Autour du problème de la couronne

Jessica Hergoualch

N°d'ordre : 2873

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par **Jessica HERGOUALCH**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : **Mathématiques pures**

****

AUTOUR DU PROBLÈME DE LA COURONNE

****

Soutenue le : 25 Novembre 2004

Après avis de Messieurs :

Mats ANDERSSON	Professeur, Université de Göteborg	**Rapporteurs**
Pascal THOMAS	Professeur, Université Toulouse 3	

Devant la commission d'examen formée de :

Christine LAURENT	Professeur, Université Grenoble 1	**Présidente**
Eric AMAR	Professeur, Université Bordeaux 1	**Examinateurs**
Mats ANDERSSON	Professeur, Université de Göteborg	
Philippe CHARPENTIER	Professeur, Université Bordeaux 1	
Chantal MENINI	Matre de conférences, Université Bordeaux 1	
Pascal THOMAS	Professeur, Université Toulouse 3	
Yves DUPAIN	Professeur, Université Bordeaux 1	**Invité**

- 2004 -

Autour du problème de la couronne.

Jessica Hergoualch
Thèse sous la direction de Eric Amar

25 novembre 2004

Remerciements

Mes premiers remerciements sont, bien entendu, destinés à Eric Amar qui a encadré mon travail pendant trois ans, et m'a fait profiter de son expérience et de ses connaissances mathématiques. Il a su me proposer une sujet de recherche passionnant, permettant d'aborder des mathématiques variées, et a toujours été disponible et à l'écoute de mes questions.

J'aimerais aussi remercier Mats Andersson, qui a accepté de lire cette thèse rédigée dans une langue qui ne lui est pas familière, et a pris l'avion pour venir de si loin assister à la soutenance. J'ai beaucoup apprécié les échanges que nous avons pu avoir lors de ses deux séjours à Bordeaux, et je souhaite que cette relation puisse se poursuivre.

Je voudrais aussi remercier Pascal Thomas, rapporteur de ma thèse, qui, par sa lecture attentive et ses remarques nombreuses et pertinentes, m'a permis d'améliorer ce manuscrit et d'éclaircir certains points.

Je suis reconnaissante à Christine Laurent d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse, et de s'être déplacée pour venir assister à la soutenance.

Je voudrais aussi remercier Philippe Charpentier, Yves Dupain et Chantal Menini d'avoir bien voulu faire partie de ce jury, et de s'être intéressés à mes travaux. J'aimerais ici ajouter que j'ai apprécié les groupes de travail du jeudi matin, et je remercie tous ceux qui l'animent.

Je n'oublie pas toutes les personnes, tant chercheurs confirmés que thésards, que j'ai eu l'occasion de rencontrer lors des différentes Journées du Sud et écoles auxquelles j'ai pu participer ces dernières années. J'ai beaucoup apprécié ces jounées, qui m'ont permis de connaître des sujets proches du mien, de rencontrer des gens intéressants, et ont à chaque fois accru ma motivation et mon goût pour l'analyse complexe.

Enfin, une pensée toute particulière pour Laurent, qui a su me soutenir durant ces trois années, et a été à mes côtés dans les moments de doute et de découragement. Je le remercie aussi pour le soutien logistique qu'il m'a apporté durant ces derniers mois.

Résumé

On s'intéresse dans un premier temps à un problème de division dans les espaces de Hardy de la boule $\mathbb{B}$ de $\mathbb{C}^n$. Il s'agit, étant données m fonctions $g_1, ..., g_m$ holomorphes et bornées dans $\mathbb{B}$, et une fonction f holomorphe dans $\mathbb{B}$, de donner une condition suffisante, plus faible que l'hypothèse classique de la couronne, pour qu'il existe m fonctions $f_1, ..., f_m$ dans un espace de Hardy de $\mathbb{B}$ vérifiant $f_1 g_1 + ... + f_m g_m = f$. La démonstration repose sur l'utilisation du complexe de Koszul, et la résolution du $\overline{\partial}$ avec de bonnes estimations. La principale nouvelle difficulté, par rapports aux travaux antérieurs, provient du fait que les fonctions $g_1, ..., g_m$ peuvent s'annuler simultanément.
Dans un deuxième temps on s'intéresse au problème de la couronne dans les espaces de Hardy du bidisque muni de son bord topologique. On donne un résultat de résolution du $\overline{\partial}$ dans le bidisque avec estimations dans $L^p(\partial\mathbb{D}^2)$, quand les donnnées vérifient des hypothèses de type Carleson.
Enfin on termine avec un résultat permettant de déduire d'un théorème de la couronne dans un espace de Hardy d'un domaine de $\mathbb{C}^n$, un théorème de la couronne à valeurs dans des espaces vectoriels de dimension finie. Ceci nous permet d'obtenir un théorème de la couronne opérateur dans les espaces de Hardy de la boule de $\mathbb{C}^n$ et du polydisque muni de son bord distingué.

Mots-clés : Problème de la couronne, espaces de Hardy, mesures de Carleson, fonction maximale, résolution du $\overline{\partial}$.

Abstract

In a first part, we are interested in a problem of division in Hardy spaces of the unit ball $\mathbb{B}$ of $\mathbb{C}^n$. Given m functions $g_1, ..., g_m$ holomorphic and bounded in $\mathbb{B}$, and a holomorphic function f, we give a sufficient condition, weaker than the classical corona hypothesis, so that there exist m functions $f_1, ..., f_m$ in a Hardy space of $\mathbb{B}$ such that $f_1 g_1 + ... + f_m g_m = f$. The proof is based on the Koszul complex method, and the resolution of $\overline{\partial}$-equations with good estimates. The main new difficulty, with respect to previous works, comes from the fact that the functions $g_1, ..., g_m$ may have common zeros.
In a second part we are interested in the corona problem in the Hardy spaces of the bidisc equipped with its topological boundary. We give a result about the resolution of a $\overline{\partial}$-equation in the bidisc with estimates in $L^p(\partial\mathbb{D}^2)$, when the data verify Carleson-type hypotheses.
Finally, we end with a result allowing to deduce a corona theorem with values in vector spaces of finite dimension from a classical corona theorem in a Hardy space of a domain in $\mathbb{C}^n$. As a consequence we obtain an operator corona theorem in Hardy spaces of the ball of $\mathbb{C}^n$ and of the polydisc equipped with its distinguished boundary.

Key-words : Corona problem, Hardy spaces, Carleson measures, maximal function, resolution of $\overline{\partial}$-equation.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction.

En 1962, L. Carleson a montré dans [10] que si $g_1, ..., g_m$ sont des fonctions holomorphes et bornées dans le disque de $\mathbb{C}$, alors on a équivalence entre les deux propriétés suivantes :

$$\exists \delta > 0 / \ \ |g|^2 = |g_1|^2 + ... + |g_2|^2 \geq \delta^2$$

$$\exists (f_1, ..., f_m) \in H^\infty(\mathbb{D})^m / \ f_1 g_1 + ... + f_m g_m = 1 \tag{0.1}$$

Le problème analogue pour le cas plus général des domaines strictement pseudoconvexes de $\mathbb{C}^n$ est toujours ouvert. Cependant des versions plus faibles, dans les espaces de Hardy de certains domaines comme la boule et le polydisque sont connues.

Par exemple, dans la boule de $\mathbb{C}^n$ (et plus généralement dans les domaines strictement pseudoconvexes) E. Amar dans le cas de deux générateurs (voir [1]), et M. Andersson et H. Carlsson dans le cas de plusieurs générateurs (voir [6]), ont montré que si $g_1, ..., g_m$ sont des fonctions holomorphes et bornées dans $\mathbb{B}$ qui vérifient

$$\exists \delta > 0 / \ \ |g| = \left(|g_1|^2 + ... + |g_m|^2 \right)^{1/2} \geq \delta \tag{0.2}$$

alors pour toute fonction f dans l'espace de Hardy $H^p(\mathbb{B})$, où $p \in [1, +\infty[$, il existe des fonctions $f_1, ..., f_m$ dans ce même espace $H^p(\mathbb{B})$ telles que

$$f_1 g_1 + ... + f_m g_m = f. \tag{0.3}$$

Cependant, quand on cherche à résoudre l'équation (0.3) connaissant les fonctions holomorphes $g_1, ..., g_m$ et f, la condition (0.2) n'est plus nécessaire. On peut donc chercher une condition suffisante plus faible pour résoudre cette équation. Je m'intéresse dans les chapitres 2 et 3 à ce problème de division dans les espaces de Hardy de la boule.

Pour pouvoir résoudre l'équation (0.3) avec des fonctions f_i dans un espace de Hardy, il faut d'abord savoir la résoudre avec des fonctions simplement holomorphes. Pour cela il faut au moins que la fonction f s'annule sur l'ensemble des zéros communs aux fonctions $g_1, ..., g_m$. Plus précisément l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous montre que $\frac{|f|}{|g|}$ doit être localement bornée.

Pour ce qui est des conditions suffisantes pour résoudre (0.3) sans estimations, dans le cas de polynômes, le théorème des zéros de Hilbert dit que si f s'annule sur l'ensemble des zéros communs à $g_1, ..., g_m$ alors une certaine puissance de f est dans l'idéal engendré par $g_1, ..., g_m$. Le théorème de Briançon-Skoda (démontré dans [9]) précise cette puissance dans le cas de fonctions holomorphes au voisinage d'un point :

Théorème 1.0.1 *Soient $g_1, ..., g_m$ et f des fonctions dans l'anneau $\mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}$ des séries convergentes à n variables. Soit $q = \min(n, m)$. Si il existe une constante positive C telle que*

$$|f| \leq C\,|g|$$

alors f^q appartient à l'idéal engendré par les fonctions $g_1, ..., g_m$, c'est-à-dire

$$\exists (f_1, ... f_m) \in \mathbb{C}\{z_1, ..., z_n\}^m /\ f_1 g_1 + ... + f_m g_m = f^q.$$

De plus l'exposant q donné dans ce théorème est optimal.

H. Skoda a démontré en 1972 un théorème (dans [20]), basé sur des estimations L^2 de Hörmander, qui entraîne le résultat suivant, donnant une condition suffisante pour la résolution de (0.3) sans estimations.

Théorème 1.0.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$, supposé de Stein. Soient $g_1, ..., g_m$ et f des fonctions holomorphes dans Ω. On note $k = \min(n, m-1)$.*
Si

$$\frac{|f|}{|g|^{k+1}} \in L^\infty_{loc}(\Omega)$$

alors

$$\exists (f_1, ..., f_m) \in Hol(\Omega)^m /\ f_1 g_1 + ... + f_m g_m = f$$

Ainsi, si f est une fonction qui s'annule suffisamment sur l'ensemble des zéros communs aux fonctions g_i, alors elle appartient à l'idéal engendré par ces fonctions. Si on demande en plus que les fonctions solutions f_i soient dans un espace de Hardy, il faut une condition plus forte.

Tout d'abord, l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous montre que si l'équation (0.3) est résolue quand les fonctions $g_1, ..., g_m$ sont dans $H^\infty(\mathbb{B})$ avec des solutions $f_1, ..., f_m$ dans l'espace de Hardy $H^p(\mathbb{B})$, alors la fonction maximale de $\frac{|f|}{|g|}$, notée $M\left(\frac{|f|}{|g|}\right)$, est dans $L^p(\partial\mathbb{B})$.

Pour ce qui est des conditions suffisantes, U. Cegrell a démontré dans [11] le résultat suivant dans le cas d'une variable :

Théorème 1.0.3 *Soient g_1, g_2 et f des fonctions dans $H^\infty(\mathbb{D})$. Si elles vérifient*

$$\exists \epsilon > 0 / \ \frac{|f|}{|g|^{2+\epsilon}} \in L^\infty(\mathbb{D})$$

alors

$$\exists (f_1, f_2) \in H^\infty(\mathbb{D})^2 / \ f_1 g_1 + f_2 g_2 = f$$

A la question posée par T. Wolff, qui était de savoir si, dans cette situation, la même condition avec $\epsilon = 0$ est encore suffisante, S. Treil a répondu par la négative dans [24].

Dans la boule de $\mathbb{C}^n$, dans le cas de deux générateurs et d'une fonction $f = 1$, E. Amar et J. Bruna ont donné dans [3] une condition suffisante sur les fonctions $g_1, g_2 \in H^\infty(\mathbb{B})$ pour qu'il existe deux fonctions f_1 et f_2 dans $H^p(\mathbb{B})$ telles que $f_1 g_1 + f_2 g_2 = 1$. J'ai étendu ce résultat au cas où f est quelconque et où il y a plus de deux générateurs de la façon suivante, répondant ainsi à une question de M. Putinar et S. Sandberg :

Théorème 1.0.4 *Soient n un entier supérieur ou égal à 2, $\mathbb{B}$ la boule de $\mathbb{C}^n$, m un entier supérieur ou égal à 2 et $p \in [1, +\infty[$. On note $r = \min(n, \ m)$. Soient $g_1, ..., g_m$ et f des fonctions holomorphes dans $\mathbb{B}$. On suppose que*

$$\forall j \in \mathbb{N} / \ 1 \leq j \leq m, \ \ g_j \in H^\infty(\mathbb{B})$$

et

$$\exists \epsilon > 0 / \ M \left(\frac{f}{|g|^{r+1}} \left| log \, |g| \right|^{\frac{(2+\epsilon)r}{2}} \right) \in L^p(\partial \mathbb{B}) \tag{0.4}$$

Alors

$$\exists (f_1, ..., f_m) \in H^p(\mathbb{B})^m / \ f_1 g_1 + ... + f_m g_m = f$$

La démonstration de ce résultat repose sur la méthode du complexe de Koszul. Une des principales difficultés vient du fait que $|g|$ peut s'annuler, et que les formes qu'il faut alors résoudre ne sont pas régulières, ni même définies en tant que produits de courants. Pour contourner cet obstacle je régularise le problème en introduisant une fonction $g_{m+1} = \epsilon$; il faut alors résoudre le nouveau problème avec des estimations indépendantes de ϵ. De plus, pour obtenir certaines d'entre elles, il est nécessaire d'estimer ∂f en utilisant uniquement l'hypothèse (0.4) (cette difficulté disparait bien sûr quand $f = 1$). Cette méthode de régularisation fait 'perdre' une puissance au dénominateur quand $r = m$. Pour se rapprocher au maximum du résultat 1.0.2 de Skoda, il faudrait améliorer le résultat en obtenant la même chose avec $r = \min(n, m-1)$.

Dans le cas où $m = 2$ et $n = 2$, j'ai cependant obtenu une meilleure estimation en régularisant la forme à résoudre par convolution, ce qui est possible dans ce cas car le complexe de Koszul s'arrête au rang 1 et ne fait donc pas apparaître de produits de courants. On obtient en fait

Théorème 1.0.5 *Soit $1 \leq p < \infty$. Soient g_1 et g_2 deux fonctions dans $H^\infty(\mathbb{B})$ et f une fonction holomorphe dans $\mathbb{B}$. On suppose que*

$$\exists \epsilon > 0/ \ M\left(\frac{f\,|log\,|g||^{2+\epsilon}}{|g|^2}\right) \in L^p(\partial\mathbb{B})$$

Alors il existe f_1 et f_2 *dans $H^p(\mathbb{B})$ telles que $f_1g_1 + f_2g_2 = f$ dans $\mathbb{B}$.*

Pour ce qui est du polydisque, K. C. Lin a montré dans [18], en 1994, que si g_1 et g_2 sont des fonctions holomorphes dans le polydisque $\mathbb{D}^n$ qui vérifient la condition (0.2) alors, pour toute fonction f dans l'espace de Hardy usuel $H^p(\mathbb{T}^2)$, il existe des fonctions f_1 et f_2 dans cet espace qui vérifient

$$f_1g_1 + f_2g_2 = f \tag{0.5}$$

J'ai pour ma part essayé de démontrer le même résultat pour l'espace de Hardy du bidisque muni de son 'vrai' bord, $H^p(\mathbb{D}^2)$, c'est-à-dire l'espace des fonctions holomorphes dans $\mathbb{D}^2$ muni de la norme :

$$\|f\|_{H^p}^p = \operatorname*{Sup}_{0<r<1} \int_{\partial\mathbb{D}^2} |f(rz)|^2 \, d\sigma(z)$$

Sans aboutir, j'ai cependant démontré, dans le chapitre 4, un théorème sur la résolution du $\overline{\partial}$ dans le bidisque avec estimations dans $L^p(\partial\mathbb{D}^2)$ quand la donnée est le produit d'une fonction de $H^p(\mathbb{D}^2)$ par une forme vérifiant des hypothèses de type mesure de Carleson.
Ici $\mathbb{B}$ désigne la boule unité de $\mathbb{C}^2$ et $V^1(\mathbb{D})$ et $V^1(\mathbb{B})$ les espaces de mesures de Carleson dans $\mathbb{D}$ et $\mathbb{B}$.

Théorème 1.0.6 *Soit $\omega = \omega_1 d\overline{z}_1 + \omega_2 d\overline{z}_2$ une $(0,1)$-forme de classe C^∞ dans $\overline{\mathbb{D}}^2$ telle que $\overline{\partial}\omega = 0$. On suppose qu'il existe une constante positive C_1 telle que*
a) $\forall z_2 \in \mathbb{D}, \ \omega_1(.,z_2) \in V^1(\mathbb{D})$ *de norme majorée par C_1.*

b) $\exists \epsilon > 0/ \ \forall z_2 \in \mathbb{D}, \ \dfrac{\left|\omega_1(z_1,z_2)d\overline{z}_1 \wedge \overline{\partial}\rho(z_1,z_3)\right|^2}{(-\rho(z_1,z_3))^\epsilon} \in V^1(\mathbb{B})$ *de norme majorée par C_1.*

c) $\forall z_1 \in \mathbb{D}, \ \omega_2(z_1,.) \in V^1(\mathbb{D})$ *de norme majorée par C_1.*

d) $\exists \epsilon > 0/ \ \forall z_1 \in \mathbb{D}, \ \dfrac{\left|\omega_2(z_1,z_2)d\overline{z}_1 \wedge \overline{\partial}\rho(z_2,z_3)\right|^2}{(-\rho(z_2,z_3))^\epsilon} \in V^1(\mathbb{B})$ *de norme majorée par C_1.*

Alors il existe une constante C ne dépendant que de C_1 et de ϵ telle que pour toute fonction f dans l'espace $H^p(\mathbb{D}^2) \cap C^\infty(\overline{\mathbb{D}}^2)$ il existe une solution u de l'équation

$$\overline{\partial}u = f\omega$$

vérifiant

$$\|u\|_{L^p(\partial\mathbb{D}^2)} \leq C \ \ \|f\|_{H^p}.$$

La démonstration de ce théorème utilise fortement la structure produit du bidisque, et fait intervenir des noyaux intégraux en une variable.

Enfin, dans le chapitre 5, je m'intéresse à une version opérateur du problème de la couronne. En effet, dans le problème de la couronne introduit ci-dessus, on peut considérer le m-uplet de fonctions holomorphes $(g_1, ..., g_m)$ comme une fonction à valeurs dans l'espace des applications linéaires de $\mathbb{C}^m$ dans $\mathbb{C}$, noté $L(\mathbb{C}^m, \mathbb{C})$. Ainsi résoudre l'équation (0.3) revient à se donner

$$G = (g_1, ..., g_m) \in H^\infty(\Omega, L(\mathbb{C}^m, \mathbb{C})) \quad \text{et} \quad f \in H^p(\Omega)$$

et à trouver $F = (f_1, ..., f_m) \in H^p(\Omega, \mathbb{C}^m)$ tel que

$$GF = f \tag{0.6}$$

On peut généraliser ce problème en considérant $G \in H^\infty(\Omega, L(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n))$ et $k \in H^p(\Omega, \mathbb{C}^n)$ et en cherchant $F \in H^p(\Omega, \mathbb{C}^m)$ tel que

$$GF = k \tag{0.7}$$

J'ai démontré dans ce chapitre que si on sait résoudre l'équation (0.6) pour tout entier positif m, alors on peut résoudre l'équation (0.7). J'en déduis des théorèmes de la couronne opérateur pour les espaces de Hardy de la boule et du polydisque.

Chapitre 2

Division dans $H^p(\mathbb{B})$.

2.1 Définitions, résultat.

Dans ce chapitre on va démontrer le théorème de division dans les espaces de Hardy de la boule (théorème 1.0.4). On commence par préciser les définitions et notations qui interviennent dans son énoncé.
Soit $n \geq 2$. On note $\mathbb{B}$ la boule unité de $\mathbb{C}^n$, $\partial\mathbb{B}$ son bord et $\rho(z) = |z|^2 - 1$ sa fonction définissante.
On note $d\lambda$ la mesure de Lebesgue de $\mathbb{C}^n$ et $d\sigma$ la mesure de Lebesgue de $\partial\mathbb{B}$.
De façon générale, si $g = (g_1, ..., g_m)$, on note

$$|g|^2 = \sum_{i=1}^{m} |g_i|^2$$

Pour énoncer le théorème 1.0.4 dans une forme un peu plus générale on introduit la fonction μ, comme dans [3], qui jouera le rôle de la fonction $\dfrac{1}{|log\ \ |g||^{2+\epsilon}}$.
Soit $d\mu_0$ une mesure positive dans $[0,1[$ telle que

$$\int_0^1 \frac{d\mu_0(s)}{s^2} < +\infty$$

On note alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \mu(x) = \int_0^1 x^{2s} d\mu_0(s)$$

Par exemple, pour $\epsilon > 0$ et pour $d\mu_0(s) = s^{1+\epsilon}ds$, on obtient $\mu(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{|log\ x|^{2+\epsilon}}$.

Pour tout point ζ du bord de la boule on définit, comme dans [19], le domaine admissible de sommet ζ par

$$\Gamma_\zeta = \{b \in \mathbb{B} /\ \ \left|1 - \overline{b}\zeta\right| < 2(1 - |b|^2)\}$$

On définit alors pour $h \in L^1(\mathbb{B})$ la fonction maximale de h par

$$\forall \zeta \in \partial\mathbb{B},\ \ Mh(\zeta) = \operatorname*{Sup}_{z\in\Gamma_\zeta} |h(z)|$$

Ceci nous permet de définir, pour $p \in [1, +\infty]$, les espaces suivants :

$$M^p(\mathbb{B}) = \{h \in L^1(\mathbb{B})/Mh \in L^p(\partial\mathbb{B})\}$$

qu'on munit de la norme

$$\|h\|_{M^p} = \|Mh\|_{L^p(\partial\mathbb{B})}$$

On note aussi $Hol(\mathbb{B})$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans $\mathbb{B}$ et $H^\infty(\mathbb{B})$ l'espace des fonctions holomorphes et bornées dans $\mathbb{B}$, muni de la norme $\|h\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{z\in\mathbb{B}} |h(z)|$; pour $1 \leq p < \infty$ on note $H^p(\mathbb{B})$ l'espace de Hardy défini par

$$H^p(\mathbb{B}) = \{h \in Hol(\mathbb{B})/\ \|h\|_{H^p} < \infty\}$$

où

$$\|h\|^p_{H^p} = \operatorname*{Sup}_{0<r<1} \int_{\partial\mathbb{B}} |h(r\zeta)|^p\, d\sigma(\zeta)$$

On peut à présent énoncer le théorème 1.0.4, qui donne une condition suffisante pour la division d'une fonction de $H^p(\mathbb{B})$, sous une forme un peu plus générale.

Théorème 2.1.1 *Soient n un entier supérieur ou égal à 2, $\mathbb{B}$ la boule de $\mathbb{C}^n$, m un entier supérieur ou égal à 2 et $p \in [1, +\infty[$. On note $r = \min(n, m)$. Soient $g_1, ..., g_m$ et f des fonctions holomorphes dans $\mathbb{B}$. On suppose que*

$$\forall j \in \mathbb{N}/\ 1 \leq j \leq m,\ \ g_j \in H^\infty(\mathbb{B})$$

et

$$\frac{f}{|g|^{r+1}\, \mu(|g|)^{\frac{r}{2}}} \in M^p(\mathbb{B})$$

Alors

$$\exists (f_1, ..., f_m) \in H^p(\mathbb{B})^m/\ f_1g_1 + ... + f_mg_m = f \tag{1.1}$$

On va dans la suite du chapitre démontrer ce théorème en utilisant la méthode du complexe de Koszul après avoir régularisé le problème.
Désormais on garde les notations du théorème : $g_1, ..., g_m$ sont des fonctions dans $H^\infty(\mathbb{B})$ et f est une fonction holomorphe dans $\mathbb{B}$.

2.2 Régularisation ; complexe de Koszul.

Si on pose, pour tout entier j compris entre 1 et m,

$$f_j^0 = \frac{\overline{g}_j}{|g|^2} f \tag{2.1}$$

on obtient une solution à l'équation (1.1). Mais ces fonctions ne sont pas holomorphes, ni même régulières, car $|g|$ peut s'annuler. Ce sont cependant des distributions, car $|g|^2$ est réelle analytique, et on peut appliquer le théorème de Lojasiewicz.
Pour corriger le défaut d'holomorphie des fonctions f_j^0 il suffit de trouver des fonctions f_j^1 telles que

$$\operatorname*{Sup}_{0<r<1} \int_{\partial \mathbb{B}} \left| f_j^1(r\zeta) \right|^p d\sigma(\zeta) < +\infty$$

$$\overline{\partial} f_j^1 = \overline{\partial} f_j^0 \tag{2.2}$$

et

$$\sum_{j=1}^{m} f_j^1 g_j = 0 \tag{2.3}$$

Les fonctions $f_j^0 - f_j^1$ résoudront alors l'équation (1.1) et seront nécessairement régulières car holomorphes.
Pour faire cela on va utiliser le complexe de Koszul, introduit dans ce cadre par Hörmander. Ce complexe fait intervenir des produits des formes $\overline{\partial}(f_j^0)$, qui ne sont pas bien définis en tant que produits de distributions. Pour contourner cette difficulté on va régulariser le problème en introduisant, pour $\epsilon > 0$, la fonction $g_{m+1} = \epsilon$, qui ne s'annule pas, puis on fera tendre ϵ vers 0.
On va en fait démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.2.1 *Soient $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ supérieurs ou égaux à 2, $p \in [1, +\infty[$ et $\mathbb{B}$ la boule de $\mathbb{C}^n$. On note $r = min(m, n)$. Soit K un réel positif. Il existe une constante positive C telle que pour toutes fonctions $g_1, ..., g_m, f \in Hol(\mathbb{B}) \cap C^\infty(\overline{\mathbb{B}})$ vérifiant*

$$\left\| \frac{f}{|g|^{r+1} \mu(|g|)^{\frac{r}{2}}} \right\|_{M^p} \leq K \tag{2.4}$$

et

$$\|g\|_\infty < 1$$

on ait, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\exists (f_1, ..., f_m, f_{m+1}) \in H^p(\mathbb{B})^{m+1} / \quad f_1 g_1 + ... + f_m g_m + f_{m+1}\epsilon = f$$

$$\text{et} \quad \forall 1 \leq j \leq m+1,\ \|f_j\|_{H^p} \leq C$$

On note que l'estimation obtenue est uniforme en ϵ. Plus exactement, la constante C ne dépend que de n, K, p, et m. Désormais toute telle constante sera notée $C(K)$.

On démontrera au paragraphe 2.10, en faisant tendre ϵ vers 0, que ce théorème entraîne le théorème 2.1.1.

On va à présent s'attacher à prouver le théorème 2.2.1 et on se place dans les hypothèses de celui-ci. On note $g_{m+1} = \epsilon$ et $|g^\epsilon|^2 = |g|^2 + \epsilon^2$.
Nous reprenons ici les notations de M. Andersson et H. Carlsson dans [6] pour introduire le complexe de Koszul.
Soit Λ^* l'algèbre extérieure des formes linéaires alternées sur $\mathbb{C}^{m+1}$ et soit $\{e_1, ..., e_{m+1}\}$ la base duale de la base canonique de $\mathbb{C}^{m+1}$. Le produit extérieur dans Λ^* sera noté $\cap$, pour ne pas le confondre avec le produit extérieur des formes différentielles, noté $\wedge$.

On va travailler dans les espaces $C^\infty_{(r,s)}(\overline{\mathbb{B}}, \Lambda^l)$ des (r,s)-formes de classe C^∞ dans $\overline{\mathbb{B}}$ à valeurs dans Λ^l. Si $f \in C^\infty_{(r,s)}(\overline{\mathbb{B}}, \Lambda^l)$, f s'écrit $f = \sum_{|I|=l}{}' f_I\ e_I$ où la somme $\sum_{|I|=l}{}'$ s'effectue sur les multi-indices ordonnés $I = (i_1, ..., i_l)$, $f_I \in C^\infty_{(r,s)}(\overline{\mathbb{B}})$, et $e_I = e_{i_1} \cap ... \cap e_{i_l}$.

On remarque qu'on peut notamment avoir $f \cap f \neq 0$. Par exemple si $f = f_1 e_1 + f_2 e_2$, où f_1 et f_2 sont des $(0,1)$-formes on a $f \cap f = 2(f_1 \wedge f_2)\ e_1 \cap e_2$. On note $f^{\cap k} = f \cap ... \cap f$ (k fois).
Si $f = \sum_{|I|=l}{}' f_I\ e_I$ on note, pour tout $z \in \mathbb{B}$, $|f(z)|^2 = \sum_{|I|=l}{}' |f_I(z)|^2$.
On définit alors, sur ces espaces, d'une part l'opérateur $\overline{\partial}$ prolongeant naturellement celui sur les formes différentielles, et d'autre part le produit intérieur par $(g_1, ..., g_{m+1})$.

Définition 2.2.2
Soit

$$\overline{\partial} : C^\infty_{(r,s)}(\Lambda^l) \longrightarrow C^\infty_{(r,s+1)}(\Lambda^l)$$

défini par

$$\overline{\partial}\Big(\sum_{|I|=l}{}' f_I\ e_I\Big) = \sum_{|I|=l}{}' \overline{\partial} f_I\ e_I$$

Soit

$$\delta_g : C^\infty_{(r,s)}(\Lambda^{l+1}) \longrightarrow C^\infty_{(r,s)}(\Lambda^l)$$

le produit intérieur par le vecteur X_g de coordonées $(g_1, ..., g_{m+1})$, c'est-à-dire défini par

$$\forall (X_1, ..., X_l) \in \left(\mathbb{C}^{m+1}\right)^l,\ \delta_g f(X_1, ..., X_l) = f(X_g, X_1, ..., X_l)$$

Dans les coordonnées $(e_1, ..., e_{m+1})$ l'opérateur δ_g s'exprime de la façon suivante :

Lemme 2.2.3 *Soient $l \in \mathbb{N}$ et $h \in C^{\infty}_{(r,s)}(\Lambda^{l+1})$. Si $h = \sum_{|I| = l+1}{}' h_I \ e_I$ alors*

$$\delta_g h = (-1)^l \sum_{|J|=l}{}' \left(\sum_{j=1}^{m+1} g_j h_{Jj} \right) \ e_J$$

Démonstration :
On note $\{e_1^*, ..., e_{m+1}^*\}$ la base canonique de $\mathbb{C}^{m+1}$. Si $\delta_g h = \sum_{|J| = l}{}' \alpha_J \ e_J$ alors, pour tout multi-indice ordonné $J = (j_1, ..., j_l)$, on a

$$(\delta_g h)(e_{j_1}^*, ..., e_{j_l}^*) = \sum_{|J| = l}{}' \alpha_J \ e_J(e_{j_1}^*, ..., e_{j_l}^*) = \alpha_{j_1,...,j_l}$$

Or par définition

$$(\delta_g h)(e_{j_1}^*, ..., e_{j_l}^*) = h(\sum_{j=1}^{m+1} g_j \ e_j^*, e_{j_1}^*, ..., e_{j_l}^*)$$

On en déduit que

$$\alpha_{j_1,...,j_l} = \sum_{|I| = l+1}{}' h_I \ e_I \left(\sum_{j=1}^{m+1} g_j \ e_j^*, e_{j_1}^*, ..., e_{j_l}^* \right) = \sum_{|I| = l+1}{}' h_I \sum_{j=1}^{m+1} g_j \ e_I(e_j^*, e_{j_1}^*, ..., e_{j_l}^*)$$

Or $e_I(e_j^*, e_{j_1}^*, ..., e_{j_l}^*) \neq 0$ si et seulement si $I = J \cup \{j\}$ et dans ce cas $e_I(e_j^*, e_{j_1}^*, ..., e_{j_l}^*)$ est égal à la signature de la permutation qui envoie I sur (j, J). Comme $h_{Jj} = 0$ si $j \in J$, on en déduit que

$$\alpha_{j_1,...,j_l} = (-1)^l \sum_{j=1}^{m+1} h_{Jj} g_j$$

ce qui achève la démonstration du lemme. ■

On obtient alors un double complexe :

Lemme 2.2.4 *Avec les notations précédentes on a :*
a) $\delta_g \circ \delta_g = 0$

b) $\overline{\partial} \circ \overline{\partial} = 0$

c) $\overline{\partial} \circ \delta_g = \delta_g \circ \overline{\partial}$

Démonstration :
a) Pour tout h dans $C^{\infty}_{(r,s)}(\mathbb{B}, \Lambda^{l+2})$, pour tous champs de vecteurs $X_1, ..., X_l$, on a par définition

$$\delta_g \circ \delta_g h(X_1, ..., X_l) = h(X_g, X_g, X_1, ..., X_l) = 0$$

car h est alternée.
b) Immédiat.
c) Pour tout h dans $C^{\infty}_{(r,s)}(\Lambda^{l+1})$ qui s'écrit $\displaystyle\sum_{|I|=l+1}{}' h_I\ e_I$, on a, d'après le lemme 2.2.3,

$$\overline{\partial}\circ\delta_g h = (-1)^l \sum_{|J|=l}{}' \overline{\partial}\Big(\sum_{j=1}^{m+1} h_{Jj}g_j\Big)\ e_J = (-1)^l \sum_{|J|=l}{}' \sum_{j=1}^{m+1}\overline{\partial}h_{Jj}g_j\ e_J = \delta_g\circ\overline{\partial}h$$

car $\overline{\partial}g_j = 0,\ \forall j\in\{1,...,m+1\}$. ∎

Avec ces nouvelles notations, trouver des fonctions $F_1,...,F_{m+1}\in H^p(\mathbb{B})$ telles que $\displaystyle\sum_{i=1}^{m+1}F_ig_i = f$ de normes majorées par $C(K)$ revient à trouver $F = \displaystyle\sum_{i=1}^{m+1}F_i\ e_i \in C^{\infty}_{(0,0)}(\overline{\mathbb{B}},\Lambda^1)$ tel que

$$\delta_g F = \sum_{i=1}^{m+1}F_ig_i = f \quad \text{et} \quad \|F\|_{H^p}\leq C(K)$$

Le lemme suivant montre qu'il suffit en fait de démontrer que

$$\exists F\in C^{\infty}(\overline{\mathbb{B}},\Lambda^1)/\ \delta_gF = f,\ \ \overline{\partial}F = 0\ \ et\ \ \|F\|_{L^p(\partial\mathbb{B})}\leq C(K) \tag{2.5}$$

Lemme 2.2.5 *Si $h\in C^{\infty}(\overline{\mathbb{B}})$ alors*

$$h\in H^p(\mathbb{B}) \iff h_{|\partial\mathbb{B}}\in L^p(\partial\mathbb{B})\ \ et\ h\in Hol(\mathbb{B})$$

De plus, dans ce cas on a

$$\|h\|_{H^p} = \left\|h_{|\partial\mathbb{B}}\right\|_{L^p(\partial\mathbb{B})}$$

On va à présent s'attacher à démontrer (2.5).

2.3 Division sans estimations.

On remarque qu'avec ces notations, en prenant en compte g_{m+1}, la solution non holomorphe (2.1) s'écrit

$$F^0 = \sum_{j=1}^{m+1} f_j^0\ e_j = \gamma\cap f$$

où

$$\gamma = \sum_{j=1}^{m+1} \frac{\overline{g}_j}{|g^\epsilon|^2}\; e_j \tag{3.1}$$

Notons que cette solution F^0 vérifie bien

$$\delta_g(F^0) = f$$

Plus généralement, le produit par γ (qui dépend de ϵ) résoud δ_g au sens suivant :

Lemme 2.3.1 *Pour toute fonction $h \in C^\infty_{(r,s)}(\overline{\mathbb{B}},\ \Lambda^l)$ si $\delta_g h = 0$ alors $\delta_g(\gamma \cap h) = h$.*

Démonstration :
On peut écrire $h = \sum\limits_{|I|=l} {}' h_I\ e_I$. Alors

$$\delta_g h = 0 \Longleftrightarrow \forall J \in \{1, ..., m+1\}^{l-1},\ \sum_{j=1}^{m+1} h_{J,j} g_j = 0 \tag{3.2}$$

On note

$$\gamma = \sum_{j=1}^{m+1} \gamma_j e_j \quad , \quad \gamma \cap h = \sum_{|J|=l+1} H_J e_J \quad , \quad \delta_g(\gamma \cap h) = (-1)^l \sum_{|J|=l} G_J e_J$$

On a par définition, pour $J \in \{1, ..., m+1\}^{l+1}$, avec $J = (J_1, ..., J_{l+1})$,

$$H_J = \sum_{j=1}^{l+1} (-1)^{j+1} \gamma_{J_j} h_{J \setminus J_j}$$

De plus

$$G_L = \sum_{j=1}^{m+1} g_j H_{Lj} = \sum_{j=1}^{m+1} \sum_{i=1}^{l} g_j (-1)^{i+1} \gamma_{L_i} h_{(L\setminus L_i)j} + \sum_{j=1}^{m+1} g_j (-1)^l \gamma_j h_L$$
$$G_L = \sum_{i=1}^{l} (-1)^{i+1} \gamma_{L_i} \sum_{j=1}^{m+1} g_j h_{(L\setminus L_i)j} + (-1)^l h_L \sum_{j=1}^{m+1} g_j \gamma_j$$

En utilisant alors la définition (3.1) de γ et l'hypothèse (3.2) on obtient

$$G_L = (-1)^l h_L \quad \text{i.e.} \quad \delta_g(\gamma \cap h) = h$$

■

Si on se donne alors un opérateur qui résoud le $\overline{\partial}$ dans $\mathbb{B}$, le complexe de Koszul nous permet de résoudre les équations $\delta_g F = f$ et $\overline{\partial} F = 0$ simultanément, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 2.3.2 *Soit A un opérateur résolvant le $\overline{\partial}$, c'est-à-dire*

$$A : C^\infty_{(0,s+1)}(\overline{\mathbb{B}}, \Lambda^l) \longrightarrow C^\infty_{(0,s)}(\overline{\mathbb{B}}, \Lambda^l)$$

tel que $\overline{\partial}(Ah) = h$ *si* $\overline{\partial}h = 0$.
Soit

$$F = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k (\delta_g \circ A)^k (\gamma \cap (\overline{\partial}\gamma)^{\cap k} \cap f) \tag{3.3}$$

Alors $F \in C^{\infty}_{(0,0)}(\overline{\mathbb{B}}, \Lambda^1)$ *et vérifie*

$$\delta_g F = f \qquad \text{et} \qquad \overline{\partial} F = 0$$

On dessine le complexe de Koszul dans $\mathbb{C}^2$.

$$\begin{array}{cccccccc}
\Lambda^3 & & & A(\gamma \cap (\overline{\partial}\gamma)^{\cap 2} \cap f) & \xrightarrow{\overline{\partial}} & \gamma \cap (\overline{\partial}\gamma)^{\cap 2} \cap f & \xrightarrow{\overline{\partial}} & 0 \\
 & & & {\scriptstyle\delta_g}\downarrow & & {\scriptstyle\delta_g}\downarrow & & {\scriptstyle\delta_g}\downarrow \\
\Lambda^2 & A(w_1) & \xrightarrow{\overline{\partial}} & w_1 \left\{ \begin{array}{c} \delta_g \circ A(\gamma \cap (\overline{\partial}\gamma)^{\cap 2} \cap f) \\ \gamma \cap \overline{\partial}\gamma \cap f \end{array} \right. & \xrightarrow{\overline{\partial}} & (\overline{\partial}\gamma)^{\cap 2} \cap f & \xrightarrow{\overline{\partial}} & 0 \\
 & {\scriptstyle\delta_g}\downarrow & & {\scriptstyle\delta_g}\downarrow & & {\scriptstyle\delta_g}\downarrow & & \\
\Lambda^1 & F \left\{ \begin{array}{c} \delta_g \circ A(w_1) \\ \gamma \cap f \end{array} \right. & \xrightarrow{\overline{\partial}} & \overline{\partial}\gamma \cap f & & 0 & & \\
 & {\scriptstyle\delta_g}\downarrow & & {\scriptstyle\delta_g}\downarrow & & & & \\
\Lambda^1 & f & \xrightarrow{\overline{\partial}} & 0 & & & & \\
 & (0,0) & & (0,1) & & (0,2) & & (0,3)
\end{array}$$

Démonstration :
On définit par récurrence

$$\begin{aligned}
w_r &= \gamma \cap (\overline{\partial}\gamma)^{\cap r} \cap f \\
w_l &= \gamma \cap (\overline{\partial}\gamma)^{\cap l} \cap f - \delta_g \circ A(w_{l+1}) \quad \text{si} \quad 0 \le l < r
\end{aligned}$$

On constate alors que, pour tout entier l tel que $0 \le l \le r$,

$$w_l = \sum_{k=l}^{r} (-1)^{k-l} (\delta_g \circ A)^{k-l} (\gamma \cap (\overline{\partial}\gamma)^{\cap k} \cap f)$$

On a notamment $F = w_0$.

Montrons qu'on a, pour tout l,

$$\delta_g w_l = (\overline{\partial}\gamma)^{\cap l} \cap f$$

Puisque $\delta_g \circ \delta_g = 0$ il suffit pour cela de montrer que

$$\delta_g(\gamma \cap (\overline{\partial}\gamma)^{\cap l} \cap f) = (\overline{\partial}\gamma)^{\cap l} \cap f$$

D'après le lemme 2.3.1 il suffit pour cela de montrer que

$$\delta_g((\overline{\partial}\gamma)^{\cap l} \cap f) = 0$$

Procédons par récurrence sur l. Le cas $l = 0$ est immédiat. Supposons que

$$\delta_g((\overline{\partial}\gamma)^{\cap l} \cap f) = 0 \tag{3.4}$$

alors, puisque δ_g et $\overline{\partial}$ commutent,

$$\delta_g((\overline{\partial}\gamma)^{\cap(l+1)} \cap f) = \overline{\partial} \circ \delta_g(\gamma \cap (\overline{\partial}\gamma)^{\cap l} \cap f)$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence (3.4) et le lemme 2.3.1 on en déduit que

$$\delta_g((\overline{\partial}\gamma)^{\cap(l+1)} \cap f) = \overline{\partial}((\overline{\partial}\gamma)^{\cap l} \cap f) = \overline{\partial} \circ \overline{\partial}(\gamma \cap (\overline{\partial}\gamma)^{\cap(l+1)} \cap f) = 0$$

On a ainsi montré que $\delta_g w_l = (\overline{\partial}\gamma)^{\cap l} \cap f$ pour tout l ; en particulier $\delta_g F = f$.

Montrons par récurrence descendante sur l que pour tout l on a $\overline{\partial} w_l = 0$.

• Pour $l = r$ on a $w_r = \gamma \cap (\overline{\partial}\gamma)^{\cap r} \cap f$ donc $\overline{\partial} w_r \in C^\infty_{(0,r+1)}(\overline{\mathbb{B}}, \Lambda^{r+1})$. Deux cas se présentent alors.
Si $r + 1 = n + 1$ alors $C^\infty_{(0,r+1)}(\overline{\mathbb{B}}) = \{0\}$, et $\overline{\partial} w_r = 0$.
Si $r + 1 = m + 1$, comme on l'a vu précédemment,

$$\overline{\partial} w_r = (\overline{\partial}\gamma)^{\cap(r+1)} \cap f = \delta_g(\gamma \cap (\overline{\partial}\gamma)^{\cap(r+1)} \cap f)$$

Or $\gamma \cap (\overline{\partial}\gamma)^{\cap(r+1)} \cap f \in C^\infty_{(0,r+1)}(\overline{\mathbb{B}}, \Lambda^{r+2})$, et $\Lambda^{r+2} = \Lambda^{m+2} = \{0\}$, d'où $\overline{\partial} w_r = 0$.

• Supposons que $\overline{\partial} w_l = 0$. Alors

$$\overline{\partial} w_{l-1} = \overline{\partial}(\gamma \cap (\overline{\partial}\gamma)^{\cap(l-1)} \cap f) - \overline{\partial} \circ \delta_g \circ A(w_l) = (\overline{\partial}\gamma)^{\cap l} \cap f - \delta_g \circ \overline{\partial} \circ A(w_l)$$

Puisque A résoud le $\overline{\partial}$ et que $\overline{\partial} w_l = 0$ on a $\overline{\partial} \circ A(w_l) = w_l$ et puisque $\delta_g w_l = (\overline{\partial}\gamma)^{\cap l} \cap f$ on a donc

$$\overline{\partial} w_{l-1} = (\overline{\partial}\gamma)^{\cap l} \cap f - (\overline{\partial}\gamma)^{\cap l} \cap f = 0$$

On a ainsi montré que $\overline{\partial} F = 0$ et $\delta_g F = f$. ■

Pour achever la démonstration du théorème 2.2.1 il reste à obtenir une estimation de $\|F\|_{H^p}$. On prend pour A l'opérateur utilisé dans [6] (théorème 4.1). Alors la solution F obtenue est de classe $C^\infty(\overline{\mathbb{B}})$. Il reste donc à montrer, d'après le lemme 2.2.5, la proposition suivante :

Proposition 2.3.3 *Si A est l'opérateur donné dans [6], la solution F donnée par (3.3) est dans $L^p(\partial\mathbb{B})$ de norme majorée par $C(K)$.*

2.4 Estimations.

Il s'agit de démontrer la proposition 2.3.3. Pour cela on va démontrer que chaque terme de la somme (3.3) est dans $L^p(\partial\mathbb{B})$ de norme majorée par $C(K)$. On examinera par ordre de simplicité les cas $k=0$, $k\geq 2$ puis $k=1$.

Pour $k=0$ il faut montrer que $\gamma\cap f\in L^p(\partial\mathbb{B})$. Grâce à la définition de γ et sachant que $|g|\leq 1$ et $|g^\epsilon|>|g|$ on a

$$|\gamma\cap f|\leq\frac{|f|}{|g^\epsilon|}\leq\frac{|f|}{|g|^{r+1}\,\mu(|g|)^{\frac{r}{2}}}$$

L'hypothèse 2.4 nous montre alors que $\gamma\cap f\in C^\infty(\overline{\mathbb{B}},\Lambda^1)\cap M^p(\mathbb{B})$ de norme majorée par K. Le lemme suivant nous permet alors de conclure que $\gamma\cap f\in L^p(\partial\mathbb{B})$ de norme majorée par K.

Lemme 2.4.1 *Si $h\in M^p(\mathbb{B})\cap C^\infty(\overline{\mathbb{B}})$ alors $h\in L^p(\partial\mathbb{B})$ et*

$$\|h\|_{L^p(\partial\mathbb{B})}\leq\|h\|_{M^p}$$

Démonstration :
Soit $\zeta\in\partial\mathbb{B}$. Puisque $h\in C^\infty(\overline{\mathbb{B}})$, $h(r\zeta)$ tend vers $h(\zeta)$ quand r tend vers 1 avec $r\in[0,1[$. De plus, $\forall r\in[0,1[,\ r\zeta\in\Gamma_\zeta$, donc $|h(r\zeta)|\leq Mh(\zeta)$, d'où, en passant à la limite, $|h(\zeta)|\leq Mh(\zeta)$. On en déduit que $\|h\|_{L^p(\partial\mathbb{B})}\leq\|Mh\|_{L^p(\partial\mathbb{B})}=\|h\|_{M^p}$. ■

On s'intéresse ensuite aux termes pour $k\geq 2$.

2.4.1 Estimations des termes pour $k \geq 2$.

Pour cela on va utiliser les estimations de l'opérateur A données par M. Andersson et H. Carlsson dans le théorème 4.1 de [6]. On introduit pour cela les espaces de mesures de Carleson.

On rappelle que le noyau de Hardy-Littlewood P^0 est défini par

$$\forall z \in \mathbb{B},\ \forall \zeta \in \partial\mathbb{B},\ P^0(z,\zeta) = \frac{1}{\sigma\left(\mathcal{B}\left(\frac{z}{|z|}, -\rho(z)\right)\right)} \mathbb{1}_{\mathcal{B}\left(\frac{z}{|z|}, -\rho(z)\right)}(\zeta)$$

où la pseudo-boule $\mathcal{B}(a,t)$ centrée en $a \in \partial\mathbb{B}$ et de rayon t est définie par

$$\mathcal{B}(a,t) = \{b \in \partial\mathbb{B} /\ \ |1 - \overline{a}b| < t\}$$

On note aussi $T_\zeta^{\mathbb{C}}\mathbb{B}$ l'espace tangent complexe à $\mathbb{B}$ en $\zeta \in \partial\mathbb{B}$. Pour $s > 0$ et $\zeta \in \partial\mathbb{B}$ on définit de plus la tente de centre ζ et de rayon s par

$$T_{s,\zeta} = \{z \in \mathbb{B} / d(T_\zeta^{\mathbb{C}}\mathbb{B}, z) < s\}$$

où d désigne la distance euclidienne dans $\mathbb{C}^n$.

Définition 2.4.2
a) *On dit qu'une mesure ν dans $\mathbb{B}$ est dans l'espace des mesures de Carleson, noté $V^1(\mathbb{B})$, si il existe une constante C positive telle que pour tout $\zeta \in \partial\mathbb{B}$ et tout $s > 0$,*

$$|\nu|(T_{s,\zeta}) \leq Cs^n$$

Dans ce cas $\|\nu\|_{V^1}$ est par définition la plus petite constante C qui convient.
b) *Soit $\alpha \in]0,1[$. On dit qu'une mesure ν dans $\mathbb{B}$ est dans l'espace des mesures de Carleson d'ordre α, noté $W^\alpha(\mathbb{B})$, si la balayée*

$$P^{0*}|\nu| = \int_{\mathbb{B}} P^0(z,\zeta) d|\nu|(z)$$

de $|\nu|$ par le noyau de Hardy-Littlewood appartient à $L^p(\partial\mathbb{B})$, où $\frac{1}{p} = 1 - \alpha$. Dans ce cas on note $\|\nu\|_{W^\alpha}$ la norme $\left\|P^{0*}|\nu|\right\|_{L^p(\partial\mathbb{B})}$.

On notera aussi $V^0(\mathbb{B})$ l'espace des mesures bornées dans $\mathbb{B}$. Les espaces ainsi définis sont des espaces de Banach.
Par abus de langage on dira qu'une fonction h définie dans la boule est une mesure de Carleson si $hd\lambda$ est une mesure de Carleson.

On définit aussi les normes suivantes, tenant compte de la géométrie de la boule. Si h est une $(0,s)$-forme on note

$$|h|_*^2 = (-\rho)|h|^2 + |\partial\rho \wedge h|^2$$

On remarque notamment que si h est une fonction $|h|_*$ est équivalente à $|h|$. Plus précisément on a $|h|_*^2 \leq 2\,|h|^2 \leq 4\,|h|_*^2$.
On peut alors énoncer le théorème suivant, prouvé dans [6].

Théorème 2.4.3 *Il existe un opérateur linéaire*

$$A : C^\infty_{(0,s+1)}(\overline{\mathbb{B}}, \Lambda^l) \longrightarrow C^\infty_{(0,s)}(\overline{\mathbb{B}}, \Lambda^l)$$

tel que , pour tout $\alpha \in [0,1[$*, pour tout* $\tau \in]-1,+\infty[$*, et pour toute forme* $h \in C^\infty_{(0,s+1)}(\overline{\mathbb{B}}, \Lambda^l)$ *on a :*
(i) $\|(-\rho)^\tau A h\|_{*W^\alpha} \leq C \left\|(-\rho)^{\tau+\frac{1}{2}} h\right\|_{*W^\alpha}$
(ii) $\|Ah\|_{*L^p(\partial\mathbb{B})} \leq C \left\|(-\rho)^{-\frac{1}{2}} h\right\|_{*W^\alpha}$*, où* $p = 1 - \dfrac{1}{\alpha}$ *et* C *est une constante positive.*

De plus A *vérifie* $\overline{\partial}(Ah) = h$ *si* $\overline{\partial} h = 0$*.*

Pour estimer les termes de (3.3) pour $k \geq 2$ on va appliquer successivement ce théorème et le lemme suivant :

Lemme 2.4.4 *Pour tous* $s \geq 1$ *et* $l \in \mathbb{N}$*, pour tout* $W \in C^\infty_{(0,s)}(\overline{\mathbb{B}}, \Lambda^l)$ *on a l'inégalité*

$$|\delta_g W| \leq \sqrt{l}\,|W|$$

Démonstration :
Soit $W = \sum_{|J|=l} {}' W_J e_J$. Alors

$$\delta_g W = (-1)^{l-1} \sum_{|K|=l-1} {}' \left(\sum_{j=1}^{m+1} g_j W_{Kj} \right) e_K$$

On en déduit que

$$|\delta_g W|^2 = \sum_{|K|=l-1} {}' \left| \sum_{j=1}^{m+1} g_j W_{Kj} \right|^2 \leq \sum_{|K|=l-1} {}' \left(\sum_{j=1}^{m+1} |g_j|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{m+1} |W_{Kj}|^2 \right)$$

$$|\delta_g W|^2 \leq |g^\epsilon|^2 \sum_{|K|=l-1} {}' \sum_{j=1}^{m+1} |W_{Kj}|^2 = |g^\epsilon|^2\, l \sum_{|J|=l} |W_J|^2 \leq l\,|W|^2$$

■

Soit $k \geq 2$. Puisque $(\delta_g \circ A)^k(\gamma \cap (\overline{\partial}\gamma)^{\cap k} \cap f) \in C^\infty_{(0,0)}(\overline{\mathbb{B}}, \Lambda^1)$, on a

$$2\left|(\delta_g \circ A)^k(\gamma \cap (\overline{\partial}\gamma)^{\cap k} \cap f)\right|_* \geq \left|(\delta_g \circ A)^k(\gamma \cap (\overline{\partial}\gamma)^{\cap k} \cap f)\right|$$

On en déduit, grâce au point **(ii)** du théorème 2.4.3, que

$$\left\|(\delta_g \circ A)^k(\gamma \cap (\overline{\partial}\gamma)^{\cap k} \cap f)\right\|_{L^p(\partial\mathbb{B})} \leq 2\sqrt{2}\left\|(-\rho)^{-\frac{1}{2}}(\delta_g \circ A)^{k-1}(\gamma \cap (\overline{\partial}\gamma)^{\cap k} \cap f)\right\|_{*W^\alpha}$$

puis, en appliquant successivement le point **(i)** du théorème 2.4.3 et le lemme 2.4.4, on obtient :

$$\left\|(\delta_g \circ A)^k(\gamma \cap (\overline{\partial}\gamma)^{\cap k} \cap f)\right\|_{L^p(\partial\mathbb{B})} \leq C^k\sqrt{(k+1)!}\left\|(-\rho)^{\frac{k-2}{2}}(\gamma \cap (\overline{\partial}\gamma)^{\cap k} \cap f)\right\|_{*W^\alpha}$$

On utilise alors le lemme suivant pour estimer $\left\|(-\rho)^{\frac{k-2}{2}}(\gamma \cap (\overline{\partial}\gamma)^{\cap k} \cap f)\right\|_{*W^\alpha}$:

Lemme 2.4.5 *Soient h_1 et h_2 des formes à valeurs dans Λ^*. Alors on a*

$$|h_1 \cap h_2|_* \leq C\,|h_1|_*\,|h_2|_*$$

où C est une constante ne dépendant que des degrés de h_1 et h_2.

Pour la démonstration voir le paragraphe 2.9.
On en déduit que

$$\left|(-\rho)^{\frac{k-2}{2}}(\gamma \cap (\overline{\partial}\gamma)^{\cap k} \cap f)\right|_* \leq C\,|f|_*\,(-\rho)^{\frac{k-2}{2}}\,|\gamma|_*\,\left|\overline{\partial}\gamma\right|_*\,\left|(\overline{\partial}\gamma)^{\cap(k-1)}\right|_*$$

d'où, en utilisant le fait que $|\gamma| \leq |g|^{-1}$, et en prenant t un réel strictement positif,

$$\left|(-\rho)^{\frac{k-2}{2}}(\gamma \cap (\overline{\partial}\gamma)^{\cap k} \cap f)\right|_* \leq C\frac{|f|}{|g|}\left(t(-\rho)^{k-2}\left|(\overline{\partial}\gamma)^{\cap(k-1)}\right|_*^2 + \frac{1}{t}\left|\overline{\partial}\gamma\right|_*^2\right)$$

Estimons d'abord $\left|\overline{\partial}\gamma\right|_*^2$. Par définition de la norme on a :

$$\left|\overline{\partial}\gamma\right|_*^2 = (-\rho)\left|\overline{\partial}\gamma\right|^2 + \left|\overline{\partial}\rho \wedge \overline{\partial}\gamma\right|^2$$

Par définition de γ, sachant que

$$\overline{\partial}\gamma = \sum_{i,j=1}^{m+1} g_j\frac{\overline{g}_i\overline{\partial g_j} - \overline{g}_j\overline{\partial g_i}}{|g^\epsilon|^4}\;e_i, \tag{4.1}$$

on a :

$$\left|\overline{\partial}\gamma\right|_*^2 \preceq \frac{(-\rho)\,|\partial g|^2}{|g|^4} + \frac{|\partial\rho \wedge \partial g|^2}{|g|^4}$$

On en déduit que

$$\left|\overline{\partial}\gamma\right|_*^2 \preceq \frac{1}{|g|^2\,\mu(|g|)}(A+B)$$

où

$$A = \frac{(-\rho)\,|\partial g|^2}{|g|^2}\mu(|g|) \qquad \text{et} \qquad B = \frac{|\partial g \wedge \partial g|^2}{|g|^2}\mu(|g|)$$

D'autre part on estime $(-\rho)^{k-2}\left|(\overline{\partial}\gamma)^{\cap(k-1)}\right|_*^2$ de la façon suivante :

$$(-\rho)^{k-2}\left|(\overline{\partial}\gamma)^{\cap(k-1)}\right|_*^2=(-\rho)^{k-1}\left|(\overline{\partial}\gamma)^{\cap(k-1)}\right|^2+(-\rho)^{k-2}\left|\overline{\partial}\rho\wedge(\overline{\partial}\gamma)^{\cap(k-1)}\right|^2$$

On a d'une part

$$\left|(\overline{\partial}\gamma)^{\cap(k-1)}\right|^2\preceq\frac{1}{|g|^{4k-4}}\sum_{|I|=k-1}\left|\partial g_{I_1}\wedge...\wedge\partial g_{I_{k-1}}\right|^2$$

et d'autre part

$$\left|\overline{\partial}\rho\wedge(\overline{\partial}\gamma)^{\cap(k-1)}\right|^2\preceq\frac{1}{|g|^{4k-4}}\sum_{|I|=k-1}\left|\partial\rho\wedge\partial g_{I_1}\wedge...\wedge\partial g_{I_{k-1}}\right|^2$$

On en déduit que

$$(-\rho)^{k-2}\left|(\overline{\partial}\gamma)^{\cap(k-1)}\right|_*^2\preceq\frac{1}{|g|^{2k-2}\mu(|g|)^{k-1}}(D+E)$$

où

$$D=\sum_{|I|=k-1}(-\rho)^{k-1}\frac{\left|\partial g_{I_1}\wedge...\wedge\partial g_{I_{k-1}}\right|^2}{|g|^{2k-2}}\mu(|g|)^{k-1}$$

et

$$E=\sum_{|I|=k-1}(-\rho)^{k-2}\frac{\left|\partial\rho\wedge\partial g_{I_1}\wedge...\wedge\partial g_{I_{k-1}}\right|^2}{|g|^{2k-2}}\mu(|g|)^{k-1}$$

On choisit alors $t=|g|^{k-2}\mu(|g|)^{\frac{k-2}{2}}$ et on obtient

$$\left|(-\rho)^{\frac{k-2}{2}}(\gamma\cap(\overline{\partial}\gamma)^{\cap k}\cap f)\right|_*\preceq\frac{|f|}{|g|}\left(\frac{D+E}{|g|^k\mu(|g|)^{\frac{k}{2}}}+\frac{A+B}{|g|^k\mu(|g|)^{\frac{k}{2}}}\right)$$

c'est-à-dire

$$\left|(-\rho)^{\frac{k-2}{2}}(\gamma\cap(\overline{\partial}\gamma)^{\cap k}\cap f)\right|_*\preceq\frac{|f|}{|g|^{k+1}\mu(|g|)^{\frac{k}{2}}}(A+B+D+E)$$

Pour pouvoir conclure on va d'une part montrer que A, B, D et E sont des mesures de Carleson et d'autre part montrer que $\dfrac{|f|}{|g|^{k+1}\mu(|g|)^{k/2}}\in M^p(\mathbb{B})$, ce qui nous permettra d'appliquer le lemme suivant et d'obtenir la majoration voulue :

Lemme 2.4.6 *Soit $p\in[1,+\infty]$. Si $\nu\in V^1(\mathbb{B})$ et $h\in M^p(\mathbb{B})$ alors $h\nu\in W^\alpha(\mathbb{B})$, où $\alpha=1-\dfrac{1}{p}$, de norme majorée par $\|\nu\|_{V^1}\|h\|_{M^p}$.*

Pour la démonstration de ce lemme voir le lemme 2.4 p 12 de [3].

Pour montrer que A, B, D et E sont des mesures de Carleson il suffit d'appliquer directement la proposition suivante, qui sera démontrée au paragraphe 2.6.

Proposition 2.4.7 *Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, pour toutes fonctions $h_1, ..., h_k$ de $H^\infty(\mathbb{B})$, les fonctions ϖ_1 et ϖ_2 ci-dessous sont des mesures de Carleson de norme majorée par* $\max(1, \|h\|_\infty^{2k})$

$$\varpi_1 = (-\rho)^k \frac{|\partial h_1 \wedge ... \wedge \partial h_k|^2}{|h|^{2k}} \mu(|h|)^k$$
$$\varpi_2 = (-\rho)^{k-1} \frac{|\partial \rho \wedge \partial h_1 \wedge ... \wedge \partial h_k|^2}{|h|^{2k}} \mu(|h|)^k$$

Enfin on a, sachant que $|g|$ est majorée par 1, et en utilisant l'hypothèse (2.4) :

$$\frac{|f|}{|g|^{k+1} \mu(|g|)^{\frac{k}{2}}} = \frac{|f|}{|g|^{r+1} \mu(|g|)^{\frac{r}{2}}} |g|^{r-k} \mu(|g|)^{\frac{r-k}{2}} \leq \frac{|f|}{|g|^{r+1} \mu(|g|)^{\frac{r}{2}}} \in M^p(\mathbb{B})$$

ce qui achève la démonstration du fait que, pour tout entier k compris entre 2 et r on a :

$$\left\| (\delta_g \circ A)^k (\gamma \cap (\overline{\partial} \gamma)^{\cap k} \cap f) \right\|_{L^p(\partial \mathbb{B})} \leq C(K)$$

Remarque 2.4.8 *Pour estimer le terme d'ordre k dans (3.3) quand $k \neq 1$ on utilise seulement l'hypothèse $\dfrac{|f|}{|g|^{k+1} \mu(|g|)^{k/2}} \in M^p(\mathbb{B})$, qui est une conséquence de l'hypothèse (2.4) comme on vient de le voir.*

2.4.2 Estimation du terme pour $k = 1$.

Pour estimer ce terme on utilisera seulement l'hypothèse

$$\frac{|f|}{|g|^3 \mu(|g|)} \in M^p(\mathbb{B}) \tag{4.2}$$

qui est une conséquence de l'hypothèse (2.4) (puisque m et n sont supérieurs ou égaux à 2, $r+1$ est bien supérieur ou égal à 3).
On note $w = \gamma \cap \overline{\partial} \gamma \cap f$.
Pour montrer que $Aw \in L^p(\partial \mathbb{B})$ on prend $\psi \in L^q(\partial \mathbb{B})$, où $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, et on évalue

$$I = \int_{\partial \mathbb{B}} Aw(z) \psi(z) d\sigma(z)$$

D'après [5] p 333

$$I = J + L$$

où
$$J = \int_{\mathbb{B}} w \wedge T\psi \qquad \text{et} \qquad L = \int_{\mathbb{B}} \frac{1}{\sqrt{-\rho}} w \wedge \overline{\partial}\rho \wedge T'\psi$$
et
$$T\psi(\zeta) = \int_{\partial\mathbb{B}} \frac{(-\rho)\mathcal{O}(1)\psi(z)d\sigma(z)}{v(\zeta,z)^n v(z,\zeta)} \qquad T'\psi = \int_{\partial\mathbb{B}} \frac{(-\rho)^{1/2}\mathcal{O}(|\zeta - z|)\psi(z)d\sigma(z)}{v(\zeta;z)^n v(z,\zeta)}$$
où les fonctions $\mathcal{O}$ sont de clase C^1.
On cherche alors à appliquer le lemme suivant :

Lemme 2.4.9 *Soit $q \in]1,+\infty]$ et $\alpha = \frac{1}{q}$. Soit $P = T$ ou T'. Il existe alors une constante positive C telle que*
$$\forall\ \nu \in W^\alpha(\mathbb{B}),\ \forall\ \psi \in L^q(\partial\mathbb{B}),\ \int_{\mathbb{B}} |P\psi|\,|\nu| \leq C\,\|\nu\|_{W^\alpha}\,\|\psi\|_{L^q(\partial\mathbb{B})}$$

Démonstration :
Constatons d'abord que T et T' sont des opérateurs de type Poisson, comme ils sont définis dans [5] p 330. Pour T il suffit de choisir $\epsilon = 1$, $k = 0$ et $j = 1$ et pour T', $\epsilon = 1/2$, $k = 0$ et $j = 1$, sachant que $\mathcal{O}(|\zeta - z|)$ est a fortiori un $\mathcal{O}(1)$.
D'autre part, d'après la proposition 1 p 30 dans [2], si $\nu \in W^\alpha(\mathbb{B})$ alors il existe une mesure de Carleson ν_0 et une fonction $h \in L^p(\nu_0)$ telles que $\nu = h\nu_0$, où $\frac{1}{p} = 1 - \alpha$. On peut de plus choisir h et ν_0 tels que $\|\nu_0\|_{V^1} = 1$ et $\|h\|_{L^p(\nu_0)} \leq \|\nu\|_{W^\alpha}$. On utilise alors l'inégalité de Hölder pour obtenir
$$\int_{\mathbb{B}} |P\psi|\,|\nu| \leq \left(\int_{\mathbb{B}} |P\psi|^q\,|\nu_0|\right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{B}} |h|^p\,|\nu_0|\right)^{1/p}$$
D'après la proposition 7.1 de [5] on a alors
$$\int_{\mathbb{B}} |P\psi|\,|\nu| \leq \|h\|_{L^p(\nu_0)}\,\|\nu_0\|_{V^1}^{1/q}\,\|\psi\|_{L^q(\partial\mathbb{B})} \leq \|\nu\|_{W^\alpha}\,\|\psi\|_{L^q(\partial\mathbb{B})}$$
ce qui termine la preuve du lemme. ■

Or, a priori, w n'appartient pas à $W^\alpha(\mathbb{B})$, mais $(-\rho)w$ oui. On utilise alors le lemme suivant pour faire apparaître $(-\rho)w$ dans l'intégrale.

Lemme 2.4.10 *Pour toute fonction $F \in C^1(\overline{\mathbb{B}})$ on a :*
a) $\displaystyle\int_{\mathbb{B}} F(z)d\lambda(z) = (n+1)\int_{\mathbb{B}} (-\rho)(z)F(z)d\lambda(z) + \int_{\mathbb{B}} (-\rho)(z)\mathcal{L}F(z)d\lambda(z)$
b) $\displaystyle\int_{\mathbb{B}} \frac{1}{\sqrt{-\rho(z)}}F(z)d\lambda(z) = (2n+1)\int_{\mathbb{B}} \sqrt{-\rho(z)}F(z)d\lambda(z) + 2\int_{\mathbb{B}} \sqrt{-\rho(z)}\mathcal{L}F(z)d\lambda(z)$
où on note
$$\mathcal{L}h = \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial h}{\partial z_j}$$

Démonstration :
a) En appliquant le formule de Stokes on a, pour $i \neq j$:

$$0 = \int_{\partial \mathbb{B}} (-\rho)(\zeta) F(\zeta) \zeta_i \omega_i = \int_{\mathbb{B}} \frac{\partial}{\partial \zeta_i} \left((-\rho)(\zeta) F(\zeta) \zeta_i \right) d\zeta_i \wedge \omega_i$$

où $\omega_i = d\zeta_1 \wedge ... \wedge d\zeta_{i-1} \wedge d\zeta_{i+1} \wedge ... \wedge d\zeta_n \wedge d\overline{\zeta}_1 \wedge ... \wedge d\overline{\zeta}_n$.
On en déduit que

$$0 = \int_{\mathbb{B}} \frac{\partial(-\rho)(\zeta)}{\partial \zeta_i} F(\zeta) \zeta_i d\lambda(\zeta) + \int_{\mathbb{B}} (-\rho)(\zeta) F(\zeta) d\lambda(\zeta) + \int_{\mathbb{B}} (-\rho)(\zeta) \frac{\partial F}{\partial \zeta_i}(\zeta) \zeta_i d\lambda(\zeta)$$

En additionnant les égalités pour $i = 1$ à n on obtient

$$\int_{\mathbb{B}} |\zeta|^2 F(\zeta) d\lambda(\zeta) = n \int_{\mathbb{B}} (-\rho)(\zeta) F(\zeta) d\lambda(\zeta) + \int_{\mathbb{B}} (-\rho)(\zeta) \mathcal{L} F(\zeta) d\lambda(\zeta)$$

Or $|\zeta|^2 = 1 + \rho(\zeta)$ d'où

$$\int_{\mathbb{B}} F(\zeta) d\lambda(\zeta) = (n+1) \int_{\mathbb{B}} (-\rho)(\zeta) F(\zeta) d\lambda(\zeta) + \int_{\mathbb{B}} (-\rho)(\zeta) \mathcal{L} F(\zeta) d\lambda(\zeta)$$

b) Soit $\eta > 0$. On note $-\rho_\eta = -\rho + \eta$. Alors $\sqrt{-\rho_\eta} \in C^1(\overline{\mathbb{B}})$. Comme précédemment on peut appliquer la formule de Stokes et obtenir, si $i \neq j$,

$$\sqrt{\eta} \int_{\partial \mathbb{B}} F(\zeta) \zeta_i \omega_i = \int_{\partial \mathbb{B}} \sqrt{-\rho_\eta(\zeta)} F(\zeta) \zeta_i \omega_i = \int_{\mathbb{B}} \frac{\partial}{\partial \zeta_i} \left(\sqrt{-\rho_\eta(\zeta)} F(\zeta) \zeta_i \right) d\zeta_i \wedge \omega_i$$

En additionnant les égalités obtenues pour $i = 1$ à n, et sachant que $\dfrac{\partial \sqrt{-\rho_\eta(\zeta)}}{\partial \zeta_i} = \dfrac{-\overline{\zeta}_i}{2\sqrt{-\rho_\eta(\zeta)}}$, on obtient

$$n\sqrt{\eta} \int_{\partial \mathbb{B}} F(\zeta) \zeta_i \omega_i = n \int_{\mathbb{B}} \sqrt{-\rho_\eta(\zeta)} F(\zeta) d\lambda(\zeta) + \int_{\mathbb{B}} \sqrt{-\rho_\eta(\zeta)} \mathcal{L} F(\zeta) d\lambda(\zeta) - \int_{\mathbb{B}} \frac{|\zeta|^2 F(\zeta)}{2\sqrt{-\rho_\eta(\zeta)}} d\lambda(\zeta)$$

et puisque $|\zeta|^2 = 1 + \rho(\zeta)$ on obtient, en faisant tendre η vers 0,

$$\int_{\mathbb{B}} \frac{F(\zeta)}{2\sqrt{-\rho(\zeta)}} d\lambda(\zeta) = (n + \frac{1}{2}) \int_{\mathbb{B}} \sqrt{-\rho(\zeta)} F(\zeta) d\lambda(\zeta) + \int_{\mathbb{B}} \sqrt{-\rho(\zeta)} \mathcal{L} F(\zeta) d\lambda(\zeta)$$

■

Remarque 2.4.11 *On étend la définition de $\mathcal{L}$ aux formes différentielles de la façon suivante : si ω s'écrit dans la base canonique $\omega = \sum_{I,J} \omega_{I,J}\ dz_I \wedge d\overline{z}_J$ alors $\mathcal{L}\omega = \sum_{I,J} \mathcal{L}\omega_{I,J}\ dz_I \wedge d\overline{z}_J$. On définit de même $\partial_k \omega = \sum_{I,J} \frac{\partial \omega_{I,J}}{\partial z_k}\ dz_I \wedge d\overline{z}_J$ de sorte que $\mathcal{L}\omega = \sum_{k=1}^{n} z_k \partial_k \omega$. On vérifie immédiatement que si ω_1 et ω_2 sont deux formes différentielles alors $\mathcal{L}(\omega_1 \wedge \omega_2) = (\mathcal{L}\omega_1) \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge (\mathcal{L}\omega_2)$.*

On obtient alors, d'après ce lemme,

$$J = (n+1) \int_{\mathbb{B}} (-\rho) w \wedge T\psi + \int_{\mathbb{B}} (-\rho) \mathcal{L}(w \wedge T\psi) = (n+1) J_1 + J_2 + J_3$$

où

$$J_1 = \int_{\mathbb{B}} (-\rho) w \wedge T\psi$$
$$J_2 = \int_{\mathbb{B}} (-\rho)(\mathcal{L}w) \wedge T\psi$$
$$J_3 = \int_{\mathbb{B}} (-\rho) w \wedge \mathcal{L}(T\psi)$$

On a aussi

$$L = (2n+1)\int_{\mathbb{B}} \sqrt{-\rho}\, w \wedge \overline{\partial}\rho \wedge T'\psi + 2\int_{\mathbb{B}} \sqrt{-\rho}\,\mathcal{L}(w \wedge \overline{\partial}\rho \wedge T'\psi) = (2n+1)L_1 + 2L_2 + 2L_3$$

où

$$L_1 = \int_{\mathbb{B}} \sqrt{-\rho}\, w \wedge \overline{\partial}\rho \wedge T'\psi$$
$$L_2 = \int_{\mathbb{B}} \sqrt{-\rho}\,\mathcal{L}(w \wedge \overline{\partial}\rho) \wedge T'\psi$$
$$L_3 = \int_{\mathbb{B}} \sqrt{-\rho}\, w \wedge \overline{\partial}\rho \wedge \mathcal{L}(T'\psi)$$

Pour estimer J_1, J_2, L_1 et L_2, d'après le lemme 2.4.9, il suffit d'appliquer le lemme suivant, qu'on démontrera au paragraphe 2.4.3.

Lemme 2.4.12 *$(-\rho)w$, $(-\rho)\mathcal{L}w$, $\sqrt{-\rho}(w \wedge \overline{\partial}\rho)$, $\sqrt{-\rho}\mathcal{L}(w \wedge \overline{\partial}\rho)$ sont dans $W^\alpha(\mathbb{B})$ de normes majorées par $C(K)$.*

Il restera alors à démontrer les estimations suivantes, ce qui sera fait au paragraphe (2.4.4).

Lemme 2.4.13 *Il existe une constante $C(K) > 0$ ne dépendant que de K telle que*

$$\forall \psi \in L^q(\partial\mathbb{B}),\ \ J_3 \le C(K)\,\|\psi\|_{L^q(\partial\mathbb{B})} \qquad \text{et} \qquad L_3 \le C(K)\,\|\psi\|_{L^q(\partial\mathbb{B})}$$

2.4.3 Estimations concernant w.

On démontre ici le lemme 2.4.12. On commence par estimer les termes qui ne font pas intervenir de dérivation.

Estimation de $(-\rho)w$ et $\sqrt{-\rho}(w \wedge \overline{\partial}\rho)$.

On a, puisque $|g^\epsilon| > |g|$,

$$(-\rho)\,|w| \preceq \frac{|f|}{|g|^3} \sum_{1\leq k<m+1} |\partial g_k|\,(-\rho) \preceq \frac{|f|}{|g|^2\sqrt{\mu(|g|)}}\left((-\rho)\frac{|\partial g|^2}{|g|^2}\mu(|g|) + (-\rho)\right)$$

D'après l'hypothèse (4.2), et sachant que $\mu(|g|)$ est borné, $\dfrac{|f|}{|g|^2\sqrt{\mu(|g|)}} \in M^p(\mathbb{B})$ de norme majorée par $C(K)$.

On utilise alors la proposition 2.4.7 et on en conclut que $(-\rho)\dfrac{|\partial g|^2}{|g|^2}\mu(|g|) + (-\rho) \in V^1(\mathbb{B})$. Le lemme 2.4.6 nous permet d'en déduire que $(-\rho)w \in W^\alpha(\mathbb{B})$ de norme majorée par $C(K)$.

D'autre part on a

$$\sqrt{-\rho}\,\left|w \wedge \overline{\partial}\rho\right| \preceq \sqrt{-\rho}\frac{|f|}{|g^\epsilon|^3} \sum_{1\leq k\leq m+1} |\partial g_k \wedge \partial\rho| \preceq \frac{|f|}{|g|^2\sqrt{\mu(|g|)}}\left(\frac{|\partial g \wedge \partial\rho|^2}{|g|^2}\mu(|g|) + (-\rho)\right)$$

En utilisant à nouveau la proposition 2.4.7, le lemme 2.4.6, l'hypothèse (4.2), et sachant que $(-\rho)$ est dans $V^1(\mathbb{B})$, on en déduit que $\sqrt{-\rho}(w \wedge \overline{\partial}\rho) \in W^\alpha(\mathbb{B})$ de norme majorée par $C(K)$.

Estimation de $(-\rho)\mathcal{L}w$.

Par définition de w on a

$$\partial_k w = \partial_k(\gamma \cap \overline{\partial}\gamma) \cap f + \gamma \cap \overline{\partial}\gamma \cap \partial_k f$$

Puisque $\mathcal{L}w = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} z_k \partial_k w$, il suffit de monter que $(-\rho)\,|\partial_k w| \in W^\alpha(\mathbb{B})$ pour tout k.

Pour le premier terme on a

$$\partial_k(\gamma \cap \overline{\partial}\gamma) \cap f = \partial_k\gamma \cap \overline{\partial}\gamma \cap f + \gamma \cap \partial_k\overline{\partial}\gamma \cap f$$

Or

$$\partial_k\gamma = \sum_{i,j=1}^{m+1} -\frac{\overline{g}_i\overline{g}_j\partial_k g_j}{|g^\epsilon|^4}\ e_i$$

$$\overline{\partial}\gamma = \sum_{i,j=1}^{m+1} -g_j\frac{\overline{g}_j\overline{\partial g}_i - \overline{g}_i\overline{\partial g}_j}{|g^\epsilon|^4}\ e_i$$

$$\partial_k\overline{\partial}\gamma = \sum_{i,j,l=1}^{m+1} \overline{g}_l\frac{\overline{g}_j\overline{\partial g}_i - \overline{g}_i\overline{\partial g}_j}{|g^\epsilon|^4}(2g_j\partial_k g_l - g_l\partial_k g_j)\ e_i$$

On en déduit que

$$\left|(-\rho)\partial_k(\gamma \cap \overline{\partial}\gamma) \cap f\right| \preceq (-\rho)\frac{|\partial g|^2 |f|}{|g^\epsilon|^4} \preceq (-\rho)\frac{|\partial g|^2}{|g|^2}\mu(|g|)\frac{|f|}{|g|^2 \mu(|g|)}$$

On utilise alors l'hypothèse (4.2), la proposition 2.4.7 et le lemme 2.4.6 pour montrer que $(-\rho)\partial_k(\gamma \cap \overline{\partial}\gamma) \cap f$ est dans $W^\alpha(\mathbb{B})$ de norme majorée par $C(K)$.

On majore le deuxième terme de la façon suivante :

$$\left|(-\rho)\gamma \cap \overline{\partial}\gamma \cap \partial_k f\right| \preceq (-\rho)\frac{|\partial f|}{|g^\epsilon|^6}\sum_{k=1}^{m+1} |\partial g_k|\, |g^\epsilon|^3 \preceq \sqrt{-\rho}\frac{|\partial f|}{|g|^3}\sqrt{-\rho}\, |\partial g|$$

On applique alors le lemme suivant, qu'on démontrera au paragraphe 2.4.5.

Lemme 2.4.14 *Soient $p \in [1, +\infty]$ et $\alpha = 1 - \frac{1}{p}$. Soit ν une fonction positive dans $\mathbb{B}$. Si*

$$\frac{\nu^2}{|g|^2}\mu(|g|) \in V^1(\mathbb{B})$$

et f vérifie

$$\frac{f}{|g|^2 \mu(|g|)} \in M^p(\mathbb{B}) \tag{4.3}$$

de norme majorée par K alors $\sqrt{-\rho}\frac{\partial f}{|g|^3}\nu$ et $\frac{|\partial f \wedge \partial \rho|}{|g|^3}\nu$ sont dans $W^\alpha(\mathbb{B})$ de normes majorées par $C(K)\left\|\frac{\nu^2}{|g|^2}\mu(|g|)\right\|_{V^1}$.

D'après la proposition 2.4.7 $(-\rho)\frac{|\partial g|^2}{|g|^2}\mu(|g|) \in V^1(\mathbb{B})$. Puisque $|g| < 1$, l'hypothèse (4.2) entraîne (4.3).
On peut donc appliquer le lemme 2.4.14 avec $\nu = \sqrt{-\rho}\,|\partial g|$ et en déduire que $\left|(-\rho)\gamma \cap \overline{\partial}\gamma \cap \partial_k f\right|$ est dans $W^\alpha(\mathbb{B})$ de norme majorée par $C(K)$.

Estimation de $\sqrt{-\rho}\mathcal{L}(w \wedge \overline{\partial}\rho)$.

On a

$$\partial_k(w \wedge \overline{\partial}\rho) = \partial_k(\gamma \cap (\overline{\partial}\gamma \wedge \overline{\partial}\rho) \cap f) = w_1^k + w_2^k + w_3^k$$

où

$$w_1^k = \partial_k \gamma \cap (\overline{\partial}\gamma \wedge \overline{\partial}\rho) \cap f$$

$$w_2^k = \gamma \cap \partial_k (\overline{\partial}\gamma \wedge \overline{\partial}\rho) \cap f$$

$$w_3^k = \gamma \cap (\overline{\partial}\gamma \wedge \overline{\partial}\rho) \cap \partial_k f$$

Comme précédemment il suffit d'estimer chaque w_j^k.

$$\begin{aligned}
\sqrt{-\rho}\left|w_1^k\right| &\leq \sqrt{-\rho}\left|\partial_k \gamma \cap (\overline{\partial}\gamma \wedge \overline{\partial}\rho) \cap f\right| \\
&\preceq \sqrt{-\rho}\frac{|f|}{|g^\epsilon|^4}\left|\partial g\right|\left|\partial g \wedge \partial \rho\right| \\
&\preceq \frac{|f|}{|g|^2 \mu(|g|)}\left((-\rho)\frac{|\partial g|^2}{|g|^2}\mu(|g|) + \frac{|\partial g \wedge \partial \rho|^2}{|g|^2}\mu(|g|)\right)
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (4.2), la proposition 2.4.7 et le lemme 2.4.6, on déduit que $\sqrt{-\rho}\left|w_1^k\right|$ est dans $W^\alpha(\mathbb{B})$ de norme majorée par $C(K)$.
De la même façon on majore $\sqrt{-\rho}\left|w_2^k\right|$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{-\rho}\left|w_2^k\right| &\preceq \sqrt{-\rho}\frac{|f|}{|g^\epsilon|}(\left|\partial_k \overline{\partial}\gamma \wedge \overline{\partial}\rho\right| + \left|\overline{\partial}\gamma \wedge \partial_k \overline{\partial}\rho\right|) \\
&\preceq \sqrt{-\rho}\frac{|f|}{|g^\epsilon|}(\frac{|\partial g|\left|\partial g \wedge \partial \rho\right|}{|g^\epsilon|^3} + \frac{|\partial g|}{|g^\epsilon|^2}) \\
&\preceq \frac{|f|}{|g|^2 \mu(|g|)}\left((-\rho)\frac{|\partial g|^2}{|g|^2}\mu(|g|) + \frac{|\partial g \wedge \partial \rho|^2}{|g|^2}\mu(|g|) + \mu(|g|)\right)
\end{aligned}$$

On en déduit de même que $\sqrt{-\rho}\left|w_2^k\right| \in W^\alpha(\mathbb{B})$ de norme majorée par $C(K)$.

$$\sqrt{-\rho}\left|w_3^k\right| \preceq \sqrt{-\rho}\frac{|\partial f|\left|\partial g \wedge \partial \rho\right|}{|g|^3}$$

D'après la proposition 2.4.7 $\dfrac{|\partial g \wedge \partial \rho|^2}{|g|^2}\mu(|g|) \in V^1(\mathbb{B})$, ce qui nous permet, grâce au lemme 2.4.14, appliqué avec $\nu = |\partial g \wedge \partial \rho|$, de déduire que $\sqrt{-\rho}\left|w_3^k\right| \in W^\alpha(\mathbb{B})$ de norme majorée par $C(K)$, et donc l'estimation voulue pour $\sqrt{-\rho}\mathcal{L}(w \wedge \overline{\partial}\rho)$.
Ceci achève la démonstration du lemme 2.4.12.
Il reste encore à démontrer le lemme 2.4.14 et le lemme 2.4.13.

2.4.4 Estimation des deux derniers termes.

On démontre ici le lemme 2.4.13, qu'on rappelle ci-dessous :

Il existe une constante $C(K) > 0$ ne dépendant que de K telle que

$$\forall \psi \in L^q(\partial \mathbb{B}), \quad J_3 = \int_{\mathbb{B}} (-\rho) w \wedge \mathcal{L}(T\psi) \leq C(K) \|\psi\|_{L^q(\partial\mathbb{B})}$$
$$\text{et} \quad L_3 = \int_{\mathbb{B}} \sqrt{-\rho} w \wedge \overline{\partial}\rho \wedge \mathcal{L}(T'\psi) \leq C(K) \|\psi\|_{L^q(\partial\mathbb{B})}$$

Pour cela, on va utiliser le lemme suivant, démontré plus loin dans ce paragraphe, qu'on pourra appliquer pour estimer J_3 et L_3.
Dans la suite on note $\mathcal{C} = \{b/(-\rho) |b|^2 \in V^1$ et $(-\rho) |b| \in L^\infty(\mathbb{B})\}$ et

$$\|b\|_{\mathcal{C}}^2 = \left\|(-\rho) |b|^2\right\|_{V^1} + \text{Sup } (-\rho) |b|$$

Lemme 2.4.15 *Soit $P = T$ ou T'. Si $p \in [1, +\infty]$ et q vérifie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors*

$$\forall \psi \in L^q(\partial\mathbb{B}),\ \forall G \in M^p(\mathbb{B}),\ \forall b \in \mathcal{C},\ \left| \int_{\mathbb{B}} (-\rho) G b \wedge \mathcal{L}(P\psi) \right| \leq C \|b\|_{\mathcal{C}} \|G\|_{M^p} \|\psi\|_{L^q(\partial\mathbb{B})}$$

où C est une constante positive.

Pour l'appliquer à J_3 on écrit

$$w = Gb$$

où

$$G = \frac{f}{|g|^3 \sqrt{\mu(|g|)}} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{|g|^3}{|g^\epsilon|^6} \sqrt{\mu(|g|)} \sum_{i,j,l=1}^{m+1} g_i \overline{g}_j (\overline{g}_j \overline{\partial g}_l - \overline{g}_l \overline{\partial g}_j)\ e_i \cap e_l$$

Alors

$$(-\rho) |b|^2 \preceq (-\rho) \frac{|\partial g|^2}{|g|^2} \mu(|g|)$$

et, d'après la proposition 2.4.7, $(-\rho) |b|^2 \in V^1(\mathbb{B})$ de norme majorée par une constante ne dépendant que de $\|g\|_\infty$. Pour voir que $b \in \mathcal{C}$ il suffit alors d'utiliser le lemme suivant, sachant que

$$(-\rho) |b| \preceq (-\rho) |\partial g|$$

Lemme 2.4.16 *Il existe une constante positive C telle que, pour toute fonction $g \in H^\infty(\mathbb{B})$ on ait*

$$(-\rho) |\partial g| \leq C \|g\|_\infty \qquad \text{et} \qquad \sqrt{-\rho}\, |\partial g \wedge \partial \rho| \leq C \|g\|_\infty$$

Ce lemme sera démontré au paragraphe 2.7.
De plus, d'après l'hypothèse (4.2), $G \in M^p(\mathbb{B})$. On en déduit grâce au lemme 2.4.15 que

$$|J_3| \leq C(K) \|\psi\|_{L^q(\partial\mathbb{B})}$$

Pour l'estimation de L_3 on écrit de même

$$\frac{w \wedge \overline{\partial}\rho}{\sqrt{-\rho}} = Gb$$

où

$$G = \frac{f}{|g|^3 \sqrt{\mu(|g|)}} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{1}{\sqrt{(-\rho)}} \frac{|g|^3}{|g^\epsilon|^6} \sqrt{\mu(|g|)} \sum_{i,j,l=1}^{m+1} g_i \overline{g}_j (\overline{g}_j \overline{\partial g}_l - \overline{g}_l \overline{\partial g}_j) \wedge \overline{\partial}\rho \ e_i \cap e_l$$

Alors $G \in M^p(\mathbb{B})$ d'après l'hypothèse (4.2) et

$$(-\rho)\,|b|^2 \preceq \frac{1}{(-\rho)}(-\rho) \sum_k \frac{|\partial g_k \wedge \partial\rho|^2}{|g|^2} \mu(|g|) \preceq \frac{|\partial g \wedge \partial\rho|^2}{|g|^2} \mu(|g|)$$

et, d'après la proposition 2.4.7, on a donc $(-\rho)\,|b|^2 \in V^1(\mathbb{B})$. De plus $(-\rho)\,|b| \preceq \sqrt{-\rho}\,|\partial g \wedge \partial\rho|$, d'où, en utilisant le lemme 2.4.16, $b \in \mathcal{C}$. Ceci nous permet d'appliquer à nouveau le lemme 2.4.15 et d'obtenir l'estimation

$$|L_3| \leq C(K)\,\|\psi\|_{L^q(\partial\mathbb{B})}$$

On a ainsi démontré le lemme 2.4.13.

Démonstration du lemme 2.4.15.

On procède ici par interpolation.
On définit pour chaque fonction ψ mesurable sur $\partial\mathbb{B}$ l'application linéaire

$$L_\psi(G) = \int_{\mathbb{B}} (-\rho) G b \wedge \mathcal{L}(P\psi)$$

On utilise alors le lemme suivant pour majorer $L_\psi(G)$.

Lemme 2.4.17 *Soient ψ une fonction mesurable sur $\partial\mathbb{B}$ et b une fonction de Carleson dans $\mathbb{B}$. Soit $P = T$ ou T'. On a alors les inégalités suivantes :*

a) $\displaystyle\int_{\mathbb{B}} (-\rho)\,|\mathcal{L}P\psi|\,|b|\,d\lambda \leq C\,\|\psi\|_{\mathcal{H}^1}\,\|b\|_{\mathcal{C}}$

b) $\|\mathcal{L}P\psi\|_{\mathcal{C}} \leq C\,\|\psi\|_\infty$

Ici $\mathcal{H}^1$ désigne l'espace atomique défini par exemple dans [13] dans le chapitre 2.
Pour la démonstration du lemme voir [5] proposition 7.1.
On a, d'après le point **a)**,

$$|L_\psi(G)| \preceq \|b\|_{\mathcal{C}}\,\|G\|_\infty\,\|\psi\|_{\mathcal{H}^1}$$

D'autre part on a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|L_\psi(G)| \leq \left(\int_{\mathbb{B}} (-\rho)\,|b|^2\,|G|\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{B}} (-\rho)\,|\mathcal{L}P\psi|^2\,|G|\right)^{1/2}$$

Alors, d'après le point **b)** du lemme 2.4.17, et en utilisant le lemme 2.4.6, on obtient

$$|L_\psi G| \leq \|G\|_{M^1}\,\|b\|_{\mathcal{C}}\,\|\psi\|_\infty$$

On en déduit que l'application linéaire L définie par $L(\psi) = L_\psi$ est bornée :

$$\mathcal{H}^1 \longrightarrow (M^\infty(\mathbb{B}))'$$

et

$$L^\infty(\partial\mathbb{B}) \longrightarrow (M^1(\mathbb{B}))'$$

de norme majorée par $\|b\|_C$. On en déduit par interpolation que, si $0 < \theta < 1$ et $t \in]1, \infty[$, L est bornée dans

$$(\mathcal{H}^1, L^\infty(\partial\mathbb{B}))_{\theta,t} \longrightarrow ((M^\infty(\mathbb{B}))', (M^1(\mathbb{B}))')_{\theta,t}$$

de norme majorée par $\|b\|_C$. On utilise alors les lemmes suivants :

Lemme 2.4.18
a) *L'espace $M^p(\mathbb{B})$ est un espace de Banach, $\forall p \in [1, +\infty]$.*
b) *Soit $p \in [1, +\infty[$ et soit $q \in]1, +\infty]$ tels que $q > p$, alors $M^q(\mathbb{B})$ est dense dans $M^p(\mathbb{B})$.*
c) *Soient $p_0,\ p_1 \in [1, +\infty]$, $\theta \in]0, 1[$ et p tels que $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$. Alors*

$$(M^{p_0}(\mathbb{B}), M^{p_1}(\mathbb{B}))_{\theta,p} = M^p(\mathbb{B})$$

Ce lemme sera démontré au paragraphe 2.5.2.

Lemme 2.4.19 *Soit (A_0, A_1) un couple d'espaces de Banach tels que $A_0 \cap A_1$ est dense dans A_0 et A_1. Soient $q \in [1, +\infty[$ et $\theta \in]0, 1[$. Alors $(A_0, A_0)'_{\theta,q} = (A'_0, A'_1)_{\theta,q'}$, où $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$.*

Pour la démonstration de ce lemme voir [8] p 53 théorème 3.7.1.
Puisque $M^\infty(\mathbb{B}) \cap M^1(\mathbb{B}) = M^\infty(\mathbb{B})$ on peut, d'après le lemme 2.4.18, appliquer le lemme 2.4.19 et obtenir

$$((M^\infty(\mathbb{B}))', (M^1(\mathbb{B}))')_{\theta,t} = (M^\infty(\mathbb{B}), M^1(\mathbb{B}))'_{\theta,s}$$

où $\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{s} = 1$ et $t < +\infty$. Prenons $s = p$, $t = q$ et θ tel que $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{\infty} + \dfrac{\theta}{1}$, i.e. $\theta = \dfrac{1}{p} < 1$. Alors, d'après le lemme 2.4.18 **c)**,

$$((M^\infty(\mathbb{B}))', (M^1(\mathbb{B}))')_{\theta,t} = (M^p(\mathbb{B}))'$$

Enfin on utilise le lemme suivant pour conclure. Celui-ci est une conséquence du théorème 3.34 et de la remarque (1) p 75 dans [13].

Lemme 2.4.20 *Soit $\theta \in]0, 1[$ et $t > 0$ tels que $\dfrac{1}{t} = 1 - \theta$. Alors on a*

$$(\mathcal{H}^1, L^\infty(\partial\mathbb{B}))_{\theta,t} = L^t(\partial\mathbb{B})$$

On en déduit que L est borné de $L^q(\partial\mathbb{B}) \longrightarrow (M^p(\mathbb{B}))'$, de norme majorée par $\|b\|_C$, ce qui nous donne le résultat.

2.4.5 Estimation de $|\partial f|$.

On démontre ici le lemme 2.4.14, qui s'énonce ainsi :

Soient $p \in [1, +\infty]$ et $\alpha = 1 - \dfrac{1}{p}$. Soit ν une fonction positive dans $\mathbb{B}$. Si

$$\frac{\nu^2}{|g|^2}\mu(|g|) \in V^1(\mathbb{B})$$

et f vérifie

$$\frac{f}{|g|^2\,\mu(|g|)} \in M^p(\mathbb{B})$$

de norme majorée par K alors $\sqrt{-\rho}\dfrac{\partial f}{|g|^3}\nu$ et $\dfrac{|\partial f \wedge \partial \rho|}{|g|^3}\nu$ sont dans $W^\alpha(\mathbb{B})$ de normes majorées par $C(K)\left\|\dfrac{\nu^2}{|g|^2}\mu(|g|)\right\|_{V^1}$.

Pour cela on suppose que ν vérifie $\dfrac{\nu^2}{|g|^2}\mu(|g|) \in V^1(\mathbb{B})$ et on procède par interpolation entre $p = 1$ et $p = +\infty$ pour montrer que $\sqrt{-\rho}\dfrac{|\partial f|}{|g|^3}\nu \in W^\alpha(\mathbb{B})$ et $\dfrac{|\partial f \wedge \partial \rho|}{|g|^3}\nu \in W^\alpha(\mathbb{B})$ quand $\dfrac{|f|}{|g|^2\,\mu(|g|)} \in M^p(\mathbb{B})$.

• Pour $p = +\infty$, $\alpha = 1$. On va utiliser le lemme suivant qui caractérise les mesures de Carleson :

Lemme 2.4.21 *Une mesure positive ν dans $\mathbb{B}$ est dans $V^1(\mathbb{B})$ si et seulement si*

$$\exists C \in \mathbb{R}^+ /\ \forall h \in H^2(\mathbb{B}),\ \int_{\mathbb{B}} |h|^2\,\nu \leq C\,\|h\|^2_{H^2}$$

Ce lemme est démontré dans [17] (théorème 4.3).
D'après ce lemme il suffit de prendre $h \in H^2(\mathbb{B})$ et d'évaluer

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{B}} |h|^2\,\sqrt{-\rho}\frac{|\partial f|}{|g|^3}\nu d\lambda \\ I_2 &= \int_{\mathbb{B}} |h|^2\,\frac{|\partial f \wedge \partial \rho|}{|g|^3}\nu d\lambda \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\begin{aligned} I_1^2 &\leq \int_{\mathbb{B}} |h|^2\,\frac{\nu^2}{|g|^2}\mu(|g|)d\lambda \int_{\mathbb{B}} |h|^2\,(-\rho)\frac{|\partial f|^2}{|g|^4\,\mu(|g|)}d\lambda \\ I_2^2 &\leq \int_{\mathbb{B}} |h|^2\,\frac{\nu^2}{|g|^2}\mu(|g|)d\lambda \int_{\mathbb{B}} |h|^2\,\frac{|\partial f \wedge \partial \rho|^2}{|g|^4\,\mu(|g|)}d\lambda \end{aligned}$$

L'hypothèse sur $\frac{\nu^2}{|g|^2}\mu(|g|)$ et le lemme 2.4.21 nous permettent de déduire que

$$\int_{\mathbb{B}} |h|^2 \frac{\nu^2}{|g|^2}\mu(|g|)d\lambda \leq \left\| \frac{\nu^2}{|g|^2}\mu(|g|) \right\|_{V^1} \|h\|^2_{H^2}$$

Pour estimer $J_1 = \int_{\mathbb{B}} |h|^2 (-\rho)\frac{|\partial f|^2}{|g|^4 \mu(|g|)}d\lambda$ et $J_2 = \int_{\mathbb{B}} |h|^2 \frac{|\partial f \wedge \partial\rho|^2}{|g|^4 \mu(|g|)}d\lambda$ on applique le lemme suivant à la fonction holomorphe hf.

Lemme 2.4.22 *Si h est une fonction holomorphe dans $\mathbb{B}$ de classe $C^\infty(\overline{\mathbb{B}})$ elle vérifie :*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{B}} (-\rho)\frac{|\partial h|^2}{|g|^4 \mu(|g|)}d\lambda \quad &\leq \quad C_1 \int_{\mathbb{B}} \frac{|h|^2}{|g|^4 \mu(|g|)}d\lambda \\
&\quad + C_2 \int_{\mathbb{B}}\int_{\partial\mathbb{B}} \frac{|h|^2}{|g|^4 \mu(|g|)}(\zeta)P(z,\zeta)d\sigma(\zeta)d\lambda(z) \\
&\quad + C_3 \int_{\mathbb{B}} (-\rho)\frac{|h|^2 |\partial g|^2}{|g|^6 \mu(|g|)}d\lambda
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{B}} \frac{|\partial h \wedge \partial\rho|^2}{|g|^4 \mu(|g|)}d\lambda \quad &\leq \quad C_1 \int_{\mathbb{B}} \frac{|h|^2}{|g|^4 \mu(|g|)}d\lambda \\
&\quad + C_2 \int_{\mathbb{B}}\int_{\partial\mathbb{B}} \frac{|h|^2}{|g|^4 \mu(|g|)}(\zeta)P(z,\zeta)d\sigma(\zeta)d\lambda(z) \\
&\quad + C_3 \int_{\mathbb{B}} (-\rho)\frac{|h|^2 |\partial g|^2}{|g|^6 \mu(|g|)}d\lambda \\
&\quad + C_4 \int_{\mathbb{B}} \frac{|h|^2 |\partial g \wedge \partial\rho|^2}{|g|^6 \mu(|g|)}d\lambda
\end{aligned}$$

où P est le noyau de Poisson de la boule et C_1, C_2, C_3 et C_4 sont des constantes absolues.

Ce lemme sera démontré au paragraphe 2.4.6.
Pour cela on suppose d'abord que $h \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}})$. On a $\partial(hf) = h\partial f + f\partial h$ donc

$$|h|^2 |\partial f|^2 \leq 2 |\partial(hf)|^2 + 2 |f|^2 |\partial h|^2$$

et

$$|h|^2 |\partial f \wedge \partial\rho|^2 \leq 2 |\partial(hf) \wedge \partial\rho|^2 + 2 |f|^2 |\partial h \wedge \partial\rho|^2$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
J_1 \quad &\leq \quad 2\int_{\mathbb{B}} (-\rho)\frac{|\partial(hf)|^2}{|g|^4 \mu(|g|)}d\lambda + 2\int_{\mathbb{B}} |\partial h|^2 (-\rho)\frac{|f|^2}{|g|^4 \mu(|g|)}d\lambda \\
J_2 \quad &\leq \quad 2\int_{\mathbb{B}} \frac{|\partial(hf) \wedge \partial\rho|^2}{|g|^4 \mu(|g|)}d\lambda + 2\int_{\mathbb{B}} |\partial h \wedge \partial\rho|^2 \frac{|f|^2}{|g|^4 \mu(|g|)}d\lambda
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (4.3) avec $p=+\infty$ et le lemme suivant on en déduit que les deux dernières intégrales sont majorées par $C(K)\,\|h\|^2_{H^2}$.

Lemme 2.4.23 *Si $h\in H^2(\mathbb{B})$ alors $(-\rho)\,|\partial h|^2$ et $|\partial h\wedge\partial\rho|^2$ sont des mesures bornées dans $\mathbb{B}$ de masse totale majorée par $\|h\|^2_{H^2}$.*

Ce lemme est démontré dans [1] p 294.
D'autre part le lemme 2.4.22 nous permet d'avoir

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{B}}(-\rho)\frac{|\partial(hf)|^2}{|g|^4\,\mu(|g|)}d\lambda &\leq C_1A+C_2B+C_3C\\
\int_{\mathbb{B}}\frac{|\partial(hf)\wedge\partial\rho|^2}{|g|^4\,\mu(|g|)}d\lambda &\leq C_1A+C_2B+C_3C+C_4D
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\mathbb{B}}\frac{|h|^2\,|f|^2}{|g|^4\,\mu(|g|)}(\zeta)d\lambda(\zeta)\\
B &= \int_{\mathbb{B}}\int_{\partial\mathbb{B}}\frac{|h|^2\,|f|^2}{|g|^4\,\mu(|g|)}(\zeta)P(z,\zeta)d\sigma(\zeta)d\lambda(z)\\
C &= \int_{\mathbb{B}}(-\rho)(\zeta)\frac{|h|^2\,|f|^2\,|\partial g|^2}{|g|^6\,\mu(|g|)}(\zeta)d\lambda(\zeta)\\
D &= \int_{\mathbb{B}}\frac{|h|^2\,|f|^2\,|\partial g\wedge\partial\rho|^2}{|g|^6\,\mu(|g|)}d\lambda
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (4.3) avec $p=+\infty$ on en déduit immédiatement

$$\begin{aligned}
A\leq\ & C(K)\int_{\mathbb{B}}|h|^2\,d\lambda\\
B\leq\ & C(K)\int_{\mathbb{B}}\int_{\partial\mathbb{B}}|h|^2\,(\zeta)P(z,\zeta)d\sigma(\zeta)d\lambda(z)\\
C\leq\ & C(K)\int_{\mathbb{B}}(-\rho)(\zeta)\,|h|^2\,(\zeta)\frac{|\partial g|^2}{|g|^2}(\zeta)\mu(|g|)d\lambda(\zeta)\\
D\leq\ & C(K)\int_{\mathbb{B}}|h|^2\,(\zeta)\frac{|\partial g\wedge\partial\rho|^2}{|g|^2}(\zeta)\mu(|g|)d\lambda(\zeta)
\end{aligned}$$

et donc, en utilisant la proposition 2.4.7,

$$I_1^2\leq C(K)\,\|h\|^2_{H^2}\qquad\text{et}\qquad I_2^2\leq C(K)\,\|h\|^2_{H^2}\tag{4.4}$$

pour $h\in H^2(\mathbb{B})\cap C^\infty(\overline{\mathbb{B}})$. Si $h\in H^2(\mathbb{B})$, pour tout $r\in]0,1[$, on applique (4.4) à la fonction h_r définie par $\forall z\in\mathbb{B},\ h_r(z)=h(rz)$. Le membre de droite est alors uniformément majoré par $C(K)\,\|h\|^2_{H^2}$. Puisque de plus h_r tend vers h presque partout dans $\mathbb{B}$ quand r tend 1, on obtient (4.4) pour h. Ainsi on a montré que $\sqrt{-\rho}\dfrac{|\partial f|}{|g|^3}\nu\in V^1(\mathbb{B})$ et $\dfrac{|\partial f\wedge\partial\rho|}{|g|^3}\nu\in V^1(\mathbb{B})$ quand $p=+\infty$, de norme majorée par $C(K)$.

• Pour $p=1$, $\alpha=0$. Il suffit d'évaluer les intégrales

$$\begin{aligned} I_1 = & \int_{\mathbb{B}} \sqrt{-\rho}\frac{|\partial f|}{|g|^3}\nu \\ I_2 = & \int_{\mathbb{B}} \frac{|\partial f \wedge \partial\rho|}{|g|^3}\nu \end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz et on obtient :

$$\begin{aligned} I_1^2 \leq & \int_{\mathbb{B}} \frac{|f|}{|g|^2\mu(|g|)}\frac{\nu^2}{|g|^2}\mu(|g|) \int_{\mathbb{B}}(-\rho)\frac{|\partial f|^2}{|f|\,|g|^2} \\ I_2^2 \leq & \int_{\mathbb{B}} \frac{|f|}{|g|^2\mu(|g|)}\frac{\nu^2}{|g|^2}\mu(|g|) \int_{\mathbb{B}}\frac{|\partial f\wedge\partial\rho|^2}{|f|\,|g|^2} \end{aligned}$$

L'hypothèse (4.3), le fait que $\dfrac{\nu^2}{|g|^2}\mu(|g|) \in V^1(\mathbb{B})$ et le lemme 2.4.6 appliqués avec $p=1$ permettent de dire que la première intégrale est majorée par $C(K)$. Pour les deux dernières intégrales on utilise le lemme suivant, appliqué à f :

Lemme 2.4.24 *Soit $h \in Hol(\mathbb{B}) \cap C^\infty(\overline{\mathbb{B}})$. Alors*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}}(-\rho)\frac{|\partial h|^2}{|h|\,|g|^2}d\lambda \leq \quad & C_1\int_{\mathbb{B}}\frac{|h|}{|g|^2}d\lambda \\ & + C_2\int_{\mathbb{B}}\int_{\partial\mathbb{B}}\frac{|h|}{|g|^2}(\zeta)P(z,\zeta)d\sigma(\zeta)d\lambda(z) \\ & + C_3\int_{\mathbb{B}}(-\rho)\frac{|h|\,|\partial g|^2}{|g|^4}d\lambda \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}}\frac{|\partial h\wedge\partial\rho|^2}{|h|\,|g|^2}d\lambda \leq \quad & C_1\int_{\mathbb{B}}\frac{|h|}{|g|^2}d\lambda \\ & + C_2\int_{\mathbb{B}}\int_{\partial\mathbb{B}}\frac{|h|}{|g|^2}(\zeta)P(z,\zeta)d\sigma(\zeta)d\lambda(z) \\ & + C_3\int_{\mathbb{B}}(-\rho)\frac{|h|\,|\partial g|^2}{|g|^4}d\lambda \\ & + C_4\int_{\mathbb{B}}|h|\,\frac{|\partial g\wedge\partial\rho|^2}{|g|^4}d\lambda \end{aligned}$$

où P est le noyau de Poisson de la boule et C_1, C_2, C_3 et C_4 sont des constantes absolues.

Ce lemme sera démontré au paragraphe 2.4.6.

Puisque $\frac{|f|}{|g|^2} \in M^1(\mathbb{B})$ de norme majorée par $C(K)$, les deux premières intégrales obtenues sont majorées par $C(K)$. On majore la troisième de la façon suivante :

$$\int_{\mathbb{B}} (-\rho)\frac{|f|\,|\partial g|^2}{|g|^4} d\lambda \leq \int_{\mathbb{B}} (-\rho)\frac{|\partial g|^2}{|g|^2}\mu(|g|)\frac{|f|}{|g|^2\,\mu(|g|)} d\lambda$$

Puisque, d'après la proposition 2.4.7, $(-\rho)\frac{|\partial g|^2}{|g|^2}\mu(|g|) \in V^1(\mathbb{B})$ et que d'après l'hypothèse (4.3) $\frac{|f|}{|g|^2\,\mu(|g|)} \in M^1(\mathbb{B})$ de norme majorée par $C(K)$, le lemme 2.4.6 nous permet de conclure que cette intégrale est majorée par $C(K)$. La quatrième et dernière intégrale est majorée de la façon suivante en utilisant la proposition 2.4.7 avec $k = 1$ et le lemme 2.4.6, et l'hypothèse (4.3) avec $p = 1$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{B}} |f| \frac{|\partial g \wedge \partial \rho|^2}{|g|^4} d\lambda = & \int_{\mathbb{B}} \frac{|f|}{|g|^2\,\mu(|g|)} \frac{|\partial g \wedge \partial \rho|^2}{|g|^2}\mu(|g|) d\lambda \\
\leq & \left\| \frac{|f|}{|g|^2\,\mu(|g|)} \right\|_{M^1} \left\| \frac{|\partial g \wedge \partial \rho|^2}{|g|^2}\mu(|g|) \right\|_{V^1} \\
\leq & C(K)
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration pour $p = 1$.

• Interpolation :
Considérons l'application linéaire L définie par

$$L(G) = \frac{\sqrt{-\rho}\nu}{|g|^3}\partial(G\,|g|^2\,\mu(|g|))$$

On a montré que L est bornée de $M^1(\mathbb{B})$ dans $V^0(\mathbb{B})$ et de $M^\infty(\mathbb{B})$ dans $V^1(\mathbb{B})$, de normes majorées par $C(K)$. On en déduit par interpolation que L est bornée de $(M^1(\mathbb{B}), M^\infty(\mathbb{B}))_{\theta,p}$ dans $(V^0(\mathbb{B}), V^1(\mathbb{B}))_{\theta,p}$, i.e., d'après le théorème 2.4.25 ci-dessous et le lemme 2.4.18 **c)**, de $M^p(\mathbb{B})$ dans $W^\alpha(\mathbb{B})$, où $\frac{1}{p} = 1 - \alpha$.

Théorème 2.4.25 *Soit $\theta \in]0, 1[$, et p tel que $\frac{1}{p} = 1 - \theta$. Alors on a*

$$(V^0(\mathbb{B}), V^1(\mathbb{B}))_{\theta,p} = W^\theta(\mathbb{B})$$

Ce théorème a été démontré par E. Amar et A. Bonami dans [2].

2.4.6 Démonstration des inégalités concernant $|\partial f|$.

Démonstration du lemme 2.4.22.

Il s'agit de démontrer que

Si h est une fonction holomorphe dans $\mathbb{B}$ de classe $C^\infty(\overline{\mathbb{B}})$ elle vérifie :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}}(-\rho)\frac{|\partial h|^2}{|g|^4\mu(|g|)}d\lambda \quad\leq\quad & C_1\int_{\mathbb{B}}\frac{|h|^2}{|g|^4\mu(|g|)}d\lambda\\ &+C_2\int_{\mathbb{B}}\int_{\partial\mathbb{B}}\frac{|h|^2}{|g|^4\mu(|g|)}(\zeta)P(z,\zeta)d\sigma(\zeta)d\lambda(z)\\ &+C_3\int_{\mathbb{B}}(-\rho)\frac{|h|^2|\partial g|^2}{|g|^6\mu(|g|)}d\lambda\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}}\frac{|\partial h\wedge\partial\rho|^2}{|g|^4\mu(|g|)}d\lambda \quad\leq\quad & C_1\int_{\mathbb{B}}\frac{|h|^2}{|g|^4\mu(|g|)}d\lambda\\ &+C_2\int_{\mathbb{B}}\int_{\partial\mathbb{B}}\frac{|h|^2}{|g|^4\mu(|g|)}(\zeta)P(z,\zeta)d\sigma(\zeta)d\lambda(z)\\ &+C_3\int_{\mathbb{B}}(-\rho)\frac{|h|^2|\partial g|^2}{|g|^6\mu(|g|)}d\lambda\\ &+C_4\int_{\mathbb{B}}\frac{|h|^2|\partial g\wedge\partial\rho|^2}{|g|^6\mu(|g|)}d\lambda\end{aligned}$$

où P est le noyau de Poisson de la boule et C_1, C_2, C_3 et C_4 sont des constantes absolues.

Montrons d'abord la première inégalité. Il s'agit de majorer l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{B}}(-\rho)\frac{|\partial h|^2}{|g|^4\mu(|g|)}d\lambda$ quand $h\in Hol(\mathbb{B})\cap C^\infty(\overline{\mathbb{B}})$. Pour cela on prend $\eta>0$ et on applique la formule de Green à la fonction

$$v=\frac{|h|^2}{|g^\eta|^4\mu(|g^\eta|)}\in C^\infty(\overline{\mathbb{B}})$$

Puisque $v\in C^1(\overline{\mathbb{B}})$, on a, pour $z\in\mathbb{B}$,

$$v(z)=\int_{\mathbb{B}}G(z,\zeta)\Delta v(\zeta)d\lambda(\zeta)+\int_{\partial\mathbb{B}}P(z,\zeta)v(\zeta)d\sigma(\zeta)$$

où G est le noyau de Green de $\mathbb{B}$ et P le noyau de Poisson. On intègre alors cette égalité par rapport à $z\in\mathbb{B}$, et on obtient :

$$\int_{\mathbb{B}}vd\lambda=\frac{1}{8}\int_{\mathbb{B}}\rho\ \Delta vd\lambda+\int_{\mathbb{B}}\int_{\partial\mathbb{B}}P(z,\zeta)v(\zeta)d\sigma(\zeta)d\lambda(z) \tag{4.5}$$

En effet, calculons $L(\zeta) = \int_{\mathbb{B}} G(z,\zeta) d\lambda(z)$; par symétrie de G on a $L(\zeta) = \int_{\mathbb{B}} G(\zeta, z) d\lambda(z)$. Alors par définition du noyau de Green, L est la fonction qui vérifie $\Delta L = 1$ dans $\mathbb{B}$ et $L\,|_{\partial\mathbb{B}} = 0$. Donc $L(\zeta) = \frac{|\zeta|^2 - 1}{8} = \frac{1}{8}\rho(z)$.

Calculons le Laplacien de v.

$$\Delta v = 4 \sum_{i=1}^{n} \partial_i \overline{\partial}_i v$$

Dans la suite de cette démonstration on note μ pour $\mu(|g^\eta|)$.

$$\overline{\partial}_i v = \frac{h \overline{\partial}_i \overline{h}}{|g^\eta|^4 \mu} - 2 \frac{|h|^2}{|g^\eta|^6 \mu} \overline{\partial}_i \left|g^\eta\right|^2 - \frac{|h|^2}{|g^\eta|^4 \mu^2} \overline{\partial}_i \mu$$

$$\begin{aligned}
\partial_i \overline{\partial}_i v = \quad & \frac{\partial_i h \overline{\partial}_i \overline{h}}{|g^\eta|^4 \mu} - \frac{2 h \overline{\partial}_i \overline{h} \partial_i \left|g^\eta\right|^2}{|g^\eta|^6 \mu} - \frac{h \partial_i \mu \overline{\partial}_i \overline{h}}{|g^\eta|^4 \mu^2} - \frac{2 \overline{h} \partial_i h \overline{\partial}_i \left|g^\eta\right|^2}{|g^\eta|^6 \mu} \\
& - \frac{2 |h|^2 \partial_i \overline{\partial}_i \left|g^\eta\right|^2}{|g^\eta|^6 \mu} + \frac{6 |h|^2 \left|\partial_i \left|g^\eta\right|^2\right|^2}{|g^\eta|^8 \mu} + \frac{2 |h|^2 \partial_i \mu \overline{\partial}_i \left|g^\eta\right|^2}{|g^\eta|^6 \mu^2} \\
& - \frac{\overline{h} \partial_i h \overline{\partial}_i \mu}{|g^\eta|^4 \mu^2} - \frac{|h|^2 \partial_i \overline{\partial}_i \mu}{|g^\eta|^4 \mu^2} + \frac{2 |h|^2 \partial_i \left|g^\eta\right|^2 \overline{\partial}_i \mu}{|g^\eta|^6 \mu^2} + \frac{2 |h|^2 \left|\partial_i \mu\right|^2}{|g^\eta|^4 \mu^3}
\end{aligned}$$

Or

$$\partial_i \overline{\partial}_i \left|g^\eta\right|^2 = \sum_{k=1}^{m+1} \partial_i \overline{\partial}_i \left|g_k\right|^2 = \sum_{k=1}^{m+1} \partial_i g_k \overline{\partial}_i \overline{g}_k = \sum_{k=1}^{m+1} \left|\partial_i g_k\right|^2$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{n} \partial_i \overline{\partial}_i \left|g^\eta\right|^2 = \left|\partial g\right|^2$$

De même

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\partial_i \left|g^\eta\right|^2\right| = \left|\partial \left|g^\eta\right|^2\right|^2$$

Nous utilisons alors le lemme suivant qui donne les dérivées de μ et qui sera démontré au paragraphe 2.8.

Lemme 2.4.26 *Soit $\eta > 0$. On a, pour tout entier i compris entre 1 et n,*

$$\overline{\partial}_i \partial_i \mu = \frac{\overline{\partial}_i \partial_i \left|g^\eta\right|^2}{|g^\eta|^2} \nu_1(|g^\eta|) + \frac{\left|\partial_i \left|g^\eta\right|^2\right|^2}{|g^\eta|^4} \nu_2(|g^\eta|)$$

et

$$\partial_i \mu = \frac{\partial_i \left|g^\eta\right|^2}{|g^\eta|^2} \nu_1(|g^\eta|)$$

où ν_1 et ν_2 sont définis par

$$\nu_1(x) = \int_0^1 sx^{2s} d\mu_0(s) \qquad \text{et} \qquad \nu_2(x) = \int_0^1 s(s-1)x^{2s} d\mu_0(s)$$

et vérifient

$$0 \leq \nu_i(x) \leq \mu(x) \tag{4.6}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\Delta v = \quad & \frac{|\partial h|^2}{|g^\eta|^4 \mu} - 2Re\left(\frac{h}{|g^\eta|^6 \mu} (\sum_{i=1}^n \overline{\partial}_i \overline{h} \partial_i |g^\eta|^2)(2 + \frac{\nu_1}{\mu}) \right) \\ & - \frac{|h|^2 |\partial g|^2}{|g^\eta|^6 \mu}(2 + \frac{\nu_1}{\mu}) + \frac{|h|^2 \left|\partial |g^\eta|^2\right|^2}{|g^\eta|^8 \mu}(6 + \frac{2\nu_1}{\mu} - \frac{\nu_2}{\mu} + \frac{2\nu_1}{\mu} + \frac{2\nu_1^2}{\mu^2}) \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités (4.6), $\left|\partial |g^\eta|^2\right|^2 \leq |g^\eta|^2 |\partial g|^2$ et l'égalité (4.5), on obtient, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}} (-\rho) \frac{|\partial h|^2}{|g^\eta|^4 \mu} d\lambda \leq \quad & \frac{1}{4} \int_{\mathbb{B}} v d\lambda + \int_{\mathbb{B}} \int_{\partial\mathbb{B}} P(z,\zeta) v(\zeta) d\sigma(\zeta) d\lambda(z) \\ & + t \int_{\mathbb{B}} (-\rho) \frac{|\partial h|^2}{|g^\eta|^4 \mu} d\lambda + \frac{36}{t} \int_{\mathbb{B}} (-\rho) \frac{|h|^2 |\partial g|^2}{|g^\eta|^6 \mu} d\lambda \\ & + 17 \int_{\mathbb{B}} (-\rho) \frac{|h|^2 |\partial g|^2}{|g^\eta|^6 \mu} d\lambda \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}} (-\rho) \frac{|\partial h|^2}{|g^\eta|^4 \mu} d\lambda \leq \quad & \frac{2}{1-t} \int_{\mathbb{B}} \frac{|h|^2}{|g^\eta|^4 \mu} d\lambda + \frac{(17 + \frac{36}{t})}{1-t} \int_{\mathbb{B}} (-\rho) \frac{|h|^2 |\partial g|^2}{|g^\eta|^6 \mu} d\lambda \\ & + \frac{2}{1-t} \int_{\mathbb{B}} \int_{\partial\mathbb{B}} \frac{|h|^2}{|g^\eta|^4 \mu}(\zeta) P(z,\zeta) d\sigma(\zeta) d\lambda(z) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Il suffit alors de choisir $t \in]0,1[$ et de faire tendre η vers 0 pour obtenir le résultat.

Montrons à présent la deuxième inégalité :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}} \frac{|\partial h \wedge \partial \rho|^2}{|g|^4 \mu(|g|)} d\lambda \quad \leq \quad & C_1 \int_{\mathbb{B}} \frac{|h|^2}{|g|^4 \mu(|g|)} d\lambda \\ & + C_2 \int_{\mathbb{B}} \int_{\partial\mathbb{B}} \frac{|h|^2}{|g|^4 \mu(|g|)}(\zeta) P(z,\zeta) d\sigma(\zeta) d\lambda(z) \\ & + C_3 \int_{\mathbb{B}} (-\rho) \frac{|h|^2 |\partial g|^2}{|g|^6 \mu(|g|)} d\lambda \\ & + C_4 \int_{\mathbb{B}} \frac{|h|^2 |\partial g \wedge \partial \rho|^2}{|g|^6 \mu(|g|)} d\lambda \end{aligned}$$

Pour cela on prend $\eta > 0$ et applique deux fois la formule de Stokes de la façon suivante :

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\partial\mathbb{B}} \rho \frac{\partial h \wedge \overline{\partial h} \wedge \partial\rho \wedge (\partial\overline{\partial}\rho)^{n-2}}{|g^\eta|^4 \mu(|g^\eta|)} = \quad & \int_{\mathbb{B}} \frac{\partial h \wedge \partial\rho \wedge \overline{\partial h} \wedge \overline{\partial}\rho \wedge (\partial\overline{\partial}\rho)^{n-2}}{|g^\eta|^4 \mu(|g^\eta|)} \\ & + \int_{\mathbb{B}} (-\rho) \frac{\partial h \wedge \overline{\partial h} \wedge (\partial\overline{\partial}\rho)^{n-1}}{|g^\eta|^4 \mu(|g^\eta|)} \\ & + \int_{\mathbb{B}} \rho \overline{\partial}(\frac{1}{|g^\eta|^4 \mu(|g^\eta|)}) \wedge \partial h \wedge \overline{\partial h} \wedge \partial\rho \wedge (\partial\overline{\partial}\rho)^{n-2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\partial\mathbb{B}} \overline{h} \rho \overline{\partial}(\frac{1}{|g^\eta|^4 \mu(|g^\eta|)}) \wedge \partial h \wedge \partial\rho \wedge (\partial\overline{\partial}\rho)^{n-2} = \quad & - \int_{\mathbb{B}} \overline{h} \rho \overline{\partial}(\frac{1}{|g^\eta|^4 \mu(|g^\eta|)}) \wedge \partial h \wedge (\partial\overline{\partial}\rho)^{n-1} \\ & + \int_{\mathbb{B}} \rho \overline{\partial}(\frac{1}{|g^\eta|^4 \mu(|g^\eta|)}) \wedge \partial h \wedge \overline{\partial h} \wedge \partial\rho \wedge (\partial\overline{\partial}\rho)^{n-2} \\ & + \int_{\mathbb{B}} \overline{h}\ \overline{\partial}\rho \wedge \overline{\partial}(\frac{1}{|g^\eta|^4 \mu(|g^\eta|)}) \wedge \partial h \wedge \partial\rho \wedge (\partial\overline{\partial}\rho)^{n-2} \end{aligned}$$

Si on note

$$\begin{aligned} A &= \int_{\mathbb{B}} \frac{|\partial h \wedge \partial\rho|^2}{|g^\eta|^4 \mu(|g^\eta|)} d\lambda \\ B &= \int_{\mathbb{B}} (-\rho) \frac{|\partial h|^2}{|g^\eta|^4 \mu(|g^\eta|)} d\lambda \\ D &= \int_{\mathbb{B}} \overline{h\partial}\rho \wedge \overline{\partial}(\frac{1}{|g^\eta|^4 \mu(|g^\eta|)}) \wedge \partial h \wedge \partial\rho \wedge (\partial\overline{\partial}\rho)^{n-2} \\ E &= \int_{\mathbb{B}} \overline{h} \rho \overline{\partial}(\frac{1}{|g^\eta|^4 \mu(|g^\eta|)}) \wedge \partial h \wedge (\partial\overline{\partial}\rho)^{n-1} \end{aligned}$$

on obtient alors

$$A + B = D - E \tag{4.8}$$

Nous cherchons à majorer A. L'intégrale B est majorée grâce à la première inégalité du lemme (inégalité (4.7)).
Grâce au lemme 2.4.26 on peut calculer

$$\overline{\partial}\left(\frac{1}{|g^\eta|^4 \mu(|g^\eta|)}\right) = -\frac{\overline{\partial}\,|g^\eta|^2}{|g^\eta|^6 \mu(|g^\eta|)}(2 + \frac{\nu_1}{\mu})$$

Pour majorer D et E on applique alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz tout en utilisant le fait que $\nu_1 \leq \mu$:

$$
\begin{aligned}
|D| &\leq 3\left(\int_{\mathbb{B}} \frac{|h|^2 |\partial g \wedge \partial\rho|^2}{|g^\eta|^6 \mu(|g^\eta|)} d\lambda\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{B}} \frac{|\partial h \wedge \partial\rho|^2}{|g^\eta|^4 \mu(|g^\eta|)} d\lambda\right)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{t}\int_{\mathbb{B}} \frac{|h|^2 |\partial g \wedge \partial\rho|^2}{|g^\eta|^6 \mu(|g^\eta|)} d\lambda + tA
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|E| &\leq \left(\int_{\mathbb{B}} (-\rho)\frac{|h|^2 |\partial g|^2}{|g^\eta|^6 \mu(|g^\eta|)} d\lambda\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{B}} (-\rho)\frac{|\partial h|^2}{|g^\eta|^4 \mu(|g^\eta|)} d\lambda\right)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{t}\int_{\mathbb{B}} (-\rho)\frac{|h|^2 |\partial g|^2}{|g^\eta|^6 \mu(|g^\eta|)} d\lambda + tB
\end{aligned}
$$

Ces deux inégalités, l'inégalité (4.7) ainsi que (4.8) nous permettent d'en déduire, en choisissant t suffisamment petit et en faisant tendre η vers 0, la deuxième partie du lemme.

Démonstration du lemme 2.4.24.

Il s'agit de démontrer ceci :

Soit $h \in Hol(\mathbb{B}) \cap C^\infty(\overline{\mathbb{B}})$. Alors

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{B}} (-\rho)\frac{|\partial h|^2}{|h|\,|g|^2} d\lambda \leq \quad & C_1 \int_{\mathbb{B}} \frac{|h|}{|g|^2} d\lambda \\
& + C_2 \int_{\mathbb{B}}\int_{\partial\mathbb{B}} \frac{|h|}{|g|^2}(\zeta) P(z,\zeta) d\sigma(\zeta) d\lambda(z) \\
& + C_3 \int_{\mathbb{B}} (-\rho)\frac{|h|\,|\partial g|^2}{|g|^4} d\lambda
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{B}} \frac{|\partial h \wedge \partial\rho|^2}{|h|\,|g|^2} d\lambda \leq \quad & C_1 \int_{\mathbb{B}} \frac{|h|}{|g|^2} d\lambda \\
& + C_2 \int_{\mathbb{B}}\int_{\partial\mathbb{B}} \frac{|h|}{|g|^2}(\zeta) P(z,\zeta) d\sigma(\zeta) d\lambda(z) \\
& + C_3 \int_{\mathbb{B}} (-\rho)\frac{|h|\,|\partial g|^2}{|g|^4} d\lambda \\
& + C_4 \int_{\mathbb{B}} |h| \frac{|\partial g \wedge \partial\rho|^2}{|g|^4} d\lambda
\end{aligned}
$$

où P est le noyau de Poisson de la boule et C_1, C_2, C_3 et C_4 sont des constantes absolues.

On démontre d'abord la première inégalité. Pour cela on prend $\eta > 0$ et on applique comme précédemment la formule de Green à la fonction

$$v = \frac{(|h|^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}}}{|g^\eta|^2}$$

qui est bien dans $C^1(\overline{\mathbb{B}})$. Dans la suite on note $|h^\eta|^2 = |h|^2 + \eta^2$. Calculons le Laplacien de v :

$$\begin{aligned}\Delta v = \quad & \frac{1}{2}\frac{|h^\eta|^{-1}|\partial h|^2}{|g^\eta|^2}\left(1 - \frac{|h|^2}{2|h^\eta|^2}\right) - Re\left(\frac{|h^\eta|^{-1}\overline{h}}{|g^\eta|^4}\sum_{i=1}^{n}\partial_i h \overline{\partial}_i |g^\eta|^2\right) \\ & -\frac{|h^\eta||\partial g|^2}{|g^\eta|^4} + 2\frac{|h^\eta|\left|\partial |g^\eta|^2\right|^2}{|g^\eta|^6}\end{aligned}$$

On applique alors l'égalité (4.5), en utilisant le fait que $1 - \dfrac{|h|^2}{2|h^\eta|^2} \geq \dfrac{1}{2}$ ainsi que le fait que $\left|\partial |g^\eta|^2\right|^2 \leq |g^\eta|^2 |\partial g|^2$, et on obtient, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned}C\int_{\mathbb{B}}(-\rho)\frac{|h^\eta|^{-1}|\partial h|^2}{|g^\eta|^2}d\lambda \leq \quad & \int_{\mathbb{B}} v d\lambda + \int_{\mathbb{B}}\int_{\partial\mathbb{B}} P(z,\zeta)v(\zeta)d\sigma(\zeta)d\lambda(z) \\ & + t\int_{\mathbb{B}}(-\rho)\frac{|h^\eta|^{-1}|\partial h|^2}{|g^\eta|^2}d\lambda \\ & + \frac{1}{t}\int_{\mathbb{B}}(-\rho)\frac{|h^\eta|^{-1}|h|^2|\partial g|^2}{|g^\eta|^4}d\lambda \\ & + \int_{\mathbb{B}}(-\rho)\frac{|h^\eta||\partial g|^2}{|g^\eta|^4}d\lambda\end{aligned} \tag{4.9}$$

où C est une constante positive. Il suffit alors de choisir t suffisamment petit ($t < C$) et de faire tendre η vers 0 pour obtenir l'inégalité voulue.

Pour la deuxième inégalité du lemme on prend $\eta > 0$ et on applique deux fois la formule de Stokes de la façon suivante :

$$\begin{aligned}0 = \int_{\partial\mathbb{B}}\rho\frac{\partial h \wedge \overline{\partial h} \wedge \partial\rho \wedge (\partial\overline{\partial}\rho)^{n-2}}{|h^\eta||g^\eta|^2} = \quad & \int_{\mathbb{B}}\frac{\partial h \wedge \partial\rho \wedge \overline{\partial h} \wedge \overline{\partial}\rho \wedge (\partial\overline{\partial}\rho)^{n-2}}{|h^\eta||g^\eta|^2} \\ & + \int_{\mathbb{B}}(-\rho)\frac{\partial h \wedge \overline{\partial h} \wedge (\partial\overline{\partial}\rho)^{n-1}}{|h^\eta||g^\eta|^2} \\ & + \int_{\mathbb{B}}\rho\overline{\partial}\left(\frac{1}{|h^\eta||g^\eta|^2}\right) \wedge \partial h \wedge \overline{\partial h} \wedge \partial\rho \wedge (\partial\overline{\partial}\rho)^{n-2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
0=\int_{\partial\mathbb{B}}\rho\overline{h\partial}(\frac{1}{|h^\eta|\,|g^\eta|^2})\wedge\partial h\wedge\partial\rho\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-2} = & -\int_{\mathbb{B}}\rho\overline{h\partial}(\frac{1}{|h^\eta|\,|g^\eta|^2})\wedge\partial h\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-1}\\
&+\int_{\mathbb{B}}\rho\overline{\partial}(\frac{1}{|h^\eta|\,|g^\eta|^2})\wedge\partial h\wedge\overline{\partial h}\wedge\partial\rho\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-2}\\
&+\int_{\mathbb{B}}\overline{h\partial}\rho\wedge\overline{\partial}(\frac{1}{|h^\eta|\,|g^\eta|^2})\wedge\partial h\wedge\partial\rho\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-2}
\end{aligned}
$$

Or on a

$$
\overline{\partial}\left(\frac{1}{|h^\eta|\,|g^\eta|^2}\right)=\frac{\overline{\partial}\,|g^\eta|^2}{|h^\eta|\,|g^\eta|^4}-\frac{1}{2}\frac{h\overline{\partial h}}{|h^\eta|^3\,|g^\eta|^2}
$$

On en déduit que

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{B}}(1+\frac{|h|^2}{2\,|h^\eta|^2})(-\rho)\frac{\partial h\wedge\overline{\partial h}\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-1}}{|h^\eta|\,|g^\eta|^2}+\int_{\mathbb{B}}(1+\frac{|h|^2}{2\,|h^\eta|^2})\frac{\partial h\wedge\partial\rho\wedge\overline{\partial h}\wedge\overline{\partial}\rho\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-2}}{|h^\eta|\,|g^\eta|^2}=\\
&\qquad\int_{\mathbb{B}}(-\rho)\overline{h}\frac{\overline{\partial}\,|g^\eta|^2}{|h^\eta|\,|g^\eta|^4}\wedge\partial h\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-1}+\int_{\mathbb{B}}\overline{h\partial}\rho\wedge\frac{\overline{\partial}\,|g^\eta|^2}{|h^\eta|\,|g^\eta|^4}\wedge\partial h\wedge\partial\rho\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-2}
\end{aligned}
$$

Puisque $1\leq 1+\dfrac{|h|^2}{2\,|h^\eta|^2}\leq 2$, si on note

$$
\begin{aligned}
A&=\int_{\mathbb{B}}\frac{|\partial h\wedge\partial\rho|^2}{|h^\eta|\,|g^\eta|^2}d\lambda\\
B&=\int_{\mathbb{B}}(-\rho)\frac{|\partial h|^2}{|h^\eta|\,|g^\eta|^2}d\lambda\\
D&=\int_{\mathbb{B}}(-\rho)\overline{h}\frac{\overline{\partial}\,|g^\eta|^2}{|h^\eta|\,|g^\eta|^4}\wedge\partial h\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-1}\\
E&=\int_{\mathbb{B}}\overline{h\partial}\rho\wedge\frac{\overline{\partial}\,|g^\eta|^2}{|h^\eta|\,|g^\eta|^4}\wedge\partial h\wedge\partial\rho\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-2}
\end{aligned}
$$

on a alors

$$
A\leq 2(B+|D|+|E|)
$$

On cherche à majorer A. L'inégalité (4.9) permet de majorer B. Pour estimer D et E on utilise le fait que $|h|\leq|h^\eta|$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir

$$
\begin{aligned}
|D|&\leq\sqrt{B}\left(\int_{\mathbb{B}}|h|\,(-\rho)\frac{|\partial g|^2}{|g^\eta|^4}d\lambda\right)^{1/2} & & |E|\leq\sqrt{A}\left(\int_{\mathbb{B}}|h|\,\frac{|\partial g\wedge\partial\rho|^2}{|g^\eta|^4}d\lambda\right)^{1/2}\\
&\leq tB+\frac{1}{t}\int_{\mathbb{B}}|h|\,(-\rho)\frac{|\partial g|^2}{|g^\eta|^4}d\lambda & \text{et} & \quad\leq tA+\frac{1}{t}\int_{\mathbb{B}}|h|\,\frac{|\partial g\wedge\partial\rho|^2}{|g^\eta|^4}d\lambda
\end{aligned}
$$

Il suffit alors de choisir t suffisamment petit et de faire tendre η vers 0 pour obtenir le résultat.

2.5 Les espaces $M^p(\mathbb{B})$.

2.5.1 Description des domaines admissibles.

Le domaine admissible de sommet $\zeta \in \partial\mathbb{B}$ est défini par

$$\Gamma_\zeta = \{b \in \mathbb{B}/ \ \left|1 - \overline{\zeta}.b\right| < 2(1 - |b|^2)\}$$

On aurait pu choisir, comme dans [19], de définir les domaines admissibles par $\Gamma_\zeta = \{b \in \mathbb{B}/ \ \left|1 - \overline{\zeta}.b\right| < s(1 - |b|^2)\}$ où $s > \frac{1}{2}$. Cependant, comme les fonctions qu'on considère ne sont pas régulières dans $\mathbb{B}$, on a besoin que tout point de la boule se trouve dans un domaine admissible. En particulier, il faut que 0 soit dans un de ces domaines, ce qui entraîne que $1 < s$. Cette condition est suffisante pour assurer que les domaines admissibles recouvrent entièrement le boule (ce qui entraîne par exemple qu'une fonction de $M^p(\mathbb{B})$ est bornée presque partout sur tout compact de $\mathbb{B}$). Pour des raisons de simplicité on choisit $s = 2$.
Avec cette définition Γ_ζ est tangent à $\partial\mathbb{B}$ dans les directions tangentes complexes et non tangent dans la direction conjuguée de la normale. Pour le montrer, il suffit de s'intéresser au cas où ζ est le point $\mathbf{1} = (1, 0, ..., 0)$, car si R est une rotation, $R(\Gamma_\zeta) = \Gamma_{R(\zeta)}$. On a par définition

$$\Gamma_{\mathbf{1}} = \{b \in \mathbb{B}/ \ |1 - b_1| < 2(1 - |b|^2)\}$$

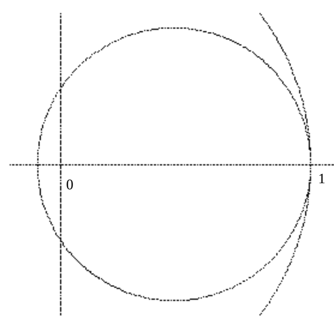

FIG. 2.1 – Le domaine admissible dans le plan engendré par (1,0,...,0) et (0,1,0,...,0)

La courbe c définie dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ par

$$\forall t \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[, \ c(t) = (1 - t^2, 0, ..., 0, \frac{t}{2}, 0, ..., 0)$$

vérifie

$$c(0) = \mathbf{1} \qquad \text{et} \qquad c'(0) = (1, 0, ..., 0, \frac{1}{2}, 0, ..., 0)$$

donc a sa dérivée dans l'espace complexe tangent à $\partial\mathbb{B}$ en $\mathbf{1}$. De plus c est incluse dans $\Gamma_{\mathbf{1}}$. En effet, pour tout $t \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$,

$$|1 - \mathbf{1}.\overline{c}(t)| = \left|1 - (1 - t^2)\right| = t^2$$

$$1 - |c(t)|^2 = 1 - (1 - t^2)^2 - \frac{t^2}{4} = t^2(\frac{7}{4} - t^2)$$

d'où, puisque $t^2 < \frac{3}{4}$, $|1 - \mathbf{1}.c(t)| < 2(1 - |c(t)|^2)$. Enfin

$$|c(t)|^2 = 1 + t^2(t^2 - \frac{7}{4})$$

et, puisque $t^2 < \frac{7}{4}$, $c(t)$ est dans $\mathbb{B}$. On a ainsi montré que $\Gamma_{\mathbf{1}}$ est tangent à $\partial\mathbb{B}$ dans les directions tangentes complexes.

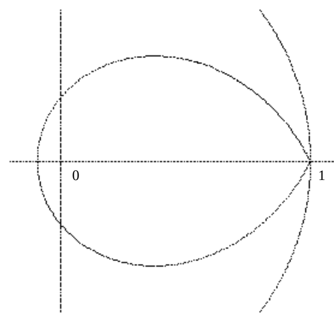

FIG. 2.2 – Le domaine admissible dans le plan engendré par (1,0,...,0) et (i,0,...,0)

Pour montrer que $\Gamma_{\mathbf{1}}$ est non tangent dans la direction conjuguée de la normale, prenons c une courbe régulière telle que

$$c(0) = \mathbf{1} \quad \text{et} \quad c'(0) = (i, 0, ..., 0) \tag{5.1}$$

Montrons que c ne peut pas être incluse dans $\Gamma_{\mathbf{1}}$ au voisinage de 0. L'hypothèse (5.1) nous permet de développer c au voisinage de 0 :

$$c(t) = (1 + it + tx(t) + ity(t), t\epsilon(t))$$

où x et y sont des fonctions réelles et ϵ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}^{n-1}$, qui tendent vers 0 quand t tend vers 0. On peut alors calculer :

$$|1 - \mathbf{1}.\overline{c}(t)| = |t|\,|i(1 + y) - x|$$

$$1 - |c(t)|^2 = -t(t(1 + x^2 + y^2 + 2y + |\epsilon|^2) + 2x)$$

On en déduit que

$$\frac{|1 - \mathbf{1}.\overline{c}(t)|}{1 - |c(t)|^2} = -sg(t)\frac{|i(1 + y) - x|}{t(1 + x^2 + y^2 + 2y + |\epsilon|^2) + 2x}$$

et puisque les fonctions x,y et ϵ tendent vers 0 quand t tend vers 0, on en déduit que $\dfrac{|1-\mathbf{1}.\overline{c}(t)|}{1-|c(t)|^2}$ n'est pas borné au voisinage de 0, et donc que $c(t)$ n'appartient pas à $\Gamma_{\mathbf{1}}$ au voisinage de 0, ce qui montre bien que $\Gamma_{\mathbf{1}}$ est non tangente dans la direction conjuguée de la normale.

2.5.2 Propriétés des espaces $M^p(\mathbb{B})$.

On va démontrer le lemme 2.4.18 qu'on rappelle ci-dessous :

a) *L'espace* $M^p(\mathbb{B})$ *est un espace de Banach,* $\forall p \in [1,+\infty]$.
b) *Soit* $p \in [1,+\infty[$ *et soit* $q \in]1,+\infty]$ *tels que* $q > p$*, alors* $M^q(\mathbb{B})$ *est dense dans* $M^p(\mathbb{B})$.
c) *Soient* $p_0,\ p_1 \in [1,+\infty]$, $\theta \in]0,1[$ *et* p *tels que* $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$. *Alors*

$$(M^{p_0}(\mathbb{B}), M^{p_1}(\mathbb{B}))_{\theta,p} = M^p(\mathbb{B})$$

Démonstration du point a) : On démontre que pour tout $p \in [1,+\infty]$, l'espace $M^p(\mathbb{B})$ est un espace de Banach.
Pour cela montrons que $M^p(\mathbb{B})$ est un sous espace fermé de $L^p(\partial\mathbb{B}, L^\infty(\Gamma))$, où Γ désigne le domaine admissible de sommet $\mathbf{1}$. Considérons l'application

$$I : M^p(\mathbb{B}) \longrightarrow L^p(\partial\mathbb{B}, L^\infty(\Gamma))$$

définie par

$$I(f)(\zeta,\gamma) = f(r_\zeta(\gamma))$$

où r_ζ est la rotation telle que $r_\zeta(\mathbf{1}) = \zeta$. On vérifie aisément que I est linéaire, isométrique, et on identifie $M^p(\mathbb{B})$ avec son image par I. Soit (f_n) une suite de $M^p(\mathbb{B})$ qui converge vers une fonction f de $L^p(\partial\mathbb{B}, L^\infty(\Gamma))$. Montrons que $f \in M^p(\mathbb{B})$. Soient $(\zeta,\zeta') \in \partial\mathbb{B}^2$ et $(\gamma,\gamma') \in \Gamma^2$ tels que $r_\zeta(\gamma) = r_{\zeta'}(\gamma')$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$ on a

$$|f(\zeta,\gamma) - f(\zeta',\gamma')| \leq |f(\zeta,\gamma) - f_n(\zeta,\gamma)| + |f(\zeta',\gamma') - f_n(\zeta',\gamma')|$$

Or $\operatorname{Sup}_{\gamma\in\Gamma} |f(\zeta,\gamma) - f_n(\zeta,\gamma)|$ tend vers 0 dans $L^p(\partial\mathbb{B})$, donc il existe une sous-suite qui tend vers 0 presque partout dans $\partial\mathbb{B}$. On en déduit qu'une sous-suite de $|f(\zeta,\gamma) - f_n(\zeta,\gamma)|$ tend vers 0 presque partout dans $\partial\mathbb{B} \times \Gamma$. Ainsi $f(\zeta,\gamma) = f(\zeta',\gamma')$ pour presque tous $\zeta,\zeta',\gamma,\gamma'$ tels que $r_\zeta(\gamma) = r_{\zeta'}(\gamma')$ donc f est égale presque partout à une fonction de $M^p(\mathbb{B})$, ce qui achève la démonstration du point **a)**.

Démonstration du point b) : On montre que si $p \in [1,+\infty[$ et $q \in]1,+\infty]$ vérifient $q > p$ alors $M^q(\mathbb{B})$ est dense dans $M^p(\mathbb{B})$.

Soit $f \in M^p(\mathbb{B})$ et, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n = \begin{cases} f & \text{si} \quad |f| < n \\ 0 & \text{si} \quad |f| \geq n \end{cases}$$

Alors $\forall z \in \mathbb{B}$, $|f_n(z)| < n$, donc $f_n \in L^\infty(\mathbb{B})$ et, par conséquent, $f_n \in M^q(\mathbb{B})$. Montrons que f_n tend vers f dans $M^p(\mathbb{B})$.
On a

$$|f_n - f|(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |f(z)| < n \\ |f(z)| & \text{si} \quad |f(z)| \geq n \end{cases}$$

On en déduit que

$$M(f_n - f)(\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad M(f)(\zeta) < n \\ M(f)(\zeta) & \text{si} \quad M(f)(\zeta) \geq n \end{cases}$$

Ainsi

$$S_n = \|f_n - f\|^p_{M^p} = \int_{\partial\mathbb{B}} |M(f_n - f)|^p \, d\sigma = \int_{\{\zeta / Mf(\zeta) \geq n\}} |Mf(\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta)$$

Et, puisque $f \in M^p(\mathbb{B})$, S_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Démonstration du point c) : On montre que si $p_0, p_1, p \in [1, +\infty]$ et $\theta \in]0, 1[$ vérifient l'égalité $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$ alors l'espace interpolé $(M^{p_0}(\mathbb{B}), M^{p_1}(\mathbb{B}))_{\theta,p}$ est égal à $M^p(\mathbb{B})$.
Montrons d'abord que $(M^{p_0}(\mathbb{B}), M^{p_1}(\mathbb{B}))_{\theta,p} \subset M^p(\mathbb{B})$.
Puisque la fonction I définie en **a)** est linéaire, continue, en considérant successivement $p = p_0$ et $p = p_1$ on en déduit (par interpolation) que I est aussi continue de $(M^{p_0}(\mathbb{B}), M^{p_1}(\mathbb{B}))_{\theta,p}$ dans $(L^{p_0}(\partial\mathbb{B}, L^\infty(\Gamma)), L^{p_1}(\partial\mathbb{B}, L^\infty(\Gamma)))_{\theta,p}$. Or ce dernier espace est égal à $L^p(\partial\mathbb{B}, L^\infty(\Gamma))$ (voir [8] p 108). Soit $f \in (M^{p_0}(\mathbb{B}), M^{p_1}(\mathbb{B}))_{\theta,p}$, alors $I(f) \in L^p(\partial\mathbb{B}, L^\infty(\Gamma))$. De plus $f \in M^{p_0}(\mathbb{B})$, ce qui entraîne que si $r_\zeta(\gamma) = r_{\zeta'}(\gamma')$ alors $I(f)(r_\zeta(\gamma)) = I(f)(r_{\zeta'}(\gamma'))$. On en déduit que $f \in M^p(\mathbb{B})$.

• Pour la deuxième inclusion examinons d'abord le cas où $p_1 = +\infty$. On a alors $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0}$.
Soit $f \in M^p(\mathbb{B})$. On note Mf^* le réarrangement décroissant de Mf défini de la façon suivante :
Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ on note

$$m(t, Mf) = \sigma\{\zeta \in \partial\mathbb{B} / |Mf(\zeta)| > t\}$$

où σ est toujours la mesure de Lebesgue sur $\partial\mathbb{B}$. Alors si $u \in \mathbb{R}^+$,

$$Mf^*(u) = \inf\{t \in \mathbb{R}^+ / m(t, Mf) \leq u\}$$

Soient $t \in \mathbb{R}^+$ et $z \in \mathbb{B}$; on définit

$$\begin{aligned} f_0(t)(z) &= f(z) - (Mf^*)(t^{p_0}) \frac{f(z)}{|f(z)|} && \text{si} \quad |f(z)| > (Mf^*)(t^{p_0}) \\ &= 0 && \text{sinon} \end{aligned}$$

et

$$f_1(t) = f - f_0(t)$$

Soit

$$H(t) = \|f_0(t)\|_{M^{p_0}} + t\,\|f_1(t)\|_{M^\infty}$$

Alors, par définition de $(M^{p_0}, M^\infty)_{\theta,p}$, on a

$$\|f\|_{(M^{p_0},M^\infty)_{\theta,p}} \leq \int_0^{+\infty} (t^{-\theta}H(t))^p \frac{dt}{t} = I$$

Evaluons $H(t)$.
Si $|f(z)| > Mf^*(t^{p_0})$, alors $|f_1(z)| = Mf^*(t^{p_0})$; sinon $|f_1(z)| = |f(z)| \leq Mf^*(t^{p_0})$. On en déduit que

$$\|f_1\|_\infty \leq Mf^*(t^{p_0})$$

Soit

$$E = \{\zeta \in \partial\mathbb{B}/Mf(\zeta) > Mf^*(t^{p_0})\}$$

Si $|f(z)| > Mf^*(t^{p_0})$ alors $|f_0(z)| = |f(z)|\left|1 - \dfrac{Mf^*(t^{p_0})}{|f(z)|}\right|$ et, puisque $|f(z)| > Mf^*(t^{p_0})$, on a $1 - \dfrac{Mf^*(t^{p_0})}{|f(z)|} > 0$ donc

$$|f_0(z)| = |f(z)| - Mf^*(t^{p_0})$$

On en déduit que si $Mf(\zeta) > Mf^*(t^{p_0})$ alors $Mf_0(\zeta) = Mf(\zeta) - Mf^*(t^{p_0})$, et que sinon $Mf_0(\zeta) = 0$. Ainsi

$$\|f_0\|^p_{M^{p_0}} = \int_{\partial\mathbb{B}} \|Mf_0\|^{p_0}\, d\sigma = \int_E (Mf(\zeta) - Mf^*(t^{p_0}))^{p_0} d\sigma(\zeta)$$

et donc

$$H(t) \leq \left(\int_E (Mf(\zeta) - Mf^*(t^{p_0}))^{p_0}\, d\sigma(\zeta)\right)^{1/p_0} + tMf^*(t^{p_0})$$

Soit

$$G(\zeta) = (Mf(\zeta) - Mf^*(t^{p_0}))\mathbb{1}_E$$

Calculons le réarrangement décroissant G^* de G. Soit $t \in \mathbb{R}^+$, $\zeta \in \partial\mathbb{B}$,

$$|G(\zeta)| > \lambda \Longleftrightarrow Mf(\zeta) > Mf^*(t^{p_0}) + \lambda$$

car $G \geq 0$, d'où

$$m(\lambda, G) = m(\lambda + Mf^*(t^{p_0}), Mf)$$

Ainsi,

$$\forall u \in \mathbb{R}^+,\ m(\lambda, G) \leq u \Longleftrightarrow m(\lambda + Mf^*(t^{p_0}), Mf) \leq u$$

Ainsi

$$\{\lambda \in \mathbb{R}^+/m(\lambda, G) \leq u\} = \big(\{v \in \mathbb{R}^+/m(v, Mf) \leq u\} \cap [Mf^*(t^{p_0}), +\infty[\big) - Mf^*(t^{p_0})$$

d'où on déduit que

$$G^*(u) = \begin{cases} Mf^*(u) - Mf^*(t^{p_0}) & \text{si} \quad Mf^*(u) \geq Mf^*(t^{p_0}) \\ Mf^*(t^{p_0}) - Mf^*(t^{p_0}) \ = 0 & \text{si} \quad Mf^*(u) \leq Mf^*(t^{p_0}) \end{cases}$$

Or

$$\int_{\partial\mathbb{B}} G(\zeta)^{p_0} d\sigma(\zeta) = \int_0^{+\infty} G^*(u)^{p_0} du.$$

donc

$$H(t) \leq \left(\int_0^{+\infty} G^*(u)^{p_0} du \right)^{1/p_0} + tMf^*(t^{p_0})$$

De plus Mf^* est une fonction décroissante, donc

$$H(t) \leq \left(\int_0^{t^{p_0}} (Mf^*(u) - Mf^*(t^{p_0}))^{p_0} \, du \right)^{1/p_0} + tMf^*(t^{p_0})$$

Or

$$tMf^*(t^{p_0}) = (t^{p_0}(Mf^*(t^{p_0}))^{p_0})^{1/p_0} = \left((Mf^*(t^{p_0}))^{p_0} \int_0^{t^{p_0}} du \right)^{1/p_0}$$

Puisque Mf^* est décroissante on a

$$tMf^*(t^{p_0}) \leq \left(\int_0^{t^{p_0}} (Mf^*(u))^{p_0} du \right)^{1/p_0}$$

d'où

$$H(t) \leq 2 \left(\int_0^{t^{p_0}} (Mf^*(u))^{p_0} du \right)^{1/p_0}$$

alors

$$I \leq 2^p \int_0^{+\infty} t^{-\theta p} \left(\int_0^{t^{p_0}} (Mf^*(u))^{p_0} du \right)^{p/p_0} \frac{dt}{t}$$

On effectue le changement de variable $u = vt^{p_0}$ et on obtient

$$I \leq 2^p \int_0^{+\infty} t^{-\theta p} t^p \left(\int_0^1 (Mf^*(vt^{p_0}))^{p_0} dv \right)^{p/p_0} \frac{dt}{t}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Sachant que $(1-\theta)p = p_0$ on a

$$I \leq 2^p \int_0^{+\infty} t^{p_0} \left(\int_0^1 v^\alpha (Mf^*(vt^{p_0}))^{p_0} \frac{dv}{v^\alpha} \right)^{p/p_0} \frac{dt}{t}$$

On applique alors l'inégalité de Hölder

$$I \leq 2^p \int_0^{+\infty} t^{p_0} \left(\int_0^1 v^{\frac{\alpha p}{p_0}} (Mf^*(vt^{p_0}))^p dv \right) \left(\int_0^1 \frac{dv}{v^{\frac{\alpha p}{p-p_0}}} \right)^{(p-p_0)/p} \frac{dt}{t}$$

car $\dfrac{p}{p_0} > 1$. Si $\dfrac{\alpha p}{p - p_0} < 1$, i.e. si $\alpha < 1 - \dfrac{p_0}{p}$ alors

$$I \leq 2^p \left(\frac{1}{1-\frac{\alpha p}{p-p_0}} \right)^{\frac{p-p_0}{p}} \int_0^{+\infty} t^{p_0} \left(\int_0^1 v^{\frac{\alpha p}{p_0}} (Mf^*(vt^{p_0}))^p dv \right) \frac{dt}{t}$$

On change l'ordre d'intégration, on effectue le changement de variable (en t) $u = vt^{p_0}$ et on obtient

$$I \leq C(p, p_0, \alpha) \int_0^1 v^{\frac{\alpha p}{p_0}} \int_0^{+\infty} Mf^*(u)^p \frac{du}{p_0 v} dv$$

d'où

$$I \leq C(p, p_0, \alpha) \left\| Mf^* \right\|_{L^p}^p \int_0^1 v^{\frac{\alpha p}{p_0}-1} dv$$

Si $1 - \dfrac{\alpha p}{p_0} < 1$, i.e. si $\alpha > 0$ on a

$$I \leq C'(p, p_0, \alpha) \left\| f \right\|_{M^p}^p$$

Puisque $\dfrac{p-p_0}{p} > 0$, il est possible de choisir α tel que $0 < \alpha < \dfrac{p-p_0}{p}$ et on obtient donc l'inégalité voulue

$$\left\| f \right\|_{(M^{p_0}, M^\infty)_{\theta,p}} \leq C(p, p_0) \left\| f \right\|_{M^p}$$

• Pour obtenir le résultat général on va utiliser le théorème de réitération énoncé dans [8] p 50. Pour cela on considère $p_0, p_1 \in [1, +\infty]$, $\eta \in]0,1[$ et p tel que $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\eta}{p_0} + \dfrac{\eta}{p_1}$.

D'après ce qu'on vient de démontrer on a

$$\begin{aligned} M^{p_0} &= (M^1, M^\infty)_{\theta_0, p_0} \quad \text{où} \quad \theta_0 = 1 - \frac{1}{p_0} \\ M^{p_1} &= (M^1, M^\infty)_{\theta_1, p_1} \quad \text{où} \quad \theta_1 = 1 - \frac{1}{p_1} \end{aligned}$$

De plus, d'après le point **a)**, M^{p_0} et M^{p_1} sont des espaces de Banach. On peut alors appliquer le théorème de réitération et on obtient

$$(M^{p_0}, M^{p_1})_{\eta,p} = (M^0, M^1)_{\theta,p}$$

où $\theta = (1-\eta)\theta_0 + \eta\theta_1$. En remplaçant θ_0 et θ_1 par leurs valeurs on obtient $\theta = 1 - \left(\dfrac{1-\eta}{p_0} + \dfrac{\eta}{p_1} \right)$ et en utilisant la définition de p on obtient $\theta = 1 - \dfrac{1}{p}$, ce qui nous permet d'utiliser à nouveau ce qu'on a déjà démontré et d'obtenir $(M^{p_0}, M^{p_1})_{\eta,p} = M^p$, ce qui achève la démonstration de ce lemme.

2.6 Mesures de Carleson.

On démontre ici la proposition 2.4.7 dont on rappelle l'énoncé ci-dessous :

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, pour toutes fonctions $h_1, ..., h_k$ de $H^\infty(\mathbb{B})$, les fonctions ϖ_1 et ϖ_2 ci-dessous sont des mesures de Carleson de norme majorée par $\max(1, \|h\|_\infty^{2k})$

$$\varpi_1 = (-\rho)^k \frac{|\partial h_1 \wedge ... \wedge \partial h_k|^2}{|h|^{2k}} \mu(|h|)^k$$
$$\varpi_2 = (-\rho)^{k-1} \frac{|\partial\rho \wedge \partial h_1 \wedge ... \wedge \partial h_k|^2}{|h|^{2k}} \mu(|h|)^k$$

Pour cela on généralise la démonstration faite dans le cas où $n = 2$ et $k = 1$ dans [3].
On procède par récurrence sur k.

2.6.1 Cas d'une seule fonction.

Dans ce paragraphe on démontre la proposition pour $k = 1$.

On commence par démontrer la proposition suivante :

Proposition 2.6.1 *Il existe une constante C_1 ne dépendant que de la dimension de l'espace telle que, si $\alpha \in]0,1[$, si $h \in H^\infty(\mathbb{B})$, alors $(-\rho)\,|\partial h|^2\,|h|^{2(\alpha-1)}$ et $|\partial h \wedge \partial\rho|^2\,|h|^{2(\alpha-1)}$ sont des mesures de Carleson de norme majorée par $\dfrac{C_1}{\alpha^2}\,\|h\|_\infty^{2\alpha}$.*

Démonstration :
Par définition des mesures de Carleson, en utilisant l'invariance par rotations, il suffit de montrer que pour tout $s \in]0,1]$, si T_s est la tente de centre $(1, 0, ..., 0)$ et de rayon s,

$$I_1 = \int_{T_s} (-\rho)\,|\partial h|^2\,|h|^{2(\alpha-1)}\,d\lambda \leq \frac{C_1}{\alpha^2}\,\|h\|_\infty^{2\alpha}\,s^n \tag{6.1}$$

$$I_2 = \int_{T_s} |\partial h \wedge \partial\rho|^2\,|h|^{2(\alpha-1)}\,d\lambda \leq \frac{C_1}{\alpha^2}\,\|h\|_\infty^{2\alpha}\,s^n \tag{6.2}$$

• On suppose pour commencer que $h \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}})$ et on estime les mesures $(-\rho)\,|\partial h|^2\,|h|^{2(\alpha-1)}\,d\lambda$ et $|\partial h \wedge \partial\rho|^2\,|h|^{2(\alpha-1)}\,d\lambda$ dans $\mathbb{B}$. Afin de régulariser $|h|$ on introduit $\eta > 0$, et on considère la fonction

$(|h|^2+\eta^2)^\alpha$ qui est bien de classe C^1 dans $\overline{\mathbb{B}}$, ce qui nous permet d'appliquer la formule de Stokes et d'obtenir les trois égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathbb{B}}(|h|+\eta^2)^\alpha\partial\rho\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-1} = \quad & \alpha\int_{\mathbb{B}}(|h|^2+\eta^2)^{\alpha-1}h\partial\overline{h}\wedge\partial\rho\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-1}\\ & -\int_{\mathbb{B}}(|h|^2+\eta^2)^\alpha(\partial\overline{\partial}\rho)^n\end{aligned} \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned}0 = \int_{\partial\mathbb{B}}(-\rho)(|h|^2+\eta^2)^{\alpha-1}h\overline{\partial h}\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-1} & \\ = \int_{\mathbb{B}}(|h|^2+\eta^2)^{\alpha-1}h\overline{\partial h}\wedge\partial\rho\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-1} & \\ +(\alpha-1)\int_{\mathbb{B}}(-\rho)(|h|^2+\eta^2)^{\alpha-2}\,|h|^2\,\partial h\wedge\overline{\partial h}\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-1} & \\ +\int_{\mathbb{B}}(-\rho)(|h|^2+\eta^2)^{\alpha-1}\partial h\wedge\overline{\partial h}\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-1} &\end{aligned} \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned}0 = \int_{\partial\mathbb{B}}(-\rho)(|h|^2+\eta^2)^{\alpha-1}\partial h\wedge\overline{\partial h}\wedge\partial\rho\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-2} & \\ = -\int_{\mathbb{B}}(|h|^2+\eta^2)^{\alpha-1}\overline{\partial}\rho\wedge\partial h\wedge\overline{\partial h}\wedge\partial\rho\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-2} & \\ -\int_{\mathbb{B}}(-\rho)(|h|^2+\eta^2)^{\alpha-1}\partial h\wedge\overline{\partial h}\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-1} &\end{aligned} \tag{6.5}$$

Si on note :

$$\begin{aligned}A_\eta &= \int_{\partial\mathbb{B}}(|h|^2+\eta^2)^\alpha\partial\rho\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-1}\\ B_\eta &= \int_{\mathbb{B}}(|h|^2+\eta^2)^\alpha(\partial\overline{\partial}\rho)^n\\ J_\eta &= \int_{\mathbb{B}}(|h|^2+\eta^2)^{\alpha-1}h\overline{\partial h}\wedge\partial\rho\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-1}\end{aligned}$$

les deux premières égalités (6.3) et (6.4) nous permettent d'obtenir

$$A_\eta+B_\eta=\alpha J_\eta=-\alpha\int_{\mathbb{B}}\left(1+\frac{(\alpha-1)\,|h|^2}{|h|^2+\eta^2}\right)(-\rho)(|h|^2+\eta^2)^{\alpha-1}\partial h\wedge\overline{\partial h}\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-1}$$

Or

$$1+\frac{(\alpha-1)\,|h|^2}{|h|^2+\eta^2}=\frac{\eta^2+\alpha\,|h|^2}{\eta^2+|h|^2}\geq\alpha$$

On en déduit que

$$\alpha^2\int_{\mathbb{B}}(-\rho)(|h|^2+\eta^2)^{\alpha-1}\,|\partial h|^2\,d\lambda\leq|A_\eta|+|B_\eta|$$

puis, en faisant tendre η vers 0,

$$\alpha^2 \int_{\mathbb{B}} (-\rho) |h|^{2(\alpha-1)} |\partial h|^2 \, d\lambda \leq \int_{\mathbb{B}} |h|^{2\alpha} \, d\lambda + \int_{\partial\mathbb{B}} |h|^{2\alpha} \, d\sigma \tag{6.6}$$

D'autre part l'équation (6.5) nous donne, en faisant tendre η vers 0,

$$\int_{\mathbb{B}} |h|^{2(\alpha-1)} |\partial\rho \wedge \partial h|^2 \, d\lambda = (n-1) \int_{\mathbb{B}} (-\rho) |h|^{2(\alpha-1)} |\partial h|^2 \, d\lambda \tag{6.7}$$

• Pour démontrer les inégalités (6.1) et (6.2) on va faire le changement de variables donné par la fonction suivante. On note $r = 1 - s$.

$$\begin{aligned} \phi_1(z) &= \frac{r - z_1}{1 - r z_1} \\ \phi_j(z) &= \frac{\sqrt{1-r^2}\, z_j}{1 - r z_1} \qquad \text{si} \;\; 1 < j \leq n \end{aligned}$$

Alors $\phi = (\phi_1, ..., \phi_n)$ est holomorphe et vérifie :

$$\phi \circ \phi = Id \qquad\qquad \phi(\mathbb{B}) = \mathbb{B} \qquad\qquad \phi(r, 0, ..., 0) = 0$$

Calculons ses dérivées :

$$\begin{aligned} \partial\phi_1 &= -\frac{1-r^2}{(1-rz_1)^2} dz_1 \\ \partial\phi_j &= \frac{\sqrt{1-r^2}}{1-rz_1} dz_j + \frac{\sqrt{1-r^2}\, r z_j}{(1-rz_1)^2} dz_1 \qquad \text{si} \qquad 1 < j \leq n \end{aligned}$$

On peut alors calculer le Jacobien de ϕ

$$J(\phi) = |\partial\phi_1 \wedge ... \wedge \partial\phi_n|^2 = \frac{(1-r^2)^{n+1}}{|1-rz_1|^{2n+2}}$$

On a aussi

$$\rho \circ \phi(z) = \sum_{j=1}^{n} |\phi_j(z)|^2 - 1 = \frac{1-r^2}{|1-rz_1|^2} \, \rho(z)$$

Exprimons $|(\partial h) \circ \phi|^2$ en fonction de $|\partial(h \circ \phi)|^2$.
On a

$$\begin{aligned} \partial_1(h \circ \phi) &= \sum_{j=1}^{n} \partial_1\phi_j \; (\partial_j h) \circ \phi \\ \partial_j(h \circ \phi) &= \partial_j\phi_j \; (\partial_j h) \circ \phi \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
(\partial_1 h)\circ\phi &= \frac{1}{\partial_1\phi_1}(\partial_1(h\circ\phi) - \sum_{j=2}^{n}\frac{\partial_1\phi_j}{\partial_j\phi_j}\ \partial_j(h\circ\phi)) \\
(\partial_j h)\circ\phi &= \frac{\partial_j(h\circ\phi)}{\partial_j\phi_j}
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Alors

$$|(\partial h)\circ\phi|^2 \leq CS_1^2(1+S_2^2)\,|\partial(h\circ\phi)|^2$$

où C est une constante qui ne dépend que de n, tandis que S_1 et S_2 sont définis par

$$S_1 = \operatorname*{Sup}_{1\leq j\leq n}\frac{1}{|\partial_j\phi_j|} \qquad \text{et} \qquad S_2 = \operatorname*{Sup}_{2\leq j\leq n}\left|\frac{\partial_1\phi_j}{\partial_j\phi_j}\right|$$

On peut donc majorer ces deux quantités de la façon suivante

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\partial_1\phi_1|} &= \frac{|1-rz_1|^2}{1-r^2} \\
\frac{1}{|\partial_j\phi_j|} &\leq \frac{|1-rz_1|}{\sqrt{1-r^2}} \quad \text{si} \quad 1<j\leq n \\
\left|\frac{\partial_1\phi_j}{\partial_j\phi_j}\right| &\leq \frac{r}{|1-rz_1|} \quad \text{si} \quad 1<j\leq n
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
S_1 &\leq \frac{|1-rz_1|}{\sqrt{1-r^2}}\ \text{Sup}\ (1,\ \frac{|1-rz_1|}{\sqrt{1-r^2}}) \\
S_2 &\leq \frac{r}{|1-rz_1|}
\end{aligned}$$

On effectue alors le changement de variables dans (6.1) :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\phi(T_s)}(-\rho\circ\phi)\,|(\partial h)\circ\phi|^2\,|h\circ\phi|^{2(\alpha-1)}\,J(\phi)d\lambda \\
&\leq \int_{\phi(T_s)}(-\rho)\,|\partial(h\circ\phi)|^2\,|h\circ\phi|^{2(\alpha-1)}\,Fd\lambda
\end{aligned}$$

où

$$F(z) = \frac{1-r^2}{|1-rz_1|^2}\frac{|1-rz_1|^2}{1-r^2}\text{Sup}\ \left(1,\ \frac{|1-rz_1|^2}{1-r^2}\right)\left(1+\frac{r}{|1-rz_1|}\right)^2\frac{(1-r^2)^{n+1}}{|1-rz_1|^{2n+2}}$$

Il s'agit à présent de majorer $F(z)$ quand $z\in\phi(T_s)$. Dans un premier temps, montrons l'implication suivante

$$z\in\phi(T_s) \Longrightarrow \frac{1-r^2}{|1-rz_1|^2} \leq 2s \tag{6.9}$$

Puisque $z\in\phi(T_s)$, il existe $\zeta\in T_s$ tel que $z=\phi(\zeta)$. Alors $|1-\zeta_1|<s$. On écrit alors $\zeta_1 = 1+u$ où $|u|<s$ et on calcule :

$$\frac{1-r^2}{|1-rz_1|^2} = \frac{|s+(s-1)u|^2}{1-r^2} \leq \frac{s^2+(1-s)^2|u|^2+2s(1-s)|u|}{s(2-s)} \leq s(2-s) \leq 2s$$

ce qui démontre (6.9). En particulier, si $z \in \phi(T_s)$,

$$1 \leq 2s\frac{|1-rz_1|^2}{1-r^2}$$

En utilisant le fait que $s \leq 1$ on a

$$\text{Sup } (1, \ \frac{|1-rz_1|^2}{1-r^2}) \leq 2\frac{|1-rz_1|^2}{1-r^2}$$

D'autre part on a aussi, d'après (6.9),

$$\left(1+\frac{r}{|1-rz_1|}\right)^2 \leq \left(1+\frac{r\sqrt{2s}}{\sqrt{1-r^2}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{s}\sqrt{1+r}+r\sqrt{2s})^2}{s(1+r)} = \frac{(\sqrt{1+r}+r\sqrt{2})^2}{(1+r)} \leq C$$

où C est une constante absolue. On en déduit finalement en utilisant à nouveau (6.9)

$$F \leq C\frac{(1-r^2)^n}{|1-rz_1|^{2n}} \leq C(2s)^n$$

En reportant cette majoration dans I_1 on trouve

$$I_1 \leq C2^n s^n \int_{\mathbb{B}} (-\rho)\,|\partial(h\circ\phi)|^2\,|h\circ\phi|^{2(\alpha-1)}\,d\lambda$$

On applique alors l'inégalité (6.6) à la fonction holomorphe $h\circ\phi$ et on obtient :

$$I_1 \leq \frac{C}{\alpha^2}s^n(\int_{\mathbb{B}} |h\circ\phi|^{2\alpha}\,d\lambda + \int_{\partial\mathbb{B}} |h\circ\phi|^{2\alpha}\,d\sigma)$$

On applique ensuite l'inégalité de Hölder pour obtenir

$$I_1 \leq \frac{C_1}{\alpha^2}s^n \|h\circ\phi\|_{H^2}^{2\alpha} \tag{6.10}$$

où C_1 est une constante ne dépendant que de n. Or il est clair que $\|h\circ\phi\|_{H^2}^{2\alpha} \leq \|h\|_\infty^{2\alpha}$, ce qui montre que $(-\rho)\,|\partial h|^2\,|h|^{2(\alpha-1)}$ est une mesure de Carleson de norme majorée par $\dfrac{C_1}{\alpha^2}\|h\|_\infty^{2\alpha}$.

• Si h n'est pas de classe $C^\infty(\overline{\mathbb{B}})$, on considère la fonction $h_r(z) = h(rz)$, où $r \in [0,1[$, qui est bien dans $C^\infty(\overline{\mathbb{B}}) \cap Hol(\mathbb{B})$, et on lui applique l'inégalité suivante, découlant de (6.10),

$$\int_{T_s} (-\rho)\,|\partial h|^2\,|h|^{2(\alpha-1)}\,d\lambda \leq \frac{C_1}{\alpha^2}s^n\,\|h\|_\infty^{2\alpha}$$

Alors, puisque $\|h_r\|_\infty \leq \|h\|_\infty$, il suffit de faire tendre r vers 1 pour obtenir le résultat.

Remarque 2.6.2 *Si h est seulement dans l'espace BMOA, alors $\|h \circ \phi\|_{H^2} \leq \|h\|_{BMO}$ et on montre ainsi la même propriété pour les fonctions de BMOA.*

• De la même manière on effectue le changement de variable ϕ pour majorer I_2. On évalue la quantité suivante

$$|(\partial\rho \wedge \partial h) \circ \phi|^2 = \sum_{1\leq i<j\leq n} |(\partial_i h \partial_j \rho - \partial_j h \partial_i \rho) \circ \phi|^2$$

En utilisant (6.8) on obtient :

$$|(\partial\rho \wedge \partial h) \circ \phi|^2 \leq S_1^2(1+S_2^2)\,|\partial(\rho\circ\phi) \wedge \partial(h\circ\phi)|^2$$

où

$$S_1 = \operatorname*{Sup}_{1\leq i<j\leq n} \frac{1}{|\partial_i\phi_i\partial_j\phi_j|} \qquad \text{et} \qquad S_2 = \operatorname*{Sup}_{2\leq k\leq n} \left|\frac{\partial_1\phi_k}{\partial_k\phi_k}\right|$$

Comme précédemment, on prouve que si $z \in \phi(T_s)$ alors

$$S_1 \leq 2\frac{|1-rz_1|^3}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{et} \qquad S_2 \leq \frac{r}{|1-rz_1|}$$

On en déduit, grâce à (6.9), que

$$1+S_2^2 \leq 1+\frac{r^2 2s}{1-r^2} = \frac{s(1+r)+2sr^2}{s(1+r)} \leq 4$$

D'autre part on a aussi

$$\partial(\rho\circ\phi) = \frac{1-r^2}{|1-rz_1|^2}\partial\rho + \frac{(1-r^2)r(1-r\overline{z}_1)}{|1-rz_1|^4}\rho dz_1$$
$$|(\partial\rho \wedge \partial h) \circ \phi|^2 \leq \frac{|1-rz_1|^2}{1-r^2}\,|\partial\rho \wedge \partial(h\circ\phi)|^2 + \frac{1}{(1-r^2)}(-\rho)^2\,|\partial(h\circ\phi)|^2$$

On effectue alors le changement de variables dans I_2 et on obtient :

$$I_2 \leq \int_{\phi(T_s)} |\partial(h\circ\phi) \wedge \partial\rho|^2\,|h\circ\phi|^{2(\alpha-1)}\,F_1 d\lambda + \int_{\phi(T_s)} (-\rho)\,|\partial(h\circ\phi)|^2\,|h\circ\phi|^{2(\alpha-1)}\,F_2 d\lambda$$

où

$$F_1 = \frac{|1-rz_1|^2}{1-r^2}\frac{(1-r^2)^{n+1}}{|1-rz_1|^{2n+2}} \qquad \text{et} \qquad F_2 = \frac{-\rho}{(1-r^2)}\frac{(1-r^2)^{n+1}}{|1-rz_1|^{2n+2}}$$

on a alors

$$F_1 \leq (2s)^n \qquad \text{et} \qquad F_2 \leq (2s)^n\frac{-\rho}{|1-rz_1|^2} \leq (2s)^n\frac{2s}{1-r^2} = (2s)^n\frac{2}{1+r} \leq 2(2s)^n$$

Il suffit alors d'appliquer (6.6) et (6.7) pour conclure comme précédemment. ∎

Remarque 2.6.3 *On peut démontrer cette proposition plus rapidement grâce à la formule de Green, mais la démonstration donnée ci-dessus a l'avantage de pouvoir se généraliser au cas de plusieurs fonctions comme on le verra dans le prochain paragraphe. Voici toutefois les grandes lignes de la démonstration utilisant la formule de Green.*
Pour montrer que $(-\rho)\left|\partial h\right|^2 \left|h\right|^{2(\alpha-1)}$ *est une mesure de Carleson, d'après le lemme 2.4.21 il suffit de prendre une fonction* $\psi \in H^2(\mathbb{B})$ *et d'estimer l'intégrale*

$$I = \int_{\mathbb{B}} \left|\psi\right|^2 (-\rho) \left|\partial h\right|^2 \left|h\right|^{2(\alpha-1)} d\lambda$$

Pour cela on commence par supposer que toutes les fonctions considérées sont de classe $C^1(\overline{\mathbb{B}})$*, on prend* $\eta > 0$*, et on applique la formule de Green à la fonction* $\left|\psi\right|^2 (\left|h\right|^2 + \eta)^\alpha$*. On obtient alors, après calcul et estimation de* $\Delta\left(\left|\psi\right|^2 (\left|h\right|^2 + \eta)^\alpha\right)$*, en faisant tendre* η *vers* 0*, l'estimation*

$$\alpha^2 I \leq C_1 \int_{\mathbb{B}} \left|\psi\right|^2 \left|h\right|^{2\alpha} d\lambda + C_2 \int_{\mathbb{B}} \int_{\partial\mathbb{B}} P \left|\psi\right|^2 \left|h\right|^{2\alpha} (\zeta) d\sigma d\lambda + C_3 \int_{\mathbb{B}} (-\rho) \left|\partial\psi\right|^2 \left|h\right|^{2\alpha} d\lambda$$

ce qui nous permet, grâce au lemme 2.4.23, de déduire que

$$I \leq \frac{C}{\alpha^2} \left\|h\right\|_\infty^{2\alpha} \left\|\psi\right\|_{H^2}^2$$

où C *est une constante ne dépendant que de la dimension de l'espace. Il suffit alors de régulariser* ψ *puis* h *quand ces fonctions ne sont pas dans* $C^1(\overline{\mathbb{B}})$ *pour obtenir le résultat.*
Pour montrer que $\left|\partial h \wedge \partial\rho\right|^2 \left|h\right|^{2(\alpha-1)}$ *est mesure de Carleson il suffit alors de prendre* $\psi \in H^2(\mathbb{B})$ *et d'appliquer la formule de Stokes à* $(-\rho)\left|\psi\right|^2 \left|h\right|^{2(\alpha-1)} \partial h \wedge \overline{\partial h} \wedge \partial\rho \wedge (\partial\overline{\partial}\rho)^{n-2}$ *pour pouvoir obtenir le résultat.*

On montre à présent la proposition 2.4.7 dans le cas où $k = 1$ qui s'énonce comme suit.

Proposition 2.6.4 *Il existe une constante* C_2 *ne dépendant que de la dimension de l'espace telle que, si* $h \in H^\infty(\mathbb{B})$*, alors* $(-\rho)\dfrac{\left|\partial h\right|^2}{\left|h\right|^2}\mu(\left|h\right|)$ *et* $\dfrac{\left|\partial\rho \wedge \partial h\right|^2}{\left|h\right|^2}\mu(\left|h\right|)$ *sont des mesures de Carleson de norme majorée par* $C_2 \max(1, \left\|h\right\|_\infty^2)$*.*

Démonstration :
Par définition des mesures de Carleson, en utilisant la proposition 2.6.1, si T_s est une tente de $\mathbb{B}$ de rayon $s \in]0,1[$ on a, pour tout $\alpha \in]0,1[$,

$$\int_{T_s} (-\rho) \left|\partial h\right|^2 \left|h\right|^{2(\alpha-1)} d\lambda \leq C_1 \frac{\left\|h\right\|_\infty^{2\alpha}}{\alpha^2} s^n$$

On intègre alors cette inégalité par rapport à α, pour la mesure $d\mu_0$. Puisque l'intégrande est positive on peut inverser l'ordre d'intégration et on obtient :

$$\int_{T_s} (-\rho) \frac{\left|\partial h\right|^2}{\left|h\right|^2} \int_0^1 \left|h\right|^{2\alpha} d\mu_0(\alpha) d\lambda \leq C_1 s^n \int_0^1 \frac{\left\|h\right\|_\infty^{2\alpha}}{\alpha^2} d\mu_0(\alpha)$$

En utilisant la définition de $\mu(\left|h\right|)$ et le fait que $\displaystyle\int_0^1 \frac{d\mu_0(\alpha)}{\alpha^2} < \infty$ on obtient

$$\int_{T_s} (-\rho)\frac{|\partial h|^2}{|h|^2}\mu(|h|)d\lambda \leq C_2 \max(1, \|h\|_\infty^2)s^n$$

ce qui, par définition des mesures de Carleson, démontre que $(-\rho)\frac{|\partial h|^2}{|h|^2}\mu(|h|)$ est une mesure de Carleson de norme majorée par $C_2 \max(1, \|h\|_\infty^2)$. On procède de la même façon pour la deuxième partie de la proposition.
Ceci achève la démonstration dans le cas où $k = 1$. ■

2.6.2 Cas de plusieurs fonctions.

Dans ce paragraphe on suppose que la proposition est vraie pour un certain entier $k-1$, et on en déduit qu'elle est vraie pour k.
Comme pour le cas où $k = 1$ on commence par démontrer la proposition suivante :

Proposition 2.6.5 *Soit k un entier strictement supérieur à 1.*
On suppose qu'il existe une constante positive C telle que, si $\alpha \in]0,1[$, pour toutes fonctions $h_1, ..., h_{k-1} \in H^\infty(\mathbb{B})$ les quantités

$$(-\rho)^{k-1}\frac{|\partial h_1 \wedge ... \wedge \partial h_{k-1}|^2}{|h|^{2k-2}}\mu(|h|)^{k-1} \quad \text{et} \quad (-\rho)^{k-2}\frac{|\partial \rho \wedge \partial h_1 \wedge ... \wedge \partial h_{k-1}|^2}{|h|^{2k-2}}\mu(|h|)^{k-1}$$

où $|h|^2 = \sum_{j=1}^{k-1} |h_j|^2$, sont des mesures de Carleson de norme majorée par $C \max(1, \|h\|_\infty^{2k-2})$. Alors il existe une constante C_1 telle que, si $h_1, ..., h_k \in H^\infty(\mathbb{B})$, alors

$$(-\rho)^k\frac{|\partial h_1 \wedge ... \wedge \partial h_k|^2}{|h|^{2k-2}}|h_k|^{2(\alpha-1)}\mu(|h|)^{k-1} \quad \text{et} \quad (-\rho)^{k-1}\frac{|\partial \rho \wedge \partial h_1 \wedge ... \wedge \partial h_k|^2}{|h|^{2k-2}}|h_k|^{2(\alpha-1)}\mu(|h|)^{k-1}$$

sont des mesures de Carleson de norme majorée par $C_1 C \max(1, \|h\|_\infty^{2k-2})\frac{\|h_k\|_\infty^{2\alpha}}{\alpha^2}$.

Démonstration :
Le plan de cette démonstration suit celui du cas où $k = 1$. Dans un premier temps on suppose que toutes les fonctions considérées sont dans $C^\infty(\overline{\mathbb{B}})$.
Soit $\eta > 0$. On note

$$G_\eta = \frac{\partial h_1 \wedge ... \wedge \partial h_{k-1}}{(|h|^2+\eta^2)^{\frac{k-1}{2}}}\mu\left(\sqrt{|h|^2+\eta^2}\right)^{\frac{k-1}{2}}$$

où $|h|^2 = \sum_{j=1}^{k-1} |h_j|^2$.

• On commence de nouveau par montrer des inégalités grâce à la formule de Stokes. Soit $\epsilon > 0$. On a alors :

$$
\begin{aligned}
0 = \int_{\partial\mathbb{B}} (-\rho)^{k-1}(|h_k|^2+\eta^2)^{\alpha}\partial\rho\wedge G_\eta\wedge\overline{G}_\eta\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-k} = \\
-(k-1)\int_{\mathbb{B}} (-\rho)^{k-2}(|h_k|^2+\eta^2)^{\alpha}\overline{\partial}\rho\wedge\partial\rho\wedge G_\eta\wedge\overline{G}_\eta\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-k} \\
+\alpha\int_{\mathbb{B}} (-\rho)^{k-1}(|h_k|^2+\eta^2)^{\alpha-1}h_k\overline{\partial h_k}\wedge\partial\rho\wedge G_\eta\wedge\overline{G}_\eta\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-k} \\
-\int_{\mathbb{B}} (-\rho)^{k-1}(|h_k|^2+\eta^2)^{\alpha}\partial\overline{\partial}\rho\wedge G_\eta\wedge\overline{G}_\eta\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = \int_{\partial\mathbb{B}} (-\rho)^{k}(|h_k|^2+\eta^2)^{\alpha-1}h_k\overline{\partial h_k}\wedge G_\eta\wedge\overline{G}_\eta\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-k} = \\
-k\int_{\mathbb{B}} (-\rho)^{k-1}(|h_k|^2+\eta^2)^{\alpha-1}h_k\partial\rho\wedge\overline{\partial h_k}\wedge G_\eta\wedge\overline{G}_\eta\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-k} \\
+(\alpha-1)\int_{\mathbb{B}} (-\rho)^{k}(|h_k|^2+\eta^2)^{\alpha-2}\,|h_k|^2\,\partial h_k\wedge\overline{\partial h_k}\wedge G_\eta\wedge\overline{G}_\eta\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-k} \\
+\int_{\mathbb{B}} (-\rho)^{k}(|h_k|^2+\eta^2)^{\alpha-1}\partial h_k\wedge\overline{\partial h_k}\wedge G_\eta\wedge\overline{G}_\eta\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = \int_{\partial\mathbb{B}} (-\rho)^{k}(|h_k|^2+\eta^2)^{\alpha-1}\partial\rho\wedge\partial h_k\wedge\overline{\partial h_k}\wedge G_\eta\wedge\overline{G}_\eta\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-k-1} = \\
-k\int_{\mathbb{B}} (-\rho)^{k-1}(|h_k|^2+\eta^2)^{\alpha-1}\overline{\partial}\rho\wedge\partial\rho\wedge\partial h_k\wedge\overline{\partial h_k}\wedge G_\eta\wedge\overline{G}_\eta\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-k-1} \\
+\int_{\mathbb{B}} (-\rho)^{k}(|h_k|^2+\eta^2)^{\alpha-1}\partial\overline{\partial}\rho\wedge\partial h_k\wedge\overline{\partial h_k}\wedge G_\eta\wedge\overline{G}_\eta\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-k-1}
\end{aligned}
$$

Si on note

$$
\begin{aligned}
J_\eta &= \int_{\mathbb{B}} (-\rho)^{k-1}(|h_k|^2+\eta^2)^{\alpha-1}h_k\overline{\partial h_k}\wedge\partial\rho\wedge G_\eta\wedge\overline{G}_\eta\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-k} \\
A_\eta &= \int_{\mathbb{B}} (-\rho)^{k-2}(|h_k|^2+\eta^2)^{\alpha}\overline{\partial}\rho\wedge\partial\rho\wedge G_\eta\wedge\overline{G}_\eta\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-k} \\
B_\eta &= \int_{\mathbb{B}} (-\rho)^{k-1}(|h_k|^2+\eta^2)^{\alpha}\partial\overline{\partial}\rho\wedge G_\eta\wedge\overline{G}_\eta\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-k}
\end{aligned}
$$

la première équation nous donne

$$\alpha J_\eta = B_\eta + (k-1)A_\eta$$

et la deuxième s'écrit

$$-kJ_\eta = \int_{\mathbb{B}} (-\rho)^{k}(|h_k|^2+\eta^2)^{\alpha-1}\left(1+\frac{(\alpha-1)\,|h_k|^2}{|h_k|^2+\eta^2}\right)\partial h_k\wedge\overline{\partial h_k}\wedge G_\eta\wedge\overline{G}_\eta\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-k}$$

Comme précédemment on a

$$1+\frac{(\alpha-1)\left|h_k\right|^2}{\left|h_k\right|^2+\eta^2}=\frac{\eta^2+\alpha\left|h_k\right|^2}{\eta^2+\left|h_k\right|^2}>\alpha$$

Ce qui implique

$$\alpha^2\int_{\mathbb{B}}(-\rho)^k(\left|h_k\right|^2+\eta^2)^{\alpha-1}\left|\partial h_k\wedge\partial G_\eta\right|^2d\lambda\leq k(\left|B_\eta\right|+(k-1)\left|A_\eta\right|)$$

Il suffit alors de faire tendre η vers 0 pour obtenir

$$\begin{aligned}\alpha^2\int_{\mathbb{B}}(-\rho)^k\left|h_k\right|^{2(\alpha-1)}\frac{\left|\partial h_k\wedge\partial h_1\wedge...\wedge\partial h_{k-1}\right|^2}{\left|h\right|^{2(k-1)}}\mu(\left|h\right|)^{k-1}d\lambda\leq&\\ k\int_{\mathbb{B}}\left|h_k\right|^{2\alpha}(-\rho)^{k-1}\frac{\left|\partial h_1\wedge...\wedge\partial h_{k-1}\right|^2}{\left|h\right|^{2k-2}}\mu(\left|h\right|)^{k-1}d\lambda&\\ +k(k-1)\int_{\mathbb{B}}\left|h_k\right|^{2\alpha}(-\rho)^{k-2}\frac{\left|\partial\rho\wedge\partial h_1\wedge...\wedge\partial h_{k-1}\right|^2}{\left|h\right|^{2k-2}}\mu(\left|h\right|)^{k-1}d\lambda&\end{aligned}\tag{6.11}$$

et, en utilisant la troisième égalité, on a aussi

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}}(-\rho)^k\left|h_k\right|^{2(\alpha-1)}\frac{\left|\partial h_k\wedge\partial h_1\wedge...\wedge\partial h_{k-1}\right|^2}{\left|h\right|^{2(k-1)}}\mu(\left|h\right|)^{k-1}d\lambda=&\\ \int_{\mathbb{B}}(-\rho)^{k-1}\left|h_k\right|^{2(\alpha-1)}\frac{\left|\partial\rho\wedge\partial h_k\wedge\partial h_1\wedge...\wedge\partial h_{k-1}\right|^2}{\left|h\right|^{2(k-1)}}\mu(\left|h\right|)^{k-1}d\lambda&\end{aligned}\tag{6.12}$$

• Par définition des mesures de Carleson, en utilisant l'invariance par rotations, il suffit de montrer que pour tout s, si $T_s=\{z\in\mathbb{B}/\ \ |1-z_1|<s\}$ est la tente de centre $(1,0,...,0)$ et de rayon s,

$$I_1=\int_{T_s}(-\rho)^k\frac{\left|\partial h_1\wedge...\wedge\partial h_k\right|^2}{\left|h\right|^{2k-2}}\left|h_k\right|^{2(\alpha-1)}\mu(\left|h\right|)^{k-1}d\lambda\leq Cs^n$$
$$I_2=\int_{T_s}(-\rho)^{k-1}\frac{\left|\partial\rho\wedge\partial h_1\wedge...\wedge\partial h_k\right|^2}{\left|h\right|^{2k-2}}\left|h_k\right|^{2(\alpha-1)}\mu(\left|h\right|)^{k-1}d\lambda\leq Cs^n$$

où C est une constante indépendante de s et des fonctions h_j.
Comme précédemment on utilise la fonction ϕ pour faire un changement de variables. Il nous faut donc évaluer $\left|(\partial h_1\wedge...\wedge\partial h_k)\circ\phi\right|^2$. Pour cela on utilise l'équation (6.8).

$$\begin{aligned}(\partial h_1\wedge...\wedge\partial h_k)\circ\phi=&\sum_{|I|=k}{}'\left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\epsilon(\sigma)\frac{\partial_{I_1}(h_{\sigma(1)}\circ\phi)...\partial_{I_k}(h_{\sigma(k)}\circ\phi)}{\partial_{I_1}\phi_{I_1}...\partial_{I_k}\phi_{I_k}}\right)\\ &-\sum_{|I|=k/I_1=1}{}'\left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\epsilon(\sigma)\sum_{l=2}^{n}\frac{\partial_1\phi_l}{\partial_l\phi_l}\partial_l(h_{\sigma(1)}\circ\phi)\frac{\partial_{I_2}(h_{\sigma(2)}\circ\phi)...\partial_{I_k}(h_{\sigma(k)}\circ\phi)}{\partial_{I_1}\phi_{I_1}...\partial_{I_k}\phi_{I_k}}\right)\end{aligned}$$

où le signe $'$ signifie que la somme s'effectue sur les multi-indices ordonnés, $\mathfrak{S}_k$ désigne le groupe des permutations de k éléments et $\epsilon(\sigma)$ la signature de la permutation σ.
On note

$$S_1 = \operatorname*{Sup}_{|I|=k} \frac{1}{\left|\partial_{I_1}\phi_{I_1}...\partial_{I_j}\phi_{I_j}\right|} \qquad \text{et} \qquad S_2 = \operatorname*{Sup}_{2\leq j\leq n} \left|\frac{\partial_1\phi_j}{\partial_j\phi_j}\right|$$

On a alors

$$|(\partial h_1 \wedge ... \wedge \partial h_k)\circ\phi| \leq S_1 \left(|(\partial(h_1\circ\phi)\wedge ... \wedge \partial(h_k\circ\phi)| + S_2\,|(\partial(h_1\circ\phi)\wedge ... \wedge \partial(h_k\circ\phi)| + S_2 A\right)$$

où

$$A = \sum_{|I|=k/I_1=1}{}' \sum_{2\leq l\leq n/\ l\in I} \left|\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \epsilon(\sigma)\partial_l(h_{\sigma(1)}\circ\phi)\partial_{I_2}(h_{\sigma(2)}\circ\phi)...\partial_{I_k}(h_{\sigma(k)}\circ\phi)\right|$$

Montrons que $A=0$. Soit I un multi-indice ordonné de longueur k tel que $I_1=1$. Soit $2\leq s\leq n$ et $l=I_s$. On note τ la transposition qui échange 1 et s.
Soit

$$T = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \epsilon(\sigma)\partial_l(h_{\sigma(1)}\circ\phi)\partial_{I_2}(h_{\sigma(2)}\circ\phi)...\partial_l(h_{\sigma(s)}\circ\phi)...\partial_{I_k}(h_{\sigma(k)}\circ\phi)$$

$$T = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} -\epsilon(\sigma\circ\tau)\partial_l(h_{\sigma\circ\tau(1)}\circ\phi)\partial_{I_2}(h_{\sigma\circ\tau(2)}\circ\phi)...\partial_l(h_{\sigma\circ\tau(s)}\circ\phi)...\partial_{I_k}(h_{\sigma\circ\tau(k)}\circ\phi)$$

Or l'application qui à σ associe $\sigma\circ\tau$ est une bijection de $\mathfrak{S}_k$ sur lui-même. On a donc

$$T = \sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_k} -\epsilon(\sigma')\partial_l(h_{\sigma'(1)}\circ\phi)\partial_{I_2}(h_{\sigma'(2)}\circ\phi)...\partial_l(h_{\sigma'(s)}\circ\phi)...\partial_{I_k}(h_{\sigma'(k)}\circ\phi) = -T$$

Donc $T=0$, et on en déduit que $A=0$.
On a ainsi montré que

$$|(\partial h_1 \wedge ... \wedge \partial h_k)\circ\phi| \leq S_1(1+S_2)\,|(\partial(h_1\circ\phi)\wedge ... \wedge \partial(h_k\circ\phi)|$$

Comme précédemment on a

$$S_2 \leq \frac{r}{|1-rz_1|}$$

Puisque, d'après (6.9), $\dfrac{1-r^2}{|1-rz_1|^2} \leq 2s$ si $z\in\phi(T_s)$ on a aussi

$$S_2^2 \leq \frac{r^2}{|1-rz_1|^2} \leq \frac{2sr^2}{1-r^2} = \frac{2r^2}{1+r} \leq 2$$

De même on a, pour $j>1$,

$$\frac{1}{|\partial_j\phi_j|} \leq \frac{2\sqrt{s}}{|\partial_1\phi_1|} \leq \frac{2}{|\partial_1\phi_1|}$$

On en déduit que

$$S_1 \leq 2\frac{|1-rz_1|^{k+1}}{(1-r^2)^{\frac{k+1}{2}}}$$

Cela nous permet d'obtenir

$$I_1 \leq \int_{\phi(T_s)} (-\rho)^k \frac{|\partial(h_1\circ\phi)\wedge ... \wedge\partial(h_k\circ\phi)|^2}{|h\circ\phi|^{2k-2}} |h_k\circ\phi|^{2(\alpha-1)} \mu(|h\circ\phi|)^{k-1} F d\lambda$$

où

$$F(z) = \frac{(1-r^2)^k}{|1-rz_1|^{2k}} \frac{4|1-rz_1|^{2k+2}}{(1-r^2)^{k+1}} 9\frac{(1-r^2)^{n+1}}{|1-rz_1|^{2n+2}} \leq 36\frac{(1-r^2)^n}{|1-rz_1|^{2n}} \leq 36(2s)^n$$

Puisque $\phi(T_s)\subset\mathbb{B}$ on a

$$I_1 \leq C_2 s^n \int_{\mathbb{B}} (-\rho)^k \frac{|\partial(h_1\circ\phi)\wedge ... \wedge\partial(h_k\circ\phi)|^2}{|h\circ\phi|^{2k-2}} |h_k\circ\phi|^{2(\alpha-1)} \mu(|h\circ\phi|)^{k-1} d\lambda$$

où C_2 est une constante ne dépendant que de n.
On applique alors l'inégalité (6.11) aux fonctions holomorphes $h_j\circ\phi$ pour obtenir

$$\begin{aligned} I_1 \leq \frac{C_2 k(k-1)}{\alpha^2} s^n \Big(& \int_{\mathbb{B}} (-\rho)^{k-1} \frac{|\partial(h_1\circ\phi)\wedge ... \wedge\partial(h_{k-1}\circ\phi)|^2}{|h\circ\phi|^{2k-2}} |h_k\circ\phi|^{2\alpha} \mu(|h\circ\phi|)^{k-1} d\lambda \\ & + \int_{\mathbb{B}} (-\rho)^{k-2} \frac{|\partial\rho\wedge\partial(h_1\circ\phi)\wedge ... \wedge\partial(h_{k-1}\circ\phi)|^2}{|h\circ\phi|^{2k-2}} |h_k\circ\phi|^{2\alpha} \mu(|h\circ\phi|)^{k-1} d\lambda \Big) \end{aligned}$$

On applique alors l'inégalité de Hölder et le lemme 2.4.21 pour obtenir

$$I_1 \leq \frac{C_1}{\alpha^2} s^n \|h_k\circ\phi\|_{H^2}^{2\alpha} N$$

où

$$\begin{aligned} N = & \left\| (-\rho)^{k-1} \frac{|\partial(h_1\circ\phi)\wedge ... \wedge\partial(h_{k-1}\circ\phi)|^2}{|h\circ\phi|^{2k-2}} \mu(|h\circ\phi|)^{k-1} \right\|_{V^1} \\ & + \left\| (-\rho)^{k-2} \frac{|\partial\rho\wedge\partial(h_1\circ\phi)\wedge ... \wedge\partial(h_{k-1}\circ\phi)|^2}{|h\circ\phi|^{2k-2}} \mu(|h\circ\phi|)^{k-1} \right\|_{V^1} \end{aligned}$$

et C_1 est une constante ne dépendant que de n et k.
Or on a pour tout l , $|h_l\circ\phi| < \|h_l\|_\infty$. On en déduit, en utilisant l'hypothèse, que

$$I_1 \leq \frac{C_1}{\alpha^2} s^n \|h_k\|_\infty^{2\alpha} C \max(1, \|h\|_\infty^{2k-2})$$

ce qui nous permet de conclure grâce à la définition des mesures de Carleson.

• Pour évaluer I_2 on procède de la même façon. Comme précédemment on a, si $k \leq n-1$,

$$|\partial\rho \wedge \partial h_1 \wedge ... \wedge \partial h_k \circ \phi| \leq C_2 \frac{|1-rz_1|^{k+2}}{(1-r^2)^{\frac{k+2}{2}}} |\partial(\rho\circ\phi) \wedge \partial(h_1\circ\phi) \wedge ... \wedge \partial(h_k\circ\phi)|$$

Or,

$$\partial(\rho\circ\phi) = \frac{1-r^2}{|1-rz_1|^2}\partial\rho + \frac{r(1-r^2)(1-r\overline{z}_1)}{|1-rz_1|^4}\rho(z)dz_1$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}|\partial\rho \wedge \partial h_1 \wedge ... \wedge \partial h_k \circ \phi| \leq \quad & C_2 \frac{|1-rz_1|^k}{(1-r^2)^{k/2}} |\partial\rho \wedge \partial(h_1\circ\phi) \wedge ... \wedge \partial(h_k\circ\phi)| \\ & + C_2 \frac{|1-rz_1|^{k-1}}{(1-r^2)^{k/2}} (-\rho) |\partial(h_1\circ\phi) \wedge ... \wedge \partial(h_k\circ\phi)|\end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned}I_2 \leq \quad & \int_{\phi(T_s)} (-\rho)^{k-1} \frac{|\partial\rho \wedge \partial(h_1\circ\phi) \wedge ... \wedge \partial(h_k\circ\phi)|^2}{|h\circ\phi|^{2k-2}} |h_k\circ\phi|^{2(\alpha-1)} \mu(|h\circ\phi|)^{k-1} F_1 d\lambda \\ & + \int_{\phi(T_s)} (-\rho)^k \frac{|\partial(h_1\circ\phi) \wedge ... \wedge \partial(h_k\circ\phi)|^2}{|h\circ\phi|^{2k-2}} |h_k\circ\phi|^{2(\alpha-1)} \mu(|h\circ\phi|)^{k-1} F_2 d\lambda\end{aligned}$$

où

$$F_1(z) = \frac{(1-r^2)^{k-1}}{|1-rz_1|^{2k-2}} \frac{C_2 |1-rz_1|^{2k}}{(1-r^2)^k} \frac{(1-r^2)^{n+1}}{|1-rz_1|^{2n+2}} \leq C_2 \frac{(1-r^2)^n}{|1-rz_1|^{2n}} \leq C_2 (2s)^n$$

et

$$F_2(z) = \frac{(1-r^2)^k}{|1-rz_1|^{2k}} \frac{C_2 |1-rz_1|^{2k-2}}{(1-r^2)^k} \frac{(1-r^2)^{n+1}}{|1-rz_1|^{2n+2}} \leq C_2 \frac{(1-r^2)^{n+1}}{|1-rz_1|^{2n+4}} \leq C_2 (2s)^{n+1}$$

On utilise alors l'égalité (6.12) et l'inégalité (6.11) pour obtenir

$$I_2 \leq \frac{C_1}{\alpha^2} s^n \|h_k\circ\phi\|_{H^2}^{2\alpha} N$$

où N a été défini précédemment. On conclut alors comme pour I_1.

Le cas où les données ne sont pas dans $C^\infty(\overline{\mathbb{B}})$ se traite comme dans le cas où $k=1$. ■

On démontre à présent la proposition suivante :

Proposition 2.6.6 *Soit k un entier strictement plus grand que 1.*
On suppose qu'il existe une constante positive C telle que pour toutes fonctions $h_1, ..., h_{k-1} \in H^\infty(\mathbb{B})$ les quantités

$$(-\rho)^{k-1} \frac{|\partial h_1 \wedge ... \wedge \partial h_{k-1}|^2}{|h|^{2k-2}} \mu(|h|)^{k-1} \quad \text{et} \quad (-\rho)^{k-2} \frac{|\partial\rho \wedge \partial h_1 \wedge ... \wedge \partial h_{k-1}|^2}{|h|^{2k-2}} \mu(|h|)^{k-1}$$

où $|h|^2 = \sum_{j=1}^{k-1} |h_j|^2$, *sont des mesures de Carleson de norme majorée par* $C\ \max(1, \|h\|_\infty^{2k-2})$.
Alors il existe une constante C_2 *ne dépendant que de la dimension de l'espace et de* k *telle que, si* $h_1, ..., h_k \in H^\infty(\mathbb{B})$, *alors*

$$(-\rho)^k \frac{|\partial h_1 \wedge ... \wedge \partial h_k|^2}{(|h|^2 + |h_k|^2)^k} \mu(\sqrt{|h|^2 + |h_k|^2})^k \quad \text{et} \quad (-\rho)^{k-1} \frac{|\partial \rho \wedge \partial h_1 \wedge ... \wedge \partial h_k|^2}{(|h|^2 + |h_k|^2)^k} \mu(\sqrt{|h|^2 + |h_k|^2})^k$$

sont des mesures de Carleson de norme majorée par $C_2\ \max\left(1, \left\|\sqrt{|h|^2 + |h_k|^2}\right\|_\infty^{2k}\right)$.

Démonstration :
Par définition des mesures de Carleson, en utilisant la proposition 2.6.5, si T_s est une tente de $\mathbb{B}$ de rayon s on a, pour tout $\alpha \in]0, 1[$,

$$\int_{T_s} (-\rho)^k \frac{|\partial h_1 \wedge ... \wedge \partial h_k|^2}{|h|^{2k-2}} |h_k|^{2(\alpha-1)} \mu(|h|)^{k-1} d\lambda \leq C_1 C\ \max(1, \|h\|_\infty^{2k-2}) \frac{\|h_k\|_\infty^{2\alpha}}{\alpha^2} s^n$$

On intègre alors cette inégalité par rapport à α, pour la mesure $d\mu_0$. Puisque l'intégrande est positive on peut inverser l'ordre d'intégration et on obtient, comme dans le cas où $k = 1$,

$$\int_{Th} (-\rho)^k \frac{|\partial h_1 \wedge ... \wedge \partial h_k|^2}{|h|^{2k-2} |h_k|^2} \mu(|h|)^{k-1} \mu(|h_k|) d\lambda \leq C_1 C\ \max(1, \|h\|_\infty^{2k-2}) s^n \int_0^1 \frac{\|h_k\|_\infty^{2\alpha}}{\alpha^2} d\mu_0(\alpha)$$

Montrons alors que $\dfrac{\mu\left(\sqrt{|h|^2 + |h_k|^2}\right)^k}{(|h|^2 + |h_k|^2)^k} \leq \dfrac{\mu(|h|)^{k-1}\mu(|h_k|)}{|h|^{2k-2}|h_k|^2}$. Pour cela, puisque $|h|^2 \leq |h|^2 + |h_k|^2$ et $|h_k|^2 \leq |h|^2 + |h_k|^2$ il suffit de démontrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\psi(x) = \dfrac{\mu(x)}{x^2}$ est décroissante. Or ψ est dérivable et

$$\psi'(x) = \frac{1}{x^3}(x\mu'(x) - 2\mu(x)) = \frac{2}{x^3} \int_0^1 (s-1) x^{2s} d\mu_0(s) < 0$$

On peut donc en déduire que

$$\begin{aligned} \int_{T_s} (-\rho)^k \frac{|\partial h_1 \wedge ... \wedge \partial h_k|^2}{(|h|^2 + |h_k|^2)^k} \mu(\sqrt{|h|^2 + |h_k|^2})^k d\lambda \quad & \leq C_2\ \max(1, \|h\|_\infty^{2k-2})\ \max(1, \|h_k\|_\infty^2) s^n \\ & \leq C_2\ \max(1, \left\|\sqrt{|h|^2 + |h_k|^2}\right\|_\infty^{2k})\ s^n \end{aligned}$$

ce qui, par définition des mesures de Carleson, démontre que $(-\rho)^k \dfrac{|\partial h_1 \wedge ... \wedge \partial h_k|^2}{(|h|^2 + |h_k|^2)^k} \mu(\sqrt{|h|^2 + |h_k|^2})^k$ est une mesure de Carleson de norme majorée par $C_2\ \max\left(1, \left\|\sqrt{|h|^2 + |h_k|^2}\right\|_\infty^{2k}\right)$. On procède de la même façon pour la deuxième partie de la proposition. ∎

2.7 Estimation des dérivées d'une fonction holomorphe et bornée.

On démontre ici le lemme 2.4.16 qu'on rappelle ci-dessous :

Il existe une constante positive C telle que, pour toute fonction $g \in H^\infty(\mathbb{B})$ on ait

$$(-\rho)\,|\partial g| \leq C\,\|g\|_\infty \qquad \text{et} \qquad \sqrt{-\rho}\,|\partial g \wedge \partial \rho| \leq C\,\|g\|_\infty$$

• On commence par démontrer la première inégalité. Pour cela on considère $g \in H^\infty(\mathbb{B})$. Il suffit, pour obtenir l'estimation voulue, d'estimer $\left|\dfrac{\partial g}{\partial z_i}\right|$ pour $1 \leq i \leq n$. Comme toutes les coordonnées jouent le même rôle on s'intéresse uniquement à $\left|\dfrac{\partial g}{\partial z_1}\right|$. Pour cela on fixe z' dans la boule de $\mathbb{C}^{n-1}$ et on applique la formule de Cauchy dans le disque unité à la fonction holomorphe définie par $h(z_1) = g(Rz_1, z')$, où $R^2 = 1 - |z'|^2$. On obtient alors

$$h(z_1) = \frac{1}{i2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z_1}d\zeta$$

On en déduit que

$$\frac{\partial g}{\partial z_1}(z_1, z') = \frac{1}{i2\pi R}\int_{\mathbb{T}} \frac{g(R\zeta, z')d\zeta}{(\zeta - \frac{z_1}{R})^2}$$

puis, en utilisant une rotation

$$\left|\frac{\partial g}{\partial z_1}(z_1, z')\right| \leq \frac{\|g\|_\infty}{2\pi R}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left|e^{i\theta} - \frac{|z_1|}{R}\right|^2}$$

On note alors $\alpha = \dfrac{|z_1|}{R}$, $b = \dfrac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha}$ et on effectue le changement de variables $e^{i\theta} = \dfrac{x - ib}{-x - ib}$. On obtient alors

$$\left|\frac{\partial g}{\partial z_1}(z_1, z')\right| \leq \frac{\|g\|_\infty}{2\pi R}\int_{\mathbb{R}} \frac{2b\;dx}{(x^2 + b^2)\left|\frac{x - ib}{-x - ib} - \alpha\right|^2}$$

et après simplifications

$$\left|\frac{\partial g}{\partial z_1}(z_1, z')\right| \leq \frac{\|g\|_\infty\,2\alpha}{2\pi R(1-\alpha)(1+\alpha)}\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^2 + \alpha^2}$$

On obtient finalement
$$\left|\frac{\partial g}{\partial z_1}(z_1,z')\right| \leq \frac{2\left\|g\right\|_\infty}{R(1-\alpha^2)}$$
et en remplaçant R par $\sqrt{1-\left|z'\right|^2}$ on a

$$\left|\frac{\partial g}{\partial z_1}(z_1,z')\right| \leq \frac{2\left\|g\right\|_\infty\sqrt{1-\left|z'\right|^2}}{1-\left|z'\right|^2-\left|z_1\right|^2} \leq \frac{2\left\|g\right\|_\infty}{-\rho(z_1,z')}$$
ce qui nous donne la première inégalité.

• Démontrons à présent la deuxième inégalité. Soit $g\in H^\infty(\mathbb{B})$. On a
$$\partial g\wedge\partial\rho = \sum_{1\leq k<l\leq n}(\overline{z}_l\frac{\partial g}{\partial z_k}-\overline{z}_k\frac{\partial g}{\partial z_l})\ dz_k\wedge\partial z_l$$
Il suffit donc d'estimer $\overline{z}_l\frac{\partial g}{\partial z_k}-\overline{z}_k\frac{\partial g}{\partial z_l}$, et puisque toutes les coordonnées jouent le même rôle on s'intéresse à $\overline{z}_2\frac{\partial g}{\partial z_1}-\overline{z}_1\frac{\partial g}{\partial z_2}$. Pour cela on fixe z' dans la boule unité de $\mathbb{C}^{n-2}$ et on applique la formule de Cauchy dans la boule $\mathbb{B}_2$ de $\mathbb{C}^2$ à la fonction holomorphe $h(z_1,z_2)=g(Rz_1,Rz_2,z')$, où $R=\sqrt{1-\left|z'\right|^2}$:
$$h(z_1,z_2)=c_2\int_{\partial\mathbb{B}_2}\frac{h(\zeta_1,\zeta_2)}{(1-\overline{\zeta}_1z_1-\overline{\zeta}_2z_2)^2}d\sigma(\zeta)$$
On en déduit que
$$\frac{\partial g}{\partial z_1}=\frac{2c_2}{R}\int_{\partial\mathbb{B}_2}\frac{g(R\zeta_1,R\zeta_2,z')\overline{\zeta}_1}{(1-\overline{\zeta}_1\frac{z_1}{R}-\overline{\zeta}_2\frac{z_2}{R})^3}d\sigma(\zeta)\quad\text{et}\quad\frac{\partial g}{\partial z_2}=\frac{2c_2}{R}\int_{\partial\mathbb{B}_2}\frac{g(R\zeta_1,R\zeta_2,z')\overline{\zeta}_2}{(1-\overline{\zeta}_1\frac{z_1}{R}-\overline{\zeta}_2\frac{z_2}{R})^3}d\sigma(\zeta)$$
On en déduit que
$$\left|\overline{z}_2\frac{\partial g}{\partial z_1}-\overline{z}_1\frac{\partial g}{\partial z_2}\right| \leq \frac{2c_2}{R}\left\|g\right\|_\infty\int_{\partial\mathbb{B}_2}\frac{\left|\overline{z}_2\overline{\zeta}_1-\overline{z}_1\overline{\zeta}_2\right|}{\left|1-\overline{\zeta}_1\frac{z_1}{R}-\overline{\zeta}_2\frac{z_2}{R}\right|^3}d\sigma(\zeta)$$
On fait alors le changement de variables suivant :
$$\xi_1=\frac{\zeta_1\overline{z}_1+\zeta_2\overline{z}_2}{|z|}$$
$$\xi_2=\frac{\zeta_1z_2-\zeta_2z_1}{|z|}$$
où $|z|^2=|z_1|^2+|z_2|^2$, et on obtient
$$\left|\overline{z}_2\frac{\partial g}{\partial z_1}-\overline{z}_1\frac{\partial g}{\partial z_2}\right| \leq \frac{2c_2}{R}\left\|g\right\|_\infty|z|\int_{\partial\mathbb{B}_2}\frac{|\xi_2|}{\left|1-\frac{|z|}{R}\xi_1\right|^3}d\sigma(\xi)$$

Puisque $(\xi_1,\xi_2)\in\partial\mathbb{B}_2$, on a $|\xi_1|^2+|\xi_2|^2=1$ d'où on déduit que

$$\int_{\partial\mathbb{B}_2}\frac{|\xi_2|}{\left|1-\frac{|z|}{R}\xi_1\right|^3}d\sigma(\xi)=\int_{\partial\mathbb{B}_2}\frac{\sqrt{1-|\xi_1|^2}}{\left|1-\frac{|z|}{R}\xi_1\right|^3}d\sigma(\xi)=\int_{\mathbb{D}}\frac{\sqrt{1-|\xi_1|^2}}{\left|1-\frac{|z|}{R}\xi_1\right|^3}\int_{|\xi_2|^2=1-|\xi_1|^2}d\sigma(\xi_2)d\lambda(\xi_1)$$

Ainsi on a

$$\left|\overline{z}_2\frac{\partial g}{\partial z_1}-\overline{z}_1\frac{\partial g}{\partial z_2}\right|\leq\frac{2c_2}{R}\left\|g\right\|_\infty|z|\int_{\mathbb{D}}\frac{1-|\xi_1|^2}{\left|1-\frac{|z|}{R}\xi_1\right|^3}d\lambda(\xi_1)$$

Or on a, puisque $\frac{|z|}{R}\leq 1$, $1-|\xi_1|^2\leq 2(1-\frac{|z|}{R}|\xi_1|)\leq 2\left|1-\frac{|z|}{R}\xi_1\right|$ d'où

$$\left|\overline{z}_2\frac{\partial g}{\partial z_1}-\overline{z}_1\frac{\partial g}{\partial z_2}\right|\leq\frac{2c_2}{R}\left\|g\right\|_\infty|z|\int_{\mathbb{D}}\frac{1}{\left|1-\frac{|z|}{R}\xi_1\right|^2}d\lambda(\xi_1)=\frac{2c_2}{R}\left\|g\right\|_\infty|z|\ \ I$$

On effectue alors le changement de variables $\xi_1=\dfrac{-ib+x+iy}{-ib-(x+iy)}$ où $\alpha=\dfrac{|z|}{R}$, $b=\dfrac{\alpha(1+\alpha)}{1-\alpha}$ et on obtient

$$I=\int_{x\in\mathbb{R}}\int_{y\in\mathbb{R}^+}\frac{4b^2\ dx\ dy}{|ib+(x+iy)|^4\left|1-\alpha\frac{-ib+x+iy}{-ib-(x+iy)}\right|^2}$$

$$I=\int_{x\in\mathbb{R}}\int_{y\in\mathbb{R}^+}\frac{4b^2\ dx\ dy}{(x^2+(y+b)^2)(1+\alpha)^2(x^2+(y+\alpha)^2)}$$

On pose alors $x=\alpha u$ et $y=\alpha v$ et on obtient

$$I=\frac{4}{(1-\alpha)^2}\int_{x\in\mathbb{R}}\int_{y\in\mathbb{R}^+}\frac{du\ dv}{(u^2+(v+\frac{1+\alpha}{1-\alpha})^2)(u^2+(u+1)^2)}$$

On utilise alors une décomposition en éléments simples, on intègre d'abord par rapport à u, puis par rapport à v et on obtient

$$I=\frac{\pi}{\alpha^2}\ log(\frac{1}{1-\alpha^2})$$

On en déduit que

$$\left|\overline{z}_2\frac{\partial g}{\partial z_1}-\overline{z}_1\frac{\partial g}{\partial z_2}\right|\leq\frac{2c_2}{R}\left\|g\right\|_\infty|z|\ \ \frac{\pi}{\alpha^2}\ log(\frac{1}{1-\alpha^2})\leq C\left\|g\right\|_\infty\frac{1}{\alpha}\ log(\frac{1}{1-\alpha^2})$$

Ainsi, puisque $-\rho(z_1,z_2,z')=1-|z|^2-|z'|^2=R^2-|z|^2=R^2(1-\alpha^2)$, on a

$$\sqrt{-\rho}\left|\overline{z}_2\frac{\partial g}{\partial z_1}-\overline{z}_1\frac{\partial g}{\partial z_2}\right|\leq C\left\|g\right\|_\infty\frac{R\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\ log(\frac{1}{1-\alpha^2})$$

or cette dernière quantité est bornée quand $\alpha\in[0,1]$, ce qui achève de démontrer la deuxième inégalité.

2.8 Propriétés de la fonction μ.

Rappelons que $d\mu_0$ est une mesure positive sur $[0,1[$ vérifiant

$$\int_0^1 \frac{d\mu_0(s)}{s^2} < +\infty \tag{8.1}$$

et que μ est définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\mu(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 x^{2s}\ d\mu_0(s) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Démontrons d'abord que $\mu(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.
Pour x suffisamment petit on note $A(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|log\ x|}}$. On a alors

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \int_0^{A(x)} x^{2s} d\mu_0(s) + \int_{A(x)}^1 x^{2s} d\mu_0(s) \\ &\leq \int_0^{A(x)} s^2 x^{2s} \frac{d\mu_0(s)}{s^2} + x^{2A(x)} \int_{A(x)}^1 d\mu_0(s) \\ &\leq A(x)^2 \int_0^1 \frac{d\mu_0(s)}{s^2} + x^{2A(x)} \int_0^1 d\mu_0(s) \end{aligned}$$

Or $A(x)^2 = \dfrac{1}{|log\ x|}$ tend vers 0 quand x tend vers 0 et $x^{2A(x)} = exp(-2\sqrt{|log\ x|})$ aussi, ce qui, grâce à l'hypothèse (8.1), nous donne la continuité de μ.

Régularité de μ et démonstration du lemme 2.4.26.

Montrons que la fonction μ_1 définie par $\mu_1(x^2) = \mu(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour cela on évalue le taux d'accroissement $T_t = \dfrac{\mu_1(x+t) - \mu_1(x)}{t}$ pour $x > 0$, grâce à la formule de Taylor avec reste intégral :

$$T_t = \int_0^1 \frac{(x+t)^s - x^s}{t} d\mu_0(s) = \int_0^1 \left(sx^{s-1} + t \int_0^1 (1-u)s(s-1)(x+tu)^{s-2} du \right) d\mu_0(s)$$

Si t est suffisamment petit, $x + tu > \dfrac{x}{2}$ d'où

$$\int_0^1 (1-u)s(s-1)(x+tu)^{s-2} du \leq s(s-1) \left(\frac{x}{2}\right)^{s-2}$$

On en déduit que T_t tend vers $\int_0^1 sx^{s-1}\, d\mu_0(s)$ quand t tend vers 0. Ainsi μ_1 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mu_1'(x) = \int_0^1 sx^{s-1}\, d\mu_0(s) \tag{8.2}$$

Pour montrer que μ_1 est aussi de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ on procède de la même façon et on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mu_1''(x) = \int_0^1 s(s-1)x^{s-2}\, d\mu_0(s)$$

Démontrons à présent le lemme 2.4.26, qui s'énonce ainsi :

Soit $\eta > 0$. On a, pour tout entier i compris entre 1 et n,

$$\overline{\partial}_i \partial_i \mu = \frac{\overline{\partial}_i \partial_i \left|g^\eta\right|^2}{\left|g^\eta\right|^2} \nu_1(|g^\eta|) + \frac{\left|\partial_i \left|g^\eta\right|^2\right|^2}{\left|g^\eta\right|^4} \nu_2(|g^\eta|)$$

et

$$\partial_i \mu = \frac{\partial_i \left|g^\eta\right|^2}{\left|g^\eta\right|^2} \nu_1(|g^\eta|)$$

où ν_1 et ν_2 sont définis par

$$\nu_1(x) = \int_0^1 sx^{2s} d\mu_0(s) \qquad \text{et} \qquad \nu_2(x) = \int_0^1 s(s-1)x^{2s} d\mu_0(s)$$

et vérifient

$$0 \le \nu_i(x) \le \mu(x)$$

Puisque $|g^\eta|$ ne s'annule pas sur $\overline{\mathbb{B}}$, la fonction $\mu(|g^\eta|) = \mu_1(|g^\eta|^2)$ est de classe C^2 dans $\overline{\mathbb{B}}$, et on a

$$\partial_i \mu(|g^\eta|) = \mu_1'(|g^\eta|^2)\partial_i \left|g^\eta\right|^2 = \frac{\partial_i \left|g^\eta\right|^2}{\left|g^\eta\right|^2} \int_0^1 s \left|g^\eta\right|^{2s} d\mu_0(s) = \frac{\partial_i \left|g^\eta\right|^2}{\left|g^\eta\right|^2} \nu_1(|g^\eta|)$$

De même on a

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}_i \partial_i \mu(|g^\eta|) &= \mu_1''(|g^\eta|^2) \left|\partial_i \left|g^\eta\right|^2\right|^2 + \mu_1'(|g^\eta|^2) \overline{\partial}_i \partial_i \left|g^\eta\right|^2 \\
&= \frac{\left|\partial_i \left|g^\eta\right|^2\right|^2}{\left|g^\eta\right|^4} \int_0^1 s(s-1) \left|g^\eta\right|^{2s} d\mu_0(s) + \frac{\overline{\partial}_i \partial_i \left|g^\eta\right|^2}{\left|g^\eta\right|^2} \int_0^1 s \left|g^\eta\right|^{2s} d\mu_0(s) \\
&= \frac{\left|\partial_i \left|g^\eta\right|^2\right|^2}{\left|g^\eta\right|^4} \nu_2(|g^\eta|) + \frac{\overline{\partial}_i \partial_i \left|g^\eta\right|^2}{\left|g^\eta\right|^2} \nu_1(|g^\eta|)
\end{aligned}$$

Il reste alors à voir que, si $s \in [0,1]$, alors s et $s(s-1)$ aussi, ce qui montre les inégalités (4.6).

Exemple de fonction μ.

Si on prend pour $d\mu_0$ la mesure $d\mu_0(s) = s^{1+\epsilon}ds$, avec $\epsilon > 0$, qui vérifie bien la condition (8.1), alors

$$\mu(x) \underset{x \longrightarrow 0^+}{\sim} \frac{C}{|log\ x|^{2+\epsilon}}$$

Pour le démontrer on s'intéresse plutôt à la fonction μ_1. On a d'après (8.2)

$$\mu_1'(x) = \int_0^1 sx^{s-1}\ s^{1+\epsilon}ds$$

Après une intégration par parties on obtient

$$\mu_1'(x) = \frac{1}{log(x)} - \frac{2+\epsilon}{xlog(x)}\mu_1(x)$$

et on en déduit que

$$\mu_1(x)\,|log(x)|^{2+\epsilon} = l(x)$$

où

$$l'(x) = sg(log(x))\,|log(x)|^{1+\epsilon} \quad \text{et} \quad l(0) = 0$$

Au voisinage de 0 la fonction l s'écrit donc, pour un certain $a \in \mathbb{R}_+^*$

$$l(x) = -\int_a^x (-log(t))^{1+\epsilon}dt + l(a)$$

Or au voisinage de 0

$$0 < (-log(t))^{1+\epsilon} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$$

donc $(-log(t))^{1+\epsilon}$ est intégrable en 0 et l a une limite finie en 0, ce qui montre l'équivalence.

Plus généralement on peut montrer que si $a < 2$ alors $\mu(x)\,|log(x)|^a$ tend vers 0 quand x tend vers 0 et que si $b > 2$ alors $\dfrac{\mu(x)}{x^b}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0.

2.9 Inégalités de normes.

On cherche ici à démontrer le lemme 2.4.5 qui s'énonce ainsi :

Soient h_1 et h_2 des formes à valeurs dans Λ^*. Alors on a

$$|h_1 \cap h_2|_* \leq C\, |h_1|_*\, |h_2|_*$$

où C est une constante ne dépendant que des degrés de h_1 et h_2.

On commence par démontrer deux lemmes intermédiaires.

Lemme 2.9.1 *Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. Il existe une constante positive $C(p,q)$ telle que pour toute $(0,p)$ forme h et toute $(0,q)$ forme k dans $\mathbb{B}$,*

$$|h \wedge k|^2 \leq C(p,q) \left(|h|^2 \frac{\left|k \wedge \overline{\partial}\rho\right|^2}{|\partial\rho|^2} + |k|^2 \frac{\left|h \wedge \overline{\partial}\rho\right|^2}{|\partial\rho|^2} + \frac{\left|k \wedge \overline{\partial}\rho\right|^2 \left|h \wedge \overline{\partial}\rho\right|^2}{|\partial\rho|^4} \right)$$

Démonstration :
On note $h' = \dfrac{h}{|h|}$ et $k' = \dfrac{k}{|k|}$. On note $e_1 = \dfrac{\overline{\partial}\rho}{|\partial\rho|}$ et on complète en une base orthonormée $(e_1, ..., e_n)$ de $\mathbb{C}^n$. Alors on a

$$h' = \sum_{|I|=p}{}' h_I e_I \quad \text{et} \quad k' = \sum_{|J|=q}{}' k_J e_J$$

On en déduit que

$$h' \wedge \overline{\partial}\rho = |\partial\rho|\, h' \wedge e_1 = |\partial\rho| \sum_{|I|=p/1\notin I}{}' h_I e_I \wedge e_1$$

et donc que

$$\left|h' \wedge \overline{\partial}\rho\right|^2 = |\partial\rho|^2 \sum_{|I|=p/1\notin I}{}' |h_I|^2 \tag{9.1}$$

De plus, puisque $|h'| = 1$ on a aussi

$$\sum_{|I|=p/1\in I}{}' |h_I|^2 \leq 1 \tag{9.2}$$

Alors

$$\begin{aligned}
|h' \wedge k'|^2 = & \sum_{|L| = p+q}{}' \left| \sum_{I \cup J = L} \epsilon_{I,J} h_I \wedge k_J \right|^2 \\
\leq & \sum_{1\in L} \left| \sum_{I\cup J=L/1\in I} \epsilon_{I,J} h_I \wedge k_J + \sum_{I\cup J=L/1\in J} \epsilon_{I,J} h_I \wedge k_J \right|^2 + \sum_{1\notin L} \left| \sum_{I\cup J=L} \epsilon_{I,J} h_I \wedge k_J \right|^2 \\
\leq & \sum_{1\in L} \left(\sum_{1\in I}{}' |h_I|^2 \right) \left(\sum_{1\notin J}{}' |k_J|^2 \right) + \sum_{1\in L} \left(\sum_{1\notin I}{}' |h_I|^2 \right) \left(\sum_{1\in J}{}' |k_J|^2 \right) \\
& + \sum_{1\notin L} \left(\sum_{1\notin I}{}' |h_I|^2 \right) \left(\sum_{1\notin J}{}' |k_J|^2 \right)
\end{aligned}$$

On utilise alors (9.1) et (9.2) ainsi que leurs équivalents pour k et on obtient

$$\left|h' \wedge k'\right|^2 \leq \sum_{1 \in L} \left|h'\right|^2 \frac{\left|\overline{\partial}\rho \wedge k'\right|^2}{\left|\partial\rho\right|^2} + \sum_{1 \in L} \left|k'\right|^2 \frac{\left|\overline{\partial}\rho \wedge h'\right|^2}{\left|\partial\rho\right|^2} + \sum_{1 \notin L} \frac{\left|\overline{\partial}\rho \wedge h'\right|^2 \left|\overline{\partial}\rho \wedge k'\right|^2}{\left|\partial\rho\right|^4}$$

Il suffit alors de multiplier cette inégalité par $\left|h\right|^2 \left|k\right|^2$ pour obtenir la conclusion du lemme, avec $C(p,q) = 3 \text{ card}\{L / \left|L\right| = p+q\}$. ∎

Lemme 2.9.2 *Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. Il existe une constante positive $C'(p,q)$ telle que pour toute $(0,p)$ forme h et toute $(0,q)$ forme k dans $\mathbb{B}$,*

$$\left|h \wedge k\right|_* \leq C'(p,q) \left|h\right|_* \left|k\right|_*$$

Démonstration :
Par définition de la norme $|.|_*$ on a

$$\left|h \wedge k\right|_*^2 = (-\rho) \left|h \wedge k\right|^2 + \left|\overline{\partial}\rho \wedge h \wedge k\right|^2 \tag{9.3}$$

Si $\left|\partial\rho\right| > \dfrac{1}{2}$, d'après le lemme 2.9.1 on a

$$\left|h \wedge k\right|_*^2 \leq C \left((-\rho) \left|h\right|^2 \frac{\left|k \wedge \overline{\partial}\rho\right|^2}{\left|\partial\rho\right|^2} + (-\rho) \left|k\right|^2 \frac{\left|h \wedge \overline{\partial}\rho\right|^2}{\left|\partial\rho\right|^2} + \frac{\left|k \wedge \overline{\partial}\rho\right|^2 \left|h \wedge \overline{\partial}\rho\right|^2}{\left|\partial\rho\right|^4} \right)$$

où $C = \max(C(p,q), C(p+1,q))$, et on en déduit que, si $\left|\partial\rho\right| > \dfrac{1}{2}$,

$$\left|h \wedge k\right|_*^2 \leq 16C((-\rho) \left|h\right|^2 + \left|\overline{\partial}\rho \wedge h\right|^2)((-\rho) \left|k\right|^2 + \left|\overline{\partial}\rho \wedge k\right|^2)$$

i.e.

$$\left|h \wedge k\right|_*^2 \leq 16C \left|h\right|_*^2 \left|k\right|_*^2$$

Si $\left|\partial\rho\right| \leq \dfrac{1}{2}$ alors $(-\rho) \geq \dfrac{3}{4}$ et on en déduit, à partir de (9.3), que

$$\left|h \wedge k\right|_*^2 \leq \frac{4}{3}(-\rho)^2 \left|h\right|^2 \left|k\right|^2 + \frac{4}{3}(-\rho) \left|h\right|^2 \left|\overline{\partial}\rho \wedge k\right|^2 \leq \frac{4}{3} \left|h\right|_*^2 \left|k\right|_*^2$$

On obtient ainsi le résultat avec $C'(p,q)^2 = \max(16C, \dfrac{4}{3})$. ∎

Nous pouvons à présent démontrer le lemme 2.4.5.
Si on note $h_i = \sum_{|I| = l_i} {}' h_{i,I}\, e_I$ pour $i = 1$ ou 2 on a par définition des normes

$$|h_1 \cap h_2|_*^2 = \sum_{|L|=l_1+l_2}{}' \left| \sum_{I_1 \cup I_2 = L} \epsilon(I_1, I_2) h_{1,I_1} \wedge h_{2,I_2} \right|_*^2$$

On utilise alors l'inégalité triangulaire pour $|.|_*$, le lemme 2.9.2 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir

$$|h_1 \cap h_2|_*^2 \leq C' \sum_{|L|=l_1+l_2}{}' \left(\sum_{|I|=l_1}{}' |h_{1,I}|_*^2 \right) \left(\sum_{|I|=l_2}{}' |h_{2,I}|_*^2 \right) \leq C\, |h_1|_*^2\, |h_2|_*^2$$

où C ne dépend que des degrés de h_1 et h_2., ce qui termine la démonstration du lemme 2.4.5.

2.10 Retour au théorème de division.

On se place dans les hypothèses du théorème 2.1.1 et on se ramène à celles du théorème 2.2.1 pour pouvoir appliquer celui-ci et en déduire la conclusion voulue.

Si $\|g\|_\infty \geq 1$, on définit

$$\forall j \in \mathbb{N}/1 \leq j \leq m,\ g_j^0 = \frac{g_j}{2\,\|g\|_\infty}$$

Alors

$$\left\|g^0\right\|^2 = \frac{\|g\|^2}{4\,\|g\|_\infty^2} < 1$$

On pose aussi $f^0 = \dfrac{f}{2\,\|g\|_\infty}$. Alors f^0 est bien holomorphe.
De plus

$$\frac{|f^0|}{|g^0|^{r+1}\,\mu(|g^0|)^{\frac{r}{2}}} = (2\,\|g\|_\infty)^r \frac{|f|}{|g|^{r+1}\,\mu(|g^0|)^{\frac{r}{2}}}$$

La définition de μ permet de voir que si $\|g\|_\infty \geq 1$ alors $\dfrac{\mu(|g|)}{4\,\|g\|_\infty^2} \leq \mu(\left|g^0\right|)$. On en déduit que

$$\frac{|f^0|}{|g^0|^{r+1}\,\mu(|g^0|)^{\frac{r}{2}}} < (2\,\|g\|_\infty)^{2r} \frac{|f|}{|g|^{r+1}\,\mu(|g|)^{\frac{r}{2}}}$$

de sorte que $\dfrac{\left|f^0\right|}{\left|g^0\right|^3\,\mu(\left|g^0\right|)} \in M^p(\mathbb{B})$ de norme majorée par $K(2\,\|g\|_\infty)^{2r}$.

Enfin soit $s\, \in]0,1[$. On définit $f^s(z) = f^0(sz)$ et $g_j^s(z) = g_j^0(sz)$. Ces fonctions vérifient alors les hypothèses du théorème 2.2.1. En effet, les fonctions ainsi définies sont holomorphes dans $B(0, \dfrac{1}{s})$, donc de classe C^∞ dans $\overline{\mathbb{B}}$ et $|g^s|\,(z) = \left|g^0\right|(sz) \leq \left\|g^0\right\|_\infty < 1$. Enfin soit $\zeta \in \partial\mathbb{B}$ et $z \in \Gamma_\zeta$. Alors

$$\frac{|f^s|}{|g^s|^{r+1}\mu(|g^s|)^{\frac{r}{2}}}(z) = \frac{|f^0|}{|g^0|^{r+1}\mu(|g^0|)^{\frac{r}{2}}}(sz) \leq M(\frac{|f^0|}{|g^0|^{r+1}\mu(|g^0|)^{\frac{r}{2}}})(\zeta)$$

car si $s < 1$ alors $sz \in \Gamma_\zeta$. En effet, si $|z| < \frac{1}{2}$ alors $\left|1 - s\overline{\zeta}.z\right| < \frac{3}{2} \leq 2(1 - s^2|z|^2)$. Sinon, $|z| \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2(s+1)}$ d'où

$$\begin{aligned}
\left|1 - s\overline{\zeta}.z\right| &< 2(1 - |z|^2) + (1 - s)|z| \\
&\leq 2(1 - s^2|z|^2) + (1 - s)|z|(1 - 2(1 + s)|z|) \\
&\leq 2(1 - s^2|z|^2)
\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\frac{|f^s|}{|g^s|^{r+1}\mu(|g^s|)^{\frac{r}{2}}} \in M^p(\mathbb{B})$$

de norme majorée par $K(2\|g\|_\infty)^{2r}$. D'après le théorème 2.2.1 pour tout $\epsilon > 0$ on a :

$$\exists (f_1^{s,\epsilon}, ..., f_m^{s,\epsilon}, f_{m+1}^{s,\epsilon}) \in H^p(\mathbb{B})^m /\ f_1^{s,\epsilon} g_1^s + ... + f_m^{s,\epsilon} g_m^s + f_{m+1}^s \epsilon = f^{\ s} \tag{10.1}$$

et

$$\forall j \in \mathbb{N}/1 \leq j \leq m+1,\ \left\|f_j^{s,\epsilon}\right\|_{H^p} \leq C$$

On utilise alors la proposition suivante pour faire tendre ϵ vers 0.

Proposition 2.10.1 *Soit $(h_l)_{l\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $H^p(\mathbb{B})$ vérifiant*

$$\forall l \in \mathbb{N},\ \|h_l\|_{H^p} \leq C$$

où C est une constante positive. Alors il existe une fonction $h \in H^p(\mathbb{B})$ et une suite extraite $(h_{l_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tendant vers h uniformément sur les compacts. De plus $\|h\|_{H^p} \leq C$.

Cette proposition sera démontrée au paragraphe 2.11.
Ainsi, il existe une suite $(\epsilon_l)_{l\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 et il existe des fonctions $(f_1^s, ..., f_m^s, f_{m+1}^s) \in H^p(\mathbb{B})^{m+1}$ telles que

$$\forall j \in \mathbb{N}/1 \leq j \leq m+1,\ \left\|f_j^s\right\|_{H^p} \leq C$$

De plus, pour tout j, la suite f_j^{s,ϵ_l} tend vers f_j^s uniformément sur les compacts. On en déduit en passant à la limite dans (10.1) que

$$f_1^s g_1^s + ... + f_m^s g_m^s = f^s \tag{10.2}$$

On utilise alors à nouveau la proposition 2.10.1 en faisant tendre s vers 1. On en déduit qu'il existe une suite $(s_l)_{l\in\mathbb{N}}$ tendant vers 1, et des fonctions $(f_1^0, ..., f_m^0) \in H^p(\mathbb{B})^m$ telles que

$$\forall j \in \mathbb{N}/1 \leq j \leq m+1,\ \left\|f_j^0\right\|_{H^p} \leq C$$

De plus, pour tout j, la suite f_j^s tend vers f_j^0 uniformément sur les compacts. On en déduit en passant à la limite dans (10.2) que

$$f_1^0 g_1^0 + \ldots + f_m^0 g_m^0 = f^0$$

Il suffit alors de multiplier cette équation par $2\left\|g\right\|_\infty$ pour obtenir

$$f_1^0 g_1 + \ldots + f_m^0 g_m = f$$

Puisque les fonctions f_j^0 sont dans $H^p(\mathbb{B})$ cela finit la démonstration du théorème 2.1.1.

2.11 Convergence dans $H^p(\mathbb{B})$.

On démontre ici la proposition 2.10.1. Pour cela on considère une suite $(h_l)_{l\in\mathbb{N}}$ de fonctions dans $H^p(\mathbb{B})$ vérifiant

$$\exists C > 0/\ \forall l \in \mathbb{N},\ \left\|h_l\right\|_{H^p} \leq C$$

et on cherche à montrer que cette suite admet une sous-suite convergeant uniformément sur les compacts vers une fonction $h \in H^p(\mathbb{B})$ telle que $\left\|h\right\|_{H^p} \leq C$. D'après le lemme 2.11.1 ci-dessous on a

$$\forall z \in \mathbb{B},\ |h_l(z)| \leq C_2 \frac{\left\|h_l\right\|_{H^p}}{(1-|z|^2)^{n-2+2/p}} \leq C_2 \frac{C}{(1-|z|^2)^{n-2+2/p}}$$

d'où

$$\forall z \in \overline{B}(0,R),\ |h_l(z)| \leq \frac{CC_2}{(1-R^2)^{n-2+2/p}}$$

i.e. $(h_l)_{l\in\mathbb{N}}$ est une famille de fonctions holomorphes uniformément bornée sur les compacts. Donc il existe une sous-suite $(h_{l_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et une fonction h holomorphe dans $\mathbb{B}$ telle que h_{l_k}tend vers h uniformément sur les compacts de $\mathbb{B}$. Montrons que $h \in H^p(\mathbb{B})$. Soit $\epsilon > 0$ et $r < 1$. Alors, en utilisant la convergence uniforme sur $\overline{B}(0,r)$, on obtient

$$\exists K \in \mathbb{N}/\ \forall k \geq K,\ \forall z \in \overline{\mathbb{B}},\ |h(rz) - h_{l_k}(rz)| \leq \epsilon.$$

Alors,

$$\int_{\partial\mathbb{B}} |h(rz) - h_{l_k}(rz)|^p\, d\sigma(z) \leq \int_{\partial\mathbb{B}} \epsilon^p d\sigma \leq C\epsilon^p$$

d'où

$$\left(\int_{\partial\mathbb{B}} |h(rz)|^p \, d\sigma(z)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon + \left(\int_{\partial\mathbb{B}} |h_{l_k}(rz)|^p \, d\sigma(z)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon + \|h_{l_k}\|_{H^p} \leq \epsilon + C$$

On peut alors faire tendre ϵ vers 0 ce qui nous permet d'obtenir

$$\forall r < 1, \; \left(\int_{\partial\mathbb{B}} |h(rz)|^p \, d\sigma(z)\right)^{\frac{1}{p}} \leq C$$

et donc, sachant que h est holomorphe dans $\mathbb{B}$, on a $h \in H^p(\mathbb{B})$ et $\|h\|_{H^p} \leq C$.

Lemme 2.11.1 *Il existe une constante $C_2 > 0$ telle que*

$$\forall h \in H^p(\mathbb{B}), \; \forall a \in \mathbb{B}, \; |h(a)| \leq C_2 \frac{\|h\|_{H^p}}{(1-|a|^2)^{n-2+2/p}}.$$

Démonstration :
Soit $h \in H^p(\mathbb{B})$ et soit h^* sa limite radiale. On note P le noyau de Poisson-Szegö de $\mathbb{B}$. On a

$$\forall a \in \mathbb{B}, \; |h(a)| = \left| \int_{\partial\mathbb{B}} P(a,\zeta) h^*(\zeta) d\sigma(\zeta) \right| \; \leq \|P(a,.)\|_{L^q(\partial\mathbb{B})} \|h^*\|_{L^p(\partial\mathbb{B})}$$

où $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Or on a, d'après le lemme ci-dessous

$$\forall q \geq 1, \; \exists \gamma_q > 0 / \; \forall a \in \mathbb{B}, \; \|P(a,.)\|_{L^q(\partial\mathbb{B})} \leq \gamma_q \frac{1}{(1-|a|^2)^{n-2/q}}.$$

donc $|h(a)| \leq \gamma_q \dfrac{1}{(1-|a|^2)^{n-2+2/p}} \|h\|_{H^p}$ d'où le résultat. ∎

Lemme 2.11.2 *Si on note,*

$$\forall a \in \mathbb{B}, \; \forall \zeta \in \partial\mathbb{B}, \; P(a,\zeta) = C \frac{(1-|a|^2)^n}{(1-\overline{a}.\zeta)^{2n}}$$

le noyau de Poisson-Szegö dans $\mathbb{B}$ alors

$$\forall q \geq 1, \; \exists \gamma_q > 0 / \; \forall a \in \mathbb{B}, \; \|P(a,.)\|_{L^q(\partial\mathbb{B})} \leq \gamma_q \frac{1}{(1-|a|^2)^{n-2/q}}.$$

Démonstration :
On remarque d'abord que $\|P(a,.)\|_{L^q(\partial\mathbb{B})}$ ne dépend que de $|a|$ car la mesure de Lebesgue sur $\partial\mathbb{B}$ est invariante par rotation. On peut donc supposer que $a = (r, 0)$.
Soit $A = \|P(a,.)\|^q_{L^q(\partial\mathbb{B})}$; par définition, A s'écrit

$$A = (1-r^2)^{nq} \int_{\partial\mathbb{B}} \frac{d\sigma(\zeta)}{|1-r\zeta_1|^{2nq}}$$

$$A = (1-r^2)^{nq}\int_{\zeta_1\in\mathbb{D}} \frac{1}{|1-r\zeta_1|^{2nq}}\left(\int_{|\zeta_2|^2=1-|\zeta_1|^2} d\sigma(\zeta_2)\right) d\lambda(\zeta_1),$$

or $\forall \zeta_1 \in \mathbb{D}$, $\displaystyle\int_{|\zeta_2|^2 = 1-|\zeta_1|^2} d\sigma(\zeta_2) \leq 1$, donc

$$A \leq \frac{(1-r^2)^{nq}}{2\pi}\int_{\mathbb{D}} \frac{d\zeta_1 \wedge d\overline{\zeta}_1}{|1-r\zeta_1|^{2nq}} = \frac{(1-r^2)^{nq}}{2\pi} I$$

On effectue le changement de variables suivant dans I :

$$\zeta_1 = \frac{-ib+x+iy}{-ib-(x+iy)} \qquad \text{où} \qquad b = \frac{r(r+1)}{1-r}$$

On a alors

$$I = \frac{4b^2}{(1+r)^{2nq}}\int_{x=-\infty}^{+\infty}\int_{y=0}^{+\infty} \frac{(x^2+(y+b)^2)^{nq-2}}{(x^2+(y+r)^2)^{nq}} dxdy$$

Or on a $y+b = \dfrac{y(1-r)+r(1+r)}{1-r}$ d'où

$$(x^2+(y+b)^2)^{nq-2} \leq \frac{4^{nq-2}}{(1-r)^{2nq-4}}(x^2+(y+r)^2)^{nq-2}$$

On en déduit que

$$I \leq \frac{C_q b^2}{(1+r)^{2nq}(1-r)^{2nq-4}}\int_{x=-\infty}^{+\infty}\int_{y=0}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+(y+r)^2)^2} dxdy = \frac{C_q b^2}{(1+r)^{2nq}(1-r)^{2nq-4}} I_2$$

Alors on a

$$I_2 \leq \int_{s=r}^{+\infty}\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{sdsd\theta}{s^4} \leq \pi\frac{1}{2r^2}$$

On obtient enfin, en remplaçant b par sa valeur

$$A \leq \frac{(1-r^2)^{nq}}{2\pi}\frac{C_q r^2(1+r)^2}{(1-r)^2(1+r)^{2nq}(1-r)^{2nq-4}}\pi\frac{1}{2r^2} = \frac{4}{(1-r^2)^{nq-2}}$$

ce qui nous donne le résultat. ∎

Chapitre 3

Division dans $H^p(\mathbb{B})$: cas de deux fonctions.

3.1 Introduction.

Dans ce chapitre on améliore le résultat obtenu précédemment (théorème 2.1.1) dans le cas où on n'a que deux générateurs g_1 et g_2 et où les fonctions dépendent de deux variables. En effet, la méthode de régularisation employée pour démontrer le théorème 2.1.1, qui consiste à rajouter une fonction génératrice g_{m+1} nous donne dans le cas de deux générateurs la condition suffisante $\frac{f}{|g|^3\,\mu(|g|)^{3/2}} \in M^p(\mathbb{B})$. Pour se rapprocher du résultat de H. Skoda dans le théorème 1.0.2 il faudrait diminuer les exposants du dénominateur.
Dans le cas de deux générateurs le complexe de Koszul s'arrête au rang 1, et ne fait intervenir qu'une forme à résoudre, qu'on peut alors régulariser par convolution. Ceci nous permet d'obtenir le résultat énoncé ci-dessous.

Théorème 3.1.1 *Soient $1 \leq p < \infty$ et $\mathbb{B}$ la boule unité de $\mathbb{C}^2$. Soient g_1 et g_2 deux fonctions dans $H^\infty(\mathbb{B})$ et f une fonction holomorphe dans $\mathbb{B}$. On suppose que*

$$\frac{f}{|g|^2\,\mu(|g|)} \in M^p(\mathbb{B})$$

Alors il existe f_1 et f_2 dans $H^p(\mathbb{B})$ telles que $f_1g_1 + f_2g_2 = f$ dans $\mathbb{B}$.

Comme dans ce théorème, dans tout le chapitre, $\mathbb{B}$ désignera la boule unité de $\mathbb{C}^2$.
Pour démontrer ce théorème on va résoudre une $(0,1)$-forme, qu'on va d'abord régulariser par convolution. Pour cela on a besoin qu'elle soit définie dans un domaine un peu plus grand que la boule. C'est pourquoi dans un premier temps on résoud le problème quand les données sont définies dans une boule de rayon plus grand que 1, pour ensuite se ramener au théorème 3.1.1 dans le paragraphe 3.3.

3.2 Résolution quand les données sont dans $\mathbb{B}_\delta$.

Comme dans le cas de plusieurs générateurs, si on pose $f_i^0 = f\dfrac{\overline{g}_i}{|g|^2}$ on a $f_1^0 g_1 + f_2^0 g_2 = f$, mais les fonctions f_i^0, si ce sont bien des distributions, ne sont ni holomorphes ni régulières. Cependant si on trouve des distributions f_1^1 et f_2^1 telles que

$$\overline{\partial} f_i^1 = \overline{\partial} f_i^0 \qquad et \qquad f_1^1 g_1 + f_2^1 g_2 = 0$$

alors les fonctions $f_i = f_i^0 - f_i^1$ seront holomorphes et vérifieront $f_1 g_1 + f_2 g_2 = f$. Or le calcul montre que

$$\overline{\partial} f_1^0 = -g_2 \omega \qquad et \qquad \overline{\partial} f_2^0 = g_1 \omega \tag{2.1}$$

où ω est le $(0,1)$-courant suivant

$$\omega = \frac{f}{|g|^4}(\overline{g}_1 \overline{\partial g_2} - \overline{g}_2 \overline{\partial g_1}).$$

Il suffit alors de trouver u tel que $\overline{\partial} u = \omega$ (après avoir vérifié que ω est bien $\overline{\partial}$-fermé) et de poser

$$f_1 = f\frac{\overline{g}_1}{|g|^2} + g_2 u \qquad \text{et} \qquad f_2 = f\frac{\overline{g}_1}{|g|^2} - g_1 u$$

pour obtenir

$$\overline{\partial} f_i = 0 \qquad \text{et} \qquad f_1 g_1 + f_2 g_2 = f$$

Si de plus la solution u obtenue vérifie de bonnes estimations, les fonctions f_i seront bien dans $H^p(\mathbb{B})$, ce qui démontrera le théorème.
Dans la suite on va donc chercher à résoudre le courant ω. Pour cela, on procède en régularisant la forme ω par convolution. Pour que la forme régularisée obtenue soit bien définie dans $\mathbb{B}$ on a besoin de supposer que ω, et donc g_1, g_2 et f, sont définies dans une boule un peu plus grande que $\mathbb{B}$.
Pour $\delta > 0$ on définit

$$\mathbb{B}_\delta = \{z \in \mathbb{C}^2 / \, |z| < 1 + \delta\}$$

la boule de rayon $1+\delta$, de fonction définissante

$$\rho_\delta(z) = |z|^2 - (1+\delta)^2$$

On va en fait chercher à démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.2.1 *Soit $\delta > 0$. Soient g_1 et g_2 deux fonctions dans $H^\infty(\mathbb{B}_\delta)$ et f une fonction holomorphe dans $\mathbb{B}_\delta$ telles qu'il existe une constante K positive telle que*

$$\frac{f}{|g|^2 \mu(|g|)} \in M^p(\mathbb{B}_\delta) \tag{2.2}$$

de norme majorée par K.
Alors il existe deux fonctions f_1 et f_2 dans $H^p(\mathbb{B})$ de norme majorée par une constante $C(K)$ ne dépendant que de K telles que

$$\forall z \in \mathbb{B},\ \ f_1(z)g_1(z) + f_2(z)g_2(z) = f(z). \tag{2.3}$$

Les espaces $M^p(\mathbb{B}_\delta)$ sont définis de la façon suivante. Si $\zeta \in \partial\mathbb{B}_\delta$ on définit le domaine admissible de sommet ζ par

$$\Gamma_\zeta^\delta = \{z \in \mathbb{B}_\delta / \left|(1+\delta)^2 - \overline{\zeta}.z\right| < 2((1+\delta)^2 - |z|^2)\}$$

et si h est une fonction mesurable dans $\mathbb{B}_\delta$ sa fonction maximale en un point $\zeta \in \partial\mathbb{B}_\delta$ est définie par

$$M_\delta h(\zeta) = \operatorname*{Sup}_{z \in \Gamma_\zeta^\delta} |h(z)|$$

On peut alors définir l'espace

$$M^p(\mathbb{B}_\delta) = \{h \in L^1(\mathbb{B}_\delta)/M_\delta h \in L^p(\partial\mathbb{B}_\delta)\}$$

qu'on munit de la norme

$$\|h\|_{M_\delta^p} = \|M_\delta h\|_{L^p(\partial\mathbb{B}_\delta)}$$

3.2.1 La forme ω est $\overline{\partial}$-fermée.

Pour résoudre l'équation $\overline{\partial}u = \omega$ il faut d'abord vérifier que $\overline{\partial}\omega = 0$.
D'après (2.1) on a

$$g_1\overline{\partial}\omega = 0 \qquad \text{et} \qquad g_2\overline{\partial}\omega = 0$$

ce qui permet de voir qu'en dehors de l'ensemble Z des zéros communs à g_1 et g_2 la forme ω est de classe C^∞ et $\overline{\partial}$-fermée.
Pour montrer que ω est $\overline{\partial}$- fermée en un point a de Z on considère une $(2,0)$-forme ϕ dans $C^\infty(\mathbb{B}_\delta)$ à support dans un voisinage Ω de a qu'on précisera dans la suite. Pour $\epsilon > 0$ on note

$$Z_\epsilon = \{z \in \mathbb{B}_\delta / d(z, Z) < \epsilon\}$$

Soit χ_ϵ une fonction de classe C^∞ dans Ω telle que $0 \le \chi_\epsilon \le 1$ et

$$\chi_\epsilon \quad \begin{array}{l} \equiv 1 \quad \text{sur } Z_\epsilon \\ \equiv 0 \quad \text{sur } \Omega\backslash Z_{2\epsilon} \end{array}$$

On suppose de plus que $\left|\overline{\partial}\chi_\epsilon\right| \leq \dfrac{C_0}{\epsilon}$ où C_0 est une constante positive(voir le paragraphe 3.4 pour la démonstration qu'une telle fontion existe). On note $\phi_1^\epsilon = \chi_\epsilon \phi$ et $\phi_2^\epsilon = (1-\chi_\epsilon)\phi$. Alors ϕ_1^ϵ est à support dans $Z_{2\epsilon}$ et ϕ_2^ϵ est à support dans $\Omega \backslash Z_\epsilon$.

$$\left\langle \overline{\partial}\omega, \phi \right\rangle = \left\langle \overline{\partial}\omega, \phi_1^\epsilon \right\rangle + \left\langle \overline{\partial}\omega, \phi_2^\epsilon \right\rangle = \left\langle \overline{\partial}\omega, \phi_1^\epsilon \right\rangle$$

car $\overline{\partial}\omega = 0$ sur le support de ϕ_2^ϵ. Ainsi

$$\left\langle \overline{\partial}\omega, \phi \right\rangle = -\int_{Z_{2\epsilon}\cap\Omega} \omega \wedge \overline{\partial}\phi_1^\epsilon.$$

Par définition de ϕ_1^ϵ on a $\overline{\partial}\phi_1^\epsilon = 0$ dans Z_ϵ et $\left|\overline{\partial}\phi_1^\epsilon\right| \leq \|\phi\|_\infty \dfrac{C_0}{\epsilon}$ dans $(Z_{2\epsilon}\backslash Z_\epsilon)\cap\Omega$.
On utilise alors le lemme suivant, qui permet de majorer $|\omega|$ sur Ω.

Lemme 3.2.2 *Si $F \in M^p(\mathbb{B}_\delta)$ alors F est bornée presque partout sur chaque compact de $\mathbb{B}_\delta$.*

Démonstration :
On démontre en fait la contraposée. Soit K un compact de $\mathbb{B}_\delta$. Si F n'est pas bornée presque partout sur K alors

$$\forall C \in \mathbb{R}^+,\ \lambda(E_C) > 0$$

où

$$E_C = \{z \in \mathbb{B}_\delta / |F(z)| > C\}$$

Alors il existe un point z_0 tel que

$$z_0 \in \bigcap_{C>0} \overline{E}_c$$

En effet, puisque chaque ensemble E_C est non vide on peut prendre, pour tout entier n, $z_n \in E_n$. Alors la suite est contenue dans le compact $\overline{E}_0$. On peut donc en extraire une sous-suite $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un point $z_0 \in \mathbb{B}_\delta$. Soit $C > 0$. Montrons que $z_0 \in \overline{E}_C$. Puisque $z_{n_k} \in E_C$ si $C \leq n_k$, il existe un entier k_0 tel que

$$\forall k \geq k_0,\ d(z_0, \overline{E}_C) \leq d(z_0, z_{n_k})$$

Puisque la suite z_{n_k} tend z_0 on en déduit que

$$d(z_0, \overline{E}_C) = 0$$

et puisque $\overline{E}_C$ est fermé que $z_0 \in \overline{E}_C$.
On note alors

$$\Gamma^{z_0} = \{\zeta \in \partial\mathbb{B}_\delta / z_0 \in \Gamma_\zeta^\delta\}$$

Soit $C > 0$. Si $\zeta \in \Gamma^{z_0}$ alors Γ_ζ^δ est un voisinage ouvert de z_0, et puisque $z_0 \in \overline{E}_C$, $\Gamma_\zeta^\delta \cap E_C$ est un ouvert non vide, qui est donc de mesure non nulle, et sur lequel $F > C$. On en déduit que $M_\delta F(\zeta) \geq C$. Puisque ceci est vrai pour tout $C > 0$ et pour tout $\zeta \in \Gamma^{z_0}$, on a donc $M_\delta F = +\infty$ sur Γ^{z_0}. Or

$$\Gamma^{z_0} = \{\zeta \in \partial\mathbb{B}_\delta / \left|(1+\delta)^2 - z_0.\overline{\zeta}\right| < 2((1+\delta)^2 - |z_0|^2)\}$$

est un ouvert non vide de $\partial\mathbb{B}$ (il contient par exemple le point $(1+\delta)\dfrac{z_0}{|z_0|}$) et est donc de mesure non nulle. On en déduit que $M_\delta F$ n'est pas dans $L^p(\partial\mathbb{B}_\delta)$. ∎

Ce lemme et l'hypothèse (2.2) entrainent qu'il existe une constante C telle que $|\omega| \leq C\dfrac{|\partial g|}{|g|}\mu(|g|)$ presque partout dans Ω.
De plus dans $(Z_{2\epsilon}\backslash Z_\epsilon)\cap\Omega$ on a $\epsilon \leq |g| \leq 2\epsilon$. Puisque pour tout $s \in [0,1]$, la fonction qui à x associe x^{2s} est croissante, et puisque la mesure $d\mu_0$ est positive, la fonction μ est croissante. On en déduit que

$$\left\langle \overline{\partial}\omega, \phi \right\rangle \leq \|\phi\|_\infty CC_0 \|\partial g\|_{L^\infty(\Omega)} \frac{1}{\epsilon^2}\mu(2\epsilon)\lambda(Z_{2\epsilon}\backslash Z_\epsilon \cap \Omega) \tag{2.4}$$

Afin d'estimer $\lambda(Z_{2\epsilon}\backslash Z_\epsilon \cap \Omega)$ on utilise le lemme suivant :

Lemme 3.2.3 *Avec les définitions précédentes, il existe un voisinage Ω de a dans $\mathbb{B}_\delta$ tel que*

$$\exists C > 0/\ \forall \epsilon \in]0,1[,\ \ \lambda(Z_\epsilon \cap \Omega) \leq C\epsilon^2.$$

On fait alors tendre ϵ vers 0 dans (2.4) et on en déduit, sachant que μ tend vers 0 en 0 (voir le paragraphe 2.8), que

$$\left\langle \overline{\partial}\omega, \phi \right\rangle = 0$$

Démonstration du lemme 3.2.3 :
On utilise la proposition 2.40 de [15] pour $Y = Z$. On se place dans un bon système de coordonnées et on distingue plusieurs cas de figure.

Si $\dim_a Z = 0$ il existe un voisinage Ω de a et un ensemble analytique de Ω de la forme $Y = \{z \in \Omega/P_1(z_1) = P_2(z_2) = 0\}$, où P_1 et P_2 sont des polynômes, tels que $(Z\cap\Omega) \subset Y$. On en déduit que Y est une réunion finie de points. Si on note encore $Y_\epsilon = \{z \in \Omega/d(z,Y) < \epsilon\}$ on en déduit que

$$\forall \epsilon > 0, \lambda(Y_\epsilon) \leq 2\pi N\epsilon^4$$

où N est le nombre de points de Y. D'autre part $(Z_\epsilon \cap \Omega) \subset Y_\epsilon$ d'où on déduit que

$$\forall \epsilon \in]0,1[,\ \ \lambda(Z_\epsilon \cap \Omega) \leq 2\pi N\epsilon^2.$$

Si $\dim_a Z = 1$ il existe un voisinage D de a et un ensemble analytique Y de D tels que $(Z\cap D) \subset Y$. De plus $Y = \{z \in D/P(z_2;z_1) = 0\}$ où P est un polynôme de Weierstrass en z_2. Or l'ensemble Y ainsi défini est une sous-variété. Soit alors Φ un difféomorphisme local de $\mathbb{C}^2$ défini sur un voisinage Ω de a tel que $\Phi(Y\cap\Omega) = \{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2/z_2 = 0\} \cap \Phi(\Omega)$. On évalue alors la mesure de Y_ϵ.

$$\int_{Y_\epsilon\cap\Omega} d\lambda = \int_{\Phi(Y_\epsilon\cap\Omega)} \frac{d\lambda}{|\mathrm{Jac}\ \Phi|}$$

Or $|\text{Jac } \Phi|$ est minoré sur Ω d'où

$$\exists C_1 > 0 / \int_{Y_\epsilon \cap \Omega} d\lambda \leq C_1 \lambda(\Phi(Y_\epsilon \cap \Omega))$$

Or si $z \in Y_\epsilon \cap \Omega$, $\exists z_0 \in Y / \ |z - z_0| < \epsilon$ et on en déduit que

$$\exists C_2 > 0 / \ |\Phi(z) - \Phi(z_0)| \leq C_2 |z - z_0| \leq C_2 \epsilon$$

d'où

$$\Phi(Y_\epsilon \cap \Omega) \subset \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 / \ |z_2| < C_2 \epsilon\} \cap \Phi(\Omega)$$

et en conséquence

$$\exists C > 0 / \ \lambda(\Phi(Y_\epsilon \cap \Omega)) \leq C \epsilon^2$$

Puisque on a aussi $(Z_\epsilon \cap \Omega) \subset (Y_\epsilon \cap \Omega)$ on obtient la conclusion. ∎

3.2.2 Régularisation et résolution de la forme ω_ϵ obtenue.

Soit $\chi \in C^\infty(\mathbb{C}^2)$ positive à support dans $\mathbb{B}$ telle que $\|\chi\|_{L^1(\mathbb{C}^2)} = 1$.
Soit $\epsilon_0 > 0$ qu'on fixera plus tard, $0 < \epsilon < \epsilon_0$ et $\forall z \in \mathbb{C}^2$, $\chi_\epsilon(z) = \dfrac{1}{\epsilon^4} \chi\left(\dfrac{z}{\epsilon}\right)$. On définit alors $\omega_\epsilon = \chi_\epsilon * \omega$ comme la convolée de χ_ϵ avec ω. La forme ω_ϵ est donc de classe C^∞ sur $\overline{\mathbb{B}}$. On montrera au paragraphe 3.2.5 que ω_ϵ tend vers ω dans $L^1(\mathbb{B}_\eta)$.
On cherche à résoudre cette nouvelle forme en appliquant le corollaire p 13 de [3], qui s'écrit comme suit :

Corollaire 3.2.4 *Soient $1 \leq p < \infty$ et w une $(0,1)$-forme de classe C^∞ dans $\overline{\mathbb{B}}$ telle que $\overline{\partial} w = 0$ et vérifiant les deux hypothèses suivantes :*
a) *Les coefficients de $-\rho \partial w$, $\sqrt{-\rho} \partial w \wedge \overline{\partial} \rho$, $\sqrt{-\rho} \partial w \wedge \partial \rho$ et $\partial w \wedge \partial \rho \wedge \overline{\partial} \rho$ sont dans $W^\alpha(\mathbb{B})$ de norme majorée par $C(K)$.*
b) *Les coefficients de w sont majorés par $\gamma \nu$ où $\gamma \in M^p(\partial \mathbb{B})$ et $-\rho \nu^2 \in V^1(\mathbb{B})$ de normes majorées par $C(K)$.*
Alors il existe une solution $u \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}})$ de l'équation $\overline{\partial} u = w$ telle que $u \in L^p(\partial \mathbb{B})$ de norme majorée par une constante ne dépendant que de K.

Vérifions d'abord que ω_ϵ est $\overline{\partial}$-fermée.
Soit ϕ une $(0,2)$-forme de classe C^∞ à support compact dans $\mathbb{B}$.

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{\partial} \omega_\epsilon, \phi \right\rangle = -\left\langle \omega_\epsilon, \overline{\partial} \phi \right\rangle &= -\int_{\mathbb{B}} \int_{\mathbb{C}^2} \chi_\epsilon(z) \omega(z_0 - z) \wedge \overline{\partial} \phi(z_0) d\lambda(z) \\
&= -\int_{\mathbb{C}^2} \chi_\epsilon(z) \left(\int_{\mathbb{B}} \omega(z_0 - z) \wedge \overline{\partial} \phi(z_0) \right) d\lambda(z) \\
&= -\int_{\{|z| < \epsilon\}} \chi_\epsilon(z) \left(\int_{\{|u| < 1 + \epsilon\}} \omega(u) \wedge \overline{\partial} \phi(u + z) \right) d\lambda(z)
\end{aligned}$$

Soit $\phi_z(u) = \phi(z+u)$. Alors

$$\begin{aligned}\left\langle \overline{\partial}\omega_\epsilon, \phi \right\rangle &= -\int_{\{|z|\,<\,\epsilon\}} \chi_\epsilon(z) \left\langle \omega, \overline{\partial}\phi_z \right\rangle d\lambda(z) \\ &= \int_{\{|z|\,<\,\epsilon\}} \chi_\epsilon(z) \left\langle \overline{\partial}\omega, \phi_z \right\rangle d\lambda(z)\end{aligned}$$

Or $\overline{\partial}\omega = 0$ dans $\mathbb{B}_\delta$, et ϕ_z est à support dans $\mathbb{B}_\delta$ donc

$$\left\langle \overline{\partial}\omega_\epsilon, \phi \right\rangle = 0.$$

Pour pouvoir appliquer le corollaire 3.2.4, on commence par vérifier que ω vérifie les hypothèses a) et b) dans $\mathbb{B}_\eta$ pour tout $\eta < \delta$. Nous devons d'abord pour cela définir les mesures de Carleson dans $\mathbb{B}_\eta$.

Définition des mesures de Carleson dans $\mathbb{B}_\eta$.

Comme dans $\mathbb{B}$ on définit les tentes de la façon suivante. Si $\zeta \in \partial\mathbb{B}_\delta$ et $s > 0$ la tente de centre ζ et de rayon s est définie par

$$T_s^\delta = \{z \in \mathbb{B}_\delta / d(T_\zeta^{\mathbb{C}}\mathbb{B}_\delta, z) < s\}$$

Montrons que

$$T_s^\delta = \{z \in \mathbb{B}_\delta / \left|(1+\delta) - \frac{1}{1+\delta}\overline{\zeta}.z\right| < s\}$$

Pour cela il suffit de montrer que

$$d(T_\zeta^{\mathbb{C}}\mathbb{B}_\delta, z) = \left|(1+\delta) - \frac{1}{1+\delta}\overline{\zeta}.z\right|$$

Il suffit de considérer le cas où $\zeta = (1+\delta, 0, ..., 0)$. On a alors

$$T_\zeta^{\mathbb{C}}\mathbb{B}_\delta = \{z \in \mathbb{C}^2 / z_1 = 1+\delta\}$$

Soit (e_1, e_2) une base hilbertienne de $\mathbb{C}^2$ telle que $e_1 = (1,0)$. Soit $u \in T_\zeta^{\mathbb{C}}\mathbb{B}_\delta$. Alors

$$u = (1+\delta)e_1 + u_2\ e_2$$

où $u_2 \in \mathbb{C}$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{B}_\delta$ tel que

$$z = z_1e_1 + z_2e_2$$

on a

$$d(T_\zeta^{\mathbb{C}}\mathbb{B}_\delta, z)^2 \leq |z-u|^2 = |z_1 - (1+\delta)|^2 + |z_2 - u_2|^2$$

On en déduit que

$$d(T_\zeta^{\mathbb{C}}\mathbb{B}_\delta, z) = |z_1 - (1+\delta)|$$

Or on a

$$z_1 = z.\overline{e}_1 = z.\frac{\overline{\zeta}}{1+\delta}$$

ce qui nous donne bien

$$d(T_\zeta^{\mathbb{C}}\mathbb{B}_\delta, z) = \left|(1+\delta) - \frac{1}{1+\delta}\overline{\zeta}.z\right|$$

On définit alors les mesures de Carleson comme dans $\mathbb{B}$:

Définition 3.2.5 *On dit qu'une mesure ν est dans $V^1(\mathbb{B}_\delta)$ si il existe une constante postive C telle que*

$$\forall \zeta \in \partial\mathbb{B}_\delta, \forall s > 0,\ \ |\nu|\left(T_s^\delta\right) \leq Cs^2 \tag{2.5}$$

On définit alors $\|\nu\|_{V^1}$ comme la plus petite constante C vérifiant (2.5).

Comme dans $\mathbb{B}$ on note $V^0(\mathbb{B})$ l'espace des mesures bornées dans $\mathbb{B}_\delta$ et on définit alors les espaces $W^\alpha(\mathbb{B}_\delta)$ par interpolation :

Définition 3.2.6 *Si $\alpha \in]0,1[$ et $p = 1 - \dfrac{1}{\alpha}$ on définit*

$$W^\alpha(\mathbb{B}_\delta) = (V^0(\mathbb{B}_\delta), V^1(\mathbb{B}_\delta))_{\alpha,p}$$

Avec ces définitions on peut maintenant montrer que ω vérifie les hypothèses a) et b) du corollaire 3.2.4 dans $\mathbb{B}_\eta$, dès que $\eta < \delta$.

Estimations de ω dans $\mathbb{B}_\eta$.

On suppose dans ce paragraphe que $p \in [1, +\infty]$ et que f vérifie l'hypothèse (2.2), et on démontre que ω vérifie les points a) et b) dans $\mathbb{B}_\eta$ avec des normes majorées par $C(K)$.

Point a).

$$\partial\omega = \omega_1 + \omega_2$$

où

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{\partial f}{|g|^4} \wedge (\overline{g}_1\overline{\partial g_2} - \overline{g}_2\overline{\partial g_1}) \\
\omega_2 &= -\frac{2f}{|g|^6}(\overline{g}_1\partial g_1 + \overline{g}_2\partial g_2) \wedge (\overline{g}_1\overline{\partial g_2} - \overline{g}_2\overline{\partial g_1})
\end{aligned}$$

(i) Montrons que $(-\rho_\eta)\,|\partial\omega| \in W^\alpha(\mathbb{B}_\eta)$.

$$(-\rho_\eta)\,|\omega_1| \leq \sqrt{-\rho_\eta}\frac{|\partial f|}{|g|^3}\,|\partial g|\,\sqrt{-\rho_\eta}$$

On va utiliser le lemme suivant, de façon similaire à ce qu'on a fait au chapitre précédent, pour estimer ∂f à partir d'une hypothèse sur f.

Lemme 3.2.7 *Soient $p \in [1,+\infty]$ et $\alpha = 1-\frac{1}{p}$. Soient $g_1, g_2 \in H^\infty(\mathbb{B}_\eta)\cap C^\infty(\overline{\mathbb{B}}_\eta)$ et f une fonction dans $Hol(\mathbb{B}_\eta)\cap C^\infty(\overline{\mathbb{B}}_\eta)$. Si*

$$\frac{f}{|g|^2\,\mu(|g|)} \in M^p(\mathbb{B}_\eta) \tag{2.6}$$

de norme majorée par K alors les mesures $\sqrt{-\rho_\eta}\frac{\partial f}{|g|^3}\,|\partial g \wedge \partial\rho|$, $(-\rho_\eta)\frac{\partial f}{|g|^3}\,|\partial g|$, $\frac{|\partial f \wedge \partial\rho|}{|g|^3}\,|\partial g \wedge \partial\rho|$ et $\sqrt{-\rho_\eta}\frac{|\partial f \wedge \partial\rho|}{|g|^3}\,|\partial g|$ sont dans $W^\alpha(\mathbb{B}_\eta)$ de normes majorées par $C(K)$.

Démonstration :
On procède par interpolation.
• On suppose d'abord que $\frac{f}{|g|^2\,\mu(|g|)} \in M^\infty(\mathbb{B}_\eta)$. Montrons que $\sqrt{-\rho_\eta}\frac{\partial f}{|g|^3}\,|\partial g \wedge \partial\rho| \in V^1(\mathbb{B}_\eta)$. Pour cela on considère une tente T_s^η de $\mathbb{B}_\eta$ de rayon s et on évalue

$$I = \int_{T_s^\eta} \sqrt{-\rho_\eta}\frac{|\partial f|}{|g|^3}\,|\partial g \wedge \partial\rho|\,d\lambda$$

Pour cela on introduit

$$F(u) = f((1+\eta)u) \qquad \text{et} \qquad G_i(u) = g_i((1+\eta)u)$$

et on effectue le changement de variable $u = \frac{z}{1+\eta}$, ce qui nous donne

$$I = \int_{T'} \sqrt{-\rho}\frac{|\partial F|}{|G|^3}\,|\partial G \wedge \partial\rho|\,(1+\eta)^4 d\lambda$$

où T' est une tente de $\mathbb{B}$ de rayon $\frac{s}{1+\eta}$. En effet, si T_s^η est centrée en ζ,

$$z \in T_s^\eta \iff d(T_\zeta^{\mathbb{C}}\mathbb{B}_\eta, z) < s \iff d(\frac{1}{1+\eta}T_\zeta^{\mathbb{C}}\mathbb{B}, \frac{z}{1+\eta}) < \frac{s}{1+\eta} \tag{2.7}$$

ce qui équivaut à dire que $\frac{z}{1+\eta}$ est dans la tente de $\mathbb{B}$ de centre $\frac{\zeta}{1+\eta}$ et de rayon $\frac{s}{1+\eta}$.
Montrons que F, G_1 et G_2 vérifient les hypothèses du lemme 2.4.14 avec $\nu = |\partial G \wedge \partial\rho|$. Tout d'abord les fonctions ainsi définies sont bien holomorphes dans $\mathbb{B}$, et de plus $\|G_i\|_\infty = \|g_i\|_\infty$. De plus $\frac{F}{|G|^2\,\mu(|G|)}$ est aussi borné dans $\mathbb{B}$ de norme majorée par K. Enfin la proposition 2.4.7 avec

$k=1$ montre que $\dfrac{\nu^2}{|G|^2}\mu(|G|) \in V^1(\mathbb{B})$. On peut donc appliquer le lemme 2.4.14 et en déduire que $\sqrt{-\rho}\dfrac{|\partial F|}{|G|^3}\,|\partial G \wedge \partial\rho| \in V^1(\mathbb{B})$ de norme majorée par $C(K)$ et donc, par définition des mesures de Carleson, que

$$I \leq C(K)\left(\frac{s}{1+\eta}\right)^2(1+\eta)^4 \leq C(K)(1+\eta)^2 s^2$$

On a ainsi montré que $\sqrt{-\rho_\eta}\dfrac{\partial f}{|g|^3}\,|\partial g \wedge \partial\rho| \in V^1(\mathbb{B}_\eta)$ quand $\dfrac{f}{|g|^2\,\mu(|g|)} \in M^\infty(\mathbb{B}_\eta)$.

• On suppose à présent que $\dfrac{f}{|g|^2\,\mu(|g|)} \in M^1(\mathbb{B}_\eta)$ et on montre que $\sqrt{-\rho_\eta}\dfrac{\partial f}{|g|^3}\,|\partial g \wedge \partial\rho| \in V^0(\mathbb{B}_\eta)$. Pour cela on évalue

$$I = \int_{\mathbb{B}_\eta} \sqrt{-\rho_\eta}\frac{|\partial f|}{|g|^3}\,|\partial g \wedge \partial\rho|\, d\lambda$$

En effectuant le même changement de variable que précédemment on obtient

$$I = \int_{\mathbb{B}} \sqrt{-\rho}\frac{|\partial F|}{|G|^3}\,|\partial G \wedge \partial\rho|\,(1+\eta)^4 d\lambda$$

On va de la même façon que précédemment appliquer le lemme 2.4.14. Pour cela il nous reste à montrer que $\dfrac{F}{|G|^2\,\mu(|G|)} \in M^1(\mathbb{B})$. Or, par définition des domaines admissibles on a l'équivalence suivante :

$$u \in \Gamma_\zeta \Longleftrightarrow (1+\eta)u \in \Gamma^\eta_{(1+\eta)\zeta}$$

On en déduit que pour $\zeta \in \partial\mathbb{B}$ on a

$$M(\frac{F}{|G|^2\,\mu(|G|)})(\zeta) = M(\frac{f}{|g|^2\,\mu(|g|)})((1+\eta)\zeta)$$

ce qui montre que $\dfrac{F}{|G|^2\,\mu(|G|)} \in M^1(\mathbb{B})$. Ainsi le lemme 2.4.14 montre que $\sqrt{-\rho}\dfrac{|\partial F|}{|G|^3}\,|\partial G \wedge \partial\rho|$ est dans $V^0(\mathbb{B})$ de norme majorée par $C(K)$, ce qui montre que

$$I \leq (1+\eta)^4 C(K)$$

ce qui achève de démontrer que $\sqrt{-\rho_\eta}\dfrac{\partial f}{|g|^3}\,|\partial g \wedge \partial\rho| \in V^0(\mathbb{B}_\eta)$ de norme majorée par $C(K)$.

• On considère alors l'application linéaire qui à $\dfrac{f}{|g|^2\,\mu(|g|)}$ associe $\sqrt{-\rho_\eta}\dfrac{\partial f}{|g|^3}\,|\partial g \wedge \partial\rho|$. On a montré qu'elle est bornée de $M^\infty(\mathbb{B}_\eta)$ dans $V^1(\mathbb{B}_\eta)$ et de $M^1(\mathbb{B}_\eta)$ dans $V^0(\mathbb{B}_\eta)$, de normes majorées par $C(K)$. On en déduit par interpolation, grâce au lemme 3.2.8 ci-dessous et à la définition des espaces

$W^\alpha(\mathbb{B}_\eta)$ que cette application est aussi bornée de $M^p(\mathbb{B}_\eta)$ dans $W^\alpha(\mathbb{B}_\eta)$, où $p = 1 - \dfrac{1}{\alpha}$, de norme majorée par $C(K)$, ce qui démontre la première partie du lemme.
Pour les trois autres parties on procède de la même façon. ■

Lemme 3.2.8 *Soient $\theta \in]0,1[$ et p tels que $\dfrac{1}{p} = 1 - \theta$. Alors*

$$(M^1(\mathbb{B}_\eta), M^\infty(\mathbb{B}_\eta))_{\theta,p} = M^p(\mathbb{B}_\eta)$$

Démonstration :
L'application qui à $h \in M^p(\mathbb{B}_\eta)$ associe $H(z) = h((1+\eta)z)$ est une isométrie de $M^p(\mathbb{B}_\eta)$ sur $M^p(\mathbb{B})$. En effet, par définition des domaines admissibles, on a

$$z \in \Gamma_\zeta \Longleftrightarrow (1+\eta)z \in \Gamma^\eta_{(1+\eta)\zeta}$$

et donc pour tout $\zeta \in \partial\mathbb{B}$ on a $M_\eta h((1+\eta)\zeta) = MH(\zeta)$ et en conséquence $\|h\|_{M^p_\eta} = \|H\|_{M^p}$.
D'après le lemme 2.4.18 on a $(M^1(\mathbb{B}), M^\infty(\mathbb{B}))_{\theta,p} = M^p(\mathbb{B})$, ce qui, grâce à cette isométrie, nous donne le résultat. ■

Pour pouvoir appliquer le lemme 3.2.7 on utilise l'hypothèse (2.2) et le lemme ci-dessous, ce qui nous permet de conclure que $(-\rho_\eta)\,|\omega_1| \in W^\alpha(\mathbb{B}_\eta)$ de norme majorée par $C(K)$.

Lemme 3.2.9 *Soit $p \in [1,+\infty]$. Soient δ et η deux réels positifs tels que $\eta \le \delta$. Alors*

$$M^p(\mathbb{B}_\delta) \subset M^p(\mathbb{B}_\eta)$$

Démonstration :
Soit $\zeta \in \partial\mathbb{B}$. Montrons qu'alors

$$\Gamma^\eta_{(1+\eta)\zeta} \subset \Gamma^\delta_{(1+\delta)\zeta}$$

Soit $z \in \Gamma^\eta_{(1+\eta)\zeta}$. Alors

$$\left|(1+\eta)^2 - (1+\eta)\overline{\zeta}.z\right| < 2((1+\eta)^2 - |z|^2) \tag{2.8}$$

Pour montrer que $z \in \Gamma^\delta_{(1+\delta)\zeta}$ il suffit de montrer que

$$\left|(1+\delta)^2 - (1+\delta)\overline{\zeta}.z\right| < 2((1+\delta)^2 - |z|^2)$$

Or

$$\left|(1+\delta)^2 - (1+\delta)\overline{\zeta}.z\right| \le (1+\delta)^2 - (1+\eta)^2 + \left|(1+\eta)^2 - (1+\eta)\overline{\zeta}.z\right| + (\delta-\eta)\left|\overline{\zeta}.z\right|$$

On utilise alors (2.8) pour obtenir

$$\left|(1+\delta)^2 - (1+\delta)\overline{\zeta}.z\right| < (2+\delta+\eta)(\delta-\eta) + 2((1+\eta)^2 - |z|^2) + (\delta-\eta)\left|\overline{\zeta}.z\right|$$

Il suffit donc de montrer que

$$(2+\delta+\eta)(\delta-\eta)+2((1+\eta)^2-|z|^2)+(\delta-\eta)\left|\overline{\zeta}.z\right| \leq 2((1+\delta)^2-|z|^2)$$

c'est-à-dire

$$\left|\overline{\zeta}.z\right| < 2+\delta+\eta$$

ce qui est vérifié car $\zeta \in \mathbb{B}$, $z \in \mathbb{B}_\delta$ et $\left|\overline{\zeta}.z\right| \leq |\zeta|\,|z|$.
Ainsi on a $\Gamma^{\eta}_{(1+\eta)\zeta} \subset \Gamma^{\delta}_{(1+\delta)\zeta}$.
On en déduit que, pour toute fonction h et tout $\zeta \in \partial\mathbb{B}$,

$$M_\eta h((1+\eta)\zeta) \leq M_\delta h((1+\delta)\zeta)$$

et donc que

$$\|h\|_{M^p_\eta} \leq \|h\|_{M^p_\delta}$$

■

De même

$$-\rho_\eta\,|\omega_2| \leq 2(-\rho_\eta)\frac{|f|}{|g|^4}(|\partial g_1|\,|\partial g_2|+|\partial g_1|^2+|\partial g_2|^2)$$

d'où

$$-\rho_\eta\,|\omega_2| \leq h\nu$$

où

$$h=\frac{4\,|f|}{|g|^2\,\mu(|g|)} \quad \text{et} \quad \nu=(-\rho_\eta)\frac{|\partial g_1|^2}{|g|^2}\mu(|g|)+(-\rho_\eta)\frac{|\partial g_2|^2}{|g|^2}\mu(|g|).$$

D'après l'hypothèse (2.2), $h \in M^p(\mathbb{B}_\delta)$ donc, grâce au lemme 3.2.9 $h \in M^p(\mathbb{B}_\eta)$ de norme majorée par K. Il suffit alors d'utiliser le lemme 3.2.10 ci-dessous pour démontrer que $\nu \in V^1(\mathbb{B}_\eta)$ de norme majorée par $C(K)$, puis le lemme 3.2.11 pour conclure que $-\rho_\eta\,|\omega_2|$ est dans $W^\alpha(\mathbb{B}_\eta)$.
Ainsi, en rassemblant les estimations pour ω_1 et ω_2, on obtient bien

$$-\rho_\eta\,|\partial\omega| \in W^\alpha(\mathbb{B}_\eta) \tag{2.9}$$

de norme majorée par une constante $C(K)$ ne dépendant que de K.

Lemme 3.2.10 *Si $h \in H^\infty(\mathbb{B}_\eta)$ alors $(-\rho_\eta)\frac{|\partial h|^2}{|h|^2}\mu(|h|)$ et $\frac{|\partial h \wedge \partial\rho_\eta|^2}{|h|^2}\mu(|h|)$ sont dans $V^1(\mathbb{B}_\eta)$ de norme majorée par $(1+\eta)^2\,\|h\|_\infty$.*

Démonstration :
On définit

$$\forall z \in \mathbb{B},\;\; H(z)=h((1+\eta)z)$$

Alors $H \in H^\infty(\mathbb{B})$ et $\|H\|_\infty = \|h\|_\infty$. Soit T_s une tente de $\mathbb{B}_\eta$ de rayon s. Pour montrer que $(-\rho_\eta)\dfrac{|\partial h|^2}{|h|^2}\mu(|h|) \in V^1(\mathbb{B}_\eta)$ on évalue

$$I = \int_{T_s} (-\rho_\eta(z))\frac{|\partial h|^2}{|h|^2}(z)\mu(|h|)d\lambda$$

On fait le changement de variable $u = \dfrac{z}{1+\eta}$ et on obtient

$$I = \int_{T'} (-\rho)\frac{|\partial H|^2}{|H|^2}(z)\mu(|H|)(1+\eta)^4 d\lambda$$

où T' est une tente de $\mathbb{B}$ de rayon $\dfrac{s}{1+\eta}$ (voir (2.7)).
On applique alors la proposition 2.4.7 avec $k = 1$ à la fonction H et on obtient

$$I \leq \|H\|_\infty^2 \left(\frac{s}{1+\eta}\right)^2 (1+\eta)^4 \leq \|h\|_\infty^2 (1+\eta)^2 s^2$$

ce qui achève la preuve que $(-\rho_\eta)\dfrac{|\partial h|^2}{|h|^2}\mu(|h|) \in V^1(\mathbb{B}_\eta)$. Pour la deuxième partie du lemme on procède de la même manière pour obtenir le résultat. ∎

Lemme 3.2.11 *Soit $p \in [1, +\infty]$. Si $\nu \in V^1(\mathbb{B}_\eta)$ et $h \in M^p(\mathbb{B}_\eta)$ alors $h\nu \in W^\alpha(\mathbb{B}_\eta)$, où $\alpha = 1 - \dfrac{1}{p}$, de norme majorée par $\|\nu\|_{V^1} \|h\|_{M^p}$.*

Démonstration :
On procède par interpolation. Soit $\nu \in V^1(\mathbb{B}_\eta)$.
• Commençons par montrer que si $h \in M^\infty(\mathbb{B}_\eta)$ alors $h\nu \in V^1(\mathbb{B}_\eta)$. Pour cela on considère une tente T_s^η de $\mathbb{B}_\eta$ de rayon s et on évalue

$$I = \int_{T_s^\eta} |h\nu|$$

On a alors $I \leq \|h\|_\infty \displaystyle\int_{T_s^\eta} |\nu|$ et puisque $\nu \in V^1(\mathbb{B}_\eta)$ on a finalement

$$I \leq \|\nu\|_{V^1} \|h\|_{M^\infty} s^2$$

ce qui démontre que $h\nu \in V^1(\mathbb{B}_\eta)$ de norme majorée par $\|\nu\|_{V^1} \|h\|_{M^\infty}$.
• Montrons à présent que si $h \in M^1(\mathbb{B}_\eta)$ alors $h\nu \in V^0(\mathbb{B}_\eta)$. Pour cela il suffit d'évaluer

$$I = \int_{\mathbb{B}_\eta} |h(z)\nu(z)|$$

On suppose ici que $\nu = nd\lambda$. On introduit

$$H(u) = h((1+\eta)u) \qquad \text{et} \qquad N(u) = n((1+\eta)u)$$

et on effectue le changement de variable $u = \dfrac{z}{1+\eta}$, ce qui nous donne

$$I = (1+\eta)^4 \int_{\mathbb{B}} |H(u)|\,|N(u)|\,d\lambda(u)$$

Montrons que $H \in M^1(\mathbb{B})$. Puisque $u \in \Gamma_\zeta \iff (1+\eta)u \in \Gamma^\eta_{(1+\eta)\zeta}$ on a

$$MH(\zeta) = M_\eta h((1+\eta)\zeta)$$

d'où

$$\|H\|_{M^1} = \int_{\partial\mathbb{B}} |MH(u)|\,d\sigma(u) = \frac{1}{(1+\eta)^3}\int_{\partial\mathbb{B}_\eta} |M_\eta h(z)|\,d\sigma_\eta(z) = \frac{\|h\|_{M^1_\eta}}{(1+\eta)^3}$$

Montrons aussi que $Nd\lambda \in V^1(\mathbb{B})$. Pour cela on prend une tente T_s de $\mathbb{B}$ et on considère l'intégrale suivante :

$$I = \int_{T_s} |N(u)|\,d\lambda(z) = \frac{1}{(1+\eta)^4}\int_{T'} |n(z)|\,d\lambda(z)$$

et T' est une tente de $\mathbb{B}_\eta$ de rayon $(1+\eta)s$ (cf (2.7)). On en déduit que

$$I \leq \|nd\lambda\|_{V^1} s^2$$

et donc que $Nd\lambda \in V^1(\mathbb{B})$ de norme majorée par $\|nd\lambda\|_{V^1}$.
On utilise alors le lemme 2.4.6 qui nous montre que $HNd\lambda \in V^0(\mathbb{B})$ de norme majorée par $\|H\|_{M^1}\|Nd\lambda\|_{V^1} \leq \|h\|_{M^1}\|\nu\|_{V^1}$. On en déduit que

$$I \leq \frac{1}{(1+\eta)^3}\|h\|_{M^1}\|\nu\|_{V^1}$$

et donc que $h\nu \in V^0(\mathbb{B}_\eta)$ de norme majorée par $\dfrac{1}{(1+\eta)^3}\|h\|_{M^1}\|\nu\|_{V^1}$.

• On a ainsi montré que l'application linéaire qui à h associe $h\nu$ est bornée de $M^\infty(\mathbb{B}_\eta)$ dans $V^1(\mathbb{B}_\eta)$ et de $M^1(\mathbb{B}_\eta)$ dans $V^0(\mathbb{B}_\eta)$. On en déduit par interpolation, grâce au lemme 3.2.8 et à la définition de $W^\alpha(\mathbb{B}_\eta)$, qu'elle est bornée de $M^p(\mathbb{B}_\eta)$ dans $W^\alpha(\mathbb{B}_\eta)$, où $p = 1 - \dfrac{1}{\alpha}$. ∎

(ii) Montrons que $\sqrt{-\rho_\eta}\,|\partial\omega \wedge \partial\rho_\eta| \in W^\alpha(\mathbb{B}_\eta)$.
Tout d'abord on a

$$\sqrt{-\rho_\eta}\,|\omega_1 \wedge \partial\rho_\eta| \leq \sqrt{-\rho_\eta}\frac{|\partial f \wedge \partial\rho_\eta|}{|g|^3}\,|\partial g|$$

On utilise alors l'hypothèse (2.2) et le lemme 3.2.9 pour appliquer le lemme 3.2.7 et obtenir $\sqrt{-\rho_\eta}\,|\omega_1 \wedge \partial\rho_\eta| \in W^\alpha(\mathbb{B}_\eta)$ de norme majorée par $C(K)$.

$$\sqrt{-\rho_\eta}\,|\omega_2 \wedge \partial\rho_\eta| \leq \sqrt{-\rho_\eta}\frac{|f|}{|g|^4}\sum_{1\leq k,l\leq 2}|\partial g_k \wedge \partial\rho_\eta|\,|\partial g_l| \tag{2.10}$$

d'où

$$\sqrt{-\rho_\eta}\,|\omega_2 \wedge \partial\rho_\eta| \leq h\nu$$

où

$$h = \frac{|f|}{|g|^2\,\mu(|g|)} \qquad \text{et} \qquad \nu = (-\rho_\eta)\frac{|\partial g|^2}{|g|^2}\mu(|g|) + \frac{|\partial g \wedge \partial\rho_\eta|^2}{|g|^2}\mu(|g|)$$

En utilisant à nouveau l'hypothèse (2.2), le lemme 3.2.10 et le lemme 3.2.11 on en déduit que $\sqrt{-\rho_\eta}\,|\partial\omega \wedge \partial\rho_\eta| \in W^\alpha(\mathbb{B}_\eta)$ de norme majorée par $C(K)$.

(iii) Montrons que $\sqrt{-\rho_\eta}\left|\partial\omega \wedge \overline{\partial}\rho_\eta\right| \in W^\alpha(\mathbb{B}_\eta)$.

$$\sqrt{-\rho_\eta}\left|\omega_1 \wedge \overline{\partial}\rho_\eta\right| \leq \sqrt{-\rho_\eta}\frac{|\partial f|}{|g|^3}\,|\partial g \wedge \partial\rho_\eta|$$

On applique de nouveau le lemme 3.2.7 et on en déduit, grâce à l'hypothèse (2.2) et au lemme 3.2.7 que $\sqrt{-\rho_\eta}\left|\omega_1 \wedge \overline{\partial}\rho_\eta\right| \in W^\alpha(\mathbb{B}_\eta)$ de norme majorée par $C(K)$.
D'autre part on a

$$\sqrt{-\rho_\eta}\left|\omega_2 \wedge \overline{\partial}\rho_\eta\right| \leq \sqrt{-\rho_\eta}\frac{|f|}{|g|^4}\sum_{1\leq k,l\leq 2}|\partial g_k \wedge \partial\rho_\eta|\,|\partial g_l|$$

qu'on peut estimer comme en (2.10). On en déduit que $\sqrt{-\rho_\eta}\left|\partial\omega \wedge \overline{\partial}\rho_\eta\right| \in W^\alpha(\mathbb{B}_\eta)$ de norme majorée par $C(K)$ ne dépendant que de K.

(iv) Montrons que $\left|\partial\omega \wedge \partial\rho_\eta \wedge \overline{\partial}\rho_\eta\right| \in W^\alpha(\mathbb{B}_\eta)$.
On a

$$\left|\omega_1 \wedge \partial\rho_\eta \wedge \overline{\partial}\rho_\eta\right| \leq \frac{|\partial f \wedge \partial\rho_\eta|}{|g|^3}\,|\partial g \wedge \partial\rho_\eta|$$

On applique de nouveau le lemme 3.2.7 et on en déduit, grâce à l'hypothèse (2.2) et au lemme 3.2.7 que $\left|\omega_1 \wedge \partial\rho_\eta \wedge \overline{\partial}\rho_\eta\right| \in W^\alpha(\mathbb{B}_\eta)$ de norme majorée par $C(K)$.
D'autre part on a

$$\left|\omega_2 \wedge \partial\rho_\eta \wedge \overline{\partial}\rho_\eta\right| \leq \frac{|f|}{|g|^4}\sum_{1\leq k,l\leq 2}|\partial g_k \wedge \partial\rho_\eta|\,|\partial g_l \wedge \partial\rho_\eta|$$

d'où

$$\left|\omega_2 \wedge \partial\rho_\eta \wedge \overline{\partial}\rho_\eta\right| \leq h\nu$$

où

$$h = \frac{|f|}{|g|^2\sqrt{\mu(|g|)}} \quad \text{et} \quad \nu = 2\frac{|\partial g \wedge \partial\rho_\eta|^2}{|g|^2}\mu(|g|)$$

En utilisant à nouveau l'hypothèse (2.2), le lemme 3.2.10 et le lemme 3.2.11 on en déduit que $\left|\partial\omega \wedge \partial\rho_\eta \wedge \overline{\partial}\rho_\eta\right| \in W^\alpha(\mathbb{B}_\eta)$ de norme majorée par $C(K)$, ce qui achève la vérification du point **a)** pour ω.

Point b).
Soient
$$\gamma = \frac{|f|}{|g|^2 \sqrt{\mu(|g|)}} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{|\partial g|}{|g|}\sqrt{\mu(|g|)}$$
Alors on a bien
$$|\omega| \leq \gamma\nu \tag{2.11}$$
dans $\mathbb{B}_\eta$ et, d'après l'hypothèse (2.2) et le lemme 3.2.9 on a
$$\gamma \in M^p(\mathbb{B}_\eta) \tag{2.12}$$
de norme majorée par K et, d'après le lemme 3.2.10,
$$-\rho_\eta \nu^2 \in V^1(\mathbb{B}_\eta) \tag{2.13}$$
de norme indépendante de η.

Estimations de ω_ϵ dans $\mathbb{B}$.

Vérifions à présent que ω_ϵ vérifie les points a) et b) dans $\mathbb{B}$.
point a).
Pour chaque point on va procéder par interpolation entre $p = 1$ et $p = \infty$.
(i) Montrons que $-\rho\,|\partial\omega_\epsilon| \in W^\alpha(\mathbb{B})$.
• On commence par démontrer que si f vérifie l'hypothèse (2.2) pour $p = +\infty$ alors $-\rho\,|\partial\omega_\epsilon|$ est dans $V^1(\mathbb{B})$.
Pour cela on considère une tente T_s de $\mathbb{B}$ de rayon s et on estime
$$I = \int_{T_s} (-\rho(z))\,|\partial\omega_\epsilon(z)|\,d\lambda(z).$$
Par définition de ω_ϵ on a
$$I \leq \int_{z\in T_s}\int_{\zeta\in\mathbb{C}^2} \chi_\epsilon(\zeta - z)(-\rho(z))\,|\partial\omega(\zeta)|\,d\lambda(\zeta)d\lambda(z).$$
Or pour $z \in \mathbb{B}$ et $\zeta - z \in \operatorname{Supp}(\chi_\epsilon)$ on a
$$-\rho(z) = 1 - |z - \zeta + \zeta|^2 \leq -\rho(\zeta) + 4\,|\zeta|\,|z - \zeta|\,.$$
Or χ_ϵ est à support dans $\{z \in \mathbb{C}^2 / \,|z| < \epsilon\}$ donc
$$-\rho(z) \leq -\rho(\zeta) + 4(1+\epsilon)\epsilon = -\rho_{2\epsilon}(\zeta) \tag{2.14}$$
Sachant de plus que $\|\chi_\epsilon\|_\infty \leq \epsilon^{-4}\,\|\chi\|_\infty \leq C\epsilon^{-4}$ on obtient
$$I \leq C\epsilon^{-4}\int_{z\in T_s}\int_{\zeta\in B(z,\epsilon)} (-\rho_{2\epsilon}(\zeta))\,|\partial\omega(\zeta)|\,d\lambda(\zeta)d\lambda(z)$$

De plus si $z \in T_s$ et $\zeta \in B(z,\epsilon)$ alors $\zeta \in \mathbb{B}_{2\epsilon}$ et pour $\xi' = (1+2\epsilon)\xi$ on a

$$d(\zeta, T^{\mathbb{C}}_{\xi'}(\mathbb{B}_{2\epsilon})) \leq d(\zeta, z) + d(z, T^{\mathbb{C}}_{\xi}\mathbb{B}) + d(T^{\mathbb{C}}_{\xi}\mathbb{B}, T^{\mathbb{C}}_{\xi'}\mathbb{B}_{2\epsilon})$$

$$d(\zeta, T^{\mathbb{C}}_{\xi'}(\mathbb{B}_{2\epsilon})) \leq \epsilon + s + 2\epsilon$$

donc ζ est dans une tente $T_{s+3\epsilon}$ de $\mathbb{B}_{2\epsilon}$ de rayon $s+3\epsilon$.

$$I \leq C\epsilon^{-4} \int_{\zeta \in T_{s+3\epsilon}} (-\rho_{2\epsilon}(\zeta)) \left|\partial\omega(\zeta)\right| A(\zeta) d\lambda(\zeta)$$

où

$$A(\zeta) = \int_{z \in T_s \cap B(\zeta,\epsilon)} d\lambda(z)$$

Puisque la mesure de Lebesgue $d\lambda$ est invariante par rotation on peut se ramener au cas où $\xi = (1,0)$. Alors on obtient (en notant encore ζ le point image de ζ par la rotation effectuée)

$$A(\zeta) = \int_{\{z_2/|z_2-\zeta'|<\epsilon\}} \int_E d\lambda(z_1) d\lambda(z_2)$$

et

$$E = \{z \in \mathbb{C} / \left|z_1 - 1\right| < s \text{ et } \left|z_1 - \zeta_1\right|^2 < \epsilon^2 - \left|z_2 - \zeta_2\right|^2\}$$

En particulier $E \subset \{z \in \mathbb{C} / \left|z_1 - 1\right| < s\}$, d'où

$$A(\zeta) \leq \pi^2 \epsilon^2 s^2.$$

De plus, puisque $T_s \cap B(\zeta,\epsilon) \subset B(\zeta,\epsilon)$ on a aussi

$$A(\zeta) \leq \pi^2 \epsilon^4$$

ainsi

$$A(\zeta) \leq \pi^2 \epsilon^2 \min(s^2, \epsilon^2)$$

Et, puisque d'après (2.9) on a, quand $p = +\infty$, $-\rho_{2\epsilon}\left|\partial\omega\right| \in V^1(\mathbb{B}_{2\epsilon})$ de norme majorée par $C(K)$ on obtient que

$$I \leq C\epsilon^{-4} C(K)(s+3\epsilon)^2 \pi^2 \epsilon^2 \min(s^2, \epsilon^2)$$

et, en distiguant les cas où $s < \epsilon$ et où $s > \epsilon$, on obtient

$$I \leq C(K) s^2$$

• On montre maintenant que si f vérifie l'hypothèse (2.2) pour $p=1$ alors $-\rho\,|\partial\omega_\epsilon| \in V^0(\mathbb{B})$. Pour cela on évalue l'intégrale

$$I = \int_{\mathbb{B}} (-\rho(z))\,|\partial\omega_\epsilon(z)|\,d\lambda(z).$$

Par définition de ω_ϵ on a

$$I \leq \int_{z\in\mathbb{B}}\int_{\zeta\in\mathbb{C}^2} \chi_\epsilon(\zeta - z)(-\rho(z))\,|\partial\omega(\zeta)|\,d\lambda(\zeta)d\lambda(z).$$

On utilise alors l'inégalité (2.14), et le fait que si $z\in\mathbb{B}$ et $\zeta - z \in \mathrm{Supp}(\chi_\epsilon)$ alors $\zeta\in\mathbb{B}_{2\epsilon}$ pour obtenir

$$I \leq \int_{\zeta\in\mathbb{B}_{2\epsilon}} (-\rho_{2\epsilon}(\zeta))\,|\partial\omega(\zeta)| \int_{z\in\mathbb{B}} \chi_\epsilon(\zeta - z)d\lambda(z)d\lambda(\zeta)$$

On utilise alors le fait que d'après (2.9) $-\rho_{2\epsilon}\,|\partial\omega| \in V^0(\mathbb{B}_{2\epsilon})$ et le fait que $\|\chi_\epsilon\|_{L^1} = 1$ pour déduire que I est majorée par une constante ne dépendant que de K, ce qui montre que $-\rho\,|\partial\omega_\epsilon| \in V^0(\mathbb{B})$ de norme majorée par $C(K)$.

• On considère alors l'application linéaire L_ϵ qui à $\dfrac{f}{|g|^2\,\mu(|g|)}$ associe $(-\rho)\partial\omega_\epsilon$. On a montré que L_ϵ est bornée de $M^1(\mathbb{B}_\delta)$ dans $V^0(\mathbb{B})$ et de $M^\infty(\mathbb{B}_\delta)$ dans $V^1(\mathbb{B})$ de normes majorées par $C(K)$. On en déduit par interpolation que L_ϵ est bornée de $(M^1(\mathbb{B}_\delta), M^\infty(\mathbb{B}_\delta))_{\alpha,p}$ dans $(V^0(\mathbb{B}), V^1(\mathbb{B}))_{\alpha,p}$ pour tout $\alpha\in[0,1]$. En particulier, si $\alpha = 1-\dfrac{1}{p}$, on a, d'après le lemme 3.2.8, $(M^1(\mathbb{B}_\delta), M^\infty(\mathbb{B}_\delta))_{\alpha,p} = M^p(\mathbb{B}_\delta)$, et, d'après le lemme 2.4.25, $(V^0(\mathbb{B}), V^1(\mathbb{B}))_{\alpha,p} = W^\alpha(\mathbb{B})$. On en déduit que si $\dfrac{f}{|g|^2\,\mu(|g|)} \in M^p(\mathbb{B}_\delta)$ alors $(-\rho)\partial\omega_\epsilon \in W^\alpha(\mathbb{B})$ de norme majorée par une constante ne dépendant que de K.

(ii) Montrons que $\sqrt{-\rho}\,|\partial\omega_\epsilon\wedge\partial\rho| \in W^\alpha(\mathbb{B})$.
• Comme précédemment on commence par démontrer que si f vérifie l'hypothèse (2.2) pour $p=+\infty$ alors $\sqrt{-\rho}\,|\partial\omega_\epsilon\wedge\partial\rho| \in V^1(\mathbb{B})$. Pour cela on évalue

$$I = \int_{T_s} \sqrt{-\rho}\,|\partial\omega_\epsilon\wedge\partial\rho|\,d\lambda.$$

$$I \leq \int_{z\in T_s}\int_{\zeta\in\mathbb{C}^2} \chi_\epsilon(\zeta - z)\sqrt{-\rho(z)}\,|\partial\omega(\zeta)\wedge\partial\rho(z)|\,d\lambda(\zeta)d\lambda(z)$$

Or $\partial\rho(z) = \partial\rho(\zeta) + T$ où $T = (\overline{z}_1 - \overline{\zeta}_1)dz_1 + (\overline{z}_2 - \overline{\zeta}_2)dz_2$. On en déduit donc que

$$I \leq I_1 + I_2$$

où

$$I_1 = \int_{z\in T}\int_{\zeta\in B(z,\epsilon)} \chi_\epsilon(\zeta - z)\sqrt{-\rho(z)}\,|\partial\omega\wedge\partial\rho(\zeta)|\,d\lambda(\zeta)d\lambda(z)$$

$$I_2 = \int_{z\in T_s}\int_{\zeta\in B(z,\epsilon)} \chi_\epsilon(\zeta - z)\sqrt{-\rho(z)}\,|\partial\omega(\zeta)|\,|\zeta - z|\,d\lambda(\zeta)d\lambda(z)$$

Alors en procédant comme précédemment on obtient dans un premier temps

$$I_1 \leq C\epsilon^{-4}\pi^2\epsilon^2\min(s^2,\epsilon^2)\int_{\zeta\in T_{s+3\epsilon}} \sqrt{-\rho_{2\epsilon}(\zeta)}\,|\partial\omega\wedge\partial\rho(\zeta)|\,d\lambda(\zeta)$$

puis, sachant que $\sqrt{-\rho_{2\epsilon}}\,|\partial\omega\wedge\partial\rho_{2\epsilon}| \in V^1(\mathbb{B}_{2\epsilon})$ et que $\partial\rho = \partial\rho_{2\epsilon}$ on en déduit que

$$I_1 \leq C(K)s^2.$$

Pour I_2 on obtient dans un premier temps, puisque $2\epsilon > 0$,

$$I_2 \leq C\epsilon^{-4}\epsilon\int_{z\in T_s}\int_{\zeta\in B(z,\epsilon)} \sqrt{-\rho(z)+2\epsilon}\frac{\sqrt{-\rho(z)+2\epsilon}}{\sqrt{-\rho(z)+2\epsilon}}\,|\partial\omega(\zeta)|\,d\lambda(\zeta)d\lambda(z)$$

Or, si $z\in T_r$ et $\zeta\in B(z,\epsilon)$ on a

$$-\rho(z)+2\epsilon \leq -\rho(\zeta)+4(1+\epsilon)\epsilon+2\epsilon \leq -\rho_{3\epsilon}(\zeta).$$

De plus ζ appartient à une tente de rayon $r+4\epsilon$ de $\mathbb{B}_{3\epsilon}$. Ainsi on a, sachant que $-\rho(z)+2\epsilon \geq 2\epsilon$,

$$I_2 \leq C\epsilon^{-3}\frac{1}{\sqrt{2\epsilon}}\int_{\zeta\in T_{s+4\epsilon}} (-\rho_{3\epsilon}(\zeta))\,|\partial\omega(\zeta)|\,A(\zeta)d\lambda(\zeta).$$

Puisque $-\rho_{3\epsilon}\,|\partial\omega| \in V^1(\mathbb{B}_{3\epsilon})$ on en déduit que

$$I_2 \leq C\frac{1}{\epsilon^3\sqrt{2\epsilon}}C(K)(s+4\epsilon)^2\pi^2\epsilon^2\min(s^2,\epsilon^2)$$

et donc que

$$I_2 \leq C(K)\sqrt{\epsilon}s^2.$$

On a ainsi montré que $\sqrt{-\rho}\,|\partial\omega_\epsilon\wedge\partial\rho| \in V^1(\mathbb{B})$ de norme majorée par $C(K)$.

• On montre maintenant que si f vérifie l'hypothèse (2.2) pour $p=1$ alors $\sqrt{-\rho}\,|\partial\omega_\epsilon\wedge\partial\rho| \in V^0(\mathbb{B})$. Pour cela on évalue l'intégrale

$$I = \int_{\mathbb{B}} \sqrt{-\rho}\,|\partial\omega_\epsilon\wedge\partial\rho|\,d\lambda.$$

Par définition de ω_ϵ on a

$$I \leq \int_{z\in\mathbb{B}}\int_{\zeta\in\mathbb{C}^2} \chi_\epsilon(\zeta - z)\sqrt{-\rho(z)}\,|\partial\omega(\zeta)\wedge\partial\rho(z)|\,d\lambda(\zeta)d\lambda(z)$$

Or $\partial\rho(z) = \partial\rho(\zeta) + T$ où $T = (\overline{z}_1 - \overline{\zeta}_1)dz_1 + (\overline{z}_2 - \overline{\zeta}_2)dz_2$. On en déduit donc que

$$I \leq I_1 + I_2$$

où

$$I_1 = \int_{z\in\mathbb{B}} \int_{\zeta\in B(z,\epsilon)} \chi_\epsilon(\zeta - z)\sqrt{-\rho(z)}\, |\partial\omega \wedge \partial\rho(\zeta)|\, d\lambda(\zeta)d\lambda(z)$$

$$I_2 = \int_{z\in\mathbb{B}} \int_{\zeta\in B(z,\epsilon)} \chi_\epsilon(\zeta - z)\sqrt{-\rho(z)}\, |\partial\omega(\zeta)|\, |\zeta - z|\, d\lambda(\zeta)d\lambda(z)$$

Alors en procédant comme précédemment on obtient dans un premier temps

$$I_1 \leq \int_{\zeta\in\mathbb{B}_{2\epsilon}} \sqrt{-\rho_{2\epsilon}(\zeta)}\, |\partial\omega \wedge \partial\rho(\zeta)| \int_{z\in\mathbb{B}} \chi_\epsilon(\zeta - z)d\lambda(z)d\lambda(\zeta)$$

puis, sachant que $\sqrt{-\rho_{2\epsilon}}\, |\partial\omega \wedge \partial\rho_{2\epsilon}| \in V^0(\mathbb{B}_{2\epsilon})$ et que $\partial\rho = \partial\rho_{2\epsilon}$ on en déduit que

$$I_1 \leq C(K)$$

Pour I_2 on obtient dans un premier temps, puisque $2\epsilon > 0$,

$$I_2 \leq \epsilon \int_{z\in\mathbb{B}} \int_{\zeta\in B(z,\epsilon)} \sqrt{-\rho(z) + 2\epsilon}\frac{\sqrt{-\rho(z) + 2\epsilon}}{\sqrt{-\rho(z) + 2\epsilon}}\, |\partial\omega(\zeta)|\, \chi_\epsilon(\zeta - z)d\lambda(\zeta)d\lambda(z)$$

Or, si $z \in \mathbb{B}$ et $\zeta \in B(z,\epsilon)$ on a

$$-\rho(z) + 2\epsilon \leq -\rho(\zeta) + 4(1+\epsilon)\epsilon + 2\epsilon \leq -\rho_{3\epsilon}(\zeta).$$

De plus ζ appartient à $\mathbb{B}_{3\epsilon}$. Ainsi on a, sachant que $-\rho(z) + 2\epsilon \geq 2\epsilon$,

$$I_2 \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{2\epsilon}} \int_{\zeta\in\mathbb{B}_{3\epsilon}} (-\rho_{3\epsilon}(\zeta))\, |\partial\omega(\zeta)| \int_{z\in\mathbb{B}} \chi_\epsilon(\zeta - z)d\lambda(z)d\lambda(\zeta).$$

Puisque $-\rho_{3\epsilon}\, |\partial\omega| \in V^0(\mathbb{B}_{3\epsilon})$ on en déduit que

$$I_2 \leq C\frac{\epsilon}{\sqrt{2\epsilon}}C(K)$$

et donc que

$$I_2 \leq C(K)\sqrt{\epsilon}.$$

On a ainsi montré que $\sqrt{-\rho}\, |\partial\omega_\epsilon \wedge \partial\rho| \in V^0(\mathbb{B})$ de norme majorée par $C(K)$.

• On considère alors l'application linéaire L_ϵ qui à $\dfrac{f}{|g|^2\, \mu(|g|)}$ associe $\sqrt{-\rho}\partial\omega_\epsilon \wedge \partial\rho$. On a montré que L_ϵ est bornée de $M^1(\mathbb{B}_\delta)$ dans $V^0(\mathbb{B})$ et de $M^\infty(\mathbb{B}_\delta)$ dans $V^1(\mathbb{B})$ de normes majorées par $C(K)$. On en déduit par interpolation que L_ϵ est bornée de $M^p(\mathbb{B}_\delta)$ dans $W^\alpha(\mathbb{B})$, ce qui démontre bien que si $\dfrac{f}{|g|^2\, \mu(|g|)} \in M^p(\mathbb{B}_\delta)$ alors $\sqrt{-\rho}\partial\omega_\epsilon \wedge \partial\rho \in W^\alpha(\mathbb{B})$ de norme majorée par une constante ne dépendant que de K.

(iii) Pour montrer que $\sqrt{-\rho}\left|\partial\omega_\epsilon \wedge \overline{\partial}\rho\right| \in W^\alpha(\mathbb{B})$ de norme majorée par $C(K)$ on procède exactement de la même façon.

(iv) Montrons enfin que $\left|\partial\omega_\epsilon \wedge \partial\rho \wedge \overline{\partial}\rho\right| \in W^\alpha(\mathbb{B})$.

• Montrons d'abord que si f vérifie l'hypothèse (2.2) pour $p = +\infty$ alors $\left|\partial\omega_\epsilon \wedge \partial\rho \wedge \overline{\partial}\rho\right| \in V^1(\mathbb{B})$. Pour cela on considère une tente T_s de $\mathbb{B}$ de rayon s et on estime

$$I = \int_{T_s} \left|\partial\omega_\epsilon \wedge \partial\rho \wedge \overline{\partial}\rho\right| d\lambda$$

$$I \leq \int_{z\in T_s}\int_{\zeta\in\mathbb{C}^2} \chi_\epsilon(\zeta - z)\left|\partial\omega(\zeta) \wedge \partial\rho(z) \wedge \overline{\partial}\rho(z)\right| d\lambda(\zeta)d\lambda(z)$$

Or $\partial\rho(z) \wedge \overline{\partial}\rho(z) = (\partial\rho \wedge \overline{\partial}\rho)(\zeta) + T \wedge \overline{\partial}\rho(\zeta) + \partial\rho(\zeta) \wedge \overline{T} + T \wedge \overline{T}$ donc

$$I \leq I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

où

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{z\in T_s}\int_{\zeta\in\mathbb{C}^2} \chi_\epsilon(\zeta - z)\left|\partial\omega(\zeta) \wedge \partial\rho(\zeta) \wedge \overline{\partial}\rho(\zeta)\right| d\lambda(\zeta)d\lambda(z)\\
I_2 &= \int_{z\in T_s}\int_{\zeta\in\mathbb{C}^2} \chi_\epsilon(\zeta - z)\left|\partial\omega(\zeta) \wedge \overline{\partial}\rho(\zeta)\right| |\zeta - z|\, d\lambda(\zeta)d\lambda(z)\\
I_3 &= \int_{z\in T_s}\int_{\zeta\in\mathbb{C}^2} \chi_\epsilon(\zeta - z)\left|\partial\omega(\zeta) \wedge \partial\rho(\zeta)\right| |\zeta - z|\, d\lambda(\zeta)d\lambda(z)\\
I_4 &= \int_{z\in T_s}\int_{\zeta\in\mathbb{C}^2} \chi_\epsilon(\zeta - z)\left|\partial\omega(\zeta)\right| |\zeta - z|^2\, d\lambda(\zeta)d\lambda(z)
\end{aligned}$$

En procédant comme précédemment on obtient

$$I_1 \leq C\epsilon^{-4}\int_{\zeta\in T_{s+3\epsilon}} \left|\partial\omega \wedge \overline{\partial}\rho \wedge \partial\rho(\zeta)\right| A(\zeta)d\lambda(\zeta)$$

et comme $\left|\partial\omega \wedge \overline{\partial}\rho \wedge \partial\rho(\zeta)\right| \in V^1(\mathbb{B}_{2\epsilon})$ on obtient

$$I_1 \leq C\epsilon^{-4}(K)(s + 3\epsilon)^2\pi^2\epsilon^2 r\min(s^2, \epsilon^2)$$

et

$$I_1 \leq C(K)s^2.$$

Pour I_2 on a

$$I_2 \leq C\epsilon^{-4}\epsilon\int_{z\in T_s}\int_{\zeta\in B(z,\epsilon)} \frac{\sqrt{-\rho(z) + 2\epsilon}}{\sqrt{-\rho(z) + 2\epsilon}}\left|\partial\omega \wedge \overline{\partial}\rho(\zeta)\right| d\lambda(\zeta)d\lambda(z)$$

$$I_2 \leq C\epsilon^{-3}\int_{\zeta\in T_{s+4\epsilon}} \sqrt{-\rho_{3\epsilon(\zeta)}}\left|\partial\omega\wedge\overline{\partial}\rho(\zeta)\right|\int_{z\in T_s\cap B(\zeta,\epsilon)}\frac{1}{\sqrt{-\rho(z)+2\epsilon}}d\lambda(z)d\lambda(\zeta)$$

et puisque $\sqrt{-\rho_{3\epsilon}}\left|\partial\omega\wedge\overline{\partial}\rho\right| \in V^1(\mathbb{B}_{3\epsilon})$ on obtient

$$I_2 \leq C\epsilon^{-3}(K)(s+4\epsilon)^2\frac{1}{\sqrt{2\epsilon}}\pi^2\epsilon^2\min(s^2,\epsilon^2)$$

d'où

$$I_2 \leq C(K)\sqrt{\epsilon}s^2$$

On obtient de la même façon

$$I_3 \leq C(K)\sqrt{\epsilon}s^2$$

Enfin

$$I_4 \leq C\epsilon^{-4}\epsilon^2\int_{z\in T_s}\int_{\zeta\in B(z,\epsilon)}\frac{-\rho(z)+2\epsilon}{-\rho(z)+2\epsilon}\left|\partial\omega(\zeta)\right|d\lambda(\zeta)d\lambda(z)$$

$$I_4 \leq C\epsilon^{-2}\int_{\zeta\in T_{s+4\epsilon}}(-\rho_{3\epsilon}(\zeta))\left|\partial\omega(\zeta)\right|\int_{z\in T_s\cap B(\zeta,\epsilon)}\frac{1}{-\rho(z)+2\epsilon}d\lambda(z)d\lambda(\zeta)$$

et puisque $-\rho_{3\epsilon}\left|\partial\omega\right| \in V^1(\mathbb{B}_{3\epsilon})$ on obtient

$$I_4 \leq C\epsilon^{-2}C(K)(s+4\epsilon)^n\frac{1}{2\epsilon}\pi^2\epsilon^2\min(s^2,\epsilon^2)$$

$$I_4 \leq C(K)\epsilon s^2$$

ce qui achève le cas où $p=+\infty$.

• On montre maintenant que si f vérifie l'hypothèse (2.2) pour $p=1$ alors $\left|\partial\omega_\epsilon\wedge\partial\rho\wedge\overline{\partial}\rho\right| \in V^0(\mathbb{B})$. Pour cela on évalue l'intégrale

$$I = \int_{\mathbb{B}}\left|\partial\omega_\epsilon\wedge\partial\rho\wedge\overline{\partial}\rho\right|d\lambda$$

$$I \leq \int_{z\in\mathbb{B}}\int_{\zeta\in\mathbb{C}^2}\chi_\epsilon(\zeta-z)\left|\partial\omega(\zeta)\wedge\partial\rho(z)\wedge\overline{\partial}\rho(z)\right|d\lambda(\zeta)d\lambda(z)$$

Comme précédemment on a

$$I \leq I_1+I_2+I_3+I_4$$

où

$$I_1 = \int_{z\in\mathbb{B}}\int_{\zeta\in\mathbb{C}^2}\chi_\epsilon(\zeta-z)\left|\partial\omega(\zeta)\wedge\partial\rho(\zeta)\wedge\overline{\partial}\rho(\zeta)\right| d\lambda(\zeta)d\lambda(z)$$
$$I_2 = \int_{z\in\mathbb{B}}\int_{\zeta\in\mathbb{C}^2}\chi_\epsilon(\zeta-z)\left|\partial\omega(\zeta)\wedge\overline{\partial}\rho(\zeta)\right| |\zeta-z|\, d\lambda(\zeta)d\lambda(z)$$
$$I_3 = \int_{z\in\mathbb{B}}\int_{\zeta\in\mathbb{C}^2}\chi_\epsilon(\zeta-z)\left|\partial\omega(\zeta)\wedge\partial\rho(\zeta)\right| |\zeta-z|\, d\lambda(\zeta)d\lambda(z)$$
$$I_4 = \int_{z\in\mathbb{B}}\int_{\zeta\in\mathbb{C}^2}\chi_\epsilon(\zeta-z)\left|\partial\omega(\zeta)\right| |\zeta-z|^2\, d\lambda(\zeta)d\lambda(z)$$

En procédant comme précédemment on obtient

$$I_1 \le \int_{\zeta\in\mathbb{B}_{2\epsilon}}\left|\partial\omega\wedge\overline{\partial}\rho\wedge\partial\rho(\zeta)\right|\int_{z\in\mathbb{B}}\chi_\epsilon(\zeta-z)d\lambda(z)d\lambda(\zeta)$$

et comme $\left|\partial\omega\wedge\overline{\partial}\rho\wedge\partial\rho(\zeta)\right| \in V^0(\mathbb{B}_{2\epsilon})$ on obtient

$$I_1 \le C(K)$$

Pour I_2 on a

$$I_2 \le \epsilon\int_{z\in\mathbb{B}}\int_{\zeta\in B(z,\epsilon)}\frac{\sqrt{-\rho(z)+2\epsilon}}{\sqrt{-\rho(z)+2\epsilon}}\left|\partial\omega\wedge\overline{\partial}\rho(\zeta)\right|\chi_\epsilon(\zeta-z)d\lambda(\zeta)d\lambda(z)$$

$$I_2 \le \epsilon\int_{\zeta\in\mathbb{B}_{3\epsilon}}\sqrt{-\rho_{3\epsilon(\zeta)}}\left|\partial\omega\wedge\overline{\partial}\rho(\zeta)\right|\int_{z\in\mathbb{B}\cap B(\zeta,\epsilon)}\chi_\epsilon(\zeta-z)\frac{1}{\sqrt{-\rho(z)+2\epsilon}}d\lambda(z)d\lambda(\zeta)$$

et puisque $\sqrt{-\rho_{3\epsilon}}\left|\partial\omega\wedge\overline{\partial}\rho\right| \in V^0(\mathbb{B}_{3\epsilon})$ on obtient

$$I_2 \le C(K)\sqrt{\epsilon}.$$

On obtient de la même façon

$$I_3 \le C(K)\sqrt{\epsilon}$$

Enfin

$$I_4 \le \epsilon^2\int_{z\in\mathbb{B}}\int_{\zeta\in B(z,\epsilon)}\frac{-\rho(z)+2\epsilon}{-\rho(z)+2\epsilon}\left|\partial\omega(\zeta)\right|\chi_\epsilon(\zeta-z)d\lambda(\zeta)d\lambda(z)$$

$$I_4 \le \epsilon^2\int_{\zeta\in\mathbb{B}_{3\epsilon}}(-\rho_{3\epsilon}(\zeta))\left|\partial\omega(\zeta)\right|\int_{z\in\mathbb{B}\cap B(\zeta,\epsilon)}\frac{1}{-\rho(z)+2\epsilon}\chi_\epsilon(\zeta-z)d\lambda(z)d\lambda(\zeta)$$

et puisque $-\rho_{3\epsilon}\left|\partial\omega\right| \in V^0(\mathbb{B}_{3\epsilon})$ on obtient

$$I_4 \le C(K)\epsilon$$

ce qui achève le cas où $p=1$.

• On considère alors l'application linéaire L_ϵ qui à $\dfrac{f}{|g|^2 \mu(|g|)}$ associe $\partial\omega_\epsilon \wedge \partial\rho \wedge \overline{\partial}\rho$. On a montré que L_ϵ est bornée de $M^1(\mathbb{B}_\delta)$ dans $V^0(\mathbb{B})$ et de $M^\infty(\mathbb{B}_\delta)$ dans $V^1(\mathbb{B})$ de normes majorées par $C(K)$. On en déduit par interpolation que L_ϵ est bornée de $M^p(\mathbb{B}_\delta)$ dans $W^\alpha(\mathbb{B})$, ce qui démontre bien que si $\dfrac{f}{|g|^2 \mu(|g|)} \in M^p(\mathbb{B}_\delta)$ alors $\partial\omega_\epsilon \wedge \partial\rho \wedge \overline{\partial}\rho \in W^\alpha(\mathbb{B})$ de norme majorée par une constante ne dépendant que de K.

Ceci achève la démonstration du point a) pour ω_ϵ.

Point b).
Soit $z \in \mathbb{B}$. On a

$$|\omega_\epsilon(z)| \leq \int_{\mathbb{C}^2} \chi_\epsilon(\zeta - z)\, |\omega(\zeta)|\, d\lambda(\zeta)$$

et d'après (2.11) on a donc

$$|\omega_\epsilon(z)| \leq \int_{\mathbb{C}^2} \chi_\epsilon(\zeta - z)\gamma(\zeta)\nu(\zeta) d\lambda(\zeta).$$

Or d'après l'hypothèse (2.2), $\dfrac{\gamma}{\sqrt{\mu(|g|)}} \in M^p(\partial\mathbb{B}_\delta)$. On en déduit, sachant que $\mu(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$, que γ est continue dans $\mathbb{B}_\delta$, et donc que γ est uniformément continue sur $\overline{\mathbb{B}}_\epsilon$ pour $\epsilon < \delta$. Donc

$$\exists \epsilon_0 > 0 / \forall z, z' \in \overline{\mathbb{B}}_\epsilon,\ |z - z'| < \epsilon_0 \Longrightarrow |\gamma(z) - \gamma(z')| < K$$

et on en déduit que pour $\epsilon < \epsilon_0$ on a

$$|\omega_\epsilon(z)| \leq \gamma(z) \int_{B(z,\epsilon)} \chi_\epsilon(\zeta - z)\nu(\zeta) d\lambda(\zeta) + \int_{\mathbb{C}^2} \chi_\epsilon(\zeta - z)\nu(\zeta)(\gamma(\zeta) - \gamma(z)) d\lambda(\zeta)$$

$$|\omega_\epsilon(z)| \leq (\gamma(z) + K)\nu_\epsilon(z)$$

où

$$\nu_\epsilon(z) = \int_{B(z,\epsilon)} \chi_\epsilon(\zeta - z)\nu(\zeta) d\lambda(\zeta).$$

On sait alors en utilisant (2.12) que $M(\gamma + K) \in L^p(\partial\mathbb{B})$ de norme majorée par une constante ne dépendant que de K. Montrons que $-\rho\nu_\epsilon^2$ est une mesure de Carleson dans $\mathbb{B}$. Pour cela on considère une tente de $\mathbb{B}$ de rayon s et on évalue

$$I = \int_{T_s} (-\rho)\nu_\epsilon^2 d\lambda = \int_{z \in T_s} (-\rho(z)) \left(\int_{\zeta \in B(z,\epsilon)} \chi_\epsilon(\zeta - z)\nu(\zeta) d\lambda(\zeta) \right)^2 d\lambda(z).$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, et sachant que $\|\chi_\epsilon\|_{L^1(\mathbb{C}^2)} = 1$ on obtient

$$I \leq \int_{z \in T_s} \int_{\zeta \in B(z,\epsilon)} \chi_\epsilon(\zeta - z)(-\rho(z))\nu(\zeta)^2 d\lambda(\zeta) d\lambda(z).$$

En majorant comme précédemment $-\rho(z)$ par $-\rho_{2\epsilon}(\zeta)$ et en inversant les intégrales on obtient

$$I \leq C\epsilon^{-4} \int_{\zeta \in T_{s+3\epsilon}} (-\rho_{2\epsilon}(\zeta))\nu(\zeta)^2 A(\zeta) d\lambda(\zeta)$$

et en utilisant (2.13) avec $\eta = 2\epsilon$ on obtient que $-\rho\nu_\epsilon^2$ est une mesure de Carleson de norme majorée par $C(K)$.

Conclusion.
On a ainsi montré que les hypothèses du corollaire 3.2.4 sont vérifiées par ω_ϵ. On peut alors appliquer celui-ci et on obtient

$$\exists C(K) > 0 / \forall \epsilon < \epsilon_0,\ \exists u_\epsilon \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}) / \overline{\partial} u_\epsilon = \omega_\epsilon \ et\ \ \|u_\epsilon\|_{L^p(\partial\mathbb{B})} \leq C(K).$$

3.2.3 Résolution de la forme ω.

Puisque (u_ϵ) est une famille bornée dans $L^p(\partial\mathbb{B})$ il existe une suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 telle que la suite $(u_{\epsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement dans $L^p(\partial\mathbb{B})$ vers une fonction u telle que $\|u\|_{L^p(\partial\mathbb{B})} \leq C(K)$. Montrons que $\overline{\partial}_b u = \omega$. Soit ϕ une $(2,1)$-forme de classe C^∞ dans $\overline{\mathbb{B}}$ telle que $\overline{\partial}\phi = 0$. Alors, puisque $\overline{\partial} u_\epsilon = \omega_\epsilon$, d'après la formule de Stokes on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_{\partial\mathbb{B}} u_{\epsilon_n}\phi = \int_{\mathbb{B}} \omega_{\epsilon_n} \wedge \phi$$

Or par définition de u on a

$$\int_{\partial\mathbb{B}} u_{\epsilon_n}\phi \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\partial\mathbb{B}} u\phi.$$

De plus, d'après le lemme 3.2.12 ci-dessous $\omega \in L^1(\mathbb{B})$, donc ω_ϵ tend vers ω dans $L^1(\mathbb{B})$. Puisque d'autre part ϕ est bornée sur $\mathbb{B}$ on a aussi

$$\int_{\mathbb{B}} \omega_{\epsilon_n} \wedge \phi \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{B}} \omega \wedge \phi$$

D'où on déduit que

$$\int_{\partial\mathbb{B}} u\phi = \int_{\mathbb{B}} \omega \wedge \phi$$

i.e.

$$\overline{\partial}_b u = \omega.$$

Lemme 3.2.12 *Si* $\dfrac{|f|}{|g|^2 \mu(|g|)} \in M^p(\partial\mathbb{B}_\delta)$ *alors* $\omega = \dfrac{f}{|g|^4}(\overline{g}_1\overline{\partial g_2} - \overline{g}_2\overline{\partial g_1}) \in L^1(\mathbb{B})$.

Ce lemme sera démontré au paragraphe 3.2.5.

3.2.4 Conclusion.

Soient

$$f_1 = \frac{f\overline{g}_1}{|g|^2} + g_2 u \quad \text{et} \quad f_2 = \frac{f\overline{g}_2}{|g|^2} - g_1 u$$

Sachant que $|g|$ est bornée, qu'on a l'hypothèse (2.2), et que $u \in L^p(\partial\mathbb{B})$, on en déduit que f_1 et f_2 sont dans $L^p(\partial\mathbb{B})$ de norme majorée par $C(K)$.
De plus, puique g_i est holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{B}}$ on a $\overline{\partial}_b(g_i u) = g_i\overline{\partial}_b u = g_i\omega$ et on en déduit que $\overline{\partial}_b f_i = 0$. On utilise alors le théorème suivant :

Théorème 3.2.13 *Soit $p \geq 1$ et u une fonction définie sur $\partial\mathbb{B}$. On a les équivalences suivantes :*
1) $u \in L^p(\partial\mathbb{B})$ et $\overline{\partial}_b u = 0$
2) $\exists U \in H^p(\mathbb{B}) /\ U^* = u$ où U^* représente les valeurs au bord presque partout de U.

Ce théorème sera démontré au paragraphe 3.5.
On en déduit que

$$\exists f_1', f_2' \in H^p(\mathbb{B})/(f_i')^* = f_i \ \textit{et} \ \ \|f_i'\|_{H^p} = \|f_i\|_{L^p(\partial\mathbb{B})}$$

où $(f_i')^*$ désigne les limites radiales de f_i' sur $\partial\mathbb{B}$. Sur $\partial\mathbb{B}$ on a alors $f_1'g_1 + f_2'g_2 = f$. Ainsi $f_1'g_1 + f_2'g_2$ et f sont deux fonctions de $H^p(\mathbb{B})$ qui sont égales sur $\partial\mathbb{B}$, elles sont donc égales dans $\mathbb{B}$. Ainsi on a montré que

$$\exists f_1', f_2' \in H^p(\mathbb{B})/f_1'g_1 + f_2'g_2 = f \ \textit{et} \ \ \|f_i'\|_{H^p} \leq C(K).$$

3.2.5 La forme ω est dans $L^1(\mathbb{B})$.

On démontre ici le lemme 3.2.12. Pour montrer que $\omega \in L^1(\mathbb{B})$ il suffit de montrer que $|\omega| \in L^1_{loc}(\mathbb{B}_\delta)$. Pour cela on se place au voisinage d'un point de $\mathbb{B}_\delta$. On peut supposer sans perte de généralité que ce point est 0.
On a

$$|\omega| \leq \frac{|f|}{|g|^2}\left(\frac{|\partial g_1|}{|g_1|} + \frac{|\partial g_2|}{|g_2|}\right)$$

L'hypothèse (2.2) et le lemme 3.2.2 permettent de voir, sachant que $\mu(|g|)$ est borné, que $\dfrac{|f|}{|g|^2}$ est borné dans $\mathbb{B}_\delta$. Il suffit donc de montrer que $\dfrac{|\partial g_i|}{|g_i|} \in L^1_{loc}(\mathbb{B}_\delta)$ pour $i = 1, 2$.

Montrons d'abord que g_i s'écrit sous la forme

$$g_i(z_1, z_2) = u(z_1, z_2) z_2^n \prod_{j=1}^{N} (z_1 - b_j(z_2)) \tag{2.15}$$

où $n, N \in \mathbb{N}$, et u est une fonction holomorphe telle que $u(0,0) \neq 0$. Si g_i est la fonction nulle il n'y a rien à faire. On suppose maintenant que g_i n'est pas identiquement nulle. D'après le théorème de préparation de Weierstrass (voir par exemple [23] p 28), si g_i est régulière d'ordre k par rapport à z_1 en 0 alors elle s'écrit au voisinage de 0

$$g_i(z_1, z_2) = u(z_1, z_2) \sum_{j=0}^{k} c_j(z_2) z_1^j$$

où u, c_j sont holomorphes, $u(0,0) \neq 0$ et $c_k = 1$. Si on fixe z_2 alors $\sum_{j=0}^{k} c_j(z_2) z_1^j$ est un polynôme complexe de degré k en z_1 donc il se factorise sous la forme

$$\sum_{j=0}^{k} c_j(z_2) z_1^j = \prod_{j=1}^{k} (z_1 - b_j(z_2)) \tag{2.16}$$

On ainsi obtenu l'écriture voulue quand g_i est régulière par rapport à z_1 en 0. Si ce n'est pas le cas alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\partial^k g_i}{\partial z_1^k}(0,0) = 0$, et la fonction holomorphe $g_i(z_1, 0)$ a un zéro d'ordre infini en 0, donc est identiquement nulle. On en déduit, en utilisant le développement en série entière de $g_i(z_1, z_2)$ que $g_i(z_1, z_2) = z_2 h(z_1, z_2)$ où h est une fonction holomorphe au voisinage de 0. Si h est régulière par rapport à z_1 on obtient directement l'écriture voulue. Sinon on recommence. Montrons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{g_i}{z_2^n}$ est holomorphe et régulière par rapport à z_1 en 0. Si ce n'est pas le cas on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $h_n = \dfrac{g_i}{z_2^n}$ est holomorphe. Alors,

$$\begin{aligned}
\forall k, l \in \mathbb{B}, \ \frac{\partial^{k+l} g_i}{\partial z_1^k \partial z_2^l}(0) &= \frac{\partial^{k+l}(z_2^{l+1} h_{l+1})}{\partial z_1^k \partial z_2^l}(0) \\
&= \frac{\partial^k}{\partial z_1^k}\left(\sum_{j=0}^{l} C_l^j \frac{(l+1)!}{(l+1-j)!} z_2^{l+1-j} \frac{\partial^{l-j} h_{l+1}}{\partial z_2^{l-j}} \right)(0) \\
&= \left(\sum_{j=0}^{l} C_l^j \frac{(l+1)!}{(l+1-j)!} z_2^{l+1-j} \frac{\partial^{l+k-j} h_{l+1}}{\partial z_1^k \partial z_2^{l-j}} \right)(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

On en déduit que g_i est identiquement nulle, ce qui n'est pas. On peut donc conclure que g_i s'écrit sous le forme (2.15).

On en déduit que

$$\frac{1}{g_i}\frac{\partial g_i}{\partial z_1} = \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial z_1} + \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{z_1 - b_j(z_2)}$$

Montrons alors que $\dfrac{|\partial_1 g_i|}{|g_i|}$ est intégrable au voisinage de 0. Pour cela, puisque u ne s'annule pas en 0, il suffit de montrer que les fonctions $\dfrac{1}{z_1 - b_j(z_2)}$ sont intégrables au voisinage de 0.
Pour cela on considère l'intégrale

$$I = \int_{\mathbb{D}^2} \frac{d\lambda(z_1)d\lambda(z_2)}{|z_1 - b_j(z_2)|}$$

On peut majorer I par $I_1 + I_2$ où

$$I_1 = \int_{\mathbb{D}} \int_{D(b_j(z_2),\frac{1}{2})} \frac{d\lambda(z_1)}{|z_1 - b_j(z_2)|} d\lambda(z_2)$$

et

$$I_2 = \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}\setminus D(b_j(z_2),\frac{1}{2})} \frac{d\lambda(z_1)}{|z_1 - b_j(z_2)|} d\lambda(z_2)$$

On obtient alors

$$I \leq \pi^2 + 2\pi^2$$

ce qui nous donne le résultat pour $\dfrac{|\partial_1 g_i|}{|g_i|}$. Pour $\dfrac{|\partial_2 g_i|}{|g_i|}$ on a, par symétrie, le même résultat, et, puisque $\dfrac{|\partial g_i|}{|g_i|} \leq \dfrac{|\partial_1 g_i|}{|g_i|} + \dfrac{|\partial_2 g_i|}{|g_i|}$, ceci achève la démonstration du fait que ω est localement intégrable dans $\mathbb{B}_\delta$, et donc intégrable dans $\mathbb{B}$.

3.3 Retour au problème dans $\mathbb{B}$.

Soient $0 < r < 1$ et $\delta = \dfrac{1}{r} - 1$. On considère les fonctions définies sur $\mathbb{B}_\delta$ par $f^r(z) = f(rz)$ et $g_i^r(z) = g_i(rz)$. Alors f^r et g_i^r vérifient les hypothèses du théorème 3.2.1. Donc

$$\exists f_1^r, f_2^r \in H^p(\mathbb{B}) / f_1^r g_1^r + f_2^r g_2^r = f^r \text{ et } \|f_i^r\|_{H^p} \leq C(K)$$

Ainsi, d'après la proposition 2.10.1 il existe un suite croissante $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tendant vers 1 telle que les suites $(f_1^{r_k})_k$ et $(f_2^{r_k})_k$ convergent uniformément sur les compacts vers deux fonctions f_1 et f_2 qui sont dans $H^p(\mathbb{B})$ et qui vérifient $f_1 g_1 + f_2 g_2 = f$, ce qui achève la démonstration du théorème 3.1.1.

3.4 Une fonction régulière qui vaut 1 au voisinage d'un ensemble analytique.

Soient g_1, g_2 deux fonctions holomorphes et Z l'ensemble des zéros communs à g_1 et g_2. Pour $\epsilon > 0$ on note $Z_\epsilon = \{z \in \mathbb{B}_\delta / d(z, Z) < \epsilon\}$. Soit Ω un ensemble relativement compact dans $\mathbb{B}_\eta$. On veut montrer qu'il existe, pour chaque $\epsilon > 0$, une fonction χ_ϵ de classe C^1 dans Ω telle que $0 \leq \chi_\epsilon \leq 1$, $\chi_\epsilon \equiv 1$ sur Z_ϵ et $\chi_\epsilon \equiv 0$ sur $\Omega \backslash Z_{2\epsilon}$ vérifiant en plus $\left|\overline{\partial}\chi_\epsilon\right| \leq \dfrac{C_0}{\epsilon}$. On note $d(z) = d(z, Z)$, fonction qui est bien définie et continue sur Ω. On définit alors

$$\begin{aligned} C_\epsilon(z) &= 1 & & si\ d(z) \leq \frac{4}{3}\epsilon \\ &= e^{\frac{9\epsilon^2}{9d(z)^2 - 25\epsilon^2} + 1} & & si\ \epsilon < d(z) < 2\epsilon \\ &= 0 & & si\ d(z) \geq \frac{5}{3}\epsilon \end{aligned}$$

On constate aisément que la fonction C_ϵ ainsi définie est bien continue.
On définit aussi $R(z) = (\frac{3}{\epsilon})^4 \chi(\frac{3z}{\epsilon})$ où $\chi \in C^\infty(\mathbb{C}^2)$ est une fonction positive à support dans $\mathbb{B}$ telle que $\|\chi\|_{L^1(\mathbb{C}^2)} = 1$. Alors $R \in C^\infty(\mathbb{C}^2)$ et son support est inclus dans la boule de rayon $\frac{\epsilon}{3}$. On pose alors

$$\chi_\epsilon = R * C_\epsilon$$

Cette fonction est de classe C^∞ dans Ω et vérifie bien $0 \leq \chi_\epsilon \leq 1$, $\chi_\epsilon \equiv 1$ sur Z_ϵ et $\chi_\epsilon \equiv 0$ sur $\Omega \backslash Z_{2\epsilon}$. Il reste à vérifier que $\left|\overline{\partial}\chi_\epsilon\right| \leq \dfrac{C_0}{\epsilon}$. Pour cela on va utiliser le fait que C_ϵ est dérivable presque partout dans Ω et montrer que $\left|\overline{\partial}C_\epsilon\right| \leq \dfrac{C_0}{\epsilon}$. Il suffit alors de voir que

$$\left|\overline{\partial}\chi_\epsilon\right|(z) = \left|\chi * \overline{\partial}C_\epsilon\right|(z) = \int_{\mathbb{C}^n} \left|\chi(z-\zeta)\overline{\partial}C_\epsilon(\zeta)\right| d\lambda(\zeta) \leq \frac{C_0}{\epsilon}\|\chi\|_{L^1(\mathbb{C}^n)} = \frac{C_0}{\epsilon}$$

Calculons à présent $\overline{\partial}C_\epsilon$.
Si $d(z) < \frac{4}{3}\epsilon$ ou $d(z) > \frac{5}{3}\epsilon$ alors $\overline{\partial}C_\epsilon(z) = 0$.
Si $\frac{4}{3}\epsilon < d(z) < \frac{5}{3}\epsilon$ alors

$$\overline{\partial}C_\epsilon(z) = -81\epsilon^2 \frac{2d(z)}{(9d(z)^2 - 25\epsilon^2)^2} e^{\frac{9\epsilon^2}{9d(z)^2 - 25\epsilon^2} - 1} \overline{\partial}(d(z))$$

La fontion d est dérivable presque partout et de plus sa dérivée est bornée par 1 sur Ω.

Soit $F(x) = \dfrac{9\epsilon^2}{9x^2 - 25\epsilon^2}$. Alors quand $\dfrac{4}{3}\epsilon < d(z) < \dfrac{5}{3}\epsilon$,

$$\left|\overline{\partial} C_\epsilon\right| = \left|2\frac{F(d(z))^2 d(z)}{\epsilon^2} e^{F(d(z))} \overline{\partial}(d(z))\right|$$

d'où, sachant que $|d(z)| \leq \dfrac{5}{3}\epsilon$, on a

$$\left|\overline{\partial} C_\epsilon\right| \leq \frac{10}{3}\frac{F(d(z))^2}{\epsilon} e^{F(d(z))}.$$

Il suffit alors de montrer que $\forall x \in [\frac{4}{3}\epsilon, \frac{5}{3}\epsilon[,\ G(x) = F(x)^2 e^{F(x)} \leq 4e^{-2}$.
On a

$$G'(x) = F(x)F'(x)(2 + F(x))e^{F(x)}$$

et $F(x) < 0$ sur $[\frac{4}{3}\epsilon, \frac{5}{3}\epsilon[$. De plus

$$F'(x) = -81\epsilon^2 \frac{2x}{(9x^2 - 25\epsilon^2)^2} < 0$$

sur $[\frac{4}{3}\epsilon, \frac{5}{3}\epsilon[$ et

$$2 + F(x) = \frac{2}{9x^2 - 25\epsilon^2}(3\sqrt{2}x - \sqrt{41}\epsilon)(3\sqrt{2}x + \sqrt{41}\epsilon).$$

On en déduit que G admet un maximum en $x = \dfrac{\sqrt{41}}{3\sqrt{2}}\epsilon$ qui vaut $4e^{-2}$ ce qui achève la démonstration.

3.5 Prolongement holomorphe d'une fonction du bord $\overline{\partial}_b$-fermée.

Soit D un domaine borné de classe C^2 de $\mathbb{C}^n$.

Définition 3.5.1 *Soit $u \in L^p(\partial D)$ et $f \in L^1_{(0,1)}(D)$. On dit que $\overline{\partial}_b u = f$ si pour toute forme $\phi \in C^\infty_{(n,n-1)}(\overline{D})$ telle que $\overline{\partial}\phi = 0$ on a*

$$\int_{\partial D} u\phi = \int_D f \wedge \phi$$

On peut à présent caractériser les fonctions du bord qui sont $\overline{\partial}_b$-fermées.

Théorème 3.5.2 *Soit $p \geq 1$ et u une fonction définie sur ∂D. On a les équivalences suivantes :*
1) $u \in L^p(\partial D)$ et $\overline{\partial}_b u = 0$
2) $\exists U \in H^p(D)/\ U^* = u$ où U^* représente les valeurs au bord presque partout de U.

Démonstration :
• 2) $\Longrightarrow$ 1)
Soit $\phi \in C^\infty_{(n,n-1)}(\overline{D})$ tel que $\overline{\partial}\phi = 0$. Soit $\epsilon > 0$ et $\partial D_\epsilon = \{z \in D/\ d(z, \partial D) = \epsilon\}$. Alors d'après le théorème de Stokes

$$\int_{\partial D_\epsilon} U\phi = 0.$$

Montrons que cette quantité tend vers $\int_{\partial D} U^*\phi$ quand ϵ tend vers 0.
Pour cela on considère l'application Φ_ϵ de ∂D dans ∂D_ϵ définie par $\Phi_\epsilon(\zeta) = \zeta - \epsilon n_\zeta$, où n_ζ désigne la normale extérieure à ∂D en ζ. Si ϵ est assez petit Φ_ϵ est un C^1-difféomorphisme (voir [7] p 106) et on a

$$\int_{\partial D_\epsilon} U\phi = \int_{\partial D} \Phi_\epsilon^*(U\phi) = \int_{\partial D} U(\zeta - \epsilon n_\zeta)\Phi_\epsilon^*(\phi).$$

Or $U(\zeta - \epsilon n_\zeta)$ tend vers $U^*(\zeta)$ dans $L^p(\partial D)$ quand ϵ tend vers 0 et $\Phi_\epsilon^*(\phi)$ tend uniformément vers ϕ quand ϵ tend vers 0, d'où le résultat.

• 1) $\Longrightarrow$ 2)
Soit K_B le noyau de Bochner-Cauchy-Martinelli sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \backslash \Delta$ (où Δ désigne la diagonale de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$) :

$$K_B = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{(\overline{\zeta}_i - \overline{z}_i)}{|\zeta - z|^{2n}} \wedge_{j \neq i} (d\overline{\zeta}_i - d\overline{z}_j) \wedge_{j=1}^n (d\zeta_j - dz_j).$$

Soit $f = -[\partial D]_{0,1} u$ où $[\partial D]_{0,1}$ est la composante de degré $(0,1)$ du courant d'intégration sur le bord de D. On a alors $\forall \phi \in C^\infty_{(n,n-2)}(\mathbb{C}^n)$ à support compact

$$\left\langle \overline{\partial} f, \phi \right\rangle = -\left\langle f, \overline{\partial}\phi \right\rangle = \int_{\partial D} u\overline{\partial}\phi = 0$$

car $\overline{\partial}_b u = 0$. Ainsi $\overline{\partial} f = 0$ au sens des courants. Si on note $K_{0,0}$ la composante de K_B de degré $(n, n-1)$ en ζ et $(0,0)$ en z, on a d'après [21] p 234 :

$$\overline{\partial}(\langle K_{0,0}(z,.), f \rangle) = c_n f$$

au sens des courants, où $c_n = (2i\pi)^n/(n-1)!$. Cela nous conduit à poser

$$U(z) = \alpha_n \langle K_{0,0}(z,.), f \rangle = -\alpha_n \int_{\partial D} K_{0,0}(z,\zeta) u(\zeta).$$

où α_n est une constante qu'on fixera ultérieurement. On a alors $\forall \phi \in C^\infty_{(n,n-1)}(\mathbb{C}^n)$ à support compact

$$-\alpha_n c_n \int_{\partial D} u\phi = \alpha_n c_n \langle f, \phi \rangle = \left\langle \overline{\partial} U, \phi \right\rangle = -\left\langle U, \overline{\partial}\phi \right\rangle = -\int_{\mathbb{C}^n} U\overline{\partial}\phi. \tag{5.1}$$

Montrons que U est à support dans $\overline{D}$. Soit $z \notin \overline{D}$, alors $K_{0,0}(z,.) \in C^1(\overline{D})$. Or d'après [21] (p234), dans $\overline{D}$ on a $\overline{\partial}_\zeta K_{0,0} = 0$, donc, u étant $\overline{\partial}_b$-fermée, $U(z) = \alpha_n c_n \int_{\partial D} u K_{0,0}(z,.) = 0$. Ainsi U est à support dans $\overline{D}$ et on obtient dans (5.1)

$$\alpha_n c_n \int_{\partial D} u\phi = \int_{\overline{D}} U \overline{\partial}\phi. \tag{5.2}$$

Pour montrer 2) montrons que la fonction U ainsi définie est l'intégrale de Poisson de u. Pour cela on introduit la fonction de Green de D :

$$G(z,\zeta) = c'_n |\zeta - z|^{2-2n} - H(z,\zeta)$$

où $c'_n = (n-2)!/(4\pi^n)$ et $H(z,.)$ est harmonique et de classe C^∞ dans $\overline{D}$ pour tout z dans D. Soit $\beta = \frac{i}{2}\partial\overline{\partial}|\zeta|^2 = \frac{i}{2}\sum_{j=1}^n d\zeta_j \wedge d\overline{\zeta}_j$. Alors on a

$$\alpha_n K_{0,0}(z,\zeta) = a_n \partial_\zeta(|\zeta - z|^{2-2n}\beta^{n-1}).$$

En effet

$$K_{0,0}(z,\zeta) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\overline{\zeta}_j - \overline{z}_j}{|\zeta - z|^{2n}} \wedge_{k\neq j} d\overline{\zeta}_k \wedge_{k=1}^n d\zeta_k$$

et d'autre part

$$\partial_\zeta(|\zeta - z|^{2-2n}\beta^{n-1}) = (\frac{i}{2})^{n-1}(n-1)!\sum_{j=1}^n \frac{(1-n)}{|z-\zeta|^{2n}}(\overline{\zeta}_j - \overline{z}_j) \wedge_{k\neq j} (d\zeta_k \wedge d\overline{\zeta}_k) \wedge d\zeta_j$$

d'où le résultat avec $a_n = \frac{\alpha_n 2^{n-1}}{i^{n-1}(n-1)(n-1)!}$. Ainsi, si on pose $b_n = \frac{a_n}{c'_n} = \frac{\pi^n \alpha_n 2^{n+1}}{i^{n-1}((n-1)!)^2}$, on a

$$\alpha_n K_{0,0}(z,\zeta) = b_n \partial_\zeta(G(z,\zeta)\beta^{n-1}) + b_n \partial_\zeta(H(z,\zeta)\beta^{n-1})$$

$$\alpha_n K_{0,0}(z,\zeta) = b_n \partial_\zeta G(z,\zeta) \wedge \beta^{n-1} + b_n \partial_\zeta H(z,\zeta) \wedge \beta^{n-1}$$

Or $H(z,.)$ est harmonique donc $\overline{\partial}_\zeta(\partial_\zeta H(z,\zeta) \wedge \beta^{n-1}) = 0$, et sachant que $\overline{\partial}_b u = 0$, on en déduit que

$$\int_{\partial D} u(.)\partial_\zeta H(z,.) \wedge \beta^{n-1} = 0$$

d'où

$$U(z) = \int_{\partial D} b_n u(.)\partial_\zeta G(z,.) \wedge \beta^{n-1}$$

Or on sait que pour tout z dans D et tout ζ dans ∂D, $G(z,\zeta) = 0$. On en déduit que

$$d_\zeta G(z,.) = a_z(\zeta) d\rho(\zeta)$$

où ρ est une fonction définissante de D et $a_z(\zeta)$ un scalaire. Alors, sachant d'une part que $\overline{\partial}_\zeta G(z,.) \in C^1(\overline{D})$, $\overline{\partial}_\zeta(\overline{\partial}_\zeta G(z,.)) = 0$ et $\overline{\partial}_b u = 0$, d'autre part que $d_\zeta G(z,.) = \overline{\partial}_\zeta G(z,.) + \partial_\zeta G(z,.)$, on obtient

$$U(z) = \int_{\partial D} u(\zeta) b_n a_z(\zeta) d\rho(\zeta) \wedge \beta^{n-1}$$

Or

$$\frac{\partial G}{\partial n}(z,\zeta)dS = \left(dG.\frac{d\rho}{|d\rho|}\right)\left(\frac{d\rho}{|d\rho|}\lrcorner\, dV\right) = \left(a_z(\zeta)\frac{d\rho.d\rho}{|d\rho|^2}\right)(d\rho\lrcorner\, dV)$$

$$\frac{\partial G}{\partial n}(z,\zeta)dS = a_z(\zeta) d\rho\lrcorner\, dV$$

$$\frac{\partial G}{\partial n}(z,\zeta)dS = a_z(\zeta)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \rho}{dz_j}(-1)^{n+j}\wedge_{k=1}^{n} d\zeta_k \wedge_{k\neq j} d\overline{\zeta}_k + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \rho}{\partial \overline{z}_j}(-1)^{j}\wedge_{k\neq j} d\zeta_k \wedge_{k=1}^{n} d\overline{\zeta}_k\right)$$

$$\frac{\partial G}{\partial n}(z,\zeta)dS = a_z(\zeta)(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{2}{i}\right)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}d\rho\wedge\beta^{n-1}$$

Ainsi

$$U(z) = d_n \int_{\partial D}\frac{\partial G}{\partial n}(z,\zeta)u(\zeta)dS(\zeta)$$

où $d_n = \frac{4\pi^n \alpha_n}{i^{(n+1)(n-1)}(n-1)!}$. Or $\dfrac{\partial G}{\partial n}(z,.) = P(z,.)$ est le noyau de Poisson de D. On a ainsi montré que, si α_n est choisi tel que $d_n = 1$, U est l'intégrale de Poisson de u. D'autre part, d'après (5.2) (en prenant ϕ à support compact dans D), $\overline{\partial}U = 0$ dans D au sens des courants, donc U est holomorphe dans D , et d'après [22] (p 5) $U \in H^p(D)$.

Il reste à voir que $U^* = u$. Soit $f(z) = \displaystyle\int_{\partial D}(U^*(\zeta) - u(\zeta))P(z,\zeta)dS(\zeta)$. C'est une fonction harmonique dans D ayant pour valeurs au bord $U^* - u$. Or on sait que U est aussi l'intégrale de Poisson de U^*, donc f est nulle dans D, donc $U^* - u = 0$ presque partout, ce qui achève la preuve. ∎

Chapitre 4

Résolution du $\overline{\partial}$ dans le bidisque.

4.1 Définitions et résultat.

On note $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$ le disque unité de $\mathbb{C}$ et $d\lambda$ la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{D}$.
Le bidisque sera noté $\mathbb{D}^2 = \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ et son bord $\partial\mathbb{D}^2 = \mathbb{T} \times \mathbb{D} \cup \mathbb{D} \times \mathbb{T}$.
On note $H^p(\mathbb{D}^2)$ l'ensemble des fonctions f holomorphes dans $\mathbb{D}^2$ telles que

$$\|f\|_{H^p} = \operatorname*{Sup}_{r<1} \int_{\partial\mathbb{D}^2} |f(rz)|^p \, d\sigma(z) < +\infty$$

et $H^p(\mathbb{T}^2)$ l'ensemble des fonctions f holomorphes dans $\mathbb{D}^2$ telles que $\operatorname*{Sup}_{r<1} \int_{\mathbb{T}^2} |f(rz)|^p \, d\sigma(z) < +\infty$.
Il serait intéressant de démontrer pour $H^p(\mathbb{D}^2)$ un théorème similaire à celui qu'on trouve dans [18] pour l'espace de Hardy usuel du bidisque $H^p(\mathbb{T}^2)$. Plus précisément, on voudrait montrer que si g_1 et g_2 sont dans $H^\infty(\mathbb{D}^2)$ et vérifient $|g| \geq \delta > 0$, alors pour toute fonction $f \in H^p(\mathbb{D}^2)$ il existe deux fonctions f_1 et f_2 dans $H^p(\mathbb{D}^2)$ telles que $f_1 g_2 + f_2 g_2 = f$ dans $\mathbb{D}^2$. Pour cela, en suivant la méthode utilisée au chapitre 3, il suffit de résoudre la $(0,1)$-forme

$$\omega = f \frac{\overline{g}_1 \overline{\partial g_2} - \overline{g}_2 \overline{\partial g_1}}{|g|^4}$$

qui, ici, est bien régulière dans $\mathbb{D}^2$, avec une solution u ayant une norme $\|u\|_{H^p}$ finie. Pour cela on peut supposer d'abord que toutes les fonctions sont de classe C^∞ dans $\overline{\mathbb{D}}^2$, résoudre la forme ω obtenue avec une fonction u qui est dans $C^\infty(\overline{\mathbb{D}}^2)$ et dont la norme dans $L^p(\partial\mathbb{D}^2)$ est majorée par une constante ne dépendant que de $\|g\|_\infty$ et de $\|f\|_{H^p}$. Un argument de familles normales, comme au paragraphe 2.10, permettrait alors de conclure.
Je me suis ainsi attachée à résoudre les $(0,1)$-formes $\overline{\partial}$-fermées dans $\mathbb{D}^2$ avec des estimations dans $L^p(\partial\mathbb{D}^2)$. Le résultat obtenu concerne les formes qui sont le produit d'une fonction de $H^p(\mathbb{D}^2)$ par une forme vérifiant des hypothèses de type Carleson. Si la forme ω définie plus haut est bien le

produit d'une fonction de $H^p(\mathbb{D}^2)$ par une forme, elle ne vérifie pas, a priori, les hypothèses du résultat obtenu.

Pour énoncer le résultat on a besoin de définir l'opérateur qui donne la solution minimale du $\overline{\partial}$ dans $L^2(\mathbb{D},(1-|z|^2)d\lambda)$. Pour toute fonction $h\in C^\infty(\overline{\mathbb{D}})$ et tout z dans $\mathbb{D}$ on définit

$$S(h)(z)=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}h(\zeta)\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\overline{\zeta}z}\right)^2\frac{1}{z-\zeta}d\lambda(\zeta)$$

Si $h\in C^\infty(\overline{\mathbb{D}}^2)$ et $z\in\overline{\mathbb{D}}^2$ on note aussi

$$S^1(h)(z)=S(h(.,z_2))(z_1)\qquad\qquad S^2(h)(z)=S(h(z_1,.))(z_2)$$

On note aussi $A^p(\mathbb{D})$ l'espace des fonctions holomorphes dans $\mathbb{D}$ qui sont aussi dans $L^p(\mathbb{D})$ muni de la norme $\|h\|_{A^p}=\|h\|_{L^p(\mathbb{D})}$.
On peut à présent énoncer le théorème suivant :

Théorème 4.1.1 *Soit $p\in[1,+\infty[$. Soit $\omega=\omega_1d\overline{z}_1+\omega_2d\overline{z}_2$ une $(0,1)$-forme de classe C^∞ dans $\overline{\mathbb{D}}^2$ telle que $\overline{\partial}\omega=0$. Si ω vérifie :*

$$\begin{array}{rl}\exists C_p>0/\ \forall f\in H^p(\mathbb{D})\cap C^\infty(\overline{\mathbb{D}}), & \|S^1(f\omega_1(.,z_2))\|_{L^p(\mathbb{T})}\leq C_p\|f\|_{H^p}\\ & \|S^2(f\omega_2(z_1,.))\|_{L^p(\mathbb{T})}\leq C_p\|f\|_{H^p}\\ \forall f\in A^p(\mathbb{D})\cap C^\infty(\overline{\mathbb{D}}), & \|S^1(f\omega_1(.,z_2))\|_{L^p(\mathbb{D})}\leq C_p\|f\|_{A^p}\\ & \|S^2(f\omega_2(z_1,.))\|_{L^p(\mathbb{D})}\leq C_p\|f\|_{A^p}\end{array}\tag{1.1}$$

alors

$$\exists C'_p>0/\ \forall f\in H^p(\mathbb{D}^2)\cap C^\infty(\overline{\mathbb{D}}^2),\ \exists u\in C^\infty(\overline{\mathbb{D}}^2)\cap L^p(\partial\mathbb{D}^2)/\ \overline{\partial}u=f\omega \text{ et } \|u\|_{L^p(\partial\mathbb{D}^2)}\leq C'_p\|f\|_{H^p}$$

Dans la suite $\mathbb{B}$ désignera la boule de $\mathbb{C}^2$, et $\rho(z_1,z_3)=|z_1|^2+|z_3|^2-1$ la fonction définisante de $\mathbb{B}$. On utilisera la notation (z_1,z_2) pour les points du bidisque et la notation (z_1,z_3) ou (z_2,z_3) pour les points de $\mathbb{B}$. On rappelle que les mesures de Carleson ont été définies au paragraphe 2.4.1.
On peut à présent énoncer le corollaire suivant.

Corollaire 4.1.2 *Soit $\omega=\omega_1d\overline{z}_1+\omega_2d\overline{z}_2$ une $(0,1)$-forme de classe C^∞ dans $\overline{\mathbb{D}}^2$ telle que $\overline{\partial}\omega=0$. On suppose qu'il existe une constante positive C_1 telle que*
a) $\forall z_2\in\mathbb{D},\ \omega_1(.,z_2)\in V^1(\mathbb{D})$ *de norme majorée par* C_1.

b) $\exists\epsilon>0/\ \forall z_2\in\mathbb{D},\ \dfrac{\left|\omega_1(z_1,z_2)d\overline{z}_1\wedge\overline{\partial}\rho(z_1,z_3)\right|^2}{(-\rho(z_1,z_3))^\epsilon}\in V^1(\mathbb{B})$ *de norme majorée par* C_1.

c) $\forall z_1\in\mathbb{D},\ \omega_2(z_1,.)\in V^1(\mathbb{D})$ *de norme majorée par* C_1.

d) $\exists \epsilon > 0 / \ \forall z_1 \in \mathbb{D}, \ \dfrac{\left|\omega_2(z_1, z_2) d\overline{z}_1 \wedge \overline{\partial}\rho(z_2, z_3)\right|^2}{(-\rho(z_2, z_3))^\epsilon} \in V^1(\mathbb{B})$ *de norme majorée par* C_1.

Alors il existe une constante C *ne dépendant que de* C_1 *telle que pour toute fonction* f *dans l'espace* $H^p(\mathbb{D}^2) \cap C^\infty(\overline{\mathbb{D}}^2)$ *il existe une solution* u *de l'équation*

$$\overline{\partial} u = f\omega \tag{1.2}$$

vérifiant

$$\|u\|_{L^p(\partial\mathbb{B})} \leq C \ \ \|f\|_{H^p}.$$

Pour démontrer ces résultats on va utiliser fortement le structure produit du bidisque et utiliser des noyaux de projection et de résolution du $\overline{\partial}$ dans le disque $\mathbb{D}$. Avant de donner la solution u de l'équation (1.2) et de l'estimer, on définit ces opérateurs et on énonce les propriétés qu'ils vérifient et dont on aura besoin par la suite.

4.2 Propriétés des opérateurs de projection et de résolution du $\overline{\partial}$ dans le disque de $\mathbb{C}$.

Pour toute fonction $h \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}})$ et tout z dans $\mathbb{D}$ on définit

$$P(h)(z) = \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{D}} h(\zeta) \frac{1 - |\zeta|^2}{(1 - \overline{\zeta} z)^3} d\lambda(\zeta)$$

et on rappelle que

$$S(h)(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} h(\zeta) \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \overline{\zeta} z} \right)^2 \frac{1}{z - \zeta} d\lambda(\zeta)$$

Si $h \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}}^2)$ et $z \in \overline{\mathbb{D}}^2$ on note aussi

$$\begin{array}{ll} P^1(h)(z) = P(h(., z_2))(z_1) & \qquad S^1(h)(z) = S(h(., z_2))(z_1) \\ P^2(h)(z) = P(h(z_1, .))(z_2) & \qquad S^2(h)(z) = S(h(z_1, .))(z_2) \end{array}$$

Proposition 4.2.1 *Les opérateurs* P *et* S *vérifient les propositions suivantes :*
(1) P *est la projection orthogonale de* $L^2((1 - |z|^2) d\lambda(z))$ *sur le sous-espace des fonctions holomorphes.*
(2) Si $h \in C^1(\overline{\mathbb{D}})$, $S(h)$ *est la solution minimale dans* $L^2((1 - |z|^2) d\lambda(z))$ *de l'équation* $\overline{\partial} u = h \ d\overline{z}$.
(3) Si $h \in C^1(\overline{\mathbb{D}})$ *alors* $h = P(h) + S\left(\dfrac{\partial h}{\partial \overline{z}}\right)$.
(4) Si $h \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}}^2)$ *et* $i \in \{1, 2\}$ *alors* $P^i(h)$ *et* $S^i(h)$ *sont dans* $C^\infty(\overline{\mathbb{D}}^2)$.

(5) Si $h \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}}^2)$ *alors* $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}_2} P^1(h) = P^1\left(\dfrac{\partial h}{\partial \overline{z}_2}\right)$ *et* $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}_2} S^1(h) = S^1\left(\dfrac{\partial h}{\partial \overline{z}_2}\right)$.
(6) P *est un opérateur borné de* $L^p(\mathbb{D})$ *dans* $L^p(\mathbb{D})$ *pour tout* $p \in [1, +\infty[$.
(7) Si $h \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}})$ *alors* $P \circ S(h) = 0$.
(8) Si $h \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}}^2)$ alors $P^1 \circ S^2(h) = S^2 \circ P^1(h)$.

La démonstration de cette proposition sera faite au paragraphe 4.5.

4.3 Résolution du $\overline{\partial}$ dans le bidisque sans estimations.

On reprend ici les notations du théorème 4.1.1. On pose

$$b_1 = S^1(f\omega_1), \qquad b_2 = S^2(f\omega_2)$$

et

$$u = b_1 - P^1(b_1 - b_2)$$

D'après la proposition 4.2.1 assertion (4) b_1, b_2 et u sont dans $C^\infty(\overline{\mathbb{D}}^2)$. Montrons que u est solution de l'équation $\overline{\partial} u = f\omega$ dans $\mathbb{D}^2$.
Calculons $\dfrac{\partial u}{\partial \overline{z}_1}$. Par définition on a

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}_1} = \frac{\partial b_1}{\partial \overline{z}_1} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}_1}(P^1(b_1 - b_2))$$

D'après la proposition 4.2.1 (2)

$$\frac{\partial b_1}{\partial \overline{z}_1} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}_1} S^1(f\omega_1) = f\omega_1$$

et d'après la proposition 4.2.1 (1)

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_1} P^1(b_1 - b_2) = 0$$

donc

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}_1} = f\omega_1$$

Calculons $\dfrac{\partial u}{\partial \overline{z}_2}$.

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}_2} = \frac{\partial b_1}{\partial \overline{z}_2} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}_2}(P^1(b_1 - b_2))$$

D'après la proposition 4.2.1 (5) on a

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_2}(P^1(b_1 - b_2)) = P^1\left(\frac{\partial b_1}{\partial \overline{z}_2} - \frac{\partial b_2}{\partial \overline{z}_2}\right)$$

D'autre part
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_1}\left(\frac{\partial(b_1-b_2)}{\partial \overline{z}_2}\right)=\frac{\partial(f\omega_1)}{\partial \overline{z}_2}-\frac{\partial(f\omega_2)}{\partial \overline{z}_1}=0$$
car $\overline{\partial}\omega=0$. En utilisant la proposition 4.2.1 (1) on en déduit que
$$P^1\left(\frac{\partial b_1}{\partial \overline{z}_2}-\frac{\partial b_2}{\partial \overline{z}_2}\right)=\frac{\partial b_1}{\partial \overline{z}_2}-\frac{\partial b_2}{\partial \overline{z}_2}$$
Ainsi
$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}_2}=\frac{\partial b_1}{\partial \overline{z}_2}-\frac{\partial b_1}{\partial \overline{z}_2}+\frac{\partial b_2}{\partial \overline{z}_2}=f\omega_2$$
et
$$\overline{\partial}u=f\omega$$

Il reste maintenant à montrer que u vérifie les bonnes estimations.

4.4 Estimations des solutions du $\overline{\partial}$ dans le bidisque.

Pour démontrer le théorème 4.1.1 il suffit de montrer que la solution u obtenue précédemment est bien dans $L^p(\partial\mathbb{D}^2)$. Pour cela on procède en deux temps.

Estimation de $\|u\|_{L^p(\mathbb{D}\times\mathbb{T})}$.

On a
$$\|u\|_{L^p(\mathbb{D}\times\mathbb{T})}\leq \|b_1\|_{L^p(\mathbb{D}\times\mathbb{T})}+\left\|P^1(b_1-b_2)\right\|_{L^p(\mathbb{D}\times\mathbb{T})}$$
donc d'après
l'hypothèse (1.1), sachant que $b_1=S^1(f\omega_1(.,z_2))$, on a
$$\begin{aligned}\|b_1\|_{L^p(\mathbb{D}\times\mathbb{T})} &= \int_{z_2\in\mathbb{T}}\left\|S^1(f\omega_1(.,z_2))\right\|^p_{L^p(\mathbb{D})}d\lambda(z_2)\\ &\leq C_p^p\int_{\mathbb{T}}\|f(.,z_2)\|^p_{L^p(\mathbb{D})}d\lambda(z_2)\\ &= C_p^p\|f\|^p_{L^p(\mathbb{D}\times\mathbb{T})}\end{aligned}$$
De plus
$$\left\|P^1(b_1-b_2)\right\|^p_{L^p(\mathbb{D}\times\mathbb{T})}=\int_{z_2\in\mathbb{T}}\int_{z_1\in\mathbb{D}}\left|P^1(b_1-b_2)\right|^p d\lambda(z_1)d\sigma(z_2)$$
En utilisant la proposition 4.2.1 (6) et l'hypothèse (1.1) on obtient alors

$$\left\| P^1(b_1-b_2) \right\|^p_{L^p(\mathbb{D}\times\mathbb{T})} \leq \int_{z_2\in\mathbb{T}}\int_{z_1\in\mathbb{D}} |b_1-b_2|^p \, d\lambda(z_1)d\sigma(z_2) = \|b_1-b_2\|^p_{L^p(\mathbb{D}\times\mathbb{T})} \leq 2C_p^p \|f\|^p_{L^p(\mathbb{D}\times\mathbb{T})}$$

Ainsi

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{D}\times\mathbb{T})} \leq 3C_p^p \|f\|_{L^p(\mathbb{D}\times\mathbb{T})}.$$

Estimation de $\|u\|_{L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{D})}$.

On a $u = b_1 - P^1(b_1-b_2)$. Grâce à l'hypothèse (1.1) on sait que

$$\begin{aligned} \|b_1\|_{L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{D})} &= \int_{z_2\in\mathbb{D}} \left\| S^1(f\omega_1(.,z_2)) \right\|^p_{L^p(\mathbb{T})} d\sigma(z_2) \\ &\leq C_p^p \int_{\mathbb{D}} \|f(.,z_2)\|^p_{L^p(\mathbb{T})} d\lambda(z_2) \\ &= C_p^p \|f\|^p_{L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{D})} \end{aligned}$$

De plus
$P^1(b_1) = P^1\circ S^1(f\omega_1) = 0$ d'après la proposition 4.2.1 (7). Il reste donc à majorer $\left\|P^1(b_2)\right\|_{L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{D})}$.
Or
$P^1(b_2) = b_2 - S^1(\dfrac{\partial b_2}{\partial \overline{z}_1})$ d'après la proposition 4.2.1 (3)
$P^1(b_2) = b_2 - S^1(\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}_1} S^2(f\omega_2))$ par définition de b_2
$P^1(b_2) = b_2 - S^1\circ S^2(\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}_1}(f\omega_2))$ d'après la proposition 4.2.1 (5)
$P^1(b_2) = b_2 - S^1\circ S^2(f\dfrac{\partial \omega_2}{\partial \overline{z}_1})$ car f est holomorphe
$P^1(b_2) = b_2 - S^1\circ S^2(f\dfrac{\partial \omega_1}{\partial \overline{z}_2})$ car $\overline{\partial}\omega = 0$. Or, d'après la proposition 4.2.1 (3) on a
$f\omega_1 = P^2(f\omega_1) + S^2(f\dfrac{\partial \omega_1}{\partial \overline{z}_2})$, d'où on déduit que
$P^1(b_2) = b_2 - S^1(f\omega_1) + S^1\circ P^2(f\omega_1)$
$P^1(b_2) = b_2 - b_1 + P^2\circ S^1(f\omega_1)$ d'après la proposition 4.2.1 (8), d'où
$P^1(b_2) = b_2 - b_1 + P^2(b_1)$
Or, grâce à l'hypothèse (1.1) et à la définition de b_1 et b_2, on sait que $\|b_1-b_2\|_{L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{D})} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{D})}$ et
$\left\|P^2(b_1)\right\|^p_{L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{D})} = \displaystyle\int_{z_1\in\mathbb{T}}\int_{z_2\in\mathbb{D}} \left|P^2(b_1)\right|^p d\lambda(z_2)d\sigma(z_1)$
$\left\|P^2(b_1)\right\|^p_{L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{D})} \leq \displaystyle\int_{z_1\in\mathbb{T}}\int_{z_2\in\mathbb{D}} |b_1|^p \, d\lambda(z_2)d\sigma(z_1)$ d'après la proposition 4.2.1 (6). Finalement on obtient

$$\|u\|_{L^p(\partial\mathbb{D})} \leq 6C_p \|f\|_{L^p(\partial\mathbb{D})}$$

où C ne dépend que de C_1 et C_2.
Ceci achève la démonstration du théorème 4.1.1. On s'attache maintenant à en déduire le corollaire 4.1.2. Pour cela il suffit de démontrer que si la forme ω vérifie les hypothèses du corollaire 4.1.2, alors elle vérifie aussi celles du théorème 4.1.1. Dans la suite du paragraphe on suppose donc que la forme ω vérifie les hypothèses du corollaire 4.1.2, et on estime les normes de $b_1 = S^1(f\omega_1(.,z_2))$ et $b_2 = S^2(f\omega_2(z_1,.))$.

4.4.1 Estimation de $\|b_i\|_{L^p(\partial\mathbb{D}^2)}$.

Estimation de $\|b_1\|_{L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{D})}$.

Montrons que le noyau $S(\zeta,z) = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{1-|\zeta|^2}{1-\overline{\zeta}z}\right)^2 \dfrac{1}{z-\zeta}$ vérifie la condition (H1) définie p 26 dans [2].
Pour cela, puisque le noyau de Poisson-Szegö la vérifie, il suffit de voir que

$$\forall \zeta \in \mathbb{D},\ \forall z \in \mathbb{T},\ |S(\zeta,z)| = \frac{1}{\pi}\left|\frac{1-|\zeta|^2}{1-\overline{\zeta}z}\right|^2 \frac{1}{|1-\overline{z}\zeta|} \le \frac{2}{\pi}\frac{1-|\zeta|^2}{\left|1-\overline{\zeta}z\right|^2} = \frac{2}{\pi}|P(\zeta,z)|$$

D'autre part, pour tout $z_2 \in \mathbb{D}$, $\omega_1(.,z_2)$ est de Carleson dans $\mathbb{D}$ et $f(.,z_2) \in H^p(\mathbb{D})$. Le lemme ci-dessous nous permet d'en déduire que $f\omega_1(.,z_2)$ est une mesure de Carleson d'ordre $1-\dfrac{1}{p}$ de norme majorée par $C_1\|f(.,z_2)\|_{L^p(\mathbb{T})}$. Enfin $b_1(.,z_2)$ est la balayée de $f\omega_1(.,z_2)$ par le noyau S, donc, d'après le théorème 2 de [2], $b_1(.,z_2) \in L^p(\mathbb{T})$ et

$$\|b_1(.,z_2)\|_{L^p(\mathbb{T})} \le C_1\|f(.,z_2)\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

On en déduit que
$\|b_1\|^p_{L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{D})} = \int_{\mathbb{D}}\|b_1(.,z_2)\|^p_{L^p(\mathbb{T})}d\lambda(z_2) \le C_1^p\int_{\mathbb{D}}\|f(.,z_2)\|^p_{L^p(\mathbb{T})}d\lambda(z_2) \le C_1^p\|f\|^p_{L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{D})}$ i.e.

$$\|b_1\|_{L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{D})} \le C_1\|f\|_{L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{D})}.$$

Lemme 4.4.1 *Soit $p \in [1,+\infty]$. Si $\nu \in V^1(\mathbb{D})$ et $f \in H^p(\mathbb{D})$ alors $f\nu \in W^\alpha(\mathbb{D})$, où $\alpha = 1-\dfrac{1}{p}$, de norme majorée par $\|\nu\|_{V^1}\|f\|_{H^p}$.*

Pour la démonstration de ce lemme voir [2].

Estimation de $\|b_1\|_{L^p(\mathbb{D}\times\mathbb{T})}$.

On fixe momentanément $z_2 \in \mathbb{D}$ et on considère les fonctions suivantes, définies dans la boule $\mathbb{B}$ de $\mathbb{C}^2$:

$$\forall(z_1, z_3) \in \mathbb{B}, f^{z_2}(z_1, z_3) = f(z_1, z_2),\ \omega_1^{z_2}(z_1, z_3) = \omega_1(z_1, z_2)$$

On les notera respectivement f et ω_1.
On introduit la $(0,1)$-forme $h(\zeta) = (f^{z_2}\omega_1^{z_2})(\zeta)d\overline{\zeta}_1$ de classe C^∞ dans $\mathbb{B}$. On va résoudre cette forme dans $\mathbb{B}$ grâce au noyau donné dans [12] p134, et on en déduira des estimations sur b_1. Pour cela on a besoin des estimations suivantes sur h.

Lemme 4.4.2 *La forme h vérifie les hypothèses suivantes :*
(1) $\overline{\partial}h = 0$.
(2) Les coefficients de h sont des mesures de Carleson d'ordre $\alpha = 1 - \dfrac{1}{p}$ de norme majorée par $C_1 \|f(., z_2)\|_{L^p(\mathbb{D})}$.
(3) Les coefficients de $\dfrac{h(\zeta) \wedge \overline{\partial}\,|\zeta|^2}{\sqrt{1-|\zeta|^2}}$ sont des mesures de Carleson d'ordre $\alpha = 1 - \dfrac{1}{p}$ de norme majorée par $C_1 \|f(., z_2)\|_{L^p(\mathbb{D})}$.

Soit alors

$$u(z) = \int_{\mathbb{B}} h(\zeta) \wedge K_1(\zeta, z)$$

pour tout $z \in \partial\mathbb{B}$, où K_1 est le noyau bC_1 donné dans [12] p134. D'après [12] p136 et le lemme (4.4.2) on a alors

$$\overline{\partial}_b(u) = h \qquad \text{et} \qquad \|u\|_{L^p(\partial\mathbb{B})} \leq C\,\|f(., z_2)\|_{L^p(\mathbb{D})}$$

où C est une constante ne dépendant que de C_1. On définit alors

$$U^{z_2}(z_1) = \int_0^{2\pi} u(z_1, \sqrt{1-|z_1|^2}e^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}$$

On obtient grâce aux propriétés de u que

$$\overline{\partial}U^{z_2} = f^{z_2}\omega_1^{z_2}d\overline{z}_1 \qquad \text{et} \qquad \|U^{z_2}\|_{L^p(\mathbb{D})} \leq \|u\|_{L^p(\partial\mathbb{B})} \leq C\,\|f(., z_2)\|_{L^p(\mathbb{D})}$$

Montrons que U^{z_2} est un multiple de b_1, ce qui donnera les bonnes estimations pour b_1. Pour cela calculons U^{z_2}.

$$U^{z_2}(z_1) = \int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{B}} h(\zeta) \wedge K_1(\zeta_1, \zeta_3, z_1, \sqrt{1-|z_1|^2}e^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}$$

$$U^{z_2}(z_1)=\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{B}}(f\omega_1)(\zeta_1)K_1^*(\zeta_1,\zeta_3,z_1,\sqrt{1-|z_1|^2}e^{i\theta})d\lambda(\zeta_1)d\lambda(\zeta_3)\frac{d\theta}{2\pi}$$

En posant $\zeta_3=\sqrt{1-|\zeta_1|^2}\rho e^{i\phi}$ on obtient

$$U^{z_2}(z_1)=\int_{\mathbb{D}}(f\omega_1)(\zeta_1)(1-|\zeta_1|^2)K(\zeta_1,z_1)d\lambda(\zeta_1)$$

où

$$K(\zeta_1,z_1)=\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}K_1^*(\zeta_1,\sqrt{1-|\zeta_1|^2}\rho e^{i\phi},z_1,\sqrt{1-|z_1|^2}e^{i\theta})\rho d\rho d\phi\frac{d\theta}{2\pi}$$

Or

$$K_1^*(\zeta,z)=c\frac{1-|\zeta|^2}{(1-\overline{\zeta}z)^3(1-\zeta\overline{z})}(\overline{z}_1-\overline{\zeta}_1)$$

où $c=\dfrac{1}{4\pi^2B(2,1)}$, d'où

$$2\pi K(\zeta_1,z_1)=\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}c\frac{(1-|\zeta_1|^2-(1-|\zeta_1|^2)\rho^2)(\overline{z}_1-\overline{\zeta}_1)}{(1-\overline{\zeta}_1z_1-\sqrt{1-|\zeta_1|^2}\rho e^{-i\phi}\sqrt{1-|z_1|^2}e^{i\theta})^3}$$
$$\frac{\rho d\rho d\phi d\theta}{(1-\zeta_1\overline{z}_1-\sqrt{1-|\zeta_1|^2}\rho e^{i\phi}\sqrt{1-|z_1|^2}e^{-i\theta})}$$

Si on pose $\tau=\phi-\theta$ ainsi que $A^2=1-|\zeta_1|^2$, $B^2=1-|z_1|^2$ et $a=\dfrac{1-\overline{\zeta}_1z_1}{AB}$ on obtient

$$2\pi K(\zeta_1,z_1)=c\frac{\overline{z}_1-\overline{\zeta}_1}{A^2B^4}\int_0^1(1-\rho^2)\rho J(\rho)d\rho$$

où

$$J(\rho)=\int_0^{2\pi}\frac{e^{2i\tau}e^{i\tau}d\tau}{(ae^{i\tau}-\rho)^3(\overline{a}-\rho e^{i\tau})}$$

Calculons $J(\rho)$.

$$J(\rho)=-i\int_{\mathbb{T}}g(\zeta)d\zeta$$

où

$$g(\zeta)=\frac{\zeta^2}{(a\zeta-\rho)^3(\overline{a}-\rho\zeta)}$$

est une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ de pôles $\dfrac{\rho}{a}$ et $\dfrac{\overline{a}}{\rho}$; seul $\dfrac{\rho}{a}$ est dans $\mathbb{D}$ donc

$$J(\rho)=2\pi\ \mathrm{Res}(g,\frac{\rho}{a})$$

Or il existe des nombres complexes $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ et δ tels que

$$g(\zeta)=\frac{\alpha}{\overline{a}-\rho\zeta}+\frac{\beta}{a\zeta-\rho}+\frac{\gamma}{(a\zeta-\rho)^2}+\frac{\delta}{(a\zeta-\rho)^3} \tag{4.1}$$

et $\mathrm{Res}(g,\frac{\rho}{a})=\frac{\beta}{a}$. On a

$$\alpha=\frac{\rho\overline{a}^2}{(|a|^2-\rho^2)^3}$$

et en multipliant (4.1) par ζ et en faisant tendre ζ vers $+\infty$ on obtient

$$0=-\frac{\alpha}{\rho}+\frac{\beta}{a}\quad \mathrm{d'où}\quad \frac{\beta}{a}=\frac{\alpha}{\rho}=\frac{\overline{a}^2}{(|a|^2-\rho^2)^3}$$

et

$$J(\rho)=2\pi\frac{\overline{a}^2}{(|a|^2-\rho^2)^3}$$

On obtient ainsi

$$K(\zeta_1,z_1)=c\frac{\overline{z}_1-\overline{\zeta}_1}{A^2B^4}\overline{a}^2\int_0^1\frac{(1-\rho^2)\rho d\rho}{(|a|^2-\rho^2)^3}$$

d'où, en intégrant par parties,

$$K(\zeta_1,z_1)=c\frac{\overline{z}_1-\overline{\zeta}_1}{A^2B^4}\overline{a}^2\frac{1}{4\,|a|^4\,(|a|^2-1)}=c\frac{(\overline{z}_1-\overline{\zeta}_1)(1-|\zeta_1|^2)}{4(1-\overline{\zeta}_1z_1)^2\,|\zeta_1-z_1|^2}$$

Ainsi on obtient

$$U^{z_2}(z_1)=\frac{c}{4}\int_{\mathbb{D}}(f\omega_1)(\zeta_1)\frac{(1-|\zeta_1|^2)^2}{(1-\overline{\zeta}_1z_1)^2}\frac{1}{z_1-\zeta_1}d\lambda(\zeta_1)=\frac{c}{4}b_1(z_1)$$

On en déduit donc que b_1 vérifie les mêmes estimations que U^{z_2}, et en intégrant ces estimations par rapport à z_2 dans $\mathbb{T}$ on obtient

$$\|b_1\|_{L^p(\mathbb{D}\times\mathbb{T})}\leq C\,\|f\|_{L^p(\mathbb{D}\times\mathbb{T})} \tag{4.2}$$

où C est une constante qui ne dépend que de C_1.
Par symétrie b_2 vérifie les mêmes estimations.

4.4.2 Estimations dans la boule de $\mathbb{C}^2$.

On démontre dans ce paragraphe le lemme 4.4.2 qui concerne la forme $h=f^{z_2}\omega_1^{z_2}d\overline{\zeta}_1$ et dont on rappelle l'énoncé :

La forme h vérifie les hypothèses suivantes :

(1) $\overline{\partial} h = 0$.
(2) Les coefficients de h *sont des mesures de Carleson d'ordre* $\alpha = 1 - \dfrac{1}{p}$ *de norme majorée par* $C_1 \left\| f(.,z_2) \right\|_{L^p(\mathbb{D})}$.
(3) Les coefficients de $\dfrac{h(\zeta) \wedge \overline{\partial} \left|\zeta\right|^2}{\sqrt{1-\left|\zeta\right|^2}}$ *sont des mesures de Carleson d'ordre* $\alpha = 1 - \dfrac{1}{p}$ *de norme majorée par* $C_1 \left\| f(.,z_2) \right\|_{L^p(\mathbb{D})}$.

(1) $\overline{\partial} h = \dfrac{\partial}{\partial \overline{\zeta}_3}(f^{z_2}\omega_1^{z_2}) d\overline{\zeta}_3 \wedge d\overline{\zeta}_1 = 0$ car f^{z_2} et $\omega_1^{z_2}$ ne dépendent pas de ζ_3.
(2) Montrons que $\omega_1 d\lambda(z_1)d\lambda(z_3)$ est une mesure de Carleson dans $\mathbb{B}$. On note $\mathbb{1} = (1,0)$ et, pour $s>0$, on cherche à évaluer la mesure de la tente $T_{s,\mathbb{1}}$ pour la mesure $\left|\omega_1\right|(z_1)d\lambda(z) = \left|\omega_1\right|^{z_2} d\lambda(z)$.

$$\int_{T_{s,\mathbb{1}}} \left|\omega_1\right|(\zeta_1)d\lambda(\zeta) = \int_{\mathbb{D}\cap D(\mathbb{1},s)} \left|\omega_1\right|(\zeta_1)d\lambda(\zeta_1) \int_{\left|\zeta_2\right|^2 \leq 1-\left|\zeta_1\right|^2} d\lambda(\zeta_2)$$

$$\int_{T_{s,\mathbb{1}}} \left|\omega_1\right|(\zeta_1)d\lambda(\zeta) = \int_{\mathbb{D}\cap D(\mathbb{1},s)} (1-\left|\zeta_1\right|^2)\left|\omega_1\right|(\zeta_1)d\lambda(\zeta_1)$$

Or $1-\left|\zeta_1\right|^2 \leq 2\left|1-\zeta_1\right|$ donc

$$\int_{T_{s,\mathbb{1}}} \left|\omega_1\right|(\zeta_1)d\lambda(\zeta) \leq 2s \int_{\mathbb{D}\cap D(\mathbb{1},s)} \left|\omega_1\right|(\zeta_1)d\lambda(\zeta_1)$$

et comme $\omega_1^{z_2}$ est une mesure de Carleson dans $\mathbb{D}$ on en déduit que

$$\int_{T_{s,\mathbb{1}}} \left|\omega_1\right|(\zeta_1)d\lambda(\zeta) \leq 2C_1 s^2.$$

Le même résultat est valable pour toute tente au-dessus d'un point $(e^{i\theta},0)$. Il reste à mesurer les tentes au-dessus des points (ζ_1,ζ_3) tels que $\zeta_3 \neq 0$.

Soit $\zeta = (\zeta_1,\zeta_3) \in \partial\mathbb{B}$ tel que $\zeta_3 \neq 0$ et $s>0$. On cherche à évaluer la mesure de la tente $T_{s,\zeta}$ pour $\left|\omega_1\right| d\lambda$.
On a

$$T_{s,\zeta} = \{(z_1,z_3) \in \mathbb{C}^2 / \left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2 \leq 1,\ \left|1 - z_1\overline{\zeta}_1 - z_3\overline{\zeta}_3\right| < s\}$$

On note

$$T_{s,\zeta} = \{(z_1,z_3) \in \mathbb{C}^2 / z_1 \in E_1,\ z_3 \in E_2(z_1)\}$$

Alors

$$E_1 = \{z_1 \in \mathbb{D} / \left|\frac{1 - z_1\overline{\zeta}_1}{\zeta_3}\right| < \frac{s}{\left|\zeta_3\right|} + \sqrt{1-\left|z_1\right|^2}\}$$

En effet

$$
\begin{aligned}
z_1 \in E_1 &\iff \exists z_3 \in \mathbb{C}/\ |z_3|^2 \leq 1-|z_1|^2,\ \left|\frac{1-\overline{\zeta}_1 z_1}{\overline{\zeta}_3} - z_3\right| < \frac{s}{|\zeta_3|} \\
&\implies |z_1| < 1,\ \left|\frac{1-z_1\overline{\zeta}_1}{\overline{\zeta}_3}\right| < \frac{s}{|\zeta_3|} + \sqrt{1-|z_1|^2}
\end{aligned}
$$

Réciproquement, on écrit $\frac{1-z_1\overline{\zeta}_1}{\overline{\zeta}_3} = se^{i\theta}$, et on suppose que $s < \frac{s}{|\zeta_3|} + \sqrt{1-|z_1|^2}$.
Si

$$
\sqrt{1-|z_1|^2} \leq s \leq \frac{s}{|\zeta_3|} + \sqrt{1-|z_1|^2} - 2\epsilon
$$

en posant $z_3 = (\sqrt{1-|z_1|^2} - \epsilon)e^{i\theta}$ on obtient bien

$$
|z_3| < \sqrt{1-|z_1|^2} \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{1-z_1\overline{\zeta}_1}{\overline{\zeta}_3} - z_3\right| = s - \sqrt{1-|z_1|^2} + \epsilon \leq \frac{s}{|\zeta_3|} - \epsilon < \frac{s}{|\zeta_3|}
$$

Si

$$
s < \sqrt{1-|z_1|^2}
$$

en posant $z_3 = se^{i\theta}$ on a bien

$$
|z_3| < \sqrt{1-|z_1|^2} \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{1-z_1\overline{\zeta}_1}{\overline{\zeta}_3} - z_2\right| = 0 < \frac{s}{|\zeta_3|}
$$

Evaluons à présent

$$
A(z_1) = \int_{z_3 \in E_2(z_1)} d\lambda(z_3)
$$

On note $R = \sqrt{1-|z_1|^2}$, $Z = \frac{1-z_1\overline{\zeta}_1}{\overline{\zeta}_3}$ et $s' = \frac{s}{|\zeta_3|}$.
Alors

$$
E_2(z_1) = \{z_3 \in \mathbb{C}/\ |z_3| \leq R,\ \ |Z - z_3| < s'\}
$$

Puisque $E_2(z_1)$ est inclus dans le disque de centre Z et de rayon s' on a

$$
A(z_1) \leq \pi s'^2
$$

et puisque $E_2(z_1)$ est inclus dans le disque de centre 0 et de rayon R on a

$$
A(z_1) \leq \pi R^2
$$

On en déduit que

$$
A(z_1) \leq \pi \min(s'^2, R^2)
$$

On en déduit que

$$
\int_{T_{r,\zeta}} |\omega_1|(\zeta_1) d\lambda(\zeta) \leq I + J
$$

où
$$I=\int_{E_1\cap\{R\leq s'\}} R^2\left|\omega_1\right|(\zeta_1)d\lambda(\zeta) \qquad \text{et} \qquad J=s'^2\int_{E_1\cap\{s'\leq R\}}\left|\omega_1\right|(\zeta_1)d\lambda(\zeta)$$

Evaluons I. Pour cela montrons que $E_1\cap\{R\leq s'\}$ est inclus dans la tente T de $\mathbb{D}$ de centre $\dfrac{\zeta_1}{|\zeta_1|}$ et de rayon $2s+|\zeta_3|^2$. Si $z_1\in E_1\cap\{R\leq s'\}$ alors
$$\left|\frac{1-z_1\overline{\zeta}_1}{\zeta_3}\right|<\frac{s}{|\zeta_3|}+\sqrt{1-|z_1|^2} \quad \text{et} \quad \sqrt{1-|z_1|^2}\leq\frac{s}{|\zeta_3|}$$
donc
$$\left|1-z_1\overline{\zeta}_1\right|\leq 2s \tag{4.3}$$
On en déduit que
$$\left|1-z_1\frac{\overline{\zeta}_1}{|\zeta_1|}\right|\leq\left|1-z_1\overline{\zeta}_1\right|+|z_1|\left|\zeta_1-\frac{\zeta_1}{|\zeta_1|}\right|\leq 2s+(1-|\zeta_1|)\leq 2s+(1-|\zeta_1|^2)=2s+|\zeta_3|^2$$
ce qui montre que z_1 appartient à la tente T.
On distingue à présent les cas où $s<|\zeta_3|^2$ et où $s\geq|\zeta_3|^2$.
Si $s<|\zeta_3|^2$, puisque $R<s'$ on a
$$I\leq\pi\frac{s^2}{|\zeta_3|^2}\int_T\omega_1(z_1)d\lambda(z_1)$$
Or, par hypothèse, $\omega_1(z_1)d\lambda(z_1)$ est une mesure de Carleson dans $\mathbb{D}$ de norme majorée par C_1, ce qui nous donne, dans ce cas,
$$I\leq\pi\frac{s^2}{|\zeta_3|^2}C_1(2s+|\zeta_3|^2)\leq\pi\frac{s^2}{|\zeta_3|^2}C_1 3\left|\zeta_3\right|^2\leq 3\pi C_1 s^2$$
Si $s\geq|\zeta_3|^2$, on majore R de la façon suivante :
$$1\leq\left|1-\overline{\zeta}_1 z_1\right|+|z_1|\,|\zeta_1|\leq 2s+|z_1|\,|\zeta_1|$$
d'après (4.3). On en déduit que
$$1-|z_1|\leq 2s+(|\zeta_1|-1)\,|z_1|\leq 2s$$
et donc que
$$R^2=1-|z_1|^2\leq 4s$$
Ainsi on a,
$$I\leq\pi\ 4sC_1(2s+|\zeta_3|^2)\leq 12\pi C_1 s^2$$
dans ce deuxième cas.
On a ainsi montré que $I\leq Cs^2$ où C est une constante ne dépendant que de C_1.

Pour évaluer J, montrons que $E_1 \cap \{s' \leq R\}$ est inclus dans la tente T de $\mathbb{D}$ de centre $\frac{\zeta_1}{|\zeta_1|}$ et de rayon $9\,|\zeta_3|^2$. Pour cela on considère $z_1 \in E_1 \cap \{s' \leq R\}$. Alors on a

$$\left|1 - z_1\overline{\zeta}_1\right| \leq s + |\zeta_3|\sqrt{1 - |z_1|^2} \quad \text{et} \quad s \leq |\zeta_3|\sqrt{1 - |z_1|^2}$$

donc

$$\left|1 - z_1\overline{\zeta}_1\right| \leq 2\,|\zeta_3|\sqrt{1 - |z_1|^2} \tag{4.4}$$

D'autre part on a

$$1 \leq \left|1 - \overline{\zeta}_1 z_1\right| + |z_1|\,|\zeta_1| \leq 2\,|\zeta_3|\sqrt{1 - |z_1|^2} + |z_1|\,|\zeta_1|$$

d'où

$$1 - |z_1| \leq 2\,|\zeta_3|\sqrt{1 - |z_1|^2} + (|\zeta_1| - 1)\,|z_1| \leq 2\,|\zeta_3|\sqrt{1 - |z_1|^2}$$

d'où

$$1 - |z_1|^2 \leq 4\,|\zeta_3|\sqrt{1 - |z_1|^2}$$

et en conséquence

$$\sqrt{1 - |z_1|^2} \leq 4\,|\zeta_3| \tag{4.5}$$

On en déduit, grâce à (4.4) et (4.5) que

$$\begin{aligned}\left|1 - z_1\frac{\overline{\zeta}_1}{|\zeta_1|}\right| &\leq \left|1 - z_1\overline{\zeta}_1\right| + |z_1|\left|\zeta_1 - \frac{\zeta_1}{|\zeta_1|}\right| \leq 2\,|\zeta_3|\sqrt{1 - |z_1|^2} + (1 - |\zeta_1|) \\ &\leq 2\,|\zeta_3|\sqrt{1 - |z_1|^2} + (1 - |\zeta_1|^2) = 8\,|\zeta_3|^2 + |\zeta_3|^2 = 9\,|\zeta_3|^2\end{aligned}$$

ce qui montre bien que z_1 est dans la tente T. On en déduit, sachant que $\omega_1(z_1)d\lambda(z_1)$ est une mesure de Carleson dans $\mathbb{D}$ de norme majorée par C_1, que

$$J \leq \pi\frac{s^2}{|\zeta_3|^2}C_1 9\,|\zeta_3|^2 = 9\pi C_1 s^2$$

On a ainsi montré que

$$\int_{T_{r,\zeta}} \omega_1(\zeta_1)d\lambda(\zeta) \leq Cs^2$$

où C est une constante ne dépendant que de C_1, ce qui montre bien que $\omega_1 d\lambda(z_1)d\lambda(z_3)$ est une mesure de Carleson dans $\mathbb{B}$ de norme majorée par une constante ne dépendant que de C_1.

Enfin f^{z_2} est dans $H^p(\mathbb{B})$. En effet f^{z_2} est holomorphe dans $\mathbb{B}$ et

$$\int_{\partial\mathbb{B}} |f^{z_2}(z_1, z_3)|^p\,d\sigma(z) = \int_{z_1 \in \mathbb{D}} |f(z_1, z_2)|^p \int_{|z_2|^2 = 1 - |z_1|^2} d\sigma(z_3)d\lambda(z_1) = \|f(.,z_2)\|^p_{L^p(\mathbb{D})}$$

donc $\|f^{z_2}\|_{H^p(\mathbb{B})} = \|f(.,z_2)\|_{L^p(\mathbb{D})}$. On en déduit donc, grâce au lemme 4.4.1, que $f^{z_2}\omega_1^{z_2} d\lambda(z_1)d\lambda(z_3)$ est une mesure de Carleson d'ordre $1-\dfrac{1}{p}$ de norme majorée par $C_1 \|f(.,z_2)\|_{L^p(\mathbb{D})}$.

(3) Par définition des espaces $W^\alpha(\mathbb{B})$ il suffit ici de montrer que $P^{o*}\left|\dfrac{fw_1\wedge\overline{\partial}\rho}{\sqrt{-\rho}}\right|$ est dans $L^p(\partial\mathbb{B})$. Pour cela, par dualité, il suffit de prendre une fonction $\psi \in L^q(\partial\mathbb{B})$, où $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, et de majorer l'intégrale

$$I = \int_{\partial\mathbb{B}} \psi P^{o*}\left|\frac{fw_1\wedge\overline{\partial}\rho}{\sqrt{-\rho}}\right|$$

Par définition de P^{0*} on a

$$I = \int_{\mathbb{B}} P^0(\psi)\left|\frac{fw_1\wedge\overline{\partial}\rho}{\sqrt{-\rho}}\right|$$

On applique alors l'inégalité de Hölder pour obtenir

$$|I| \leq \left(\int_{\mathbb{B}} \left|P^0(\psi)\right|^q \left|\frac{w_1\wedge\overline{\partial}\rho}{\sqrt{-\rho}}\right| d\lambda\right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{B}} |f|^p \left|\frac{w_1\wedge\overline{\partial}\rho}{\sqrt{-\rho}}\right| d\lambda\right)^{1/p}$$

D'après les deux lemmes suivants, sachant que $f \in H^p(\mathbb{B})$ de norme majorée par une constante fois $\|f(.,z_2)\|_{L^p(\mathbb{D})}$, il suffit alors de montrer que $\left|\dfrac{w_1\wedge\overline{\partial}\rho}{\sqrt{-\rho}}\right|$ est une mesure de Carleson dans $\mathbb{B}$.

Lemme 4.4.3 *Soit ν une mesure de Carleson dans $\mathbb{B}$. On a alors*

$$\forall\psi \in L^q(\partial\mathbb{B}),\ \int_{\mathbb{B}} \left|P^{0*}\psi\right|^q d|\nu| \leq \|\nu\|_{V^1} \|\psi\|_{L^q(\partial\mathbb{B})}$$

Ce lemme est démontré dans [2].

Lemme 4.4.4 *Soit $p \in [1,+\infty[$. Si $\nu \in V^1(\mathbb{B})$ et $h \in H^p(\mathbb{B})$ alors $|h|^p\nu \in V^0(\mathbb{B})$ de norme majorée par $\|\nu\|_{V^1}\|h\|_{H^p}^p$.*

Ce lemme est démontré dans [17].

On cherche maintenant à montrer que $\dfrac{w_1\wedge\overline{\partial}\rho}{\sqrt{-\rho}} \in V^1(\mathbb{B})$ de norme majorée par une constante ne dépendant que de C_1. Pour cela, par définition des mesures de carleson il suffit de considérer une tente T_s de $\mathbb{B}$ de rayon s et dévaluer

$$I = \int_{T_s} \frac{\left|w_1\wedge\overline{\partial}\rho\right|}{\sqrt{-\rho}} d\lambda$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne alors

$$I \leq \left(\int_{T_s} \frac{\left|w_1 \wedge \overline{\partial}\rho\right|^2}{(-\rho)^{\epsilon}} d\lambda\right)^{1/2} \left(\int_{T_s} \frac{d\lambda}{(-\rho)^{1-\epsilon}}\right)^{1/2}$$

On utilise alors l'hypothèse **b)** du théorème 4.1.2 pour majorer la première intégrale par $\sqrt{C_1}s$. Calculons la deuxième intégrale. On peut supposer sans perte de généralité que T_s est la tente centrée en $(1,0)$ c'est-à-dire que $T_s = \{(z_1, z_3) \in \mathbb{B}/ \ \ |z_1 - 1| < s\}$. On a alors

$$\int_{T_s} \frac{d\lambda}{(-\rho)^{1-\epsilon}} = \int_{\{z_1 \in \mathbb{D}/|z_1-1|<s\}} \int_{\{z_2 \in \mathbb{C}/|z_2|^2 < 1-|z_1|^2\}} \frac{d\lambda(z_2)}{(1-|z_1|^2 - |z_2|^2)^{1-\epsilon}} d\lambda(z_1)$$

En effectuant le changement de variable $u = \dfrac{z_2}{\sqrt{1-|z_1|^2}}$ on obtient

$$\int_{T_s} \frac{d\lambda}{(-\rho)^{1-\epsilon}} = \int_{\{z_1 \in \mathbb{D}/|z_1-1|<s\}} (1-|z_1|^2)^{\epsilon} \int_{u \in \mathbb{D}} \frac{d\lambda(u)}{(1-|u|^2)^{1-\epsilon}} d\lambda(z_1)$$

Puisque $\epsilon > 0$ l'intégrale $\displaystyle\int_{u \in \mathbb{D}} \frac{d\lambda(u)}{(1-|u|^2)^{1-\epsilon}}$ est finie. On note C_ϵ sa valeur. De plus, si $|z_1 - 1| < s$ et $z_1 \in \mathbb{D}$ alors $1 - |z_1| < s$. On en déduit que

$$\int_{T_s} \frac{d\lambda}{(-\rho)^{1-\epsilon}} \leq C_\epsilon (2s)^{\epsilon} \pi s^2$$

On alors

$$I \leq C s^{\epsilon/2} s^2$$

où C est une constante ne dépendant que de C_1 et ϵ. Ceci finit de montrer que $\left|\dfrac{w_1 \wedge \overline{\partial}\rho}{\sqrt{-\rho}}\right|$ est une mesure de Carleson, et donc le lemme 4.4.2.

4.5 Démonstration des propriétés des opérateurs P et S.

On démontre ici la proposition 4.2.1.
Pour les points (1), (2) et (3) voir par exemple [12].
Le point (6) est démontré dans [16] p 10.

4.5.1 Régularité de P et S.

On démontre ici le point (4).

Régularité de S.

Par définition on a

$$S^1(1)(z) = \int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\overline{\zeta}_1 z_1} \right)^2 \frac{d\overline{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1}{z_1 - \zeta_1}$$

et d'autre part, puisque $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}_1}\overline{z}_1 = 1$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \int_{\mathbb{D}} \overline{z}_1 \overline{z}_1^n (1-|z_1|^2) d\lambda(z_1) = 0$$

d'après la proposition 4.2.1 (2) on a

$$S^1(1)(z) = \overline{z}_1.$$

Ainsi, pour toute fonction h dans $C^\infty(\overline{\mathbb{D}}^2)$ on a

$$S^1(h)(z) - \overline{z}_1 h(z) = \int_{\mathbb{D}} (h(\zeta_1, z_2) - h(z_1, z_2)) \left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\overline{\zeta}_1 z_1} \right)^2 \frac{d\overline{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1}{z_1 - \zeta_1}$$

d'où

$$S^1(h)(z) = \overline{z}_1 h(z) + K(z)$$

et comme $\overline{z}_1 h(z) \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}}^2)$ il suffit de montrer que $K \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}}^2)$. Soit $N \in \mathbb{N}$. Alors, par régularité de h on a

$$\begin{aligned} h(\zeta_1, z_2) - h(z_1, z_2) = \quad & \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} \frac{\partial^n h}{\partial z_1^p \partial \overline{z}_1^{n-p}}(z_1, z_2)(\zeta_1 - z_1)^p (\overline{\zeta}_1 - \overline{z}_1)^{n-p} \\ & + \sum_{p=0}^{N+1} (\zeta_1 - z_1)^p (\overline{\zeta}_1 - \overline{z}_1)^{N+1-p} g_p(z, \zeta_1) \end{aligned}$$

où $g_p \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}}^3)$. Ainsi on peut écrire

$$K(z) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} \frac{\partial^n h}{\partial z_1^p \partial \overline{z}_1^{n-p}}(z_1, z_2) I_{n,p}(z_1) + \sum_{p=0}^{N+1} J_p(z_1, z_2)$$

Evaluons la régularité de $I_{n,p}$ et J_p.

$$\begin{aligned}
-I_{n,p}(z_1) &= -\int_{\mathbb{D}} \frac{(\zeta_1 - z_1)^p(\overline{\zeta}_1 - \overline{z}_1)^{n-p}}{z_1 - \zeta_1} \left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\overline{\zeta}_1 z_1}\right)^2 d\lambda(\zeta_1) \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{(re^{i\theta} - z_1)^{p-1}(re^{-i\theta} - \overline{z}_1)^{n-p}(1-r^2)^2}{(1-re^{-i\theta}z_1)^2} r dr d\theta \\
&= \int_0^1 (1-r^2)^2 r dr \int_0^{2\pi} \frac{(r - z_1 e^{-i\theta})^{p-1}(re^{-i\theta} - \overline{z}_1)^{n-p} e^{-i\theta} d\theta}{(1-re^{-i\theta}z_1)^2 e^{-ip\theta}} \\
&= i\int_0^1 (1-r^2)^2 r dr \int_{\mathbb{T}} g(\zeta) d\zeta
\end{aligned}$$

où

$$g(\zeta) = \frac{(r - z_1\zeta)^{p-1}(r\zeta - \overline{z}_1)^{n-p}}{(1 - rz_1\zeta)^2 \zeta^p}$$

est une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ de pôles $\frac{1}{rz_1}$ et 0 si $p \geq 1$. Or $\left|\frac{1}{rz_1}\right| > 1$ donc

$$\int_{\mathbb{T}} g(\zeta) d\zeta = 2i\pi \mathrm{Res}(g, 0)$$

Si $p \geq 1$ on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(g,0) &= \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{d\zeta^{p-1}} (\zeta^p g(\zeta)) \mid_{\zeta=0} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} c_{p,k} \frac{d^k}{d\zeta^k} (r - z_1\zeta)^{p-1} \mid_{\zeta=0} \frac{d^{p-1-k}}{d\zeta^{p-1-k}} \left(\frac{(r\zeta - \overline{z}_1)^{n-p}}{(1-rz_1\zeta)^2}\right) \mid_{\zeta=0} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{l=0}^{p-1-k} c_{p,k,l} z_1^k r^{p-1-k} \frac{d^l}{d\zeta^l} (r\zeta - \overline{z}_1)^{n-p} \mid_{\zeta=0} \frac{d^{p-1-k-l}}{d\zeta^{p-1-k-l}} (1 - r\overline{z}_1\zeta)^{-2} \mid_{\zeta=0} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{l=0}^{\min(p-1-k,n-p)} c_{p,k,l} z_1^k r^{p-1-k} r^l \overline{z}_1^{n-p-l} (rz_1)^{p-1-k-l} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{l=0}^{\min(p-1-k,n-p)} c_{p,k,l} r^{2(p-1-k)} z_1^{p-1-l} \overline{z}_1^{n-p-l}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$-I_{n,p}(z_1) = \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{l=0}^{\min(p-1-k,n-p)} C_{p,k,l} z_1^{p-1-l} \overline{z}_1^{n-p-l}$$

où $C_{p,k,l} = c_{p,k,l} \int_0^1 (1-r^2)^2 r^{p-k} dr$. On en déduit que $I_{n,p} \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}})$ si $p \geq 1$.

Si $p = 0$ la fonction g a pour pôles $\frac{1}{rz_1}$ et $\frac{r}{z_1}$. Si $r < |z_1|$ alors

$$\int_{\mathbb{T}} g(\zeta) d\zeta = \mathrm{Res}(g, \frac{r}{z_1})$$

et si $r > |z_1|$ alors
$$\int_{\mathbb{T}} g(\zeta)d\zeta = 0$$
Calculons $\mathrm{Res}(g, \frac{r}{z_1})$. Il existe un polynôme P et des nombres complexes a, b et c tels que
$$g(\zeta) = P(\zeta) + \frac{a}{r - z_1\zeta} + \frac{b}{1 - z_1 r\zeta} + \frac{c}{(1 - rz_1\zeta)^2}$$
On a alors
$$\mathrm{Res}(g, \frac{r}{z_1}) = \frac{a}{z_1} = \frac{1}{z_1}\frac{(r\frac{r}{z_1} - \overline{z}_1)^n}{(1 - rz_1\frac{r}{z_1})^2} = \frac{(r^2 - |z_1|^2)^n}{z_1^{n+1}(1 - r^2)^2}$$
d'où
$$\begin{aligned} -I_{n,0} &= \int_0^{|z_1|} (1 - r^2)^2 r \frac{(r^2 - |z_1|^2)^n}{z_1^{n+1}(1 - r^2)^2} dr \\ &= \frac{1}{z_1^{n+1}} \left[\frac{(r^2 - |z_1|^2)^{n+1}}{2(n+1)} \right]_0^{|z_1|} \\ &= -\frac{1}{2(n+1)z_1^{n+1}} (-|z_1|^2)^{n+1} \\ &= \frac{(-1)^n}{2(n+1)} \overline{z}_1^{n+1} \end{aligned}$$
Ainsi $\forall p, n \ I_{n,p} \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}})$.
Examinons la régularité de J_p pour $p \geq 1$.
$$\begin{aligned} -J_p(z_1, z_2) &= \int_{\mathbb{D}} (\zeta_1 - z_1)^{p-1}(\overline{\zeta}_1 - \overline{z}_1)^{N+1-p} \left(\frac{1 - |\zeta_1|^2}{1 - \overline{\zeta}_1 z_1} \right)^2 g_p(z, \zeta_1) d\lambda(\zeta_1) \\ &= \int_{\mathbb{D}} h(z, \zeta_1) d\lambda(\zeta_1) \end{aligned}$$
Montrons que $h \in C^{N-1}(\overline{\mathbb{D}}^3)$. On en déduira que $J_p \in C^{N-1}(\overline{\mathbb{D}}^2)$. Soit $D \leq N - 1$.
$$d^{(D)}h = \sum_{\mathcal{E}} G(z_1, \zeta_1) H(z, \zeta_1)$$
où
$$G(z_1, \zeta_1) = \frac{(\zeta_1 - z_1)^k(\overline{\zeta}_1 - \overline{z}_1)^l(1 - |\zeta_1|^2)^m}{(1 - \overline{\zeta}_1 z_1)^q}$$
et
$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \{(k, l, m, q) \in \mathbb{N}^4 / 0 \leq k \leq p - 1,\ 0 \leq l \leq N + 1 - p,\ 0 \leq m \leq 2,\ q \geq 2 \\ \text{et } (p - 1 - k) + (N + 1 - p - l) + (2 - m) + (q - 2) \leq D\} \end{aligned}$$
et $H \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}}^3)$ contient les dérivées de g_p. On peut réecrire l'ensmble $\mathcal{E}$ de la façon suivante :

$$\mathcal{E}=\{(k,l,m,q)\in\mathbb{N}^4/0\leq k\leq p-1,\ 0\leq l\leq N+1-p,\ 0\leq m\leq 2,\ 2\leq q\leq k+l+m+D-N\}$$

Montrons que G est continue sur $\overline{\mathbb{D}}^2$. Tout d'abord G est continue sur $\{(z_1,\zeta_1)\in\overline{\mathbb{D}}^2/1-\overline{\zeta}_1 z_1\neq 0\}$. De plus

$$|G(z_1,\zeta_1)|=\left|\frac{\zeta_1-z_1}{1-\overline{\zeta}_1 z_1}\right|^{k+l}\left|\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\overline{\zeta}_1 z_1}\right|^{m}\left|1-\overline{\zeta}_1 z_1\right|^{k+l+m-q}$$

Or sur $\overline{\mathbb{D}}^2$ les quantités $\left|\frac{\zeta_1-z_1}{1-\overline{\zeta}_1 z_1}\right|$ et $\left|\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\overline{\zeta}_1 z_1}\right|$ sont bornées et, puisque $q\leq k+l+m+D-N$ et $D\leq N-1$, les exposants $k+l$ et m sont positifs. De plus $k+l+m-q\geq 1$ donc $\left|1-\overline{\zeta}_1 z_1\right|^{k+l+m-q}$ tend vers 0 quand $1-\overline{\zeta}_1 z_1$ tend vers 0, ce qui montre la continuité de G sur $\mathbb{D}^2$. On en déduit que $d^{(D)}F$ est continue si $D\leq N-1$, donc que F est de classe C^{N-1}, ainsi que J_p si $p\geq 1$.
Examinons présent la régularité de J_p pour $p=0$.

$$\begin{aligned}-J_0(z_1,z_2)&=\int_{\mathbb{D}}\frac{(\overline{\zeta}_1-\overline{z}_1)^{N+1}}{z_1-\zeta_1}\left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\overline{\zeta}_1 z_1}\right)^2 g_p(z,\zeta_1)d\lambda(\zeta_1)\\&=\int_{\mathbb{D}}h(z,\zeta_1)d\lambda(\zeta_1)\end{aligned}$$

Montrons de même que $h\in C^{N-1}(\overline{\mathbb{D}}^3)$. On en déduira que $J_0\in C^{N-1}(\overline{\mathbb{D}}^2)$. Soit $D\leq N-1$.

$$d^{(D)}h=\sum_{\mathcal{E}}G(z_1,\zeta_1)H(z,\zeta_1)$$

où

$$G(z_1,\zeta_1)=\frac{(\overline{\zeta}_1-\overline{z}_1)^k(1-|\zeta_1|^2)^l}{(z_1-\zeta_1)^m(1-\overline{\zeta}_1 z_1)^q}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{E}=\{(k,l,m,q)\in\mathbb{N}^4/0\leq k\leq N+1,\ 0\leq l\leq 2,\ 1\leq m,\ q\geq 2\\ \text{et } (N+1-k)+(2-l)+(m-1)+(q-2)\leq D\}\end{aligned}$$

et $H\in C^{\infty}(\overline{\mathbb{D}}^3)$ contient les dérivées de g_p. On peut réécrire l'ensemble $\mathcal{E}$ sous le forme

$$\mathcal{E}=\{(k,l,m,q)\in\mathbb{N}^4/0\leq k\leq N+1,\ 0\leq l\leq 2,\ 1\leq m,\ 2\leq q,\ m+q\leq D+k+l-N\}$$

Montrons que G est continue sur $\overline{\mathbb{D}}^2$. Tout d'abord G est continue sur $\{(z_1,\zeta_1)\in\overline{\mathbb{D}}^2/z_1\neq\zeta_1$ et $1-\overline{\zeta}_1 z_1\neq 0\}$. De plus

$$|G(z_1,\zeta_1)|=\left|\frac{\zeta_1-z_1}{1-\overline{\zeta}_1 z_1}\right|^{k-m-1/2}\left|\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\overline{\zeta}_1 z_1}\right|^{l}\left|1-\overline{\zeta}_1 z_1\right|^{k+l-m-q-1/2}\left|\zeta_1-z_1\right|^{1/2}$$

Or sur $\overline{\mathbb{D}}^2$ les quantités $\left|\dfrac{\zeta_1 - z_1}{1-\overline{\zeta}_1 z_1}\right|$ et $\left|\dfrac{1-|\zeta_1|^2}{1-\overline{\zeta}_1 z_1}\right|$ sont bornées. De plus

$$k - m - 1/2 \geq q - l - (D-N) - 1/2 \geq q - l + 1/2 \geq 2 - 2 + 1/2 > 0$$

$$l \geq 0,\ 1/2 > 0 \text{ et } k - m - 1/2 + l - q \geq 1/2 > 0$$

On en déduit que G est bien continue.
On en déduit ainsi que pour tout N, $S^1(h)$ est de classe C^{N-1}, donc $S^1(h)$ est de classe C^∞ dans $\overline{\mathbb{D}}^2$.

Régularité de P.

Par définition on a

$$1 = P^1(1)(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{1-|\zeta_1|^2}{(1-\overline{\zeta}_1 z_1)^3} d\overline{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1$$

car 1 est holomorphe.Ainsi, pour toute fonction h dans $C^\infty(\overline{\mathbb{D}}^2)$ on a

$$P^1(h)(z) - h(z) = \int_{\mathbb{D}} (h(\zeta_1, z_2) - h(z_1, z_2)) \frac{1-|\zeta_1|^2}{(1-\overline{\zeta}_1 z_1)^3} d\lambda(\zeta_1)$$

d'où

$$P^1(h)(z) = h(z) + K(z)$$

et comme $h(z) \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}}^2)$ il suffit de montrer que $K \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}}^2)$. Soit $N \in \mathbb{N}$. Alors, par régularité de h on a

$$\begin{aligned} h(\zeta_1, z_2) - h(z_1, z_2) = \quad & \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} \frac{\partial^n h}{\partial z_1^p \partial \overline{z}_1^{n-p}}(z_1, z_2)(\zeta_1 - z_1)^p (\overline{\zeta}_1 - \overline{z}_1)^{n-p} \\ & + \sum_{p=0}^{N+1} (\zeta_1 - z_1)^p (\overline{\zeta}_1 - \overline{z}_1)^{N+1-p} g_p(z, \zeta_1) \end{aligned}$$

où $g_p \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}}^3)$. Ainsi on peut écrire

$$K(z) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} \frac{\partial^n h}{\partial z_1^p \partial \overline{z}_1^{n-p}}(z_1, z_2) I_{n,p}(z_1) + \sum_{p=0}^{N+1} J_p(z_1, z_2)$$

Evaluons la régularité de $I_{n,p}$ et J_p.

$$
\begin{aligned}
-I_{n,p}(z_1) &= -\int_{\mathbb{D}} \frac{(\zeta_1-z_1)^p(\overline{\zeta}_1-\overline{z}_1)^{n-p}(1-|\zeta_1|^2)}{(1-\overline{\zeta}_1 z_1)^3} d\lambda(\zeta_1) \\
&= \int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{(re^{i\theta}-z_1)^p(re^{-i\theta}-\overline{z}_1)^{n-p}(1-r^2)}{(1-re^{-i\theta}z_1)^3} r dr d\theta \\
&= \int_0^1 (1-r^2) r dr \int_0^{2\pi} \frac{(r-z_1e^{-i\theta})^p(re^{-i\theta}-\overline{z}_1)^{n-p}e^{-i\theta}d\theta}{(1-re^{-i\theta}z_1)^3 e^{-i(p+1)\theta}} \\
&= i\int_0^1 (1-r^2) r dr \int_{\mathbb{T}} g(\zeta)d\zeta
\end{aligned}
$$

où

$$
g(\zeta) = \frac{(r-z_1\zeta)^p(r\zeta-\overline{z}_1)^{n-p}}{(1-rz_1\zeta)^3\zeta^{p+1}}
$$

est une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ de pôles $\dfrac{1}{rz_1}$ et 0. Or $\left|\dfrac{1}{rz_1}\right| > 1$ donc

$$
\int_{\mathbb{T}} g(\zeta)d\zeta = 2i\pi \mathrm{Res}(g,0)
$$

On a

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}(g,0) &= \frac{1}{p!}\frac{d^p}{d\zeta^p}(\zeta^{p+1}g(\zeta)) \mid_{\zeta=0} \\
&= \sum_{k=0}^{p} c_{p,k}\frac{d^k}{d\zeta^k}(r-z_1\zeta)^p \mid_{\zeta=0} \frac{d^{p-k}}{d\zeta^{p-k}}\left(\frac{(r\zeta-\overline{z}_1)^{n-p}}{(1-rz_1\zeta)^3}\right) \mid_{\zeta=0} \\
&= \sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{p-k} c_{p,k,l} z_1^k r^{p-k} \frac{d^l}{d\zeta^l}(r\zeta-\overline{z}_1)^{n-p} \mid_{\zeta=0} \frac{d^{p-k-l}}{d\zeta^{p-k-l}}(1-r\overline{z}_1\zeta)^{-3} \mid_{\zeta=0} \\
&= \sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{\min(p-k,n-p)} c_{p,k,l} z_1^k r^{p-k} r^l \overline{z}_1^{n-p-l}(rz_1)^{p-k-l} \\
&= \sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{\min(p-k,n-p)} c_{p,k,l} r^{2(p-k)} z_1^{p-l}\overline{z}_1^{n-p-l}
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
-I_{n,p}(z_1) = \sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{Min(p-k,n-p)} C_{p,k,l} z_1^{p-l}\overline{z}_1^{n-p-l}
$$

où $C_{p,k,l} = c_{p,k,l}\displaystyle\int_0^1 (1-r^2)r^{2(p-k)+1}dr$. On en déduit que $I_{n,p} \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}})$.
Examinons la régularité de J_p .

$$
\begin{aligned}
-J_p(z_1) &= -\int_{\mathbb{D}} \frac{(\zeta_1-z_1)^p(\overline{\zeta}_1-\overline{z}_1)^{n-p}(1-|\zeta_1|^2)}{(1-\overline{\zeta}_1 z_1)^3} g_p(z,\zeta_1)d\lambda(\zeta_1) \\
&= \int_{\mathbb{D}} h(z,\zeta_1)d\lambda(\zeta_1)
\end{aligned}
$$

Montrons que $h \in C^{N-2}(\overline{\mathbb{D}}^3)$. On en déduira que $J_p \in C^{N-2}(\overline{\mathbb{D}}^2)$. Soit $D \leq N-2$.

$$d^{(D)}h = \sum_{\mathcal{E}} G(z_1, \zeta_1) H(z, \zeta_1)$$

où

$$G(z_1, \zeta_1) = \frac{(\zeta_1 - z_1)^k (\overline{\zeta}_1 - \overline{z}_1)^l (1 - |\zeta_1|^2)^m}{(1 - \overline{\zeta}_1 z_1)^q}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \{(k,l,m,q) \in \mathbb{N}^4 / 0 \leq k \leq p,\ 0 \leq l \leq N+1-p,\ 0 \leq m \leq 1,\ q \geq 3 \\ \text{et } (p-k) + (N+1-p-l) + (1-m) + (q-3) \leq D\} \end{aligned}$$

et $H \in C^{\infty}(\overline{\mathbb{D}}^3)$ contient les dérivées de g_p. L'ensemble $\mathcal{E}$ s'écrit aussi

$$\mathcal{E} = \{(k,l,m,q) \in \mathbb{N}^4 / 0 \leq k \leq p,\ 0 \leq l \leq N+1-p,\ 0 \leq m \leq 1,\ 3 \leq q \leq k+l+m+1+D-N\}$$

Montrons que G est continue sur $\overline{\mathbb{D}}^2$. Tout d'abord G est continue sur $\{(z_1, \zeta_1) \in \overline{\mathbb{D}}^2 / 1 - \overline{\zeta}_1 z_1 \neq 0\}$. De plus

$$|G(z_1, \zeta_1)| = \left| \frac{\zeta_1 - z_1}{1 - \overline{\zeta}_1 z_1} \right|^{k+l} \left| \frac{1 - |\zeta_1|^2}{1 - \overline{\zeta}_1 z_1} \right|^m \left| 1 - \overline{\zeta}_1 z_1 \right|^{k+l+m-q}$$

Or sur $\overline{\mathbb{D}}^2$ les quantités $\left| \frac{\zeta_1 - z_1}{1 - \overline{\zeta}_1 z_1} \right|$ et $\left| \frac{1 - |\zeta_1|^2}{1 - \overline{\zeta}_1 z_1} \right|$ sont bornées et, puisque $q \leq k+l+m+D-N+1$ et $D \leq N-2$, les exposants $k+l$ et m sont positifs. De plus $k+l+m-q \geq 1$ donc $\left| 1 - \overline{\zeta}_1 z_1 \right|^{k+l+m-q}$ tend vers 0 quand $1 - \overline{\zeta}_1 z_1$ tend vers 0, ce qui montre la continuité de G sur $\mathbb{D}^2$. On en déduit que $d^{(D)}F$ est continue si $D \leq N-2$, donc que F est de classe C^{N-2}, ainsi que J_p .

On en déduit ainsi que pour tout N ,$P^1(h)$ est de classe C^{N-2}, donc $P^1(h)$ est de classe C^{∞} dans $\overline{\mathbb{D}}^2$.

4.5.2 Les opérateurs P^1 et S^1 commutent avec $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_2}$.

On démontre ici le point (5) de la proposition 4.2.1.

Soit $h \in C^{\infty}(\overline{\mathbb{D}}^2)$. D'après 4.2.1 (2) on a $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_1} S^1 h = h$. On en déduit que

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_1}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} S^1 h\right) = \frac{\partial h}{\partial \overline{z}_2}$$

Or d'après 4.2.1 (2) on a

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} S^1 h = P^1(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} S^1 h) + S^1(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_1}(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} S^1 h))$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} S^1 h = P^1(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} S^1 h) + S^1(\frac{\partial h}{\partial \overline{z}_2})$$

Il suffit donc de montrer que $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} S^1 h$ est orthogonal aux fonctions holomorphes en z_1 dans l'espace $L^2((1-|z_1|^2)d\lambda(z_1))$, pour obtenir $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} S^1 h = S^1(\frac{\partial h}{\partial \overline{z}_2})$. Soit $V \in Hol(\mathbb{D}) \cap C^\infty(\overline{\mathbb{D}})$. Alors

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} S^1 h(z_1, z_2) \overline{V}(z_1)(1-|z_1|^2) d\lambda(z_1) = \frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} \int_{\mathbb{D}} S^1 h(z_1, z_2) \overline{V}(z_1)(1-|z_1|^2) d\lambda(z_1)$$

et d'après 4.2.1 (2) on a

$$\int_{\mathbb{D}} S^1 h(z_1, z_2) \overline{V}(z_1)(1-|z_1|^2) d\lambda(z_1) = 0$$

Soit maintenant $V \in Hol(\mathbb{D}) \cap L^2((1-|z_1|^2)d\lambda(z_1))$. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $V_\epsilon \in H(\mathbb{D}) \cap C^\infty(\overline{\mathbb{D}})$ tel que $\|V - V_\epsilon\|_{L^2((1-|z_1|^2)d\lambda(z_1))} \leq \epsilon$. Alors

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{D}} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} S^1 h(z_1, z_2) \overline{V}(z_1)(1-|z_1|^2) d\lambda(z_1)\right| &\leq \left|\int_{\mathbb{D}} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} S^1 h(z_1, z_2) \overline{V}_\epsilon(z_1)(1-|z_1|^2) d\lambda(z_1)\right| \\
&\quad + \left|\int_{\mathbb{D}} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} S^1 h(z_1, z_2) (\overline{V} - \overline{V}_\epsilon)(z_1)(1-|z_1|^2) d\lambda(z_1)\right| \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{D}} \left|\frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} S^1 h(z_1, z_2)\right|^2 (1-|z_1|^2) d\lambda(z_1)\right)^{1/2} \\
&\leq C\epsilon
\end{aligned}$$

où C ne dépend que de h. Cette inégalité étant vraie pour tout ϵ on en déduit que

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} S^1 h(z_1, z_2) \overline{V}(z_1)(1-|z_1|^2) d\lambda(z_1) = 0$$

ce qui achève de montrer que

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} S^1 h = S^1(\frac{\partial h}{\partial \overline{z}_2}) \tag{5.1}$$

D'autre part, d'après 4.2.1 (3) on a

$$h = P^1 h + S^1(\frac{\partial h}{\partial \overline{z}_1})$$

d'où

$$\frac{\partial h}{\partial \overline{z}_2} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} P^1 h + \frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} S^1(\frac{\partial h}{\partial \overline{z}_1})$$

Sachant (5.1) on en déduit que

$$\frac{\partial h}{\partial \overline{z}_2} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} P^1 h + S^1 (\frac{\partial h}{\partial \overline{z}_2 \partial \overline{z}_1})$$

Or d'après 4.2.1 (3) on a aussi

$$\frac{\partial h}{\partial \overline{z}_2} = P^1 \frac{\partial h}{\partial \overline{z}_2} + S^1 (\frac{\partial h}{\partial \overline{z}_1 \partial \overline{z}_2})$$

ce qui nous donne

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} P^1 h = P^1 (\frac{\partial h}{\partial \overline{z}_2})$$

4.5.3 L'opérateur $P \circ S$ est nul.

On démontre ici le point (7) de la proposition 4.2.1.
Soit $h \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}})$. D'après 4.2.1 (3) on a

$$S(h) = P \circ S(h) + S(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} S(h))$$

D'après 4.2.1 (1) on a

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} S(h) = h$$

d'où on déduit que

$$P \circ S(h) = 0$$

4.5.4 Les opérateurs P^1 et S^2 commutent.

On démontre ici le point (8) de la proposition 4.2.1.
Soit $h \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}}^2)$. Montrons que

$$P^1 \circ P^2(h) = P^2 \circ P^1(h)$$

Soit

$$T^1 h(z_1, z_2) = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |\zeta|^2) h(\zeta, z_2)}{|1 - \zeta z_1|^3} d\lambda(\zeta)$$

et

$$T^2 h(z_1, z_2) = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |\zeta|^2) h(z_1, \zeta)}{|1 - \zeta z_2|^3} d\lambda(\zeta)$$

D'après [16] théorème 1.9 L'opérateur T est borné sur $L^p(\mathbb{D})$ donc l'opérateur $T^1 \circ T^2$ est borné sur $L^p(\mathbb{D}^2)$. On en déduit que $T^1 \circ T^2(|h|)$ est fini presque partout dans $\mathbb{D}^2$. On peut donc appliquer le Théorème de Fubini et obtenir que

$$P^1 \circ P^2(f) = P^2 \circ P^1(f) \tag{5.2}$$

presque partout dans $\mathbb{D}^2$, et par régularité, la même égalité partout dans $\mathbb{D}^2$.
Alors
$P^1 \circ S^2(h) = P^2(P^1 \circ S^2(h)) + S^2(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_2}(P^1 \circ S^2(h)))$ d'après 4.2.1 (3)
$P^1 \circ S^2(h) = P^1 \circ P^2 \circ S^2(h) + S^2 \circ P^1(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} S^2(h))$ d'après 4.2.1 (5) et (5.2)
$P^1 \circ S^2(h) = 0 + S^2 \circ P^1(h)$ d'après 4.2.1 (7) et (1).

Chapitre 5

Problème de division dans des espaces de dimension finie.

5.1 Cadre et théorème général.

Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}^N$. Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ deux espaces de Hilbert de dimensions respectives m et n , qu'on identifiera via des bases orthonormales $\{e_i, i = 1...m\}$ et $\{f_j, j = 1...n\}$ à $\mathbb{C}^m$ et $\mathbb{C}^n$. On notera le produit scalaire $\langle ., . \rangle$. Soit $H^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes bornées sur Ω, muni de la norme $\|h\|_\infty = \underset{z\in\Omega}{\text{Sup}} |h(z)|$. Soit $\mathbb{H}$ un espace de Banach de fonctions sur Ω. On suppose que $\mathbb{H}$ est un $H^\infty(\Omega)$-module de Banach, c'est-à-dire que si $h \in \mathbb{H}$ et $g \in H^\infty(\Omega)$ alors $gh \in \mathbb{H}$ et $\|gh\|_{\mathbb{H}} \leq \|g\|_\infty \|h\|_{\mathbb{H}}$.

Exemple 5.1.1 *Si $\Omega = \mathbb{B}$, $H^p(\mathbb{B})$ est un $H^\infty(\Omega)$-module de Banach.*

Définition 5.1.2 *Soit $\mathbb{H}(\Omega, \mathcal{H}) = \{h : \Omega \longrightarrow \mathcal{H} / \ \forall \tilde{h} \in \mathcal{H}, \ \left\langle h(.), \tilde{h} \right\rangle \in \mathbb{H}\}$. On munit $\mathbb{H}(\Omega, \mathcal{H})$ de la norme suivante :* $\|h\|_{\mathbb{H}} = \left(\sum_{i=1}^{m} \|\langle h(.), e_i \rangle\|_{\mathbb{H}}^2 \right)^{1/2}$.

On montre ici le théorème suivant, qui permet de déduire un théorème de la couronne opérateur à partir du théorème usuel. on verra au prochain paragraphe comment celui-ci s'applique.

Théorème 5.1.3 *Soient n et m deux entiers non nuls tels que $n \leq m$. On note $m' = \dfrac{m!}{n!}$. Soit $\mathbb{H}$ un $H^\infty(\Omega)$-module de Banach de fonctions dans Ω et $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert de dimension finie m. On suppose que le théorème de la couronne est vrai quand $\mathcal{K} = \mathbb{C}$, i.e. :*
Si $g_1, ..., g_{m'} \in H^\infty(\Omega)$ vérifient

$$\exists \delta > 0 / \ \forall z \in \Omega, \ |g(z)|^2 \geq \delta^2 \tag{1.1}$$

alors

$$\forall \phi \in \mathbb{H}, \ \exists f_1, ..., f_{m'} \in \mathbb{H}^{m'} / \ \forall z \in \Omega, \ \sum_{i=1}^{m'} g_i(z) f_i(z) = \phi(z)$$

et de plus $\|f\|_{\mathbb{H}} \leq C \|\phi\|_{\mathbb{H}}$*, où* C *ne dépend que de* Ω*,* $\mathbb{H}$*,* m'*,* δ *et* $\|g\|_\infty$*.*
On en déduit le théorème de la couronne quand $\mathcal{K}$ *est de dimension finie* n*, i.e. :*
Si $G \in H^\infty(\Omega, L(\mathcal{H}, \mathcal{K}))$ *vérifie*

$$\exists \delta > 0 / \ \forall k \in \mathcal{K}, \ \forall z \in \Omega, \ \|G(z)^* k\|_{\mathcal{H}} \geq \delta \|k\|_{\mathcal{K}} . \tag{1.2}$$

alors

$$\forall \phi \in \mathbb{H}(\Omega, \mathcal{K}), \ \exists h \in \mathbb{H}(\Omega, \mathcal{H}) / \ \forall z \in \Omega \ G(z) h(z) = \phi(z),$$

et de plus $\|h\|_{\mathbb{H}} \leq \tilde{C} \|\phi\|_{\mathbb{H}}$ *où* $\tilde{C}$ *ne dépend que de* Ω*,* $\mathbb{H}$*,* m*,* n*,* δ *et* $\|g\|_\infty$*.*

Ce théoreme a pour conséquence le théorème de la couronne H^p pour la boule et le polydisque dans le cas de deux espaces de dimension finie, comme on le verra dans le prochain paragraphe.
Andersson [4] a montré le théorème de la couronne pour deux espaces de dimension finie dans le cas où Ω est un domaine de $\mathbb{C}^N$ admettant une fonction définissante pluri-sous-harmonique de classe C^2 et $\mathbb{H} = H^2(\Omega)$. Il utilise une méthode, différente de celle utilisée ici, qui ne se généralise pas à H^p. Si son résultat ne contient pas le cas du polydisque, qui sera une conséquence de théorème 5.1.3, il donne en revanche le cas de domaines plus généraux que la boule ou les domaines strictement pseudoconvexes.

On s'inspire dans cette partie du travail de P.A. Fuhrmann [14].
On démontre d'abord un lemme qui permet de relier les deux hypothèses (1.1) et (1.2) entre elles. Remarquons d'abord que si l'hypothèse (1.2) est vérifiée alors $G^*(z)$ est injective et donc $n \leq m$.

Lemme 5.1.4 *Soit* $G \in H^\infty(\mathbb{B}, L(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n))$ *tel que*

$$\exists \delta > 0 / \ \forall k \in \mathbb{C}^n, \ \forall z \in \mathbb{B}, \ \|G(z)^* k\|_{\mathbb{C}^m} \geq \delta \|k\|_{\mathbb{C}^n} . \tag{1.3}$$

Si $I = (i_1, ..., i_n)$ *est un multi-indice on note* $G_I(z)$ *la matrice extraite de* $G(z)$ *ayant pour colonnes les colonnes d'indices* $i_1, ..., i_n$ *de* $G(z)$*. Alors il existe* $\tilde{\delta} > 0$ *tel que*

$$\forall z \in \mathbb{B}, \ \sum_{|I|=n}{}' |\det G_I(z)| \geq \tilde{\delta}.$$

Démonstration *:*

On note $H_I = G_I^*$ *et* $H = G^*$. On note $\{y_i(z), i = 1...m\}$ les lignes de $H(z)$. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe une suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{B}$ telle que

$$\epsilon_k = \sum_{|I|=n}{}' \left|\det G_I(z_k)\right| \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad k \longrightarrow \infty.$$

On peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

• 1° cas : $\exists k \in \mathbb{N}/\ \epsilon_k = 0$. Alors pour tout I, $|\det G_I(z_k)| = 0$. Alors $\text{rang}(H(z_k)) \leq n-1$. On considère x un vecteur non nul de $\mathbb{C}^n$ dans l'espace orthogonal de l'espace formé des lignes de $H(z_k)$ ce qui permet d'écrire

$$\|H(z_k)x\|_{\mathbb{C}^m}^2 = \sum_{i=1}^{m} |\langle y_i(z_k), x\rangle|^2 = 0,$$

ce qui contredit l' hypothèse (1.3).

• 2° cas : $\forall k \in \mathbb{N},\ \epsilon_k \neq 0$. Soit k fixé. Il existe un multi-indice $I = i_1 < ... < i_n$ tel que pour tout multi-indice J

$$|\det H_J(z_k)| \leq |\det H_I(z_k)| \neq 0. \tag{1.4}$$

On utilise alors le lemme suivant :

Lemme 5.1.5 *Pour toute matrice carrée d'ordre n et pour toute norme matricielle $\|.\|$ on a l'inégalité suivante :*

$$|\det A| \geq \left\|A^{-1}\right\|^{-n},$$

où par convention $\left\|A^{-1}\right\|^{-1} = 0$ si A n'est pas inversible.

Démonstration :

Si A n'est pas inversible il n'y a rien à démontrer. Sinon $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_i$ où les a_i sont les valeurs propres de A. Alors A^{-1} a pour valeurs propres $\{a_i^{-1}\}_{i=1...n}$, donc $\left\|A^{-1}\right\| \geq \left|a_i^{-1}\right|$, $\forall i = 1...n$ ce qui nous permet d'obtenir le résutat. ∎

Grâce à ce lemme on déduit que

$$\epsilon_{k+1} > \epsilon_k \geq |\det H_I(z_k)| \geq \left\|H_I(z_k)^{-1}\right\|^{-n},$$

d'où

$$\left\|H_I(z_k)^{-1}\right\|^{n} > 1/\epsilon_{k+1}.$$

Or par définition de la norme d'un opérateur on a

$$\left\|H_I(z_k)^{-1}\right\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|H_I(z_k)^{-1}x\|_{\mathbb{C}^n}}{\|x\|_{\mathbb{C}^n}} = \sup_{y\neq 0} \frac{\|y\|_{\mathbb{C}^n}}{\|H_I(z_k)y\|_{\mathbb{C}^n}},$$

d'où

$$\exists x_k \in \mathbb{C}^n/\ \|x_k\|_{\mathbb{C}^n} = 1 \text{ et } \|H_I(z_k)x_k\|_{\mathbb{C}^n} < \epsilon_{k+1}^{1/n},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{\alpha=1}^{n} |\langle y_{i_\alpha}, x_k\rangle|^2 < \epsilon_{k+1}^{2/n}. \qquad (1.5)$$

D'autre part , puisque det $(H_I(z_k)) \neq 0$, les lignes $y_{i_1}, ..., y_{i_n}$ de $H_I(z_k)$ forment une base de $\mathbb{C}^n$, d'où

$$\forall 1 \leq l \leq m,\ \exists (\beta_{l,\alpha})_{\alpha=1...n} /\ y_l = \sum_{\alpha=1}^{n} \beta_{l,\alpha} y_{i_\alpha}. \qquad (1.6)$$

Or en utilisant (1.4) on a

$$|\det H_I(z_k)| \geq |\det H_J(z_k)| = |\det(y_{j_1}, ..., y_{j_n})|$$

$$|\det H_I(z_k)| \geq \left| \sum_{\alpha_1,...,\alpha_n} \beta_{j_1,\alpha_1} ... \beta_{j_n,\alpha_n} \det(y_{i_{\alpha_1}}, ..., y_{i_{\alpha_n}}) \right|$$

$$|\det H_I(z_k)| \geq \left| \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \beta_{j_1,\sigma(1)} ... \beta_{j_n,\sigma(n)} \det(y_{i_{\sigma(1)}}, ..., y_{i_{\sigma(n)}}) \right|$$

$$|\det H_I(z_k)| \geq |\det H_I(z_k)|\, |\det(\beta_{j_\alpha,\gamma})_{\alpha,\gamma=1...n}|$$

d'où, pour tout multi-indice J, on a $|\det(\beta_{j_\alpha,\gamma})_{\alpha,\gamma=1...n}| \leq 1$. Il suffit alors de considérer les multi-indices de la forme $j_\alpha = i_\alpha$ si $\alpha \neq \alpha_0$ et $j_{\alpha_0} = \gamma_0$, pour obtenir $|\beta_{\gamma_0,\alpha_0}| \leq 1$. Alors d'après (1.6) $\forall l = 1...m,\ |\langle y_l, x_k\rangle|^2 = \left| \sum_{\alpha=1}^{n} \beta_{l,\alpha} \langle y_{i_\alpha}, x_k\rangle \right|$, et en utilisant (1.5) on trouve

$$|\langle y_l, x_k\rangle|^2 \leq \sum_{\alpha=1}^{n} |\langle y_{i_\alpha}, x_k\rangle|^2 < \epsilon_{k+1}^{2/n},$$

d'où

$$\|H(z_k)x_k\|_{\mathbb{C}^m}^2 = \sum_{l=1}^{m} |\langle y_l, x_k\rangle|^2 \leq (m-n+1)\epsilon_{k+1}^{2/n}.$$

Or d'après l'hypothèse (1.3)

$$0 < \delta \leq \|H(z_k)x_k\|_{\mathbb{C}^m} \leq (m-n+1)\epsilon_{k+1}^{2/n}$$

et en faisant tendre k vers $+\infty$ on obtient une contradiction. ∎

Démonstration du théorème 5.1.3 :
D'après le lemme 5.1.4

$$\exists \tilde{\delta} > 0 /\ \forall z \in \Omega,\ \sum_{|I|=n}{}' |\det G_I(z)| \geq \tilde{\delta}. \qquad (1.7)$$

Soit $k(z) = (k_1(z), ..., k_n(z)) \in \mathbb{H}(\Omega, \mathcal{K})$. Pour chaque j on applique l'hypothèse du théorème avec pour fonctions g_j les fonctions $\det G_I$ qui sont bien dans $H^\infty(\Omega)$ et pour fonction ϕ la fonction k_j qui est bien dans $\mathbb{H}$. Puisque on a (1.7) on peut appliquer cette hypothèse et on obtient

$$\forall j=1...n,\ \exists h_I^j \in \mathbb{H}/ \ \sum_{|I|=n}{}' h_I^j \det G_I = k_j$$

avec les estimations

$$\forall j=1...n,\ \left\|h^j\right\|_{\mathbb{H}} \leq C \left\|k_j\right\|_{\mathbb{H}}. \tag{1.8}$$

On développe les déterminants, en notant $g_{i,j}$ les coefficients de $G(z)$.

$$k_j = \sum_{|I|=n}{}' \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} h_I^j \epsilon(\sigma) g_{\sigma(1),i_1} \cdots g_{\sigma(n),i_n}$$

$$k_j = \sum_{k=1}^{n} \sum_{|I|=n}{}' \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n/\ \sigma(k)=j} h_I^j \epsilon(\sigma) g_{\sigma(1),i_1} \cdots g_{j,i_k} \cdots g_{\sigma(n),i_n}.$$

Alors on peut écrire cette somme sous la forme suivante

$$k_j = \sum_{l=1}^{m} g_{j,l} b_{l,j}$$

où

$$b_{l,j} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{I/i_k=l} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n/\ \sigma(k)=j} h_I^j \epsilon(\sigma) g_{\sigma(1),i_1} \cdots g_{\sigma(k-1),i_{k-1}} g_{\sigma(k+1),i_{k+1}} \cdots g_{\sigma(n),i_n} \tag{1.9}$$

et $b_{l,j} \in \mathbb{H}$. D'autre part, si $i\neq j$,

$$\sum_{l=1}^{m} g_{i,l} b_{l,j} = \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \sum_{I/i_k=l} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n/\ \sigma(k)=j} h_I^j \epsilon(\sigma) g_{\sigma(1),i_1} \cdots g_{\sigma(k-1),i_{k-1}} g_{i,l} g_{\sigma(k+1),i_{k+1}} \cdots g_{\sigma(n),i_n}$$

$$\sum_{l=1}^{m} g_{i,l} b_{l,j} = \sum_{I}{}' h_I^j \det\tilde{G}_I,$$

où $\tilde{G}_I$ a pour lignes celles de G_I sauf la j^{eme} qui est remplacée par la i^{eme}, d'où pour tout I, $\det\tilde{G}_I = 0$. Ainsi si on note $B = (b_{l,j})_{l=1...m, j=1...n}$, B est à coefficients dans $\mathbb{H}(\Omega)$ et vérifie

$$G(z)B(z) = \begin{pmatrix} k_1(z) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_n(z) \end{pmatrix}$$

d'où si $h(z) = B(z)u$ où u est le vecteur $(1,...,1)$ de $\mathbb{C}^n$, on a $h \in \mathbb{H}$ et l'égalité $G(z)h(z) = k(z)$ pour tout $z \in \Omega$.

On évalue à présent $\|h\|_{\mathbb{H}}$. Par définition de h on a

$$\forall z \in \Omega,\ \|h(z)\|^2_{\mathbb{C}^m} = \sum_{l=1}^{m} \left|\sum_{j=1}^{n} b_{l,j}\right|^2.$$

Or d'après (1.9)

$$|b_{l,j}| \leq C_1 \sum_{k=1}^{n} \sum_{I/i_k=l} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n/\sigma(k)=j} \left|h_I^j\right|$$

où C_1 ne dépend que de n et $\|G\|_\infty$. On en déduit que

$$\|h\|_{\mathbb{C}^m}^2 \leq C_1 \sum_{l=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{I/i_k=l}{}' \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n/\sigma(k)=j} \left|h_I^j\right|)^2 \tag{1.10}$$

$$\|h\|_{\mathbb{C}^m}^2 \leq C_1 C_2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{|I|=n}{}' \left|h_I^j\right|^2$$

où C_2 dépend du nombre de termes dans (1.10), c'est-à-dire de m et n. On en déduit grâce à (1.8) que

$$\|h\|_{\mathbb{H}} \leq \tilde{C}\,\|k\|_{\mathbb{H}}$$

où $\tilde{C}$ dépend de $C,\ C_1,\ C_2$ et n, ce qui nous donne le résultat. ■

5.2 Applications : théorèmes de la couronne opérateur dans les espaces de Hardy de la boule et du polydisque.

5.2.1 Le théorème de la couronne opérateur dans $H^p(\mathbb{B})$.

On peut appliquer le théorème 5.1.3 dans le cas où Ω est la boule $\mathbb{B}$ de $\mathbb{C}^N$ et $\mathbb{H}$ est l'espace de Hardy $H^p(\mathbb{B})$ grâce au théorème démontré par M. Andersson et H. Carlsson dans [6]. On obtient alors le théorème de la couronne H^p suivant :

Théorème 5.2.1 *Soit* $1 \leq p < \infty$. *Soient* $\mathcal{H}$ *et* $\mathcal{K}$ *deux espaces de Hilbert de dimension finie. Soit* $G \in H^\infty(\mathbb{B}, L(\mathcal{H},\mathcal{K})),$ *tel que* $\exists\delta > 0/\ \forall k \in \mathcal{K},\ \forall z \in \mathbb{B},\ \|G(z)^*k\|_{\mathcal{H}} \geq \delta\,\|k\|_{\mathcal{K}}.$
Alors

$$\forall k \in H^p(\mathbb{B},\mathcal{K}),\ \exists h \in H^p(\mathbb{B},\mathcal{H})/\ \forall z \in \mathbb{B},\ G(z)h(z) = k(z).$$

De plus $\|h\|_{H^p} \leq C\,\|k\|_{H^p}$ où C ne dépend que des dimensions respectives de $\mathcal{H},\ \mathcal{K},$ de $\delta,\ \|G\|_\infty,\ N$ et p.

5.2.2 Le théorème de la couronne opérateur dans $H^p(\mathbb{D}^N)$.

Soit $\mathbb{D}^N$ le polydisque dans $\mathbb{C}^N$. On rappelle la définition des espaces de Hardy dans $\mathbb{D}^N$:

$$H^p(\mathbb{D}^N) = \{f \in H(\mathbb{D}^N)/ \sup_{0\leq r<1} \int_{\mathbb{T}^N} |f(r\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta) < \infty\} .$$

On rappelle que $H^p(\mathbb{D}^N)$ est un $H^\infty(\mathbb{D}^N)$-module de Banach.
Kai-Ching Lin démontre dans [18] le théorème suivant :

Théorème 5.2.2 *Soient $g_1, ..., g_m$ des élèments de $H^\infty(\mathbb{D}^N)$ tels que*

$$\exists \delta > 0/ \ \forall z \in \mathbb{D}^N, \ |g(z)|^2 \geq \delta^2.$$

Soit $1 < p < +\infty$. Alors

$$\forall \phi \in H^p(\mathbb{D}^N), \ \exists \ f_1, ..., f_m \in H^p(\mathbb{D}^N)/ \ \forall z \in \mathbb{D}^N, \ \sum_{i=1}^{m} g_i(z) f_i(z) = \phi(z).$$

De plus $\forall i = 1...m, \ \|f_i\|_{H^p} \leq C \|\phi\|_{H^p}$, où C ne dépend que de $m, \ N, \ \delta, \ \|g\|_\infty$ et p.

Ceci correspond exactement au cas $\Omega = \mathbb{D}^N$ et $\mathbb{H} = H^p(\mathbb{D}^N)$ dans les hypothèses de 5.1.3. On peut alors utiliser le théorème 5.1.3 et obtenir le théorème suivant :

Théorème 5.2.3 Soit $1 < p < \infty$. *Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ deux espaces de Hilbert de dimension finie. Soit $G \in H^\infty(\mathbb{D}^N, L(\mathcal{H}, \mathcal{K}))$ tel que $\exists \delta > 0/ \ \forall k \in \mathcal{K}, \forall z \in \mathbb{D}^N, \ \|G(z)^* k\|_{\mathcal{H}} \geq \delta \|k\|_{\mathcal{K}}$.*
Alors

$$\forall k \in H^p(\mathbb{D}^N, \mathcal{K}), \ \exists h \in H^p(\mathbb{D}^N, \mathcal{H})/ \ \forall z \in \mathbb{D}^N, \ G(z)h(z) = k(z).$$

De plus $\|h\|_{H^p} \leq C \|k\|_{H^p}$ où C ne dépend que des dimensions respectives de $\mathcal{H}, \ \mathcal{K},$ de *$\delta, \ \|G\|_\infty, \ N$ et p.*

Bibliographie

[1] E. Amar. On the corona problem. *The Journal of Geometric Analysis*, 1(4) :291–305, 1991.

[2] E. Amar and A. Bonami. Mesures de Carleson d'ordre α et solutions au bord de l'équation $\overline{\partial}$. *Bull. Soc. Math. France*, 107 :23–48, 1979.

[3] E. Amar and J. Bruna. On H^p-solutions of the bezout equation in the ball. *The Journal of Fourier Analysis and Applications. Special issue*, pages 7–15, 1995.

[4] M. Andersson. The H^p corona problem and $\bar{\partial}_b$ in weakly pseudo-convex domains. *T. A. M. S.*, 342 :241–255, 1994.

[5] M. Andersson and H. Carlsson. H^p-estimates of holomorphic division formulas. *Pacific Journal of Mathematics*, 173(2) :307–335, 1996.

[6] M. Andersson and H. Carlsson. Estimates of solutions of the H^p and $BMOA$ corona problem. *Math. Ann.*, 316(1) :83–102, 2000.

[7] M. Berger and B. Gostiaux. *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces.* Presses universitaires de France, 1987.

[8] J. Bergh and J. Löfstrom. *Interpolation Spaces An Introduction*, volume 223 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.* Springer-Verlag, 1976.

[9] J. Briançon and H. Skoda. Sur la clôture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes en un point de $\mathbb{C}^n$. *C.R.A.N.S*, 278 :949–951, 1974.

[10] L. Carleson. Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem. *Annals of Mathematics*, 1962.

[11] U. Cegrell. A generalisation of the corona theorem in the unit disc. *Math. Z.*, 1990.

[12] P. Charpentier. Formules explicites pour les solutions minimales de l'équation $\bar{\partial}u = f$ dans la boule et dans le polydisque de $\mathbb{C}$. *Annales de l'institut Fourier*, 30(4) :121–154, 1980.

[13] G. B. Folland and E. M. Stein. *Hardy spaces on homogeneous groups*, volume 28 of *Mathematical notes.* Princeton university press, 1982.

[14] P. Fuhrmann. On the corona theorem and its applications to spectral problems in Hilbert spaces. *T. A. M. S.*, 132 :55–66, 1968.

[15] L. Gruman and P. Lelong. *Entire functions of several complex variables*, volume 282 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.* Springer-Verlag, 1986.

[16] H. Hedenmalm, B. Korenblum, and K. Zhu. *Theory of Bergman spaces*, volume 199 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer Verlag, 2000.

[17] L. Hörmander. L^p estimates for (pluri) subharmonic functions. *Math. Scand.*, 20 :65–78, 1967.

[18] K.C. Lin. The H^p-corona theorem for the polydisc. *T.A.M.S.*, 341 :371–375, 1994.

[19] W. Rudin. *Function theory in the unit ball of* $\mathbb{C}^n$, volume 241 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1980.

[20] H. Skoda. Application des techniques L^2 à la théorie des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids. *Ann. Sci. École Norm. Sup.(4)*, 5 :545–579, 1972.

[21] H. Skoda. Valeurs au bord pour les solutions de l'opérateur d" et caractérisation des zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna. *Bull. Soc. math. France*, 104 :225–299, 1976.

[22] E. M. Stein. *Boundary behaviour of holomorphic functions of several complex variables.* Mathematical notes. Princeton university press, 1972.

[23] J. C. Tougeron. *Idéaux de fonctions différentiables*, volume 71 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete neue Folge*. Springer Verlag, 1972.

[24] S. Treil. Estimates in the corona theorem and ideals of H^∞ ; a problem of T. Wolff. *J. d'Analyse Mathématique*, 87 :481–495, 2002.