (a) three-body and (b) two-body loss rates vs temperature at the Feshbach resonance. (a) ◆: atoms in the Zeeman ground state $|f=1/2,m_f=1/2\rangle$, $B_{0,f}\sim 159$ G. (b) ■: atoms polarized in $|f=1/2,m_f=-1/2\rangle$, $B_{0,f}\sim 215$ G. ●: the mixture $|f=1/2,m_f=1/2\rangle + |f=1/2,m_f=-1/2\rangle$, $B_{0,f}\sim 186$ G. In both cases, the full line is a fit to the data using the prediction of Eq. (4) with the magnetic field as the only fitting parameter.

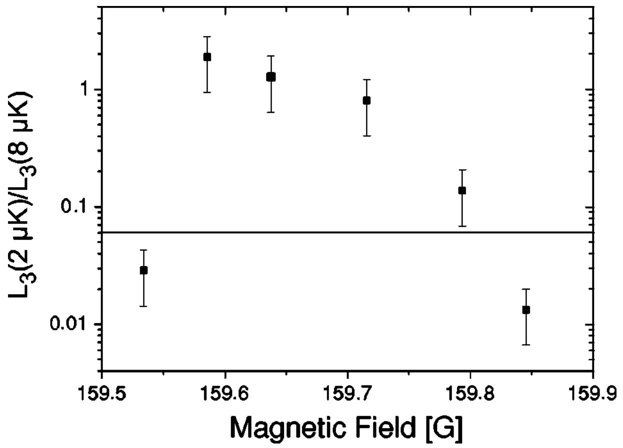

FIG. 4. Ratio $L_3(T=2\ \mu\text{K})/L_3(T=8\ \mu\text{K})$ of the three-body decay rate for two different temperatures for a gas of atoms polarized in $|f=1/2, m_f=1/2\rangle$. The full line is the threshold law $L_3 \sim T^2$.

results, the analysis of [11] relies on a Wigner threshold law, i.e., a perturbative calculation based on the Fermi golden rule. At the Feshbach resonance where the scattering cross section is expected to diverge, this simplified treatment is not sufficient. This suggests that three-body processes must be described by a more refined formalism, analogous to the unitary limited treatment of the *s*-wave elastic collisions [15]. To confirm this assumption, we have compared the loss rates at two given temperatures ($T=2\ \mu$K and $T=8\ \mu$K, respectively) for various values of the magnetic field (Fig. 4). If the threshold law is valid, then the ratio $L_3(2\ \mu\text{K})/L_3(8\ \mu\text{K})$ should always be smaller than $(2/8)^2 \sim 0.0625$ (full line of Fig. 4). As seen before, experimental data show no significant variation of L_3 with temperature near resonance. However, when the magnetic field is tuned out of resonance we recover a dependence in agreement with [11].

In contrast to *s*-wave Feshbach resonances where dipolar losses are forbidden in the $f=1/2$ manifold [16], the losses at resonance are found to be dominantly two body in the $(1/2,-1/2)$ and $(-1/2,-1/2)$ channels. The variations of the two-body loss rate with temperature are displayed in Fig. 3(b). The temperature dependence appears very different in the two cases. We show now that this is the consequence of a strong sensitivity to magnetic field detuning from resonance, rather than a specific property of the states involved. In an extension of the work presented in [17], we describe inelastic collisions by two noninteracting open channels coupled to a single *p*-wave molecular state [18]. This model leads to an algebra close to the one describing photoassociation phenomena [19] and the two-body loss rate at energy E is given by

$$g_2(E) = \frac{KE}{(E-\delta)^2 + \gamma^2/4}. \tag{3}$$

Here $\delta = \mu(B - B_F)$ is the detuning to the Feshbach resonance and K, μ, and γ are phenomenological constants, depending on the microscopic details of the potential [21]. For each channel, these parameters are estimated from our coupled-channel calculation (Table II). To compare with experimental

TABLE II. Parameters characterizing the two-body loss rates for $(1/2,-1/2)$ and $(-1/2,-1/2)$ spin channels.

(m_{f_1}, m_{f_2})	K (cm^3 μK s^{-1})	γ (μK)	μ (μK G^{-1})
$(1/2,-1/2)$	1.21×10^{-13}	0.05	117
$(-1/2,-1/2)$	7.33×10^{-13}	0.08	111

data, Eq. (3) is averaged over a thermal distribution and for $\delta > 0$ and $\delta \gg \gamma$ we get

$$G_2 \sim 4\sqrt{\pi}\frac{K}{\gamma}\left(\frac{\delta}{k_B T}\right)^{3/2} e^{-\delta/k_B T}. \tag{4}$$

Equation (4) is used to fit the data of Fig. 3(b), with $B - B_F$ as the only fitting parameter. We get a fairly good agreement if we take $B - B_F = 0.04$ G (0.3 G) for the $(-1/2, -1/2)[(1/2,-1/2)]$ channel, illustrating the extreme sensitivity of G_2 to detuning and temperature. This feature was also qualitatively tested by measuring the variations of G_2 with magnetic field at constant temperature. Another interesting feature of Eq. (4) is that it predicts that the width δB of the Feshbach resonance, as measured by atom losses, should scale like $k_B T/\mu$. For a typical temperature $T \sim 15\ \mu$K, this yields $\delta B \sim 0.15$ G, in agreement with the resonance width shown in Fig. 2.

From Eq. (4) we see that G_2 nearly vanishes at $\delta=0$. The thermal average of Eq. (4) for $\delta=0$ yields $G_2(\delta=0) \propto K k_B T$. The ratio between the maximum two-body loss rate ($\delta = 3k_B T/2$) and that at $\delta=0$ is then $\sim k_B T/\gamma$, $\sim 10^2$ for $\sim 10\ \mu$K. In the region $\delta < 0$ where we expect to form molecules, we benefit from a $1/\delta^2$ further reduction of the two-body losses [see Eq. (4)].

We have checked the production of molecules in $(1/2, -1/2)$ by using the scheme presented in [13,22]. We first generate molecules in $|S=0, I=1, l=1\rangle$ by ramping in 20 ms the magnetic field from 190 G$>B_F$ to $B_{\text{nuc}}=185$ G$<B_F$. At this stage, we can follow two paths before detection (Fig. 5). Path 1 permits us to measure the number N_1 of free atoms: by ramping *down* in 2 ms the magnetic field from 185 G to 176 G, we convert the molecules into deeply bound molecu-

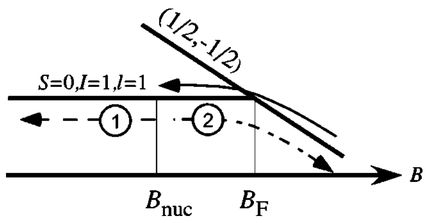

FIG. 5. Molecules are generated by ramping from a magnetic field higher than B_F to $B_{\text{nuc}} < B_F$. From there, two paths are used. In path 1 (dashed line), the magnetic field is decreased to create tightly bound molecules that will not appear on absorption images. In path 2 (dashed-dotted line), the magnetic field is ramped up across resonance to dissociate the molecules. The efficiency of the molecule production is simply given by $(1-N_1/N_2)$, where N_i is the atom number measured after path i.

lar states that decay rapidly by two-body collisions. Path 2 gives access to the total atom number N_2 (free atoms + atoms bound in p-wave molecules). It consists of ramping *up* the magnetic field in 2 ms from B_{nuc} to 202 G$>B_F$ to convert the molecules back into atoms. Since the atoms involved in molecular states appear only in pictures taken in path 2, the number of molecules in the trap is $(N_2-N_1)/2$. In practice, both sequences are started immediately after reaching B_{nuc} and we average the data of 25 pictures to compensate for atom number fluctuations. We then get $N_1=7.1(5)\times10^4$ and $N_2=9.1(7)\times10^4$ which corresponds to a molecule fraction $1-N_1/N_2=0.2(1)$. Surprisingly, we failed to detect any molecule signal when applying the same method to $(1/2,1/2)$ atoms.

Since the dramatic reduction of inelastic losses close to a s-wave Feshbach resonance [23] was a key ingredient to the recent observation of fermionic superfluids, the formation of stable atom pairs requires a full understanding of the decay mechanisms at play close to a p-wave resonance. In this paper we have shown that in the particular case of two-body losses, the maximum losses take place when the detuning is positive. Since stable dimers are expected to be generated for negative detuning, dipolar losses should not present a major hindrance to further studies of p-wave molecules.

We thank Z. Hadzibabic for very helpful discussions. S.K. acknowledges support from the Netherlands Organization for Scientific Research (NWO). E.K. acknowledges support from the Stichting FOM, which is financially supported by NWO. This work was supported by CNRS, and Collège de France. Laboratoire Kastler Brossel is *Unité de recherche de l'École Normale Supérieure et de l'Université Pierre et Marie Curie, associée au CNRS.*

[1] S. Jochim *et al.*, Science **302**, 2101 (2003).
[2] M. W. Zwierlein *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 250401 (2003).
[3] T. Bourdel *et al.*, e-print cond-mat/0403091.
[4] J. Kinast *et al.*, Phys. Rev. Lett. **92**, 150402 (2004).
[5] M. Greiner, C. A. Regal, and D. S Jin, Nature (London) **426**, 537 (2003).
[6] D. M. Lee, Rev. Mod. Phys. **69**, 645 (1997).
[7] C. C Tsuei and J. R. Kirtley, Phys. Rev. Lett. **85**,182 (2000).
[8] C. Chin *et al.*, Phys. Rev. Lett. **85**, 2717 (2000).
[9] C. A. Regal *et al.*, Phys. Rev. Lett. **90**, 053201 (2003).
[10] T. Weber *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 123201 (2003).
[11] B. D. Esry, C. H. Greene, and H. Suno, Phys. Rev. A **65**, 010705 (2002).
[12] E. G. M. van Kempen *et al.*, e-print cond-mat/0406722.
[13] J. Cubizolles *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91** 240401 (2003).
[14] T. Bourdel *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 020402 (2003).
[15] H. Suno, B. D. Esry, and C. H. Greene, Phys. Rev. Lett. **90**, 053202 (2003).
[16] K. Dieckmann *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 203201 (2002).
[17] M. Holland *et al.*, Phys. Rev. Lett. **87**, 120406 (2001).
[18] We also neglect the splitting between the different m_l predicted by [20].
[19] R. Napolitano *et al.*, Phys. Rev. Lett. **73**, 1352 (1994)
[20] C. Ticknor *et al.*, Phys. Rev. A **69**, 042712 (2004).
[21] Note that in our case μ is positive. This corresponds to molecular states stable at low field.
[22] C. A. Regal *et al.*, Nature (London) **424**, 47 (2003).
[23] D. S. Petrov, Phys. Rev. A **67**, 010703 (2003).

Resonant scattering properties close to a p-wave Feshbach resonance

F. Chevy[1], E. G. M. van Kempen[2], T. Bourdel[1], J. Zhang[3], L. Khaykovich[4],
M. Teichmann[1], L. Tarruell[1], S. J. J. M. F. Kokkelmans[3], and C. Salomon[1]
[1] *Laboratoire Kastler-Brossel, ENS, 24 rue Lhomond, 75005 Paris*
[2] *Eindhoven University of Technology, P.O. Box 513, 5600 MB Eindhoven, The Netherlands*
[3] *SKLQOQOD, Institute of Opto-Electronics, Shanxi University, Taiyuan 030006, P.R. China and*
[4] *Department of Physics, Bar Ilan University, Ramat Gan 52900, Israel.*
(Dated: December 15, 2004)

We present a semi-analytical treatment of both the elastic and inelastic collisional properties near a p-wave Feshbach resonance. Our model is based on a simple three channel system that reproduces more elaborate coupled-channel calculations. We stress the main differences between s-wave and p-wave scattering. We show in particular that, for elastic and inelastic scattering close to a p-wave Feshbach resonance, resonant processes dominate over the low-energy behaviour.

PACS numbers: 03.75.Ss, 05.30.Fk, 32.80.Pj, 34.50.-s

INTRODUCTION

The observation of molecular gaseous Bose-Einstein condensates (BEC) and the subsequent experimental study of the BEC-BCS crossover [1, 2, 3, 4, 5] were made possible by the possibility of tuning interatomic interactions using a magnetic field (the so-called Feshbach resonances). Although all these experiments were based on s-wave interatomic interactions, it is known from condensed matter physics that superfluidity of fermionic systems can also arise through higher order partial waves. The most famous examples of this non-conventionnal superfluidity are ^{3}He [6], for which the Cooper pairs spawn from p-wave interactions, and high-T_c superconductivity, in which pairs are known to possess d-wave symmetry [7]. Recent interest in p-wave interactions in cold atom gases stemmed from these possibilities and resulted in the observation of p-wave Feshbach resonances in ^{40}K [8] and ^{6}Li [9, 10], as well as theoretical studies on the superfluidity of cold atom interacting through p-wave pairing [11, 12].

The present paper is devoted to the study of p-wave interactions close to a Feshbach resonance and it derives some results presented in [9]. In a first part, we present the model we use to describe both elastic and inelastic processes that are discussed in the second part. We stress in particular the main qualitative differences between p-wave and s-wave physics and show that contrarily to the case of s-wave that is dominated by low energy physics, p-wave scattering is dominated by a resonance peak associated to the quasi bound molecular state. Finally, we compare our analytical results to numerical coupled-channel calculations.

MODEL FOR P-WAVE INTERACTIONS

We consider the scattering of two identical particles of mass m. As usual when treating a two-body problem, we work in the center of mass frame and only consider the motion of a fictitious particle of mass $m/2$ interacting with a static potential. In order to study the p-wave Feshbach resonance, we use a model based on the separation of open and closed channels. In this framework, the Feshbach resonance arises in an open channel as a result of the coupling with a closed channel [13]. At resonance, scattering properties are dominated by resonant effects and we can neglect all "background" scattering (ie. we assume there is no scattering far from resonance).

1. We restrict ourselves to a 3-channel system, labelled 1,2 and 3 which correspond to the different two-body spin configurations (Fig. 1). Channels $|1\rangle$ and $|2\rangle$ are open channels. We focus on the situation were atoms are prepared initially in state $|1\rangle$. Atoms may be transferred to state $|2\rangle$ after an inelastic process. Channel $|3\rangle$ is closed and hosts the bound state leading to the Feshbach resonance.

   Let us consider for instance the case of ^{6}Li atoms prepared in a mixture of $|F = 1/2, m_F = 1/2\rangle$ and $|F' = 1/2, m'_F = -1/2\rangle$. In this system, the only two-body decay channel is associated with the flipping of a $m'_F = -1/2$ atom to $m'_F = 1/2$. If we denote by (m_F, m'_F) the symmetrized linear combination of the states $|F = 1/2, m_F\rangle$ and $|F' = 1/2, m'_F\rangle$, then $|1\rangle = (1/2, -1/2)$ and $|2\rangle = (1/2, 1/2)$.

2. The Feshbach resonances studied here are all located at values of the magnetic field where the Zeeman splitting is much larger than the hyperfine structure. In first approximation we can therefore assume that the internal states are described by uncoupled electronic and nuclear spin states. In the absence of any dipolar or hyperfine coupling between the electronic singlet and triplet manifolds, we assume we have no direct interaction in channels 1 and 2 so that the eigenstates are plane waves characterized by their relative wave-vector k

and their energy $E_1(k) = \hbar^2 k^2/m$ (channel 1) and $E_2(k) = -\Delta + \hbar^2 k^2/m$ (channel 2). $\Delta > 0$ is the energy released in an inelastic process leading from 1 to 2. Δ can be considered as independent of the magnetic field and is assumed to be much larger than any other energy scales ($\Delta/h \sim 80\,$MHz in the case of ^{6}Li).

3. In channel 3, we consider only a p-wave bound state nesting at an energy δ quasi-resonant with channel 1. In the case of ^{6}Li atoms in the $F = 1/2$ hyperfine state, $\delta = 2\mu_B(B - B_0)$, where B is the magnetic field and B_0 is the position of the "bare" Feshbach resonance. If the projection of the angular momentum (in unit of $\hbar$) is denoted by $m_{\mathbf{u}}$ for a quantization axis chosen along some vector $\mathbf{u}$, the eigenfunctions associated to this bound state can be written as $g(r)Y_1^{m_{\mathbf{u}}}(\theta,\phi)$, where (r,θ,ϕ) is the set of polar coordinates and the Y_l^m are the spherical harmonics.

4. The coupling $\widehat{V}$ between the various channels affects only the spin degrees of freedom. Therefore the orbital angular momentum is conserved during the scattering process and we restrict our analysis to the p-wave manifold. This is incontrast to the situation in heavy alkalis where incoming particles in s-wave can be coupled to molecular states of higher orbital angular momentum [14, 15].

   We assume also that the only non-vanishing matrix elements are between the closed and the open channels (ie. $\langle 1,2|\widehat{V}|3\rangle$ and $\langle 3|\widehat{V}|1,2\rangle$).

Let us denote a state of the system by $|\alpha,\chi\rangle$, where $\alpha \in \{1,2,3\}$ and χ describe respectively the internal (spin) and the orbital degrees of freedom. According to assumption (4), the matrix element $\langle\alpha,\chi|\widehat{V}|\alpha',\chi'\rangle$ is simply given by:

$$\langle\alpha,\chi|\widehat{V}|\alpha',\chi'\rangle = \langle\chi|\chi'\rangle\langle\alpha|\widehat{V}|\alpha'\rangle,$$

and is therefore simply proportional to the overlap $\langle\chi|\chi'\rangle$ between the external states.

Let us now particularize to the case where $\alpha \in \{1,2\}$, and $|\chi\rangle = |\mathbf{k}\rangle$ is associated to a plane wave of relative momentum $\hbar\mathbf{k}$. According to hypothesis (4), this state is coupled only to the closed channel $|3\rangle$. Moreover, using the well known formula $e^{ikz} = \sum_l i^l\sqrt{4\pi(2l+1)}j_l(kr)Y_l^0(\theta,\phi)$, where the j_l are the spherical Bessel functions, we see that $|\chi\rangle$ is coupled only to the bound state with $m_{\mathbf{k}} = 0$. The matrix element then reads

$$\langle\alpha,\mathbf{k}|\widehat{V}|3,m_{\mathbf{k}}\rangle = i\delta_{m_{\mathbf{k}},0}\sqrt{\frac{12\pi}{L^3}}\langle\alpha|\widehat{V}|3\rangle\int g^*(r)j_1(kr)r^2\,\mathrm{d}r, \tag{1}$$

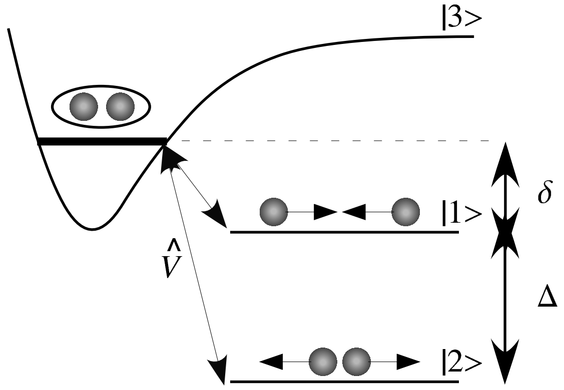

FIG. 1: The p-wave model: we consider three internal states, labelled $|1\rangle$, $|2\rangle$ and $|3\rangle$. States $|1\rangle$ and $|2\rangle$ are two open channels corresponding respectively to the incoming and decay channels. The released energy in an inelastic collision bringing atom initially in $|1\rangle$ to $|2\rangle$ is denoted Δ. State $|3\rangle$ is a closed channel that possesses a p-wave bound state of energy δ nearly resonant with state $|1\rangle$. Finally, we assume that these three channels interact through a potential $\widehat{V}$ acting only on the internal states and coupling the two open channels to the closed channels.

where L^3 is a quantization volume. Since for small k we have $j_1(kr) \sim kr/3$, the matrix element $\langle\alpha,\mathbf{k}|\widehat{V}|3,m_{\mathbf{k}}\rangle$ takes the general form

$$\langle\alpha,\mathbf{k}|\widehat{V}|3,m_{\mathbf{k}}\rangle = \delta_{m_{\mathbf{k}},0}\frac{kF_\alpha(k)}{\sqrt{L^3}}, \tag{2}$$

where $F_\alpha(k)$ has a finite (in general non zero) limit when k goes to zero.

Later on, we shall also need the coupling between $|\alpha,\mathbf{k}\rangle$ and $|3,m_{\mathbf{k}'} = 0\rangle$ (that will be denoted by $|3,0_{\mathbf{k}'}\rangle$), where the momentum $\mathbf{k}$ and the direction of quantization $\mathbf{k}'$ are no longer parallel. The calculation presented above yields readily

$$\langle\alpha,\mathbf{k}|\widehat{V}|3,0_{\mathbf{k}'}\rangle = \frac{kF_\alpha(k)}{\sqrt{L^3}}\langle 0_{\mathbf{k}}|0_{\mathbf{k}'}\rangle = \frac{kF_\alpha(k)}{\sqrt{L^3}}\cos(\widehat{\mathbf{k},\mathbf{k}'}), \tag{3}$$

where $(\widehat{\mathbf{k},\mathbf{k}'})$ is the angle between $\mathbf{k}$ and $\mathbf{k}'$.

T-MATRIX

From general quantum theory, it is known that the scattering properties of a system are given by the so-called T-matrix $\widehat{T}$. It can be shown in particular that $\widehat{T}$ is given by the following expansion in power of the coupling potential

$$\widehat{T}(E) = \widehat{V} + \widehat{V}\widehat{G}_0(E)\widehat{V} + \widehat{V}\widehat{G}_0(E)\widehat{V}\widehat{G}_0(E)\widehat{V} + ..., \tag{4}$$

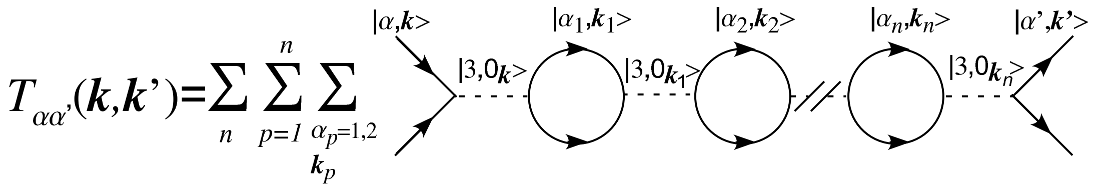

FIG. 2: Diagrammatic expansion of the T-matrix. The full lines (resp. dashed) represent free atoms (resp. molecules). $|\alpha, \mathbf{k}\rangle$ is the scattering state of the two particles, in the internal state $\alpha = 1, 2$. $|3, 0_{\mathbf{k}}\rangle$ represents the state of a p-wave molecule with orbital angular momentum component zero on $\mathbf{k}$ direction.

where $\widehat{G}_0(E) = 1/(E - \widehat{H}_0)$ and $\widehat{H}_0 = \widehat{H} - \widehat{V}$ is the free hamiltonian of the system.

Let us consider $|\alpha, \mathbf{k}\rangle$ and $|\alpha', \mathbf{k}'\rangle$, two states of the *open channels* and let us set $T_{\alpha\alpha'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', E) = \langle\alpha, \mathbf{k}|\widehat{T}(E)|\alpha', \mathbf{k}'\rangle$. According to formula (4), this matrix element is the sum of terms that can be represented by the diagram of Fig. 2 and we get after a straightforward calculation

$$T_{\alpha\alpha'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', E) = \frac{kk'}{L^3} F_\alpha(k) F^*_{\alpha'}(k') \sum_{n=0}^{\infty} R_n \Lambda(E)^n G_0^{(m)}(E)^{n+1}.$$

Here $G_0^{(m)}(E) = 1/(E - \delta)$ is the free propagator for the molecule, $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ with

$$\Lambda_\alpha(E) = \int \frac{q^4 dq}{(2\pi)^3} \frac{|F_\alpha(q)|^2}{E - E_\alpha(q)} \qquad (5)$$

results of the integration on the loops, and finally

$$R_n = \int d^2\Omega_1 ... d^2\Omega_n \cos(\widehat{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}) \cos(\widehat{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}) ... \cos(\widehat{\mathbf{k}_n, \mathbf{k}'}),$$

where Ω_p is the solid angle associated to $\mathbf{k}_p$, arises from the pair breaking vertices $|3, 0_{\mathbf{k}_i}\rangle \to |\alpha_{i+1}, \mathbf{k}_{i+1}\rangle$. This last integral can be calculated recursively and we get $R_n = (4\pi/3)^n \cos(\widehat{\mathbf{k}, \mathbf{k}'})$, that is for the T-matrix

$$T_{\alpha\alpha'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', E) = \frac{1}{L^3} \frac{kk' F_\alpha(k) F^*_{\alpha'}(k')}{E - \delta - \Sigma_1 - \Sigma_2} \cos(\widehat{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}),$$

with $\Sigma_\alpha = 4\pi\Lambda_\alpha/3$.

This expression can be further simplified since, according to Eqn. (1), the width of $F_\alpha(q)$ is of the order of $1/R_e$, where R_e is the characteristic size of the resonant bound state. In the low temperature limit, we can therefore expand Σ_α with the small parameter kR_e.

From Eqn. (1), we see that replacing $F_\alpha(q)$ by its value at $q = 0$ leads to a q^2 divergence. This divergence can be regularized by the use of counter terms in the integral, namely by writing that

$$\Sigma_\alpha(E) = \int |F_\alpha(q)|^2 \left[\frac{q^4}{E - E_\alpha(q)} + \frac{mq^2}{\hbar^2} + \frac{m^2}{\hbar^4}(E - E_\alpha(0))\right] \frac{dq}{6\pi^2} - \int |F_\alpha(q)|^2 \frac{mq^2}{\hbar^2} \frac{dq}{6\pi^2} - (E - E_\alpha(0)) \int |F_\alpha(q)|^2 \frac{m^2}{\hbar^4} \frac{dq}{6\pi^2},$$

where we have assumed that F_α was decreasing fast enough at large q to ensure the convergence of the integrals. $|F_\alpha(q)|^2$ can now be safely replaced by $\lambda_\alpha = |F_\alpha(0)|^2$ in the first integral and we finally get

$$\Sigma_\alpha = -i \frac{\lambda_\alpha}{6\pi} \frac{m}{\hbar^2} \left(\frac{m}{\hbar^2}(E - E_\alpha(0))\right)^{3/2} - \delta_{0,\alpha} - \eta_\alpha (E - E_\alpha(0)),$$

with

$$\delta_0^{(\alpha)} = \int |F_\alpha(q)|^2 \frac{mq^2}{\hbar^2} \frac{dq}{6\pi^2}$$
$$\eta_\alpha = \int |F_\alpha(q)|^2 \frac{m^2}{\hbar^4} \frac{dq}{6\pi^2}.$$

If we assume that the release energy Δ is much larger than E and if we set $\delta_0 = \delta_0^{(1)} + \delta_0^{(2)}$ and $\eta = \eta_1 + \eta_2$, we get for the T-matrix

$$T_{\alpha\alpha'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', E) \simeq \frac{1}{L^3} \frac{kk' F_\alpha(0) F^*_{\alpha'}(0) \cos(\widehat{\mathbf{k}, \mathbf{k}'})/(1 + \eta)}{E - \tilde{\delta} + i\hbar\gamma(E)/2}. \qquad (6)$$

with

$$\hbar\gamma(E) = \left(\frac{m}{\hbar^2}\right)^{5/2} \frac{(\lambda_2 \Delta^{3/2} + \lambda_1 E^{3/2})}{3\pi(1 + \eta)}$$
$$\tilde{\delta} = \frac{(\delta - \delta_0)}{1 + \eta}.$$

We note that this expression for the T-matrix is consistent with the general theory of multichannel scattering resonances [13] , where resonantly enhanced transitions to other channels are readily included. In a similar context of two open channels and a Feshbach resonance, a recent experiment was analyzed [15], that involved the decay of a molecular state formed from a Bose-Einstein condensate.

S-WAVE VS P-WAVE

This section is devoted to the discussion of the expression found for the T-matrix. In addition to the scattering cross section, the study of the T-matrix yields important informations on the structure of the dressed molecular state underlying the Feshbach resonance and we will demonstrate important qualitative differences between the behaviours of p-wave and s-wave resonances.

Molecular state. The binding energy E_b of the molecule is given by the pole of T. In the limit $\delta \sim \delta_0$, it is therefore given by:

$$E_{\rm b} = \tilde{\delta} - i\hbar\gamma(\tilde{\delta})/2,$$

We see that the real part of E_b (the "physical" binding energy) is $\sim \tilde{\delta}$ and therefore scales linearly with the detuning $\delta - \delta_0$. This scaling is very different from what happens for s-wave processes where we expect a $(\delta - \delta_0)^2$ behavior. This difference is in practice very important: indeed, the molecules can be trapped after their formation only if their binding energy is smaller than the trap depth. The scaling we get for the p-wave molecules means that the binding energy increases much faster when we increase the detuning than what we obtain for s-wave molecules (this feature was already pointed out in [11]). Hence, p-wave molecules must be looked for only in the close vicinity of the Feshbach resonance − for instance, for $\eta \ll 1$ (relevant for ^{6}Li, as we show below) and a trap depth of 100 μK, the maximum detuning at which molecules can be trapped is $\simeq 0.1$ G.

This asymptotic behavior of the binding energy is closely related to the internal structure of the molecule. Indeed, the molecular wave function $|\psi_{\rm m}(B)\rangle$ can be written as a sum $|{\rm open}\rangle + |{\rm closed}\rangle$ of its projections on the closed and open channels, that correspond respectively to short and long range molecular states. If we neglect decay processes by setting $\lambda_2 = 0$, we can define the magnetic moment of the molecule (relative to that of the free atom pair) by

$$\Delta\mu_{\rm eff}(B) = -\frac{\partial E_{\rm b}}{\partial B} = -\frac{\partial\tilde{\delta}}{\partial B},$$

that is, in the case of ^{6}Li where $\delta = 2\mu_B(B - B_0)$,

$$\Delta\mu_{\rm eff}(B) = -\frac{2\mu_B}{1+\eta}. \qquad (7)$$

On the other hand, we can also write $E_b = \langle\psi_{\rm m}(B)|\widehat{H}(B)|\psi_{\rm m}(B)\rangle$. Since in the absence of any decay channel, the molecular state is the ground state of the two-body system, we can write using the Hellman-Feynman relation

$$\Delta\mu_{\rm eff} = -\frac{\partial E_b}{\partial B} = -\langle\psi_{\rm m}(B)|\frac{\partial\widehat{H}(B)}{\partial B}|\psi_{\rm m}(B)\rangle.$$

In our model, the only term of the hamiltonian depending on the magnetic field is the energy $\delta = 2\mu_{\rm B}(B - B_0)$ of the bare molecular state in the closed channel and we finally have

$$\Delta\mu_{\rm eff} = -2\mu_B\langle{\rm closed}|{\rm closed}\rangle. \qquad (8)$$

If we compare Eqn. (7) and (8), we see that the probability $P_{\rm closed} = \langle{\rm closed}|{\rm closed}\rangle$ to be in the closed channel is given by

$$P_{\rm closed} = 1/(1+\eta).$$

In other words, unless $\eta = \infty$, there is always a finite fraction of the wave-function in the tightly bound state. In practice, we will see that in the case of ^{6}Li, $\eta \ll 1$. This means that the molecular states that are nucleated close to a Feshbach resonance are essentially short range molecules. On the contrary, for s-wave molecules, $E_{\rm b} \propto (\delta-\delta_0)^2$ leads to $\Delta\mu_{\rm eff} = -2\mu_B\langle{\rm closed}|{\rm closed}\rangle \propto (\delta-\delta_0)$. This scaling leads to a zero probability of occupying the bare molecular state near a s-wave resonance.

We can illustrate this different behaviours in the simplified picture of Fig. 3. For small detunings around threshold, the p-wave potential barrier provides a large forbidden region, that confines the bound state behind this barrier. The bound state wavefunction decays exponentially inside the barrier and the tunneling remains nearly negligible. Since there is no significant difference for the shape of the p-wave bound state for small positive and negative detunings, the linear dependence of the closed channel with magnetic field will be conserved for the bound state, and therefore the binding energy will also linearly approach the threshold. We note that the linear dependence close to threshold can also be found from the general Breit-Wigner expression for a resonance, in combination with the p-wave threshold behavior of the phase shift [13].

The imaginary part of E_b corresponds to the lifetime of the molecule. In the case of s-wave molecules for which two-body decay is forbidden [19, 20], the only source of instability is the coupling with the continuum of the incoming channel that leads to a spontaneous decay when $\tilde{\delta} > 0$ (see Fig. 3.a). By contrast, we get a finite lifetime in p-wave even at $\tilde{\delta} < 0$: due to dipolar relaxation between its constituents, the molecule can indeed spontaneously decay towards state $|2\rangle$. For $\tilde{\delta} \sim 0$, the decay rate γ_0 associated to this process is given by:

$$\gamma_0 = \gamma(0) = \frac{\lambda_2}{1+\eta}\frac{m}{3\pi\hbar^3}\left(\frac{m\Delta}{\hbar^2}\right)^{3/2}.$$

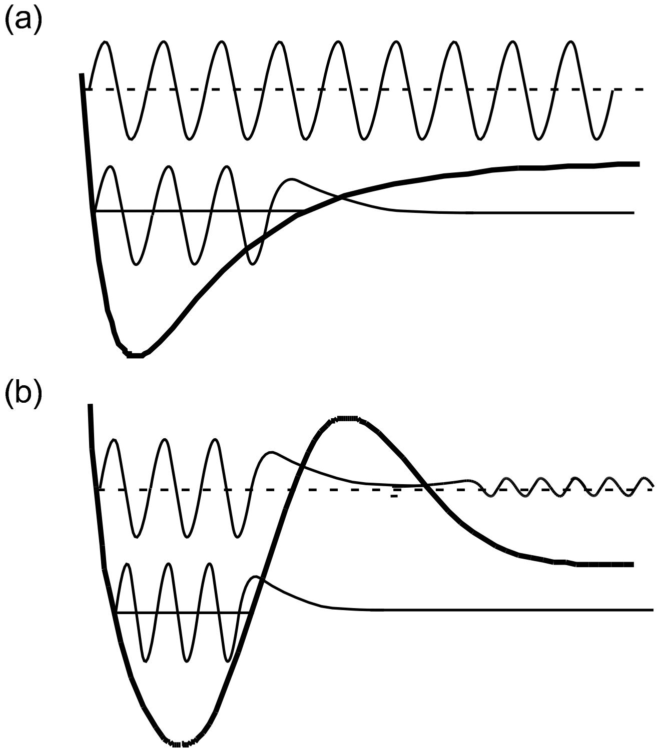

FIG. 3: Effect of the centrifugal barrier on the bound state in p-wave Feshbach resonances. (a) Case of a s-wave scattering: the bare molecular state goes from $\delta < 0$ (full line) to $\delta > 0$ (dashed line). In the process, the molecular state becomes unstable and the wave function becomes unbounded. (b) In the case of p-wave bound state, the presence of the centrifugal barrier smoothes the transition from $\delta > 0$ to $\delta < 0$. Even for $\delta > 0$, the wave-function stays located close to the bottom of the well.

Elastic scattering. The scattering amplitude $f(\mathbf{k},\mathbf{k}')$ for atoms colliding in the channel 1 can be extracted from the T-matrix using the relation

$$f(\mathbf{k},\mathbf{k}') = -\frac{mL^3}{4\pi\hbar^2}T_{11}(\mathbf{k},\mathbf{k}',E=\hbar^2k^2/m),$$

that is

$$f(\mathbf{k},\mathbf{k}') = -\frac{m\lambda_1}{4\pi\hbar^2}\left(\frac{k^2\cos(\widehat{\mathbf{k},\mathbf{k}'})/(1+\eta)}{\hbar^2k^2/m-\tilde{\delta}-i\hbar\gamma/2}\right).$$

The $\cos(\widehat{\mathbf{k},\mathbf{k}'})$ dependence is characteristic of p-wave processes and, once again, this expression shows dramatic differences with the s-wave behavior. First, at low k, $f(\mathbf{k},\mathbf{k}')$ vanishes like k^2. If we introduce the so-called scattering volume V_s [13] defined by

$$f(\mathbf{k},\mathbf{k}') = -V_s k^2,$$

then we have

$$V_s = \frac{-m\lambda_1}{4\pi\hbar^2(\delta-\delta_0+i(1+\eta)\hbar\gamma_0/2)} \sim \frac{-m\lambda_1}{2\pi\hbar^2(\delta-\delta_0)},$$

if we neglect the spontaneous decay of the molecule. We see that in this approximation, the binding energy E_b of the molecule is given by

$$E_{\mathrm{b}} = -\frac{m\lambda_1}{2\pi\hbar^2(1+\eta)}\frac{1}{V_s}.$$

In s-wave processes, the binding energy and the scattering length are related through the universal formula $E_{\mathrm{b}} = -\hbar^2/ma^2$. This relationship is of great importance since it allows to describe both scattering properties and the molecular state with the sole scattering length, without having to care with any other detail of the interatomic potential. In the case of p-wave, we see that no such universal relation exists between the scattering volume and E_{b}, a consequence of the fact that we have to deal with short range molecular states, even at resonance. We therefore need two independent parameters to describe both the bound states and the scattering properties.

In the general case, the elastic cross-section σ_{el} is proportional to $|f|^2$. According to our calculation, we can put σ_{el} under the general form

$$\sigma_{\mathrm{el}}(E) = \frac{CE^2}{(E-\tilde{\delta})^2+\hbar^2\gamma^2/4}, \tag{9}$$

where $E = \hbar^2k^2/m$ is the kinetic energy of the relative motion and C is a constant depending on the microscopic details of the system. Noticeably, the energy dependence of the cross-section exhibits a resonant behavior at $E = \tilde{\delta}$ as well as a plateau when $E \to \infty$, two features that were observed in the numerical coupled channel calculations presented in [16]. Once again, this leads to physical processes very different from what is expected in s-wave scattering. Indeed, we know that in s-wave, we have $f \sim -a$, as long as $ka \ll 1$. Since a is in general non zero, the low energy behavior gives a non negligible contribution to the scattering processes. By contrast, we have just seen that in the case of p-wave, the low energy contribution was vanishingly small ($\sigma_{\mathrm{el}} \sim E^2$) so that the scattering will be dominated by the resonant peak $E \sim \tilde{\delta}$.

Inelastic scattering. For two particules colliding in channel 1 with an energy $E = \hbar^2k^2/m$, the probability to decay to channel 2 is proportional to $\rho_2(k')|T_{12}(\mathbf{k},\mathbf{k}',E)|^2$ where ρ_2 is the density of state in channel 2. Since k' is given by the energy conservation condition $\hbar^2k'^2/m - \Delta = E$, and in practice $\Delta \gg E$, we see that $k' \sim \sqrt{m\Delta/\hbar^2}$ is therefore a constant. Using this approximation, we can write the 2-body loss rate $g_2(E)$ for particles of energy E as:

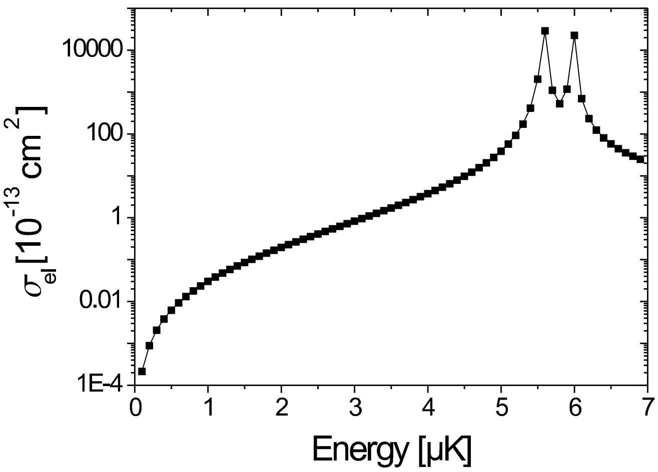

FIG. 4: Energy dependence of the elastic cross section. Dots: numerical closed channel calculation. The left peak corresponds to $m_l = 0$ and the right peak to $m_l = \pm 1$. Full line: Fits using Eqn. (10)

$$g_2(E) = \frac{DE}{(E-\tilde{\delta})^2 + \hbar^2\gamma^2/4},$$

where D is a constant encapsulating the microscopic details of the potential.

COMPARISON WITH COUPLED-CHANNEL CALCULATION

The quantities such as C, D, γ_0 etc. that were introduced in the previous section were only phenomenological parameters to which we need to attribute some value to be able to perform any comparison with the experiment. These data are provided by *ab initio* numerical calculations using the coupled channel scheme described in [17]. The result of this calculation for the elastic scattering cross-section is presented in Fig. 4. The most striking feature of this figure is that it displays two peaks instead of one, as predicted by Eqn. (9). This difference can be easily understood by noting that the dipolar interaction that couples the molecular state to the outgoing channel provides a "spin-orbit" coupling that modifies the relative orbital angular momentum of the pair [16]. In other word, each resonance corresponds to a different value of the relative angular momentum m_l (the $m_l = +1$ and $m_l = -1$ resonances are superimposed because the frequency shift induced by the dipolar coupling is proportional to m_l^2, as noted in [16]).

As the spin-orbit coupling is not included in our simplified three-level model, we take the multiple peak structure into account by fitting the data of Fig. (4) using a sum of three laws (9) with a different set of phenomenological parameters for each value of the angular momentum:

$$\sigma_{\rm el}(E) = \sum_{m_l=-1}^{+1} \frac{C_{m_l}E^2}{(E-\tilde{\delta}_{m_l})^2 + \hbar^2\gamma_{m_l}^2/4}, \qquad (10)$$

where $\tilde{\delta}_{m_l}$ is related to the magnetic field through $\tilde{\delta}_{m_l} = \mu(B - B_{F,m_l})$ and $\gamma_{m_l} = \gamma_{0,m_l} + a_{m_l}E^{3/2}$. Using this law, we obtain a perfect fit to the elastic as well as inelastic data obtained from the coupled channel calculations. The values obtained for the different phenomenological parameters are presented on Table I.

From these data, we see first that the "elastic" properties are independent of m_l. This comes from the fact that the elastic scattering is mainly a consequence of the hyperfine coupling that does not act on the center of mass motion of the atoms. However, we see that both the inelastic collision rate constant D and the molecule lifetime γ_0 exhibit large variations with the relative angular momentum [21]. First, the spontaneous decay rate γ_0 of a molecule in $m_l = 0, +1$ is always larger than $\sim 10^2\,{\rm s}^{-1}$, which corresponds to a maximum lifetime of about 10 ms. Second, we observe a strong reduction of the losses in the $m_l = -1$ channel, in which no significant spontaneous decay could be found. An estimate of γ_0 can nevertheless be obtained by noting that, since the elastic parameters are independent of m_l, the ratio D/γ_0 should not depend on m_l (this can be checked by comparing the ratios D/γ_0 for $m_l = 0$ and $m_l = +1$ in the (-1/2,-1/2) channel). Using this assumption we find that $\gamma_0 \sim 4\times 10^{-3}\,{\rm s}^{-1}$ both in (1/2,-1/2) and (-1/2,-1/2). The reason for this strong increase of the lifetime of the molecules in $m_l = -1$ is probably due to the fact that due to angular momentum conservation the outgoing pair is expected to occupy a state with $l = 3$ after an inelastic process. Indeed, if we start in a two-body state (m_F, m_F') and if the dipolar relaxation flips the spin m_F', then the atom pair ends up in a state $(m_F, m_F'+1)$. This increase of the total spin of the pair must be compensated by a decrease of the relative angular momentum. Therefore, if the molecule was associated to a relative angular momentum m_l, it should end up with $m_l - 1$. In the case of $m_l = -1$, this means that the final value of the relative angular momentum is $m_l = -2$, ie. $l \geq 2$. But, according to selection rules associated to spin-spin coupling, the dipolar interaction can only change l by 0 or 2. Therefore, starting from a p-wave ($l = 1$) compound, this can only lead to $l = 3$. Compared to a purely p-wave process, it means that the atoms have to cross a larger centrifugal barrier to escape from the molecule, which could explain the increased lifetime.

channel	(1/2,-1/2)			(-1/2,-1/2)		
m_l	-1	0	1	-1	0	1
$C\,(10^{-13}\,\mathrm{cm}^2)$	0.22	0.22	0.22	0.87	0.88	0.87
$D\,(10^{-13}\,\mathrm{cm}^2\mu\mathrm{K/s})$	0.00002	0.59	0.56	3×10^{-5}	1.54	5.72
$\gamma_0\,(\mathrm{s}^{-1})$	$< 10^{-2}$	110	110	< 1	220	830
$a\,(\mu\mathrm{K}^{-1/2})$	0.0017	0.0017	0.0017	0.0024	0.0024	0.0024
η	0.22	0.22	0.22	0.23	0.23	0.23
$\delta B_{\mathrm{F}}\,(\mathrm{G})$	-0.0036	0	-0.0036	-0.012	0	-0.012

TABLE I: Values of the phenomenological parameters obtained after a fit to the coupled channel calculations data of Fig. 4. δB_{F} is the shift between the $m_l = \pm 1$ and $m_l = 0$ resonances.

TEMPERATURE AVERAGING

In realistic conditions, the two body loss rate G_2 needs to be averaged over the thermal distribution of atoms. G_2 is therefore simply given by

$$G_2(E) = \sqrt{\frac{\pi}{4(k_{\mathrm{B}}T)^3}} \int_0^\infty g_2(E) e^{-E/k_{\mathrm{B}}T} E^{1/2} dE.$$

The evolution of G_2 vs detuning is displayed in Fig. 5 and shows a strongly asymmetric profile that was already noticed in previous theoretical and experimental papers [8, 10].

This feature can readily be explained by noting that in situations relevant to experiments, γ_0 is small with respect to temperature. We can therefore replace g_2 by a sum of Dirac functions centered on δ_{0,m_l}. When the δ_{0,m_l} are positive, G_2 takes the simplified form

$$G_2 = 4\sqrt{\pi} \sum_{m_l} \left(\frac{D_{m_l}}{\hbar\gamma_{m_l}(\tilde{\delta}_{m_l})}\right) \left(\frac{\tilde{\delta}_{m_l}}{k_{\mathrm{B}}T}\right)^{3/2} e^{-\tilde{\delta}_{m_l}/k_{\mathrm{B}}T}.$$

Moreover, if we neglect the lift of degeneracy due to the dipolar interaction coupling and we assume all the $\tilde{\delta}_{m_l}$ to be equal to some $\tilde{\delta}$, we get

$$G_2 = 4\sqrt{\pi} \left(\frac{\bar{D}}{\hbar\bar{\gamma}(\tilde{\delta})}\right) \left(\frac{\tilde{\delta}}{k_{\mathrm{B}}T}\right)^{3/2} e^{-\tilde{\delta}/k_{\mathrm{B}}T}, \qquad (11)$$

with $\bar{D} = \sum_{m_l} D_{m_l}$ and $\bar{D}/\bar{\gamma} = \sum_{m_l} D_{m_l}/\gamma_{m_l}$ [18].

For $\tilde{\delta} < 0$, and $|\tilde{\delta}| \gg k_{\mathrm{B}}T$, we can replace the denominator of g_2 by $\tilde{\delta}^2$ and we get the asymptotic form for G_2

$$G_2 = \frac{3}{2} k_B T \sum_{m_l} \frac{D_{m_l}}{\tilde{\delta}_{m_l}^2}. \qquad (12)$$

Let us now comment the two equations (11) and (12).

1. We note that the maximum value of G_2 is obtained for $\tilde{\delta}/k_{\mathrm{B}}T = 3/2$. It means that when tuning the magnetic field (ie., $\tilde{\delta}$), the maximum losses are not obtained at the resonance $\tilde{\delta} = 0$, but at a higher field, corresponding to $\tilde{\delta} = 3k_{\mathrm{B}}T/2$. For a typical experimental temperature $T = 10\ \mu$K, this corresponds to a shift of about 0.1 G.

2. Similarly, the width of $G_2(\tilde{\delta})$ scales like $k_{\mathrm{B}}T$. Expressed in term of magnetic field, this corresponds to ~ 0.1 G for $T = 10\,\mu$K. This width is a consequence of the resonance nature of the scattering in p-wave processes. As seen earlier, both elastic and inelastic collisions are more favorable when the relative energy $E = \tilde{\delta}$. When $\tilde{\delta} < 0$, the resonance conditions cannot be fulfilled, since there are no state in the incoming channel with negative energy. The scattering is then formally analogous to optical pumping or other second-order processes and yields the $1/\tilde{\delta}^2$ obtained in (12). When $\tilde{\delta} \gg k_{\mathrm{B}}T$, the resonance condition is fulfilled by states that are not populated (since for a thermal distribution, we populate states up to $E \sim k_{\mathrm{B}}T$).

CONCLUSION

In this paper, we have developed a simple model capturing the main scattering properties close to a p-wave Feshbach resonance. The analytical formulas we obtained show very good agreement with both numerical coupled channel calculations and experimental measurements from our group [9] and from the Innsbruck group [22]. We have shown that the line shape of the resonance is very different from what is expected for a s-wave process: while s-wave scattering is mainly dominated by low energy processes, p-wave scattering is rather dominated by collisions at energies equal to that of the molecular state. Regarding p-wave molecules, we have seen that at resonance their wave-function was dominated by the short range bare molecular state. Finally, the study of the spontaneous decay of these molecules has shown

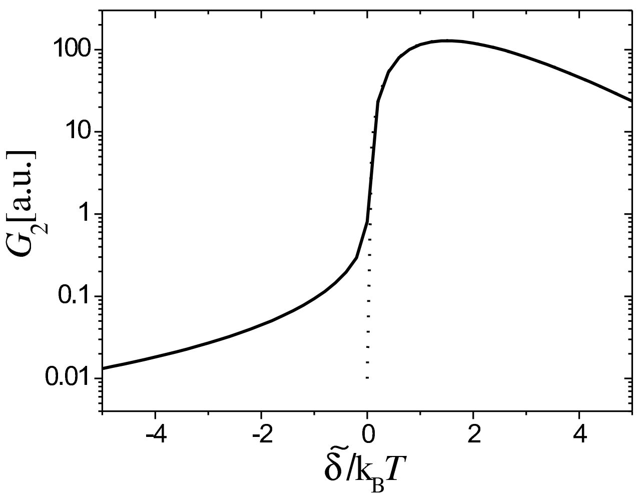

FIG. 5: Full line: numerical calculation of the loss-rate for $T = 10\ \mu$K. Dotted line: asymptotic expansion (11).

a very different lifetime depending on the relative angular momentum of its constituents, since molecules in $m_l = -1$ could live 10^4 times longer than in $m_l = 0, +1$. This very intriguing result might prove to be a valuable asset for the experimental study of p-wave molecule since it guaranties that $m_l = -1$ dimers are very stable against two-body losses in the absence of depolarizing collisions.

We thank Z. Hadzibabic, J. Dalibard and Y. Castin for very helpful discussions. S.K. acknowledges support from the Netherlands Organisation for Scientific Research (NWO) and E.U. contract HPMF-CT-2002-02019. E.K. acknowledges support from the Stichting FOM, which is financially supported by NWO. M. Teichmann acknowledges support from E.U. HPMT-2000-00102 and MEST-CT-2004-503847 contracts. This work was supported by CNRS, by the A.C.I. photonique and nanosciences programs from the french ministry of research, and by Collège de France. Laboratoire Kastler Brossel is *Unité de recherche de l'École Normale Supérieure et de l'Université Pierre et Marie Curie, associée au CNRS.*

[1] S. Jochim, M. Bartenstein, A. Altmeyer, G. Hendl, S. Riedl, C. Chin, J. Hecker Denschlag, and R. Grimm, Science **302**, 2101 (2003).

[2] M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, S. Gupta, Z. Hadzibabic, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **91**, 250401 (2003).

[3] T. Bourdel, L. Khaykovich, J. Cubizolles, J. Zhang, F. Chevy, M. Teichmann, L. Tarruell, S. J. J. M. F. Kokkelmans, and C. Salomon , Phys. Rev. Lett. **93**, 050401 (2004).

[4] J. Kinast, S. L. Hemmer, M. E. Gehm, A. Turlapov, and J. E. Thomas, Phys. Rev. Lett. **92**, 150402 (2004).

[5] M. Greiner, C. A. Regal, and D. S Jin, Nature **426**, 537 (2003).

[6] D.M. Lee, Rev. Mod. Phys. **69**, 645 (1997).

[7] C.C. Tsuei and J. R. Kirtley, Phys. Rev. Lett. **85**, 182 (2000).

[8] C. A. Regal *et al.* Phys. Rev. Lett. **90**, 053201 (2003).

[9] J. Zhang, E. G. M. van Kempen, T. Bourdel, L. Khaykovich, J. Cubizolles, F. Chevy, M. Teichmann, L. Tarruell, S. J. J. M. F. Kokkelmans, and C. Salomon1, Phys. Rev. A **70**, 030702 (2004).

[10] C. H. Schunck, M. W. Zwierlein, C. A. Stan, S. M. F. Raupach, W. Ketterle, A. Simoni, E. Tiesinga, C.J. Williams, P. S. Julienne, e-print cond-mat/0407373.

[11] T.L. Ho and N. Zahariev, e-print cond-mat/0408469; T.L. Ho and R.B. Diener, e-print cond-mat/0408468.

[12] Y. Ohashi, e-print cond-mat/0410516.

[13] J. R. Taylor, Scattering Theory (John Wiley, New York, 1972); H. Feshbach, Theoretical Nuclear Physics (John Wiley, New York, 1992).

[14] C. Chin, V. Vuletic, A. J. Kerman, and S. Chu Phys. Rev. Lett. **85**, 2717 (2000); P. J. Leo, C. J. Williams, and P. S. Julienne Phys. Rev. Lett. **85**, 2721 (2000).

[15] Thomas Volz, Stephan Drr, Niels Syassen, Gerhard Rempe, Eric van Kempen and Servaas Kokkelmans, e-print, cond-mat/0410083.

[16] C. Ticknor, C. A. Regal, D. S. Jin, and J. L. Bohn Phys. Rev. A **69**, 042712 (2004).

[17] E.G.M. van Kempen, B. Marcelis and S.J.J.M.F. Kokkelmans, e-print cond-mat/0406722.

[18] For the sake of simplicity, these averaged parameters only were presented in [9].

[19] K. Dieckmann, C. A. Stan, S. Gupta, Z. Hadzibabic, C. H. Schunck, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **89**, 203201 (2002).

[20] H.T.C. Stoof, J.M.V. A. Koelman, and B. J. Verhaar, Phys. Rev. B **38**, 4688 (1988).

[21] Note that the different lifetimes calculated for the three m_l states do not violate any rotational symmetry. Indeed, the magnetic field used to reach the Feshbach resonance provides a preferred direction to the system.

[22] C. Chin and R. Grimm, private communication.

Bibliographie

[1] S. N. Bose, "Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese," Z. Phys. **26**, 178 (1924).

[2] A. Einstein, "Quantentheorie des einatomigen idealen Gases," Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. **22**, 261 (1924).

[3] P. Dirac, Proceeding of the Royal Society of London **112**, 661 (1926).

[4] A. Kastler and C. Cohen-Tanoudji, Progress in optics (North Holland publ.) **5**, (1966).

[5] Background information for the 1997 Nobel prize in physics for laser cooling, http ://www.nobel.se/announcement-97/phyback97.html.

[6] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, "Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor," Science **269**, 198 (1995).

[7] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, "Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms," Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995).

[8] E. A. Cornell, W. Ketterle, and C. E. Wieman, "for the achievement of Bose-Einstein condensation in dilute gases of alkali atoms, and for early fundamental studies of the properties of the condensates," (2001), http ://www.nobel.se/physics/laureates/2001/index.html.

[9] D. G. Fried, T. C. Killian, L. Willmann, D. Landhuis, S. C. Moss, D. Kleppner, and T. J. Greytak, "Bose-Einstein Condensation of Atomic Hydrogen," Phys. Rev. Lett. **81**, 3811 (1998).

[10] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollet, and R. G. Hulet, "Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions," Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995).

[11] G. Modugno, G. Ferrari, G. Roati, R. J. Brecha, A. Simoni, and M. Inguscio, "Bose-Einstein Condensation of Potassium Atoms by Sympathetic Cooling," Science **294**, 1320 (2001).

[12] S. L. Cornish, N. R. Claussen, J. L. Roberts, E. A. Cornell, and C. E. Wieman, "Stable ^{85}Rb Bose-Einstein Condensates with Widely Tunable Interactions," Phys. Rev. Lett. **85**, 1795 (2000).

[13] T. Weber, J. Herbig, M. Mark, H.-C. Nägerl, and R. Grimm, "Bose-Einstein condensation of cesium," Science **299**, 232 (2003).

[14] A. Robert, O. Sirjean, A. Browaeys, J. Poupard, S. Nowak, D. Boiron, C. I. Westbrook, and A. Aspect, "A Bose-Einstein Condensate of Metastable Atoms," Science **292**, 461 (2001).

[15] F. P. D. Santos, J. Leonard, J. M. Wang, C. J. Barrelet, F. Perales, E. Rasel, C. S. Unnikrishnan, M. Leduc, and C. Cohen-Tannoudji, "Bose-Einstein condensation of metastable helium," Phys. Rev. Lett. **86**, 3459 (2001).

[16] Y. Takasu, K. Maki, K. Komori, T. Takano, K. Honda, M. Kumakura, T. Yabuzaki, and Y. Takahashi, "Spin-Singlet Bose-Einstein Condensation of Two-Electron Atoms," Phys. Rev. Lett. **91**, 040404 (2003).

[17] S. Jochim, M. Bartenstein, A. Altmeyer, G. Hendl, S. Riedl, C. Chin, J. H. Denschlag, and R. Grimm, "Bose-Einstein condensation of molecules," Science **302**, 2101 (2003).

[18] M. Greiner, C. A. Regal, and D. S. Jin, "Emergence of a Molecular Bose-Einstein Condensate from a Fermi Gas," Nature **426**, 537 (2003).

[19] M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, S. Gupta, Z. Hadzibabic, and W. Ketterle, "Observation of Bose-Einstein Condensation of Molecules," Phys. Rev. Lett. **91**, 250401 (2003).

[20] T. Bourdel, L. Khaykovich, J. Cubizolles, J. Zhang, F. Chevy, M. Teichmann, L. Tarruell, S. Kokkelmans, and C. Salomon, "Experimental Study of the BEC-BCS Crossover Region in ^{6}Li," cond-mat/040391 (04).

[21] R. Grimm, M. Weidelmüller, and Y. B. Ovchinnikov, "Optical traps for neutral atoms," Adv. At. Mol. Opt. Phys. **42**, 95 (2000).

[22] H. A. Feshbach, "Unified Theory of Nuclear Reactions," Annals of Physics **5**, 357 (1958).

[23] H. A. Feshbach, "A unified theory of nuclear reactions II," Annals of Physics **19**, 287 (1962).

[24] E. Tiesinga, B. J. Verhaar, and H. T. C. Stoof, "Threshold and resonance phenomena in ultracold ground-state collisions," Phys. Rev. A **47**, 4114 (1993).

[25] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, and W. Ketterle, "Observation of Feshbach resonances in a Bose-Einstein condensate," Nature **392**, 151 (1998).

[26] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, "Theory of Bose–Einstein condensation in trapped gases," Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999).

[27] E. W. Hagley, L. Deng, M. Kozuma, J. Wen, K. Helmerson, S. L. Rolston, and W. D. Phillips, "A Well-Collimated Quasi-Continuous Atom Laser," Science **283**, 1706 (1999).

[28] K. W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, and J. Dalibard, "Vortex formation in a stirred Bose-Einstein condensate," Phys. Rev. Lett. **84**, 806 (2000).

[29] S. Inouye, A. P. Chikkatur, D. M. Stamper-Kurn, J. Stenger, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, "Superradiant Rayleigh scattering from a Bose-Einstein condensate," Science **285**, 571 (1999).

[30] S. Dettmer, D. Hellweg, P. Ryytty, J. J. Arlt, W. Ertmer, K. Sengstock, D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, K. Kreutzmann, L. Santos, and M. Lewenstein, "Observation of Phase Fluctuations in Elongated Bose-Einstein Condensates," Phys. Rev. Lett. **87**, 160406 (2001).

[31] S. Burger, K. Bongs, S. Dettmer, W. Ertmer, K. Sengstock, A. Sanpera, G. V. Shlyapnikov, and M. Lewenstein, "Dark Solitons in Bose-Einstein Condensates," Phys. Rev. Lett. **83**, 5198 (1999).

[32] L. Khaykovich, F. Schreck, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, L. D. Carr, Y. Castin, and C. Salomon, "Formation of a matter-wave bright soliton," Science **296**, 1290 (2002).

[33] K. E. Strecker, G. B. Partridge, A. G. Truscott, and R. G. Hulet, "Formation and propagation of matter-wave soliton trains," Nature **417**, 150 (2002).

[34] U. A. Khawaja, H. T. C. Stoof, R. G. Hulet, K. E. Strecker, and G. B. Partridge, "Bright Soliton Trains of Trapped Bose-Einstein Condensates," Phys. Rev. Lett. **89**, 200404 (2002).

[35] B. Paredes, A. Widera, V. Murg, O. Mandel, S. Fölling, I. Cirac, G. V. Shlyapnikov, T. W. Hänsch, and I. Bloch, "Tonks-Girardeau gas of ultracold atoms in an optical lattice," Nature **429**, 277 (2004).

[36] M. Girardeau, "Relationship between systems of impenetrable bosons and fermions in one dimension," J. Math. Phys. **1**, 516 (1960).

[37] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hansch, and I. Bloch, "Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms," Nature **415**, 39 (2002).

[38] B. DeMarco and D. S. Jin, "Onset of Fermi Degeneracy in a Trapped Atomic Gas," Science **285**, 1703 (1999).

[39] F. Schreck, L. Khaykovich, K. L. Corwin, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, and C. Salomon, "Quasipure Bose-Einstein Condensate Immersed in a Fermi Sea," Phys. Rev. Lett. **87**, 080403 (2001).

[40] A. G. Truscott, K. E. Strecker, W. I. McAlexander, G. B. Partridge, and R. G. Hulet, "Observation of Fermi Pressure in a Gas of Trapped Atoms," Science **291**, 2570 (2001).

[41] S. R. Granade, M. E. Gehm, K. M. O'Hara, and J. E. Thomas, "Preparation of a degenerate, two-component fermi gas by evaporation in a single beam optical trap," Phys. Rev. Lett. **88**, 120405 (2002).

[42] M. B. S. Jochim, G. Hendl, J. H. Denschlag, R. Grimm, A. Mosk, and M. Weidemüller, "Magnetic Field Control of Elastic Scattering in a Cold Gas of Fermionic Lithium Atoms," Phys. Rev. Lett. **89**, 273202 (2002).

[43] Z. Hadzibabic, C. A. Stan, K. Dieckmann, S. Gupta, M. W. Zwierlein, A. Görlitz, and W. Ketterle, "Two-Species Mixture of Quantum Degenerate Bose and Fermi Gases," Phys. Rev. Lett. **88**, 160401 (2002).

[44] G. Roati, F. Riboli, G. Modugno, and M. Inguscio, "Fermi-Bose Quantum Degenerate ^{40}K - ^{87}Rb Mixture with Attractive Interaction," Phys. Rev. Lett. **89**, 150403 (2002).

[45] M. Holland, S. J. J. M. F. Kokkelmans, M. L. Chiofalo, and R. Walser, "Resonance Superfluidity in a Quantum Degenarate Fermi Gas," Phys. Rev. Lett. **87**, 120406 (2001).

[46] L. N. Cooper, "Bound Electron Pairs in a Degenerate Fermi Gas," Phys. Rev. **104**, 1189 (1956).

[47] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schreiffer, "Theory of Superconductivity," Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).

[48] M. Tinkham, *Supraconductivity* (Krieger, Malabar, Florida, 1975).

[49] P. Nozières and S. Schmitt-Rink, "Bose Condensation in an Attractive Fermion Gas : From Weak to Strong Coupling Superconductivity," J. Low. Temp. Phys. **1985**, 195 (59).

[50] M. Randeria, in *Bose-Einstein Condensation*, edited by A. Griffin, D. Snoke, and S. Stringari (Cambridge University Press, Cambridge, 1995), pp. 355 – 392.

[51] J. G. Bednorz and K. A. Müller, "for their discovery of new superconducting materials," (1987), http ://www.nobel.se/physics/laureates/1987/index.html.

[52] A. J. Moerdijk, B. J. Verhaar, and A. Axelsson, "Resonances in ultra-cold collisions of ^{6}Li, ^{7}Li and ^{23}Na," Phys. Rev. A **51**, 4852 (1995).

[53] H. T. C. Stoof, M. Houbiers, C. A. Sackett, and R. G. Hulet, "Superfluidity of spin polarized ^{6}Li," Phys. Rev. Lett. **76**, 10 (1996).

[54] M. Houbiers, H. T. C. Stoof, W. I. McAlexander, and R. G. Hulet, "Elastic and inelastic collisions of ^{6}Li atoms in magnetic and optical traps," Phys. Rev. A **57**, R1497 (1998).

[55] R. Combescot, "Trapped ^{6}Li : A High Tc Superfluid ?," Phys. Rev. Lett. **83**, 3766 (1999).

[56] C. S. de Melo, M. Randeria, and J. Engelbrecht, "Crossover from BCS to Bose superconductivity : Transition temperature and time-dependent Ginzburg-Landau theory," Phys. Rev. Lett. **71**, 3202 (1993).

[57] J. N. Milstein, S. J. J. M. F. Kokkelmans, and M. J. Holland, "Resonance theory of the crossover from Bardee-Cooper-Schrieffer superfluidity to Bose-Einstein condensation in a dilute fermi gas," Phys. Rev. A **66**, 043604 (2002).

[58] Y. Ohashi and A. Griffin, "BCS-BEC crossover in a gas of Fermi atoms with a Feshbach resonance," Phys. Rev. Lett. **89**, 130402 (2002).

[59] L. D. Carr, T. Bourdel, and Y. Castin, "Limits of sympathetic cooling by bosons due to particle loss," Phys. Rev. A **69**, 033603 (2004).

[60] T. Bourdel, J. Cubizolles, L. Khaykovich, K. M. F. Magalhães, S. J. J. M. F. Kokkelmans, G. V. Shlyapnikov, and C. Salomon, "Measurement of the Interaction Energy near a Feshbach Resonance in a ^{6}Li Fermi Gas," Phys. Rev. Lett. **91**, 020402 (2003).

[61] J. Cubizolles, T. Bourdel, S. J. J. M. F. Kokkelmans, G. V. Shlyapnikov, and C. Salomon, "Production of Long-Lived Ultracold Li_2 Molecules from a Fermi Gas," Phys. Rev. Lett. **91**, 240401 (2003).

[62] J. Zhang, E. van Kempen, T. Bourdel, L. Khaykovich, J. Cubizolles, F. Chevy, M. Teichmann, L. Tarruell, S. Kokkelmans, and C. Salomon, "P-wave Feshbach resonances of ultracold ^{6}Li," Phys. Rev. A **70**, 030702 (2004).

[63] F. Chevy, E. G. M. van Kempen, T. Bourdel, J. Zhang, L. Khaykovich, M. Teichmann, L. Tarruell, S. Kokkelmans, and C. Salomon, "Resonnant scattering properties close to a p-wave Feshbach resonance," submitted to PRA (2004).

[64] G. Ferrari, Ph.D. thesis, Université Paris VI, 2000.

[65] F. Schreck, Ph.D. thesis, Université Paris VI, 2002.

[66] W. Pauli, "The Connection Between Spin and Statistics," Phys. Rev. **58**, 716 (1940).

[67] E. L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, and D. E. Pritchard, "Trapping of Neutral Sodium with Radiation Pressure," Phys. Rev. Lett. **59**, 2631 (1987).

[68] M.-. Mewes, G. Ferrari, F. Schreck, A. Sinatra, and C. Salomon, "Simultaneous Magneto-Optical Trapping of Two Lithium Isotopes," Phys. Rev. A **61**, 011403 (1999).

[69] F. Schreck, G. Ferrari, K. L. Corwin, J. Cubizolles, L. Khaykovich, M.-O. Mewes, and C. Salomon, "Sympathetic Cooling of Bosonic and Fermionic Lithium Gases toward Quantum Degeneracy," Phys. Rev. A **64**, 011402 (01).

[70] B. H. Bransden and C. J. Joachain, *Physics of Atoms and Molecules* (Longman, New-York, 1983).

[71] D. A. Butts and D. S. Rokhsar, "Trapped Fermi gases," Phys. Rev. A **55**, 4346 (1997).

[72] B. Diu, C. Guthman, D. Lederer, and C. Roulet, *Physique Statistique* (Hermann, Paris, 1997).

[73] J. Dalibard, *Collisional dynamics of ultra-cold atomic gases, Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi, Course CXL* (IOS Press, Amsterdam, 1999), m. Inguscio, S. Stringari and C. Wieman (Eds).

[74] F. A. van Abeelen, Ph.D. thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 1999.

[75] L. Tarruell, Rapport de DEA, 2004.

[76] L. Pitaevski and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation* (Clarendon Press, Oxford, 2003).

[77] C. J. Joachain, *Quantum Collision Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1983).

[78] C. Cohen-Tannoudji, Cours au Collège de France, 1998-1999, disponible sur http ://www.lkb.ens.fr/cours/college-de-france.

[79] S. Gupta, Z. Hadzibabic, M. W. Zwierlein, C. A. Stan, K. Dieckmann, C. H. Schunck, E. G. M. van Kempen, B. J. Verhaar, and W. Ketterle, "Radio-Frequency Spectroscopy of Ultracold Fermions," Science **300**, 1723 (2003).

[80] G. Roati, E. de Mirandes, F. Ferlaino, H. Ott, G. Modugno, and M. Inguscio, "Atom Interferometry with Trapped Fermi Gases," Phys. Rev. Lett. **92**, 230402 (2004).

[81] E. R. I. Abraham, C. A. Sackett, and R. G. Hulet, "Triplet s-wave resonance in ^{6}Li collisions and scattering length," Phys. Rev. A **55**, 3299 (1997).

[82] E. R. I. Abraham, W. I. McALexander, C. A. Sackett, and R. G. Hulet, "Spectroscopic Determination of the s-Wave Scattering Length of Lithium," Phys. Rev. Lett. **74**, 1315 (1995).

[83] Z. Hadzibabic, Ph.D. thesis, MIT, 2003.

[84] E. Timmermans, P. Tommasini, M. Hussein, and A. Kerman, "Feshbach resonances in atomic Bose-Einstein condensates," Phys. Reports **315**, 199 (1999).

[85] B. Marcelis, E. G. M. van Kempen, B. J. Verhaar, and S. J. J. M. F. Kokkelmans, "Feshbach resonances with large background scattering length : Interplay with open-channel resonances," Phys. Rev. A **70**, 012701 (2004).

[86] J. Cubizolles, Ph.D. thesis, Université Paris VI, 2004.

[87] J. Dalibard, Cours de DEA de physique quantique sur les collisions.

[88] N. Davidson, H. J. Lee, C. S. Adams, M. Kasevich, and S. Chu, "Long Atomic Coherence Times in an Optical Dipole Trap," Phys. Rev. Lett. **74**, 1311 (1995).

[89] H. F. Hess, "Evaporative cooling of magnetically trapped and compressed spin-polarized hydrogen," Phys. Rev. B **34**, 3476 (1986).

[90] N. Masuhara, J. M. Doyle, J. C. Sandberg, D. Kleppner, T. J. Greytak, H. F. Hess, and G. P. Kochanski, "Evaporative Cooling of Spin-Polarized Atomic Hydrogen," Phys. Rev. Lett. **61**, 935 (1988).

[91] C. Cohen-Tannoudji, Cours au Collège de France, 1996-1997, disponible sur http ://www.lkb.ens.fr/cours/college-de-france.

[92] J. Goldwin, S. Inouye, M. L. Olsen, B. Newman, B. D. DePaola, and D. S. Jin, "Measurement of the interaction strength in a Bose-Fermi mixture with ^{87}Rb and ^{40}K," Phys. Rev. A **70**, 021601 (2004).

[93] K. E. Strecker, G. B. Partridge, and R. G. Hulet, "Conversion of an Atomic Fermi Gas to a Long-Lived Molecular Bose Gas," Phys. Rev. Lett. **91**, 080406 (2003).

[94] E. Timmermans, "Degenerate Fermion Gas Heating by Hole Creation," Phys. Rev. Lett. **87**, 240403 (2001).

[95] L. D. Carr and J. Brand, "Soliton Formation and Modulational Instability in Bose-Einstein Condensates," Phys. Rev. Lett. **92**, 040401 (2004).

[96] G. Ferrari, "Collisional relaxation in a fermionic gas," Phys. Rev. A. **59**, R4125 (1999).

[97] Z. Hadzibabic, S. Gupta, C. A. Stan, C. H. Schunck, M. W. Zwierlein, K. Dieckmann, and W. Ketterle, "Fifty-fold improvement in the number of quantum degenerate fermionic atoms," Phys.Rev.Lett **91**, 160401 (2003).

[98] M. Holland, B. DeMarco, and D. S. Jin, "Evaporative cooling of a two-component degenerate Fermi gas," Phys. Rev. A. **61**, 053610 (2000).

[99] T. Loftus, C. A. Regal, C. Ticknor, J. L. Bohn, and D. S. Jin, "Resonant control of elastic collisions in an optically trapped Fermi gas of atoms," Phys. Rev. Lett. **88**, 173201 (2002).

[100] S. Gupta, Z. Hadzibabic, J. R. Anglin, and W. Ketterle, "Collisions in zero temperature Fermi gases," Phys. Rev. Lett. **92**, 100401 (2004).

[101] M. E. Gehm, S. L. Hemmer, S. R. Granade, K. M. O'Hara, and J. E. Thomas, "Mechanical Stability of a Strongly-Interacting Fermi Gas of Atoms," Phys. Rev. A **68**, 011401(R) (2003).

[102] K. Dieckmann, C. A. Stan, S. Gupta, Z. Hadzibabic, C. H. Schunck, and W. Ketterle, "Decay of an Ultracold Fermionic Lithium Gas near a Feshbach Resonance," Phys. Rev. Lett. **89**, 203201 (2002).

[103] K. M. O'Hara, S. L. Hemmer, S. R. Granade, M. E. Gehm, J. E. Thomas, V. Venturi, E. Tiesinga, and C. J. Williams, "Measurement of the zero crossing in a Feshbach resonance of fermionic ^{6}Li," Phys. Rev. A **66**, 041401 (2002).

[104] H. T. C. Stoof, J. M. V. A. Koelman, and B. J. Verhaar, "Spin-exchange and dipole relaxation rates in atomic hydrogen : Rigorous and simplified calculations," Phys. Rev. B **38**, 4688 (1988).

[105] D. S. Petrov, "Three-body problem in Fermi gases with short-range interparticle interaction," Phys. Rev. A **67**, 010703(R) (2003).

[106] B. D. Esry, C. H. Greene, and H. Suno, "Threshold laws for three-body recombination," Phys. Rev. A. **65**, 010705(R) (2002).

[107] D. S. Petrov, C. Salomon, and G. V. Shlyapnikov, "Weakly Bound Dimers of Fermionic Atoms," Phys. Rev. Lett. **93**, 090404 (2004).

[108] Y. Kagan and B. V. Svistunov, "Evolution of Correlation Properties and Appearance of Broken Symmetry in the Process of Bose-Einstein Condensation," Phys. Rev. Lett. **79**, 3331 (1997).

[109] C. Menotti, P. Pedri, and S. Stringari, "Expansion of an Interacting Fermi Gas," Phys. Rev. Lett. **89**, 250402 (2002).

[110] Y. Castin and R. Dum, "Bose-Einstein condensation in time dependent traps," Phys. Rev. Lett. **77**, 5315 (1996).

[111] I. Shvarchuck, C. Buggle, D. S. Petrov, K. Dieckmann, M. Zielonkowski, M. Kemmann, T. Tiecke, W. V. Klitzing, G. V. Shlyapnikov, and J. T. M. Walraven, "Bose-Einstein Condensation into Nonequilibrium States Studied by Condensate Focusing," Phys. Rev. Lett. **89**, 270404 (2002).

[112] I. Shvarchuck, C. Buggle, D. S. Petrov, M. Kemmann, W. von Klitzing, G. V. Shlyapnikov, and J. T. M. Walraven, "Hydrodynamic behavior in expanding thermal clouds of ^{87}Rb," Phys. Rev. A **68**, 063603 (2003).

[113] M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, R. Geursen, S. Jochim, C. Chin, J. H. Denschlag, R. Grimm, A. Simoni, E. Tiesinga, C. J. Williams, and P. S. Julienne, "Precise determination of ^{6}Li cold collision parameters by radio-frequency spectroscopy on weakly bound molecules," cond-mat/ 0408673 (2004).

[114] D. Guéry-Odelin, F. Zambelli, J. Dalibard, and S. Stringari, "Collective oscillations of a classical gas confined in harmonic traps," Phys. Rev. A **60**, 4851 (1999).

[115] S. J. J. M. F. Kokkemlans, G. V. Shlyapnikov, and C. Salomon, "Degenerate Atom-Molecle Mixture in a Cold Fermi Gas," Phys. Rev. A **69**, 031602(R) (2004).

[116] C. A. Regal, C. Ticknor, J. L. Bohn, and D. S. Jin, "Creation of ultracold molecules from a Fermi Gas of Atoms," Nature **424**, 47 (2003).

[117] C. Chin and R. Grimm, "Thermal equilibrium and efficient evaporation of an ultracold atom-molecule mixture," Phys. Rev. A. **69**, 033612 (2004).

[118] G. M. Falco and H. T. C. Stoof, "Crossover temperature of Bose-Einstein condensation in an atomic Fermi gas," Phys. Rev. Lett. **92**, 130401 (2004).

[119] L. D. Carr, G. V. Shlyapnikov, and Y. Castin, "Achieving a BCS transition in an atomic Fermi gas," cond-mat/0308306 (2003).

[120] J. D. Weinstein, R. DeCarvalho, T. Guillet, B. Friedrich, and J. M. Doyle, "Magnetic trapping of calcium monohydride molecules at millikelvin temperatures," Nature **395**, 148 (1998).

[121] R. Wynar, R. S. Freeland, D. J. Han, C. Ryu, and D. J. Heinzen, "Molecules in a Bose-Einstein Condensate," Science **287**, 1016 (2000).

[122] E. A. Donley, N. R. Claussen, S. T. Thompson, and C. E. Wieman, "Atom-molecule coherence in a Bose-Einstein condensate," Nature **417**, 529 (2002).

[123] S. Dürr, T. Volz, A. Marte, and G. Rempe, "Observation of molecules produced from a Bose-Einstein condensate," Phys. Rev. Lett. **92**, 020406 (2003).

[124] J. Herbig, T. Kraemer, M. Mark, T. Weber, C. Chin, H.-C. Nägerl, and R. Grimm, "Preparation of a Pure Molecular Quantum Gas," Science **301**, 1510 (2003).

[125] K. Xu, T. Mukaiyama, J. R. Abo-Shaeer, J. K. Chin, D. E. Miller, and W. Ketterle, "Formation of Quantum-Degenerate Sodium Molecules," Phys. Rev. Lett. **91**, 210402 (2003).

[126] M. Mark, T. Kraemer, J. Herbig, C. Chin, H.-C. Naegerl, and R. Grimm, "Efficient creation of molecules from a cesium Bose-Einstein condensate," cond-mat/ 0409737 (2004).

[127] C. A. Regal, C. Ticknor, J. L. Bohn, and D. S. Jin, "Tuning p-wave interactions in an ultracold Fermi gas of atoms," Phys. Rev. Lett. **90**, 053201 (2003).

[128] S. Jochim, M. Bartenstein, A. Altmeyer, G. Hendl, C. Chin, J. H. Denschlag, and R. Grimm, "Pure Gas of Optically Trapped Molecules Created from Fermionic Atoms," Phys. Rev. Lett. **91**, 240402 (03).

[129] M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, C. Chin, J. H. Denschlag, and R. Grimm, "Crossover from a Molecular Bose-Einstein Condensate to a Degenerate Fermi Gas," Phys. Rev. Lett. **92**, 120401 (2004).

[130] M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, A. J. Kerman, and W. Ketterle, "Condensation of Pairs of Fermionic Atoms near a Feshbach Resonance," Phys. Rev. Lett. **92**, 120403 (2004).

[131] T. D. Lee and T. D. Yang, Phys. Rev. **105**, 1119 (1957).

[132] T. D. Lee, K. Huang, and T. D. Yang, "Eigenvalues and Eigenfunctions of a Bose System of Hard Spheres and Its Low-Temperature Properties," Phys. Rev. **106**, 1135 (1957).

[133] G. E. Astrakharchik, J. Boronat, J. Casulleras, and S. Giorgini, "Equation of state of a Fermi gas in the BEC-BCS crossover : a quantum Monte-Carlo study," cond-mat/ 0406113 (2004).

[134] J. Söding, D. Guéry-Odelin, P. Desbiolles, F. Chevy, H. Inamori, and J. Dalibard, "Three-body decay of a rubidium Bose-Einstein condensate," Appl. Phys. B **69**, 257 (1999).

[135] C. A. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin, "Lifetime of Molecule-atom Mixtures Near a Feshbach Resonance in ^{40}K," Phys. Rev. Lett. **92**, 083201 (2004).

[136] F. Gerbier, J. H. Thywissen, S. Richard, P. Bouyer, and A. Aspect, "Critical Temperature of a Trapped, Weakly Interacting Bose Gas," Phys. Rev. Lett. **92**, 030405 (2004).

[137] P. Grüter, D. Ceperley, and F. Laloë, "Critical Temperature of Bose-Einstein Condensation of Hard-Sphere Gases," Phys. Rev. Lett. **79**, 3549 (1997).

[138] A. J. Leggett, in *Modern Trends in the Theory of Condensed Matter*, edited by A. Pekalski and L. N. i. P. V. . R. Przystawa (Springer-Verlag, Berlin, 1980), p. 13.

[139] G. Bruun, Y. Castin, R. Dum, and K. Burnett, "BCS Theory for Trapped Ultracold Fermions," Euro. Phys. J. D **7**, 433 (1999).

[140] P. Pieri and G. Strinati, "Strong-coupling limit in the evolution from BCS superconductivity to Bose-Einstein condensation," Phys. Rev. B **61**, 15370 (2000).

[141] S. J. J. M. F. Kokkelmans, J. N. Milstein, M. L. Chiofalo, R. Walser, and M. J. Holland, "Resonance superfluidity : Renormalization of resonance scattering theory," Phys. Rev. A **65**, 053617 (2002).

[142] J. Stajic, J. Milstein, Q. Chen, M. Chiofalo, M. Holland, and K. Levin, "The Nature of Superfluidity in Ultracold Fermi Gases Near Feshbach Resonances," Phys. Rev.A **69**, 063610 (2004).

[143] M. Holland, C. Menotti, and L. Viverit, "The role of boson-fermion correlations in the resonance theory of superfluids," cond-mat/ 0408468 (2004).

[144] A. Perali, P. Pieri, L. Pisani, and G. Strinati, "BCS-BEC crossover at finite temperature for superfluid trapped Fermi atoms," Phys. rev. Lett. **92**, 220404 (2004).

[145] S. D. Palo, M. Chiofalo, M. Holland, and S. Kokkelmans, "Resonance effects on the crossover of bosonic to fermionic superfluidity," cond-mat/ 0404672 (2004).

[146] R. Combescot, "Feshbach resonance in dense ultracold Fermi gases," Phys. Rev. Lett. **91**, 120401 (2003).

[147] R. Combescot, "Shift of the molecular bound state threshold in dense ultracold Fermi gases with Feshbach resonance," New J. Phys. **5**, 86 (2003).

[148] R. Combescot, "Threshold of molecular bound state and BCS transition in dense ultracold Fermi gases with Feshbach resonance," cond-mat/0310583 (2004).

[149] J. Kinnunen, M. Rodriguez, and P. Törmä, "Pairing Gap and In-Gap Excitations in Trapped Fermionic Superfluids," Science **305**, 1131 (2004).

[150] J. Kinnunen, M. Rodriguez, and P. Törmä, "Signatures of Superfluidity for Feshbach-Resonant Fermi Gases," Phys. Rev. Lett. **92**, 230403 (2004).

[151] C. Chin, "A simple mean field equation for condensates in the BEC-BCS crossover regime," cond-mat/ 0409489 (2004).

[152] G. M. Bruun and C. J. Pethick, "An effective theory of Feshbach resonances and many-body properties of Fermi gases," Phys. Rev. Lett. **92**, 140404 (2004).

[153] R. B. Diener and T.-L. Ho, "The Condition for Universality at Resonance and Direct Measurement of Pair Wavefunctions Using rf Spectroscopy," cond-mat/ 0405174 (2004).

[154] L. P. Gorkov and T. K. Melik-Barkhudarov, "Contribution to the Theory of Superfluidity in an Imperfect Fermi Gas," Zh. Eskp. Theor. Fiz. **40**, 1452 (1961), [Sov. Phys. JETP 34, 61 (1961)].

[155] M. Greiner, C. A. Regal, C. Ticknor, J. L. Bohn, and D. S. Jin, "Detection of Spatial Correlations in an Ultracold Gas of Fermions," Phys. Rev. Lett. **92**, 150405 (2004).

[156] M. Houbiers, R. Ferwenda, H. T. C. Stoof, W. McAlexander, C. A. Sackett, and R. G. Hulet, “Superfluid state of atomic ^{6}Li in a magnetic trap,” Phys. Rev. A **56**, 4864 (1997).

[157] X. Leyronas and R. Combescot, “Instability of a trapped ultracold Fermi gas with attractive interactions,” cond-mat/ 0403617 (2004).

[158] H. Heiselberg, “Fermi Systems with long scattering lengths,” Phys. Rev. A. **63**, 043606 (2001).

[159] T.-L. Ho, “Universal Thermodynamics of Degenerate Quantum Gases in the Unitarity Limit,” Phys. Rev. Lett. **92**, 090402 (2004).

[160] H. Heiselberg, “Bosons and Fermions near Feshbach resonances,” Phys. Rev. B. **37**, 1 (2004).

[161] K. M. O’Hara, S. L. Hemmer, M. E. Gehm, S. R. Granade, and J. E. Thomas, “Observation of a Strongly Interacting Degenerate Fermi Gas of Atoms,” Science **298**, 2179 (2002).

[162] J. Carlson, S.-Y. Chang, V. R. Pandharipande, and K. E. Schmidt, “Superfluid Fermi Gases with Large Scattering Length,” Phys. Rev. Lett. **91**, 050401 (2003).

[163] A. Perali, P. Pieri, and G. Strinati, “Quantitative comparison between theoretical predictions and experimental results for the BCS-BEC crossover,” Phys. Rev. Lett. **93**, 100404 (2003).

[164] B. Jackson, J. Pedri, and S. Stringari, “Collisions and expansion of an ultracold diluteFermi gas,” cond-mat/0404175 (2004).

[165] J. Kinast, A. Turlapov, and J. E. Thomas, “Heat Capacity of a Strongly-Interacting Fermi Gas,” cond-mat/ 0409283 (2004).

[166] C. A. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin, “Observation of Resonance Condensation of Fermionic Atom Pairs,” Phys. Rev. Lett. **92**, 040403 (2004).

[167] M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, and W. Ketterle, “private communication,” (2004).

[168] R. B. Diener and T.-L. Ho, “Projecting Fermion Pair Condensates into Molecular Condensates,” cond-mat/ 0404517 (2004).

[169] R. Combescot and X. Leyronas, “Hydrodynamic Modes in Dense Trapped Ultracold Gases,” Phys. Rev. Lett. **89**, 190405 (2002).

[170] Y. E. Kim and A. L. Zubarev, “Time-Dependent Density-Functional Theory for Trapped strongly-Interacting Fermionic Atoms,” cond-mat/ 0404513 (2004).

[171] Y. E. Kim and A. L. Zubarev, “Dynamics of Strongly Interacting Fermi Gases of Atoms in a Harmonic Trap,” cond-mat/ 0403085 (2004).

[172] H. Hu, A. Minguzzi, X. Liu, and M. Tosi, “Collective modes and ballistic expansion of a Fermi gas in the BCS-BEC crossover,” cond-mat/0404012 (2004).

[173] S. Stringari, "Collective oscillations of a trapped superfluid Fermi gas near a Feshbach resonance," Europhys. Lett. **65**, 749 (2004).

[174] M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, C. Chin, J. H. Denschlag, and R. Grimm, "Collective Excitations of a Degenerate Gas at the BEC-BCS Crossover," Phys. Rev. Lett. **92**, 203201 (2004).

[175] J. Kinast, S. L. Hemmer, M. E. Gehm, A. Turlapov, and J. E. Thomas, "Evidence for Superfluidity in a Strongly Attractive Fermi Gas," Phys. Rev. Lett **150402**, (2004).

[176] J. Kinast, A. Turlapov, and J. E. Thomas, "Breakdown of Hydrodynamics in the Radial Breathing Mode of a Strongly-Interacting Fermi Gas," cond-mat/ 0408634 (2004).

[177] R. Combescot and X. Leyronas, "Comment on "Collective Excitations of a Degenerate Gas at the BEC-BCS Crossover"," Phys. Rev. Lett. **93**, 138901 (2004).

[178] C. Chin, M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, J. H. Denschlag, and R. Grimm, "Observation of the pairing gap in a strongly interacting Fermi gas," Science **305**, 1128 (2004).

[179] M. Greiner, C. Regal, and D. Jin, "Probing the excitation spectrum of a Fermi gas in the BCS-BEC crossover regime," cond-mat/ 0407381 (2004).

[180] R. Onofrio, C. Raman, J. M. Vogels, J. R. Abo-Shaeer, A. P. Chikkatur, and W. Ketterle, "Observation of Superfluid Flow in a Bose-Einstein Condensed Gas," Phys. Rev. Lett. **85**, 2228 (2000).

[181] L. Pitaevskii, S. Stringari, and G. Orso, "Sound propagation and oscillations of a superfluid Fermi gas in the presence of a 1D optical lattice," cond-mat/ 0407532 (2004).

[182] I. Carusotto and Y. Castin, to be published (2004).

[183] L. Viverit, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, "Momentum distribution of a trapped Fermi gas with large scattering length," cond-mat/0307538 (2004).

[184] E. Altman, E. Demler, and M. D. Lukin, "Probing many-body states of ultracold atoms via noise correlations," Phys. Rev. A **70**, 013603 (2004).

[185] E. van Kempen, B. Marcelis, and S. Kokkelmans, "Formation of fermionic molecules via interisotope Feshbach resonances," cond-mat/ 0406722 (2004).

[186] J. Zhang, E. G. M. van Kempen, T. Bourdel, L. Khaykovich, J. Cubizolles, M. Teichmann, L. Tarruell, S. Kokkelmans, and C. Salomon, "Expansion of a lithium gas in the BEC-BCS crossover," Proceedings ICAP (2004).

[187] C. A. Stan, M. W. Zwierlein, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, and W. Ketterle, "Observation of Feshbach resonances between two different atomic species," cond-mat/ 0406129 (2004).

[188] S. Inouye, J. Goldwin, M. L. Olsen, C. Ticknor, J. L. Bohn, and D. S. Jin, "Observation of Heteronuclear Feshbach Resonances in a Bose-Fermi Mixture," cond-mat/ 0406208 (2004).

[189] H. Heiselberg, C. Pethick, H. Smith, and L. Viverit, "Influence of Induced Interactions on the Superfluid Transition on Dilute Fermi Gases," Phys. Rev. Lett. **85**, 2418 (2000).

[190] L. Viverit, "Boson-induced s-wave pairing in dilute boson-fermion mixtures," Phys. Rev. A **66**, 023605 (2002).

[191] G. Modugno, G. Roati, F. Riboli, F. Ferlaino, R. J. Brecha, and M. Inguscio, "Collapse of a degenerate Fermi gas," Science **68**, 011601 (2002).

[192] L. Viverit and S. Giorgini, "Ground-state properties of a dilute Bose-Fermi mixture," Phys. Rev. A **66**, 062604 (2002).

[193] T.-L. Ho and N. Zahariev, "High Temperature Universal Properties of Atomic Gases Near Feshbach Resonance with Non-Zero Orbital Angular Momentum," cond-mat/ 0408469 (2004).

[194] T.-L. Ho and R. B. Diener, "Fermion Superfluids of Non-Zero Orbital Angular Momentum near Resonance," cond-mat/ 0408468 (2004).

[195] D. M. Lee, "The extraordinary phases of liquid 3He," Rev. Mod. Phys. **69**, 645 (1997).

[196] C. C. Tsuei and J. R. Kirtley, "Phase-Sensitive Evidence for d-Wave Pairing Symmetry in Electron-Doped Cuprate Superconductors," Phys. Rev. Lett. **85**, 182 (2000).

[197] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë, *Mécanique Quantique* (Hermann, Paris, 1996).

[198] C. H. Schunck, M. W. Zwierlein, C. A. Stan, S. M. F. Raupach, W. Ketterle, A. Simoni, E. Tiesinga, C. J. Williams, and P. S. Julienne, "Feshbach Resonances in Fermionic ^{6}Li," cond-mat/ 0407373 (2004).

[199] H. Suno, B. D. Esry, and C. H. Greene, "Recombination of Three Ultracold Fermionic Atoms," Phys. Rev. Lett. **90**, 053202 (2003).

[200] C. Ticknor, C. A. Regal, D. S. Jin, and J. L. Bohn, "Multiplet structure of Feshbach resonances in nonzero partial waves," Phys. Rev. A **69**, 042712 (2004).

[201] L. Santos, G. V. Shlyapnikov, P. Zoller, and M. Lewenstein, "Bose-Einstein Condensation in Trapped Dipolar Gases," Phys. Rev. Lett. **85**, 1791 (2000).

[202] M. A. Baranov, M. S. Mar'enko, V. S. Rychkov, and G. V. Shlyapnikov, "Superfluid pairing in a polarized dipolar Fermi gas," Phys. Rev. A **66**, 013606 (2002).

[203] M. A. Baranov, L. Dobrek, K. Goral, L. Santos, and M. Lewenstein, "Ultracold dipolar gases - a challenge for experiments and theory," cond-mat/ 0201100 (2002).

[204] S. Giovanazzi, A. Görlitz, and T. Pfau, "Tuning the Dipolar Interaction in Quantum Gases," Phys. Rev. Lett. **89**, 130401 (2002).

[205] A. Derevianko, “Anisotropic pseudopotential for polarized dilute quantum gases,” Phys. Rev. A **67**, 033607 (2003).

[206] L. Santos, G. V. Shlyapnikov, and M. Lewenstein, “Roton-Maxon Spectrum and Stability of Trapped Dipolar Bose-Einstein Condensates,” Phys. Rev. Lett. **90**, 250403 (2003).

[207] I. Mazets, D. O’Dell, G. Kurizki, N. Davidson, and W. Schleich, “Depletion of a Bose-Einstein condensate by laser-iduced dipole-dipole interactions,” cond-mat/0310672 (2004).

[208] G. Modugno, F. Ferlaino, R. Heidemann, G. Roati, and M. Inguscio, “. Production of a Fermi gas of atoms in an optical lattice,” Phys. Rev. A **297**, 2240 (2003).

[209] W. Hofstetter, J. I. Cirac, P. Zoller, E. Demler, and M. D. Lukin, “High-temperature superfluidity of fermionic atoms in optical lattices,” Phys. Rev. Lett. **89**, 220407 (2002).

[210] F. Illuminati and A. Albus, “High-Temperature Atomic Superfluidity in Lattice Boson-Fermion Mixtures,” Phys. Rev. Lett. **93**, 090406 (2004).

[211] C. Lee, “Bose-Einstein Condensation of Particule-Hole Pairs in Ultracold Fermionic Atoms Trapped within Optical Lattices,” Phys. Rev. Lett. **93**, 120406 (2004).

[212] H. P. Büchler and G. Blatter, “Phase separation of atomic Bose-Fermi mixtures in an optical lattice,” Phys. Rev. A **69**, 063603 (2004).

[213] R. Roth and K. Burnett, “Quantum phases of atomic boson-fermion mixtures in optical lattices,” Phys. Rev. A **69**, 021601 (2004).

Résumé :

Ce mémoire de thèse décrit les propriétés d'un gaz de Fermi dégénéré en interaction forte. Tout d'abord, nous étudions d'un point de vue théorique la limite au refroidissement d'un gaz de fermions imposée par l'existence de pertes d'atomes. Un gaz de lithium fermionique ^{6}Li est ensuite étudié au voisinage d'une résonance de Feshbach en onde s. En changeant le champ magnétique, on peut contrôler le signe et la force des interactions effectives entre atomes. Nous montrons la formation efficace de molécules faiblement liées constituées de deux fermions. Ces résultats sont interprétés par un modèle d'équilibre thermodynamique entre atomes et molécules. Le principe de Pauli confère à ces bosons composites une extraordinaire stabilité proche du pic de la résonance. Cette propriété nous a permis de produire un condensat de Bose-Einstein (BEC) de molécules et de mesurer l'interaction entre les molécules à basse température. En augmentant le champ magnétique au-delà de la résonance de Feshbach, on s'attend à ce que le gaz, à basse température, subisse une transition de phase de type BCS (Bardeen, Cooper, Shrieffer) analogue à la transition supraconductrice dans les métaux. Proche de résonance, le gaz est un système à N-corps en interaction forte, difficile à traiter théoriquement. Expérimentalement, nous avons étudié l'expansion du gaz dans cette région qui correspond à la transition entre un condensat de molécules et une phase BCS. Enfin, nous avons caractérisé le comportement des pertes au voisinage de résonances de Feshbach en onde p.

Mots clés : Atomes froids, Fermions Dégénérés, Résonance de Feshbach, Interaction Forte, Condensat Bose-Einstein de Molécules, Superfluide Fermionique, Transition BEC-BCS.

Abstract :

This thesis presents properties of a strongly interacting quantum-degenerate Fermi gas. First, we study theoretically the limit to the cooling of a Fermi gas due to atom losses. A fermionic ^{6}Li gas is then studied in the vicinity of a s-wave Feshbach resonance. By adjusting the magnetic field, one can control the sign and the strength of the effective atom-atom interactions. We demonstrate the efficient formation of weakly bound molecules, which are composed of two fermions. These results are interpreted using a model assuming thermodynamic equilibrium between atoms and molecules. Due to the Pauli principle, these molecules are extraordinarily stable near the resonance peak. This property allows us to produce a molecular Bose-Einstein condensate (BEC) and to measure the mean field interaction energy between molecules. When increasing the magnetic field over the Feshbach resonance, one expects a phase transition at low temperature similar to the BCS (Bardeen, Cooper, Schrieffer) superconducting transition in metals. Close to resonance the gas is a strongly interacting N-body system, difficult to treat theoretically. Experimentally, we studied the expansion of the gas in this transition region between a molecular condensate and a BCS phase. Finally we characterized losses in the vicinity of p-wave Feshbach resonances.

Keywords : Cold Atoms, Degenerate Fermions, Feshbach Resonance, Strong Interaction, Molecular Bose-Einstein Condensate, Fermionic Superfluid, BEC-BCS crossover.