

# **Modélisation et analyse mathématique de problèmes d'interaction fluide-structure**

Muriel BOULAKIA

# Contenu de la thèse

I Modélisation et étude théorique de l'interaction entre une structure élastique et un fluide incompressible.

- 1) Un premier modèle
- 2) Le modèle couplé

# Contenu de la thèse

**I** Modélisation et étude théorique de l'interaction entre une structure élastique et un fluide incompressible.

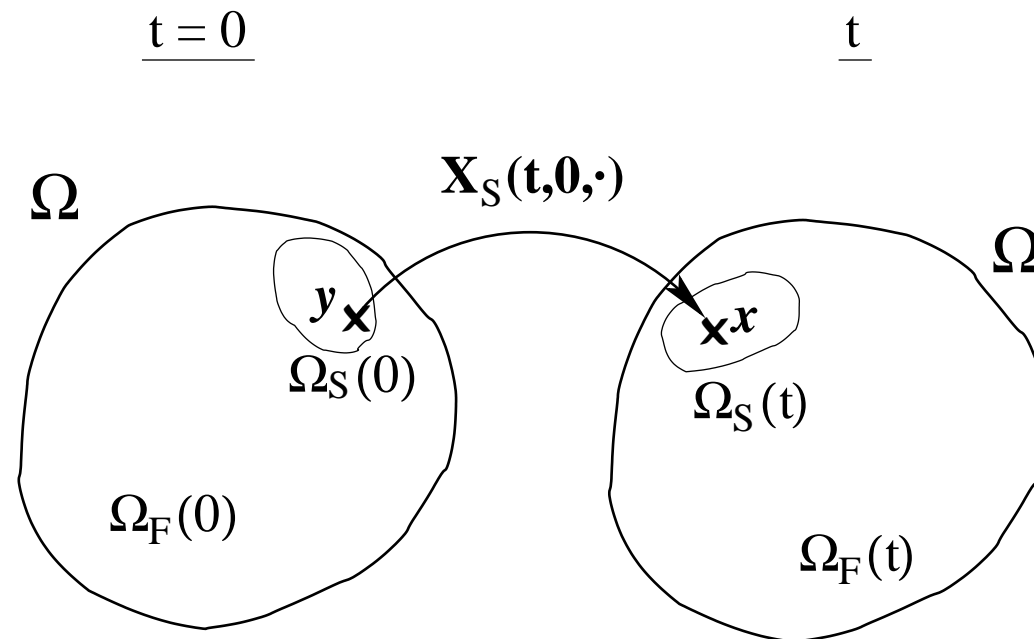
1) Un premier modèle

2) Le modèle couplé

**II** Modélisation et étude théorique de l'interaction entre une structure élastique et un fluide compressible.

# Le contexte général

- structure immergée dans un fluide visqueux newtonien et inhomogène en dimension 3.
- Le déplacement de la structure élastique se compose de grands déplacements rigides et de petites perturbations élastiques.



# I. Fluide incompressible-structure élastique

1. Le modèle
2. Résultat principal
3. Représentation des vitesses
4. Le problème en dimension finie
5. Passage au problème continu

# 1. Le modèle : les équations du fluide

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_F (\partial_t u_F + (u_F \cdot \nabla) u_F) - \nu \Delta u_F + \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega_F(t) \\ \operatorname{div} u_F = 0 & \text{dans } \Omega_F(t) \\ \partial_t \rho_F + \operatorname{div} (\rho_F u_F) = 0 & \text{dans } \Omega_F(t) \\ u_F = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

$\rho_F$  : densité volumique,  $u_F$  : vitesse eulérienne et  $p$  : pression.

$\nu > 0$  : coefficient de viscosité.

# 1. Le modèle : notations

Pour tout  $y \in \Omega_S(0)$ ,

$$X_S(t, 0, y) = \underbrace{a(t) + Q(t)(y - g_0)}_{\text{PARTIE RIGIDE}} + \underbrace{Q(t)\xi(t, y)}_{\text{PARTIE ELASTIQUE}}$$

avec  $a$  le vecteur translation,  $Q$  la matrice de rotation et  $\xi$  le vecteur de déformation élastique.

# 1. Le modèle : notations

Pour tout  $y \in \Omega_S(0)$ ,

$$X_S(t, 0, y) = \underbrace{a(t) + Q(t)(y - g_0)}_{\text{PARTIE RIGIDE}} + \underbrace{Q(t)\xi(t, y)}_{\text{PARTIE ELASTIQUE}}$$

avec  $a$  le vecteur translation,  $Q$  la matrice de rotation et  $\xi$  le vecteur de déformation élastique.

**Relations d'orthogonalité :**

$$\int_{\Omega_S(0)} \varrho_S^0 \xi(t, y) dy = 0, \quad \int_{\Omega_S(0)} \varrho_S^0 \xi(t, y) \wedge y dy = 0$$



# 1. Le modèle : notations

Pour tout  $y \in \Omega_S(0)$ ,

$$X_S(t, 0, y) = \underbrace{a(t) + Q(t)(y - g_0)}_{\text{PARTIE RIGIDE}} + \underbrace{Q(t)\xi(t, y)}_{\text{PARTIE ELASTIQUE}}$$

avec  $a$  le vecteur translation,  $Q$  la matrice de rotation et  $\xi$  le vecteur de déformation élastique.

**Relations d'orthogonalité :**

$$\int_{\Omega_S(0)} \varrho_S^0 \xi(t, y) dy = 0, \quad \int_{\Omega_S(0)} \varrho_S^0 \xi(t, y) \wedge y dy = 0$$

On définit le flot inverse :  $X_S(0, t, \cdot) = X_S(t, 0, \cdot)^{-1} : \Omega_S(t) \mapsto \Omega_S(0)$ ,

et la vitesse eulérienne :  $\forall x \in \Omega_S(t)$

$$u_S(t, x) = \partial_t X_S(t, 0, \cdot) \circ X_S(0, t, x).$$

# 1. Le modèle : les équations du solide

Le mouvement du solide doit satisfaire le problème suivant :

$$\int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) \partial_t^2 X_S(t, 0, y) V(t, y) dy dt + \epsilon \int_0^T (\partial_t^2 \xi, V_E)_{H^3(\Omega_S(0))} dt$$
$$+ \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \Sigma_E^2(\xi) : \varepsilon(V_E) = \langle F_{f \rightarrow s}, V \rangle$$

pour toute fonction test s'écrivant :

$$V(t, y) = \dot{b}(t) + r(t) \wedge (Q(t)(y - g_0 + \xi(t, y))) + Q(t)V_E(t, y).$$

# 1. Le modèle : les équations du solide

Le mouvement du solide doit satisfaire le problème suivant :

$$\int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \rho_S^0(y) \partial_t^2 X_S(t, 0, y) V(t, y) dy dt + \epsilon \int_0^T (\partial_t^2 \xi, V_E)_{H^3(\Omega_S(0))} dt$$
$$+ \int_0^T \int_{\Omega_S(0)} \Sigma_E^2(\xi) : \varepsilon(V_E) = \langle F_{f \rightarrow s}, V \rangle$$

pour toute fonction test s'écrivant :

$$V(t, y) = \dot{b}(t) + r(t) \wedge (Q(t)(y - g_0 + \xi(t, y))) + Q(t)V_E(t, y).$$

- $\Sigma_E^2(\xi) = \lambda \text{tr}(\varepsilon(\xi)) Id + 2\mu \varepsilon(\xi)$  avec  $\lambda + 2\mu > 0$  et  $\mu > 0$ ,
- $\epsilon > 0$  paramètre de régularisation fixé.

# 1. Le modèle : les équations de couplage

(i) Pour  $V$  assez régulière,

$$\langle F_{f \rightarrow s}, V \rangle = \int_0^T \int_{\partial\Omega_S(t)} (\sigma_F n) \cdot V(t, X_S(0, t, x)) d\gamma_x dt$$

# 1. Le modèle : les équations de couplage

(i) Pour  $V$  assez régulière,

$$\langle F_{f \rightarrow s}, V \rangle = \int_0^T \int_{\partial\Omega_S(t)} (\sigma_F n) \cdot V(t, X_S(0, t, x)) d\gamma_x dt$$

(ii)  $u_F = u_S$  sur  $\partial\Omega_S(t)$

# 1. Le modèle : les équations de couplage

(i) Pour  $V$  assez régulière,

$$\langle F_{f \rightarrow s}, V \rangle = \int_0^T \int_{\partial\Omega_S(t)} (\sigma_F n) \cdot V(t, X_S(0, t, x)) d\gamma_x dt$$

(ii)  $u_F = u_S$  sur  $\partial\Omega_S(t)$

## Remarque :

(ii)+ incompressibilité du fluide  $\implies$  condition de compatibilité sur  $\xi$  :

$$\int_{\Omega_F(t)} \operatorname{div} u_F = \int_{\partial\Omega_F(t)} u_F \cdot n_x = \int_{\partial\Omega_S(t)} u_F \cdot n_x = \int_{\partial\Omega_S(t)} u_S \cdot n_x$$

Donc :

$$\int_{\partial\Omega_S(t)} u_S \cdot n_x = \int_{\partial\Omega_S(t)} \left( Q(t) \partial_t \xi(t, X_S(0, t, x)) \right) \cdot n_x = 0$$

# 1. Le modèle : conditions initiales

$$\begin{aligned} a(0) &= g_0, \quad a'(0) = a^1, \quad \omega(0) = \omega^0, \quad Q(0) = Id, \\ \xi(0) &= 0 \text{ dans } \Omega_S(0), \quad \partial_t \xi(0) = \xi^1 \text{ dans } \Omega_S(0), \\ u_F(0) &= u_F^0 \text{ dans } \Omega_F(0), \quad \varrho_F(0) = \varrho_F^0 \chi_{\Omega_F(0)} \text{ dans } \Omega \end{aligned}$$

# 1. Le modèle : conditions initiales

$$\begin{aligned} a(0) &= g_0, \quad a'(0) = a^1, \quad \omega(0) = \omega^0, \quad Q(0) = Id, \\ \xi(0) &= 0 \text{ dans } \Omega_S(0), \quad \partial_t \xi(0) = \xi^1 \text{ dans } \Omega_S(0), \\ u_F(0) &= u_F^0 \text{ dans } \Omega_F(0), \quad \varrho_F(0) = \varrho_F^0 \chi_{\Omega_F(0)} \text{ dans } \Omega \end{aligned}$$

qui vérifient les conditions suivantes :

$$\xi^1 \in H^3(\Omega_S(0))^3, \quad \int_{\Omega_S(0)} \xi^1(y) \cdot n_y \, dy = 0$$

$$u_F^0 \in H^1(\Omega_F(0))^3, \quad u_F^0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad \operatorname{div} u_F^0 = 0 \text{ dans } \Omega_F(0)$$

$$u_F^0(y) = a^1 + \omega^0 \wedge (y - a^0) + \xi^1(y) \text{ sur } \partial\Omega_S(0)$$

$$\varrho_F^0 \in L^\infty(\Omega_F(0)), \quad 0 < M_1 \leq \varrho_F^0 \leq M_2 \text{ dans } \Omega_F(0)$$



# 1. Le modèle : remarques

- l'équation du mouvement solide global est équivalente à trois équations portant sur  $a$ ,  $Q$  et  $\xi$ . Ces équations sont non linéaires et couplées entre elles.
- l'espace des fonctions tests dépend de la solution. Pas de résolution directe pour ce type de problèmes  $\Rightarrow$  linéarisation et argument de point fixe.

# 1. Le modèle : estimation d'énergie a priori

$$\forall t \in [0, T], E_c(t) + E_p(t) \leq E_0$$

avec  $E_c$  l'énergie cinétique,  $E_p$  l'énergie potentielle et  $E_0$  l'énergie initiale :

$$E_c(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_S(0)} \varrho_S^0(y) |\partial_t X_S(t, 0, y)|^2 dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega_F(t)} \varrho_F(t, x) |u_F(t, x)|^2 dx$$

$$\begin{aligned} E_p(t) &= \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega_S(0)} |\operatorname{tr}(\varepsilon(\xi(t, y)))|^2 dy + \mu \int_{\Omega_S(0)} |\varepsilon(\xi(t, y))|^2 dy \\ &+ \frac{1}{2} \epsilon \|\partial_t \xi(t, \cdot)\|_{H^3(\Omega_S(0))}^2 + 2\nu \int_0^t \int_{\Omega_F(s)} |\varepsilon(u_F(s, x))|^2 dx ds \end{aligned}$$

## 2. Résultat principal

### Théorème d'existence :

Hypothèse :  $\text{dist}(\Omega_S(0), \partial\Omega) > 0$ .

Il existe un temps  $T^*$  dépendant des données et de  $\epsilon$  tel que sur  $[0, T^*]$ , notre problème admet une solution. Cette solution est définie jusqu'au temps  $T$  :

$$T = \sup \{ t > 0 / d(t) > 0, g(t) > 0 \text{ et } X_S(t, 0, \cdot) \text{ injectif} \}$$

où :

$$d(t) = \text{dist}(\Omega_S(t), \partial\Omega) \text{ et } g(t) = \inf_{y \in \Omega_S(0)} |\det \nabla X_S(t, 0, y)|.$$

Et cette solution vérifie l'estimation d'énergie donnée précédemment.

## 2. Résultat principal

Remarque sur la dépendance de  $T$  par rapport à  $\epsilon$  :

$$d(t) \geq d(0) - \sup_{0 \leq s \leq t, y \in \Omega_S(0)} |\partial_s X_S(s, 0, y)| t \geq d(0) - \frac{Ct}{\epsilon}$$

et

$$\begin{aligned} \|\nabla X_S(s, 0, y) - Id\|_{L^\infty((0,t) \times \Omega_S(0))} &\leq t \|\partial_s \nabla X_S(s, 0, y)\|_{L^\infty((0,t) \times \Omega_S(0))} \\ &\leq \frac{C(\Omega_S(0), E_0)t}{\epsilon} \end{aligned}$$

$\implies$  importance de la régularisation dans l'équation d'élasticité

## 2. Résultat principal

### **Bibliographie : Interaction fluide-structure rigide.**

- C. Conca, J. San Martin et M. Tucsnak
- B. Desjardins, M. Esteban

## 2. Résultat principal

### Bibliographie : Interaction fluide-structure rigide.

- C. Conca, J. San Martin et M. Tucsnak
- B. Desjardins, M. Esteban
- J. San Martin, V. Starovoitov et M. Tucsnak
- E. Feireisl

## 2. Résultat principal

### **Bibliographie : Interaction fluide-structure rigide.**

- C. Conca, J. San Martin et M. Tucsnak
- B. Desjardins, M. Esteban
- J. San Martin, V. Starovoitov et M. Tucsnak
- E. Feireisl

### **Bibliographie : Interaction fluide-structure élastique.**

- B. Desjardins, M.J. Esteban, C. Grandmont et P. Le Tallec

## 2. Résultat principal

### **Bibliographie : Interaction fluide-structure rigide.**

- C. Conca, J. San Martin et M. Tucsnak
- B. Desjardins, M. Esteban
- J. San Martin, V. Starovoitov et M. Tucsnak
- E. Feireisl

### **Bibliographie : Interaction fluide-structure élastique.**

- B. Desjardins, M.J. Esteban, C. Grandmont et P. Le Tallec
- A. Chambolle, B. Desjardins, M.J. Esteban et C. Grandmont
- H. Beirao da Veiga
- C. Grandmont



## 2. Résultat principal

### **Bibliographie : Interaction fluide-structure rigide.**

- C. Conca, J. San Martin et M. Tucsnak
- B. Desjardins, M. Esteban
- J. San Martin, V. Starovoitov et M. Tucsnak
- E. Feireisl

### **Bibliographie : Interaction fluide-structure élastique.**

- B. Desjardins, M.J. Esteban, C. Grandmont et P. Le Tallec
- A. Chambolle, B. Desjardins, M.J. Esteban et C. Grandmont
- H. Beirao da Veiga
- C. Grandmont

### **Autres résultats.**

- C. Grandmont, Y. Maday et P. Métier

### 3. Représentation des vitesses

La vitesse eulérienne  $u$  globale doit satisfaire :

- $u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ ,
- le flot  $X$  associé à  $u$  est défini sur  $\Omega$  et s'écrit :

$$X(t, 0, y) = a(t) + Q(t)(y - g_0) + Q(t)\xi(t, y) \text{ sur } \Omega_S(0)$$

avec  $a \in W^{1,\infty}(0, T)^3$ ,  $Q \in W^{1,\infty}(0, T; SO_3(\mathbb{R}))$  et  $\xi \in W^{1,\infty}(0, T; H^3(\Omega_S(0)))^3$ ,

- $\operatorname{div} u = 0$  sur  $\Omega_F(t)$ ,
- $\operatorname{vol}(\Omega_S(t)) = \operatorname{vol}(\Omega_S(0))$ ,  $\forall t \in [0, T]$  où  $\Omega_S(t) = X(t, 0, \Omega_S(0))$ .

### 3. Représentation des vitesses

Soit  $(a, Q, \xi)$  suffisamment proche de  $(g_0, Id, 0)$ .

$$\text{sur } \Omega_S(0), X_S(t, 0, y) = a(t) + Q(t)(y - g_0) + Q(t)\xi(t, y)$$

### 3. Représentation des vitesses

Soit  $(a, Q, \xi)$  suffisamment proche de  $(g_0, Id, 0)$ .

sur  $\Omega_S(0)$ ,  $X_S(t, 0, y) = a(t) + Q(t)(y - g_0) + Q(t)\xi(t, y) + \lambda(t)Q(t)\eta(y)$

$\eta$  : relèvement de la normale sur  $\Omega_S(0)$ .

### 3. Représentation des vitesses

Soit  $(a, Q, \xi)$  suffisamment proche de  $(g_0, Id, 0)$ .

sur  $\Omega_S(0)$ ,  $X_S(t, 0, y) = a(t) + Q(t)(y - g_0) + Q(t)\xi(t, y) + \lambda(t)Q(t)\eta(y)$

$\eta$  : relèvement de la normale sur  $\Omega_S(0)$ .

$\lambda(t)$  déterminé par :

$$\text{vol}(\Omega_S(t)) = \int_{\Omega_S(0)} \det \nabla X_S(t, 0, y) dy = \text{vol}(\Omega_S(0)).$$

Ceci est possible (théorème des fonctions implicites) autour de 0.

### 3. Représentation des vitesses

Soit  $(a, Q, \xi)$  suffisamment proche de  $(g_0, Id, 0)$ .

sur  $\Omega_S(0)$ ,  $X_S(t, 0, y) = a(t) + Q(t)(y - g_0) + Q(t)\xi(t, y) + \lambda(t)Q(t)\eta(y)$

$\eta$  : relèvement de la normale sur  $\Omega_S(0)$ .

$\lambda(t)$  déterminé par :

$$\text{vol}(\Omega_S(t)) = \int_{\Omega_S(0)} \det \nabla X_S(t, 0, y) dy = \text{vol}(\Omega_S(0)).$$

Ceci est possible (théorème des fonctions implicites) autour de 0. On prend  $(a, Q, \xi)$  suffisamment proche de  $(g_0, Id, 0)$  pour que :

$$\|X_S(t, 0, \cdot) - Id\|_{L^\infty(0, T; W^{1, \infty}(\Omega_S(0)))} \leq \alpha,$$

de sorte que  $X_S(t, 0, \cdot)$  peut se prolonger en une fonction  $Y_{S,p}(t, \cdot)$  inversible de  $\Omega$  sur  $\Omega$ .

### 3. Représentation des vitesses

$u_S$  vitesse eulérienne associée à  $X_S$  :

$$u_S(t, x) = \partial_t X_S(t, 0, X_S(0, t, x)) \text{ sur } \Omega_S(t).$$

### 3. Représentation des vitesses

$u_S$  vitesse eulérienne associée à  $X_S$  :

$$u_S(t, x) = \partial_t X_S(t, 0, X_S(0, t, x)) \text{ sur } \Omega_S(t).$$

$u_{S,p}$ , un prolongement de  $u_S$  solution du problème de Stokes :

$$\begin{cases} -\Delta u_{S,p} + \nabla q & = 0 & \Omega_F(t) \\ \operatorname{div} u_{S,p} & = 0 & \Omega_F(t) \\ u_{S,p} & = u_S & \partial \Omega_S(t) \\ u_{S,p} & = 0 & \partial \Omega \end{cases}$$

avec  $\Omega_F(t) = \Omega \setminus \overline{\Omega_S(t)}$ .



### 3. Représentation des vitesses

Soit  $w_F \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_F(0))) \cap L^2(0, T; V(\Omega_F(0)))$  avec :

$$V(\Omega_F(0)) = \{w \in H_0^1(\Omega_F(0)) / \operatorname{div} w = 0 \text{ sur } \Omega_F(0)\}.$$

$$\bar{w}_F = \begin{cases} w_F & \text{dans } \Omega_F(0) \\ 0 & \text{dans } \Omega_S(0). \end{cases}$$

Soit  $Y_{S,p}(0, t, \cdot)^* \bar{w}_F$  la transformée de Piola :

$$(Y_{S,p}(0, t, \cdot)^* \bar{w}_F)(t, x) = \operatorname{cof} \nabla Y_{S,p}(0, t, x)^t \bar{w}_F(t, Y_{S,p}(0, t, x)).$$

Alors :

$$\operatorname{div} (Y_{S,p}(0, t, \cdot)^* \bar{w}_F) = 0 \text{ sur } \Omega.$$

### 3. Représentation des vitesses

Soit  $w_F \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_F(0))) \cap L^2(0, T; V(\Omega_F(0)))$  avec :

$$V(\Omega_F(0)) = \{w \in H_0^1(\Omega_F(0)) / \operatorname{div} w = 0 \text{ sur } \Omega_F(0)\}.$$

$$\bar{w}_F = \begin{cases} w_F & \text{dans } \Omega_F(0) \\ 0 & \text{dans } \Omega_S(0). \end{cases}$$

Soit  $Y_{S,p}(0, t, \cdot)^* \bar{w}_F$  la transformée de Piola :

$$(Y_{S,p}(0, t, \cdot)^* \bar{w}_F)(t, x) = \operatorname{cof} \nabla Y_{S,p}(0, t, x)^t \bar{w}_F(t, Y_{S,p}(0, t, x)).$$

Alors :

$$\operatorname{div} (Y_{S,p}(0, t, \cdot)^* \bar{w}_F) = 0 \text{ sur } \Omega.$$

On note  $\Theta$  l'application définie pour  $\|(a, Q, \xi) - (g_0, Id, 0)\| \leq \kappa$  :

$$\Theta : (a, Q, \xi, w_F) \mapsto u = u_{S,p} + Y_{S,p}(0, t, \cdot)^* \bar{w}_F.$$

## 4. Le problème en dimension finie

On considère l'application :

$$(\tilde{a}^N, \tilde{Q}^N, \tilde{\xi}^N, \tilde{w}_F^N) \xrightarrow{\Theta} \tilde{u}^N \rightarrow u^N \xrightarrow{\Theta^{-1}} (a^N, Q^N, \xi^N, w_F^N)$$

définie pour  $\|(\tilde{a}^N, \tilde{Q}^N, \tilde{\xi}^N) - (g_0, Id, 0)\| \leq \kappa$ .

## 4. Le problème en dimension finie

On considère l'application :

$$(\tilde{a}^N, \tilde{Q}^N, \tilde{\xi}^N, \tilde{w}_F^N) \xrightarrow{\Theta} \tilde{u}^N \rightarrow u^N \xrightarrow{\Theta^{-1}} (a^N, Q^N, \xi^N, w_F^N)$$

définie pour  $\|(\tilde{a}^N, \tilde{Q}^N, \tilde{\xi}^N) - (g_0, Id, 0)\| \leq \kappa$ .

- on se place sur  $[0, T^*]$  de telle sorte que:

$$\|(a^N, Q^N, \xi^N) - (g_0, Id, 0)\| \leq \kappa$$

- compacité  $\Rightarrow$  point fixe sur  $[0, T^*]$ .

# 5. Passage au problème continu

Résultats de compacité :

- Convergence forte de  $(\varrho_F^N)$  : résultat de di Perna-Lions

$$\varrho_F^N \rightarrow \varrho_F \text{ dans } \mathcal{C}(0, T^*; L^p(\Omega)), \forall p < +\infty$$

# 5. Passage au problème continu

Résultats de compacité :

- Convergence forte de  $(\varrho_F^N)$  : résultat de di Perna-Lions

$$\varrho_F^N \rightarrow \varrho_F \text{ dans } \mathcal{C}(0, T^*; L^p(\Omega)), \forall p < +\infty$$

- Convergence forte de  $(u^N)$  : on montre que

$$\sqrt{\varrho_F^N} u^N \rightarrow \sqrt{\varrho_F} u \text{ dans } L^2((0, T^*) \times \Omega)^3$$

en prouvant une inégalité du type :

$$\int_0^{T^*-h} \int_{\Omega} \left| \sqrt{\varrho_F^N(t+h)} u^N(t+h) - \sqrt{\varrho_F^N(t)} u^N(t) \right|^2 dx dt \leq \delta(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

# 5. Passage au problème continu

Résultats de compacité :

- Convergence forte de  $(\varrho_F^N)$  : résultat de di Perna-Lions

$$\varrho_F^N \rightarrow \varrho_F \text{ dans } \mathcal{C}(0, T^*; L^p(\Omega)), \forall p < +\infty$$

- Convergence forte de  $(u^N)$  : on montre que

$$\sqrt{\varrho_F^N} u^N \rightarrow \sqrt{\varrho_F} u \text{ dans } L^2((0, T^*) \times \Omega)^3$$

en prouvant une inégalité du type :

$$\int_0^{T^*-h} \int_{\Omega} \left| \sqrt{\varrho_F^N(t+h)} u^N(t+h) - \sqrt{\varrho_F^N(t)} u^N(t) \right|^2 dx dt \leq \delta(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Prolongement de la solution en temps : nouvelles configurations de référence  $\Omega_S(T^*)$  et  $\Omega_F(T^*)$ .

## II. Fluide compressible-structure élastique

1. Le modèle
2. Résultat principal
3. Résolution d'un problème régularisé
4. Passage à la limite dans les termes de régularisation



# 1. Le modèle : les équations du fluide

$$\begin{cases} \partial_t(\rho_F u_F) + \operatorname{div}(\rho_F u_F \otimes u_F) - \operatorname{div} \sigma_F = 0 & \text{dans } \Omega_F(t) \\ \partial_t \rho_F + \operatorname{div}(\rho_F u_F) = 0 & \text{dans } \Omega_F(t) \\ u_F = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$\rho_F$  : densité volumique,  $u_F$  : vitesse eulérienne et :

$$\sigma_F = \mu_F \nabla u_F + ((\lambda_F + \mu_F) \operatorname{div} u_F - p) Id$$

$p$  : pression,  $\lambda_F$  et  $\mu_F$  tels que  $\mu_F > 0$ ,  $3\lambda_F + 2\mu_F > 0$ .

# 1. Le modèle : les équations du fluide

$$\begin{cases} \partial_t(\rho_F u_F) + \operatorname{div}(\rho_F u_F \otimes u_F) - \operatorname{div} \sigma_F = 0 & \text{dans } \Omega_F(t) \\ \partial_t \rho_F + \operatorname{div}(\rho_F u_F) = 0 & \text{dans } \Omega_F(t) \\ u_F = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$\rho_F$  : densité volumique,  $u_F$  : vitesse eulérienne et :

$$\sigma_F = \mu_F \nabla u_F + ((\lambda_F + \mu_F) \operatorname{div} u_F - p) Id$$

$p$  : pression,  $\lambda_F$  et  $\mu_F$  tels que  $\mu_F > 0$ ,  $3\lambda_F + 2\mu_F > 0$ .

Loi d'état isentropique :

$$p = a \rho_F^\gamma \text{ avec } \gamma > \frac{3}{2} \text{ et } a > 0.$$

# 1. Le modèle : les équations du solide

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t(\rho_S u_S) + \operatorname{div}(\rho_S u_S \otimes u_S) + \theta A_3 u_S - \operatorname{div} \sigma_S = 0 & \text{dans } \Omega_S(t) \\ \partial_t \rho_S + \operatorname{div}(\rho_S u_S) = 0 & \text{dans } \Omega_S(t) \\ \partial_t X_S(t, 0, y) = u_S(t, X_S(t, 0, y)), \text{ pour tout } y \in \Omega_S(0) & \end{array} \right.$$

$\rho_S$  : densité,  $u_S$  : vitesse eulérienne,  $X_S$  : flot lagrangien,  $\theta > 0$ .  
Pour tout  $u$  et  $v$  dans  $\mathcal{D}(\Omega_S(t))$ ,

$$(u, v)_{H^3(\Omega_S(t))} = \int_{\Omega_S(t)} A_3 u v$$

# 1. Le modèle : les équations du solide

$$\begin{cases} \partial_t(\rho_S u_S) + \operatorname{div}(\rho_S u_S \otimes u_S) + \theta A_3 u_S - \operatorname{div} \sigma_S = 0 & \text{dans } \Omega_S(t) \\ \partial_t \rho_S + \operatorname{div}(\rho_S u_S) = 0 & \text{dans } \Omega_S(t) \\ \partial_t X_S(t, 0, y) = u_S(t, X_S(t, 0, y)), \text{ pour tout } y \in \Omega_S(0) \end{cases}$$

$\rho_S$  : densité,  $u_S$  : vitesse eulérienne,  $X_S$  : flot lagrangien,  $\theta > 0$ .  
Pour tout  $u$  et  $v$  dans  $\mathcal{D}(\Omega_S(t))$ ,

$$(u, v)_{H^3(\Omega_S(t))} = \int_{\Omega_S(t)} A_3 u v$$

Loi d'état :  $\Sigma_2$  le second tenseur de Piola-Kirchhoff

$$\Sigma_2 = 2\mu_S E(X_S) + \lambda_S \operatorname{tr}(E(X_S)) Id \text{ avec } E(X_S) = \frac{1}{2}({}^t \nabla X_S \nabla X_S - Id),$$

$$\mu_S > 0, \lambda_S + 2\mu_S > 0.$$

# 1. Le modèle

## Les équations de couplage :

- $u_F = u_S$  sur  $\partial\Omega_S(t)$
- pour tout  $v \in \mathcal{C}(\partial\Omega_S(t))$ ,

$$\int_{\partial\Omega_S(t)} \sigma_F n_x \cdot v = \int_{\partial\Omega_S(t)} \sigma_S n_x \cdot v - \theta \langle u_S, v \rangle_{3, \partial\Omega_S(t)} .$$

# 1. Le modèle

## Les équations de couplage :

- $u_F = u_S$  sur  $\partial\Omega_S(t)$
- pour tout  $v \in \mathcal{C}(\partial\Omega_S(t))$ ,

$$\int_{\partial\Omega_S(t)} \sigma_F n_x \cdot v = \int_{\partial\Omega_S(t)} \sigma_S n_x \cdot v - \theta \langle u_S, v \rangle_{\mathcal{C}, \partial\Omega_S(t)} .$$

## Conditions initiales :

$$u(0) = u^0 \in H_0^1(\Omega), \varrho(0) = \varrho^0 \in L^\gamma(\Omega).$$

où  $u$  et  $\varrho$  sont respectivement la vitesse et la densité globales.

# 1. Le modèle

## Estimation d'énergie :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varrho(t) |u(t)|^2 + \frac{a}{\gamma - 1} \int_{\Omega_F(t)} \varrho_F^\gamma(t) + \mu_F \int_0^t \int_{\Omega_F(s)} |\nabla u_F(s)|^2 \\ & + (\lambda_F + \mu_F) \int_0^t \int_{\Omega_F(s)} |\operatorname{div} u_F(s)|^2 + \theta \int_0^t \|u_S(s)\|_{H^3(\Omega_S(s))}^2 \\ & + \mu_S \int_{\Omega_S(0)} |E(X_S(t, 0, y))|^2 + \frac{\lambda_S}{2} \int_{\Omega_S(0)} |\operatorname{tr} E(X_S(t, 0, y))|^2 \leq E_0. \end{aligned}$$

# 1. Le modèle

## Estimation d'énergie :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varrho(t) |u(t)|^2 + \frac{a}{\gamma - 1} \int_{\Omega_F(t)} \varrho_F^\gamma(t) + \mu_F \int_0^t \int_{\Omega_F(s)} |\nabla u_F(s)|^2 \\ & + (\lambda_F + \mu_F) \int_0^t \int_{\Omega_F(s)} |\operatorname{div} u_F(s)|^2 + \theta \int_0^t \|u_S(s)\|_{H^3(\Omega_S(s))}^2 \\ & + \mu_S \int_{\Omega_S(0)} |E(X_S(t, 0, y))|^2 + \frac{\lambda_S}{2} \int_{\Omega_S(0)} |\operatorname{tr} E(X_S(t, 0, y))|^2 \leq E_0. \end{aligned}$$

## Solution renormalisée :

$\varrho$  est une solution renormalisée de l'équation de continuité si :

$$\partial_t b(\varrho) + \operatorname{div} (b(\varrho)u) + (b'(\varrho)\varrho - b(\varrho))\operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \Omega).$$

pour toute fonction  $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  telle que :

$$b'(x) = 0, \text{ pour } x \text{ assez grand.}$$



## 2. Résultat principal

### Théorème d'existence :

Hypothèses :  $\text{dist}(\Omega_S(0), \partial\Omega) > 0$ ,  $u^0 \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\varrho^0 \in L^\gamma(\Omega)$ .

Il existe un temps  $T^*$  dépendant des données et de  $\theta$  tel que, sur  $[0, T^*]$ , notre problème admet une solution  $(X_S, \varrho, u)$ . Cette solution est définie jusqu'au temps  $T$  donné par :

$$T = \sup\{t > 0 / d(t) > 0, g(t) > 0 \text{ et } X_S(t, 0, \cdot) \text{ injectif}\}$$

$$\text{où : } d(t) = \text{dist}(\Omega_S(t), \partial\Omega) \text{ et } g(t) = \inf_{y \in \Omega_S(0)} |\det \nabla X_S(t, 0, y)|$$

et la solution vérifie l'estimation d'énergie donnée précédemment.  $\square$

Pour montrer ce résultat, on reprend la démarche développée dans les travaux de E. Feireisl, A. Novotny et H. Petzeltova.

## 2. Résultat principal

### Bibliographie : fluide compressible.

- P.L. Lions
- E. Feireisl, A. Novotny, H. Petzeltova

## 2. Résultat principal

### **Bibliographie : fluide compressible.**

- P.L. Lions
- E. Feireisl, A. Novotny, H. Petzeltova

### **Bibliographie : interaction fluide-structure.**

- B. Desjardins, M. Esteban
- E. Feireisl
- F. Flori et P. Orenca

### 3. Résolution d'un problème régularisé

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\rho_F u_F) + \operatorname{div}(\rho_F u_F \otimes u_F) + \epsilon \nabla u_F \nabla \rho_F - \operatorname{div} \sigma_F = 0 \text{ dans } \Omega_F(t) \\ \partial_t \rho_F + \operatorname{div}(\rho_F u_F) = \epsilon \Delta \rho_F \text{ dans } \Omega_F(t) \\ \nabla \rho_F \cdot n = 0 \text{ sur } \partial \Omega_F(t) \end{array} \right.$$

$$\sigma_F = \mu_F \nabla u_F + ((\lambda_F + \mu_F) \operatorname{div} u_F - p(\rho_F)) Id$$

avec :

$$p(\rho_F) = a \rho_F^\gamma + \delta \rho_F^\beta \text{ avec } \beta \text{ aussi grand qu'on veut.}$$

### 3. Résolution d'un problème régularisé

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\varrho_F u_F) + \operatorname{div}(\varrho_F u_F \otimes u_F) + \epsilon \nabla u_F \nabla \varrho_F - \operatorname{div} \sigma_F = 0 \text{ dans } \Omega_F(t) \\ \partial_t \varrho_F + \operatorname{div}(\varrho_F u_F) = \epsilon \Delta \varrho_F \text{ dans } \Omega_F(t) \\ \nabla \varrho_F \cdot n = 0 \text{ sur } \partial \Omega_F(t) \end{array} \right.$$

$$\sigma_F = \mu_F \nabla u_F + ((\lambda_F + \mu_F) \operatorname{div} u_F - p(\varrho_F)) \operatorname{Id}$$

avec :

$$p(\varrho_F) = a \varrho_F^\gamma + \delta \varrho_F^\beta \text{ avec } \beta \text{ aussi grand qu'on veut.}$$

**Estimations supplémentaires sur la densité :**

$$\varrho_F \in L^\infty(0, T; L^\beta(\Omega)) \text{ et } \varrho_F \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

### 3. Résolution d'un problème régularisé

- Problème linéarisé en dimension finie.
- Argument de point fixe en dimension finie  $N$  : solution  $(X_S^N, \varrho^N, u^N)$  définie sur  $[0, T]$ ,  $T > 0$  arbitraire.

### 3. Résolution d'un problème régularisé

- Problème linéarisé en dimension finie.
- Argument de point fixe en dimension finie  $N$  : solution  $(X_S^N, \varrho^N, u^N)$  définie sur  $[0, T]$ ,  $T > 0$  arbitraire.
- Passage au problème continu.

$$X_S^N \rightharpoonup X_S \text{ dans } H^1(0, T; H^3(\Omega_S(0))).$$

Solution sur  $[0, T^*]$  avec  $T^*$  tel que toute fonction  $(X_S, \varrho, u)$  satisfaisant l'estimation d'énergie vérifie :

$$\text{dist}(\Omega_S(t), \partial\Omega) \geq \alpha > 0, \|\nabla X_S(t, 0, \cdot) - Id\| \leq e_0.$$

### 3. Résolution d'un problème régularisé

- Problème linéarisé en dimension finie.
- Argument de point fixe en dimension finie  $N$  : solution  $(X_S^N, \varrho^N, u^N)$  définie sur  $[0, T]$ ,  $T > 0$  arbitraire.
- Passage au problème continu.

$$X_S^N \rightharpoonup X_S \text{ dans } H^1(0, T; H^3(\Omega_S(0))).$$

Solution sur  $[0, T^*]$  avec  $T^*$  tel que toute fonction  $(X_S, \varrho, u)$  satisfaisant l'estimation d'énergie vérifie :

$$\text{dist}(\Omega_S(t), \partial\Omega) \geq \alpha > 0, \|\nabla X_S(t, 0, \cdot) - Id\| \leq e_0.$$

On a :

$$\varrho^N \rightharpoonup \varrho \text{ dans } L^\infty(0, T^*; L^\gamma(\Omega)) w * .$$



### 3. Résolution d'un problème régularisé

Equation de continuité  $\Rightarrow$

$$\varrho^N \rightarrow \varrho \text{ dans } \mathcal{C}(0, T^*; L_w^\gamma(\Omega)).$$

Comme  $\gamma > \frac{6}{5}$ , l'injection  $L^\gamma(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$  est compacte.

### 3. Résolution d'un problème régularisé

Equation de continuité  $\Rightarrow$

$$\varrho^N \rightarrow \varrho \text{ dans } \mathcal{C}(0, T^*; L_w^\gamma(\Omega)).$$

Comme  $\gamma > \frac{6}{5}$ , l'injection  $L^\gamma(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$  est compacte. De plus, comme  $u^N \rightharpoonup u$  dans  $L^2(0, T^*; H^1(\Omega))$ , on en déduit :

$$\varrho^N u^N \rightharpoonup \varrho u \text{ dans } L^\infty(0, T^*; L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)) w * .$$

### 3. Résolution d'un problème régularisé

Equation de continuité  $\Rightarrow$

$$\varrho^N \rightarrow \varrho \text{ dans } \mathcal{C}(0, T^*; L_w^\gamma(\Omega)).$$

Comme  $\gamma > \frac{6}{5}$ , l'injection  $L^\gamma(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$  est compacte. De plus, comme  $u^N \rightharpoonup u$  dans  $L^2(0, T^*; H^1(\Omega))$ , on en déduit :

$$\varrho^N u^N \rightharpoonup \varrho u \text{ dans } L^\infty(0, T^*; L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)) w * .$$

Equation de la quantité de mouvement  $\Rightarrow$

$$\varrho^N u^N \rightarrow \varrho u \text{ dans } \mathcal{C}(0, T^*; L_w^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)).$$

Comme  $\gamma > \frac{3}{2}$ ,  $\frac{2\gamma}{\gamma+1} > \frac{6}{5}$  et l'injection  $L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$  est compacte.

### 3. Résolution d'un problème régularisé

Equation de continuité  $\Rightarrow$

$$\varrho^N \rightarrow \varrho \text{ dans } \mathcal{C}(0, T^*; L_w^\gamma(\Omega)).$$

Comme  $\gamma > \frac{6}{5}$ , l'injection  $L^\gamma(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$  est compacte. De plus, comme  $u^N \rightharpoonup u$  dans  $L^2(0, T^*; H^1(\Omega))$ , on en déduit :

$$\varrho^N u^N \rightharpoonup \varrho u \text{ dans } L^\infty(0, T^*; L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)) w * .$$

Equation de la quantité de mouvement  $\Rightarrow$

$$\varrho^N u^N \rightarrow \varrho u \text{ dans } \mathcal{C}(0, T^*; L_w^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)).$$

Comme  $\gamma > \frac{3}{2}$ ,  $\frac{2\gamma}{\gamma+1} > \frac{6}{5}$  et l'injection  $L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$  est compacte.

On en déduit que :

$$\varrho^N u^N \otimes u^N \rightharpoonup \varrho u \otimes u \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T^*) \times \Omega).$$

### 3. Résolution d'un problème régularisé

#### Identification de la pression :

Soit  $p$  la limite de  $(p(\varrho_F^N))$ .

$$p = p(\varrho_F) = a\varrho_F^\gamma + \delta\varrho_F^\beta \quad ?$$

### 3. Résolution d'un problème régularisé

#### Identification de la pression :

Soit  $p$  la limite de  $(p(\varrho_F^N))$ .

$$p = p(\varrho_F) = a\varrho_F^\gamma + \delta\varrho_F^\beta \quad ?$$

$(\varrho_F^N)$  bornée dans  $L^2(0, T^*; H^1(\Omega))$ ,  $(\varrho_S^N)$  bornée dans  $L^2(0, T^*; H^1(\Omega))$

$(\partial_t \varrho^N)$  bornée dans  $L^2(0, T^*; H^{-1}(\Omega))$ .

On en déduit (“lemme d’Aubin”) :

$$\varrho^N \rightarrow \varrho \text{ dans } L^2((0, T^*) \times \Omega)$$

$(\varrho_F^N)$  bornée dans  $L^{\beta+1}((0, T^*) \times \Omega) \Rightarrow$

$$\varrho_F^N \rightarrow \varrho_F \text{ dans } L^\beta((0, T^*) \times \Omega).$$

## 4. Passages à la limite en $\epsilon$ et $\delta$

Passage à la limite en  $\epsilon$  :

$$\int_0^{T^*} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} a \varrho_{F,\epsilon}^{\gamma+1} + \delta \varrho_{F,\epsilon}^{\beta+1} \leq C$$

## 4. Passages à la limite en $\epsilon$ et $\delta$

**Passage à la limite en  $\epsilon$  :**

$$\int_0^{T^*} \int_{\Omega_{F,\epsilon}(t)} a \varrho_{F,\epsilon}^{\gamma+1} + \delta \varrho_{F,\epsilon}^{\beta+1} \leq C$$

**Méthode due à Lions :** dans  $\Omega_F(t)$ ,

$$\partial_t(\varrho_F u_F) + \operatorname{div}(\varrho_F u_F \otimes u_F) - \mu_F \Delta u_F - \nabla((\lambda_F + \mu_F) \operatorname{div} u_F - p(\varrho_F)) = 0.$$

A  $t$  fixé,  $\exists!$   $(w, q)$  dans  $W_0^{1,p}(\Omega_F(t)) \times L_0^p(\Omega_F(t))$  :

$$-\Delta w + \nabla q = \partial_t(\varrho_F u_F) + \operatorname{div}(\varrho_F u_F \otimes u_F) - \mu_F \Delta u_F, \operatorname{div} w = 0$$

D'où :

$$q - (\lambda_F + \mu_F) \operatorname{div} u_F + p(\varrho_F) = c$$

où  $c$  est une constante dépendant du temps.



## 4. Passages à la limite en $\epsilon$ et $\delta$

### Identification de la pression :

Soit  $p$  la limite faible de  $p(\rho_{F,\epsilon})$  dans  $L^{\frac{\beta+1}{\beta}}((0, T^*) \times \Omega)$ .

$$p = p(\rho_F) = a\rho_F^\gamma + \delta\rho_F^\beta \quad ?$$

## 4. Passages à la limite en $\epsilon$ et $\delta$

### Identification de la pression :

Soit  $p$  la limite faible de  $p(\varrho_{F,\epsilon})$  dans  $L^{\frac{\beta+1}{\beta}}((0, T^*) \times \Omega)$ .

$$p = p(\varrho_F) = a\varrho_F^\gamma + \delta\varrho_F^\beta \quad ?$$

On prouve que, pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(0, T^*; \mathcal{D}(\Omega_F(t)))$  positif,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{T^*} \int_{\Omega} \varphi (p(\varrho_{F,\epsilon}) - (\lambda_F + 2\mu_F) \operatorname{div} u_\epsilon) \varrho_{F,\epsilon} = \int_0^{T^*} \int_{\Omega} \varphi (p - (\lambda_F + 2\mu_F) \operatorname{div} u) \varrho_F$$

On en déduit que, si  $(\varphi_m)$  est une suite croissante qui tend vers  $\chi_{\Omega_F(t)}$ ,

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{T^*} \int_{\Omega} \varphi_m p(\varrho_{F,\epsilon}) \varrho_{F,\epsilon} \leq \int_0^{T^*} \int_{\Omega_F(t)} p \varrho_F$$

et on conclut par un argument de monotonie.

## 4. Passages à la limite en $\epsilon$ et $\delta$

### Passage à la limite en $\delta$ :

Il existe  $\alpha > 0$  tel que :

$$\int_0^{T^*} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} \alpha \varrho_{F,\delta}^{\gamma+\alpha} + \delta \varrho_{F,\delta}^{\beta+\alpha} \leq C.$$

## 4. Passages à la limite en $\epsilon$ et $\delta$

### Passage à la limite en $\delta$ :

Il existe  $\alpha > 0$  tel que :

$$\int_0^{T^*} \int_{\Omega_{F,\delta}(t)} a \varrho_{F,\delta}^{\gamma+\alpha} + \delta \varrho_{F,\delta}^{\beta+\alpha} \leq C.$$

Soit  $(\mathcal{T}_k)$  une famille de fonctions de troncature.

On montre que : pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(0, T^*; \mathcal{D}(\Omega_F(t)))$  positive,

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{T^*} \int_{\Omega} \varphi (a \varrho_{F,\delta}^{\gamma} - (\lambda_F + 2\mu_F) \operatorname{div} u_{\delta}) \mathcal{T}_k(\varrho_{F,\delta}) \\ = \int_0^{T^*} \int_{\Omega} \varphi (a \overline{\varrho_F^{\gamma}} - (\lambda_F + 2\mu_F) \operatorname{div} u) \overline{\mathcal{T}_k(\varrho_F)}. \end{aligned}$$

## 4. Passages à la limite en $\epsilon$ et $\delta$

On en déduit que :

$$\|\overline{\mathcal{T}_k(\varrho_F)} - \mathcal{T}_k(\varrho)\|_{L^{\gamma+1}((0, T^*) \times \Omega)} \leq C.$$

Ceci permet de prouver que  $\varrho$  vérifie l'équation de continuité au sens des solutions renormalisées et d'identifier la limite  $\overline{\varrho \log \varrho}$  de  $(\varrho_\delta \log \varrho_\delta)$  :

$$\overline{\varrho \log \varrho} = \varrho \log \varrho$$

$\Rightarrow$  convergence forte de  $(\varrho_\delta)$  dans  $L^1((0, T^*) \times \Omega)$ .

## 4. Passages à la limite en $\epsilon$ et $\delta$

On en déduit que :

$$\|\overline{\mathcal{T}_k(\varrho_F)} - \mathcal{T}_k(\varrho)\|_{L^{\gamma+1}((0, T^*) \times \Omega)} \leq C.$$

Ceci permet de prouver que  $\varrho$  vérifie l'équation de continuité au sens des solutions renormalisées et d'identifier la limite  $\overline{\varrho \log \varrho}$  de  $(\varrho_\delta \log \varrho_\delta)$  :

$$\overline{\varrho \log \varrho} = \varrho \log \varrho$$

$\Rightarrow$  convergence forte de  $(\varrho_\delta)$  dans  $L^1((0, T^*) \times \Omega)$ .

Pour terminer, on prolonge la solution jusqu'au temps  $T$  comme annoncé au départ.

# Conclusions et perspectives

- Peut-on se passer de terme régularisant ? Résultats de Ciarlet : problème de déplacement pur stationnaire.
- Utiliser des modèles plus complexes : pour le fluide compressible, considérer un modèle avec la température comme variable.
- Simulation numérique.