

Processus de Lévy en Finance: Problèmes Inverses et Modélisation de Dépendance

*Thèse présentée pour obtenir le titre de
Docteur de l'Ecole Polytechnique
par Peter TANKOV*

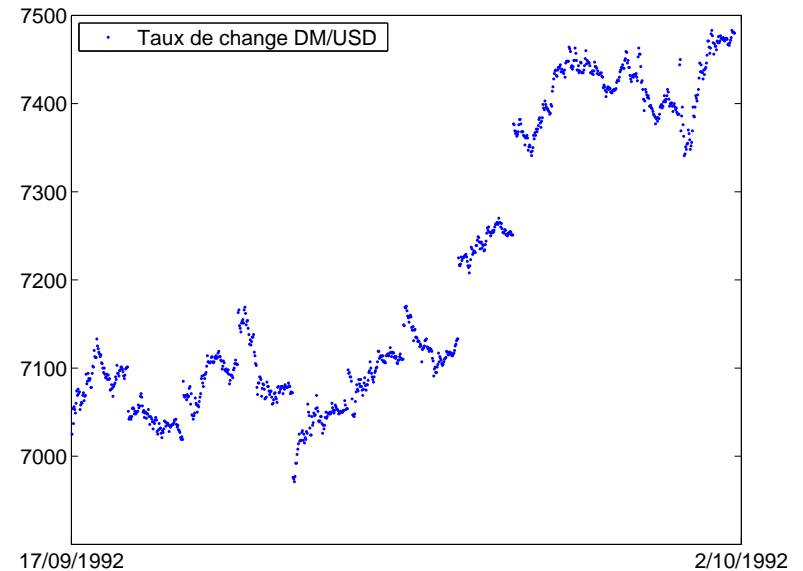
Directeur de thèse: M. Rama Cont

Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique

Introduction: processus de Lévy et modèles exponentielle-Lévy.

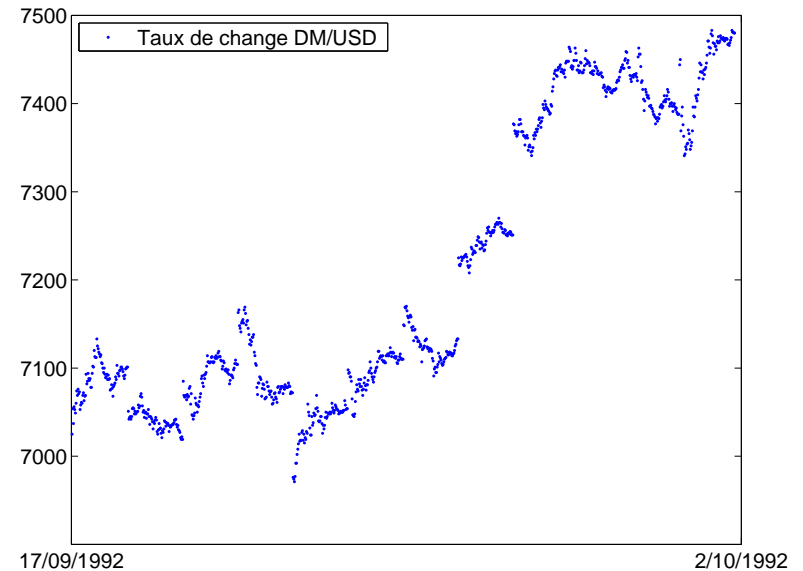
Modèles avec sauts en finance

- Meilleure gestion de risques grâce à la présence explicite de sauts dans le modèle.



Modèles avec sauts en finance

- Meilleure gestion de risques grâce à la présence explicite de sauts dans le modèle.
- L'existence des options est justifiée par l'incomplétude du marché.



Processus de Lévy: définitions

Processus de Lévy: **P**rocessus aux **A**ccroissements
Indépendants et **S**tationnaires

Exemples: mouvement Brownien, processus de Poisson

Processus de Lévy: définitions

Processus de Lévy: **P**rocessus aux **A**ccroissements
Indépendants et **S**ationnaires

Exemples: mouvement Brownien, processus de Poisson

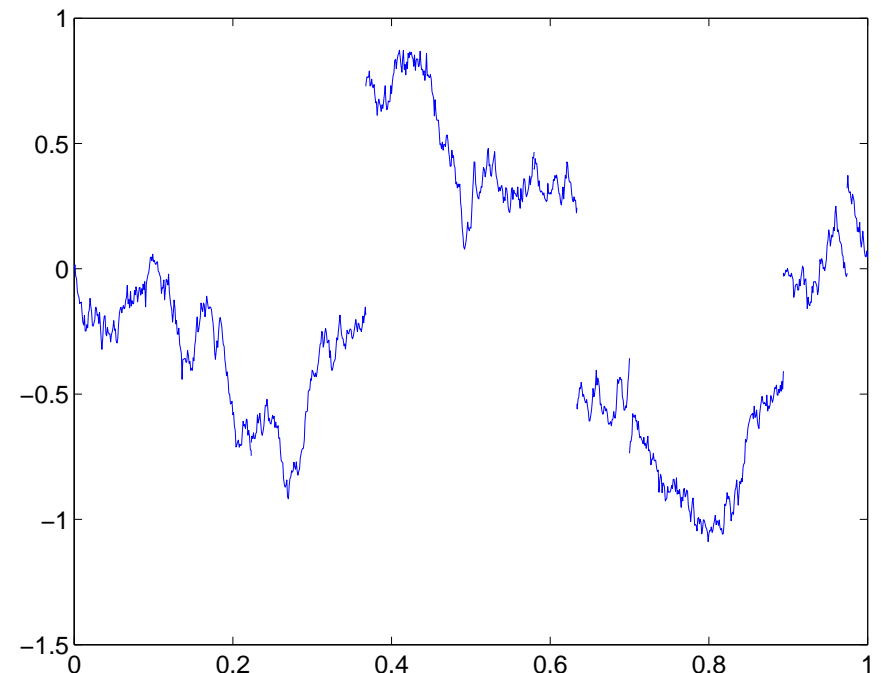
Intensité de sauts finie:

$$X_t = \gamma t + W_t^\Sigma + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

N_t : Poisson d'intensité λ

Y_i : IID avec distribution $f(\cdot)$

$\nu = \lambda f$: la mesure de Lévy.



Processus de Lévy: définitions

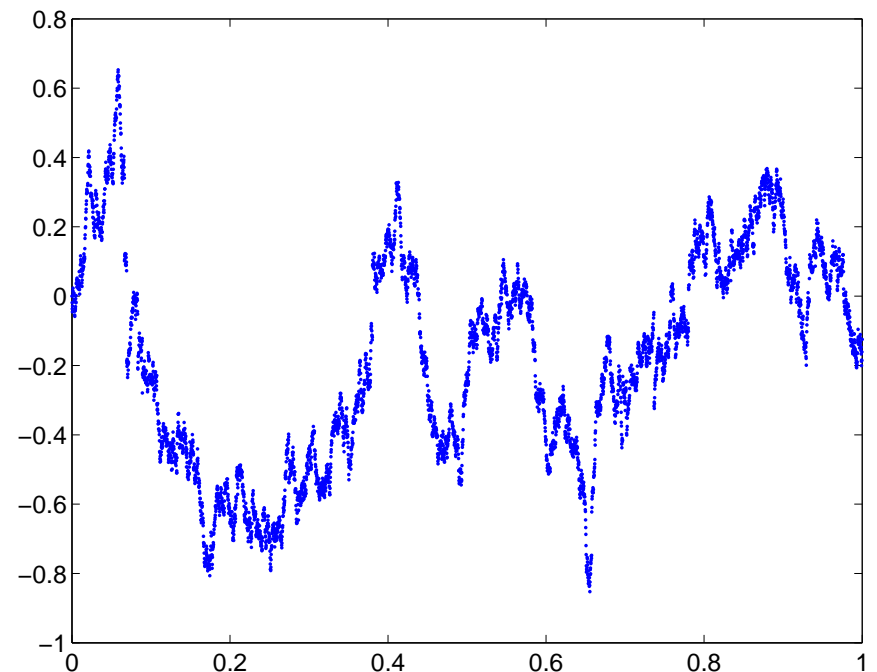
Intensité de sauts infinie:

$$X_t = \gamma t + W_t^\Sigma + Z_t$$

Z_t : a une infinité de sauts dans chaque intervalle

ν : mesure positive sur \mathbb{R}^d telle que

$$\int_{\mathbb{R}^d} 1 \wedge |x|^2 \nu(dx) < \infty$$



Modèles exponentielle-Lévy

Soit (X_t) un processus de Lévy sur (Ω, \mathcal{F}, P) .

$$S_t = S_0 e^{rt + X_t}$$

Modèles exponentielle-Lévy

Soit (X_t) un processus de Lévy sur (Ω, \mathcal{F}, P) .

$$S_t = S_0 e^{rt + X_t}$$

Absence d'opportunité d'arbitrage



$\exists Q \sim P : e^{X_t}$ est une Q -martingale.

- Dans un modèle exp-Lévy il n'y a pas d'arbitrage si les trajectoires de (X, P) ne sont pas p.s. croissantes ni p.s. décroissantes.

Modèles exp-Lévy paramétriques

- Modèle de Merton (1976):

$$\sigma > 0, \quad \nu(x) = \frac{\lambda}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\delta^2}}.$$

- Variance gamma (Madan, Milne (1991)):

$$\sigma = 0, \quad \nu(x) = \frac{Ae^{-\eta+x}}{x} 1_{x>0} + \frac{Ae^{-\eta-|x|}}{|x|} 1_{x<0}.$$

Contenu de la thèse

1. Processus de Lévy et modèles exponentielle-Lévy
2. Calibration de modèles exponentielle-Lévy aux prix d'options, théorie
3. Implémentation numérique de l'algorithme de calibration et application aux données réelles
4. Caractérisation de la dépendance de processus de Lévy multidimensionnels
5. Applications de copules de Lévy

Contenu de la thèse

1. Processus de Lévy et modèles exponentielle-Lévy
2. Calibration de modèles exponentielle-Lévy aux prix d'options, théorie
3. Implémentation numérique de l'algorithme de calibration et application aux données réelles
4. Caractérisation de la dépendance de processus de Lévy multidimensionnels
5. Applications de copules de Lévy

Contenu de la thèse

1. Processus de Lévy et modèles exponentielle-Lévy
2. Calibration de modèles exponentielle-Lévy aux prix d'options, théorie
3. Implémentation numérique de l'algorithme de calibration et application aux données réelles
4. Caractérisation de la dépendance de processus de Lévy multidimensionnels
5. Applications de copules de Lévy

Calibration non-paramétrique de modèles exponentielle-Lévy aux prix d'options, cotées sur un marché financier.

Le problème de calibration

Pricing: sous la probabilité risque-neutre:

$$C^Q(T, K) = e^{-rT} E^Q[(S_0 e^{rT+X_t} - K)^+]$$

$\mathcal{M} = \{\text{probabilités risque-neutres}\}$

$\mathcal{L} = \{Q : (X, Q) \text{ est un processus de Lévy}\}$

Calibration: étant donnés les prix de marché

$C_M(T_i, K_i)$, $i \in I$, trouver $Q \in \mathcal{M} \cap \mathcal{L}$:

$$C_M(T_i, K_i) = C^Q(T_i, K_i) \quad \text{pour tout } i \in I. \quad (E)$$

Calibration exacte et approchée

Le problème de calibration avec contraintes exactes (E):

- Pas d'erreurs dans les données (fourchettes bid-ask)
- Données compatibles avec un modèle exp-Lévy

Calibration exacte et approchée

Le problème de calibration avec contraintes exactes (E):

- Pas d'erreurs dans les données (fourchettes bid-ask)
- Données compatibles avec un modèle exp-Lévy

Sinon, calibration avec la plus grande précision possible:

trouver $Q^{LS} \subseteq \mathcal{M} \cap \mathcal{L}$:

$$\forall Q^* \in Q^{LS}, \|C_M - C^{Q^*}\|_w^2 = \inf_{Q \in \mathcal{M} \cap \mathcal{L}} \|C_M - C^Q\|_w^2, \quad (LS)$$

$$\text{où } \|C_M - C^Q\|_w^2 := \sum_{i \in I} w_i (C_M(T_i, K_i) - C^Q(T_i, K_i))^2.$$

Calibration par moindres carrés

Problème bien posé (Hadamard): existence, unicité, continuité

Calibration par moindres carrés: un problème mal posé

- Manque d'identifiabilité
- Absence de solution
- Même si une solution existe, elle peut ne pas être continue par rapport aux données de marché
- La solution est difficile à trouver numériquement parce que l'erreur de pricing n'est pas convexe

Sélection en utilisant l'entropie relative

Pour résoudre le problème d'identifiabilité \Rightarrow choisir les éléments de \mathcal{Q}^{LS} qui minimisent l'entropie relative par rapport à un processus "a priori" $P \in \mathcal{L}$:

$$\mathcal{Q}^{MELS} = \{Q^* \in \mathcal{Q}^{LS} : I(Q^*|P) = \inf_{Q \in \mathcal{Q}^{LS}} I(Q|P)\}, \quad (MELS)$$

Sélection en utilisant l'entropie relative

Pour résoudre le problème d'identifiabilité \Rightarrow choisir les éléments de \mathcal{Q}^{LS} qui minimisent l'entropie relative par rapport à un processus "a priori" $P \in \mathcal{L}$:

$$\mathcal{Q}^{MELS} = \{Q^* \in \mathcal{Q}^{LS} : I(Q^*|P) = \inf_{Q \in \mathcal{Q}^{LS}} I(Q|P)\}, \quad (MELS)$$

$$\text{où } I(Q|P) := \begin{cases} \int \frac{dQ}{dP} \log \frac{dQ}{dP} dP, & Q \ll P, \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Fonctionnelle non-négative convexe de Q pour P fixé, égale à zéro ssi $\frac{dQ}{dP} = 1$ p.s.

Le problème de calibration régularisé

Soit C_M^δ une donnée bruitée avec $\|C_M^\delta - C_M\| < \delta$.

Pour résoudre le problème (*MELS*) de façon stable en présence d'erreurs, il est remplacé par:

$$Q^R = \arg \inf_{Q \in \mathcal{M} \cap \mathcal{L}} \{ \|C_M^\delta - C^Q\|_w^2 + \alpha I(Q|P) \} \quad (R_\alpha)$$

Le problème de calibration régularisé

Soit C_M^δ une donnée bruitée avec $\|C_M^\delta - C_M\| < \delta$.

Pour résoudre le problème (*MELS*) de façon stable en présence d'erreurs, il est remplacé par:

$$Q^R = \arg \inf_{Q \in \mathcal{M} \cap \mathcal{L}} \{ \|C_M^\delta - C^Q\|_w^2 + \alpha I(Q|P) \} \quad (R_\alpha)$$

- Pour α fixé, (R_α) est un problème bien posé.

Le problème de calibration régularisé

Soit C_M^δ une donnée bruitée avec $\|C_M^\delta - C_M\| < \delta$.

Pour résoudre le problème (*MELS*) de façon stable en présence d'erreurs, il est remplacé par:

$$Q^R = \arg \inf_{Q \in \mathcal{M} \cap \mathcal{L}} \{ \|C_M^\delta - C^Q\|_w^2 + \alpha I(Q|P) \} \quad (R_\alpha)$$

- Pour α fixé, (R_α) est un problème bien posé.
- Si (*MELS*) a une solution avec donnée C_M , les solutions de (R_α) convergent vers les solutions de (*MELS*) quand $\delta \rightarrow 0$, avec un choix approprié de α .

Problème de calibration régularisé: propriétés

$\mathcal{L}_B^+ := \{(X, P) \in \mathcal{L} : \Delta X_t \leq B \forall t\}$: l'ensemble de processus de Lévy avec sauts bornés supérieurement par B .

$\mathcal{L}_{NA} := \{(X, P) \in \mathcal{L} : X \text{ n'est pas p.s. croissant ni décroissant}\}$: les processus de Lévy satisfaisant les conditions d'AOA

Problème de calibration régularisé: propriétés

$\mathcal{L}_B^+ := \{(X, P) \in \mathcal{L} : \Delta X_t \leq B \forall t\}$: l'ensemble de processus de Lévy avec sauts bornés supérieurement par B .

$\mathcal{L}_{NA} := \{(X, P) \in \mathcal{L} : X \text{ n'est pas p.s. croissant ni décroissant}\}$: les processus de Lévy satisfaisant les conditions d'AOA

Théorème. *Supposons que $P \in \mathcal{L}_B^+ \cap \mathcal{L}_{NA}$. Alors*

- *Le problème (R_α) a au moins une solution.*

Problème de calibration régularisé: propriétés

$\mathcal{L}_B^+ := \{(X, P) \in \mathcal{L} : \Delta X_t \leq B \forall t\}$: l'ensemble de processus de Lévy avec sauts bornés supérieurement par B .

$\mathcal{L}_{NA} := \{(X, P) \in \mathcal{L} : X \text{ n'est pas p.s. croissant ni décroissant}\}$: les processus de Lévy satisfaisant les conditions d'AOA

Théorème. *Supposons que $P \in \mathcal{L}_B^+ \cap \mathcal{L}_{NA}$. Alors*

- *Le problème (R_α) a au moins une solution.*
- *Les solutions de (R_α) sont continues par rapport à C_M .*

Problème de calibration régularisé: propriétés

$\mathcal{L}_B^+ := \{(X, P) \in \mathcal{L} : \Delta X_t \leq B \forall t\}$: l'ensemble de processus de Lévy avec sauts bornés supérieurement par B .

$\mathcal{L}_{NA} := \{(X, P) \in \mathcal{L} : X \text{ n'est pas p.s. croissant ni décroissant}\}$: les processus de Lévy satisfaisant les conditions d'AOA

Théorème. *Supposons que $P \in \mathcal{L}_B^+ \cap \mathcal{L}_{NA}$. Alors*

- *Le problème (R_α) a au moins une solution.*
- *Les solutions de (R_α) sont continues par rapport à C_M .*
- *Sous des conditions de régularité sur P , les solutions de (R_α) sont des mesures martingales équivalentes à P .*

Existence de solution: idée de la preuve

$$J(Q) := \|C_M - C^Q\|_w^2 + \alpha I(Q|P)$$

Existence de solution: idée de la preuve

$$J(Q) := \|C_M - C^Q\|_w^2 + \alpha I(Q|P)$$

Il existe une mesure $Q_0 \in \mathcal{M} \cap \mathcal{L}_B^+$ avec $I(Q_0|P) < \infty$.

Existence de solution: idée de la preuve

$$J(Q) := \|C_M - C^Q\|_w^2 + \alpha I(Q|P)$$

Il existe une mesure $Q_0 \in \mathcal{M} \cap \mathcal{L}_B^+$ avec $I(Q_0|P) < \infty$.

Soit $I_r := \{Q \in \mathcal{P}(\Omega), I(Q|P) \leq r\}$. La solution appartient à l'ensemble $I_{J(Q_0)} \cap \mathcal{M} \cap \mathcal{L}_B^+$ qui est (étroitement) compact.

Existence de solution: idée de la preuve

$$J(Q) := \|C_M - C^Q\|_w^2 + \alpha I(Q|P)$$

Il existe une mesure $Q_0 \in \mathcal{M} \cap \mathcal{L}_B^+$ avec $I(Q_0|P) < \infty$.

Soit $I_r := \{Q \in \mathcal{P}(\Omega), I(Q|P) \leq r\}$. La solution appartient à l'ensemble $I_{J(Q_0)} \cap \mathcal{M} \cap \mathcal{L}_B^+$ qui est (étroitement) compact.

$$I(Q|P) = \sup_{f \in C_b(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} f dQ - \int_{\Omega} (e^f - 1) dP \right\}$$

$\Rightarrow I(Q|P)$ (et $J(Q)$) est (étroitement) sci par rapport à Q .

Existence de solution: idée de la preuve

$$J(Q) := \|C_M - C^Q\|_w^2 + \alpha I(Q|P)$$

Il existe une mesure $Q_0 \in \mathcal{M} \cap \mathcal{L}_B^+$ avec $I(Q_0|P) < \infty$.

Soit $I_r := \{Q \in \mathcal{P}(\Omega), I(Q|P) \leq r\}$. La solution appartient à l'ensemble $I_{J(Q_0)} \cap \mathcal{M} \cap \mathcal{L}_B^+$ qui est (étroitement) compact.

$$I(Q|P) = \sup_{f \in C_b(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} f dQ - \int_{\Omega} (e^f - 1) dP \right\}$$

$\Rightarrow I(Q|P)$ (et $J(Q)$) est (étroitement) sci par rapport à Q .

$\Rightarrow J(Q)$ atteint son minimum sur l'ensemble

$$I_{J(Q_0)} \cap \mathcal{M} \cap \mathcal{L}_B^+$$

Problème régularisé: convergence

Théorème. *Supposons que*

(i) $P \in \mathcal{L}_B^+ \cap \mathcal{L}_{NA}$.

(ii) *Il existe une solution du problème (MELS) avec donnée C_M et processus a priori P .*

(iii) $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ **et** $\frac{\delta}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0$ *quand $\delta \rightarrow 0$.*

Problème régularisé: convergence

Théorème. *Supposons que*

(i) $P \in \mathcal{L}_B^+ \cap \mathcal{L}_{NA}$.

(ii) Il existe une solution du problème (MELS) avec donnée C_M et processus a priori P .

(iii) $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ et $\frac{\delta}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0$ quand $\delta \rightarrow 0$.

Alors les solutions du problème ($R_{\alpha(\delta)}$) avec donnée C_M^δ convergent vers une solution du problème (MELS) lorsque $\delta \rightarrow 0$.

Continuité par rapport au prior

Théorème. *Supposons que $P, \{P_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{L}_B^+ \cap \mathcal{L}_{NA}$ avec $P_n \Rightarrow P$.*

Alors les solutions du problème (R_α) avec processus a priori P_n convergent vers une solution du problème (R_α) avec processus a priori P .

Continuité par rapport au prior

Théorème. *Supposons que $P, \{P_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{L}_B^+ \cap \mathcal{L}_{NA}$ avec $P_n \Rightarrow P$.*

Alors les solutions du problème (R_α) avec processus a priori P_n convergent vers une solution du problème (R_α) avec processus a priori P .

Conséquences:

(i) La solution est peu sensible aux petites variations du prior.

Continuité par rapport au prior

Théorème. *Supposons que $P, \{P_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{L}_B^+ \cap \mathcal{L}_{NA}$ avec $P_n \Rightarrow P$.*

Alors les solutions du problème (R_α) avec processus a priori P_n convergent vers une solution du problème (R_α) avec processus a priori P .

Conséquences:

- (i) La solution est peu sensible aux petites variations du prior.
- (ii) La solution avec un prior quelconque peut être approchée par une suite de solutions avec priors discrétisés.

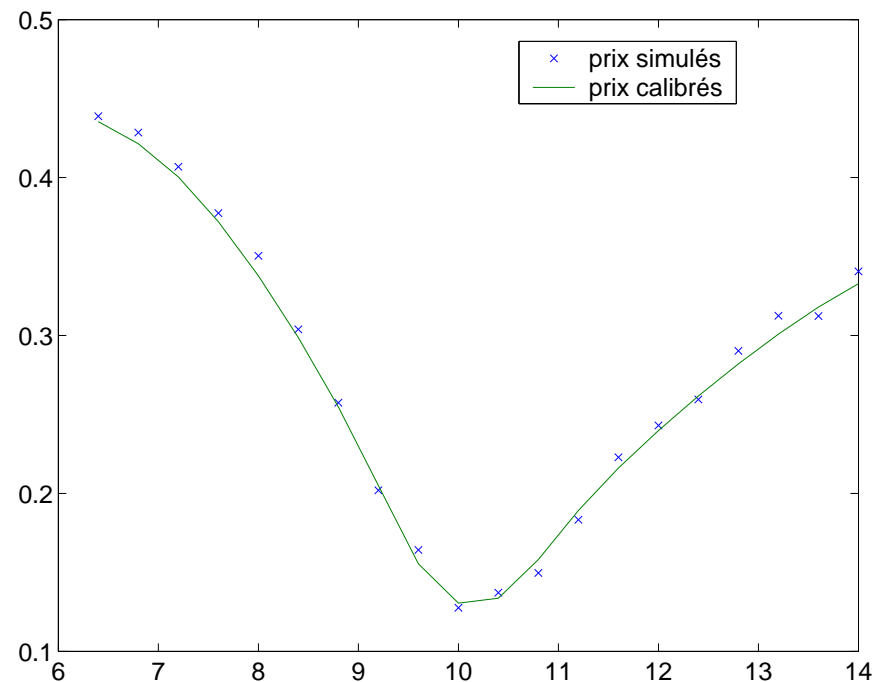
Tests sur les données simulées

Modèle: modèle de Kou (intensité finie)

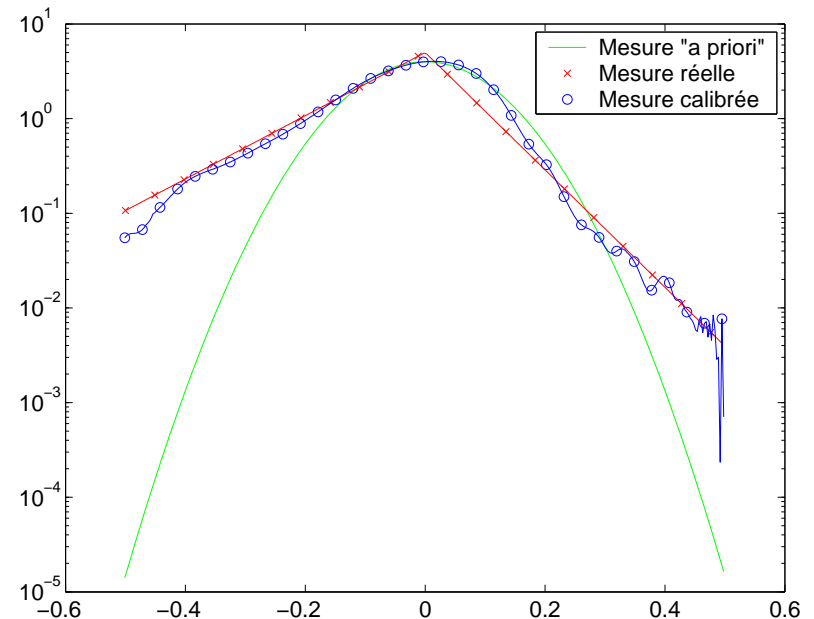
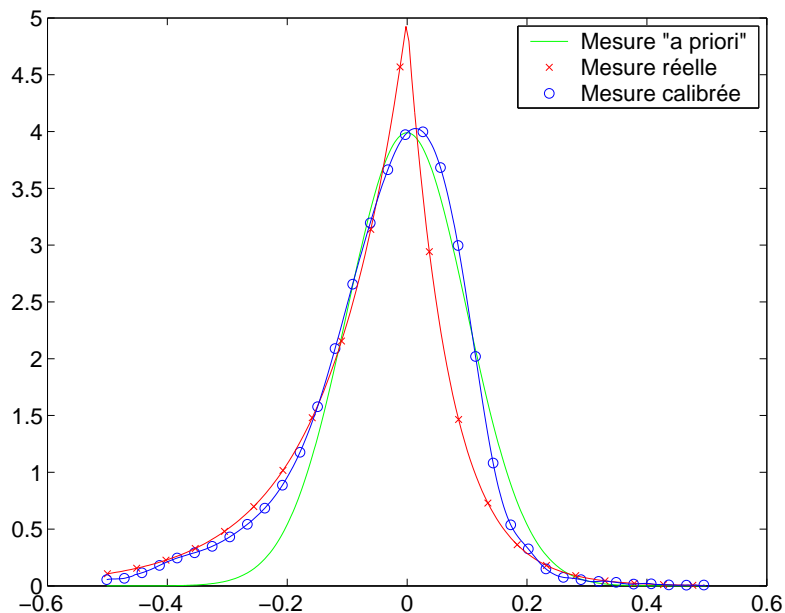
$$\nu(x) = \lambda[p\alpha_1 e^{-\alpha_1 x} 1_{x>0} + (1-p)\alpha_2 e^{-\alpha_2 |x|} 1_{x<0}]$$

Modèle à priori: modèle de Merton (sauts Gaussiens).

Perturbations de 1% ont été ajoutées aux données.

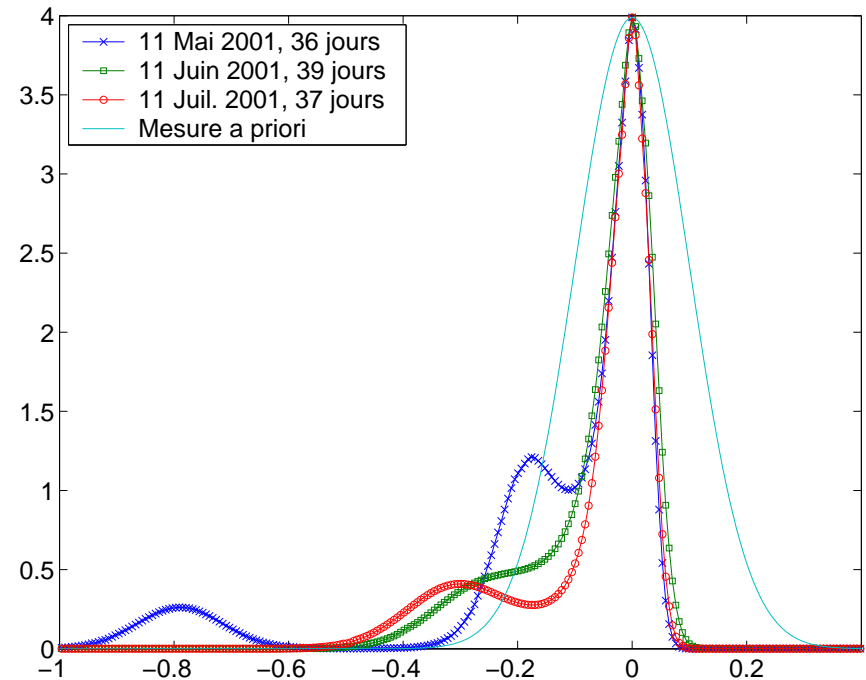
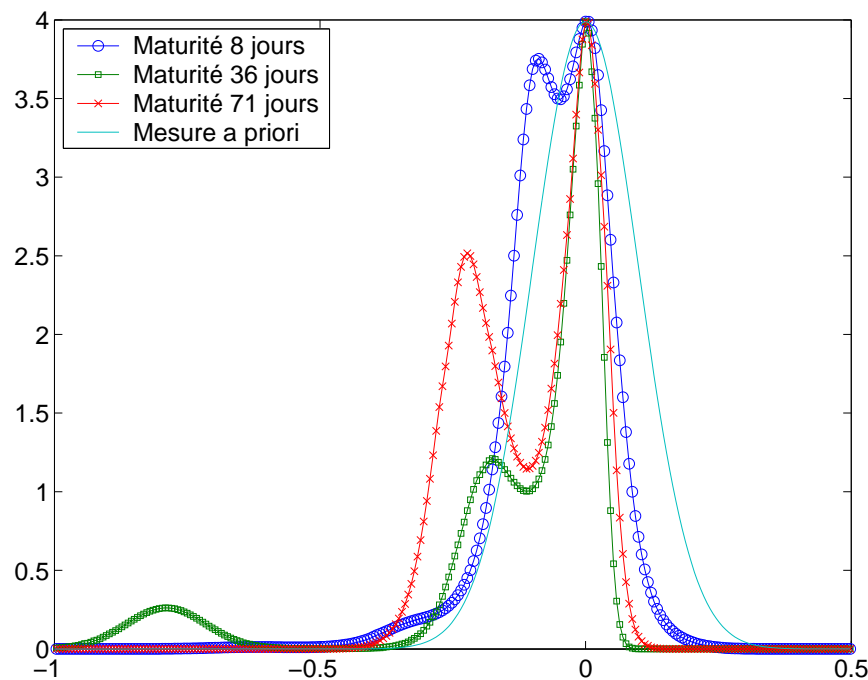


Tests sur les données simulées



Mesure de Lévy calibrée aux prix d'options simulées à partir du modèle de Kou avec $\sigma_0 = 10\%$. Perturbations de 1% ont été ajoutées aux données.

Mesures de Lévy implicites



Gauche: Mesures de Lévy calibrées aux options DAX pour trois maturités différentes. Droite: Mesures de Lévy calibrées aux options DAX pour trois dates différentes.

Conclusions I

- Une méthode permettant de calibrer un modèle exponentielle-Lévy simultanément aux données historiques et aux prix d'options, stable en présence d'erreurs dans les données.
- La qualité de calibration est bonne pour les données réelles d'une seule maturité, même lorsque l'intensité de sauts est finie.
- Les modèles exponentielle-Lévy sont insuffisantes pour calibrer les données de plusieurs maturités avec une grande précision.

Perspectives I

- Extension aux modèles qui permettent de calibrer la structure par terme complète de prix d'options:
 - modèles fondés sur les processus additifs,
 - modèles hybrides, comportant une composante de sauts et une composante de volatilité stochastique.
- Liens entre la calibration et la couverture dans les modèles exponentielle-Lévy.

Modélisation de la dépendance entre les composantes d'un processus de Lévy multidimensionnel.

Une partie de ce travail a été réalisée en collaboration avec
Jan Kallsen

Motivation

Deux actions S_1 et S_2 dans le même secteur:

- Les lois marginales de S_1 et S_2 peuvent être calibrées aux prix d'options européennes sur S_1 et S_2 , cotées sur le marché.
- Un modèle de la dépendance peut être estimé à partir des séries temporelles historiques de S_1 et S_2 .

Supposant que S_1 et S_2 sont les exponentielles de processus variance gamma, comment construire un processus de Lévy bidimensionnel pour valoriser les options à panier?

Objectifs de cette étude

- A partir de n processus de Lévy unidimensionnels X^1, \dots, X^n , caractériser tous les processus de Lévy Y à valeurs dans \mathbb{R}^n tels que $Y^1 \stackrel{d}{=} X^1, \dots, Y^n \stackrel{d}{=} X^n$.

Objectifs de cette étude

- A partir de n processus de Lévy unidimensionnels X^1, \dots, X^n , caractériser tous les processus de Lévy Y à valeurs dans \mathbb{R}^n tels que $Y^1 \stackrel{d}{=} X^1, \dots, Y^n \stackrel{d}{=} X^n$.
- Exprimer les structures de dépendance particulières (comme l'indépendance et la dépendance complète) à partir de cette caractérisation.

Objectifs de cette étude

- A partir de n processus de Lévy unidimensionnels X^1, \dots, X^n , caractériser tous les processus de Lévy Y à valeurs dans \mathbb{R}^n tels que $Y^1 \stackrel{d}{=} X^1, \dots, Y^n \stackrel{d}{=} X^n$.
- Exprimer les structures de dépendance particulières (comme l'indépendance et la dépendance complète) à partir de cette caractérisation.
- Construire des modèles de dépendance paramétriques.

Objectifs de cette étude

- A partir de n processus de Lévy unidimensionnels X^1, \dots, X^n , caractériser tous les processus de Lévy Y à valeurs dans \mathbb{R}^n tels que $Y^1 \stackrel{d}{=} X^1, \dots, Y^n \stackrel{d}{=} X^n$.
- Exprimer les structures de dépendance particulières (comme l'indépendance et la dépendance complète) à partir de cette caractérisation.
- Construire des modèles de dépendance paramétriques.

⇒ Pour les variables aléatoires réelles: les copules.

Copules traditionnelles

Copule:

- fonction de répartition sur $[0, 1]^2$ avec lois marginales uniformes;
- outil mathématique qui caractérise le passage des lois marginales à la loi jointe.

Pour les extensions à \mathbb{R}^n : voir thèse.

Copules pour les mesures de Lévy

- Mesure de probabilité \leftrightarrow mesure de Lévy
- Fonction de répartition \leftrightarrow intégrale de queue
- Difficulté principale: singularité non-intégrable de ν en 0.

Copules pour les mesures de Lévy

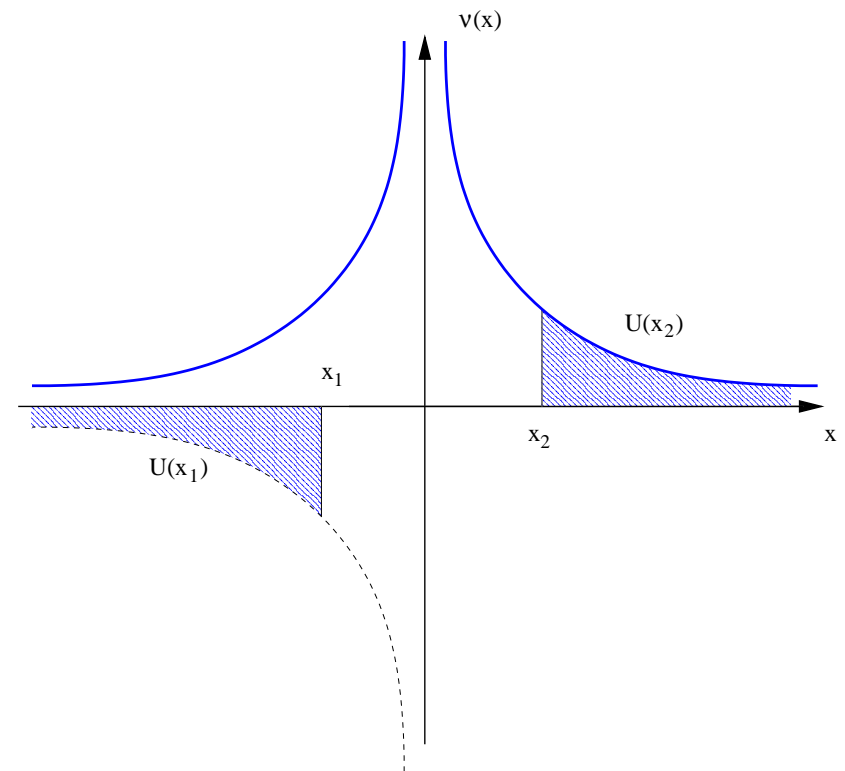
- Mesure de probabilité \leftrightarrow mesure de Lévy
- Fonction de répartition \leftrightarrow intégrale de queue
- Difficulté principale: singularité non-intégrable de ν en 0.

Intégrale de queue unidimensionnelle

$$U : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x > 0 \mapsto \nu([x, \infty))$$

$$x < 0 \mapsto -\nu((-\infty, x))$$



Copules pour les mesures de Lévy

Intégrale de queue 2-dim

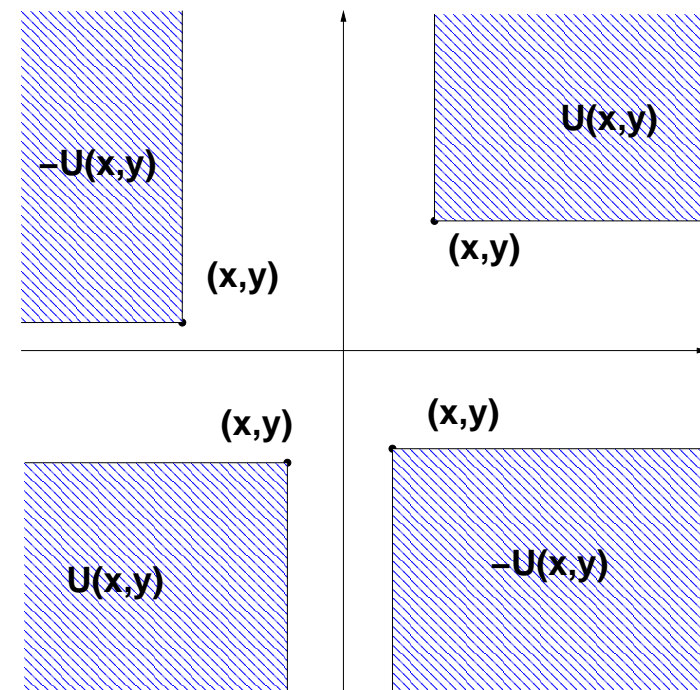
$$U : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x > 0 \quad y > 0 \mapsto \nu([x, \infty) \times [y, \infty))$$

$$x > 0 \quad y < 0 \mapsto -\nu([x, \infty) \times (-\infty, y))$$

$$x < 0 \quad y > 0 \mapsto -\nu((-\infty, x) \times [y, \infty))$$

$$x < 0 \quad y < 0 \mapsto \nu((-\infty, x) \times (-\infty, y))$$



- Intégrales marginales \equiv Intégrales de composantes
- Intégrale de queue 2-dim + intégrales marginales déterminent la mesure de Lévy.

Définition de la copule de Lévy

$F : (-\infty, \infty] \times (-\infty, \infty] \rightarrow (-\infty, \infty]$ est une *copule de Lévy* si

1. $F(x, y) \neq \infty$ pour $(x, y) \neq (\infty, \infty)$
2. $F(x, 0) = F(0, x) = 0$ pour tout x .
3. F est une fonction croissante: pour $x_1 \leq x_2$ et $y_1 \leq y_2$,

$$F(x_1, y_1) + F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) \geq 0$$

4. F a des marginales “de Lebesgue”:

$$F_1(x) := F(x, \infty) - \lim_{c \rightarrow -\infty} F(x, c) = x \quad \forall x$$

$$F_2(y) := F(\infty, y) - \lim_{c \rightarrow -\infty} F(c, y) = y \quad \forall y$$

Théorème de représentation

1. Soit $X = (X^1, X^2)$ un processus de Lévy à valeurs dans \mathbb{R}^2 .

\Rightarrow Il existe une copule de Lévy F avec:

$$U(x, y) = F(U_1(x), U_2(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (*)$$

2. Soit F une copule de Lévy et soit U_1, U_2 intégrales de queue de processus de Lévy 1-dim.

\Rightarrow Il existe un processus de Lévy à valeurs dans \mathbb{R}^2 avec intégrales de queue marginales U_1, U_2 et dont l'intégrale de queue satisfait (*).

Exemples de copules de Lévy

Soit $(X_t) \equiv (X_t^1, X_t^2)$ un processus de Lévy sans composante Brownienne.

- X^1 et X^2 sont indépendants ssi X a la copule de Lévy

$$F_{\perp}(x_1, x_2) = x_1 1_{x_2=\infty} + x_2 1_{x_1=\infty}.$$

- X^1 et X^2 sont complètement dépendants (la trajectoire de l'un d'entre eux peut être reconstruite à partir de la trajectoire de l'autre) ssi X a la copule de Lévy

$$F_{\parallel}(x_1, x_2) = \min(|x_1|, |x_2|) 1_{\text{sgn } x_1 = \text{sgn } x_2} \text{sgn } x_1 \text{sgn } x_2.$$

Copules de Lévy archimédiennes

Soit $\phi : [-1, 1] \rightarrow [-\infty, \infty]$ une fonction croissante continue, telle que $\phi(1) = \infty$ et $\phi(-1) = -\infty$, concave sur $(-1, 0)$ et convexe sur $(0, 1)$, et soit $\tilde{\phi}(u) := \phi(u) - \phi(-u)$.

$\Rightarrow F(u, v) := \phi(\tilde{\phi}^{-1}(u)\tilde{\phi}^{-1}(v))$ est une copule de Lévy.

Copules de Lévy archimédiennes

Soit $\phi : [-1, 1] \rightarrow [-\infty, \infty]$ une fonction croissante continue, telle que $\phi(1) = \infty$ et $\phi(-1) = -\infty$, concave sur $(-1, 0)$ et convexe sur $(0, 1)$, et soit $\tilde{\phi}(u) := \phi(u) - \phi(-u)$.

$\Rightarrow F(u, v) := \phi(\tilde{\phi}^{-1}(u)\tilde{\phi}^{-1}(v))$ est une copule de Lévy.

Exemple: $\phi(x) = \eta(-\log |x|)^{-1/\theta} 1_{x \geq 0} - (1 - \eta)(-\log |x|)^{-1/\theta} 1_{x < 0}$

$\Rightarrow F(u, v) = (|u|^{-\theta} + |v|^{-\theta})^{-1/\theta} (\eta 1_{uv \geq 0} - (1 - \eta) 1_{uv < 0})$.

Copules de Lévy archimédiennes

Soit $\phi : [-1, 1] \rightarrow [-\infty, \infty]$ une fonction croissante continue, telle que $\phi(1) = \infty$ et $\phi(-1) = -\infty$, concave sur $(-1, 0)$ et convexe sur $(0, 1)$, et soit $\tilde{\phi}(u) := \phi(u) - \phi(-u)$.

$\Rightarrow F(u, v) := \phi(\tilde{\phi}^{-1}(u)\tilde{\phi}^{-1}(v))$ est une copule de Lévy.

Exemple: $\phi(x) = \eta(-\log |x|)^{-1/\theta} 1_{x \geq 0} - (1 - \eta)(-\log |x|)^{-1/\theta} 1_{x < 0}$

$\Rightarrow F(u, v) = (|u|^{-\theta} + |v|^{-\theta})^{-1/\theta} (\eta 1_{uv \geq 0} - (1 - \eta) 1_{uv < 0})$.

$\theta \rightarrow \infty, \eta = 1 \Rightarrow$ dépendance positive complète

$\theta \rightarrow \infty, \eta = 0 \Rightarrow$ dépendance négative complète

$\theta \rightarrow 0, \forall \eta \Rightarrow$ indépendance

Exemple: un modèle variance gamma en 2d

Variance gamma (Madan, Milne (1991)):

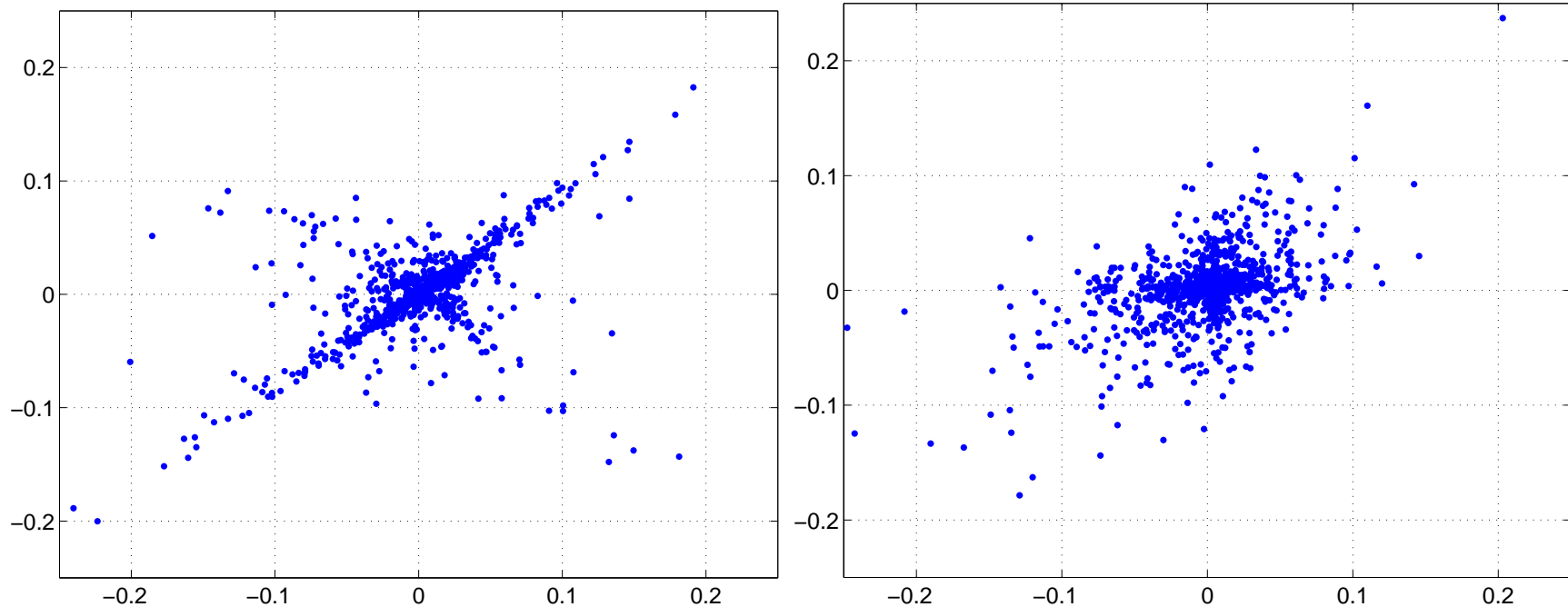
$$\sigma = 0, \quad \nu(x) = \frac{ce^{-\lambda+x}}{x} 1_{x>0} + \frac{ce^{-\lambda-|x|}}{|x|} 1_{x<0}.$$

Le modèle:

$$\begin{cases} S_t^1 = \exp(rt + X_t); & X = VG(c^1, \lambda_+^1, \lambda_-^1) \\ S_t^2 = \exp(rt + Y_t); & Y = VG(c^2, \lambda_+^2, \lambda_-^2) \end{cases}$$

La dépendance entre X et Y est donnée par la copule de Lévy F avec paramètres θ et η .

Exemple: un modèle variance gamma en 2d



Rendements hebdomadaires dans un modèle variance gamma en 2d avec une corrélation $\rho = 50\%$. Gauche: $\eta = 0.75$ et $\theta = 10$. Droite: $\eta = 0.99$ et $\theta = 0.61$.

Valorisation d'options multi-sousjacent

- Les options sont valorisées par Monte Carlo, en utilisant les prix des Européennes comme variables de contrôle:

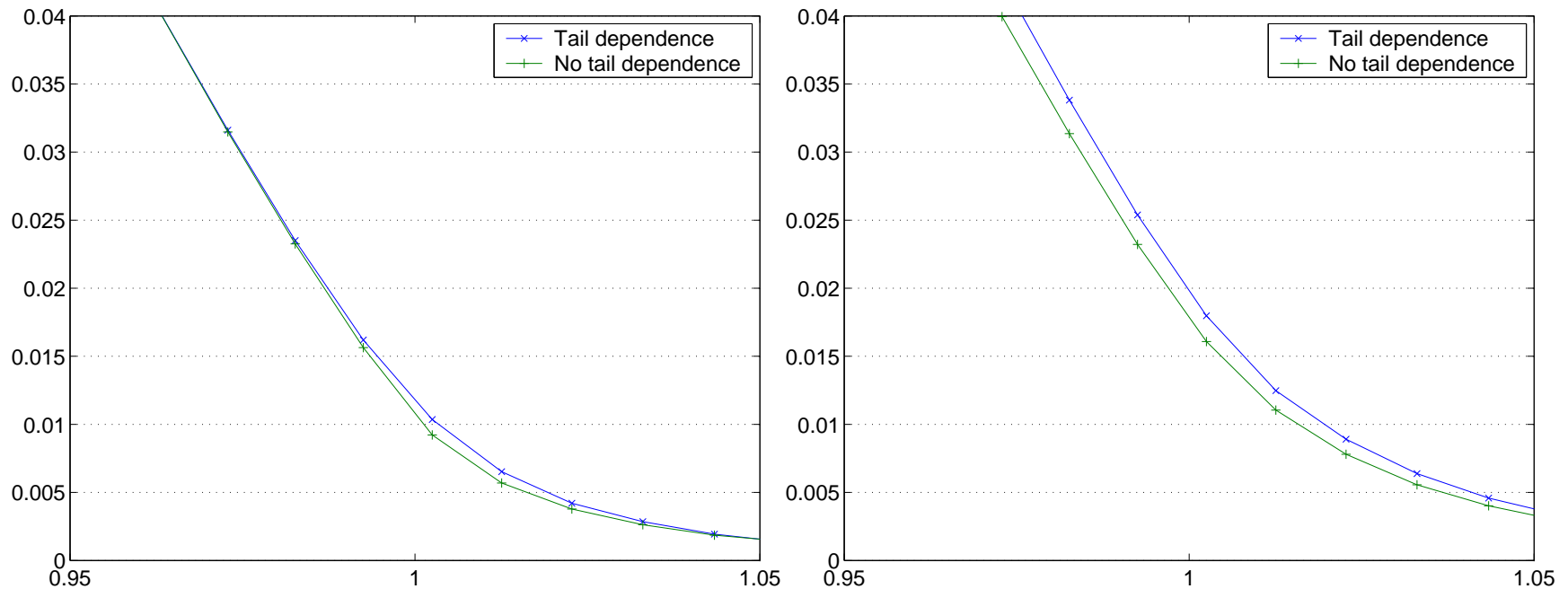
Option “best-of”:

$$H_T = \left(N \max \left(\frac{S_T^1}{S_0^1}, \frac{S_T^2}{S_0^2} \right) - K \right)^+ .$$

Option sur moyenne pondérée:

$$H_T = \left(\sum_{i=1}^2 w_i S_T^i - K \right)^+ \quad \text{avec} \quad w_{1,2} \geq 0 \quad \text{and} \quad w_1 + w_2 = 1 .$$

Valorisation d'options multi-sousjacent



Prix des options sur moyenne pondérée (gauche) et des options best-of (droite): avec une corrélation donnée, le type de dépendance peut modifier le prix d'une option de 10%.

Conclusions II

- Une méthode générale pour décrire la dépendance entre les composantes d'un processus de Lévy et pour construire des modèles multivariés avec sauts.
- Contrairement aux copules traditionnelles, possibilité de travailler avec plusieurs échelles de temps.
- Méthodes de simulation de processus de Lévy multidimensionnels à partir de leur copules de Lévy

Perspectives II

- Nouvelles applications financières, e.g., en risque de crédit.
- Estimation de modèles fondés sur les copules de Lévy, e.g., par la méthode de moments.

Remerciements

- Merci à tous ceux qui m'ont aidé dans ce travail.
- Merci à tous ceux qui m'ont écouté.