

Algorithmique et optimisation de réseaux de communications optiques

David Coudert

Sous la direction d'Afonso Ferreira

MASCOTTE, CNRS-I3S-INRIA

11 décembre 2001

L'optique dans les communications

- Dissipation d'énergie
 - ★ Utilise moins d'énergie que l'électronique
 - ★ Intéressant dès que la distance est $\geq 1\text{cm}$ [FE+88]

L'optique dans les communications

- Dissipation d'énergie
 - ★ Utilise moins d'énergie que l'électronique
 - ★ Intéressant dès que la distance est $\geq 1\text{cm}$ [FE+88]
- Densité des interconnexions
 - ★ Le croisement de faisceaux optique est possible

L'optique dans les communications

- Dissipation d'énergie
 - ★ Utilise moins d'énergie que l'électronique
 - ★ Intéressant dès que la distance est $\geq 1\text{cm}$ [FE+88]
- Densité des interconnexions
 - ★ Le croisement de faisceaux optique est possible
- Débit
 - ★ Une longueur d'onde = 2.5 Gbits/s, 10Gbits/s (40 Gbits/s)
 - ★ Une fibre optique > 1 Tbits/s
 - * Multiplexage en longueur d'ondes (*WDM*)

L'optique dans les communications (2)

Espace libre optique

- Lentilles, miroirs, ...
 - ★ Routeurs tout optiques
 - ★ *Board to board* et *on board*
 - ★ Interconnexions denses

WDM

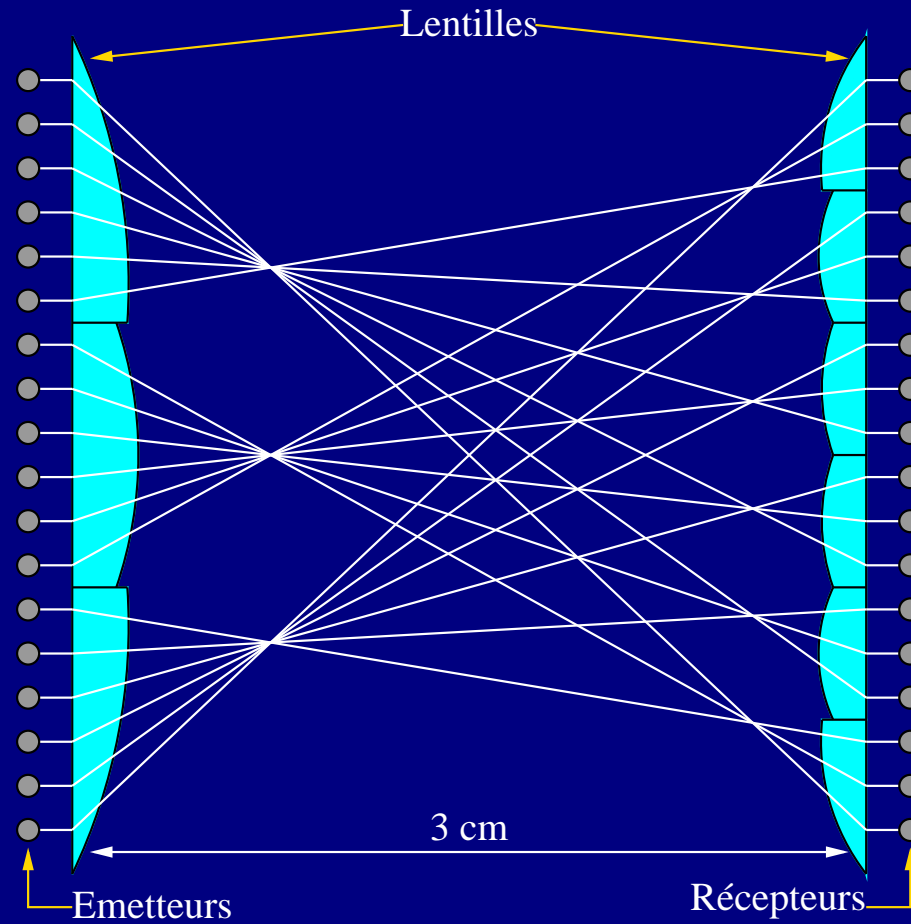
- Fibres optiques
 - ★ Réseaux d'infrastructure haut débit
 - ★ Réseaux nationaux, intercontinentaux

Plan

1. Réseaux en espace libre optique
 - *Optical Transpose Interconnection System* (OTIS)
 - Réseaux multi-OPS
 - **Implantation optimisée du de Bruijn avec OTIS**
2. Réseaux WDM
 - Protection par sous-réseaux
3. Conclusions et perspectives

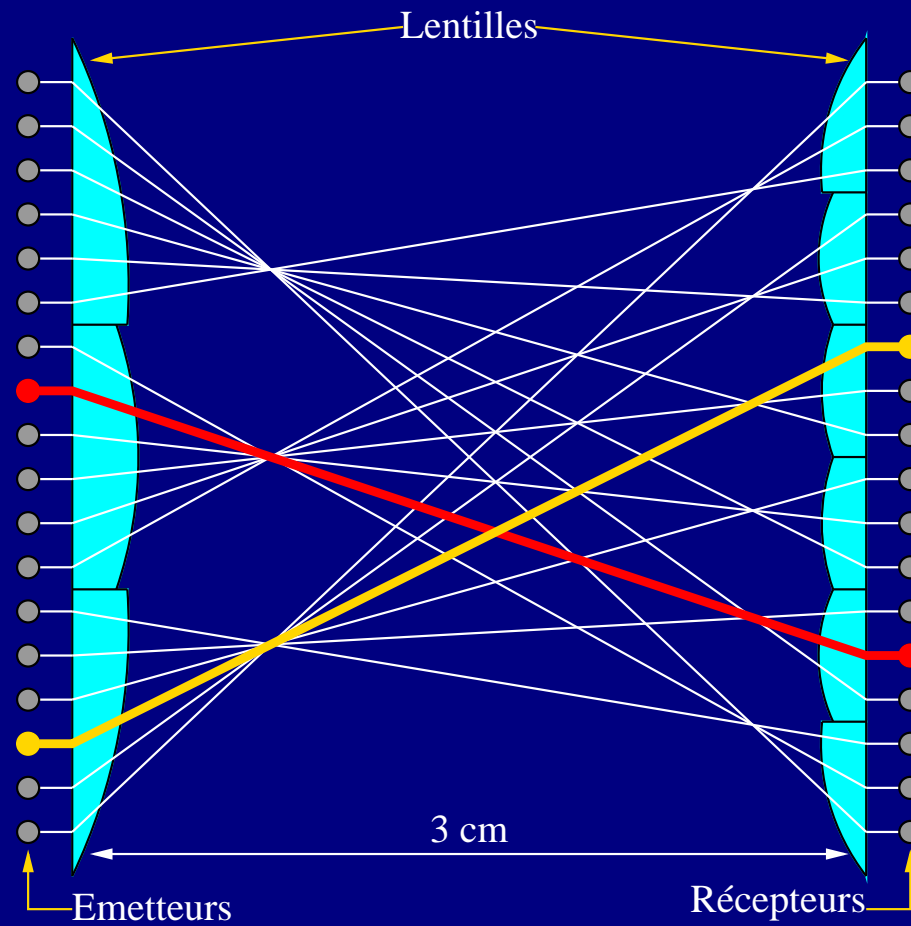
Réseaux d'interconnexions

- *Optical Transpose Interconnection System (OTIS) [MM+93]*



Réseaux d'interconnexions

- *Optical Transpose Interconnection System (OTIS) [MM+93]*



Réseaux d'interconnexions (2)

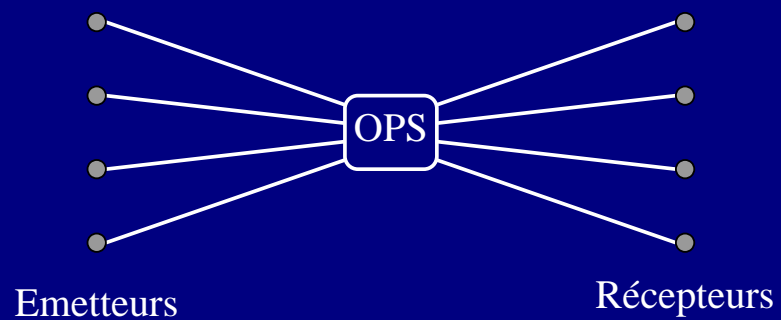
- **Objectif** : caractériser des topologies de réseaux d'interconnexions réalisables avec OTIS
- Réseaux tout optiques
 - ★ Modélisation par des graphes de degré constant
 - ★ Isomorphismes avec des graphes connus
 - * Kautz, de Bruijn, Imase-Itoh
- Réseaux hybrides : OTIS + électronique
 - ★ Modélisation par des graphes composés
 - ★ Nouvelle formulation de réseaux déjà étudiés
- avec A. Ferreira et S. Pérennes
[AlgoTel 99, IEEE WOCS 99, OSA Appl. Opt. 00]

De l'optique aux graphes

- Introduction de “nouveaux” graphes à alphabets, $A(f, \pi, j)$
- Caractérisation complète de cette famille
 - ★ de Bruijn
 - ★ Réseaux papillons cycliques
 - ★ Convolution de de Bruijn par des cycles
- Application : implantation optimale du de Bruijn avec OTIS en le nombre de lentilles
- avec A. Ferreira et S. Pérennes
[*IEEE IPDPS 00*, en révision à *Networks*]

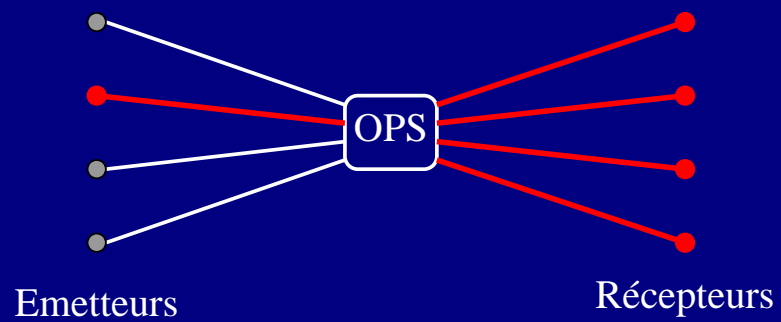
Réseaux multi-OPS

- Etoile Passive Optique (OPS)



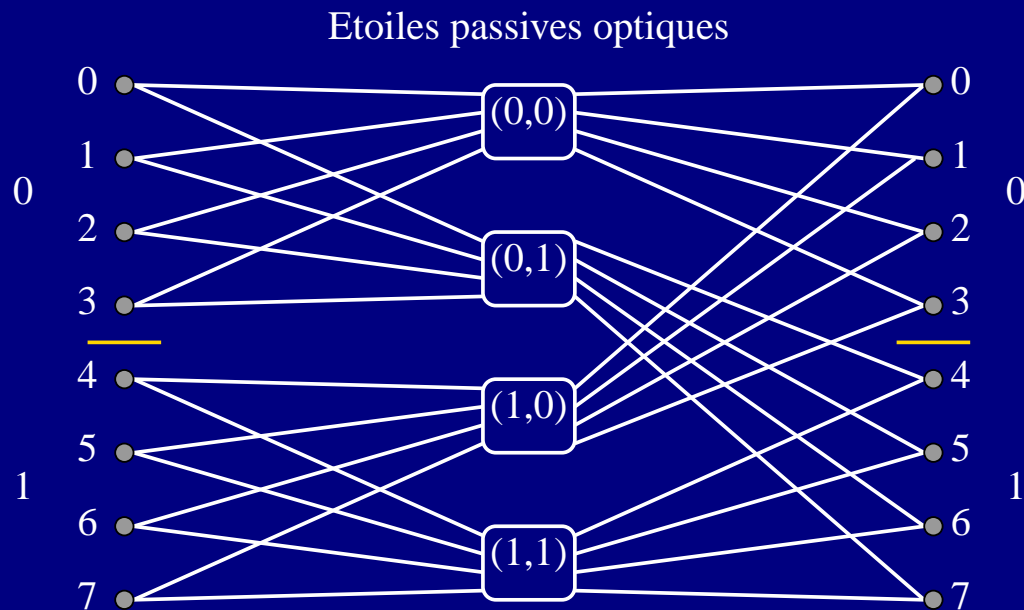
Réseaux multi-OPS

- Etoile Passive Optique (OPS)



Réseaux multi-OPS

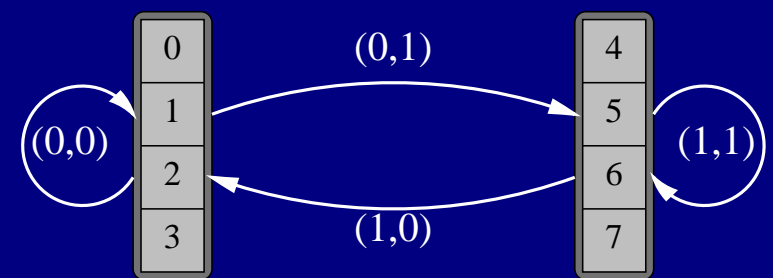
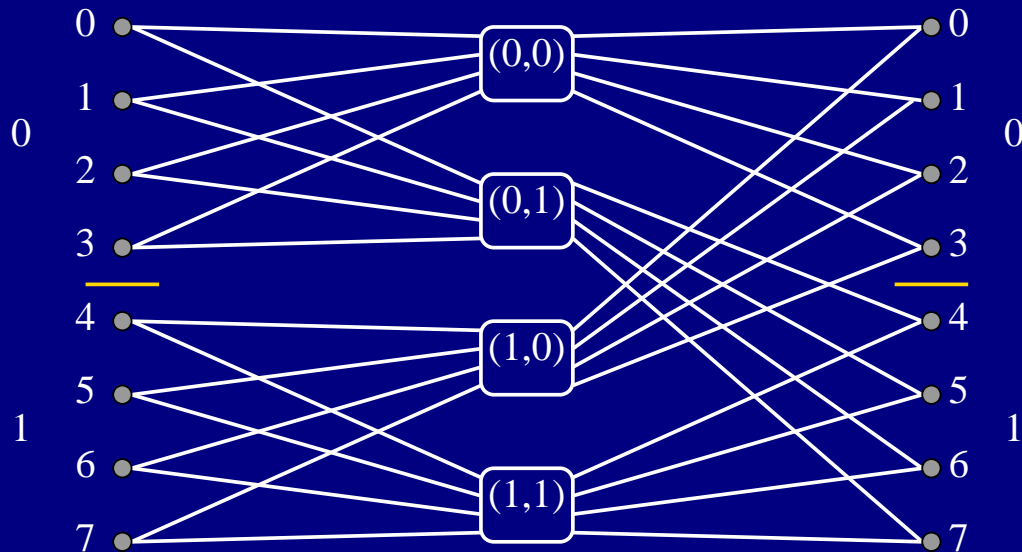
- Etoile Passive Optique (OPS)
- *Partitionned Optical Passive Star network* (POPS) [CL+96]



Réseaux multi-OPS

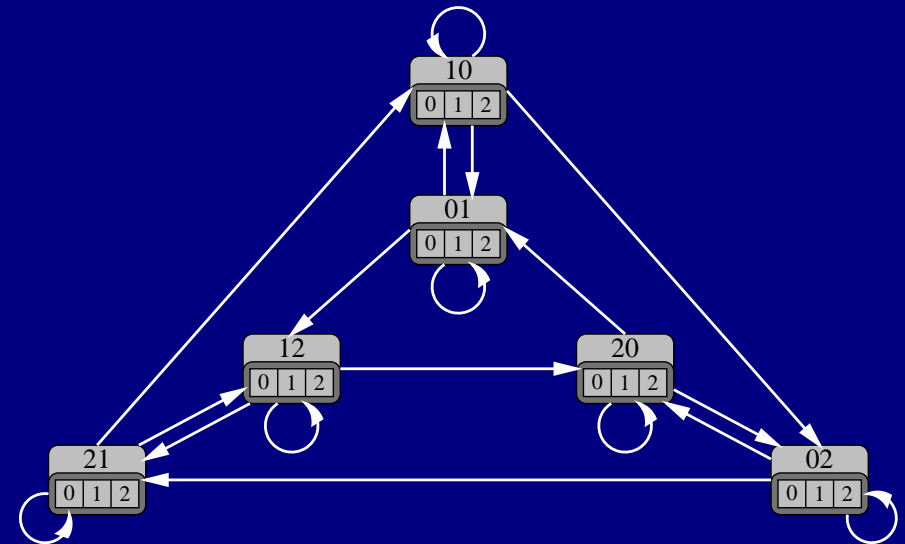
- Etoile Passive Optique (OPS)
- *Partitionned Optical Passive Star network* (POPS) [CL+96]
- ★ $POPS(s, g)$ est modélisé par le stack-graph $\zeta(s, K_g^+)$ [BF96]

Etoiles passives optiques



Alternative

- Compromis: diamètre / nombre de sommets
- Stack-Kautz : $SK(s, d, D) = \zeta(s, K(d, D))$
 - ★ Caractéristiques, eccentricité
 - ★ Routage, diffusion
 - ★ Protocoles de contrôles
 - ★ Simulations
 - ★ Plongements
 - ★ Implantation avec OTIS



- avec A. Ferreira et X. Muñoz (Barcelone)
[IEEE IPSS 98, IEEE/OSA J. Light. Tech. 00]

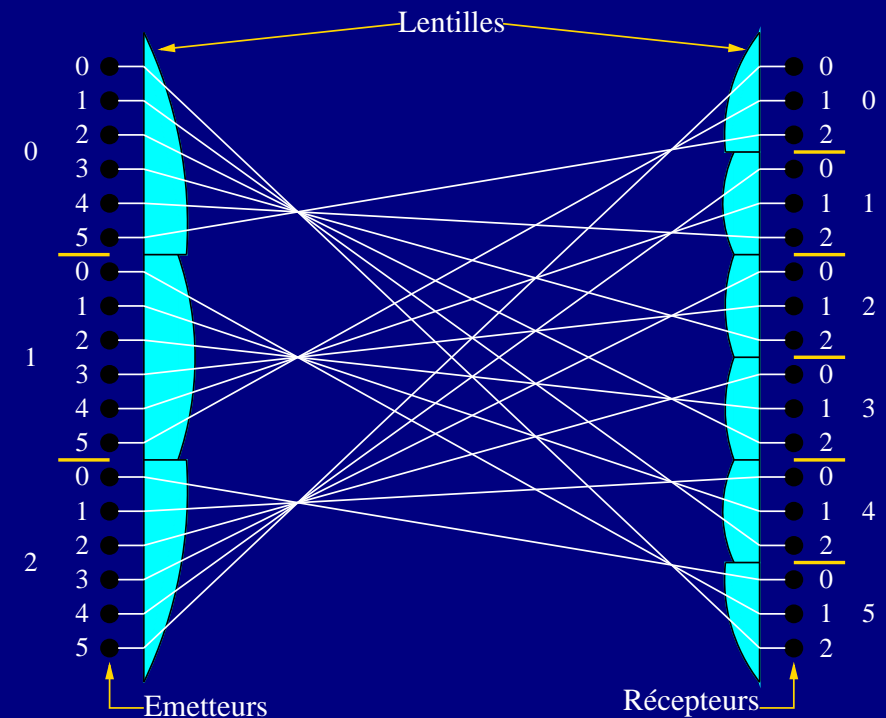
Plan

1. Réseaux en espace libre optique
 - *Optical Transpose Interconnection System* (OTIS)
 - Réseaux multi-OPS
 - **Implantation optimisée du de Bruijn avec OTIS**
2. Réseaux WDM
 - Protection par sous-réseaux
3. Conclusions et perspectives

L'architecture OTIS

[Marsden et al., *Optics Letters*, 1993]

- Optical Transpose Interconnection System
 - ★ Composant optique passif
 - ★ Relie p groupes de q émetteurs vers q groupes de p récepteurs
 - ★ L'émetteur (i, j) est relié au récepteur $(q - j - 1, p - i - 1)$
- Exemple: $OTIS(3, 6)$ relie 18 émetteurs à 18 récepteurs



L'architecture OTIS

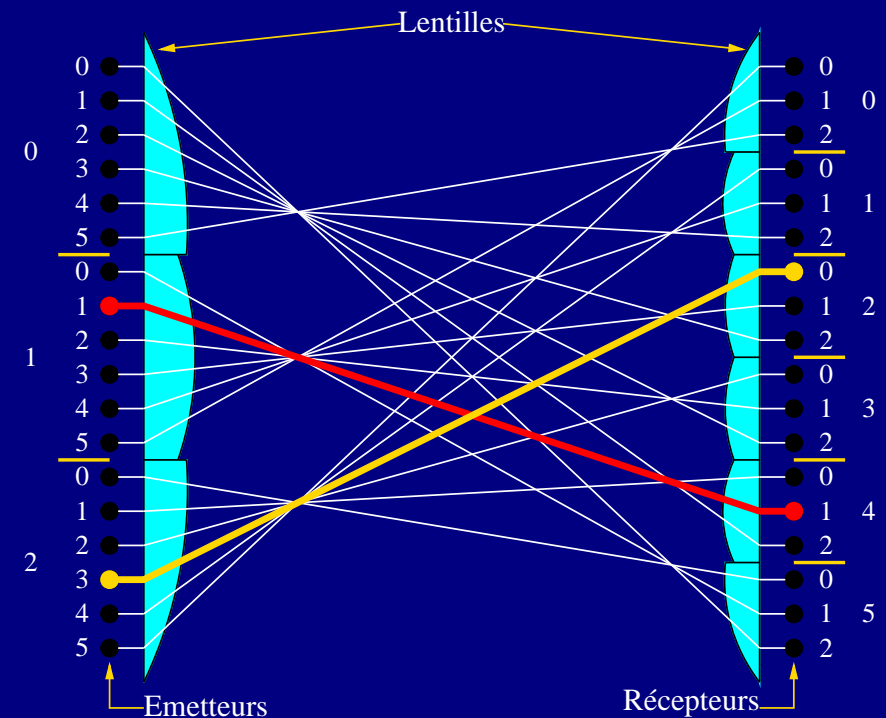
[Marsden et al., *Optics Letters*, 1993]

- Optical Transpose Interconnection System

- ★ Composant optique passif
- ★ Relie p groupes de q émetteurs vers q groupes de p récepteurs
- ★ L'émetteur (i, j) est relié au récepteur $(q - j - 1, p - i - 1)$

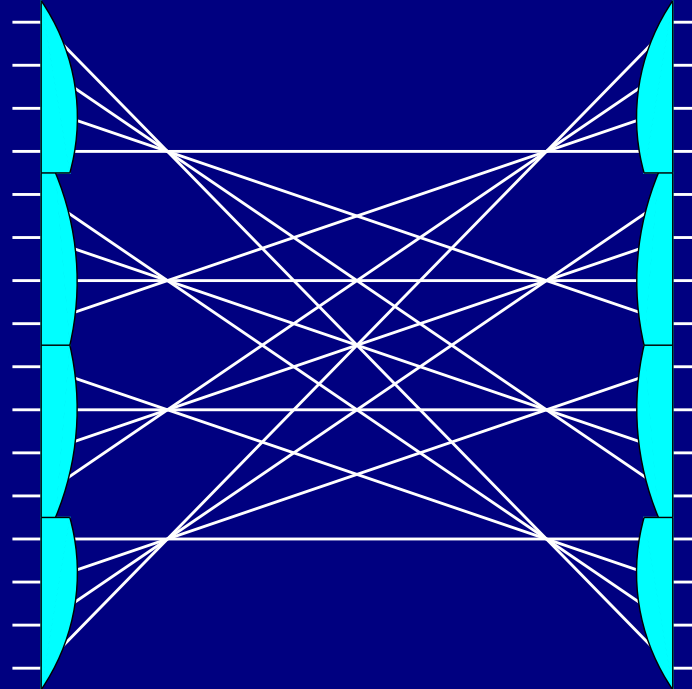
- Exemple: $OTIS(3, 6)$ relie 18 émetteurs à 18 récepteurs

- ★ $(1, 1) \longrightarrow (6 - 1 - 1, 3 - 1 - 1) = (4, 1)$
- ★ $(2, 3) \longrightarrow (6 - 3 - 1, 3 - 2 - 1) = (2, 0)$



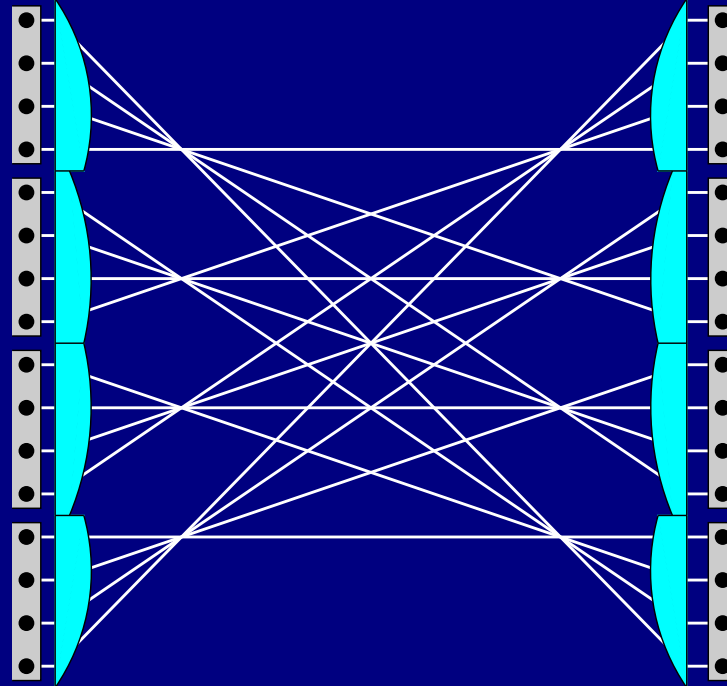
Utilisations

- $OTIS(n, n)$ permet de construire



Utilisations

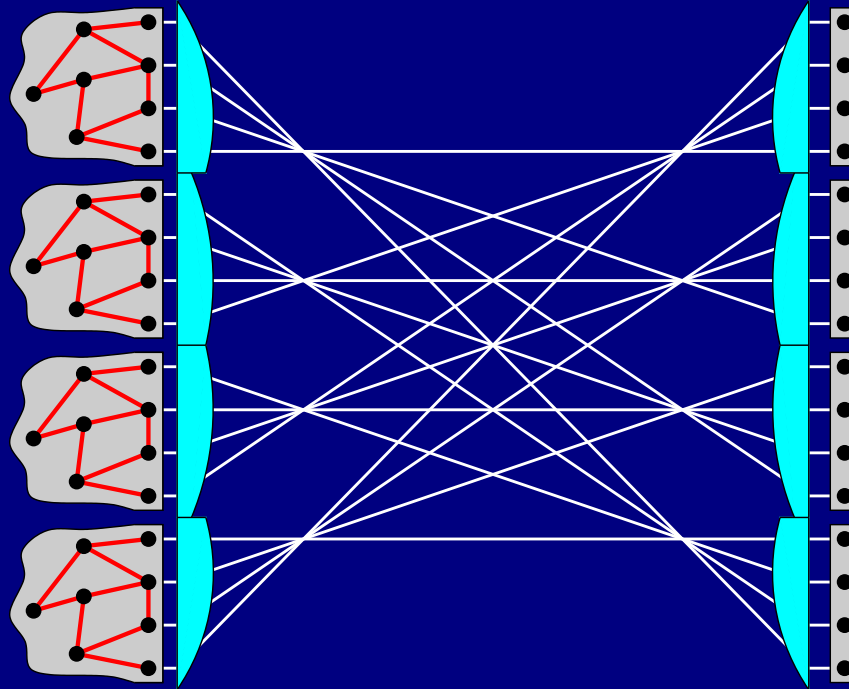
- $OTIS(n, n)$ permet de construire K_n^+



- Tout graphe G comme sous graphe de K_n^+

Utilisations

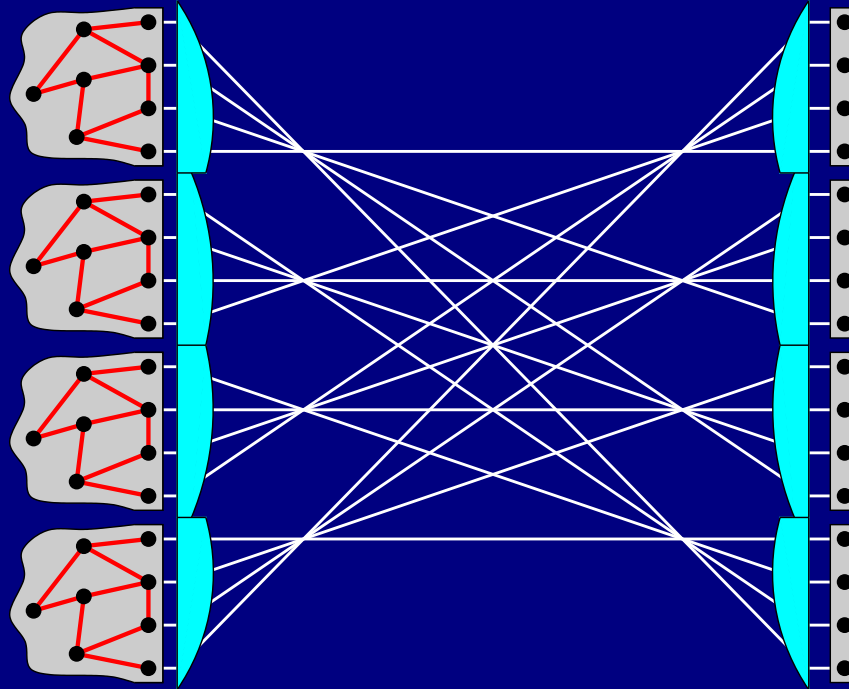
- $OTIS(n, n)$ permet de construire K_n^+ et $K_n^+[G]$



- Tout graphe G comme sous graphe de K_n^+

Utilisations

- $OTIS(n, n)$ permet de construire K_n^+ et $K_n^+[G]$



- Tout graphe G comme sous graphe de K_n^+

Exploitation des ressources

- Supposons un graphe G d'ordre n et de degré 2
 - ★ Implantation avec $OTIS(n, n) \Rightarrow 2n$ liens utilisés sur n^2
 - ★ Inefficace

Exploitation des ressources

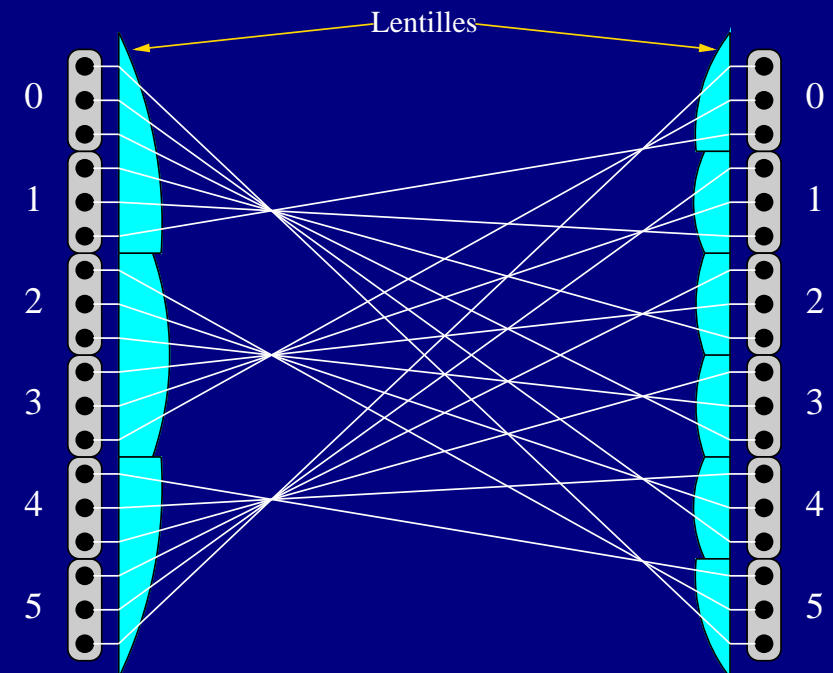
- Supposons un graphe G d'ordre n et de degré 2
 - ★ Implantation avec $OTIS(n, n) \Rightarrow 2n$ liens utilisés sur n^2
 - ★ Inefficace
- Implantation efficace = tous les liens optiques sont utilisés
- **Objectif:** Caractériser les graphes admettant une implantation efficace avec OTIS.

Modélisation

- $H(p, q, d)$:
 - ★ Graphe orienté de degré d construit sur $OTIS(p, q)$
 - ★ Sommets: entiers modulo $n = \frac{pq}{d}$
 - ★ Le sommet u est relié aux sommets v_α , $0 \leq \alpha < d$, tels que :

$$v_\alpha = \left\lfloor \frac{(pq-1) \left(\left\lfloor \frac{du+\alpha}{q} \right\rfloor + 1 \right) - p(du+\alpha)}{d} \right\rfloor$$

- Exemple: $H(3, 6, 3)$

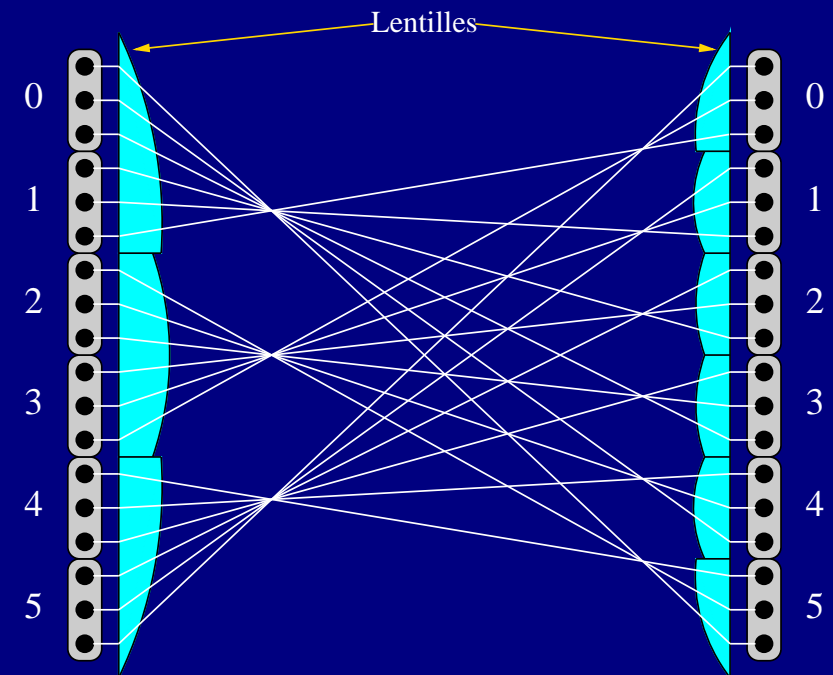


Modélisation

- $H(p, q, d)$:
 - ★ Graphe orienté de degré d construit sur $OTIS(p, q)$
 - ★ Sommets: entiers modulo $n = \frac{pq}{d}$
 - ★ Le sommet u est relié aux sommets v_α , $0 \leq \alpha < d$, tels que :

$$v_\alpha = \left\lfloor \frac{(pq-1)\left(\left\lfloor \frac{du+\alpha}{q} \right\rfloor + 1\right) - p(du+\alpha)}{d} \right\rfloor$$

- Exemple: $H(3, 6, 3)$



Objectif: Caractériser les graphes $H(p, q, d)$

Quelques résultats

- Graphe de Imase et Itoh $II(d, n)$ $H(d, n, d)$
- ★ Graphe complet, K_n^+ $H(n, n, n)$
- ★ K_n^* $H(n - 1, n, n - 1)$
- ★ de Bruijn, $B(d, D)$ $H(d, d^D, d)$
- ★ Kautz, $K(d, D)$ $H(d, d^{D-1}(d + 1), d)$

Quelques résultats

- Graphe de Imase et Itoh $II(d, n)$ $H(d, n, d)$
- ★ Graphe complet, K_n^+ $H(n, n, n)$
- ★ K_n^* $H(n - 1, n, n - 1)$
- ★ de Bruijn, $B(d, D)$ $H(d, d^D, d)$
- ★ Kautz, $K(d, D)$ $H(d, d^{D-1}(d + 1), d)$
- Pas de graphes orientés symétriques autre que K_n^+ et K_n^*

Quelques résultats

- Graphe de Imase et Itoh $II(d, n)$ $H(d, n, d)$
- ★ Graphe complet, K_n^+ $H(n, n, n)$
- ★ K_n^* $H(n - 1, n, n - 1)$
- ★ de Bruijn, $B(d, D)$ $H(d, d^D, d)$
- ★ Kautz, $K(d, D)$ $H(d, d^{D-1}(d + 1), d)$
- Pas de graphes orientés symétriques autre que K_n^+ et K_n^*
- Réseaux hybrides
 - ★ OTIS-Mesh, [ZM+96] $(H(n, n, n) \otimes H(n, n, n)) [M(n, n)]$
 - ★ OTIS-G, [DA02] $(H(n, n, n) \otimes H(n, n, n)) [G]$

Le problème (d, D) sur OTIS

- Pour un degré d et un diamètre D fixés, quelles sont les valeurs possibles de n , p et q ?

Le problème (d, D) sur OTIS

- Pour un degré d et un diamètre D fixés, quelles sont les valeurs possibles de n , p et q ?
- Exemple : $H(p, q, 2)$ de diamètre 8, 9 et 10

n	p	q
⋮	⋮	⋮
253	2	253
254	2	254
255	2	255
256	2	256
	4	128
	16	32
258	2	258
264	2	264
288	2	288
384	2	384

$D = 8$

de Bruijn
de Bruijn
de Bruijn

Kautz

n	p	q
⋮	⋮	⋮
509	2	509
510	2	510
511	2	511
512	2	512
	8	128
513	2	513
516	2	516
528	2	528
576	2	576
768	2	768

$D = 9$

de Bruijn
de Bruijn

Kautz

n	p	q
⋮	⋮	⋮
1022	2	1022
1023	2	1023
1024	2	1024
	4	512
	8	256
	16	128
1024	32	64
1026	2	1026
1032	2	1032
1056	2	1056
1152	2	1152
1536	2	1536

$D = 10$

de Bruijn
de Bruijn
de Bruijn
de Bruijn

Kautz

Le problème (d, D) sur OTIS

- Pour un degré d et un diamètre D fixés, quelles sont les valeurs possibles de n , p et q ?
- Exemple : $H(p, q, 2)$ de diamètre 8, 9 et 10

n	p	q
⋮	⋮	⋮
253	2	253
254	2	254
255	2	255
256	2	256
	4	128
	16	32
258	2	258
264	2	264
288	2	288
384	2	384

$D = 8$

de Bruijn
de Bruijn
de Bruijn

Kautz

n	p	q
⋮	⋮	⋮
509	2	509
510	2	510
511	2	511
512	2	512
	8	128
513	2	513
516	2	516
528	2	528
576	2	576
768	2	768

$D = 9$

de Bruijn
de Bruijn

Kautz

n	p	q
⋮	⋮	⋮
1022	2	1022
1023	2	1023
1024	2	1024
	4	512
	8	256
	16	128
1024	32	64
1026	2	1026
1032	2	1032
1056	2	1056
1152	2	1152
1536	2	1536

$D = 10$

de Bruijn
de Bruijn
de Bruijn
de Bruijn

Kautz

- Plusieurs manières de faire le de Bruijn !

Graphe de de Bruijn

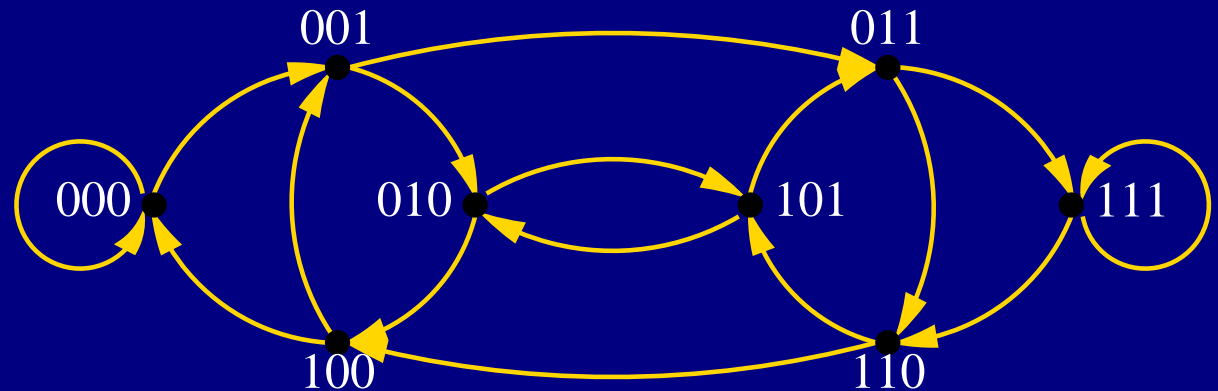
- $B(d, D)$
 - ★ Graphe orienté d'ordre d^D , degré d et diamètre D
 - ★ Sommets : mots de longueur D sur l'alphabet $\{0, 1, \dots, d - 1\}$
 - ★ Voisinage :
 - * décalage à gauche
 - * ajout d'une lettre $x_{D-1}x_{D-2} \dots x_0 \longrightarrow x_{D-2} \dots x_0\beta$

Graphe de de Bruijn

- $B(d, D)$
 - ★ Graphe orienté d'ordre d^D , degré d et diamètre D
 - ★ Sommets : mots de longueur D sur l'alphabet $\{0, 1, \dots, d - 1\}$
 - ★ Voisinage :
 - * décalage à gauche
 - * ajout d'une lettre

$$x_{D-1}x_{D-2} \dots x_0 \longrightarrow x_{D-2} \dots x_0 \beta$$

- Exemple : $B(2, 3)$



Problème

- **Question:** Quels sont les couples (p, q) tels que les graphes $H(p, q, d)$ et $B(d, D)$ sont isomorphes ?
- $H(p, q, d)$, graphe d'ordre $\frac{pq}{d}$ construit sur $OTIS(p, q)$
- $B(d, D)$, graphe d'ordre $n = d^D$

Problème

- **Question:** Quels sont les couples (p, q) tels que les graphes $H(p, q, d)$ et $B(d, D)$ sont isomorphes ?

- $H(p, q, d)$, graphe d'ordre $\frac{pq}{d}$ construit sur $OTIS(p, q)$

- $B(d, D)$, graphe d'ordre $n = d^D$

$$\Rightarrow pq = dn = d^{D+1}$$

- Hypothèses : $p = d^{p'}$ et $q = d^{q'}$, avec $p' + q' = D + 1$

- Conséquence : le voisinage dans $H(d^{p'}, d^{q'}, d)$ peut s'écrire

$$x_{D-1} \dots x_1 x_0 \longrightarrow \overline{x_{q'-2} \dots x_0 \beta x_{D-1} \dots x_{q'}}$$

Graphes $A(f, \pi, j)$

- $A(f, \pi, j)$:
 - ★ Graphe orienté d'ordre d^D , degré d et dimension D
 - ★ Voisinage
 - * permutation sur les indices (f)
 - * permutation sur l'alphabet (π)
 - * substitution d'une lettre sur une position fixée (j)

$$x_{D-1} \dots x_1 x_0 \longrightarrow y_{D-1} \dots y_{j+1} \beta y_{j-1} \dots y_0, \quad y_i = \pi(x_{f(i)})$$

Graphes $A(f, \pi, j)$

- $A(f, \pi, j)$:

- ★ Graphe orienté d'ordre d^D , degré d et dimension D

- ★ Voisinage

- * permutation sur les indices (f)

- * permutation sur l'alphabet (π)

- * substitution d'une lettre sur une position fixée (j)

$$x_{D-1} \dots x_1 x_0 \longrightarrow y_{D-1} \dots y_{j+1} \beta y_{j-1} \dots y_0, \quad y_i = \pi(x_{f(i)})$$

- **Théorème:** Le graphe $A(f, \pi, j)$ est un de Bruijn si et seulement si f est cyclique

Permutations sur l'alphabet ?

- Exemple :

- ★ Graphe orienté d'ordre 8, degré 2 et diamètre 3

- ★ Sommets : mots de longueur 3 sur l'alphabet $\{0, 1\}$

- ★ Voisinage :

- * décalage à gauche

- * complément bit à bit

- * ajout d'une lettre

$$x_2x_1x_0 \longrightarrow \bar{x}_1\bar{x}_00 \text{ et } \bar{x}_1\bar{x}_01$$

Permutations sur l'alphabet ?

- Exemple :

- ★ Graphe orienté d'ordre 8, degré 2 et diamètre 3

- ★ Sommets : mots de longueur 3 sur l'alphabet $\{0, 1\}$

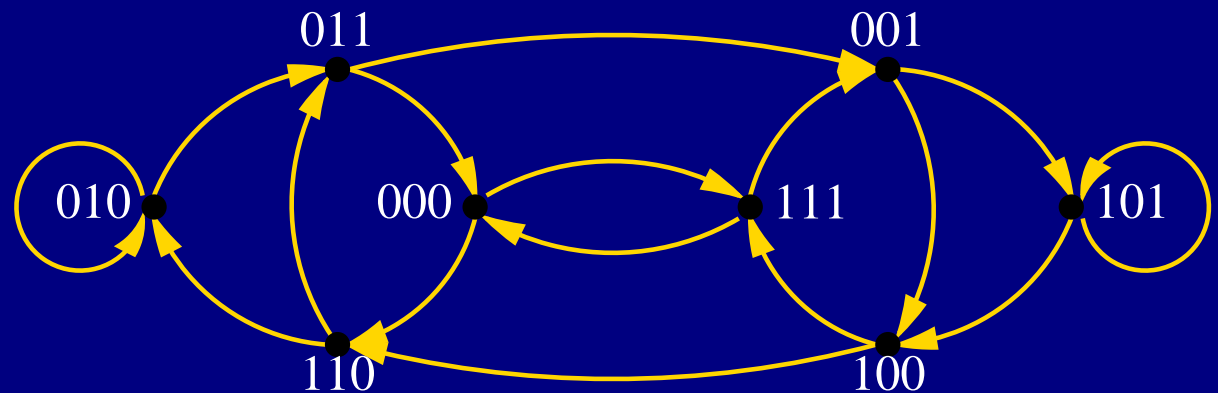
- ★ Voisinage :

- * décalage à gauche

- * complément bit à bit

- * ajout d'une lettre

$$x_2x_1x_0 \longrightarrow \bar{x}_1\bar{x}_00 \text{ et } \bar{x}_1\bar{x}_01$$



Permutations sur l'alphabet (2)

- $B_\pi(d, D)$
 - ★ Graphe orienté d'ordre d^D , degré d et diamètre D
 - ★ π : permutation de l'alphabet
 - ★ Sommets : mots de longueur D sur l'alphabet $\{0, 1, \dots, d - 1\}$,
 - ★ Voisinage :
 - * décalage à gauche
 - * permutation sur l'alphabet
 - * ajout d'une lettre

Permutations sur l'alphabet (2)

- $B_\pi(d, D)$
 - ★ Graphe orienté d'ordre d^D , degré d et diamètre D
 - ★ π : permutation de l'alphabet
 - ★ Sommets : mots de longueur D sur l'alphabet $\{0, 1, \dots, d - 1\}$,
 - ★ Voisinage :
 - * décalage à gauche
 - * permutation sur l'alphabet
 - * ajout d'une lettre

$$x_{D-1}x_{D-2} \dots x_1x_0 \longrightarrow \pi(x_{D-2}) \dots \pi(x_1)\pi(x_0)\beta$$

Permutations sur l'alphabet (2)

- $B_\pi(d, D)$
 - ★ Graphe orienté d'ordre d^D , degré d et diamètre D
 - ★ π : permutation de l'alphabet
 - ★ Sommets : mots de longueur D sur l'alphabet $\{0, 1, \dots, d - 1\}$,
 - ★ Voisinage :
 - * décalage à gauche
 - * permutation sur l'alphabet
 - * ajout d'une lettre

$$x_{D-1}x_{D-2} \dots x_1x_0 \longrightarrow \pi(x_{D-2}) \dots \pi(x_1)\pi(x_0)\beta$$

- **Proposition:** $\forall \pi$, $B_\pi(d, D)$ et $B(d, D)$ sont isomorphes.

Permutations sur les indices ?

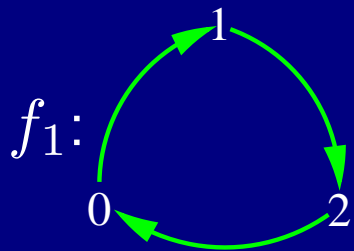
Permutations sur les indices ?

- Exemple :
 - ★ Graphe orienté d'ordre 8, degré 2 et diamètre 3
 - ★ Sommets : mots de longueur 3 sur l'alphabet $\{0, 1\}$
 - ★ Voisinage :
 - * permutation de l'ordre des lettres
 - * substitution d'une lettre sur une position fixée

Permutations sur les indices ?

- Exemple :
 - ★ Graphe orienté d'ordre 8, degré 2 et diamètre 3
 - ★ Sommets : mots de longueur 3 sur l'alphabet $\{0, 1\}$
 - ★ Voisinage :
 - * permutation de l'ordre des lettres
 - * substitution d'une lettre sur une position fixée

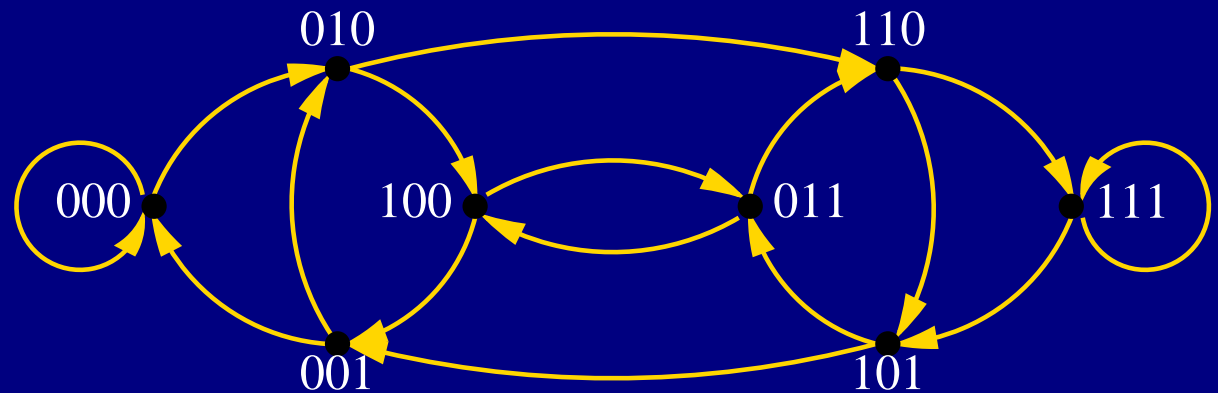
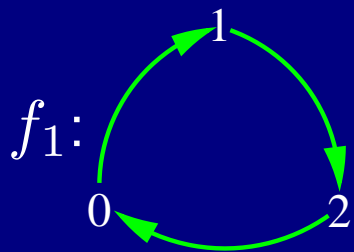
$$x_2x_1x_0 \longrightarrow x_10x_2 \text{ et } x_11x_2$$



Permutations sur les indices ?

- Exemple :
 - ★ Graphe orienté d'ordre 8, degré 2 et diamètre 3
 - ★ Sommets : mots de longueur 3 sur l'alphabet $\{0, 1\}$
 - ★ Voisinage :
 - * permutation de l'ordre des lettres
 - * substitution d'une lettre sur une position fixée

$$x_2x_1x_0 \longrightarrow x_10x_2 \text{ et } x_11x_2$$



Permutations sur les indices (2)

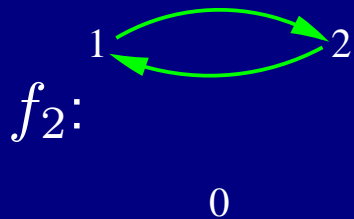
- Exemple 2:
 - ★ Graphe orienté d'ordre 8, degré 2 et dimension 3
 - ★ Sommets : mots de longueur 3 sur l'alphabet $\{0, 1\}$
 - ★ Voisinage :
 - * permutation de l'ordre des lettres
 - * substitution d'une lettre sur une position fixée

$$x_2x_1x_0 \longrightarrow x_1x_20 \text{ et } x_1x_21$$

Permutations sur les indices (2)

- Exemple 2:
 - ★ Graphe orienté d'ordre 8, degré 2 et dimension 3
 - ★ Sommets : mots de longueur 3 sur l'alphabet $\{0, 1\}$
 - ★ Voisinage :
 - * permutation de l'ordre des lettres
 - * substitution d'une lettre sur une position fixée

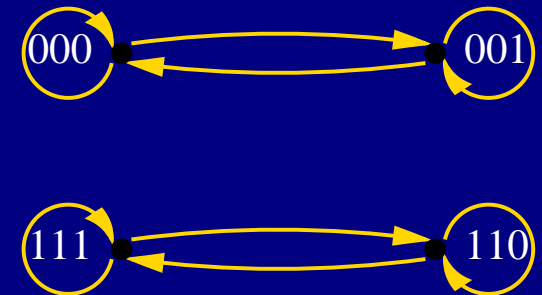
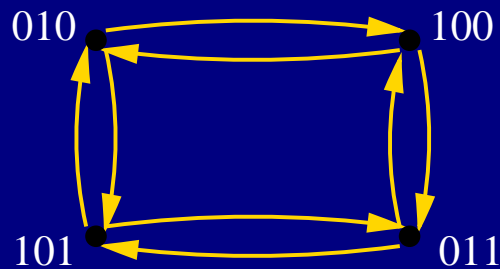
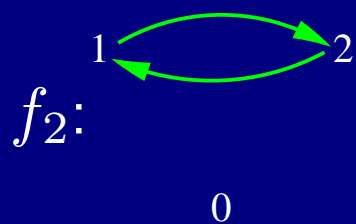
$$x_2x_1x_0 \longrightarrow x_1x_20 \text{ et } x_1x_21$$



Permutations sur les indices (2)

- Exemple 2:
 - ★ Graphe orienté d'ordre 8, degré 2 et dimension 3
 - ★ Sommets : mots de longueur 3 sur l'alphabet $\{0, 1\}$
 - ★ Voisinage :
 - * permutation de l'ordre des lettres
 - * substitution d'une lettre sur une position fixée

$$x_2x_1x_0 \longrightarrow x_1x_20 \text{ et } x_1x_21$$



- Ce n'est pas un de Bruijn !

Permutations sur les indices (3)

- Données
 - ★ Une permutation f sur $\{0, 1, \dots, D - 1\}$
 - ★ Un indice j marquant la position de la lettre à modifier
- $B_{f,j}(d, D)$
 - ★ Graphe orienté d'ordre d^D , de degré d et "dimension D "
 - ★ Sommets : mots de longueur D sur $\{0, 1, \dots, d - 1\}$
 - ★ Voisinage :

$$x_{D-1} \dots x_1 x_0 \longrightarrow y_{D-1} \dots y_{j+1} \beta y_{j-1} \dots y_0, \quad y_i = x_{f(i)}$$

Permutations sur les indices (3)

- Données
 - ★ Une permutation f sur $\{0, 1, \dots, D - 1\}$
 - ★ Un indice j marquant la position de la lettre à modifier
- $B_{f,j}(d, D)$
 - ★ Graphe orienté d'ordre d^D , de degré d et "dimension D "
 - ★ Sommets : mots de longueur D sur $\{0, 1, \dots, d - 1\}$
 - ★ Voisinage :

$$x_{D-1} \dots x_1 x_0 \longrightarrow y_{D-1} \dots y_{j+1} \beta y_{j-1} \dots y_0, \quad y_i = x_{f(i)}$$
- **Théorème:** $B_{f,j}(d, D)$ est isomorphe à $B(d, D)$ si et seulement si la permutation f est cyclique.

Généralisation: graphes $A(f, \pi, j)$

- Les 2 permutations, sur les lettres et sur les indices, sont applicables simultanément
- $A(f, \pi, j)$:
 - ★ graphe orienté d'ordre d^D , degré d et dimension D
 - ★ Voisinage
 - * permutation sur les indices (f)
 - * permutation sur l'alphabet (π)
 - * substitution d'une lettre sur une position fixée (j)

$$x_{D-1} \dots x_1 x_0 \longrightarrow y_{D-1} \dots y_{j+1} \beta y_{j-1} \dots y_0, \quad y_i = \pi(x_{f(i)})$$

Généralisation: graphes $A(f, \pi, j)$

- Les 2 permutations, sur les lettres et sur les indices, sont applicables simultanément
- $A(f, \pi, j)$:
 - ★ graphe orienté d'ordre d^D , degré d et dimension D
 - ★ Voisinage
 - * permutation sur les indices (f)
 - * permutation sur l'alphabet (π)
 - * substitution d'une lettre sur une position fixée (j)

$$x_{D-1} \dots x_1 x_0 \longrightarrow y_{D-1} \dots y_{j+1} \beta y_{j-1} \dots y_0, \quad y_i = \pi(x_{f(i)})$$

- **Théorème:** Le graphe $A(f, \pi, j)$ est un de Bruijn si et seulement si la permutation f est cyclique.

Remarques

- L'isomorphisme entre $A(f, \pi, j)$ et $B(d, D)$ est indépendant du degré
- Si f n'est pas cyclique, alors les composantes connexes de $A(f, \pi, j)$ sont des convolutions de cycles et de de Bruijn
 - ★ Contient les réseaux papillons cycliques

Relation avec OTIS

- $H(d^{p'}, d^{q'}, d)$ est le graphe $A(f_{p',q'}, \pi, p' - 1)$ où
 - ★ $f_{p',q'}$ est la permutation sur les indices

$$f_{p',q'} : i \longmapsto \begin{cases} i + p' & \text{si } i < q' - 1 \\ p' - 1 & \text{si } i = q' - 1 \\ i + p' - 1 \pmod{D} & \text{sinon} \end{cases}$$

- ★ π est la permutation sur l'alphabet: $\pi(x) = d - x - 1$
- ★ $p' - 1$ est l'indice de la lettre substituée

$$x_{D-1} \dots x_1 x_0 \longrightarrow \overline{x_{q'-2} \dots x_0} \beta x_{D-1} \dots x_{q'}$$

Relation avec OTIS

- $H(d^{p'}, d^{q'}, d)$ est le graphe $A(f_{p',q'}, \pi, p' - 1)$ où
 - ★ $f_{p',q'}$ est la permutation sur les indices

$$f_{p',q'} : i \mapsto \begin{cases} i + p' & \text{si } i < q' - 1 \\ p' - 1 & \text{si } i = q' - 1 \\ i + p' - 1 \pmod{D} & \text{sinon} \end{cases}$$

- ★ π est la permutation sur l'alphabet: $\pi(x) = d - x - 1$
- ★ $p' - 1$ est l'indice de la lettre substituée

$$x_{D-1} \dots x_1 x_0 \longrightarrow \overline{x_{q'-2} \dots x_0} \beta x_{D-1} \dots x_{q'}$$

- **Corollaire:** Le graphe $H(d^{p'}, d^{q'}, d)$ est un de Bruijn si et seulement si la permutation $f_{p',q'}$ est cyclique.

Exemple

- $H(2^2, 2^3, 2)$

$$f : i \mapsto \begin{cases} i + 2 & \text{si } i < 2 \\ 1 & \text{si } i = 2 \\ i + 1 \pmod{4} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$x_3x_2x_1x_0 \longrightarrow \overline{x_1x_0\beta x_3}$$

- $H(2^2, 2^3, 2) \equiv B(2, 4)$

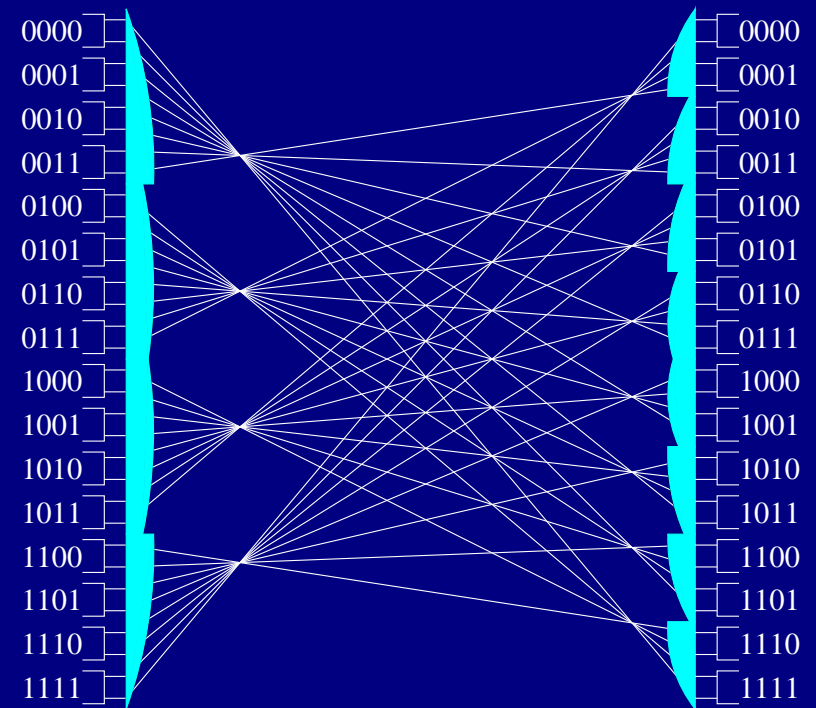
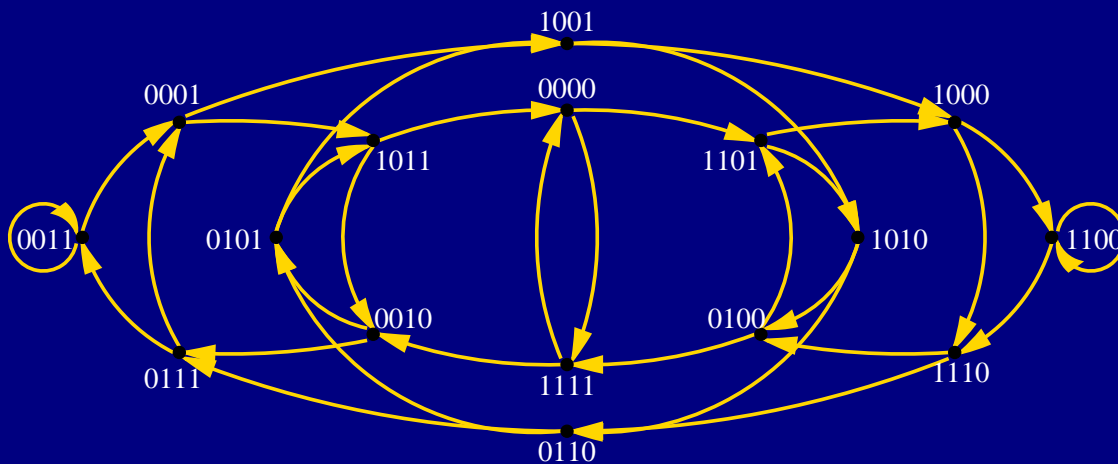
Exemple

- $H(2^2, 2^3, 2)$

$$f : i \mapsto \begin{cases} i + 2 & \text{si } i < 2 \\ 1 & \text{si } i = 2 \\ i + 1 \pmod{4} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$x_3x_2x_1x_0 \longrightarrow \overline{x_1x_0\beta x_3}$$

- $H(2^2, 2^3, 2) \equiv B(2, 4)$



Implantation optimale

- $H(p, q, d)$
 - ★ pq est fixé
 - ★ $p + q$ lentilles
- Minimiser le nombre de lentilles \iff minimiser $p + q$
- $B(d, D)$
 - ★ $pq = d^{D+1}$
 - ★ Minimum pour $p = q \Rightarrow O\left(d^{\frac{D+1}{2}}\right)$ lentilles
- Minimiser $p + q$ prend un temps $O(D^2)$.

Le problème (d, D) sur OTIS

- $H(p, q, 2)$ de diamètre 8, 9 et 10

n	p	q
⋮	⋮	⋮
253	2	253
254	2	254
255	2	255
256	2	256
	4	128
	16	32
258	2	258
264	2	264
288	2	288
384	2	384

$D = 8$

de Bruijn
de Bruijn
de Bruijn

Kautz

n	p	q
⋮	⋮	⋮
509	2	509
510	2	510
511	2	511
512	2	512
	8	128
513	2	513
516	2	516
528	2	528
576	2	576
768	2	768

$D = 9$

de Bruijn
de Bruijn

Kautz

n	p	q
⋮	⋮	⋮
1022	2	1022
1023	2	1023
1024	2	1024
	4	512
	8	256
	16	128
	32	64
1026	2	1026
1032	2	1032
1056	2	1056
1152	2	1152
1536	2	1536

$D = 10$

de Bruijn
de Bruijn
de Bruijn
de Bruijn

Kautz

Conclusion sur OTIS

- Modélisations par les graphes $H(p, q, d)$
 - ★ Isomorphismes : Imase et Itoh, Kautz, de Bruijn, K_n^+ , K_n^*
 - ★ Graphes orientés symétriques
- Graphes $A(f, \pi, j)$
 - ★ Caractérisation complète
 - ★ Implantation optimale du de Bruijn avec OTIS
- Implantation du POPS et du Stack-Kautz avec OTIS

Plan

1. Réseaux en espace libre optique
 - *Optical Transpose Interconnection System* (OTIS)
 - Réseaux multi-OPS
 - Implantation optimisée du de Bruijn avec OTIS
2. Réseaux WDM
 - Protection par sous-réseaux
3. Conclusions et perspectives

Sécurisation dans les réseaux WDM

- Réseaux WDM
 - ★ Réseaux en mode connectés
 - ★ Une requête \leftarrow chemin + longueur d'onde
- Transport massif de données \Rightarrow besoin de sécurisation des flux
- Panne = rupture d'un faisceau de fibres
 - ★ 2-connexité nécessaire
- Solutions
 - ★ Restauration = réaction à une panne
 - ★ Protection = prévision des pannes

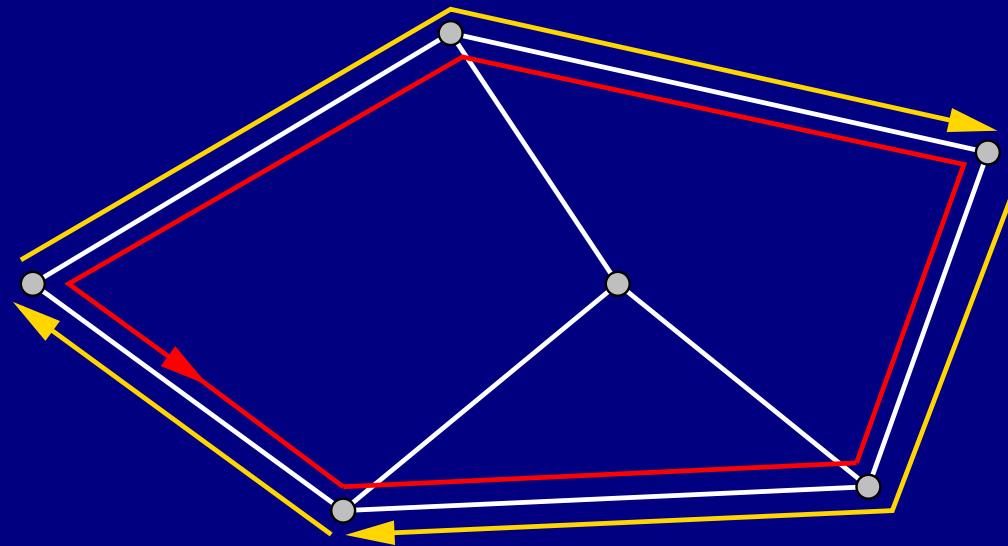
Protection

- Différentes stratégies de protection
- Reroutage global
 - ★ Minimisation de la charge
 - ★ Reconfiguration totale du réseau
- Protection 1+1
 - ★ Chaque requête possède son propre chemin de protection
 - ★ Pas d'interruption de trafic
 - ★ Ressources plus que doublées
- Compromis : protection par sous-réseaux

Protection par sous réseaux

(problème posé par FT R&D)

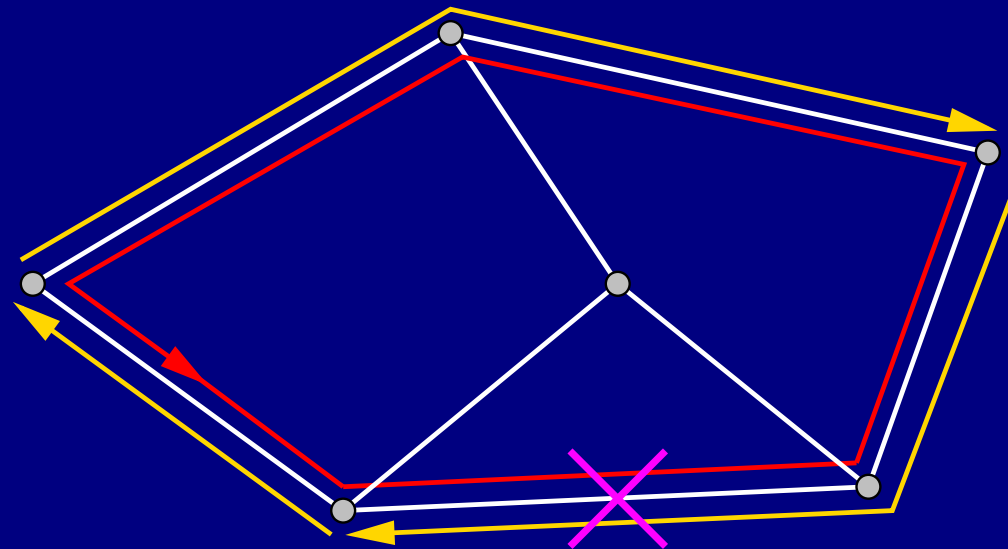
- Grouper les requêtes en sous-réseaux
- Partager la ressource de protection



Protection par sous réseaux

(problème posé par FT R&D)

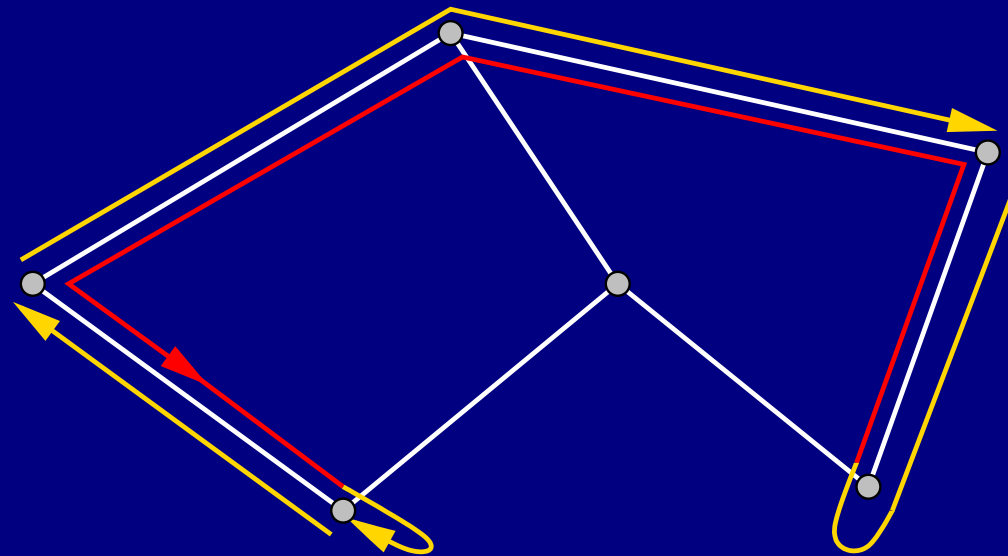
- Grouper les requêtes en sous-réseaux
- Partager la ressource de protection



Protection par sous réseaux

(problème posé par FT R&D)

- Grouper les requêtes en sous-réseaux
- Partager la ressource de protection



- Difficile en général \Rightarrow étude de cas simples

Echange total sur le cycle

- Données
 - ★ Réseau physique = cycle C_n
 - ★ Instance de communication = échange total, K_n
- Objectifs
 - ★ Associer un chemin dans C_n à chaque arête de K_n
 - ★ Sous-réseaux de protection = le cycle
 - ★ Minimiser le nombre de sous-réseaux

Echange total sur le cycle, cas impair

Théorème: $n = 2p + 1$

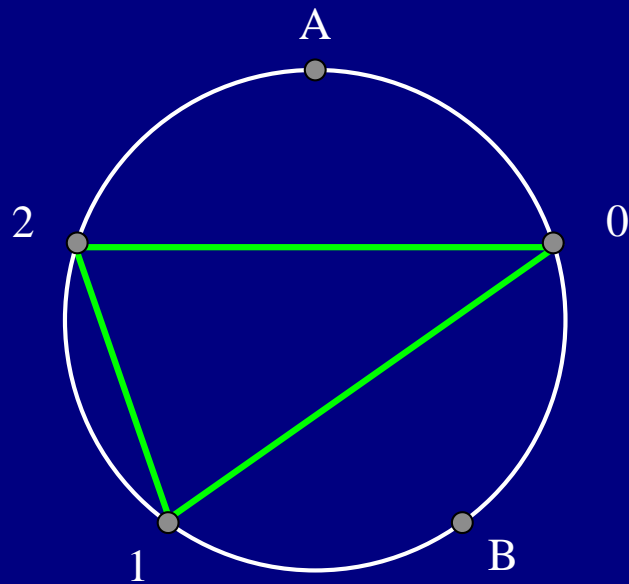
La couverture des arêtes de K_n utilise $\frac{p(p+1)}{2}$ cycles.

De plus, la couverture est réalisée par p C_3 et $\frac{p(p-1)}{2}$ C_4 .

Echange total sur le cycle, cas impair

Théorème: $n = 2p + 1$

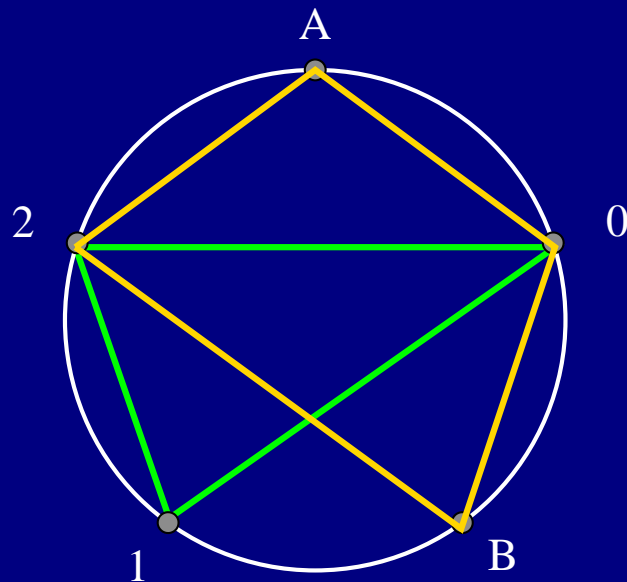
La couverture des arêtes de K_n utilise $\frac{p(p+1)}{2}$ cycles.
De plus, la couverture est réalisée par p C_3 et $\frac{p(p-1)}{2}$ C_4 .



Echange total sur le cycle, cas impair

Théorème: $n = 2p + 1$

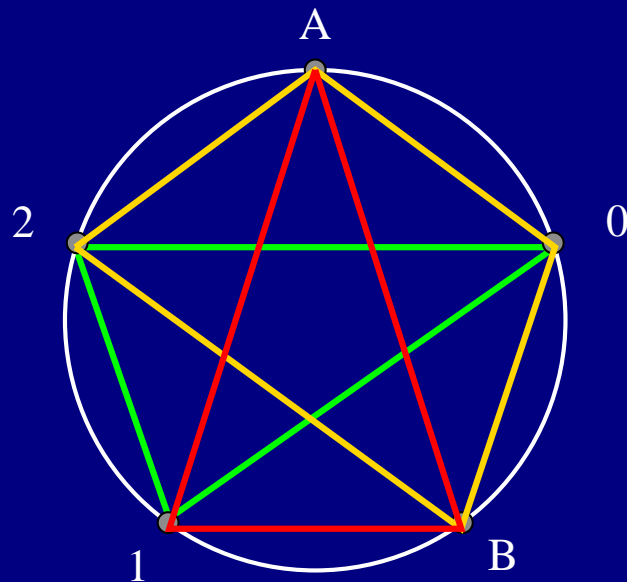
La couverture des arêtes de K_n utilise $\frac{p(p+1)}{2}$ cycles.
De plus, la couverture est réalisée par p C_3 et $\frac{p(p-1)}{2}$ C_4 .



Echange total sur le cycle, cas impair

Théorème: $n = 2p + 1$

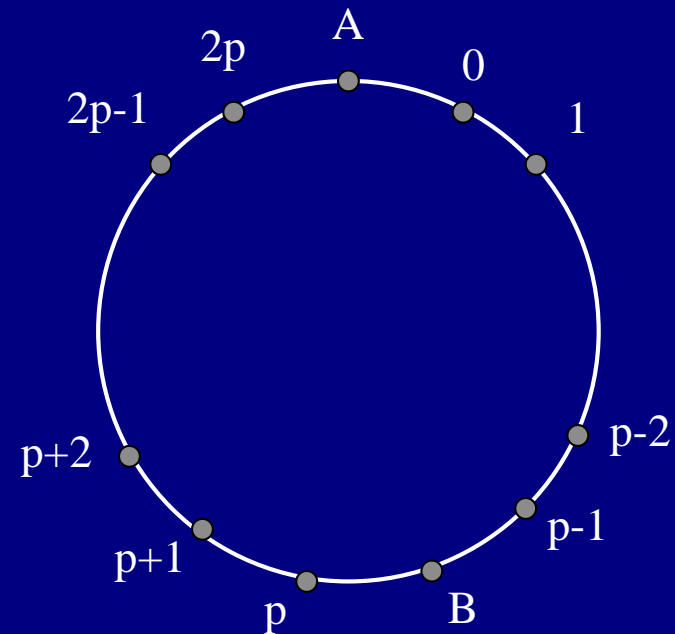
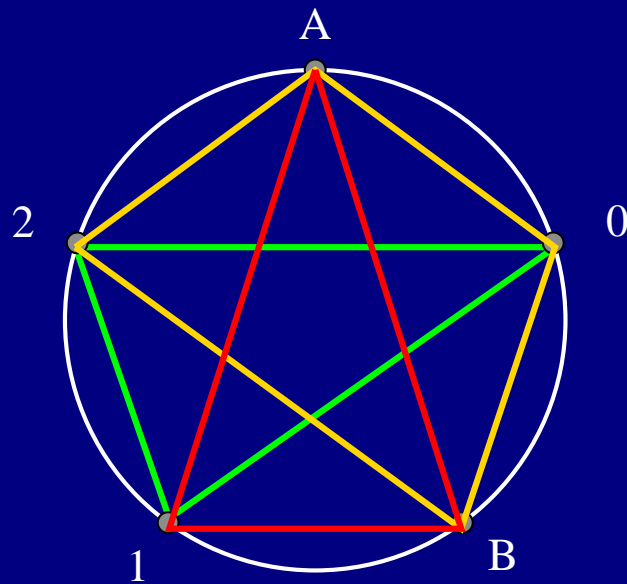
La couverture des arêtes de K_n utilise $\frac{p(p+1)}{2}$ cycles.
De plus, la couverture est réalisée par p C_3 et $\frac{p(p-1)}{2}$ C_4 .



Echange total sur le cycle, cas impair

Théorème: $n = 2p + 1$

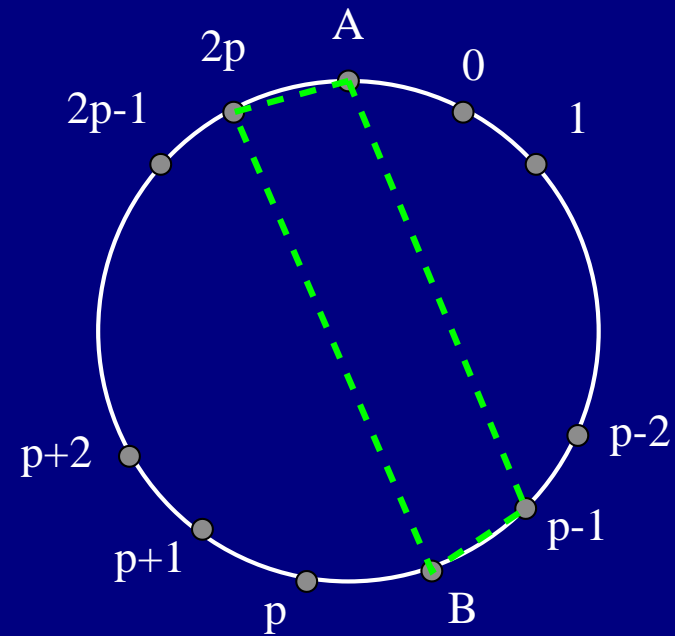
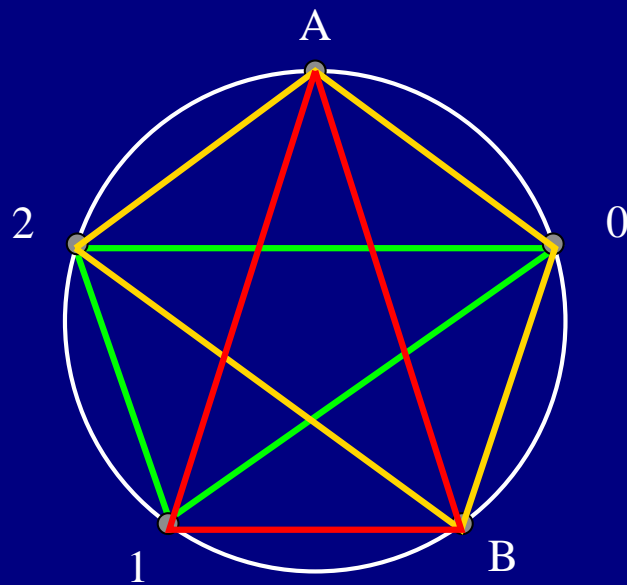
La couverture des arêtes de K_n utilise $\frac{p(p+1)}{2}$ cycles.
De plus, la couverture est réalisée par p C_3 et $\frac{p(p-1)}{2}$ C_4 .



Echange total sur le cycle, cas impair

Théorème: $n = 2p + 1$

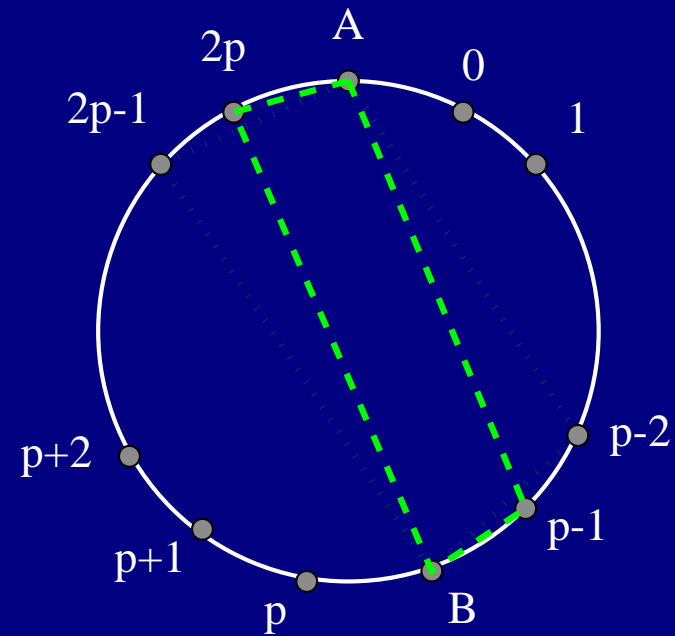
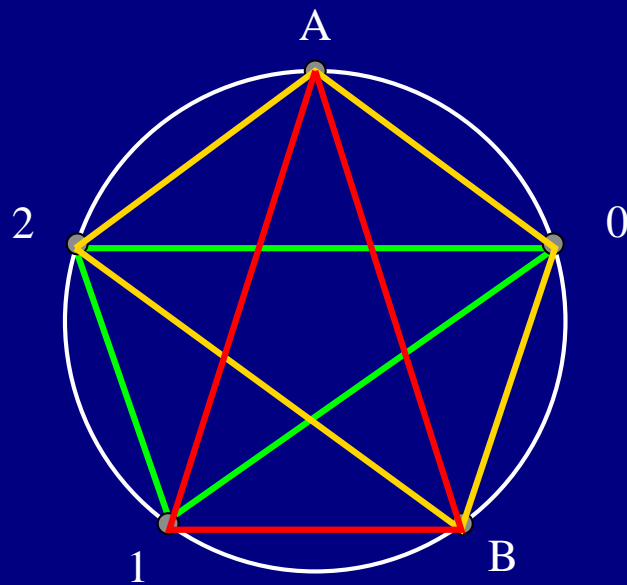
La couverture des arêtes de K_n utilise $\frac{p(p+1)}{2}$ cycles.
De plus, la couverture est réalisée par p C_3 et $\frac{p(p-1)}{2}$ C_4 .



Echange total sur le cycle, cas impair

Théorème: $n = 2p + 1$

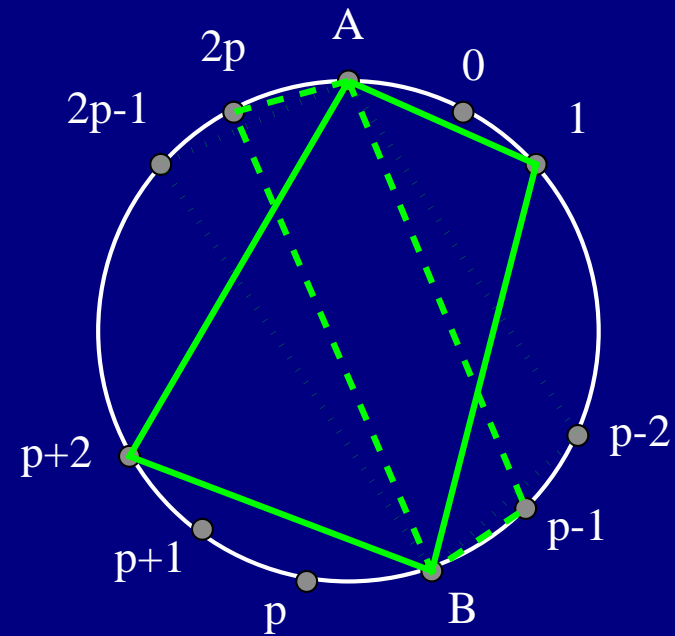
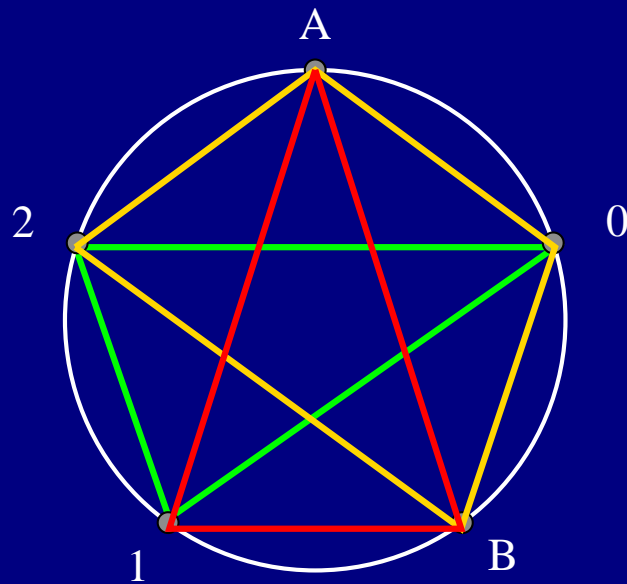
La couverture des arêtes de K_n utilise $\frac{p(p+1)}{2}$ cycles.
De plus, la couverture est réalisée par p C_3 et $\frac{p(p-1)}{2}$ C_4 .



Echange total sur le cycle, cas impair

Théorème: $n = 2p + 1$

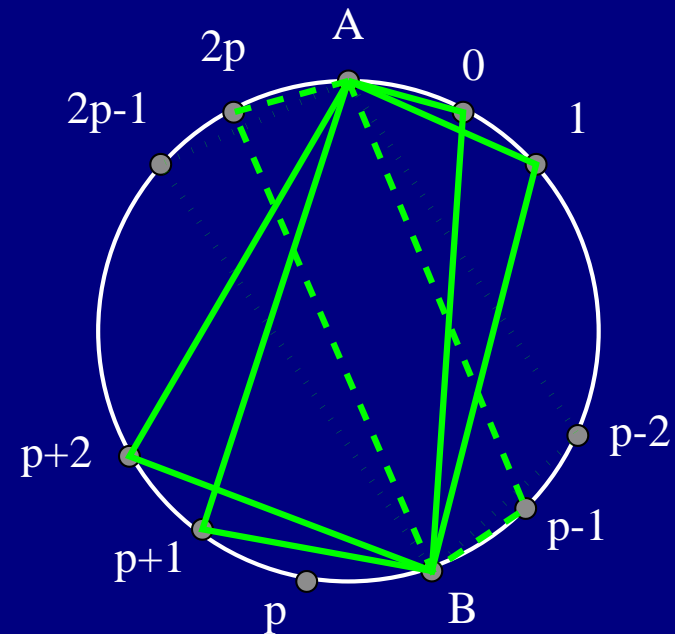
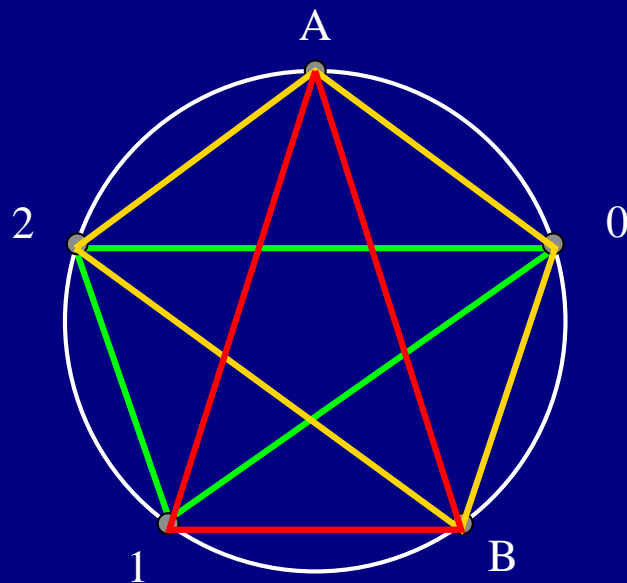
La couverture des arêtes de K_n utilise $\frac{p(p+1)}{2}$ cycles.
De plus, la couverture est réalisée par p C_3 et $\frac{p(p-1)}{2}$ C_4 .



Echange total sur le cycle, cas impair

Théorème: $n = 2p + 1$

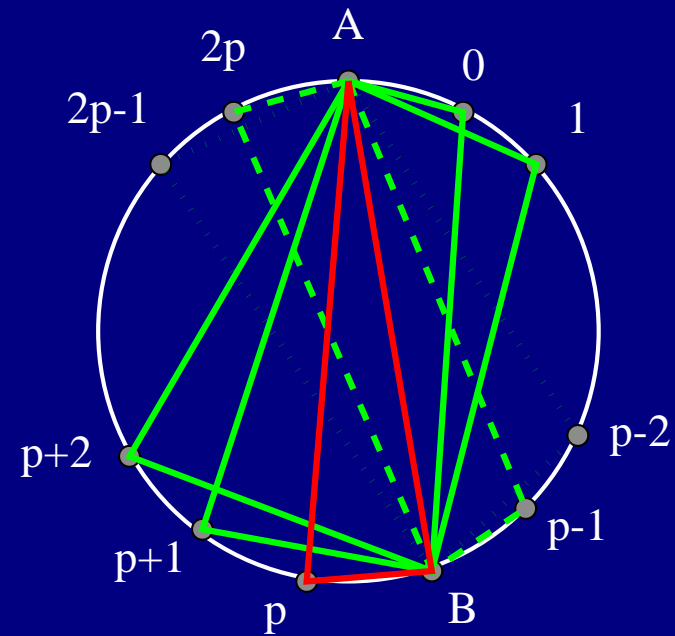
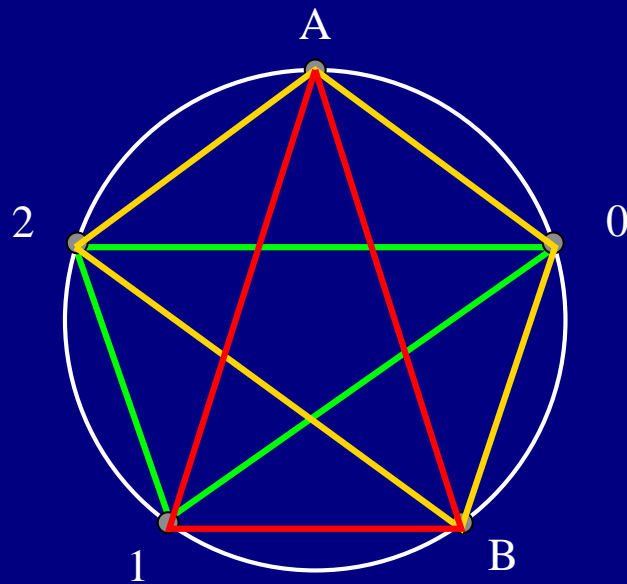
La couverture des arêtes de K_n utilise $\frac{p(p+1)}{2}$ cycles.
De plus, la couverture est réalisée par p C_3 et $\frac{p(p-1)}{2}$ C_4 .



Echange total sur le cycle, cas impair

Théorème: $n = 2p + 1$

La couverture des arêtes de K_n utilise $\frac{p(p+1)}{2}$ cycles.
De plus, la couverture est réalisée par p C_3 et $\frac{p(p-1)}{2}$ C_4 .



Résultats

- Construction de solutions optimale dans tous les cas
 - ★ Orienté ou non-orienté
 - ★ Taille fixée des cycles de la couverture ou non
- Fourni une coloration optimale
- avec J-C. Bermond, L. Chacon, M-L Yu (Canada), F. Tillerot
[*AlgoTel 00, Sirocco 01*, soumis à *J. Comb. Design*]

Conclusions & Perspectives

- Relations entre l'informatique théorique et l'ingénierie des télécommunications
- Réseaux en espace libre optique
 - ★ OTIS et graphes $A(f, \pi, j)$
 - ★ Stack-Kautz
 - ★ Autres composants, MEMS

Conclusions & Perspectives (2)

- Protection par sous-réseaux
 - ★ Autres réseaux
 - ★ Autres instances
 - ★ Heuristiques
- Comparaisons entre les stratégies de protections
- Influences des coûts sur le dimensionnement
- Réseaux multi-fibres

Merci