



HAL
open science

Le Champ Magnétique Terrestre : Structures Spatiales et Variations Temporelles vues par les Ondelettes

Aude Chambodut

► **To cite this version:**

Aude Chambodut. Le Champ Magnétique Terrestre : Structures Spatiales et Variations Temporelles vues par les Ondelettes. Géophysique [physics.geo-ph]. Institut de physique du globe de paris - IPGP, 2004. Français. NNT : . tel-00008021

HAL Id: tel-00008021

<https://theses.hal.science/tel-00008021>

Submitted on 12 Jan 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée

À L'INSTITUT DE PHYSIQUE DU GLOBE DE PARIS

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'INSTITUT DE PHYSIQUE DU GLOBE DE PARIS

spécialité : GÉOPHYSIQUE INTERNE

par

Aude Chambodut

sujet :

LE CHAMP MAGNÉTIQUE TERRESTRE :
STRUCTURES SPATIALES ET VARIATIONS TEMPORELLES
VUES PAR LES ONDELETTES

soutenue le 5 Novembre 2004 devant le jury composé de

M. J.-L. Le Mouél	Président du jury
Mme. M. Manda	Directrice de thèse
M. M. Holschneider	Co-directeur
M. R. Holme	Rapporteur
M. D. Gibert	Rapporteur

*à Martin,
à Isabelle et à mes parents.*

REMERCIEMENTS

Mes remerciements vont d'abord à Mioara Manda qui a été pour moi, au long de ces trois années de thèse, LA directrice parfaite. J'ai particulièrement apprécié son écoute, sa patience et ses encouragements, mais également sa franchise. Bien plus qu'une directrice de thèse, c'est une amie que j'ai trouvée.

Les applications sur les *frames* d'ondelettes n'auraient pas vu le jour sans Matthias Holschneider. Malgré un emploi du temps surchargé, il a su être avec moi d'une infinie patience et d'une grande gentillesse. J'ai énormément appris à ses côtés.

Je souhaite également remercier : Monsieur Jean-Louis Le Mouël pour m'avoir accueillie au sein de son laboratoire et m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être le président de mon jury de thèse ; Messieurs Dominique Gibert et Richard Holme, pour avoir accepté d'être mes rapporteurs.

Je pense aussi à tous les chercheurs avec qui j'ai eu des discussions et des échanges personnels : Alain Bonneville, Arnaud Chulliat, Vincent Courtillot, Michel Diamant, Emmanuel Dormy, Jérôme Dymont, Armand Galdéano, Marianne Greff, Mohamed Hamoudi, Gauthier Hulot, Monika Korte, Stéphane Labrosse, Benoit Langlais, Jean-Paul Poirier, Michael Purucker.

Certains des travaux présentés dans ce mémoire n'auraient pas eu la même « saveur » sans l'émulation produite par la formation d'équipes avec mes collègues Judith Schwarte, Ingo Wardinsky, Isabelle Panet et Céline Eymin. Je joins également à ces remerciements Mihai, Damien, Olivier, Cécile, Claire, Éric, Hélène, Catherine, Vincent, Thomas, Svetlana, Lars, le gang des « *paléomagiciens*© » avec Aude (I.), Fatim, Brian, Laurent et Anne-Lise.

J'exprime mes remerciements à toutes les personnes qui m'ont entourée, aidée et encouragée dans l'accomplissement de ce travail.

Sur un plan plus personnel, le soutien de mes tribus Chambodut/Cotineau et Guingouain/Huchet m'a été d'un grand réconfort. Les divers commandos « *ExtirponsAudeDeDevantSonEcran* » par Darth Sabot et ses padawans, par les p'tits loups et par isa-greg, n'ont pas toujours été couronnés de succès ; mais leur patience, leur écoute et surtout leurs délires décalés ont été, aux bons moments, de véritables instants de fraîcheur...

Et surtout merci à toi Martin, d'être là, toujours, pour moi.



Le travail présenté dans ce mémoire a eu pour but une meilleure description et compréhension des structures spatiales et des variations temporelles du champ magnétique terrestre.

Dans une *première partie*, nous décrivons et utilisons deux méthodes de modélisation du champ magnétique terrestre.

La première méthode utilisée est le développement en harmoniques sphériques. En utilisant les mesures fournies par les observatoires magnétiques et par les récents satellites, Ørsted et CHAMP, et en leur appliquant des critères de sélection, nous avons calculé des modèles candidats aux DGRFs de 1995 et 2000.

La seconde méthode que nous avons développée est la description du champ géomagnétique à l'aide des *frames* d'ondelettes de Poisson. Les comparaisons avec les harmoniques sphériques et les représentations de fonctions scalaires sur la sphère, illustrent la flexibilité de la méthode : le développement en *frames* d'ondelettes s'adapte à la répartition des données sur la sphère. Un même modèle en *frames* d'ondelettes comporte de petites échelles spatiales dans les zones où les données sont denses et des échelles spatiales plus grandes dans les régions où elles sont plus disparates. Les champs vectoriels dérivant de potentiels harmoniques, tels le champ magnétique et le champ de pesanteur, sont développés à partir des *frames* d'ondelettes.

Dans la *seconde partie*, nous étudions la variation temporelle du champ magnétique terrestre principal, la variation séculaire. Sa caractéristique la plus énigmatique est l'occurrence, à intervalles irréguliers, de brusques changements de sa tendance : les secousses géomagnétiques. Ces événements sont détectables par l'analyse en ondelettes appliquée aux moyennes mensuelles des observatoires. Malheureusement, la distribution des observatoires est très irrégulière à la surface du Globe. Pour contourner ce problème dans l'étude des secousses géomagnétiques, une solution s'est alors imposée : l'utilisation de modèles de champ globaux et continus dans le temps, de type « *comprehensive model* ».

Nous avons ainsi étudié, par des méthodes simples, les répartitions temporelles et spatiales des secousses, vues par ces modèles, en tout point du globe sur les quatre dernières décennies. Nous nous sommes focalisé sur les secousses autour de 1971, 1980 et 1991 et avons mis en évidence des zones « *aveugles* », où aucune secousse n'a été clairement détectée. Enfin, nous présentons une possible relation entre les secousses géomagnétiques et un paramètre physique à la surface du noyau, la pression dynamique absolue.

L'utilisation des ondelettes, en tant qu'outils de modélisation et d'analyse, permet d'explorer les échelles spatiales et temporelles du champ magnétique terrestre.

ABSTRACT

The aim of this work is a better description and understanding of the spatial structures and temporal variations of the Earth's magnetic field.

In the *first part*, we described and used two methods to model the geomagnetic field.

The first used method is the spherical harmonics analysis. Using measurements provided by the magnetic observatories and the recent satellites, Ørsted and CHAMP, and applying various selection criteria to these datasets, we computed candidate models for the DGRFs 1995 and 2000.

The second developed method is the description of the geomagnetic field using the wavelet frames. The chosen wavelets are the Poisson ones which derive from the same generating function as the spherical harmonics. The comparisons between wavelet frames and spherical harmonics, as well as the representations of scalar functions on the sphere, illustrate the flexibility of the method : the development in wavelet frames really suit to the data distribution. The same model contains small spatial scales in zones covered by a dense dataset and larger spatial scales in areas with sparsed measurements. Vector fields derived from harmonic potentials, as magnetic and gravity field, are developed on wavelet frames.

In the *second part*, we study the temporal variation of the main geomagnetic field, known as secular variation. Its more enigmatic characteristic is the occurrence, at irregular intervals, of abrupt changes of its tendency : the geomagnetic jerks. These events are detectable by wavelet analysis in observatory monthly mean series. Unfortunately, the observatory distribution is uneven at the Earth's surface. To circumvent this problem and to find a solution for geomagnetic jerks study all over the Globe, the use of continuous field models, like *comprehensive model*, is suitable.

We studied, by simple methods, the temporal and spatial distributions of jerks detected in these models, at any point of the sphere over the four last decades. We focused on jerks around 1971, 1980 and 1991 and highlighted "*blind*" zones, where no jerk is clearly detected. In the last chapter, we present a possible relation between the geomagnetic jerks and a physical parameter at the surface of the core, the absolute dynamic pressure.

The use of the wavelets, as tools of modelling and/or analysis, makes it possible to explore all the spatial and/or temporal scales of the geomagnetic field.

Table des matières

Avant propos	17
I Introduction : le champ magnétique terrestre	23
1 Les sources	25
1.1 Le champ interne	26
1.2 Le champ externe	27
2 Bases Mathématiques	31
2.1 L'équation de Laplace	31
2.2 Décomposition en potentiels harmoniques	32
II Les variations spatiales	35
3 Les mesures du champ magnétique terrestre	37
3.1 Les mesures à la surface de la Terre	39
3.1.1 Les observatoires	39
3.1.2 Les stations de répétition	40
3.2 Les mesures satellitaires	42
3.2.1 Le satellite Ørsted	42
3.2.2 Le satellite CHAMP	43
4 Modélisation par les harmoniques sphériques	45
4.1 Formalisme mathématique des harmoniques sphériques	45
4.1.1 Les polynômes de Legendre	47
4.1.2 Développement du potentiel	48
4.1.3 Expression et résolution du problème inverse	49
4.2 Les modèles de champ magnétique en harmoniques sphériques . .	51
4.2.1 La sélection de données	51
4.2.2 La paramétrisation des champs externes	59
4.2.3 Les modèles géomagnétiques internationaux de référence .	69

5	Modélisation par les ondelettes de Poisson	85
5.1	Formalisme mathématique des <i>frames</i> d'ondelettes	86
5.1.1	Mais... Qu'est-ce qu'une ondelette?	86
5.1.2	Les <i>frames</i>	88
5.1.3	Expression et résolution du problème inverse	90
5.2	Les modèles de champ magnétique en ondelettes	109
5.2.1	Représentation d'un champ radial	109
5.2.2	Représentation d'un champ de potentiel	110
III	Les variations temporelles	171
6	La variation séculaire	173
6.1	La variation séculaire vue par les observatoires	173
6.2	La variation séculaire vue par les satellites	174
6.2.1	Série de modèles bimestriels	175
6.2.2	Un modèle Ørsted et CHAMP	181
7	Les secousses géomagnétiques	183
7.1	Sur leur caractérisation temporelle	186
7.2	Sur leur distribution spatiale	213
8	La variation séculaire et l'intérieur de la Terre	221
8.1	La variation séculaire à la limite noyau-manteau	221
8.2	Les secousses géomagnétiques et la pression à la limite noyau- manteau	226
IV	Conclusions	231
A	Algorithme de sélection des données de nuit	249
A.1	La date julienne en temps UTC	249
A.2	Le temps sidéral et la longitude du Soleil	251
A.3	L'ascension droite et la déclinaison du Soleil	251
A.4	L'angle horaire, l'azimut et la hauteur du Soleil	252
A.5	à l'altitude du satellite	253
B	Observatoires magnétiques	255

Table des figures

1	Champ magnétique associé à une sphère de magnétite uniformément aimantée (« <i>terrella</i> »). William Gilbert, « <i>De magnete</i> », 1600.	18
2	Champ magnétique associé à un courant électrique parcourant un fil conducteur, expérience de Ørsted.	19
1.1	Schéma simplifié de la structure interne de la Terre.	26
1.2	Carte représentant l'intensité du champ principal à la surface de la Terre. Les valeurs obtenues dérivent d'un développement en harmoniques sphériques (voir chapitre 4) jusqu'au degré/ordre 13 (modèle Ø19992000, d'après Langlais <i>et al.</i> (2003)).	27
1.3	Carte représentant la composante verticale du champ crustal obtenue à partir d'un modèle en harmoniques sphériques du degré/ordre 16 à 80 à une altitude de 400 km, d'après Maus <i>et al.</i> (2002).	28
1.4	Schéma simplifié des courants ionosphériques, d'après Lanzerotti <i>et al.</i> (1993).	29
1.5	La magnétosphère et l'ionosphère : les systèmes de courants électriques et les champs magnétiques correspondant sont aussi indiqués (d'après Kivelson <i>et al.</i> (1995)).	30
2.1	Schéma des sources de courants contribuant au champ géomagnétique terrestre et disposition des principales sphères de référence (à l'altitude des observatoires ou bien à l'altitude des satellites magnétiques) d'après Sabaka <i>et al.</i> (2002).	33
3.1	Les composantes du champ magnétique terrestre.	38
3.2	Carte de répartition des observatoires magnétiques ayant fourni des données pendant le dernier quart de siècle (<i>losanges noirs</i>) et appartenant au réseau INTERMAGNET (<i>cercles gris</i>).	39

3.3	Variation séculaire mesurée à l'Observatoire National de Chambon la Forêt.	40
3.4	Séries temporelles des mesures magnétiques à l'Observatoire National de Chambon la Forêt durant les journées calme du 26 mai 2004 (<i>gris</i>) et perturbée du 7 mai 2004 (<i>noir</i>).	41
3.5	Carte de répartition des stations de répétitions sur la France métropolitaine et la Corse. Les codes de trois lettres servent de dénomination pour les stations.	42
3.6	Le satellite Ørsted.	43
3.7	Le satellite CHAMP.	43
4.1	Représentation des premiers polynômes de Legendre $P_\ell(\cos \theta)$ en fonction de la colatitude θ sur une sphère unitaire.	47
4.2	Spectre d'énergie du champ magnétique terrestre calculé, à la surface de la Terre et à la limite noyau-manteau à partir d'un modèle en harmoniques sphériques jusqu'au degré/ordre 29 (modèle CO2 d'après Holme <i>et al.</i> (2002)).	49
4.3	Position de la Terre au cours de sa révolution annuelle autour du Soleil.	53
4.4	Distribution des données vectorielles utilisées dans la modélisation des données corrigées de l'influence de l'anneau de courants et non corrigées.	60
4.5	L'anneau de courant de la magnétosphère situé à une distance de plusieurs rayons terrestres produit un champ magnétique homogène à la surface de la planète. Dans le développement en harmoniques sphériques, le champ résultant est décrit par le terme q_1^0 (d'après Schwarte (2004)).	61
4.6	Spectres de deux modèles de champ obtenus en utilisant des données corrigées et non corrigées. Les deux spectres étant étroitement confondus sur ce graphique, leur différence est également représentée.	61
4.7	Cartes des différences sur les composantes X et Z entre un modèle calculé à partir de données corrigées de l'influence de l'anneau de courants et un modèle calculé à partir de données non corrigées. Les modèles sont développés en harmoniques sphériques jusqu'au degré/ordre 20.	62
5.1	Schéma de synthèse décrivant les propriétés des ondelettes	88

5.2	Carte des résidus entre le modèle en harmoniques sphériques et le modèle en ondelettes (gauche). Histogramme des résidus entre les données utilisées et les résultats des modèles en harmoniques sphériques et en ondelettes (droite)	109
6.1	Composantes Nord (X), Est (Y) et verticale (Z) du champ magnétique mesuré à l'observatoire de Chambon la Forêt.	174
6.2	Variation séculaire de la composante Est (Y) du champ magnétique mesuré à l'observatoire de Chambon la Forêt en France (<i>vert</i>) et à l'observatoire d'Hermanus en Afrique du Sud (<i>rouge</i>). Les traits noirs repèrent deux évènements survenus autour de 1969 et 1978 en Europe; les traits bleus représentent les mêmes évènements mais apparus autour de 1972 et 1982 en Afrique du Sud (voir chapitre 7.1 pour plus de détails).	175
6.3	Valeurs des résidus moyens, entre les données de départ et les données synthétiques calculées à partir des modèles bimestriels : sur les données scalaires (haut) et sur les données vectorielles (bas).	176
6.4	Distribution des données scalaires (<i>noir</i>) et vectorielles (<i>rouge</i>) utilisées dans les calculs de modèles bimestriels : a mars-avril 1999; b juillet-août 1999; c novembre-décembre 1999; d mai-juin 2002.	177
6.5	Répartition mensuelle des données fournies par le satellite Ørsted contenues dans la base de l'Institut de Physique du Globe de Paris.	178
6.6	Séries temporelles des six premiers coefficients de Gauss des modèles bimestriels en harmoniques sphériques.	179
6.7	Spectre d'énergie de la variation séculaire obtenue par différence entre le modèle de mai-juin 1999 et celui de mai-juin 2002.	179
6.8	Représentation des composantes de la variation séculaire entre le modèle de mai-juin 1999 et celui de mai-juin 2002 à la surface de la Terre.	180
6.9	Répartition temporelle des données après les sélections et l'homogénéisation année par année pour chaque satellite.	181
6.10	Spectre d'énergie de la variation séculaire du modèle global de 1999 à 2003 (<i>trait continu</i>); spectre d'énergie de la variation séculaire obtenue par différence entre le modèle de mai-juin 1999 et celui de mai-juin 2002 (<i>trait pointillé</i> - rappel de la figure 6.7); spectre d'énergie de l'accélération séculaire du modèle global de 1999 à 2003 (<i>tirets</i>).	182

7.1	Signature d'une secousse idéale, d'après Courtillot et al. [1984]. $E(t)$ représente une composante du champ magnétique terrestre. . .	184
7.2	Troisième dérivée d'une gaussienne.	187
7.3	Principe de la transformée en ondelettes par translations et convolutions successives d'une famille d'ondelettes avec un signal. . . .	187
7.4	Transformée en ondelettes (haut) de la série temporelle de la composante Est magnétique mesurée à l'Observatoire National de Chambon la Forêt (bas).	188
7.5	Représentation de la dérivée seconde de la composante Est du champ magnétique terrestre (d^2Y/dt^2) d'après le modèle CM4; seule la partie principale du champ interne est prise en compte (développement jusqu'au degré/ordre 13 en harmoniques sphériques) (gauche). Portions de surface où la dérivée seconde de la composante Est du champ magnétique terrestre a changé de signe à une date intermédiaire à celles indiquées en bas des deux cartes placées à sa gauche (droite).	214
8.1	Composante radiale du champ magnétique principal (gauche) et sa variation séculaire (droite) calculées à la limite noyau-manteau à partir du modèle de Sabaka et al. [2004].	223
8.2	Pression géostrophique (<i>échelle de couleurs</i> de -1400 à 1400 Pa) et mouvements du fluide (<i>flèches</i> proportionnelles à la vitesse - vitesse maximale de 37 km/an) à la surface du noyau, calculés à partir du modèle de Sabaka et al. [2004] [Eymin, <i>comm. pers.</i>].	224
8.3	Exemple de structure d'un observatoire géomagnétique et géoélectrique fond de mer H ₂ O (de l'anglais <i>Hawaii-2 Observatory</i>). Cet observatoire est situé à mi-chemin entre la Californie et Hawaii, à 5000 m de profondeur depuis fin 2003.	237
8.4	Le positionnement dans l'environnement terrestre de la constellation des satellites du projet Swarm.	238
A.1	Position d'une étoile sur la sphère Céleste.	252
A.2	Position de l'étoile pour l'observateur	253
A.3	Position du satellite par rapport à l'ombre de la Terre	253

Avant propos

Historique

L'Homme part à la conquête de l'Espace mais les secrets de notre planète Terre, sous nos pieds, ne sont pas encore tous dévoilés. Bien sûr, les sciences de la Terre sont fort anciennes et il est attesté que, dès le VI^e siècle avant Jésus-Christ, les Grecs connaissent la propriété de certaines roches naturelles d'attirer le fer : ils les appellent « pierres de Magnésie » du nom de la ville près de laquelle on en trouve alors de grandes quantités. Thalès de Milet, puis Aristote, expliquent les propriétés de ces roches par la philosophie animiste :

« Toutes choses sont pleines de Dieux. L'aimant (...) est vivant car il a la puissance de mouvoir le fer. »

Dans le Monde Grec et Latin, la connaissance du magnétisme ne progresse guère. L'Orient, la Chine en particulier, avance plus vite avec dès le X^e siècle avant Jésus-Christ, la découverte de la boussole¹. Le fer, attiré par les aimants, devient lui-même magnétique et peut, à son tour, attirer d'autres morceaux de fer. On s'aperçoit que de fines lamelles de ces roches (ou des aiguilles métalliques aimantées à leur contact) laissées libres de leur mouvement s'orientent toujours dans un plan vertical passant approximativement par l'Étoile Polaire, donc à proximité du point de la surface terrestre appelé plus tard le Pôle Nord : c'est la première observation du magnétisme terrestre. En Europe, il faut attendre la fin du XII^e siècle pour trouver la première description d'une boussole (A. Neckman en 1190 ; G. De Provins en 1205) et la généralisation de son utilisation par les navigateurs. En 1269, le français, P. Pélerin de Maricourt découvre la nature dipolaire des aimants et établit la relation existant entre la direction de l'aiguille d'une boussole et la direction des pôles de l'axe de rotation de la Terre. Très vite, au XVI^e siècle, on s'aperçoit que la boussole ne donne que approximativement la direction du Nord géographique, les pôles magnétiques ne sont pas confondus avec les pôles géographiques. L'angle entre les deux directions est nommé « *déclinaison* ». Le cartographe Gérard Mercator (Gerhard Kremer) tente alors de

¹De l'italien « *bussola* » petite boîte

préciser la position des pôles magnétiques en trouvant l'intersection des grands cercles tracés à partir de quelques valeurs éparses de la déclinaison magnétique. Dans le même temps, G. Hartmann, en 1544, puis R. Norman, en 1576, font de manière indépendante une autre observation : le champ magnétique terrestre n'est pas horizontal, comme pourrait le laisser croire l'aiguille d'une boussole, qui n'est libre de tourner qu'autour d'un axe vertical, mais il est incliné par rapport à l'horizontale (« *inclinaison* »). Les premières tentatives de synthèse de ces ob-

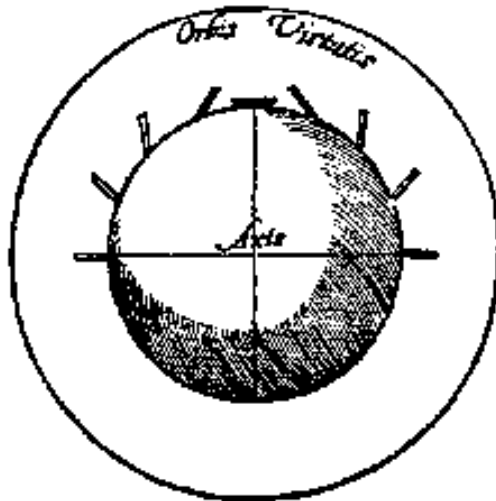


FIG. 1: *Champ magnétique associé à une sphère de magnétite uniformément aimantée (« terrella »). William Gilbert, « De magnete », 1600.*

servations sont publiées au tout début du XVII^e siècle, par G. Le Nautonnier² et W. Gilbert³. Ce dernier, dans son traité, « De magnete », montre que le champ magnétique terrestre est analogue au champ développé par une sphère de magnétite uniformément aimantée (figure 1), lui-même semblable au champ magnétique engendré par un barreau aimanté, ou dipôle, qui serait situé au centre de la Terre et presque aligné suivant l'axe de rotation (dipôle axial centré). En 1635, enfin, H. Gellibrand, professeur d'astronomie, montre que non seulement la déclinaison magnétique varie régionalement, mais qu'elle présente également des différences au cours du temps. Cette variation temporelle du champ magnétique sera dénommée « *variation séculaire* ». Au siècle suivant, l'intérêt pour le magnétisme terrestre est tel que R. Descartes écrit dans ses « *Principes de Philosophie* » un long passage consacré au magnétisme expérimental :

« 1- Qu'il y a deux poles en chaque ayment, l'un desquels, en quelque lieu de le Terre que ce soit, tend tous-jours à estre tourneé vers le

²Astronome et géographe du roi Henri IV de France, 1557 - 1620

³Médecin et physicien de la reine Elizabeth 1ère d'Angleterre, 1544-1603

Septentrion, et l'autre vers le Sud.

2- Que ces poles de l'aymant tendent aussi à se pencher vers la Terre ; et ce diversement, à raison de divers lieux où il est transportè.

3- Que, lors que deux aymans de figure ronde sont proches, chacun d'eux se tourne et se penche vers l'autre, en mesme facon qu'un seul se tourne et penche vers la Terre.

4 - Que lors qu'ils sont ainsi tournez l'un vers l'autre, il s'approchent jusques à ce qu'ils se touchent.

5 - Que s'ils sont retenus par contrainte en une situation contraire à celle-là, il se fuyent et se reculent l'un de l'autre. (...)

30 - Que la limure de fer s'arrange en certain ordre autour des pierres d'aymant. »

René Descartes, « Principes de Philosophie », tome IX, p 283.

Le XVIII^e siècle est celui de l'expérimentation en électrostatique surtout. Des machines capables d'électriser des corps sont utilisées, les scientifiques électrisent tout, les substances les plus variées, les animaux et les hommes. Les observations de déclinaison et d'inclinaison se multiplient. Des cartes du champ géomagnétique sont publiées (E. Halley en 1700 : première carte de déclinaison ; J.C. Wilcke, en 1768 : première carte de l'inclinaison). Finalement l'accumulation des observations permet au physicien, astronome et mathématicien, C.F. Gauss d'effectuer en 1839 la première analyse mathématique du champ, à l'aide de l'analyse en harmoniques sphériques. Cette analyse confirme, non seulement la nature principalement dipolaire du champ magnétique terrestre, mais en démontre de plus son origine interne à la sphère terrestre. Il crée à Gottingen le premier observatoire magnétique. Vers la fin du XVIII^e et au début du XIX^e siècle, les savants se succèdent chacun apportant sa pierre à l'édifice de la physique et de la connaissance en géomagnétisme. C.A. De Coulomb formule la première loi quantitative pressentie depuis quelques temps, la loi en $\frac{1}{r^2}$. Le magnétisme et l'électricité sont

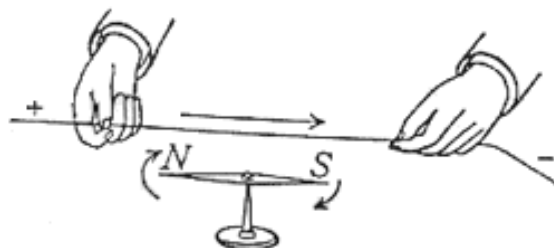


FIG. 2: *Champ magnétique associé à un courant électrique parcourant un fil conducteur, expérience de Ørsted.*

encore séparés mais A. Volta qui construit la première pile va donner à H.C. Ørsted l'outil qu'il faut pour montrer le lien entre ces deux domaines de la Physique. Dans une expérience, il montre la déviation d'une aiguille aimantée placée à proximité d'un fil parcouru par un courant (figure 2).

« - l'aiguille aimantée est déviée de sa position d'équilibre par l'action de l'appareil voltaïque et que cet effet se produit quand le circuit est fermé et non lorsqu'il est ouvert(...) »

- Supposons qu'on tende une portion rectiligne de ce fil au-dessus d'une aiguille aimantée suspendue à la manière ordinaire et parallèlement à sa direction . Dans le cas actuel, l'aiguille quittera sa position, et le pôle qui se trouve sous la partie du fil conjonctif la plus voisine de l'extrémité négative de l'appareil galvanique déviera vers l'ouest(...)

- Si le fil conjonctif est disposé horizontalement sous l'aiguille, les effets sont les mêmes que lorsqu'il est au-dessus, à cela près qu'ils sont de sens contraires. »

H.C. Ørsted (professeur de physique à l'Université de Copenhague), « Expériences relatives à l'effet du conflit électrique sur l'aiguille aimantée », 1820.

A.M. Ampère qui comprend très vite l'importance de cette expérience l'analyse et propose toute une théorie du magnétisme. M. Faraday met en pratique l'expérience inverse de Ørsted et montre que un champ magnétique peut, à son tour, générer un courant électrique. La même année, en 1831, P. Barlow vérifie expérimentalement que l'existence de courants électriques dans la Terre peut expliquer les observations. Le modèle de Barlow consiste en une sphère en bois, de « 16 pouces » de diamètre, dans laquelle il grave des rainures à l'équateur et des parallèles tous les 4 degrés, ainsi qu'une rainure verticale d'un pôle à l'autre. Il enroule autour de la sphère un fil de cuivre en passant de parallèle en parallèle. Une fois parcouru par un courant, son modèle reproduit si bien l'orientation de la boussole (déclinaison et inclinaison) qu'il y dessine, pour plus de réalisme, des continents. Il conclut sur l'origine électrique probable du magnétisme terrestre. En 1873, J.C. Maxwell pose à son tour les équations qui sont la base de la formulation de l'électromagnétisme dans son ouvrage intitulé « *Electricity and Magnetism* ».

Depuis Thalès, 2500 ans se sont écoulés. Même si les bases du géomagnétisme sont posées, la recherche continue à faire des bonds en avant notamment grâce aux mesures plus précises effectuées non seulement à la surface de la Terre mais également aux hautes altitudes satellitaires. En effet, jusqu'alors, les mesures se font surtout au sol : des essais dans des avions ou des ballons sondes sont effectués mais les altitudes de mesure ne dépassent pas la troposphère (cette région de l'atmosphère, jusqu'à 10 km d'altitude environ où la pression atmosphérique diminue régulièrement ainsi que la température). à partir du 4 octobre 1957, date du lancement du premier satellite artificiel, Spoutnik 1, les premières mesures extra-atmosphère du champ magnétique terrestre sont effectuées. Ce premier satellite pionnier est suivi de nombreux autres qui représentent chacun des avancées dans le domaine de la connaissance du champ magnétique terrestre, de ses variations spatiales et temporelles. En embarquant des magnétomètres dans les satellites, l'étude de la Terre prend une dimension spatiale et on vérifie ce que l'on pressentait déjà que l'influence magnétique de la Terre existe assez loin du globe. C'est le début de la recherche satellitaire en géo-potential.

Première partie

Introduction : le champ magnétique terrestre

Chapitre 1

Les sources

« Laissez-moi m'interrompre un instant pour, pendant que j'y pense, vous faire part de la réflexion que formulait l'autre jour [un ami](...) : - C'est drôle, on parle souvent du pôle Nord, plus rarement du pôle Sud, et jamais du pôle Ouest ni du pôle Est. Pourquoi cette injustice ?... ou cet oubli ? »

*Alphonse ALLAIS (Écrivain et humoriste français, 1855-1905),
« Le Sourire », Oeuvres posthumes, p 601.*

En première approximation, le champ observé à la surface de la Terre semble simple. Il peut être décrit comme étant principalement d'origine interne, et très semblable au champ produit par un dipôle magnétique situé au centre de la Terre. Mais au delà de cette grossière simplification, le champ magnétique terrestre \vec{B} présente de multiples échelles spatiales et temporelles. Dans ce premier chapitre, nous allons présenter très brièvement les sources du champ magnétique terrestre. Le lecteur intéressé découvrira des informations détaillées dans des ouvrages publiés récemment [Jacobs, 1987; Langel et Hinze, 1998].

\vec{B} est ainsi la résultante d'une somme de deux parties principales, un champ interne \vec{B}_{int} ayant ses sources à l'intérieur de la Terre et un champ externe \vec{B}_{ext} .

$$\vec{B} = \vec{B}_{int} + \vec{B}_{ext}. \quad (1.1)$$

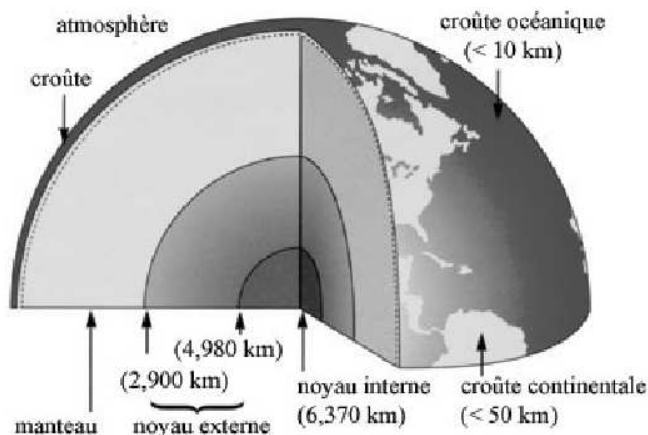


FIG. 1.1: Schéma simplifié de la structure interne de la Terre.

1.1 Le champ interne

Le champ interne est la somme d'un champ principal \vec{B}_{prin} et d'un champ dit crustal \vec{B}_{crust} .

Le champ principal

Appelé également champ « nucléaire », le champ principal a son origine dans le noyau terrestre à plus de 2 900 km de profondeur (figure 1.1). Le noyau externe, liquide et métallique, est en mouvement et des courants électriques sont induits par « effet dynamo¹ ». Ceux-ci provoquent à leur tour l'apparition d'un champ magnétique. Ce champ est dit « principal » car il représente plus de 90% du champ mesuré à la surface du globe et varie en intensité d'environ 60 000 nT² aux pôles jusqu'à 30 000 nT à l'équateur (figure 1.2).

La variation temporelle du champ principal est connue sous le nom de « *variation séculaire* ». Elle contient des constantes de temps allant de la centaine de millions d'années (fréquences des inversions au cours des temps géologiques) à moins de l'année (secousses géomagnétiques).

¹L'émergence et l'entretien de champs magnétiques par leur interaction avec des champs de vitesse (souvent turbulents) dans un milieu conducteur dont la dynamique est décrite par les équations de la magnétohydrodynamique (MHD)

²Les unités de mesure d'induction magnétique sont le Tesla (T , système SI - Système International) et le Gauss (G , système EMCGS - système basé sur les unités fondamentales Centimètre/Gramme/Seconde en électromagnétisme).

$$10^{-9} T = 1 nT = 10^{-5} G$$

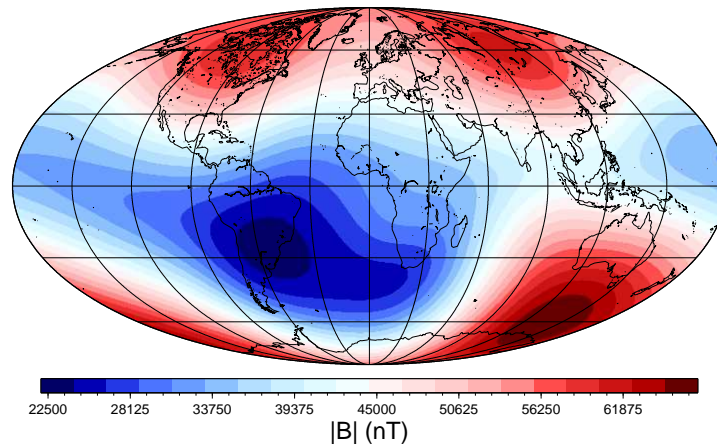


FIG. 1.2: Carte représentant l'intensité du champ principal à la surface de la Terre. Les valeurs obtenues dérivent d'un développement en harmoniques sphériques (voir chapitre 4) jusqu'au degré/ordre 13 (modèle Ø19992000, d'après Langlais et al. (2003)).

Le champ crustal

Cette partie du champ géomagnétique a ses sources dans la croûte terrestre et est engendrée par des roches aimantées, situées immédiatement sous la surface de la Terre, au-dessus de la surface isotherme dite de Curie (surface dont la température est égale à la température de Curie au-dessus de laquelle les roches perdent leurs propriétés magnétiques). Le champ crustal peut être considéré comme une quantité constante dans le temps. à la surface de la Terre, il a une amplitude moyenne égale à quelques centaines de nT et s'affaiblit rapidement avec l'altitude. La plus forte anomalie crustale connue est située en Russie, à Kursk ; l'intensité du champ y varie de 45 000 à plus de 195 000 nT sur une distance de 250 km [Taylor et Frawley, 1987]. La figure 1.3 représente la composante verticale du champ crustal, à 400 km d'altitude, obtenue à partir d'un modèle en harmoniques sphériques.

1.2 Le champ externe

Le champ externe s'exprime comme la somme de deux autres champs \vec{B}_{iono} et \vec{B}_{mag} issus respectivement de la circulation de courants dans l'ionosphère et la magnétosphère. Ces courants varient dans le temps en réponse aux marées thermiques dans l'ionosphère, aux interactions entre le vent solaire et la magnétosphère et aux variations de l'activité solaire. Le champ externe est caractérisé

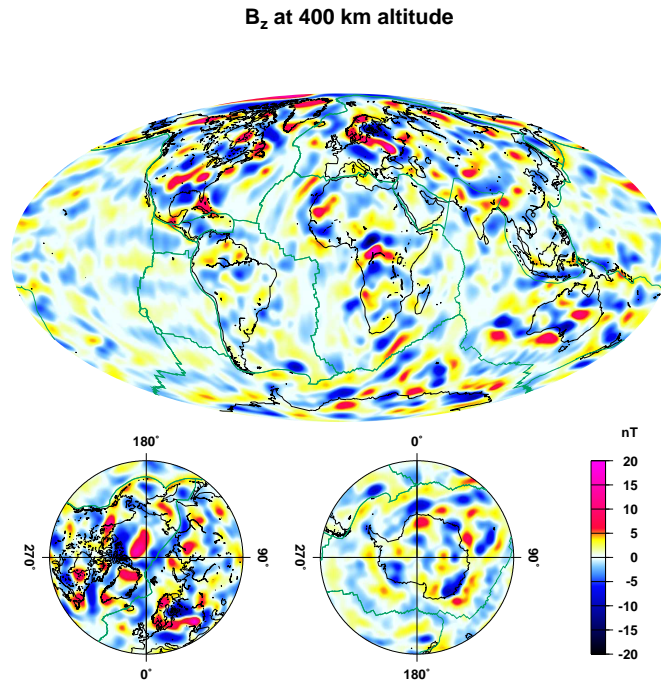


FIG. 1.3: Carte représentant la composante verticale du champ crustal obtenue à partir d'un modèle en harmoniques sphériques du degré/ordre 16 à 80 à une altitude de 400 km, d'après Maus et al. (2002).

par les mêmes constantes de temps que le Soleil. Sa période principale est de 24 heures (cycle diurne), mais il présente également des périodes de 27 jours (cycle rotationnel solaire), 1 an (cycle révolutionnaire terrestre), 22 ans (cycle solaire) et leurs harmoniques. Le champ externe varie de quelques nT , en période calme, à plusieurs milliers de nT en cas d'orage magnétique.

Le champ ionosphérique

L'atmosphère est en permanence soumise aux rayonnements cosmiques et solaires. Il en résulte une ionisation de la région E de la base de l'ionosphère, entre 100 et 140 km d'altitude. Tant que la pression est suffisamment élevée, c'est à dire aux altitudes inférieures à 100 km, l'atmosphère neutre impose ses conditions à l'ionosphère. De même aux hautes altitudes, supérieures à 140-150 km, la raréfaction de l'atmosphère entraîne une baisse du nombre de particules, donc de la pression, et conduit ainsi à une prépondérance du champ magnétique terrestre sur les particules ionisées. Entre ces deux limites, l'ionosphère a ses conditions propres ; elle est soumise aux perturbations de l'activité solaire. Elle subit des effets diurnes, saisonniers et géographiques, liés à la variation de la distance zénithale du Soleil. Les caractéristiques de l'ionosphère varient aussi fortement avec

la latitude géomagnétique.

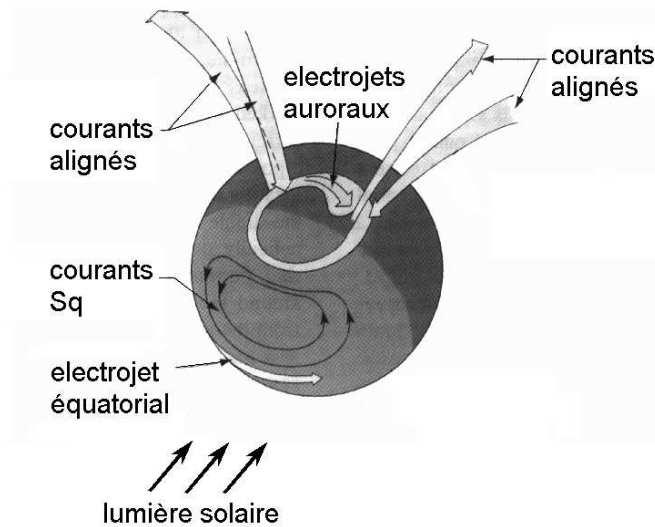


FIG. 1.4: Schéma simplifié des courants ionosphériques, d'après Lanzerotti et al. (1993).

Nous pouvons ainsi distinguer, au sein de l'ionosphère (figure 1.4), plusieurs systèmes de courants horizontaux :

- aux basses latitudes, les courants de l'électrojet équatorial (bande de courant suivant l'équateur magnétique du « côté jour ») ;
- aux latitudes moyennes, les courants dits « Sq » (de l'anglais « Solar Quiet », ces courants héliosynchrones sont les seuls d'importance significative pendant les jours calmes) ;
- aux hautes latitudes, les courants des électrojets auroraux.

Aux latitudes élevées, l'ionosphère est couplée directement à la magnétosphère *via* les courants alignés. Ceux-ci sont verticaux près des pôles et suivent les lignes de force du champ géomagnétique plongeant dans les régions aurorales.

Le champ magnétosphérique

Le champ magnétosphérique est généré en dehors de la Terre, dans une région appelée magnétosphère (figure 1.5). Cette région correspond à l'espace, entourant notre planète, dont la limite inférieure est l'ionosphère et qui s'étend jusqu'au plus profond des zones contrôlées par le champ géomagnétique (l'avant, du côté Soleil, est à environ dix rayons terrestres tandis que la « queue » s'étend sur plus d'un millier de rayons terrestres).

Plusieurs systèmes de courants sont présents dans la magnétosphère :

- les courants de magnétopause, directement issus de l'interaction avec le vent

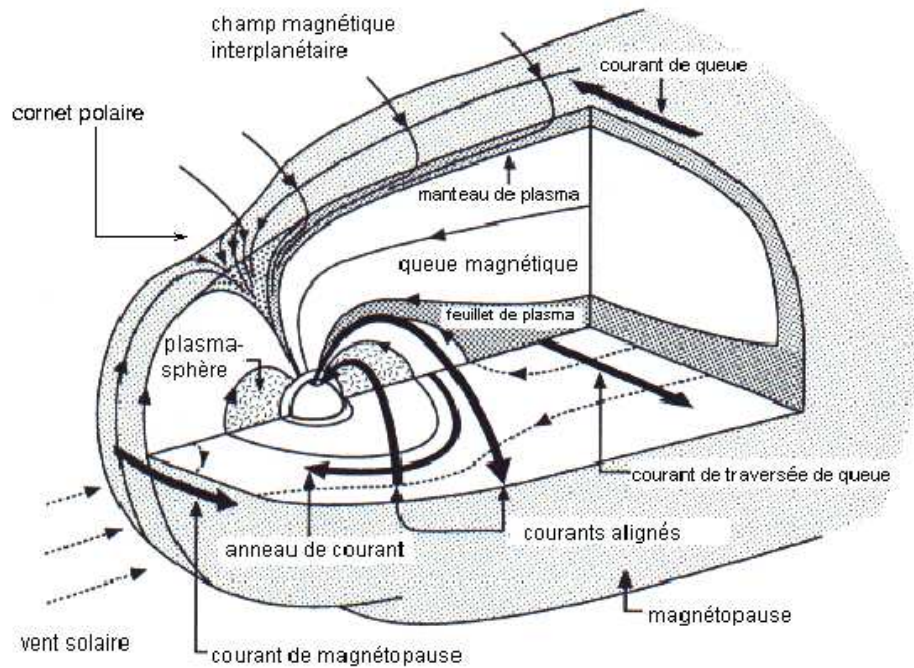


FIG. 1.5: *La magnétosphère et l'ionosphère : les systèmes de courants électriques et les champs magnétiques correspondant sont aussi indiqués (d'après Kivelson et al. (1995)).*

solaire ;

- les courants dans le « feuillet neutre » qui s'étend dans la queue de la magnétosphère, à l'opposé du Soleil ;
- les courants entourant la Terre dans les régions équatoriales à 20 000 km d'altitude, appelés « anneau de courants équatorial ».

La magnétosphère réagit parfois violemment aux humeurs du Soleil : des phénomènes explosifs à la surface de l'étoile se répercutent dans la magnétosphère et produisent des effets mesurables dans les observatoires magnétiques (voir chapitre 3.1.1) à la surface de la Terre. Les champs magnétosphériques sont difficiles à modéliser car ils varient très fortement dans le temps et dépendent de systèmes complexes de courants.

Chapitre 2

Bases Mathématiques

« Nous sommes si loin de connaître toutes les forces de la nature et leurs divers modes d'action qu'il serait indigne du philosophe de nier des phénomènes simplement parce qu'ils sont inexplicables dans l'état actuel de nos connaissances. Plus il est difficile d'en reconnaître l'existence, plus nous devons apporter de soin à leur étude. »

Marquis Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827)

Après les sources du champ magnétique terrestre, nous nous proposons ici de faire un bref rappel introductif aux principales équations et hypothèses utilisées pour la description mathématique du champ magnétique terrestre.

2.1 L'équation de Laplace

Le champ magnétique \vec{B} vérifie les équations de Maxwell suivantes :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J} \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$) et \vec{J} la densité de courant. Dans une région dépourvue de sources (dans l'atmosphère neutre, entre l'ionosphère et la surface de la Terre), la densité de courant est

considérée comme négligeable, ainsi :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = 0. \quad (2.3)$$

De l'équation 2.3, peut être déduit le fait que \vec{B} dérive d'un potentiel scalaire harmonique V :

$$\vec{B} = -\vec{\nabla}V \quad (2.4)$$

Ainsi d'après l'équation 2.2, V satisfait l'équation de Laplace tel que :

$$\Delta V = 0 \quad (2.5)$$

Les solutions de l'équation de Laplace sont donc deux fois continûment dérivables. Appelées « fonctions harmoniques », leurs solutions sont analytiques et peuvent être exprimées en séries de fonctions puissances. Deux exemples sont donnés dans la suite de ce mémoire avec les développements en séries de fonctions harmoniques sphériques (chapitre 4) et en « *frames*¹ d'ondelettes » de Poisson (chapitre 5).

2.2 Décomposition en potentiels harmoniques

Nous avons vu que le champ géomagnétique \vec{B} résulte de la somme de multiples contributions. Le potentiel V est donc également la somme des potentiels scalaires représentant toutes les sources. Mais cette simple séparation selon la nature des sources, ne peut pas être utilisée ici. Les mesures du champ magnétique terrestre ne permettent pas de séparer toutes les sources (figure 2.1). Un choix naturel se porte alors sur l'utilisation d'une sphère de référence qui permet de scinder le potentiel en deux parties : interne et externe.

Ainsi à la surface d'une sphère centrée sur la Terre, le potentiel scalaire V est écrit comme la somme de deux potentiels :

$$V(r, \theta, \phi) = V_i(r, \theta, \phi) + V_e(r, \theta, \phi) \quad (2.6)$$

où V_i et V_e sont les potentiels interne et externe, exprimés dans le repère géocentrique sphérique (r, θ, ϕ) .

¹Le terme de *frame* est anglais. Il n'a pas de réel traduction en français même s'il peut être compris par les expressions de « cadre » ou « encadrement ». Dans un souci de clarté, nous avons choisi de conserver la terminologie anglaise : *frame*.

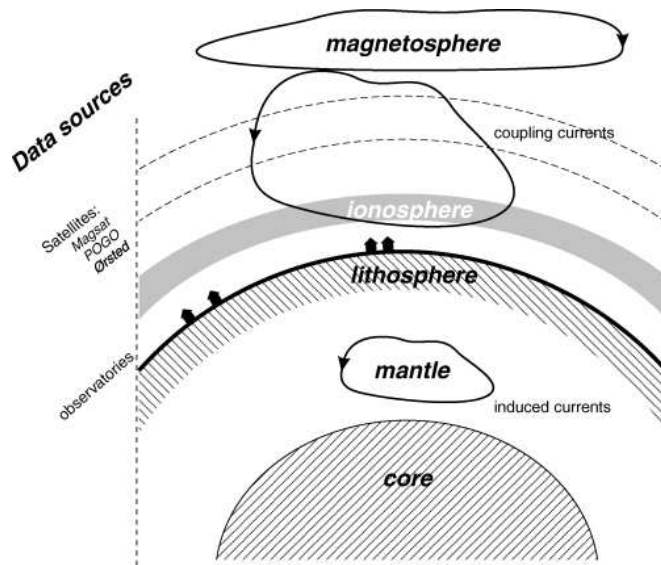


FIG. 2.1: Schéma des sources de courants contribuant au champ géomagnétique terrestre et disposition des principales sphères de référence (à l'altitude des observatoires ou bien à l'altitude des satellites magnétiques) d'après Sabaka et al. (2002).

Ici, les dénominations interne et externe des potentiels V_i et V_e ne doivent pas se comprendre comme celles précédemment établies pour les champs B_{int} et B_{ext} (chapitre 1 de ce mémoire). La sphère sur laquelle l'équation du potentiel est établie est « quelconque ». Si la sphère est assimilée à la surface de la Terre :

- le potentiel interne correspond aux sources nucléaire et crustales,
- le potentiel externe aux sources ionosphériques et magnétosphériques.

Cependant, si la sphère considérée est à l'altitude des satellites magnétiques (chapitre 3.2), généralement entre 350 et 900 km, alors :

- le potentiel interne correspond aux sources nucléaire, crustales et ionosphériques,
- le potentiel externe aux sources magnétosphériques.

Le potentiel ionosphérique est donc considéré soit comme interne, soit externe selon l'altitude des observations (figure 2.1).

Une équation de continuité est nécessaire pour pouvoir utiliser conjointement des données fournies par les observatoires et les satellites. L'ionosphère est modélisée comme une coquille sphérique, mince et conductrice, à une altitude h constante de 110 km. L'équation de continuité de sa dérivée radiale à travers la

surface de la coquille est :

$$-\frac{\partial V_{iono}}{\partial r}|_{r=(a+h)^-} = -\frac{\partial V_{iono}}{\partial r}|_{r=(a+h)^+} \quad (2.7)$$

En combinant les équations 2.6 et 2.7, les mesures à la surface de la Terre et les mesures satellitaires, il est théoriquement possible de séparer les sources ionosphériques des autres sources.

Dans la réalité, cette distinction est plutôt difficile à réaliser. Le champ ionosphérique, principalement tributaire des effets diurnes, ne varie pas sur des échelles de temps comparables à celle du champ interne. Le calcul précis de la part du champ ionosphérique nécessite donc une couverture complète et homogène en temps local. Pour cette raison, le champ ionosphérique est réduit au minimum grâce à l'application de critères de sélections sur toutes les données acquises. Les mesures du champ magnétique terrestre, que nous avons utilisées pour la description des structures spatiales et des variations temporelles du champ magnétique interne, sont décrites dans le chapitre suivant de ce mémoire.

Deuxième partie

Les variations spatiales

Chapitre 3

Les mesures du champ magnétique terrestre

“On peut parfaitement examiner un objet pendant des années sans jamais en tirer la moindre observation d'intérêt scientifique. Pour apporter une observation de quelque valeur, il faut déjà, au départ, avoir une certaine idée de ce qu'il y a à observer. Il faut déjà avoir décidé ce qui est possible. Si la science évolue, c'est souvent parce qu'un aspect encore inconnu des choses se dévoile soudain; pas toujours comme conséquence de l'apparition d'un appareillage nouveau, mais grâce à une manière nouvelle d'examiner les objets, de les considérer sous un angle neuf.”

François JACOB (Biologiste français, prix Nobel de médecine, né en 1920.), Le Jeu des possibles, Fayard, 1981.

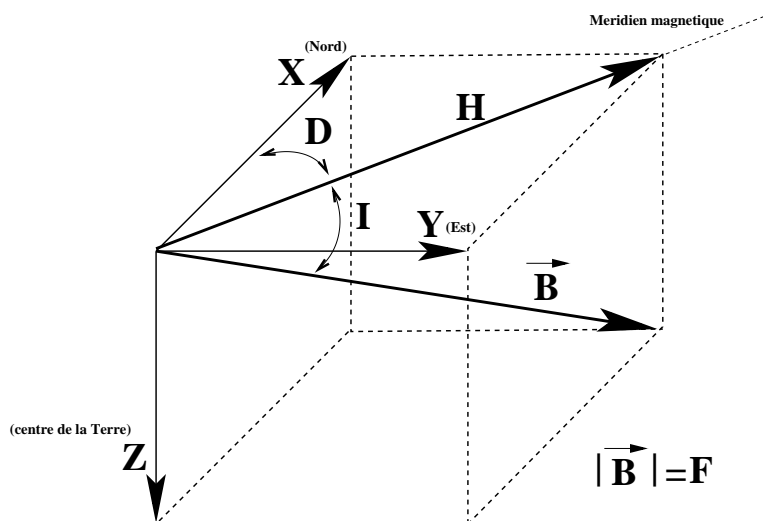


FIG. 3.1: Les composantes du champ magnétique terrestre.

Le champ magnétique \vec{B} mesuré en un point est défini par son intensité et sa direction. La figure 3.1 décrit les sept éléments qui caractérisent communément une mesure du champ magnétique terrestre. Les composantes vectorielles sont X , horizontale et positive vers le nord géographique, Y , horizontale et positive vers l'est géographique, et Z , la normale à l'horizontale, positive vers le centre de la Terre. Les autres éléments magnétiques sont F , le module de \vec{B} , H l'intensité horizontale, D , la déclinaison, ou l'angle entre le nord magnétique et le nord géographique, positive vers l'est, et enfin I , l'inclinaison, ou l'angle entre \vec{B} et le plan horizontal, positive vers le bas. Les éléments X , Y et Z font ici référence à des composantes géomagnétiques donc à un repère local qui peut être assimilé à un repère local sphérique (r, θ, ϕ) avec les équations suivantes :

$$\begin{cases} X = -B_\theta \\ Y = B_\phi \\ Z = -B_r \end{cases}$$

Les composantes (X , Y et Z) s'expriment directement à partir des potentiels, telles que :

$$X = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (V_{int} + V_{mag} + V_{iono}) \quad (3.1)$$

$$Y = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_{int} + V_{mag} + V_{iono}) \quad (3.2)$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial r} (V_{int} + V_{mag} + V_{iono}) \quad (3.3)$$

Les mesures du champ magnétique terrestre présentent un caractère hétérogène de part leurs natures, leurs positions, leurs fréquences et leurs précisions.

Nous choisissons de les présenter en deux parties, d'abord les mesures à la surface de la Terre et ensuite celles effectuées aux altitudes satellitaires.

3.1 Les mesures à la surface de la Terre

3.1.1 Les observatoires

Actuellement environ 200 observatoires (figure 3.2) de 70 pays sont implantés à la surface du globe. Leur répartition demeure fortement hétérogène avec un décalage évident entre zones continentales et océaniques et entre hémisphère Nord et hémisphère Sud.

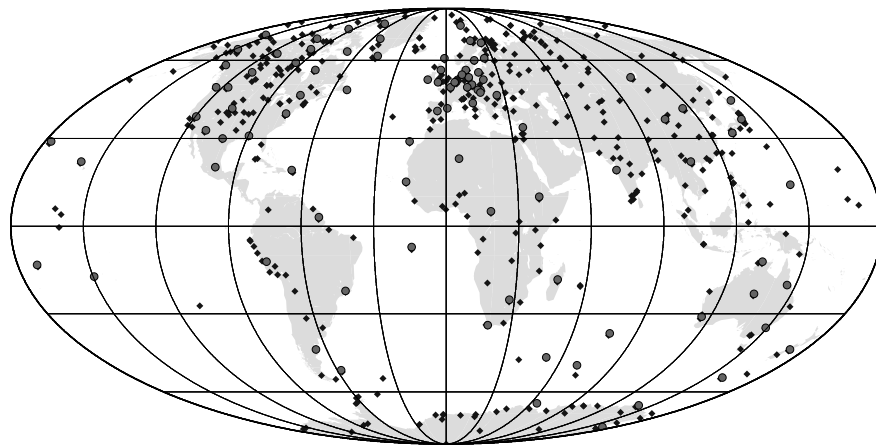


FIG. 3.2: Carte de répartition des observatoires magnétiques ayant fourni des données pendant le dernier quart de siècle (losanges noirs) et appartenant au réseau INTERMAGNET (cercles gris).

L'importance des observatoires magnétiques réside dans le fait qu'ils sont les seuls à fournir de longues séries de données sur une position fixe à la surface du globe. Les observatoires magnétiques demeurent les témoins de toutes les variations magnétiques mesurables sur Terre : que les sources soient intérieures (variation séculaire) ou bien extérieures (orage magnétique). Sur la figure 3.3, nous montrons la variation séculaire à l'observatoire de Chambon la Forêt depuis son installation en 1883 ; sur la figure 3.4, nous présentons les magnétogrammes d'un jour calme et d'un jour perturbé au même observatoire.

Cependant, si les observatoires présentent de nombreux précieux avantages, les mesures effectuées ne sont pas toujours de la même qualité d'un observatoire à l'autre. Des hétérogénéités demeurent dans les méthodes de mesure utilisées. La

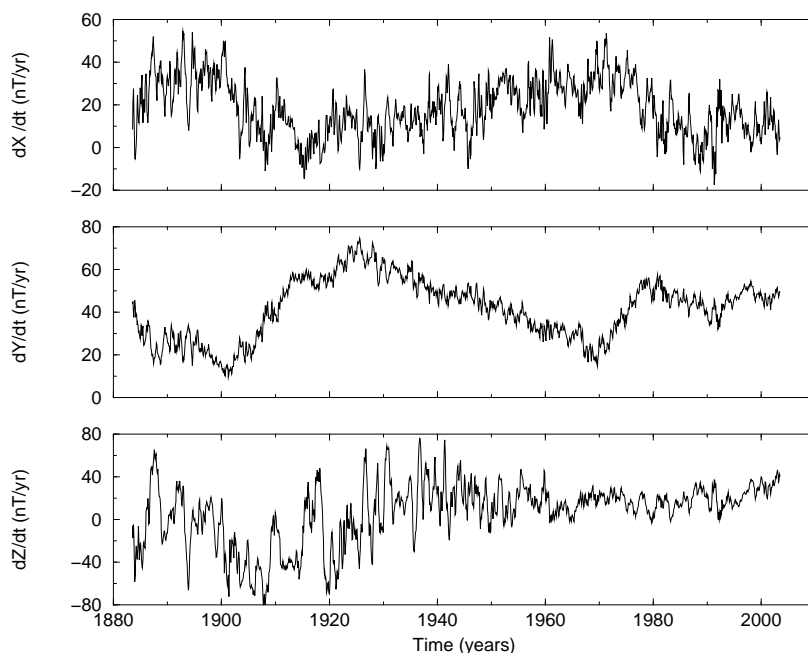


FIG. 3.3: *Variation séculaire mesurée à l'Observatoire National de Chambon la Forêt.*

mise en place du réseau INTERMAGNET ¹ (INTERnational Real-time observatory Network) tend à mettre en place des standards. Depuis 1987, 90 observatoires ont adhéré à ce label (figure 3.2). Ils doivent répondre à des critères de qualité et être capables de communiquer leurs mesures en temps quasi-réel.

3.1.2 Les stations de répétition

Les stations de répétition ne présentent pas le caractère de répartition global des observatoires. Ces campagnes de mesures relèvent en effet d'initiatives purement nationales, même si l'AIGA ² a récemment tenté d'uniformiser les dates, positions et méthodes utilisées ³. La répartition des stations est choisie comme la plus homogène possible sur l'espace national du pays considéré. Un exemple est présente dans la figure 3.5 où les positions des stations de répétition pour la France métropolitaine et la Corse sont indiquées.

Bien que préconisés tous les 5 ans, ces relevés sur le terrain ne peuvent, dans

¹Voir la page web : http://www.intermagnet.org/Welcom_f.html

²AIGA : Association Internationale de Géomagnétisme et d'Aéronomie, en anglais IAGA (International Association of Geomagnetism and Aeronomy);

voir la page web : <http://www.iugg.org/IAGA/>

³Résolution n° 4 adoptée à la conférence des délégations de l'AIGA à la XXIII^e assemblée générale de l'UIGG (Union Internationale de Géodésie et Géophysique; en anglais : IUGG, International Union of Geodesy And Geophysics), à Sapporo au Japon en juillet 2003

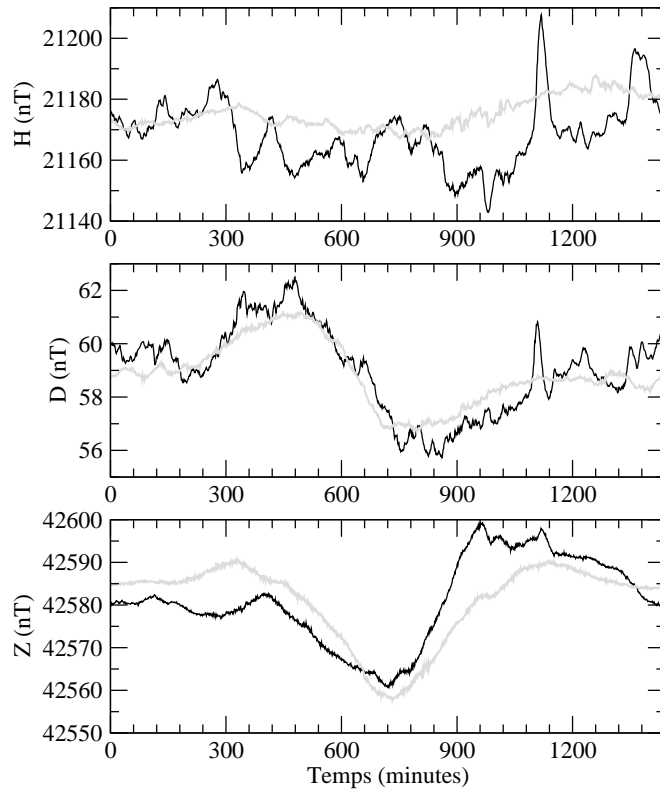


FIG. 3.4: *Séries temporelles des mesures magnétiques à l’Observatoire National de Chambon la Forêt durant les journées calme du 26 mai 2004 (gris) et perturbée du 7 mai 2004 (noir).*

les faits, bien souvent être effectués aussi ponctuellement et de manière aussi fréquente. La discontinuité temporelle de ce système d’acquisition de données est évidente. D’une façon plus pratique, il faut également rappeler que les campagnes de réseaux de répétitions ne présentent pas le caractère permanent (infrastructure, personnel...) des observatoires. D’une période de campagne à l’autre, les lieux de mesures parasités (routes, pylônes, constructions métalliques...), les disparitions de bornes de repérage ou la croissance incontrôlée de la végétation, sont autant de facteurs limitant l’établissement rapide et régulier de ces campagnes. Notons finalement que les stations de répétition permettent une fine description du champ magnétique à travers une plus grande résolution spatiale. Pour les territoires français ces mesures sont aussi utilisées pour la mise à jour de la carte de déclinaison, publiée tous les cinq ans par l’Institut Géographique National.

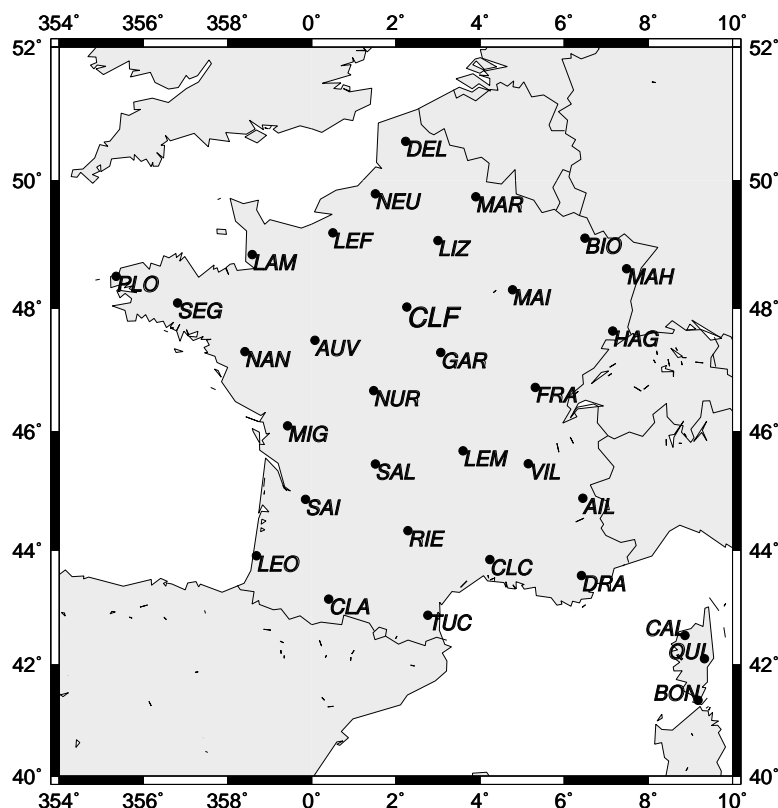


FIG. 3.5: Carte de répartition des stations de répétitions sur la France métropolitaine et la Corse. Les codes de trois lettres servent de dénomination pour les stations.

3.2 Les mesures satellitaires

Les mesures satellitaires assurent quant à elles une couverture homogène de la surface du globe. Le lancement de la mission MAGSAT (de l'anglais « Magnetometer SATellite ») en 1979 a permis, pour la première fois, l'acquisition de données vectorielles. Plus tard, lui ont succédé les missions satellitaires Ørsted, CHAMP et SAC-C respectivement lancées en 1999, juillet et novembre 2000. Les satellites magnétiques Ørsted et CHAMP ont fourni des données qui ont été particulièrement utilisées dans ce mémoire. Nous présentons brièvement leurs caractéristiques dans les deux paragraphes suivants.

3.2.1 Le satellite Ørsted

Ørsted ⁴ du nom du physicien danois du début du XIX^e siècle, est un satellite d'initiative danoise lancé le 23 février 1999. Petit satellite d'un poids total de 62 kg, il est constitué d'un petit corps central (abritant les systèmes de navigation,

⁴Voir la page web : <http://web.dmi.dk/fsweb/projects/oersted/>

de communication et survie des instruments) prolongé par un bras de 8 m (figure 3.6). Ce mât se déploie lors de la mise en orbite et porte les deux magnétomètres : vectoriel relatif (danois, de type fluxgate « CSC » pour *Compact Spherical Coil tri-axial vector magnetometer*) et scalaire absolu (français, de type *OVERHauser* nommé « OVH »).

Les principales caractéristiques orbitales de ce satellite sont :

- une inclinaison de $96,5^\circ$ sur le plan de l'écliptique,
- une orbite elliptique, de périégée et d'apogée respectivement de 650 et 885 km,
- une dérive en heure locale de -0,9 minute/jour.

En d'autres termes, Ørsted ne présente pas une configuration héliosynchrone mais couvre toutes les heures locales en à peu près 800 jours (un peu moins de 2,5 ans). Il vole à une altitude élevée qui lui permet encore, 5 ans après son lancement, de fournir des données de qualité.



FIG. 3.6: *Le satellite Ørsted.*

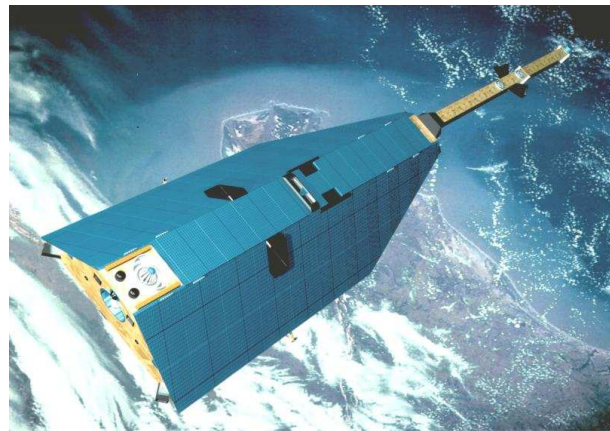


FIG. 3.7: *Le satellite CHAMP.*

3.2.2 Le satellite CHAMP

CHAMP ⁵ (de l'anglais *CHALLENGING Minisatellite Payload*), est un satellite d'initiative allemande avec une participation internationale, lancé le 15 juillet 2000. C'est un satellite assez conséquent tant en masse (plus de 500 kg) qu'en volume (figure 3.7). Ceci provient du double objectif de cette mission : CHAMP n'est en effet pas seulement dédié au géomagnétisme mais doit également répondre

⁵Voir la page web : <http://op.gfz-potsdam.de/champ/>

dans sa conception à des contraintes liées à sa mission d'observation du champ de gravité. Un bras de 4 *m*, donc plus court que celui conçu pour Ørsted, supporte les instruments magnétiques : deux magnétomètres CSC et un OVH.

Les principales caractéristiques orbitales de ce satellite sont :

- une inclinaison de $87,3^\circ$ sur le plan de l'écliptique,
- une orbite quasi circulaire et quasi polaire, d'altitude moyenne de 454 *km* (± 30 *km*),
- une dérive en heure locale de -12 minutes/jour.

CHAMP couvre toutes les heures locales en environ 120 jours (4 mois). Il vole à une altitude basse qui lui permet une plus fine détection des sources crustales.

Chapitre 4

Modélisation par les harmoniques sphériques

« The sciences do not try to explain, they hardly even try to interpret, they mainly make models. By a model is meant a mathematical construct which, with the addition of certain verbal interpretations, describes observed phenomena. »

John Von Neumann (Mathématicien américain, 1903-1957).

Après la mesure du champ magnétique terrestre (chapitre 3), nous rappelons d'abord les méthodes mathématiques traditionnellement utilisées pour la modélisation du champ magnétique terrestre. Ensuite, cette introduction aux développements en séries de polynômes de Legendre et fonctions harmoniques sphériques nous conduit à présenter les modèles de champ géomagnétique obtenus par cette méthode.

4.1 Formalisme mathématique des harmoniques sphériques

Les harmoniques sphériques sont des solutions générales de l'équation de Laplace par séparation de variables. Nous partons de l'hypothèse que le potentiel V développé sur une sphère quelconque (toujours bien sûr dans une région dépour-

vue de sources) présente la forme suivante :

$$V(r, \theta, \phi) = R(r) \cdot \Phi(\phi) \cdot \Theta(\theta).$$

L'équation de Laplace en coordonnées sphériques géocentriques devient :

$$\Delta V(r, \theta, \phi) = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 \theta}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{\sin \theta}{\Theta(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) \\ + \frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Dans l'équation 4.3, la première partie est indépendante de θ et de ϕ tandis que la seconde partie est indépendante de r . Chaque terme peut donc être exprimé en qualité de dérivées entières telles que :

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) = \ell(\ell + 1)R(r) \quad (4.4)$$

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) = \left(\frac{m^2}{\sin \theta} - \ell(\ell + 1) \sin \theta \right) \Theta(\theta) \quad (4.5)$$

$$\frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} = (-m^2) \Phi(\phi) \quad (4.6)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \ell \in N \\ 0 \leq m \leq \ell \end{cases}$$

Les solutions sont donc de la forme :

$$R(r) = C_r^{stea} r^\ell + C_r^{steb} r^{-(\ell+1)} \quad (4.7)$$

$$\Theta(\theta) = C_\theta^{ste} \left(\frac{(1 - \cos^2 \theta)^{\frac{m}{2}}}{\ell!} \left(\frac{d}{d(\cos \theta)} \right)^{\ell+m} (\cos^2 \theta - 1)^\ell \right) \quad (4.8)$$

$$\Phi(\phi) = C_\phi^{ste} \cdot e^{im\phi} \quad (4.9)$$

où $C_{r,\theta,\phi}^{ste}$ sont des constantes.

Étant donné un degré ℓ et un ordre m , le potentiel V a donc ici pour forme :

$$\begin{aligned} V_{\ell,m}(r, \theta, \phi) = C_{\theta,\phi}^{ste} \cdot (C_r^{stea} r^\ell + C_r^{steb} r^{-(\ell+1)}) \cdot \\ \left(\frac{(1 - \cos^2 \theta)^{\frac{m}{2}}}{\ell!} \left(\frac{d}{d(\cos \theta)} \right)^{\ell+m} (\cos^2 \theta - 1)^\ell \right) \cdot e^{im\phi} \end{aligned} \quad (4.10)$$

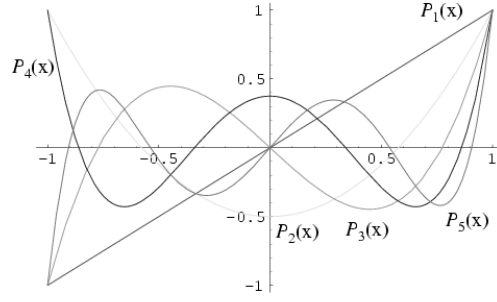


FIG. 4.1: Représentation des premiers polynômes de Legendre $P_\ell(\cos \theta)$ en fonction de la colatitude θ sur une sphère unitaire.

4.1.1 Les polynômes de Legendre

La partie de l'équation 4.11 qui ne dépend que de la variable θ permet d'introduire $P_\ell^m(\cos \theta)$, les fonctions dites « fonctions de Legendre quasi-normalisées au sens de Schmidt¹ » Schmidt [1935], telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_\ell^m(\cos \theta) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{d(\cos \theta)^\ell} (\cos^2 \theta - 1)^\ell \quad \text{si } m = 0, \\ P_\ell^m(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2(\ell-m)!(1-\cos \theta)^m}{(\ell+m)!}} \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^{\ell+m}}{d(\cos \theta)^{\ell+m}} (\cos^2 \theta - 1)^\ell \\ \quad = \sqrt{\frac{2(\ell-m)!(1-\cos \theta)^m}{(\ell+m)!}} \frac{d^m}{d(\cos \theta)^m} P_\ell(\cos \theta) \quad \text{si } m \neq 0 \end{array} \right. \quad (4.11)$$

$P_\ell(\cos \theta)$ sont les polynômes de Legendre (figure 4.1); ils ne dépendent que du degré ℓ .

Étant donné un degré ℓ et un ordre m , la solution à l'équation de Laplace exprimée à l'aide des fonctions de Legendre quasi-normalisées au sens de Schmidt devient :

$$V_{\ell,m}(r, \theta, \phi) = (A_\ell^m r^\ell + B_\ell^m r^{-(\ell+1)}) e^{im\phi} P_\ell^m(\cos \theta) \quad (4.12)$$

où A_ℓ^m et B_ℓ^m sont des constantes.

Les harmoniques sphériques à proprement parler peuvent alors être introduites. Notées $Y_\ell^m(\theta, \phi)$, elles forment un ensemble de fonctions complexes définies sur la sphère et directement proportionnelles aux $P_\ell^m(\cos \theta)$:

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} e^{im\phi} P_\ell^m(\cos \theta) \quad (4.13)$$

¹Cette normalisation est utilisée car elle permet un calcul du spectre du champ magnétique invariant quelles que soient les possibles rotations du système de coordonnées (θ, ϕ) sur la sphère.

Ainsi, la solution de l'équation de Laplace peut être exprimée sous la forme d'une somme d'harmoniques sphériques :

$$V(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} (C_{\ell}^m r^{\ell} + D_{\ell}^m r^{-(\ell+1)}) Y_{\ell}^m(\theta, \phi) \quad (4.14)$$

où C_{ℓ}^m et D_{ℓ}^m sont des constantes.

4.1.2 Développement du potentiel

Comme le champ recherché est réel, seule la partie réelle des harmoniques sphériques est conservée. L'expression d'un potentiel, solution de l'équation de Laplace, suit alors un développement où deux parties, interne et externe, apparaissent. La solution générale a la forme suivante :

$$\begin{aligned} V(r, \theta, \phi) &= V_i(r, \theta, \phi) + V_e(r, \theta, \phi) \\ &= a \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \left(\frac{a}{r}\right)^{\ell+1} (g_{\ell}^m \cos m\phi + h_{\ell}^m \sin m\phi) P_{\ell}^m(\cos \theta) \\ &\quad + a \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \left(\frac{r}{a}\right)^{\ell} (q_{\ell}^m \cos m\phi + s_{\ell}^m \sin m\phi) P_{\ell}^m(\cos \theta) \end{aligned} \quad (4.15)$$

où V_i et V_e sont les potentiels interne et externe, exprimés dans le repère géocentrique sphérique (r, θ, ϕ) . La surface de référence est ici la surface de la Terre définie par son rayon moyen : $a = 6\,371,2 \text{ km}$. Le degré et l'ordre des termes du développement sont notés ℓ et m . (g_{ℓ}^m, h_{ℓ}^m) ; (q_{ℓ}^m, s_{ℓ}^m) sont respectivement les coefficients de Gauss internes et externes. P_{ℓ}^m désigne la fonction associée de Legendre, semi-normalisée au sens de Schmidt [Langel, 1987].

L'ionosphère est considérée comme externe sur la surface de la Terre :

$$V_{iono}(r, \theta, \phi) = a \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \left(\frac{r}{a}\right)^{\ell} (c_{\ell}^m \cos m\phi + d_{\ell}^m \sin m\phi) P_{\ell}^m(\cos \theta), \quad (4.16)$$

mais avec 2.7 et 4.16, à l'altitude du satellite, l'ionosphère est une source interne :

$$\begin{aligned} V_{iono}(r, \theta, \phi) &= a \sum_{\ell=1}^{\infty} - \left(\frac{\ell}{\ell+1}\right) \left(\frac{a+h}{a}\right)^{2\ell+1} \left(\frac{a}{r}\right)^{\ell+1} \\ &\quad \cdot \sum_{m=0}^{\ell} (c_{\ell}^m \cos m\phi + d_{\ell}^m \sin m\phi) P_{\ell}^m(\cos \theta) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Pour chaque degré ℓ , l'énergie du champ magnétique interne se calcule par la somme [Mauersberger, 1956; Lowes, 1974] :

$$R_{\ell} = (\ell+1) \sum_{m=0}^{\ell} [(g_{\ell}^m)^2 + (h_{\ell}^m)^2]. \quad (4.18)$$

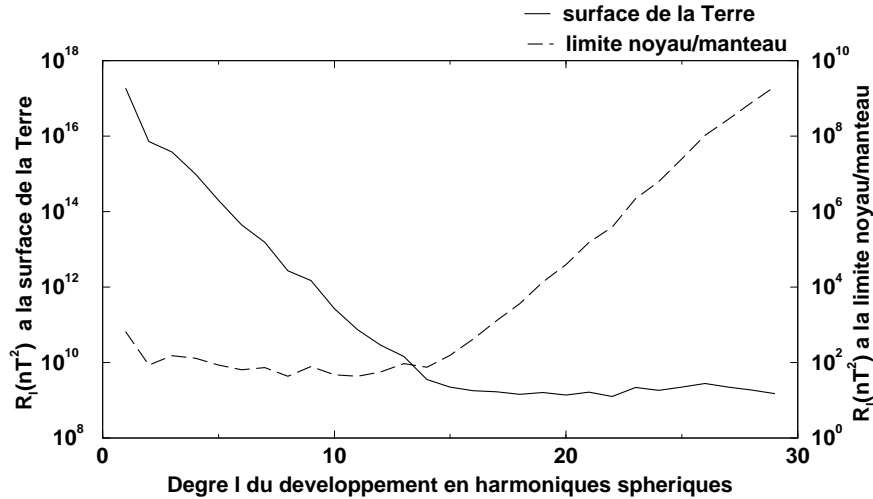


FIG. 4.2: Spectre d'énergie du champ magnétique terrestre calculé, à la surface de la Terre et à la limite noyau-manteau à partir d'un modèle en harmoniques sphériques jusqu'au degré/ordre 29 (modèle CO2 d'après Holme et al. (2002)).

La figure 4.2 représente le spectre d'énergie du champ géomagnétique interne calculé sur deux sphères de référence : à la surface de la Terre ($r = a = 6\,371,2\text{ km}$) et à la limite noyau-manteau ($r = 3\,485,0\text{ km}$). Ce spectre présente, aux deux rayons de calcul, une rupture autour du degré/ordre 13 du développement en harmoniques sphériques. Ce changement de pente des spectres est interprété comme la transition entre deux domaines :

- les bas degrés ($\ell \leq 13$) où le champ d'origine nucléaire domine et présente un spectre de bruit blanc à la surface du noyau ;
- les hauts degrés ($\ell \geq 13$) où le champ d'origine crustale, de plus petite longueur d'onde, domine et présente à son tour un spectre de bruit blanc à la surface de la Terre.

Le degré ℓ du développement en harmoniques sphériques est directement reliable à la longueur d'onde spatiale horizontale λ par l'approximation :

$$\lambda \approx 2\pi a/\ell.$$

4.1.3 Expression et résolution du problème inverse

L'analyse en harmoniques sphériques est utilisée pour retrouver la valeur des coefficients de Gauss à partir de mesures magnétiques. Les coefficients de Gauss obtenus constituent ce que l'on appelle un « modèle de champ ». La méthode d'in-

version appliquée est celle des moindres carrés, qui consiste à minimiser le carré de l'écart entre une mesure donnée et la prédiction localisée au même endroit. Si les données dont nous disposons sont vectorielles, il n'existe qu'une seule solution. La résolution est alors directe. Si les données sont essentiellement scalaires, elles ne sont pas linéairement reliées aux coefficients de Gauss. La résolution du problème inverse est ambiguë et la solution non-unique. Dans notre cas, nous disposons d'une combinaison des composantes magnétiques du champ (vectorielles : X, Y, Z ; scalaires : F, H ; directionnelles : D, I). Nous avons donc utilisé une méthode hybride basée sur des itérations [Cain et al., 1965].

Notons C_i la $i^{\text{ème}}$ mesure d'une composante du champ magnétique terrestre. La résolution du problème inverse consiste donc à minimiser χ^2 telle que :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N_{obs}} \omega_i (C_i^{obs} - C_i^{mod})^2 \quad (4.19)$$

où N_{obs} est le nombre total de mesures utilisées dans l'inversion, ω_i est le poids attribué à la composante i , et C_i^{mod} est la valeur du champ prédite par le modèle pour la mesure de C_i^{obs} .

C_i^{mod} dépend de i , c'est à dire de la mesure de départ donc de sa position en espace (r_i, θ_i, ϕ_i) et en temps (t_i). En linéarisant le problème en un développement en série de Taylor au premier ordre, C^{mod} peut être exprimé en fonction d'un modèle de départ C^{mod_0} . Ainsi :

$$C^{mod} \simeq C^{mod_0} + \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial C^{mod}}{\partial g_k} \right)_{g_0} \delta g_k \quad (4.20)$$

C^{mod_0} et $\left(\frac{\partial C^{mod}}{\partial g_k} \right)_{g_0}$ sont les valeurs de C^{mod} et de ses dérivées par rapport à g_k , l'ensemble des coefficients de Gauss du modèle, calculés en une solution approchée g_0 . La solution g est atteinte lorsque

$$\left(\frac{\partial \chi^2}{\partial g_k} \right)_{g_k} \simeq \left(\frac{\partial \chi^2}{\partial g_k} \right)_{g_0} = 0.$$

En introduisant l'équation 4.20 dans l'équation 4.19, nous obtenons :

$$\left(\frac{\partial \chi^2}{\partial g_k} \right)_{g_0} = 0 = -2 \sum_{i=1}^{N_{obs}} \omega_i \left[C_i^{obs} - C^{mod_0} - \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial C^{mod}}{\partial g_j} \right)_{g_0} \delta g_j \right] \left(\frac{\partial C^{mod}}{\partial g_k} \right)_{g_0} \quad (4.21)$$

Pour le coefficient j , l'équation normale s'écrit :

$$\sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^{N_{obs}} \omega_i \left(\frac{\partial C^{mod}}{\partial g_j} \right)_{g_0} \left(\frac{\partial C^{mod}}{\partial g_k} \right)_{g_0} \right) \delta g_j = \sum_{i=1}^{N_{obs}} \omega_i (C_i^{obs} - C^{mod_0}) \left(\frac{\partial C^{mod}}{\partial g_k} \right)_{g_0} \quad (4.22)$$

La notation C peut donc être remplacée par les composantes du champ magnétique. Le système d'équations à résoudre devient :

$$\sum_{j=1}^N x_j a_{jk} = b_k \quad (4.23)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_j = \delta g_j \\ a_{jk} = \sum_{i=1}^{N_x} \omega_i^X \left(\frac{\partial X}{\partial g_j} \right)_{g_0} \left(\frac{\partial X}{\partial g_k} \right)_{g_0} + \sum_{i=1}^{N_y} \omega_i^Y \left(\frac{\partial Y}{\partial g_j} \right)_{g_0} \left(\frac{\partial Y}{\partial g_k} \right)_{g_0} \\ \quad + \sum_{i=1}^{N_z} \omega_i^Z \left(\frac{\partial Z}{\partial g_j} \right)_{g_0} \left(\frac{\partial Z}{\partial g_k} \right)_{g_0} + \sum_{i=1}^{N_f} \omega_i^F \left(\frac{\partial F}{\partial g_j} \right)_{g_0} \left(\frac{\partial F}{\partial g_k} \right)_{g_0} \\ b_k = \sum_{i=1}^{N_x} \omega_i^X \left(\frac{\partial X}{\partial g_k} \right)_{g_0} (X_i^{obs} - X^{mod_0}) + \sum_{i=1}^{N_y} \omega_i^Y \left(\frac{\partial Y}{\partial g_k} \right)_{g_0} (Y_i^{obs} - Y^{mod_0}) \\ \quad + \sum_{i=1}^{N_z} \omega_i^Z \left(\frac{\partial Z}{\partial g_k} \right)_{g_0} (Z_i^{obs} - Z^{mod_0}) + \sum_{i=1}^{N_f} \omega_i^F \left(\frac{\partial F}{\partial g_k} \right)_{g_0} (F_i^{obs} - F^{mod_0}) \end{array} \right. \quad (4.24)$$

Le système d'équations 4.24 est alors résolu à partir d'un modèle initial mod_0 relativement proche de la solution (Ultré-Guérard [1996] a estimé l'écart quadratique moyen maximal entre le modèle initial et le modèle final à 10 000 nT environ). La variation séculaire est introduite grâce à une dépendance temporelle des coefficients :

$$g(t) = g(T_0) + \dot{g}(t - T_0) \quad (4.25)$$

Dans la suite de ce chapitre, nous la supposons comme linéaire pour les périodes de temps relativement courtes (inférieures à 2 ans).

4.2 Les modèles de champ magnétique en harmoniques sphériques

4.2.1 La sélection de données

Avant même de modéliser le champ magnétique terrestre par des développements en harmoniques sphériques, la question de la sélection des données magnétiques satellitaires se pose. Celles-ci se doivent d'être choisies d'abord d'après les valeurs des indices géomagnétiques, ensuite d'après leur position en heure locale. Le but de ces pré-traitements est de minimiser l'influence des champs externes.

Les indices géomagnétiques

Les indices géomagnétiques² traduisent l'activité magnétique externe imposée principalement par les humeurs du Soleil. Ils quantifient l'importance des champs magnétiques magnétosphériques et ionosphériques, par rapport au champ magnétique interne.

Le nombre d'indices géomagnétiques est assez important. Leur élaboration fait, en général, appel à la même démarche : des mesures des observatoires magnétiques sont, selon leur position à la surface du globe, utilisées dans le calcul de l'un ou l'autre des indices. Nous ne rentrons pas ici dans les détails des calculs des indices géomagnétiques. En effet, une littérature abondante et complète existe sur le sujet [Bartels et al., 1939; Mayaud, 1980; Rangarajan, 1989; Menvielle et Berthelier, 1991].

Nous donnons simplement les principales caractéristiques des indices utilisés dans ce mémoire : l'indice Kp et l'indice Dst³.

• L'indice Kp

Kp est un indice d'activité magnétique planétaire ayant une échelle quasi-logarithmique (0o, 0+, 1-, 1o, 1+,... 9-, 9o) et des valeurs tri-horaires. Les 12 observatoires magnétiques des régions subaurorales (autour de $\pm 45^\circ$ latitude), dont les mesures sont utilisées pour le calcul de l'indice Kp, sont : SIT, MEA, OTT, FRD, LER, LOV, ESK, RSK, WNG, HAD, CAN et EYR (voir annexe B pour leur localisation géographique).

• L'indice Dst

Dst est un indice d'activité magnétique qui caractérise l'intensité de l'électrojet équatorial symétrique (ou anneau de courant de la magnétosphère). Son échelle est linéaire, directement en nT et ses valeurs horaires. Les 4 observatoires magnétiques dont les mesures sont utilisées pour le calcul de l'indice Dst : sont HON, SJG, HER et KAK (voir annexe B pour leur localisation géographique).

Les données « réellement de nuit »

Une sélection d'après les indices géomagnétiques ne suffit pas pour s'affranchir des effets diurnes du Soleil et de la variation journalière produite. Les données satellitaires sont généralement sélectionnées en heure locale 22H00/6H00.

La méthode que nous proposons ici, et qui fait l'objet d'un article publié en

²Voir la page web : <http://www.cetp.ipsl.fr/~isgi/>

³De l'anglais *Disturbance Storm-Time*

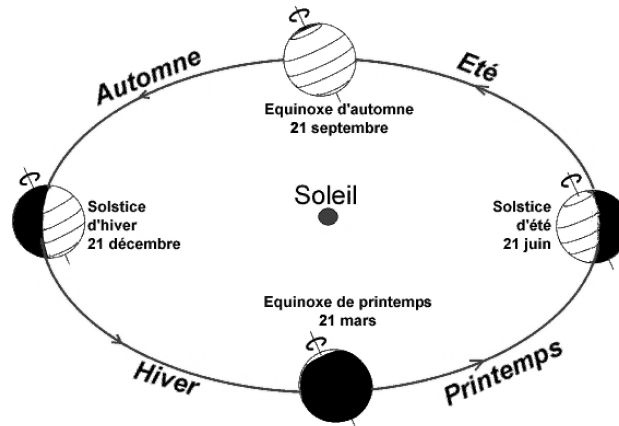


FIG. 4.3: *Position de la Terre au cours de sa révolution annuelle autour du Soleil.*

2003 [Chambodut et al., 2003], est de ne conserver que les mesures faites par le satellite lorsque celui-ci est lui-même dans l'ombre de la Terre. La principale différence avec la méthode dite « de l'heure locale » résulte du fait que les données conservées sont alors réellement de nuit. La figure 4.3 représente les positions de la Terre par rapport au Soleil au cours d'une année. Quelle que soit l'inclinaison de la Terre sur son plan de l'écliptique, c'est à dire, quelle que soit la saison, la méthode de sélection en heure locale conserve les données par bandes entières de longitude, d'un pôle géographique à l'autre. Au contraire, la méthode que nous proposons ici tient compte de l'inclinaison de la Terre sur son plan de l'écliptique. Ne sélectionner que les données « réellement de nuit » présente toutefois d'évidentes limites pour une répartition homogène des données à la surface du globe. En effet, aucune donnée ne sera conservée au-dessus du pôle Sud au solstice d'hiver et du pôle Nord au solstice d'été. Il nous apparaît préférable de centrer temporellement la sélection de données sur un équinoxe. L'algorithme que nous avons développé pour la sélection des « données réellement de nuit » est construit à partir d'une éphéméride. Pour chaque mesure magnétique, la position relative du soleil par rapport au satellite est déterminée. Ensuite, l'altitude de l'orbite est prise en compte. Pour qu'une donnée soit conservée, le satellite et le point à l'aplomb du satellite sur la surface du globe doivent être dans l'ombre de la Terre. Cet algorithme est présenté en Annexes A de ce mémoire.

Résumé de l'article :

**La sélection des données dans la modélisation
du champ géomagnétique**Aude Chambodut, Judith Schwarte, Benoit Langlais, Herman
Lühr et Mioara Mandeapublié dans *OIST-4 Proceedings*, 2003.

Les lancements des satellites magnétiques de haute précision Ørsted et CHAMP ont ouvert de nouveaux horizons à une meilleure compréhension du champ magnétique terrestre. Des modèles de champ magnétique en harmoniques sphériques ont été développés par plusieurs groupes de chercheurs à partir de mesures acquises au cours de ces deux missions. Toutefois, avant toute modélisation, les données scalaires et vectorielles sont sélectionnées selon plusieurs critères afin de réduire le plus possible les contributions externes par rapport au champ magnétique interne à modéliser. Ainsi, les données et les indices géomagnétiques associés à la date des mesures sont analysés. Les données sont seulement conservées si elles correspondent à des périodes géomagnétiquement calmes et à une position non éclairée par le Soleil.

Cependant, du fait des différentes paramétrisations des analyses en harmoniques sphériques (degré/ordre des développements en harmoniques sphériques pour les contributions internes et externes) mais également à cause des multiples critères de sélection des mesures (valeurs faibles pour les indices géomagnétiques : Kp , Dst , etc ; définition variable de la notion de « donnée de nuit » ; données seulement scalaires aux hautes latitudes géomagnétiques), les modèles obtenus sont différents. Afin de quantifier l'influence de ces paramètres, nous calculons plusieurs modèles basés sur différents sous-ensembles de données obtenus à partir de divers critères de sélection. Nous évaluons d'abord l'influence du choix des indices géomagnétiques. Ensuite, nous présentons différentes méthodes de sélection des données de nuit afin d'obtenir un ensemble de mesures où l'influence des variations diurnes des champs externes est amenuecée. Enfin, nous comparons nos modèles de champ géomagnétique interne avec ceux précédemment publiés [Holme et al., 2002; Langlais et al., 2003].

THE SELECTION OF DATA IN FIELD MODELING

Aude Chambodut¹, Judith Schwarte^{1,2}, Benoit Langlais³, Herman Lühr², and Mioara Mandea¹¹Laboratoire de géomagnétisme, Institut de Physique du globe de Paris, Paris, France²GeoForschungsZentrum Potsdam, Section 2.3, Potsdam, Germany³NAS/NRC at GSFC/NASA, Geodynamics Branch, Greenbelt, Md, USA

ABSTRACT

The launch of the Ørsted and CHAMP high-precision geomagnetic field satellites has opened new horizons for a better understanding of the Earth's magnetic field. Geomagnetic field models based on Spherical Harmonic Analysis (SHA) of geomagnetically quiet, night-time, vector and scalar measurements acquired on-board the Ørsted and CHAMP spacecrafts have been estimated by different groups of researchers. Because of the differing SHA parametrizations (degree/order of internal/external parts) and differing data selection criteria (geomagnetic indices: Kp , Dst , etc; night-side data; only scalar data at high geomagnetic latitudes), the resulting models are different. In order to quantify these discrepancies, we computed different field models based on different subsets of data (obtained using various selection criteria). We first evaluate the influence of the geomagnetic indices used on the external field. Next, we present different methods to select the night-side dataset. Finally, we compare our models with some previously published models (Langlais *et al.*, 2002; Holme *et al.*, 2002).

Key words: magnetic satellite data, field modeling, geomagnetic indices.

1. INTRODUCTION

Ørsted, CHAMP and SAC-C were launched in February 1999, July 2000 and November 2000, respectively. These three satellites monitor and map variations of the Earth's magnetic field. Equivalent measurements had been done only once before, with MAGSAT (1979-1980). At the satellite altitude, contributions from the core, the lithosphere and the ionosphere are considered as internal sources, and the ones from magnetosphere as external sources. The use of appropriate selection criteria minimize the influence of the external sources, thus allowing us to properly model the internal (static and time varying) Earth's magnetic field. Data selection based on

geomagnetic indices and local time removes most of the aperiodic and periodic magnetic variations of external origin. The aim of this study is to refine selection criteria in order to reduce these external perturbations. Thus we are interested in determining the influence of selection criteria on magnetic models based on short (\simeq two months) or long (\simeq six months) datasets.

2. MODELING TWO-MONTH DATASETS

In order to avoid any considerations linked to secular variation, we restricted our study to a two-month period, from August 22nd to October 23rd 2001. Various models are computed, using scalar and vector data from both Ørsted and CHAMP satellites for the same period of time. Here the purpose is to modify only one selection criterion in each case, and to see its influence on the resulting model.

2.1. Selection criteria

The following selection criteria are identical for all models computed in this study:

- vector data are used below $\pm 50^\circ$ absolute geomagnetic latitude,
- scalar data are used above $\pm 50^\circ$ absolute geomagnetic latitude or when vector data are missing,
- outliers are removed using methods based on first and second time derivatives (Langlais *et al.*, 1999).

In field modeling, commonly used magnetic indices to select the measurements, are the planetary index Kp , and the ring current one, Dst . Quiet magnetic periods are defined, using five different Kp ranges, and two Dst ranges. There are thus ten different datasets for each satellite.

Night side data are often selected using local time. In Holme *et al.* (2002) another method is used: the authors keep the data when the Sun is at least 5° below horizon.

In the following we compare the models computed when the above selection criteria are applied. For each satellite, twenty datasets are obtained, with the following selection criteria:

$$\left\{ \begin{array}{l} Kp(t) \leq 1^+ \quad \text{and} \quad Kp(t \pm 3) \leq 2^- \\ Kp(t) \leq 1^+ \quad \text{and} \quad Kp(t \pm 3) \leq 2^0 \\ Kp(t) \leq 2^- \quad \text{and} \quad Kp(t \pm 3) \leq 2^0 \\ Kp(t) \leq 2^- \quad \text{and} \quad Kp(t \pm 3) \leq 2^+ \\ Kp(t) \leq 2^0 \quad \text{and} \quad Kp(t \pm 3) \leq 2^+ \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |Dst(t)| \leq 5\text{nT} \quad \text{and} \quad \left| \frac{dDst(t)}{dt} \right| \leq 3\text{nT}\cdot\text{hour}^{-1} \\ |Dst(t)| \leq 10\text{nT} \quad \text{and} \quad \left| \frac{dDst(t)}{dt} \right| \leq 3\text{nT}\cdot\text{hour}^{-1} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{local time 2200-0600} \\ \text{Sun at least } 5^\circ \text{ below horizon} \end{array} \right.$$

An uneven geographical data distribution may produce large errors in models. In order to minimize this problem, we rejected the selection for which $|Dst(t)| \leq 5 \text{ nT}$ and $|dDst(t)/dt| \leq 3 \text{ nT}\cdot\text{hour}^{-1}$. This selection criterion is actually the most restrictive, and may be inappropriate with only two months of data. For $|Dst(t)| \leq 10 \text{ nT}$, we can notice some gaps, mostly North-South. However, data homogenization on the sphere will provide uniformly distributed datasets for our study.

2.2. Modeling parameters

After the selection, identical modeling parameters are considered for all datasets. The data distribution is homogenized. An equiangular grid of $5^\circ \times 5^\circ$ is defined: a maximum of ten measurement locations per bin are randomly sorted from each dataset.

A geographic weighting scheme is applied on satellite datasets. Considering a near-polar orbit satellite, there are much more data near the pole than near the equator. Such an uneven coverage can be counter-balanced by using normalized weights in $\sin(\theta_i)$ for each data i at the latitude θ_i . This is the approach we used for CHAMP data. For Ørsted, we combined this geographic scheme to another one based on the attitude uncertainty related to a poorer determination of the rotation angle around the pointing axis of the Star IMager (SIM) (Holme, 2000).

Finally the SHA is developed up to degree/order 20 for internal field, 0 for secular variation and 2 for external field, with a first degree/order Dst dependence.

2.3. Results

Results are presented in terms of magnetic field energy spectra and scalar residuals between observations and predictions. Fig. 1 (top and bottom) shows the spectra for CHAMP and Ørsted based models, respectively. All models give similar spectra; some small differences occur and they are discussed below.

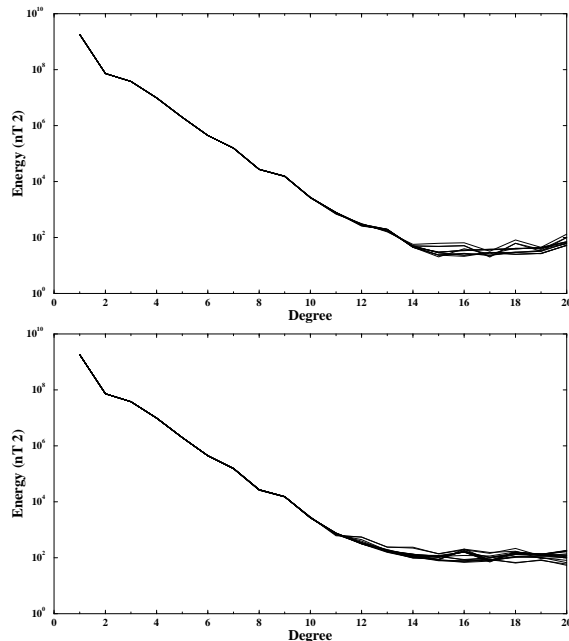


Figure 1. Energy spectra of the two-month field models for CHAMP (top) and Ørsted (bottom) satellites.

Fig. 2 (top) shows the differences of level in spectra for different Kp selections. The more restrictive the Kp selection is, the lower and flatter the spectrum is for high degrees. Fig. 2 (bottom) shows the comparison of night-side methods. A conservative Kp selection, keeping only data when the Sun is at least 5° below horizon, gives a lower energy for high degrees. For a less conservative Kp selection, energy spectra are similar whatever the night-side method.

In Fig. 3 we plotted the residuals in nT, between the selected scalar data and the values predicted by the corresponding field model. The results show that a lower Kp range gives a less energetic spectrum. For the same reason, and because it permits the retention of more data for the two-month case, the '5° below horizon' selection is also preferable to the 2200-0600 local time selection. We were not able to distinguish the influence of the $Kp(t \pm 3)$ and of the Dst selections.

3. MODELING SIX-MONTH DATASETS

A six-month dataset is also defined, from June 18th to December 23rd 2001, around autumn equinox. This longer time period gives larger datasets, thus allowing us to test another more restrictive selection criterion, we call 'real shadow side'.

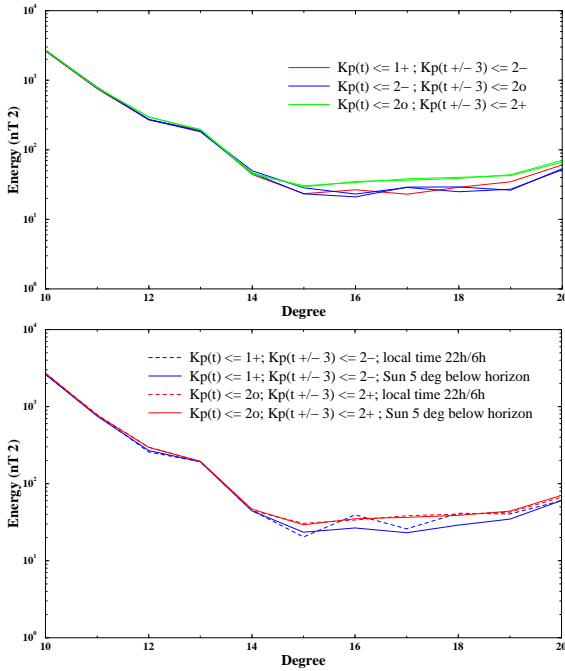


Figure 2. Details of the energy spectra of the two months field models for CHAMP satellite: *Kp* influence (top); night side differences (bottom).

3.1. Selection criteria

Identical selection criteria on scalar/vector data as for the two-month case are applied. We used the best *Kp* selection we deduced from the two-month datasets. Complete selection criteria are described as:

$$Kp(t) \leq 1^+ \quad \text{and} \quad Kp(t \pm 3) \leq 2^-$$

$$\begin{cases} |Dst(t)| \leq 5 \text{ nT} & \text{and} & \left| \frac{dDst(t)}{dt} \right| \leq 3 \text{ nT} \cdot \text{hour}^{-1} \\ |Dst(t)| \leq 10 \text{ nT} & \text{and} & \left| \frac{dDst(t)}{dt} \right| \leq 3 \text{ nT} \cdot \text{hour}^{-1} \end{cases}$$

The night side data are now defined by:

$$\begin{cases} \text{local time 2200-0600} \\ \text{position of the Sun } 5^\circ \text{ below horizon} \\ \text{real shadow side} \end{cases}$$

In order to avoid the disturbances produced by the Sun (temperature, particles) on the satellite, we decided to keep only the measurements made in the shadow of the Earth. Fig. 4 shows the different night-side definitions. This method, as the 5° below horizon one, follows the inclination of the Earth on the ecliptic plane with the seasons (this is the reason why we consider three months before/after the autumn equinox).

3.2. Modeling Parameters

The modeling parameters are nearly identical to those used for the two-month models. The only differences reflect the geographical distribution (a

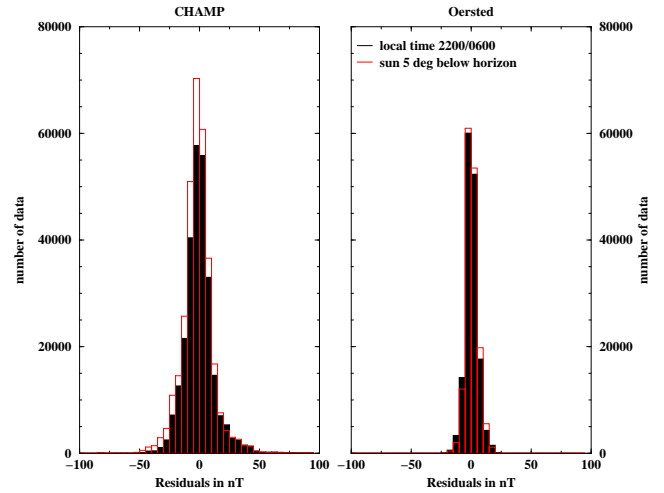


Figure 3. Distributions of the residuals of the scalar data (field measured - field modeled) for CHAMP (left) and Ørsted (right) satellites: Local time 2200-0600 (black); Sun 5° below horizon (red) selection. All histograms are plotted in number of data.

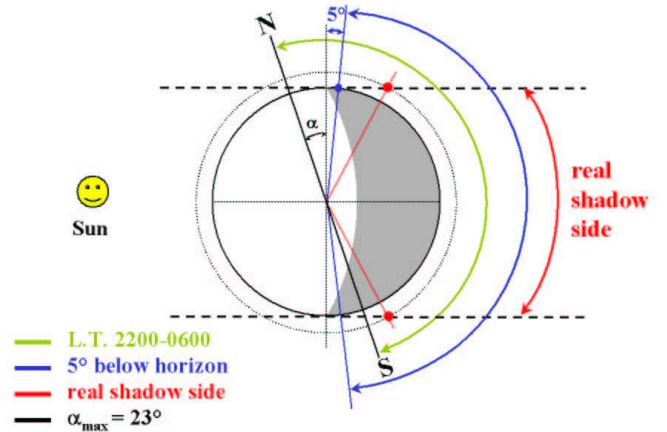


Figure 4. Three methods to define the night side.

$3^\circ \times 3^\circ$ grid is used), and SHA degree and order are higher: 29 for internal field, 10 for secular variation and 2 for external field, with a first degree/order *Dst* dependence.

3.3. Results

We use two reference models to compare the spectra of six-month models: the Ø19992000_SVM model (Langlais *et al.*, 2002) computed with data from Ørsted satellite over 14 months and the CO2 model (Holme *et al.*, 2002) obtained from different sources of data (CHAMP, Ørsted, Ørsted-2/SAC-C satellites and ground-based observatories) over 17 months. To quantify the effect of data selection on the presented field models, the resulting energy magnetic spectra for each model are presented in Fig. 5. Also shown are the distribution of residuals (Fig. 6) of the scalar data compared to the Ørsted models. Thus we can compare those 4 histograms to each other. The dis-

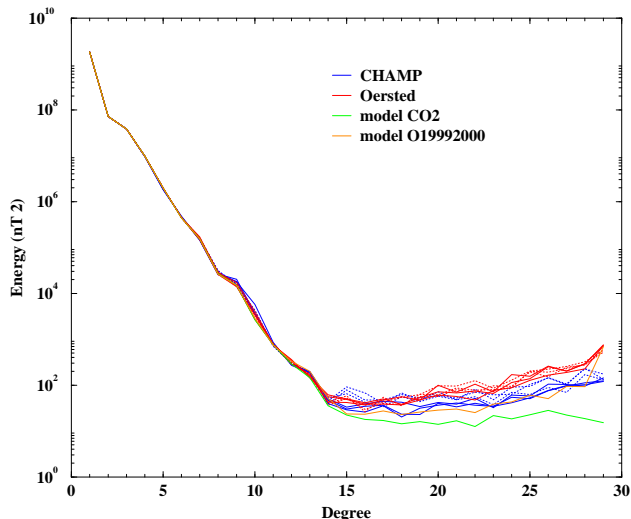


Figure 5. Energy spectra of the six-month field models for CHAMP (blue) and Ørsted (red) satellites. The spectra of the CO2 model (green) and of the Ø19992000_SVM model (orange) are also plotted.

persion of residuals is much more important for a local time selection (amplitude: 70 nT) than for a real shadow side selection (amplitude: 35 nT). The residuals are lower for a smaller Dst range. Results on each component of vector data (X, Y, Z) are nearly the same. The choice of the real shadow side data allows us to improve our models.

4. CONCLUSION

In order to improve the utilization of the unique datasets provided by satellite magnetometry missions, we analyzed the influence of data selection on the resulting field models. The choice of 'quiet' geomagnetic indices ranges (Kp , Dst), and methods used to determine the night side data are important selection parameters. They have to be carefully determined in order to build data sets of high quality, and will depend, in part, on the time duration of the data set.

In this paper we discuss geomagnetic models computed with different data distributions obtained with various selection criteria, and we develop a new method to define the night data, called 'real shadow side' (let us emphasize that this method requires a dataset longer than one year, or a time selection centered on an equinox). In all studied cases, the most conservative selection based on geomagnetic indices is better and must be applied. Concerning the night side data selection, we note that if the number of data kept after the geomagnetic indices selection does not provide an even geographical data distribution, the '5° below horizon' method has to be preferred to the 'real shadow side' one. This is particularly true when short (\simeq two months) time periods are considered. But for longer time period (spanning at least

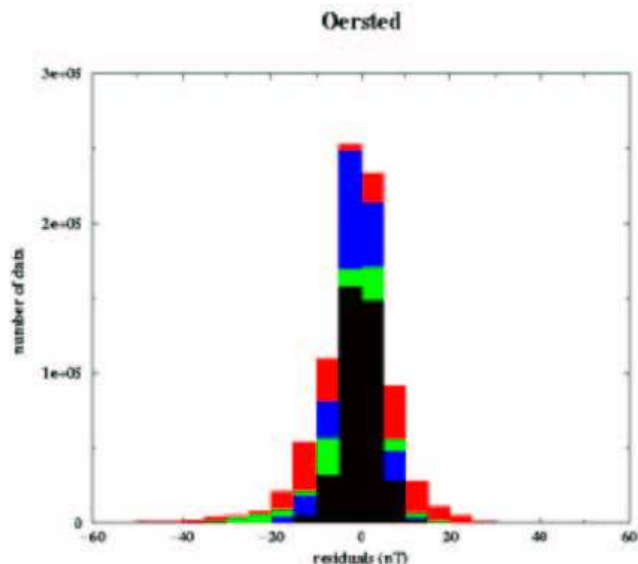


Figure 6. Distributions of the scalar data residuals (field measured - field modeled). The different selections of data are: $|Dst(t)| \leq 10nT$ and local time 2200-0600 (red); $|Dst(t)| \leq 10nT$ and real shadow side data (blue); $|Dst(t)| \leq 5nT$ and local time 2200-0600 (green) and $|Dst(t)| \leq 5nT$ and real shadow side data (black).

six months), the real shadow side selection is more appropriate to reduce the magnetic perturbations of external origin.

ACKNOWLEDGMENTS

Authors wish to thank the many scientists and engineers that contributed to the development, the launch and the ground section of the Ørsted and CHAMP missions. J. Schwarte is supported by a Marie Curie fellowship. B. Langlais is supported by a NAS/NRC postdoctoral fellowship.

REFERENCES

- Holme R., 2000, Modelling of attitude error in vector magnetic data: application to Ørsted data, *Earth Planets Space*, 52, 1187-1197.
- Holme R., Olsen N., Rother M. and Lühr H., 2002, CO2: A CHAMP magnetic field model. In: *Proceedings of the First CHAMP Science Meeting*, Springer Verlag, in press.
- Langlais B., Ultré-Guérard P., Vernin C., Mandaia M., Cohen Y. and Hulot G., 1999, Ørsted: IGP commissioning of the OVH magnetometer, *technical report CNES, OERS.RP_0000_0031_IPG*.
- Langlais B., Mandaia M. and Ultré-Guérard P., 2002, High resolution magnetic field modeling: application to MAGSAT and Ørsted data., *Phys. Earth Planet. Inter.*, in press.

4.2.2 La paramétrisation des champs externes

Bien que le pré-traitement des données satellitaires aide à diminuer l'importance des contributions externes, l'influence des critères de sélection de données est non négligeable. Comme le montre l'étude précédente, un même ensemble de données peut, de par la sélection qui lui est appliqué, donner lieu à l'obtention de modèles de champ différents. Le modelisateur doit faire un choix équilibré entre sélection drastique des mesures satellitaires et couverture homogène de la sphère terrestre par les données. Une solution alternative à ce problème est la paramétrisation des champs externes et la correction des données avant modélisation.

Dans cette partie, nous présentons une étude réalisée en collaboration avec Judith Schwarte sur la paramétrisation des grandes échelles de champ produite par l'anneau de courant de la magnétosphère. Ce travail est présenté plus loin dans un article publié en 2003 [Schwarte et al., 2003]. En plus de cette étude, nous avons examiné l'effet de cette paramétrisation sur les modèles de champ interne. Ainsi, deux modèles de champ sont obtenus à partir du même ensemble initial de données, qui est ou non corrigé des grandes échelles magnétiques (développement en harmoniques sphériques de bas degré/ordre) dues à l'anneau de courant de la magnétosphère. L'ensemble initial de données est composé des mesures vectorielles fournies par le satellite CHAMP, pendant la période du 19 juin au 26 septembre 2002. Les corrections appliquées aux pôles sont celles discutées par Stauning et Primdahl [2000] et Schwarte [2004]. Ensuite, les données sont sélectionnées selon les indices géomagnétiques ($Kp(t) \leq 1^+$ et $Kp(t \pm 3) \leq 2^-$, $|Dst(t)| \leq 10 \text{ nT}$ et $|\frac{Dst(t)}{dt}| \leq 3 \text{ nT.h}^{-1}$) et selon l'heure locale (22H00-06H00). Une homogénéisation spatiale des mesures est enfin appliquée sur l'ensemble de données présélectionnées. Dix mesures sont aléatoirement conservées pour chaque surface de $9^\circ \times 9^\circ$ sur la sphère.

Cette période de 3 mois de données a été choisie car elle présente une configuration orbitale optimale du satellite CHAMP pour l'application de la méthode de paramétrisation des grandes échelles du champ magnétosphérique. En effet, tous les 5 jours, le satellite repasse sensiblement par la même orbite, donc survole la même région du globe. De plus, avec une période de seulement 3 mois de données, nous avons la possibilité de négliger le calcul de la variation séculaire tout en conservant une couverture homogène des données nécessaire au futur développement en harmoniques sphériques.

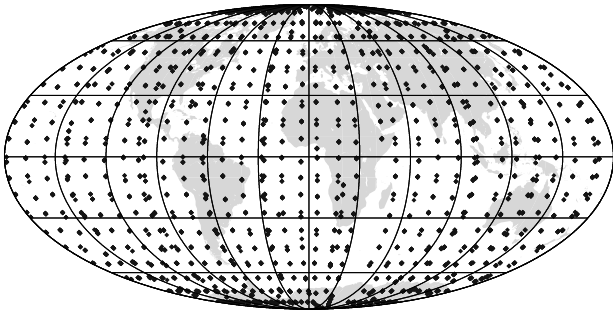


FIG. 4.4: *Distribution des données vectorielles utilisées dans la modélisation des données corrigées de l'influence de l'anneau de courants et non corrigées.*

La distribution obtenue est présentée sur la figure 4.4. L'homogénéisation sur la sphère ne peut être plus fine sous peine de faire apparaître de larges zones vides de mesure (Sud Est de l'Afrique). La paramétrisation des champs externes, présentée dans l'article Schwarte et al. [2003], est appliquée sur cet ensemble de données; ainsi, les données où la correction est la plus forte (celles comportant un indice Dst supérieur à $10 nT$) ne sont pas conservées.

Les différences entre modèles sont présentées de deux manières. D'abord la différence entre les deux spectres des modèles (figure 4.6) fait apparaître la prépondérance d'un terme dipolaire suivi au plus haut degré/ordre du développement en harmoniques sphériques d'une décroissance régulière jusqu'au degré/ordre 13. Entre les degrés 13 et 20, le spectre ne fait apparaître que des oscillations de l'ordre de 10 à $50 nT^2$. Ces dernières sont ici considérées comme négligeables et assimilées à du bruit, car la paramétrisation des champs externes ne considère que les grandes échelles spatiales du champ magnétique induit par l'anneau de courants magnétosphériques (figure 4.5). Ensuite, les différences sur les composantes X et Z à la surface de la Terre (figure 4.7) présentent bien la géométrie attendue d'un champ principalement dipolaire de l'ordre de quelques dizaines de nT . Les différences plus importantes observées sur la composante Z au sud du continent africain peuvent être liées à un manque de données dans cette région (voir encore figure 4.4).

Il apparaît certain que la paramétrisation des champs magnétiques externes demande une description dans le système de coordonnées géomagnétiques et dans un repère temporel basé sur l'heure locale. L'importance des variations temporelles des champs externes ne peut être correctement prise en considération sans ce changement de référentiel.

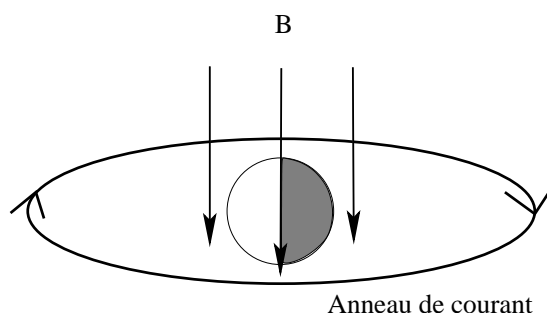


FIG. 4.5: *L'anneau de courant de la magnétosphère situé à une distance de plusieurs rayons terrestres produit un champ magnétique homogène à la surface de la planète. Dans le développement en harmoniques sphériques, le champ résultant est décrit par le terme q_1^0 (d'après Schwarte (2004)).*

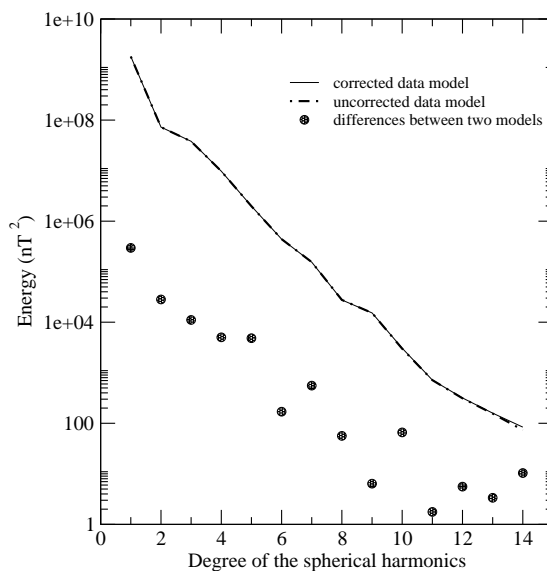


FIG. 4.6: *Spectres de deux modèles de champ obtenus en utilisant des données corrigées et non corrigées. Les deux spectres étant étroitement confondus sur ce graphique, leur différence est également représentée.*

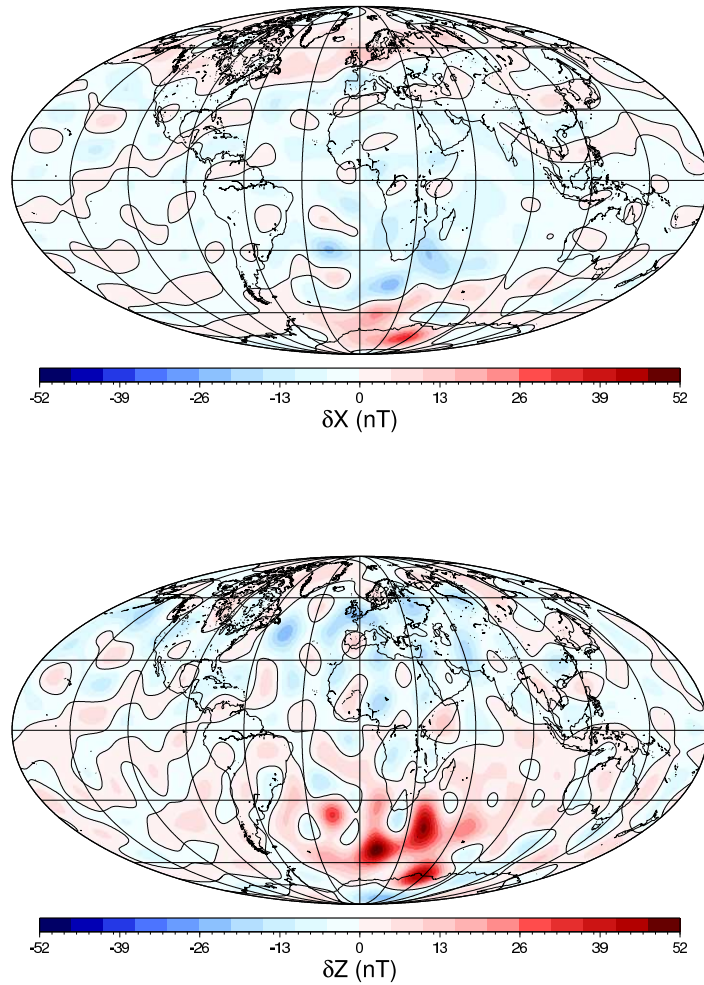


FIG. 4.7: Cartes des différences sur les composantes X et Z entre un modèle calculé à partir de données corrigées de l'influence de l'anneau de courants et un modèle calculé à partir de données non corrigées. Les modèles sont développés en harmoniques sphériques jusqu'au degré/ordre 20.

Résumé de l'article :

**Paramétrisation des champs magnétiques
externes à partir des données vectorielles du
satellite CHAMP**

Judith Schwarte, Aude Chambodut, Herman Lühr et Mioara

Mandea

publié dans *OIST-4 Proceedings*, 2003.

Les études récentes sur les champs magnétiques externes suggèrent que la simple réduction de l'influence de l'anneau de courant du champ magnétosphérique, d'après l'indice géomagnétique Dst, n'est pas adaptée. Par exemple, elle ne considère pas de façon suffisamment rigoureuse la dépendance en heure locale. De plus, l'importance des courants externes n'est pas bien définie proche des pôles. Pour diminuer les effets causés par les systèmes de courants magnétosphériques à grandes longueurs d'onde, une limitation aux seules données scalaires ne suffit pas.

Dans cette étude, nous utilisons les mesures vectorielles du satellite CHAMP en utilisant la configuration orbitale particulière de ce satellite entre août et septembre 2001. En effet, tous les 5 jours CHAMP repasse approximativement à la même position au dessus de la surface terrestre. Lorsque les mesures magnétiques acquises le long de deux orbites séparées de 5 jours sont soustraites entre elles, les contributions lithosphériques sont éliminées alors que les effets magnétiques associés aux systèmes de courants externes sont accentués. Ces différences entre orbites sont considérées ici comme les données à modéliser. Afin de minimiser les contributions des potentiels non-scalaires et avant d'appliquer une analyse en harmoniques sphériques, nous déterminons « l'intégrale de la loi d'Ampère » sur une orbite complète et appliquons une correction sur les régions polaires ($\pm 20^\circ$ autour des pôles). L'analyse est ensuite réalisée dans le repère du dipôle axial et en heure locale. La composante B_y fortement affectée par les courants alignés n'est pas prise en compte. Nous montrons ici les premiers résultats obtenus dans la caractérisation du champ externe.

PARAMETERISATION OF EXTERNAL MAGNETIC FIELDS FROM CHAMP VECTOR DATA

J. Schwarte^{1,2}, A. Chambodut¹, H. Lühr², and M. Mandaia¹¹ Institut de Physique du Globe de Paris, France² GeoForschungsZentrum Potsdam, Germany

ABSTRACT

The initial development of a better parameterisation of external magnetic fields using scalar data suggests that conventional ‘ring current corrections’ may have difficulties. For example, they do not consider the local time dependence properly and furthermore the external field estimates do not seem to be adequate near the poles. For a better modeling of the effects caused by the large-scale magnetospheric current systems a limitation to scalar data is not appropriate.

Here we used CHAMP vector measurements for our analysis and take advantage of the five-day orbital repeat tracks in August and September 2001. When subtracting two successive repeat tracks the lithospheric contributions and model errors are eliminated while the contribution of the magnetic effects caused by the external current systems is emphasised. Repeat track differences are taken as our data. In order to minimise non-scalar potential contributions, before applying the spherical harmonic analysis, we determine ‘Ampere’s law integral’ over one-full orbit and apply a correction to the region of $\pm 20^\circ$ around the north and south poles. The analysis is carried out in a dipole-axis/local time frame and the B_y component, strongly affected by field-aligned currents, is not taken into account. We show first results of parameterising internal and external magnetic field contributions for a few local times.

Key words: magnetic field modeling, external magnetic field, parameterisation, ring current.

1. INTRODUCTION

CHAMP¹ is a new opportunity for a better description of the geomagnetic field, as its orbit provides a good coverage over the whole surface of the

¹CHALLENGING MINISATELLITE PAYLOAD

Earth and the satellite position is changing in local time (LT). The magnetic instruments onboard the satellite are one scalar Overhauser Magnetometer (OM) and two Fluxgate Magnetometers (FGM), with one pair of star sensors for vector measurements all placed on a 4m-boom (Fig.1).

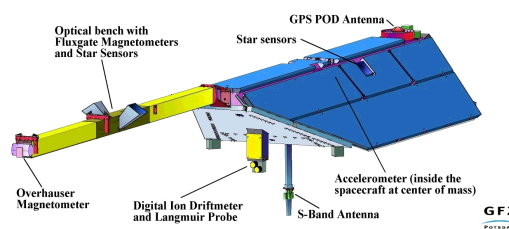


Figure 1. Instruments onboard CHAMP, see also <http://www.gfz-potsdam.de/champ>

For a better parameterisation of the external magnetic contributions the fields caused by magnetospheric currents are of main interest. The sources are the magnetopause current on the day side, the tail current on the night side and mainly the ring current [1]. These currents are shown in Fig.2.

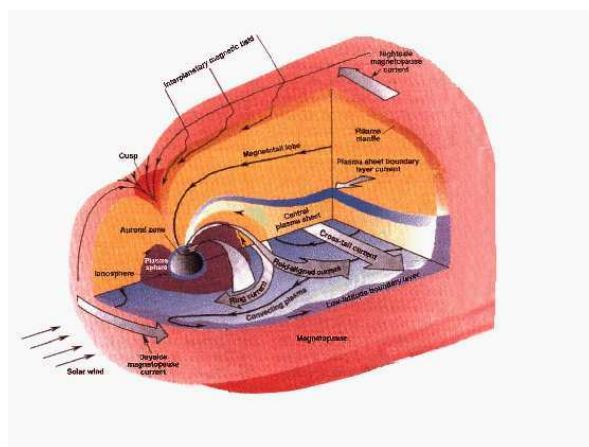


Figure 2. Magnetosphere of the Earth, see also <http://www.irfl.lu.se/HeliosHome/earthouter.html>

2. METHOD

Using spherical harmonic analysis (SHA) the orbit height defines the limit between the external and internal sources [2]. While CHAMP is flying at a height of about 450km, the magnetic fields induced by ionospheric currents are considered as internal contributions.

From time to time CHAMP is flying in resonance with the Earth rotation. During these periods the ground tracks are nearly the same after a couple of days. In August and September 2001 the repeat track cycle covered a 5-days period.

First of all, we computed the residuals between measured and modeled data from a main-field model [3]. We are interested in the differences of residuals (RC) of such two repeat tracks. In main field modeling the typically used intervals are of 3 - 5 days, during which a correction of changes in external field is necessary. The difference of the residuals of repeat tracks describe these changes and they have the advantage that problems in main-field models and D_{ST}^2 values (like baseline problems) are removed.

Describing the differences of repeat tracks through spherical harmonic functions we obtain a set of Gauss coefficients for each track, which characterise the part of the magnetic field originating from external sources. These coefficients then can be compared with D_{ST} .

In a first step the **scalar data** of CHAMP are used. The difference RC in total field caused by the external part of the magnetic field can be described by an ambient field of internal origin (B_r , B_θ , B_ϕ , approximated by a main-field model) and an additional field of external origin (b_r , b_θ , b_ϕ , unknown).

Assuming that the ring current is the main part of the external field and that it is axially symmetric around the dipole axis of the Earth (indeed, in SHA the order $m = 0$ and no longitudinal dependence) the unknown field can be expressed as:

$$b_r = 2g_1^0 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos\Theta - q_1^0 \cos\Theta - q_2^0 \left(\frac{r}{a}\right) (3\cos^2\Theta - 1) \quad (1)$$

$$b_\theta = g_1^0 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin\Theta + q_1^0 \sin\Theta + 3q_2^0 \left(\frac{r}{a}\right) \sin\Theta \cos\Theta \quad (2)$$

$$b_\phi = 0 \quad (3)$$

²Geomagnetic index that describes the effect of external fields at the Earth surface (see <http://swdcdb.kugi.kyoto-u.ac.jp/>)

where $a = 6371.2km$ is the radius of the reference sphere (Earth's surface), r and Θ are the radius and the geomagnetic colatitude of the CHAMP position, and g_1^0 , q_1^0 and q_2^0 are the three calculated Gauss coefficients. g_1^0 describes the induced internal part and q_1^0 , q_2^0 external parts.

It is justified to linearise the scalar product of these two fields, as the effect of the ring current is only of the order of 0.2% of the main field intensity. From $RC = \frac{B_r b_r + B_\theta b_\theta + B_\phi b_\phi}{B}$ it is possible to find a linear relationship between the observed difference RC and the SHA coefficients:

$$RC = c_1 g_1^0 + c_2 q_1^0 + c_3 q_2^0. \quad (4)$$

The factors c_1 , c_2 , c_3 are only depending on the position of the satellite and can be computed for each data point. For each track³ the Gauss coefficients and the difference of the residuals can be written as vectors \mathbf{g} and \mathbf{R} , the factors c_1, c_2, c_3 as matrix \mathbf{C} . The inversion

$$\mathbf{g} = (\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C})^{-1} \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{R} \quad (5)$$

gives a set of Gauss coefficients for each track. This method is explained in more detail in [4].

Using **vector data** we did a straightforward inversion for the components b_r and b_θ . Because of the large effect of field aligned currents (FAC) the b_ϕ component is not considered. In principal the computations are the same as for the scalar data.

We did the calculations of the vector data for the orbit height ($a = r$) and set the longitude $\Phi = 0^\circ$ when CHAMP was flying northward and $\Phi = 180^\circ$ when it was flying southward, in order to simplify the equations. Then the three components can be described by SHA like:

$$b_r = \{2g_1^0 - q_1^0\} \cos\Theta + \{2g_1^1 - q_1^1\} \sin\Theta \cos\Phi + \{3g_2^0 - 2q_2^0\} \frac{1}{2} (3\cos^2\Theta - 1) + \{3g_2^1 - 2q_2^1\} \sqrt{3} \cos\Theta \sin\Theta \cos\Phi \quad (6)$$

$$b_\theta = \{g_1^0 + q_1^0\} \sin\Theta - \{g_1^1 + q_1^1\} \cos\Theta \cos\Phi + \{g_2^0 + q_2^0\} 3 \sin\Theta \cos\Theta - \{g_2^1 + q_2^1\} \sqrt{3} (\cos^2\Theta - \sin^2\Theta) \cos\Phi \quad (7)$$

$$b_\phi = 0. \quad (8)$$

³The effect of the ring current is prominent around the geomagnetic equator. Thus, the chosen colatitude ranges between 40° and 140° .

In a matricial form⁴, $\mathbf{b}_r = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}$ and $\mathbf{b}_\theta = \mathbf{dP} \cdot \mathbf{D}$, the two inversions are:

$$\mathbf{C} = (\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P})^{-1} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{b}_r \quad (9)$$

and

$$\mathbf{D} = (\mathbf{dP}^T \cdot \mathbf{dP})^{-1} \cdot \mathbf{dP}^T \cdot \mathbf{b}_\theta. \quad (10)$$

Solving equations (9) and (10) two ‘helping coefficients’ (c_n^m and d_n^m) are obtained; they contain g_n^m and q_n^m with the same order and degree each. The relation between c_n^m , d_n^m and g_n^m , q_n^m gives the Gauss coefficients for each track or orbit:

$$\begin{aligned} g_n^m &= \frac{c_n^m + n d_n^m}{2n + 1} \\ q_n^m &= \frac{(n + 1) d_n^m - c_n^m}{2n + 1}. \end{aligned} \quad (11)$$

The coefficients g_n^m and q_n^m can be calculated by inverting the data for whole orbits or only tracks from 40° to 140° geomagnetic colatitude. For the inversion of data over whole orbits a pole correction calculating Ampere’s law integral [5] ($\pm 20^\circ$ around the magnetic poles) is applied.

3. RESULTS

a) Scalar data

For the first model scalar data of day and night side tracks from August and September 2001 (repeat tracks every 5 days) are used. This model plotted with the corresponding measurements (Fig. 3) shows a good description of the ‘ring current effect’. However, figure 3 (bottom) shows that the obtained model from day-side data differs from the residuals. The presence of known currents at high latitudes (FAC) and around the equator (equatorial electrojet) makes the modeling difficult.

b) Vector data

Therefore, a second model using vector data for tracks from 40° to 140° geomagnetic colatitude is computed for the same period. The obtained model fits very well (Fig. 4, top). The model using vector data for full orbits is still very much influenced by currents at high latitudes (Fig. 4, bottom).

Up to now a common description of the ‘ring current effect’ is done by D_{ST} . A comparison between q_1^0 and D_{ST} , using scalar and vector data shows a good correlation between them. Table 1 shows the correlation coefficients for several methods using different data sets. The correlation between D_{ST} and q_1^0 for day and night side (using vector data) is not as good as the inversion, if it is done for whole orbits. Applying the pole correction and doing the inversion for orbits the correlation coefficient is much improved.

⁴The expressions in brackets of equation (6) are represented by \mathbf{P} and in equation (7) by \mathbf{dP} .

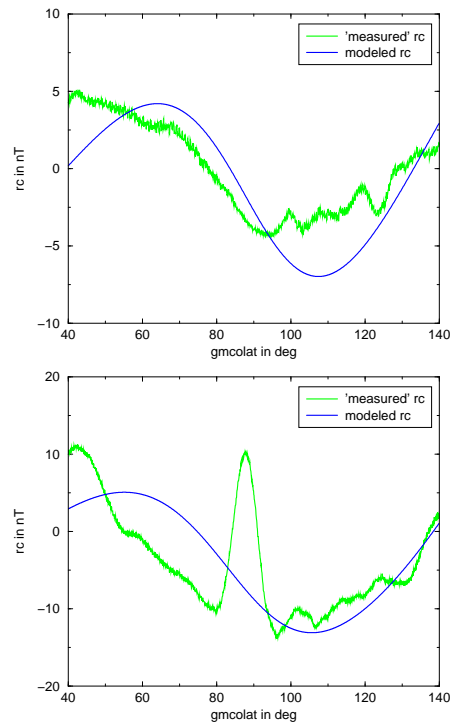


Figure 3. Measured and modeled RC for the nightside repeat track (top panel) and following day-side repeat track (bottom panel) of 14/19 August 2001.

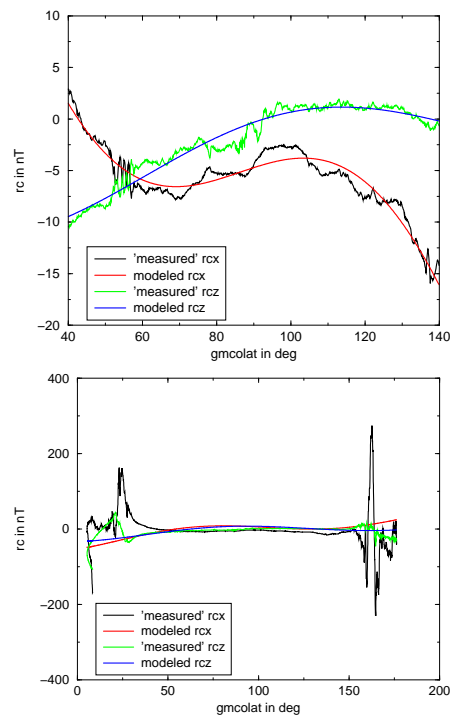


Figure 4. Measured and modeled RC for the x and z component using vector data for tracks from 40° to 140° geomagnetic colatitude (top panel) and for full orbits after applying Ampere’s law (shown only the night side half orbit, bottom panel), of 14/19 August 2001.

	D_{ST} vs q_1^0
<u>scalar data:</u>	
day side	0.75
night side	0.83
<u>vector data:</u>	
orbit	0.72
day side	0.54
night side	0.47

Table 1. Correlation coefficients between D_{ST} and q_1^0 for different data sets.

4. CONCLUSION

Here we showed the advantage of using repeat tracks and CHAMP vector data in modeling external fields. Problems in main field models and D_{ST} (base line problems) are removed and a good description of the ‘ring current effect’ is obtained.

Results of calculations using scalar data showed that the influence of currents at high latitudes has to be corrected before modeling the effect of large-scale magnetospheric currents. A good description of the ring current was already obtained using scalar data. However, these first calculations using vector data are more promising. We also obtained very good correlations (for scalar and vector data) between D_{ST} (typically used geomagnetic index to describe the effect of external fields) and q_1^0 (describing the effect of fields induced by magnetospheric currents).

These promising results will allow us to include the obtained parameterisation of external fields in main field modeling, in order to correct the effect of large-scale magnetospheric current systems. To improve the present model we would like to get a better correction for effects caused by currents at high latitudes (e.g., use of robust inversion methods).

ACKNOWLEDGMENTS

This study is supported by the DFG special research program SPP 1097 done at GFZ Potsdam, Germany and by the EU Marie Curie Host Fellowships for the five months stay at IPG Paris, France.

REFERENCES

- [1] Kivelson M. G., Russell C. T., (eds.), 1995, Introduction to space physics, Cambridge University Press.
- [2] Jacobs J. A., (ed.), 1987, Geomagnetism Vol. 1, Langel R. A., Chapter 4: The Main Field, Academic Press.
- [3] Holme R.T., 2002, CO2 - A CHAMP magnetic field model, proceedings CHAMP Science Meeting 1.

[4] Schwarte J., Lühr H., Holme R., 2001, Secular Variation from CHAMP Magnetic Field Measurements, DFG project report.

[5] Stauning P., Primdahl F., 2000, First detection of global dawn-dusk ionospheric current intensities using Ampere’s law on Ørsted orbits, Geophys. Res. Lett., Vol. 27, No. 20, pp. 3273-3276.

Corresponding author: Judith Schwarte, GFZ Potsdam, Telegrafenberg, Haus F 456, 14473 Potsdam, tel. +49(0)331 2881256, judith@gfz-potsdam.de

4.2.3 Les modèles géomagnétiques internationaux de référence

Face à la multitude de paramètres influant sur le calcul d'un modèle de champ magnétique terrestre, les modèles géomagnétiques internationaux de référence se posent comme des descriptions mathématiques standards en harmoniques sphériques. La première allusion à l'élaboration de modèles géomagnétiques internationaux de référence est faite en 1954 lors d'une assemblée de l'AIGA à Toronto. Le but est alors de disposer de référentiels de base communs afin de : « disposer d'une base commune pour le calcul du champ magnétique principal et pour homogénéiser les résultats des études portant sur les anomalies crustales (par soustraction de tendances cohérentes sur les différentes sources de données aéromagnétiques ou terrestres), les courants externes (par calculs de résidus) et la morphologie générale des lignes de champ (par exemple, cartes de déclinaison pour la navigation) ».

A partir de 1969, date de l'adoption du premier modèle géomagnétique de référence, deux types de modèles sont régulièrement calculés :

Les modèles IGRF (International Geomagnetic Reference Field) sont des modèles prédictifs de champ principal calculés à une époque donnée (généralement le 1er janvier de l'année considérée) et auxquels sont adjoints des modèles de variation séculaire sensés être valables pour les 5 années suivantes.

Les modèles DGRF (Definitive Geomagnetic Reference Field) sont des modèles ponctuels de champ principal, calculés sans variation séculaire à partir de toutes les données disponibles pour la période concernée (période antérieure à l'époque du modèle). La détermination de la variation séculaire, ou le calcul des modèles DGRF à une époque intermédiaire, est possible grâce à une interpolation linéaire entre deux modèles successifs.

En 2001 à Hanoi, lors de l'assemblée de l'AIGA, le groupe de travail sur la modélisation du champ magnétique terrestre (*Working Group V-8*) lance un appel à la communauté géomagnéticienne pour la présentation de modèles candidats à la 9^e génération de modèles géomagnétiques internationaux de référence. Six modèles candidats sont ainsi présentés pour le DGRF de 1995, cinq modèles pour le DGRF 2000 et sept modèles pour l'IGRF 2000-2005.

Dans cette partie, nous présentons les modèles candidats de notre équipe à chacun de ces trois types de modèles. Un bref récapitulatif sous forme de rapport aux évaluateurs est présenté, nous ne donnerons donc pas plus de détails ici. Puis l'article de la parution officielle du modèle retenu rappelle les processus d'évaluation des modèles candidats mais aussi les tableaux des coefficients de Gauss pour toutes les générations successives de modèle de référence.

Résumé du rapport aux évaluateurs :
L'élaboration de modèles candidats
aux DGRFs 1995,0 et 2000,0 et à l'IGRF
2000-2005

Aude Chambodut, Benoit Langlais et Mioara Mandaia

publié sur la page web :

[http://www.ipgp.jussieu.fr/mioara/dgrf/dgrf_page.html].

Dans ce rapport, des modèles de champ magnétique principal pour les époques 1995, 2000 et un modèle de variation séculaire pour la période 2000-2005 sont proposés. L'élaboration de ces modèles est limitée par le fait qu'aucune mesure magnétique satellitaire vectorielle de grande qualité n'existe pour la période 1980 à 1999. Seules des données sol, relativement mal réparties sur la surface de la Terre, peuvent être utilisées durant ces 19 ans. Notre approche s'est donc basée sur l'idée que le champ principal est évidemment mieux connu pour l'époque 2000.0, grâce aux données fournies par le satellite Ørsted, que pour l'époque 1995. En utilisant un modèle de variation séculaire sur la période 1995-2000, le modèle de 2000.0 peut alors être extrapolé à l'époque 1995.0.

L'élaboration des modèles candidats aux DGRF 1995.0 et 2000.0 et à l'IGRF 2000-2005, suit donc un schéma en deux étapes. Un modèle de champ principal pour l'année 2000.0 est calculé à partir des données Ørsted ainsi qu'un modèle de variation séculaire pour la période 2000-2005. Ensuite, une série de modèles de variation séculaire de 1995 à 2000 sont calculés exclusivement à partir de données d'observatoires. Une variation séculaire calculée à partir de 112 observatoires est choisie et appliquée au précédent modèle de 2000.0 pour le recalculé en 1995.0.

***A candidate Main Field Model
for the Definitive Geomagnetic Reference Field 2000.0
and a secular variation model for 2000-2005.***

Aude Chambodut (chambodu@ipgp.jussieu.fr) 1
Benoit Langlais (langlais@ltpmailx.gsfc.nasa.gov) 2
Mioara Manda (mioara@ipgp.jussieu.fr) 1

- 1- Laboratoire de Géomagnétisme, Institut de Physique du Globe de Paris, Paris, France.
2- NASA/NRC at GSFC/NASA, Geodynamics Branch, Greenbelt, Md, USA.

Our candidate main field model for DGRF 2000.0 has been calculated from all available vector and scalar data of Ørsted satellite, over 1999-2002 period.

Data Selection criteria

- 1)** From April 1999 to September 2002, the number of data is really important and allows us to apply strict data selection criteria:
- vector data are used below $\pm 50^\circ$ absolute geomagnetic latitude,
 - scalar data are used above $\pm 50^\circ$ absolute geomagnetic latitude or when vector data are missing,
 - outliers are removed using methods based on first and second time derivatives (Langlais *et al.*, 1999).
- 2)** In order to minimize the contributions of external fields, two more selection criteria have been applied:
- a-** Data corresponding to periods characterized by the following geomagnetic indices are kept:
- $K_p(t) \leq 1+$ and $K_p(t \pm 3) \leq 2$ -
 - $|Dst(t)| \leq 5nT$ and $|dDst(t)/dt| \leq 3nT/hour$
- b-** We do not use any selection in local time but in order to avoid the disturbances produced by the Sun (temperature, particles) on the satellite, we decided to keep only the measurements made in the 'real shadow side' of the Earth (Chambodut *et al.*, 2003).

Modeling Parameters

After the selection, the data distribution is homogenized. An equiangular grid of $3^\circ \times 3^\circ$ is defined: a maximum of ten measurement locations per bin are randomly sorted from each dataset. A geographic weighting scheme is applied on satellite datasets, as in a near-polar orbit satellite, there are much more data near the pole than near the equator. Such an uneven coverage can be counterbalanced by using normalized weights in $\sin(\theta(i))$ for each data i at the latitude $\theta(i)$. We combined this geographic scheme to

another one based on the attitude uncertainty related to a poorer determination of the rotation angle around the pointing axis of the Star IMager (SIM) (Holme, 2000).

Modeling

A first rough model is computed up to degree/order 29 for internal field, 10 for secular variation and 2 for external field, with a first degree/order Dst dependence. The coefficients are estimated by an iterative least-squares fit and are applied to determine the residuals on all the data, which have been selected before homogenization. This model is only a preliminary one and allows us to apply a new selection of data; indeed, in the next step, only data with residuals inferior to 5 nT, on each component, are kept.

Thus, we obtained a new set of data to which we applied the homogenization procedure. Distributions of the homogenized data in space and time are shown on Figures 1 and 2. The poor number of data during the year 2000 is counterbalanced by the good coverage before and after this period during the years 1999 and 2001/2002.

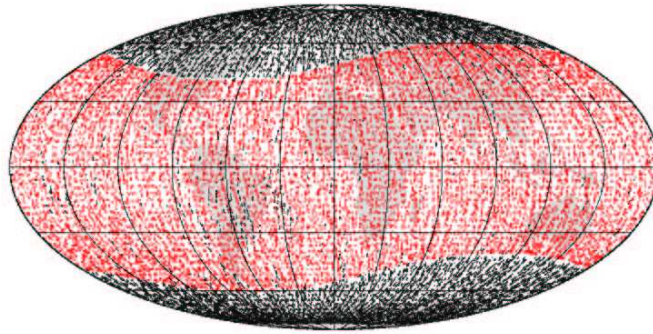


Figure 1: Geographical distribution of scalar (black) and vector (red) Ørsted satellite data used in the computation of the final model (after homogenization).

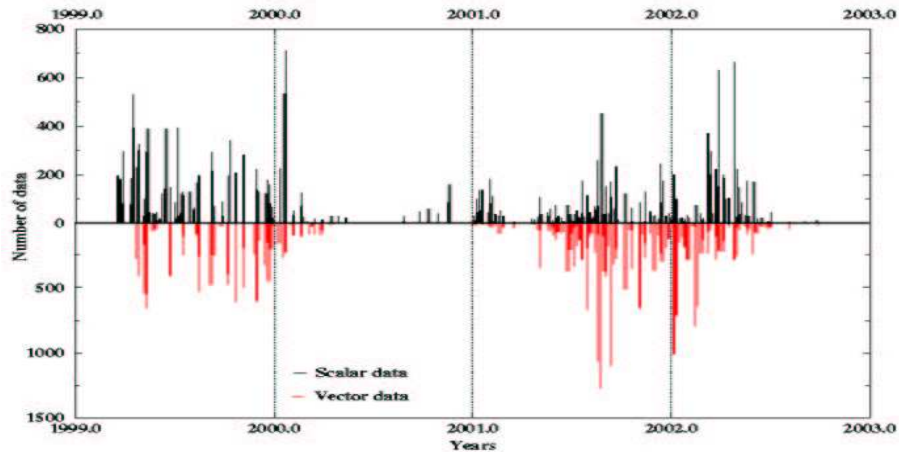


Figure 2: Temporal distribution of scalar (black) and vector (red) Ørsted satellite data used in the computation of the final model.

The number of scalar and vector data, after the various selection criteria applied for the preliminary and final models, may be resumed in the following table:

	Vector	Scalar
after main selection (Dst, Kp, 'real shadow side'...)	1 570 107	1 236 184
after reduction of the number of data at random ①	48 301	38 497
after homogenization ①	39 093	25 723
after test on residuals ≤ 5 nT ②	55 090	52 460
after homogenization ②	39 366	27 243

(① preliminary model, ② final model)

Finally, the spherical harmonic analysis is developed up to degree/order 20 for internal field, 10 for secular variation (free up to 8; imposed for degree/order 9 and 10) and 2 for external field, with a first degree/order Dst dependence.

Misfits

The RMS residuals found after three iterations, sufficient for convergence, are:

X RMS	: 2.49019	nT
Y RMS	: 3.00761	nT
Z RMS	: 2.74100	nT
vector total RMS	: 2.64766	nT
scalar total RMS	: 2.75956	nT
total RMS	: 2.66898	nT

References

- Chambodut, A., Schwarte, J., Langlais, B., Luhr, H. and Manda, M., 2003, The selection of data in field modeling, *Proceedings of the 4th OIST meeting*.
- Holme, R., 2000. Modeling of attitude error in vector magnetic data: application to Ørsted data. *Earth Planets Space*, **52**, 1187-1197.
- Langlais B., Ultré-Guérard P., Vernin C., Manda M., Cohen Y. and Hulot G., 1999, Ørsted: IGP commissioning of the OVH magnetometer, *technical report CNES, OERS_RP_0000_0031_IPG*.

A candidate Main Field Model for the Definitive Geomagnetic Reference Field 1995.0

Aude Chambodut (chambodu@ipgp.jussieu.fr)¹
Benoit Langlais (langlais@ltpmailx.gsfc.nasa.gov)²
Mioara Mandea (mioara@ipgp.jussieu.fr)¹

¹ Laboratoire de Géomagnétisme, Institut de Physique du Globe de Paris, France

² NASA/NRC at GSFC/NASA, Geodynamics Branch, Greenbelt, MD, USA

1. Introduction

A candidate main geomagnetic field for epoch 1995.0 is proposed. High-quality satellite vector measurements of the magnetic field were not made between 1980 and 1999, and thus only ground, sparse measurements are available. Our approach is based on the idea that the main field is well-known for the epoch 2000.0, using the high-quality data provided by Ørsted satellite around this epoch. Using a secular variation model over the time-span 1995-2000, this satellite-based model can be extrapolated back to the 1995.0 epoch.

2. Data

Modeling the main field for 1995 epoch is a two-step procedure. First, a main-field model is computed for the epoch 2000.0, based on satellite data. Second, this model is adjusted to epoch 1995.0, using a secular variation model we describe in the following.

Observatory data

The approach we chose is an indirect one. We first computed annual main-field models, that we later used to derive secular variation models. In this approach, we used only observatory measurements. Indeed, several tests we made showed that consecutive main-field models, based on different arrays of observatories (i.e. using all the available data) induce artificial secular variation signal. We thus decided to use a constant array of observatories.

Two time series were considered. The main epoch of study is 1994-2001, but we also considered data back to 1979 whenever possible. This allowed us to check the time series measurements consistency (by plotting the time series of the annual means). This also helped us to double-check the crustal biases (see below).

Finally, in order to build a secular variation model for the time span 1995-2000, we considered observatory annual mean series, available between 1994.5 and 2000.5. A number of 112 observatories were selected. A jump was applied for TUC in 1996, and data for SYO were interpolated for 1997.5 and 2000.5. The final observatory geographical distribution is plotted in figure 1.

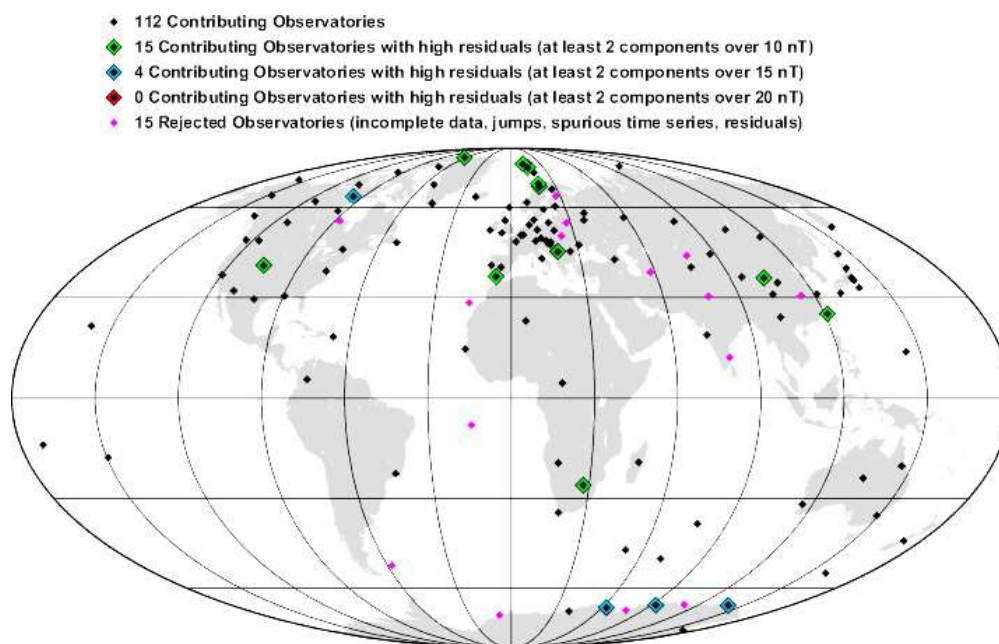


Figure 1. Geomagnetic observatories used to derive the secular variation model.

Crustal Corrections

Satellite-based models computed by Langlais et al. (2003) were used to predict annual mean values for epoch 2000.0 at each observatory location. The used models are denoted Ø19991112 and Ø20000102. These predicted values, up to degree $n=13$, were compared to the mean of 1999.5 and 2000.5 values, and the derived crustal corrections were applied to the time series. When possible, the crustal biases were compared to those computed in 1980.0, based on the M19791112 and M19800102 models of Langlais et al. (2003), without getting differences.

Weights

Because of the particular data distribution (highly non uniformed, with the Northern hemisphere lands more covered), it is necessary to use an adequate weighing scheme that would counterbalance this uneven geographical distribution. The complete weighting scheme is described in Langlais and Mandea (2000): for each observatory, a mean index is computed, inversely proportional to the distance between this observatory and the closest one in each of the four North-East, North-West, South-West and South-East quarters. A maximum distance, equal to $(2 \cdot \Delta / 2n)$ was set, avoiding isolated observatories to have a too large index.

3. Modeling

After inversion seven main-field models were obtained, up to degree and order 8. Associated rms values between annual mean observations and predictions were around 43-44 nT each year. Without the crustal corrections, these rms values are equal to 230 nT. From the

seven main-field models, we computed six secular variation models (from 1995.0 to 2000.0). In order to test these models, we derived a total variation model for epoch 1994.5 - 2000.5, which we used to predict the observed variations. RMS differences between observations and predictions are equal to 1.63 nT/yr, 1.71 nT/yr and 1.58 nT/yr for the X, Y and Z components. In only four observatories the differences between observed and predicted variations were larger than 3 nT/yr for at least 2 of the 3 X, Y or Z components (BLC, BOU, DRV and MIR).

We also computed the energy spectra for different secular variation models (derived from different observatory distributions and for different degree/order of expansion, or already published), and they are plotted in figure 2.

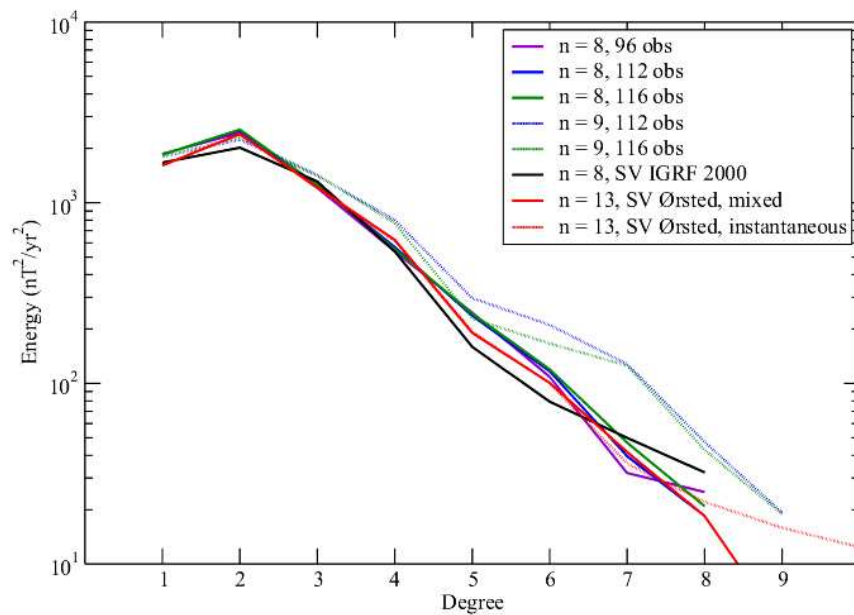


Figure 2. Energy spectra for the different secular variation models.

Finally, a mean 1995-2000 secular variation model was computed up to degree and order 8. For degrees 9 and 10 the imposed secular variation coefficients (see the candidate secular variation model) were considered. Applying this secular variation to our candidate main-field model for epoch 2000, we obtained the candidate main-field model for 1995.0.

References

- Chambodut, A., Schwarte, J., Langlais, B., Lühr, H., and Manda, M., 2003, The selection of data in field modeling, *Proceedings of the 4th OIST meeting*.
- Holme, R., 2000, Modeling of attitude error in vector magnetic data: application to Ørsted data. *Earth Planets Space*, **52**, 1187-1197.
- Langlais B., Ultré-Guérard P., Vernin C., Manda M., Cohen Y. and Hulot G., 1999, Ørsted: IGP commissioning of the OVH magnetometer, technical report CNES, OERS_RP_0000_0031_IPG.

Résumé de l'article :

**9^e Génération de Modèles de Champ
Géomagnétique de Référence**

S. Macmillan, S. Maus, T. Bondar, A. Chambodut,
V. Golovkov, R. Holme, B. Langlais, V. Lesur,
F. Lowes, H. Lühr, W. Mai, M. Manda,
N. Olsen, M. Rother, T. Sabaka, A. Thomson
and I. Wardinski publié dans :

Geophysical Journal International, 2003
et *EOS*, 2003.

Lors de la conférence de l'IUGG en 2003 à Sapporo au Japon, le groupe de travail de modélisation du champ magnétique terrestre de l'AIGA a discuté et voté le choix des modèles définitifs. La question portait principalement sur le choix des modèles à utiliser mais également des moyennes éventuelles à appliquer (moyennes simples linéaires ou bien pondérées). L'évaluation des différents modèles candidats est faite grâce aux différences entre les composantes du champ magnétique calculées à partir des modèles. Ainsi les résidus moyens absolus sur l'intensité $|\vec{B}|$ des champs magnétiques terrestres prédits est de 45 à 63 nT pour le DGRF 1995, de 8 à 10 nT pour le DGRF 2000 et de 7 à 14 nT/an pour le modèle de variation séculaire 2000-2005. Il est alors décidé de prendre des moyennes linéaires des coefficients des modèles candidats pour les deux modèles DGRF 1995 et 2000. Pour le modèle IGRF de variation séculaire sur la période 2000-2005, le choix se porte encore sur une simple moyenne mais sur 6 des 7 modèles candidats de départ, dont le notre.

The 9th-Generation International Geomagnetic Reference Field

International Association of Geomagnetism and Aeronomy (IAGA), Division V, Working Group 8

Participating members: S. Macmillan,* S. Maus, T. Bondar, A. Chambodut, V. Golovkov, R. Holme, B. Langlais, V. Lesur, F. Lowes, H. Lühr, W. Mai, M. Manda, N. Olsen, M. Rother, T. Sabaka, A. Thomson and I. Wardinski

Accepted 2003 August 21. Received 2003 August 21

SUMMARY

The International Association of Geomagnetism and Aeronomy has recently released the 9th-Generation International Geomagnetic Reference Field—the latest version of a standard mathematical description of the Earth's main magnetic field used widely in studies of the Earth's deep interior, its crust and its ionosphere and magnetosphere. The coefficients were recently finalized at the XXIII General Assembly of the International Union of Geophysics and Geodesy, held at Sapporo in Japan in 2003 July. The IGRF is the product of a huge collaborative effort between magnetic field modellers and the institutes involved in collecting and disseminating magnetic field data from satellites and from observatories and surveys around the world.

Key words: geomagnetic field model, geomagnetic reference field, IGRF, secular variation.

The IGRF is a series of mathematical models of the Earth's main field and its annual rate of change (secular variation). In source-free regions at the Earth's surface and above, the main field, with sources internal to the Earth, is the negative gradient of a scalar potential V , which can be represented by a truncated series expansion

$$V(r, \theta, \lambda, t) = R \sum_{n=1}^{n_{\max}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n [g_n^m(t) \cos m\lambda + h_n^m(t) \sin m\lambda] P_n^m(\theta)$$

where r , θ and λ are geocentric coordinates (r is the distance from the centre of the Earth, θ is the colatitude, i.e. 90° -latitude, and λ is the longitude), R is a reference radius (6371.2 km); $g_n^m(t)$ and $h_n^m(t)$ are the coefficients at time t and $P_n^m(\theta)$ are the Schmidt semi-normalized associated Legendre functions of degree n and order m . The coefficients are functions of time and for the IGRF they are assumed to vary at constant rates for 5-year intervals. For more details on main-field modelling the reader is referred to Chapman & Bartels (1940) and Langel (1987).

The coefficients of the 9th-generation IGRF are listed in Table 1 and are available in digital form from the IAGA web site www.iugg.org/IAGA and the World Data Centers listed at the end of this paper, along with software to compute magnetic field values from them. The new coefficients are the main-field coefficients for 1995.0 and 2000.0 (these are now definitive) and the secular-variation coefficients for 2000.0–2005.0. The previous (8th) generation IGRF was determined by a Task Force at the end of 1999 rather than at IUGG in 1999 July so that as many Ørsted satellite

data could be incorporated as possible (IAGA Division V, Working Group 8, 2000). Since then, much progress has been made on producing models of the Earth's magnetic field with the unprecedented amount of good quality satellite data available during the first half of the International Decade of Geopotential Research. In order to ensure that the accuracy of the IGRF reflects the high quality of available data, IAGA decided in 2001 that the 9th-generation IGRF should be determined at the IUGG meeting in 2003, and that for 2000.0 the main-field coefficients should extend to degree 13 and be quoted to 0.1 nT precision (to reflect improved instrument resolution).

As it is unusual to have a revision of the IGRF in a year not close to the epoch of a constituent main-field model and as this is the first generation of the model where a definitive set of main-field coefficients is followed by a set of secular-variation coefficients, there is a need to update the nomenclature used. Table 2 gives the new nomenclature that should be used henceforth, and gives a summary of the history of the IGRF.

It is recommended not to use the term IGRF without reference to the generation, as then it is difficult to establish which coefficients were actually used. For example, one cannot recover the original full-field data from an aeromagnetic anomaly data set in order to tie it with adjacent surveys if one does not know which generation of the IGRF was used. It is also recommended that the full name be used, so that it is more apparent whether the output values are 'predictive' and are therefore less accurate.

The International Astronomical Union 1966 spheroid has been recommended for coordinate transformations when using the IGRF until now. The parameters of IAU66 are $a = 6378.160$, $b = 6356.775$ km. However, the World Geodetic System 1984 datum and spheroid are more widely recognized as a standard ($a = 6378.137$,

*Corresponding author: British Geological Survey, Murchison House, West Mains Road, Edinburgh EH9 3LA, UK. E-mail: smac@bgs.ac.uk

Table 1. Spherical harmonic coefficients of the 9th-generation IGRF (revised 2003).

g/h	n	m	1900.0	1905.0	1910.0	1915.0	1920.0	1925.0	1930.0	1935.0	1940.0	1945.0	1950.0	1955.0	1960.0	1965.0	1970.0	1975.0	1980.0	1985.0	1990.0	1995.0	2000.0	SV	
g	1	0	-31 543	-31 464	-31 354	-31 212	-31 060	-30 926	-30 805	-30 715	-30 654	-30 594	-30 554	-30 500	-30 421	-30 334	-30 220	-30 100	-29 992	-29 873	-29 775	-29 692	-29 619.4	13.3	
g	1	1	-2298	-2298	-2297	-2306	-2317	-2318	-2316	-2306	-2292	-2285	-2250	-2215	-2169	-2119	-2068	-2013	-1956	-1905	-1848	-1784	-1728.2	11.6	
h	1	1	5922	5909	5898	5875	5845	5817	5808	5812	5821	5810	5815	5820	5791	5776	5737	5675	5604	5500	5406	5306	5186.1	-21.2	
g	2	0	-677	-728	-769	-802	-839	-893	-951	-1018	-1106	-1244	-1341	-1440	-1555	-1662	-1781	-1902	-1997	-2072	-2131	-2200	-2267.7	-14.4	
g	2	1	2905	2928	2948	2956	2959	2969	2980	2984	2981	2990	2998	3003	3002	2997	3000	3010	3027	3044	3059	3070	3068.4	-3.7	
h	2	1	-1061	-1086	-1128	-1191	-1259	-1334	-1424	-1520	-1614	-1702	-1810	-1898	-1967	-2016	-2047	-2067	-2129	-2197	-2279	-2366	-2481.6	-22.7	
g	2	2	924	1041	1176	1309	1407	1471	1517	1550	1566	1578	1576	1581	1590	1594	1611	1632	1663	1687	1686	1681	1670.9	-3.6	
h	2	2	1121	1065	1000	917	823	728	644	586	528	477	381	291	206	114	25	-68	-200	-306	-373	-413	-458	-11.1	
g	3	0	1022	1037	1058	1084	1111	1140	1172	1206	1240	1282	1297	1302	1302	1297	1287	1276	1281	1296	1314	1335	1339.6	-1.1	
g	3	1	-1469	-1494	-1524	-1559	-1600	-1645	-1692	-1740	-1790	-1834	-1889	-1944	-1992	-2038	-2091	-2144	-2180	-2208	-2239	-2267	-2288	-3.5	
h	3	1	-330	-357	-389	-421	-445	-462	-480	-494	-499	-499	-476	-462	-414	-404	-366	-333	-336	-310	-284	-262	-227.6	5.6	
g	3	2	1256	1239	1223	1212	1205	1202	1205	1215	1232	1255	1274	1288	1289	1292	1278	1260	1251	1247	1248	1249	1252.1	-1.2	
h	3	2	3	34	62	84	103	119	133	146	163	186	206	216	224	240	251	262	271	284	293	302	293.4	-4.5	
g	3	3	572	635	705	778	839	881	907	918	916	913	896	882	878	856	838	830	833	829	802	759	714.5	-8.5	
h	3	3	523	480	425	360	293	229	167	101	43	-11	-46	-83	-130	-165	-196	-223	-252	-297	-352	-427	-491.1	-8	
g	4	0	876	880	884	887	889	891	896	903	914	944	954	958	957	957	952	946	938	936	939	940	932.3	-2.7	
g	4	1	628	643	660	678	695	711	727	744	762	776	792	796	800	804	800	791	782	780	780	780	786.8	2.2	
h	4	1	195	203	211	218	220	216	205	188	169	144	136	133	135	148	167	191	212	232	247	262	272.6	1.7	
g	4	2	660	653	644	631	616	601	584	565	550	544	528	510	504	479	461	438	398	361	325	290	250	-8	
h	4	2	-69	-77	-90	-109	-134	-163	-195	-226	-252	-276	-278	-274	-278	-269	-266	-257	-249	-240	-236	-231.9	1		
g	4	3	-361	-380	-400	-416	-424	-426	-422	-415	-405	-421	-408	-397	-394	-390	-395	-405	-419	-424	-423	-418	-403	4.5	
h	4	3	-210	-201	-189	-173	-153	-130	-109	-90	-72	-55	-37	-23	3	13	26	39	53	69	84	97	119.8	5.1	
g	4	4	134	146	160	178	199	217	234	249	265	304	303	290	269	252	234	216	199	170	141	122	111.3	-1.9	
h	4	4	-75	-65	-55	-51	-57	-70	-90	-114	-141	-178	-210	-230	-255	-269	-288	-297	-299	-306	-308.8	-30.3			
g	5	0	-184	-192	-201	-211	-221	-230	-237	-241	-241	-253	-240	-229	-222	-219	-216	-218	-218	-214	-214	-214	-218.8	-1.4	
g	5	1	328	328	327	327	326	326	327	329	334	346	349	360	362	358	359	356	357	355	353	352	351.4	0.7	
h	5	1	-210	-193	-172	-148	-122	-96	-72	-51	-33	-12	3	15	16	19	26	31	46	47	46	46	43.8	-0.3	
g	5	2	264	259	253	245	236	226	218	211	208	194	211	230	242	254	262	264	261	253	245	235	222.3	-2.6	
h	5	2	53	56	57	58	58	58	60	64	71	95	103	110	125	128	139	148	150	150	154	165	171.9	1.5	
g	5	3	5	-1	-9	-16	-23	-28	-32	-33	-33	-20	-20	-23	-26	-31	-42	-59	-74	-93	-109	-118	-130.4	-1.2	
h	5	3	-33	-32	-33	-34	-38	-44	-53	-64	-75	-67	-87	-98	-117	-126	-139	-152	-151	-154	-153	-143	-133.1	2	
g	5	4	-86	-93	-102	-111	-119	-125	-131	-136	-141	-142	-147	-152	-156	-157	-160	-159	-162	-164	-165	-166	-168.6	0	
h	5	4	-124	-125	-126	-126	-125	-122	-118	-115	-113	-119	-122	-121	-114	-97	-91	-83	-78	-75	-69	-55	-39.3	3.8	
g	5	5	-16	-26	-38	-51	-62	-69	-74	-76	-76	-66	-82	-76	-69	-63	-62	-56	-49	-48	-46	-36	-17	-12.9	-0.2
h	5	5	3	11	21	32	43	51	58	64	69	82	80	78	81	81	83	88	92	95	97	107	106.3	-0.5	
g	6	0	63	62	62	61	61	61	60	59	57	59	54	47	46	45	43	45	48	53	61	68	72.3	0.4	
g	6	1	61	60	58	57	55	54	53	53	54	57	57	57	58	61	64	66	66	65	65	67	68.2	0.3	
h	6	1	-9	-7	-5	-2	0	3	4	4	4	6	-1	-9	-10	-11	-12	-13	-15	-16	-17	-17.4	-0.7		
g	6	2	-11	-11	-11	-10	-10	-9	-8	-7	6	4	3	1	8	15	28	42	51	59	68	74.2	0.7		
h	6	2	83	86	89	93	96	99	102	104	105	100	99	96	99	100	100	99	93	88	82	72	63.7	-1.8	
g	6	3	-217	-221	-224	-228	-233	-238	-242	-246	-246	-247	-247	-237	-237	-228	-212	-198	-192	-185	-178	-170	-160.9	1.9	
h	6	3	2	4	5	8	11	14	19	25	33	16	33	48	60	68	72	75	71	69	67	65.1	-0.2		
g	6	4	-58	-57	-54	-51	-46	-40	-32	-25	-18	-25	-16	-8	-1	4	2	1	4	4	3	-1	-5.9	-1.7	
h	6	4	-35	-32	-29	-26	-22	-18	-16	-15	-15	-9	-12	-16	-20	-32	-37	-41	-43	-48	-52	-58	-61.2	-0.4	
g	6	5	59	57	54	49	44	39	32	25	18	21	12	7	-2	1	3	6	14	16	18	19	16.9	-0.5	
h	6	5	36	32	28	23	18	13	8	4	0	-16	-12	-12	-11	-8	-4	-2	-1	1	1	0.7	-0.2		
g	6	6	-90	-92	-95	-98	-101	-103	-104	-106	-107	-104	-105	-107	-113	-111	-112	-111	-108	-102	-96	-93	-90.4	0.7	
h	6	6	-69	-67	-65	-62	-57	-52	-46	-33	-39	-30	-24	-17	-7	1	11	17	21	24	36	43.8	1.5		
g	7	0	70	70	71	72	73	73	74	74	74	70	65	65	67	75	72	71	72	74	77	77	79	0.2	
g	7	1	-55	-54	-54	-54	-54	-54	-54	-53	-53	-40	-55	-56	-56	-57	-57	-56	-59	-62	-64	-72	-74	-0.1	
h	7	1	-45	-46	-47	-48	-49	-50	-51	-52	-52	-45	-35	-50	-55	-61	-70	-77	-82	-83	-80	-69	-64.6	0.7	
g	7	2	0	0	1	2	2	3	4	4	4	0	2	2	5	4	1	2	3	2	1	0	-0.3		
h	7	2	-13	-14	-14	-14	-14	-14	-15	-17	-18	-18	-17	-24	-28	-27	-27	-26	-27	-27	-26	-25	-24.2	0.3	
g	7	3	34	33	32	31	29	27	25	23	20	0	1	10	15	13	14	16	21	24	26	28	33.3	1.1	
h	7	3	-10	-11	-12	-12	-13	-14	-14	-14	-14	2	0	-4	-6	-2	-4	-5	-5	-2	0	4	6.2	0.1	
g	7	4	-41	-41	-40	-38	-37	-35	-34	-33	-31	-29	-40	-32	-32	-26	-22	-14	-12	-6	-1	5	9.1	0.7	
h	7	4	-1	0	1	2	4	5	6	7	7	6	10	8	7	6	8	10	16	20	21	24	24	0.3	
g	7	5	-21	-20	-19	-18	-16	-14	-12	-11	-9	-10	-7	-11	-7	-6	-2	0	1	4	5	4	6.9	0.5	
h	7	5	28	28	28	28	28	29	29	29	29	28	36	28	23	26	23	22	18	17	17	17	14.8	-0.8	
g	7	6	18	18	18	19	19	19	18	18	17	15	5	9	17	13	13	12	11	10	9	8	7.3	-0.3	

Table 1. (Continued.)

g/h	n	m	1900.0	1905.0	1910.0	1915.0	1920.0	1925.0	1930.0	1935.0	1940.0	1945.0	1950.0	1955.0	1960.0	1965.0	1970.0	1975.0	1980.0	1985.0	1990.0	1995.0	2000.0	SV
h	7	6	-12	-12	-13	-15	-16	-17	-18	-19	-20	-17	-18	-20	-18	-23	-23	-23	-23	-23	-23	-24	-25.4	-0.1
g	7	7	6	6	6	6	6	6	6	6	5	29	19	18	8	1	-2	-5	-2	0	0	-2	-1.2	0.5
h	7	7	-22	-22	-22	-22	-22	-21	-20	-19	-19	-22	-16	-18	-17	-12	-11	-12	-10	-7	-4	-6	-5.8	0.2
g	8	0	11	11	11	11	11	11	11	11	11	13	22	11	15	13	14	14	18	21	23	25	24.4	0.1
g	8	1	8	8	8	8	7	7	7	7	7	15	9	6	5	6	6	6	6	5	6	6.6	0.2	
h	8	1	8	8	8	8	8	8	8	8	8	12	5	10	11	7	7	6	7	8	10	11	11.9	-0.2
g	8	2	-4	-4	-4	-4	-3	-3	-3	-3	-3	-8	-4	-6	-4	-4	-2	-1	0	0	-1	-6	-9.2	-0.5
h	8	2	-14	-15	-15	-15	-15	-15	-15	-14	-14	-21	-22	-15	-14	-12	-15	-16	-18	-19	-19	-21	-21.5	0.1
g	8	3	-9	-9	-9	-9	-9	-9	-9	-9	-10	-5	-1	-14	-11	-14	-13	-12	-11	-11	-10	-9	-7.9	0.2
h	8	3	7	7	6	6	6	6	5	5	5	-12	0	5	7	9	6	4	4	5	6	8	8.5	0.3
g	8	4	1	1	1	2	2	2	2	1	1	9	11	6	2	0	-3	-8	-7	-9	-12	-14	-16.6	-0.4
h	8	4	-13	-13	-13	-13	-14	-14	-14	-15	-15	-7	-21	-23	-18	-16	-17	-19	-22	-23	-22	-23	-21.5	0.4
g	8	5	2	2	2	3	4	4	5	6	6	7	15	10	10	8	5	4	4	4	3	9	9.1	0.2
h	8	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	2	-8	3	4	4	6	6	9	11	12	15	15.5	0.1
g	8	6	-9	-8	-8	-8	-7	-7	-6	-6	-5	-10	-13	-7	-5	-1	0	0	3	4	4	6	7	0.5
h	8	6	16	16	16	16	17	17	18	18	19	18	17	23	23	24	21	18	16	14	12	11	8.9	-0.3
g	8	7	5	5	5	6	6	7	8	8	9	7	5	6	10	11	11	10	6	4	2	-5	-7.9	-0.7
h	8	7	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	3	-4	-4	1	-3	-6	-10	-13	-15	-16	-16	-14.9	0.4	
g	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	2	-1	9	8	4	3	1	-1	-4	-6	-7	-7	0.4
h	8	8	-18	-18	-18	-18	-19	-19	-19	-19	-19	-11	-17	-13	-20	-17	-16	-17	-15	-11	-10	-4	-2.1	0.4
g	9	0	8	8	8	8	8	8	8	8	8	5	3	4	4	8	8	7	5	5	4	4	5	
h	9	1	10	10	10	10	10	10	10	10	10	-21	-7	9	6	10	10	10	10	10	9	9	9.4	
g	9	1	-20	-20	-20	-20	-20	-20	-20	-21	-21	-27	-24	-11	-18	-22	-21	-21	-21	-21	-20	-20	-19.7	
h	9	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-4	0	2	2	2	1	1	1	3	3	
g	9	2	14	14	14	14	14	14	14	15	15	17	19	12	12	15	16	16	16	15	15	15	13.4	
h	9	3	-11	-11	-11	-11	-11	-11	-12	-12	-12	-11	-25	-5	-9	-13	-12	-12	-12	-12	-10	-10	-8.4	
g	9	3	5	5	5	5	5	5	5	5	5	29	12	7	2	7	6	7	9	9	11	12	12.5	
h	9	4	12	12	12	12	12	12	12	12	11	3	10	2	1	10	10	10	9	9	9	8	6.3	
g	9	4	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-9	2	6	0	-4	-4	-4	-5	-6	-7	-6	-6.2	
h	9	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	16	5	4	4	-1	-1	-1	-3	-4	-8	-8.9		
g	9	5	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-3	-3	4	2	-2	-3	-5	-5	-5	-6	-6	-7	-8	-8.4	
h	9	6	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-3	-5	1	-1	-1	-1	-1	-1	-2	-1	-1.5		
g	9	6	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	8	10	9	10	10	10	9	9	9	8	8.4	
h	9	7	2	2	2	2	2	2	3	3	3	-4	-2	2	-2	5	3	4	7	7	7	10	9.3	
g	9	7	10	10	10	10	10	10	10	11	11	6	8	7	8	10	11	11	10	9	8	5	3.8	
h	9	8	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	-3	3	2	3	1	1	1	2	1	1	-2	-4.3	
g	9	8	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	1	-11	-6	0	-4	-2	-3	-6	-7	-7	-8	-8.2	
h	9	9	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-2	-2	-2	-4	8	5	-1	-2	-1	-2	-5	-5	-6	-8	-8.2	
g	9	9	2	2	2	2	2	2	2	2	2	8	-7	5	5	1	1	1	2	2	2	3	4.8	
h	10	0	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-8	-3	1	-2	-3	-3	-4	-4	-3	-3	-2.6	
g	10	1	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	11	4	-5	-3	-3	-3	-4	-4	-4	-4	-6	-6	
h	10	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	5	13	-4	4	2	1	1	1	1	2	1	1.7	
g	10	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	-1	-1	4	2	2	2	2	3	2	2	1.7	
h	10	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-2	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	
g	10	3	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	2	13	2	0	-5	-5	-5	-5	-5	-4	-4	-3.1	
h	10	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	-20	-10	-8	0	2	3	3	3	3	4	4	
g	10	4	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-5	-4	-3	-1	-2	-1	-2	-2	-2	-1	-1	-0.5	
h	10	4	6	6	6	6	6	6	6	6	6	-1	2	-2	2	6	4	4	6	6	6	5	4.9	
g	10	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	-1	4	7	4	4	6	5	5	4	4	3.7	
h	10	5	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-6	-3	-4	-5	-4	-4	-4	-4	-4	-5	-5.9	
g	10	6	4	4	4	4	4	4	4	4	4	8	12	4	6	4	4	4	3	3	3	2	1	
h	10	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	6	1	1	0	0	-1	0	0	0	-1	-1.2	
g	10	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	3	-2	1	0	1	1	1	1	1	2	2	
h	10	7	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-1	-1	-4	-3	-3	-1	-2	-1	-1	-1	-1	-2	-2	-2.9	
g	10	8	2	2	2	1	1	1	1	2	2	-3	2	6	-1	2	0	0	2	2	3	5	4.2	
h	10	8	4	4	4	4	4	4	4	4	4	-2	6	7	6	3	3	3	4	4	3	1	0.2	
g	10	9	2	2	2	3	3	3	3	3	3	5	10	-2	2	2	3	3	3	3	3	1	0.3	
h	10	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11	-1	0	0	1	1	0	0	-1	-2	-2.2	
g	10	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	3	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	-1.1	
h	10	10	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-2	8	-3	-7	-6	-4	-5	-6	-6	-7	-7.4	

November 18, 2003

12:58

Geophysical Journal International

gji12102

1054

IAGG, Division V Working Group 8

Table 1. (Continued.)

g/h	n	m	1900.0	1905.0	1910.0	1915.0	1920.0	1925.0	1930.0	1935.0	1940.0	1945.0	1950.0	1955.0	1960.0	1965.0	1970.0	1975.0	1980.0	1985.0	1990.0	1995.0	2000.0	SV
g	11	0																						2.7
g	11	1																						-1.7
h	11	1																						0.1
g	11	2																						-1.9
h	11	2																						1.3
g	11	3																						1.5
h	11	3																						-0.9
g	11	4																						-0.1
h	11	4																						-2.6
g	11	5																						0.1
h	11	5																						0.9
g	11	6																						-0.7
h	11	6																						-0.7
g	11	7																						0.7
h	11	7																						-2.8
g	11	8																						1.7
h	11	8																						-0.9
g	11	9																						0.1
h	11	9																						-1.2
g	11	10																						1.2
h	11	10																						-1.9
g	11	11																						4
h	11	11																						-0.9
g	12	0																						-2.2
g	12	1																						-0.3
h	12	1																						-0.4
g	12	2																						0.2
h	12	2																						0.3
g	12	3																						0.9
h	12	3																						2.5
g	12	4																						-0.2
h	12	4																						-2.6
g	12	5																						0.9
h	12	5																						0.7
g	12	6																						-0.5
h	12	6																						0.3
g	12	7																						0.3
h	12	7																						0
g	12	8																						-0.3
h	12	8																						0
g	12	9																						-0.4
h	12	9																						0.3
g	12	10																						-0.1
h	12	10																						-0.9
g	12	11																						-0.2
h	12	11																						-0.4
g	12	12																						-0.4
h	12	12																						0.8
g	13	0																						-0.2
g	13	1																						-0.9
h	13	1																						-0.9
g	13	2																						0.3
h	13	2																						0.2
g	13	3																						0.1
h	13	3																						1.8
g	13	4																						-0.4
h	13	4																						-0.4

Table 1. (Continued.)

g/h	n	m	1900.0	1905.0	1910.0	1915.0	1920.0	1925.0	1930.0	1935.0	1940.0	1945.0	1950.0	1955.0	1960.0	1965.0	1970.0	1975.0	1980.0	1985.0	1990.0	1995.0	2000.0	SV
g	13	5																						1.3
h	13	5																						-1
g	13	6																						-0.4
h	13	6																						-0.1
g	13	7																						0.7
h	13	7																						0.7
g	13	8																						-0.4
h	13	8																						0.3
g	13	9																						0.3
h	13	9																						0.6
g	13	10																						-0.1
h	13	10																						0.3
g	13	11																						0.4
h	13	11																						-0.2
g	13	12																						0
h	13	12																						-0.5
g	13	13																						0.1
h	13	13																						-0.9

© 2003 RAS, GJI, 155, 1051–1056

Table 2. Summary of nomenclature and IGRF history.

Full name	Short name	Valid for	Definitive for
IGRF 9th generation (revised 2003)	IGRF-9	1900.0–2005.0	1945.0–2000.0
IGRF 8th generation (revised 1999)	IGRF-8	1900.0–2005.0	1945.0–1990.0
IGRF 7th generation (revised 1995)	IGRF-7	1900.0–2000.0	1945.0–1990.0
IGRF 6th generation (revised 1991)	IGRF-6	1945.0–1995.0	1945.0–1985.0
IGRF 5th generation (revised 1987)	IGRF-5	1945.0–1990.0	1945.0–1980.0
IGRF 4th generation (revised 1985)	IGRF-4	1945.0–1990.0	1965.0–1980.0
IGRF 3rd generation (revised 1981)	IGRF-3	1965.0–1985.0	1965.0–1975.0
IGRF 2nd generation (revised 1975)	IGRF-2	1955.0–1980.0	–
IGRF 1st generation (revised 1969)	IGRF-1	1955.0–1975.0	–

November 18, 2003 12:58 Geophysical Journal International gj12102

1056 IAGA, Division V, Working Group 8

$b = 6356.752$ km). Present-day satellite magnetic data are mostly positioned using WGS84 but for other data we are often unaware which datum is used. Differences in output IGRF magnetic field values at the Earth's surface are less than 1 nT when the change of spheroid is made. It is recognized that some software already in circulation uses WGS84. It is therefore recommended that the WGS84 spheroid is used for coordinate transformations for the IGRF.

The 9th-generation IGRF coefficients were computed from candidate sets of coefficients produced by the participating members of IAGA Working Group V-8 listed in this paper. Their institutes and the many organizations involved in operating magnetic survey satellites, observatories, magnetic survey programmes and World Data Centers are to be thanked for their continuing support of the IGRF project.

World Data Centers

WDC for Solid Earth Geophysics
National Geophysical Data Center
325 Broadway
Boulder
CO 80303-3328
USA
E-mail: Susan.McLean@noaa.gov
Internet: www.ngdc.noaa.gov

WDC for Geomagnetism
Data Analysis Center for Geomagnetism and Space Magnetism
Graduate School of Science, Kyoto University
Kyoto 606-8502
Japan
E-mail: iyemori@kugi.kyoto-u.ac.jp
Internet: swdcwww.kugi.kyoto-u.ac.jp

WDC for Geomagnetism
British Geological Survey
Murchison House
West Mains Road
Edinburgh
EH9 3LA
UK
E-mail: smac@bgs.ac.uk
Internet: www.geomag.bgs.ac.uk

REFERENCES

- Chapman, S. & Bartels, J., 1940. *Geomagnetism* (2 Vols), Oxford University Press, London.
- International Association of Geomagnetism and Aeronomy (IAGA) Division V, Working Group 8, 2000. International Geomagnetic Reference Field 2000. *Geophys. J. Int.*, **141**, 259–262.
- Langel, R.A., 1987. Main field, in *Geomagnetism*, Vol. 1, ed. Jacobs, J.A., Academic, London.

Chapitre 5

Modélisation par les ondelettes de Poisson

“[Ne craignez rien,] les équations n’explorent pas.”

Bertrand Russel (Mathématicien et philosophe anglais, 1872-1970),

Extrait du journal The Observer.

Les ondelettes furent d’abord introduites par Morlet, scientifique français travaillant sur l’analyse de signaux sismiques. Son approche est basée sur les précédents travaux de Gabor, Wigner et Ville. Ceux-ci définissent, au cours des années 1940, la transformation de Fourier par fenêtre glissante et la transformation de Wigner-Ville dans le contexte de la mécanique quantique. Plus tard, Morlet et Grossmann [1985] ainsi que Goupillaud [1984] développent la théorie de la transformée continue en ondelettes à une dimension. Parmi toutes les applications, cette transformée est surtout utilisée pour caractériser les singularités dans des signaux. Elle est étendue aux espaces à n dimensions par Meyer, puis Murenzi [1990].

Meyer collabore avec Grossmann et Daubechies afin de définir le concept d’ensemble discret de la transformée en ondelettes continues. Cet ensemble complet sur $L^2(R_n)$ constitue ce qui sera appelé plus tard *frame*¹. Il pense d’abord qu’il est impossible de construire une base orthogonale d’ondelettes avec des ondelettes régulières. Les ondelettes de Haar (1909) permettent en effet une telle construction mais leur manque de régularité demeure problématique à la représentation de signaux réguliers. Finalement, Meyer et Lemarié prouvent le contraire et développent la théorie des ondelettes orthogonales dans l’espace à n dimensions [Lemarié-Rieusset et Meyer, 1986; Meyer, 1986]. Daubechies [1988; 1991] présente également ses travaux sur une base orthogonale d’ondelettes au support

¹voir note de bas de page numéro 1 à la page 32

compact (localisation spatiale) et à la régularité arbitraire.

Des algorithmes de transformation en ondelettes orthogonales sont développés par Mallat [1989], qui donne alors la première réelle impulsion à l'utilisation des ondelettes dans le traitement du signal. Des avancées significatives sont faites et bientôt les ondelettes ne sont plus seulement cantonnées à ce seul domaine du traitement du signal et des mathématiques. Les ondelettes influencent d'autres domaines de la recherche (imagerie médicale, statistique financière, traitement et compression d'images et de sons...) et renouent notamment avec la géophysique [Meyer et Roques, 1993; Foufoula-Georgiou et Kumar, 1994]. Le panorama des applications des analyses en ondelettes s'élargie. Elles sont utilisées pour de multiples études : géodésiques, de traitements d'images radar, de gravité et de topographie [Simons et al., 1997], de sismique [Bethoux et al., 1998], d'analyse de données potentielles [Moreau *et al.*, 1997; 1999], ou encore de détection de secousses géomagnétiques [Alexandrescu *et al.*, 1995; 1996] et des modes de Chandler [Gibert et al., 1998; Bellanger et al., 2002]. Plus intéressant encore est le cas des *frames* d'ondelettes, celles-ci sont définies sur la sphère pour la représentation de champs de potentiels harmoniques [Holschneider, 1996; Freedon et Winterheuser, 1996; Freedon et al., 1998; Dahlke et al., 2001].

Cette dernière application est développée dans ce chapitre. Nous présentons ici les résultats obtenus dans le cadre d'une modélisation du champ magnétique terrestre à partir de *frames* d'ondelettes de Poisson. Le but de cette étude est de proposer une méthode alternative et complémentaire aux harmoniques sphériques. En effet, l'objectif est non pas de remplacer celles-ci mais de disposer d'une autre méthode de modélisation apte à décrire les mêmes phénomènes tout en permettant une plus grande flexibilité.

5.1 Formalisme mathématique des *frames* d'ondelettes

5.1.1 Mais... Qu'est-ce qu'une ondelette ?

D'abord de façon extrêmement schématique, une ondelette est l'idéalisation mathématique d'une note de musique. Cette analogie est plutôt galvaudée mais elle a le mérite d'être intuitivement compréhensible et reflète réellement tous les aspects que porte la notion d'ondelette. Ainsi, de même qu'une oeuvre musicale est représentée sous forme de séries de notes portées sur une partition, des notes

mathématiques peuvent représenter certains objets mathématiques, tels que des fonctions ou signaux. Ces fonctions ou signaux constituent les briques élémentaires de décomposition d'un signal, ce sont les ondelettes. Une note de musique est un morceau de son. Elle apparaît à un instant donné, avec une durée et une hauteur donnée. Les ondelettes, notes mathématiques, sont également des objets auxquels sont associés des caractéristiques physiques telles que leur localisation spatiale (ou temporelle) et fréquentielle. Par comparaison, une sinusoïde correspond à une note idéale de durée infinie et de fréquence pure.

D'un point de vue mathématique, une ondelette est une fonction localisée en espace (ou en temps), mais oscillante et de moyenne nulle. Il n'y a pas une ondelette qui soit meilleure que les autres. Seule l'application qui en est faite prévaut, et peut conduire à un choix. Dans le cas présenté dans ce mémoire, l'ondelette est définie dans l'espace à trois dimensions et calculée sur la sphère. L'ondelette choisie se doit de présenter au moins les propriétés des harmoniques sphériques. Sélectionner, comme famille alternative aux harmoniques sphériques, une *frame* d'ondelettes aux caractéristiques moins utiles à la représentation de champs harmoniques sur la sphère n'aurait aucun sens.

Les ondelettes choisies doivent donc permettre un calcul numérique aisé, une interprétation et une extension harmonique faciles (multipôles). Mais le système choisi pourra de plus présenter naturellement des avantages quant aux modélisations locales et aux aspects géométriques plus souples pour, par exemple, décrire la forme spatio-temporelle de l'ionosphère.

Les ondelettes de Poisson, notées ici ψ , sont de la forme $\omega^n e^{-\omega}$. Dans ce mémoire, l'ondelette située au point \vec{x} est décrite sur la sphère de rayon $r = \|\vec{x}\|$ par l'équation :

$$\psi_a^n(\vec{x}) = N_a^n \sum_{\ell} (a\ell)^n e^{-a\ell} Q_{\ell} \left(\frac{\vec{e}}{\|\vec{e}\|} \cdot \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right) \quad (5.1)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} N_a^n &= \left(\int_{S(r)} \psi_a^n(\vec{x}) \cdot \psi_a^n(\vec{x}) ds(\vec{x}) \right)^{-\frac{1}{2}} \\ Q_{\ell} \left(\frac{\vec{e}}{\|\vec{e}\|} \cdot \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right) &= (2\ell + 1) P_{\ell} \left(\frac{\vec{e}}{\|\vec{e}\|} \cdot \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right) \end{cases} \quad (5.2)$$

où N_a^n est le facteur de normalisation (norme L^2) de l'ondelette, ℓ un entier correspondant au degré des polynômes de Legendre P_{ℓ} et Q_{ℓ} sont les fonctions noyaux reproduisants correspondantes. Chaque ondelette de Poisson est définie donc par trois paramètres : son échelle a , sa position \vec{e} et son ordre n . En d'autres termes, a est un nombre sans dimension qui traduit la mesure de la longueur d'onde

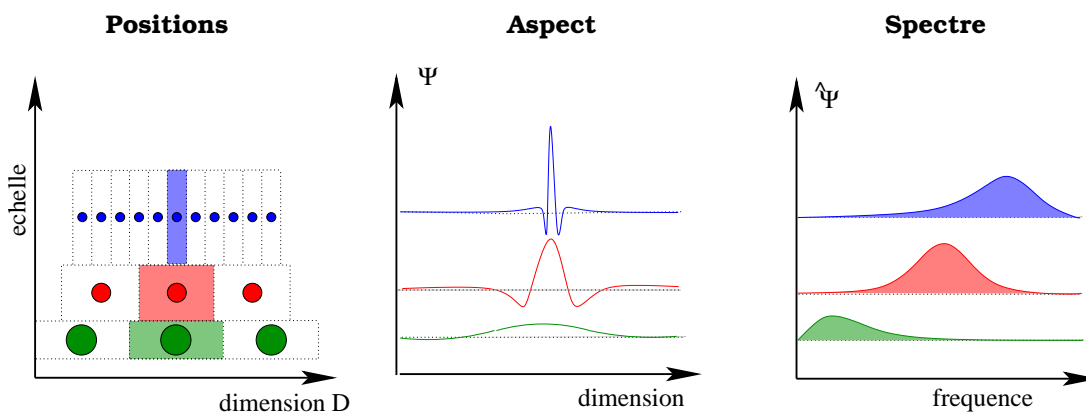


FIG. 5.1: Schéma de synthèse décrivant les propriétés des ondelettes

de l'ondelette considérée (son extension spatiale), \vec{e} est la position de l'ondelette dans l'espace à trois dimensions et n le degré qui caractérise l'aspect de l'ondelette (nombre d'oscillations). La figure 5.1 illustre ces notions de fréquence, échelle, aspect et position en présentant une analogie avec le cas à une dimension. L'équation 5.1 décrit les ondelettes de Poisson sur la sphère. Ces ondelettes peuvent être identifiées à des multipôles d'ordre n localisés aux points $(r \cdot e^{-a}\vec{e})$ à l'intérieur de la sphère (la profondeur des multipôles est ainsi directement liée au paramètre d'échelle). Les ondelettes de Poisson peuvent ainsi également être calculée par prolongement harmonique dans tout l'espace sauf, bien sur, aux positions singulières des multipôles.

5.1.2 Les frames

Elles représentent une forme de généralisation de la notion de base d'un espace vectoriel. De façon plus explicite, une *frame* est une famille de vecteurs qui permet de représenter tout signal par ses produits scalaires avec ces vecteurs. En général, les *frames* fournissent une représentation discrète et redondante du signal.

Définition :

Une collection de fonctions (ou de vecteurs) $\{\psi_n\}_{n=0,1,\dots}$, dans un espace de Hilbert H , est une *frame* si, pour toute fonction $s \in H$, nous avons :

$$A\|s\|^2 \leq \sum_n |\langle \psi_n, s \rangle|^2 \leq B\|s\|^2, \quad (5.3)$$

où A et B sont deux constantes, appelées bornes de la *frame*, telles que :

$$0 < A < B < \infty$$

- Si $A = B$, on dit que la *frame* est ajustée.
- Si les vecteurs de *frame* sont indépendants, alors $A \leq 1 \leq B$.
- La *frame* est une base orthonormée si et seulement si $A = B = 1$.
- Si $A > 1$, la *frame* est redondante.

Une famille finie est ainsi toujours une *frame* de l'espace qu'elle engendre. Les *frames* fournissent ainsi une représentation stable, éventuellement redondante, du signal. La **redondance** est une propriété souvent appréhendée comme un avantage car elle permet une analyse fine du signal. Elle peut cependant être envisagée comme un inconvénient dans la mesure où elle implique un coût de calcul accru et un nombre de coefficients plus grand à manipuler. La redondance doit être perçue comme un degré de liberté de l'analyse en ondelette. Le modélisateur se doit d'adapter la *frame* au problème à traiter pour donner toute sa puissance à celle-ci.

Une *frame* ne fait perdre aucune information sur la fonction de départ s , tout en nous permettant de décomposer celle-ci en une combinaison linéaire des éléments de la *frame*. Avec l'utilisation des *frames* d'ondelettes, nous obtenons une base présentant les propriétés des ondelettes et celles des *frames*, un « couplage » des deux.

5.1.3 Expression et résolution du problème inverse

Résumé de l'article :

**De l'analyse globale à celle régionale d'un
champ magnétique sur une sphère grâce aux
frames d'ondelettes**

Matthias Holschneider, Aude Chambodut et Mioara Mandea
publié dans *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **135**,
107-124, 2003.

L'analyse en ondelettes a prouvé son grand potentiel dans les études numériques et de traitement du signal. En effet, les développements en ondelettes génèrent seulement un faible nombre de coefficients dans la représentation de fonctions et de larges ensembles de données. Dans cette étude, nous présentons une construction en ondelettes sur la sphère pour des fonctions scalaires. En particulier, nous montrons comment les harmoniques sphériques sont efficacement représentées grâce aux ondelettes sphériques choisies : les ondelettes de Poisson créées à partir de la même fonction génératrice que les polynômes de Legendre [Backus et al., 1996]. Ensuite, la comparaison d'un modèle en ondelettes et d'un modèle en harmoniques sphériques basés sur un ensemble de données d'observatoires permet de montrer comment les ondelettes sont capables de représenter une fonction scalaire sur la sphère (ici l'intensité du champ magnétique terrestre) simultanément sur des échelles spatiales globales et locales.

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

Physics of the Earth and Planetary Interiors 135 (2003) 107–124

PHYSICS
OF THE EARTH
AND PLANETARY
INTERIORSwww.elsevier.com/locate/pepi

From global to regional analysis of the magnetic field on the sphere using wavelet frames

Matthias Holschneider^a, Aude Chambodut^{b,*}, Mioara Mandaia^b^a *Department of Applied and Industrial Mathematics, University of Potsdam, Am Neuen Palais 10, D-14469 Potsdam, Germany*^b *Laboratoire de Géomagnétisme, Institut de Physique du Globe de Paris, 4 Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France*

Accepted 10 August 2002

Abstract

Wavelet analysis has proven to be a powerful tool for numerical studies and signal processing. The wavelets power lies in the fact that in general they only require a small number of coefficients to represent functions and large datasets accurately up to a given precision. In this paper, we present a wavelet construction for scalar functions defined on the sphere. In particular, we show how spherical harmonics can be efficiently represented with spherical wavelets. The final goal of this approach is to model the magnetic field of the Earth simultaneously on global and regional scales.

© 2003 Elsevier Science B.V. All rights reserved.

Keywords: Magnetic field; Sphere; Wavelet frames

1. Introduction

Although people have been measuring and using the Earth's magnetic field for centuries, a theory for description of the geomagnetic field only arose in the 19th century (Gauss, 1839). This standard method for modelling the values of any three dimensional field is called spherical harmonic analysis (SHA). In the following we only summarize this method; for the technical details, see the books by Langel (1987) and Merrill et al. (1996).

The Earth's magnetic field is constantly changing in such a way that it is impossible to accurately predict what the field will be at any point in the very distant future. By constantly measuring the magnetic field, we can observe how the field is changing over a period of years (the so-called secular variation).

Using this information, it is possible to create a mathematical representation of the Earth's main magnetic field (having its sources in the fluid core) and how it is changing. The main field is the negative spatial gradient of a scalar potential $V(r, \theta, \phi, t)$ which satisfies Laplace's equation. Each internal field model comprises a set of spherical harmonics, each of which is a solution to Laplace's equation:

$$V(r, \theta, \phi, t) = a \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} (g_n^m(t) \cos m\phi + h_n^m(t) \sin m\phi) P_n^m(\cos \theta), \quad (1)$$

where $a = 6371.2$ km is the mean radius of the Earth, $r \geq a$ denotes the radial distance from the centre of the Earth, θ the geocentric colatitude, ϕ the east longitude, t the time, $P_n^m(\cos \theta)$ are the Schmidt-normalized associated Legendre functions of degree n and order m , and $g_n^m(t)$ and $h_n^m(t)$ are the corresponding Gauss coefficients. The maximum

* Corresponding author.

E-mail address: chambodu@ipgp.jussieu.fr (A. Chambodut).

spherical harmonic degree of the expansion is N , which corresponds to $N(N + 2)$ real coefficients.

Since the field changes in space and time, magnetic observations must continually be made and models generated to accurately represent the magnetic field as it is. For example, the International Geomagnetic Reference Field (IGRF) models are adopted every 5 years. These models have only computed spherical harmonics for the main field up to degree and order 10 (Mandea and Macmillan, 2000). However, as has been pointed out many times, the internal field at the Earth's surface contains clearly defined components from the core at least up to harmonics $N = 13$, beyond which they begin to become comparable to those from the crust. For higher N they likely continue to decrease in power until they are submerged below the crustal component. The crustal component has a much flatter spectral fall-off, and dominates the observed field for $N \geq 16$ which corresponds to scale sizes smaller than 2500 km. No method has yet been found to separate completely the two sources. The general practice has been to ignore the crustal contribution below $N \approx 13$, and core component above that number. One can compare maps attempting to show such separations using different techniques such as those by Cain et al. (1990), Langel (1993), and Alsdorf et al. (1994). The described scheme can also be applied for a regional magnetic field model (Haines, 1985), using the method of spherical cap harmonic analysis (SCHA). SCHA permits the use of data from only a portion of the Earth while satisfying the constraints of potential field theory. Indeed, the region to be studied has to be defined by a spherical cap and the analysis enables radial extrapolations and satisfies the zero curl and divergence conditions. It also allows the use of data from different altitudes.

Limitations of SHA or SCHA in modelling the Earth's magnetic field are linked to the precision in observations, their distributions and to the use of truncated spherical harmonics expansions. Indeed, the truncation of the spherical harmonics series followed by straightforward least-squares inversion leads to solutions that are strongly dependent on the particular chosen truncation level. Changing the truncation level modifies all the coefficients, due to spatial aliasing of the higher-order harmonics (Whaler, 1986). Some alternative modelling methods exist, such as harmonic spline modelling (Shure, 1982). This ap-

proach produces models smoothed according to some objective criteria (e.g. minimizing the complexity of some well-defined parameters of the field, such as the energy outside the core, mean square radial field component at the core–mantle boundary (CMB), lower bound on ohmic losses in the core, surface gradient of the radial field) which are nevertheless consistent with the data. Short-wavelength fields originating in both core and crust are suppressed. More details about this method are found in Shure (1982), Shure et al. (1982) and Parker and Shure (1982). To cover the global and the regional pattern of the magnetic field and to eliminate the limitations of SHA and SCHA, a new method to model the Earth's magnetic field can be developed. We believe that wavelet techniques may play a role in the solution of this challenging problem.

Over the last decade wavelets have become an exceedingly powerful tool for computations and data processing. They offer both the theoretical characteristics of smoothness, insights into the structure of functions and operators, and practical numerical tools leading to faster computational algorithms. Wavelets on the sphere have been considered by many authors (see, e.g. Dahlke and Maaß, 1996; Freedon et al., 1998; Holschneider, 1996; Dahlke et al., 2001). In this paper, we will limit ourselves to scalar fields. However, vector valued wavelet expansions of Mie potentials can also be applied and they have been considered recently (Bayer et al., 1998, 2001).

In this paper, we describe a simple technique for constructing wavelets on the sphere with properties that are useful for applications in geophysics. Although wavelets of that kind have been developed (e.g. Freedon et al., 1998; Freedon and Winterheuser, 1996; Holschneider, 1996; Klees and Haagmans, 1996) we believe this is the first time when their connection to multipolar developments has been stated. In particular, we interpret wavelets as multipolar sources which are not only situated at the CMB, but at different distances from the Earth's surface. Their position with respect to the Earth's surface can be interpreted as the scale of the wavelet (some of the statements are found in Freedon et al. (1998) with less concrete extent). Moreover, the formulae we present are very explicit and intuitive in terms of well-known multipoles.

The outline of the paper is as follows. We first give a brief review of applications and previous work involving wavelets on the sphere. This is followed by

a discussion of basic formulae of continuous wavelet analysis on the sphere. After a section on the discrete frames, we report on some simulations and conclude with discussions.

2. The basic formulae

Geophysical information systems have long had a need to represent sampled data on the sphere. In the following we present the expansion of scalar fields into continuous wavelets.

2.1. Continuous wavelet analysis on the sphere

Consider the unit sphere Σ , which sometimes may be considered as the subset of R^3 consisting of unit vectors. We denote by \hat{e} the unit vector in the direction of the North pole. The sphere is equipped with a (up to a normalization constant) unique measure $d\sigma$ that is invariant under the rotation group. We use the normalization where $\int_{\Sigma} d\sigma = 4\pi$. The space of square integrable functions with respect to this surface is denoted by $L^2(\Sigma)$, and the scalar product by $\langle \cdot, \cdot \rangle$. The space $L^2(\Sigma)$ has a natural well-known orthonormal basis given by the (complex) spherical harmonics $Y_{\ell,m}$. The linear span of the $Y_{\ell,m}$, for fixed ℓ with $m = -\ell, \dots, 0, \dots, +\ell$ is denoted by W_{ℓ} . We then have the decomposition of $L^2(\Sigma)$ into orthogonal components

$$L^2(\Sigma) = \bigoplus_0^{\infty} W_{\ell}, \quad (2)$$

where the orthogonal sum includes the closure in $L^2(\Sigma)$.

A function that depends only on $\hat{e} \cdot x$, $f = f(\hat{e} \cdot x)$, is called a zonal function. We tacitly identify zonal functions f over the sphere Σ with functions \tilde{f} over the interval $[-1, 1]$ by means of

$$f(x) = \tilde{f}(\hat{e} \cdot x) = \tilde{f}(\cos \theta), \quad x \in \Sigma, \quad (3)$$

and we do not distinguish between f and \tilde{f} in order to simplify the notations. The zonal harmonics, $m = 0$, are related to the Legendre polynomials via

$$\sqrt{2\ell+1}P_{\ell}(\hat{e} \cdot x) = Y_{\ell,0}(x), \quad x \in \Sigma. \quad (4)$$

Note that $\hat{e} \cdot x = \cos \theta$, where θ is the colatitude (i.e. the angle between the North pole and the point x ;

$0 \leq \theta \leq 180$). We also introduce the functions Q_{ℓ} via

$$Q_{\ell} = (2\ell+1)P_{\ell} = \sqrt{2\ell+1}Y_{\ell,0}. \quad (5)$$

The Q_{ℓ} are in fact the reproducing kernels of the W_{ℓ} . More precisely, a function on the sphere is called zonal, if it depends only on the latitude $f = f(\hat{e} \cdot x)$. Now the convolution of a zonal function with an arbitrary function $s(x)$ is well defined through

$$f * s(x) = \int_{\Sigma} f(x \cdot x')s(x') d\sigma(x'). \quad (6)$$

If we denote for a zonal function f , its translated version $\tau_y f(x) = f(x \cdot y)$, then the convolution can also be written as

$$f * s(x) = \langle \tau_x f, s \rangle. \quad (7)$$

Note that since f is rotational invariant around the \hat{e} -axis (the north-south direction), it follows that $\tau_y f$ is invariant for rotations around the y -axis (the direction of the point y). The functions Q_{ℓ} are the reproducing kernels for the W_{ℓ} , namely convolution with the Q_{ℓ} acts in W_{ℓ} like the identity:

$$r \in W_{\ell} \Rightarrow Q_{\ell} * r = \delta_{\ell,\ell'} r. \quad (8)$$

In particular, it follows that the scalar product of a spherical harmonic with the translated Q_{ℓ} can be easily computed

$$\langle \tau_x Q_{\ell}, Y_{\ell',m} \rangle = Q_{\ell} * Y_{\ell',m}(x) = \delta_{\ell,\ell'} Y_{\ell',m}(x). \quad (9)$$

Note also that the following convolution theorem holds: if $f = \sum_{\ell} \hat{f}_{\ell} Q_{\ell}$ and $r = \sum_{\ell,m} \hat{s}_{\ell,m} Y_{\ell,m}$ then

$$f * s = \sum_{\ell,m} \hat{f}_{\ell} \hat{s}_{\ell,m} Y_{\ell,m}. \quad (10)$$

2.2. The wavelet transform on the sphere

We recall the basic facts for the construction of continuous wavelet analysis on the sphere. We essentially follow Holschneider (1996) and Freedman et al. (1998) and references therein. A piecewise continuous function $\gamma(\omega)$ defined for $\omega > 0$ is called admissible if the following integral is finite

$$c_{\gamma} = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} |\gamma(\omega)|^2 < \infty, \quad (11)$$

and if there is a $C < \infty$ such that for each $a > 0$ we may estimate

$$a^2 \sum_0^{\infty} (2\ell + 1) |\gamma(a\ell)|^2 < C. \quad (12)$$

If χ is a second admissible function, we say that (γ, χ) is an analysis-reconstruction pair if

$$\int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \bar{\gamma}(\omega) \chi(\omega) = 1. \quad (13)$$

Here $\bar{\gamma}(\omega)$ denotes the complex conjugate of $\gamma(\omega)$. In particular for an admissible function γ with $c_\gamma = 1$ we have that (γ, γ) is an analysis-reconstruction pair.

For each $a > 0$ we now define g_a via

$$g_a = \sum_0^{\infty} \gamma(a\ell) Q_\ell. \quad (14)$$

Analogously for h_a with γ replaced by χ . By conditions (4), (5) and (12), we have g_a in $L^2(\Sigma)$ with $\|g_a\|^2 < C/a^2$. Clearly g_a is a zonal function since the Q_ℓ are zonal. We call $a > 0$ the scale, although the meaning of this becomes clear as we consider concrete examples. As before, we denote by $\tau_x g_a$ or by $g_{x,a}$ the function translated to position x .

2.2.1. The wavelet transform

The wavelet transform of an arbitrary function $s \in L^2(\Sigma)$ is now defined as the following family of scalar products:

$$\mathcal{W}_\gamma s(x, a) = \langle \tau_x g_a, s \rangle = \langle g_{x,a}, s \rangle, \quad (15)$$

and it is a function of position $x \in \Sigma$ and scale $a > 0$. Note that we can also write it as a family of convolutions

$$\mathcal{W}_\gamma s(x, a) = \bar{g}_a * s(x). \quad (16)$$

Upon decomposing s into spherical harmonics, $s = \sum \hat{s}_{\ell,m} Y_{\ell,m}$, we may also write

$$\mathcal{W}_\gamma s(x, a) = \sum_{\ell,m} \bar{\gamma}(a\ell) \hat{s}_{\ell,m} Y_{\ell,m}(x). \quad (17)$$

Upon summing over m first, we make appear the projections s_ℓ of s onto W_ℓ , $s_\ell = \sum_m \hat{s}_{\ell,m} Y_{\ell,m}$, and we have

$$\mathcal{W}_\gamma s(x, a) = \sum_\ell \bar{\gamma}(a\ell) s_\ell(x). \quad (18)$$

2.2.2. The wavelet synthesis

For a function $r(x, a)$, $x \in \Sigma$, $a > 0$, we define the wavelet synthesis of r with respect to χ as

$$\mathcal{M}_\chi r(x) = \int_0^{\infty} \frac{da}{a} \int_\Sigma d\sigma(x') r(x', z) \tau_{x'} h_a(x), \quad (19)$$

whenever this integral makes sense. It is a superposition of wavelets $\tau_{x'} h_a$ with respective weights given by the coefficients $r(x', a)$. If (γ, χ) is an analysis-reconstruction pair, then we have

$$\mathcal{M}_\chi \mathcal{W}_\gamma = 1. \quad (20)$$

That means the wavelet transform may be inverted by the wavelet synthesis.

2.3. The Poisson multipole wavelets

2.3.1. Definition

The wavelets with $\gamma(\omega) = \omega^n e^{-\omega}$ are called the Poisson wavelets for a reason that will become clear later. We explicitly have

$$g_a^n(x) = \sum_\ell (a\ell)^n e^{-a\ell} Q_\ell(x), \quad x \in \Sigma. \quad (21)$$

We now want to show that these wavelets can be identified with multipole sources inside the Earth. Consider a monopole inside the Earth at position ζ , $|\zeta| < 1$. Its field is a solution of the Laplace equation:

$$\Delta \Psi = \mu, \quad (22)$$

with $\mu = \delta_\zeta$, the Dirac measure located at ζ . The (scalar) field generated by this singularity is $1/|x - \zeta|$ in the whole space. Its restriction to the (unit) sphere can be expanded into zonal harmonics, namely

$$\frac{1}{|x - \zeta|} = \sum_\ell P_\ell(x \cdot \hat{\zeta}) |\zeta|^\ell, \quad |\zeta| < 1, |x| = 1. \quad (23)$$

Here $\hat{\zeta} = \zeta/|\zeta|$ is a unit vector in the direction ζ . We now suppose that the multipole is located on the line between the centre of the sphere and the North pole, $\zeta = \lambda \hat{e}$, $0 < \lambda < 1$. Considering the field Ψ^n generated by the multipole $\mu = (\lambda \partial_\lambda)^n \delta_\lambda \hat{e}$, we clearly have

$$\Psi_\lambda^n(x) = (\lambda \partial_\lambda)^n \frac{1}{|x - \lambda \hat{e}|} = \sum_\ell P_\ell(x \cdot \hat{e}) \ell^n \lambda^\ell. \quad (24)$$

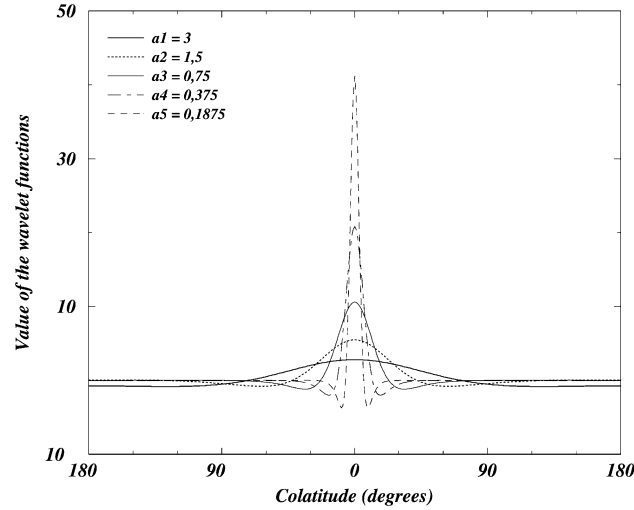


Fig. 1. The Poisson wavelets, with order 3 and different scales a , as function of the colatitude θ on the sphere.

Therefore, if we write $a = \log(1/\lambda)$, we have

$$\Psi_\lambda^n(x) = a^{-n} \sum_{\ell} (a\ell)^n e^{-a\ell} P_\ell(x \cdot \hat{e}). \quad (25)$$

Finally, since $Q_\ell = (2\ell + 1)P_\ell$ we end up with

$$g_a^n = a^n \left(\frac{2}{a} \Psi_\lambda^{n+1} + \Psi_\lambda^n \right). \quad (26)$$

Therefore, we may see g_a^n as the restriction to the unit sphere of the field generated by a multipole located and oriented along the \hat{e} -axis. More precisely, we have that $g_a^n(x)$ may be harmonically continued to the whole space except at the point $\zeta = \lambda\hat{e} = e^{-a}\hat{e}$. This continuation, denoted again by g_a^n , satisfies

$$\Delta g_a^n = a^n \left(\frac{2}{a} (\lambda\partial_\lambda)^{n+1} - (\lambda\partial_\lambda)^n \right) \delta_{\lambda\hat{e}}, \quad (27)$$

$$g_a^n(x) = a^n \left(\frac{2}{a} (\lambda\partial_\lambda)^{n+1} - (\lambda\partial_\lambda)^n \right) \frac{1}{|x - \lambda\hat{e}|}. \quad (28)$$

If we note that $(\lambda\partial_\lambda)f(\lambda) = -\partial_a f(e^{-a})$, we may also write

$$g_a^n(x) = (-1)^{n+1} a^n \left(\frac{2}{a} \partial_a^{n+1} - \partial_a^n \right) \frac{1}{|x - e^{-a}\hat{e}|}, \quad (29)$$

$$g_a^n(x) = \sum_{\ell} (a\ell)^n e^{-a\ell} (2\ell + 1) P_\ell(x \cdot \hat{e}). \quad (30)$$

Note that these expressions give explicit formulae for the wavelets. Fig. 1 shows an example of five wavelets computed with different values for the scale a (all of them are centred on the North pole).

2.3.2. Explicit expressions in terms of Legendre polynomials

We can give an expression of the wavelets g_a^n in terms of Legendre polynomials in the following way. First note that for $x \neq 0$ we have

$$\partial_\lambda^n \frac{1}{|x - \lambda\hat{e}|} \Big|_{\lambda=0} = n! P_n(\hat{x} \cdot \hat{e}) |x|^{-n-1}. \quad (31)$$

Here $\hat{x} = x/|x|$ is the unit vector in direction x . Therefore, for a multipole located at $\lambda\hat{e}$ we may write

$$\begin{aligned} \partial_\lambda^n \frac{1}{|x - \lambda\hat{e}|} &= n! P_n(\cos \chi) |x - \lambda\hat{e}|^{-n-1}, \\ \cos \chi &= (x - \lambda\hat{e}) \cdot \frac{x}{|x - \lambda\hat{e}|}. \end{aligned} \quad (32)$$

Now, let us define coefficients C_k^n in the following way

$$(\lambda\partial_\lambda)^n = \sum_{k=1}^n C_k^n \lambda^k \partial_\lambda^k, \quad k \leq n, \quad C_k^n = 0 \quad k > n. \quad (33)$$

So, we can write

$$g_a^n(x) = (-1)^{n+1} a^n \sum_{k=1}^{n+1} k! \frac{2C_k^{n+1} - aC_k^n}{a} \times e^{-ka} P_k(\cos \chi)|x - e^{-a}\hat{e}|^{-n-1}. \quad (34)$$

Note that although the wavelets contain infinite spherical harmonics (if we try to expand them into multipoles centred at the origin) they only contain $(n+1)$ multipoles located at $e^{-a}\hat{e}$. This is obviously well suited for numerical computations. Thus, asymptotically, the scale a corresponds to the distance of the multipoles to the Earth's surface:

$$|e^{-a}\hat{e} - \hat{e}| \simeq a. \quad (35)$$

The coefficients C_k^n can be computed recursively via

$$C_k^{n+1} = kC_k^n + C_{k-1}^n. \quad (36)$$

Note that rarely the order depasses 10.

2.3.3. Convolution properties

The main advantage of the wavelets we have introduced is that their convolutions can be easily computed. More precisely using (8), we see that:

$$g_a^n \times g_{a'}^{n'} = \frac{(a)^n (a')^{n'}}{(a+a')^{n+n'}} g_{a+a'}^{n+n'}. \quad (37)$$

In particular, the scalar product between our wavelets is explicit

$$\langle g_{y,a}^n, g_{y',a'}^{n'} \rangle = \frac{(a)^n (a')^{n'}}{(a+a')^{n+n'}} g_{a+a'}^{n+n'}(y \cdot y'), \quad (38)$$

$y, y' \in \Sigma$.

The formulae become even simpler, if we consider only wavelets having the same order $n = n'$. So we have for the L^2 norm the following simple relation:

$$\|g_a^n\|^2 = 4^{-n} g_{2a}^{2n}(1). \quad (39)$$

This follows easily from the definition, the fact that Q_ℓ are reproducing operators for the spaces W_ℓ , and the convolution theorem (see Eqs. (8) and (10)). Indeed, we may write

$$g_a^n \times g_{a'}^{n'}(x) = \sum_{\ell} (a\ell)^n (a'\ell)^{n'} e^{-\ell(a+a')} Q_\ell(x), \quad (40)$$

and the above formulae follow easily.

2.3.4. Quadratic forms

In modelling the magnetic fields, some a priori information about the regularity of the field are often used to invert the data in a stable way. Very often this regularity can be expressed in terms of quadratic forms. More precisely for $s = \sum_{\ell,m} \hat{s}_{\ell,m} Y_{\ell,m}$ and $r = \sum_{\ell,m} \hat{r}_{\ell,m} Y_{\ell,m}$, we consider quadratic forms of the following type:

$$B(s, r) = \sum_{\ell,m} \bar{\hat{s}}_{\ell,m} \hat{r}_{\ell,m} \ell^k, \quad (41)$$

$$\langle Y_{\ell,m}, BY_{\ell',m'} \rangle = \ell^k \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'}, \quad (42)$$

where k is an integer. Examples of such quadratic forms appear when considering the heat flow at the CMB or an a priori decreasing of the field spectrum. All such quadratic forms have fairly explicit matrix elements with respect to the Poisson wavelets. Indeed,

$$B(g_{y,a}^n, g_{y',a'}^{n'}) = a^{-k} \sum_{\ell} (a\ell)^{n+k} (a'\ell)^{n'} e^{-\ell(a+a')} Q_\ell(x), \quad (43)$$

$$B(g_{y,a}^n, g_{y',a'}^{n'}) = a^{-k} \frac{a^{n+k} a'^{n'}}{(a+a')^{n+k+n'}} g_{a+a'}^{n+k+n'}(y \cdot y'). \quad (44)$$

3. Discrete frames

The continuous collection of functions $g_{x,a}$ may be reduced to a countable family if we sample the position–scale space. This can be intuitively explained as follows: for fixed scale a and degree n , the spectrum of the wavelet g_a^n covers only a part of the spaces W_ℓ . Indeed, Fig. 2 shows that 90% of the energy is contained in a few wavelengths around the central peak located around (n/a) . However, this space has a finite dimension and only a finite number of independent wavelet functions is needed. Indeed, this number depends on the scale: at smaller scale, the number of wavelets is larger. Moreover, it should be possible to discretize the scales because the wavelets have largely overlapping spectra (compare although Fig. 6 below).

3.1. Frames

In our times of ever faster computers there is no more practical need for the exclusive use of an

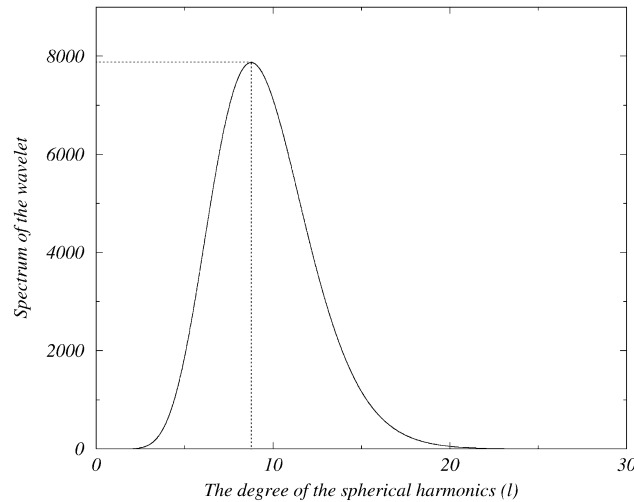


Fig. 2. Spectrum of the wavelet of scale $a = 0.625$ and degree $n = 5$. Its maximum is around $\ell = 8$.

orthonormal basis. Suppose we have a set of functions $\{g_n\}_{n=0,1,\dots}$ which play the role of a complete family of elementary functions. Let us see what this family must fulfil in order to be useful in modelling data:

- it should be a complete family;
- functions should be rather independent;
- easy interpretation should be possible;
- finite families should have good approximation properties.

As it turns out, frames of wavelets fulfil these requirements. For the convenience of the reader we recall the basic properties of frames. A collection $\{g_n\}_{n=0,1,\dots}$ in a Hilbert space H is a *frame* if for all $s \in H$ we have with two constants $0 < A < B < \infty$,

$$A\|s\|^2 \leq \sum_n |\langle g_n, s \rangle|^2 \leq B\|s\|^2. \quad (45)$$

The numbers A and B are called the framebounds. An orthonormal basis is a frame with framebounds equal to 1. But frames are more general. If we introduce the sampling operator S with respect to the family $\{g_n\}$ as $(Sr)(n) = \langle g_n, r \rangle$,

then this defines a continuous mapping from H to $L^2(N)$. In case we want to stress the dependency on

g_n we will write $S_{\{g_n\}}$. By the right inequality the sampling mapping with respect to a frame is bounded, and by the left inequality it is injective. However, it is not surjective: not every sequence of numbers can be obtained as sampling sequence with respect to a frame, but every $r \in H$ may be recovered from its sampling sequence Sr ; no information is lost, and we may expand arbitrary elements in H into linear combinations of the g_n . For more details we refer to Holschneider (1995) or Daubechies (1992).

In the context of wavelet analysis, frames appear when we replace the continuous position–scale space $(x, a) \in \Sigma \times R^+$, by a suitable chosen discrete grid of positions and scales Γ . More precisely, the family $\{g_{x,a} | (x, a) \in \Gamma\}$ is a frame and not an orthonormal basis. In the following section we give concrete examples of such grids Γ .

4. Application to synthetic data

Our construction of grids involves two steps: a choice of positions on the sphere and a choice of scale discretization. The positions are obtained by projecting hierarchical subdivision of a cube onto the sphere. The scale discretization is based on geometrical progression.

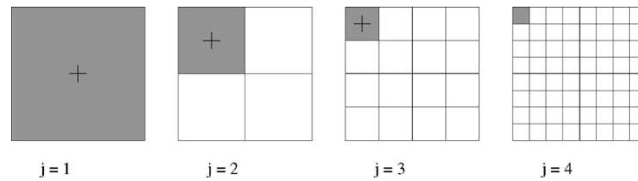


Fig. 3. Degree of sampling j of a cube.

4.1. Description of the position–scale grid

Let us recall that the wavelet $g_{x,a}^n$ may be identified with a multipole of order n at the point $(e^{-a}x)$ inside the sphere. Therefore, all wavelets for fixed scale a correspond to multipoles on a spherical shell of radius $R = e^{-a}$. The defined unit sphere Σ contains a number of concentric shells of radius R_i . Each shell can be represented on Σ by points characterized by θ, ϕ , where θ denotes the colatitude and ϕ is the longitude.

4.1.1. The discrete directions (θ, ϕ)

We define the directions (θ, ϕ) as follows. We take a cube centred with respect to the sphere. Each of its six sides is divided in 4^{j-1} squares, where $(j \geq 1)$ denotes the maximum degree of sampling (Fig. 3). Projecting the centres of the facets onto the sphere defines the positions. Thus, for generating j we have $(6 \times 4^{j-1})$ positions which are denoted by Λ_j (Fig. 4).

4.1.2. The radii of shells

The definition of position–scale grid is completed by choosing the radii of shells to be:

$$R_j = e^{(-C \cdot p^{j-1})}, \tag{47}$$

where j is the degree of sampling the cube, $0 < p < 1$, and C a constant. In the present study the adopted values are $p = 1/2$ and C the order of the wavelet in the given basis. This value for C ensures that the wavelet $g_{a=1}$ is concentrated around a spherical harmonic $\ell = 1$.

4.1.3. Coding of the wavelets

We use two different codings for our family of wavelets. The first is given by a multi-index of the form:

$$[j, F, \alpha_0, \dots, \alpha_{j-2}], \tag{48}$$

where $j = 0, 1, 2, \dots, F \in \{0, 1, 2, \dots, 5\}$; $\alpha_p \in \{0, 1, 2, 3\}$ and $p \in \{0, \dots, j-2\}$. Here j denotes the generation and thus determines the scale/radius. F is the number of the face of the cube as depicted in Fig. 5a–c. The α_p corresponds to the position on the cube. This is shown in Fig. 5a–c and Table 1. The case $j = 0$ corresponds to the constant function. The second ordering is sequential.

The transition between the two codings is difficult to be expressed in closed form. For the interested reader, we have suitable C++ class available.

4.2. Verification of the wavelet frame

In the previous section, some evidence was given that our family of wavelets is a frame. Here we want to give some more evidence for this. If the family of

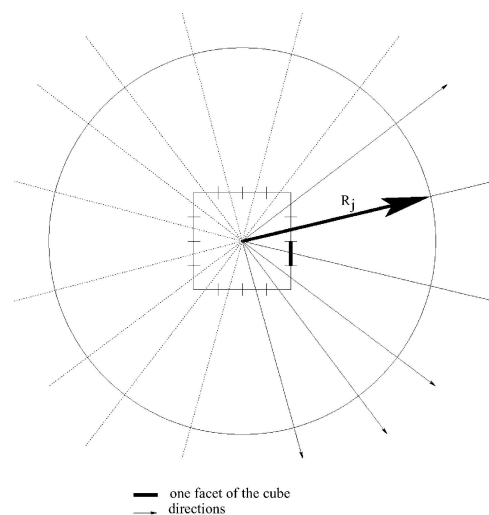


Fig. 4. Representation of a unit sphere and a cube centred with respect to the sphere for $j = 3$.

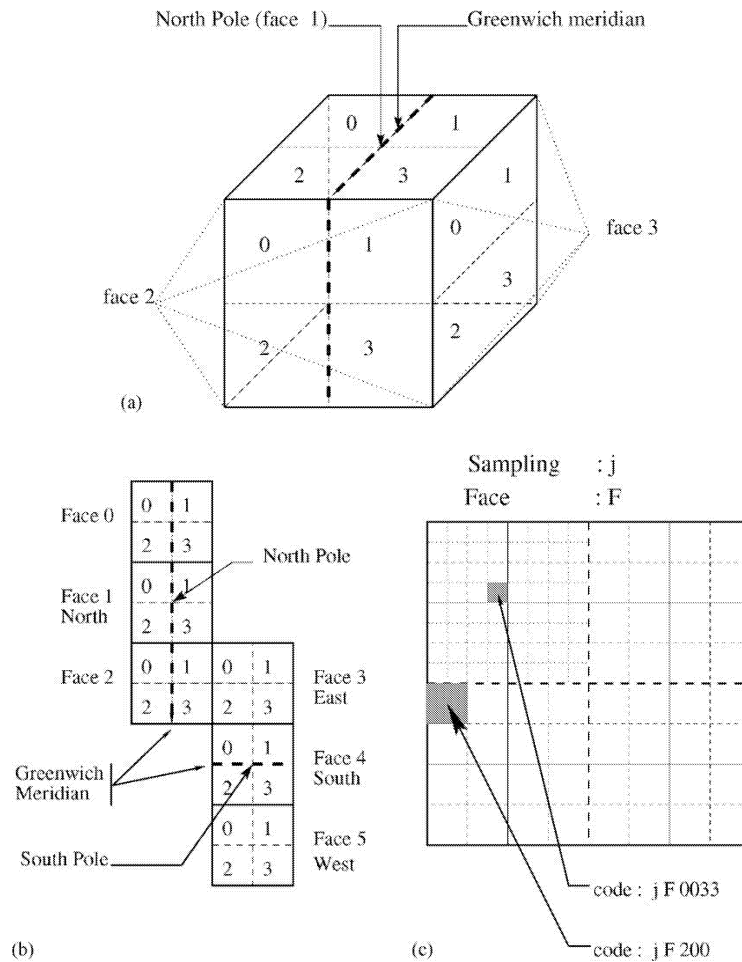


Fig. 5. Generation of codes using a cube side: (a) the cube in volume; (b) the flat cube; (c) a side of the cube.

Table 1
The table of used codings of the positions

The generation j	The entire code $[j, F, \alpha_0, \dots, \alpha_{j-2}]$
0	[0, -, -]
1	[1, 0, -][1, 1, -][1, 2, -][1, 3, -][1, 4, -][1, 5, -]
2	[2, 0, 0][2, 0, 1][2, 0, 2][2, 0, 3][2, 1, 0] [2, 1, 1][2, 1, 2][2, 1, 3][2, 2, 0]... [2, 5, 3]
3	[3, 0, 00][3, 0, 01]... [3, 5, 33]
4	[4, 0, 000][4, 0, 001]... [4, 2, 001]... [4, 5, 333]
5	[5, 0, 0000]... [5, 5, 3333]
6	...

wavelets we consider is actually a frame, then any scalar field on the sphere can be represented via an infinite superposition of wavelets

$$s = \sum_0^{\infty} \alpha_n g_n. \tag{49}$$

However, in practical applications, we are confronted with a finite number of wavelets and we have to analyse the approximation properties of finite dimension subspaces of wavelets. Let U_j denote the spaces of functions that is generated by the first j generations

of wavelets; that is

$$s \in U_j \Leftrightarrow s = \sum_{n=0}^{M(j)} \alpha_n g_n. \quad (50)$$

Here $M(j) = 4 \times 6^{j-1}$ is the number of wavelets up to scale division j . On the other hand let us consider the spaces of spherical harmonics of degree ℓ , i.e. W_ℓ . Its dimension equals $(2\ell + 1)$ and hence the space of functions

$$V_N = \bigoplus_{\ell=0}^N W_\ell, \quad (51)$$

consisting of all linear combinations of spherical harmonics up to degree N , with dimension $N(N + 2)$. We do not prove that the family of wavelets generated in this way and used in the paper is actually a frame. This is still under mathematical investigation for this specific family of wavelets. However, we can provide numerical evidence that the family of wavelets is complete without being too over-complete. The first argument is based on counting dimensions. The other

evidence is given by showing that spherical harmonics are numerically well approximated with a finite sum of wavelets. Note however, that results concerning some frames of wavelets on the sphere exist (see, e.g. Freeden et al., 1998).

Suppose that N is fixed. In order to represent all spherical harmonics in V_N exactly, we would need all wavelets. No finite sum of wavelets represents a spherical harmonic exactly. This follows easily from the fact that the wavelets are not strictly band-limited. However, fixing a level of approximation, we may replace the wavelets by band-limited functions. This is done by truncating the spectrum of the wavelets at, say, 90% of the energy. We call again U_j the spaces generated by such truncated wavelets. We now want to argue that all spherical harmonics can be decomposed into wavelets. For this note that for each N there is a smallest j such that $U_j \cap V_N = U_{j+1} \cap V_N$. This means, adding new scales ($j \rightarrow j + 1$), does not help us to represent the spherical harmonics in V_N . Therefore, the dimension of V_N must not be larger than the

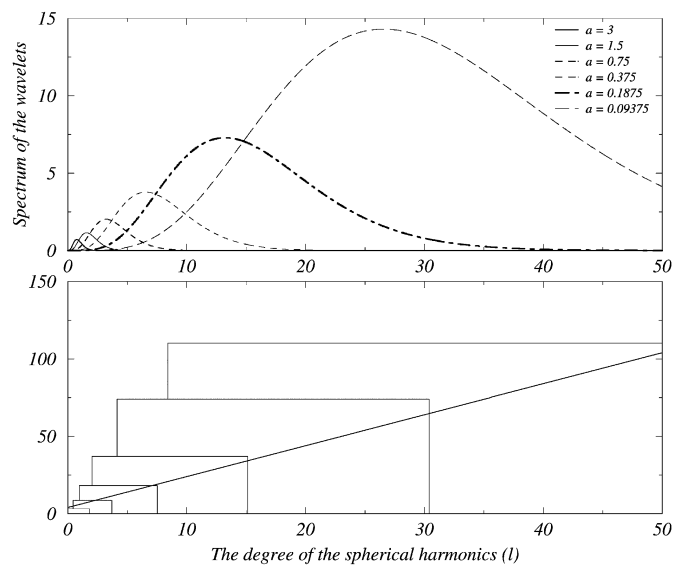


Fig. 6. Top: Spectral functions of the 5000 wavelets of the frame based on six-scale generations. Note that the spectrum is covered. Bottom: Crude approximation of the above picture. The dimensions of the space of spherical harmonics up to degree ℓ correspond to the surface below the thick line. The additional area of each rectangle corresponds to the number of wavelets at a given scale. Each rectangle corresponds to the “effective spectral support” of the wavelets (to be compared with the above picture). Note that (i) the amplitude of the wavelets (top) were scaled such as the corresponding area reflects the number of wavelets at a given scale; (ii) the dimensions although not equal are nevertheless comparable; (iii) our frame is likely to be over-dense.

dimension of the corresponding V_j . This is actually the case shown in Fig. 6. On the other hand, the ratio between dimensions should not increase with the number of scales. This is not the case and it is shown again in Fig. 6.

If we want to project an arbitrary function onto the approximation space U_j , we use the method of least squares, which leads to the so-called normal equations:

$$\sum_{n'} \langle g_n, g_{n'} \rangle \cdot \alpha_{n'} = \langle g_n, S \rangle, \quad (52)$$

$$\sum_{n'} M_{nn'} \cdot \alpha_{n'} = b_n, \quad (53)$$

where the matrix $M_{nn'} = \langle g_n, g_{n'} \rangle$ is the covariance matrix (Gramm matrix) and its elements are the scalar products between the functions g_n ; the $b_{n'}$ contains the sum of scalar products between a wavelet of the basis and the scalar measurements. The $M_{nn'}$ matrix provides us with a way to measure the correlation between the functions.

When only data on a finite set (\mathcal{O}) of “observation points” p , with measured values $V(p)$ are available, the above formulae are no longer applicable, because we need to include some a priori information into the approximations. This can be done in many ways. One possibility is to require some global smoothness, which amounts to minimize the following quadratic expression:

$$\sum_{p \in \mathcal{O}} |L(p) - V(p)|^2 + \lambda \langle L, CL \rangle. \quad (54)$$

Here, L is the model (e.g. given by a wavelet expansion) and C is a quadratic form, that controls the regularity. Generally, the last term is justified by physical considerations (the energy outside the core, mean square radial field component at CMB, lower bound on ohmic losses in the core, etc.). In term of coefficients of finite wavelet expansions, the equation now reads:

$$\sum_{n'} (B_{n,n'} + \lambda C_{n,n'}) \alpha_{n'} = V_n, \quad (55)$$

with $B_{n,n'} = \sum_{p \in \mathcal{O}} g_n(p) g_{n'}(p)$, $C_{n,n'} = \langle g_n, C g_{n'} \rangle$, and $V_n = V(p_n)$; λ is used to choose between a better fit and a higher smoothness. In this paper, we use a simple approach, by considering a suitable cut-off in

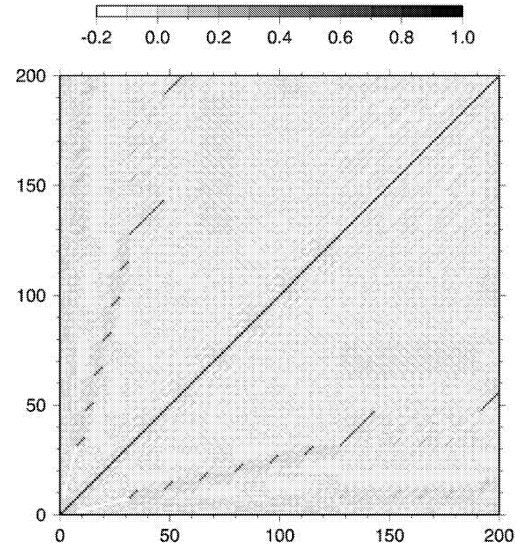


Fig. 7. The covariance matrix for a basis containing 200 wavelets (degree $n = 3$, initial scale $a = 1$).

the scales, which in turn allows us to use $C = Id$ as “regularizer”.

4.2.1. Covariance matrix

The first application of our basis is given in Fig. 7, showing the covariance matrix for $n, n' = 1, \dots, 200$. In the case of an orthonormal basis the covariance matrix is diagonal (the off-diagonal terms are zero because of the orthogonality properties of the functions). The correlation between functions gives off-diagonal terms in the $M_{nn'}$ matrix, which can be considered as an indicator of the departure of the actual situation from the ideal one. In fact the diagonal terms are well defined, moreover other small segments are also present, as a result of the different interactions between the different scales of wavelets on the sphere. For example, the six small segments above the diagonal result from the scalar product between the second cube with $j = 2$, scale $a = 0.5$ and degree $n = 3$ (on the y-axis: $y = 7$ to $y = 31$) and the third one with $j = 3$, scale $a = 0.25$ and degree $n = 3$ (on the x-axis: $x = 32$ to $x = 127$).

Let us also note that if we take a finite collection of wavelets only, they are linearly independent, and thus they constitute a basis for the space they

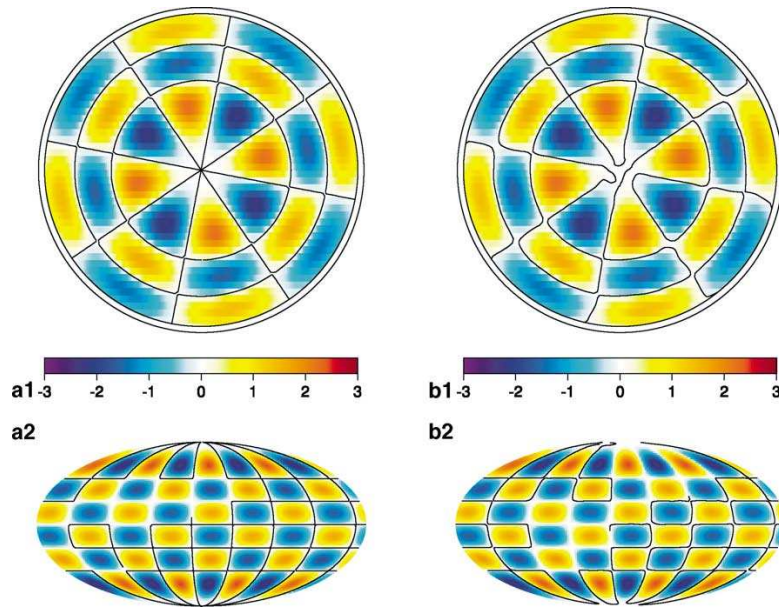


Fig. 8. Representation of the spherical harmonic $l = 9, m = 4$ (a) directly and (b) in the basis of the 1000 wavelets (1: North pole of the sphere, 2: Mollweide projection).

generate. However, as the number of wavelets increases, they may become less and less independent. A manifestation is seen in the covariance matrix, which becomes less and less positive-definite. The simple least-squares method we have used can become numerically unstable. But if the collection is a frame, then other numerical methods exist to invert the

data in a stable way and the stability of the algorithms does not depend on the number of wavelets used.

4.2.2. Approximation of a spherical harmonic in the wavelet frame

To approximate a spherical harmonic in a wavelet frame is more important, as thereafter it is possible

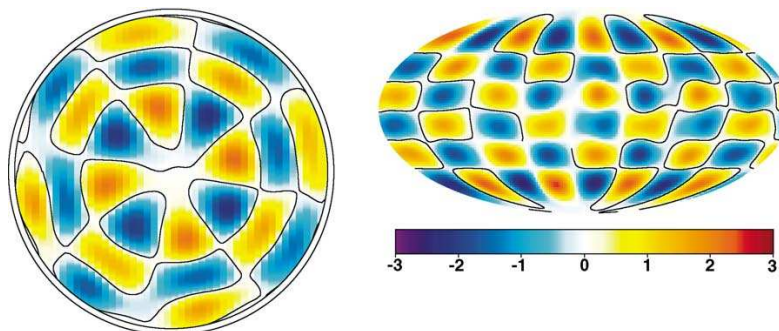


Fig. 9. Representation of the spherical harmonic $l = 9, m = 4$ in the frame of the 200 wavelets (left: North pole of the sphere; right: Mollweide projection).

to compare a spherical harmonic basis with a wavelet frame. This is a natural requirement, and has been considered before for different wavelets (e.g. Maier and Bayer, 1998). All the spherical harmonics can be described by a wavelet frame. Many tests were done, for different spherical harmonics and different wavelet frames. Fig. 8 shows one of them: (a) the spherical harmonic for degree $\ell = 9$, and order $m = 4$ is represented in the classical way (Langel, 1987; Backus et al., 1996); the same spherical harmonic is represented in our wavelet frame (b) formed by 1000 wavelets, with degree $n = 3$ and their scales varying from $a_1 = 1.0$ to $a_{1000} = 0.0625$. The two representations are similar, underlining our capability to represent a spherical harmonic in a given wavelet frame. The higher degree and order harmonics are better approximated when the wavelet frame has a large number of wavelets and they are of small scales. The same spherical harmonic for $\ell = 9$, $m = 4$ is represented in Fig. 9 with a frame of 200 wavelets with degree $n = 3$, their scales varying from $a_0 = 1.0$ to $a_{200} = 0.125$. This figure clearly shows how important is to use the adequate wavelet frame in order to describe the spherical harmonic basis.

4.2.3. Modelling the geomagnetic field

To model the geomagnetic field we employ the usual SHA expansion of the scalar potential in geocentric coordinates. For example the IGRF models are the empirical representations of the Earth's main field (without crustal and external sources) at different epochs. The IGRF coefficients are based on all available data sources including geomagnetic measurements from observatories, repeat stations, ships, aircrafts and satellites. Nevertheless, the data used by different research teams are not the same, and differences between the candidate IGRF models can reach some thousands of nT (Lowes et al., 2000). Differences between models can also be observed when the same dataset is used, but the SHA expansion is applied with different parameters (varying the degree/order of the expansion, considering or not the crustal and external contributions, modelling or not the Dst, etc.). Moreover, the SHA is not able to take into account the uneven distribution of data on the sphere or to describe, by the same set of coefficients, the global and the regional features of the magnetic field. These disadvantages are overtaken by the pre-

sented wavelet analysis and the following results show this.

In order to obtain a candidate model for IGRF 2000, Langlais and Mioara (2000) used the data provided by geomagnetic observatories, repeat stations and some scalar data. The quality of these data was taken into account by a weighting scheme. Here we use only the total field measurements provided by the same 145 observatories as in Langlais and Mioara (2000). Fig. 10 shows that the geographical distribution of observatories is unbalanced between the Northern and Southern hemispheres and obviously between the continental and oceanic regions.

These data are used in getting a series of wavelet models, depending on different parameters as number and degree of wavelets, scale values, etc. Finally, the chosen model based on wavelets is obtained considering the following parameters:

- number of wavelets: 100,
- number of cube generations: $j = 3$,
- degree of wavelets: $n = 2$,
- and scales from $a_1 = 5.0$ to $a_{100} = 1.25$.

These parameters allow us to compare the two models with 120 spherical harmonics and 100 wavelet basis coefficients, respectively.

Figs. 11 and 12 show the total field intensity given by a SHA model (here the candidate model for IGRF 2000 was provided by Langlais and Mioara (2000)) and our model based on wavelet basis. First, we remark that both figures show the same general well-known features of the total field of the Earth. The wavelet model better underlines some small scale changes. Indeed in the Australian region, some oscillations in the field are clearly shown by the wavelet model. Another example concerns the south Atlantic anomaly which is well defined in both maps, but more details are given by the wavelet basis.

To compare these two models, more tests are needed. Firstly, we plot the residuals between the two models over the Globe. Fig. 13 shows that the differences between models can reach some thousands of nT in areas where observatories are completely missing. Indeed, in northern Atlantic area, Pacific area and Antarctica, the most important differences are observed. This behaviour is normal, as the SHA represents the geomagnetic field at the global scale and the lack of data, in a given region, is seen by

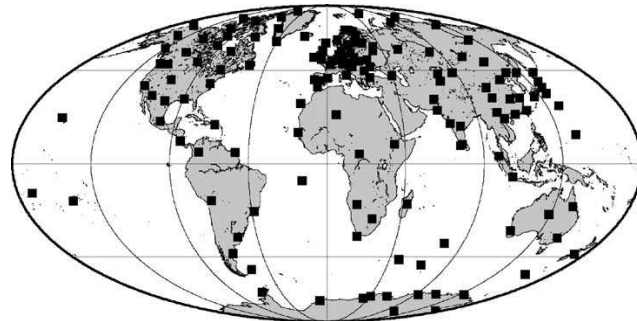


Fig. 10. The geographical distribution of the 145 observatories used (Mollweide projection).

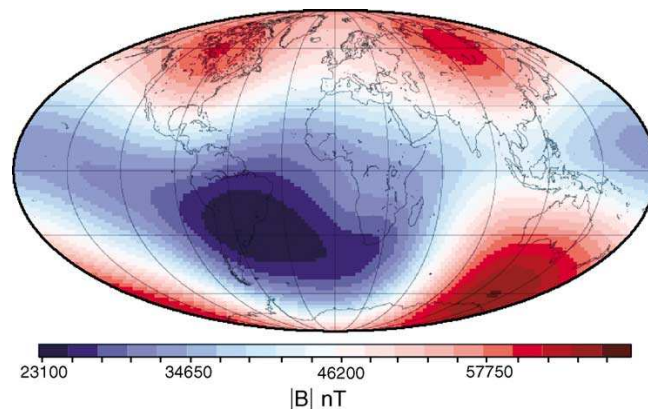


Fig. 11. The total intensity of the geomagnetic field (nT) obtained from a spherical harmonic model, with degree/order 10 (Langlais and Mioara, 2000) (Mollweide projection).

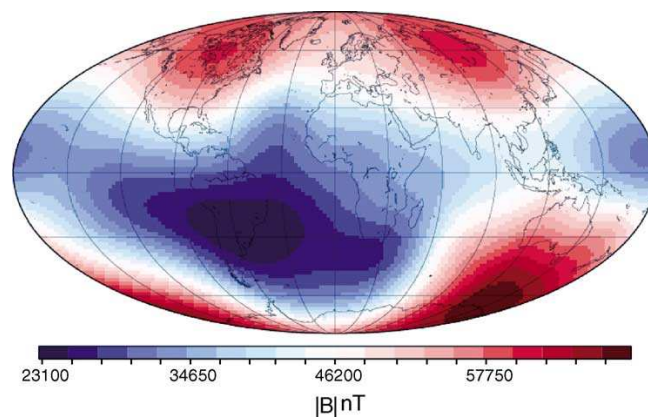


Fig. 12. The total intensity of the geomagnetic field (nT) obtained from a wavelets model of 100 wavelets with $a_1 = 5$ to $a_{100} = 1.25$ (Mollweide projection).

M. Holschneider et al./Physics of the Earth and Planetary Interiors 135 (2003) 107–124

121

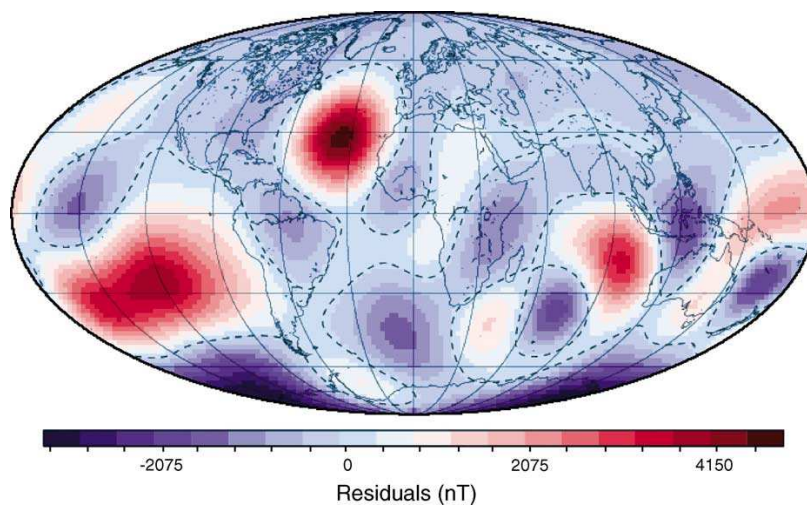


Fig. 13. Residuals between the two models (spherical harmonic analysis-wavelet basis) (Mollweide projection).

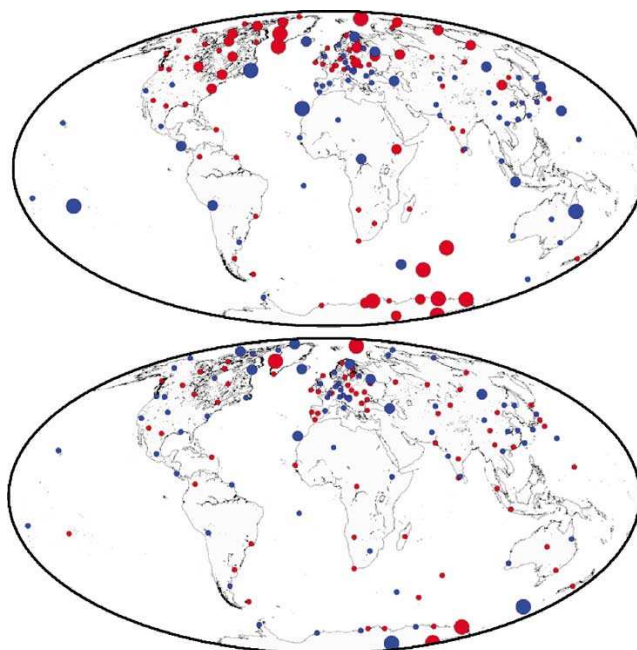


Fig. 14. Residuals (observed minus predicted values) between (top) observational data and spherical harmonic model; (bottom) observational data and wavelet model. Code is as follows: red colour for positive differences, blue colour for negative differences; absolute values larger than 600 nT : full large circles; absolute values between 300 and 600 nT : full small circles; absolute values smaller than 300 nT : dots.

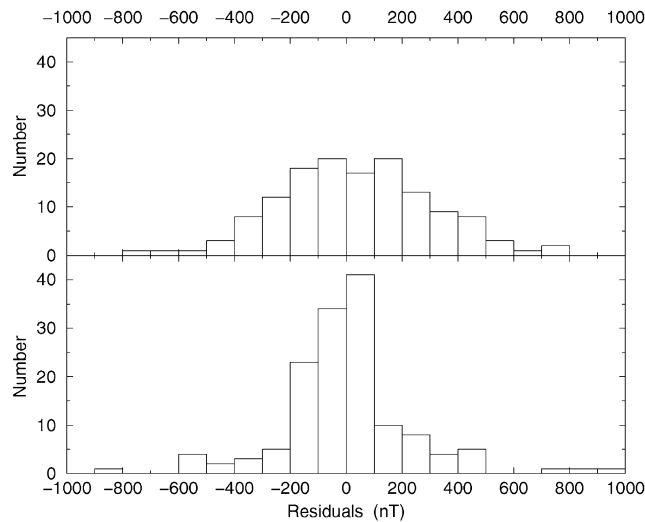


Fig. 15. Histograms of residuals (observed minus predicted values). Top: Differences between observatory data and spherical harmonic model. Bottom: Differences between observatory data and wavelet model. Absolute values larger than 1000 nT are not included (seven values for the top histogram, two values for the bottom one).

the model. The wavelets represent the field only in regions where data exist. If data are missing, the wavelets do not create artificial coefficients.

Of course, the most suitable comparison is between models and the used data to create them. Figs. 14 and 15 show the results of this test. It clearly appears that about 9% (13 observatories) of the used observatory data show discrepancies that remain truly strong when SHA is applied. This is reduced to 4% (6 observatories) when wavelet technique is used. Both models give large discrepancies for four observatories (CCS, DRV, GDH and SBA), which have important crustal magnetic biases (Mandea and Langlais, 2002). So long we use the geomagnetic observatory data, the disagreement between our testing dataset and the models is more important with SHA model, clearly in high-latitude regions (Antarctica, south Indian Ocean, Greenland, Canada, northern part of Russia). Fig. 15 displays the histograms of residuals. The discrepancy between observations and models is significantly reduced when wavelet analysis is used. Our first results give us good hope to apply the wavelet technique in modelling the magnetic field.

5. Conclusions

In our attempt to produce a new representation of the magnetic field on the sphere, we choose an approach which always makes a direct relation between the spherical harmonics and wavelets. The main result is the theoretical description of the wavelets on the sphere in order to use them in field modelling. The first comparisons between the SHA basis and wavelet basis show how well the wavelets are able to reproduce the spherical harmonics. This on its own is not very exciting. However, we believe the potential of wavelets has been shown. Any kind of geomagnetic field modelling can be described as seeking a solution to optimize the cost function ‘*error + smoothness*’. In general, the smoothness part can be associated with some (physically motivated) Sobolev norm. It is in general implemented through some a priori damping of the basis functions in the inversion. The function that gives the optimal solution is sometimes referred to as a spline solution. As it stands, it does not appeal to any family of basis functions in which the actual numerical computations are carried out. Therefore, in the limit of infinitely many functions and without any

numerical errors, we get the same models, if we use spherical harmonics, wavelets, or any other complete family of functions. However, given finite resources it does matter, since for a fixed number of basis functions, wavelets have better approximation properties than spherical harmonics. Moreover, the underlying matrices are quasi-diagonal for wavelets, thanks to their locality in phase. Therefore, the matrices may easily be preconditioned and inverted by iterative methods. In contrast, spherical harmonics give full matrices, which cannot be inverted easily by standard means when the dimension becomes too large. Moreover, the modelling of strongly heterogeneous fields, such as from external currents, wavelets may play an additional role, since they allow a more geometric description of the fields. For the moment, however, we have limited ourselves to some simple examples.

Our first result in modelling the Earth's magnetic field using the wavelet basis underlines the applicability of the method. The comparison with the SHA models shows how well the wavelets describe the magnetic field on a global scale. The regional feature of the field are also observed in this global representation. Of course, more work must be done with regard to the choice of the optimal wavelet basis. For example, we have to study the evolution of scales, the degree, the number of wavelets and how much the wavelets induce a distortion on the spherical harmonics.

In the future, a primary concern is that the wavelet search and the implementation of the wavelet transformation and excision process be carried out in a computationally efficient manner. It is our goal to perform these operations in a real-time digital signal processing at extremely high sample rates, to match that of the magnetic satellites.

Acknowledgements

We would like to thank Richard Holme and two anonymous referees for useful suggestions. All maps were plotted using the GMT software (Wessel and Smith, 1991). This is IGP contribution #1875.

References

- Alsdorf, D.E., VonFrese, R.R.B., Arkani-Hamid, J., Noltimier, H.C., 1994. Separation of lithospheric, external, and core components of the south polar geomagnetic field at satellite altitudes. *J. Geophys. Res.* 99, 4655–4668.
- Backus, G., Parker, R., Constable, C., 1996. *Foundations of Geomagnetism*. Cambridge University Press.
- Bayer, M., Beth, S., Freeden, W., 1998. Geophysical field modelling by multiresolution analysis. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica* 33, 289–319.
- Bayer, M., Freeden, W., Maier, T., 2001. A vector wavelet approach in iono- and magnetospheric geomagnetic satellite data. *J. Atmos. Sol. Terrestrial Phys.* 63, 581–597.
- Cain, J.C., Holter, B., Sandee, D., 1990. Numerical experiments in geomagnetic modelling. *J. Geomagn. Geoelectr.* 42, 973–987.
- Dahlke, S., Maaß, P., 1996. Continuous wavelet transforms with applications to analyzing functions on spheres. Technical Report, University of Potsdam.
- Dahlke, S., Steidl, G., Teschke, G., 2001. Coorbit spaces and banach frames on homogeneous spaces with applications to analyzing functions on spheres. Technical Report, Zentrum für Technomathematik, Uni-Bremen.
- Daubechies, I., 1992. *Ten Lectures on Wavelets*. CBMS-NSF Series in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia.
- Freeden, W., Winterheuser, U., 1996. Spherical wavelet transform and its discretization. *Adv. Comput. Math.* 5, 51–94.
- Freeden, W., Gervens, T., Schreiner, M., 1998. *Constructive Approximation on the Sphere (With Applications to Geomathematics)*. Oxford Science Publication/Clarendon Press, Oxford.
- Gauss, C.F., 1939. In: Gauss, C.F., Weber, W. (Eds.), *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1833*. Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus. Leipzig.
- Haines, G.V., 1985. Spherical cap harmonic analysis. *J. Geophys. Res.* 90, 2583–2591.
- Holschneider, M., 1995. *Wavelets: An Analysis Tool*. Oxford Science Publications, Oxford.
- Holschneider, M., 1996. Wavelet analysis on the sphere. *J. Math. Phys.* 37 (8), 4156–4165.
- Klees, R., Haagmans, R. (Eds.), 1999. *Wavelets in the Geosciences*. Springer, Berlin.
- Langel, R.A., 1987. The main field. In: Jacobs, J.A. (Ed.), *Geomagnetism*, vol. 1. Academic Press, London, pp. 249–492.
- Langel, R.A., 1993. The use of low altitude satellite data bases for modelling of core and crustal fields and the separation of external and internal fields. *Surv. Geophys.* 14, 31–87.
- Langlais, B., Manda, M., 2000. An IGRF candidate main geomagnetic field model for epoch 2000 and a secular variation model for 2000–2005. *Earth Planets Space* 52, 1137–1148.
- Loves, F.J., Bondar, T., Golovkov, V.P., Langlais, B., Macmillan, S., Manda, M., 2000. Evaluation of the candidate main field model for IGRF 2000 derived from preliminary Ørsted data. *Earth Planets Space* 52, 1183–1186.
- Maier, T., Bayer, M., 1998. Multiscale analysis of the geomagnetic field. In: Freeden, W. (Ed.), *Progress in Geodetic Science at GW 98*, pp. 174–282.
- Manda, M., Langlais, B., 2002. Observatory crustal magnetic during MAGSAT and Ørsted satellite missions. *Geophys. Res. Lett.* 29 (15), 10.1029/2001GL013693.

- Mandea, M., Macmillan, S., 2000. International geomagnetic reference field—the eighth generation. *Earth Planets Space* 52, 1119–1124.
- Merill, R.T., McElhinny, M.W., McFadden, P.L., 1996. *The Magnetic Field of the Earth*. Academic Press, New York.
- Parker, T.L., Shure, L., 1982. Efficient modelling of the Earth's magnetic field with harmonic splines. *Geophys. Res. Lett.* 9, 812–815.
- Shure, L., 1982. *Modern mathematical methods in geomagnetism*. Ph.D. dissertation, University of California, San Diego.
- Shure, L., Parker, R.L., Backus, G.E., 1982. Harmonic splines for geomagnetic modelling. *Phys. Earth Planet Int.* 28, 215–229.
- Waler, K.A., 1986. Geomagnetic evidence for fluid upwelling at the core mantle boundary. *J. Geophys. Res.* 86, 563–586.

5.2 Les modèles de champ magnétique en ondelettes

5.2.1 Représentation d'un champ radial

Dans Holschneider *et al.* (2003), nous avons montré les propriétés des ondelettes dans la représentation d'une fonction scalaire sur la sphère. La première application que nous avons développée par la suite a été de modéliser un champ radial. Pour cela nous avons amélioré notre base de programmes en C/C++ afin d'introduire des contraintes géophysiques (informations *a priori*) dans la résolution du problème inverse. Ces premiers tests sur le champ radial montre que le modèle en ondelettes obtenu est très proche du modèle en harmoniques sphériques calculé à partir du même ensemble de données (figure 5.2).

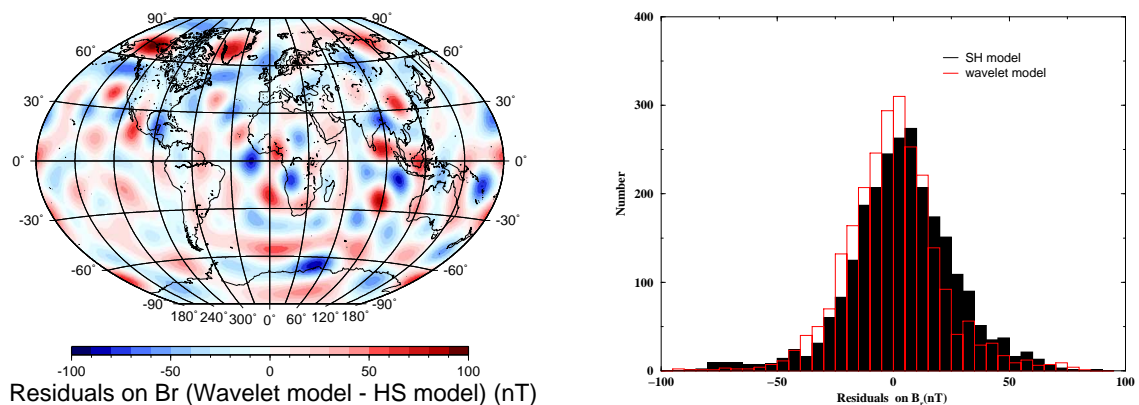


FIG. 5.2: Carte des résidus entre le modèle en harmoniques sphériques et le modèle en ondelettes (**gauche**). Histogramme des résidus entre les données utilisées et les résultats des modèles en harmoniques sphériques et en ondelettes (**droite**)

A ce jour, nous sommes plus loin dans notre étude. En effet, les derniers résultats obtenus dans la modélisation d'un champ de potentiel (paragraphe suivant) nous amènent à ne pas détailler plus avant cette partie de notre travail.

5.2.2 Représentation d'un champ de potentiel

Résumé de l'article :

**Les *frames* d'ondelettes :
une alternative à la représentation des champs
de potentiels par les harmoniques sphériques**

Aude Chambodut, Isabelle Panet,

Mioara Manda, Michel Diament,

Matthias Holschneider et Olivier Jamet

soumis à *Geophysical Journal International*, 2004.

Les champs de potentiels sont classiquement représentés par des harmoniques sphériques sur la sphère. Cependant cette décomposition entraîne des difficultés numériques lorsque les données utilisées dans le problème inverse sont irrégulièrement distribuées ou ne couvrent qu'une région de la surface terrestre. Afin de contourner ce problème, nous développons une nouvelle représentation des champs terrestres (magnétique et de gravité) basés sur les *frames* d'ondelettes. Dans cette étude, nous décrivons d'abord comment construire des *frames* d'ondelettes sur la sphère. Celles-ci sont basées sur des ondelettes dites « *multipôles de Poisson* ». Le paramètre d'échelle de ces ondelettes est directement lié à la profondeur du multipôle (Holschneider *et al.*, 2003). Ainsi, des *frames* sont construites en utilisant deux différentes sortes de grilles sur la sphère (cube et icosaèdre) et plusieurs séquences d'échelles. Nous validons ensuite la méthode mathématique grâce à de simples approximations de fonctions scalaires sur la sphère. De plus, nous proposons des modèles vectoriels géomagnétiques et de gravité qui prennent en compte des contraintes géophysiques réalistes. Les représentations obtenues des champs magnétiques et de pesanteur sont convaincantes et fidèles aux données régulièrement ou irrégulièrement réparties sur la sphère. Les comparaisons des modèles en ondelettes obtenus avec les modèles initiaux en harmoniques sphériques montrent les avantages de la modélisation en ondelettes, tant à l'échelle globale que locale.

Wavelet frames: an alternative to spherical harmonic representation of potential fields

Aude Chambodut ¹, Isabelle Panet ^{2,3},
Mioara Mandea ¹, Michel Diament ²,
Matthias Holschneider ⁴, Olivier Jamet ³

¹ Laboratoire de Géomagnétisme et Paléomagnétisme, UMR 7577, Institut de Physique du Globe de Paris, 4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

² Laboratoire de Gravimétrie et Géodynamique, Département de Géophysique Spatiale et Planétaire, UMR 7096, Institut de Physique du Globe de Paris, 4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

³ Laboratoire de Recherche en Géodésie, Institut Géographique National, 6/8 avenue Blaise Pascal, Cité Descartes, Champs-sur-Marne, 77455 Marne-la-Vallée Cedex 2, France

⁴ Department of Applied and Industrial Mathematics, University of Potsdam, Am Neuen Palais 10, D-14469, Potsdam, Germany

Abstract

Potential fields are classically represented on the sphere using spherical harmonics. However, this decomposition leads to numerical difficulties when data to be modelled are unevenly distributed or cover a regional zone. To overcome this drawback, we develop a new representation of the magnetic and the gravity fields based on wavelet frames.

In this paper, we first describe how to build wavelet frames on the sphere. The chosen frames are based on the Poisson multipole wavelets, which are of special interest for geophysical modelling, since their scaling parameter is linked to the multipole depth (Holschneider *et al.*, 2003). The implementation of wavelet frames results from a discretization of the continuous wavelet transform in space and scale. We also build different frames using two kinds of spherical meshes and various scale sequences. We then validate the mathematical method through simple fits of scalar functions on the sphere, named 'scalar models'. Moreover, we propose magnetic and gravity models, referred to as 'vectorial models', taking into account geophysical constraints.

We find a convincing representation of the Earth's magnetic and gravity fields from data evenly or unevenly distributed. Comparisons of the obtained wavelet models with the initial spherical harmonic models point out the advantages of wavelet modelling when the used magnetic or gravity data are sparsely distributed or cover just a very local zone.

keywords wavelets, spherical harmonics, magnetic and gravity field.

1 Introduction

Not all near-Earth geophysical measurements are so important in understanding the geodynamic activity of our planet as the magnetic and gravity observations. Measurements of the Earth's magnetic and gravity fields undertaken by satellites (without forgetting those on land, sea, and air) are of particular interest, as they provide global and uniform survey of these fields and of their temporal evolution.

Magnetic field has been measured by several Earth's satellite missions which have been carrying magnetic sensors. Satellite-borne magnetometers provide information on strength and direction of the internal and external Earth's magnetic field and its time variations. The Earth is surrounded by a large and complicated field caused to a large extent by a dynamo operating in the fluid core. Currents flowing in the ionosphere, magnetosphere and oceans, and magnetized rocks also influenced the geomagnetic field.

Three magnetic missions (Ørsted – launched in 1999, CHAMP and SAC-C – launched in 2000) have been taking such measurements offering new insights into the composition and the processes in the interior, and surrounding of the planet. These observations are also used in a range of applications, including navigation systems, resource exploration drilling, spacecraft attitude control systems, and assessments of the impact of space weather. The coming decade will see further missions planned for more in-depth, dedicated studies of magnetic field including DEMETER, 2004; ESPERIA, 2006; Swarm, 2008; etc.

Gravity field observations from space provide the most promising advances for improving measurement of the geoid and its time variations. The geoid is the surface of equal gravitational potential at mean sea level, and reflects the irregularities in the Earth's gravity field at its surface due to the inhomogeneous mass and density distribution in the Earth's interior. Such measurements are vital for quantitative determination, in combination with satellite altimetry, of permanent ocean currents, for improvement of global height references, for the study of the Earth's internal structure, for estimates of the thickness of the polar ice sheets and its variations and for estimates of the mass/volume redistribution of freshwater in order to further understand the hydrological cycle.

Gravity field measurement packages on satellites often utilise combinations of different instrument types in order to derive the necessary information: single or multiple accelerometer, precise satellite orbit determination systems, and satellite to satellite tracking systems. CHAMP and GRACE gravity packages have been providing new information on the Earth's gravity field since 2000. The future planned missions (GOCE, 2006; etc), will provide new and unique datasets to model the Earth's gravity field and its variability over time, allowing determination of the geoid to 1cm accuracy and gravity anomalies to 1 mGal at one hundred kilometers resolution.

With the advent of space exploration and all of the subsequent technological advancements it is possible to systematically study the Earth as a whole entity. However, it is only now being realized that to comprehend the myriad of interactions between Earth systems, we must utilise a multidisciplinary approach within which the mapping of the Earth's magnetic and gravity fields, to a high degree of accuracy and resolution, plays a crucial role. High-resolution models of the magnetic and gravity fields of the Earth help us to understand the structure and the driving forces behind plate tectonics, lithospheric motions, mantle convection, core fluid flows.

Until recently, magnetic and gravity models have been realised by applying the same technique: the spherical harmonic analysis. This method is well suited for global representations, but is very demanding for high resolution models. This is the main reason why during the last years some other new methods have been investigated. Among them, a promising approach emerges: the wavelets technique. In the present paper the spherical wavelet models are introduced as an alternative to spherical harmonic models of the Earth's magnetic and gravity fields like IGRF, OIFM, CM4 and respectively EIGEN-1S, EIGEN-2, EIGEN-GRACE01S, GGM01S, UCPH2002_0.5, EGM96. Thereby the localizing properties of spherical wavelets and their approximating capacity are shown. A detailed description of the inverse problems is given. We validate the mathematical method through the simple fits of scalar functions on the sphere: this approach will be referred to as the 'scalar case' in the following, and the derived representations as 'scalar models'. Finally, we propose magnetic and gravity models: this approach will be referred to as the 'vectorial case', and the derived models as 'vectorial models'.

2 State of the problem: global and regional modelling

2.1 Magnetic field

Current geomagnetic field models include contributions from the core, crust, ionosphere and magnetosphere, and are derived by a joint analysis of ground-based and satellite magnetic observations. In doing so, a separation of the magnetic field contributions at particular epoch is necessary, and their inadequate separation is one of the limiting factors for a more accurate determination of the core field, of its secular variation, and of the lithospheric field.

The standard method for modelling the three dimensional magnetic field is called Spherical Harmonic Analysis (SHA). In the following this method is summarized; for the technical details, see books by Jacobs (1987) and Merrill *et al.* (1996). The internal part of the magnetic field is the negative spatial gradient of a scalar potential $V_M(r, \theta, \phi, t)$ which satisfies Laplace's equation. Each internal field model comprises a set of spherical harmonics, each of which being a solution to Laplace's equation:

$$V_M(r, \theta, \phi, t) = R_E \sum_{\ell=1}^N \sum_{m=0}^{\ell} \left(\frac{R_E}{r} \right)^{\ell+1} (g_{\ell}^m(t) \cos m\phi + h_{\ell}^m(t) \sin m\phi) P_{\ell}^m(\cos \theta) \quad (1)$$

where $R_E = 6371.2$ km is the mean radius of the Earth, $r \geq R_E$ denotes the radial distance from the center of the Earth, θ denotes the geocentric colatitude, ϕ denotes the east longitude, t is the time, $P_{\ell}^m(\cos \theta)$ are the Schmidt semi-normalized associated Legendre functions of degree ℓ and order m , and $g_{\ell}^m(t)$ and $h_{\ell}^m(t)$ are the corresponding Gauss coefficients. The maximum spherical harmonic degree of the expansion is N , which leads to $N(N+2)$ real coefficients.

Since the magnetic field changes in space and time, measurements need to be continually performed and models are frequently generated to accurately represent the magnetic field as it is. The internal field at the Earth's surface contains clearly defined components from the core at least up to harmonics $N = 13$, beyond which they begin to become comparable to those from the crust (Mauersberger, 1956; Lowes, 1974). For higher N they likely continue to decrease in power until they are submerged below the crustal component. The crustal component has a much flatter spectral fall-off, and dominates the observed field for $N \geq 16$ which corresponds to scale sizes smaller than 2500 km (Fig. 1). No method has yet been found to separate completely the two sources. The general practice has been to ignore the crustal contribution below $N \approx 13$, and core component above that number.

The described approach can also be applied for a regional magnetic field model known as the spherical cap harmonic analysis (SCHA) and firstly proposed by Haines (1985; 1990). SCHA permits the use of data from only a portion of the Earth while satisfying the constraints of potential field theory. Indeed, the region to be studied has to be defined by a spherical cap and satisfies the zero curl and divergence conditions. The method is claimed to be valid over any spherical cap at any altitude above the Earth's surface. On the basis of these assertions, SCHA has been widely used for getting regional magnetic maps (De Santis *et al.*, 1997; Hwang and Chen, 1997; Korte and Haak, 2000). However, two kinds of difficulties are to be taken into account when SCHA is performed. The first one, crucial, stressed by De Santis (1994) comes from the failure of the correctly modelling the radial dependence (i.e. that the models can not be continued and data acquired at different altitudes can not be simultaneously inverted). The second is that there is not a simple relation with the global spherical harmonics. A new approach for the spherical cap harmonic modelling has been proposed by Thébaud *et al.* (2004) in order to solve these two difficulties.

2.2 Gravity field

The gravity field of the Earth reflects the internal structure of the solid Earth as well as the distribution of masses in the surrounding fluid envelopes (oceans, atmosphere, ice caps, hydrology). Models of the static and time-varying gravity field lead to a better understanding of the internal geodynamical processes and of the superficial and external envelopes. However, time-varying gravity effects, mostly due to the contribution of the fluid envelopes but also to the solid Earth processes such as post-glacial rebound, are three to four order of magnitude smaller than static contributions.

For the past three decades, global models of the Earth's static gravity field were derived from the combination of high altitude satellite data (including altimetry) with ground-based measurements. With the advent of low altitude gravity missions, new global models are currently released, dramatically improving our knowledge of the static field and giving an insight into its temporal variations at large scale for the first time.

Those models are classically expressed as a series of fully normalized spherical harmonics :

$$V_G(r, \theta, \phi, t) = \frac{GM}{R_{Eq}} \sum_{\ell=0}^N \sum_{m=0}^{\ell} \left(\frac{R_{Eq}}{r} \right)^{\ell+1} (C_{\ell}^m(t) \cos m\phi + S_{\ell}^m(t) \sin m\phi) R_{\ell}^m(\cos \theta) \quad (2)$$

where $R_{Eq} = 6378.1$ km is the mean equatorial radius of the Earth, $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ is the Newtonian gravitational constant, M the Earth's total mass including the atmosphere, $C_{\ell}^m(t)$ and $S_{\ell}^m(t)$ dimensionless coefficients and $R_{\ell}^m(\cos \theta)$ are the fully normalized associated Legendre functions of degree ℓ and order m . The spectrum of the gravity field decreases as shown on Fig. 2, reflecting the continuous distribution of masses inside the Earth and its fluid envelopes. Major density discontinuities of the planet's interior can be recovered from a fine analysis of the spectrum (Hipkin, 2001).

For regional gravity field modelling, the spherical cap harmonic analysis can be applied although references are mostly found in the geomagnetic literature. In the geodetic literature, Hwang and Chen (1997) introduced fully normalized SCHA to analyse sea-level data. Applications are also found for regional gravity field representation (De Santis and Torta, 1997), for example over China (Li *et al.*, 1995). Another approach was developed to deal with the problem of off-polar orbits in satellite geodesy, leading to polar gaps in the data, and to study bounded domains such as the oceans. As known, spherical harmonics are global functions orthogonal over the sphere. Over bounded domain, they are no longer orthogonal. This is why a new set of functions is generated from the SHA, in order to be orthogonal over the limited domain. For example, Albertella *et al.* (1999) define a basis on a spherical belt to avoid the problem of the polar gaps in the data. Their approach can also be applied on a spherical cap. To represent an oceanic signal, spherical harmonics are orthonormalized over the oceans by a Gram-Schmidt procedure (Hwang, 1993).

2.3 Limitations of the spherical harmonic analysis

As it was shown before, at the global and regional scales, spherical harmonics are among the standard mathematical procedures for describing scalar and vector fields. However, with the advent of the new satellite missions, the geo-scientific community has a new challenge in defining better techniques to describe the very high-accuracy and high-resolution datasets provided by these satellite missions.

Although spherical harmonic techniques are appropriate for global applications, they have some deficiencies, and research on various aspects in new mathematical tools is ongoing on. In order to better define which methods have to be developed, some arguments on the advantages and disadvantages of spherical harmonic models are given below:

- global support is required for each harmonic term;
- total number of terms may not be commensurate (either too few or too many) in some areas with that required to achieve requisite accuracy;
- computation of error estimates implied by very high degree expansions, if pursued via complete covariance matrix propagation, is extremely demanding computationally;
- inadequate propagation of error statistics to derived physical quantities due to computational limitations (ad hoc assignment of observation errors);
- models yield uniform global resolution: thus, very high degree models generally do not reflect available data resolution everywhere, and the global and regional information are not found in the same set of coefficients.

For numerous applications in geomagnetism and geodesy, one common strategy is to have a global spherical harmonic expansion to the highest resolution possible for the global data and then switch to a spatial representation for any further regional resolution. One crucial requirement is to ensure that no information are lost when refining a global spherical harmonic representation to a regional one, and the solution can be provided by the wavelet analysis.

3 Wavelets families

Let us give a brief recall about wavelet analysis. Wavelets were firstly introduced by Morlet, a French scientist working on seismic data analysis. His approach was based on previous work by Gabor, Wigner and Ville who defined the windowed Fourier transform and the Wigner-Ville transform in the 1940's in the context of quantum mechanics. Later on, Morlet and Grossmann (1985) developed the theory of continuous one dimensional wavelet transform. Among all applications, the continuous wavelet transform was used to detect and characterize singularities in signals. It was extended to n dimensions by Meyer and then by Murenzi (1990).

Meyer collaborated with Grossmann and Daubechies to select a discrete subset of the continuous wavelet transform that would constitute a complete set of $L^2(R_n)$, called '*frame*'. He first thought it would be impossible to build an orthogonal wavelet basis with regular wavelets. The well-known Haar wavelets (1909) lead to an orthogonal basis but their lack of regularity was a problem to describe regular signals. Finally, Meyer and Lemarié proved the contrary and developed the theory of orthogonal wavelets in the n -dimensional case (Lemarié and Meyer, 1986; Meyer, 1986). Later on, Daubechies (1988; 1991) constructed orthogonal wavelet bases with compact support and arbitrary regularity. Fast orthogonal wavelet transform algorithms were developed by Mallat (1989), who gave a boost to digital signal processing using wavelets. Since this time, the wavelets are more and more widely used and have been spreading among many communities (signal processing in medicine, geophysics, finance; image or sound processing and compression; etc).

For geophysical purposes, the need has been expressed to design wavelets suitable for representing the potential fields. In particular on the sphere, the used functions should satisfy the following properties:

- functions have to admit a physical interpretation;
- harmonic prolongation must be easily computable;
- function itself has to be numerically easy to compute;

- functions must be localized on the sphere.

These requirements naturally lead to constructions based on the Poisson kernel of spherical functions. Let us notice that Poisson wavelets are also used in one and two dimensions (Sailhac *et al.*, 2000; Martelet *et al.*, 2001; Sailhac & Gibert, 2003) to analyze potential fields. Continuous spherical wavelet constructions of that kind are well known by now (Freeden and Winterheuser, 1996; Holschneider, 1996; Freeden *et al.*, 1998; Freeden and Schneider, 1998; Dahlke *et al.*, 2001).

3.1 Frame of wavelets

Special collection of functions called frames are of primary interest for representing potential fields on the sphere. The concept of frame is more general than the basis one. In fact, it is a complete set of functions but may include some redundancy, which makes frames much more flexible than bases. More precisely, a collection $\{g_n\}_{n=0,1,\dots}$ in a Hilbert space H is a *frame* if for all $s \in H$, with two constants called framebounds ($0 < A \leq B < \infty$), the following inequalities exist:

$$A\|s\|^2 \leq \sum_n |g_n \cdot s|^2 \leq B\|s\|^2, \quad (3)$$

where the expression: $g_n \cdot s$ denotes the scalar product of g_n with s . It is possible to build discrete frames based on wavelets as the constitutive functions, by properly sampling the continuous wavelet transform in space and frequency (Holschneider, 1995; Freeden and Winterheuser, 1996).

In this study, we use the Poisson wavelets. More precisely, a Poisson wavelet at point \vec{x} on the sphere of radius $\|\vec{x}\| = R$ is expressed as:

$$\psi_a^n(\vec{x}) = N_a^n \sum_{\ell} (a\ell)^n e^{-a\ell} Q_{\ell} \left(\frac{\vec{e}}{\|\vec{e}\|} \cdot \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right) \quad (4)$$

$$\text{with: } \begin{cases} N_a^n &= \left(\int_{S(r)} \psi_a^n(\vec{x}) \cdot \psi_a^n(\vec{x}) ds(\vec{x}) \right)^{-\frac{1}{2}} \\ Q_{\ell} \left(\frac{\vec{e}}{\|\vec{e}\|} \cdot \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right) &= (2\ell + 1) P_{\ell} \left(\frac{\vec{e}}{\|\vec{e}\|} \cdot \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right) \end{cases} \quad (5)$$

The wavelet is defined by three parameters: its scale a , its position \vec{e} and its order n . In other words, a is a measure of the wavelength of the wavelet without any dimension, \vec{e} is the position of the wavelet, and order n characterises the global shape of the wavelets (number of oscillations). These wavelets on the sphere may also be considered as the restriction on the sphere of a function that is harmonic outside and that has singularities inside it. In the following, $\psi_a^n(\vec{x})$ will represent either the wavelet on the sphere, or its harmonic continuation.

In the above equations, N_a^n is a L^2 -normalisation factor, ℓ an integer which corresponds to the degree of the Legendre polynomials P_{ℓ} , and Q_{ℓ} are the related kernel functions.

In fact Poisson wavelets show many useful properties. They may be identified with multipoles of order n , located at points $(R \cdot e^{-a}\vec{e})$ inside the sphere: the depth of the multipole is thus linked to the scale parameter (Holschneider *et al.*, 2003). Let us recall the main geometrical, mathematical and numerical properties of these functions.

Geometrical. The wavelets are zonal functions, both localized in space and frequency. As their scales decrease, they become more sensitive to the local features of the signal and their spectra are shifted towards the higher degrees of the spherical harmonics.

Mathematical. The wavelets are generated by the Legendre polynomials as the spherical harmonics are, and when considering functions in the whole space, they satisfy the Laplace equation except for a pole inside the sphere. The use of the same generating functions constitutes a “bridge” between the two representations and allows easier comparisons between the two developments. The harmonic continuation of the wavelets in the space outside sources can be defined in a similar way as for the spherical harmonics.

Numerical. The wavelets can be calculated easily thanks to analytical solutions. Indeed, they can be computed using a finite superposition of multipoles at suitable positions related to their scales instead of summing an infinite series of spherical harmonics. Moreover, the scalar product between two wavelets can be expressed as another wavelet.

3.2 Implementation of the positions

In order to build the appropriate wavelet frames, we have to discretize the continuous wavelet transform in space and define scales interval in such a way that all frequencies are covered over the whole sphere. We choose to locate wavelets on the vertexes of a spherical mesh derived by subdividing the facets of a regular convex polyhedron centred with respect to the sphere and projecting the directions of the vertexes onto the sphere. The more the polyhedron’s facets are subdivided, the finer the mesh: it is then possible to create a set of hierarchical meshes associated with wavelets at different scales.

Some brief recalls about geometrical aspects of polyhedrons (Cromwell, 1997) are given in Appendix A. Let us note that any of the polyhedrons might be used. Here it is chosen to discretize the positions of wavelets on the sphere within a cube and an icosahedron. An approach based on successive generations is used, the generation j corresponding to a given mesh. It means that a level of subdivision corresponds to a given wavelet scale.

3.2.1 The cube

The cube is initially chosen due to its easier implementation. A description of the method is given in Appendix B.

Positions are defined by recursive subdivision of each facet of the cube into four squares. Denoting j the generation, the number of vertexes of the j -level mesh $V(j)$ is defined as:

$$V(j) = \begin{cases} 1 & \text{for: } j = 0, \\ 6 \cdot (4^{j-1}) & \text{for: } j > 0. \end{cases}$$

Fig. 3 (top) shows the incrementation of vertexes from $j = 1$ to $j = 4$.

The coordinates of positions are determined in two steps. At first, the points on the cube are defined within a 3D-space Cartesian system. The middle of each facet is taken as a wavelet position as detailed in Appendix B. Then, they are projected onto the sphere according to a straight line which passes from the center of the sphere, the point at the surface of the cube and up to the sphere. With such a method, the points obtained are on the same sphere and are not perfectly homogeneously distributed (see subsection 3.2.3).

3.2.2 The icosahedron

The second chosen polyhedron is the icosahedron. The description of its implementation is given in Appendix C.

Positions are defined by recursive subdivision of each facet of the icosahedron into four triangles connecting the middle of the sides. As for the cube, the number of vertexes of the j -level mesh is denoted $V(j)$:

$$V(j) = \begin{cases} 1 & \text{for: } j = 0, \\ 10 \cdot (4^{j-1}) + 2 & \text{for: } j > 0. \end{cases}$$

Fig. 3 (bottom) shows the incrementation of vertexes from $j = 1$ to $j = 4$.

The coordinates of positions are determined in the same two steps as for the cube. Nevertheless, the method is slightly different in the sense that the vertexes defining positions are not the middle of facets as for the cube. More interesting, the points are more regularly distributed than for the cube.

3.2.3 Comparison of the two meshes

The number of points at each generation is depicted in Fig. 4. The icosahedric meshes comprise more vertexes than the cubical ones: the ratio tends to about 1.7 as j increases. Moreover, at level $(j + 1)$, it includes all the vertexes of level j . At contrary, vertexes from the cubical meshes never coincide between j and $(j + 1)$ generations. Both kinds of meshes (Fig. 5 a and b) show a good regularity even if a non-negligible dispersion of distances between points is observed. The dispersion of distances between points at different generation for cubical and icosahedric meshes is roughly coming to respectively 30% and 10 % of the mean value. This phenomenon is not significative for the resolution obtained in this study.

The regularity of the meshes is a difficult problem, known as “*Le problème des dictateurs ennemis*”: how to distribute territories of sphere to several dictators so that they have all the same territory and that they are as distant as possible from each other. The interested reader may find more details in an abundant bibliography on the subject (Hicks and Wheeling, 1959; Muller, 1959).

3.3 Implementation of the scales

In the previous subsection, we described the discretisation of wavelet positions (θ, ϕ) on the sphere. We have now to associate to each generation j of positions the corresponding scale a_j . This last parameter has to be carefully chosen in order to satisfy two main constraints: (i) the spectrum should be covered; (ii) the number of wavelets of each scale should be sufficient, but not too large, to generate the corresponding spherical harmonics.

The sequence of the scales is defined on a unit sphere Σ_1 and corresponds to a geometric progression:

$$a_j = a_0 \cdot \gamma^{j-1} \quad (6)$$

where j is the generation, a_0 is a chosen initial scale and γ , a constant verifying: $0 < \gamma < 1$.

Then, the position $(r_j, \theta, \phi)_{\Sigma_1}$ of mathematical “source” of the corresponding multipole inside Σ_1 is:

$$\begin{cases} r_j = e^{-a_j} \\ (\theta, \phi) \text{ given by the mesh} \end{cases}$$

The bounds of scales and of positions for “sources” within Σ_1 are:

$$\begin{cases} 0 < a_j \leq a_0 \\ 1 > r_j \geq e^{-a_0} \end{cases}$$

Considering the Earth’s surface noted Σ_E , we define new positions R_j and their associated scales A_j :

$$A_j = a_j - \ln \left(\frac{R_{ref}}{R_E} \right) \quad (7)$$

$$R_j = R_{ref} \cdot r_j \quad (8)$$

R_E is the mean radius of the Earth. R_{ref} allows to introduce *a priori* information in the incrementation of scale, as it corresponds to radii of known discontinuities of the Earth.

Table 1: Sequence of scales chosen for the frame used in scalar approach for magnetic field modelling

j	$a_j = A_j$	r_j	$R_j = r_j R_E$ (km)	
1	2	0.135	860	large scale
2	1	0.368	2345	
3	0.5	0.607	3867	
4	0.25	0.779	4963	
5	0.125	0.883	5626	
6	0.0625	0.939	5985	small scale
	<i>0.0</i>	<i>1.0</i>	<i>6371.2</i>	<i>Earth's surface</i>

Indeed, all multipoles located inside (respectively outside) a sphere of radius R_{ref} have a scale parameter greater (respectively lower) than:

$$A_{ref} = -\ln\left(\frac{R_{ref}}{R_E}\right) \quad (9)$$

Then, we can choose the scales of wavelet frames in order to sample the desired layers of the Earth's interiors, taking into account the *a priori* structures.

The mathematical relation between R_j and A_j is the same as for the unit sphere:

$$R_j = R_E \cdot e^{-A_j} \quad (10)$$

In the following, we discuss two possible examples of frames to represent magnetic and gravity data.

3.3.1 Magnetic field

For the magnetic field, we choose to implement a frame based on the multipoles of order 2. This order is sufficient to allow a good coverage of low degrees of the spherical harmonics. Moreover, it allows to get a precise localization in both space and frequency. The scale a_j associated to the j -level on the unit sphere verifies $a_0 = 2$ and $\gamma = (\frac{1}{2})$. Positions (θ, ϕ) are discretized on the cubical mesh.

Different frames are then used for the scalar and vectorial approaches. Indeed, the demanding constraints and the physical meanings of this last case are more important than the simple fit of a scalar function on the sphere.

For the scalar case, the mathematical source of multipoles only regularly sample the wavelengths present in the modelled scalar function, which is the intensity of the magnetic field $|\vec{B}|$. We thus simply use: $R_{ref} = R_E$. Table 1 shows the multipole characteristics for different generations. Fig. 6 shows that the spectrum is covered, and that the number of wavelets is large enough, comparing to the number of spherical harmonics.

For the vectorial case, the mathematical source of multipoles correspond to the core of the Earth: $R_{ref} = R_{CMB} = 3485km$, and to the crust: $R_{ref} = R_E = 6371.2km$. Table 2 shows the multipole characteristics for different generations. Fig. 7 shows that the spectrum is covered, and that the number of wavelets is large enough comparing to the number of spherical harmonics. The core and crustal wavelets cover all the spherical harmonic degrees. Indeed, it is necessary even for low degrees to consider both fields as the synthetic data in spherical harmonics do not distinguish the two contributions. In an ideal case, it would be possible to consider a wavelet model with mathematical sources of multipoles that would purely correspond to physical sources (for example: $R_{crust} \geq 6341.2 km \rightarrow A_{crust} \leq 0.005$).

Table 2: Sequence of scales chosen for the frame used in vectorial approach magnetic field modelling

j	a_j	A_j	r_j	R_j (km)	
1	2	2.6	0.135	472	Core: large scale
2	1	1.6	0.368	1282	
3	0.5	1.1	0.607	2114	
4	0.25	0.85	0.779	2714	Core: small scale
	<i>0.0</i>	<i>0.60</i>	<i>1.0</i>	<i>3485</i>	<i>CMB</i>
1	2	2	0.135	860	Crust: large scale
2	1	1	0.368	2345	
3	0.5	0.5	0.607	3867	
4	0.25	0.25	0.779	4963	Crust: small scale
5	0.125	0.125	0.883	5626	
6	0.0625	0.0625	0.939	5985	
	<i>0.0</i>	<i>0.0</i>	<i>1.0</i>	<i>6371.2</i>	<i>Earth's surface</i>

The problem would require a tremendous number of crust-wavelets on the whole Earth's surface to describe the magnetic field up to degree/order 29 and to get a sufficient number (again comparing to the number of spherical harmonics). The radial positions of the wavelets inside the Earth, noted R_j in Table 2, are given as another manner to represent the crust-wavelets by using the non-unicity of the solution given by wavelet frames. Thus, the R_j do not constitute here the position of physical sources of the modelled field, but the position of mathematical sources.

3.3.2 Gravity field

For the gravity field, we choose to implement a frame based on order 3 multipoles. The localization in space and frequency is still satisfactory: indeed, the wavelets only show one spatial ondulation and their spectra narrow. Let us notice that the spectra of these wavelets shift towards the higher degrees and show less power in the lower degrees.

The scale associated to the j -level verifies $a_0 = 3$ and $\gamma = \frac{1}{2}$. The sequence of multipole depths R_j inside the Earth, regularly samples its successive concentric envelopes, to reflect the distribution of masses: $R_{ref} = R_{Eq} = 6378.1km$. Table 3 shows the multipole depths for different generations. Those multipoles are considered as physical sources when modelling the disturbing potential (vectorial approach, see section 4), and as mathematical sources when directly modelling the gravity anomaly (scalar approach, see section 4). Thus, we used the same frame for both cases.

Positions (θ, ϕ) are discretized on the icosahedric meshes since the gravity anomalies are modelled at a rather high resolution. Fig. 8 shows that the spectrum is homogeneously covered, and that the number of wavelets is large enough as compared to the number of spherical harmonics. Let us notice that this frame is more redundant than the other one on the cube.

4 Inverse problem

4.1 The least square method

The magnetic and gravity fields (respectively \vec{B} and \vec{g}) can be expressed as a linear combination of wavelets. In the following, we are focussing on the two quantities used by magnetic

Table 3: Sequence of scales chosen for the frame used in gravity modelling. Wavelets are considered as mathematical sources for the scalar case and physical sources for the vectorial case.

j	$a_j = A_j$	$R_j = r_j R_E$ (km)	Location
1	3	318	Inner Core
2	1.5	1423	Outer Core
3	0.75	3013	Outer Core
4	0.375	4384	Lower mantle
5	0.1875	5288	Lower mantle
6	0.09375	5807	Upper mantle
7	0.046875	6086	Upper mantle
8	0.023438	6230	Upper mantle
9	0.011719	6304	Upper mantle (lithosphere)
10	0.005859	6341	Crust
	<i>0.0</i>	<i>6378.1</i>	<i>Earth's surface</i>

and gravity communities: the magnetic field and the free air gravity anomaly¹. In the scalar approach, the intensity of magnetic field and gravity anomaly are directly written as a sum of wavelets. In the vectorial approach, only potentials are expressed as a sum of wavelets modelled as superposition of multipolar potentials. Thereafter, the magnetic field and the gravity anomaly are derived.

Denoting E the function to be represented, α the vector of wavelet coefficients and ψ the wavelet frame, the following general equality holds :

$$E = \sum_i \alpha_i \psi_i \quad (11)$$

In order to find the coefficients α_i of the wavelet development, we set a classical least square problem. This method consists in deriving the set of coefficients which minimizes the residuals between the data and the model in a L^2 sense. However, many sets of coefficients lead to a good fit of the data since the problem is often under-determined. Thus, we have to take into account additionnal constraints in order to eliminate the overfitted solutions that show large oscillations. Here, we introduced a smoothness constraint to regularize the problem. However, the smoother the solution is, the worse the measurement residuals are: we have to find a trade-off between a good fit of data and the global smoothness. We actually minimize the following quantity :

$$\chi^2 = (b - M\alpha)^t \cdot W \cdot (b - M\alpha) + \lambda \alpha^t \cdot L \cdot \alpha \quad (12)$$

leading to the normal system :

$$(M^t \cdot W \cdot M + \lambda L) \cdot \alpha = M^t \cdot W \cdot b \quad (13)$$

where b is the vector of measurements, M the matrix containing the wavelets, α the vector of wavelet coefficients, W a matrix of data ponderation, L the matrix of a quadratic form that controls the regularity, and λ a parameter balancing the constraints between fit and smoothness. λ avoids the model to fit the data with a precision better than their noise (case of overfitting, for which the solution is too oscillating). It also avoids the case of underfitting,

¹ The free air gravity anomaly is defined as the difference between the intensity of the real gravity field at the point of measurement and the intensity of the normal gravity field at the same point: the resulting value is called the ‘‘gravity disturbance’’ among the geodetic community, but here it will be called ‘‘gravity anomaly’’. It can be linked to the disturbing potential T , which is defined as the difference between the real gravity potential of the Earth and the normal potential of the reference ellipsoid (Moritz, 1989).

for which the solution is too smooth.

Equation 13 is actually related to the general theory of inverse problems as developed by Tarantola (1987). Gaussian distributions of probabilities are associated to the vector of wavelet coefficients and the vector of measurements.

Our *a priori* knowledge on the vector of coefficients is expressed through an *a priori* probability involving the matrix L , which is interpreted as the inverse of the covariance matrix of the wavelet coefficients. This matrix expresses the fact that the coefficients are correlated to some extent since the wavelets are not orthogonal (even if their correlations remain rather small, as shown by Holschneider *et al.* (2003)). It also expresses how the field energy decreases from the large scales to the small ones: coefficients at large scales show indeed larger variances than those at small scales.

Measurements bring additional information, so that an *a posteriori* probability on the coefficients can be defined, taking the measurements as well as the *a priori* knowledge into account. In this context, matrix W is interpreted as the inverse of the covariance matrix of the measurement noise. The vector of coefficients for which this *a posteriori* probability reaches a maximum is given by Equation 13: this is the solution of the problem.

If the covariances are perfectly known, the λ parameter should be equal to 1, in theory. Matrix W can be evaluated in a rather good way since it is based on the measurement noise. However, we do not have an exact knowledge of the matrix L : this leads to the cases of overfitting and underfitting, reflecting the fact that our *a priori* model is not appropriate. λ can then be interpreted as an adjusting parameter of these covariances, and is chosen to avoid the problems of over- and underfitting.

In the following, we assume a decorrelated noise on the data, so W is diagonal with:

$$W_{jj} = \frac{1}{\sigma_j^2} \quad (14)$$

where σ_j^2 is the variance of the noise of j^{th} measurement. When measurements are very precise, the diagonal terms of W become very large, implying a stronger constraint on measurement residuals. The inverse of the covariances of the coefficients will be approximated in two different ways, keeping in mind the notion of spectral decrease.

We now detail Equation 13 for both scalar and vectorial cases.

4.2 Scalar case

In the scalar case, the function E (Equation 11) represents the intensity of the magnetic field $|\vec{B}|$ or the gravity anomaly Δg . In an expanded form, equation 12 becomes:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{N_{Obs}} \left[\left(b_j - \sum_{i=1}^{N_{waves}} \alpha_i \psi_i(p_j) \right)^2 \cdot W_j \right] + \lambda \sum_{i,i'=1}^{N_{waves}} \alpha_i \alpha_{i'} L_{i,i'} \quad (15)$$

and equation 13 becomes:

$$\sum_{i'=1}^{N_{waves}} \left(\sum_{j=1}^{N_{Obs}} \psi_{i'}(p_j) W_j \psi_i(p_j) - \lambda L_{i,i'} \right) \cdot \alpha_i \quad (16)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{N_{Obs}} \psi_i(p_j) W_j b_j \right)$$

where b_j is the j^{th} measurement of $|\vec{B}|$ or Δg , over N_{Obs} observations at position p_j and with the weight W_j . N_{waves} is the total number of wavelets.

Studying the scalar case is mainly a way to check the applicability of the method rather than to get a physical representation of a field. It allows us to apprehend the behaviour of the wavelets and the influence of each parameter of the model (incrementations of scales, discretizations of positions, choices of the regularization parameter λ). The scalar approach also allows to test the capability of the wavelets to represent a given function E on the sphere.

An important task is how to define the L matrix. In the following, we present two examples in how it can be chosen. The first example is mainly applied to the magnetic field and the second to the gravity field. However, it is possible to exchange the presented approaches between the two fields.

4.2.1 Magnetic field

In this example, we directly parameterize the regularization matrix L . It expresses the decreasing power spectrum of the magnetic potential (Loves, 1974). L contains the scalar product of the wavelets on the sphere as :

$$L_{i,i'} = \langle K\psi_i(\vec{r}_1), \psi_{i'}(\vec{r}_1) \rangle \quad (17)$$

where \vec{r}_1 defines position on the unit sphere. K is an operator of weighting of the wavelets spectrum:

$$K\psi_i(\vec{r}_1) = N_{a_i}^{n_i} \sum_{\ell} \ell^t (a_i \ell)^{n_i} e^{-a_i \ell} Q_{\ell} \left(\frac{\vec{e}_i}{\|\vec{e}_i\|} \cdot \frac{\vec{r}_1}{\|\vec{r}_1\|} \right) \quad (18)$$

with t a positive exponent. $K\psi_i$ could be written as a simple scalar product between ψ_i and a quadratic form C . Thus the small-scale coefficients are more expensive than the large-scale ones.

4.2.2 Gravity field

In this example, we first approximate matrix L^{-1} of covariances between coefficients and then invert it.

If the wavelets formed an orthonormal basis, coefficients would be defined as the scalar products on the sphere between gravity anomalies and the basis functions: $\alpha_i = \langle \Delta g, \psi_i \rangle$. Following Holschneider *et al.* (2003), who showed that the correlations between wavelets remain rather small, we apply the orthonormal approximation. This choice is *a posteriori* validated by the results of numerical experiments.

The covariances of the coefficients are thus linked to the spatial correlations of the gravity anomalies. We denote $C(\vec{r}, \vec{r}_1)$ the covariance function of gravity anomalies at points \vec{r} and \vec{r}_1 on the sphere. We make the assumption that $C(\vec{r}, \vec{r}_1)$ only depends on the spherical distance between \vec{r} and \vec{r}_1 . In this case, $C(\vec{r}, \vec{r}_1)$ can be written as a series of Legendre polynomials (Moritz, 1989):

$$C(\vec{r}, \vec{r}_1) = \sum_{\ell} c_{\ell} P_{\ell}(\vec{r} \cdot \vec{r}_1) \quad (19)$$

The coefficients c_ℓ are equal to the variance of gravity anomalies for degree ℓ . We assume that the power spectrum of the gravity potential follows Kaula's rule of quadratic decrease (Kaula, 1966). Thus, the power spectrum of the gravity anomaly at degree ℓ decreases as:

$$c_\ell = (\ell + 1)^2(2\ell + 1) \frac{\eta}{\ell^4} \quad (20)$$

where η is a real constant.

Let us now denote K the operator associating to each square integrable function on the sphere f its scalar product with $C(\vec{r}, \vec{r}_1)$:

$$Kf(\vec{r}_1) = \langle C(\vec{r}, \vec{r}_1), f(\vec{r}) \rangle \quad (21)$$

We derive the covariance between two coefficients α_i and $\alpha_{i'}$ as a scalar product between the corresponding wavelets. This comes from the formulas of covariance propagation by Moritz (1989):

$$L_{i,i'}^{-1} = \langle K\psi_i(\vec{r}_1), \psi_{i'}(\vec{r}_1) \rangle \quad (22)$$

The last step consists in inverting the matrix given by Equation 22 to get L .

4.3 Vectorial case

In the vectorial case, the function E represents the magnetic potential V_M or the gravity disturbing potential T (see footnote 1 on page 11).

The measurement vector b contains no values of V_M or T , but the vectorial components of the magnetic field or the gravity anomaly in the radial spherical approximation (the gravity anomaly is a scalar but in the spherical approximation, it is oriented in the radial direction and then considered here as vectorial). Thus the matrix M is different for each inverse problem. Sections 4.3.1 and 4.3.2 present the equation systems for the two fields.

4.3.1 Magnetic field

The magnetic field is represented via a superposition of the derivatives of the wavelets in the spherical coordinate system :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B_r \\ B_\theta \\ B_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial V}{\partial r} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$\vec{B} = \sum_i \alpha_i \begin{pmatrix} -\frac{\partial \psi_i}{\partial r} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta} \\ -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi_i}{\partial \phi} \end{pmatrix} \quad (24)$$

In matricial notation, equation 24 becomes:

$$\vec{B} = M.\alpha \quad (25)$$

The L matrix is, as for the scalar case, chosen in order to allow a balance between a good fit and a global smoothness. We choose to implement it in order to assume a regularity on B_r the radial component of the magnetic field. Thus:

$$L_{i,i'} = \left\langle \frac{\partial}{\partial r} \psi_i, \frac{\partial}{\partial r} \psi_{i'} \right\rangle \quad (26)$$

The value of the radial derivative increases when the scale decreases. Thus, small-scale wavelets are more expansive than large-scale ones. This matrix is applied on both groups of wavelets supposed to represent the core and the lithosphere.

4.3.2 Gravity field

In the spherical approximation, the free air gravity anomaly is related to the disturbing potential (Moritz, 1989):

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} \quad (27)$$

where r is the spherical radius. The wavelet expansion of the gravity anomaly is then derived by linearity :

$$\Delta g = -\sum_i \alpha_i \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial r} \right) \quad (28)$$

In matricial notation, equation 28 becomes:

$$\Delta g = M.\alpha \quad (29)$$

As for the scalar case, the matrix L is defined as the inverse of the covariance matrix of the wavelet coefficients, but these coefficients correspond now to the wavelet approximation of the disturbing potential. This matrix is derived in the same way as described in section 4.2.2. However, the power spectrum of the gravity anomalies has to be replaced by the power spectrum of the disturbing potential. The Kaula's rule for the potential reads :

$$c_\ell = (2\ell + 1) \frac{\beta}{\ell^4} \quad (30)$$

where β is a real constant.

5 Results

In the present paper, we only discuss tests obtained from synthetic data sets. Indeed, this choice allows: (1) to know exactly the spatial and spectral contents of the used information, (2) to test as many distributions of data as possible and (3) to directly compare with the initial model in spherical harmonics. The two fields, magnetic and gravity, differ in their spatial and spectral characteristics. Their behaviours help us to study the impact of different parameters of the used wavelet frames.

The results we obtained are presented for magnetic and gravity fields, separately. Moreover, we made a distinction between the global and regional representations, obtained with both possible even and uneven distributions.

5.1 Magnetic models

5.1.1 Global representations

Data. We used a synthetic dataset computed from CO2 model (Holme *et al.*, 2003). This model is obtained from the measurements provided by three magnetic satellites: CHAMP, Ørsted and SAC-C, from August 2000 to December 2001. This spherical harmonic model is developed up to degree/order 29 when describing the internal field.

The magnetic field spectrum is clearly decreasing up to degree/order 13 (Fig. 1). We truncated the CO2 model at this degree, for global representations of main internal contributions (Figs 9 and 10). From this model, we constituted an even and an uneven distribution of data. We did not apply a gaussian filter on synthetic data as it was done for gravity modelling (see below). The even distribution of synthetic data comprises 629 samples, with one data per bin of $10^\circ \times 10^\circ$ on the whole Earth's surface. The uneven distribution contains 670 samples, located at all observatory positions that have ever run on the Earth (past and

Table 4: Parameters of the global tests - Magnetic scalar approach

Parameters	Even case (629 data)	Uneven case (670 data)
Order of multipoles	2	2
Generations of the frame	1 to 4	1 to 4
Scales	see Table 1	see Table 1
Number of wavelets	510	510
W matrix	$1\mathbb{I}$	$1\mathbb{I}$
λ parameter	10^{-10}	10^{-9}
t exponent parameter	7	7

Table 5: Parameters of the global tests - Magnetic vectorial approach

Parameters	Even case (629 data)	Uneven case (670 data)
wavelets belong to:	core / crust	core / crust
Order of multipoles	2/2	2/2
Generations of the frame	1 to 4 / 1 to 3	1 to 3 / 1 to 3
Scales	see Table 2	see Table 2
Number of wavelets	510/126	126 /126
W matrix	$1\mathbb{I}$	$1\mathbb{I}$
λ parameter	10^{-21}	10^{-14}

present observatory locations). We chose this realistic distribution because it allows to get dense (Europe) and sparse (Pacific) covered areas.

Tests. Tables 4 and 5 summarize the parameters used in global magnetic field modelling. We fixed a noise level at 1 nT for all tests presented below: matrix W is thus set to the identity matrix in all computations. This choice is motivated by the fact that data are supposed to be “perfect”. The order of multipoles, the number of generations of the frame and the scale sequences are fixed with respect to some geophysical constraints (see paragraph 3.3.1). Thus the residuals between the synthetic data and their wavelet representation are minimized by adjusting the following parameters: the exponent of regularization t in the scalar case, the quadratic form (matrix L) in the vectorial case, and the regularization parameter λ in both cases.

Results - even case. The obtained wavelet models are not mapped here. Indeed, they mimic the initial synthetic data provided by CO2 model (Figs 9 and 10).

For the scalar case, the residuals between the CO2 and the wavelet models (Fig. 11) are rather important, up to ± 1800 nT. Nevertheless, the residuals between the initial synthetic and reconstructed data (Fig. 12) are well centred on zero and reach limits of ± 400 nT. The scalar case is presented just as a simple fit of the data: the regularization is rough and it is not based on geophysical considerations.

The results obtained for the vectorial approach show the real advantages when applying the wavelets. First of all, the residuals between the CO2 and the wavelet models (Fig. 13) are smaller than the considered noise of 1 nT. Furthermore, the residuals between initial synthetic and reconstructed data (Fig. 14) are well centred on zero, being no larger than ± 0.25 nT. Due to the number and the repartition of data, low regularizations (see λ parameter in Tables 5) allow an easy recovery of the initial spherical harmonic model up to degree/order 13.

Results - uneven case. Fig. 15 shows a map of the intensity of the magnetic field modelled by wavelets. When comparing with Fig. 9, one can see additional oscillations, without major changes on the global shape of the intensity. The residuals between the CO2

and the wavelet models (Fig. 16) reach some huge values, up to $-10\,000$ nT in the South Atlantic area or $5\,000$ nT in India Ocean. In this case, the residuals on the data (Fig. 17) vary up to ± 300 nT. This model points out the key role of the regularization. Indeed, the small-scale wavelets are not sufficiently constrained. If the regularization parameter λ is increasing, the resolution decreases, leading to an increase of the residuals on the data. If λ is decreasing, the residuals also decrease up to ± 5 nT but the obtained model is less regular.

Fig. 18 shows maps for X , Y and Z magnetic field components modelled by wavelets. When comparing these maps with those shown in Fig. 10, no remarkable differences appear between the initial spherical harmonic and the wavelet models. For all regions well-covered by data the residuals for all three components are as small as a few tens of nT. As expected, the largest residuals (Fig. 19) are in areas without data (Pacific Ocean, Southern Atlantic region). For regions without data, these residuals are larger. These differences are due to the spherical harmonic model, as wavelet model does not introduce spurious artifacts when data are missing. Let us emphasize that a recalculated spherical harmonic model from the same dataset represents these data in a less accurate way than the wavelet model we presented here. The residuals on data (Fig. 20) are larger than for the even case up to ± 25 nT. These last results were obtained with an increased regularization parameter. We had to choose a trade-off between a regular field at Earth's surface and a reasonable fit of data. Again, decreasing the regularization parameter λ up to $1 \cdot 10^{-21}$ leads to a better fit of initial data, with residuals no larger than ± 10 nT.

5.1.2 Regional representation

Data. For the regional representation we chose an area centred over Europe, as it contains the largest number of magnetic observatories. The intensity $|\vec{B}|$ and the three components X , Y and Z of the magnetic field computed up to degree/order 29 from the CO2 model centred over the considered area are shown in Figs 21 and 22. From the same model, we also computed an even and an uneven distribution of data centred over Europe ($15^\circ\text{N}/75^\circ\text{N}$ lat.; $15^\circ\text{W}/45^\circ\text{E}$ lon.). The even distribution of data contains 576 values with one data per bin of $3^\circ \times 3^\circ$ and a sparse grid of data elsewhere with one data per bin of $20^\circ \times 20^\circ$. The regular sampling takes into account the Nyquist frequency constraint. The uneven distribution comprises synthetic data at all European and Northern African observatory locations, and a sparse distribution with one data per bin of $20^\circ \times 20^\circ$ on the remaining surface. We used this sparse, global dataset because the regional magnetic field contains large wavelengths that need to be constrained. Thus, to derive the regional model, we selected small-scale wavelets in the neighbourhood of the area under study, and large-scale wavelets all over the globe. The extension of the neighbourhood depends on the shape of the wavelet: for a given scale, we selected all wavelets whose radius of influence intersects the area under study. The radius of influence of a wavelet is defined as the distance between the wavelet location (where it gets its maximal value) and the position where the wavelet amplitude has decreased by 90%.

Tests. Tables 6 and 7 summarize the parameters used in regional magnetic modelling, for the scalar and vectorial approaches, respectively. Compared with the global tests, we used here a larger number of generations of the frame. Again, for the vectorial approach we considered that magnetic sources are located in the core and in the crust, and they are consequently modelled.

Results - even case. As for the global tests, the maps obtained for the even case are not plotted here. Indeed they are similar to those obtained from the initial spherical harmonic model (Figs 21 and 22). The residuals between the CO2 and the wavelet models (Figs 23 and 25) do not exceed ± 80 nT for the scalar case and ± 12 nT for the vectorial one. Let us remark that in the regional case the range covered by residuals is one order of magnitude larger than in the global case (Fig. 13). This difference comes from the fact

Table 6: Parameters of the regional tests - Magnetic scalar approach (Parameters: with stars as superscripts denote wavelets localised on the whole sphere; without superscript, wavelets are localised on the European area.)

Parameters	Even case (576 data)	Uneven case (200 data)
Order of multipoles	2	2
Generations of the frame	(1 to 3)*, 4 and 5	(1 to 3)*, 4 and 5
Scales	see Table 1	see Table 1
Number of wavelets	127* and 218	127* and 218
W matrix	1 \mathbb{I}	1 \mathbb{I}
λ parameter	10^{-15}	10^{-13}
t exponent parameter	7	7

Table 7: Parameters of the regional tests - Magnetic vectorial approach (Parameters: with stars as superscripts denote wavelets localised on the whole sphere; without superscript, wavelets are localised on the European area.)

Parameters	Even case (576 data)	Uneven case (200 data)
wavelets belong to:	core / crust	core / crust
Order of multipoles	2/2	2/2
Generations of the frame	(1 to 3)* and 4 / 3 to 5	(1 to 3)* and 4 / 1 to 4
Scales	see Table 2	see Table 2
Number of wavelets	127* and 44/ 216	126* and 44/ 63
W matrix	1 \mathbb{I}	1 \mathbb{I}
λ parameter	10^{-20}	10^{-17}

that the wavelet model is not truncated at degree/order 29 as the spherical harmonic model does. The reconstructed wavelet model contains small-scales that do not exist in the initial dataset. The residuals on the data (Figs 24 and 26) are of order ± 70 nT for the scalar case and of order ± 8 nT for the vectorial case.

Results - uneven case. The wavelet models (Figs 27 and 30) we obtained mimic the initial synthetic data provided by CO2 model (Figs 21 and 22) for both scalar and vectorial cases. The residuals between the CO2 and the wavelet models (28 and 31) are larger in the Southern part of the area for both scalar and vectorial maps. This is the outcome of the very sparse data distribution in Northern Africa. In the upper part of the studied area, the two observatories situated in Northern Sea allow to better constrain the wavelet model. The residuals on the data (Figs 29 and 32), as expected, are larger for the scalar case (± 50 nT) than for the vectorial (± 10 nT).

5.2 Gravity models

5.2.1 Global representations

Data. To assess the ability of the wavelets to represent the gravity field at a global scale, we inverted synthetic gravity anomalies in both cases of even and uneven distribution of data. We constructed the synthetic datasets using the first gravity model based on GRACE data: GGM01S (Tapley *et al.*, 2004). This model was established with 111 days of GRACE measurements, from April to November 2002, and is developed up to degree and order 120. We truncated the gravity anomaly model at degree and order 12, and applied a gaussian filter to the spherical harmonic coefficients in order to avoid artificial oscillations (Sandwell

Table 8: Parameters of the global tests - Gravity case

Parameters	Even case (1106 data)	Uneven case (99 data)
Order of multipoles	3	3
Generations of the frame	2 to 4	2 to 4
Scales	see Table 3	see Table 3
Number of wavelets	846	846
W matrix	$10^{10}\mathbb{I}$	$10^4\mathbb{I}$
λ parameter	0.005	5

& Renkin, 1988). The applied filter is given by :

$$w(\ell) = e^{-\frac{(\ell-2)^2}{2(\sigma-2)^2}} \quad (31)$$

where ℓ is the degree of the spherical harmonics. We chose $\sigma = 7$. This value corresponds to a characteristic attenuation of around 0.6.

From this model, we computed an even and an uneven distribution of data. The even distribution comprises 1106 samples, with one data per bin of $7.5^\circ \times 7.5^\circ$ on the whole Earth's surface. The 7.5° interval was chosen in order to respect the Nyquist frequency constraint for the degree 12. The uneven distribution comprises 99 samples, with large gaps at low latitudes and areas of higher concentration. We chose an arbitrary distribution of data, without any preference for the continental areas. Indeed, gravity data are available all over the Earth: ground-based measurements are numerous over continents, and satellite altimetry provides a complete coverage of the oceans.

Fig. 33 shows the gravity anomaly model GGM01S filtered as previously explained, with the uneven distribution of data superimposed.

Tests. Table 8 summarizes the parameters used in gravity modelling at a global scale. Parameters are the same for both scalar and vectorial approaches. We did not use the first generation of the frame: indeed, gravity anomalies have no component on the degrees 0 and 1 whereas the spectrum of the first generation is centred onto degree 1.

As the data are 'perfect' (we did not spoil them with any synthetic noise), matrix W of data ponderation is arbitrary. The uniform ponderation applied corresponds to an arbitrary data noise of 10^{-2} mGal for the uneven distribution of data, and 10^{-5} mGal for the even one.

Lastly, we filtered the wavelet model in the same way as the gravity model, to insure their consistency. Indeed, real gravity anomalies, modelled as a sum of wavelets, have an infinite spectrum. In our examples, the synthetic data only constrain the low frequency part: thus, they only give an access to the low frequency part of the wavelet representation. The presented results are thus derived on a filtered wavelet frame.

Results - even case. Wavelets succeed in representing the low harmonics of the gravity anomaly model. We do not show the wavelet models since there is visually no difference with the GGM01S model shown on Fig. 33. The residuals between the initial GGM01S gravity anomaly model and the wavelet reconstruction from an even distribution of data are of same magnitude as the data noise (Figure 34 and 36). Moreover, their aspect is rather isotropic. Measurement residuals (Figs 35 and 37) reach $5 \cdot 10^{-5}$ mGal: same order as the 10^{-5} mGal of assumed data noise.

Results - uneven case. Wavelet models obtained for the scalar and vectorial cases (Figs 38 and 41) show that the wavelets well handle the gaps in the dataset: the wavelet model reproduces the main structures of the gravity anomaly model even in poorly constrained areas. Residuals between wavelet and GGM01S models increase in the equatorial area, due

Table 9: Parameters of the regional tests - Gravity case

Parameters	Even case (1369 data)	Uneven case (576 data)
Order of multipoles	3	3
Generations of the frame	2 to 10	2 to 8
Scales	see Table 3	see Table 3
Number of wavelets	7189	1962
W matrix	$10^6\mathbb{I}$	$10^4\mathbb{I}$
λ parameter	1000	50

to the large gaps in the spatial coverage of the uneven dataset (Figs 39 and 42): the wavelets nicely predict the features in the gaps, but their amplitudes and localization are not perfect because of lack of constraints. Moreover, spherical harmonics would lead to strong oscillations with such a distribution of data, a phenomenon that the wavelets avoid. Let us notice that the number of measurements is much smaller than the number of wavelets: that is the reason why residuals can be high. However, in areas of higher density of data, residuals do not exceed 1 mGal. Residuals between measurements and reconstructed data from wavelet model are mostly of comparable magnitude as assumed data noise (Figs 40 and 43).

Lastly, scalar and vectorial approaches yield very similar results in both even and uneven cases. Indeed, the wavelets can represent any spherical function. The difference between both approaches is that the wavelet coefficients have a physical meaning in the vectorial case only, the scalar case only being a mathematical fit of a function on a sphere.

5.2.2 Regional representations

Data. Here, we show the ability of the wavelet frames to represent the gravity field at a higher resolution for regional studies. To get a maximum resolution, we derived the synthetic data from the EGM96 gravity model (Lemoine *et al.*, 1998), up to degree and order 360 (this corresponds to a resolution of 55 km). As previously, we applied a gaussian filtering to the coefficients up to degree 360 with $\sigma = 250$.

From this model, we computed an even and an uneven distribution of data. The studied area is located in South America, in the northern part of the Andes ($5^\circ/14^\circ$ lat. S; $73^\circ/82^\circ$ lon. W). The even distribution contains 1369 samples, with one data per bin of 0.25° at the Earth's surface. Again, the bin takes into account the Nyquist frequency constraint. The uneven distribution comprises 576 samples, in a larger area than regular case ($0^\circ/9^\circ$ lat. S; $67^\circ/85^\circ$ lon. W). There is a higher concentration of data in the northern half (394 data) than in the southern one (182 data).

Tests. Table 9 gives the used parameters. They are the same for both scalar and vectorial approaches. We selected the wavelets located inside the area under study and in an appropriate neighbourhood. We defined this neighbourhood in the following way: first, we calculated the radius of influence of the wavelets at the different scales. This radius is equal to the square root of the spherical variance of the function. Then, for a given scale, we selected all the wavelets whose radius of influence intersects the area under study.

The wavelet model is filtered in the same way as the data are. We applied the arbitrary noise of 10^{-2} mGal for the uneven distribution of data, and 10^{-3} mGal for the even one. This last value is larger than for the global case: indeed, generation 11 of the frame could also contribute to gravity anomaly modelling since its power spectrum still contains energy below degree 360. Nevertheless, we only took 10 generations in the frame so that the number of wavelets should not be too large. Moreover, the spatial selection of wavelets could also degrade the approximation. For all these reasons, we increased the arbitrary data noise.

Results - even case. The subset of the wavelet frame succeeds in representing the regional gravity anomaly model with a good precision, but we could not avoid edge effects. We do not show the wavelet models since there is again no visual difference with the EGM96 model.

Residuals between the initial gravity model and the wavelet reconstruction are rather homogeneous in the central area (around 10^{-3} mGal), and they increase to 10^{-2} mGal when approaching the boundaries, a value still very acceptable considering the usual precision of regional gravity maps (data precision is around 0.1 mGal). The residuals reach the extrema of -0.3 mGal and 0.25 mGal at the edges (Figs 45 and 47). These effects are mainly localized on the North-West and the South-East edges. They are due to the spatial selection of the wavelets, and to the distribution of vertices of the icosahedral mesh. Indeed, the vertices do not follow lines of equal latitude and longitude, but their two main directions show a slight obliquity with respect to the directions of parallels and meridians. As a consequence, when selecting wavelets in a neighbourhood of the area, the coverage is not perfectly isotropic and two corners over the four are privileged. Let us notice that the two other corners are modelled with an accuracy of 10^{-3} mGal. A full treatment of the edge effects is beyond the scope of this paper and will necessitate further studies. Residuals between synthetic data and reconstructed data from wavelet model are of comparable magnitude as assumed data noise (Figs 46 and 48).

Results - uneven case. Wavelet models (Figs 49 and 52) for both scalar and vectorial cases again underline the ability of wavelets to model dispersed data without generating awkward large oscillations. Similar to the global case, the wavelets reconstitute the main features of the field. Residuals between the wavelet model and the EGM 96 model (Figs 50 and 53) are larger in the southern part of the area than in the northern one: this is due to the unequal repartition of data, with a larger density in the northern half. Residuals are larger in areas with large variations of the gravity anomaly, where a larger amount of data should be used to constrain the wavelet model. Contrary to the even data distribution case, we do not notice any edge effect: indeed, those effects are of too small amplitude to be detected when the limitation of precision comes from the number of available data. Residuals between synthetic data and reconstructed data from wavelet model (Figs 51 and 54) are mostly of same order of magnitude as the assumed data noise. Some residuals can reach slightly larger values, but still very acceptable considering the usual noise on ground measurements.

Finally, scalar and vectorial approaches give again very similar results as for the global tests, in both cases of even and uneven distributions of data.

6 Conclusions

In this paper, we investigated an appealing alternative to the spherical harmonic representation of potential fields: the Poisson multipole wavelet frames. We took into account the specificities of the magnetic and the gravity fields. Indeed, their spectral and spatial characteristics are quite different. This reflects the different distributions of magnetic and gravity sources inside the Earth. In particular, the magnetic field is dominated by an important dipolar component. Moreover, geomagneticians and gravimetricians are used to work with different functionals of the field: intensity and vectorial field for the formers, anomaly for the latter. That is the reason why we proposed two different implementations of a wavelet representation, well-suited for each kind of data.

The magnetic field was thus modelled with order 2 multipoles on a cubical mesh, whereas the gravity anomaly was modelled with order 3 multipoles on more regular meshes, based in the icosahedron, so that the finest scales could be correctly represented. Thus, the frame used for gravity modelling is more redundant than the one used for magnetic modelling. As a consequence of this redundancy and of the importance of the small scales, the inverse

problem needed more regularization for the case of the gravity field than for the case of the magnetic field.

We proposed two different kinds of modelling, the one which we named scalar and the other vectorial. Whereas the scalar models constitute a simple fit of a function defined on a sphere, the vectorial ones take into account a fundamental characteristic of the used wavelets, namely their multipolar nature. The wavelets can thus be considered as physical sources of the magnetic - respectively gravity, field if the scales are chosen in order to locate the multipoles at realistic depths. The wavelets coefficients thus reflect the core magnetic field produced by fluid flows and crustal magnetizations - respectively densities.

Our calculations proved the interest of the Poisson multipole wavelets for global and regional modelling of the magnetic and the gravity fields. We wrote the normal equations in two different ways, one taking into account in the wavelet model the spectral truncation in the datasets, and the other not. We studied the impact of the different parameters involved in the computations of various magnetic and gravity models: order of the multipoles, meshes, scales, regularization, data distribution and spectral characteristic, etc. The results presented at a global scale and derived from evenly distributed datasets showed that the wavelets well represent an harmonic field. On the one hand, the number of wavelets involved is larger than the number of spherical harmonics. Thus, the spherical harmonics are more adapted to deal with global, evenly distributed datasets. On the other hand, wavelets are considerably more interesting than spherical harmonics as soon as the datasets are dispersed or regional. Indeed, the wavelet models based on datasets with gaps do not show the strong oscillations that are generated by spherical harmonics. On the contrary, they represent the data in a faithfully and realistic way, be they globally or regionally distributed. The main structures of the fields are correctly reproduced, with the right amplitudes and locations. The interpolation errors are due to the lack of constraints in the large data gaps. They are higher for the gravity anomaly, due to the importance of the small-scales components. The results obtained on regional, evenly distributed datasets stressed the ability of a subset of the frames to represent an harmonic field with a high precision, despite some edge effects easy to by-pass. The numeric gain is quite impressive, since only a few thousands of wavelets are necessary to model a field up to degree and order 360, instead of about 130000 spherical harmonics. Moreover, the number of wavelets may be decreased by adjusting the frame parameters.

We intent now to apply our approach to ground-based measurements localized in a specific region, in order to derive both magnetic and gravity models that will be useful for geodynamical purposes.

Acknowledgments The authors would like to thank Lars Amsel (University of Potsdam) for his computationnal help, and David Renault (Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique, Université Bordeaux 1 and ENSEIRB) for fruitful discussions about spherical meshes.

All maps were plotted using the GMT software (Wessel and Smith, 1991). This is IPGP contribution num...

References

- Albertella, A., Sanso, F. and Sneeuw, N., 1999. Band-limited functions on a bounded spherical domain: the Slepian problem on the sphere. *Journal of Geodesy*, **73**, 436-447.
- Cromwell, P.R., 1997. *Polyhedra*, 460 pp., Cambridge University Press, New York.

- Dahlke, St., Steidl, G., and Teschke, G., 2001. Coorbit Spaces and Banach Frames on Homogeneous Spaces with Applications to Analyzing Functions on Spheres, Zentrum für Technomathematik Technical Report, 01-13, Bremen University.
- Daubechies, I., 1988. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure & Appl. Math.*, **41**(7), 909-996.
- Daubechies, I., 1990. The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis. *IEEE Trans. Inf. Theory*, **36**, 961-1005.
- Daubechies, I., 1991. Ten lectures on wavelets. *CMBS Lecture Notes Series*, 61, SIAM, Philadelphia.
- De Santis, A., De Franceschi, G. and Kerridge, D.J., 1994. Regional spherical modelling of 2D functions: the case of the critical frequency of the F2 ionospheric layer, *Computers & Geosciences*, **20**, 849-871.
- De Santis, A., Falcone, C. and Torta, J.M., 1997. SHA vs. SCHA for modelling secular variation in a small region such as Italy, *J. Geomag. Geoelectr.*, **49**, 359-371.
- De Santis, A. and Torta, J.M., 1997. Spherical cap harmonic analysis: a comment on its proper use for local gravity field representation, *Journal of Geodesy*, **71**, 526-532.
- Freeden, W. and U., Winterheuser, 1996. Spherical Wavelet Transform and its Discretization, *Advances in Computational Mathematics*, **5**, 51-94.
- Freeden, W. and Schneider, F., 1998. An integrated wavelet concept of physical geodesy, *Journal of Geodesy*, **72**, 259-281.
- Freeden, W., Gervens, T. and Schreiner, M., 1998. *Constructive Approximation on the Sphere (With Applications to Geomathematics)*, Oxford Science Publication, Clarendon Press, Oxford.
- Gabor, D., 1946. Theory of Communications, *J. Inst. Elec. Eng.*, **93**, 429-457.
- Grossman, A. and Morlet, J., 1985. Mathematics and Physics, Vol. 2, L. Streit Ed., World Scientific Publishing, Singapore.
- Haar, A., 1909. Zur theorie der orthogonalen funktionensysteme, *Math. Annalen*, **69**, 331-371.
- Haines, G.V., 1985. Spherical cap harmonic analysis, *J. Geophys. Res.*, **141**, 2583-2591.
- Haines, G.V., 1990. Regional magnetic field modelling: a review, *J. Geomag. Geoelectr.*, **141**, 1001-1018
- Hicks, J.S. and Wheeling, R. F., 1959. An efficient method for generating uniformly distributed points on the surface of an n-dimensional sphere, *Communications of the ACM*, **2**, 4, 17-19.
- Hipkin, R.G., 2001. The statistics of pink noise on a sphere: applications to mantle density anomalies. *Geophysical Journal International*, **144**, 259-270.
- Holme, R., Olsen, N., Rother, M., and Lühr, H., 2003. CO2 - A CHAMP Magnetic Field Model, in *First CHAMP Mission Results for Gravity, Magnetic and Atmospheric Studies*, pp220-225, ed. Reigber, C., Lühr, L. and Schwintzer, P., Springer Verlag.
- Holschneider, M., 1995. Wavelets: an analysis tool. Oxford Sciences Publications, Oxford.
- Holschneider, M., 1996. Wavelet analysis on the sphere. *J. Math. Phys.*, **37**(8), 4156-4165.

- Holschneider, M., Chambodut, A. and Manda, M., 2003. From global to regional analysis of the magnetic field on the sphere using wavelet frames, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **135**, 107-124.
- Hwang, C., 1993. Spectral analysis using orthonormal functions with a case study on the sea surface topography. *Geophys. J. Int.*, **115**, 1148-1160.
- Hwang, C. and Chen, S.K., 1997. Fully normalized spherical cap harmonics: application to the analysis of sea-level data from TOPEX/POSEIDON and ERS-1. *Geophys. J. Int.*, **129**, 450-460.
- Jacobs, J.A. (Ed), 1987. *Geomagnetism*, Vol. 2, 627 pp, Academic Press, London, Orlando.
- Kaula, W.M., 1966. *Theory of satellite geodesy*, Waltham, Blaisdell.
- Kenner, H., 1976. *Geodesic math and how to use it*, University of California Press, Berkeley.
- Korte, M. and Haak, V., 2000. Modelling European Magnetic Repeat Station Data by SCHA in Search of Time-varying Anomalies, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **122**, 205-220.
- Li, J., Chao, D. and Ning, J., 1995. Spherical cap harmonic expansion for local gravity field representation. *Manuscripta Geodaetica*, **20**, 265-277.
- Lowes, F.J., 1974. Spatial power spectrum of the main geomagnetic field and extrapolation to the core. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, **36**, 717-730.
- Lemarié, P.G. and Meyer, Y., 1986. Ondelettes et bases hilbertiennes. *Rev. Mat. IberoAm.*, **2**, 1-18.
- Lemoine, F.G. et al., 1998. The development of the joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) geopotential model EGM96. NASA/TP - 1998 - 206861, Greenbelt, Maryland.
- Mallat, S., 1989. A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: the Wavelet Representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **31**, 679-693.
- Martelet, G., Saille, P., Moreau, F. and Diament, M., 2001. Characterization of geological boundaries using 1D-wavelet transform on gravity data: Theory and application to the Himalaya, *Geophysics*, **66**, 4, 1116-1129.
- Mauersberger, P., 1956. Das mittel der energiedichte des geomagnetischen hauptfeldes an der erdoberfläche und seine säkulare änderung. *Gerlands Beitr. Geophys.*, **65**, 207-215.
- Merrill, R.T., McElhinny, M.W. and McFadden, P.L., 1996. *The Magnetic Field of the Earth*, Academic Press, San Diego.
- Meyer, Y., 1986. Ondelettes et fonctions splines. *Seminaire Equations aux dérivées partielles*, Cent. Math. Ecole Polytech., Palaiseau, France.
- Moritz, H., 1989. *Advanced physical geodesy*, 2nd edn, Wichmann, Karlsruhe.
- Muller, M. E., 1959. A Note on a Method for Generating Points Uniformly on N-Dimensional Spheres, *Comm. Assoc. Comput. Mach.*, **2**, 19-20.
- Murenzi, R., 1990. *Ondelettes multidimensionnelles et application à l'analyse d'images*. PhD thesis. Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium.
- Saille, P., Galdeano, A., Gibert, D., Moreau, F., Delor, C., 2000. Identification of sources of potential fields with the continuous wavelet transform: Complex wavelets and application to aeromagnetic profiles in French Guiana. *J. Geophys. Res.*, **105**, B8, 19455-19475.

- Sailhac, P. and Gibert, D., 2003. Identification of sources of potential fields with the continuous wavelet transform: Two-dimensional wavelets and multipolar approximations. *J. Geophys. Res.*, **108**, B5, 2262, doi:10.1029/2002JB002021.
- Sandwell, D.T. and Renkin, M.L., 1988. Compensation of Swells and Plateaus in the North Pacific: No Direct Evidence for Mantle Convection. *J. Geophys. Res.*, **93**, 2775-2783.
- Tapley, B. D., Bettadpur, S., Watkins, M. and Reigber, C., 2004. The gravity recovery and climate experiment: Mission overview and early results. *Geophys. Res. Lett.*, **31**, L09607:10.1029/2004GL019920.
- Tarantola, A., 1987. *Inverse problem theory*, Elsevier, New York.
- Thébault, E., Schott, J.J., Manda, M. and Hoffbeck, J.P., 2004. A new proposal for spherical cap harmonic analysis. *Geophys. J. Int.*, In press.

A Regular convex polyhedrons

Also called “Platonic bodies”, they comprise five families: tetrahedron, hexahedron (cube), octahedron, dodecahedron and icosahedron (geodesic domes). Their properties may be summarized by the definition:

A **convex** polyhedron is a region P , closed and bounded in the 3D space, which is the intersection of a finite number of half-spaces. Thus, P is an ordered collection of vertexes $V_1; V_2; \dots; V_n$ and edges $E_{1,2} = V_1V_2; E_{2,3} = V_2V_3; \dots; E_{n,1} = V_nV_1$ joining the vertexes. The plane into its interior (finite) is separated from its exterior (infinite) regions by the faces F .

A polyhedron is said to be **regular** if the following statements are verified: (1) the vertexes of P all lie on a sphere; (2) all the dihedral angles are equal; (3) all the vertex figures are regular polygons; (4) all the solid angles are equivalent; (5) all the vertexes are surrounded by the same number of faces.

Table A gives the number of faces F , edges E and vertexes V for each kind of regular convex polyhedrons.

Name	F	E	V
Tetrahedron	4 triangles	6	4
Hexahedron (cube)	6 squares	12	8
Octahedron	8 triangles	12	6
Dodecahedron	12 pentagons	30	20
Icosahedron	20 triangles	30	12

B Cubical mesh

The construction of the cubical mesh is presented in details in Holschneider *et al.* (2003). Here we just recall the main steps of this implementation.

The coordinates of the j -level mesh are determined through three successive steps. The first one is the subdivision of the facets of the cube as explained in Sect. 3.2.1. The cube is centred with respect to a cartesian coordinates system. The coordinates (X,Y,Z) of centres of each facet are calculated. Then, we determine directional spherical coordinates (θ, ϕ) by simple trigonometric relation. The last step consists in projecting the resulting points on the sphere in order to obtain the third component of spherical coordinates (r, θ, ϕ). Fig. 55 summarizes this implementation.

C Icosahedral mesh

The construction of an icosahedric mesh was implemented based on C++ code from Richard J. Bono freely distributed on the web site <http://www.applied-synergetics.com/ashp/html/domes.html>. Let us recall the principle of the implementation, based on Kenner (1976).

The icosahedron is made of 20 equilateral triangles, called "symmetry triangles". The 10 "cap triangles" share a vertex at one pole (the North pole for triangles numbered 0 to 4 and the South pole for triangles numbered 15 to 19), whereas the other 10 ones form a band around the Equator (triangles 5 to 9 northward and 10 to 14 southward). This polyhedron is symmetric by rotations of $\frac{\pi}{5}$ radians around the North-South axe, and the Equatorial plane is a symmetry plane.

We calculated the coordinates of the j -level mesh in 3 steps. The first step consists in subdividing triangle number 0, j times in 4^{j-1} facets and calculating the Cartesian coordinates of the vertexes. Then we converted these coordinates into spherical ones and projected the mesh on the sphere. The last step consists in deducing the coordinates in the other triangles from the first ones thanks to the symmetries of the icosahedron. All these steps are detailed in the following.

Cartesian coordinates of one triangle vertexes

Fig. 56 shows an equilateral triangle of level $j = 4$. We define a system of coordinates (X, Y) whose axes follow two sides of the triangle. The length of the sides is set to 2^{j-1} (number of segments). We also define a Z coordinate linked to the other ones by the relation $X + Y + Z = 2^{j-1}$.

The Cartesian coordinates (x, y, z) of the subdivided triangle 0 in a classical frame with origin at the center of the icosahedron and axes defined as shown on figure 57 are deduced from (X, Y, Z) according to Kenner (1976):

$$\begin{cases} x &= X + Y \cdot \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \\ y &= Y \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \\ z &= \frac{2^{j-1}}{2} + \frac{Z}{\tau} \end{cases} \quad (32)$$

where $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Figs 58 and 59 illustrate these relationships for the case $j = 3$.

Projection on the sphere

The spherical coordinates of the vertexes in the same frame can be easily obtained from (x, y, z) :

$$\begin{cases} \phi &= \arctan \frac{x}{y} \\ \theta &= \arctan \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \end{cases} \quad (33)$$

The vertexes are projected on the sphere by setting their radius to 1.

Last vertexes of the icosahedron obtained by symmetry

We can now deduce the spherical coordinates of the vertexes in the other symmetry triangles. Let k be the number of the triangles. Triangles 1 to 4 are ϕ - rotated copies of triangle 0 with a rotational angle of $72k$. To get triangles 15 to 19, we perform a symmetry with respect to the equatorial plane, and a ϕ - rotation of angle $72(k-15)$. To get the equatorial triangles, we first apply a transformation linking triangle 0 to triangle 10, followed by a ϕ - rotation of angle $72(k-10)$ for the southward directed triangles (10 to 14), plus an equatorial symmetry and another ϕ - rotation of angle 36° for the northward directed triangles. The aforementioned transformation can be described as follows: let A (θ_1, ϕ_1) be a point of triangle 0 and B (θ_2, ϕ_2) its image in triangle 10. A and B play equivalent roles with respect to edges 2 ($\theta = 180^\circ - \arctan 2, \phi = 36^\circ$) and 1 $(0, 0)$ respectively (see Fig. 61): if we rotate

the icosahedron so that the edge 2 arrives on zenith, the colatitude of the moved point A (A') is the same as that of point B in the initial configuration, so :

$$\cos \theta_2 = \cos \theta_1 \cos \theta + \sin \theta_1 \sin \theta \cos(\phi - \phi_1) \quad (34)$$

The longitude of rotated point A becomes :

$$\sin \phi_2 = \sin \theta_1 \frac{\sin(\phi - \phi_1)}{\sin \theta_2} \quad (35)$$

We can now deduce the longitude of point B in the initial configuration, which is equal to $\pi + 36 - \phi_2$ (Kenner, 1976). Figs 60 and 61, representing triangles 0 (1-3-4 on the figure) and 10 (3-4-2 on the figure), illustrate this transformation.

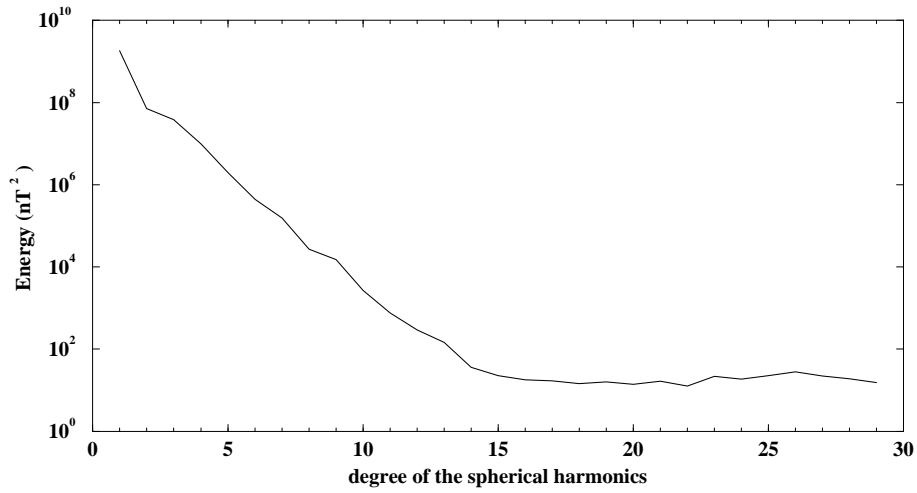


Figure 1: The energy spectrum of the magnetic field at the Earth's surface (CO2 model, from Holme *et al.* (2003)).

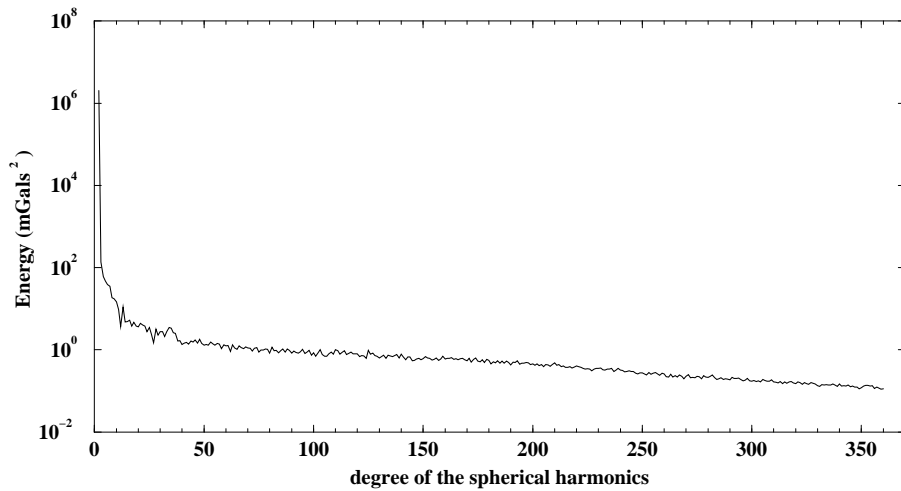


Figure 2: The energy spectrum of the gravity field, up to $N = 360$ (EGM96 model, from Lemoine *et al.* (1998)).

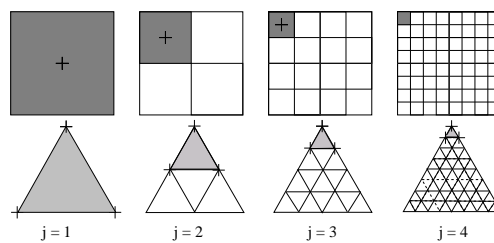
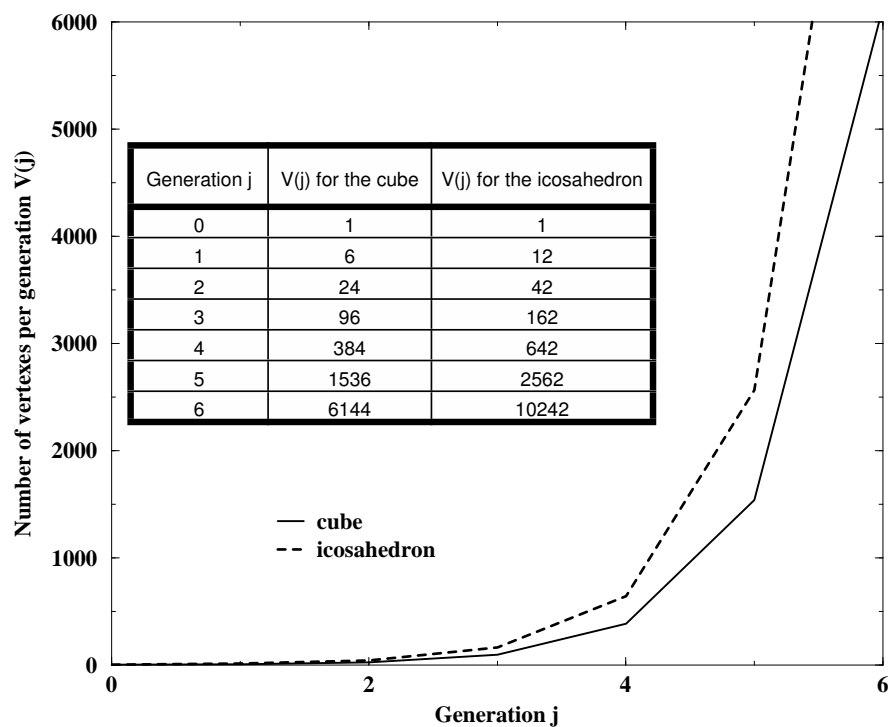
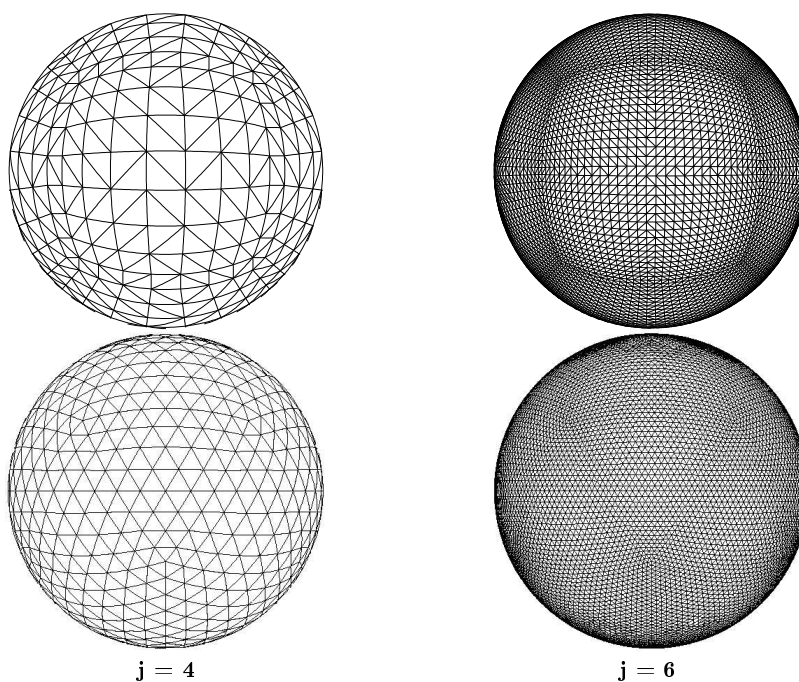


Figure 3: Facets of polyhedrons at each generation j for a cube (top) and an icosahedron (bottom). Black crosses represent positions of wavelets.

Figure 4: Number of points of the polyhedrons at each generation j .Figure 5: Meshes on the sphere at two generations j , calculated for a cube (top) and an icosahedron (bottom).

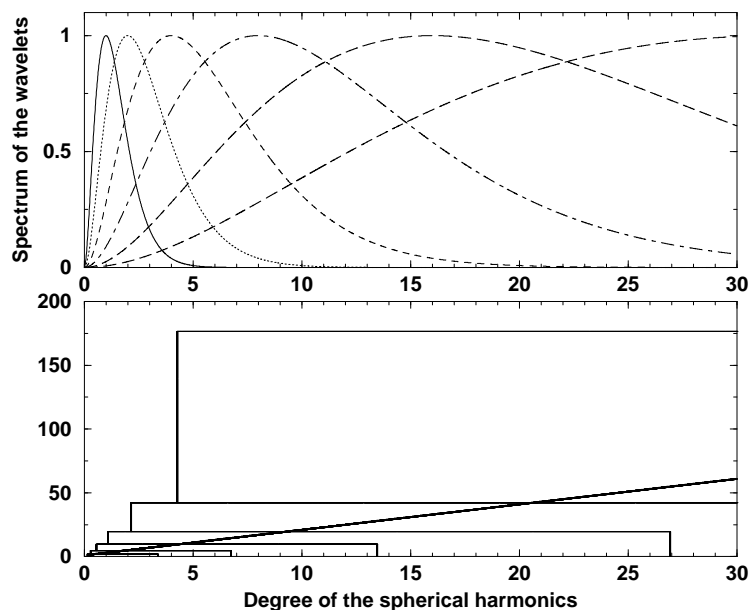


Figure 6: Implementation of the scales with order 2 multipoles. The energy spectra for the generations 1 to 6 are computed (top panel). The number of wavelets (*areas defined by thin segments*) is compared to the number of spherical harmonics (*areas below thick line*) for each degree ℓ (bottom panel).

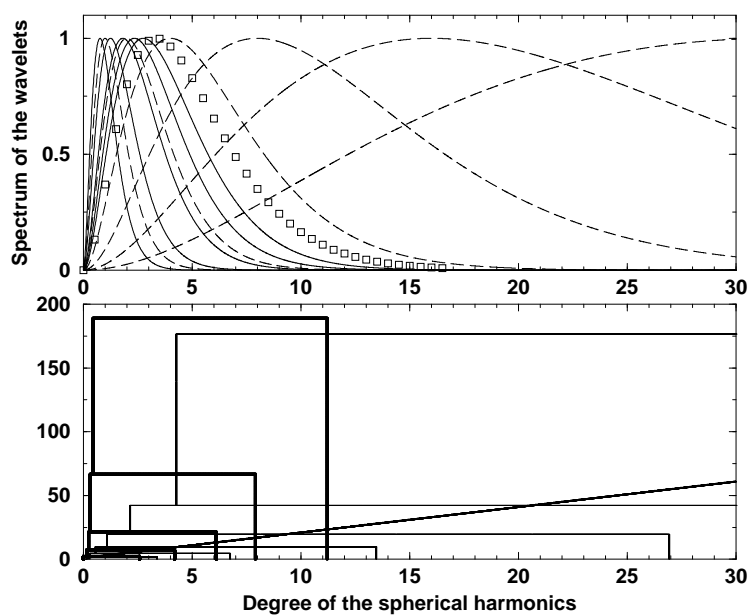


Figure 7: Implementation of the scales with order 2 multipoles. The energy spectra for the generations 1 to 5 on the core (*top panel, solid curves*) and 1 to 6 on the crust (*top panel, dashed curves*) are calculated (top). The squares define the limit spectrum of the core-wavelets. The number of wavelets from the core (*areas defined by thick segments*) and from the crust (*areas defined by thin segments*) is compared to the number of spherical harmonics (*areas below thick line*) for each degree ℓ (bottom panel). Note that (i) the spectra of core-wavelets cover spherical harmonic up to degree $\ell \simeq 13$; (ii) the core-wavelets are more redundant than the crustal ones below $\ell = 13$ and (iii) only crustal-wavelets represent the field when $\ell \geq 16$.

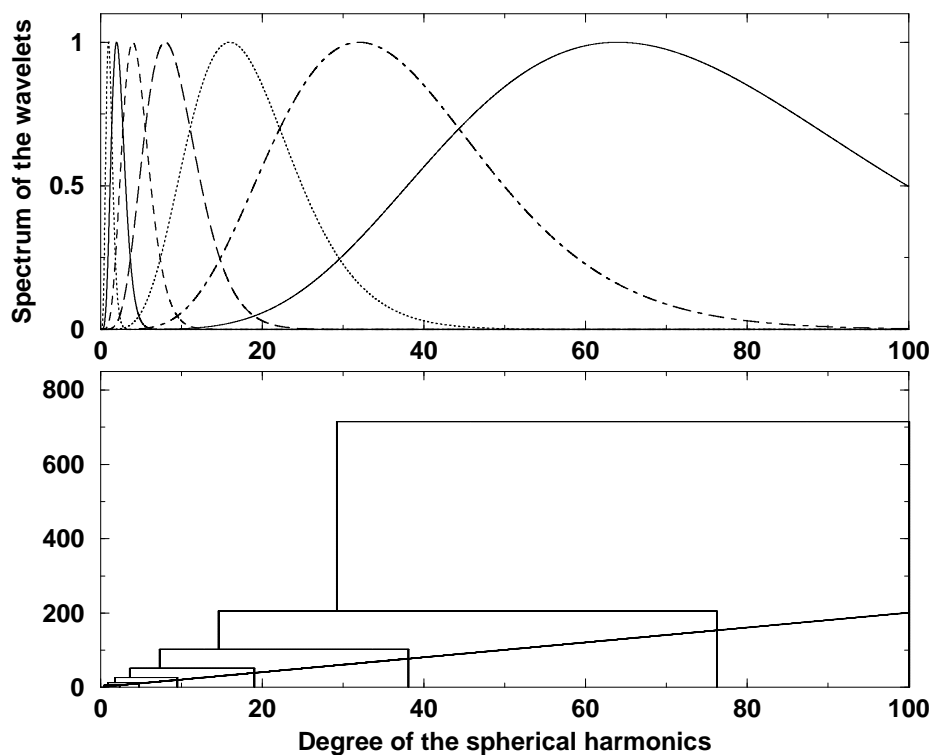


Figure 8: Implementation of the scales with order 3 multipoles. The energy spectra for the generations 1 to 7 are calculated (top panel). The number of wavelets (*areas defined by thin segments*) is compared to the number of spherical harmonics (*areas below thick line*) for each degree ℓ (bottom panel).

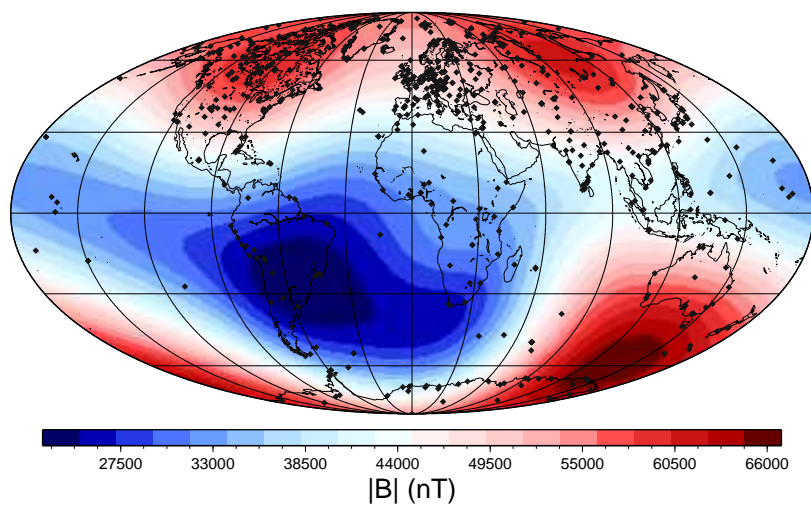


Figure 9: Map for the magnetic field intensity ($|\vec{B}|$) computed at the Earth's surface, from CO2 model (Holme *et al.*, 2003) up to degree/order 13. Black dots represent the chosen uneven distribution of data, which directly correspond to the distribution of 670, past and present, magnetic observatory locations.

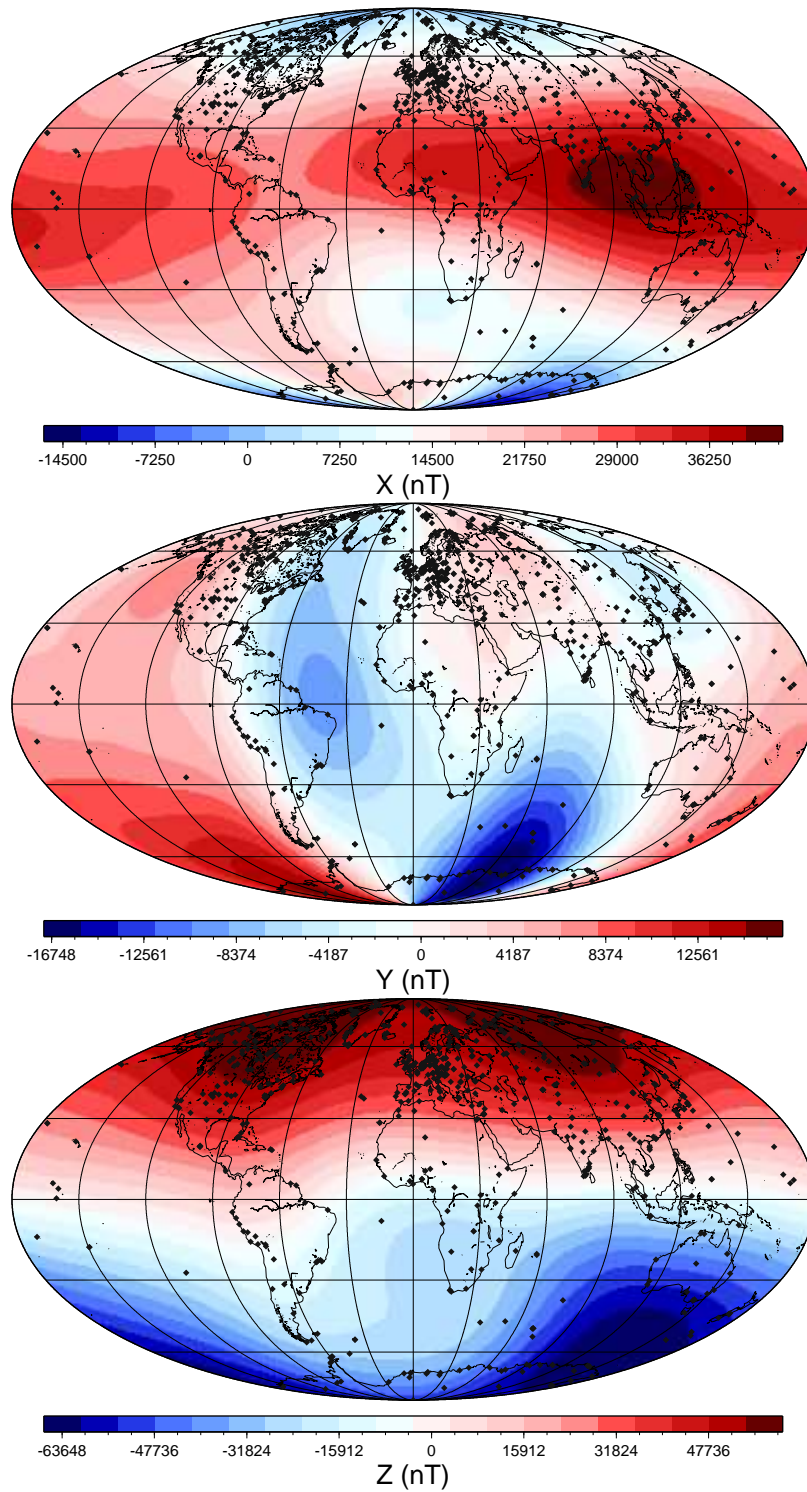


Figure 10: Same as figure 9 for Northern X (*top*), Eastern Y (*middle*) and Downward vertical Z (*bottom*) components.

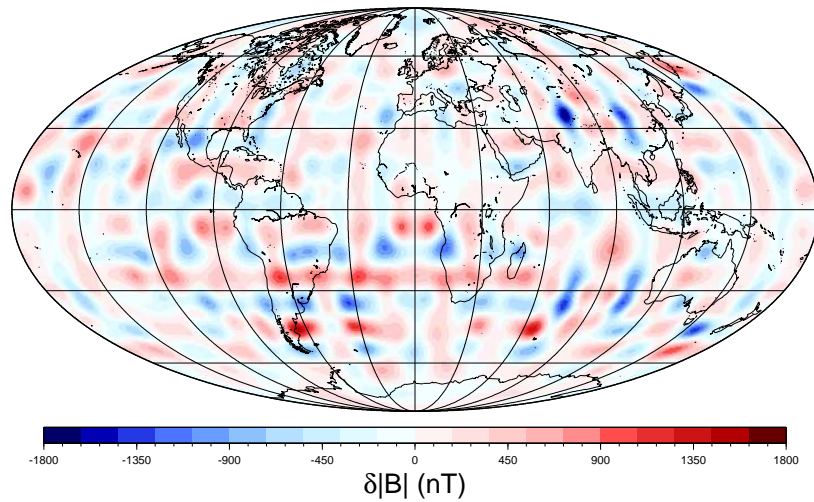


Figure 11: Map of residuals on the magnetic field intensity ($|\vec{B}|$) at the Earth's surface (initial spherical harmonic model CO2 - 510 wavelet model). The wavelet model is computed applying the scalar approach on the even distribution of 629 data.

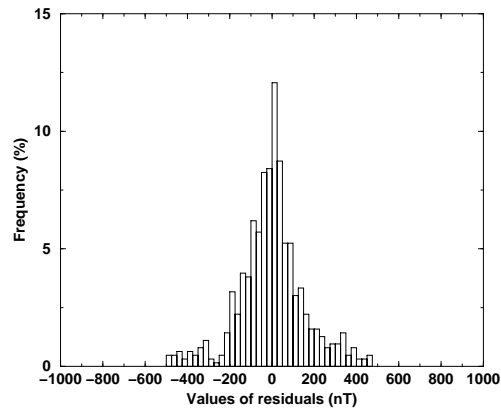


Figure 12: Histograms of residuals on the magnetic field intensity $|\vec{B}|$ (initial synthetic data from spherical harmonics model CO2 - reconstructed data from 510 wavelet model). The wavelet model is computed applying the scalar approach on the even distribution of 629 data.

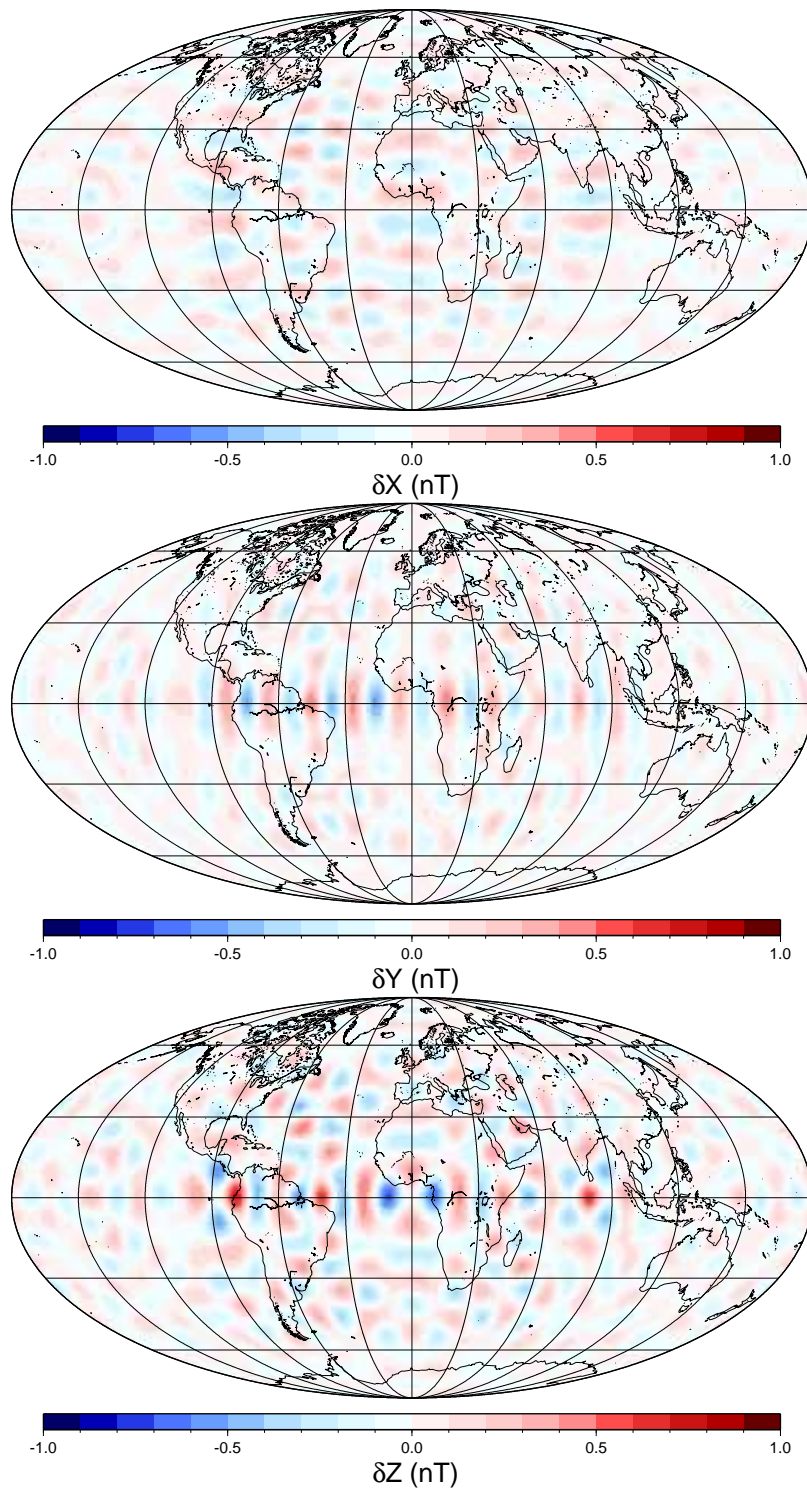


Figure 13: Maps of residuals on the magnetic field Northern X (*top*), Eastern Y (*middle*) and Downward vertical Z (*bottom*) components at the Earth's surface (initial spherical harmonic model CO2 - 636 wavelet model). The wavelet model is computed applying the vectorial approach on the even distribution of 629 data.

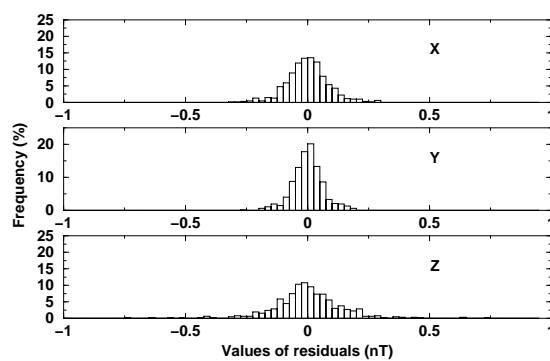


Figure 14: Histograms of residuals on the magnetic field vectorial components (initial synthetic data from spherical harmonic model CO2 - reconstructed data from 636 wavelet model). The wavelet model is computed applying the vectorial approach on the even distribution of 629 data.

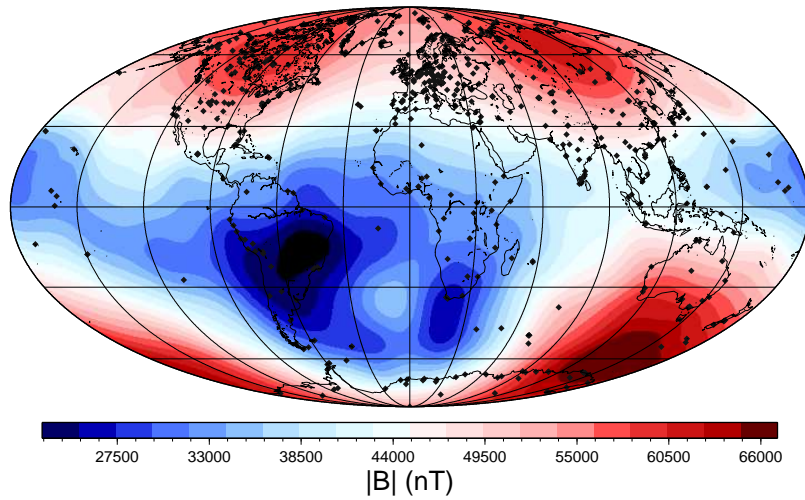


Figure 15: Map for the magnetic field intensity ($|\vec{B}|$) computed at the Earth's surface from 510 wavelet model. Black dots represent the chosen uneven distribution of 670 synthetic data used in the scalar approach.

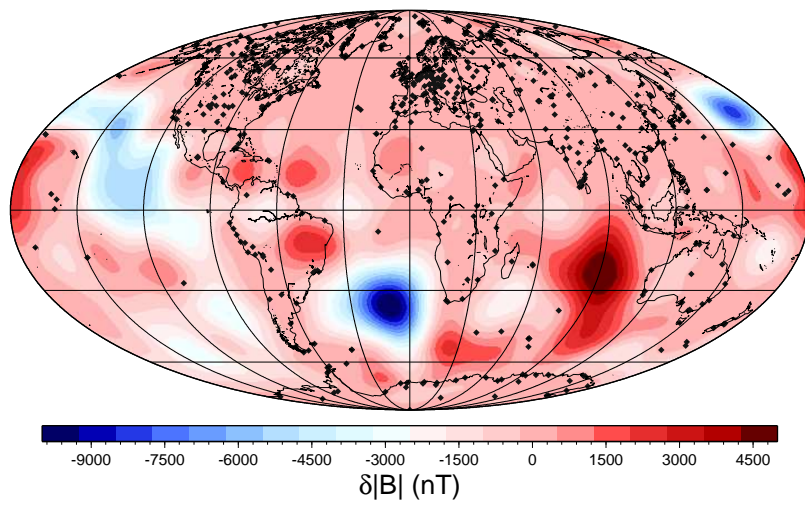


Figure 16: Map of residuals on the magnetic field intensity ($|\vec{B}|$) at the Earth's surface (initial spherical harmonic model CO2 - 510 wavelet model). The wavelet model is computed applying the scalar approach on the uneven distribution of 670 data.

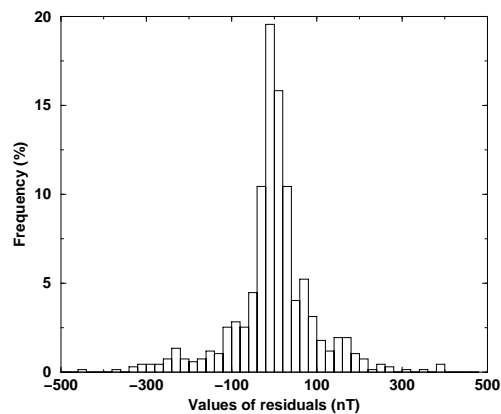


Figure 17: Histograms of residuals on the magnetic field intensity $|\vec{B}|$ (initial synthetic data from spherical harmonics model CO2 - reconstructed data from 510 wavelet model). The wavelet model is computed applying the scalar approach on the uneven distribution of 670 data.

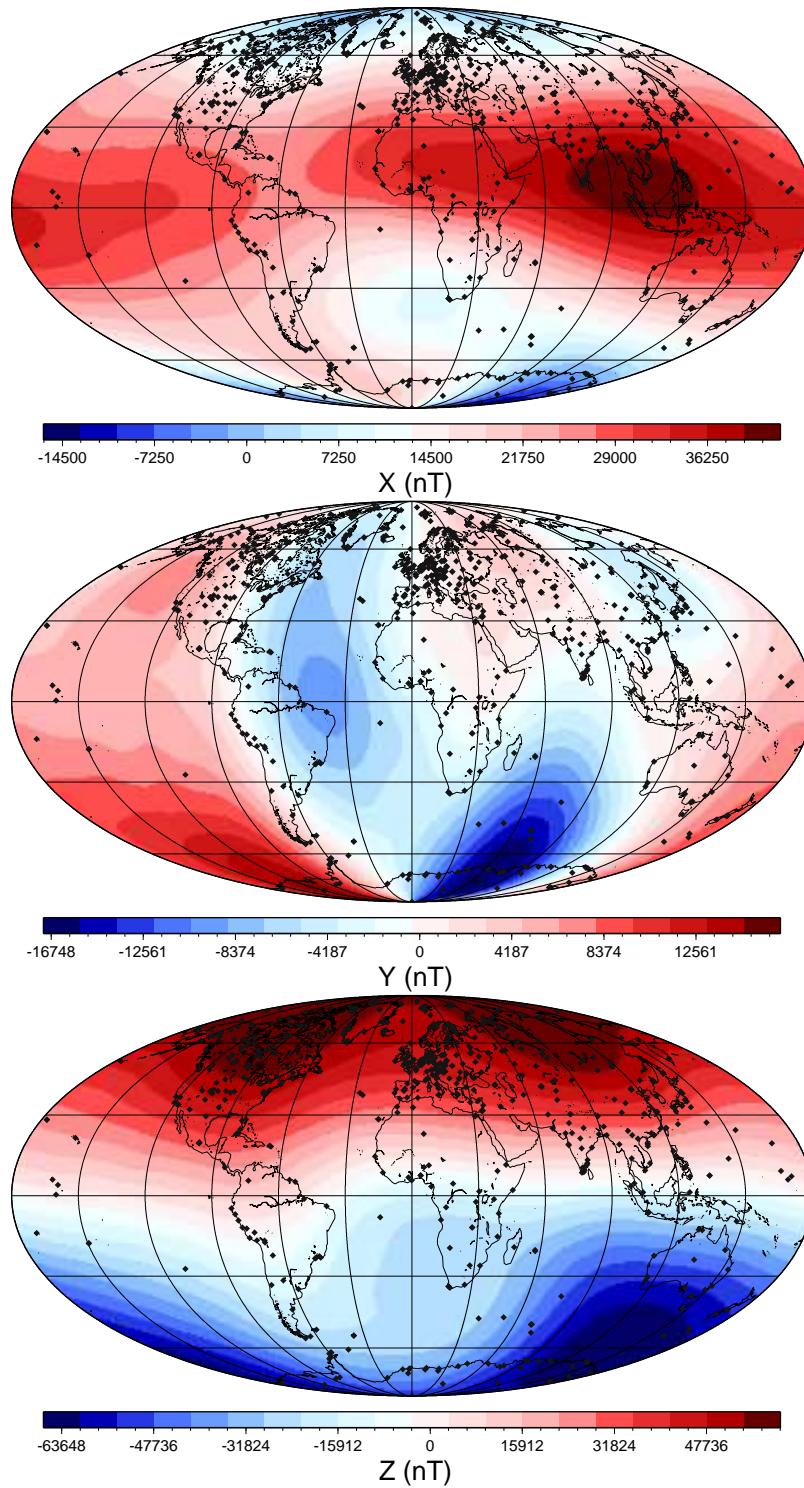


Figure 18: Maps for the magnetic field Northern X (*top*), Eastern Y (*middle*) and Downward vertical Z (*bottom*) components computed at the Earth's surface from 252 wavelet model. Black dots represent the chosen uneven distribution of 670 synthetic data used in the vectorial approach.

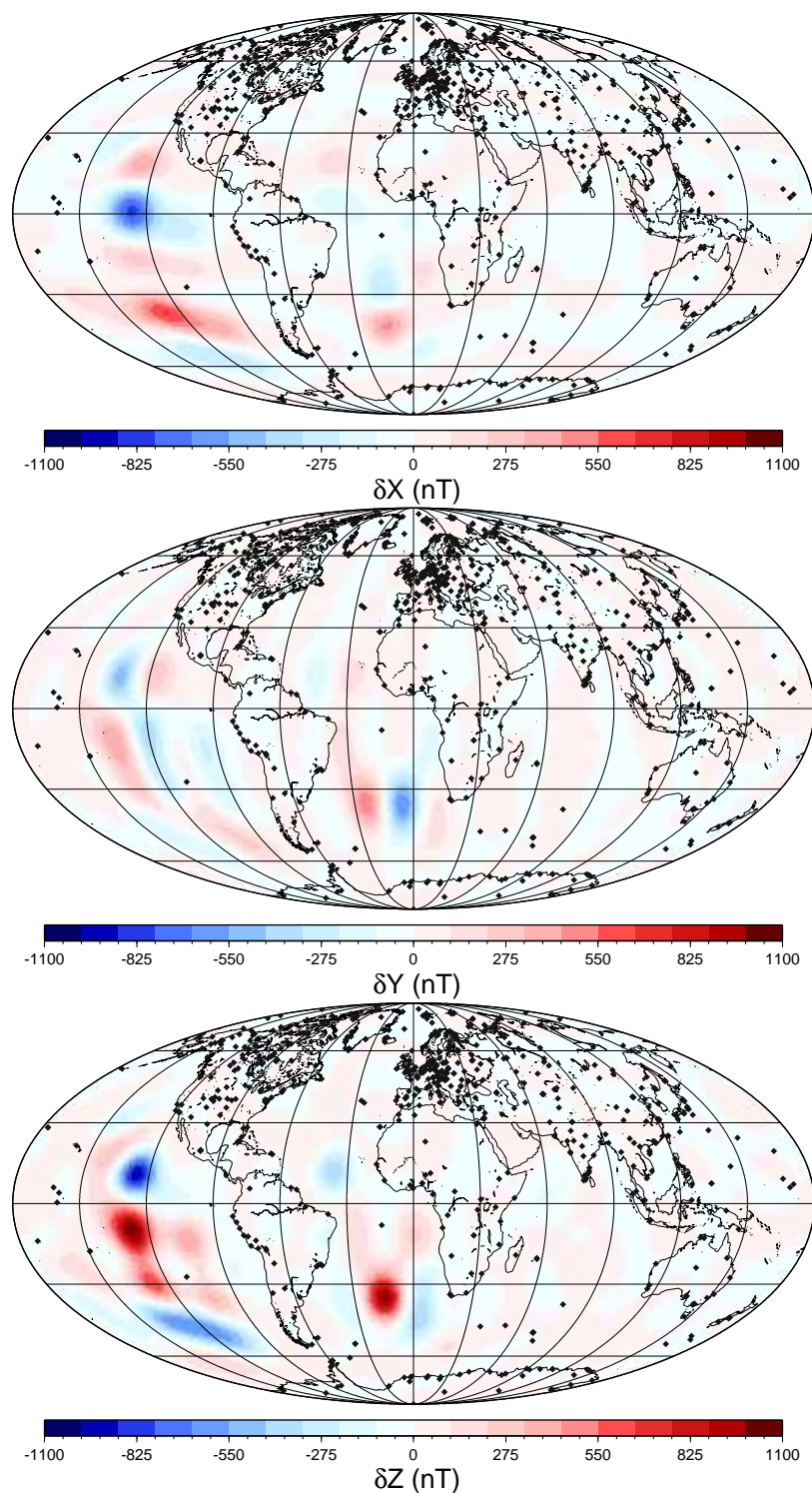


Figure 19: Maps of residuals on the magnetic field Northern X (*top*), Eastern Y (*middle*) and Downward vertical Z (*bottom*) components at the Earth's surface (initial spherical harmonic model CO2 - 252 wavelet model). The wavelet model is computed applying the vectorial approach on the uneven distribution of 670 data.

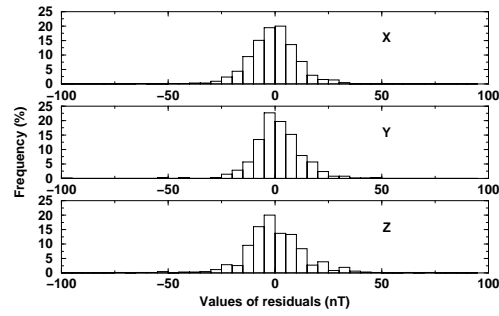


Figure 20: Histograms of residuals on the magnetic field vectorial components (initial synthetic data from spherical harmonic model CO2 - reconstructed data from 252 wavelet model). The wavelet model is computed applying the vectorial approach on the uneven distribution of 670 data.

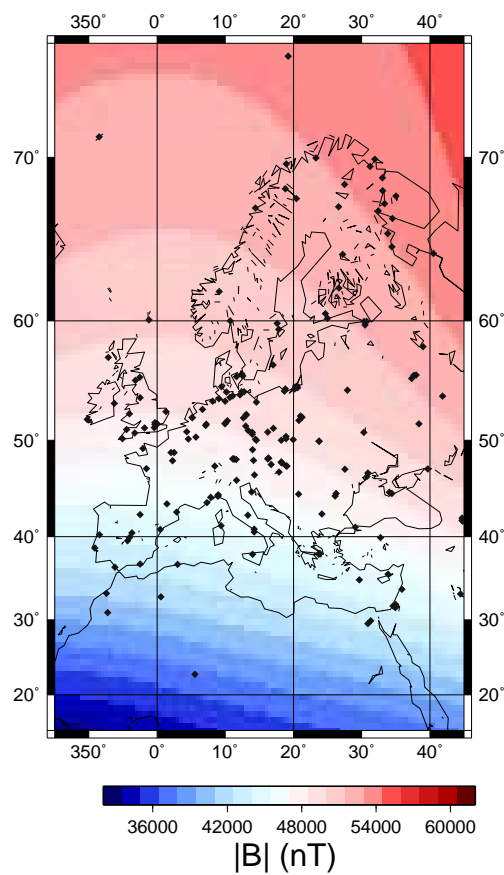


Figure 21: Map for the magnetic field intensity ($|\vec{B}|$) computed from CO2 model up to degree/order 29, above Europe. The black dots represent the chosen uneven distribution of data, which directly correspond to the distribution of past and present magnetic observatory locations.

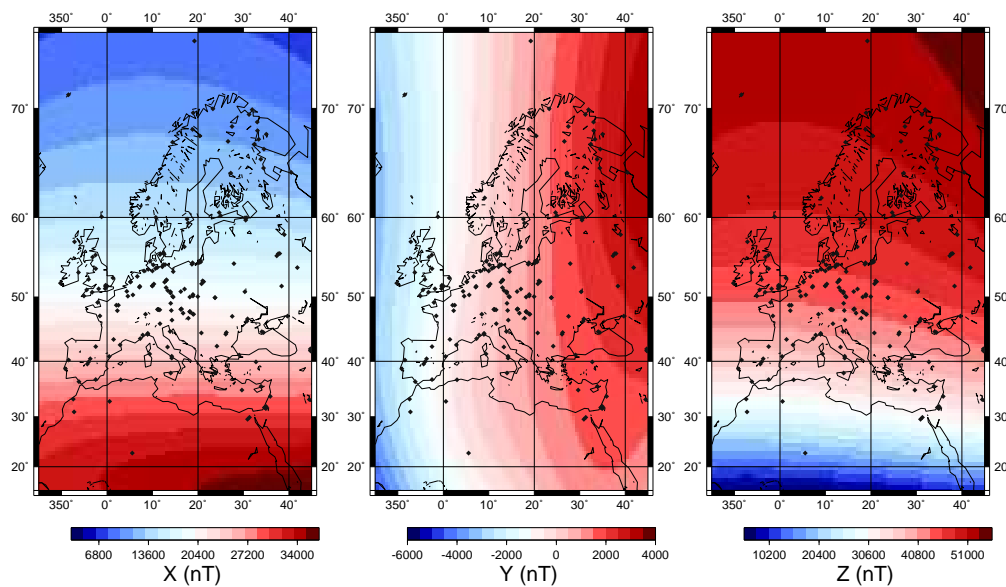


Figure 22: Maps for the magnetic field Northern X , Eastern Y and Downward vertical Z components computed from CO2 model up to degree/order 29, above Europe. The black dots represent the chosen uneven distribution of data, which directly correspond to the distribution of past and present magnetic observatory locations.

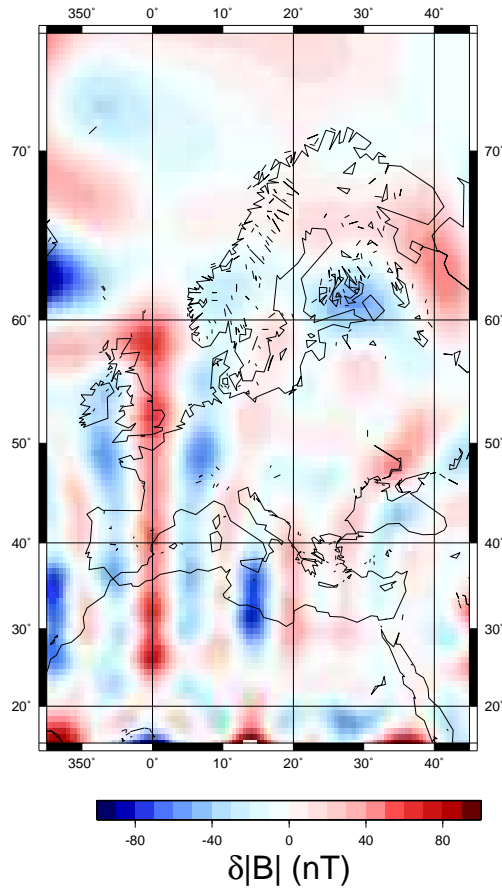


Figure 23: Map of residuals on the magnetic field intensity ($|\vec{B}|$) at the Earth's surface (initial spherical harmonic model CO2 - 345 wavelet model). The wavelet model is computed applying the scalar approach on the even distribution of 576 data.

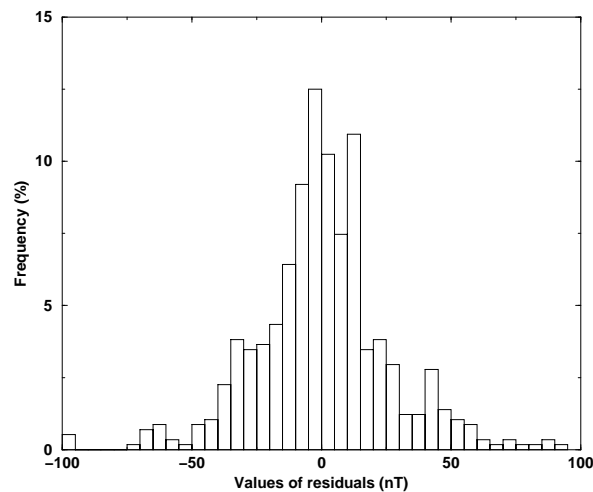


Figure 24: Histograms of residuals on the magnetic field intensity $|\vec{B}|$ (initial synthetic data from spherical harmonic model CO2 - reconstructed data from 345 wavelet model). The wavelet model is computed applying the scalar approach on the even distribution of 576 data.

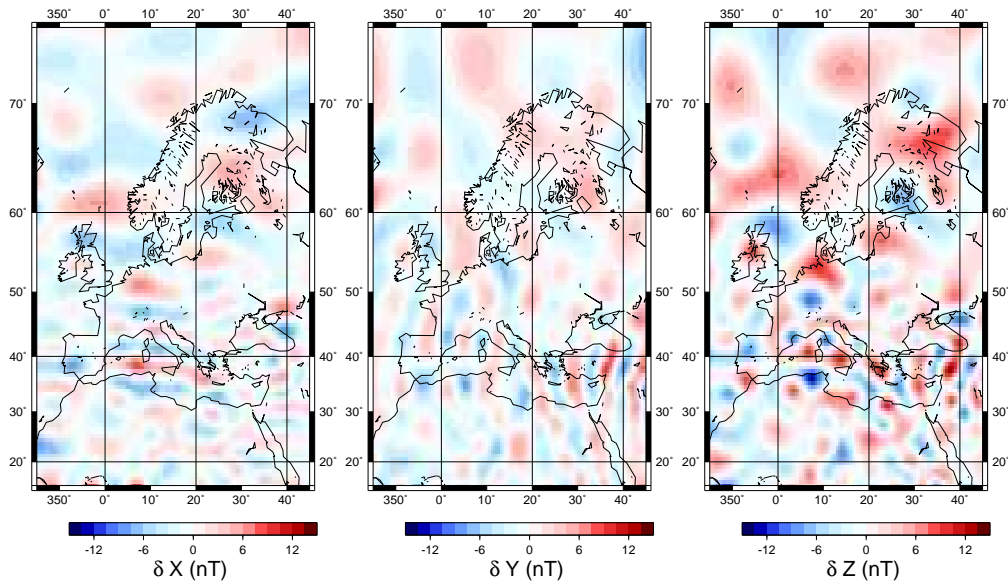


Figure 25: Maps of residuals on the magnetic field Northern X (*left*), Eastern Y (*middle*) and Downward vertical Z (*right*) components at the Earth's surface (initial spherical harmonic model CO2 - 387 wavelet model). The wavelet model is computed applying the vectorial approach on the even distribution of 576 data.

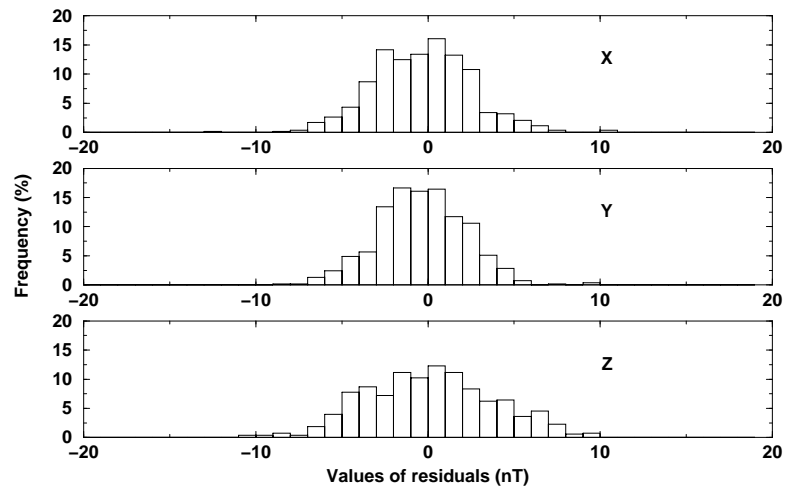


Figure 26: Histograms of residuals on the magnetic field vectorial components (initial synthetic data from spherical harmonic model CO2 - reconstructed data from 387 wavelet model). The wavelet model is computed applying the vectorial approach on the uneven distribution of 576 data.

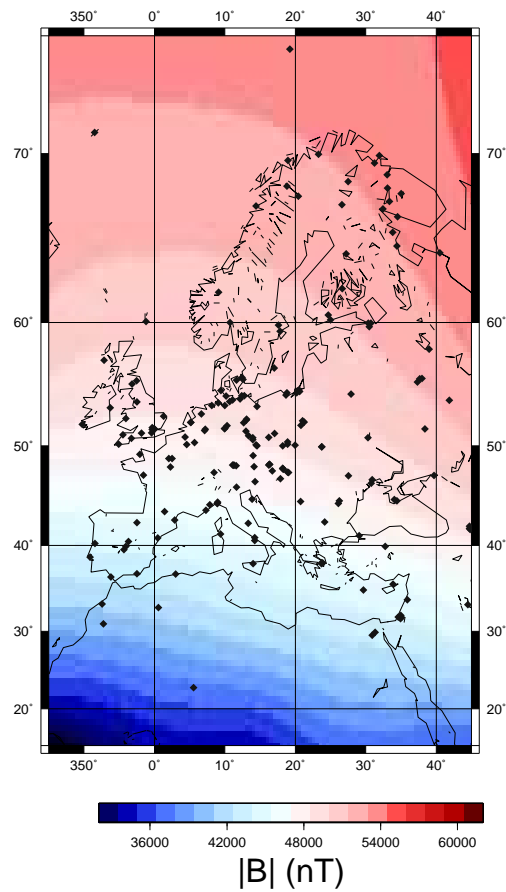


Figure 27: Map for the magnetic field intensity ($|\vec{B}|$) computed at the Earth's surface from 345 wavelet model. Black dots represent the chosen uneven distribution of 200 synthetic data used in the scalar approach.

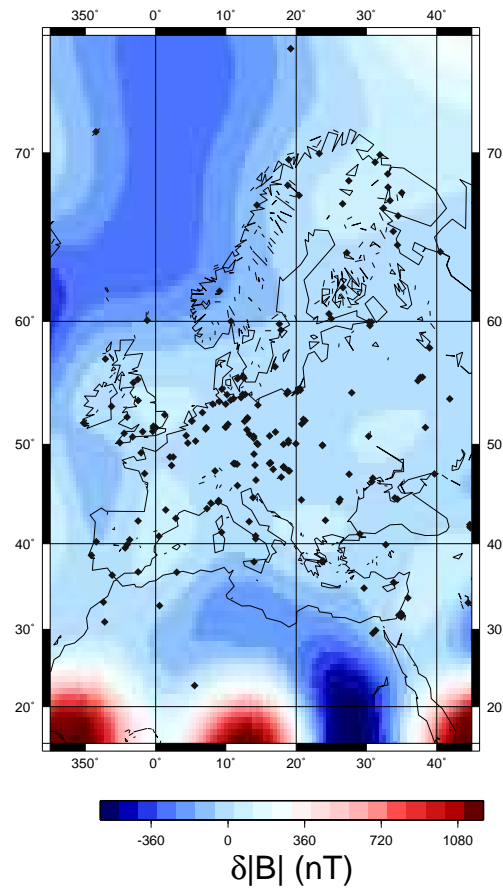


Figure 28: Map of residuals on the magnetic field intensity ($|\vec{B}|$) at the Earth's surface (initial spherical harmonic model CO2 - 345 wavelet model). The wavelet model is computed applying the scalar approach on the uneven distribution of 200 data.

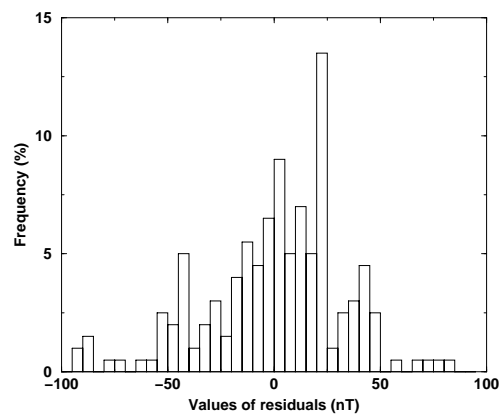


Figure 29: Histogram of residuals on the magnetic field intensity ($|\vec{B}|$) at the Earth's surface (initial spherical harmonic model CO2 - 345 wavelet model). The wavelet model is computed applying the scalar approach on the uneven distribution of 200 data.

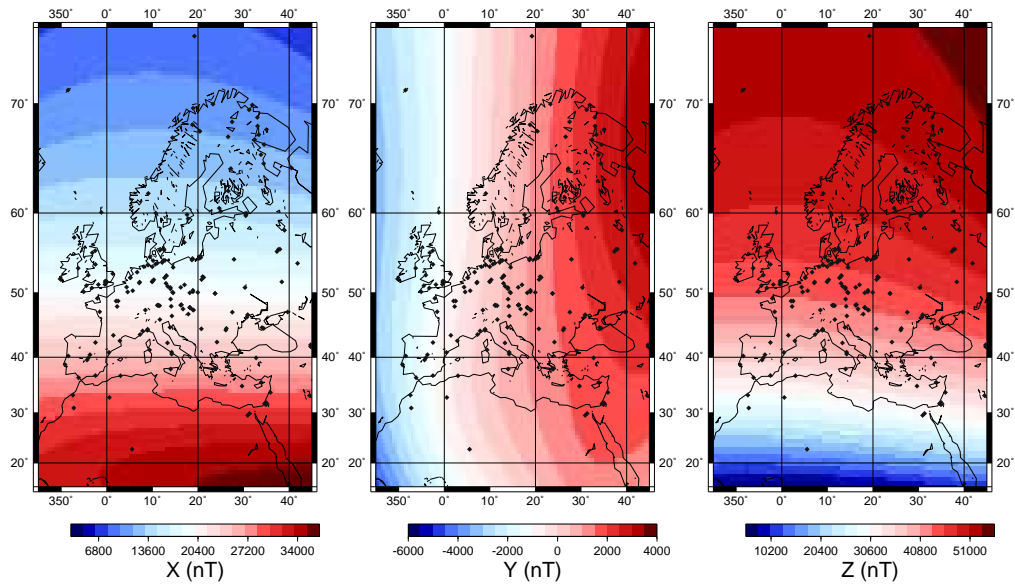


Figure 30: Maps for the magnetic field Northern X (*top*), Eastern Y (*middle*) and Downward vertical Z (*bottom*) components computed at the Earth's surface from 233 wavelet model. Black dots represent the chosen uneven distribution of 200 synthetic data used in the vectorial approach.

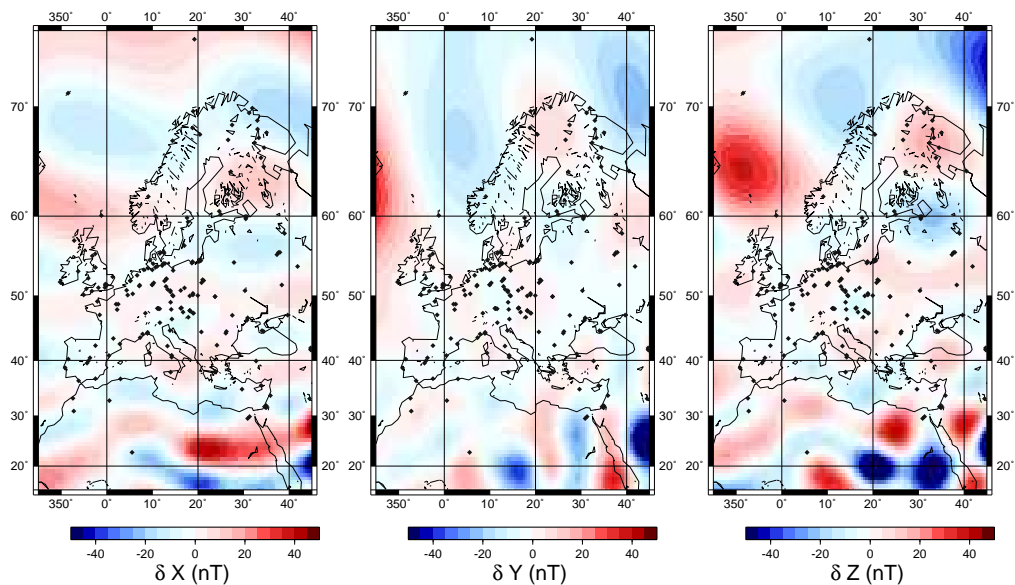


Figure 31: Maps of residuals on the magnetic field Northern X (*top*), Eastern Y (*middle*) and Downward vertical Z (*bottom*) components at the Earth's surface (initial spherical harmonic model CO2 - 233 wavelet model). The wavelet model is computed applying the vectorial approach on the uneven distribution of 200 data.

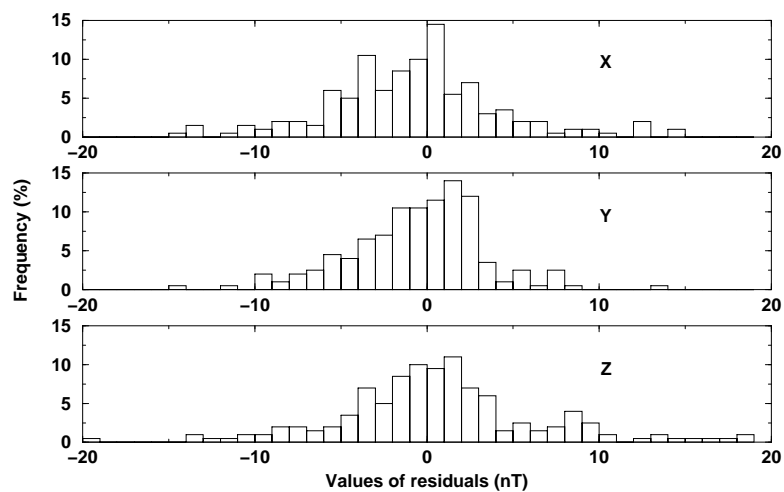


Figure 32: Histograms of residuals on the magnetic field vectorial components (initial synthetic data from spherical harmonic model CO2 - reconstructed data from 233 wavelet model). The wavelet model is computed applying the vectorial approach on the uneven distribution of 200 data.

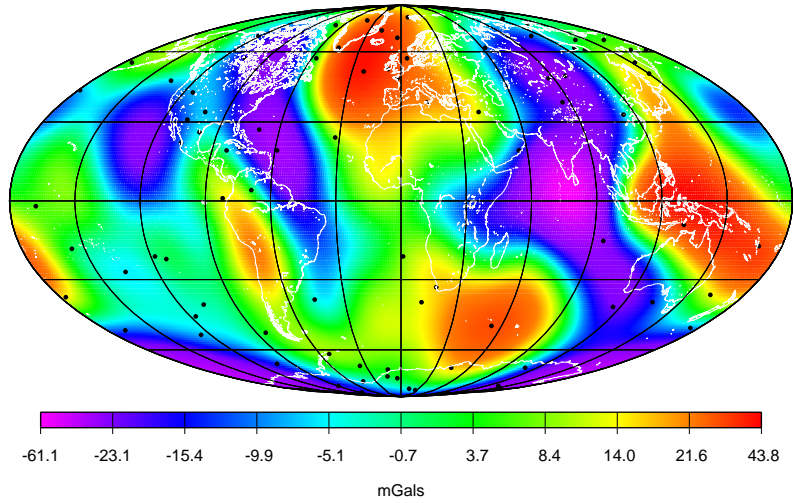


Figure 33: Map for the gravity anomaly Δg computed at the Earth's surface from model GGM01S up to degree/order 12, with gaussian filtering. Black dots represent the uneven distribution of 99 synthetic data.

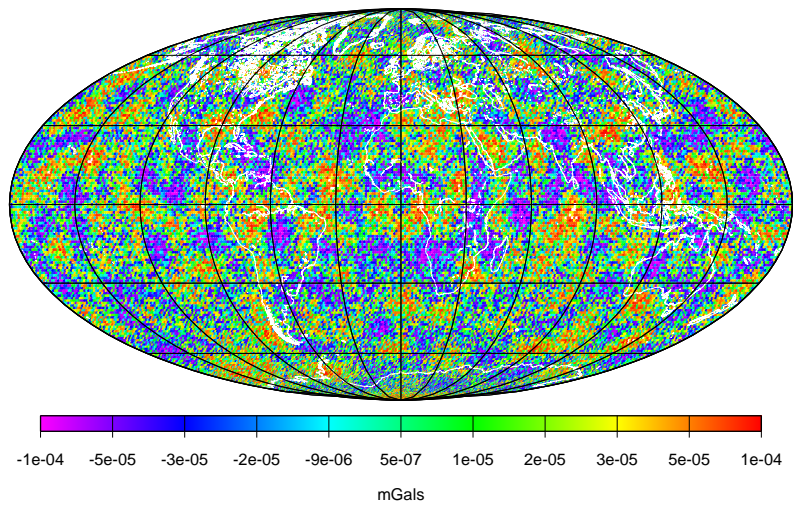


Figure 34: Map of residuals on the gravity anomaly Δg at the Earth's surface (initial spherical harmonic model GGM01S - 846 wavelet model). The wavelet model is computed applying the scalar approach on the even distribution of 1106 data.

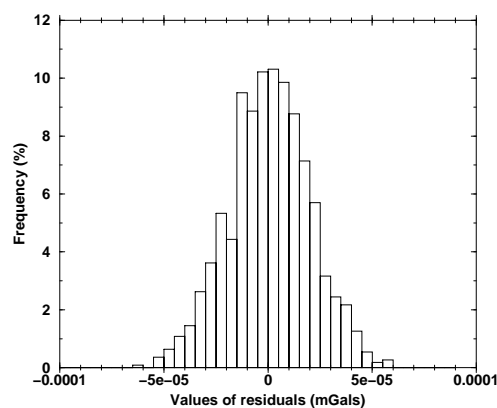


Figure 35: Histogram of residuals on the gravity anomaly Δg (initial synthetic data from spherical harmonic model GGM01S - approximated data from 846 wavelet model). The wavelet model is computed applying the scalar approach on the even distribution of 1106 data.

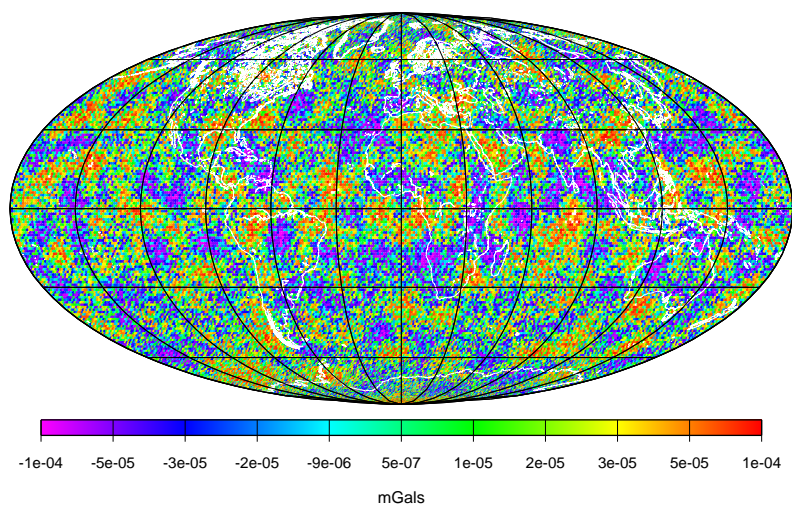


Figure 36: Map of residuals on the gravity anomaly Δg at the Earth's surface (initial spherical harmonic model GGM01S - 846 wavelet model). The wavelet model is computed applying the vectorial approach on the even distribution of 1106 data.

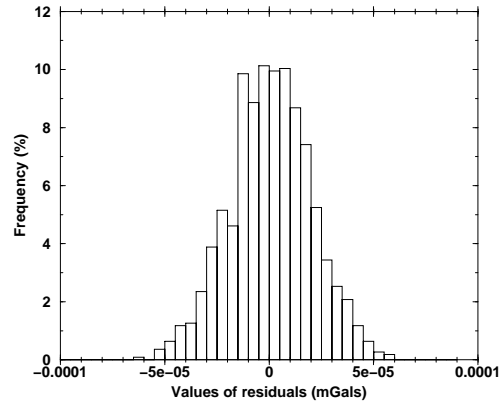


Figure 37: Histogram of residuals on the gravity anomaly Δg (initial synthetic data from spherical harmonic model GGM01S - approximated data from 846 wavelet model). The wavelet model is computed applying the vectorial approach on the even distribution of 1106 data.

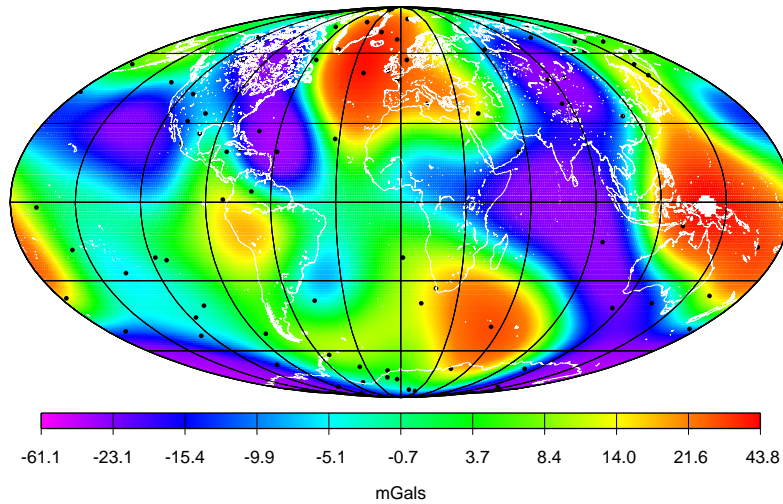


Figure 38: Map of the gravity anomaly Δg computed at the Earth's surface from 846 wavelet model, with gaussian filtering. Black dots represent the uneven distribution of 99 synthetic data used in scalar approach.

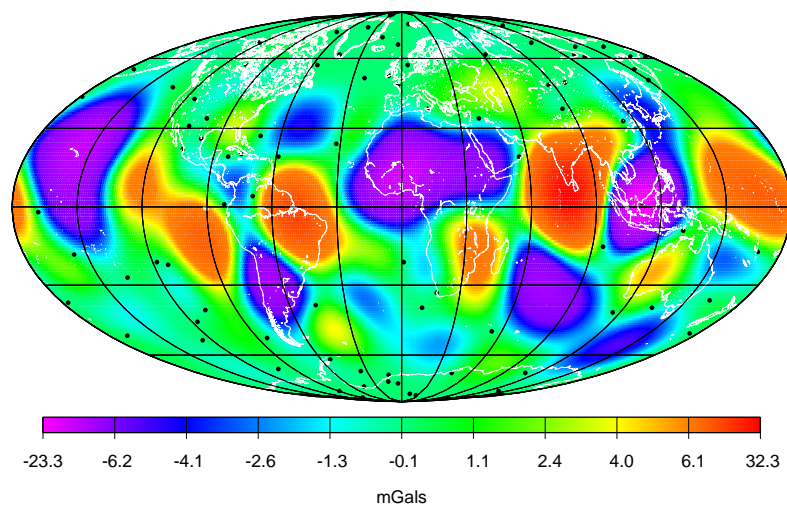


Figure 39: Map of residuals on the gravity anomaly Δg at the Earth's surface (initial spherical harmonic model GGM01S - 846 wavelet model). The wavelet model is computed applying the scalar approach on the uneven distribution of 99 data.

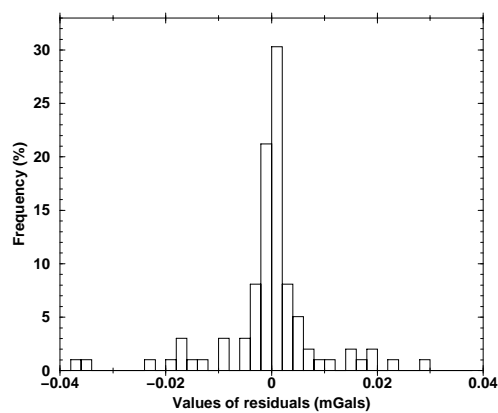


Figure 40: Histogram of residuals on the gravity anomaly Δg (initial synthetic data from spherical harmonic model GGM01S - approximated data from 846 wavelet model). The wavelet model is computed applying the scalar approach on the uneven distribution of 99 data.

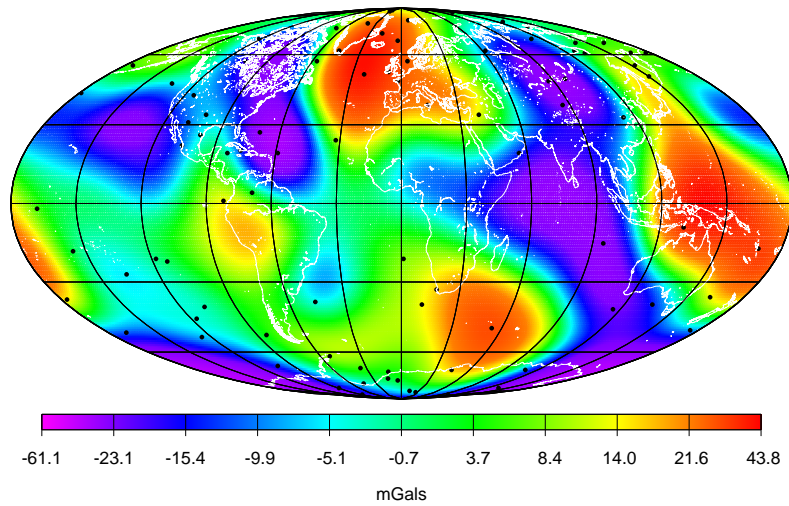


Figure 41: Map of the gravity anomaly Δg computed at the Earth's surface from 846 wavelet model, with gaussian filtering. Black dots represent the uneven distribution of 99 synthetic data used in vectorial approach.

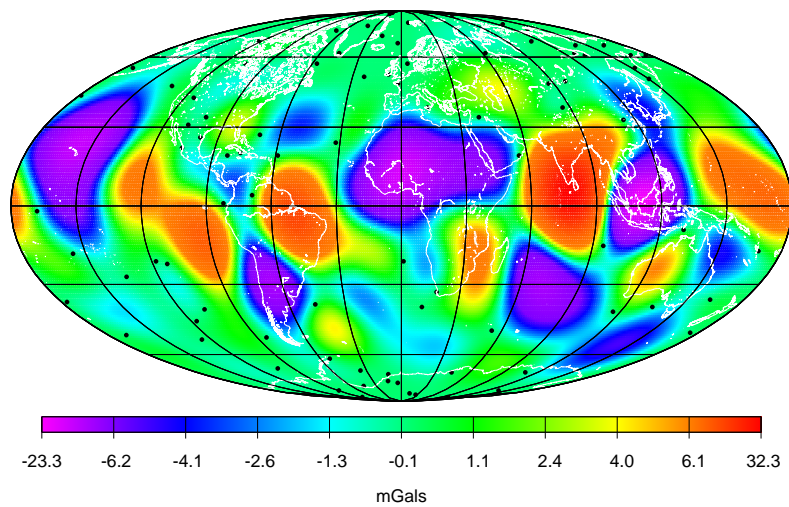


Figure 42: Map of residuals on the gravity anomaly Δg at the Earth's surface (initial spherical harmonic model GGM01S - 846 wavelet model). The wavelet model is computed applying the vectorial approach on the uneven distribution of 99 data.

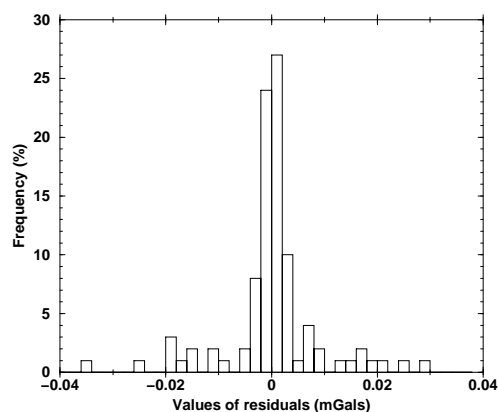


Figure 43: Histogram of residuals on the gravity anomaly Δg (initial synthetic data from spherical harmonic model GGM01S - approximated data from 846 wavelet model). The wavelet model is computed applying the vectorial approach on the uneven distribution of 99 data.

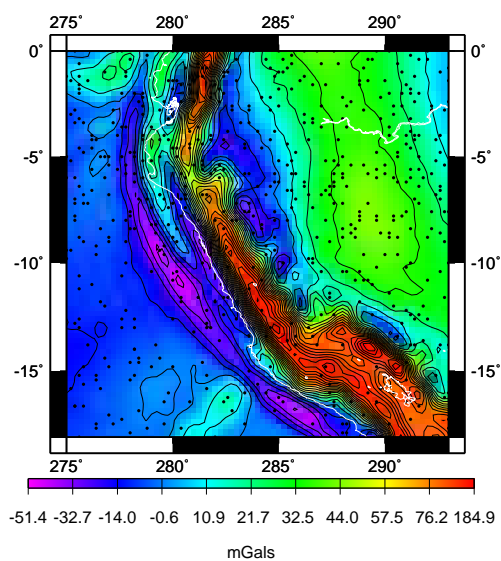


Figure 44: Map of the gravity anomaly Δg on Northern Andean Cordillera computed at the Earth's surface from model EGM 96 up to degree/order 360, with gaussian filtering. Black dots represent the uneven distribution of 576 synthetic data.

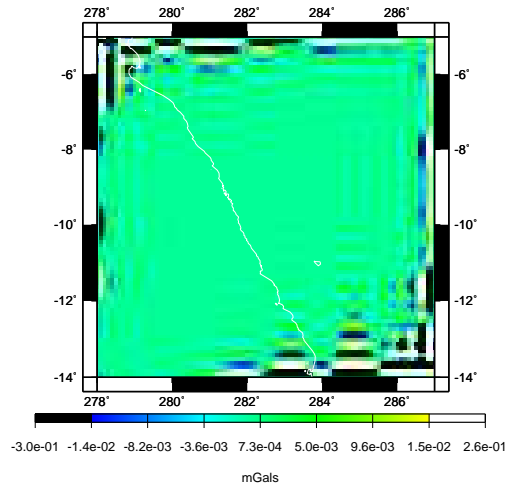


Figure 45: Map of residuals on the gravity anomaly Δg at the Earth's surface (initial spherical harmonic model EGM 96 - 7189 wavelet model). The wavelet model is computed applying the scalar approach on the even distribution of 1369 data.

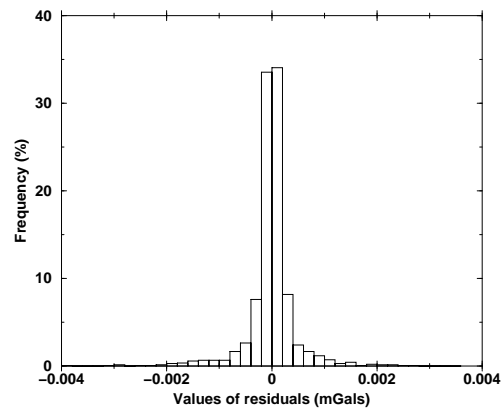


Figure 46: Histogram of residuals on the gravity anomaly Δg (initial synthetic data from spherical harmonic model EGM96 - approximated data from 7189 wavelet model). The wavelet model is computed applying the scalar approach on the even distribution of 1369 data.

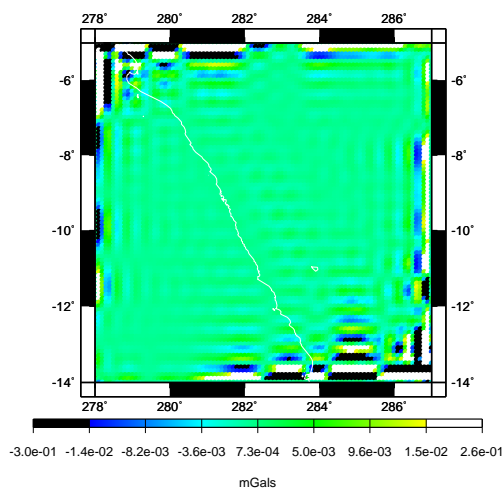


Figure 47: Map of residuals on the gravity anomaly Δg at the Earth's surface (initial spherical harmonic model EGM 96 - 7189 wavelet model). The wavelet model is computed applying the vectorial approach on the even distribution of 1369 data.

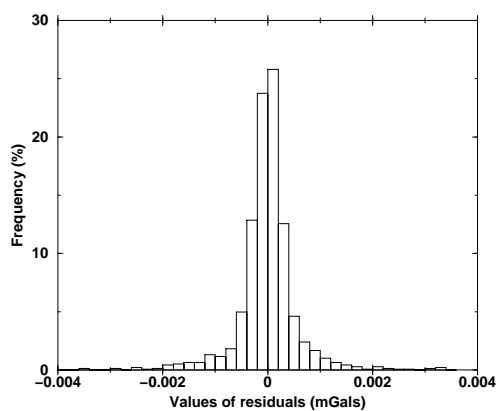


Figure 48: Histogram of residuals on the gravity anomaly Δg (initial synthetic data from spherical harmonic model EGM96 - approximated data from 7189 wavelet model). The wavelet model is computed applying the vectorial approach on the even distribution of 1369 data.

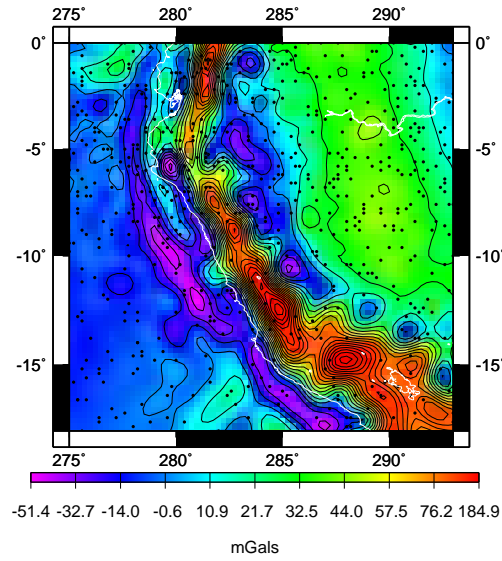


Figure 49: Map of the gravity anomaly Δg computed at the Earth's surface from 1962 wavelet model, with gaussian filtering. Black dots represent the uneven distribution of 576 synthetic data used in scalar approach.

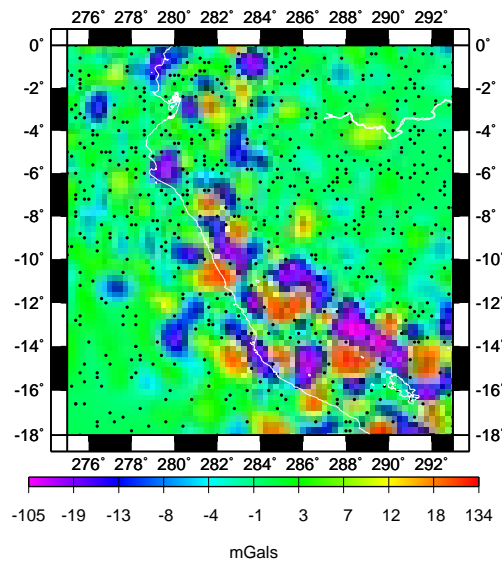


Figure 50: Map of residuals on the gravity anomaly Δg at the Earth's surface (initial spherical harmonic model EGM 96 - 1962 wavelet model). The wavelet model is computed applying the scalar approach on the uneven distribution of 576 data.

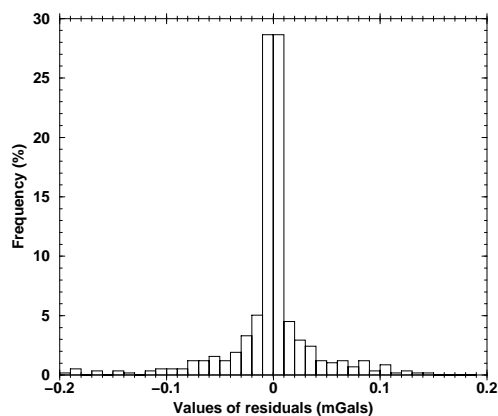


Figure 51: Histogram of residuals on the gravity anomaly Δg (initial synthetic data from spherical harmonic model EGM96 - approximated data from 1962 wavelet model). The wavelet model is computed applying the scalar approach on the uneven distribution of 576 data.

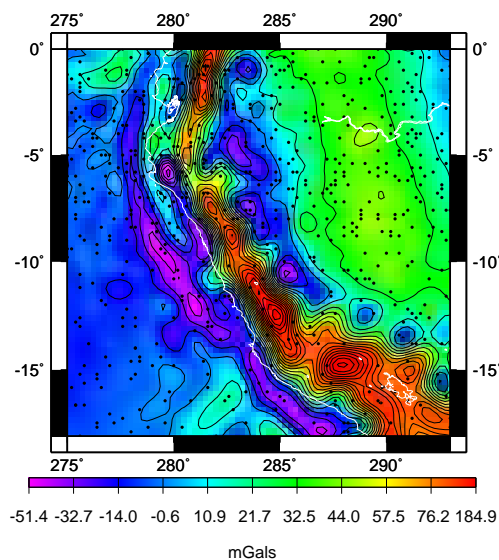


Figure 52: Map of the gravity anomaly Δg computed at the Earth's surface from 1962 wavelet model, with gaussian filtering. Black dots represent the uneven distribution of 576 synthetic data used in vectorial approach.

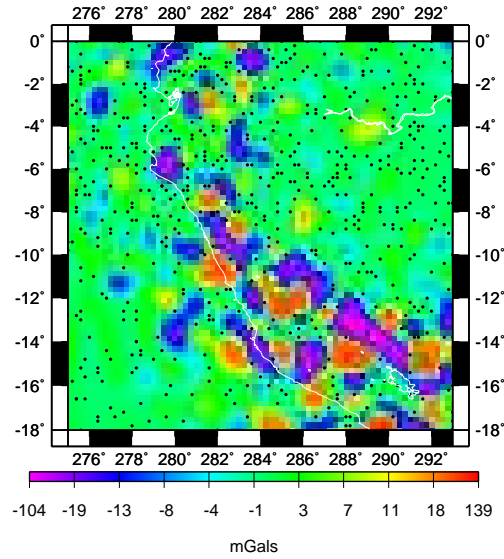


Figure 53: Map of residuals on the gravity anomaly Δg at the Earth's surface (initial spherical harmonic model EGM 96 - 1962 wavelet model). The wavelet model is computed applying the vectorial approach on the uneven distribution of 576 data.

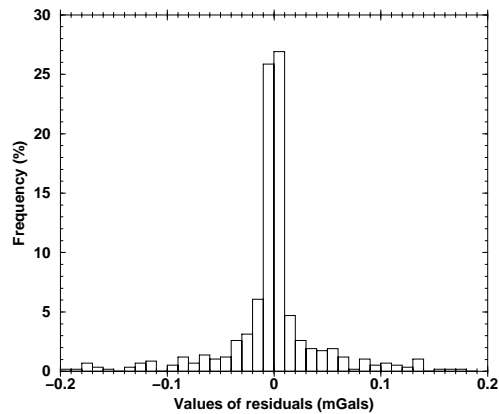


Figure 54: Histogram of residuals on the gravity anomaly Δg (initial synthetic data from spherical harmonic model EGM96 - approximated data from 1962 wavelet model). The wavelet model is computed applying the vectorial approach on the uneven distribution of 576 data.

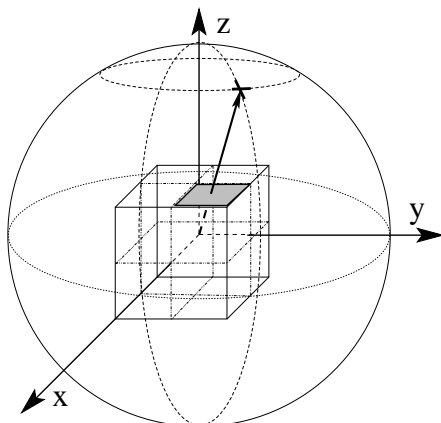


Figure 55: Cube centred with respect to cartesian coordinates system and to an arbitrary sphere.

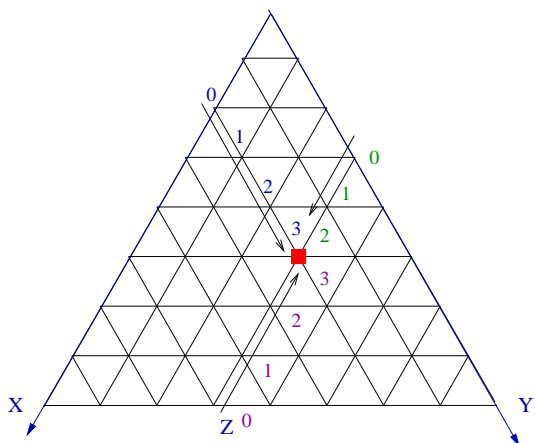


Figure 56: Coordinate system (X,Y,Z) associated to a symmetry triangle at generation j .

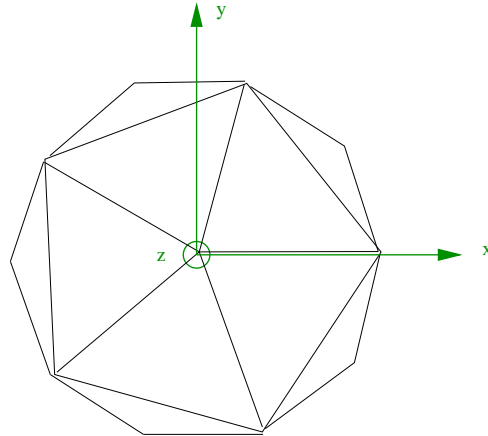


Figure 57: Cartesian coordinates (x,y,z)

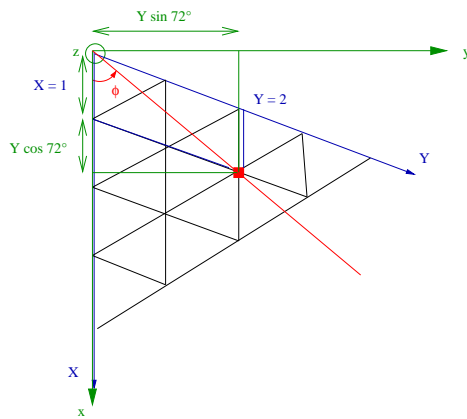


Figure 58: Coordinates x and y of the vertexes.

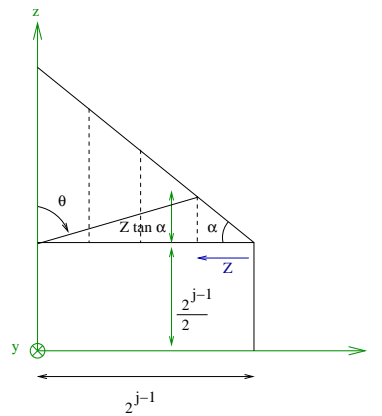


Figure 59: Coordinates z of the vertexes.

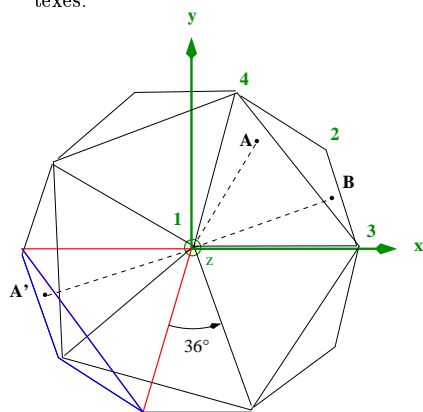


Figure 60: Rotation applied to calculate the longitude.

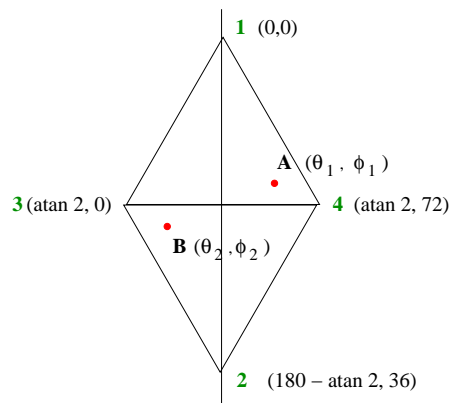


Figure 61: Rotation applied to calculate the colatitude.

Troisième partie

Les variations temporelles

Chapitre 6

La variation séculaire

« *Le temps est ce qui se fait, et même ce qui fait que tout se fait.* »

Henri Bergson, *La pensée et le mouvant.*

La variation temporelle du champ principal sur des périodes de quelques dizaines à quelques centaines d'années est nommée « *variation séculaire* ». Connaître la variation séculaire du champ principal représente une des rares possibilités d'étudier les propriétés du noyau externe. À partir de la composante radiale du champ et de sa variation séculaire, on peut, en effet, retrouver le mouvement du fluide à la surface du noyau (voir chapitre 8). Jusque récemment, les modèles de variation séculaire n'ont reposé exclusivement que sur des données d'observatoires. Dans ce chapitre, nous présentons deux manières de l'appréhender : (1) à partir des données fournies par les observatoires - de façon directe grâce aux séries temporelles - et (2) à partir des données fournies par les satellites - de façon indirecte grâce à des différences entre modèles de champ interne.

6.1 La variation séculaire vue par les observatoires

Les observatoires magnétiques sont des témoins privilégiés des variations temporelles du champ magnétique principal (voir le chapitre 3.1.1 sur les observatoires). Des séries de mesures sur plusieurs dizaines, voire centaines d'années, ont été acquises, et représentent ainsi la variation séculaire pour une position fixe.

La figure 6.1 montre le champ magnétique mesuré à l'Observatoire Magnétique

National de Chambon la Forêt, depuis 1883 (les mesures faites sur les sites de Saint-Maur (1883-1901) et de Val-Joyeux (1901-1935) ont été rapportées sur le pilier de référence de Chambon la Forêt).

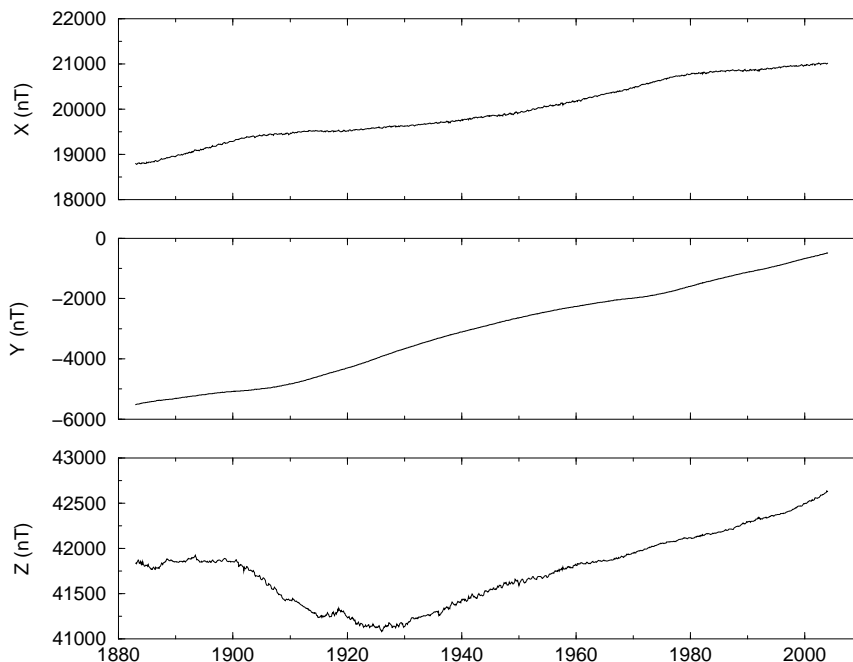


FIG. 6.1: Composantes Nord (X), Est (Y) et verticale (Z) du champ magnétique mesuré à l'observatoire de Chambon la Forêt.

Un simple regard sur ces courbes est suffisant pour constater que la composante Y présente une évolution quasi-linéaire au cours du temps (malgré tout entrecoupée de petites inflexions que nous étudierons plus loin dans le chapitre 7), tandis que les composantes X et Z sont plus bruitées.

Ces séries de mesures fournies par l'observatoire de Chambon la Forêt, permettent de mieux comprendre et de caractériser la variation séculaire. Mais c'est seulement grâce à l'ensemble des données des observatoires magnétiques que l'étude directe complète de la variation séculaire est possible. La comparaison entre la variation séculaire en Europe et en Afrique du Sud (figure 6.2) montre combien ce phénomène est différent suivant la position géographique et à quel point il peut nous apporter des informations sur son origine.

6.2 La variation séculaire vue par les satellites

Le satellite Ørsted, qui a initié la « *Decade of Geopotential Research* », est en vol depuis maintenant plus de cinq ans et fourni encore des données de qualité. Les premières années de la mission ont permis de calculer des modèles du champ

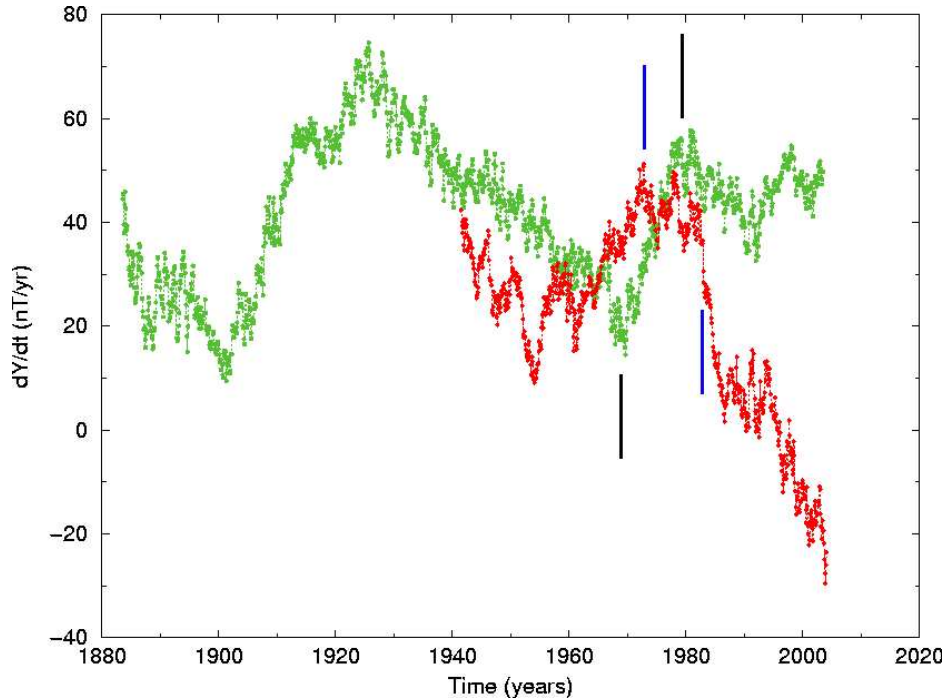


FIG. 6.2: *Variation séculaire de la composante Est (Y) du champ magnétique mesuré à l'observatoire de Chambon la Forêt en France (vert) et à l'observatoire d'Hermanus en Afrique du Sud (rouge). Les traits noirs repèrent deux évènements survenus autour de 1969 et 1978 en Europe ; les traits bleus représentent les mêmes évènements mais apparus autour de 1972 et 1982 en Afrique du Sud (voir chapitre 7.1 pour plus de détails).*

principal, puis des modèles de variation séculaire, avec une résolution croissante. Désormais nous pouvons envisager d'avoir accès à une caractérisation de la variation séculaire en temps quasi-réel. Ces premiers modèles ont été améliorés grâce aux données du satellite CHAMP. Nous avons ainsi développé une série de modèles à partir des données fournies par les satellites Ørsted et CHAMP.

6.2.1 Série de modèles bimestriels

Afin de décrire, le plus finement possible et sur une durée la plus longue possible, les variations temporelles du champ magnétique terrestre, une première série de modèles bimestriels est calculée à partir des données du satellite à la plus importante longévité : le satellite Ørsted.

Les mêmes critères de sélection sont appliqués sur tous les ensembles de deux mois de données :

- sélection selon les indices géomagnétiques : $Kp(t) \leq 2^-$ et $Kp(t \pm 3) \leq 2^0$;

$$|Dst(t)| \leq 10 \text{ nT} \text{ et } \left\| \frac{dDst(t \pm 3)}{dt} \right\| \leq 3 \text{ nT.h}^{-1},$$

- sélection selon l'heure locale (22H00-6H00)¹,

- conservation des données vectorielles pour des latitudes géomagnétiques inférieures à $\pm 50^\circ$ et scalaires aux hautes latitudes (pour diminuer les contributions des champs externes, plus particulièrement les courants alignés),

- homogénéisation sur la sphère avec conservation de 10 mesures par surface de $5^\circ \times 5^\circ$ sur la sphère.

Ces critères de sélection ont été choisis de façon à être les plus restrictifs possibles tout en permettant la conservation d'un nombre suffisant de données. Les modèles en harmoniques sphériques sont développés jusqu'au degré/ordre 10 seulement (la répartition de données la plus dense et la plus homogène ne permettant pas une plus grande résolution).

La figure 6.3 présente les valeurs des résidus moyens, entre les données de départ et les données synthétiques, des différents modèles pour chaque période de deux mois.

L'observation des résidus est un moyen immédiat de repérer les modèles qui

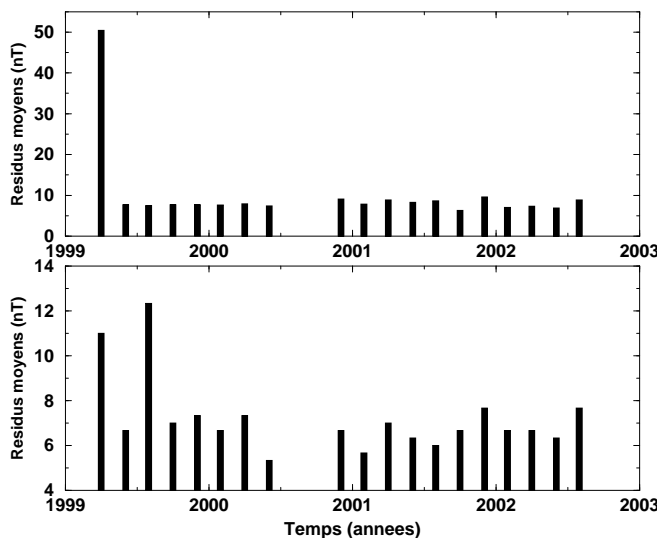


FIG. 6.3: Valeurs des résidus moyens, entre les données de départ et les données synthétiques calculées à partir des modèles bimestriels : sur les données scalaires (**haut**) et sur les données vectorielles (**bas**).

pourraient être mal contraints. Nous nous apercevons de la grande homogénéité de la série de modèles dans son ensemble même si le premier et le troisième modèle de la série se démarquent nettement. Ces modèles (mars-avril 1999 et juillet-août

¹La méthode de sélection des données réellement de nuit (chapitre 4.2.1) n'est pas applicable ici (courtes périodes temporelles).

1999) comportent des résidus de plusieurs ordres de grandeur supérieurs aux autres modèles. Ces différences sont dues à de trop faibles nombres de mesures vectorielles (figure 6.4). Nous choisissons de ne pas prendre en compte ces deux modèles.

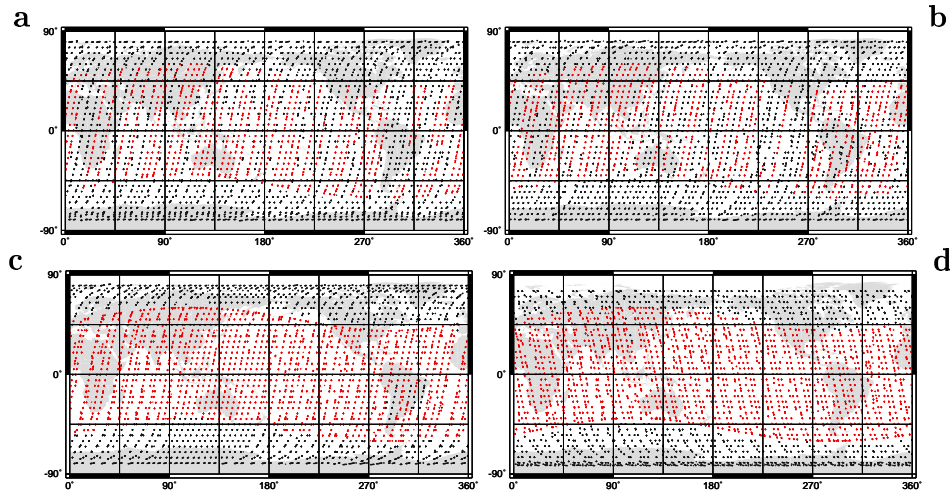


FIG. 6.4: *Distribution des données scalaires (noir) et vectorielles (rouge) utilisées dans les calculs de modèles bimestriels : a mars-avril 1999 ; b juillet-août 1999 ; c novembre-décembre 1999 ; d mai-juin 2002.*

Le problème que nous rencontrons alors est l'impossibilité d'avoir une série continue de modèles tous les deux mois avec seulement les mesures d'un satellite. En effet, Ørsted bien que fournissant des données de façon continue depuis 1999, présente des périodes (juillet à octobre 2000, début et fin 2003) pendant lesquelles, aucune, ou trop peu de données exploitables ont été acquises (voir figure 6.5). Le satellite Ørsted connaît en effet dès ses premiers instants en vol des problèmes de détermination de sa position exacte. Les caméras stellaires (en anglais SIM pour *Star IMager*) présentent des incertitudes de mesures anisotropiques selon la composante du champ mesurée [Holme, 2000].

Les modèles en harmoniques sphériques obtenus peuvent être perçus comme des instantanés d'un modèle variable dans le temps. Tous les paramètres des sélections de données et des inversions sont identiques d'un modèle à l'autre. Seul le nombre de données peut parfois être légèrement différent (au maximum variations de $\pm 5\%$ du nombre des données entre deux modèles). Cette série de modèles nous permet de vérifier les comportements au cours du temps des premiers coefficients de Gauss du développement en harmoniques sphériques.

La figure 6.6 présente les séries temporelles des six premiers coefficients de Gauss des modèles bimestriels obtenus. Chaque graphique présente une variation

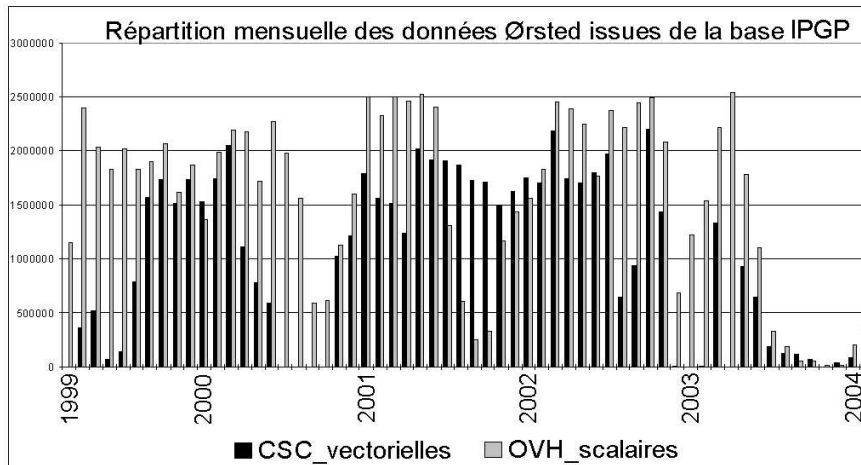


FIG. 6.5: Répartition mensuelle des données fournies par le satellite Ørsted contenues dans la base de l'Institut de Physique du Globe de Paris.

linéaire plus ou moins bruitée. L'analyse de ces séries de coefficients ne peut être plus fine ici, comme les séries, déjà courtes, comportent des lacunes. Un modèle de variation séculaire, jusqu'au degré/ordre 10, est cependant obtenu par différence entre le modèle de mai-juin 1999 et celui de mai-juin 2002 et présenté sur les figures 6.7 et 6.8.

Ce dernier modèle de variation séculaire est comparé plus loin avec le modèle issu de la sélection de toutes les données disponibles des satellites Ørsted et CHAMP à la date de ce mémoire.

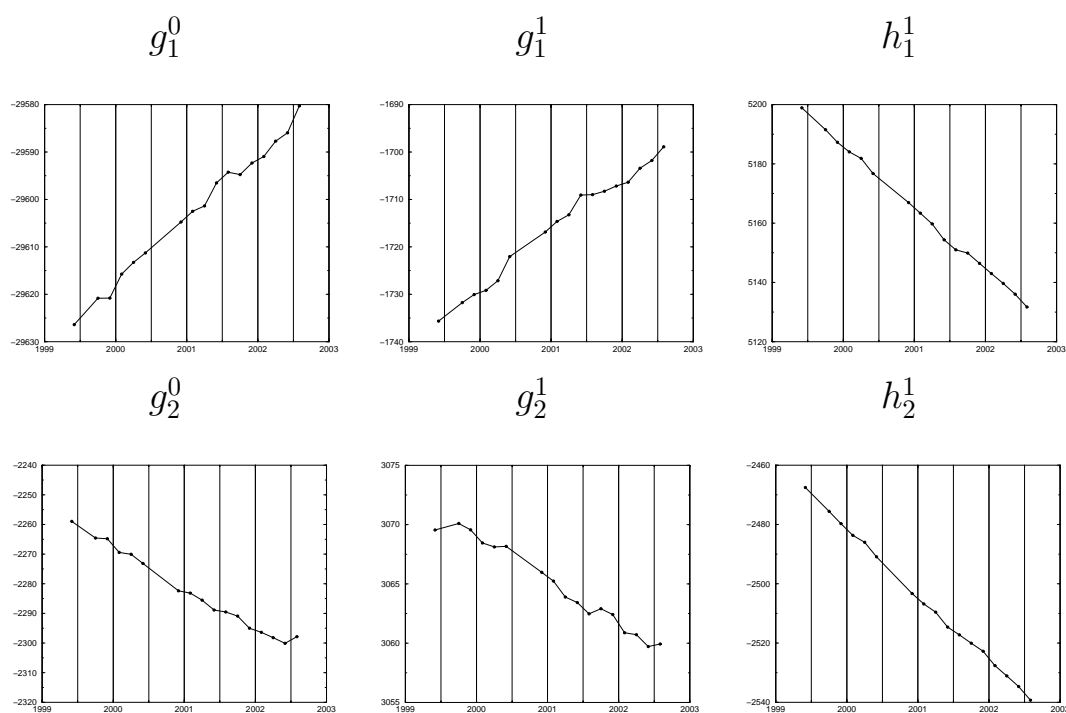


FIG. 6.6: Séries temporelles des six premiers coefficients de Gauss des modèles bimestriels en harmoniques sphériques.

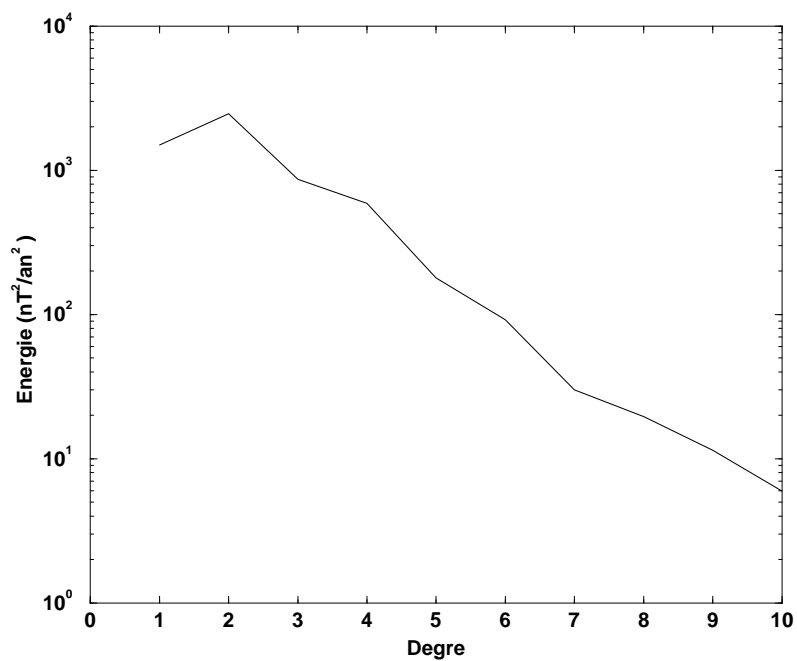


FIG. 6.7: Spectre d'énergie de la variation séculaire obtenue par différence entre le modèle de mai-juin 1999 et celui de mai-juin 2002.

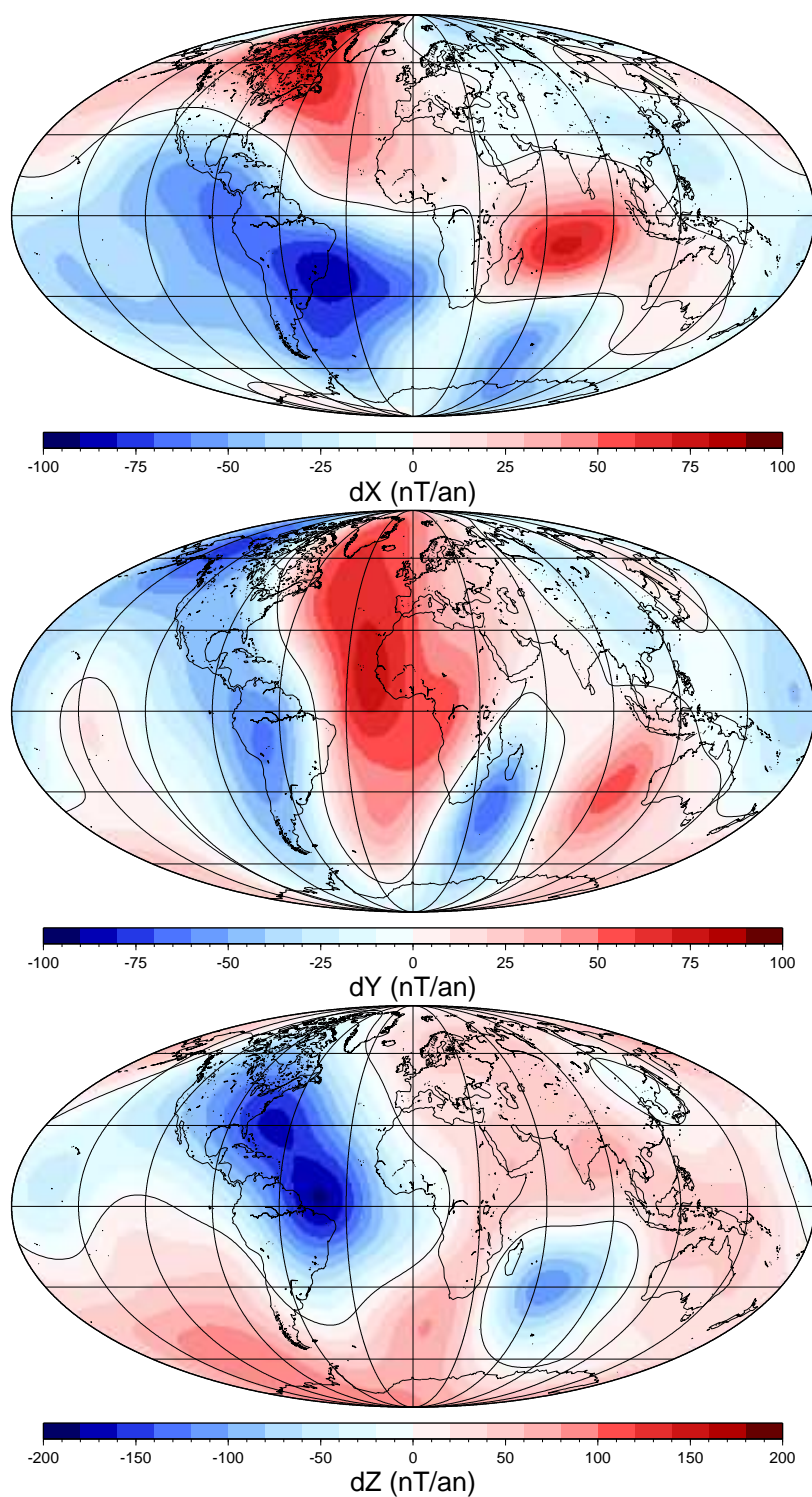


FIG. 6.8: Représentation des composantes de la variation séculaire entre le modèle de mai-juin 1999 et celui de mai-juin 2002 à la surface de la Terre.

6.2.2 Un modèle Ørsted et CHAMP

Nous choisissons délibérément de ne pas présenter ici les modèles de champ obtenus année par année, leur étude n'offrant pas plus d'éclaircissement sur la variation séculaire vu par les satellites. Par contre, nous présentons le modèle global obtenu à partir de toutes les mesures disponibles des satellites Ørsted et CHAMP à la date de cette étude.

Comme pour les modèles bimestriels des critères de sélection de données sont choisis de façon à conserver des données sur l'entière période d'étude de mars 1999 à fin 2003. Ainsi, nous appliquons successivement : une sélection selon les indices géomagnétiques ($Kp(t) \leq 1^-$ et $Kp(t \pm 3) \leq 1^0$; $|Dst(t)| \leq 5 nT$ et $\left\| \frac{dDst(t \pm 3)}{dt} \right\| \leq 2 nT.h^{-1}$), sélection non plus selon l'heure locale mais avec une sélection des « données réellement de nuit » (chapitre 4.2.1, Chambodut et al. [2003]). Remarquons que les critères de sélection ainsi choisis sont plus restrictifs que dans le cas des modèles bimestriels.

Dans le but de disposer de données réparties de façon homogène spatialement et temporellement, une homogénéisation des données sur la sphère est appliquée année par année. Pour chaque ensemble de mesures de chaque satellite, cinq données sont aléatoirement sélectionnées par unité de surface de $3^\circ \times 3^\circ$. Un modèle en harmoniques sphériques est développé jusqu'au degré/ordre 19 pour le champ interne, 13 pour la variation séculaire et 9 pour l'accélération séculaire. Les résidus moyens sur les données sont supérieurs à ceux obtenus pour les modèles bimestriels. Ils sont ici en moyenne de $12,68 nT/mesure$.

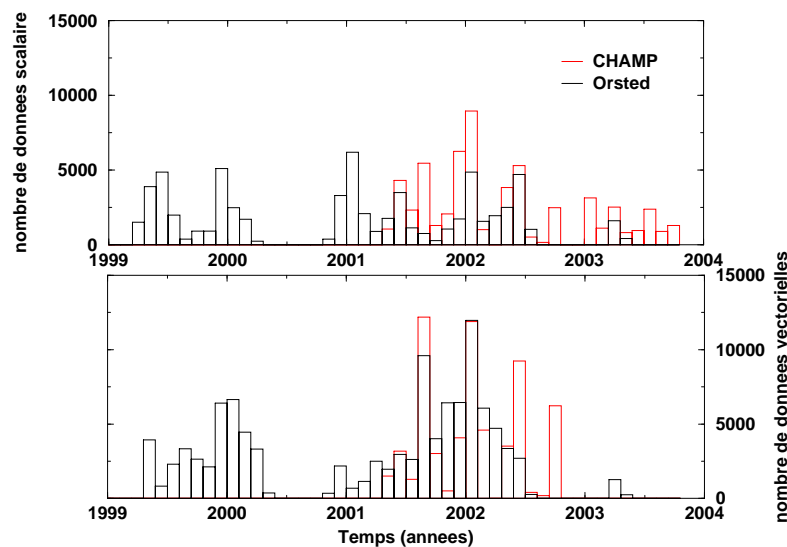


FIG. 6.9: Répartition temporelle des données après les sélections et l'homogénéisation année par année pour chaque satellite.

Le but de ce modèle est de comparer la variation séculaire obtenue avec celle calculée précédemment par différence des deux modèles bimestriels.

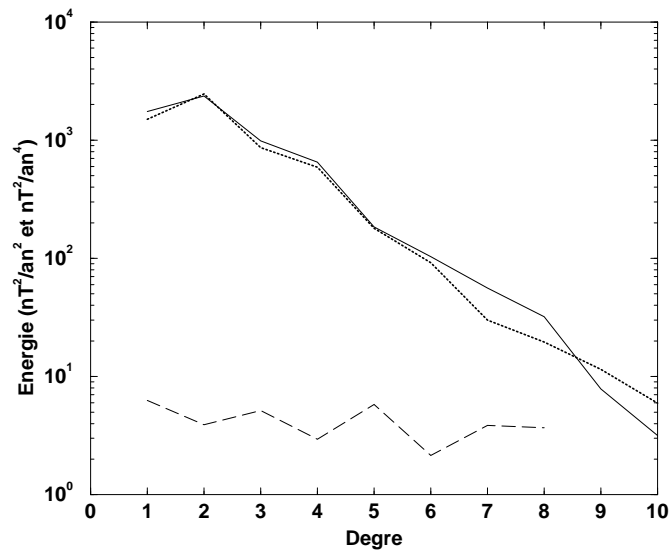


FIG. 6.10: Spectre d'énergie de la variation séculaire du modèle global de 1999 à 2003 (trait continu); spectre d'énergie de la variation séculaire obtenue par différence entre le modèle de mai-juin 1999 et celui de mai-juin 2002 (trait pointillé - rappel de la figure 6.7); spectre d'énergie de l'accélération séculaire du modèle global de 1999 à 2003 (tirets).

La figure 6.10 montre les spectres d'énergie de la variation séculaire, mais également le spectre d'énergie de l'accélération séculaire.

Les modèles en harmoniques sphériques et leur simple comparaison visuelle des spectres d'énergie font bien apparaître que depuis le milieu de 1999 (date des premières données du satellite Ørsted) la variation séculaire suit une évolution quasi-linéaire, et l'accélération séculaire demeure quasi-constante. Un soudain saut de la variation séculaire et/ou une brusque accélération séculaire ne peuvent pas être caractérisés de manière précise tant temporellement que spatialement par les seules séries de données aux observatoires, ni par les seules mesures satellitaires dont nous disposons actuellement. Cette constatation nous a amené à investiguer les possibilités ouvertes par les nouvelles générations de modèles globaux continus dans le temps (« *comprehensive models* »).

Chapitre 7

Les secousses géomagnétiques

« *Même le temps n'est pas insensible à son propre passage.* »

David Mitchell (Écrivain anglais né à Southport en 1970), Écrits fantômes.

Si l'évolution du champ principal apparaît régulière sur de courtes périodes de temps (voir dans le chapitre précédent les modèles de champ bimestriels de 1999 à 2004), il est possible de constater sur des périodes plus longues, des changements de tendance très rapides de cette évolution à intervalles irréguliers. Ce sont les « *secousses géomagnétiques* » [Courtillot et al., 1978]. En effet, plutôt détectées dans les séries de moyennes mensuelles des observatoires, et plus particulièrement sur la composante Est ¹, les secousses géomagnétiques peuvent être vues comme de brusques changements de tendance de la variation séculaire. Cela correspond à des fonctions de type créneau dans l'accélération séculaire ou encore à une impulsion dans la dérivée troisième du champ (figure 7.1).

Au cours du XX^e siècle, une dizaine de secousses ont été répertoriées [Macmillan, 1996; Alexandrescu et al., 1996; De Michelis et al., 1998]. Trois secousses, parmi les plus récentes, autour de 1971, 1980 et 1991, seront étudiées en détail dans ce chapitre.

L'intervalle d'occurrence des secousses ne facilite pas leur détection, car la période d'environ 10 ans entre ces phénomènes se superpose à la variation externe de 11 ans, due au cycle solaire. Les secousses ont de plus tendance à s'annuler

¹Les séries de moyennes mensuelles des observatoires sur la composante Est ($Y(t)$) présentent le double avantage d'être peu sensibles aux contributions de l'anneau externe de courants magnétosphériques et aux contributions ionosphériques qui se trouvent de fait, moyennées.

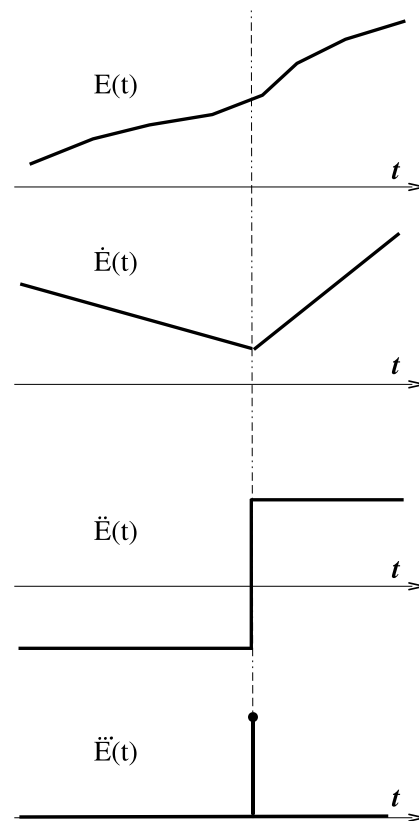


FIG. 7.1: Signature d'une secousse idéale, d'après Courtillot et al. [1984]. $E(t)$ représente une composante du champ magnétique terrestre.

l'une l'autre [Le Huy et al., 1998]. Même la caractérisation des échelles spatiales de ces phénomènes n'est pas bien connue : seul un décalage temporel, dans les dates d'occurrences, d'environ 2 ans entre les deux hémisphères a pu être nettement mis en évidence [Alexandrescu et al., 1996].

Plusieurs hypothèses sur l'origine de ces phénomènes ont récemment été avancées. Les secousses géomagnétiques pourraient être issues d'une accélération du fluide à la limite noyau-manteau [Le Huy et al., 2000]. Une autre étude considère que les secousses sont dues à une instabilité du mouvement du fluide à la surface du noyau. Celle-ci entraînerait alors une perturbation de densité dans une couche à la frontière noyau-manteau, perturbation qui se propagerait ensuite dans le noyau. Récemment, Bloxham et al. [2002] montrent que ces phénomènes peuvent être créés par des ondes de torsions dans le noyau. La diversité de ces trois exemples montre que le mécanisme à l'origine des secousses est loin d'être formellement identifié.

Pourtant, déterminer les caractéristiques spatiales et temporelles des secousses géomagnétiques a une importance primordiale dans la connaissance de la Terre comme un système global. La connaissance des secousses géomagnétiques est un outil utile pour déterminer et contraindre la conductivité du manteau inférieur [Mandea Alexandrescu et al., 1999], ou pour estimer ses possibles hétérogénéités de conductivité [Nagao et al., 2003].

Nous sommes donc partis du principe que les mécanismes engendrant les secousses ne peuvent pas être clairement définis sans une parfaite connaissance de leur morphologie spatiale et temporelle. Pour cela, nous nous retournons vers les modèles géomagnétiques. En effet, les données satellitaires combinées avec les données au sol peuvent être utilisées dans des modèles globaux et continus dans le temps (de type « *comprehensive models* », Sabaka et al. [2002, 2004]). Ces modèles représentent une possibilité de décrire les secousses avec un spectre temporel plus large et avec une meilleure résolution spatiale. C'est cet axe d'étude que nous présentons dans ce chapitre. Comme nous l'avons déjà laissé entendre, nous ne présentons pas une explication physique aux phénomènes que sont les secousses, mais nous tentons de raffiner notre connaissance de leur répartition spatiale et temporelle.

7.1 Sur leur caractérisation temporelle

Si la représentation de Courtillot et al. [1978] permet de mettre en évidence aisément les secousses, de fines analyses en ondelettes des séries temporelles aux observatoires ont montré que les secousses sont des phénomènes plus complexes. En effet, ces « impulsions » ne correspondent pas à un simple saut d'ordre 2 du champ selon l'équation $(t-t_0)^2$, mais plutôt à un saut d'ordre 1,5 tel que $(t-t_0)^{1,5}$ [Alexandrescu et al., 1995, 1996].

L'analyse en ondelettes est une méthode objective qui ne fait aucune hypothèse *a priori* sur les singularités recherchées dans le signal de départ. Introduite par Jean Morlet au début des années 1980, cette transformation, que nous notons W , est la convolution d'une fonction analysante Ψ avec un signal $s(t)$ à analyser. Ainsi, au temps t_0 , la convolution correspond à l'expression :

$$W_a s(t_0) = s * \Psi_a(t_0) \quad (7.1)$$

$$= \int_0^{+\infty} \Psi_a^*(t-t_0)s(t)dt, \text{ avec : } a > 0 \text{ et } t_0 \in R. \quad (7.2)$$

où a est le coefficient de dilatation de l'ondelette Ψ et Ψ_a^* le complexe conjugué de Ψ_a .

L'ondelette que nous avons utilisé pour la détection de secousses géomagnétiques dans les séries mensuelles des observatoires est la troisième dérivée d'une gaussienne (figure 7.2) :

$$\Psi(t) = \frac{d^3}{dt^3} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) \quad (7.3)$$

$$= t(t^2 - 3) \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) \text{ à un signe près.} \quad (7.4)$$

Cette ondelette est de moyenne nulle et bien localisée temporellement. Les ondelettes analysantes Ψ_a sont obtenues par dilatation ou compression de cette fonction « mère » telles que :

$$\Psi_a(t) = \frac{1}{a} \Psi\left(\frac{t}{a}\right) \quad (7.5)$$

La transformée en ondelettes d'un signal est obtenue par translations et convolutions successives d'une famille d'ondelettes analysantes avec le signal. La figure 7.3 schématise ce mécanisme pour deux positions successives (deux moments b_1 et b_2) et pour deux ondelettes analysantes de coefficients de dilatation a_1 et a_2 .

Dans cette application de la détection des secousses géomagnétiques, les séries mensuelles des observatoires sont considérées comme étant de la forme :

$$s(t) = \beta j_\alpha(t) + c(t) + n(t) \quad (7.6)$$

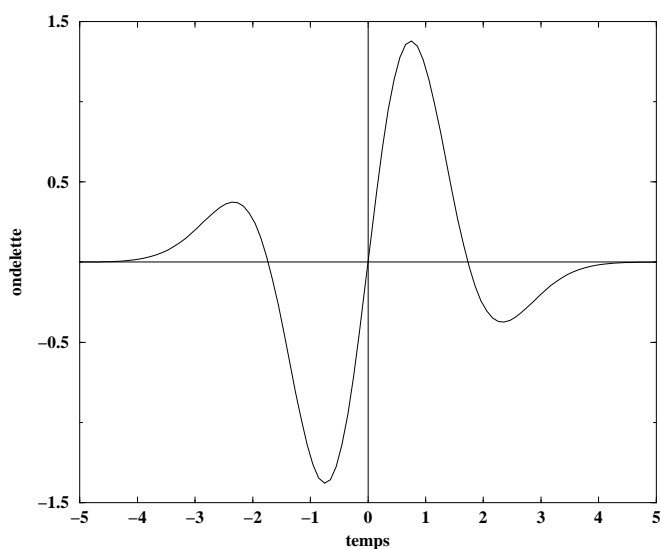


FIG. 7.2: Troisième dérivée d'une gaussienne.

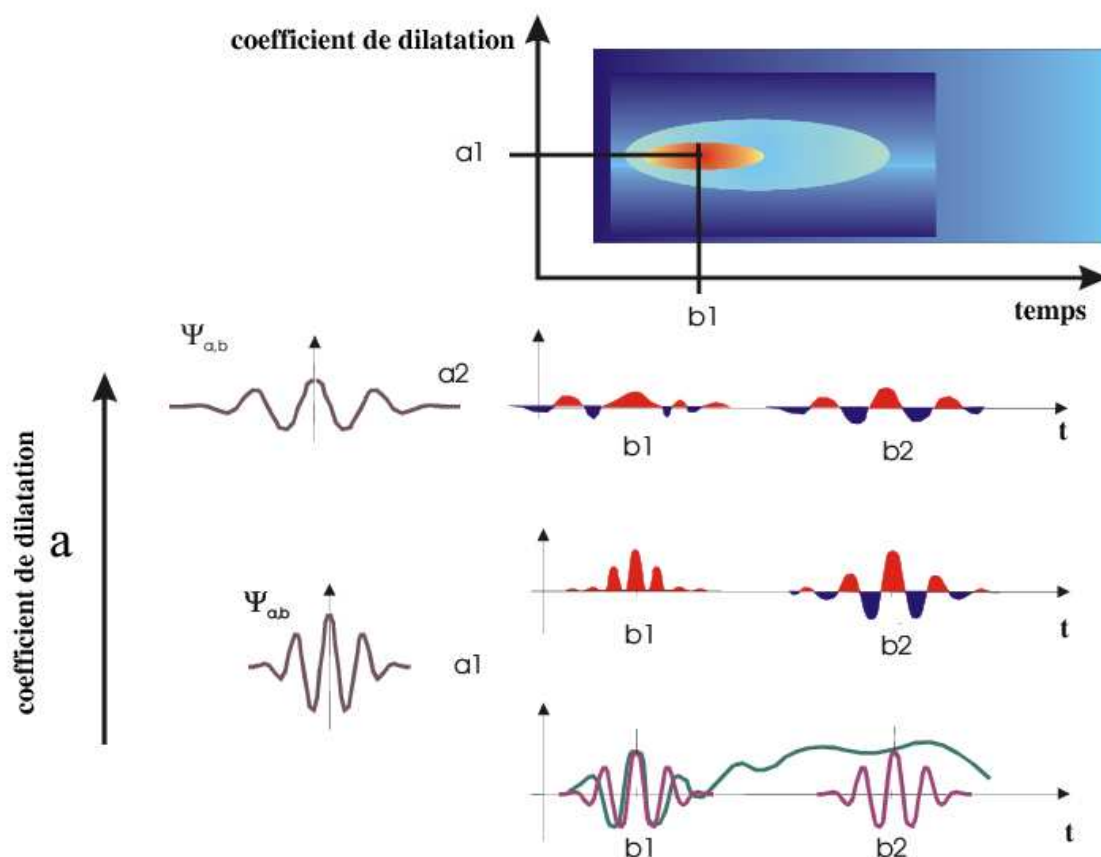


FIG. 7.3: Principe de la transformée en ondelettes par translations et convolutions successives d'une famille d'ondelettes avec un signal.

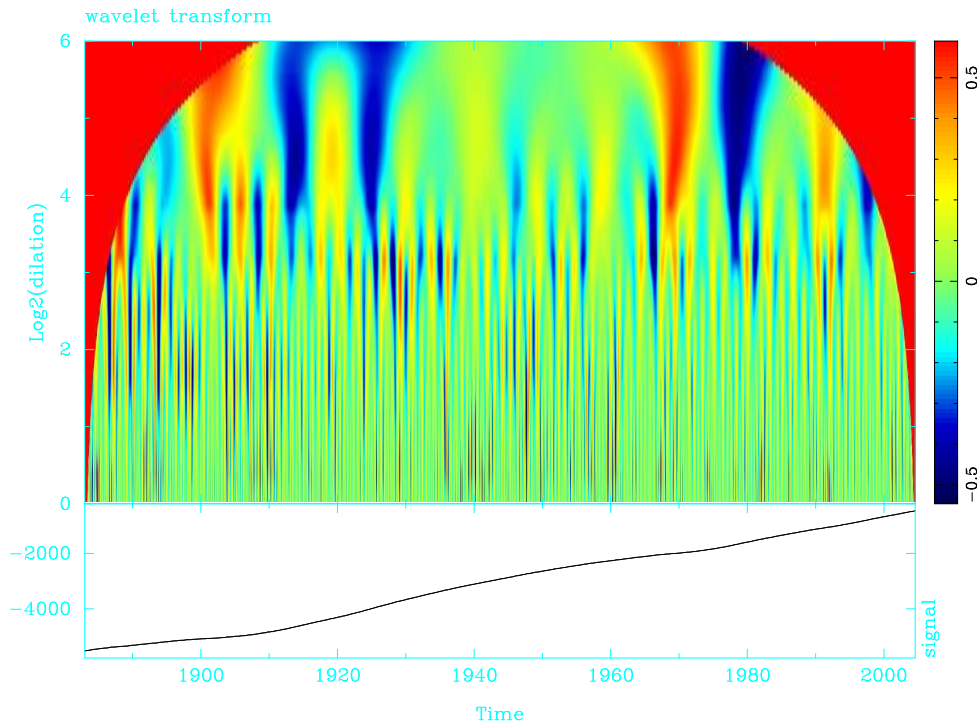


FIG. 7.4: Transformée en ondelettes (**haut**) de la série temporelle de la composante Est magnétique mesurée à l'Observatoire National de Chambon la Forêt (**bas**).

où $j_\alpha(t)$ est la singularité recherchée d'amplitude β , $c(t)$ est une fonction harmonique et $n(t)$ un signal représentant le bruit sur la série.

Alors la transformée en ondelettes d'un tel signal est telle que :

$$W_a s(t) = \beta W_a j_\alpha(t) + W_a c(t) + W_a n(t) \quad (7.7)$$

Le bruit $n(t)$ présentera une énergie principalement localisée dans les très bas degrés de dilatation des ondelettes analysantes, la fonction harmonique $c(t)$ ne présentera pas une énergie constante sur tous les niveaux de dilatation (présentation sous forme de taches), tandis que la singularité $j_\alpha(t)$ se présentera sous la forme d'un cône coupant tous les niveaux de dilatation. L'analyse en ondelettes se traduit dans un demi plan comme la représentation des convolutions du signal étudié avec une famille d'ondelettes. Pour chaque coefficient de dilatation de l'ondelette a , une série de valeurs sont obtenues.

La figure 7.4 représente la transformée en ondelettes de la série temporelle de la composante Est magnétique mesurée à l'Observatoire National de Chambon la Forêt. Les secousses autour de 1901, 1913, 1925, 1969 et 1978 sont nettement visibles. Cette longue série (1883.00 - 2004.67) permet aussi de déceler en 1991 et 1999 [Mandea et al., 2000], l'existence de deux secousses récentes. Dans le plan

perpendiculaire à cette figure, les fonctions arêtes qui représentent les extrema locaux de la transformée en ondelettes permettent de vérifier les caractéristiques des singularités détectées. La pente des droites obtenues est connue comme la régularité.

En appliquant cette méthode, nous avons complété les résultats de Alexandrescu et al. [1996] pour la dernière secousse répertoriée autour de 1991.

Résumé de l'article :

**Évidence des secousses géomagnétiques dans
les modèles de type « *comprehensive models* »**

Aude Chambodut et Mioara Mandea

en révision pour la revue *Earth Planets Space*, 2004.

La tendance de la variation séculaire présente occasionnellement de soudains changements détectés, sur les dernières quatre décennies, dans des séries géomagnétiques autour de 1970, 1980, 1991 et 1999. De tels évènements sont appelés « *secousses géomagnétiques* ». Celles-ci ont *a priori* une origine interne. Cependant, face à une répartition hétérogène des observatoires magnétiques, toutes les caractéristiques des secousses ne sont pas encore bien connues. Dans cette étude, nous tentons d'apporter des précisions sur la distribution de leurs dates d'occurrences, à partir d'un modèle de champ magnétique terrestre, global et continu dans le temps : le modèle CM4 de Sabaka et al. [2004]. Cette méthode de détection des secousses présente un caractère nouveau. Elle nous permet d'avoir immédiatement accès à une variation séculaire où les courants externes, les champs induits correspondants et les biais crustaux sont considérablement atténués par la paramétrisation choisie par les auteurs. Le modèle CM4 est ainsi utilisé pour la recherche systématique de ces évènements à la surface de la Terre. Les distributions de dates obtenues suggèrent que les secousses, survenues au cours des quarante dernières années et détectées dans le modèle CM4, ne présentent pas de caractère global dans leurs dates d'apparition. Ce résultat est étayé par la comparaison des dates obtenues dans cette étude avec celles indiquées par les analyses en ondelettes, tant déjà publiées que récentes, des séries magnétiques des observatoires.

Evidence for geomagnetic jerks in comprehensive models

Aude Chambodut and Mioara Mandea

Institut de Physique du Globe de Paris, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

(Received xxxx xx, 2004; Revised xxxx xx, 2004; Accepted xxxx xx, 2004)

The rate of secular variation occasionally undergoes a sudden, sharp change, called a geomagnetic jerk. Such jerks have been detected in geomagnetic time series, centered - over the last four decades - around 1970, 1980, 1991, and 1999; others have been inferred from historical records. The geomagnetic jerks represent a reorganization of the secular variation, implying an internal origin, as established through spherical harmonic and wavelet analysis. However, some characteristics of jerks are not well understood. Here we estimate the occurrence dates for geomagnetic jerks, as they can be detected from a global geomagnetic model. This choice makes the present study novel, for two reasons. First, utilizing the comprehensive modelling approach allows for the use of a secular variation signal free of time-varying external fields and their corresponding induced counterpart, and observatory biases. Second, the model utilizes satellite data when available, in addition to observatory data. Indeed, POGO (1967 to 1971), MAGSAT (1979 to 1980) Østed (1999 to present time) and CHAMP (2000 to present time) satellite measurements help to separate the different magnetic sources. In this study the CM4 comprehensive model is used for a global search of geomagnetic jerks and their occurrence dates. Our first result indicates that found geomagnetic jerks might not have been worldwide in occurrence. Moreover, the obtained dates suggest that jerks detected in the CM4 model over the last four decades occurred not simultaneously but at slightly different times around 1971, 1980 and 1991.

1. Introduction

The magnetic field, observed on the surface of the Earth, is mainly generated in the external core. Known as the core field, this is the largest component of the magnetic field, which is believed to be caused by electrical currents flowing in the Earth's fluid outer core. In addition to sources in the Earth's

core the magnetic field has a sizable contribution from the lithosphere and crust, both from induced magnetisation from the core field, and also from permanent remnant magnetisation (field frozen into rocks at the time of their formation). The external magnetic field is generated from magnetic sources outside the Earth, and is mainly produced by tidal motions in the ionosphere and interactions of the Earth's magnetosphere with the solar wind. Another source is the externally induced field by currents flowing within the Earth's crust and mantle.

The geomagnetic field varies on a range of scales, both in space and time domains. The external fields vary on a much shorter time scale than the core field, temporal variation of which is known as the secular variation. Although the secular variation usually occurs as smooth time changes of the core field, episodes of abrupt changes have occurred in the past. These are known as geomagnetic jerks or geomagnetic impulses (Courtillot *et al.*, 1978). A serious limitation regarding the investigation of these internal processes with time-scales of months to a few years is the effect of geomagnetic variations of external origin, since they contribute significantly on these time-scales. An immediate consequence is that some fundamental characteristics of a jerk are not completely identified and still not agreed upon by researchers; among those are occurrence dates, duration, and their global or local character.

The last topic has been addressed recently (Bloxham *et al.*, 2002). They suggested that jerks can be explained by a simple model of core dynamics that includes torsional oscillations, and that these events are strongly dependent on the local magnetic field at the top of the core. To support this hypothesis Bloxham *et al.* (2002) referred to the secular variation of the magnetic field at Niemegk (Germany) and Macquarie Island (Australia) observatories for the period 1950 to 2001. Geomagnetic jerks can be clearly observed in the East component of the secular variation at Niemegk observatory. At Macquarie Island, which is approximately antipodal to Niemegk, the secular variation is much less apparent, with little or no evidence of geomagnetic jerks. The authors claimed that the fact that jerks are most readily observed at European observatories, are largely confined to one component of the field, and are abrupt, argues for a local origin, perhaps a magnetic field instability.

Clearly, the global or local character of geomagnetic jerks and their simultaneity or lack thereof are important features of these phenomena. In order to make a systematic study of jerks, without any *a priori* assumption on their existence, location or form, a wavelet analysis was applied to the monthly mean series provided by geomagnetic observatories (Alexandrescu *et al.*, 1995; Alexandrescu *et al.*, 1996). One of the advantages of this analysis is the possibility to detect and date singularities in a signal, as impulses in monthly mean series. In Alexandrescu *et al.* (1996), it was shown that the 1969 and 1978 events display an intriguing space-time behavior, consisting of an early occurrence in the Northern hemisphere, followed by a later one in the Southern hemisphere, generally speaking. In Nagao *et al.* (2002), jerks were detected objectively and automatically using the third order spline function for a geomagnetic time series trend model at a given observatory, and applying this model to monthly means of each local time obtained from hourly means at 124 observatories. The authors also showed that the occurrence time for an impulse is slightly different between the Northern and Southern hemispheres. A much easier method to determine the date when a jerk occurs is to approximate secular variation time series by straight lines and to consider the intersection point of such lines as the date of an event (Chau *et al.*, 1981; Stewart and Whaler, 1995). This method was also applied by De Michelis *et al.* (1998) and their analysis also showed that on a global scale geomagnetic jerks are not simultaneous.

The above studies generally confirm that geomagnetic jerks are detected with a time lag of a few years in occurrence dates in the two hemispheres. However, such events have only been witnessed in ground-based observatories so far, because none have occurred during the effective life time of recent magnetic satellite missions (Østed or CHAMP). The lack of continuous satellite observations of the geomagnetic field is an important limitation in elucidating where and when a geomagnetic jerk has occurred. To overcome this problem we used a time varying core field model to describe geomagnetic jerks. Recently, two geomagnetic models covering long-time periods have been published. One of these models (Jackson *et al.*, 2000) is based on a new compilation of historical observations, and covers four centuries. Recently, another available model has been produced by Sabaka *et al.* (2004)

covering the time-span 1960-2002. Due to its advantages (see below) this model is chosen in the present investigation. The initial phase of this kind of comprehensive modeling was first reported in Sabaka and Baldwin (1993) and the second phase in Langel *et al.* (1996). A brief description of the last available model proposed by Sabaka *et al.* (2004) is given in the following.

The Comprehensive Models (CMs) are constructed from ground-based and satellite geomagnetic observations. The last published model, denoted CM4 is an extension of CM3 (Sabaka *et al.*, 2002), and solves simultaneously for core and crustal field, for ionospheric and magnetospheric contributions (plus their induced counterparts), and for the toroidal magnetic field produced by electrical currents at satellite altitude. The internal (core and lithospheric) fields are represented by a degree and order 65 internal spherical harmonic expansion, with the secular variation represented by cubic B-splines through degree and order 13 and a knot spacing of 2.5 yr and extended through mid-2002. The CM4 model has been derived from the observatory hourly means closest to 01:00 h local time on the quietest day per month (1960-2000) and hourly means every 2 hr on these quiet days during the POGO and MAGSAT missions. The quiet time POGO (1967-1971), MAGSAT (1979-1980), Østed (1999-2002), and CHAMP (2001-2002) satellite observations are also used. The use of ground-based and satellite data together facilitates separation of the various field sources and their spatial and temporal sampling extents. This is especially helpful when considering, as in the present paper, a core source for geomagnetic jerks. The comprehensive modeling approach proposed by Sabaka *et al.* (2004) presents two major advantages for our analysis, as it covers a recent period of time, when jerks are already well-detected in observatory data and fits the observatory data in their finer temporal details.

In the following we illustrate how well the CM4 model estimates the geomagnetic data by comparing the monthly means provided by the magnetic observatories and those computed from this model for the observatory locations. Thereafter, we search for geomagnetic jerks in time series of monthly means provided by observatories and in synthetic data computed all over the globe. We focus on the three well-documented last jerks, detected in 1969, 1979 and 1992 (Le Huy *et al.*, 1998). Finally, maps

indicating jerk occurrence dates over the 1960-2002 time-span are presented and discussed.

2. Data

Two datasets are used in this study. The first one is composed of the monthly mean series provided by magnetic observatories distributed worldwide¹. The length of these series is different from one observatory to the other; but for the period we are interested in, we updated the existing series with the most recent published data, getting monthly means up to the end of 2003. A wavelet analysis was carried out on this dataset in order to determine the occurrence dates for different events.

The second dataset consists of synthetic data. To estimate the magnetic field components at a given location for a given epoch and for given magnetic conditions (here quiet conditions), we used the CM4 associated code. This code returns the local X, Y, Z (North, East, Vertical down) components of the \vec{B} field of the various contributions (core, crust, primary magnetospheric, secondary (induced) magnetospheric, primary ionospheric, secondary (induced) ionospheric, toroidal magnetic field due to in-situ radial currents at satellite altitude). In our study only the core field is considered by using the spherical harmonic expansion up to degree/order 13.

To analyze geomagnetic jerks it is essential to check how well the CM4 model fits the data provided by observatories. Available observatory monthly means for X, Y, and Z field components are compared with the synthetic means estimated for the observatory locations. For this comparison all observatories providing minimum five-year series between 1960 and 2002 are kept. This amounts to 146 observatories shown in Fig. 1.

In the following examples of comparisons between real and synthetic monthly means for six observatories denoted by their IAGA codes (FRD, GNA, HER, KAK, LER, SIT) and located in different regions (see Fig. 1 and Table 1) are given. Fig. 2 shows that some nearly-constant differences appear in synthetic values with regard to the real ones (see for example, the X component for LER, Y for GNA

<http://obsmag.ipgp.jussieu.fr>

or LER, and Z for GNA, KAK and SIT). They are due to crustal biases, as only the core field at the observatory locations is computed. The differences observed in Fig. 2 agree well with the published crustal biases (Mandea and Langlais, 2002), as shown in Table 1.

One simple way to avoid the crustal field signature is to directly estimate and analyse secular variation, computed here as the centered difference between two consecutive values:

$$\dot{Y}(t_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{Y(t_{i+1}) - Y(t_i)}{t_{i+1} - t_i}. \quad (1)$$

For secular variation comparison only observatories with continuously series between 1960 and 2002 are kept: only 39 out of the 146 observatories providing data in this time span meet this requirement (Fig. 1). For these 39 observatories the secular variation has been computed, and thereafter the $\dot{Y}(t_{i+\frac{1}{2}})$ series have been smoothed with a simple 12-month running average to get rid of most of the external disturbance fields. The results obtained for the same six observatories are presented in Fig. 3. The secular variation comparison also shows the good agreement between real data and synthetic data computed from CM4 model. The resemblance, although imperfect – and there is little reason to expect it to be perfect as the core field computed from CM4 model is compared with real data containing all sources – is striking. The jerks are particularly clear in the Y component of the secular variation, which is supposed to be the least affected by the external disturbance fields.

3. Method of analysis

In the following, in order to estimate the secular variation trend for each point on the Earth's surface, we assume that in a given time interval $[t_{begin}, t_{end}]$, a geomagnetic jerk occurs at time t_0 . We need some *a priori* information about the mean epoch for each event and the choice of the $[t_{begin}, t_{end}]$ interval. To find the mean epoch for each event we considered the results obtained in detection and characterisation of geomagnetic jerks in observatory monthly series using the wavelet analysis method. Indeed, the mean epochs for the 1969 and 1978 jerks have been determined from Alexandrescu *et al.* (1996), where a clearly bimodal distribution of the dates of occurrence for these events is shown. For the so-

called 1969 event a first group of dates is centered on 1969.5 ± 0.5 and another one 1972.1 ± 0.5 ; their merging date being around 1971. The dates for 1978 event split into a first group centered on 1977.9 ± 0.6 and a second one centered on 1981 ± 0.5 , with a merging date around 1980. For the 1991 jerk, we applied the same wavelet analysis to monthly mean series beyond 2000, and we obtained an intriguing behaviour, consisting of an early arrival in the European and African observatories, followed by a later arrival at the remaining observatories. The mean epoch is 1990.6 ± 1.6 yr. Thus, we consider 1991 the center of the third time interval.

The time interval has been chosen as twice the maximum time lag in the occurrence dates (Alexandrescu *et al.*, 1996), $[t_{begin}, t_{end}] = 6$ yr. This *a priori* information is used in the following algorithm.

For the full interval covered by CM4 model we consider the time-span 1965-2000. The first five years are not kept for the analysis as the synthetic series seems to be more noisy. The year 2000 is the end of the studied interval, because of possible jerk at the end of the 20th century (Mandea *et al.*, 2000). So, we focus on the three well-known 1969, 1978, and 1991 events. Each of these jerks is searched separately, using the best fit by piecewise linear functions over the four intervals. The first jerk occurring at t_{0_1} is searched within the first interval $[t_{begin}, t_{end}] = [1968, 1974]$. The \dot{Y} secular variation component is approximated by two straight-line segments (from 1965 to 1977, the beginning years for the real or synthetic monthly series, and for the second interval containing a jerk, respectively) which best fit the data in the least-squares sense before and after the date t_{0_1} :

$$\dot{Y}(t) = a_1 t + b_1 \quad \text{for: } t \leq t_{0_1}, \quad (2)$$

$$\dot{Y}(t) = a_2 t + b_2 \quad \text{for: } t \geq t_{0_1}. \quad (3)$$

To determine the occurrence time t_{0_1} of a jerk, the algorithm searches for a clear change of the slope in the straight-line segments. Thereafter the algorithm finds the best estimate of the secular variation by two straight-line segments (in the RMS sense). For example, for the first line segment, the quantity to

be minimized is:

$$\frac{\sum_t |\dot{Y}(t) - (a_1 t + b_1)|}{Nb} \longrightarrow \text{minimum} \quad (4)$$

where $1965 \leq t \leq t_{0_1}$ and Nb the number of values on this interval.

The same method is applied for the other two investigated intervals. For the second one the chosen interval is $[t_{begin}, t_{end}] = [1977, 1983]$ and the straight-line segments have to give the best fit between the first obtained occurrence date t_{0_1} and the beginning of the third interval, i.e. 1988. The last time-span over which a jerk has been searched is $[t_{begin}, t_{end}] = [1988, 1994]$. Finally, three occurrence dates t_{0_1} , t_{0_2} and t_{0_3} could be obtained for characterizing the three considered jerks.

4. Results

4.1 Analysis at observatory locations

The linear approximation method is applied to the secular variation of the Y component for the 50 observatories, providing continuously monthly means between 1965-2000. We consider it useful to show again a few comparisons between the results obtained when using real and synthetic data. Fig. 4 shows, for the same six observatories, the secular variation from the real data and its approximation by straight-line segments (upper panel for each observatory), and the secular variation estimated from the CM4 model and its corresponding approximation (lower panel).

FRD and GNA are situated at nearly antipodal locations. For both observatories only one event is very well-defined, the two others being more difficult to be defined. For FRD, the first and third events are not detected (the series provided by this observatory has an unusual behaviour between 1987-1988). At GNA observatory, the signature of the external field makes it difficult to identify the two last geomagnetic jerks. HER observatory is situated in an area with a considerable secular variation rate. Since the establishment of this observatory in 1941, the total field intensity has decreased by 20%, which is larger than the decrease at any other magnetic observatory. Even in this very dynamic region approximation by straight-line segments is similar for real and synthetic data.

In the Northern hemisphere, KAK observatory is located in an area with less secular variation. The first two impulses are well-defined, the last one is suffering from the superimposed external contributions. LER observatory is a typical example for a region where all three events have been well determined. Indeed, in the European area, real and synthetic data present the same behaviour, with the well-known V-shaped pattern for all three jerks. For SIT observatory, in Northern America, the V-shaped is less accentuated; however, two on three expected jerks have been detected.

The results obtained for these six chosen observatories, applying different techniques (i.e. linear approximation or wavelet analysis) are summarized in Table 2. The dichotomy noted by Alexandrescu *et al.* (1996) in the occurrence dates of jerks, is confirmed: in the Southern hemisphere the first two jerks seem to occur clearly later than in the Northern hemisphere. For the last jerk, we are not able to conclude about a such ordering, as the available series, mainly for the Southern hemisphere are not long enough. With the available series, we observed an intriguing spatio-temporal behaviour, consisting of an early arrival in the African and European regions.

The above examples indicate some limitations of the linear approximation method in detecting jerks, comparing with some other methods proposed by Alexandrescu *et al.* (1996), or Nagao *et al.* (2002). However, this linear approximation technique is less complicated, perfectly agrees with the common definition of jerks, and for synthetic data, as those obtained with the CM4 model, the knots of the temporal splines used in inversion scheme modeling are not detected (as in the wavelet analysis are).

4.2 Global analysis

The same linear approximation method is applied for a global analysis. We consider the whole Earth gridded by $1^\circ \times 1^\circ$. In each obtained location at the Earth's surface, the same approximation by straight-line segments is applied on \dot{Y} component of synthetic data. Fig. 5 shows a region of the Earth, situated between $60^\circ N/60^\circ S$ and $80^\circ/120^\circ E$, with plots corresponding to every 20° location. One of the best detection of jerks is shown in the graph corresponding to $40^\circ N/120^\circ E$, which clearly indicates the three events. In some other plots only two events are clearly detected ($0^\circ/120^\circ E$), or even only

one ($40^{\circ}S/120^{\circ}E$). These examples also indicate that some events either do not appear in CM4 model, or are not clearly detected. This remark is supported by previous results when observatory data have been analyzed (see again Fig. 4). We can define some “blind” zones, where jerks are not detected. In order to delimit these areas we computed the difference $\delta = a_2 - a_1$, for each t_0 . The obtained range for δ is $\pm 15 \text{ nT/yr}^2$, with a zero-line indicating no change in the straight-line segments tendency. We considerer that 10% of this extrema interval represents a reasonable limit in defining zones with no change or too small changes in the straight-line segments tendency. The areas characterised by values of $-1.5 \text{ nT/yr}^2 < \delta < 1.5 \text{ nT/yr}^2$ are defined as “blind” zones.

The final result of the present study is presented in Figs. 6, 7 and 8. For each interval $[t_{begin}, t_{end}]$ the dates detection has been done automatically. The three obtained maps show the occurrence dates for the events centered on 1971, 1980 and 1991. On these maps the geomagnetic jerk dates obtained from real observatory monthly means when wavelet analysed, are also plotted. The number of observatories for which the dates have been obtained is 48 for the first event, 46 for the second, and 34 for the third one. Generally speaking, for all three events, the dates obtained from observatory monthly means using wavelet analysis agree with those attributed to the respective area using the linear approximation method. Some differences of ± 1 year appear. This is not surprising as monthly means are used and two different methods applied.

The global distribution for the first geomagnetic jerk (Fig. 6) shows a clear dichotomy, separating, grossly speaking, the two hemispheres, as was previously claimed (Alexandrescu *et al.*, 1996; De Michelis *et al.*, 1998). The gray shadowed areas underline the missing information about occurrence dates, indeed the above defined “blind” zones. For the second event, the occurrence dates seem to be much more scattered, defining a few regions (Fig. 7). However, a general separation appears between two large areas, one being centered over the African continent. More surprising is the last map (Fig. 8), where the dates seem to indicate a change in occurrence tendency, with an early occurrence in so-called “European/African” region.

5. Conclusions

The CM4 model embodies our most detailed knowledge of how the geomagnetic field has varied in both space and time during the last four decades. The information it contains has, however, not yet been fully exploited. In particular, little attention has been paid to the secular variation description associated with this model. However, the authors of CM4 model, emphasize the advantage of the strengths of their model in jerk studies (Sabaka *et al.*, 2004). Here, we investigate the behavior of the CM4 comprehensive model since 1960 and determined changes in the secular variation trend, showing a clear evidence for geomagnetic jerks. The inclusion of Østed vector and scalar data, and CHAMP scalar data in the CM4 model improved our analysis of the 1991 geomagnetic jerk. In this study the geomagnetic jerks do not appear in some geographically regions, perhaps because (1) they might not have been worldwide in occurrence or (2) the model contains limited spread data over the four decades beyond the existing observatory data. We also estimated occurrence dates for geomagnetic jerks detected in Sabaka *et al.* (2004) model. This result could be obtained because the CM4 model is able to separate the various field sources.

The geomagnetic jerk occurrences are highly asymmetric in their geographical distribution. This “asymmetric” behaviour, already underlined by Alexandrescu *et al.* (1996) and De Michelis *et al.* (1998) is far from simple. The obtained results clearly show that these events are not simultaneous. The average epochs are around 1971, 1980 and 1991, with an intriguing behaviour for the last two events. Their occurrence dates are, for the very dynamic region centered over African continent, *after* the average epoch for the 1980 jerk and *before* the average epoch for the 1991 jerk.

Geomagnetic jerks, influencing the secular variation years or even decades after they have occurred, are usually quite difficult to observe. Up to now, they were detected only in observatory data. Recently, we have shown that the north magnetic pole position, which involves the field as a whole, and its velocity provides a nice indicator of jerks (Mandea and Dormy, 2003). The geomagnetic jerks themselves are an excellent tool to constrain the lower mantle conductivity (Mandea Alexandrescu

et al., 1999), or to estimate its possible laterally heterogeneous conductivity (Nagao *et al.*, 2003). Moreover, the observed patterns, with zones characterized by different occurrence epochs or zones where no jerks have been detected in the CM4 model, may stimulate the discussion of the role of torsional oscillations (Bloxham *et al.*, 2002).

To investigate the global or local character of geomagnetic jerks, and to better understand each of those phenomena and how they relate to one another, an improvement in measurement accuracy and resolution, in space and time, is needed. Presently, the geomagnetic field is monitored from space by a fleet of dedicated satellites, Ørsted, CHAMP and SAC-C. The secular variation at decadal scale or longer, however, cannot be well determined due to the fairly short life-time of these missions. An important question, therefore, is how well do secular changes derived from satellite data fit the ground-based measurements, and how geomagnetic jerks can be detected in satellite data. By ensuring long-term space observations with a better spatial resolution the multi-satellite Swarm mission² (Friis-Christensen *et al.*, 2004), scheduled for launch in 2009, will improve secular variation models all over the Globe. And, if a geomagnetic jerk occurs during the course of satellite missions its characteristics could be investigated in much more detail than was previously possible with just ground-based data or global models.

Acknowledgments. All maps were plotted using the GMT software (Wessel and Smith, 1991). We would like to thank Hiromichi Nagao and Terence Sabaka for useful suggestions that helped in improving the paper. This is IPGP contribution XXXX.

References

Alexandrescu, M., D. Gibert, G. Hulot, J.-L. Le Mouél, and G. Saracco, Detection of geomagnetic jerks using wavelet analysis, *J. Geophys. Res.*, **100**, 12557-12572, 1995.

Alexandrescu, M., D. Gibert, G. Hulot, J.-L. Le Mouél, and G. Saracco, Worldwide analysis of geomagnetic jerks, *J. Geophys. Res.*, **101**, 21975-21994, 1996.

<http://www.esa.int/esaLP/swarm.html>

- Bloxham, J., S. Zatman, and M. Dumberry, The origin of geomagnetic jerks, *Nature*, **420**, 65-68, 2002.
- Chau, H.D., J. Ducruix, and J.-L. Le Mouél, Sur le caractère planétaire du saut de variation séculaire de 1969-1970, *C. R. Acad. Sci. B*, **298**, 157-160, 1981.
- Courtilot, V., J. Ducruix, and J.-L. Le Mouél, Sur une accélération récente de la variation séculaire du champ magnétique terrestre, *C. R. Acad. Sci. D*, **287**, 1095-1098, 1978.
- De Michelis, P., L. Cafarella and A. Meloni, Worldwide character of the 1991 jerk, *Geophys. Res. Lett.*, **25**, 377-380, 1998.
- Friis-Christensen, E., De Santis, A., Jackson, A., Hulot, G., Kuvshinov, A., Lühr, H., Manda, M., Maus, S., Olsen, N., Purucker, M., Rothacher, M., Sabaka, T., Thomson, A., Vennerstrom, S., and Visser, P. *Swarm. The Earth's Magnetic Field and Environment Explorers*, ESA SP-1279(6), 2004.
- Jackson, A., A. Jonkers, and M. Walker, Four Centuries of Geomagnetic Secular Variation from Historical Records, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **358**, 957-990, 2000.
- Langel, R. A., T. J. Sabaka, R. T. Baldwin, and J. A. Conrad, The near-Earth magnetic field from magnetospheric and quiet-day ionospheric sources and how it is modeled, *Phys. Earth Planet Inter.*, **98**, 235-267, 1996.
- Le Huy, M., M. Alexandrescu, G. Hulot and J.-L. Le Mouél, On the characteristics of successive geomagnetic jerks, *Earth Planets Space*, **50**, 723-732, 1998.
- Manda Alexandrescu, M., D. Gibert, J.-L. Le Mouél, G. Hulot and G. Saracco, An estimate of average lower mantle conductivity by wavelet analysis of geomagnetic jerks, *J. Geophys. Res.*, **104**, 17735-17745, 1999.
- Manda, M., E. Bellanger, and J.-L. Le Mouél, A geomagnetic jerk for the end of 20th century?, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **183**, 369-373, 2000.
- Manda, M., and B. Langlais, Observatory crustal magnetic biases during MAGSAT and Østed satellite missions, *Geophys. Res. Lett.*, **29**, 10.1029/2001GL013693, 2002.
- Manda, M., and E. Dorny, Asymmetric behavior of magnetic dip poles, *Earth Planets Space*, **55**, 153-157, 2003.
- Nagao, H., T. Iyemori, T. Higuchi, S. Nakano, and T. Araki, Local time features of geomagnetic jerks, *Earth Planets Space*, **54**, 119-131, 2002.
- Nagao, H., T. Iyemori, T. Higuchi, and T. Araki, Lower mantle conductivity anomalies estimated from geomagnetic jerks, *J. Geophys. Res.*, **108(B5)**, 2254, doi:10.1029/2002JB001786, 2003.
- Sabaka, T. J., and R. T. Baldwin, Modeling the Sq magnetic field from POGO and MAGSAT satellite and contemporaneous hourly observatory data,

HSTX/G&G-9302, Hughes STX Corp., 7701 Greenbelt Road, Greenbelt, MD, 1993.

Sabaka, T., N. Olsen, and R. A. Langel, A comprehensive model of the quiet-time, near-Earth magnetic field: phase 3, *Geophys. J. Int.*, **151**, 32-68, 2002.

Sabaka, T., N. Olsen, and M.E. Purucker, Extending comprehensive models of the Earth's magnetic field with Østed and CHAMP data, *Geophys. J. Int.*, **151**, 1-10, 2004, doi: 10.1111/j.1365-246X.2004.02421.x, 2004.

Stewart, D.N. and K. Whaler, Geomagnetic disturbance fields: An analysis of observatory monthly means, *Geophys. J. Int.*, **108**, 215-223, 1992

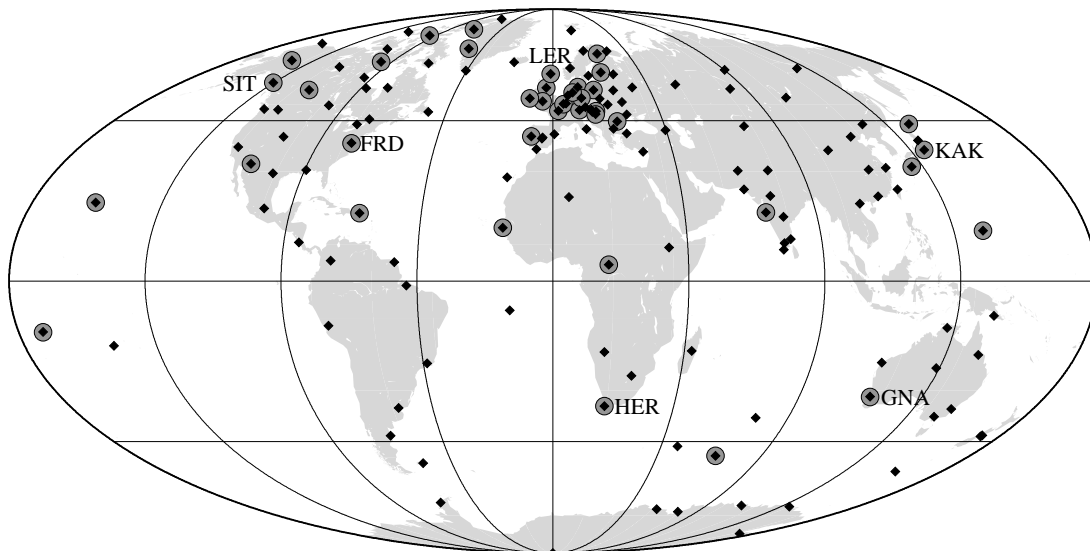


Fig. 1. Distribution of observatories used in the present study. **Black diamonds:** 146 observatories with minimum five-year monthly means between 1960 and 2002; **gray circles:** 39 observatories with continuously monthly mean series between 1960 and 2002. The **IAGA codes** are given for the six observatories chosen as examples.

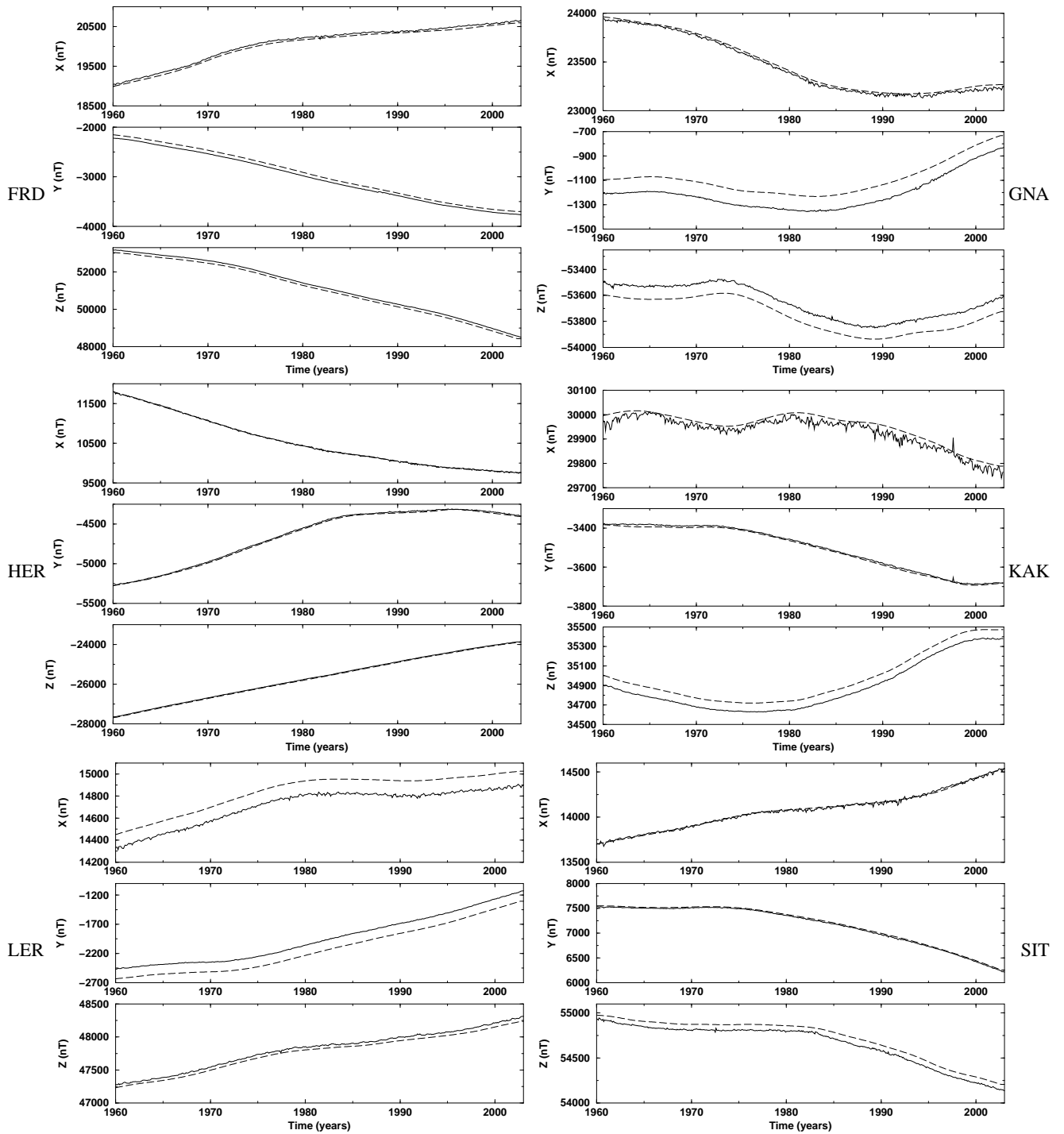


Fig. 2. Monthly means for the X, Y and Z field components (**solid curve**: real data, **dashed curve**: synthetic data given by the CM4 model).

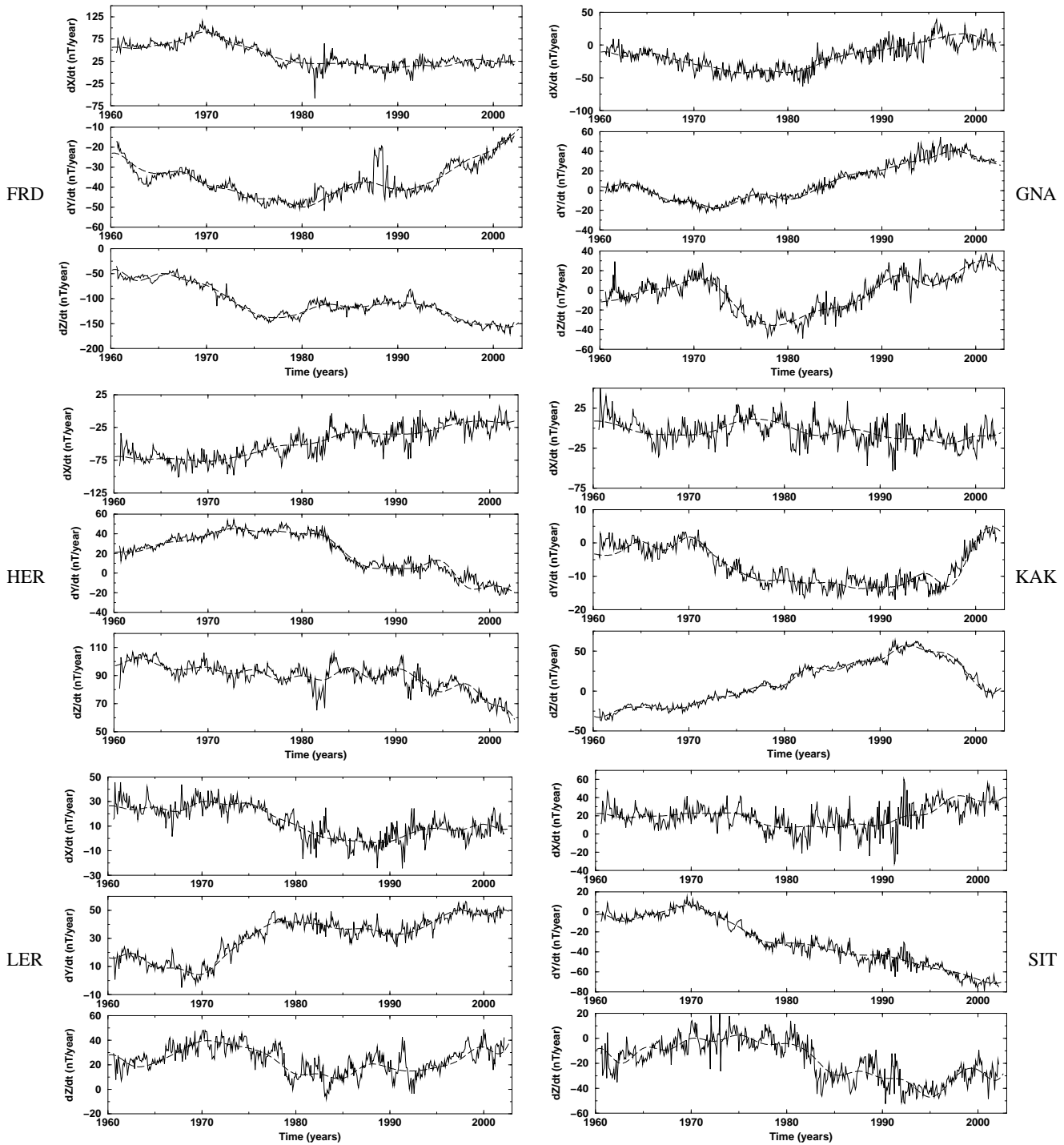


Fig. 3. Monthly means for X,Y and Z secular variation components (solid curve: real data, dashed curve: synthetic data given by CM4 model).

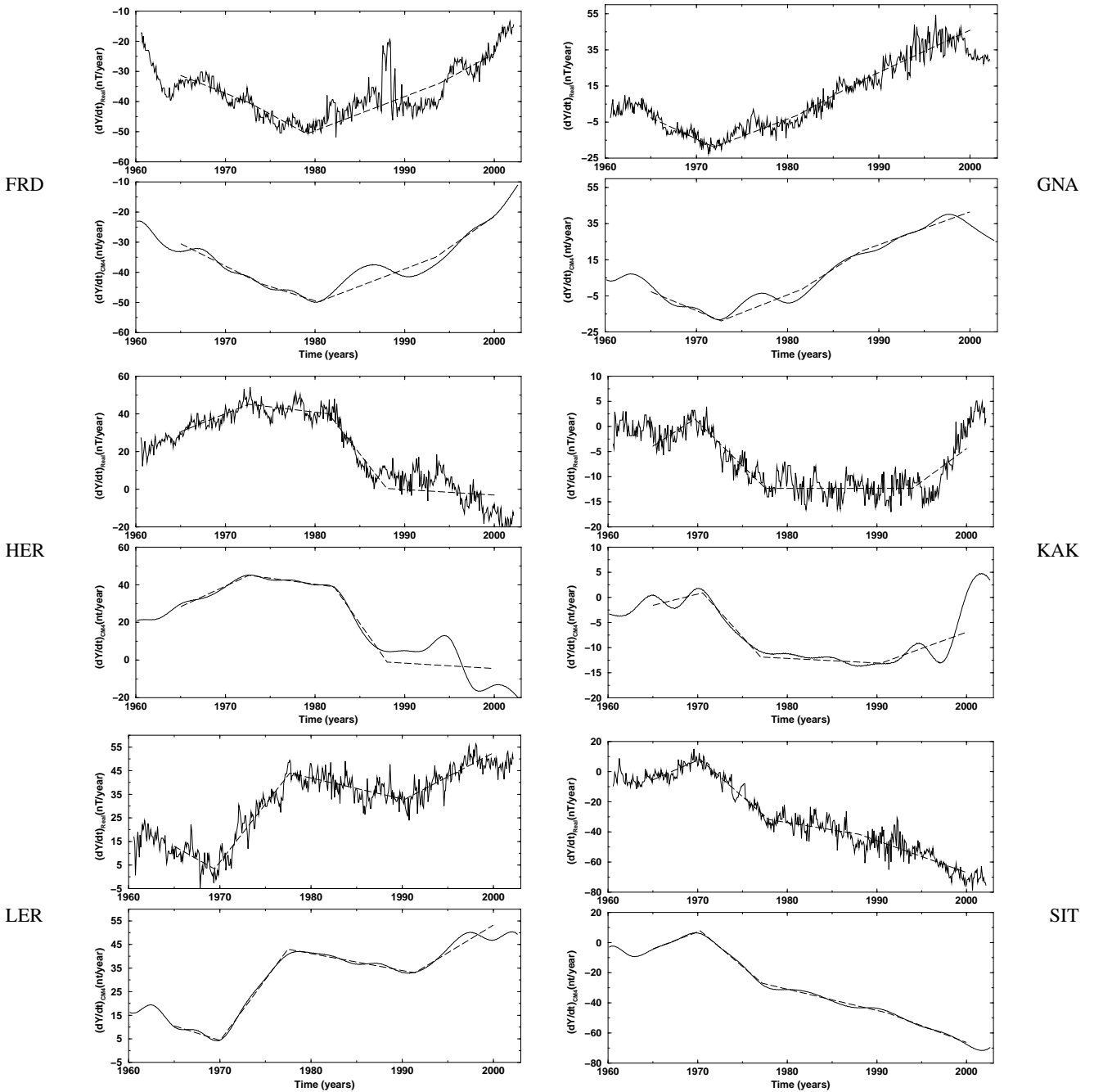


Fig. 4. Monthly means for Y secular variation component. For each observatory the **upper panel** represents the linear approximation (**dashed curve**) of real data (**solid curve**); the **lower panel** represents the linear approximation (**dashed curve**) of synthetic data given by the CM4 model (**solid curve**).

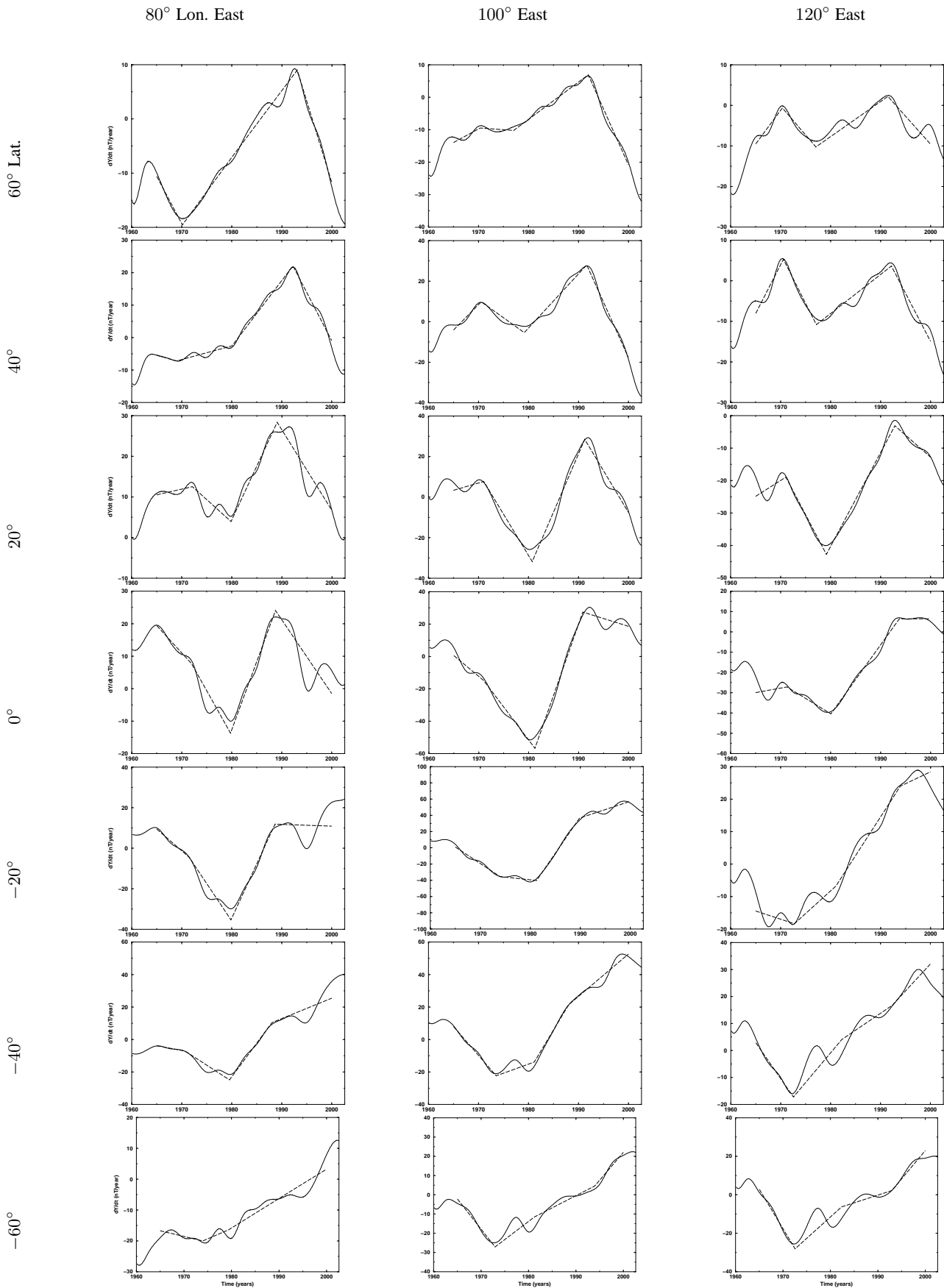


Fig. 5. Secular variation for Y component at some location points: linear approximation (dashed curve) of synthetic data given by the CM4 model (solid curve).

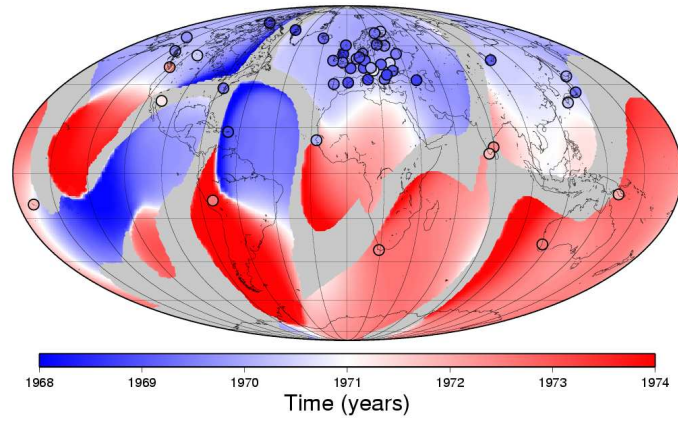


Fig. 6. Occurrence dates obtained from the CM4 synthetic data for the geomagnetic jerk centered on 1971. The same scale is used for dates given by wavelet analysis on observatory monthly mean series (**full colored circle**). The **shadowed areas** indicate the so-called ‘blind’ zones where no jerk is detected.

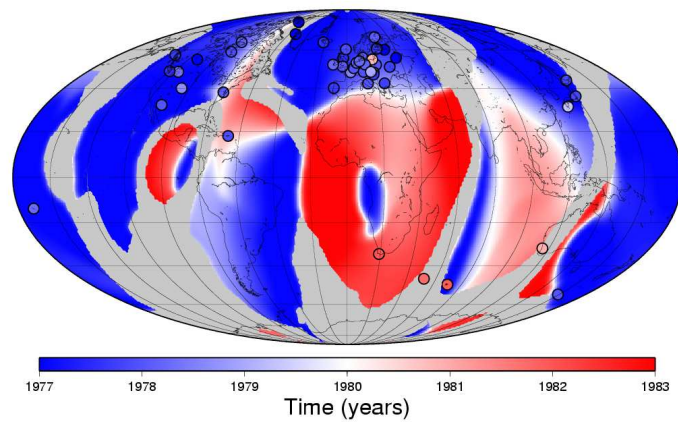


Fig. 7. Occurrence dates obtained from the CM4 synthetic data for the geomagnetic jerk centered on 1980. The same scale is used for dates given by wavelet analysis on observatory monthly mean series (**full colored circle**). The **shadowed areas** indicate the so-called ‘blind’ zones where no jerk is detected.

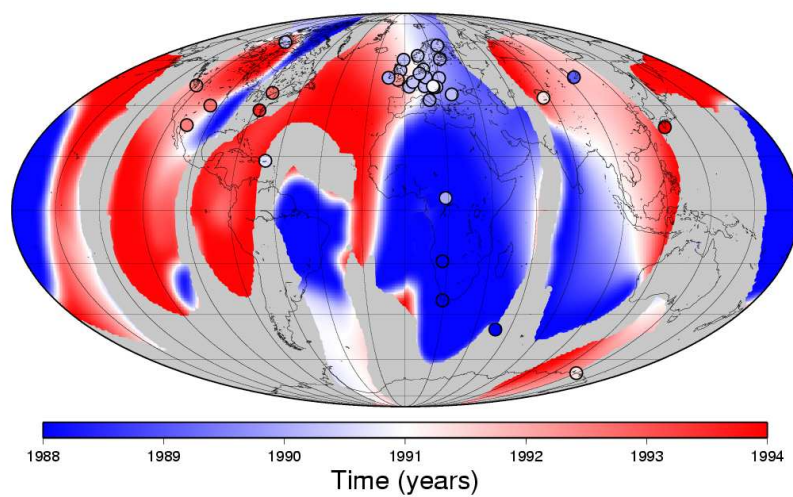


Fig. 8. Occurrence dates obtained from the CM4 synthetic data for the geomagnetic jerk centered on 1991. The same scale is used for dates given by wavelet analysis on observatory monthly mean series (**full colored circle**). The **shadowed areas** indicate the so-called “blind” zones where no jerk is detected.

Table 1. Crustal biases comparisons.

	Code ^a	λ ^b	φ ^c	model	X_{cc} ^d	Y_{cc} ^e	Z_{cc} ^f
Fredericksburg	FRD	38.210	282.630	M	48	-75	131
				Ø	38	-59	142
				CM4	40	-55	114
Gnangara	GNA	-31.783	115.950	M	-3	-135	108
				Ø	-37	-107	102
				CM4	-22	-110	98
Hermanus	HER	-34.425	19.225	M	19	13	10
				Ø	3	15	11
				CM4	3	12	30
Kakioka	KAK	36.230	140.190	M	-26	7	-83
				Ø	-26	2	-85
				CM4	-20	7	-90
Lerwick	LER	60.133	358.817	M	-123	172	34
				Ø	-133	164	55
				CM4	-132	173	47
Sitka	SIT	57.058	224.675	M	-12	-19	-49
				Ø	-11	-14	-69
				CM4	-2	-20	-61

^a According to the IAGA convention.

^b Latitude of the observatory, in degrees.

^c Longitude of the observatory, in degrees, positive eastward.

^{d,e,f} Crustal biases, using MAGSAT model (M), Østed model (Ø), and CM4 model (CM4), in nT.

Table 2. Date of occurrence of geomagnetic jerks (year/month).

Code ^a	Event ^b	Wavelet ^c	Linear (real data) ^d	Linear (synthetic data) ^e
FRD	1	1969/06	N.D.*	N.D.
	2	1978/02	1979/01	1980/04
	3	1993/08	N.D.	N.D.
GNA	1	1972/08	1971/11	1972/09
	2	1980/12	N.D.	N.D.
	3	N.D.	N.D.	N.D.
HER	1	1972/06	1972/07	1972/07
	2	1982/01	1981/06	1982/01
	3	1987/05	1988/01	1988/01
KAK	1	1969/06	1969/08	1970/07
	2	1977/11	1977/06	1977/01
	3	N.D.	N.D.	N.D.
LER	1	1969/02	1969/05	1970/01
	2	1977/12	1977/08	1977/06
	3	1990/04	1990/03	1991/05
SIT	1	1969/09	1970/03	1970/04
	2	1977/09	1977/12	1977/03
	3	N.D.	N.D.	N.D.

^a According to the IAGA convention.

^b Considered geomagnetic jerks around: 1971 (1), 1980 (2) and 1991 (3).

^c Date of occurrence given by the wavelet analysis on real Y data.

^d Date of occurrence given by the linear approximation on real \dot{Y} data.

^e Date of occurrence given by the linear approximation on synthetic \dot{Y} data.

* N.D. - Not Detected.

7.2 Sur leur distribution spatiale

Dans cette partie, nous présentons une étude qui utilise le changement de signe de la dérivée seconde du champ magnétique pour déterminer la répartition à la surface du Globe des secousses magnétiques. Cette répartition est celle obtenue à partir des modèles de champ magnétique de type « *comprehensive model* ». Nous ne donnerons pas plus de détails sur cette méthode, car elle est décrite dans l'article Chambodut et al. [2004] suivant. Quelques résultats méritent toutefois d'être ajoutés.

Les cartes de la figure 7.5 montrent l'accélération séculaire de la composante Est magnétique à des dates choisies avant et après une date connue d'occurrence de secousse magnétique. Les figures contenues dans l'article sont répétées ici afin de permettre une meilleure lecture. Les observatoires magnétiques où les secousses géomagnétiques sont détectées se situent dans la surface balayées par la ligne $d^2Y/dt^2 = 0$.

Toutes les cartes représentant les changements de signe de l'accélération séculaire à la surface de la Terre sont ensuite résumées au moyen d'une intégrale de surface. Il est toutefois nécessaire de constamment se référer aux cartes utilisées dans le calcul de sa valeur. Les époques où une secousse a eu lieu sont visibles par de larges étendues, à la surface de la Terre subissant le changement de signe de l'accélération séculaire. Mais des périodes plus « calmes » peuvent également faire apparaître des maximums locaux de ces courbes. Les surfaces couvertes par les changements de signes ne sont alors que la somme de petites surfaces morcelées en fines bandes. Ces artefacts sont principalement dus aux approximations numériques dans le calcul des dérivées successives, mais également à la troncature du modèle initial en harmoniques sphériques. Nous les assimilons à un niveau de bruit. Un autre maximum se révèle être apparemment une secousses non répertoriée autour de 1986. Cet évènement est discuté dans le chapitre 8.

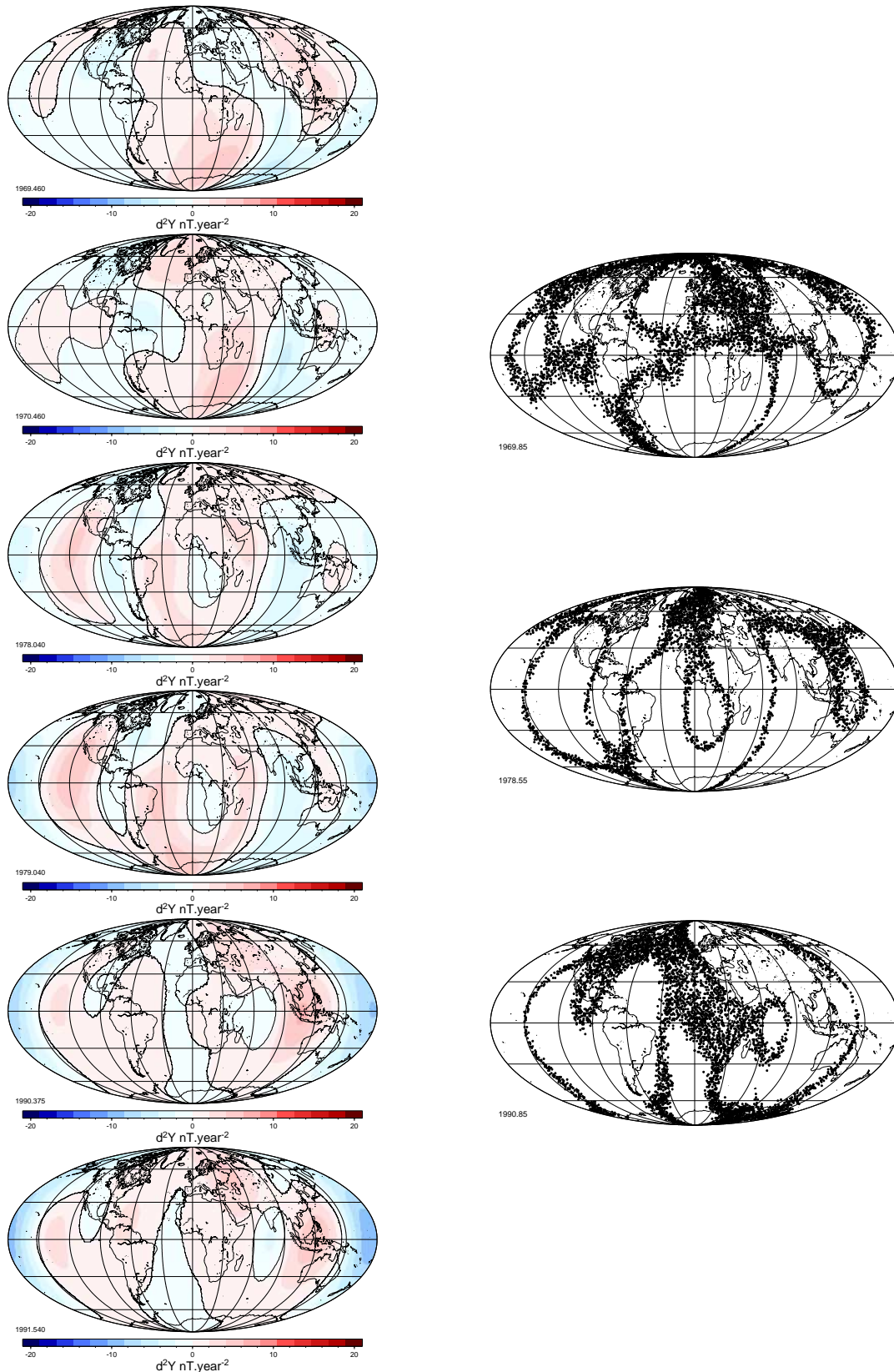


FIG. 7.5: Représentation de la dérivée seconde de la composante Est du champ magnétique terrestre (d^2Y/dt^2) d'après le modèle CM_4 ; seule la partie principale du champ interne est prise en compte (développement jusqu'au degré/ordre 13 en harmoniques sphériques) (**gauche**). Portions de surface où la dérivée seconde de la composante Est du champ magnétique terrestre a changé de signe à une date intermédiaire à celles indiquées en bas des deux cartes placées à sa gauche (**droite**).

Résumé de l'article :
Secousses géomagnétiques dans les modèles de
champ continu :
Leur distribution à la surface de la Terre
Aude Chambodut, Céline Eymin et Mioara Mandea
soumis à la revue
Geophysical Research Letters, 2004.

Si les secousses géomagnétiques se traduisent par de soudains changements dans la tendance de la variation séculaire, elles peuvent être représentées dans l'accélération séculaire sous la forme de fonctions de type créneau et dans la dérivée troisième du champ par une impulsion (un « Dirac »). Trois secousses géomagnétiques ont eu lieu au cours de la période couverte par le récent modèle global CM4 [Sabaka et al., 2004]. Afin d'analyser ces événements sur toute la surface du globe, des séries de données synthétiques ont été calculées, tous les deux degrés sur la sphère terrestre. Les secousses géomagnétiques y sont détectées comme étant les moments où la seconde dérivée de la composante Est (Y) du champ change de signe. Les cartes obtenues montrent les positions où ces changements surviennent et indiquent que les secousses géomagnétiques détectées dans le modèle ne semblent pas avoir un caractère global. La détermination mois après mois des aires balayées par la ligne de changement de signe de \ddot{Y} confirme ce fait.

Cette première étude conduit à une seconde [Eymin et al., 2004] montrant la corrélation entre secousses géomagnétiques et variation de pression à la surface du noyau (chapitre 8.2).

Submitted to Geophysical Research Letters

Geomagnetic jerks in the comprehensive magnetic field models: their Earth's surface distribution

Aude Chambodut, Céline Eymin¹ and Mioara Mandea

Institut de Physique du Globe de Paris, Laboratoire de Géomagnétisme,
4 place Jussieu, 75257 Paris Cedex 05, France.

Abstract. Modifications in the magnetic field characterized by an abrupt change in the secular variation or a step-like in the secular acceleration have been named “secular variation impulses” or “geomagnetic jerks”. Three geomagnetic jerks occurred during the time-span covered by the recently published comprehensive model CM4. In order to analyze these events all over the world, synthetic time series were obtained from CM4 model between 1960-2002. Geomagnetic jerks are detected in these series as a change of sign in the second field derivative of the Eastern component. Maps showing these changes indicate that the three geomagnetic jerks detected in CM4 model might be not worldwide phenomena. This study is followed by a second one where a correlation between geomagnetic jerks and their signatures at the top of the core is shown.

1. Introduction

The spatial and temporal scales of various constituents of the geomagnetic field overlap, making it difficult to separate their effects from samplings of the observed field. A successful approach is the “comprehensive modeling”, recently developed to overcome this problem [Langel *et al.*, 1996; Sabaka *et al.*, 2002]. The comprehensive models entail the parameterization and co-estimation of fields associated with the internal and external sources, thus including those of core and lithospheric origins, and those of magnetospheric and ionospheric origins along with the associated induced contributions. For the present study it is important to note that the secular variation is represented by cubic B-splines through degree and order 13, with the knot spacing at 2.5 years. A detailed description of these comprehensive models is given by Sabaka *et al.* [2002, 2004] and a comparison between the last two versions (CM3 and CM4) is in Sabaka and Olsen [2002].

For the present study, the used model is CM4 [Sabaka *et al.*, 2004]. One of the strengths of the comprehensive modeling approach is its ability to properly define the signals from the various field sources. The field contribution we are interested in is the core field and its temporal variations. The shortest periods of internal origin are found in the so-called “secular variation impulses” or “geomagnetic jerks” [Courillot *et al.*, 1978; Malin and Hodder, 1982]. The geomagnetic jerks are expressed in the field component as two second degree polynomials of time with a sudden change in

curvature at the time of the event; the corresponding secular variation (the first time derivative of the geomagnetic field) is a V-shaped graph, the second time derivative is step-like, and the third time derivative is a Dirac distribution [Courillot *et al.*, 1984]. In order to make a systematic study of jerks which have occurred over the period covered by CM4 model (1960-2002), we analyzed in details the behavior of the second time derivative, obtained from the Sabaka *et al.* model developed in spherical harmonics, only for the internal field (i.e. up to degree/order 13). The advantage of this analysis is its special sensitivity to localized events defined by a change of sign of the second derivative over the whole sphere. In this first paper, we focus on the global behavior of geomagnetic jerks at the Earth's surface. In particular we show that the three events detected in CM4 model might not be worldwide phenomena. In a second paper, we show a correlation between geomagnetic jerks and their signature at the top of the core (Eymin *et al.* [2004], thereafter referred to as Paper II).

2. Data analysis

In order to use the CM4 model for a detailed study over the whole Earth's surface, we first compare the behavior of the secular variation and secular acceleration of the field from magnetic observatory data and synthetic data provided by the comprehensive model for the same observatory locations [Chambodut and Mandea, 2004]. Secular variation from observatory monthly means or from CM4 model is calculated as simple differences between consecutive values:

$$\dot{E}(t) = \frac{E(t_2) - E(t_1)}{t_2 - t_1}, \quad (1)$$

¹Now at Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique, Université Joseph Fourier, BP53, 38041 Grenoble Cedex 9, France.

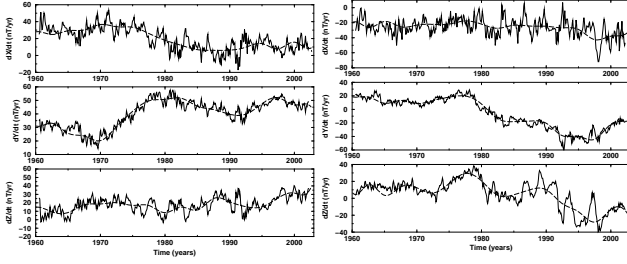


Figure 1. Secular variation for X, Y and Z components at Chambon la Forêt (CLF) observatory (*left*) and Apia (API) observatory (*right*) from: real data smoothed with a 12-month running average filter (*solid curve*) and synthetic data obtained from CM4 model (*dashed curve*).

where $t = (t_1 + (t_2 - t_1)/2)$ and $E(t)$ represents one of the magnetic field component (X – Northern, Y – Eastern and Z – Vertical downward) at time t .

Figure 1 shows two examples: one for Chambon la Forêt (CLF) observatory situated in Europe ($48.023^\circ N$; $2.260^\circ E$), the other one for Apia (API) observatory located in Pacific area ($13.807^\circ S$; $171.775^\circ W$). For both locations, the real and synthetic \dot{X} , \dot{Y} , \dot{Z} are plotted. The agreement is nearly perfect for the \dot{Y} component; however, for \dot{X} and \dot{Z} components, much larger discrepancies are observed between the real data and the smoother representation given by model. Due to the external field contributions on the Northern component, and to the fact that previous analysis generally have been done on the Eastern field component [Alexandrescu *et al.*, 1996], in the following, we focus on this last one, only.

Let us remind that the published studies on geomagnetic impulse characteristics exploited the magnetic field itself [Alexandrescu *et al.*, 1996; Nagao *et al.*, 2002] or its secular variation [Macmillan, 1996; Le Huy *et al.*, 1998; De Michelis *et al.*, 1998; Chambodut and Manda, 2004]. Defined also as a step-like in the second time derivative implies that a geomagnetic jerk corresponds to a sudden change of sign in the secular acceleration [Courillot *et al.*, 1978]. Searching geomagnetic jerks in the second field derivative has not been approached until now, mainly because of the noise level in such series computed from real observatory data. Using synthetic data, provided by CM4 model, the noise contribution is minimized as the model already takes into account the external fields and smooths a large part of their variations. Secular acceleration, here only for Y component, is calculated by simple differences between consecutive secular variation values:

$$\ddot{Y}(t) = \frac{\dot{Y}(t_2) - \dot{Y}(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (2)$$

where $t = (t_1 + (t_2 - t_1)/2)$. For the same two observatory locations (CLF and API), the behavior of the second derivative of synthetic data is depicted on Figure 2.

We now investigate the geomagnetic jerks as a change of sign of the secular acceleration \ddot{Y} . For CLF observatory, the

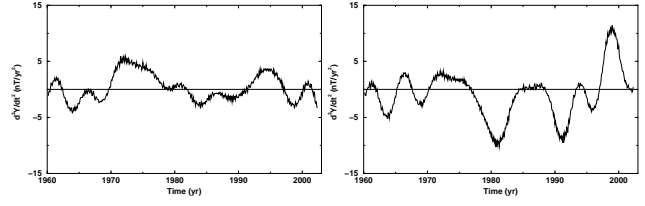


Figure 2. Secular acceleration for Y synthetic component at Chambon la Forêt (CLF) observatory (*left*) and Apia (API) observatory.

first and third noted events, (around 1970 and 1990, respectively) are particularly well defined. These dates are also confirmed by Figure 1. The second event is dated with an uncertainty of ± 1 year, as the change of sign appears after a small inflection in \dot{Y} curve. For API observatory, two jerks are well defined, those noted around 1970 and 1978. The situation is however more complicated than for CLF observatory secular acceleration, as a few crossing points of the zero line appear: (1) a couple of oscillations could be due to some remaining external or noise effects (mainly over the first decade); (2) some \dot{Y} values are very close to zero over a couple of years around 1985. This last period will be discussed in Paper II.

3. Global Results

Considering that a change of sign of the secular acceleration is a signature of a geomagnetic jerk, we are interested to detect such a behavior at the Earth's surface. In order to get very detailed information, the whole sphere is gridded by $1^\circ \times 1^\circ$. For each defined location, \dot{Y} is computed only for the core field contribution, as modeled by CM4 model. To find the epochs when the sign of \dot{Y} changes, for each position k corresponding to coordinates (θ_k, ϕ_k) at the surface of the Earth, the following algorithm is applied:

$$\begin{cases} \text{if } (\ddot{Y}_k(t_1) \times \ddot{Y}_k(t_2)) < 0 \\ \rightarrow \ddot{Y} \text{ changes of sign between } t_1 \text{ and } t_2. & \text{case (1)} \\ \text{if } (\ddot{Y}_k(t_1) \times \ddot{Y}_k(t_2)) \geq 0 \\ \rightarrow \ddot{Y} \text{ does not change of sign between } t_1 \text{ and } t_2. & \text{case (2)} \end{cases}$$

The locations at the Earth's surface characterized by the change of sign of $\ddot{Y} = 0$ are plotted for each month, so we obtained 490 maps. Here, we display only four of them, the whole set of maps is available as auxiliary material.

Figure 3 shows maps indicating positions where the sign of \ddot{Y} changes for three epochs corresponding to the well-known geomagnetic jerk dates detected over the last four decades in (Figure 3 a-c). The last example is chosen for a period when no geomagnetic impulse has been listed (Figure 3 d).

Let us discuss in more details these maps. The first one (Figure 3 a), representative for the 1968-1970 event, shows

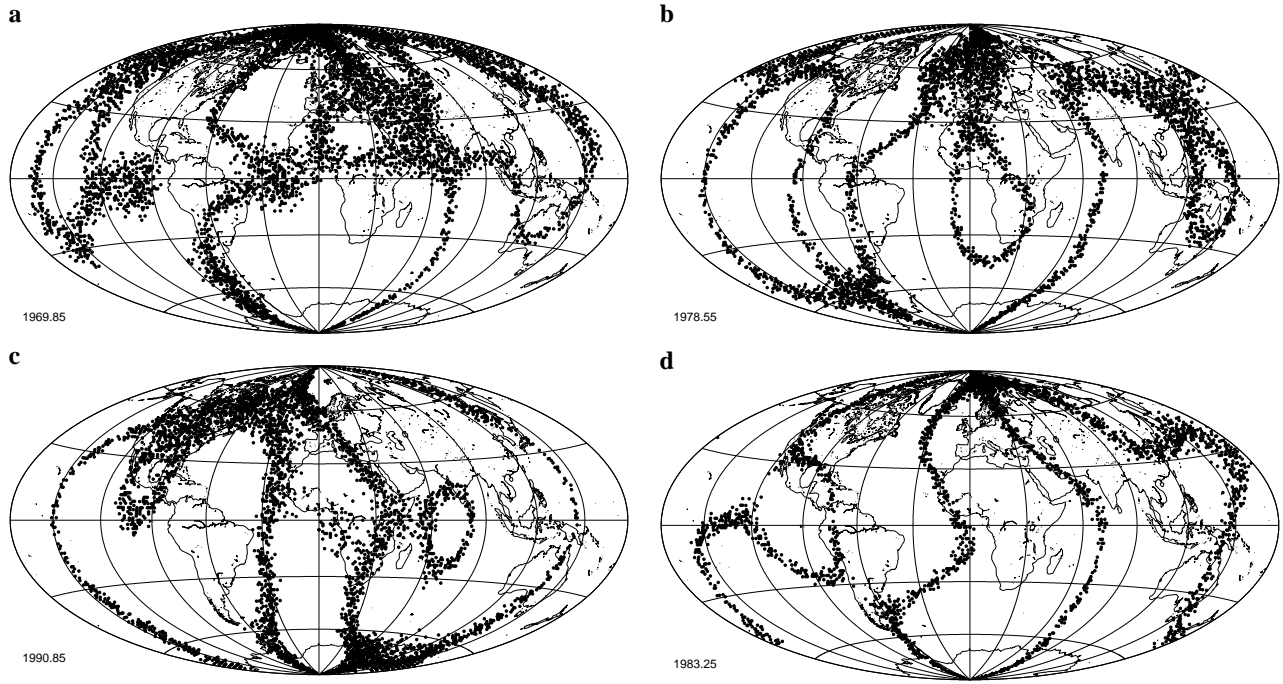


Figure 3. Maps indicating locations where the sign of \dot{Y} changes at the Earth's surface (*black dots*). Three representative samples (*a-c*) are shown, corresponding to the well-known geomagnetic impulses (1969.85, 1978.55, 1990.85). For comparison an example (*d*) is given for an epoch when no geomagnetic jerk has been listed (1983.25).

that for a large part of the Earth's surface, the case (1) of the previously defined algorithm is satisfied. The points are mainly situated on continents, European area being very well covered. The second event is less extended than the previous one. Again, the European region is very well covered (Figure 3 b). The last event (Figure 3 c) is significant over two important regions: Northern America and Europe. The last presented map (Figure 3 d) shows a clear alignment of points organized as some thin lines. This picture, plotted for epoch 1983.25 is representative for a period without geomagnetic jerk.

The presented images are only snapshots of the complete series of maps over the four studied decades. In order to get a description over the whole period, we computed the total area S on the sphere covered by points satisfying condition (1) for each epoch t :

$$S(t) = \left[\sum_k \delta_k(t) \cdot \sin(\theta_k) \right] \cdot \frac{100}{4\pi}, \quad (3)$$

where:

$$\begin{cases} \delta_k(t) = 1 & \text{case (1)} \\ \delta_k(t) = 0 & \text{case (2)} \end{cases}$$

at position number k (θ_k, ϕ_k). The obtained graph is shown in Figure 4.

For the first and the last 2.5 years, the curve are not plotted as this time-lag represents the knot of temporal B-splines of the model. Indeed, an event at one end of the

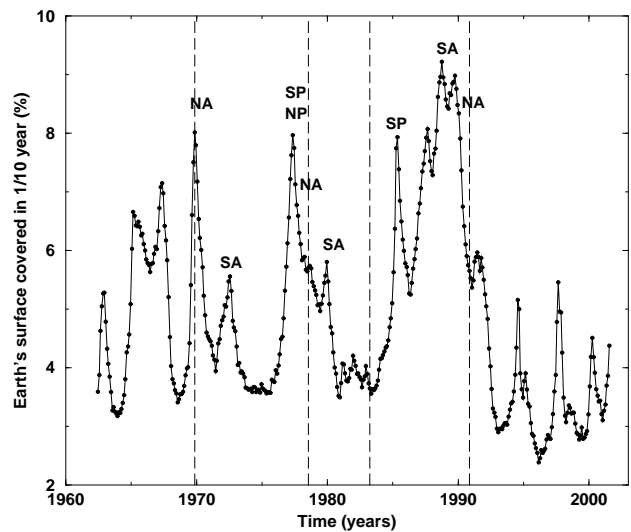


Figure 4. Percentage of the Earth's surface covered by locations where the sign of \dot{Y} changes. Each circle of the curve represents the surface calculated for 1/10 year, only. Vertical lines indicate the epochs corresponding of maps shown on Figure 3. The used codes are: NA - Northern Atlantic; SA - Southern Atlantic; NP - Northern Pacific; SP - Southern Pacific, indicating zones where geomagnetic jerks are mainly detected (see text for details).

domain can influence the other end via propagation through the sequence of splines. This influence is also seen in Figure 4, as a superposition at the signal we are interested in with the signature of the knot interval. However, the graph clearly reveals the existence of three maxima corresponding to 1969.85, 1977.45 and 1988.65. These dates are close to those already admitted as epochs for geomagnetic jerks (around 1970, 1978, 1990). For these three epochs a large part of the Earth's surface is covered by locations characterized by the change of sign of \dot{Y} . The two maxima observed before 1968 and also after 1992 are not considered here as the maps corresponding to these epochs (see the web animation) do not indicate large areas with a change of sign for \dot{Y} , but only small zones situated in polar regions. In order to discuss in more details the geomagnetic jerks occurrence zones, we defined four areas referred to as:

- Northern Atlantic (0° to $90^\circ N$; $90^\circ W$ to $90^\circ E$),
- Southern Atlantic (0° to $90^\circ S$; $90^\circ W$ to $90^\circ E$),
- Northern Pacific (0° to $90^\circ N$; 90° to $270^\circ E$),
- Southern Pacific (0° to $90^\circ S$; 90° to $270^\circ E$).

The first event is mainly seen over the Northern Atlantic area, followed by a later occurrence in the Southern Atlantic region. This bimodal behavior between the two hemispheres has already been noted [Alexandrescu et al., 1996; De Michelis et al., 1998]. The same 2-year time-lag is observed for the second event. For this geomagnetic jerk, it seems that the occurrence is firstly in Pacific area followed by Northern Atlantic and finally by Southern Atlantic. The last event happens in the Southern Pacific zone thereafter in the Southern Atlantic and then in Northern Atlantic.

This very simple representation gives us some clues about geomagnetic jerks. First, the geomagnetic jerks detected in CM4 model might not have been worldwide in occurrence. Second, the covered area by an event is more or less extended. Epochs for which large zones of the Earth's surface are well covered correspond to dates when geomagnetic jerks have been already noted. Moreover, this method reveals an event around 1985 which was not previously invoked (see Figure 4 and Paper II for more details).

4. Conclusion

A global characterization of geomagnetic jerks is difficult to achieve when only data provided by observatories are available: they are very unevenly distributed in space, being concentrated over continents of the Northern hemisphere and sparser over the oceans and over the Southern hemisphere. Nevertheless, using these very valuable and long series of data, and applying different mathematical tools, some questions have been already addressed about the spatial and temporal occurrence of geomagnetic jerks [Alexandrescu et al., 1996; De Michelis et al., 1998; Manda et al., 2000; Chambodut and Manda, 2004].

In this paper we show that a comprehensive model, as that published by Sabaka et al. [2002] is a suitable basis to extract a clear signature of geomagnetic jerks in synthetic

series obtained from it. Here we focus on geomagnetic jerks spatial occurrence by exploiting the information contained in the second derivative of Eastern main field component. We show that geomagnetic jerks might not be worldwide in occurrence. The proposed approach is promising, as the results obtained in the present paper lead us to analyze in more details geomagnetic jerks and to correlate them with a physical parameter variation at the top of the core (see Paper II).

Acknowledgments. All maps were plotted using the GMT software (Wessel and Smith, 1991). This is IPGP contribution XXXX

References

- Alexandrescu, M., D. Gibert, G. Hulot, J. Le Mouél, and G. Saracco, Worldwide wavelet analysis of geomagnetic jerks, *J. Geophys. Res.*, 101, 21,975–21,994, 1996.
- Chambodut, A., and M. Manda, Evidence for geomagnetic jerks in comprehensive models, *Earth Planets Space*, submitted, 2004.
- Courtillot, V., J. Ducruix, and J.-L. Le Mouél, Sur une accélération récente de la variation séculaire du champ magnétique terrestre, *C.R. Hebd. Séances Acad. Sci., ser. D*, 287, 1095–1098, 1978.
- Courtillot, V., J.-L. Le Mouél, and J. Ducruix, On backus' mantle filter theory and the 1969 geomagnetic impulse, *Geophys. J. Roy. astr. Soc.*, 78, 619–624, 1984.
- De Michelis, P., L. Cafarella, and A. Meloni, Worldwide character of the 1991 geomagnetic jerk, *Geophys. Res. Lett.*, 25, 377, 1998.
- Eymin, C., A. Chambodut, and M. Manda, Geomagnetic jerks in the comprehensive magnetic field models: their core surface signature, *Geophys. Res. Lett.* submitted, 2004.
- Langel, R., T. Sabaka, R. Baldwin, and J. Conrad, The near-earth magnetic field from magnetospheric and quiet-dat ionospheric sources and how it is modeled, *Phys. Earth Planet. Inter.*, 98, 235–267, 1996.
- Le Huy, M., M. Manda, G. Hulot, and J. Le Mouél, On the characteristics of successive geomagnetic jerks, *Earth Planets Space*, 50, 723–732, 1998.
- Macmillan, S., A geomagnetic jerk for the early 1990's, *Earth Planet. Sci. Lett.*, 137, 189–192, 1996.
- Malin, S., and B. Hodder, Was the 1970 geomagnetic jerk of internal or external origin?, *Nature*, 296, 726–728, 1982.
- Manda, M., E. Bellanger, and J.-L. Le Mouél, A geomagnetic jerk for the end of the 20th century?, *Earth Planet. Sci. Lett.*, 183, 369–373, 2000.
- Nagao, H., T. Iyemori, T. Higuchi, S. Nakano, and T. Araki, Local time features of geomagnetic jerks, *Earth Planets Space*, 54, 119–131, 2002.
- Sabaka, T., and N. Olsen, Comprehensive modelling of the earth's magnetic field: current status and future prospects, in *OIST-4. Proceedings from the 4th Oersted International Science Team Conference.*, pp. 21–30, Copenhagen, 2002.
- Sabaka, T., N. Olsen, and R. A. Langel, A comprehensive model of the quiet-time, near-earth magnetic field: phase 3, *Geophys. J. Int.*, 151, 32–68, 2002.
- Sabaka, T., N. Olsen, and M. Purucker, Extending comprehensive models of the earth's magnetic field with ørsted and champ data, *Geophys. J. Int.*, in press, 2004.

Chapitre 8

La variation séculaire et l'intérieur de la Terre

« Théoriquement, on sait que la Terre tourne, mais en fait on ne s'en aperçoit pas ; le sol sur lequel on marche semble ne pas bouger et on vit tranquille. »

Marcel Proust, A la recherche du temps perdu.

Dans ce mémoire, nous nous sommes jusqu'ici toujours attachés à percevoir les modélisations comme étant des outils au service d'une meilleure description et visualisation des données de départ. Nous sommes amenés ici à aborder une autre philosophie. En effet, l'intérieur de la Terre en général et le noyau en particulier, ne sont pas directement observables. Ce sont les modèles de champ qui vont servir ici de clef dans l'étude de paramètres physiques du noyau. Quantifier ceux-ci nécessite cependant de passer par une suite de déductions et d'hypothèses.

8.1 La variation séculaire à la limite noyau-manteau

Nous l'avons déjà évoqué au chapitre 2, le champ magnétique dérive d'un potentiel harmonique. Les modèles de variation séculaire calculés en surface peuvent donc être prolongés jusqu'à la base du manteau à travers la croûte et le manteau en prenant en compte le fait que : le manteau est considéré comme un isolant, ou du moins ayant une conductivité électrique faible [Peyronneau et Poirier, 1989; Shankland et al., 1993; Manda Alexandrescu et al., 1999; Poirier, 2000]; les sources crustales ne perturbent pas les grandes échelles du champ magnétique nucléaire. Le fait que la composante radiale B_r et sa variation séculaire dB_r/dt peuvent être prolongées à la frontière noyau-manteau ouvre des possibilités d'estimation des mouvements au sommet du noyau fluide [Hulot et al., 2002].

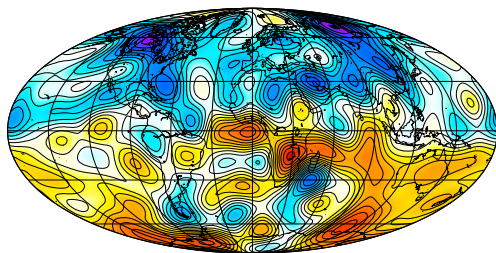
La figure 8.1 montre la composante radiale du champ magnétique ainsi que sa variation séculaire calculées à la limite noyau-manteau à partir du modèle de Sabaka et al. [2004]. Ce modèle de champ permet un calcul mensuel de cette composante et de sa variation séculaire sur une période de 43 ans. Nous avons choisi de montrer seulement quelques cartes de la série sur quatre décennies, délimitées par un intervalle de 10 ans, pour la composante radiale ainsi que pour sa variation séculaire. Nous observons que la variation séculaire de ce modèle montre de fortes variations localisées principalement dans une région située dans la zone Atlantique Nord et Sud. Au contraire, les régions situées sous la zone Pacifique et le pôle sud ne présentent que peu de variations. Une comparaison avec les résultats publiés par Hulot *et al.* (2002) suggère que le modèle de Sabaka *et al.* est capable de décrire des échelles spatiales que l'on ne pouvait pas résoudre auparavant sur un tel intervalle de temps.

Le calcul de modèle de variation séculaire (plus particulièrement ici de sa composante radiale $\frac{\partial B_r}{\partial t}$) à la limite noyau-manteau est la première étape nécessaire au calcul des mouvements de fluide à la surface du noyau liquide conducteur tel que :

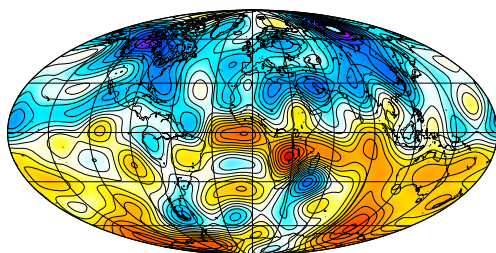
$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -\nabla_H \cdot (\vec{u}B_r) + \frac{\eta}{r}\Delta(rB_r), \quad (8.1)$$

où ∇_H est la composante horizontale de la divergence, \vec{u} la vitesse du fluide à la surface du noyau et η la diffusivité magnétique du noyau. Cette équation montre la relation entre la variation séculaire de la composante radiale du champ, le transport du fluide (induisant le champ) et la diffusion (qui tend à détruire le champ par dissipation ohmique). Pour des échelles temporelles inférieures à quelques centaines d'années, le terme diffusif peut être négligé, donc le noyau est considéré comme infiniment conducteur. Cette approximation est appelée « *hypothèse du flux gelé* » [Roberts et Scott, 1965]. Mais cette seule hypothèse ne conduit pas directement à la détermination du champ de vitesse de façon unique [Backus, 1968], il est nécessaire d'en poser une seconde sur la nature du mouvement (stationnaire, toroïdal ou encore tangentiellement géostrophique). Nous retiendrons ici l' « *hypothèse du mouvement tangentiellement géostrophique* ». Celle-ci implique un équilibre à la limite noyau-manteau entre les composantes horizontales des forces de Coriolis et le gradient horizontal de pression dynamique [Le Mouél, 1984; Chulliat et Hulot, 2001]. Grâce à ces deux hypothèses, le mouvement du fluide au sommet du noyau peut être déterminé presque partout [Eymin, 2004].

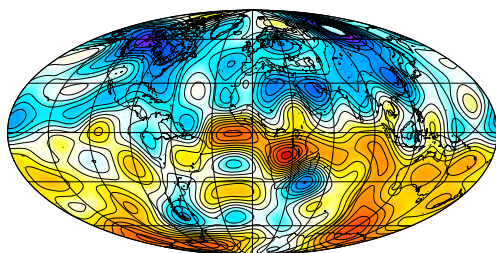
1960.0



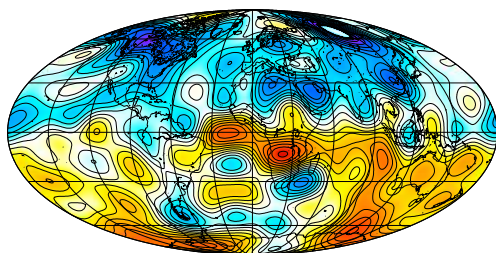
1970.0



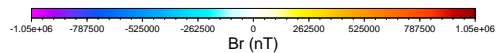
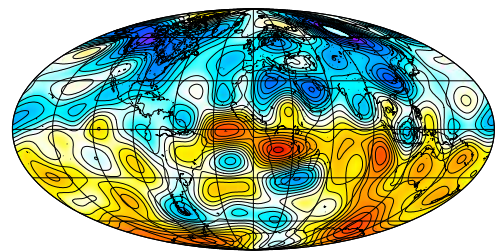
1980.0



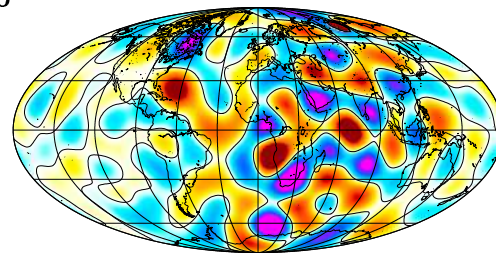
1990.0



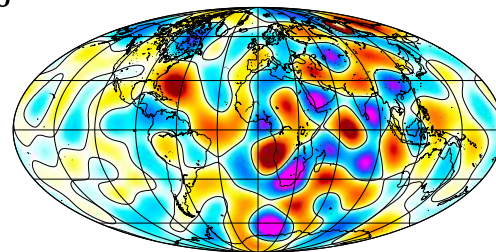
2000.0



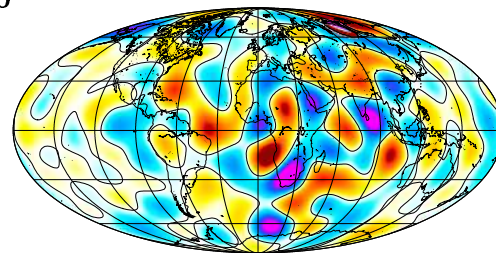
1965.0



1975.0



1985.0



1995.0

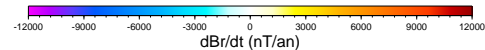
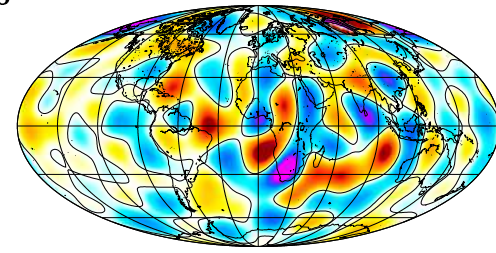


FIG. 8.1: Composante radiale du champ magnétique principal (*gauche*) et sa variation séculaire (*droite*) calculées à la limite noyau-manteau à partir du modèle de Sabaka et al. [2004].

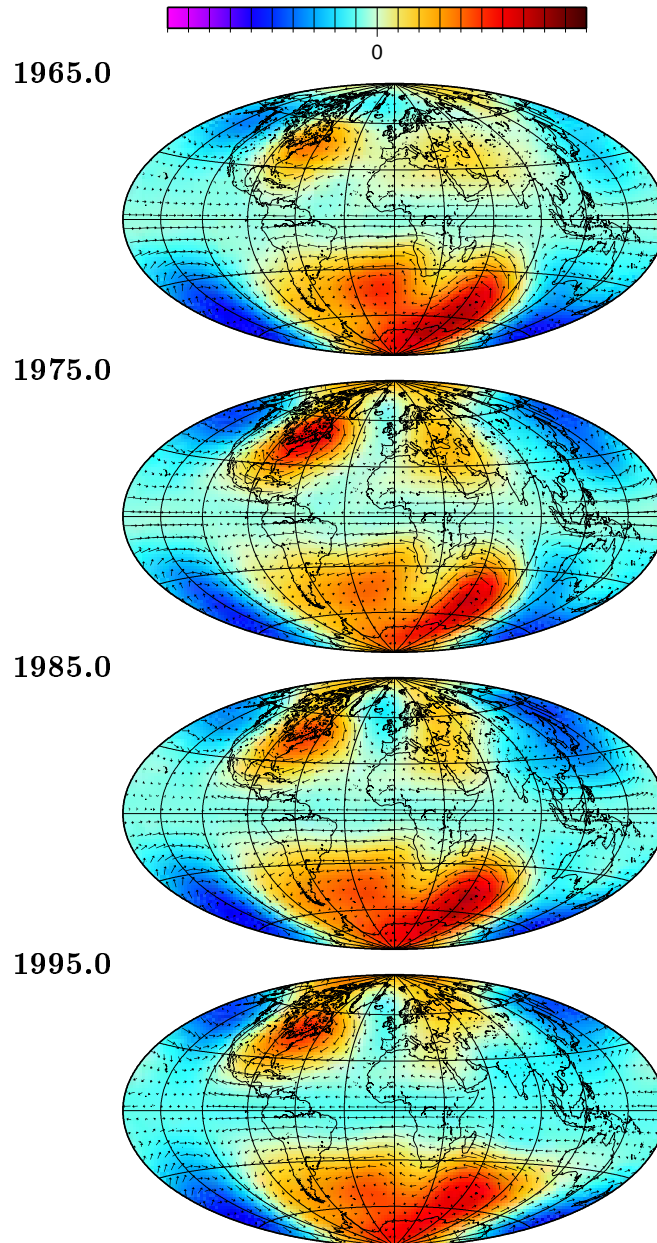


FIG. 8.2: *Pression géostrophique (échelle de couleurs de -1400 à 1400 Pa) et mouvements du fluide (flèches proportionnelles à la vitesse - vitesse maximale de 37 km/an) à la surface du noyau, calculés à partir du modèle de Sabaka et al. [2004] [Eymin, comm. pers.].*

La figure 8.2 représente les mouvements calculés à la frontière noyau-manteau. Nous observons que ces cartes de mouvements montrent la même organisation générale sur la période analysée. En comparant en détail la variation séculaire de 1975.0 et 1995.0, une évolution claire de petites échelles est observée au dessous de l'Afrique du Sud, ce qui se traduit par un changement de vitesse du fluide (voir la direction et la longueur des flèches dessinées dans cette région). La figure 6.2 du chapitre 6.1 représente la variation séculaire à la position d'un observatoire de cette même région (Hermanus en Afrique du Sud). Cette figure permet de vérifier le bon accord entre le dynamisme prédit par les modèles de mouvements et l'évolution rapide de la variation séculaire (de 40 nT/an à -10 nT/an entre 1975 et 1985) à la surface de la Terre.

Par la suite, nous utilisons cette méthode de calcul des mouvements pour : (1) leur représentation mensuelle (entre 1960 et 2004) ; (2) une analyse détaillée d'une éventuelle corrélation entre le mouvement (ou un paramètre lié) et les secousses géomagnétiques.

8.2 Les secousses géomagnétiques et la pression à la limite noyau-manteau

Nous reproduisons ici les résultats d'une étude faisant l'objet d'une publication soumise à la revue *Geophysical Research Letters*.

Résumé de l'article :
**Secousses géomagnétiques dans les modèles de
champ continu :**
Leur signature à la surface du noyau
Céline Eymin, Aude Chambodut et Mioara Mandea
soumis à la revue
Geophysical Research Letters, 2004.

L'étude précédente [Chambodut et al., 2004] montre que les secousses géomagnétiques, détectées dans le modèle CM4, ne semblent pas avoir un caractère global. En déterminant les mouvements du fluide à la surface du noyau pour le même modèle, il est possible d'étudier en détail les secousses géomagnétiques et les paramètres physiques du transport de fluide à la surface du noyau. Les modèles de mouvements reproduisent en effet les caractéristiques globales des secousses géomagnétiques sans toutefois présenter, dans leurs mouvements mêmes, des écoulements particuliers aux dates d'occurrences des secousses. Un indicateur global est trouvé, la pression moyenne dynamique, qui à chaque événement répertorié autour de 1970, 1978, 1990 et 1999 montre un maximum très net de son amplitude. Un autre événement semble avoir eu lieu autour de 1985 localisé principalement dans le Pacifique Sud. Il a été détecté dans des séries de données mensuelles aux observatoires correspondant à cette zone (API, PPT).

Submitted to Geophysical Research Letters

Geomagnetic jerks in the comprehensive magnetic field models: their core surface signature

Céline Eymin¹, Aude Chambodut and Mioara Mandea

Laboratoire de Géomagnétisme, Institut de Physique du Globe de Paris, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France.

Abstract.

We use the comprehensive magnetic model CM4 recently derived by Sabaka et al. [GJI, 2004] to look for the signature of jerks in core surface flows. This model, providing the best temporal resolution between 1960 and 2002 as well as a fine separation of the different magnetic sources, can be used to study this rapid phenomena of internal origin. Using this model, Chambodut et al. [GRL, 2004] characterize the global extension of these events at the Earth's surface. At the core surface, the flows we obtain under the frozen-flux and tangentially geostrophic assumptions do not exhibit any special pattern at jerk times (1969, 1978, 1991, 1999), but a smooth temporal evolution over the whole time period. However, the mean amplitude of the dynamical pressure associated to these flows present maxima at each jerk occurrence and leads to the identification of a jerk in 1985.

1. Introduction

The internal origin of geomagnetic jerks, these rapid jumps of the acceleration of the magnetic field at the Earth's surface, is widely accepted [Malin and Hodder, 1982]. However, the phenomena giving rise to these jumps are still enigmatic. Core surface flow computations may be used to study these events. Indeed, these computations of the fluid velocity at the top of the core from observations of the magnetic field at the Earth's surface provide partial, but nonetheless interesting, insights into the dynamics of the outer core.

According to the magnetic induction equation and the frozen-flux assumption [Roberts and Scott, 1965], the temporal variations of the main magnetic field at the Earth's surface result from the action of the fluid velocity on the magnetic field lines at the core surface. It is thus possible to estimate core surface flows from observations of the main magnetic field and its variations [e.g. Le Mouél, 1984]. The validity of the different assumptions made to compute these flows is difficult to assess properly. However, core surface flows obtained in this way give an explanation for the decadal variations of the length-of-day which are not explained by other processes [Jault et al., 1988]. This argument is a point in favor of the relevance of these computations.

Some previous studies have already attempted to characterize the behavior of the core surface flows during a geomagnetic jerk. All of them agree on the fact that modifications of the fluid velocity come with these abrupt events

[Courillot and Le Mouél, 1984]. However, a stationary flow is not compatible with these rapid modifications of the magnetic field [Gubbins, 1984; Davis and Whaler, 1993; Bloxham et al., 2002]. Moreover, Waddington et al. [1995] and Davis and Whaler [1997] demonstrated that an instantaneous change in the flow is not sufficient to account for the jerk signal at the Earth's surface, even if these flows globally reproduce the observed secular variation. The velocity field thus has to be time-dependent before and after the jerk occurrence. Most of recent studies have searched a particular, but still unknown, event in the core dynamics that would be responsible for the geomagnetic jerks. Hulot et al. [1993] identified a temporal change in the slope of the flow energy at jerk times. Le Huy et al. [2000] observed similarities in the pattern of the acceleration of the very large-scale flow during different geomagnetic jerks. More recently, Bloxham et al. [2002] showed that a time-dependent flow may at a given moment and location produce a jerk signal, because of a particular geometry of the magnetic field rather than because of a particular dynamical event.

In this study, we use the comprehensive geomagnetic field model CM4 [Sabaka et al., 2002, 2004], that provides the best temporal resolution for between 1960 and 2002.5 ever achieved. Moreover, this model, based on both observatory and satellite data, provides a fine separation of the different magnetic sources. Chambodut et al. [2004, thereafter referred to as Paper I], takes advantage of this model to investigate the distribution of geomagnetic jerks at the Earth's surface over the last four decades. In this second paper, we concentrate on the core surface, using the comprehensive model

¹Now at Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique, Université Joseph Fourier, BP53, 38041 Grenoble Cedex 9, France.

CM4 to analyze, more acutely than was previously possible, the modifications of core surface fbws linked to the jerks that occurred around 1969, 1978 and 1991 [see Paper I for references].

2. Core surface flows from 1962 to 2000

A standard spectral method [e.g. *Gire and Le Mouél, 1990*] is used to compute core surface fbws. This method relies on the magnetic induction equation, written at the top of the core, in which the magnetic diffusion is neglected according to the frozen-flux approximation [*Roberts and Scott, 1965*]:

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -\nabla_H \cdot (\mathbf{u}B_r), \quad (1)$$

B_r being the radial component of the magnetic field, \mathbf{u} the fluid velocity, assumed horizontal, and $\nabla_H = \nabla - \partial/\partial r$. To reduce the non-uniqueness of Equation (1) the fbw is assumed to be tangentially geostrophic [*Le Mouél, 1984*]. The radial magnetic field B_r and its secular variation $\partial B_r/\partial t$ observed at the Earth's surface are downward continued to the surface of the core [e.g. *Blakely, 1995*]. The velocity field \mathbf{u} is estimated by inverting, with a Bayesian inverse method [e.g. *Menke, 1984*], a matrix-form of Equation (1) obtained by using spherical harmonic expansions of the magnetic and velocity fields. The obtained fbw model represents the fbw fitting the observed secular variation as well as possible – given the observational uncertainties –, with as few small scales as possible [a detailed description of the method and used parameters is given by *Pais and Hulot, 2000*]. Core surface fbws are then estimated each 0.1 year between 1962.5 and 2000 (as noted in Paper I, the first and last 2.5 years of the time period covered by CM4 are to take with caution because of possible artefacts). Each fbw model is independent from the others and no special condition is imposed at jerk times.

The obtained velocity fields at the core surface are in good agreement with previous computations. The fbw pattern evolves slowly and no special modification of the fbw is visible at jerk times. Figure 1 shows the velocity obtained for 1970 and 1990 epochs. The three main structures appearing in most of core surface fbw computations [*Jault, 1990; Eymin, 2004*] also exist in our models. They indeed exhibit the Atlantic westward current, as well as the two anticyclones located beneath Northern America and Southern Indian Ocean. As these structures are visible in most of the recent fbw models computed with different methods and under different assumptions [*Holme and Whaler, 2001; Amit and Olson, 2004; Pais et al., 2004; Eymin and Hulot, 2004*], they can be considered as the most reliable at the core surface.

Each individual fbw model, corresponding to a given date, reproduces as well as possible the instantaneous secular variation. The fact that each fbw model is independent from the others does not insure that the time series obtained by juxtaposing the instantaneous fbw models correctly ex-

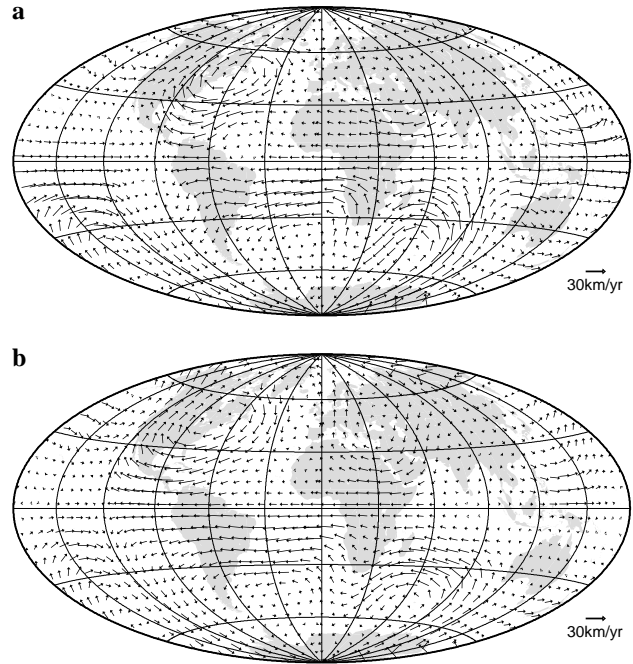


Figure 1. Core surface fbws in (a) 1970 (b) 1990 obtained from the CM4 magnetic model. Arrow sizes are proportional to the fluid velocity

plains the jerk signals [see *Davis and Whaler, 1997*]. Anyhow, figure 2 shows that the fbw time series correctly fits the global jerk characteristics. Indeed, the observed and predicted areas concerned by a jerk at the Earth's surface (identified as a change of sign of the acceleration of the Eastward component of the magnetic field \ddot{Y} , see Paper I) are similar.

3. Pressure maxima and jerks

As already mentioned, the global pattern of the velocity field exhibits no special feature during jerk events. However, we observe an intriguing behavior considering the mean pressure amplitude $\langle |p| \rangle$, defined as:

$$\langle |p| \rangle = \frac{1}{S} \int_S |p| dS, \quad (2)$$

S being the surface of the core and p the dynamical pressure associated to the fbw (the velocity and pressure fields are linked by $\nabla_H p = -2\rho(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u})$, $\boldsymbol{\Omega}$ being the Earth's rotation, because of the tangentially geostrophic assumption). Figure 3 indeed shows that each maximum of the mean pressure amplitude happens at or just before each geomagnetic jerk of the considered time-period, excepting a maximum in 1985.

In order to better link up geomagnetic jerks and pressure maxima at the core surface, we have to investigate whether a jerk, not yet identified, happened in 1985. We globally searched the region concerned by a possible impulse in 1985 using the technique presented in Paper I. Indeed, we have to find out if there is a large part of the Earth's surface covered by a change of the sign of \ddot{Y} , the acceleration of the East-

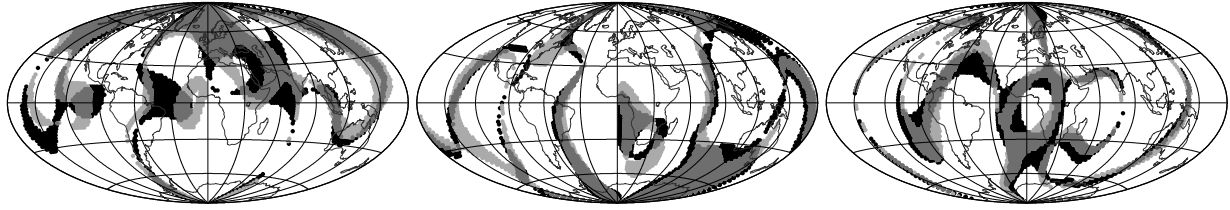


Figure 2. Jerk extension predicted by the time series of core surface fbws in 1969.85 (left), 1977.45 (middle) and 1989.95 (right). Shaded areas correspond to locations where the sign of \dot{Y} changes during a 6-months period centered on the mentioned date. Gray areas: changes predicted by the fbw models, black areas: changes present in model CM4 (see paper I for more details). The three presented epochs correspond to maxima of the area concerned by a jerk-signal (figure 4 of Paper I).

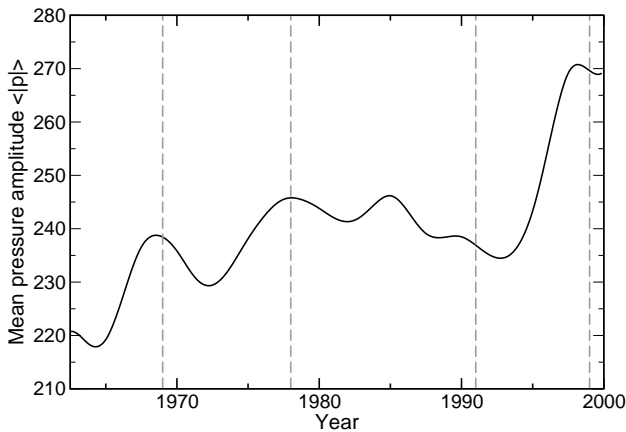


Figure 3. Mean amplitude of the dynamical pressure at the core surface. Vertical lines indicate the occurrence epochs of the widely recognized geomagnetic jerks: 1969, 1978, 1991 and 1999. The first and last 2.5 years are omitted because of a possible artefacts (see Paper I).

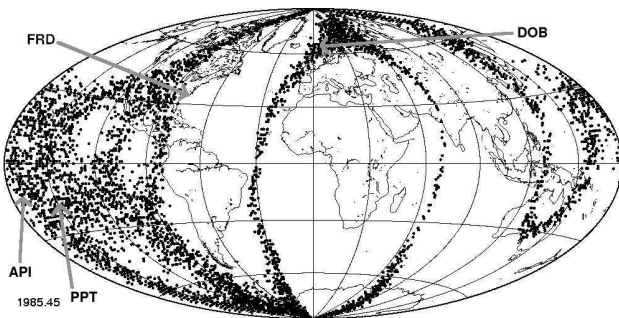


Figure 4. Map indicating locations where the sign of \dot{Y} changes at the Earth's surface (black dots), corresponding to 1985.45, epoch when no geomagnetic jerk has been listed before.

ward component of magnetic field. Figure 4 and figure 4 of paper 1 clearly shows that a significant portion of the Earth's surface is concerned.

Magnetic data provided by different observatories located in the indicated area (API, PPT, FRD, DOB, see figure 4 for their locations) confirm the existence of a jerk signal around 1985. The fact that a very few observatories operate in the Southern Pacific, where the change of sign of \dot{Y} is mainly noted at this epoch, explain why this event has not been noticed when magnetic observatory data have been analyzed.

4. Discussion

The localization of a geomagnetic jerk around 1985 in the Pacific zone may bring some questions about the real existence of this event. Indeed, in Paper I and in this study, a jerk is defined by a large area of the Earth's surface concerned by a jerk signal (a change of sign of the Eastward acceleration of the magnetic field \dot{Y}). As only few magnetic observatories operate in the Southern Pacific Ocean, the comprehensive model CM4 has few constraints to extrapolate the jerk signal effectively present in the available observatory data. It is thus possible that CM4 overestimates the real area concerned by a jerk signal (figure 4). In any case, the correlation between geomagnetic jerks and pressure maxima remains valuable, since fbw models are computed from the comprehensive model that do exhibit a jerk. If CM4 overestimates the extension of this event then the associated pressure maximum is probably not relevant for the core. Let us also remind that geomagnetic jerks have only been witnessed in ground-based magnetic series so far, because none has occurred during the effective life time of the last magnetic satellite missions. Observing such an event in magnetic satellite data will bring a real benefit in globally characterizing geomagnetic jerks. Indeed, their geographical extension will be more precisely determined and the lengthening of the detailed time series will give more weight to the geomagnetic jerk-pressure correlation exposed in this study.

This link between pressure maxima and jerk occurrences may appear, at first sight, similar to modifications of the fbw energy associated to geomagnetic jerks [Hulot et al., 1993]. Nevertheless, this is not exactly the case. Even if the pressure and velocity fields are related by the tangential

geostrophic assumption, pressure and energy maxima do not always appear simultaneously in our flow time series. As a result, the signature of a geomagnetic jerk in the flow energy is less clear than in the dynamical pressure: each energy maximum does not correspond to a jerk, and each jerk does not correspond to an energy maximum (or to a change of the energy slope [Hulot *et al.*, 1993]). The existence of pressure maxima during geomagnetic jerks is not contradictory with the result of Bloxham *et al.* [2002]. Pressure maxima indeed result of a smoothly time-varying flow that do not exhibit other special feature at jerk times. The flow models we obtain are more complex than those of Bloxham *et al.* [2002] but they do explain a more complex signal: the global extent of geomagnetic jerks at the Earth's surface.

Understanding the physical meaning of the observed pressure maxima is an open and interesting question. Indeed, they can either be related to a special event in the bulk core dynamics or just represent usual temporal fluctuations of the geodynamo. Answering this question will help in elucidating the origin of geomagnetic jerks: which are the processes requiring secular variation to vary so abruptly at some given epochs, or alternatively, why does secular variation evolve linearly between these events?

Acknowledgments. All maps were plotted using the GMT software (Wessel and Smith, 1991). This is IGP contribution

References

- Amit, H., and P. Olson (2004), Helical core flow from geomagnetic secular variation, *Phys. Earth Planet. Inter.*, in press.
- Blakely, R. (1995), *Potential theory in gravity & magnetic applications*, Cambridge University Press.
- Bloxham, J., S. Zatman, and M. Dumberry (2002), The origin of geomagnetic jerks, *Nature*, 420, 65–68.
- Chambodut, A., C. Eymin, and M. Manda (2004), Geomagnetic jerks (1), *submitted to Geophys. Res. Lett.*
- Courillot, V., and J.-L. Le Mouél (1984), Geomagnetic secular variation impulses, *Nature*, 311, 709–716.
- Davis, R., and K. Whaler (1993), Velocity fields at the Earth's core surface from 1900 to 1980 using the frozen-flux approximation and steady velocity assumption, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 67, 241–258.
- Davis, R., and K. Whaler (1997), The 1969 geomagnetic impulse and spin-up of the Earth's liquid core, *Phys. Earth Planet. Inter.*, 103, 181–194.
- Eymin, C. (2004), Étude des mouvements à la surface du noyau terrestre : du 17^{ème} au 21^{ème} siècle, Ph.D. thesis, Institut de Physique du Globe de Paris, France.
- Eymin, C., and G. Hulot (2004), On large and small core surface flows inferred from magnetic satellite data, *Phys. Earth Planet. Inter.*, en révision.
- Gire, C., and J.-L. Le Mouél (1990), Tangentially geostrophic flow at core-mantle boundary compatible with the observed geomagnetic secular variation: The large-scale component of the flow, *Phys. Earth Planet. Inter.*, 59, 259–287.
- Gubbins, D. (1984), Geomagnetic field analysis—II. Secular variation consistent with a perfectly conducting core, *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, 77, 753–766.
- Holme, R., and K. Whaler (2001), Steady core flow in an azimuthally drifting reference frame, *Geophys. J. Int.*, 145, 560–569.
- Hulot, G., M. Le Huy, and J.-L. Le Mouél (1993), Secousses (jerks) de la variation séculaire et mouvements dans le noyau terrestre, *C. R. Acad. Sci.*, 317, 333–341.
- Jault, D. (1990), Variation séculaire du champ géomagnétique et fluctuations de la longueur du jour, Ph.D. thesis, Université Paris VII.
- Jault, D., C. Gire, and J.-L. Le Mouél (1988), Westward drift, core motions and exchanges of angular momentum between core and mantle, *Nature*, 333, 353–356.
- Le Huy, M., M. Manda, J.-L. Le Mouél, and A. Pais (2000), Time evolution of the fluid flow at the top of the core. Geomagnetic jerks, *Earth Planets Space*, 52, 163–173.
- Le Mouél, J.-L. (1984), Outer core geostrophic flow and secular variation of Earth's magnetic field, *Nature*, 311, 734–735.
- Malin, S., and B. Hodder (1982), Was the 1970 geomagnetic jerk of internal or external origin?, *Nature*, 296, 726–728.
- Menke, W. (1984), *Geophysical data analysis : Discrete inverse theory*, Academic Press.
- Pais, A., and G. Hulot (2000), Length of day decade variations, torsional oscillations and inner core superrotation: Evidence from recovered core surface zonal flows, *Phys. Earth Planet. Inter.*, 118, 291–316.
- Pais, M. A., O. Oliveira, and F. Nogueira (2004), Non-uniqueness of inverted CMB flows and deviations from tangential geostrophy, *J. Geophys. Res.*, sous presse.
- Roberts, P. H., and S. Scott (1965), On the analysis of the secular variation: 1. A hydromagnetic constraint: theory, *J. Geomagn. Geoelectr.*, 17, 137–151.
- Sabaka, T., N. Olsen, and R. Langel (2002), A comprehensive model of the quiet-time, near-earth magnetic field: Phase 3, *Geophys. J. Int.*, 151, 32–68, doi:10.1111/j.1365-246X.2004.02421.x.
- Sabaka, T., N. Olsen, and M. Purucker (2004), Extending comprehensive models of the Earth's magnetic field with Ørsted and CHAMP data, *Geophys. J. Int.*, 159, 521–547.
- Waddington, R., D. Gubbins, and D. Barber (1995), Geomagnetic field analysis—V. Determining steady core-surface flows directly from geomagnetic observations, *Geophys. J. Int.*, 122, 326–350.

This preprint was prepared with AGU's L^AT_EX macros v5.01, with the extension package 'AGU++' by P. W. Daly, version 1.6b from 1999/08/19.

Quatrième partie

Conclusions

VERS UN NOUVEAU PORTRAIT DU CHAMP MAGNÉTIQUE TERRESTRE...

Les observations du champ magnétique de la Terre présentent une grande variété dans leur nature, leur origine, leur précision et leur distribution spatiale et temporelle (chapitre 3). Notre premier intérêt dans la modélisation du champ géomagnétique a donc été de revenir aux « sources » de tout modèle : les données magnétiques. Il n'est pas trivial en effet de sélectionner, voire de corriger des données. Le modélisateur se doit de faire des choix qui, par la suite, ne provoqueront pas d'altérations de la qualité/quantité des mesures tout en permettant une amenuisement des contributions externes [Chambodut et al., 2003; Schwarte et al., 2003]. Le travail que nous avons effectué sur les critères de sélection des données magnétiques nous a naturellement amené à exploiter celles-ci pour le calcul de modèles de champ selon des décompositions en harmoniques sphériques (chapitre 4).

Nous avons ainsi contribué à l'élaboration de la neuvième génération de l'IGRF [Macmillan et al., 2003]. Mais si les modèles que nous avons obtenus expliquent les observations, et respectent les propriétés physiques et les contraintes imposées par la physique de la Terre, ils exigent néanmoins des ensembles de données globalement bien distribuées sur de courtes périodes de temps. En effet, quel que soit le degré/ordre d'une harmonique sphérique, celle-ci est délocalisée à toute la sphère. La distribution globale des données détermine donc la résolution spatiale de ce type de modèles. Les petites échelles du champ, comme la partie crustale, ne peuvent être correctement retrouvées que si toute la surface du globe est couverte de données d'une façon suffisamment dense et homogène. Une autre conséquence directe de l'utilisation des harmoniques sphériques est une séparation inadéquate des contributions des diverses sources. Les champs principal et crustal ne sont pas représentés par des fonctions séparées.

Même si l'utilisation de données satellitaires tend à résoudre ces problèmes, il nous est apparu nécessaire de développer des méthodes mathématiques d'exploitation plus puissantes et plus flexibles : les *frames* d'ondelettes sur la sphère (chapitre 5).

D'abord, les bases mathématiques de cette méthode ont permis de faire les premières comparaisons avec les résultats obtenus par les développements en har-

moniques sphériques [Holschneider et al., 2003]. Notre intérêt se porta ensuite sur les possibilités offertes par notre nouvelle description du champ magnétique terrestre. L'affranchissement des modèles, développés en *frame* d'ondelettes, face à la dépendance à la distribution de données est sans conteste une propriété primordiale. Ce nouveau genre de modèle a une résolution adaptable à la distribution de données. En d'autres termes, le même modèle tient compte de toutes les différentes longueurs d'onde du champ observé sans rendre forcément nécessaire des études plus locales. Un simple « grossissement » de la partie la plus finement échantillonnée par les données au départ, permet d'observer les plus petites variations présentes modélisées. Si toutefois des études plus locales se doivent d'être réalisées, les effets de bords et les contraignantes conditions aux limites à déterminer pour les méthodes classiques reposant sur les harmoniques sphériques, sont considérablement réduits voir inexistantes avec les *frames* d'ondelettes.

Nous avons effectué des tests, sur notre nouvelle représentation. Avec, en premier lieu, une simple représentation de fonctions scalaires sur la sphère, nous avons vérifié le bon comportement de nos programmes en C/C++ et la stabilité des algorithmes développés. Notre seconde série de tests a porté sur la représentation d'un champ purement radial. Comme pour le cas scalaire, une distribution de données dispersées permet une représentation raisonnable en *frame* d'ondelettes. Par raisonnable, nous entendons que notre modélisation ne fait pas apparaître d'artefact dans les régions les moins bien couvertes, comme cela est le cas avec les harmoniques sphériques. Face à une répartition homogène des données, les modèles obtenus à partir de *frame* d'ondelettes sont de qualité égale à ceux obtenus grâce aux harmoniques sphériques. Enfin, nous avons achevé la représentation de champs vectoriels dérivant de potentiels harmoniques. Par la prise en compte d'informations *a priori* (positions des sources du champ magnétique terrestre interne dans le noyau et la croûte, décroissance du spectre d'énergie du champ, régularité du champ à la frontière noyau-manteau) et l'utilisation d'ensembles de données distribuées de manière régulière ou irrégulière à la surface de la Terre, nous avons appliqué cette nouvelle méthode de modélisation non seulement au champ magnétique terrestre mais également au champ de pesanteur [Chambodut et al., 2004].

... ET DE SON ÉVOLUTION.

Dans la seconde partie de ce manuscrit, nous avons étudié la variation séculaire du champ magnétique terrestre. Si les observatoires sont incontestablement les principaux témoins des variations du champ sur une période de plus d'une dizaine d'années, leur répartition géographique est malheureusement particulièrement inégale. La variation séculaire est donc finement décrite dans les secteurs comportant un grand nombre d'observatoires (Europe), mais nettement moins bien connue dans d'autres régions du monde (principalement les secteurs océaniques dépourvus d'observatoires). Les satellites quant à eux permettent de décrire finement la variation séculaire en tous points du globe mais leur utilisation est trop récente pour permettre des études sur de longues périodes de temps. Chacun de ces types de données présente ses avantages et ses inconvénients. Leur utilisation dans l'étude de la variation séculaire sur de petites échelles spatiales et temporelles n'est pas réellement envisageable.

Nous nous sommes ensuite intéressé à l'une des caractéristiques temporelles les plus énigmatiques du champ magnétique terrestre : les secousses géomagnétiques (chapitre 7). Leur origine et même leur répartition spatiale et temporelle, ne sont pas encore bien déterminées à ce jour. Il nous semblait donc important, plutôt que de chercher une cause à ces phénomènes, de d'abord bien les décrire. Partant de ce principe, nous nous sommes dirigé vers une observation « indirecte » des secousses géomagnétiques au moyen d'un modèle global continu et couvrant les quatre dernières décennies : le modèle CM4 d'après Sabaka et al. [2004].

Nous avons ainsi développé des méthodes extrêmement simples, basées sur la détection des secousses géomagnétiques comme étant des ruptures de pente des séries de la variation séculaire ou des fonctions de type créneau dans l'accélération séculaire. Cette approximation, initialement présentée par Courtillot et al. [1984], a été le fil conducteur de toutes nos études sur les secousses géomagnétiques.

Dans une première étude, les séries synthétiques de variation séculaire obtenues à partir du modèle CM4 ont été approximées par des suites de droites pour des positions régulièrement espacées sur la surface du globe. Les ruptures de pente de la variation séculaire, modélisées comme la jonction entre deux droites consécutives, sont considérées comme correspondant à des dates d'occurrence de secousses. Des informations *a priori* ont cependant été utilisées : les dates

des secousses sont recherchées dans des intervalles de temps de ± 3 ans autour d'époques connues de secousses (1970, 1980 et 1991). La distribution temporelle des secousses sur la surface de la Terre est ainsi déterminée et comparée avec celle obtenue par l'analyse en ondelettes des séries magnétiques des observatoires [Chambodut et Mandeau, 2004]. La découverte de zones, que nous avons nommées « aveugles », où aucune détection claire des secousses n'a pu être opérée, est plus tard confirmée par notre seconde étude sur la répartition spatiale des secousses.

A partir du même modèle, et cette fois-ci en étudiant non pas les ruptures de pentes de la variation séculaire mais les changements de signe de sa dérivée seconde (connue comme l'accélération séculaire) nous avons pu observer, mois par mois, la distribution spatiale des secousses sur les quatre dernières décennies [Chambodut et al., 2004]. Un résultat important de cette étude est que les secousses, vues par les modèles géomagnétiques, ne présentent pas un caractère global, ni une géométrie particulièrement symétrique.

Nous nous sommes borné à observer les secousses en comparant toujours scrupuleusement les résultats obtenus à partir du modèle CM4 avec les résultats obtenus à partir des données fournies par les observatoires. Il était important de ne pas perdre le lien avec les données et de ne pas faire des analyses purement basées sur des mesures synthétiques, issues de modèles.

Si nous n'avons pas avancé une explication physique à ces phénomènes nous avons cependant analysé la variation séculaire à la surface du noyau, puis, décelé un lien entre secousse magnétique et un paramètre physique à la limite noyau-manteau. Notre réflexion a suivi un cheminement simple. Si la variation séculaire synthétique, obtenue à partir du modèle CM4, traduit la présence des secousses géomagnétiques à la surface de la Terre, alors il doit en être de même à la surface du noyau. La corrélation entre les maxima des aires à la surface de la Terre présentant un changement de signe de la seconde dérivée de la composante Est du champ ($\ddot{Y}(t)$) et ceux de la pression géostrophique au sommet du noyau, semble très claire [Eymin et al., 2004]. La détection d'une secousse apparemment non-répertoriée autour de 1986 dans les deux courbes vient confirmer le lien étroit entre ces deux paramètres. Principalement localisé dans le Pacifique Sud, l'évènement de 1986 est également détecté dans les données d'observatoires situés dans cette région.

PERSPECTIVES

Les perspectives de mes travaux présentés dans ce mémoire reposent sur deux principaux axes. D'abord, les futurs projets d'acquisition de données magnétiques représentent de fabuleux espoirs pour tout géomagnéticien. Ensuite, la poursuite du développement des *frames* d'ondelettes sur la sphère à des études plus appliquées et plus complètes me semble une évidence.

De futurs projets...

Les deux futurs projets d'acquisition de données magnétiques, que je présente ici, me tiennent particulièrement à coeur car ils sont, à mon sens, parfaitement complémentaires.

En effet, les observatoires dits « fonds de mer » vont permettre d'obtenir des données, à la surface de la Terre, dans des régions jusqu'ici totalement vides de tout observatoire. L'importance des zones immergées amène de plus en plus la communauté scientifique à s'intéresser aux zones océaniques et aux possibilités d'implantations de stations automatiques de mesures. Le challenge reste important du point de vue technologique et scientifique. Des contraintes déjà résolues pour les missions satellitaires restent posés pour de futures stations fonds de mer, comme (1) l'utilisation de matériaux résistant à la corrosion et à la pression, (2) la nécessité d'une parfaite étanchéité, (3) l'approvisionnement en énergie par câbles sous-marins ou batteries et (4) la transmission des mesures. Leur réalisation (Fi-

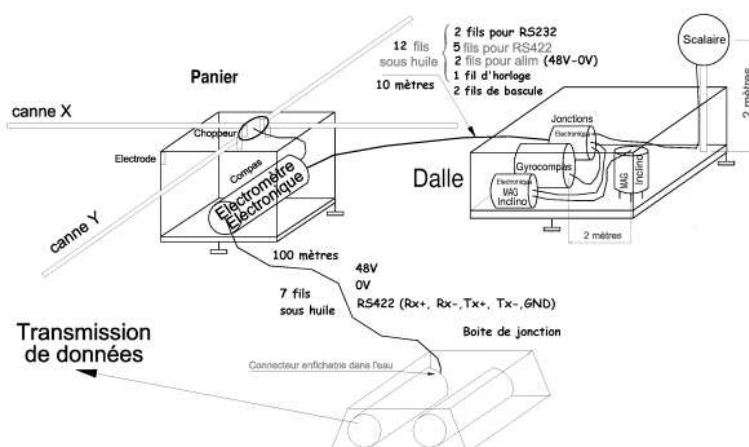


FIG. 8.3: Exemple de structure d'un observatoire géomagnétique et géoélectrique fond de mer H2O (de l'anglais Hawaii-2 Observatory). Cet observatoire est situé à mi-chemin entre la Californie et Hawaii, à 5000 m de profondeur depuis fin 2003.

gure 8.3) en est encore au stade expérimental et reste coûteuse financièrement. Plusieurs programmes d'observatoires « fond de mer » (OFM ¹) ont vu le jour ces dix dernières années.

Les mesures acquises par ces stations vont, non seulement permettre la réalisation de modèles de champ avec seulement des données acquises à la surface de la Terre (donc la diminution des influences des contributions externes sera encore plus importante) mais également rendre possible l'étude de la variation séculaire de façon éminemment plus précise.

Le second projet dont je souhaite vous parler ici se situera à plusieurs centaines de kilomètres d'altitude au dessus des observatoires fond de mer. Grâce aux enseignements tirés des précédentes missions satellitaires et grâce aux récentes améliorations techniques, le lancement de constellations satellitaires semble possible. Ainsi, la future mission Swarm ² (« essaim » en anglais) est en cours de

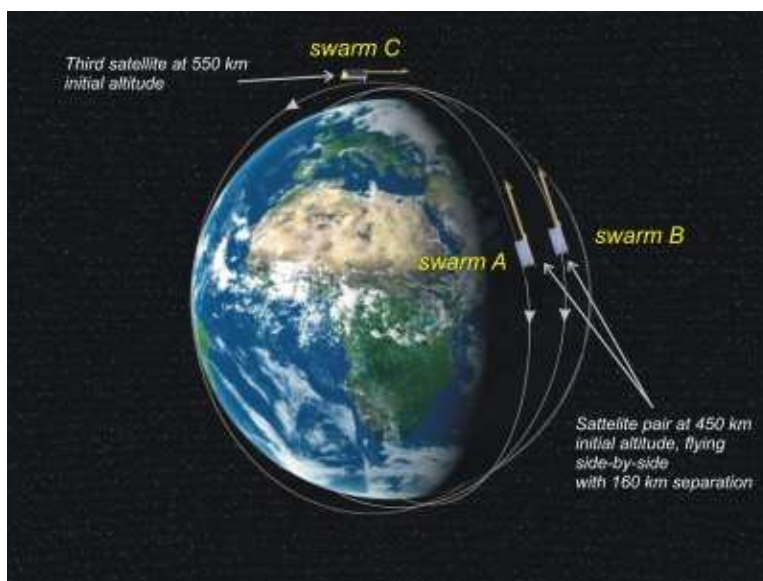


FIG. 8.4: *Le positionnement dans l'environnement terrestre de la constellation des satellites du projet Swarm.*

développement. La constellation devrait être lancée vers 2009. L'objectif de cette mission est de permettre l'étude la plus complète jamais réalisée du champ géomagnétique terrestre et de son environnement. La constellation Swarm, embarquée à bord d'un seul lanceur, comprendra trois satellites identiques considérés comme faisant parti d'un même système : deux d'entre eux décriront une orbite polaire

¹voir la page web : <http://www.dt.insu.cnrs.fr/ofm/ofm.html>

²voir la page web : http://www.esa.int/esaLP/ESA3QZJE43D_swarm_0.html

située initialement à 450 km d'altitude et le troisième parcourra une autre orbite située à 550 km (figure 8.4).

Leurs instruments de haute résolution mesureront de manière extrêmement précise l'intensité, la direction et les variations du champ magnétique terrestre en les complétant par d'autres données de navigation, d'accélérométrie et de mesures électriques. Ces observations permettront de modéliser et de séparer les différentes sources du champ géomagnétique. Elles contribueront également à étudier la composition du globe, ses processus internes ou encore l'influence du Soleil sur le système terrestre [Friis-Christiensen et al., 2004].

...pour de futurs modèles.

L'acquisition d'un nombre si important de données nécessitera de la part de la communauté géomagnéticienne de ne pas se laisser submerger. Dans ce contexte, les modèles en harmoniques sphériques ne m'apparaissent pas comme le seul outil de modélisation mathématique à utiliser. Les *frames* d'ondelettes pourraient avantageusement tirer parti de ces nouvelles données mieux réparties. J'espère avoir réussi à souligner la portée du développement d'un tel type de modèle. Le nombre de coefficients nécessaires au calcul des modèles en harmoniques sphériques dépend de la résolution souhaitée, qui elle-même dépend de la distribution initiale des données. Les développements en *frame* ondelettes ne reposent que sur la distribution initiale des mesures.

Notre objectif est de représenter toutes les sources du champ magnétique terrestre dans l'espace en trois dimensions, à l'intérieur et autour de la Terre, en tenant compte de la variabilité des échelles spatiales et temporelles. Nous avons déjà expliqué l'intérêt et la force des ondelettes pour les descriptions d'échelles spatiales. Pour les échelles temporelles, plutôt que d'utiliser des splines temporelles qui « moyennent » les données, l'utilisation d'ondelettes temporelles est parfaitement envisageable. Les processus à très long terme de la dynamo, comme les inversions et excursions du champ, sur plusieurs millions d'années, pourraient être modélisés à l'aide d'ondelettes temporelles grandes échelles tandis que sa dynamique à court terme, exprimée par les secousses, pourrait être représentée par des ondelettes temporelles de plus petites échelles. Même les événements magnétiques à très court terme, comme les orages magnétiques de plusieurs heures à quelques secondes, seraient susceptibles d'être représentés. Un modèle capable d'employer une distribution hétérogène des données aussi bien dans le domaine spatial que temporel permettra une description de toutes les échelles contenues

dans les données utilisées, et seulement dans celles-ci.

Les perspectives sont nombreuses avec : la possibilité de séparer les sources internes et externes, d'obtenir une meilleure discrimination entre champ principal et contributions crustales, ou champs ionosphérique et magnétosphérique.

La séparation entre les sources internes et externes est habituellement faite par la sélection de données selon les indices géomagnétiques, et/ou par un développement en harmoniques sphériques complet avec un potentiel interne et un potentiel externe. Cependant, les modèles internes de champ obtenus par cette méthode sont encore « pollués » par ces contributions externes. Les champs externes ont différentes échelles de temps et différentes géométries. L'utilisation d'une *frame* d'ondelettes bien contrainte (positionnement des ondelettes non seulement dans le noyau et la croûte mais également dans l'ionosphère et la magnétosphère) devrait permettre d'améliorer sensiblement les modèles internes du champ magnétique terrestre. Les nouveaux modèles décriront toutes les échelles spatiales et temporelles des différentes sources.

Ces perspectives ne sont pas seulement applicables au seul domaine du géomagnétisme. La poursuite de ma collaboration avec le laboratoire de gravimétrie et géodynamique (Département de Géophysique Spatiale et Planétaire, UMR 7096) devrait prochainement donner lieu à une étude conjointe des champs magnétique et de pesanteur d'une zone du Pacifique Sud.

Bibliographie

- Alexandrescu, M., D. Gibert, G. Hulot, J.-L. Le Mouél, et G. Saracco (1995). Detection of geomagnetic jerks using wavelet analysis. *J. Geophys. Res.* *100*(B7), 12557–12572.
- Alexandrescu, M., D. Gibert, G. Hulot, J.-L. Le Mouél, et G. Saracco (1996). Worldwide wavelet analysis of geomagnetic jerks. *J. Geophys. Res.* *101*, 21975–21994.
- Backus, G. (1968). Kinematics of geomagnetic secular variation in a perfectly conducting core. *Philos. Trans. R. Soc. London A263*, 239–266.
- Backus, G., R. Parker, et C. C. (1996). *Foundations of geomagnetism*. Cambridge University Press.
- Bartels, J., N. H. Heck, et H. Johnston (1939). The three-hour-range index measuring geomagnetic activity. *J. Geophys. Res.* (44), 411.
- Bellanger, E., D. Gibert, et J.-L. Le Mouél (2002). A geomagnetic triggering of Chandler wobble phase jumps? *Geophys. Res. Lett.* *29*(7), 28/1–28/4.
- Bethoux, N., G. Ouillon, et M. Nicolas (1998). The instrumental seismicity of the western alps : spatio-temporal patterns analysed with the wavelet transform. *Geophys. J. Int.* *135*, 177–194.
- Bloxham, J., S. Zatman, et M. Dumberry (2002). The origin of geomagnetic jerks. *Nature* *420*, 65–68.
- Cain, J.C. and Daniels, W., S. Hendricks, et D. Jensen (1965). An evaluation of the main geomagnetic field, 1940-1962. *J. Geophys. Res.* *70*, 3647–3674.
- Chambodut, A., C. Eymin, et M. Manda (2004). Geomagnetic jerks in the comprehensive magnetic field models : their earth's surface distribution. *soumis à Geophys. Res. Lett.*

- Chambodut, A. et M. Manda (2004). Evidence for geomagnetic jerks in cm3 comprehensive model. *soumis à Earth Planets Space*.
- Chambodut, A., I. Panet, M. Manda, M. Diament, M. Holschneider, et O. Jamet (2004). Wavelet frames : an alternative to spherical harmonic representation of potential fields. *soumis à Earth Planets Space*.
- Chambodut, A., J. Schwarte, B. Langlais, H. Lühr, et M. Manda (2003). The selection of data in field modelling. In *Proceedings from the 4'th Oersted International Science Team Conference*, DMI Scientific Report 03-09, pp. 31–34. Danish Meteorological Institute.
- Chulliat, A. et G. Hulot (2001). Geomagnetic secular variation generated by a tangentially geostrophic flow under the frozen flux assumption - i. necessary conditions. *Geophys. J. Int.* 147, 237–246.
- Courtilot, V., J. Ducruix, et J.-L. Le Mouël (1978). Sur une accélération récente de la variation séculaire du champ magnétique terrestre. *C.R. Hebd. Séances Acad. Sci., ser. D* 287, 1095–1098.
- Courtilot, V., J.-L. Le Mouël, et J. Ducruix (1984). On backus' mantle filter theory and the 1969 geomagnetic impulse. *Geophys. J. R. Astr. Soc.* 78, 619–624.
- Dahlke, S., G. Steidl, et G. Teschke (2001). Coorbit spaces and banach frames on homogeneous spaces with applications to analyzing functions on spheres. Technical report, Zentrum für Technomathematik, Uni-Bremen.
- Daubechies, I. (1988). Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.* 41(7), 909–96.
- Daubechies, I. (1991). *Ten lectures on wavelets*. CMBS Lecture Notes Series. SIAM.
- De Michelis, P., L. Cafarella, et A. Meloni (1998). Worldwide character of the 1991 geomagnetic jerk. *Geophys. Res. Lett.* 25, 377.
- Eymin, C. (2004). *Étude des mouvements à la surface du noyau terrestre : du 17ème au 21ème siècle*. Thèse de Doctorat, Institut de physique du Globe de Paris, France.

- Eymin, C., A. Chambodut, et M. Manda (2004). Geomagnetic jerks in the comprehensive magnetic field models : their core surface signature. *soumis à Geophys. Res. Lett.*
- Foufoula-Georgiou, E. et P. Kumar (1994). Wavelets analysis and its applications. In *Wavelets in Geophysics*, Vol. 4. Academic Press, San Diego, California.
- Freedon, W., T. Gervens, et S. M. (1998). *Constructive Approximation on the Sphere (With Applications to Geomathematics)*. Oxford Science Publication.
- Freedon, W. et U. Winterheuser (1996). Spherical wavelet transform and its discretization. *Advances in Computational Mathematics* 5, 51–94.
- Friis-Christensen, E., A. De Santis, A. Jackson, G. Hulot, A. Kuvshinov, H. Lühr, M. Manda, N. Maus, S. and Olsen, M. Purucker, M. Rothacher, T. Sabaka, A. Thomson, et P. Vennerstrøm, S. and Visser (2004). Swarm - the earth's magnetic field and environment explorers. Technical report, ESA SP-1279(6).
- Gibert, D., M. Holschneider, et J.-L. Le Mouél (1998). Wavelet analysis of the Chandler wobble. *J. Geophys. Res.* 103(B11), 27,069–27,090.
- Goupillaud, P., A. Grossmann, et J. Morlet (1984). Cycles-octaves and related transforms in seismic signal analysis. *Geoexploration* 23, 85–102.
- Grossman, A. et J. Morlet (1985). *Mathematics and Physics, 2*. World Scientific Publishing, Singapore.
- Holme, R. (2000). Modelling of attitude error in vector magnetic data : application to Ørsted data. *Earth Planets Space* 52, 1187–1197.
- Holme, R., N. Olsen, M. Rother, et H. Lühr (2002). Co2 : A champ magnetic field model. In *Proceedings of the First CHAMP Science Meeting*, pp. 220–225. Springer Verlag.
- Holschneider, M. (1996). Wavelet analysis on the sphere. *J. Math. Phys.* 37(8), 4156–4165.
- Holschneider, M., A. Chambodut, et M. Manda (2003). From global to regional analysis of the magnetic field on the sphere using wavelet frames. *Phys. Earth Planet. Int.* 135, 107–124.

- Hulot, G., C. Eymin, B. Langlais, M. Manda, et N. Olsen (2002). Small scale structure of the geodynamo inferred from ørsted and magsat satellite data. *Nature* 416, 620–623.
- Jacobs, J. (Ed.) (1987). *Geomagnetism*, Vol. 1,2,3 et 4. Academic Press.
- Kivelson, M. G. et C. T. Russell (1995). *Introduction to Space Physics*. Cambridge University Press.
- Langel, R. (1987). *Geomagnetism*, Chapter The main field. Academic Press, New York.
- Langel, R. et W. Hinze (1998). *The magnetic field of the Earth's lithosphere - the satellite perspective*. Cambridge University Press.
- Langlais, B., M. Manda, et P. Ultré-Guérard (2003). High-resolution magnetic field modeling : application to magsat and ørsted data. *Phys. Earth Planet. Int.* 135, 77–92.
- Lanzerotti, L. J., R. A. Langel, et A. D. Chave (1993). *Encyclopedia of Applied Physics*, Chapter Geoelectromagnetism. VCH Publishers, New York.
- Le Huy, M., M. Manda, G. Hulot, et J.-L. Le Mouél (1998). On the characteristics of successive geomagnetic jerks. *Earth Planets Space* 50, 723–732.
- Le Huy, M., M. Manda, J.-L. Le Mouél, et A. Pais (2000). Time evolution of the fluid flow at the top of the core. *Earth Planets Space* 52, 163–173.
- Le Mouél, J.-L. (1984). Outer-core geostrophic flow and secular variation of earth's geomagnetic field. *Nature* 311, 734–735.
- Lemarié-Rieusset, P. et Y. Meyer (1986). Ondelettes et bases hilbertiennes. *Rev. Mat. IberoAm.* 2, 1–18.
- Lowes, F. (1974). Spatial power spectrum of the main geomagnetic field and extrapolation to the core. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*
- Macmillan, S. (1996). A geomagnetic jerk for the early 1990's. *Earth Planet. Sci. Lett.* 137, 189–192.

- Macmillan, S. and Maus, S., T. Bondar, A. Chambodut, V. Golovkov, R. Holme, B. Langlais, V. Lesur, F. Lowes, H. Lühr, W. Mai, M. Manda, N. Olsen, M. Rother, T. Sabaka, A. Thomson, et I. Wardinski (2003). The 9th-generation international geomagnetic reference field. *Geophys. J. Int. et EOS, Trans. Amer. Geophys. Union*.
- Mallat, S. (1989). A theory for multiresolution signal decomposition of the wavelet representation. *IEEE Trans. Pattern Anal. and Machine Intelligence* 31, 679–693.
- Manda, M., E. Bellanger, et J.-L. Le Mouël (2000). A geomagnetic jerk for the end of the 20th century? *Earth Planet. Sci. Lett.* 183, 369–373.
- Manda Alexandrescu, M., J.-L. Gibert, D. and Le Mouël, G. Hulot, et G. Saracco (1999). An estimate of average lower mantle conductivity by wavelet analysis of geomagnetic jerks. *J. Geophys. Res.* 104, 17 735–17 745.
- Mauersberger, P. (1956). Das mittel der energiedichte des geomagnetischen hauptfeldes an der erdoberfläche und seine säkulare änderung. *Gerlands Beitr. Geophys.* 65, 207–215.
- Maus, S., M. Rother, R. Holme, H. Lühr, N. Olsen, et V. Haak (2002). First scalar magnetic anomaly map from champ satellite data indicates weak lithospheric field. *Geophys. Res. Lett.* 29(14). 10.1029/2001GL013685.
- Mayaud, P. N. (1980). *Derivation, meaning, and use of geomagnetic indices*, Vol. 22 of *Geophys. Monogr.* American Geophysical Union, Washington, DC.
- Menvielle, M. et A. Berthelier (1991). The derived planetary indices : description and availability. *Rev. of Geophys.* 29, 415–432.
- Meyer, Y. (1986). Ondelettes et fonctions splines. In *Seminaire Equations aux dérivées partielles*. Cent. Math. Ecole Polytech., Palaiseau, France.
- Meyer, Y. et S. Roques (1993). Progress in wavelet analysis and applications. In *Proceedings of the International Conference "Wavelets and Applications"*, F. Editions Frontières, Gif-sur-Yvette (Ed.).
- Moreau, F., D. Gibert, M. Holschneider, et G. Saracco (1997). Wavelets analysis of potential fields. *Inverse Problems* 13, 165–178.

- Moreau, F., D. Gibert, M. Holschneider, et G. Saracco (1999). Identification of sources of potential fields with continuous wavelets transform : one basic theory. *J. Geophys. Res.* 104, 5003–5013.
- Murenzi, R. (1990). *Ondelettes multidimensionnelles et application à l'analyse d'images*. Thèse de Doctorat, Univ. Cathol. Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium.
- Nagao, H., T. Iyemori, et T. Higuchi, T. and Araki (2003). Lower mantle conductivity anomalies estimated from geomagnetic jerks. *J. Geophys. Res.* 108(B5), 2254, doi :10.1029/2002JB001786.
- Peyronneau, J. et J. Poirier (1989). Electrical conductivity in the earth's lower mantle. *Nature* 342, 537–539.
- Poirier, J. (2000). *Introduction to the Physics of the Earth's Interior*. Ed. Cambridge University Press.
- Rangarajan, G. K. (1989). *Geomagnetism*, Vol. 3, Chapter Indices of geomagnetic activity. Academic Press, London.
- Roberts, P. H. et S. Scott (1965). On analysis of the secular variation (i) a hydromagnetic constraint : Theory. *J. Geomag. Geoelectr.* 17(2), 137–151.
- Sabaka, T. J., N. Olsen, et R. A. Langel (2002). A comprehensive model of the quiet-time, near-earth magnetic field : phase 3. *Geophys. J. Int.* 151, 32–68.
- Sabaka, T. J., N. Olsen, et M. E. Purucker (2004). Extending comprehensive models of the earth's magnetic field with ørsted and champ data. *Geophys. J. Int.*.
- Schmidt, A. (1935). Tafeln der normierten kugelfunktionen und ihrer ableitungen nebst den logarithmen dieser zahlen sowie formeln zur entwicklung nach kugelfunktionen. *Engelhard-Reyher Verlag, Gotha*.
- Schwarte, J. (2004). *Modelling the Earth's magnetic field of magnetospheric origin from CHAMP data*. Thèse de Doctorat, Universität Braunschweig.
- Schwarte, J., A. Chambodut, H. Lühr, et M. Manda (2003). Parameterisation of external magnetic fields from champ vector data. In *Proceedings from the 4'th Oersted International Science Team Conference*, DMI Scientific Report 03-09, pp. 135–138. Danish Meteorological Institute.

- Shankland, T. J., J. Peyronneau, et J. Poirier (1993). Electrical conductivity of the earth's lower mantle. *Nature* 366, 453–455.
- Simons, M., S. Solomon, et H. Hager (1997). Localization of gravity and topography : constraints on the tectonics and mantle dynamics of venus. *Geophys. J. Int.* 131, 24–44.
- Stauning, P. et F. Primdahl (2000). First detection of global dawn-dusk ionospheric current intensities using ampere's integral law on ørsted orbits. *Geophys. Res. Lett.* 27, 3273–3276.
- Taylor, P. et J. Frawley (1987). Magsat anomaly data over the kursk region, ussr. *Phys. Earth Planet. Int.* 45.
- Ultré-Guérard, P. (1996). *Du paléomagnétisme au géomagnétisme spatial : analyse de quelques séquences temporelles du champ magnétique terrestre*. Thèse de Doctorat, Institut de Physique du Globe de Paris, Paris.

Annexe A

Algorithme de sélection des données de nuit

Les données satellitaires que nous utilisons sont localisées spatialement, dans un repère sphérique géocentrique (R, θ, ϕ) , et temporellement (année, jour de l'année, heure, minute et seconde en temps UTC¹).

Le but de cet algorithme est de déterminer à partir de ces renseignements, si, lors de l'acquisition de la mesure considérée, le satellite se situait dans et à l'aplomb de la « face nuit » de la Terre. Le résultat n'est pas immédiat et nécessite plusieurs précalculs présentés et commentés dans les paragraphes ci-dessous. Nous rappelons ici que tous ces calculs dérivent d'une éphéméride dont la validité temporelle est limitée à la période 1900-2100. Tous les angles sont exprimés en radians et ont une précision de l'ordre de 0.0015 radians. Enfin, les phénomènes de précession, nutation et réfraction de la lumière ne sont pas pris en compte dans cet algorithme.

A.1 La date julienne en temps UTC

Le calendrier julien est une échelle de temps qui numérote, sans discontinuité, les jours depuis le lundi 1 janvier 4712 avant Jésus-Christ à 12 :00 (midi). Il a été introduit par l'astronome Scaliger en 1583. Pour calculer le jour julien à partir de la date du calendrier grégorien (calendrier actuel), l'algorithme suivant peut être utilisé.

¹De l'anglais Universal Time Coordinated - 00 :00 UTC est équivalent à 00 :00 GMT, ce qui correspond à l'heure « solaire » à la longitude 0°.

Soient les coordonnées temporelles dans le calendrier grégorien en temps UTC, données par le satellite pour chaque mesure :

$$\left\{ \begin{array}{l} A : \text{année} \\ M : \text{mois} \\ J : \text{jour dans le mois considéré} \\ H : \text{heure} \\ M : \text{minute} \\ S : \text{seconde} \end{array} \right.$$

Soient les coordonnées temporelles intermédiaires pour la date julienne recherchée :

$$\left\{ \begin{array}{l} y : \text{année} \\ m : \text{mois} \\ d : \text{jour} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Si } (M > 2) & \text{ALORS } (y = A \text{ ET } m = M) \\ \text{Si } (M = 1) \text{ OU } (M = 2) & \text{ALORS } (y = A - 1 \text{ ET } m = M + 12) \end{array} \right.$$

(Nous considérons ainsi que les mois de janvier et février sont le 13^e et 14^e mois de l'année précédente.)

Une année est bissextile si elle est divisible par 4 et non par 100. Les jours supplémentaires introduits par ces années sont additionnés. Nous notons $E(X)$ la partie entière de la variable X :

$$d = 2 - E(y/100) + E(E(y/100)/4)$$

Enfin, le jour julien noté JD est tel que :

$$JD = E(365.25y) + E(30.6001(m + 1)) + J + 1720994.5 + d \quad (\text{A.1}) \\ + (3600H + 60M + S)/86400$$

$$\text{où : } \left\{ \begin{array}{ll} 365.25 & : \text{nombre de jours dans une année julienne} \\ 30.6001 & : \text{nombre de jours dans un mois julien} \\ 1720994.5 & : \text{nombre de jours juliens entre le début du calendrier} \\ & \text{julien et le début du calendrier grégorien.} \end{array} \right.$$

Un point de repère temporel plus proche de notre époque peut-être utilisé comme référence. Le jour julien 2 440 000 commence à midi le 23 mai 1968.

A.2 Le temps sidéral et la longitude du Soleil

Le temps sidéral est mesuré en jours sidéraux, qui séparent deux passages consécutifs d'une même étoile au même méridien. Le temps sidéral correspond à l'intervalle de temps écoulé depuis le dernier passage du point vernal (point d'intersection entre l'équateur et l'écliptique) au méridien du lieu d'observation. Ainsi, le temps sidéral à Greenwich est tel que :

$$T_0 = 4.89496 + 2301.2167531t \quad (\text{A.2})$$

avec t une variable intermédiaire : $t = \frac{JD-2451545}{365.25}$. Le temps sidéral local se déduit ensuite :

$$T_{local} = T_0 - \frac{\pi\phi}{180} \quad (\text{A.3})$$

où ϕ est la longitude de la position du satellite exprimée en degrés négativement à l'est et positivement à l'ouest. La longitude L du Soleil est calculée par l'approximation :

$$L = 4.89496 + 6.2833197t + 0.03342 \sin(6.2401 + 6.283076t) + 0.00035 \sin(6.20 + 12.5662t) \quad (\text{A.4})$$

avec toujours $t = \frac{JD-2451545}{365.25}$

A.3 L'ascension droite et la déclinaison du Soleil

Il est d'abord nécessaire d'utiliser des coordonnées indépendantes de la position de la mesure satellitaire, c'est à dire indépendantes de ce que l'on pourrait considérer comme l'observateur dans notre problème. Les coordonnées équatoriales sont utilisées. Dans ce système, les étoiles sont supposées être très loin de la Terre. Cette dernière est donc considérée comme un point minuscule au centre du repère. La position de l'étoile, ici le Soleil, est représentée par deux angles : l'ascension droite α et la déclinaison δ comme le montre la Figure A.1. Les deux références pour la mesure de ces angles sont l'équateur Céleste (projection de l'équateur terrestre) et le point vernal.

L'ascension droite α et la déclinaison du Soleil δ sont calculées trigonométriquement à partir de la Longitude L du Soleil et de l'obliquité² $\epsilon = 0.4091$ radians

²Angle que fait le plan de l'écliptique avec le plan de l'équateur céleste

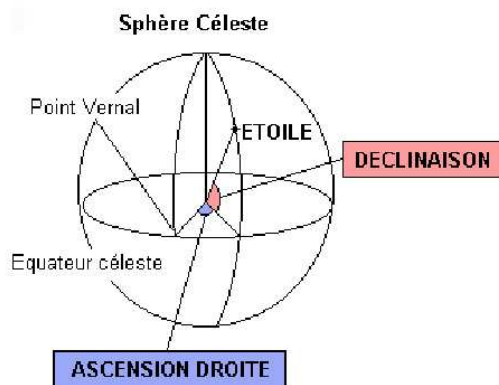


FIG. A.1: Position d'une étoile sur la sphère Céleste.

= 23.44° :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\cos \epsilon \sin L}{\cos L}\right) \quad (\text{A.5})$$

$$\delta = \arcsin(\sin \epsilon \sin L) \quad (\text{A.6})$$

L'ascension droite α est déterminée à π près et il y a lieu de vérifier que sa valeur calculée est proche de celle de L .

A.4 L'angle horaire, l'azimut et la hauteur du Soleil

Ensuite, nous devons considérer la position même de la mesure. Nous utilisons un autre système de coordonnées, dites coordonnées célestes horizontales. La position définie comme celle de l'observateur est ici en réalité la position du satellite projetée normalement à la surface de la Terre. Deux angles sont définis à partir de cette position. L'azimut a indique l'angle dans le plan horizontal à la surface du globe entre la direction du sud géographique et le Soleil. Cet angle est mesuré de 0° à 360°, positif vers l'ouest. La hauteur h est l'angle entre l'horizon et le Soleil, mesuré de 0° à 180°.

$$\sin(h) = \sin\left(\frac{\pi}{180}\theta\right) \sin(\delta) + \cos\left(\frac{\pi}{180}\theta\right) \cos(\delta) \cos(H) \quad (\text{A.7})$$

$$\cos(h) \sin(a) = \cos(\delta) \sin(H) \quad (\text{A.8})$$

$$\cos(h) \cos(a) = -\cos\left(\frac{\pi}{180}\theta\right) \sin(\delta) + \sin\left(\frac{\pi}{180}\theta\right) \cos(\delta) \cos(H) \quad (\text{A.9})$$

où θ est la latitude de la position du satellite exprimée en degrés.

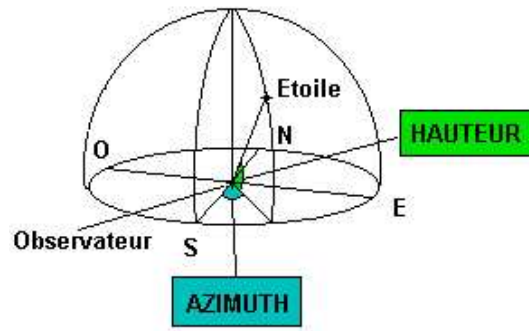


FIG. A.2: Position de l'étoile pour l'observateur

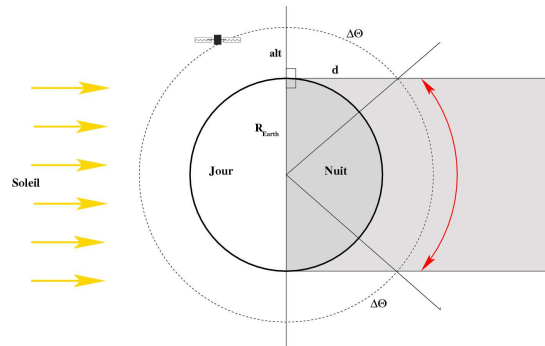


FIG. A.3: Position du satellite par rapport à l'ombre de la Terre

A.5 à l'altitude du satellite

Même si les satellites ont des orbites relativement basses au regard du rayon terrestre, leurs altitudes alt doivent être prises en compte. Les données dites « de nuit » sont alors : **les mesures effectuées lorsque le satellite est dans l'ombre de la Terre mais également lorsque celui-ci survole une zone non-éclairée de la surface du globe.**

Plusieurs hypothèses raisonnables sont faites :

- la Terre est supposée sphérique de rayon R_{Earth} ,
- l'altitude alt du satellite est considérée comme constante,
- les limites de l'ombre portée de la Terre sont considérées comme parallèle (le Soleil est à l'infini donc les rayons lumineux ont des trajectoires colinéaires).

La Figure A.3 présente les variables de ce dernier calcul :

$$alt = R - R_{Earth} \quad (A.10)$$

$$d = \sqrt{2altR_{Earth} + alt^2} \quad (A.11)$$

$$\delta\theta = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{d}{R_{Earth} + alt}\right) \quad (\text{A.12})$$

Enfin, une simple sélection est appliquée sur les données selon la valeur de h :
Si et seulement si ($|h| \geq |\delta\theta|$) **→ la donnée est conservée.**

Le même algorithme peut-être utilisé pour sélectionner les données 5° sous l'horizon, dans ce cas :

Si et seulement si ($h \geq -5^\circ$) **→ la donnée est conservée.**

Annexe B

Observatoires magnétiques

Liste des observatoires magnétiques ayant effectués des mesures continues durant au moins 5 années consécutives :

Code IAGA	Nom	Latitude géographique	Longitude géographique	Latitude géomagnétique	Longitude géomagnétique	Altitude (mètres)	Période début-fin
ABN	ABINGER	51.18	359.61	53.58	84.55	244	1925-1957
ABK	ABISKO	68.36	18.82	65.88	115.50	380	1945
AAE	ADDIS ABABA	9.03	38.77	5.19	110.97	2442	1958
ADE	ADELAIDE	-34.60	138.40	-43.99	214.06		1973
AGN	AGINCOURT	43.78	280.73	54.65	349.54	175	1881-1969
AHM	AHMEDABAD	23.02	72.60	14.03	145.65		1973
ALE	ALERT	82.50	297.50	86.24	163.08	2260	1961
ABG	ALIBAG	18.63	72.87	9.64	145.39	10	1904
AAA	ALMA ATA	43.25	76.92	33.69	152.21	1300	1963
ALM	ALMERIA	36.85	357.53	40.16	76.83	65	1955
ALU	ALOUSHTA	44.68	34.42	40.86	114.94		1957
AML	AMBERLEY	-43.15	172.72	-47.16	254.00	40	1929-1977
AWS	ANDREWS AFB	38.20	282.63	49.13	352.23		1972
ANN	ANNAMALAINAGAR	11.40	79.68	1.77	151.20	0	1957
TAN	ANTANANARIVO	-18.92	47.55	-23.85	114.58	1375	1902
ANO	ANTIPOLO	14.60	121.17	3.50	191.60	220	1910-1938
APA	APATITY	67.55	33.33	62.78	125.99		1973
API	APIA	-13.80	188.22	-15.61	261.99	2	1905
ART	ARCTOWSKI	-62.16	301.52	-51.33	9.25	16	1978
ARE	AREQUIPA	-16.47	288.52	-5.45	359.45		1958
AIA	ARGENTINE ISLAND	-65.20	295.70	-54.23	4.73	10	1957
SV3	ARTI	56.43	58.43	48.50	139.90		1973
ASH	ASHKHABAD	37.95	58.10	30.58	134.62		1958
ASO	ASO	32.88	131.02	22.58	199.85	570	1940
PEG	ATHENS	37.97	23.72	32.60	121.60	110	1900-1908
AUT	AU-TAU	22.45	114.05	11.20	184.60	60	1928-1939
AVE	AVERROES	37.99	14.02	38.13	93.59	230	1970
BKC	BACK	57.69	265.77	67.43	326.54		1978
BAG	BAGUIO	16.42	120.60	5.61	191.08	440	1967
BAL	BALDWIN	38.78	264.83	48.90	330.60	340	1901-1909
BLC	BAKER LAKE	64.33	263.97	73.67	319.15	30	1951
BNG	BANGUI	4.43	18.57	4.45	90.33	390	1952
BAP	BARRACKPORE	22.78	88.36	12.20	160.30	10	1904-1914
BRW	BARROW	71.30	203.25	69.10	243.67	7	1949
BTH	BARTH	54.37	12.75	55.00	99.90	20	1898-1903
BTV	BATAVIA	-6.18	106.83	-17.19	177.64	10	1884-1944
BJI	BEI-JING	40.06	116.18	29.12	186.20	43	1957
KGD	BEREZNIAKI	49.82	73.08	40.30	150.00		1965

Code IAGA	Nom	Latitude géographique	Longitude géographique	Latitude géomagnétique	Longitude géomagnétique	Altitude (mètres)	Période début-fin
BEL	BELSK	51.83	20.80	50.19	105.24	180	1960
BIN	BINZA	-4.38	15.26	-3.57	85.40	300	1953
BJN	BJORNOYA	74.50	19.20	71.06	124.67	80	1951
BGA	BORGA	-72.97	356.20	-66.46	42.49		1975
BOX	BOROK	58.03	38.97	52.97	324.23		1977
BOU	BOULDER	40.13	254.77	48.88	319.04	1675	1964
BZR	BOUZAREAH	36.80	3.02	39.20	82.40	340	1912-1920
BJE	BRORFELDE	55.63	11.67	55.80	97.60	80	1978
BVZ	BUDAKESZI	47.52	18.90	46.40	101.80	410	1949-1955
BDV	BUDKOV	49.07	14.02	48.82	97.64	496	1967
BY1	BYRD STATION 1	-79.98	240.00	-70.60	336.60	1515	1957-1961
BY2	BYRD STATION 2	-80.01	240.51	-70.60	336.90	1515	1962-1965
CBB	CAMBRIDGE BAY	69.10	255.00	76.77	299.13	17	1972
CAN	CANBERRA	-35.30	149.00	-43.38	226.09	850	1980
CCS	CAPE CHELYUSKIN	77.72	104.28	66.72	177.41	10	1935
CGH	CAPE OF GOOD HOPE	-33.93	18.48	-33.10	81.80		1842-1846
CTO	CAPE TOWN	-33.95	18.47	-33.12	82.06	20	1932-1940
CWE	CAPE WELLEN	66.17	190.17	62.36	239.37	10	1933
CY.	CAPO DI MONTE	40.86	14.26	40.90	94.80	160	1883-1911
CPI	CAPRI	40.55	14.22	40.58	94.60		1957
CAO	CASTELLACCIO	44.43	8.93	45.34	90.82	1175	1933
CRC	CASTLE ROCK	37.23	237.87	43.56	301.06		1970
HVN	CENTRO GEOFISICO	22.97	277.86	34.00	347.40		1965
CPA	CHA-PA	22.35	103.83	11.38	175.03	1550	1957
CLF	CHAMBON LA FORET	48.02	2.27	50.06	85.71		1936
CLH	CHELTENHAM	38.70	283.20	49.65	352.89	72	1901-1956
CBI	CHICHIJIMA	27.15	142.30	17.80	210.78	154	1973
CHR	CHRISTCHURCH	43.54	172.62	47.60	254.3	10	1902-1928
COI	COIMBRA	40.22	351.58	44.53	71.78	140	1866
BOM	COLABA	18.90	72.82	9.70	145.30	10	1846-1905
CMO	COLLEGE 2	64.87	212.17	65.10	259.23	200	1948
CLL	COLLMBERG	51.32	13.00	51.16	97.70		1935
CSS	COLORADO SPRINGS	38.50	255.51	47.36	320.27		1973
COP	COPENHAGEN	55.69	12.58	55.39	99.64		1892-1900
CZT	CROZET	-46.43	51.87	-51.49	111.46	500	1974
DAL	DALLAS	32.98	263.25	42.73	330.14	210	1964-1974
DRS	DAR ES SALAAM	-6.51	39.18	-10.17	108.56		1896-1900
DAV	DAVAO	7.08	125.58	-3.49	196.39		1968
DVS	DAVIS	-68.60	78.00	-76.81	124.34		1973
DBN	DE BILT	52.10	5.18	53.40	90.56		1899-1938
DDI	DEHRA DUN	30.32	78.06	20.50	151.60	680	1903-1943
DIK	DIXON	73.55	80.57	63.36	162.45	20	1933
DOB	DOMBAS	62.07	9.12	61.97	100.94	660	1916
DOU	DOURBES	50.10	4.60	51.60	88.99	208	1955
DL	DUBLIN	53.35	353.73	56.90	80.00		1841-1850
DRV	DUMONT DURVILLE	-66.66	140.01	-75.06	232.15	40	1957
TFS	DUSHETI	42.08	44.70	36.50	23.50	982	1938
KIV	DYMER	50.72	30.30	47.30	113.60	100	1964
EAA	EAST ANGLIA	52.63	1.30	54.64	87.01		1973
EIC	EASTER ISLAND	-27.17	250.58	-18.37	324.28		1959-1963
EP.	EASTPORT	44.90	293.02	56.20	4.80		1860-1867
EBR	EBRO	40.82	0.50	43.45	81.13	50	1910
ENB	EIELSON AFB	64.67	212.92	65.06	260.11		1966
ELI	ELIZABETHVILLE	-11.63	27.42	-13.00	95.93	1230	1932-1957
ESK	ESKDALEMUIR	55.32	356.80	58.04	84.07	245	1908
EKP	ESKIMO POINT	61.10	265.93	70.78	324.73		1973
EYR	EYREWELL	-43.41	172.35	-47.48	253.71	390	1979
FAL	FALMOUTH	50.15	354.92	53.60	79.40	50	1892-1912
FCC	FORT CHURCHILL 1	58.80	265.90	68.53	325.60	15	1964
FCC	FORT CHURCHILL 2	58.77	265.73	68.70	325.20	15	1964
FMM	FORT MCMURRAY	56.70	248.60	64.18	305.05		1973
FSV	FORT SEVERN	55.98	272.35	66.34	336.32		1977
FSM	FORT SMITH	58.00	246.00	65.01	301.02		1973
FYU	FORT YUKON	66.57	214.70	67.08	259.59		1957
FRD	FREDERICKSBURG	38.20	282.63	49.13	352.23	69	1956
FTN	FREETOWN	8.46	346.79	14.21	59.59		1961-1967

Code IAGA	Nom	Latitude géographique	Longitude géographique	Latitude géomagnétique	Longitude géomagnétique	Altitude (mètres)	Période début-fin
FUQ	FUQUENE	5.47	286.27	16.47	357.07	2543	1954
FUR	FURSTENFELDBRUCK	48.17	11.28	48.48	94.62	572	1939
GEN	GENOVA MC	44.55	8.96	45.50	91.00	700	1958-1962
GEN	GENOVA C	44.43	8.93	45.50	91.00	350	1933-1969
GIT	GILGIT	35.93	74.30	26.67	148.86	1494	1967
GLM	GILLAM	56.40	265.30	66.11	326.54		1975
GIR	GIRARDVILLE	49.00	287.40	60.01	357.77		1973
GNA	GNANGARA	-31.78	115.95	-42.71	187.94	60	1959
GDH	GODHAVN	69.23	306.48	79.25	34.62	8	1926
GOT	GOTTINGEN	51.55	9.97	51.97	95.00	270	1957
GVD	GONZALES VIDELA	-64.82	297.15	-53.88	5.80	60	1961
VLA	GORNOTAYEZHAYA	43.68	132.17	30.10	199.60	200	1958
GRM	GRAHAMSTOWN	-33.28	26.48	-34.01	90.04	650	1974
GWC	GREAT WHALE RIVER	55.30	282.25	66.21	350.32	25	1965
GRW	GREENWICH	51.48	0.00	53.79	85.10	50	1846-1925
GCK	GROCKA	44.63	20.77	43.28	102.27	231	1958
GUA	GUAM	13.58	144.87	4.57	214.76	150	1957
HLL	HALLET	-72.32	170.22	-74.42	278.16		1957-1963
HBA	HALLEY BAY	-75.50	333.40	-66.36	25.85	30	1957
HBK	HARTEBEESTHOEK	-25.88	27.71	-27.01	93.14		1980
HAD	HARTLAND	50.98	355.52	54.17	80.29	95	1957
HTY	HATIZYO	33.07	139.83	23.45	207.83		1978
HVN	HAVANA	22.97	277.85	33.75	347.53		1964
HII	HEARD ISLAND	-53.03	73.37	-61.50	132.30	10	1950-1954
HIS	HEISS ISLAND	80.62	58.05	71.60	156.33	20	1959
HLP	HEL	54.60	18.82	53.19	104.80	4	1957
HLW	HELWAN	29.87	31.33	26.98	108.01	120	1903-1959
HCR	HERCHMER	57.40	265.90	67.16	326.86		1973
HER	HERMANUS	-34.42	19.23	-33.73	82.67	26	1941
HNA	HOLLANDIA	-2.57	140.52	-11.94	212.17	98	1957-1962
HKC	HONG KONG 1	22.30	114.18	11.00	184.70	30	1884-1928
HKC	HONG KONG 2	22.20	114.20	11.22	184.82	555	1972
HON	HONOLULU 1-2-3	21.32	202.00	21.46	268.57	4	1902
HUA	HUANCAYO	-12.05	284.67	-1.06	355.67	3313	1922
HRB	HURBANOVO	47.87	18.18	46.89	101.07	120	1938
HYB	HYDERABAD	17.42	78.55	7.86	150.69	500	1965
IBD	IBADAN	7.43	3.90	10.17	76.46	300	1956
IRT	IRKUTSK	52.17	104.45	41.18	176.22	470	1887-1914
ISL	ISLAND LAKE	53.90	265.30	63.65	327.61		1976
ISK	ISTANBUL KANDILLY	41.07	29.07	38.31	108.87	130	1947
JSS	JASSY	47.18	27.53	44.40	109.60		1935-1957
KAK	KAKIOKA	36.23	140.18	26.62	207.77	28	1913
KNG	KALININGRAD	54.60	20.20	52.94	106.06		1964
KNY	KANOYA	31.42	130.88	21.12	199.85	105	1957
KNZ	KANOZAN	35.25	139.97	25.63	207.70	342	1961
KGD	KARAGANDA	49.82	73.08	40.56	150.04		1966
TFS	KARSANI	41.83	42.70	36.20	123.50	1100	1905-1934
KZN	KAZAN	55.83	48.85	49.36	131.52	80	1909
KEL	KELES	41.42	69.20	32.40	145.20	450	1936-1963
KEM	KEM	65.00	34.40	60.26	124.74		1973
KEW	KEW	51.47	359.68	54.10	85.10	10	1857-1924
KHB	KHABAROVSK	48.48	135.07	38.39	201.74		1972
KIV	KIEV	50.72	30.30	47.42	113.40	100	1963
KIR	KIRUNA	67.83	20.42	65.14	116.19	390	1950
KLY	KLYUCHI	55.03	82.90	44.70	159.00		1967
KOD	KODAIKANAL	10.23	77.47	0.81	148.93	2323	1902
KTS	KORETS	50.60	61.07	42.64	140.10		1968
KOR	KOROR	7.33	134.50	-2.64	205.21	10	1957-1966
MOS	KRASNAYA	55.47	37.32	50.70	121.70	190	1930
KSA	KSARA	33.82	35.88	30.03	113.26	920	1937-1968
KUY	KUYPER	-6.03	106.73	-17.04	177.54	1	1950-1962
KWJ	KWAJALEIN	9.05	167.20	3.13	237.11		1973
AQU	L'AQUILA	42.38	13.32	42.52	94.35	682	1960
LQA	LA QUIACA	-22.10	294.40	-11.13	5.01	3464	1920
LAS	LAS ACACIAS	-35.00	302.32	-24.24	11.86	20	1964
LDR	LAUDER	-43.03	169.41	-37.70	232.10	370	1977

Code IAGA	Nom	Latitude géographique	Longitude géographique	Latitude géomagnétique	Longitude géomagnétique	Altitude (mètres)	Période début-fin
LRV	LEIRVOGUR	64.18	338.30	69.71	71.98	30	1957
LNN	LENINGRAD	59.95	30.70	56.14	118.32	70	1869-1877
LER	LERWICK	60.13	358.82	62.15	89.55	105	1923
LIS	LISBON	38.72	350.85	43.30	70.60		1890-1900
LGR	LOGRONO	42.45	357.50	45.59	78.66	445	1957
MMK	LOPARSKAYA	68.25	33.08	63.30	126.70	200	1961
LOB	LORING AFB	46.95	292.12	57.95	3.89		1966
LA.	LOS ANGELES	34.05	241.74	41.20	305.70		1882-1889
LMM	LOURENCO MARQUES	-25.92	32.58	-27.98	97.96	40	1957
LOV	LOVO	59.35	17.83	57.84	106.75	25	1928
LOZ	LOVOZERO	67.97	35.02	62.90	127.64		1957
LUA	LUANDA	-8.92	13.17	-7.63	82.48	53	1956
LB	LUBECK	53.86	10.69	54.00	97.00		1885-1893
LUK	LUKIAPANG	31.32	121.03	20.20	190.80	100	1908-1933
LNP	LUNPING	25.00	121.17	14.21	191.28		1965
LVV	LVOV	49.90	23.75	47.80	107.10	400	1952
LWI	LWIRO	-2.25	28.80	-4.06	99.10	1680	1958-1970
MBO	MBOUR	14.40	343.02	20.68	56.80	10	1952
MCQ	MACQUARIE ISLAND	-54.50	158.95	-60.54	244.48	4	1951
MGD	MAGADAN	60.12	151.02	51.28	212.15		1966
MSC	MAISACH	48.20	11.26	48.50	94.90	480	1927-1932
MQ	MAKERSTOUN	55.58	357.48	52.20	85.30		1841-1849
MAB	MANHAY	50.30	5.68	51.60	90.15	440	1936-1971
MAN	MANILA	14.58	120.98	3.50	191.40		1891-1904
MRN	MARION ISLAND	-46.85	37.87	-49.30	96.75	45	1972
AMS	MARTIN DE VIVIES	-37.83	77.57	-46.94	142.78		1981
MSR	MATOCHKIN SHAR	73.26	56.40	64.80	147.40	250	1937-1944
MRI	MAURITIUS	-20.09	57.55	-26.80	124.40	50	1892-1965
MAW	MAWSON	-67.60	62.88	-73.32	106.62	6	1955
MEA	MEANOOK	54.62	246.67	61.88	304.02	686	1916
MEL	MELBOURNE	-37.83	144.98	46.60	222.30	30	1865-1921
MEV	MELVILLE AFB	53.28	299.47	64.05	14.25		1966
MMB	MEMAMBETSU	43.90	144.20	34.61	210.23	39	1950
MNK	MINSK	54.10	26.52	51.32	111.51		1961
MIR	MIRNY	-66.55	93.02	-76.80	151.15		1956
MLT	MISALLAT	29.52	30.90	26.72	107.52	120	1960
MIU	MIYAZU	35.32	135.11	25.30	203.32		1973
MIZ	MIZUSAWA	39.01	141.08	29.47	208.21		1969
MFP	MOCA	3.35	8.67	5.27	80.39	1949	1958-1971
MOL	MOLODEZHAYA	67.67	45.85	70.10	87.50	854	1965
MOS	MOSCOW	55.48	37.32	50.79	121.62	190	1880-1888
MBC	MOULD BAY	76.30	240.60	79.62	259.89	150	1962
MWC	MT WILSON	34.14	241.97	41.19	306.30		1926-1958
MNH	MUNCHEN	48.15	11.61	48.40	95.20	530	1842-1926
MUT	MUNTINLUPA	14.37	121.02	3.58	191.57	62	1951
MMK	MURMANSK	68.25	33.08	63.45	126.43	210	1958-1960
NCK	NAGYCENK	47.63	16.72	46.93	99.59	160	1961
NAI	NAIROBI	-1.28	36.83	-4.60	107.19	1673	1964
NTS	NANTES	47.25	358.44	50.10	81.70	35	1923-1958
NAQ	NARSSARSSUAQ	61.20	314.60	70.60	38.66	4	1973
NL	NEW ALESUND	78.92	11.93	75.43	130.70	12	1966
NEW	NEWPORT	48.27	242.88	55.14	302.78	780	1966
NYI	NEW YEAR ISLAND	54.65	295.85	43.30	5.20		1902-1916
NCE	NICE	43.72	7.30	45.00	89.00		1889-1901
NGK	NIEMEGK	52.07	12.68	51.94	97.77	78	1932
NSM	NITSANIM	31.73	34.60	28.21	111.55	150	1963-1967
NOK	NORILSK	69.20	88.00	58.68	165.77		1969
NKK	NOVOKAZALINSK	45.77	62.12	37.76	139.83		1974
NVL	NOVOLAZAREVSKAYA	-70.77	11.82	-66.76	55.88	460	1961
NVS	NOVOSIBIRSK	55.03	82.90	44.92	159.07		1967
NUR	NURMIJARVI	60.52	24.65	57.71	113.51	105	1953
ODE	ODESSA	46.78	30.88	43.52	112.42	50	1896-1925
OGY	O'GYALIA	47.88	18.19	46.80	101.30	110	1906-1912
OKN	OKINAWA	24.75	125.33	14.14	195.18		1977
ORC	ORCADAS DEL SUR	-60.74	315.22	-50.30	20.00	4	1931-1962
OSL	OSLO	59.98	10.72	59.60	101.10		1843-1930

Code IAGA	Nom	Latitude géographique	Longitude géographique	Latitude géomagnétique	Longitude géomagnétique	Altitude (mètres)	Période début-fin
OTT	OTTAWA	45.40	284.45	56.37	354.11	75	1968
PAG	PANAGYURISHTE	42.52	24.18	40.61	104.75	556	1948
PPT	PAPEETE	-17.55	210.38	-15.09	284.44		1958
PAB	PARAMARIBO	5.82	304.78	16.41	16.28	2	1957
PET	PARATUNKA	53.10	158.63	44.80	220.00	110	1973
IRK	PATRONY	52.17	104.45	40.90	176.10	500	1959
PEB	PELLY BAY	68.50	270.20	78.39	323.86		1977
PEK	PEKING 1	39.95	116.47	28.70	186.30		1870-1883
PEK	PEKING 2	40.04	116.18	28.80	186.10		1957-1964
PEG	PENDELI	38.03	23.52	36.38	102.73	495	1958
PRF	PERPIGNAN	42.70	2.88	44.90	84.30	30	1890-1900
PIL	PILAR	-31.67	296.12	-20.73	6.39	336	1905
PLS	PLAISANCE	-20.43	57.67	-27.02	124.68	123	1966
PZ	PLESHCHENITZI	54.50	27.88	51.40	113.10	200	1961
POD	PODKAMENAYA TUNG	61.40	90.00	50.84	165.64		1968
POL	POLA	44.86	13.26	44.80	95.90	30	1883-1922
PAF	PORT AUX FRANCAIS	-49.35	70.22	-57.31	130.79	50	1957
PMG	PORT MORESBY	-9.40	147.15	-17.99	219.75	80	1957
PBQ	POSTE DE LA BALEINE	55.30	287.25	66.31	357.38		1984
POT	POSTDAM	52.38	13.06	52.16	98.28	80	1890-1907
PRU	PRUHONICE	49.98	14.55	49.59	98.55	329	1946
QUE	QUETTA	30.18	66.95	21.77	141.35	1737	1953
RIT	RANKIN INLET	62.80	267.90	72.64	326.36		1975
REG	REGENSBURG	47.48	8.44	48.40	91.70	605	1957-1969
RES	RESOLUTE BAY	74.70	265.10	83.14	295.98	25	1954
RDJ	RIO DE JANEIRO	-22.91	316.83	-12.80	26.00	60	1899-1906
ROB	ROBURENT	44.30	7.88	45.41	89.74	815	1964
RSV	RUDE SKOV	55.85	12.45	55.56	99.61	48	1907-1978
SAB	SABHAWALA	30.33	77.80	20.78	151.34	498	1964
SFS	SAN FERNANDO	36.47	353.80	40.47	72.90	28	1891
SJG	SAN JUAN 1-2-3	18.38	293.88	29.36	5.21	100	1903
SNA	SANAE	-70.30	357.65	-64.23	46.20	52	1962
STJ	SAINT JOHNS	47.59	307.32	58.20	23.30		1968
PSM	SAINT MAUR	48.81	2.49	50.80	86.60		1883-1900
SMG	SAN MIGUEL	37.77	334.35	45.04	52.61	175	1911
SBA	SCOTT BASE	-77.85	166.78	-78.84	293.24	15	1957
SED	SEDDEN	52.28	13.01	52.10	98.50	40	1908-1931
STF	SDR STROMFJORD	67.02	309.28	76.83	36.25		1972
SSH	SHE-SHAN	31.10	121.19	20.30	191.03	100	1934
SHB	SHEPHERD BAY	68.75	266.25	78.14	316.78		1966
SHL	SHILLONG	25.55	91.88	14.99	163.95		1975
SSO	SIMOSATO	33.57	135.93	23.62	204.24	59	1954-1978
SIT	SITKA	57.07	224.67	60.31	278.12	22	1902
SOD	SODANKYLA	67.37	26.63	63.68	120.64	178	1914
SLU	SLUTSK	59.68	30.48	55.80	118.30		1878-1941
SGG	SOUTH GEORGIA	-54.28	323.52	-44.82	27.73		1974-1982
SPA	SOUTH POLE	-90.00	0.00	-78.98	0.00	2820	1959
SRE	SREDNIKAN	62.43	152.32	53.67	212.35	61	1936-1966
MGD	STEKOLNI	60.12	151.02	51.00	211.80		1966
ODE	STEPANOVKA	46.78	30.88	43.40	112.50	140	1948
STO	STONYHURST	53.85	357.53	56.52	83.91	116	1865-1967
SUA	SURLARI	44.68	26.25	42.32	107.42	84	1949
SVD	SVERDLOVSK	56.73	61.07	48.64	141.89	290	1887-1931
SWI	SWIDER	52.12	21.25	50.38	105.79	100	1921
SYO	SYOWA BASE	-69.03	39.60	-70.10	79.70	15	1958-1970
TAM	TAMANRASSET	22.80	5.53	24.94	81.23	1395	1932
TNG	TANGERANG	-6.17	106.63	-17.18	177.43	14	1964
TKT	TASHKENT	41.33	69.62	32.51	145.52	500	1883
TBT	TATUOCA	-1.20	311.48	8.98	220.50	10	1957-1971
TEH	TEHERAN	35.73	51.38	29.36	128.05	1367	1960-1973
SZT	TENERIFE	28.48	343.72	34.60	60.30	310	1959
TEO	TEOLOYUCAN	19.75	260.82	29.35	329.24	2280	1923
TAA	TERRE ADELIE	-66.67	140.02	-75.07	232.18	40	1957
TMP	THOMPSON	55.72	262.12	65.09	322.65		1969
THU	THULE/CAMP TUTO	76.55	291.17	87.53	11.26	480	1932-1952
THL	THULE/QANAQ	77.48	290.83	88.46	14.10	57	1956

Code IAGA	Nom	Latitude géographique	Longitude géographique	Latitude géomagnétique	Longitude géomagnétique	Altitude (mètres)	Période début-fin
TFS	TIFLIS	42.08	44.70	36.62	123.49	982	1879-1905
THY	TIHANY	46.90	17.90	46.01	100.41	187	1949
TKH	TIKHAYA BAY	80.30	52.80	71.74	153.42	10	1932-1958
TIP	TIRUCHIRAPALLI	10.80	78.70	1.26	150.19		1975
TIK	TIXIE BAY	71.58	129.00	60.99	192.81	40	1944
KAK	TOKYO	35.75	139.72	26.10	207.41	20	1897-1912
TOL	TOLEDO	39.88	355.95	43.39	76.18	501	1947
TMK	TOMSK	56.47	84.93	46.21	160.93	200	1958-1969
TOO	TOOLANGI	-37.53	145.47	-46.05	222.66	457	1922-1980
AGN	TORONTO	43.67	280.50	54.80	349.10		1872-1898
TLE	TOULOUSE	43.61	1.46	46.00	83.20	190	1894-1905
TGO	TOUNGOO	18.93	96.45	7.90	167.80	300	1905-1923
TOH	TOYOHARANEW	46.95	142.75	37.20	208.30	70	1932-1941
TRW	TRELEW	-43.25	294.68	-32.28	4.81		1957-1970
TRD	TRIVANDRUM	8.48	76.95	-0.88	148.24	300	1957
TRO	TROMSO	69.67	18.95	67.00	117.16	105	1930
TSN	TSINGTAO	36.07	120.32	25.00	189.90	80	1924-1936
TSU	TSUMEB	-19.22	17.70	-18.59	84.83	1300	1964
TUC	TUCSON	32.25	249.17	40.37	314.57	770	1910
TUL	TULSA	35.92	264.22	45.75	330.78	257	1961
UCC	UCCLE	50.80	4.36	52.30	89.40	100	1896-1919
UBA	ULAN BATOR	47.85	106.75	36.84	178.03		1966
WIT	UTRECHT	52.00	5.12	53.40	90.80		1891-1896
VLJ	VAL JOYEUX	48.82	2.02	50.87	85.83		1901-1936
VAL	VALENTIA	51.93	349.75	56.15	74.79	14	1899
VSS	VASSOURAS	-22.40	316.35	-12.53	25.70	457	1915
VIC	VICTORIA	48.52	236.58	54.33	295.66	185	1956
VQS	VIEQUES	18.15	294.55	29.11	5.93		1903-1924
VLA	VLADIVOSTOK	43.12	131.90	32.84	199.68		1932
LNN	VOEIKOVO	59.95	30.70	56.00	118.50	70	1947
VOR	VOROSHILOV	43.78	132.03	33.20	199.60	30	1952-1957
VOS	VOSTOK	-78.45	106.87	-89.31	139.62	3500	1958
SVD	VYSOKAYA	56.73	61.07	48.40	141.90	290	1932
WAT	WATHEROO	-30.30	115.90	-41.23	187.82	240	1919-1958
WES	WESTON	42.38	288.68	53.40	359.49		1960
WHS	WHITE SHELL	49.80	264.80	59.56	328.39		1975
WIK	WIEN	48.25	16.36	47.60	69.70		1892-1898
WIA	WIEN-AUHOF	48.20	16.24	47.50	69.60	2050	1929-1950
WIK	WIEN-KOBENZL	48.27	16.32	47.62	69.48	400	1954
WLH	WILHELMSHAVEN	53.53	8.15	54.20	94.50	10	1884-1911
WIL	WILKES	-66.25	110.58	-77.26	182.71		1957-1966
WNG	WINGST	53.75	9.07	54.22	95.21	50	1939
WNP	WINNIPEG	49.63	262.87	59.19	326.02		1969-1975
WIT	WITTEVEEN	52.82	6.67	53.79	92.39	17	1938-1988
YAK	YAKUTSK	62.02	129.72	51.53	195.40	100	1931
TKT	YANGI BAZAR	41.33	69.62	32.30	145.60	500	1964
YAU	YAUCA	-15.53	285.33	-4.54	356.36		1957-1960
YKC	YELLOWKNIFE	62.47	245.53	69.14	296.56	198	1958
YSS	YUZHNO SAKHALINSK	46.95	142.72	37.49	208.45		1948
KNK2	ZAIMISHCHE	55.83	48.85	49.20	131.60	80	1914-1972
ZAR	ZARIA	11.15	7.65	13.12	80.89		1964
ZKW	ZI KA WEI	31.22	121.43	20.20	191.20	10	1875-1907
ZIN	ZINZEN	37.48	126.63	26.60	195.30	50	1921-1941
ZSC	ZO SE	31.10	121.19	20.00	190.80	100	1933-1974
ZUY	ZUY	52.47	104.03	41.20	17.80	430	1915-1958