



Génération et inversion de données de propagation d'ondes radio à travers un noyau cométaire (Experience CONSERT - Mission Spatiale ROSETTA)

Mehdi Benna

► To cite this version:

Mehdi Benna. Génération et inversion de données de propagation d'ondes radio à travers un noyau cométaire (Experience CONSERT - Mission Spatiale ROSETTA). Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2002. Français. NNT : . tel-00007990

HAL Id: tel-00007990

<https://theses.hal.science/tel-00007990>

Submitted on 10 Jan 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ TOULOUSE III

Spécialité : Planétologie & Techniques Spatiales

présentée et soutenue
par

Mehdi BENNA

Le 19 septembre 2002

**Génération et inversion de données de propagation d'ondes
radio à travers un noyau cométaire
(Simulation de l'expérience CONSERT)**

JURY

M. Henri RÈME	Professeur à l'UPS	Président
M. Gérard CAUDAL	Professeur à l'Université de Versailles	Rapporteur
M. Alain REINEX	Directeur de Recherche à l'IRCOM	Rapporteur
M. Michel FESTOU	Directeur de Recherche à l'OMP	Examineur
M. Wlodek KOFMAN	Directeur de Recherche au LPG	Examineur
M. Jürgen KLINGER	Professeur à l'UJF	Invité
M. Jean-Pierre BARRIOT	Ingénieur au CNES	Directeur de thèse

À mes grands parents,
à mes parents,
à ma belle Tunisie ...

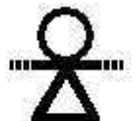


Table des matières

Table des figures	vi
Liste des tableaux	vii
Remerciements	ix
Résumé/Abstract	xi
Introduction	1
1 Les comètes	7
1.1 Historique	9
1.2 Le scénario de la vie des comètes	11
1.3 Formation des noyaux cométaires	13
1.3.1 Les grains de la nébuleuse primitive	13
1.3.2 L'énergie latente des grains primitifs	15
1.3.3 L'accrétion	16
1.4 L'évolution des planétésimaux aux confins du système solaire	18
1.5 Dynamique du nuage de Oort et de la ceinture de Kuiper	19
1.6 Évolution des comètes au voisinage du Soleil	20
1.7 La mort des comètes	22
2 L'expérience CONSERT à bord de la sonde ROSETTA	23
2.1 GIOTTO : le précurseur	24
2.2 La Mission Spatiale ROSETTA	29
2.2.1 La comète 46P/Wirtanen	29
2.2.2 La sonde spatiale ROSETTA	30
2.2.3 Instruments embarqués	33
2.3 L'expérience CONSERT	35
2.3.1 Objectifs scientifiques	35
2.3.2 Principe de mesure	35

2.3.3	Description de l'instrument CONCERT	37
3	Approche bidimensionnelle	45
3.1	Résolution du problème direct et inverse en 2-D	46
3.1.1	CONCERT and data processing preparation	47
3.1.2	The pseudospectral time domain method (PSTD)	48
3.1.3	Ray tracing method (RTM)	54
3.1.4	Results of wave propagation simulation and methods comparison . .	58
3.1.5	Data Inversion	64
3.1.6	Overall conclusion	70
3.2	Utilisation de l'information a priori	71
3.2.1	Introduction	72
3.2.2	The Covariance Matrix of the Model	74
3.2.3	Inversion result	79
3.2.4	Conclusion and Perspective	80
4	Approche tridimensionnelle	83
4.1	Extension de la méthode de tracé des rayons aux modèles 3-D	85
4.1.1	Introduction	86
4.1.2	The 3-D Ray Tracing Method (RTM)	87
4.1.3	Results of 3-D Waves Propagation	91
4.1.4	Conclusions	100
4.2	Modélisation d'un noyau cométaire 3-D	101
4.2.1	Évaluation de la permittivité diélectrique d'un mélange poreux de silicates et de glace d'eau	102
4.2.2	Modèles de répartition interne de la porosité	103
4.3	Exemples de simulations CONCERT	110
5	Perspectives	115
5.1	Introduction	116
5.2	Approche variationnelle du problème inverse	118
5.3	Inversion avec des équations de contraintes	120
5.4	Inversion sous hypothèse d'harmonicité du modèle	123
5.4.1	Introduction	124
5.4.2	Derivation of the Equation - Physical Assumptions	124
5.4.3	Unicity of the Solution	125
5.4.4	Conclusion	126
	Conclusion	127

A	L'approche stochastique gaussienne de la méthode d'inversion de Tikhonov	131
A.1	Principe	131
A.2	Formulation du problème inverse dans le cadre gaussien	133
B	Optimisation de la formule d'inversion	137
C	Generalized Analytical Covariance Formulas (Appendix of the Section 3.2)	139
C.1	Analytical Covariance for a 1-D Nucleus Structure	139
C.2	Analytical Covariance for a 2-D Nucleus Structure	141
C.3	Analytical Covariance for a 3-D Nucleus Structure	142

Table des figures

1.1	Monnaie romaine frappée après la mort de Jules César	9
1.2	Classification des comètes dans le <i>Livre de la soie</i>	10
1.3	Modèle laplacien de formation du système solaire	12
1.4	Types de grains dans les nuages moléculaires	15
1.5	Structure en “nid d’oiseau” des grains	17
1.6	Un des modèle de structure de noyau cométaire	18
1.7	Différentiation physico-chimique du noyau	21
2.1	Survol de la comète de Halley	25
2.2	Le noyau de la comète de Halley photographiée par GIOTTO	26
2.3	Le noyau de la comète 19P/Borrelly photographié par DEEP SPACE I	28
2.4	La comète 46P/Wirtanen	29
2.5	La sonde spatiale ROSETTA	31
2.6	Trajectoire de la sonde ROSETTA	32
2.7	Disposition des instruments sur ROSETTA	33
2.8	Logo de l’expérience CONSERT	35
2.9	Structure du code numérique utilisé par CONSERT	37
2.10	Principe de fonctionnement de l’instrument CONSERT	39
2.11	Schéma bloc de l’instrument CONSERT	40
2.12	Déroulement d’une campagne de mesures	41
2.13	Séquence temporelle d’une mesure CONSERT	42
2.14	Antenne CONSERT sur ROSETTA	43
2.15	Antenne CONSERT sur RoLAND	43
3.1	Implementation of Absorbing Boundary Conditions using <i>PML</i>	51
3.2	2-D Source radiation diagram.	54
3.3	Beam used in 2-D amplitude determination.	58
3.4	Comparison between the RTM and PSTD algorithms.	62
3.5	Propagation of the electric field (2-D simulation).	63
3.6	Discrete propagating ray.	65
3.7	Ray path length differences between an homogeneous and an inhomogeneous model.	66

3.8	2-D data extraction.	67
3.9	Original 2-D model and inversion results	69
3.10	2-D ray path between the Lander and the Orbiter.	73
3.11	Structure of the original 2-D nucleus model.	75
3.12	Covariance modeling for a 1-D structure (2).	77
3.13	Covariance modeling for a 1-D structure (2).	78
3.14	Structure of the covariance matrix.	81
3.15	Result of 2-D image reconstruction using different covariance matrices. . .	81
4.1	2-D nucleus model showing different ray paths	87
4.2	Beam used in the determination of the power along the 3-D ray	88
4.3	The wave decomposition principle	91
4.4	3-D Nucleus model	92
4.5	Cross sections of the 3-D nucleus interior model	94
4.6	The received radio-wave pattern over a 5 km radius “orbital sphere” centered on the comet nucleus	95
4.7	Arrival times along the Rosetta circular orbit	97
4.8	Synthetic CONSERT data along the Rosetta orbit	99
4.9	modèle 3-D : MOD 1	107
4.10	modèle 3-D : MOD 2	108
4.11	modèle 3-D : MOD 3	109
4.12	Cartes de temps d’arrivée radio pour les modèles MOD 1, MOD 2, et MOD 3	112
4.13	Données brutes recues le long de l’orbite pour les modèles MOD 1, MOD 2, et MOD 3	113
5.1	Évolution de la permittivité d’un mélange de silicates et de glaces d’eau . .	121
5.2	Reconstruction of an harmonic model	126

Liste des tableaux

2.1	Principales caractéristiques de la comète 46P/Wirtanen.	30
2.2	Principales phases de la mission ROSETTA (dates nominales).	33
2.3	Instruments embarqués à bord de ROSETTA et du module RoLAND	34
2.4	Principales caractéristiques techniques de l'instrument CONSERT	44
3.1	Parameters of the PSTD algorithm to obtain a 120 dB dynamic.	60
3.2	Parameters of the RTM algorithm for a 2-D simulation.	61
4.1	Parameters of the RTM algorithm used for the 3-D direct simulation	93
4.2	Parameters of the nucleus rotation and of the Rosetta orbit used in this simulation.	96
4.3	Paramètres des modèles de noyaux MOD 1, MOD 2, et MOD 3	105

Remerciements

En commençant cette thèse je n'imaginais pas encore son aboutissement. Depuis, trois années sont passées laissant dans leurs sillages une tête plus pleine et un regard nouveau. Ces années ont été des plus dures mais aussi des plus constructives sur les plans intellectuels et humains. Je les vois s'achever en ayant le sourire et beaucoup de gratitude aux lèvres.

Ma gratitude s'adresse tout d'abord à mon directeur de thèse, Jean-Pierre Barriot, qui a dû batailler pour que cette thèse ait lieu et qui, ensuite, a su durant ces trois longues années “diriger sans imposer”. Ceci est tout un art que j'ai eu le plaisir de découvrir avec lui. Au-delà de sa grande qualité de chercheur je retiens ses grandes qualités humaines et son efficacité à toute épreuve.

Mes vifs remerciements vont aussi aux membres de mon jury, en particulier à mes deux rapporteurs, Gérard Caudal, et Alain Reinex, pour l'intérêt qu'ils ont montré pour mon travail.

Je remercie aussi Patrick Pinet et George Balmino pour leur accueil respectivement au sein de l'UMR 5562 et du GRGS, ainsi que Wlodek Kofman pour son accueil chaleureux au sein de l'équipe CONSERT.

Mes remerciements s'adressent aussi à Nicole Lestieu, Muriel Barriot et Nathalie Dalla-Riva pour leur assistance sans failles aux tâches administratives diverses et variées.

Mon séjour à Toulouse n'aurait pas été aussi agréable sans le concours de François et Monique Querci. Je les remercie pour tout le temps qu'ils ont pu me consacrer et l'amitié qu'ils m'ont offerte.

Je tiens aussi à remercier tous les membres de mon labo et des labos avoisinant, plus particulièrement Michel Festou et Sylvestre Maurice pour leurs conseils avisés, ainsi que les membres du BGI et du département GTP du CNES avec lesquels j'ai partagé la plupart de mes cafés le matin (quand il en restait!).

Je n'oublie pas enfin toute la tribu de thésards, d'ex-thésards, et des jamais-thésards qui m'ont accompagné tout au long de ces années, à commencer par la suisse Marie Python et le bourguignon Romain Garmier, mes compagnons de bureau, Jamal Bittar un phénicien comme on n'en trouve pas souvent, Guillaume, Aurélien, Yves, Noalwenn, Arnaud, Noémie, Julien, Damien, Esther, Serge, et j'en oublie sûrement. Tout ce beau monde a fait que ma thèse soit un fou rire permanent.

Ce travail ne serait pas ce qu'il est sans l'encouragement de mes parents et de mes sœurs. Qu'ils trouvent dans ce travail et ceux qui suivront, l'expression de ma gratitude infinie d'avoir fait de moi ce que je suis.

Ces années m'ont particulièrement permis de réaliser que le plus beau des pays était le mien et que la plus douce des compagnies était celle des miens. Je continue donc à porter le regard aux étoiles en pensant désormais à un très vieux quatrain du grand savant perse Omar Khayyam :

*Quelle énigme, ces astres qui bondissent dans l'espace !
Khayyam, tiens solidement la corde de la Sagesse.
Prends garde au vertige qui fait tomber,
autour de toi, tes compagnons !*

Ces travaux de recherche ont été financés par l'Institut National des Sciences de l'Univers et par le Centre National d'Etudes Spatiales. La bourse de thèse a été accordée par le Ministère de l'Enseignement Supérieur Tunisien.

Résumé

Ce mémoire présente les modélisations directe et inverse entreprises dans le cadre de la préparation de l'exploitation scientifique de l'expérience CONSERT de la mission spatiale ROSETTA.

Nous nous sommes intéressés à la modélisation de la propagation d'ondes radio dans le cas simplifié d'un noyau cométaire à géométrie bidimensionnelle. À cette fin, une technique de tracé de rayons (Ray Tracing Method, RTM) a été développée et validée par comparaison avec les résultats d'une méthode spectrale (Pseudo Spectral Time Domain, PSTD). Cette technique a été ensuite étendue au cas plus complexe d'une géométrie tridimensionnelle, aboutissant à la réalisation d'un simulateur pour l'instrument CONSERT.

Le problème inverse a été abordé dans le cas d'une géométrie bidimensionnelle à faibles perturbations de permittivité en utilisant la méthode de régularisation de Tikhonov. Son étude a montré son caractère mal posé et fortement non linéaire, ainsi que le rôle important des informations *a priori* lors de la reconstruction d'image.

Abstract

This thesis presents the direct and inverse simulations made in the framework of the CONSERT experiment (Comet Nucleus Sounding Experiment using Radio wave Transmission). This experiment is part of the scientific package of the ROSETTA space mission.

We modeled the propagation of electromagnetic waves through a comet nucleus model in a two dimensional setting using a Ray Tracing technique (RTM). This algorithm was validated with respect to the Pseudo-Spectral Time Domain (PSTD) method and was extended to the three dimensional case. We emulated as closely as possible the true CONSERT data to achieve a complete instrument simulator.

For the inverse problem, we used a Tikhonov-like inverse RTM method based on weak permittivity assumptions. We demonstrated that the tomographical problem is an ill-posed non-linear problem. Reconstruction results showed the importance of the *a priori* information to enhance the quality of the imaging.

“Mais Esculape n’est, dans nos temples, qu’un dieu venu de l’étranger : César, né dans Rome, est dieu dans sa patrie. Sans égal dans la guerre comme dans la paix, ce n’est pas plus à ses travaux guerriers achevés dans la victoire, au sage gouvernement de l’État, au cours rapide de ses conquêtes, qu’aux vertus de son fils, qu’il doit d’avoir été changé en comète, et de briller parmi les astres : car, dans tout ce que César a fait, sa gloire la plus éclatante est d’être père d’Auguste.”

Apothéose de César (Ovide - Les Métamorphoses, Livre XV)

Introduction

Fin 1993, l'Agence Spatiale Européenne (ESA) a retenu la mission ROSETTA comme troisième “pierre angulaire” de son programme scientifique à long terme “Horizon 2000”. Cette mission vise à réaliser un rendez-vous avec la comète 46P/Wirtanen afin d'étudier son noyau et son activité lors de son approche du Soleil.

Les petits corps, comme les astéroïdes et les comètes, constituent les reliquats de la matière primitive à partir de laquelle s'est formé le système solaire. Ils ont joué un rôle essentiel non seulement au cours de ce processus de formation, mais peut-être aussi dans l'évolution biologique. Les comètes sont supposées provenir de deux nuages à la périphérie du système solaire. De temps à autre, des perturbations gravitationnelles propulsent l'une d'entre elles à l'intérieur du système solaire. On pense qu'une fraction importante de la matière organique terrestre, à partir de laquelle se sont constituées les briques élémentaires de la vie, a pu être apportée par les comètes. En 1985, plusieurs sondes interplanétaires, dont la sonde européenne GIOTTO, ont étudié la célèbre comète de Halley lors de son plus récent passage à proximité de la Terre.

Depuis plusieurs dizaines d'années, les “cométologues” sont persuadés de la nécessité d'aller observer un noyau cométaire de près pour mieux percer les mystères de la nature des comètes. Le succès de l'exploration spatiale de la comète de Halley n'a fait que renforcer cette conviction. Comment identifier de manière non ambiguë la nature du matériau cométaire ? Comment comprendre le mystère de la nature sombre du noyau ? Comment élucider l'origine des écarts isotopiques dans les grains cométaires ? Comment déterminer la nature des glaces à l'intérieur du noyau ? Une réponse : une nouvelle mission spatiale qui, au lieu de survoler une comète comme dans le cas de Halley, l'accompagnera depuis son aphélie jusqu'à son périhélie pour analyser plus longuement le développement de son activité. La mission ROSETTA a été conçue dans cette optique.

La sonde ROSETTA sera équipée d'instruments couvrant un large champ d'investigations (caméras, spectromètres fonctionnant dans l'ultraviolet, le visible et l'infrarouge, spectromètres de masse et analyseurs de poussières, etc.). La sonde embarquera un module baptisé ROLAND qui aura pour mission d'atterrir sur la surface du noyau cométaire et de conduire des investigations *in situ*.

Parmi la panoplie d'instruments embarquées sur la sonde ROSETTA et sur le module ROLAND figure l'instrument CONSERT (*COmet Nucleus Sounding Experiment by Radio-wave Transmission*). Cet instrument, proposé par Wlodek Kofman du Laboratoire de Planétologie de Grenoble, aura pour but de sonder l'intérieur du noyau cométaire en analysant les perturbations induites par la matière cométaire sur les ondes radio.

Dans l'équipe qui s'est créée pour le développement de cet instrument, Jean-Pierre Barriot avait la charge principale d'analyser les méthodes d'inversion des données CONSERT. C'est ainsi qu'il m'a associé à ce projet, d'abord comme stagiaire, ensuite comme doctorant.

Un projet de fin d'étude de génie électrique et un sujet de diplôme des études approfondies en communication micro-onde [Benna, 1999] ont permis d'étudier la problématique que pose le traitement des données CONSERT. De ces premiers travaux est apparu la nécessité de distinguer deux problèmes différents :

- la modélisation de la propagation des ondes électromagnétiques dans le noyau cométaire,
- la résolution du problème inverse posé par la reconstitution tomographique.

La modélisation de la propagation d'ondes nous a semblé nécessaire pour la compréhension des phénomènes physiques qui feront l'objet de l'inversion par la suite. Il est évident qu'on ne saura pas inverser correctement un processus physique dont on ne comprend pas les caractéristiques et l'évolution. Entre temps, un besoin d'expertise relatif aux conditions de déroulement de l'expérience et aux performances de cette dernière s'est fait sentir. En effet, il est apparu de nos premiers travaux que la qualité des données CONSERT est tributaire de l'orbite choisie pour la sonde ROSETTA, du site d'atterrissage de ROLAND, ainsi que de la forme et de la structure du noyau de la comète Wirtanen. Nous nous sommes alors intéressés aux meilleurs moyens qui permettent de simuler l'interaction entre ces différents paramètres, et nous avons étudié leur implication sur les résultats de l'expérience.

Nous avons décidé, en premier lieu, de nous investir pleinement dans la recherche des meilleures techniques de simulation de la propagation du signal CONSERT dans un modèle de noyau cométaire. Ceci dans le but de :

- mieux comprendre la nature des phénomènes physiques mis en jeu,
- proposer un simulateur pour l'expérience CONSERT capable de fournir l'expertise la plus complète possible en vue d'être utilisée lors du choix du site d'atterrissage de ROLAND, et lors de la définition des orbites de ROSETTA.

Suite à nos premières études, la résolution du problème inverse que constitue l'interprétation des données CONSERT, s'est révélée assez complexe pour diverses raisons. La première raison vient du fait que le problème est intrinsèquement mal posé et que la géométrie de l'expérience (un seul atterrisseur) ne permet pas de construire une solution

unique au problème d'imagerie.

La seconde raison vient de la nature elle-même des mesures CONSERT. En effet, pour minimiser les ambiguïtés sur les mesures de phases, il serait souhaitable que celle-ci soient acquises au plus près de la surface du noyau cométaire. Ceci n'est pas le cas puisque l'instrument CONSERT ne va mesurer que les temps d'arrivées et l'amplitude des signaux le long d'un ensemble réduit d'orbites¹ à quelques kilomètres de distance du noyau. Il faudrait alors rétropropager le signal électromagnétique au plus près de la surface de la comète², ce qui implique de connaître ce champ en tout point d'une surface fermée englobant le corps. Ceci étant extrêmement difficile, nous avons préféré dans un premier temps une autre approche basée sur une technique de prolongement vers le bas des mesures de phases³.

À la lumière des premières investigations nous avons décidé de structurer ce travail de thèse en trois étapes. Ces étapes sont :

1. développer et valider un algorithme pour la simulation de la propagation d'ondes dans un milieu tridimensionnel hétérogène borné (problème direct).
2. adjoindre à cet algorithme les caractéristiques techniques de l'instrument CONSERT pour en faire un simulateur capable de générer le plus fidèlement les sorties de l'instrument en fonction des paramètres d'orbite de la sonde ROSETTA, de la localisation de ROLAND sur la surface, ainsi que de la forme et de la structure du noyau cométaire.
3. développer et valider un algorithme d'inversion de données (problème inverse) capable d'une part d'extraire toute l'information contenue dans les données CONSERT, et capable d'autre part d'intégrer toute information annexe provenant d'un autre instrument scientifique ou de toute information *a priori* sur le noyau.

Nous avons adopté, durant le développement des différentes parties, une démarche progressive en passant généralement du cas bidimensionnel (2-D) au cas tridimensionnel (3-D). Cette approche présente l'avantage de permettre de mieux cerner la taille des problèmes posés et d'explorer plusieurs voies pour leur résolution. Les solutions trouvées sont ensuite généralisées au cas 3-D.

Cette thèse s'est achevée avec quatre articles scientifiques soumis pour publication ou déjà publiés. Ces publications couvrent diverses thématiques rendant ainsi compte de la diversité des aspects traités tout au long de la thèse.

¹Le nombre d'orbites dont disposera l'expérience CONSERT dépendra essentiellement du temps de fonctionnement qui lui sera alloué, ainsi que de la dynamique de rotation du noyau cométaire.

²La rétropropagation d'une onde consiste à évaluer globalement le champ électromagnétique à l'instant t en fonction de l'ensemble des valeurs de celui-ci à l'instant $t + dt$.

³Le prolongement vers le bas de la mesure de phases consiste à évaluer le long d'un chemin optique la phase en la coordonnée curviligne s en fonction de la phase en $s + ds$.

Ces articles sont :

1. “*Data set generation and inversion simulation of radio-waves propagating through a 2-D comet nucleus (CONSERT experiment)*”, sous press au journal *Radio Science*, traite des méthodes de simulation de la propagation d’onde dans un noyau cométaire bidimensionnel, ainsi que de la méthode de résolution du problème inverse.
2. “*A priori information required for a two or three dimensional reconstruction of the internal structure of a comet nucleus (CONSERT experiment)*”, publié au journal *Advances in Space Research*, traite de la manière d’exprimer mathématiquement l’information *a priori* que nous pouvons avoir sur le noyau, ainsi que de la manière de l’intégrer dans le processus d’inversion.
3. “*Generation of 3-D synthetic data by a ray-tracing technique for the radiotomography of comet Wirtanen (CONSERT experiment)*”, soumis au journal *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, où nous étendons l’algorithme de simulation de la propagation d’ondes aux modèles de noyaux tridimensionnels. Cet article présente aussi un simulateur complet de l’expérience CONSERT capable de fournir des données synthétiques qui miment les données réelles de l’instrument.
4. “*Radiotomography with an additional functional assumption : the CONSERT case*”, soumis pour publication au journal *Proceedings on Applied Mathematics and Mechanics*, traite d’une autre manière plus originale l’inversion des données à l’aide d’équations de contraintes.

Ces articles sont insérés tels qu’ils ont été soumis ou publiés, et constituent ainsi le cœur de ce mémoire.

Dans le premier chapitre du mémoire nous présentons les comètes dans leur aspect le plus général depuis la transformation de leurs grains dans les nuages interstellaires jusqu’à leur mort. Notre but est de dégager les éléments qui nous seront nécessaires d’une part à la compréhension de l’intérêt de la mission spatiale ROSETTA et de l’expérience CONSERT, et d’autre part à la conduite du travail de modélisation du noyau cométaire dans les chapitres suivants.

Dans le second chapitre nous présentons la mission spatiale ROSETTA, ainsi que l’expérience CONSERT. Nous commençons par présenter la mission GIOTTO comme antécédent à la mission ROSETTA et source d’une grande partie de nos connaissances sur les comètes. Nous présentons ensuite les caractéristiques de la comète 46P/Wirtanen déduites des campagnes d’observations au sol. Nous évoquons aussi les caractéristiques techniques de la sonde et de son instrumentation ainsi que le principe de l’expérience CONSERT et ses

principaux détails techniques. Ces détails nous seront fort utiles lors de la modélisation de la trajectoire de la sonde et lors de l'évaluation de l'apport possible des autres expériences à la notre.

Le troisième chapitre traite de la technique de résolution du problème direct et inverse rencontré dans l'expérience CONSERT dans une géométrie bidimensionnelle. Il s'articule autour des deux articles soumis respectivement à *Radio Science* et à *Advances in Space Research*.

Dans le quatrième chapitre nous généralisons la méthode de résolution du problème direct au cas tridimensionnel. Dans ce chapitre, constitué de l'article soumis à *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, nous présentons la version complète du simulateur de l'expérience, des modèles analytiques de structure interne de noyau cométaire, ainsi que des exemples de données synthétiques CONSERT.

Le dernier chapitre est consacré aux perspectives de notre travail. Nous y présenterons l'idée d'une alternative à la rétropropagation. Nous discutons aussi, sous la forme d'un article publié à *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, d'une méthode d'inversion se basant, non plus sur les matrices de covariance, mais sur des équations de contrainte.

Tous ces travaux de recherche présentés dans ce mémoire se sont déroulés au sein de l'UMR 5562 de l'Observatoire Midi-Pyrénées avec un financement conjoint du Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS) et du Centre National d'Études Spatiales (CNES). Ma thèse de doctorat a été quant à elle financée par une bourse de 3^e cycle du Ministère de l'Enseignement Supérieur Tunisien.

Chapitre 1

Les comètes

Ce chapitre est consacré à la présentation des comètes dans leur aspect le plus général. La présentation est conduite sous la forme d'un scénario relatant la formation, la vie, et la mort de ces astres. Nous nous basons, tout au long de notre récit sur les théories et les visions les plus couramment admises en science cométaire. Notre but n'est nullement de discuter le degré de validité de ces théories, mais plutôt de présenter la vision générale que nous avons aujourd'hui des comètes en partant de la transformation de leurs grains de poussières dans les nuages interstellaires jusqu'à leur mort lente ou subite.

Nous nous sommes attachés, tout au long de ce chapitre, à dégager les éléments qui nous seront nécessaires d'une part à la compréhension de l'intérêt de la mission spatiale ROSETTA et de l'expérience CONSERT, et d'autre part à la conduite du travail de modélisation d'un noyau cométaire dans les chapitres suivants.

1.1 Historique

Quand une comète apparaissait dans le ciel, les hommes ont toujours souhaité y voir un message. Autrefois les astrologues croyaient que l'apparition imprévue d'un tel phénomène, souvent très impressionnant, leur révélait quelque chose d'important sur le futur. Des tablettes cunéiformes nous apprennent que, plusieurs millénaires avant notre ère, les Babyloniens attribuaient déjà aux comètes un pouvoir sur les récoltes : l'apparition d'une comète était, en effet, considérée comme un présage de pluie ; sa disparition annonçait une bonne ou une mauvaise récolte de sésame, selon qu'elle se produisait vers le sud ou vers le nord.

Chez les grecs, Aristote (384-322 av. J.-C.) pensait que les comètes annonçaient vent et sécheresse, conformément à la nature météorologique qu'il leur attribuait. On les rendit responsables de la disparition des deux villes d'Achaïe, Hélice et Bura, englouties sous les eaux du golfe de Corinthe, à la suite d'un tremblement de terre, en 373 av. J.-C. Pour Diodore de Sicile et Plutarque, les comètes pouvaient être d'heureux présages puisque, selon ces deux auteurs, la comète de l'an 344 av. J.-C. aurait annoncé le succès de l'expédition de Timoléon de Corinthe contre la Sicile. Chez les romains, les comètes annonçaient les guerres et les épidémies. On y associa la mort de Jules César en 43 av. J.-C. quand à son décès on vit une brillante comète dans le ciel (Figure 1.1). Les chroniques anciennes nous apprennent que des comètes annoncèrent de même la mort d'autres célèbres rois et empereurs comme celle de l'empereur Constantin (366), de Maurice, empereur de Byzance (602), du prophète Mahomet (632), de Louis II (875), de Henri I^{er}, roi de France (1060), du pape Alexandre III (1181), de Richard I^{er}, roi d'Angleterre (1198), du pape Innocent IV (1254), de Charles le Téméraire (1476), de Philippe le Beau, père de Charles Quint (1505), de François II, roi de France (1560), etc.

Parallèlement à cette mystification des phénomènes que constitue l'apparition des comètes, les hommes ont toujours cherché à identifier leur nature et leur origine. S'ils furent de bons observateurs, ni les Babyloniens ni les Chinois ne semblent avoir conçu de théories très élaborées sur les comètes. Les savants et les philosophes de la Grèce ou de la Rome antique, au contraire, n'ont pas manqué de s'interroger sur la nature des comètes. Leurs conceptions nous sont connues surtout par Aristote et Sénèque (4 av. J.-C.-



FIG. 1.1: Pièce de monnaie romaine frappée après la mort de Jules César où le défunt est symbolisé par une comète (crédit Barber Institute).

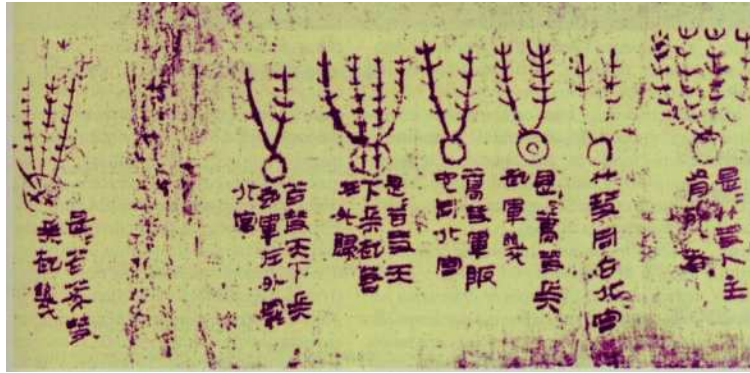


FIG. 1.2: Fragment du *Livre de soie*, manuscrit chinois datant probablement du IV^e siècle av. J.-C., contenant la plus ancienne classification de comètes découvertes à ce jour (crédit Xi [1984]).

65 apr. J.-C.) qui, chacun, ont fait une étude critique des hypothèses avancées par leurs prédécesseurs et leurs contemporains avant d'exposer leurs propres idées sur la question. Pour certains comme les pythagoriciens, les comètes étaient des corps permanents ayant, comme les planètes, un cours régulier mais ne s'élevant jamais beaucoup au-dessus de l'horizon et étant, de ce fait, rarement visibles. D'autres, comme Anaxagore (500-428 av. J.-C.) et Démocrite (460-370 av. J.-C.), au contraire, déniaient aux comètes toute existence réelle et expliquaient leur apparence par le rapprochement très serré de deux planètes dans le ciel, conjuguant ainsi leurs éclats et pouvant donner l'illusion d'un astre unique allongé ou d'une traînée lumineuse.

Aristote dans sa *Météorologie* réfute tour à tour ces deux conceptions et souligne le caractère imprévisible et irrégulier de l'apparition des comètes, qui s'oppose à sa conception philosophique de la nature permanente des cieux. Ainsi il est finalement conduit à considérer les comètes comme des phénomènes survenant dans l'atmosphère terrestre : des feux allumés par une sorte de tourbillons d'air. Cette théorie va peu à peu s'imposer et prévaudra jusqu'à la Renaissance.

L'étude scientifique des comètes débute réellement après la Renaissance. Les progrès de l'astronomie cométaire entre le XVI^e et le XVII^e siècle coïncident avec une époque de grand renouveau scientifique et se distinguent par des découvertes clés qui furent décisives. Nous en retiendrons les plus importantes, à savoir :

- la confirmation de l'orientation de la queue cométaire dans la direction anti-solaire par le médecin allemand Jérôme Fracastor en 1531,
- la mesure de la distance d'une comète par l'astronome danois, Tycho Brahé, en 1577 plaçant ainsi définitivement ces astres à des positions au-delà de l'orbite lunaire.

L'heure de gloire de la science cométaire sonna lorsque le jeune astronome anglais Edmond Halley publia en 1705 son mémoire intitulé *Astronomiae Cometicae Synopsis*¹ où il annonça que les comètes vues en 1456, 1531, 1607 et 1682 n'étaient qu'une seule et même comète dont il prédit le retour pour le 25 décembre 1758. Cette comète qui porte aujourd'hui son nom, fut effectivement repérée par un astronome amateur de Saxe le soir de Noël de l'an 1758 et par Charles Messier à Paris le 21 janvier 1759. Pour la première fois de l'histoire, le retour d'une comète est observé après avoir été prédit et calculé.

Depuis, la science cométaire n'a cessé de progresser, et des découvertes importantes ont permis de mieux comprendre la physique de ces astres et d'en tirer des informations sur la naissance et l'évolution de notre système solaire.

1.2 Le scénario de la vie des comètes

C'est à la formation du système solaire que remonte l'origine des comètes. Selon la théorie laplacienne aujourd'hui admise, le système solaire s'est formé à partir d'un nuage de gaz et de poussières, appelé la "nébuleuse pré-solaire" (Figure 1.3) [Weidenschilling et al., 1989]. Ce nuage s'est contracté sous sa propre gravitation, et la température et la densité en son centre ont atteint des valeurs suffisantes pour que les réactions thermonucléaires se déclenchent, permettant la naissance du Soleil. En se contractant, le nuage, en rotation autour du proto-Soleil, s'est aplati, formant un disque épais.

Pendant que se forme le Soleil, les collisions entre les grains provoquent leur agglomération en particules de plus en plus grosses. Cette agglomération, ou accréation, des grains et des particules résultantes produit finalement des blocs de quelques kilomètres de diamètre, embryons de planètes ou "planétésimaux". Les planètes et probablement les innombrables astéroïdes se formèrent par agglomération de ces planétésimaux. On conçoit aisément alors la somme de renseignements qu'une analyse de ces grains devrait nous apporter sur l'histoire de notre système solaire. Malheureusement, les grains originels n'existent probablement plus; ceux qui ne se sont pas agglomérés ont été probablement dispersés et rejetés du système solaire par le vent solaire ou happés par les planètes.

Aujourd'hui on sait que l'histoire de notre système solaire n'est pas perdue à tout jamais. En effet, nous avons la quasi-certitude que des planétésimaux ayant échappé à l'agglomération en planètes subsistent aux confins de notre système solaire. Trop petits et trop loin du Soleil pour évoluer géologiquement, ils conserveraient probablement une structure physique et chimique à peine modifiée qui nous renseignerait beaucoup sur la nébuleuse primitive. De temps en temps, sous l'effet de perturbations gravitationnelles internes ou externes du système solaire, l'un d'eux plonge vers le Soleil et nous rend visite : il s'agit alors d'une comète.

¹Synopsis d'astronomie cométaire.

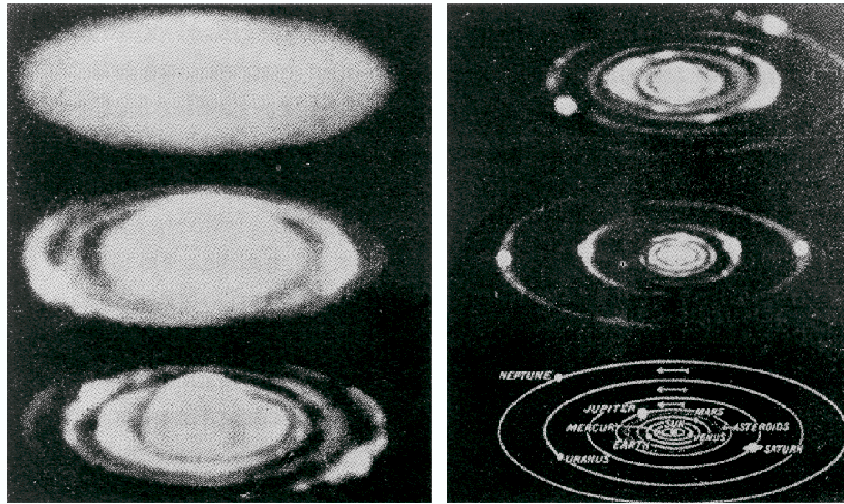


FIG. 1.3: La séquence chronologique du modèle laplacien de formation du système solaire à partir de la nébuleuse primitive (crédit Whipple [1972]).

Comment certains planétésimaux ont-ils pu échapper à la formation des planètes ? Il peut s'agir des "blocs de construction" inutilisés et rejetés par les planètes géantes. En effet, dans la partie externe du système solaire, la formation de planètes a peut-être été gênée, et même empêchée du fait que la densité des planétésimaux restant était trop faible, ce qui rendait la formation de planètes plus difficile.

Quoi qu'il en soit, des planétésimaux ont dû échapper à la formation planétaire. De plus, s'étant formés loin du Soleil, donc à basses températures, ils sont restés dans le froid extrême de ces régions lointaines, ce qui leur a probablement permis de conserver la composition quasi-exacte des grains primordiaux, y compris les éléments les plus volatils.

Selon le modèle de l'astronome néerlandais Oort [1950], un vaste réservoir de tels planétésimaux existerait au-delà de l'orbite de Neptune et s'étendrait de 20 000 u.a. à probablement plus de 100 000 u.a.² Ce cocon, baptisé depuis "le Nuage de Oort", occupant un volume en forme de vaste et épaisse coquille plus ou moins sphérique centrée sur le Soleil, pourrait comprendre 10^{10} à 10^{12} objets. Chacun d'eux circulerait sur une orbite dont la période peut se chiffrer en millions d'années et les dimensions en plusieurs dizaines de milliers d'u.a. En complément à cette théorie, Kuiper proposa l'existence d'un second réservoir trans-neptunien à des distances plus proches du soleil (~ 50 u.a.) [Kuiper, 1956; Whipple, 1972; Fernández, 1980]. Ce second réservoir est nommé "Ceinture de Kuiper". Chacun des blocs de glaces et de poussières est si éloigné, si petit, qu'il émet trop peu de

²u.a. : l'unité astronomique est la distance moyenne Terre-Soleil, soit 149 598 500 kilomètres; à titre de comparaison, la plus proche étoile, Proxima Centauri, se trouve à moins de 250 000 u.a.

lumière pour être observé avec les moyens actuels. Mais heureusement, ce réservoir géant n'est pas tout à fait stable. Sous l'influence continue du champ gravitationnel de notre Galaxie, d'une perturbation brusque produite par une étoile ou d'un nuage interstellaire passant à proximité du système solaire et du mouvement d'oscillation du soleil sur son orbite, les orbites des planétésimaux du nuage de Oort se transforment. Selon les cas, elles peuvent s'ouvrir sur l'espace interstellaire, projetant les planétésimaux hors du système solaire, ou bien au contraire les transférer vers les parties internes du système solaire. Dans ce second cas, l'attraction gravitationnelle des planètes agit elle aussi, transformant les orbites longues des planétésimaux en orbites de périodes beaucoup plus courtes (d'une période de quelques millions d'années jusqu'à quelques années seulement).

Cette évolution atteint un stade décisif lorsque le planétésimal s'approche du Soleil. La chaleur de notre étoile commence alors à volatiliser les glaces emprisonnées, de sorte que le planétésimal s'entoure d'une sorte d'atmosphère formée par des gaz et des poussières en expansion vers le vide de l'espace interstellaire. Cette atmosphère de plus en plus épaisse cache en son centre le planétésimal (son noyau) et développe des queues formées par les poussières et les gaz repoussés par la lumière et le vent solaire. La comète prend alors sa forme caractéristique et son noyau commence à évoluer physiquement.

Le phénomène comète ne peut se maintenir que pendant un temps limité ($\sim 1\,000$ - $10\,000$ passages), car la perte de matière induite par l'évaporation des volatils et la libération des poussières à chaque passage près du Soleil diminue petit à petit la masse du noyau.

Dans les détails, ce scénario comporte évidemment des points sombres et des lacunes, mais semble expliquer dans sa globalité et d'une manière assez cohérente, la physique de formation des noyaux cométaires et leur évolution. Nous allons dans la suite détailler plus amplement ce scénario. Nous ne présenterons que les éléments de la théorie les plus largement répandus car notre démarche n'est pas de confronter les divers modèles de formation, mais plutôt de donner une conception assez plausible et réaliste de la vie d'une comète.

1.3 Formation des noyaux cométaires

1.3.1 Les grains de la nébuleuse primitive

Pour mieux comprendre la structure des noyaux cométaires il faut remonter à la structure des briques de base qui les constituent : les grains.

Comme nous l'avons mentionné, la nébuleuse primitive est faite de gaz et de poussières. Le gaz se compose surtout d'hydrogène et d'hélium. Les poussières - petits grains de dimension micrométriques - se composent de matériaux réfractaires (métaux, silicates, graphite, substances organiques plus ou moins complexes) et de substances volatiles. Parmi ces vo-

latils³ on trouve majoritairement, et en quantités très mal connues, de la glace d'eau (H_2O), de la glace de dioxyde de carbone (CO_2), de la glace de monoxyde de carbone (CO), d'ammoniac (NH_3), de méthane (CH_4), etc.

Ces grains pourraient avoir été formés par condensation, lors du refroidissement d'un nuage reliquat de l'atmosphère d'une étoile géante rouge en fin de vie. Un tel nuage abonde en éléments chimiques synthétisés par les réactions nucléaires au cours de la vie de l'étoile. Les réfractaires se condensent en premier formant le cœur des grains. Ceux-ci sont ensuite soufflés vers l'espace interstellaire par le vent solaire de la géante rouge [Gehrz, 1989; Tielens, 1991].

Les grains ainsi formés passent alors des centaines de millions d'années, ou plus, en orbite dans la galaxie, où leurs trajectoires les mènent successivement à travers des milieux différents. Dans certaines zones, la densité du gaz et des grains est très élevée. Il se forme alors une région appelée "nuage moléculaire" où les atomes du gaz se combinent en molécules (essentiellement H_2 , mais aussi CO , H_2O , NH_3 , OCS , SiO , etc.) [Sandford, 1996]. Étant donnée la basse température qui règne dans ce nuage moléculaire (quelques dizaines de degrés absolus), la poussière réfractaire s'enveloppe d'une couche de glace de volatils (volatils condensés tels que H_2O , CO_2 , CH_4 , H_2CO , etc.). Au cours de sa vie, le grain peut se retrouver dans des régions moins froides, de plus basse densité. La lumière ultraviolette des étoiles environnantes casse alors les molécules en radicaux libres très réactifs (par exemple OH , NH_2 , CN , CH , HCO , etc.), ce qui dépose de l'énergie latente (sous forme d'énergie de liaison chimique) à la surface du grain. Cette énergie se libérera à l'occasion d'une élévation de température, entraînant des réactions chimiques qui transformeront le matériau volatil en une couche de substances carbonées relativement réfractaires (voir Figure 1.4). Ce processus peut se répéter plusieurs fois jusqu'à ce que le grain arrive enfin à un nuage moléculaire particulier, celui qui formera le Soleil.

La contraction de ce gigantesque nuage donne ensuite naissance, par fragmentation, à plusieurs nébuleuses pré-stellaires évoluant chacune pour former une étoile accompagnée généralement d'un disque proto-planétaire. L'une d'entre elles est notre nébuleuse proto-solaire, composée des gaz et des grains précédemment décrits. Ces grains vont ensuite pouvoir s'agglomérer et former les planétésimaux. À ce stade, il est important de noter qu'avant même d'être incorporés dans les planétésimaux, les grains peuvent stocker de l'énergie sous diverses formes, énergie qui par la suite modifiera l'évolution des planétésimaux.

³On désigne par volatils, les substances s'évaporant à basse température par opposition aux matériaux réfractaires qui eux fondent à très haute température.

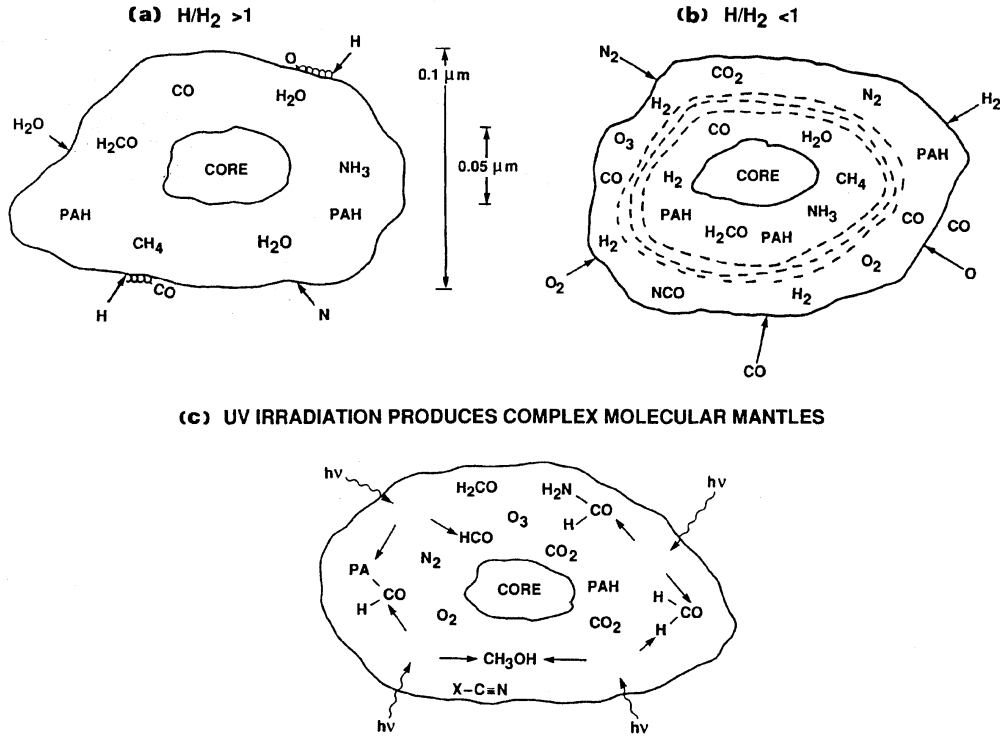


FIG. 1.4: Les types de grains de poussières présents dans les nuages moléculaires. (a) Dans les régions où le taux $H > H_2$, l'hydrogène atomique du nuage réagit avec les diverses molécules et atomes présents à la surface des grains produisant un manteau de volatils comme CH_4 , NH_3 et H_2O . (b) dans le cas où le nuage moléculaire est dense ($H < H_2$), le grain va s'entourer d'un manteau riche en éléments non hydrogénés comme CO , O_2 et N_2 . (c) l'irradiation et le chauffage des grains créent dans le manteau des molécules plus complexes (crédit Sandford [1996]).

1.3.2 L'énergie latente des grains primitifs

Les grains stockent de l'énergie selon divers processus. De ces processus, nous n'évoquerons que les trois principaux.

Une première manière provient du fait que l'évolution de la nébuleuse proto-solaire fut probablement affectée par celle de ses voisines. En effet, les plus massives des étoiles voisines émettent un intense rayonnement ultraviolet de sorte que, avant de s'agglomérer à ses partenaires, un grain a reçu une dose d'énergie sous cette forme. Il devient alors différencié⁴ : un cœur dense réfractaire (comptant pour environ 30% de la masse totale

⁴Sa composition chimique et ses propriétés physiques varient avec la profondeur dans le grain.

du grain) est entouré d'un mince manteau de glaces.

La seconde manière d'acquérir de l'énergie latente provient de l'explosion de certaines étoiles massives - des supernovae - à proximité du Soleil en formation. Une anomalie isotopique de l'oxygène observée dans certains grains (ne contenant que ^{16}O) le suggère [Lattimer et al., 1978]. En effet, l'explosion d'une supernova disperse de nombreux isotopes radioactifs susceptibles de contaminer les grains de la nébuleuse primitive et de les alimenter en énergie par leurs désintégrations radioactives. Ainsi ces grains seraient de véritables sources de chaleur, qui pourraient chauffer l'intérieur des planétésimaux dans lesquels ils sont incorporés. Parmi ces isotopes, ^{26}Al , ⁵ identifié dans certaines météorites, est l'un des plus "célestes".

Dans les grains microscopiques, la chaleur interne due à la radioactivité est efficacement évacuée vers l'extérieur par rayonnement. Mais ce n'est pas le cas lorsque le grain est "enterré" dans un gros corps comme un planétésimal.

Le troisième mode d'acquisition d'énergie provient de l'eau. Composée de deux des éléments les plus abondants dans l'Univers, la glace d'eau (H_2O) est un constituant très important des grains. L'une de ses propriétés particulières a sans doute beaucoup influencé l'évolution du matériau cométaire : condensée à des températures inférieures à 90 K, la glace se présente sous forme amorphe⁶. Cette forme est instable à plus haute température (on ne la trouve pas sur Terre) : vers 125 K, la glace amorphe se cristallise irréversiblement, par une transition de phase exothermique dégageant de l'énergie [Jenniskens and Blake, 1998]. Juste après la naissance du Soleil, la nébuleuse primitive s'est réchauffée et ce n'est que dans les régions froides éloignées du Soleil, que la glace amorphe a pu survivre. Les planétésimaux du nuage de Oort contiendraient ainsi de grandes quantités de cette glace d'eau amorphe.

En somme, ces grains sont de véritables sources potentielles d'énergie : soit grâce aux désintégrations des isotopes radioactifs, soit grâce à l'eau qu'ils contiennent, prête à se cristalliser en libérant son énergie, soit encore par la présence des radicaux très réactifs. Toutes ces sources d'énergies latentes vont influencer fortement l'évolution ultérieure de ces planétésimaux.

1.3.3 L'accrétion

L'agglomération des grains s'est produite lorsque, par rencontres mutuelles au cours des mouvements turbulents de la nébuleuse, les grains se sont progressivement collés les uns aux autres, formant des sortes d'agrégats (Figure 1.5) assez lâches appelés "nids d'oiseaux" [Greenberg and Hage, 1990]. Ces agrégats, de dimension centimétrique, se sont rassemblés au fur et à mesure des rencontres. Leur taille a progressivement augmenté pour

⁵L'isotope ^{26}Al a une durée de vie voisine de 700 000 ans.

⁶Sous la forme amorphe et contrairement à la forme cristalline, un solide n'est pas ordonné, et les molécules qui le constituent s'arrangent plus ou moins aléatoirement.



FIG. 1.5: Modèle de structure d'agrégat en "nid d'oiseau". Cet agrégat est composé de particules de taille sub-micrométrique. Chaque particule est formée d'un noyau de silicates recouvert d'un manteau de composés organiques et de glaces de volatils (crédit Greenberg et al. [1995]).

aboutir à des mini-boules très poreuses appelées "cométésimaux". À partir de ces mini-boules, des planétésimaux, de quelques kilomètres de dimension, peu denses, poreux et globalement homogènes entre eux se sont finalement formés (Figure 1.6) [Weissman, 1986; Donn, 1990; Möhlmann, 1996]. Au-delà des planètes actuellement connues, la croissance des planétésimaux s'est arrêtée au bout de quelques millions d'années, à cause de la raréfaction des rencontres et de la gêne que les planètes géantes voisines ont commencé à exercer.

1.4 L'évolution des planétésimaux aux confins du système solaire

Loin du Soleil, la surface du planétésimal reste froide, tandis que le dégagement interne d'énergie accroît la température centrale (comme dans les planètes telluriques chauffées par la radioactivité des roches profondes). Ces transformations physico-chimiques, même à basse température, modifient les matériaux et produisent probablement une migration des gaz vers l'extérieur, suivie de sa recondensation près de la surface [Sirono and Yamamoto, 1999]. Bien que ce scénario soit plus ou moins généralement accepté, les détails de ces processus sont encore très mal définis, et il est très difficile pour l'instant de relier la chimie d'une comète aux modèles de formation du planétésimal. Nous pouvons aussi envisager que dans certains cas extrêmes, la chaleur dégagée peut être suffisante pour faire fondre la glace ; il en résulte un remplissage des vides de la structure par les liquides issus de la fusion, d'où une augmentation de la densité et une migration des particules lourdes vers l'intérieur du planétésimal. Le résultat se traduit par une différenciation du corps. Aujourd'hui il est très probable que ces planétésimaux ont eu assez de temps depuis leur formation pour qu'ils puissent dissiper toute la chaleur générée dans leur profondeur.

Outre la transformation de leur intérieur, les planétésimaux ont vu aussi leur surface évoluer. En effet, la surface d'un planétésimal est exposée à toutes les agressions venues du cosmos. Les particules de haute énergie venues du milieu cosmique et du Soleil pénètrent les couches superficielles des planétésimaux. Là, il réagissent avec les molécules des volatils gelés, déclenchant la synthèse d'éléments encore plus volatils et des résidus polymérisés [Moore and Donn, 1982].

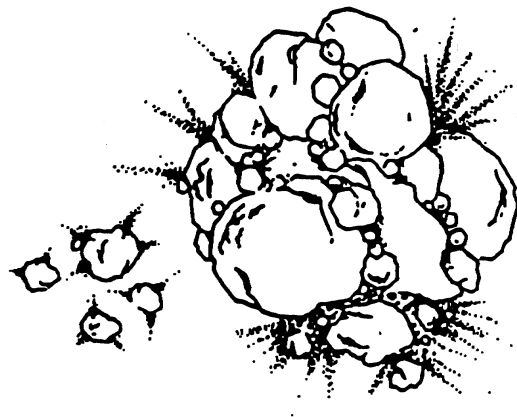


FIG. 1.6: Un des modèles de structure de noyaux cométaires. Le noyau est composé d'un assemblage de cométésimaux poreux (crédit Weissman [1986]).

1.5 Dynamique du nuage de Oort et de la ceinture de Kuiper

Diverses études de l'évolution dynamique du nuage de Oort et de la ceinture de Kuiper ainsi que leur relation ont été achevées. Un scénario assez vraisemblable se distingue et semble faire le consensus parmi les planétologues.

L'évolution des planétésimaux est différente, selon qu'ils appartiennent à la partie centrale ou externe du nuage de Oort, ou qu'ils appartiennent à la ceinture trans-neptunienne de Kuiper et aux régions les plus internes du nuage de Oort.

Les planétésimaux du nuage de Oort sont les plus instables. Une étoile passant à proximité peut fortement perturber les éléments de cette région, éjectant certains éléments dans l'espace interstellaire et en projetant d'autres à l'intérieur du système solaire [Scholl et al., 1982]. Les comètes aux longues périodes orbitales fraîchement arrivées de ces régions lointaines, sont appelées "nouvelles". Elles présentent généralement une importante activité due aux volatils accumulés dans leurs couches superficielles et qui s'évaporent lors de leurs premiers passages près du soleil. Une fois dans la région interne du système solaire, ces comètes subissent l'influence de Jupiter. Cette perturbation peut, soit les éjecter du système solaire, soit baisser l'aphélie de leur orbite leur accordant un nouveau passage près du soleil et une nouvelle intervention de Jupiter. Un processus chaotique s'installe faisant évoluer aléatoirement le demi-grand axe de l'orbite cométaire [Petrosky and Broucke, 1988]. Les calculs montrent que dans le cas général ces comètes finissent par être éjectées du système solaire. Dans des cas relativement rares, quelques comètes finissent par se faire capturer sur des orbites un peu plus stables avec des périodes plus courtes. Parmi les membres les plus représentatifs de ce type de comètes nous citerons les célèbres comètes de Halley et de Hall-Bop.

Quant aux planétésimaux de la région interne du nuage de Oort et ceux de la ceinture de Kuiper qui sont à des distances plus proches, ils suivent une route différente de celle du reste des membres du nuage de Oort. Le transfert de ces planétésimaux est beaucoup moins brusque et se fait par un phénomène long de diffusion chaotique. Ceci les amène progressivement :

- soit à des orbites plus hautes alimentant probablement ainsi le nuage de Oort,
- soit à des orbites plus basses avec des périhélies au voisinage de l'orbite de Neptune et d'Uranus, de sorte que l'influence gravitationnelle de ces planètes, depuis longtemps négligeable, commence à agir.

La perturbation causée par une planète peut alors devenir efficace. Pour peu que les conditions soit favorables, la planète gouverne l'évolution orbitale de la comète. Lorsqu'une planète a réduit suffisamment la distance périhélique de l'orbite cométaire, c'est la planète suivante (plus proche du Soleil) qui prend le contrôle, et le processus se répète.

Ce transfert arrive à son terme lorsque la distance aphélique de la comète se réduit à près de 5 u.a., rayon de l'orbite de Jupiter, et sa distance périhélique à environ 1-2 u.a. Ces comètes sont dites de la "famille" de Jupiter.

Aujourd'hui, on connaît beaucoup de comètes dont l'orbite est en pleine évolution. Un exemple est celui de la comète Schwassmann-Wachmann 1 dont l'orbite est entre Saturne et Jupiter. Un autre exemple est Chiron, découvert il y a plus de 20 ans et classé comme astéroïde (numéro 2060). Son orbite entre Saturne et Uranus s'est révélée instable, et d'ici 100 000 ans il se sera probablement rapproché du Soleil [Hahn and Bailey, 1990]. De plus, on lui a détecté une augmentation de luminosité, interprétée comme une activité cométaire [Tholen et al., 1988].

La capture d'une comète, telle qu'on vient de la décrire, est un processus lent comportant des retours en arrière. Pendant ce transfert, et particulièrement au cours des dernières phases, le planétésimal subit sans doute déjà une évolution interne qui fera perdre à son noyau toute mémoire de son passé dynamique.

1.6 Évolution des comètes au voisinage du Soleil

Le point décisif de l'évolution de l'orbite d'une comète est atteint quand le périhélie de l'orbite cométaire descend sous les 5 u.a. La température à la surface du noyau cométaire approche les 200 K et la glace d'eau commence à se sublimer de plus en plus vite. Une queue commence alors à se former et ce qui n'était qu'un planétésimal devient une "comète". Le noyau cométaire commence alors à subir une évolution physico-chimique plus profonde qui dépendra de sa structure originelle.

La chaleur commence à pénétrer à l'intérieur du noyau essentiellement par conduction thermique. Ce processus est d'autant plus lent que le noyau est poreux et la glace initiale est amorphe⁷. Il n'est donc pas sûr que le réchauffement se propage jusqu'au centre du noyau et il est probable que les comètes possèdent pour la plupart un cœur froid.

Sous la surface la chaleur cristallise la glace d'eau amorphe qui à son tour dégage de la chaleur et vient cristalliser les couches sous-jacentes. Un front de cristallisation progresse donc de plus en plus profondément à l'intérieur du noyau (Figure 1.7). Son comportement dépend essentiellement de la teneur du noyau en poussière. En effet, cette dernière va consommer une partie de l'énergie calorifique pour atteindre son équilibre thermique, ralentissant ainsi plus ou moins le front de cristallisation dans sa progression. Divers modèles montrent même que ce front se stabilise à une profondeur plus ou moins importante selon le cas, formant ainsi une couche de glace cristalline [Klinger et al., 1996; Klinger, 1999].

Vu la porosité du noyau, les gaz provenant de la sublimation des composants volatils diffusent à travers les pores, soit pour s'échapper dans l'espace, soit pour se recondenser

⁷L'une des propriétés de la glace amorphe est sa mauvaise conductivité thermique.

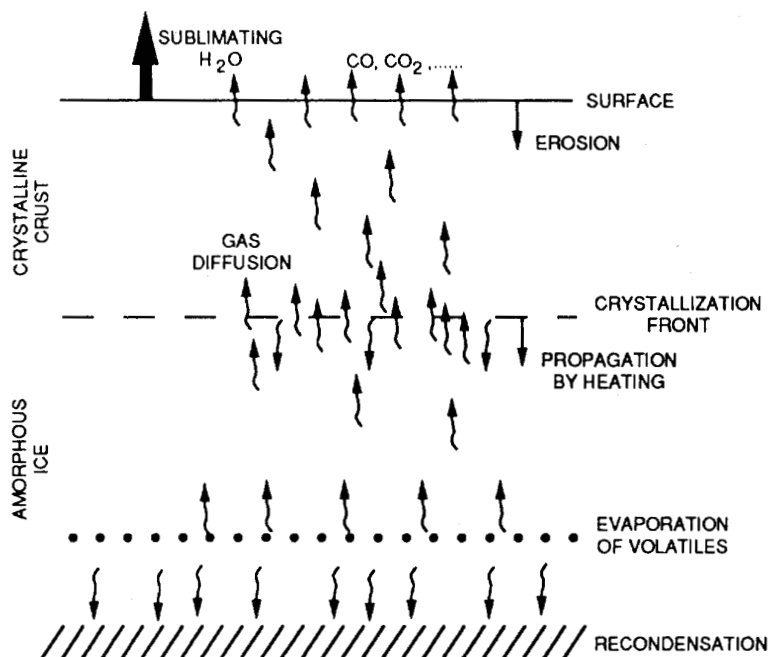


FIG. 1.7: Modèle de différenciation physico-chimique du noyau cométaire. Ce modèle est basé sur la cristallisation de la glace d'eau amorphe libérant les volatils emprisonnés et dégageant de la chaleur. Une partie des gaz libérés s'échappe vers l'extérieur alors qu'une autre se recondense dans des régions plus profondes du noyau (crédit Rickman [1991]).

plus en profondeur. Une partie des plus fines poussières est immédiatement emportée par le flux gazeux contribuant à la brillance de la chevelure et de la queue. Des modèles montrent que la condensation en éléments volatils comme CO_2 ou CO augmente vers l'intérieur, tandis que la proportion des composants réfractaires est plus forte près de la surface. Selon la dynamique de rotation du noyau et de son relief, une différenciation locale de la surface peut survenir et dans les cas extrêmes une croûte de matériau réfractaire peut même se former. Cette différenciation peut se traduire par la formation de zones "inactives" par opposition aux zones "actives" où la couche de poussière n'est pas assez continue et dense pour étouffer la production de gaz [Möhlmann, 1995]. La présence de grandes régions inactives explique probablement la faible production de gaz constatée dans certaines comètes comme P/Encke.

Le dégazage plus ou moins localisé dans les régions actives du noyau, exerce une force de réaction sur ce dernier. Le couple résultant modifie la rotation; celle-ci à son tour, détermine la distribution de l'énergie solaire à la surface du noyau et donc l'évolution

des régions actives et inactives. Cette force de réaction est faible, mais ses effets cumulés sont révélés par les modifications observées dans les mouvements orbitaux des comètes de courtes périodes. C'est Whipple [1950] qui attribua cet effet constaté sur P/Encke au dégazage anisotrope du noyau et aux forces non-gravitationnelles qui en résultent.

1.7 La mort des comètes

Le stade final de cette évolution physico-chimique dépend de la balance entre les deux phénomènes antagonistes que sont : la sublimation des volatils et la formation d'une croûte isolante à la surface du noyau. Deux destins extrêmes en découlent⁸ : celui de "la perte de volatils" et celui de "l'étouffement".

Le premier suppose que la taille du noyau diminue inexorablement par sublimation jusqu'à l'épuisement de toute la réserve de volatils ou la disparition totale du noyau. Il en subsistera comme seule trace un courant de météorites en orbite autour du Soleil. Le noyau peut aussi se fragmenter en plusieurs morceaux (P/Biela en 1844, P/West en 1976, SL9 en 1994 ou LINEAR 1999S4 en 2000) [Sekanina, 1968; Hughes and McBride, 1992]. Le second cas suppose que la surface du noyau cométaire se charge de plus en plus de poussières formant une couche de plus en plus épaisse et isolante étouffant ainsi toute activité de dégazage. La comète "s'éteint". Il en résulte un objet s'apparentant à un astéroïde sur une orbite cométaire. Plusieurs astéroïdes, en particulier quelques uns du groupe Apollo-Amor comme 1983 SA ou 1983 XF, sont soupçonnés d'être de tels objets [Hahn and Rickman, 1985]. Cette mort peut n'être que provisoire en attendant une évolution de l'orbite et un passage plus rapproché du soleil qui relancerait un dégazage plus intense capable de briser la croûte de poussières.

⁸dans le cas où le noyau cométaire n'a pas fini par chuter sur le Soleil ou se faire éjecter dans le milieu interstellaire

Chapitre 2

L'expérience CONSERT à bord de la sonde ROSETTA

Dans ce chapitre nous présentons la mission spatiale ROSETTA ainsi que l'expérience CONSERT.

Nous consacrons la première section à la mission GIOTTO ; mission célèbre par son survol de la comète de Halley en 1986 à qui nous devons beaucoup de notre savoir sur les noyaux cométaires. Il nous a semblé important de détailler les informations apportées par le survol de la comète de Halley pour mieux introduire les développements de la forme et de la structure des noyaux cométaires qui seront évoqués dans les chapitres suivants.

La deuxième section de ce chapitre est consacrée à la présentation de la mission spatiale ROSETTA. Nous évoquerons les caractéristiques techniques de la sonde et de son instrumentation. Ces détails nous seront fort utiles lors de la modélisation de la trajectoire de la sonde et lors de l'évaluation de l'apport possible des autres expériences à CONSERT. Un court passage est consacré à la comète 46P/Wirtanen dont il présente l'essentiel de ses caractéristiques.

Nous présentons dans la dernière section du chapitre l'expérience CONSERT proprement dite. Nous abordons le principe de l'expérience ainsi que les principaux détails techniques en vue de les utiliser lors de la simulation de l'instrument.

2.1 GIOTTO : le précurseur

Au milieu des années 60, les agences spatiales commençaient à étudier la possibilité d'envoyer un véhicule automatique à la rencontre d'une comète. D'abord parce qu'aucune comète n'avait été explorée pendant les deux premières décennies de l'ère spatiale. Ensuite, parce que ces boules de neige isolées aux confins glacés du système solaire représentent le matériau le plus primitif qu'il nous soit possible d'étudier afin de tenter de décrire notre histoire et nos origines.

Quatre types de missions étaient envisagés : survol par une sonde qui traverse rapidement la chevelure ou la queue, rendez-vous avec mise en orbite autour du noyau, atterrissage sur celui-ci, retour d'échantillons prélevés du sol et de l'atmosphère. Les deux derniers projets étaient bien trop ambitieux, alors que l'existence même des noyaux cométaires était spéculative, mais les deux premiers pouvaient être réalisés.

Le choix de la comète 1P/Halley comme première cible était évident : c'était d'abord une comète assez active avec une orbite bien définie. De plus, depuis ses retours de 1759, 1835 et 1910, elle n'avait cessé de fasciner le public. Dès le début des années 80, et parallèlement à la Russie et au Japon, l'ESA¹ s'était engagée dans la conception d'une sonde baptisée GIOTTO et équipée d'une panoplie d'instruments destinée à survoler le noyau de la comète de Halley lors de son passage périhélique de 1986.

Durant les deux années 1984 et 1985, une vraie flottille fut donc lancée à la rencontre de Halley :

- les deux sondes nipponnes SAKIGAKE et SUISEI destinées à l'étude de son plasma et de son halo d'hydrogène,
- les deux sondes russes VÉGA 1 et 2 destinées à l'étude de sa chevelure externe,
- la sonde GIOTTO pour l'étude de la chevelure interne.

Ces différentes missions étaient complémentaires non seulement au niveau des régions explorées, mais aussi au niveau des instruments embarqués et des dates de survol (voir Figure 2.1).

Très vite, il devint évident pour la communauté scientifique engagée dans ces projets qu'une coopération internationale était indispensable pour planifier et optimiser la phase d'observation durant ces survols, ainsi que pour l'interprétation des résultats. La communauté astronomique s'était mobilisée pour une campagne d'observations au sol coordonnée par l'agence spatiale américaine NASA² et le comité international de surveillance de Halley IHW³. L'une des réalisations les plus remarquables de cette coopération internationale fut le guidage de la sonde GIOTTO jusqu'au plus près de sa cible. Les observations menées depuis le sol ne permettaient pas de situer avec précision le noyau au cœur de l'épaisse

¹European Space Agency/Agence Spatiale Européenne.

²National Aeronautics and Space Administration.

³International Halley Watch.

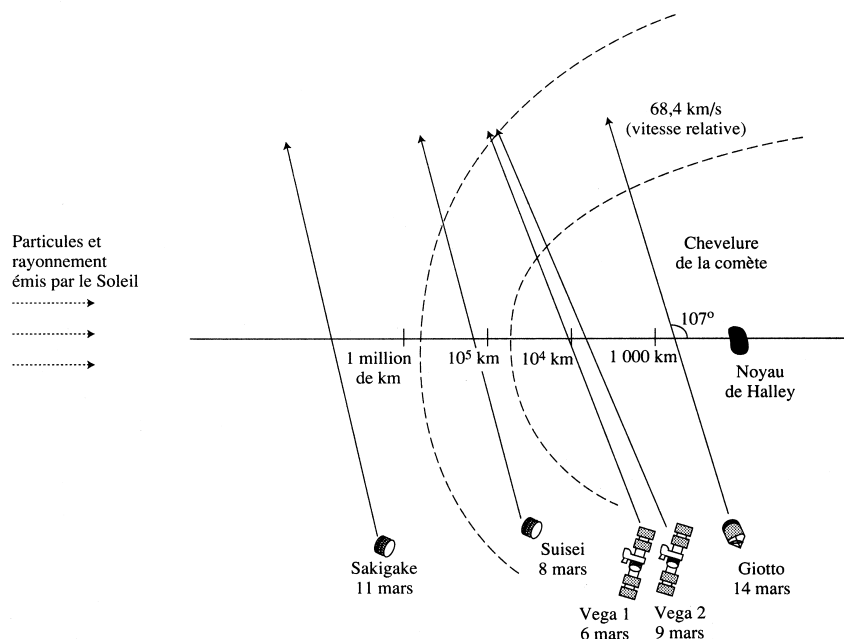


FIG. 2.1: Survol de la comète de Halley : en mars 1986, 5 sondes spatiales de différentes nationalités ont traversé la chevelure de la comète de Halley. La sonde européenne GIOTTO est passée à 600 km de son noyau (crédit ESA).

coma cométaire. Ce sont les caméras embarquées à bord des sondes soviétiques VÉGA qui le localisèrent en premier. La position des sondes soviétiques fut ensuite déterminée par le réseau d'observation de l'espace lointain de la NASA. La trajectoire de GIOTTO fut alors ajustée de manière à lui permettre de passer à 600 km du noyau et d'obtenir des images uniques (Figure 2.2).

Au-delà de la large coopération internationale et de l'extraordinaire aventure humaine que ces survols ont pu symboliser, ils ont constitué une première scientifique en matière d'études cométaires. Les données recueillies par les différentes sondes ont permis pour la première fois de mieux caractériser ces astres.

Les principales découvertes, qui ont directement découlé des survols de Halley, sont :

- la confirmation de la nature du noyau cométaire en tant qu'objet compact, de très petite taille⁴, ayant une forme asphérique (la taille du noyau de Halley est

⁴Comparativement à la coma qui peut s'étendre à plusieurs millions de km.

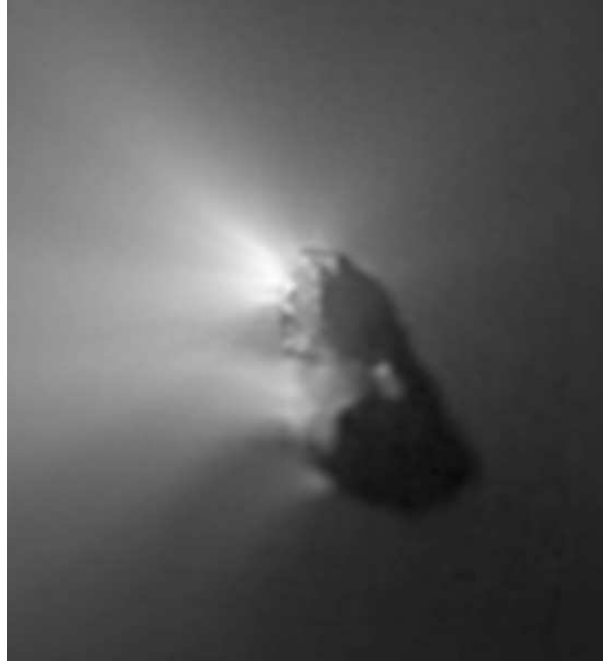


FIG. 2.2: Le noyau de la comète de Halley photographié en 1986 par la caméra multi-spectrale HMC de la sonde GIOTTO (crédit MP Ae).

de $7 \text{ km} \times 8 \text{ km} \times 15 \text{ km}$ [Keller et al., 1986; Sagdeev et al., 1986b]).

Les différentes photographies ont montré aussi l'existence de jets provenant de régions très localisées de la surface cométaire. Pour Halley, la surface active a été estimée à 8-10% de la surface exposée au soleil. Toutes ces observations sont venues conforter la théorie de Whipple [1950] de la “boule de neige sale”. Une des surprises de ces images fut la très basse valeur de l'albédo de la surface cométaire (0,04 pour Halley [Sagdeev et al., 1986a; Keller et al., 1986]) rivalisant avec celui des objets les plus sombres jamais observés dans le système solaire.

- l'estimation de la densité moyenne du matériau cométaire à $\sim 0,2\text{-}0,6 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ [Rickman, 1986; Sagdeev et al., 1988]. Aujourd'hui, une densité allant de $0,2 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ à $1 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ semble faire le consensus. Ces très basses valeurs suggèrent une grande porosité, ce qui rend compte de la fragilité du noyau cométaire et explique les diverses fragmentations de noyaux observées jusqu'aujourd'hui (exemple : la comète Shoemaker-Levy 9 en 1994 et la comète Linear en 2000).
- le recensement des éléments neutres et ionisés composant la coma cométaire. Cette étude, a été conduite essentiellement grâce aux spectromètres de masse IMS⁵ et

⁵*Ion Mass Spectrometer.*

NMS⁶, et de l'analyseur d'ions RPA⁷ de GIOTTO et grâce au spectromètre infrarouge IKS⁸ de VEGA. Ces instruments ont permis aussi de détecter quelques molécules "parentes" dans la région proche du noyau [Moroz et al., 1987; Combes et al., 1988]. Ces molécules "parentes" sont les produits originels de la sublimation des volatils du noyau. Une fois dans la coma, et sous l'action de divers processus chimiques, elles réagissent pour donner d'autres éléments. Le grand intérêt du survol de GIOTTO et de VEGA fut leurs passages proches du noyau, ce qui a permis d'identifier ces molécules et de mesurer leurs abondances [Korth et al., 1987]. Depuis, des modèles numériques de plus en plus sophistiqués de chimie et d'hydrodynamique ont été réalisés [Wegmann et al., 1987; Schmidt-Voigt, 1989] pour expliquer les observations recueillies au cours des survols de la comète.

- une étude plus précise de la composition des grains dans la chevelure cométaire et *de facto* une meilleure caractérisation de la composition à la surface du noyau. L'analyseur de particules PIA⁹ et l'analyseur d'impacts DIDS¹⁰ embarqués à bord de GIOTTO ont permis de détecter des éléments lourds chondritiques (à base de H, C, N et O) montrant d'une part l'existence de molécules organiques dans les noyaux de comètes, et confirmant d'autre part le caractère primitif du matériau cométaire [Kissel et al., 1986a,b].

Même si le survol de Halley reste la principale source de connaissance de la physico-chimie des noyaux et des régions profondes des comas cométaires par des moyens spatiaux, nous pouvons aussi lui associer les résultats de missions spatiales plus récentes comme le survol de la comète 19P/Borrelly par la sonde DEEP SPACE I en 2001. En nous fournissant une deuxième série d'images (voir Figure 2.3), cette sonde est venue nous confirmer le caractère compact, irrégulier et sombre des noyaux cométaires.

Le succès retentissant de la mission GIOTTO a incité l'ESA à aller plus loin et plus profondément dans l'étude des comètes. L'agence européenne a décidé alors de se lancer dans une entreprise encore plus audacieuse : il ne s'agira plus, cette fois, d'un bref survol d'une comète, mais d'une mise en orbite d'une sonde autour d'un noyau cométaire pour une étude encore plus proche.

À ses débuts, ce projet s'est basé sur les réflexions communes avec les américains dans le cadre d'un projet baptisé CNSR¹¹ envisageant un retour d'échantillons du noyau et/ou de l'atmosphère cométaire. L'ESA a préféré pour des raisons de coûts, de temps de

⁶Neutral Mass Spectrometer.

⁷Rème Plasma Analyser.

⁸Infra Krasnoie Spektrometer.

⁹Particulate Impact Analyser.

¹⁰Dust Impact Detection System.

¹¹Comet Nucleus Sample Return.

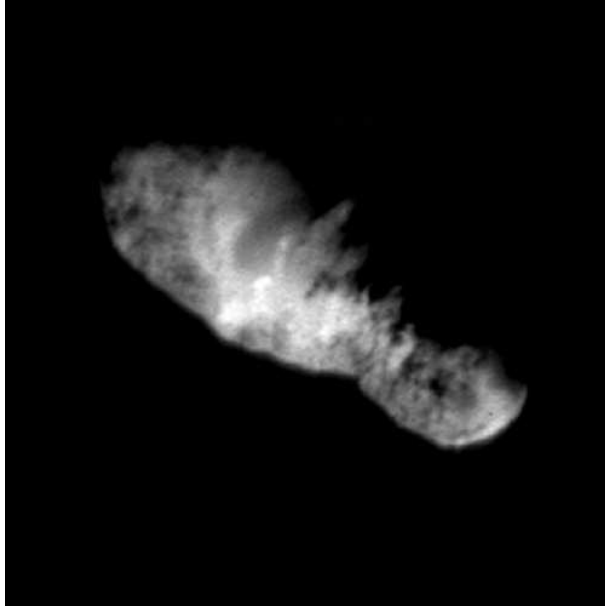


FIG. 2.3: Le noyau de la comète 19/Borrelly photographié en 2001 par la caméra multi-spectrale de la sonde DEEP SPACE I (crédit JPL-NASA).

développement et de faisabilité, d'abandonner le volet de retour d'échantillons privilégiant une étude plus étoffée *in situ*. Le projet ROSETTA était né.

2.2 La Mission Spatiale Rosetta

La Mission Spatiale ROSETTA fut approuvée en 1993 en tant que troisième pierre angulaire du programme HORIZON 2000 de l'ESA [Schwehm and Hechler, 1994]. La mission a été baptisée ainsi en référence à la pierre de Rosette ayant permis à Jean-François Champollion de déchiffrer les hiéroglyphes en 1822; la mission ROSETTA devant nous fournir la clé de la formation du système solaire.

La sonde fut initialement destinée à rendre visite à la comète Schwassmann-Wachmann 1 qui orbite entre Saturne et Jupiter, mais elle a vu son objectif se modifier pour devenir la comète Churyunov-Gerasimenko, puis la comète HMP (Honda - Mkros - Pajmenko). Le projet ayant encore pris du retard, une nouvelle cible a dû à nouveau être définie. Cette fois la comète 46P/Wirtanen fut l'élue.

Outre l'étude prolongée de la comète (près de 18 mois), le programme inclut le survol des deux astéroïdes Siwa et Otawara.

2.2.1 La comète 46P/Wirtanen

46P/Wirtanen (Figure 2.4), est un petit noyau cométaire très actif, dont l'aphélie est au niveau de l'orbite de Jupiter et le périhélie est à près de 1 u.a du soleil. La comète a été découverte le 15 janvier 1948 par l'astronome Carl Wirtanen.

L'ESA a justifié son choix par le fait que 46P/Wirtanen possède une orbite plus facile à atteindre que la plupart des comètes périodiques.

46P/Wirtanen est une comète de courte période faisant partie de la famille de Jupiter¹². Deux passages successifs à côté de la planète géante en 1972 (à 0,28 u.a.) et en 1984 (à 0,46 u.a.) ont fait évoluer le périhélie de l'orbite de la comète de 1,63 u.a à 1,06 u.a. et ont amené sa période de 6,71 années à 5,46 années [Krolikowska and Sitarski, 1996]. Aujourd'hui, son orbite présente une inclinaison de 12° par rapport à celle de la Terre, la rendant relativement facile d'accès par un engin spatial.

Depuis sa découverte, à l'exception de son passage de 1980, la comète fut observée durant tous ses passages périhéliques. Dans le cadre de la



FIG. 2.4: La Comète Wirtanen photographiée par le télescope de 2,2 m de l'ESO en septembre 1996. On distingue largement la coma et la queue de gaz ionisé et de poussières (crédit MPG-ESO).

¹²L'aphélie de l'orbite cométaire se situe au niveau de l'orbite de la planète géante.

préparation de la mission ROSETTA, une campagne internationale d'observation coordonnée a eu lieu lors du passage périhélique de 1996/1997 en vue de mieux contraindre les principaux paramètres physiques de la comète.

Durant cette campagne, Lamy et al. [1998] ont estimé le rayon du noyau cométaire, à partir d'observations photométriques avec le HST¹³, à $0,60 \pm 0,02$ km, ce qui est en accord avec la valeur avancée par Boenhardt et al. [1997]. Le taux de production de poussières a été évalué durant la même observation à 4 kg.s^{-1} . Le taux de production d'eau au périhélie a été estimé, selon différents modèles [Almeida et al., 1997; Fink et al., 1998; Rickman and Jorda, 1998], à $500\text{-}800 \text{ kg.s}^{-1}$. Ces valeurs placent la comète Wirtanen au rang des comètes de petite taille et de moyenne activité comparée à des comète comme Halley ou Hale-Bopp. Le Tableau 2.1 résume les principales caractéristiques de la comète.

Date de découverte	15 janvier 1948
Découvreur	Carl Wirtanen (Lick Observatory, USA)
Diamètre estimé du noyau	1200 m
Période orbitale	5,46 ans
Distance minimale du soleil (périhélie)	159 millions de km (1,06 u.a.)
Distance maximale du soleil (aphélie)	768 millions de km (5,13 u.a.)
Excentricité de l'orbite	0,657
Inclinaison de l'orbite	$11,72^\circ$

TAB. 2.1: Principales caractéristiques de la comète 46P/Wirtanen.

2.2.2 La sonde spatiale Rosetta

La sonde ROSETTA est ce que l'on pourrait qualifier de "géant" de l'espace. Avec ses 4 m^2 de base, ses 2,5 m de haut, ses 32 m d'envergure, ses 60 m^2 de panneaux solaires, et son antenne de 2,2 m de diamètre, ROSETTA ressemble plus à un satellite de télécommunications qu'à une sonde interplanétaire. Ces choix technologiques, qui peuvent paraître démesurés, ne sont que la réponse aux difficultés que rencontrera cette sonde pendant son voyage. Ces principales contraintes sont :

- la longue durée prévue de la mission. En effet, plus de 10 ans sépareront l'envol de la sonde en Janvier 2003 de sa fin de mission en 2013 (voir Figure 2.6). Un haut niveau de redondance équipera la sonde et une stratégie d'hibernation de longue durée sera appliquée durant les phases de croisière. Le Tableau 2.2 présente les principales phases de vol de la sonde. Plus de 1,5 tonnes d'ergols seront nécessaires à la correction de la trajectoire et aux manœuvres d'approche et de maintien à poste autour du noyau de Wirtanen.

¹³*Hubble Space Telescope.*

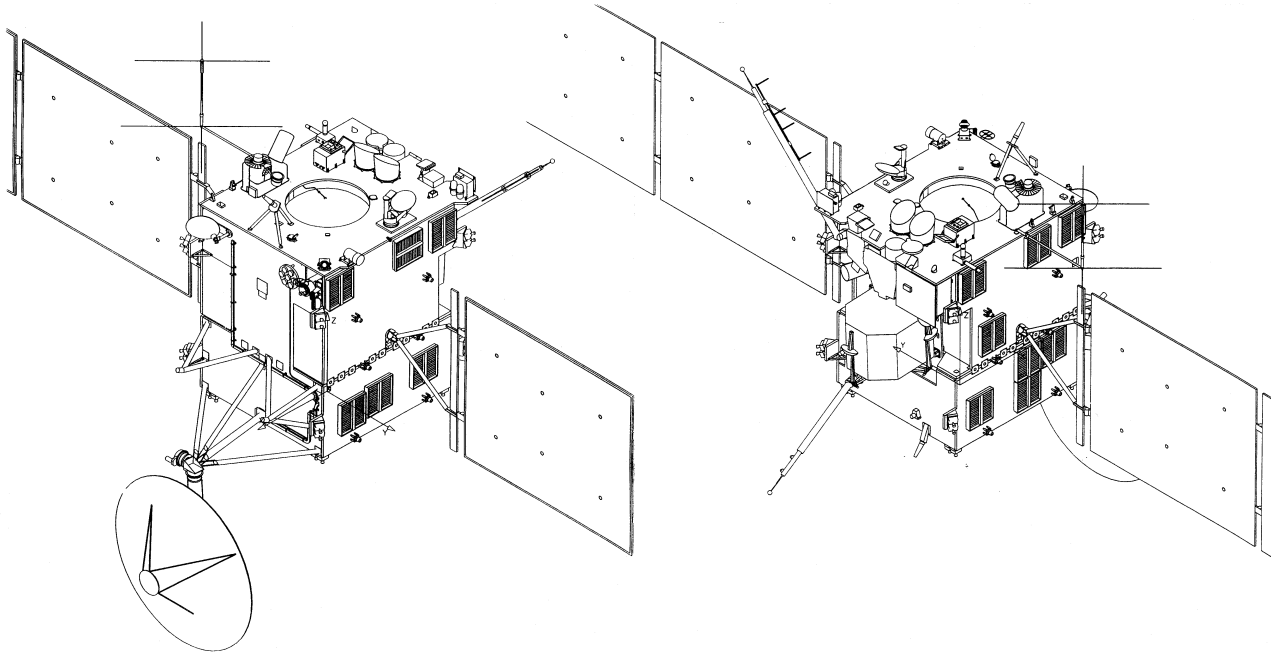


FIG. 2.5: La sonde spatiale ROSETTA (crédit ESA).

- les phases critiques d’assistances gravitationnelles martiennes et terrestres et les survols des astéroïdes. Ceci a imposé la mise au point d’un système de navigation et de gestion de bord à haut degré d’autonomie. Une antenne à grand gain (bande X et S) de 2,2 m et ayant deux articulations associée à deux antennes omni-directionnelles de faible gain permettront d’assurer les communications quelle que soit la position relative de la Terre.
- la large variation de la distance séparant la sonde du soleil et la variation de température et d’éclairement qui en découle. Cette contrainte a imposé la conception d’une architecture spécifique de protection thermique pouvant protéger la sonde des grandes variations de température. Les 60 m² de panneaux solaires assureront la production électrique même au plus loin du soleil, là où la sonde ne recevra que 4% de l’énergie qu’elle recevrait au niveau de la Terre.
- la spécificité de l’environnement à explorer. En effet, la sonde se maintiendra durant près de 18 mois à quelques kilomètres du noyau cométaire s’exposant ainsi au jets de gaz et de poussières. Une attention particulière a été ainsi accordée à la protection de la sonde et de ses instruments.

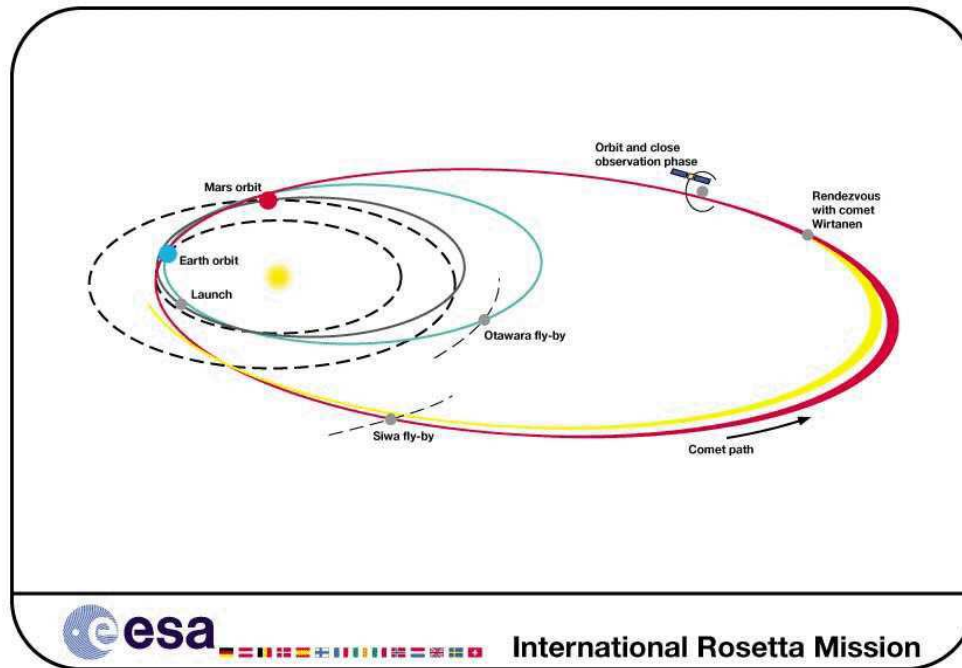


FIG. 2.6: Trajectoire de la sonde ROSETTA. Trois assistances gravitationnelles (Mars-Terre-Terre) et le survol de deux astéroïdes (Ottawa et Siwa) sont prévus avant d'atteindre la comète Wirtanen (crédit ESA).

La principale particularité de la mission ROSETTA, outre la mise en orbite autour du noyau de la comète Wirtanen, réside dans le module d'investigation en surface ROLAND¹⁴ qui sera embarqué à bord de la sonde. L'ESA a opté pour une étude étoffée *in situ* du noyau cométaire, s'affranchissant ainsi de la difficulté technique que représenterait un retour d'échantillons sur Terre.

Le module ROLAND sera largué par la sonde quelques mois après son arrivée et sa mise en orbite autour de la comète. Une fois au sol, ce module automatique aura quelques dizaines d'heures (72 heures de fonctionnement en tant que spécification nominale) pour effectuer toutes les expériences scientifiques embarquées.

Durant la phase d'étude du noyau, une orbite adéquate sera choisie pour la sonde de manière à assurer :

- la visibilité constante de la Terre (communication Orbiteur-Terre) et du soleil (énergie),
- la visibilité régulière du module ROLAND (communication Orbiteur-Atterrisseur),
- la sécurité de la sonde sur son orbite. L'orbite choisie doit assurer la stabilité de la sonde et présenter le minimum de risque de collision avec des débris s'éjectant du noyau [Desvoivres et al., 2000].

¹⁴ Acronyme de ROSETTA Lander.

Lancement par Ariane V	21 janvier 2003
Première assistance gravitationnelle (Mars)	26 août 2005
Deuxième assistance gravitationnelle (Terre)	26 novembre 2005
Survol de l'astéroïde Otawara	11 janvier 2006
Troisième assistance gravitationnelle (Terre)	27 novembre 2007
Survol de l'astéroïde Siwa	25 juillet 2008
Premières manœuvres de rendez-vous avec la comète	24 août 2011
Largage du module ROland	22 août 2012
Fin de la mission lors du passage périhélique de la comète	10 juillet 2013

TAB. 2.2: Principales phases de la mission ROSETTA (dates nominales).

2.2.3 Instruments embarqués

La sonde ROSETTA embarque 240 kg d'instruments scientifiques dont 90 kg pour le module ROland. Ces instruments constitueront un ensemble complémentaire et permettront de caractériser le noyau de Wirtanen et son atmosphère en utilisant différentes techniques d'observations. Le Tableau 2.3 présente l'ensemble des instruments embarqués à bord de l'orbiteur et de l'atterrisseur. Les instruments de la sonde ROSETTA (sauf RPC) sont disposés sur une baie commune qui sera constamment dirigée vers le noyau de la comète. Les orientations des panneaux solaires et de l'antenne de communication à grand gain évolueront de manière à assurer un pointage constant respectivement du Soleil et de la Terre. La Figure 2.7 montre la disposition des instruments sur la sonde.

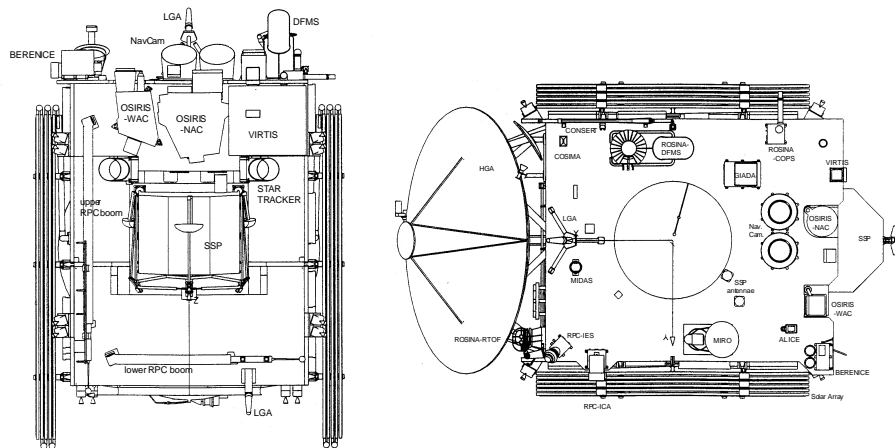


FIG. 2.7: Disposition des instruments scientifiques à bord de la sonde ROSETTA. Le module ROland restera attaché sur l'un des côtés de la sonde durant toute la durée du voyage jusqu'à la comète (crédit ESA).

Instruments de ROSETTA

Téledétection

OSIRIS	Imagerie visible et infrarouge NAC (Narrow Angle Camera) $2,35^\circ \times 2,35^\circ$ WAC (Wide Angle Camera) $12^\circ \times 12^\circ$ (250 nm-1000 nm)
ALICE	Spectrométrie UV (70 nm-205 nm)
VIRTIS	Spectro-imagerie dans le visible et l'IR (0,25 μ m-5 μ m)
MIRO	Spectrométrie micro-onde (1,3 mm et 0,5 mm)

Analyse de gaz et de poussières

ROSINA	Spectrométrie de masse de gaz neutres et ionisés (12-200 amu)
COSIMA	Spectrométrie de masse de poussières
MIDAS	Morphologie des grains de poussières (résolution nanométrique)

Étude des grandes structures du noyau

CONSERT	Sondage radio du noyau cométaire.
---------	-----------------------------------

Analyse de flux de poussières

GIADA	Mesure de la vitesse et de la quantité de mouvement des poussières.
-------	---

Plasma

RPC	Magnétomètre, analyseur de composition d'ions, sonde de Languir.
-----	--

Géodésie

RSI	Radio-sciences, Étude du champ gravitationnel cométaire.
-----	--

Instruments de RoLAND

APX	Spectrométrie rayon X.
MODULUS	Composition moléculaire de gaz.
CIVA	Caméra panoramique et microscope pour l'étude de la matière cométaire.
ROLIS	Système d'imagerie active pendant la descente de RoLAND . Imagerie des zones d'échantillonnage.
SESAME	Propriétés électriques et mécaniques de la surface cométaire.
MUPUS	Mesure des propriétés thermiques et mécaniques de la surface cométaire.
ROMAP	Magnétomètre et analyseur de plasma.
CONSERT	Sondage radio du noyau cométaire.

TAB. 2.3: Instruments embarqués à bord de ROSETTA et du module RoLAND .

2.3 L'expérience CONSERT

2.3.1 Objectifs scientifiques

CONSERT (acronyme de COmet Nucleus Sounding Experiment by Radio-wave Transmission) est l'une des expériences embarquées à bord de la sonde ROSETTA. Son principal objectif sera de révéler la structure interne et la composition du noyau cométaire.

CONSERT permettra de déterminer :

- la nature du matériau cométaire à travers la détermination des propriétés électriques moyennes (permittivité et conductivité) du noyau,
- les structures à grande échelle constituant le noyau (cométésimaux, stratifications, failles, etc.),
- les irrégularités de la surface.

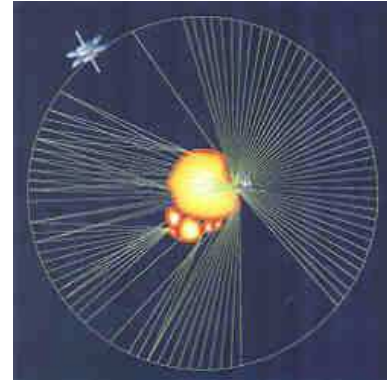


FIG. 2.8: Logo officiel de l'expérience CONSERT (crédit CONSERT Team).

A travers ses résultats, l'expérience CONSERT permettra de construire un modèle du noyau de 46P/Wirtanen pour mieux contraindre les modèles de formation des noyaux cométaires.

L'expérience CONSERT a été proposée par un groupe international de scientifiques coordonnés par Wlodek Kofman (Laboratoire de Planétologie de Grenoble). Le développement de l'instrument est financé par le CNES¹⁵ et le DLR¹⁶, respectivement agences spatiales française et allemande.

2.3.2 Principe de mesure

L'expérience CONSERT est simple dans son principe. Un émetteur radio équipera l'orbiteur ROSETTA et un récepteur équipera le lander ROLAND. Un pulse¹⁷ radio va être émis depuis la sonde en orbite, qui, après s'être propagé dans le vide, traversera le noyau de la comète. Pour une position favorable de l'orbiteur et de l'atterrisseur, le pulse sera reçu par l'atterrisseur. La phase (temps de propagation) et l'amplitude de ce signal seront mesurées et comparées aux valeurs théoriques d'un même pulse se propageant dans le vide. Toute variation dans la phase ou l'amplitude du signal reflètera la répartition

¹⁵Centre Nationale d'Études Spatiales.

¹⁶*Deutsches Zentrum für Luft-und Raumfahrt/Agence Spatiale Allemande.*

¹⁷une émission d'onde de très courte durée.

spatiale et les propriétés électriques du matériau cométaire traversé. Les deux paramètres importants pour caractériser le signal émis sont sa fréquence et sa largeur de bande.

Le choix de la fréquence découle d'un compromis entre la puissance d'émission du pulse et la taille de l'antenne qui l'émet. En effet, dans le cas général, l'absorption d'une onde dans la bande VHF ou UHF augmente avec la fréquence. Le matériau cométaire¹⁸ n'échappant pas à cette règle, nous sommes tentés d'émettre un pulse ayant la fréquence la plus basse possible pour minimiser les pertes par absorption et du coup minimiser la puissance d'émission nécessaire pour qu'il soit reçu. Cependant, les dimensions, et donc la masse et l'encombrement des antennes, est inversement proportionnelle à la fréquence d'émission. Un consensus entre puissance d'émission et encombrement (masse et volume) de l'émetteur doit alors être trouvé. Une première estimation des propriétés électriques du matériau cométaire [Kofman et al., 1998; Barbin et al., 1999] a permis de choisir la fréquence de 90 MHz comme fréquence d'émission.

Quant à la largeur de bande du signal, elle a été fixée pour satisfaire aux contraintes de précision de mesure. En effet, le temps de propagation τ du pulse entre l'émetteur et le récepteur s'écrit :

$$\tau = t_{TX} - t_{RX} = \frac{1}{c_0} (R_v + R_c \sqrt{\epsilon}) \quad (2.1)$$

et le temps additionnel de propagation, exprimant la différence de la propagation dans le noyau et dans le vide, est alors :

$$\tau_a = \frac{1}{c_0} R_c (\sqrt{\epsilon} - 1) \quad (2.2)$$

où

- t_{TX} est la date de transmission du pulse (référence absolue),
- t_{RX} est la date de réception du pulse (référence absolue),
- R_c est la longueur du trajet dans la comète,
- R_v est la longueur du trajet dans le vide,
- ϵ est la permittivité moyenne de la matière cométaire traversée par le pulse,
- c_0 est la célérité de la lumière dans le vide.

Nous espérons lors de la mission connaître la distance relative de la sonde par rapport au noyau de la comète avec une précision de 10 m. La caméra OSIRIS [Thomas et al., 1998] nous fournira un modèle de forme du noyau à moins de 1 m de résolution. Pour obtenir une précision relative de 1% sur la permittivité diélectrique nous devons mesurer le temps de propagation τ du pulse avec une précision de 100 ns. Cette précision est estimée pour un trajet moyen à l'intérieur de la comète de longueur $R_c = 1500$ m (du même ordre que le diamètre estimé du noyau de la comète Wirtanen). Le pulse émis doit alors avoir une largeur de bande maximale de 10 MHz.

¹⁸à base de glace d'eau et de silicates.

2.3.3 Description de l'instrument Consert

Le signal radio envoyé par l'orbiteur ne peut pas être un pulse unique : compte tenu des atténuations attendues (80-170 dB pour une comète de 1500 m de diamètre, une orbite de 10 km de rayon et une porteuse de fréquence 100 MHz [Kofman et al., 1998]), il faudra émettre un pulse d'une puissance de plusieurs kilowatts pour recevoir un signal de quelques nanowatts ; une chose évidemment impensable sur une sonde spatiale. Seule l'utilisation d'un code pseudo-aléatoire nous permettra de contourner cette contrainte.

2.3.3.a Code pseudo-aléatoire

Au lieu d'émettre un pulse unique, l'instrument CONCERT émettra un code pseudo-aléatoire. Un code pseudo-aléatoire p -PN est une séquence numérique polaire ou non-polaire¹⁹ ayant les propriétés suivantes :

- une périodicité p correspondant à la longueur du code,
- des propriétés spectrales approchant celle d'une séquence numérique totalement aléatoire tout en étant un code déterministe,
- un fin pic principal d'auto-corrélation de hauteur $20 \log(1/p)$ par rapport aux lobes secondaires.

Ce type de séquences aléatoires trouve son intérêt principalement dans la communication par étalement de spectre et dans les applications de radar.

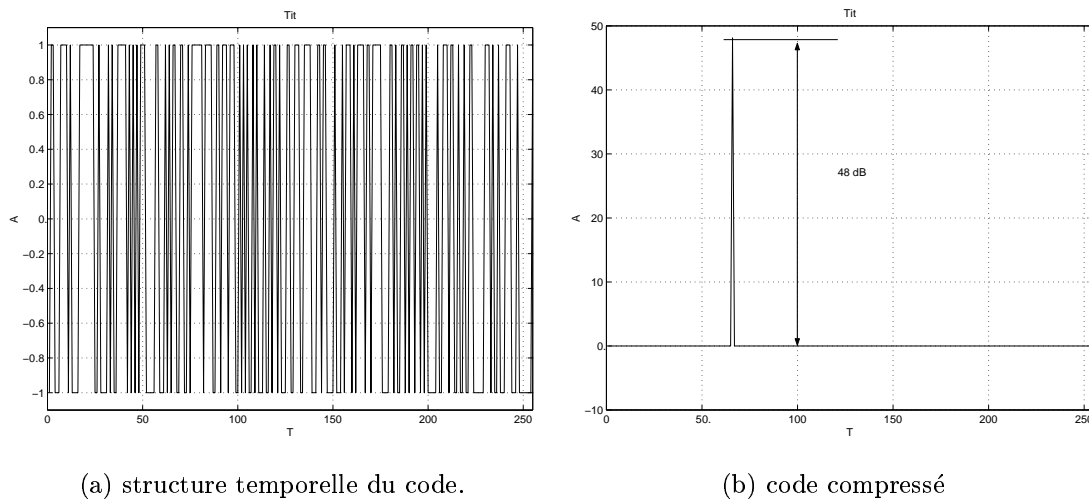


FIG. 2.9: Structure du code numérique utilisé par CONCERT

¹⁹Polaire : utilisant l'alphabet $[-1,1]$; non-polaire : utilisant l'alphabet $[0,1]$.

Pour CONSERT, un code 255-PN (code d'une longueur de 255 bits) d'une durée de 25,5 ms a été choisi. Une telle longueur assure d'une part la largeur de bande visée (10 MHz) et d'autre part évite toute ambiguïté de mesure (τ_a a été évalué à 20 μ s lors de la conception de l'instrument). Ce signal donne, après compression²⁰, une différence de 48 dB entre le pic principal et les pics secondaires. En pratique, les non-linéarités présentes dans la chaîne de traitement électronique de l'instrument réduisent cette valeur à environ 30 dB. La Figure 2.9 montre la structure de ce code qui sera modulé par une porteuse à la fréquence de 90 MHz.

2.3.3.b Addition cohérente

Pour améliorer encore le rapport signal sur bruit, le code décrit précédemment va être transmis 1024 fois à la suite. Ceci profite du fait que la sonde se déplace très lentement sur son orbite (quelques cm.s^{-1}). À la réception, la suite de codes sera accumulée dans un buffer de 255 bits. Si les horloges de l'orbiteur et de l'atterrisseur sont synchronisées, les signaux vont se superposer de manière cohérente, contrairement au bruit. Le niveau de bruit va alors se réduire par rapport à celui du signal utile. L'addition des signaux reste cohérente tant que la phase n'a pas dérivé de plus d'une demi-période sur tout le temps d'intégration. À 90 MHz, la demi-période vaut 5,5 ns, ce qui donne un temps d'intégration maximal de 27,7 μ s en utilisant des horloges avec des stabilités²¹ de $2,10^{-7}$. Le choix d'accumuler 1024 codes correspondant à un temps d'intégration de 26,1 μ s nous assure un gain de 30 dB sur le rapport signal sur bruit.

2.3.3.c Précision des horloges et contraintes spatiales

La mesure de τ pose un autre problème d'ordre technique. L'orbiteur et l'atterrisseur auront chacun leur horloge respective. Ces horloges seront synchronisées avant la phase d'occultation lorsque la distance entre les deux sondes, et donc le temps de parcours du signal, seront bien connus. Si nous considérons le cas simple de l'expérience où l'orbiteur ne fait qu'émettre et l'atterrisseur que recevoir, t_{TX} et t_{RX} seront alors mesurés chacun par une horloge différente. Pour respecter les objectifs de précision (cf. **Sec. 2.3.2**), les erreurs sur les mesures de t_{TX} et de t_{RX} ne doivent pas excéder la demi-largeur d'un pulse, soit 50 ns ; et ce, sur la durée complète de l'occultation, soit près de 15 h. La stabilité relative des deux horloges doit alors être de 10^{-12} , soit une seconde de dérive sur 31 700 ans. Ce type d'horloges existe, ce sont des USOs (*Ultra Stable Oscillators*), mais elles sont lourdes

²⁰ Le terme compression est souvent utilisé pour désigner l'opération d'auto-corrélation.

²¹ La dérive des horloges peut-être interprétée comme un déplacement radial de la sonde. Une stabilité de $2,10^{-7}$ peut alors s'interpréter comme une vitesse radiale de 60 m.s^{-1} . La sonde ne devant pas atteindre de telles vitesses, la limitation provient alors effectivement des horloges.

(plus de 1 kg) et gourmandes en énergie (quelques Watts). Elles sont donc incompatibles avec notre application où la masse et l'énergie sont rationnées. Pour s'affranchir du besoin d'une grande stabilité des horloges, il faut utiliser la même référence de temps pour les mesures de t_{TX} et de t_{RX} .

La technique retenue utilise RoLAND comme un réflecteur actif. L'orbiteur envoie son train de signaux vers le noyau. Après propagation dans le noyau cométaire, les signaux atteignent l'atterrisseur. Là, ils sont accumulés, puis compressés. RoLAND détecte le pic principal, puis réémet le même train de codes que l'orbiteur avec un délai fixe par rapport au temps d'arrivée du pic principal. Après une propagation dans le sens inverse dans le milieu cométaire, les signaux atteignent l'orbiteur. Ils sont alors échantillonnés et accumulés, puis stockés avant d'être transmis vers la Terre. La Figure 2.10 résume ce principe de fonctionnement.

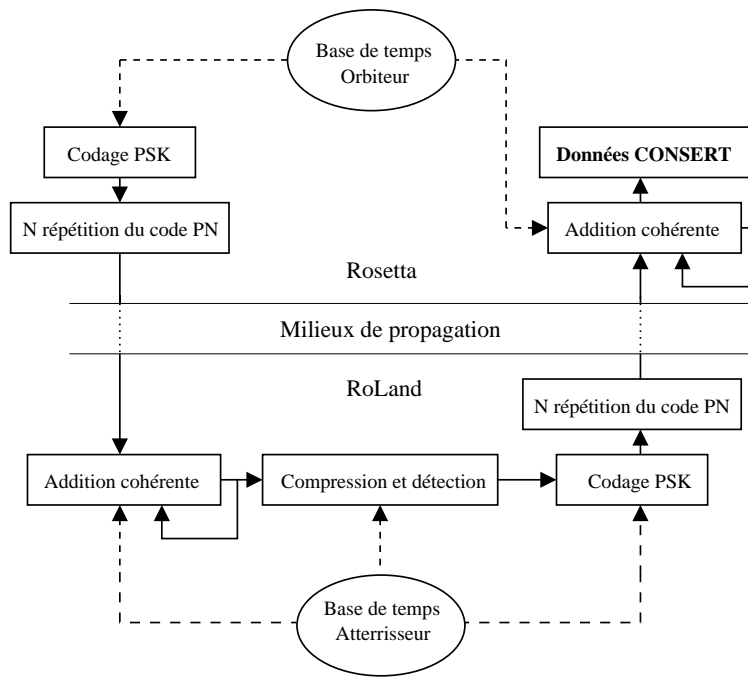


FIG. 2.10: Principe de fonctionnement de l'instrument CONSERT

Pour simplifier la conception, l'intégration et les tests, les deux parties de l'instrument embarquées à bord de l'atterrisseur et de l'orbiteur sont exactement les mêmes. Seul le programme chargé à bord de chacun le configure comme étant atterrisseur ou orbiteur. La Figure 2.11 présente le schéma bloc de l'instrument. On y distingue en bleu la chaîne d'émission et en rouge la chaîne de réception. Les éléments de gestion y figurent en noir. La porteuse de fréquence de 90 MHz est générée à partir d'un oscillateur de 10 MHz suivi

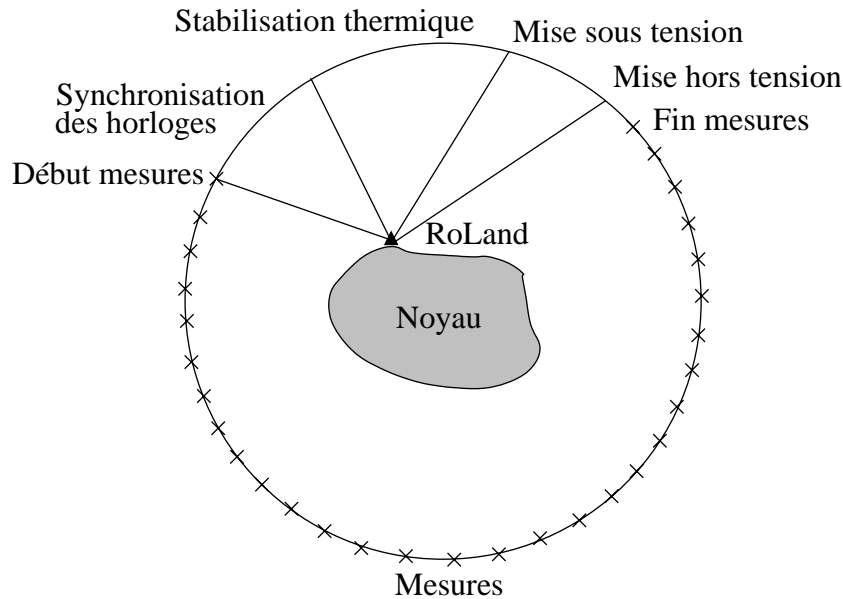


FIG. 2.12: Déroulement d'une campagne de mesures

l'expérience CONSERT dépendra essentiellement de la dynamique de rotation du noyau cométaire.

Une campagne de mesures se déroule comme suit :

- durant la période de visibilité directe entre l'atterrisseur et l'orbiteur, l'instrument CONSERT sera mis sous tension. Il s'ensuit une période de stabilisation thermique.
- l'instrument charge sa table des opérations contenant les paramètres nécessaires à la conduite de la campagne de mesures.
- débute ensuite la phase de synchronisation des horloges respectives de l'orbiteur et de l'atterrisseur. Les horloges ont besoin d'être synchronisées non seulement en fréquence, mais aussi en temps. En effet, si la première assure aux horloges de battre à $2,10^{-7}$ près, la seconde assure qu'aux périodes d'écoute du ROLAND correspondent les périodes d'émission de ROSETTA et *vice-versa*. La synchronisation des deux calendriers se fait avant chaque occultation à une précision de 10 ms. De plus, pour garantir que les périodes d'émission couvrent les périodes de réception, le signal utile est émis 8 fois de suite, soit 8×10^{24} fois le code.
- la campagne de mesure proprement dite débute légèrement avant l'occultation. À la fin des mesures²², l'instrument est soit mis hors tension, soit une nouvelle phase de synchronisation est initiée.

²²Nous utiliserons aussi le terme "sondage" pour désigner une mesure CONSERT .

La Figure 2.12 illustre l'évolution d'une campagne de mesures et la Figure 2.13 détaille le déroulement d'une mesure. Les temps caractéristiques sont :

- T_X largeur de la fenêtre d'émission = 209 ms,
- R_X largeur de la fenêtre de réception = 26 ms,
- P_X durée du traitement = 104 ms (atterrisseur uniquement),

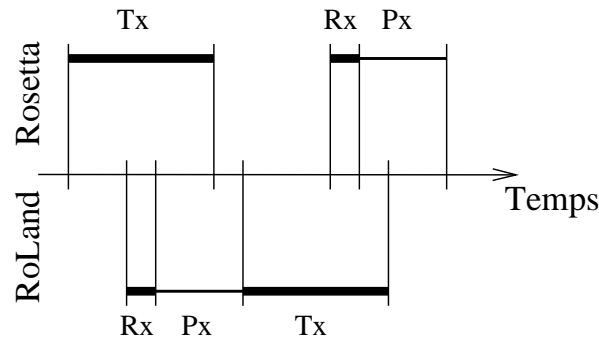


FIG. 2.13: Séquence temporelle d'une mesure CONSERT

2.3.3.e Caractéristique technique de l'instrument Consert

Avec ses 5 kg et ses 2 W de consommation, CONSERT est l'un des plus petits instruments de la mission. Deux antennes équiperont l'orbiteur et le lander. L'antenne de l'orbiteur est un double dipôle croisé placé à l'avant d'un réflecteur (voir Figure 2.14). Après le lancement de la sonde, cette antenne se déploiera grâce à un système pyrotechnique. L'antenne de l'atterrisseur (voir Figure 2.15) est constituée de deux monopoles orthogonaux. Ce type d'antenne assure d'une part une communication en polarisation circulaire pour s'affranchir des problèmes de changement de polarisation au contact de la surface cométaire, et d'autre part un rayonnement quasi hémisphérique pour explorer toutes les voies de communication possibles entre l'orbiteur et l'atterrisseur.

Le Tableau 2.4 résume toutes les caractéristiques techniques de l'instrument. Une partie de ces données sera utilisée dans la suite pour simuler l'expérience CONSERT.

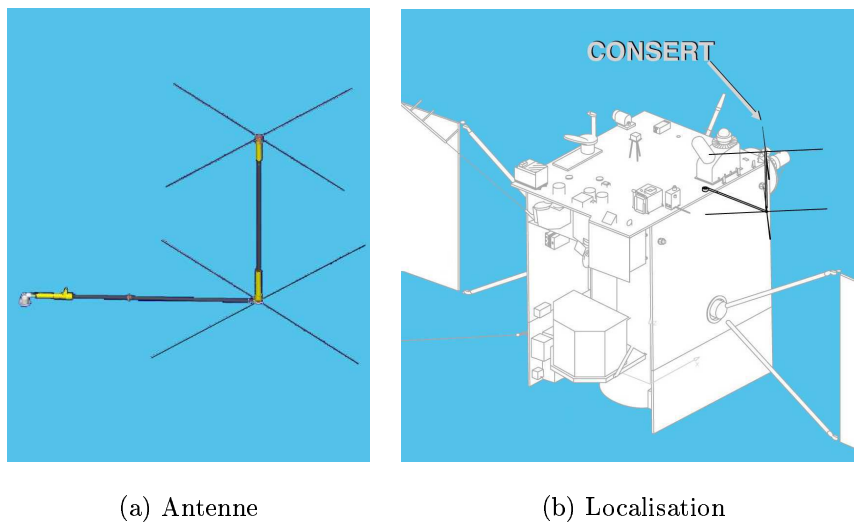


FIG. 2.14: Structure de l'antenne CONSERT équipant la sonde ROSETTA (crédit ESA).



FIG. 2.15: Vue arrière de RoLAND montrant les deux monopoles de l'antenne CONSERT (crédit ESA).

TAB. 2.4: Principales caractéristiques techniques de l'instrument CONSERT

Masse			
	Électronique	Antenne et harnais	Masse totale
ROSETTA	1475 g	1380 g	2855 g
ROLAND	1475 g	425 g	1900 g
Électronique			
Horloges			
Fréquence	10 MHz		
Précision $\Delta f/f$	minimale	nominale	maximale
	-	2.10^{-7}	4.10^{-7}
Émission			
Modulation	BPSK à 90 MHz		
Code PN	255×100 ns = 25,5 μ s		
Répétition du code	8×1024 = 209 ms		
Puissance d'émission	2,0 W - Orbiteur		
	0,2 W - Atterrisseur		
Réception			
Bande de réception	85 MHz à 95 MHz		
Plage de Gain	ajustable de 30 dB à 90 dB (avec AGC)		
Conversion A/N	8 bits à 10 MHz (sur deux voies I et Q)		
Traitement			
Addition	Addition cohérente en temps réel		
Nb d'additions	M. Dégradé 256 M. Nominal 1024		
Gain de l'addition	M. Dégradé 24 dB M. Nominal 30 dB		
Télémesure			
ROSETTA	24 Mbits par orbite		
ROLAND	500 kbits par orbite		
Consommation			
	Minimal	Nominal	Maximal
ROSETTA	1,6 W	1,9 W	2,95 W
ROLAND	-	1,5 W	1,95 W
Fonctionnement			
	Minimal	Nominal	Maximal
Durée d'une orbite	2 h	10 h	15 h
Nb de mesures/orbite	3000	3000	3000

Chapitre 3

Approche bidimensionnelle

Dans ce chapitre nous présentons les techniques de résolution des problèmes directs et inverses rencontrées que pose l'expérience CONSERT dans une géométrie bidimensionnelle. Ce chapitre s'articule autour des deux articles :

- “*Data set generation and inversion simulation of radio-waves propagating through a 2-D comet nucleus (CONSERT experiment)*”, publié au *Radio Science Journal*,
- “*A priori information required for a two or three dimensional reconstruction of the internal structure of a comet nucleus (CONSERT experiment)*”, publié au journal *Advances in Space Research*.

La première publication traite de la technique de tracé des rayons (RTM) pour la simulation de la propagation d'ondes dans un noyau cométaire bidimensionnel. Nous montrons que cette technique est très intéressante dans le cas d'un modèle de noyau cométaire de forme régulière¹ et dont les courbures de la surface sont larges devant la longueur d'onde du signal. Cette méthode est ensuite comparée à la méthode spectrale PSTD basée sur la résolution numérique des équations de Maxwell et développée par A. Piot et W. Kofman du laboratoire de Planétologie de Grenoble. Nous abordons ensuite la résolution du problème inverse que constitue la reconstitution tomographique du noyau.

Le second article traite quant à lui de la méthode d'utilisation, dans notre schéma d'inversion, des informations provenant d'autres observations comme étant des données *a priori*. Nous montrons qu'une construction analytique d'une matrice de covariance est possible et nous en donnons l'exemple pour les modèles de noyaux formés d'un assemblage de cométésimaux.

¹Une forme régulière est une forme continue sans singularités.

3.1 La méthode de tracé des rayons et la résolution du problème inverse en 2-D

Data Set Generation and Inversion Simulation of Radio-Waves Propagating Through a 2-D Comet Nucleus (Consert Experiment)

M. Benna¹, A. Piot², J.-P. Barriot¹, W. Kofman²

¹ LDTP, Observatoire Midi Pyrénées, 14 Av. E. Belin, F-31400 Toulouse, France

² Laboratoire de Planétologie de Grenoble, BP 53, F-38041 Grenoble Cedex 9, France

Submitted to *Radio Science*

Submitted April 2002

Accepted July 2002

Manuscript Pages : 26

Tables : 2

Figures : 9

Abstract

To prepare the Comet Nucleus Sounding Experiment using Radio wave Transmission (CONSERT) during the ROSETTA mission, we study the electromagnetic wave propagation through a comet nucleus model and tomographic inversion in a two dimensional setting. For the propagation, the Ray Tracing Method (RTM) is validated with respect to the Pseudo-Spectral Time Domain (PSTD) method. For the inverse problem, a Tikhonov-like inverse RTM method based on weak permittivity assumptions is used, with synthetic data derived from the PSTD algorithm. Reconstruction results show that the CONSERT data will permit a reliable tomography of the comet nucleus. Surface data will enhance the quality of the imaging.

3.1.1 Consert and data processing preparation

The ROSETTA cometary mission is a cornerstone mission of the European Space Agency (ESA) dedicated to the study of comet 46P/Wirtanen in 2011. ROSETTA will carry a Surface Science Package called Roland which will land on the nucleus to perform in-situ investigations. The CONSERT experiment (COMet Nucleus Sounding Experiment by Radiowave Transmission) is one of these investigations which involves both the orbiter and the lander. It aims at imaging the internal structure of the comet nucleus by analysing the time-delay perturbations affecting radiowaves propagating through the nucleus. The principle of this experiment is detailed in [Kofman et al., 1998] and [Barbin et al., 1999]. Dedicated data processing techniques are currently under investigations. Hérique et al. [1999] proved that the mean nucleus permittivity can be derived from CONSERT measurements and proposed a statistical characterisation of comet nucleus in two-dimension. Barriot et al. [1999] demonstrated that we can map large scale heterogeneities in the frame of the small perturbation theory by using Tikhonov-like techniques.

To develop these inverse methods one needs to generate synthetic data which mimic real measurements as closely as possible. One of the simplest ways to simulate wave propagation is the Ray Tracing Method (RTM) which is generally used in seismic tomography [Snieder and Sambridge, 1991]. CONSERT is a more complex case since :

- the medium in which waves propagate is a completely bounded body, unlike in geophysical prospecting. The propagation in such a medium is affected by abrupt interface reflexions and refractions, trajectory deviations, diffractions and interferences. All these phenomena can have a great impact on the measurements collected by the orbiter.
- the CONSERT instrument is designed to detect very low level signals corresponding to indirect paths (internal reflections).
- in the CONSERT experiment, we are not only interested in measuring the propagation delay between the lander and the orbiter, but also in measuring the signal

power which is providing by itself additional information on the crossed medium. The initial circular polarization of the emitted waves, combined with the 3-D complex shape of the body, greatly complexifies the modeling of the received signal power.

All this constraints implied to develop a Ray Tracing Method tailored to the CONSERT experiment. An evident first step was to develop a 2-D algorithm to validate the use of the RTM and to study its performances and limitations before using it for the 3-D case. The validation of the RTM method was done using the Pseudo Spectral Time Domain Method (PSTD), based on the resolution of the Maxwell equations. This Method is more accurate than the RTM method but numerically untractable up to now for the 3-D case.

In this Paper we present these two methods and compare their performances in a 2-D case. We also use the derived synthetic data to test a 2-D inversion scheme (imaging), based on Thikonov-like least-squares techniques, with statistical a priori assumptions about the structure of the inhomogeneities and about the surface permittivity distribution.

3.1.2 The pseudospectral time domain method (PSTD)

3.1.2.a Introducing PSTD

Solving Maxwell equations has been widely used to simulate radio-waves propagation since Yee [1966] described the Finite Difference Time Domain (FDTD) method in the sixties. The FDTD method is based on a central differential operator applied to both time and space coordinates. It results in a second order accuracy with respect to the time and space discretisation. FDTD remains popular among scientists although it suffers from anisotropic numerical dispersion. Phase velocity in vacuum is minimum along the x and y axis and maximum along the diagonals. It leads to phase errors that accumulate with time. Reducing this anisotropy requires finer grids. To achieve good accuracy, problems of moderate size (100λ) require at least 10 or 20 nodes per wavelength. Our simulations are 500λ large since the wavelength λ is thought to be 2.4 m in the nucleus (relative permittivity of 2) and the latter to be 1200 m across [Lamy et al., 1998]. To avoid computing on too many nodes, in order to keep anisotropy low, higher order solutions were developed such as 4th order finite difference method. Another class of methods, called spectral methods appeared in the seventies. Spectral methods were developed to solve partial differential equations in fields ranging from fluid dynamics, weather forecasting, to wave propagation [Fornberg, 1998]. In contrast to the FDTD method, the spectral methods require only a few nodes (in theory two) per wavelength to achieve infinitely good accuracy. In spectral methods, functions are approximated by polynomials of special functions.

Using trigonometric functions leads to the so-called pseudospectral method [Orszag, 1972]. Fornberg [1998] shows that pseudospectral methods can be viewed as finite difference me-

thods of infinite order. A difference however is that the electro-magnetic components are all computed on the same nodes in the PSTD method (a regular grid to be compared to the staggered grid used in the FDTD method). When applied to the resolution of Maxwell equations, the pseudospectral method takes the name of PSTD by reference to the FDTD method.

3.1.2.b Principles of PSTD

We choose to solve the Maxwell equations in the case of 2-D Transverse Magnetic (TM) mode :

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - J_z \right) \\ \frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x} \end{cases} \quad (3.1)$$

where E_z is a component of the electric field; H_x and H_y are the components of the magnetic field; J_z is a current source; and μ and ϵ are respectively the permeability and permittivity of the medium.

The PSTD method consists in

- 1/ Computing space derivative approximations using a spectral method on the right hand side of Eq. 3.1.
- 2/ Estimating the time derivatives in the left hand side of Eq. 3.1 from step one.
- 3/ Integrating in time. Finite difference can be used, or more sophisticated approaches.

Estimation of the space derivatives : The pseudospectral method approximates the electromagnetic fields with polynomials of trigonometric functions. It relies then on the discrete Fourier transform : derivation of a N -point function in the Fourier domain reduces to N single multiplications. Let us note $f(x)$ a function of x

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \mathfrak{F}_x^{-1} \{ i k_x \mathfrak{F}_x \{ f(x) \} \} \quad (3.2)$$

where \mathfrak{F}_x and \mathfrak{F}_x^{-1} denote respectively the discrete Fourier transform and its inverse and k_x the wavenumbers.

The introduction of Fast Fourier Transform (FFT) made this operation attractive. To save more time and memory, use of hermitian symmetry is highly recommended, so that only $N/2$ Fourier coefficients need to be computed.

Absorbing Boundary Condition : Using the discrete Fourier transform implies periodicity of the computational domain : a pulse outgoing from one edge of the computational domain will enter it on the opposite edge. To ensure simulations on an infinite domain, we adopted Béranger's Perfectly Matched Layers as Absorbing Boundary Condition to massively absorb outgoing waves. Béranger [1994] described the *PML* technique for the FDTD algorithm. Implementation to the PSTD algorithm is straightforward.

PML technique lies on the splitting of the electrical field component E_z (for 2-D TM case) in two sub components E_{zx} and E_{zy} . To absorb waves in the boundary layers, electrical and magnetical losses are introduced, by the mean of electrical and magnetical conductivities, respectively (σ_x, σ_y) and (ρ_x, ρ_y) . The resulting Maxwell equations are

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_{zx}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \sigma_x E_{zx} - J_z \right) \\ \frac{\partial E_{zy}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma_y E_{zy} \right) \\ \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(-\frac{\partial (E_{zx} + E_{zy})}{\partial y} - \rho_y H_x \right) \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial (E_{zx} + E_{zy})}{\partial x} - \rho_x H_y \right) \end{array} \right. \quad (3.3)$$

A *PML* medium is then defined by the 6 following parameters

$$(\epsilon, \mu, \sigma_x, \sigma_y, \rho_x, \rho_y).$$

Vacuum is a peculiar *PML* medium the parameters of which are $(\epsilon_0, \mu_0, 0, 0, 0, 0)$. Béranger noticed that the impedance of a *PML* medium is that of vacuum if $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$ and

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_x}{\epsilon_0} = \frac{\rho_x}{\mu_0} \\ \frac{\sigma_y}{\epsilon_0} = \frac{\rho_y}{\mu_0} \end{array} \right. \quad (3.4)$$

He demonstrated the transmission properties through an interface between two *PML* media of parameters $(\epsilon, \mu, \sigma_{x1}, \sigma_{y1}, \rho_{x1}, \rho_{y1})$ and $(\epsilon, \mu, \sigma_{x2}, \sigma_{y2}, \rho_{x2}, \rho_{y2})$ verifying Eq. 3.4. If this interface is normal to the x -axis, waves crossing it are completely transmitted, whatever their frequencies and incidence angles, if

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{y1} = \sigma_{y2} \\ \rho_{y1} = \rho_{y2} \end{array} \right. \quad (3.5)$$

The same property is derived for an interface normal to y axis : y has then to be replaced by x in Eq. 3.5. Béranger then proposed to belt the computational domain with

such *PMLs*. For efficiency reasons, we proceeded the way described in Fig. 3.1 using discrete Fourier transform properties. Absorbing Boundary Conditions are matched to vacuum, so that outgoing waves are massively absorbed without any spurious reflections. That way, the computational domain seems to be infinite.

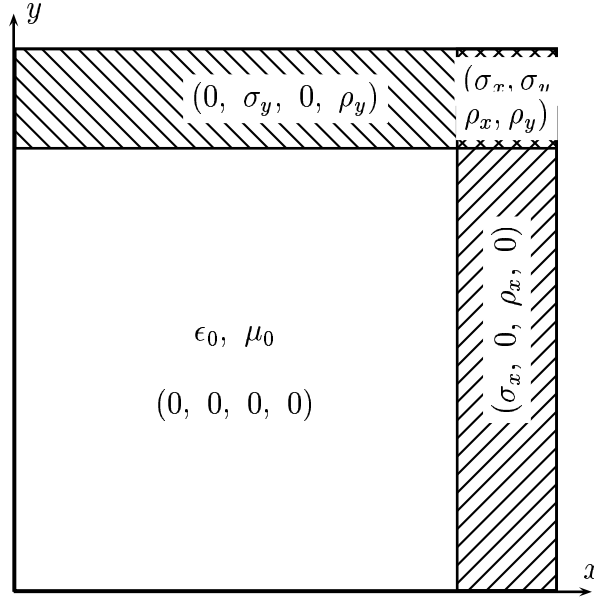


FIG. 3.1: Implementation of Absorbing Boundary Conditions using *PML*.

Condition of validity : The use of discrete Fourier transform implies some constraints on space discretisation. To avoid aliasing and then large errors when computing space derivatives within the Fourier space, Shannon theorem claims that the space steps Δx and Δy have to be shorter than half the shortest wavelength λ_{\min}

$$\max(\Delta x, \Delta y) \leq \frac{\lambda_{\min}}{2}. \quad (3.6)$$

Our simulations run with $\Delta x = \Delta y$. Theoretically, $\Delta x = \frac{\lambda_{\min}}{2}$, it means two nodes per shortest wavelength, should define a fine enough grid. But two difficulties arise.

The first one is in defining λ_{\min} . Its expression is

$$\lambda_{\min} = \frac{c_{\min}}{\nu_{\max}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_{\max}} \nu_{\max}}. \quad (3.7)$$

So computing λ_{\min} requires to know the maximal permittivity of the medium ϵ_{\max} and the maximal frequency of the emitted signal ν_{\max} . The maximum permittivity ϵ_{\max} is

easy to get whereas defining ν_{Max} is much more complicated. Signal shape is a trade-off between pulse duration and frequency broadening, so that signal cannot be bounded in frequency.

The second difficulty concerns the enlargement of the spectrum when a pulse crosses an interface. The explanation of this significant enlargement is in the product between $1/\epsilon$ and the space derivatives of the magnetic field \vec{H} in Eq. 3.3. This product acts as a convolution in the wavenumber domain. This leads to unphysical Gibbs oscillations which spread through the whole computational domain and spoil the simulation. Gibbs phenomenon has to be rejected below the upper limit of the acceptable numerical noise, by oversampling the propagating signal and avoiding strong permittivity gradients. Oversampling means that cells have to be smaller than the Nyquist wavelength. We experimentally choose $\Delta x = \Delta y = \lambda_{min}/5$, to cope with our models which contains steep interfaces between media of permittivity $\epsilon_r = 1$ (vacuum) and $\epsilon_r = 2$ (comet nucleus).

Time stepping : Once the four space derivatives in Maxwell equations Eq. 3.3 are estimated, time has to be stepped forward. Time derivative are estimated and then integrated using values of the fields at previous time steps. We adopted the method after [Kinnmark and Gray, 1984] which integrates sets of differential equations of the form

$$\frac{\partial u^t}{\partial t} = D u^t, \quad (3.8)$$

where u^t is a vector of time functions and D is a constant matrix with respect to time. The numerical Maxwell equations can be expressed that way if

$$u^t = u^{n\Delta t} = \begin{pmatrix} E_z(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t) \\ H_x(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t) \\ H_y(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{z,i,j}^n \\ H_{x,i,j}^n \\ H_{y,i,j}^n \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

and

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\epsilon}\mathfrak{D}_y & \frac{1}{\epsilon}\mathfrak{D}_x \\ -\frac{1}{\mu}\mathfrak{D}_y & 0 & 0 \\ \frac{1}{\mu}\mathfrak{D}_x & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

where \mathfrak{D}_x and \mathfrak{D}_y are the derivative operators with respect to x and y .

Kinnmark and Gray [1984] proposed a one step numerical integration of the form

$$u^{t+\Delta t} = \sum_{g=0}^G \alpha_g (\Delta t D)^g u^t, \quad (3.11)$$

where Δt is the time step and α_g are scalars. From a practical point of view, powers of D are not computed. It is better to use the iterative equivalent Eq. 3.12 of Eq. 3.11. Time

integration is then performed in G substeps.

$$\begin{aligned} u^{n+\frac{1}{G}} &= \alpha_{G-1} u^n + \alpha_G \Delta t D u^n \\ u^{n+\frac{2}{G}} &= \alpha_{G-2} u^n + \Delta t D u^{n+\frac{1}{G}} \\ u^{n+\frac{m}{G}} &= \alpha_{G-m} u^n + \Delta t D u^{n+\frac{(m-1)}{G}} \quad m \leq G. \end{aligned} \quad (3.12)$$

In our simulations, we set $G = 4$, as we noticed that pulses are abnormally attenuated for $G = 3$ compared to propagation in vacuum. The coefficients α_g are then

$$\alpha_0 = 1 \quad \alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \quad \alpha_3 = \frac{1}{6} \quad \alpha_4 = \frac{1}{24}. \quad (3.13)$$

Numerical stability : To ensure algorithm stability, time steps have to be small enough. Considering the space and time eigenvalue problem and introducing results from [Kinnmark and Gray, 1984], we can derive the stability requirement

$$\Delta t \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{\Delta x}{c}. \quad (3.14)$$

However, this stability criterion only holds for homogeneous media. Deriving such a criterion for heterogeneous media is not obvious. For this reason, we require Eq. 3.14 to be verified in each homogeneous part of the computational domain. Nevertheless this might not be sufficient, so we took a much smaller time step

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{3c}. \quad (3.15)$$

Excitation : As in the FDTD method, wave propagation can be initiated by using non-zero initial condition or a current source. In the first case, one initializes the three fields E_z , H_x and H_y to coherent values to cause the electromagnetic field to propagate. However in our simulations, the source lies on the comet nucleus surface, so that interaction between waves and the surface cannot be a priori easily described. Thus a current source J_z is introduced in Maxwell equations and the fields are initialized to zero. We then observe, Fig. 3.2, that the radiation diagram is not uniform due to the nucleus. To improve coupling, it means the energy transmitted inside the nucleus, the source is put right under the surface of the nucleus.

i. Frequency contents of the current source :

The signal for our simulations has properties close to that of the signal used by CONSERT, namely a 9 MHz bandwidth signal modulated at 90 MHz. For simplicity, we choose a 90 MHz modulated Gaussian pulse of standard deviation $\sigma_t = 1/2\pi\sigma_\nu$ with $\sigma_\nu = 4.5$ MHz. The maximal frequency ν_{Max} was then said to be 100 MHz, meaning that $\lambda_{min} = 2.1$ m.

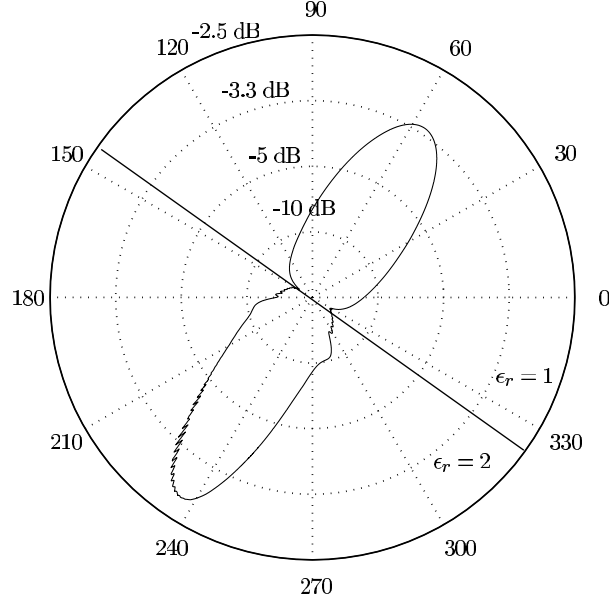


FIG. 3.2: Radiation diagram due to the current source in the presence of the nucleus surface. Nucleus permittivity ϵ_r is 2

ii. Spatial shape of the current source :

Because of the use of discrete Fourier transform to compute space derivatives, the spatial shape of the current source J_z has to respect the Shannon-Nyquist criterion. Thus, we choose a 2-D Gaussian shape of standard deviation σ_s for the spatial extension of the source. If we set $\sigma_s = 2.85\Delta x$, this form rejects the numerical noise at least 140 dB below the emitted signal. The counterpart is that the source is slightly over one wavelength large ($2\sigma_s$ limit). The full expression of the current source is then

$$J_{z_{i,j}}^n = J_0 \exp\left(-\frac{(i\Delta x)^2 + (j\Delta y)^2}{2\sigma_s^2}\right) \exp\left(-\frac{(n - n_0)^2 \Delta t^2}{2\sigma_t^2}\right) \sin(2\pi\nu_s n \Delta t), \quad (3.16)$$

where n_0 is the time step at which the maximum of the pulse is emitted.

3.1.3 Ray tracing method (RTM)

The Ray Tracing Method (RTM) is a practical tool to model large scale wave propagation problems in “smooth” media without having to track the whole wave-field evolution. It finds its major area of application in high frequency geophysical tomography, X-ray medical imaging and optics. It is a unique way to model a high frequency propagation in the case of bounded 3-D non-homogeneous media with complex boundaries and over long propagation times. In this section we present this technique, and apply it to a 2-D bounded

medium in order to show its capabilities and limitations comparing to the PSTD method.

Starting from the TM mode Maxwell equations (Eq. 3.1), we have

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon\mu} \left(\Delta E_z - \mu \frac{\partial J_z}{\partial t} \right). \quad (3.17)$$

By looking to an harmonic process, i.e. with

$$\begin{cases} E_z = E_z(\vec{r}) e^{-i\omega t} \\ J_z = J_z(\vec{r}) e^{-i\omega t} \end{cases}, \quad (3.18)$$

we obtain the Helmholtz equation :

$$-\omega^2 E_z(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon\mu} (\Delta E_z(\vec{r}) + i\omega\mu J_z(\vec{r})), \quad (3.19)$$

which simplifies outside the source to

$$\Delta E_z(\vec{r}) + k^2 \tilde{\epsilon}(\vec{r}) E_z(\vec{r}) = 0, \quad (3.20)$$

$k = \omega\sqrt{\epsilon\mu} = \frac{2\pi}{\lambda}$ being the wavenumber and $\tilde{\epsilon}(\vec{r})$ being the local relative dielectric permittivity of the medium.

In the case of a smooth medium (i.e. in a mathematical sense, with a sufficiently differentiable permittivity function with scale variations larger than a few wavelengths λ), we can expect that the solution of the Helmholtz equation (Eq. 3.20) will look-like a plane wave affected by a phase shift. This wave can be written as :

$$E_z(\vec{r}) = A(\vec{r}, k) e^{ik\varphi(\vec{r})}, \quad (3.21)$$

where $A(\vec{r}, k)$ and $\varphi(\vec{r})$ are respectively the local amplitude and the local phase of the wave. Assuming the asymptotic expansion [Keller, 1978] :

$$A(\vec{r}, k) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m(\vec{r})}{(ik)^m}, \quad (3.22)$$

we arrive at (by substituting Eq. 3.22 and Eq. 3.21 in Eq. 3.20 and ordering the result with respect to the inverse powers of k)

$$\left(\vec{\nabla} \varphi \right)^2 = \tilde{\epsilon}(\vec{r}) \quad (\text{for } m = 0) \quad (3.23)$$

called the the eikonal equation, and

$$2\vec{\nabla} A_0 \cdot \vec{\nabla} \varphi + A_0 \nabla^2 \varphi = \vec{\nabla} \cdot \left(A_0^2 \vec{\nabla} \varphi \right) = 0 \quad (\text{for } m = 1) \quad (3.24)$$

called the transport equation.

If we can write $\tilde{\epsilon}$ as :

$$\tilde{\epsilon}(\vec{r}) = \epsilon_0 + \epsilon_1(\vec{r}), \quad \text{with } \epsilon_1 \ll \epsilon_0, \quad (3.25)$$

ϵ_0 being a constant background permittivity, we have :

$$\varphi(s) = \sqrt{\epsilon_0}s + \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_0}} \int_0^s \epsilon_1(\vec{r}(x)) dx, \quad (3.26)$$

where s is the rectilinear distance from the source. The term :

$$\varphi_1(s) = 2\sqrt{\epsilon_0} \int_0^s \epsilon_1(\vec{r}(x)) dx \quad (3.27)$$

is the phase perturbation affecting the wave. We will use these two last equations later. The characteristics of the eikonal equation are the ray equations :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}}{ds}(s) = \vec{u}(s) \times \left(\frac{\vec{\nabla} n(\vec{r}(s))}{n(\vec{r}(s))} \times \vec{u}(s) \right) \\ \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{u}(s) \end{cases}, \quad (3.28)$$

where $\vec{u}(s)$ is the direction vector of the ray path at a given point \vec{r} and $n = \sqrt{\epsilon}$ is the refractive index. We can add to the ray differential equations (Eq. 4.1) an additional equation to compute the travel time T along the ray path :

$$\frac{dT}{ds} = \frac{n(\vec{r}(s))}{c}. \quad (3.29)$$

These equations characterize completely the ray path in a continuous medium. When a discontinuity, in the form of a smooth shape interface, is encountered, the paths of the reflected and the refracted rays can be calculated by following Descartes-Snell's laws.

3.1.3.a Ray path and phase determination

The simplest form of ray tracing is shooting (initial value problem), in which the initial position \vec{r}_S and the initial direction $\vec{u}_S = \vec{u}(\vec{r}_S)$ of the ray are imposed.

Another form of ray tracing is the “two point ray tracing”, where the source position \vec{r}_S and the receiver position \vec{r}_R are known and we have to find the rays connecting these two points.

To solve such a problem we can use the shooting technique by starting with an initial position \vec{r}_S and a shooting direction \vec{u}_S , and recording the final position \vec{r}_F . By analyzing

the evolution of the couple $(\vec{r}_F, d\vec{r}_F/d\vec{u}_S)$ we can adjust the shooting direction until the final condition $\vec{r}_F = \vec{r}_R$ is met. Such a shooting algorithm can diverge in the case of highly non-homogeneous media for which the final conditions (\vec{r}_F, \vec{u}_F) are very sensitive to the variations of the initial values (\vec{r}_S, \vec{u}_S) . In this paper we will use the first form which is efficient for a small shooting step γ .

3.1.3.b Amplitude determination

The two different effects that can be calculated using the RTM in a non-dispersive medium are :

- The geometric spreading (which consists on the geometric expansion of the wavefront with the distance from the source), by solving the ray equations (Eq. 4.1) for a thin beam with an aperture angle δ (Fig. 3.3). From the transport equation (Eq. 3.24) evaluated at two arbitrary positions \vec{r}_0 and \vec{r} along the central ray, we have :

$$A_0^2(\vec{r}_0) n(\vec{r}_0) dS_0 = A_0^2(\vec{r}) n(\vec{r}) dS , \quad (3.30)$$

where dS_0 and dS are the cross-section surfaces at respectively \vec{r}_0 and \vec{r} . This follows from the conservation of the power along the beam. The power per surface unit at position \vec{r} is then given by :

$$P(\vec{r}) = \frac{P_0}{dS(\vec{r})} , \quad (3.31)$$

where $P_0 = A_0^2(\vec{r}_0) n(\vec{r}_0) dS_0$ is the emitted power by the source along the beam. In 2-D power calculation, dS_0 and dS are lineic quantities. Difficulties arise in special points where $dS = 0$. These locations, where the power amplitude is “infinite”, are called caustics. Generally, we will simply reject the rays ending at caustics or we will determine their powers by continuity from adjacent “well defined” rays.

For an anisotropic source (Fig. 3.2) the emitted power is function of the emission direction. $P(\vec{r})$ is then written as

$$P(\vec{r}) = \frac{P(\theta, \delta)}{dS(\vec{r})} , \quad (3.32)$$

where $P(\theta, \delta)$ is the power emitted in the angular direction θ by a beam with an angular aperture size δ .

- The reflection/transmission coefficients, that account for the splitting of energy at the interfaces when the incoming wave separates into refracted and transmitted outgoing waves. The outgoing power is

$$P_{out}(\vec{r}) = T P_{in}(\vec{r}) , \quad (3.33)$$

where $P_{in}(\vec{r})$ is the power carried by the incident ray, $P_{out}(\vec{r})$ is the power carried by the reflected or transmitted ray and T is the reflection or transmission coefficient.

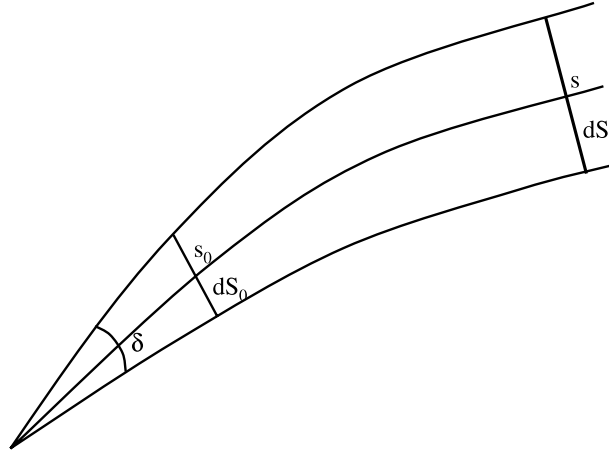


FIG. 3.3: Beam used in amplitude determination.

- The loss in the medium, which attenuates the wave amplitude during propagation from the source S to the intercept point R . It depends on the medium composition and on its inhomogeneities :

$$P(\vec{r}(R)) = P(\theta, \delta) \cdot e^{-\int_S^R \alpha(\vec{r}(s)) ds}, \quad (3.34)$$

where $\alpha(\vec{r}(s))$ is the local attenuation coefficient of the medium.

3.1.3.c Polarization determination

The polarization determination is of interest only in the case of 3-D propagation or in the case of a complex source polarization (circular or elliptic). To model it we have to consider, when we reach the interface, the appropriate transmission/reflection ratio for each polarization direction, so that we can determine the polarisation state at the receiver position. In our 2-D case the polarization remain constant during the wave propagation corresponding to a TM mode (electric field perpendicular to the propagating plane).

3.1.4 Results of wave propagation simulation and methods comparison

3.1.4.a Nucleus model

There are many possible nucleus models that can be used for this study [Whipple, 1950; Weissman, 1986; Möhlmann, 1996; Weidenschilling, 1997]. As the aim of this paper is not to discuss which one is the most plausible, we will consider only one of these possible models : a 2-D comet nucleus model that is a conglomerate of homogeneous sub-nuclei

(cometesimals). This model, already presented in [Benna and Barriot, 2001] allows us to easily compute analytically the local permittivity. The permittivity distribution model inside the comet nucleus is then given by :

$$\tilde{\epsilon}(x, y) = \epsilon_0 + \sum_{i=1}^N \epsilon_1^i(x, y) = \epsilon_0 + \sum_{i=1}^N \Lambda_i \exp \left[\frac{1}{b_i^2} ((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2) \right], \quad (3.35)$$

where ϵ_0 is the background permittivity, N is the number of cometesimals into the nucleus, $(\Lambda_i, x_i, y_i, b_i)$ being respectively the central permittivity perturbation, the cartesian coordinates of the cometesimal centre, and a characteristic length assumed to be the radius of the i^{th} cometesimal. The term ϵ_0 can be seen as the mean permittivity value of the nucleus, although it is not strictly the mean value on a mathematical sense. The comet is bounded by a geometrically smooth shape interface which makes the ray tracing technique valid and prevents surface diffraction phenomena. Fig. 3.9a shows this model with its permittivity distribution. The characteristic length for this model is $(\nabla n/n)^{-1} > 500$ m. This allows us to use the geometric optics approximation ($\lambda \approx 2.4$ m) and so we can apply the RTM. The wave source (lander) is positioned on the surface, and the receiver positions (orbiter) are represented by a circular orbit around this nucleus model.

3.1.4.b Rays shots

We developed for this simulation a ray tracing algorithm based on the previous exposed shooting technique (Sec. 3.1.3.a) :

- Each ray is characterized by the initial shooting direction \vec{u}_I . The shooting angle sampling which defines the rays density is γ .
- When an interface is encountered, if a refraction occurs, we propagate simultaneously the refracted ray and the partially-reflected component, and so on, taking into account the power attenuation of each partially-reflected ray.
- If the total length for a given ray exceeds a defined limit l_{max} or a refraction limit Ref_{max} , we will consider that the attenuation due to several interface reflections and to media losses makes the power carried by the ray out of the the detection range of the receiver, and reject the ray. In our simulation $l_{max} = 15000$ m, corresponding to attenuation values greater than 200 dB. The geometrical spreading will also often increase this attenuation.

If the ray is considered as valid, we start its amplitude computation : We shoot a second ray from the same source in a direction very close to the direction of the original ray in order to evaluate the geometric ray divergence. The received power is the combination of effects of spreading, of interface reflections and of losses in the medium (already discussed in the Sec. 3.1.3.b) and can be written as :

$$P(\vec{r}(R)) = \left[\frac{e^{-\int_S^R \alpha(\vec{r}(s)) ds}}{dS} \cdot \prod_{i=1}^N T_i \right] P(\theta, \delta), \quad (3.36)$$

where T_i are the reflection or transmission coefficients corresponding to the N interface encounters undertook by the ray. The final amplitude attenuation in dB is then given by :

$$A(R) = \int_S^R \text{Attenu}(\vec{r}(s)) ds + 10 \log \left(\prod_{i=1}^N T_i \right) + 10 \log \left(\frac{D(\theta, \delta)}{dS} \right), \quad (3.37)$$

where $\text{Attenu}(r)$ is the local attenuation of the medium in dB, and dS is the cross-section distance of the beam when it intercepts the orbit, allowing us to compute the geometric spreading. $D(\theta, \delta)$ is the source directivity :

$$D(\theta, \delta) = \frac{P(\theta, \delta)}{P_0}, \quad (3.38)$$

If we end up with a caustic ($dS = 0$), we simply reject the ray. This does not affect the final result, since we shoot highly concentrated rays.

3.1.4.c Comparison

We run the PSTD and the RTM algorithms on the model described in Sec. 3.1.4.a. The PSTD and RTM algorithms used the parameters described respectively in Tab. 3.1 and Tab. 3.2.

Discretization	
Size of computational domain	$N_x = N_y = 3072$
Space sampling	$\Delta x = \Delta y = \frac{\lambda_s}{8} \approx \frac{\lambda_{min}}{5}$ = 42 cm
Time sampling	$\Delta t = \frac{\Delta x}{3c_0} = 0.46$ ns
Absorbing Boundary Condition	
Apparent transmission coefficient	$T_0 = -120$ dB
Half-width of PMLs	$\delta = 40\Delta x$
Source	
Size	$\sigma_s = 2.85\Delta x = 1.18$ m
Delay of the maximum of the pulse	$t_0 = 627\Delta t$

TAB. 3.1: Parameters of the PSTD algorithm to obtain a 120 dB dynamic.

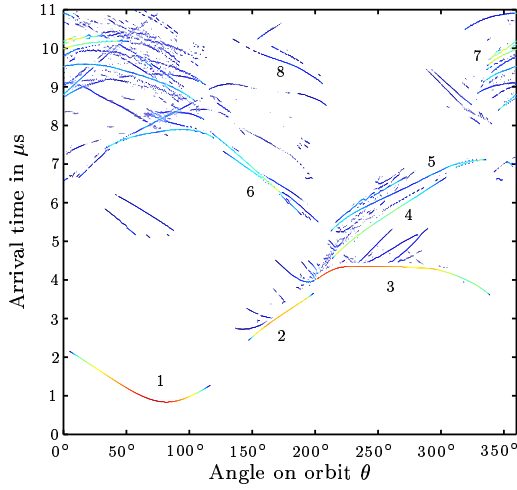
To compare the two algorithms, we need to extract the travel time and intensity of the signals on the orbit from the outputs of the PSTD algorithm. As the medium is not dispersive, the travel time is defined by the time elapsed between the emission and the reception of the maximum of the Gaussian shape pulse. Its amplitude is given by the maximum of the pulse. Fig. 3.4 displays the travel time of waves through the model Fig. 3.9(a) using the PSTD algorithm Fig. 3.4(a) and the RTM algorithm Fig. 3.4(b). Along the

Discretization	
Ray trajectory integration step	$ds = 1 \text{ m}$
Angular shooting step	$\gamma = 0.05^\circ$
beam angle size	$\delta = 0.005^\circ$
Max. ray length	$l_{max} = 15000 \text{ m}$
Max. Reflections	$Ref_{max} = 8$
Model	
Background permittivity	$\epsilon_0 = 2$
Local attenuation	$Attenu(r) = 0 \text{ dB/m}$

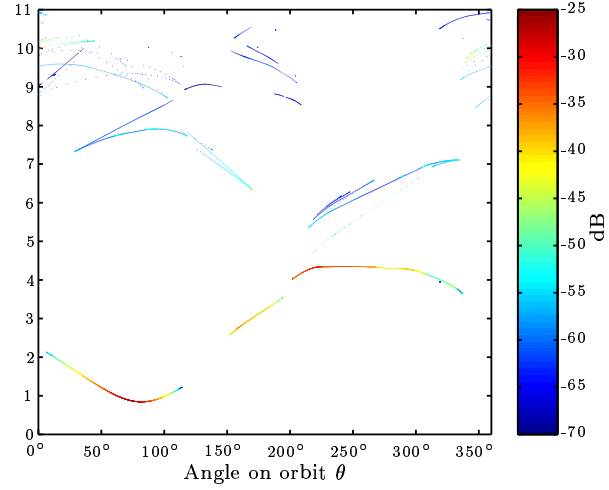
TAB. 3.2: Parameters of the RTM algorithm.

abscissae we have the angular position on the orbit, with color reflecting the power density in dB. We notice that the PSTD algorithm gives much more details than the RTM by taking into account the diffraction phenomena. As a matter of fact, the PSTD algorithm requires the discretisation of the propagation medium. So the surface is like stairs and is responsible for diffraction. For the RTM, the surface is continuous. Moreover the RTM does not handle diffraction phenomena. Besides diffraction, the main patterns are identical on both graphs. The main pulses have the same power and are at the same location. To identify the main patterns, we refer to Fig. 3.5 which displays the intensity of the electric field in the model versus time. We then notice that wave front 1 corresponds to direct propagation between the source and orbit in vacuum. Wave fronts 2 and 3 correspond to main waves which only undergo one refraction at the nucleus-vacuum interface. The others wavefronts correspond to pulses which reflected either completely one or several times on the interface (4, 5, 7 and 8) or partially (6).

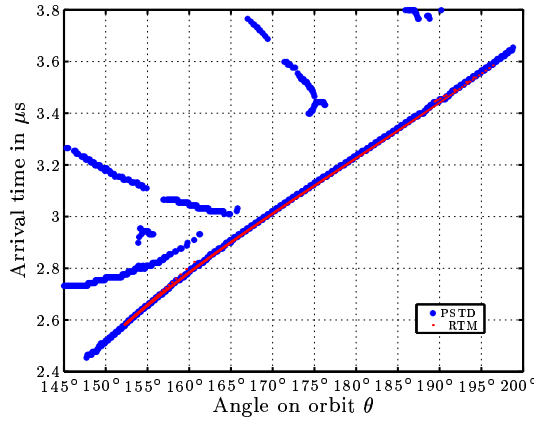
Let us have a closer look on the two direct pulses (2 and 3). We see on Fig. 3.4(e) that the RTM algorithm gives continuous arrival times whereas the PSTD algorithm gives discrete arrival times. This is normal as the PSTD algorithm uses discrete time steps. We notice on both Fig. 3.4(c) and Fig. 3.4(e) that there is a good agreement between the two methods with respect to the arrival time. On each graph, both curves follow the same variations and the differences are within one time step (11 ns). These differences can be explained by errors on the detection of the maxima. Concerning amplitudes the agreement is also satisfactory, according to the previous remarks. However, the RTM does not describe interferences in opposition to the PSTD algorithm. That is why amplitude variations are important on the border of wave-front 2 for the PSTD algorithm outputs (Upper graph in Figure 4d. Other points correspond to a wave front arriving later). In areas where interference does not occur, agreement between both methods is really good (Fig. 3.4(d)). Note that these interferences are physical and are not due to the discretisation of the surface. They occur because two or more rays converge on the same orbit point.



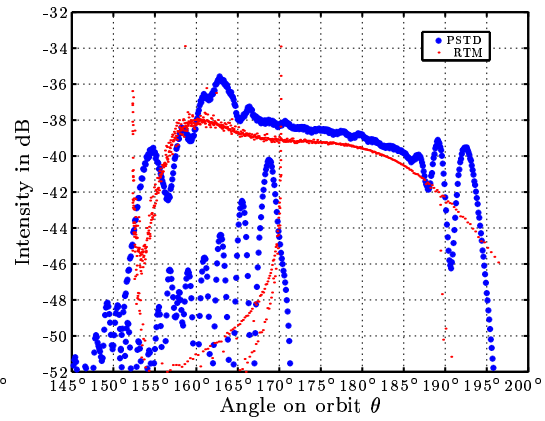
(a) Results from the PSTD algorithm



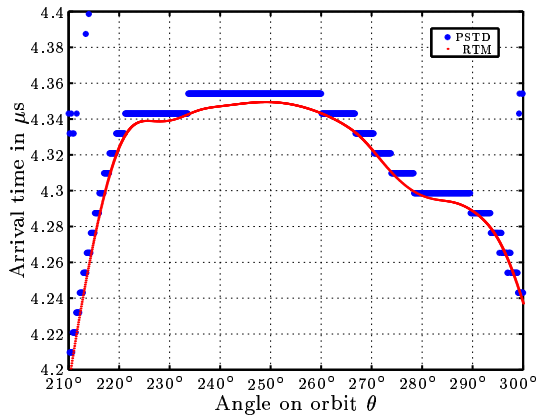
(b) Results from the RTM algorithm



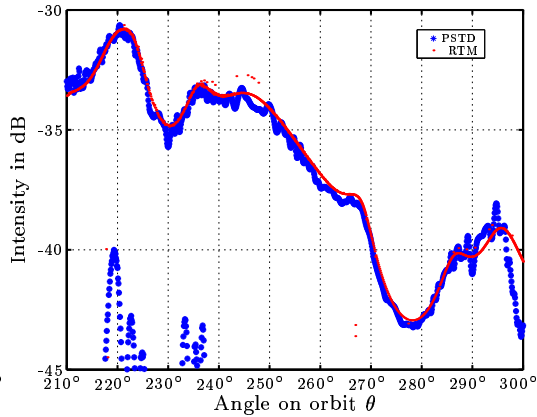
(c) Arrival time (Wave-front 2)



(d) Intensity (Wave-front 2)



(e) Arrival time (Wave-front 3)



(f) Intensity (Wave-front 3)

FIG. 3.4: Comparison between the RTM and PSTD algorithms. Figures (a) and (b) show the complete signals received along the orbit computed respectively from the PSTD and RTM algorithms. Details of the 2 and 3 main wave-fronts are shown in figures (c)-(d) and (e)-(f). They correspond to a direct pulse which propagated through the nucleus and undertook only a refraction.

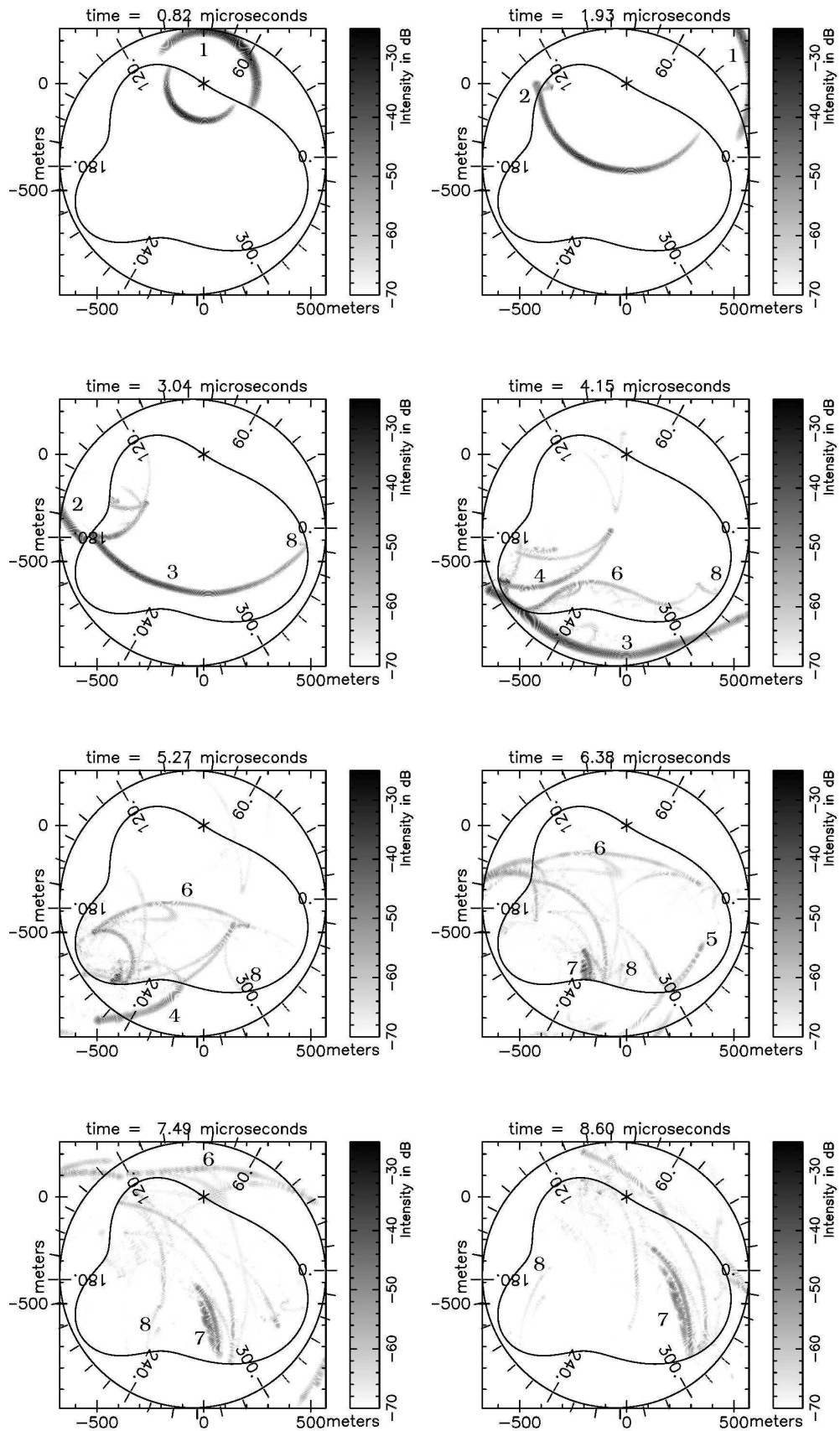


FIG. 3.5: Propagation of the electric field in the comet nucleus model (time sequence). Wave-fronts are labeled for identification on Fig. 3.4(a).

3.1.4.d Conclusion

The PSTD algorithm permits to model the full solution of the Maxwell equations. Unlike the RTM algorithm, it can handle diffraction, caustics and fully describe interference phenomena. As expected, the RTM algorithm is efficient, provided that the model variations are smooth (*i.e* the heterogeneities scales are large with respect to the wavelength). Thus, the RTM will be implemented to study the propagation in 3-D which is needed for CONSERT, as the PSTD algorithm is too CPU and memory demanding to be extended to the three dimensional case.

3.1.5 Data Inversion

The inverse imaging problem was already discussed by Barriot et al. [1999] in the case of a 2-D model and using data generated from RTM method. In this paper we will only discuss the use of the phase information (time propagation). We consider as data the phase perturbation $\varphi_1(s) = \varphi(s) - \varphi_0(s)$ due to the permittivity perturbation $\epsilon_1(\vec{r}(s)) = \tilde{\epsilon}(\vec{r}(s)) - \epsilon_0$ along the ray, where φ_0 is the phase generated by the background permittivity ϵ_0 . The forward problem can then be written in a discrete form (Fig. 3.6) by using Eq. 3.26 as :

$$\varphi_1^j = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_0}} \sum_{i=1}^N \epsilon_1^i \Delta_i^j, \quad (3.39)$$

where N is the number of cells of the discretized model, φ_1^j is the phase perturbation of the j^{th} ray, ϵ_1^i is the permittivity perturbation of the i^{th} cell of the discrete model, and Δ_i^j is the part of j^{th} ray path contained in the i^{th} cell (Fig.3.6). For the M available data points $\{\varphi_1^j\}_{1 \leq j \leq M}$ we obtain the following matrix form :

$$\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{p}, \quad (3.40)$$

where $\mathbf{d} = [\varphi_1^j]_{1 \leq j \leq M}$ is the vector of data points, $\mathbf{p} = [\epsilon_1^i]_{1 \leq i \leq N}$ is the permittivity perturbation vector and $\mathbf{G} = [\Delta_i^j]_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq M}}$ is a linear matrix operator. This matrix form expresses the linearized forward problem. The image reconstruction (inverse problem) consists in finding a structure $\tilde{\mathbf{p}}$ which verifies Eq. 3.40.

The resolution of this inverse problem is based on the Tikhonov-Arsenine formula [Tarantola and Valette, 1982; Tarantola, 1987] (see appendices A and B) :

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{C}_p \mathbf{G}^T [\mathbf{G}^T \mathbf{C}_p \mathbf{G} + \mathbf{C}_d]^{-1} \mathbf{d}, \quad (3.41)$$

where $\mathbf{C}_d = \sigma_d \mathbf{I}$ is the sum of data error variance (supposed non correlated) and of the forward modeling error variance. \mathbf{C}_p is the variance-covariance matrix of the model,

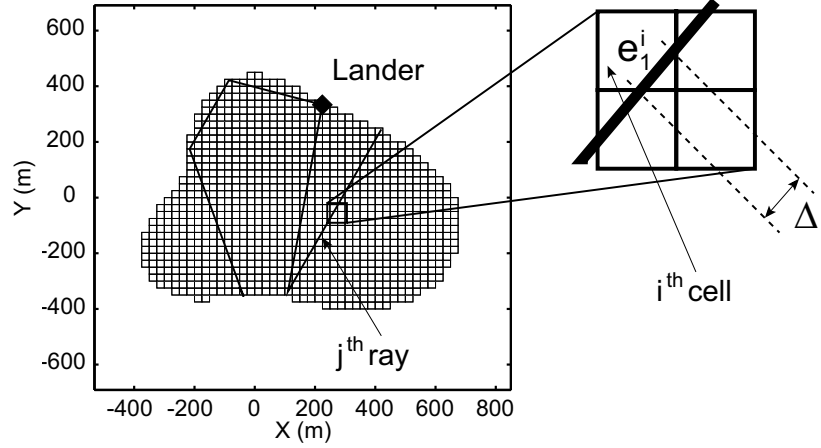


FIG. 3.6: Discrete propagating ray.

containing all a priori information we have about the nucleus interior. In their paper, Benna and Barriot [2001] analysed the structure of this matrix, how to construct it and finally what is its impact on the reconstructed image.

3.1.5.a Data extraction

During data gathering, the CONSERT instrument will measure the total travel times and amplitudes of propagating wave pulses. The correspondence between the phase φ^j and the travel time T_j of the j^{th} measure is given by :

$$\varphi^j = 2\pi\nu T_j , \quad (3.42)$$

ν being the radiowave frequency. The propagation delay is counted from the lander to the orbiter.

We need to extract from this total phase, the part due to the propagation into the nucleus $\varphi_c^j = \varphi^j - \varphi_v^j$, which contains the useful information. The free space phase φ_v^j is due to the propagation of the ray in the vacuum from the nucleus surface to the orbiter, so we have :

$$\varphi_c^j = \varphi^j - \sqrt{\epsilon_v} L_{v_j} = \varphi^j - L_{v_j} , \quad (3.43)$$

where L_{v_j} is the total ray length in the vacuum for the j^{th} measure, and $\epsilon_v = 1$ is the dielectric permittivity of the vacuum. The quantity L_{v_j} is function of :

- the location of the emerging point of the considered ray j on the comet surface, which is itself a function of the trajectory of this ray into the nucleus and then so a function of the heterogeneity distribution throughout the nucleus.

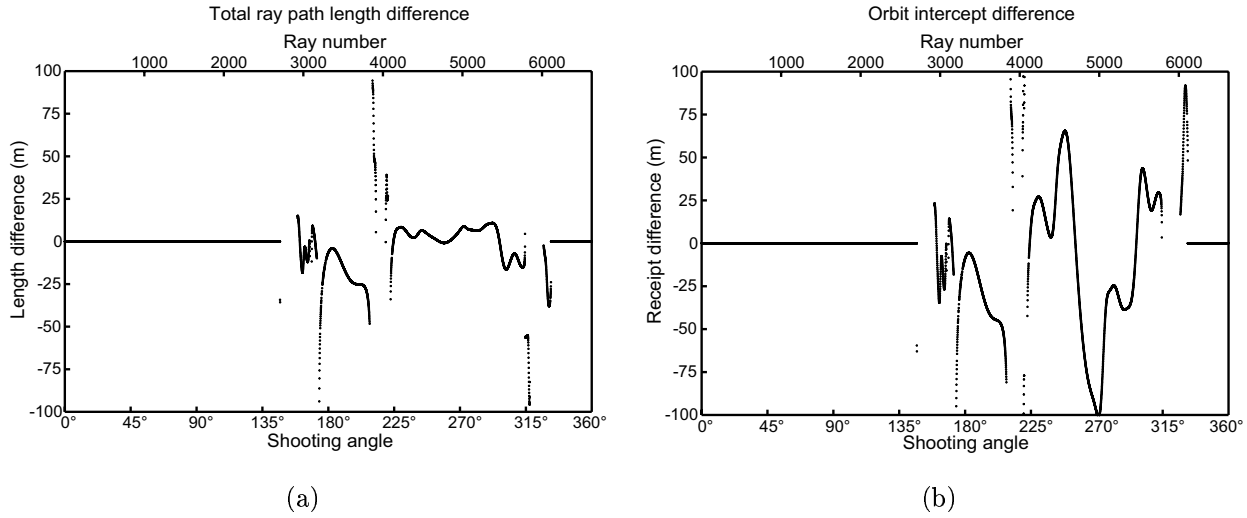


FIG. 3.7: Ray path length differences between an homogeneous and an inhomogeneous model for a given shooting angle : (a) the total ray length difference between the lander and the intercept point in orbit, (b) the ray intercept position dispersion between the two model.

- the local refraction index on the surface which determines the emerging direction of a ray leaving the comet and so the length of this ray from the nucleus to the orbit intercept point. A small deviation of this emerging direction produces a large deviation along the orbit and so a large variation of the length L_{vj} . This effect is shown in Fig. 3.7a and Fig. 3.7b where we report respectively the differences between the trajectory lengths in a homogeneous and inhomogeneous model and the distance between the two orbit intercept points for a given shooting angle.

Since we will not be able to measure the arrival direction of the ray along the orbit, we will not be able to estimate correctly L_{vj} . A good solution to this problem consists in back-propagating the ray from the real orbit to the nucleus surface or to a virtual orbit closer to the nucleus surface. This method will reduce the effect of errors due to the estimation of L_{vj} (ideally this error will vanish if we will be able to back-propagate down to the surface of the nucleus). Hérique et al. [1999] showed that a viable back-propagating method exists for 2-D circular nucleus shape models, provided that we have a complete or near complete data coverage over the orbit.

With a more complex shape, we can use a more general but less accurate method based on the assumption that the heterogeneities of the nucleus are weak enough. In this case, the average length of a thin ray pencil is roughly equal to the ray length computed in the case of a homogeneous model which propagates and arrives over the same “receiving” region.

The data extraction strategy is then the following : for each ray j computed from RTM method for an homogeneous model and defined by its intercept position $P(j)$ along the orbit, we average the N measurements φ^k located in a given reception window $W = [-\Delta, \Delta]$ centered around $P(j)$. In our case, $P(j)$ is the angular position of the ray intercept point along the circular orbit. This averaged measurement includes an averaged phase perturbation $\bar{\varphi}_1^j$ which is close to the real perturbation φ_1^j . The window W should be large enough to contain all measurements coming from the same region of the straight ray j . In our case, we choose Δ to be equal to the maximum sampling angle tolerated for the experiment (see [Kofman, 1995]). We remove from this averaged total phase the homogeneous component φ_0^j . This can be written as :

$$\bar{\varphi}_1^j = \left(\frac{1}{N} \sum_{k/\delta_{k,j} \in W} \varphi^k \right) - \varphi_0^j \quad (3.44)$$

where $\delta_{k,j} = P(j) - P(k)$. Fig. 3.8a shows the extracted phase perturbation compared to the real one.

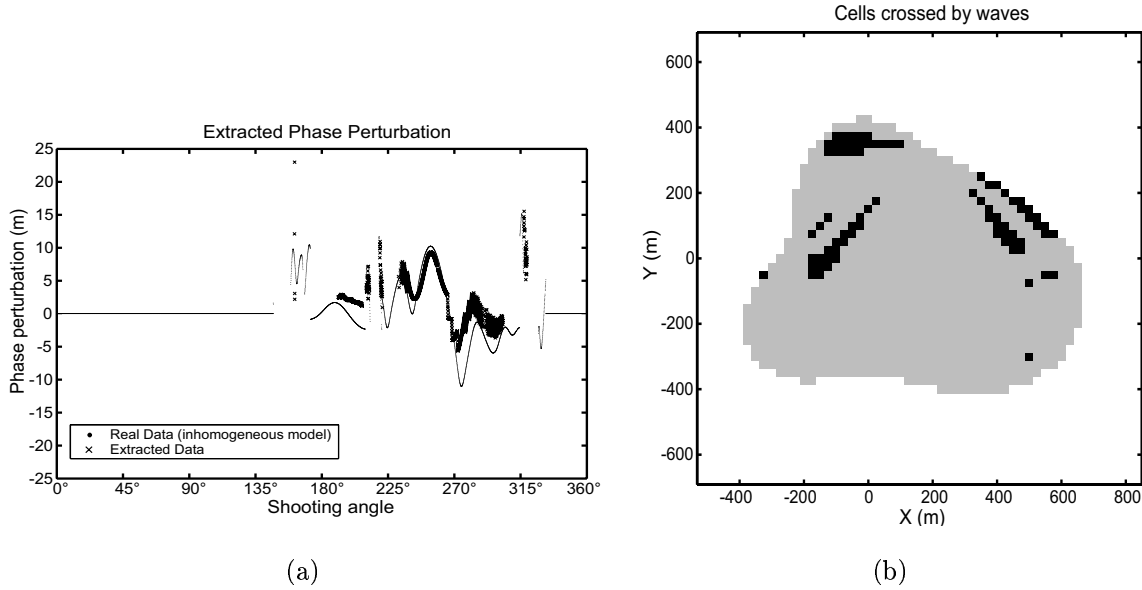


FIG. 3.8: Data extraction : (a) the extracted phase perturbation using Eq. 3.44 (red) compared to the real phase perturbation of the ray Eq. 3.27 (blue), caustic regions are filtered, (b) internal illumination of the nucleus (cells not crossed by waves are in black).

3.1.5.b Inversion results

A first inversion was done using PSTD data and the extraction process detailed above (Sec. 3.1.5.a). We generated the a priori covariance matrix of the expected permittivity from an analytical model [see Benna and Barriot, 2001]. This matrix contains the a priori correlation between all cells in the discretized nucleus. Fig. 3.8b presents cells crossed by waves for which we can use both phase information and a priori information for inversion. The permittivity of remaining cells (black cells) is determined using only the a priori information which define their correlations with the illuminated region. Fig. 3.9c presents the inversion result. Fig. 3.9d is the error between the real discretized model (Fig. 3.9b) and this reconstructed model. Another reconstruction was made by adding the surface permittivity as an a priori information : we supposed in this case that the permittivity of surface cells was known with an error bar vector \mathbf{C}_s . We injected this information to make a new forward problem by writing :

$$\mathbf{d}' = \mathbf{G}'\mathbf{p} , \quad (3.45)$$

where

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{d}' = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} \\ \mathbf{G}' = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} , \mathbf{F}(i, j) = 1 \text{ if the cell } (i, j) \text{ is a surface cell , } 0 \text{ otherwise.} \end{array} \right. \quad (3.46)$$

\mathbf{s} being a vector containing the permittivity perturbation values of surface cells. The inversion equation Eq. 3.41 remains the same and we have just to replace \mathbf{G} by the new operator \mathbf{G}' and \mathbf{d} by the new data vector \mathbf{d}' . The data variance-covariance matrix $\mathbf{C}_{\mathbf{d}'}$ merges the phase variances and the surface permittivity variances :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{d}'} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_d \\ \mathbf{C}_s \end{bmatrix} . \quad (3.47)$$

Fig. 3.9e presents the result of this new reconstruction. We can notice that the addition of the information concerning the permittivity surface decreases the reconstruction error (Fig. 3.9f) not only in surface regions but also in the deep interior region : the permittivity perturbations were all well positioned with the correct signs. This surface information could come from other ROSETTA Experiments which will quantify the surface mineralogy and surface composition.

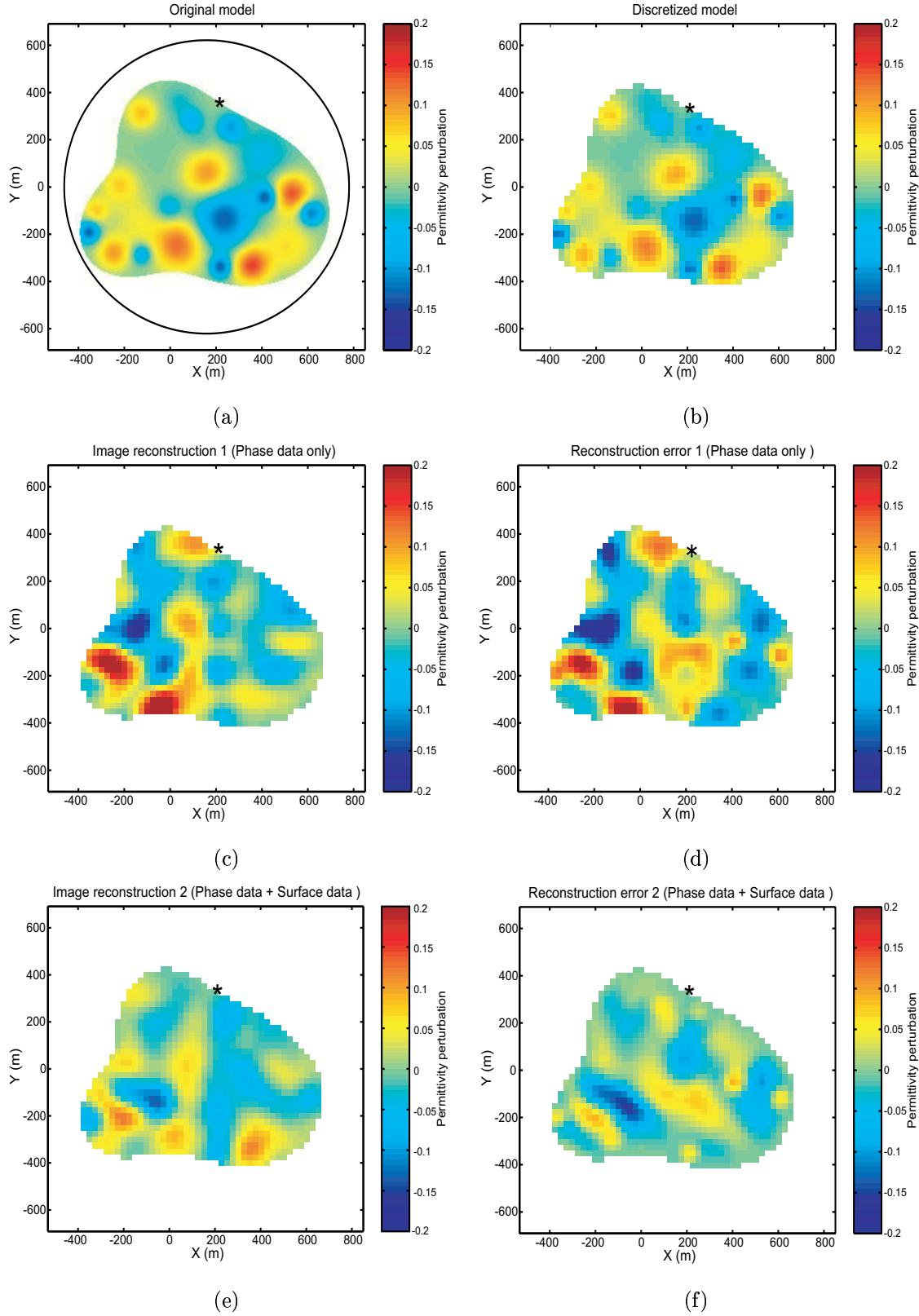


FIG. 3.9: Original model and inversion results : (a) structure of the original nucleus model ($\epsilon_0 = 2$) ; (b) corresponding discretized nucleus with $25\ m \times 25\ m$ cells, (*) represents the lander position ; (c) reconstruction using the phase perturbation ; (d) error between the first reconstruction (c) and the original discretized model (b) ; (e) reconstruction using the phase perturbation and a priori values for the surface permittivity perturbations ; (f) error between the second reconstruction (e) and the original discretized model (b).

3.1.6 Overall conclusion

In this paper we achieved a complete 2-D wave propagation simulation (forward problem) of the CONSERT experiment and synthetic data acquisition using two methods : The Pseudo Spectral Time Domaine Method (PSTD) and the Ray Tracing Method (RTM). These data were also inverted using a Thikonov-like scheme.

In the forward problem we showed that :

1. the PSTD method is very efficient for the simulation of complex high frequency wave propagations over a large scale medium. This method is today numerically intractable for a full scale 3-D CONSERT simulation.
2. the RTM method is a good alternative to the PSTD method, being able to simulate wave propagation with a good accuracy. Diffraction phenomena could be added in the frame of the Geometrical Theory of Diffraction which is similar to the Geometrical Optic Theory used in this paper [Keller, 1962]. This improvement will extend the ability of our algorithm to model real diffractions due to the small irregularities of the nucleus surface. The RTM technique could be used to select the best landing site for the lander as well as orbit parameters in order to maximise the scientific return.

In the preparation to the backward problem, we achieved a data filtering algorithm to determine the phase perturbation along the orbit that is an alternative to the back-propagation method of Hérique et al. [1999] in the case of weak permittivity perturbations. We demonstrated, in the backward (inverse) problem, that adding surface permittivity values will significantly improve the imaging. These values could be derived from the global chemical surface mapping provided by other orbiter instruments and from the lander analysis, by using permittivity evaluation equations [Sihvola and Kong, 1988]. Nevertheless, we will always need to use either a priori information such as a global covariance matrix of the permittivity in order to regularize this ill-posed inverse problem.

In a future work, we will go ahead and generalize the RTM method for a 3-D nucleus shape. Therefore, we will also need to take into account the real circular polarisation of the emitted waves in the modeling of the power of received signals.

Acknowledgments

All the computations using PSTD and RTM codes presented in this paper were respectively performed at the Service Commun de Calcul Intensif de l'Observatoire de Grenoble (SCCI) and at the Centre de Calcul Intensif du Centre National d'Etudes Spatiales (CNES). This research was founded by the Centre National de la Recherche Scientifique and the CNES. The Ph.D. grant of M. Benna is provided by the Tunisian government. The Ph.D. grant of A. Piot is provided by the French government.

3.2 Utilisation de l'information a priori la résolution du problème inverse

A Priori Information Required for a Two or Three Dimensional Reconstruction of the Internal Structure of a Comet Nucleus (Consert Experiment)

M. Benna¹, J.-P. Barriot¹, W. Kofman²

¹ LDTP, Observatoire Midi Pyrénées, 14 Av. E. Belin, F-31400 Toulouse, France

² Laboratoire de Planétologie de Grenoble, BP 53, F-38041 Grenoble Cedex 9, France

Published in *Advances in Space Research*

Submitted October 2001

Accepted January 2002

Published May 2002

Manuscript Pages : 10

Tables : 0

Figures : 6

Abstract

We study here the sensitivity of the imaging reconstruction problem of the CONSERT experiment with respect to a priori information. We give this a priori information in the form of a priori covariance matrices of the expected permittivity perturbation in the nucleus. We analyze the impact of different covariance models. We also construct a covariance model and show that the inversion result is not too sensitive to the exact form of the a priori covariance, provided that the covariance takes into account an a priori variance and correlation length.

3.2.1 Introduction

The aim of the CONSERT (COmet Nucleus Sounding Experiment by Radiowave Transmission) is to probe the internal structure of the comet 46P/Wirtanen during the ROSETTA space mission (2003-2012). The CONSERT experiment is based on the analysis of the propagation delays of 90 MHz radiowaves crossing the comet nucleus from the ROSETTA orbiter to a lander on the comet surface (Fig. 3.10). A complete description of both CONSERT principle and CONSERT technology is given by Kofman et al. [1998] and Barbin et al. [1999].

3.2.1.a The ray approach

Under the geometrical optics approximation [Zernov and Lundborg, 1993; Chew, 1990; Hérique et al., 1999], weak permittivity perturbation and other smoothing assumptions, the received phase of radiowave along a geometrical propagation path j can be approximated by [see Barriot et al., 1999] :

$$\varphi^j(s) = \sqrt{\bar{\epsilon}} \int_{LM} ds + \frac{1}{2\sqrt{\bar{\epsilon}}} \int_{LM} \epsilon_1(\vec{r}(s)) ds + \sqrt{\epsilon_v} MS + \text{noise}, \quad (3.48)$$

where $\bar{\epsilon}$ is a background mean dielectric permittivity of the nucleus, $\epsilon_1(\vec{r})$ is the local permittivity perturbation along the ray path, ϵ_v is the permittivity of the comet surroundings (the vacuum dielectric permittivity at 90 MHz frequency) and s is the length along the considered curved ray path LM (see Fig. 3.10). The ray path LM can be direct or reflected on the internal faces of the comet surface and only depends on the nucleus shape and on the nucleus mean permittivity / vacuum permittivity ratio in the case of a very weak permittivity perturbation. Hérique et al. [1999] discussed the determination of the background mean permittivity $\bar{\epsilon}$ from a global set of measurements. The constant $\bar{\epsilon}$ being known, a more physically interesting quantity φ_1 can be derived from Eq. 3.48 :

$$\varphi_1^j(s) = \varphi^j(s) - \sqrt{\bar{\epsilon}} \int_{LM} ds - \sqrt{\epsilon_v} MS = \frac{1}{2\sqrt{\bar{\epsilon}}} \int_{LM} \epsilon_1(\vec{r}(s)) ds + \text{noise}, \quad (3.49)$$

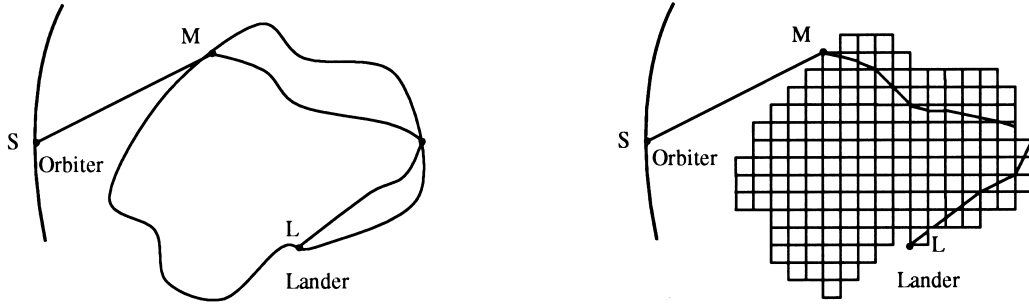


FIG. 3.10: A two-dimensional ray path between the Lander and the Orbiter. On the left, the case of a reflected rays in an inhomogeneous nucleus. On the right, the same rays over a discretized structure. The curved path is approximated by a sum of broken straight lines.

φ_1^j is the phase perturbation due only to the dielectric permittivity perturbation ϵ_1 along the propagation path j and is a classical Radon Transform over a continuous domain. This transform is widely studied in imaging problems [Louis, 1981; Deans, 1983].

In the discrete case, needed for our inversion process, the Discrete Radon Transform can be written for the j^{th} ray as :

$$\varphi_{1,N}^j = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon}} \sum_{i=1}^N \epsilon_1^i \Delta_i^j, \quad (3.50)$$

where Δ_i^j is the part of the j^{th} ray path contained in the i^{th} cell. The accuracy of Eq. 3.50 depends on the fineness of the grid. For the M available data $\{\varphi_1^j\}_{1 \leq j \leq M}$ we have in matrix form :

$$\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{p}, \quad (3.51)$$

where $\mathbf{d} = [\varphi_1^j]_{1 \leq j \leq M}$ is the vector of data points, $\mathbf{p} = [\epsilon_1^i]_{1 \leq i \leq N}$ is the permittivity perturbation vector (or model vector) and $\mathbf{G} = [\Delta_i^j]_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq M}}$ is a linear matrix operator. This matrix form expresses the forward problem. The image reconstruction or “inverse problem” means to find a structure $\hat{\mathbf{p}}$ which verifies “at best” Eq. 3.51, the vector \mathbf{d} and the matrix \mathbf{G} being given.

3.2.1.b The inverse problem

The inversion or imaging problem was already discussed by Barriot et al. [1999] for two dimensional structures using a Tikhonov type algorithm with the introduction of a

priori information in the form of an a priori covariance matrix \mathbf{C}_p leading to the estimator [Tarantola and Valette, 1982; Tarantola, 1987] (see appendices A and B) :

$$\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{C}_p \mathbf{G}^t [\mathbf{G}^t \mathbf{C}_p \mathbf{G} + \sigma_d \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{d}, \quad (3.52)$$

σ_d being the sum of data error variance (non correlated) and of the “direct modeling error” variance.

In their paper, Barriot et al. constructed their a priori covariance matrix from a set of numerical models (drawings) of a priori cometary nucleus as [Blanc-Lapierre, 1991] :

$$\mathbf{C}_p = \mathbf{M} ((\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}}) (\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}})^t), \quad (3.53)$$

\mathbf{M} being an averaging operator over all the considered models and acting as an expectation operator. Numerical studies showed that $\mathbf{M}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ i.e. that the covariance matrix is naturally centered [Benna, 1999].

The construction rules for the numerical comet models (drawings) were as follows :

- the nucleus is considered as an assembly of sub-nuclei (cometesimals) which are characterized by their bell-like permittivity distribution and their “radius” b ,
- all cometesimals are totally included in the nucleus,
- the distance between cometesimals centers is not less than $2b$.

This technique of building the covariance matrix was very versatile and easy to implement, but had a birth defect. In order to be of a full rank (to be a “true” covariance matrix), the matrix \mathbf{C}_p has to be generated using a number of drawings equal to the square of the dimension of the matrix (for example, for a 100×100 discretization grid of a 2-D comet nucleus model, one has to average 10 000 permittivity functions). For a realistic 2-D mesh, or even a 3-D mesh, with hundreds of thousands cells, this approach is clearly unrealistic. Even building \mathbf{C}_p before the resolution of the Tikhonov inverse equation (Eq. 3.52) revealed to be impossible for the moment (for a $200 \times 200 \times 200$ 3-D grid, we will have to store more than 10 gigabytes on a 64 bits computer). The matrix \mathbf{C}_p has to be introduced on line during the construction of the normal equations. In this paper we discuss the feasibility and the efficiency of the covariance matrix generation using a deterministic formula which includes physically sound comet nucleus parameters and we compare the reconstructions obtained with different kinds of covariance matrices.

3.2.2 The Covariance Matrix of the Model

3.2.2.a The nucleus model

A few nucleus models emerge from the literature :

- a mono-bloc nucleus [Whipple, 1950],
- a rubble assembly of homogeneous sub-nucleus called cometesimals [Weissman, 1986],

– a rubble assembly of layered sub-nucleus [Möhlmann, 1996; Weidenschilling, 1997]. For our simulation we chose to consider the second case of an assembly of sub-nucleus which allows us to easily compute analytically the covariance. The first case reduces to the determination of $\bar{\epsilon}$ [Hérique et al., 1999] if the nucleus is homogeneous. The following work can be extended to the third case with more mathematical developments. We suppose that each cometsimal is characterized by its own gaussian permittivity perturbation profile, the position and the diameter of cometsimals being generated randomly with an uniform distribution (Fig. 3.11a). The permittivity perturbation model inside the comet nucleus is then (Fig. 3.11b) :

$$\epsilon_1(x, y) = \sum_{i=1}^N \epsilon_{1,i}(x, y) = \sum_{i=1}^N E_i \exp \left[\frac{1}{b_i^2} ((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2) \right], \quad (3.54)$$

where N is the number of cometsimals in the nucleus, (E_i, x_i, y_i, b_i) being respectively the central permittivity perturbation, the cartesian coordinates of the cometsimal center, and a characteristic length assumed to be the “radius” of the i^{th} cometsimal. The standard deviation for each gaussian permittivity perturbation is then $\sigma_i = 1/b_i$.

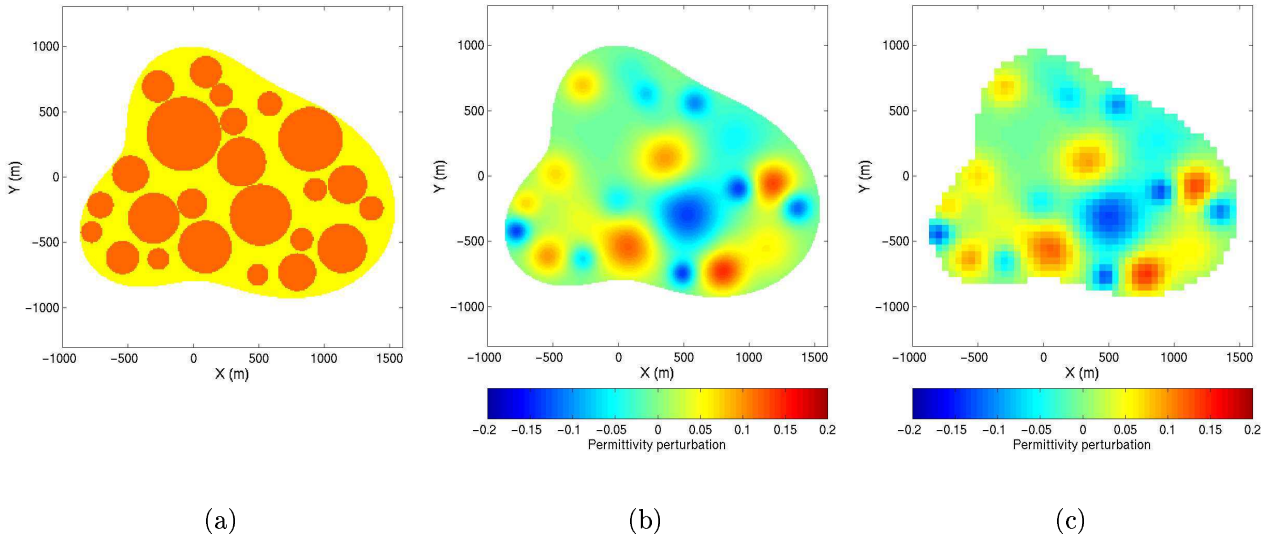


FIG. 3.11: Structure of the original nucleus model : (a) Cometesimals distribution with their permittivity “diameters” into the nucleus, (b) Corresponding dielectric permittivity perturbation distribution ($\epsilon_0 = 2$), (c) Corresponding discretized nucleus.

3.2.2.b The statistical generation of one dimensional covariance matrix

To understand what should be the structure of the covariance matrix, we will first consider a “one-dimensional” comet nucleus, i.e. a bounded line. We generated randomly 100 1-D numerical nucleus models with $b_i \in [120 \text{ m}, 240 \text{ m}]$ and computed the corresponding covariance matrix according to Eq. 3.53 (Fig. 3.14a). Fig. 3.14b shows that the covariance can be approximated by the Gaussian :

$$\mathbf{C}_p(i, j) = C_0 \exp \left(-\frac{d(i, j)^2}{\sigma_c^2} \right), \quad (3.55)$$

where $d(i, j)$ is the distance between the two cells i and j , $C_0 = \mathbf{C}_p(i, i)$, and the standard deviation is $\sigma_c = \sqrt{2} \bar{b}$, \bar{b} being the statistical mean cometsimal “radius” in the nucleus. For an infinite structure without any boundaries the covariance reduces to the Gaussian of Eq. 3.55, so, the dispersion of red points around this Gaussian is due to the effect of the limited length of the line segment.

In their paper, Barriot et al. proposed to compute the Thikonov solution using a second order Markov covariance :

$$\mathbf{C}_M(i, j) = C_1 \left(1 + \frac{d(i, j)}{\alpha} \right) \exp \left[-\frac{d(i, j)}{\alpha} \right], \quad (3.56)$$

where α is a correlation length and C_1 a suitably chosen constant.

The Gaussian and Markov profiles are both bell-like and have the mutual disadvantages of :

- introducing abstract parameters (C_0, σ_c ; C_1, α) difficult to estimate without the help of random numerical models,
- not taking into account the nucleus shape.

3.2.2.c Analytical study for a one dimensional structure (Overlapping case)

To include the effect of shape boundaries in order to generate a more accurate covariance matrix, we studied the simple case of a segment $[R_{min}, R_{max}]$ including cometsimals with constant “radius” \bar{b} and $E_i \in [-E, +E]$. We simplified calculations by considering that cometsimals can overlap. Then the covariance formula takes the form (see Appendix C.1) :

$$\begin{aligned} Cov(x, \acute{x}) = \bar{N} \frac{1}{(R_{max} - R_{min} - 2\bar{b})} \frac{E^2 \bar{b}}{6} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2\bar{b}^2} (x - \acute{x})^2 \right] \cdot \\ \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}}{\bar{b}} \left(R_{max} - \bar{b} - \frac{x + \acute{x}}{2} \right) \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}}{\bar{b}} \left(R_{max} + \bar{b} - \frac{x + \acute{x}}{2} \right) \right) \right], \end{aligned} \quad (3.57)$$

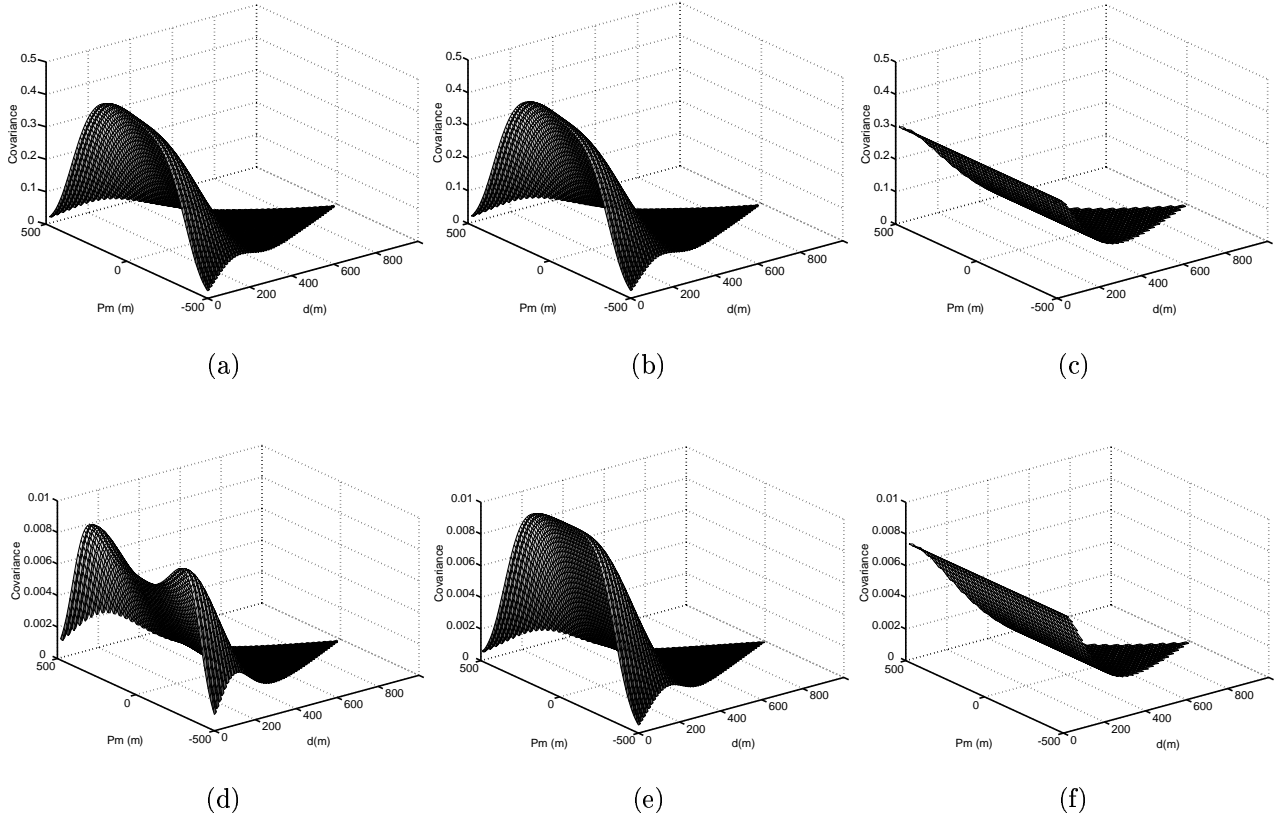


FIG. 3.12: Covariance modeling for a one-dimensional structure : $E = 0.2$, $R_{min} = -500 \text{ m}$, $R_{max} = 500 \text{ m}$, $\bar{b} = 180 \text{ m}$ (see Eq. 3.54 and Eq. 3.57). (a) Statistical covariance with cometesimals overlap : $b_i \in [120 \text{ m}, 240 \text{ m}]$, (b) Eq. 3.57 covariance with cometesimals overlap, (c) The fitted second order Markov covariance for the overlap case, (d) Statistical covariance with cometesimals non-overlap : $b_i \in [120 \text{ m}, 240 \text{ m}]$, (e) Eq. 3.57 covariance with cometesimals overlap, (f) The fitted second order Markov covariance for an non-overlap case.

where \bar{N} is an average number of the cometesimals contained into the segment $[R_{min}, R_{max}]$ and $\text{erf}(z)$ is the error function defined by :

$$\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt, \quad (3.58)$$

For an infinite line $[-\infty, +\infty]$ this formula reduces to :

$$\text{Cov}(x, \dot{x}) = C_0 \exp \left[-\frac{1}{2\bar{b}^2} (x - \dot{x})^2 \right], \quad (3.59)$$

i.e. Eq. 3.55 with $\bar{b} = \sigma_c / \sqrt{2}$.

Fig. 3.12b represents the covariance for a segment $[-500 \text{ m}, +500 \text{ m}]$ as a function of the

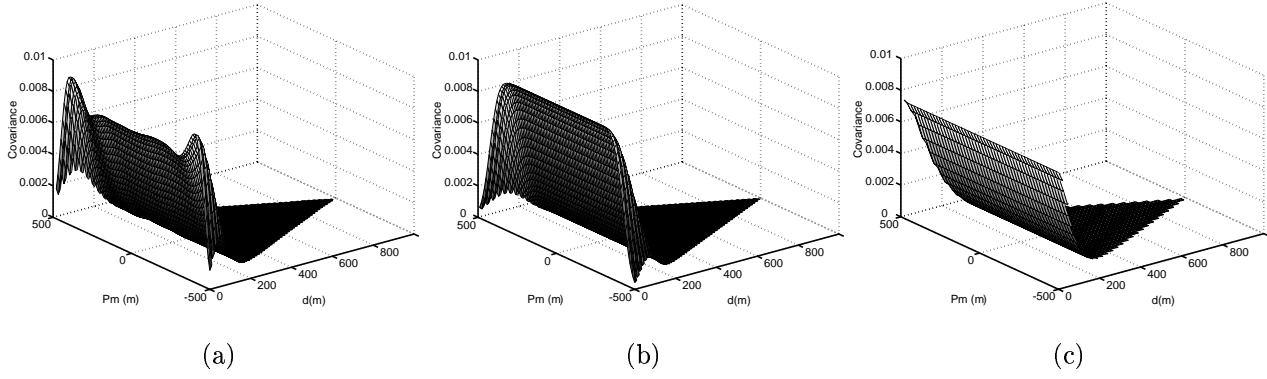


FIG. 3.13: Covariance modeling for a one-dimensional structure : $E = 0.2$, $R_{min} = -500 \text{ m}$, $R_{max} = 500 \text{ m}$, $\bar{b} = 90 \text{ m}$. (a) Statistical covariance with cometesimals non-overlap : $b_i \in [60 \text{ m}, 120 \text{ m}]$, (b) Eq. 3.57 covariance with cometesimals overlap, (c) Second order Markov covariance.

distance $d = (x - \hat{x})$ and of the midpoint position $P_m = (x + \hat{x})/2$, which we compare with a statistically generated covariance (Fig. 3.12a). Fig. 3.12c presents the corresponding second order Markov covariance.

We can easily see that the Markov covariance has more difficulties to fit the statistical covariance profile of a bounded structure especially near the edges. Formula 3.57 is clearly a better fit to the statistical covariance.

3.2.2.d Effect of overlap and size of cometesimals

One can be interested in identifying the effect of the cometesimals overlap on the covariance matrix and how long we can extend the analytical covariance formula established for a cometesimal overlapping structure to the case of non-overlap. For that purpose, we generated a new statistical covariance model with the same parameters as in the previous section but with the non-overlapping rule (the distance between cometesimal centers is not less than $2b$).

Fig. 3.12d presents the resulting statistical covariance and has to be compared with the analytical covariance of Fig. 3.12e. We can notice that the covariance is only modified for the points in the central region and remains unchanged for points near edges.

Fig. 3.13a and Fig. 3.13b show the evolution of the covariance for smaller cometesimals radii. The analytical covariance formula has more easiness to fit the covariance in the non-overlap case since cometesimals radii are smaller than the global size of the nucleus.

3.2.2.e Generalization for Two and Three Dimensional Structures

For 2-D and 3-D structures we developed 2-D and 3-D versions of the 1-D covariance formula (Eq. 3.57). To take into account the real 2-D and 3-D shapes is clearly unfeasible. So we took 2-D and 3-D boxes (i.e. ad-hoc rectangle and parallelepiped enclosing the real shapes). Appendices C.2 and C.3 detail the calculations of the covariance formulas assuming cometesimals overlap. We estimate that these formulas are accurate for nucleus shapes that can be fitted without great divergence by a rectangle or a parallelepiped. They generate covariance plots similar as the one in Fig. 3.14c. A more accurate covariance formula that excludes cometesimals overlap is more difficult to establish : it is feasible for a structure with a small number of cometesimals (less than 4) but is too complex for a structure with a large number of sub-nuclei.

3.2.3 Inversion result

We adopted a ray tracing technique [Zernov and Lundborg, 1993], based on gradient analyses and geometrical optics, to simulate the propagation of radiowaves during the resolution of the forward problem. A first image reconstruction involving a statistically covariance matrix (Fig. 3.14c) is presented in Fig. 3.15a (to be compared with the discrete original permittivity perturbation, Fig. 3.11c). Black cells are cells not crossed by received radiowaves and for which there is no available information. The number and locations of these non-illuminated cells depend on the Lander position/ROSETTA orbit configuration. Two other image reconstruction tentatives are shown in Fig. 3.15b and Fig. 3.15c using for the first a 2-D analytical covariance matrix generated using Eq. C.4 (see Appendix C.2) and for the second the second order Markov covariance. Reconstructions are nearly identical and we only show the first case. This result proves that the analytical generated covariance ensures a good image reconstruction without the need of a statistically built covariance matrix. The visible ghosts are inherent to the Radon Transform properties. Their intensity and extension are functions of the number of available phase data provided by reflected rays [Louis, 1981; Derevtsov, 1997].

For the sake of completeness, we also achieved a reconstruction using a diagonal covariance matrix :

$$\mathbf{C}_p = \sigma_p^2 \mathbf{I}, \quad (3.60)$$

Such covariance matrix imposes only the variances of cell permittivity and removes all cross-correlation between cells. The result of the image reconstruction (Fig. 3.15c) with this covariance matrix shows clearly that the introduction of a correlation length is essential to insure a coherent reconstruction.

3.2.4 Conclusion and Perspective

We demonstrated that the covariance matrix can be generated analytically for two and three dimensional nucleus structures by using the assumption that the nucleus is an assembly of rubble heterogeneous sub-nucleus. Our analytical formulas were calculated for a segment, rectangle, and parallelepiped but are still valid for all smooth structures close to these shapes. They take into account the geometrical limits of the nucleus shape, the a priori mean cometesimals sizes and the a priori permittivity perturbation variations into the nucleus. The necessity of the introduction of the covariance matrix in the inversion process was already proved by Barriot et al. [1999], but we established in this paper that a well constructed matrix insure more coherent result. The reconstruction results using our formulas are similar to the ones obtained by using a statistically built covariance, or a Gaussian or Markov covariance. This establishes the fact that the reconstructed image is not too sensitive to the exact form of the a priori covariance if this one takes into account a permittivity variance and a correlation length. Our formulas permit to build covariance matrices based on physical parameters such as nucleus size, a priori number of cometesimals and sizes, which could be derived from in situ observations in the future. Other covariance formulas can be established using the same mathematical tools for other kinds of nucleus models such as layered mono-bloc nucleus or rubble assembly of layered sub-nuclei. We are now completing a full simulation of the three dimensional case of the CONSERT experiment including a more realistic 3-D nucleus model.

Acknowledgments

This research was founded by the Centre National de la Recherche Scientifique and the Centre National d'Etudes Spatiales. The PhD grant of M. Benna is provided by the Tunisian government.

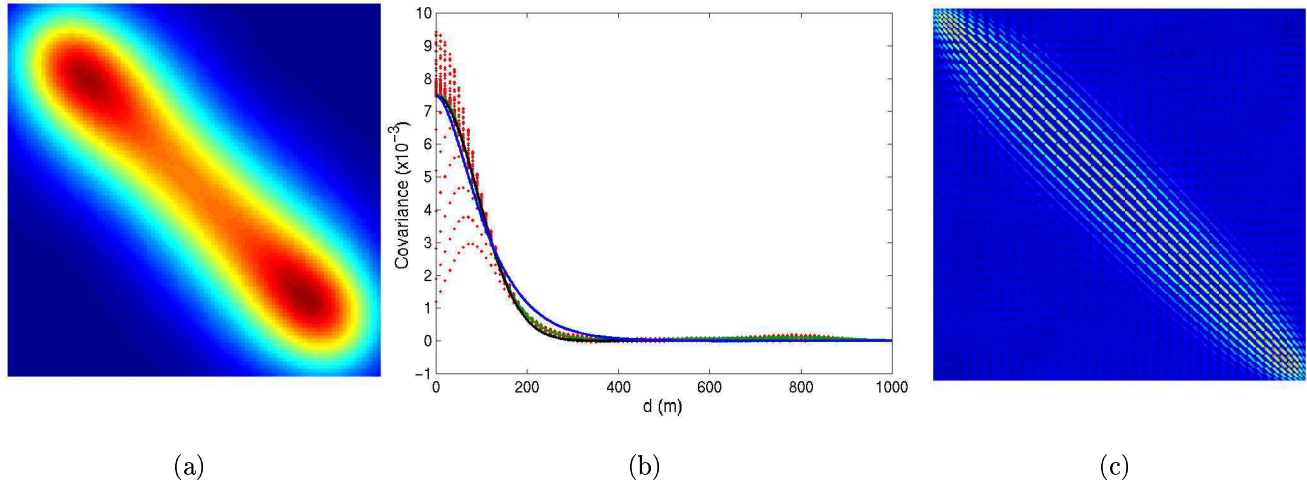


FIG. 3.14: Structure of the covariance matrix (numerical averaging (Eq. 3.53)) : (a) Structure of the covariance matrix for 1-D nucleus, (b) Covariance in function of the distance between cells (red), mean covariance curve (green), Gaussian approximated profile (blue) and Markov approximation profile (black), (c) Structure of the statistical covariance matrix for a 2-D nucleus.

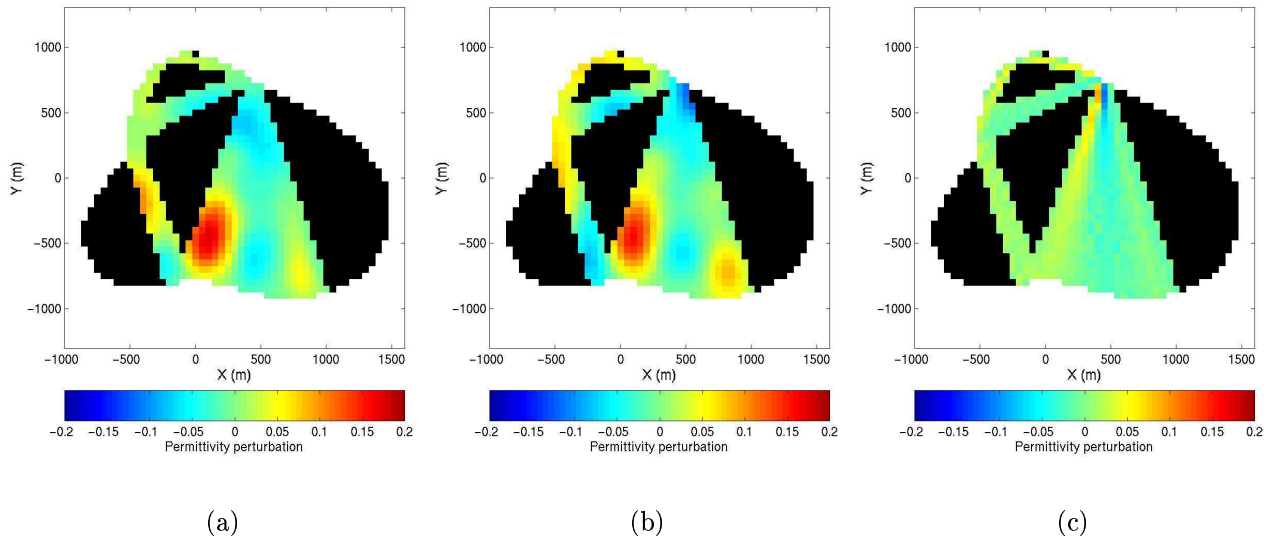


FIG. 3.15: Result of 2-D image reconstruction using different covariance matrices : (a) Inversion using a statistical covariance, (b) Inversion using our analytical covariance formula (Eq. C.4) (nearly identical to result using the Markov covariance), (c) Inversion using a diagonal covariance matrix (non correlated cells).

Chapitre 4

Approche tridimensionnelle

Dans ce chapitre nous étendons l'approche bidimensionnelle pour la simulation de la propagation d'ondes développée précédemment au cas de noyaux tridimensionnels bornés. En se basant sur cette extension, nous présentons un simulateur complet de l'expérience CONSERT. A partir de la forme du noyau, de la position de ROLAND sur sa surface, de la configuration d'orbite choisie pour la sonde ROSETTA, ce simulateur fournit des mesures synthétiques conformes aux capacités et aux performances de l'instrument CONSERT.

Ce chapitre s'articule autour de l'article : “*Generation of 3-D synthetic data by a ray-tracing technique for the radiotomography of comet Wirtanen (CONCERT experiment)*”, soumis pour publication au journal *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*.

4.1 Extension de la méthode de tracé des rayons aux modèles 3-D

Generation of 3-D synthetic data by a ray-tracing technique for the radiotomography of comet Wirtanen (CONSERT experiment)

M. Benna¹, J.-P. Barriot¹, W. Kofman², Y. Barbin³

¹ LDTP, Observatoire Midi Pyrénées, 14 Av. E. Belin, F-31400 Toulouse, France

² Laboratoire de Planétologie de Grenoble, BP 53, F-38041 Grenoble Cedex 9, France

³ LSEET/CNRS Universit de Toulon et du Var, BP 132, F-83957 La Garde, France

Submitted to *IEEE Transactions on Antennas and Propagations*
Submitted June 2002

Manuscript Pages : 16

Tables : 2

Figures : 9

Abstract

We present a 3-D simulation of the CONSERT radiotomography experiment of the comet Wirtanen. This experiment is part of the ROSETTA space mission, due to launch in January 2003.

Our simulation is based on a ray tracing algorithm and takes into account multiple internal reflections, power losses, phase delays and polarization distortions. We emulate as closely as possible the true CONSERT data and discuss the results of the simulation.

4.1.1 Introduction

In mid January 2003, the European Space Agency (ESA) will launch the first cornerstone mission of its long-term space program Horizon 2000. The probe, called Rosetta, will reach the comet 46P/Wirtanen in 2011 to study its environment and nucleus. One of the mission's challenges will consist in the landing of a Surface Scientific Package (SSP) on the comet surface to carry in-situ investigations. In this paper we deal with the CONSERT experiment (COmet Nucleus Sounding Experiment by Radiowave Propagation). CONSERT will probe the comet nucleus interior by analyzing the propagation time delays and amplitude perturbations affecting radiowaves propagating through the comet interior between the lander and the orbiter. The experiment's principle is detailed in Barbin et al. [1999] and Kofman et al. [1998].

We showed in a previous work Benna et al. [2002] that the shooting technique of the Ray-Tracing Method (RTM) is an efficient way to simulate waves propagation in a 2-D nucleus model. This method was validated using the Pseudo-Spectral Time Domain Method (PSTD), more accurate, but numerically intractable for complex 3-D shapes. In this paper we develop the extension of our RTM to 3-D modeling. In section II we present our 3-D method, tailored for the comet nucleus sounding case. In section III we comment the wave propagation results and provide an example of a CONSERT synthetic data set, to show a picture of the instrument capabilities.

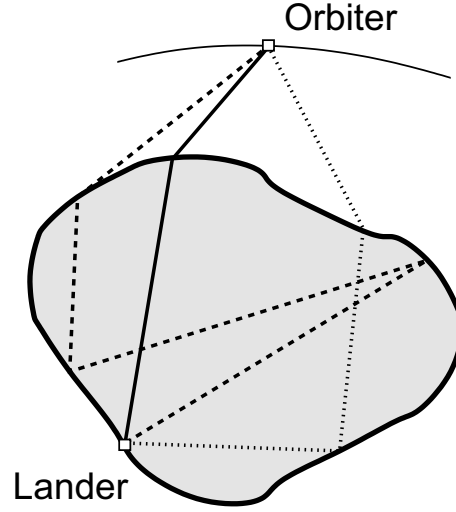


FIG. 4.1: 2-D nucleus model showing different ray paths. Solid line : ray transmitted without reflection. Dotted line : ray undergoing one total reflection at the nucleus surface. Dashed line : ray undergoing two (or more) total reflections.

4.1.2 The 3-D Ray Tracing Method (RTM)

4.1.2.a Determination of the ray trajectory and propagation delay

Under the assumption of an isotropic smooth non-homogeneous cometary medium, with an heterogeneity scale large compared to the wave length λ , the ray equations are :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}}{ds}(s) = \vec{u}(s) \times \left(\frac{\vec{\nabla} n(\vec{r}(s))}{n(\vec{r}(s))} \times \vec{u}(s) \right) \\ \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{u}(s) \\ \frac{dT}{ds} = \frac{n(\vec{r}(s))}{c} \end{cases}, \quad (4.1)$$

where s is the rectilinear distance from the source, $\vec{u}(\vec{r}(s))$ is the direction vector along the ray path at a given point \vec{r} , $n = \sqrt{\epsilon}$ is the local refractivity index and T is the travel time along the considered ray. From a physical point of view, rays are curves orthogonal at each point to the wavefronts. For the particular case of an homogeneous cometary medium, rays are straight lines. When a discontinuity occurs, in the form of a smooth interface, the respective directions of the reflected and the refracted rays can be calculated by using the Descartes-Snell's laws (Fig. 4.1). The total propagation, that will be measured by the CONSERT instrument from the lander position S (source) to the orbiter position R

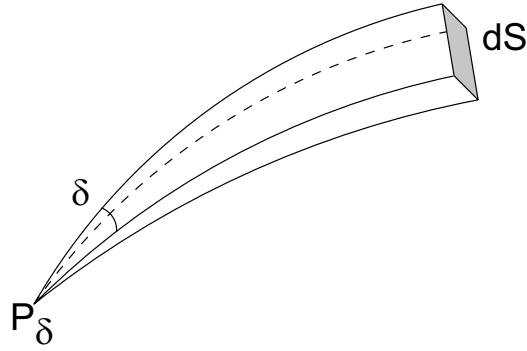


FIG. 4.2: Beam used in the determination of the power along the ray.

(orbital intercept point), is calculated as :

$$T_{\text{prop}} = \int_S^R T \, ds. \quad (4.2)$$

4.1.2.b Determination of the ray power density flux

We estimate the ray power density in the case of an heterogeneous bounded medium by taking into account :

- The geometrical spreading (the geometrical expansion of the wavefront with the distance from the source), by solving the ray equations (Eq. 4.1) for a thin beam with an initial solid angle δ (Fig. 4.2). The power per surface unit at a given position \vec{r} is

$$P(\vec{r}) = \frac{P_\delta}{dS(\vec{r})}, \quad (4.3)$$

where P_δ is the emitted power by the source along a thin beam of an angular size δ , and dS is the cross-section surface at the given position \vec{r} . This follows from the conservation of the power along the beam. Difficulties arise in special points where $dS = 0$. These locations, where the power is "infinite" and Eq. 4.3 does not apply, are called caustics. Generally, we simply reject the rays ending at caustics or determine their "equivalent" powers by continuity from adjacent "well defined" rays.

For a non-isotropic source, the emitted power is a function of the emission direction as defined by the spherical coordinates (θ, ϕ) (θ is the longitude and ϕ is the latitude). Then

$$P(\vec{r}) = \frac{P_\delta(\theta, \phi)}{dS(\vec{r})}, \quad (4.4)$$

where $P_\delta(\theta, \phi)$ is the power of a beam with an angular size δ emitted along the direction (θ, ϕ) .

- The reflection/transmission coefficients, that account for the partition of energy at the interfaces, when the wave splits into refracted and transmitted parts. The outgoing power is

$$P_{out}(\vec{r}) = \Psi P_{in}(\vec{r}), \quad (4.5)$$

where $P_{in}(\vec{r})$ is the power carried by the incident ray, $P_{out}(\vec{r})$ is the power carried by the reflected or transmitted ray and Ψ the reflection or transmission coefficient.

- The losses in the medium, which attenuate the wave amplitude during propagation from the source S to the orbital intercept point R . They depend on the medium composition and on its heterogeneities and contribute to the power attenuation as

$$P(\vec{r}(R)) = P_\delta(\theta, \phi) \cdot e^{-\int_S^R \alpha(\vec{r}(s)) ds}, \quad (4.6)$$

where $\alpha(\vec{r}(s))$ is the local attenuation coefficient of the medium at point $\vec{r}(s)$.

The received power is the combination of all these effects and can be written as

$$P(\vec{r}(R)) = \left[\frac{1}{dS} \cdot e^{-\int_S^R \alpha(\vec{r}(s)) ds} \cdot \prod_{i=1}^N \Psi_i \right] \cdot P_\delta(\theta, \phi), \quad (4.7)$$

where $\{\Psi_i\}_{1 \leq i \leq N}$ are the reflection or transmission coefficients corresponding to the N interfaces encountered by the ray. The final power attenuation in dB is then given by

$$\begin{aligned} A(R) = & \int_S^R Attenu(\vec{r}(s)) ds + 10 \log \left(\prod_{i=1}^N \Psi_i \right) \\ & + 10 \log \left(\frac{D(\theta, \phi)}{dS} \right), \end{aligned} \quad (4.8)$$

where $Attenu(\vec{r})$ is the local attenuation of the medium in dB/m, and dS is the cross-section of the beam when it intercepts the orbit, allowing us to compute the geometrical spreading. $D(\theta, \phi)$ is the source directivity defined as

$$D(\theta, \phi) = \frac{P_\delta(\theta, \phi)}{P_0}, \quad (4.9)$$

P_0 being the total power emitted by the source.

4.1.2.c Determination of the ray polarization

Ray polarization must be taken into account in the case of a 3-D propagation. In the special case of the CONSERT experiment, the lander will emit an initial elliptical (quasi-circular) polarization. This polarization will be distorted as the wave crosses several interfaces during its propagation through the nucleus. To compute the polarization

distortion, we break up the initial elliptically polarized wave W_0 as a sum of four linearly polarized waves $W_i = (\vec{E}_i, \gamma_i)_{1 \leq i \leq 4}$, where the $[\vec{E}_i]_{1 \leq i \leq 4}$ are the linear electrical vectors and the $[\gamma_i]_{1 \leq i \leq 4}$ are their corresponding phases. We suppose that $\gamma_2 = \gamma_1 - 90^\circ$ and $\gamma_3 = \gamma_4 - 90^\circ$ in such a way that the waves (W_1, W_2) and (W_3, W_4) correspond to the right and the left circular polarizations, making up the emitted elliptically polarized wave. Propagating the elliptically polarized wave W_0 is equivalent to propagating independently each one of its four components $(W_i)_{1 \leq i \leq 4}$. When a linearly polarized wave W_i reaches the interface nucleus/free space, a total reflection, or a refraction associated with a partial reflection occurs. In the case of a total or a partial reflection, the incident wave W_i splits in two components : a parallel and a perpendicular reflected components W_j and W_k . In the case of a refraction, the incident wave W_i is transmitted as a parallel and a perpendicular components W_p and W_q . These new waves are defined as :

$$\begin{aligned} W_j & \begin{cases} \vec{E}_j = |r_{//}| E_{i//} \vec{e}_{r//} \\ \gamma_j = \arg(r_{//}) + \gamma_i \end{cases} & W_k & \begin{cases} \vec{E}_k = |r_{\perp}| E_{i\perp} \vec{e}_{r\perp} \\ \gamma_k = \arg(r_{\perp}) + \gamma_i \end{cases} \\ W_p & \begin{cases} \vec{E}_p = \tau_{\perp} E_{i\perp} \vec{e}_{\tau\perp} \\ \gamma_p = \gamma_i \end{cases} & W_q & \begin{cases} \vec{E}_q = \tau_{//} E_{i//} \vec{e}_{\tau//} \\ \gamma_q = \gamma_i \end{cases} \end{aligned}, \quad (4.10)$$

where $E_{i\perp}$ and $E_{i//}$ are respectively the scalar TE and TM components of the incident electric vector \vec{E}_i . The coefficients r_{\perp} and $r_{//}$ are the TE and TM Fresnel's reflection coefficients. The coefficients τ_{\perp} and $\tau_{//}$ are the TE and TM Fresnel's transmission coefficients. The vectors $\vec{e}_{\tau\perp}$ and $\vec{e}_{\tau//}$ are the TE and TM electrical vectors directions after the transmission, and $\vec{e}_{r\perp}$ and $\vec{e}_{r//}$ are the TE and TM electrical vectors directions after the reflection. The coefficient τ_{\perp} and $\tau_{//}$ are real while the coefficients r_{\perp} and $r_{//}$ can be complex (case of a total reflection). The Fresnel's coefficients $(r_{\perp}, r_{//}, \tau_{\perp}, \tau_{//})$ and the directions of the electric vector $(\vec{e}_{\tau\perp}, \vec{e}_{\tau//}, \vec{e}_{r\perp}, \vec{e}_{r//})$ after the reflection or the refraction depend on the incident angle of the wave W_0 and on the nucleus surface refractive index.

We then have to propagate the resulting waves W_j , W_k , W_p and W_q independently, applying for each one and each interface encountered the same follow-on treatment (see Fig. 4.3). When the ray reaches the spacecraft, we obtain a set of N linearly polarized waves resulting from the different splittings. The wave W_N received by the orbiter can be written as a combination of the N received waves $W_i = (\vec{E}_i, \gamma_i)_{n \leq i \leq m}$ as

$$\vec{E}_N(\zeta) = \sum_{i=n}^m \vec{E}_i \cos(\zeta + \gamma_i). \quad (4.11)$$

The received wave ellipticity in dB can be approximated as

$$r = 10 \log \left(\frac{\mathcal{E}_N(\zeta_b)}{\mathcal{E}_N(\zeta_a)} \right), \quad (4.12)$$

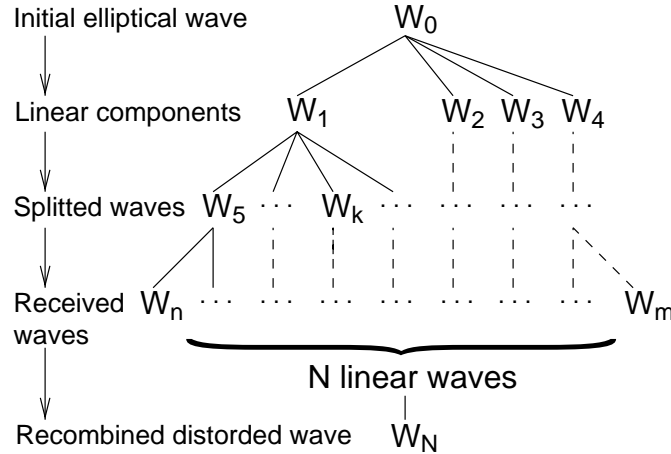


FIG. 4.3: The initial decomposition of the wave W_0 into linear polarized waves. The linearly polarized components W_1, W_2, W_3, W_4 split in secondary linearly polarized waves when they cross interfaces. Along the orbit, N phased linearly polarized waves are received and recombined to estimate the polarization distortion.

where

$$\begin{cases} \mathcal{E}_N(\zeta_a) = \max_{0 \leq \zeta < 2\pi} (|E_N(\zeta)|) \\ \mathcal{E}_N(\zeta_b) = |E_N(\zeta_a + \frac{\pi}{2})| \end{cases}, \quad (4.13)$$

4.1.3 Results of 3-D Waves Propagation

4.1.3.a Comet nucleus model

To apply the RTM algorithm we need to define a plausible 3-D comet nucleus shape. We use a model from Muinonen Muinonen [1998] who derived statistical nucleus characteristics from known asteroids and comets shapes. Our 3-D nucleus shape is generated by using a gaussian spherical harmonic expansion with respect to spherical coordinates :

$$\ln \left(\frac{r(\theta, \phi)}{a} \right) = \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^l P_{l,m}(\cos \phi) (a_{l,m} \cos m\theta + b_{l,m} \sin m\theta), \quad (4.14)$$

where $r(\theta, \phi)$ is the distance from the nucleus center (an arbitrary point inside the nucleus), a is the mean radius of the nucleus, the $P_{l,m}$ are the associated Legendre functions of degree l and order m , and the coefficients $a_{l,m}$ and $b_{l,m}$ are Gaussian random coefficients obeying to a given covariance law. In this paper we use the shape of Fig. 4.4. This shape is smooth enough to make the ray tracing technique valid and to prevent surface diffraction

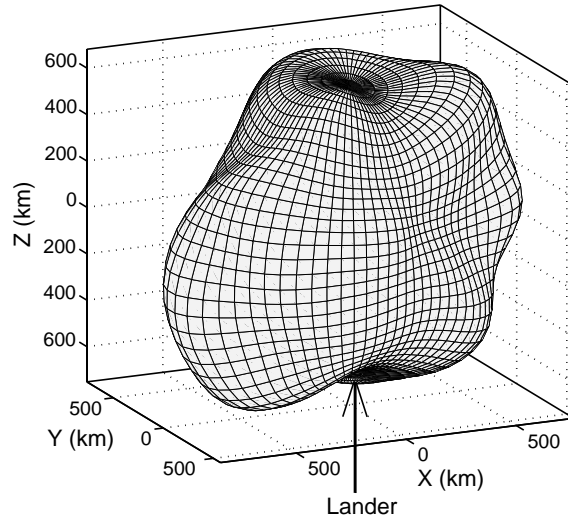


FIG. 4.4: Our model of comet nucleus shape, with a mean radius of 700 m. In this simulation the lander is located at the bottom of the nucleus (arrow).

phenomena. For our simulation we take $a = 700$ m which is the expected mean radius value for the comet 46P/Wirtanen as derived from ground-based observations Lamy et al. [1998].

For the internal structure, we consider the rubble-pile model shown in Fig. 4.5. This model corresponds to a possible structure of a comet nucleus Möhlmann [1996]. We describe the complex dielectric permittivity of this model by the analytical formula :

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}(x, y, z) &= \epsilon_0 + \sum_{i=1}^N \epsilon_1^i(x, y, z) \\ &= \epsilon_0 + \sum_{i=1}^N \Lambda_i \exp \left[\frac{1}{b_i^2} d_i^2(x, y, z) \right], \end{aligned} \quad (4.15)$$

$d_i(x, y, z)$ being

$$d_i(x, y, z) = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}, \quad (4.16)$$

where ϵ_0 is the background permittivity, N is the number of cometesimals (chunks) making up the nucleus, $(\Lambda_i, x_i, y_i, z_i, b_i)$ are respectively the central permittivity perturbation, the cartesian coordinates of each cometesimal centre, and a characteristic length assumed to be the radius of the i^{th} cometesimal. The term ϵ_0 can be seen as the mean permittivity value of the nucleus. The characteristic length for this model is $(\nabla n/n)^{-1} > 100$ m (see Eq.

4.1). This value, compared to the wavelength ($\lambda \approx 2.2$ m), allows us to use the geometric optics approximation and to apply the RTM.

4.1.3.b Ray-Tracing results

In the current simulation the lander is positioned at the bottom of the nucleus ($\theta_L = 0^\circ$, $\phi_L = -90^\circ$). In order to investigate the distribution of the ray pattern as a function of the orbital position, we propagate rays from the lander to a 5 km radius “orbital sphere” centered on the nucleus center. This sphere corresponds to the orbital distance planned by ESA from the nucleus to the Rosetta orbiter. The set of parameters that we used for this simulation is presented in Table 4.1. The radiation and polarization diagrams considered for the lander and for the orbiter antennas are presented in Nielsen et al. [2001].

TAB. 4.1: Parameters of the RTM algorithm used in this paper.

Ray trajectory integration step	$ds = 5 \text{ m}$
Angular shooting step	$\zeta = 2.5^\circ$
Beam angle size	$\delta = 0.01^\circ$
Max. Reflections on comet surface	$\text{Ref}_{\text{max}} = 3$

Figures 4.6a, 4.6b and 4.6c show respectively phase delays, powers, and polarization distortions of the received waves over the “orbital sphere”. For clarity reasons we only plot the waves that propagate through the nucleus. The direct rays joining the lander to the orbiter through the vacuum were computed but omitted in these representations. In these plots, one can observe that :

- the “radio pattern” received on “the orbital sphere” shows an hemispherical division with respect to the lander position (in our case we have a quasi equatorial division). The upper hemisphere corresponds mainly to waves having large powers, minimum travel times, and low distortions, propagating without undergoing any total reflections at the nucleus surface. The lower hemisphere corresponds to waves with lower powers, longer propagating times and higher distortions. These waves arrive along the orbit after one or more total reflections on the nucleus surface. This pattern is close to the pattern of a spherical homogeneous nucleus model.
- the radio pattern is a highly non-linear convolution of the nucleus shape and nucleus heterogeneities. Even a global rescaling of the permittivity and absorption distribution could lead to a new spatial structure of the observed radio.
- Some of the pattern signatures are lens effects. Lens effects can arise from a combination of local internal structures and local curvatures of the nucleus surface. In this simulation, the visible lens effect in the upper right corner of the Fig. 4.6a is a signature of a chunk under the upper hemisphere surface (see Fig. 4.5).

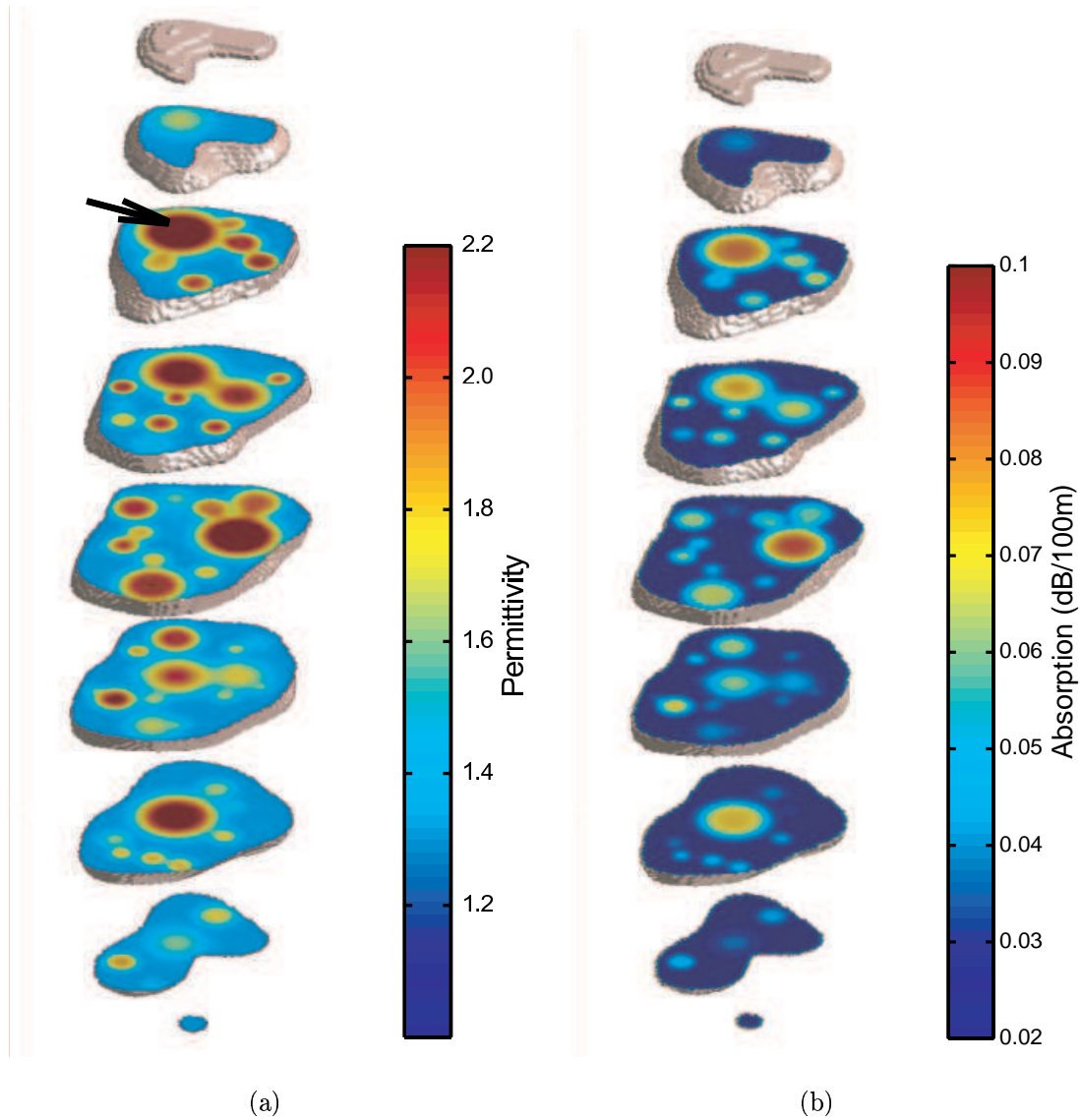


FIG. 4.5: Cross sections of the nucleus interior model used in this simulation : (a) the dielectric permittivity distribution, (b) the absorption in dB/100 m. The arrow indicates the chunk which causes the lens effect on the radio pattern (Fig. 4.6).

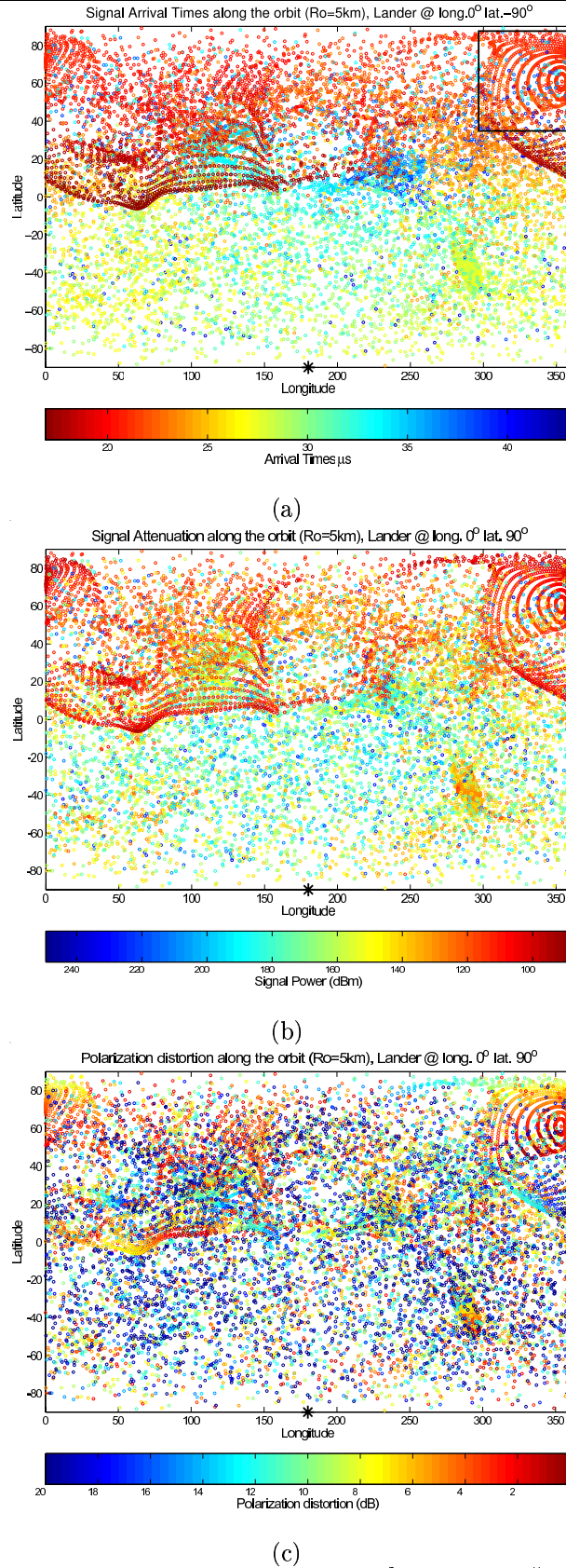


FIG. 4.6: The received radio-wave pattern over a 5 km radius “orbital sphere” centered on the comet nucleus : (a) Wave propagation times T_{prop} , (b) Wave powers, (c) Wave polarization ellipticities (considered as a distortion). * represents the Lander location on the nucleus surface (along the abscissa). The box in the upper right corner of the sub-figure (a) shows a lens effect, the chunk at the origin of this effect is indicated in Fig 4.5 (arrow).

4.1.3.c Simulation of the CONSERT instrument output

The CONSERT experiment is planned to work a few tens of hours because of the very limited amount of resources onboard the lander. In this section we simulate the CONSERT data acquisition along the one or two orbits that the Rosetta probe will complete during this short period.

Rosetta orbit modeling : Some of the plausible orbit characteristics and nucleus dynamic are presented in Table 4.2. We adopt here a circular orbit centered on the nucleus. The Rosetta probe will not orbit around the nucleus in free fall, but will fire quasi continuously its thrusters.

Because of the long nucleus rotation period and the long probe orbital period (a few hours) with respect to the duration of each sounding (a few milliseconds), the CONSERT measurements can be considered as “instantaneous”. The noise mean power of the CONSERT

TAB. 4.2: Parameters of the nucleus rotation and of the Rosetta orbit used in this simulation.

Nucleus parameter	
Nucleus Spin axis	\vec{z}
Nucleus Spin period	$\Omega_N = 7 \text{ h}$
Rosetta orbit parameters (circular orbit)	
Radius	$R_O = 5 \text{ km}$
Inclination	$i_O = 85^\circ$
Right Asc. of asc. node	$\theta_O = 0^\circ$
Orbital period	$\Omega_O = 14 \text{ h}$
Number of soundings	$N_O = 3600 \text{ (1 sounding per 14 s)}$

experiment is estimated to be $P_N = -91 \text{ dBm}$ for our considered frequency and bandwidth Barbin et al. [1999]. This noise level includes both the galactical and the receiver electronics contributions. The power level of the received signals ($< -110 \text{ dBm}$) is so completely embedded in the noise. To extract the signals the CONSERT orbiter instrument processes the received waves as follows :

- only the left circular polarization of the wave is seen by the orbiter antenna (left circular polarized crossed dipoles).
- an Automatic Gain Control (AGC) adjusts the signal level to use the complete dynamic range of the A/D Converters.
- the signals are quantified and coded on 8 bits using A/D converters.
- a coherent 1024 additions followed by a signal correlation (matched filter) enhance the Signal/Noise ratio.

- the wave phase detection is only over a $25.5 \mu s$ periodic time window with a 100 ns time step, as the length of CONSERT periodic code is $25.5 \mu s$.

Effect of the periodic time window : The coherent additions and subsequent correlation will enhance the the Signal/Noise ratio with respectively a gain of $G_a=30 \text{ dB}$ and a gain of $G_c=24 \text{ dB}$ (the best case). The code theoretical peak to sidelobes ratio is 48 dB . Taking into account the non-linearity of the transmitter amplifier, the receiver and the processing system, some localized side lobes may pop up at a level as high as -30 dB below the peak resulting in a loss of detectability. In that context, for i^{th} each sounding, the instrument will not be able to record an arriving signal with a power less than Taking into account the non-linearity of the processing system, the correlation of the signals with the original emitted code exhibits a $G_p= 30 \text{ dB}$ peak to side lobes ratio, in such a way that, for i^{th} each sounding, the instrument will not be able to record an arriving signal with a power less than

$$P_{min}^i = \max \left[(P_{max}^i - G_p), (P_N - G_a - G_c) \right], \quad (4.17)$$

where P_{max}^i is the maximal received signal power during the i^{th} sounding and P_N is the mean noise power. From Eq. 4.17 we can consider, for the power domain $> P_n - G_a - G_c$ ($> -145 \text{ dBm}$), that the instrument has a limited dynamic of $G = G_p = 30 \text{ dB}$. This dynamic restriction will constrain detection capabilities for both high and low power signals at the same time.

Nevertheless, in certain situations, the non linearity induced side lobes positions can be

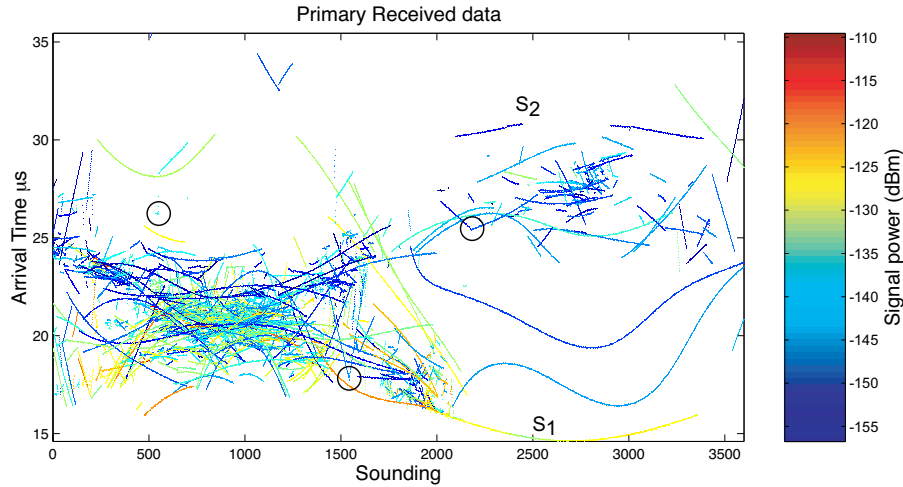


FIG. 4.7: Arrival times along the Rosetta circular orbit. The wavefront S_1 indicates direct waves which propagates only in the vacuum from the lander to the orbiter. Circles indicate some caustics corresponding to wavefront discontinuities.

identified and tracked from sounding to sounding, as their positions are related to the main peak position. Their blanking effect would then be limited. Finally, the practical achievable dynamics will be between 30 and 48dB.

Figure 4.8b presents synthetic CONSERT data taking into account the coherent additions, correlations, and quantifications. The effect of the dynamic limitation of the instrument can be seen from the soundings 2000 to 3300 corresponding to orbital positions where the orbiter can directly see the lander. In these locations, the instrument is unable to detect secondary waves due to the blinding caused by the main wavefront. This effect increases with the dielectric absorption and nucleus dimension.

It is necessary, before any interpretation of the data, to distinguish carefully each wavefront and to remove the ambiguity due to the signals overlapping as discussed in Section C.4.1.3.c Here, this operation is simplified by the existence of a wide partition (from $7.5 \mu s$ to $14.5 \mu s$) in the $25.5 \mu s$ window. In this case, the wavefronts continuity is used to replace correctly each part of the signals as shown in Figure 4.8c. The first arriving signal of the direct front S_1 is used to correctly calibrate signal phases in order to recover absolute propagating time. The propagation time from the lander to the orbiter of this particular first arriving signal is given as :

$$T_f = d_m \times c. \quad (4.18)$$

d_m being the minimal distance of the orbiter to the lander, and c the wave velocity in the vacuum. In this simulation $d_m = 4380 \text{ m}$ so $T_f = 14.6 \mu s$.

In the case of more complex patterns we will probably need to compare the received data with a synthetic pattern obtained using a homogeneous nucleus model by our RTM technique in order to fix the time ambiguities.

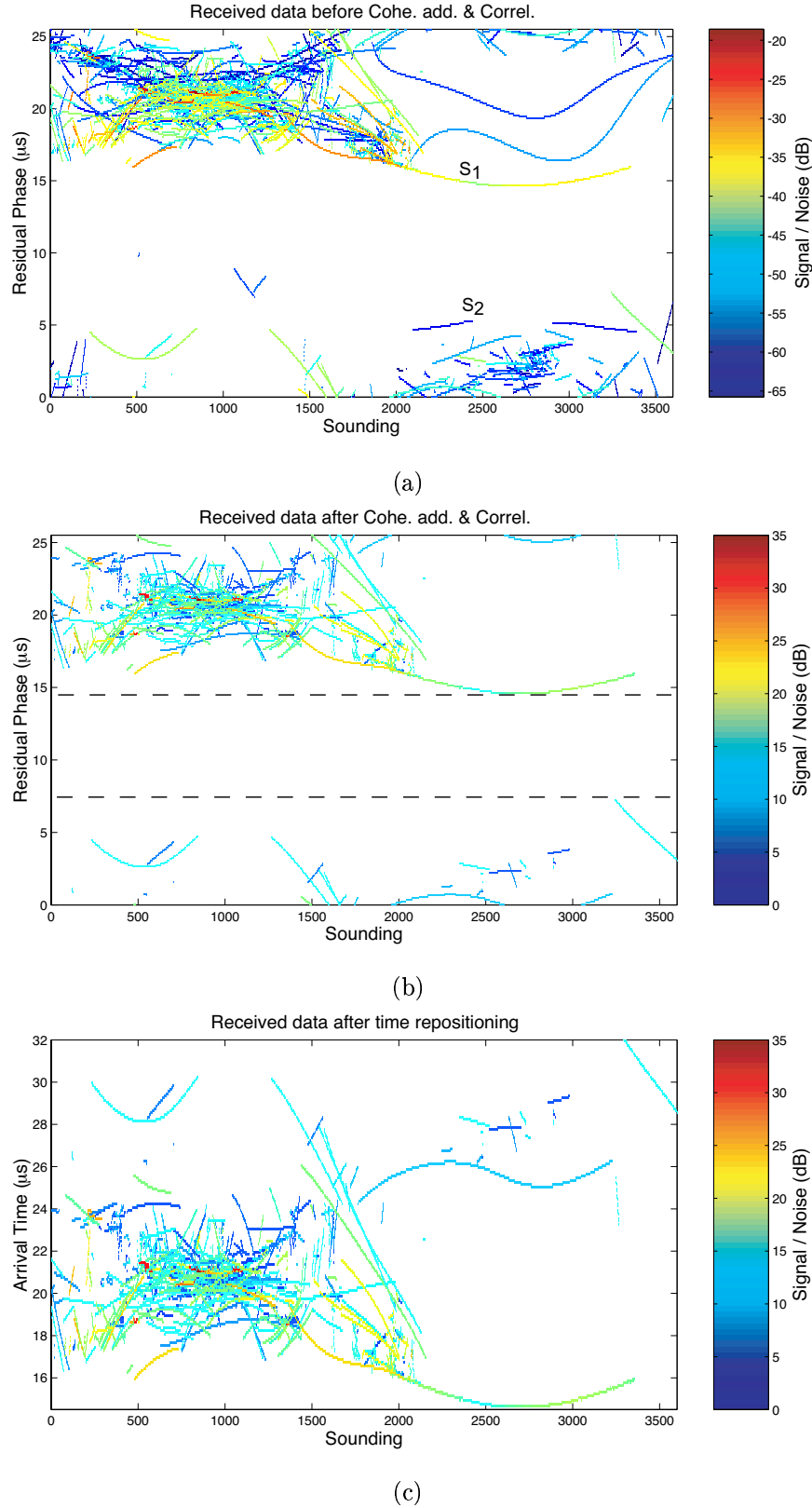


FIG. 4.8: Synthetic CONSERT data along the Rosetta orbit (assuming a -91 dBm noise level). (a) Effect of the periodic time window : signals overlap over a $25.5 \mu\text{s}$ cyclic window (with 100 ns time step). (b) Effect of the coherent addition and correlation : some low power signals will be masked because of the dynamic limitation of the instrument. Notice the existing partition from 7.5 to $14.5 \mu\text{s}$ that will help the wavefronts repositioning (c) Synthetic CONSERT data after the wavefronts repositioning and phase calibration.

4.1.4 Conclusions

In this paper we demonstrated the capabilities of the Ray-Tracing Method (RTM) to model the propagation of a high frequency waves into a large space domain. This algorithm was adapted to the case of a 3-D bounded heterogeneous medium in order to completely simulate the ROSETTA/CONSERT experiment (the wave propagation through a 3-D comet nucleus model). Time propagation delays, power attenuations, and polarization distortions were evaluated for the received waves along the Rosetta's orbit, and a synthetic CONSERT instrument output data set was generated. These synthetic data will be used in future works to validate different inversion schemes.

This simulation also shows the ability of our method to provide the global radio pattern for a given lander position. This capability will be of the highest interest during the search phase for the landing site for the Surface Science Package (SSP), to determine which of the preselected sites is the more interesting for the CONSERT investigations.

Acknowledgments

The authors thank K. Muinonen and E. Nielsen for providing respectively the nucleus model shape and the radiation diagrams of the lander. All the computations presented in this paper were performed at the Centre de Calcul Intensif du CNES. This research was founded by the Centre National de la Recherche Scientifique and the Centre National d'Etudes Spatiales. The Ph.D. grant of M. Benna was provided by the Tunisian government.

4.2 Modélisation d'un noyau cométaire 3-D

Dans la section précédente nous avons présenté brièvement un modèle de noyau cométaire tridimensionnel. Dans cette section nous allons détailler plus amplement la technique de modélisation analytique des différentes structures internes possibles du noyau.

Nous allons partir de l'hypothèse vraisemblable et généralement admise qu'un noyau cométaire est essentiellement un mélange plus ou moins poreux de silicates et de glace d'eau. Comme nous l'avons mentionné dans le premier chapitre, la structure interne d'un noyau est tributaire de ses mécanismes de formation ainsi que des processus physico-chimiques qui régissent son évolution.

Depuis le modèle de Whipple [1950], diverses conceptions des structures internes des noyaux cométaires ont fait leurs apparitions pour expliquer les phénomènes physiques observés. A titre d'exemple nous citons les travaux de Weissman [1986], Weidenschilling et al. [1989], Donn [1990], Hughes [1996], etc... Ces diverses visions des structures des noyaux cométaires, aussi différentes qu'elles puissent être, partagent des bases héritées de la conception de Whipple : le noyau poreux mélange de silicates et de glace d'eau.

Dans notre études nous avons décidé de retenir trois "classes" de structures internes :

1. les noyaux homogènes, où la composition et la porosité du matériau cométaire ne varient pas,
2. les noyaux formés d'un assemblage de cométésimaux de petites tailles,
3. les noyaux ayant une structure interne stratifiée, formée d'une succession de couches de propriétés différentes.

Dans cette étude nous nous plaçons dans le cas simple d'un noyau dont le ratio massique entre les silicates et la glace d'eau $R_{D/I}$ est constant. Nous partons en effet de la vision simple que le noyau s'est formé d'un nuage interstellaire homogène. La structure interne qui caractérise le noyau n'est due alors qu'au mécanisme d'accrétion et ne se traduit que par une distribution spécifique de la porosité.

D'autre part, nous supposons que cette structure ne subit aucune évolution en profondeur au cours de la vie de la comète. Seule la surface du noyau (et plus précisément les premiers mètres de la surface) est affectée par une évolution sous l'effet du réchauffement et du dégazage.

4.2.1 Évaluation de la permittivité diélectrique d'un mélange poreux de silicates et de glace d'eau

En considérant un ratio massique $R_{D/I}$ entre les silicates et la glace l'eau, les masses totales respectives m_{Ice} et m_{Dust} se calculent par :

$$\begin{cases} m_{Ice} = \frac{V_t \delta_m}{1 + R_{D/I}} \\ m_{Dust} = \frac{V_t \delta_m R_{D/I}}{1 + R_{D/I}} \end{cases} \quad (4.19)$$

où V_t est le volume total du noyau, et δ_m est sa densité moyenne.

Les fractions volumiques respectives de la glace et des silicates f_{Ice} et f_{Dust} s'expriment comme :

$$\begin{cases} f_{Ice} = \frac{V_{Ice}}{V_t} = \frac{\delta_m}{\delta_{Ice} (1 + R_{D/I})} \\ f_{Dust} = \frac{V_{Dust}}{V_t} = \frac{\delta_m R_{D/I}}{\delta_{Dust} (1 + R_{D/I})} \end{cases} \quad (4.20)$$

δ_{Ice} et δ_{Dust} étant respectivement la densité de la matière silicatée et celle de la glace.

Soit $p(x, y, z)$ la distribution de porosité dans le noyau (prise dans un repère cartésien). Le développement de l'équation 4.20 donne :

$$\begin{cases} f_{Ice} = \frac{1 - p}{1 + \frac{\delta_{Ice}}{\delta_{Dust}} R_{D/I}} \\ f_{Dust} = \frac{1 - p}{1 + \frac{\delta_{Dust}}{\delta_{Ice}} R_{D/I}} \end{cases} \quad (4.21)$$

ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} f_{Ice} = \frac{1}{A_{Ice}} (1 - p) \\ f_{Dust} = \frac{1}{A_{Dust}} (1 - p) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A_{Ice} = \frac{\delta_{Dust} + \delta_{Ice} R_{D/I}}{\delta_{Dust}} \\ A_{Dust} = \frac{\delta_{Dust} + \delta_{Ice} R_{D/I}}{\delta_{Ice} R_{D/I}} \end{cases} \quad (4.22)$$

Diverses études ont été proposées pour modéliser la permittivité diélectrique d'un mélange de matériaux connaissant les fractions et les propriétés diélectriques de ses constituants [Beek, 1967]. Sihvola and Kong [1988] ont montré que la permittivité diélectrique ϵ_{eff} d'un mélange de n constituants de permittivités respectives $\{\epsilon_i\}_{1 \leq i \leq n}$ incluses dans une matrice de permittivité ϵ peut être approchée par :

$$\epsilon_{eff} = \epsilon + \frac{\sum_{i=1}^n f_i (\epsilon_i - \epsilon) \frac{3\epsilon}{\epsilon_i + 2\epsilon}}{1 - \sum_{i=1}^n f_i \frac{\epsilon_i - \epsilon}{\epsilon_i + 2\epsilon}} \quad (4.23)$$

où f_i est la fraction volumique de chacune des inclusions.

Dans notre cas d'étude, la matrice est le vide ($\epsilon = 1$), et les inclusions sont les silicates et la glace d'eau avec des fractions respectives f_{Dust} et f_{Ice} et des permittivités diélectriques respectives ϵ_{Dust} et ϵ_{Ice} . L'équation 4.23 se réduit alors à :

$$\epsilon_{eff} = 1 + \frac{f_{Ice} (\epsilon_{Ice} - 1) \frac{3}{\epsilon_{Ice} + 2} + f_{Dust} (\epsilon_{Dust} - 1) \frac{3}{\epsilon_{Dust} + 2}}{1 - f_{Ice} \frac{\epsilon_{Ice} - 1}{\epsilon_{Ice} + 2} - f_{Dust} \frac{\epsilon_{Dust} - 1}{\epsilon_{Dust} + 2}} \quad (4.24)$$

En remplaçant f_{Dust} et f_{Ice} par leurs expressions on obtient :

$$\epsilon_{eff} = 1 + \frac{\alpha (1 - p)}{1 - \beta (1 - p)} \quad (4.25)$$

avec :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{A_{Ice}} (\epsilon_{Ice} - 1) \frac{3}{\epsilon_{Ice} + 2} + \frac{1}{A_{Dust}} (\epsilon_{Dust} - 1) \frac{3}{\epsilon_{Dust} + 2} \\ \beta = \frac{1}{A_{Ice}} \left(\frac{\epsilon_{Ice} - 1}{\epsilon_{Ice} + 2} \right) + \frac{1}{A_{Dust}} \left(\frac{\epsilon_{Dust} - 1}{\epsilon_{Dust} + 2} \right) \end{cases} \quad (4.26)$$

Cette expression nous servira à évaluer la permittivité diélectrique complexe de notre modèle de noyau à partir de sa distribution de porosité. Elle suppose évidemment un ratio massique constant entre les silicates et la glace eau.

4.2.2 Modèles de répartition interne de la porosité

Nous avons cherché à modéliser à travers une seule formule analogique les trois modèles de répartition de porosité que sont : le noyau homogène, le noyau stratifié et le noyau

résultant d'un assemblage de cométésimaux.

Cette formule s'écrit dans sa forme générale :

$$p(x, y, z) = p_{max} + \sum_{i=1}^m \rho_i \exp \left[- \left(\frac{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}}{\sigma_i} \right)^{\zeta_i} \right] \quad (4.27)$$

avec

$$\begin{cases} \rho_i = p_i - p_{max} \\ \zeta_i = a_i r_{max} + b_i \end{cases} \quad (4.28)$$

r_{max} étant la mesure du rayon du noyau passant par la position (x, y, z) . p_{max} est la porosité maximale dans le noyau. $\{a_i, b_i, \zeta_i, x_i, y_i, z_i\}_{1 \leq i \leq n}$ sont des paramètres spécifiques caractérisant chaque modèle.

Selon cette équation, le noyau peut être vu comme un assemblage de n profils de porosité gaussiens (Ddes gaussiennes généralisées) centrés sur les positions (x_i, y_i, z_i) , avec différentes hauteurs ρ_i et différents écarts types ζ_i .

Le tableau 4.3 présente les paramètres utilisés pour générer les trois modèles suivants :

- MOD 1 : un modèle de noyau homogène et de porosité moyenne égale à 0,55 ,
- MOD 2 : un modèle de noyau formé de 35 cométésimaux de taille variant entre 80 m et 240 m et de porosité variant entre 0,33 et 0,8 ,
- MOD 3 : un modèle de noyau stratifié ayant 3 couches dont la porosité varie entre 0,64 et 0,8.

Les figures 4.9, 4.10 et 4.11, montrent les répartitions de la porosité, de la densité, de la permittivité diélectrique, ainsi que les pertes dans les trois modèles ainsi obtenues.

TAB. 4.3: Paramètres des modèles de noyaux MOD 1, MOD 2, et MOD 3

Paramètres communs à tous les modèles							
$R_{D/I}=1$							
$\delta_{Dust}=3,2\text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$				$\delta_{Ice}=0,9\text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$			
$\epsilon_{Dust}=15+i1,5\cdot 10^{-2}$				$\epsilon_{Ice}=3,1+i0,35\cdot 10^{-4}$			
Modèle MOD1 (Homogène)							
m= 0				$p_{max}=0,55$			
Modèle MOD2 (cométésimaux)							
m= 35				$p_{max}=0,8$			
i	x_i	y_i	z_i	p_i	a_i	b_i	ζ_i
1	-61,4	123,7	-339,8	0,40	0	237,4	4
2	-466,1	-297,8	-0,8	0,45	0	197,5	4
3	85,9	338,8	360,9	0,34	0	259,5	4
4	-477,1	38,1	233,3	0,60	0	88,6	4
5	258,3	-57,7	47,4	0,33	0	240,1	4
6	-417,8	-219,1	-455,7	0,48	0	103,9	4
7	144,7	500,3	-132,0	0,46	0	151,0	4
8	-566,8	229,4	-93,1	0,52	0	85,4	4
9	-391,0	185,3	85,3	0,44	0	113,7	4
10	-311,1	-39,1	-73,8	0,44	0	112,1	4
11	319,3	-240,6	-264,8	0,55	0	82,2	4
12	-109,5	-326,2	-21,4	0,58	0	93,7	4
13	298,9	277,9	-491,2	0,55	0	136,5	4
14	-120,7	485,6	-245,0	0,48	0	91,2	4
15	565,9	-11,2	267,2	0,46	0	83,7	4
16	-509,7	77,9	-245,7	0,40	0	133,3	4
17	76,1	-212,7	-286,3	0,43	0	107,7	4
18	-455,1	96,9	-551,2	0,54	0	99,3	4
19	397,2	220,6	-242,7	0,56	0	81,6	4
20	289,0	52,5	-291,4	0,60	0	93,1	4
21	-83,9	85,1	194,9	0,51	0	81,2	4
22	-121,8	-207,9	421,7	0,49	0	105,4	4
23	-35,0	-304,1	234,9	0,48	0	90,7	4
24	-196,8	94,5	428,4	0,57	0	111,3	4
25	-317,1	-367,9	-299,1	0,47	0	107,2	4
26	-298,1	-106,4	262,8	0,47	0	108,2	4
27	413,0	270,4	458,0	0,55	0	87,7	4
28	537,6	218,8	-2,4	0,50	0	153,1	4
29	-554,8	-76,3	-444,1	0,49	0	86,7	4

30	338,2	-186,3	426,4	0,45	0	107,0	4
31	-293,9	367,3	227,0	0,46	0	81,9	4
32	-122,3	523,1	2,5	0,47	0	133,6	4
33	273,7	299,1	24,6	0,52	0	110,0	4
34	-228,5	263,9	-49,3	0,51	0	107,2	4
35	343,8	47,0	426,1	0,47	0	118,5	4
Modèle MOD3 (stratifié)							
m= 3				$p_{max}= 0,8$			
i	x_i	y_i	z_i	p_i	a_i	b_i	ζ_i
1	0,0	0,0	0,0	0.64	0,57	0	30
2	0,0	0,0	0,0	0.70	0,76	0	30
3	0,0	0,0	0,0	0.75	0,95	0	30

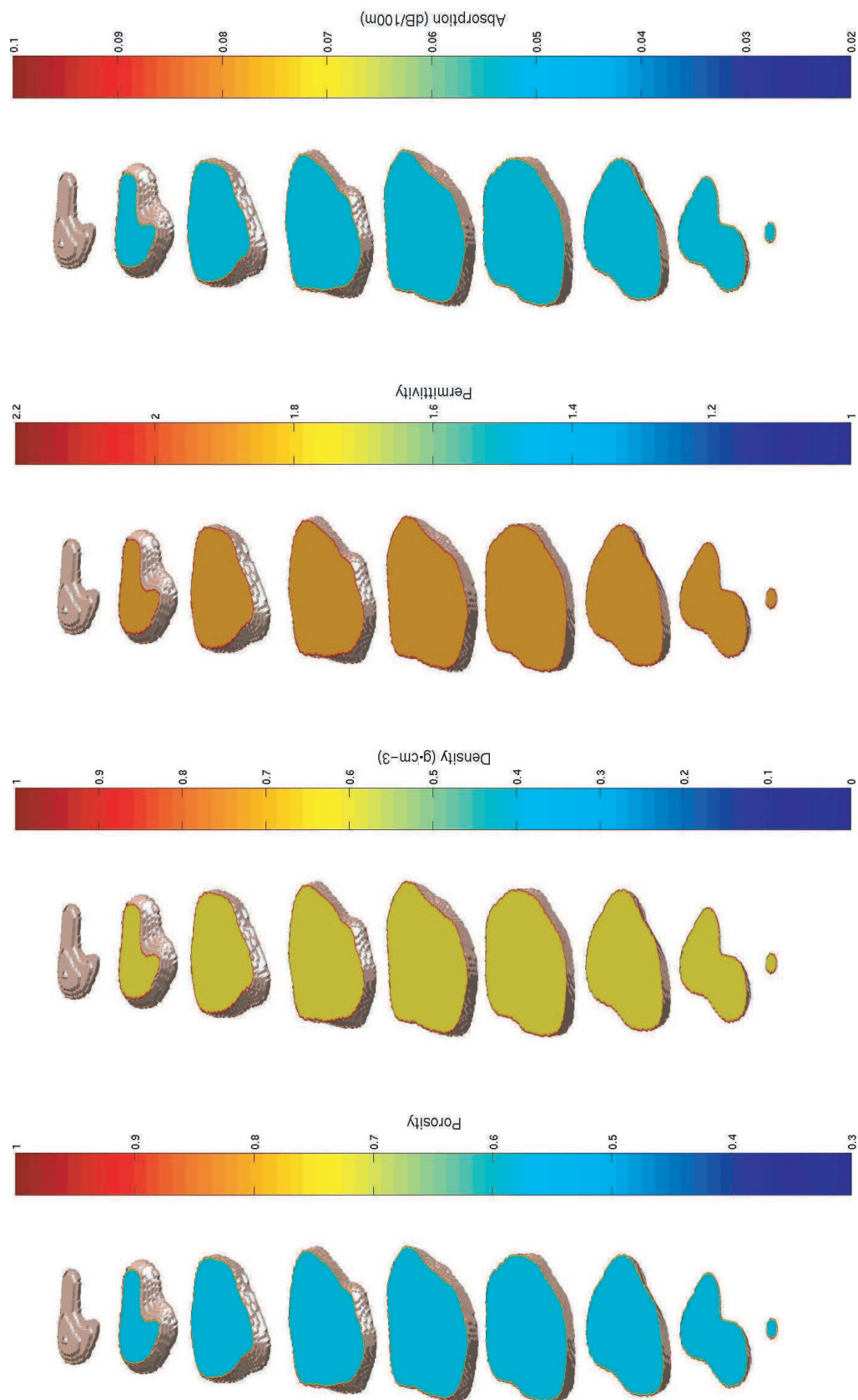


FIG. 4.9: Distribution de porosité, de densité, de permittivité diélectrique et d'absorption dans un modèle homogène (MOD 1)

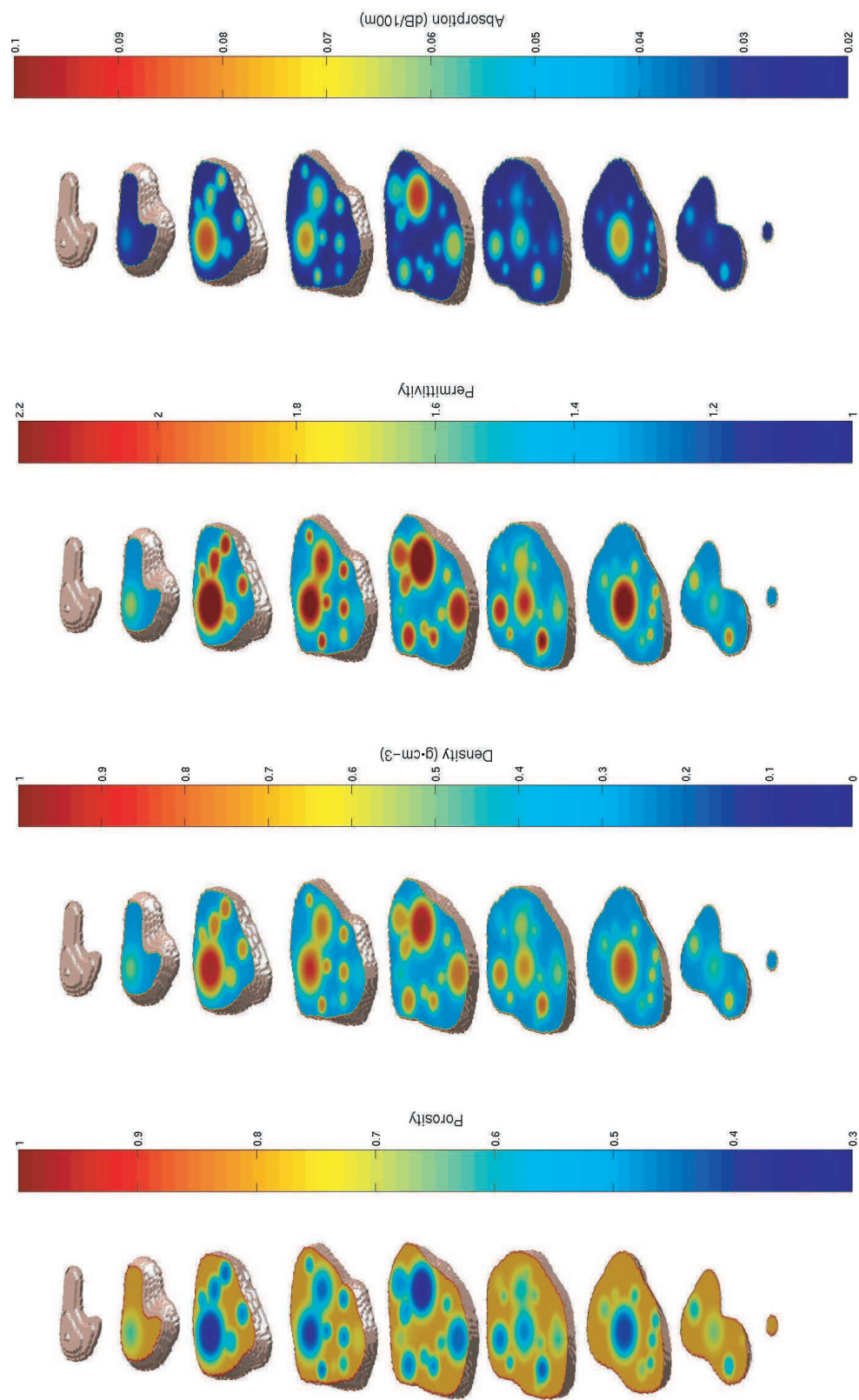


FIG. 4.10: Distribution de porosité, de densité, de permittivité diélectrique et d'absorption dans un modèle de noyau formé de cométésimaux (MOD 2)

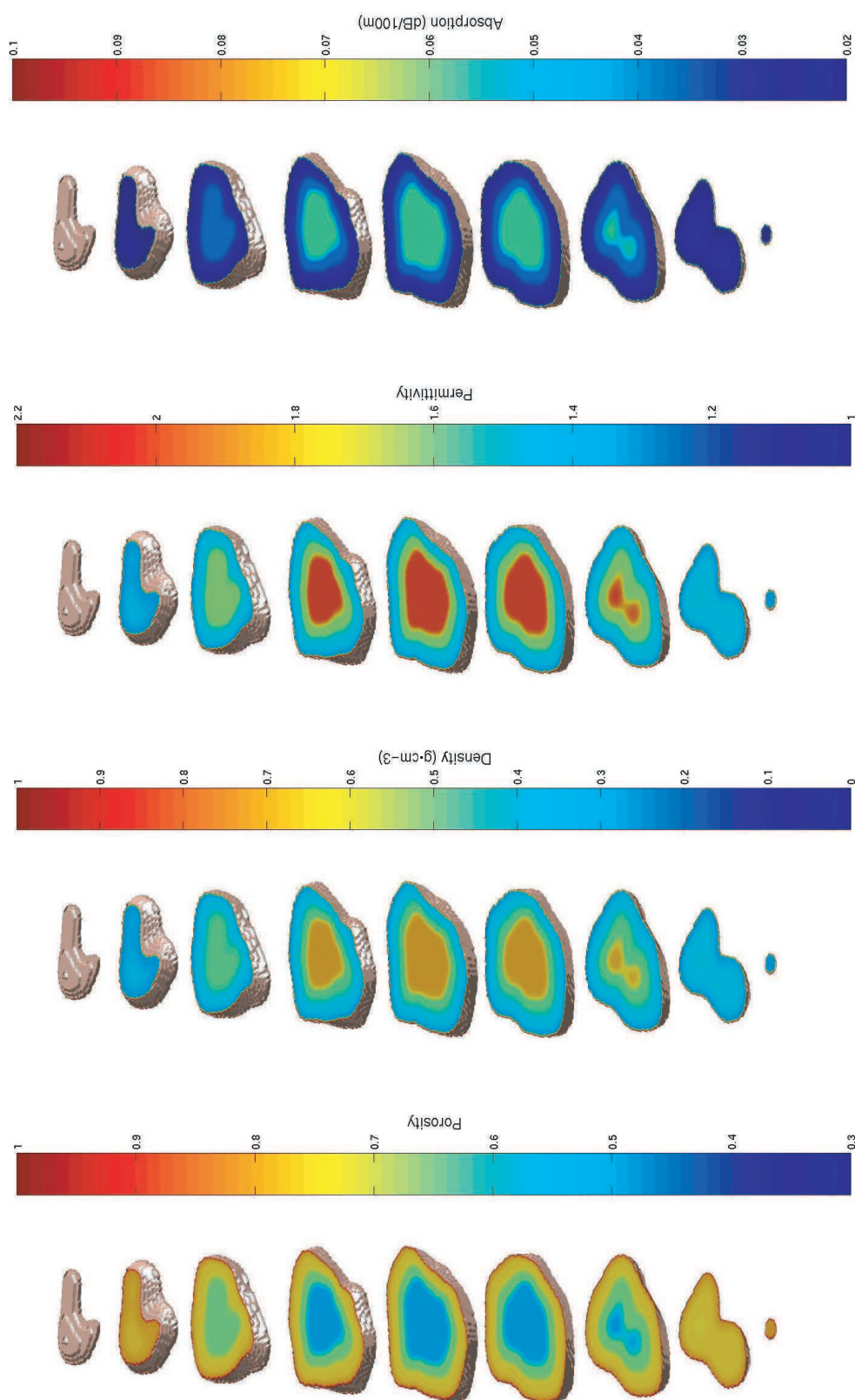


FIG. 4.11: Distribution de porosité, de densité, de permittivité diélectrique et d'absorption dans un modèle de noyau stratifié (MOD 3)

4.3 Exemples de simulations Consert

Nous avons appliqué notre simulateur CONSERT aux trois modèles MOD 1, MOD 2 et MOD 3 présentés dans la section précédente. Nous ne présentons ici que les résultats qui nous semblent les plus intéressants et les plus pertinents.

Tout d'abord nous présentons les cartes de temps d'arrivée radio sur une sphère de 5 km de rayon centrée sur le noyau (Figure 4.12). Ces cartes confirment en effet la grande sensibilité de l'évolution des chemins optiques en fonction de la structure interne. Cette grande sensibilité rend particulière la répartition du signal de chaque modèle ou "classe" de modèles. On pourrait sûrement définir des signatures correspondantes à chaque classe en identifiant des caractéristiques globales de l'ensemble du signal reçu (effets de lentilles, des zones d'absence de signal, etc.), ce qui impliquera de réaliser des couvertures les plus globales possibles du noyau cométaire.

La figure 4.13 montre le signal brut qui sera reçu au niveau d'une orbite de 5 km de rayon pour chacun des trois modèles. Les paramètres de ces simulations sont les mêmes que ceux adoptés dans la simulation de la section 4.1. En se basant sur ces figures on constate encore une fois la sensibilité du signal obtenu le long de l'orbite. En effet, mise à part les rayons directs qui se propagent entièrement dans le vide et dont la trajectoire est invariante d'un modèle à un autre, on n'arrive à identifier aucun front identique sur les trois simulations. Il est ainsi impossible d'appliquer directement notre méthode d'inversion développée dans le cas des faibles perturbations.

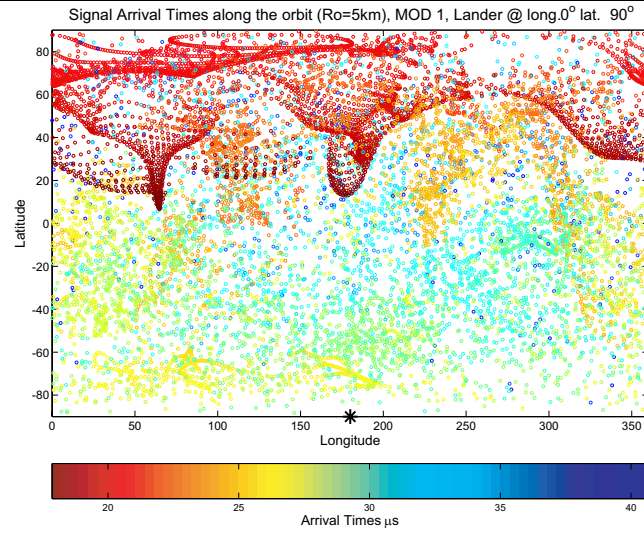
Il est intéressant de noter que diverses autres simulations ont montré que la notion de faible perturbation, qui a été fixée à $\pm 10\%$ de la permittivité moyenne dans le cas 2-D¹, n'est satisfaite dans le cas 3-D que pour une perturbation de permittivité inférieure à $\pm 3\%$ de la permittivité moyenne. Ceci est dû essentiellement au fait que, contrairement aux simulations 2-D, nous considérons une orbite réaliste de 5 km dans nos simulations 3-D. Nous avons en effet déjà noté cette contrainte lors de l'étude du problème inverse bidimensionnel.

Pour achever une inversion 3-D sur le schéma de l'algorithme réalisé en 2-D, il est nécessaire de partir d'un modèle *a priori* très proche de la structure réelle du noyau de manière à se retrouver dans le contexte de l'hypothèse des faibles perturbations. La construction d'un modèle *a priori* peut être réalisée en faisant tourner un grand nombre de simulations directes avec des structures internes différentes et en comparant les signaux obtenus avec les vraies données transmises par l'instrument CONSERT, de façon à

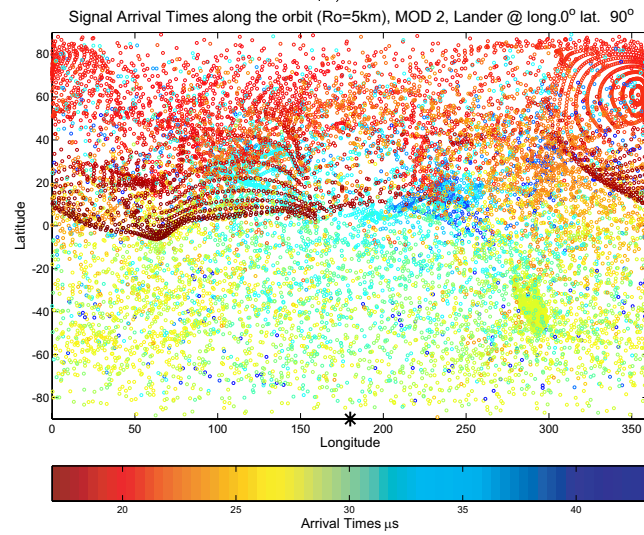
¹Ce chiffre est donné à titre indicatif. Il est important de garder à l'esprit que les notions de faible et de forte perturbation sont entre autre fonctions des dimensions géométrique du milieu de propagation et de la forme du modèle.

identifier la structure interne la plus proche de celle du vrai noyau cométaire. La seule contrainte à cette opération sera le temps de calcul nécessaire à l'achèvement de chaque simulation.

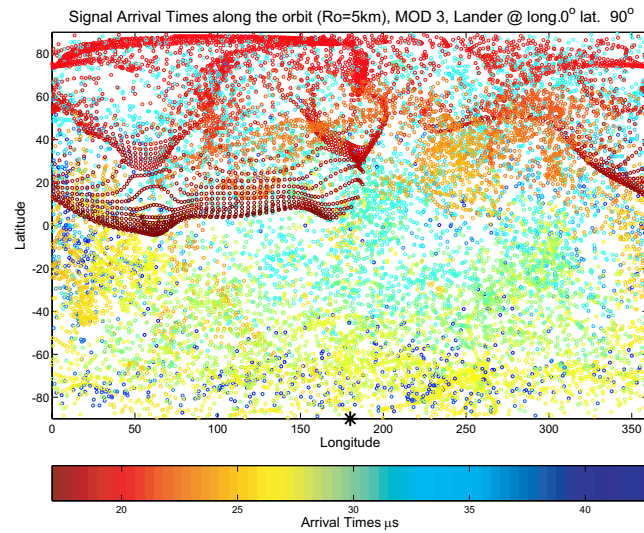
Si par simulation directe on trouve un modèle dont la structure donne un signal synthétique CONSERT très proche des vraies données obtenues, il sera facile d'extraire des perturbations de phases et d'appliquer une inversion pour ajuster au plus près la solution finale.



(a)

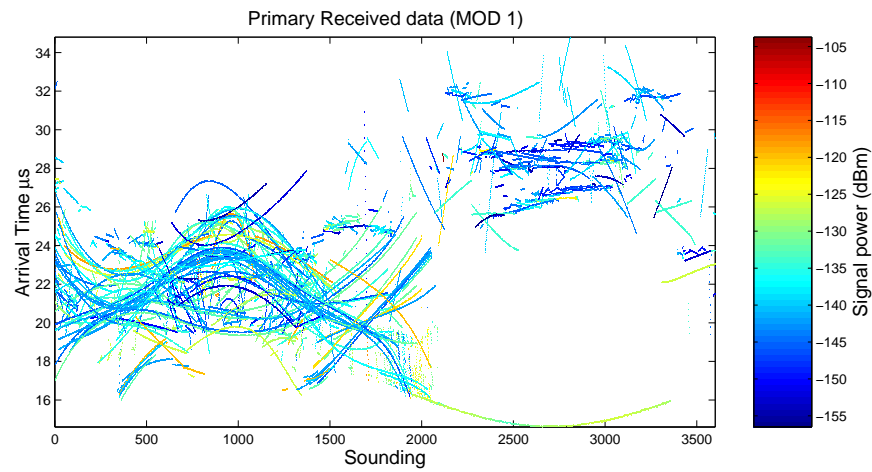


(b)

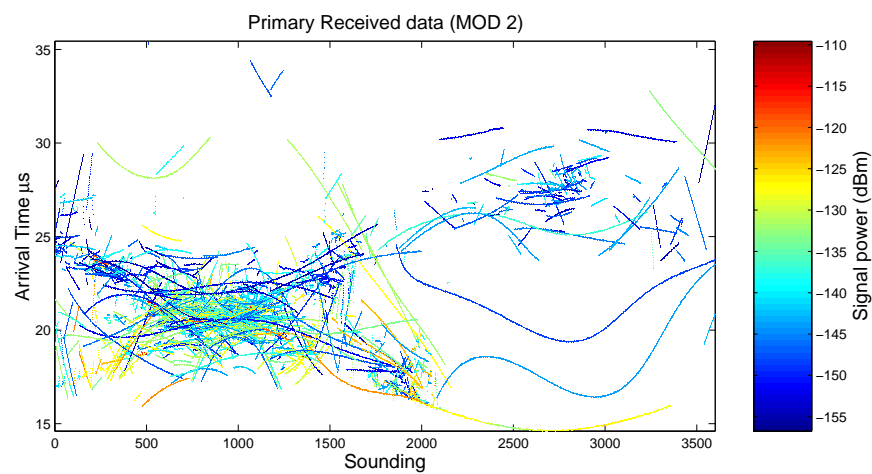


(c)

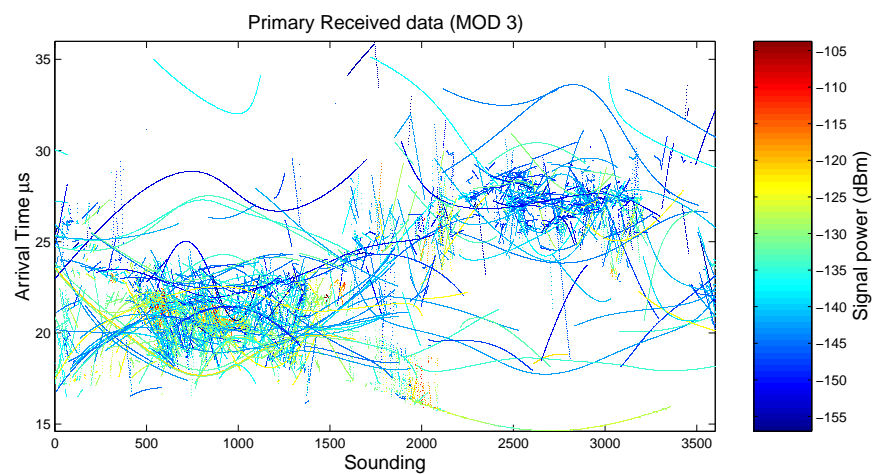
FIG. 4.12: Cartes de temps d'arrivée radio pour les modèles MOD 1, MOD 2 et MOD 3. Le signal est mesuré sur une sphère orbitale de 5 km de rayon centrée sur le noyau. (a) résultat avec MOD 1, (b) résultat avec MOD 2, (c) résultat avec MOD 3.



(a)



(b)



(c)

FIG. 4.13: Données synthétiques CONSERT reçues le long d'une orbite (Rayon 5 km). (a) résultat avec MOD 1, (b) résultat avec MOD 2, (c) résultat avec MOD 3.

Chapitre 5

Perspectives

Dans ce chapitre nous résumons les possibles extensions à cette thèse. Nous détaillons d'abord les principaux problèmes qui restent à résoudre. Nous proposons ensuite des éléments de résolution aux deux principaux problèmes que sont :

- le prolongement vers le bas des mesures de phase,
- l'utilisation d'une matrice de covariance pour régulariser le problème inverse.

Nous introduisons comme alternative à la technique de prolongement vers le bas de la phase des rayons une approche variationnelle permettant de s'affranchir du besoin de déterminer le chemin optique relatif à chaque mesure.

Enfin, nous proposons l'inversion en utilisant des équations de contrainte comme moyen de régulariser le problème inverse en substitution à l'utilisation des matrices de covariance. Un essai d'inversion par cette méthode est donné à travers l'article : “*Radiotomography with an additional functional assumption : the CONSERT case*”, proposé pour publication au journal *Proceedings on Applied Mathematics and Mechanics*.

5.1 Introduction

Au cours de cette thèse, nous avons mis en évidence deux contraintes majeures à la reconstitution tomographique du noyau cométaire à partir des mesures de l'instrument CONSERT. Ces deux difficultés sont :

- l'obligation de reconstituer les chemins optiques suivis par les rayons, ainsi que de prolonger vers le bas les données de phase relevées en orbite pour les ramener au niveau de la surface,
- la contrainte que constitue la présence d'une matrice de covariance dans le processus d'inversion.

La première difficulté est de taille. Comme nous l'avons présenté précédemment (voir section 3.1.5.a), l'inversion utilisant l'approximation de l'optique géométrique et la RTM suppose que l'on se place dans le cas des faibles perturbations par rapport à un modèle de noyau *a priori*. Cette hypothèse présente le grand intérêt de permettre, d'une part, d'extraire l'information utile contenue dans les mesures, et d'autre part de linéariser le problème inverse. En effet, l'hypothèse des faibles perturbations implique que les chemins optiques suivis par les signaux CONSERT dans le noyau réel soient peu différents des chemins optiques suivis par ces mêmes signaux dans le modèle de noyau *a priori*, ce qui permet de :

- prolonger vers le bas chaque mesure φ^j pour la ramener au niveau de son point d'émergence de la surface cométaire. La mesure φ_c^j ainsi obtenue au niveau de la surface s'écrit alors :

$$\varphi_c^j = \varphi^j - L_{v_j} , \quad (5.1)$$

où L_{v_j} est la distance parcourue par le signal j dans le vide.

- d'extraire la perturbation φ^j due à l'écart de la permittivité interne réelle par rapport à celle du modèle *a priori*. Dans nos exemples nous avons choisi un noyau homogène comme modèle *a priori*.
- de construire correctement l'opérateur \mathbf{G} de l'équation matricielle linéaire :

$$\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{p} , \quad (5.2)$$

où \mathbf{d} est le vecteur des mesures et \mathbf{p} le vecteur des permittivités.

Toutes ces opérations nécessitent la connaissance des chemins optiques parcourus par les signaux non seulement dans la comète mais aussi dans le vide. Nous avons constaté au cours des développements, d'une part la forte sensibilité de la direction d'émergence des rayons au niveau de la surface due aux lois de Snell-Descartes, et d'autre part que l'absence de toute mesure de direction d'arrivée du signal rendent délicat la détermination de L_{v_j} , et par suite difficile le prolongement vers le bas de la phase et la construction

de l'opérateur \mathbf{G} . Nous avons certes contourné le problème, dans le cas 2-D où nous disposons d'une bonne répartition des données, en utilisant l'estimateur de la formule (3.44). Il n'en fut pas de même dans le cas 3-D où la répartition des données est moins bonne (quelques arcs de mesure dans l'espace), car notre méthode n'est applicable que si nous disposons d'une couverture englobant tout le noyau.

En résumé, la détermination du chemin optique de chaque signal et le prolongement vers le bas de sa mesure de phase se sont révélées extrêmement difficiles à réaliser, même dans le cas des faibles perturbations. Il serait donc souhaitable d'explorer de nouvelles voies. Cela pourrait être une rétropropagation du signal complet au niveau de la surface cométaire, ce qui implique une bonne couverture des mesures CONSERT et donc d'une compagne de mesure appropriée. Ce la pourrait être aussi le développement d'une approche variationnelle du problème inverse utilisant les données acquises au niveau de l'orbite.

La deuxième difficulté que constitue la présence de la matrice de covariance dans le processus d'inversion, vient du fait que le problème inverse est très sous-déterminé. Pour le régulariser, nous avons injecté de l'information sous la forme d'une matrice de covariance dont la taille est le carré de la taille du modèle (voir section 3.2). Les limitations de cette approche résident dans :

- la taille des matrices à manipuler. En effet, la puissance actuelle des machines de calcul limite la taille de ces matrices, et donc la taille du modèle.
- l'obligation d'injecter des informations sur la structure supposée du noyau cométaire. Cette opération est évidemment délicate et fait intervenir des critères subjectifs. Le processus d'inversion ne fera qu'essayer de concilier les données dont il dispose avec l'image que nous nous faisons de la structure interne du noyau. Si cette image est loin de la réalité, la solution trouvée en sera loin elle aussi.

D'un autre côté cette matrice constitue un moyen efficace d'introduire les mesures de permittivité en surface qui seront probablement déduites des informations fournies par les caméras d'observation embarquées à bord de la sonde. Il serait sûrement très intéressant de développer une autre méthode d'inversion pouvant intégrer l'information supplémentaire que constitue la composition en surface, sans passer nécessairement par l'utilisation d'une matrice de covariance. Nous pensons que ceci pourra se faire en utilisant des équations de contraintes particulières pour formuler le problème inverse.

5.2 Approche variationnelle du problème inverse

Nous rappelons tout d'abord que le problème inverse que constitue la reconstitution tomographique se résume à la recherche d'un vecteur des permittivités $\tilde{\mathbf{p}}$ qui vérifie l'équation (5.2) pour un vecteur de mesures \mathbf{d} donné. Dans notre analyse précédente (voir Section 3.1.5), le vecteur \mathbf{d} contient la perturbation de phase due à la propagation des ondes dans le noyau cométaire.

Pour s'affranchir du besoin de prolonger vers le bas et d'extraire la perturbation de phase $\{\varphi_1^i\}_{1 \leq i \leq M}$ à partir des mesures brutes $\{\varphi^i\}_{1 \leq i \leq M}$, nous chercherons plutôt à résoudre à la place de l'équation (5.2) :

$$\mathbf{b} = f(\mathbf{p}), \quad (5.3)$$

où $\mathbf{b} = \{\varphi^i\}_{1 \leq i \leq M}$ est le vecteur des données brutes, et f est un opérateur qui représente les processus physiques mis en jeu durant la propagation des signaux. Pour linéariser cette équation, nous nous plaçons de nouveau dans le cas des faibles perturbations, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_p) + f(\mathbf{p}_p) \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_p) + \mathbf{b}_p, \end{aligned} \quad (5.4)$$

où \mathbf{b}_p est le vecteur des mesures relatives à la propagation des signaux dans un modèle de noyau *a priori* \mathbf{p}_p . L'opérateur matriciel \mathbf{F} se construit comme :

$$\mathbf{F} = \left[\frac{\partial f^i}{\partial p^j} \right]_{\mathbf{p}_p} \quad \text{avec } 1 \leq i \leq M \quad \text{et } 1 \leq j \leq N, \quad (5.5)$$

N et M étant encore une fois les tailles respectives du vecteur du modèle et du vecteur des données.

L'estimation de la matrice \mathbf{F} passe par le calcul des différentes dérivées partielles qu'elle contient. Ceci se traduit concrètement par l'évaluation de la variation d'une mesure i pour une légère variation de la cellule j du modèle. Ceci pour un point d'émission et un point de réception en orbite donnés. Les variations que nous imposons aux différentes cellules du modèle, doivent rester assez faibles pour garder globalement la même répartition de mesures à l'arrivée.

Pour estimer ces dérivées partielles nous serons normalement amenés à réaliser $2 \times N$ simulations de propagation et ceci quelle que soit la méthode de simulation du problème direct adoptée. L'exemple 2-D du chapitre 3 ($N = 1\,000$) nous amène déjà à 2 000 simulations directes, ce qui représente au minimum quelques dizaines de mois de calcul !

Une version adaptée de notre algorithme de tracé de rayons (RTM) permettra de contourner ce problème. En effet, il est logique qu'une cellule j lointaine de la trajectoire d'un rayon i ne perturbe pas ce dernier, auquel cas $\mathbf{F}^{i,j} = 0$. Il ne sert alors à rien de simuler ces cas évidents. Les modifications se feront donc de telle manière que notre algorithme ne s'intéressera chaque fois qu'à propager le rayon i correspondant à la mesure b^i , et ne fera varier que les valeurs des cellules voisines du trajet du rayon. Par un calcul rapide, nous pensons que ceci équivaldra au temps nécessaire pour faire ~ 60 simulations directes seulement, soit un facteur de gain de près de 40.

Il est cependant important de noter que la structure de la matrice \mathbf{F} s'apparente à celle de la matrice des chemins optiques \mathbf{G} . En effet chaque dérivée partielle $\frac{\partial f^i}{\partial p^j}$ a la dimension d'une longueur.

L'inversion de l'équation (5.4) s'effectuera simplement par la méthode de Tikhonov avec adjonction de matrice de covariance.

Cette méthode, si elle résout définitivement tout problème d'identification des chemins optiques et de prolongement vers le bas, présente, à première vue, les inconvénients suivants :

- la complexité pour construire l'opérateur matriciel \mathbf{F} . Il sera nécessaire d'étudier la faisabilité d'un tel algorithme.
- l'obligation de se restreindre aux cas de modèles faiblement perturbés pour pouvoir linéariser le problème inverse. Cette contrainte est encore plus forte pour les cellules situées à la surface du modèle car c'est là où se concentrent les plus fortes non-linéarités.
- le grand temps de calcul que nécessitera un tel algorithme. Ce temps dépendra essentiellement du nombre de mesures considérées et de la finesse de la grille de discrétisation du modèle.

Nous pourrions pousser encore plus loin les investigations dans ce domaine en considérant une discrétisation fonctionnelle du modèle. Ceci se traduit concrètement par la décomposition de la fonction permittivité $\epsilon(x, y)$ sur une base de L fonctions élémentaires $\psi_j(x, y)$ judicieusement choisies, orthogonales sur leur support borné (l'intérieur du noyau cométaire). Ceci s'écrit :

$$\epsilon(x, y) = \sum_{j=1}^L \alpha_j \psi_j(x, y), \quad (5.6)$$

où $\{\alpha_j\}_{1 \leq j \leq L}$ sont les coefficients de la décomposition de la fonction $\epsilon(x, y)$ dans la base des fonctions $\{\psi_j(x, y)\}_{1 \leq j \leq L}$.

Le problème de reconstruction tomographique s'écrit alors :

$$\mathbf{b} = h(\mathbf{q}), \quad (5.7)$$

où $\mathbf{q} = \{\alpha_j\}_{1 \leq j \leq L}$, et qui donne après linéarisation autour de \mathbf{q}_p :

$$\mathbf{b} = \mathbf{H} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_p) + \mathbf{b}_p , \quad (5.8)$$

avec :

$$\mathbf{H} = \left[\frac{\partial h^i}{\partial \alpha_j} \right]_{\mathbf{q}_p} \quad \text{avec } 1 \leq i \leq M \quad \text{et } 1 \leq j \leq L. \quad (5.9)$$

Cette nouvelle manière de discrétiser pourra être plus efficace, car elle profite du fait que la permittivité à l'intérieur du noyau est probablement continue et donc décomposable en une série de fonctions orthogonales (par analogie à une décomposition en série de Fourier). Si la longueur de corrélation de la permittivité dans le noyau est assez grande, le nombre L de paramètres α_j nécessaire pour décrire la fonction $\epsilon(x, y)$ sera largement inférieur au nombre N de cellules de discrétisation nécessaire pour une résolution spatiale donnée.

L'estimation de cette matrice \mathbf{H} passe de nouveau par un ensemble $2 \times L$ simulations directes où l'on fait varier légèrement les éléments du vecteur \mathbf{q} autour d'un vecteur *a priori* \mathbf{q}_p . L'inversion quant à elle nécessitera l'étude de la structure de la matrice de covariance qui découle de cette nouvelle manière de discrétiser.

Cette approche est encore plus intéressante que la première car le nombre de coefficients α_j restera sensiblement le même ($\sim L$) en passant du cas 2-D au cas 3-D, alors que dans le cas d'une discrétisation du type "pixel" le nombre de cellules du modèle, et par conséquent la taille du problème inverse, augmente de N en 2-D à $N^{\frac{3}{2}}$ en 3-D. Soit probablement une augmentation de taille d'au minimum un facteur 1 000.

5.3 Inversion avec des équations de contraintes

Les conditions de contraintes sont souvent utilisées en mathématique pour restreindre l'espace de solutions d'un problème. Un des exemples est la jauge de radiation en électromagnétisme.

L'idée que nous avons, consiste à ne plus chercher une solution qui est contrainte par une fonction ou matrice de covariance, mais qui doit appartenir à une famille ou posséder une propriété mathématique particulière. Dans notre cas, nous cherchons à contraindre la fonction de perturbation permittivité $\epsilon_1(x, y)$ définie sur le domaine \mathcal{D} que constitue le noyau cométaire, lui-même borné par la surface cométaire $\partial\mathcal{D}$.

L'une des contraintes les plus intéressante à imposer à la fonction de perturbation de permittivité ϵ_1 est l'harmonicité. L'harmonicité de la fonction de perturbation de permit-

tivité se traduit par :

$$\Delta \epsilon_1(x, y) = 0. \quad (5.10)$$

La fonction $\tilde{\epsilon}_1$ qui vérifie cette équation de contrainte aura alors les propriétés particulières suivantes :

- la fonction $\tilde{\epsilon}_1$ est complètement définie de manière unique sur tout le domaine \mathcal{D} par ses valeurs à la frontière $\partial\mathcal{D}$. Dans notre cas, cette condition à la frontière est naturellement donnée par les mesures de phase.
- la fonction $\tilde{\epsilon}_1$ est analytique et s'écrit :

$$\epsilon_1(x, y) = \sum_{l,m} \alpha_{lm} x^l y^m, \quad (5.11)$$

avec $\alpha_{pq} \in \mathbb{R}$, et $l, m \geq 0$.

- les extremums absolus (maximum et minimum) de la fonction sont situés sur la frontière $\partial\mathcal{D}$.

La dernière propriété justifie en partie l'utilisation de l'équation (5.10) comme équation de contrainte. En effet, comme nous l'avons décrit dans le chapitre 1, la surface d'un noyau cométaire est probablement vide de tout volatile et présente à cet endroit le maximum de porosité. La Figure 5.1 montre que de telles propriétés de surface correspondent à

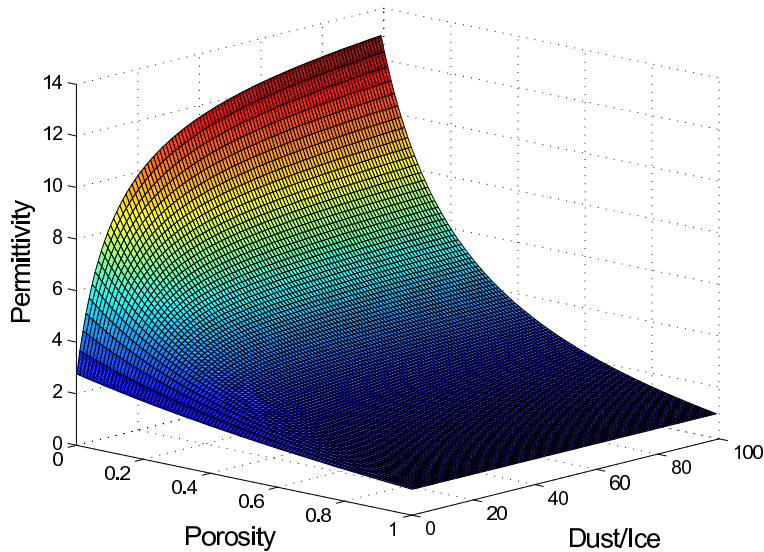


FIG. 5.1: Évolution de la permittivité d'un mélange de silicates et de glace d'eau en fonction de sa porosité et du rapport massique poussière/glace

une valeur minimale de permittivité. Il est aussi probable que, à cause des phénomènes d'érosion et d'arrachage de la croûte par le dégazage, une partie de la surface cométaire aura une composition plus "fraîche" et donc éventuellement une permittivité maximale. L'hypothèse d'harmonicité de la fonction de perturbation de permittivité ϵ_1 restreint l'ensemble des solutions aux modèles dont les permittivités à frontières $\partial\mathcal{D}$ satisfont à cette caractéristique probable des noyaux cométaires.

Nous présentons dans la section 5.4 une ébauche de l'utilisation de l'hypothèse d'harmonicité du modèle. Une extension naturelle de ce travail serait d'essayer d'inverser le modèle 2-D du chapitre 3 avec cette méthode. Cette opération permettra d'évaluer la sensibilité du résultat dans le cas où la fonction de permittivité du modèle de noyau originel n'est pas harmonique.

Nous pouvons également étendre cette méthode en utilisant l'une des équations de contraintes :

$$\Delta\Delta\epsilon_1(x, y) = 0, \quad (5.12)$$

$$\Delta\Delta\Delta\epsilon_1(x, y) = 0. \quad (5.13)$$

La première équation de contrainte nécessite deux conditions limites à la surface et permet d'utiliser conjointement les mesures de phase et d'amplitude. La deuxième, quant à elle, nécessite trois conditions limites à la surface et permet dans son cas de combiner les mesures d'amplitude, de phase et de permittivité à la surface.

Une étude plus profonde des différentes équations de contraintes permettra d'évaluer leur validité et de mettre en évidence les éventuels avantages ou inconvénients qu'il y a, à combiner des conditions limites différentes.

5.4 Inversion sous hypothèse d'harmonicité du modèle

Radiotomography with an additional functional assumption : the Consort case

J.-P. Barriot¹, M. Benna¹

¹ LDTP, Observatoire Midi Pyrénées, 14 Av. E. Belin, F-31400 Toulouse, France

Submitted to *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*
Submitted March 2002

Manuscript Pages : 3
Figures : 1

Abstract

In 2003 The European Space Agency will launch the Rosetta probe toward the comet Wirtanen, a small body of the solar system, that will be reached in 2011. One of the numerous experiments onboard is CONSERT [see Kofman et al., 1998], a radiotomography experiment between a small lander that will be deposited on the comet surface and an orbiter, that will remain around the comet.

5.4.1 Introduction

In 2003 The European Space Agency will launch the ROSETTA probe toward the comet Wirtanen, a small body of the solar system, that will be reached in 2011. One of the numerous experiments onboard is CONSERT [see Kofman et al., 1998], a radiotomography experiment between a small lander that will be deposited on the comet surface and an orbiter, that will remain around the comet.

5.4.2 Derivation of the Equation - Physical Assumptions

We will treat in this paper a very simplified two dimensional case of this tomography experiment, when the measurements are taken on the comet surface and the radiowaves are emitted from the lander, itself on the comet surface. Interested readers will find more details in [Hérique et al., 1999]. The behaviour of the radiowave is governed by the eikonal equation : $\left(\vec{\nabla}\varphi\right)^2 = \epsilon$, where φ is the phase of the radiowave [Chew, 1990].

It follows from physical assumptions that the internal permittivity of the comet could be separated as a constant background ϵ_0 with small superimposed perturbation ϵ_1 [Barriot et al., 1999], such that we can write $\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_1$ with $\epsilon_1 \ll \epsilon_0$.

We look therefore at perturbed solution $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, where φ_1 is a small superimposed perturbation to the zero-order solution $\varphi_0 : \varphi_0(r) = \sqrt{\epsilon_0} r$, where $\vec{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ and $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. The first order solution for the phase is then

$$2\sqrt{\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{\nabla}\varphi_1 = \epsilon_1 \text{ over a bounded domain } \mathcal{D} \text{ (the comet interior),} \quad (5.14)$$

the corresponding two-dimensional integral form being

$$\varphi_1(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_0}} \int_0^1 \epsilon_1(xt, yt) dt. \quad (5.15)$$

This equation belongs to the class of the Radon transforms and is not invertible if the data $\varphi_1(x, y)$ are only known on the domain boundary $\partial\mathcal{D}$ (the physical case).

Our imaging (tomography) problem has therefore no unique solution. A typical remedy to this situation is to use “a priori information”, i.e. a priori assumptions about the expected “physical” properties of ϵ_1 .

Considering the problem with a Bayesian approach, this leads to introduce these a priori assumptions in the form of a priori covariance matrices for ϵ_1 (the so-called Tikhonov-Arsenine inversion). We have explored this path in [5]. We will consider here another path, by introducing this a priori information in the form of an expected “behaviour” for ϵ_1 . Once again, this a priori behaviour must be derived from physical consideration. We will take here the assumption $\Delta\epsilon_1 = 0$ over the cometary interior \mathcal{D} . This insures that the maximum and minimum of the permittivity will take place on the comet boundary, i.e. the place where the maximum of cometary activity is likely to occur (outgassing, chemical activity). The assumption of harmonicity of ϵ_1 leads, from Eq. 5.14 to

$$\Delta \left(2\sqrt{\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{\nabla} \varphi_1 \right) = 0, \quad (5.16)$$

and after some algebraic work, to the third-order linear boundary value problem

$$\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \Delta \varphi_1 + \frac{\vec{r}}{r^2} \cdot \left(2\vec{\nabla} \times \left(\vec{r} \times \vec{\nabla} \varphi_1 \right) + \vec{\nabla} \varphi_1 \right) = 0 \text{ over } \mathcal{D} \text{ (the comet interior)}, \quad (5.17)$$

with φ_1 known on the domain boundary $\partial\mathcal{D}$ (the comet surface). This equation is only valid for the two dimensional case.

5.4.3 Unicity of the Solution

The unicity follows from the consideration of the following problem, equivalent to Eq. 5.17 : find ϵ_1 such that

$$\Delta\epsilon_1 = 0 \text{ on } \mathcal{D} \quad \text{and} \quad \int_0^1 \epsilon_1(xt, yt) dt = 0 \quad \forall (x, y) \in \partial\mathcal{D}. \quad (5.18)$$

By applying the laplacean operator to the second equation of (5), one finds

$$\frac{1}{r} \int_0^1 \epsilon_1(xt, yt) dt + r \int_0^1 t^2 \Delta\epsilon_1(xt, yt) dt + 2\frac{x}{r} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \epsilon_1(xt, yt) dt + 2\frac{y}{r} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \epsilon_1(xt, yt) dt = 0. \quad (5.19)$$

The first two terms of Eq. 5.19 vanish by the hypothesis of Eq. 5.18. The function ϵ_1 being harmonic, it is then analytic, so we have $\epsilon_1(x, y) = \sum_{p,q} \alpha_{pq} x^p y^q$ with $(x, y) \in \mathcal{D}$, $\alpha_{pq} \in \mathbb{R}$, $p, q \geq 0$ and then Eq. 5.19 reduces to

$$\frac{2}{r} \left(\int_0^1 \sum_{p,q=0}^{\infty} (p+q) \alpha_{pq} t^{p+q} x^p y^q dt \right) = 0 \quad \forall (x, y) \in \partial\mathcal{D}. \quad (5.20)$$

Therefore, the only solution to Eq. 5.20 is $\epsilon_1 = 0$, showing the unicity of the solution of Eq. 5.17. This responds to the non unicity of the Radon Transform.

We have also programmed the numerical solution of Eq. 5.17 by using a fourth-order finite difference approach with very satisfactory results (see Fig. 5.2).

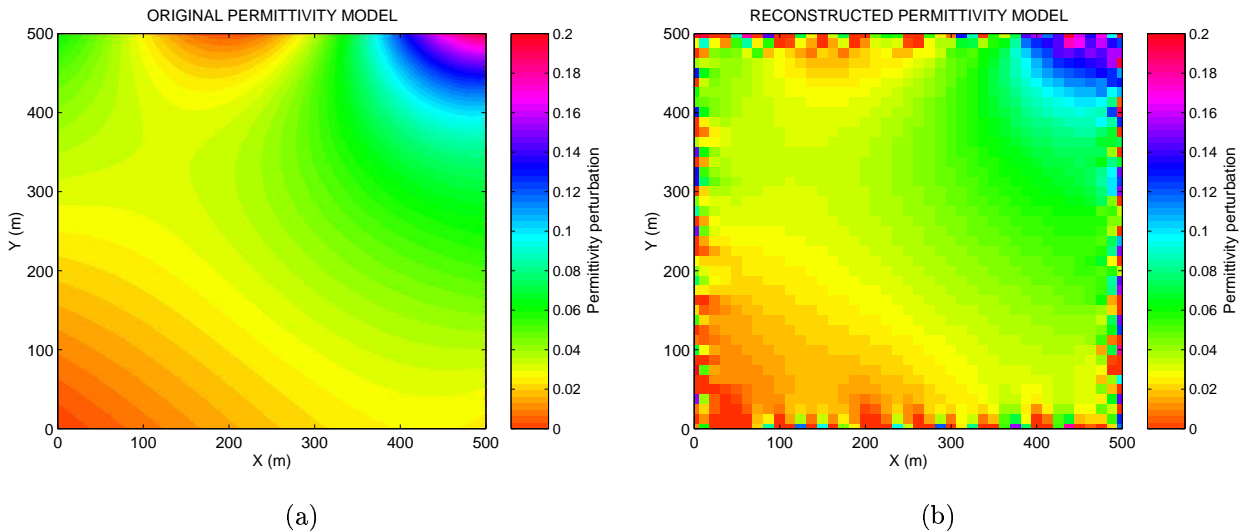


FIG. 5.2: Reconstruction (b) of an harmonic model (a) using a finite difference approach of Eq. 5.17. The lander seats at (0,0). The phase perturbation φ_1 is supposed to be known all over the four faces, with a 5% additive noise.

5.4.4 Conclusion

We demonstrated in this paper that the information needed to have a unique solution to our imaging problem can be provided through a behaviour equation (here the harmonicity of the expected permittivity), then providing an alternative to Tikhonov-Arsenine approaches. We will address in a forthcoming paper the question of existence and well-posedness of the solution (see Fig. 5.2).

Conclusion

Au cours de cette thèse nous nous sommes fixés deux principaux objectifs :

- réaliser un simulateur de l'expérience CONSERT aussi complet que possible, à même de rendre compte des possibilités de l'instrument et de constituer un outil d'expertise et d'aide à la décision lors de la planification des opérations scientifiques de l'expérience,
- jeter les bases des méthodes et des algorithmes de traitement et d'interprétation des données CONSERT.

1. Réalisation du simulateur Consert :

Dans le cadre de la conception d'un simulateur, nous avons développé un algorithme de simulation de propagation d'ondes radio dans les milieux inhomogènes bornés, dont le principe se base sur la théorie de l'optique géométrique (GOT) et la méthode de tracé des rayons (RTM). La méthode de tracé des rayons est souvent utilisée en ingénierie pour le calcul des diagrammes de rayonnement d'antennes couplées avec des structures complexes (interactions antennes-plateformes dans les satellites, couverture des relais GSM en milieu urbain). Elle est aussi utilisée en géophysique pour des applications de tomographie sismique.

Dans la majeure partie de ces applications, soit le milieu de propagation est homogène et borné par une forme complexe, soit il est inhomogène et non borné. Ces deux configurations simplifient considérablement les calculs. En effet, dans le premier cas, celui du milieu homogène nous avons affaire à une propagation rectiligne où les discontinuités sont dues aux réflexions sur les bords. Dans le second cas (milieu inhomogène non borné) nous avons affaire à une propagation courbe sans discontinuité de bordure. De plus on ne s'intéresse généralement que soit au bilan de puissance, soit aux temps de propagation des ondes, mais rarement à la caractérisation complète de ces signaux (temps de propagation, puissance, et polarisation).

Nous avons élaboré un algorithme qui généralise la méthode classique de tracé des rayons. Ce nouvel algorithme s'intéresse à la propagation des ondes de hautes fréquences

dans un grand volume de matière inhomogène, borné par une interface de forme complexe. Cet algorithme a été conçu pour prendre en compte tous les phénomènes de propagation envisagés par la théorie de l'optique géométrique (chemins multiples, réflexions et réfractions multiples, courbure des trajectoires des rayons, pertes de puissance par absorption et par réflexions, distorsion de polarisation, etc...). Seuls les phénomènes de diffraction, d'interférence et de dispersion spectrale n'ont pas été abordés car ils ne peuvent être modélisés dans le cadre de cette théorie.

Nous avons appliqué cet algorithme à la modélisation de l'expérience CONSERT, où le milieu de propagation est un noyau cométaire entouré par le vide spatial, la source d'émission étant l'atterrisseur ROLAND, et le récepteur la sonde ROSETTA en orbite autour de la comète. Nous avons d'abord abordé le cas d'un modèle bidimensionnel et d'une propagation en mode TM, car ceci permettait de simplifier les calculs de l'évolution de signaux. L'algorithme ainsi obtenu a été validé par comparaison avec une méthode spectrale (PSTD) développée par A. Piot et W. Kofman du Laboratoire de Planétologie de Grenoble. Cette seconde méthode se base sur la résolution numérique des équations de Maxwell. À travers cette comparaison nous avons vérifié les bonnes performances de notre algorithme. Non seulement la méthode RTM a présenté des résultats comparables à la méthode PSTD en terme de résolution et de précision, mais elle a permis en plus un gain considérable en temps de calcul. Ce dernier avantage autorisait l'extension de notre algorithme au contexte tridimensionnel.

L'extension au cas tridimensionnel de l'algorithme RTM s'est accompagnée du développement d'une méthode originale pour la modélisation de la polarisation des ondes.

Nous avons utilisé cet algorithme pour simuler la propagation des signaux CONSERT dans un modèle plausible de noyau cométaire. Ce modèle a des dimensions, une forme, et une structure interne conforme à ce que nous imaginions être la structure d'une comète de type 46P/Wirtanen. Nous avons encore poussé plus loin nos développements, en simulant aussi complètement que possible le traitement du signal apporté par l'instrument CONSERT. Cette extension a permis de rendre compte des performances de l'instrument et de fournir des données synthétiques mimant au plus près les vraies données.

Cependant cet algorithme ne peut s'appliquer qu'aux cas de modèles dont la structure et la forme sont continues et dont la taille caractéristique des inhomogénéités est grande devant la longueur d'onde du signal CONSERT ($\approx 2,4$ m). Nous ne pouvons pas rendre compte dans l'état actuel de l'algorithme de l'effet de la présence de petites cavités ou de fissures à l'intérieur du noyau.

2. Inversion des données :

L'interprétation des données CONSERT a été abordée à travers la construction et l'étude du problème inverse de la reconstruction tomographique. Ce problème est apparu très sous déterminé. Nous avons utilisé une approche stochastique gaussienne pour le régulariser. Cette approche possède l'avantage de fournir naturellement le paramètre de régularisation "optimal" (au sens de Tikhonov) sous la forme de matrices de covariance du modèle et des données. Ces matrices de covariance contiennent toute l'information *a priori* sur la structure interne du noyau cométaire, ainsi que sur les propriétés statistiques des mesures (bruit, corrélation, etc...).

Vu l'importance de la matrice de covariance du modèle dans le processus d'inversion, nous avons étudié d'une manière plus approfondie sa structure. Nous avons montré qu'il est possible de construire cette matrice analytiquement "*on-the-fly*" s'affranchissant ainsi de la contrainte de stockage et de manipulation de cette énorme matrice.

Parallèlement, nous avons montré la technique d'extraction de l'information utile (perturbation de phases des signaux) contenue dans les mesures CONSERT brutes. Cette extraction peut se révéler plus ardue dans le cas des modèle très inhomogènes du fait de la difficulté de caractériser correctement les directions d'émergence des ondes à la surface du noyau. Ceci rend par la suite difficile l'identification de la trajectoire de chaque signal, depuis son émergence à la surface cométaire jusqu'à sa réception par l'orbiteur.

Pour contourner ce problème dans le cas des noyaux faiblement inhomogènes, nous avons développé une méthode de filtrage permettant de compenser l'erreur de la détermination de la trajectoire en moyennant localement le signal reçu le long de l'orbite. Dans ce cadre, cette méthode s'est avérée satisfaisante et a permis d'extraire correctement les perturbations de phases que renferment les données brutes. Elle atteint ses limites dès que le modèle devient fortement inhomogène.

En se basant sur ces données synthétiques, nous avons étudié la performance de l'algorithme d'inversion que nous avons développé. Nous avons ainsi montré l'importance de la matrice de covariance comme un moyen de régularisation du problème inverse. En complément nous nous sommes intéressés à démontrer l'apport des mesures indirectes de permittivité de surface que pourraient fournir d'autre instruments de la sonde ROSETTA, et les mesures *in situ* du module ROLAND. Ces données additionnelles permettraient de contraindre plus efficacement la solution tout en minimisant le rôle de la matrice de covariance.

3. Orientations futures :

En se basant sur les résultats de ces travaux, des orientations futures ont pu être établies. Concernant le simulateur de l'expérience CONSERT, il serait intéressant d'intégrer

la théorie géométrique de la diffraction (GTD) dans notre algorithme. Ceci permettrait de rendre compte des phénomènes de diffraction dus aux irrégularités à petite échelle de la surface cométaire et aux inhomogénéités de faibles tailles (par rapport à la longueur d'onde CONSERT) à l'intérieur du noyau. Il serait aussi intéressant de voir si l'on pourrait ainsi caractériser ces irrégularités de surface et ces inhomogénéités en profondeur.

Concernant l'imagerie (problème inverse), il serait nécessaire d'étudier une approche s'affranchissant de tout besoin de prolongement vers le bas des mesures de phase. Nous avons donné des éléments de réponse à travers l'introduction de l'approche variationnelle. Il est évident que la résolution du problème inverse pour un noyau très inhomogène est quasi impossible vu le caractère très non linéaire du problème. Il est important alors de développer des outils de caractérisation indirecte du noyau (taux d'homogénéité, longueur de corrélation des hétérogénéités, etc...), ou bien de s'orienter vers une identification directe de la structure interne du noyau en comparant les mesures réelles avec celles fournies par des simulations. Notre algorithme de simulation directe trouvera ici une seconde application.

Un autre champ d'investigation pourrait être la suppression définitive de la matrice de covariance en lui substituant une ou plusieurs équations de contrainte. Nous avons essayé cette méthode en inversant un modèle bidimensionnel harmonique. Le résultat a montré les bonnes performances et l'aspect prometteur de la méthode. Il reste évidemment à trouver les bonnes équations de contrainte qui restreindront efficacement l'espace des solutions (voire même imposeront l'unicité de la solution), tout en ayant un sens physique.

En résumé, les développements concernant l'expérience CONSERT sont loin d'être achevés. En effet, même si l'instrument est aujourd'hui prêt à prendre son envol à bord de la sonde ROSETTA, les études détaillées des méthodes d'analyse et d'interprétation des données ne font réellement que commencer. Ces études se poursuivront probablement durant toute la durée du voyage de la sonde jusqu'à la comète 46P/Wirtanen, soit durant près de huit années. L'objectif est d'être scientifiquement prêt en 2012 pour exploiter les données de l'instrument d'une manière optimale.

D'ici là, notre vision des noyaux cométaires va sûrement s'affiner et s'enrichir de par les observations des missions spatiales prévues dans le futur proche. Nous citerons d'abord la sonde CONTOUR qui survolera la comète 2P/Encke fin 2003, puis la comète 73P/Schwassmann-Wachmann 3 en 2006 ; puis la mission STARDUST qui ramènera sur terre en 2006 les poussières collectées en 2004 dans la chevelure de la comète 81P/Wild 2 ; enfin la mission DEEP IMPACT programmée pour l'an 2005 et qui étudiera le noyau de la comète 9P/Tempel 1 en le bombardant avec un projectile métallique. La mission européenne ROSETTA se positionnera alors en 2014 comme point d'orgue de la recherche cométaire de ce début du siècle.

Annexe A

L'approche stochastique gaussienne de la méthode d'inversion de Tikhonov

A.1 Principe

L'approche probabiliste des problèmes inverses se base sur la traduction des informations que nous possédons sur une variable $x \in [a, b]$ par une densité de probabilité $f_X(x)$. Cette fonction peut prendre deux expressions particulières correspondant à deux quantités d'information extrêmes qui sont :

- **L'état de la complète connaissance** où x prend avec certitude la valeur x_0 :

$$f_X(x) = \delta(x - x_0) \quad (\text{A.1})$$

- **L'état de l'ignorance totale (ou information nulle)** où x prend de manière équiprobable toutes les valeurs comprises entre a et b :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & (a \leq x \leq b) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Le traitement des problèmes inverses, dans le cadre de cette approche, se décompose comme suit [Abdellah, 1995; Bonnet, 1997] :

1. Les mesures \mathbf{d} et les inconnues \mathbf{p} sont initialement considérées comme statistiquement indépendantes. On introduit :
 - une loi d'erreur sur les mesures \mathbf{d} , sous la forme d'une densité de probabilité $f_D(\mathbf{d})$. Cette loi d'erreur traduit les incertitudes de l'instrument et des techniques de

mesures.

- des informations *a priori* sur les valeurs de \mathbf{p} qui correspondent généralement à une connaissance qualitative du modèle, également sous la forme d'une densité de probabilité $f_P(\mathbf{p})$.
- une loi d'erreur qui caractérise le degré supposé d'exactitude du modèle physique exprimée par une densité de probabilité $f_G(\mathbf{p}, \mathbf{d})$. Cette loi d'erreur englobera d'une part l'erreur commise en adoptant les différentes approximations introduites pour obtenir la forme linéaire de la transformée de Radon (voir Equation (3.39)) et d'autre part, l'erreur commise en discrétisant le problème inverse.

Les densités de probabilité f_D et f_P décrivent l'état de notre connaissance de \mathbf{d} et de \mathbf{p} avant la prise en compte du modèle physique théorique (qu'on qualifie d'*a priori*) (voir Equation (3.40)), alors que f_G exprime le niveau de notre confiance dans ce modèle physique.

2. En fait, \mathbf{d} et \mathbf{p} sont corrélés du fait même de l'existence du modèle physique (3.40). Tarantola [1987] propose de traduire mathématiquement cette conjonction de deux états d'information indépendants sur les grandeurs \mathbf{p} et \mathbf{d} par une densité de probabilité "a posteriori" $F(\mathbf{p}, \mathbf{d})$. Cette densité de probabilité traduit donc toute l'information que l'on possède, après exploitation de la corrélation, par le modèle physique que symbolise l'Equation (3.40).

L'opération de conjonction $f_1, f_2 \rightarrow C(f_1, f_2)$ de deux états d'information (représentés par deux densités de probabilité f_1 et f_2), telle que Tarantola la définit, repose sur une analogie avec l'opérateur logique "et" ; on lui demande de jouir des propriétés suivantes :

- Commutativité : $C(f_1, f_2) = (f_2, f_1)$
- Associativité : $C(f_1, C(f_2, f_3)) = C(C(f_1, f_2), f_3)$
- La conjonction d'un état d'information f_1 avec l'état d'ignorance totale μ redonne l'état initial : $C(f_1, \mu) = f_1$
- Continuité absolue par rapport à f_1 et f_2 , c'est-à-dire :

$$(f_1(A) = 0 \quad \text{ou} \quad f_2(A) = 0) \Rightarrow C(f_1, f_2)(A) = 0$$

Une définition de $C(\cdot, \cdot)$ qui remplit ces propriétés, est [Tarantola and Valette, 1982] :

$$C(f_1, f_2) = \frac{f_1 f_2}{\mu} \tag{A.4}$$

La densité de probabilité $F(\mathbf{p}, \mathbf{d})$, suivant ce raisonnement, est donnée par :

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = \frac{f_D(\mathbf{d})f_P(\mathbf{p})f_G(\mathbf{p}, \mathbf{d})}{\mu(\mathbf{p}, \mathbf{d})} \quad (\text{A.5})$$

L'équation (A.5) est l'élément central de l'approche stochastique des problèmes inverses. Il fournit la solution du problème inverse au sens où la densité *a posteriori* $F(\mathbf{p}, \mathbf{d})$ contient toute l'information disponible sur \mathbf{p} et \mathbf{d} , après prise en compte des erreurs de mesure, des informations *a priori* et du modèle physique. Cependant ce résultat est un peu trop général. Dans la pratique, on souhaite surtout connaître la loi de probabilité *a posteriori* $F(\mathbf{p})$ sur \mathbf{p} . Si on fait les hypothèses (peu restrictives) suivantes :

- $\mu(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = \mu_P(\mathbf{p})\mu_D(\mathbf{d})$
- $f_G(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = f_G(\mathbf{d}/\mathbf{p})\mu_P(\mathbf{d})$

qui expriment :

1. que les données \mathbf{d} sont accumulées indépendamment de toute information \mathbf{p} ,
2. que l'écart au modèle exact suit une loi de probabilité conditionnelle \mathbf{d} pour tout \mathbf{p} donné (traduisant ainsi les erreurs de modélisation et les erreurs de linéarisation).
 $F(\mathbf{p})$ s'écrit alors comme une loi marginale :

$$F(\mathbf{p}) = \int_D F(\mathbf{p}, \mathbf{d}) d\mathbf{d} = f_P(\mathbf{p}) \int_D \frac{f_D(\mathbf{d})f_G(\mathbf{d}/\mathbf{p})}{\mu_D(\mathbf{d})} d\mathbf{d} \quad (\text{A.6})$$

A.2 Formulation du problème inverse dans le cadre gaussien

Pour la résolution pratique de notre problème inverse discret, il reste à indiquer le choix des lois de probabilité qui permettent d'expliciter et d'exploiter les expressions (A.5) et (A.6). Tarantola s'est essentiellement attaché aux lois gaussiennes et gaussiennes généralisées. Nous nous limiterons dans cette présentation aux lois gaussiennes que nous allons adopter dans la suite du travail.

Rappelons que le vecteur aléatoire $\mathbf{y} = [y_i]_{1 \leq i \leq N}$ suit une loi gaussienne $\mathbf{N}(\langle \mathbf{y} \rangle, \mathbf{C})$ de moyenne $\langle \mathbf{y} \rangle$ et de matrice de covariance \mathbf{C} si la densité de probabilité correspondante s'écrit :

$$f(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(\mathbf{C})}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \langle \mathbf{y} \rangle)^t \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{y} - \langle \mathbf{y} \rangle) \right] \quad (\text{A.7})$$

où \mathbf{C} est la matrice de covariance, matrice symétrique définie positive telle que :

$$\mathbf{C}(i, j) = \int_{-\infty}^{+\infty} (y_i - \langle y \rangle_i) (y_j - \langle y \rangle_j) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (\text{A.8})$$

et $\langle \mathbf{y} \rangle$ le vecteur “espérance mathématique de \mathbf{y} ” défini par :

$$\langle \mathbf{y} \rangle = \text{Esp}(\mathbf{y}) = \int_Y \mathbf{y} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (\text{A.9})$$

Supposons alors que :

- l'écart entre la mesure observée \mathbf{d}_{obs} et la mesure vraie \mathbf{d} suit une loi gaussienne $\mathbf{N}(\langle \mathbf{d}_{obs} \rangle, \mathbf{C}_d)$,
- l'écart entre la mesure exacte \mathbf{d} et la mesure calculée selon le modèle \mathbf{Gp} suit une loi gaussienne $\mathbf{N}(\mathbf{d}_{obs}, \mathbf{C}_T)$ (incertitudes de modélisation).

L'intégrale (A.6) est calculable analytiquement (produit de convolution de densités gaussiennes) et la loi de probabilité *a posteriori* sur \mathbf{p} est donnée par :

$$F(\mathbf{p}) = \text{Cste } f_P(\mathbf{p}) \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{Gp} - \mathbf{d}_{obs})^t \mathbf{C}_D^{-1} (\mathbf{Gp} - \mathbf{d}_{obs}) \right] \quad (\text{A.10})$$

avec :

$$\mathbf{C}_D = \mathbf{C}_d + \mathbf{C}_T \quad (\text{A.11})$$

Les incertitudes de modélisation et de mesure s'ajoutent, on peut donc raisonner comme si le modèle était exact, \mathbf{C}_D ne représentant que des incertitudes expérimentales.

Si on suppose de plus que l'information *a priori* sur \mathbf{p} est également représentée par une loi gaussienne $\mathbf{N}(\mathbf{p}_{prior}, \mathbf{C}_p)$, on obtient immédiatement :

$$F_P(\mathbf{p}) = \text{Cste} \exp \left[-\frac{1}{2} S(\mathbf{p}) \right] \quad (\text{A.12})$$

avec :

$$S(\mathbf{p}) = (\mathbf{Gp} - \mathbf{d}_{obs})^t \mathbf{C}_D^{-1} (\mathbf{Gp} - \mathbf{d}_{obs}) + (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{prior})^t \mathbf{C}_p^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{prior}) \quad (\text{A.13})$$

La résolution du problème inverse consiste alors à chercher le vecteur noté $\langle \mathbf{p} \rangle$ qui maximise $F_P(\mathbf{p})$ et qui donc minimise $S(\mathbf{p})$. En posant :

$$\langle \mathbf{p} \rangle = [\mathbf{G}^t \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{C}_p^{-1}]^{-1} [\mathbf{G}^t \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{d}_{obs} + \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{p}_{prior}] \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{C} = [\mathbf{G}^t \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{C}_p^{-1}]^{-1} \quad (\text{A.15})$$

l'équation (A.13) s'écrit :

$$S(\mathbf{p}) = [(\mathbf{p} - \langle \mathbf{p} \rangle)^t \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{p} - \langle \mathbf{p} \rangle)] - [\langle \mathbf{p} \rangle^t \mathbf{C}_p^{-1} \langle \mathbf{p} \rangle + \mathbf{d}_{obs}^t \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{d}_{obs} + \mathbf{p}_{prior}^t \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{p}_{prior}] \quad (\text{A.16})$$

et en reléguant les termes constants de (A.16) en dehors de l'exponentielle, on obtient :

$$F_P(\mathbf{p}) = C_{ste} \exp \left[-\frac{1}{2} S'(\mathbf{p}) \right] \quad (\text{A.17})$$

avec :

$$S'(\mathbf{p}) = (\mathbf{p} - \langle \mathbf{p} \rangle)^t \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{p} - \langle \mathbf{p} \rangle) \quad (\text{A.18})$$

$\langle \mathbf{p} \rangle$ défini par (A.14) est alors la solution du problème.

Le cadre gaussien, par sa simplicité de mise en œuvre, est ici privilégié. Il semble que ce soit le seul pour lequel la solution du problème inverse ne nécessite qu'une inversion de matrice. Il fournit, en fait, une interprétation probabiliste des méthodes "classiques" des moindres carrés au sens de Tikhonov [Tikhonov and Arsenine, 1976] :

- si $\mathbf{C}_p = \infty$ (*i.e.* pas d'information *a priori* sur la valeur de \mathbf{p}) on retrouve l'ajustement "simple" par moindres carrés entre paramètres inconnus et mesures (recherche de la quasi-solution).
- si $\mathbf{C}_p < \infty$ on retrouve l'ajustement par moindres carrés avec addition d'un terme "régularisant" dont le coefficient multiplicateur est fixé *a priori* par l'interprétation statistique et quantifie les degrés relatifs de confiance accordés aux mesures et aux informations *a priori*.

Dans cette approche, le rôle de la matrice de covariance \mathbf{C}_p peut être aisément identifié : elle permet dans le cas de problèmes mal posés d'insérer de l'information provenant d'autres sources (mesures gravimétriques, mesures *in situ*, etc.). Ceci a pour effet de contraindre le résultat à s'approcher au mieux d'une solution *a priori*. Il est clair qu'une injection d'autres mesures (de même type ou de type différent) permettra de nous débarrasser de cette contrainte "artificielle" en posant à la limite $\mathbf{C}_p = \infty$.

Si on donne un modèle homogène (sans perturbation de permittivité) comme base de départ :

$$\mathbf{p}_{prior} = \mathbf{0} \quad (\text{A.19})$$

nous obtenons :

$$\langle \mathbf{p} \rangle = [\mathbf{G}^t \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{C}_p^{-1}]^{-1} \mathbf{G}^t \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{d}_{obs} \quad (\text{A.20})$$

Une fois arrangée, cette équation donne :

$$\langle \mathbf{p} \rangle = [\mathbf{G}^t \mathbf{G} + \mathbf{C}_D \mathbf{C}_p^{-1}]^{-1} \mathbf{G}^t \mathbf{d}_{obs} \quad (\text{A.21})$$

connue sous le nom de formule d'inversion de Tikhonov.

Si les mesures sont non corrélées, \mathbf{C}_D s'explicite comme la somme de la variance des données σ_d^2 due à la discrétisation, et de la variance σ_b^2 du bruit de mesures :

$$\mathbf{C}_D = (\sigma_b^2 + \sigma_d^2) \mathbf{I} = \sigma_D^2 \mathbf{I} \quad (\text{A.22})$$

ce qui donne enfin :

$$\langle \mathbf{p} \rangle = [\mathbf{G}^t \mathbf{G} + \sigma_D^2 \mathbf{C}_p^{-1}]^{-1} \mathbf{G}^t \mathbf{d}_{obs} \quad (\text{A.23})$$

Annexe B

Optimisation de la formule d'inversion

Si le nombre N de paramètres du modèle \mathbf{p} est assez grand, la formule d'inversion originale de Thikonov :

$$\tilde{\mathbf{p}} = [\mathbf{G}^t \mathbf{G} + \mathbf{C}_d \mathbf{C}_p^{-1}]^{-1} \mathbf{G}^t \mathbf{C}_d^{-1} \mathbf{d} \quad (\text{B.1})$$

est extrêmement difficile à évaluer. En effet son calcul nécessite d'inverser par deux fois une matrice de taille $N \times N$. Pour faciliter ce calcul, et dans le cas où la taille M du vecteur des données est très faible devant la taille N du vecteur du modèle, on transforme la formule (B.1) en une deuxième plus facilement maniable.

En effet, soit \mathbf{C}_1 and \mathbf{C}_2 deux matrices carrées définies positives, de dimensions respectives N et M , et \mathbf{F} une matrice de dimension $(N \times M)$, nous avons alors l'identité :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^t + \mathbf{F}^t \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{F} \mathbf{C}_2 \mathbf{F}^t &= \mathbf{F}^t \mathbf{C}_1^{-1} (\mathbf{C}_1 + \mathbf{F} \mathbf{C}_2 \mathbf{F}^t) \\ &= (\mathbf{F}^t \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{F} + \mathbf{C}_2^{-1}) \mathbf{C}_2 \mathbf{F}^t \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Ce qui donne, du moment que $(\mathbf{C}_1 + \mathbf{F} \mathbf{C}_2 \mathbf{F}^t)$ et $(\mathbf{F}^t \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{F} + \mathbf{C}_2^{-1})$ sont définies positives :

$$(\mathbf{F}^t \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{F} + \mathbf{C}_2^{-1})^{-1} \mathbf{F}^t \mathbf{C}_1^{-1} = \mathbf{C}_2 \mathbf{F}^t (\mathbf{C}_1 + \mathbf{F} \mathbf{C}_2 \mathbf{F}^t)^{-1} \quad (\text{B.3})$$

En appliquant notre identité à la formule d'inversion (B.1) nous obtenons :

$$\begin{aligned} [\mathbf{G}^t \mathbf{G} + \mathbf{C}_d \mathbf{C}_p^{-1}]^{-1} \mathbf{G}^t &= [\mathbf{G}^t \mathbf{C}_d^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{C}_p^{-1}]^{-1} \mathbf{G}^t \mathbf{C}_d^{-1} \\ &= \mathbf{C}_p \mathbf{G}^t [\mathbf{G}^t \mathbf{C}_p \mathbf{G} + \mathbf{C}_d]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Cette forme présente les avantages de :

- ne mettre en jeu qu'une seule inversion, alors que la formule de Tikhonov originale nécessite deux inversions,

- réduire la taille des matrices dans le cas où $M \ll N$ puisqu'on manipule des matrices carrées de dimensions $(M \times M)$, alors qu'elles sont de dimensions $(N \times N)$ dans la formule initiale.

Dans le cas peu probable où $N \ll M$ nous garderons la forme originale de la formule d'inversion.

Annexe C

Generalized Analytical Covariance Formulas (Appendix of the Section 3.2)

C.1 Analytical Covariance for a 1-D Nucleus Structure

Let a linear nucleus structure $[R_{min}, R_{max}]$. We consider a set of \bar{N} cometesimals with centers $\{x_i\}_{1 \leq i \leq \bar{N}} \in [R_{min} + \bar{b}, R_{max} - \bar{b}]$ (cometesimal completely included into the comet) and constant "radius" \bar{b} , each one with the same gaussian permittivity perturbation profile. The resulted permittivity function into the segment for any position x is given by :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\bar{N}} E_i \exp \left[-\frac{1}{\bar{b}^2} (x - x_i)^2 \right], \quad (\text{C.1})$$

where $E_i \in [-E, +E]$.

The covariance between two locations x and y pertaining to the segment $[R_{min}, R_{max}]$ is :

$$Cov(x, y) = K \cdot \int_{-E}^E \int_{-E}^E \int_{R_{min} - \bar{b}}^{R_{max} - \bar{b}} \int_{R_{min} - \bar{b}}^{R_{max} - \bar{b}} f(x) f(y) dx_i dx_j dE_i dE_j, \quad (\text{C.2})$$

where K is a normalization constant :

$$K = \frac{1}{4E^2} \frac{1}{(R_{max} - R_{min} - 2\bar{b})}, \quad (\text{C.3})$$

This gives :

$$\begin{aligned}
Cov(x, y) &= K \cdot \sum_{i=1}^{\bar{N}} \sum_{j=1}^{\bar{N}} \int_{-E}^E \int_{-E}^E \int_{R_{min}-\bar{b}}^{R_{max}-\bar{b}} \int_{R_{min}-\bar{b}}^{R_{max}-\bar{b}} E_i E_j \\
&\quad \exp \left[-\frac{1}{\bar{b}^2} ((x - x_i)^2 + (y - x_j)^2) \right] dx_i dx_j dE_i dE_j \\
&= K \cdot \sum_{i=1}^{\bar{N}} \sum_{j=1}^{\bar{N}} I_{i,j}(x, y) \int_{-E}^E \int_{-E}^E E_i E_j dE_i dE_j,
\end{aligned} \tag{C.4}$$

where :

$$I_{i,j}(x, y) = \int_{R_{min}-\bar{b}}^{R_{max}-\bar{b}} \int_{R_{min}-\bar{b}}^{R_{max}-\bar{b}} \exp \left[-\frac{1}{\bar{b}^2} ((x - x_i)^2 + (y - x_j)^2) \right] dx_i dx_j. \tag{C.5}$$

We have :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\bar{N}} \sum_{j=1}^{\bar{N}} I_{i,j}(x, y) \int_{-E}^E \int_{-E}^E E_i E_j dE_i dE_j &= \sum_{i=1}^{\bar{N}} I_{i,i}(x, y) \int_{-E}^E E_i^2 dE_i \\
&= \frac{4}{3} \sum_{i=1}^{\bar{N}} E^4 I_{i,i}(x, y),
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Developing $I_{i,i}(x, y)$ gives :

$$\begin{aligned}
I_{i,i}(x, y) &= \int_{R_{min}-\bar{b}}^{R_{max}-\bar{b}} \int_{R_{min}-\bar{b}}^{R_{max}-\bar{b}} \exp \left[-\frac{1}{2\bar{b}^2} (x - y)^2 \right] \cdot \exp \left[\frac{2}{\bar{b}^2} \left(x_i - \frac{x + y}{2} \right)^2 \right] dE_i dE_i \\
&= \frac{\bar{b}}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2\bar{b}^2} (x - y)^2 \right] \\
&\quad \cdot \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}}{\bar{b}} \left(R_{max} - \bar{b} - \frac{x + y}{2} \right) \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}}{\bar{b}} \left(R_{max} + \bar{b} - \frac{x + y}{2} \right) \right) \right],
\end{aligned} \tag{C.7}$$

So the final form of the 1-D covariance formula is :

$$\begin{aligned}
Cov(x, y) &= \bar{N} \frac{1}{(R_{max} - R_{min} - 2\bar{b})} \frac{E^2 \bar{b}}{6} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2\bar{b}^2} (x - y)^2 \right] \\
&\quad \cdot \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}}{\bar{b}} \left(R_{max} - \bar{b} - \frac{x + y}{2} \right) \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}}{\bar{b}} \left(R_{max} + \bar{b} - \frac{x + y}{2} \right) \right) \right].
\end{aligned} \tag{C.8}$$

C.2 Analytical Covariance for a 2-D Nucleus Structure

In this section we consider a rectangular structure $[R_{Xmin}, R_{Xmax}] [R_{Ymin}, R_{Ymax}]$ with the same assumptions as in the pervious section.

In 2-D, the permittivity perturbation into the nucleus is :

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{\bar{N}} E_i \exp \left[-\frac{1}{\bar{b}^2} ((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2) \right], \quad (C.9)$$

where $\{(x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq \bar{N}}$ is the location of a cometesimal center (completely included into the comet).

The covariance is then :

$$\begin{aligned} Cov((x, y), (\acute{x}, \acute{y})) = K \cdot \int_{-E}^E \int_{-E}^E \int_{R_{Xmin}-\bar{b}}^{R_{Xmax}-\bar{b}} \int_{R_{Xmin}-\bar{b}}^{R_{Xmax}-\bar{b}} \int_{R_{Ymin}-\bar{b}}^{R_{Ymax}-\bar{b}} \int_{R_{Ymin}-\bar{b}}^{R_{Ymax}-\bar{b}} f(x, y) \\ \cdot f(\acute{x}, \acute{y}) dy_i dy_j dx_i dx_j dE_i dE_j, \end{aligned} \quad (C.10)$$

where K is a normalization constant :

$$K = \frac{1}{4E^2} \frac{1}{(R_{Xmax} - R_{Xmin} - 2\bar{b})} \frac{1}{(R_{Ymax} - R_{Ymin} - 2\bar{b})}. \quad (C.11)$$

After performing all calculations as in the 1-D case we obtain the 2-D covariance formula :

$$Cov((x, y), (\acute{x}, \acute{y})) = \bar{N} K \frac{2\pi E^4 \bar{b}^2}{3} I_X(x, \acute{x}) I_Y(y, \acute{y}), \quad (C.12)$$

where :

$$\left\{ \begin{aligned} I_X(x, \acute{x}) &= \exp \left[-\frac{1}{2\bar{b}^2} (x - \acute{x})^2 \right] \cdot \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}}{\bar{b}} \left(R_{Xmax} - \bar{b} - \frac{x + \acute{x}}{2} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}}{\bar{b}} \left(R_{Xmax} + \bar{b} - \frac{x + \acute{x}}{2} \right) \right) \right] \\ I_Y(y, \acute{y}) &= \exp \left[-\frac{1}{2\bar{b}^2} (y - \acute{y})^2 \right] \cdot \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}}{\bar{b}} \left(R_{Ymax} - \bar{b} - \frac{y + \acute{y}}{2} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}}{\bar{b}} \left(R_{Ymax} + \bar{b} - \frac{y + \acute{y}}{2} \right) \right) \right] \end{aligned} \right. \quad (C.13)$$

C.3 Analytical Covariance for a 3-D Nucleus Structure

In this section we consider a parallelepipedic structure $[R_{Xmin}, R_{Xmax}] [R_{Ymin}, R_{Ymax}] [R_{Zmin}, R_{Zmax}]$ with the same assumptions as in the previous section. In 3-D, the permittivity perturbation into the nucleus is :

$$f(x, y, z) = \sum_{i=1}^{\bar{N}} E_i \exp \left[-\frac{1}{\bar{b}^2} ((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2) \right], \quad (C.14)$$

where $\{(x_i, y_i, z_i)\}_{1 \leq i \leq \bar{N}}$ is the location of a cometesimal center (completely included into the comet).

The covariance is then :

$$\begin{aligned} Cov((x, y, z), (\acute{x}, \acute{y}, \acute{z})) = \\ K \cdot \int_{-E}^E \int_{-E}^E \int_{R_{Xmin}-\bar{b}}^{R_{Xmax}-\bar{b}} \int_{R_{Xmin}-\bar{b}}^{R_{Xmax}-\bar{b}} \int_{R_{Ymin}-\bar{b}}^{R_{Ymax}-\bar{b}} \int_{R_{Ymin}-\bar{b}}^{R_{Ymax}-\bar{b}} \int_{R_{Zmin}-\bar{b}}^{R_{Zmax}-\bar{b}} \int_{R_{Zmin}-\bar{b}}^{R_{Zmax}-\bar{b}} f(x, y, z) \\ \cdot f(\acute{x}, \acute{y}, \acute{z}) dz_i dz_j dy_i dy_j dx_i dx_j dE_i dE_j, \end{aligned} \quad (C.15)$$

where K is a normalization constant :

$$K = \frac{1}{4E^2} \frac{1}{(R_{Xmax} - R_{Xmin} - 2\bar{b})} \frac{1}{(R_{Ymax} - R_{Ymin} - 2\bar{b})} \frac{1}{(R_{Zmax} - R_{Zmin} - 2\bar{b})}. \quad (C.16)$$

After performing all calculations as in the 1-D case we obtain the 3-D covariance formula :

$$Cov((x, y, z), (\acute{x}, \acute{y}, \acute{z})) = \bar{N} K \frac{2E^4 \bar{b}^2}{3} \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}} I_X(x, \acute{x}) I_Y(y, \acute{y}) I_Z(z, \acute{z}), \quad (C.17)$$

where :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_X(x, \acute{x}) = \exp \left[-\frac{1}{2\bar{b}^2} (x - \acute{x})^2 \right] \cdot \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}}{\bar{b}} \left(R_{Xmax} - \bar{b} - \frac{x + \acute{x}}{2} \right) \right) \right. \\ \quad \left. - \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}}{\bar{b}} \left(R_{Xmax} + \bar{b} - \frac{x + \acute{x}}{2} \right) \right) \right] \\ \\ I_Y(y, \acute{y}) = \exp \left[-\frac{1}{2\bar{b}^2} (y - \acute{y})^2 \right] \cdot \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}}{\bar{b}} \left(R_{Ymax} - \bar{b} - \frac{y + \acute{y}}{2} \right) \right) \right. \\ \quad \left. - \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}}{\bar{b}} \left(R_{Ymax} + \bar{b} - \frac{y + \acute{y}}{2} \right) \right) \right] \\ \\ I_Z(z, \acute{z}) = \exp \left[-\frac{1}{2\bar{b}^2} (z - \acute{z})^2 \right] \cdot \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}}{\bar{b}} \left(R_{Zmax} - \bar{b} - \frac{z + \acute{z}}{2} \right) \right) \right. \\ \quad \left. - \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}}{\bar{b}} \left(R_{Zmax} + \bar{b} - \frac{z + \acute{z}}{2} \right) \right) \right] \end{array} \right. \quad (C.18)$$

Bibliographie

- Abdellah, J. B. (1995). Inversion gaussienne appliquée à la correction paramétrique de modèles structuraux. Thèse, École Polytechnique.
- Almeida, A. A., Singh, P. D., and Huebner, W. F. (1997). Water release rates, active areas, and minimum nucleus radius derived from visual magnitudes of comets - application to comet 46P/Wirtanen. *Planetary and Space Science*, 45(6) :681–692.
- Barbin, Y., Kofman, W., Nielsen, E., Hagfors, T., Seu, R., Picardi, G., and Svedhem, H. (1999). The CONSERT instrument for the ROSETTA mission. *Advances on Space Research*, 24(9) :1115–1126.
- Barriot, J.-P., Kofman, W., Hérique, A., Leblanc, S., and Portal, A. (1999). A Two Dimensional Simulation of the CONSERT Experiment (Radio Tomography of Comet Wirtanen). *Advances in Space Research*, 24(9) :1127–1138.
- Beek, L. K. H. V. (1967). Dielectric behaviour of heterogeneous systems. *Progress in Dielectrics*, 7 :66–114.
- Benna, M. (1999). Inversion stochastique gaussienne appliquée à la reconstitution tomographique tridimensionnelle d'un noyau cométaire. Mémoire de D.E.A., Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis.
- Benna, M. and Barriot, J.-P. (2001). A Priori Information Required for a Two or Three Dimensional Reconstitution of the Internal Structure of a Comet Nucleus (CONSERT Experiment). *Advances in Space Research*. in press.
- Benna, M., Piot, A., Barriot, J.-P., and Kofman, W. (2002). Data set generation and inversion simulation of radio-waves propagating through a 2-d comet nucleus (CONSERT experiment). *RadioScience Journal*. submitted.
- Béranger, J.-P. (1994). A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves. *Journal of Computational Physics*, 114 :185–200.
- Blanc-Lapierre, A. (1991). *La corrélation*. Cepadue-Edition.
- Boenhardt, H., Babion, J., and West, R. M. (1997). An optimized detection technique for faint moving objects on a star rich background : a search for the nucleus of 46P/Wirtanen. *Astronomy and Astrophysics*, 320 :642–651.

- Bonnet, M. (1997). Cours de D.E.A. de dynamique des structures et couplage. Technical report, École Polytechnique.
- Chew, W. C. (1990). *Waves and fields in inhomogeneous media*. Van Nostrand Reinhold.
- Combes, M., Crovisier, J., Encrenaz, T., Moroz, V. I., and Bibring, J.-P. (1988). The 2.5-12 micron spectrum of comet Halley from the IKS-VEGA experiment. *Icarus*, 76 :404–436.
- Deans, S. R. (1983). *The Radon Transform and some of its applications*. A Wiley-Interscience publication.
- Derevtsov, E. Y. (1997). Ghost distributions in the cone-beam tomography. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 5 :411–426.
- Desvoivres, E., Klinger, J., and Lévassieur-Regourd, A. C. (2000). Estimation du risque collisionnel entre une sonde spatiale cométaire et un fragment du noyau. *Compte Rendu de L'Académie des Sciences*, 1(4) :135–141.
- Donn, B. D. (1990). The formation and structure of fully cometary nuclei from random accumulation of grains. *Astronomy and Astrophysics*, 235 :441–446.
- Fernández, J. A. (1980). On the existence of a comet belt beyond Neptune. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 192 :481–491.
- Fink, U., Fevig, R. A., and Collins, J. (1998). Spectroscopy of 46P/Wirtanen during its 1997 apparition. *Astronomy and Astrophysics*, 335 :L37–L45.
- Fornberg, B. (1998). *Practical Guide to Pseudospectral Methods*, volume 1 of *Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics*. Cambridge University Press.
- Gehrz, R. (1989). Sources of stardust in the galaxy. In *Interstellar Dust*. Proceedings of the 135th Symposium of the International Astronomical Union.
- Greenberg, J. M. and Hage, J. I. (1990). From interstellar dust to comets - a unification of observational constraints. *Astrophysical Journal*, 361 :260–274.
- Greenberg, J. M., Mizutani, H., and Yamamoto, T. (1995). A new derivation of the tensile strength of cometary nuclei : application to comet Shoemaker-Levy 9. *Astronomy and Astrophysics*, 295 :L35–L38.
- Hahn, G. and Bailey, M. E. (1990). Rapid dynamical evolution of giant comet Chiron. *Nature*, 348 :132–136.
- Hahn, G. and Rickman, H. (1985). Asteroids in cometary orbits. *Icarus*, 61 :417–442.
- Hérique, A., Kofman, W., Hagfors, T., Caudal, G., and Ayanides, J. (1999). A Characterization of Comet Nucleus Interior : Inversion of Simulated Radio Frequency Data. *Planetary and Space Sciences*, 47(6) :885–904.
- Hughes, D. W. (1996). The interior of a cometary nucleus. *Planetary and Space Science*, 44(7) :705–710.
- Hughes, D. W. and McBride, N. (1992). Short-period comet splitting. *Journal of the British Astronomical Association*, 102(5) :265–268.

- Jenniskens, P. and Blake, D. F. (1998). Amorphous water ice. In et al., S., editor, *Solar System Ices*, pages 139–155. Kluwer Academic Publishers.
- Keller, H. U., Arpigny, C., Barbieri, C., Bonnet, R. M., Cazes, S., Coradini, M., Cosmovici, C. B., Delamere, W. A., Huebner, W. F., Hughes, D. W., Jamar, C., Malaise, D., Reitsema, H. J., Schmidt, H. U., Schmidt, W. K. H., Seige, P., Whipple, F. L., and Wilhelm, K. (1986). First Halley multicolour camera imaging results from Giotto. *Nature*, 321 :320–326.
- Keller, J. (1962). Geometrical Theory of Diffraction. *Journal of the Optical Society of America*, 52 :290–306.
- Keller, J. B. (1978). Rays, Waves and Asymptotics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 84(5) :727–750.
- Kinnmark, I. and Gray, W. G. (1984). One Step Integration Methods of Third-fourth Order Accuracy with Large Hyperbolic Stability Limit. *Mathematics and Computers in Simulation*, 26 :181–188.
- Kissel, J., Brownlee, D. E., Buchler, K., Clark, B. C., Fechtig, H., Grun, E., Hornung, K., Igenbergs, E. B., Jessberger, E. K., Krueger, F. R., Kuczer, H., McDonnell, J. A. M., Morfill, G. M., Rahe, J., Schwehm, G. H., Sekanina, Z., Utterback, N. G., Volk, H. J., and Zook, H. A. (1986a). Composition of comet Halley dust particles from Giotto observations. *Nature*, 321 :336–337.
- Kissel, J., Sagdeev, Bertaux, J. L., Angarov, V. M., Audouze, J., Blamont, J. E., Buchler, K., Evlanov, E. N., Fechtig, H., Fomenkova, M. N., von Hoerner, H., Inogamov, N. A., Khromov, V. N., Knabe, W., Krueger, F. R., Langevin, Y., Leonasv, B., Levasseur-Regourd, A. C., Managadze, G. G., Podkolzin, S. N., Shapiro, V. D., Tabaldyev, S. R., and Zubkov, B. V. (1986b). Composition of comet Halley dust particles from VEGA observations. *Nature*, 321 :280–282.
- Klinger, J. (1999). Thermal evolution of comet nuclei. *Advances in Space Research*, 23(7) :1309–1318.
- Klinger, J., Levasseur-Regourd, A.-C., Bouziani, N., and Enzian, A. (1996). Toward a model of cometary nuclei for engineering studies for future space missions to comets. *Advances in Space Research*, 44(7) :637–653.
- Kofman, W. (1995). CONSERT : Investigation and Technical Plan. Technical report, Centre d’Etude des Phénomènes Aléatoires et Géophysique.
- Kofman, W., Barbin, Y., Klinger, J., Levasseur-Regourd, A. C., Barriot, J. P., Hérique, A., Hagfors, T., Nielsen, E., Grün, E., Edenhofer, P., Kochan, H., Picardi, G., Seu, R., van Zyl, J., Elachi, C., Melosh, J., Veverka, J., Weissman, P., Svedhem, L. H., Hamran, S. E., and Williams, I. P. (1998). Comet Nucleus Sounding Experiment by Radiowave Transmission. *Advances in Space Research*, 21(11) :1589–1598.

- Korth, A., Richter, A. K., Anderson, D. A. M. K. A., and Carlson, C. W. (1987). The composition and radial dependence of cometary ions in the coma of comet P/Halley. *Astronomy and Astrophysics*, 187 :149–152.
- Krolikowska, M. and Sitarski, G. (1996). Evolution of the orbit of comet 49P/Wirtanen during 1947-2013. *Astronomy and Astrophysics*, 310 :992–998.
- Kuiper, G. (1956). The formation of the planets, Part III. *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada*, 50 :158–176.
- Lamy, P. L., Toth, I., Jorda, L., Weaver, H. A., and A'Hearn, M. (1998). The nucleus and inner coma of Comet 46P/Wirtanen. *Astronomy and Astrophysics*, 335 :L25–L29.
- Lattimer, J. M., Schramm, D. N., and Grossman, L. (1978). Condensation in supernova ejecta and isotopic anomalies in meteorites. *Astrophysical Journal*, 219(1) :230–249.
- Louis, A. K. (1981). Ghosts in tomography - the null space of the Radon Transform. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 3 :1–10.
- Möhlmann, D. (1995). Cometary activity and nucleus model. *Advances in Space Research*, 43(3) :327–332.
- Möhlmann, D. (1996). Origin of Comets in the Extended Preplanetary Disk. *Planetary and Space Science*, 7 :731–743.
- Moore, M. H. and Donn, B. (1982). Studies of irradiated ice mixtures - laboratory synthesized residue. *Bulletin of the American Astronomical Society*, 14 :605.
- Moroz, V. I., Combes, M., Bibring, J. P., Coron, N., Crovisier, J., Encrenaz, T., Crifo, J. F., Sanko, N., Grigoryev, A. V., Bockelée-Morvan, D., Gispert, R., Nikolsky, Y. V., Emerich, C., Lamarre, J. M., Rocard, F., Krasnopolsky, V. A., and Owen, T. (1987). Detection of parent molecules in comet p/Halley from the IKS VEGA experiment. *Astronomy and Astrophysics*, 187(1) :513.
- Muinenen, K. (1998). Introducing the gaussian shape hypothesis for asteroids and comets. *Astronomy and Astrophysics*, 332 :1087–1097.
- Nielsen, E., Engelhardt, W., Chares, B., Bemann, L., Richards, M., Backwinkel, F., Plettemeier, D., Edenhofer, P., Barbin, Y., Goutail, J.-P., Kofman, W., and Svehem, L. (2001). Antennas for sounding of cometary nucleus in the ROSETTA mission. *11th International Conference on Antennas and Propagation, Conference Publication*, 480 :436–441.
- Oort, J. H. (1950). The structure of the cloud of comets surrounding the solar system and a hypothesis concerning its origin. *Bulletin of the Astronomical Institute of the Netherlands*, 11 :91–110.
- Orszag, S. A. (1972). Comparison of Pseudospectral and Spectral Approximations. *Stud. Appl. Math.*, 51(9) :253.
- Petrosky, T. Y. and Broucke, R. (1988). Area-preserving mappings and deterministic chaos for nearly parabolic motions. *Celestial Mechanics*, 42(1) :53–79.

- Rickman, H. (1986). In Comet Nucleus Sample Return. Technical Report SP-240, ESA.
- Rickman, H. (1991). On the properties of comets, asteroids, and terrestrial planet impactors. *Advances in Space Research*, 11(6) :7–18.
- Rickman, H. and Jorda, L. (1998). Comet 46P/Wirtanen, the target of the Rosetta mission. *Advances in Space Research*, 21(11) :1491–1504.
- Sagdeev, R. Z., Blamont, J. E., Galeev, A. A., Kovtunen, V., Moroz, V. I., Shapiro, V. D., Shevchenko, V. I., and Szego, K. (1986a). VEGA-1 and VEGA-2 spacecraft encounters with comet Halley. *Soviet Astronomical Letter*, 12(4) :243–248.
- Sagdeev, R. Z., Elyasberg, P. E., and Moroz, V. I. (1988). Is the nucleus of comet Halley a low density body? *Nature*, 331 :240–242.
- Sagdeev, R. Z., Szabo, F., Avanesov, G. A., Cruvellier, P., Szabo, L., Szego, K., Abergel, A., Balazs, A., Barinov, I. V., Bertaux, J.-L., Blamont, J., Demaille, M., Demarelis, E., Nev, G. N. D., Endrocy, G., Gardos, M., Kanyo, M., Kostenko, V. I., Krasikov, V. A., Nguyen-Trong, T., Nyitrai, Z., Reny, I., Rusznyak, P., Shamis, V. A., Smith, B., Sukhanov, K. G., Szabo, F., Szalai, S., Tarnopolsky, V. I., Toth, I., Tsukanova, G., Valnicek, B. I., Varhalmi, L., Zaiko, Y. K., Zatsepin, S. I., Ziman, Y. L., Zsenei, M., and Zhukov, B. S. (1986b). Television observations of comet Halley from VEGA spacecraft. *Nature*, 321 :262–266.
- Sandford, S. A. (1996). The inventory of interstellar materials available for the formation of the solar system. *Meteoritics and planetary science*, 31 :449–476.
- Schmidt-Voigt, M. (1989). Time-dependent MHD simulations for cometary plasmas. *Astronomy and Astrophysics*, 210 :433–454.
- Scholl, H., Cazenave, A., and Brahic, A. (1982). The effect of star passages on cometary orbits in the Oort cloud. *Astronomy and Astrophysics*, 112(1) :157–166.
- Schwehm, G. and Hechler, M. (1994). 'Rosetta' - ESA's planetary cornerstone mission. *ESA Bulletin*, 77 :7–18.
- Sekanina, Z. (1968). Disruption of comet P/Biela and explosive mechanisms of cometary splits. *Bulletin of the Astronomical Institute of Czechoslovakia*, 19 :63.
- Sihvola, A. and Kong, J. (1988). Effective Permittivity of Dielectric Mixtures. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 26 :420–429.
- Sirono, S. and Yamamoto, T. (1999). Internal evolution of an icy planetesimal : the evolution of the temperature, chemical composition and mechanical properties. *Advances in Space Research*, 23(7) :1299–1308.
- Snieder, R. and Sambridge, M. (1991). Ray Perturbation Theory for Traveltimes and Ray Paths in 3-d Heterogeneous Media. *Geophysical Journal International*, 109 :294–322.
- Tarantola, A. (1987). *Inverse Problem Theory : Methods for Data Fitting and Model Parameters Estimation*. Elsevier Science Publishers.

- Tarantola, A. and Valette, B. (1982). Inverse Problem = Quest for Information. *Journal of Geophysics*, 50 :159–170.
- Tholen, D. J., Hartmann, W. K., Cruikshank, D. P., Lilly, S., Bowell, E., and Hewitt, A. (1988). Chiron. *IAU Circular*, 4554.
- Thomas, N., Keller, H. U., Arijs, E., Barbieri, C., Grande, M., Lamy, P., Rickman, H., Rodrigo, R., Wenzel, K.-P., A'Hearn, M. F., Angrilli, F., Bailey, M., Barucci, M. A., Bertaux, J.-L., Brieb, K., Burns, J. A., Cremonese, G., Curdt, W., Deceuninck, H., Emery, R., Festou, M., Fulle, M., Ip, W.-H., Jorda, L., Korth, A., Koschny, D., Kramm, J.-R., Kührt, E., Lara, L. M., Llebaria, A., Lopez-Moreno, J. J., Marzari, F., Moreau, D., Muller, G., Murray, C., Naletto, G., Nevejans, D., Ragazzoni, R., Sabau, L., Sanz, A., Sivan, J.-P., and Tondello, G. (1998). OSIRIS-the Optical, Spectroscopic and Infrared Remote Imaging System for the Rosetta Orbiter. *Advances in Space Research*, 21(11) :1505–1515.
- Tielens, A. G. (1991). Characteristics of interstellar and circumstellar dust. In *Origin and Evolution of Interplanetary Dust*. Proceedings of IAU Colloq. 126.
- Tikhonov, A. N. and Arsenine, V. Y. (1976). *Méthode de résolution des problèmes mal posés*. Edition Mir.
- Wegmann, R., Schmidt, H. U., Huebner, W. F., and Boice, D. C. (1987). Cometary MHD and Chemistry. *Astronomy and Astrophysics*, 187 :339–350.
- Weidenschilling, S. (1997). The Origin of Comets in the Solar Nebula : A Unified Model. *Icarus*, 127 :116–130.
- Weidenschilling, S. J., Donn, B., and Meakin, P. (1989). The physics of planetesimal formation. In *The Formation and the Evolution of Planetary System*. Cambridge University Press.
- Weissman, P. (1986). Are Cometary Nuclei Primordial Rubble Piles? *Nature*, 320 :242–244.
- Whipple, F. L. (1950). A comet model. I. The acceleration of comet Encke. *Astrophysical Journal*, 111 :375–394.
- Whipple, F. L. (1972). The origin of comets. In *The Motion, Evolution of Orbits, and Origin of Comets*. Proceedings from IAU Symposium no. 45.
- Xi, Z. Z. (1984). The cometary Atlas in the Silk Book of the Han tomb at Mawangdui. *Chinese Astronomy and Astrophysics*, 8(1) :1–7.
- Yee, K. S. (1966). Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell Equations in Isotropic Media. *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, 14(3) :302–307.
- Zernov, N. and Lundborg, B. (1993). The statistical theory of wave propagation and HF propagation in the ionosphere with local inhomogeneities. Technical Report 215, Swedish Institute of Space Physics.

AUTEUR : Mehdi BENNA

TITRE : Génération et inversion de données de propagation d'ondes radio à travers un noyau cométaire (Simulation de l'expérience CONSERT).

DIRECTEUR DE THÈSE : Dr. Jean-Pierre BARRIOT

LIEU ET DATE DE SOUTENANCE : Le 19 septembre 2002 à l'observatoire Midi-Pyrénées, Toulouse, France.

RESUMÉ :

Ce mémoire présente les modélisations directe et inverse entreprises dans le cadre de la préparation de l'exploitation scientifique de l'expérience CONSERT de la mission spatiale ROSETTA.

Nous nous sommes intéressés à la modélisation de la propagation d'ondes radio dans le cas simplifié d'un noyau cométaire à géométrie bidimensionnelle. À cette fin, une technique de tracé de rayons (Ray Tracing Method, RTM) a été développée et validée par comparaison avec les résultats d'une méthode spectrale (Pseudo Spectral Time Domain, PSTD). Cette technique a été ensuite étendue au cas plus complexe d'une géométrie tridimensionnelle, aboutissant à la réalisation d'un simulateur pour l'instrument CONSERT.

Le problème inverse a été abordé dans le cas d'une géométrie bidimensionnelle à faibles perturbations de permittivité en utilisant la méthode de régularisation de Tikhonov. Son étude a montré son caractère mal posé et fortement non linéaire, ainsi que le rôle important des informations *a priori* lors de la reconstruction d'image.

MOTS-CLÉS :

Propagation d'ondes radioélectriques - Radiotomographie - Technique de tracé des rayons - Méthodes spectrales - Problèmes inverses mal posés - Noyaux cométaires.

DISCIPLINE ADMINISTRATIVE : Planétologie & Techniques Spatiales

INTITULÉ ET ADRESSE DU LABORATOIRE DE THÈSE :

Laboratoire de Dynamique Terrestre et Planétaire (UMR 5562/GRGS/CNES),
Observatoire Midi-Pyrénées, 14, Avenue Edouard-Belin, F-31400 Toulouse, France.