Jeudi 16 décembre 2004

Contribution à la théorie des interféromètres atomiques

Charles ANTOINE

Équipe de Relativité Gravitation et Astrophysique (ERGA)

LERMA, Observatoire de Paris, Université Pierre et Marie Curie

(sous la direction de Ch. J. BORDÉ)

Plan

1. **Introduction**
2. **Formalisme ABCD**
3. **Séparatrices laser**
4. **Calcul du déphasage**
5. **Application**
6. **Conclusions & perspectives**

Ondes de matière

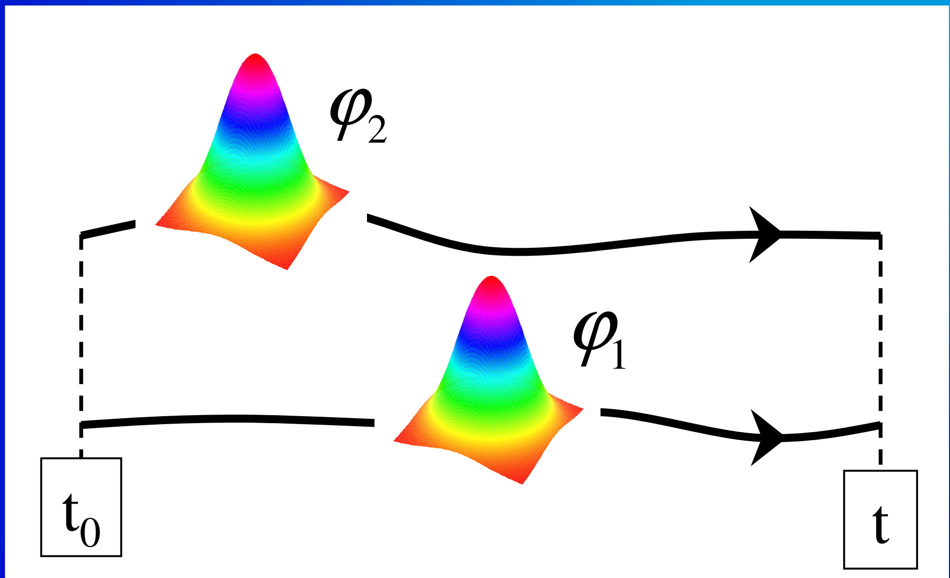
De Broglie (1923) **:**

$$\boxed{\lambda_{DB} = \frac{h}{mv}}$$

$\Longrightarrow$ **évolution de paquets d'ondes matériels**

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V\left(\vec{r}, \vec{p}, t\right)$$

Phase locale associée: $\varphi\left(\vec{r}, t\right)$



$\Longrightarrow \varphi_2\left(t\right) - \varphi_1\left(t\right)$

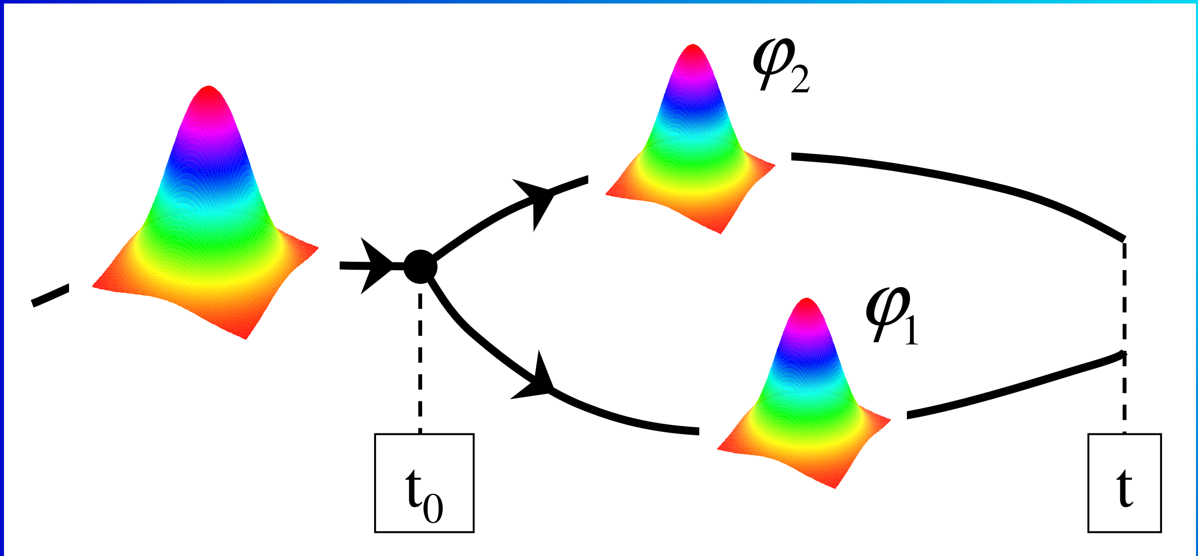
contient la **signature**

du potentiel $V\left(\vec{r}, \vec{p}, t\right)$

Cohérence ?

de t_0 à t: évolution cohérente

à t_0: 2 sources cohérentes (BEC)



ou…

séparation cohérente
d'un unique
nuage initial

Comment ?

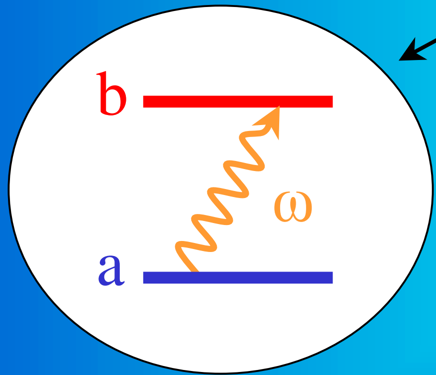
Diffraction par des **structures matérielles**
…ou **lumineuses**

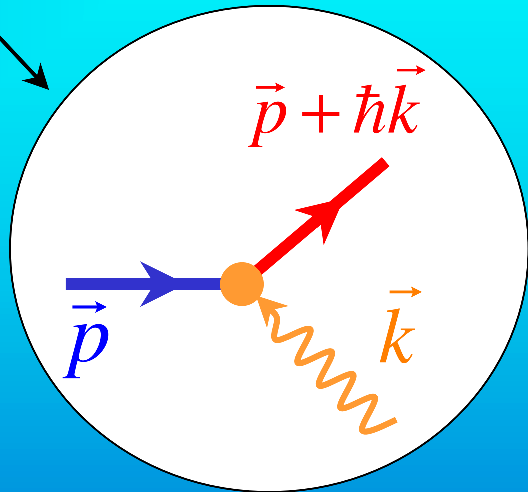
interactions lumière-matière $\Longrightarrow$ absorption/émission de photons

Séparatrices laser

Changement d'état **interne** et **externe**

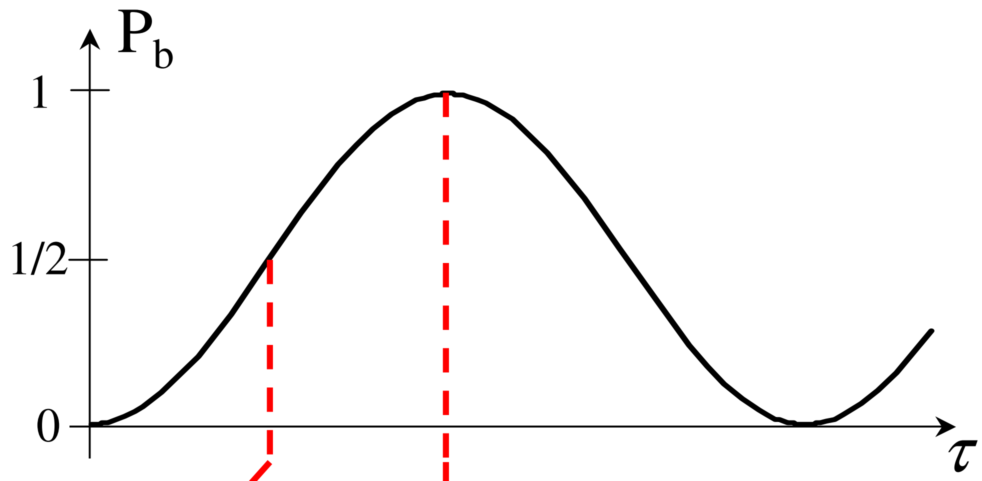
$\Longrightarrow$ oscillations de Rabi:





$\Downarrow$

effet de recul



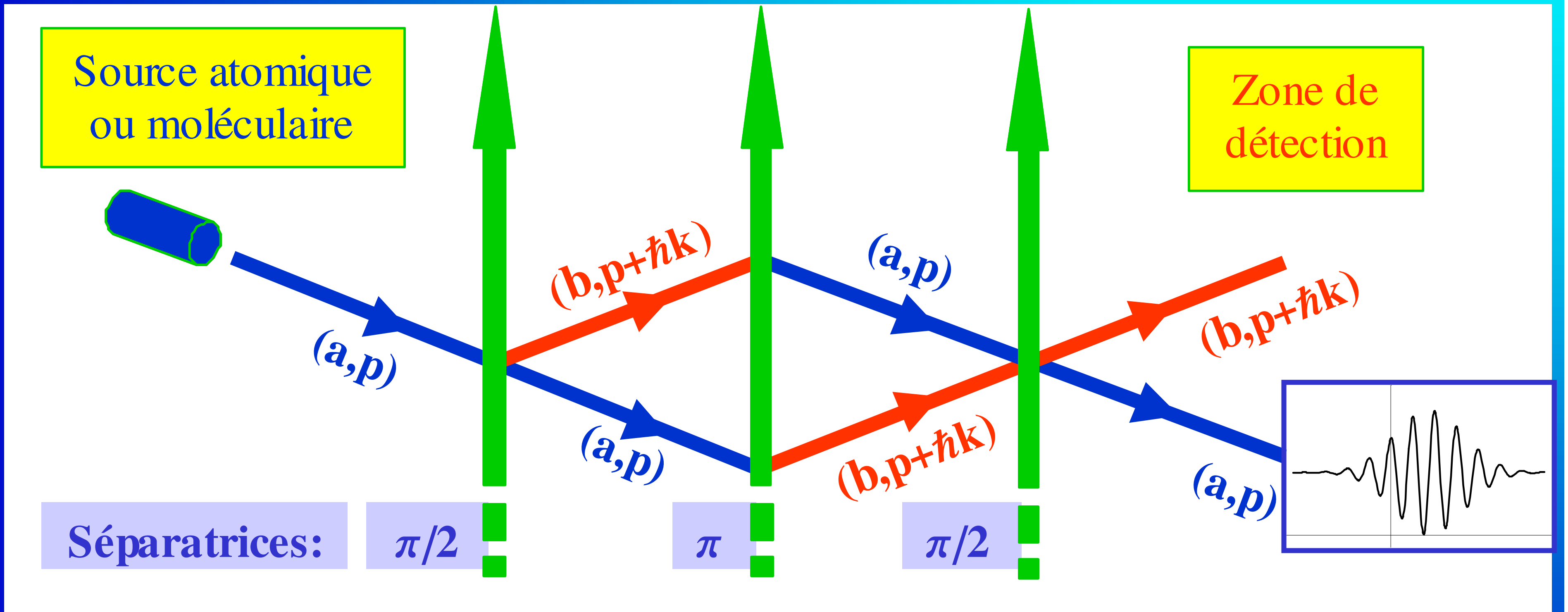
lame 50/50

miroir

$\Longrightarrow$ « **séparatrices à ondes de matière** »

Interféromètre à ondes de matière

Cœur: **séparatrices** et **zones sombres**



$\Longrightarrow$ **Signal de franges:**

$$S = S_0\left(1 + e^{-\eta}.\cos\left(\Delta\phi\right)\right)$$

Applications

- mesure d'accélérations, de rotations, de champs gravitationnels
  $\Longrightarrow$ **navigation, géodésie, géophysique**
- mesure de fréquences $\Longrightarrow$ **horloges atomiques**
- mesure de **propriétés atomiques ou moléculaires**
- mesure de certaines **constantes de la Physique** $\Longrightarrow$ G, α…
- test de **théories fondamentales** $\Longrightarrow$ Ω_{LT} , GW, variation de α, principe d'équivalence…

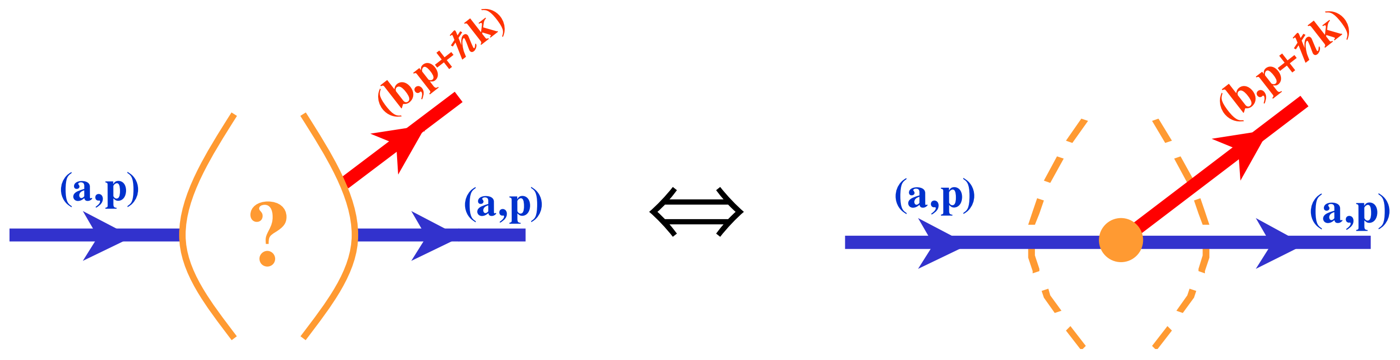
$\Longrightarrow$ sensibilité, précision et stabilité exceptionnelles

méthodes de calcul du déphasage compatibles ? **NON**

Modélisations des séparatrices

Pendant longtemps:

- modélisation très simplifiée des séparatrices



Étape intermédiaire:

- en champ fort et en présence d'une accélération **g** uniforme et constante

Présent travail:

- en **champ fort** et en présence d'**accélérations**, de **gradients** et de **rotations**: « $\mathbf{g} + \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\Omega}$ »
- **structuration dispersive** en présence de ces champs extérieurs

Méthodes de calcul du déphasage

Pendant longtemps:

- calcul à la Feynman: - ondes planes
  - calcul perturbatif: $g + \gamma_{perturb}$

Bordé (1990):

- **formalisme ABCD:** - vrais paquets d'ondes
  - calculs non-perturbatifs

Présent travail:

- notion de **chemins homologues** et mise en évidence d'**invariants caractéristiques**

$\Longrightarrow$ **effet simultané de plusieurs champs inertiels et gravitationnels**

($\Longrightarrow$ **« $g + \gamma + \Omega$ » exact**)

$\Longrightarrow$ applicable à **tous types d'interféromètres**

$\Longrightarrow$ **origine des simplifications** essentielles observées dans l'expression du déphasage

Une nécessité…

$\Longrightarrow$ **mise en évidence de corrections d'ordre supérieur**

	Précision et sensibilité actuelles:	1ères corrections pertinentes: (effets inertiels et gravitationnels)	
• gyromètre (rad.s^{-1}.$Hz^{-1/2}$)	**6.10^{-10}**	**7.10^{-10}**	: gradient de gravité
• gravimètre ($\Delta g/g$)	**3.10^{-9}**	**1.10^{-10}**	: gradient $\times$ rotation
• mesure de α	**7.10^{-9}**	**8.10^{-9}**	: gradient de gravité
• horloges opt. ($\Delta\upsilon/\upsilon$)	**$< 10^{-14}$**	**3.10^{-17}**	: gradient de gravité

+

corrections dues à la prise en compte de la **structuration dispersive** ayant lieu dans chaque séparatrice de l'interféromètre

Plan

1. Introduction
2. **Formalisme ABCD**
3. Séparatrices laser
4. Calcul du déphasage
5. Application
6. Conclusion & perspectives

Formalisme ABCD

théorème ABCD

Méthode de la fonction génératrice

« évolution de vrais paquets d'ondes atomiques
en présence de potentiels au plus quadratiques en **r** et **p** »

Matrices ABCD

effets usuels:

$$H_{ext} = \frac{1}{2m}\vec{p}.\left(\overset{\Rightarrow}{1} + \overset{\Rightarrow}{h}(t)\right).\vec{p} - \vec{\Omega}(t).(\vec{r}\times\vec{p}) - m\vec{g}(t).\vec{r} - \frac{m}{2}\vec{r}.\overset{\Rightarrow}{\gamma}(t).\vec{r}$$

ondes gravit.
(jauge d'Einstein)

rotation

gravité
uniforme

gradient
de gravité

Matrices ABCD

= solution **classique** des équations de Hamilton

$$\begin{pmatrix} \vec{r}(t) \\ \vec{p}(t)/m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t,t_0) & B(t,t_0) \\ C(t,t_0) & D(t,t_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{r}(t_0) \\ \vec{p}(t_0)/m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{\xi}(t,t_0) \\ \vec{\phi}(t,t_0) \end{pmatrix}$$

termes quadra. de H_{ext}

termes lin. de H_{ext}

$\Longrightarrow$ pas de solution analytique dans le cas général

Cas particuliers:

- cas libre
- **g** seul, γ seul, **Ω** seul, « **g** + γ »
- **H_{ext} indép. du temps** $\Longrightarrow$ « **g + γ + Ω** »

Théorème ABCD

= généralisation du théorème d'Ehrenfest

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\psi(\vec{r}, t_1) = wp(\vec{r}, t_1\ ;\ \vec{r}_1, \vec{p}_1, X_1, Y_1)$$

structure identique

$$\psi(\vec{r}, t_2) = e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(t_2, t_1, \vec{r}_1, \vec{p}_1)} . wp(\vec{r}, t_2\ ;\ \vec{r}_2, \vec{p}_2, X_2, Y_2)$$

loi linéaire identique

pour les centres:

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_2 \\ \vec{p}_2 / m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{21} & B_{21} \\ C_{21} & D_{21} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{p}_1 / m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{\xi}_{21} \\ \vec{\phi}_{21} \end{pmatrix}$$

…et pour les largeurs:

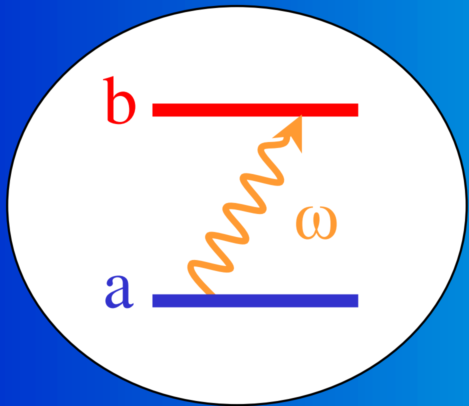
$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{21} & B_{21} \\ C_{21} & D_{21} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}$$

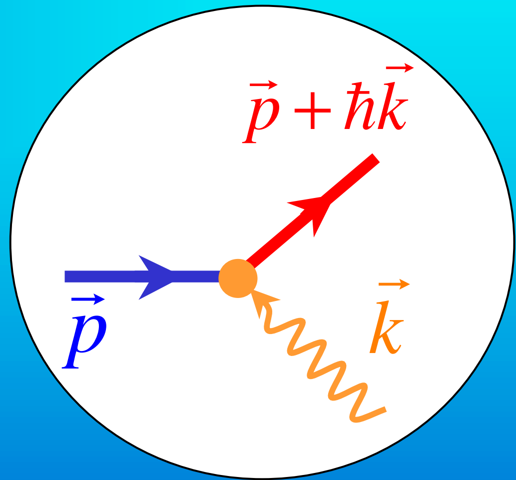
Plan

1. Introduction
2. Formalisme ABCD
3. **Séparatrices laser**
4. Calcul du déphasage
5. Application
6. Conclusion & perspectives

Deux niveaux effectifs… *(1)*

Atome à 2 niveaux
soumis à une onde laser quasi-résonnante



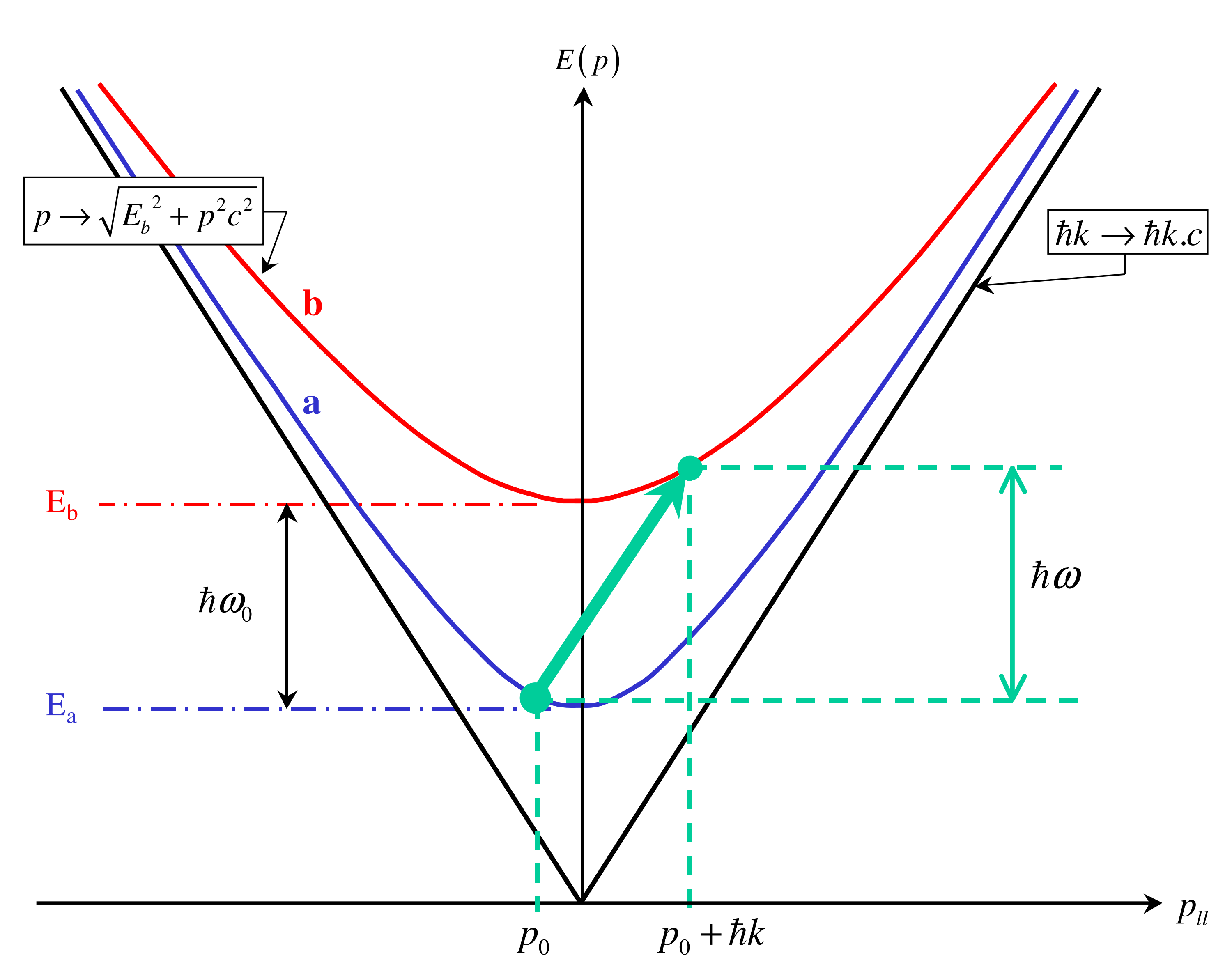


changement d'énergie

changement d'impulsion

$\Longrightarrow$ diagramme d'énergie-impulsion

Deux niveaux effectifs… *(2)*



Deux niveaux effectifs… *(3)*

Condition de résonance (cas libre):

$$\boxed{\underbrace{\omega-\omega_0}_{\text{désaccord}}\Big(\underbrace{\sqrt{1-v^2/c^2}}_{\text{Doppler 2ème}}\Big)-\vec{k}.\left(\underbrace{\frac{\vec{p}}{m}}_{\text{Doppler 1er}}+\underbrace{\frac{\hbar\vec{k}}{2m}}_{\text{énergie de recul}}\right)=0}$$

Position du problème

+ cadre usuel:

- approximation dipolaire (sans spin)
- processus de relaxation négligés
- approximation des ondes tournantes

$$\Rightarrow \quad i\hbar\partial_t \left|\psi(t)\right\rangle = \left(H_0 + H_{ext}\left(\vec{r}_{op}, \vec{p}_{op}, t\right) + V_{em}\left(\vec{r}_{op}, t\right)\right)\left|\psi(t)\right\rangle$$

champs inertiels et gravitationnels

$$\cancel{\left|\psi(t)\right\rangle = e^{\frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} H\left(\vec{r}_{op}, \vec{p}_{op}, t'\right)dt'} \left|\psi(t_0)\right\rangle}$$

Pb: double raison de non-commutation:

$$\left[H\left(\vec{r}_{op}, \vec{p}_{op}, t\right), H\left(\vec{r}_{op}, \vec{p}_{op}, t'\right)\right] \neq 0$$

Changement de référentiel

transfo. unitaires:

$$|\psi\rangle = U|\varphi\rangle$$

$\Longrightarrow$ **référentiel de moindre mouvement:**

$$\boxed{\partial_t |\varphi(t)\rangle = iM_{op}(t)|\varphi(t)\rangle}$$

$$M_{op}(t) = \begin{pmatrix} \Delta_{op}(t) & \Omega_0 F_{op}(t) \\ \Omega_0 F_{op}(t) & 0 \end{pmatrix}$$

opérateur désaccord généralisé:

$$\Delta_{op}(t) = \omega - \omega_0 - \vec{k}.\frac{d}{dt}\left(A(t).\vec{r}_{op} + B(t).\frac{\vec{p}_{op}}{m} + \vec{\xi}(t) \right) - \frac{\hbar k^2}{2m}$$

$$= \omega - \omega_0 - \vec{k}.\frac{\vec{p}_{op}}{m} - \frac{\hbar k^2}{2m} \quad - \vec{k}.\vec{g}t - \vec{k}.\left(\vec{\Omega} \times \left[\vec{r}_{op} + 2\frac{\vec{p}_{op}}{m}t \right] \right) - \vec{k}.\overset{\Rightarrow}{\gamma}.\vec{r}_{op}t - \ldots$$

Méthodes de résolution

$$\partial_t \left|\varphi(t)\right\rangle = iM_{op}(t)\left|\varphi(t)\right\rangle$$

$$\boxed{\left[M_{op}(t), M_{op}(t')\right] \neq 0}$$

Comment résoudre le problème de double non-commutation:

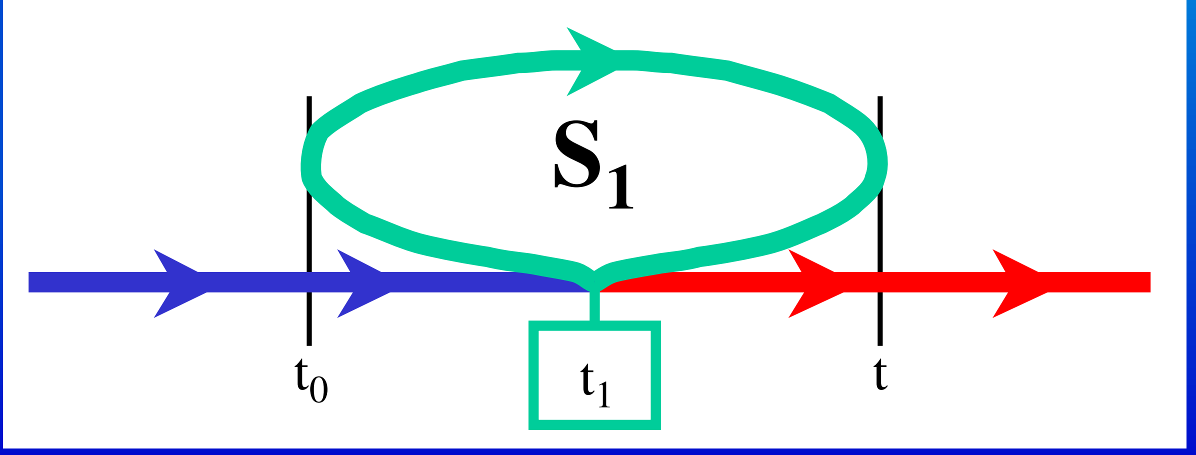
- **cas particuliers** exactement résolubles
- **développements**:
  - linéaire (Dyson)
  - non-linéaire (Magnus…)
  - **élimination opératorielle**
  - **états adiabatiques successifs**
- **approximations**:
  - rotations et gradients négligés
  - gravité compensée

Schéma ttt généralisé

$\Longrightarrow$ **Retour dans le référentiel d'origine**

$$\underbrace{|\psi(t)\rangle = U_{ext}(t,t_1)}_{\text{évolution de } t_1 \text{ à } t}\ \underbrace{S_1(t,t_0)}_{\text{interaction instantanée effective}}\ \underbrace{U_{ext}(t_1,t_0)|\psi(t_0)\rangle}_{\text{évolution de } t_0 \text{ à } t_1}$$

interaction instantanée effective

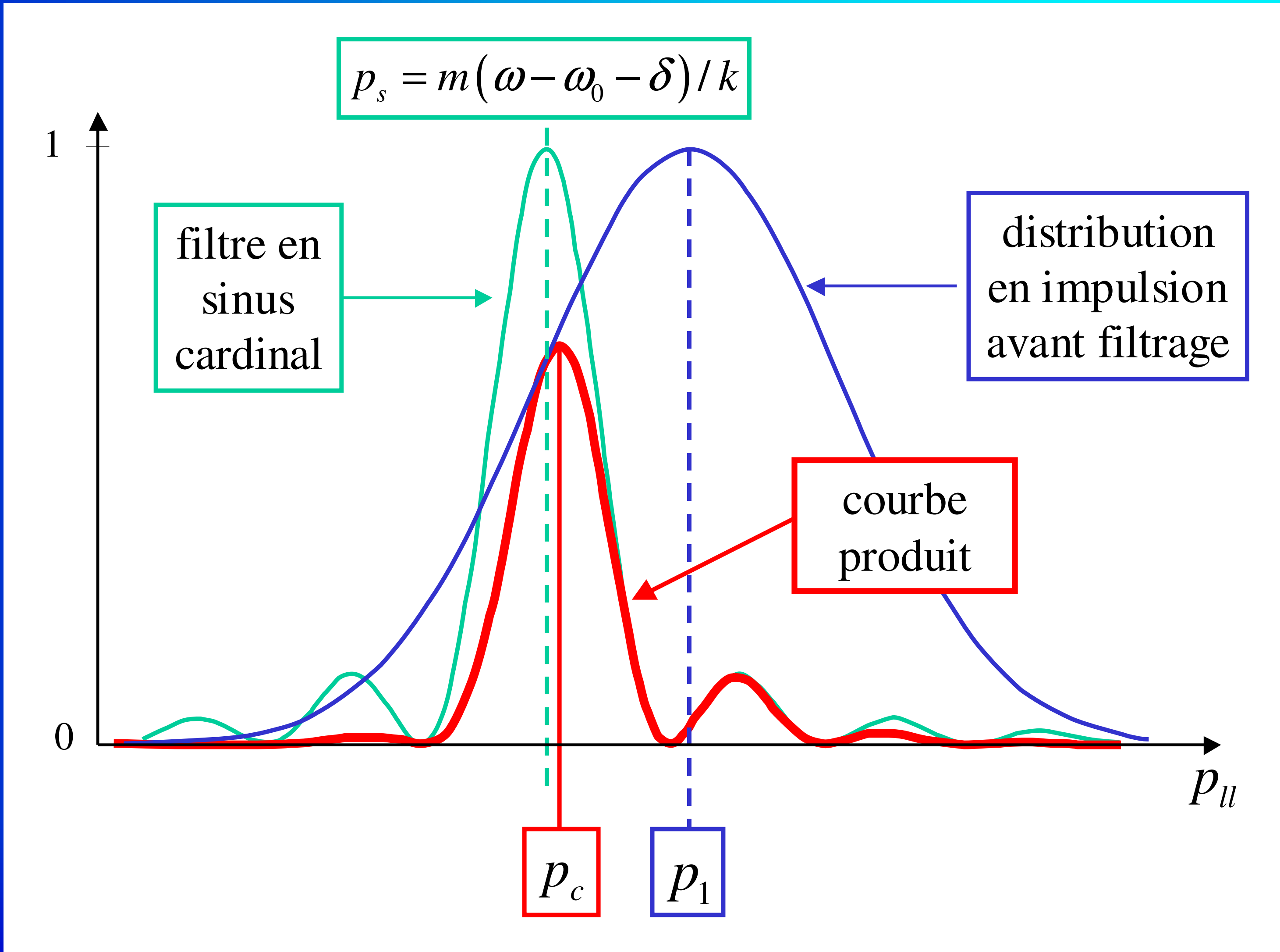


Action du filtre S_1 sur $\psi(t_1)$

Structuration du paquet d'ondes initial:

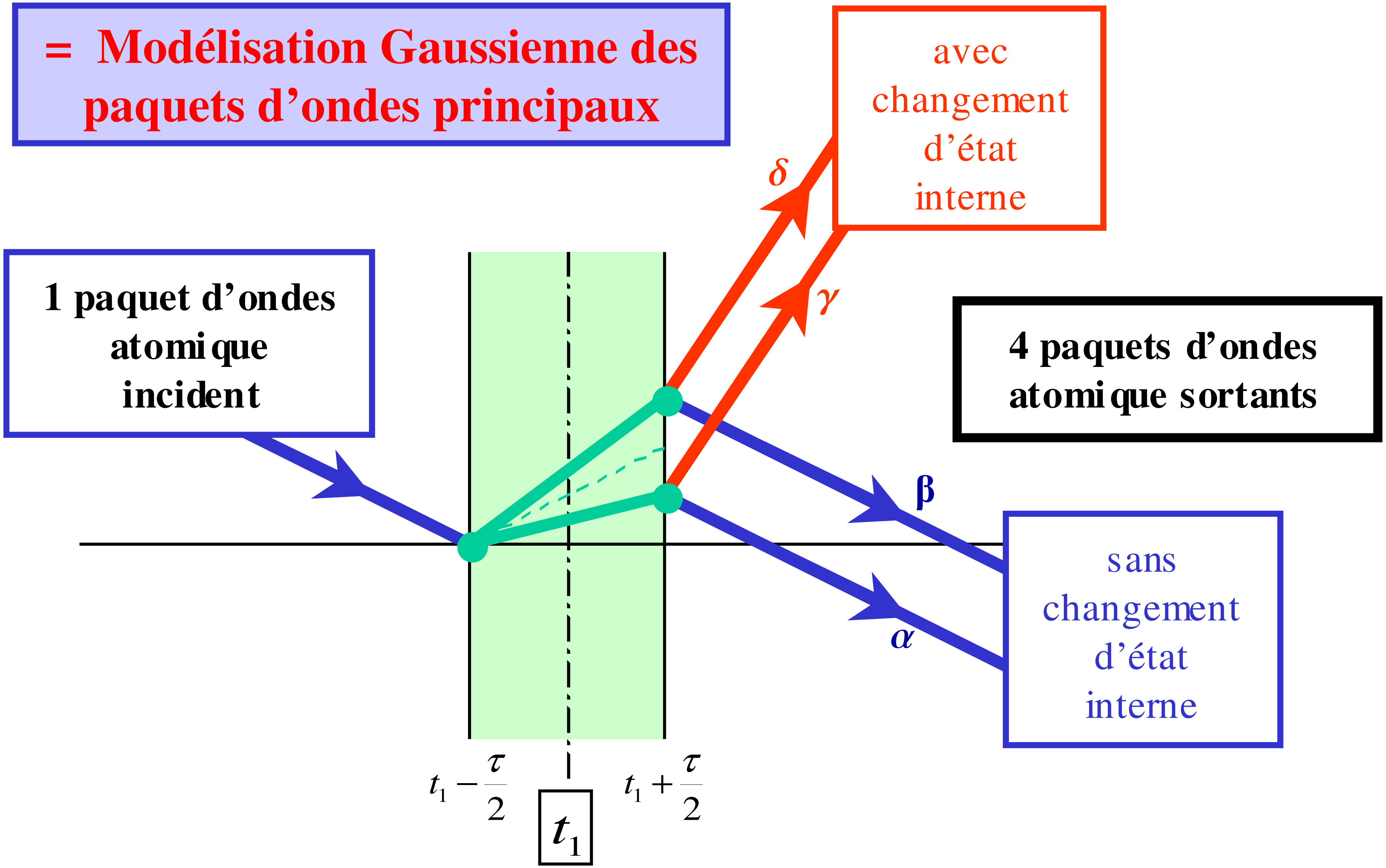
- en **plusieurs paquets d'ondes**
- de formes différentes:
  - changement d'**amplitude**
  - **sélectivité** en vitesse transverse
  - **dispersion anormale**
- avec une modification de **position et d'impulsion centrales** pour **tous** les paquets d'ondes
- avec ajout d'une **phase laser effective**

Structuration de la distribution en impulsion : lame π



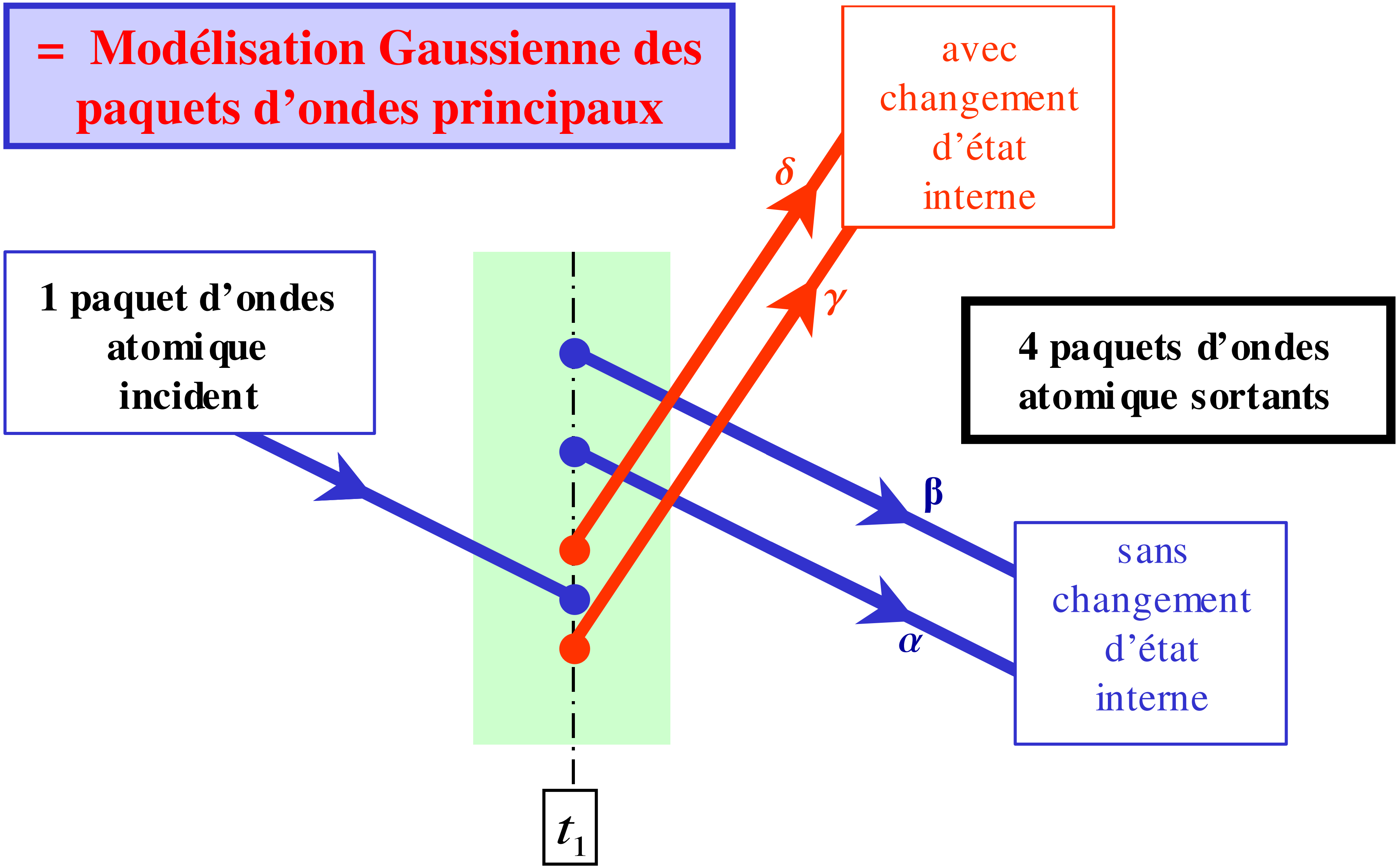
Modélisation *ttt* champ fort généralisée *(1)*

= Modélisation Gaussienne des paquets d'ondes principaux



Modélisation *ttt* champ fort généralisée *(2)*

= Modélisation Gaussienne des paquets d'ondes principaux



Modélisation *ttt* champ fort généralisée *(3)*

= Modélisation Gaussienne des paquets d'ondes principaux

avec changement d'état

δ

1 paqu
at
ir

résonance parfaite pour la porteuse atomique

+ faible dispersion initiale en impulsion

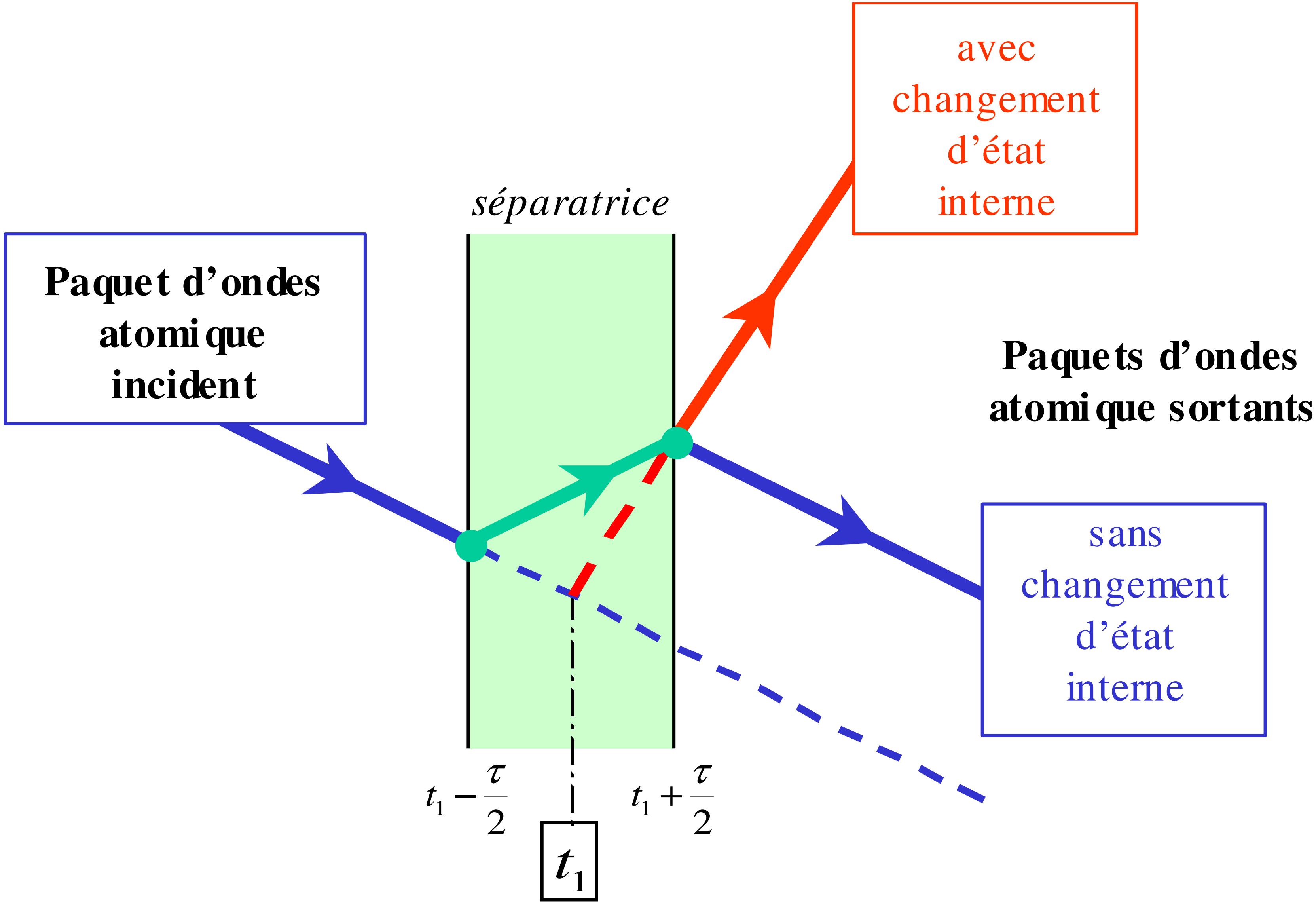
$\Longrightarrow$ Effet Borrmann généralisé

ndes
ants

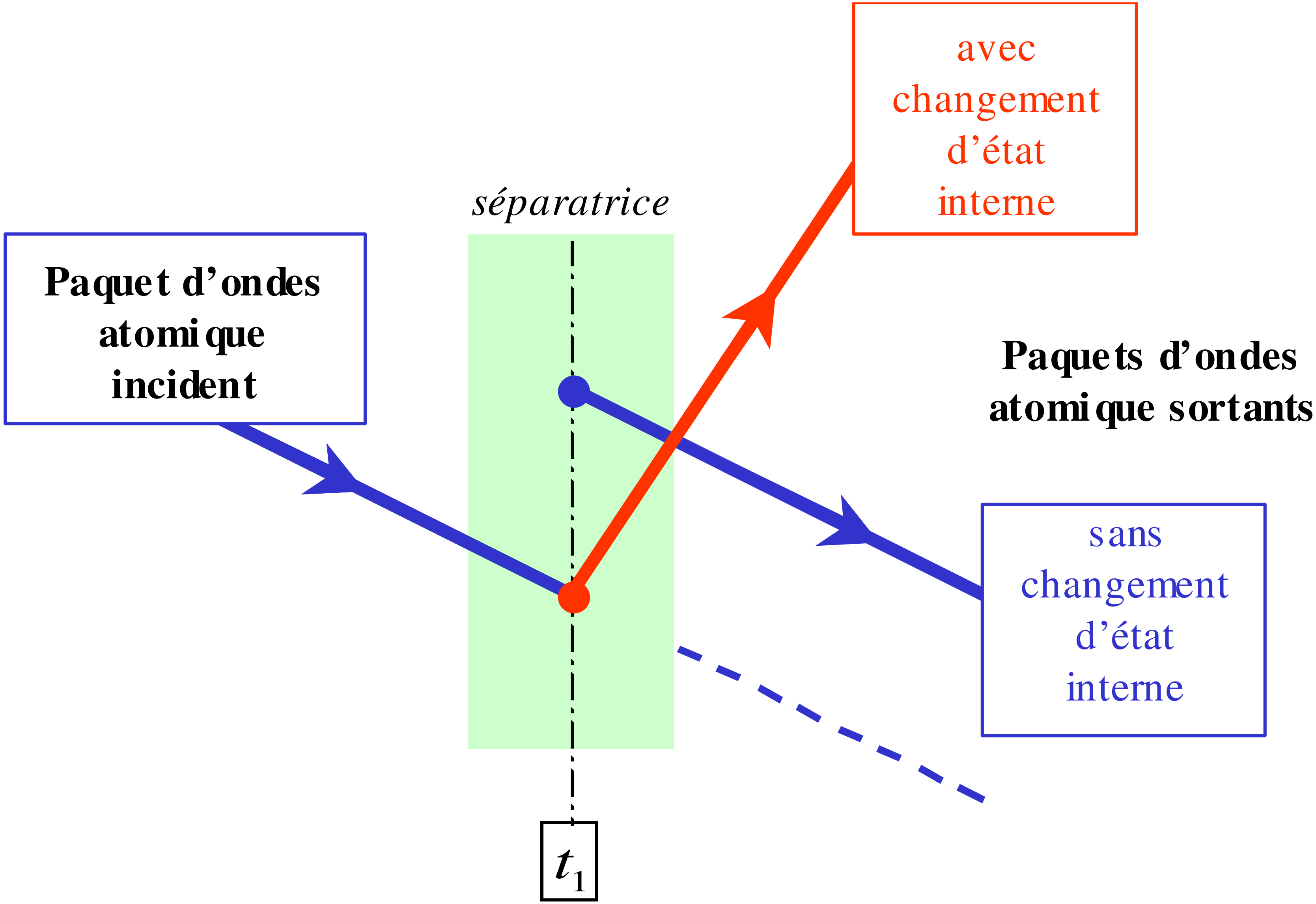
interne

t_1

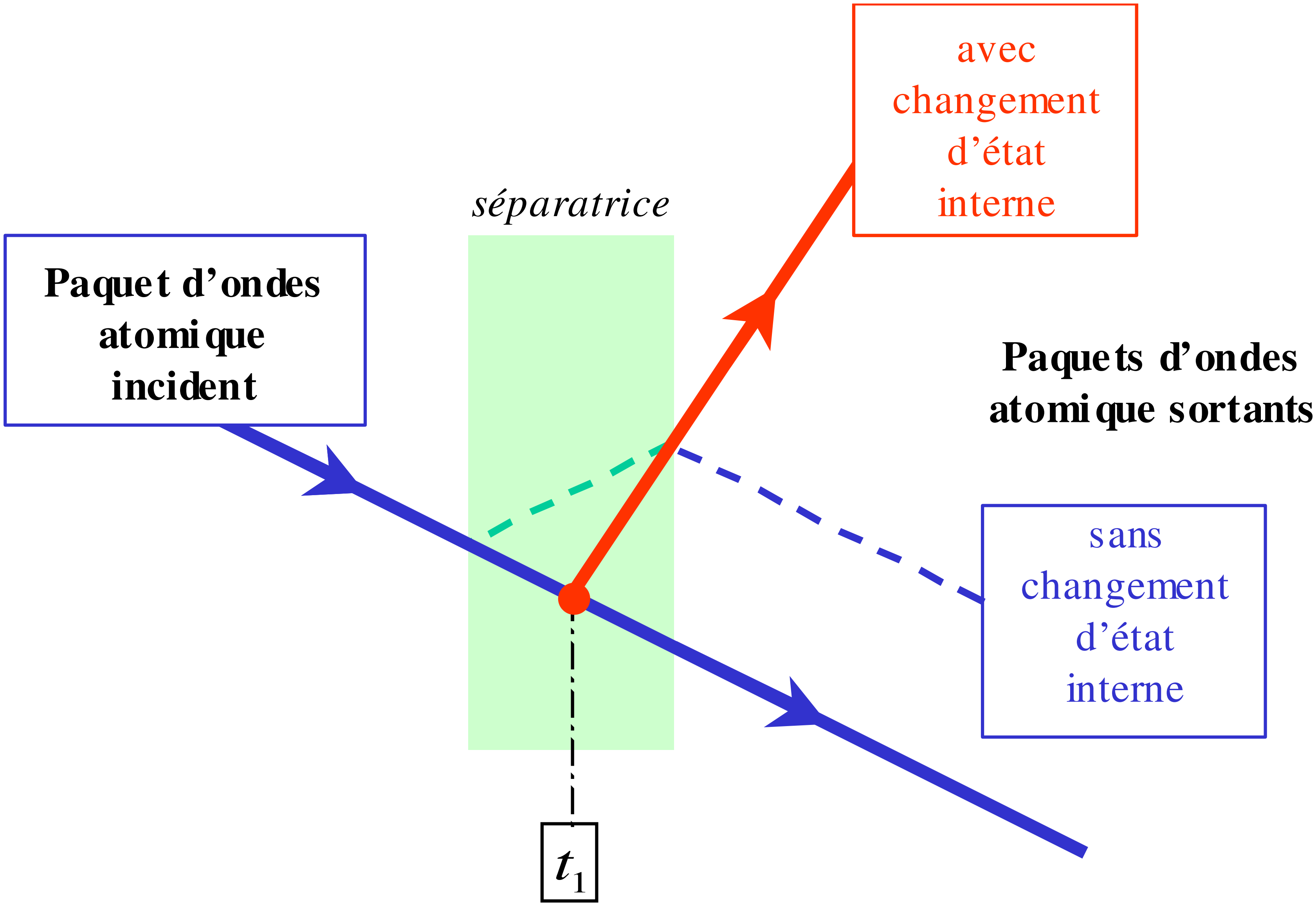
Effet Borrmann généralisé *(1)*



Effet Borrmann généralisé *(2)*



Modélisations simplifiées antérieures



Plan

1. Introduction
2. Formalisme ABCD
3. Séparatrices laser
4. **Calcul du déphasage**
5. Application
6. Conclusion & perspectives

Méthode antérieure de calcul du déphasage

En 3 étapes:

1) identifier les bras
2) calculer la phase accumulée par chacun des bras
3) en prendre la différence: $\Delta\phi = \Delta\phi_{action} + \Delta\phi_{laser} + \Delta\phi_{sep}$

Origine véritable du déphasage ?

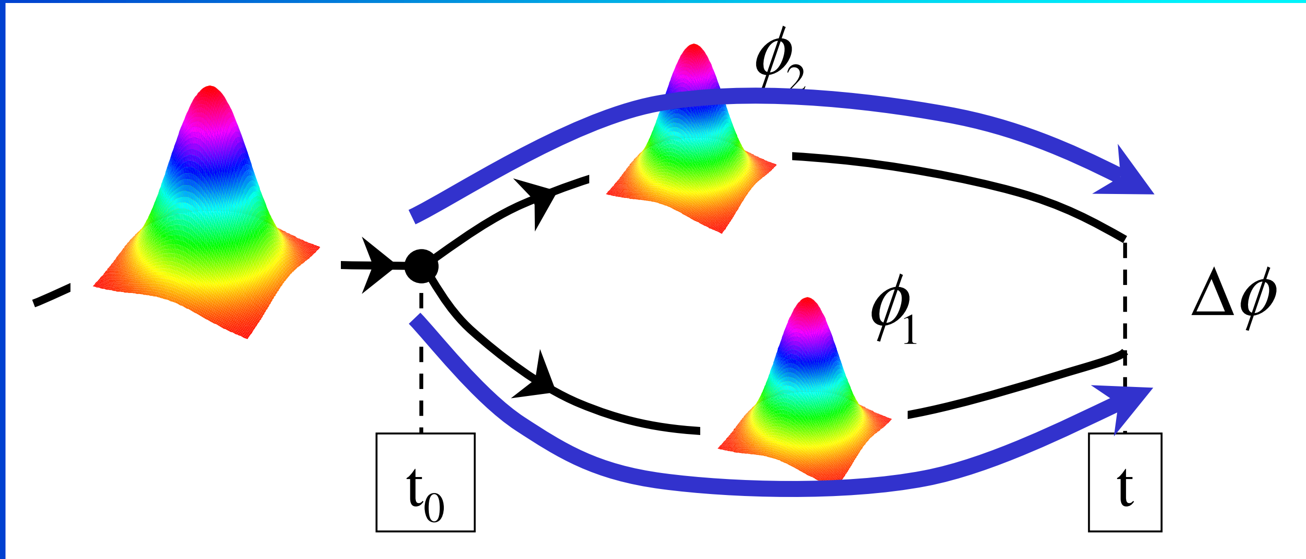
Origine des compensations observées ?

$\Delta\phi_{action} + \Delta\phi_{sep} \approx 0$

Méthode de calcul plus pertinente ?

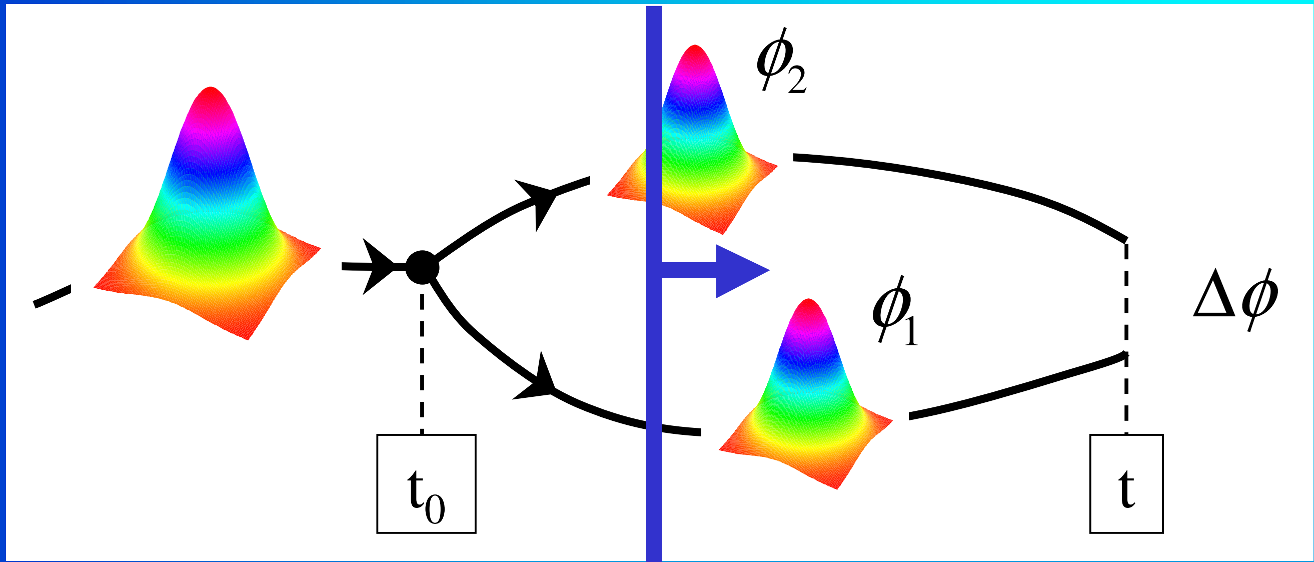
OUI

Vision statique antérieure



Vision **statique** de deux **bras indépendants**

Vision dynamique

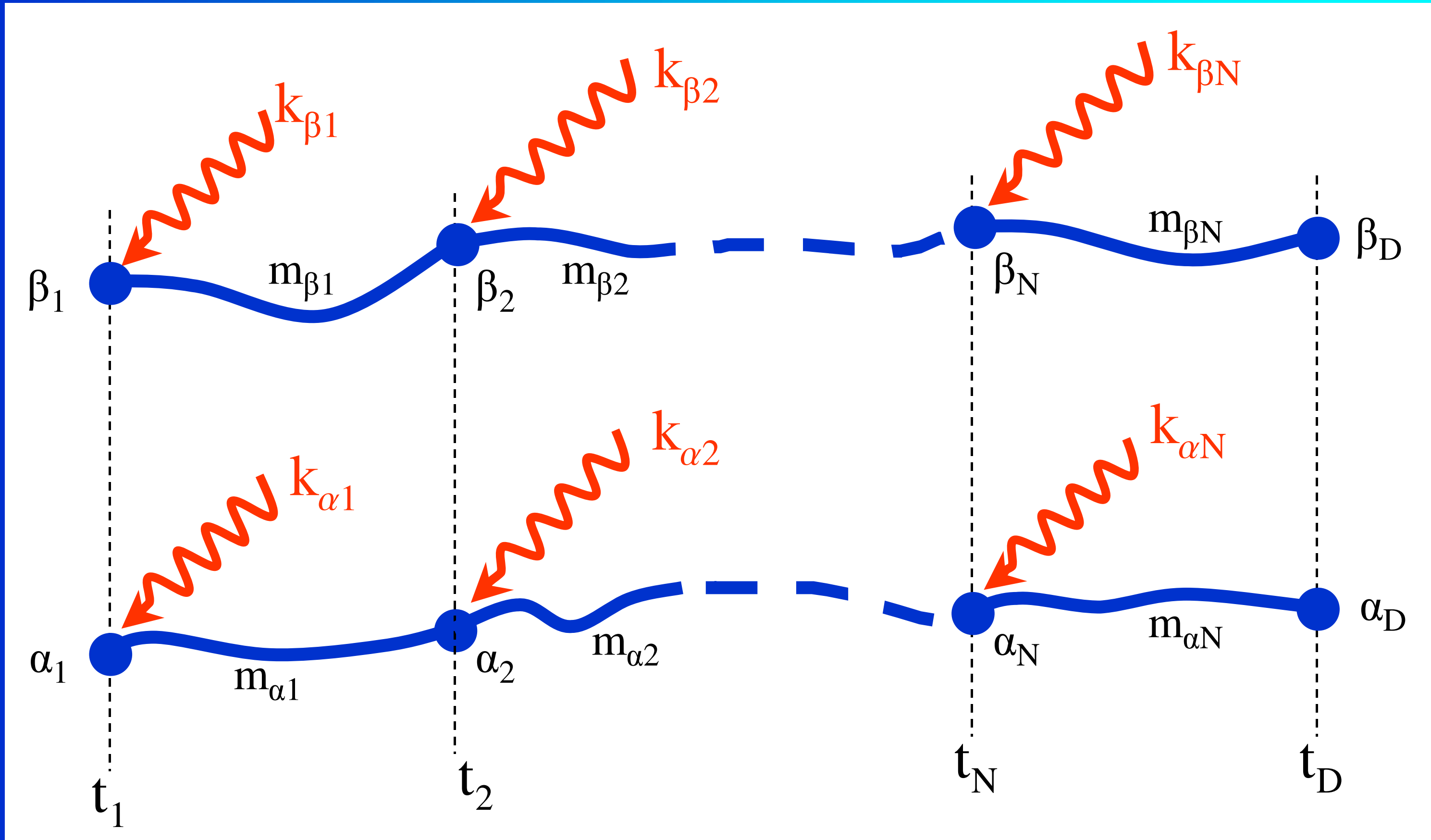


~~Vision **statique** de deux **bras indépendants**~~

Vision dynamique d'une seule entité à plusieurs bras

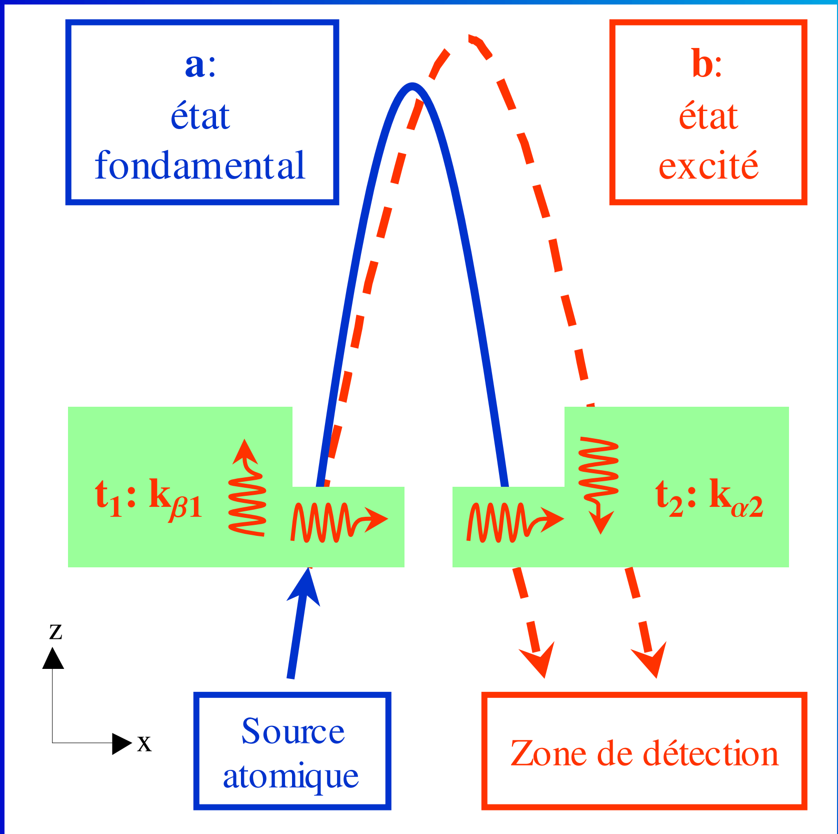
schéma ttt $\Longrightarrow$ interf. ato. **= succession de tranches temporelles**

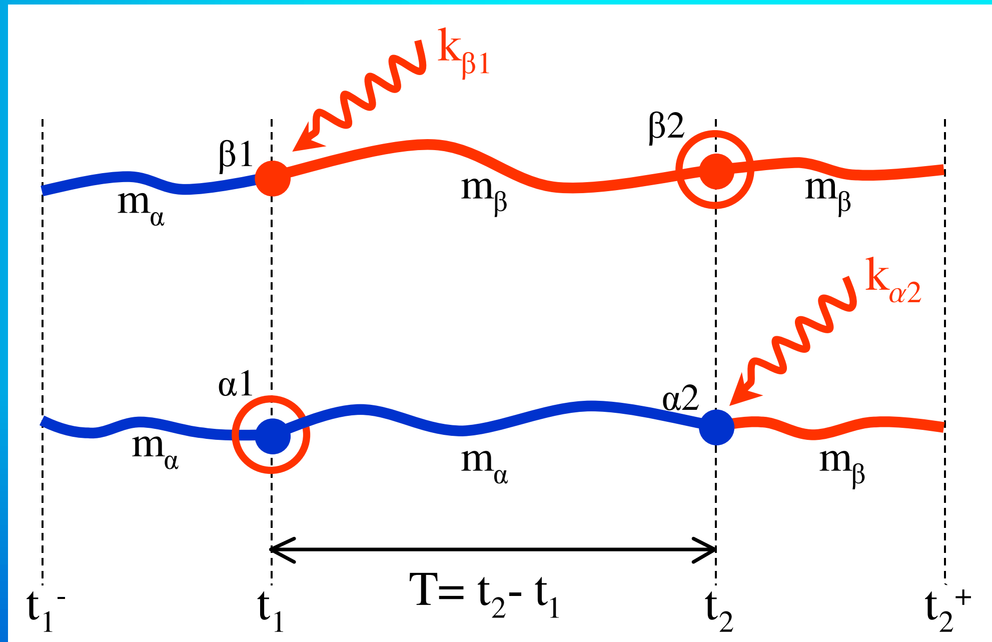
Tranches temporelles



- **valable pour toute géométrie d'interféromètre**
- lorsqu'une interaction agit sur un seul bras,
  le **k** correspondant à l'autre bras est pris nul

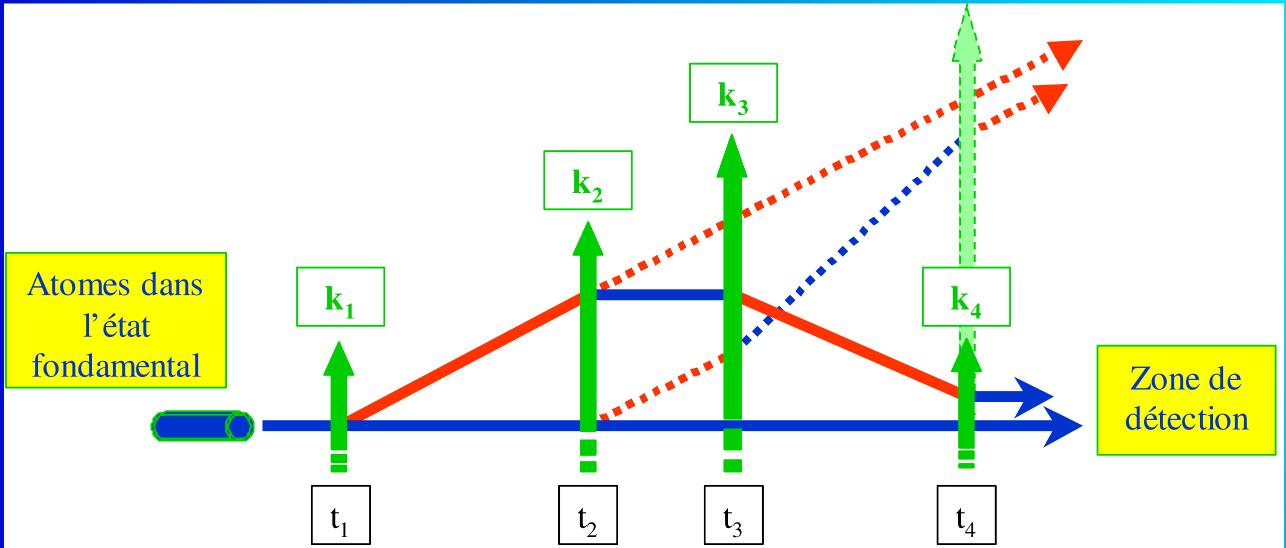
Exemple 1: fontaine atomique



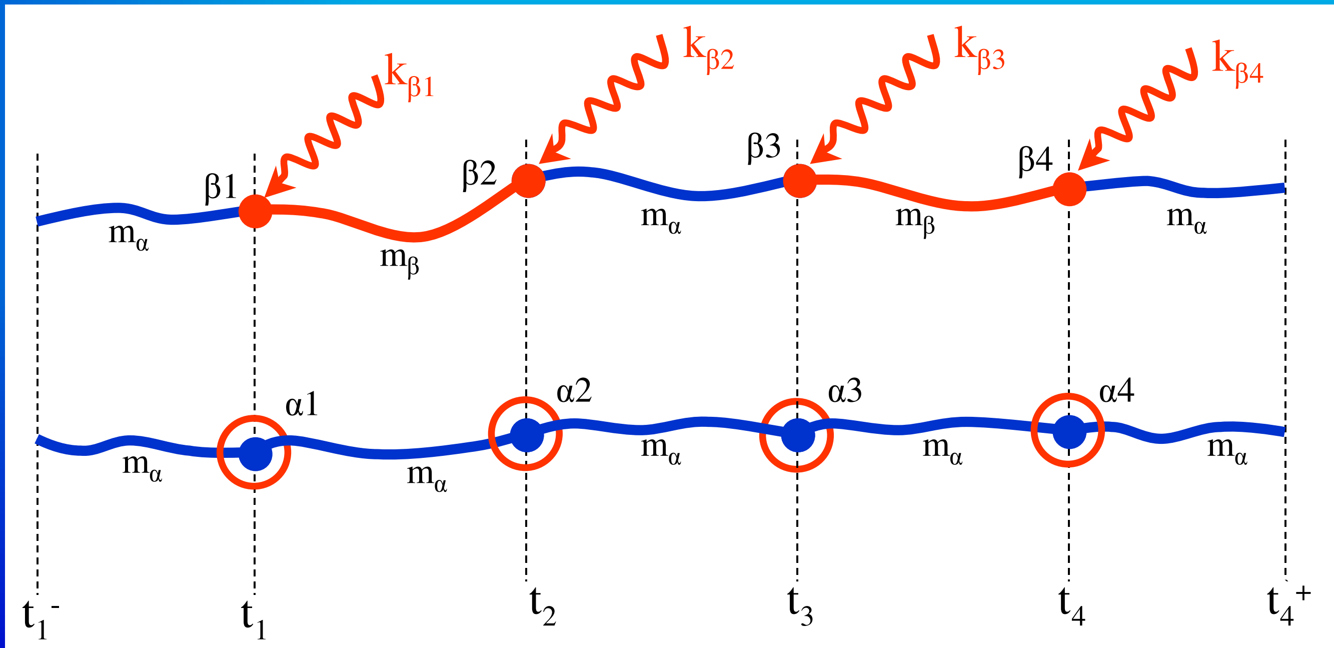


- 1 seule tranche temporelle
- 2 interactions instantanées équivalentes

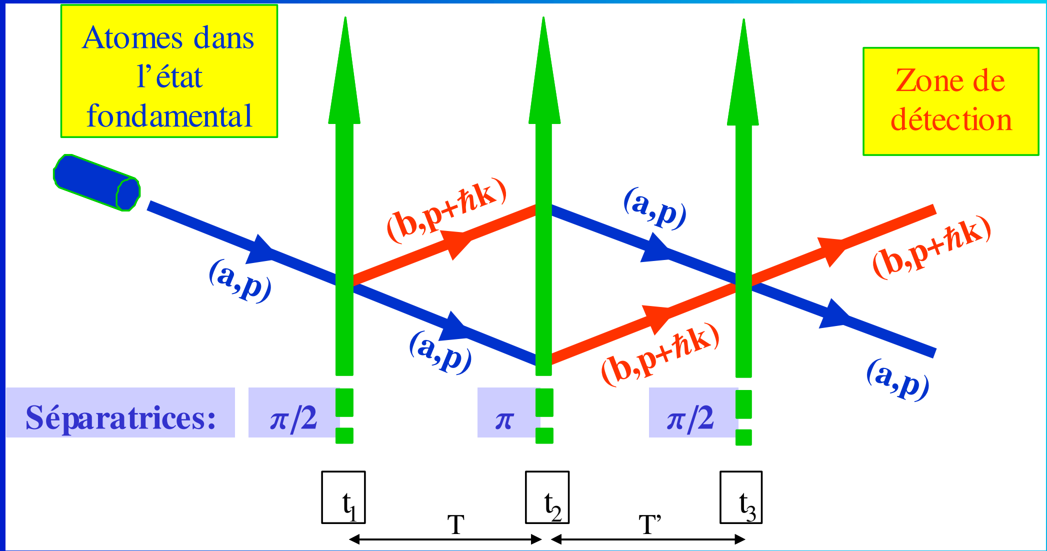
Ex. 2: Ramsey-Bordé asymétrique



Horloges optiques, mesure de α…

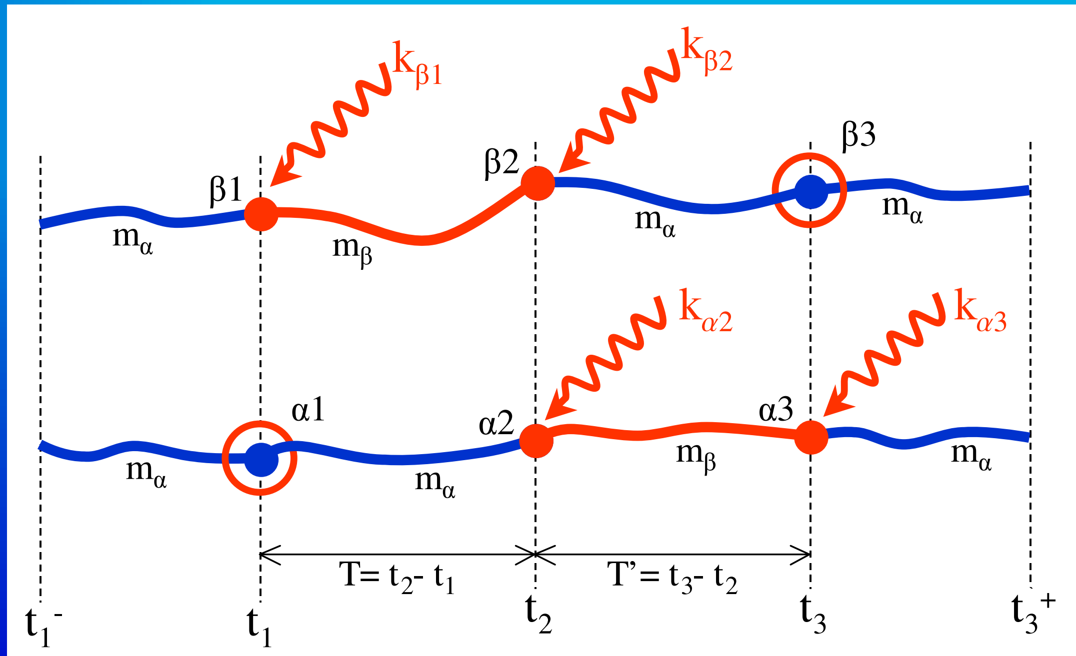


Ex. 3: Ramsey-Bordé symétrique



Géométrie Mach-Zehnder

- 2 tranches temporelles
- 3 interactions instantanées équivalentes



Chemins homologues

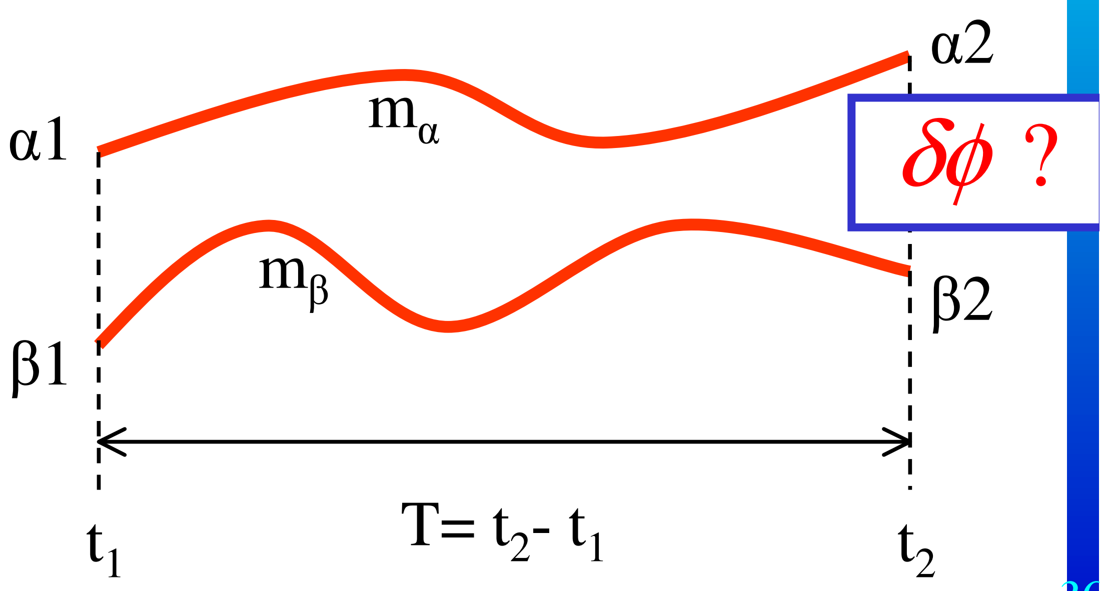
<u>Signal de franges:</u>

somme des signaux de sortie correspondant à chaque paire de bras

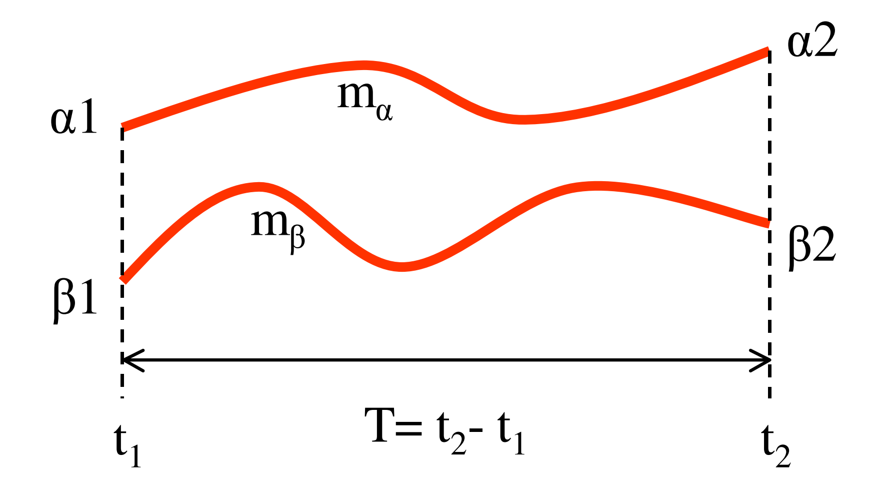
1) **<u>Déphasage</u>**
2) Amplitude et contraste
3) Distributions statistiques décrivant la source matérielle
4) Intégration sur le volume de détection

« Brique élémentaire »:

paire de chemins homologues



Théorème des 4 points finaux



$\Longrightarrow$ **mise en évidence d'un invariant** (symplectique) **équivalent à l'étendue en optique**

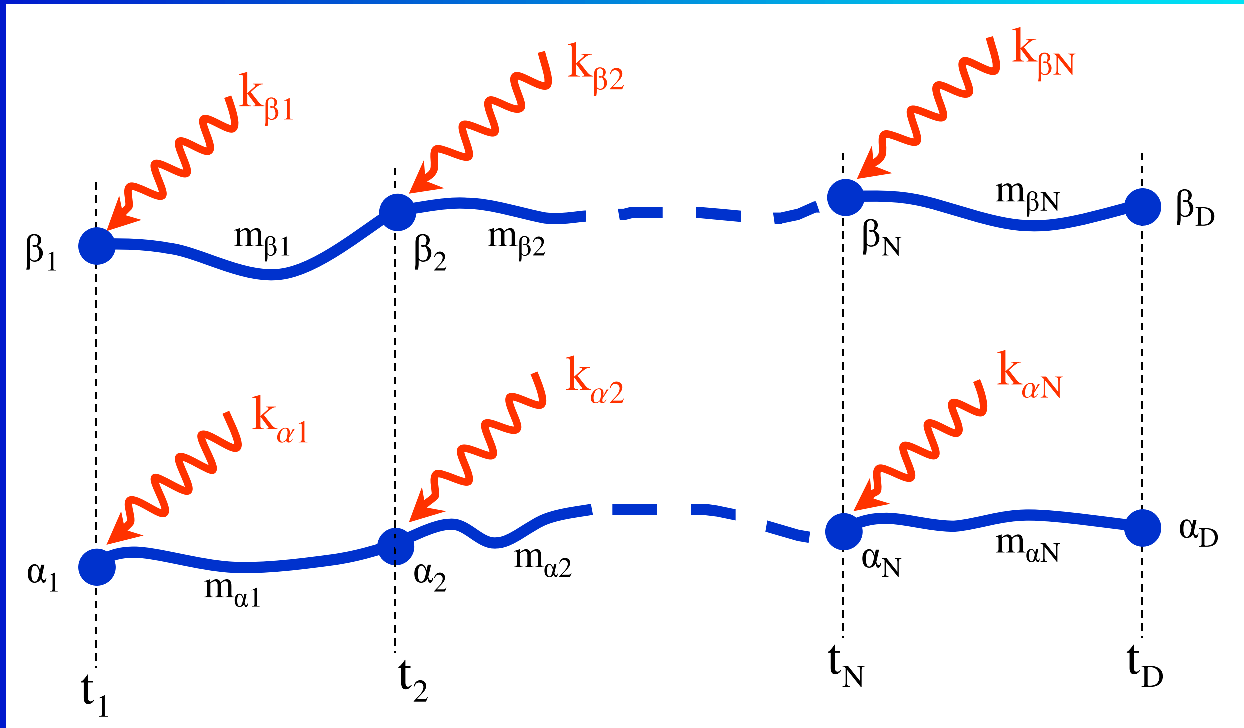
$\Longrightarrow$ **partie principale du déphasage:**

$$\hbar\,\delta\phi = \left(\vec{p}_{\alpha 2} - \vec{p}_{\beta 2}\right).\vec{Q}_2 - \left(\vec{p}_{\alpha 1} - \vec{p}_{\beta 1}\right).\vec{Q}_1 - \left(m_\beta - m_\alpha\right)c^2\tau$$

points milieux:

$$\vec{Q}_i = \frac{\vec{r}_{\alpha i} + \vec{r}_{\beta i}}{2}$$

Déphasage global



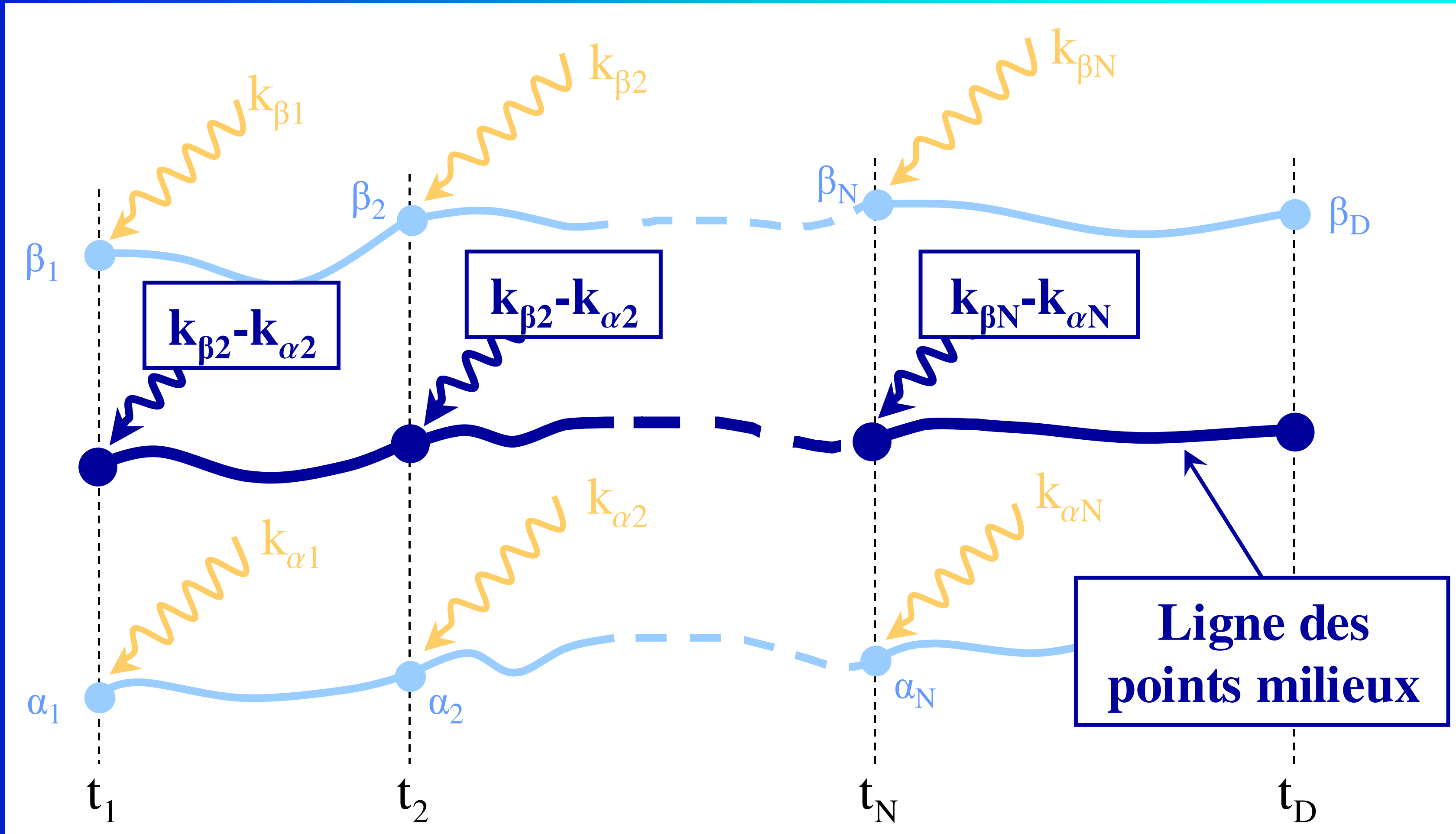
Simplification si:

point milieu de fin de tranche = point milieu de début de tranche suivante

$$\boxed{\Delta\phi_{\beta\alpha} =} \; \boxed{\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{k}_{\beta i}-\vec{k}_{\alpha i}\right).\vec{Q}_i} \; -\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\varphi_{\beta i}-\varphi_{\alpha i}\right)+\left(\omega_{\beta i}-\omega_{\alpha i}\right)t_i+\left(m_{\beta i}-m_{\alpha i}\right)c^2\tau_i\right]$$

<u>interprétation:</u> **ligne de points milieux avec interactions effectives**

Ligne de points milieux équivalente



⟹ méthode efficace d'obtention du déphasage

Compensation essentielle

<u>observation:</u> $\Delta\phi_{action} + \Delta\phi_{sep} \approx 0$

Origine ? invariant symplectique précédent

Validité ? Si **géométrie symétrique** et **masses identiques:**

$$\Delta\phi_{action} + \Delta\phi_{sep} = 0 - \frac{\vec{k}_{\alpha\, final} + \vec{k}_{\beta\, final}}{2} . \left(\underline{\vec{r}_{\beta\, final} - \vec{r}_{\alpha\, final}} \right)$$

non-fermeture de l'interféromètre
(due aux termes quadratiques de $H_{ext} \Longrightarrow$ rotations, gradients…)

Formule exacte du signal de franges

valable pour:

- **H_{ext} au plus quadratique** (dépendant du temps et 3D)

  $\Longrightarrow$ Accélération + gradient + rotations : exact

  $\Longrightarrow$ Gradient de gradient : perturbatif

- Toute **géométrie** d'interféromètre
- Deux types de modélisations des **séparatrices**:

  $\Longrightarrow$ simplifiées **(temporelles et spatiales)**

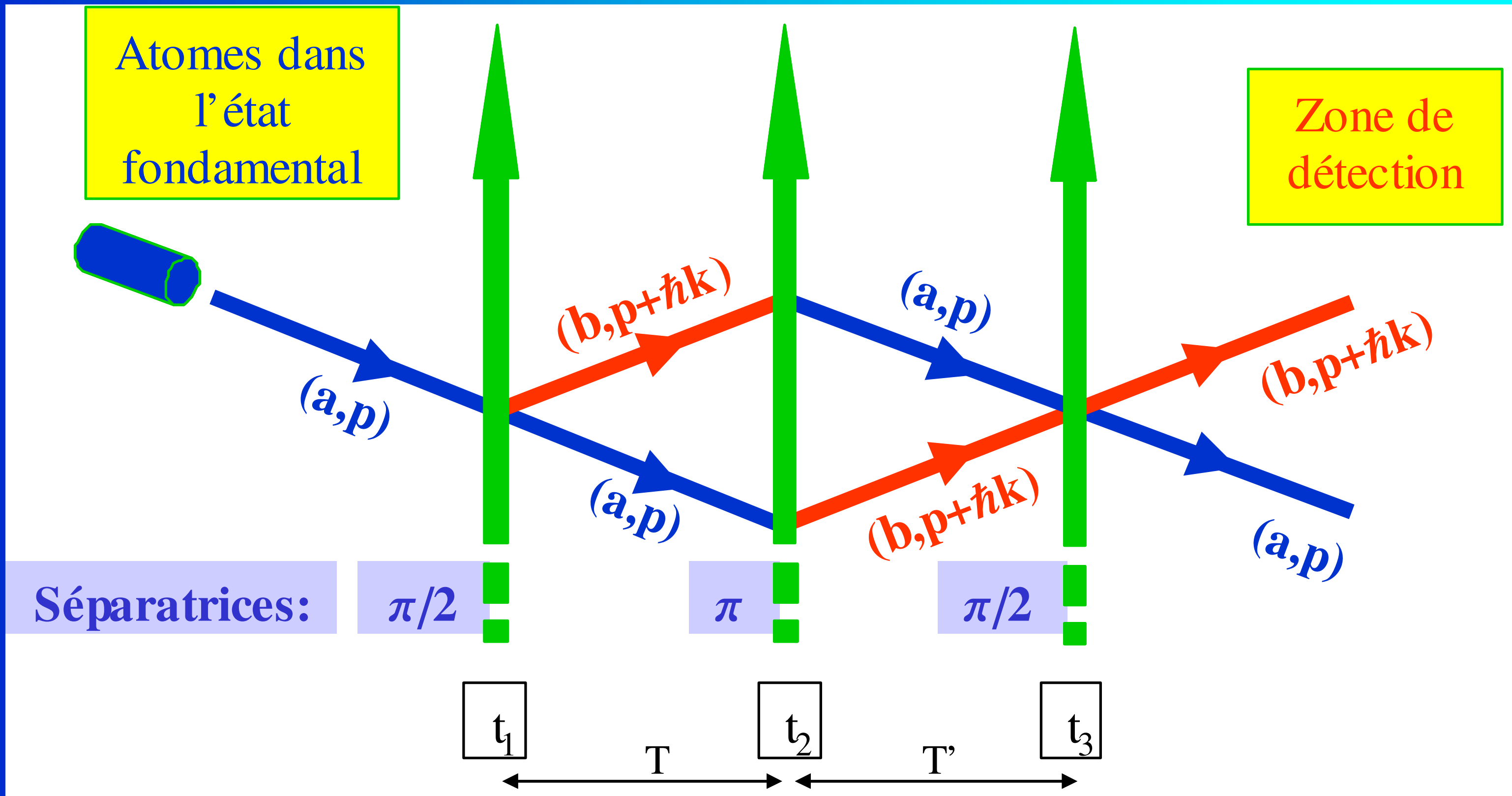
  $\Longrightarrow$ **ttt champ fort généralisée** (temporelle)

- Tous types de **sources** matérielles
- Tous types de processus de **détection**

Plan

1. Introduction
2. Formalisme ABCD
3. Séparatrices laser
4. Calcul du déphasage
5. **Application**
6. Conclusion & perspectives

Interféromètres de Ramsey-Bordé symétriques



- gyromètres
- gravimètres et accéléromètres
- gradiomètres…

$\Longrightarrow$ Stanford, Yale, Hanovre, Paris, Florence, projet spatial européen HYPER…

Déphasage global avec modélisations simplifiées des séparatrices laser

$$\Delta\phi = \vec{k}.\left[1 + A(T+T') - 2A(T)\right].\vec{r}_1$$
$$+ \vec{k}.\left[B(T+T') - 2B(T)\right].\left(\frac{\vec{p}_1}{m} + \frac{\hbar\vec{k}}{2m}\right)$$
$$+ \vec{k}.\left[\vec{\xi}(T+T') - 2\vec{\xi}(T)\right] \quad -(\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3)$$

$\Longrightarrow$ **Généralisation des formules antérieures:**
gyrométrie et gravimétrie pures (Bordé 2001 & 2002)

On retrouve bien sûr les **résultats perturbatifs usuels:**

déphasage Sagnac:

$$\Delta\phi = \frac{2m}{\hbar}\Omega * Aire$$

et formule de Wolf-Tourrenc (1999)

Des termes correctifs non-négligeables

$A, B, \vec{\xi}$?

- **expression analytique** (pour H_{ext} indép. du temps)
- **développements de Taylor** en ΩT et γT^2 …
  …**à l'ordre voulu !**

$\Longrightarrow$ mise en évidence de termes directs (**g**, **Ω** et **γ**) et croisés pour toute orientation et toute géométrie

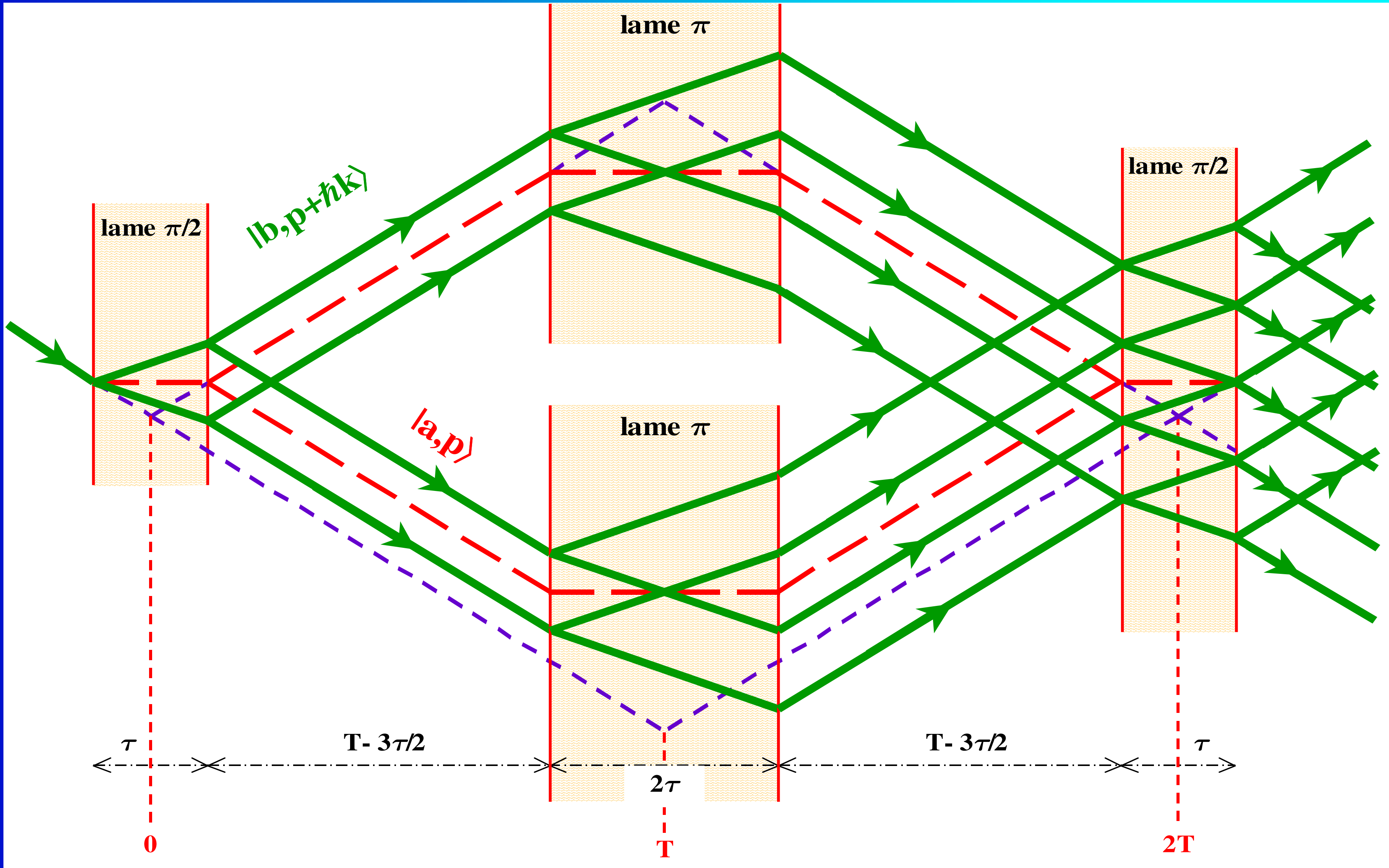
$\Longrightarrow$ Gyro – gradio - gravimètres

Exemple de terme correctif pour gyromètres:

$$\frac{7}{3} k_x T^2 \Omega_z v_y \quad \gamma_y T^2$$

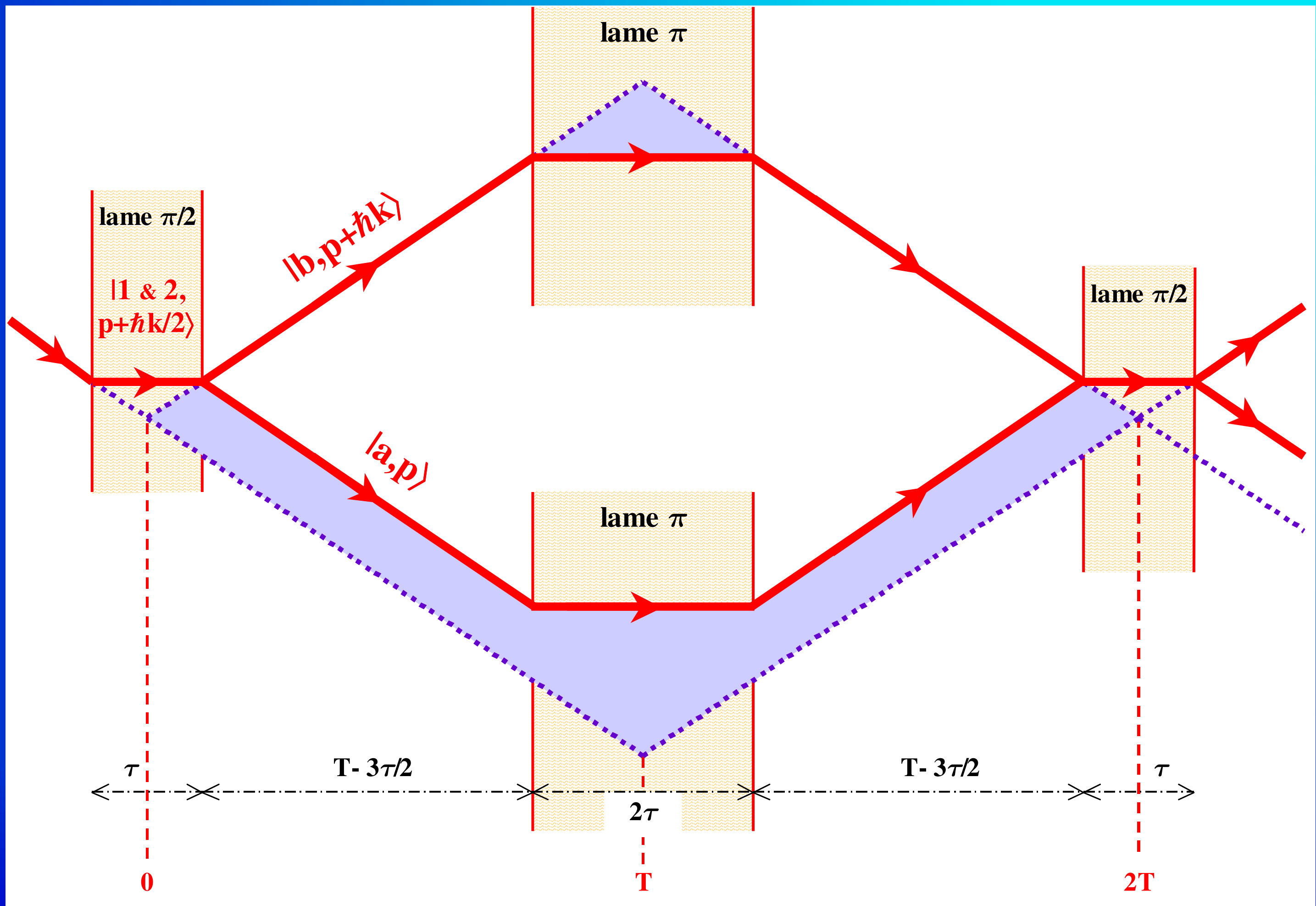
État du nuage	T	Valeur relative
Thermique (Yale)	0,003 s	$\mathbf{1.10^{-11}}$
Froid (Paris)	0,03 s	$\mathbf{1.10^{-9}}$
Ultra-froid (HYPER)	3 s	$\mathbf{9.10^{-6}}$

Avec modélisation ttt champ fort généralisée



Cas particulier: effet Borrmann généralisé

- **résonance** parfaite pour toutes les séparatrices et **faible dispersion** en vitesse du nuage atomique initial



Effet Borrmann généralisé: corrections au déphasage

$\Longrightarrow$ **calcul exact du déphasage** et développements de Taylor en ΩT et γT^2

➢ mise en évidence de **corrections en puissance de $\boldsymbol{\tau/T}$** quelque soit la géométrie et l'orientation de l'interféromètre

modification de l'aire:

$$\boxed{1-\tau/T-\frac{3}{4}(\tau/T)^2}$$

correction à l'angle initial de Bragg:

$$\boxed{\text{"}\left(3\Omega^2+\gamma\right)\tau/T\text{"}}$$

Conclusions

- **étude et modélisation des séparatrices laser** temporelles
  $\Longrightarrow$ structuration dispersive en présence de H_{ext}

- **nouvelle méthode de calcul du déphasage**
  $\Longrightarrow$ simplifications essentielles (invariants symplectiques)

- **expression analytique très générale du signal de franges pour une large variété d'interféromètres atomiques**

- **développement d'outils plus théoriques:**

  $\Longrightarrow$ méthode de l'élimination opératorielle

  $\Longrightarrow$ méthode des états adiabatiques successifs

  $\Longrightarrow$ autre approche du formalisme ABCD basée sur l'utilisation des opérateurs intégrales premières

Perspectives

⟹ **tester la validité des corrections mises en évidence**

⟹ **estimer numériquement les erreurs dues aux différentes approximations** (processus de relaxation, multiples ordres de diffraction…)

⟹ **étudier et modéliser la structuration dispersive des séparatrices** dans le cas **spatial**

⟹ **appliquer la modélisation à d'autres géométries d'interféromètres** (interféromètres multi-dim.)

⟹ **généraliser le formalisme ABCD:**

- à tout Hamiltonien ⟹ opérateurs intégrales premières
- à 4D ⟹ temps propre comme var. conj. de la masse

Merci

antoinec@ccr.jussieu.fr