



HAL
open science

Fonctions tau de l'operateur de Dirac sur le cylindre

Oleg Lisovyy

► **To cite this version:**

Oleg Lisovyy. Fonctions tau de l'operateur de Dirac sur le cylindre. Physique mathématique [math-ph]. Université d'Angers, 2004. Français. NNT : . tel-00007956

HAL Id: tel-00007956

<https://theses.hal.science/tel-00007956>

Submitted on 7 Jan 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ D'ANGERS

Année : 2004
N° d'ordre : 664

FONCTIONS TAU DE L'OPERATEUR DE DIRAC
SUR LE CYLINDRE

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : Mathématiques

ÉCOLE DOCTORALE D'ANGERS

Présentée et soutenue publiquement

le 29 Novembre 2004
à l'université d'Angers
par Oleg LISOVYY

Devant le jury ci-dessous :

Olivier BABELON

Rapporteur, Directeur de recherche au CNRS

Philip BOALCH

Rapporteur, Chercheur CNRS, ENS Paris

Eric DELABAERE

Examineur, Professeur, Université d'Angers

Laurent GUILLOPE

Examineur, Professeur, Université de Nantes

Vitaly SHADURA

Examineur, Professeur, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics
(Kyiv, Ukraine)

Directeur de thèse : Vladimir ROUBTSOV, Professeur, Université d'Angers

Nom et coordonnées du laboratoire : U.M.R N° 6093 associée au CNRS
2 Bd Lavoisier, 49045 Angers cedex 01, France

Fonctions τ de l'opérateur de Dirac sur le cylindre

Cette thèse est consacrée à l'étude d'un analogue du problème de Riemann-Hilbert et de déformations isomonodromiques pour les solutions de l'équation de Dirac sur le cylindre. L'objectif est de faire un lien entre la théorie de déformation et les fonctions de corrélation dans certains modèles intégrables en théorie quantique des champs dans le volume fini.

Dans une première partie, nous étudions des solutions multivaluées de l'équation de Dirac, qui réalisent une représentation unitaire de dimension 1 du groupe fondamental du cylindre avec n points marqués. Nous introduisons une base canonique dans l'espace des solutions de carré intégrable de ce type et montrons qu'elle vérifie un système d'équations de déformation. Nous généralisons au cas du cylindre les définitions de la fonction de Green et de la fonction τ (déterminant régularisé) de l'opérateur de Dirac singulier, données par J. Palmer. Nous donnons de plus les formules explicites pour la base canonique et la fonction de Green quand $n = 1$, et aussi pour la fonction τ quand $n = 2$.

Dans une seconde partie, nous obtenons, de deux façons différentes, les équations différentielles non linéaires satisfaites par les fonctions de corrélation du modèle d'Ising sur le cylindre dans la limite continue. La première méthode est illustrée sur l'exemple des corrélations paires et utilise les expressions exactes pour les facteurs de forme, obtenues par A. Bugrij. La deuxième méthode donne les équations pour les corrélateurs d'ordre arbitraire et est fondée sur l'idée de développements de produits d'opérateurs (OPE). Elle établit la correspondance entre le modèle d'Ising dans le volume fini et la théorie de Dirac pour un choix particulier de la monodromie.

Mots clefs: systèmes intégrables, modèle d'Ising, fonction de corrélation, facteur de forme, volume fini, fonction τ , déformations isomonodromiques, opérateur de Dirac singulier.

Tau functions for the Dirac operator on the cylinder

This thesis is devoted to the study of an analog of the Riemann-Hilbert problem and monodromy preserving deformations for the solutions of the Dirac equation on the cylinder. The aim is to understand the connection between deformation theory and correlation functions of certain integrable models of quantum field theory in the finite volume.

In the first part, we study multivalued solutions of the Dirac equation that realize a unitary one-dimensional representation of the fundamental group of the cylinder with n marked points. We introduce a canonical basis in the space of square integrable solutions of this type and show that it obeys a system of deformation equations. We generalize the definitions of the Green function and tau function (regularized determinant) for the singular Dirac operator, given by J. Palmer, to the case of the cylinder. Moreover, we present the explicit formulae for the canonical basis and Green function for $n = 1$, and also for the two-point tau function.

In the second part, we derive nonlinear differential equations, satisfied by the correlation functions of the Ising model on the cylinder in the continuum limit, in two different ways. The first method is illustrated on the example of pair correlations. It uses the exact expressions for the form factors, obtained by A. Bugrij. The second method gives the equations for the correlators of arbitrary order, and is based on the concept of operator product expansion (OPE). It establishes the correspondence between the Ising model in the finite volume and Dirac theory for a particular choice of monodromy.

Keywords: integrable systems, Ising model, correlation function, form factor, finite volume, tau function, monodromy preserving deformations, singular Dirac operator.

Remerciements

Je suis très reconnaissant à Vladimir Roubtsov de m'avoir accepté comme étudiant en thèse et de m'avoir dirigé dans ce travail à la frontière des mathématiques et de la physique. Ses conseils judicieux et ses idées toujours brillantes m'ont constamment permis de progresser. Son apport intellectuel dépasse de loin le cadre strictement professionnel. Son enthousiasme communicatif pour tous les domaines de la connaissance et sa gentillesse ont fait de nos conversations un véritable plaisir.

Je voudrais exprimer toute ma gratitude et ma sincère reconnaissance à Anatoliy Bugrij qui a guidé mes premiers pas dans la recherche scientifique. Je le remercie des nombreuses discussions enrichissantes et du soutien permanent qu'il m'a apporté. Je suis heureux d'être son élève.

Je remercie chaleureusement Olivier Babelon et Philip Boalch, qui ont accepté la tâche de rapporteurs, pour la lecture attentive de ma thèse. Je tiens à remercier Eric Delabaere, Laurent Guillopé et Vitaliy Shadura pour leur participation au jury.

Merci au laboratoire de mathématiques d'Angers pour m'avoir accordé un cadre de travail agréable. En particulier, je remercie son ancien directeur Jean Michel Granger pour toute aide et les moyens qu'il a mis à ma disposition. Merci bien sûr à notre bibliothécaire, Madame Françoise Bock pour son travail et sa invariable gentillesse.

Je remercie la Communauté d'Agglomération du Grand Angers pour m'avoir attribué une bourse de thèse.

Je tiens à remercier Michèle Loday et Eric Delabaere pour le colloque extraordinaire qu'ils ont organisé à Angers, aussi que Frederic Helein et Joseph Couneihier pour les rencontres mémorables à Peyresq. Merci à Olga Kravchenko et Feodor Smirnov de m'avoir invité à leurs séminaires pour parler de mon travail.

Merci à tous ceux qui m'ont donné des explications dans quelque domaine de mathématiques que ce soit: A. Borodin, M. Iorgov, M. Jimbo, S. Korotkin, S. Pakuliak, J. Palmer, F. Smirnov.

Merci à vous mes amis français, Bertrand, Celine, Goulwen, Dika, Rouchdi, Jean-Marc, Souleyman, Ludovic... Nous avons passé ensemble trois ans très agréables.

Je pense affectueusement à mes camarades en Ukraine, qui défendent la liberté dans les rues froides de Kyiv ces jours-là. Je suis avec vous, mes amis.

Enfin je remercie ma famille, mes parents, mon frère et Iuliia à qui je dédie cette thèse.

Table des matières

Introduction	7
Résumé des résultats principaux	13
Première partie. Fonctions τ de l'opérateur de Dirac sur le cylindre	15
Chapitre 1. Base canonique des solutions de l'équation de Dirac	17
1. Définitions	17
2. Base canonique sur le cylindre avec un point marqué	21
Chapitre 2. Fonction de Green de l'opérateur de Dirac	27
1. Fonction de Green pour $n = 0$	27
2. Propriétés générales de la fonction de Green	28
3. Fonction de Green à un point	31
Chapitre 3. Fonctions τ	35
1. Sous-espaces $W_{int}(a)$ et $W_{ext}(a)$	35
2. Grassmannienne, fibré \det^* et sa trivialisaton	41
Chapitre 4. Equations de déformation	47
Deuxième partie. Limite continue du modèle d'Ising sur le cylindre	51
Chapitre 5. EDP pour les fonctions de corrélation à deux points	53
1. Fonctions de corrélation: représentation par les déterminants de Fredholm	53
2. Déterminants de Fredholm et équations différentielles non linéaires	55
3. Représentations multilinéaires de Hirota	59
Chapitre 6. Fonctions de corrélation et déformations isomonodromiques	63
1. Fermions libres	63
2. OPE dans le modèle d'Ising	63
3. Déformations isomonodromiques	68
Annexe A	73
Annexe B	75
Bibliographie	79

Introduction

Probablement, la meilleure façon d'expliquer le sujet de cette thèse est de décrire le point de départ et les résultats qu'on va généraliser.

Pour la première fois, la notion de la monodromie des solutions d'équations différentielles est apparue dans les travaux de Riemann consacrés à l'étude de l'équation hypergéométrique. Les équations différentielles linéaires ordinaires à coefficients méromorphes sur la sphère de Riemann ont des solutions multivaluées. Les prolongements de telles solutions le long de courbes contournant des singularités font apparaître les matrices de la monodromie. On peut donc associer à chaque équation différentielle une représentation du groupe fondamental de la sphère avec des points marqués. Le problème "inverse" consiste à déterminer si le groupe de la monodromie caractérise complètement les équations. Une version particulière de cette question fait partie de la liste célèbre des problèmes de Hilbert, sous le numéro 21. Ce problème, dit aussi de Riemann-Hilbert, a été résolu au début de XX siècle par Plemelj, Hilbert et Birkhoff. Leur solution, par contre, n'est pas constructive et représente un théorème d'existence.

Ce qui est plus intéressant — au moins, du point de vue de cette thèse — est qu'il existe aussi une solution constructive au problème de l'obtention d'une équation différentielle à partir de son groupe de la monodromie. Par exemple, Schlesinger a considéré le cas le plus simple, un système Fuchsien sur la sphère \mathbb{CP}^1 avec les singularités aux points a_1, \dots, a_{k+1} . Dans les coordonnées standards, en posant $a_{k+1} = \infty$, on peut écrire ce système sous la forme

$$(0.1) \quad \frac{dY}{dz} = \sum_{\nu=1}^k \frac{A_\nu}{z - a_\nu} Y,$$

où $A_1, \dots, A_k \in \text{End } \mathbb{C}^n$ et $Y = (\vec{y}_1 \dots \vec{y}_n)$. Fixons d'abord des valeurs quelconques de $\{A_\nu\}$ et $\{a_\nu\}$ et calculons le groupe de la monodromie. Ensuite, on va changer les positions des singularités. Comment faut-il modifier les matrices $\{A_\nu\}$ pour que la monodromie reste la même? Schlesinger a montré que, sous certaines hypothèses simplificatrices concernant les valeurs propres de $\{A_\nu\}$, une condition nécessaire est un système d'équations non linéaires:

$$(0.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial A_\mu}{\partial a_\nu} = \frac{[A_\mu, A_\nu]}{a_\mu - a_\nu}, & \nu \neq \mu, \\ \frac{\partial A_\mu}{\partial a_\mu} = - \sum_{\mu \neq \nu}^k \frac{[A_\mu, A_\nu]}{a_\mu - a_\nu}. \end{cases}$$

En utilisant le groupe d'automorphismes de \mathbb{CP}^1 , $PSL(2, \mathbb{C})$, on peut toujours fixer les positions de trois singularités. Alors la situation non triviale la plus simple correspond au choix $n = 2$, $k = 3$; il est bien connu que, dans ce cas, le système d'équations de Schlesinger est équivalent à une seule équation non linéaire du deuxième ordre, dite équation de Painlevé VI.

Remarquons que Painlevé a découvert ses équations avant les travaux de Schlesinger, dans un contexte un peu différent. Il étudiait les équations différentielles du type $y''(x) = F(x, y(x), y'(x))$, F étant une fonction rationnelle de ses arguments. Painlevé a montré que si les solutions de cette équation n'ont pas de singularités essentielles mobiles (qui dépendent des conditions initiales),

elle est équivalente à une équation linéaire ou se réduit à une des six équations non linéaires particulières. Parmi elles, l'équation de Painlevé VI est la plus compliquée. Les autres représentent certaines limites de celle-ci.

Pendant plus qu'un demi-siècle, les équations de Painlevé n'ont pas attiré beaucoup d'attention. Aucune application physique n'a été trouvée, ni lien avec les autres branches des mathématiques. La vraie explosion d'intérêt, au début des années soixante-dix, est liée à deux raisons. La première provient de l'étude des systèmes intégrables. Il est apparu que les solutions de toutes les réductions de ceux-ci ont la propriété de Painlevé, c'est-à-dire, n'ont pas de singularités essentielles mobiles. Même aujourd'hui le "Painlevé test" est utilisé comme une des premières vérifications empiriques d'intégrabilité. La deuxième raison, qui est plus importante pour nous, provient de la théorie quantique des champs. McCoy *et al* [38] ont montré que les corrélateurs paires du modèle d'Ising sur le plan dans la limite continue s'expriment en fonction des transcendants de Painlevé! Cela donne l'intuition que la monodromie est contenue quelque part dans le modèle même.

L'explication a été donnée dans une série d'articles [32] de Sato, Miwa et Jimbo (SMJ ci-dessous). Ils ont construit la théorie de déformation isomonodromique pour les solutions de l'équation de Dirac et montré que le modèle d'Ising est lié avec un cas particulier de cette théorie. La subtilité consiste dans le fait que l'équation de Dirac, contrairement au système Fuchsien, est une équation *aux dérivées partielles*. Alors l'analyse de SMJ, qui se traduit naturellement en langage physique, est très différent de l'approche de Schlesinger. En appliquant ensuite leurs méthodes au problème classique d'un système différentiel sur \mathbb{CP}^1 à coefficients méromorphes [32, 10, 11, 12], SMJ ont également obtenu les équations de déformation dans le cas des points singuliers irréguliers. Ils ont aussi transféré au cas classique le concept de la fonction τ , un analogue mathématique de la fonction de corrélation. Par exemple, la fonction τ du système (0.1) est définie par

$$(0.3) \quad d \ln \tau = \frac{1}{2} \sum_{\mu \neq \nu}^k \operatorname{tr}(A_\mu A_\nu) \frac{da_\mu - da_\nu}{a_\mu - a_\nu}.$$

Pour vérifier que la définition est correcte et la forme à droite est vraiment fermée, il faut utiliser les équations de déformation (0.2).

L'idée de SMJ est très simple. Expliquons le principe général sur l'exemple du modèle d'Ising sur le plan. Le champ physique dans ce modèle est la variable de spin $\sigma(a) = \sigma(a_x, a_y)$, qui dépend de deux coordonnées $a_x, a_y \in \mathbb{R}$. Il est commode d'introduire encore un autre champ auxiliaire, $\psi(z) = \psi(x, y)$, qui correspond aux fermions libres massifs de Dirac. Les opérateurs des champs $\hat{\sigma}(a)$ et $\hat{\psi}(z)$ vérifient les relations de commutation suivantes:

$$(0.4) \quad \hat{\sigma}(a) \hat{\psi}(z) = \begin{cases} \hat{\psi}(z) \hat{\sigma}(a), & x > a_x, \\ -\hat{\psi}(z) \hat{\sigma}(a), & x < a_x. \end{cases}$$

Qu'est-ce que cela signifie pour les fonctions de corrélation? Considérons par exemple la valeur moyenne

$$G(z, z') = \langle \sigma(a_1) \dots \sigma(a_n) \psi(z) \otimes \psi^\dagger(z') \rangle.$$

Vue comme une fonction de z , cette expression satisfait (localement) l'équation de Dirac. Elle a pourtant des singularités aux points a_1, \dots, a_n , et z' . La condition (0.4) implique qu'en prolongeant $G(z, z')$ le long d'une courbe, contournant un des points a_1, \dots, a_n , on obtient la monodromie (-1) . L'asymptotique de $G(z, z')$ aux voisinages des singularités peut être déduite des développements de produits d'opérateurs (OPE). Le fait décisif est que les conditions au bord, superposées par l'OPE, fixent la solution de l'équation de Dirac de façon unique. Alors en

étudiant certaines solutions singulières de cette équation, on peut extraire une information sur les corrélateurs. En particulier, la théorie de déformation isomonodromique, développée par SMJ, donne un système d'équations satisfait par les fonctions de corrélation $\langle \sigma(a_1) \dots \sigma(a_n) \rangle$ d'ordre arbitraire (voir aussi [14] pour un exposé pédagogique de ces résultats). Miraculeusement, dans le cas $n = 2$ ce système se réduit à l'équation de Painlevé III.

Il est utile également de décrire le problème en termes géométriques. Nous commençons par le système fuchsien (0.1). Il peut être interprété comme les équations déterminant les sections horizontales d'une connexion méromorphe ∇ sur un fibré vectoriel trivial de rang n sur \mathbb{CP}^1 . Ensuite, nous relevons ∇ en une connexion $\tilde{\nabla}$ sur $\mathbb{CP}^1 \times (\mathbb{CP}^1)^{\times(k+1)}$, en demandant que la monodromie soit constante (ici, le deuxième facteur dans le produit cartésien correspond aux positions des singularités). Autrement dit, les sections horizontales, données par la matrice fondamentale Y , restent plates par rapport à $\tilde{\nabla}$. Cela implique les relations additionnelles

$$(0.5) \quad \frac{\partial Y}{\partial a_\mu} = -\frac{A_\mu}{z - a_\mu} Y, \quad \mu = 1, \dots, k,$$

et alors on vérifie aisément que la condition de courbure nulle de $\tilde{\nabla}$ se traduit en les équations de Schlesinger.

Quel est le sens géométrique de la fonction τ ? Malgrange [19] a montré qu'elle peut être interprétée comme déterminant d'un opérateur de Toeplitz. L'ensemble des zéros de la fonction τ dans l'espace des singularités est appelé le diviseur de Malgrange; il est très important dans l'étude de la solvabilité du problème de Riemann-Hilbert pour la monodromie donnée. Malheureusement, il n'est pas clair comment généraliser l'analyse de Malgrange dans une autre situation, par exemple, dans la théorie de Dirac/Ising, qui était en effet l'origine du concept de la fonction τ . Une meilleure interprétation a été trouvée par Palmer [24], qui a montré que la fonction τ représente le déterminant d'un opérateur de Cauchy-Riemann singulier, $\tau = \det \bar{\partial}_{a,M}$. Expliquons la démarche dont nous nous servons plus tard.

- Soit E un fibré vectoriel holomorphe de rang n et de degré d sur \mathbb{CP}^1 , et $\Omega^{p,q}(E)$ l'espace vectoriel des formes lisses de type (p, q) à valeurs dans E . L'opérateur différentiel $\bar{\partial} : \Omega^{0,0}(E) \rightarrow \Omega^{0,1}(E)$ est appelé l'opérateur de Cauchy-Riemann (non singulier) si sa forme locale est $\bar{\partial} = d\bar{z}(\partial_{\bar{z}} + \alpha(z))$, où on identifie \mathbb{CP}^1 avec $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ de façon usuelle et $\alpha(z)$ représente une fonction matricielle. On va supposer que l'opérateur $\bar{\partial}$ est d'indice zéro, alors d'après le théorème de Riemann-Roch $n = -d$. Par exemple, on peut supposer que E est le fibré de spin: $E \simeq \underbrace{\mathcal{O}(-1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(-1)}_n$. Ensuite, construisons

au-dessus de l'espace \mathcal{A} formé de tous les opérateurs $\bar{\partial}$ le fibré déterminant \det . La fibre au point $\bar{\partial}$ est identifiée à la droite $\lambda(\ker \bar{\partial})^* \otimes \lambda(\text{coker } \bar{\partial})$, où $\lambda(V)$ est la puissance extérieure maximale de l'espace vectoriel V . L'idée de Quillen [30] est de définir le déterminant $\det \bar{\partial}$ en comparant deux sections du fibré \det . En effet, ce fibré a une section canonique qu'on notera σ , et alors si on trouve une trivialisant du fibré, σ s'identifie avec une fonction sur \mathcal{A} , qu'on peut appeler le déterminant. La deuxième section (trivialisante) peut être construite à partir d'un produit scalaire sur le fibré \det , qui est défini en utilisant le ζ -déterminant de l'opérateur de Laplace $\partial\bar{\partial}$; mais ce mécanisme concret n'est pas vraiment important pour la suite.

- En effet, il y a une autre façon de décrire le fibré \det . Puisque chaque $\bar{\partial} \in \mathcal{A}$ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro, il existe des applications inversibles $q : \Omega^{0,0}(E) \rightarrow \Omega^{0,1}(E)$ telles que $q^{-1}\bar{\partial}$ est une perturbation à trace de l'identité. De telles applications q sont appelées les paramétrices admissibles de $\bar{\partial}$. Si q_1 et q_2 sont deux telles paramétrices, l'opérateur $q_1^{-1}q_2 : \Omega^{0,0}(E) \rightarrow \Omega^{0,0}(E)$ est une perturbation

à trace de l'identité, et alors le déterminant de Fredholm $\det(q_1^{-1}q_2)$ est bien défini. On peut donc former la fibre au point $\bar{\partial}$ des classes d'équivalence des paires (q, γ) , où q est une paramétrice admissible, γ est un nombre complexe et $(q_1, \gamma_1) \sim (q_2, \gamma_2)$ si $\gamma_1 = \gamma_2 \det(q_2^{-1}q_1)$. La section canonique est définie par $\sigma : \bar{\partial} \mapsto (q, \det(q^{-1}\bar{\partial}))$. Il faut souligner que cette section ne dépend pas de la nature des opérateurs de Cauchy-Riemann — en effet, toutes les constructions (sauf trivialisations) sont valables même si on remplace \mathcal{A} par une famille d'opérateurs de Fredholm d'indice zéro avec de “bonnes” propriétés.

- L'idée suivante de Palmer a été inspirée par les travaux de Witten [37] sur la localisation des fibrés \det . Soit D le disque fermé $|z| \leq 1$ sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Chaque opérateur de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}$ induit un opérateur $\bar{\partial}_D$ sur ce disque de la façon suivante. Considérons les sections f de E qui vérifient $\bar{\partial}f(p) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus D$ et identifions-les avec les fonctions sur D à valeurs dans \mathbb{C}^r . L'opérateur $\bar{\partial}_D$ est par définition la restriction de $\partial_z + \alpha(z)$ au domaine formé de ces fonctions. Le point important est qu'on peut identifier les noyaux et les conoyaux de $\bar{\partial}$ et $\bar{\partial}_D$. Alors, puisque la fibre du fibré \det est isomorphe à $\lambda(\ker \bar{\partial})^* \otimes \lambda(\operatorname{coker} \bar{\partial})$, il est naturel d'essayer de définir le fibré déterminant aussi pour la famille d'opérateurs locaux $\bar{\partial}_D$.
- Supposons qu'on a une famille \mathcal{X} d'opérateurs de Cauchy-Riemann, qui coïncident à l'intérieur de D . Leurs localisations diffèrent alors l'une de l'autre seulement par les valeurs au bord ∂D des fonctions contenues dans leurs domaines. Par conséquent, à chaque opérateur de cette famille, on peut associer un sous-espace de l'espace des fonctions sur ∂D . En utilisant les résultats de Segal et Wilson [33], Palmer a montré que ces sous-espaces sont inclus dans une grassmannienne construite à partir de la décomposition standard de l'espace des fonctions sur $\partial D \sim S^1$ en fonctions qui se prolongent analytiquement à l'intérieur et à l'extérieur. Au dessus de la grassmannienne, on peut introduire un fibré \det^* et une section canonique de ce fibré (voir [33] ou les définitions au début du paragraphe II.3.2). Le fibré déterminant et la section canonique au-dessus de la famille \mathcal{X} représentent en fait le pull-back de celles-ci.

Résumé: On peut définir le déterminant d'un opérateur de Cauchy-Riemann en trivialisant le fibré \det^* au-dessus d'une grassmannienne qui inclut les espaces des valeurs au bords des sections contenues dans son domaine.

En travaillant avec les opérateurs de Cauchy-Riemann singuliers, il est commode de définir sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ un système de coupures pour que la matrice fondamentale $Y(z)$ soit univaluée. Avec les transformations homographiques, on peut déplacer les coupures et toutes les singularités du système fuchsien (0.1) à l'extérieur du disque D . Le domaine de l'opérateur de Cauchy-Riemann singulier, $\bar{\partial}_{a,M}$, est formé des sections $f \in \Omega^{0,0}(E)$ avec la monodromie nécessaire ($Y(z)f$ est une H^1 -section univaluée). L'action locale de $\bar{\partial}_{a,M}$ est la suivante: $\bar{\partial}_{a,M}f = Y(z)^{-1}\partial_z Y(z)f$, c'est-à-dire, que, en dehors des coupures, il s'agit simplement de la dérivée par rapport à \bar{z} . Considérons maintenant une famille d'opérateurs $\bar{\partial}_{a,M}$, paramétrée par les coordonnées des points du branchement. Ils coïncident sur le disque D , et alors leurs localisations diffèrent l'une de l'autre uniquement par les valeurs au bord ∂D des sections dans leurs domaines. C'est exactement la situation qu'on avait précédemment. Il est possible de construire de la même manière une grassmannienne des espaces des valeurs au bord et le fibré \det^* . La trivialisations de celui-ci nous donne le déterminant $\det \bar{\partial}_{a,M}$, qui coïncide en fait avec la fonction τ , définie par (0.3).

Ce qui est remarquable dans cette construction — est qu'elle peut être transférée presque littéralement au cas des déformations isomonodromiques des solutions de l'équation de Dirac.

Dans l'article [25], par exemple, ce problème a été résolu pour l'équation de Dirac sur le plan avec n points marqués a_1, \dots, a_n . Enumérons les étapes nécessaires:

- Construction d'une section plate \vec{w} d'une connexion "Dirac-compatible" sur le fibré trivial $\mathbb{R}^2 \setminus \{a_1 \dots a_n\} \times \mathbb{C}^{2n}$. La compatibilité signifie que chacune des n composantes de $\vec{w} = (\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_n)^T \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^n$ vérifie l'équation de Dirac $(m - \gamma^i \partial_i) \mathbf{w}_j = 0$. De plus, nous supposons qu'au point a_j ($j = 1, \dots, n$) on a la monodromie unitaire $e^{2\pi i \lambda_j} \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_n$. Dit plus simplement, il faut résoudre l'équation de Dirac sous les conditions au bord particulières. En comparaison avec le système fuchsien, l'équation de Dirac est un analogue de la condition d'holomorphie de la connexion, alors que le système même correspond à la monodromie fixée.
- Relèvement de la connexion sur $\mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^2)^{\times n}$ de telle manière que la section \vec{w} reste encore plate et que la monodromie se préserve. Ici on obtient des équations analogues, dans un sens, à (0.5). La condition de courbure nulle de la connexion implique certaines équations différentielles non linéaires (celles-ci correspondent aux équations de Schlesinger). Pour un choix particulier de la monodromie, elles nous donnent les équations satisfaites par les corrélateurs du modèle d'Ising.
- Définition et calcul de la fonction τ . On choisit un système de coupures sur le plan (par exemple, les rayons $x = \operatorname{Re} a_j$, $y < \operatorname{Im} a_j$). Ensuite, il faut isoler ces coupures dans un ouvert (par exemple, dans les bandes $S_j = \{(x, y) : |x - \operatorname{Re} a_j| < \varepsilon\}$). On localise l'opérateur de Dirac dans le complémentaire de cet ouvert, $\mathbb{R}^2 \setminus \left(\bigcup_{j=1}^n S_j\right)$. Si on fait varier les positions des points de branchement de telle manière que chaque a_j reste dans S_j , les localisations vont différer seulement par les espaces des valeurs au bord $\bigcup_{j=1}^n \partial S_j$ des fonctions appartenant au domaine de l'opérateur correspondant. De façon analogue à la précédente, à partir de ces espaces on peut construire une grassmannienne à dimension infinie. La trivialisaton du fibré \det^* au-dessus de celle-ci nous permet de définir le déterminant de l'opérateur de Dirac (autrement dit, la fonction τ). Dans le cas du modèle d'Ising, ce déterminant représente une combinaison des fonctions de corrélation.

Une question naturelle apparaît: est-il possible de développer la théorie analogue de déformations isomonodromiques et de définir le déterminant de l'opérateur de Dirac sur une surface de Riemann arbitraire, M , munie d'une métrique? En fait, pour chacune de ces trois étapes, il faut que M soit un espace homogène pour un groupe G qui agisse sur M par les isométries. Il n'y a que cinq telles surfaces: le plan ($G = E(2)$), le cylindre ($G = S^1 \times \mathbb{R}$), le tore ($G = S^1 \times S^1$), le disque de Poincaré ($G = PSU(1,1)$) et la sphère ($G = PSU(2)$).

Le cas du plan a été étudié dans [25] et dans les travaux originaux de SMJ [32]. Des résultats similaires concernant le disque hyperbolique ont été obtenus dans [22, 27, 28]. Mentionnons aussi l'article [6], où la fonction de corrélation paire des champs de la monodromie sur le disque de Poincaré était calculée par des méthodes de la théorie quantique des champs. Cette thèse est consacrée au cas du cylindre, mais les résultats techniques obtenus permettent de considérer le tore également. On s'est inspiré d'un progrès récent dans la théorie du modèle d'Ising — le calcul des fonctions de corrélation [2, 3] et des facteurs de forme [4] sur le réseau fini, et l'obtention directe des équations différentielles pour les corrélateurs paires dans la limite continue sur le cylindre [16, 17]. Au-delà de l'intérêt intrinsèque, ce travail est important pour la théorie quantique des champs, où la dimension périodique correspond au volume fini ou à la température non-nulle.

Résumé des résultats principaux

Cette thèse est consacrée, d'une part, à l'étude d'un analogue du problème de Riemann-Hilbert et de déformations isomonodromiques pour les solutions de l'équation de Dirac sur le cylindre, et d'autre part, à l'application des résultats en théorie quantique des champs. L'exposé est donc divisé en deux parties.

Première partie: Fonction τ de l'opérateur de Dirac sur le cylindre

Dans le premier chapitre on étudie des solutions multivaluées de l'équation de Dirac qui réalisent une représentation unitaire de dimension 1 du groupe fondamental du cylindre avec n points marqués a_1, \dots, a_n . Nous montrons (théorème 1.1) que l'espace de telles solutions de carré intégrable est de dimension n . Nous introduisons la base canonique de cet espace (formule (1.12)), qui est fixée par le comportement des solutions au voisinage des singularités. La section \vec{w} dont on a parlé précédemment, est formée à partir des éléments de la base canonique. Ensuite, nous calculons explicitement l'élément de la base canonique dans le cas $n = 1$ (théorème 2.2). Tous les calculs suivants sont basés essentiellement sur ces formules.

Dans le deuxième chapitre, nous définissons la fonction de Green de l'opérateur de Dirac singulier. On va l'utiliser plus tard pour construire la section trivialisante du fibré \det^* . Nous montrons que les dérivées de la fonction de Green par rapport aux positions des singularités s'écrivent sous la forme factorisée (2.23), (2.24) et s'expriment en fonction des éléments de la base canonique. On obtient ensuite une expression explicite pour la fonction de Green dans le cas $n = 1$ (formules (2.29), (2.30)).

Le chapitre suivant est consacré à la définition et le calcul de la fonction τ . Le résultat technique principal est le théorème 1.3 qui donne les "projections à un point" sur un espace des valeurs au bord de certaines solutions locales de l'équation de Dirac. En utilisant ce théorème pour trivialisier le fibré \det^* , on obtient une formule explicite (3.24) pour la fonction τ . Dans le cas non trivial le plus simple, quand $n = 2$, τ est un déterminant de Fredholm (voir (3.25), (3.26)). Nous montrons également que les dérivées logarithmiques de la fonction τ s'expriment en fonction des coefficients des développements locaux des éléments la base canonique (proposition 2.3). Cela signifie que la définition de la fonction τ ne dépend pas de la localisation de l'opérateur de Dirac.

Finalement, dans le dernier chapitre, nous obtenons les équations de déformation isomonodromique, satisfaites par les coefficients des développements de la base canonique.

Deuxième partie: Limite continue du modèle d'Ising sur le cylindre

Dans le Chapitre 5 nous obtenons les équations différentielles satisfaites par les fonctions de corrélation paires du modèle d'Ising sur le cylindre. La méthode est directe et est basée sur les expressions exactes pour les facteurs de forme. A partir des équations (5.22)–(5.25) pour certaines combinaisons des fonctions de corrélation on obtient des jolies équations "déterminantes" (5.40)–(5.41) pour les corrélateurs eux-mêmes. On trouve aussi les représentations multilinéaires de Hirota de ces dernières équations.

Dans le Chapitre 6, en utilisant la notion du développement de produit d'opérateurs, on établit la correspondance entre le modèle d'Ising dans le volume fini et la théorie de déformation isomonodromique des solutions de l'équation de Dirac. Nous obtenons les équations satisfaites par les fonctions de corrélation d'ordre arbitraire et montrons comment la fonction τ s'exprime en fonction des corrélateurs.

Résultats de la thèse ont fait l'objet de trois articles [**16**, **17**, **18**].

Première partie

Fonctions τ de l'opérateur de Dirac
sur le cylindre

CHAPITRE 1

Base canonique des solutions de l'équation de Dirac

1. Définitions

Soit $a = (a_1, \dots, a_n)$ une collection de n points distincts sur le cylindre \mathcal{C} . Le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{C} \setminus a; x_0)$ est engendré par les classes d'homotopie de $n+1$ cycles $\gamma_0, \dots, \gamma_n$ représentés sur la Fig. 1, et agit sur le revêtement universel $\widetilde{\mathcal{C}} \setminus a$ par le relèvement des chemins. Fixons une représentation unitaire de dimension 1,

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \rho_\lambda : \pi_1(\mathcal{C} \setminus a; x_0) &\rightarrow U(1), & [\gamma_\nu] &\mapsto e^{-2\pi i \lambda_\nu}, & \nu &= 0, \dots, n, \\ \lambda_0 &\in \mathbb{R}, & \lambda_\nu &\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, & \nu &= 1, \dots, n. \end{aligned}$$

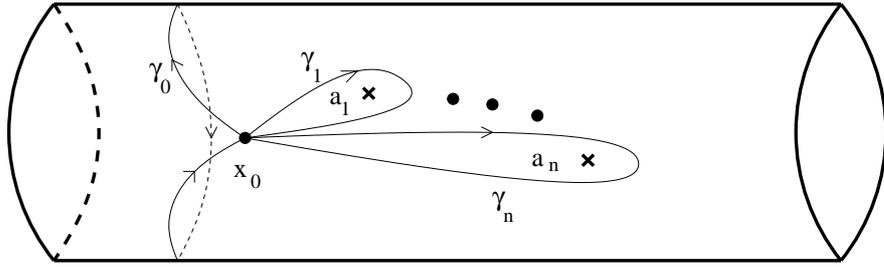


Fig. 1.

Remplaçons le cylindre par la bande $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \beta\}$, ses bords haut et bas étant identifiés. L'opérateur de Dirac sur $\widetilde{\mathcal{C}} \setminus a$ est induit par l'opérateur de Dirac sur \mathbb{R}^2 , qui s'écrit comme

$$(1.2) \quad D = \begin{pmatrix} \frac{m}{2} & -\partial_z \\ -\partial_{\bar{z}} & \frac{m}{2} \end{pmatrix},$$

où z, \bar{z} sont les coordonnées complexes standards,

$$\begin{cases} z = x + iy, & \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y), \\ \bar{z} = x - iy, & \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y). \end{cases}$$

Quoique nous *ne travaillerons pas* avec les fonctions holomorphes, à cause de la présence de $\partial_z, \partial_{\bar{z}}$ dans l'opérateur (1.2), il sera commode de noter la fonction de deux variables réelles $\psi(x, y)$ par $\psi(z)$.

Nous nous intéressons aux solutions multivaluées $\tilde{\psi} : \widetilde{\mathcal{C}} \setminus a \rightarrow \mathbb{C}^2$ de l'équation de Dirac, qui se transforment selon la représentation (1.1):

$$D\tilde{\psi}(z) = 0, \quad \tilde{\psi}(\gamma z) = \rho_\lambda([\gamma]) \cdot \tilde{\psi}(z).$$

Ce problème peut être formulé autrement. Fixons le système de coupures $b = (b_1, \dots, b_n; d_0, \dots, d_n)$ représenté sur la Fig. 2 et considérons les solutions de l'équation de Dirac sur $\mathcal{C} \setminus b$ qui se prolongent à travers les coupures en dehors des points a_1, \dots, a_n . Les prolongements à gauche et à droite à travers b_ν des solutions qui nous intéressent diffèrent du facteur $e^{2\pi i \lambda_\nu}$ ($\nu = 1, \dots, n$). Les prolongements à travers d_ν diffèrent de $\exp(2\pi i \sum_{k=0}^{\nu} \lambda_k)$, $\nu = 0, \dots, n$.

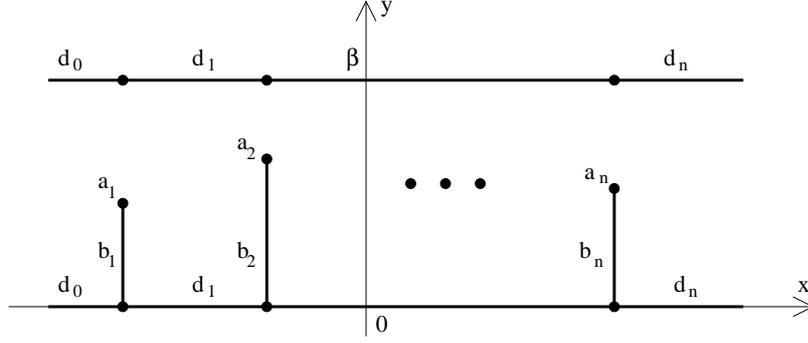


Fig. 2.

Pour décrire le comportement local de telles solutions au voisinage du point a_ν , considérons un disque ouvert B de centre a_ν et de rayon suffisamment petit. Introduisons dans B les coordonnées polaires

$$\begin{cases} r = |z - a_\nu|^{1/2}, \\ \varphi = \frac{1}{2i} \ln \frac{z - a_\nu}{\bar{z} - \bar{a}_\nu}, \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_z = \frac{1}{2} e^{-i\varphi} (\partial_r - \frac{i}{r} \partial_\varphi), \\ \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2} e^{i\varphi} (\partial_r + \frac{i}{r} \partial_\varphi). \end{cases}$$

L'opérateur de Dirac sur B s'écrit alors comme

$$D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} m & -e^{-i\varphi} (\partial_r - \frac{i}{r} \partial_\varphi) \\ -e^{i\varphi} (\partial_r + \frac{i}{r} \partial_\varphi) & m \end{pmatrix}.$$

Pour toute solution multivaluée ψ , la fonction $e^{-i\lambda_\nu \varphi} \psi$ est univaluée sur B , et peut donc être développée en série de Fourier:

$$\psi[a_\nu] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Psi_k(r) e^{i(k + \lambda_\nu)\varphi}.$$

En substituant cette série dans l'équation de Dirac, on peut montrer que les coefficients $\Psi_k(r) = \begin{pmatrix} \Psi_{k,1}(r) \\ \Psi_{k,2}(r) \end{pmatrix}$ vérifient les équations

$$\begin{aligned} m \Psi_{k,1}(r) &= \left(\frac{d}{dr} + \frac{k + 1 + \lambda_\nu}{r} \right) \Psi_{k+1,2}(r), \\ \left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \left(m^2 + \frac{(k + \lambda_\nu)^2}{r^2} \right) \right\} \Psi_{k,2}(r) &= 0. \end{aligned}$$

On a alors localement:

$$(1.3) \quad \psi[a_\nu] = \sum_{k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \{ c_k w_{k + \lambda_\nu}[a_\nu] + d_k w_{k - \lambda_\nu}^*[a_\nu] \}.$$

où

$$(1.4) \quad w_l[a_\nu] = \begin{pmatrix} e^{i(l-1/2)\varphi} I_{l-1/2}(mr) \\ e^{i(l+1/2)\varphi} I_{l+1/2}(mr) \end{pmatrix}, \quad w_l^*[a_\nu] = \begin{pmatrix} e^{-i(l+1/2)\varphi} I_{l+1/2}(mr) \\ e^{-i(l-1/2)\varphi} I_{l-1/2}(mr) \end{pmatrix},$$

$I_l(x)$ étant la fonction de Bessel modifiée de 1ère espèce d'ordre l .

Dans la suite, nous aurons besoin de contrôler le comportement singulier de la fonction ψ aux points a_ν . On va considérer deux types des restrictions:

- Supposons que $0 < \lambda_\nu < 1$ et que la fonction ψ est de carré intégrable au voisinage de a_ν . Si $|z| \rightarrow a_\nu$, l'asymptotique des solutions particulières est donnée par

$$w_l[a_\nu] \sim \begin{pmatrix} \frac{(m(z-a_\nu)/2)^{l-\frac{1}{2}}}{(l-\frac{1}{2})!} \\ \frac{(m(z-a_\nu)/2)^{l+\frac{1}{2}}}{(l+\frac{1}{2})!} \end{pmatrix} + \dots, \quad w_l^*[a_\nu] \sim \begin{pmatrix} \frac{(m(\bar{z}-\bar{a}_\nu)/2)^{l+\frac{1}{2}}}{(l+\frac{1}{2})!} \\ \frac{(m(\bar{z}-\bar{a}_\nu)/2)^{l-\frac{1}{2}}}{(l-\frac{1}{2})!} \end{pmatrix} + \dots,$$

où les factoriels sont définis comme $l! = \Gamma(l+1)$. Ainsi pour que la condition $\psi \in L^2[a_\nu]$ soit satisfaite, une moitié des coefficients dans (1.3) doit s'annuler,

$$(1.5) \quad \psi[a_\nu] = c_{-1/2} w_{-1/2+\lambda_\nu}[a_\nu] + \sum_{k>0} \{c_k w_{k+\lambda_\nu}[a_\nu] + d_k w_{k-\lambda_\nu}^*[a_\nu]\}.$$

- Soit $-\frac{1}{2} < \lambda_\nu < \frac{1}{2}$ et

$$(1.6) \quad \begin{pmatrix} (z-a_\nu)^{-\lambda_\nu} & 0 \\ 0 & (\bar{z}-\bar{a}_\nu)^{\lambda_\nu} \end{pmatrix} \psi \in H^1[a_\nu],$$

où l'espace de Sobolev $H^1[a_\nu]$ est formé par les fonctions univaluées qui sont de carré intégrable au voisinage de a_ν ainsi que leurs dérivées du premier ordre. Donc nécessairement

$$(1.7) \quad \psi[a_\nu] = \sum_{k>0} \{c_k w_{k+\lambda_\nu}[a_\nu] + d_k w_{k-\lambda_\nu}^*[a_\nu]\}.$$

Considérons maintenant les solutions multivaluées de l'équation de Dirac dont la monodromie est fixée par (1.1). De plus, nous demanderons qu'elles soient de carré intégrables quand $|x| \rightarrow \infty$ et vérifient (1.5) ou (1.7) au voisinage de *chaque* singularité. On notera les espaces des solutions du premier et du deuxième type par $\mathbf{W}^{a,\lambda}$ et $\widetilde{\mathbf{W}}^{a,\lambda}$ respectivement.

THÉORÈME 1.1. $\dim \mathbf{W}^{a,\lambda} \leq n$; $\dim \widetilde{\mathbf{W}}^{a,\lambda} = 0$.

■ Introduisons sur $\mathbf{W}^{a,\lambda}$ un produit scalaire défini positif:

$$(1.8) \quad \langle u, w \rangle = \overline{\langle w, u \rangle} = \frac{m^2}{2} \int_{\mathcal{C} \setminus a} \bar{u} \cdot w \, idz \wedge d\bar{z} = \frac{m^2}{2} \int_{\mathcal{C} \setminus a} (\bar{u}_1 w_1 + \bar{u}_2 w_2) \, idz \wedge d\bar{z}.$$

On note que l'expression intégrée est en effet une fonction sur $\mathcal{C} \setminus a$. A cause des conditions au bord, cette fonction est intégrable. De l'équation de Dirac sur $\mathcal{C} \setminus b$ on déduit

$$\begin{cases} \frac{m}{2} w_1 = \partial_z w_2, \\ \frac{m}{2} w_2 = \partial_{\bar{z}} w_1, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{m}{2} \bar{u}_1 = \partial_{\bar{z}} \bar{u}_2, \\ \frac{m}{2} \bar{u}_2 = \partial_z \bar{u}_1, \end{cases}$$

et alors

$$(1.9) \quad \frac{m}{2} (\bar{u}_1 w_1 + \bar{u}_2 w_2) \, dz \wedge d\bar{z} = -d(\bar{u}_2 w_1 \, dz) = d(\bar{u}_1 w_2 \, d\bar{z}).$$

Notons $D_\varepsilon(a_\nu)$ le disque de rayon ε centré en a_ν . En utilisant la formule (1.9) et le théorème de Stokes, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle u, w \rangle &= im \sum_{\nu=1}^n \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\partial D_\varepsilon(a_\nu)} \bar{u}_2 w_1 dz = \\
&= im \sum_{\nu=1}^n \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\partial D_\varepsilon(a_\nu)} \left(\overline{c_{-1/2}^{(\nu)}(u)} \frac{(m\bar{z}/2)^{\lambda_\nu}}{\lambda_\nu!} + \dots + \overline{d_{1/2}^{(\nu)}(u)} \frac{(mz/2)^{-\lambda_\nu}}{(-\lambda_\nu)!} + \dots \right) \times \\
&\quad \times \left(c_{-1/2}^{(\nu)}(w) \frac{(mz/2)^{\lambda_\nu-1}}{(\lambda_\nu-1)!} + \dots + d_{1/2}^{(\nu)}(w) \frac{(m\bar{z}/2)^{1-\lambda_\nu}}{(1-\lambda_\nu)!} + \dots \right) dz = \\
(1.10) \quad &= -4 \sum_{\nu=1}^n \overline{d_{1/2}^{(\nu)}(u)} c_{-1/2}^{(\nu)}(w) \sin \pi \lambda_\nu.
\end{aligned}$$

De façon analogue,

$$\begin{aligned}
\langle u, w \rangle &= -im \sum_{\nu=1}^n \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\partial D_\varepsilon(a_\nu)} \bar{u}_1 w_2 d\bar{z} = \\
&= -im \sum_{\nu=1}^n \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\partial D_\varepsilon(a_\nu)} \left(\overline{c_{-1/2}^{(\nu)}(u)} \frac{(m\bar{z}/2)^{\lambda_\nu-1}}{(\lambda_\nu-1)!} + \dots + \overline{d_{1/2}^{(\nu)}(u)} \frac{(mz/2)^{1-\lambda_\nu}}{(1-\lambda_\nu)!} + \dots \right) \times \\
&\quad \times \left(c_{-1/2}^{(\nu)}(w) \frac{(mz/2)^{\lambda_\nu}}{\lambda_\nu!} + \dots + d_{1/2}^{(\nu)}(w) \frac{(m\bar{z}/2)^{-\lambda_\nu}}{(-\lambda_\nu)!} + \dots \right) d\bar{z} = \\
(1.11) \quad &= -4 \sum_{\nu=1}^n \overline{c_{-1/2}^{(\nu)}(u)} d_{1/2}^{(\nu)}(w) \sin \pi \lambda_\nu = \overline{\langle w, u \rangle}.
\end{aligned}$$

Si la dimension de $\mathbf{W}^{a,\lambda}$ était plus grande que n , on aurait pu trouver une solution $v \in \mathbf{W}^{a,\lambda}$ telle que $c_{-1/2}^{(\nu)}(v) = 0$ pour tout $\nu = 1, \dots, n$. Comme la norme de cette solution est égale à 0, v s'annule identiquement, d'où la première partie du théorème.

Remarquons que les solutions du deuxième type sont de carré intégrable par rapport au produit scalaire (1.8). On peut montrer de manière analogue que précédemment que $\langle v, v \rangle = 0$ pour tout $v \in \widetilde{\mathbf{W}}^{a,\lambda}$. Par conséquent, $\dim \widetilde{\mathbf{W}}^{a,\lambda} = 0$. ■

Supposons¹ que $\dim \mathbf{W}^{a,\lambda} = n$. On peut alors fixer la base canonique $\{\mathbf{w}_\mu\}_{\mu=1,\dots,n}$ de cet espace en choisissant $c_{-1/2}^{(\nu)}(\mathbf{w}_\mu) = \delta_{\mu\nu}$:

$$(1.12) \quad \mathbf{w}_\mu[a_\nu] = \delta_{\mu\nu} w_{-1/2+\lambda_\nu}[a_\nu] + \sum_{k>0} \left\{ c_k^{(\nu)}(\mathbf{w}_\mu) w_{k+\lambda_\nu}[a_\nu] + d_k^{(\nu)}(\mathbf{w}_\mu) w_{k-\lambda_\nu}^*[a_\nu] \right\}$$

Remarque. Calculons le produit de deux éléments de la base canonique de deux façons différentes — par la formule (1.10) et sa “conjuguée” (1.11):

$$(1.13) \quad \overline{\langle \mathbf{w}_\mu, \mathbf{w}_\nu \rangle} = -4 \overline{d_{1/2}^{(\nu)}(\mathbf{w}_\mu)} \sin \pi \lambda_\nu = -4 d_{1/2}^{(\mu)}(\mathbf{w}_\nu) \sin \pi \lambda_\mu.$$

1. La preuve utilise certaine technique d'analyse fonctionnelle et est très proche de la preuve du Théorème 3.2.4 de [32].

On obtient ainsi quelques relations algébriques satisfaites par les coefficients $d_{1/2}^{(\nu)}(\mathbf{w}_\mu)$. Nous en déduisons plus loin des relations additionnelles et les utiliserons pour construire les équations des déformations isomonodromiques.

Il existe une illustration instructive du théorème précédent dans le plan, pour $n = 1$. Dans ce cas, on peut supposer que la singularité se situe en 0. Alors chaque solution $\psi \in \mathbf{W}^{0,\lambda}$ est représentée par le développement

$$\psi = c_{-1/2} w_{-1/2+\lambda}[0] + \sum_{k>0} \{c_k w_{k+\lambda}[0] + d_k w_{k-\lambda}^*[0]\},$$

qui reste vrai sur le plan avec époiné $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tout entier. Ce développement sera de carré intégrable à l'infini si et seulement si

$$\begin{cases} c_k = 0 \text{ pour } k > 0, \\ d_k = 0 \text{ pour } k > 1, \\ d_{1/2} = -c_{-1/2}, \end{cases}$$

puisque les combinaisons linéaires des solutions particulières (1.4), qui sont intégrables à l'infini, s'engendrent par

$$\hat{w}_l[0] = w_{-l}^*[0] - w_l[0].$$

Alors, comme on aurait pu s'y attendre, l'espace $\mathbf{W}^{0,\lambda}$ est engendré par un seul élément de la base canonique

$$\mathbf{w} = w_{-1/2+\lambda}[0] - w_{1/2-\lambda}[0] = -\hat{w}_{1/2-\lambda}[0].$$

Avec certains efforts, il est aussi possible de trouver une formule explicite pour la base canonique sur le cylindre avec un point marqué. On résoudra ce problème dans le paragraphe suivant en utilisant une généralisation de la méthode proposée par Fonseca et Zamolodchikov [7].

2. Base canonique sur le cylindre avec un point marqué

On cherche la solution ψ de l'équation de Dirac sur la bande $0 < y < \beta$

$$\begin{pmatrix} \frac{m}{2} & -\partial_z \\ -\partial_{\bar{z}} & \frac{m}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0,$$

qui satisfait aux conditions suivantes:

- Les prolongements de cette solution au demi-plan gauche et droit sont quasipériodiques en y ,

$$(1.14) \quad \psi(x, y + \beta) = e^{2\pi i \lambda_0} \psi(x, y) \text{ pour } x < 0,$$

$$(1.15) \quad \psi(x, y + \beta) = e^{2\pi i \tilde{\lambda}} \psi(x, y) \text{ pour } x > 0,$$

où $\tilde{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1$.

- La condition de normalisation

$$(1.16) \quad \lim_{|z| \rightarrow 0} (mz/2)^{1-\lambda_1} \psi_1(x, y) = \frac{1}{\Gamma(\lambda_1)},$$

où la puissance fractionnaire de z est définie par

$$z^{1-\lambda_1} = e^{(1-\lambda_1) \ln z}, \quad 0 < \text{Im}(\ln z) < 2\pi.$$

Le Théorème 1.1 montre que les propriétés énumérées ci-dessus déterminent la solution de façon unique.

La fonction $e^{-2\pi i\lambda_0 y/\beta}\psi$ est périodique dans le demi-plan gauche et donc, là, elle peut être développée en série de Fourier. En substituant cette série dans l'équation de Dirac, on obtient la forme générale de la solution pour $x < 0$,

$$(1.17) \quad \psi_{x<0}(x,y) = -A \sum_{n \in \mathbb{Z} + \lambda_0} \frac{G(\theta_n)}{m\beta \cosh \theta_n} e^{mx \cosh \theta_n + imy \sinh \theta_n} \begin{pmatrix} e^{\theta_n} \\ 1 \end{pmatrix},$$

où $\sinh \theta_n = \frac{2\pi}{m\beta}n$. Le facteur $1/(m\beta \cosh \theta_n)$ est introduit pour simplifier les expressions à venir. De manière analogue, on déduit la forme générale de la solution dans le demi-plan droit:

$$(1.18) \quad \psi_{x>0}(x,y) = A \sum_{n \in \mathbb{Z} - \bar{\lambda}} \frac{H(\theta_n)}{m\beta \cosh \theta_n} e^{-mx \cosh \theta_n - imy \sinh \theta_n} \begin{pmatrix} -e^{\theta_n} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

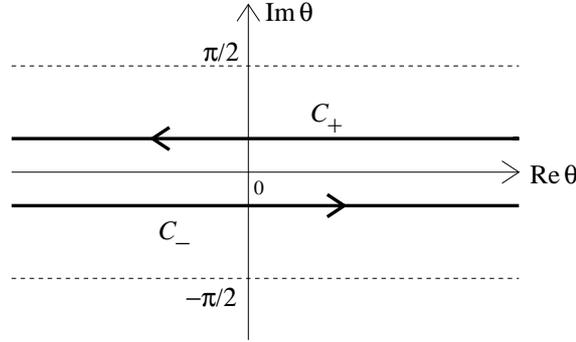


Fig. 3.

Bien sûr, les fonctions $G(\theta)$ et $H(\theta)$ ne doivent pas croître trop rapidement quand $\theta \rightarrow \pm\infty$ pour que les séries (1.17) et (1.18) soient convergentes. De plus, nous supposons que $G(\theta)$ et $H(\theta)$ sont analytiques dans la bande $-\frac{\pi}{2} - \delta < \text{Im } \theta < \frac{\pi}{2} + \delta$, $\delta > 0$. Dans ce cas, les représentations (1.17) et (1.18) peuvent être décrites par les intégrales de contour (Fig. 3)

$$\psi_{x<0}(x,y) = A \int_{C_- \cup C_+} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{G(\theta)}{1 - e^{im\beta \sinh \theta - 2\pi i\lambda_0}} e^{mx \cosh \theta + imy \sinh \theta} \begin{pmatrix} e^\theta \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\psi_{x>0}(x,y) = A \int_{C_- \cup C_+} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{H(\theta)}{1 - e^{-im\beta \sinh \theta - 2\pi i\bar{\lambda}}} e^{-mx \cosh \theta - imy \sinh \theta} \begin{pmatrix} -e^\theta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si $0 < y < \beta$, on peut déformer les contours C_+ et C_- continûment en $\text{Im } \theta = \frac{\pi}{2}$ et $\text{Im } \theta = -\frac{\pi}{2}$ respectivement. Ceci permet de construire les prolongements de $\psi_{x<0}(x,y)$ et $\psi_{x>0}(x,y)$ sur la bande entière:

$$\psi_{x<0}(x,y) = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{2\pi} \left\{ -\frac{G(\theta + i\pi/2)e^{imx \sinh \theta - my \cosh \theta}}{1 - e^{-m\beta \cosh \theta - 2\pi i\lambda_0}} \begin{pmatrix} ie^\theta \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{G(\theta - i\pi/2)e^{-imx \sinh \theta + my \cosh \theta}}{1 - e^{m\beta \cosh \theta - 2\pi i\lambda_0}} \begin{pmatrix} -ie^\theta \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\psi_{x>0}(x,y) = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{2\pi} \left\{ -\frac{H(\theta + i\pi/2)e^{-imx \sinh \theta + my \cosh \theta}}{1 - e^{m\beta \cosh \theta - 2\pi i\tilde{\lambda}}} \begin{pmatrix} -ie^\theta \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{H(\theta - i\pi/2)e^{imx \sinh \theta - my \cosh \theta}}{1 - e^{-m\beta \cosh \theta - 2\pi i\tilde{\lambda}}} \begin{pmatrix} ie^\theta \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ces prolongements coïncident si deux relations fonctionnelles entre $G(\theta)$ et $H(\theta)$ sont vraies:

$$(1.19) \quad \frac{G(\theta + i\pi/2)}{H(\theta - i\pi/2)} = -\frac{1 - e^{-m\beta \cosh \theta - 2\pi i\lambda_0}}{1 - e^{-m\beta \cosh \theta - 2\pi i\tilde{\lambda}}},$$

$$(1.20) \quad \frac{G(\theta - i\pi/2)}{H(\theta + i\pi/2)} = -e^{2\pi i\lambda_1} \frac{1 - e^{-m\beta \cosh \theta + 2\pi i\lambda_0}}{1 - e^{-m\beta \cosh \theta + 2\pi i\tilde{\lambda}}}.$$

Pour trouver les solutions de ces équations, on a besoin du lemme suivant.

LEMME 2.1. *Soient $f(\theta)$ et $g(\theta)$ deux fonctions analytiques dans la bande $|\operatorname{Im} \theta| < \delta$. Si dans cette bande $|f(\theta)| = O\left(\frac{1}{|\operatorname{Re} \theta|^2}\right)$ et $|g(\theta)| = O(1)$ pour $\operatorname{Re} \theta \rightarrow \pm\infty$, les fonctions*

$$(1.21) \quad \nu(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi} \tanh(\theta' - \theta) f(\theta'), \quad \eta(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi} \operatorname{sech}(\theta' - \theta) g(\theta'), \quad \theta \in \mathbb{R}$$

se prolongent analytiquement sur $|\operatorname{Im} \theta| < \frac{\pi}{2} + \delta$. Si de plus $|\operatorname{Im} \theta| < \delta$, ces prolongements vérifient les relations

$$(1.22) \quad \nu\left(\theta + \frac{i\pi}{2}\right) - \nu\left(\theta - \frac{i\pi}{2}\right) = -if(\theta), \quad \eta\left(\theta + \frac{i\pi}{2}\right) + \eta\left(\theta - \frac{i\pi}{2}\right) = g(\theta).$$

■ Il est clair que les fonctions $\nu(\theta)$ et $\eta(\theta)$, définies par (1.21), sont analytiques dans la bande $|\operatorname{Im} \theta| < \frac{\pi}{2}$. On peut définir leurs prolongements sur $|\operatorname{Im} \theta| < \frac{\pi}{2} + \delta$ comme ceci:

$$\begin{aligned} \nu(\theta) \Big|_{\operatorname{Im} \theta = \pm \frac{\pi}{2}} &= \mp \frac{i}{2} f\left(\theta \mp \frac{i\pi}{2}\right) + P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi} \coth\left(\theta' - \theta \pm \frac{i\pi}{2}\right) f(\theta'), \\ \eta(\theta) \Big|_{\operatorname{Im} \theta = \pm \frac{\pi}{2}} &= \frac{1}{2} g\left(\theta \mp \frac{i\pi}{2}\right) \pm iP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi} \operatorname{csch}\left(\theta' - \theta \pm \frac{i\pi}{2}\right) g(\theta'), \\ \nu(\theta) \Big|_{\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} \theta < \frac{\pi}{2} + \delta} &= -if\left(\theta - \frac{i\pi}{2}\right) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi} \tanh(\theta' - \theta) f(\theta'), \\ \eta(\theta) \Big|_{\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} \theta < \frac{\pi}{2} + \delta} &= g\left(\theta - \frac{i\pi}{2}\right) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi} \operatorname{sech}(\theta' - \theta) g(\theta'), \\ \nu(\theta) \Big|_{-\frac{\pi}{2} - \delta < \operatorname{Im} \theta < -\frac{\pi}{2}} &= if\left(\theta + \frac{i\pi}{2}\right) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi} \tanh(\theta' - \theta) f(\theta'), \\ \eta(\theta) \Big|_{-\frac{\pi}{2} - \delta < \operatorname{Im} \theta < -\frac{\pi}{2}} &= g\left(\theta + \frac{i\pi}{2}\right) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi} \operatorname{sech}(\theta' - \theta) g(\theta'), \end{aligned}$$

où, dans les deux premières expressions, le symbole P signifie la valeur principale de Cauchy. On en déduit le résultat. ■

Si nous écrivons les fonctions $G(\theta)$ et $H(\theta)$ sous la forme

$$(1.23) \quad \begin{cases} G(\theta) = -\exp\left(\pi i \lambda_1 - \lambda_1 \theta + \frac{i}{2} \nu(\theta) + \frac{1}{2} \eta(\theta)\right), \\ H(\theta) = \exp\left(-\lambda_1 \theta + \frac{i}{2} \nu(\theta) - \frac{1}{2} \eta(\theta)\right), \end{cases}$$

les relations fonctionnelles (1.19) et (1.20) se réduisent à (1.22), le choix des fonctions $f(\theta)$ et $g(\theta)$ étant

$$(1.24) \quad f(\theta) = \ln \frac{1 - e^{-m\beta \cosh \theta - 2\pi i \lambda_0}}{1 - e^{-m\beta \cosh \theta + 2\pi i \lambda_0}} - \ln \frac{1 - e^{-m\beta \cosh \theta - 2\pi i \tilde{\lambda}}}{1 - e^{-m\beta \cosh \theta + 2\pi i \tilde{\lambda}}},$$

$$(1.25) \quad g(\theta) = \ln \frac{(1 - e^{-m\beta \cosh \theta + 2\pi i \lambda_0})(1 - e^{-m\beta \cosh \theta - 2\pi i \lambda_0})}{(1 - e^{-m\beta \cosh \theta + 2\pi i \tilde{\lambda}})(1 - e^{-m\beta \cosh \theta - 2\pi i \tilde{\lambda}})}.$$

Les branches des logarithmes dans (1.24) et (1.25) sont fixées de telle manière que pour $\theta \in \mathbb{R}$ leurs parties imaginaires sont dans l'intervalle $(-\pi; \pi)$.

Les formules (1.17), (1.18), (1.21) et (1.23)–(1.25) fournissent une solution de l'équation de Dirac sur le cylindre avec un point marqué, avec la monodromie définie ci-dessus (on peut revenir au début du paragraphe et vérifier que toutes les manipulations formelles effectuées avec les fonctions $G(\theta)$ et $H(\theta)$ peuvent être effectivement faites). Il nous reste une seule chose à faire: vérifier la condition de normalisation (1.16).

Prenons par exemple le développement (1.18) et appliquons la formule de sommation de Poisson:

$$\psi_{x>0}(x, y) = A \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{2\pi} H(\theta) e^{-mx \cosh \theta - im(y+k\beta) \sinh \theta - 2\pi i k \tilde{\lambda}} \begin{pmatrix} -e^\theta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'asymptotique de ψ pour $|z| \rightarrow 0$ est déterminée par le premier terme ($k = 0$). Puisque $\lambda_1 > 0$, la contribution principale à l'intégrale provient des grandes valeurs de $|\theta|$. Un calcul direct montre que pour $|z| \rightarrow 0$, on a

$$\psi_1(x, y) \sim -\frac{A}{2\pi} e^{-\pi i \lambda_1 / 2 + i \nu_\infty / 2} \Gamma(1 - \lambda_1) (mz/2)^{\lambda_1 - 1},$$

où

$$(1.26) \quad \nu_\infty = \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \nu(\theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \left(\ln \frac{1 - e^{-m\beta \cosh \theta - 2\pi i \lambda_0}}{1 - e^{-m\beta \cosh \theta + 2\pi i \lambda_0}} - \ln \frac{1 - e^{-m\beta \cosh \theta - 2\pi i \tilde{\lambda}}}{1 - e^{-m\beta \cosh \theta + 2\pi i \tilde{\lambda}}} \right).$$

Ainsi la solution construite et l'élément de la base canonique diffèrent seulement d'une constante qui peut toujours être ramenée à 1 par un choix approprié de A . En résumant tous ces résultats, on arrive au

THÉORÈME 2.2. *L'élément de la base canonique sur le cylindre ayant une seule singularité est donné par les expressions suivantes:*

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(x, y) &= A \sum_{n \in \mathbb{Z} + \lambda_0} \frac{e^{\pi i \lambda_1 + \frac{i}{2} \nu(\theta_n) + \frac{1}{2} \eta(\theta_n)}}{m\beta \cosh \theta_n} e^{-\lambda_1 \theta_n + mx \cosh \theta_n + imy \sinh \theta_n} \begin{pmatrix} e^{\theta_n} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ pour } x < 0, \\ \mathbf{w}(x, y) &= A \sum_{n \in \mathbb{Z} - \tilde{\lambda}} \frac{e^{\frac{i}{2} \nu(\theta_n) - \frac{1}{2} \eta(\theta_n)}}{m\beta \cosh \theta_n} e^{-\lambda_1 \theta_n - mx \cosh \theta_n - imy \sinh \theta_n} \begin{pmatrix} -e^{\theta_n} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ pour } x > 0, \end{aligned}$$

où les fonctions $\nu(\theta)$, $\eta(\theta)$ sont définies par

$$\nu(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi} \tanh(\theta' - \theta) \left(\ln \frac{1 - e^{-m\beta \cosh \theta' - 2\pi i \lambda_0}}{1 - e^{-m\beta \cosh \theta' + 2\pi i \lambda_0}} - \ln \frac{1 - e^{-m\beta \cosh \theta' - 2\pi i \bar{\lambda}}}{1 - e^{-m\beta \cosh \theta' + 2\pi i \bar{\lambda}}} \right),$$

$$\eta(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi} \operatorname{sech}(\theta' - \theta) \ln \frac{(1 - e^{-m\beta \cosh \theta' + 2\pi i \lambda_0})(1 - e^{-m\beta \cosh \theta' - 2\pi i \lambda_0})}{(1 - e^{-m\beta \cosh \theta' + 2\pi i \bar{\lambda}})(1 - e^{-m\beta \cosh \theta' - 2\pi i \bar{\lambda}})},$$

et la constante de normalisation vaut $A = -2 \sin \pi \lambda_1 e^{-i\nu_\infty/2}$.

CHAPITRE 2

Fonction de Green de l'opérateur de Dirac

1. Fonction de Green pour $n = 0$

Calculons d'abord la fonction de Green sur le cylindre sans singularité. Dans ce cas, le domaine de l'opérateur de Dirac est formé des fonctions quasipériodiques $\psi(x, y + \beta) = e^{2\pi i \lambda_0} \psi(x, y)$ et de carré intégrable dans la bande $S = \{(x, y) : 0 < y < \beta\}$. Après transformation de Fourier

$$\hat{\psi}(\xi_x, \xi_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\beta} dy \psi(x, y) e^{-i(x\xi_x + y\xi_y)}, \quad \xi_x \in \mathbb{R}, \xi_y \in \frac{2\pi}{\beta}(\mathbb{Z} + \lambda_0)$$

l'opérateur de Dirac et son inverse s'écrivent comme

$$D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} m & -i\bar{\xi} \\ -i\xi & m \end{pmatrix}, \quad D^{-1} = \frac{2}{m^2 + |\xi|^2} \begin{pmatrix} m & i\bar{\xi} \\ i\xi & m \end{pmatrix},$$

où $\xi = \xi_x + i\xi_y$, $\bar{\xi} = \xi_x - i\xi_y$. Puisque la transformation inverse s'effectue par

$$\psi(x, y) = \frac{2\pi}{\beta} \sum_{\xi_y} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_x \hat{\psi}(\xi_x, \xi_y) e^{i(x\xi_x + y\xi_y)},$$

on obtient la formule suivante pour la fonction de Green $G_0(x - x', y - y')$:

$$(2.1) \quad G_0(x, y) = \frac{1}{\pi\beta} \sum_{\xi_y} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_x \begin{pmatrix} m & i\bar{\xi} \\ i\xi & m \end{pmatrix} \frac{e^{i(x\xi_x + y\xi_y)}}{m^2 + |\xi|^2}.$$

Dans la suite, il sera commode d'utiliser deux autres représentations de la fonction de Green. Choisissons par exemple $x > 0$ et calculons les intégrales dans (2.1):

$$(2.2) \quad G_0(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z} - \lambda_0} \frac{e^{-mx \cosh \theta_n - imy \sinh \theta_n}}{\beta \cosh \theta_n} \begin{pmatrix} 1 & -e^{\theta_n} \\ -e^{-\theta_n} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$(2.3) \quad = m \int_{C_- \cup C_+} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{e^{-mx \cosh \theta - imy \sinh \theta}}{1 - e^{-im\beta \sinh \theta - 2\pi i \lambda_0}} \begin{pmatrix} 1 & -e^{\theta} \\ -e^{-\theta} & 1 \end{pmatrix}.$$

De façon analogue, pour $x < 0$ on a

$$(2.4) \quad G_0(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z} + \lambda_0} \frac{e^{mx \cosh \theta_n + imy \sinh \theta_n}}{\beta \cosh \theta_n} \begin{pmatrix} 1 & e^{\theta_n} \\ e^{-\theta_n} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$(2.5) \quad = -m \int_{C_- \cup C_+} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{e^{mx \cosh \theta + imy \sinh \theta}}{1 - e^{im\beta \sinh \theta - 2\pi i \lambda_0}} \begin{pmatrix} 1 & e^{\theta} \\ e^{-\theta} & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous aurons aussi besoin de l'asymptotique de ces expressions pour $x, y \rightarrow 0$. Pour la trouver, réécrivons (2.1) en utilisant la formule de Poisson:

$$(2.6) \quad G_0(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_x d\xi_y \begin{pmatrix} m & i\bar{\xi} \\ i\xi & m \end{pmatrix} \frac{e^{i(x\xi_x + y\xi_y) + ik(\beta\xi_y - 2\pi\lambda_0)}}{m^2 + |\xi|^2}.$$

Le terme principal de l'asymptotique provient de l'intégrale correspondant à $k = 0$ qui représente la fonction de Green sur le plan. Il est immédiat de vérifier que si $|z| \rightarrow 0$, alors

$$G_0(x, y) \sim -\frac{m}{\pi} \begin{pmatrix} \ln |z| & 1/z \\ 1/\bar{z} & \ln |z| \end{pmatrix}.$$

Il est très commode d'écrire la fonction de Green sous la forme

$$G_0(z) = 2G(z)J, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$

puisque les lignes de $G(z)$ vérifient l'équation de Dirac (au lieu de son équation adjointe, satisfaite par les lignes de $G_0(z)$).

2. Propriétés générales de la fonction de Green

Nous commençons par définir le domaine $\mathcal{D}^{a, \lambda}$ de l'opérateur de Dirac $D^{a, \lambda}$. La fonction $\psi \in \mathcal{D}^{a, \lambda}$ doit avoir les monodromies $e^{2\pi i \lambda_\nu}$ ($\nu = 0, \dots, n$), être de carré intégrable quand $|x| \rightarrow \infty$, et vérifier la condition (voir (1.6))

$$(2.7) \quad \begin{pmatrix} (z - a_\nu)^{-\lambda_\nu} & 0 \\ 0 & (\bar{z} - \bar{a}_\nu)^{\lambda_\nu} \end{pmatrix} \psi[a_\nu] \in H^1[a_\nu], \quad \nu = 1, \dots, n.$$

Rappelons que $H^1[a_\nu]$ est l'espace des fonctions qui sont de carré intégrable au voisinage de a_ν ainsi que leurs dérivées du premier ordre. Comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent, l'équation de Dirac $D^{a, \lambda} \psi = 0$ n'a pas de solution dans $\mathcal{D}^{a, \lambda}$. On peut donc penser à $D^{a, \lambda}$ comme étant un opérateur inversible. Le noyau de l'opérateur inverse est appelé la fonction de Green $G^{a, \lambda}$. Plus précisément, on suppose que la solution de

$$D^{a, \lambda} \psi = \varphi,$$

peut être écrite sous la forme

$$(2.8) \quad \psi(z) = \int_{\mathcal{C} \setminus b} G^{a, \lambda}(z, z') J \varphi(z') idz' \wedge d\bar{z}'.$$

Alors, on peut essayer de définir la fonction de Green par les conditions suivantes:

- Les colonnes de $G^{a, \lambda}(z, z')$ doivent vérifier l'équation de Dirac $D_z G^{a, \lambda}_{\cdot, j}(z, z') = 0$ pour tout $z \in \mathcal{C} \setminus (b \cup \{z'\})$. Ce sont des fonctions de carré intégrable quand $|x| \rightarrow \infty$, ayant la monodromie $e^{2\pi i \lambda_\nu}$ ($\nu = 0, \dots, n$) et le comportement (2.7) dans chaque singularité. Ainsi

$$(2.9) \quad G^{a, \lambda}_{\cdot, j}(z, z')[a_\nu] = \sum_{k > 0} \left\{ a_{k, j}^{(\nu)}(z') w_{k + \lambda_\nu}[a_\nu] + b_{k, j}^{(\nu)}(z') w_{k - \lambda_\nu}^*[a_\nu] \right\}.$$

- L'opérateur intégral à noyau $D_z^{a, \lambda} G^{a, \lambda}(z, z')$ doit "découper" les valeurs de la fonction $\varphi(z)$. Alors le comportement singulier de $G^{a, \lambda}(z, z')$ pour $z \rightarrow z'$ et celui de la fonction de Green sur le cylindre sans singularité coïncident:

$$(2.10) \quad G^{a, \lambda}(z, z') - G(z, z') \in C^1(z \rightarrow z').$$

Remarque. Supposons que la fonction définie par ces conditions existe. Alors elle est *unique*, puisque les colonnes de la différence de deux telles fonctions sont évidemment dans $\widetilde{W}^{a,\lambda}$.

Déterminons maintenant de quelle manière $G^{a,\lambda}(z, z')$ dépend de son deuxième argument. Pour faire cela, définissons la matrice $F^{a,\lambda}(z, z')$ satisfaisant les conditions:

- Les lignes $F^{a,\lambda}(z, z')$ sont des fonctions de carré intégrable quand $|x| \rightarrow \infty$, et qui vérifient l'équation de Dirac $D_{z'} G_{j,\cdot}^{a,\lambda}(z, z') = 0$ pour tout $z' \in \mathcal{C} \setminus (b \cup \{z\})$. Elles ont la monodromie inverse $e^{-2\pi i \lambda_\nu}$ ($\nu = 0, \dots, n$), et leur comportement aux points de branchement est fixé par (2.7):

$$(2.11) \quad F_{j,\cdot}^{a,\lambda}(z, z')[a_\nu] = \sum_{k>0} \left\{ \alpha_{k,j}^{(\nu)}(z) w_{k-\lambda_\nu}[a_\nu] + \beta_{k,j}^{(\nu)}(z) w_{k+\lambda_\nu}^*[a_\nu] \right\}.$$

- Le comportement singulier de $F^{a,\lambda}(z, z')$ pour $z' \rightarrow z$ coïncide avec celui de la fonction de Green “non-perturbée”,

$$(2.12) \quad F^{a,\lambda}(z, z') - G(z, z') \in C^1(z' \rightarrow z).$$

En supposant l'existence de $G^{a,\lambda}(z, z')$ (ou $F^{a,\lambda}(z, z')$), démontrons le théorème suivant:

THÉORÈME 2.1. $G^{a,\lambda}(z, z') = F^{a,\lambda}(z, z')$.

■ On obtient d'abord une relation auxiliaire: si $f(z)$ et $g(z)$ sont des fonctions lisses sur un ouvert $U \subset \mathcal{C}$, alors

$$(2.13) \quad \{Df \cdot Jg - f \cdot JDg\} dz \wedge d\bar{z} = \{\partial_z(f_2g_2) - \partial_{\bar{z}}(f_1g_1)\} dz \wedge d\bar{z} = d(f_1g_1 dz + f_2g_2 d\bar{z}).$$

Choisissons maintenant deux points distincts $x, y \notin b$ et posons

$$\begin{cases} f(z) = F_{i,\cdot}^{a,\lambda}(x, z), \\ g(z) = G_{\cdot,j}^{a,\lambda}(z, y), \end{cases}$$

U étant le complémentaire de l'union des disques $\left(\bigcup_{\nu=1}^n D_\varepsilon(a_\nu)\right) \cup D_\varepsilon(x) \cup D_\varepsilon(y)$ et de deux bandes: $S'_\varepsilon = \{(x, y) : 0 \leq y < \varepsilon\}$ et $S''_\varepsilon = \{(x, y) : \beta - \varepsilon < y \leq \beta\}$. En intégrant (2.13) sur cet ouvert et en utilisant le théorème de Stokes, on obtient

$$0 = \sum_{\nu=1}^n \oint_{\partial D_\varepsilon(a_\nu)} (f_1g_1 dz + f_2g_2 d\bar{z}) + \oint_{\partial D_\varepsilon(x) \cup \partial D_\varepsilon(y)} (f_1g_1 dz + f_2g_2 d\bar{z}) + \oint_{\partial S'_\varepsilon \cup \partial S''_\varepsilon} (f_1g_1 dz + f_2g_2 d\bar{z}).$$

L'expression sous ces intégrales est univaluée sur $\mathcal{C} \setminus a$, et alors par passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ la dernière intégrale s'annule. Les intégrales sur $\partial D_\varepsilon(a_\nu)$ sont nulles aussi, ce qui peut être vérifié en substituant à la place de $G_{\cdot,j}^{a,\lambda}(z, y)$ et $F_{i,\cdot}^{a,\lambda}(x, z)$ leurs développements locaux, (2.9) et (2.11). Il reste à calculer

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \oint_{\partial D_\varepsilon(x)} F_{i,1}^{a,\lambda}(x, z) G_{1,j}^{a,\lambda}(z, y) dz + \oint_{\partial D_\varepsilon(x)} F_{i,2}^{a,\lambda}(x, z) G_{2,j}^{a,\lambda}(z, y) d\bar{z} \right\} = \\ = \frac{i}{2\pi} \left\{ -2\pi i \delta_{i1} G_{1,j}^{a,\lambda}(x, y) - 2\pi i \delta_{i2} G_{2,j}^{a,\lambda}(x, y) \right\} = G_{i,j}^{a,\lambda}(x, y), \end{aligned}$$

et l'expression analogue,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \oint_{\partial D_\varepsilon(y)} F_{i,1}^{a,\lambda}(x, z) G_{1,j}^{a,\lambda}(z, y) dz + \oint_{\partial D_\varepsilon(y)} F_{i,2}^{a,\lambda}(x, z) G_{2,j}^{a,\lambda}(z, y) d\bar{z} \right\} = -F_{i,j}^{a,\lambda}(x, y).$$

Ainsi nous obtenons finalement que $G_{i,j}^{a,\lambda}(x,y) = F_{i,j}^{a,\lambda}(x,y)$. ■

Remarque. Puisque les colonnes et les lignes de la fonction de Green $G^{a,\lambda}(z,z')$ vérifient l'équation de Dirac en z et z' respectivement, les dérivées $\partial_{a_\mu} G^{a,\lambda}(z,z')$ et $\partial_{\bar{a}_\mu} G^{a,\lambda}(z,z')$ la vérifient aussi. Ces dérivées ne sont pas singulières quand $z \rightarrow z'$. Par contre, leurs développements locaux sont un peu plus divergents que (2.9) ou (2.11); des relations

$$\begin{cases} \partial_z w_l = \frac{m}{2} w_{l-1}, & \partial_z w_l^* = \frac{m}{2} w_{l+1}^*, \\ \partial_{\bar{z}} w_l = \frac{m}{2} w_{l+1}, & \partial_{\bar{z}} w_l^* = \frac{m}{2} w_{l-1}^* \end{cases}$$

on déduit

$$(2.14) \quad \partial_{a_\mu} G_{j,\cdot}^{a,\lambda}(z,z')[a_\nu] = -\frac{m}{2} \delta_{\mu\nu} \alpha_{1/2,j}^{(\nu)}(z) w_{-1/2-\lambda_\nu} + \sum_{k>0} \left\{ \gamma_{k,j}^{(\nu)}(z) w_{k-\lambda_\nu} + \tilde{\gamma}_{k,j}^{(\nu)}(z) w_{k+\lambda_\nu}^* \right\},$$

$$(2.15) \quad \partial_{\bar{a}_\mu} G_{j,\cdot}^{a,\lambda}(z,z')[a_\nu] = -\frac{m}{2} \delta_{\mu\nu} \beta_{1/2,j}^{(\nu)}(z) w_{-1/2+\lambda_\nu}^* + \sum_{k>0} \left\{ \eta_{k,j}^{(\nu)}(z) w_{k-\lambda_\nu} + \tilde{\eta}_{k,j}^{(\nu)}(z) w_{k+\lambda_\nu}^* \right\}.$$

Alors, si on trouve, par une méthode quelconque, les coefficients $\alpha_{1/2,j}^{(\nu)}(z)$, $\beta_{1/2,j}^{(\nu)}(z)$, ainsi que la solution de l'équation de Dirac avec le même comportement singulier "excessif", elle coïncidera avec la dérivée correspondante de la fonction de Green.

Soit $f(z)$ une solution multivaluée de l'équation de Dirac dans la bande $S = \{(x,y) : 0 < y < \beta\}$, qui est de carré intégrable quand $|x| \rightarrow \infty$. Nous supposons que les développements locaux de $f(z)$ au voisinage des points a_ν (il n'y a pas d'autres singularités!) sont donnés par

$$f(z)[a_\nu] = \sum_k \left\{ a_k^{(\nu)} w_{k-\lambda_\nu} + b_k^{(\nu)} w_{k+\lambda_\nu}^* \right\}.$$

De plus, on demande que le nombre de coefficients $a_k^{(\nu)}$, $b_k^{(\nu)}$ non nuls avec $k < 0$ soit fini. Les prolongements de $f(z)$ en haut et en bas à travers les coupures d_ν ($\nu = 0, \dots, n$) diffèrent du facteur de monodromie $\exp(2\pi i \sum_{k=0}^{\nu} \lambda_k)$, et alors le produit $G_{j,\cdot}^{a,\lambda}(z,z') \overline{f(z')}$, étant considéré comme une fonction de z' , est univalué sur $\mathcal{C} \setminus a$. En utilisant la formule (1.9) et le théorème de Stokes, on obtient

$$(2.16) \quad \frac{m}{2} \int_{\mathcal{C} \setminus \bigcup_{\nu} D_\varepsilon(a_\nu)} G_{j,\cdot}^{a,\lambda}(z,z') \overline{f(z')} idz' \wedge d\bar{z}' =$$

$$(2.17) \quad = - \sum_{\nu} \oint_{\partial D_\varepsilon(a_\nu)} G_{j,2}^{a,\lambda}(z,z') \overline{f_1(z')} id\bar{z}' - \oint_{\partial D_\varepsilon(z)} G_{j,2}^{a,\lambda}(z,z') \overline{f_1(z')} id\bar{z}' =$$

$$(2.18) \quad = \sum_{\nu} \oint_{\partial D_\varepsilon(a_\nu)} G_{j,1}^{a,\lambda}(z,z') \overline{f_2(z')} idz' + \oint_{\partial D_\varepsilon(z)} G_{j,1}^{a,\lambda}(z,z') \overline{f_2(z')} idz'.$$

L'intégrale de surface (2.16) ne converge pas pour $\varepsilon \rightarrow 0$. On peut néanmoins comparer les asymptotiques de (2.17) et (2.18) pour $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2.17) = -\frac{4}{m} \sum_{\nu} \sum_{k>0} (-1)^{k+1/2} \sin \pi \lambda_\nu \beta_{k,j}^{(\nu)}(z) \overline{a_{-k}^{(\nu)}} - i \delta_{j2} \overline{f_1(z)},$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2.18) = \frac{4}{m} \sum_{\nu} \sum_{k>0} (-1)^{k+1/2} \sin \pi \lambda_{\nu} \alpha_{k,j}^{(\nu)}(z) \overline{b_{-k}^{(\nu)}} + i \delta_{j1} \overline{f_2(z)}.$$

Nous obtenons finalement

$$(2.19) \quad \sum_{\nu} \sum_{k>0} (-1)^{k+1/2} \sin \pi \lambda_{\nu} \left\{ \beta_{k,j}^{(\nu)}(z) \overline{a_{-k}^{(\nu)}} + \alpha_{k,j}^{(\nu)}(z) \overline{b_{-k}^{(\nu)}} \right\} = -\frac{im}{4} (\delta_{j2} \overline{f_1(z)} + \delta_{j1} \overline{f_2(z)}).$$

Pour trouver les premiers coefficients des développements de la fonction de Green, on va faire un choix particulier de $f(z')$. De manière analogue au chapitre précédent (voir (1.12)), introduisons n solutions particulières (multivaluées, intégrables quand $|x| \rightarrow \infty$) de l'équation de Dirac, caractérisées par les développements locaux

$$(2.20) \quad \tilde{\mathbf{w}}_{\mu}(\lambda)[a_{\nu}] = \delta_{\mu\nu} w_{-1/2+\lambda_{\nu}}[a_{\nu}] + \sum_{k>0} \left\{ a_k^{(\nu)}(\tilde{\mathbf{w}}_{\mu}(\lambda)) w_{k+\lambda_{\nu}}[a_{\nu}] + b_k^{(\nu)}(\tilde{\mathbf{w}}_{\mu}(\lambda)) w_{k-\lambda_{\nu}}^*[a_{\nu}] \right\}.$$

L'existence de la base canonique implique l'existence et l'unicité de telles solutions; ces deux bases coïncident si $\lambda_{\nu} > 0$ pour tout ν .

Après le remplacement de $f(z)$ par $\tilde{\mathbf{w}}_{\mu}(-\lambda)$ dans (2.19) on obtient

$$(2.21) \quad \begin{pmatrix} \beta_{1/2,1}^{(\mu)}(z) \\ \beta_{1/2,2}^{(\mu)}(z) \end{pmatrix} = \frac{im}{4 \sin \pi \lambda_{\mu}} \begin{pmatrix} \overline{\tilde{\mathbf{w}}_{\mu 2}(z, -\lambda)} \\ \overline{\tilde{\mathbf{w}}_{\mu 1}(z, -\lambda)} \end{pmatrix} = \frac{im}{4 \sin \pi \lambda_{\mu}} \tilde{\mathbf{w}}_{\mu}^*(z, -\lambda).$$

D'autre part, la substitution $f(z) = \tilde{\mathbf{w}}_{\mu}^*(z, \lambda)$ dans (2.19) permet d'obtenir une formule pour le coefficient $\alpha_{1/2,j}^{(\mu)}(z)$,

$$(2.22) \quad \begin{pmatrix} \alpha_{1/2,1}^{(\mu)}(z) \\ \alpha_{1/2,2}^{(\mu)}(z) \end{pmatrix} = \frac{im}{4 \sin \pi \lambda_{\mu}} \tilde{\mathbf{w}}_{\mu}(z, \lambda).$$

En prenant en considération les remarques précédentes (formules (2.14) et (2.15)), on peut calculer les dérivées de la fonction de Green en fonction des solutions (2.20):

$$(2.23) \quad \partial_{a_j} G^{a,\lambda}(z, z') = -\frac{im^2}{8 \sin \pi \lambda_j} \tilde{\mathbf{w}}_j(z, \lambda) \otimes \tilde{\mathbf{w}}_j(z', -\lambda),$$

$$(2.24) \quad \partial_{\bar{a}_j} G^{a,\lambda}(z, z') = -\frac{im^2}{8 \sin \pi \lambda_j} \tilde{\mathbf{w}}_j^*(z, -\lambda) \otimes \tilde{\mathbf{w}}_j^*(z', \lambda).$$

3. Fonction de Green à un point

Maintenant, nous allons utiliser les formules (2.23) et (2.24) pour calculer la fonction de Green $G^{a,\lambda}$ sur le cylindre avec un seul point de branchement $\{a\}$. Remarquons que dans le cas d'une seule singularité, les résultats explicites obtenus pour la base canonique permettent de trouver les solutions (2.20). Posons par exemple $0 < \lambda_1 < \frac{1}{2}$. Alors $\tilde{\mathbf{w}}(z, \lambda) = \mathbf{w}(z, \lambda)$. En dérivant les développements locaux, on peut aussi vérifier que

$$\tilde{\mathbf{w}}(z, -\lambda) = \frac{2}{m} \partial_z \mathbf{w}(z, 1 - \lambda).$$

Déterminons $G^{a,\lambda}(z, z')$ si z et z' appartiennent à la demi-bande gauche: $\operatorname{Re} z, \operatorname{Re} z' < \operatorname{Re} a$. En utilisant les résultats du chapitre précédent, on obtient

$$(2.25) \quad \tilde{\mathbf{w}}(z, \lambda) = -A(\lambda) \sum_{l \in \mathbb{Z} + \lambda_0} \frac{G(\theta_l; \lambda) e^{\frac{m}{2}(z-a)e^{\theta_l} + \frac{m}{2}(\bar{z}-\bar{a})e^{-\theta_l}}}{m\beta \cosh \theta_l} \begin{pmatrix} e^{\theta_l} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(2.26) \quad \tilde{w}(z, -\lambda) = -A(1-\lambda) \sum_{n=\mathbb{Z}-\lambda_0} \frac{G(\theta_n; 1-\lambda) e^{\theta_n + \frac{m}{2}(z-a)e^{\theta_n} + \frac{m}{2}(\bar{z}-\bar{a})e^{-\theta_n}}}{m\beta \cosh \theta_n} \begin{pmatrix} e^{\theta_n} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il est immédiat de vérifier que

$$(2.27) \quad \begin{aligned} A(\lambda)A(1-\lambda) &= 4 \sin^2 \pi \lambda_1, \\ \nu(\theta; \lambda) &= -\nu(\theta; 1-\lambda) = -\nu(\theta; -\lambda), \\ \eta(\theta; \lambda) &= \eta(\theta; 1-\lambda) = \eta(\theta; -\lambda). \end{aligned}$$

Substituons les relations (2.25) et (2.26) dans les équations (2.23), (2.24). En intégrant le résultat, nous obtenons la représentation suivante de la fonction de Green $G^{a,\lambda}(z, z')$:

$$(2.28) \quad \begin{aligned} G^{a,\lambda}(z, z') &= i \sin \pi \lambda_1 \sum_{l \in \mathbb{Z} + \lambda_0} \sum_{n \in \mathbb{Z} - \lambda_0} \frac{G(\theta_l; \lambda) G(\theta_n; 1-\lambda) e^{\theta_n}}{m\beta^2 \cosh \theta_l \cosh \theta_n} \times \\ &\times \frac{e^{\frac{m}{2}\{(z-a)e^{\theta_l} + (\bar{z}-\bar{a})e^{-\theta_l} + (z'-a)e^{\theta_n} + (\bar{z}'-\bar{a})e^{-\theta_n}\}}}{e^{\theta_l} + e^{\theta_n}} \begin{pmatrix} e^{\theta_l + \theta_n} & e^{\theta_l} \\ e^{\theta_n} & 1 \end{pmatrix} + C(z, z'). \end{aligned}$$

La fonction $C(z, z')$ ne dépend pas de la position de la singularité et est inconnue pour l'instant. Notons que la somme double dans la partie gauche de la dernière relation converge même si $z = z'$. Cela donne une intuition que $C(z, z')$ peut être égale à la fonction de Green "non-perturbée", $G(z - z'; \lambda_0)$. En supposant que c'est vrai, fixons $a = 0$ et réécrivons (2.28) par les intégrales de contour

$$(2.29) \quad \begin{aligned} G^{0,\lambda}(z, z') &= im \sin \pi \lambda_1 \int_{C_- \cup C_+} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{C_- \cup C_+} \frac{d\theta'}{2\pi} \frac{G(\theta; \lambda) G(\theta'; 1-\lambda) e^{\theta'}}{(1 - e^{im\beta \sinh \theta - 2\pi i \lambda_0})(1 - e^{im\beta \sinh \theta' + 2\pi i \lambda_0})} \times \\ &\times \frac{e^{\frac{m}{2}\{ze^{\theta} + \bar{z}e^{-\theta} + z'e^{\theta'} + \bar{z}'e^{-\theta'}\}}}{e^{\theta} + e^{\theta'}} \begin{pmatrix} e^{\theta + \theta'} & e^{\theta} \\ e^{\theta'} & 1 \end{pmatrix} + G(z - z'; \lambda_0). \end{aligned}$$

De manière analogue, on suppose que si $\operatorname{Re} z, \operatorname{Re} z' > 0$, la fonction de Green $G^{0,\lambda}(z, z')$ s'écrit comme

$$(2.30) \quad \begin{aligned} G^{0,\lambda}(z, z') &= im \sin \pi \lambda_1 \int_{C_- \cup C_+} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{C_- \cup C_+} \frac{d\theta'}{2\pi} \frac{H(\theta; \lambda) H(\theta'; 1-\lambda) e^{\theta'}}{(1 - e^{-im\beta \sinh \theta - 2\pi i \tilde{\lambda}})(1 - e^{-im\beta \sinh \theta' + 2\pi i \tilde{\lambda}})} \times \\ &\times \frac{e^{-\frac{m}{2}\{ze^{\theta} + \bar{z}e^{-\theta} + z'e^{\theta'} + \bar{z}'e^{-\theta'}\}}}{e^{\theta} + e^{\theta'}} \begin{pmatrix} e^{\theta + \theta'} & -e^{\theta} \\ -e^{\theta'} & 1 \end{pmatrix} + G(z - z'; \tilde{\lambda}). \end{aligned}$$

Pour démontrer que les formules (2.29) et (2.30) représentent vraiment la fonction de Green, nous allons construire leurs prolongements aux valeurs arbitraires $z, z' \in \mathcal{C} \setminus b$, et montrer que ces prolongements coïncident.

Nous commençons par la représentation (2.29). A la première étape, on construit son prolongement aux valeurs arbitraires de z . Pour cela, déformons les contours d'intégration C_- et C_+ en $\operatorname{Im} \theta = -\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Im} \theta = \frac{\pi}{2}$ respectivement. Après cette procédure, on a

$$G^{0,\lambda}(z, z') - G(z - z'; \lambda_0) = im \sin \pi \lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{C_- \cup C_+} \frac{d\theta'}{2\pi} \frac{G(\theta'; 1-\lambda) e^{\theta' + mx' \cosh \theta' + imy' \sinh \theta'}}{1 - e^{im\beta \sinh \theta' + 2\pi i \lambda_0}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{G(\theta - i\pi/2; \lambda) e^{-imx \sinh \theta + my \cosh \theta}}{(1 - e^{m\beta \cosh \theta - 2\pi i \lambda_0})(-ie^\theta + e^{\theta'})} \begin{pmatrix} -ie^{\theta+\theta'} & -ie^\theta \\ e^{\theta'} & 1 \end{pmatrix} - \frac{G(\theta + i\pi/2; \lambda) e^{imx \sinh \theta - my \cosh \theta}}{(1 - e^{-m\beta \cosh \theta - 2\pi i \lambda_0})(ie^\theta + e^{\theta'})} \begin{pmatrix} ie^{\theta+\theta'} & ie^\theta \\ e^{\theta'} & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Il n'est pas possible de faire la même chose la deuxième fois, car la fonction dans l'intégrale par rapport à la variable θ' a un pôle $\theta' = \theta \pm \frac{i\pi}{2}$. On peut néanmoins transformer C_- et C_+ en contours $C_-^{\varepsilon, \theta}$ et $C_+^{\varepsilon, \theta}$ montrés sur la Fig. 4, et ensuite considérer la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Alors, le prolongement de (2.29) à toutes les valeurs de $z, z' \in \mathcal{C} \setminus b$ est donné par

$$(2.31) \quad \begin{aligned} G^{0, \lambda}(z, z') &= im \sin \pi \lambda_1 \sum_{\sigma=\pm 1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi} \frac{G(\theta + \frac{i\sigma\pi}{2}; \lambda) G(\theta' + \frac{i\sigma\pi}{2}; 1 - \lambda) e^{\theta'}}{(1 - e^{-\sigma m \beta \cosh \theta - 2\pi i \lambda_0})(1 - e^{-\sigma m \beta \cosh \theta' + 2\pi i \lambda_0})} \times \\ &\quad \times \frac{e^{\sigma m(ix \sinh \theta - y \cosh \theta + ix' \sinh \theta' - y' \cosh \theta')}}{e^\theta + e^{\theta'}} \begin{pmatrix} -e^{\theta+\theta'} & \sigma i e^\theta \\ \sigma i e^{\theta'} & 1 \end{pmatrix} + \\ &\quad - im \sin \pi \lambda_1 \sum_{\sigma=\pm 1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{2\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi} \frac{G(\theta + \frac{i\sigma\pi}{2}; \lambda) G(\theta' - \frac{i\sigma\pi}{2}; 1 - \lambda) e^{\theta'}}{(1 - e^{-\sigma m \beta \cosh \theta - 2\pi i \lambda_0})(1 - e^{\sigma m \beta \cosh \theta' + 2\pi i \lambda_0})} \times \\ &\quad \times \frac{e^{\sigma m(ix \sinh \theta - y \cosh \theta - ix' \sinh \theta' + y' \cosh \theta')}}{e^{\theta'} - e^\theta} \begin{pmatrix} e^{\theta+\theta'} & \sigma i e^\theta \\ -\sigma i e^{\theta'} & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left\{ G(z - z'; \lambda_0) + G(z - z'; \tilde{\lambda}) \right\}. \end{aligned}$$

Les deux derniers termes représentent “les contributions des pôles”, qui peuvent être calculées en utilisant (2.27) et les représentations contours de la fonction de Green sur le cylindre sans singularité.

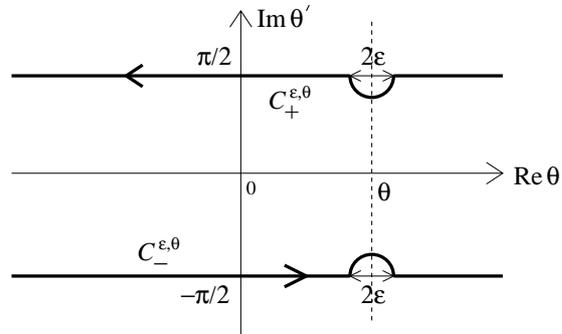


Fig. 4.

Si on répète ces manipulations avec la représentation (2.30) dans la demi-bande droite, l'expression finale coïncidera avec (2.31) à cause des relations (1.19) et (1.20), satisfaites par les fonctions $G(\theta)$ et $H(\theta)$. Alors les formules (2.29)–(2.31) déterminent vraiment la fonction de Green $G^{0, \lambda}(z, z')$.

CHAPITRE 3

Fonctions τ

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à des espaces de valeurs au bord de certaines solutions locales de l'équation de Dirac. Ces espaces peuvent être inclus dans une grassmannienne à dimension infinie. La fonction τ est définie par la trivialisaton du fibré \det^* sur cette grassmannienne.

1. Sous-espaces $W_{int}(a)$ et $W_{ext}(a)$

Considérons un cercle $L_{x_0} = \{(x,y) \in \mathcal{C} : x = x_0\}$, et notons $H_\lambda^{1/2}(L_{x_0})$ l'espace des fonctions à valeurs dans \mathbb{C}^2 , quasipériodiques sur L_{x_0} . On a notamment $g(y + \beta) = e^{2\pi i \lambda} g(y)$ pour $g \in H_\lambda^{1/2}(L_{x_0})$. Après transformation de Fourier la fonction g s'écrit comme

$$g(y) = \frac{2\pi}{\beta} \sum_{n \in \mathbb{Z} + \lambda} \hat{g}(\theta_n) e^{imy \sinh \theta_n}, \quad \sinh \theta_n = \frac{2\pi}{m\beta} n.$$

Introduisons deux opérateurs, Q_+ et Q_- , qui agissent sur $H_\lambda^{1/2}(L_{x_0})$ de la manière suivante:

$$Q_\pm g(y) = \frac{2\pi}{\beta} \sum_{n \in \mathbb{Z} + \lambda} Q_\pm(\theta_n) \hat{g}(\theta_n) e^{imy \sinh \theta_n},$$

$$Q_+(\theta) = \frac{1}{2 \cosh \theta} \begin{pmatrix} e^\theta & 1 \\ 1 & e^{-\theta} \end{pmatrix},$$

$$Q_-(\theta) = \frac{1}{2 \cosh \theta} \begin{pmatrix} e^{-\theta} & -1 \\ -1 & e^\theta \end{pmatrix}.$$

Ces opérateurs ont les propriétés des projecteurs,

$$Q_+ + Q_- = \mathbf{1}, \quad Q_+^2 = Q_+, \quad Q_-^2 = Q_-,$$

et déterminent donc la décomposition $H_\lambda^{1/2}(L_{x_0}) = H_\lambda^+ \oplus H_\lambda^-$, où $H_\lambda^\pm = Q_\pm H_\lambda^{1/2}(L_{x_0})$. On peut aisément vérifier que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} + \lambda} \|Q_\pm(\theta_n) \hat{g}(\theta_n)\|^2 \cosh \theta_n = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z} + \lambda} |g_\pm(\theta_n)|^2,$$

où

$$\begin{pmatrix} g_+(\theta_n) \\ g_-(\theta_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_n^{1/2} & v_n^{-1/2} \\ -v_n^{-1/2} & v_n^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{g}_1(\theta_n) \\ \hat{g}_2(\theta_n) \end{pmatrix},$$

$$v_n \equiv v(\theta_n) = e^{\theta_n}.$$

Alors, la fonction g s'exprime en composantes de polarisation $g_{\pm}(\theta_n)$ comme

$$(3.1) \quad g(y) = \frac{2\pi}{\beta} \sum_{n \in \mathbb{Z} + \lambda} \frac{e^{imy \sinh \theta_n}}{2 \cosh \theta_n} \begin{pmatrix} v_n^{1/2} & -v_n^{-1/2} \\ v_n^{-1/2} & v_n^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_+(\theta_n) \\ g_-(\theta_n) \end{pmatrix}.$$

Montrons maintenant que les éléments de H_{λ}^- (H_{λ}^+) représentent les valeurs au bord des solutions quasipériodiques de l'équation de Dirac dans la demi-bande droite (gauche) $x > x_0$ ($x < x_0$). Pour cela, écrivons l'équation de Dirac sous la forme

$$(3.2) \quad \partial_x \psi = \begin{pmatrix} -i\partial_y & m \\ m & i\partial_y \end{pmatrix} \psi.$$

Si on pose la condition initiale $\psi(x_0, y) = g(x_0, y)$, avec $g(x_0, y) \in H_{\lambda}^-$ (c'est-à-dire, $g_+(\theta_n) = 0$ pour tout n), la solution de (3.2) dans la demi-bande droite est la suivante:

$$\psi_{x > x_0} = \frac{2\pi}{\beta} \sum_{n \in \mathbb{Z} + \lambda} \frac{e^{imy \sinh \theta_n - m(x-x_0) \cosh \theta_n}}{2 \cosh \theta_n} \begin{pmatrix} v_n^{1/2} & -v_n^{-1/2} \\ v_n^{-1/2} & v_n^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g_-(\theta_n) \end{pmatrix}.$$

La convergence de cette série est justifiée par sa convergence pour $x = x_0$. La solution de (3.2) dans la demi-bande gauche peut être construite à partir d'un élément de H_{λ}^+ de façon similaire.

La fonction de Green $G(z - z'; \lambda)$ sur le cylindre sans singularité permet d'obtenir une formule utile pour les projections Q_{\pm} :

PROPOSITION 1.1. *Soit $Q : H_{\lambda}^{1/2}(L_{x_0}) \rightarrow H_{\lambda}^1(\mathcal{C} \setminus L_{x_0})$ une application définie par*

$$(3.3) \quad (Qg)(z) = i \int_{L_{x_0}} G(z - z'; \lambda) \sigma_z g(y') dy', \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad g \in H_{\lambda}^{1/2}(L_{x_0}).$$

Alors les valeurs au bord L_{x_0} des restrictions de $(Qg)(z)$ à la demi-bande gauche et droite sont données par Q_+g et $-Q_-g$, respectivement.

■ Pour démontrer cette proposition, il faut juste substituer dans (3.3) le développement de Fourier de g (3.1) et les représentations (2.2), (2.4) de la fonction de Green. ■

Supposons que les premières coordonnées des points de branchement soient toutes distinctes. Alors on peut isoler les coupures b_1, \dots, b_n dans les bandes ouvertes S_1, \dots, S_n (Fig. 5). On notera S l'union $\bigcup_{j=1}^n S_j$.

DEFINITION 1.2. *Considérons le sous-espace de $H^1(\mathcal{C} \setminus \bar{S})$ formé des fonctions ψ qui vérifient sur $\mathcal{C} \setminus \bar{S}$ l'équation de Dirac et les conditions de quasipériodicité correspondantes:*

$$\psi(x, y + \beta) = \begin{cases} e^{2\pi i \lambda_0} \psi(x, y) \text{ for } x < x_1^L, \\ \exp\{2\pi i \sum_{j=0}^k \lambda_j\} \psi(x, y) \text{ pour } x_k^R < x < x_{k+1}^L, \\ \exp\{2\pi i \sum_{j=0}^n \lambda_j\} \psi(x, y) \text{ pour } x > x_n^R. \end{cases}$$

Notons W_{ext} l'espace des valeurs au bord de telles fonctions. C'est un sous-espace de l'espace W des $H^{1/2}$ -fonctions quasipériodiques sur ∂S (toujours à valeurs dans \mathbb{C}^2):

$$(3.4) \quad W = H_{\lambda_0}^{1/2}(L_{x_1^L}) \oplus H_{\lambda_0 + \lambda_1}^{1/2}(L_{x_1^R}) \oplus \dots \oplus H_{\sum_{k=0}^n \lambda_k}^{1/2}(L_{x_n^R}).$$

De manière analogue, $W_{int} \subset W$ est défini comme l'espace des valeurs au bord des fonctions $g \in \mathcal{D}^{a, \lambda}$ qui vérifient $D^{a, \lambda} g = 0$ sur S .

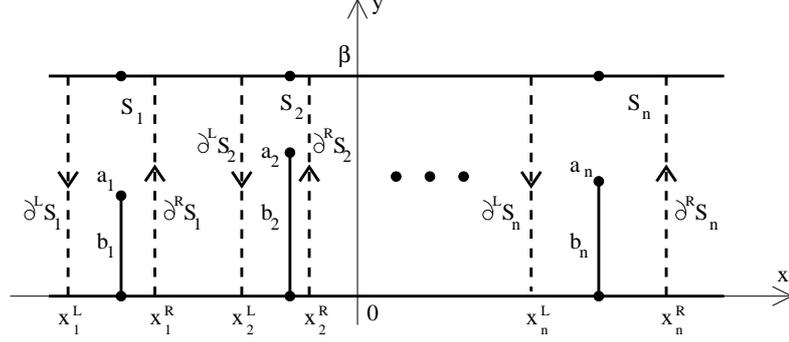


Fig. 5.

La construction de la grassmannienne à dimension infinie, effectuée dans le chapitre suivant, est fondée essentiellement sur la transversalité des sous-espaces W_{ext} et W_{int} dans W . On va donner la preuve de transversalité plus loin; ici, à la place, nous expliquerons comment trouver les formules explicites pour les projections sur ces sous-espaces. Considérons la restriction $g^{(i)} = g|_{\partial^L S_i \cup \partial^R S_i}$ d'un élément $g \in W$ au bord de la bande S_i . Il est commode de noter

$$g^{(i)} = \begin{pmatrix} g_{R,+}^{(i)} \\ g_{L,-}^{(i)} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} g_{R,-}^{(i)} \\ g_{L,+}^{(i)} \end{pmatrix}.$$

Exemple. Supposons pour un instant que la bande S_i ne contienne pas de coupures, c'est-à-dire les conditions de quasipériodicité pour les fonctions $g_L^{(i)}$ et $g_R^{(i)}$ soient les mêmes, par exemple

$$g_L^{(i)}(y + \beta) = e^{2\pi i \lambda} g_L^{(i)}(y),$$

$$g_R^{(i)}(y + \beta) = e^{2\pi i \lambda} g_R^{(i)}(y).$$

Alors l'application

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \tilde{Q}g^{(i)}(z) &= i \int_{\partial^L S_i \cup \partial^R S_i} G(z - z'; \lambda) \sigma_z g^{(i)}(y') dy' = \\ &= \int_{\partial^L S_i \cup \partial^R S_i} G_{,1}(z - z'; \lambda) g_1^{(i)}(z') dz' + G_{,2}(z - z'; \lambda) g_2^{(i)}(z') d\bar{z}' \end{aligned}$$

définit une fonction qui vérifie l'équation de Dirac sur S_i . Après le calcul simple qui utilise les représentations de Fourier de $g^{(i)}$ et de la fonction de Green, on obtient la formule explicite:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}g^{(i)}(z) &= \frac{2\pi}{\beta} \sum_{n \in \mathbb{Z} + \lambda} \frac{e^{m(x-x_i^R) \cosh \theta_n + imy \sinh \theta_n}}{2 \cosh \theta_n} \begin{pmatrix} v_n^{1/2} & -v_n^{-1/2} \\ v_n^{-1/2} & v_n^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{R,+}^{(i)}(\theta_n) \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{2\pi}{\beta} \sum_{n \in \mathbb{Z} + \lambda} \frac{e^{-m(x-x_i^L) \cosh \theta_n + imy \sinh \theta_n}}{2 \cosh \theta_n} \begin{pmatrix} v_n^{1/2} & -v_n^{-1/2} \\ v_n^{-1/2} & v_n^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g_{L,-}^{(i)}(\theta_n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En passant aux valeurs au bord, on voit que \tilde{Q} induit une application sur W . Elle est donnée par

$$\tilde{Q} : \begin{pmatrix} g_{R,+}^{(i)} \\ g_{L,-}^{(i)} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} g_{R,-}^{(i)} \\ g_{L,+}^{(i)} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} g_{R,+}^{(i)} \\ g_{L,-}^{(i)} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & \hat{\omega} \\ \hat{\omega} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{R,+}^{(i)} \\ g_{L,-}^{(i)} \end{pmatrix},$$

où, dans la représentation de Fourier, $(\hat{\omega}g)(\theta_n) = e^{-m(x_i^R - x_i^L) \cosh \theta_n} g(\theta_n)$. De plus, \tilde{Q} est une projection sur l'espace des solutions de l'équation de Dirac sur S_i . Si $g_L^{(i)}$ et $g_R^{(i)}$ représentent les valeurs au bord d'une fonction f appartenant à cet espace, la 1-forme dans (3.5) est fermée, et alors on peut contracter le contour d'intégration en un petit cercle autour de z . En utilisant l'asymptotique de la fonction de Green pour $z' \rightarrow z$, on obtient $\tilde{Q}f(z) = f(z)$.

La généralisation de cet exemple à la bande contenant une coupure nous conduit au résultat principal de ce chapitre:

THÉORÈME 1.3. *Soit $G^{a,\lambda}(z, z')$ la fonction de Green à un point¹ qui a été calculée dans le chapitre précédent. Soient $a \in S'$, $S' = \{(x, y) \in \mathcal{C} : x_L < x < x_R\}$. Considérons une fonction g sur $\partial S'$, qui vérifie $g|_{\partial^L S'} \in H_{\lambda_0}^{1/2}(\partial^L S')$, $g|_{\partial^R S'} \in H_{\tilde{\lambda}}^{1/2}(\partial^R S')$. Alors l'application*

$$(3.6) \quad P_{S'}(a)g(z) = \int_{\partial^L S' \cup \partial^R S'} G_{\cdot,1}^{a,\lambda}(z, z')g_1(z')dz' + G_{\cdot,2}^{a,\lambda}(z, z')g_2(z')dz'$$

définit une projection sur l'espace des fonctions $f \in \mathcal{D}^{a,\lambda}$ qui vérifient $D^{a,\lambda}f = 0$ sur S' . L'application des valeurs au bord induite est donnée par la formule suivante:

$$(3.7) \quad P_{S'}(a) : \begin{pmatrix} g_{R,+} \\ g_{L,-} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} g_{R,-} \\ g_{L,+} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} g_{R,+} \\ g_{L,-} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \hat{\alpha} & \hat{\beta} \\ \hat{\gamma} & \hat{\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{R,+} \\ g_{L,-} \end{pmatrix},$$

où

$$(3.8) \quad (\hat{\alpha}g)(\theta_l) = \frac{2 \sin \pi \lambda_1}{\beta} \sum_{n \in \mathbb{Z} + \tilde{\lambda}} \frac{(v_l v_n)^{\lambda_1 + \frac{1}{2}} e^{-m(x_R - a_x)(\cosh \theta_l + \cosh \theta_n) - i m a_y (\sinh \theta_l - \sinh \theta_n)}}{1 + v_l v_n \cosh \theta_n} \times \\ \times e^{-\frac{i}{2}(\nu_l + \nu_n) - \frac{1}{2}(\eta_l + \eta_n)} g(\theta_n), \quad l \in \mathbb{Z} + \tilde{\lambda},$$

$$(3.9) \quad (\hat{\beta}g)(\theta_l) = \frac{2e^{-\pi i \lambda_1} \sin \pi \lambda_1}{\beta} \sum_{n \in \mathbb{Z} + \lambda_0} \frac{e^{-m(x_R - a_x) \cosh \theta_l + m(x_L - a_x) \cosh \theta_n - i m a_y (\sinh \theta_l - \sinh \theta_n)}}{\cosh \theta_n} \times \\ \times \frac{v_l^{\lambda_1 + \frac{1}{2}} v_n^{-\lambda_1 + \frac{1}{2}}}{v_l - v_n} e^{-\frac{i}{2}(\nu_l - \nu_n) - \frac{1}{2}(\eta_l - \eta_n)} g(\theta_n), \quad l \in \mathbb{Z} + \tilde{\lambda},$$

$$(3.10) \quad (\hat{\gamma}g)(\theta_l) = -\frac{2e^{\pi i \lambda_1} \sin \pi \lambda_1}{\beta} \sum_{n \in \mathbb{Z} + \tilde{\lambda}} \frac{e^{m(x_L - a_x) \cosh \theta_l - m(x_R - a_x) \cosh \theta_n - i m a_y (\sinh \theta_l - \sinh \theta_n)}}{\cosh \theta_n} \times \\ \times \frac{v_l^{-\lambda_1 + \frac{1}{2}} v_n^{\lambda_1 + \frac{1}{2}}}{v_l - v_n} e^{\frac{i}{2}(\nu_l - \nu_n) + \frac{1}{2}(\eta_l - \eta_n)} g(\theta_n), \quad l \in \mathbb{Z} + \lambda_0,$$

1. Ici on note a un point, et pas un ensemble (a_1, \dots, a_n) . J'espère que cet abus de notation n'obscurcira pas l'exposé.

$$(3.11) \quad (\hat{\delta}g)(\theta_l) = \frac{2 \sin \pi \lambda_1}{\beta} \sum_{n \in \mathbb{Z} + \lambda_0} \frac{(v_l v_n)^{-\lambda_1 + \frac{1}{2}} e^{m(x_L - a_x)(\cosh \theta_l + \cosh \theta_n) - im a_y (\sinh \theta_l - \sinh \theta_n)}}{1 + v_l v_n \cosh \theta_n} \times \\ \times e^{\frac{i}{2}(\nu_l + \nu_n) + \frac{1}{2}(\eta_l + \eta_n)} g(\theta_n), \quad l \in \mathbb{Z} + \lambda_0,$$

et $\nu_l = \nu(\theta_l; \lambda)$, $\eta_l = \eta(\theta_l; \lambda)$.

■ L'obtention de (3.6)–(3.11) s'effectue de manière analogue à l'exemple précédent et utilise deux autres représentations (en plus de (2.28–2.30)) de la fonction de Green:

$$(3.12) \quad G^{a,\lambda}(z, z') = i \sin \pi \lambda_1 \sum_{l \in \mathbb{Z} + \lambda_0} \sum_{n \in \mathbb{Z} + \tilde{\lambda}} \frac{G(\theta_l; \lambda) H(\theta_n; 1 - \lambda)}{m \beta^2 \cosh \theta_l \cosh \theta_n} \frac{e^{\theta_n + m(x - a_x) \cosh \theta_l + im(y - a_y) \sinh \theta_l}}{e^{\theta_l} - e^{\theta_n}} \times \\ \times e^{-m(x' - a_x) \cosh \theta_n - im(y' - a_y) \sinh \theta_n} \begin{pmatrix} -e^{\theta_l + \theta_n} & e^{\theta_l} \\ -e^{\theta_n} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour } x < a_x < x',$$

$$(3.13) \quad G^{a,\lambda}(z, z') = i \sin \pi \lambda_1 \sum_{l \in \mathbb{Z} + \lambda_0} \sum_{n \in \mathbb{Z} + \tilde{\lambda}} \frac{G(-\theta_l; \lambda) H(-\theta_n; 1 - \lambda)}{m \beta^2 \cosh \theta_l \cosh \theta_n} \frac{e^{-\theta_n - m(x - a_x) \cosh \theta_l + im(y - a_y) \sinh \theta_l}}{e^{-\theta_l} - e^{-\theta_n}} \times \\ \times e^{m(x' - a_x) \cosh \theta_n - im(y' - a_y) \sinh \theta_n} \begin{pmatrix} -e^{-\theta_l - \theta_n} & -e^{-\theta_l} \\ e^{-\theta_n} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour } x > a_x > x'.$$

En appliquant le théorème de Stokes pour démontrer la propriété de projection, il faut transformer le contour d'intégration dans (3.6) en deux petits cercles, autour de z et a . En utilisant les développements (1.7), (2.11) des solutions multivaluées locales de l'équation de Dirac, on en déduit aisément que la deuxième intégrale s'annule. ■

Remarque. Choisissons dans $H_\lambda^{1/2}(L)$ une famille orthonormée complète $\{\varphi_k\}$, par exemple,

$$\varphi_k = \frac{1}{\sqrt{\beta}} e^{imy \sinh \theta_k}, \quad k \in \mathbb{Z} + \lambda.$$

Avec ces fonctions, on peut calculer les normes de Schmidt de $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\delta}$ et montrer qu'elles sont toutes finies. Par exemple,

$$\|\hat{\beta}\|_2^2 = \sum_{n, n' \in \mathbb{Z}} |\langle \hat{\beta} \varphi_{n+\lambda_0}, \varphi_{n'+\tilde{\lambda}} \rangle|^2 = \sum_{l \in \mathbb{Z} + \tilde{\lambda}} \sum_{n \in \mathbb{Z} + \lambda_0} |\hat{\beta}(\theta_l, \theta_n)|^2,$$

où $\hat{\beta}(\theta_l, \theta_n)$ représente le “noyau” de $\hat{\beta}$. Cette somme converge rapidement à cause des facteurs exponentiels $e^{-m(x_R - a_x) \cosh \theta_l}$ et $e^{m(x_L - a_x) \cosh \theta_n}$ dans $\hat{\beta}(\theta_l, \theta_n)$. Nous remarquons néanmoins que par passage à la limite $\beta \rightarrow \infty$, quand $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\delta}$ deviennent des opérateurs intégraux, $\hat{\beta}$ et $\hat{\gamma}$ ne sont plus dans la classe de Schmidt à cause des singularités dans leurs noyaux.

Nous esquissons maintenant la preuve de transversalité des sous-espaces W_{int} et W_{ext} dans W , en suivant étroitement l'article de Palmer [25]. Supposons que $f \in W$ se décompose comme $f = g + h$, avec $g \in W_{int}$ et $h \in W_{ext}$. Le théorème 1.1 garantit l'unicité de cette décomposition, car les éléments de $W_{int} \cap W_{ext}$ représentent les valeurs au bord des fonctions appartenants à $\widetilde{W}^{a,\lambda}$. Il ne reste à démontrer que l'existence.

Pour que g soit dans W_{int} , il suffit de satisfaire les conditions

$$(3.14) \quad \begin{pmatrix} g_{R,-}^{(i)} \\ g_{L,+}^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_i & \hat{\beta}_i \\ \hat{\gamma}_i & \hat{\delta}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{R,+}^{(i)} \\ g_{L,-}^{(i)} \end{pmatrix},$$

où $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i, \hat{\gamma}_i, \hat{\delta}_i$ s'obtiennent à partir des $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}$ par la substitution

$$x_L \rightarrow x_i^L, \quad x_R \rightarrow x_i^R, \quad a \rightarrow a_i,$$

$$\lambda_0 \rightarrow \sum_{k=0}^{i-1} \lambda_k, \quad \tilde{\lambda} \rightarrow \sum_{k=0}^i \lambda_k.$$

Les autres relations résultent du fait que $h \in W_{ext}$. En effet, $h_L^{(1)}$ est la valeur au bord d'une solution de l'équation de Dirac dans la demi-bande gauche $x < x_1^L$; $h_R^{(n)}$ doit représenter la valeur au bord d'une solution dans la demi-bande droite $x > x_n^R$. Cela implique deux relations:

$$(3.15) \quad h_{L,-}^{(1)} = 0, \quad h_{R,+}^{(n)} = 0.$$

Ensuite, d'après l'exemple qu'on a considéré, les fonctions $h_R^{(i)}$ et $h_L^{(i+1)}$ sont les valeurs au bord d'une solution dans $x_i^R < x < x_{i+1}^L$, si

$$(3.16) \quad h_{L,-}^{(i+1)} = \hat{\omega}_i h_{R,-}^{(i)}, \quad h_{R,+}^{(i)} = \hat{\omega}_i h_{L,+}^{(i+1)}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

où $\hat{\omega}_i$ s'obtient de $\hat{\omega}$ en substituant

$$x_i^L \rightarrow x_i^R, \quad x_i^R \rightarrow x_{i+1}^L, \quad \lambda \rightarrow \sum_{k=0}^i \lambda_k.$$

On peut transformer (3.15) et (3.16) en des conditions sur g . En utilisant (3.14) pour éliminer tout $g_{R,-}^{(i)}$ et $g_{L,+}^{(i)}$, nous obtenons un système d'équations,

$$(3.17) \quad g_{R,+}^{(i)} - \hat{\omega}_i \left(\hat{\gamma}_{i+1} g_{R,+}^{(i+1)} + \hat{\delta}_{i+1} g_{L,-}^{(i+1)} \right) = f_{R,+}^{(i)} - \hat{\omega}_i f_{L,+}^{(i+1)}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$(3.18) \quad g_{L,-}^{(i+1)} - \hat{\omega}_i \left(\hat{\alpha}_i g_{R,+}^{(i)} + \hat{\beta}_i g_{L,-}^{(i)} \right) = f_{L,-}^{(i+1)} - \hat{\omega}_i f_{R,-}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$(3.19) \quad g_{L,-}^{(1)} = f_{L,-}^{(1)}, \quad g_{R,+}^{(n)} = f_{R,+}^{(n)}.$$

En introduisant la notation

$$U_i = - \begin{pmatrix} \hat{\omega}_i \hat{\gamma}_{i+1} & \hat{\omega}_i \hat{\delta}_{i+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_i = - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hat{\omega}_i \hat{\alpha}_i & \hat{\omega}_i \hat{\beta}_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$\tilde{g}_j = \begin{pmatrix} g_{R,+}^{(j)} \\ g_{L,-}^{(j)} \end{pmatrix}, \quad F_k = \begin{pmatrix} f_{R,+}^{(k)} - \hat{\omega}_k f_{L,+}^{(k+1)} \\ f_{L,-}^{(k)} - \hat{\omega}_{k-1} f_{R,-}^{(k-1)} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 2, \dots, n-1,$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} f_{R,+}^{(1)} - \hat{\omega}_1 f_{L,+}^{(2)} \\ f_{L,-}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad F_n = \begin{pmatrix} f_{R,+}^{(n)} \\ f_{L,-}^{(n)} - \hat{\omega}_{n-1} f_{R,-}^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

on peut réécrire le système (3.17)–(3.19) sous la forme

$$(3.20) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & U_1 & 0 & \cdot & 0 \\ V_1 & \mathbf{1} & U_2 & \cdot & 0 \\ 0 & V_2 & \mathbf{1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & U_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdot & V_{n-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{g}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{g}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_n \end{pmatrix}.$$

L'opérateur dans la partie gauche de la formule (3.20) représente une perturbation compacte de l'identité, et est donc un opérateur de Fredholm d'indice zéro. Puisqu'à chaque élément non trivial de son noyau il est possible d'associer un élément non trivial de $W_{int} \cap W_{ext}$, le noyau est nécessairement $\{0\}$. Ainsi cet opérateur est inversible et peut être utilisé pour construire la décomposition $f = g + h$ explicitement.

2. Grassmannienne, fibré \det^* et sa trivialisation

Introduisons d'abord quelques définitions importantes. Nous nous basons essentiellement sur le livre [33] de Segal et Wilson (l'application des grassmanniennes aux systèmes intégrables et à la théorie quantique des champs est expliquée dans [21, 29, 37]).

DEFINITION 2.1. *Soit H un espace de Hilbert complexe, muni d'une décomposition $H = H_+ \oplus H_-$. La grassmannienne $Gr(H)$ est l'ensemble de tous les sous-espaces fermés $V \subset H$ tels que*

- la projection $\text{pr}_+ : V \rightarrow H_+$ le long de H_- est un opérateur de Fredholm;
- la projection $\text{pr}_- : V \rightarrow H_-$ le long de H_+ est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

La première condition signifie que les codimensions de $V \cap H_+$ dans V et dans H_+ sont finies. Les composantes connexes de la grassmannienne se distinguent par la valeur de l'indice de pr_+ ; nous allons considérer uniquement la composante $Gr_0(H)$, qui correspond à l'indice zéro.

DEFINITION 2.2. *L'application linéaire inversible $v : H_+ \rightarrow V$ est appelée le cadre admissible pour l'espace $V \in Gr_0(H)$, si $\text{pr}_+ \circ v : H_+ \rightarrow H_+$ est une perturbation à trace de l'identité. La fibre du fibré \det^* au-dessus de V est formée des classes d'équivalence des paires (v, α) , où v est un cadre admissible, α est un nombre complexe et $(v_1, \alpha_1) \sim (v_2, \alpha_2)$ si $\alpha_1 = \alpha_2 \det(v_2^{-1}v_1)$. La section canonique du fibré \det^* est définie comme $\sigma : V \mapsto (v, \det(\text{pr}_+ \circ v))$.*

Dans les travaux de Segal et Wilson, et presque dans tous les articles subséquents sur ce sujet, l'espace de Hilbert H était formé des fonctions de carré intégrable sur le cercle unitaire $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, H_+ et H_- étant engendrés par les éléments $\{z^k\}$ avec $k \geq 0$ et $k < 0$, respectivement.

Nous nous intéressons à un modèle plus compliqué de la grassmannienne. On identifie H avec l'espace W (voir (3.4)) des fonctions à valeurs dans \mathbb{C}^2 , qui sont quasipériodiques et de carré intégrable sur ∂S . Fixons une collection de points $a^0 = (a_1^0, \dots, a_n^0)$ telle que $a_j^0 \in S_j$, $j = 1, \dots, n$. Alors on peut définir la grassmannienne $Gr(W)$ par rapport à la décomposition $W = W_{int}(a^0) \oplus W_{ext}$. L'observation décisive, analogue à celle de Palmer [25], est que $W_{int}(a) \in Gr_0(W)$.

Introduisons maintenant deux cadres admissibles pour le sous-espace $W_{int}(a)$. Le premier, que l'on notera $P(a) : W_{int}(a^0) \rightarrow W_{int}(a)$, représente la projection de $W_{int}(a^0)$ sur $W_{int}(a)$ le long de W_{ext} . Il est facile de comprendre que $P(a)$ est l'inverse de pr_+ . Alors la section canonique s'écrit comme $\sigma : W_{int}(a) \mapsto (P(a), 1)$. Le deuxième cadre, $F(a) : W_{int}(a^0) \rightarrow W_{int}(a)$,

est la restriction à $W_{int}(a^0)$ de la somme directe des projections associées à un point (3.6)-(3.7): $F(a) = (P_{S_1}(a_1) \oplus \dots \oplus P_{S_n}(a_n)) \Big|_{W_{int}(a^0)}$. Il définit une deuxième section (trivialisante) $\vartheta : W_{int}(a) \mapsto (F(a), 1)$. Le déterminant de l'opérateur de Dirac $D^{a,\lambda}$, autrement dit la fonction τ , est déterminé de la comparaison de ces deux sections,

$$(3.21) \quad \tau(a, a^0) = \frac{\sigma(W_{int}(a))}{\vartheta(W_{int}(a))} = \det(P(a)^{-1}F(a)).$$

Remarque. L'origine de cette idée est l'article [24], où la fonction τ isomonodromique, associée à un système fuchsien sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, a été interprétée comme déterminant d'un opérateur de Cauchy-Riemann avec le domaine contenant des fonctions multivaluées.

Pour trouver une forme plus explicite de $\tau(a, a^0)$, nous utilisons quelques résultats et notations du paragraphe précédent. Supposons que $f \in W_{int}(a^0)$, $g \in W_{int}(a)$, alors

$$(3.22) \quad f^{(j)} = \tilde{f}_j \oplus N_j(a^0) \tilde{f}_j, \quad g^{(j)} = \tilde{g}_j \oplus N_j(a) \tilde{g}_j, \quad N_j(a) = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_j(a) & \hat{\beta}_j(a) \\ \hat{\gamma}_j(a) & \hat{\delta}_j(a) \end{pmatrix}.$$

Les fonctions f et g peuvent être représentées par les colonnes

$$f = (\tilde{f}_1 \dots \tilde{f}_n)^T, \quad g = (\tilde{g}_1 \dots \tilde{g}_n)^T.$$

Dans ces coordonnées, l'application $F(a) : W_{int}(a^0) \rightarrow W_{int}(a)$ est donnée par la matrice identité. Pour obtenir la représentation de $P(a)^{-1}$, il faut trouver pour tout $g \in W_{int}(a)$ une fonction $f \in W_{int}(a^0)$ telle que $g = f - h$ avec $h \in W_{ext}$. Cela revient au même calcul qu'on a déjà fait ci-dessus en dérivant (3.20). En utilisant la condition additionnelle (3.22) sur f , on obtient finalement

$$(\mathbf{1} + M(a))g = (\mathbf{1} + M(a^0))f,$$

où

$$M(a) = \begin{pmatrix} 0 & U_1(a) & 0 & \cdot & 0 \\ V_1(a) & 0 & U_2(a) & \cdot & 0 \\ 0 & V_2(a) & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & U_{n-1}(a) \\ 0 & 0 & \cdot & V_{n-1}(a) & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, la fonction τ est donnée par

$$(3.23) \quad \tau(a, a^0) = \det \left\{ (\mathbf{1} + M(a)) (\mathbf{1} + M(a^0))^{-1} \right\}.$$

En effet, on peut en déduire une représentation encore plus explicite. Introduisons la matrice

$$\tilde{M}(a) = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{U}_1(a) & 0 & \cdot & 0 \\ \tilde{V}_1(a) & 0 & \tilde{U}_2(a) & \cdot & 0 \\ 0 & \tilde{V}_2(a) & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \tilde{U}_{n-1}(a) \\ 0 & 0 & \cdot & \tilde{V}_{n-1}(a) & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$\tilde{U}_j = \begin{pmatrix} -\hat{\omega}_j \hat{\gamma}_{j+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{V}_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\hat{\omega}_j \hat{\beta}_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

La matrice $\mathbf{1} + \tilde{M}(a)$ est le produit d'une matrice triangulaire supérieure par une matrice triangulaire inférieure à diagonales unités. On obtient ainsi

$$\det \left\{ (\mathbf{1} + \tilde{M}(a^0)) (\mathbf{1} + \tilde{M}(a))^{-1} \right\} = 1.$$

En multipliant la partie droite de (3.23) par ce déterminant, on obtient

$$\tau(a, a^0) = \det \left\{ (\mathbf{1} + \tilde{M}(a))^{-1} (\mathbf{1} + M(a)) (\mathbf{1} + M(a^0))^{-1} (\mathbf{1} + \tilde{M}(a^0)) \right\} = \frac{\tau(a)}{\tau(a^0)},$$

où

$$(3.24) \quad \tau(a) = \det \left\{ (\mathbf{1} + \tilde{M}(a))^{-1} (\mathbf{1} + M(a)) \right\}.$$

Exemple. Considérons la situation non triviale la plus simple, quand il n'y a que deux points de branchement sur le cylindre. Notons

$$\tilde{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1, \quad \bar{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2,$$

$$a_x = (a_2)_x - (a_1)_x, \quad a_y = (a_2)_y - (a_1)_y.$$

Dans le cas $n = 2$ la matrice inverse $(\mathbf{1} + \tilde{M}(a))^{-1}$ est particulièrement simple,

$$(\mathbf{1} + \tilde{M}(a))^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\tilde{U}_1(a) \\ -\tilde{V}_1(a) & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

En utilisant cette formule, on peut montrer que la fonction τ à deux points s'écrit comme

$$(3.25) \quad \tau(a) = \det(\mathbf{1} - K),$$

où l'opérateur $K = \hat{\omega}_1 \hat{\alpha}_1 \hat{\omega}_1 \hat{\delta}_2$ est donné par une matrice à dimension infinie avec les éléments

$$(3.26) \quad K_{mn} = \frac{4 \sin \pi \lambda_1 \sin \pi \lambda_2}{\beta^2} \frac{(v_m v_n)^{\frac{\lambda_1 - \lambda_2 + 1}{2}}}{\sqrt{\cosh \theta_m \cosh \theta_n}} \times \\ \times \sum_{l \in \mathbb{Z} + \tilde{\lambda}} \frac{v_l^{\lambda_1 - \lambda_2 + 1} e^{-m|a_x|} \frac{\cosh \theta_m + 2 \cosh \theta_l + \cosh \theta_n}{2} + i m a_y \frac{\sinh \theta_m - 2 \sinh \theta_l + \sinh \theta_n}{2} + \frac{\rho(\theta_m) + 2\rho(\theta_l) + \rho(\theta_n)}{2}}{(1 + v_m v_l)(1 + v_l v_n) \cosh \theta_l}.$$

Les indices ont les valeurs $m, n \in \mathbb{Z} + \tilde{\lambda}$ et

$$2\rho(\theta) = \eta(\theta; \tilde{\lambda}, \bar{\lambda}) - \eta(\theta; \lambda_0, \bar{\lambda}) + i\nu(\theta; \tilde{\lambda}, \bar{\lambda}) - i\nu(\theta; \lambda_0, \bar{\lambda}).$$

On peut aussi réécrire K comme

$$K = 4 \sin \pi \lambda_1 \sin \pi \lambda_2 \cdot V V^T, \\ V_{mn} = \frac{1}{\beta} \frac{(v_m v_n)^{\frac{\lambda_1 - \lambda_2 + 1}{2}} e^{-m|a_x|} \frac{\cosh \theta_m + \cosh \theta_n}{2} + i m a_y \frac{\sinh \theta_m - \sinh \theta_n}{2} + \frac{\rho(\theta_m) + \rho(\theta_n)}{2}}{\sqrt{\cosh \theta_m \cosh \theta_n} (1 + v_m v_n)}, \quad m, n \in \mathbb{Z} + \tilde{\lambda}.$$

Ces formules explicites pour la fonction τ représentent, dans un certain sens, une récompense pour le travail technique accompli en calculant l'élément de la base canonique sur le cylindre avec un point marqué (Théorème 2.2). Il serait intéressant de les comparer avec les fonctions de corrélation des champs de la monodromie, qui ont été obtenus dans [5] pour la théorie de Dirac régularisée sur réseau.

Remarquons que la réponse finale (3.25)–(3.26) pour la fonction τ à deux points ne dépend pas du choix de la localisation (coordonnées des côtés des bandes S_1, \dots, S_n). Montrons que c'est vrai même dans le cas général.

PROPOSITION 2.3. *Les dérivées logarithmiques de la fonction τ (3.21) sont données par*

$$(3.27) \quad d \ln \tau(a, a^0) = \frac{m}{2} \sum_{\nu=1}^n \left\{ a_{1/2}^{(\nu)}(\tilde{\mathbf{w}}_\nu(\lambda)) da_\nu + \overline{a_{1/2}^{(\nu)}(\tilde{\mathbf{w}}_\nu(-\lambda))} d\bar{a}_\nu \right\}.$$

■ Considérons la fonction de Green à n points, $G^{a,\lambda}(z, z')$, et construisons une application $\tilde{P}(a) : W \rightarrow W_{int}(a)$ de la façon suivante:

$$(3.28) \quad \tilde{P}(a)f(z) = \int_{\partial S} G_{,1}^{a,\lambda}(z, z')f_1(z')dz' + G_{,2}^{a,\lambda}(z, z')f_2(z')d\bar{z}'.$$

On peut aisément montrer que cette application définit la projection sur $W_{int}(a)$ le long de W_{ext} . Effectivement, utilisons la transversalité et écrivons la fonction $f(z) \in W$ comme $f = g + h$, avec $g \in W_{int}(a)$ et $h \in W_{ext}$. La forme sous l'intégrale $\tilde{P}(a)g(z)$ est fermée, alors on peut contracter chaque pièce ∂S_μ du contour d'intégration en deux petits cercles, autour de z et a_μ . En calculant les résidus, nous obtenons $\tilde{P}(a)g(z) = g(z)$. De manière analogue, on montre aussi que $\tilde{P}(a)h(z) = 0$.

Il est clair que le cadre admissible $P(a) : W_{int}(a^0) \rightarrow W_{int}(a)$ et la projection $\text{pr}_+ : W_{int}(a) \rightarrow W_{int}(a^0)$ sont les restrictions

$$P(a) = \tilde{P}(a)\Big|_{W_{int}(a^0)}, \quad \text{pr}_+ = \tilde{P}(a^0)\Big|_{W_{int}(a)}.$$

De façon analogue, considérons l'application $\tilde{F}(a) : W \rightarrow W_{int}(a)$, définie comme la somme directe des projections à un point, $\tilde{F}(a) = P_{S_1}(a_1) \oplus \dots \oplus P_{S_n}(a_n)$. Le deuxième cadre admissible utilisé ci-dessus, $F(a) : W_{int}(a^0) \rightarrow W_{int}(a)$, est la restriction $F(a) = \tilde{F}(a)\Big|_{W_{int}(a^0)}$. Son inverse, qu'on va noter $F(a^0) : W_{int}(a) \rightarrow W_{int}(a^0)$, est donné par $F(a^0) = \tilde{F}(a^0)\Big|_{W_{int}(a)}$.

Ainsi en dérivant (3.21), on obtient

$$\begin{aligned} d \ln \tau(a, a^0) &= -\text{Tr} \{ d(F(a)^{-1}P(a)) P(a)^{-1}F(a) \} = \\ &= -\text{Tr} \{ F(a^0)d(P(a))\text{pr}_+F(a) \}. \end{aligned}$$

Nous rappelons que les traces dans la dernière formule, et également le déterminant dans (3.21), se calculent sur le sous-espace $W_{int}(a^0)$. Cependant, puisque l'image de $F(a^0)$ et $\tilde{F}(a^0)$ est $W_{int}(a^0)$, on peut oublier cette restriction et remplacer sous la dernière trace $P(a)$ par $\tilde{P}(a)$, $F(a)$ par $\tilde{F}(a)$, pr_+ par $\tilde{P}(a^0)$ et $F(a^0)$ par $\tilde{F}(a^0)$. De plus, si nous utilisons les relations

$$\begin{aligned} \tilde{P}(a)(\mathbf{1} - \tilde{P}(a^0)) &= 0, \\ \tilde{F}(a)(\mathbf{1} - \tilde{F}(a^0)) &= 0, \end{aligned}$$

la trace devient

$$d \ln \tau(a, a^0) = -\text{Tr}_W \left\{ \tilde{F}(a^0)d(\tilde{P}(a))\tilde{P}(a^0)\tilde{F}(a) \right\} = -\text{Tr}_W \left\{ d(\tilde{P}(a))\tilde{F}(a) \right\}.$$

En prenant en considération la forme explicite (3.28) de $\tilde{P}(a)$ et les formules (2.23)–(2.24) pour les dérivées de la fonction de Green, on peut montrer que $d\tilde{P}(a)$ est un opérateur intégral à noyau dégénéré. Par exemple,

$$\partial_{a_\nu} \ln \tau(a, a^0) = \frac{im^2}{8 \sin \pi \lambda_\nu} \sum_{\mu=1}^n \int_{\partial S_\mu} \left\{ \left(\tilde{\mathbf{w}}_\nu(z, -\lambda) \right)_1 \left(P_{S_\mu}(a_\mu) \tilde{\mathbf{w}}_\nu(z, \lambda) \right)_1 dz + \right.$$

$$+ \left(\tilde{\mathbf{w}}_\nu(z, -\lambda) \right)_2 \left(P_{S_\mu}(a_\mu) \tilde{\mathbf{w}}_\nu(z, \lambda) \right)_2 d\bar{z} \}.$$

En appliquant le théorème de Stokes encore une fois, on contracte chaque contour ∂S_μ à un petit cercle autour de a_μ . L'intégrale est déterminée par la contribution d'un seul cercle, autour de a_ν , qui peut être calculée en utilisant l'asymptotique de la fonction de Green à un point. A la fin de ce calcul, on trouve

$$\begin{aligned} \partial_{a_\nu} \ln \tau(a, a^0) &= \frac{m}{2} a_{1/2}^{(\nu)}(\tilde{\mathbf{w}}_\nu(\lambda)), \\ \partial_{\bar{a}_\nu} \ln \tau(a, a^0) &= \frac{m}{2} \overline{a_{1/2}^{(\nu)}(\tilde{\mathbf{w}}_\nu(-\lambda))}, \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

CHAPITRE 4

Equations de déformation

Nous obtenons maintenant les équations différentielles satisfaites par les éléments (2.20), en exploitant l'idée qui a déjà été utilisé pour calculer la dérivée de la fonction de Green. Par exemple, considérons la solution $\tilde{\mathbf{w}}_\mu(\lambda)$ et dérivons la par rapport à a_ρ . On obtient encore une solution de l'équation de Dirac, mais ses développements locaux aux points de branchement sont encore plus singuliers:

$$\begin{aligned} \partial_{a_\rho} \tilde{\mathbf{w}}_\mu(\lambda)[a_\nu] &= \sum_{k>0} \left\{ \partial_{a_\rho} a_k^{(\nu)}(\tilde{\mathbf{w}}_\mu(\lambda)) w_{k+\lambda_\nu}[a_\nu] + \partial_{a_\rho} b_k^{(\nu)}(\tilde{\mathbf{w}}_\mu(\lambda)) w_{k-\lambda_\nu}^*[a_\nu] \right\} - \\ & - \frac{m}{2} \delta_{\rho\nu} \left[\delta_{\mu\nu} w_{-3/2+\lambda_\nu}[a_\nu] + \sum_{k>0} \left\{ a_k^{(\nu)}(\tilde{\mathbf{w}}_\mu(\lambda)) w_{k-1+\lambda_\nu}[a_\nu] + b_k^{(\nu)}(\tilde{\mathbf{w}}_\mu(\lambda)) w_{k+1-\lambda_\nu}^*[a_\nu] \right\} \right]. \end{aligned}$$

En ajoutant une combinaison linéaire des $\{\tilde{\mathbf{w}}_\eta(\lambda)\}$, $\{\partial_z \tilde{\mathbf{w}}_\eta(\lambda)\}$ et $\{\partial_{\bar{z}} \tilde{\mathbf{w}}_\eta(\lambda)\}$ ($\eta = 1, \dots, n$) à cette expression, on peut supprimer les termes "additionnels" du type $w_{-3/2+\lambda_\nu}$ et $w_{-1/2+\lambda_\nu}$. Alors la fonction qu'on obtient est nulle identiquement, puisqu'elle appartient à $\widetilde{\mathbf{W}}^{a,\lambda}$. Cette observation se traduit de manière générale par l'équation

$$(4.1) \quad d_{a,\bar{a}} \vec{\mathbf{w}}(\lambda) = (\Phi \partial_z + \Phi^* \partial_{\bar{z}} + \Psi) \vec{\mathbf{w}}(\lambda).$$

Ici on note $d_{a,\bar{a}} = \sum_{j=1}^n (da_j \cdot \partial_{a_j} + d\bar{a}_j \cdot \partial_{\bar{a}_j})$ la différentielle par rapport aux positions des singularités, Φ , Φ^* et Ψ sont des 1-formes à valeurs dans les matrices $n \times n$, et $\vec{\mathbf{w}}(\lambda) = (\tilde{\mathbf{w}}_1(\lambda) \dots \tilde{\mathbf{w}}_n(\lambda))^T$.

Introduisons la notation

$$(4.2) \quad C_j = \left[a_{j+1/2}^{(\nu)}(\tilde{\mathbf{w}}_\mu(\lambda)) \right]_{\mu,\nu=1,\dots,n}, \quad C_j^* = \left[b_{j-1/2}^{(\nu)}(\tilde{\mathbf{w}}_\mu(\lambda)) \right]_{\mu,\nu=1,\dots,n}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

En particulier, on a $C_0 = \mathbf{1}$ et $C_j = C_j^* = \mathbf{0}$ pour $j < 0$. Le système (4.1), étant réécrit en termes des $\{C_j\}$, $\{C_j^*\}$, se réduit à

$$(4.3) \quad dC_j - \frac{m}{2} C_{j+1} dA - \frac{m}{2} C_{j-1} d\bar{A} = \frac{m}{2} \Phi C_{j+1} + \frac{m}{2} \Phi^* C_{j-1} + \Psi C_j,$$

$$(4.4) \quad dC_j^* - \frac{m}{2} C_{j-1}^* dA - \frac{m}{2} C_{j+1}^* d\bar{A} = \frac{m}{2} \Phi C_{j-1}^* + \frac{m}{2} \Phi^* C_{j+1}^* + \Psi C_j^*,$$

où $dA = (\delta_{\mu\nu} da_\nu)_{\mu,\nu=1,\dots,n}$ et $d\bar{A} = (\delta_{\mu\nu} d\bar{a}_\nu)_{\mu,\nu=1,\dots,n}$.

Notons que les coefficients des développements vérifient certaines relations algébriques. Pour les trouver, considérons d'abord deux solutions multivaluées de l'équation de Dirac, u et v , qui sont de carré intégrable quand $|x| \rightarrow \infty$ et qui ont les développements locaux (1.3) aux singularités. On va admettre qu'il existe un nombre négatif semi-entier k_0 tel que

$$a_k^{(\nu)}(u) = b_k^{(\nu)}(u) = a_k^{(\nu)}(v) = b_k^{(\nu)}(v) = 0, \quad \nu = 1, \dots, n,$$

pour tout $k < k_0$. En utilisant (1.9) et le théorème de Stokes, calculons l'intégrale

$$\frac{m^2}{2} \int_{\mathcal{C} \setminus \bigcup_{\nu} D_{\varepsilon}(a_{\nu})} (\bar{u}_1 v_1 + \bar{u}_2 v_2) idz \wedge d\bar{z} = im \oint_{\bigcup_{\nu} D_{\varepsilon}(a_{\nu})} \bar{u}_2 v_1 dz = -im \oint_{\bigcup_{\nu} \partial D_{\varepsilon}(a_{\nu})} \bar{u}_1 v_2 d\bar{z}$$

en deux façons différentes. En comparant les asymptotiques des intégrales au bord correspondants pour $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient

$$(4.5) \quad \sum_{\nu=1}^n \sum_{k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \left\{ \overline{b_k^{(\nu)}(u)} a_{-k}^{(\nu)}(v) - \overline{a_{-k}^{(\nu)}(u)} b_k^{(\nu)}(v) \right\} (-1)^{k-1/2} \sin \pi \lambda_{\nu} = 0.$$

Si on pose maintenant $u = \tilde{\mathbf{w}}_{\mu}$, $v = \tilde{\mathbf{w}}_{\rho}$, alors (4.5) implique la relation (analogue à (1.13))

$$\overline{b_{1/2}^{(\rho)}(\tilde{\mathbf{w}}_{\mu})} \sin \pi \lambda_{\rho} = b_{1/2}^{(\mu)}(\tilde{\mathbf{w}}_{\rho}) \sin \pi \lambda_{\mu},$$

ou, en notation matricielle,

$$(4.6) \quad C_0^* \sin \pi \Lambda = [\overline{C_0^*} \sin \pi \Lambda]^T, \quad \Lambda = (\delta_{\mu\nu} \lambda_{\nu})_{\mu, \nu=1, \dots, n}.$$

D'autre part, la substitution $u = \tilde{\mathbf{w}}_{\mu}(\lambda)$, $v = \tilde{\mathbf{w}}_{\nu}^*(-\lambda)$ nous donne

$$(4.7) \quad C_1(\lambda) \sin \pi \Lambda = [C_1(-\lambda) \sin \pi \Lambda]^T.$$

Remarquons finalement que les “coordonnées” du vecteur $\partial_{\bar{z}} \tilde{\mathbf{w}}(\lambda) - \frac{m}{2} C_0^*(\lambda) \tilde{\mathbf{w}}^*(-\lambda)$ appartiennent à $\tilde{\mathbf{W}}^{a, \lambda}$ et doivent alors s'annuler. Cela implique deux relations additionnelles,

$$(4.8) \quad C_0^*(\lambda) \overline{C_1(-\lambda)} = C_1^*(\lambda), \quad C_0^*(\lambda) \overline{C_0^*(-\lambda)} = \mathbf{1}.$$

Il est clair que pour λ_{μ} , λ_{ν} positifs $\tilde{\mathbf{w}}_{\mu}(\lambda), \tilde{\mathbf{w}}_{\nu}(\lambda) \in \mathbf{W}^{a, \lambda}$, et alors on peut calculer le produit scalaire:

$$\langle \tilde{\mathbf{w}}_{\mu}(\lambda), \tilde{\mathbf{w}}_{\nu}(\lambda) \rangle = -4 \overline{b_{1/2}^{(\nu)}(\tilde{\mathbf{w}}_{\mu}(\lambda))} \sin \pi \lambda_{\nu}.$$

Par conséquent, la sous-matrice de $C_0^*(\lambda) \sin \pi \Lambda$, associée aux indices correspondants aux $\{\lambda_{\rho}\}$ positifs, est définie négative. De manière similaire, on obtient

$$\langle \tilde{\mathbf{w}}_{\mu}^*(-\lambda), \tilde{\mathbf{w}}_{\nu}^*(-\lambda) \rangle = 4 \overline{b_{1/2}^{(\mu)}(\tilde{\mathbf{w}}_{\nu}^*(-\lambda))} \sin \pi \lambda_{\mu}$$

pour λ_{μ} , λ_{ν} négatifs. En combinant cette formule avec la deuxième relation dans (4.8), on peut montrer que la sous-matrice de $(C_0^*(\lambda))^{-1} \sin \pi \Lambda$, qui correspond aux indices “négatifs”, est définie positive.

Revenons aux équations de déformation (4.3) et (4.4). Pour déterminer les formes matricielles inconnues Φ et Φ^* , posons $j = -1$. On trouve alors

$$(4.9) \quad \Phi = -dA, \quad \Phi^* = -C_0^* d\bar{A} (C_0^*)^{-1}.$$

En considérant le cas $j = 0$, on peut calculer Ψ et obtenir une équation matricielle:

$$(4.10) \quad \Psi = \frac{m}{2} [dA, C_1] = dC_0^* (C_0^*)^{-1} + \frac{m}{2} [C_0^* d\bar{A} (C_0^*)^{-1}, C_1^* (C_0^*)^{-1}].$$

Pour $j = 1$, les coefficients d'ordre supérieur apparaissent. Néanmoins, la partie “anti-holomorphe” de (4.3) et la partie “holomorphe” de (4.4) ne contiennent que les coefficients qui sont déjà engagés:

$$(4.11) \quad d_{\bar{a}} C_1 + \frac{m}{2} [C_0^* d\bar{A}, (C_0^*)^{-1}] = 0,$$

$$(4.12) \quad d_a C_1^* + \frac{m}{2} [dA, C_0^*] - \frac{m}{2} [dA, C_1] C_1^* = 0,$$

où $d_a = \sum_{j=1}^n da_j \cdot \partial_{a_j}$ et $d_{\bar{a}} = \sum_{j=1}^n d\bar{a}_j \cdot \partial_{\bar{a}_j}$. De plus, la partie diagonale de (4.3) implique

$$(4.13) \quad d_a \text{diag } C_1 = \frac{m}{2} \text{diag } ([dA, C_1] C_1).$$

Pour écrire les équations de déformation sous une forme plus compacte et standard, introduisons la notation

$$(4.14) \quad G = C_0^* \sin \pi \Lambda, \quad \Theta = \frac{m}{2} [dA, C_1], \quad \Theta^\dagger = \bar{\Theta}^T.$$

En utilisant les relations de symétrie (4.6)–(4.8), on peut transformer (4.10) en

$$(4.15) \quad \boxed{dG = \Theta G + G \Theta^\dagger.}$$

Au lieu des équations (4.11) et (4.12), nous obtenons deux relations conjuguées

$$(4.16) \quad \boxed{d_{\bar{a}} C_1 = \frac{m}{2} [d\bar{A}, G] G^{-1}, \quad d_a \bar{C}_1 = \frac{m}{2} [dA, \bar{G}] \bar{G}^{-1},}$$

et la dernière équation (4.13) s'écrit comme

$$(4.17) \quad \boxed{d_a \text{diag } C_1 = \text{diag } (\Theta C_1).}$$

On en déduit aisément de (4.14) et (4.15) que $\det G = \text{const.}$ Il est aussi très instructif de vérifier que la forme

$$\Omega = \frac{m}{2} \sum_{\nu=1}^n \left\{ a_{1/2}^{(\nu)}(\tilde{\mathbf{w}}_\nu(\lambda)) da_\nu + \overline{a_{1/2}^{(\nu)}(\tilde{\mathbf{w}}_\nu(-\lambda))} d\bar{a}_\nu \right\} = \frac{m}{2} \text{Tr} (C_1 dA + \bar{C}_1 d\bar{A}),$$

qui se trouve dans la partie droite de (3.27), est fermée, en utilisant uniquement les équations de déformation. Effectivement,

$$\begin{aligned} d\Omega &= \frac{m}{2} \text{Tr} \left(\Theta C_1 \wedge dA + \frac{m}{2} [d\bar{A}, G] G^{-1} \wedge dA + \bar{\Theta} \bar{C}_1 \wedge d\bar{A} + \frac{m}{2} [dA, \bar{G}] \bar{G}^{-1} \wedge d\bar{A} \right) = \\ &= -\frac{m^2}{4} \text{Tr} \left(C_1 dA \wedge C_1 dA + \bar{C}_1 d\bar{A} \wedge \bar{C}_1 d\bar{A} + G d\bar{A} \wedge G^{-1} dA + \bar{G} dA \wedge \bar{G}^{-1} d\bar{A} \right) = 0, \end{aligned}$$

et alors la forme Ω est vraiment la différentielle d'une fonction.

Exemple. En guise d'une illustration, calculons la forme explicite des équations de déformation dans le cas le plus simple: $n = 2$. Soit $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$. Alors $G_{11} < 0$, $\det G < 0$, et la matrice G peut être paramétrée de la manière suivante:

$$G = \chi \begin{pmatrix} -e^\eta \sin \psi & e^{i\varphi} \cos \psi \\ e^{-i\varphi} \cos \psi & e^{-\eta} \sin \psi \end{pmatrix}, \quad \chi, \eta, \psi, \varphi \in \mathbb{R},$$

où $0 < \psi < \pi$, $\chi > 0$. On notera aussi

$$C_1 = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix}, \quad q = m(a_2 - a_1)/2, \quad \bar{q} = m(\bar{a}_2 - \bar{a}_1)/2.$$

De (4.15) on déduit

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial q} &= -\chi^{-1} \begin{pmatrix} \Lambda_{12} e^{-i\varphi} \cos \psi & \Lambda_{12} e^{-\eta} \sin \psi \\ \Lambda_{21} e^\eta \sin \psi & -\Lambda_{21} e^{i\varphi} \cos \psi \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial G}{\partial \bar{q}} &= -\chi^{-1} \begin{pmatrix} \bar{\Lambda}_{12} e^{i\varphi} \cos \psi & \bar{\Lambda}_{12} e^\eta \sin \psi \\ \bar{\Lambda}_{12} e^{-\eta} \sin \psi & -\bar{\Lambda}_{21} e^{-i\varphi} \cos \psi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Cela implique les relations

$$\begin{aligned} \partial_q \varphi &= i \operatorname{tg}^2 \psi \partial_q \eta, & \partial_{\bar{q}} \varphi &= -i \operatorname{tg}^2 \psi \partial_{\bar{q}} \eta, \\ \Lambda_{12} &= e^{\eta+i\varphi} (\partial_q \psi - i \operatorname{ctg} \psi \partial_q \varphi), & \Lambda_{21} &= e^{-\eta-i\varphi} (\partial_q \psi + i \operatorname{ctg} \psi \partial_q \varphi). \end{aligned}$$

Ensuite, la première formule dans (4.16) permet d'obtenir

$$(4.18) \quad \frac{\partial C_1}{\partial \bar{q}} = - \begin{pmatrix} \cos^2 \psi & e^{\eta+i\varphi} \cos \psi \sin \psi \\ e^{-\eta-i\varphi} \cos \psi \sin \psi & -\cos^2 \psi \end{pmatrix}.$$

Les éléments hors diagonale de cette relation nous donnent un système d'équations différentielles couplées:

$$\boxed{\begin{cases} \partial_{q\bar{q}} \psi + \frac{\cos \psi}{\sin^3 \psi} \partial_q \varphi \partial_{\bar{q}} \varphi + \sin \psi \cos \psi = 0, \\ \partial_{q\bar{q}} \varphi = \frac{1}{\sin \psi \cos \psi} (\partial_q \varphi \partial_{\bar{q}} \psi + \partial_{\bar{q}} \varphi \partial_q \psi). \end{cases}}$$

Finalement, la formule (4.17) et la partie diagonale de (4.18) donnent les deuxièmes dérivées de la fonction τ :

$$(4.19) \quad \boxed{\begin{cases} \partial_{q\bar{q}} \ln \tau = \cos^2 \psi, \\ \partial_{qq} \ln \tau = (\partial_q \psi)^2 + \operatorname{ctg}^2 \psi (\partial_q \varphi)^2, \\ \partial_{\bar{q}\bar{q}} \ln \tau = (\partial_{\bar{q}} \psi)^2 + \operatorname{ctg}^2 \psi (\partial_{\bar{q}} \varphi)^2. \end{cases}}$$

Deuxième partie

**Limite continue du modèle d'Ising
sur le cylindre**

CHAPITRE 5

EDP pour les fonctions de corrélation à deux points

Dans cette partie nous obtenons, de deux façons différentes, les équations différentielles satisfaites par les fonctions de corrélation du modèle d'Ising sur le cylindre. La première méthode est directe et est fondée sur les expressions exactes pour les facteurs de forme. Elle est illustrée sur l'exemple des fonctions de corrélation à deux points. Cette méthode a été proposée par O. Babelon et D. Bernard [1] pour obtenir les représentations des corrélateurs sur le plan en termes des transcendants de Painlevé. Nous généralisons ces résultats au cas du cylindre. La deuxième méthode utilise les développements de produit d'opérateurs locaux dans le modèle d'Ising. Ici, nous obtenons les équations satisfaites par les corrélateurs d'ordre arbitraire à partir des déformations isomonodromiques de l'équation de Dirac.

1. Fonctions de corrélation: représentation par les déterminants de Fredholm

Rappelons le développement de Cällen-Lehmann des fonctions de corrélation de deux spins (Annexe B). Dans la limite continue du modèle d'Ising sur le cylindre on a

$$(5.1) \quad \langle \sigma(0,0)\sigma(x,y) \rangle^{(\pm)} = \xi_T(\beta) e^{-x/\Lambda(\beta)} \tau_{\pm}(x,y,\beta),$$

$$\tau_+(x,y,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{2n+1}(x,y,\beta), \quad \tau_-(x,y,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{2n}(x,y,\beta),$$

où les signes “+” et “-” correspondent à la phase paramagnétique et ferromagnétique. Chaque terme $g_n(x,y,\beta)$ représente la contribution des états intermédiaires à n particules et donc s'écrit sous la forme

$$g_n(x,y,\beta) = \frac{1}{n!} \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{k_n \in \mathbb{Z}} \prod_{j=1}^n e^{-m|x| \cosh \theta_{k_j} + imy \sinh \theta_{k_j}} \left| \langle vac | \hat{\sigma}(0,0) | \theta_{k_1}, \dots, \theta_{k_n} \rangle_R \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{k_n \in \mathbb{Z}} \prod_{j=1}^n \frac{e^{-m|x| \cosh \theta_{k_j} + imy \sinh \theta_{k_j} - \eta(\theta_{k_j})}}{m\beta \cosh \theta_{k_j}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \tanh^2 \frac{\theta_{k_i} - \theta_{k_j}}{2}.$$

Le produit double à droite peut être exprimé par le déterminant de Cauchy,

$$\det_n \left\| \frac{1}{e^{\theta_{k_i}} + e^{\theta_{k_j}}} \right\| = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\theta_{k_i}}}{2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \tanh^2 \frac{\theta_{k_i} - \theta_{k_j}}{2}.$$

Si on utilise cette formule et si on note

$$E_{k_i} = \left[\frac{2e^{\theta_{k_i} - \eta(\theta_{k_i})}}{\cosh \theta_{k_i}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad u_{k_i} = e^{\theta_{k_i}},$$

alors on obtient

$$g_n(x, y, \beta) = \frac{1}{n!(m\beta)^n} \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \cdots \sum_{k_n \in \mathbb{Z}} \det_n \left\| \frac{E_{k_i} E_{k_j} \exp \left\{ -m \frac{|x-iy|}{2} \frac{u_{k_i} + u_{k_j}}{2} - m \frac{|x+iy|}{2} \frac{u_{k_i}^{-1} + u_{k_j}^{-1}}{2} \right\}}{u_{k_i} + u_{k_j}} \right\|.$$

Considérons une matrice carrée arbitraire \hat{K} de coefficients K_{mn} et construisons le déterminant

$$\begin{aligned} \left| 1 + \frac{\hat{K}}{m\beta} \right| &= e^{\text{Tr} \ln \left(1 + \frac{\hat{K}}{m\beta} \right)} = e^{\text{Tr} \left(\frac{1}{m\beta} \hat{K} - \frac{1}{2(m\beta)^2} \hat{K}^2 + \dots \right)} = \\ &= 1 + \frac{1}{m\beta} \text{Tr} \hat{K} + \frac{1}{2(m\beta)^2} \left[\left(\text{Tr} \hat{K} \right)^2 - \text{Tr} \left(\hat{K}^2 \right) \right] + \dots = \\ &= 1 + \frac{1}{m\beta} \sum_m K_{mm} + \frac{1}{2(m\beta)^2} \sum_{m,n} \begin{vmatrix} K_{mm} & K_{mn} \\ K_{nm} & K_{nn} \end{vmatrix} + \dots \end{aligned}$$

sous la forme d'une série en $\frac{1}{m\beta}$. Il est facile de voir que le n -ième terme de ce développement coïncidera formellement avec $g_n(x, y, \beta)$ si \hat{K} est de dimension infinie, ses coefficients étant

$$K_{mn} = \frac{E_m E_n \exp \left\{ -m \frac{|x-iy|}{2} \frac{u_m + u_n}{2} - m \frac{|x+iy|}{2} \frac{u_m^{-1} + u_n^{-1}}{2} \right\}}{u_m + u_n}, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

En effet, dans ce cas, il faut comprendre \hat{K} comme la représentation de Fourier d'un opérateur à trace, qui agit sur les fonctions périodiques de $L^2(0; m\beta)$. Alors nous obtenons

$$(5.2) \quad \tau_- + \tau_+ = \sum_{n=0}^{\infty} g_n = \left| 1 + \frac{\hat{K}}{m\beta} \right|,$$

$$(5.3) \quad \tau_- - \tau_+ = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g_n = \left| 1 - \frac{\hat{K}}{m\beta} \right|,$$

où $\left| 1 \pm \frac{\hat{K}}{m\beta} \right|$ désignent les déterminants de Fredholm.

Passant à la limite quand $\beta \rightarrow \infty$ le spectre des impulsions des particules intermédiaires devient continu ($\theta_{k_j} \rightarrow \tilde{\theta}_{k_j}$, $\tilde{\theta}_{k_j} \in \mathbb{R}$). De plus, on a des simplifications

$$\begin{aligned} \nu(\theta) &\rightarrow 0, & \Lambda(\beta) &\rightarrow \infty, \\ \frac{1}{m\beta} \sum_{k_j \in \mathbb{Z}} f(\theta_{k_j}) &\rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_{k_j} \cosh \theta_{k_j} f(\theta_{k_j}). \end{aligned}$$

Les fonctions de corrélation sont données par

$$\tau_- \pm \tau_+ = \left| 1 \pm \tilde{K} \right|,$$

où l'opérateur intégral \tilde{K} agit sur $L^2(0; \infty)$ par

$$\tilde{K} : f(u) \mapsto \int_0^{\infty} dv \tilde{K}(u, v) f(v), \quad u \in (0; \infty),$$

le noyau étant

$$\tilde{K}(u, v) = \frac{1}{\pi} \frac{e^{-m \frac{|x|-iy}{2} \frac{u+v}{2} - m \frac{|x|+iy}{2} \frac{u^{-1}+v^{-1}}{2}}}{u+v}.$$

Tracy et Widom [34, 35, 36] ont établi des liens entre les déterminants de Fredholm d'opérateurs intégraux de ce type et les équations différentielles non linéaires. Dans le paragraphe suivant, nous complétons leurs résultats et les adaptons à notre cas.

2. Déterminants de Fredholm et équations différentielles non linéaires

Considérons encore une matrice carrée K de taille $N \times N$, de coefficients

$$K_{mn} = \frac{a_m a_n \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_l t_l (x_m^l + x_n^l) \right\}}{x_m + x_n}, \quad l \in \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z},$$

qui dépendent de $2N$ paramètres x_1, \dots, x_N , a_1, \dots, a_N et des variables $\{t_l\}$ (elles seront les "temps" de la hiérarchie intégrable ci-dessous). De plus, on suppose que $x_j > 0$ pour tout $j = 1, \dots, N$. On considère aussi le cas $N = \infty$, si K peut être interprétée comme une représentation d'un opérateur à trace.

Nous nous intéressons aux équations aux dérivées partielles par rapport aux $\{t_l\}$, satisfaites par deux fonctions,

$$(5.4) \quad \varphi = \ln \det(1 + K) - \ln \det(1 - K),$$

$$(5.5) \quad \psi = \ln \det(1 + K) + \ln \det(1 - K).$$

Pour trouver ces équations, introduisons les quantités auxiliaires

$$u_{i,j} = u_{j,i} = \langle E_i | \frac{1}{1 - K^2} | E_j \rangle,$$

$$v_{i,j} = u_{j,i} = \langle E_i | \frac{K}{1 - K^2} | E_j \rangle,$$

où les composantes de N -vecteur $|E_j\rangle$ sont données par

$$|E_i\rangle_m = a_m x_m^j \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_l t_l x_m^l \right\}.$$

Il est immédiat de vérifier que les dérivées de K se décomposent de la manière suivante (ici et dans la suite on suppose $k > 0$)

$$2 \frac{\partial K}{\partial t_k} = \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j=k-1}} (-1)^i |E_i\rangle \otimes \langle E_j|, \quad 2 \frac{\partial K}{\partial t_{-k}} = \sum_{\substack{i,j < 0 \\ i+j=-k-1}} (-1)^{i+1} |E_i\rangle \otimes \langle E_j|,$$

et alors on obtient

$$(5.6) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t_k} = \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j=k-1}} (-1)^i u_{i,j}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t_{-k}} = \sum_{\substack{i,j < 0 \\ i+j=-k-1}} (-1)^{i+1} u_{i,j},$$

$$(5.7) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t_k} = - \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j=k-1}} (-1)^i v_{i,j}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t_{-k}} = - \sum_{\substack{i,j < 0 \\ i+j=-k-1}} (-1)^{i+1} v_{i,j}.$$

De manière analogue à [35] on peut en déduire les relations de récurrence

$$(5.8) \quad u_{p+1,q} - u_{p,q+1} = u_{p,0}v_{q,0} - v_{p,0}u_{q,0},$$

$$(5.9) \quad v_{p+1,q} + v_{p,q+1} = u_{p,0}u_{q,0} - v_{p,0}v_{q,0},$$

et les formules de dérivation

$$(5.10) \quad 2 \frac{\partial u_{p,q}}{\partial t_k} = \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j=k-1}} (-1)^i (u_{p,j}v_{q,i} + v_{p,j}u_{q,i}) + u_{p+k,q} + u_{p,q+k},$$

$$(5.11) \quad 2 \frac{\partial v_{p,q}}{\partial t_k} = \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j=k-1}} (-1)^i (u_{p,j}u_{q,i} + v_{p,j}v_{q,i}) + v_{p+k,q} + v_{p,q+k},$$

$$(5.12) \quad 2 \frac{\partial u_{p,q}}{\partial t_{-k}} = \sum_{\substack{i,j < 0 \\ i+j=-k-1}} (-1)^{i+1} (u_{p,j}v_{q,i} + v_{p,j}u_{q,i}) + u_{p-k,q} + u_{p,q-k},$$

$$(5.13) \quad 2 \frac{\partial v_{p,q}}{\partial t_{-k}} = \sum_{\substack{i,j < 0 \\ i+j=-k-1}} (-1)^{i+1} (u_{p,j}u_{q,i} + v_{p,j}v_{q,i}) + v_{p-k,q} + v_{p,q-k}.$$

En appliquant ces relations, Palmer et Tracy ont montré que la fonction φ vérifie la hiérarchie des équations KdVm (KdV modifiées)

$$(5.14) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t_{2k+1}} = \left(\delta^2 - 4 \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \delta^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \delta \right)^k \frac{\partial \varphi}{\partial t_1},$$

et la hiérarchie sinh-Gordon

$$(5.15) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t_{-2k+1}} = 2^{-k} (\delta^{-1} e^{2\varphi} \delta^{-1} e^{-2\varphi} + \delta^{-1} e^{-2\varphi} \delta^{-1} e^{2\varphi})^k \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}.$$

Ici on note $\delta = \frac{\partial}{\partial t_1}$ et δ^{-1} est l'anti-dérivée qui s'annule en $\text{Re } t_1 = -\infty$.

Exemple. Nous montrons l'idée de la démonstration sur la première équation de la hiérarchie KdVm (5.14). D'après (5.6) et (5.10) on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t_3} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t_1^3} &= 2u_{2,0} - u_{1,1} - \frac{\partial^2 u_{0,0}}{\partial t_1^2} = \\ &= \frac{3}{2}(u_{2,0} - u_{1,1}) - \frac{3}{2}(u_{1,0}v_{0,0} + u_{0,0}v_{1,0} + u_{0,0}v_{0,0}^2) - \frac{1}{2}u_{0,0}^3. \end{aligned}$$

Ensuite, les relations de récurrence (5.8), (5.9) impliquent

$$\begin{aligned} u_{2,0} - u_{1,1} &= u_{1,0}v_{0,0} - u_{0,0}v_{1,0}, \\ 2v_{1,0} &= u_{0,0}^2 - v_{0,0}^2, \end{aligned}$$

et alors

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_3} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t_1^3} = -2u_{0,0}^3 = -2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \right)^3.$$

Exemple. La première équation de la hiérarchie de sinh-Gordon (5.15) est la suivante:

$$(5.16) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1 \partial t_{-1}} &= \frac{1}{2} (e^{2\varphi} \delta^{-1} e^{-2\varphi} + e^{-2\varphi} \delta^{-1} e^{2\varphi}) \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} = \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{2\varphi} \delta^{-1} \delta \frac{1 - e^{-2\varphi}}{2} + e^{-2\varphi} \delta^{-1} \delta \frac{e^{2\varphi} - 1}{2} \right) = \frac{1}{2} \sinh 2\varphi. \end{aligned}$$

En effet, l'expression (5.4), étant considérée comme une fonction de t_1 et t_{-1} , représente la solution bien connue (dite "à N solitons") de l'équation de sinh-Gordon (5.16).

La fonction ψ n'a pas été étudiée dans [35]. Néanmoins, elle vérifie également un système d'équations différentielles. Par exemple, en utilisant les formules de dérivation (5.7), (5.11) et la relation de récurrence (5.9), on peut montrer que

$$(5.17) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_1^2} = -\frac{\partial v_{0,0}}{\partial t_1} = -\frac{u_{0,0}^2 + v_{0,0}^2}{2} - v_{1,0} = -u_{0,0}^2 = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}\right)^2.$$

Effectivement, il est possible d'exprimer toutes les dérivées secondes $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t_i \partial t_j}$ en fonction de φ et de ses dérivées. En particulier,

$$(5.18) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_1 \partial t_3} &= -2 \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t_1^3} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1^2}\right)^2 + 3 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}\right)^4, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_3^2} &= -2 \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \frac{\partial^5 \varphi}{\partial t_1^5} + 4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1^2} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t_1^4} - 3 \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial t_1^3}\right)^2 + 24 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}\right)^3 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t_1^3} - 12 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}\right)^6, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_1 \partial t_{-1}} &= \frac{1 - \cosh 2\varphi}{2}, \end{aligned}$$

$$(5.19) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_{-1} \partial t_{-1}} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_{-1}}\right)^2.$$

Revenons maintenant aux fonctions de corrélation (5.1) et écrivons les sous la forme

$$(5.20) \quad \tau_- = e^{\frac{\psi}{2}} \cosh \frac{\varphi}{2},$$

$$(5.21) \quad \tau_+ = e^{\frac{\psi}{2}} \sinh \frac{\varphi}{2}.$$

En introduisant la notation

$$z = -m \frac{|x| - iy}{2}, \quad \bar{z} = -m \frac{|x| + iy}{2}$$

et en comparant (5.1)–(5.3), (5.20), (5.21) avec (5.4), (5.5), (5.16)–(5.19), on obtient finalement un système d'équations

$$\begin{aligned}
 (5.22) \quad & \partial_{z\bar{z}}\varphi = \frac{1}{2} \sinh 2\varphi, \\
 (5.23) \quad & \partial_{z\bar{z}}\psi = \frac{1 - \cosh 2\varphi}{2}, \\
 (5.24) \quad & \partial_{zz}\psi = -(\partial_z\varphi)^2, \\
 (5.25) \quad & \partial_{\bar{z}\bar{z}}\psi = -(\partial_{\bar{z}}\varphi)^2.
 \end{aligned}$$

Dans le plan, nos résultats se réduisent aux représentations célèbres [38] des fonctions de corrélation du modèle d'Ising en termes des transcendants de Painlevé. En effet, il est bien connu que en passant à la limite $\beta \rightarrow \infty$, les fonctions τ_{\pm} , et alors φ et ψ aussi, deviennent invariantes par rapport aux rotations dans le plan (x,y) . Donc, notant

$$r = 2(z\bar{z})^{\frac{1}{2}},$$

les formules (5.22)–(5.25) s'écrivent comme

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} &= \frac{1}{2} \sinh 2\varphi, \\
 \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} &= \frac{1 - \cosh 2\varphi}{2}, \\
 \frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} &= -\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2.
 \end{aligned}$$

Ensuite, après la substitution

$$\eta(\theta) = \exp\{-\varphi(2\theta)\}$$

la première de ces équations se transforme en l'équation de Painlevé III (c'est un cas particulier, correspondant au choix des paramètres: $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = -\delta = 1$)

$$(5.26) \quad \frac{d^2\eta}{d\theta^2} = \frac{1}{\eta} \left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)^2 - \frac{1}{\theta} \frac{d\eta}{d\theta} + \eta^3 - \eta^{-1}.$$

La fonction $\psi(r)$ s'exprime en fonction d'une solution de cette équation de la façon suivante:

$$\psi(r) = \int_{r/2}^{\infty} d\theta \frac{\theta}{2\eta^2} \left[(\eta^2 - 1)^2 - \left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)^2 \right],$$

et alors pour les fonctions de corrélation on obtient

$$\tau_{\pm}(r) = \frac{\eta(r/2) \mp 1}{2\sqrt{\eta(r/2)}} \exp \int_{r/2}^{\infty} d\theta \frac{\theta}{4\eta^2} \left[(\eta^2 - 1)^2 - \left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)^2 \right].$$

La condition initiale, qui détermine la solution appropriée de (5.26) et permet de transformer le calcul des fonctions de corrélation dans le plan en la résolution d'une équation différentielle, provient du comportement asymptotique (connu) des fonctions $\tau_{\pm}(r)$. Plus précisément, quand $\theta \rightarrow \infty$, on a

$$(5.27) \quad \eta(\theta) \sim 1 - \frac{2}{\pi} K_0(2\theta),$$

où $K_0(r)$ est la fonction de Macdonald d'ordre 0.

Dans le cas du cylindre, pourtant, les conditions asymptotiques quand $|x| \rightarrow \infty$ ne fixent pas la solution de (5.22) de façon unique. En effet, l'asymptotique des fonctions $\tau_{\pm}(x,y)$ est déterminée par les premiers termes des développements (5.1). De plus, dans l'expression pour g_1 on peut ne laisser qu'un seul terme, qui correspond à $k_1 = 0$ (contrairement au plan, où la somme, indexée par k_1 , se transforme en une intégrale et donne la fonction de Macdonald). Alors, pour $|x| \rightarrow \infty$, on a

$$\tau_+ \sim \frac{1}{\beta} e^{-|x| - \eta(0,\beta)}, \quad \tau_- \sim 1.$$

Ainsi l'asymptotique de φ ,

$$\varphi \sim \frac{2}{\beta} e^{-|x| - \eta(0,\beta)},$$

ne dépend pas de y . Si on suppose que cette dernière condition fixe la solution de façon unique, elle ne devrait pas dépendre de y pour tout x , et évidemment ce n'est pas vrai.

S'il était possible d'obtenir une équation additionnelle, contenant les dérivées par rapport à $\frac{1}{\beta}$ (la quantité qui correspond à la température en théorie quantique des champs), on aurait pu utiliser la solution de l'équation de Painlevé (5.26) fixée par (5.27) comme une condition initiale en $\frac{1}{\beta} = 0$. Malheureusement, ce problème semble être très difficile à résoudre¹ à cause de la complexité de la fonction $\eta(\theta,\beta)$.

Alors, si on veut décrire complètement les fonctions de corrélation en fonction des solutions de (5.22)–(5.25), il faut déterminer (au moins numériquement) la fonction $\varphi(x,y)$ et sa dérivée sur une droite ($y = \text{const}$) ou un cercle ($x = \text{const}$). De telles conditions au bord, étant combinées avec la périodicité en y , déterminent la solution appropriée de l'équation de sinh-Gordon (5.22).

3. Représentations multilinéaires de Hirota

Il est possible d'obtenir aussi les équations différentielles satisfaites par les fonctions τ_{\pm} séparément. On s'intéresse à ce problème, car telles équations sont plus adaptées à diverses généralisations. En particulier, elles permettent d'éviter certaines difficultés dans la limite conforme, où les corrélateurs τ_{\pm} doivent être égaux et alors la fonction φ tend vers l'infini. Un autre point intéressant est que ces équations coïncident dans les deux phases.

Considérons d'abord le cas ferromagnétique et notons

$$(5.28) \quad u = \ln \tau_-.$$

Ensuite, en utilisant les relations (5.20)–(5.25) et la dérivation directe, il est immédiat de vérifier les identités suivantes:

$$(5.29) \quad u_{zz} = \frac{\cosh \varphi - 1}{2} \partial_z \left(\frac{\partial_z \varphi}{\sinh \varphi} \right),$$

$$(5.30) \quad u_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{\cosh \varphi - 1}{2} \partial_{\bar{z}} \left(\frac{\partial_{\bar{z}} \varphi}{\sinh \varphi} \right),$$

$$(5.31) \quad u_{z\bar{z}} = \frac{\cosh \varphi - 1}{2} \left[-1 + \left(\frac{\partial_z \varphi}{\sinh \varphi} \right) \left(\frac{\partial_{\bar{z}} \varphi}{\sinh \varphi} \right) \right],$$

$$(5.32) \quad u_{zz\bar{z}} = u_{z\bar{z}} \left(\frac{\partial_z \varphi}{\sinh \varphi} \right) + u_{zz} \left(\frac{\partial_{\bar{z}} \varphi}{\sinh \varphi} \right),$$

1. L'équation proposée dans [15] est incorrecte, comme l'ont remarqué Fonseca et Zamolodchikov [8].

$$(5.33) \quad u_{z\bar{z}\bar{z}} = u_{\bar{z}\bar{z}} \left(\frac{\partial_z \varphi}{\sinh \varphi} \right) + u_{z\bar{z}} \left(\frac{\partial_{\bar{z}} \varphi}{\sinh \varphi} \right),$$

$$(5.34) \quad u_{zz\bar{z}\bar{z}} = u_{z\bar{z}\bar{z}} \left(\frac{\partial_z \varphi}{\sinh \varphi} \right) + u_{z\bar{z}\bar{z}} \left(\frac{\partial_{\bar{z}} \varphi}{\sinh \varphi} \right) - 2u_{z\bar{z}}^2 + \frac{2[u_{zz}u_{\bar{z}\bar{z}} - u_{z\bar{z}}^2]}{\cosh \varphi - 1},$$

$$(5.35) \quad u_{zzz\bar{z}} = u_{z\bar{z}\bar{z}} \frac{\partial_z \varphi}{\sinh \varphi} + u_{z\bar{z}\bar{z}} \frac{\partial_{\bar{z}} \varphi}{\sinh \varphi} - 2u_{zz}u_{z\bar{z}},$$

$$(5.36) \quad u_{z\bar{z}\bar{z}\bar{z}} = u_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} \frac{\partial_z \varphi}{\sinh \varphi} + u_{z\bar{z}\bar{z}} \frac{\partial_{\bar{z}} \varphi}{\sinh \varphi} - 2u_{z\bar{z}}u_{z\bar{z}}.$$

On peut voir les six dernières relations comme un système d'équations algébriques en trois variables $\frac{\cosh \varphi - 1}{2}$, $\left(\frac{\partial_z \varphi}{\sinh \varphi}\right)$, $\left(\frac{\partial_{\bar{z}} \varphi}{\sinh \varphi}\right)$. Les conditions de compatibilité de ce système impliquent trois équations pour la fonction de corrélation:

$$(5.37) \quad u_{z\bar{z}}(u_{zz\bar{z}\bar{z}} + 2u_{z\bar{z}}^2 - u_{z\bar{z}}) = u_{z\bar{z}\bar{z}}u_{z\bar{z}\bar{z}} - u_{zz}u_{\bar{z}\bar{z}}$$

$$(5.38) \quad (u_{zzz\bar{z}} + 2u_{zz}u_{z\bar{z}})(u_{z\bar{z}}^2 - u_{zz}u_{z\bar{z}}) = (u_{z\bar{z}\bar{z}}u_{z\bar{z}} - u_{z\bar{z}\bar{z}}u_{zz})u_{z\bar{z}\bar{z}} - (u_{zz\bar{z}}u_{z\bar{z}} - u_{z\bar{z}\bar{z}}u_{zz})u_{zzz},$$

$$(5.39) \quad (u_{z\bar{z}\bar{z}\bar{z}} + 2u_{z\bar{z}\bar{z}}u_{z\bar{z}})(u_{z\bar{z}}^2 - u_{zz}u_{z\bar{z}}) = (u_{z\bar{z}\bar{z}}u_{z\bar{z}} - u_{z\bar{z}\bar{z}}u_{z\bar{z}})u_{z\bar{z}\bar{z}} - (u_{z\bar{z}\bar{z}}u_{zz} - u_{z\bar{z}\bar{z}}u_{z\bar{z}})u_{z\bar{z}\bar{z}}.$$

Dans le cas $u = \ln \tau_+$ tout le calcul s'effectue de façon similaire et, quoique les équations (5.29)–(5.36) aient une forme différente, les équations (5.37)–(5.39) pour la fonction de corrélation sont les mêmes.

Le calcul analogue sur le plan est beaucoup plus simple à cause de l'invariance par rotations. Comme les fonctions τ_{\pm} ne dépendent que d'une seule variable $r = 2(z\bar{z})^{\frac{1}{2}}$, à la différence de (5.29), (5.31), (5.32) on obtient

$$u'' - \frac{1}{r}u' = -\frac{\cosh \varphi - 1}{r} \frac{\varphi'}{\sinh \varphi} - \cosh \varphi \frac{\cosh \varphi - 1}{2} \left[-1 + \left(\frac{\varphi'}{\sinh \varphi} \right)^2 \right],$$

$$u'' + \frac{1}{r}u' = \frac{\cosh \varphi - 1}{2} \left[-1 + \left(\frac{\varphi'}{\sinh \varphi} \right)^2 \right],$$

$$\left(u'' + \frac{1}{r}u' \right)' = 2u'' \left(\frac{\varphi'}{\sinh \varphi} \right),$$

respectivement. Si on regarde encore ces trois relations comme un système en deux variables φ , φ' et si on note

$$\zeta = ru',$$

de la condition de compatibilité on déduit le résultat bien connu [20]

$$(r\zeta'')^2 = 4(r\zeta' - \zeta)^2 - 4(\zeta')^2(r\zeta' - \zeta) + (\zeta')^2,$$

— l'équation pour la fonction τ de l'équation de Painlevé V. Un calcul analogue donne la même équation pour τ_+ .

Le changement de variables (5.28) simplifie considérablement la démonstration des équations (5.37)–(5.39). Remarquons néanmoins que la réponse finale a une plus jolie forme une fois qu'elle

est écrite en termes des fonctions τ_{\pm} elles-mêmes. Notamment, l'équation (5.37) peut être réécrite comme

$$(5.40) \quad \begin{vmatrix} \tau & \tau_z & \tau_{zz} \\ \tau_{\bar{z}} & \tau_{z\bar{z}} & \tau_{zz\bar{z}} \\ \tau_{\bar{z}\bar{z}} & \tau_{z\bar{z}\bar{z}} & \tau_{zz\bar{z}\bar{z}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tau_{z\bar{z}} & \tau_z & \tau_{zz} \\ \tau_{\bar{z}} & \tau & \tau_z \\ \tau_{\bar{z}\bar{z}} & \tau_{\bar{z}} & \tau_{z\bar{z}} \end{vmatrix},$$

tandis que l'équation (5.38) et sa conjuguée (5.39) se transforment en

$$(5.41) \quad \begin{vmatrix} \tau & \tau_z & \tau_{\bar{z}} & \tau_{z\bar{z}} \\ \tau_z & \tau_{zz} & \tau_{z\bar{z}} & \tau_{zz\bar{z}} \\ \tau_{\bar{z}} & \tau_{z\bar{z}} & \tau_{\bar{z}\bar{z}} & \tau_{z\bar{z}\bar{z}} \\ \tau_{zz} & \tau_{zzz} & \tau_{zz\bar{z}} & \tau_{zzz\bar{z}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tau & \tau_z & \tau_{\bar{z}} & \tau_{z\bar{z}} \\ \tau_z & \tau_{zz} & \tau_{z\bar{z}} & \tau_{zz\bar{z}} \\ \tau_{\bar{z}} & \tau_{z\bar{z}} & \tau_{\bar{z}\bar{z}} & \tau_{z\bar{z}\bar{z}} \\ \tau_{z\bar{z}} & \tau_{z\bar{z}\bar{z}} & \tau_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} & \tau_{z\bar{z}\bar{z}\bar{z}} \end{vmatrix} = 0.$$

Nous rappelons que les équations (5.40) et (5.41) ont été obtenues à partir de leur solution à N solitons. Il est alors naturel de supposer qu'elles ont d'autres propriétés des équations intégrables. En particulier, leur homogénéité suggère d'essayer de les réécrire sous la forme de Hirota.

L'opérateur usuel de Hirota est défini par son action sur le produit des fonctions:

$$D_x f \cdot g = (\partial_{x_1} - \partial_{x_2}) f(x_1) g(x_2) \Big|_{x_1=x_2=x}.$$

Cependant, comme (5.40) est trilineaire et (5.41) est quadrilineaire, il faut utiliser l'extension multilinéaire du formalisme de Hirota, introduite par Hietarinta [9]. Pour cela, introduisons $\frac{n(n+1)}{2}$ opérateurs

$$D_x^{ij} = \partial_{x_i} - \partial_{x_j},$$

qui agissent sur les n -uplets de fonctions. Bien sûr, il n'y a que $(n-1)$ opérateurs linéairement indépendants entre eux. On peut aussi considérer la base "symétrique"

$$T_x^m = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i k m}{n}} \partial_{x_k}, \quad m = 1, \dots, n-1.$$

Par exemple, dans le cas trilineaire on a seulement deux opérateurs:

$$T_x = \partial_{x_1} + j \partial_{x_2} + j^2 \partial_{x_3}, \quad T_x^* = \partial_{x_1} + j^2 \partial_{x_2} + j \partial_{x_3},$$

avec $j = e^{2\pi i/3}$. Un calcul direct montre que l'équation (5.40) s'écrit en fonction de ces opérateurs comme

$$[(T_z^3 - T_z^{*3})(T_{\bar{z}}^3 - T_{\bar{z}}^{*3}) + 9(T_z T_{\bar{z}}^* - T_z^* T_{\bar{z}})^2] \tau \cdot \tau \cdot \tau = 0.$$

Les deux équations quadrilineaires (5.41) se réduisent aussi à la forme de Hirota,

$$D_z^{41} D_z^{42} D_z^{43} D_{\bar{z}}^{41} (D_z^{13} D_{\bar{z}}^{12} - D_z^{12} D_{\bar{z}}^{13})^2 \tau \cdot \tau \cdot \tau \cdot \tau = 0,$$

$$D_{\bar{z}}^{41} D_{\bar{z}}^{42} D_{\bar{z}}^{43} D_z^{41} (D_z^{13} D_{\bar{z}}^{12} - D_z^{12} D_{\bar{z}}^{13})^2 \tau \cdot \tau \cdot \tau \cdot \tau = 0,$$

mais cette fois il est plus commode d'utiliser la base non-symétrique.

CHAPITRE 6

Fonctions de corrélation et déformations isomonodromiques

1. Fermions libres

Pour nous familiariser avec la notion d'OPE, considérons un système simple, mais très important pour la suite — les fermions libres de Dirac sur le cylindre. Ce système est caractérisé par l'action euclidienne

$$S = \int_C d^2x \bar{\psi} D \psi.$$

Ici on note D l'opérateur de Dirac:

$$D = \frac{m}{2} - \gamma^x \partial_x - \gamma^y \partial_y.$$

Les matrices γ^x, γ^y doivent vérifier l'équation $\gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i = 2\delta^{ij}$. La formule (1.2) correspond au choix

$$\gamma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Les champs de Grassmann $\psi(x,y)$ et $\bar{\psi}(x,y)$ satisfont aux conditions

$$\psi(x,y + \beta) = e^{2\pi i \lambda_0} \psi(x,y), \quad \bar{\psi}(x,y + \beta) = e^{-2\pi i \lambda_0} \bar{\psi}(x,y).$$

Calculons la fonction de corrélation à deux points $\langle \psi_\varepsilon(z) \psi_{\varepsilon'}^\dagger(z') \rangle$ dans le formalisme d'intégrale de chemins. Elle s'exprime en fonction de l'opérateur inverse D^{-1} , notamment

$$\langle \psi_\varepsilon(z) \psi_{\varepsilon'}^\dagger(z') \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{S[\psi]} \psi_\varepsilon(z) \psi_{\varepsilon'}^\dagger(z')}{\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{S[\psi]}} = - (D^{-1}(z, z') \gamma^x)_{\varepsilon \varepsilon'}, \quad \varepsilon, \varepsilon' = 1, 2.$$

En utilisant la fonction de Green introduite dans la première partie, on peut transformer cette relation en une formule compacte

$$\langle \psi(z) \otimes \psi^\dagger(z') \rangle = -2i G(z, z') \sigma_z.$$

L'asymptotique de la fonction $G(z, z')$ quand $z \rightarrow z'$ donne une illustration de l'OPE pour deux champs de fermions (dans le formalisme canonique):

$$\hat{\psi}(z) \otimes \hat{\psi}^\dagger(z') \sim \frac{m}{\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{z-z'} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{z}-\bar{z}'} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{1} + o\left(\frac{1}{|z-z'|}\right),$$

Remarquons que cette formule reflète l'anticommutativité des fermions: l'échange des arguments z et z' fait apparaître le signe “−”.

2. OPE dans le modèle d'Ising

Le but de l'analyse de la limite continue du modèle d'Ising, est de calculer les fonctions de corrélation des opérateurs de spin:

$$\langle \sigma(a_1) \dots \sigma(a_n) \rangle =_{NS} \langle vac | \hat{\sigma}(a_1) \dots \hat{\sigma}(a_n) | vac \rangle_{NS}.$$

Cependant, pour cela, il est commode de considérer une classe un peu plus large d'opérateurs et de fonctions de corrélation. Le premier exemple d'un tel opérateur provient du spineur $\psi(z)$, introduit par Onsager et Kaufman [23], qui correspond au champ des fermions libres massifs de Dirac. Encore un autre champ, $\mu(z)$, représente une version continue des variables du désordre (dislocations qui vont du point z à l'infini).

Les opérateurs $\hat{\sigma}(z)$, $\hat{\mu}(z)$, $\hat{\psi}(z)$ forment une algèbre fermée par rapport à l'OPE. Notamment, comme l'ont montré Kadanoff et Ceva [13], dans la phase ferromagnétique ils vérifient les développements

$$(6.1) \quad \hat{\psi}(z)\hat{\sigma}(a) = \frac{1}{2} (w_0[a] + w_0^*[a]) \hat{\mu}(a) + \frac{2}{m} w_1[a] \frac{\partial \hat{\mu}(a)}{\partial a} + \frac{2}{m} w_1^*[a] \frac{\partial \hat{\mu}(a)}{\partial \bar{a}} + O(|z-a|^{3/2}),$$

$$(6.2) \quad \hat{\psi}(z)\hat{\mu}(a) = \frac{i}{2} (w_0[a] - w_0^*[a]) \hat{\sigma}(a) + \frac{2i}{m} w_1[a] \frac{\partial \hat{\sigma}(a)}{\partial a} - \frac{2i}{m} w_1^*[a] \frac{\partial \hat{\sigma}(a)}{\partial \bar{a}} + O(|z-a|^{3/2}).$$

Nous montrerons que ces formules permettent de réduire le calcul des fonctions de corrélation à l'étude de certaines solutions singulières de l'équation de Dirac.

Considérons par exemple la valeur moyenne suivante:

$$\frac{1}{2} f(z) = \frac{{}_R \langle vac | \hat{\psi}(z) \hat{\sigma}(0) | vac \rangle_{NS}}{{}_R \langle vac | \hat{\mu}(0) | vac \rangle_{NS}}.$$

L'opérateur $\hat{\psi}(z)$ vérifie l'équation de Dirac $D\hat{\psi}(z) = 0$ sur \mathcal{C} . Alors la fonction $f(z)$ la vérifie également, mais cette fois on a une singularité en $\{0\}$. Du développement (6.1), on déduit que

$$(6.3) \quad f(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{(mz/2)^{-1/2}}{(m\bar{z}/2)^{-1/2}} \right) + O(\sqrt{|z|}) \text{ quand } |z| \rightarrow 0.$$

Le facteur de forme ${}_R \langle vac | \hat{\psi}(z) | n \rangle_R$ est non-nul seulement si l'état $|n\rangle_R$ ne contient qu'une seule particule. Ecrivons le développement de Lehmann de la fonction $f(z)$ en notant θ_k les rapidités de telles particules intermédiaires:

$$\frac{1}{2} f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{{}_R \langle \theta_k | \hat{\sigma}(0) | vac \rangle_{NS}}{{}_R \langle vac | \hat{\mu}(0) | vac \rangle_{NS}} e^{mx \cosh \theta_k + imy \sinh \theta_k} \frac{1}{\sqrt{m\beta \cosh \theta_k}} \begin{pmatrix} e^{\frac{\theta_k}{2}} \\ e^{-\frac{\theta_k}{2}} \end{pmatrix}.$$

Cela illustre le fait que $f(z) \rightarrow 0$ quand $|x| \rightarrow \infty$. On a vu précédemment (théorème 1.1) qu'une telle décroissance et le comportement singulier (6.3) fixent la solution de l'équation de Dirac de façon unique. En effet, si on pose $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, la fonction $f(z)$ coïncidera avec l'élément de la base canonique de l'espace $\mathbf{W}^{0,\lambda}$. En utilisant les résultats du théorème 2.2, on obtient alors

$$\frac{{}_R \langle \theta_k | \hat{\sigma}(0) | vac \rangle_{NS}}{{}_R \langle vac | \hat{\mu}(0) | vac \rangle_{NS}} = -i \frac{e^{-\eta(\theta_k)/2}}{m\beta \cosh \theta_k},$$

où on note

$$(6.4) \quad \eta(\theta) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi} \operatorname{sech}(\theta' - \theta) \ln \frac{1 + e^{-m\beta \cosh \theta'}}{1 - e^{-m\beta \cosh \theta'}}.$$

Alors, nous avons obtenu les facteurs de forme les plus simples (dans un volume fini!) à partir de l'équation de Dirac. Il est clair aussi que la fonction de Green à un point, qu'on a introduit et étudié précédemment, n'est rien d'autre que

$$G^{0,\lambda}(z,z') = \frac{{}_R\langle vac|\hat{\psi}(z) \otimes \hat{\psi}^\dagger(z') \hat{\sigma}(0)|vac\rangle_{NS}}{{}_R\langle vac|\hat{\sigma}(0)|vac\rangle_{NS}}.$$

La même idée permet aussi d'étudier les fonctions de corrélation. Nous allons montrer qu'elles s'expriment en termes des coefficients des développements locaux de la base canonique. Considérons par exemple les deux corrélateurs suivants:

$$\mathbf{v}_1(z) = \langle \psi(z) \mu(a_1) \sigma(a_2) \rangle,$$

$$\mathbf{v}_2(z) = \langle \psi(z) \sigma(a_1) \mu(a_2) \rangle.$$

Ce sont des solutions de l'équation de Dirac, décroissantes quand $|x| \rightarrow \infty$. De l'OPE (6.1), (6.1) on peut obtenir les premiers termes de l'asymptotique de ces solutions au voisinage des points singuliers a_1, a_2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1[a_1] &= \frac{i}{2} \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle (w_0[a_1] - w_0^*[a_1]) + \frac{2i}{m} \langle \partial_{a_1} \sigma_1 \sigma_2 \rangle w_1[a_1] - \\ &\quad - \frac{2i}{m} \langle \partial_{\bar{a}_1} \sigma_1 \sigma_2 \rangle w_1^*[a_1] + O(|z - a_1|^{3/2}), \\ \mathbf{v}_1[a_2] &= -\frac{1}{2} \langle \mu_1 \mu_2 \rangle (w_0[a_2] + w_0^*[a_2]) - \frac{2}{m} \langle \mu_1 \partial_{a_2} \mu_2 \rangle w_1[a_2] - \\ &\quad - \frac{2}{m} \langle \mu_1 \partial_{\bar{a}_2} \mu_2 \rangle w_1^*[a_2] + O(|z - a_2|^{3/2}), \\ \mathbf{v}_2[a_1] &= \frac{1}{2} \langle \mu_1 \mu_2 \rangle (w_0[a_1] + w_0^*[a_1]) + \frac{2}{m} \langle \partial_{a_1} \mu_1 \mu_2 \rangle w_1[a_1] + \\ &\quad + \frac{2}{m} \langle \partial_{\bar{a}_1} \mu_1 \mu_2 \rangle w_1^*[a_1] + O(|z - a_1|^{3/2}), \\ \mathbf{v}_2[a_2] &= \frac{i}{2} \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle (w_0[a_2] - w_0^*[a_2]) + \frac{2i}{m} \langle \sigma_1 \partial_{a_2} \sigma_2 \rangle w_1[a_2] - \\ &\quad - \frac{2i}{m} \langle \sigma_1 \partial_{\bar{a}_2} \sigma_2 \rangle w_1^*[a_2] + O(|z - a_2|^{3/2}), \end{aligned}$$

où on note $\sigma_j = \sigma(a_j)$, $\mu_j = \mu(a_j)$. Il est immédiat de vérifier que les fonctions $\mathbf{v}_{1,2}(z) \in \mathbf{W}^{a,\lambda}$ (pour $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$). Par conséquent, elles sont des combinaisons linéaires d'éléments de la base canonique:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1(z) \\ \mathbf{v}_2(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & -\frac{\langle \mu_1 \mu_2 \rangle}{\langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle} \\ \frac{\langle \mu_1 \mu_2 \rangle}{\langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle} & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1(z) \\ \mathbf{w}_2(z) \end{pmatrix}.$$

En inversant cette dernière formule, nous calculons les premiers termes des développements des fonctions $\mathbf{w}_1(z,\lambda)$, $\mathbf{w}_2(z,\lambda)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1[a_1] &= w_0[a_1] + \frac{\langle \mu_1 \mu_2 \rangle^2 + \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle^2}{\langle \mu_1 \mu_2 \rangle^2 - \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle^2} w_0^*[a_1] + \frac{2}{m} \frac{\partial_{a_1} (\langle \mu_1 \mu_2 \rangle^2 - \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle^2)}{\langle \mu_1 \mu_2 \rangle^2 - \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle^2} w_1[a_1] + \\ (6.5) \quad &+ \frac{2}{m} \frac{\partial_{\bar{a}_1} (\langle \mu_1 \mu_2 \rangle^2 + \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle^2)}{\langle \mu_1 \mu_2 \rangle^2 - \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle^2} w_1^*[a_1] + O(|z - a_1|^{3/2}), \\ \mathbf{w}_1[a_2] &= -\frac{2i \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle \langle \mu_1 \mu_2 \rangle}{\langle \mu_1 \mu_2 \rangle^2 - \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle^2} w_0^*[a_2] - \frac{4i \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle \langle \mu_1 \partial_{a_2} \mu_2 \rangle - \langle \sigma_1 \partial_{a_2} \sigma_2 \rangle \langle \mu_1 \mu_2 \rangle}{\langle \mu_1 \mu_2 \rangle^2 - \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle^2} w_1[a_2] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(6.6) \quad & \frac{4i \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle \langle \mu_1 \partial_{\bar{a}_2} \mu_2 \rangle + \langle \sigma_1 \partial_{\bar{a}_2} \sigma_2 \rangle \langle \mu_1 \mu_2 \rangle}{m \langle \mu_1 \mu_2 \rangle^2 - \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle^2} w_1^*[a_2] + O\left(|z - a_2|^{3/2}\right), \\
\mathbf{w}_2[a_1] = & \frac{2i \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle \langle \mu_1 \mu_2 \rangle}{\langle \mu_1 \mu_2 \rangle^2 - \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle^2} w_0^*[a_1] + \frac{4i \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle \langle \partial_{a_1} \mu_1 \mu_2 \rangle - \langle \partial_{a_1} \sigma_1 \sigma_2 \rangle \langle \mu_1 \mu_2 \rangle}{m \langle \mu_1 \mu_2 \rangle^2 - \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle^2} w_1[a_1] + \\
(6.7) \quad & + \frac{4i \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle \langle \partial_{\bar{a}_1} \mu_1 \mu_2 \rangle + \langle \partial_{\bar{a}_1} \sigma_1 \sigma_2 \rangle \langle \mu_1 \mu_2 \rangle}{m \langle \mu_1 \mu_2 \rangle^2 - \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle^2} w_1^*[a_1] + O\left(|z - a_1|^{3/2}\right), \\
\mathbf{w}_2[a_2] = & w_0[a_2] + \frac{\langle \mu_1 \mu_2 \rangle^2 + \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle^2}{\langle \mu_1 \mu_2 \rangle^2 - \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle^2} w_0^*[a_2] + \frac{2 \partial_{a_2} (\langle \mu_1 \mu_2 \rangle^2 - \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle^2)}{m \langle \mu_1 \mu_2 \rangle^2 - \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle^2} w_1[a_2] + \\
(6.8) \quad & + \frac{2 \partial_{\bar{a}_2} (\langle \mu_1 \mu_2 \rangle^2 + \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle^2)}{m \langle \mu_1 \mu_2 \rangle^2 - \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle^2} w_1^*[a_2] + O\left(|z - a_2|^{3/2}\right).
\end{aligned}$$

Revenons maintenant à la définition de la fonction τ , donnée dans la première partie. Rappelons qu'on a fixé $-\frac{1}{2} < \lambda_\nu < \frac{1}{2}$ ($\nu = 1, \dots, n$). On a introduit ensuite n solutions indépendantes $\{\tilde{\mathbf{w}}_\nu(\lambda)\}_{\nu=1, \dots, n}$ de l'équation de Dirac. Après nous avons défini la fonction de Green $G^{a, \lambda}(z, z')$ de l'opérateur de Dirac singulier et exprimé les dérivées de $G^{a, \lambda}(z, z')$ par rapport aux positions des singularités en fonction des solutions $\{\tilde{\mathbf{w}}_\nu(\lambda)\}_{\nu=1, \dots, n}$. Ensuite, on a défini les espaces $W_{int}(a)$, W_{ext} des valeurs au bord de certaines solutions locales de l'équation de Dirac et montré qu'ils sont transverses dans W . En utilisant la transversalité, nous avons construit une grassmanienne et un fibré \det^* au-dessus de celle-ci. Les fonctions de Green nous ont permis de construire une section trivialisante du fibré \det^* . En comparant cette section avec la section canonique, on a défini la fonction τ . De plus, nous avons montré que les dérivées de la fonction τ sont données par les premiers coefficients des développements locaux des solutions $\{\tilde{\mathbf{w}}_\nu(\lambda)\}_{\nu=1, \dots, n}$.

Cependant, il apparaît qu'on peut réaliser toutes les étapes de ce programme même pour un intervalle plus large: $-1 < \lambda_\nu < 1$ ($\nu = 1, \dots, n$). Dans ce cas, il faut modifier seulement la définition du domaine $\mathcal{D}^{a, \lambda}$ de l'opérateur de Dirac. La fonction $\psi(z)$, de carré intégrable et avec la monodromie nécessaire, est dans $\mathcal{D}^{a, \lambda}$ si, au voisinage des points singuliers, à la place de (1.6) on a

$$(6.9) \quad \begin{pmatrix} (z - a_\nu)^{-\lambda_\nu} & 0 \\ 0 & (\bar{z} - \bar{a}_\nu)^{\lambda_\nu} \end{pmatrix} \psi[a_\nu] = \begin{pmatrix} O\left(|z - a_\nu|^{\min\{0, 1 - 2\lambda_\nu\}}\right) \\ O\left(|z - a_\nu|^{\min\{0, 1 + 2\lambda_\nu\}}\right) \end{pmatrix},$$

En particulier, cela signifie que si la fonction $\psi \in \mathcal{D}^{a, \lambda}$ est une solution de l'équation de Dirac, elle est caractérisée par les développements de la forme

$$(6.10) \quad \psi[a_\nu] = \sum_{k>0} \{c_k w_{k+\lambda_\nu}[a_\nu] + d_k w_{k-\lambda_\nu}^*[a_\nu]\}.$$

Comme dans le Chapitre 1, on note $\widetilde{\mathbf{W}}^{a, \lambda}$ l'espace des solutions de ce type. Enumérons maintenant les points de l'exposé précédent où le domaine $\mathcal{D}^{a, \lambda}$ intervenait:

- Démonstration des théorèmes 1.1 ($\dim \widetilde{\mathbf{W}}^{a, \lambda} = 0$) et 2.1 ($G^{a, \lambda}(z, z') = F^{a, \lambda}(z, z')$).
- Calcul des expressions asymptotiques dans la preuve de la formule (2.19).
- Démonstration de l'unicité des solutions

$$\widetilde{\mathbf{w}}_\mu(\lambda)[a_\nu] = \delta_{\mu\nu} w_{-1/2+\lambda_\nu}[a_\nu] + \sum_{k>0} \left\{ a_k^{(\nu)} w_{k+\lambda_\nu}[a_\nu] + b_k^{(\nu)} w_{k-\lambda_\nu}^*[a_\nu] \right\}.$$

- Utilisation du théorème de Stokes dans la preuve du théorème 1.3 et de la proposition 2.3.

On peut vérifier directement que la modification du domaine $\mathcal{D}^{a,\lambda}$ ne change aucun résultat. Alors il est possible de définir la fonction τ même pour $-1 < \lambda_\nu < 1$ ($\nu = 1, \dots, n$). Ses dérivées logarithmiques sont données par les mêmes expressions que précédemment:

$$d \ln \tau = \frac{m}{2} \sum_{\nu=1}^n \left\{ a_{1/2}^{(\nu)}(\tilde{\mathbf{w}}_\nu(\lambda)) da_\nu + \overline{a_{1/2}^{(\nu)}(\tilde{\mathbf{w}}_\nu(-\lambda))} d\bar{a}_\nu \right\}.$$

Rappelons que si $\lambda_\nu > 0$ pour tout ν , les solutions $\{\tilde{\mathbf{w}}_\mu(\lambda)\}_{\mu=1,\dots,n}$ coïncident avec les éléments de la base canonique:

$$(6.11) \quad \tilde{\mathbf{w}}_\mu(z, \lambda) = \mathbf{w}_\mu(z, \lambda).$$

On peut vérifier également que dans ce cas

$$(6.12) \quad \tilde{\mathbf{w}}_\mu(z, -\lambda) = \frac{2}{m} \partial_z \mathbf{w}_\mu(z, 1-\lambda),$$

et alors la fonction τ peut être écrite de façon simple en fonction des coefficients des développements locaux de la base canonique:

$$d \ln \tau = \frac{m}{2} \sum_{\nu=1}^n \left\{ a_{1/2}^{(\nu)}(\mathbf{w}_\nu(\lambda)) da_\nu + \overline{a_{1/2}^{(\nu)}(\mathbf{w}_\nu(1-\lambda))} d\bar{a}_\nu \right\}.$$

Le modèle d'Ising correspond au choix particulier de la monodromie: $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{2}$. Ici, les coefficients des développements de la base canonique représentent des combinaisons de fonctions de corrélation. En particulier, pour $n = 2$ on a (voir les formules (6.5), (6.8)):

$$a_{1/2}^{(\nu)}(\mathbf{w}_\nu) = \frac{2}{m} \partial_{a_\nu} \ln \left(\langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle^2 - \langle \mu_1 \mu_2 \rangle^2 \right), \quad \nu = 1, 2,$$

et alors

$$(6.13) \quad \tau(a_1, a_2) = \text{const} \cdot \left(\langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle^2 - \langle \mu_1 \mu_2 \rangle^2 \right).$$

Mais nous avons déjà calculé la fonction τ à deux points! Notamment, quand $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$, les formules (3.25)–(3.26) se réduisent à

$$(6.14) \quad \tau(a_1, a_2) = \det |\mathbf{1} - VV^T|,$$

$$(6.15) \quad V_{ln} = \frac{2}{\beta} \frac{(v_l v_n)^{1/2} e^{-m|a_x| \frac{\cosh \theta_l + \cosh \theta_n}{2} + i m a_y \frac{\sinh \theta_l - \sinh \theta_n}{2} - (\eta(\theta_l) + \eta(\theta_n))}{1 + v_l v_n \sqrt{\cosh \theta_l \cosh \theta_n}}, \quad l, n \in \mathbb{Z},$$

où on note

$$v_l = e^{\theta_l}, \quad \sinh \theta_l = \frac{2\pi l}{m\beta},$$

et la fonction $\eta(\theta)$ est définie par (6.4). Alors, en étudiant des solutions singulières de l'équation de Dirac, on a réussi à obtenir des formules *explicites* pour les corrélateurs paires dans le modèle d'Ising sur le cylindre!

3. Déformations isomonodromiques

Dans le Chapitre 4 nous avons obtenu un système d'équations de déformation, satisfait par les coefficients des développements des fonctions $\{\tilde{\mathbf{w}}_\nu(\lambda)\}_{\nu=1,\dots,n}$. Nous montrerons que si $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{2}$, ces équations représentent des relations différentielles entre les fonctions de corrélation dans le modèle d'Ising. Dans la suite de ce chapitre, on considère uniquement cette monodromie particulière.

Rappelons quelques notations. Les éléments de la base canonique sont déterminés de façon unique par leurs développements locaux aux points a_1, \dots, a_n :

$$\mathbf{w}_\mu(\lambda)[a_\nu] = \delta_{\mu\nu} w_0[a_\nu] + \sum_{k>0} \left\{ a_k^{(\nu)} w_{k+1/2}[a_\nu] + b_k^{(\nu)} w_{k-1/2}^*[a_\nu] \right\}.$$

Dans notre cas, les fonctions $\tilde{\mathbf{w}}_\nu(\pm\lambda, z)$ ($\nu = 1, \dots, n$) sont données par

$$\tilde{\mathbf{w}}_\nu(\lambda, z) = \mathbf{w}_\nu(z), \quad \tilde{\mathbf{w}}_\nu(-\lambda, z) = \frac{2}{m} \partial_z \mathbf{w}_\nu(z).$$

Pour simplifier la notation, nous avons introduit dans le Chapitre 4 les matrices $C_j(\lambda)$, $C_j^*(\lambda)$, formées des coefficients de développements:

$$C_j(\lambda) = \left[a_{j+1/2}^{(\nu)}(\tilde{\mathbf{w}}_\mu(\lambda)) \right]_{\mu,\nu=1,\dots,n}, \quad C_j^*(\lambda) = \left[b_{j-1/2}^{(\nu)}(\tilde{\mathbf{w}}_\mu(\lambda)) \right]_{\mu,\nu=1,\dots,n}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Une autre chose importante, qu'on peut déduire de la simplicité de la monodromie, est la symétrie des coefficients:

$$C_j(\lambda) = C_j(-\lambda), \quad C_j^*(\lambda) = C_j^*(-\lambda).$$

Ensuite, puisqu'on a $\sin \pi\Lambda = \mathbf{1}$, les relations algébriques (4.6)–(4.8) se transforment en

$$\begin{aligned} C_0^*(\lambda) &= \left(\overline{C_0^*(\lambda)} \right)^T, & C_1(\lambda) &= \left(C_1(\lambda) \right)^T, \\ C_0^*(\lambda) \overline{C_1(\lambda)} &= C_1^*(\lambda), & C_0^*(\lambda) \overline{C_0^*(\lambda)} &= \mathbf{1}. \end{aligned}$$

La matrice $G = C_0^*(\lambda) \sin \pi\Lambda = C_0^*(\lambda)$ est donc hermitienne et orthogonale simultanément. Remarquons aussi qu'elle est définie négative et s'écrit alors sous la forme

$$G = -(\mathbf{1} + T)(\mathbf{1} - T)^{-1},$$

où la matrice T est antisymétrique et imaginaire pure.

Exemple. En guise d'illustration, considérons le cas $n = 2$. On peut aisément déduire des formules (6.5)–(6.8) les expressions pour G et T en termes des fonctions de corrélation:

$$\begin{aligned} G &= \begin{pmatrix} \frac{\langle \mu_1 \mu_2 \rangle^2 + \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle^2}{\langle \mu_1 \mu_2 \rangle^2 - \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle^2} & -\frac{2i \langle \mu_1 \mu_2 \rangle \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle}{\langle \mu_1 \mu_2 \rangle^2 - \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle^2} \\ \frac{2i \langle \mu_1 \mu_2 \rangle \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle}{\langle \mu_1 \mu_2 \rangle^2 - \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle^2} & \frac{\langle \mu_1 \mu_2 \rangle^2 + \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle^2}{\langle \mu_1 \mu_2 \rangle^2 - \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle^2} \end{pmatrix}, \\ T &= \begin{pmatrix} 0 & -i \frac{\langle \mu_1 \mu_2 \rangle}{\langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle} \\ i \frac{\langle \mu_1 \mu_2 \rangle}{\langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Rappelons aussi les équations de déformation:

$$dG = \Theta G + G \Theta^\dagger, \quad \Theta = \frac{m}{2} [dA, C_1], \quad (A)$$

$$d_{\bar{a}} C_1 = \frac{m}{2} [d\bar{A}, G] G^{-1}, \quad d_a \bar{C}_1 = \frac{m}{2} [dA, \bar{G}] \bar{G}^{-1}, \quad (B)$$

$$d_a \text{diag } C_1 = \text{diag}(\Theta C_1), \quad d_{\bar{a}} \text{diag } \bar{C}_1 = \text{diag}(\bar{C}_1 \Theta^\dagger). \quad (C)$$

Exemple. Quand $n = 2$, on peut paramétrer la matrice G comme ceci:

$$G = - \begin{pmatrix} \cosh \varphi & -i \sinh \varphi \\ i \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Ensuite, comme on l'a déjà fait, notons

$$C_1 = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{12} & \Lambda_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} q = m(a_2 - a_1)/2, \\ \bar{q} = m(\bar{a}_2 - \bar{a}_1)/2. \end{cases}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \Theta &= \Lambda_{12} dq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Theta^\dagger &= -\bar{\Lambda}_{12} d\bar{q} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi l'équation (A) se transforme en

$$\begin{aligned} \Lambda_{12} &= i \partial_q \varphi = i \partial_q \left(\text{arch} \frac{\langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle^2 + \langle \mu_1 \mu_2 \rangle^2}{\langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle^2 - \langle \mu_1 \mu_2 \rangle^2} \right) = \\ &= 2i \frac{\langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle \langle \mu_1 \partial_q \mu_2 \rangle - \langle \sigma_1 \partial_q \sigma_2 \rangle \langle \mu_1 \mu_2 \rangle}{\langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle^2 - \langle \mu_1 \mu_2 \rangle^2}. \end{aligned}$$

Ce résultat ne représente rien de nouveau: on aurait pu l'obtenir au tout début, par exemple, en utilisant l'OPE (6.6) (il faut prendre en considération que les fonctions de corrélation $\langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle$ et $\langle \mu_1 \mu_2 \rangle$ ne dépendent que de la différence des coordonnées a_1, a_2). Mais déjà la deuxième équation, (B), nous fournit une information non triviale:

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{q}} \Lambda_{12} &= i \partial_{q\bar{q}} \varphi = \frac{i}{2} \sinh 2\varphi, \\ \partial_{\bar{q}} \Lambda_{11} &= -\partial_{\bar{q}} \Lambda_{22} = \sinh^2 \varphi. \end{aligned}$$

Ensuite, l'équation (C) implique les relations

$$\partial_q \Lambda_{11} = -\partial_q \Lambda_{22} = -\Lambda_{12}^2.$$

Finalement, de l'OPE (6.5) on déduit que

$$\Lambda_{11} = -\partial_q \ln \left(\langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle^2 - \langle \mu_1 \mu_2 \rangle^2 \right).$$

Alors, si on écrit les fonctions de corrélation sous la forme

$$\begin{aligned} \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle &= e^{\psi/2} \cosh \frac{\varphi}{2}, \\ \langle \mu_1 \mu_2 \rangle &= e^{\psi/2} \sinh \frac{\varphi}{2}, \end{aligned}$$

les équations de déformation se transforment en les quatre relations suivantes:

$$(6.16) \quad \partial_{q\bar{q}} \varphi = \frac{1}{2} \sinh 2\varphi,$$

$$(6.17) \quad \partial_{q\bar{q}} \psi = \frac{1 - \cosh 2\varphi}{2},$$

$$(6.18) \quad \partial_{qq} \psi = -(\partial_q \varphi)^2,$$

$$(6.19) \quad \partial_{\bar{q}\bar{q}} \psi = -(\partial_{\bar{q}} \varphi)^2.$$

Rappelons que, dans ce chapitre, on a toujours travaillé dans la phase ferromagnétique. Pour passer à l'autre phase, il suffit d'échanger les lettres σ et μ (ces deux variables sont "duales"). Cela explique aussi pourquoi les quatre dernières équations coïncident avec les formules (5.22)–(5.25), obtenues précédemment.

Comment les équations de déformation (A)–(C) se traduisent-elles en termes des fonctions de corrélation quand $n > 2$? En fait, nous avons déjà donné toutes les idées nécessaires pour établir ce lien. En utilisant les opérateurs des champs ψ , σ et μ , construisons les n solutions suivantes de l'équation de Dirac:

$$\mathbf{v}_j(z) = \frac{\langle \psi(z) \sigma(a_1) \dots \mu(a_j) \dots \sigma(a_n) \rangle}{\langle \sigma(a_1) \dots \sigma(a_n) \rangle}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Ces solutions ont la monodromie appropriée ($\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{2}$) et décroissent quand $|x| \rightarrow \infty$. Leur comportement aux voisinages des points singuliers a_1, \dots, a_n peut être déterminé à partir de l'OPE (6.1), (6.2):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_j[a_k] &= \frac{i}{2} \left(\delta_{jk} - i\varepsilon_{jk} \frac{\langle \phi^{jk} \rangle}{\langle \phi \rangle} \right) w_0[a_k] - \frac{i}{2} \left(\delta_{jk} + i\varepsilon_{jk} \frac{\langle \phi^{jk} \rangle}{\langle \phi \rangle} \right) w_0^*[a_k] + \\ &+ \frac{2i}{m\langle \phi \rangle} \frac{\partial}{\partial a_k} \left\{ \langle \phi \rangle \left(\delta_{jk} - i\varepsilon_{jk} \frac{\langle \phi^{jk} \rangle}{\langle \phi \rangle} \right) \right\} w_1[a_k] - \frac{2i}{m\langle \phi \rangle} \frac{\partial}{\partial \bar{a}_k} \left\{ \langle \phi \rangle \left(\delta_{jk} + i\varepsilon_{jk} \frac{\langle \phi^{jk} \rangle}{\langle \phi \rangle} \right) \right\} w_1^*[a_k] + \\ &+ O\left(|z - a_k|^{3/2}\right), \end{aligned}$$

où on note ϕ , ϕ^{jk} les produits d'opérateurs

$$\phi = \sigma(a_1) \dots \sigma(a_n),$$

$$\phi^{jk} = \sigma(a_1) \dots \mu(a_j) \dots \mu(a_k) \dots \sigma(a_n).$$

Les éléments de la matrice antisymétrique $(\varepsilon_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$ sont égaux à 0 si $j = k$, à 1 si $j > k$, et à (-1) si $j < k$.

Les fonctions $\mathbf{v}_j(z)$ ($j = 1, \dots, n$) représentent des combinaisons linéaires des éléments de la base canonique de l'espace $\mathbf{W}^{a,\lambda}$. Ceci permet d'exprimer les matrices des coefficients G , C_1 , contenues dans les équations de déformation (A)–(C), en termes des corrélateurs. Plus précisément, on a:

$$\begin{aligned} G &= -\frac{\mathbf{1} + T}{\mathbf{1} - T}, & T_{jk} &= i\varepsilon_{jk} \frac{\langle \phi^{jk} \rangle}{\langle \phi \rangle}, \\ (C_1)_{jk} &= \frac{4}{m} \frac{\partial \ln \langle \phi \rangle}{\partial a_k} \delta_{jk} - \frac{4}{m} \left(\frac{1}{\mathbf{1} - T} \frac{\partial T}{\partial a_k} \right)_{jk}. \end{aligned}$$

Ces dernières relations transforment les relations (A)–(C) en un système (surdéterminé) d'équations non linéaires satisfaites par les fonctions de corrélation du modèle d'Ising.

Pour calculer la fonction τ , il nous faut connaître les éléments diagonaux $(C_1)_{kk}$. Remarquons que l'équation (A) implique que

$$\left(\frac{1}{\mathbf{1} - T} \frac{\partial T}{\partial a_k} \right)_{kk} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\frac{1}{\mathbf{1} - T} \frac{\partial T}{\partial a_k} \right),$$

et alors

$$\begin{aligned}
 (C_1)_{kk} &= \frac{4}{m} \frac{\partial \ln \langle \phi \rangle}{\partial a_k} - \frac{2}{m} \text{Tr} \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - T} \frac{\partial T}{\partial a_k} \right) = \\
 &= \frac{4}{m} \frac{\partial \ln \langle \phi \rangle}{\partial a_k} - \frac{2}{m} \text{Tr} \left(\frac{T}{\mathbf{1} - T^2} \frac{\partial T}{\partial a_k} \right) = \\
 &= \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial a_k} \{ 4 \ln \langle \phi \rangle + \ln \det (\mathbf{1} - T^2) \}.
 \end{aligned}$$

Finalement on obtient le lien entre la fonction τ et les fonctions de corrélation pour n arbitraire:

$$\boxed{\tau(a) = \text{const} \cdot \langle \phi \rangle^2 \left[\det (\mathbf{1} - T^2) \right]^{1/2}.}$$

Annexe A

Dans cette annexe nous présentons quelques définitions et résultats d'analyse fonctionnelle qu'on utilise dans le texte de la thèse.

DEFINITION 1. Soit U un ouvert dans \mathbb{R}^n . L'espace de Sobolev $H^1(U)$ est défini par

$$H^1(U) = \{u \in L^2(U); \exists g \in L^2(U) \text{ tel que } \int_U u \partial_{x_\alpha} \varphi = - \int_U g \varphi\},$$

pour toutes fonctions φ continues différentiables à support compact dans U et $\alpha = 1, \dots, n$. Dit plus simplement, la fonction u est dans $H^1(U)$ si elle est de carré intégrable dans U avec toutes ces dérivées du premier ordre. On notera $u \in H^1[a]$ pour $a \in \mathbb{R}^n$ s'il existe un ouvert U contenant a tel que $u \in H^1(U)$.

DEFINITION 2. Soit $s \in \mathbb{R}$. L'espace de Sobolev d'ordre fractionnaire, $H^s(\mathbb{R}^n)$, est constitué des éléments $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ tels que dans la représentation de Fourier $(1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Ici S' désigne le dual de l'espace de Schwartz. Dans le contexte de cette thèse on s'intéresse aux fonctions quasipériodiques sur le cercle: $u(y + \beta) = e^{2\pi i \lambda} u(y)$, $y \in [0; \beta]$. Alors en introduisant la notation

$$\hat{u}(\theta_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\beta dy u(y) e^{-imy \sinh \theta_n}, \quad \sinh \theta_n = \frac{2\pi}{m\beta} n,$$

on va dire par analogie que $u \in H_\lambda^{1/2}(S^1)$ si la somme $\sum_{n \in \mathbb{Z} + \lambda} |\hat{u}(\theta_n)|^2 \cosh \theta_n$ converge.

DEFINITION 3. Soient H, H' deux espaces de Hilbert séparables et $T : H \rightarrow H'$ un opérateur linéaire.

- T est compact si l'image $\{Tu_n\}$ de toute suite bornée $\{u_n\}$ dans H contient une sous-suite de Cauchy.
- L'opérateur compact T est dit de Fredholm si $\dim \ker T, \dim \text{coker } T < \infty$. L'indice d'un opérateur de Fredholm T est défini par

$$\text{ind } T = \dim \ker T - \dim \text{coker } T.$$

- La norme de trace est donnée par

$$\|T\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k,$$

ou $\{\alpha_k\}$ est l'ensemble des valeurs singulières de T :

$$T^* T \varphi_k = \alpha_k^2 \varphi_k, \quad \alpha_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

La classe de trace est formée des opérateurs T tels que $\|T\|_1 < \infty$.

– La norme de Schmidt est définie par

$$\|T\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|T\varphi_k\|^2,$$

ou $\{\varphi_k\}$ est une famille orthonormée complète dans H . L'opérateur T est dans la classe de Schmidt si $\|T\|_2 < \infty$.

DEFINITION 4. Soit H un espace de Hilbert séparable et $T : H \rightarrow H$ un opérateur compact. On peut définir la trace

$$\text{Tr } T = \sum_{k=1}^{\infty} (T\varphi_k, \varphi_k),$$

ou $\{\varphi_k\}$ est une famille orthonormée complète dans H . Si $\|T\|_1 < 1$, on peut aussi introduire le déterminant de Fredholm:

$$\det(\mathbf{1} + T) = \exp \{ \text{Tr } \ln(\mathbf{1} + T) \}.$$

Dans le cas $1 \leq \|T\|_1 < \infty$ le déterminant $\det(\mathbf{1} + T)$ est défini par le prolongement analytique de la fonction $f(z) = \det(\mathbf{1} + zT)$, qui est donnée par la série de Taylor à l'intérieur du cercle $|z| = \|T\|_1^{-1}$.

THÉORÈME 5 (alternative de Fredholm). Soit H un espace de Hilbert séparable et $T : H \rightarrow H$ un opérateur compact. Alors

$$\dim \ker(\mathbf{1} + T) = \dim \ker(\mathbf{1} + T)^* < \infty,$$

où, autrement dit, $\mathbf{1} + T$ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro.

Annexe B

Nous présentons ici quelques rappels de théorie quantique des champs. En particulier, nous expliquons le développement de Cällen-Lehmann pour les fonctions de corrélation et donnons la formule pour les facteurs de forme dans la limite continue du modèle d'Ising.

Il existe deux approches équivalentes au calcul des observables en théorie quantique des champs. Les propriétés invariantes de la théorie s'expriment mieux dans le formalisme d'intégrale de chemins. Ici, le système est défini par une fonctionnelle d'action S qui dépend d'un ensemble des champs $\{\varphi\}$. Pour obtenir des quantités observables, il faut trouver les fonctions de corrélation, c'est-à-dire, les valeurs moyennes des produits d'opérateurs locaux, calculées avec le poids $\exp\{-S[\varphi]\}$:

$$\langle \mathcal{O}_1(r_1) \dots \mathcal{O}_n(r_n) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \mathcal{O}_1(r_1) \dots \mathcal{O}_n(r_n) e^{-S[\varphi]}}{\int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi]}}.$$

Les masses des particules sont déterminées par les pôles des fonctions de corrélation à deux points dans leurs représentations de Fourier, tandis que les fonctions de corrélation à n points ($n > 2$) décrivent les processus de dispersion.

Pour les calculs pratiques, le formalisme canonique est souvent utile. Dans cette approche, le système est défini par son opérateur de Hamilton, \hat{H} , qui agit dans un espace de Hilbert des états. Le vecteur propre de \hat{H} de norme 1, qui correspond à la valeur propre minimale, est appelé le vide et noté $|vac\rangle$. Dans le formalisme hamiltonien, le temps joue un rôle special; l'évolution des opérateurs des champs locaux est donnée par l'équation de Heisenberg,

$$\frac{d\hat{\mathcal{O}}(t)}{dt} = [\hat{\mathcal{O}}, \hat{H}].$$

Sa solution formelle est

$$\hat{\mathcal{O}}(t) = \hat{R}(t)^{-1} \hat{\mathcal{O}}(0) \hat{R}(t), \quad \hat{R}(t) = e^{\hat{H}t}.$$

$\hat{R}(t)$ est appelé l'opérateur d'évolution. Les fonctions de corrélation sont les valeurs moyennes dans le vide des produits d'opérateurs locaux ordonnés dans le temps:

$$\langle \mathcal{O}_1(\vec{x}_1, t_1) \dots \mathcal{O}_n(\vec{x}_n, t_n) \rangle = \langle vac | \hat{\mathcal{O}}_1(\vec{x}_1, t_1) \dots \hat{\mathcal{O}}_n(\vec{x}_n, t_n) | vac \rangle, \quad t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n.$$

Quand les coordonnées de deux champs (ou plus) dans le produit $\mathcal{O}_1(r_1) \dots \mathcal{O}_n(r_n)$ coïncident, la fonction de corrélation $\langle \mathcal{O}_1(r_1) \dots \mathcal{O}_n(r_n) \rangle$ peut être singulière. Un problème important consiste à déterminer son asymptotique (dite ultraviolette) pour $r_i \rightarrow r_j$. Pour cela, la notion du développement de produit d'opérateurs (OPE) a été introduite. Schématiquement, ce développement s'écrit de la façon suivante:

$$\hat{\mathcal{O}}_i(x) \hat{\mathcal{O}}_j(y) = \sum_k C_{ij}^k(x-y) \hat{\mathcal{O}}_k(x) + \text{des termes moins singuiers que les fonctions } C_{ij}^k(x-y)$$

pour $x \rightarrow y$. L'étude du comportement ultraviolet se simplifie en dimension 2, car dans ce cas les types possibles d'OPE sont classifiés par la théorie conforme des champs.

Un autre moyen pour étudier les fonctions de corrélation provient de la représentation de Lehmann. On va l'illustrer sur l'exemple de la fonction de corrélation à deux points en dimension 2. L'invariance de la théorie quantique des champs par rapport aux translations implique l'existence de l'opérateur d'impulsion totale, \hat{P} , qui commute avec le hamiltonien: $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$. Cela signifie qu'on peut diagonaliser ces deux opérateurs simultanément. Fixons la base ortho-normée, constituée des vecteurs propres communs de \hat{H} et \hat{P} ; supposons que les éléments de cette base sont caractérisés par un ensemble des nombres quantiques $\{n\}$. Notons

$$\hat{H}|\{n\}\rangle = E_{\{n\}}|\{n\}\rangle, \quad \hat{P}|\{n\}\rangle = P_{\{n\}}|\{n\}\rangle.$$

On peut supposer sans perte de généralité que $E_{vac} = P_{vac} = 0$. Alors, en utilisant la solution de l'équation de Heisenberg, on obtient l'expression suivante pour la fonction de corrélation paire (on suppose que $t_2 \geq t_1$):

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_1(x_1, t_1) \mathcal{O}_2(x_2, t_2) \rangle &= \langle \mathcal{O}_1(0, 0) \mathcal{O}_2(x_2 - x_1, t_2 - t_1) \rangle = \\ &= \langle vac | \mathcal{O}_1(0, 0) e^{-\hat{H}(t_2 - t_1)} \mathcal{O}_2(x_2 - x_1, 0) | vac \rangle. \end{aligned}$$

Insérons dans cette formule l'opérateur identité écrit sous la forme $\mathbf{1} = \sum_{\{n\}} |\{n\}\rangle \langle \{n\}|$. Alors à la place de la dernière ligne on a

$$\sum_{\{n\}} \langle vac | \mathcal{O}_1(0, 0) |\{n\}\rangle \langle \{n\} | \mathcal{O}_2(x_2 - x_1, 0) | vac \rangle e^{-E_{\{n\}}(t_2 - t_1)}.$$

En utilisant l'invariance par rapport aux translations encore une fois, nous obtenons la réponse finale — la représentation de Lehmann de la fonction de corrélation à deux points pour la température nulle:

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1, t_1) \mathcal{O}_2(x_2, t_2) \rangle = \sum_{\{n\}} \langle vac | \mathcal{O}_1(0, 0) |\{n\}\rangle \langle \{n\} | \mathcal{O}_2(0, 0) | vac \rangle e^{-E_{\{n\}}(t_2 - t_1) + iP_{\{n\}}(x_2 - x_1)}.$$

Dans le cas général, le calcul des fonctions de corrélation à n points se divise en deux étapes: a) calcul du spectre de \hat{H} et b) calcul des facteurs de forme $\langle \{m\} | \mathcal{O}_i(0, 0) |\{n\}\rangle$, c'est-à-dire, des éléments matriciels d'opérateurs locaux sur les vecteurs propres de l'hamiltonien.

Exemple 1. Le spectre de l'hamiltonien pour les fermions libres massifs périodiques dans un volume fini β est donné par les formules suivantes:

$$E_{\theta_1 \dots \theta_L} = \sum_{j=1}^L m \cosh \theta_j, \quad \sinh \theta_j \in \frac{2\pi}{m\beta} \mathbb{Z}, \quad \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_L, \quad L = 0, 1, \dots$$

où m désigne la masse des fermions. Les facteurs de forme $\langle \theta_1, \dots, \theta_L | \hat{\psi}(0, 0) | \xi_1, \dots, \xi_M \rangle$ sont non-nuls seulement si $M = L + 1$ et $\{\theta_1, \dots, \theta_L\} \subset \{\xi_1, \dots, \xi_M\}$. De plus,

$$\langle \theta_1, \dots, \theta_L | \hat{\psi}(0, 0) | \theta_1, \dots, \theta_L, \theta_{L+1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\beta \cosh \theta_{L+1}}} \begin{pmatrix} e^{\theta_{L+1}/2} \\ e^{-\theta_{L+1}/2} \end{pmatrix}.$$

Exemple 2. L'ensemble des vecteurs propres de l'hamiltonien, qui correspond à la limite continue du modèle d'Ising dans un volume fini β , se divise en deux parties: le secteur de Neveu-Schwartz (NS) et le secteur de Ramond (R). Ces deux secteurs correspondent aux états de

deux champs libres de fermions, avec les conditions au bord différentes. Les valeurs propres sont données par

$$E_{\xi_1 \dots \xi_L}^{(NS)} = \sum_{j=1}^L m \cosh \xi_j, \quad E_{\theta_1 \dots \theta_M}^{(R)} = \Lambda(\beta)^{-1} + \sum_{j=1}^M m \cosh \theta_j,$$

$$\sinh \xi_j \in \frac{2\pi}{m\beta} \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2} \right), \quad \sinh \theta_j \in \frac{2\pi}{m\beta} \mathbb{Z}, \quad \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_M, \quad \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_L,$$

$$\Lambda(\beta)^{-1} = \frac{m}{\pi} \int_0^\infty dp \ln \coth \frac{m\beta \sqrt{1+p^2}}{2}.$$

Les règles de sélection différentes s'appliquent dans les deux phases: le nombre M de R-particules est pair dans la phase ferromagnétique et impair dans la phase paramagnétique, tandis que L est toujours pair.

Les facteurs de forme du spin ayant le type $_{NS} \langle vac | \hat{\sigma}(0,0) | \theta_1, \dots, \theta_M \rangle_R$ ont été calculés¹ par A. Bugrij [2, 3]. Plus tard, P. Fonseca et A. Zamolodchikov [7] ont obtenu ses formules par une autre méthode. De plus, ils ont fait une conjecture concernant le facteur de forme général:

$$_{NS} \langle \xi_1, \dots, \xi_L | \hat{\sigma}(0,0) | \theta_1, \dots, \theta_M \rangle_R = \sqrt{\xi_T(\beta)} \prod_{j=1}^L \frac{e^{\eta(\xi_j)/2}}{\sqrt{m\beta \cosh \xi_j}} \prod_{k=1}^M \frac{e^{-\eta(\theta_k)/2}}{\sqrt{m\beta \cosh \theta_k}} \times$$

$$\times \prod_{1 \leq j < k \leq L} \tanh \frac{\xi_k - \xi_j}{2} \prod_{1 \leq j < k \leq M} \tanh \frac{\theta_k - \theta_j}{2} \prod_{\substack{1 \leq j \leq L \\ 1 \leq k \leq M}} \coth \frac{\theta_k - \xi_j}{2},$$

où les fonctions $\xi_T(\beta)$ et $\eta(\theta)$ sont définies par

$$\ln \xi_T(\beta) = \left(\frac{m\beta}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_1 d\theta_2 \frac{\sinh \theta_1 \sinh \theta_2}{\sinh(m\beta \cosh \theta_1) \sinh(m\beta \cosh \theta_2)} \ln \left| \coth \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right|,$$

$$\eta(\theta) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi} \operatorname{sech}(\theta' - \theta) \ln \frac{1 + e^{-m\beta \cosh \theta'}}{1 - e^{-m\beta \cosh \theta'}}.$$

La généralisation de cette conjecture au cas du modèle d'Ising sur un réseau fini, sans passage à la limite continue, a été obtenue dans [4].

Un des résultats de cette thèse est l'obtention d'une représentation, analogue à celle de Lehmann, en utilisant seulement le comportement ultraviolet des fonctions de corrélation et certaines propriétés globales des opérateurs du spin (plus précisément, leurs "relations de commutation" avec le champ libre de fermions).

1. Les facteurs de forme du type NS-NS et R-R s'annulent automatiquement à cause de \mathbb{Z}_2 -symétrie du modèle d'Ising.

Bibliographie

- [1] O. Babelon, D. Bernard, *From form factors to correlation functions: the Ising model*, Phys. Letts. **B288**, (1992), 113–120.
- [2] A. I. Bugrij, *Correlation function of the two-dimensional Ising model on the finite lattice. I*, Theor. & Math. Phys. **127**, (2001), 528–548.
- [3] A. I. Bugrij, *Form factor representation of the correlation functions of the two-dimensional Ising model on a cylinder*, in “Integrable structures of exactly solvable two-dimensional models of quantum field theory”, eds. S. Pakuliak and G. von Gehlen, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem. **35**, Kluwer Acad. Publ., (2001), 65–93.
- [4] A. I. Bugrij, O. Lisovyy, *Spin matrix elements in 2D Ising model on the finite lattice*, Phys. Letts. **A319**, (2003), 390–394.
- [5] A. I. Bugrij, V. N. Shadura, *Asymptotic expression for the correlation function of twisted fields in the two-dimensional Dirac model on a lattice*, Theor. & Math. Phys. **121**, (1999), 1535–1549.
- [6] B. Doyon, *Two-point correlation functions of scaling fields in the Dirac theory on the Poincaré disk*, preprint hep-th/0304190.
- [7] P. Fonseca, A. Zamolodchikov, *Ising field theory in a magnetic field: analytic properties of the free energy*, J. Stat. Phys. **110**, (2003), 527–590; preprint hep-th/0112167.
- [8] P. Fonseca, A. Zamolodchikov, *Ward identities and integrable differential equations in the Ising field theory*; preprint hep-th/0309228.
- [9] B. Grammaticos, A. Ramani, J. Hietarinta, *Multilinear operators: natural extension of Hirota’s bilinear formalism*, Phys. Letts. **A190**, (1994); preprint solv-int/9404006.
- [10] M. Jimbo, T. Miwa, K. Ueno, *Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. I*, Physica **2D**, (1981), 306–352.
- [11] M. Jimbo, T. Miwa, *Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. II*, Physica **2D**, (1981), 407–448.
- [12] M. Jimbo, T. Miwa, *Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. III*, Physica **4D**, (1981), 26–46.
- [13] L. P. Kadanoff, H. Ceva, *Determination of an operator algebra for the two-dimensional Ising model*, Phys. Rev. **B3**, (1971), 3918–3938.
- [14] L. P. Kadanoff, M. Kohmoto, *SMJ’s analysis of Ising model correlation functions*, Ann. Phys. **126**, (1980), 371–398.
- [15] A. LeClair, F. Lesage, S. Sachdev, H. Saleur, *Finite temperature correlations in the one-dimensional quantum Ising model*, Nucl. Phys. **B482**, (1996), 579–602; preprint cond-mat/9606104.
- [16] O. Lisovyy, *Nonlinear differential equations for the correlation functions of the 2D Ising model on the cylinder*, Adv. Theor. Math. Phys. **5**, (2001), 909–922.
- [17] O. Lisovyy, *PDEs for Ising correlation functions on the cylinder*, Int. J. Mod. Phys. **A19** Suppl., (2004), 267–275.
- [18] O. Lisovyy, *Tau functions for the Dirac operator on the cylinder*, accepté pour publication dans Comm. Math. Phys.
- [19] B. Malgrange, *Sur les déformations isomonodromiques I–II*, in “Mathématiques et Physique. Séminaires E.N.S. 1979–1982”, Birkhäuser, (1983), 401–438.
- [20] B. M. McCoy, J. H. H. Perk, *Relation of conformal field theory and deformation theory for the Ising model*, Nucl. Phys. **B285**, (1987), 279–294.
- [21] T. Miwa, M. Jimbo, E. Date, *Solitons: differential equations, symmetries and infinite dimensional algebras*, Cambr. Univ. Press, (2000).

- [22] R. Narayanan, C. A. Tracy, *Holonomic quantum field theory of bosons in the Poincaré disk and the zero curvature limit*, Nucl. Phys. **B340**, (1990), 568–594.
- [23] L. Onsager, *Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition*, Phys. Rev. **65**, (1944), 117–149.
B. Kaufman, *Crystal statistics. II. Partition function evaluated by spinor analysis*, Phys. Rev. **76**, (1949), 1232–1243.
B. Kaufman, L. Onsager, *Crystal statistics. III. Short-range order in a binary Ising lattice*, Phys. Rev. **76**, (1949), 1244–1252.
- [24] J. Palmer, *Determinants of Cauchy-Riemann operators as τ -functions*, Acta Appl. Math. **18**, (1990), 199–223.
- [25] J. Palmer, *Tau functions for the Dirac operator in the Euclidean plane*, Pacific J. Math. **160**, (1993), 259–342.
- [26] J. Palmer, *Ising model scaling functions at short distance*, preprint [nlin.SI/0107013](#).
J. Palmer, *Short distance asymptotics of Ising correlations*, preprint [nlin.SI/0107014](#).
- [27] J. Palmer, C. A. Tracy, *Monodromy preserving deformation of the Dirac operator acting on the hyperbolic plane*, in “Mathematics of Nonlinear Science: proceedings of an AMS special session held January 11–14, 1989”, M. S. Berger ed., Contemporary Mathematics **108**, (1990), 119–131.
- [28] J. Palmer, M. Beatty, C. A. Tracy, *Tau functions for the Dirac operator on the Poincaré disk*, Comm. Math. Phys. **165**, (1994), 97–173.
- [29] A. Pressley, G. Segal, *Loop groups*, Clarendon Press, Oxford, (1986).
- [30] D. Quillen, *Determinants of Cauchy-Riemann operators on a Riemann surface*, Funct. Anal. Appl. **19**, (1985), 37–41.
- [31] D. B. Ray, I. M. Singer, *Analytic torsion for complex manifolds*, Ann. Math. **98**, (1973), 154–177.
- [32] M. Sato, T. Miwa, M. Jimbo, *Holonomic quantum fields I–V*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **14**, (1978), 223–267; **15**, (1979), 201–278; **15**, (1979), 577–629; **15**, (1979), 871–972; **16**, (1980), 531–584.
- [33] G. Segal, G. Wilson, *Loop groups and equations of KdV type*, Publ. Math. I.H.E.S. **61**, (1985), 5–65.
- [34] C. A. Tracy, H. Widom, *Fredholm determinants, differential equations and matrix models*, Comm. Math. Phys. **163**, (1994), 33–72; preprint [hep-th/9306042](#).
- [35] C. A. Tracy, H. Widom, *Fredholm determinants and mKdV/sinh-Gordon hierarchies*, Comm. Math. Phys. **179**, (1996), 1–10; preprint [solv-int/9506006](#).
- [36] H. Widom, *On the solution of a Painlevé III equation*, Math. Physics, Analysis and Geometry **3**, (2000), 375–384; preprint [solv-int/9808015](#).
- [37] E. Witten, *Quantum field theory, Grassmannians and algebraic curves*, Comm. Math. Phys. **113**, (1988), 529–600.
- [38] T. T. Wu, B. M. McCoy, C. A. Tracy, E. Barouch, *Spin-spin correlation functions for the two-dimensional Ising model: Exact theory in the scaling region*, Phys. Rev. **B13**, (1976), 316–374.