Remerciements

Depuis mon arrivée en Licence à l'Institut Fourier jusqu'à l'achèvement de cette thèse, six années se seront écoulées. Je remercie, sans pouvoir les nommer exhaustivement, tous ceux qui m'auront rendu la vie grenobloise humainement et mathématiquement agréable, ainsi qu'administrativement supportable. Je tiens tout particulièrement à remercier les personnes suivantes.

Tout d'abord mon directeur, Mikhail Zaidenberg, que j'ai connu alors qu'il était responsable du séminaire du Magistère et qui, dès le DEA, m'a témoigné sa confiance en me proposant un sujet de recherche motivant et original. Je le remercie de la grande liberté qu'il m'a accordée quant au choix de l'orientation des mes recherches, ainsi que de la bienveillance avec laquelle il a su m'apprendre petit à petit les ficelles du métier.

Les travaux de Karl Fieseler sur les surfaces complexes avec actions de groupes additifs auront été pour moi une grande source d'inspiration durant les quatre dernières années. J'ai en outre particulièrement apprécié son accueil chaleureux et la patience avec laquelle il a répondu à mes questions lors d'une rencontre impromptue à Marseille. Je le remercie tout particulièrement d'avoir accepté de rapporter sur ma thèse et de me faire l'honneur de participer à ce jury.

Je suis reconnaissant à Lucy Moser-Jauslin d'avoir porté de l'intérêt à mon travail dans une période où je commençais à douter qu'il en eût réellement. Je la remercie d'avoir accepté de rapporter sur ma thèse et de participer à ce jury.

Cette thèse doit beaucoup à Michel Brion qui, durant quatre ans, a répondu avec attention et bienveillance à toutes mes questions, souvent naïves ou mal formulées, m'ouvrant à maintes reprises de nouvelles pistes de recherche. Je le remercie par conséquent doublement, à la fois d'avoir porté de l'intérêt à mes travaux, et de me faire l'honneur, aujourd'hui, de participer à ce jury.

Je remercie également José Bertin, dont les travaux sur les compactifications de surfaces quasi-homogènes m'auront servi de guide lors de mes premiers pas en thèse et Siegmund Kosarew, à qui je dois une grande partie de mes connaissances en algèbre commutative, de prendre part à ce jury.

Je tiens aussi à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, m'auront guidé ou accompagné durant mon bout de chemin mathématique grenoblois. Je pense en particulier à Laurent Bonavero qui, après m'avoir fait comprendre le calcul différentiel en Licence, m'a initié à la géométrie algébrique, et qui, depuis lors, a toujours pris le temps de répondre à mes questions. Je remercie également Laurent Manivel de m'avoir rendu accessible la géométrie algébrique. Je suis reconnaissant à Stéphane Druel d'avoir eu la volonté de ne pas arrêter de fumer malgré ma présence quasi systématique à chacune de ses pauses clope.

Je remercie également tout le personnel administratif et technique de l'Institut Fourier, en particulier Arlette Guttin-Lombard, sans qui cette thèse n'aurait jamais abouti faute, entre autres, d'avoir pensé à s'y inscrire en temps voulu. Merci aussi à Janick Joukoff et Bruno Legouguec d'avoir régulièrement pris le temps de chercher dans les rayons les plus inaccessibles de la bibliothèque les volumes portés disparus auxquels j'ai souvent eu à me référer (aujourd'hui la situation s'est notoirement simplifiée, puisque, preuve de la vitalité de mon domaine de recherche, une partie des ouvrages en question a été reclassés dans le "fond mort" de la nouvelle bibliothèque). Je remercie également les "tauliers" Robert Feres et Franck Bevilacqua pour leur bonne humeur matinale et communicative tout au long de ces années.

Je tiens à saluer, sans tous les nommer, mes collègues thésards qui m'ont précédé ou vont me suivre. Je pense en particulier aux anciens, Matthieu, David, PE et Sophie, à mes compères depuis le DEA, Toni et Ion, à Sébastien, aux Fran(c)k, à Nicolas, Vincent et Guillemette, à Fabrice, à Amaël, à Maxime et Michel qui ont eu

à subir mon voisinage depuis un an maintenant, et aussi, bien sûr à mon co-bureau Julien, pour le plaisir que j'ai eu à partager avec lui notre passion commune pour l'informatique, ainsi que pour la tolérance qu'il a manifestée envers ma tendance à transformer notre bureau en capharnaüm repoussant.

Un grand merci à Benoît pour les nuits infos que nous avons partagées à la grande époque (nuits qui, rétrospectivement, m'ont fait réellement découvrir les mathématiques tout en me donnant l'opportunité de ne pas intégrer une ENS...). Je remercie également Malik et toute la bande pour nos escapades musicales salvatrices.

Enfin, je remercie Anne-Valérie et Marine qui ont eu le courage de me supporter toutes ces années sans trop se plaindre.

Table des matières

Introduction

Danielewski **[11]** a montré que les hypersurfaces S_1 et S_2 de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}} = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x,y,z])$ définies respectivement par les équations

$$xz - y(y+1) = 0 \quad \text{et} \quad x^2z - y(y+1) = 0$$

constituent un contre-exemple au problème de simplification de Zariski. Cela signifie que les cylindres $S_1 \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ et $S_2 \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ de bases S_1 et S_2 respectivement sont isomorphes mais que S_1 et S_2 ne le sont pas. Pour montrer que les deux cylindres sont isomorphes, Danielewski observe que les morphismes $\pi_i : S_i \to X = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x])$ induits par les restrictions de la projection $pr_x : \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}} \to X$ se factorisent via la droite affine à deux origines $\delta : X(2) \to X$. Considérées comme des $X(2)$-schémas, S_1 et S_1 possèdent chacune une structure de fibré principal homogène sous le groupe additif $\mathbb{G}_{a,X(2)} = \mathbf{Spec}\left(\mathcal{O}_{X(2)}[T]\right)$ au sens de **[43]**. Cela signifie que $\mathbb{G}_{a,X(2)}$ agit sur S_1 et S_2, et qu'il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_j)_{j \in J}$ de $X(2)$ tel que pour tout $j \in J$, $S_i \mid_{U_j}$ est isomorphe à $\mathbb{G}_{a,U_j}$ agissant sur lui-même par translations. Via les projections p_1 et p_2, $S_1 \times_{X(2)} S_2$ est un fibré principal homogène sous les groupes additifs $\mathbb{G}_{a,S_1}$ et $\mathbb{G}_{a,S_2}$ respectivement.

$$\begin{tikzcd}
 & S_1 \times_{X(2)} S_2 \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
S_1 \arrow[dr, "\rho_1"] \arrow[ddr, bend right, "\pi_1"'] & & S_2 \arrow[dl, "\rho_2"'] \arrow[ddl, bend left, "\pi_2"] \\
 & X(2) \arrow[d, "\delta"'] & \\
 & X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} &
\end{tikzcd}$$

Or, puisque S_1 et S_2 sont affines, ces fibrés sont tous deux triviaux. On a par conséquent des isomorphismes $S_1 \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \simeq S_1 \times_{X(2)} S_2 \simeq S_2 \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$.

S'inspirant de cette observation, Fieseler **[17]** a montré que si S est surface affine normale complexe munie d'une action du groupe additif $\mathbb{C}_+ = \mathbb{G}_{a,\mathbb{C}}$, de quotient $\pi : S \to Z = S//\mathbb{C}_+$, où Z est une courbe affine non singulière, alors pour tout point fermé x_0 de X tel que la fibre schématique $\pi^{-1}(x_0)$ soit réduite et possède $n \geq 1$ composantes connexes, il existe un voisinage ouvert $X \subset Z$ de x_0 tel que S devienne une fibration localement triviale $\rho : S \to X(n)$ au dessus d'un schéma en général non séparé $X(n)$, obtenu à partir de X en remplaçant x_0 par n points fermés $x_1(n), \ldots, x_n(n)$. Plus précisément, on peut trouver une paire (X, f) constituée d'un voisinage affine $X = \operatorname{Spec}(A)$ de x_0 et d'un générateur f de l'idéal maximal $\mathfrak{m}_{x_0} \subset \mathcal{O}_{X,x_0}$, un multi-indice $[\mu] = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, et une collection de *fonctions de transition* $\tilde{g} = \{\tilde{g}_{ij} \in A_f\}_{i,j=1,\ldots,n}$ satisfaisant les relations de cocycle

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \tilde{g}_{ji} & = & -f^{\mu_j-\mu_i}\tilde{g}_{ij} \\ \tilde{g}_{ik} & = & \tilde{g}_{ij}+f^{\mu_i-\mu_j}\tilde{g}_{jk} \end{array} \right.$$

tels que S soit X-isomorphe au schéma quotient $\bigsqcup_{i=1}^{n} \mathbb{A}^1_{X_i}/\sim$ obtenu en recollant n-copies $\mathbb{A}^1_{X_i} = \mathrm{Spec}\,(A\,[T_i])$ de la droite affine relative $\mathbb{A}^1_X$ le long des ouverts $\mathbb{A}^1_{X_{i,*}} = \mathrm{Spec}\,(A_f\,[T_i])$ par l'intermédiaire des isomorphismes de A_f-algèbres

$$\tau_{ij} : A_f\,[T_i] \to A_f\,[T_j]\,, T_i \mapsto \tilde{g}_{ij} + f^{\mu_i-\mu_j}T_j, \quad i \neq j,\, i,j = 1,\ldots,n.$$

L'action du groupe $\mathbb{C}_+$ sur S est alors induite par l'action du groupe additif $\mathbb{G}_{a,X(n)}$ dont les restrictions $\mathbf{t}_{f^{\mu_i}} : \mathbb{G}_{a,X_i} \times_{X_i} \mathbb{A}^1_{X_i} \to \mathbb{A}^1_{X_i}$ aux ouverts $S\mid_{X_i} = \mathbb{A}^1_{X_i}$ de S sont les translations tordues définies via les homomorphismes de co-action

$$A\,[T_i] \to A\,[T_i,T] \simeq A\,[T_i] \otimes_A A\,[T]\,, T_i \mapsto T_i + f^{\mu_i}T, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Par exemple, les données correspondant aux surfaces S_1 et S_2 munies des restrictions des actions de $\mathbb{C}_+ = \mathbb{G}_{a,\mathbb{C}}$ sur $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ définies respectivement par

$$t \star (x,y,z) = \left(x, y+tx^i, z+(2y+1)\,t+x^it^2\right), \quad i=1,2,$$

ou encore, ce qui revient au même, par les $\mathbb{C}\,[x]$-dérivations localement nilpotentes $\partial_i = x^i\dfrac{\partial}{\partial y} + (2y+1)\dfrac{\partial}{\partial z}$, sont

$$\left\{ \begin{array}{lll} (X = \mathrm{Spec}\,(\mathbb{C}\,[x])\,, f=x)\,, & [\mu]_1 = (0,0)\,, & \tilde{g}_1 = \left\{-x^{-1}, x^{-1}\right\} \\ (X = \mathrm{Spec}\,(\mathbb{C}\,[x])\,, f=x)\,, & [\mu]_2 = (0,0)\,, & \tilde{g}_2 = \left\{-x^{-2}, x^{-2}\right\} \end{array} \right.$$

Ainsi, les morphismes quotients $\pi_i : S_i \to X \simeq S_i//\mathbb{C}_+$ se factorisent via les fibrations localement triviales $\rho_i : S_i \to X\,(2)$, où $X\,(2)$ est isomorphe à la droite affine à deux origines, obtenue en remplaçant l'origine x_0 de $X \simeq \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ par deux points fermés $x_1\,(2)$ et $x_2\,(2)$. On observe alors que S_i est un fibré principal homogène sous $\mathbb{G}_{a,X(2)}$ dont la restriction au-dessus de chacun des deux ouverts $X_j\,(2) = (X \setminus \{x_0\}) \cup x_j\,(2) \simeq X$, $j=1,2$, est isomorphe à $\mathbb{G}_{a,X_j(2)}$ agissant sur lui-même par translations. De la même manière,

$$(X = \mathrm{Spec}\,(k\,[x])\,, f=x)\,, \quad [\mu] = (0,1)\,, \quad \text{et} \quad \tilde{g} = \left\{-x^{-2}, x^{-1}\right\}.$$

sont les données correspondant à la surface $S_3 \subset \mathbb{A}^4_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}\,(\mathbb{C}\,[x,y,z,u])$ définie par les équations

$$xz - y\,(y+1) = 0, \quad yu - z^2 = 0 \quad , xu - (y+1)\,z = 0,$$

et munie de la restriction de l'action $\mathbb{C}_+$ sur $\mathbb{A}^4_{\mathbb{C}}$ associée à la $\mathbb{C}\,[x]$-dérivation triangulaire

$$\partial = x^2\frac{\partial}{\partial y} + x\,(2y+1)\,\frac{\partial}{\partial z} + ((y+1)\,(2y+1)+xz)\,\frac{\partial}{\partial u}$$

Dans ce cas, la fibration localement triviale $\rho_3 : S_3 \to X\,(2)$ factorisant le morphisme quotient $\pi_3 : S_3 \to X \simeq S_3//\mathbb{C}_+$ n'admet plus de structure de fibré principal homogène sous $\mathbb{G}_{a,X(2)}$. En effet, l'action $\mathbb{G}_{a,X(2)}$ définie ci-dessus a des points fixes le long de la courbe $\rho_3^{-1}\,(x_2\,(2))$ puisque $\mu_2 = 1$.

Un des objectifs de cette thèse est d'interpréter les analogies et les différences mises à jours ci-dessus entre les surfaces S_1, S_2 et S_3, afin de dégager, plus généralement, un formalisme unifié conduisant à une classification des surfaces affines obtenues en recollant plusieurs copies du plan affine $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ le long du complémentaire d'un axe de coordonnées suivant le procédé de construction exposé précédemment. Il apparaît très rapidement qu'une ré-interprétation adéquate des procédés de construction par recollements du type précédent permet de considérer ces surfaces, que nous appelons dans cette thèse *surfaces de Danielewski*, comme un cas particulier d'une classe plus générale de schémas, que nous appelons *schémas de Danielewski-Fieseler,* obtenus en recollant plusieurs copies d'un fibré en droites $p : L \to X$ sur un schéma de base X quelconque, le long du complétaire du support d'un diviseur de Cartier effectif D sur X.

Ainsi, cette thèse est consacrée principalement à l'étude des propriétés des schémas de Danielewski-Fieseler, le cas particulier des surfaces ne constituant alors plus qu'un exemple d'application des méthodes générales que nous développons tout au long de ce travail.

Philosophie générale. L'idée directrice de l'étude que nous menons dans cette thèse est la suivante : lorsque l'on s'intéresse uniquement à l'étude des variétés affines complexes admettant des actions du groupe additif $\mathbb{C}_+ = \mathbb{G}_{a,\mathbb{C}}$, il est judicieux de considérer le problème plus général consistant à étudier, étant donné un schéma de base X quelconque, les actions du schéma en groupes[1] additifs $\mathbb{G}_{a,X} = \mathbf{Spec}\,(\mathcal{O}_X\,[T])$ sur des X-schémas $\pi : V \to X$. Cet élargissement du point de vue est entre autre motivé par le fait que toute action du groupe additif $\mathbb{C}_+$ sur une variété affine $V = \mathrm{Spec}\,(B)$ admet un quotient $\pi : V \to X = V/\!/\mathbb{C}_+$, où $X = \mathrm{Spec}\,(A)$ est simplement le spectre de l'algèbre $A = B^{\mathbb{C}_+}$ des fonctions invariantes sur V. Dans ces conditions, le groupe additif $\mathbb{C}_+$ agit alors sur V par X-automorphismes, ce qui conduit à interpréter cette action comme une action du schéma en groupes additifs $\mathbb{G}_{a,X} = \mathrm{Spec}\,(A\,[T])$ sur V. Réciproquement, à partir d'un morphisme $p : V \to Y$, où Y est cette fois un $\mathbb{C}$-schéma quelconque, et d'une action non triviale de $\mathbb{G}_{a,Y} = \mathbb{G}_{a,\mathbb{C}} \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{C})} Y$ sur V, on fabrique une action de $\mathbb{C}_+$ sur V dont le quotient $\pi : V \to X$ factorise le morphisme $p : V \to Y$.

Une fois que l'on se place dans ce cadre relatif, il est intéressant de considérer la classe plus générale des schémas $\pi : V \to X$ admettant une action d'un fibré en droites $p : L \to X$. En effet, un tel fibré est canoniquement muni d'une structure de X-schéma en groupes, dont la loi correspond simplement à l'addition des sections. Formellement, les schémas avec action de $\mathbb{G}_{a,X}$ peuvent être considérés comme une version locale sur la base de la classe des schémas avec action de fibrés en droites L. En effet, tout schéma $\pi : V \to X$ muni d'une action de L devient après un changement de base adéquat, par exemple sur un recouvrement $f : Y \to X$ trivialisant L, un schéma $\pi_Y : V_Y \to Y$ muni d'une action du groupe additif $\mathbb{G}_{a,Y}$. Ainsi, le passage de $\mathbb{G}_{a,X}$ à un fibré en droites L quelconque ne provoque pas de changements significatifs, mais présente au final l'avantage de fournir un point de vue à la fois plus général et unifié.

Même si ce simple changement de formalisme apporte un éclairage nouveau sur certains phénomènes connus, il ne faut pas s'attendre à ce qu'il suffise à résoudre les problèmes posés par l'étude des actions de groupe additif sur les variétés affines. Ce formalisme n'en demeure pas moins bien adapté à l'étude d'un grand nombre de ces problèmes, et mériterait par conséquence un traitement plus systématique.

Objets considérés dans cette thèse. Dans le cadre de l'étude générale des schémas avec action d'un fibré en droites, les objets les plus agréables que l'on puisse considérer sont les fibrés principaux homogènes sous un fibré de ce type. Rappelons, de manière générale, qu'un X-schéma $\pi : V \to X$ muni d'une action (à droite) d'un X-schéma en groupes G est appelé un *G-fibré principal homogène*

[1] Rappelons qu'un X-schéma en groupes est un schéma G/X muni de trois X-morphismes $\mu : G \times_X G \to G$, $s : G \to G$ et $\mathrm{e} : X \to G$ satisfaisant formellement aux axiomes de la loi de composition, de l'application inverse et de l'élément neutre d'un groupe.

localement trivial (on dit aussi que X est un *G-torseur* Zariski-localement trivial[2]) s'il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (X_i)_{i \in I}$ de X tel que pour tout $i \in I$, $V\mid_{X_i}$ est isomorphe à $G\mid_{X_i}$ agissant sur lui-même par translation. Pour l'essentiel, les objets que nous étudions dans cette thèse sont construits à partir de torseur. Plus précisément, nous considérons des schémas $\pi : V \to X$, affines et de type finis sur X, munis d'une action d'un fibré en droites $p : L \to X$, pour lesquels il existe un X-schéma $\delta : Y \to X$, une factorisation

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \arrow[dl, "\delta"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

et une action d'un fibré en droites $q : L' \to Y$ sur V satisfaisant les propriétés suivantes :

a) $\rho : V \to Y$ est un torseur sous L', localement trivial pour la topologie de Zariski,

b) l'action induite de $\delta^* L = L \times_X Y$ sur V se factorise via un morphisme de schémas en groupes $\phi : \delta^* L \to L'$.

La classe de schémas ainsi définie contient les torseurs sous un fibré en droites $p : L \to X$, qui correspondent au cas particulier $Y = X$, $L' = L$ et $\phi = \mathrm{Id}_L$. Un autre cas intéressant est celui où $Y = X$ et où $\phi : L \to L'$ est induit par une section $s \in \mathrm{Hom}_X(\mathcal{L}', \mathcal{L})$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ désignant les faisceaux de germes de sections de L et L' respectivement. Par exemple, toute action du groupe additif $\mathbb{C}_+$ sur $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ correspond à une donnée de ce type. En effet, étant donnée une action μ de $\mathbb{C}_+$ sur $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, il existe, d'après un résultat de Rentschler [**40**], des coordonnées x et u sur $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ dans lesquelles μ s'identifie à la translation tordue $\mathbf{t}_f$ définie par $t \star (x, u) = (x, u + tf(x))$ pour un certain polynôme $f \in \mathbb{C}[x]$. Posons alors $X = Y = \mathrm{Spec}(k[x])$, $L = \mathbb{G}_{a,X}$ et

$$q : L' = \mathbf{Spec}\left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_X(-nD)\right) \to X,$$

où $D = \mathrm{div}(f)$. Dans ces conditions, $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{A}^1_X \simeq L'$ est alors un L'-torseur trivial et l'action μ de $\mathbb{C}_+$ s'obtient grâce au morphisme $\phi : \mathbb{G}_{a,X} \to L'$ induit par la section canonique $s_D \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) \simeq \mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_X(-D), \mathcal{O}_X)$.

Les surfaces S_1, S_2 et S_3 sont des exemples de la situation dans laquelle $Y \neq X$. En effet, S_1 et S_2 équipées de leurs morphismes quotients $\pi_i : S_i \to X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x])$ respectifs correspondent à la factorisation

$$\pi_i : S_i \xrightarrow{\rho_i} Y = X(2) \xrightarrow{\delta} X,$$

où δ est induit par l'isomorphisme $\Gamma\left(X(2), \mathcal{O}_{X(2)}\right) \simeq \mathbb{C}[x]$, et à la donnée d'un isomorphisme $\phi : \delta^* \mathbb{G}_{a,X} \xrightarrow{\sim} L' = \mathbb{G}_{a,X(2)}$. Le cas de S_3 munie de la factorisation

$$\pi_3 : S_3 \xrightarrow{\rho_3} Y = X(2) \xrightarrow{\delta} X$$

de son morphisme quotient est un rien plus subtil. En effet, $\rho_3 : S_3 \to X(2)$ est un torseur sous le fibré en droites

$$q : L' = L_{x_2(2)} = \mathbf{Spec}\left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_{X(2)}(-nx_2(2))\right) \to X(2)$$

[2]Une définition plus générale (cf. SGA 1 XI.4.1) consiste à dire qu'un G-torseur est un G-fibré $\pi : V \to X$ localement trivial pour une topologie de Grothendieck fixée, par exemple la topologie f.p.p.f. Cela signifie que V devient trivial après un changement de base fidèlement plat et de présentation finie. Le recours à cette définition est ici inutile, un argument standard de descente montrant en effet que les notions de trivialité f.p.p.f et Zariski sont équivalentes lorsque G est un fibré en droites.

défini par le $\mathcal{O}_{X(2)}$-module inversible $\mathcal{O}_{X(2)}(-x_2(2))$ associé au diviseur de Cartier $-x_2(2) \in \mathrm{Div}^+(X(2))$. Le morphisme $\phi : \delta^*\mathbb{G}_{a,X} \simeq \mathbb{G}_{a,X(2)} \to L'$ convenant est alors celui induit par la section canonique $s_{x_2(2)} \in \Gamma\left(X(2), \mathcal{O}_{X(2)}(x_2(2))\right)$. Plus généralement, les modèles locaux obtenus par un procédé de recollement "à la Fieseler" se prêtent à une interprétation analogue.

Le contexte général étant défini, cette thèse s'articule selon trois grandes parties, complétées par plusieurs annexes spécifiques, dont les grandes lignes sont les suivantes : la première partie établit les notations qui seront utilisées ensuite, ainsi que certains procédés techniques servant de préliminaire aux constructions des parties suivantes. La seconde partie est consacrée à l'étude des *schémas de Danielewski-Fieseler* dans le contexte le plus général possible. Enfin, la troisième et dernière partie traite le cas particulier des *surfaces de Danielewski*, et présente, entre autres, diverses constructions combinatoires équivalentes de ces surfaces. Chacune de ces parties se décompose à son tour de la manière suivante :

Première partie. Après un chapitre rappelant brièvement la notion de fibré vectoriel $p : \mathbf{V}(\mathcal{E}) = \mathbf{Spec}(\mathbf{S}(\mathcal{E})) \to X$ associé à un $\mathcal{O}_X$-module localement libre $\mathcal{E}$ suivant EGA II.1.7, le **chapitre 2** passe en revue certaines propriétés des fibrés linéaires affines, que nous définissons ici de la manière suivante :

DÉFINITION. Un *fibré linéaire affine* attaché à un fibré vectoriel $E = \mathbf{V}(\mathcal{E})$ est la donnée d'un E-torseur $\rho : W \to X$. Si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_X$-module inversible, on dit que $\rho : W \to X$ est un *fibré en droites affines*, ou encore, un *torseur en droites.*

Les fibrés linéaires affines ne constituant par définition qu'un cas particulier de la notion générale de torseur sous un schéma en groupes, nous tirons des résultats généraux concernant ces derniers, les propriétés adaptées à nos besoins, comme par exemple le résultat suivant :

THÉORÈME. (cf. [**35**, Proposition 4.6 p.123]) *Le groupe des classes d'isomorphisme de torseurs sous un fibré vectoriel $E = \mathbf{V}(\mathcal{E})$ associé à un $\mathcal{O}_X$-module localement libre $\mathcal{E}$ est isomorphe au groupe de cohomologie $H^1(X, \mathcal{E}^\vee)$.*

On observe en particulier que lorsque X est affine, le recours aux torseurs sous les fibrés vectoriels ne présente guère d'intérêt, puisque tous ceux-ci sont isomorphes au torseur trivial, c'est-à-dire à l'espace total du fibré vectoriel correspondant. Cela justifie en partie le recours à des bases non séparées comme la droite affine à deux origines $X(2)$. Par exemple, les surfaces S_1 et S_2 sont des torseurs non triviaux sous $\mathbb{G}_{a,X(2)}$ dont les classes d'isomorphismes $c(S_i) \in H^1\left(X(2), \mathcal{O}_{X(2)}\right)$ sont celles des 1-cocycles de Čech $g_i = -x^i \in C^1\left(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{X(2)}\right)$, $i = 1, 2$, où $\mathcal{U} = (X_1(2), X_2(2))$ désigne le recouvrement canonique de $X(2)$. De même, S_3 est un torseur non trivial sous $L_{x_2(2)}$, dont la classe d'isomorphisme $c(S_3) \in H^1\left(X(2), \mathcal{O}_{X(2)}(x_2(2))\right)$ est celle du 1-cocycle $-x^{-2} \in C^1\left(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{X(2)}(x_2(2))\right)$.

Nous introduisons aussi la notion de morphisme linéaire affine entre deux torseurs sous un fibré vectoriel, qui constitue au final une simple transposition de la notion d'application affine entre deux espaces affines attachés à un espace vectoriel.

DÉFINITION. Soit $\rho : W \to X$ (resp. $\rho' : W' \to X$) un $\mathbf{V}(\mathcal{E})$-torseur (resp. un $\mathbf{V}(\mathcal{E}')$-torseur). Un *morphisme linéaire affine* $\beta : W' \to W$ est la donnée d'une paire $(\mathbf{u}, o)$ constituée :

a) d'un morphisme de schémas en groupes $\mathbf{u} : \mathbf{V}(\mathcal{E}') \to \mathbf{V}(\mathcal{E})$ induit par un homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules $u : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$;

b) d'un X-morphisme $\mathbf{u}$-équivariant $o : W' \to W$.

Et nous donnons ensuite une caractérisation cohomologique de l'existence de ces morphismes, sous la forme suivante :

Proposition. (*Proposition* 2.3.2 page 32) *Pour qu'il existe un morphisme linéaire affine $\beta : W' \to W$ entre deux torseurs $\rho : W \to X$ et $\rho' : W' \to X$ sous des fibrés vectoriels respectifs $E = \mathbf{V}(\mathcal{E})$ et $E' = \mathbf{V}(\mathcal{E}')$, il faut et il suffit qu'il existe un homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules $u : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ tel que la classe d'isomorphisme $c(W) \in H^1(X, \mathcal{E}^\vee)$ de W soit l'image de la classe d'isomorphisme $c(W') \in H^1\left(X, (\mathcal{E}')^\vee\right)$ par l'homomorphisme de groupes*

$$^t u_* : H^1\left(X, (\mathcal{E}')^\vee\right) \to H^1(X, \mathcal{E}^\vee)$$

induit par l'homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules $^t u : (\mathcal{E}')^\vee \to \mathcal{E}^\vee$ dual de u.

Par exemple, puisque le diviseur $\delta^* x_0 = x_1(2) + x_2(2) \in \mathrm{Div}^+(X(2))$, où $\delta : X(2) \to X$, est principal, on peut considérer le $\mathbb{G}_{a,X}$-torseur $\rho_1 : S_1 \to X(2)$ comme un torseur sous le fibré en droites $L_{x_1(2)+x_2(2)} = \mathbf{V}\left(\mathcal{O}_{X(2)}(-x_1(2) - x_2(2))\right)$ dont la classe d'isomorphisme

$$[g_1] = \left[-x^{-2}\right] \in H^1\left(X(2), \mathcal{O}_{X(2)}(x_1(2) + x_2(2))\right) \simeq H^1\left(X(2), \mathcal{O}_{X(2)}\right)$$

est l'image de la classe d'isomorphisme $\left[-x^{-2}\right] \in H^1\left(X(2), \mathcal{O}_{X(2)}(x_2(2))\right)$ du $L_{x_2(2)}$-torseur $\rho_3 : S_3 \to X(2)$ par l'injection

$$^t u : \mathcal{O}_{X(2)}(x_2(2)) \to \mathcal{O}_{X(2)}(x_1(2) + x_2(2)).$$

Le morphisme linéaire affine $\beta : S_3 \to S_1$ correspondant à ces données s'identifie alors à la restriction de la projection

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^4_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y,z,u]) \arrow[r, "p_{x,y,z}"] & \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y,z]) \\
S_3 \arrow[u, hook] \arrow[r, "\beta"] & S_1 \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

De même, l'injection $^t u : \mathcal{O}_{X(2)} \to \mathcal{O}_{X(2)}(x_1(2) + x_2(2))$ correspond au morphisme linéaire affine $\beta : S_2 \to S_1$ défini par la restriction du X-morphisme

$$\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y,z]) \to \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y,z]), \quad (x,y,z) \mapsto (x,y,xz),$$

tandis que l'injection $^t u : \mathcal{O}_{X(2)} \to \mathcal{O}_{X(2)}(x_2(2))$ correspond au morphisme linéaire affine $\beta : S_2 \to S_3$ défini par la restriction du X-morphisme

$$\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y,x]) \to \mathbb{A}^4_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y,z,u]), \quad (x,y,z) \mapsto (x,y,xz,(y+1)z).$$

Le **chapitre 3** introduit le concept de *quasi-torseur sous un fibré en droites.* Il s'agit essentiellement de mettre en place un formalisme permettant d'interpéter agréablement la notion d'action d'un fibré en droites $L = \mathbf{V}(\mathcal{L})$ sur lui-même par une translation tordue $\mathbf{t}_f$ définie via l'homomorphisme co-action induit par l'homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules

$$\mathrm{Id} \otimes 1 + f \otimes \mathrm{Id} : \mathcal{L} \to \mathbf{S}(\mathcal{L}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbf{S}(\mathcal{L}), \quad f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X \cap \mathcal{K}_X^*)$$

généralisant le cas des actions de ce type du groupe additif $\mathbb{G}_{a,X}$ sur lui-même déjà rencontrées ci-dessus. Les quasi-torseurs sont à la fois définis et caractérisés par les résultats suivants (cf. Définition 3.1.2 page 38, Proposition 3.1.6 page 39 et Proposition 3.3.3 page 41).

Définition. Soit $L = \mathbf{V}(\mathcal{L})$ un fibré en droites défini par un $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}$. Un *L-quasi-torseur* (ou encore, *un fibré principal quasi-homogène sous* L) est un X-schéma $\rho : W \to X$ satisfaisant l'une des propriétés équivalentes suivantes :

a) il existe un fibré en droites $L' = \mathbf{V}(\mathcal{L}')$ tel que W soit un L'-torseur, et un homomorphisme régulier de $\mathcal{O}_X$-modules $u : \mathcal{L}' \to \mathcal{L}$.

b) il existe un diviseur de Cartier effectif $D \in \mathrm{Div}^+(X)$ tel que W soit un torseur sous le fibré en droites défini par le $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(-D)$.

c) W est muni d'une action de L pour laquelle il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (X_i)_{i \in I}$ de X et des éléments réguliers $f_i \in \Gamma(X_i, \mathcal{O}_X)$ tels que pour tout $i \in I$, $W|_{X_i}$ est isomorphe à $L|_{X_i}$ agissant sur lui-même par la translation tordue $\mathbf{t}_{f_i}$.

Par exemple, la surface S_2 munie de son morphisme $\rho_2(2) : S_2 \to X(2)$ est un quasi-torseur sous $\mathbb{G}_{a,X(2)}$ correspondant à la donnée de $\mathcal{L}' = \mathcal{O}_{X(2)}(-x_2(2))$ et de l'homomorphisme $u \in \mathrm{Hom}_{X(2)}(\mathcal{L}', \mathcal{O}_{X(2)}) \simeq \Gamma(X(2), \mathcal{O}_{X(2)}(x_2(2)))$ défini par la section canonique $s_{x_2(2)}$ de diviseur $x_2(2)$. Il n'y a pas unicité des structures de quasi-torseurs sur un schéma $\pi : W \to X$ donné. Par exemple, la surface $\rho_1(2) : S_1 \to X(2)$ peut aussi être équipée d'une structure de torseur sous le fibré en droites $L_{x_1(2)+x_2(2)}$. L'homomorphisme

$$u \in \mathrm{Hom}_{X(2)}(\mathcal{O}_{X(2)}(-x_1(2) - x_2(2)), \mathcal{O}_{X(2)}) \simeq \Gamma(X(2), \mathcal{O}_{X(2)}(x_1(2) + x_2(2)))$$

correspondant à la section canonique $s_{x_1(2)+x_2(2)}$ permet alors de munir S_1 d'une structure de $\mathbb{G}_{a,X(2)}$-quasi-torseur pour laquelle l'action de $\mathbb{G}_{a,X(2)}$ correspondante admet des points fixes le long des courbes $\rho_1^{-1}(2)(x_j(2)) \subset S_1$, $j = 1, 2$.

Le **chapitre 4** introduit une généralisation naturelle de la notion de modification affine de Kaliman et Zaidenberg [**32**], permettant de transférer une construction typique de la géométrie affine dans un cadre relatif. Plus précisément, étant donné un schéma de base X quelconque, nous considérons une classe de X-morphismes affines birationnels $\sigma : X' \to X$, obtenus en prenant le complémentaire dans l'éclatement $\bar{\sigma} : \bar{X}' \to X$ d'un sous schéma fermé Y de X de la transformée propre d'un diviseur de Cartier effectif $D \in \mathrm{Div}^+(X)$ dont le support contient le support de Y. Nous définissons ensuite la notion de *modification affine équivariante d'un quasi-torseur* $\pi : W \to X$ sous un fibré en droites L donné. On obtient ainsi une méthode générale permettant de construire des schémas $\pi' : W' \to X$ avec actions de L, et munis d'un X-morphisme affine birationnel équivariant $\sigma : W' \to W$. Par exemple, le morphisme $\psi : S_1 \to \mathbb{A}^1_X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x][y])$ induit par la restriction de la projection $pr_{x,y} : \mathbb{A}^2_X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x][y,z]) \to \mathbb{A}^1_X$ s'interprète en ces termes comme la modification affine $\mathbb{G}_{a,X}$-équivariante du $\mathbb{G}_{a,X}$-quasi-torseur $\mathbb{A}^1_X$ muni de l'action par la translation tordue $\mathbf{t}_x$ définie par $t \star (x,y) = (x, y + tx)$.

Dans le **chapitre 5**, nous passons en revue quelques propriétés générales des schémas $\pi : V \to X$ affine et de type fini sur X admettant une action d'un fibré en droite $p : L \to X$. Lorsque X, et par conséquent V, sont définis sur un corps k de caractéristique nulle, nous mettons à jour une analogie avec la correspondance bijective qui existe entre les actions du groupe additif $\mathbb{G}_{a,k}$ sur un schéma affine $\mathrm{Spec}(B)$ et les k-dérivations localement nilpotentes $\partial : B \to B$. Nous montrons en effet (Proposition 5.1.10 page 53) que sous les conditions ci-dessus, une action du fibré en droites $L = \mathbf{V}(\mathcal{L})$ sur V est uniquement déterminée par la donnée d'une $\mathcal{O}_X$-dérivation

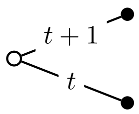
$$\partial : \mathcal{B} = \pi_* \mathcal{O}_V \to \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}$$

localement nilpotente, au sens que pour toute section locale b de $\mathcal{B}$ il existe un entier $n = n(b)$ tel que la composition

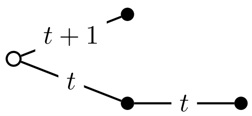
$$\left(\partial \otimes \mathrm{Id}^{\otimes(n-1)}\right) \circ \cdots \circ (\partial \otimes \mathrm{Id}) \circ \partial : \mathcal{B} \to \mathcal{B} \otimes S^n(\mathcal{L})$$

soit nulle. Le noyau $\mathcal{A} = \mathrm{Ker}(\partial)$ de la dérivation ∂ s'identifie alors à la sous-$\mathcal{O}_X$-algèbre de $\mathcal{B}$ dont les éléments sont les sections locales invariantes de $\mathcal{B}$, et l'on obtient ainsi une notion de quotient $q : V \simeq \mathbf{Spec}(\mathcal{B}) \to V//L = \mathbf{Spec}(\mathcal{A})$ qui généralise agréablement la situation connue pour le groupe additif.

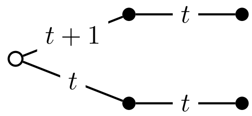
Enfin, dans le **chapitre 6** , qui clôt cette première partie, nous décrivons un procédé local permettant de construire des schémas avec actions de $\mathbb{G}_{a,X}$ à partir de données combinatoires. De manière plus précise, un corps k de caractéristique nulle, une k-algèbre intègre A et un élément non nul et non inversible $f \in A$ étant fixés, nous considérons des arbres $A[t]$-pondérés $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$, c'est-à-dire des arbres finis orientés Γ, munis d'une fonction de poids $w : E(\Gamma) \to A[t]$ de l'ensemble des arêtes de Γ à valeurs dans l'anneau de polynômes $A[t]$, où t est une variable. A chaque arbre de ce type, nous associons un sous-schéma fermé $V_{\mathfrak{g}} \subset \mathbb{A}^N_X = \mathrm{Spec}(A[\Gamma])$ d'un espace affine de base $X = \mathrm{Spec}(A)$ dont la dimension dépend uniquement de l'arbre sous-jacent Γ de $\mathfrak{g}$. Les générateurs de l'idéal $I_{\mathfrak{g}}$ de $V_{\mathfrak{g}}$ sont explicitement définis à partir des mineurs 2×2 d'une matrice $M_{\mathfrak{g}}$ déterminée par la fonction de poids w. Les schémas $V_{\mathfrak{g}}$ ainsi obtenus sont canoniquement munis d'une action du groupe additif $\mathbb{G}_{a,X}$ induite par la restriction d'une action sur l'espace affine ambiant $\mathbb{A}^N_X$, elle-même définie par une A-dérivation localement nilpotente explicite de l'algèbre de polynômes $A[\Gamma]$. Lorsque $A = \mathbb{C}[x]$ et $f = x$, les surfaces S_1, S_2 et S_3 font partie de la classe des schémas construits par ce procédé ; elles correspondent respectivement aux arbres $\mathbb{C}[x][t]$-pondérés $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ et $\mathfrak{g}_3$ suivants.



$\mathfrak{g}_1$



$\mathfrak{g}_3$



$\mathfrak{g}_2$

Seconde partie. Cette partie est consacrée aux schémas de Danielewski-Fieseler et s'articule selon le plan suivant. Le **chapitre 7** constitue une introduction à la théorie générale de ces schémas. L'observation principale conduisant à la définition des schémas de Danielewski-Fieseler est une ré-interprétation des procédés de recollement "à la Fieseler", c'est-à-dire, dans un contexte plus général, la technique consistant, étant donnée une paire $(X = \mathrm{Spec}(A), f \in A)$, où $f \in A$ est un élément régulier non inversible, un multi-indice $[\mu] = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ et des fonctions de transition $\tilde{g} = \{\tilde{g}_{ij} \in A_f\}_{i,j=1,\ldots,n}$, à former un X-schéma $\pi : W \to X$ en recollant plusieurs copies $\mathbb{A}^1_{X_i(n)} = \mathrm{Spec}(A[T_i])$ de la droite affine de base X par l'intermédiaire d'isomorphismes de A_f-algèbre

$$\tau_{ij} : A_f[T_i] \xrightarrow{\sim} A_f[T_j], T_i \mapsto \tilde{g}_{ij} + f^{\mu_i - \mu_j} T_i.$$

Nous expliquons en détail dans ce chapitre comment un schéma $\pi : W \to X$ s'interprète, en introduisant le X-schéma $\delta : X(n) \to X$ obtenu à partir de X en remplaçant le support de $D = \mathrm{div}(f)$ par n copies de ce même support, comme un torseur sous un fibré en droites $p : L_n \to X(n)$. Sans entrer dans les détails, disons que ce fibré en droites $L_n = \mathbf{V}(\mathcal{L}_n)$ est défini par les fonctions de transition $f_{ij} = f^{\mu_i - \mu_j} \in A^*_f$, et que la structure de L_n-torseur sur W provient du fait que la collection des éléments $g_{ij} = f^{-\mu_i} \tilde{g}_{ij} \in A_f$ s'identifie à un 1-cocycle de Čech à valeurs dans $\mathcal{L}_n^\vee$ pour le recouvrement canonique de $X(n)$ par les ouverts $X_i(n)$, $i = 1, \ldots, n$. Même si le passage aux torseurs n'est pas essentiel lorsque l'on travaille sur des bases affines, ce point de vue comporte plusieurs avantages. Tout d'abord l'introduction du fibré en droites L_n et du cocycle $g = \{g_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n}$ permet d'intégrer les fonctions $f_{ij} = f^{\mu_i - \mu_j}$ dans la donnée d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A_f[T_i] \arrow[r, "\tau_{ij}"] \arrow[d, "\wr"'] & A_f[T_j] \arrow[d, "\wr"] \\ \mathbf{S}(\mathcal{L}_n)\mid_{X_{ij}(n)} \arrow[r, "\mathbf{S}(g_{ij}, \mathrm{Id})"] & \mathbf{S}(\mathcal{L}_n)\mid_{X_{ij}(n)} \end{tikzcd}$$

où $X_{ij}(n) = X_i(n) \cap X_j(n) \simeq X_* = X \setminus \mathrm{Supp}(D)$ et où $\mathbf{S}(g_{ij}, \mathrm{Id})$ désigne l'homomorphisme de $\mathcal{O}_{X_*}$-algèbres induit par l'homomorphisme de $\mathcal{O}_{X_*}$-modules

$$g_{ij} \oplus \mathrm{Id}_{\mathcal{L}} : \mathcal{L}_n \mid_{X_*} \to \mathcal{O}_{X_*} \oplus \mathcal{L}_n \mid_{X_*} \hookrightarrow \mathbf{S}(\mathcal{L}) \mid_{X_*} .$$

On obtient ainsi une théorie unifiée des recollements ci-dessus. D'autre part, ce point de vue donne accès aux classes d'isomorphismes des schémas obtenus, qui s'interprètent alors par l'intermédiaire du groupe de cohomologie $H^1(X(n), \mathcal{L}_n^{\vee})$ des classes d'isomorphismes de L_n-torseurs sur $X(n)$.

Enfin, la possibilité d'intégrer les fonctions $f_{ij} = f^{\mu_i - \mu_j}$ dans la donnée du fibré en droites $p : L_n \to X(n)$ ouvre la voie à une généralisation naturelle de ces recollements, dans laquelle on remplace le schéma de base affine $X = \mathrm{Spec}(A)$ par un schéma quelconque, et le diviseur principal $D = \mathrm{div}(f)$ par un diviseur de Cartier effectif $D \in \mathrm{Div}^+(X)$. L'étape suivante consiste à remarquer que l'on peut remplacer le fibré en droites trivial $\mathbb{A}^1_X \to X$ dont on recolle des copies par n'importe quel torseur $\rho : V \to X$ sous un fibré en droites $L \to X$ donné. On arrive ainsi à la notion de *schéma de Danielewski-Fieseler* introduite dans le **chapitre 8**, dont une des définitions équivalentes est la suivante (Définition 8.2.3 page 79) :

DÉFINITION. Soit $(X, D, \mathcal{L}, V)$ un quadruplet constitué d'un schéma X, d'un diviseur effectif $D \in \mathrm{Div}^+(X)$, d'un $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}$ et d'un torseur $\rho : V \to X$ sous le fibré en droites $L = \mathbf{V}(\mathcal{L})$ défini par $\mathcal{L}$. Notons $X_* = X \setminus \mathrm{Supp}(D)$, $\delta : X(D, n) \to X$ le X-schéma obtenu à partir de X en remplaçant D par n-copies $D_i(n)$ de D, et $\mathcal{U} = (X_i(n))_{i=1,\ldots,n}$ le recouvrement canonique de $X(D, n)$ par les ouverts $X_i(n) = X_* \cup D_i(n) \simeq X$. Pour un multi-indice $[\mu] = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ donné, nous notons

$$\mathcal{L}_n[-\mu] = \delta^* \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_{X(n)}} \mathcal{O}_{X(n)} \left(- \sum_{i=1}^{n} \mu_i D_i(n) \right), \text{ et } L_n[-\mu] = \mathbf{V}(\mathcal{L}_n[-\mu]),$$

et nous désignons par $(\theta_{\mu_i})_* : H^1(X, \mathcal{L}^{\vee}) \to H^1(X, \mathcal{L}^{\vee} \otimes \mathcal{O}_X(\mu_i D))$ l'homomorphisme de groupes induit par l'homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules

$$\theta_{\mu_i} \in \mathrm{Hom}_X(\mathcal{L}^{\vee}, \mathcal{L}^{\vee} \otimes \mathcal{O}_X(\mu_i D)) \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(\mu_i D))$$

correspondant à la section canonique $s_{\mu_i D} \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(\mu_i D))$.

Dans ces conditions , on appelle *schéma de Danielewski-Fieseler de type* $(n, [\mu])$, *de base* (X, D), *attaché au* L*-torseur* $\rho : V \to X$ un X-schéma

$$\pi : W = W^{(n,[\mu])} \stackrel{\rho(n)}{\to} X(n) = X(D, n) \stackrel{\delta}{\to} X$$

où $\rho(n) : W \to X(D, n)$ est $L_n[-\mu]$-torseur tel que pour tout $i = 1, \ldots, n$, la classe d'isomorphisme $c_i \in H^1\left(X_i(n), \mathcal{L}_n[-\mu]^{\vee} \mid_{X_i(n)}\right) \simeq H^1(X, \mathcal{L}^{\vee} \otimes \mathcal{O}_X(\mu_i D))$ du $L[-\mu] \mid_{X_i(n)}$-torseur $W \mid_{X_i(n)}$ soit égale à l'image de la classe d'isomorphisme $c[V]$ du L-torseur $\rho : V \to X$ par l'homomorphisme $(\theta_{\mu_i})_*$.

Par exemple, les surfaces $\pi_i : S_i \stackrel{\rho_i}{\to} X(2) \stackrel{\delta}{\to} X$, $i = 1, 2, 3$, considérées plus haut sont des schémas de Danielewski-Fieseler de base $(X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x]), D = \mathrm{div}(x))$, attachés au $\mathbb{G}_{a,X}$-torseur trivial $\mathbb{A}^1_X$, de types $(2, (0, 0))$, $(2, (0, 0))$ et $(2, (0, 1))$ respectivement. Plus généralement, tous les schémas obtenus par un procédé de recollement "à la Fieseler" constituent des exemples de schémas de Danielewski-Fieseler attachés au $\mathbb{G}_{a,X}$-torseur trivial.

Un fait remarquable est que tout schéma de Danielewski-Fieseler $\pi : W \to X$ attaché à un L-torseur $\rho : V \to X$ est canoniquement muni d'une action du fibré en droites L, induite par la structure de $\delta^* L$-quasi-torseur sur $\rho(n) : W \to X(n)$ correspondant à l'homomorphisme

$$u \in \mathrm{Hom}_{X(n)}(\mathcal{L}_n[-\mu], \delta^* \mathcal{L}) \in \Gamma\left(X(n), \mathcal{O}_{X(n)}\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i D_i(n)\right)\right)$$

défini par la section canonique $s_{[\mu]} \in \Gamma\left(X(n), \mathcal{O}_{X(n)}\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i D_i(n)\right)\right)$. On retrouve dans ce contexte les propriétés déjà observées sur les surfaces S_1, S_2 et S_3. Toujours dans le chapitre 8, nous introduisons les morphismes de schémas de Danielewski-Fieseler $\beta : W' \to W$ (Définition 8.3.2 page 81), qui constituent une sous-classe des morphismes L-équivariants pour les actions canoniques sur W et W' respectivement. Cela permet de définir une catégorie $\mathfrak{D}^{(\mathcal{L},V)}_{/(X,D)}$ des schémas de Danielewski-Fieseler attachés à un L-torseur $\rho : V \to X$ donné.

Le **chapitre 9** est consacré à une étude plus détaillée des schémas de Danielewski-Fieseler $\pi : W \to X$ attachés à un fibré en droites $p : L = \mathbf{V}(\mathcal{L}) \to X$ considéré comme un L-torseur trivial. Les schémas de ce type constituent des modèles locaux des schémas de Danielewski-Fieseler généraux. Ils ont la propriété d'être uniquement déterminés, à isomorphisme près, par la donnée d'un 1-cocyle de Čech $g = \{g_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n} \in C^1\left(\mathcal{U}, \mathcal{L}_n[-\mu]^{\vee}\right)$ à valeurs dans $\mathcal{L}_n[-\mu]^{\vee}$ pour le recouvrement canonique $\mathcal{U} = (X_i(n))_{i=1,\ldots,n}$ de $X(n)$. En effet, suivant un procédé de construction standard (cf. [**35**, Remarque 4.4 p. 121]), un tel cocycle permet de définir, en recollant les $\mathcal{O}_{X_i(n)}$-algèbres symétriques $\mathbf{S}\left(\mathcal{L}_n[-\mu]\mid_{X_i(n)}\right)$ au-dessus des intersections $X_{ij}(n)$ via les isomorphismes $\mathcal{O}_{X_{ij}(n)}$-algèbres

$$\mathbf{S}(g_{ij}, \mathrm{Id}) : \mathbf{S}\left(\mathcal{L}_n[-\mu]\mid_{X_{ij}(n)}\right) \stackrel{\sim}{\to} \mathbf{S}\left(\mathcal{L}_n[-\mu]\mid_{XY_{ij}(n)}\right), \quad i \neq j,\ i,j = 1,\ldots,n,$$

une $\mathcal{O}_{X(n)}$-algèbre quasi-cohérente $\mathcal{B}$ dont le spectre

$$\rho(n) : \mathbf{W}(\mathcal{U}, \mathcal{L}_n[-\mu], g) = \mathbf{Spec}(\mathcal{B}) \to X(n)$$

est canoniquement muni d'une structure de $L_n[-\mu]$-torseur. En vertu de la correspondance bijective entre les classes d'isomorphismes de $L_n[-\mu]$-torseurs et les éléments du groupe $H^1\left(X(n), \mathcal{L}_n[-\mu]^{\vee}\right)$, on voit que tout schéma de Danielewski-Fieseler de type $(n, [\mu])$, attaché au L-torseur trivial est $X(n)$-isomorphe à un schéma construit par ce procédé. Parmi les représentants d'une classe d'isomorphisme donnée, nous nous intéressons aux cocycles

$$g_{(\lambda,\sigma)} = \{g_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n} \in C^1\left(\mathcal{U}, \mathcal{L}_n[-\mu]^{\vee}\right)$$

satisfaisant une égalité de la forme

$$\theta_{[\mu],\lambda}\left(g_{(\lambda,\sigma)}\right) = \partial(\sigma) \in C^1\left(\mathcal{U}, \delta^*\left(\mathcal{L}^{\vee} \otimes \mathcal{O}_X(\lambda D)\right)\right)$$

où (λ, σ) est une paire constituée d'un entier $\lambda \geq \max_{i=1,\ldots,n}(\mu_i)$ et d'une 0-cochaîne de Čech $\sigma \in C^0\left(\mathcal{U}, \delta^*\left(\mathcal{L}^{\vee} \otimes \mathcal{O}_X(\lambda D)\right)\right) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(\lambda D))$, et où l'homomorphisme $\theta_{[\mu],\lambda} \in \mathrm{Hom}_{X(n)}\left(\mathcal{L}_n[-\mu]^{\vee}, \delta^*(\mathcal{L}^{\vee}) \otimes \mathcal{O}_X(\lambda D)\right)$ correspond à la section canonique

$$s_{\lambda-[\mu]} \in \Gamma\left(X(n), \mathcal{O}_{X(n)}\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda - \mu_i) D_i(n)\right)\right).$$

Autrement dit, les sections $g_{ij} \in \Gamma\left(X_i(n) \cap X_j(n), \mathcal{L}_n[-\mu]^{\vee}\right)$ sont définies par les égalités

$$\theta_{[\mu],\lambda}(g_{ij}) = \sigma_j\mid_{X_i(n)} - \sigma_i\mid_{X_j(n)}, \quad i \neq j,\ i,j = 1,\ldots,n.$$

Nous montrons en particulier le résultat suivant (Théorème 9.1.8 page 86).

THÉORÈME. *Tout schéma de Danielewski-Fieseler $\pi : W \to X$ de type $(n, [\mu])$, de base (X, D), attaché à la paire $(\mathcal{L}, L)$, est isomorphe à un schéma*

$$\pi : W^{(n,[\mu])}_{(\lambda,\sigma)} = \mathbf{W}\left(\mathcal{U}, \mathcal{L}_n[-\mu], g_{(\lambda,\sigma)}\right) \xrightarrow{\rho(n)} X(n) \xrightarrow{\delta} X$$

défini par une paire (λ, σ). *De plus, un tel isomorphisme* $W \simeq W_{(\lambda,\sigma)}^{(n,[\mu])}$ *est uniquement déterminé par la donnée d'un morphisme de schémas de Danielewski-Fieseler* $\beta : W \to \mathbf{V}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(-\lambda D))$.

Par exemple, la surface S_3 munie du morphisme de schémas de Danielewski-Fieseler

$$\beta : S_3 \to \mathbb{A}_X^1 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x][y]) \simeq \mathbf{V}(\mathcal{O}_X(-\mathrm{div}(x)))$$

induit par la restriction de la projection $pr_y : \mathbb{A}_X^3 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x][y,z,u]) \to \mathbb{A}_X^1$ correspond à la paire

$$(\lambda, \sigma) = \left(2, \left\{\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -x^{-2}\right\}\right) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \Gamma(X, \mathcal{O}_X(2x_0))^2$$

qui satisfait effectivement l'égalité

$$\theta_{(0,1),2}(g_{12}) = (\sigma_2 - \sigma_1) \in C^1\left(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{X(2)}(2(x_1(2) + x_2(2)))\right).$$

Le reste du chapitre est consacré à l'étude des classes d'isomorphismes des schémas de Danielewski-Fieseler de la forme $W_{(\lambda,\sigma)}^{(n,[\mu])}$ ainsi qu'à la description d'un procédé de construction explicite de morphismes de schémas de Danielewski-Fieseler entre deux schémas de ce type.

Un des problèmes qui se posent lorsque l'on construit des schémas par recollement est celui de la séparation. En effet, si l'on ne respecte pas certaines conditions sur les isomorphismes de recollement, on obtient en général des schémas non séparés, comme par exemple la droite affine à deux origines. Pour les schémas de Danielewski-Fieseler $\pi : W \to X$ le problème ne se pose pas exactement en ces termes, puisque, dans notre approche, le schéma de base X n'est pas nécessairement séparé. Il s'agit donc de déterminer des conditions garantissant que le morphisme structural $\pi : W \to X$ est séparé. Cette question est traitée au **chapitre 10**, où nous obtenons la caractérisation suivante (Proposition 10.1.2 page 96 et Théorème 10.2.1 page 98) qui généralise un résultat de Fieseler [**17**, Proposition 1.4] valable pour les schémas de Danielewski-Fieseler de base $(X = \mathrm{Spec}(A), h)$, où A est un anneau de Dedekind et h est un générateur d'un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A.

Théorème. *Soit* $\pi : W \to X$ *un schéma de Danielewski-Fieseler de base* (X, D), *attaché à un torseur* $\rho : V \to X$ *sous un fibré en droites* $p : L = \mathbf{V}(\mathcal{L}) \to X$. *Si* X *est localement factoriel, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $\pi : W \to X$ *est un morphisme séparé,*

b) $\pi : W \to X$ *est un morphisme affine,*

c) il existe un recouvrement de X *par des ouverts affines* $U_\alpha = \mathrm{Spec}(A_\alpha)$ *et des éléments réguliers non inversibles* $f_\alpha \in A_\alpha$ *tels que pour tout* α, $W|_{U_\alpha}$ *est isomorphe à un schéma de Danielewski-Fieseler de base* (U_α, f_α) *défini par une collection de fonctions de transition* $\tilde{g}_\alpha = \left\{\tilde{g}_{\alpha,ij} \in (A_\alpha)_{f_\alpha}\right\}_{i,j=1,\ldots,n}$ *pour lesquelles les sous* A_α*-algèbres* $A_\alpha[\tilde{g}_{\alpha,ij}]$ *et* $A_\alpha[\tilde{g}_{\alpha,ji}]$ *de* $(A_\alpha)_{f_\alpha}$ *engendrées respectivement par* $\tilde{g}_{\alpha,ij}$ *et* $\tilde{g}_{\alpha,ji}$ *sont égales à* $(A_\alpha)_{f_\alpha}$.

Comme conséquence de la démonstration du théorème ci-dessus, on obtient la description suivante (Théorème 10.2.7 page 101) qui généralise la situation déjà observée ci-dessus pour les surfaces S_i, $i = 1, 2, 3$.

Théorème. *Un schéma de Danielewski-Fieseler* $\pi : W \to X$ *de base* (X, D), *attaché au torseur trivial* $\rho : L \to X$ *sous un fibré en droites* $L = \mathbf{V}(\mathcal{L})$ *tel que* π *est affine, est isomorphe à une modification affine* L*-équivariante du* L*-quasi-torseur* $L(-\lambda) = \mathbf{V}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(-\lambda D))$ *pour un certain entier* $\lambda \geq 1$.

Dans le **chapitre 11** qui termine la seconde partie, nous revenons sur les schémas affines $\pi : V_{\mathfrak{g}} \to X = \mathrm{Spec}(A)$ définis par des arbres $A[t]$-pondérés $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$ pour montrer le résultat suivant (Théorème 11.2.1 page 106) :

Théorème. *Soit k un corps de caractéristique nulle et soit (A, f) une paire constituée d'une k-algèbre intègre et d'un élément $f \in A$ non nul et non inversible. Soit $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$ un arbre $A[t]$-pondéré dont la fonction de poids $w : E(\Gamma) \to A[t]$ satisfait les hypothèses suivantes :*

a) pour toute arête $\overrightarrow{ee'}$ de Γ il existe $a_{ee'} \in A$ tel que $w\left(\overrightarrow{ee'}\right) = a_{ee'} + t \subset A[t]$,

b) pour tout couple e_1, e_2 de fils [3] d'un même sommet e' de Γ, les coefficients $a_{e_1,e'}$ et $a_{e_2,e'}$ engendrent l'idéal unité de A et l'image de $a_{e_1e'} - a_{e_2e'}$ dans A/fA est un élément inversible,
Alors le schéma $V_{\mathfrak{g}}$ est un schéma de Danielewski-Fieseler de base $(X, div(f))$, associé au $\mathbb{G}_{a,X}$-torseur trivial $\mathbb{A}^1_X$.

Troisième partie. La troisième et dernière partie de cette thèse est consacrée aux surfaces de Danielewski. Selon [**1**], [**7**], ou encore [**1, 7, 19**], ce terme désigne habituellement une surface isomorphe à une hypersurface de l'espace affine $\mathbb{A}^3_k = \text{Spec}(k[x, y, z])$ définie par une équation de la forme $x^n z - P(y) = 0$. Certains auteurs réservent parfois cette terminologie aux seules surfaces lisses. Nous introduisons dans cette thèse la définition suivante, plus conforme à l'esprit initial de l'article de Danielewski :

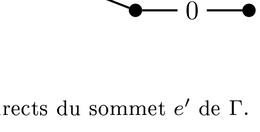
Définition. Une *k-surface de Danielewski* est un schéma affine isomorphe à un schéma de Danielewski-Fieseler de base $(X = \text{Spec}(k[x]), x_0 = \text{div}(x))$ attaché au $\mathbb{G}_{a,X}$-torseur trivial $p : \mathbb{A}^1_X \to X$.

Les surfaces S_1 et S_2 sont des surfaces de Danielewski au sens ci-dessus, et il en est plus généralement de même de toutes les hypersurfaces $x^n z - P(y) = 0$, où $P \in k[y]$ est un polynôme non constant, scindé, à racines simples dans k. La surface S_3 est aussi une surface de Danielewski mais n'est pas isomorphe à une hypersurface de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ du type précédent. On peut en effet vérifier que le module canonique ω_{S_3} de S_3 n'est pas trivial. Ainsi la notion de surface de Danielewski introduite dans cette thèse généralise substantiellement celle précédemment en vigueur.

Dans le **chapitre 12**, nous donnons une classification combinatoire des surfaces de Danielewski. Pour cela, nous introduisons la classe des arbres finis orientés k-pondérés γ, c'est-à dire, des arbres Γ munis d'une fonction de poids $w : E(\Gamma) \to k$ qui associe un élément $w\left(\overrightarrow{ee'}\right) \in k$ à toute arête $\overrightarrow{ee'}$. Nous montrons que si $\gamma = (\Gamma, w)$ est *finement pondéré*, ce qui signifie que $w(\overrightarrow{e_1e}) \neq w(\overrightarrow{e_2e})$ pour tout couple e_1, e_2 de fils d'un même sommet e de Γ, alors il est possible d'associer à γ une k-surface de Danielewski $S(\gamma)$ sous la forme d'un schéma de Danielewski-Fieseler

$$\pi : S(\gamma) = W^{(n,[\mu(\gamma)])}_{(h(\Gamma),\tilde{\sigma}(\gamma))} \overset{\rho(n)}{\to} X(n) \overset{\delta}{\to} X,$$

où $h(\Gamma)$ et n désignent respectivement la hauteur et le nombre de feuilles de l'arbre Γ, où le multi-indice $[\mu(\gamma)]$ dépend de $h(\Gamma)$ et de la longueur des sous-chaînes maximales de Γ, et où la 0-cochaîne $\sigma = \{\sigma_i \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(h(\Gamma)x_0))\}_{i=1,\ldots,n}$ est définie à partir de la fonction de poids w. Par exemple, la surface de Danielewski S_3 est obtenu à partir de l'arbre finement k-pondéré $\gamma_3 = (\Gamma_3, w_3)$ suivant :

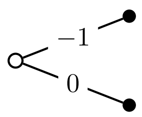
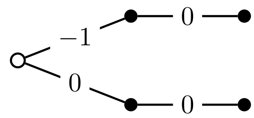
$\gamma_3 =$ 

[3]C'est-à-dire de descendants directs du sommet e' de Γ.

en posant tout d'abord $\mu_i = h(\Gamma) - l(\downarrow e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i=1 \\ 1 & \text{si } i=2 \end{cases}$, où $l(\downarrow e_i)$ désigne la longueur du plus court chemin joignant e_i à la racine e_0 de Γ_3 puis

$$\sigma_1 = x^{-2}\left(w\left(\overrightarrow{e_{0,1}e_0}\right) + w\left(\overrightarrow{e_1 e_{0,1}}\right)x\right) = 0, \quad \text{et} \quad \sigma_2 = x^{-2}w\left(\overrightarrow{e_1 e_0}\right) = -x^{-2}.$$

Les surfaces de Danielewski S_1 et S_2 sont obtenues selon le même procédé à partir des arbres finement k-pondérés $\gamma_1 = (\Gamma_1, w_1)$ et $\gamma_2 = (\Gamma_2, w_2)$ suivants :

$\gamma_1 =$  $\gamma_2 =$ 

Plus généralement, nous établissons le résultat suivant (Théorème 12.2.7 page 123) :

Théorème. *Toute surface de Danielewski est X-isomorphe à une surface $\pi : S(\gamma) \to X$ définie par un arbre finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$.*

Nous montrons ensuite que les classes d'isomorphismes de surfaces de Danielewski peuvent être déterminées à partir de la combinatoire des arbres finement k-pondérés γ. Pour cela, nous introduisons la notion d'équivalence d'arbres finement k-pondérés suivante (Définition 12.3.2 page 125) :

Définition. Deux arbres finement k-pondérés $\gamma = (\Gamma, w)$ et $\gamma' = (\Gamma', w')$ sont dit ***équivalents***, s'il existe un isomorphisme d'arbres $\eta : \mathrm{Es}(\Gamma) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Es}(\Gamma')$ entre les sous-arbres maximaux de Γ et Γ' enracinés en le premier ancêtre commun des feuilles de Γ et Γ' respectivement, un élément $a \in k^*$ et une collection $\tilde{b} = \{b_i \in k\}_{i=0,\ldots,h-1}$, où $h = h(\mathrm{Es}(\Gamma))$ désigne la hauteur de l'arbre $\mathrm{Es}(\Gamma)$ tels que

$$w'\left(\overrightarrow{\eta(e_{i+1})\,\eta(e_i)}\right) = aw\left(\overrightarrow{e_{i+1}e_i}\right) + b_i, \quad i = 0, \ldots, h-1$$

pour tout arête $\overrightarrow{e_{i+1}e_i}$ de $\mathrm{Es}(\Gamma)$ joignant deux sommets e_{i+1} et e_i aux niveaux $i+1$ et i respectivement.

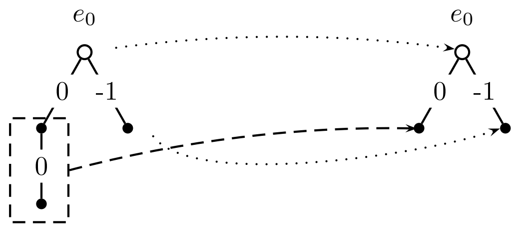
Nous établissons le critère d'isomorphie suivant (Théorème 12.3.4 page 125) :

Théorème. *Pour que deux surfaces de Danielewski $S(\gamma)$ et $S(\gamma')$, définies par des arbres finement k-pondérés $\gamma = (\Gamma, w)$ et $\gamma' = (\Gamma', w')$ respectivement, soient des X-schémas isomorphes, il faut et il suffit que γ et γ' soient équivalents.*

Les arbres γ_1, γ_2 et γ_3 n'étant pas deux à deux équivalents, on déduit par exemple de ce résultat que les surfaces de Danielewski S_1, S_2 et S_3 sont des X-schémas non isomorphes[4].

Le **chapitre 13** est consacré à l'étude des *morphismes de surfaces de Danielewski* (Définition 13.1.1 page 133), c'est à dire des X-morphismes birationnels $\beta : S' \to S$ dont la restriction au-dessus de $X_* = X \setminus \{x_0\}$ est un X_*-isomorphisme. Nous montrons que tout morphisme $\beta : S(\gamma') \to S(\gamma)$ de ce type entre deux surfaces de Danielewski définies par des arbres finement k-pondérés γ' et γ est uniquement déterminé par la donnée d'un *morphisme d'arbres finement k-pondérés* $\tau : \gamma' \to \gamma$. Un tel morphisme est défini comme la contraction d'un sous-arbre de γ' sur un sommet de γ, de manière compatible avec les fonctions de poids de γ et γ' respectivement. Par exemple le morphisme $\beta : S_3 \to S_1$ induit par la restriction de la projection $pr_{x,y,z} : \mathbb{A}^4_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ correspond au morphisme d'arbres finement k-pondérés $\tau : \gamma_3 \to \gamma_1$ suivant :

[4]Cela n'empêche cependant pas, *a priori*, que S_1 et S_2 soient isomorphes comme schémas abstraits.



Nous déduisons de cette description le résultat suivant, qui permet de ramener l'étude des surfaces de Danielewski à celle de la combinatoire des arbres finement k-pondérés (Théorème 13.2.9 page 138) :

THÉORÈME. *La catégorie relative* $\overrightarrow{\mathfrak{Ds}}$ *dont les objets sont les morphismes de surfaces de Danielewski* $\mathfrak{S} = \left(\psi : S \to \mathbb{A}^1_X\right)$ *et dont les morphismes* $\mathfrak{b} : \mathfrak{S}' \to \mathfrak{S}$ *sont les morphismes de surfaces de Danielewski* $\beta : S' \to S$ *tels que* $\psi' = \psi \circ \beta$*, est équivalente à la catégorie* $\mathcal{T}^k_{w,f}$ *des arbres finement* k*-pondérés.*

Nous mettons finalement à profit la correspondance obtenue entre les morphismes de surfaces de Danielewski et les contractions de sous-arbres pour donner un procédé de construction de complétions relatives équivariantes d'une surface de Danielewski (Théorème 13.4.6 page 145).

THÉORÈME. *Pour toute surface de Danielewski* $\pi : S = S(\gamma) \to X$ *définie par un arbre finement* k *-pondéré* $\gamma = (\Gamma, w)$*, il existe un* X*-schéma projectif régulier* $\bar{\pi} : \bar{S} \to X$ *et une immersion ouverte* $i : S \hookrightarrow \bar{S}$ *satisfaisant les propriétés suivantes :*

a) la restriction de $\bar{S}$ *au dessus de* X_* *est isomorphe au fibré trivial* $\mathbb{P}^1_{X_*}$*,*

b) la fibre schématique $\bar{F} = \bar{\pi}^{-1}(x_0) \subset \bar{S}$ *est un diviseur réduit, à croisements normaux simples dont toutes les composantes irréductibles sont isomorphes à* $\mathbb{P}^1_k$ *et dont le graphe dual* $\Gamma\left(\bar{F}\right)$ *est isomorphe à l'arbre* Γ*.*

c) le support du diviseur $\bar{S} \backslash i(S)$ *est la réunion d'une section* Y_0 *de* $\bar{\pi} : \bar{S} \to X$ *et d'un sous-ensemble de composantes irréductibles* $\bar{C}$ *de* $\bar{F}$ *dont le graphe dual* $\Gamma\left(\bar{C}\right)$ *est isomorphe au sous-arbre* $\Gamma \setminus Fe(\Gamma)$ *de* Γ*, c'est à dire au sous-arbre de* Γ *dont les sommets sont les sommets de* Γ *qui ne sont pas des feuilles de* Γ*.*

De plus, pour tout $\mathbb{G}_{a,X}$*-action sur* S*, il existe une* $\mathbb{G}_{a,X}$*-action sur* $\bar{S}$ *rendant l'immersion ouverte* $i : S \hookrightarrow \bar{S}$ *équivariante.*

Au **chapitre 14**, nous comparons les deux techniques de construction de surfaces de Danielewski à partir d'arbres pondérés. En effet, outre les surfaces de Danielewski $S(\gamma)$ définies à partir d'arbres finement k-pondérés $\gamma = (\Gamma, w)$, les résultats des chapitres 6 et 11 montrent que certains arbres $k[x][t]$-pondérés $\mathfrak{g} = (\Gamma, \tilde{w})$ correspondent à des surfaces de Danielewski $V_{\mathfrak{g}}$ plongées dans un espace affine $\mathbb{A}^N_X$ au-dessus de X. Nous montrons dans ce chapitre que toute surface de Danielewski $S(\gamma)$ admet un plongement dans $\mathbb{A}^N_X$, où N dépend de γ, sous la forme d'un schéma $V_{\mathfrak{g}}$. Cela conduit en particulier au théorème de comparaison suivant (Théorème 14.1.8 page 150) :

THÉORÈME. *Pour toute surface de Danielewski* $\pi : S \to X$*, il existe un arbre* Γ *muni de fonctions de poids* $w : E(\Gamma) \to k$ *et* $\tilde{w} : E(\Gamma) \to A[t]$*, et des* X*-isomorphismes* $S(\gamma) \simeq S \simeq V_{\mathfrak{g}}$*.*

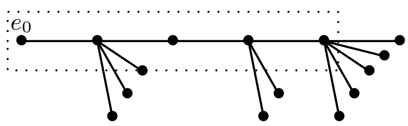
En comparant ensuite la structure des actions du groupe additif $\mathbb{G}_{a,X}$ sur les surfaces de Danielewski $S(\gamma)$ et $V_{\mathfrak{g}}$, nous obtenons le résultat suivant (Théorème 14.2.18 page 158) qui assure que toute surface de Danielewski S admet un plongement dans un espace affine $\mathbb{A}^N_X$ de telle sorte que *toute* action du X-groupe additif $\mathbb{G}_{a,X}$ sur S provienne de la restriction d'une action sur $\mathbb{A}^N_X$.

Théorème. *Pour toute surface de Danielewski $\pi : S \to X$ non isomorphe à $\mathbb{A}^1_X$, il existe un entier $N = N(S) \geq 2$ et un plongement fermé $\phi : S \hookrightarrow \mathbb{A}^N_X$, tels que pour toute $\mathbb{G}_{a,X}$-action sur S, il existe une $\mathbb{G}_{a,X}$-action sur $\mathbb{A}^N_X$ faisant de ϕ un plongement équivariant.*

Le **chapitre 15** traite des surfaces de Danielewski dont l'*invariant de Makar-Limanov* est trivial. Rappelons que cet invariant, introduit par Makar-Limanov [**31**], est défini, pour une k-variété affine $V = \mathrm{Spec}(B)$, comme la sous-algèbre $ML(V)$ de B dont les éléments sont les fonctions invariantes par toutes les actions du groupe additif $\mathbb{G}_{a,k}$ sur V. Lorsque k est de caractéristique nulle, $ML(V)$ s'identifie à l'intersection dans B des noyaux des k-dérivations localement nilpotentes de B. Si V est une surface, on sait que l'invariant de Makar-Limanov $ML(V)$ est trivial si et seulement si V admet deux $\mathbb{G}_{a,k}$-actions *indépendantes*, c'est-à-dire deux actions dont les orbites générales sont distinctes. Lorsque le corps de base est algébriquement clos, de caractéristique nulle, nous avons établi dans [**13**] la caractérisation géométrique suivante, qui généralise des résultats antérieurs de Bandman et Makar-Limanov [**1**], Bertin [**2**] et Gizatullin [**20**] valables pour des surfaces non singulières.

Théorème. *Une surface affine normale S/k, définie sur un corps algébriquement clos $k = \bar{k}$ de caractéristique nulle et non isomorphe à $\left(\mathbb{A}^1_k\right)_* \times \mathbb{A}^1_k$, où $\left(\mathbb{A}^1_k\right)_* = \mathrm{Spec}\left(k\left[x, x^{-1}\right]\right)$, a un invariant de Makar-Limanov trivial si et seulement si S admet une complétion $\bar{S}$ telle que le diviseur de bord $B = \bar{S} \setminus S$ soit une chaîne de courbes rationnelles lisses. Si cela est le cas, alors, pour toute complétion minimale $\bar{S}'$ de S, le bord $B' = \bar{S}' \setminus S$ possède cette propriété.*

Ce critère géométrique nous permet d'obtenir une caractérisation combinatoire des k-surfaces de Danielewski dont l'invariant de Makar-Limanov est trivial. Nous introduisons pour cela la classe particulière des arbres Γ dont le sous-arbre $\Gamma \setminus \mathrm{Fe}(\Gamma)$ constitué des sommets de Γ qui ne sont pas des feuilles est une chaîne. Un arbre de ce type est appelé un *peigne*.



Un peigne enraciné en e_0.

Nous établissons la caractérisation suivante (15.1.1 page 162) :

Théorème. *Soit k un corps* quelconque *de caractéristique nulle. Alors l'invariant de Makar-Limanov d'une k-surface de Danielewski $\pi : S \to X$ est trivial si et seulement si S est isomorphe à une surface de Danielewski $S(\gamma)$ définie par un peigne finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$.*

Par exemple, les surfaces S_1 et S_3 ont un invariant de Makar-Limanov trivial, puisqu'elles correspondent respectivement aux peignes γ_1 et γ_3 ci-dessus. Par contre, l'invariant de Makar-Limanov de S_2 n'est pas trivial. Par conséquent S_1 n'est pas isomorphe à S_2. Comme cas particulier de ce théorème, on retrouve le résultat de Makar-Limanov [**34**] qui dit qu'une surface de Danielewski $S_{P,n} \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ de la forme $x^n z - P(y) = 0$ a un invariant de Makar-Limanov trivial si et seulement si $n = 1$.

Dans [**8**], Daigle montre que toutes les $\mathbb{G}_{a,k}$-actions sur une surface de Danielewski S_P de la forme $xz - P(y) = 0$, où $P \in k[y]$ est un polynôme non constant, scindé, à racines simples dans k, sont *conjuguées,* au sens que pour tout couple de $\mathbb{G}_{a,k}$-action $\xi_i : \mathbb{G}_{a,k} \times S \to S$, $i = 1, 2$, il existe un automorphisme $\phi : S \xrightarrow{\sim} S$ tels que les orbites générales des actions ξ_1 et $\phi \circ \xi_2$ coïncident. Nous établissons dans cette thèse le résultat suivant (Théorème 15.2.3 page 167), qui montre que cette propriété très spéciale suffit à caractériser les surfaces de Danielewski de la forme S_P.

THÉORÈME. *Toute k-surface de Danielewski d'invariant de Makar-Limanov trivial et non isomorphe à une surface S_P admet deux $\mathbb{G}_{a,k}$-actions indépendantes non conjuguées.*

Sous certaines hypothèses supplémentaires portant sur les peignes finement k-pondéré γ (cf. 15.1.10 page 165), nous montrons le résultat suivant (2.1.4 page 29) :

THÉORÈME. *Une surface de Danielewski $\pi : S(\gamma) \rightarrow X$ définie par un peigne finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$ non essentiellement auto-similaire admet trois $\mathbb{G}_{a,k}$-actions indépendantes non conjuguées deux à deux.*

Dans le **chapitre 16**, qui clôt cette thèse, nous étudions une classe particulière de surfaces de Danielewski d'invariant de Makar-Limanov trivial, définie par les propriétés équivalentes suivantes (Proposition 16.1.1 page 173 , Théorème 16.1.3 page 174 et Lemme 16.2.4 page 176).

THÉORÈME. *Pour une surface de Danielewski S définie sur un corps k, algébriquement clos et de caractéristique nulle, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) L'invariant de Makar-Limanov $ML(S)$ est trivial et le groupe de Picard $Pic(S)$ est égal à $\mathbb{Z}$,

b) S est isomorphe à une surface de Danielewski $S(\gamma)$ définie par un peigne finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$ possédant exactement deux feuilles,

c) S est isomorphe au complémentaire d'une section d'une surface de Hirzebruch $\mathbb{F}_n = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)) \rightarrow \mathbb{P}^1$,

d) S est isomorphe à une surface $S(h) \subset \mathbb{A}_k^4 = Spec(k[x,y,z,u])$, où $h \in \mathbb{Z}_{>0}$, définie par les équations

$$xz - y(y-1) = 0, \quad y^{h-1}u - z^h = 0, \quad x^{h-1}u - (y-1)^{h-1}z = 0.$$

Par exemple, les surfaces de Danielewski S_1 et S_3, qui sont respectivement isomorphes aux surfaces $S(1)$ et $S(2)$, se réalisent respectivement comme les complémentaires de la diagonale $\Delta \subset \mathbb{F}_0 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et d'une section $\bar{D}$ de $\mathbb{F}_1$, d'auto-intersection $(\bar{D}^2) = 3$.

On doit à Russell d'avoir remarqué, à partir de la description des surfaces complétables par une courbe irréductible due à Danilov-Gizatullin **[22]**, qu'une surface affine $S \simeq \mathbb{F}_n \setminus C$ obtenue comme le complémentaire d'une section C d'auto-intersection $(C^2) = c + 1$, a la propriété d'admettre c actions indépendantes non conjuguées du groupe additif $\mathbb{G}_{a,k}$. Or, puisque toute surface $S = \mathbb{F}_n \setminus C$ est une surface de Danielewski pour le morphisme quotient $\pi : S \rightarrow S//\mathbb{G}_{a,k}$ associé à l'une de ces actions, on obtient le résultat suivant, dont nous donnons une nouvelle preuve. (Théorème 16.2.1 page 176).

THÉORÈME. (Russel) *Toute surface de Danielewski $S(h)$, où $h \geq 2$, admet h actions deux à deux non conjuguées du groupe additif $\mathbb{G}_{a,k}$.*

Première partie

Actions de fibrés en droites sur les schémas

CHAPITRE 1

Rappels sur les fibrés vectoriels et projectifs

Dans ce premier chapitre nous rappelons brièvement les notions de fibrés vectoriels et projectifs au-dessus d'un schéma X. Cela nous permet de fixer les conventions de notation utilisées dans la suite. Dans toute cette thèse, nous privilégions l'approche algébrique des fibrés vectoriels, en termes de $\mathcal{O}_X$-modules localement libres, qui s'avère mieux adaptée à notre démarche que le point de vue géométrique.

Il existe deux manières duales d'associer à un $\mathcal{O}_X$-module cohérent localement libre $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel géométrique $p : E \to X$ au-dessus de X. La première consiste à définir E comme le spectre de la $\mathcal{O}_X$-algèbre symétrique du dual $\mathcal{E}^\vee$ de $\mathcal{E}$. On dit alors, dans la terminologie usuelle, que E est *l'espace total* du $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{E}$. La seconde consiste évidemment à définir E comme le spectre de la $\mathcal{O}_X$-algèbre symétrique de $\mathcal{E}$. On dit alors, suivant EGA II.1.7.8, que E est *le fibré vectoriel défini par* $\mathcal{E}$.

Dans la première construction, le $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{E}$, ou plutôt son bidual $\mathcal{E}^{\vee\vee} \simeq \mathcal{E}$, s'identifie canoniquement aux faisceaux de germes de X-sections de E, tandis que dans la seconde, c'est évidemment le dual $\mathcal{E}^\vee$ de $\mathcal{E}$ qui joue ce rôle.

Face à ce choix de convention qui nous est offert, nous privilégions dans cette thèse la seconde approche qui rend plus naturelles certaines des constructions à base de fibrés vectoriels introduites par la suite . En faisant ce choix, nous allons bien sûr à l'encontre du point de vue géométrique usuel. Le lecteur habitué à la première construction prendra donc garde au fait que toutes les assertions découlant du choix de cette seconde convention sont duales de celles qui lui sont familières[1].

L'objectif poursuivi dans cette thèse nous conduit à considérer les fibrés vectoriels $p : E \to X$ non seulement comme de simples schémas mais encore comme des X-schémas en groupes commutatifs. Nous renvoyons le lecteur peu familier avec ces notions à l'annexe A, dans laquelle nous avons rassemblé l'essentiel des résultats en la matière auxquels nous aurons recours par la suite.

1.1. Fibré vectoriel associé à un faisceau de modules

Étant donné un schéma X et un $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{E}$ localement libre, nous rappelons ci-dessous comment construire un fibré vectoriel $\mathbf{V}(\mathcal{E})$, au sens de EGA II.1.7, dont le faisceau des germes de X-sections s'identifie au dual $\mathcal{E}^\vee = \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$ de $\mathcal{E}$.

1.1.1. Rappelons tout d'abord, que pour tout $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{E}$, l'algèbre symétrique

$$\mathbf{S}(\mathcal{E}) = \bigoplus_{n \geq 0} S^n \mathcal{E}$$

de $\mathcal{E}$ est la $\mathcal{O}_X$-algèbre quotient de l'algèbre tensorielle $\mathbf{T}(\mathcal{E})$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments $x \otimes y - y \otimes x$, x, y parcourant $\mathcal{E}$. La composition des applications canoniques $\mathcal{E} \to \mathbf{T}(\mathcal{E})$ et $\mathbf{T}(\mathcal{E}) \to \mathbf{S}(\mathcal{E})$ définit une application canonique notée $\sigma : \mathcal{E} \to \mathbf{S}(\mathcal{E})$.

[1] En particulier, n'en déplaise à certains (!), le *fibré en droites défini par le* $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$-module inversible $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ sur $\mathbb{P}^n$ n'a pas de section non nulle puisqu'il s'identifie au fibré en droites tautologique *espace total* du $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$-module $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$.

Pour toute $\mathcal{O}_X$-algèbre $\mathcal{B}$, il y a alors correspondance biunivoque entre homomorphismes de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{E} \to \mathcal{B}$ et homomorphismes de $\mathcal{O}_X$-algèbres $\mathbf{S}(\mathcal{E}) \to \mathcal{B}$.

Notation 1.1.2. Étant donnés une $\mathcal{O}_X$-algèbre $\mathcal{B}$ et un homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules $u : \mathcal{E} \to \mathcal{B}$, nous noterons l'homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbres correspondant par $\mathbf{S}(u) : \mathbf{S}(\mathcal{E}) \to \mathcal{B}$. Si $\mathcal{B} = \mathbf{S}(\mathcal{F})$ est elle-même l'algèbre symétrique d'un certain $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{F}$, alors $u : \mathcal{E} \to \mathbf{S}(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n \geq 0} S^n\mathcal{F}$ est donné par une collection finie d'homomorphismes de $\mathcal{O}_X$-modules $u_{n_i} : \mathcal{E} \to S^{n_i}\mathcal{F}$, $i = 1, \ldots, k$. Nous noterons alors

$$\mathbf{S}(u) = \mathbf{S}(u_{n_1}, \ldots, u_{n_k}) : \mathbf{S}(\mathcal{E}) \to \mathbf{S}(\mathcal{F})$$

l'homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbres correspondant.

Définition 1.1.3. (EGA II.1.7.8) Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent localement libre. On appelle *fibré vectoriel sur X défini par $\mathcal{E}$*, le X-schéma affine

$$p : E = \mathbf{V}(\mathcal{E}) = \mathbf{Spec}(\mathbf{S}(\mathcal{E})) \to X.$$

Lorsque $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_X$-module inversible, nous dirons encore que $L = \mathbf{V}(\mathcal{L})$ est le *fibré en droites* défini par $\mathcal{E}$.

Définition 1.1.4. Étant donnés un fibré vectoriel $p : E = \mathbf{V}(\mathcal{E}) \to X$ et un morphisme de schémas $f : X' \to X$, on appelle image inverse f^*E de E par f le fibré vectoriel

$$p' : f^*E = \mathbf{V}(f^*\mathcal{E}) \to X'$$

On a bien sûr un isomorphisme $f^*E \simeq E \times_X X'$ qui identifie p' avec la seconde projection.

1.1.5. Par construction, le fibré vectoriel $p : E = \mathbf{V}(\mathcal{E}) \to X$ représente le foncteur contravariant en groupes commutatifs

$$G_{\mathcal{E}} : \left(\mathrm{Sch}_{/X}\right)^{\circ} \to (\mathrm{Grp}), \left(Y \xrightarrow{f} X\right) \mapsto G_{\mathcal{E}}(Y) = \mathrm{Hom}_Y(f^*\mathcal{E}, \mathcal{O}_Y).$$

Un fibré vectoriel E est donc un X-schéma en groupes commutatifs, noté par la suite E_+ou $\mathbf{V}(\mathcal{E})_+$. Nous utiliserons les notations spécifiques $\mathbb{A}^1_X = \mathbf{V}(\mathcal{O}_X)$ pour désigner le fibré en droites trivial au-dessus de X, et $\mathbb{G}_{a,X} = \mathbf{V}(\mathcal{O}_X)_+$ pour le groupe additif de base X. Pour être cohérent avec la notation additive, nous appellerons respectivement co-addition, co-opposé et co-neutre les trois homomorphismes de $\mathcal{O}_X$-algèbres Δ, s et ε, définissant la structure de X-groupe sur E_+. Rappelons que ces trois homomorphismes sont induits respectivement par les homomorphismes de $\mathcal{O}_X$-modules suivant

$$\begin{cases} \mathrm{Id} \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{Id} : & \mathcal{E} \to \mathbf{S}(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbf{S}(\mathcal{E}) \\ -\mathrm{Id} : & \mathcal{E} \to \mathcal{E} \\ 0 : & \mathcal{E} \to \mathcal{O}_X \end{cases}$$

Notation 1.1.6. Afin de ne pas alourdir inutilement les énoncés, nous emploierons en général la formule compacte "soit $p : E \to X$ un fibré vectoriel" en lieu et place de la formulation complète " soit $p : E = \mathbf{V}(\mathcal{E}) \to X$ le fibré vectoriel défini par un $\mathcal{O}_X$-module cohérent localement libre $\mathcal{E}$". Dans le premier cas, la donnée de $\mathcal{E}$ sera toujours implicite, et en général claire en fonction du contexte d'utilisation.

1.1.7. Pour tout homomorphisme $u : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ entre deux $\mathcal{O}_X$-modules cohérents localement libres $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, le X- morphisme $\mathbf{u} : F_+ \to E_+$ induit par l'homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbres $\mathbf{S}(u) : \mathbf{S}(\mathcal{E}) \to \mathbf{S}(\mathcal{F})$ est un morphisme de X-groupes. Si X est défini sur un corps k de caractéristique nulle, alors il y a une correspondance biunivoque entre les morphismes de X-groupes $\mathbf{u} : F_+ \to E_+$ et les homomorphismes de $\mathcal{O}_X$-modules $u : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$.

Remarque 1.1.8. Si la caractéristique de k est strictement positive, les morphismes de X-groupes de la forme $\mathbf{u} : F_+ \to E_+$ ne constituent en général qu'une sous-classe stricte de la classe des morphismes de X-groupes $F_+ \to E_+$. Par exemple, tout homomorphisme de $\mathbf{F}_2$-algèbres $\mathbf{F}_2[T] \to \mathbf{F}_2[T], T \mapsto aT + P(T^2)$, où $a \in \mathbf{F}_2$ et P est un polynôme à coefficients dans $\mathbf{F}_2$ sans terme constant, définit un morphisme de groupes de $\mathbb{G}_{a,\mathbf{F}_2}$ dans lui-même, alors que les seuls morphismes de la forme $\mathbf{u}$ sont le "morphisme nul" et le morphisme identique, selon que $a = 0$ ou 1.

1.2. Complétion projective d'un fibré vectoriel

Suivant EGA II.8.3, nous rappelons ci-dessous comment plonger un fibré vectoriel $E = \mathbf{V}(\mathcal{E})$ dans un fibré projectif $\bar{p} : \mathbf{P}(\mathcal{F}) \to X$ admettant une E_+-action prolongeant celle de E_+ sur lui-même par translations.

Définition 1.2.1. Étant donné un $\mathcal{O}_X$-module cohérent localement libre $\mathcal{F}$, on appelle *fibré projectif associé à* $\mathcal{F}$ le X-schéma

$$\bar{p} : \mathbf{P}(\mathcal{F}) = \mathbf{Proj}(\mathbf{S}(\mathcal{F})) \to X$$

spectre homogène de la $\mathcal{O}_X$-algèbre quasi-cohérente graduée $\mathbf{S}(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n \geq 0} S^n \mathcal{F}$.

1.2.2. Par construction, le X-schéma $\mathbf{P}(\mathcal{F})$ représente le foncteur contravariant

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hyp}_{\mathcal{F}} : \left(Sch_{/X}\right)^{\circ} & \to & (Ens) \\ (f : Y \to X) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} \text{sous } \mathcal{O}_Y - \text{modules } \mathcal{G} \text{ de } f^*\mathcal{F} \\ \text{tels que } f^*\mathcal{F}/\mathcal{G} \text{ soit inversible} \end{array} \right\} \end{array}$$

où, pour tout X-morphisme $\phi : Y' \to Y$, et tout sous $\mathcal{O}_Y$-module $\mathcal{G}$ de $f^*\mathcal{F}$ tel que $f^*\mathcal{F}/\mathcal{G}$ soit inversible, $\mathrm{Hyp}_{\mathcal{F}}(\phi)(\mathcal{G}) = \phi^*\mathcal{G}$.

Pour tout $\mathcal{O}_X$-module cohérent localement libre $\mathcal{E}$, tout schéma $Y \xrightarrow{f} X$, et tout $\theta \in G_{\mathcal{E}}(Y) = \mathrm{Hom}_X(f^*\mathcal{E}, \mathcal{O}_Y)$ le noyau de l'homomorphisme

$$\theta + \mathrm{Id} : f^*\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_Y$$

est un élément de $\mathrm{Hyp}_{\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_X}(Y)$ isomorphe à $f^*\mathcal{E}$. En posant $\mathcal{F} = \mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_X$, on obtient ainsi un homomorphisme de foncteurs $i : G_{\mathcal{E}} \to \mathrm{Hyp}_{\mathcal{F}}$, dont le X-morphisme $i : E = \mathbf{V}(\mathcal{E}) \hookrightarrow \mathbf{P}(\mathcal{F})$ correspondant n'est autre que l'immersion ouverte définie par l'isomorphisme canonique $\mathbf{S}(\mathcal{F}) / (T-1)\mathbf{S}(\mathcal{F}) \simeq \mathbf{S}(\mathcal{E})$ où $\mathbf{S}(\mathcal{F}) \simeq \mathbf{S}(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{O}_X[T]$.

L'*hyperplan à l'infini* complémentaire de $i(E)$ dans $\mathbf{P}(\mathcal{F})$ s'identifie canoniquement à $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ via l'immersion fermée de $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ dans $\mathbf{P}(\mathcal{F})$ induite par la surjection $p_1 : \mathcal{F} = \mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_X \to \mathcal{E}$.

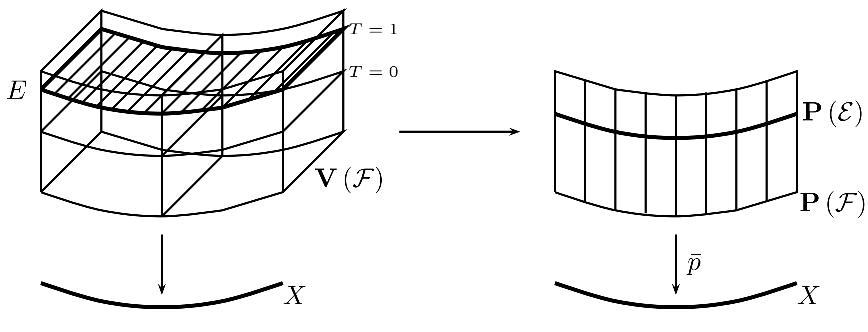


Fig. 1.2.1. Complétion projective d'un fibré vectoriel $E = \mathbf{V}(\mathcal{E})$.

1.2.3. Nous allons vérifier que l'action de E_+ sur lui-même par translations s'étend en une action de E_+ sur $\mathbf{P}(\mathcal{F})$. Pour cela, étant donné un schéma $Y \xrightarrow{f} X$ et un sous $\mathcal{O}_Y$-module $\mathcal{G}$ de $f^*\mathcal{F}$ tel que $\mathcal{L} = f^*\mathcal{F}/\mathcal{G}$ soit inversible, nous considérons l'homomorphisme quotient $(\pi_1, \pi_2) : f^*\mathcal{F} = f^*\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{L}$. Pour tout homomorphisme $\theta : f^*\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_Y$, le noyau $\mu_Y(\theta, \mathcal{G})$ de l'homomorphisme surjectif $(\pi_1 + \pi_2 \circ \theta, \pi_2) : f^*\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{L}$ est encore un élément de $\mathrm{Hyp}_{\mathcal{F}}(Y)$. On obtient ainsi une action

$$G_{\mathcal{E}}(Y) \times \mathrm{Hyp}_{\mathcal{F}}(Y) \rightarrow \mathrm{Hyp}_{\mathcal{F}}(Y), (\theta, \mathcal{G}) \mapsto \mu_Y(\theta, \mathcal{G})$$

du groupe $G_{\mathcal{E}}(Y)$ sur l'ensemble $\mathrm{Hyp}_{\mathcal{F}}(Y)$ qui prolonge, via l'application canonique $i(Y) : G_{\mathcal{E}}(Y) \hookrightarrow \mathrm{Hyp}_{\mathcal{F}}(Y)$ de (1.2.2), l'action de $G_{\mathcal{E}}(Y)$ sur lui-même par translations. Puisque pour tout X-morphisme $\phi : Y' \rightarrow Y$, on a

$$\mu_{Y'}(\phi^*(\theta), \phi^*\mathcal{G}) = \phi^*\mu_Y(\theta, \mathcal{G}),$$

on conclut que l'homomorphisme de foncteurs $\mu : G_{\mathcal{E}} \times \mathrm{Hyp}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathrm{Hyp}_{\mathcal{F}}$ correspond à une action de E_+ sur $\mathbf{P}(\mathcal{F})$ prolongeant l'action de E_+ sur lui-même par translations. Autrement dit, $\mathbf{P}(\mathcal{F})$ est une *complétion E_+-équivariante* canonique de E.

Plus explicitement, cette action μ est induite par l'action de E_+ sur $\mathbf{V}(\mathcal{F})$ dont la co-action $\Xi : \mathbf{S}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{S}(\mathcal{F}) \otimes \mathbf{S}(\mathcal{E})$ se déduit de l'homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules

$$\mathrm{Id} \otimes 1 + T \otimes p_1 : \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{S}(\mathcal{F}) \otimes \mathbf{S}(\mathcal{E}) \simeq (\mathbf{S}(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{O}_X[T]) \otimes \mathbf{S}(\mathcal{E}).$$

CHAPITRE 2

Fibrés linéaires affines

Les fibrés linéaires affines sont les analogues en géométrie algébrique de la notion d'espace affine attaché à un espace vectoriel. Plus précisément, un fibré linéaire affine attaché à un fibré vectoriel $p : E \to X$ est un X-schéma $\rho : W \to X$ localement isomorphe à E agissant sur lui même par translations. Cela revient à dire que W est un espace principal homogène sous l'action du X-groupe E_+, autrement dit, un torseur sous E_+.

Bien que ces fibrés soient des objets classiques en géométrie algébrique, la bibliographie les concernant est, à notre connaissance, assez maigre. Bien sûr, l'essentiel des propriétés de ces fibrés se déduit aisément des résultats de la théorie générale des torseurs sous un schéma en groupes, telle qu'exposée, par exemple, dans SGA 1 XI.4, [**43**], ou encore [**35**], et dont l'annexe A contient, si nécessaire, un aperçu adapté à la lecture de ce qui suit.

Les fibrés linéaires affines constituant une base pour l'essentiel des constructions que nous développons dans la suite de cette thèse, nous jugeons utile de consacrer le présent chapitre à un exposé détaillé du sujet. Nous insistons plus particulièrement sur les procédés constructifs, par l'intermédiaire de cocycles ou d'extensions de fibrés vectoriels, ainsi que sur l'interprétation cohomologique classique des classes d'isomorphismes de fibrés linéaires affines qui s'en déduit. Nous donnons également une série de caractérisations géométriques alternatives de ces fibrés qui s'avèrent fort utiles en pratique.

2.1. Torseurs sous un fibré vectoriel

D'après le chapitre précédent, le fibré vectoriel $p : E = \mathbf{V}(\mathcal{E}) \to X$ défini par un $\mathcal{O}_X$-module cohérent localement libre $\mathcal{E}$ est un schéma en groupes E_+au dessus de X. Cela justifie par conséquent la définition suivante.

Définition 2.1.1. Un *fibré linéaire affine* attaché à un fibré vectoriel $E = \mathbf{V}(\mathcal{E})$ est la donnée d'un E_+-torseur $\rho : W \to X$. Si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_X$-module inversible, nous dirons que $\rho : W \to X$ est un *fibré en droites affines* , ou encore, un *torseur en droites.*

Définition 2.1.2. Étant donnés un E_+-torseur $\rho : W \to X$ et un morphisme de schémas $f : X' \to X$, on appelle image inverse f^*W de W par f le f^*E_+-torseur $p_2 : W \times_X X' \to X'$.

2.1.3. Nous notons $\mathbf{t} : E_+ \times_X W \to W$ l'action de E_+ sur un torseur $\rho : W \to X$. Nous prolongeons cette analogie avec l'action d'un espace vectoriel sur un espace affine par translations en introduisant la définition suivante, qui se veut l'analogue de la notion d'application linéaire affine entre deux espaces affines.

Définition 2.1.4. Soit $\rho : W \to X$ (resp. $\rho' : W' \to X$) un E_+-torseur (resp. un E'_+-torseur). Un *morphisme linéaire affine* $\beta : W' \to W$ est la donnée d'une paire $(\mathbf{u}, o)$ consituée :

a) d'un morphisme de X-groupes $\mathbf{u} : E'_+ = \mathbf{V}(\mathcal{E}')_+ \to E_+ = \mathbf{V}(\mathcal{E})_+$ induit par un homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules $u : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$;

b) d'un X-morphisme $\mathbf{u}$-équivariant $o : W' \to W$.

Remarque 2.1.5. On notera que du fait de la condition a), la classe des morphismes linéaires affines $\beta : W' \to W$ est en général une sous-classe stricte de la classe des morphismes équivariants $\phi : W' \to W$. Rappelons cependant que d'après la remarque (1.1.8), ces deux classes coïncident dès lors que X est défini sur un corps k de caractéristique nulle.

2.2. Classes d'isomorphismes de torseurs

Dans ce paragraphe, nous redonnons la construction classique conduisant à une interprétation cohomologique du groupe $\mathrm{PH}(E_+/X)$ des classes d'isomorphismes de torseurs sous un fibré vertoriel $E_+ = \mathbf{V}(\mathcal{E})_+$.

2.2.1. Torseur défini par un cocycle de Čech. Soit $\{\mathcal{U}, g\}$ une paire constituée d'un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (X_i)_{i\in I}$ de X et d'un 1-cocycle de Čech $\{g_{ij}\}_{i,j\in I} \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}^\vee)$.

2.2.1. Désignons par $\mathcal{B}$ la $\mathcal{O}_X$-algèbre quasi-cohérente obtenue en recollant les $\mathcal{O}_X$-algèbres symétriques $\mathbf{S}(\mathcal{E}\mid_{X_i})$, $i \in I$, au dessus des intersections $X_{ij} = X_i \cap X_j$, via les isomorphismes

$$\mathbf{S}(g_{ij}, \mathrm{Id}) : \mathbf{S}\left(\mathcal{E}\mid_{X_{ij}}\right) \to \mathbf{S}\left(\mathcal{E}\mid_{X_{ij}}\right),$$

où g_{ij} et Id correspondent respectivement aux homomorphismes de $\mathcal{O}_{X_{ij}}$-modules

$$g_{ij} : \mathcal{E}\mid_{X_{ij}} \to \mathcal{O}_{X_{ij}} \quad \text{et} \quad \mathrm{Id} : \mathcal{E}\mid_{X_{ij}} \to \mathcal{E}\mid_{X_{ij}}.$$

Il est clair qu'il existe une unique co-action $\theta : \mathcal{B} \to \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbf{S}(\mathcal{E})$ de $\mathbf{S}(\mathcal{E})$ sur $\mathcal{B}$ induisant les co-actions

$$\Delta\mid_{X_i} : \mathbf{S}(\mathcal{E}\mid_{X_i}) \longrightarrow \mathbf{S}(\mathcal{E}\mid_{X_i}) \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathbf{S}(\mathcal{E}\mid_{X_i}) \quad i \in I$$

correspondant à l'action de E_+ sur lui-même par translations. On en déduit que le X-schéma affine

$$\rho : W = \mathbf{W}\left(\mathcal{U}, \mathcal{E}, \{g_{ij}\}_{i,j\in I}\right) \to X$$

spectre de la $\mathcal{O}_X$-algèbre quasi-cohérente $\mathcal{B}$ est un E_+-torseur.

2.2.2. Par construction, le X-schéma $\rho : W \to X$ ainsi construit représente le sous-foncteur $W_{\mathcal{U},\mathcal{E},g} \subset C^0(\mathcal{U}, G_{\mathcal{E}})$ défini par

$$W_{\mathcal{U},\mathcal{E},g}\left(Y \xrightarrow{f} X\right) = \left\{(\sigma_i)_{i\in I} \in C^0(\mathcal{U}, G_{\mathcal{E}})(Y),\ \partial(\sigma_i) = f^*g\right\},$$

où ∂ désigne l'homomorphisme de foncteurs en groupes

$$\begin{array}{rcl} \partial : C^0(\mathcal{U}, G_{\mathcal{E}}) = \prod_{i\in I} G_{\mathcal{E}|_{X_i}} & \to & C^1(\mathcal{U}, G_{\mathcal{E}}) = \prod_{i,j\in I} G_{\mathcal{E}|_{X_i\cap X_j}} \\ (\sigma_i)_{i\in I} & \mapsto & \left(\sigma_j\mid_{X_i} - \sigma_i\mid_{X_j}\right)_{i,j\in I}, \end{array}$$

et $g = \{g_{ij}\}_{i,j\in I} \in C^1(\mathcal{U}, G_{\mathcal{E}})(X) = C^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}^\vee)$. Par conséquent, W satisfait la propriété universelle suivante.

Proposition 2.2.3. *Un morphisme $f : Y \to X$ se factorise par $\mathbf{W}(\mathcal{U}, \mathcal{E}, g)$ si et seulement si le cocycle $f^*g \in C^1\left(f^{-1}\mathcal{U}, (f^*\mathcal{E})^\vee\right)$ est un cobord.*

2.2.4. Pour toute paire de cocycles de Čech g_1 et g_2 à valeurs dans $\mathcal{E}^\vee$ pour le même recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, nous pouvons former l'espace fibré associé

$$W' = \mathbf{W}(\mathcal{U}, \mathcal{E}, g_1) \vee^{E_+} \mathbf{W}(\mathcal{U}, \mathcal{E}, g_2)$$

au sens de la définition (A.4). Il s'agit de nouveau d'un torseur sous le X-groupe E_+, devenant lui aussi trivial sur le recouvrement $\mathcal{U}$. On vérifie alors immédiatement que W est isomorphe au torseur $\mathbf{W}(\mathcal{U}, \mathcal{E}, g_1 + g_2)$ correspondant au cocycle de Čech $g_1 + g_2$ somme des cocycles g_1 et g_2.

2.2.2. Groupe des classes d'isomorphismes de torseurs. De manière générale, l'application qui à toute paire de E_+-torseurs W et W' associe le E_+-torseur $W \vee^{E_+} W'$ induit une structure de groupe abélien sur l'ensemble $\mathrm{PH}(E_+/X)$ des classes d'isomorphismes de E_+-torseurs. La construction précédente conduit alors au résultat classique suivant (cf., par exemple [**35**, Proposition 4.6 p. 123]).

Proposition 2.2.5. *Il existe un isomorphisme de groupes*

$$c : \left(PH(E_+/X)\,, \cdot \vee^{E_+} \cdot\right) \xrightarrow{\sim} H^1\left(X, \mathcal{E}^\vee\right).$$

Démonstration. Tout E_+-torseur $\rho : W \to X$ admet un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (X_i)_{i\in I}$ trivialisant, i.e. tel qu'il existe des isomorphismes équivariants

$$\phi_i : W\mid_{X_i} \simeq E\mid_{X_i} \simeq \mathbf{Spec}\left(\mathbf{S}\left(\mathcal{E}\mid_{X_i}\right)\right), \quad i \in I$$

pour l'action de E_+ sur lui-même par translations. Les automorphismes $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ de $E\mid_{X_{ij}}$ sont alors nécessairement induits par des isomorphismes de $\mathcal{O}_{X_{ij}}$-algèbres de la forme

$$\mathbf{S}\left(g_{ij}, \mathrm{Id}\right) : \mathbf{S}\left(\mathcal{E}\mid_{X_{ij}}\right) \to \mathbf{S}\left(\mathcal{E}\mid_{X_{ij}}\right),$$

où $g_{ij} \in \mathrm{Hom}_{X_{ij}}\left(\mathcal{E}\mid_{X_{ij}}, \mathcal{O}_{x_{ij}}\right)$ et $\mathrm{Id} \in \mathrm{Hom}_{X_{ij}}\left(\mathcal{E}\mid_{X_{ij}}, \mathcal{E}\mid_{X_{ij}}\right)$. On obtient ainsi un 1-cocycle de Čech $g = \{g_{ij}\}_{i,j\in I} \in C^1\left(\mathcal{U}, \mathcal{E}^\vee\right)$ et un isomorphisme de E_+-torseurs $W \simeq \mathbf{W}\left(\mathcal{U}, \mathcal{E}, g\right)$.

Il est clair que si l'on choisit une autre collection $(\phi_i')_{i\in I}$ d'isomorphismes équivariants, alors $\{g_{ij}\}_{i,j\in I}$ est remplacé par un cocycle cohomologue de sorte que l'on peut ainsi associer à tout E_+-torseur $\rho : W \to X$ devenant trivial sur $\mathcal{U}$ une classe de cohomologie de Čech $\bar{g} \in \check{H}^1\left(\mathcal{U}, \mathcal{E}^\vee\right)$, qui reste évidemment inchangée si l'on remplace W par un torseur isomorphe. On en déduit, par passage à la limite sur les recouvrements ouverts $\mathcal{U}$ de X, une application

$$c : \mathrm{PH}\left(E_+/X\right) \to \check{H}^1\left(X, \mathcal{E}^\vee\right) = \varinjlim \check{H}^1\left(\mathcal{U}, \mathcal{E}^\vee\right),$$

dont la réciproque est donnée par l'application qui à une classe $[g] \in \check{H}^1\left(X, \mathcal{E}^\vee\right)$ associe la classe d'isomorphisme du E_+-torseur $\mathbf{W}\left(\mathcal{U}, \mathcal{E}, g\right)$ défini par un représentant $g = \{g_{ij}\}_{i,j\in I}$ de $[g]$ sur un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X. Finalement, (2.2.4) implique que l'application c ainsi construite est un isomorphisme de groupes, le passage de $\check{H}^1\left(X, \mathcal{E}^\vee\right)$ au groupe de cohomologie "foncteurs dérivés" $H^1\left(X, \mathcal{E}^\vee\right)$ étant immédiat puisque ces deux groupes sont toujours isomorphes. □

Remarque 2.2.6. On notera que la proposition (2.2.5) ci-dessus implique en particulier que tout E_+-torseur $\rho : W \to X$ au dessus d'un schéma affine $X = \mathrm{Spec}\,(A)$ est isomorphe au E_+-torseur trivial $p : E \to X$.

2.3. Caractérisation cohomologique des morphismes linéaires affines

Nous sommes maintenant en mesure de donner des conditions assurant de l'existence d'un morphisme linéaire affine $\beta : W' \to W$ (2.1.4) entre deux torseurs $\rho : W \to X$ et $\rho' : W' \to X$ sous des fibrés vectoriels respectifs $E = \mathbf{V}(\mathcal{E})$ et $E' = \mathbf{V}(\mathcal{E}')$.

2.3.1. Pour cela, nous pouvons bien sûr supposer dès le départ que W et W' deviennent triviaux sur un recouvrement ouvert commun $\mathcal{U} = (X_i)_{i\in I}$ de X, et choisir des représentants

$$g = \{g_{ij}\}_{i,j\in I} \in C^1\left(\mathcal{U}, \mathcal{E}^\vee\right) \quad \text{et} \quad g' = \left\{g'_{ij}\right\}_{i,j\in I} \in C^1\left(\mathcal{U}, \left(\mathcal{E}'\right)^\vee\right)$$

de leurs classes d'isomorphismes respectives

$$c\left(W\right) = [g] \in H^1\left(X, \mathcal{E}^\vee\right) \quad \text{et} \quad c\left(W'\right) = [g'] \in H^1\left(X, \left(\mathcal{E}'\right)^\vee\right).$$

Par définition, un morphisme linéaire affine $\beta : W' \to W$ correspond à la donnée d'un homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules $u : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ et d'un X-morphisme $o : W' \to W$ équivariant pour le morphisme de X-groupes $\mathbf{u} : E'_+ \to E_+$ induit par u. Une fois ce morphisme u fixé, un X-morphisme $o : W' \to W$ convenant est alors uniquement déterminé par ses restrictions o_i au-dessus des ouverts trivialisants X_i, $i \in I$. Puisqu'elles sont équivariantes, ces restrictions $o_i : W' \mid_{X_i} \to W \mid_{X_i}$ sont nécessairement induites par des homomorphismes de $\mathcal{O}_{X_i}$-algèbres

$$\mathbf{S}\left(\sigma_i, u\mid_{X_i}\right) : \rho_* \mathcal{O}_W \mid_{X_i} \simeq \mathbf{S}\left(\mathcal{E}\mid_{X_i}\right) \to \rho'_* \mathcal{O}_{W'} \mid_{X_i} \simeq \mathbf{S}\left(\mathcal{E}'\mid_{X_i}\right) \quad i \in I$$

où $\sigma_i \in \mathrm{Hom}_{X_i}\left(\mathcal{E}\mid_{X_i}, \mathcal{O}_{X_i}\right)$.

Les X-morphismes locaux o_i ainsi définis se recollent en un X-morphisme global $o : W' \to W$ si et seulement si la 0-cochaine $\sigma = \{\sigma_i\}_{i \in I} \in C^0\left(\mathcal{U}, \mathcal{E}^\vee\right)$ satisfait l'identité ${}^t u\left(g'\right) = g' \circ u = g + \partial(\sigma)$ dans $C^1\left(\mathcal{U}, \mathcal{E}^\vee\right)$. Cela conduit donc à la caractérisation suivante :

Proposition 2.3.2. *Pour qu'il existe un morphisme linéaire affine $\beta : W' \to W$ entre deux torseurs $\rho : W \to X$ et $\rho' : W' \to X$ sous des fibrés vectoriels respectifs $E = \mathbf{V}(\mathcal{E})$ et $E' = \mathbf{V}(\mathcal{E}')$, il faut et il suffit qu'il existe un homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules $u : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ tel que la classe d'isomorphisme $c(W) \in H^1\left(X, \mathcal{E}^\vee\right)$ de W soit l'image de la classe d'isomorphisme $c(W') \in H^1\left(X, (\mathcal{E}')^\vee\right)$ par l'homomorphisme de groupes*

$${}^t u_* : H^1\left(X, (\mathcal{E}')^\vee\right) \to H^1\left(X, \mathcal{E}^\vee\right)$$

induit par l'homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules ${}^t u : (\mathcal{E}')^\vee \to \mathcal{E}^\vee$ dual de u.

2.3.3. En particulier, pour tout E'_+-torseur $\rho' : W' = \mathbf{W}\left(\mathcal{U}, \mathcal{E}', g\right) \to X$ et tout homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules $u : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$, le cocycle ${}^t u\left(g'\right) \in C^1\left(\mathcal{U}, \mathcal{E}^\vee\right)$ définit un E_+-torseur $\rho : W = \mathbf{W}\left(\mathcal{U}, \mathcal{E}, {}^t u\left(g'\right)\right) \to X$ canoniquement équipé d'un X-morphisme linéaire affine $\beta : W' \to W$.

Définition 2.3.4. Soit $u : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ un homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules cohérents localement libres, et soit $\rho' : W' \to X$ un E'_+-torseur. On dit qu'un E_+-torseur $\rho : W \to X$ est une *image directe* de W' par u si la classe d'isomorphisme $c(W) \in H^1\left(X, \mathcal{E}^\vee\right)$ de W est l'image de la classe d'isomorphisme $c(W') \in H^1\left(X, (\mathcal{E}')^\vee\right)$ de W' par l'homomorphisme de groupes ${}^t u_* : H^1\left(X, (\mathcal{E}')^\vee\right) \to H^1\left(X, \mathcal{E}^\vee\right)$.

2.4. Torseur associé à une extension

Dans ce paragraphe, nous donnons une interprétation alternative des E_+-torseurs $\rho : W \to X$ en termes d'extensions du $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{E}$ par $\mathcal{O}_X$. Cela conduit en particulier à un procédé de construction très simple de ces torseurs.

2.4.1. Rappelons tout d'abord que l'on note $\mathrm{Ext}^1_X\left(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X\right)$ le groupe des classes d'isomorphismes d'extensions de $\mathcal{E}$ par $\mathcal{O}_X$, deux extensions de ce type étant dites isomorphes s'il existe un isomorphisme de suites exactes induisant l'identité sur $\mathcal{E}$ et $\mathcal{O}_X$, autrement dit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & 0\,. \\ & & \| & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X & \longrightarrow & \mathcal{F}' & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Rappelons aussi que pour tout $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent $\mathcal{E}$, il existe un homomorphisme canonique

$$\mathrm{ext} : H^1\left(X, \mathcal{E}^\vee\right) \to \mathrm{Ext}^1_X\left(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X\right)$$

qui associe à une classe $[g] \in H^1\left(X, \mathcal{E}^\vee\right)$ représentée par un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \left(X_i\right)_{i \in I}$ de X et un 1-cocycle de Čech $g = \{g_{ij}\} \in C^1\left(\mathcal{U}, \mathcal{E}^\vee\right)$, la classe de l'extension $0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{F} \to \mathcal{E} \to 0$ obtenue en recollant les extensions triviales $\mathcal{O}_{X_i} \oplus \mathcal{E} \mid_{X_i}$, $i \in I$, au-dessus des intersections X_{ij} via les isomorphismes d'extensions

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Id} & g_{ij} \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix} : \mathcal{O}_{X_{ij}} \oplus \mathcal{E} \mid_{X_{ij}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X_{ij}} \oplus \mathcal{E} \mid_{X_{ij}} .$$

Lorsque $\mathcal{E}$ est localement libre, l'homomorphisme *ext* est un isomorphisme dont l'isomorphisme réciproque est obtenu en associant à toute extension $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ par $\mathcal{O}_X$, l'image $\partial(1) \in H^1(X, \mathcal{E}^\vee)$ de $1 \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$ via la suite exacte longue de cohomologie associée à l'extension duale $0 \to \mathcal{E}^\vee \to \mathcal{F}^\vee \to \mathcal{O}_X \to 0$.

2.4.2. Soit maintenant $\rho : W \to X$ un E_+-torseur, de classe d'isomorphisme $c(W) = [g] \in H^1(X, \mathcal{E}^\vee)$, et soit $0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{F} \to \mathcal{E} \to 0$, une extension dont la classe d'isomorphisme $[e] \in \mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$ s'identifie à $[g]$ via l'isomorphisme *ext*. La surjection $\mathcal{F} \to \mathcal{E}$ induit alors une immersion fermée de $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ dans $\mathbf{P}(\mathcal{F})$, dont l'ouvert complémentaire $\rho : \mathbf{P}(\mathcal{F}) \setminus \mathbf{P}(\mathcal{E}) \to X$ est X-isomorphe à W.

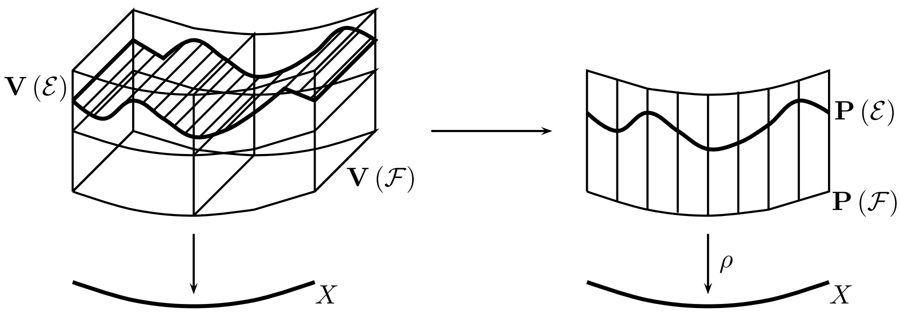


Fig. 2.4.1. Torseur associé à une extension.

2.4.3. L'extension ci-dessus devenant, par construction, triviale sur le recouvrement $\mathcal{U}$, le fibré projectif $\mathbf{P}(\mathcal{F})$ s'identifie canoniquement à l'espace fibré associé $W \vee^{E_+} \mathbf{P}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_X)$. Par ailleurs, l'isomorphisme de E_+-torseurs $W \vee^{E_+} E_+ \simeq W$ induit, via l'immersion ouverte canonique $i : E \hookrightarrow \mathbf{P}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_X)$ (1.2.2), une immersion ouverte E_+-équivariante

$$i_W : W \hookrightarrow W \times^{E_+} \mathbf{P}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_X) \simeq \mathbf{P}(\mathcal{F})$$

faisant du X-schéma $\mathbf{P}(\mathcal{F})$ une *complétion E_+-équivariante* de W

Remarque 2.4.4. Selon la situation, on peut aussi considérer des extensions

$$0 \to \mathcal{L} \to \mathcal{F} \to \mathcal{E} \to 0$$

de $\mathcal{E}$ par un faisceau inversible $\mathcal{L}$ quelconque, puisque pour toute extension de ce type représentant une classe $[e] \in \mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{E}, \mathcal{L})$, l'extension

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^\vee \to \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^\vee \to 0$$

déduite de cette dernière représente alors la classe $\widetilde{[e]} \in \mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^\vee, \mathcal{O}_X)$, image de $[c]$ par l'isomorphisme canonique $\mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{E}, \mathcal{L}) \simeq \mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^\vee, \mathcal{O}_X)$.

Exemple 2.4.5. Tout torseur en droites affines $\rho : W \to X$ est défini par une extension $0 \to \mathcal{L}_2 \to \mathcal{F} \to \mathcal{L}_1 \to 0$ d'un $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}_1$ par un second $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}_2$, donc est isomorphe au complémentaire d'une section d'un fibré en $\mathbb{P}^1$ $\bar{\rho} : \bar{W} = \mathbb{P}(\mathcal{F}) \to X$.

En particulier, si $X = \mathbb{P}^1_k$, où k est un corps algébriquement clos, alors $\bar{W}$ est isomorphe à une surface de Hirzebruch

$$\bar{\rho} : \mathbb{F}_e = \mathbb{P}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-e)\right) \to X, \quad e \geq 0,$$

et toute section de $\bar{\rho}$ est induite par une surjection

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-e) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n-e), \quad n = 0 \text{ ou } n \geq e,$$

de noyau isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)$. Si $n = 0$, alors le fibré linéaire affine correspondant est isomorphe au complémentaire dans $\mathbb{F}_e$ de l'unique section C_0 d'auto-intersection $\left(C_0^2\right) = -e$, donc est isomorphe à $\mathbf{V}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-e)\right)$. Par contre, pour tout $n \geq \max(e, 1)$, il existe des fibrés linéaires affines non triviaux puisque

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{P}^1}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n-e), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)\right) \simeq H^0\left(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2(n-1)-e)\right)$$

n'est pas réduit à $\{0\}$.

Si la section C de $\bar{\rho}$ est le support d'un diviseur ample sur $\mathbb{F}_e$, ce qui est le cas lorsque $n > e$, alors l'espace total du fibré linéaire affine $\rho : \mathbb{F}_e \setminus C \to \mathbb{P}^1$ correspondant est une surface affine. On obtient ainsi des surfaces affines lisses munies d'une structure de torseur sous un fibré en droites sur $\mathbb{P}^1$. Un exemple représentatif bien connu de cette situation est fourni par la surface de Danielewski $S \subset \mathbb{A}^3_k = \mathrm{Spec}\left(k[x,y,z]\right)$ d'équation $xz - y(y-1) = 0$, qui se réalise, suivant [**11**], comme le complémentaire de la diagonale Δ de $\mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$ via le plongement

$$\phi : S \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k \setminus \Delta, (x,y,z) \mapsto ([x:y],[y:z]) = ([y+1:z],[x:y+1])$$

et qui est donc un $\mathbf{V}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)\right)_+$-torseur.

2.5. Fibrés linéaires affines géométriques

Dans l'approche géométrique, un fibré vectoriel $p : E \to X$ de rang n sur X s'obtient en recollant des fibrés triviaux $E_i = \mathbb{A}^n_{X_i}$ sur un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (X_i)_{i \in I}$ par l'intermédiaire d'isomorphismes de transition $\phi_{ij} : E_j \mid_{X_{ij}} \xrightarrow{\sim} E_i \mid_{X_{ij}}$ induits par des $\mathcal{O}_{X_{ij}}$-automorphismes $M_{ij} \in \mathrm{Aut}_{X_{ij}}\left(\mathcal{O}^n_{X_{ij}}\right)$. En changeant le groupe des automorphismes de recollement, on obtient une description géométrique analogue des fibrés linéaires affines.

Définition 2.5.1. Un *fibré linéaire affine géométrique de rang* n au dessus d'un schéma X est la donnée d'un morphisme de schémas $\rho : W \to X$, d'un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (X_i)_{i \in I}$ de X et d'isomorphismes $\tau_i : \rho^{-1}(X_i) \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n_{X_i}$ tels que pour tout couple d'indice $i \neq j$, l'automorphisme $\tau_i \circ \tau_j^{-1}$ de $\mathbb{A}^n_{X_{ij}} = \mathbf{Spec}\left(\mathcal{O}_{X_{ij}}[x_1, \ldots, x_n]\right)$ soit induit par un automorphisme de $\mathcal{O}_{X_{ij}}$-algèbres *linéaire affine* τ^* de $\mathcal{O}_{X_{ij}}[x_1, \ldots, x_n]$. Cela signifie qu'il existe

$$M_{ij} = (m_{kl})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{O}^n_{X_{ij}}\right) \quad \text{et} \quad T_{ij} = (t_1, \ldots, t_n) \in \bigoplus_{i=1}^n \Gamma\left(X_{ij}, \mathcal{O}_X\right)$$

tels que $\tau^*(x_l) = \sum_{k=1}^m m_{kl} x_k + t_l$ pour tout $l = 1, \ldots, n$.

Définition 2.5.2. Un isomorphisme de fibrés linéaires affines géométriques de rang n

$$\phi : \left(w', \rho', \mathcal{U}', \{\tau'_i\}_{i \in I'}\right) \to \left(W, \rho, \mathcal{U}, \{\tau_i\}_{i \in I}\right)$$

est un isomorphisme de schémas $\phi : W' \xrightarrow{\sim} W$ tel que $\rho' = \rho \circ \phi$ et tel que $\rho' : W' \to X$ soit un fibré linéaire affine géométrique pour le recouvrement formé des ouverts de $\mathcal{U}$ et de $\mathcal{U}'$, et les trivialisations $\{\tau'_i\}_{i \in I'}$ et $\{\tau_i \circ \phi\}_{i \in I}$.

2.5.3. Tout torseur $\rho : W \to X$ sous un fibré vectoriel $E_+ = \mathbf{V}(\mathcal{E})_+$ de rang n est évidemment un fibré linéaire affine géométrique de rang n sur X au sens de la définition (2.5.1). Réciproquement, pour tout fibré linéaire affine géométrique $\rho : W \to X$ devenant trivial sur un recouvrement $\mathcal{U} = (X_i)_{i \in I}$ de X, et tout triplet d'indices i, j et k les identités

$$\begin{cases} M_{ik} & = & M_{jk}M_{ij} \\ T_{ik} & = & M_{jk} \cdot T_{ij} + T_{jk} \end{cases}$$

sont satisfaites dans $GL_n\left(\mathcal{O}^n_{X_{ijk}}\right)$ et $\Gamma(X_{ijk}, \mathcal{O}_X)$ respectivement. La première de ces identités signifie que les matrices de transition M_{ij}, $i, j \in I$, définissent un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{E}$ localement libre de rang n, devenant trivial sur $\mathcal{U}$ avec isomorphismes $\phi_i : \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^n_{X_i}$, $i \in I$, tels que $\phi_j = M_{ij} \circ \phi_i$ au-dessus de X_{ij} . La seconde garantit quant à elle que la collection des sections

$$g_{ij} = T_{ij} \circ \phi_i \mid_U \in \mathrm{Hom}_U(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X,) \quad i \neq j \; i, j \in I,$$

est un 1-cocyle de Čech à valeurs dans $\mathcal{E}^\vee$ pour le recouvrement $\mathcal{U}$. Ainsi $\rho_* W$ s'identifie à la $\mathcal{O}_X$-algèbre quasi-cohérente obtenue en recollant les $\mathcal{O}_{X_i}$-algèbres symétriques $\mathbf{S}(\mathcal{E} \mid_{X_i})$ au-dessus des intersections X_{ij} par l'intermédiaire des isomorphismes

$$\mathbf{S}(g_{ij}, \mathrm{Id}) : \mathbf{S}\left(\mathcal{E} \mid_{X_{ij}}\right) \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}\left(\mathcal{E} \mid_{X_{ij}}\right) \quad i \neq j, i, j \in I.$$

Par conséquent, le fibré linéaire affine $\rho : W \to X$ est isomorphe au X-schéma $\mathbf{W}(\mathcal{U}, \mathcal{E}, g)$ (2.2.1). Bien que la donnée d'une action du fibré vectoriel $\mathbf{V}(\mathcal{E})_+$ ne fasse pas explicitement partie de la définition de $\rho : W \to X$, on obtient néanmoins une correspondance biunivoque entre fibrés linéaires affines géométriques et torseurs sous un fibré vectoriel. Cela conduit à l'abus suivant, consistant à appeler torseur sous un fibré vectoriel tout schéma $\rho : W \to X$ pour lequel il existe un fibré vectoriel $p : E \to X$ et une action de E_+ sur W faisant de $\rho : W \to X$ un E_+-torseur.

2.5.4. Ainsi définis, les fibrés linéaires affines géométriques de rang n constituent une sous-classe, en générale stricte, de la classe des fibrés affines de rang n, i.e. des fibrés $\rho : V \to X$ localement isomorphes à $\mathbb{A}^n_X$. Ces deux classes ne coïncident que si le groupe $\mathrm{Aut}_X(\mathbb{A}^n_X)$ des X-automorphismes de $\mathbb{A}^n_X$ coïncide avec son sous-groupe des automorphismes linéaires affines. Cela conduit à la caractérisation pratique suivante des torseurs en droites au-dessus d'un schéma intègre.

Proposition 2.5.5. *Soit X un schéma* intègre. *Pour qu'un schéma $\rho : W \to X$ soit un torseur en droites, il faut et il suffit qu'il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (X_i)_{i \in I}$ de X tel que $W \mid_{X_i} \simeq \mathbb{A}^1_{X_i}$ pour tout $i \in I$.*

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, il suffit de remarquer que si A est un anneau intègre, alors tout A-automorphisme de l'algèbre $A[T]$ est linéaire affine, i.e. de la forme $T \mapsto b + aT$ où $b \in A$ et $a \in A^*$. □

2.5.6. Donnons pour terminer un résultat qui s'avère utile en pratique lorsqu'il s'agit de déterminer si un schéma muni d'une action d'un fibré vectoriel E_+ est un torseur. Rappelons au préalable qu'un schéma $\rho : W \to X$ est dit formellement principal homogène sous une action $\mathbf{t} : E_+ \times_X W \to W$ de E_+ si le morphisme $E \times_X W \to W \times_X W$ de composantes $\mathbf{t}$ et ρ est un isomorphisme.

Proposition 2.5.7. *Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent localement libre et $\rho : W \to X$ un X-schéma fidèlement plat et quasi-compact sur lequel $E_+ = \mathbf{V}(\mathcal{E})_+$ agit. Alors W est un E_+-torseur si et seulement s'il est formellement principal homogène.*

Démonstration. La condition est bien sûr nécessaire. On notera d'ailleurs que tout E_+-torseur $\rho : W \to X$ est fidèlement plat et quasi-compact sur X puisque E l'est. Réciproquement, considérons le changement de base $\rho : W \to X$. Si W

est formellement principal homogène sous E_+, alors $W \times_X W$ est formellement principal homogène sous $E \times_X W$, donc est isomorphe au torseur trivial puisqu'il admet une section, en l'occurrence le morphisme diagonal $W \to W \times_X W$. Ainsi $\rho_W : W \times_X W \to W$ est isomorphe au torseur défini par l'extension triviale

$$0 \to \mathcal{O}_W \to \mathcal{O}_W \oplus \rho^* \mathcal{E} \to \rho^* \mathcal{E} \to 0.$$

Les morphismes fidèlement plats et quasi-compacts étant des morphismes de descente effective dans la catégorie fibrée des faisceaux localement libres de rang n, et, par conséquent, dans la catégorie des extensions localement triviales de tels faisceaux (SGA 1 VIII.1), nous concluons qu'il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (X_i)_{i \in I}$ de X tel que pour tout $i \in I$, $W \mid_{X_i}$ soit isomorphe au $E \mid_{X_i}$-torseur défini par l'extension triviale $\mathcal{O}_{X_i} \oplus \mathcal{E} \mid_{X_i}$. $\square$

CHAPITRE 3

Quasi-torseurs sous un fibré en droites

Le présent chapitre est consacré à l'étude d'une classe de schémas $\rho : W \to X$ munis d'une action d'un fibré en droites $p : L_+ \to X$ sur X, qui ne sont pas des torseurs pour cette action, mais qui le deviennent pour certaines actions d'autres fibrés en droites $p' : L'_+ \to X$ se déduisant de L.

De telles situations se rencontrent fréquemment en pratique, comme le montre l'exemple bien connu suivant. On sait d'après **[40]** que toute action non triviale du groupe additif $\mathbb{C}_+ = \mathbb{G}_{a,\mathbb{C}}$ sur le plan affine complexe $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}\left(\mathbb{C}\left[x\right]\left[y\right]\right)$ est conjuguée à une action par "translation tordue" de la forme $t \star (x, y) \mapsto (x, y + tf(x))$ pour un certain polynôme non nul $f \in A = \mathbb{C}[x]$. Via la projection $pr : \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \to X = \mathrm{Spec}(A)$, nous pouvons considérer une telle action comme une action $\mathbf{t}_f$ de $\mathbb{G}_{a,X} = \mathrm{Spec}(A[t])$ sur $\mathbb{A}^1_X = \mathrm{Spec}(A[y])$, dont la co-action est donnée par l'homomorphisme de A-algèbres

$$A[y] \to A[y] \otimes_A A[t], y \mapsto y \otimes 1 + f \otimes t.$$

Ainsi $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{A}^1_X$ muni de cette action est un $\mathbb{G}_{a,X}$-torseur si et seulement si $f = 1$ Supposons justement que $f \neq 1$. Alors la sous A-algèbre $A[ft] \subset A[t]$ s'identifie à l'algèbre symétrique du A-module inversible $M = fA$ et l'inclusion ci-dessus définit un morphisme de X-groupes $\mathbf{u} : \mathbb{G}_{a,X} \to \mathbf{V}\left(\tilde{M}\right) = \mathrm{Spec}(A[ft])$. D'autre part, puisque $A[ft] \simeq A[y]$, $\mathbb{A}^1_X$ est un $\mathbf{V}\left(\tilde{M}\right)_+$-torseur pour l'action $\mathbf{t}$ de $\mathbf{V}\left(\tilde{M}\right)_+$ définie via la co-action

$$A[y] \mapsto A[y] \otimes_A A[ft], y \mapsto y \otimes 1 + 1 \otimes ft,$$

et l'action $\mathbf{t}_f$ de $\mathbb{G}_{a,X}$ sur $\mathbb{A}^1_X$ se factorise par $\mathbf{t}$ via le morphisme $\mathbf{u}$.

On notera que si f n'est pas inversible, alors l'action $\mathbf{t}_f$ de $\mathbb{G}_{a;X}$ n'est pas libre puisque tout sous-schéma fermé contenu dans la préimage par $pr : \mathbb{A}^1_X \to X$ de la sous-variété fermée $V(f)$ est fixé par cette action, tandis que, par construction, l'action $\mathbf{t}$ de $\mathbf{V}\left(\tilde{M}\right)_+$ est libre. En général, on est plus à l'aise lorsqu'un groupe agit librement sur un ensemble.

La tendance naturelle consisterait donc, dans l'exemple ci-dessus, à privilégier l'action de $\mathbf{V}\left(\tilde{M}\right)_+$ par rapport à l'action de $\mathbb{G}_{a,X}$ qui s'en déduit via le morphisme $\mathbf{u}$. Il est cependant beaucoup plus intéressant de pouvoir construire des actions non libres d'un fibré en droites sur l'espace total d'un torseur. En effet, sans dévoiler plus avant le contenu du prochain chapitre, disons que cette construction est un préliminaire nécessaire à la définition de la notion de modification affine équivariante. Pour faire sentir au lecteur l'intérêt pour nous que représente l'existence de points fixes, rappelons qu'étant données une variété algébrique X munie d'une action d'un groupe algébrique G, et une sous-variété fermée Z de X invariante par G, l'action de G sur X se relève en une G-action sur la variété $\tilde{X}$ obtenue à partir de X en éclatant Z.

Revenant à la situation relative où $\rho : W \to X$ est un torseur sous un fibré en droites L_+, on constate que les sous-schémas fermés invariants de W sont les images inverses des sous-schémas fermés de X. L'ensemble des sous-schémas fermés Z de

W susceptibles de se voir appliquer une construction du type précédent est donc relativement limité. Par contre, dès lors que l'on sait munir W d'une action à la fois non libre et non triviale d'un fibré en droites L'_+, il devient possible de construire par cette méthode de nombreux schémas $\tilde{\rho} : \tilde{W} \to X$ admettant une L'_+-action non triviale.

3.1. Quasi-torseurs en droites et diviseurs effectifs

Dans ce paragraphe nous introduisons la notion de quasi-torseur $\rho : W \to X$ sous un fibré en droites. Nous donnons ensuite une interprétation de cette nouvelle structure en termes de diviseurs (de Cartier) effectifs sur X.

3.1.1. Définitions. Rappelons que lorsque l'on travaille sur un schéma X non nécessairement intègre, le faisceau constant $\mathcal{K}_X$ des fonctions rationnelles sur X n'est pas défini, et doit être remplacé par le faisceau $\mathcal{M}_X = \mathcal{O}_X\left[\mathcal{S}^{-1}\right]$ *des germes de fonctions méromorphes sur* X, obtenu en inversant la partie multiplicative $\mathcal{S}$ de $\mathcal{O}_X$ constituée, pour tout ouvert U, de l'ensemble des éléments réguliers, i.e. non diviseurs de zéro, de l'anneau $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. On appelle alors fonction méromorphe régulière sur X toute section globale du faisceau de groupes multiplicatifs $\mathcal{M}_X^*$ des éléments inversibles de $\mathcal{M}_X$.

Plus généralement, on appelle section méromorphe régulière (resp. holomorphe régulière) d'un $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}$ toute section de $\mathcal{M}_X(\mathcal{L}) = \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_X$ correspondant, pour tout ouvert U tel que $\mathcal{L}\mid_U \simeq \mathcal{O}_U$, à un élément de $\Gamma(U, \mathcal{M}_X^*)$ (resp. à un élément de $\Gamma(U, \mathcal{M}_X^* \cap \mathcal{O}_X)$). Cela conduit à la définition suivante.

Définition 3.1.1. Soient X un schéma, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ deux $\mathcal{O}_X$-modules inversibles. On dit qu'un homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules $u : \mathcal{L}' \to \mathcal{L}$ est régulier s'il correspond à une section holomorphe régulière $s \in \Gamma\left(X, (\mathcal{L}')^\vee \otimes \mathcal{L}\right)$ via l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{L}', \mathcal{L}) \simeq \Gamma\left(X, (\mathcal{L}')^\vee \otimes \mathcal{L}\right)$.

Nous en arrivons à la définition de la notion de quasi-torseur sous un fibré en droites.

Définition 3.1.2. Soient X un schéma, L et L' deux fibrés en droites sur X, définis respectivement par des $\mathcal{O}_X$-modules inversibles $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$, et soit $\rho : W \to X$ un L'_+-torseur. On appelle *structure de quasi-torseur* sous L_+ sur W la donnée d'un homomorphisme régulier $u : \mathcal{L}' \to \mathcal{L}$.

3.1.3. Cette étrange définition se révèle en observant qu'en composant l'action $\mathbf{t} : L'_+ \times_X W \to W$ de L'_+ sur W avec le morphisme X-groupes $\mathbf{u} : L_+ \to L'_+$ induit par l'homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbres $\mathbf{S}(u) : \mathbf{S}(\mathcal{L}') \to \mathbf{S}(\mathcal{L})$, on obtient, puisque f est un homomorphisme régulier, donc en particulier un homomorphisme non nul, une action non triviale

$$\mathbf{t}_u = \mathbf{t} \circ (\mathbf{u} \times \mathrm{Id}) : L_+ \times_X W \to W$$

de L_+ sur W. Nous dirons alors que W est un *quasi-torseur* sous L_+, ou encore un L_+-*quasi-torseur.*

Exemple 3.1.4. Tout L_+-torseur $\rho : W \to X$ est bien sûr un quasi-torseur puisqu'il suffit de prendre $f = \mathrm{Id} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ dans la définition (3.1.2). Plus généralement, pour tout élément régulier $a \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, la multiplication par a définit un homomorphisme régulier $f = \times a : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, donc une structure de L_+-quasi-torseur sur W.

3.1.5. Soit maintenant $\rho' : W' \to X$ un L'_+-torseur image directe du L_+-torseur $\rho : W \to X$ par l'homomorphisme régulier $u : \mathcal{L}' \to \mathcal{L}$. Rappelons (2.3.3) que cela signifie que la classe d'isomorphisme $c(W') \in H^1\left(X, (\mathcal{L}')^\vee\right)$ est l'image de la classe d'isomorphisme $c(W) \in H^1(X, \mathcal{L}^\vee)$ par l'homomorphisme de groupe induit par l'homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules ${}^t u : \mathcal{L}^\vee \to (\mathcal{L}')^\vee$ dual de u. On sait alors qu'il existe un morphisme affine linéaire $\beta : W \to W'$ qui est équivariant pour le morphisme de X-groupes $\mathbf{u} : L_+ \to L'_+$ déduit de u. Ce morphisme β devient donc L_+-équivariant lorsque l'on munit W' de sa structure de quasi-torseur sous L_+ correspondant à l'homomorphisme $u : \mathcal{L}' \to \mathcal{L}$.

3.1.2. Quasi-torseur associé à un diviseur effectif. Par définition, un homomorphisme régulier $u : \mathcal{L}' \to \mathcal{L}$ correspond à une section régulière $s \in \Gamma\left(X, (\mathcal{L}')^\vee \otimes \mathcal{L}\right)$, de sorte que la paire $\left((\mathcal{L}')^\vee \otimes \mathcal{L}, s\right)$ correspondante est isomorphe à la paire $(\mathcal{O}_X(D), s_D)$ définie par le diviseur effectif $D = \operatorname{div}(s) \in \operatorname{Div}^+(X)$. Autrement dit, $\mathcal{L}' \simeq \mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X(D)$, où $\mathcal{J}_X(D) = (\mathcal{O}_X(D))^\vee$, et u s'identifie à l'homomorphisme

$$\mathrm{Id} \otimes^t s_D : \mathcal{L}' \simeq \mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X(D) \longrightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{L}$$

induit par la section canonique $s_D \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) \simeq \operatorname{Hom}_X(\mathcal{J}_X(D), \mathcal{O}_X)$. On en déduit donc la caractérisation alternative suivante des quasi-torseurs sous un fibré en droites.

Proposition 3.1.6. *Il y a une correspondance biunivoque entre les quasi-torseurs sous $\mathbf{V}(\mathcal{L})_+$ et les $\mathbf{V}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X(D))_+$-torseurs, où $D \in Div^+(X)$.*

Corollaire 3.1.7. *Soient X un schéma, $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X$-module inversible et $\rho : W \to X$ un $\mathbf{V}(\mathcal{L})_+$-torseur. Alors, pour tout diviseur effectif $D \in Div^+(X)$, W est muni d'une structure de quasi-torseur sous $\mathbf{V}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(D))_+$.*

Démonstration. Il suffit en effet d'appliquer la proposition (3.1.6) au $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(D)$. $\square$

3.1.8. Comme on vient de le voir, se donner une structure de $\mathbf{V}(\mathcal{L})_+$-quasi-torseur sur un $\mathbf{V}(\mathcal{L}')_+$-torseur $\rho : W \to X$, c'est se donner un isomorphisme $\mathcal{L}' \simeq \mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X(D)$ pour un certain diviseur effectif $D \in \operatorname{Div}^+(X)$. En particulier, il n'y a pas unicité d'une telle structure. Accordons-nous cependant de dire qu'un schéma $\rho : W \to X$, a priori sans action de $\mathbf{V}(\mathcal{L})_+$, est un quasi-torseur sous $\mathbf{V}(\mathcal{L})_+$ s'il existe un diviseur effectif $D \in \operatorname{Div}^+(X)$ et une action de $\mathbf{V}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X(D))_+$ sur W faisant de W un $\mathbf{V}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X(D))_+$-torseur. L'ensemble des structures possibles de quasi-torseur sous L_+ sur le X-schéma W est alors décrit par la proposition suivante.

Proposition 3.1.9. *Soit $\rho : W \to X$ un quasi-torseur sous L_+, défini par un diviseur effectif $D \in Div^+(X)$. Il y a une correspondance biunivoque entre les structures de quasi-torseur sous L_+ sur W et les éléments du système linéaire complet $|D|$ des diviseurs effectifs linéairement équivalents à D.*

Démonstration. Par hypothèse, W est un $\mathbf{V}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X(D))_+$-torseur dont la structure de L_+-quasi-torseur est définie par l'homomorphisme régulier $\mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X(D) \to \mathcal{L}$ induit par la section canonique $s_D \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$. Toute autre structure de L_+-quasi-torseur sur W est alors donnée par un homomorphisme régulier $\mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X(D) \to \mathcal{L}$, donc par une section régulière méromorphe $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$. La proposition s'en déduit puisque l'ensemble de ces sections est en bijection avec le système linéaire complet $|D|$ des diviseurs effectifs linéairement équivalents à D. $\square$

3.2. Fibrés principaux quasihomogènes

Par définition, un schéma $\rho : W \to X$ muni d'une action d'un fibré en droites $L_+ = \mathbf{V}(\mathcal{L})_+$ est un torseur s'il est localement isomorphe à L agissant sur lui-même par translations. Dans ce paragraphe, nous montrons que les quasi-torseurs sous L_+ sont caractérisés par une condition locale analogue.

Définition 3.2.1. Soient X un schéma, L un fibré en droites défini par un $\mathcal{O}_X$-modules inversible $\mathcal{L}$, et $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ un élément régulier. On appelle *translation tordue par* f l'action $\mathbf{t}_f$ de L_+ sur L induite par l'homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules

$$\mathrm{Id} \otimes 1 + f \otimes \mathrm{Id} : \mathcal{L} \to \mathbf{S}(\mathcal{L}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbf{S}(\mathcal{L}).$$

Remarque 3.2.2. En toute généralité, il n'est pas nécessaire de supposer que f soit régulier. Néanmoins, on s'expose alors à certaines situations contraires à l'intuition géométrique où une action $\mathbf{t}_f$ non triviale induit une action triviale sur toutes les fibres du morphisme structural $p : L \to X$. C'est le cas, par exemple, de l'action $\mathbf{t}_\varepsilon$ au dessus de $X = \mathrm{Spec}(k[\varepsilon])$.

Définition 3.2.3. Soient X un schéma et L un fibré en droites défini par un $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}$. Un schéma $\rho : W \to X$ muni d'une L_+-action est appelé un *fibré principal quasi-homogène de groupe* L_+ s'il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (X_i)_{i \in I}$ de X et des éléments réguliers $f_i \in \Gamma(X_i, \mathcal{O}_X)$ tels que pour tout $i \in I$, $W|_{X_i}$ soit isomorphe à $L|_{X_i}$ agissant sur lui-même par la translation tordue $\mathbf{t}_{f_i}$.

3.2.4. Tout L_+-quasi-torseur $\rho : W \to X$ est un fibré principal quasi-homogène de groupe L_+. En effet, d'après la proposition (3.1.6), il existe un diviseur effectif $D \in \mathrm{Div}^+(X)$ tel que W soit un $\mathbf{V}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X(D))_+$-torseur et tel que l'action de L_+ s'identifie à l'action $\mathbf{t}_{s_D}$ composée de l'action $\mathbf{t}$ de $\mathbf{V}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X(D))_+$ sur W et du morphisme de X-groupes $\mathbf{u} : L_+ \to \mathbf{V}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X(D))_+$ induit par la section canonique $s_D \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$. Soient alors $\left\{(X_i, f_i)_{i \in I}\right\}$ des donnée locales pour D. Pour tout $i \in I$, la restriction de $\mathbf{u}$ au dessus de l'ouvert X_i s'identifie, via l'isomorphisme

$$\mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X(D)|_{X_i} \simeq \mathcal{L}|_{X_i} \otimes f_i \mathcal{O}_{X_i} \simeq \mathcal{L}|_{X_i},$$

au X-morphisme induit par l'homomorphisme régulier $f_i \mathrm{Id} : \mathcal{L}|_{X_i} \to \mathcal{L}|_{X_i}$. Quitte à restreindre les ouverts X_i, nous pouvons supposer que le $\mathbf{V}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X(D))_+$-torseur W devient trivial sur le recouvrement $\mathcal{U} = (X_i)_{i \in I}$. On obtient ainsi des isomorphismes supplémentaires

$$\psi_i : L|_{X_i} \xrightarrow{\sim} \mathbf{V}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X(D)|_{X_i}) \xrightarrow{\sim} W|_{X_i}, \quad i \in I.$$

Le diagramme suivant étant alors commutatif,

$$\begin{tikzcd}
L|_{X_i} \times_{X_i} L|_{X_i} \arrow[r, "\mathbf{t}_{f_i}"] \arrow[d, "\mathbf{u}|_{X_i} \times \psi_i"'] & L|_{X_i} \arrow[d, "\psi_i"] \\
\mathbf{V}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X(D))|_{X_i} \times_{X_i} W|_{X_i} \arrow[r, "\mathbf{t}"] & W|_{X_i}
\end{tikzcd}$$

nous concluons que la restriction au-dessus de X_i de l'action $\mathbf{t}_{s_D}$ de L_+ sur W s'identifie à la translation tordue $\mathbf{t}_{f_i}$ induite par l'homomorphisme de $\mathcal{O}_{X_i}$-modules

$$\mathrm{Id} \otimes 1 + f_i \otimes \mathrm{Id} : \mathcal{L}|_{X_i} \to \mathbf{S}(\mathcal{L}|_{X_i}) \otimes \mathbf{S}(\mathcal{L}|_{X_i}).$$

Ainsi tout quasi-torseur $\rho : W \to X$ sous L_+ définit un fibré principal quasi-homogène sous L_+ au sens de la définition (3.2.3). On en déduit la nouvelle caractérisation suivante des quasi-torseurs.

Proposition 3.2.5. *Pour un X-schéma $\rho : W \to X$ muni d'une action d'un fibré en droites $p : L_+ \to X$, les assertions suivantes sont équivalentes :*
1) W est un L_+-quasi-torseur.
2) W est un fibré principal quasi-homogène sous L_+.

Démonstration. Il suffit de montrer que 2) implique 1). Par hypothèse W est muni d'une action de L_+ telle qu'il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (X_i)_{i \in I}$ de X, des sections régulières $f_i \in \Gamma(X_i, \mathcal{O}_X)$ et des isomorphismes $L_+|_{X_i}$-équivariants

$$\tau_i : \rho_* \mathcal{O}_E|_{X_i} \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}(\mathcal{L}|_{X_i}), \quad i \in I,$$

pour l'action de $L_+ |_{X_i}$ sur lui-même par la translation tordue $\mathbf{t}_{f_i}$. Pour tout $i \neq j$, $i, j \in I$, l'isomorphisme équivariant $\tau_{ij} = \tau_j |_{X_i} \circ \tau_i^{-1} |_{X_j}$ est alors nécessairement induit par un homomorphisme de $\mathcal{O}_{X_{ij}}$-algèbres

$$\mathbf{S}(h_{ij}, f_{ij}) : \mathbf{S}(\mathcal{L} |_{X_{ij}}) \to \mathbf{S}(\mathcal{L} |_{X_{ij}}),$$

où $h_{ij} \in \Gamma(X_{ij}, \mathcal{L}^\vee)$, et où $f_{ij} \in \mathrm{Isom}_{X_{ij}}(\mathcal{L}, \mathcal{L}) \simeq \Gamma(X_{ij}, \mathcal{O}_X^*)$ satisfait l'identité $f_i |_{X_j} = f_{ij} f_j |_{X_i}$. On obtient de plus, pour tout triplet d'indices i, j, k, les relations

$$\begin{cases} f_{ik} & = & f_{jk} f_{ij} \\ h_{ik} & = & h_{ij} + f_{ij} h_{jk} \end{cases}$$

au-dessus de $X_i \cap X_j \cap X_k$. On en déduit que W est isomorphe au un $\mathbf{V}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X(D))_+$-torseur

$$\tilde{\rho} : \mathbf{W}\left(\mathcal{U}, \mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X(D), \{g_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n}\right) \to X,$$

où $D \in \mathrm{Div}^+(X)$ désigne le diviseur de données locales $\{(X_i, f_i)\}_{i \in I}$, et où $\{g_{ij}\}_{i,j \in I} \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{O}_X(D))$ est le 1-cocyle de Čech défini par les sections

$$g_{ij} = h_{ij} \otimes f_i^{-1} \in \Gamma(X_{ij}, \mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{O}_X(D)), \quad i \neq j, \ i, j \in I.$$

□

3.3. Points fixes d'un quasi-torseur

L'action d'un fibré en droites L_+ sur un quasi-torseur $\rho : W \to X$ n'est en général pas libre. Dans ce paragraphe, nous introduisons différentes notions liées à l'étude des points fixes d'une telle action, relativement à la base X.

3.3.1. D'après la proposition (3.1.6), la donnée d'une structure de quasi-torseur sous L_+ sur un schéma $\rho : W \to X$ équivaut à la donnée d'un diviseur effectif $D \in \mathrm{Div}^+(X)$ tel que W soit un $\mathbf{V}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X(D))_+$-torseur. L'action de L_+ sur W s'identifie alors à l'action $\mathbf{t}_{s_D}$ composée de l'action $\mathbf{t}$ de $\mathbf{V}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X(D))_+$ sur W et du morphisme de X-groupes $\mathbf{u} : L_+ \to \mathbf{V}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X(D))_+$ induit par la section canonique $s_D \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$. Si $D = 0$, autrement dit si D admet des données locales $\{(X_i, f_i)_{i \in I}\}$ telles que $f_i \in \Gamma(X_i, \mathcal{O}_X^*)$ pour tout $i \in I$, alors l'action de L_+ sur W est libre.

Par contre, si $D \neq 0$, la restriction à l'ouvert X_i de l'action $\mathbf{t}_{s_D}$ s'identifie à l'action de $L_+ |_{X_i}$ sur $W |_{X_i} \simeq L |_{X_i}$ par la translation tordue $\mathbf{t}_{f_i}$. Ainsi, pour tout point $x \in \mathrm{Supp}(D)$ l'action induite de $L_x \simeq \mathbb{G}_{a,k(x)}$ sur la fibre $\rho^{-1}(x) \simeq \mathbb{A}^1_{k(x)}$ est triviale. Cela conduit à la définition suivante :

Définition 3.3.2. Soit $\rho : W \to X$ un quasi-torseur sous L_+ défini par un diviseur effectif $D \in \mathrm{Div}^+(X)$. On appelle *schéma des points fixes de L_+ sur W* le sous-schéma fermé de X défini par D.

Puisqu'à tout diviseur effectif $D \in \mathrm{Div}^+(X)$ correspond un 1-cycle à coefficients positifs ou nuls $\mathrm{cyc}(D)$, nous pouvons de même définir la notion de cycle des points fixes d'un L_+-torseur.

Définition 3.3.3. Soit $\rho : W \to X$ un quasi-torseur sous L_+ défini par diviseur effectif $D \in \mathrm{Div}^+(X)$. On appelle *cycle des points fixes de L_+ sur W* le 1-cycle $\mathrm{cyc}(D)$ associé à D . Pour tout 1-cycle premier $x \in X^{(1)}$, l'entier

$$\mathrm{fix}_x(W, \mathcal{L}, D) := \mathrm{mult}_x(D)$$

est appelé l'*ordre de point fixe de L_+ sur W en x*.

Exemple 3.3.4. Considérons de nouveau l'action $\mathbb{C}_+ = \mathbb{G}_{a,\mathbb{C}}$ sur le plan complexe $\mathbb{A}^2_X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x][y])$, où $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x])$, par la translation tordue $t \star (x, y) \mapsto (x, y + tf(x))$ pour un certain polynôme non nul $f \in \mathbb{C}[x]$. Rappelons que nous considérons cette action comme une $\mathbb{G}_{a,X}$ via la projection $pr : \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \to X$. Le cycle des points fixes de $\mathbb{G}_{a,X}$ sur $\mathbb{A}^1_X$ est alors simplement le cycle des zéros de f, i.e.le cycle

$$\mathrm{cyc}\,(f) = \sum_{x \in X \setminus \eta} \mathrm{ord}_x\,(f) \cdot \overline{\{x\}} = \sum_{x \in X \setminus \eta} \mathrm{long}\,(\mathcal{O}_{X,x}/f_x\mathcal{O}_{X,x}) \cdot \overline{\{x\}},$$

où η désigne le point générique de X. Autrement dit, l'ordre de point fixe au-dessus de x est simplement l'ordre d'annulation de la fonction f au point x.

3.3.5. Cette définition de la notion de point fixe de L_+ sur W relativement à la base X, nous permet de déterminer les sous-schémas fermés de E invariant par l'action de L_+. En effet, comme nous l'avons déjà remarqué ci-dessus, si $\rho : W \to X$ un $\mathbf{V}\,(\mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X\,(D))$-torseur pour un certain $D \in \mathrm{Div}^+\,(X)$, alors pour tout $x \in \mathrm{Supp}\,(D)$, la restriction de l'action $\mathbf{t}_{s_D}$ de L_+ sur W à la fibre schématique W_x est triviale. Plus généralement, on a le résultat suivant :

Proposition 3.3.6. *Avec les notations précédentes, tout sous-schéma fermé Z de W contenu dans le support du diviseur $\rho^*D \in Div^+\,(W)$ est invariant sous l'action $\mathbf{t}_{s_D}$ de L_+ sur W, et la restriction de cette action à Z est triviale.*

Démonstration. Soient $i : Z \hookrightarrow W$ l'immersion fermée d'un sous-schéma fermé Z de W, d'idéal $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_W$, et $\phi = \rho \circ i : Z \to X$ le morphisme structural de Z. Notons

$$\tilde{t}_{s_D} : \rho_*\mathcal{O}_W \to \rho_*\mathcal{O}_W \otimes \mathbf{S}\,(\mathcal{L})$$

la co-action correspondant à l'action $\mathbf{t}_{s_D}$ de L_+ sur W. Avec ces notations, le sous-schéma fermé $Z \subset W$ est invariant si et seulement si l'homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbres

$$\rho_*\mathcal{O}_W \stackrel{\tilde{t}_{s_D}}{\to} \rho_*\mathcal{O}_W \otimes \mathbf{S}\,(\mathcal{L}) \stackrel{i^\sharp \otimes \mathrm{Id}}{\longrightarrow} \phi_*\mathcal{O}_Z \otimes \mathbf{S}\,(\mathcal{L})$$

se factorise via $\phi_*\mathcal{O}_Z$. Comme il suffit de le vérifier localement, nous pouvons supposer que $X = \mathrm{Spec}\,(A)$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$, $D = \mathrm{div}\,(f)$, où $f \in A$ est régulier, $W = \mathbb{A}^1_X$. La co-action $\tilde{t}_{s_D}$ s'identifie alors à l'homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbres

$$\tilde{t}_f : A\,[T] \to A\,[T] \otimes A\,[T]\,, T \mapsto T \otimes 1 + f \otimes T.$$

Puisque Z est contenu dans le support de ρ^*D, son idéal $I \subset A\,[T]$ contient f. Soit $\pi : A\,[T] \to \Gamma\,(Z, \mathcal{O}_Z) = A\,[T]\,/I$ l'homomorphisme quotient. Le diagramme suivant étant alors clairement commutatif

$$\begin{tikzcd} A\,[T] \arrow[r, "\tilde{t}_f"] \arrow[d, "\pi"'] & A\,[T] \otimes A\,[T] \arrow[d, "\pi \otimes \mathrm{Id}"] \\ A\,[T]\,/I \arrow[r, "\mathrm{Id} \otimes 1"] & A\,[T]\,/I \otimes A\,[T] \end{tikzcd}$$

nous concluons que Z est bien invariant, et que l'action de L_+ induite sur Z est triviale. $\square$

CHAPITRE 4

Modifications affines équivariantes

Considérons la surface $S \subset \mathbb{A}^3_X = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x][y,z])$ d'équation $xz - y^2 = 0$. L'action du groupe additif $\mathbb{G}_{a,X}$ sur $\mathbb{A}^2_X$ via

$$t \star (x, y, z) \mapsto \left(x, y + tx, z + 2yt + xt^2\right)$$

induit une action libre de $\mathbb{G}_{a,X}$ sur S. La restriction de la projection $pr_x : S \to X$ au-dessus de $X_* = X \setminus \{0\} \simeq \operatorname{Spec}\left(\mathbb{C}\left[x, x^{-1}\right]\right)$ est isomorphe au fibré trivial. Par contre, la fibre $pr_x^{-1}(0)$ est isomorphe à la droite affine double $\operatorname{Spec}\left(\mathbb{C}[y,z] / \left(y^2\right)\right)$. Ainsi, S munie de cette $\mathbb{G}_{a,X}$-action n'est pas un torseur. Nous observons cependant que la projection $pr_{x,y} : S \to \mathbb{A}^1_X, (x,y,z) \mapsto (x,y)$ se restreint en un isomorphisme au dessus de X_* tandis que l'image de la fibre $pr_x^{-1}(0) \subset S$ par $pr_{x,y}$ est un sous-schéma fermé propre de la fibre $pr_x^{-1}(0) \subset \mathbb{A}^1_X$. Via $pr_{x,y}$, nous obtenons un isomorphisme

$$\Gamma(S, \mathcal{O}_S) \simeq \mathbb{C}\left[x, y, x^{-1}y^2\right] \subset \mathbb{C}\left[x, x^{-1}, y\right].$$

On dit alors, suivant [**32**], que $pr_{x,y} : S \to \mathbb{A}^1_X$ est la *modification affine* de centre $I = \left(x, y^2\right)$ et de diviseur x. Par construction, $pr_{x,y}$ est équivariant lorsque l'on munit $\mathbb{A}^1_X$ de la $\mathbb{G}_{a,X}$-action par translation tordue $t \star (x,y) \mapsto (x, y + tx)$, l'idéal I étant alors invariant. Ainsi S s'identifie à une modification affine du $\mathbb{G}_{a,X}$-quasi-torseur $\mathbb{A}^1_X$.

Les modifications affines au sens de [**32**] sont essentiellement des constructions d'algèbre commutative permettant de décrire la géométrie birationnelle des variétés affines. Dans le présent chapitre, nous introduisons une généralisation naturelle de cette notion à des schémas X quelconques. Cela nous permet ensuite de construire, à partir de quasi-torseurs $\rho : W \to X$ sous un fibré en droites $p : L \to X$, des nouveaux X-schémas admettant une L_+-action, mais qui ne sont en général pas des torseurs.

4.1. Modifications affines selon Kaliman et Zaidenberg

Nous rappelons dans ce paragraphe la notion de modification affine d'un schéma affine $X = \operatorname{Spec}(A)$ introduite par Kaliman et Zaidenberg [**32**]. Il s'agit principalement de transposer les notions relatives à l'étude de la géométrie birationnelle des schémas affines dans le langage équivalent de l'algèbre commutative. Cela justifie pleinement la définition générale suivante.

Définition 4.1.1. On appelle modification affine de $X = \operatorname{Spec}(A)$, tout X-schéma affine de type fini $\pi : Y \to X$ spectre d'une sous-A-algèbre de type fini de l'anneau total des fractions K_A de A.

4.1.2. Lorsque X est intègre, K_A s'identifie au corps des fractions $\operatorname{Frac}(A)$, de sorte que toute sous-A-algèbre de type fini $B \subset \operatorname{Frac}(A)$ définit un schéma affine $\pi : Y = \operatorname{Spec}(B) \to X$ birationnel à X.

De manière générale, toute sous-A-algèbre de type fini de $B \subset K_A$ est engendrée par un nombre fini d'éléments de la forme b_i/f_i, où $b_i \in A$ et $f_i \in K_A^* \cap A$. Autrement dit, on a un isomorphisme de A-algèbres

$$B \simeq A\left[b_1/f_1, \ldots, b_r/f_r\right] \simeq A\left[a_1/f, \ldots, a_r/f\right] \subset A_f \subset K_A,$$

où $f = f_1 \cdots f_r \in K_A^* \cap A$. En notant $I = (f, a_1, \ldots, a_r) \subset A$ l'idéal de A engendré par $f, a_1, \ldots, a_r$, on voit que B s'identifie à la A-algèbre

$$A[I/f] = A[a_1/f, \ldots, a_r/f] = \left\{a^k/f^k \mid a^k \in I^k,\ k = 1, \ldots\right\},$$

quotient de la A-algèbre de Rees $A[It] = \bigoplus_{n \geq 0} I^n t^n \subset A[t]$ par l'idéal principal engendré par $1 - ft$. On retrouve ainsi la définition d'une modification affine selon [**32**]. Dans ces conditions, nous adopterons la terminologie plus précise suivante.

DÉFINITION 4.1.3. On dit que

$$\sigma_{I/f} : X_{I,f} = \mathrm{Spec}\,(A[I/f]) \to X = \mathrm{Spec}\,(A)$$

est *la modification affine de X de centre I et de diviseur $D = \mathrm{div}\,(f)$*, ou, plus simplement, de centre (I, f).

4.1.4. Puisque $A[I/f] \simeq A[It]/(1 - ft)$, l'immersion ouverte canonique

$$j : X_{I/f} = \mathrm{Spec}\,(A[I/f]) \hookrightarrow \tilde{X} = \mathrm{Proj}_A\,(A[It])$$

réalise $X_{I,f}$ comme l'ouvert principal $\tilde{X}_f$ de $\tilde{X}$ où f ne s'annule pas. En conséquence, le morphisme $\sigma : X_{I/f} \to X$ se factorise, via j, par l'éclatement $\mathrm{Bl}_I : \tilde{X} \to X$ de X de centre I. Suivant [**32**], nous dirons que le sous-schéma fermé $D_f^{pr} \simeq \mathrm{Proj}_A\,(A[It]/ft)$, complémentaire dans $\tilde{X}$ de $j\,(X_{\mathcal{I},f}) \simeq \tilde{X}_f$ est *la transformée propre* de D.

EXEMPLE 4.1.5. Soient k un corps, $A = k[x, y]$, $I = (x, y)$ et $f = x^2 \in I$. La transformée propre du diviseur div (f) dans

$$\mathrm{Proj}_A A[xt, yt] \simeq \mathrm{Proj}_A A[u, v]/(xv - yu)$$

est donnée par l'équation $\{xu = 0\}$. Elle est donc constituée de la réunion de la transformée stricte de la droite $V(f) = \{x = 0\}$ et du diviseur exceptionnel $\{x = y = 0\}$ de l'éclatement $\mathrm{Bl}_I : \mathrm{Proj}_A A[xt, yt] \to \mathrm{Spec}\,(A)$.

4.1.6. Comme le montre l'exemple précédent, la transformée propre D_f^{pr} est en général disctincte de la *transformée stricte* D'_f de $D = \mathrm{div}\,(f)$, qui est définie, rappelons-le, comme l'adhérence dans $\tilde{X}$ de l'image inverse de $D \setminus V(I)$ par l'éclatement $\mathrm{Bl}_I : \tilde{X} \to X$. Il existe cependant des cas où ces deux notions coïncident, comme le montre la proposition suivante :

PROPOSITION 4.1.7. *Si l'idéal $I \subset A$ est engendré par une suite régulière $a_0 = f, a_1, \ldots, a_r$, alors la transformée propre de $D = div(f)$ coïncide avec sa transformée stricte.*

DÉMONSTRATION. Puisque la suite $a_0, \ldots, a_r$ est régulière, l'algèbre de Rees $A[It]$ s'identifie, via l'homomorphisme $X_i \mapsto a_i t$, $i = 0, \ldots, r$, à la A-algèbre B, quotient de $A[X_0, \ldots, X_r]$ par l'idéal J engendré par les mineurs 2×2 de la matrice

$$\begin{pmatrix} a_0 & \cdots & a_r \\ X_0 & \cdots & X_r \end{pmatrix}.$$

Ainsi la transformée propre D_f^{pr} et la transformée stricte D'_f coïncident puisqu'elles sont toutes deux données par l'équation $\{X_0 = 0\}$ dans $\mathrm{Proj}_A B$. □

4.1.8. Il est utile pour la suite de donner la construction alternative suivante de la modification affine $\sigma_{I/f} : X_{I,f} \to X$ de X de centre (I, f). Étant donné un idéal $I = (a_1, \ldots, a_r)$ de A et un élément régulier $f \in I$, nous observons que $1 \in A_f$ est un élément de l'idéal $f^{-1}I = (a_1/f, \ldots, a_r/f) \in A_f$ de $A_f \subset K_A$. On a alors un isomorphisme de A-algèbres

$$A[I/f] = A[It]/(1 - ft) \simeq A\left[\left(f^{-1}I\right)t\right]/(1 - t),$$

où $A\left[\left(f^{-1}I\right)t\right]$ désigne la A-algèbre de Rees de l'idéal $\left(f^{-1}I\right)$ de A_f. Ainsi, quitte à remplacer l'idéal I de A par l'idéal $f^{-1}I$ de K_A qui contient 1, nous pouvons faire formellement disparaître f de la définition de l'algèbre $A\left[I/f\right]$. Cette interprétation, qui n'apporte évidemment rien de nouveau lorsque l'on travaille sur un schéma de base affine, va cependant nous permettre de généraliser la notion de modification affine à des schémas de base X quelconques.

4.2. Modifications affines générales

La notion centrale dans l'étude de la géométrie birationnelle des schémas affines sur un schéma X donné est celle d'$\mathcal{O}_X$-algèbre fractionnaire, que nous rappelons ci-dessous. Parmi ces algèbres, nous étudions ensuite une sous-classe particulière qui constitue généralisation naturelle de la notion de modification affine $\sigma_{I,f} : \mathrm{Spec}\left(A\left[I/f\right]\right) \to \mathrm{Spec}\left(A\right)$ de $\mathrm{Spec}\left(A\right)$, de centre $\left(I,f\right)$.

4.2.1. Algèbres fractionnaires. Les algèbres fractionnaires, introduites cidessous, sont les analogues naturelles, pour les schémas X quelconques, des sous-A-algèbres de type fini $B \subset K_A$ pour les schéma affines $X = \mathrm{Spec}\left(A\right)$.

Définition 4.2.1. Soit X un schéma. On appelle *$\mathcal{O}_X$-algèbre fractionnaire* toute $\mathcal{O}_X$-algèbre isomorphe à une sous $\mathcal{O}_X$-algèbre quasi-cohérente de type fini du faisceau des germes de fonctions méromorphes $\mathcal{K}_X$ de X.

4.2.2. Une $\mathcal{O}_X$-algèbre fractionnaire $\mathcal{B} \subset \mathcal{K}_X$ définit un X-schéma affine de type fini $\sigma : Y = \mathbf{Spec}\left(\mathcal{B}\right) \to X$. Par construction, l'homomorphisme $\mathcal{O}_X \to \mathcal{B}$ est injectif et induit un isomorphisme $\mathcal{K}_X \xrightarrow{\sim} \sigma_*\mathcal{K}_Y$. En particulier, si X est intègre, alors Y l'est aussi et σ est birationnel.

Réciproquement, si $\sigma : Y \to X$ un morphisme affine de type fini tel que l'homomorphisme $\sigma^\sharp : \mathcal{O}_X \to \sigma_*\mathcal{O}_Y$ induise un isomorphisme $\tilde{\sigma} : \mathcal{K}_X \xrightarrow{\sim} \sigma_*\mathcal{K}_Y$ alors $\sigma^\sharp$ est injectif puisque les homomorphismes canoniques $i_X : \mathcal{O}_X \to \mathcal{K}_X$ et $\sigma_*\left(i_Y\right) : \sigma_*\mathcal{O}_Y \to \sigma_*\mathcal{K}_Y$ le sont. Ainsi, puisque Y est de type fini sur X, $\mathcal{B} = \tilde{\sigma}^{-1}\left(\sigma_*\mathcal{O}_Y\right) \subset \mathcal{K}_X$ est une $\mathcal{O}_X$-algèbre fractionnaire isomorphe à $\sigma_*\mathcal{O}_Y$. On obtient donc la caractérisation suivante :

Proposition 4.2.3. *Il y une correspondance biunivoque entre les $\mathcal{O}_X$-algèbres fractionnaires et les morphismes affines de type fini $\pi : Y \to X$ induisant un isomorphisme entre les faisceaux des germes de fonctions méromorphes sur X et Y respectivement.*

Exemple 4.2.4. Soient X un schéma intègre, $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ un idéal de type fini, et soit $\mathrm{Bl}_{\mathcal{I}} : \tilde{X} = \mathbf{Proj}\left(\mathcal{S}\right) \to X$ l'éclatement de X de centre $\mathcal{I}$, où $\mathcal{S} = \bigoplus \mathcal{I}^n$. Pour toute section $f \in \Gamma\left(X, \mathcal{I}\right)$, $\mathcal{B} = \mathcal{S}/\left(1-f\right)\mathcal{S}$ est alors une $\mathcal{O}_X$-algèbre fractionnaire. Le X-schéma affine correspondant est canoniquement isomorphe à l'ouvert principal $\tilde{X}_f$ de $\tilde{X}$ où f ne s'annule pas, i.e. l'unique ouvert de $\tilde{X}$ tel que pour tout ouvert affine $U \subset \tilde{X}$, $\tilde{X}_f \cap \sigma^{-1}\left(U\right) = D_+\left(f\mid_U\right)$ dans $\sigma^{-1}\left(U\right) \simeq \mathrm{Proj}\left(\Gamma\left(U, \mathcal{S}\right)\right)$ (EGA II.3.1.4).

Définition 4.2.5. Un morphisme affine de type fini $\pi : Y \to X$ comme cidessus sera appelé une pseudo-modification affine.

4.2.6. Une $\mathcal{O}_X$-algèbre fractionnaire $\mathcal{B} \subset \mathcal{K}_X$ étant par définition de type fini, elle est engendrée par un *idéal fractionnaire* $\mathcal{J}$, c'est à dire un sous $\mathcal{O}_X$-module de type fini de $\mathcal{K}_X$ (EGA II.8.2.1). En général, il n'est pas possible de trouver un "dénominateur commun" aux éléments de $\mathcal{J}$ comme cela était le cas dans la situation affine (4.1.2) . Plus formellement, ceci signifie que le faisceau $\mathcal{D}$ des dénominateurs de $\mathcal{J}$, i.e. le faisceau défini localement par $\{a \in \mathcal{O}_X \mid a \cdot \mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X\}$ n'admet pas nécessairement de section globale. A supposer qu'une telle section existe, ce qui est le cas dès lors que X est quasi-projectif sur un corps k (cf. 4.2.7 ci-dessous), on ne peut toutefois pas garantir que $Y = \mathbf{Spec}\,(\mathcal{B})$ soit isomorphe à un ouvert principal d'un schéma éclaté $\mathrm{Bl}_{\mathcal{I}} : \tilde{X} \to X$ comme ci-dessus.

Cependant, lorsque X est intègre, la proposition suivante montre qu'il est possible de réaliser Y comme ouvert d'un X-schéma projectif $\mathrm{Bl}_{\mathcal{J}} : \tilde{X} \to X$ obtenu en éclatant un idéal fractionnaire $\mathcal{J} \subset \mathcal{K}_X$.

Proposition 4.2.7. *Soient X un schéma intègre et $\mathcal{B} \subset \mathcal{K}_X$ une $\mathcal{O}_X$-algèbre fractionnaire. Alors il existe un idéal fractionnaire $\mathcal{J} \subset \mathcal{K}_X$ et une immersion ouverte de X-schémas*

$$j : Y = \mathbf{Spec}\,(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathbf{Proj}\left(\bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{J}^n\right).$$

Si de plus X est quasi-projectif sur un corps k, alors on peut supposer que $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$.

Démonstration. Puisque X est intègre, $\mathcal{K}_X$ n'est autre que le faisceau constant $\mathcal{R}_X$ des fonctions rationnelles de X. Par hypothèse, Y est défini par une sous $\mathcal{O}_X$-algèbre de $\mathcal{R}_X$, donc est aussi intègre . Puisque Y est affine, de type fini sur X, il existe un X-schéma projectif intègre $\pi : \tilde{X} = \mathbf{Proj}\,(\mathcal{S}) \to X$, où $\mathcal{S}$ est une $\mathcal{O}_X$-algèbre quasi-cohérente graduée de type fini, engendrée par $\mathcal{S}_1$, et une immersion ouverte de X-schémas $i : Y \hookrightarrow \tilde{X}$. De plus, le morphisme structural $\sigma : Y \to X$ étant birationnel, nous concluons que π l'est aussi.

D'après EGA III.2.3.5, il existe alors un idéal fractionnaire $\mathcal{J} \subset \mathcal{K}_X$ tel que $\tilde{X} \simeq \mathbf{Proj}\left(\bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{J}^n\right)$, d'où la première assertion. Si de plus X est quasi-projectif sur k, alors il existe un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample sur X, et la seconde assertion résulte alors de EGA III.2.3.6, ou directement de [**29**, Théorème II.7.17,p166]. $\square$

4.2.2. Modification affine d'un schéma le long d'un diviseur. Dans ce paragraphe, nous introduisons une sous-classe d'algèbres fractionnaires dont la structure est formellement la même que celle des A-algèbres $A\,[I/f]$ au-dessus d'un schéma affine $X = \mathrm{Spec}\,(A)$.

4.2.8. Si X est un schéma nœthérien, alors toute $\mathcal{O}_X$-algèbre fractionnaire $\mathcal{B} \subset \mathcal{K}_X$ est limite inductive de ses sous $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents de type fini, donc limite inductive d'un système d'idéaux fractionnaires. D'autre part, $\mathcal{B}$ étant une $\mathcal{O}_X$-algèbre de type fini, nous pouvons choisir un système inductif $\{\mathcal{J}_n\}_{n\geq 0}$ d'idéaux fractionnaires contenus dans $\mathcal{B}$ de telle sorte que $\mathcal{J}_0 = \mathcal{O}_X$, que $\mathcal{J}_1$ engendre $\mathcal{B}$ comme $\mathcal{O}_X$-algèbre et que, pour tout $m \geq n$, $\mathcal{J}_n \subset \mathcal{J}_m$ et $\mathcal{J}_n \mathcal{J}_m \subset \mathcal{J}_{m+n}$. Par construction, le $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{B} = \varinjlim \mathcal{J}_n$ est alors canoniquement isomorphe au quotient de la $\mathcal{O}_X$-algèbre quasi-cohérente graduée

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{J}_m \subset \mathcal{K}_X$$

par le sous-$\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{G}$ image de l'homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules

$$\mathrm{Id} - \bigoplus_{n\geq 0} g_n^{n+1} : \mathcal{A} \to \mathcal{A},$$

où $g_n^m : \mathcal{J}_n \hookrightarrow \mathcal{J}_m$, $m \geq n \geq 0$ désigne l'inclusion de $\mathcal{J}_n$ dans $\mathcal{J}_m$. Par construction, $\mathcal{G}$ s'identifie à l'idéal de $\mathcal{A}$ localement engendré par les éléments de la forme $a_n - g_n^m\,(a_n)$, où a_n désigne une section locale de $\mathcal{J}_n \subset \mathcal{A}$, de sorte que l'on obtient un isomorphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbres $\mathcal{B} \simeq \mathcal{A}/\mathcal{G}$.

4.2.9. En particulier, tout idéal fractionnaire $\mathcal{I} \subset \mathcal{K}_X$ définit un système inductif $\{\mathcal{J}_n = \mathcal{I}^n\}_{n\geq 0}$ comme ci-dessus, donc une $\mathcal{O}_X$-algèbre fractionnaire $\mathcal{B}_{\mathcal{I}} = \varinjlim \mathcal{I}^n$. Les algèbres obtenues par ce procédé sont clairement les équivalents globaux des

A-algèbres fractionnaires $A[a_1/f_1, \ldots, a_r/f_r]$ au-dessus d'un schéma affine $X = \operatorname{Spec}(A)$. Une fois de plus, sans hypothèses supplémentaires sur X, on ne peut espérer "réduire au même dénominateur" les éléments de $\mathcal{I}$ (cf 4.2.6).

4.2.10. Nous allons maintenant construire des $\mathcal{O}_X$-algèbres fractionnaires $\mathcal{B}$, équivalents globaux des A-algèbres $A[I/f]$. La généralisation naturelle qui vient immédiatement à l'esprit consiste à considérer un idéal de type fini $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$, une section régulière $f \in \Gamma(X, \mathcal{I})$ et à former la $\mathcal{O}_X$-algèbre fractionnaire $\mathcal{O}_X[\mathcal{I}/f]$, quotient de la $\mathcal{O}_X$-algèbre de Rees

$$\mathcal{O}_X[\mathcal{I}t] = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^n t^n$$

par l'idéal principal engendré par $(1 - ft)$. Ce faisant, on définit un X-schéma affine

$$\sigma : X_{\mathcal{I},f} = \mathbf{Spec}(\mathcal{O}_X[I/f]) \to X$$

pour lequel σ est un isomorphisme hors du diviseur principal $D = \operatorname{div}(f)$. On a naturellement envie de remplacer ce diviseur principal par un diviseur effectif quelconque. L'observation (4.1.8) fournit la clef d'une telle généralisation, sous la forme suivante :

4.2.11. Considérons un triplet $(X, \mathcal{I}, D)$ constitué d'un schéma X, d'un diviseur effectif $D \in \operatorname{Div}^+(X)$ et d'un idéal de type fini $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ contenant l'idéal $\mathcal{J}_X(D) = \mathcal{O}_X(D)^\vee$. Se donner un tel triplet $(X, \mathcal{I}, D)$ revient évidemment à se donner un diviseur effectif $D \in \operatorname{Div}^+(X)$ et un sous-schéma fermé $Z \subset X$ contenu dans D. Les hypothèses impliquent que l'idéal fractionnaire

$$\mathcal{J} = \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D) \simeq \mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_X(D)$$

contient $\mathcal{O}_X$, donc la section constante $1 \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

Définition 4.2.12. Étant donné un triplet $(X, \mathcal{I}, D)$ comme ci-dessus, on appelle modification affine de X de centre $(\mathcal{I}, D)$ le X-schéma affine

$$\sigma_{\mathcal{I},D} : X_{\mathcal{I},D} = \mathbf{Spec}(\mathcal{O}_X[\mathcal{I}/D]) \to X$$

spectre de la $\mathcal{O}_X$-algèbre fractionnaire $\mathcal{O}_X[\mathcal{I}/D]$, quotient de la $\mathcal{O}_X$-algèbre de Rees

$$\mathcal{O}_X[\mathcal{J}t] = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{J}^n t^n \subset \mathcal{K}_X[t]$$

par l'idéal principal engendré par $(1 - t)$.

Remarque 4.2.13. Puisque par définition $\mathcal{J}_X(D) \subset \mathcal{I}$, la $\mathcal{O}_X$-algèbre fractionnaire $\mathcal{O}_X[\mathcal{I}/D]$ s'identifie à la limite inductive du système $(\mathcal{J}_n, g_n^m)$ où

$$\mathcal{J}_n = \mathcal{I}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(nD) \simeq \mathcal{I}^n \cdot \mathcal{O}_X(nD) \simeq \mathcal{J}_1^n \subset \mathcal{K}_X$$

et où les homomorphismes $g_n^m : \mathcal{J}_n \to \mathcal{J}_m$ sont induits par les identifications canoniques

$$\mathcal{J}_n = \mathcal{I}^n \otimes \mathcal{O}_X(nD) \simeq (\mathcal{I}^n \cdot \mathcal{J}_X((m-n)D)) \otimes \mathcal{O}_X(mD) \subset \mathcal{J}_m, \quad m \geq n.$$

4.2.14. Pour des données locales $\left\{(X_i, f_i)_{i \in I}\right\}$ de D, $\mathcal{O}_X(D)|_{X_i}$ est isomorphe au sous $\mathcal{O}_{X_i}$-module de $\mathcal{K}_{X_i}$ engendré par f_i^{-1}. La $\mathcal{O}_{X_i}$-algèbre $\mathcal{O}_X[\mathcal{I}/D]|_{X_i}$ est alors isomorphe au quotient de la $\mathcal{O}_{X_i}$-algèbre de Rees de l'idéal $\mathcal{I}_i = \mathcal{I}|_{X_i}$ de $\mathcal{O}_{X_i}$ par l'idéal principal engendré par $(1 - f_i t)$, et le schéma $X_{\mathcal{I},D}|_{X_i}$ correspondant s'identifie, via l'immersion ouverte canonique

$$j_i : X_{\mathcal{I},D}|_{X_i} \simeq \mathbf{Spec}(\mathcal{O}_{X_i}[\mathcal{I}_i t] / (1 - f_i t)) \hookrightarrow \tilde{X}_i = \mathbf{Proj}(\mathcal{O}_{X_i}[\mathcal{I}_i t]),$$

à l'ouvert principal $\left(\tilde{X}_i\right)_{f_i}$ de $\tilde{X}_i$.

EXEMPLE 4.2.15. (Complémentaire d'un diviseur). Pour tout diviseur effectif $D \in \mathrm{Div}^+(X)$ non nul, la modification $\sigma_{1,D} : X_{1,D} \to X$ de centre $(\mathcal{I} = 1 \cdot \mathcal{O}_X, D)$ s'identifie à l'immersion ouverte du schéma X_{s_D}de $\mathbf{Proj}\left(\mathbf{S}\left(\mathcal{O}_X(D)\right)\right) \simeq X$ où la section canonique $s_D \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$ ne s'annule pas, c'est à dire au complémentaire du support de D dans X.

4.2.16. Comme le montre l'exemple (4.2.15) ci-dessus, si $\mathcal{I}$ est l'idéal unité de $\mathcal{O}_X$, alors pour tout diviseur $D \in \mathrm{Div}^+(X)$, la modification affine de centre $(\mathcal{I}, D)$ est isomorphe au complémentaire X_{s_D} de D dans X. Même si $\mathcal{I}$ est un idéal *propre* de $\mathcal{O}_X$ contenant $\mathcal{J}_X(D)$, il peut tout de même encore arriver que $X_{\mathcal{I},D}$ soit isomorphe à X_{s_D}. Dans cette situation, nous dirons que $\sigma_{\mathcal{I},D} : X_{\mathcal{I},D} \to X$ est une *modification divisorielle*. Ces modifications particulières sont caractérisées par la propriété suivante :

LEMME 4.2.17. *Une modification affine $\sigma_{\mathcal{I},D} : X_{\mathcal{I},D} \to X$ de centre $(\mathcal{I}, D)$ est divisorielle si et seulement si il existe $k \geq 1$ tel que $\mathcal{J}_X(kD) \subset \mathcal{I}^{k+1}$.*

DÉMONSTRATION. Le problème étant local, nous pouvons supposer que $X = \mathrm{Spec}(A)$, $\mathcal{I} = \tilde{I}$ pour un idéal de type fini $I \subset A$ et que $D = \mathrm{div}(f)$ pour un certain élément régulier $f \in A$. On a alors $X_{\mathcal{I},D} = \mathrm{Spec}(A[I/f])$. Dans ces conditions, $\sigma_{\mathcal{I},D}$ est divisorielle si et seulement si les A-algèbres $A[I/f]$ et $A_f = A[1/f]$ sont isomorphes. C'est le cas si et seulement si il existe $a \in I^k$ tel que $1/f = a/f^k$ dans A_f, ce qui revient à dire, puisque f est régulier, qu'il existe $k \geq 2$ tel que $f^{k-1} \in I^k$. □

COROLLAIRE 4.2.18. *Soit $\sigma_{\mathcal{I},D} : X_{\mathcal{I},D} \to X$ une modification affine de centre $(\mathcal{I}, D)$ non divisorielle. Si D est non nul, alors $\sigma_{\mathcal{I},D}^{-1}(\mathit{Supp}(D))$ est le support d'un diviseur effectif non nul sur $X_{\mathcal{I},D}$.*

DÉMONSTRATION. Nous pouvons de nouveau nous ramener à la situation locale $X = \mathrm{Spec}(A)$, $\mathcal{I} = \tilde{I}$ et $D = \mathrm{div}(f)$. Sous ces hypothèses, $X_{I,D} \simeq \mathrm{Spec}(A[It]/(1-ft))$ est isomorphe au complémentaire dans $\sigma : \mathrm{Proj}_A(A[It]) \to X$ de la transformée propre D_f^{pr} du sous-schéma fermé $V(f) \subset X$. Puisque $\sigma_{\mathcal{I},D}$ n'est pas divisorielle, la transformée totale $\sigma^{-1}(V(f))$ de $V(f)$ n'est pas entièrement contenue dans D_f^{pr}. Ainsi $\sigma^{-1}(V(f)) \cap X_{\mathcal{I},D} \simeq \sigma_{\mathcal{I},D}^{-1}(V(f))$ est bien un diviseur sur $X_{\mathcal{I},D}$. □

4.3. Modifications équivariantes de quasi-torseurs

Dans ce paragraphe, nous appliquons les techniques de modification affine pour construire de nouveaux schémas $q : W \to X$ avec actions de fibrés en droites $p : L \to X$.

4.3.1. Dans ce qui suit, nous considérons des quadruplets $(X, \mathcal{L}, D, W)$ constitués d'un schéma X, d'un $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}$ sur X, d'un diviseur effectif $D \in \mathrm{Div}^+(X)$ et d'un torseur $\rho : W \to X$ sous le X-groupe $\mathbf{V}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X(D))_+$. Nous munissons W de sa structure canonique de quasi-torseur (3.1.8) sous $L_+ = \mathbf{V}(\mathcal{L})_+$ correspondant à la section canonique $s_D \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$.

4.3.2. Soit $(X, \mathcal{L}, D, W)$ un tel quadruplet. Puisque W est localement isomorphe à $\mathbf{V}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X(D))$, l'image inverse $D_W = \rho^* D$ de D est un diviseur effectif non nul bien défini sur W.

Étant donné un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_W$ contenant $\mathcal{J}_W(D_W)$, considérons la modification affine $\sigma_{\mathcal{I},D_W} : W_{\mathcal{I},D_W} \to W$ de W de centre $(\mathcal{I}, D_W)$. Puisque ρ et $\sigma_{\mathcal{I},D_W}$ sont tous deux des morphismes affines de type fini, nous concluons que

$$\rho_{\mathcal{I},D_W} = \rho \circ \sigma_{\mathcal{I},D_W} : W_{\mathcal{I},D_W} \to X$$

l'est aussi. D'autre part, la restriction de $\sigma_{\mathcal{I},D_W}$ au-dessus de l'ouvert complémentaire U du support de D dans X induit un isomorphisme $W_{\mathcal{I},D_W}|_U \xrightarrow{\sim} W_{|U}$.

4.3.3. Supposons de plus que D, et donc D_W soient non nuls. D'après la proposition (3.3.6), l'action $\mathbf{t}_{s_D}$ de L_+ sur W n'est pas libre, et tout sous-schéma fermé du support de D_W est fixé par cette action. C'est donc, en particulier, le cas du sous-schéma fermé $V(\mathcal{I}) \subset D_W$.

Proposition 4.3.4. *L'action $\mathbf{t}_{s_D}$ de L_+ sur W se relève canoniquement en une action $\mathbf{t}_{\mathcal{I},s_D}$ sur $W_{\mathcal{I},D_W}$ pour laquelle le X-morphisme $\sigma_{\mathcal{I},D_W} : W_{\mathcal{I},D_W} \to W$ est L_+-équivariant.*

Démonstration. Il suffit de le vérifier localement au-dessus de X. Pour tout ouvert affine $U = \mathrm{Spec}\,(A)$ de X tel que $\mathcal{L} \mid_U \simeq \mathcal{O}_U$, $D \mid_U = \mathrm{div}\,(f)$ et $W \mid_U \simeq \mathbf{V}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X(D)) \mid_U$, $W \mid_U$ est isomorphe à $\mathbb{A}^1_X = \mathrm{Spec}\,(A[y])$, muni de l'action de $L_+ \mid_U \simeq \mathrm{Spec}\,(A[t])$ par la translation tordue correspondant à la co-action

$$A[y] \mapsto A[y] \otimes_A A[t]\,, y \mapsto y \otimes 1 + f \otimes t.$$

D'autre part, $D_W \mid_{\rho^{-1}(U)} = \mathrm{div}\,(f)$, où nous considérons f comme un élément de $A[y]$ via l'injection $A \hookrightarrow A[y]$. De même, $\mathcal{I} \mid_{\rho^{-1}(U)}$ est de la forme $\tilde{I}$ pour un certain idéal de type fini $I = (a_1(y), \ldots, a_r(y)) \subset A[y]$ contenant f. On obtient ainsi un U-isomorphisme $W_{\mathcal{I},D_W} \mid_U \simeq \mathrm{Spec}\,(A[y][I/f])$, et l'action recherchée est alors simplement définie par la co-action

$$\begin{array}{ccc} A[y][I/f] & \to & A[y][I/f][t] \simeq A[y][I/f] \otimes_A A[t] \\ \left\{ \begin{array}{c} y \\ a_i(y)/f \end{array} \right. & \mapsto & \left\{ \begin{array}{c} y + tf \\ a_i(y+tf)/f, \quad 1 \leq i \leq r \end{array} \right. \end{array}$$

$\square$

Exemple 4.3.5. (La cubique de Russel [**42**]) Soient $A = \mathbb{C}[x,z]$, $f = -x^2$ et $B = A[t]$. Nous munissons $\mathbb{A}^1_X = \mathrm{Spec}\,(A[t])$ de l'action de $\mathbb{G}_{a,X}$ par la translation tordue $\mathbf{t}_{x^2}$ correspondant à la A-dérivation localement nilpotente $\partial = f\dfrac{\partial}{\partial t}$. Soit I l'idéal de B engendré par f et $g = x + z^2 + t^3 \in B$. Puisque $\partial g = 3ft^2 \in I$, le sous-schéma $V(I) \subset \mathbb{A}^1_X$ est invariant, donc fixé car contenu dans $\mathbb{A}^1_D = \mathrm{Spec}\,(A[t]/(f))$. Soit donc

$$\sigma_{I,f} : Y = \mathrm{Spec}\,(B[g/f]) \to \mathbb{A}^1_X$$

la modification affine équivariante de $\mathbb{A}^1_X$, de centre (I,f). Il est clair que Y est isomorphe à la cubique de Russel, i.e l'hypersurface de $\mathbb{A}^2_X = \mathrm{Spec}\,(A[t,y])$ d'équation $x + x^2y + z^2 + t^3 = 0$. L'action de $\mathbb{G}_{a,X}$ sur Y relevant celle de $\mathbb{G}_{a,X}$ sur $\mathbb{A}^1_X$ est alors induite par la A-dérivation localement nilpotente $\tilde{\partial} = 3t\dfrac{\partial}{\partial y} + f\dfrac{\partial}{\partial t}$ de $A[t,y]$.

On remarquera que puisque z et t jouent des rôles comparables dans l'équation de la cubique de Russel, il est aussi possible de la construire comme la modification affine équivariante de $B' = A'[z]$, où $A' = \mathbb{C}[x,t]$, de centre (I,f). Les $\mathbb{G}_{a,X'}$-actions correspondantes étant alors données par les A'-dérivations localement nilpotentes $\partial' = f\dfrac{\partial}{\partial z}$ et $\tilde{\partial}' = 3z\dfrac{\partial}{\partial y} + f\dfrac{\partial}{\partial z}$ respectivement.

4.3.6. Dans la situation de (4.3.3), supposons de plus que la restriction $W\mid_D$ de W au sous-schéma fermé D de X soit isomorphe au $\mathbf{V}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X(D))_+ \mid_D$-torseur trivial, ce qui revient à dire que l'image de la classe d'isomorphisme $[g] \in H^1(X, \mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{O}_X(D))$ de W dans $H^1(D, \mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{O}_D(D))$ est nulle. Dans ce cas $W\mid_D$ admet une section $s : D \to W\mid_D \simeq D_W$. L'image de toute section s de ce type définit donc un sous-schéma fermé Z_s de D_W.

Proposition 4.3.7. *Soient $\mathcal{I}_s \subset \mathcal{O}_W$ l'idéal de Z_s et $\sigma_{\mathcal{I},D_W} : W_{\mathcal{I},D_W} \to W$ la modification affine correspondante. Alors $W_{\mathcal{I},D_W}$ est isomorphe à W, et est un L_+-torseur pour l'action $\mathbf{t}_{\mathcal{I},s_D}$ de L_+ relevée de l'action $\mathbf{t}_{s_D}$ sur W.*

DÉMONSTRATION. Il s'agit de nouveau d'un problème local. Nous pouvons donc supposer que $X = \mathrm{Spec}\,(A)$, $D = \mathrm{div}\,(f)$ pour un certain élément régulier $f \in A$, $W = \mathrm{Spec}\,(A\,[y])$ et $\mathcal{I} = \tilde{I}$ où $I = (y-a, f)$ pour un certain élément $a \in A$. Sous ces hypothèses

$$W_{\mathcal{I},D_W} \simeq \mathrm{Spec}\left(A\,[y]\left[\frac{y-a}{f}\right]\right) \simeq \mathrm{Spec}\,(A\,[y,z]\,/\,(fz-y+a)) \simeq \mathrm{Spec}\,(A\,[z])$$

est isomorphe à W, et l'action de $L_+ = \mathrm{Spec}\,(A\,[t])$ sur $W_{\mathcal{I},D_W}$ relevant celle sur W coïncide avec l'action par translations définie par la co-action

$$A\left[\frac{y-a}{f}\right] \to A\left[\frac{y-a}{f}\right][t]\,,\, \frac{y-a}{f} \mapsto \frac{y+ft-a}{f} = \frac{y-a}{f} + t,$$

d'où le résultat. Bien que $W_{\mathcal{I},D_W}$ soit isomorphe à W, on notera que la modification affine $\sigma_{\mathcal{I},D_W}$ n'est pas un isomorphisme, puisqu'elle est donnée, dans les coordonnées introduites ci-dessus, par l'homomorphisme de A-algèbres $A\,[y] \to A\,[z]\,, y \mapsto fz + a$. $\square$

CHAPITRE 5

Compléments sur les actions de fibrés en droites

Les schémas $\pi : Y \to X$ admettant une action non triviale d'un fibré en droites $p : L \to X$ constituent une généralisation naturelle des schémas admettant une action du groupe additif $\mathbb{G}_{a,X}$. D'autre part, toute action de L sur Y correspond, à un changement de base $\phi : X' \to X$ près, à une action de $\mathbb{G}_{a,X'}$ sur $Y' = Y \times_X X'$. Il suffit, par exemple, de considérer le schéma X' formé de la réunion disjointe de la collection des ouverts d'un recouvrement trivialisant le fibré L.

Il est donc tout à fait normal que les actions de fibrés en droites possèdent les mêmes propriétés formelles que celles du groupe additif. Dans ce chapitre, nous donnons deux exemples de constructions illustrant ce fait. La première consiste en une caractérisation différentielle des actions d'un fibré en droites $p : L \to X$ sur un X-schéma affine $\pi : Y \to X$ en terme de dérivations localement nilpotentes, en un sens généralisé. La seconde concerne la construction de quotients $q : Y \to Y/L_+$ pour ces actions.

Dans les deux cas, nous ne donnons que quelques résultats et exemples simples. En particulier, nous n'abordons ni le problème concernant la génération finie des noyaux de dérivations localement nilpotentes, ni les questions ayant trait à la surjectivité ou à la platitude des quotients $q : Y \to Y/L_+$, qui mériteraient à eux seuls une étude approfondie débordant largement du cadre de cette thèse.

5.1. Caractérisation différentielle

Dans tout ce paragraphe, nous considérons des schéma définis sur un corps k de caractéristique nulle.

5.1.1. Sous ces hypothèses, il est bien connu que pour tout schéma affine $X = \mathrm{Spec}\,(A)$ et tout X-schéma $Y = \mathrm{Spec}\,(B)$, il existe une correspondance biunivoque entre les actions de $\mathbb{G}_{a,X}$ sur Y et les A-dérivations localement nilpotentes $\partial : B \to B$, c'est à dire les dérivations $\partial \in \mathrm{Der}_A\,(B, B)$ telles que pour tout $b \in B$ il existe $n = n\,(b) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ satisfaisant $\partial^n b = 0$.

5.1.2. Rappelons que cette correspondance est obtenue en associant à toute action de $\mathbb{G}_{a,X} = \mathrm{Spec}\,(A\,[T])$ sur Y la A-dérivation

$$\partial = \frac{\partial}{\partial T} \mid_{T=0} \circ \phi \in \mathrm{Der}_A\,(B, B)$$

déduite de la co-action $\phi : B \to B\,[T] \simeq B \otimes_A A\,[T]$.

Réciproquement, toute A-dérivation localement nilpotente $\partial \in \mathrm{Der}_A\,(B, B)$ permet de définir, puisque k est de caractéristique nulle, un homomorphisme

$$e^{T\partial} : B \to B\,[T]\,, b \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial^i b}{n!} T^i = \sum_{i=0}^{n(b)} \frac{\partial^i b}{n!} T^i$$

satisfaisant les axiomes d'une co-action de $\mathbb{G}_{a,X}$ sur Y.

5.1.3. Il est possible d'obtenir une description analogue des actions d'un fibré en droites $p : L \to X$ sur un X-schéma affine $\pi : Y \to X$ en terme d'une certaine classe de dérivations $\partial : \pi_* \mathcal{O}_Y \to \pi_* \mathcal{O}_Y \otimes \mathcal{L}$. Rappelons tout d'abord la définition suivante :

Définition 5.1.4. Soit $\pi : Y \to X$ un morphisme de schéma. Pour tout $\mathcal{O}_Y$-module $\mathcal{F}$, on appelle X-dérivation de $\mathcal{O}_Y$ dans $\mathcal{F}$ tout homomorphisme de faisceaux de groupes additifs $D : \mathcal{O}_Y \to \mathcal{F}$ qui soit $\mathcal{O}_X$-linéaire et satisfasse la règle de Leibniz ; autrement dit, vérifiant les conditions suivantes pour tout ouvert V de Y :

a) Pour tout couple de sections (t_1, t_2) de $\mathcal{O}_Y$ au dessus de V, on a $D(t_1 t_2) = t_1 D(t_2) + D(t_1) t_2$;

b) Pour toute section t de $\mathcal{O}_Y$ au-dessus de V et toute section s de $\mathcal{O}_X$ au dessus d'un ouvert U de X tel que $V \subset p^{-1}(U)$, on a $D((s|_V)t) = (s|_V) D(t)$.
On note $\mathrm{Der}_X(\mathcal{O}_Y, \mathcal{F})$ le $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$-module des X-dérivations de $\mathcal{O}_Y$ dans $\mathcal{F}$.

5.1.5. Dans la situation précédente, on a, pour tout $\mathcal{O}_Y$-module $\mathcal{F}$, un isomorphisme de $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$-modules

$$\mathrm{Hom}_Y\left(\Omega^1_{Y/X}, \mathcal{F}\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_X(\mathcal{O}_Y, \mathcal{F}), \phi \mapsto \phi \circ d_{Y/X},$$

où $d_{Y/X} : \mathcal{O}_Y \to \Omega^1_{Y/X}$ désigne la différentielle canonique.

5.1.6. Lorsque Y est le fibré en droites $p : L = \mathbf{Spec}(\mathbf{S}(\mathcal{L})) \to X$ défini par un $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}$, la composition de l'homomorphisme $p^*\sigma : p^*\mathcal{L} \to \mathcal{O}_{\mathbf{V}(\mathcal{L})}$, déduit de l'homomorphisme canonique $\sigma : \mathcal{L} \to \mathbf{S}(\mathcal{L})$ et de la différentielle canonique $d_{L/X} : \mathcal{O}_L \to \Omega^1_{L/X}$ induit un isomorphisme de $\mathcal{O}_L$-modules $p^*\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{L/X}$, donc un isomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules $p_*\Omega^1_{L/X} \simeq p_*p^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L} \otimes \mathbf{S}(\mathcal{L})$.

Notons alors $\varepsilon : \mathbf{S}(\mathcal{L}) \to \mathcal{O}_X$ l'homomorphisme d'augmentation, de noyaux $\mathbf{S}_+(\mathcal{L}) = \bigoplus_{n>0} \mathcal{L}^n$ et posons

$$\pi_0 : \mathbf{S}(\mathcal{L}) \xrightarrow{p_* d_{L/X}} p_*\Omega^1_{L/X} \simeq \mathcal{L} \otimes \mathbf{S}(\mathcal{L}) \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes\varepsilon} \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{L}.$$

5.1.7. Soit maintenant $\pi : Y \to X$ un X-schéma affine, défini par une $\mathcal{O}_X$-algèbre quasi-cohérente $\mathcal{B} = \pi_*\mathcal{O}_Y$. Nous supposons Y munit d'une L_+-action, dont la co-action correspondante est donnée par un homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbres $\phi : \mathcal{B} \to \mathcal{B} \otimes \mathbf{S}(\mathcal{L})$. L'homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules

$$\partial = (\mathrm{Id} \otimes \pi_0) \circ \phi : \mathcal{B} \to \mathcal{B} \otimes \mathcal{L}$$

est alors une X-dérivation de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B} \otimes \mathcal{L}$ qui s'identifie localement au-dessus d'un recouvrement de X par des ouverts affine $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ trivialisant le fibré en droites L à la A_i-dérivation $\frac{\partial}{\partial T}|_{T=0} \circ \phi$ de (5.1.2).

5.1.8. On ne peut évidemment plus dire qu'une X-dérivation $\partial : \mathcal{B} \to \mathcal{B} \otimes \mathcal{L}$ comme ci-dessus est localement nilpotente au sens précédemment introduit. Cependant, pour tout $n \geq 1$, on obtient, par récurrence, une collection d'homomorphismes de $\mathcal{O}_X$-modules

$$\partial^n = \partial \circ \partial^{n-1} : \mathcal{B} \xrightarrow{\partial^{n-1}} \mathcal{B} \otimes \mathcal{L}^{n-1} \xrightarrow{\partial\otimes\mathrm{Id}} (\mathcal{B} \otimes \mathcal{L}) \otimes \mathcal{L}^{n-1} \simeq \mathcal{B} \otimes \mathcal{L}^n.$$

Nous dirons alors qu'une X-dérivation $\partial : \mathcal{B} \to \mathcal{B} \otimes \mathcal{L}$ est *localement nilpotente* si, pour tout ouvert U de X et toute section $b \in \Gamma(U, \mathcal{B})$, il existe $n \geq 0$ tel que $\partial^n(b) = 0$. Cela revient bien sûr à dire que pour tout ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(A)$ de X tel que $\mathcal{L}|_U \simeq \mathcal{O}_U$ la A-dérivation $\Gamma(\partial) : \Gamma(U, \mathcal{B}) \to \Gamma(U, \mathcal{B})$ induite par ∂ est localement nilpotente au sens de (5.1.1).

5.1.9. La discussion précédente montre que toute dérivation $\partial : \mathcal{B} \to \mathcal{B} \otimes \mathcal{L}$ déduite d'une action de L_+ sur $\pi : Y = \mathbf{Spec}(\mathcal{B}) \to X$ est localement nilpotente. Réciproquement, toute X-dérivation localement nilpotente ∂ de ce type permet de définir un homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbres

$$\phi_\partial = \bigoplus_{n\geq 0} \frac{\partial^n}{n!} : \mathcal{B} \to \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{B} \otimes \mathcal{L}^n \simeq \mathcal{B} \otimes \mathbf{S}(\mathcal{L})$$

qui satisfait clairement aux axiomes d'une co-action de L_+ sur Y. On obtient ainsi la généralisation suivante de la caractérisation des actions du groupe additif.

PROPOSITION 5.1.10. *Il y a une correspondance biunivoque entre les actions d'un fibré en droites $p : L = \mathbf{V}(\mathcal{L}) \to X$ sur un X-schéma affine $\pi : Y \to X$ et les X-dérivations localement nilpotentes $\partial : \pi_* \mathcal{O}_Y \to \pi_* \mathcal{O}_Y \otimes \mathcal{L}$.*

5.2. Schémas quotients

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à l'étude des quotients pour l'action d'un fibré en droites $p : L \to X$ sur un X-schéma affine $\pi : Y \to X$.

Rappelons tout d'abord qu'il existe de nombreuses variantes de la notion de quotient (cf. par exemple [**38**]) . La plus naturelle a priori est celle de *quotient catégorique* qui consiste à demander que le morphisme $q : Y \to Y/L_+$ soit constant le long des orbites et universel pour cette propriété. Le comportement en général pathologique de ces quotients conduit à introduire une notion plus proche de l'intuition géométrique, en demandant que le schéma quotient Y/L_+ paramétrise les orbites de l'action de L_+. On arrive ainsi à la notion de *quotient géométrique.*

DÉFINITION 5.2.1. Soient X un schéma, G un X-schémas en groupes et $\pi : Y \to X$ un X-schéma muni d'une action $\mu : G \times_X Y \to Y$ de G. Un X-morphisme $q : Y \to Z$ est appelé un quotient géométrique s'il satisfait les conditions suivantes :

a) q est surjectif et l'image du morphisme $(\mu, p_2) : G \times_X Y \to Y \times_X Y$ est égale à $Y \times_Z Y$.

b) q est submersif, i.e. un sous-ensemble $U \subset Z$ est ouvert si et seulement si $q^{-1}(U)$ l'est.

c) $\mathcal{O}_Z = q_* \mathcal{O}_Y^G$, i.e. $\mathcal{O}_Z \subset q_* \mathcal{O}_Y$ est le sous-faisceau des fonctions G-invariantes.

Dans la situation où G est un fibré en droites L_+ agissant sur un X-schéma affine $\pi : Y \to X$, nous rappelons ci-dessous comment construire un quotient $q : Y \to Y/L_+$ satisfaisant automatiquement la condition c) ci-dessus, mais qui n'est, en général, ni un quotient catégorique, ni un quotient géométrique.

5.2.1. Construction de schémas quotients. Pour tout schéma affine $X = \operatorname{Spec}(A)$ et toute action du groupe additif $\mathbb{G}_{a,X}$ sur un X-schéma affine $Y = \operatorname{Spec}(B)$, nous pouvons définir un X-schéma quotient naturel $q : Y \to Y/\mathbb{G}_{a,X}$ de la manière suivante :

5.2.2. Puisque X et Y sont tous deux affines, l'action de $\mathbb{G}_{a,X}$ sur Y est définie par sa co-action $\phi : B \to B \otimes_A A[T]$. L'idéal $B' = \operatorname{Ker}(\phi - \operatorname{Id} \otimes 1)$ est alors une A-algèbre car pour tout couple d'éléments b et b' de B', l'identité

$$\phi(bb') - bb' = (\phi(b) - b)\, b' - (\phi(b') - b')\, \phi(b)$$

dans $B[T] \simeq B \otimes_A A[T]$ implique que le produit bb' est dans B'. Ainsi B' est la sous-A-algèbre de B constituée des fonctions $\mathbb{G}_{a,X}$-invariantes sur $Y = \operatorname{Spec}(B)$, et l'inclusion $B' \hookrightarrow B$ induit un morphisme de X-schémas

$$q : Y \to Y/\mathbb{G}_{a,X} := \operatorname{Spec}(B').$$

Lorsque X et Y sont définis sur un corps k de caractéristique nulle, l'action de $\mathbb{G}_{a,X}$ considérée est déterminée par la dérivation localement nilpotente

$$\partial = \frac{\partial}{\partial T} |_{T=0} \circ \phi : B \to B,$$

et l'on observe alors que B' s'identifie au noyau de cette dérivation.

5.2.3. Plus généralement, pour tout schéma X et tout X-schéma affine $\pi : Y \to X$ muni d'une action d'un fibré en droites $p : L \to X$, il est encore possible de définir un quotient Y/L_+ sous la forme d'un X-schéma affine. En effet, puisque Y s'identifie au spectre de la $\mathcal{O}_X$-algèbre quasi-cohérente $\mathcal{B} = \pi_* \mathcal{O}_Y$, l'action de L_+

sur Y est déterminée par un homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbres $\phi : \mathcal{B} \to \mathcal{B} \otimes \mathbf{S}(\mathcal{L})$ satisfaisant aux axiomes d'une co-action. On en déduit comme précédemment que le sous $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{B}' = \mathrm{Ker}(\phi - \mathrm{Id} \otimes 1)$ de $\mathcal{B}$ est une $\mathcal{O}_X$-algèbre quasi-cohérente, de sorte que l'inclusion $\mathcal{B}' \to \mathcal{B}$ induit un X-morphisme

$$q : Y \simeq \mathbf{Spec}(\mathcal{B}) \to Y/L_+ := \mathbf{Spec}(\mathcal{B}')$$

que nous appellerons encore morphisme quotient. Lorsque X est défini sur un corps k de caractéristique nulle, la $\mathcal{O}_X$-algèbre $\mathcal{B}'$ s'identifie de nouveau au noyau de la dérivation localement nilpotente $\partial : \mathcal{B} \to \mathcal{B} \otimes \mathcal{L}$ correspondant à l'action de L_+ sur Y. Puisque par construction $\mathcal{B}' = q_*\mathcal{B}^{L_+}$, le quotient $q : Y \to Y/L_+$ ainsi défini vérifie l'axiome c) de la définition d'un quotient géométrique.

5.2.2. Propriétés des schémas quotients. Si $\pi : Y \to X$ est un torseur sous le fibré en droites L_+, alors le quotient $q : Y/L_+ \to X$ construit ci-dessus s'identifie au morphisme structural $q = \pi : Y \to X$, donc est un quotient géométrique.

5.2.4. Par contre, si $\pi : Y \to X$ est seulement un quasi-torseur sous L_+, alors bien qu'étant une fibration localement triviale, $q : Y \to Y/L_+$ n'est en général plus un quotient géométrique. En effet, dans ce cas, le quotient $q : Y \to Y/L_+$ s'identifie de nouveau à $\pi : Y \to X$ puisque par définition Y est un torseur sous un fibré en droites de la forme $\mathbf{V}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X(D))$ pour un certain diviseur effectif $D \in \mathrm{Div}^+(X)$, tandis que l'action de L_+ s'identifie à l'action par translation tordue $\mathbf{t}_{s_D}$ induite par la section canonique $s_D \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$ (3.1.6). Or, si D est non nul, tout point $y \in Y$ contenu dans $\pi^{-1}(\mathrm{Supp}(D))$ est fixé par l'action $\mathbf{t}_{s_D}$(3.3.6). Ainsi, les fibres géométriques du morphisme $\pi : Y \to X$ ne coïncident plus avec les orbites des points géométriques de Y, ce qui met en défaut l'axiome a) de la définition de quotient géométrique.

Un exemple typique de cette situation est fourni par l'action de $\mathbb{G}_{a,k} = \mathrm{Spec}(k[t])$ sur $Y = \mathbb{A}^2_k = \mathrm{Spec}(k[x,y])$ par la translation tordue $t \star (x,y) \mapsto (x, y+tx)$, pour laquelle le schéma quotient $Y/\mathbb{G}_{a,k}$ s'identifie à $\mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[x])$ alors que la fibre $p_x^{-1}(0)$ de la projection $p_x : \mathbb{A}^2_k \to \mathbb{A}^1_k$ est entièrement constituée de points fixes de l'action de $\mathbb{G}_{a,k}$.

5.2.5. Même si l'on se limite à ne considérer que des actions libres de L_+ sur $\pi : Y \to X$, le quotient $q : Y \to Y/L_+$ n'est en général ni un quotient catégorique, ni un quotient géométrique. Une illustration de ce fait est fournie par la surface de Danielewski $S \subset \mathbb{A}^2_X = \mathrm{Spec}(k[x][y,z])$ d'équation $xz - y^2 + 1 = 0$, où k est un corps de caractéristique nulle et $X = \mathrm{Spec}(k[x])$. En effet S est munie de l'action libre de $\mathbb{G}_{a,X}$ induite par l'action

$$t \star (x,y,z) = \left(x, y+tx, z + \frac{(y+tx)^2 - y^2}{x} \right)$$

sur $\mathbb{A}^2_X$. Le quotient $q : S \to S/\mathbb{G}_{a,X}$ coïncide alors avec la restriction sur S de la projection $pr_X : \mathbb{A}^2_X \to X$. La restriction de $q = pr_X\ |_S$ au-dessus de l'ouvert $X_* = X \setminus \{0\}$ de X identifie $q^{-1}(X_*)$ au $\mathbb{G}_{a,X_*}$-torseur trivial, tandis que la fibre $q^{-1}(0)$ est constituée de la réunion disjointe de deux courbes isomorphes à la droite affine $\mathbb{A}^1_k$. Ainsi, bien que l'action de $\mathbb{G}_{a,X}$ sur S soit libre, l'axiome a) de la définition d'un quotient géométrique est de nouveau mis en défaut.

En introduisant le X-schéma $\delta : \tilde{X} \to X$ isomorphe à la droite affine à deux origines, obtenu à partir de X en remplaçant le point 0 par deux points fermés x_1 et x_2, on obtient une factorisation $q : Y \xrightarrow{\rho} \tilde{X} \xrightarrow{\delta} X$, où $\rho : Y \to \tilde{X}$ est cette fois un torseur sous le groupe additif $\mathbb{G}_{a,\tilde{X}}$. En particulier, ρ est à la fois surjectif et constant sur les orbites de l'action de $\mathbb{G}_{a,X}$. Comme il n'existe pas de morphisme $\phi : X \to \tilde{X}$ tel que $\rho = \phi \circ q$, on conclut que $X = S/\mathbb{G}_{a,X}$ n'est pas un quotient catégorique.

Remarque 5.2.6. De manière générale, la question de l'existence d'un quotient géométrique pour une action libre de $\mathbb{G}_{a,X}$ sur un X-schéma affine $\pi : Y \to X$ admet une réponse négative, Finston et Deveney [**12**] ayant construit un exemple d'action libre de $\mathbb{G}_{a,k}$ sur $\mathbb{A}_k^5$ n'admettant pas de quotient de ce type.

5.2.7. Si $\pi : Y \to X$ est un quasi-torseur sous L_+, ou plus généralement une modification affine équivariante d'un quasi-torseur (4.3.3), alors il existe un ouvert U de X tel que la restriction $\pi\mid_U : V = \pi^{-1}(U) \to U$ soit un torseur sous la restriction $L_+\mid_U$. La restriction du schéma quotient Y/L_+ au-dessus de cet ouvert U est alors isomorphe à U lui-même, et $q\mid_V : V \to Y/L_+\mid_U$ est un quotient géométrique. Plus généralement, si X est un schéma intègre défini sur un corps k de caractéristique nulle, alors, pour tout X-schéma affine $\pi : Y \to X$ intègre muni d'une action d'un fibré en droites $p : L \to X$, il existe un ouvert U du schéma quotient Y/L_+ tel que la restriction du morphisme quotient $q : Y \to Y/L_+$ au-dessus de U identifie $Y\mid_U$ à un torseur sous un fibré en droites sur U. Cela découle en effet du résultat bien connu suivant :

Proposition 5.2.8. ([**45**] Proposition 2.1) *Soient B une algèbre intègre sur un corps k de caractéristique nulle et $\partial \in Der_k(B,B)$ une dérivation localement nilpotente non nulle. Alors pour tout $s \in Ker\partial^2 \setminus Ker\partial$, $B_{\partial s} = B'_{\partial s}[s]$, où $B' = Ker\partial$ et s est algébriquement indépendant sur B'. De plus, la dérivation $\partial_s : B_{\partial s} \to B_{\partial s}$ induite par ∂ coïncide alors avec la dérivation $\dfrac{\partial}{\partial s}$ de $B'_{\partial s}[s]$.*

Remarque 5.2.9. Dans la situation de la proposition précédente, on obtient, en posant $f = \partial s$, un homomorphisme de B'_f-algèbres surjectif

$$\pi_f : B \to B'_f, b \mapsto \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n b}{f^n}s^n,$$

qui joue, en un certain sens, le rôle de l'opérateur Reynolds pour les groupes réductifs.

CHAPITRE 6

Exemples de schémas affines avec actions du groupe additif

Étant donné un schéma affine $X = \operatorname{Spec}(A)$, où A est une algèbre de type fini sur un corps de caractéristique nulle, nous présentons dans ce chapitre une méthode de construction de schémas affines $\pi : V \to X$ admettant des actions du groupe additif $\mathbb{G}_{a,X}$. Ces schémas sont obtenus à partir d'une donnée combinatoire consistant en un arbre pondéré $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$, où $w : E(\Gamma) \to A[t]$ est une fonction qui associe à chaque arête de Γ un polynôme en la variable t, à coefficients dans A. Plus précisément, nous définissons à partir de ces données une sous-variété irréductible $V_{\mathfrak{g}}$ d'un certain espace affine relatif $\mathbb{A}_X^{d(\Gamma)+1}$, où l'entier $d(\Gamma)$ dépend de la structure de l'arbre Γ. Nous montrons ensuite que les schémas $V_{\mathfrak{g}}$ ainsi obtenus admettent des actions du groupe additif $\mathbb{G}_{a,X}$, construites comme les restrictions d'actions de $\mathbb{G}_{a,X}$ sur l'espace affine ambiant $\mathbb{A}_X^{d(\Gamma)+1}$, elles-mêmes définies par des dérivations localement nilpotentes explicites.

La classe des schémas $V_{\mathfrak{g}}$ obtenus par ce procédé à partir d'arbres pondérés $\mathfrak{g}$ est suffisamment grande pour contenir, entre autres, la cubique de Russell [**42**] et la famille des hypersurfaces de $\mathbb{A}_k^3 = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z])$ d'équations $x^n z - P(x, y) = 0$, où $n \geq 1$ et où $P \in k[x, y]$ est un polynôme quelconque.

Notation 6.0.10. Dans tout ce qui suit, k est un corps de caractéristique nulle, A une k-algèbre de type fini intègre et $f \in A$ est un élément à la fois non nul et non inversible. Nous posons $X = \operatorname{Spec}(A)$, $D = \operatorname{div}(f)$ et $X_* = X \setminus \operatorname{Supp}(D) \simeq A_f$. Nous utilisons ici librement la terminologie et les notations relatives aux arbres pondérés, telles qu'introduites dans l'annexe C de cette thèse.

6.1. Schéma affine $V_{\mathfrak{g}}$ associé à un arbre pondéré $\mathfrak{g}$

Dans ce paragraphe nous établissons un procédé général permettant de construire un X-schéma affine $\pi : V_{\mathfrak{g}} \to X$ à partir d'un arbre pondéré $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$, où $w : E(\Gamma) \to A[t]$ est une fonction de poids à valeurs dans l'anneau des polynômes en une variable t, à coefficients dans A.

Définition 6.1.1. Étant donné un arbre Γ enraciné en e_0, nous désignons par $\mathbf{S}(M_\Gamma)$ l'algèbre symétrique du A-module libre M_Γ engendré par les symboles X_e, où e parcourt le sous-ensemble $\operatorname{Par}(\Gamma)$ consitué des sommets de Γ qui ne sont pas des feuilles de Γ. Étant donné un nouveau symbole X_0, nous dirons que

$$A[\Gamma] = A[X_0] \otimes_A \mathbf{S}(M_\Gamma)$$

est la A-algèbre de polynômes attachée à l'arbre Γ. Par définition, $A[\Gamma]$ est un anneau de polynômes en $d(\Gamma) + 1$ variables, où

$$d(\Gamma) = \operatorname{Card}(\operatorname{Par}(\Gamma)) = \sum_{i=1}^{h(\Gamma)} (N_{i-1}(\Gamma) \setminus \operatorname{Fe}(\Gamma)),$$

$N_i(\Gamma) \subset N(\Gamma)$ désignant le sous-ensemble des sommets de Γ au niveau i. Nous dirons que $\mathbb{A}_X^{d(\Gamma)+1} = \operatorname{Spec}(A[\Gamma])$ est l'espace affine de base X associé à Γ.

Notation 6.1.2. Si $e' \in \operatorname{Par}(\Gamma)$ est le parent d'un sommet $e \in \Gamma \setminus \{e_0\}$, alors nous désignerons parfois la variable $X_{e'} \in A[\Gamma]$ par la notation $X_{\operatorname{Par}(e)}$. Nous étendons d'ailleurs cette relation de parenté entre les variables de l'algèbre $A[\Gamma]$ en posant $X_{e_{-1}} = X_{\operatorname{Par}(e_0)} = X_0 \in A[\Gamma]$.

Pour tout sommet $e \in \operatorname{Par}(\Gamma)$ d'un arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$, nous introduisons ci-dessous trois polynômes $F_e(\mathfrak{g}), A_e(\mathfrak{g}), G_e(\mathfrak{g}) \in A[\Gamma]$, définis récursivement à partir de la fonction de poids w.

Définition 6.1.3. Pour tout $e \in \operatorname{Par}(\Gamma)$, et tout sous-ensemble $J \subset \operatorname{Fils}(e)$, on appelle *polynôme des fils* de e *n'appartenant pas à* J le polynôme

$$F_e^J(\mathfrak{g}) = \prod_{e' \in (\operatorname{Fils}_\Gamma(e) \setminus J)} w\left(\overrightarrow{e'e}\right)\left(X_{\operatorname{Par}(e)}\right) \in A\left[X_{\operatorname{Par}(e)}\right] \subset A[\Gamma].$$

Nous dirons simplement que $F_e(\mathfrak{g}) = F_e^{\emptyset}(\mathfrak{g})$ est le *polynôme des fils de* e.
Pour tout sommet e de Γ, on appelle *polynôme des ancêtres* de e le polynôme $A_e(\mathfrak{g})$ défini récursivement par $A_{e_0}(\mathfrak{g}) = 1$ et

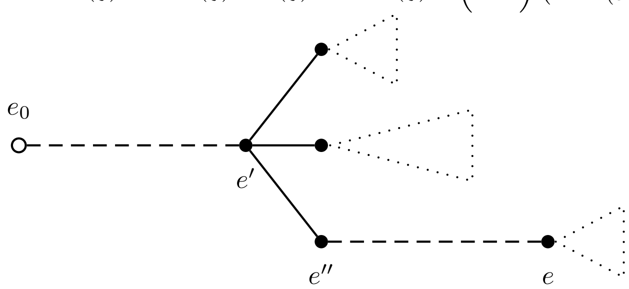
$$A_e(\mathfrak{g}) = A_{\operatorname{Par}(e)}(\mathfrak{g})\, F_{\operatorname{Par}(e)}^{\{e\}}(\mathfrak{g}) \in A\left[X_0, (X_{e'})_{e' \in \operatorname{Anc}(\operatorname{Par}(e))}\right] \subset A[\Gamma].$$

Pour tout sommet $e \in \operatorname{Par}(\Gamma)$, on appelle *polynôme généalogique* de e, le polynôme

$$G_e(\mathfrak{g}) = A_e(\mathfrak{g})\, F_e(\mathfrak{g}) \in A\left[X_0, (X_{e'})_{e' \in \operatorname{Par}(e)}\right] \subset A[\Gamma].$$

6.1.4. Soit $e \in \operatorname{Par}(\Gamma) \setminus \{e_0\}$ un sommet de Γ et soit $e' \in \operatorname{Anc}(e)$ un ancêtre de e. Notons $e'' = \operatorname{Fils}(e') \cap (\downarrow e)_\Gamma$ l'unique fils de e' appartenant à la sous-chaîne $(\downarrow e)_\Gamma$ de Γ. Puisque $e \in (\uparrow e'')_\Gamma$, le polynôme $A_{e''}(\mathfrak{g})$ des ancêtres de e'' divise le polynôme $A_e(\mathfrak{g})$ des ancêtres de e. De même, $A_{e''}(\mathfrak{g})$ divise le polynôme généalogique $G_{e'}(\mathfrak{g})$ de e' puisque

$$G_{e'}(\mathfrak{g}) = A_{e'}(\mathfrak{g})\, F_{e'}(\mathfrak{g}) = A_{e''}(\mathfrak{g})\, w\left(\overrightarrow{e''e'}\right)\left(X_{\operatorname{Par}(e')}\right) \in A[\Gamma].$$



Définition 6.1.5. Dans la situation ci-dessus, le polynôme

$$G_{e'<e}(\mathfrak{g}) = A_{e''}(\mathfrak{g})^{-1}\, G_e(\mathfrak{g})$$

est appelé *le polynôme généalogique de* e *relativement à son ancêtre* e'.

6.1.6. Par définition, le polynôme $G_{e'<e}(\mathfrak{g})$ ne dépend que du sous-arbre maximal $k[t]$-pondéré $\mathfrak{g}(e'') = (\Gamma(e''), w)$ enraciné en e'' et s'identifie, à un changement de variables près, au polynôme généalogique $G_e(\mathfrak{g}(e''))$ de e considéré comme un sommet de l'arbre $\Gamma^{e''}$, indépendamment de l'injection $\Gamma^{e''} \hookrightarrow \Gamma$. En effet, en notant

$$(\downarrow e)_\Gamma = \{e_0 < e_1 \cdots < e_{r-1} = e' < e_r = e'' < e_{r+1} < \cdots < e_n = e\},$$

on a, par définition,

$$G_e(\mathfrak{g}) = A_{e_n}(\mathfrak{g})\, F_{e_n}(\mathfrak{g}) = A_{e_r}(\mathfrak{g})\, F_{e_r}^{\{e_{r+1}\}}(\mathfrak{g}) \cdots F_{e_{n-1}}^{\{e_n\}}(\mathfrak{g})\, F_{e_n}(\mathfrak{g}),$$

où pour tout $i = r, \ldots, n-1$, $F_{e_i}^{\{e_{i+1}\}}(\mathfrak{g})$ est un polynôme en la variable $X_{e_{i-1}}$. Ainsi, le changement de variables $X_0 = X_{e_{r-1}}$, $X_{e_i} = X_{e_{r-1+i}}$, $i = 1, \ldots, n-r$, conduit bien à l'identification $G_{e'<e}(\mathfrak{g}) = G_{e''}(\mathfrak{g}(e''))$.

6.1.7. A partir des polynômes généalogiques $G_e(\mathfrak{g})$, $e \in \mathrm{Par}(\Gamma)$, nous formons une collection de matrices colonnes

$$M_e = \begin{pmatrix} G_e(\mathfrak{g}) \\ X_e \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2,1}(A[\Gamma]), \quad e \in \mathrm{Par}(\Gamma).$$

Nous désignons par M_0 la matrice colonne $\begin{pmatrix} f \\ 1 \end{pmatrix} \in A \subset A[\Gamma]$. Nous dirons alors que

$$M(\mathfrak{g}) = \left(M_0, (M_e)_{e\in\mathrm{Par}(\Gamma)}\right) \in \mathrm{Mat}_{2,(d(\Gamma)+1)}(A[\Gamma])$$

est la *matrice généalogique* associée à l'arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$.

6.1.8. Soit $e_1, e_2 \in \mathrm{Par}(\Gamma)$ une paire de sommets distincts de Γ. Supposons tout d'abord que e_1 est un ancêtre de e_2, et notons $e_3 = \mathrm{Fils}(e_1) \cap (\downarrow e_2)_\Gamma$ l'unique fils de e_1 appartenant à la sous-chaîne $(\downarrow e_2)_\Gamma$ de Γ. On notera que si e_2 est lui-même un fils de e_1, alors $e_3 = e_2$. Dans ces conditions, les polynômes généalogiques $G_{e_2}(\mathfrak{g})$ et $G_{e_1}(\mathfrak{g})$ sont tous deux divisibles par le polynôme $A_{e_3}(\mathfrak{g})$ des ancêtre de e_3 puisque l'on a, par définition, les égalités

$$G_{e_2}(\mathfrak{g}) = A_{e_3}(\mathfrak{g})\, G_{e_1<e_2}(\mathfrak{g}) \quad \text{et} \quad G_{e_1}(\mathfrak{g}) = A_{e_3}(\mathfrak{g})\, w(\overrightarrow{e_3e_1})\left(X_{\mathrm{Par}(e_1)}\right).$$

Nous posons alors

$$\begin{aligned} \Delta_{e_1<e_2}(\mathfrak{g}) &= A_{e_3}(\mathfrak{g})^{-1} \det(M_{e_1}, M_{e_2}) \\ &= w(\overrightarrow{e_3e_1})\left(X_{\mathrm{Par}(e_1)}\right) X_{e_2} - X_{e_1} G_{e_1<e_2}(\mathfrak{g}) \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

Supposons maintenant que $e_i \notin (\downarrow e_j)_\Gamma$, $i = 1, 2$. Notons $e = \mathrm{Anc}(e_1, e_2)$ le premier ancêtre commun de e_1 et e_2 et désignons par $e_i' = \mathrm{Fils}(e) \cap (\downarrow e_i)_\Gamma$, $i = 1, 2$, les deux seuls fils de e appartenant respectivement aux sous-chaînes $(\downarrow e_1)_\Gamma$ et $(\downarrow e_2)_\Gamma$ de Γ. Par définition, les polynômes $A_{e_1'}(\mathfrak{g})$ et $A_{e_2'}(\mathfrak{g})$ divisent $G_{e_1}(\mathfrak{g})$ et $G_{e_2}(\mathfrak{g})$ respectivement. Ainsi, les égalités

$$A_{e_i'}(\mathfrak{g}) = A_e(\mathfrak{g})\, F_e^{\{e_1', e_2'\}}(\mathfrak{g})\, w(\overrightarrow{e_j e})\left(X_{\mathrm{Par}(e)}\right), \quad i, j = 1, 2,\ i \neq j$$

impliquent que le polynôme $A_e(\mathfrak{g})\, F_e^{\{e_1,e_2\}}(\mathfrak{g})$ divise à la fois les polynômes généalogiques $G_{e_1}(\mathfrak{g})$ et $G_{e_2}(\mathfrak{g})$. Nous posons donc

$$\begin{aligned} \Delta_{e_1,e_2}(\mathfrak{g}) &= \left(A_e(\mathfrak{g})\, F_e^{\{e_1', e_2'\}}(\mathfrak{g})\right)^{-1} \det(M_{e_1}, M_{e_2}) \\ &= w\left(\overrightarrow{e_2'e}\right)\left(X_{\mathrm{Par}(e)}\right) G_{e<e_1}(\mathfrak{g})\, X_{e_2} - w\left(\overrightarrow{e_1'e}\right)\left(X_{\mathrm{Par}(e)}\right) G_{e<e_2}(\mathfrak{g})\, X_{e_1} \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

Finalement pour tout sommet $e \in \mathrm{Par}(\Gamma)$, nous posons

$$\Delta_e(\mathfrak{g}) = \det(M_0, M_e) = f X_e - G_e(\mathfrak{g}). \tag{6.1.3}$$

DÉFINITION 6.1.9. Étant donné un arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$, on note $I(\mathfrak{g}) \subset A[\Gamma]$ l'idéal engendré par les polynômes suivants :

$$\begin{cases} \Delta_e(\mathfrak{g}) & e \in \mathrm{Par}(\Gamma) \\ \Delta_{e'<e}(\mathfrak{g}) & (e, e') \in \mathrm{Par}(\Gamma) \times \mathrm{Anc}(e) \\ \Delta_{e_1,e_2}(\mathfrak{g}) & e_1, e_2 \in \mathrm{Par}(\Gamma),\ e_i \notin (\downarrow e_j)_\Gamma \end{cases}$$

Nous dirons que $I(\mathfrak{g})$ est l'idéal engendré par les *mineurs simplifiés* de la matrice généalogique $M(\mathfrak{g})$, c'est à dire les mineurs 2×2 de $M(\mathfrak{g})$ simplifiés selon les règles (6.1.1) et (6.1.2). On note $V(\mathfrak{g})$ le sous-schéma fermé de $\mathbb{A}_X^{d(\Gamma)+1} = \mathrm{Spec}(A[\Gamma])$ défini par l'idéal $I(\mathfrak{g})$.

Le résultat suivant est alors une conséquence immédiate des définitions ci-dessus.

Lemme 6.1.10. *Les générateurs de l'idéal $I(\mathfrak{g})$ satisfont les relations suivantes*

$$\left\{\begin{array}{lcll} \Delta_{e_1,e_2}(\mathfrak{g}) & = & G_{e<e_2}(\mathfrak{g})\,\Delta_{e<e_1}(\mathfrak{g}) - G_{e<e_1}(\mathfrak{g})\,\Delta_{e<e_2}(\mathfrak{g}) & e = Anc(e_1,e_2) \\ f\Delta_{e'<e}(\mathfrak{g}) & = & w\left(\overrightarrow{e''e'}\right)\left(X_{Par(e')}\right)\Delta_e(\mathfrak{g}) - G_{e'<e}(\mathfrak{g})\,\Delta_{e'}(\mathfrak{g}) & e'' = Fils(e') \cap (\downarrow e)_\Gamma \end{array}\right.$$

En particulier, l'idéal $I(\mathfrak{g})$ est engendré par les polynômes $\Delta_e(\mathfrak{g})$, $e \in Par(\Gamma)$, et $\Delta_{e'<e}(\mathfrak{g})$, $(e,e') \in Par(\Gamma) \times Anc(e)$.

Définition 6.1.11. Étant donné un arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$, nous posons

$$I_{\mathfrak{g}} = \{a \in A(\Gamma),\ \exists n \in \mathbb{N},\ f^n a \in I(\mathfrak{g})\},$$

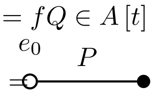
et nous appelons X-schéma $\pi : V_{\mathfrak{g}} \to X$ associé à $\mathfrak{g}$, le sous-schéma fermé

$$V_{\mathfrak{g}} = \operatorname{Spec}(B(\mathfrak{g})), \quad \text{où } B(\mathfrak{g}) = A[\Gamma]/I_{\mathfrak{g}}$$

de $\mathbb{A}_X^{d(\Gamma)+1} = \operatorname{Spec}(A[\Gamma])$, considéré comme un X-schéma via l'homomorphisme canonique $A \to B(\mathfrak{g})$.

6.1.12. La différence entre les deux idéaux $I(\mathfrak{g})$ et $I_{\mathfrak{g}}$ de $A[\Gamma]$ s'interprète de la manière suivante. Nous verrons en (6.3.1) ci-dessous qu'en restriction au-dessus de l'ouvert $X_* = \operatorname{Spec}(A_f)$ de X, les X-schémas $V_{\mathfrak{g}}$ et $V(\mathfrak{g}) = \operatorname{Spec}(A[\Gamma]/I(\mathfrak{g}))$ sont isomorphes à un même X_*-schéma $V_* \simeq \mathbb{A}^1_{X_*}$. Étant intègre, le schéma $V_{\mathfrak{g}}$ s'identifie donc à l'adhérence dans $V(\mathfrak{g})$ de l'ouvert $V_* \subset V(\mathfrak{g})$, muni de sa structure de X-schéma réduit. En général, $V(\mathfrak{g})$ et $V_{\mathfrak{g}}$ sont des X-schémas distincts, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 6.1.13. Étant donné un polynôme $Q \in A[t]$, non constant et non divisible par f, nous posons $P = fQ \in A[t]$ et nous considérons l'arbre $A[t]$-pondéré

$\mathfrak{g} = (\Gamma, w) =$ 

Les schémas $V(\mathfrak{g})$ et $V_{\mathfrak{g}}$ associés sont les hypersurfaces de $\mathbb{A}^2_X = \operatorname{Spec}(A[X_0, X_{e_0}])$ définies respectivement par les équations

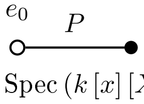
$$fX_{e_0} - fP(X_0) = 0 \quad \text{et} \quad X_{e_0} - P(X_0) = 0.$$

On observe qu'en restriction au dessus de X_*, ces deux schémas sont bien isomorphes à $\mathbb{A}^1_{X_*} = \operatorname{Spec}(A_f[X_0])$. Cependant $V_{\mathfrak{g}} \simeq \mathbb{A}^1_X = \operatorname{Spec}(A[X_0])$ tandis que $V(\mathfrak{g})$ s'identifie à la réunion de $V_{\mathfrak{g}}$ et du schéma $\mathbb{A}^2_D = \operatorname{Spec}((A/fA)[X_0, X_{e_0}])$, supporté le long de la fibre $\pi^{-1}(D)$ du morphisme structural $\pi : V(\mathfrak{g}) \to X$.

6.2. Exemples

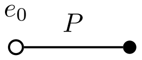
Avant d'établir, dans le paragraphe suivant, une série de résultats généraux partagés par tous les schémas $V_{\mathfrak{g}}$ définis ci-dessus, nous considérons ici quelques exemples illustrant le principe général de construction.

Exemple 6.2.1. Nous supposons ici que $A = k[x]$, $f = x \in A$. Pour tout polynôme non constant $P \in k[t] \subset A[t]$, le schéma $V(\mathfrak{g})$ associé à l'arbre $k[t]$-pondéré

$\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$ 

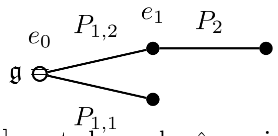
est l'hypersurface de $\mathbb{A}^2_X = \operatorname{Spec}(k[x][X_0, X_{e_0}])$ d'équation $xX_{e_0} - P(X_0) = 0$. La fibre $\pi^{-1}(0)$ du morphisme structural $\pi : V(\mathfrak{g}) \to X$ est réduite si et seulement si P est un produit de facteurs linéaires deux à deux distincts. Dans ce cas précis, $\pi^{-1}(0)$ est alors constituée d'une réunion disjointe de courbes isomorphes à la droite affine $\mathbb{A}^1_k$. Plus généralement, si $P = P_1^{r_1} \cdots P_n^{r_n}$ est un produit de puissances de polynômes irréductibles $P_i \in k[t]$ deux à deux distincts, alors la fibre schématique $\pi^{-1}(0)$ et constituée de la réunion disjointe des sous-schémas $C_i \simeq \operatorname{Spec}(k[X_0, X_{e_0}]/P_i^{r_i}(X_0))$, $i = 1, \ldots, n$, et l'on a $(C_i)_{\mathrm{red}} \simeq \mathbb{A}^1_{k_i}$, où k_i désigne le corps $k[t]/P_i(t)\,k[t]$.

Exemple 6.2.2. Soient $A = \mathbb{C}[x,z]$, $f = x^2$, et $P = -x - z^2 - t^3 \in A[t]$. Le schéma $V(\mathfrak{g})$ associé à l'arbre $A[t]$-pondéré

$\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$ 

est l'hypersurface de $\mathbb{A}^2_X = \mathrm{Spec}\left(A\left[X_0, X_{e_0}\right]\right)$ d'équation $x^2 X_{e_0} + x + z^2 + X_0^3 = 0$, c'est à dire la cubique de Russel [**42**].

6.2.3. Nous supposons de nouveau que $A = k[x]$ et $f = x \in A$, et nous considérons ci-dessous différents exemples de schémas $V_{\mathfrak{g}}$ définis par les arbres $k[t]$-pondérés $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$ suivants



où $P_{1,1}, P_{1,2}, P_2 \in k[t]$ sont des polynômes indéterminés. L'algèbre $A[\Gamma]$, qui ne dépend que de l'arbre sous-jacent Γ est donc $A[\Gamma] = k[x]\left[X_0, X_{e_0}, X_{e_1}\right]$, tandis que la matrice associée à un choix de polynômes $P_{1,1}, P_{1,2}, P_2 \in k[t]$ est

$$M(\mathfrak{g}) = \begin{pmatrix} x & P_{1,1}(X_0) P_{1,2}(X_0) & P_{1,1}(X_0) P_2(X_{e_0}) \\ 1 & X_{e_0} & X_{e_1} \end{pmatrix}.$$

Le sous-schéma $V(\mathfrak{g})$ de $\mathbb{A}^3_X = \mathrm{Spec}(A[\Gamma])$ correspondant est alors défini par les équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} xX_{e_0} - P_{1,1}(X_0) P_{1,2}(X_0) & = & 0 \\ P_{1,1}(X_0) X_{e_1} - X_{e_0} P_2(X_{e_0}) & = & 0 \\ xX_{e_1} - P_{1,1}(X_0) P_2(X_{e_0}) & = & 0 \end{array} \right.$$

Exemple 6.2.4. Si $P_{1,1} = \left(t^2 - 1\right)$ $P_{1,2} = t$ et et $P_2 = \left(t^2 - 1\right)$, alors $V(\mathfrak{g})$ s'identifie à la surface de Bandman et Makar-Limanov [**1**] de $\mathbb{A}^3_X$ définie par les équations

$$xX_{e_0} - X_0\left(X_0^2 - 1\right) = 0, X_0 X_{e_1} - X_{e_0}\left(X_{e_0}^2 - 1\right) = 0, xX_{e_1} - \left(X_0^2 - 1\right)\left(X_{e_0}^2 - 1\right) = 0,$$

donc s'identifie à $V_{\mathfrak{g}}$ puisque cette surface est évidemment intègre.

Exemple 6.2.5. Si $P_{1,1} = P_{1,2} = t$ et $P_2 = t - 1$, alors $V(\mathfrak{g})$ est encore intègre, donc s'identifie à $V_{\mathfrak{g}}$. Cependant la fibre $\pi^{-1}(0)$ du morphisme structural $\pi : V(\mathfrak{g}) \to X$ n'est pas réduite. On notera néanmoins qu'en posant $A' = k\left[X_{e_1}\right]$ et $f' = X_{e_1} \in A'$, la restriction $\pi' : V(\mathfrak{g}) \to X' = \mathrm{Spec}(A)$ de la projection induite par l'inclusion $A \subset k\left[x, X_0, X_{e_0}, X_{e_1}\right]$ permet d'identifier $V(\mathfrak{g})$ au schéma $V(\mathfrak{g}')$ associé à l'arbre $k[t]$-pondéré $\mathfrak{g}' = (\Gamma, w')$ d'arbre sous-jacent Γ, correspondant cette fois aux polynômes $P_{1,1} = t - 1$, $P_{1,2} = t$ et $P_2 = t$. La fibre $(\pi')^{-1}(0)$ est alors réduite. Puisque $V(\mathfrak{g})$ est défini par les équations

$$xX_{e_0} - X_0^2 = 0, \quad X_0 X_{e_1} - X_{e_0}\left(X_{e_0} - 1\right), \quad xX_{e_1} - X_0\left(X_{e_0} - 1\right),$$

pour tout polynôme $Q \in A = k[x]$, la A-dérivation triangulaire

$$\tilde{\partial}_1 = Q\left(x^2 \frac{\partial}{\partial X_0} + 2xX_0 \frac{\partial}{\partial X_{e_0}} + \left(x\left(X_{e_0} - 1\right) + 2X_0^2\right) \frac{\partial}{\partial X_{e_1}}\right)$$

de $A[\Gamma]$ préserve l'idéal $I(\mathfrak{g})$ de $V(\mathfrak{g})$, donc induit une A-dérivation localement nilpotente $\partial_1 \in \mathrm{Der}_A(B(\mathfrak{g}))$, correspondant à une $\mathbb{G}_{a,X}$-action sur $V(\mathfrak{g})$, autrement dit à une action $\xi_Q : \mathbb{G}_{a,k} \times V(\mathfrak{g}) \to V(\mathfrak{g})$ du groupe additif $\mathbb{G}_{a,k}$ sur $V(\mathfrak{g})$ par X-automorphismes. Un raisonnement analogue montre que pour tout polynôme $R \in A' = k\left[X_{e_1}\right]$, la A'-dérivation triangulaire

$$\tilde{\partial}_2 = R\left(X_{e_1}^2 \frac{\partial}{\partial X_{e_0}} + X_{e_1}\left(2X_{e_0} - 1\right) \frac{\partial}{\partial X_0} + \left(X_{e_1} X_0 + \left(X_{e_0} - 1\right)\left(2X_{e_0} - 1\right)\right) \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

de $A'[X_{e_0}, X_0, x] \simeq A[X_0, X_{e_0}, X_{e_1}]$ induit une action $\xi'_R : \mathbb{G}_{a,k} \times V(\mathfrak{g}) \to V(\mathfrak{g})$ de $\mathbb{G}_{a,k}$ sur $V(\mathfrak{g}') \simeq V(\mathfrak{g})$ par X'-automorphismes. Notons G_1 et G_2 les sous-groupes du groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(V(\mathfrak{g}))$ de $V(\mathfrak{g})$ engendrés respectivement par les automorphismes $\xi_Q(1,\cdot)$ et $\xi'_R(1,\cdot)$, où Q et R parcourent $k[x]$ et $k[X_{e_1}]$. Ces deux sous-groupes sont bien sûr isomorphes mais ne sont par contre pas conjugués dans $\mathrm{Aut}(V(\mathfrak{g}))$. En effet, si cela était le cas, alors il existerait un isomorphisme $\phi : X \xrightarrow{\sim} X'$ tel que $\phi(0) = (0)$ et un automorphisme $\psi : V(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} V(\mathfrak{g})$ tel que $\pi' \circ \psi = \phi \circ \pi$, ce qui est évidemment impossible puisque les fibres $\pi^{-1}(0)$ et $(\pi')^{-1}(0)$ n'ont pas la même structure. On observera finalement qu'outre les deux familles de $\mathbb{G}_{a,k}$-actions algébriquement indépendantes ainsi construites, $V(\mathfrak{g})$ est muni d'une action du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_{m,k}$ induite par la restriction de l'action de $\mathbb{G}_{m,k}$ sur $\mathbb{A}^3_X$ définie par $\lambda \star (x, X_0, X_{e_0}, X_{e_1}) = \left(\lambda^{-2}x, \lambda^{-1}X_0, X_{e_0}, \lambda X_{e_1}\right)$ pour tout $\lambda \in k^*$.

Exemple 6.2.6. Si $P_{1,1} = P_{1,2} = P_2 = t$, alors $V(\mathfrak{g})$ est la surface torique de $\mathbb{A}^3_X$ définie par les équations

$$xX_{e_0} - X_0^2 = 0, \quad X_0X_{e_1} - X_{e_0}^2 = 0, \quad xX_{e_1} - X_0X_{e_0} = 0,$$

donc s'identifie encore à $V_{\mathfrak{g}}$. La fibre

$$\pi^{-1}(0) \simeq \mathrm{Spec}\left(k[X_0, X_{e_0}, X_{e_1}] / \left(X_0^2, X_0X_{e_1} - X_{e_0}^2, X_0X_{e_0}\right)\right)$$

n'est pas réduite, mais l'on a cependant $\pi^{-1}(0)_{\mathrm{red}} \simeq \mathrm{Spec}(k[X_{e_1}])$. Cette fois, les variables x, X_{e_1} et X_0, X_{e_0} jouent des rôles exactement symétriques. Notons $A' = k[X_{e_1}]$, $f' = X_{e_1} \in A'$ et $\pi' : V(\mathfrak{g}) \to X' = \mathrm{Spec}(A')$ le morphisme induit par la restriction de la projection $pr_{X_{e_1}} : \mathbb{A}^3_{X'} = \mathrm{Spec}(A'[X_0, X_{e_0}, x]) \to X'$. L'automorphisme de k-algèbres

$$k[x, X_0, X_{e_0}, X_{e_1}] \xrightarrow{\sim} k[x, X_0, X_{e_0}, X_{e_1}], x \leftrightarrow X_{e_1}, X_0 \leftrightarrow X_{e_0}$$

induit un isomorphisme $\phi : X \xrightarrow{\sim} X'$ et un automorphisme $\psi : V(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} V(\mathfrak{g})$ de $V(\mathfrak{g})$ tel que $\pi' \circ \psi = \phi \circ \pi$. On en déduit que les deux sous-groupes G_1 et G_2 du groupe $\mathrm{Aut}(V(\mathfrak{g}))$ engendrés respectivement par les automorphismes $\xi_Q(1,\cdot)$ et $\xi'_R(1,\cdot)$, où Q et R parcourent $k[x]$ et $k[X_{e_1}]$, suivant le modèle de l'exemple précédent, sont cette fois conjugués via l'automorphisme ψ.

6.3. Propriétés générales des schémas $V_{\mathfrak{g}}$

Il serait évidemment tentant de mener à bien une étude systématique des schémas $\pi : V_{\mathfrak{g}} \to X$ construits par le procédé exposé ci-dessus. Nous nous bornons dans ce paragraphe à établir une série de propriétés générales simples partagées par tous ces schémas. Nous montrons en particulier qu'ils admettent tous des actions non triviales du groupe additif $\mathbb{G}_{a,X}$.

6.3.1. Structure de X-schéma des schémas $V_{\mathfrak{g}}$. Nous étudions ici le morphisme structural d'un schéma $\pi : V_{\mathfrak{g}} \to X$ associé à un arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$. Le résultat principal est le suivant.

Proposition 6.3.1. *Pour tout arbre $A[T]$-pondéré $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$, la restriction du X-schéma $\pi : V_{\mathfrak{g}} \to X$ au-dessus de l'ouvert $X_* \simeq \mathrm{Spec}(A_f)$ de $X = \mathrm{Spec}(A)$ est isomorphe au fibré en droites trivial $\mathbb{A}^1_{X_*} \simeq \mathrm{Spec}(A_f[X_0])$.*

Démonstration. Désignons par $I_*(\mathfrak{g}) = I(\mathfrak{g})A_f[\Gamma]$ l'idéal de $A_f[\Gamma]$ engendré par l'image canonique de l'idéal $I(\mathfrak{g}) \subset A[\Gamma]$. On déduit des relations (6.1.10) que $I_*(\mathfrak{g})$ est engendré par les images des polynômes $\Delta_e = fX_e - G_e(\mathfrak{g})$, où e parcourt l'ensemble $\mathrm{Par}(\Gamma)$ des parents de Γ, donc par les éléments $X_e - f^{-1}G_e(\mathfrak{g})$ de $A_f[\Gamma]$. Puisque par définition $I_{\mathfrak{g}} = \{a \in A[\Gamma]\ fa \in I(\mathfrak{g})\}$, on conclut que les idéaux $I_{\mathfrak{g}}A_f[\Gamma]$ et $I_*(\mathfrak{g})$ de $A_f[\Gamma]$ coïncident. D'autre part, pour tout $e \in \mathrm{Par}(\Gamma)$,

G_e est un polynôme à coefficients dans A, en les variables $(X_{e'})_{e'\in \mathrm{Anc}(e)}$ et X_0. On conclut ainsi récursivement qu'il existe $P_e \in A_f[X_0]$ tel que $X_e - P_e \in I_*(\mathfrak{g})$, de sorte que l'on obtient finalement un isomorphisme

$$B(\mathfrak{g})_f = B(\mathfrak{g}) \otimes_A A_f \simeq A_f[\Gamma]/I_{\mathfrak{g}}A_f[\Gamma] \simeq A_f[\Gamma]/I_*(\mathfrak{g}) \simeq A_f[X_0],$$

ce qui démontre la proposition. □

Corollaire 6.3.2. *Pour tout arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$, $V_{\mathfrak{g}}$ est intègre.*

Démonstration. D'après (6.3.1), $B(\mathfrak{g})_f \simeq A_f[X_0]$ est un anneau intègre puisque A l'est. La définition de l'idéal $I_{\mathfrak{g}} \subset A[\Gamma]$ de $V(\mathfrak{g})$ entraîne que l'image de $f \in A$ dans $B(\mathfrak{g})$ n'est pas un diviseur de zéro. Ainsi, l'homomorphisme canonique $B(\mathfrak{g}) \to B(\mathfrak{g})_f$ est injectif, de sorte que $B(\mathfrak{g})$ est intègre puisque sous-anneau d'un anneau intègre. □

6.3.2. Actions du groupe additif sur les schémas $V_{\mathfrak{g}}$. Nous montrons ici que tout schéma $\pi : V_{\mathfrak{g}} \to X$ associé à un arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$ admet des actions du groupe additif $\mathbb{G}_{a,X}$ provenant de la restriction d'actions de ce type sur l'espace affine ambiant $\mathbb{A}_X^{d(\Gamma)+1} = \mathrm{Spec}(A[\Gamma])$. En particulier, certaines des ces $\mathbb{G}_{a,X}$-actions sont définies par des dérivations localement nilpotentes $\partial \in \mathrm{Der}_A(A[\Gamma])$ explicites, comme le montre le résultat suivant :

Proposition 6.3.3. *Pour tout entier $m \geq h(\Gamma)$, la A-dérivation*

$$\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},m} = f^m \frac{\partial}{\partial X_0} + f^{-1} \sum_{e \in Par(\Gamma)} \tilde{\partial}_{\mathfrak{g},m}(G_e(\mathfrak{g})) \frac{\partial}{\partial X_e} \in Der_A(A[\Gamma], A_f[\Gamma])$$

est une dérivation triangulaire de $A[\Gamma]$, induisant une A-dérivation localement nilpotente $\partial_{\mathfrak{g},m}$ de la A-algèbre $B(\mathfrak{g}) = A[\Gamma]/I_{\mathfrak{g}}$.

Démonstration. Par définition, le polynôme généalogique $G_e(\mathfrak{g})$ d'un sommet $e \in \mathrm{Par}(\Gamma)$ ne fait intervenir que les variables X_0, $(X_{e'})_{e'\in\mathrm{Anc}(e)}$ de l'algèbre $A[\Gamma]$. Par conséquent, puisque par hypothèse $m \geq h(\Gamma)$, on a

$$\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},m}(X_e) = f^{-1} \sum_{e'\in \mathrm{Anc}(e)\cup\{0\}} \frac{\partial G_e(\mathfrak{g})}{\partial X_{e'}} \tilde{\partial}_{\mathfrak{g},m}(X_{e'}) \in f^{m-k-1} A\left[X_0, (X_{e'})_{e'\in\mathrm{Anc}(e)}\right]$$

pour tout sommet e de Γ au niveau k, $0 \leq k \leq h(\Gamma) - 1$. Ainsi $\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},m}(A[\Gamma]) \subset A[\Gamma]$, de sorte que $\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},m}$ est une A-dérivation triangulaire de $A[\Gamma]$. Par construction,

$$\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},m}(\Delta_e(\mathfrak{g})) = \tilde{\partial}_{\mathfrak{g},m}(fX_e - G_e(\mathfrak{g})) = f\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},m}(X_e) - \tilde{\partial}_{\mathfrak{g},m}(G_e(\mathfrak{g})) = 0$$

pour tout $e \in \mathrm{Par}(\Gamma)$. On déduit de la définition de l'idéal $I_{\mathfrak{g}}$ et des relations (6.1.10) que pour tout $P \in I_{\mathfrak{g}}$, il existe $n \geq 0$ tel que $f^n P$ appartienne à l'idéal J de $A[\Gamma]$ engendré par les polynômes $\Delta_e(\mathfrak{g})$, $e \in \mathrm{Par}(\Gamma)$. Puisque $\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},m}(\Delta_e(\mathfrak{g})) = 0$ pour tout $e \in \mathrm{Par}(\Gamma)$, $\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},m}(f^n P)$ appartient à J, donc à l'idéal $I(\mathfrak{g})$. On en déduit que $f^n\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},m}(P) = \tilde{\partial}_{\mathfrak{g},m}(f^n P)$ appartient à $I(\mathfrak{g})$, donc que $\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},m}(P) \in I_{\mathfrak{g}}$ par définition de $I_{\mathfrak{g}}$. Ainsi $\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},m}(I_{\mathfrak{g}}) \subset I_{\mathfrak{g}}$, de sorte que $\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},m}$ induit un A-dérivation localement nilpotente $\partial_{\mathfrak{g},m}$ de $B(\mathfrak{g}) = A[\Gamma]/I_{\mathfrak{g}}$. □

Puisque $\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},m}$ est une A-dérivation localement nilpotente laissant l'idéal $I_{\mathfrak{g}}$ de $V_{\mathfrak{g}}$ invariant, il en est de même de la A-dérivation $a\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},m}$ pour tout $a \in A \setminus fA$, d'où le résultat suivant :

Corollaire 6.3.4. *Pour tout $a \in A \setminus fA$ et tout $m \geq h(\Gamma)$, A-dérivation $a\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},m} \in Der_A(A[\Gamma])$ induit une $\mathbb{G}_{a,X}$-action non triviale sur $V_{\mathfrak{g}}$.*

6.3.5. Étant donné un arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$, nous notons $\psi : V_{\mathfrak{g}} \to \mathbb{A}^1_X$ la restriction de la projection $pr_{X_0} : \mathbb{A}^{d(\Gamma)+1}_X \to \mathbb{A}^1_X = \mathrm{Spec}\,(A[X_0])$ induite par l'inclusion $A[X_0] \subset A[\Gamma]$. D'après (6.3.1), la restriction de ψ au-dessus de l'ouvert X_* de X induit un isomorphisme de X_*-schéma $\psi : V_{\mathfrak{g}} \mid_{X_*} \stackrel{\sim}{\to} \mathbb{A}^1_{X_*} = \mathrm{Spec}\,(A_f[X_0])$. Ainsi ψ est un morphisme birationnel, donc une modification affine (4.1.3) de $\mathbb{A}^1_X$ dont le centre est un sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^1_X$ supporté le long de la fibre $p^{-1}(D)$ du morphisme structural $p : \mathbb{A}^1_X \to X$. Par construction, $\psi : V_{\mathfrak{g}} \to \mathbb{A}^1_X$ est $\mathbb{G}_{a,X}$-équivariant lorsque l'on munit $V_{\mathfrak{g}}$ de la $\mathbb{G}_{a,X}$-action définie par la dérivation localement nilpotente $\partial_{\mathfrak{g},m}$ et $\mathbb{A}^1_X \simeq \mathbf{V}(\mathcal{J}_X(mD))$ de sa structure canonique de quasi-torseur sous $\mathbb{G}_{a,X}$, c'est à dire de l'action par la translation tordue $\mathbf{t}_{f^m}$. On a donc montré le résultat suivant :

Théorème 6.3.6. *Pour tout arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$ et tout $m \geq h(\Gamma)$, le X-schéma $\pi : V_{\mathfrak{g}} \to X$, muni de la $\mathbb{G}_{a,X}$-action définie par la dérivation localement nilpotente $\partial_{\mathfrak{g},m}$ est une modification affine équivariante du $\mathbb{G}_{a,X}$-quasi-torseur $\mathbf{V}(\mathcal{J}_X(mD)) \simeq \mathbb{A}^1_X$.*

Deuxième partie

Schémas de Danielewski-Fieseler

CHAPITRE 7

Introduction aux schémas de Danielewski-Fieseler

Dans son célèbre contre-exemple au problème de simplification de Zariski, Danielewski [**11**] construit deux hypersurfaces affines complexes

$$S_1 = \{xz - y(y+1) = 0\} \quad \text{et} \quad S_2 = \left\{x^2z - y(y+1) = 0\right\}$$

de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y,z])$ non isomorphes telles que $S_1 \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \simeq S_2 \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$.

Pour montrer cette seconde propriété, la technique consiste tout d'abord à considérer ces deux surfaces comme des schémas au-dessus de $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x])$ via les restrictions $q_1 : S_1 \to X$ et $q_2 : S_2 \to X$ de la projection $pr_x : \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}} \to X$. On remarque ensuite que S_1 et S_2 sont toutes deux obtenues en recollant, au-dessus de $X_* = X \setminus \{0\}$ deux copies $W_i = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x][T_i])$, $i = 1, 2$, du $\mathbb{G}_{a,X}$-torseur trivial via les isomorphismes de X_*-schémas induits par les isomorphismes de $\mathbb{C}\left[x, x^{-1}\right]$-algèbres

$$\begin{cases} \tau_1 : \mathbb{C}\left[x, x^{-1}\right][T_1] \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\left[x, x^{-1}\right][T_2], T_1 \mapsto x^{-1} + T_2 \\ \tau_2 : \mathbb{C}\left[x, x^{-1}\right][T_1] \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\left[x, x^{-1}\right][T_2], T_1 \mapsto x^{-2} + T_2 \end{cases}$$

respectivement. En introduisant le X-schéma $\delta : X(2) \to X$ formé à partir de X en remplaçant le point 0 par deux points fermés x_1 et x_2, on peut alors interpréter S_1 et S_2 comme des torseurs $\rho_i : S_i \to X(2)$, $i = 1, 2$, sous le groupe additif $\mathbb{G}_{a,X(2)}$. Puisque S_1 et S_2 sont affines, on conclut finalement que les $\mathbb{G}_{a,S_i}$-torseurs images inverses $\rho'_i : S_1 \times_{X(2)} S_2 \to S_i$, $i = 1, 2$, sont tous deux triviaux, d'où l'isomorphisme $S_1 \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \simeq S_1 \times_{X(2)} S_2 \simeq S_2 \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ annoncé.

Une interprétation similaire constitue la base de la classification des surfaces affines complexes normales S avec action de $\mathbb{G}_{a,\mathbb{C}}$ obtenue ensuite par Fieseler [**17**]. L'approche développée par Fieseler consiste à étudier la structure locale du quotient $q : S \to S/\mathbb{G}_{a,\mathbb{C}}$, en introduisant des schémas intermédiaires Y en général non séparés, pour obtenir une factorisation $q : S \to Y \to S/\mathbb{G}_{a,\mathbb{C}}$ telle que $\rho : S \to Y$ soit à fibres connexes. En cela, les schémas comme $X(2)$ dans l'exemple ci-dessus constituent un palliatif à la non existence de la factorisation de Stein lorsque l'on travaille avec des schémas affines.

Nous nous proposons d'étudier tout au long de cette partie la notion de *schéma de Danielewski-Fieseler* qui constitue une généralisation naturelle de la construction originale de Danielewski dans laquelle on remplace la droite affine $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x])$ par un schéma X quelconque, le point fermé $0 \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ par un diviseur effectif non nul $D \in \mathrm{Div}^+(X)$, et le $\mathbb{G}_{a,X}$-torseur trivial $\mathbb{A}^1_X$ dont on recolle des copies par un torseur $\rho : W \to X$ sous un fibré en droites $p : L \to X$.

Ce chapitre préparatoire est consacré au cas simple où $X = \mathrm{Spec}(A)$ est un schéma affine, $D = \mathrm{div}(f)$ et $W = \mathbb{A}^1_X$. Nous donnons tout d'abord une construction par recollements analogue de celle ci-dessus et constituant une généralisation formelle immédiate des procédés décrits par Fieseler dans le cas où A est un anneau de Dedekind, puis nous interprétons les schémas ainsi obtenus comme des torseurs sous un fibré en droites au-dessus d'un schéma en général non séparé.

7.1. Schémas de Danielewski-Fieseler au-dessus d'un schéma affine

Dans ce paragraphe, nous donnons une première définition des schémas de Danielewski-Fieseler par l'intermédiaire de constructions par recollements.

7.1.1. Dans tout ce qui suit, nous considérons un triplet $\left(X, D, \mathbb{A}^1_X\right)$ constitué d'un schéma affine $X = \mathrm{Spec}\,(A)$, d'un diviseur effectif principal $D = \mathrm{div}\,(f)$ défini par un élément régulier non inversible $f \in A$, et du fibré en droites trivial

$$p_0 : \mathbb{A}^1_X = \mathbf{V}\,(\mathcal{O}_X) \simeq \mathrm{Spec}\,(A\,[T]) \to X,$$

au-dessus de X. Nous notons $X_* = X \setminus \mathrm{Supp}\,(D) \simeq \mathrm{Spec}\,(A_f)$ l'ouvert complémentaire du support de $D = \mathrm{div}\,(f)$ dans X.

7.1.2. Puisque $D = \mathrm{div}\,(f)$ est un diviseur principal sur X, tous les fibrés en droites $p_k : \mathbf{V}\,(\mathcal{O}_X\,(\lambda D)) \to X$ sur X, où $\lambda \in \mathbb{Z}$, sont isomorphes au fibré trivial $\mathbb{A}^1_X$. Par ailleurs, pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mathbb{A}^1_X \simeq \mathbf{V}\,(\mathcal{J}_X\,(\lambda D))$ est muni d'une structure canonique de quasi-torseur sous $\mathbb{G}_{a,X} = \mathbf{V}\,(\mathcal{O}_X)$ induite par la section canonique $s_{\lambda D} \in \Gamma\,(X, \mathcal{O}_X\,(\lambda D))$(3.1.2). Cela revient bien sûr à faire agir le groupe additif $\mathbb{G}_{a,X} = \mathrm{Spec}\,(A\,[T])$ sur $\mathbb{A}^1_X = \mathrm{Spec}\,(A\,[T])$ par la translation tordue $\mathbf{t}_{f^\lambda}$ (3.2.1), correspondant à l'homomorphisme de co-action

$$A\,[T] \to A\,[T] \otimes_A A\,[T]\,, T \mapsto T \otimes 1 + f^\lambda \otimes T.$$

Notation 7.1.3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, nous notons $\mathbb{A}^1_X\,(-\lambda)$ pour désigner le fibré trivial $p_0 : \mathbb{A}^1_X \to X$ muni de l'action du groupe additif $\mathbb{G}_{a,X}$ par la translation tordue $\mathbf{t}_{f^\lambda}$. Nous noterons en général simplement $\mathbb{A}^1_X$ au lieu de $\mathbb{A}^1_X\,(0)$.

7.1.1. Définition des schémas de Danielewski-Fieseler. Nous considérons maintenant $n \geq 1$ copies $W_i = \mathrm{Spec}\,(A\,[T_i])$, où T_i est une variable, du fibré trivial $\mathbb{A}^1_X$ au-dessus de X. Nous fixons un multi-indice $[\mu] = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ et nous choisissons une collection $\{\tilde{g}\} = \{\tilde{g}_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n}$ d'éléments $\tilde{g}_{ij} \in A_f$ satisfaisant les relations de cocycle "tordues"

$$\begin{cases} \tilde{g}_{ji} & = & -f^{\mu_j - \mu_i}\tilde{g}_{ij} \\ \tilde{g}_{ik} & = & \tilde{g}_{ij} + f^{\mu_i - \mu_j}\tilde{g}_{jk} \end{cases}$$

7.1.4. Désignons par W le schéma obtenu en recollant les schémas W_i le long des ouverts $W_{i,*} = \mathrm{Spec}\,(A_f\,[T_i])$, $i = 1, \ldots, n$, via les isomorphismes de A_f-algèbres

$$\tau_{ij} : A_f\,[T_i] \to A_f\,[T_j]\,, T_i \mapsto \tilde{g}_{ij} + f^{\mu_i - \mu_j} T_j.$$

On observera que les relations de cocycle satisfaites par les *fonctions de transition* $\{\tilde{g}_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n}$ garantissent en effet que l'on peut former un schéma W par ce procédé.

7.1.5. Le schéma W ainsi obtenu est muni d'un morphisme $\pi : W \to X$ induit par les morphismes structuraux $\pi_i : W_i \simeq \mathbb{A}^1_X \to X$. Par construction, la restriction de π identifie l'ouvert $W_* = \pi^{-1}\,(X_*)$ de W au fibré en droites trivial $\mathbb{A}^1_{X_*}$ au-dessus de X_*. Par contre, la préimage $\pi^{-1}\,(\mathrm{Supp}\,(D))$ du support de D est constituée de la réunion disjointe de n schémas tous isomorphes à la restriction $\mathbb{A}^1_D$ du fibré en droites trivial $\mathbb{A}^1_X$ au-dessus de $\mathrm{Supp}\,(D)$.

Définition 7.1.6. On dit que le X-schéma $\pi : W \to X$ ainsi obtenu est le *schéma de Danielewski-Fieseler* de base $(X, D = \mathrm{div}\,(f))$ défini par le multi-indice $[\mu] \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ et les fonctions de transitions $\tilde{g} = \{\tilde{g}_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n}$.

Remarque 7.1.7. Au sens de la définition précédente, les objets considérés dans [**11**], sont les schémas de Danielewski-Fieseler de base $(X = \mathrm{Spec}\,(A)\,, D = \mathrm{div}\,(f))$, où A est une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini intègre, définis par le multi-indice $(0,0) \in \mathbb{Z}^2$ et les fonctions de transition $g_{12} = a/f^n$ telles que a et f engendrent l'idéal unité de A. Nous verrons plus loin, au chapitre 10, que cette dernière hypothèse garantit que $\pi : W \to X$ est un morphisme affine, ce qui revient à dire, dans ce cas particulier, que W est un schéma affine.

7.1.8. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, nous pouvons munir le X-schéma W_i de l'action du groupe additif $\mathbb{G}_{a,X} = \mathrm{Spec}\,(A\,[T])$ par la translation tordue $\mathbf{t}_{f^{\mu_i}}$. Cela revient à considérer $W_i \simeq \mathbb{A}^1_X$ non seulement comme le fibré en droites trivial au-dessus de

X mais encore comme le $\mathbb{G}_{a,X}$-schéma $\mathbb{A}^1_X(-\mu_i)$ (7.1.3). Pour tout couple d'indices $i \neq j$, les isomorphismes de recollement τ_{ij} sont clairement équivariants pour ces actions par translations tordues. Ainsi le schéma de Danielewski-Fieseler $\pi : W \to X$ correspondant est canoniquement muni d'une action du groupe additif $\mathbb{G}_{a,X}$ dont les restrictions aux ouverts W_i coïncident avec les actions par translations tordues $\mathbf{t}_{f^{\mu_i}}$, $i = 1, \ldots, n$.

7.1.2. Morphismes équivariants canoniques. Considérons un schéma de Danielewski-Fieseler $\pi : W \to X$ défini par un multi-indice $[\mu] = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ et une collection $\{\tilde{g}\} = \{\tilde{g}_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n}$ de fonction de transitions $\tilde{g}_{ij} \in A_f$.

7.1.9. Soit un entier $\lambda \geq \max_{i=1,\ldots,n}(\mu_i)$ tel que pour tout couple d'indices $i \neq j$, l'élément $f^{\lambda-\mu_i}\tilde{g}_{ij} \in A_f$ soit dans l'image de l'injection canonique $A \hookrightarrow A_f$. Cela est évidemment toujours le cas pour λ assez grand. Nous pouvons alors choisir une collection $\tilde{\sigma} = \{\tilde{\sigma}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ d'éléments $\tilde{\sigma}_i \in A$ de sorte que pour tout couple d'indices $i \neq j$ on ait l'égalité

$$\tilde{g}_{ij} = f^{\mu_i-\lambda}(\tilde{\sigma}_j - \tilde{\sigma}_i) \in A_f, \quad i \neq j,\ i,j = 1, \ldots, n,$$

où $\tilde{\sigma}_j$ et $\tilde{\sigma}_i$ sont assimilés à leurs images canoniques respectives dans A_f. Il suffit en effet de poser, par exemple, $\tilde{\sigma}_1 = 0$ puis $\tilde{\sigma}_i = f^{\lambda-\mu_1}g_{1i} \in A$ pour tout $i = 2, \ldots, n$.

7.1.10. Considérons alors la collection de X-morphismes $\tilde{\psi}_i : W_i \to \mathbb{A}^1_X$ induits par les homomorphismes de A-algèbres

$$A[T] \to A[T_i], T \mapsto \tilde{\sigma}_i + f^{\lambda-\mu_i}T_i \quad i = 1, \ldots, n.$$

Par construction de la collection $\tilde{\sigma}$, ces X-morphismes locaux $\tilde{\psi}_i$ se recollent en un X-morphisme global $\psi_{(\lambda,\tilde{\sigma})} : W \to \mathbb{A}^1_X$ qui est $\mathbb{G}_{a,X}$-équivariant lorsque l'on munit W de l'action (7.1.8) et $\mathbb{A}^1_X$ de l'action par la translation tordue $\mathbf{t}_{f^\lambda}$.

Remarque 7.1.11. Dans la description ci-dessus, il n'y a évidemment unicité ni de l'entier λ, ni de la collection $\tilde{\sigma} = \{\tilde{\sigma}_i\}_{i=1,\ldots,n}$. En particulier, tout entier $\lambda' \geq \lambda$ et toute collection $\tilde{\sigma}' = \{\tilde{\sigma}'_i\}_{i=1,\ldots,n}$ de la forme $\tilde{\sigma}'_i = \tilde{\sigma}_i + a$, où $a \in A$ est fixé conduit à une construction analogue.

7.1.12. Réciproquement, à partir d'un entier $\lambda \geq \max_{i=1,\ldots,n}(\mu_i)$ et d'une collection $\tilde{\sigma} = \{\tilde{\sigma}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ d'éléments $\tilde{\sigma}_i \in A$, nous pouvons construire des fonctions de transition

$$\tilde{g}_{ij} = f^{\mu_i-\lambda}(\tilde{\sigma}_j - \tilde{\sigma}_i) \quad i \neq j,\ i,j = 1, \ldots, n,$$

et par conséquent un schéma de Danielewski-Fieseler $\pi : W = W_{(\lambda,\tilde{\sigma})} \to X$ canoniquement muni d'un X-morphisme $\mathbb{G}_{a,X}$-équivariant $\psi_{(\lambda,\tilde{\sigma})} : W \to \mathbb{A}^1_X(-\lambda)$.

Définition 7.1.13. On dit que le schéma $\pi : W_{(\lambda,\tilde{\sigma})} \to X$ ainsi obtenu est le schéma de Danielewski-Fieseler associé à la paire $(\lambda, \tilde{\sigma})$, et l'on dit que

$$\psi_{(\lambda,\tilde{\sigma})} : W_{(\lambda,\tilde{\sigma})} \to \mathbb{A}^1_X(-\lambda)$$

est le morphisme $\mathbb{G}_{a,X}$-équivariant canonique associé à cette même paire (λ, σ).

La discussion précédente entraîne le résultat utile suivant :

Proposition 7.1.14. *Tout schéma de Danielewski-Fieseler est isomorphe à un schéma $\pi : W_{(\lambda,\tilde{\sigma})} \to X$ associé à une paire $(\lambda, \tilde{\sigma})$.*

7.2. Interprétation en termes de torseurs

Nous montrons ici que les schémas de Danielewski-Fieseler $\pi : W \to X$ tels que définis ci-dessus s'interprètent comme des torseurs en droites $\rho(n) : W \to X(n)$ au-dessus de certains X-schémas $X(n)$ déduits de X. Cette approche alternative se révèle particulièrement fructueuse, puisqu'elle nous permettra par la suite de généraliser les constructions simples ci-dessus à des schémas de base X quelconques.

7.2.1. Changement de base. Soit $\pi : W \to X$ un schéma de Danielewski-Fieseler de base $(X = \mathrm{Spec}\,(A)\,, D = \mathrm{div}\,(f))$, défini par un multi-indice $[\mu] \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ et une collection $\tilde{g} = \{\tilde{g}_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n}$ de fonctions de transitions $\tilde{g}_{ij} \in A_f$.

7.2.1. Notons maintenant $\delta : X(n) \to X$ le X-schéma obtenu à partir de X en remplaçant le support du diviseur $D = \mathrm{div}\,(f)$ par n copies disjointes $D_i(n)$ de ce diviseur. Pour tout indice $i = 1, \ldots, n$, nous désignons par $X_i(n)$ l'ouvert de $X(n)$ formé de la réunion de l'ouvert $X_*(n) = \delta^{-1}(X_*)$ et de la copie $D_i(n)$ de D. On obtient ainsi une collection d'isomorphismes induits $\delta_i = \delta\mid_{X_i(n)}: X_i(n) \xrightarrow{\sim} X$. Nous notons alors $\mathcal{U}_{(n)} = (X_i(n))_{i=1,\ldots,n}$ le recouvrement ouvert de $X(n)$ ainsi obtenu. On notera que pour tout couple d'indices $i \neq j$, les ouverts $X_{ij}(n) := X_i(n) \cap X_j(n)$ et $X_*(n)$ de $X(n)$ coïncident.

7.2.2. Nous pouvons alors identifier chaque ouvert W_i de W au fibré en droites trivial $\rho_i(n) : W_i = \mathbb{A}^1_{X_i(n)} \to X_i(n)$ au-dessus de $X_i(n)$, de sorte que le morphisme structural $\pi : W \to X$ se factorise via un morphisme $\rho(n) : W \to X(n)$ suivi du morphisme $\delta : X(n) \to X$. Autrement dit, W s'identifie par l'intermédiaire de $\rho(n)$ au $X(n)$-schéma obtenu en recollant les $X_i(n)$-schémas $W_i = \mathrm{Spec}\,(A[T_i])$ au-dessus des ouverts $X_{ij}(n) = X_*(n) \simeq \mathrm{Spec}\,(A_f)$ via les isomorphismes de A_f-algèbres

$$\tau_{ij} : A_f[T_i] \to A_f[T_j]\,, T_i \mapsto \tilde{g}_{ij} + f^{\mu_i - \mu_j} T_j$$

précédemment introduits. On déduit alors de ce nouveau procédé de construction que $\rho(n) : W \to X(n)$ est un fibré linéaire affine géométrique au sens de la définition (2.5.1).

7.2.2. Torseur en droites associé à un schéma de Danielewski-Fieseler. L'interprétation ci-dessus conduit à considérer un schéma de Danielewski-Fieseler $\pi : W \to X$ défini par un multi-indice $[\mu] = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ et une collection de fonctions de transition $\tilde{g} = \{\tilde{g}_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n}$ non seulement comme un X-schéma, mais encore comme un fibré linéaire affine géométrique $\rho(n) : W \to X(n)$ au-dessus d'un X-schéma $\delta : X(n) \to X$.

Or on sait d'après (2.5.3) qu'il y a une correspondance biunivoque entre ces fibrés et les torseurs sous les fibrés en droites $\mathbf{V}(\mathcal{L})_+$, où $\mathcal{L}$ parcoure l'ensemble des $\mathcal{O}_{X(n)}$-modules inversibles.

7.2.3. Ainsi, tout schéma de Danielewski-Fieseler $\pi : W \to X$, hérite naturellement d'une structure de torseur $\rho(n) : W \to X(n)$ sous un certain fibré en droites $\mathbf{V}(\mathcal{L})_+$, où $\mathcal{L}$ est un $\mathcal{O}_{X(n)}$-module inversible que l'on peut déterminer précisément à l'aide de la méthode indiquée en (7). En effet, nous observons tout d'abord que si $\mathcal{L}$ convient, alors ses restrictions $\mathcal{L}\mid_{X_i(n)}$ au-dessus des ouverts $X_i(n)$ du recouvrement $\mathcal{U}_{(n)}$ de $X(n)$ sont respectivement isomorphes à $\mathcal{O}_{X_i(n)}$, puisque l'on a, par construction, des identifications $W_i \simeq \mathbb{A}^1_{X_i(n)}$ pour tout indice $i = 1, \ldots, n$. Il est clair que le sous $\mathcal{O}_{X(n)}$-module inversible

$$\mathcal{O}[-\mu] = \mathcal{O}_{X(n)}[-\mu]$$

de $\mathcal{K}_{X(n)}$ engendré par f^{μ_i} au-dessus de $X_i(n)$ satisfait ces conditions. On notera que puisque $[\mu] \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, le $\mathcal{O}_{X(n)}$-module $\mathcal{O}[-\mu]$ ainsi défini est un idéal de $\mathcal{O}_{X(n)}$.

7.2.4. Par définition, le dual $\mathcal{O}[\mu] = \mathcal{O}[-\mu]^\vee$ est le sous $\mathcal{O}_{X(n)}$-module inversible de $\mathcal{K}_{X(n)}$ engendré par $f^{-\mu_i}$ au-dessus de $X_i(n)$. On a donc des isomorphismes de $\mathcal{O}_{X_i(n)}$-modules

$$\zeta_{\mu_i} : \mathcal{O}[\mu]\mid_{X_i(n)} = f^{-\mu_i}\mathcal{O}_{X_i(n)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X_i(n)}, s_i = f^{-\mu_i} a_i \mapsto a_i = f^{\mu_i} s_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Les sections

$$g_{ij} = \zeta_{\mu_i}^{-1}(\tilde{g}_{ij}) \in \Gamma(X_{ij}(n)\,, \mathcal{O}[\mu])\,, \quad i \neq j,\ i,j = 1, \ldots, n,$$

définies via les isomorphismes induits

$$\zeta_{\mu_i} : \Gamma\left(X_{ij}\left(n\right), \mathcal{O}\left[\mu\right]\right) \xrightarrow{\sim} \Gamma\left(X_*\left(n\right), \mathcal{O}_{X(n)}\right) \simeq A_f.$$

constituent alors un 1-cocycle de Čech $g = \{g_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n} \in C^1\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{O}\left[\mu\right]\right)$ pour le recouvrement $\mathcal{U}_{(n)} = \left(X_i\left(n\right)\right)_{i=1,\ldots,n}$ de $X\left(n\right)$, et l'on obtient finalement un isomorphisme de $\mathbf{V}\left(\mathcal{O}\left[-\mu\right]\right)_+$-torseurs

$$W \simeq \mathbf{W}\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{O}\left[-\mu\right], g\right) \xrightarrow{\rho(n)} X\left(n\right),$$

où, suivant (2.2.1), la notation $\mathbf{W}\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{O}\left[-\mu\right], g\right)$ désigne le $X\left(n\right)$-schéma spectre de la $\mathcal{O}_{X(n)}$-algèbre quasi-cohérente obtenue en recollant les algèbres symétriques $\mathbf{S}\left(\mathcal{O}\left[-\mu\right]|_{X_i(n)}\right)$ au-dessus des ouverts $X_{ij}\left(n\right)$ par l'intermédiaire des isomorphismes de $\mathcal{O}_{X_{ij}(n)}$-algèbres

$$\mathbf{S}\left(g_{ij}, \mathrm{Id}\right) : \mathbf{S}\left(\mathcal{O}\left[-\mu\right]|_{X_{ij}(n)}\right) \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}\left(\mathcal{O}\left[-\mu\right]|_{X_{ij}(n)}\right).$$

Cela conduit donc à l'interprétation suivante des schémas de Danielewski-Fieseler :

Proposition 7.2.5. *Il y a une correspondance biunivoque entre les schémas de Danielewski-Fieseler $\pi : W \to X$ définis par un multi-indice $[\mu] \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ et une collection de fonctions de transition $\tilde{g} = \{\tilde{g}_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n}$ et les $\mathbf{V}\left(\mathcal{O}\left[-\mu\right]\right)_+$-torseurs*

$$\rho\left(n\right) : W = \mathbf{W}\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{O}\left[-\mu\right], g\right) \to X\left(n\right)$$

définis par un 1-cocycle de Čech $g = \{g_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n} \in C^1\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{O}\left[\mu\right]\right)$.

7.2.3. Actions du groupe additif sur les schémas de Danielewski-Fieseler. Par définition, un schéma de Danielewski-Fieseler $\pi : W \to X$ défini par un multi-indice $[\mu] \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ et une collection de fonctions de transition $\{\tilde{g}_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n}$ est muni d'une action du groupe $\mathbb{G}_{a,X}$ dont les restrictions aux ouverts $W_i = \mathrm{Spec}\left(A\left[T_i\right]\right)$ coïncident avec les actions par translations tordues $\mathbf{t}_{f^{\mu_i}}$.

7.2.6. D'autre part, l'interprétation ci-dessus conduit à considérer W comme un torseur $\rho\left(n\right) : W \to X\left(n\right)$ sous le $X\left(n\right)$-groupe $\mathbf{V}\left(\mathcal{O}\left[-\mu\right]\right)_+$. Or, par construction, le $\mathcal{O}_{X(n)}$-module inversible $\mathcal{O}\left[\mu\right]$ s'identifie au module inversible associé au diviseur effectif

$$[\mu]\, D\left(n\right) := \sum_{i=1}^{n} \mu_i D_i\left(n\right) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^*\left(\mu_i D\right)$$

défini par les données locales $\{\left(X_i\left(n\right), f^{\mu_i}\right)\}_{i=1,\ldots,n}$. Ainsi, par l'intermédiaire de la section canonique $s_{[\mu]} \in \Gamma\left(X\left(n\right), \mathcal{O}\left[\mu\right]\right)$ correspondante, nous pouvons munir le $\mathbf{V}\left(\mathcal{O}\left[-\mu\right]\right)_+$-torseur $\rho\left(n\right) : W \to X\left(n\right)$ d'une structure de quasi-torseur sous le groupe additif $\mathbb{G}_{a,X(n)}$ (3.1.6).

7.2.7. Équiper $\rho\left(n\right) : W \to X\left(n\right)$ de cette $\mathbb{G}_{a,X(n)}$-action par translations tordues $\mathbf{t}_{s_{[\mu]}}$ revient bien sûr à faire agir, pour tout indice $i = 1, \ldots, n$, le groupe additif $\mathbb{G}_{a,X_i(n)}$ sur $W_i = W|_{X_i(n)} \simeq \mathbb{A}^1_{X_i(n)}$ via la translation tordue $\mathbf{t}_{f^{\mu_i}}$. Ainsi, la donnée de la $\mathbb{G}_{a,X}$-action canonique (7.1.3) sur un schéma de Danielewski-Fieseler $\pi : W \to X$ est équivalente à la donnée de la structure de quasi-torseur sous $\mathbb{G}_{a,X(n)}$ sur le $\mathbf{V}\left(\mathcal{O}\left[-\mu\right]\right)_+$-torseur $\rho\left(n\right) : W \to X\left(n\right)$ correspondant.

Remarque 7.2.8. Les isomorphismes $\tau_{ij} : A_f\left[T_i\right] \xrightarrow{\sim} A_f\left[T_j\right]$, $T_i \mapsto \tilde{g}_{ij} + f^{\mu_i - \mu_j} T_j$ sont inchangés lorsque l'on remplace le multi-indice $[\mu] \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ par un multi-indice $[\mu'] = [\mu] + [\hat{\nu}] \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, où $\nu \geq -\min_{i=1,\ldots,n}\left(\mu_i\right)$ et $[\hat{\nu}] = \left(\nu, \ldots, \nu\right)$. Cela correspond, dans l'interprétation en termes de torseurs $\rho\left(n\right) : W \to X\left(n\right)$, au fait que les diviseurs $[\mu]\, D\left(n\right)$ et $[\mu']\, D\left(n\right)$ sur $X\left(n\right)$ sont linéairement équivalents puisque $[\hat{\nu}]\, D\left(n\right) = \mathrm{div}\left(\delta^* f^{\nu}\right)$ est un diviseur trivial. Ainsi, remplacer le multi-indice $[\mu]$ par un multi-indice $[\mu']$ comme ci-dessus, ne change pas la classe d'isomorphisme de W

en tant que X-schéma, mais altère cependant la $\mathbb{G}_{a,X}$-canonique (7.2.7) en modifiant le cycle des points fixes (3.3.3) du $\mathbb{G}_{a,X(n)}$-quasi-torseur $\rho(n) : W \to X(n)$.

Le tableau suivant rassemble l'essentiel des étapes des deux procédés de construction des schémas de Danielewski-Fieseler introduits dans le présent chapitre.

Construction par recollement	Construction par torseurs
Multi-indice $[\mu] = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$	Multi-indice $[\mu] = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$
Fonctions de transition $\tilde{g} = \{\tilde{g}_{ij} \in A_f\}$ Relations $\tilde{g}_{ik} = \tilde{g}_{ij} + f^{\mu_i - \mu_j}\tilde{g}_{jk}$	Schéma $\delta : X(n) \to X$ $\mathcal{O}_{X(n)}$-module $\mathcal{O}[\mu]$ Cocycle $g = \{g_{ij}\} \in C^1\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{O}[\mu]\right)$
Isomorphismes $\tau_{ij} : A_f[T_i] \xrightarrow{\sim} A_f[T_j]$ $T_i \mapsto \tilde{g}_{ij} + f^{\mu_i - \mu_j}T_j$	Isomorphismes $\mathbf{S}(g_{ij}, \mathrm{Id}) : \mathbf{S}\left(\mathcal{O}[\mu] \mid_{X_{ij}(n)}\right) \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}\left(\mathcal{O}[\mu] \mid_{X_{ij}(n)}\right)$
Schéma $\pi : W \to X$	$\mathbf{V}(\mathcal{O}[-\mu])_+$-torseur $\rho(n) : W = \mathbf{W}\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{O}[-\mu], g\right) \to X(n)$ Schéma $\pi = \delta \circ \rho(n) : W \to X$
Action de $\mathbb{G}_{a,X}$ par translations tordues locales $\mathbf{t}_{f^{\mu_i}}$	Quasi-torseur sous $\mathbb{G}_{a,X(n)}$ via la section canonique $s_{[\mu]}$

FIG. 7.2.1. Construction des schémas de Danielewski-Fieseler.

7.2.4. Retour sur les morphismes équivariants canoniques. D'après la proposition (7.1.14), tout schéma de Danielewski-Fieseler $\pi : W \to X$ est isomorphe à un schéma de ce type obtenu à partir d'un multi-indice $[\mu] = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, d'un entier $\lambda \geq \max\limits_{i=1,\ldots,n}(\mu_i)$ et d'une collection $\tilde{\sigma} = \{\tilde{\sigma}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ d'éléments $\tilde{\sigma}_i \in A$. Un tel schéma $\pi : W_{(\lambda,\tilde{\sigma})} \to X$ est alors canoniquement muni d'un morphisme $\mathbb{G}_{a,X}$-équivariant $\psi_{(\lambda,\tilde{\sigma})} : W_{(\lambda,\tilde{\sigma})} \to \mathbb{A}^1_X(-\lambda)$ (7.1.13).

Le procédé de construction d'un schéma de Danielewski-Fieseler $W = W_{(\lambda,\tilde{\sigma})}$ et de son morphisme canonique $\psi_{(\lambda,\tilde{\sigma})}$ s'interprète de nouveau agréablement en termes du $\mathbf{V}(\mathcal{O}[-\mu])_+$-torseur $\rho(n) : W \to X(n)$ correspondant.

7.2.9. Notons $\delta : X(n) \to X$ le morphisme structural de $X(n)$ et considérons le $\mathcal{O}_{X(n)}$-module inversible $\mathcal{O}\left[\hat{\lambda}\right] = \delta^*\mathcal{O}_X(\lambda D) \simeq \mathcal{O}_{X(n)}(\delta^*(\lambda D))$ correspondant au multi-indice constant $\left[\hat{\lambda}\right] = (\lambda, \ldots, \lambda)$. Via l'isomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules

$$\zeta_\lambda : \mathcal{O}_X(\lambda D) = f^{-\lambda}\mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X, s = f^{-\lambda}a \mapsto a = f^\lambda s,$$

nous pouvons maintenant définir, à partir de la collection $\tilde{\sigma} = \{\tilde{\sigma}_i\}_{i=1,\ldots,n}$, une 0-cochaine de Čech

$$\sigma = \left\{\sigma_i = \delta_i^* \circ \zeta_\lambda^{-1}(\tilde{\sigma}_i)\right\}_{i=1,\ldots,n} \in C^0\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{O}\left[\hat{\lambda}\right]\right).$$

7.2.10. Le diviseur $\left(\left[\hat{\lambda}\right] - [\mu]\right)D(n) = \sum_{i=1}^n (\lambda - \mu_i) D_i(n) \in \mathrm{Div}(X(n))$ étant par hypothèse effectif puisque $\lambda \geq \max\limits_{i=1,\ldots,n}(\mu_i)$, la section canonique $s_{[\hat{\lambda}]-[\mu]}$ induit un homomorphisme de $\mathcal{O}_{X(n)}$-modules $\theta_{[\mu],\lambda} = s_{[\hat{\lambda}]-[\mu]} : \mathcal{O}[\mu] \to \mathcal{O}\left[\hat{\lambda}\right]$. Par définition, les fonctions de transition $\tilde{g}_{ij}$ du schéma de Danielewski-Fieseler $\pi : W = W_{(\lambda,\tilde{\sigma})} \to X$ satisfont les identités $f^{\lambda-\mu_i}\tilde{g}_{ij} = \tilde{\sigma}_j - \tilde{\sigma}_i \in A_f$ pour tout couple d'indices $i \neq j$. Ainsi, le 1-cocycle de Čech

$$g_{(\lambda,\sigma)} = \left\{g_{ij} = \zeta_{\mu_i}^{-1}(\tilde{g}_{ij})\right\}_{i,j=1,\ldots,n} \in C^1\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{O}[\mu]\right)$$

correspondant satisfait la relation $\theta_{[\mu],\lambda}\left(g_{(\lambda,\sigma)}\right) = \partial(\sigma)$ dans $C^1\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{O}\left[\hat{\lambda}\right]\right)$, où ∂ désigne la différentielle du complexe de Čech. On notera d'ailleurs que ce cocycle

$g_{(\lambda,\sigma)} = \{g_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n}$ est uniquement déterminé par cette relation puisque par définition, la restriction de $\theta_{[\mu],\lambda}$ au-dessus de l'ouvert $X_*(n)$ de $X(n)$ induit un isomorphisme $\mathcal{O}[\mu] \mid_{X_*(n)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}\left[\hat{\lambda}\right] \mid_{X_*(n)}$. Autrement dit, dans les conditions ci-dessus, les sections $g_{ij} \in \Gamma(X_{ij}(n), \mathcal{O}[\mu]) \simeq \Gamma(X_*(n), \mathcal{O}[\mu])$ sont déterminées de manière unique par les identités $\theta_{[\mu],\lambda}(g_{ij}) = \sigma_j \mid_{X_i(n)} - \sigma_i \mid_{X_j(n)}$.

7.2.11. Nous pouvons maintenant identifier $W_{(\lambda,\tilde{\sigma})}$ aux $\mathbf{V}(\mathcal{O}[-\mu])_+$-torseur

$$\rho(n) : W_{(\lambda,\tilde{\sigma})} \simeq \mathbf{W}\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{O}[-\mu], g_{(\lambda,\sigma)}\right) \to X(n)$$

correspondant au cocycle $g_{(\lambda,\sigma)}$. Puisque l'image par $\theta_{[\mu],\lambda}$ du cocycle $g_{(\lambda,\sigma)}$ est un cobord, la donnée de la 0-cochaîne $\sigma \in C^0\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{O}\left[\hat{\lambda}\right]\right)$ est équivalente à la donnée d'un $X(n)$-morphisme linéaire affine $\tilde{\psi}_{(\lambda,\sigma)} : W_{(\lambda,\tilde{\sigma})} \to \mathbf{V}\left(\mathcal{O}\left[-\hat{\lambda}\right]\right)$ équivariant pour le morphisme de $X(n)$-groupes $\mathbf{V}(\mathcal{O}[-\mu])_+ \to \mathbf{V}\left(\mathcal{O}\left[-\hat{\lambda}\right]\right)_+$ induit par l'homomorphisme de $\mathcal{O}_{X(n)}$-modules ${}^t\theta_{[\mu],\lambda} : \mathcal{O}\left[-\hat{\lambda}\right] \to \mathcal{O}[-\mu]$ dual de $\theta_{[\mu],\lambda}$. Plus précisément, d'après (2.3.1) , $\tilde{\psi}_{(\lambda,\sigma)}$ est l'unique $X(n)$-morphisme dont les restrictions au-dessus des ouverts $X_i(n)$ de $X(n)$ sont induites par les homomorphismes de $\mathcal{O}_{X_i(n)}$-algèbres

$$\mathbf{S}\left(\sigma_i, {}^t\theta_{[\mu],\lambda}\right) : \mathbf{S}\left(\mathcal{O}[-\mu] \mid_{X_i(n)}\right) \to \mathbf{S}\left(\mathcal{O}\left[-\hat{\lambda}\right] \mid_{X_i(n)}\right).$$

Par construction, le morphisme $\tilde{\psi}_{(\lambda,\sigma)}$ est $\mathbb{G}_{a,X(n)}$ équivariant lorsque l'on munit $W_{(\lambda,\tilde{\sigma})}$ et $\mathbf{V}\left(\mathcal{O}\left[-\hat{\lambda}\right]\right)$ des structures canoniques de quasi-torseur sous $\mathbb{G}_{a,X(n)}$ correspondant respectivement aux sections canoniques $s_{[\mu]}$ et $s_{[\hat{\lambda}]}$. Ainsi, le X-morphisme

$$\psi_{(\lambda,\sigma)} : W_{(\lambda,\tilde{\sigma})} \xrightarrow{\tilde{\psi}_{(\lambda,\sigma)}} \mathbf{V}\left(\mathcal{O}\left[-\hat{\lambda}\right]\right) \simeq \mathbf{V}(\mathcal{J}_X(\lambda D)) \times_X X(n) \xrightarrow{p_1} \mathbf{V}(\mathcal{J}_X(\lambda D))$$

s'identifie au morphisme $\mathbb{G}_{a,X}$-équivariant $\psi_{(\lambda,\tilde{\sigma})} : W_{(\lambda,\tilde{\sigma})} \to \mathbb{A}^1_X(-\lambda)$ associé à la paire $(\lambda, \tilde{\sigma})$.

Le tableau suivant résume les deux procédés de construction des schémas de Danielewski-Fieseler de type $W_{(\lambda,\tilde{\sigma})} = W_{(\lambda,\sigma)}$, et de leurs morphismes canoniques $\psi_{(\lambda,\tilde{\sigma})} = \psi_{(\lambda,\sigma)}$ respectifs.

Construction par recollement	Construction par torseurs
Multi-indice $[\mu] = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n_{>0}$	Multi-indice $[\mu] = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n_{>0}$
Entier $\lambda \geq \max_{i=1,\ldots,n}(\mu_i)$ Collection $\tilde{\sigma} = \{\tilde{\sigma}_i \in A\}$	Entier $\lambda \geq \max_{i=1,\ldots,n}(\mu_i)$ Cochaîne $\sigma =\in C^0\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{O}\left[\hat{\lambda}\right]\right)$
Fonctions de transition $\tilde{g}_{ij} = f^{\mu_i-\lambda}(\tilde{\sigma}_j - \tilde{\sigma}_i)$	Homomorphisme $\theta_{[\mu],\lambda} : \mathcal{O}[\mu] \to \mathcal{O}\left[\hat{\lambda}\right]$ Cocycle $g = \theta^{-1}_{[\mu],\lambda}(\partial(\sigma))$
Schéma $\pi : W_{(\lambda,\tilde{\sigma})} \to X$ Morphisme équivariant $\psi_{(\lambda,\tilde{\sigma})} : W_{(\lambda,\tilde{\sigma})} \to \mathbb{A}^1_X(-\lambda)$	Schéma $\pi : W_{(\lambda,\sigma)} \to X$ Morphisme équivariant $\psi_{(\lambda,\sigma)} : W_{(\lambda,\sigma)} \to \mathbb{A}^1_X(-\lambda)$

FIG. 7.2.2. Morphismes équivariants canoniques.

EXEMPLE 7.2.12. Nous revenons pour cet exemple à la surface de Danielewski $S_1 \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}\left(\mathbb{C}\left[x,y,z\right]\right)$ définie par l'équation $xz-y\left(y+1\right)=0$. La construction de l'introduction conduit à interpréter S comme le schéma de Danielewski-Fieseler de base $\left(X=\mathrm{Spec}\left(\mathbb{C}\left[x\right]\right), D=\mathrm{div}\left(x\right)\right)$ défini par le multi-indice $\mu=(0,0)\in\mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ et la fonction de transition $\tilde{g}_{12}=-x^{-1}\in\mathbb{C}\left[x,x^{-1}\right]$. Cela revient à dire, en terme de torseurs, que S s'identifie au torseur $\rho\left(2\right):S\rightarrow X\left(2\right)$ sous le groupe additif $\mathbb{G}_{a,X(2)}$ défini par le cocycle $g_{12}=x^{-1}\in\Gamma\left(X_{12}\left(2\right),\mathcal{O}_{X(2)}\right)\simeq\mathbb{C}\left[x,x^{-1}\right]$.

D'autre part, puisque $\tilde{g}_{12}=x^{-1}\left(0-\left(-1\right)\right)$ on constate que S est isomorphe au schéma de Danielewski-Fieseler défini par la paire $\left(\lambda,\left\{\tilde{\sigma}_1,\tilde{\sigma}_2\right\}\right)$, où $\lambda=1$, $\tilde{\sigma}_1=-1$ et $\tilde{\sigma}_2=0$. Cela revient de nouveau à dire que le torseur $\rho\left(2\right):S\rightarrow X\left(2\right)$ correspondant est défini par la paire $\left(\lambda,\left\{\sigma_1,\sigma_2\right\}\right)$, où $\sigma_1=-x^{-1}\in\Gamma\left(X,\mathcal{O}_X\left(D\right)\right)$ et $\sigma_2=0$.

Considérons maintenant S non comme une surface affine de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ mais seulement comme le schéma de Danielewski-Fieseler abstrait W correspondant à ces données, c'est à dire comme le schéma obtenu en recollant les deux fibrés triviaux $W_i=\mathrm{Spec}\left(\mathbb{C}\left[x\right]\left[T_i\right]\right)$ au dessus de $X_*=\mathrm{Spec}\left(\mathbb{C}\left[x,x^{-1}\right]\right)$ par l'intermédiaire de l'isomorphisme de $\mathbb{C}\left[x,x^{-1}\right]$-algèbres

$$\tau_{12}:\mathbb{C}\left[x,x^{-1}\right]\left[T_1\right]\xrightarrow{\sim}\mathbb{C}\left[x,x^{-1}\right]\left[T_2\right], T_1\mapsto x^{-1}\left(\tilde{\sigma}_2-\tilde{\sigma}_1\right)+T_2.$$

Grâce au morphisme canonique $\psi_{(1,\tilde{\sigma})}:W\rightarrow\mathbb{A}^1_X\left(-1\right)$ associé à la paire $\left(1,\tilde{\sigma}\right)$, nous allons retrouver, selon un procédé similaire à celui utilisé par Bandman et Makar-Limanov **[1]**, le plongement initial de $S\simeq W$. Posons pour cela $\pi=\delta\circ\rho\left(2\right):W\rightarrow X$ et $\mathbb{A}^1_X=\mathrm{Spec}\left(\mathbb{C}\left[x\right]\left[y\right]\right)$. Dans les coordonnées précédemment introduites, les restrictions de $\psi_{(1,\tilde{\sigma})}$ aux ouverts W_1 et W_2 sont induites par les homomorphismes de $\mathbb{C}\left[x\right]$-algèbres

$$\tilde{\psi}_i:\mathbb{C}\left[x\right]\left[y\right]\rightarrow\mathbb{C}\left[x\right]\left[T_i\right], y\mapsto\tilde{\sigma}_i+xT_i,\quad i=1,2.$$

On en déduit que $\xi=x^{-1}\psi_{(1,\tilde{\sigma})}\left(\psi_{(1,\tilde{\sigma})}+1\right)$ est une fonction régulière sur W dont la restriction à chacune des deux composantes irréductibles de la fibre $\pi^{-1}\left(0\right)$ est une fonction coordonnée. D'autre part, $\psi_{(1,\tilde{\sigma})}$ induit une fonction coordonnée sur les fibres $\pi^{-1}\left(x\right)$, $x\in X_*$, et prend les valeurs distinctes 0 et 1 sur les deux composantes irréductibles de $\pi^{-1}\left(0\right)$.

On en conclut que le X-morphisme $\left(\psi_{(1,\tilde{\sigma})},\zeta\right):W\rightarrow\mathbb{A}^2_X$ est un plongement fermé de W dans $\mathbb{A}^2_X\simeq\mathrm{Spec}\left(\mathbb{C}\left[x\right]\left[y,z\right]\right)$ dont l'image s'identifie clairement à la surface S définie par l'équation $xz-y\left(y+1\right)=0$. Bien sûr, ce plongement est équivariant lorsque l'on munit S de la restriction de l'action

$$t\star\left(x,y,z\right)=\left(x,y+xt,z+2yt+xt^2\right)$$

de $\mathbb{G}_{a,X}$ sur $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$, le morphisme $\psi_{(1,\tilde{\sigma})}:S\rightarrow\mathbb{A}^1_X\left(-1\right)$ s'identifiant alors, par construction, à la restriction sur S de la projection équivariante $pr_y:\mathbb{A}^3_X\rightarrow\mathbb{A}^1_X\left(-1\right)$.

CHAPITRE 8

Schémas de Danielewski-Fieseler généraux

Étant donné un schéma X et un diviseur effectif non nul $D \in \mathrm{Div}^{+}(X)$, nous introduisons dans le présent chapitre la notion générale de schéma de Danielewski-Fieseler de base (X, D) attaché à un torseur $\rho : V \to X$ sous un fibré en droites $L_{+} = \mathbf{V}(\mathcal{L})$. Dans le cas particulier où $X = \mathrm{Spec}(A)$, $D = \mathrm{div}(f)$ et $\rho : V \to X$ est le torseur trivial sous le groupe additif $\mathbb{G}_{a,X}$, on retrouvera la notion précédemment introduite.

Pour aboutir à la définition finale, nous procédons en plusieurs étapes. Nous définissons d'abord la notion de duplication $\delta : X(D, n) \to X$ d'un diviseur effectif D dans un schéma X. Il s'agit pour l'essentiel de donner une formulation exploitable de la construction (7.2.1) consistant à former un X-schéma $X(D, n)$ en remplaçant D par un nombre fini de copies de D.

Les schémas de Danielewski-Fieseler généraux $\pi : W \to X$ constituent alors une classe particulière de torseurs $\rho(n) : W \to X(D, n)$ sous certains fibrés en droites $L_n[-\mu]$ déduits de L, satisfaisant des propriétés analogues à celles rencontrées dans l'interprétation en termes de torseurs des schémas de Danielewski-Fieseler au sens de la définition (7.1.6) du chapitre précédent.

Les schémas $\pi = \delta \circ \rho(n) : W \to X$ ainsi introduits sont canoniquement munis d'une action du fibré en droites L_{+}. Il sont donc les objets d'une certaine sous-catégorie $\mathfrak{D}^{(\mathcal{L},V)}_{/(X,D)}$ de la catégorie des X-schémas munis d'une action de ce type.

Notation 8.0.13. Étant donné un schéma X et un diviseur effectif non nul $D \in \mathrm{Div}^{+}(X)$, nous désignons par $\mathcal{O}_X(D)$ le $\mathcal{O}_X$-module inversible défini par D, et par $\mathcal{J}_X(D) \simeq \mathcal{O}_X(-D)$ l'idéal inversible de $\mathcal{O}_X$, dual de $\mathcal{O}_X(D)$. Nous ferons l'abus de notation usuel consistant à identifier tour à tour D soit avec le sous-schéma fermé $\mathrm{Spec}(\mathcal{J}_X(D))$ de X soit avec son support $\mathrm{Supp}(D)$. En particulier, étant donné un tel diviseur effectif D non nul, nous désignons par $X_* = X \setminus D$ l'ouvert complémentaire du support de D.

Étant donnés deux diviseurs effectifs D et D' sur X, tels que $D - D'$ soit effectif, nous notons $s_{D-D'} : \mathcal{O}_X(D') \to \mathcal{O}_X(D)$ l'homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules correspondant à la section canonique

$$s_{D-D'} \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D - D')) \simeq \mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_X(D'), \mathcal{O}_X(D)),$$

et nous notons ${}^{t}s_{D-D'} : \mathcal{J}_X(D') \to \mathcal{J}_X(D)$ son homomorphisme dual.

8.1. Duplications de diviseurs

Sur le modèle de la construction de la droite affine à deux origines, nous introduisons dans ce paragraphe la notion de duplication d'un diviseur effectif D sur un schéma X. Nous définissons ensuite une classe de morphismes entre les schémas ainsi obtenus, que nous appelons *morphismes de duplications*.

8.1.1. Définitions et notations.

Définition 8.1.1. Soient X un schéma, $D \in \mathrm{Div}^{+}(X)$ un diviseur effectif *non nul*, et $n \geq 1$ un entier. On appelle n-duplication de D dans X, X-schéma

$$\delta : X(D, n) \to X$$

obtenu en recollant n copies $\delta_i : X_i \xrightarrow{\sim} X$ de X par l'identité le long des ouverts $X_{i,*} = \delta_i^{-1}(X_*) \subset X_i$ préimages respectives de l'ouvert $X_* = X \setminus D$ de X par les isomorphismes δ_i, $i = 1, \ldots, n$.

NOTATION 8.1.2. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la donnée du diviseur D, nous noterons simplement $\delta : X(n) \to X$ pour désigner le X-schéma $X(D, n)$. Nous désignons par $\mathcal{U}_{(n)} = \mathcal{U}_{(D,n)}$ le recouvrement ouvert canonique de $X(n)$ par les ouverts $X_i(n) \simeq X$, $i = 1, \ldots, n$, images respectives des schémas $X_i \simeq X$ par le morphisme quotient canonique

$$\xi : \bigsqcup_{i=1}^{n} X_i \to X(n) = \bigsqcup_{i=1}^{n} X_i / \sim .$$

Dans ce qui suit, nous identifierons δ_i avec la restriction de δ à l'ouvert $X_i(n)$, et nous notons $X_*(n) = \delta^{-1}(X_*) \subset Y(n)$ l'ouvert de $X(n)$ préimage de X_* par δ.

8.1.3. Par construction, $X(1)$ est canoniquement isomorphe à X. Par contre, pour tout $n \geq 2$, le morphisme $\delta : X(n) \to X$ n'est pas séparé, et pour tout couple d'indices $i \neq j$, on a $X_{ij}(n) := X_i(n) \cap X_j(n) \simeq X_*(n)$, tandis que la préimage $\delta^{-1}(D)$ du sous-schéma fermé D est constitué de la réunion disjointe des n sous schémas fermés définis par les diviseurs effectifs

$$D_i(n) = \delta_i^*(D) \in \mathrm{Div}^+(X_i(n)), \quad i = 1, \ldots, n,$$

images inverses respectives de $D \in \mathrm{Div}^+(X)$ par les isomorphismes $\delta_i : X_i(n) \xrightarrow{\sim} X$. On notera que pour tout sous-ensemble d'indices $\{i_1, \ldots, i_r\} \subset \{1, \ldots, n\}$, la structure de X-schéma induite par δ sur l'ouvert $\bigcup_{k=1}^{r} X_{i_k}(n) \subset X(n)$ identifie ce dernier à la r-duplication $X(D, r)$ de D dans X.

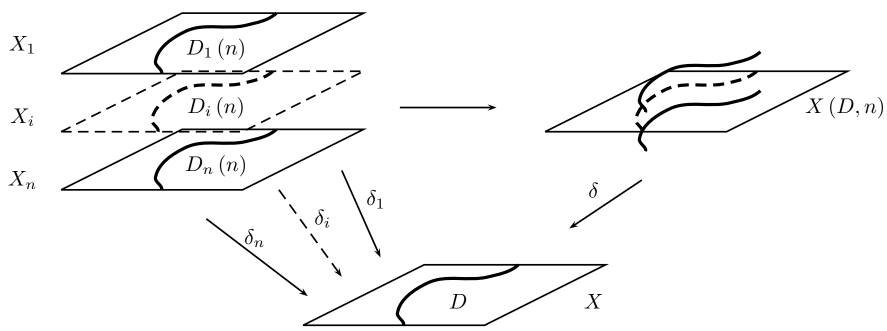


FIG. 8.1.1. Duplication du diviseur D dans X.

REMARQUE 8.1.4. On notera enfin que le X-schéma $X(n)$ ne dépend que du support de D, et non de la structure schématique sur le sous-schéma fermé de X correspondant.

8.1.2. Diviseurs sur une duplication.

DÉFINITION 8.1.5. Pour tout multi-indice $[\mu] = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n$, nous désignons $[\mu]\, D(n) \in \mathrm{Div}(X(n))$ l'unique diviseur tel que

$$[\mu]\, D(n)\,|_{X_i(n)} \simeq \delta_i^*(\mu_i D), \quad i = 1, \ldots, n.$$

8.1.6. Avec la notation ci-dessus, la préimage $D_i(n)$ de D par l'homomorphisme $\delta_i^* : \operatorname{Div}(X) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Div}(X_i(n))$ s'identifie donc à la restriction à l'ouvert $X_i(n)$ du diviseur $\begin{bmatrix} \overset{i}{1} \end{bmatrix} D(n)$, où

$$\begin{bmatrix} \overset{i}{1} \end{bmatrix} = \left(0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0 \ldots, 0\right), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Plus généralement, puisque $\delta : X(n) \to X$ est localement un isomorphisme, l'homomorphisme image inverse $\delta^* : \operatorname{Div}(X) \to \operatorname{Div}(X(n))$ est bien défini. Il est bien sur injectif mais n'est bijectif que si $n = 1$ puisque l'on a en particulier la relation

$$\sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} \overset{i}{1} \end{bmatrix} D(n) = (1, \ldots, 1) D(n) = \delta^* D.$$

On en déduit d'ailleurs qu'un diviseur $[\mu] D(n)$ est dans l'image de δ^* si et seulement si $[\mu] = (\mu, \ldots, \mu)$ pour un certain $\mu \in \mathbb{Z}$.

Notation 8.1.7. Nous considérons l'ensemble $\mathbb{Z}^n$ comme muni de sa structure de groupe produit. Pour tout multi-indice $[\mu] = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n$ et tout entier $\lambda \in \mathbb{Z}$, $\lambda \cdot [\mu]$ désigne le multi-indice $(\lambda\mu_1, \ldots, \lambda\mu_n) \in \mathbb{Z}^n$. L'opposé de $[\mu]$ sera simplement noté $[-\mu] = (-\mu_1, \ldots, -\mu_n)$. Étant donné un entier $\mu \in \mathbb{Z}$, on note le multi-indice constant $(\mu, \ldots, \mu) \in \mathbb{Z}^n$ par $[\hat{\mu}] = \mu \cdot [\hat{1}]$, et le multi-indice $\left(0, \ldots, 0, \overset{i}{\mu}, 0, \ldots, 0\right)$ par $\begin{bmatrix} \overset{i}{\mu} \end{bmatrix} = \mu \cdot \begin{bmatrix} \overset{i}{1} \end{bmatrix}$, $i = 1, \ldots, n$. Il nous arrivera par la suite de considérer un multi-indice $[\mu] \in \mathbb{Z}^n$ comme une application $[\mu] : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{Z}$, $i \mapsto [\mu](i) = \mu_i$.

Définition 8.1.8. Pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}$ et tout multi-indice $[\mu] = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n$ nous notons

$$\begin{cases} \mathcal{L}_n[\mu] &= \delta^* \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_{X(n)}} \mathcal{O}_{X(n)}([\mu] D(n)) \\ \mathcal{L}_n[-\mu] &= \delta^* \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_{X(n)}} \mathcal{O}_{X(n)}([-\mu] D(n)) \end{cases}$$

8.1.9. Pour tout entier $\mu_1 \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{L}_1[\hat{\mu}_1]$ s'identifie donc, via l'isomorphisme $X(1) \simeq X$, au $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(\mu_1 D)$, que nous noterons dorénavant $\mathcal{L}(\mu_1)$. Ainsi pour tout multi-indice $[\mu] = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\mathcal{L}_n[\mu]$ est un $\mathcal{O}_{X(n)}$ -module inversible, dont la restriction au-dessus de $X_i(n)$, est isomorphe au $\mathcal{O}_{X_i(n)}$-module $\delta_i^* \mathcal{L}(\mu_i)$. Par définition des diviseurs $[\mu] D(n) \in \operatorname{Div}(X(n))$, on a de plus un isomorphisme

$$\mathcal{L}_n[\mu] \simeq \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{L}_n \begin{bmatrix} \overset{i}{\mu_i} \end{bmatrix}.$$

8.1.10. Étant donnés deux multi-indices $[\mu], [\mu'] \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ tels que $[\mu] - [\mu'] \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, on note

$$\theta_{[\mu'],[\mu]} = \operatorname{Id} \otimes s_{[\mu]-[\mu']} : \mathcal{L}^\vee[\mu'] \to \mathcal{L}^\vee[\mu]$$

l'homomorphisme induit par la section canonique $s_{[\mu]-[\mu']}$ du $\mathcal{O}_{X(n)}$-module inversible $\mathcal{O}_{X(n)}([\mu] - [\mu'])$ associé au diviseur effectif $([\mu] - [\mu']) D(n)$.

Notation 8.1.11. Conformément aux conventions introduites dans la première partie, nous notons $p : L_n[\mu] = \mathbf{V}(\mathcal{L}_n[\mu]) \to X(n)$ le fibré en droites défini par $\mathcal{L}_n[\mu]$, et nous utilisons la notation supplémentaire $L_n[\mu]_+$ pour indiquer que nous considérons $L_n[\mu]$ non seulement comme un fibré en droites sur $X(n)$ mais encore comme un $X(n)$-schéma en groupes.

8.1.3. Morphismes de duplications. Les duplications $\delta : X(n) \to X$, où n parcourt l'ensemble des entiers naturels, forment une sous-catégorie pleine de la catégorie des X-schémas. Parmi tous les X-morphismes entre deux telles duplications, nous considérons la sous-classe suivante :

Définition 8.1.12. Un X-morphisme $\alpha : X(n') \to X(n)$ entre deux duplications de D dans X est appelé un *morphisme de duplications* s'il existe une application $\phi : \{1, \ldots, n'\} \to \{1, \ldots, n\}$ telle que pour tout indice $i = 1, \ldots, n'$, l'image du support du diviseur $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} D(n') \subset X_i(n')$ par α soit contenue dans l'ouvert $X_{\phi(i)}(n) \subset X(n)$.

8.1.13. Il revient au même de dire qu'un X-morphisme $\alpha : X(n') \to X(n)$ est un morphisme de duplications si et seulement si, pour tout indice $j = 1, \ldots, n$, la restriction $\alpha : \alpha^{-1}(X_j(n)) \to X_j(n)$ identifie l'ouvert $\alpha^{-1}(X_j(n))$ à la r-duplication de $D_j(n)$ dans $X_j(n)$. En particulier, pour tout indice $i = 1, \ldots, n'$ tel que $\alpha(D_i(n')) \subset D_j(n)$, α induit un X-isomorphisme $\alpha_{ij} : X_i(n') \xrightarrow{\sim} X_j(n)$ puisque la restriction de α à l'ouvert $X_*(n') \simeq X_*$ induit nécessairement un isomorphisme de X_*-schémas $\alpha_* : X_*(n') \xrightarrow{\sim} X_*(n)$. Ainsi, un morphisme de ce type est uniquement déterminé par la donnée d'une application $\phi : \{1, \ldots, n'\} \to \{1, \ldots, n\}$. Nous noterons donc $\alpha_\phi : X(n') \to X(n)$ le morphisme correspondant à un tel ϕ.

Exemple 8.1.14. Via l'identification canonique $X \simeq X(1)$, le morphisme structural $\delta : X(n) \to X$ de la n-duplication de D dans X est un morphisme de duplications au sens de la définition précédente. De même, pour tout sous-ensemble d'indices $\{i_1, \ldots, i_r\} \subset \{1, \ldots, n\}$, l'immersion ouverte $\bigcup_{k=1}^{r} X_{i_k}(n) \hookrightarrow X(n)$ est un morphisme de duplications puisque l'ouvert $\bigcup_{k=1}^{r} X_{i_k}(n)$ de $X(n)$ est isomorphe, via la restriction du morphisme $\delta : X(n) \to X$ à la r-duplication de X le long de D.

Remarque 8.1.15. Si le support de D est connexe, alors pour tout X-morphisme $\alpha : X(n') \to X(n)$ l'image du support du diviseur $D_i(n') \subset X_i(n')$ est toujours contenue dans le support d'un unique diviseur $D_{j(i)}(n) \subset X_{j(i)}(n)$. Ainsi, sous cette hypothèse, tout X-morphisme $\alpha : X(n') \to X(n)$ est un morphisme de duplications au sens de la définition (8.1.12).

8.1.16. Puisqu'un morphisme de duplications $\alpha = \alpha_\phi : X(n') \to X(n)$ est localement un isomorphisme, il est possible de définir l'homomorphisme image inverse $\alpha^* : \mathrm{Div}(X(n)) \to \mathrm{Div}(X(n'))$. En particulier, pour tout multi-indice $[\mu] = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n$, l'image inverse $\alpha^*([\mu] D(n))$ du diviseur $[\mu] D(n)$ est un diviseur sur $X(n')$, isomorphe au diviseur $[\mu_\alpha] D(n')$ correspondant au multi-indice

$$[\mu_\alpha] = [\mu \circ \phi] = (\mu'_1, \ldots, \mu'_{n'}) \in \mathbb{Z}^{n'}$$

défini par $\mu'_i = \mu_{\phi(i)}$ pour tout $i = 1, \ldots, n'$. Par conséquent, pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}$ et tout multi-indice $[\mu] \in \mathbb{Z}^n$, on a un isomorphisme de $\mathcal{O}_{X(n')}$-modules

$$\alpha^* \mathcal{L}_n[\mu] \simeq \mathcal{L}_{n'}[\mu_\alpha] \simeq (\delta')^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{X(n)}([\mu_\alpha] D(n')).$$

8.2. Duplications de torseurs en droites

Dans ce paragraphe, nous considérons des quadruplets $(X, D, \mathcal{L}, V)$ constitués d'un schéma X, d'un diviseur effectif $D \in \mathrm{Div}^+(X)$ non nul, d'un $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}$ et d'un torseur $\rho : V \to X$ sous le fibré en droites $L_+ = \mathbf{V}(\mathcal{L})_+$ défini par $\mathcal{L}$.

8.2.1. Définitions et notations. Étant donné un tel quadruplet $(X, D, \mathcal{L}, V)$ et un entier $n \geq 1$, nous considérons la n-duplication $\delta : X(n) \to X$ de D dans X et nous désignons par $\rho_i : V_i = \delta_i^* V \to X_i(n)$ les torseurs sous $\delta_i^* L_+ = \mathbf{V}(\delta_i^* \mathcal{L})_+$, images inverses respectives de V par les isomorphismes $\delta_i : X_i(n) \xrightarrow{\sim} X$ (2.1.2).

Pour tout entier positif ou nul μ_i, nous notons

$$^t\theta_{\mu_i} = \mathrm{Id} \otimes^t s_{\mu_i} : \mathcal{L}_n \begin{bmatrix} i \\ -\mu_i \end{bmatrix} |_{X_i(n)} \simeq \delta_i^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_{X_i(n)}(\mu_i D_i(n)) \to \mathcal{L}_n \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix} |_{X_i(n)}$$

l'homomorphisme de $\mathcal{O}_{X_i(n)}$-modules déduit de la section canonique s_{μ_i} du $\mathcal{O}_{X_i(n)}$ -module inversible $\mathcal{O}_{X_i(n)}(\mu_i D_i(n))$.

8.2.1. Rappelons maintenant (2.3.3) qu'une image directe du $\delta_i^* L_+$-torseur $\rho_i : V_i \to X_i(n)$ par l'homomorphisme θ_{μ_i} est un torseur $\tilde{\rho}_i : W_i \to X_i(n)$ sous le $X_i(n)$-groupe $L_n \begin{bmatrix} i \\ -\mu_i \end{bmatrix} |_{X_i(n)}$ tel que les classes d'isomorphismes

$$c(W_i) \in H^1\left(X_i(n), \mathcal{L}_n^\vee \begin{bmatrix} i \\ \mu_i \end{bmatrix} |_{X_i(n)}\right) \quad \text{et} \quad c(V_i) \in H^1\left(X_i(n), \mathcal{L}_n^\vee \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix} |_{X_i(n)}\right)$$

de W_i et V_i respectivement satisfassent la relation $(\theta_{\mu_i})_*(c(W_i)) = c(V_i)$, où

$$(\theta_{\mu_i})_* : H^1\left(X_i(n), \mathcal{L}_n^\vee \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix} |_{X_i(n)}\right) \to H^1\left(X_i(n), \mathcal{L}_n^\vee \begin{bmatrix} i \\ \mu_i \end{bmatrix} |_{X_i(n)}\right)$$

désigne l'homomorphisme de groupes induit par l'homomorphisme de $\mathcal{O}_{X_i(n)}$-modules $\theta_{\mu_i} : \mathcal{L}_n^\vee \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix} |_{X_i(n)} \to \mathcal{L}_n^\vee \begin{bmatrix} i \\ \mu_i \end{bmatrix} |_{X_i(n)}$.

Définition 8.2.2. Soient $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X$-module inversible, $\rho : V \to X$ un $\mathbf{V}(\mathcal{L})_+$-torseur et $[\mu] \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ un multi-indice. On appelle $[\mu]$-*duplication* de V, tout $L[-\mu]_+$-torseur $\rho(n) : W \to X(n)$ dont les restrictions au-dessus des ouverts $X_i(n)$ de $X(n)$ sont des images directes $\tilde{\rho}_i : W_i \to X_i(n)$ de $\rho_i : V_i \to X_i(n)$ par l'homomorphisme θ_{μ_i}.

Définition 8.2.3. On appelle *schéma de Danielewski-Fieseler de type* $(n, [\mu])$, *de base* (X, D), *attaché au* $\mathbf{V}(\mathcal{L})_+$*-torseur* $\rho : V \to X$ tout X-schéma

$$\pi : W = W^{(n,[\mu])} \xrightarrow{\rho(n)} X(n) = X(D, n) \xrightarrow{\delta} X$$

tel que $\rho(n) : W \to X(n)$ soit isomorphe à une $[\mu]$-duplication de V au sens de la définition (8.2.2).

Exemple 8.2.4. La définition des schémas de Danielewski-Fieseler de base $(X = \mathrm{Spec}(A), D = \mathrm{div}(f))$ introduite dans le 7 chapitre (cf. 7.1.6) est évidemment compatible avec la définition plus générale ci-dessus. En effet, d'après (7.2.5), tout schéma $\pi : W \to X$ de ce type défini par un multi-indice $[\mu] \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ et une collection de fonction de transitions $\{\tilde{g}_{ij} \in A_f\}_{i,j=1,\ldots,n}$ s'identifie à une $[\mu]$-duplication du $\mathbb{G}_{a,X}$-torseur trivial $p : \mathbb{A}_X^1 \to X$. On notera d'ailleurs que dans ce cas particulier les deux notions coïncident car toute image directe du torseur trivial $\mathbb{A}_X^1$ par un homomorphisme $\theta_{\mu_i} : \mathcal{J}_X(\mu_i D) \to \mathcal{O}_X$ est isomorphe au $\mathbf{V}(\mathcal{J}_X(\mu_i D))_+$-torseur trivial, donc est isomorphe, comme X-schéma, à $\mathbb{A}_X^1$ puisque $D = \mathrm{div}(f)$ est principal.

Notation 8.2.5. Afin d'alléger la terminologie introduite ci-dessus, nous dirons plus simplement qu'un schéma $\pi : W \to X$ satisfaisant aux hypothèses de la définition (8.2.3) est un $(n, [\mu])$-DFS[1] attaché à la paire $(\mathcal{L}, V)$, le diviseur D étant alors implicite, comme cela était déjà le cas dans la définition de duplication d'un diviseur.

[1]Abréviation de la version anglaise *Danielewski-Fieseler Scheme.*

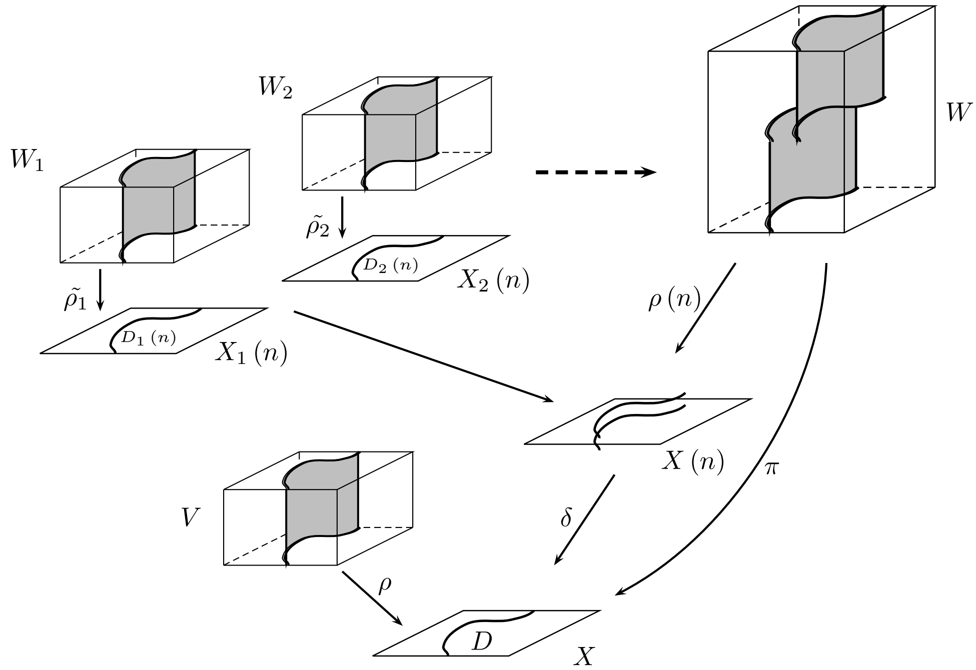


FIG. 8.2.1. Duplication d'un torseur en droites.

8.2.2. Structures de quasi-torseurs sur les DFS. Par définition, un $(n, [\mu])$-DFS attaché à un L_+-torseur $\rho : V \to X$ est essentiellement constitué d'un torseur $\rho(n) : W \to X(n)$ sous le fibré en droites $L_n[-\mu]_+$, le morphisme $\pi : W \to X$ s'en déduisant par composition avec le morphisme structural $\delta : X(n) \to X$ de la duplication du diviseur D dans X.

8.2.6. Puisque $[\mu] \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, pour tout entier $r \geq 0$, $([\mu] + [\hat{r}])\, D(n)$ est un diviseur effectif sur $X(n)$. On définit alors, par l'intermédiaire de la section canonique $s_{[\mu]+[\hat{r}]}$ du $\mathcal{O}_{X(n)}$-module inversible $\mathcal{O}_{X(n)}([\mu] + [\hat{r}])$ correspondant, un homomorphisme régulier (3.1.1)

$$\mathrm{Id} \otimes^t s_{[\mu]-[-\hat{r}]} : \mathcal{L}_n[-\mu] = \delta^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_{X(n)}([\mu]\, D(n)) \to \mathcal{L}_n[\hat{r}] = \delta^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{X(n)}([\hat{r}]\, D(n))$$

permettant de munir $\rho(n) : W \to X(n)$ d'une structure canonique de quasi-torseur sous le fibré en droites $L[\hat{r}]_+$ (cf 3.1.8). Par conséquent, pour tout $r \geq 0$, le X-schéma $\pi = \delta \circ \rho(n) : W \to X$ peut être canoniquement muni d'une action du X-groupe $L(r)_+ = \mathbf{V}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(rD))_+$.

DÉFINITION 8.2.7. On appelle L_+-*action canonique* sur le $(n, [\mu])$-DFS

$$\pi : W \xrightarrow{\rho(n)} X(n) = X(D, n) \xrightarrow{\delta} X$$

attaché au L_+-torseur $\rho : V \to X$, l'action de L_+ sur W correspondant à la structure de $L[\hat{0}]_+$-quasi-torseur sur $\rho(n) : W \to X(n)$, induite par la section canonique $s_{[\mu]} \in \Gamma\left(X(n), \mathcal{O}_{X(n)}([\mu])\right)$.

REMARQUE 8.2.8. Via l'identification qui existe entre les $(n, [\mu])$-DFS de base $(X = \mathrm{Spec}(A), D = \mathrm{div}(f))$ attachés au torseur trivial $p : \mathbb{A}^1_X \to X$ sous $\mathbb{G}_{a,X}$ et les schémas de Danielewski-Fieseler au sens de la définition (7.1.6), l'action canonique définie ci-dessus coïncide avec celle précédemment introduite dans ce cas particulier (cf. 7.2.6).

8.2.9. Une fois muni de sa L_+-action canonique, la structure d'un $(n,[\mu])$-DFS $\pi : W \to X$ attaché à un L_+-torseur $\rho : V \to X$ est la suivante :

- la restriction W_* de W au-dessus de l'ouvert $X_*(n) \simeq X_*$ de $X(n)$ est isomorphe à la restriction V_* de V au-dessus de l'ouvert X_* de X ;

- la préimage du support de D par π est constituée de la réunion disjointe des restrictions des $L[-\mu]\mid_{X_i(n)}$-torseurs $\tilde{\rho}_i : W_i = W\mid_{X_i(n)} \to X_i(n)$, sur les support des diviseurs $D_i(n) \subset X_i(n)$, $i = 1,\ldots,n$.

On notera en particulier que si $n \geq 2$, alors $\pi : W \to X$ n'est certainement pas un torseur sous L_+.

8.3. La catégorie des schémas de Danielewski-Fieseler

Dans ce paragraphe, nous fixons un quadruplet $(X, D, \mathcal{L}, V)$ constitué d'un schéma X, d'un diviseur effectif non nul $D \in \mathrm{Div}^+(X)$, d'un $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}$, et d'un torseur $\rho : V \to X$ sous le fibré en droites $L_+ = \mathbf{V}(\mathcal{L})_+$ défini par $\mathcal{L}$. Les $(n,[\mu])$-DFS

$$\pi : W = W^{(n,[\mu])} \xrightarrow{\rho(n)} X(n) = X(D,n) \xrightarrow{\delta} X$$

attachés à V sont les objets d'une sous-catégorie $\mathfrak{D}_{\mathcal{L},V}$ de la catégorie $\left(\mathrm{Sch}_{/X}\right)$ des X-schémas, que nous allons définir ci-dessous.

8.3.1. Étant donnés deux entiers n et n', nous considérons un morphisme de duplications (8.1.12) $\alpha : X(n') \to X(n)$. Soit maintenant $\pi : W \xrightarrow{\rho(n)} X(n) \xrightarrow{\delta} X$ un $(n,[\mu])$-DFS attaché à la paire $(\mathcal{L}, V)$. L'image inverse $W_\alpha = W \times_{X(n)} X(n')$ du $L_n[-\mu]_+$-torseur $\rho(n) : W \to X(n)$ est un torseur $\rho_\alpha(n') : W_\alpha \to X(n')$ sous le fibré en droites $\alpha^* L_n[-\mu]_+ \simeq L_{n'}[\mu_\alpha]$ (8.1.16). Nous dirons alors que

$$\pi_\alpha : W_\alpha : \xrightarrow{\rho_\alpha(n')} X(n') \xrightarrow{\delta'} X$$

est le $(n',[\mu_\alpha])$-DFS *image inverse* de $\pi : W \to X$ par le morphisme de duplications $\alpha : X(n') \to X(n)$.

.

Définition 8.3.2. Un *morphisme de* schémas de Danielewski-Fieseler

$$\beta : W' = W'^{(n',[\mu'])} \to W = W^{(n,[\mu])},$$

où les deux DFS sont attachés à une même paire $(\mathcal{L}, V)$ est la donnée

a) d'un morphisme de duplications $\alpha : X(n') \to X(n)$,

b) d'un α-morphisme $\beta : W' \to W$ qui est L_+-équivariant pour les actions canoniques.

8.3.3. Par définition des L_+-actions canoniques (8.2.7) sur W et W' respectivement, le α-morphisme $\beta : W' \to W$ satisfait la définition ci-dessus si et seulement si $[\mu_\alpha] - [\mu'] \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ et le $X(n')$-morphisme $\beta_\alpha : W' \to W_\alpha = W \times_{X(n)} X(n')$ factorisant β est un morphisme linéaire affine (2.1.4) équivariant pour le morphisme de $X(n')$-groupes $L_{n'}[-\mu']_+ \to \alpha^* L_n[-\mu]_+$ induit par l'homomorphisme de $\mathcal{O}_{X(n')}$-modules

$${}^t\theta_{[\mu'],[\mu_\alpha]} = \mathrm{Id} \otimes^t s_{[\mu_\alpha]-[\mu']} : \alpha^* \mathcal{L}_n[-\mu] \simeq \mathcal{L}_{n'}[-\mu_\alpha] \to \mathcal{L}_{n'}[-\mu'].$$

On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
W' \arrow[dr, "\beta_\alpha"] \arrow[drr, bend left, "\beta"] \arrow[ddr, bend right, "\rho(n')"'] & & \\
& W_\alpha \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "\rho_\alpha(n')"] & W \arrow[d, "\rho(n)"] \\
& X(n') \arrow[r, "\alpha"] & X(n)
\end{tikzcd}$$

Remarque 8.3.4. On notera que si le support de D est connexe, alors pour tout X-morphisme $\beta : W' \to W$ il existe un morphisme de duplications $\alpha : X(n') \to X(n)$ tel que β soit un α-morphisme. En effet, sous cette hypothèse, la préimage par $\rho(n') : W' \to X(n')$ d'un diviseur $D_i(n')$ sur $X(n')$ est elle aussi connexe, de sorte que son image par β est contenue dans la préimage par $\rho(n) : W \to X(n)$ d'un unique diviseur $D_{\phi(i)}(n)$. Le morphisme de duplications recherché est alors celui correspondant à cette application $\phi : \{1, \ldots, n'\} \to \{1, \ldots, n\}$.

Exemple 8.3.5. Soit $\pi : W = W_{(\lambda,\tilde{\sigma})} \to X$ le schéma de Danielewski-Fieseler de type $(n, [\mu])$, de base $(X = \mathrm{Spec}(A), D = \mathrm{div}(f))$, attaché au $\mathbb{G}_{a,X}$-torseur trivial $p : \mathbb{A}^1_X \to X$, et associé à une paire $(\lambda, \tilde{\sigma})$ constituée d'un entier $\lambda \geq \max\limits_{i=1,\ldots,n}(\mu_i)$ et une collection $\tilde{\sigma} = \{\tilde{\sigma}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ d'éléments $\tilde{\sigma}_i \in A$ (cf. 7.1.13). Alors le X-morphisme $\mathbb{G}_{a,X}$-équivariant canonique $\psi_{(\lambda,\tilde{\sigma})} : W_{(\lambda,\tilde{\sigma})} \to \mathbb{A}^1_X(-\lambda)$ est un morphisme de schémas de Danielewski-Fieseler au sens de la définition (8.3.2). En effet, par construction de ce morphisme (7.1.10), il suffit de prendre $\alpha = \delta : X(n) \to X$ dans la définition.

Définition 8.3.6. Soit $(X, D, \mathcal{L}, V)$ un triplet constitué d'un schéma X, d'un diviseur effectif non nul $D \in \mathrm{Div}^+(X)$, d'un $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}$ et d'un torseur $p : V \to X$ sous le fibré en droites L défini par $\mathcal{L}$.

On appelle catégorie des schémas de Danielewski-Fieseler de base (X, D) attaché à la paire $(\mathcal{L}, V)$ la sous-catégorie $\mathfrak{D}^{(\mathcal{L},V)}_{/(X,D)}$ de la catégorie $(\mathrm{Sch}_{/X})$ suivante :

a) Les objets de $\mathfrak{D}^{(\mathcal{L},V)}_{/(X,D)}$ sont les $(n, [\mu])$-DFS de base (X, D) attachés à la paire $(\mathcal{L}, V)$ au sens de la définition (8.2.3), équipés de leur L_+-action canonique (8.2.7)

b) Les morphismes de $\mathfrak{D}^{(\mathcal{L},V)}_{/(X,D)}$ sont les morphismes de DFS au sens de la définition (8.3.2).

Notation 8.3.7. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la base (X, D) ou la paire $(\mathcal{L}, V)$, nous noterons plus simplement $\mathfrak{D}^{(\mathcal{L},V)}$ ou encore seulement $\mathfrak{D}$ en lieu et place de $\mathfrak{D}^{(\mathcal{L},V)}_{/(X,D)}$.

8.3.8. Par définition, la restriction W_* au-dessus de l'ouvert $X_*(n) \simeq X_*$ d'un $(n, [\mu])$-DFS $\pi : W \to X$ de $\mathfrak{D}^{(\mathcal{L},V)}$ est isomorphe à la restriction V_* de V au-dessus de X_*, et cet isomorphisme est L_+-équivariant. Par conséquent, tout morphisme de DFS $\beta : W' \to W$ induit, en restriction au-dessus de X_*, un X_*-isomorphisme L_+-équivariant $\beta\mid_{X_*} : W'_* \to W_*$. En particulier, si X est intègre, alors tous les $(n, [\mu])$-DFS le sont, et les morphismes $\beta : W' \to W$ dans $\mathfrak{D}^{(\mathcal{L},V)}$ sont birationnels, donc, s'ils sont affines, des pseudo-modifications affines (4.2.5).

CHAPITRE 9

Schémas de Danieleweski-Fieseler attachés à un torseur en droites trivial

Le présent chapitre est consacré à une description détaillée des schémas de Danielewski-Fieseler de base (X, D), associés à un torseur en droites trivial $p : L = \mathbf{V}(\mathcal{L}) \to X$ défini par un $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}$, c'est à dire les objets de la catégorie $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^{(\mathcal{L},L)}_{/(X,D)}$ précédemment introduite.

Nous établissons en particulier un procédé de construction de $(n,[\mu])$-DFS

$$\pi : W^{(n,[\mu])}_{(\lambda,\sigma)} \xrightarrow{\rho(n)} X(n) = X(D,n) \xrightarrow{\delta} X$$

à partir d'entiers $\lambda \geq 0$ et de 0-cochaînes de Čech $\sigma = \{\sigma_i\} \in C^0\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{L}^\vee_n\left[\hat{\lambda}\right]\right)$, similaire à celui déjà rencontré dans le cas particulier des schémas de Danielewski-Fieseler de base $(X = \operatorname{Spec}(A), D = \operatorname{div}(f))$. Nous montrons ensuite que tout objet de $\mathfrak{D}$ est isomorphe à un objet obtenu de cette manière, et nous donnons un critère permettant de décider si deux DFS $W^{(n,[\mu])}_{(\lambda,\sigma)}$ et $W^{(n',[\mu'])}_{(\lambda',\sigma')}$ de ce type sont isomorphes dans $\mathfrak{D}$.

Nous décrivons enfin, encore par l'intermédiaire de cochaînes, la structure des morphismes dans la catégorie $\mathfrak{D}$, et nous donnons de nouveau un procédé permettant de construire tous les morphismes possibles entre deux schémas de Danielewski-Fieseler $W^{(n,[\mu])}_{(\lambda,\sigma)}$ et $W^{(n',[\mu'])}_{(\lambda',\sigma')}$.

Notation 9.0.9. Dans ce chapitre, nous fixons un diviseur effectif non nul $D \in \operatorname{Div}^+(X)$ et nous considérons exclusivement des schémas de Danielewski-Fieseler attachés au L_+-torseur trivial $p : L = \mathbf{V}(\mathcal{L}) \to X$, où $\mathcal{L}$ est un $\mathcal{O}_X$-module inversible lui aussi fixé. Pour tout $n \geq 1$ nous notons $\delta : X(n) \to X$ la n-duplication de D dans X. Conformément aux notations précédemment introduites, pour tout multi-indice $[\mu] \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, $\mathcal{L}_n[\mu]$ désigne le $\mathcal{O}_{X(n)}$-module inversible $\delta^*\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_{X(n)}} \mathcal{O}_{X(n)}([\mu] D(n))$. Étant donné un second multi-indice $[\mu'] \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ tel que $[\mu] \geq [\mu']$ (pour l'ordre produit sur $\mathbb{Z}^n$), nous notons $s_{[\mu]-[\mu']}$ la section canonique du $\mathcal{O}_{X(n)}$-module inversible $\mathcal{O}_{X(n)}([\mu]-[\mu'])$ associé au diviseur effectif $([\mu]-[\mu'] D(n)) \in \operatorname{Div}^+(X(n))$.

Dans ces conditions, nous notons $\theta_{[\mu'],[\mu]} = \operatorname{Id} \otimes s_{[\mu]-[\mu]} : \mathcal{L}^\vee_n[\mu'] \to \mathcal{L}^\vee_n[\mu]$, où $\mathcal{L}^\vee_n = \delta^*\mathcal{L}^\vee$, l'homomorphisme déduit de cette section. Si $[\mu]$ est un multi-indice constant $\left[\hat{\lambda}\right] = (\lambda, \ldots, \lambda) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, nous noterons simplement $\theta_{[\mu'],\lambda}$ en lieu et place de $\theta_{[\mu'],[\hat{\lambda}]}$. Enfin, l'homomorphisme $\mathcal{L}_n[-\mu] \to \mathcal{L}_n[-\mu']$ dual de $\theta_{[\mu'],[\mu]}$ sera noté ${}^t\theta_{[\mu'],[\mu]} = \operatorname{Id} \otimes^t s_{[\mu]-[\mu']}$.

9.1. Schémas de Danielewski-Fieseler définis par des cochaînes

Étant donné un $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}$, nous donnons ci-dessous un procédé de construction de schémas de Danielewski-Fieseler $\pi : W \to X$ de type $(n,[\mu])$ attachés aux L_+-torseur trivial $p : L = \mathbf{V}(\mathcal{L}) \to X$. Les DFS ainsi obtenus sont canoniquement munis d'un morphisme $\psi : W \to L(-\lambda) = \mathbf{V}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X(\lambda D))$ dans la catégorie $\mathfrak{D}$.

9.1.1. Schéma de Danielewski-Fieseler défini par une paire (λ, σ)**.** Fixons un entier $n \geq 1$, et notons $\delta : X(n) \to X$ la n-duplication de D dans X.

9.1.1. Étant donné un multi-indice $[\mu] = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, nous considérons une paire (λ, σ) consituée

1) d'un entier $\lambda \geq \max\limits_{i=1,\ldots,n} (\mu_i)$;

2) d'une 0-cochaîne de Čech $\sigma = \{\sigma_i\}_{i=1,\ldots,n} \in C^0\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{L}_n^\vee \left[\hat{\lambda}\right]\right)$.

9.1.2. Les diviseurs $[\mu]\, D(n)$ et $\left[\hat{\lambda}\right] D(n)$ étant tous deux supportés sur un fermé du complémentaire de $X_*(n) \simeq X_*$, la restriction de l'homomorphisme $\theta_{[\mu],\lambda}$, dont l'existence est assurée par la condition 1), au-dessus de l'ouvert $X_*(n)$ de $X(n)$ est un isomorphisme. Par conséquent, il existe un unique 1-cocycle de Čech

$$g_{(\lambda,\sigma)} = \{g_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n} \in C^1\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{L}_n^\vee [\mu]\right)$$

satisfaisant l'égalité $\theta_{[\mu],\lambda}\left(g_{(\lambda,\sigma)}\right) = \partial(\sigma)$, où ∂ désigne la différentielle du complexe de Čech. Autrement dit, les sections $g_{ij} \in \Gamma\left(X_i(n) \cap X_j(n), \mathcal{L}_n^\vee [\mu]\right)$ sont définies par les égalités $\theta_{[\mu],\lambda}(g_{ij}) = \sigma_j \mid_{X_i(n)} - \sigma_i \mid_{X_j(n)}$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Définition 9.1.3. On appelle *cocycle canonique associé à la paire* (λ, σ) le 1-cocycle de Čech $g_{(\lambda,\sigma)} = \{g_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n} \in C^1\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{L}_n^\vee [\mu]\right)$ défini par la relation $\theta_{[\mu],\lambda}\left(g_{(\lambda,\sigma)}\right) = \partial(\sigma)$.

9.1.4. Rappelons (2.2.1) qu'à partir du cocycle $g_{(\lambda,\sigma)}$ ainsi défini, on construit, en recollant les $\mathcal{O}_{X_i(n)}$-algèbres symétriques $\mathbf{S}\left(\mathcal{L}_n[-\mu] \mid_{X_i(n)}\right)$ au-dessus des intersections $X_{ij}(n)$ via les isomorphismes $\mathcal{O}_{X_{ij}(n)}$-algèbres

$$\mathbf{S}(g_{ij}, \mathrm{Id}) : \mathbf{S}\left(\mathcal{L}_n[-\mu] \mid_{Y_{ij}(n)}\right) \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}\left(\mathcal{L}_n[-\mu] \mid_{Y_{ij}(n)}\right), \quad i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, n,$$

une $\mathcal{O}_{X(n)}$-algèbre quasi-cohérente $\mathcal{B}$ dont le spectre

$$\rho(n) : W = \mathbf{W}\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{L}_n[-\mu], g_{(\lambda,\sigma)}\right) \to X(n)$$

est canoniquement muni d'une structure de torseur sous le fibré en droites $L_n[-\mu]_+$.

Définition 9.1.5. On dit que le schéma de Danielewski-Fieseler

$$\pi : W_{(\lambda,\sigma)} = W_{(\lambda,\sigma)}^{(n,[\mu])} = \mathbf{W}\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{L}_n[-\mu], g_{(\lambda,\sigma)}\right) \xrightarrow{\rho(n)} X(n) \xrightarrow{\delta} X$$

est le $(n, [\mu])$-DFS attaché à $(\mathcal{L}, L)$ défini par la paire (λ, σ).

9.1.2. Morphisme canonique associé à une paire (λ, σ)**.** Tout $(n, [\mu])$-DFS $\pi : W = W_{(\lambda,\sigma)} \xrightarrow{\rho(n)} X(n) \xrightarrow{\delta} X$ défini par une paire (λ, σ) satisfaisant aux hypothèses (9.1.1), admet un morphisme canonique

$$\psi_{(\lambda,\sigma)} : W_{(\lambda,\sigma)} \to L(-\lambda) = \mathbf{V}\left(\mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X(\lambda D)\right)$$

dans la catégorie $\mathfrak{D}$.

9.1.6. En effet, par définition du cocyle $g_{(\lambda,\sigma)}$, l'identité $\theta_{[\mu],\lambda}\left(g_{(\lambda,\sigma)}\right) = \partial(\sigma)$ est satisfaite, ce qui implique, d'après (2.3.2), l'existence d'un $X(n)$-morphisme linéaire affine

$$\tilde{\psi}_{(\lambda,\sigma)} : W \to L_n\left[-\hat{\lambda}\right] \simeq L(-\lambda) \times_X X(n)$$

équivariant pour le morphisme de $X(n)$-groupes induit par l'homomorphisme de $\mathcal{O}_{X(n)}$-modules ${}^t\theta_{[\mu],\lambda} : \mathcal{L}_n\left[-\hat{\lambda}\right] \to \mathcal{L}_n[-\mu]$ dual de $\theta_{[\mu],\lambda}$. Rappelons (2.3.1), que $\tilde{\psi}_{(\lambda,\sigma)}$ est l'unique morphisme dont les restrictions au-dessus des ouverts $X_i(n)$ de $X(n)$ sont induites par les homomorphismes de $\mathcal{O}_{X_i(n)}$-algèbres

$$\mathbf{S}\left(\sigma_i, {}^t\theta_{[\mu],\lambda} \mid_{X_i(n)}\right) : \mathbf{S}\left(\mathcal{L}_n\left[-\hat{\lambda}\right] \mid_{X_i(n)}\right) \to \mathbf{S}\left(\mathcal{L}_n[-\mu] \mid_{X_i(n)}\right), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ainsi, $\tilde{\psi}_{(\lambda,\sigma)} : W \to L_n\left[-\hat{\lambda}\right]$ est bien L_+-équivariant lorsque l'on munit ces deux torseurs de leurs structures canoniques respectives de quasi-torseur sous $L_n\left[\hat{0}\right]_+$ (8.2.7), de sorte que le X-morphisme

$$\psi_{(\lambda,\sigma)} = p_1 \circ \tilde{\psi}_{(\lambda,\sigma)} : W = W_{(\lambda,\sigma)} \to L_n\left[-\hat{\lambda}\right] \simeq L(-\lambda) \times_X X(n) \to L(-\lambda)$$

est un morphisme de DFS au sens de la définition (8.3.2), dont le morphisme de duplication sous-jacent s'identifie au morphisme structural $\delta : X(n) \to X$.

DÉFINITION 9.1.7. Soit $\pi : W_{(\lambda,\sigma)} \to X$ un $(n,[\mu])$-DFS défini par une paire (λ,σ) satisfaisant aux hypothèses (9.1.1). On dit que $\psi_{(\lambda,\sigma)} : W_{(\lambda,\sigma)} \to L(-\lambda)$ est le *X-morphisme L_+-équivariant canonique* associé à la paire (λ,σ).

La figure suivante résume l'ensemble du procédé de construction de schémas de Danielewski-Fieseler obtenu ci-dessus.

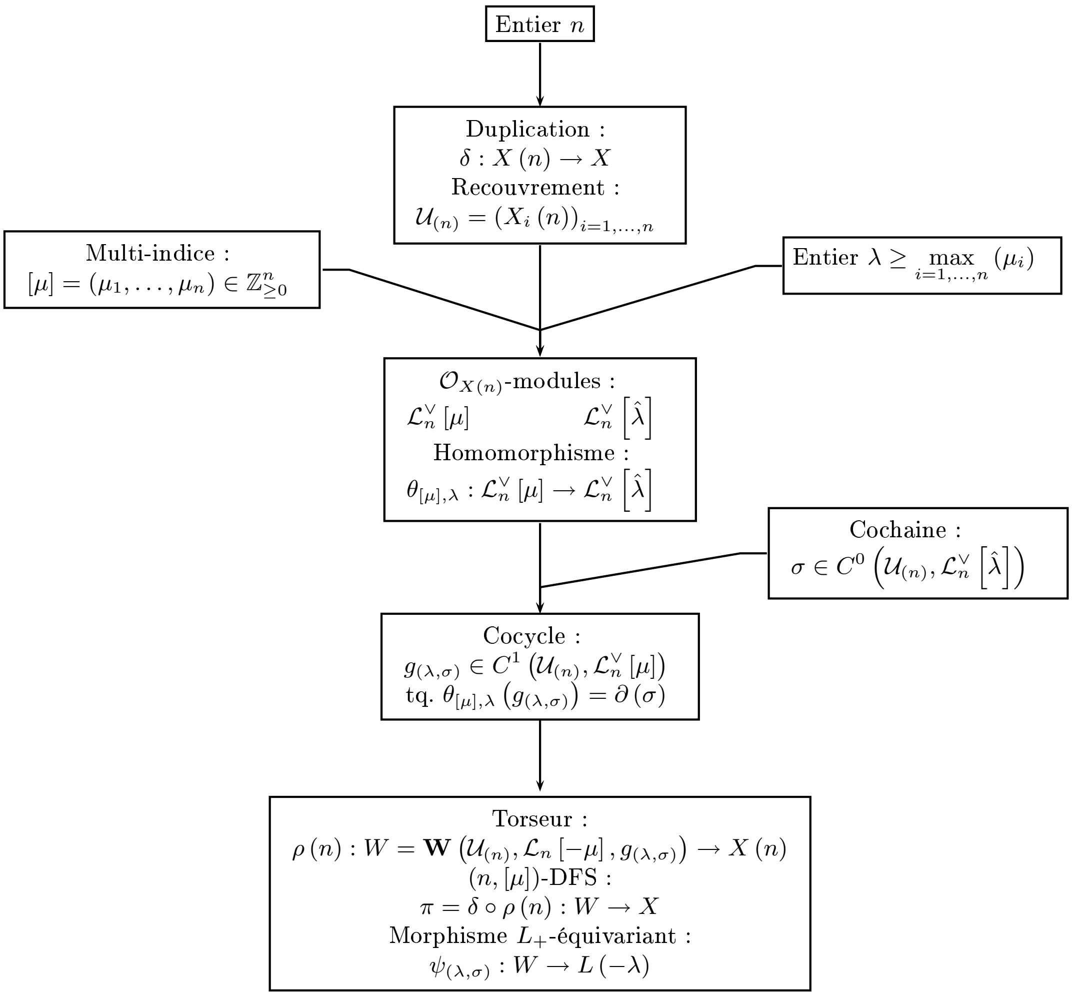


FIG. 9.1.1. Construction d'un $(n,[\mu])$-DFS à partir d'une paire (λ,σ).

9.1.3. Théorèmes d'isomorphies. D'après la proposition (7.1.14), tout schéma de Danielewski-Fieseler de base $(X = \mathrm{Spec}\,(A)\,, D = \mathrm{div}\,(f))$et attaché au $\mathbb{G}_{a,X}$-torseur trivial $p : \mathbb{A}^1_X \to X$ est isomorphe à un schéma défini par une paire (λ, σ). Le résultat suivant constitue donc une généralisation naturelle de cette caractérisation.

THÉORÈME 9.1.8. *Soient X un schéma, $D \in Div^+(X)$ un diviseur effectif non nul et $p : L \to X$ le torseur trivial sous le fibré en droites $L_+ = \mathbf{V}(\mathcal{L})_+$ défini par un $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}$. Tout schéma de Danielewski-Fieseler de base (X, D), attaché à la paire $(\mathcal{L}, L)$, est isomorphe à un $(n, [\mu])$-DFS*

$$\pi : W^{(n,[\mu])}_{(\lambda,\sigma)} = \mathbf{W}\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{L}_n[-\mu], g_{(\lambda,\sigma)}\right) \xrightarrow{\rho(n)} Y(n) \xrightarrow{\delta} X$$

défini par une paire (λ, σ).

DÉMONSTRATION. Par définition, W est un $(n, [\mu])$-DFS $\pi : W \overset{\rho(n)}{\to} X(n) \overset{\delta}{\to} X$, où $\rho(n)$ est un $L_n[-\mu]_+$-torseur dont les restrictions $W_i = W\mid_{X_i(n)}$ au dessus des ouverts $X_i(n)$ du recouvrement canonique $\mathcal{U}_{(n)}$ de $X(n)$ sont des images directes du torseur trivial $p_i : \delta_i^* L \to Y_i(n)$ par les homomorphismes de $\mathcal{O}_{X_i(n)}$-modules induits par les sections canoniques $s_{\mu_i} \in \Gamma\left(X_i(n), \mathcal{O}_{X_i(n)}(\mu_i D_i(n))\right)$. Par conséquent, le torseur $\rho(n) : W \to Y(n)$ devient trivial sur le recouvrement ouvert canonique $\mathcal{U}_{(n)}$, de sorte que l'on peut choisir un représentant de la classe d'isomorphisme $c(W) \in H^1\left(X(n), \mathcal{L}_n^\vee[\mu]\right)$ de W sous la forme d'un 1-cocyle de Čech $g = \{g_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n} \in C^1\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{L}_n^\vee[\mu]\right)$, ce qui conduit à un isomorphisme de $L_n[-\mu]_+$-torseurs $W \simeq \mathbf{W}\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{L}_n[-\mu], g\right)$.

Pour tout couple d'indices $i \neq j$, $X_{ij}(n) = X_*(n)$ s'identifie à l'ouvert de $X(n)$ sur lequel la section canonique $s_{[\hat{1}]} \in \Gamma\left(X(n), \mathcal{O}_{X(n)}\left([\hat{1}]\,D(n)\right)\right)$ ne s'annule pas. Ainsi, pour tout entier r assez grand, $g_{ij} \otimes s_{[\hat{r}]} \in \Gamma\left(X_*(n), \mathcal{L}_n^\vee[\mu] \otimes \mathcal{O}_{X(n)}[\hat{r}]\right)$ s'étend en une section globale de $\mathcal{L}_n^\vee[k] \otimes \mathcal{O}_{X(n)}[\hat{r}]$ sur $X(n)$. En posant maintenant $m = \max\limits_{i=1,\ldots,m}(\mu_i)$ et $\lambda = r + m$, on conclut que pour tout couple d'indices $i \neq j$,

$$\theta_{[\mu],\lambda}(g_{ij}) = g_{ij} \otimes s_{[\hat{r}]} \otimes s_{[\hat{m}]-[\mu]} \in \Gamma\left(X_*(n), \mathcal{L}_n^\vee[\mu] \otimes \mathcal{O}_{X(n)}[\hat{r}] \otimes \mathcal{O}_{X(n)}([\hat{m}] - [\mu])\right)$$

s'étend en une section globale de $\mathcal{L}_n^\vee\left[\hat{\lambda}\right]$. Il ne reste alors plus qu'à poser, par exemple,

$$\sigma_1 = 0, \quad \text{et} \quad \sigma_i = \theta_{[\mu],\lambda}(g_{1i})\mid_{X_i(n)} \in \Gamma\left(X_i(n), \mathcal{L}_n^\vee\left(\left[\hat{\lambda}\right]\right)\right), \quad i = 2, \ldots, n$$

pour obtenir la relation $\theta_{[\mu],\lambda}(g) = \partial(\sigma)$ qui signifie précisément que $g = g_{(\lambda,\sigma)}$ où $\sigma = \{\sigma_i\}_{i=1,\ldots,n} \in C^0\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{L}_n^\vee\left[\hat{\lambda}\right]\right)$. □

9.1.9. Le théorème précédent s'interprète en termes d'extensions de la manière agréable suivante. Rappelons tout d'abord (2.4.1) qu'à tout $L_n[-\mu]_+$-torseur $\rho(n) : W \to X(n)$ défini à partir d'un cocyle $g = \{g_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n} \in C^1\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{L}_n^\vee[\mu]\right)$ correspond, via l'isomorphisme $H^1\left(X(n), \mathcal{L}_n^\vee[\mu]\right) \simeq \mathrm{Ext}^1_{X(n)}\left(\mathcal{L}_n[-\mu], \mathcal{O}_{X(n)}\right)$, une extension

$$0 \to \mathcal{O}_{X(n)} \to \mathcal{E} \overset{q}{\to} \mathcal{L}_n[-\mu] \to 0,$$

devenant triviale sur le recouvrement canonique $\mathcal{U}_{(n)}$ de $X(n)$, et telle que W s'identifie au complémentaire dans $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ de la $X(n)$-section définie par la surjection $\mathcal{E} \to \mathcal{L}_n[-\mu]$. Nous pouvons alors former le *produit fibré* de l'extension ci-dessus par l'homomorphisme de $\mathcal{O}_{X(n)}$-modules ${}^t\theta_{[\mu],\lambda} : \mathcal{L}_n\left[-\hat{\lambda}\right] \to \mathcal{L}_n[-\mu]$ dual de $\theta_{[\mu],\lambda}$, c'est à dire l'extension

$$0 \to \mathcal{O}_{X(n)} \to \left[\mathrm{Ker}\left(-q, {}^t\theta_{[\mu],\lambda}\right) : \mathcal{E} \oplus \mathcal{L}_n\left[-\hat{\lambda}\right] \to \mathcal{L}_n[-\mu]\right] \to \mathcal{L}_n\left[-\hat{\lambda}\right] \to 0.$$

Le théorème (9.1.8) signifie alors que pour tout entier λ assez grand, l'extension ainsi obtenue est isomorphe à l'extension triviale $\mathcal{O}_{X(n)} \oplus \mathcal{L}_n\left[-\hat{\lambda}\right]$, le scindage correspondant étant donné par une 0-cochaine $\sigma = \{\sigma_i\}_{i=1,\ldots,n} \in C^0\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{L}_n^\vee\left[\hat{\lambda}\right]\right)$.

9.1.10. Comme nous l'avions déjà remarqué dans le cas particulier des schémas de Danielewski-Fieseler de base $(X = \operatorname{Spec}(A), D = \operatorname{div}(f))$ attachés au $\mathbb{G}_{a,X}$-torseur trivial $\mathbb{A}^1_X$, l'entier λ et la cochaîne σ du théorème (9.1.8) ne sont pas déterminés de manière unique. L'interprétation en termes d'extensions montre en particulier que tout entier $\lambda' \geq \lambda$ convient et que la cochaîne σ donnant le scindage n'est définie que modulo l'addition d'une section $\upsilon \in \Gamma\left(X(n), \mathcal{L}_n^\vee\left[\hat{\lambda}\right]\right)$. De même, le cocycle intermédiaire $g \in C^1\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{L}_n^\vee[\mu]\right)$ donnant l'isomorphisme $W \simeq \mathbf{W}\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{L}_n[-\mu], g\right)$ peut être remplacé par un cocycle de la forme $g + \partial(\tau)$, où $\tau \in C^0\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{L}_n^\vee[\mu]\right)$.

Toutes les paires (λ, σ) pour lesquelles on a un isomorphisme de $L_n[-\mu]_+$-torseurs $W \simeq W_{(\lambda,\sigma)}^{(n,[\mu])}$ se déduisent donc essentiellement des considérations précédentes. Pour déterminer à quelles conditions deux DFS $W_{(\lambda,\sigma)}^{(n,[\mu])}$ et $W_{(\lambda',\sigma')}^{(n',[\mu'])}$ sont isomorphes dans la catégorie $\mathfrak{D}$, il reste à remarquer que si $\alpha : X(n) \xrightarrow{\sim} X(n)$ est un isomorphisme de duplications, alors pour tout schéma de Danielewski-Fieseler $\pi : W \xrightarrow{\rho(n)} X(n) \xrightarrow{\delta} X$, l'image inverse $\pi_\alpha : W_\alpha \to X$ de $\pi : W \to X$ par α est un schéma de Danielewski-Fieseler isomorphe à $\pi : W \to X$, bien que les torseurs $\rho_\alpha(n) : W_\alpha \to X(n)$ et $\rho(n) : W \to X(n)$ ne soient en général pas isomorphes. Cela conduit à la caractérisation suivante :

Théorème 9.1.11. *Pour que deux DFS $W = W_{(\lambda,\sigma)}^{(n,[\mu])}$ et $W' = W_{(\lambda',\sigma')}^{(n',[\mu'])}$, où $\lambda' \geq \lambda$, soient isomorphes dans $\mathfrak{D}$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :*

a) $n = n'$;

b) Il existe un isomorphisme de duplications $\alpha : X(n) \xrightarrow{\sim} X(n)$ tel que $[\mu_\alpha] = [\mu']$;

c) Il existe $\upsilon \in \Gamma\left(X(n), \mathcal{L}_n^\vee\left[\hat{\lambda}'\right]\right)$ et $\tau \in C^0\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{L}_n^\vee[\mu']\right)$ telles que l'égalité

$$\sigma' = \upsilon + \theta_{\lambda,\lambda'}(\sigma_\alpha) + \theta_{[\mu'],\lambda'}(\tau)$$

soit satisfaite dans $C^0\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{L}_n^\vee\left[\hat{\lambda}'\right]\right)$, où $\theta_{\lambda,\lambda'} = Id \otimes s_{[\hat{\lambda}']-[\hat{\lambda}]} : \mathcal{L}_n^\vee\left[\hat{\lambda}\right] \to \mathcal{L}_n^\vee\left[\hat{\lambda}'\right]$, et où υ est identifié au 0-cocyle de Čech $\upsilon = \left\{\upsilon\mid_{X_i(n)}\right\}_{i=1,\ldots,n}$.

Démonstration. D'après ce qui précède, ces conditions sont suffisantes. Réciproquement, par définition des morphismes dans la catégorie $\mathfrak{D}$, il est clair que si W et W' sont isomorphes on doit avoir $n = n'$. Ainsi, le morphisme de duplications $\alpha = \alpha_\phi : X(n) \to X(n)$ sous-jacent à un tel isomorphisme $\beta : W' \xrightarrow{\sim} W$ est un isomorphisme, donc est déterminé par une permutation ϕ de l'ensemble d'indices $\{1, \ldots, n\}$. Pour que le morphisme linéaire affine $\beta_\alpha : W' \to W_\alpha = \alpha^* W$ déterminant β soit un isomorphisme équivariant pour le morphisme de $X(n)$-groupes induit par l'homomorphisme de $\mathcal{O}_{X(n)}$-modules

$${}^t\theta_{[\mu'],[\mu_\alpha]} = \mathrm{Id} \otimes^t s_{[\mu_\alpha]-[\mu']} : \alpha^*\mathcal{L}_n[-\mu] \simeq \mathcal{L}_n[-\mu_\alpha] \to \mathcal{L}_n[-\mu'],$$

il est nécessaire que $\theta_{[\mu'],[\mu_\alpha]}$ soit un isomorphisme. Cette condition est évidemment remplie si et seulement si $[\mu_\alpha] = [\mu']$ ce qui revient à dire que ${}^t\theta_{[\mu'],[\mu_\alpha]}$ est l'isomorphisme identique de $\mathcal{L}_n[\mu']$.

Puisque W est défini par la paire (λ, σ), l'image inverse W_α de W est déterminée par la paire (λ, σ_α) correspondant à la 0-cochaîne

$$\sigma_\alpha = \alpha^*\sigma \in C^0\left(\mathcal{U}_{(n)}, \alpha^*\mathcal{L}_n^\vee[\mu]\right) \simeq C^0\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{L}_n^\vee[\mu']\right).$$

D'après (2.3.2), l'existence d'un $X(n')$-morphisme $\beta_\alpha : W' \to W_\alpha$ satisfaisant les conditions requises équivaut à l'existence d'une cochaîne $\tau \in C^0\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{L}_n^\vee[\mu']\right)$ telle que l'égalité $g_{(\lambda',\sigma')} = g_{(\lambda,\sigma_\alpha)} + \partial(\tau)$ soit satisfaite dans $C^1\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{L}_n^\vee[\mu']\right)$. Puisque $\lambda' \geq \lambda$, l'égalité $\theta_{[\mu'],\lambda'} = \theta_{\lambda,\lambda'} \circ \theta_{[\mu'],\lambda}$ implique alors, par définition des cocycles $g_{(\lambda',\sigma')}$ et $g_{(\lambda,\sigma_\alpha)}$, que la relation $\partial(\sigma') = \partial\left(\theta_{\lambda,\lambda'}(\sigma_\alpha) + \theta_{[\mu],\lambda'}(\tau)\right)$ est satisfaite dans $C^1\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{L}_n^\vee\left[\hat{\lambda}'\right]\right)$. Ainsi, la 0-cochaîne

$$\sigma' - \theta_{\lambda,\lambda'}(\sigma_\alpha) - \theta_{[\mu'],\lambda'}(\tau) \in C^0\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{L}_n^\vee\left[\hat{\lambda}'\right]\right)$$

est un cocycle, donc un cobord, si bien qu'il existe une section $v \in \Gamma\left(X(n), \mathcal{L}_n^\vee\left[\hat{\lambda}'\right]\right)$ pour laquelle la condition c) est satisfaite. □

Exemple 9.1.12. Étant donnée une collection $\{a\} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ de nombres complexes deux à deux distincts, nous considérons la famille des schémas de Danielewski-Fieseler $W^n_{(\lambda,\{a\})}$ de base $(X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x]), D = \mathrm{div}(x))$, de type $\left(n, \left[\hat{0}\right]\right)$, attachés au $\mathbb{G}_{a,X}$-torseur trivial $\mathbb{A}^1_X$, et définis par des paires (λ, σ) où $\sigma_i = a_i x^{-\lambda} \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(\lambda D))$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. D'après le théorème (9.1.11) deux schémas $W^n_{(\lambda,\{a\})}$ et $W^{n'}_{(\lambda',\{a'\})}$ sont isomorphes dans la catégorie $\mathfrak{D}$ correspondante si et seulement si $n = n'$, $\lambda = \lambda'$, et s'il existe $b \in \mathbb{C}$ et une permutation ϕ de l'ensemble d'indices $\{1, \ldots, n\}$ telles que $a'_i = a_{\phi(i)} + b$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

Un raisonnement analogue à celui de l'exemple (7.2.12) montre que le X-morphisme $\phi : W^n_{(\lambda,\{a\})} \to \mathbb{A}^2_X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x][y,z])$ de composantes

$$\phi_1 = \psi_{(\lambda,\sigma)} \quad \text{et} \quad \phi_2 = x^{-\lambda} P_{\{a\}}(\phi_1) = x^{-\lambda} \prod_{i=1}^{n} (\phi_1 - a_i)$$

est un plongement $\mathbb{A}^2_X$ induisant un isomorphisme entre $W^n_{(\lambda,\{a\})}$ et la surface $S^\lambda_{P_{\{a\}}} \subset \mathbb{A}^2_X$ définie par l'équation $x^\lambda z - P_{\{a\}}(y) = 0$, et que cet isomorphisme est $\mathbb{G}_{a,X}$-équivariant lorsque l'on munit $S^\lambda_{P_{\{a\}}}$ de la restriction de la $\mathbb{G}_{a,X}$-action sur $\mathbb{A}^2_X$ correspondant à la dérivation localement nilpotente

$$\partial = x\frac{\partial}{\partial y} + P'_{\{a\}}(y)\frac{\partial}{\partial z}.$$

On en déduit que deux *schémas de Danielewski-Fieseler* $S^\lambda_{P_{\{a\}}}$ et $S^{\lambda'}_{P_{\{a'\}}}$ sont isomorphes si et seulement si $\lambda = \lambda'$, et s'il existe $b \in \mathbb{C}$ tel que $P_{\{a\}}(y) = P_{\{a'\}}(y + b)$.

D'autre part, d'après un résultat de Makar-Limanov ([**33**] et [**34**]), deux *schémas* $S^\lambda_{P_{\{a\}}}$ et $S^{\lambda'}_{P_{\{a'\}}}$ sont isomorphes si et seulement si $\lambda = \lambda'$, et s'il existe $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que $P_{\{a\}}(y) = P_{\{a'\}}(ay + b)$. Pour lever l'apparente contradiction entre ces deux résultats, il suffit de remarquer que l'isomorphisme de schémas $S^\lambda_{P_{\{a\}}} \simeq S^\lambda_{P_{\{a'\}}}$ induit par l'automorphisme $(x, y, z) \mapsto (x, ay + b, z)$ de $\mathbb{A}^2_X$ est un isomorphisme de schémas de Danielewski-Fieseler si et seulement si il est $\mathbb{G}_{a,X}$-équivariant, ce qui n'est évidemment le cas que lorsque $a = 1$.

Remarque 9.1.13. L'exemple précédent montre qu'il est naturel de s'intéresser aux classes d'isomorphismes des schémas de Danielewski-Fieseler $\pi : W \to X$ dans la catégorie des X-schémas. Si l'on fait abstraction du problème lié à la factorisaton d'un isomorphisme de X-schémas $\beta : W' \xrightarrow{\sim} W$ par un morphisme de duplications sous-jacent $\alpha : X(n') \to X(n)$ qui apparaît lorsque le support du diviseur D n'est pas connexe (8.1.15), la question se ramène alors essentiellement à la détermination des X-automorphismes des fibrés en droites $p : L(-\lambda) = \mathbf{V}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X(\lambda D)) \to X$. Or, lorsque X est intègre, tout automorphisme de ce type est nécessairement induit par un automorphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbres de la forme

$$\mathbf{S}(g,f) : \mathbf{S}(\mathcal{L}\otimes\mathcal{J}_X(lD)) \to \mathbf{S}(\mathcal{L}\otimes\mathcal{J}_X(lD)),$$

où $g \in \Gamma(X, \mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{O}_X(lD))$ et $f \in \mathrm{End}_X(\mathcal{L}\otimes\mathcal{J}_X(lD)) \simeq \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ est un automorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules, correspondant donc à un élément inversible de $\mathcal{O}_X$. Autrement dit, dans ces conditions, la seule différence par rapport au cas L_+-équivariant étudié jusqu'à présent est la possibilité de remplacer l'homomorphisme identique $\mathrm{Id}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{J}_X(lD)}$ par n'importe quel automorphisme f.

Même sous les hypothèses simplificatrices précédentes, le problème consistant maintenant à déterminer à quelles conditions deux schémas de Danielewski-Fieseler W et W' sont des schémas abstraits isomorphes, c'est à dire indépendamment de leur structures respectives de X-schémas avec L_+-action, est en général beaucoup plus difficile.

9.2. Construction de morphismes de schémas de Danielewski-Fieseler

Dans ce paragraphe nous donnons un procédé permettant de construire des morphismes $\beta : W' \to W$ dans la catégorie $\mathfrak{D}$ des schémas de Danielewski-Fieseler de base (X,D), attachés au L_+-torseur trivial $p : L = \mathbf{V}(\mathcal{L}) \to X$. Nous montrons ensuite qu'à isomorphisme près, tout morphisme dans $\mathfrak{D}$ peut être obtenu par ce procédé.

9.2.1. Principe de construction. Étant donné un $(n,[\mu])$-DFS

$$\pi : W = W_{(\lambda,\sigma)} \xrightarrow{\rho(n)} X(n) \xrightarrow{\delta} X$$

attaché à la paire $(\mathcal{L}, L)$, défini par une paire (λ,σ) satisfaisant aux hypothèses (9.1.1), nous donnons ci-dessous un procédé permettant de construire des morphismes de DFS $\beta : W' \to W$.

9.2.1. Pour cela, nous considérons les données suivantes :
1) un morphisme de duplications $\alpha : X(n') \to X(n)$;
2) un multi-indice $[\mu'] \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n'}$ tel que $[\mu_\alpha] \geq [\mu']$;
3) une 0-cochaine $\tau = \{\tau_i\}_{i=1,\ldots,n'} \in C^0\left(\mathcal{U}_{(n')}, \mathcal{L}_{n'}^\vee[\mu_\alpha]\right)$.

9.2.2. Sous les hypothèses précédentes, nous notons $\sigma_\alpha =\in C^0\left(\mathcal{U}_{(n')}, \mathcal{L}_{n'}^\vee\left[\hat{\lambda}\right]\right)$ l'image inverse $\alpha^*\sigma$ de la 0-cochaîne σ par le morphisme $\alpha : X(n') \to X(n)$. Puisque par hypothèse $\left[\hat{\lambda}\right] \geq [\mu]$, on a $\left[\hat{\lambda}\right] \geq [\mu_\alpha]$ dans $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{n'}$, et donc, d'après la condition 2), $\left[\hat{\lambda}\right] \geq [\mu']$, d'où l'existence des homomorphismes de $\mathcal{O}_{X(n')}$-modules

$$\begin{cases} \theta_{[\mu_\alpha],\lambda} = \mathrm{Id}\otimes s_{[\hat{\lambda}]-[\mu_\alpha]} : \mathcal{L}_{n'}^\vee[\mu_\alpha] \to \mathcal{L}_{n'}^\vee\left[\hat{\lambda}\right] \\ \theta_{[\mu'],\lambda} = \mathrm{Id}\otimes s_{[\hat{\lambda}]-[\mu']} : \mathcal{L}_{n'}^\vee[\mu'] \to \mathcal{L}_{n'}^\vee\left[\hat{\lambda}\right] \end{cases}$$

Nous pouvons alors former le 1-cocycle canonique $g'_{(\lambda,\sigma')} \in C^1\left(\mathcal{U}_{(n')}, \mathcal{L}_{n'}^\vee[\mu']\right)$ (9.1.3) associé à la paire (λ,σ'), où

$$\sigma' = \sigma_\alpha + \theta_{[\mu_\alpha],\lambda}(\tau) \in C^0\left(\mathcal{U}_{(n')}, \mathcal{L}_{n'}^\vee\left[\hat{\lambda}\right]\right).$$

Ce cocycle définit à son tour un $(n',[\mu'])$-DFS

$$\pi' : W' = \mathbf{W}\left(\mathcal{U}_{(n')}, \mathcal{L}_{n'}[-\mu'], g'_{(\lambda,\sigma')}\right) \xrightarrow{\rho(n')} X(n') \xrightarrow{\delta'} X$$

attaché au L_+-torseur trivial $p : L \to X$. Nous prétendons maintenant qu'il existe un X-morphisme de DFS $\beta : W' \to W$ dans $\mathfrak{D}$, dont $\alpha : X(n') \to X(n)$ est le morphisme de duplications sous-jacent.

9.2.3. En effet, l'image inverse (8.3.1) $\pi_\alpha : W_\alpha = \alpha^* W \overset{\rho_\alpha(n')}{\longrightarrow} X(n') \overset{\delta'}{\to} X$ de W est isomorphe au $(n', [\mu_\phi])$-DFS $W_{(\lambda,\sigma_\alpha)}$défini par la paire (λ, σ_α). D'autre part, 2) implique l'existence d'un homomorphisme de $\mathcal{O}_{X(n')}$-modules

$$\theta_{[\mu'],[\mu_\alpha]} = \mathrm{Id} \otimes s_{[\mu_\alpha]-[\mu']} : \mathcal{L}_{n'}^\vee [\mu'] \to \mathcal{L}_{n'}^\vee [\mu_\alpha]$$

tel que $\theta_{[\mu'],\lambda} = \theta_{[\mu_\alpha],\lambda} \circ \theta_{[\mu'],[\mu_\alpha]}$. La relation $\theta_{[\mu'],[\mu_\alpha]}\left(g'_{(\lambda,\sigma')}\right) = g_{(\lambda,\sigma_\alpha)} + \partial(\tau)$ étant satisfaite dans $C^1\left(\mathcal{U}_{(n')}, \mathcal{L}_{n'}^\vee [\mu_\alpha]\right)$ par construction, la proposition (2.2.5) garantit l'existence d'un $X(n')$-morphisme linéaire affine $\beta_\alpha : W' \to W_\alpha$ équivariant pour le morphisme de $X(n')$-groupes induit par l'homomorphisme de $\mathcal{O}_{X(n')}$-modules ${}^t\theta_{[\mu'],[\mu_\alpha]}$ dual de $\theta_{[\mu'],[\mu_\alpha]}$. Ainsi, le X-morphisme

$$\beta(\tau) = p_1 \circ \beta_\alpha : W' \to W_\alpha \simeq W \times_{X(n)} X(n') \to W$$

déduit de β_α est un morphisme de DFS ayant $\alpha : X(n') \to X(n)$ pour morphisme de duplications sous-jacent, comme annoncé.

9.2.4. On notera que par construction, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} W' \arrow[rr, "\beta(\tau)"] \arrow[dr, "\psi_{(\lambda,\sigma')}"'] & & W \arrow[dl, "\psi_{(\lambda,\sigma)}"] \\ & L(-\lambda) & \end{tikzcd}$$

dans la catégorie $\mathfrak{D}$, où $\psi_{(\lambda,\sigma)}$ et $\psi_{(\lambda,\sigma')}$ désignent les morphismes L_+-équivariant canoniques respectivement associés aux paires (λ, σ) et (λ, σ').

Le résultat suivant garantit que tous les morphismes dans la catégorie $\mathfrak{D}$ peuvent être obtenus suivant ce procédé.

Théorème 9.2.5. *Soit $\beta : W' = W^{(n',[\mu'])} \to W = W^{(n,[\mu])}$ un morphisme de schémas de Danielewski-Fieseler, de morphisme de duplications sous-jacent $\alpha : X(n') \to X(n)$. Alors il existe*
a) deux paires (λ, σ') et (λ, σ)satisfaisant aux hypothèses (9.1.1),
b) une 0-cochaîne $\tau \in C^0\left(\mathcal{U}_{(n')}, \alpha^* \mathcal{L}_n^\vee [\mu]\right)$ satisfaisant l'identité $\sigma' = \sigma_\alpha + \theta_{[\mu_\alpha],\lambda}(\tau)$ dans $C^0\left(\mathcal{U}_{(n')}, \mathcal{L}_{n'}^\vee \left[\hat{\lambda}\right]\right)$,
c) des isomorphismes $\phi' : W' \overset{\sim}{\to} W_{(\lambda,\sigma')}$et $\phi : W \overset{\sim}{\to} W_{(\lambda,\sigma)}$, et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} W' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\phi'"', "\wr"] & W \arrow[d, "\phi", "\wr"'] \\ W'_{(\lambda,\sigma')} \arrow[r, "\beta(\tau)"] & W_{(\lambda,\sigma)} \end{tikzcd}$$

dans lequel $\beta(\tau)$ désigne le morphisme obtenu par le procédé (9.2.3).

Démonstration. D'après le théorème (9.1.8), il existe une paire (λ, σ) et un isomorphisme

$$\phi : W \overset{\sim}{\to} W_{(\lambda,\sigma)}^{(n,[\mu])} = \mathbf{W}\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{L}_n[-\mu], g_{(\lambda,\sigma)}\right).$$

Choisissons d'autre part un représentant arbitraire $g' \in C^1\left(\mathcal{U}_{(n')}, \mathcal{L}_n^\vee [\mu']\right)$ de la classe d'isomorphisme $c(W') \in H^1\left(Y(n'), \mathcal{L}_{n'}^\vee [k']\right)$ du torseur $L_n[-\mu']_+$-torseur $\rho(n') : W' \to X(n')$ correspondant à W'. Par définition (cf. 8.3.2), le morphisme $\beta : W' \to W$ est donné par un morphisme linéaire affine $\beta_\alpha : W' \to W_\alpha = \alpha^* W$, équivariant pour le morphisme de $X(n')$-groupes induit par l'homomorphisme de $\mathcal{O}_{X(n')}$-modules

$${}^t\theta_{[\mu'],[\mu_\alpha]} = \mathrm{Id} \otimes^t s_{[\mu_\alpha]-[\mu']} : \alpha^* \mathcal{L}_n[-\mu] \simeq \mathcal{L}_{n'}[-\mu_\alpha] \to \mathcal{L}_{n'}[-\mu'].$$

Puisque W_α est isomorphe au $(n', [\mu_\alpha])$-DFS défini par la paire (λ, σ_α), où $\sigma_\alpha = \alpha^*\sigma$, un tel morphisme $\beta_\alpha : W' \to W_\alpha$ est uniquement déterminé par la donnée d'une 0-cochaîne $\tau \in C^0\left(\mathcal{U}_{(n')}, \mathcal{L}_{n'}^\vee[\mu_\alpha]\right)$ telle que l'égalité $\theta_{[\mu'],[\mu_\alpha]}(g') = g_{(\lambda,\sigma_\alpha)} + \partial(\tau)$ soit satisfaite dans $C^0\left(\mathcal{U}_{(n')}, \mathcal{L}_{n'}^\vee[\mu_\alpha]\right)$. Puisque $\theta_{[\mu'],\lambda} = \theta_{[\mu_\alpha],\lambda} \circ \theta_{[\mu'],[\mu_\alpha]}$, cette identité équivaut à son tour à la relation $\theta_{[\mu'],\lambda}(g') = \partial\left(\sigma_\alpha + \theta_{[\mu_\alpha],\lambda}(\tau)\right)$ qui signifie exactement que $g' = g_{(\lambda,\sigma')}$, où

$$\sigma' = \sigma_\alpha + \theta_{[\mu_\alpha],\lambda}(\tau) \in C^0\left(\mathcal{U}_{(n')}, \mathcal{L}_{n'}^\vee\left[\hat{\lambda}\right]\right).$$

Cela démontre donc le théorème. $\square$

La figure suivante rassemble les ingrédients et les opérations nécessaires à la construction d'un morphisme de schémas de Danielewski-Fieseler.

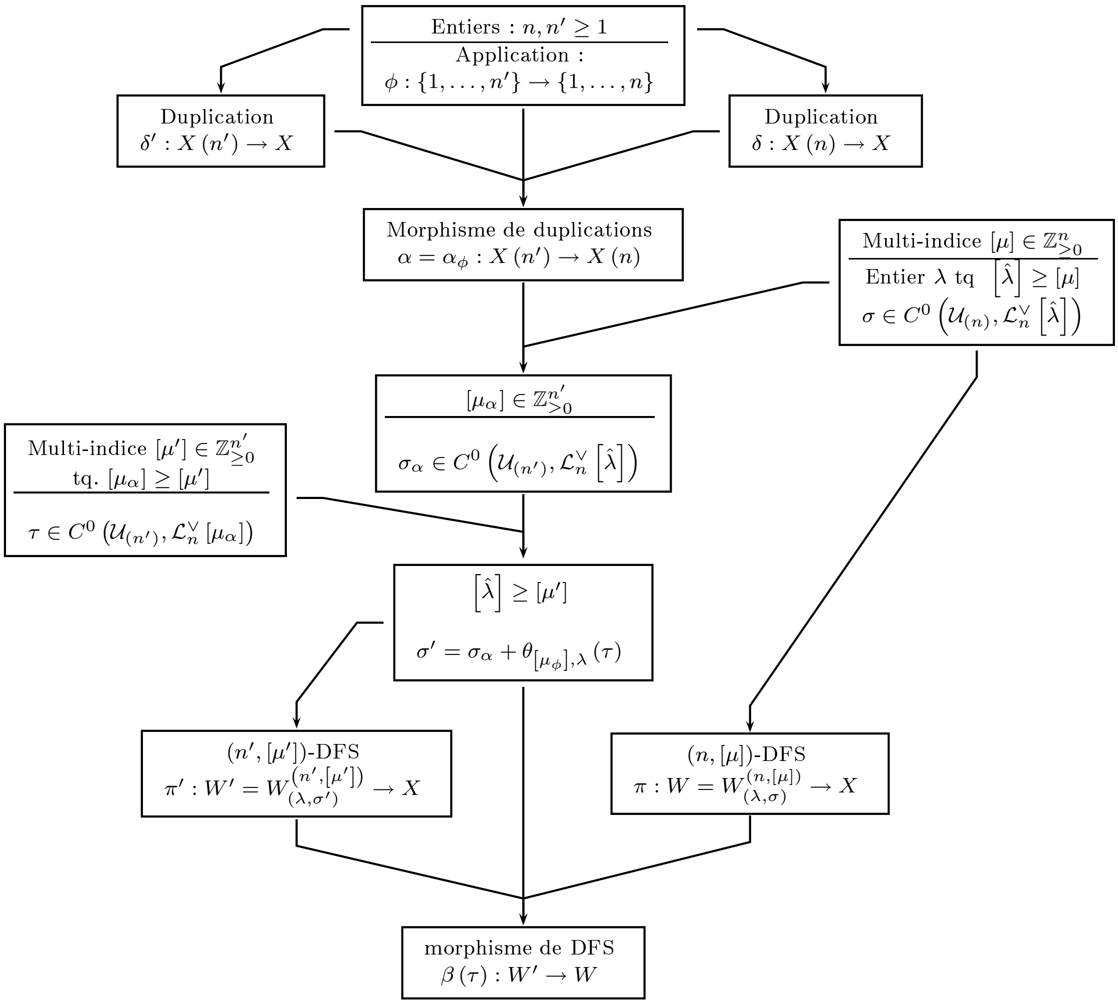


FIG. 9.2.1. Construction d'un morphisme dans la catégorie $\mathfrak{D}$.

9.2.2. La catégorie relative $\overrightarrow{\mathfrak{D}}$. Le théorème (9.2.5) implique en particulier que la donnée d'un isomorphisme $\phi : W \xrightarrow{\sim} W_{(\lambda,\sigma)}^{(n,[\mu])}$ dans la catégorie $\mathfrak{D}$ équivaut à la donnée d'un morphisme $\beta : W \to L(-\lambda) = \mathbf{V}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X(\lambda D))$ dans cette même catégorie, le morphisme $\beta \circ \phi^{-1}$ s'identifiant alors au morphisme équivariant canonique $\psi_{(\lambda,\sigma)} : W_{(\lambda,\sigma)}^{(n,[\mu])} \to L(-\lambda)$. Cela conduit à la définition suivante :

Définition 9.2.6. Soient X un schéma, $D \in \mathrm{Div}^+(X)$ un diviseur effectif non nul et $p : L \to X$ un fibré en droites défini par un $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}$. On appelle catégorie des schémas de Danielewski-Fieseler relatifs de base (X,D) associés à la paire $(\mathcal{L}, L)$, la catégorie $\overrightarrow{\mathfrak{D}} = \overrightarrow{\mathfrak{D}}_{/(X,D)}^{(\mathcal{L},L)}$ dont les objets sont les morphismes $\mathfrak{W} = (\psi : W \to L(-\lambda))$ dans la catégorie $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_{/(X,D)}^{(\mathcal{L},L)}$, où λ parcourt l'ensemble $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, et dont les morphismes $\beta : \mathfrak{W}' \to \mathfrak{W}$ sont les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} W' \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "\psi'"'] & & W \arrow[dl, "\psi"] \\ & L(-l) & \end{tikzcd}$$

dans cette même catégorie $\mathfrak{D}$.

9.2.7. Pour tout couple d'entiers positifs ou nuls $\lambda' \geq \lambda$, le morphisme $\mathfrak{L}_{\lambda,\lambda'} = (\psi_{\lambda,\lambda'} : L(-\lambda) \to L(-\lambda'))$ induit par l'homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules

$$^t\theta_{\lambda,\lambda'} = \mathrm{Id} \otimes^t s_{(\lambda'-\lambda)D} : \mathcal{L}(-\lambda') = \mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X(\lambda' D) \to \mathcal{L}(-\lambda) = \mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X(\lambda D)$$

est un objet $\overrightarrow{\mathfrak{D}}$. On notera que pour λ fixé, deux objets $\mathfrak{L}_{\lambda,\lambda'}$ et $\mathfrak{L}_{\lambda,\lambda''}$ ne sont isomorphes dans $\overrightarrow{\mathfrak{D}}$ que si $\lambda' = \lambda''$. Plus généralement, pour tout multi-indice $[\mu] \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ et toute paire (λ, σ) satisfaisant aux hypothèses (9.1.1) ,

$$\mathfrak{W}_{(\lambda,\sigma)}^{(n,[\mu])} = \left(\psi_{(\lambda,\sigma)} : W_{(\lambda,\sigma)}^{(n,[\mu])} \to L(-\lambda)\right),$$

où $\psi_{(\lambda,\sigma)}$ désigne le morphisme canonique (9.1.7), est lui aussi un objet de $\overrightarrow{\mathfrak{D}}$. Nous déduisons aussi de (9.2.4) que tout morphisme

$$\beta(\tau) : W_{(\lambda,\sigma')}^{\left(n',[\mu']\right)} \to W_{(\lambda,\sigma)}^{(n,[\mu])}$$

obtenu selon le procédé (9.2.3) définit un morphisme $\beta(\tau) : \mathfrak{W}_{(\lambda',\sigma')}^{\left(n',[\mu]\right)} \to \mathfrak{W}_{(\lambda,\sigma)}^{(n,[\mu])}$ dans la catégorie $\overrightarrow{\mathfrak{D}}$. Le résultat suivant est donc une conséquence immédiate des théorèmes (9.1.8) et (9.2.5)

Théorème 9.2.8. *Tout objet $\mathfrak{W} = (\psi : W \to L(-\lambda))$ de la catégorie $\overrightarrow{\mathfrak{D}}$ est isomorphe à un objet $\mathfrak{W}_{(\lambda,\sigma)}^{(n,[\mu])}$ défini par une paire (λ, σ), et pour tout morphisme $\beta : \mathfrak{W}' \to \mathfrak{W}$ dans la catégorie $\overrightarrow{\mathfrak{D}}$, il existe des isomorphismes $\phi' : \mathfrak{W}' \xrightarrow{\sim} \mathfrak{W}'_{(\lambda,\sigma')}$ et $\phi : \mathfrak{W} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{W}_{(\lambda,\sigma)}$ tels que $\phi' \circ \beta = \beta(\tau) \circ \phi$.*

Pour terminer ce chapitre, nous mettons en pratique l'ensemble des techniques développées ci-dessus pour décrire un exemple analogue à celui donné par Bandman et Makar-Limanov [**1**].

Exemple 9.2.9. Soit $\delta' : X(3) \to X$ la 3-duplication de $D = \operatorname{div}(x)$ dans $X = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x])$, obtenue en remplaçant le point fermé $\{0\}$ par trois points $x'_{1,1}$, $x'_{2,1}$ et $x'_{2,2}$, et soit $\pi' : W_{(2,\sigma')} \stackrel{\rho(3)}{\to} X(3) \stackrel{\delta'}{\to} X$ le schéma de Danielewski-Fieseler défini par le multi-indice $[\mu'] = (1,0,0)$ et la paire $(2,\sigma')$, où

$$\sigma' = \left\{\sigma'_{1,1}, \sigma'_{2,1}, \sigma'_{2,2}\right\} \in C^0\left(\mathcal{U}_{(3)}, \mathcal{O}\left[\hat{2}\right]\right) = \bigoplus_{i=1}^{3} \Gamma\left(X, \mathcal{O}_X(2D)\right) \simeq \bigoplus_{i=1}^{3} x^{-2}\mathbb{C}[x]$$

est la cochaîne définie par $\sigma'_{1,1} = -x^2$, $\sigma'_{2,1} = -x^{-1}$ et $\sigma'_{2,2} = 0$.

De même, soit $\delta : X(2) \to X$ la 2-duplication obtenue en remplaçant $\{0\}$ par deux points $x_{1,1}$ et $x_{1,2}$, et soit $\pi : W_{(2,\sigma)} \stackrel{\rho(2)}{\to} X(2) \stackrel{\delta}{\to} X$ le schéma de Danielewski-Fieseler défini par le multi-indice $[\mu] = (1,1)$ et la paire $(2,\sigma)$, où $\sigma \in C^0\left(\mathcal{U}_{(2)}, \mathcal{O}\left[\hat{2}\right]\right)$ désigne la cochaîne définie par $\sigma_{1,1} = -x^2$ et $\sigma_{1,2} = 0$.

Considérons maintenant l'unique morphisme de duplications $\alpha : X(3) \to X(2)$ tel que $\alpha\left(x'_{1,1}\right) = x_{1,1}$ et $\alpha\left(x'_{2,i}\right) = x_{1,2}$, $i = 1,2$. On a alors $[\mu_\alpha] = (1,1,1) \in \mathbb{Z}^3_{\geq 0}$, tandis que la 0-cochaîne $\sigma_\alpha = \alpha^*\sigma \in C^0\left(\mathcal{U}_{(3)}, \mathcal{O}\left[\hat{2}\right]\right)$ est donnée par $(\sigma_\alpha)_{1,1} = -x^{-2}$ et $(\sigma_\alpha)_{2,i} = 0$, $i = 1,2$.

La relation $\sigma' = \sigma_\alpha + \theta_{[\mu_\alpha],2}(\tau)$ est alors satisfaite dans $C^0\left(\mathcal{U}_{(3)}, \mathcal{O}\left[\hat{2}\right]\right)$ pour la cochaîne $\tau \in C^0\left(\mathcal{U}_{(3)}, \mathcal{O}[\mu_\alpha]\right)$ définie par $\tau_{1,1} = 0$, $\tau_{2,1} = -x^{-1}$ et $\tau_{2,2} = 0$. Ces données correspondent donc à un morphisme de schémas de Danielewski-Fieseler $\beta : W'_{(2,\sigma')} \to W_{(2,\sigma)}$, ayant α pour morphisme de duplication sous-jacent, et tel que $\psi_{(2,\sigma')} = \psi_{(2,\sigma)} \circ \beta$.

On déduit de la correspondance (7.2.5) que $\pi : W_{(2,\sigma)} \to X$ s'identifie au schéma de Danielewski-Fieseler défini par le multi-indice $(1,1) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ et la paire $(2,\tilde{\sigma})$, où $\tilde{\sigma}_{1,1} = -1$ et $\tilde{\sigma}_{1,2} = 0$. De même $\pi' : W'_{(2,\sigma')} \to X$ s'identifie au schéma de Danielewski-Fieseler défini par le multi-indice $(1,0,0) \in \mathbb{Z}^3_{\geq 0}$ et la paire $\left(2, \tilde{\sigma'}\right)$, où $\tilde{\sigma}'_{1,1} = -1$ et $\tilde{\sigma}'_{1,2} = -x$ et $\tilde{\sigma}'_{2,2} = 0$.

Le même raisonnement que dans l'exemple (7.2.12) montre maintenant que le plongement $\phi : W_{(2,\tilde{\sigma})} \to \mathbb{A}^2_X$ de composantes

$$\phi_1 = \psi_{(2,\tilde{\sigma})} \quad \text{et} \quad \phi_2 = x^{-1}\phi_1(\phi_1 + 1),$$

induit un X-isomorphisme entre $W_{(2,\tilde{\sigma})}$ et la surface $S_1 \subset \mathbb{A}^2_X = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x][y,z])$ d'équation $xz - y(y+1) = 0$. La différence avec l'exemple (7.2.12) consiste cependant dans le fait que le plongement ainsi défini est cette fois $\mathbb{G}_{a,X}$-équivariant lorsque l'on munit S_1 de la restriction de l'action $t \star (x,y,z) = \left(x, y + x^2 t, z + 2xt + x^3 t^2\right)$ sur $\mathbb{A}^2_X$ correspondant à la $\mathbb{C}[x]$-dérivation localement nilpotente

$$\partial = x^2 \frac{\partial}{\partial y} + x(2y+1)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Nous laissons le soin au lecteur de vérifier selon le même procédé que $W'_{(2,\tilde{\sigma}')}$ est X-isomorphe à la surface $S_3 \subset \mathbb{A}^3_X = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x][y,z,u])$ d'équations

$$xz - y(y+1) = 0; \quad yu - z^2(z+1) = 0; \quad xu - (y+1)z(z+1) = 0,$$

via le plongement défini par le X-morphisme $\phi' : W_{(2,\tilde{\sigma})} \to \mathbb{A}^3_X$ de composantes

$$\phi'_1 = \psi_{(2,\tilde{\sigma}')}, \quad \phi'_2 = x^{-1}\phi'_1(\phi'_1 + 1), \quad \phi'_3 = x^{-1}(\phi'_1 + 1)\phi'_2(\phi'_2 + 1),$$

et que ce plongement est $\mathbb{G}_{a,X}$-équivariant lorsque l'on munit S_3 de la restriction de la $\mathbb{G}_{a,X}$-action sur $\mathbb{A}^3_X$ correspondant à la $\mathbb{C}[x]$-dérivation localement nilpotente

$$\partial' = x^2\frac{\partial}{\partial y} + x(2y+1)\frac{\partial}{\partial z} + ((2z+1)(2y+1)(y+1) + z(z+1)x)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Via ces deux isomorphismes équivariants, le morphisme de schémas de Danielewski-Fieseler $\beta : W'_{(2,\sigma')} \to W_{(2,\sigma)}$ défini ci-dessus s'identifie alors simplement au morphisme $\zeta : S_3 \to S_1$ induit par la restriction de la projection équivariante $p_{x,y,z}$: $\mathbb{A}^3_X \to \mathbb{A}^2_X$, $(x,y,z,u) \mapsto (x,y,z)$, tandis que les morphismes $\mathbb{G}_{a,X}$-équivariant canoniques $\psi_{(2,\sigma')} : W' \to \mathbb{A}^1_X(-2)$ et $\psi_{(2,\sigma)} : W \to \mathbb{A}^1_X(-2)$ s'identifient respectivement aux restrictions des projections équivariantes $p_{x,y} : \mathbb{A}^3_X \to \mathbb{A}^1_X, (x,y,z,u) \mapsto (x,y)$ et $p_{x,y} : \mathbb{A}^2_X \to \mathbb{A}^1_X, (x,y,z) \mapsto (x,y)$.

Notons maintenant $q_3 : S_3 \to X$ et $q_1 : S_1 \to X$ les morphismes induits par les restrictions des projections $p_x : \mathbb{A}^3_X \to X$ et $p_x : \mathbb{A}^2_X \to X$ respectivement. Les courbes $\rho(2)^{-1}(x_{1,i}) \subset W_{(2,\sigma)}$, $i = 1,2$, s'identifient alors aux deux composantes connexes $C_{1,1} = \{x = 0; y = -1\}$ et $C_{1,2} = \{x = 0; y = 0\}$ de la fibre $q_1^{-1}(0)$ tandis que les courbes $\rho(3)^{-1}\left(x'_{1,1}\right)$ et $\rho(3)^{-1}(x_{2,i})$, $i = 1,2$, s'identifient respectivement aux trois composantes connexes

$C'_{1,1} = \{x = 0; y = -1\}$ $C'_{2,1} = \{x = 0, y = 0, z = -1\}$ $C'_{2,2} = \{x = 0, y = 0, z = 0\}$

de la fibre $q_3^{-1}(0)$.

CHAPITRE 10

Propriétés locales des schémas de Danielewski-Fieseler

Par rapport à la base intermédiaire $X(n)$, la structure d'un schéma de Danielewski-Fieseler

$$\pi : W \xrightarrow{\rho(n)} X(n) = X(D,n) \xrightarrow{\delta} X$$

de base (X,D), attaché à un torseur $\rho : V \to X$ sous un fibré en droites $p : L_+ = \mathbf{V}(\mathcal{L})_+ \to X$, est celle d'un torseur sous un fibré en droites $L_n[-\mu]_+$ pour un certain multi-indice $[\mu] \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. En particulier, $\rho(n) : W \to X(n)$ est une fibration affine localement triviale. Il n'en est, en général, pas de même du morphisme composé $\pi : W \to X$. Par exemple, si $n \geq 2$, alors le morphisme $\delta : X(n) \to X$ n'est pas séparé, et l'image inverse $\delta^* V$ du L_+-torseur $\rho : V \to X$ n'est pas séparée au-dessus de X, donc n'est pas affine au dessus de X.

Dans ce chapitre, nous établissons des critères permettant de décider si le morphisme structural $\pi : W \to X$ d'un schéma de Danielewski-Fieseler est un morphisme séparé ou affine. Puisque ces propriétés sont toutes deux locales par rapport à la base X, il suffit d'établir de tels critères lorsque X est un schéma affine. Plus précisément, puisque la restriction $W\mid_{X_*}$ de W au-dessus de l'ouvert $X_* = X \setminus \mathrm{Supp}(D)$ de X est affine au-dessus de X_*, car isomorphe à la restriction de V au-dessus de ce même ouvert, il suffit d'étudier ces questions sur recouvrement de X par des ouverts X_* et $U_\alpha = \mathrm{Spec}(A_\alpha)$ tels que pour tout α les trois conditions suivantes soient satisfaites :

1) $D\mid_{U_\alpha} = \mathrm{div}(f_\alpha)$ pour un certain élément régulier non inversible $f_\alpha \in A_\alpha$.
2) $\mathcal{L}\mid_{U_\alpha} \simeq \mathcal{O}_{U_\alpha}$.
3) $V\mid_{U_\alpha}$ est isomorphe au $\mathbb{G}_{a,U_\alpha}$-torseur trivial $\mathbb{A}^1_{U_\alpha}$.

On se ramène ainsi à ne considérer que des schémas de Danielewski-Fieseler de base $(X = \mathrm{Spec}(A), D = \mathrm{div}(f))$ attachés au $\mathbb{G}_{a,X}$-torseur trivial $\mathbb{A}^1_X$, ce qui permet, en particulier, de mettre à profit les deux descriptions alternatives de ces schémas telles qu'exposées au chapitre 7.

Danielewski **[11]** montre qu'un schéma de Danielewski-Fieseler $\pi : W \to X$ défini par le multi-indice $(0,0) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ et une fonction de transition $\tilde{g}_{12} = a/f^n$, où a et f engendrent l'idéal unité de A, est un schéma affine, isomorphe au spectre de la A-algèbre $A[T_1,T_2]/(f^nT_2 - T_1(T_1+a))$. Dans ce chapitre, nous généralisons ce résultat en donnant des critères pour qu'un schéma de Danielewski-Fieseler défini par un multi-indice $[\mu] \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ et une collection de fonctions de transition $\tilde{g} = \{\tilde{g}_{ij} \in A_f\}_{i,j=1,\ldots,n}$ soit un schéma affine.

Puisque X est par hypothèse un schéma affine, un morphisme $\pi : W \to X$ est séparé (resp. affine) si et seulement si W est un schéma séparé (resp. affine). Un schéma affine étant en particulier un schéma séparé, nous établissons tout d'abord à quelles conditions un schéma Danielewski-Fieseler est séparé. Nous montrons ensuite que sous cetaines hypothèses supplémentaires raisonnables, comme par exemple X localement factoriel, un schéma de Danielewski-Fieseler $\pi : W \to X$ est affine si et seulement si il est séparé.

NOTATION 10.0.10. Nous considérons dans ce chapitre des schémas de Danielewski-Fieseler $\pi : W \overset{\rho(n)}{\to} X(n) \overset{\delta}{\to} X$ de base $(X = \mathrm{Spec}(A), D = \mathrm{div}(f))$, de type $(n, [\mu])$, attachés au $\mathbb{G}_{a,X}$-torseur trivial $p : \mathbb{A}^1_X \to X$. Nous notons simplement $\mathfrak{D}$ la catégorie $\mathfrak{D}^{(\mathcal{O}_X, \mathbb{A}^1_X)}_{/(X,D)}$ correspondante, et nous conservons les notations établies au chapitre 7. En particulier, pour distinguer les deux constructions alternatives de ces schémas, nous notons, comme précédemment, $\tilde{g} = \{\tilde{g}_{ij} \in A_f\}$ les fonctions de transition servant à la construction par recollement (7.1.4), et nous notons $g = \{g_{ij}\} \in C^1(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{O}[\mu])$ le 1-cocycle de Čech correspondant dans l'interprétation en termes de torseurs.

10.1. Schémas de Danielewski-Fieseler séparés

Par définition, un schéma de Danielewski-Fieseler $\pi : W \to X$ de type $(1, [\mu])$, où $\mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, est une image directe du $\mathbb{G}_{a,X}$-torseur trivial $p : \mathbb{A}^1_X \to X$ par l'homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules $s_\mu : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(\mu D)$ défini par la section canonique $s_\mu \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(\mu D))$, donc est affine car isomorphe, une fois muni de sa $\mathbb{G}_{a,X}$-action canonique, à $\mathbb{A}^1_X(-\mu)$ (7.1.3) . Par contre, si $n \geq 2$, alors le morphisme structural $\pi : W \to X$ d'un $(n, [\mu])$-DFS n'est pas, en général, un morphisme séparé. Un exemple typique d'une telle situation est fourni par le $\mathbb{G}_{a,X(n)}$-torseur trivial $W = \mathbb{A}^1_X \times_X X(n)$, image inverse du $\mathbb{G}_{a,X}$-torseur trivial $\mathbb{A}^1_X$ par le morphisme structural $\delta : X(n) \to X$ de la n-duplication de D dans X. Dans ce paragraphe, nous établissons différents critères permettant de décider si un $(n, [\mu])$-DFS $\pi : W \to X$ est séparé. Avant d'établir un critère général, considérons l'exemple explicite suivant, qui illustre le genre de situation que nous cherchons à éviter.

EXEMPLE 10.1.1. Soient $A = \mathbb{C}[x, y]$ et $D = \mathrm{div}(x)$. Posons $B = A/(x - y)$, et considérons le $(2, [\hat{0}])$-DFS $\pi : W \overset{\rho(2)}{\to} X(2) \overset{\delta}{\to} X$ défini par la fonction de transition $\tilde{g}_{12} = x^{-1}y \in A_x$. La restriction de $\pi : W \to X$ au-dessus de la droite $Y = \mathrm{Spec}(B) \subset X$ est alors isomorphe au $(2, [\hat{0}])$-DFS $\pi_Y W\mid_Y \overset{\rho_Y(2)}{\to} Y(2) \overset{\delta_Y}{\to} Y$ de base $\mathbb{A}^1_Y \simeq \mathrm{Spec}(B[T])$ défini par la fonction de transition $\tilde{h}_{12} = 1$. Puisque le cocycle $h_{12} \in \Gamma(Y_{12}(2), \mathcal{O}_{Y(2)})$correspondant à $\tilde{h}_{12}$ est alors un cobord , $\rho_Y(2) : W\mid_Y \to Y(2)$ est isomorphe au $\mathbb{G}_{a,Y(2)}$-torseur trivial, donc admet une section $s : Y(2) \to W\mid_Y$. Ainsi, W contient le schéma $s(Y(2))$ isomorphe à la droite affine à deux origines, donc n'est pas un schéma séparé.

Le résultat suivant montre que le type d'obstruction à la séparation exhibé dans l'exemple précédent est essentiellement le seul.

PROPOSITION 10.1.2. *Pour un schéma de Danielewski-Fieseler $\pi : W \to X$ défini par un multi-indice $[\mu] = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ et des fonctions de transition $\tilde{g} = \{\tilde{g}_{ij} \in A_f\}_{i,j=1,\ldots,n}$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) W est un schéma séparé

2) Pour tout couple d'indices $i \neq j$, les sous A-algèbres $A[\tilde{g}_{ij}]$ et $A[\tilde{g}_{ji}]$ de A_f engendrées respectivement par $\tilde{g}_{ij}$ et $\tilde{g}_{ji}$ sont égales à A_f.

3) Pour tout couple d'indices $i \neq j$ tels que $\mu_i \geq \mu_j$, on a $A[\tilde{g}_{ij}] = A_f$.

DÉMONSTRATION. Les conditions 2) et 3) sont clairement équivalentes car si $\mu_i \geq \mu_j$ et $A[\tilde{g}_{ij}] = A_f$, alors $A[\tilde{g}_{ji}] = A_f$ puisque $\tilde{g}_{ji} = -f^{\mu_j - \mu_i}\tilde{g}_{ij}$ (7.1.4). Montrons maintenant que les assertions 1) et 3) sont équivalentes. Par définition, W est recouvert par les ouverts affines $W_i = W\mid_{X_i(n)} \simeq \mathrm{Spec}(A[T_i])$, $i = 1, \ldots, n$, et les isomorphismes de recollement au-dessus des ouverts $X_{ij}(n) \simeq X_*$ sont induits par les isomorphismes de A_f-algèbres réciproques

$$\begin{cases} \tau_{ij} : A_f[T_i] \to A_f[T_j], T_i \mapsto \tilde{g}_{ij} + f^{\mu_i - \mu_j}T_j \\ \tau_{ji} : A_f[T] \to A_f[T], T_i \mapsto \tilde{g}_{ji} + f^{\mu_j - \mu_i}T_j \end{cases}$$

D'autre part, pour tout couple d'indices $i \neq j$, $W_i \cap W_j = W_*$ est affine puisqu'il s'identifie à la restriction $\mathbb{A}^1_{X_*} \simeq \mathrm{Spec}\,(A_f\,[T])$ du fibré trivial $p : \mathbb{A}^1_X \to X$ au dessus de X_*. Dans ces conditions, d'après EGA I.5.5.6, $\pi : W \to X$ est séparé si et seulement si, pour tout couple d'indices $i \neq j$, l'anneau $A_f\,[T]$ est engendré par la réunion des images canoniques des anneaux $A\,[T_i]$ et $A\,[T_j]$. Selon que l'on privilégie τ_{ij} ou τ_{ji}, ces sous-anneaux sont les sous A-algèbres

$$A_{ij} = A\left[T, \tilde{g}_{ij} + f^{\mu_i - \mu_j} T\right] \subset A_f\,[T] \quad \text{et} \quad A_{ji} = A\left[T, \tilde{g}_{ji} + f^{\mu_j - \mu_i} T\right] \subset A_f\,[T]\,.$$

Quitte à permuter i et j, nous pouvons supposer $\mu_i \geq \mu_j$, de sorte que A_{ij} est isomorphe à la sous-A-algèbre $A\,[\tilde{g}_{ij}, T]$ de $A_f\,[T]$ engendrée par $\tilde{g}_{ij}$ et T. Il est alors clair que $A\,[\tilde{g}_{ij}, T] = A_f\,[T]$ si et seulement si $A\,[\tilde{g}_{ij}] = A_f$, ce qui démontre la proposition. □

Ainsi, pour vérifier qu'un schéma de Danielewski-Fieseler $\pi : W \to X$ est séparé, il suffit de montrer qu'il est isomorphe à un schéma de ce type défini par des fonctions de transition satisfaisant la condition 2) de la proposition (10.1.2). Cela revient donc à déterminer sous quelles conditions un élément $g \in A_f$ engendre A_f comme A-algèbre. Pour cela, on dispose du critère suivant :

LEMME 10.1.3. *Pour qu'un élément $g \in A_f$ engendre A_f comme A-algèbre, il faut et il suffit qu'il puisse s'écrire sous la forme $g = h^{-1}a$ pour deux éléments $a, h \in A$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

a) h est régulier, $h^{-1} \in A_f$, et engendre A_f comme A-algèbre.

b) il existe $k \geq 1$ tel que $h^{k-1} \in (a,h)^k$.

Si de plus f est un produit fini $f = f_1^{r_1} \cdots f_m^{r_m}$ de puissances d'éléments irréductibles $f_i \in A$ non inversibles, alors g engendre A_f si et seulement si il peut être écrit sous la forme $g = h^{-1}a$, où h satisfait la condition a) et $aA + hA = A$.

DÉMONSTRATION. Les conditions sont suffisantes puisque qu'elle garantissent, dans les deux cas, que $A_f = A\left[h^{-1}\right] \subset A\,[g]$, et donc que $A\,[g] \subset A_f$ est égal à A_f. Réciproquement, pour qu'un élément $f^{-m}a \in A_f$, où $a \in A$, engendre A_f il faut et il suffit que $m \geq 1$ et qu'il existe $b_0, \ldots, b_n \in A$, où $n \geq 1$, tels que $f^{-m} = \sum_{i=0}^{n} b_i a^i f^{-mi}$. Puisque f est régulier, cette égalité est équivalente à l'existence d'une relation $f^{m(n-1)} = \sum_{i}^{n} b_i a^i f^{m(n-i)}$ dans A. La première partie de l'énoncer s'obtient alors en posant $h = f^m$ et $k = n$.

Supposons maintenant que f soit un produit fini $f_1^{r_1} \cdots f_m^{r_m}$ d'éléments irréductibles $f_i \in A$ non inversibles et deux à deux distincts. Puisque $g \in A_f$ engendre A_f comme A-algèbre, il existe $a \in A$ n'appartenant à aucun des idéaux (f_i), des entiers $s_i \geq 1$, et $n \geq 1$ éléments $b_0, \ldots, b_n \in A$ tels que $g = h^{-1}a$, où $h = f^{s_1} \cdots f^{s_m}$, et $h^{-1} = b_0 + b_1 a h^{-1} + \ldots + b_n a^n h^{-n} \in A\,[g]$. Puisque h est régulier, cette égalité équivaut à l'existence d'un élément $c \in A$ tel que la relation $h^{n-1} = b_0 h^n + ca$ soit satisfaite dans A. Si $n \neq 1$ alors c est dans l'idéal engendré par h^{n-1} car les f_i sont irréductibles et $a \notin (f_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, m$, de sorte qu'il existe $d \in A$ tel que $1 = b_0 h + da$, ce qui termine la preuve. □

On en déduit en particulier une version générale des critères de séparation [**17**, Proposition 1.4] et [**14**, Proposition 2.6].

COROLLAIRE 10.1.4. *Soit $\pi : W \to X$ un schéma de Danielewski-Fieseler de base (X, D), de type $(n, [\mu])$, défini par un cocycle de Čech $g = \{g_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n} \in C^1\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{O}\,[\mu]\right)$. Supposons satisfaite l'une des hypothèses supplémentaires suivantes :*

a) $X \simeq$ Spec $(k\,[x])$, où k est un corps, et $f = x^n$, où $n \geq 1$.

b) X est le spectre d'un anneau de valuation discrète R, de paramètre uniformisant h, et $f = h^n$ où $n \geq 1$.
Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1) W est séparé.

2) Pour tout couple d'indices $i \neq j$, $g_{ij} \in \Gamma(X_{ij}(n), \mathcal{O}[\mu])$ n'est pas dans l'image de la différentielle

$$\Gamma(X_j(n), \mathcal{O}[\mu]) \oplus \Gamma(X_j(n), \mathcal{O}[\mu]) \stackrel{res_i - res_j}{\longrightarrow} \Gamma(X_{ij}(n), \mathcal{O}[\mu]).$$

3) Pour tout couple d'indices $i \neq j$, les fonctions de transition $\tilde{g}_{ij} \in A_f$ et $\tilde{g}_{ji} \in A_f$ correspondant au cocycle g_{ij} ont un pôle le long de $D = div(f)$.

4) Pour tout couple d'indices $i \neq j$ tels que $k_i \geq k_j$, $-ord_D(\tilde{g}_{ij}) \geq 1$.

Démonstration. Nous nous bornons à donner la preuve sous l'hypothèse a), l'argument se transposant de manière évidente au cas b). Notons tout d'abord que quitte à remplacer le multi-indice $[\mu]$ par le multi-indice $n \cdot [\mu]$ on peut supposer que $n = 1$. Sous l'hypothèse a), nous pouvons écrire les fonctions de transition $\tilde{g}_{ij}, \tilde{g}_{ji} \in k[x, x^{-1}]$ sous la forme

$$\tilde{g}_{ij} = x^{-n_{ij}} P_{ij}(x), \quad \text{et} \quad \tilde{g}_{ij} = -x^{-n_{ij}+k_j-k_i} P_{ij}(x)$$

où $P_{ij} = a_n x^n + \ldots + a_0 \in K[x]$ est un polynôme soit nul, soit de terme constant a_0 non nul, et $n_{ij} \in \mathbb{Z}$. Pour que $\tilde{g}_{ij}$ engendre $k[x, x^{-1}]$ comme $k[x]$-algèbre, il faut et il suffit alors que P_{ij} soit non nul et que $n_{ij} \geq 1$. De même, $k[x][\tilde{g}_{ji}] = k[x, x^{-1}]$ si et seulement si $n_{ji} = n_{ij} + k_i - k_j \geq 1$. Les assertions 3) et 4) sont donc équivalentes, et l'équivalence des assertions 1), 3) provient alors, via le lemme (10.1.3), de la proposition (10.1.2). La condition 2) signifie que $g_{ij} \in \Gamma(X_{ij}, \mathcal{O}[\mu]) \simeq k[x, x^{-1}]$ ne peut pas s'écrire sous la forme $x^{-\mu_j} a_j - x^{-\mu_i} a_i$, où $a_i, a_j \in k[x]$, ce qui revient à dire, en supposant que $\mu_i \geq \mu_j$, que g_{ij} ne peut pas s'écrire sous la forme $x^{-\mu_i} a_{ij}$ où $a_{ij} \in k[x]$. On en conclut que les assertions 2) et 4) sont équivalentes puisque par définition $\tilde{g}_{ij} = \zeta_\mu(g_{ij}) = a_{ij}$ (cf. 9.1.2). □

10.2. Schémas de Danielewski-Fieseler affines

Maintenant que nous disposons d'un critère permettant de décider si un schéma de Danielewski-Fieseler $\pi : W \to X$ de base $(X = \mathrm{Spec}(A), D = \mathrm{div}(f))$ est un schéma séparé, nous aimerions naturellement pouvoir déterminer lesquels parmi ces derniers sont des schémas affines. Nous ne disposons malheureusement pas d'une caractérisation complète de ces schémas. Nous nous contenterons donc du résultat partiel suivant :

Théorème 10.2.1. *Soit $\pi : W \to X$ un schéma de Danielewski-Fieseler de base $(X = Spec(A), D = div(f))$ de type $(n, [\mu])$, où $n \geq 2$. Si X admet un recouvrement par des ouverts affines $U_\alpha = Spec(A_\alpha)$ tels que pour tout α l'image de f_α de f dans A_α soit un produit fini de puissances d'éléments irréductibles $f_{\alpha,i} \in A_\alpha$, alors W est affine si et seulement si il est séparé.*

10.2.2. Pour que W soit un schéma affine, il faut et il suffit, puisque X est affine, que $\pi : W \to X$ soit un morphisme affine. L'énoncé du théorème (10.2.1) étant de nature locale par rapport à X, il suffit donc de le démontrer dans le cas où f est un produit fini $f_1^{r_1} \cdots f_m^{r_m}$ de puissances d'éléments irréductibles $f_i \in A$ deux à deux distincts. La stratégie consiste alors à construire X-morphisme affine $\psi : W \to \mathbb{A}^1_X$. Cela prouvera en effet que W est affine au-dessus de $\mathbb{A}^1_X$, donc que $\pi : W \to X$ est un morphisme affine.

Pour simplifier, nous supposons dans un premier temps que $f = h^r$, où $h \in A$ est irréductible, régulier et non inversible. Pour tout $n \geq 2$, la n-duplication $\delta : X(n) \to X$ de $D = \mathrm{div}(f)$ dans $X = \mathrm{Spec}(A)$ ne dépend que du support $V(f)$ de D et non du sous-schéma fermé $\mathrm{Spec}(A/f)$ défini par D. D'autre part, il y a une correspondance biunivoque entre les schémas de Danielewski-Fieseler de base $(X, D = \operatorname{div}(f))$ définis par un multi-indice $[\mu] = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ et les schémas de Danielewski-Fieseler de base $\left(X, \tilde{D} = \operatorname{div}(h)\right)$ définis par le multi-indice $r \cdot [\mu] = (r\mu_1, \ldots, r\mu_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. On peut supposer dès le départ que $f \in A$ est lui-même irréductible. La proposition suivante démontre alors le théorème (10.2.1) dans ce cas particulier.

Proposition 10.2.3. *Un schéma de Danielewski-Fieseler $\pi : W \overset{\rho(n)}{\to} X(n) \overset{\delta}{\to} X$ de base $(X = Spec(A), D = div(f))$, où $f \in A$ est irréductible, est affine si et seulement s'il est séparé.*

Démonstration. Si $n = 1$ alors W est affine car isomorphe, en tant que X-schéma, à $\mathbb{A}^1_X$. Nous pouvons donc supposer dorénavant que $\pi : W \to X$ est défini par un multi-indice $[\mu] = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, où $n \geq 2$. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, la restriction

$$\pi_i = \pi \mid_{\hat{W}_i}: \hat{W}_i = W \mid_{\hat{X}_i(n)} \overset{\rho_i(n-1)}{\longrightarrow} X(n-1) \to X$$

de W au-dessus de l'ouvert $\hat{X}_i(n) = X(n) \setminus \operatorname{Supp}(D_i(n)) \simeq X(n-1)$ est un schéma de Danielewski-Fieseler de type $(n-1, [\mu]_i)$, où $[\mu]_i = (\mu_1, \ldots, \hat{\mu}_i, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^{n-1}_{\geq 0}$. Le critère de séparation (10.1.2) ne faisant intervenir que des couples d'indices $i \neq j$, nous procédons donc par récurrence sur n, en supposant que $\hat{W}_i$ est affine pour tout $i = 1, \ldots, n$. Puisque W est par hypothèse séparé, le lemme (10.1.3) garantit qu'il existe une collection de fonctions de transition $\tilde{g} = \{\tilde{g}_{ij} \in A_f\}_{i,j=1,\ldots,n}$ définissant W, telles que pour tout couple d'indices $i \neq j$, $\tilde{g}_{ij} = f^{-m_{ij}} a_{ij}$ où $m_{ij} \geq 1$ et $a_{ij} \in A$ est premier avec f.

Puisque nous nous intéressons à une propriété de W en tant que schéma, et non en tant que X-schéma avec $\mathbb{G}_{a,X}$-action, nous pouvons supposer, quitte à d'abord réordonner l'ensemble d'indices $\{1, \ldots, n\}$ de sorte que $\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_n$, et à remplacer ensuite $[\mu]$ par le multi-indice $[\mu] - [\hat{\mu}_1]$ (cf. 7.2.8), que $0 = \mu_1 \leq \cdots \leq \mu_n$. Posons alors $m = \max_{i=2,\ldots,n}(m_{1i})$, $\tilde{\sigma}_1 = 0$, et $\tilde{\sigma}_i = f^m \tilde{g}_{1i} \in A$. Notons que $m_{1n} > \mu_n = \max_{i=1,\ldots,n}(\mu_i)$ puisque $\tilde{g}_{n1} = -f^{\mu_n} g_{1n}$ et $m_{n1} \geq 1$. Ces données définissent donc un X-morphisme $\psi = \psi_{(m,\tilde{\sigma})} : W \to \mathbb{A}^1_X$ dont les restrictions ψ_i aux ouverts $W_i = W \mid_{X_i(n)}$ de W correspondent aux homomorphismes de A-algèbres

$$\psi_i^* : A[T] \to A[T_i], T \mapsto \tilde{\sigma}_i + f^{m-\mu_i} T_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

induisant eux-mêmes les homomorphismes de $A/(f)$-algèbres

$$\bar{\psi}_i^* : (A/(f))[T] \to (A/(f))[T_i], T \mapsto \overline{\tilde{\sigma}_i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Notons $p : \mathbb{A}^1_X \to X$ le morphisme structural, et montrons que ψ est un morphisme affine. Par choix de m, il existe un indice i_0, $2 \leq i_0 \leq n$, tel que $m - \mu_{i_0} = m_{i_0}$ et $\tilde{\sigma}_{i_0} = a_{1i_0}$ est premier avec f. Puisque $\tilde{\sigma}_1 = 0$, les éléments f, $T - \tilde{\sigma}_1$ et $T - \tilde{\sigma}_{i_0}$ engendrent l'idéal unité de $A[T]$, de sorte que les trois ouverts affines principaux $U_0 = \left(\mathbb{A}^1_X\right)_{T-\tilde{\sigma}_{i_0}}$, $U_1 = \left(\mathbb{A}^1_X\right)_{T-\tilde{\sigma}_1}$ et $U_* = \left(\mathbb{A}^1_X\right)_f = p^{-1}(X_*)$ forment un recouvrement de $\mathbb{A}^1_X$. Par construction, $\psi^{-1}(U_*) = \psi^{-1}\left(p^{-1}(X_*)\right) = \pi^{-1}(X_*) = W \mid_{X_*}$ est isomorphe à $\mathbb{A}^1_{X_*}$ donc est affine. Par construction, les images des diviseurs $\mathbb{A}^1_{D_i(n)} = \rho(n)^{-1}(\operatorname{Supp}(D_i(n)))$ par ψ sont des sections du fibré trivial $p^{-1}(D)$ au-dessus de D. En particulier, $\psi\left(\mathbb{A}^1_{D_1(n)}\right)$ est la section nulle de ce fibré puisque $\tilde{\sigma}_1 = 0$ tandis que $\psi\left(\mathbb{A}^1_{D_{i_0}(n)}\right)$ est une section partout non nulle puisque $\tilde{\sigma}_{i_0}$ est premier avec f, donc inversible modulo f. Par conséquent, $\psi^{-1}(U_0) \subset \hat{W}_1$ et $\psi^{-1}(U_1) \subset \hat{W}_{i_0}$. Or, par hypothèse de récurrence, $\hat{W}_1$ et $\hat{W}_{i_0}$ sont tous deux affines au-dessus de X. La restriction de ψ à ces deux ouverts de W étant un X-morphisme affine puisque $\mathbb{A}^1_X$ est lui-même affine sur X, cela entraîne que $\psi^{-1}(U_0)$ et $\psi^{-1}(U_1)$ sont des ouverts affines de $\hat{W}_1$ et $\hat{W}_{i_0}$ respectivement, donc des ouverts affines de W. Ainsi W est affine au-dessus de $\mathbb{A}^1_X$, donc est affine au dessus de X. □

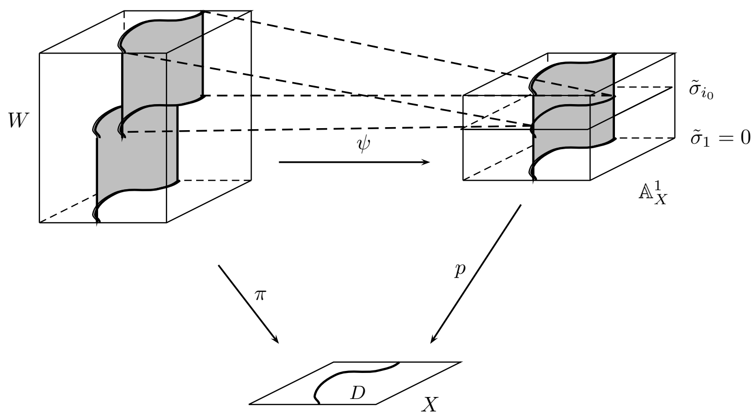


FIG. 10.2.1. Construction d'un X-morphisme affine $\psi : W \to \mathbb{A}^1_X$.

10.2.4. Pour terminer la preuve du théorème (10.2.1), il reste à montrer que si $f = f_1^{r_1} \cdots f_s^{r_s}$, où $s \geq 2$, et où les $f_i \in A$ sont des éléments réguliers irréductibles et non inversibles deux à deux distincts, alors un schéma de Danielewski-Fieseler séparé $\pi : W \to X$ de base $(X = \mathrm{Spec}(A), D = \mathrm{div}(f))$, défini par un multi-indice $[\mu] \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, est un schéma affine.

Si X est recouvert par les ouverts principaux $\hat{U}_i = X_{\hat{f}_i}$ correspondant aux éléments réguliers $\hat{f}_i = \prod_{j \neq i} f_j \in A$, $i = 1, \ldots, m$, ce qui revient à dire que les composantes irréductibles de $D = \mathrm{div}(f)$ sont ses composantes connexes, alors le résultat est une conséquence de la proposition (10.2.3) puisque la restriction de f à chacun de ces ouverts $\hat{U}_i$ est une puissance d'un élément irréductible. Il suffit donc montrer que si les ouverts $\hat{U}_i$ ne recouvrent pas X, alors tout point fermé $x \in X \setminus \bigcup_{k=1}^{s} \hat{U}_s \subset \mathrm{Supp}(D)$ admet un voisinage affine $U_x \subset X$ tel que la restriction $W|_{U_x}$ de W soit affine au-dessus de U_x. On se ramène alors à la situation où $x \in X$ correspond à un idéal maximal $\mathfrak{m} \subset A$ tel $f_i \in \mathfrak{m}$ pour tout $i = 1, \ldots, s$.

PROPOSITION 10.2.5. *Sous les hypothèses précédentes, si $\pi : W \to X$ est un schéma séparé, alors W est un schéma affine.*

DÉMONSTRATION. On peut supposer, comme dans la preuve de la proposition (10.2.3) que $0 = \mu_1 \leq \cdots \leq \mu_n$. Puisque W est séparé, il existe une collection de fonctions de transitions $\tilde{g}_{ij} = f_1^{-m_{ij,1}} \cdots f_s^{-m_{ij,s}} a_{ij} \in A_f$ définissant W, où pour tout $k = 1, \ldots, s$, $m_{ij,k} \geq 1$, et où $a_{ij} \in A$ est premier avec f_k. Supposons alors qu'il existe un indice i_0 tel que pour tout $k = 1, \ldots, s$ on ait

$$m_{1i_0,k} = \max(m_{1i,k}), \quad i = 2, \ldots, n \; k = 1, \ldots, s.$$

D'après la relation de cocycle $\tilde{g}_{n1} = -f^{\mu_n}\tilde{g}_{1n}$, on a $m_{n1,k} = m_{1n,k} - r_k\mu_n$ pour tout $k = 1, \ldots, n$ puisque $f = f_1^{r_1} \cdots f_s^{r_s}$, de sorte que si un tel indice i_0 existe, alors $m_{1,i_0,k} > r_k\mu_n$ car $m_{n1,k} \geq 1$ par hypothèse. Posons $h = \prod_{k=1}^{s} f_k^{m_{1i_0,k}}$, $\tilde{\sigma}_1 = 0$ et $\tilde{\sigma}_i = h\tilde{g}_{1i} \in A$. Puisque $hf^{-\mu_i}\tilde{g}_{ij} = \tilde{\sigma}_j - \tilde{\sigma}_i$, ces données définissent un X-morphisme $\psi : W \to \mathbb{A}^1_X$ dont les restrictions aux ouverts $W_i = W\mid_{X_i(n)}$ sont induites par les homomorphismes de A-algèbres

$$A[T] \to A[T_i], T \mapsto \tilde{\sigma}_i + hf^{-\mu_i}T_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Puisque $\tilde{\sigma}_1 = 0$ et $\tilde{\sigma}_{i_0}$ est inversible modulo f, on conclut alors, comme dans la preuve de la proposition (10.2.3) que ψ est un morphisme affine, ce qui prouve que W est affine au-dessus de X, donc un schéma affine.

Il suffit donc de montrer qu'un tel indice i_0 existe. Si $n = 2$ alors l'assertion est évidente. Nous supposons dorénavant que $n \geq 3$, et nous associons à tout indice $i = 2, \ldots, n$, le s-uplet d'entiers

$$\upsilon_i = (m_{1i,1}, \ldots, m_{1i,s}) \in \mathbb{Z}^s_{\geq 0}.$$

Il suffit alors de montrer que le sous-ensemble $\{\upsilon_2, \ldots, \upsilon_n\}$ de $\mathbb{Z}^s_{\geq 0}$ est totalement ordonné par la restriction de l'ordre produit $\preceq$, autrement dit que pour tout couple d'indices $i \neq j$, on a soit $\upsilon_i \preceq \upsilon_j$, soit $\upsilon_j \preceq \upsilon_i$. Supposons que cela ne soit pas le cas. Quitte à réordonner l'ensemble d'indices $1, \ldots, s$, nous pouvons alors supposer que $m_{1i,1} < m_{1j,1}$ et $m_{1i,2} > m_{1j,2}$. Posons, pour tout $k = 1, \ldots, m$ $\eta_k = \max(m_{1i,k}, m_{1j,k})$, de sorte que $\eta_1 = m_{1j,1}$ et $\eta_2 = m_{1i,2}$. Puisque $\mu_1 = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{ij} &= f^{\mu_i}(\tilde{g}_{1j} - \tilde{g}_{i1}) = f^{\mu_i}\left(\prod f_k^{-m_{1j,k}}a_{1j} - \prod f_k^{m_{1i,k}}a_{1i}\right) \\
&= f^{\mu_i}\prod f_k^{-\eta_k}\left(f_2^{\eta_2 - m_{1j,2}}\prod_{k\geq 3} f_k^{\eta_k - m_{1j,k}}a_{1j} - f_1^{\eta_1 - m_{1i,1}}\prod_{k\geq 3} f_k^{\eta_k - m_{1i,k}}a_{1i}\right) \\
&= \prod f_k^{r_k\mu_i - \eta_k}b_{ij} = \prod f_k^{-m_{ij,k}}a_{ij}
\end{aligned}$$

Puisque par hypothèse $a_{1j} \notin (f_1)$ et $a_{1i} \notin (f_2)$, nous concluons qu'il en est de même de b_{ij}. Par contre, b_{ij} appartient à l'idéal engendré par f_1 et f_2 puisque $\eta_2 - m_{1j,2} \geq 1$ et $\eta_1 - m_{1i,1} \geq 1$. On en conclut que $a_{ij} \in (f_1, f_2) \subset \mathfrak{m}$, ce qui contredit le choix de a_{ij}. □

La caractérisation des schémas de Danielewski-Fieseler affines conduit, dans le cas d'une base X générale, aux résultats suivants :

Théorème 10.2.6. *Soit $\pi : W \to X$ un schéma de Danielewski-Fieseler de base (X, D), attaché à un torseur $\rho : V \to X$ sous un fibré en droites $p : L = \mathbf{V}(\mathcal{L}) \to X$ défini par un $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}$. Si X est localement factoriel, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $\pi : W \to X$ est un morphisme séparé.

b) $\pi : W \to X$ est un morphisme affine.

Démonstration. Puisque X est localement factoriel, il existe un recouvrement de X par des ouverts affines $U_\alpha = \mathrm{Spec}(A_\alpha)$ tels que pour tout α, $D\mid_{U_\alpha} = \mathrm{div}(f_\alpha)$ où $f_\alpha \in A_\alpha$ est un produit de puissances d'éléments irréductibles. Le résultat découle donc du théorème (10.2.1). □

Théorème 10.2.7. *Soit $\pi : W \to X$ un schéma de Danielewski-Fieseler de base (X, D), attaché au torseur trivial $\rho : L \to X$ sous un fibré en droites $L_+ = \mathbf{V}(\mathcal{L})_+$ défini par un $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}$. Si $\pi : W \to X$ est affine, alors W est isomorphe à une pseudo-modification affine équivariante (4.2.5) du torseur trivial $L(-\lambda) = \mathbf{V}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{J}_X(\lambda D))$ pour un certain entier $\lambda \geq 1$.*

Démonstration. D'après le théorème (9.1.8), $W \simeq \mathbf{W}\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{L}[-\mu], g_{(\lambda,\sigma)}\right)$ pour un certain entier $\lambda \geq \max\limits_{i=1,\ldots,n}(\mu_i)$, et une 0-cochaîne $\sigma \in C^0\left(\mathcal{U}_{(n)}, \mathcal{L}^\vee\left[\hat{\lambda}\right]\right)$. Puisque W est affine au-dessus de X, le X-morphisme L_+-équivariant canonique $\psi_{(\lambda,\sigma)} : W \to L(-\lambda)$ est un morphisme affine de type fini, dont la restriction au dessus de X_* est un X-isomorphisme équivariant. Ainsi $\psi_{(\lambda,\sigma)} : W \to L(-\lambda)$ est une pseudo-modification affine équivariante de $L(-\lambda)$. $\square$

CHAPITRE 11

Exemples de schémas de Danielewski-Fieseler affines

Étant donné un schéma affine $X = \mathrm{Spec}(A)$, où A est une algèbre de type fini sur un corps k de caractéristique nulle, nous étudions plus en détail dans le présent chapitre, un cas particulier de schémas affines $\pi : V_{\mathfrak{g}} \to X$ définis par des arbres $A[t]$-pondérés $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$ suivant le procédé du chapitre (6). Nous montrons que sous certaines hypothèses aisément vérifiables portant sur la fonction de poids $w : E(\Gamma) \to A[t]$, les schémas $V_{\mathfrak{g}}$ correspondants sont des schémas de Danielewski-Fieseler de base X, attachés au $\mathbb{G}_{a,X}$-torseur trivial $p : \mathbb{A}^1_X \to X$. Nous donnons ensuite un algorithme permettant de construire des fonctions de transition pour ces schémas.

Notation 11.0.8. Dans tout ce qui suit, k est un corps de caractéristique nulle, A une k-algèbre de type fini intègre et $f \in A$ est un élément à la fois non nul et non inversible. Nous posons $X = \mathrm{Spec}(A)$, $D = \mathrm{div}(f)$ et $X_* = X \setminus \mathrm{Supp}(D) \simeq \mathrm{Spec}(A_f)$.

11.1. Les schémas de Danielewski-Fieseler $V_{\mathfrak{g}}$

Nous considérons ci-dessous la sous-classe des des arbres $A[t]$-pondérés $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$ satisfaisant les deux propriétés suivantes :

11.1.1. a) Pour tout sommet $e' \in \mathrm{Par}(\Gamma)$ et pour tout $e \in \mathrm{Fils}(e')$, le polynôme $w\left(\overrightarrow{ee'}\right)$ est de la forme $w\left(\overrightarrow{ee'}\right) = a_{ee'} + t \in A[t]$ pour un certain élément $a_{ee'} \in A$.

b) Pour tout $e' \in \mathrm{Par}(\Gamma)$ et tout couple $e_1, e_2 \in \mathrm{Fils}(e')$, les coefficients $a_{e_1,e'}$ et $a_{e_2,e'}$ sont premiers entre eux, *i.e.* $a_{e_1e'}A + a_{e_2e'}A = A$, et l'image de $a_{e_1e'} - a_{e_2e'}$ dans A/fA est un élément inversible.

11.1.2. Nous allons montrer que ces hypothèses garantissent que les schémas $V(\mathfrak{g})$ et $V_{\mathfrak{g}}$ (6.1.9,6.1.11) associés à l'arbre $\mathfrak{g}$ coïncident. Cela nous permettra en particulier de travailler par la suite directement avec l'idéal $I(\mathfrak{g})$ dont on connaît explicitement les générateurs. Rappelons brièvement (6.1.9) qu'étant donné un arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$ quelconque, on note $I(\mathfrak{g})$ l'idéal de $A[\Gamma] = A\left[X_0, (X_e)_{e \in \mathrm{Par}(\Gamma)}\right]$ engendré par les polynômes suivants

$$\left\{\begin{array}{lclc} \Delta_e(\mathfrak{g}) & = & fX_e - G_e(\mathfrak{g}) & e \in \mathrm{Par}(\Gamma) \\ \Delta_{e'<e}(\mathfrak{g}) & = & w\left(\overrightarrow{e''e'}\right)\left(X_{\mathrm{Par}(e')}\right)X_e - X_{e'}G_{e'<e}(\mathfrak{g}) & \begin{array}{c}(e,e') \in \mathrm{Par}(\Gamma) \times \mathrm{Anc}(e) \\ e'' = \mathrm{Fils}(e') \cap (\downarrow e)_\Gamma\end{array} \end{array}\right.$$

et que l'on note $I_{\mathfrak{g}} = \{a \in A[\Gamma]\,,\, fa \in I(\mathfrak{g})\} \subset A[\Gamma]$. Par définition, $I_{\mathfrak{g}}$ est le plus petit idéal I de $A[\Gamma]$ contenant $I(\mathfrak{g})$ pour lequel l'image de f dans $A[\Gamma]/I$ ne soit pas un diviseur de zéro. Les sous-schémas fermés de $\mathbb{A}_X^{d(\Gamma)+1} = \mathrm{Spec}(A[\Gamma])$ définis par les idéaux $I(\mathfrak{g})$ et $I_{\mathfrak{g}}$ sont notés respectivement $V(\mathfrak{g})$ et $V_{\mathfrak{g}}$. Le résultat suivant montre donc que sous les hypothèses (11.1.1), les idéaux $I(\mathfrak{g})$ et $I_{\mathfrak{g}}$ de $A[\Gamma]$ coïncident.

Théorème 11.1.3. *Pour tout arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$ satisfaisant aux hypothèses (11.1.1), le schéma $V(\mathfrak{g}) = \mathrm{Spec}(A[\Gamma]/I(\mathfrak{g}))$ est intègre.*

11.1.4. La suite de ce paragraphe est consacrée à la preuve du théorème (11.1.3). Il suffit de montrer que sous les hypothèses introduites, l'image de $f \in A$ dans $B = A[\Gamma]/I(\mathfrak{g})$ n'est pas un diviseur de zéro dans B. En effet, si c'est le cas, alors le même raisonnement qu'en (6.3.2) montre que B s'identifie à une sous-algèbre de $B_f \simeq A_f[X_0]$, donc est un anneau intègre puisque A_f en est un. Pour vérifier que f n'est pas un diviseur de zéro, il suffit de trouver un recouvrement ouvert particulier de $V(\mathfrak{g})$ par des ouverts principaux $\mathrm{Spec}(B_{h_i})$, où les $h_i \in B$ engendrent l'idéal unité de B, tel que pour tout i, l'image canonique de f dans B_{h_i} ne soit pas un diviseur de zéro. Or, les hypothèses (11.1.1) impliquent justement que $V(\mathfrak{g})$ admet un recouvrement ouvert naturel par des ouverts principaux.

LEMME 11.1.5. *Sous les hypothèses (11.1.1), le schéma $V(\mathfrak{g})$ est recouvert par les ouverts principaux $D(A_e(\mathfrak{g})) \cap V(\mathfrak{g}) \simeq Spec(A[\Gamma][T]/(I(\mathfrak{g}), A_e(\mathfrak{g})T-1))$ où e parcourt l'ensemble $Fe(\Gamma)$ des feuilles de Γ.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que les polynômes des ancêtres $A_e(\mathfrak{g})$, où e parcourt l'ensemble des feuilles de Γ, engendrent l'idéal unité de $A[\Gamma]$, autrement dit, que les ouvert principaux $D(A_e(\mathfrak{g}))$ recouvrent $\mathrm{Spec}(A[\Gamma])$. Par hypothèse, pour tout sommet $e' \in \mathrm{Par}(\Gamma)$, les polynômes $w\left(\overrightarrow{ee'}\right)$, où e parcourt l'ensemble des fils de e', sont deux à deux premiers entre eux. Par conséquent, pour tout sommet $e' \in \mathrm{Par}(\Gamma)$, les polynômes

$$F_{e'}^{\{e\}}(\mathfrak{g}) = \prod_{e'' \in \mathrm{Fils}(e') \setminus \{e\}} w\left(\overrightarrow{e''e'}\right)\left(X_{\mathrm{Par}(e')}\right) \in A\left[X_{\mathrm{Par}(e')}\right],$$

où $e \in \mathrm{Fils}(e')$, et où, par convention, $F_{e'}^{\{e\}}(\mathfrak{g}) = 1$ si $\mathrm{Fils}(e') = \{e\}$, sont premiers entre eux dans leur ensemble. Il existe donc des polynômes $\Lambda_e \in A[\Gamma]$ tels que

$$A_{e'}(\mathfrak{g}) = A_{e'}(\mathfrak{g}) \sum_{e \in \mathrm{Fils}(e')} \Lambda_e F_{e'}^{\{e\}}(\mathfrak{g}) = \sum_{e \in \mathrm{Fils}(e')} \Lambda_e A_e(\mathfrak{g}),$$

car, par définition, $A_e(\mathfrak{g}) = A_{e'}(\mathfrak{g}) F_{e'}^{\{e\}}(\mathfrak{g})$ pour tout $e \in \mathrm{Fils}(e')$. On déduit récursivement que pour tout $e' \in \mathrm{Par}(\Gamma)$, le polynôme $A_{e'}(\mathfrak{g})$ des ancêtres de e' appartient à l'idéal de $A[\Gamma]$ engendré par les polynômes des ancêtres des feuilles du sous-arbre maximal $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g}(e') = (\Gamma(e'), w)$ enraciné en e'. En particulier, $A_{e_0}(\mathfrak{g}) = 1$ appartient à l'idéal engendré par les polynômes $A_e(\mathfrak{g})$, où e parcourt l'ensemble des feuilles de Γ, ce qui démontre le lemme. ☐

11.1.6. Sous les hypothèses (11.1.1), on a, pour toute feuille $e \in \mathrm{Fe}(\Gamma)$ un isomorphisme $B(e) = B_{\bar{A}_e(\mathfrak{g})} \simeq A[\Gamma][T]/(I(\mathfrak{g}), Q_e)$, où $Q_e = TA_e(\mathfrak{g}) - 1$, et où $\bar{A}_e(\mathfrak{g})$ désigne l'image de $A_e(\mathfrak{g})$ dans $B = A[\Gamma]/I(\mathfrak{g})$. Pour terminer la preuve de (11.1.3), il suffit donc de montrer que pour tout $e \in \mathrm{Fe}(\Gamma)$, l'image canonique de $f \in A$ dans $B(e)$ n'est pas un diviseur de zéro. Pour ce faire, nous procédons en deux étapes. Nous définissons tout d'abord un nouvel idéal $I_{0,e} \subset A[\Gamma][T]$ pour lequel il est facile de vérifier que l'image de f dans $A[\Gamma][T]/(I_{0,e}, Q_e)$ n'est pas un diviseur de zéro. Nous montrons ensuite que les idéaux $(I(\mathfrak{g}), Q_e)$ et $(I_{0,e}, Q_e)$ de $A[\Gamma][T]$ coïncident.

11.1.7. Notons $(\downarrow e)_\Gamma = \{e_0 < e_1 < \cdots < e_{n-1} < e_n = e\}$ la sous-chaîne maximale de Γ correspondant à la feuille e. Par définition du polynôme $A_e(\mathfrak{g})$ des ancêtres de e, $A_{e_{i+1}}(\mathfrak{g})$ divise $A_e(\mathfrak{g})$ pour tout $i = 0, \ldots, n-1$, et

$$L_i = A_{e_{i+1}}^{-1}(\mathfrak{g}) A_e(\mathfrak{g}) \in A[\Gamma], \quad i = 0, \ldots, n-1$$

est un polynôme en les variables $X_{e_i}, \ldots, X_{e_{n-2}}$. Étant donné $e' \in \mathrm{Par}(\Gamma) \setminus (\downarrow e)_\Gamma$, le premier ancêtre commun de e' et e est l'un des sommets e_i, où $i \leq n-1$, de la chaîne $(\downarrow e)_\Gamma$, et l'on a $e'' = \text{Fils}(e_i) \cap (\downarrow e')_\Gamma \neq e_{i+1}$. Dans ces conditions, le polynôme $w\left(\overrightarrow{e''e_i}\right)\left(X_{\text{Par}(e_i)}\right)$ divise donc $A_e(\mathfrak{g})$, et nous posons

$$K_{e'} = \left(w\left(\overrightarrow{e''e_i}\right)\left(X_{\text{Par}(e_i)}\right)\right)^{-1} A_e(\mathfrak{g}) \in k[x]\left[X_0, X_{e_0}, \ldots, X_{e_{n-1}}\right] \subset k[x][\Gamma].$$

Soit maintenant $I_{0,e} \subset A[\Gamma][T]$ l'idéal engendré par les polynômes

$$\begin{cases} \delta_i &= -\left(w\left(\overrightarrow{e_{i+1}e_i}\right)\left(X_{\text{Par}(e_i)}\right)\right) + xX_{e_i}L_iT \quad i = 0, \ldots, n-1 \\ \delta_{e'} &= X_{e'} - TK_{e'}X_{e_i}G_{e_i<e'}(\mathfrak{g}) \quad \begin{array}{c} e' \in \text{Par}(\Gamma) \setminus (\downarrow e)_\Gamma \\ \text{Anc}(e', e) = e_i \end{array} \end{cases}$$

et soit $B_{0,e} = A[\Gamma][T] / (I_{0,e}, Q_e)$.

Lemme 11.1.8. *Il existe un isomorphisme $B_{0,e} \simeq A\left[X_{e_{n-1}}, T\right] / (TP_e - 1)$ pour un certain polynôme $P_e \in A\left[X_{e_{n-1}}, T\right]$.*

Démonstration. D'après les hypothèses (11.1.1), pour tout $i = 0, \ldots, n-2$, il existe $a_{e_{i+1}e_i} \in A$ tel que $w\left(\overrightarrow{e_{i+1}e_i}\right)\left(X_{\text{Par}(e_i)}\right) = a_{e_{i+1}e_i} + X_{\text{Par}(e_i)}$. Puisque L_i est un polynôme en les variables $X_{e_i}, \ldots, X_{e_{n-2}}$, on conclut que par définition des polynômes δ_i, il est possible d'éliminer récursivement toutes les variables $X_0, X_{e_0}, \ldots, X_{e_{n-3}}$, puisque chacune d'elles s'exprime, modulo $I_{0,e}$ en un polynôme en les variables x, $X_{e_{n-1}}$ et T . De même, puisque les polynômes $G_{e_i<e'}$ ne font intervenir que les variables $X_{e''}$ où $e'' \in \text{Anc}(e')$, on conclut que les polynômes $\delta_{e'}$ permettent d'éliminer toutes les variables $X_{e'}$, où $e' \in \text{Par}(\Gamma) \setminus (\downarrow e)_\Gamma$. Enfin, $A_e(\mathfrak{g})$ étant un polynôme en les variables $X_0, X_{e_0}, \ldots, X_{e_{n-1}}$, son image dans $A[\Gamma][T] / I_{0,e} \simeq A\left[X_{e_{n-1}}, T\right]$ est un polynôme P_e, et l'on conclut, par définition de $Q_e = TA_e(\mathfrak{g}) - 1$, que $A[\Gamma][T] / (I_{0,e}, Q_e) \simeq A\left[X_{e_{n-1}}, T\right] / (TP_e - 1)$. □

Lemme 11.1.9. *L'image de f dans $B_{0,e}$ n'est pas un diviseur de zéro.*

Démonstration. Il suffit de montrer que tout polynôme $S \in A\left[X_{e_{n-1}}, T\right]$ satisfaisant une relation de la forme $fS = R(TP_e - 1)$ dans $A\left[X_{e_{n-1}}, T\right]$ pour un certain polynôme $R \in A\left[X_{e_{n-1}}, T\right]$, appartient à l'idéal engendré par $TP_e - 1$. Étant donnée une telle relation, notons

$$R = \sum_{i,j} r_{i,j} X^i_{e_{n-1}} T^j \quad, P_e = \sum_{i,j} p_{i,j} X^i_{e_{n-1}} T^j, \quad \text{et } R(TP_e - 1) = \sum_{i,j} c_{i,j} X^i_{e_{n-1}} T^j,$$

où, pour tout couple d'indices i, j, $c_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=0}^{i} \sum_{l=0}^{j-1} r_{k,l} p_{i-k,j-l-1} - r_{i,j} \in A$. Puisque f divise $R(TP_e - 1)$, il divise donc chacun des coefficients $c_{i,j}$. En particulier, f divise $r_{i,0}$ pour tout $i \geq 0$ puisque l'on a $c_{i,0} = -r_{i,0}$. On conclut alors par récurrence, en supposant que f divise $r_{i,j}$ pour tout $i \geq 0$ et tout $j < j_0$, que f divise r_{i,j_0} pour tout $i \geq 0$. On en déduit que f divise R et que par conséquent $S \in (TP_e - 1)$. □

Pour terminer la preuve du théorème (11.1.3), il ne reste plus qu'à vérifier que les idéaux $(I(\mathfrak{g}), Q_e)$ et (I_0, Q_e) de $A[\Gamma][T]$ coïncident.

Lemme 11.1.10. *Pour tout $e \in Fe(\Gamma)$, les idéaux $(I(\mathfrak{g}), Q_e)$ et $(I_{0,e}, Q_e)$ de $A[\Gamma][T]$ coïncident.*

Démonstration. Les identités

$$\begin{cases} \delta_i &= TL_i\Delta_{e_i}(\mathfrak{g}) + \left(w\left(\overrightarrow{e_{i+1}e_i}\right)\left(X_{\text{Par}(e_i)}\right)\right) Q_e \quad i = 0, \ldots, n-1 \\ \delta_{e'} &= TK_{e'}\Delta_{e_i<e'}(\mathfrak{g}) - X_{e'}Q_e \quad \begin{array}{c} e' \in \text{Par}(\Gamma) \setminus (\downarrow e)_\Gamma \\ \text{Anc}(e', e) = e_i \end{array} \end{cases}$$

garantissent que $(I_{0,e}, Q_e) \subset (I(\mathfrak{g}), Q_e)$. Réciproquement, on déduit des identités

$$\left\{\begin{array}{lcll} \Delta_{e_i}(\mathfrak{g}) & = & A_{e_{i+1}}(\mathfrak{g})\,\delta_i - fX_{e_i}Q_e & i = 0, \ldots, n-1 \\ \Delta_{e'}(\mathfrak{g}) & = & f\delta_{e'} + \left(w\left(\overrightarrow{e_{i+1}e_i}\right)\left(X_{\mathrm{Par}(e_i)}\right)\right) G_{e'}(\mathfrak{g})\,\delta_i & \begin{array}{c} e' \in \mathrm{Par}(\Gamma) \setminus (\downarrow e)_\Gamma \\ \mathrm{Anc}(e', e) = e_i \end{array} \end{array}\right.$$

que tous les polynômes $\Delta_{e'}(\mathfrak{g})$, où $e' \in \mathrm{Par}(\Gamma)$, appartiennent à l'idéal $(I_{0,e}, Q_e)$. Les relations (6.1.10) entraînent alors que pour toute paire $(e', e'') \in \mathrm{Par}(\Gamma) \times \mathrm{Anc}(e')$, le polynôme $f\Delta_{e''<e'}(\mathfrak{g})$ appartient à $(I_{0,e}, Q_e)$. Ainsi $\Delta_{e''<e'}(\mathfrak{g}) \in (I_{0,e}, Q_e)$ car sinon f serait un diviseur de zéro dans $B_{0,e}$, ce qui contredirait (11.1.9). □

11.2. Structure des schémas $V_\mathfrak{g}$

Nous montrons dans le présent paragraphe que tout schéma $V(\mathfrak{g})$ associé à un arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$ satisfaisant les hypothèses (11.1.1) est un schéma de Danielewski-Fieseler. Plus précisément, nous allons établir le résultat suivant :

Théorème 11.2.1. *Pour tout arbre pondéré $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$ satisfaisant les hypothèses (11.1.1), de feuilles $Fe(\Gamma) = \{e_1, \ldots, e_n\}$, le schéma $V(\mathfrak{g})$ est un schéma de Danielewski-Fieseler*

$$\pi : V(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\rho(n)} X(n) = X(D, n) \xrightarrow{\delta} X,$$

de base $(X = Spec(A), D = div(f))$, de type $(n, [\mu])$, où les coefficients du multi-indice $[\mu] \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ sont définis par $\mu_i = h(\Gamma) - l(\downarrow e_i)_\Gamma$, $i = 1, \ldots, n$, associé au $\mathbb{G}_{a,X}$-torseur trivial $\mathbb{A}^1_X = Spec(A[X_0])$.

11.2.2. La preuve du théorème (11.2.1) se décompose en plusieurs étapes. Puisque $V(\mathfrak{g}) = V_\mathfrak{g}$ d'après (11.1.3), on sait (6.3.1) que la restriction de $V(\mathfrak{g})$ au-dessus de X_* est isomorphe au fibré trivial $\mathbb{A}^1_{X_*}$. Nous commençons donc par étudier en détail la fibre $\pi^{-1}(D)$ du morphisme structural $\pi : V(\mathfrak{g}) \to X$. La description de cette fibre fait l'objet de la proposition (11.2.8) ci-dessous et permet de déduire que π se factorise, via la n-duplication $\delta : X(n) \to X$ de D dans X (cf. 8.1.1), par un morphisme surjectif $\rho(n) : V(\mathfrak{g}) \to X(n)$. Il restera alors à vérifier que $\rho(n) : V(\mathfrak{g}) \to X(n)$ est bien une fibration localement triviale, ce qui fait l'objet de la proposition (11.2.10) ci-dessous. La preuve se conclut par la détermination du multi-indice $[\mu] \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ correspondant à la $\mathbb{G}_{a,X}$-action sur $V(\mathfrak{g})$ par l'intermédiaire de la dérivation localement nilpotente $\partial_{\mathfrak{g},h(\Gamma)} \in \mathrm{Der}_A(B(\mathfrak{g}))$ (6.3.3).

Pour décrire la fibre $\pi^{-1}(D)$ au-dessus du sous-schéma fermé $D = \mathrm{div}(f)$ de X, nous procédons par récurrence sur la hauteur de l'arbre Γ. Pour cela, nous avons besoin du résultat préliminaire suivant :

Lemme 11.2.3. *Soit $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$ un arbre $A[t]$-pondéré enraciné en e_0 et satisfaisant les hypothèses (11.1.1). Si $Fils(e_0) \neq \emptyset$ alors il existe un isomorphisme d'algèbres*

$$A[\Gamma]/(f, I(\mathfrak{g})) \simeq \prod_{e \in Fils(e_0)} A[\Gamma(e)](f, I(\mathfrak{g}(e))),$$

où pour tout $e \in Fils(e_0)$, $\mathfrak{g}(e) = (\Gamma(e), w)$ désigne le sous-arbre maximal pondéré de $\mathfrak{g}$ enraciné en e.

11.2.4. La preuve du lemme (11.2.3) fait l'objet des lemmes (11.2.5) et (11.2.7) ci-dessous. Observons tout d'abord qu'étant donné $e \in \mathrm{Fils}(e_0)$, la racine e_0 de Γ n'est pas un sommet de $\Gamma(e)$, de sorte qu'il est possible de faire le changement de variables $X_0 = X_{e_0}$ dans la définition de l'algèbre associée à $\Gamma(e)$, c'est à dire choisir un isomorphisme $A[\Gamma(e)] = A[X_0] \otimes_A \mathbf{S}\left(M_{\Gamma(e)}\right) \simeq A[X_{e_0}] \otimes_A \mathbf{S}\left(M_{\Gamma(e)}\right)$. Avec ce choix de coordonnées, on a $A[\Gamma] = A[\Gamma(e)][X_0]$ et les identifications

$$\left\{\begin{array}{rcll} G_{e'}(\mathfrak{g}(e)) & = & G_{e_0<e'}(\mathfrak{g}) & e' \in \mathrm{Par}(\Gamma(e)) \\ G_{e''<e'}(\mathfrak{g}(e)) & = & G_{e''<e'}(\mathfrak{g}) & (e', e'') \in \mathrm{Par}(\Gamma(e)) \times \mathrm{Anc}_{\Gamma(e)}(e') \end{array}\right.$$

Notons alors $\tilde{I}(\mathfrak{g}(e))$ l'idéal de $A[\Gamma(e)] \subset A[\Gamma]$ engendré par les polynômes $G_{e_0<e'}(\mathfrak{g})$, $e' \in \mathrm{Par}(\Gamma(e))$ et $\Delta_{e''<e'}(\mathfrak{g})$, $(e', e'') \in \mathrm{Par}(\Gamma(e)) \times \mathrm{Anc}_{\Gamma(e)}(e')$, I_0 l'idéal de $A[\Gamma]$ engendré par $\tilde{I}(\mathfrak{g}(e))$ et les polynômes

$$\delta_{e_0<e'} = (a_{h,e_0} - a_{e,e_0}) X_{e'} - X_{e_0} G_{e_0<e'}(\mathfrak{g}) \left\{ \begin{array}{l} e' \in \mathrm{Par}(\Gamma) \setminus (\{e_0\} \cup \mathrm{Par}(\Gamma(e))) \\ h = \mathrm{Fils}(e_0) \cap (\downarrow e')_\Gamma \neq e \end{array} \right. ,$$

et notons enfin $J_e = (f, w(\overrightarrow{ee_0})(X_0)) = (f, a_{e,e_0} + X_0) \subset A[\Gamma]$.

LEMME 11.2.5. *Les algèbres $A[\Gamma] / (J_e, I_0)$ et $A[\Gamma] / (J_e, I(\mathfrak{g}))$ sont isomorphes.*

DÉMONSTRATION. Par définition, pour tout $e' \in \mathrm{Par}(\Gamma) \setminus \mathrm{Par}(\Gamma(e))$, $w(\overrightarrow{ee_0})(X_0)$ divise le polynôme $G_{e'}(\mathfrak{g})$ des ancêtres de e', de sorte que $\Delta_{e'}(\mathfrak{g}) = f X_{e'} - G_{e'}(\mathfrak{g}) \in J_e$. Pour tout ancêtre $e'' \in \mathrm{Anc}_\Gamma(e')$, on a

$$\Delta_{e''<e'}(\mathfrak{g}) = w\left(\overrightarrow{he''}\right)\left(X_{\mathrm{Par}(e'')}\right) X_{e'} - X_{e''} G_{e''<e'}(\mathfrak{g})$$

où $h = \mathrm{Fils}(e'') \cap (\downarrow e')_\Gamma \neq e$. Si $e'' = e_0$ alors, par construction $\Delta_{e''<e'}(\mathfrak{g})$ et $\delta_{e_0<e'}$ ont la même image dans $A[\Gamma] / J_e A[\Gamma]$. Sinon, si $e'' \neq e_0$ alors $\Delta_{e''<e'}(\mathfrak{g})$ a la même image que

$$w\left(\overrightarrow{he''}\right)\left(X_{\mathrm{Par}(e'')}\right) \delta_{e_0<e'} - \delta_{e_0<e''} G_{e''<e'}(\mathfrak{g}) \in I_0$$

dans $A[\Gamma] / J_e A[\Gamma]$. Pour tout $e' \in \mathrm{Par}(\Gamma(e))$, le polynôme $\Delta_{e'}(\mathfrak{g}) \in I(\mathfrak{g})$ a la même image dans $A[\Gamma] / J_e A[\Gamma]$ que le polynôme $F_{e_0}^{\{e\}}(-a_{e,e_0}) G_{e_0<e'}(\mathfrak{g}) \in I_0$, tandis que l'image de $\Delta_{e_0<e'}(\mathfrak{g}) \in I(\mathfrak{g})$ dans $A[\Gamma] / J_e A[\Gamma]$ coïncide avec celle du polynôme $G_{e_0<e'}(\mathfrak{g}) \in I_0$. Enfin, pour tout $e'' \in \mathrm{Anc}_\Gamma(e') \setminus \{e_0\}$, le polynôme $\Delta_{e''<e'}(\mathfrak{g})$ est à la fois dans $I(\mathfrak{g})$ et dans I_0. On a donc montré que les idéaux $I(\mathfrak{g})$ et I_0 de $A[\Gamma]$ ont la même image dans $A[\Gamma] / J_e A[\Gamma]$. Ainsi, $A[\Gamma] / (J_e, I_0) \simeq A[\Gamma] / (J_e, I(\mathfrak{g}))$, ce qui démontre le lemme. □

11.2.6. Par définition, $\Delta_{e_0}(\mathfrak{g}) = f X_{e_0} - G_{e_0}(\mathfrak{g})$, où $G_{e_0}(\mathfrak{g}) = \prod_{e \in \mathrm{Fils}(e_0)} w(\overrightarrow{ee_0})(X_0)$. Les hypothèses (11.1.1) impliquant que les polynômes $w(\overrightarrow{ee_0})(X_0) = a_{e,e_0} + X_0$ sont deux à deux premiers entre eux, on a donc un isomorphisme

$$A[\Gamma] / (f, I(\mathfrak{g})) \simeq \prod_{e \in \mathrm{Fils}(e_0)} A[\Gamma] / (f, a_{e,e_0} + X_0, I(\mathfrak{g})) \simeq \prod_{e \in \mathrm{Fils}(e_0)} A[\Gamma] / (J_e, I_0).$$

Pour terminer la preuve du lemme (11.2.3), il suffit maintenant de vérifier que pour tout $e \in \mathrm{Fils}(e_0)$, les anneaux $A[\Gamma] / (J_e, I_0)$ et $A[\Gamma(e)] / (f, I(\mathfrak{g}(e)))$ sont isomorphes.

LEMME 11.2.7. *Il existe un isomorphisme $A[\Gamma] / (J_e, I_0) \simeq A[\Gamma(e)] / (f, I(\mathfrak{g}(e)))$*

DÉMONSTRATION. Par construction, pour tout $e' \in \mathrm{Par}(\Gamma(e))$, les polynômes $\Delta_{e'}(\mathfrak{g}(e)) = f X_{e'} - G_{e'}(\mathfrak{g}(e))$ et $G_{e'}(\mathfrak{g}(e)) = G_{e_0<e'}(\mathfrak{g})$ ont la même image dans $A[\Gamma(e)] / f A[\Gamma(e)]$. On a donc un isomorphisme

$$A[\Gamma(e)] / \left(f, \tilde{I}(\mathfrak{g}(e))\right) \simeq A[\Gamma(e)] / (f, I(\mathfrak{g}(e))).$$

Il suffit alors de montrer que $A[\Gamma] / (J_e, I_0) \simeq A[\Gamma(e)][X_0] / (f, a_{e,e_0} + X_0, I_0)$ est isomorphe à $A[\Gamma(e)] / \left(f, \tilde{I}(\mathfrak{g}(e))\right)$. Or, par définition, $I_0 = \tilde{I}(\mathfrak{g}(e)) + \tilde{J}_0$, où $\tilde{J}_0$ désigne l'idéal engendré par les polynômes $\delta_{e_0<e'}$, $e' \in \mathrm{Par}(\Gamma) \setminus (\mathrm{Par}(\Gamma(e)) \cup \{e_0\})$. Par hypothèse (11.1.1), pour tout $h \in \mathrm{Fils}(e_0) \setminus \{e\}$, l'image de $a_{h,e_0} - a_{e,e_0}$ dans A/fA est un élément inversible. Par définition, pour tout $e' \in \mathrm{Par}(\Gamma) \setminus (\mathrm{Par}(\Gamma(e)) \cup \{e_0\})$, $\delta_{e_0<e'} = (a_{h,e_0} - a_{e,e_0}) X_{e'} - X_{e_0} G_{e_0<e'}(\mathfrak{g})$, où le polynôme $G_{e_0<e'}(\mathfrak{g})$ ne fait intervenir que les variables $(X_{e''})_{e'' \in \mathrm{Anc}(e')}$. A l'aide des polynômes $\delta_{e_0<e'}$, on peut ainsi éliminer récursivement toutes les variables $X_{e'}$ correspondant à des sommets $e' \in \mathrm{Par}(\Gamma) \setminus (\{e_0\} \cup \mathrm{Par}(\Gamma(e)))$, pour obtenir finalement

l'isomorphisme $A[\Gamma] / \left(f, a_{e,e_0} + X_0, \tilde{J} + \tilde{I}(\mathfrak{g}(e))\right) A[\Gamma] \simeq A[\Gamma(e)] / \left(f, \tilde{I}(\mathfrak{g}(e))\right)$ souhaité. $\square$

On déduit de (11.2.3) la description suivante de la fibre $\pi^{-1}(D)$ du morphisme structural $\pi : V(\mathfrak{g}) \to X$.

PROPOSITION 11.2.8. *Pour tout arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$ satisfaisant les hypothèses (11.1.1), la fibre du morphisme $\pi_{\mathfrak{g}} : V(\mathfrak{g}) \to X$ est constituée de la réunion disjointe des sous-schémas fermés $C_e \simeq Spec\left((A/fA)\left[X_{Par(e)}\right]\right) \simeq \mathbb{A}^1_D$ de $V(\mathfrak{g})$ définis respectivement par les idéaux*

$$I(\mathfrak{g})(e) = \left\{ f, I(\mathfrak{g}), \left(w\left(\overrightarrow{Par^{k-1}(e)\, Par^{k}(e)}\right)\left(X_{Par^{k+1}(e)}\right)\right)_{k=1,\ldots,m_e} \right\} \subset A[\Gamma]$$

où e parcourt l'ensemble $Fe(\Gamma)$ des feuilles de Γ, et où $m_e = l(\downarrow e)_{\Gamma}$.

DÉMONSTRATION. Nous procédons par récurrence sur la hauteur $h(\Gamma)$ de l'arbre Γ. Si $h(\Gamma) = 0$, alors Γ est l'arbre trivial à un élément $\{e_0\}$, $A[\Gamma] = A[X_0]$ et $I(\mathfrak{g}) = 0$. Ainsi $V(\mathfrak{g}) = \mathrm{Spec}(A[X_0])$ de sorte que $\pi_{\mathfrak{g}}^{-1}(D) \simeq \mathrm{Spec}((A/fA)[X_0])$. Si $\mathrm{Fils}(e_0) \neq \emptyset$, alors, d'après (11.2.3),

$$\pi_{\mathfrak{g}}^{-1}(D) \simeq \mathrm{Spec}(A[\Gamma] / (f, I(\mathfrak{g}))) \simeq \bigsqcup_{e \in \mathrm{Fils}(e_0)} \mathrm{Spec}(A[\Gamma(e)] / (f, I(\mathfrak{g}(e))))$$

s'identifie à la réunion disjointe des fibres $\pi_{\mathfrak{g}(e)}^{-1}(D)$ des schémas $\pi_{\mathfrak{g}(e)} : V(\mathfrak{g}(e)) \to X$ associés aux sous-arbres maximaux $A[t]$-pondérés $\mathfrak{g}(e) = (\Gamma(e), w)$ de $\mathfrak{g}$ enracinés en les fils de e_0. Ces arbres satisfont bien sûr les hypothèses (11.1.1) , et sont de hauteurs respectives $h(\Gamma(e)) < h(\Gamma)$. La description des composantes connexes C_e de $\pi_{\mathfrak{g}}^{-1}(D)$ s'obtient alors par récurrence, en utilisant à chaque étape l'isomorphisme $A[\Gamma] / (f, I(\mathfrak{g})) \simeq \prod_{e \in \mathrm{Fils}(e_0)} A[\Gamma] / (f, I(\mathfrak{g}), w(\overrightarrow{ee_0})(X_0))$ précédemment établi (11.2.3). $\square$

11.2.9. On a donc montré que pour tout arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$, de feuilles $\mathrm{Fe}(\Gamma) = \{e_1, \ldots, e_n\}$, et satisfaisant les hypothèses (11.1.1), la fibre $\pi^{-1}(D)$ du morphisme structural $\pi : V(\mathfrak{g}) \to X$ est une réunion disjointe de sous-schémas fermés C_{e_i}, $i = 1, \ldots, n$, tous isomorphes à la droite affine $\mathbb{A}^1_D$ de base $D = \mathrm{div}(f)$. On en déduit que π se factorise, via la n-duplication $\delta : X(n) \to X$ de D dans X, par un morphisme surjectif $\rho(n) : V(\mathfrak{g}) \to X(n)$. L'étape suivante dans la preuve du théorème (11.2.1) consiste à montrer que la restriction de $V(\mathfrak{g})$ au-dessus de chaque ouvert $X_i(n) \simeq X$ du recouvrement canonique de X (cf. 8.1.1) est isomorphe au fibré trivial $\mathbb{A}^1_{X_i(n)}$. Cela revient à prouver que pour toute feuille $e \in \mathrm{Fe}$ de Γ l'ouvert

$$V_*(e) = V \setminus \bigcup_{e' \in \mathrm{Fe}(\Gamma) \setminus \{e\}} C_{e'} \simeq V\mid_{X_*} \cup C_e$$

est X-isomorphe au fibré trivial $\mathbb{A}^1_X$. Il s'agit donc d'une conséquence du résultat suivant, car, puisque $X = \mathrm{Spec}(A)$ est affine, tout $\mathbb{G}_{a,X}$-torseur est trivial.

PROPOSITION 11.2.10. *Pour toute feuille $e \in Fe(\Gamma)$ de Γ, il existe une action de $\mathbb{G}_{a,X}$ sur $V_*(e)$ faisant de $\pi : V_*(e) \to X$ un $\mathbb{G}_{a,X}$-torseur.*

DÉMONSTRATION. Posons $B_*(e) = \Gamma\left(X, \pi_* \mathcal{O}_{V_*(e)}\right)$. L'image de f dans $B_*(e)$ engendre l'idéal de $C_e \subset V_*(e)$, et d'après (11.2.8), $B_*(e) / fB_*(e) \simeq (A/fA)\left[X_{\mathrm{Par}(e)}\right]$ est plat sur A/fA. Puisque $V(\mathfrak{g})$ est intègre d'après (11.1.3), $V_*(e)$ l'est aussi, de sorte que f n'est pas un diviseur de zéro dans $B_*(e)$. On déduit alors du critère local de platitude ([**4**, III, §5]) que $B_*(e)$ est plat sur A. D'autre part, pour tout point ferme $x \in X$, la fibre $\pi^{-1}(x)$ du morphisme induit $\pi : V_*(e) \to X$ est isomorphe à $\mathbb{A}^1_{k(x)}$ puisque la restriction de $V_*(e)$ au-dessus de l'ouvert X_* de X est isomorphe au fibré trivial $\mathbb{A}^1_{X_*}$ (6.3.1) tandis que sa restriction au-dessus de D est isomorphe à $\mathbb{A}^1_D$ (11.2.8). Ainsi $\pi : V_*(e) \to X$ est un morphisme plat dont toutes les fibres fermées $\pi^{-1}(x) \simeq \mathbb{A}^1_{k(x)} \to \operatorname{Spec}(k(x))$ sont lisses, donc est un morphisme lisse. Supposons maintenant que $V_*(e)$ puisse être muni d'une action libre de $\mathbb{G}_{a,X}$. Alors, pour tout morphisme étale $X' \to X$, $p_2 : V'_*(e) = V_*(e) \times_X X' \to X'$ est encore lisse, muni d'une action libre de $\mathbb{G}_{a,X'}$ et ses fibres fermées $p_2^{-1}(x')$ sont isomorphes à $\mathbb{A}^1_{k(x')}$. Supposons que p_2 admette une section S'. Alors le morphisme naturel $S' \times_{X'} \mathbb{G}_{a,X'} \to V'_*(e)$, qui est un isomorphisme sur son image, est surjectif sur les points fermés de $V'_*(e)$, donc est un isomorphisme. Ainsi $V'_*(e) \simeq S' \times_{X'} \mathbb{G}_{a,X'} \simeq \mathbb{G}_{a,X'}$ est isomorphe au $\mathbb{G}_{a,X}$-torseur trivial. Or, puisque le morphisme $\pi : V_*(e) \to X$ est lisse, il admet une quasi-section étale, *i.e.* il existe un changement de base étale $X' \to X$ tel que $V_*(e) \times_X X'$ admette une section. Ainsi si $V_*(e)$ est muni d'une $\mathbb{G}_{a,X}$-action libre, alors il existe un recouvrement étale $\mathcal{U} = (X'_i \to X)_{i \in I}$ de X trivialisant $\pi : V_*(e) \to X$. Autrement dit, $\pi : V_*(e) \to X$ est localement trivial pour la topologie étale, donc est localement trivial pour la topologie de Zariski puisque le groupe additif est un groupe spécial (cf. A.3.4 et [**43**]). Il reste donc seulement à vérifier que $V_*(e)$ peut être muni d'une action libre de $\mathbb{G}_{a,X}$, ce qui fait l'objet du lemme (11.2.11) ci-dessous. $\square$

Afin de munir $V_*(e)$ d'une $\mathbb{G}_{a,X}$-action libre, il suffit de modifier légèrement la construction des dérivations localement nilpotentes canoniques $\partial_{\mathfrak{g},m}$ (6.3.3).

LEMME 11.2.11. *Pour toute feuille $e \in Fe(\Gamma)$ au niveau $m = l(\downarrow e)_\Gamma$ la A-dérivation*

$$f^{m-h(\Gamma)}\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},h(\Gamma)} = f^m \frac{\partial}{\partial X_0} + f^{-1} \sum_{e \in Par(\Gamma)} \tilde{\partial}_{\mathfrak{g},m}(G_e(\mathfrak{g})) \frac{\partial}{\partial X_e} \in Der_A(A[\Gamma], A_f[\Gamma])$$

induit une A-dérivation localement nilpotente $\partial_{e,m}$ de $B_*(e) = \Gamma\left(X, \pi_*\mathcal{O}_{V_*(e)}\right)$, correspondant à une action libre de $\mathbb{G}_{a,X}$ sur $V_*(e)$.

DÉMONSTRATION. Notons $\tilde{\partial}_{e,m} = f^{m-h(\Gamma)}\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},h(\Gamma)}$. Puisque la fibre $C_e = \pi^{-1}(D)$ du morphisme $\pi : V_*(e) \to X$ est isomorphe à $\mathbb{A}^1_D$ (11.2.8), l'image de f dans $B_*(e)$ engendre l'idéal de $\pi^{-1}(D)$. D'autre part l'idéal de C_e dans $V(\mathfrak{g})$ est engendré par l'image de l'idéal $I(\mathfrak{g})(e) \subset A[\Gamma]$ de (11.2.8). Pour montrer que $\tilde{\partial}_{e,m}$ induit une dérivation localement nilpotente de $B_*(e)$, il suffit par conséquent de vérifier que $\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},h(\Gamma)}(A[\Gamma]) \subset (I(\mathfrak{g})(e))^{h(\Gamma)-m}$. Notons $(\downarrow e)_\Gamma = \{e_0 < e_1 < \cdots < e_m = e\}$. Pour tout sommet e' de Γ au niveau k, $0 \leq k \leq h(\Gamma) - 1$, on a, par construction (6.3.3) $\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},h(\Gamma)}(X_{e'}) \subset f^{h(\Gamma)-k-1}A[\Gamma]$. En particulier $\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},h(\Gamma)}(X_{e_i}) \in f^{h(\Gamma)-m}A[\Gamma]$ pour tout $i = 0, \ldots, m-1$. Nous allons maintenant montrer par récurrence que pour tout $i \neq m$ et tout sommet $e' \in \operatorname{Par}(\Gamma) \setminus (\downarrow e)_\Gamma$ au niveau k, tel que e_i soit le premier ancêtre commun de e et e', $\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},h(\Gamma)}(X_{e'}) \in (I(\mathfrak{g})(e))^{h(\Gamma)-i-2}$. Puisque $G_{e'}(\mathfrak{g}) = A_{e'}(\mathfrak{g}) F_{e'}(\mathfrak{g})$ on a donc

$$\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},h(\Gamma)}(X_{e'}) = A_{e'}(\mathfrak{g}) f^{-1} \frac{dF_{e'}(\mathfrak{g})}{dX_{\operatorname{Par}(e')}} \tilde{\partial}_{\mathfrak{g},h(\Gamma)}\left(X_{\operatorname{Par}(e')}\right) + f^{-1}F_{e'}(\mathfrak{g})\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},h(\Gamma)}(A_{e'}(\mathfrak{g})),$$

où, soit par hypothèse de récurrence, soit du fait que $\operatorname{Par}(e') = e_i$, on a

$$\begin{cases} \tilde{\partial}_{\mathfrak{g},h(\Gamma)}\left(X_{\operatorname{Par}(e')}\right) \in (I(\mathfrak{g})(e))^{h(\Gamma)-i-1} \cap f^{h(\Gamma)-k}A[\Gamma] \\ \tilde{\partial}_{\mathfrak{g},h(\Gamma)}(A_{e'}(\mathfrak{g})) \in (I(\mathfrak{g})(e))^{h(\Gamma)-i-1} \cap f^{h(\Gamma)-k+1}A[\Gamma] \subset (I(\mathfrak{g})(e))^{h(\Gamma)-i}. \end{cases}$$

En effet $A_{e'}(\mathfrak{g})$ ne contient que les variables $(X_{e''})_{e'' \in \operatorname{Anc}(\operatorname{Par}(e'))}$. Or, par définition, $w(\overrightarrow{e_{i+1}e_i})\left(X_{e_{i-1}}\right) \in I(\mathfrak{g})(e)$ divise $A_{e'}(\mathfrak{g})$. Ainsi $\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},h(\Gamma)}(X_{e'}) \in (I(\mathfrak{g})(e))^{h(\Gamma)-i-1}$ comme annoncé. On a montré que $\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},h(\Gamma)}(A[\Gamma]) \subset (I(\mathfrak{g})(e))^{h(\Gamma)-m}$, donc que $\tilde{\partial}_{e,m} = f^{m-h(\Gamma)}\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},h(\Gamma)}$ induit une dérivation localement nilpotente ∂ de $B_*(e)$.

Il reste à montrer que la $\mathbb{G}_{a,X}$-action correspondante sur $V_*(e)$ est bien libre, autrement dit que l'idéal engendré par $\partial(B_*(e))$ est l'idéal unité. Notons $\bar{X}_0$ et $\bar{X}_{e_{m-1}}$ les images dans $B_*(e)$ des variables X_0 et $X_{e_{m-1}}$ de $A[\Gamma]$. Par construction, $\partial\left(\bar{X}_0\right) = f^m$, tandis que l'on obtient, par récurrence que

$$\tilde{\partial}_{e,m}\left(X_{e_{m-1}}\right) = Pf + f^{-m}\prod_{i=0}^{m-1}\frac{dF_{e_i}(\mathfrak{g})}{dX_{e_{i-1}}}\tilde{\partial}_{e,m}(X_0) = Pf + \prod_{i=0}^{m-1}\frac{dF_{e_i}(\mathfrak{g})}{dX_{e_{i-1}}}$$

pour un certain polynôme $P \in A\left[X_0, \left(X_{e_j}\right)_{j=0,\ldots,m-1}\right]$. Or, par définition de $F_{e_i}(\mathfrak{g})$, il existe un polynôme $Q \in A\left[X_{e_{i-1}}\right]$ tel que

$$\frac{dF_{e_i}(\mathfrak{g})}{dX_{e_{i-1}}} = w\left(\overrightarrow{e_{i+1}e_i}\right)\left(X_{e_{i-1}}\right)Q + \prod_{e'\in\mathrm{Fils}(e_i)\setminus\{e_{i+1}\}} w\left(\overrightarrow{e'e_i}\right)\left(X_{e_{i-1}}\right),$$

de sorte que $\partial\left(\bar{X}_{e_{m-1}}\right)$ a la même image dans

$$B_*(e)/fB_*(e) \simeq A[\Gamma]/I(\mathfrak{g})(e) \simeq (A/fA)\left[X_{e_{m-1}}\right]$$

que $a = \prod_{e'\in\mathrm{Fils}(e_i)\setminus\{e_{i+1}\}}\left(a_{e',a_i} - a_{e_{i+1},e_i}\right) \in A$, où $w\left(\overrightarrow{e'e_i}\right) = a_{e',a_i} + t$. Puisque par hypothèse (11.1.1), l'image de $a_{e',a_i} - a_{e_{i+1},e_i}$ dans A/fA est inversible pour tout $e' \in \mathrm{Fils}(e_i) \setminus \{e_{i+1}\}$, on conclut que $\partial\left(\bar{X}_{e_{m-1}}\right)$ est inversible modulo f, donc l'est encore modulo f^m pour tout $m \geq 1$. Ainsi $\partial\left(\bar{X}_{e_{m-1}}\right)$ et $\partial\left(\bar{X}_0\right) = f^m$ engendrent l'idéal unité de $B_*(e)$, ce qui conclut la preuve du lemme. □

11.2.12. On déduit maintenant de la description ci-dessus que $V_*(e)$ est isomorphe à $\mathbb{A}^1_X = \mathrm{Spec}(A[T_e])$, où T_e est une nouvelle variable, et que cet isomorphisme est équivariant lorsque l'on munit $V_*(e)$ de la $\mathbb{G}_{a,X}$-action induite correspondant à la dérivation localement nilpotente $\partial_{\mathfrak{g},h(\Gamma)}$ de $B_{\mathfrak{g}} = A[\Gamma]/I(\mathfrak{g})$ et $\mathbb{A}^1_X$ de l'action par la translation tordue $\mathbf{t}_{f^{h(\Gamma)-m}}$, où $m = l(\downarrow e)_\Gamma$. Ainsi, la discussion ci-dessus montre que pour tout arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$ satisfaisant aux hypothèses (11.1.1), et de feuilles $\mathrm{Fe}(\Gamma) = \{e_1, \ldots, e_n\}$, le schéma $V(\mathfrak{g})$ muni de la $\mathbb{G}_{a,X}$-action correspondant à la dérivation localement nilpotente $\partial_{\mathfrak{g},h(\Gamma)}$ est un schéma de Danielewski-Fieseler

$$\pi : V(\mathfrak{g}) \overset{\rho(n)}{\to} X(n) = X(D,n) \overset{\delta}{\to} X$$

de base $(X, D = \mathrm{div}(f))$, associé au $\mathbb{G}_{a,X}$-torseur trivial, de type $(n, [\mu])$, où les coefficients du multi-indice $[\mu]$ sont définis par $\mu_i = h(\Gamma) - l(\downarrow e_i)_\Gamma$, ce qui termine la preuve du théorème (11.2.1).

11.3. Compléments sur les schémas $V_{\mathfrak{g}}$

Étant donné un arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$ satisfaisant aux hypothèses (11.1.1), nous donnons, pour terminer ce paragraphe, un procédé permettant de construire une collection de fonctions de transition $\tilde{g} = \{\tilde{g}_{ij} \in A_f\}$ pour le schéma de Danielewski-Fieseler $\pi : V(\mathfrak{g}) \to X$ correspondant. Il apparaît qu'une collection de ce type est, pour l'essentiel, uniquement déterminée par la fonction de poids $w : E(\Gamma) \to A[t]$, et peut être déterminée à partir des poids par un procédé algorithmique récursif.

La mise en place de ce procédé fait l'objet des lemmes (11.3.1)-(11.3.3) ci-dessous.

Lemme 11.3.1. *Soit $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$ un arbre $A[t]$-pondéré satisfaisant aux hypothèses (11.1.1) et soit $e \in Fe(\Gamma)$ une feuille de Γ au niveau $m = l(\downarrow e)_\Gamma$. Notons $(\downarrow e)_\Gamma = \{e_0 < e_1 < \cdots < e_m = e\}$ et $w\left(\overrightarrow{e_{i+1}e_i}\right) = a_{e_{i+1},e_i} + t$, $i = 0, \ldots, m-1$. Alors il existe des éléments $b_0, b_1, \ldots, b_{m-1} \in A$ dépendant des coefficients a_{e_{i+1},e_i},*

$i=0,\ldots,m-1$ tels que si l'on pose $Z_0=\sum_{j=0}^{m-1} b_j f^j \in A$, les éléments $Z_{e_i}\in A_f$, $i=0,\ldots,m-2$, définis récursivement par les formules

$$Z_{e_i}=f^{-1}G_{e_i}(\mathfrak{g})\left(Z_0,Z_{e_0},\ldots,Z_{e_{i-1}}\right)=f^{-1}w\left(\overrightarrow{e_{i+1}e_i}\right)\left(Z_{e_{i-1}}\right)\prod_{j=0}^{i}F_{e_j}^{\{e_{j+1}\}}(\mathfrak{g})\left(Z_{e_{j-1}}\right)$$

s'écrivent sous la forme $Z_{e_i}=-a_{e_{i+2},e_{i+1}}+f\xi_i$ pour un certain $\xi_i\in A$.

Démonstration. Notons que par définition

$$G_{e_{i+1}}(\mathfrak{g})=\prod_{j=0}^{i+1}F_{e_j}^{\{e_{j+1}\}}(\mathfrak{g})\,w\left(\overrightarrow{e_{i+2}e_{i+1}}\right)\left(X_{e_i}\right)\in A\left[X_0,X_{e_0},\ldots,X_{e_i}\right],$$

où $w\left(\overrightarrow{e_{i+2}e_{i+1}}\right)\left(X_{e_i}\right)=a_{e_{i+2},e_{i+1}}+X_{e_i}\in A\left[X_{e_i}\right]$. Par conséquent, si $Z_{e_0},\ldots,Z_{e_i}$ satisfont les conditions énoncées alors $Z_{e_{i+1}}=f^{-1}G_{e_{i+1}}(\mathfrak{g})\left(Z_0,Z_{e_0},\ldots,Z_{e_i}\right)\in A_f$ est bien dans A puisque $w\left(\overrightarrow{e_{i+2}e_{i+1}}\right)\left(Z_{e_i}\right)\in fA$. Nous allons montrer qu'il est possible de déterminer successivement les éléments $b_0,\ldots,b_{m-1}$ du lemme. Nous posons tout d'abord $b_0=-a_{e_1,e_0}$. On a donc $f^{-1}\left(a_{e_1,e_0}+Z_0\right)=\displaystyle\sum_{i=1}^{m-1}b_if^{i-1}$, de sorte que

$$\begin{aligned}
Y_{e_0} &= f^{-1}G_{e_0}(\mathfrak{g})\left(Z_0\right)=f^{-1}w\left(\overrightarrow{e_1e_0}\right)\left(Z_0\right)F_{e_0}^{\{e_1\}}(\mathfrak{g})\left(Z_0\right)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{m-1}b_if^{i-1}\right)F_{e_0}^{\{e_1\}}(\mathfrak{g})\left(-a_{e_1,e_0}+\sum_{j=1}^{m-1}b_jf^j\right)\\
&= \tilde{c}_{0,0}+f\sum_{j=1}^{N_i}\tilde{c}_{0,j}f^{j-1}
\end{aligned}$$

où pour tout $j=0,\ldots,m-2$, $\tilde{c}_{0,j}=b_{j+1}F_{e_0}^{\{e_1\}}(\mathfrak{g})\left(-a_{e_1,e_0}\right)+R_{0,j}$, $R_{0,j}$ s'exprimant comme un polynôme en les éléments $b_0,\ldots,b_j$, à coefficients dans A. Les hypothèses (11.1.1) entraînent que l'image de $F_{e_0}^{\{e_1\}}(\mathfrak{g})\left(-a_{e_1,e_0}\right)$ dans A/fA est inversible. Il existe donc $b_1\in A$ tel que $\tilde{c}_{0,0}=-a_{e_2,e_1}+f\xi_0$ pour un certain $\xi_0\in A$. Ainsi défini,

$$Z_{e_0}=-a_{e_2,e_1}+f\sum_{j=1}^{N_0}c_{0,j}f^{j-1}$$

où $c_{0,1}=\tilde{c}_{0,1}+d$ et $c_{0,j}=\tilde{c}_{0,j}$ pour tout $j=2,\ldots,m-1$, satisfait l'assertion du lemme. De plus, pour tout $j=1,\ldots,m-2$, $c_{0,j}=\alpha_{0,j}b_{j+1}+\beta_{0,j}$ pour un certain $\alpha_{0,j}\in A$ dont la classe dans A/fA est inversible et un certain $\beta_{0,j}\in A$ pouvant s'exprimer comme un polynôme en les éléments b_l, $l\leq j$, à coefficients dans A.

Supposons maintenant les éléments $b_0,\ldots,b_{i_0}\in A$ convenables choisis. Nous pouvons alors supposer que $Z_0,Z_{e_0},\ldots,Z_{e_{i_0-1}}$ s'écrive sous la forme

$$Z_{e_i}=-a_{e_{i+2},e_{i+1}}+f\sum_{j=1}^{N_i-1}c_{i,j}f^{j-1},$$

où, pour tout j tel que $i+j\leq m-2$, $c_{i,j}=\alpha_{i,j}b_{i+j+1}+\beta_{i,j}\in A$, où la classe de $\alpha_{i,j}\in A$ dans A/fA est inversible, et où $\beta_{i,j}\in A$ s'exprime comme un polynôme en les éléments $b_l\in A$, $l\leq i+j$, à coefficients dans A. Montrons alors que l'on peut choisir b_{i_0+1} de telle façon que

$$Z_{e_{i_0}}=f^{-1}\prod_{i=0}^{i_0}F_{e_i}^{\{e_{i+1}\}}(\mathfrak{g})\left(Z_{e_{i-1}}\right)w\left(\overrightarrow{e_{i_0+1}e_{i_0}}\right)\left(Z_{e_{i_0-1}}\right)$$

vérifie l'assertion du lemme et admette une écriture satisfaisant les mêmes propriétés que celles des éléments $Z_{e_0}, \ldots, Z_{e_{i_0-1}}$. En développant formellement la relation définissant $Z_{e_{i_0}}$ suivant les puissances de f, on obtient de l'égalité

$$\begin{aligned} Z_{e_{i_0}} &= \prod_{i=0}^{i_0} F_{e_i}^{\{e_{i+1}\}}(\mathfrak{g}) \left(-a_{e_i,e_{i-1}} + f \sum_{j=1}^{N_{i-1}} c_{i-1,j} f^{j-1} \right) \left(\sum_{j=1}^{N_{i_0-1}} c_{i_0-1,j} f^{j-1} \right) \\ &= \tilde{c}_{i_0,0} + f \sum_{j=1}^{N_{i_0}} \tilde{c}_{i_0,j} f^{j-1} + T_e Q_{i_0}(T_e), \end{aligned}$$

où pour tout j_0 tel que $i_0 + j_0 \leq m-2$

$$\tilde{c}_{i_0,j_0} = \prod_{i=0}^{i_0} F_{e_i}^{\{e_{i+1}\}}(\mathfrak{g}) \left(-a_{e_i,e_{i-1}} \right) c_{i_0-1,j_0+1} + \tilde{R}_{i_0,j_0}$$

pour un certain $\tilde{R}_{i_0,j_0}$ pouvant s'exprimer comme un polynôme en les éléments $c_{i_0-1,j_0}, \ldots, c_{i_0-1,1}$ et $(c_{i,l})_{i<i_0-1}$. Par hypothèse de récurrence, pour tout j_0 tel que $i_0 + j_0 \leq m-2$, $c_{i_0-1,j_0+1} = \alpha_{i_0-1,j_0+1} b_{i_0+j_0+1} + \beta_{i_0-1,j_0+1} \in A$ pour un certain élément $\alpha_{i_0-1,j_0-1} \in A$ dont la classe dans A/fA est inversible, et pour un certain $\beta_{i_0-1,j_0+1} \in A$ pouvant s'exprimer comme un polynôme en les éléments b_l, $l \leq i_0 + j_0$. Ainsi, on a

$$\tilde{c}_{i_0,j_0} = \alpha_{i_0-1,j_0+1} \prod_{i=0}^{i_0} F_{e_i}^{\{e_{i+1}\}}(\mathfrak{g}) \left(-a_{e_i,e_{i-1}} \right) b_{i_0+j_0+1} + \beta_{i_0,j_0}$$

où β_{i_0,j_0} peut s'exprimer comme un polynôme en les éléments b_l, $l \leq i_0 + j_0$. Les hypothèses (11.1.1) entraînent que la classe de $\prod_{i=0}^{i_0} F_{e_i}^{\{e_{i+1}\}}(\mathfrak{g}) \left(-a_{e_i,e_{i-1}} \right)$ dans A/fA est elle aussi inversible. Il existe donc b_{i_0+1} tel que

$$\tilde{c}_{i_0,0} = \alpha_{i_0-1,1} \prod_{i=0}^{i_0} F_{e_i}^{\{e_{i+1}\}}(\mathfrak{g}) \left(-a_{e_i,e_{i-1}} \right) b_{i_0+1} + \beta_{i_0,j_0}$$

et $-a_{e_{i_0+2},e_{i_0+1}}$ aient la même image dans A/fA. On obtient alors l'égalité $\tilde{c}_{i_0,0} = -a_{e_{i_0+2},e_{i_0+1}} + fd$ pour un certain $d \in A$, de sorte qu'en posant $c_{i_0,1} = \tilde{c}_{i_0,1} + d$ et $c_{i_0,j} = \tilde{c}_{i_0,j}$ pour tout $j \geq 2$, $Z_{e_{i_0}}$ satisfait bien l'assertion du lemme et admet une écriture sous la forme voulue. On peut finalement terminer la preuve par récurrence sur l'indice $i = 0, \ldots, m-2$. □

Lemme 11.3.2. *Sous les mêmes hypothèses que (11.3.1), considérons les éléments $Z_{e_0}, \ldots, Z_{e_{m-2}}$ précédemment construits et posons $Y_0 = Z_0 + f^m T_e \in A[T_e]$, où T_e est une variable. Alors, pour tout $i = 0, \ldots, m-1$, les éléments $Y_{e_i} \in A_f[T_e]$ définis récursivement par les formules*

$$Y_{e_i} = f^{-1} G_{e_i}(\mathfrak{g}) \left(Y_0, Y_{e_0}, \ldots, Y_{e_{i-1}} \right) \in A_f[T_e], \quad i = 0, \ldots, m-1$$

peuvent être écrits sous la forme

$$Y_{e_i} = Z_{e_i} + \zeta_i f^{m-i-1} T_e + f^{m-i} R_i(T_e) \in A[T_e], \quad i = 0, \ldots, m-2$$

tandis qu'il existe $\zeta_{m-1} \in A$, dont l'image dans A/fA est inversible et $\beta \in A$ tels que

$$Y_{e_{m-1}} = (\beta + \zeta_{m-1} T_e) + f R_{e_{m-1}}(T_e) \in A[T_e].$$

Démonstration. Montrons par récurrence que pour tout $i = 0, \ldots, m-2$, il existe $\zeta_i \in A$ dont l'image dans A/fA est inversible, tel que

$$Y_{e_i} = Z_{e_i} + \zeta_i f^{m-i-1} T_e + f^{m-i} R_i(T_e)$$

pour un certain polynôme $R_i \in A[T_e]$. L'assertion est vraie pour $i = 0$. En effet, par définition de Z_0, on obtient, en développant suivant les puissances de T_e, qu'il existe un polynôme $R_0 \in A[T_e]$ tel que

$$\begin{aligned}
Y_{e_0} &= f^{-1}w\left(\overrightarrow{e_1e_0}\right)\left((Z_0 + f^mT_e)\right)\left(F_{e_0}^{\{e_1\}}(\mathfrak{g})(Z_0 + f^mT_e)\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{m-1} b_jf^{j-1} + f^{m-1}T_e\right) F_{e_0}^{\{e_1\}}(\mathfrak{g})(Z_0 + f^mT_e) \\
&= F_{e_0}^{\{e_1\}}(\mathfrak{g})(Z_0)\left(\sum_{j=1}^{m-1} b_jf^{j-1}\right) + f^{m-1}F_{e_0}^{\{e_1\}}(\mathfrak{g})(Z_0)T_e + f^mR_0(T_e) \\
&= Z_{e_0} + f^{m-1}F_{e_0}^{\{e_1\}}(\mathfrak{g})(Z_0)T_e + f^mR_0(T_e).
\end{aligned}$$

L'image de $\zeta_0 = F_{e_0}^{\{e_1\}}(\mathfrak{g})(Z_0)$ dans A/fA est égale à celle de $F_{e_0}^{\{e_1\}}(\mathfrak{g})(-a_{e_1,e_0})$, donc est inversible (cf. 11.1.1). Supposons donc l'assertion vraie pour tout $i = 0, \ldots, i_0 - 1$ et montrons la au rang i_0. En développant comme précédemment, on conclut qu'il existe un polynôme $R_{i_0} \in A[T_e]$ tel que

$$\begin{aligned}
Y_{e_{i_0}} &= f^{-1}w\left(\overrightarrow{e_{i_0}e_{i_0+1}}\right)(Y_{i_0-1})\left(\prod_{j=0}^{i_0} F_{e_j}^{\{e_{j+1}\}}(\mathfrak{g})\left(Y_{e_{j-1}}\right)\right) \\
&= f^{-1}\left(f\xi_{i_0-1} + f^{m-i_0}\zeta_{i_0-1}T_e + f^{m-i_0+1}R_{i_0-1}(T_e)\right)\prod_{j=0}^{i_0} F_{e_j}^{\{e_{j+1}\}}(\mathfrak{g})\left(Y_{e_{j-1}}\right) \\
&= \left(\xi_{i_0-1} + f^{m-i_0-1}\zeta_{i_0-1}T_e\right)\prod_{j=0}^{i_0} F_{e_j}^{\{e_{j+1}\}}(\mathfrak{g})\left(Z_{e_{j-1}}\right) + f^{m-i_0}R_{i_0}(T_e)
\end{aligned}$$

On a donc bien, par définition de $Z_{e_{i_0}}$,

$$Y_{e_{i_0}} = Z_{e_{i_0}} + f^{m-i_0-1}\zeta_{i_0-1}\prod_{j=0}^{i_0} F_{e_j}^{\{e_{j+1}\}}(\mathfrak{g})\left(Z_{e_{j-1}}\right)T_e + f^{m-i_0}R_{i_0}(T_e)$$

tandis que l'hypothèse de récurrence assure, en conjonction avec les hypothèses (11.1.1) et la construction des éléments $Z_{e_i} \in A$, $i = 0, \ldots, i_0 - 1$, que l'image de $\zeta_{i_0} = \zeta_{i_0-1}\prod_{j=0}^{i_0} F_{e_j}^{\{e_{j+1}\}}(\mathfrak{g})\left(Z_{e_{j-1}}\right) \in A$ dans A/fA est bien inversible. Le même argument permet finalement de conclure que

$$\begin{aligned}
Y_{e_{m-1}} &= (\xi_{m-2} + \zeta_{m-2}T_e)\prod_{j=0}^{m-1} F_{e_j}^{\{e_{j+1}\}}(\mathfrak{g})\left(Z_{e_{j-1}}\right) + fR(T_e) \\
&= (\beta + \zeta_{m-1}T_e) + fR(T_e)
\end{aligned}$$

où, par construction, l'image de $\zeta_{m-1} = \zeta_{m-2}\prod_{j=0}^{m-1} F_{e_j}^{\{e_{j+1}\}}(\mathfrak{g})\left(Z_{e_{j-1}}\right)$ dans A/fA est bien inversible. □

Lemme 11.3.3. *Sous les mêmes hypothèses que (11.3.1), considérons les polynômes $Y_0, Y_{e_0}, \ldots, Y_{e_{m-1}} \in A[T_e]$ construits en (11.3.2). Alors pour tout $e' \in Par(\Gamma) \setminus (\downarrow e)_\Gamma$ les éléments $Y_{e'} \in A_f[T_e]$ définis récursivement par la formule*

$$Y_{e'} = f^{-1}G_{e'}(\mathfrak{g})\left(Y_0, (Y_{e''})_{e'' \in Anc(e')}\right) \in A_f[T_e]$$

sont des polynômes $Y_{e'} \in A[T_e]$.

DÉMONSTRATION. Puisque $e' \in \mathrm{Par}(\Gamma) \setminus (\downarrow e)_\Gamma$, le premier ancêtre commun de e' et e est un sommet $e_i \in (\downarrow e)_\Gamma$ pour un certain i, $0 \leq i \leq m-1$. Ainsi pour tout $e'' \in (\downarrow e')_\Gamma \setminus (\downarrow e)_\Gamma$, le polynôme $A_{e''}(\mathfrak{g})$ des ancêtres de e'' est divisible par $w(\overrightarrow{e_{i+1}e_i})(X_{e_{i-1}})$. En particulier, si $e'' = \mathrm{Fils}(e_i) \cap (\downarrow e')_\Gamma$ alors,

$$Y_{e''} = f^{-1}A_{e''}(\mathfrak{g})\left(Y_0, Y_{e_0}, \dots, Y_{e_{i-2}}\right) F_{e''}(\mathfrak{g})(Y_{e_i}) \in A[T_e]$$

puisque par construction

$$\begin{aligned} w(\overrightarrow{e_{i+1}e_i})\left(Y_{e_{i-1}}\right) &= a_{e_{i+1},e_i} + Z_{e_i} + \zeta_i f^{m-i-1}T_e + f^{m-i}R_i(T_e) \\ &= f\xi_i + \zeta_i f^{m-i-1}T_e + f^{m-i}R_i(T_e) \end{aligned}$$

est divisible par f. On conclut alors par récurrence, suivant le même argument, que $Y_{e''} \in A[T_e]$ pour tout $e'' \in (\downarrow e')_\Gamma$, donc en particulier que $Y_{e'} \in A[T_e]$. □

Les constructions ci-dessus aboutissent finalement au résultat suivant :

PROPOSITION 11.3.4. *Soit $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$ un arbre $A[t]$-pondéré satisfaisant aux hypothèses (11.1.1) et soit $e \in Fe(\Gamma)$ une feuille de Γ au niveau $m = l(\downarrow e)_\Gamma$. Notons $(\downarrow e)_\Gamma = \{e_0 < e_1 < \cdots < e_m = e\}$ et $V_*(e) = V(\mathfrak{g})\mid_{X_*} \cup C_e$ l'ouvert de $V(\mathfrak{g})$ correspondant à la feuille e. Soient enfin $Y_0, (Y_{e'})_{e' \in Par(\Gamma)} \in A[T_e]$ les polynômes construits en (11.3.2) et (11.3.3). Alors l'homomorphisme de A-algèbres*

$$\phi : A[\Gamma] \to A[T_e], X_0 \mapsto Y_0, X_{e'} \mapsto Y_{e'}, \quad e' \in Par(\Gamma)$$

induit un isomorphisme de A-algèbres $B_*(e) = \Gamma(X, \pi_* V_*(e)) \xrightarrow{\sim} A[T_e]$.

DÉMONSTRATION. Par construction des polynômes $Y_0, Y_{e'}$, $e' \in \mathrm{Par}(\Gamma)$, la relation

$$\phi(\Delta_{e'}(\mathfrak{g})) = \Delta_{e'}(\mathfrak{g})\left(Y_0, (Y_{e''})_{e'' \in \mathrm{Anc}(e')}\right) = fY_{e'} - G_{e'}(\mathfrak{g})\left(Y_0, (Y_{e''})_{e'' \in \mathrm{Anc}(e')}\right) = 0$$

est satisfaite dans $A[T_e]$. D'après (6.1.10), la relation

$$f\phi(\Delta_{e''<e'}(\mathfrak{g})) = f\Delta_{e''<e'}(\mathfrak{g})\left(Y_0, (Y_{e''})_{e'' \in \mathrm{Anc}(e')}\right) = 0$$

est donc aussi satisfaite dans $A[T_e]$ pour tout $e'' \in \mathrm{Anc}(e')$. Puisque f n'est pas diviseur de zéro dans $A[T_e]$, cela implique que $\phi(\Delta_{e''<e'}(\mathfrak{g})) = 0$ dans $A[T_e]$. Ainsi, ϕ se factorise par un homomorphisme $\bar{\phi} : B(\mathfrak{g}) = A[\Gamma]/I(\mathfrak{g}) \to A[T_e]$. La définition de $Y_0 = Z_0 + f^m T_e$ implique d'autre part que $\bar{\phi}$ induit un isomorphisme de A_f-algèbres $B(\mathfrak{g})_f \simeq A_f[X_0] \xrightarrow{\sim} A_f[T_e]$. D'après (11.2.8), l'idéal de la composante $C_e \subset V_*(e)$ de la fibre $\pi^{-1}(D)$ est l'idéal

$$I(\mathfrak{g})(e) = \left\{f, I(\mathfrak{g}), \left(a_{e_{i+1},e_i} + X_{e_{i-1}}\right)_{i=0,\dots,m-1}\right\} \subset A[\Gamma],$$

et C_e est isomorphe à $\mathbb{A}^1_D \simeq \mathrm{Spec}\left((A/fA)\left[X_{\mathrm{Par}(e)}\right]\right)$. On en déduit que $\phi(Q) \in fA[T_e]$ pour tout $Q \in I(\mathfrak{g})(e)$ puisque pour tout $i = 0, \dots, m-2$,

$$Y_{e_i} = Z_{e_i} + f^{m-i-1}\zeta_i T_e + f^{m-i}R_i(T_e) \quad \text{où} \quad Z_{e_i} = -a_{e_{i+2},e_{i+1}} + f\xi_i.$$

D'autre part, puisque par construction $Y_{e_{m-1}} = \beta + \zeta_{m-1}T_e + fR_{m-1}(T_e)$, où l'image de ζ_{m-1} dans A/fA est inversible, ϕ induit un isomorphisme

$$A[\Gamma]/I(\mathfrak{g})(e) \simeq (A/fA)\left[X_{e_{m-1}}\right] \xrightarrow{\sim} (A/fA)[T_e].$$

Ainsi l'image du X-morphisme $\mathbb{A}^1_X \to \mathbb{A}^{d(\Gamma)}_X$ correspondant à l'homomorphisme ϕ est contenue dans l'ouvert $V_*(e)$ de $V(\mathfrak{g})$. Il est alors clair que le X-morphisme induit $\tau : \mathbb{A}^1_X \to V_*(e)$ est bijectif, donc est un isomorphisme puisque $V_*(e)$ est lui-même isomorphe à $\mathbb{A}^1_X$ d'après (11.2.10). □

11.3.5. On a montré que pour tout arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$ satisfaisant aux hypothèses (11.1.1) et toute feuille $e_i \in \mathrm{Fe}(\Gamma)$ au niveau $m_i = l(\downarrow e_i)_\Gamma$, il existe $\tilde{\sigma}_i = Z_0 \in A$ tel que l'homomorphisme de A-algèbres

$$\tilde{\tau}_i : A[X_0] \to A[T_i], X_0 \mapsto \tilde{\sigma}_i + f^{m_i} T_i$$

se prolonge en un isomorphisme $\tau_i : B_*(e_i) \xrightarrow{\sim} A[T_i]$. Par construction, $\tilde{\tau}_i$ induit un isomorphisme $B(\mathfrak{g})_f \simeq B_*(e_i) \simeq A_f[X_0] \xrightarrow{\sim} A_f[T_i]$. On obtient donc, pour toute autre feuille $e_j \in \mathrm{Fe}(\Gamma)$ de Γ au niveau $m_j = l(\downarrow e_j)_\Gamma$, un isomorphisme de A_f-algèbres $\tilde{\tau}_j \circ \tilde{\tau}_i^{-1} : A_f[T_i] \to A_f[T_j]$ défini par

$$T_i \mapsto f^{-m_i}(\tilde{\sigma}_j - \tilde{\sigma}_i) + f^{m_j - m_i} T_j = f^{\mu_i - h(\Gamma)}(\tilde{\sigma}_j - \tilde{\sigma}_i) + f^{\mu_i - \mu_j} T_j,$$

où (11.2.1), $\mu_i = h(\Gamma) - m_i$ et $\mu_j = h(\Gamma) - m_j$. Ainsi $V(\mathfrak{g})$ est isomorphe au schéma de Danielewski-Fieseler de base $(X, D = \mathrm{div}(f))$, de type $(n, [\mu])$, défini par les fonctions de transition $\tilde{g}_{ij} = f^{\mu_i - h(\Gamma)}(\tilde{\sigma}_j - \tilde{\sigma}_i) \in A_f$, donc au schéma de Danielewski-Fieseler $\pi : W = W^{(n[\mu])}_{(h(\Gamma), \tilde{\sigma})} \to X$ (7.1.11) associé à la paire $(\lambda, \tilde{\sigma})$, où $\tilde{\sigma} = \{\tilde{\sigma}_i \in A\}$.

11.3.6. On observera que par construction, la restriction sur $V(\mathfrak{g})$ de la projection $pr_{X_0} : \mathbb{A}^{d(\Gamma)+1}_X \to \mathbb{A}^1_X = \mathrm{Spec}(A[X_0])$ induite par l'inclusion $A[X_0] \subset A[\Gamma]$ coïncide, via l'isomorphisme $V(\mathfrak{g}) \simeq W$, avec le morphisme $\mathbb{G}_{a,X}$-équivariant canonique $\psi_{(h(\Gamma), \tilde{\sigma})} : W \to \mathbb{A}^1_X$ (7.1.13) correspondant à la donnée de la paire $(h(\Gamma), \tilde{\sigma})$. En particulier, lorsque l'on munit W de sa structure canonique de $\mathbb{G}_{a,X}$-quasi-torseur correspondant à la section canonique $s_{[\mu]} \in \Gamma(X(n), \mathcal{O}[\mu])$ et $V(\mathfrak{g})$ de la $\mathbb{G}_{a,X}$-action définie par la dérivation localement nilpotente $\partial_{\mathfrak{g}, h(\Gamma)} \in \mathrm{Der}_A(B(\mathfrak{g}))$ induite par la dérivation localement nilpotente $\widetilde{\partial}_{\mathfrak{g}, m} \in \mathrm{Der}_A(A[\Gamma])$ (6.3.3), l'isomorphisme $W \xrightarrow{\sim} V(\mathfrak{g})$ est équivariant, et l'on obtient, par composition avec l'immersion fermée équivariante $V(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathbb{A}^{d(\Gamma)+1}_X$, un plongement équivariant $W \hookrightarrow \mathbb{A}^{d(\Gamma)+1}_X$ prolongeant le morphisme équivariant canonique $\psi_{(h(\Gamma), \tilde{\sigma})} : W \to \mathbb{A}^1_X$.

Troisième partie

Surfaces de Danielewski

CHAPITRE 12

Combinatoire des surfaces de Danielewski

Nous revenons dans le présent chapitre à l'étude des surfaces de Danielewski S_1 et S_2 de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}\left(\mathbb{C}\left[x, y, z\right]\right)$, définies par les équations $xz - y\left(y+1\right) = 0$ et $x^2 z - y\left(y+1\right) = 0$, qui ont servi de motivation à l'introduction et au développement de la notion générale de schéma de Danielewski-Fieseler. Rappelons que via la restriction de la projection $pr_x : \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}} \to X = \mathrm{Spec}\left(\mathbb{C}\left[x\right]\right)$, ces deux surfaces sont des schémas de Danielewski-Fieseler de base $\left(X, D = \mathrm{div}\left(x\right)\right)$ attachés au $\mathbb{G}_{a,X}$-torseur trivial $p : \mathbb{A}^1_X \to X$.

Dans ce chapitre, nous fixons un corps k de caractéristique nulle, et nous considérons plus généralement la classe des schémas de Danielewski-Fieseler $\pi : S \to X = \mathrm{Spec}\left(k\left[x\right]\right)$, de base $\left(X, D = \mathrm{div}\left(x\right)\right)$, attachés au $\mathbb{G}_{a,X}$-torseur trivial $p : \mathbb{A}^1_X \to X$, tels que S soit un schéma affine. Par analogie avec les surfaces S_1 et S_2, nous appelons ces schémas *surfaces de Danielewski.*

Ces surfaces ont été déjà introduites dans **[14]**, dans le cas particulier où $k = \mathbb{C}$, sous l'appellation de surfaces de Danielewski généralisées. Il ressort de cet article que ces surfaces peuvent être décrites, à isomorphisme près, de manière purement combinatoire, par l'intermédiaire d'une certaine classe d'arbres pondérés $\gamma = \left(\Gamma, w\right)$. Précisons que nous utilisons ici des arbres pondérés γ d'une manière totalement différente de celle du chapitre 6, la notation γ utilisée ci-dessous ayant d'ailleurs pour but d'éviter les risques de confusion. Nous relierons cependant, dans le chapitre 14, les deux constructions distinctes de surfaces de Danielewski obtenues respectivement à partir d'arbres k-pondérés γ et $k\left[x\right]\left[t\right]$-pondérés $\mathfrak{g}$.

Dans le présent chapitre, nous montrons que l'essentiel des constructions de **[14]** s'adapte sans difficulté à un corps de base k quelconque. Signalons cependant que pour rester en accord avec la notion générale de schéma de Danielewski-Fieseler développée précédemment, la présentation que nous faisons ici est duale de celle introduite dans *loc. cit.*, cette dualité se manifestant principalement lors de la construction de l'arbre pondéré associé à une surface de Danielewski.

La lecture de ce qui suit ne requiert pour l'essentiel que la connaissance de la notion combinatoire intuitive d'arbre orienté. Cependant, certains détails techniques, notamment ceux relatifs à la construction d'arbres par recollement de chaînes, méritent un traitement rigoureux qui ne peut être mené à bien qu'en introduisant un formalisme adapté. Afin de ne pas perturber l'exposé, nous avons rassemblé l'ensemble de ces résultats techniques, ainsi que la terminologie correspondante dans l'annexe (C) de cette thèse.

NOTATION 12.0.7. Un corps k étant fixé, nous notons $A = k\left[x\right]$, $X = \mathrm{Spec}\left(k\left[x\right]\right)$ la droite affine $\mathbb{A}^1_k$, $x_0 = \mathrm{div}\left(x\right)$ et $\delta : X\left(n\right) \to X$ la n-duplication de x_0 dans X au sens de (8.1.1). Les points fermés de $\delta^{-1}\left(x_0\right)$, que nous appellerons dorénavant *les origines de* $X\left(n\right)$ seront notés $x_1\left(n\right), \ldots, x_n\left(n\right)$. Conformément à la notation (8.1.5), nous désignons par $x\left(n\right) = x_1\left(n\right) + \cdots + x_n\left(n\right)$ le diviseur image inverse de x_0 par δ.

12.1. Définitions et résultats préliminaires

DÉFINITION 12.1.1. On appelle *surface de Danielewski* tout X-schéma affine isomorphe à un schéma de Danielewski-Fieseler de base $(X = \mathrm{Spec}\,(k\,[x])\,, x_0 = \mathrm{div}\,(x))$, attaché au $\mathbb{G}_{a,X}$-torseur trivial $p : \mathbb{A}^1_X \to X$.

12.1.1. Conventions de construction. Par définition, une surface de Danielewski $\pi : S \to X$ admet une structure de torseur $\rho\,(n) : S \to X\,(n)$ sous un fibré en droites $\mathbf{V}\,(\mathcal{O}\,[-\mu])_+$, où $[\mu] \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, au-dessus de la n-duplication $\delta : X\,(n) \to X$ de x_0 dans $X = \mathbb{A}^1_k$. Un tel multi-indice $[\mu]$ n'est évidemment déterminé qu'à l'addition près d'un multi-indice constant $[\hat{v}]$, où $v \geq -\min\limits_{i=1,\ldots,n}(\mu_i)$, les diviseurs effectifs $[\mu]\,x\,(n)$ et $([\mu] + [\hat{v}])\,x\,(n)$ étant en effet linéairement équivalents puisque $[\hat{v}]\,x\,(n) = \mathrm{div}\,(\delta^* x^v)$ est principal.

12.1.2. Rappelons d'autre part que S s'identifie au X-schéma quotient $\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} \mathbb{A}^1_{X_i} / \sim$ obtenu en recollant $n \geq 1$ copies $S_i = S\mid_{X_i(n)} \simeq \mathbb{A}^1_X = \mathrm{Spec}\,(A\,[T_i])$ de la droite affine de base X, au-dessus de l'ouvert $X_* = X \setminus \{x_0\} \simeq \mathrm{Spec}\,(A_x)$, via des isomorphismes de A_x-algèbres $A_x\,[T_i] \xrightarrow{\sim} A_x\,[T_j]\,, T_i \mapsto \tilde{g}_{ij} + x^{\mu_i - \mu_j} T_j$ associés à $[\mu] = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ et à une collection $\tilde{g} = \{\tilde{g}_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n}$ de fonctions de transition $\tilde{g}_{ij} \in A_x = k\left[x, x^{-1}\right]$satisfaisant les relations de cocycle "tordues"

$$\left\{\begin{array}{lcl} \tilde{g}_{ji} & = & -x^{\mu_j - \mu_i} \tilde{g}_{ij} \\ \tilde{g}_{ik} & = & \tilde{g}_{ij} + x^{\mu_i - \mu_j} \tilde{g}_{jk} \end{array}\right.$$

Le fait que les recollements et les relations de cocycles ne dépendent que des différences $\mu_i - \mu_j$ implique que remplacer $[\mu]$ par $[\mu] + [\hat{v}]$ tout en conservant les mêmes fonctions de transition conduit à un X-schéma identique à S. Cela incite à ne plus considérer des multi-indices $[\mu] \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ mais seulement des classes d'équivalences de multi-indices de ce type modulo l'addition de multi-indices constant $[\hat{v}]$. Si l'on ne souhaite pas travailler avec des classes d'équivalence, on peut tout aussi bien choisir une fois pour toutes un représentant de chaque classe, ce qui peut d'ailleurs se faire de manière canonique puisque pour tout multi-indice $[\mu] \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, il existe un unique représentant $[\mu_{\min}] = [\mu] - [\hat{v}] \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ de la classe d'équivalence de $[\mu]$, correspondant à l'entier $\hat{v} = \min\limits_{i=1,\ldots,n}(\mu_i)$, ayant au moins un de ses coefficients égal à 0, et les autres ≥ 0. En choisissant cette description en terme de classes d'équivalence de multi-indices, on abandonne évidemment l'approche qui prévalait jusqu'alors, consistant à considérer un schéma de Danielewski-Fieseler $\pi : W \to X$ de type $(n, [\mu])$ attaché au $\mathbb{G}_{a,X}$-torseur trivial comme muni canoniquement de la $\mathbb{G}_{a,X}$-action par translations tordues correspondant à la structure de $\mathbb{G}_{a,X(n)}$-quasi torseur sur $\rho\,(n) : W \to X\,(n)$ induite par la section canonique $s_{[\mu]} \in \Gamma\,(X\,(n)\,, \mathcal{O}\,[\mu])$. Il n'en demeure pas moins que tout surface de Danielewski $\pi : S \to X$ peut être équipée d'une $\mathbb{G}_{a,X}$-action du type précédent, ce qui revient à choisir un représentant de la classe d'équivalence du multi-indice $[\mu] \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$.

12.1.3. Plus généralement, d'après (3.1.9), les structures de $\mathbb{G}_{a,X(n)}$-quasi-torseur sur $\rho\,(n) : S \to X\,(n)$ sont en bijection avec les diviseurs effectifs sur $X\,(n)$ linéairement équivalents à $[\mu]\,x\,(n)$. Puisque $X = \mathbb{A}^1_k$, tout diviseur de ce type est de la forme $[\mu]\,x\,(n) + \mathrm{div}\,(\delta^* x^v f)$, où $f \in k\,[x] \setminus xk\,[x]$ et $v \geq -\min\limits_{i=1,\ldots,n}(\mu_i)$, de sorte que la structure de $\mathbb{G}_{a,X(n)}$-quasi-torseur associée à un tel diviseur correspond encore à une $\mathbb{G}_{a,X}$-action sur S. On notera en particulier que le représentant canonique $[\mu_{\min}] \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ de la classe d'équivalence de $[\mu]$ correspond au diviseur effectif $[\mu_{\min}]\,x\,(n)$ linéairement équivalent à $[\mu]\,x\,(n)$ pour lequel le cycle des points fixes (3.3.3) du $\mathbb{G}_{a,X(n)}$-quasi-torseur associé est minimal. On en déduit la description suivante des $\mathbb{G}_{a,X}$-actions sur $\pi : S \to X$.

Proposition 12.1.4. *Toute $\mathbb{G}_{a,X}$-action sur S correspond à une structure de $\mathbb{G}_{a,X}$-quasi-torseur définie par une section $fs_{[\mu_{\min}]}$ pour un certain $f \in A$.*

Démonstration. Toute $\mathbb{G}_{a,X}$-action non triviale sur S induit une $\mathbb{G}_{a,X_i(n)}$-action non triviale sur $S_i = S\mid_{X_i(n)}$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Puisque $S_i \simeq \mathbb{A}^1_{X_i(n)}$, cette action est nécessairement une translation tordue $\mathbf{t}_{f_i}$ pour un certain élément $f_i \in \Gamma\left(X_i(n), \mathcal{O}_{X(n)}\right) \setminus \{0\} \simeq A \setminus \{0\}$, donc correspond à un homomorphisme de co-action $A[T_i] \rightarrow A[T_i, T] \simeq A[T_i] \otimes_A A[T], T_i \mapsto T_i + f_i T$. Ces actions sont compatibles avec les isomorphismes de recollement définissant S si et seulement si la relation $f_i = x^{\mu_i - \mu_j} f_j$ est satisfaite dans $A_x = k\left[x, x^{-1}\right]$ pour tout couple d'indices $i \neq j$, *i.e.*, si et seulement si les sections locales $x^{-\mu_i} f_i \in \Gamma(X_i(n), \mathcal{O}[\mu])$ se recollent en une section globale $\tilde{f}$. Il existe donc une section $f \in \Gamma\left(X(n), K_{X(n)}\right) \simeq \Gamma(X, K_X) = \operatorname{Frac}(A)$ telle que $\tilde{f} = fs_{[\mu_{\min}]}$. Soit $\operatorname{div}_\infty(f) = \lambda x_0 + \tilde{D}$, où $\lambda \geq 0$, $\tilde{D} \geq 0$ et $\operatorname{Supp}\left(\tilde{D}\right) \subset X_*$, le diviseur des pôles de $f \in \operatorname{Frac}(A)$. On en déduit que $\operatorname{div}\left(\tilde{f}\right) = \delta^* \operatorname{div}_0(f) + \sum_{i=1}^n (\mu_i - \lambda) x_i(n) - \delta^* \tilde{D}$ est effectif si et seulement si $\tilde{D} = 0$ et $\lambda = 0$, car, par définition du multi-indice $[\mu_{\min}]$, il existe au moins un indice i tel que $\mu_i = 0$. Ainsi $f \in A$, ce qui termine la preuve. □

12.1.2. Reformulation du critère d'affinité. D'après (7.1.14), tout schéma de Danielewski-Fieseler $\pi : W \rightarrow X$ de type $(n, [\mu])$, attaché au $\mathbb{G}_{a,X}$-torseur trivial $\mathbb{A}^1_X$, admet des fonctions de transition sous la forme

$$\tilde{g}_{ij} = x^{\mu_i - \lambda} (\tilde{\sigma}_j - \tilde{\sigma}_i) \in k\left[x, x^{-1}\right] \quad i \neq j, i, j = 1, \ldots, n$$

pour un certain entier $\lambda \geq \max_{i=1,\ldots,n} (\mu_i)$ et une certaine collection $\tilde{\sigma} = \{\tilde{\sigma}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ de polynômes $\tilde{\sigma}_i \in A = k[x]$, ces données étant déterminées par le choix d'un morphisme de schémas de Danielewski-Fieseler $\psi : W \rightarrow \mathbb{A}^1_X$ qui s'identifie alors au morphisme $\mathbb{G}_{a,X}$-équivariant canonique $\psi_{(\lambda,\tilde{\sigma})} : W \rightarrow \mathbb{A}^1_X(-\lambda)$ (7.1.13). On déduit de plus de (9.1.11) qu'à isomorphisme près, la collection $\tilde{\sigma}$ peut être choisie de telle sorte que $\deg(\tilde{\sigma}_i) < \lambda - \mu_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

12.1.5. Toute surface de Danielewski admet par conséquent une présentation analogue, si ce n'est que l'entier λ et le multi-indice $[\mu] \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ ne sont alors définis qu'à l'addition près d'un entier $\upsilon \geq -\min_{i=1,\ldots,n} (\mu_i)$ et du multi-indice constant $[\hat{\upsilon}]$ respectivement. Néanmoins, suivant (7.1.11), une surface de Danielewski de ce type sera notée $S_{(\lambda,\tilde{\sigma})} = S^{(n,[\mu])}_{(\lambda,\tilde{\sigma})}$. Une surface de Danielewski $S_{(\lambda,\tilde{\sigma})}$ étant par définition affine , l'entier λ (ou plutôt sa classe d'équivalence) et la collection $\tilde{\sigma}$ ne sont pas quelconques, le corollaire (10.1.4) et le théorème (10.2.1) permettant de déterminer plus précisément que si $n \geq 2$ alors $S_{(\lambda,\tilde{\sigma})}$ est affine si et seulement si

$$\lambda > \max_{i=1,\ldots,n} (\mu_i) \quad \text{et} \quad \operatorname{ord}_{x_0}(\tilde{\sigma}_j - \tilde{\sigma}_i) < \min(\lambda - \mu_i, \lambda - \mu_j)$$

pour tout couple d'indices $i \neq j$, cette condition étant en effet la seule à garantir que les fonctions de transition $\tilde{g}_{ij}, \tilde{g}_{ji} \in k\left[x, x^{-1}\right]$ aient toutes deux un pôle en x_0. On notera au passage que les deux contraintes ci-dessus sont compatibles avec la description en terme de classes d'équivalence, puisqu'elles demeurent inchangées lorsque l'on remplace $[\mu]$ et λ par des données équivalentes $[\mu] + [\hat{\upsilon}]$ et $\lambda + \upsilon$. On obtient donc la description suivante :

Proposition 12.1.6. *Toute surface de Danielewski est isomorphe à un schéma de Danielewski-Fieseler $\pi : S^{(n,[\mu])}_{(\lambda,\tilde{\sigma})} \rightarrow X$ pour des données $n \geq 1$, $[\mu] \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, $\lambda \geq 0$ et $\tilde{\sigma} = \{\tilde{\sigma}_i \in k[x]\}$ satisfaisant les conditions suivantes :*

1) Si $n = 1$, alors $\lambda \geq \mu$.

2) Si $n \geq 2$, alors $\lambda > \max_{i=1,\ldots,n} (\mu_i)$ et $\operatorname{ord}_{x_0}(\tilde{\sigma}_j - \tilde{\sigma}_i) < \min(\lambda - \mu_i, \lambda - \mu_i)$ pour tout couple d'indices $i \neq j$.

12.2. Arbre pondéré associé à une surface de Danielewski

L'ensemble des surfaces de Danielewski de la forme $S_{(\lambda,\tilde{\sigma})}^{(n,[\mu])}$ admet une description combinatoire simple en termes d'arbres finement k-pondérés. Nous renvoyons le lecteur à l'annexe (C) pour un exposé complet sur ces arbres. Rappelons simplement qu'un arbre finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$ est un arbre fini orienté Γ, de racine e_0, muni d'une application de poids $w : E(\Gamma) \to k$, de l'ensemble des arêtes de Γ à valeurs dans le corps k, telle que pour tous deux sommets distincts e et e' de Γ partageant le même parent e'', on ait $w\left(\overrightarrow{ee''}\right) \neq w\left(\overrightarrow{e'e''}\right)$. Nous nous proposons ici d'établir une bijection entre l'ensemble des surfaces de Danielewski $S_{(\lambda,\tilde{\sigma})}^{(n,[\mu])}$, où $\tilde{\sigma} = \{\tilde{\sigma}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ est une collection de polynômes

$$\tilde{\sigma}_i = \sum_{j=0}^{\lambda-\mu_i-1} w_{i,j}x^j \in k[x], \quad i = 1, \ldots, n$$

de degrés $\deg(\tilde{\sigma}_i) < \lambda - \mu_i$, et l'ensemble des arbres finement k-pondérés.

12.2.1. Arbre pondéré associé à une surface de Danielewski. Étant donnée une surface de Danielewski $S = S_{(\lambda,\tilde{\sigma})}^{(n,[\mu])}$, nous construisons ci-dessous un arbre finement k-pondéré γ_S.

12.2.1. Supposons tout d'abord que $n = 1$, ce cas correspondant aux surfaces de Danielewski $S = S_{(\lambda,\tilde{\sigma}_1)}^{(1,\mu_1)}$ qui sont isomorphes à $\mathbb{A}_X^1$. Une fois des représentants $\mu_1 \geq 0$ et $\lambda \geq \mu_1$ fixés, la donnée du polynôme $\tilde{\sigma}_1$ équivaut alors simplement à la donnée du morphisme $\psi : \mathbb{A}_X^1 \to \mathbb{A}_X^1$ induit par l'homomorphisme de A-algèbres $A[T] \to A[T], T \mapsto \tilde{\sigma_1} + x^{\lambda-\mu_1}T$. Si $\lambda = \mu_1$, alors nous posons $\gamma_S = \{e_0\}$, c'est à dire l'arbre trivial à un élément.

Sinon, si $\lambda - \mu_1 \geq 1$, nous construisons une chaîne k-pondérée $\gamma_S = (\Gamma_S, w_S)$ en équipant la chaîne $\Gamma_S = \{e_0 < e_1 < \cdots < e_{\lambda-\mu_1}\}$ de longueur $\lambda - \mu_1$ de la fonction de poids $w_S : E(\Gamma_S) \to k$ définie par $w_S\left(\overrightarrow{e_{j+1}e_j}\right) = w_{1,j}$ pour tout $j = 0, \ldots, \lambda - \mu_1 - 1$.

12.2.2. Supposons maintenant que $n \geq 2$. Nous formons alors, suivant le même procédé que précédemment, n chaînes k-pondérées $\gamma_i = (\Gamma_i, w_i)$ en équipant les chaînes $\Gamma_i = \{e_{i,0} < \cdots < e_{i,n_i}\}$, de longueur $n_i = \lambda - \mu_i \geq 1$, des fonctions de poids respectives $w_i : E(\Gamma_i) \to k$ définies par

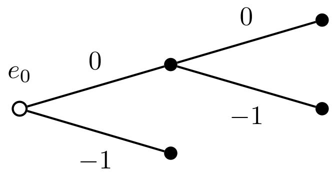
$$w\left(\overrightarrow{e_{i,j+1,i}e_{i,j}}\right) = w_{i,j}, \quad j = 0, \ldots, \lambda - \mu_i - 1.$$

Puisque S est affine, $n_{ij} = \mathrm{ord}_{x_0}(\tilde{\sigma}_j - \tilde{\sigma}_i) < \min(n_i, n_j)$ d'après (12.1.6). Ainsi, d'après (C.3.5), il existe un unique arbre finement k-pondéré $\gamma_S = (\Gamma_S, w_S)$, de feuilles e_i, $i = 1, \ldots, n$, et des isomorphismes de chaînes pondérées $\eta_i : \gamma_i \xrightarrow{\sim} (\downarrow e_i)_{\gamma_S}$ tels que $\eta_i\left(\left\{e_{i,0} < \cdots < e_{i,n_{ij}}\right\}, w_i\right) = (\downarrow e_i)_{\gamma_S} \cap (\downarrow e_j)_{\gamma_S}$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, ceci revenant à dire que l'arbre γ_S est obtenu en recollant entre elles les chaînes k-pondérées γ_i le long de leurs sous-chaînes maximales pondérées $\left(\left\{e_{i,0} < \cdots < e_{i,n_{ij}}\right\}, w_i\right)$.

Exemple 12.2.3. D'après (9.2.9), la surface $S_3 \subset \mathbb{A}_X^3 = \mathrm{Spec}(k[x][x,y,z,u])$ définie par les équations

$$xz - y(y+1) = 0, \quad yu - z^2(z+1) = 0, \quad xu - (y+1)z(z+1) = 0$$

devient, via la restriction $\pi : S_3 \to X$ de la projection $pr_x : \mathbb{A}_X^3 \to X$, une surface de Danielewski définie par le multi-indice $[\mu] = (1,0,0) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$, l'entier $\lambda = 2$, et les trois polynômes $\tilde{\sigma}_1 = -1$, $\tilde{\sigma}_2 = -x$ et $\tilde{\sigma}_3 = 0$. L'arbre finement k-pondéré γ_{S_3} correspondant à ces données est donc le suivant :



12.2.2. Surface de Danielewski associée à un arbre pondéré. Réciproquement, tout arbre finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$ détermine une surface de Danielewski $S(\gamma)$ obtenue de la manière suivante.

12.2.4. En notant $(\downarrow e_i)_\gamma = \{e_{i,0} = e_0 < \cdots < e_{i,n_i} = e_i\}_w$ les sous-chaînes maximales pondérées de longueur $n_i \geq 0$ de γ correspondant aux feuilles $e_1, \ldots, e_n$ de Γ, nous obtenons, suivant le procédé inverse de celui exposé précédemment, les données suivantes :

a) un entier $\lambda = h(\Gamma)$,

b) un multi-indice $[\mu(\gamma)] = (\mu_1(\gamma), \ldots, \mu_n(\gamma)) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, où $\mu_i = \lambda - n_i$,

c) une collection $\tilde{\sigma}(\gamma) = \{\tilde{\sigma}_i(\gamma)\}_{i=1,\ldots,n}$ de polynômes

$$\tilde{\sigma}_i(\gamma) = \sum_{j=0}^{n_i-1} w\left(\overrightarrow{e_{i,j+1,i}e_{i,j}}\right) x^j \in k[x], \quad i = 1, \ldots, n.$$

L'arbre γ étant finement pondéré, l'entier λ et la collection $\tilde{\sigma}(\gamma)$ satisfont les conditions (12.1.6), donc définissent une surface de Danielewski $S(\gamma) = S^{(n,[\mu(\gamma)])}_{(\lambda,\tilde{\sigma}(\gamma))}$. On notera en particulier que par construction le multi-indice $[\mu(\gamma)]$ est le représentant canonique (12.1.3) de sa classe d'équivalence puisque au moins un de ses coefficients est égal à 0. Puisque dans la définition d'une surface de Danielewski $S^{(n,[\mu])}_{(\lambda,\tilde{\sigma})}$ l'entier λ et le multi-indice $[\mu]$ ne sont déterminés qu'à équivalence près, on conclut que les applications $S \mapsto \gamma_S$ et $\gamma \mapsto S(\gamma)$ sont réciproques l'une de l'autre, ce qui conduit au résultat suivant :

Proposition 12.2.5. *L'ensemble des surfaces de Danielewski $S^{(n,[\mu])}_{(\lambda,\tilde{\sigma})}$ définies par des collections $\tilde{\sigma} = \{\tilde{\sigma}_i \in k[x]\}_{i=1,\ldots,n}$ de polynômes de degrés $\deg(\tilde{\sigma}_i) < \lambda - \mu_i$ est en bijection avec l'ensemble des arbres finement k-pondérés.*

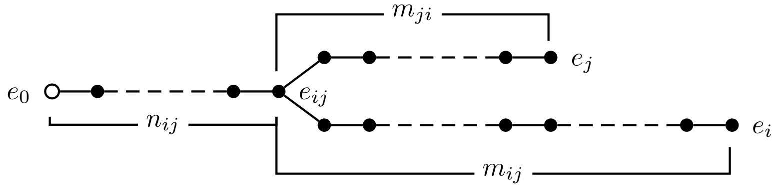
12.2.6. Plus généralement, pour toute surface de Danielewski $S = S^{(n,[\mu])}_{(\lambda,\tilde{\sigma})}$ définie par une collection $\tilde{\sigma} = \{\tilde{\sigma}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ de polynômes $\tilde{\sigma}_i \in k[x]$ ne satisfaisant nécessairement $\deg(\tilde{\sigma}_i) < \lambda - \mu_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, il est encore possible de construire un arbre finement k-pondéré γ_S, en tronquant chaque polynôme $\tilde{\sigma}_i$ au degré $\lambda - \mu_i - 1$. La surface de Danielewski $S(\gamma_S)$ correspondant à l'arbre ainsi obtenu est alors isomorphe à S d'après (9.1.11). Toute surface de Danielewski étant isomorphe à une surface de ce type (cf. 7.1.14), on obtient finalement le résultat suivant.

Théorème 12.2.7. *Toute surface de Danielewski est isomorphe à une surface $\pi : S(\gamma) \to X$ définie par un arbre finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$.*

12.2.8. Par construction, la surface de Danielewski $S(\gamma)$ associée à un arbre finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$ qui n'est pas une chaîne, est définie par le multi-indice $[\mu(\gamma)]$ et les fonctions de transition

$$\tilde{g}_{ij} = x^{h(\Gamma)-\mu_i(\gamma)}\left(\tilde{\sigma}_j(\gamma) - \tilde{\sigma}_i(\gamma)\right) = x^{-n_i}\left(\tilde{\sigma}_j(\gamma) - \tilde{\sigma}_i(\gamma)\right) \in k\left[x, x^{-1}\right],$$

où par définition de $\mu_i(\gamma)$, $n_i > 1$ désigne la longueur de la sous-chaîne maximale $(\downarrow e_i)_\Gamma$ définie par la feuille e_i de Γ correspondante. En notant e_{ij} le premier ancêtre commun des feuilles e_i et e_j, l'entier $n_{ij} = \mathrm{ord}_{x_0}(\tilde{\sigma}_j(\gamma) - \tilde{\sigma}_i(\gamma))$ s'identifie à la longueur de la sous-chaîne $(\downarrow e_{ij})_\Gamma$ de Γ, tandis que les entiers $m_{ij} := -\mathrm{ord}_{x_0}(\tilde{g}_{ij})$ et $m_{ji} := -\mathrm{ord}_{x_0}(\tilde{g}_{ji})$, qui satisfont la relation $m_{ji} = n_j - n_{ij} = m_{ij} + n_j - n_i$, s'identifient respectivement aux longueurs des sous-chaînes $[e_{ij}, e_i]_\Gamma$ et $[e_{ij}, e_j]_\Gamma$ de Γ.



12.3. Isomorphismes de surfaces de Danielewski

Ce paragraphe est consacré à l'étude des classes d'isomorphismes de surfaces de Danielewski, considérées comme des X-schémas. Nous laissons en particulier de coté le problème épineux consistant à caractériser les classes d'isomorphismes de surfaces de Danielewski dans la catégorie des k-schémas.

12.3.1. Critères généraux. D'après (9.1.11), deux surfaces de Danielewski S (resp. S') définies par un multi-indice $[\mu] \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ (resp. $[\mu'] \in \mathbb{Z}^{n'}_{\geq 0}$) et une collection de fonctions de transition $\tilde{g} = \{\tilde{g}_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n}$ (resp. $\tilde{g}' = \{\tilde{g}'_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n'}$), sont isomorphes en tant que schémas de Danielewski-Fieseler si et seulement si $n = n'$ et s'il existe une permutation ϕ de l'ensemble d'indices $\{1, \ldots, n\}$ et une collection $\tilde{\tau} = \{\tilde{\tau}_i\}_{i=1,\ldots,n'}$ de polynômes $\tilde{\tau}_i \in k[x]$, tels que $\mu'_i = \mu_{\phi(i)}$ pour tout $i = 1, \ldots, n'$ et

$$\tilde{g}'_{ij} = \tilde{g}_{\phi(i)\phi(j)} + x^{\mu_{\phi(i)} - \mu_{\phi(j)}}\tilde{\tau}_j - \tilde{\tau}_i$$

pour tout couple d'indices $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n'$. Rappelons que cette caractérisation repose essentiellement sur le fait qu'un X-automorphisme de $\mathbb{A}^1_X$ équivariant pour les $\mathbb{G}_{a,X}$-actions par translations tordues de la forme $\mathbf{t}_{x^{\mu_i}}$ (7.1.8) est nécessairement induit par un $k[x]$-automorphisme de $k[x][T]$ de la forme $T \mapsto \tilde{\tau}_i + T$ pour un certain polynôme $\tilde{\tau}_i \in k[x]$.

12.3.1. Plus généralement, d'après (2.5.5), tout X-automorphisme de $\mathbb{A}^1_X$ est induit par un $k[x]$-automorphisme de $k[x][T]$ de la forme $T \mapsto \tilde{\tau}_i + a_i T$, où $\tilde{\tau}_i \in k[x]$ et $a_i \in k^*$. Un raisonnement analogue à celui de la preuve de (9.1.11) montre alors que S et S' sont isomorphes en tant que surfaces de Danielewski si et seulement si il existe $a \in k^*$, $\upsilon \in \mathbb{Z}$ et une collection $\tilde{\tau} = \{\tilde{\tau}_i\}_{i=1,\ldots,n'}$, tels que $\mu'_i = \mu_{\phi(i)} + \upsilon$ pour tout $i = 1, \ldots, n'$ et tels que $a\tilde{g}'_{ij} = \tilde{g}_{\phi(i)\phi(j)} + x^{\mu_{\phi(i)} - \mu_{\phi(j)}}\tilde{\tau}_j - \tilde{\tau}_i$ pour tout couple d'indices $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n'$, la première relation provenant du fait que les multi-indices $[\mu]$ et $[\mu']$ ne sont plus définis qu'à équivalence près, tandis que la seconde exprime les conditions de compatibilité aux recollements d'une collection d'isomorphismes locaux de la forme $T \mapsto \tilde{\tau}_i + a_i T$.

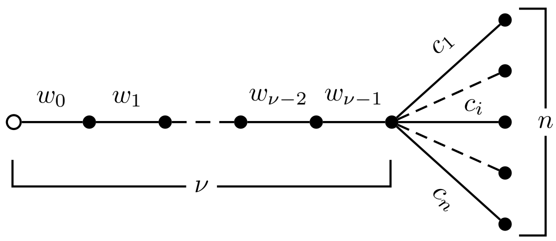
12.3.2. Critère combinatoire. Lorsque S et S' sont deux surfaces de Danielewski définies par des arbres finement k-pondérés γ et γ' respectivement, il devient possible de décider si S et S' sont isomorphes uniquement à partir des propriétés de ces arbres. Rappelons au préalable (C.1.8) que le sous-arbre k-pondéré essentiel $\mathrm{Es}(\gamma)$ d'un arbre finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$ est le sous-arbre maximal $\mathrm{Es}(\Gamma)$ de Γ, enraciné soit en l'unique feuille $\tilde{e}_0$ de Γ si Γ et une chaîne, soit en l'unique ancêtre commun $\tilde{e}_0$ des feuilles de Γ, pondéré par la restriction de la fonction de poids $w : E(\Gamma) \to k$.

Définition 12.3.2. Deux arbres finement k-pondérés $\gamma = (\Gamma, w)$ et $\gamma' = (\Gamma', w')$ sont dit ***équivalents***, s'il existe un isomorphisme d'arbres $\eta : \mathrm{Es}(\Gamma) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Es}(\Gamma')$ entre les sous-arbres essentiels de Γ et Γ' respectivement, un élément $a \in k^*$ et une collection $\tilde{b} = \{b_i \in k\}_{i=0,\ldots,h-1}$, où $h = h(\mathrm{Es}(\Gamma))$ désigne la hauteur de l'arbre $\mathrm{Es}(\Gamma)$ tels que

$$w'\left(\overrightarrow{\eta(e_{i+1})\,\eta(e_i)}\right) = aw\left(\overrightarrow{e_{i+1}e_i}\right) + b_i, \quad i = 0, \ldots, h-1$$

pour tout arête $\overrightarrow{e_{i+1}e_i}$ de $\mathrm{Es}(\Gamma)$ joignant deux sommets e_{i+1} et e_i aux niveaux $i+1$ et i respectivement.

Exemple 12.3.3. Étant donnés un entier $\nu \geq 0$, une collection $w = \{w_0, \ldots, w_{\nu-1}\}$ d'éléments de k, un entier $n \geq 2$ et une collection $c = \{c_1, \ldots, c_n\}$ d'éléments de k deux à deux distincts $\nu \geq 0$, nous considérons l'arbre finement k-pondéré suivant :

$\gamma^n_{\nu,w,c} =$ 

Par définition $S\left(\gamma^n_{(\upsilon,w,c)}\right)$ est la surface de Danielewski correspondant au multi-indice $[\mu] = [\hat{0}] \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ et à la paire $(\lambda, \tilde{\sigma})$, où $\lambda = \nu + 1$ et $\tilde{\sigma}_i = \displaystyle\sum_{j=0}^{\nu-1} w_j x^j + x^\nu c_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. On a donc $\tilde{g}_{ij} = x^{-1}(c_j - c_i)$ pour tout couple d'indice $i \neq j$. Ainsi $S\left(\gamma^n_{(\nu,w,c)}\right)$ est isomorphe à la surface de Danielewski $S\left(\gamma^n_{(0,\emptyset,c)}\right)$ définie par le multi-indice $[\hat{0}] \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ et la paire $(1, \tilde{\sigma}')$, où $\tilde{\sigma}'_i = c_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. En posant $P_c(y) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(y - c_i)$, le même raisonnement qu'en (7.2.12) montre que via le plongement $(\xi_1, \xi_2) : S\left(\gamma^n_{(\upsilon,w,c)}\right) \hookrightarrow \mathbb{A}^2_X = \mathrm{Spec}(k[x][y,z])$ de composantes $\xi_1 = \psi_{(1,\tilde{\sigma}')}$ et $\xi_2 = x^{-1}P_c(\xi_1)$, $S\left(\gamma^n_{(0,\emptyset,c)}\right)$ s'identifie à l'hypersurface d'équation $xz - P_c(y) = 0$. D'après **[33]** deux surfaces de ce type, correspondant respectivement à des polynômes à racines simples P_c et $P_{c'}$ comme ci-dessus sont isomorphes, donc en particulier X-isomorphes, si et seulement si $P_c(y) = P_{c'}(ay + b)$ pour une certaine paire $(a, b) \in k^* \times k$. Ainsi deux surfaces de Danielewski $S\left(\gamma^n_{(\nu,w,c)}\right)$ et $S\left(\gamma^{n'}_{(\nu',w',c')}\right)$ sont isomorphes si et seulement si les arbres $\gamma^n_{(\nu,w,c)}$et $\gamma^{n'}_{(\nu',w',c')}$ sont équivalents.

Plus généralement, les arbres finement k-pondérés définissant des surfaces de Danielewski isomorphes sont caractérisés par le résultat suivant :

Théorème 12.3.4. *Pour que deux surfaces de Danielewski $S(\gamma)$ et $S(\gamma')$, définies par des arbres finement k-pondérés $\gamma = (\Gamma, w)$ et $\gamma' = (\Gamma', w')$ respectivement, soient des X-schémas isomorphes, il faut et il suffit que γ et γ' soient équivalents.*

Démonstration. Par construction, une surface de Danielewski $S(\gamma)$ est isomorphe à $\mathbb{A}^1_X$ si et seulement si γ est une chaîne k-pondérée. Toutes les chaînes pondérées étant équivalentes entres elles, le théorème est donc démontré dans ce cas particulier. Nous supposons donc dorénavant qui ni γ ni γ' ne sont des chaînes, et, dans un premier temps que γ et γ' coïncident avec leurs sous-arbres essentiels respectifs. Supposons alors que γ et γ' sont équivalents, et notons h leur hauteur commune. Puisque l'image d'une feuille e_i' de Γ' par l'isomorphisme $\eta^{-1} : \Gamma' \xrightarrow{\sim} \Gamma$ est une feuille $e_{\phi(i)} = \eta^{-1}(e_i')$ de Γ, on a $\mu_i(\gamma') = \mu_{\phi(i)}(\gamma)$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, où n désigne le nombre de feuilles de Γ et Γ'. Quitte à réordonner l'ensemble d'indices $\{1, \ldots, n\}$, on peut supposer que $\mu_1(\gamma') = \min_{i=1,\ldots,n}(\mu_i(\gamma'))$. Par définition, il existe $a \in k^*$ et une collection $\tilde{b} = \left\{\tilde{b}_r \in k\right\}_{r=0,\ldots,h-1}$ tels que

$$\tilde{\sigma}_i(\gamma') = a\tilde{\sigma}_{\phi(i)}(\gamma) + \sum_{r=0}^{h-\mu_{\phi(i)}(\gamma)-1} b_r x^r, \quad i = 1, \ldots, n,$$

de sorte que si l'on pose

$$\tilde{\tau}_i = -ax^{\mu_i(\gamma')-h}\left(\sum_{r=h-\mu_i(\gamma')}^{h-\mu_1(\gamma')-1} b_r x^r\right) \in k[x], \quad i = 1, \ldots, n$$

on obtient finalement que les fonctions de transition $\tilde{g}_{ij}(\gamma')$ et $\tilde{g}_{ij}(\gamma)$ correspondant aux données ci-dessus satisfont les relations

$$a^{-1}\tilde{g}_{ij}(\gamma') = \tilde{g}_{\phi(i)\phi(j)}(\gamma) + x^{\mu_{\phi(i)}(\gamma)-\mu_{\phi(i)}(\gamma)}\tilde{\tau}_j - \tilde{\tau}_i$$

garantissant que $S(\gamma)$ et $S(\gamma')$ sont des surfaces de Danielewski isomorphes.

Réciproquement, si $S(\gamma)$ et $S(\gamma')$ sont isomorphes, alors il existe une permutation ϕ de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$, un entier $\upsilon \in \mathbb{Z}$, un élément $a \in k^*$ et une collection $\tilde{\tau} = \{\tilde{\tau}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ de polynômes $\tilde{\tau}_i \in k[x]$, tels que $\mu_i(\gamma') = \mu_{\phi(i)}(\gamma) + \upsilon$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ et tels que $a\tilde{g}_{ij}(\gamma') = \tilde{g}_{\phi(i)\phi(j)}(\gamma) + x^{\mu_{\phi(i)}(\gamma)-\mu_{\phi(i)}(\gamma)}\tilde{\tau}_j - \tilde{\tau}_i$ pour tout couple d'indices $i \neq j$. Puisque par construction les multi-indices $[\mu(\gamma')]$ et $[\mu(\gamma)]$ ont chacun au moins un de leurs coefficients égal à 0, on conclut que $\upsilon = 0$, de sorte que les sous-chaînes maximales $\left(\downarrow e_{\phi(i)}\right)_\Gamma$ et $(\downarrow e_i')_{\Gamma'}$ de Γ et Γ' ont la même longueur $n_i = h(\Gamma') - \mu_i(\gamma') = h(\Gamma) - \mu_{\phi(i)}(\gamma) > 1$. La seconde condition équivaut alors à l'existence d'un élément $P \in k\left[x, x^{-1}\right]$ tel que

$$ax^{h(\Gamma)-h(\Gamma')}\tilde{\sigma}_i(\gamma') = \tilde{\sigma}_{\phi(i)}(\gamma) + x^{n_i}\tilde{\tau}_i + P, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Puisque $\gamma = \mathrm{Es}(\gamma)$ et $\gamma' = \mathrm{Es}(\gamma')$ sont des arbres finement k-pondérés, on a nécessairement $h(\Gamma) = h(\Gamma')$. En effet, si $h(\Gamma) - h(\Gamma') > 0$, alors $P \in k[x]$ et l'on obtient une contradiction car dans ce cas $\tilde{\sigma}_{\phi(i)}(\gamma)(0) = P(0)$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ puisque $n_i > 1$. De même, si $h(\Gamma) - h(\Gamma') < 0$, alors la contradiction provient de l'égalité $\tilde{\sigma}_i(\gamma')(0) = Q(0)$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, où $Q = x^{h(\Gamma')-\upsilon-h(\Gamma)}P \in k[x]$. Ainsi $h(\Gamma') = h(\Gamma)$ et $P = \sum c_r x^r \in k[x]$. Les polynômes $\tilde{\sigma}_i(\gamma')$ et $\tilde{\sigma}_{\phi(i)}(\gamma)$ étant tous deux de degré $< n_i$, on conclut que

$$\tilde{\sigma}_i(\gamma') = a^{-1}\tilde{\sigma}_{\phi(i)}(\gamma) + \sum_{r=0}^{n_i-1} a^{-1}c_r x^r \quad i = 1\ldots, n.$$

Les entiers $\mathrm{ord}_{x_0}(\tilde{\sigma}_j(\gamma') - \tilde{\sigma}_i(\gamma'))$ et $\mathrm{ord}_{x_0}\left((\tilde{\sigma}_{\phi(j)}(\gamma) - \tilde{\sigma}_{\phi(i)}(\gamma))\right)$, qui sont tous deux strictement inférieurs à $\min(n_i, n_j)$, sont alors égaux puisque

$$\tilde{\sigma}_j(\gamma') - \tilde{\sigma}_i(\gamma') = a^{-1}\left(\tilde{\sigma}_{\phi(j)}(\gamma) - \tilde{\sigma}_{\phi(i)}(\gamma)\right) + x^{\min(n_i,n_j)}R$$

pour un certain polynôme $R \in k[x]$. Les relations satisfaites par $\tilde{\sigma}(\gamma)$ et $\tilde{\sigma}(\gamma')$ assurent finalement que γ et γ' sont équivalents via l'isomorphisme $\eta : \Gamma \xrightarrow{\sim} \Gamma'$ obtenu en recollant les isomorphismes de chaînes $\eta_i : \left(\downarrow e_{\phi(i)}\right)_\Gamma \xrightarrow{\sim} (\downarrow e_i')_{\Gamma'}$ selon le procédé (C.2.1). Pour terminer la preuve, il reste à montrer que pour tout arbre finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$, les surfaces de Danielewski $S(\gamma)$ et $S(\mathrm{Es}(\gamma))$ définies respectivement par γ et son sous-arbre essentiel $\mathrm{Es}(\gamma)$ sont isomorphes. Or, par définition de $\mathrm{Es}(\gamma)$, $h = h(\Gamma) - h(\mathrm{Es}(\Gamma)) \geq 0$, $[\mu(\gamma)] = [\mu(\mathrm{Es}(\gamma))]$, et il existe alors un polynôme $P \in k[x]$ de degré $\deg(P) < h$ tel que $\tilde{\sigma}_i(\gamma) = P + x^h \tilde{\sigma}_i(\mathrm{Es}(\gamma))$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, de sorte que $S(\gamma)$ et $S(\mathrm{Es}(\gamma))$ sont définies par les mêmes fonctions de transition, donc sont évidemment isomorphes. □

COROLLAIRE 12.3.5. *Toute surface de Danielewski est isomorphe à une surface définie par un arbre finement k-pondéré $\gamma_0 = (\Gamma_0, w_0)$ de feuilles $e_1, \ldots, e_n$ satisfaisant les conditions suivantes :*
a) $\Gamma_0 = Es(\Gamma_0)$,
b) $l(\downarrow e_1)_{\Gamma_0} \leq \cdots \leq l(\downarrow e_n)_{\Gamma_0}$,
c) la restriction de w_0 à la chaîne $(\downarrow e_n)_{\Gamma_0}$ est la pondération nulle.

DÉMONSTRATION. D'après (12.2.7), toute surface de Danielewski est isomorphe à une surface $S(\gamma)$ définie par un arbre finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$. Un arbre γ_0 convenant peut alors être obtenu à partir de γ en posant tout d'abord $\gamma' = \mathrm{Es}(\gamma) = (\mathrm{Es}(\Gamma), w)$, puis en réindexant si nécessaire les feuilles $e_1, \ldots, e_n$ de $\mathrm{Es}(\Gamma)$ de telle sorte que la condition b) soit satisfaite par γ', et en définissant finalement la fonction de poids w_0 sur $\mathrm{Es}(\Gamma)$, à partir de la chaîne maximale

$$(\downarrow e_n)_{\gamma'} = \{e_{n,0} = e_0 < \cdots < e_{n,h} = e_n\}_w$$

de longueur $h = h(\mathrm{Es}(\Gamma))$, par la formule $w_0(\overrightarrow{e_{i+1}e_i}) = w(\overrightarrow{e_{i+1}e_i}) - w(\overrightarrow{e_{n,i+1}e_{n,i}})$ pour toute arête $\overrightarrow{e_{i+1}e_i}$ de $\mathrm{Es}(\Gamma)$ joignant deux sommets e_{i+1} et e_i aux niveaux $i+1$ et i respectivement. Par construction, $\gamma_0 = (\mathrm{Es}(\Gamma), w_0)$ est équivalent à γ', donc à γ, de sorte que $S(\gamma) \simeq S(\gamma_0)$ d'après (12.3.4). □

12.4. Exemples de surfaces de Danielewski

Nous donnons dans ce paragraphe une liste d'exemples de surfaces de Danielewski, correspondant à certaines classes d'arbres particulières.

12.4.1. Surfaces de Danielewski définies par des cônes.

DÉFINITION 12.4.1. Un *cône* $\triangle_h$ de hauteur $h \geq 0$ est est un arbre $\Gamma = (N(\Gamma), \leq)$ enraciné en e_0, tel que $(N(\Gamma) \setminus \{e_0\}, \leq)$ est soit vide, soit une réunion disjointe de chaînes de longueur $h-1$. Un cône de hauteur 1 sera encore appelé un *triangle*.

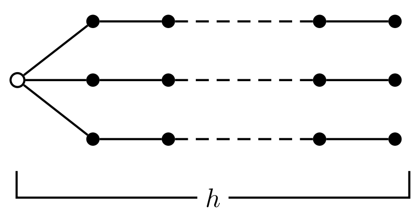


FIG. 12.4.1. Un cône de hauteur h.

D'après (12.3.3) les surfaces de Danielewski correspondant aux triangles finement k-pondérés $(\triangle, w)$ ayant $n \geq 1$ feuilles peuvent être plongées dans $\mathbb{A}^2_X = \mathrm{Spec}(k[x][y,z])$ comme les hypersurfaces $S \subset \mathbb{A}^2_X$ définies les équations $xz - P(y)$, où P est un polynôme à $n \geq 1$ racines simples. Il s'agit là d'un cas particulier du résultat général suivant :

PROPOSITION 12.4.2. *Toute surface de Danielewski $S(\triangle_h, w)$ définie par un cône finement k-pondéré $(\triangle_h, w)$ peut être plongée dans $\mathbb{A}^2_X$.*

Démonstration. Si $h=1$ alors $\triangle_h$ est triangle et le résultat provient de la discussion ci-dessus. Notons $e_1,\ldots,e_n$ les feuilles de $\triangle_h$. Si $n=1$, alors $\triangle_h$ est une chaîne et $S(\triangle_h,w)\simeq\mathbb{A}^1_X$ peut évidemment être plongé dans $\mathbb{A}^2_X$. Nous supposons donc dorénavant $n\geq 2$ et $h\geq 2$. La surface $S=S(\triangle_h,w)$ est alors définie par le multi-indice $[\mu]=[\hat{0}]\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, l'entier $\lambda=h$ et la collection $\tilde{\sigma}(\gamma)=\{\tilde{\sigma}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ des polynômes $\tilde{\sigma}_i=\sum w(\overrightarrow{e_{i,j+1}e_{i,j}})x^j\in k[x]$. Pour tout couple d'indices $i\neq j$, on a de plus $\tilde{\sigma}_i(0)\neq\tilde{\sigma}_j(0)$ puisque $(\triangle_h,w)$ est finement k-pondéré. Notons maintenant $\pi:S\overset{\rho(n)}{\to}X(n)\overset{\delta}{\to}X$ le morphisme structural de la surface de Danielewski S. Par définition, les restrictions aux ouverts $S_i=S\mid_{X_i(n)}\simeq\mathrm{Spec}(k[x][T_i])$ du morphisme canonique $\psi_{(\lambda,\tilde{\sigma}(\gamma))}:S\to\mathbb{A}^1_X=\mathrm{Spec}(k[x][T])$ (7.1.13) sont induites par les homomorphismes de $k[x]$-algèbres

$$k[x][T]\to k[x][T_i],T\mapsto\tilde{\sigma}_i+x^hT_i,\quad i=1,\ldots,n,$$

donc induisent respectivement les homomorphismes constants

$$k[T]\to k[T_i],T\mapsto c_{1,i}=\tilde{\sigma}_i(0)=w(\overrightarrow{e_{i,1}e_{i,0}}),\quad i=1,\ldots,n.$$

Cela implique, en posant $\xi_1=\psi_{(\lambda,\tilde{\sigma}(\gamma))}$ et $P_1=\prod_{i=1}^{n}(T-c_{1,i})$ que la section rationnelle $x^{-1}P_1(\xi_1)\in\Gamma(X_*,\pi_*\mathcal{O}_S)$ s'étend en une section $\xi_2\in\Gamma(X,\pi_*\mathcal{O}_S)$. En restriction aux ouverts S_i, ξ_2 est induit par les homomorphismes de $k[x]$-algèbres

$$k[x][T]\to k[x][T_i],T\mapsto\prod_{j\neq i}\left(x^{\lambda}T_i+\tilde{\sigma}_i-c_{1,j}\right)\left(\sum_{j=1}^{r-1}w(\overrightarrow{e_{i,j+1}e_{i,j}})x^{j-1}+x^{h-1}T_i\right)$$

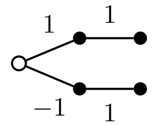
induisant respectivement, puisque $\lambda\geq 2$, les homomorphismes constants

$$k[T]\to k[T_i],T\mapsto c_{2,i}=\prod_{j\neq i}(c_{1,i}-c_{1,j})\,w(\overrightarrow{e_{i,2}e_{i,1}}),\quad i=1,\ldots,n.$$

Contrairement aux $c_{1,i}$, les éléments $c_{2,i}\in k$, $i=1,\ldots,n$, ne sont pas nécessairement deux à deux distincts. Nous choisissons donc un sous-ensemble d'indice $\{i_1,\ldots,i_{n_2}\}\subset\{1,\ldots,n\}$ tel que les c_{2,i_j} soient deux à deux distincts et représentent toutes les valeurs $c_{2,i}$, $i=1,\ldots,n$, et nous posons $P_2=\prod_{i=j}^{n_2}(T-c_{2,j})$. On conclut alors comme précédemment que $x^{-1}P_2(\xi_2)\in\Gamma(X_*,\pi_*\mathcal{O}_S)$ s'étend en une section $\xi_3\in\Gamma(X,\pi_*\mathcal{O}_S)$. En répétant ce même procédé h fois, on obtient finalement une section $\xi_h\in\Gamma(X,\pi_*\mathcal{O}_S)$ dont la restriction à chacune des composantes irréductibles $C_i=\rho(n)^{-1}(x_i(n))\simeq\mathbb{A}^1_k$, $\quad i=1,\ldots,n$, de la fibre $\pi^{-1}(x_0)$ est une fonction coordonnée. On en déduit finalement que le X-morphisme $(\xi_1,\xi_h):S\to\mathbb{A}^2_X$ est un plongement puisque ξ_1 induit un isomorphisme $S_*=S\mid_{X_*}\overset{\sim}{\to}\mathbb{A}^1_{X_*}$ et distingue les composantes irréductibles de la fibre $\pi^{-1}(x_0)$. □

12.4.3. Dans la construction précédente, les morphismes ξ_1 et ξ_h satisfont la relation $\xi_h=x^{-1}P_{h-1}\left(x^{-1}P_{h-2}\left(\cdots x^{-1}P_1(\xi_1)\right)\right)=x^{-s}Q(x,\xi_1)$ pour un certain polynôme $Q\in k[x,y]$. Par conséquent, la surface S s'identifie, via le plongement $\phi=(\xi_1,\xi_h):S\hookrightarrow\mathbb{A}^2_X=\mathrm{Spec}(k[x][y,z])$, à la normalisation de l'hypersurface d'équation $x^sz-Q(x,y)=0$. La détermination précise de l'image de $\phi(S)$ fait l'objet d'un article en préparation ([**16**]), en collaboration avec Pierre-Marie Poloni, dans lequel nous montrons que les surfaces de Danielewski $S(\triangle_h,w)$ définies par des cônes de hauteur $h\geq 2$ ayant $n\geq 2$ feuilles sont les hypersurfaces de $\mathbb{A}^2_X$ d'équation $x^hz-Q(x,y)=0$, où Q est un polynôme tel que $Q(0,y)\in k[y]$ soit un produit de n facteurs linéaires deux à deux distincts.

Exemple 12.4.4. A partir de l'arbre finement $\mathbb{C}$-pondéré γ suivant



on obtient $\xi_2 = x^{-1}P_2\left(x^{-1}P_1\left(\xi_1\right)\right)$ où $P_1 = \left(T^2-1\right)$ et où $P_2 = \left(T^2-4\right)$. D'autre part, on vérifie facilement que $\tilde{\xi}_2 = x^{-2}\left(P_1\left(\xi_1\right) - 2x\xi_1\right) \in \Gamma\left(X, \pi_*\mathcal{O}_{S(\gamma)}\right)$ et que $\left(\xi_1, \tilde{\xi}_2\right) : S\left(\gamma\right) \to \mathbb{A}^2_X = \mathrm{Spec}\left(\mathbb{C}\left[x\right]\left[y,z\right]\right)$ est un plongement dont l'image est l'hypersurface non singulière S_4 définie par l'équation $x^2z - y^2 + 2xy + 1 = 0$.

12.4.2. Surfaces de Danielewski définies par des arbres complets. Un arbre Γ est dit *complet* si toutes ses feuilles sont au même niveau $h = h\left(\Gamma\right)$, ou encore, ce qui revient au même, si toutes ses sous-chaînes maximales sont de même longueur. Les chaînes et les cônes sont évidemment des exemples d'arbres complets.

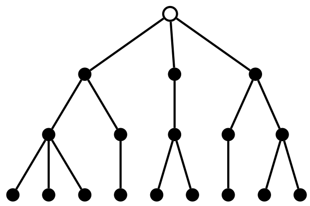
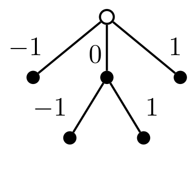


Fig. 12.4.2. Un arbre complet de hauteur $h = 3$.

Pour toute chaîne k-pondérée γ, la surface de Danielewski $S = S\left(\gamma\right)$ est isomorphe à $\mathbb{A}^1_X \simeq \mathbb{A}^2_k$, tandis que d'après (12.4.2), pour tout cône finement k-pondérée $\gamma = \left(\triangle_h, w\right)$, la surface $S\left(\gamma\right)$ est isomorphe à une hypersurface de $\mathbb{A}^2_X \simeq \mathbb{A}^3_k$. Ainsi, dans ces deux cas particuliers, le $\mathcal{O}_S$-module inversible canonique ω_S de S est trivial. Dans [**1**], Bandman et Makar-Limanov montrent que la surface $S \subset \mathbb{A}^4_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}\left(\mathbb{C}\left[x,y,z,u\right]\right)$ définie par les équations

$$xz - y\left(y^2-1\right) = 0, \quad yu - z\left(z^2-1\right) = 0, \quad xy - \left(y^2-1\right)\left(z^2-1\right) = 0,$$

a un module canonique ω_S non trivial. D'après (12.4.11) ci-dessous, cette surface S est isomorphe à la surface de Danielewski $S\left(\gamma\right)$ définie par l'arbre finement k-pondéré $\gamma = \left(\Gamma, w\right)$ suivant :



On constate que γ n'est ni une chaîne, ni un cône. Plus généralement, on a la caractérisation suivante :

Proposition 12.4.5. *Pour que le $\mathcal{O}_S$-module canonique ω_S d'une surface de Danielewski $S = S\left(\gamma\right)$ soit trivial, il faut et il suffit que γ soit un arbre finement k-pondéré complet.*

Démonstration. Étant donné un arbre finement k-pondéré quelconque $\gamma = \left(\Gamma, w\right)$, notons $\pi : S \overset{\rho(n)}{\to} X\left(n\right) \overset{\delta}{\to} X$ le morphisme structural de la surface de Danielewski $S = S\left(\gamma\right)$ correspondante, n désignant le nombre de feuilles de Γ. Par construction $\rho(n) : S \to X(n)$ est un torseur sous le $X(n)$-groupe $\mathbf{V}(\mathcal{O}[-\mu(\gamma)])_+$ défini par le $\mathcal{O}_{X(n)}$-module inversible $\mathcal{O}[-\mu(\gamma)]$ associé au diviseur $[-\mu(\gamma)]\, x(n)$ sur $X(n)$. Pour tout indice $i = 1, \ldots, n$, $S_i = S\mid_{X_i(n)} \simeq \mathrm{Spec}(k[x][T_i])$ de sorte que l'on a des isomorphismes de $\mathcal{O}_{S_i}$-modules $\phi_i : \Omega^1_{X/S}\mid_{S_i} \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{O}_{S_i} \cdot dT_i$. Au dessus de X_*, on obtient la relation $\phi_j \circ \phi_i^{-1}(dT_i) = x^{\mu_i - \mu_j} dT_j$ qui prouve que $\Omega^1_{S/X(n)}$ s'identifie à l'image inverse $\rho(n)^* \mathcal{O}[-\mu(\gamma)]$. Puisque $\rho(n) : S \to X(n)$ est un morphisme lisse, on obtient finalement

$$\omega_S \simeq \Omega^1_{S/X(n)} \otimes \rho(n)^* \Omega_{X(n)/k} \simeq \rho(n)^* \mathcal{O}[-\mu(\gamma)]$$

car $\Omega^1_{X(n)/k} \simeq \delta^* \Omega^1_{X/k} \simeq \mathcal{O}_{X(n)}$ puisque $X \simeq \mathbb{A}^1_k$. Ainsi ω_S est trivial si et seulement si $\mathcal{O}[-\mu(\gamma)] \simeq \mathcal{O}_{X(n)}$, ce qui n'est évidement le cas que si $[\mu(\gamma)]$ est un multi-indice constant, donc nul puisque par définition $[\mu(\gamma)]$ a au moins l'un de ses coefficients égal à 0. On a donc montré, par définition de $[\mu(\gamma)]$, que ω_S est trivial si et seulement si toutes les chaînes maximales de Γ ont même longueur $h(\Gamma)$, c'est à dire si et seulement si Γ est un arbre complet. □

12.4.6. Il est naturel de se demander si une surface de Danielewski $S = S(\gamma)$ définie par un arbre finement k-pondéré complet γ est une intersection complète, la trivialité de ω_S étant en effet une condition nécessaire pour cela, ou encore isomorphe à une hypersurface de $\mathbb{A}^3_k$ comme cela est le cas pour les cônes finement k-pondérés $\gamma = (\triangle_h, w)$. Nous ne disposons malheureusement que du résultat partiel suivant :

Proposition 12.4.7. *Soit $\pi : S = S(\gamma) \to X$ une surface de Danielewski définie par un arbre finement k-pondéré complet $\gamma = (\Gamma, w)$. Pour qu'il existe une section $\xi \in \Gamma(X, \pi_* \mathcal{O}_S)$ telle que le X-morphisme $\phi = \left(\psi_{(h(\Gamma), \tilde{\sigma}(\gamma))}, \xi\right) : S \to \mathbb{A}^2_X$ soit un plongement, il faut et il suffit que γ soit un cône.*

Démonstration. La preuve de (12.4.2) montre que la condition est suffisante. Réciproquement, notons $\pi : S \stackrel{\rho(n)}{\to} X(n) \stackrel{\delta}{\to} X$ le morphisme structural de S. Puisque γ est complet, les restrictions du morphisme canonique $\psi = \psi_{(h(\Gamma), \tilde{\sigma}(\gamma))}$ aux ouverts $S\mid_{X_i(n)} \simeq \mathrm{Spec}(A[T_i])$ sont induites par les homomorphismes de A-algèbres $A[T] \to A[T_i], T \mapsto \tilde{\sigma}_i(\gamma) + x^{h(\Gamma)} T_i, \quad i = 1, \ldots, n$. Si $h(\Gamma) = 0$ alors γ est l'arbre trivial à un élément $\{e_0\}$ et ψ est un isomorphisme. Sinon si $h(\Gamma) > 0$ alors ψ est constant le long de chacune des composantes irréductibles $C_i = \rho(n)^{-1}(x_i(n))$ de la fibre $\pi^{-1}(x_0)$, et deux composantes C_i et C_j sont distinguées par ψ si et seulement si $\tilde{\sigma}_i(\gamma)(0) \neq \tilde{\sigma}_j(\gamma)(0)$, autrement dit, si et seulement si le premier ancêtre commun des feuilles e_i et e_j de Γ correspondantes est la racine e_0 de Γ. Ainsi, pour que les composantes C_i, $i = 1, \ldots, n$ soient distinguées deux à deux par ψ, il faut et il suffit que Γ soit un cône. Supposons que cela ne soit pas le cas. Alors, une section $\xi \in \Gamma(X, \pi_* \mathcal{O}_S)$ telle que le morphisme $\phi : S \to \mathbb{A}^2_X$ de composantes ψ et ξ soit un plongement doit non seulement induire une fonction coordonnée sur chacune des composantes irréductibles $C_i \simeq \mathbb{A}^1_k$ de $\pi^{-1}(x_0)$ mais encore distinguer deux à deux les composantes C_i qui ne le sont pas par ψ. Cette dernière constatation termine la preuve puisqu'il est clair qu'il n'existe pas de section ξ satisfaisant simultanément ces deux conditions. □

12.4.8. Au chapitre 14, nous donnerons une méthode permettant de construire des plongements $\phi : S \hookrightarrow \mathbb{A}^N_X$ des surfaces de Danielewski $S = S(\gamma)$ définies par des arbres finement k-pondérés $\gamma = (\Gamma, w)$. Nous nous intéresserons alors plus particulièrement à l'existence de plongements équivariants pour la $\mathbb{G}_{a,X}$-action sur $S = S(\gamma)$ associée à la structure de $\mathbb{G}_{a,X(n)}$-quasi-torseur sur $\rho(n) : S \to X(n)$ correspondant à la section canonique $s_{[\mu(\gamma)]} \in \Gamma(X(n), \mathcal{O}[\mu(\gamma)])$ (12.1.3). Notre approche consistera à chercher des plongements ϕ prolongeant le morphisme $\mathbb{G}_{a,X}$-équivariant canonique $\psi_{(h(\Gamma), \tilde{\sigma}(\gamma))} : S \to \mathbb{A}^1_X(-h(\Gamma))$ (7.1.13) correspondant à cette structure de quasi-torseur. De ce point de vue, (12.4.7) montre que si $\gamma = (\Gamma, w)$

est un arbre complet qui n'est pas un cône, alors il n'existe pas de plongement équivariant de ce type de $S(\gamma)$ dans $\mathbb{A}^2_X$.

12.4.3. Surfaces de Danielewski définies par des peignes. Nous introduisons ici brièvement une classe de surfaces de Danielewski sur laquelle nous reviendrons en détail au cours des prochains chapitres de cette thèse.

DÉFINITION 12.4.9. Un *peigne* P_h de hauteur h est un arbre $\Gamma = (N(\Gamma), \leq)$ tel que $C(\Gamma) = (N(\Gamma) \setminus \mathrm{Fe}(\Gamma), \leq)$ est soit vide, soit une chaîne de longueur $h-1$.

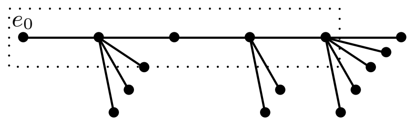


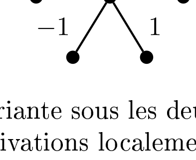
FIG. 12.4.3. Un peigne enraciné en e_0.

12.4.10. Autrement dit, un arbre Γ est un peigne si et seulement si pour tout $e \in \mathrm{Par}(\Gamma)$, tous sauf éventuellement un des fils de e sont des feuilles de Γ. Les chaînes et les triangles sont évidemment des exemples de peignes. Par contre, les cônes de hauteur $h \geq 2$ ne sont pas des peignes. D'après ce qui précède, les surfaces de Danielewski $S(\gamma)$ correspondant à ces cas particuliers de peignes sont isomorphes soit à $\mathbb{A}^1_X = \mathbb{A}^2_k$, soit aux hypersurfaces $S \subset \mathbb{A}^3_k = \mathrm{Spec}(k[x][y,z])$ définies par les équations $xz - P(y) = 0$, où $P \in k[y]$ est un produit de facteurs linéaires deux à deux distincts. Dans ce dernier cas, l'évidente symétrie entre les variables x et z entraîne que la restriction de la projection $pr_z : \mathbb{A}^3_k \to Z = \mathrm{Spec}(k[z])$, fait de S une surface de Danielewski $\pi' : S \to Z$. On retrouve ainsi le fait bien connu qu'une surface de ce type est munie de deux actions du groupe additif $\mathbb{G}_{a,k}$, l'une par X-automorphismes et l'autre par Z-automorphismes, dont les orbites générales sont manifestement distinctes. Lorsque la caractéristique du corps k est nulle, cette dernière propriété signifie de manière équivalente que l'intersection dans $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ des noyaux des k-dérivations localement nilpotentes $\partial_1, \partial_2 \in \mathrm{Der}_k(A, A)$ correspondant à ces deux actions est réduit à k, autrement dit, que l'invariant de Makar-Limanov [**31**] $\mathrm{ML}(S)$ de S est trivial. Plus généralement, nous montrerons au chapitre 15 que seules les surfaces de Danielewski $S(\gamma)$ définies par un peigne finement k-pondéré $\gamma = (P_h, w)$ possèdent cette propriété.

EXEMPLE 12.4.11. Dans [**1**], Bandman et Makar-Limanov considèrent la surface $S \subset \mathbb{A}^4_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z, u])$ définie par les équations

$$xz - y\left(y^2 - 1\right) = 0, \quad yu - z\left(z^2 - 1\right) = 0, \quad xu - \left(y^2 - 1\right)\left(z^2 - 1\right) = 0.$$

Il s'agit d'une surface de Danielewski $\pi : S \to X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x])$ pour la restriction de la projection $pr_x : \mathbb{A}^4_{\mathbb{C}} \to X$. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier, suivant le même procédé qu'en (12.2.3), que S est X-isomorphe à la surface de Danielewski définie par le peigne $\gamma = (P_2, w)$ finement $\mathbb{C}$-pondéré suivant.



La surface S est clairement invariante sous les deux actions du groupe additif $\mathbb{G}_{a,\mathbb{C}}$ sur $\mathbb{A}^4_{\mathbb{C}}$ correspondant aux $\mathbb{C}$-dérivations localement nilpotentes

$$\begin{cases} \partial_1 = x^2 \frac{\partial}{\partial y} + x\left(3y^2 - 1\right)\frac{\partial}{\partial z} + \left(2z\left(3y^2 - 1\right)\left(y^2 - 1\right) + 2xy\left(z^2 - 1\right)\right)\frac{\partial}{\partial u} \\ \partial_2 = u^2 \frac{\partial}{\partial z} + u\left(3z^2 - 1\right)\frac{\partial}{\partial y} + \left(2y\left(3z^2 - 1\right)\left(z^2 - 1\right) + 2uz\left(y^2 - 1\right)\right)\frac{\partial}{\partial x} \end{cases}$$

de $\mathbb{C}[x,y,z,u]$, et les $\mathbb{G}_{a,\mathbb{C}}$-actions sur S induites par les restrictions de ces dernières ont manifestement des orbites générales distinctes.

CHAPITRE 13

Combinatoire des morphismes de surfaces de Danielewski

Les surfaces de Danielewski constituent par définition une sous-classe de la classe des schémas de Danielewski-Fieseler. Les morphismes de schémas de Danielewski-Fieseler 8.3.2) induisent donc une classe naturelle de morphismes entre surfaces de Danielewski. Néanmoins, une surface de Danielewski n'étant pas canoniquement équipée d'une $\mathbb{G}_{a,X}$-action, il devient possible d'élargir substantiellement la notion de morphisme entre ces surfaces, tout en respectant leurs structures de X-schémas.

Dans le présent chapitre, qui reprend encore pour l'essentiel les résultats de [**14**], nous introduisons la notion de *morphismes de surfaces de Danielewski*, et nous montrons ensuite que ces morphismes sont déterminés, à conjugaison près par des isomorphismes, par des données purement combinatoires. Nous établissons plus précisément que l'ensemble des morphismes $\beta : S(\gamma') \to S(\gamma)$ entre deux surfaces de Danielewski définies par des arbres finement k-pondérés γ' et γ respectivement est en bijection avec l'ensemble des morphismes d'arbres finement k-pondérés $\eta : \gamma' \to \gamma$ au sens de (C.3.2).

Nous exploitons ensuite la description des morphismes d'arbres finement k-pondérés en terme de contractions de sous-arbres maximaux pour établir qu'à conjugaison près, tout morphisme de surface de Danielewski $\beta : S' \to S$ se factorise canoniquement en une succession de modifications affines aisément descriptibles (voir 13.3.6 ci-dessous). Nous en déduisons un procédé de construction de complétions équivariantes d'une surface de Danielewski munie d'une $\mathbb{G}_{a,X}$-action par translations tordues. Lorsque le corps de base k est algébriquement clos, de caractéristique nulle, la description détaillée de ces complétions constitue une étape importante dans l'étude des surfaces affines normales d'invariant de Makar-Limanov trivial qui fait l'objet du chapitre 15. C'est en effet le seul critère géométrique actuellement connu permettant de décider si une surface affine normale S a un invariant de Makar-Limanov trivial faisant en effet intervenir la structure du graphe dual du diviseur de bord d'une complétion minimale $\bar{S}$ de S.

13.1. Morphismes de surfaces de Danielewski

Dans ce paragraphe, nous exploitons le fait que pour toute surface de Danielewski $\pi : S \to X$, l'ouvert $S_* = \pi^{-1}(X_*)$ soit isomorphe au fibré en droites trivial $\mathbb{A}^1_{X_*}$ au dessus de X_* pour introduire une notion de morphisme entre ces surfaces moins restrictive que celle de morphisme de schémas de Danielewski-Fieseler.

DÉFINITION 13.1.1. Un *morphisme de surfaces de Danielewski* $\beta : S' \to S$ est un X-morphisme birationnel dont la restriction au-dessus de X_* est un X_*-isomorphisme.

13.1.2. Pour qu'un X-morphisme $\beta : \mathbb{A}^1_X \to \mathbb{A}^1_X$ soit un morphisme de surfaces de Danielewski au sens de (13.1.1), il faut et il suffit qu'il soit induit par homomorphisme de $k[x]$-algèbres de la forme $k[x][T] \to k[x][T], T \mapsto \tilde{\tau} + ax^{\nu}T$, où $a \in k^*$, $\tilde{\tau} \in k[x]$ et $\nu \geq 0$. On notera en particulier qu'un tel morphisme β ne correspond à un morphisme de schémas de Danielewski-Fieseler au sens de (8.3.2) que si $a = 1$. Ainsi les morphismes de surfaces de Danielewski forment une classe plus large que celle des morphismes de schémas de Danielewski-Fieseler. Toutefois, ces deux classes demeurent très proches l'une de l'autre. En effet, étant donné un morphisme de surfaces de Danielewski $\beta : S' \to S$, nous pouvons toujours considérer S' et S comme des schémas de Danielewski-Fieseler, donc en particulier comme des fibrés linéaires affines $\rho(n') : S' \to X(n')$ (resp. $\rho(n) : S \to X(n)$) au-dessus de la n'-duplication $\delta' : X(n') \to X$ (resp. la n-duplication $\delta : X(n) \to X$) de x_0 dans X. Pour tout $i = 1, \ldots, n'$, il existe alors un unique indice $\phi(i)$ tel que $\rho(n')^{-1}(x_i(n')) \subset \rho(n)^{-1}\left(x_{\phi(i)}(n)\right)$. Ainsi il existe un unique morphisme de duplications $\alpha = \alpha_\phi : X(n') \to X(n)$ tel que β soit un α-morphisme. Cela implique que β se factorise de manière unique via un $X(n')$-morphisme birationnel $\beta_\alpha : S' \to S_\alpha = S \times_{X(n)} X(n')$ dont la restriction au dessus de X_* est un X_*-isomorphisme. Puisque $S' \mid_{X_i(n')} \simeq \mathbb{A}^1_{X_i(n')} \simeq S_\alpha \mid_{X_i(n')}$, la restriction de β_α au-dessus de $X_i(n')$ est donc induite par un homomorphisme de A-algèbres linéaire affine de la forme $T_i \mapsto \tilde{\tau}_i + a_i x^{\nu_i} T_i$ comme précédemment. Ainsi la seule différence avec la notion de morphisme de schémas de Danielewski-Fieseler (8.3.2) réside dans le fait que l'on s'autorise maintenant des coefficients $a_i \in k^*$ non nécessairement égaux à 1. Cette liberté supplémentaire n'entraîne cependant pas de modification significative de la description des morphismes, comme le montre le résultat suivant.

Proposition 13.1.3. *Soit S (resp. S') deux surfaces de Danielewski définies par un multi-indice $[\mu] \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ (resp. $[\mu'] \in \mathbb{Z}^{n'}_{\geq 0}$) et des fonctions de transitions $\tilde{g} = \{\tilde{g}_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n}$ (resp. $\tilde{g}' = \left\{\tilde{g}'_{ij}\right\}_{i,j=1,\ldots,n'}$) . Pour qu'il existe un morphisme de surfaces de Danielewski $\beta : S' \to S$, il faut et il suffit qu'il existe*

a) une application $\phi : \{1, \ldots, n'\} \to \{1, \ldots, n\}$,

b) un multi-indice $[\nu] \in \mathbb{Z}^{n'}_{\geq 0}$,

c) un élément $a \in k^*$ et une collection $\tilde{\tau} = \{\tilde{\tau}_i\}_{i=1,\ldots n'}$ de polynômes $\tilde{\tau}_i \in k[x]$, tels que les relations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mu_{\phi(i)} - \mu'_i - \nu_i & = & \mu_{\phi(j)} - \mu'_j - \nu_j \\ a x^{\nu_i} \tilde{g}'_{ij} & = & \tilde{g}_{\phi(i)\phi(j)} + x^{\mu_{\phi(i)} - \mu_{\phi(j)}} \tilde{\tau}_j - \tilde{\tau}_i \end{array} \right.$$

soient satisfaites, dans $\mathbb{Z}$ et $A_x = k\left[x, x^{-1}\right]$ respectivement, pour tout couple d'indices $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n'$.

Démonstration. D'après ce qui précède, tout morphisme $\beta : S' \to S$ se factorise via un morphisme $\beta_\alpha : S \to S_\alpha$, où $\alpha = \alpha_\phi : X(n') \to X(n)$ est un morphisme de duplications correspondant à une application $\phi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n'\}$. Le X-schéma S_α, qui n'est en général pas une surface de Danielewski, n'en demeure pas moins le schéma de Danielewski-Fieseler image inverse de $\pi : S \to X$ par le morphisme α (8.3.1). En tant que tel, il est donc défini, à isomorphisme près, par le multi-indice $[\mu_\alpha] \in \mathbb{Z}^{n'}_{\geq 0}$, où $(\mu_\alpha)_i = \mu_{\phi(i)}$ pour tout $i = 1, \ldots, n'$, et les fonctions de transition $\tilde{g}_\alpha = \left\{(\tilde{g}_\alpha)_{ij}\right\}_{i,j=1,\ldots,n'}$ définies par $(\tilde{g}_\alpha)_{ij} = \tilde{g}_{\phi(i)\phi(j)} \in A_x$. Puisque β_α est un $X(n')$-morphisme, il est uniquement déterminé par ses restrictions β_i au-dessus des ouverts $X_i(n)$, restrictions qui doivent bien sûr êtres compatibles avec les isomorphismes de recollement définissant S' et S_α respectivement. Or les β_i sont induits par des homomorphismes de $k[x]$-algèbres de la forme $T_i \mapsto \tilde{\tau}_i + a_i x^{\nu_i} T_i$, où $b_i \in A$, $a_i \in k^*$, et $n_i \geq 0$. La compatibilité est donc assurée si et seulement si $a_i = a \in k^*$ pour tout $i = 1, \ldots, n'$, et les relations annoncées sont satisfaites. □

13.1.4. Il est clair que si dans la situation précédente on considère S et S' comme des schémas de Danielewski-Fieseler munis de $\mathbb{G}_{a,X}$-actions correspondant au choix de représentants $[\mu'] \in \mathbb{Z}^{n'}_{\geq 0}$ et $[\mu] \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ des classes d'équivalence correspondantes, alors un morphisme de surfaces de Danielewski $\beta : S' \to S$ est un morphisme de schémas de Danielewski-Fieseler si et seulement si $a = 1$, $\mu_{\phi(i)} \geq \mu'_i$ et $\nu_i = \mu_{\phi(i)} - \mu'_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Nous dirons plus généralement qu'un morphisme de surfaces de Danielewski $\beta : S' \to S$ est $\mathbb{G}_{a,X}$-*compatible* si $a = 1$ et s'il existe un entier $\upsilon \geq -\max_{i=1,\ldots,n}(\mu_i)$ tel que $\nu_i = \mu_{\phi(i)} + \upsilon - \mu'_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n'$. Cela revient bien sûr à dire qu'il existe un multi-indice $[\tilde{\mu}] = [\mu] + [\hat{\upsilon}]$ dans la classe d'équivalence de $[\mu]$ pour lequel β devient un morphisme de schémas de Danielewski-Fieseler lorsque l'on équipe S de la $\mathbb{G}_{a,X}$-action correspondant à ce multi-indice $[\tilde{\mu}]$ et S' de celle correspondant au multi-indice $[\mu']$.

Remarque 13.1.5. Tout X-morphisme $\beta : \mathbb{A}^1_X \to \mathbb{A}^1_X$ est induit par un homomorphisme de A-algèbres de la forme $T \mapsto P(T)$ pour un certain polynôme $P \in A[T]$. Donc, plus généralement, le même raisonnement montre que l'existence d'un X-morphisme $\beta : S' \to S$ équivaut à l'existence d'une application $\phi : \{1, \ldots, n'\} \to \{1, \ldots, n\}$ et des polynômes $P_i \in A[T]$, $i = 1, \ldots, n'$ tels que pour tout couple d'indices $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n'$, la relation

$$P_i\left(\tilde{g}'_{ij} + x^{\mu'_i - \mu'_j} T\right) = \tilde{g}_{\phi(i)\phi(j)} + x^{\mu_{\phi(i)} - \mu_{\phi(j)}} P_j(T)$$

soit satisfaite dans $A_x[T] = k\left[x, x^{-1}\right][T]$.

13.2. Morphisme d'arbres associé à un morphisme de surfaces de Danielewski

Dans le chapitre précédent, nous avons construit une bijection entre l'ensemble des surfaces de Danielewski de la forme $S^{(n,[\mu])}_{(\lambda,\tilde{\sigma})}$, où les polynômes $\tilde{\sigma}_i \in k[x]$ formant la collection $\tilde{\sigma}$ satisfont l'hypothèse $\deg(\tilde{\sigma}_i) < \lambda - \mu_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, et l'ensemble des arbres finement k-pondérés $\gamma = (\Gamma, w)$. Chaque surface de ce type est munie d'un morphisme $\mathbb{G}_{a,X}$-compatible canonique $\psi_{(\lambda,\tilde{\sigma})} : S_{(\lambda,\tilde{\sigma})} \to \mathbb{A}^1_X$ induit par le morphisme $\mathbb{G}_{a,X}$-équivariant canonique de schémas Danielewski-Fieseler correspondant à ces données (7.1.10).

13.2.1. Principes de construction. Nous montrons ici que l'ensemble des morphismes de surfaces de Danielewski $\beta : S' = S^{(n',[\mu'])}_{(\lambda',\tilde{\sigma}')} \to S = S^{(n,[\mu])}_{(\lambda,\tilde{\sigma})}$ tels que $\psi_{(\lambda',\tilde{\sigma}')} = \psi_{(\lambda,\sigma)} \circ \beta$ est lui-même en bijection avec l'ensemble des morphismes entre arbres finement k-pondérés au sens de (C.3.2).

13.2.1. Puisque par hypothèse $\deg(\tilde{\sigma}'_i) < \lambda' - \mu'_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n'$ et $\deg(\tilde{\sigma}_i) < \lambda - \mu_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, un morphisme de surfaces de Danielewski $\beta : S' \to S$ satisfaisant la relation ci-dessus est uniquement déterminé par une application $\phi : \{1, \ldots, n'\} \to \{1, \ldots, n\}$, un multi-indice $[\nu] \in \mathbb{Z}^{n'}_{\geq 0}$, et une collection $\tilde{\tau} = \{\tilde{\tau}_i\}_{i=1,\ldots,n'}$ de polynômes $\tilde{\tau}_i \in k[x]$ de degrés respectifs $\deg(\tilde{\tau}_i) < \nu_i$, tels que

$$\left\{\begin{array}{lcl} \nu_i & = & (\lambda' - \mu'_i) - \left(\lambda - \mu_{\phi(i)}\right) \\ \tilde{\sigma}'_i & = & \tilde{\sigma}_{\phi(i)} + x^{\lambda - \mu_{\phi(i)}} \tilde{\tau}_i \end{array}\right.$$

Désignons par $\gamma_{S'}$ et γ_S les arbres finement k-pondérés correspondant à S' et S respectivement. Par définition, ces deux arbres sont obtenus en recollant les collections de chaînes pondérées

$$\gamma'_i = \left\{e'_{i,0} < \cdots < e'_{i,\lambda' - \mu'_i}\right\}_{w'_i} \quad \text{et} \quad \gamma_i = \{e_{i,0} < \cdots < e_{i,\lambda' - \mu_i}\}_{w_i}$$

suivant le procédé (12.2.1). Les relations ci-dessus garantissent alors que les applications

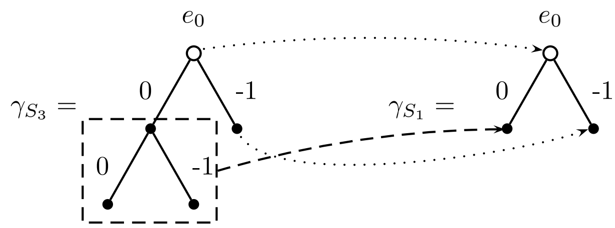
$$\eta_i : \gamma'_i \to \gamma_{\phi(i)}, e'_{i,k} \mapsto \left\{\begin{array}{ll} e_{\phi(i),\lambda - \mu_{\phi(i)}} & \text{si } k \geq \lambda - \mu_{\phi(i)} \\ e_{\phi(i),k} & \text{sinon} \end{array}\right.$$

sont des morphismes de chaînes pondérées au sens de (C.3.2) satisfaisant les conditions de (C.3.5). On conclut suivant (C.3.5) que les morphismes η_i, $i = 1, \ldots, n'$ se recollent en un morphisme d'arbres finement k-pondérés $\eta_\beta : \gamma_{S'} \to \gamma_S$ au sens de (C.3.2).

Exemple 13.2.2. D'après (9.2.9), les surfaces $S_1 \subset \mathbb{A}^2_X = \mathrm{Spec}\left(\mathbb{C}[x][y,z]\right)$ et $S_3 \subset \mathbb{A}^3_X = \mathrm{Spec}\left(\mathbb{C}[x][y,z,u]\right)$ définies respectivement par les équations

$$xz - y(y+1) = 0 \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{c} xz - y(y+1) = 0 \\ yu - z^2(z+1) = 0 \\ xu - (y+1)z(z+1) = 0 \end{array} \right.$$

sont des surfaces de Danielewski au dessus de $X = \mathrm{Spec}(k[x])$, correspondant respectivement aux arbres finement $\mathbb{C}$-pondérés γ_{S_1} et γ_{S_3} ci-dessous, et telles que la restriction de la projection $p_{x,y,z} : \mathbb{A}^3_X \to \mathbb{A}^2_X, (x,y,z,u) \mapsto (x,y,z)$ soit le morphisme de surfaces de Danielewski $\beta : S_3 \to S_1$ au sens de (13.1.1) associé au morphisme d'arbres finement $\mathbb{C}$-pondérés $\eta_\beta : \gamma_{S_3} \to \gamma_{S_1}$ suivant.



13.2.3. Puisque $\mathbb{A}^1_X$ s'identifie à la surface de Danielewski définie par l'arbre trivial à un élément $\{e_0\}$, on conclut que pour tout arbre finement k-pondéré γ, le morphisme d'arbres finement k-pondérés correspondant au morphisme canonique $\psi_{(h(\Gamma),\tilde{\sigma}(\tilde{\sigma}))} : S(\gamma) \to \mathbb{A}^1_X$ s'identifie via la construction ci-dessus au morphisme constant $s_\gamma : \gamma \to \{e_0\}$. Afin d'alléger la notation, nous désignerons dorénavant ce morphisme par $\psi_\gamma : S(\gamma) \to \mathbb{A}^1_X$.

13.2.4. Par définition, l'image d'une feuille e'_i d'un arbre finement k-pondéré $\gamma' = (\Gamma', w')$ par un morphisme d'arbres finement k-pondérés $\eta : \gamma' \to \gamma = (\Gamma, w)$ est une feuille $e_{\phi(i)}$ de γ, et l'inégalité $n'_i = l(\downarrow e'_i)_{\gamma'} \geq n_{\phi(i)} = l\left(\downarrow e_{\phi(i)}\right)_\gamma$ est satisfaite pour toute feuille e'_i de γ'. D'autre part, puisque η est un morphisme d'arbres pondérés, $\tilde{\sigma}_i(\gamma') - \tilde{\sigma}_{\phi(i)}(\gamma) \in x^{n_{\phi(i)}}k[x]$ pour toute feuille e'_i de γ'. En notant $n' \geq 1$ le nombre de feuilles de Γ', on conclut que le multi-indice $[\nu] \in \mathbb{Z}^{n'}_{\geq 0}$ et la collection de polynômes $\tilde{\tau} = \{\tilde{\tau}_i\}_{i=1,\ldots,n'}$ définis respectivement par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \nu_i & = & n'_i - n_{\phi(i)} = (h(\Gamma') - \mu_i(\gamma')) - \left(h(\Gamma) - \mu_{\phi(i)}(\gamma)\right) \\ \tilde{\tau}_i & = & x^{-n_{\phi(i)}}\left(\tilde{\sigma}_i(\gamma') - \tilde{\sigma}_{\phi(i)}(\gamma)\right) \end{array} \right.$$

sont les données correspondant à un morphisme de surfaces de Danielewski

$$\beta(\eta) : S(\gamma') = S^{(n',[\mu(\gamma')])}_{(h(\Gamma'),\tilde{\sigma}(\gamma'))} \to S(\gamma) = S^{(n,[\mu(\gamma)])}_{(h(\Gamma),\tilde{\sigma}(\gamma))},$$

tel que $\psi_{\gamma'} = \psi_\gamma \circ \beta(\eta)$. Le procédé de construction ainsi défini étant clairement réciproque du procédé (13.2.1) précédemment introduit, on obtient donc le résultat suivant :

Proposition 13.2.5. *Les applications $\beta \mapsto n_\beta$ et $\eta \mapsto \beta(\eta)$, de l'ensemble des morphismes de surfaces de Danielewski $\beta : S(\gamma') \to S(\gamma)$ tels que $\psi_{\gamma'} = \psi_\gamma \circ \beta$ dans l'ensemble des morphismes d'arbres finement k-pondérés $\eta : \gamma' \to \gamma$, et réciproquement, sont des bijections réciproques l'une de l'autre.*

13.2.6. L'image $\tilde{\gamma} = \eta(\gamma') = \left(\tilde{\Gamma}, w\right)$ d'un morphisme d'arbres finement k-pondérés $\eta : \gamma' = (\Gamma', w') \to \gamma = (\Gamma, w)$ est un sous-arbre de γ en général non maximal, constitué de la réunion des sous-chaînes maximales pondérées $(\downarrow \eta(e'_i))_{\gamma'}$, où les sommets e'_i parcourent les feuilles de l'arbre Γ'. Notons $\tilde{\eta} : \gamma' \to \tilde{\gamma}$ la co-restriction du morphisme η à son image, et $i : \tilde{\gamma} \hookrightarrow \gamma$ l'inclusion du sous-arbre finement k-pondéré $\tilde{\gamma}$ de γ. Par construction, les feuilles de l'arbre Γ sont en bijection avec les composantes irréductibles de la fibre $\pi^{-1}(x_0)$ de la surface de Danielewski $\pi : S(\gamma) \to X$. Puisque l'image $e_{\phi(i)} = \eta(e'_i)$ d'une feuille de γ' est une feuille de γ, le morphisme $\beta(\eta) : S(\gamma') \to S(\gamma)$ se factorise donc par

$$\beta(\eta) : S(\gamma') \overset{\beta(\tilde{\eta})}{\to} S(\tilde{\gamma}) \overset{\beta(i)}{\to} S(\gamma),$$

où $\beta(i)$ est une immersion ouverte réalisant $S(\tilde{\gamma})$ comme le complémentaire dans $S(\gamma)$ des composantes irréductibles de la fibre $\pi^{-1}(x_0)$ correspondant aux feuilles de Γ qui ne sont pas dans l'image du morphisme η.

13.2.7. Par construction, $\beta(\eta) : S(\gamma') \to S(\gamma)$ est un morphisme $\mathbb{G}_{a,X}$-compatible (13.1.4). C'est aussi le cas du morphisme $\beta(\tilde{\eta}) : S(\gamma') \to S(\tilde{\gamma})$. Il est de plus possible de trouver un entier λ et des représentants $[\mu']$ et $[\tilde{\mu}]$ des classes d'équivalence respectives des multi-indices $[\mu(\gamma')]$ et $[\mu(\tilde{\gamma})]$ tels que les trois morphismes $\psi_{\gamma'} : S(\gamma') \to \mathbb{A}^1_X(-\lambda)$, $\psi_{\tilde{\gamma}} : S(\tilde{\gamma}) \to \mathbb{A}^1_X(-\lambda)$et $\beta(\eta) : S(\gamma') \to S(\tilde{\gamma})$ soient équivariants pour les $\mathbb{G}_{a,X}$-actions par translations tordues correspondant à ces choix. En effet, puisque $h = h(\Gamma') - h\left(\tilde{\Gamma}\right) \geq 0$, il suffit de poser $\lambda = h(\Gamma')$, $[\mu'] = [\mu(\gamma')]$ et $[\mu] = [\mu(\tilde{\gamma})] + \left[\hat{h}\right]$ pour obtenir, pour toute feuille e'_i de γ' l'égalité $\nu_i = l(\downarrow e'_i)_{\gamma'} - l\left(\downarrow e_{\phi(i)}\right)_{\tilde{\gamma}} = \mu_{\phi(i)} - \mu_i(\gamma')$ qui garantit, selon (13.1.4), que $\beta(\tilde{\eta}) : S(\gamma') \to S(\tilde{\gamma})$ est équivariant lorsque l'on munit $S(\gamma)$ et $S(\tilde{\gamma})$ respectivement des $\mathbb{G}_{a,X}$-actions correspondant à ces multi-indices. Si $h(\Gamma) > h(\Gamma')$, il n'existe pas d'action sur $S(\gamma)$ rendant l'immersion $i : S(\tilde{\gamma}) \hookrightarrow S(\gamma)$ équivariante pour l'action ainsi construite sur $S(\tilde{\gamma})$. Néanmoins, il suffit alors de poser $h' = h(\Gamma) - h(\Gamma')$, $\lambda = h(\Gamma)$, $[\mu] = [\mu(\gamma)] + \left[\hat{h}\right] + \left[\widehat{h'}\right]$ et $[\mu'] = [\mu(\gamma')] + \left[\widehat{h'}\right]$ pour obtenir une factorisation équivariante

$$\begin{tikzcd}
S(\gamma') \arrow[r, "\beta(\tilde{\eta})"] \arrow[dr, "\psi_{\gamma'}"'] & S(\tilde{\gamma}) \arrow[r, "\beta(i)"] \arrow[d, "\psi_{\tilde{\gamma}}"'] & S(\gamma) \arrow[dl, "\psi_{\gamma}"] \\
& \mathbb{A}^1_X(-\lambda) &
\end{tikzcd}$$

13.2.2. Comparaisons de morphismes. Nous disposons maintenant de procédés permettant de construire des surfaces de Danielewski et des morphismes de surfaces de Danielewski à partir d'arbres finement k-pondérés.

13.2.8. Afin d'établir de manière précise le lien qui existe entre ces objets, il s'avère utile d'introduire, suivant le modèle (9.2.6), la catégorie relative $\overrightarrow{\mathfrak{Ds}}$ dont les objets sont les morphismes de surfaces de Danielewski $\mathfrak{S} = (\psi : S \to X)$ et dont les morphismes $\mathfrak{b} : \mathfrak{S}' \to \mathfrak{S}$ sont les morphismes de surfaces de Danielewski $\beta : S' \to S$ tels que $\psi' = \psi \circ \beta$. Par l'intermédiaire des morphismes canoniques qui leurs sont associés, on peut alors identifier les surfaces $S^{(n,[\mu])}_{(\lambda,\tilde{\sigma})}$ aux objets $\mathfrak{S}^{(n,[\mu])}_{(\lambda,\tilde{\sigma})} = \left(\psi_{(\lambda,\tilde{\sigma})} : S^{(n,[\mu])}_{(\lambda,\tilde{\sigma})} \to \mathbb{A}^1_X\right)$ et interpréter la bijection $S \mapsto \gamma_S$ de l'ensemble des surfaces de cette forme sur l'ensemble des arbres finement k-pondérés comme une bijection $\mathfrak{S} \mapsto \gamma_{\mathfrak{S}}$ de l'ensemble des morphismes $\mathfrak{S}$ correspondant sur l'ensemble des morphismes d'arbres finement k-pondérés constants $s_\gamma : \gamma \mapsto \{e_0\}$, ce dernier ensemble s'identifiant lui-même canoniquement à l'ensemble des arbres finement k-pondérés. Par ailleurs, les morphismes $\mathfrak{b} : \mathfrak{S}^{(n',[\mu'])}_{(\lambda',\tilde{\sigma}')} \to \mathfrak{S}^{(n,[\mu])}_{(\lambda,\tilde{\sigma})}$ dans $\overrightarrow{\mathfrak{Ds}}$ étant en bijection avec les morphismes de surfaces de Danielewski $\beta : S^{(n',[\mu'])}_{(\lambda',\tilde{\sigma}')} \to S^{(n,[\mu])}_{(\lambda,\tilde{\sigma})}$, la bijection $\beta \mapsto \eta_\beta$ de l'ensemble de ces morphismes sur l'ensemble des morphismes d'arbres finement k-pondérés, induit une bijection $\mathfrak{b} \mapsto \eta_{\mathfrak{b}} = \eta_\beta$ de l'ensemble des morphismes $\mathfrak{b}:\mathfrak{S}_{(\lambda',\tilde{\sigma}')}^{(n',[\mu'])}\to\mathfrak{S}_{(\lambda,\tilde{\sigma})}^{(n,[\mu])}$ sur l'ensemble des morphismes d'arbres finement k-pondérés. Cela conduit à l'interprétation suivante :

THÉORÈME 13.2.9. *La catégorie $\overrightarrow{\mathfrak{Ds}}$ des surfaces de Danielewski relatives est équivalente à la catégorie $\mathcal{T}_{w,f}^{k}$ des arbres finement k-pondérés.*

DÉMONSTRATION. D'après ce qui précède, la sous-catégorie pleine de $\overrightarrow{\mathfrak{Ds}}$ constituée des objets $\mathfrak{S}_{(\lambda,\tilde{\sigma})}^{(n,[\mu])}=\left(\psi_{(\lambda,\tilde{\sigma})}:S_{(\lambda,\tilde{\sigma})}^{(n,[\mu])}\to\mathbb{A}_X^1\right)$, où les polynômes $\tilde{\sigma}_i$ formant la collection $\tilde{\sigma}$ satisfont $\deg(\tilde{\sigma}_i)<\lambda-\mu_i$, pour tout $i=1\ldots,n$, est équivalente à la catégorie des arbres finement k-pondérés. Il suffit donc de montrer que tout objet $\mathfrak{S}=(\psi:S\to X)$ de $\overrightarrow{\mathfrak{Ds}}$ est isomorphe à un objet du type précédent. Par définition, on peut supposer que S est définie par un multi-indice $[\mu]\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ (ou plutôt par une classe d'équivalence de multi-indices) et des fonctions de transition $\tilde{g}=\left\{\tilde{g}_{ij}\in k\left[x,x^{-1}\right]\right\}_{i,j=1,\ldots,n}$. D'après (13.1.3), la donnée d'un morphisme de surfaces de Danielewski $\psi:S\to\mathbb{A}_X^1$ équivaut à l'existence d'un multi-indice $[\nu]\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, d'un élément $a\in k^*$ et d'une collection $\tilde{\tau}=\{\tilde{\tau}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ de polynômes $\tilde{\tau}_i=\sum_{j=0}^{m_i}b_{i,j}x^j\in k[x]$ tels que $\mu_i+\nu_i=\mu_j+\nu_j$ et $ax^{\nu_i}\tilde{g}_{ij}=\tilde{\tau}_j-\tilde{\tau}_i$ pour tout couple d'indices $i\neq j$. Il suffit alors de poser $\lambda=\mu_i+\nu_i$, et $\tilde{\sigma}_i=a^{-1}\sum_{j=0}^{\lambda-\mu_i-1}b_{i,j}x^j$, pour obtenir un isomorphisme de surfaces de Danielewski $\beta:S\xrightarrow{\sim}S_{(\lambda,\tilde{\sigma})}^{(n,[\mu])}$ tel que $\psi=\psi_{(\lambda,\tilde{\sigma})}\circ\beta$, autrement dit un isomorphisme $\mathfrak{b}:\mathfrak{S}\xrightarrow{\sim}\mathfrak{S}_{(\lambda,\tilde{\sigma})}^{(n,[\mu])}$. $\square$

COROLLAIRE 13.2.10. *Pour tout morphisme de surfaces de Danielewski $\beta:S'\to S$, il existe des arbres finement k-pondérés γ et γ', un morphisme d'arbres $\eta:\gamma'\to\gamma$ et des isomorphismes $\phi':S'\xrightarrow{\sim}S(\gamma')$ et $\phi:S\xrightarrow{\sim}S(\gamma)$ tels que le diagramme suivant soit commutatif*

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\phi'"', "\wr"] & S \arrow[d, "\phi", "\wr"'] \\ S(\gamma') \arrow[r, "\beta(\eta)"] & S(\gamma) \end{tikzcd}$$

DÉMONSTRATION. Cela se déduit évidemment de (13.2.9), en choisissant tout d'abord un morphisme de surfaces de Danielewski $\psi:S\to\mathbb{A}_X^1$ quelconque, puis en posant $\mathfrak{S}=\left(\psi:S\to\mathbb{A}_X^1\right)$ et $\mathfrak{S}'=\left(\psi\circ\beta:S'\to\mathbb{A}_X^1\right)$. $\square$

13.3. Géométrie birationnelle des surfaces de Danielewski

Tout morphisme de surface de Danielewski $\beta:S'\to S$ au sens de (13.1.1) est birationnel, donc est une modification affine (4.1.1) de S, dont le centre (I,f) est supporté le long de la fibre $\pi^{-1}(x_0)$ de $\pi:S\to X$. En effet, par définition, la restriction de β au dessus de X_* est un X_*- isomorphisme. Le centre (I,f) d'une modification de ce type n'est évidemment pas défini de manière unique, et il est difficile, en général, de déterminer un idéal $I\subset\Gamma(S,\mathcal{O}_S)$ convenant. Néanmoins, nous allons exploiter ici la correspondance (13.2.9) entre morphismes de surfaces de Danielewski et morphismes d'arbres finement k-pondérés établie ci-dessus pour obtenir une description simple de ces modifications affines. Nous en déduirons ensuite une méthode permettant de construire des complétions équivariantes des surfaces de Danielewski.

13.3.1. Modifications affines de surfaces de Danielewski. D'après (13.2.10), pour tout morphisme de surfaces de Danielewski $\beta : S' \to S$, il existe des arbres finement k-pondérés γ et γ', un morphisme d'arbres $\eta : \gamma' \to \gamma$ et des isomorphismes $\phi' : S' \xrightarrow{\sim} S(\gamma')$ et $\phi : S \xrightarrow{\sim} S(\gamma)$ tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\phi'"', "\wr"] & S \arrow[d, "\phi", "\wr"'] \\ S(\gamma') \arrow[r, "\beta(\eta)"] & S(\gamma) \end{tikzcd}$$

Autrement dit , β est conjugué à un morphisme $\beta(\eta) : S(\gamma') \to S(\gamma)$ défini à partir d'un morphisme d'arbres finement k-pondérés.

13.3.1. Or, par définition, un morphisme $\eta : \gamma' \to \gamma$ dans la catégorie $\mathcal{T}^k_{w,f}$ des arbres finement k-pondérés se décrit comme une contraction $\tau : \gamma' \to \gamma''$ d'une réunion disjointe de sous-arbres maximaux de γ' suivie d'une immersion dominante $i : \gamma'' \hookrightarrow \gamma$ (C.3.3). Toute contraction d'un sous-arbre maximal de $\gamma' = (\Gamma', w')$ se factorise à son tour en une succession de *contractions élémentaires* $\eta_\triangle : \gamma' \to \gamma$ consistant à contracter un triangle k-pondéré $\triangle$ (12.4.1) de γ', de racine $e_\triangle$ et de feuilles $e_1, \ldots, e_n \subset \mathrm{Fe}(\Gamma')$, sur sa racine $e_\triangle$.

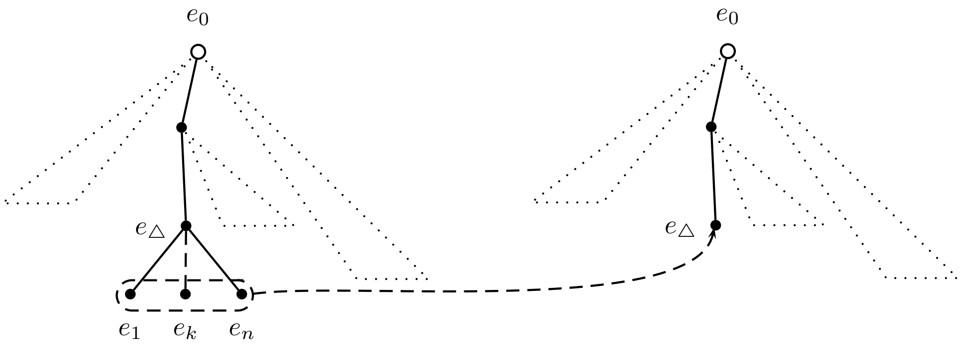


FIG. 13.3.1. Contraction élémentaire d'un triangle $\triangle$.

DÉFINITION 13.3.2. Un morphisme de surfaces de Danielewski $\beta : S' \to S$ pour lequel il existe des arbres finement k-pondérés γ' et γ, ainsi que des isomorphismes $\phi' : S' \xrightarrow{\sim} S(\gamma')$ et $\phi : S \xrightarrow{\sim} S(\gamma)$ tels que le morphisme $\phi \circ \beta \circ (\phi')^{-1} : S(\gamma') \to S(\gamma)$ corresponde à une contraction élémentaire $\eta_\triangle : \gamma' \to \gamma$, est appelé *une modification affine fibrée élémentaire.*

13.3.3. D'après (12.3.3), la surface de Danielewski $S(\gamma)$ définie par un triangle finement k-pondéré $\gamma = (\triangle, w)$ de racine $e_\triangle$ et de feuilles $e_1, \ldots, e_n$, est isomorphe à l'hypersurface de $\mathbb{A}^2_X = \mathrm{Spec}(k[x][y,z])$ d'équation $xz - P(y) = 0$, où $P = \prod_{i=1}^{n} (y - w(\overrightarrow{e_i e_\triangle}))$. Dans ces coordonnées, la modification affine fibrée élémentaire $\beta(s_\gamma) : S(\gamma) \to S(\{e_\triangle\}) \simeq \mathbb{A}^1_X$ associée au morphisme constant $s_\gamma : \gamma \to \{e_\triangle\}$ s'identifie clairement au morphisme induit par la restriction sur $S(\gamma)$ de la projection $pr_{x,y} : \mathbb{A}^2_X \to \mathbb{A}^1_X = \mathrm{Spec}(k[x][y])$, autrement dit à la modification affine $\sigma_{I,f} : S(\gamma) \to \mathbb{A}^1_X$ de centre $(I, f) = ((x, P(y)), x)$.

13.3.4. Considérons maintenant un morphisme $\beta(\tau_\triangle) : S(\gamma) \to S(\gamma_\triangle)$ correspondant à la contraction élémentaire $\tau_\triangle : \gamma \to \gamma_\triangle = (\Gamma_\triangle, w)$ d'un sous-triangle $(\triangle, w)$ de racine $e_\triangle$ d'un arbre finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$. Notons $e_1, \ldots, e_n$

les feuilles de $\triangle$ et $e'_1,\ldots,e'_m$ les autres feuilles de Γ. Les feuilles de $\gamma_\triangle$ sont alors les sommets $e'_1,\ldots,e'_m$ et $e_\triangle$ de $\Gamma_\triangle$. Soient

$$\pi_\gamma : S(\gamma) \overset{\rho(n+m)}{\rightarrow} X(n+m) \overset{\delta_\gamma}{\rightarrow} X \quad \text{et} \quad \pi_{\gamma_\triangle} : S(\gamma_\triangle) \overset{\rho(m+1)}{\rightarrow} X(m+1) \overset{\delta_{\gamma_\triangle}}{\rightarrow} X$$

les morphismes structuraux des surfaces de Danielewski correspondantes. Les composantes irréductibles de la fibre $\pi_\gamma^{-1}(x_0) \subset S(\gamma)$ (resp. $\pi_{\gamma_\triangle}^{-1}(x_0) \subset S(\gamma_\triangle)$) étant en bijection avec les feuilles $e_1,\ldots,e_n,e'_n,\ldots,e'_m$ de Γ (resp. $e'_1,\ldots,e'_m,e_\triangle$ de $\Gamma_\triangle$), nous notons par conséquent $x_{e_1},\ldots,x_{e_n},x_{e'_1},\ldots,x_{e'_m}$ les points de $\delta_\gamma^{-1}(x_0)$ (resp. $x_{e'_1},\ldots,x_{e'_m},x_{e_\triangle}$ les points de $\delta_{\gamma_\triangle}^{-1}(x_0)$). Puisque par définition $\tau_\triangle$ induit un isomorphisme $\gamma\setminus\triangle \overset{\sim}{\rightarrow} \gamma_\triangle \setminus \{e_\triangle\}$, $\beta(\tau_\triangle)$ induit l'isomorphisme identique

$$S(\gamma)\mid_{X_{e'_i}(n+m)} = \mathrm{Spec}\,(A[T_i]) \overset{\sim}{\rightarrow} S(\gamma_\triangle)\mid_{X_{e'_i}(m+1)} = \mathrm{Spec}\,(A[T_i])$$

pour tout $i=1,\ldots,m$. D'autre part, l'ouvert $S(\gamma_\triangle)\mid_{X_{e_\triangle}(m+1)}$ de $S(\gamma_\triangle)$ est isomorphe à la surface de Danielewski définie par la sous-chaîne maximale k-pondérée $(\downarrow e_\triangle)_{\gamma_\triangle}$ de $\gamma_\triangle$, donc, d'après (12.3.4), à la surface $S(\{e_\triangle\}) \simeq \mathbb{A}^1_X$ définie par l'arbre trivial $\{e_\triangle\}$. De même l'ouvert $\bigcup_{i=1}^{n} S(\gamma)\mid_{X_{e_i}(n+m)}$ de $S(\gamma)$ est isomorphe à la surface de Danielewski définie par le sous-arbre finement k-pondéré $(\downarrow e_\triangle)_\gamma \cup \triangle$ de γ, donc, pour la même raison que précédemment, est isomorphe à la surface de Danielewski $S(\triangle,w)$ définie par le triangle finement k-pondéré $(\triangle,w)$. Puisque $\tau_\triangle^{-1}(e_\triangle)=\triangle$, on conclut que via les isomorphismes ainsi définis, le morphisme

$$\beta(\tau_\triangle) : \beta(\tau_\triangle)^{-1}\left(S(\gamma_\triangle)\mid_{X_{e_\triangle}(m+1)}\right) = \bigcup_{i=1}^{n} S(\gamma)\mid_{X_{e_i}(n+m)} \rightarrow S(\gamma_\triangle)\mid_{X_{e_\triangle}(m+1)}$$

s'identifie au morphisme $\beta(s_\triangle) : S(\triangle,w) \rightarrow S(\{e_\triangle\})$ associé au morphisme constant $s_\triangle : (\triangle,w)\rightarrow\{e_\triangle\}$. On obtient donc la description suivante :

PROPOSITION 13.3.5. *Un morphisme de surfaces de Danielewski*

$$\beta : S' \rightarrow S = \bigsqcup_{i=1}^{n} \mathbb{A}^1_{X_i(n)}/\sim$$

est une modification affine fibrée élémentaire si et seulement s'il existe un indice $i_0 \in \{1,\ldots,n\}$ tel que les conditions suivantes soient satisfaites :

a) Pour tout $i \neq i_0$, la restriction de β à $\beta^{-1}(S_i)$, où $S_i = S\mid_{X_i(n)}$, induit un isomorphisme $\beta^{-1}(S_i) \overset{\sim}{\rightarrow} S_i$.

b) Il existe un polynôme non nul $P(y)=\prod_{j=1}^{m}(y-y_i)$, où $y_1,\ldots,y_m \in k$ sont deux à deux distincts, et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \beta^{-1}(S_{i_0}) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\wr"'] & S_{i_0} \arrow[d, "\wr"] \\ \left(\mathbb{A}^1_X\right)_{(I,f)} \arrow[r, "\sigma_{I,f}"] & \mathbb{A}^1_X \end{tikzcd}$$

où $\sigma_{I,f} : \left(\mathbb{A}^1_X\right)_{(I,f)} \simeq Spec\,(k[x][y,z]/(xz-P(y))) \rightarrow \mathbb{A}^1_X = Spec\,(k[x][y])$ désigne la modification affine de $\mathbb{A}^1_X$ de centre $(I,f)=((x,P(y)),x)$.

Via l'équivalence de catégories (13.2.9), on déduit de la décomposition des morphismes d'arbres finement k-pondérés en succession de contractions élémentaires que tout morphisme de surfaces de Danielewski se factorise via une succession de modifications affines fibrées élémentaires, suivie d'un plongement ouvert. Plus précisément, on obtient la description suivante :

Théorème 13.3.6. *Tout morphisme de surfaces de Danielewski $\beta : S' \to S$ admet une factorisation*

$$\beta : S' = S_n \xrightarrow{\beta_n} S_{n-1} \xrightarrow{\beta_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\beta_1} S_0 \overset{\beta_0}{\hookrightarrow} S,$$

où pour tout $j = 1, \ldots, n$, $\beta_j : S_j \to S_{j-1}$ est une modification affine fibrée élémentaire, et où $\beta_0 : S_0 \hookrightarrow S$ est une immersion ouverte. De plus, cette factorisation devient équivariante pour un choix de $\mathbb{G}_{a,X}$-actions sur les surfaces S, S' et S_i, $i = 0, \ldots, n-1$.

Démonstration. L'existence de la factorisation est une conséquence immédiate de l'équivalence de catégories (13.2.9) et du fait que le morphisme de surfaces de Danielewski $S(\gamma') \to S(\gamma)$ associé à un plongement $\gamma' = (\Gamma', w') \hookrightarrow \gamma = (\Gamma, w)$ d'arbres finement k-pondérés est un plongement ouvert de $S(\gamma')$ dans $S(\gamma)$ dont l'image s'identifie au complémentaire dans $S(\gamma)$ des composantes irréductibles de la fibre $\pi^{-1}(x_0)$ du morphisme structural $\pi : S(\gamma) \to X$ correspondant aux feuilles de $\Gamma \setminus \Gamma'$. D'après (13.1.4), le morphisme $\beta : S' \to S$ est équivariant lorsque l'on munit S de l'action correspondant à une section de la forme $x^{r_1} s_{[\mu(\gamma)]}$, où $r_1 \geq \max(0, h(\Gamma') - h(\Gamma))$, et S' de l'action correspondant à la section $x^r s_{[\mu(\gamma')]}$, où $r = h(\Gamma) - h(\Gamma') + r_1$. Il est alors clair que pour tout $i = 1, \ldots, n$, $\beta_i \circ \cdots \circ \beta_n : S' \to S_{i-1} = S(\gamma_i)$ est équivariant lorsque l'on munit S_{i-1} de la $\mathbb{G}_{a,X}$-action définie par la section $x^{r+h(\Gamma')-h(\Gamma_i)} s_{[\mu(\gamma_i)]}$, ce qui termine la preuve du théorème. □

En particulier, en appliquant (13.3.6) à un morphisme de surfaces de Danielewski $\psi : S \to \mathbb{A}^1_X$ quelconque, on obtient le résultat suivant.

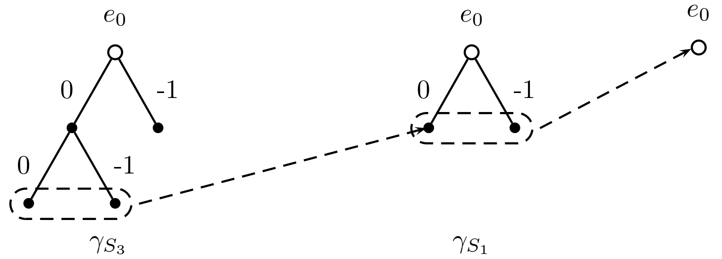
Corollaire 13.3.7. *Toute surface de Danielewski S est obtenue à partir du plan affine $\mathbb{A}^1_X = \mathbb{A}^2_k$ en effectuant une suite finie de modifications affines fibrées élémentaires. De plus, pour toute action de $\mathbb{G}_{a,X}$ sur S, il existe une unique $\mathbb{G}_{a,X}$-action sur $\mathbb{A}^1_X$ telle que $\psi : S \to \mathbb{A}^1_X$ soit équivariant et telle que toute modification affine fibrée apparaissant dans la factorisation soit elle aussi équivariante.*

Démonstration. Un morphisme de surfaces de Danielewski $\psi : S \to \mathbb{A}^1_X$ est équivariant pour une $\mathbb{G}_{a,X}$-action sur S définie par une section $f s_{[\mu_{\min}]}$, où $f \in A \setminus \{0\}$, si et seulement si $\mathbb{A}^1_X$ est équipé de l'action par la translation tordue $\mathbf{t}_{x^{h(\Gamma)} f}$. Le résultat s'en déduit puisque, d'après (12.1.4), toute $\mathbb{G}_{a,X}$-action sur une surface de Danielewski est obtenue de cette manière. □

Exemple 13.3.8. Rappelons (13.2.2) que la surface $S_3 \subset \mathbb{A}^3_X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x][y,z,u])$ définie par les équations

$$xz - y(y+1) = 0, \quad yu - z(z+1) = 0, \quad xu - (y+1)(z+1) = 0$$

est une surface de Danielewski $\pi : S_3 \to X$ via la restriction de la projection $pr_x : \mathbb{A}^3_X \to X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x])$. La restriction $\psi_3 : S_3 \to \mathbb{A}^1_X = \mathrm{Spec}(k[x][y])$ de la projection $pr_{x,y} : \mathbb{A}^3_X \to \mathbb{A}^1_X$ est un morphisme de surfaces de Danielewski dont la factorisation en modifications affines fibrées élémentaires correspond aux contractions élémentaires suivantes :



L'arbre intermédiaire γ_{S_1} ainsi introduit correspond bien sûr à la surface de Danielewski $S_1 \subset \mathbb{A}^2_X = \mathrm{Spec}\left(\mathbb{C}\left[x\right]\left[y,z\right]\right)$ définie par l'équation $xz - y\left(y+1\right) = 0$. La factorisation $\psi_3 : S_3 \overset{\beta}{\to} S_1 \overset{\psi_1}{\to} \mathbb{A}^1_X$ ainsi obtenue coïncide donc simplement avec celle induite par les restrictions sur S_3 et S_1 successivement de la factorisation canonique

$$pr_{x,y} : \mathbb{A}^3_X \overset{pr_{x,y,z}}{\longrightarrow} \mathbb{A}^2_X \overset{pr_{x,y}}{\longrightarrow} \mathbb{A}^1_X.$$

Via les morphismes ψ_1 et ψ_3, les surfaces S_1 et S_3 s'identifient aux modifications affines de $\mathbb{A}^1_X$ de centres respectifs

$$\left(I_1, f_1\right) = \left(\left(x, y\left(y+1\right)\right), x\right) \text{et} \left(I_3, f_3\right) = \left(\left(x^2, xy\left(y+1\right), \left(y+1\right)\left(y\left(y+1\right)+x\right)\right), x^2\right)$$

tandis que modification affine fibrée élémentaire $\beta : S_3 \to S_1$ s'identifie à la modification affine de S_1 de centre $\left(\bar{I}_2, \bar{f}_2\right) = \left(\left(\bar{x}, \left(\bar{y}+1\right)\left(\bar{z}+1\right)\right), \bar{x}\right)$, où $\bar{x}$, $\bar{y}$ et $\bar{z}$ désignent les images respectives de x, y et z dans $\mathbb{C}\left[x\right]\left[y,z\right] / \left(xz - y\left(y+1\right)\right)$. On notera que contrairement à l'idéal I_1, les générateurs des idéaux $\bar{I}_2$ et I_3 respectivement ne forment pas une suite régulière. Plus généralement, I_3 ne peut pas être engendré par une suite régulière contenant f_3. En effet, soit $I_3 = \left(x^2, Q\left(x,y\right)\right)$, où $Q\left(x,y\right)$ est un polynôme non diviseur de zéro modulo x^2, c'est à dire tel que $Q\left(0,y\right) \neq 0$. Alors

$$\mathbb{C}\left[x,y\right]\left[I_3 t\right] = \mathbb{C}\left[x,y\right]\left[x^2 t, Q\left(x,y\right)t\right] \simeq \mathbb{C}\left[x,y\right]\left[U,V\right] / \left(x^2 V - Q\left(x,y\right)U\right),$$

et S_3 s'identifie au complémentaire dans $\mathrm{Proj}_{\mathbb{C}[x,y]}\left(\mathbb{C}\left[x,y\right]\left[I_3 t\right]\right)$ de la transformée propre (4.1.4) $D^{pr}_{f_3} = \left\{x^2 t = U = 0\right\}$ de f_3, donc est isomorphe à l'hypersurface de $\mathbb{A}^3_X = \mathrm{Spec}\left(\mathbb{C}\left[x,y,z\right]\right)$ définie par l'équation $x^2 z - Q\left(x,y\right) = 0$. Ainsi le $\mathcal{O}_{S_3}$-module canonique ω_{S_3} de S_3 serait trivial, ce qui contredit (12.4.5) puisque l'arbre γ_{S_3} n'est pas complet.

13.4. Complétions équivariantes des surfaces de Danielewski

Le morphisme structural $\pi : S \to X$ d'une surface de Danielewski étant affine, il existe donc un X-schéma projectif $\bar{\pi} : \bar{S} \to X$ et une immersion ouverte $i : S \hookrightarrow \bar{S}$ tels que $\pi = \bar{\pi} \circ i$. Puisque la restriction de S au dessus de X_* est isomorphe au fibré en droites trivial $\mathbb{A}^1_{X_*}$, il est toujours possible de choisir un schéma $\bar{S}$ régulier, dont la restriction au dessus de X_* est isomorphe au fibré trivial $\mathbb{P}^1_{X_*}$. Puisqu'un schéma $\bar{S}$ de ce type est birationnel au fibré trivial $\mathbb{P}^1_X$, il existe alors un X-schéma projectif $\bar{Y}$ et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \bar{Y} \arrow[d, "\sigma_1"'] \arrow[dr, "\sigma_2"] & \\ \bar{S} \arrow[r, dashed] & \mathbb{P}^1_X \end{tikzcd}$$

où σ_1 et σ_2 sont des X-morphismes birationnels, se décomposant donc chacun en une suite d'éclatements de points fermés. Nous mettons ici à profit la factorisation équivariante (13.3.7) du morphisme $\psi : S \to \mathbb{A}^1_X$ en succession de modifications affines fibrées élémentaires pour construire un schéma $\bar{S}$ de ce type de manière explicite, obtenu a partir du fibré trivial $\mathbb{P}^1_X$ en effectuant une succession d'éclatements de points fermés k-valués.

13.4.1. Construction de complétions. Étant donnée une surface de Danielewski $\pi : S \to X$, nous donnons ici un procédé de construction d'une complétion $\bar{\pi} : \bar{S} \to X$. D'après ce qui précède, nous pouvons nous ramener à ne considérer que des surfaces de Danielewski définies par des arbres finement k-pondérés.

13.4.1. Considérons donc une surface de Danielewski $\pi : S = S\left(\gamma\right) \to X$, définie par un arbre finement k-pondéré $\gamma = \left(\Gamma, w\right)$, que nous munissons de son

X-morphisme canonique $\psi_\gamma : S \to \mathbb{A}^1_X$. Nous supposons que ψ_γ n'est pas un isomorphisme, autrement dit que γ n'est pas l'arbre trivial à un élément $\{e_0\}$, et nous choisissons une factorisation

$$\psi : S = S_n \overset{\beta_n}{\to} S_{n-1} \overset{\beta_{n-1}}{\to} \cdots \overset{\beta_1}{\to} S_0 = \mathbb{A}^1_X = \operatorname{Spec}(k[x][U])$$

de ψ en une succession de modifications affines fibrées élémentaires. Soit

$$\bar{\pi}_0 : \bar{S}_0 = \operatorname{Proj}_{k[x]}(k[x][U,V]) \to X,$$

où V est une nouvelle variable, le fibré trivial $\mathbb{P}^1_X$ sur X. Nous notons $i_0 : S_0 \hookrightarrow \bar{S}_0$ l'immersion ouverte canonique correspondante et $Y_0 \subset \bar{S}_0$ la section de $\bar{\pi}_0$ complémentaire de $i_0(S_0)$ dans $\bar{S}_0$.

13.4.2. Considérons maintenant le première modification affine fibrée élémentaire $\beta_1 : S_1 \to S_0$ intervenant dans la factorisation de ψ. En notant $e_1(1), \ldots, e_{n_1}(1)$ les sommets de Γ au niveau 1, la surface $\pi_1 : S_1 \to X$ s'identifie à la surface de Danielewski $S(\gamma_1)$ définie par le sous-arbre finement k-pondéré $\gamma_1 = (\Gamma_1, w)$ de γ de sommets $e_0, e_1(1), \ldots, e_{n_1}(1)$. Ainsi, dans les coordonnées précédemment introduites, β_1 est la modification affine de $S_0 = \mathbb{A}^1_X$ de centre

$$(I_1, f_1) = ((x, P_1(U)), x), \quad \text{où} \quad P_1(U) = \prod_{i=1}^{n_1} (U - w(\overrightarrow{e_{1,i}e_0})).$$

Le sous-schéma fermé $Z_1 \subset S_0$ défini par l'idéal I_1 est donc constitué de la réunion de n_1 points fermés k-valués supportés le long de la fibre $\pi_0^{-1}(x_0)$, et coïncide par conséquent avec son adhérence $\bar{Z}_1$ dans $\bar{S}_0$. Nous notons alors $\tilde{\beta}_1 : \tilde{S}_1 \to S_0$ l'éclatement de S_0 de centre Z_1 et $\bar{\beta}_1 : \bar{S}_1 \to \bar{S}_0$ l'éclatement de $\bar{S}_0$ de centre $\bar{Z}_1$. Nous considérons $\bar{S}_1$ comme un X-schéma projectif via le morphisme $\bar{\pi}_1 : \bar{S}_1 \to X$ relevant $\bar{\pi}_0 : \bar{S}_0 \to X$. D'après (4.1.7), la transformée propre (4.1.4) $F^{pr}_{f_1}$ de $F_0 = \operatorname{div}(f_1)$ dans $\tilde{S}_1$ est égale à la transformée stricte F_0' de F_0 car x et $P_1(U)$ forment une suite régulière dans $k[x][U]$. Puisque S_1 est isomorphe au complémentaire de $D^{pr}_{f_1}$ dans $\tilde{S}_1$, on conclut que S_1 s'identifie au complémentaire dans $\bar{S}_1$ de la réunion de la transformée stricte $\bar{F}_0'$ de l'adhérence $\bar{F}_0 = \bar{\pi}_0^{-1}(x_0)$ de F_0 dans $\bar{S}_0$, et de la transformée stricte Y_0' de la section Y_0 de $\bar{\pi}_0$. En notant $i_1 : S_1 \hookrightarrow \bar{S}_1$ l'immersion ouverte correspondante, on obtient donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \bar{S}_1 \arrow[r, "\bar{\beta}_1"] & \bar{S}_1 \\ S_1 \arrow[u, "i_1"] \arrow[r, "\beta_1"] & S_0 \arrow[u, "i_0"'] \end{tikzcd}$$

Par construction, la fibre $\bar{F}_1 = \bar{\pi}_1^{-1}(x_0)$ du morphisme $\bar{\pi}_1 : \bar{S}_1 \to X$ est un diviseur réduit, à croisements normaux simples, dont les composantes irréductibles sont la transformée stricte $\bar{F}_0' \simeq \mathbb{P}^1_k$ de $\bar{F}_0$ et les diviseurs exceptionnels $\bar{C}_i(1) \simeq \mathbb{P}^1_k$ de l'éclatement $\bar{\beta}_1 : \bar{S}_1 \to \bar{S}_0$, ces derniers s'identifiant par ailleurs aux adhérences des composantes irréductibles $C_i(1) \simeq \mathbb{A}^1_k$, $i = 1, \ldots, n_1$, de la fibre $\pi_1^{-1}(x_0)$ du morphisme structural $\pi_1 : S_1 \to X$.

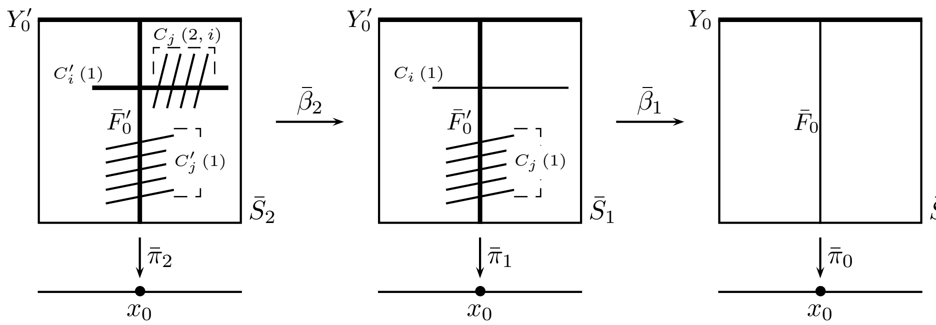
13.4.3. Si $n = 1$, alors $S = S_1 \simeq S(\gamma_1)$ et le morphisme $\bar{\pi}_1 : \bar{S}_1 \to X$ constitue une complétion du morphisme $\pi : S \to X$. Sinon, si $n \geq 2$, alors nous considérons la seconde modification affine fibrée élémentaire $\beta_2 : S_2 \to S_1$ apparaissant dans la factorisation du morphisme $\psi : S \to \mathbb{A}^1_X$. Par définition, il existe un sommet $e_i(1)$ de Γ au niveau 1, de fils $e_1(2,i), \ldots, e_{n_{(2,i)}}(2,i)$, tel que S_2 s'identifie à la surface de Danielewski $S(\gamma_{(2,i)})$ définie par le sous-arbre finement k-pondéré $\gamma_{(2,i)}$ de γ de sommets $e_0, e_1(1), \ldots, e_{n_1}(1), e_1(2,i) \ldots, e_{n_{(2,i)}}(2,i)$, et tel que $\beta_2 : S_2 \to S_1$ coïncide avec la modification affine fibrée élémentaire correspondant à la contraction élémentaire $\eta : \gamma_{(2,i)} \to \gamma_1$ du sous-triangle $(\triangle, w)$ de $\gamma_{(2,i)}$ de racine $e_i(1)$

et de feuilles $e_1(2,i),\ldots,e_{n_{(2,i)}}(2,i)$. Par conséquent, pour tout $j\neq i$, β_2 induit un isomorphisme $\beta_2^{-1}\left(S_1\mid_{X_j(n_1)}\right)\xrightarrow{\sim}S_1\mid_{X_j(n_1)}$ tandis que la restriction de β_2 à $\beta_2^{-1}\left(S_1\mid_{X_i(n_1)}\right)\simeq S(\triangle,w)$ s'identifie au morphisme

$$\beta\left(s_{(\triangle,w)}\right):S(\triangle,w)\to S(\{e_i(1)\})\simeq S_1\mid_{X_i(n_1)}$$

défini par le morphisme constant $s_{(\triangle,w)}:(\triangle,w)\to\{e_i(1)\}$. Ainsi, le sous-schéma fermé Z_2 de S_1 défini par l'idéal I_2 du centre (I_2,f_2) de la modification affine β_2 est constitué de $n_{(i,2)}$ points fermés k-valués de S_1, supportés le long de la composante irréductible $C_{1,i}$ de la fibre $\pi_1^{-1}(x_0)$ du morphisme structural $\pi_1:S_1\to X$.

13.4.4. Soit $\bar{\beta}_2:\bar{S}_2\to\bar{S}_1$ l'éclatement de $\bar{S}_1$ de centre l'adhérence $\bar{Z}_2$ de Z_2 dans $\bar{S}_1$. On conclut alors de la même manière que la fibre $\bar{F}_2=\bar{\pi}_2^{-1}(x_0)$ du morphisme projectif $\bar{\pi}_2:\bar{S}_2\to X$ relevant $\bar{\pi}_1:\bar{S}_1\to X$ est un diviseur réduit, à croisements normaux simples, dont les composantes irréductibles sont la transformée stricte $\bar{F}_0'\simeq\mathbb{P}_k^1$ de $\bar{F}_0$, les transformées strictes $\bar{C}_1'(1),\ldots,\bar{C}_{n_1}'(1)$ des autres composantes irréductibles de la fibre $\bar{\pi}_1^{-1}(x_0)\subset\bar{S}$ et les diviseurs exceptionnels $\bar{C}_j(2,i)\simeq\mathbb{P}_k^1$ de l'éclatement $\bar{\beta}_2:\bar{S}_2\to\bar{S}_1$. La surface S_2 est alors isomorphe au complémentaire dans $\bar{S}_2$ du diviseur $Y_0'\cup\bar{F}_0'\cup\bar{C}_i'(n_1)$ tandis que via l'immersion ouverte $i_2:S_2\hookrightarrow\bar{S}_2$, les composantes $\bar{C}_j'(1)\simeq\mathbb{P}_k^1$, $j\neq i$, et $\bar{C}_j(2,i)$, $j=1,\ldots n_{(2,i)}$, de $\bar{\pi}_2^{-1}(x_0)$ s'identifient aux adhérences dans $\bar{S}_2$ des composantes irréductibles de la fibre $\pi_2^{-1}(x_0)$ du morphisme structural $\pi_2:S_2\to X$ de la surface de Danielewski S_2. On obtient par conséquent l'arrangement de courbes suivant dans les fibres $\bar{\pi}_2^{-1}(x_0)$, $\bar{\pi}_1^{-1}(x_0)$ et $\bar{\pi}_0^{-1}(x_0)$ respectivement, les courbes en gras correspondant aux composantes irréductibles des diviseurs $\bar{S}_j\setminus i_j(S_j)$, $j=0,1,2$.



Par construction, les graphes duaux des diviseurs $\bar{\pi}_2^{-1}(x_0)$, $\bar{\pi}_1^{-1}(x_0)$ et $\bar{\pi}_0^{-1}(x_0)$ s'identifient donc respectivement aux arbres sous-jacents $\Gamma_{(2,i)}$, Γ_1 et $\{e_0\}$ des arbres finement k-pondérés $\gamma_{(2,i)}$, γ_1 et $\{e_0\}$.

13.4.5. En appliquant successivement la construction précédente à chacune des modifications affines fibrées élémentaires $\beta_j:S_j\to S_{j-1}$, $j=3,\ldots,n$, apparaissant dans la factorisation du morphisme $\psi_\gamma:S\to\mathbb{A}_X^1$, on obtient finalement une famille de X-schémas projectif $\bar{\pi}_j:\bar{S}_j\to X$, des immersions ouvertes $i_j:S_j\to\bar{S}_j$, des X-morphismes birationnels $\bar{\beta}_j:\bar{S}_j\to\bar{S}_{j-1}$ correspondant à l'éclatement d'un nombre fini de points fermés k-valués de $S_{j-1}\subset\bar{S}_{j-1}$ et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\bar{S}_n \arrow[r, "\bar{\beta}_n"] & \bar{S}_{n-1} \arrow[r, "\bar{\beta}_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, "\bar{\beta}_2"] & \bar{S}_1 \arrow[r, "\bar{\beta}_1"] & \bar{S}_0 \\
S_n \arrow[u, "i_n"'] \arrow[r, "\beta_n"] & S_{n-1} \arrow[u, "i_{n-1}"'] \arrow[r, "\beta_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, "\beta_2"] & S_1 \arrow[u, "i_1"'] \arrow[r, "\beta_1"] & S_0 \arrow[u, "i_0"']
\end{tikzcd}$$

Par construction, à chaque étape, $\bar{F}_j=\bar{\pi}_j^{-1}(x_0)\subset\bar{S}_j$ est un diviseur réduit, à croisements normaux simples, dont les composantes irréductibles sont toutes isomorphes à $\mathbb{P}^1_k$ et dont le graphe dual s'identifie à l'arbre sous-jacent Γ_j de l'arbre finement k-pondéré $\gamma_j = (\Gamma_j, w)$ correspondant à la surface de Danielewski $S_j \simeq S(\gamma_j)$. La complétion $\bar{\pi} : \bar{S} = \bar{S}_n \to X$ de la surface de Danielewski $\pi : S = S_n \to X$ ainsi construite est donc obtenue en éclatant successivement des points k-valués de la fibre $\bar{F}_0 = \bar{\pi}_0^{-1}(\bar{S}_0)$ et des points k-valués infiniment voisins possédant à chaque étape la propriété de n'appartenir qu'à une unique composante irréductible du diviseur $\bar{F}_j$. Lorsque $k = \mathbb{C}$, on retrouve de cette manière un cas particulier du procédé général de construction d'une complétion d'une surface affine normale avec action de $\mathbb{G}_{a,\mathbb{C}}$ décrit dans [**17**]. A des fins de références futures, l'énoncé suivant rassemble les propriétés importantes pour la suite des complétions $\bar{\pi} : \bar{S} \to X$ obtenues par le procédé ci-dessus.

THÉORÈME 13.4.6. *Pour toute surface de Danielewski $\pi : S = S(\gamma) \to X$ définie par un arbre finement k -pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$, il existe un X-schéma projectif régulier $\bar{\pi} : \bar{S} \to X$ et une immersion ouverte $i : S \hookrightarrow \bar{S}$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

a) la restriction de $\bar{S}$ au dessus de X_* est isomorphe au fibré trivial $\mathbb{P}^1_{X_*}$,

b) la fibre schématique $\bar{F} = \bar{\pi}^{-1}(x_0) \subset \bar{S}$ est un diviseur réduit, à croisements normaux simples dont toutes les composantes irréductibles sont isomorphes à $\mathbb{P}^1_k$ et dont le graphe dual $\Gamma(\bar{F})$ est isomorphe à l'arbre Γ.

c) le support du diviseur $\bar{S} \setminus i(S)$ est la réunion d'une section Y_0 de $\bar{\pi} : \bar{S} \to X$ et d'un sous-ensemble de composantes irréductibles $\bar{C}$ de $\bar{F}$ dont le graphe dual $\Gamma(\bar{C})$ est isomorphe au sous-arbre $\Gamma \setminus Fe(\Gamma)$ de Γ, c'est à dire au sous-arbre de Γ dont les sommets sont les sommets de Γ qui ne sont pas des feuilles de Γ.
De plus, pour tout $\mathbb{G}_{a,X}$-action sur S, il existe une $\mathbb{G}_{a,X}$-action sur $\bar{S}$ rendant l'immersion ouverte $i : S \hookrightarrow \bar{S}$ équivariante.

DÉMONSTRATION. Les assertions a), b) et c) étant des conséquences directes du procédé de construction de $\bar{S}$, il suffit de montrer que $i : S \hookrightarrow \bar{S}$ peut être rendu équivariant quelle que soit la $\mathbb{G}_{a,X}$-action sur S. Or, pour toute $\mathbb{G}_{a,X}$-action sur S, le morphisme de surfaces de Danielewski $\psi : S \to \mathbb{A}^1_X$ servant de donnée initiale à la procédure de construction de $\bar{S}$ par une succesion d'éclatements est équivariant lorsque l'on munit $\mathbb{A}^1_X$ d'une action par translation tordue $\mathbf{t}_a$ bien choisie. De plus, chacun des morphismes $\beta_j : S_j \to S_{j-1}$ apparaissant dans la factorisation de ψ en succession de modifications affines fibrées élémentaires est aussi équivariant (cf. 13.3.7). Puisque toute $\mathbb{G}_{a,X}$-action sur $\mathbb{A}^1_X$ de type $\mathbf{t}_a$ s'étend en une $\mathbb{G}_{a,X}$-action sur $\mathbb{P}^1_X$ (cf. 1.2.3), on conclut que cette action se relève aussi sur $\bar{S}$ puisqu'à chaque étape, $\bar{\beta}_j : \bar{S}_j \to \bar{S}_{j-1}$ est simplement l'éclatement d'un nombre fini de points fermés k-valués de $S_{j-1} \subset \bar{S}_{j-1}$ fixé par la $\mathbb{G}_{a,X}$-action sur S_{j-1} relevant l'action $\mathbf{t}_a$ sur $\mathbb{A}^1_X$. □

CHAPITRE 14

Plongements des surfaces de Danielewski dans les espaces affines

Nous avons établi au chapitre 12 que toute surface de Danielewski $\pi : S \to X$, où $x = \mathrm{Spec}\,(k\,[x])$, est isomorphe à une surface de Danielewski $S\,(\gamma)$ associée à un arbre finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$ suivant la méthode (12.2.4). D'autre part, le procédé introduit au chapitre 6 permet de construire, à partir d'une certaine classe d'arbres $k\,[x]\,[t]$-pondérés $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$ décrite au chapitre 11, des schémas de Danielewski-Fieseler affines $\pi : V\,(\mathfrak{g}) \to X$, c'est à dire des surfaces de Danielewski au sens de la définition (12.1.1).

Dans le présent chapitre, nous comparons ces deux descriptions combinatoires des surfaces de Danielewski. Nous montrons en particulier que toute surface de Danielewski S est isomorphe à une surface de Danielewski $V\,(\mathfrak{g})$ associée à un arbre $k\,[x]\,[t]$-pondéré. Plus précisément, nous établissons que pour toute surface de Danielewski $S\,(\gamma)$ définie par un arbre finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$, il existe une fonction de poids $\tilde{w} : E\,(\Gamma) \to k\,[x]\,[t]$ sur Γ, dépendant de la fonction de poids $w : E\,(\Gamma) \to k$, telle que $S\,(\gamma)$ soit isomorphe à la surface de Danielewski $V\,(\mathfrak{g})$ associée à l'arbre $\mathfrak{g} = (\Gamma, \tilde{w})$. On en déduit au passage que toute surface de Danielewski S admet un plongement équivariant dans un espace affine relatif $\mathbb{A}^N_X$ pour un certain N dépendant de S.

NOTATION 14.0.7. Pour simplifier, nous supposons dans ce chapitre que le corps de base k est de caractéristique nulle. Bien que la majorité des résultat établis dans ce chapitre ne dépendent pas de la caractéristique de k, cette hypothèse s'avère nécéssaire en (14.2.21), où nous décrivons certaines actions du groupe additif à l'aide de dérivations localement nilpotentes. Nous notons de nouveau $A = k\,[x]$, $X = \mathrm{Spec}\,(A)$ et $x_0 = \mathrm{div}\,(x)$.

14.1. Rappel des procédés de construction

Pour le confort du lecteur, nous rappelons ici brièvement les deux méthodes de construction de surfaces de Danielewski à partir d'arbres finement k-pondérés γ et d'arbres $A\,[t]$-pondérés $\mathfrak{g}$. Nous revenons ensuite sur le procédé algorithmique général du chapitre 11 permettant d'obtenir des fonctions de transitions pour une surface de Danielewski $V\,(\mathfrak{g})$ associée à un arbre $A\,[t]$-pondéré $\mathfrak{g}$.

14.1.1. Surface de Danielewski associée à un arbre finement k-pondéré. Rappelons qu'un arbre finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$ est un arbre Γ, enraciné en e_0 et muni d'une fonction de poids $w : E\,(\Gamma) \to k$ tel que, pour tout $e \in \mathrm{Par}\,(\Gamma)$ et tout couple $e_1, e_2 \in \mathrm{Fils}\,(e)$ de fils de e on ait $w\,(\overrightarrow{e_1 e}) \neq w\,(\overrightarrow{e_2 e})$.

14.1.1. Tout arbre finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$ définit une surface de Danielewski $\pi : S\,(\gamma) \to X$ construite de la manière suivante. Notons $\mathrm{Fe}\,(\Gamma) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ l'ensemble de feuilles de Γ, et posons, pour tout $i = 1, \ldots, n$, $(\downarrow e_i)_\Gamma = \{e_0 = e_{i,0} < e_{i,1} < \cdots e_{i,m_i - 1}, e_{i,m_i} = e_i\}$, où $m_i = l\,(\downarrow e_i)_\Gamma$. On forme tout d'abord une collection $\tilde{\sigma}(\gamma) = \{\tilde{\sigma}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ de polynômes $\tilde{\sigma}_i \in A = k[x]$ en posant

$$\tilde{\sigma}_i = \sum_{j=0}^{m_i} w\left(\overrightarrow{e_{i,j+1}e_{i,j}}\right) x^j \in k[x], \quad i = 1, \ldots, n.$$

On définit ensuite un multi-indice $[\mu(\gamma)] \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ en posant $\mu_i = h(\Gamma) - m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Le fait que γ soit finement k-pondéré garantit que le schéma de Danielewski-Fieseler $S(\gamma) = S_{(h(\Gamma),\tilde{\sigma}(\gamma))} = S^{(n,[\mu(\gamma)])}_{(h(\Gamma),\tilde{\sigma}(\gamma))}$ défini par les fonctions de transition $\tilde{g}_{ij} = x^{\mu_i - h(\Gamma)}(\tilde{\sigma}_j - \tilde{\sigma}_i) \in A_x = k\left[x, x^{-1}\right]$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$ est affine, donc est une surface de Danielewski au sens de la définition (12.1.1). Rappelons encore que $S(\gamma)$ s'obtient en recollant les X-schémas $\mathbb{A}^1_{X_i(n)} = \mathrm{Spec}(A[T_i])$ au dessus de $X_* = \mathrm{Spec}\left(k\left[x, x^{-1}\right]\right)$ par l'intermédiaire des isomorphismes de $k\left[x, x^{-1}\right]$-algèbres

$$\tau_{ij} : A_x[T_i] \xrightarrow{\sim} A_x[T_j], T_i \mapsto \tilde{g}_{ij} + x^{\mu_i - \mu_j} T_j, \quad i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, n.$$

Rappelons pour terminer que la surface de Danielewski $\pi : S(\gamma) \to X$ est équipée d'un X-morphisme birationnel canonique $\psi_\gamma : S(\gamma) \to \mathbb{A}^1_X = \mathrm{Spec}(A[X_0])$, où X_0 est une variable, dont les restrictions aux ouverts $\mathbb{A}^1_{X_i(n)}$ sont induites par les homomorphismes de A-algèbres $A[X_0] \to A[T_i]$, $X_0 \mapsto \tilde{\sigma}_i + x^{h(\Gamma)-\mu_i} T_i$, $i = 1, \ldots, n$.

14.1.2. Surface de Danielewski associée à un arbre $k[x][t]$-pondéré. Nous considérons ici des arbres $A[t]$-pondérés $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$ dont la fonction de poids $w : E(\Gamma) \to A[t]$ satisfait les conditions suivantes :

a) Pour tout sommet $e' \in \mathrm{Par}(\Gamma)$ et pour tout $e \in \mathrm{Fils}(e')$, le polynôme $w\left(\overrightarrow{ee'}\right)$ est de la forme $w\left(\overrightarrow{ee'}\right) = a_{e,e'} + t \subset A[t]$, où $a_{e,e'} \in k \subset A = k[x]$.

b) Pour tout $e' \in \mathrm{Par}(\Gamma)$ et tout couple $e_1, e_2 \in \mathrm{Fils}(e')$ on $a_{e_1,e'} \neq a_{e_2,e'}$.

14.1.2. Ces hypothèses impliquent que pour tout couple $e_1, e_2 \in \mathrm{Fils}(e')$, on a $a_{e_1e'}A + a_{e_2e'}A = A$, et que l'image de $a_{e_1e'} - a_{e_2e'}$ dans $A/xA = k$ est un élément inversible car non nul. Ainsi, les conditions ci-dessus assurent que $\mathfrak{g}$ est un arbre $A[t]$-pondéré satisfaisant les hypothèses générales (11.1.1). Or, d'après (11.2.1), ces hypothèses garantissent justement que le X-schéma $\pi : V(\mathfrak{g}) \to X$ associé à $\mathfrak{g}$ selon le procédé (6.1.11), que nous rappelons d'ailleurs brièvement ci-dessous, est un schéma de Danielewski-Fieseler affine de base (X, x_0), donc est une surface de Danielewski au sens de la définition (12.1.1).

14.1.3. Rappelons maintenant rapidement (6.1.9), à titre de comparaison, comment sont obtenus les schémas $V(\mathfrak{g})$. On associe tout d'abord à l'arbre Γ, la A-algèbre de polynômes $A[\Gamma] = A\left[X_0, (X_e)_{e\in\mathrm{Par}(\Gamma)}\right]$ en $d(\Gamma)+1$ variables X_0, X_e, où e parcourt l'ensemble de sommets de Γ qui sont des parents. On considère alors l'idéal $I(\mathfrak{g}) \subset A[\Gamma]$ engendré par les polynômes

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta_e(\mathfrak{g}) & = & xX_e - G_e(\mathfrak{g}) & e \in \mathrm{Par}(\Gamma) \\ \Delta_{e'<e}(\mathfrak{g}) & = & \left(X_{\mathrm{Par}(e')} + a_{e'',e'}\right) X_e - X_{e'} G_{e'<e}(\mathfrak{g}) & \begin{array}{l} (e, e') \in \mathrm{Par}(\Gamma) \times \mathrm{Anc}(e) \\ e'' = \mathrm{Fils}(e') \cap (\downarrow e)_\Gamma \end{array} \end{array}\right.$$

où, pour tout $e \in \mathrm{Par}(\Gamma)$ tel que $(\downarrow e)_\Gamma = \{e_0 < e_1 < \cdots < e_m = e\}$ on a posé

$$\left\{\begin{array}{rcl} G_e(\mathfrak{g}) & = & \displaystyle\prod_{j=0}^{m-1}\left(\prod_{e'\in\mathrm{Fils}(e_j)\setminus\{e_{j+1}\}} \left(a_{e',e_j} + X_{e_{j-1}}\right)\right) \prod_{e'\in\mathrm{Fils}(e)} \left(a_{e',e} + X_{e_{m-1}}\right) \\ G_{e_i<e}(\mathfrak{g}) & = & \displaystyle\prod_{j=i+1}^{m-1}\left(\prod_{e'\in\mathrm{Fils}(e_j)\setminus\{e_{j+1}\}} \left(a_{e',e_j} + X_{e_{j-1}}\right)\right) \prod_{e'\in\mathrm{Fils}(e)} \left(a_{e',e} + X_{e_{m-1}}\right) \end{array}\right.$$

où, par convention $X_{e_{-1}} = X_0$. On considère finalement $V(\mathfrak{g}) = \operatorname{Spec}(A[\Gamma]/I(\mathfrak{g}))$ comme un X-schéma via le morphisme $\pi : V(\mathfrak{g}) \to X$ induit par l'homomorphisme canonique $A \to A[\Gamma]/I(\mathfrak{g})$.

14.1.3. Fonctions de transitions d'une surface de Danielewski $V(\mathfrak{g})$. Au cours du chapitre 11, nous avons établi une méthode permettant d'obtenir des fonctions de transition pour un schéma de Danielewski-Fieseler $V(\mathfrak{g})$ quelconque. Dans le cas particulier où $V(\mathfrak{g})$ est une surface de Danielewski construite suivant le principe ci-dessus, l'algorithme utilisé pour déterminer ces fonctions de transition est simplifié. Plus précisément, on a le corollaire de (11.3.4) suivant :

Proposition 14.1.4. *Soit $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$ un arbre $A[t]$-pondéré satisfaisant les hypothèses (14.1.2), et soient $Fe(\Gamma) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ les feuilles de Γ. Notons $m_i = l(\downarrow e_i)_\Gamma$ et $(\downarrow e_i)_\Gamma = \{e_0 = e_{i,0} < e_{i,1} < \cdots < e_{i,m_i} = e_i\}$. Alors il existe une unique collection $\tilde{\sigma} = \{\tilde{\sigma}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ de polynômes $\tilde{\sigma}_i = \sum_{j=0}^{m_i-1} b_{i,j} x^j \in k[x]$, dépendant uniquement de la fonction de poids $w : E(\Gamma) \to A[t]$ et satisfaisant les conditions suivantes*

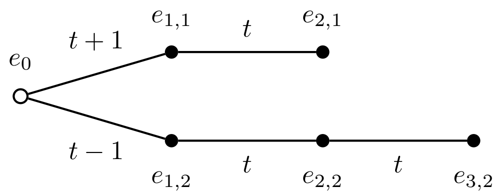
a) pour tout $i = 1, \ldots, n$, $b_{i,0} = -a_{e_{i,1},e_0} \in k$,

b) pour tout $i = 1, \ldots, n$ et tout $j = 0, \ldots, m-2$, les éléments $\tilde{\sigma}_{i,j} \in k[x, x^{-1}]$ définis récursivement par $\tilde{\sigma}_{i,j} = x^{-1} G_{e_j}(\mathfrak{g})(\tilde{\sigma}_i, \tilde{\sigma}_{i,0}, \ldots, \tilde{\sigma}_{i,j-1})$ sont des polynômes pouvant s'écrire sous la forme $\tilde{\sigma}_{i,j} = a_{e_{i,j+2},e_{i,j+1}} + x\xi_{ij}(x)$, où $\xi_{i,j} \in k[x]$,

telle que $V(\mathfrak{g})$ soit isomorphe à la surface de Danielewski $S^{(n,[\mu])}_{(h(\Gamma),\tilde{\sigma})}$, où, pour tout $i = 1, \ldots, n$, $\mu_i = h(\Gamma) - m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Rappelons (11.3.1) que les coefficients $b_{i,j} \in k$ des polynômes $\tilde{\sigma}_i$ dont la proposition ci-dessus garantit l'existence peuvent être déterminés récursivement à partir de la condition (a) de telle sorte que la condition (b) soit satisfaite à chaque étape. L'exemple ci-dessous illustre ce procédé général.

Exemple 14.1.5. Considérons l'arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$ suivant :



On a donc $A[\Gamma] = A[X_0, X_{e_0}, X_{e_{1,1}}, X_{e_{1,2}}, X_{e_{2,2}}]$, et $V(\mathfrak{g}) \subset \mathbb{A}^5_X$ est la surface de Danielewski définie par le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{rlrl} xX_{e_0} - (X_0^2 - 1) & = 0 & (X_0 + 1) X_{e_{1,1}} - X_{e_0}^2 & = 0 \\ xX_{e_{1,1}} - (X_0 - 1) X_{e_0} & = 0 & (X_0 - 1) X_{e_{1,2}} - X_{e_0}^2 & = 0 \\ xX_{e_{1,2}} - (X_0 + 1) X_{e_0} & = 0 & (X_0 - 1) X_{e_{2,2}} - X_{e_0} X_{e_{1,2}} & = 0 \\ xX_{e_{2,2}} - (X_0 + 1) X_{e_{1,2}} & = 0 & X_{e_0} X_{e_{2,2}} - X_{e_{1,2}}^2 & = 0 \end{array}\right.$$

On observera au passage que $V(\mathfrak{g})$ est munie d'une action du groupe multiplicatif $(k^*, \times) = \mathbb{G}_{m,k}$ induite par la restriction de l'action sur $\mathbb{A}^5_X$ définie par

$$\lambda \star (x, X_0, X_{e_0}, X_{e_{1,1}}, X_{e_{1,2}}, X_{e_{2,2}}) = (\lambda x, X_0, \lambda^{-1} X_{e_0}, \lambda^{-2} X_{e_{1,1}}, \lambda^{-2} X_{e_{1,2}}, \lambda^{-3} X_{e_{2,2}}).$$

L'arbre Γ ayant deux feuilles $e_{2,1}$ et $e_{3,2}$ aux niveaux 2 et 3 respectivement, il nous faut donc déterminer deux polynômes $\tilde{\sigma}_1 = b_{1,0} + xb_{1,1}$ et $\tilde{\sigma}_2 = b_{2,0} + xb_{2,1} + x^2 b_{2,2}$. D'après la condition a) de (14.1.4), on a déjà $b_{1,0} = -a_{e_{1,1},e_0} = -1$ et $b_{2,0} = -a_{e_{1,2}} = 1$. Puisque $a_{e_{2,1},e_{1,1}} = 0$, on doit avoir, d'après b),

$$\tilde{\sigma}_{1,0} = x^{-1} G_{e_0}(\mathfrak{g})(\tilde{\sigma}_1) = x^{-1}(\tilde{\sigma}_1^2 - 1) = b_{1,1}(-2 + xb_{1,1}) = x\xi_{1,0}(x)$$

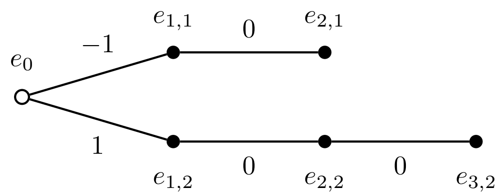
pour un certain polynôme $\xi_{1,0} \in k[x]$, ce qui n'est évidemment possible que si $b_{1,1} = 0$. On a donc $\tilde{\sigma}_1 = -1$. Le même raisonnement montre que $b_{2,1} = 0$ puisque $a_{e_{2,2},e_{1,2}} = 0$. On a donc $\tilde{\sigma}_2 = 1 + x^2 b_{2,2}$ et

$$\tilde{\sigma}_{2,0} = x^{-1} G_{e_0}(\mathfrak{g})(\tilde{\sigma}_2) = x^{-1}\left(\tilde{\sigma}_1^2 - 1\right) = 2b_{2,2}x + b_{2,2}^2 x^3$$

Finalement, puisque $a_{e_{3,2},e_{2,2}} = 0$, on conclut que

$$\tilde{\sigma}_{2,1} = x^{-1} G_{e_{1,2}}(\tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_{2,0}) = x^{-1}(\tilde{\sigma}_2 + 1)\tilde{\sigma}_{2,0} = \left(2 + x^2 b_{2,2}\right)\left(2b_{2,2} + b_{2,2}^2 x^3\right) = x\xi_{2,1}(x)$$

pour un certain polynôme $\xi_{2,1} \in k[x]$, ce qui n'est possible que si $b_{2,2} = 0$. Ainsi $V(\mathfrak{g})$ est isomorphe à la surface de Danielewski $S_{(3,\tilde{\sigma})}^{(2,[\mu])}$, où $\tilde{\sigma} = \{\tilde{\sigma}_1 = -1; \tilde{\sigma}_2 = 1\}$, et où $[\mu] = (\mu_1, \mu_2) = (1, 0)$, donc est isomorphe à la surface de Danielewski définie par l'arbre finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, \tilde{w})$ suivant :



14.1.6. Dans l'exemple précédent, la surface de Danielewski $V(\mathfrak{g})$ associée à l'arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g}$ est isomorphe à une surface de Danielewski $S(\gamma)$ définie par un arbre finement k-pondéré γ ayant le même arbre sous-jacent Γ que $\mathfrak{g}$. De manière générale, il est naturel de chercher à comparer l'arbre $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$ avec l'arbre finement k-pondéré γ_S, associé à la surface de Danielewski $S_{(h(\Gamma),\tilde{\sigma})}^{(n,[\mu])}$ correspondant aux fonctions de transition déduites de l'arbre $\mathfrak{g}$. Pour ce faire, il est nécessaire de revenir plus en détail sur le procédé de construction des polynômes $\tilde{\sigma}_i$ suivant la méthode de (14.1.4).

Lemme 14.1.7. *Soit $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$ un arbre $A[t]$-pondéré satisfaisant les hypothèses (14.1.2), et soit $e_i \in Fe(\Gamma)$ une feuille de Γ au niveau $m_i = l(\downarrow e_i)_\Gamma$. Soit $(\downarrow e_i)_\Gamma = \{e_0 = e_{i,0} < e_{i,1} < \cdots < e_{i,m_i} = e_i\}$ et soit $b_{i,0} = -a_{e_{i,1},e_0}, b_{i,1}, \ldots, b_{i,m_i-1} \in k$ les coefficients du polynôme $\tilde{\sigma}_i$ de (14.1.4). Alors pour tout $l = 1, \ldots, m-1$, il existe un couple $(\alpha_{i,l}, \beta_{i,l}) \in k^* \times k$, ne dépendant que des sommets $e_0, e_{i,1} \ldots, e_{i,l-1}$ et de leurs fils respectifs , tel que $b_{i,l} = \alpha_{i,l}^{-1}\left(-a_{e_{i,l+1},e_{i,l}} - \beta_{i,l}\right)$.*

Démonstration. On vérifie par récurrence sur les égalités

$$\tilde{\sigma}_{i,j} = x^{-1} G_{e_{i,j}}(\mathfrak{g})(\tilde{\sigma}_i, \tilde{\sigma}_{i,0}, \ldots, \tilde{\sigma}_{i,j-1}) = -a_{e_{i,j+2},e_{i,j+1}} + x\xi_{i,j}(x)$$

servant à définir les coefficients $b_{i,j}$, que si $b_{i,0}, b_{i,1}, \ldots, b_{i,j}$ ont été choisis de telle sorte que les égalités ci-dessus soient satisfaites pour tout $j = 0, \ldots, l-1$, alors il existe $(\alpha, \beta) \in k^* \times k$ satisfaisant l'assertion du lemme et tels que

$$\tilde{\sigma}_{i,l} = x^{-1} G_{e_{i,l}}(\mathfrak{g})(\tilde{\sigma}_i, \tilde{\sigma}_{i,0}, \ldots, \tilde{\sigma}_{i,l-1}) = \alpha b_{i,l+1} + \beta + x\xi_{i,l}(x)$$

pour un certain polynôme $\xi_{i,l} \in k[x]$, ce qui implique bien que le coefficient $b_{i,l+1}$ doit satisfaire l'égalité annoncée. □

On en déduit le résultat comparatif suivant :

Théorème 14.1.8. *Pour toute surface de Danielewski $V(\mathfrak{g})$ associée à un arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$ satisfaisant les hypothèses (14.1.2), il existe une fonction de poids $\tilde{w} : E(\Gamma) \to k$ sur Γ, telle que $\gamma = (\Gamma, w)$ soit un arbre finement k-pondéré, et telle que les surfaces de Danielewski $V(\mathfrak{g})$ et $S(\gamma)$ soient X-isomorphes.*

DÉMONSTRATION. Soient $\mathrm{Fe}(\Gamma)=\{e_1,\ldots,e_n\}$ les feuilles de Γ. D'après (14.1.4), il existe des polynômes $\tilde{\sigma}_i=\sum_{l=0}^{m_i-1} b_{i,l}x^l\in k[x]$, où $m_i=(\downarrow e_i)_\Gamma$, tels que $V(\mathfrak{g})$ soit isomorphe à la surface de Danielewski $S=S_{(h(\Gamma),\tilde{\sigma})}^{(n,[\mu])}$, où $\tilde{\sigma}=\{\tilde{\sigma}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ et où $\mu_i=h(\Gamma)-m_i$ pour tout $i=1,\ldots,n$. Il suffit donc de montrer que l'arbre k-pondéré $\gamma=\gamma_S=\left(\tilde{\Gamma},\tilde{w}\right)$ (12.2.1) correspondant à ces données possède le même arbre sous-jacent Γ que $\mathfrak{g}$. On est en effet assuré que l'arbre γ ainsi construit est un arbre finement k-pondéré d'après le critère (12.1.6). Par choix des données n, $h(\Gamma)$ et $[\mu]\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, $\tilde{\Gamma}$ a le même nombre de feuilles que Γ. Nous pouvons donc conserver la notation $e_1,\ldots,e_n$ pour désigner les feuilles de $\tilde{\Gamma}$. Par définition, on a $l(\downarrow e_i)_\Gamma=m_i=h(\Gamma)-\mu_i=l(\downarrow e_i)_{\tilde{\Gamma}}$, de sorte que les sous-chaînes maximales de Γ et $\tilde{\Gamma}$ respectivement sont en bijection. Il suffit par conséquent de montrer que pour tout couple de feuilles $e_i,e_j\in\mathrm{Fe}(\Gamma)$, de premier ancêtre commun $e\in\mathrm{Par}(\Gamma)$ au niveau $m\geq 0$, $\tilde{\sigma}_j-\tilde{\sigma}_i\in x^mk[x]\setminus x^{m+1}k[x]$. Cette condition garantit en effet, d'après la construction (12.2.1) de $\tilde{\Gamma}$ par recollement des sous-chaînes maximales $(\downarrow e_i)_{\tilde{\Gamma}}$, $i=1,\ldots,n$, que pour tout couple d'indices $i\neq j$ les sous-arbres $(\downarrow e_i)_{\tilde{\Gamma}}\cup(\downarrow e_j)_{\tilde{\Gamma}}$ de $\tilde{\Gamma}$ et $(\downarrow e_i)_\Gamma\cup(\downarrow e_j)_\Gamma$ de Γ sont isomorphes, donc que les arbres $\tilde{\Gamma}$ et Γ sont isomorphes. Notons

$$(\downarrow e_s)_\Gamma=\{e_0=e_{s,0}<e_{s,1}<\cdots<e_{s,m_s}=e_s\},\quad s=i,j,$$

de sorte que l'on a $e=e_{i,m}=e_{j,m}$ puisque e est au niveau m. D'après (14.1.7), les coefficients $b_{i,l}$ et $b_{j,l}$ des polynômes $\tilde{\sigma}_i$ et $\tilde{\sigma}_j$ sont déterminés tout d'abord par $b_{i,0}=-a_{e_{i,1}e_0}$ et $b_{j,0}=-a_{e_{i,1}e_0}$, puis par

$$b_{i,l}=\alpha_{i,l}^{-1}\left(-a_{e_{i,l+1},e_{i,l}}-\beta_{i,l}\right)\quad\text{et}\quad b_{j,l}=\alpha_{j,l}^{-1}\left(-a_{e_{j,l+1},e_{j,l}}-\beta_{j,l}\right).$$

pour des couples $(\alpha_{i,l},\beta_{i,l})\in k^*\times k$ (resp.$(\alpha_{j,l},\beta_{j,l})\in k^*\times k$) ne dépendant que des sommet $e_0,e_{i,1},\ldots,e_{i,l-1}$ et de leurs fils (resp. des sommets $e_0,e_{j,1},\ldots,e_{j,l-1}$ et de leurs fils). Si $m=0$, alors $b_{j,0}\neq b_{i,0}$ puisque d'après les hypothèses (14.1.2), $a_{e_{i,1},e_0}\neq a_{e_{j,1},e_0}$. Sinon, si $m>0$ alors $e_{i,l}=e_{j,l}$ pour tout $l=0,\ldots,m$, de sorte que $(\alpha_{i,l},\beta_{i,l})=(\alpha_{j,l},\beta_{j,l})$ pour tout $l=0,\ldots,m+1$. Puisque $a_{e_{i,l+1},e_{i,l}}=a_{e_{j,l+1},e_{j,l}}$ pour tout $l=0,\ldots,m-1$, on a donc $b_{i,l}=b_{j,l}$ pour tout $l=0,\ldots,m-1$. D'autre part, les hypothèses (14.1.2) impliquant de nouveau que $a_{e_{i,m+1},e_{i,m}}\neq a_{e_{j,m+1},e_{j,m}}$, on conclut que $b_{i,m}\neq b_{j,m}$. Ainsi $\tilde{\sigma}_j-\tilde{\sigma}_i\in x^mk[x]\setminus x^{m+1}k[x]$, ce qui prouve le théorème. □

14.1.9. Étant donné un arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g}=(\Gamma,w)$ satisfaisant aux hypothèses (14.1.2), il est particulièrement intéressant de pouvoir déterminer de manière précise et explicite les relations de dépendance entre les coefficients $b_{i,j}$ des polynômes $\tilde{\sigma}_i$ de (14.1.4) et la fonction de poids $w:E(\Gamma)\to A[t]$. En effet, on sait (cf. 12.3.4) sous quelles conditions deux surfaces de Danielewski $S(\gamma)$ et $S(\gamma')$, définies respectivement par des arbres finement k-pondérés γ et γ', sont X-isomorphes. Ainsi, dès lors que l'on connaît la relation explicite entre les coefficients $b_{i,j}$ et les éléments $a_{\mathrm{Par}(e),e}\in k$ servant à définir la fonction de poids $w:E(\Gamma)\to A[t]$, on est en mesure de déterminer sous quelles conditions deux surfaces de Danielewski $V(\mathfrak{g})$ et $V(\mathfrak{g}')$ sont X-isomorphes. Par construction, les coefficients $b_{i,j}$ s'expriment comme des polynômes en certains éléments $a_{\mathrm{Par}(e),e}\in k$. Il n'est donc pas évident que l'on puisse aboutir de cette manière à une caractérisation raisonnable des classes d'isomorphisme de surfaces de Danielewski $V(\mathfrak{g})$. Les coefficients $b_{i,j}$ étant cependant obtenus par un algorithme récursif explicite (cf. 11.3.1), on pourra toujours décider au cas par cas, par exemple en utilisant un logiciel de calcul formel adapté, si deux surfaces de Danielewski $V(\mathfrak{g})$ et $V(\mathfrak{g}')$ sont isomorphes. On déduit en tout cas de (12.3.4) et (14.1.8) la condition nécessaire générale suivante :

Proposition 14.1.10. *Si deux surfaces de Danielewski $V(\mathfrak{g})$ et $V(\mathfrak{g}')$ associées respectivement à des arbres $A[t]$-pondérés $\mathfrak{g}=(\Gamma,w)$ et $\mathfrak{g}'=(\Gamma',w')$ satisfaisant aux hypothèses (14.1.2) sont X-isomorphes, alors les sous-arbres essentiels (C.1.8) $Es(\Gamma)$ et $Es(\Gamma')$ de Γ et Γ' respectivement sont isomorphes.*

14.2. Plongement d'une surface de Danielewski dans un espace affine

D'après ce qui précède, toute surface de Danielewski $V(\mathfrak{g})$ associée à un arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g}=(\Gamma,w)$ satisfaisant les hypothèses (14.1.2) est isomorphe à une surface de Danielewski $S(\gamma)$ définie par un arbre finement k-pondéré γ ayant même arbre sous-jacent Γ que $\mathfrak{g}$. Nous montrons ici que la réciproque est vraie, à savoir que pour tout arbre finement k-pondéré $\gamma=(\Gamma,w)$, il existe un arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g}$ satisfaisant (14.1.2), ayant même arbre sous-jacent Γ que γ, et tel que $S(\gamma)\simeq V(\mathfrak{g})$. Pour ce faire nous construisons de manière explicite une fonction de poids $\tilde{w}:E(\Gamma)\to A[t]$ adaptée. Toute surface de Danielewski S étant isomorphe à une surface de Danielewski $S(\gamma)$ définie par un arbre γ de ce type (cf. 12.2.7), on en déduit, en particulier, que toute surface de Danielewski S peut être plongée dans un certain espace affine relatif $\mathbb{A}_X^N$ sous la forme d'une surface $V(\mathfrak{g})$. Nous montrons de plus que pour toute action non triviale du groupe additif $\mathbb{G}_{a,X}$ sur S il existe une $\mathbb{G}_{a,X}$-action sur $\mathbb{A}_X^N$, définie par une formule explicite, rendant ce plongement équivariant.

14.2.1. Construction de plongements. Nous consacrons ce paragraphe à la preuve de la réciproque suivante du théorème (14.1.8).

Théorème 14.2.1. *Pour toute surface de Danielewski $\pi:S(\gamma)\to X$ définie par un arbre finement k-pondéré $\gamma=(\Gamma,w)$, il existe une fonction de poids $\tilde{w}:E(\Gamma)\to A[t]$ satisfaisant les hypothèses (14.1.2) et un plongement $\phi:S(\gamma)\hookrightarrow\mathbb{A}_X^{d(\Gamma)+}=Spec(A[\Gamma])$ induisant un isomorphisme $S(\gamma)\simeq V(\mathfrak{g})$, où $\mathfrak{g}=(\Gamma,w)$.*

Pour démontrer le théorème (14.2.1), notre méthode consiste pour l'essentiel à inverser le procédé de construction des fonctions de transition d'une surface de Danielewski $V(\mathfrak{g})$ décrit précédemment. Nous commençons par introduire une série de notations nécessaires à la mise en oeuvre de cette construction.

14.2.2. Étant donné un arbre finement k-pondéré $\gamma=(\Gamma,w)$, de feuilles $\mathrm{Fe}(\Gamma)=\{e_1,\ldots,e_n\}$, nous notons de nouveau $m_i=l(\downarrow e_i)_\Gamma$ et

$$(\downarrow e_i)_\Gamma=\{e_0=e_{i,0}<e_{i,1}<\cdots<e_{i,m_i}=e_i\}$$

la sous-chaîne maximale pondérée correspondant à la feuille e_i. On prendra garde au fait qu'un sommet $e\in(\downarrow e_i)_\Gamma\cap(\downarrow e_j)_\Gamma$ au niveau m peut donc être noté à la fois $e_{i,m}$ et $e_{j,m}$. Dans ce qui suit, nous utiliserons régulièrement la formule condensée "soit $e=e_{i,m}$ " en lieu et place de la formulation complète "soit e un sommet de Γ au niveau m, appartenant à $(\downarrow e_i)_\Gamma$". Nous notons $\pi:S(\gamma)\overset{\rho(n)}{\to}X(n)=X(x_0,n)\overset{\delta}{\to}X$ le morphisme structural de la surface de Danielewski définie par γ, et nous désignons par $C_{e_i}\simeq\mathbb{A}_k^1$ la composante irréductible de la fibre $\pi^{-1}(x_0)$ correspondant à la feuille e_i, $i=1,\ldots,n$. Plus généralement, pour tout sommet e de Γ, nous notons

$$C(e)=\bigcup_{\{i\ e_i\in\mathrm{Fe}(\Gamma(e))\}}C_{e_i}\subset\pi^{-1}(x_0)$$

le sous-schéma fermé de $\pi^{-1}(x_0)$ constitué de la réunion des courbes $C_{e_i}\subset\pi^{-1}(x_0)$ correspondant au sous-ensemble des feuilles de Γ qui sont des feuilles du sous-arbre maximal $\Gamma(e)$ de Γ enraciné en e. On a donc en particulier $C(e_0)=\pi^{-1}(x_0)$ et $C(e_i)=C_{e_i}$ pour toute feuille $e_i\in\mathrm{Fe}(\Gamma)$ de Γ.

14.2.3. Nous notons $B_\gamma = \Gamma\left(X, \pi_*\mathcal{O}_{S(\gamma)}\right)$, $S_i(\gamma) = S(\gamma)\mid_{X_i(n)}$,

$$A[T_i] = \Gamma\left(X_i(n), \rho(n)_*\mathcal{O}_{S(\gamma)}\right) \simeq \Gamma\left(X, \pi_*\mathcal{O}_{S(\gamma)}\mid_{S_i(\gamma)}\right), \quad i = 1, \ldots, n$$

et nous désignons par $\tau_i : B_\gamma \to A[T_i]$ l'homomorphisme injectif de A-algèbres correspondant. Le X-morphisme birationnel canonique $\psi_\gamma = \psi_{(h(\Gamma),\tilde{\sigma}(\gamma))} : S(\gamma) \to \mathbb{A}^1_X = \mathrm{Spec}(A[X_0])$ correspond alors à l'unique section $s_{\gamma,e_{-1}} = \psi^*_\gamma(X_0) \in B_\gamma$ telle que

$$\tau_i\left(s_{\gamma,e_{-1}}\right) = \tilde{\sigma}_i + x^{m_i}T_i = \sum_{j=0}^{m_i-1} w\left(\overrightarrow{e_{i,j+1}e_{i,j}}\right)x^j + x^{m_i}T_i$$

pour tout $i = 1, \ldots, n$. Pour simplifier nous noterons dorénavant $w_{i,j} = w\left(\overrightarrow{e_{i,j+1}e_{i,j}}\right)$ pour tout $j = 0, \ldots, m-1$ et $w_{i,m_i} = T_i$.

14.2.4. Si $h(\Gamma) = 0$ alors Γ est l'arbre trivial à un élément $\{e_0\}$ et $\psi_\gamma : S(\gamma) \to \mathbb{A}^1_X$ est un isomorphisme. Nous supposons donc à présent que $h(\Gamma) \geq 1$, ce qui implique en particulier que $m_i \geq 1$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. On observe alors que $s_{\gamma,e_{-1}}$ est localement constant le long de la fibre $\pi^{-1}(x_0)$, et prend la valeur $w_{i,0} \in k \subset A[T_i]/xA[T_i] \simeq k[T_i]$ le long de la composante C_{e_i} de cette fibre. Puisque γ est finement pondéré, $w_{i,0} = w_{j,0}$ si et seulement si $e_{i,1} = e_{j,1}$, de sorte que si l'on note $g_1, \ldots g_r$ les sommets de Γ au niveaux 1, ψ_γ est constant les long des sous-schémas $C(g_i) \subset \pi^{-1}(x_0)$ pour tout $i = 1, \ldots, r$. Cette observation se généralise sous la forme suivante :

LEMME 14.2.5. *Si $h(\Gamma) \geq 1$, alors il existe une fonction de poids*

$$\tilde{w} : E(\Gamma) \to A[t], \overrightarrow{e\,Par(e)} \mapsto a_{e,Par(e)} + t \in k[t] \subset A[t]$$

satisfaisant les hypothèses (14.1.2), et une collection de sections $s_{\gamma,e_{-1}}, s_{\gamma,e} \in B_\gamma$, où e parcourt l'ensemble $Par(\Gamma)$, telles que si l'on note $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$ les assertions suivantes sont satisfaites :

a) Pour tout $e = e_{i,m}$, $s_{\gamma,e} = x^{-1}G_e(\mathfrak{g})\left(s_{\gamma,e_{-1}}, s_{\gamma,e_0}, s_{\gamma,e_{i,1}}, \ldots, s_{\gamma,e_{i,m-1}}\right)$.

b) si $Fils(e) = \{g_1, \ldots, g_r\}$ alors $s_{\gamma,e_{i,m-1}}$ est constant le long du sous-schéma fermé $C(g_j)$, prenant la valeur $-a_{g_j,e_{i,m}} \in k$.

c) si $g \in Fils(e) \cap Fe(\Gamma)$ alors $s_{\gamma,e_{i,m}}$ se restreint en une fonction coordonnée sur la composante irréductible $C_g \simeq \mathbb{A}^1_k$ de $\pi^{-1}(x_0)$.

14.2.6. La preuve de (14.2.5) que nous donnons ci-dessous repose pour l'essentiel sur les mêmes arguments calculatoires que ceux conduisant à la construction des fonctions de transition d'une surface de Danielewski $V(\mathfrak{g})$. Il s'agit en effet de construire par étapes, à partir de la section $s_{\gamma,e_{-1}}$ correspondant au morphisme birationnel canonique ψ_γ, la fonction de poids $\tilde{w} : E(\Gamma) \to A[t]$ et les sections $s_{\gamma,e} \in B_\gamma$, $e \in \mathrm{Par}(\Gamma)$, satisfaisant les conditions énoncées. Plus précisément, pour tout $m = 0, \ldots, h(\Gamma)$, nous notons Γ_m le sous-arbre de Γ formé de l'ensemble des sommets de Γ aux niveaux $k \leq m$, nous supposons construite une fonction de poids $\tilde{w} : E(\Gamma_m) \to A[t]$ satisfaisant les hypothèses (14.1.2), ainsi que la collection des sections $s_{\gamma,e}$ pour tous les sommets de Γ aux niveaux $k \leq m-2$. Nous définissons alors, à partir de ces données, les sections $s_{\gamma,e'}$ pour tous les sommets e' de Γ au niveau $m-1$, et nous prolongeons ensuite la fonction de poids $\tilde{w}$ en une fonction de poids $\tilde{w} : E(\Gamma_{m+1}) \to A[t]$ satisfaisant encore les hypothèses (14.1.2).

14.2.7. Étape 1. Puisque $s_{\gamma,e_{-1}}$ est donnée, il suffit de déterminer dans cette première étape les valeurs de $\tilde{w}$ sur les arêtes reliant les fils de la racine e_0 de Γ à cette même racine. Par définition, pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$\tau_i\left(s_{\gamma,e_{-1}}\right) = \tilde{\sigma}_i + x^{m_i}T_i = \sum_{j=0}^{m_i} w_{i,j}x^j \in A[T_i].$$

La condition b) de (14.2.5) n'est satisfaite que si l'on pose

$$\tilde{w}\left(\overrightarrow{ee_0}\right) = a_{e,e_0} + t = -s_{\gamma,e_{-1}} \mid_{C_{e_i}} + t = -w_{i,0} + t \in k\left[t\right] \subset A\left[t\right]$$

pour tout $e = e_{i,1} \in \mathrm{Fils}\left(e_0\right)$. Cette définition ne dépend évidemment pas du choix de l'indice i tel que $e = e_{i,1}$ puisque si j est un autre indice tel que $e = e_{j,1}$, alors on a $w_{i,0} = w\left(\overrightarrow{e_{i,1}e_0}\right) = w\left(\overrightarrow{e_{j,1}e_0}\right) = w_{0,j}$. Étant donnés deux fils distincts $e = e_{i,1}$ et $e' = e_{j,1}$ de e_0, on a nécessairement $i \neq j$, de sorte que $a_{e',e_0} = w_{j,0} \neq w_{i,0} = a_{e,e_0}$ puisque par hypothèse γ est un arbre finement k-pondéré. Par conséquent $\mathfrak{g}_1 = \left(\Gamma_1, \tilde{w}\right)$ est un arbre $A\left[t\right]$-pondéré satisfaisant les hypothèses (14.1.2).

14.2.8. Étape m, $m \geq 2$. Supposons maintenant que la fonction de poids $\tilde{w}$ est définie sur le sous-arbre Γ_m de Γ et que les sections $s_{\gamma,e}$ sont construites pour tous les sommets de Γ aux niveaux $k \leq m-2$. Étant donné un sommet $e = e_{i,m-1}$ de $\mathrm{Par}\left(\Gamma\right)$, les hypothèses que nous venons de faire impliquent que la formule

$$x^{-1} G_{e_{i,m-1}}\left(\mathfrak{g}_m\right)\left(s_{\gamma,e_{-1}}, s_{\gamma,e_0}, s_{\gamma,e_{i,1}}, \ldots, s_{\gamma,e_{i,m-2}}\right)$$

à un sens, et définit par conséquent une section de $B_\gamma \otimes_A A_x$ dont il reste à montrer qu'elle se prolonge en une section $s_{\gamma,e} \in B_\gamma$ satisfaisant (c). Or, par définition, pour tout indice $i = 1, \ldots, n$ tel que $e = e_{i,m-1}$ on a

$$\tau_i\left(s_{\ \gamma,e_{i,m-1}}\right) = x^{-1} \prod_{j=0}^{m-1} F_{e_{i,j}}^{\{e_{i,j+1}\}}\left(\mathfrak{g}_m\right)\left(\tau_i\left(s_{\gamma,e_{i,j-1}}\right)\right)\left(a_{e_{i,m},e_{i,m-1}} + \tau_i\left(s_{\gamma,e_{i,m-2}}\right)\right),$$

tandis que par construction $\tau_i\left(s_{\gamma,e_{i,j-1}}\right) \in A\left[T_i\right]$ pour tout $j = 0, \ldots, m-1$. Posons, pour tout $j = 1, \ldots, m$

$$f_{e_{i,j}} := F_{e_{i,j-1}}^{\{e_{i,j}\}}\left(\mathfrak{g}_j\right)\left(-a_{e_{i,j},e_{i,j-1}}\right) = \prod_{e' \in \mathrm{Fils}(e_{i,j-1}) \setminus \{e_{i,j}\}} \left(a_{e',e_{i,j-1}} - a_{e_{i,j},e_{i,j-1}}\right) \in k^*.$$

On déduit aisément en développant suivant les puisssances de x qu'il existe un polynôme $Q_{i,m-2} \in k\left[u_0, \ldots, u_{m-1}\right]$ ne dépendant que des sommets $e_0, \ldots, e_{i,m-1}$ et tel que $Q_{i,m-2}\left(0, \ldots, 0\right) = 0$, et un polynôme $P_{i,m-2} \in A\left[T_i\right]$ tels que

$$\tau_i\left(s_{\gamma,e_{i,m-2}}\right) = -a_{e_{i,m},e_{i,m-1}} + x\left(\alpha_{i,m-2} w_{i,m} + Q_{i,m-2}\left(w_{0,i}, \ldots, w_{0,m-1}\right)\right) + x^2 P_{i,m-2},$$

où, $\alpha_{i,m-2} = \prod_{j=1}^{m-2} f_{e_{i,j}}^{m-1-j}$. Un nouveau développement montre alors que

$$\tau_i\left(s_{\gamma,e_{i,m-1}}\right) = \alpha_{i,m-1} w_{i,m} + \beta_{i,m-1} + + x P_{i,m-1} \in A\left[T_i\right],$$

où $P_{i,m-1} \in A\left[T_i\right]$, $\alpha_{i,m-1} = \prod_{j=1}^{m-1} f_{e_{i,j}}^{m-1-j} \in k^*$ et où $\beta_{i,m-1}$ ne dépend que des sommets $e_0, e_{i,1} \ldots, e_{i,m}$. Ainsi, $\tau_i\left(s_{\gamma,e}\right) \in A\left[T_i\right]$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ tel que $e = e_{i,m-1}$. Étant donné maintenant un indice j tel que $e \notin \left(\downarrow e_j\right)_\Gamma$, le premier ancêtre commun de $e = e_{i,m-1}$ et $e_j = e_{j,m_j}$ est un sommet $e_{i,l} = e_{j,l}$ où $l \leq \min\left(m-2, m_j-1\right)$. Dans cette situation, par définition du polynôme généalogique $G_{e_{i,m-1}}\left(\mathfrak{g}_m\right)$ et de la section $s_{\gamma,e_{j,l-1}}$, on a

$$\tilde{w}\left(\overrightarrow{e_{j,l+1}e_{j,l}}\right)\left(s_{\gamma,e_{j,l-1}}\right) = a_{e_{j,l+1},e_{j,l}} + \tau_j\left(s_{\gamma,e_{j,l-1}}\right) = a_{e_{j,l+1},e_{j,l}} + \left(-a_{e_{j,l+1},e_{j,l}} + xR\right)$$

où $R \in A\left[T_i\right]$ divise le polynôme

$$g_{i,m-1} = G_{e_{i,m-1}}\left(\mathfrak{g}_m\right)\left(\tau_j\left(s_{\gamma,e_{-1}}\right), \tau_j\left(s_{\gamma,e_0}\right), \tau_j\left(s_{\gamma,e_{i,1}}\right), \ldots, \tau_j\left(s_{\gamma,e_{i,m-2}}\right)\right) \in A\left[T_j\right].$$

Puisque $g_{i,m-1}$ est en particulier divisible par x, on conclut finalement que pour tout $j = 1, \ldots, n$, $\tau_j\left(s_{\gamma,e_{i,m-1}}\right) = x^{-1} g_{i,m-1} \in A\left[T_j\right]$, donc que $s_{\gamma,e_{i,m-1}} \in B_\gamma$. Si $e' = e_{i,m} \in \mathrm{Fils}\left(e\right)$ est une feuille de Γ alors $m = m_i$, $e' = e_i$ et $w_{i,m_i} = T_i$ par définition. Dans ces conditions, $\tau_i\left(s_{\gamma,e_{i,m-1}}\right)$ induit bien une fonction coordonnée sur $C_{e_i} \simeq \mathrm{Spec}\left(k\left[T_i\right]\right)$ puisque par construction $\alpha_{i,m-1} \in k^*$. La section $s_{\gamma,e_{i,m-1}}$ satisfait par conséquent les conditions (a) et (c) de (14.2.5). Pour que la condition

(b) soit vérifiée, il suffit alors d'étendre la fonction de poids $\tilde{w}$ à l'arbre Γ_{m+1}, en posant, pour toute arête $\overrightarrow{e_{i,m+1}e_{i,m}}$ de Γ_{m+1},

$$\tilde{w}\left(\overrightarrow{e_{i,m+1}e_{i,m}}\right) = a_{e_{i,m+1},e_{i,m}} + t = s_{\gamma,e_{i,m-1}} \mid_{C_{e_i}} + t = \left(\alpha_{i,m-1} w_{i,m} + \beta_{i,m}\right) + t.$$

Si $\overrightarrow{e_{j,m+1}e_{i,m}}$, où $i \neq j$, est une autre arête de Γ_{m+1}, alors $e_{j,m} = e_{i,m}$, de sorte que les couples $(\alpha_{i,m-1}, \beta_{i,m-1})$ et $(\alpha_{j,m-1}, \beta_{j,m-1})$ sont égaux. Puisque γ est un arbre finement k-pondéré, on a $w_{i,m} \neq w_{j,m}$, donc $a_{e_{i,m+1},e_{i,m}} \neq a_{e_{j,m+1},e_{j,m}}$, ce qui prouve que $\tilde{w}$ s'étend en une fonction de poids $E(\Gamma_{m+1}) \to A[t]$ satisfaisant les hypothèses (14.1.2) et telle que la condition (b) de (14.2.5) soit elle aussi satisfaite.

14.2.9. Après exactement $h(\Gamma)$ étapes, le procédé ci-dessus s'arrête, et l'on obtient un arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_h = (\Gamma, \tilde{w})$ dont la fonction de poids $\tilde{w}$ satisfait les hypothèses (14.1.2), et des sections $s_{\gamma,e} \in B_\gamma$, où $e \in \{e_{-1}\} \cup \mathrm{Par}(\Gamma)$, vérifiant les conditions du lemme (14.2.5). Le lemme suivant complète alors la preuve du théorème (14.2.1).

Lemme 14.2.10. *Le X-morphisme $\phi : S(\gamma) = Spec(B_\gamma) \to \mathbb{A}_X^{d(\Gamma)+1}$ induit par l'homomorphisme de A-algèbres $\phi_* : A[\Gamma] \to B_\gamma, X_0 \mapsto s_{\gamma,e_{-1}}$, $X_e \mapsto s_{\gamma,e}$, où e parcourt $Par(\Gamma)$, est un plongement induisant un X-isomorphisme $S(\gamma) \simeq V(\mathfrak{g})$.*

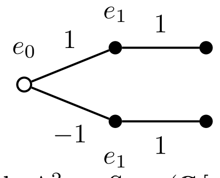
Démonstration. Par définition, $s_{\gamma,e_{-1}}$ correspond au morphisme birationnel canonique $\psi_\gamma : S(\gamma) \to \mathbb{A}_X^1$. Donc ses restrictions sur les fibres $\pi^{-1}(x)$, où $x \in X_* = X \setminus \{x_0\}$ sont des fonctions coordonnées. D'après (14.2.5), pour tout couple de feuilles $e_i, e_j \in \mathrm{Fe}(\Gamma)$, il existe une section $s_{\gamma,e} \in B_\gamma$ constante sur C_{e_i} et C_{e_j} et prenant des valeurs distinctes sur ces deux composantes irréductibles de la fibre $\pi^{-1}(x_0)$. Ainsi ϕ distingue les composantes irréductibles de $\pi^{-1}(x_0)$. Finalement, pour toute feuille $e_i = e_{i,m_i} \in \mathrm{Fe}(\Gamma)$, la condition (c) de (14.2.5) garantit que la section $s_{\gamma,e_{i,m_i-1}} \in B_\gamma$ induit une fonction coordonnée sur $C_{e_i} \simeq \mathbb{A}_k^1$. On en déduit que $\phi : S(\gamma) \to \mathbb{A}_X^{d(\Gamma)+1}$ est bien un plongement. Par construction des sections $s_{\gamma,e} \in B_\gamma$, $\phi_*(\Delta_e(\mathfrak{g})) = 0$ dans B_γ pour $e \in \mathrm{Par}(\Gamma)$. On déduit des relations (6.1.10) que $x\phi_*(\Delta_{e'<e}(\mathfrak{g})) = 0$ dans B_γ pour tout couple $(e, e') \in \mathrm{Par}(\Gamma) \times \mathrm{Anc}(e)$, donc que $\Delta_{e'<e}(\mathfrak{g}) = 0$ dans B_γ puisque B_γ est une A-algèbre intègre. Ainsi, ϕ_* se factorise via $B(\mathfrak{g}) = A[\Gamma]/I(\mathfrak{g})$. Cela signifie que l'image de ϕ est contenue dans le schéma de Danielewski $V(\mathfrak{g})$ associé à $\mathfrak{g}$. Par construction, le X-morphisme $\phi : S(\gamma) \to V(\mathfrak{g})$ ainsi obtenu est bijectif sur les points fermés de $S(\gamma)$ et $V(\mathfrak{g})$, donc est un isomorphisme d'après le Théorème principal de Zariski. En effet, $V(\mathfrak{g})$ est un schéma régulier, donc en particulier un schéma normal. □

14.2.11. Il est facile de se convaincre que le procédé de construction de la fonction de poids $\tilde{w} : E(\Gamma) \to A[t]$ à partir de l'arbre finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$ décrit ci-dessus est exactement inverse de celui permettant d'obtenir une collection de fonctions de transition pour une surface de Danielewski $V(\mathfrak{g})$ associée à un arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g} = (\Gamma, \tilde{w})$. On pourra donc toujours, au prix d'un effort calculatoire, passer d'une description à l'autre, tout en conservant le même arbre sous-jacent Γ. Toute surface de Danielewski $\pi : S \to X$ étant isomorphe à une surface de Danielewski $S(\gamma)$ définie par un arbre finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$ (cf. 12.2.7), on obtient le résultat utile suivant :

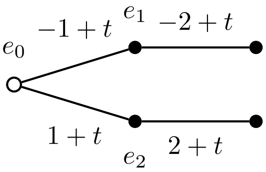
Théorème 14.2.12. *Pour toute surface de Danielewski $\pi : S \to X$, il existe un arbre Γ, des fonctions de poids $w : E(\Gamma) \to k$ et $\tilde{w} : E(\Gamma) \to A[t]$ telles que $\gamma = (\Gamma, w)$ soit un arbre finement k-pondéré et telles que $\mathfrak{g} = (\Gamma, \tilde{w})$ satisfasse les hypothèses (14.1.2) , et des X-isomorphismes $S(\gamma) \simeq S \simeq V(\mathfrak{g})$.*

Les plongements de surfaces de Danielewski $\phi : S(\gamma) \hookrightarrow \mathbb{A}_X^{d(\Gamma)+1}$ obtenus par la méthode ci-dessus ne sont en général pas optimaux, au sens qu'il est très souvent possible de construire, en raffinant de manière adéquate les procédés de construction, des plongements $\tilde{\psi} : S(\gamma) \hookrightarrow \mathbb{A}^N_X$, où $N < d(\Gamma) + 1$, comme le montre l'exemple ci-dessous, déjà considéré en (12.4.4).

Exemple 14.2.13. D'après (12.4.4) la surface de Danielewski $S(\gamma)$ associée à l'arbre finement $\mathbb{C}$-pondéré

$\gamma = (\Gamma, w) =$ 

est isomorphe à l'hypersurface S_4 de $\mathbb{A}^2_X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x][y,z])$ définie par l'équation $x^2z - y^2 + 2xy + 1 = 0$. D'autre part, le procédé de construction de plongement obtenu ci-dessus montre que $S(\gamma)$ est isomorphe à la surface de Danielewski $V(\mathfrak{g})$ de $\mathbb{A}^4_X = \mathrm{Spec}(A[\Gamma])$ associée à l'arbre $A[t]$-pondéré

$\mathfrak{g} = (\Gamma, \tilde{w}) =$ 

c'est à dire à la surface définie par le système d'équations

$$\begin{cases} xX_{e_0} - \left(X_0^2 - 1\right) = 0 & (X_0 - 1)\, X_{e_1} - X_{e_0}(X_{e_0} - 2) = 0 \\ xX_{e_1} - (X_0 + 1)(X_{e_0} - 2) = 0 & (X_0 + 1)\, X_{e_2} - X_{e_0}(X_{e_0} + 2) = 0 \\ xX_{e_2} - (X_0 - 1)(X_{e_0} + 2) = 0 & \end{cases}$$

Ainsi $V(\mathfrak{g})$ et S_4 sont toutes deux isomorphes à $S(\gamma)$, et l'homomorphisme de A_x-algèbres

$$A[X_0, X_{e_0}, X_{e_1}, X_{e_2}] \to A_x[y,z], \begin{cases} X_0 \mapsto y \\ X_{e_0} \mapsto xz + 2y \\ X_{e_1} \mapsto x^{-1}(xz + 2y - 2)(y+1) \\ X_{e_2} \mapsto x^{-1}(xz + 2y + 2)(y-1) \end{cases}$$

induit un X-isomorphisme $S_4 \simeq V(\mathfrak{g})$.

14.2.2. Plongements et modifications affines. Étant donnée une surface de Danielewski $S(\gamma)$ définie par un arbre finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$, nous montrons ici que le plongement $\phi : S(\gamma) \overset{\sim}{\hookrightarrow} V(\mathfrak{g}) \subset \mathbb{A}^{d(\Gamma)+1}_X$ obtenu ci-dessus est compatible avec la factorisation du morphisme birationnel canonique $\psi_\gamma : S_\gamma \to \mathbb{A}^1_X$ en succession de modifications affines fibrées élémentaires (13.3.2).

14.2.14. D'après (13.3.6), le morphisme birationnel canonique $\psi_\gamma : S(\gamma) \to \mathbb{A}^1_X$ se factorise de la manière suivante

$$\psi_\gamma : S(\gamma_n) = S(\gamma) \overset{\beta_n}{\to} S(\gamma_{n-1}) \overset{\beta_{n-1}}{\to} \cdots \overset{\beta_2}{\to} S(\gamma_1) \overset{\beta_1}{\to} S(\gamma_0) = \mathbb{A}^1_X,$$

où pour tout $i = 1, \ldots, n$, $\gamma_i = (\Gamma_i, w)$ est un sous-arbre finement k-pondéré obtenu à partir du sous-arbre $\gamma_{i+1} = (\Gamma_{i+1}, w)$ en effectuant une contraction élémentaire $\eta_{\triangle_i} : \gamma_{i+1} \to \gamma_i$ d'un sous-triangle $\triangle_i$ de Γ_{i+1} tel que $\mathrm{Fe}(\triangle_i) \subset \mathrm{Fe}(\Gamma_{i+1})$, et où $\beta_{i+1} : S(\gamma_{i+1}) \to S(\gamma_i)$ est le morphisme de surfaces de Danielewski (13.1.1) correspondant à $\eta_{\triangle_i}$. Notons $p_0 : \mathbb{A}^{d(\Gamma)+1}_X \to \mathbb{A}^1_X$ le X-morphisme induit par l'inclusion $A[X_0] \subset A[\Gamma]$. Par construction du plongement $\phi : S(\gamma) \overset{\sim}{\hookrightarrow} V(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{Spec}(A[\Gamma])$ ci-dessus, on a $\psi_\gamma = p_0 \circ \phi$ car, d'après (14.2.5), la première section $s_{\gamma, e_{-1}} \in B(\gamma)$ servant à définir ϕ s'identifie à $\psi^*_\gamma(X_0)$. Ainsi le plongement $\phi : S(\gamma) \hookrightarrow \mathbb{A}^{d(\Gamma)+1}_X$ prolonge le morphisme birationnel canonique ψ_γ. Plus généralement, on a le résultat suivant :

Proposition 14.2.15. *Soit $e \in Par(\Gamma)$ un sommet de Γ, $\tau : \gamma \to \Gamma_e = (\Gamma_e, w)$ la contraction du sous-arbre maximal $\gamma(e) = ((\uparrow e)_\Gamma, w)$ de γ enraciné en e, et soit $\beta : S(\gamma) \to S(\gamma_e)$ le morphisme de surfaces de Danielewski correspondant. Soit $\mathfrak{g}_e = (\Gamma_e, \tilde{w})$ le sous-arbre $A[t]$-pondéré de $\mathfrak{g} = (\Gamma, \tilde{w})$ correspondant. Notons $p_e : Spec(A[\Gamma]) \to Spec(A[\Gamma_e])$ le X-morphisme induit par l'inclusion de A-algèbres $A[\Gamma_e] \subset A[\Gamma]$. Alors l'homomorphisme de A-algèbres $A[\Gamma_e] \to B_\gamma$, $X_{e'} \mapsto s_{\gamma,e'}$ se factorise par B_{γ_e} et induit un plongement fermé $\phi_e : S(\gamma_e) \overset{\sim}{\hookrightarrow} V(\mathfrak{g}_e) \subset Spec(A[\Gamma_e])$ tel que le diagramme suivant soit commutatif*

$$\begin{tikzcd} S(\gamma) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\beta(\tau)"'] & V(\mathfrak{g}) \subset Spec(A[\Gamma]) \arrow[d, "p_e"] \\ S(\gamma_e) \arrow[r, "\phi_e"] & V(\mathfrak{g}_e) \subset Spec(A[\Gamma_e]) \end{tikzcd}$$

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence immédiate de la définition du morphisme de surfaces de Danielewski $\beta : S(\gamma) \to S(\gamma_e)$ correspondant à la contraction $\tau : \gamma \to \gamma_e$ et de la construction itérative de la fonction de poids $\tilde{w} : E(\Gamma) \to A[t]$. □

14.2.16. La proposition (14.2.15) signifie en d'autres termes qu'à partir de l'arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g} = (\Gamma, \tilde{w})$ déduit de $\gamma = (\Gamma, w)$, on obtient les plongements de toutes les surfaces de Danielewski $S(\gamma_e)$ correspondant à des sous-arbres γ_e de γ apparaissant dans la factorisation du morphisme constant $\tau_\gamma : \gamma \to \{e_0\}$. Plus précisément, puisque par définition $A[\Gamma] = A[\Gamma_e]\left[(X_{e'})_{e' \in \mathrm{Par}(\Gamma(e))}\right]$, où $\Gamma(e) = (\uparrow e)_\Gamma$ désigne le sous-arbre maximal de Γ enraciné en $e \in \mathrm{Par}(\Gamma)$, (14.2.15) implique que $I(\mathfrak{g}) \cap A[\Gamma_e] = I(\mathfrak{g}_e)$ et que la matrice

$$M(\mathfrak{g}_e) = \left(M_0, (M_{e'})_{e' \in \mathrm{Par}(\Gamma_e)}\right) \in \mathrm{Mat}_{2,(d(\Gamma_e)+1)}(A[\Gamma_e])$$

servant à définir les générateurs de l'idéal $I(\mathfrak{g}_e) \subset A[\Gamma_e]$ de la surface de Danielewski $V(\mathfrak{g}_e) \subset \mathbb{A}_X^{d(\Gamma_e)+1}$ est obtenue à partir de la matrice

$$M(\mathfrak{g}) = \left(M_0, (M_{e'})_{e' \in \mathrm{Par}(\Gamma)}\right) \in \mathrm{Mat}_{2,(d(\Gamma)+1)}(A[\Gamma])$$

donnant les générateurs de l'idéal $I(\mathfrak{g}) \subset A[\Gamma]$ de $V(\mathfrak{g}) \subset \mathbb{A}_X^{d(\Gamma)+1}$ (cf. 6.1.9) en supprimant les colonnes $M_{e'} \in \mathrm{Mat}_{2,1}(A[\Gamma])$ correspondant aux sommets de $\Gamma(e)$. Appliquée à la factorisation complète du morphisme birationnel canonique $\psi_\gamma : S(\gamma) \to \mathbb{A}_X^1$ associé au morphisme constant $\tau_\gamma : \gamma \to \{e_0\}$, cette observation conduit au résultat suivant.

Théorème 14.2.17. *Soit $V(\mathfrak{g}) \subset \mathbb{A}_X^{d(\Gamma)+1}$ une surface de Danielewski associée à un arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g} = (\Gamma, \tilde{w})$ satisfaisant les hypothèses (14.1.2), et soit*

$$\tau_\mathfrak{g} : \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g} \overset{\tau_{e_{n-1}}}{\to} \mathfrak{g}_{n-1} = (\Gamma_{n-1}, \tilde{w}) \overset{\tau_{e_{n-2}}}{\to} \cdots \overset{\tau_{e_1}}{\to} \mathfrak{g}_1 = (\Gamma_1, \tilde{w}) \overset{\tau_{e_0}}{\to} \mathfrak{g}_0 = \{e_0\}$$

une factorisation du morphisme constant $\tau_\mathfrak{g} : \mathfrak{g} \to \{e_0\}$ en succession de contractions élémentaires $\tau_{e_{i-1}} : \mathfrak{g}_i \to \mathfrak{g}_{i-1}$ d'un sous-triangle $\triangle_i$ de Γ_i enraciné en e_{i-1} tel que $Fe(\triangle_i) \subset Fe(\Gamma_i)$. Soit $p_{e_{i-1}} : Spec(A[\Gamma_{i-1}]) \to Spec(A[\Gamma_i])$ la projection correspondant à l'inclusion de A-algèbres $A[\Gamma_{i-1}] \subset A[\Gamma_i] = A[\Gamma_{i-1}]\left[X_{e_{i-1}}\right]$. Alors le X-morphisme $\psi : V(\mathfrak{g}) \to \mathbb{A}_X^1 = Spec(A[X_0])$ induit par l'homomorphisme de A-algèbres $A[X_0] \to B(\mathfrak{g})$ admet une factorisation

$$\psi : V(\mathfrak{g}) \overset{p_{e_{n-1}}}{\to} V(\mathfrak{g}_{n-1}) \overset{p_{e_{n-2}}}{\to} \cdots \overset{p_{e_1}}{\to} V(\mathfrak{g}_1) \overset{p_{e_0}}{\to} V(\mathfrak{g}_0) = Spec(A[X_0])$$

où pour tout $i = 1, \ldots, n$, la restriction $p_{e_{i-1}} : V(\mathfrak{g}_i) \to V(\mathfrak{g}_{i-1})$ de la projection $p_{e_{i-1}}$ est une modification affine fibrée élémentaire.

DÉMONSTRATION. On peut supposer, d'après (14.1.8), que $V(\mathfrak{g})$ est obtenue comme l'image du plongement $\phi : S(\gamma) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A[\Gamma])$ d'une surface de Danielewski $S(\gamma)$ définie par un arbre finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$ ayant même arbre sous-jacent Γ que $\mathfrak{g}$. L'assertion découle alors de l'existence de la factorisation du morphisme birationnel $\psi_\gamma : S(\gamma) \to \mathbb{A}^1_X$ en succesion de modifications affines fibrées élémentaires (cf. 13.3.6), et du fait que (14.2.15) garantit que le plongement ϕ est compatible avec cette factorisation. □

14.2.3. Plongements équivariants. Dans ce paragraphe, nous comparons la description des actions du groupe additif $\mathbb{G}_{a,X}$ sur les surfaces de Danielewski $S(\gamma)$ avec la structure des $\mathbb{G}_{a,X}$-actions sur les surfaces de Danielewski $V(\mathfrak{g})$ induites par les dérivations localement nilpotentes canoniques $\partial_{\mathfrak{g},m}$ (6.3.3) afin d'établir le résultat suivant :

THÉORÈME 14.2.18. *Pour toute surface de Danielewski $\pi : S \to X$ non isomorphe à $\mathbb{A}^1_X$, il existe un entier $N = N(S) \geq 2$ et un plongement fermé $\phi : S \hookrightarrow \mathbb{A}^N_X$, tel que pour toute $\mathbb{G}_{a,X}$-action sur S, il existe une $\mathbb{G}_{a,X}$-action sur $\mathbb{A}^N_X$ faisant de ϕ un plongement équivariant.*

14.2.19. Puisque toute surface de Danielewski $\pi : S \to X$ est isomorphe à une surface de Danielewski $S(\gamma)$ définie par un arbre finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$ et que toute surface de ce type admet un plongement $\phi : S(\gamma) \hookrightarrow \mathbb{A}^{d(\Gamma)+1}_X = \mathrm{Spec}(A[\Gamma])$ induisant un isomorphisme $\phi : S(\gamma) \xrightarrow{\sim} V(\mathfrak{g})$, où $\mathfrak{g} = (\Gamma, \tilde{w})$ pour une certaine fonction de poids $\tilde{w} : E(\Gamma) \to A[t]$ satisfaisant les hypothèses (14.1.2), il suffit de montrer que pour toute $\mathbb{G}_{a,X}$-action sur $S(\gamma)$, il existe une A-dérivation localement nilpotente $\partial \in \mathrm{Der}_A(A[\Gamma])$ préservant l'idéal $I(\mathfrak{g}) \subset A[\Gamma]$ de $V(\mathfrak{g})$, et telle que ϕ soit équivariant pour la $\mathbb{G}_{a,X}$-action correspondante (voir 6.3.4).

14.2.20. D'après (11.2.1), pour toute k-algèbre intègre A, tout élément $f \in A$ à la fois non nul et non inversible et tout arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g} = (\Gamma, \tilde{w})$ satisfaisant les hypothèses générales (11.1.1), le schéma $V(\mathfrak{g})$ est un schéma de Danielewski-Fieseler

$$\pi : V(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\rho(n)} X(n) = X(D, n) \xrightarrow{\delta} X$$

de base $(X, D = \mathrm{div}(f))$ de type $(n, [\mu])$, où n désigne le nombre de feuilles $e_1, \ldots, e_n$ de Γ, et où, $\mu_i = h(\Gamma) - l(\downarrow e_i)_\Gamma$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. On a de plus montré en (11.2.11) que la structure de $\mathbb{G}_{a,X}$-quasi-torseur sur $V(\mathfrak{g})$ induite par la section canonique $s_{[\mu]} \in \Gamma(X(n), \mathcal{O}[\mu])$ correspondait dans cette description à la $\mathbb{G}_{a,X}$-action sur $V(\mathfrak{g})$ induite par la A-dérivation localement nilpotente canonique $\partial_{\mathfrak{g},h(\Gamma)}$ (6.3.3) de la A-algèbre $B(\mathfrak{g}) = A[\Gamma]/I(\mathfrak{g})$.

14.2.21. Supposons en particulier que $A = k[x]$, $f = x \in A$. Alors pour une surface de Danielewski $S(\gamma) = S^{(n,[\mu(\gamma)])}_{(h(\Gamma),\bar{\sigma}(\gamma))}$ définie par un arbre finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$, le plongement $\phi : S(\gamma) \hookrightarrow \mathbb{A}^{d(\Gamma)+1}_X$ d'image $V(\mathfrak{g})$ est équivariant lorsque l'on munit respectivement $S(\gamma)$ de sa structure de $\mathbb{G}_{a,X}$-quasi-torseur correspondant à la section $s_{[\mu(\gamma)]} \in \Gamma(X(n), \mathcal{O}[\mu(\gamma)])$, et $\mathbb{A}^{d(\Gamma)+1}_X$ de la $\mathbb{G}_{a,X}$-action correspondant à la A-dérivation localement nilpotente $\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},h(\Gamma)}$ de $A[\Gamma]$ induisant la dérivation $\partial_{\mathfrak{g},h(\Gamma)}$ de $B(\mathfrak{g})$. De même, pour toute $\mathbb{G}_{a,X}$-action sur $S(\gamma)$ correspondant à une section $as_{[\mu(\gamma)]} \in \Gamma(X(n), \mathcal{O}[\mu(\gamma)])$, où $a \in A$, $\phi : S(\gamma) \hookrightarrow \mathbb{A}^{d(\Gamma)+1}_X$ est équivariant dès lors que l'on munit $\mathbb{A}^{d(\Gamma)+1}_X$ de la $\mathbb{G}_{a,X}$-action induite par la A-dérivation localement nilpotente $a\tilde{\partial}_{m,h(\Gamma)}$. Cela termine la preuve du théorème (14.2.18) puisque l'on sait d'après (12.1.4) que toutes les $\mathbb{G}_{a,X}$-actions sur $S(\gamma)$ sont obtenues de cette manière. On en déduit aussi le résultat suivant (cf. 6.3.4) :

Proposition 14.2.22. *Toute $\mathbb{G}_{a,X}$-action sur une surface de Danielewski $V(\mathfrak{g})$ associée à un arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g}=(\Gamma,w)$ est induite par la restriction d'une $\mathbb{G}_{a,X}$-action sur l'espace affine ambiant $\mathbb{A}_X^{d(\Gamma)+1}=Spec(A[\Gamma])$, définie par une dérivation localement nilpotente de $A[\Gamma]$ de la forme $ax^m\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},h(\Gamma)}$, où $m\geq 0$ et $a\in A\setminus xA$.*

14.2.23. Par construction, pour tout arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g}=(\Gamma,w)$ A-dérivation localement nilpotente $\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},h(\Gamma)}\in \mathrm{Der}_A(A[\Gamma])$ définie récursivement par la formule

$$\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},h(\Gamma)} = x^{h(\Gamma)}\frac{\partial}{\partial X_0}+x^{-1}\sum_{e\in\mathrm{Par}(\Gamma)}\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},h(\Gamma)}(G_e(\mathfrak{g}))\frac{\partial}{\partial X_e}$$

est une dérivation triangulaire, telle que pour tout $e\in\mathrm{Par}(\Gamma)$, on ait

$$\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},h(\Gamma)}(X_e)\subset A\left[X_0,(X_{e'})_{e'\in\mathrm{Anc}(e)}\right]\subset A[\Gamma_e],$$

où, comme précédemment, Γ_e désigne le sous-arbre dont les sommets sont les sommets de $(\Gamma\setminus(\uparrow e)_\Gamma)\cup\{e\}$, c'est à dire l'arbre obtenu à partir de Γ en contractant le sous-arbre maximal $\Gamma(e)=(\downarrow e)_\Gamma$ de Γ enraciné en e sur sa racine. On en déduit que pour tout $e\in\mathrm{Par}(\Gamma)$, $\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},m}$ se restreint en une A-dérivation localement nilpotente de la sous-A-algèbre $A[\Gamma_e]$ de $A[\Gamma]$. Il en est évidemment de même des dérivations localement nilpotentes $ax^m\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},h(\Gamma)}$, où $a\in k[x]\setminus xk[x]$, ce qui conduit au résultat suivant :

Corollaire 14.2.24. *Pour toute surface de Danielewski $V(\mathfrak{g})$ associée à un arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g}=(\Gamma,w)$ satisfaisant les hypothèses (14.1.2), la factorisation*

$$\psi: V(\mathfrak{g})\stackrel{p_{e_{n-1}}}{\to}V(\mathfrak{g}_{n-1})\stackrel{p_{e_{n-2}}}{\to}\cdots\stackrel{p_{e_1}}{\to}V(\mathfrak{g}_1)\stackrel{p_{e_0}}{\to}V(\mathfrak{g}_0)=Spec(A[X_0])$$

de (14.2.17) est équivariante lorsque l'on munit $V(\mathfrak{g})$ de la $\mathbb{G}_{a,X}$-action correspondant à la dérivation localement nilpotente $\partial=ax^m\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},h(\Gamma)}\in Der_A(A[\Gamma])$, où $a\in k[x]\setminus xk[x]$ et chaque $V(\mathfrak{g}_i)$ de l'action correspondant à la restriction de ∂ sur $A[\Gamma_i]$.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence immédiate de l'existence d'une factorisation équivariante du morphisme birationnel canonique $\psi_\gamma: S(\gamma)\to\mathbb{A}_X^1$ d'une surface de Danielewski définie par un arbre finement k-pondéré $\gamma=(\Gamma,w)$ (13.3.7), de la compatibilité du plongement $\phi: S(\gamma)\stackrel{\sim}{\hookrightarrow}V(\mathfrak{g})$ avec cette factorisation (14.2.15), et de la correspondance entre l'action induite sur $V(\mathfrak{g})$ par la dérivation $ax^m\tilde{\partial}_{\mathfrak{g},h(\Gamma)}$ avec la $\mathbb{G}_{a,X}$-action sur $S(\gamma)$ définie par la section $ax^m s_{[\mu(\gamma)]}$(14.2.21). □

CHAPITRE 15

Surfaces de Danielewski d'invariant de Makar-Limanov trivial

Dans le présent chapitre nous caractérisons les surfaces de Danielewski possédant un invariant de Makar-Limanov trivial. Introduit par Makar-Limanov [**31**], cet invariant est défini, pour toute algèbre de type fini A sur un corps k de caractéristique nulle, comme la sous-algèbre $\mathrm{ML}(A) = \bigcap_{\partial \in \mathrm{LND}(A)} \mathrm{Ker}(\partial)$, intersection dans A des noyaux de k-dérivations localement nilpotentes $\partial \in \mathrm{LND}(A) \subset \mathrm{Der}_k(A)$. De manière plus géométrique, les éléments de $\mathrm{ML}(A)$ sont les fonctions régulières sur $V = \mathrm{Spec}(A)$ invariantes par toutes les actions du groupe additif $\mathbb{G}_{a,k}$ sur V. Lorsque $\mathrm{ML}(A) = k$, on dit que l'invariant de Makar-Limanov de A, ou de $V = \mathrm{Spec}(A)$, est *trivial.*

Malgré cette interprétation géométrique, l'invariant de Makar-Limanov reste un objet en général difficile à manier, essentiellement du fait de sa définition algébrique faisant intervenir l'ensemble des dérivations localement nilpotentes. Cependant, lorsque S/k est une surface intègre, il est clair que l'invariant de Makar-Limanov de S est trivial si et seulement si S admet deux $\mathbb{G}_{a,k}$-actions *non équivalentes*, c'est à dire deux actions définies par des k-dérivations localement nilpotentes ∂_1 et ∂_2 de la k-algèbre $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ possédant des noyaux distincts. Cela revient encore à dire que les fibres fermées générales des deux morphismes quotients $q_i : S \to \mathrm{Spec}(\mathrm{Ker}(\partial_i))$, $i = 1, 2$, correspondants (cf. 5.2.2) sont distinctes.

On dispose d'autre part d'une caractérisation des surfaces affines normales *complexes* $S = \mathrm{Spec}(A)$ dont l'invariant de Makar-Limanov $\mathrm{ML}(S) = \mathrm{ML}(A)$ est trivial en terme de la structure du diviseur de bord d'une complétion projective $\bar{S}$ de S. Pour le confort du lecteur, nous avons inclu dans l'annexe D de cette thèse l'article original [**13**] traitant de ce sujet sur lequel nous ne reviendrons pas dans ce qui suit. Signalons cependant que cette caractérisation reste valable pour les surfaces affines normales $S/\bar{k}$ définies sur un corps algébriquement clos et de caractéristique nulle. En effet, les arguments de [**13**] ne font pas appel à des propriétés specifiques du corps de nombres complexes.

Nous mettons ici à profit cette caractérisation générale pour déterminer, et ce quel que soit le corps de base k de caractéristique nulle, quelles sont les surfaces de Danielewski dont l'invariant de Makar-Limanov est trivial. Nous établissons en effet un critère combinatoire (Théorème 15.1.1 ci-dessous) qui montre que l'invariant de Makar-Limanov d'une k-surface de Danielewski S est trivial si et seulement si S est isomorphe à une surface de Danielewski $S(\gamma)$ définie par un peigne finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$, c'est à dire (cf. 12.4.9) si et seulement si $\gamma \setminus \mathrm{Fe}(\Gamma)$ est une chaîne k-pondérée. Nous étudions ensuite certaines propriétés des actions du groupe additif $\mathbb{G}_{a,k}$ sur ces surfaces.

Notation 15.0.25. Dans ce chapitre, k désigne un corps de caractéristique nulle, et $\bar{k}$ désigne sa clôture algébrique. La donnée du corps k est amenée à varier tout au long de ce chapitre ; nous noterons $A = k[x]$, $X_k = \mathrm{Spec}(A)$ et $x_0 = \mathrm{div}(x)$, lorsqu'il sera nécessaire de préciser cette donnée. Nous noterons de même S_k pour désigner une surface de Danielewski $\pi : S \to X_k$, et nous dirons que S est une k-surface de Danielewski.

15.1. Caractérisation combinatoire des surfaces de Danielewski d'invariant de Makar-Limanov trivial

Nous nous proposons d'établir dans le présent paragraphe la caractérisation suivante des surfaces de Danielewski d'invariant de Makar-Limanov trivial.

THÉORÈME 15.1.1. *L'invariant de Makar-Limanov d'une k-surface de Danielewski $\pi : S \to X$ est trivial si et seulement si S est isomorphe à une surface de Danielewski $S(\gamma)$ définie par un peigne finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$.*

La preuve du théorème comprend deux étapes. Nous vérifions tout d'abord, par des arguments géométriques que la condition est nécessaire. Nous montrons ensuite qu'elle est suffisante, autrement dit que si γ est un peigne finement k-pondéré, alors l'invariant de Makar-Limanov de la surface de Danielewski $S(\gamma)$ est trivial, en exhibant deux actions non équivalentes du groupe additif $\mathbb{G}_{a,k}$ sur une surface de ce type.

15.1.1. Completions des $\bar{k}$-surfaces de Danielewski. Nous montrons ici que si l'invariant de Makar-Limanov $\mathrm{ML}(S(\gamma))$ d'une k-surface de Danielewski $S(\gamma)$ définie par un arbre finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$ est trivial, alors γ est un peigne. Pour cela nous utilisons la caractérisation plus générale suivante (cf. D.0.6), déduite de (D et D.2.16). Notons $\left(\mathbb{A}^1_k\right)_* = \mathrm{Spec}\left(k\left[x, x^{-1}\right]\right)$.

THÉORÈME 15.1.2. *Une surface affine normale S/k, définie sur un corps algébriquement clos $k = \bar{k}$ de caractéristique nulle et non isomorphe à $\left(\mathbb{A}^1_k\right)_* \times \mathbb{A}^1_k$, a un invariant de Makar-Limanov trivial si et seulement si S admet une complétion $\bar{S}$ telle que le graphe dual du diviseur $B = \bar{S} \setminus S$ soit une chaîne. Si cela est le cas, alors, pour toute complétion minimale $\bar{S}'$ de S, le graphe dual de $B' = \bar{S}' \setminus S$ est aussi une chaîne.*

Cette caractérisation permet de déduire directement le résultat suivant :

PROPOSITION 15.1.3. *L'invariant de Makar-Limanov d'une $\bar{k}$-surface de Danielewski $\pi : S(\gamma) \to X = \mathrm{Spec}\left(\bar{k}[x]\right)$ définie par un peigne finement $\bar{k}$-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$ est trivial si et seulement si γ est un peigne.*

DÉMONSTRATION. D'après (12.3.4), la classe d'isomorphisme de la surface de Danielewski $S(\gamma)$ reste inchangée lorsque l'on remplace γ par son sous-arbre essentiel finement $\bar{k}$-pondéré $\mathrm{Es}(\gamma) = (\mathrm{Es}(\Gamma), w)$, et il est de plus clair que Γ est un peigne si et seulement si $\mathrm{Es}(\Gamma)$ en est un. On peut donc supposer que $S = S(\gamma)$, où γ coïncide avec son sous-arbre essentiel. D'après (13.4.6), le morphisme structural $\pi : S \to X$ se complète en un morphisme projectif $\tilde{\pi} : \tilde{S} \to X$ tel que $\tilde{\pi}^{-1}(X_*) \simeq \mathbb{P}^1_{X_*}$, tandis que $\pi^{-1}(x_0)$ est un diviseur réduit dont les composantes irréductibles sont toutes isomorphes à $\mathbb{P}^1_{\bar{k}}$, et dont le graphe dual est isomorphe à l'arbre sous-jacent Γ de γ. En appliquant le même procédé de construction qu'en (13.4.2) à partir d'un modèle projectif $\bar{X} = \mathbb{P}^1_{\bar{k}}$ de X et du fibré trivial $\mathbb{P}^1_{\bar{X}}$, on obtient une surface projective non singulière $\bar{\pi} : \bar{S} \to \bar{X}$ et une immersion ouverte $S \hookrightarrow \tilde{S} \hookrightarrow \bar{S}$ telle que le diviseur de bord $B = \bar{S} \setminus S$ soit la réunion de la fibre $\bar{S}_\infty = \bar{\pi}^{-1}(\infty)$, où $\infty = \bar{X} \setminus X$, d'une section $\bar{C} \in \mathbb{P}^1_{\bar{k}}$ de $\bar{\pi}$ et d'un diviseur connexe $B' \subset \bar{\pi}^{-1}(x_0)$ dont le graphe dual est isomorphe à l'arbre $\Gamma' = \Gamma \setminus \mathrm{Fe}(\Gamma)$. Ainsi, le graphe dual de $B = \bar{S}_\infty \cup \bar{C} \cup B'$ est isomorphe à l'arbre obtenu en remplaçant la racine e_0 de Γ' par une chaîne de longueur 2, correspondant aux deux courbes $\bar{S}_\infty$ et $\bar{C}$, donc est une chaîne si et seulement si Γ' en est une. D'autre part, le procédé de construction de $\bar{S}$ à partir de $\mathbb{P}^1_{\bar{X}}$ par une succession d'éclatements permet de conclure que $\left(\bar{C}^2\right) = \left(\bar{S}_\infty^2\right) = 0$, tandis que pour tout composante irréductible E de B' correspondant à un sommet e de Γ' on a

$$\left(E^2\right) = \begin{cases} -\deg_\Gamma(e) & \text{si } e = e_0 \\ -\deg_\Gamma(e) - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

où, par définition, $\deg_\Gamma(e)$ désigne le nombre de fils de e dans l'arbre Γ. Ainsi, $\bar{S}$ est une complétion minimale de S si et seulement si $\deg_\Gamma(e_0) = 0$ ou $\deg_\Gamma(e_0) \geq 2$, ce qui est bien le cas puisque l'on a supposé que Γ coïncide avec son sous-arbre essentiel. On en déduit finalement que $\bar{S}$ est une complétion minimale de S par un diviseur dont le graphe dual est une chaîne, donc, d'après (15.1.2), que $\mathrm{ML}(S) = \bar{k}$, si et seulement si $\Gamma \setminus \mathrm{Fe}(\Gamma)$ est soit vide soit une chaîne, c'est à dire si et seulement si Γ est un peigne. $\square$

15.1.4. Pour toute k-surface de Danielewski $\pi : S \to X = \mathrm{Spec}(k[x])$, le schéma $S_{\bar{k}} = S \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}\left(\bar{k}\right)$, où $i : k \hookrightarrow \bar{k}$ désigne une clôture algébrique de k, est muni d'un morphisme $\pi_{\bar{k}} : S_{\bar{k}} \to X_{\bar{k}} = \mathrm{Spec}\left(\bar{k}[x]\right)$. On a alors le résultat suivant :

Lemme 15.1.5. *Dans les conditions précédentes $\pi_{\bar{k}} : S_{\bar{k}} \to X_{\bar{k}}$ est une surface de Danielewski. Si de plus $S \simeq S(\gamma)$ pour un certain arbre finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$, alors $S_{\bar{k}} \simeq S(\gamma_{\bar{k}})$, où $\gamma_{\bar{k}} = (\Gamma, i \circ w)$.*

Démonstration. On peut tout de suite supposer que $S = S(\gamma)$ pour un certain arbre finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$ possédant $n \geq 1$ feuilles. Ainsi S est X-isomorphe à la surface de Danielewski $S_{(h(\Gamma),\tilde{\sigma})}^{(n,[\mu])}$ obtenue en recollant n copies $\mathbb{A}_X^1 = \mathrm{Spec}(k[x][T_i])$ de la droite affine de base $X = \mathrm{Spec}(k[x])$ par l'intermédiaire des isomorphismes de $k\left[x, x^{-1}\right]$-algèbres

$$k\left[x, x^{-1}\right][T_i] \xrightarrow{\sim} k\left[x, x^{-1}\right][T_j], \quad T_i \mapsto \tilde{g}_{ij} + x^{\mu_i - \mu_j} T_j,$$

où, par définition, $\tilde{g}_{ij} = x^{\mu_i - h(\Gamma)}\left(\tilde{\sigma}_j - \tilde{\sigma}_i\right) \in k\left[x, x^{-1}\right]$. Via l'injection $i : k \hookrightarrow \bar{k}$, la fonction de poids w est naturellement une $\bar{k}$-pondération $i \circ w : E(\Gamma) \to \bar{k}$, tandis que les fonctions de transition $\tilde{g}_{ij}$ s'interprètent comme des éléments de $\bar{k}\left[x, x^{-1}\right]$. Dans ces conditions, $S' = S \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}\left(\bar{k}\right)$ est isomorphe à la surface de Danielewski définie par le même multi-indice $[\mu(\gamma)]$ et des fonctions de transition $\tilde{g}_{ij} \in k\left[x, x^{-1}\right] \subset \bar{k}\left[x, x^{-1}\right]$, obtenue en recollant n copies $\mathbb{A}_{X'}^1 = \mathrm{Spec}\left(\bar{k}[x][T_i]\right)$ de la droite affine de base $X_{\bar{k}} = \mathrm{Spec}\left(\bar{k}[x]\right)$ par l'intermédiaire des mêmes isomorphismes. Autrement dit, si $\pi : S = S(\gamma) = \mathrm{Spec}(B) \to X = \mathrm{Spec}(k[x])$ est une k-surface de Danielewski, alors $S' \simeq \mathrm{Spec}\left(B \otimes_k \bar{k}\right) \to X' = \mathrm{Spec}\left(A \otimes_k \bar{k}\right)$ est une $\bar{k}$-surface de Danielewski isomorphe à $S(\bar{\gamma})$, où $\bar{\gamma} = (\Gamma, i \circ w)$. $\square$

On en déduit finalement la caractérisation suivante :

Proposition 15.1.6. *Si l'invariant de Makar-Limanov d'une k-surface de Danielewski $\pi : S \to X$ est trivial alors $S \simeq S(\gamma)$ pour un certain peigne finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$*

Démonstration. On peut supposer $S = S(\gamma)$ pour un certain arbre finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$. Soit $B = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ et soit $i : k \hookrightarrow \bar{k}$ une clôture algébrique de k. D'après (15.1.5) $S_{\bar{k}} = \mathrm{Spec}\left(B \otimes_k \bar{k}\right)$ est une surface de Danielewski isomorphe à $S(\bar{\gamma})$, où $\bar{\gamma} = (\Gamma, i \circ w)$. L'invariant de Makar-Limanov $\mathrm{ML}(S)$ de S étant par hypothèse trivial, il existe donc deux k-dérivations localement nilpotentes $\partial_1, \partial_2 \in \mathrm{Der}_k(B)$ telles que $\mathrm{Ker}(\partial_1) \cap \mathrm{Ker}(\partial_2) = k$. Puisque $\mathrm{Der}_{\bar{k}}\left(B \otimes_k \bar{k}\right) \simeq \mathrm{Der}_k(B) \otimes_k \bar{k}$, on conclut que les dérivations $\partial_i' = \partial_i \otimes 1 \in \mathrm{Der}_{\bar{k}}\left(B \otimes_k \bar{k}\right)$, $i = 1, 2$, qui sont encore localement nilpotentes, vérifient $\mathrm{Ker}(\partial_1') \cap \mathrm{Ker}(\partial_2') = \bar{k}$, donc que l'invariant de Makar-Limanov de $S_{\bar{k}}$ est lui aussi trivial. Ainsi, d'après (15.1.3), $\bar{\gamma} = (\Gamma, i \circ w)$ est un peigne finement $\bar{k}$ pondéré, ce qui implique que $\gamma = (\Gamma, w)$ est un peigne finement k-pondéré comme annoncé. $\square$

15.1.2. Surfaces de Danielewski définies par des peignes pondérés. D'après ce qui précède, pour toute k-surface de Danielewski $S(\gamma)$ définie par un peigne finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$, $S_{\bar{k}} = S(\gamma) \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}\left(\bar{k}\right)$ est une $\bar{k}$-surface de Danielewski dont l'invariant de Makar-Limanov est trivial. On ne peut malheureusement pas en déduire directement que l'invariant de Makar-Limanov de $S(\gamma)$ est trivial. En effet, bien que $S_{\bar{k}}$ possède deux $\mathbb{G}_{a,\bar{k}}$-actions indépendantes, rien ne nous garantit *a priori* que ces actions proviennent de $\mathbb{G}_{a,k}$-actions indépendantes sur $S(\gamma)$. Nous mettons ici à profit la description des surfaces de Danielewski sous la forme des sous-schémas $V(\mathfrak{g}) \subset \mathbb{A}_X^{d(\Gamma)+1}$ associés aux arbres $A[t]$-pondérés $\mathfrak{g} = (\Gamma, \tilde{w})$ satisfaisant aux hypothèses (14.1.2), pour montrer que l'on peut effectivement trouver deux $\mathbb{G}_{a,k}$-actions indépendantes sur une k-surface de Danielewski $S(\gamma)$ définie par un peigne finement k-pondéré γ.

15.1.7. Par définition, si γ est une chaîne pondérée, alors $S(\gamma)$ est isomorphe à $\mathbb{A}_X^1 \simeq \mathbb{A}_k^2$, donc a évidemment un invariant de Makar-Limanov trivial. Nous ne considérons donc par la suite que des peignes finement k-pondérés $\gamma = (\Gamma, w)$ de hauteur $h(\Gamma) = n+1 \geq 1$ qui ne sont pas des chaînes, et nous notons dans ce cas

$$C_\gamma = (C_\Gamma, w) = \{e_0 < e_1 < \cdots < e_n\}$$

la sous-chaîne pondérée de γ dont les sommets sont donc les parents dans l'arbre Γ. Nous aurons besoin du résultat préliminaire suivant, qui permet de se ramener à ne considérer qu'une certaine sous-classe de surfaces de Danielewski définies par des peignes finement k-pondérés.

Lemme 15.1.8. *Toute surface de Danielewski $S(\gamma) \not\simeq \mathbb{A}_X^1$ définie par un peigne finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$, est X-isomorphe à une surface de Danielewski $V(\mathfrak{g}_0)$ associée à un peigne $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g}_0 = (\Gamma_0, \tilde{w}_0)$ satisfaisant les hypothèses (14.1.2) ainsi que les assertions suivantes :*
a) $\Gamma_0 \simeq Es(\Gamma)$,
b) $C_{\Gamma_0} = \{e_0 < e_1 < \cdots < e_n\}$ et $\tilde{w}_0(\overrightarrow{e_{i+1}e_i}) = t \in A[t]$, $i = 0, \ldots, n-1$,
c) pour tout $e \in Fils(e_n)$ $\tilde{w}_0(\overrightarrow{ee_n}) = t + a_{e,e_n}$, où $a_{e,e_n} \in k^*$.

Démonstration. Posons $\Gamma_0 = \mathrm{Es}(\Gamma)$, choisissons $a \in k$ tel que $w(\overrightarrow{ee_n}) + a \in k^*$ pour tout $e \in \mathrm{Fils}(e_n)$ et posons

$$w_0(\overrightarrow{ee_i}) = \begin{cases} w(\overrightarrow{ee_i}) - w(\overrightarrow{e_{i+1}e_i}) & i = 0, \ldots, n-1,\ e \in \mathrm{Fils}_{\Gamma_0}(e_i) \\ w(\overrightarrow{ee_n}) + a & e \in \mathrm{Fils}_{\Gamma_0}(e_n) \end{cases}$$

Il est clair par construction que $\gamma_{0,a} = (\Gamma_0, w_0)$ est un peigne finement k-pondéré équivalent à γ (cf. 12.3.2), tel que $w_0(\overrightarrow{e_{i+1}e_i}) = 0$ pour tout $i = 0, \ldots, n-1$ et tel que $w_0(\overrightarrow{ee_n}) \neq 0$ pour tout $e \in \mathrm{Fils}(e_n)$. D'après (12.3.4), les surfaces de Danielewski $S(\gamma)$ et $S(\gamma_0)$ sont donc X-isomorphes. En appliquant le procédé (14.2.5) à l'arbre γ_0 ainsi défini, on obtient un arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g}_0 = (\Gamma_0, \tilde{w}_0)$ satisfaisant les propriétés voulues. $\square$

On en déduit la description suivante :

Corollaire 15.1.9. *Pour toute surface de Danielewski $S(\gamma) \not\simeq \mathbb{A}_X^1$ définie par un peigne finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$, il existe une collection de polynômes scindés constants ou à racines simples $P_0, \ldots, P_n \in k[t]$, où $n = h(Es(\Gamma)) - 1$, tels que* $\deg(P_n) \geq 1$ *et 0 ne soit racine d'aucun des P_i, $i, \ldots, n$, et tels que $S(\gamma)$ soit isomorphe à la surface $S_{P_0,\ldots,P_n}$ de $\mathbb{A}_X^{n+2} = Spec(k[x][y_{-1}, y_0, \ldots, y_n])$ définie par* *les équations suivantes :*

$$\left\{\begin{array}{r} xy_n - \prod_{l=0}^{n} P_l\left(y_{l-1}\right) = 0, \quad y_{j-1}y_n - y_j \prod_{l=j+1}^{n} P_l\left(y_{l-1}\right) = 0 \quad 0 \leq j \leq n-1 \\ xy_i - y_{i-1}\prod_{l=0}^{i} P_l\left(y_{l-1}\right) = 0 \quad 0 \leq i \leq n-1 \\ y_{i-1}y_j - y_i y_{j-1} \prod_{l=i+1}^{j} P_l\left(y_{l-1}\right) = 0 \quad 0 \leq i < j \leq n-1 \end{array}\right.$$

DÉMONSTRATION. En posant $X_{e_i} = y_i$, pour tout $i = -1, \ldots, n$ et $F_{e_i}(\mathfrak{g}_0) = X_{e_{i-1}} P_i\left(X_{e_{i-1}}\right)$, pour tout $i = 0, \ldots, n-1$ et $F_{e_n}(\mathfrak{g}_0) = P_n\left(X_{e_{n-1}}\right)$, on reconnaît ci-dessus les générateurs de l'idéal $I(\mathfrak{g}_0) \subset A[\Gamma_0]$ de la surface de Danielewski $V(\mathfrak{g}_0)$ associée à l'arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g}_0 = (\Gamma_0, \tilde{w}_0)$ de (15.1.8). □

15.1.10. Nous allons maintenant montrer que toute surface $S_{P_0,\ldots,P_n} \subset \mathbb{A}_X^{n+2}$ associée à un arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g}_0 = (\Gamma_0, \tilde{w}_0)$ du type (15.1.8) a un invariant de Makar-Limanov trivial. Pour cela, notons $A' = k[x']$, où x' est une nouvelle variable, et considérons l'arbre $A'[t]$-pondéré $\mathfrak{g}' = (\Gamma', \tilde{w})$ construit à partir de $\mathfrak{g}_0 = (\Gamma_0, \tilde{w}_0)$ de la manière suivante. Tout d'abord, l'arbre sous-jacent Γ' est obtenu à partir de Γ_0 en *inversant la relation d'ordre*. Cela signifie que Γ_0 et Γ' ont le même ensemble de sommets, et que pour tout sommet $e_i \in \mathrm{Par}(\Gamma) = \{e_0 < \cdots < e_n\}$, on a

$$\mathrm{Fils}_{\Gamma'}(e_i) = \left\{\begin{array}{ll} \mathrm{Fils}_{\Gamma}(e_0) \setminus \{e_1\} & \text{si } i = 0 \\ \mathrm{Fils}_{\Gamma}(e_i) \cup \{e_{i-1}\} & \text{si } i = 1, \ldots, n \end{array}\right.$$

Dans ces conditions, puisque Γ_0 est un peigne non trivial, Γ' est aussi un peigne, enraciné en e_n, possédant le même ensemble d'arêtes que Γ_0, les mêmes feuilles $\mathrm{Fe}(\Gamma') = \mathrm{Fe}(\Gamma_0)$ que Γ_0 , et tel que $\Gamma' \setminus \mathrm{Fe}(\Gamma') = \{e_n < e_{n-1} < \cdots < e_1 < e_0\}$.

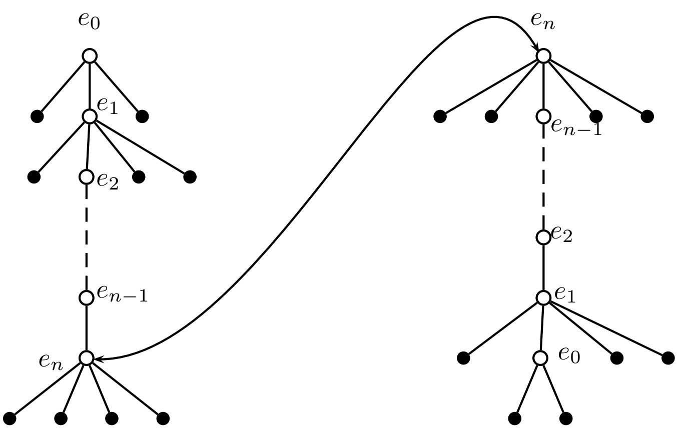


FIG. 15.1.1. Renversement de l'arête principale d'un peigne.

Nous définissons maintenant une fonction de poids $\tilde{w}' : E(\Gamma') \to A'[t]$ en posant,

$$\left\{\begin{array}{rcll} \tilde{w}'(\overrightarrow{ee_i}) & = & \tilde{w}_0(\overrightarrow{ee_i}) & e \in \mathrm{Fils}_{\Gamma}(e_i) \setminus \{e_{i+1}\}, i = 0, \ldots, n-1 \\ \tilde{w}'(\overrightarrow{ee_n}) & = & \tilde{w}_0(\overrightarrow{ee_n}) & e \in \mathrm{Fils}_{\Gamma}(e_n) \\ \tilde{w}'(\overrightarrow{e_{i-1}e_i}) & = & \tilde{w}_0(\overrightarrow{e_i e_{i-1}}) & i = 1, \ldots, n \end{array}\right.$$

Nous dirons que l'arbre $A'[t]$-pondéré $\mathfrak{g}' = (\Gamma', \tilde{w}')$ ainsi défini est obtenu à partir de $\mathfrak{g}_0 = (\Gamma_0, \tilde{w}_0)$ *en renversant l'arête principale de* Γ_0. La fonction de poids $\tilde{w}_0 : E(\Gamma_0) \to k[t] \subset A[t]$ de $\mathfrak{g}_0$ satisfaisant les hypothèses de (14.1.2), on a $\tilde{w}'(\overrightarrow{ee_i}) =$

$\tilde{w}_0(\overrightarrow{ee_i}) = a_{e,e_i} + t$, où $a_{e,e_i} \in k^*$ pour tout $i = n, \ldots, 1$ et tout fils $e \in \mathrm{Fils}_{\Gamma'}(e_i)$ de e_i différent de e_{i-1}, tandis que $\tilde{w}'(\overrightarrow{e_{i-1}e_i}) = \tilde{w}_0(\overrightarrow{e_ie_{i-1}}) = t$.
Ainsi $\mathfrak{g}' = (\Gamma', \tilde{w}')$ est un arbre $A'[t]$-pondéré satisfaisant les hypothèses (14.1.2), donc correspond à une surface de Danielewski $\pi' : V(\mathfrak{g}') \to X' = \mathrm{Spec}(A')$. On notera au passage que si Γ_0 est un triangle, *i.e.* si $\mathrm{Fils}(e_0) = \mathrm{Fe}(e_0)$ alors les arbres $\mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{g}_0$ coïncident. De manière générale, les deux surfaces de Danielewski $V(\mathfrak{g}_0)$ et $V(\mathfrak{g}')$ associées respectivement aux arbres $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{g}'$ sont reliées par le résultat suivant :

PROPOSITION 15.1.11. *Pour toute surface de Danielewski $\pi : S_{P_0,\ldots,P_n} \to X = \mathrm{Spec}(k[x])$ de $\mathbb{A}^{n+3} = \mathrm{Spec}(k[x, y_{-1}, y_0, \ldots, y_n])$ associée à un arbre $k[x][t]$-pondéré $\mathfrak{g}_0 = (\Gamma_0, \tilde{w}_0)$ du type (15.1.8), le morphisme $\pi' : S_{P_0,\ldots,P_n} \to X' = \mathrm{Spec}(k[y_n])$ induit par l'inclusion $k[y_n] \subset k[x, y_{-1}, y_0, \ldots, y_n]$ fait de $S_{P_0,\ldots,P_n}$ une surface de Danielewski isomorphe à celle associée à l'arbre $\mathfrak{g}' = \left(\Gamma', \tilde{w'}\right)$ obtenu à partir de $\mathfrak{g}_0$ en renversant l'arête principale de Γ_0.*

DÉMONSTRATION. La vérification est immédiate à partir des équations (15.1.9) servant à définir $S_{P_0,\ldots,P_n}$. □

15.1.12. D'après (14.2.22), toute surface de Danielewski $\pi : V(\mathfrak{g}) \to X = \mathrm{Spec}(k[x])$ admet des $\mathbb{G}_{a,X}$-actions non triviales, induites par des A-dérivation localement nilpotentes de l'algèbre $B(\mathfrak{g}) = k[x][\Gamma]/I(\mathfrak{g})$ de la forme $\partial_{\mathfrak{g},m}$, où $m \geq h(\Gamma)$. On a alors $\mathrm{Ker}(\partial_{\mathfrak{g},m}) = k[\bar{x}]$, où $\bar{x} \in B(\mathfrak{g})$ désigne l'image de x. En particulier, on déduit de (15.1.11) qu'une surface de Danielewski $S_{P_0,\ldots,P_n}$ associée à un arbre $k[x][t]$-pondéré $\mathfrak{g}_0 = (\Gamma_0, \tilde{w}_0)$ admet deux actions non équivalentes du groupe additif $\mathbb{G}_{a,k}$, l'une par X-automorphismes, l'autre par X'-automorphismes, ces deux actions pouvant être choisies de manière à correspondre, par exemple, aux k-dérivations localement nilpotentes $\partial_{\mathfrak{g}_0,h(\Gamma_0)} \in \mathrm{Der}_{k[x]}(B(\mathfrak{g}_0))$ et $\partial_{\mathfrak{g}',h(\Gamma')} \in \mathrm{Der}_{k[y_n]}(B(\mathfrak{g}'))$. En effet, (15.1.11) implique en particulier que les k-algèbres $B(\mathfrak{g}_0)$ et $B(\mathfrak{g}')$ sont isomorphes. Les noyaux $k[\bar{x}]$ et $k[\bar{y}_n]$ de ces deux dérivations étant distincts, on en déduit que $k \subseteq \mathrm{ML}(S_{P_0,\ldots,P_n}) \subseteq k[\bar{x}] \cap k[\bar{y}_n] = k$ est trivial, d'où le résultat suivant, qui complète la preuve du théorème (15.1.1) :

PROPOSITION 15.1.13. *L'invariant de Makar-Limanov d'une k-surface de Danielewski $S(\gamma)$ définie par un peigne finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$ est trivial.*

15.1.3. Morphismes entre surfaces de Danielewski d'invariant de Makar-Limanov trivial. Les k-surfaces de Danielewski $\pi : S \to X = \mathrm{Spec}(k[x])$ d'invariant de Makar-Limanov trivial forment une sous-catégorie pleine $\mathfrak{Ds}_{ML}$ de la catégorie dont les objets sont les surfaces de Danielewski et les morphismes sont les morphismes de surfaces de Danielewski, c'est à dire (13.1.1) les X-morphismes birationnels $\beta : S' \to S$ se restreignant en un X_* isomorphisme au-dessus de $X_* = X \setminus \{x_0\}$. D'après (13.3.6), tout morphisme β de ce type se factorise en une succession de modifications affines fibrées élémentaires (13.3.2), suivie d'un plongement ouvert. Le résultat suivant montre que la sous-catégorie $\mathfrak{Ds}_{ML}$ est stable sous ce procédé de factorisation.

PROPOSITION 15.1.14. *Soit $\beta : S \to S'$ un morphisme de surfaces de Danielewski. Si S a un invariant de Makar-Limanov trivial, alors β se factorise de manière unique en une succession de modifications affines fibrées élémentaires suivie d'un plongement ouvert $\beta : S = S_n \stackrel{\beta_n}{\to} S_{n-1} \stackrel{\beta_{n-1}}{\to} \cdots \stackrel{\beta_1}{\to} S_0 \hookrightarrow S'$, où, pour tout $i = 0, \ldots, n$, S_i est une surface de Danielewski d'invariant de Makar-Limanov trivial.*

DÉMONSTRATION. D'après (12.2.7), on peut supposer que $S = S(\gamma)$ et $S' = S(\gamma')$ pour deux arbres finement k-pondérés $\gamma = (\Gamma, w)$ et $\gamma' = (\Gamma', w')$ et que $\beta : S \to S'$ est induit par un morphisme d'arbres finement k-pondérés $\tau : \gamma \to \gamma'$ se décomposant en une succession de contractions élémentaires $\tau_i : \gamma_i \to \gamma_{i-1}$ suivie d'un plongement $\gamma_0 \hookrightarrow \gamma'$. Or, d'après (15.1.1), γ est un peigne puisque $\mathrm{ML}(S)$ est trivial. Ainsi, γ_i est aussi un peigne pour tout $i = 0, \ldots, n$, et, à chaque étape, $\tau_i : \gamma_i \to \gamma_{i-1}$ est la contraction élémentaire de l'unique sommet e de $\gamma_i = (\Gamma_i, w)$ tel que $\mathrm{Fils}(e) = \mathrm{Fe}(\Gamma_i)$. Par conséquent $S_i = S(\gamma_i)$ a un invariant de Makar-Limanov trivial pour tout $i = 0, \ldots, n$, et la modification affine fibrée élémentaire $\beta_i = \beta(\tau_i) : S_i \to S_{i-1}$ est déterminé de manière unique. □

15.2. Actions du groupe additif sur les surfaces de Danielewski d'invariant de Makar-Limanov trivial

Dans le présent paragraphe, nous mettons à profit l'ensemble des propriétés des surfaces de Danielewski établies précédemment pour étudier les actions du groupe additif $\mathbb{G}_{a,k}$ sur les k-surfaces de Danielewski d'invariant de Makar-Limanov trivial.

15.2.1. Nous nous intéressons en particulier à l'existence, sur une surface S de ce type, de $\mathbb{G}_{a,k}$-actions indépendantes, définies respectivement par des k-dérivations localement nilpotentes ∂_1 et ∂_2 de $B = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$, et non conjuguées sous l'action du groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(S)$ de S, au sens qu'il n'existe pas d'automorphisme ψ de B tel que $\psi(\mathrm{Ker}(\partial_1)) = \mathrm{Ker}(\partial_2)$.

15.2.2. Une surface de Danielewski $S(\gamma)$ définie par une chaîne k-pondérée $\gamma = (\Gamma, w)$ étant isomorphe à $\mathbb{A}^2_k$, toutes les $\mathbb{G}_{a,k}$-actions indépendantes sur $S(\gamma)$ sont conjuguées puisque, d'après [**40**], pour n'importe quelle action de $\mathbb{G}_{a,k}$ il existe des coordonnées x et y sur $\mathbb{A}^2_k$ dans lesquelles cette action devient une translation tordue de la forme $t\star(x, y) = (x, y + tf(x))$ pour un certain $f \in k[x]$. De même, si γ est un triangle finement k-pondéré possédant $n \geq 2$ feuilles, alors $S(\gamma)$ est isomorphe à une hypersurface de $\mathbb{A}^3_k = \mathrm{Spec}(k[x, y, z])$ d'équation $xz - P(y)$, où $P \in k[y]$ est un polynôme de degré n à n racines simples dans k,. D'après un résultat de Daigle [**8**] toutes les $\mathbb{G}_{a,k}$-actions indépendantes sur $S(\gamma)$ sont conjuguées au sens ci-dessus. Le résultat suivant montre qu'il s'agit d'une propriété exceptionnelle, pouvant servir à caractériser ces deux types de surfaces parmi les surfaces de Danielewski d'invariant de Makar-Limanov trivial.

Théorème 15.2.3. *Toute k-surface de Danielewski $S(\gamma)$ définie par un peigne finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$ qui n'est ni une chaîne ni un triangle admet deux $\mathbb{G}_{a,k}$-actions indépendantes non conjuguées.*

15.2.4. La preuve fait l'objet de (15.2.5)-(15.2.9) ci-dessous. La stratégie consiste à construire explicitement une $\mathbb{G}_{a,k}$-action $m : \mathbb{G}_{a,k} \times S(\gamma) \to S(\gamma)$ sur $S(\gamma)$, indépendante des $\mathbb{G}_{a,k}$-actions naturelles provenant des $\mathbb{G}_{a,X}$-actions sur $\pi : S(\gamma) \to X$, pour laquelle le morphisme quotient $q : S \to S//\mathbb{G}_{a,k}$ possède des fibres non réduites. Les fibres du morphisme structural $\pi : S(\gamma) \to X$, qui s'identifie au morphisme quotient associé à une action $\mathbb{G}_{a,k}$ induite par une $\mathbb{G}_{a,X}$-action, étant par définition réduites, l'action m ne pourra donc pas être conjuguée à une action de ce type.

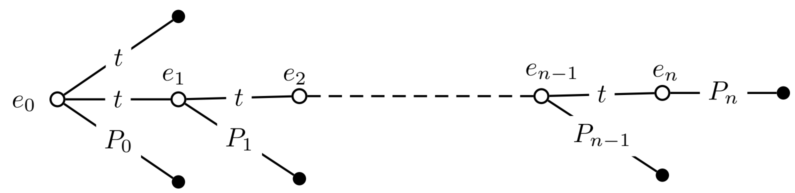
Lemme 15.2.5. *Toute k-surface de Danielewski $S(\gamma) \not\simeq \mathbb{A}^2_k$ définie par un peigne finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$ de hauteur $h(\Gamma) \geq 2$ est X-isomorphe à une surface de Danielewski $V(\mathfrak{g})$ associée à un arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g}_{0,0} = (\Gamma_{0,0}, \tilde{w}_{0,0})$ satisfaisant les hypothèses (14.1.2) ainsi que les propriétés suivantes :*
a) $\Gamma_{0,0} \simeq Es(\Gamma)$,
b) $C_{\Gamma_{0,0}} = \{e_0 < e_1 < \cdots < e_n\}$ et $\tilde{w}_{0,0}(\overrightarrow{e_{i+1}e_i}) = t \in A[t]$, $i = 0, \ldots, n-1$,
c) il existe $e_{n+1} \in Fils(e_n)$ tel que $\tilde{w}_{0,0}(\overrightarrow{e_{n+1}e_n}) = t$.

Démonstration. L'argument est exactement le même qu'en (15.1.8). □

15.2.6. Notons maintenant $\mathfrak{g}'' = (\Gamma'', \tilde{w}'')$ l'arbre $A[t]$-pondéré obtenu à partir de $\mathfrak{g}_{0,0}$ en renversant l'arête principale de $\Gamma_{0,0}$ (15.1.10). Si $\Gamma_{0,0}$ n'est pas un triangle alors, par construction, $\tilde{w}''(\overrightarrow{e_{n+1}e_n}) = \tilde{w}''(\overrightarrow{e_{n-1}e_n}) = t$, de sorte que $\mathfrak{g}'$ ne satisfait plus les hypothèses (14.1.2). Le même raisonnement qu'en (15.1.9) montre qu'il existe une collection de polynômes scindés constants ou à racines simples $P_0, \ldots, P_n \in k[t]$, où $n = h(\mathrm{Es}(\Gamma)) - 1$, tels $\deg(P_n) \geq 1$ et 0 ne soit racine d'aucun des P_i, $i, \ldots, n$, et tels que $S(\gamma)$ soit isomorphe à la surface $S_{y_{-1}P_0,\ldots,y_{n-1}P_n}$ de $\mathbb{A}^{n+2}_X = \mathrm{Spec}(k[x][y_{-1}, y_0, \ldots, y_n])$. Le même argument qu'en (15.1.11) conduit au résultat analogue suivant :

LEMME 15.2.7. *Pour toute surface de Danielewski $\pi : S \to X = Spec(k[x])$ de $\mathbb{A}^{n+3} = Spec(k[x, x_{-1}, x_0, \ldots, x_n])$ associée à un arbre $k[x][t]$-pondéré $\mathfrak{g}_{0,0} = (\Gamma_{0,0}, \tilde{w}_{0,0})$ du type (15.2.5), le morphisme $\pi' : S \to X' = Spec(k[y_n])$ induit par l'inclusion $k[y_n] \subset k[x, y_{-1}, y_0, \ldots, y_n]$ fait de S un schéma isomorphe au schéma $V(\mathfrak{g}'')$ associé à l'arbre $\mathfrak{g}'' = \left(\Gamma'', \tilde{w'}'\right)$ obtenu à partir de $\mathfrak{g}_{0,0}$ en renversant l'arrête principale de $\Gamma_{0,0}$.*

15.2.8. D'après les résultat généraux (6.3.4), S est muni de la $\mathbb{G}_{a,X'}$-action correspondant à la A'-dérivation localement nilpotente $\partial_{\mathfrak{g}'',h(\Gamma'')}$ de $B(\mathfrak{g}'') = A'[\Gamma'']/I(\mathfrak{g}'')$. Pour prouver que les $\mathbb{G}_{a,k}$-actions induites par les dérivations localement nilpotentes $\partial_{\mathfrak{g}_{0,0},h(\Gamma_{0,0})}$ et $\partial_{\mathfrak{g}'',h(\Gamma'')}$ de $B(\mathfrak{g}'') \simeq B(\mathfrak{g}_{0,0})$ ne sont pas conjuguées, il suffit donc de vérifier que si Γ'' n'est pas un triangle, alors la fibre $(\pi')^{-1}(x_0')$ n'est pas réduite. On se ramène donc à montrer que la fibre $\pi^{-1}(x_0)$ du morphisme structural $\pi : V(\mathfrak{g}) \to X = \mathrm{Spec}(k[x])$ d'un schéma $V(\mathfrak{g})$ associé à un arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$ de la forme suivante



où pour tout $i = 0, \ldots, n$, $P_i \in k[t]$ est soit constant, soit scindé, à racines simples non nulles dans k, n'est pas réduite. L'idéal $I(\mathfrak{g}) \subset k[x][\Gamma] = k[x, y_{-1}, \ldots, y_n]$ de $V(\mathfrak{g})$ est alors engendré par les polynômes suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta_0 & = & xy_0 - y_{-1}^2\delta_{0,0} & \\ \Delta_i & = & xy_i - y_{-1}y_{i-1}\delta_{0,i} & 1 \leq i \leq n-1 \\ \Delta_n & = & xy_n - y_{-1}\delta_{0,n} & \\ \Delta_{i<j} & = & y_{i-1}y_j - y_iy_{j-1}\delta_{j,i+1} & 0 \leq i < j \leq n-1 \\ \Delta_{i<n} & = & y_{i-1}y_n - y_i\delta_{n,i+1} & 0 \leq i \leq n-1 \end{array}\right.$$

où $\delta_{i,j} = \prod_{l=j}^{i} P_l(y_{l-1})$ pour tout couple d'indices $i \leq j$. L'idéal de la fibre $\pi^{-1}(x_0)$ dans $B(\mathfrak{g}) = k[x][\Gamma]/I(\mathfrak{g})$ s'identifie par conséquent à l'image de l'idéal

$$I_0 = (x, I(\mathfrak{g})) = \left(x, y_{-1}^2\delta_{0,0}, y_{-1}\delta_{0,n}, (y_{-1}y_{i-1}\delta_{0,i})_{i=1,\ldots,n}, (\Delta_{i<j})_{0\leq i<j\leq n}\right)$$

de $k[x][\Gamma]$. On notera que $y_{-1}\delta_{0,0} \in \sqrt{I_0}$, et que le même argument de récurrence que celui utilisé en (11.2.8) montre que $\left(\pi^{-1}(x_0)\right)_{\mathrm{red}} \simeq \mathrm{Spec}\left(k[x, y_{-1}, \ldots, y_n]/\sqrt{I}_0\right)$ est une réunion disjointe de courbes affines $C_i \simeq \mathbb{A}^1_k$. Cependant, on a le résultat suivant, qui termine la preuve du théorème (15.2.3) :

LEMME 15.2.9. *La fibre $\pi^{-1}(x_0)$ du morphisme structural $\pi : V(\mathfrak{g}) \to X$ n'est pas réduite.*

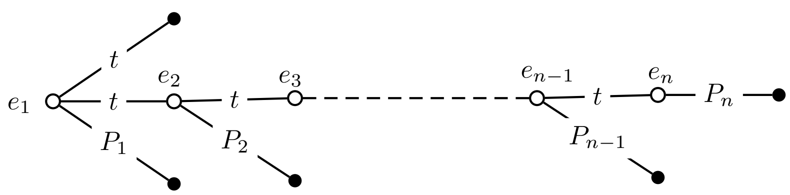
Démonstration. Nous procédons par récurrence sur la hauteur $h(\Gamma) \geq 2$ de l'arbre $\mathfrak{g} = (\Gamma, \tilde{w})$. Si $h(\Gamma) = 2$ alors, puisque les racines $\lambda_{0,1}, \ldots, \lambda_{0,n_0} \in k$ de $\delta_{0,0} = P_0$ sont simples et non nulles, I_0 s'écrit comme l'intersection des n_0+1 idéaux $J_0 = \left(x, y_{-1}^2, y_{-1}\delta_{1,1}, y_{-1}y_1 - y_0\delta_{1,1}\right)$ et $J_{\lambda_{0,i}} = (x, y_{-1} - \lambda_{0,i}, \lambda_{0,i}y_1 - y_0\delta_{1,1})$, $i = 1, \ldots, n_0$, de sorte que $k[x][\Gamma]/J_{\lambda_{0,i}} \simeq k[y_0]$ pour tout $j = 1, \ldots, n_0$, tandis qu'en posant $\tilde{J}_0 = \left(y_{-1}^2, y_{-1}\delta_{1,1}, y_{-1}y_1 - y_0\delta_{1,1}\right) \subset k[y_{-1}, y_0, y_1]$, on obtient un isomorphisme de k-algèbres $k[x][\Gamma]/J_0 \simeq k[y_{-1}, y_0, y_1]/\tilde{J}_0$. Cet idéal $\tilde{J}_0$ peut à son tour s'écrire comme l'intersection des idéaux $\tilde{J}_1 = (y_{-1}, y_0\delta_{1,1})$ et $\tilde{J}_2 = \left(y_{-1}^2, \delta_{1,1}, y_{-1}y_1\right)$. Les n_1+1 racines de $y_0\delta_{1,1} = y_0P_1(y_0)$ étant simples, on obtient un isomorphisme de k-algèbres $k[y_{-1}, y_0, y_1]/\tilde{J}_2 \simeq \prod_{j=1}^{n_1} k[y_{-1}, y_1]/\left(y_{-1}^2, y_{-1}y_1\right)$, ce qui prouve que la fibre $\pi^{-1}(x_0)$ n'est pas réduite. Si maintenant $h(\Gamma) = n+1 \geq 3$, alors, comme précédemment, l'idéal $I_0 = (x, I(\mathfrak{g}))$ s'écrit comme l'intersection des n_0+1 idéaux $J_0 = \left(x, y_{-1}^2, I(\mathfrak{g})\right)$ et $J_{\lambda_{0,i}} = (x, y_{-1} - \lambda_{0,i}, I(\mathfrak{g}))$, $i = 1, \ldots, n$, et $k[x][\Gamma]/J_0$ est isomorphe à $k[y_{-1}, y_0, \ldots, y_n]/\tilde{J}_0$, où l'idéal

$$\tilde{J}_0 = \left(y_{-1}^2, y_{-1}y_{i-1}\delta_{1,i}, y_{-1}\delta_{1,n}, (\Delta_{i<j})_{0\leq i<j\leq n}\right) \subset k[y_{-1}, y_0, \ldots, y_n]$$

s'obtient à son tour comme l'intersection des deux idéaux suivants

$$\begin{cases} \tilde{I}_1 &= \left(y_{-1}, y_0^2\delta_{1,1}, (y_0y_{i-1}\delta_{i,1})_{1\leq i\leq n-1}, y_0\delta_{0,n}, (\Delta_{j<i})_{1\leq j<i\leq n}\right) \\ \tilde{J}_1 &= \left(y_{-1}^2, (y_{-1}y_i)_{0\leq i\leq n-1}, \Delta_{0<n}, (y_{i-1}\delta_{i,1})_{1\leq i\leq n-1}, \delta_{n,1}, (\Delta_{j<i})_{1\leq j<i\leq n}\right) \end{cases}$$

On observe alors que $\tilde{I}_1$ s'identifie à l'idéal de la fibre $(\pi')^{-1}(x_0)$ du morphisme structural $\pi' : V(\mathfrak{g}') \to X$ du schéma $V(\mathfrak{g}')$ associé à l'arbre $\mathfrak{g}' = (\Gamma', \tilde{w}')$ suivant :



Puisque $h(\Gamma') = h(\Gamma) - 1$, on conclut, d'après l'hypothèse de récurrence , que $(\pi')^{-1}(x_0)$ n'est pas réduit, donc que $\pi^{-1}(x_0)$, qui contient un sous-schéma isomorphe à $(\pi')^{-1}(x_0)$, ne l'est pas non plus. □

15.2.10. Pour terminer ce paragraphe, nous considérons une classe de surfaces de Danielewski admettant trois $\mathbb{G}_{a,k}$-actions non conjuguées. Introduisons préalablement la définition suivante :

Définition 15.2.11. On dit qu'un peigne Γ est *essentiellement auto-similaire* si son sous-arbre essentiel $\mathrm{Es}(\Gamma)$ est isomorphe à l'arbre Γ' obtenu en renversant l'arête principale de $\mathrm{Es}(\Gamma)$. On dit qu'un peigne finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$ est essentiellement auto-similaire si son arbre sous-jacent Γ l'est.

On a alors le résultat suivant :

Théorème 15.2.12. *Toute k-surface de Danielewski $\pi : S(\gamma) \to X$ définie par un peigne finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$ non essentiellement auto-similaire admet trois $\mathbb{G}_{a,k}$-action indépendantes non conjuguées deux à deux.*

Démonstration. Un arbre Γ non essentiellement auto-similaire n'étant ni une chaîne, ni un triangle, on sait d'après (15.2.3) que $S(\gamma)$ admet deux $\mathbb{G}_{a,k}$-action ϕ_1 et ϕ_2 non conjuguées, l'une correspondant à une $\mathbb{G}_{a,X}$-action, l'autre à une $\mathbb{G}_{a,k}$-action pour laquelle les fibres du morphisme quotient $\pi' : S(\gamma) \to X$ ne sont pas toutes réduites (cf. 15.2.9). D'autre part, d'après (15.1.11), $S(\gamma)$ est isomorphe à la surface de Danielewski $V(\mathfrak{g}')$, où $\mathfrak{g}'$ $\mathfrak{g}' = (\Gamma', \tilde{w}')$ désigne l'arbre obtenu à

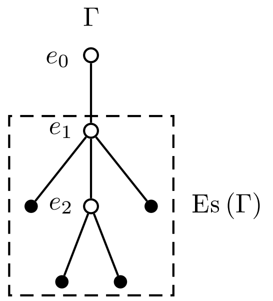
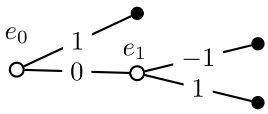


FIG. 15.2.1. Un peigne essentiellement auto-similaire.

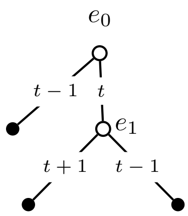
partir de $\mathfrak{g}_0 = (\Gamma_0, \tilde{w}_0)$ (cf. 15.1.8) en renversant l'arête principale de $\Gamma_0 = \mathrm{Es}\,(\Gamma)$, et $S\,(\gamma) \simeq V\,(\mathfrak{g}')$ est une surface de Danielewski pour le morphisme structural $\pi' : V\,(\mathfrak{g}') \to X'$ associé. Puisque Γ n'est pas auto-similaire, aucune $\mathbb{G}_{a,k}$-action ϕ_3 correspondant à une $\mathbb{G}_{a,X'}$-action sur $V\,(\mathfrak{g}')$ n'est conjuguée à ϕ_1, et il en est de même pour ϕ_2 puisque les fibres de π' sont, par définition, toutes réduites. □

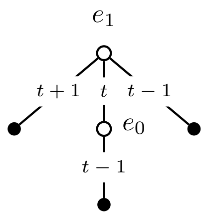
15.2.13. Dans la situation précédente, il n'est en général pas possible d'obtenir les trois morphismes quotients $\pi_i : S \to X_i \simeq \mathbb{A}^1_k$ associés respectivement aux actions ϕ_i, $i = 1, \ldots, 3$, comme les restrictions de certaines projections le long de coordonnées dans un plongement de S comme un sous-schéma $V\,(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{Spec}\,(A\,[\Gamma])$ associé à un arbre $A\,[t]$-pondéré $\mathfrak{g} = (\Gamma, \tilde{w})$. L'exemple suivant montre qu'il est toutefois possible, en faisant des changements de coordonnées adéquats, de faire apparaître directement ces trois morphismes.

EXEMPLE 15.2.14. Soit $\pi_1 : S \to X_1 = \mathrm{Spec}\,(k\,[x])$ la surface de Danielewski définie par le peigne finement k-pondéré non essentiellement auto-similaire suivant :

$\gamma = (\Gamma, w) =$ 

Les arbres $k\,[x]$-pondérés $\mathfrak{g}_0 = (\Gamma, \tilde{w}_0)$ (15.1.8) et $\mathfrak{g}' = (\Gamma', \tilde{w}')$ (15.1.11) correspondants étant les suivants,

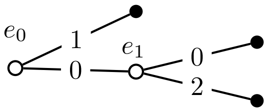
$\mathfrak{g}_0 =$ 

$\mathfrak{g}' =$ 

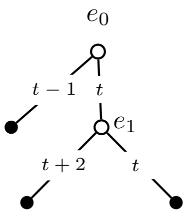
S est isomorphe à la surface S_0 de $\mathbb{A}^4_k = \mathrm{Spec}\,(k\,[x, y, z, u])$ définie par les équations

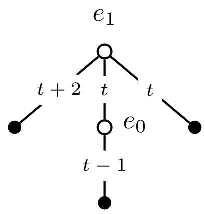
$$xz - y\,(y-1) = 0, \quad yu - z\,(z-1)\,(z+1) = 0, \quad xu - (y-1)\,(z-1)\,(z+1) = 0.$$

Via les projections $\pi_1 : S_0 \to X_1 = \mathrm{Spec}\,(k\,[x])$ et $\pi_3 : S_0 \to X_3 = \mathrm{Spec}\,(k\,[u])$, S est munie de deux structures de surfaces de Danielewski, correspondant respectivement aux arbres non essentiellement équivalents $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{g}'$. D'autre part, l'arbre γ est équivalent (12.3.2) à l'arbre finement k-pondéré $\gamma' = (\Gamma, w')$ ci-dessous,

$\gamma' = (\Gamma, w') =$ 

pour lequel l'arbre $A[t]$-pondéré $\mathfrak{g}_{0,0} = (\Gamma, \tilde{w}_{0,0})$ (15.2.5) et l'arbre $\mathfrak{g}'' = (\Gamma'', \tilde{w}'')$ obtenus en renversant l'arête principale de Γ sont cette fois ci les suivants :

$\mathfrak{g}_{0,0} =$ 

$\mathfrak{g}'' =$ 

Ainsi, S est aussi isomorphe à la surface S_0'de de $\mathbb{A}_k^4 = \operatorname{Spec}(k[x, y', z', u'])$ définie par les équations

$$xz' - y'(y'-1) = 0, \quad y'u' - (z')^2(z'+2) = 0, \quad xu' - (y'-1)z'(z'+2) = 0.$$

La projection $\pi_2' : S_0' \to X_2 = \operatorname{Spec}(k[u'])$ identifie alors S_0' au schéma $V(\mathfrak{g}'')$, et la fibre $(\pi_2')^{-1}(x_0)$ n'est pas réduite (15.2.9). Nous laissons maintenant le soin au lecteur de se convaincre qu'il existe un polynôme $P(x, y, z) \in k[x, y, z]$ tel que l'isomorphisme de $k[x]$-algèbres

$$k[x][y', z', u'] \to k[x][y, z, u], \left\{ \begin{array}{l} y' \\ z' \\ u' \end{array} \right. \mapsto \left\{ \begin{array}{l} y + x \\ z + 2y + x + 1 \\ u + P(x, y, z) \end{array} \right.$$

induise un X_1-isomorphisme $\phi : S_0 \xrightarrow{\sim} S_0'$. On en déduit finalement que le morphisme $\pi_2 : S_0 \to X_2 = \operatorname{Spec}(k[u + P(x, y, z)])$ induit par l'inclusion $k[u + P(x, y, z)] \subset k[x, y, z, u]$ correspond au morphisme quotient d'une $\mathbb{G}_{a,k}$-action sur S_0.

CHAPITRE 16

Exemple : Surfaces de Danielewski définies par des peignes à deux feuilles

Ce dernier chapitre est consacré à l'étude d'une classe particulière de surfaces de Danielewski d'invariant de Makar-Limanov trivial, à savoir les surfaces $S(\gamma)$ définies par un peigne finement k-pondéré $\gamma=(\Gamma,w)$ possédant exactement deux feuilles. Après avoir avoir caractérisé ces surfaces de diverses manières, nous montrons qu'une surface de ce type est isomorphe à l'une des surfaces $S(h)\subset \mathrm{Spec}(k[x,y,z,u])$, $h\in\mathbb{Z}_{>0}$ définies par les équations suivantes

$$xz-y(y-1)=0,\quad y^{h-1}u-z^h=0,\quad x^{h-1}u-(y-1)^{h-1}z=0,$$

et que $S(h)\not\simeq S(h')$ pour tout $h\neq h'$. Lorsque k est algébriquement clos, nous établissons ensuite, par des arguments géométriques, que si $h\geq 1$ alors $S(h)$ admet h actions indépendantes et non conjuguées du groupe additif $\mathbb{G}_{a,k}$. La construction que nous utilisons est basée sur la classification des surfaces affines non singulières S complétables par un $\mathbb{P}^1$, *i.e.* admettant une complétion projective $\bar{S}$ telle que $\bar{S}\setminus S\simeq\mathbb{P}^1_k$, due à Gizatullin et Danilov [**22**].

16.1. Propriétés des surfaces de Danielewski définies par des peignes à deux feuilles

Un peigne finement k-pondéré $\gamma=(\Gamma,w)$ ayant une unique feuille étant une chaîne, il existe une unique surface de Danielewski $S(\gamma)$ de ce type, à savoir $\mathbb{A}^1_X=\mathbb{A}^2_k$. Nous montrons ici que les classes d'isomorphisme de surfaces de Danielewski définies par des peignes finement k-pondérés γ ayant cette fois exactement deux feuilles sont en bijection avec l'ensemble $\mathbb{Z}_{>0}$ des entiers strictement positifs, et nous donnons un représentant explicite de chaque classe.

Les surfaces de Danielewski S isomorphes à une surface de Danielewski $S(\gamma)$ définie par un peigne finement k-pondéré $\gamma=(\Gamma,w)$ possédant deux feuilles sont caractérisées par la propriété suivante.

Proposition 16.1.1. *Une k-surface de Danielewski S est isomorphe à une surface de Danielewski $S(\gamma)$ définie par un peigne finement k-pondéré $\gamma=(\Gamma,w)$ possédant exactement deux feuilles si et seulement si $ML(S)=k$ et $Pic(S)=\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Par définition, une surface de Danielewski $\pi:S\to X$ est obtenue en recollant $n\geq 1$ copies $p_i:\mathbb{A}^1_{X_i}\to X$ de la droite affine relative $\mathbb{A}^1_X$ le long des ouverts $\mathbb{A}^1_{X_*}$. On en déduit que le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(S)$ de S est engendré par les classes d'isomorphismes des $\mathcal{O}_S$-modules inversibles $\mathcal{L}_i=\mathcal{O}_S\left(p_i^{-1}(x_0)\right)$, modulo la relation $\bigotimes\mathcal{L}_i\simeq\mathcal{O}_S\left(\pi^{-1}(x_0)\right)\simeq\mathcal{O}_S$, donc est isomorphe à $\mathbb{Z}^{n-1}$. Les composantes irréductibles de la fibre $\pi_\gamma^{-1}(x_0)$ du morphisme structural $\pi_\gamma:S(\gamma)\to X$ d'une surface de Danielewski $S(\gamma)$ définie par un arbre finement k-pondéré $\gamma=(\Gamma,w)$ étant par construction en bijection avec les feuilles de Γ, on conclut que $\mathrm{Pic}(S)=\mathbb{Z}$ si et seulement si $S\simeq S(\gamma)$ pour un certain arbre γ possédant exactement deux feuilles. D'après (15.1.1) $\mathrm{ML}(S(\gamma))=k$ si et seulement si γ est un peigne, ce qui termine la preuve. □

Remarque 16.1.2. Plus généralement, le même argument montre que le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(S(\gamma))$ d'une surface de Danielewski définie par un arbre finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^{n-1}$, où n désigne le nombre de feuilles de Γ.

Nous nous proposons maintenant d'établir le résultat suivant :

Théorème 16.1.3. *A isomorphismes près, les k-surfaces de Danielewski de groupe de Picard $\mathbb{Z}$ et d'invariant de Makar-Limanov trivial sont les surfaces deux à deux non isomorphes $S(h) \subset \mathbb{A}^3_X = Spec(k[x][y,z,u])$, où $h \in \mathbb{Z}_{>0}$, définies respectivement par les équations suivantes :*

$$xz - y(y-1) = 0, \quad y^{h-1}u - z^h = 0, \quad x^{h-1}u - (y-1)^{h-1}z = 0.$$

16.1.4. Pour démontrer (16.1.3), nous procédons en deux étapes. Nous commençons par déterminer dans chaque classe d'isomorphisme un représentant $S\left(\gamma_0^h\right)$ défini par un peigne finement k-pondéré $\gamma_0^h = \left(\Gamma_0^h, w_0^h\right)$ particulier, et nous montrons que deux surfaces $S\left(\gamma_0^h\right)$ et $S\left(\gamma_0^{h'}\right)$ ne sont isomorphes que si $h = h'$. Nous employons ensuite une version affinée des techniques de construction de plongement de surfaces de Danielewski (14.1.7) pour obtenir les équations annoncées.

16.1.5. D'après (16.1.1) toute surface de Danielewski S telle que $\mathrm{Pic}(S) = \mathbb{Z}$ et $\mathrm{ML}(S) = k$ est isomorphe à une surface de Danielewski $S(\gamma)$ définie par un peigne finement k-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$ possédant deux feuilles. Puisque $S(\gamma)$ est isomorphe à la surface de Danielewski $S(\mathrm{Es}(\gamma))$ définie par le sous-arbre essentiel $\mathrm{Es}(\gamma)$ de γ (cf. 12.3.4), nous pouvons supposer dès le départ que γ coïncide avec son sous-arbre essentiel, ce qui revient à dire, dans ce cas particulier, que l'un des fils f_1 de la racine e_0 de Γ est une feuille de Γ. Puisque Γ possède une unique autre feuille f_2, $\Gamma \setminus \{f_1\}$ est donc une chaîne d'extrémités e_0 et f_2. Notons

$$C_\Gamma = \Gamma \setminus \{f_1, f_2\} = \{e_0 < e_1 < \cdots < e_{h-1}\},$$

où $h = h(\Gamma)$ l'arête principale du peigne Γ. L'arbre finement k-pondéré $\gamma_0^h = \left(\Gamma, w_0^h\right)$ correspondant à la fonction de poids $w_0^h : E(\Gamma) \to k$ définie par

$$w_0^h\left(\overrightarrow{f_1 e_0}\right) = 1, \quad w_0^h\left(\overrightarrow{f_2 e_{h-1}}\right) = 0, \quad w_0^h\left(\overrightarrow{e_{i+1} e_i}\right) = 0, \ i = 0, \ldots, h-2$$

étant alors équivalent à γ (12.3.2), on conclut suivant (12.3.4) que $S(\gamma)$ est isomorphe à la surface de Danielewski $S\left(\gamma_0^h\right)$. Nous dirons que $S\left(\gamma_0^h\right)$ est un *représentant normalisé* de la classe d'isomorphisme de S. On a alors le résultat suivant :

Proposition 16.1.6. *Si $h \neq h'$ alors $S\left(\gamma_0^h\right)$ et $S\left(\gamma_0^{h'}\right)$ ne sont pas isomorphes.*

Démonstration. Nous pouvons supposer, quitte à remplacer le corps k par sa clôture algébrique $\bar{k}$ et les k-surfaces de Danielewski $S(\gamma_0^g)$, $g = h, h'$ par les $\bar{k}$-surfaces $S_{\bar{k}}(\gamma_0^g) = S(\gamma_0^g) \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}\left(\bar{k}\right)$ obtenues par extension des scalaires, que k est algébriquement clos. On sait en effet (cf. 15.1.5) que $S_{\bar{k}}(\gamma_0^g)$ est la surface de Danielewski de base $X_{\bar{k}} = \mathrm{Spec}\left(\bar{k}[x]\right)$ définie par l'arbre $\gamma_0^g = (\Gamma_0^g, i \circ w_0^g)$, où $i : k \hookrightarrow \bar{k}$ désigne l'inclusion canonique. On déduit alors de (13.4.2) que $S(\gamma_0^g)$ admet une complétion par une surface projective $\bar{S}_g$ pour laquelle le diviseur de bord

$$B_g = \bar{S}_g \setminus S(\gamma_0^g) = F_\infty \cup D \cup \bigcup_{i=0}^{g-1} E_i$$

est une chaîne de courbes rationnelles non singulières telle que $\left(F_\infty^2\right) = \left(D^2\right) = 0$ et $\left(E_i^2\right) = -2$, $i = 0, \ldots, g-1$.
On déduit alors de [**21**, Corollaire 2] que le nombre g de courbes E_i d'auto-intersection -2 apparaissant dans le diviseur de bord d'une complétion comme ci-dessus est un

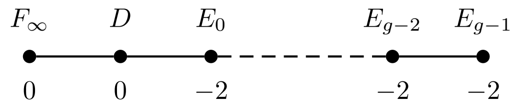


FIG. 16.1.1. Graphe dual pondéré du diviseur B_g.

invariant de la surface $S\left(\gamma_0^g\right)$ .Ainsi $S\left(\gamma_0^h\right) \neq S\left(\gamma_0^{h'}\right)$ si $h \neq h'$, ce qui termine la preuve. □

16.1.7. Un peigne $\gamma_0^1 = \left(\Gamma_0^1, w_0^1\right)$ à deux feuilles étant un triangle, on conclut suivant (12.3.3) que la surface de Danielewski $S\left(\gamma_0^1\right)$ est isomorphe à l'hypersurface $S(1)$ de $\mathbb{A}_k^3 = \mathrm{Spec}\,(k[x,y,z])$ d'équation $xz - y(y-1) = 0$. Plus généralement, le résultat suivant achève la preuve du théorème (16.1.3).

PROPOSITION 16.1.8. *Pour tout $h \in \mathbb{Z}_{>0}$, la surface de Danielewski $S\left(\gamma_0^h\right)$ est isomorphe à la surface $S(h) \subset \mathbb{A}_k^4 = \mathrm{Spec}\,(k[x,y,z,u])$ définie par les équations suivantes*

$$xz - y(y-1) = 0, \quad y^{h-1}u - z^h = 0, \quad x^{h-1}u - (y-1)^{h-1} z = 0.$$

DÉMONSTRATION. Si $h = 1$, alors $y^{h-1} = 1$ et l'on peut éliminer la variable u dans les équations ci-dessus de manière à obtenir l'isomorphisme $S\left(\gamma_0^1\right) \simeq S(1)$ précédemment établi. Nous supposons donc dorénavant que $h \geq 2$. Par construction de γ_0^h, la surface de Danielewski $\pi : S = S\left(\gamma_0^h\right) \to X = \mathrm{Spec}\,(k[x])$ est définie par la paire $(h, \{\tilde{\sigma}_1 = 1, \tilde{\sigma}_2 = 0\})$ et le multi-indice $(\mu_1, \mu_2) = (h-1, 0)$, autrement dit est obtenue en recollant deux copies $S_i = \mathrm{Spec}\,(k[x][T_i])$, $i = 1, 2$ de $\mathbb{A}_X^1 = \mathbb{A}_k^2$ par l'intermédiaire de l'isomorphisme de $k\left[x, x^{-1}\right]$-algèbres

$$k\left[x, x^{-1}\right][T_1] \xrightarrow{\sim} k\left[x, x^{-1}\right][T_2], T_1 \mapsto -x^{-1} + x^{1-h} T_2.$$

Le morphisme birationnel canonique $\psi_{\gamma_0^h} : S \to \mathbb{A}_X^1 = \mathrm{Spec}\,(k[x][y])$ est quant à lui induit par l'unique section $s_1 \in \Gamma(X, \pi_* \mathcal{O}_S)$ dont les restrictions aux ouverts S_i, $i = 1, 2$ sont données par $1 + xT_1 \in k[x][T_1]$ et $x^h T_2 \in k[x][T_2]$ respectivement. Considérons maintenant les deux sections

$$s_2 = x^{-1} s_1 (s_1 - 1), \; s_3 = x^{1-h} (s_1 - 1)^{h-1} s_2 \in \Gamma(X, \pi_* \mathcal{O}_S) \otimes_{k[x]} k\left[x, x^{-1}\right].$$

Il est clair que s_2 s'étend en une section de $\Gamma(X, \pi_* \mathcal{O}_S)$ car

$$s_2 \mid_{S_i} = \left\{ \begin{array}{rl} T_1 + xT_1^2 \in k[x][T_1] & \text{si } i = 1 \\ -x^{h-1} T_2 + x^{2h-1} T_2^2 \in k[x][T_2] & \text{si } i = 2 \end{array} \right.$$

On conclut de même que

$$s_3 \mid_{S_i} = \left\{ \begin{array}{rl} T_1^h + xT_1^{h+1} \in k[x][T_1] & \text{si } i = 1 \\ (-1)^h T_2 + xQ(T_2) \in k[x][T_2] & \text{si } i = 2 \end{array} \right.$$

où $Q_2 \in k[x][T_2]$, est une section de $\Gamma(X, \pi_* \mathcal{O}_S)$. Puisque s_1 distingue les deux composantes irréductibles C_1 et C_2 de la fibre $\pi^{-1}(x_0)$, que s_2 (resp. s_3) induit une fonction coordonnée sur C_1 (resp. C_2), on conclut que l'homomorphisme de $k[x]$-algèbres $k[x][y,z,u] \to \Gamma(X, \pi_* \mathcal{O}_S), y \mapsto s_1, \; z \mapsto s_2, \; u \mapsto s_3$ définit un plongement fermé $\phi : S \hookrightarrow \mathbb{A}_k^4$. Par construction, ϕ réalise une bijection entre l'ensemble des points fermés de S et l'ensemble des points fermés de la surface $S(h)$ dont les équations sont données ci-dessus. Puisque $S(h)$ est non singulière d'après le critère Jacobien, on conclut finalement grâce au Théorème principal de Zariski que ϕ induit un X-isomorphisme $\phi : S\left(\gamma_0^h\right) \xrightarrow{\sim} S(h)$, ce qui termine la preuve. □

16.2. Actions de groupe additif sur les surfaces de Danielewski définies par des peignes à deux feuilles

Dans ce paragraphe, k est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle fixé. D'après un résultat de Daigle [**8**] , toutes les $\mathbb{G}_{a,k}$-actions sur une surface de Danielewski $S(1) \subset \mathrm{Spec}(k[x,y,z])$ définie par l'équation $xz - y(y-1) = 0$ sont deux à deux conjuguées au sens de (15.2.1). On peut alors raisonnablement se demander si les surfaces de Danielewski $S(h)$, où $h \geq 2$, satisfont une propriété analogue. Le résultat suivant, dû à Russel, montre que cela n'est pas le cas.

Théorème 16.2.1. *Toute k-surface de Danielewski $S(h)$, où $h \geq 2$, admet h actions deux à deux non conjuguées du groupe additif $\mathbb{G}_{a,k}$.*

16.2.2. La preuve que nous donnons ci-dessous est basée sur un résultat fort utile de Gizatullin-Danilov [**22**], qui dit que pour toute surface affine non singulière S admettant une complétion par une surface projective non singulière $\bar{S}$ telle que $C = \bar{S} \setminus S \simeq \mathbb{P}^1_k$, la paire $\left(\bar{S}, C\right)$ est de l'un des trois types suivants :

a) $\left(\mathbb{P}^2_k, \text{une droite}\right)$,

b) $\left(\mathbb{P}^2_k, \text{ une conique non singulière}\right)$,

c) $\left(\mathbb{F}_n = \mathbb{P}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(-n)\right) \to \mathbb{P}^1_k, \text{ une section}\right)$.

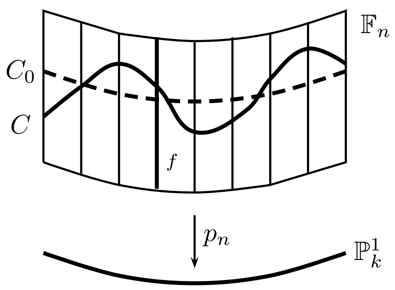


Fig. 16.2.1. Situation dans le cas (c).

De plus, l'entier strictement positif $m = \left(C^2\right)$ est un invariant $m(S)$ de la surface affine $S = \bar{S} \setminus C$, au sens que si $m \neq 4$, alors il existe, à isomorphismes près, une unique surface affine non singulière S admettant une complétion par une courbe $C \simeq \mathbb{P}^1_k$ telle que $\left(C^2\right) = m$. Si $m = 4$ alors S est soit isomorphe au complémentaire d'une conique non dégénérée dans $\mathbb{P}^2_k$, soit au complémentaire d'une section de type $(1,2)$ dans $\mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$. On notera que le complémentaire d'une conique non dégénérée C dans $\mathbb{P}^2_k$ ne peut pas être une surface de Danielewski car le même argument que celui utilisé dans la preuve de (16.1.1) ci-dessus montre que le groupe de Picard d'une surface de Danielewski est toujours sans torsion, tandis que $\mathrm{Pic}\left(\mathbb{P}^2_k \setminus C\right) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

16.2.3. Nous allons exploiter cette caractérisation de la manière suivante. Nous montrons dans un premier temps que toute surface de Danielewski de la forme $S(h)$, où $h \geq 2$, admet une complétion par une courbe $C(h) \simeq \mathbb{P}^1_k$ telle que $\left(C_h^2\right) = h+1$. Nous considérons ensuite les différentes complétions $\bar{S}$ possibles de cette surface, à partir desquelles nous construisons des morphismes $\pi_i : S(h) \to \mathbb{A}^1_k$, $i = 1, \ldots, h$, apparaissant comme les morphismes quotients de certaines $\mathbb{G}_{a,k}$-actions sur S, non deux à deux conjuguées.

Lemme 16.2.4. *Une surface de Danielewski $S(h)$, où $h \geq 2$, admet une complétion $\bar{S}(h)$ par une courbe $C(h) \simeq \mathbb{P}^1_k$ telle que $\left(C(h)^2\right) = h+1$.*

Démonstration. On a construit en (13.4.2) et (16.1.6) une complétion de la surface de Danielewski $\pi : S(h) \simeq S(\gamma_0^h) \to X = \mathbb{A}_k^1$ sous la forme d'une surface projective $\bar{\pi} : \bar{S}_0 \to \bar{X} = \mathbb{P}_k^1$, obtenue à partir de $p_0 : \mathbb{F}_0 \to \mathbb{P}_k^1$ par une succession d'éclatements, de telle sorte que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} S(h) \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & \bar{S}_0 \arrow[d, "\bar{\pi}"] \\ X \arrow[r] & \bar{X} \end{tikzcd}$$

et telle que le graphe dual du diviseur $\bar{B} = (\bar{S}_0 \setminus S(h)) \cup \bar{C}_1 \cup \bar{C}_2$, où les $\bar{C}_i \simeq \mathbb{P}_k^1$, $i = 1, 2$, sont les adhérences dans $\bar{S}_0$ des composantes irréductibles de la fibre $\pi^{-1}(x_0)$, soit obtenu en remplaçant la racine e_0 de Γ_0^h par une chaîne de longueur 2 correspondant aux transformées strictes C_0' d'une section C_0 de p_0 et F_∞' de la fibre $F_\infty = p_0^{-1}(\infty)$, où $\infty = \bar{X} \setminus X$ (cf. 13.4.6). Il est évidemment possible d'effectuer la même construction à partir de la surface de Hirzebruch $\mathbb{F}_1 = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))$, de manière à obtenir la structure suivante pour le graphe dual pondéré de $\bar{B}$.

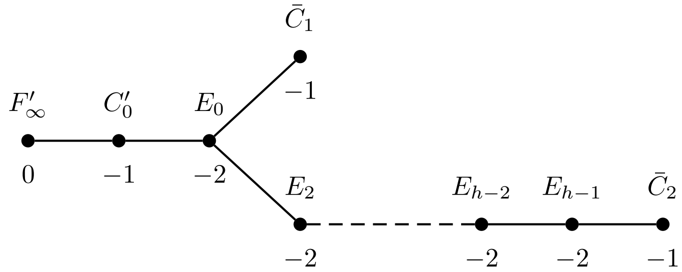


Fig. 16.2.2. Graphe dual pondéré du diviseur $\bar{B}$.

On peut alors contracter successivement la section C_0' d'auto-intersection (-1) puis toutes les courbes E_i, $i = 0, \ldots, h-1$, de manière à obtenir une nouvelle complétion $\bar{S}(h)$ de $S(h)$ par l'image $C(h) \simeq \mathbb{P}_k^1$ de la fibre F_∞'. On a alors $\left(\bar{C}(h)^2\right) = h + 1$ comme annoncé. $\square$

Remarque 16.2.5. On notera que l'image de la composante $\bar{C}_2$ de la fibre $\bar{\pi}^{-1}(x_0)$ par la contraction décrite ci-dessus est une courbe d'auto-intersection 0 intersectant $\bar{C}(h)$ transversalement en un point unique. Ainsi $\bar{S}(h)$ est une surface de Hirzebruch $\mathbb{F}_n \to \mathbb{P}_k^1$ pour un certain $n \geq 0$, dont $\bar{C}(h)$ est une section et dont l'image de $\bar{C}_2$ est une fibre.

16.2.6. Maintenant que l'on sait qu'une surface de Danielewski $S(h)$ est complétable par une courbe $\bar{C}(h) \simeq \mathbb{P}_k^1$ telle que $\left(\bar{C}(h)^2\right) = h + 1$, nous allons considérer toutes les possibilités décrites ci-dessus d'obtenir une surface de ce type comme le complémentaire d'une section $\bar{D}$ d'auto-intersection $h+1$ dans une surface de Hirzebruch $p_n : \mathbb{F}_n \to \mathbb{P}_k^1$. Dans ce qui suit nous notons C_0 l'unique section de $\mathbb{F}_n$ d'auto-intersection $-n$, et nous désignons par C_1 un membre irréductible quelconque du système linéaire $|C_0 + nf|$, où f désigne une fibre du morphisme structural p_n. Le résultat suivant montre qu'il existe un nombre fini d'entiers n tels que $\mathbb{F}_n$ apparaisse comme une complétion de $S(h)$ par une section $\bar{D}$ comme ci-dessus.

Lemme 16.2.7. *Les paires $(\mathbb{F}_n, \bar{D})$, où $\bar{D}^2 = h + 1$, telles que $\mathbb{F}_n \setminus \bar{D} \simeq S(h)$ sont de la forme $(\mathbb{F}_{h-1-2i}, \bar{D}_{h-i})$ où $i = 0, \ldots, \lfloor (h-1)/2 \rfloor$, $\lfloor (h-1)/2 \rfloor$ désignant la partie entière de $(h-1)/2$, et où $\bar{D}_{h-i}$ est un membre irréductible et non singulier du système linéaire $|C_0 + (h-i) f|$.*

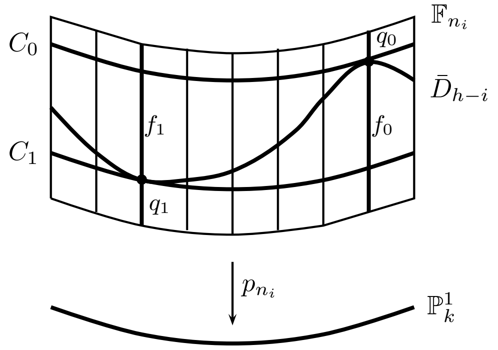
Démonstration. Toute paire $\left(\mathbb{F}_{h-1-2i}, \bar{D}_{h-i}\right)$ satisfaisant les propriétés ci-dessus convient. En effet, le système linéaire $|C_0 + (h-i) f|$ est très ample car $h - i > h - 2i - 1$ pour tout $i = 1, \ldots, \lfloor (h-1)/2 \rfloor$, et tout diviseur non singulier $\bar{D}_{h-i} \in |C_0 + (h-i) f|$ est isomorphe à $\mathbb{P}^1_k$, d'auto-intersection $\left(\bar{D}_{h-i}\right)^2 = h + 1$, de sorte que $S = \mathbb{F}_{h-1-2i} \setminus \bar{D}_{h-i}$ est une surface affine, isomorphe à $S(h)$ d'après le théorème de Gizatullin-Danilov rappelé ci-dessus (16.2.2). Réciproquement, si $S(h) \simeq \mathbb{F}_n \setminus \bar{D}^2$, où $\bar{D} \simeq \mathbb{P}^1_k$ désigne une section d'auto-intersection $h+1$, alors $\bar{D}$ est un membre non singulier du système linéaire $|C_0 + \lambda f|$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Puisque $S(h)$ est affine, $\bar{D}$ est obligatoirement ample (cf. **[23]**) , ce qui implique que $\lambda > n$. D'autre part, il découle de l'égalité $\left(\bar{D}^2\right) = -n + 2\lambda = h + 1$ que $n + h + 1$ est pair et que $h + 1 > n$, de sorte que les seules possibilités pour la paire (n, λ) sont bien celles annoncées. $\square$

Dans une paire $\left(\mathbb{F}_{h-1-2i}, \bar{D}_{h-i}\right)$ comme ci-dessus, le diviseur $\bar{D}_{h-i}$ n'est évidemment pas unique puisque tout autre membre non singulier $\bar{D}'_{h-i} \in |C_0 + (h-i) f|$ convient. Cela nous laisse la possibilité de choisir un diviseur $\bar{D}_{h-i}$ adapté à nos besoins.

Lemme 16.2.8. *Soient $p_n : \mathbb{F}_n \to \mathbb{P}^1_k$, où $n = h - 1 - 2i$, une surface de Hirzebruch, C_1 un membre non singulier du système linéaire complet $|C_0 + nf|$, et soient $q_0 \in C_0$ et $q_1 \in C_1$ deux points fermés de $\mathbb{F}_n$ non contenus dans une même fibre de p_n. Alors il existe un diviseur non singulier $\bar{D}_{h-i} \simeq \mathbb{P}^1_k$ dans le système linéaire $|C_0 + (h-i) f|$ tel que $\bar{D}_{h-i} \cap C_j = p_j$, $j = 0, 1$.*

Démonstration. Puisque $\left(C_0 \cdot \bar{D}_{h-i}\right) = i + 1$, $\left(C_1 \cdot \bar{D}_{h-i}\right) = h - i$ tandis que $|C_0 + (h-i) f| \simeq \mathbb{P}^{h+2}_k$, il existe un sous-pinceau $g_\lambda \subset |C_0 + (h-i) f|$ dont les éléments D satisfont $D \cap C_j = q_j$, $j = 0, 1$. Il suffit donc de trouver un membre de ce pinceau isomorphe à $\mathbb{P}^1_k$. Notons tout d'abord que les membres de g_λ sont irréductibles. En effet, puisque tout membre réductible D de $|C_0 + (h-i) f|$, donc de g_λ, se décompose sous la forme $D = D' + rf$, où D est un membre irréductible du système linéaire $|C_0 + (h - i - r) f|$, la condition $D \cap C_j = q_j$ impliquerait que $q_j = C_j \cap f$, $i = 0, 1$, pour une certaine fibre f de p_n, ce qui est exclu par hypothèse. Puisque $(D \cdot f) = 1$ pour toute fibre f de p_n, on conclut que pour tout point fermé $q \in D \cap f$ pour une certaine fibre f, la multiplicité d'intersection de D et f en q est égale à 1, ce qui n'est possible que si q est un point régulier de D en lequel D et f s'intersectent transversalement. Ainsi tout membre D du pinceau g_λ est non singulier, donc isomorphe à $\mathbb{P}^1_k$, ce qui termine la preuve. $\square$

16.2.9. On a montré que pour tout $h \geq 2$ et tout $i = 0, \ldots, \lfloor (h-1)/2 \rfloor$ la surface de Danielewski $S(h)$ est isomorphe au complémentaire dans $p_{n_i} : \mathbb{F}_{n_i} \to \mathbb{P}^1_k$, où $n_i = h - 1 - 2i$ d'une section $\bar{D}_{h-i}$ telle que $\left(\bar{D}^2_{h-i}\right) = h + 1$ et telle que $C_j \cap \bar{D}_{h-i} = q_j$, $j = 0, 1$, pour deux points fermés $q_0 \in C_0$ et $q_1 \in C_1$.



Pour un entier $i = 0, \ldots, \lfloor (h-1)/2 \rfloor$ fixé, nous notons f_0 et f_1 les deux fibres de $p_{n_i} : \mathbb{F}_{n_i} \to \mathbb{P}^1_x$ contenant respectivement les points q_0 et q_1, et nous considérons les sous-pinceaux $g_{i,0}$ et $g_{i,1}$ du système linéaire complet $|C_0 + (h-i) f|$ engendrés respectivement par les diviseurs $\bar{D}_{h-i}$ et $D_0 = C_0 + (h-i) f_0$, et $\bar{D}_{h-i}$ et $D_1 = C_1 + (i+1) f_1$. Il est clair que q_j est l'unique point base du pinceau $g_{i,j}$, $j = 0, 1$, et le même argument que précédemment montre que tous les membres des pinceaux $g_{i,j}$, à l'exception de D_j, sont isomorphes à $\mathbb{P}^1_k$.

16.2.10. Par construction, les pinceaux $g_{i,0}$ et $g_{i,1}$ définissent deux morphismes $\pi_{i,j} : S(h) \simeq F_{n_i} \setminus \bar{D}_{h-i} \to X_{i,j} = \mathbb{A}^1_k$, $j = 0, 1$. La restriction de $\pi_{i,j}$ au-dessus du complémentaire $U_{i,j}$ d'un certain point fermé $x_{i,j} \in X_{i,j}$ est isomorphe au fibré trivial $\mathbb{A}^1_{U_{i,j}}$, tandis que $\pi^{-1}_{i,j}(x_{i,j}) = E_{i,j} + m_{i,j} F_{i,j}$ où $E_{i,j} \simeq F_{i,j} \simeq \mathbb{A}^1_k$, et où $m_{i,1} = h - i$ tandis que $m_{i,2} = i + 1$. Autrement dit, $\pi_{i,j} : S(h) \to \mathbb{A}^1_k$ est une $\mathbb{A}^1$-*fibration* dont l'unique fibre dégénérée possède deux composantes irréductibles $E_{i,j}$ et $F_{i,j}$ de multiplicités respectives 1 et $m_{i,j}$. Ainsi, en faisant varier l'entier $i = 0, \ldots, \lfloor (h-1)/2 \rfloor$, on obtient une collection de $\mathbb{A}^1$-fibrations $\pi_{i,j} : S(h) \to \mathbb{A}^1_k$, telles que pour tout $m = 1, \ldots, h$ il existe une paire (i, j) pour laquelle l'unique fibre dégénérée de $\pi_m = \pi_{i,j} : S(h) \to \mathbb{A}^1_k$ soit constituée de deux composantes irréductibles de multiplicités 1 et m respectivement. Le théorème (16.2.1) s'en déduit puisqu'il est bien connu que toute $\mathbb{A}^1$-fibration $S(h) \to \mathbb{A}^1_k$ s'identifie au morphisme quotient d'une $\mathbb{G}_{a,k}$-action sur $S(h)$ (cf. D.2.2).

Conclusion

Les schémas de Danielewski-Fieseler $\pi : W \to X$ avec actions du groupe additif $\mathbb{G}_{a,X}$ ne constituent au final qu'une classe d'objets relativement simples, intermédiaire entre les torseurs et les schémas généraux avec $\mathbb{G}_{a,X}$-actions. Il est par conséquent naturel de se demander quelle place occupent réellement les schémas de Danielewski-Fieseler parmis ces schémas avec $\mathbb{G}_{a,X}$-action. On peut par exemple montrer, à partir des résultats de Fieseler [**17**], qu'une surface affine normale $S/\mathbb{C}$ avec action de $\mathbb{C}_+$ est localement isomorphe à un quotient cyclique d'un schéma de Danielewski-Fieseler. Par contre, en dimension supérieure, la situation est loin d'être aussi claire. En effet, l'étude des variétés de dimension ≥ 3 avec action du groupe additif $\mathbb{C}_+$ reste un vaste chantier. Par exemple, la structure des actions du groupe additif sur l'espace affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ reste encore mal connue, et ce malgré des résultats spectaculaires récents de Kaliman [**30**], et l'étude approfondie des dérivations localement nilpotentes des algèbres de polynômes $k[x,y,z]$ menée entre autres par Daigle [**6**] et Freudenburg [**18**].

Une des méthodes pour aborder les action de $\mathbb{C}_+$ sur une variété de dimension 3 consiste évidemment à étudier les propriétés des morphismes quotients $q : V \to S = V//\mathbb{C}_+$, cette approche s'étant révélée fructueuse dans le cas des surfaces. Dans une situation de ce type, on sait que S est une surface et qu'il existe un ouvert $U \subset S$ au-dessus duquel q s'identifie à un $\mathbb{G}_{a,U}$-torseur. Plusieurs questions se posent alors, par exemple, q est-il surjectif ? (la réponse est affirmative quand $V = \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ d'après [**3**]) ; q est-il plat ? ; quelle est la structure des fibres de q au-dessus des points de $S \setminus U$?, etc ...

Une méthode alternative qui mériterait d'être développée consiste à fibrer une variété V de dimension 3 avec $\mathbb{C}_+$-action par des surfaces. Pour cela, on remarque que toute fonction $\mathbb{C}_+$-invariante $f \in \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ définit une famille plate $\xi : V \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ de surfaces avec $\mathbb{C}_+$-actions. Cette approche semble évidemment prometteuse, même si, du fait que l'on travaille dans un cadre affine, l'étude des familles de ce type se révèle rapidement très complexe. Un premier problème consiste à contrôler l'apparition de dégénérescences dans ces familles et à décrire les cas possibles. Par exemple, le membre général V_t, $t \neq 0$, de la famille

$$\xi_1 : V = \left\{xz - y(y-t) = 0,\ (x,y,z,t) \in \mathbb{A}^4_{\mathbb{C}}\right\} \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[t])$$

est une surface de Danielewski, tandis que $V_0 \simeq \left\{xz - y^2 = 0,\ (x,y,z) \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}\right\}$ est une surface normale singulière. Un autre exemple de dégénérescence est fourni par la famille

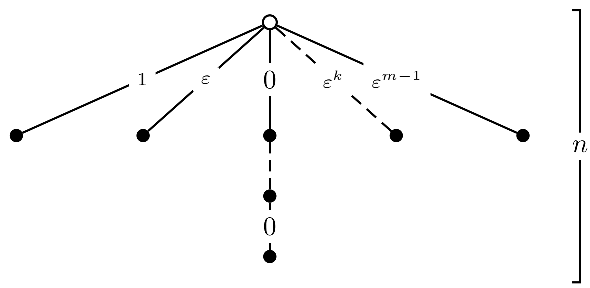
$$\xi_2 : V = \left\{x(x+t)z - y(y-1) = 0,\ (x,y,z,t) \in \mathbb{A}^4_{\mathbb{C}}\right\} \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[t])$$

dont le membre général V_t, $t \neq 0$, est un schéma de Danielewski-Fieseler de base $(X, D) = (\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x]), \mathrm{div}(x(x+t)))$ tandis que V_0 est la surface de Danielewski d'équation $x^2 z - y(y-1) = 0$. En combinant ces deux exemples, on obtient une troisième famille

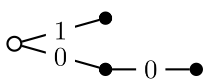
$$\xi_3 : V = \left\{x(x+t)z - y(y-t) = 0,\ (x,y,z,t) \in \mathbb{A}^4_{\mathbb{C}}\right\} \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[t])$$

dont le membre $V_0 \simeq \left\{x^2z - y^2 = 0,\ (x,y,z) \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}\right\}$ n'est pas normal, ce qui pose un nouveau problème puisqu'il n'existe pas à ce jour de classification des surfaces affines non normales avec $\mathbb{C}_+$-actions.

Des hypothèses supplémentaires sur les variétés V considérées peuvent permettre de simplifier le problème. Par exemple, si l'invariant de Makar-Limanov est trivial, on peut considérer des familles $\xi : V \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ définies par des fonctions $f \in \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ invariantes par deux $\mathbb{C}_+$-actions dont les orbites générales ne coïncident pas. Ainsi les membres V_t de cette famille sont des surfaces, éventuellement non normales, mais dont l'invariant de Makar-Limanov est trivial. Or, en combinant les résultats de **[13]** sur la structure des morphismes quotients $q : S \to S//\mathbb{C}_+ \simeq \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ sur une surface d'invariant de Makar-Limanov trivial avec les descriptions locales de **[17]**, on peut montrer (cf. **[14]**) que toute surface affine normale d'invariant de Makar-Limanov trivial est un quotient cyclique global d'une surface de Danielewski. La classification des surfaces de Danielewski qui apparaissent comme revêtement cyclique d'une surface d'invariant de Makar-Limanov trivial n'existe pas encore, mais semble raisonnablement accessible dans un futur proche. Nous disposons d'ailleurs de résultats partiels dans cette direction, déduits de l'étude de la structure des complétions de ces surfaces obtenues "en passant au quotient" des complétions de surfaces de Danielewski. Par exemple, toute surface de Danielewski $\pi : S(\gamma_{m,n}) \to X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x])$ définie par un arbre finement $\mathbb{C}$-pondéré $\gamma_{m,n} = (\Gamma, w)$ de la forme suivante,



où ε désigne une racine primitive m-ème de l'unité, admet une action du groupe cyclique $\mathbb{Z}_m$, qui commute avec toute $\mathbb{G}_{a,X}$-action sur S, pour laquelle l'invariant de Makar-Limanov de la surface quotient $S(\gamma_{m,n})/\mathbb{Z}_m$ est trivial. Il n'est pas impossible qu'une surface quotient de ce type soit aussi une surface de Danielewski par rapport à une autre action $\mathbb{C}_+$. Par exemple $S(\gamma_{2,1})$ munie de sa $\mathbb{Z}_2$-action est isomorphe à la surface de Danielewski $S \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y,z])$ d'équation $xz - y\left(y^2 - 1\right) = 0$ sur laquelle $\mathbb{Z}_2$ agit via $(x,y,z) \mapsto (-x,-y,-z)$. Le quotient $S/\mathbb{Z}_2$ est alors isomorphe à la surface de Danielewski $S\left(\gamma_0^2\right)$ définie par le peigne à deux feuilles

$\gamma_0^2 =$ 

autrement dit, à la surface $S(2) \subset \mathbb{A}^4_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[a,b,c,d])$ définie par les équations

$$dc - b(b-1) = 0, \quad ba - c^2 = 0, \quad da - (b-1)c = 0,$$

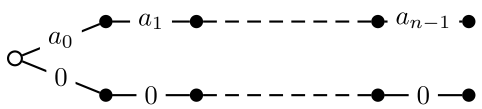
le morphisme quotient étant induit par l'homomorphisme d'algèbres

$$\mathbb{C}[a,b,c,d] \mapsto \mathbb{C}[x,y,z], \quad a \mapsto x^2, b \mapsto y^2, c \mapsto xy, d \mapsto z.$$

Citons encore, parmis d'autres cas particuliers connus, les plans de log-$\mathbb{Q}$-homologie d'invariant de Makar-Limanov trivial, c'est à dire les surfaces affines normales S, à singularités au plus log-terminales, dont les groupes d'homologie $H_i(S,\mathbb{Q})$ sont nuls pour tout $i > 0$, qui apparaissent comme les quotients cycliques des surfaces de Danielewski de la forme $xz - t^n + 1 = 0$ par une action $(x, y, t) \mapsto (\varepsilon x, \varepsilon^q y, \varepsilon^{-1} z)$ du groupe cyclique $\mathbb{Z}_m$, où ε est une racine primitive m-ème de l'unité, n divise m, et où $\mathrm{pgcd}\,(q, m/n) = 1$ (cf. [**37**] pour le cas lisse et [**15**, Théorème 5.6] pour le cas général).

Un autre thème qui mériterait d'être développé plus avant est celui des schémas affines $\pi : V_{\mathfrak{g}} \to X = \mathrm{Spec}\,(A)$ associés à des arbres $A\,[t]$-pondérés $\mathfrak{g} = (\Gamma, w)$. Il est d'abord naturel de se demander si tout schéma avec $\mathbb{G}_{a,X}$-action est isomorphe à un schéma obtenu par ce procédé. On a vu par exemple que cela était le cas pour les surfaces de Danielewski. Plus généralement le même argument montre que cette description reste valable pour tout schéma de Danielewski-Fieseler affine de base $(X = \mathrm{Spec}\,(A)\,, D = \mathrm{div}\,(h))$, où A est un anneau de valuation discrète de paramètre uniformisant h. Un autre problème, plus algébrique cette fois, consisterait à déterminer explicitement les générateurs de l'idéal $I_{\mathfrak{g}} \subset A\,[\Gamma]$ d'un schéma $V_{\mathfrak{g}}$, obtenus en "saturant" un idéal $I\,(\mathfrak{g})$ défini essentiellement à partir des mineurs 2×2 d'une matrice à coefficients polynômiaux (cf. 6.1.11), et à déterminer des conditions pour que l'on ait un isomorphisme $V_{\mathfrak{g}} \simeq V\,(\mathfrak{g}) = \mathrm{Spec}\,(A\,[\Gamma]\,/I\,(\mathfrak{g}))$.

On peut aussi envisager d'utiliser ces schémas $V_{\mathfrak{g}}$ pour décrire les groupes d'automorphismes des surfaces de Danielewski, et ce, suivant une méthode mise au point par Makar-Limanov [**33, 34**] consistant à déterminer les automorphismes par des méthodes algébriques, à partir des équations d'un plongement dans un espace affine. Par exemple, l'application d'une méthode de ce type a permis récemment (cf. [**5**]) de décrire la structure du groupe d'automorphisme d'une surface de Danielewski $S_{n,q} \subset \mathbb{A}^3_k = \mathrm{Spec}\,(k\,[x, y, z])$ d'équation $x^n z - y\,(y + q\,(x)) = 0$, où $n \geq 2$ et où $q \in k\,[x]$ ne s'annule pas en zéro. Bien qu'il s'agisse d'un type de surface très particulier, correspondant dans la description des surfaces de Danielewski à partir d'arbres finement k-pondérés aux cônes finement k-pondérés $\gamma_{n,q} = (\Gamma, w)$ de la forme suivante

$\gamma_{n,q} =$ 

où $q = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \in k\,[x]$, tout laisse à penser qu'une application systématique de ces procédés algébriques conduirait à la détermination des groupes d'automorphismes des surfaces de Danielewski.

Annexes

ANNEXE A

Schémas en groupes

Cette annexe rassemble l'essentiel des résultats utiles pour la lecture de cette thèse concernant les schémas en groupes et les actions de schémas en groupes sur les schémas. Nous renvoyons, par exemple, le lecteur aux ouvrages [**39**] et [**44**], pour une approche relativement élémentaire du cas particulier des schémas en groupes affines, qui constituent une introduction accessible au monumental SGA3. Pour les notions relatives au fibrés principaux homogènes (encore appelés torseurs dans le texte), nous suivons la présentation de SGA 1, Exposé XI, elle-même inspirée de [**43**].

A.1. Généralités sur les schémas en groupes

DÉFINITION A.1.1. Un *schéma en groupes*, ou plus simplement un X-*groupe* est la donnée d'un schéma $g : G \to X$ et de trois X-morphismes $\mu : G \times_X G \to G$, $s : G \to G$ et $e : X \to G$ satisfaisant formellement aux axiomes de la loi de composition, de l'application inverse et de l'élément neutre d'un groupe. Ceci revient à dire que les trois diagrammes suivants sont commutatifs.

1) Associativité

$$\begin{tikzcd} G \times_X G \times_X G \arrow[r, "\mathrm{Id}\times\mu"] \arrow[d, "\mu\times\mathrm{Id}"'] & G \times_X G \arrow[d, "\mu"] \\ G \times_X G \arrow[r, "\mu"] & G \end{tikzcd}$$

2) Inverse à gauche et à droite

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "(s{,}\mathrm{Id})"] \arrow[d, "g"'] & G \times_X G \arrow[d, "\mu"] \\ G \arrow[r, "e"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "(\mathrm{Id}{,}s)"] \arrow[d, "g"'] & G \times_X G \arrow[d, "\mu"] \\ X \arrow[r, "e"] & G \end{tikzcd}$$

3) Neutre à gauche et à droite

$$\begin{tikzcd} X \times_X G \arrow[r, "e\times\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\wr"'] & G \times_X G \arrow[d, "\mu"] \\ G \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \times_X X \arrow[r, "\mathrm{Id}\times e"] \arrow[d, "\wr"'] & G \times_X G \arrow[d, "\mu"] \\ G \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & G \end{tikzcd}$$

A.1.2. Si G est un X-groupe, alors, pour tout schéma $Y \to X$, l'ensemble $G(Y) = \mathrm{Hom}_X(Y, G)$ est muni d'une structure de groupe, de telle manière que pour tout X-morphisme $\phi : Y' \to Y$, l'application $G(\phi) : G(Y) \to G(Y')$ soit un homomorphisme de groupes. La réciproque est vraie, à savoir que se donner une structure de X-groupe sur un X-schéma quelconque $p : G \to X$ revient à se donner pour tout schéma $Y \to X$ une structure de groupe sur l'ensemble $G(Y)$, de telle sorte que pour tout X-morphisme $\phi : Y' \to Y$, l'application d'ensembles $G(\phi) : G(Y) \to G(Y')$ soit un morphisme de groupes. Ceci se résume en disant que le foncteur contravariant $G = \mathrm{Hom}_X(\cdot, G) : (PSch/_X)^\circ \to (Ens)$ est un *foncteur en groupes* .

Via ce formalisme fonctoriel, toutes les propriétés usuelles dans la catégorie des groupes se transposent dans la catégorie des X-groupes. Par exemple,

Définition A.1.3. On dit qu'un X-groupe G est *commutatif*, si le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} G \times_X G \arrow[r, "ech"] \arrow[d, "\mu"'] & G \times_X G \arrow[d, "\mu"] \\ G \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & G \end{tikzcd}$$

où *ech* désigne le X-morphisme échangeant les deux copies de G. Cela revient évidemment à demander que pour tout schéma $Y \to X$ le groupe $G(Y)$ soit commutatif.

Définition A.1.4. Soient G et G' deux X-groupes. On dit qu'un X-morphisme $u : G \to G'$ est un *morphisme de X-groupes* si le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} G \times_X G \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "u\times u"'] & G \arrow[d, "u"] \\ G' \times_X G' \arrow[r, "\mu'"] & G' \end{tikzcd}$$

Cela revient une nouvelle fois à dire que pour tout morphisme $Y \to X$, l'application d'ensembles $u(Y) : G'(Y) \to G(Y)$ est un homomorphisme de groupes.

A.1.5. Supposons maintenant que G soit un *X-groupe affine*, i.e. que $g : G \to X$ soit un morphisme affine, commutatif. Dans ce cas G est X-isomorphe au spectre de la $\mathcal{O}_X$-algèbre quasi-cohérente $\mathcal{A} = g_*\mathcal{O}_G$. La donnée des trois X-morphismes μ, s et e équivaut alors à la donnée de trois homomorphismes de $\mathcal{O}_X$-algèbres

$$\tilde{\mu} = g_*\left(\mu^\sharp\right) : \mathcal{A} \to g_*\left(\mu_*\mathcal{O}_{G\times_X G}\right) \simeq \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}$$

$$\tilde{s} = g_*\left(s^\sharp\right) : \mathcal{A} \to g_*\left(s_*\mathcal{O}_G\right) = \mathcal{A}$$

$$\varepsilon = g_*\left(e^\sharp\right) : \mathcal{A} \to g_*\left(e_*\mathcal{O}_X\right) = \mathcal{O}_X.$$

appelés respectivement co-multiplication, co-inverse et co-neutre, satisfaisant des propriétés duales de celles de X-morphismes μ, s et e, au sens que les trois diagrammes suivants sont commutatifs

- co-associativité

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\tilde{\mu}"] \arrow[d, "\tilde{\mu}"'] & \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\tilde{\mu}"] \\ \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \arrow[r, "\tilde{\mu}\otimes\mathrm{Id}"] & \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \end{tikzcd}$$

-co-inverse et co-neutres

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\tilde{\mu}"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \arrow[d, "\tilde{s},\mathrm{Id}"] \\ \mathcal{O}_X \arrow[r] & \mathcal{A} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\tilde{\mu}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \arrow[d, "\varepsilon\otimes\mathrm{Id}"] \\ \mathcal{A} \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{O}_X\otimes\mathcal{A} \end{tikzcd}$$

A.2. Action d'un schéma en groupes sur un schéma

Définition A.2.1. Une action d'un X-groupe G sur un X-schéma P est la donnée d'un X-morphisme $\phi : G \times_X P \to P$ satisfaisant formellement aux axiomes définissant l'action d'un groupe sur un ensemble. Ceci équivaut à la commutativité des deux diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} G \times_X G \times_X P \arrow[r, "\mathrm{Id}\times\phi"] \arrow[d, "\mu\times\mathrm{Id}"] & G \times_X P \arrow[d, "phi"] \\ G \times_X P \arrow[r, "\phi"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \times_X P \arrow[r, "e\times\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\wr"] & G \times_X P \arrow[d, "\phi"] \\ P \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & P \end{tikzcd}$$

A.2.2. Via l'interprétation fonctorielle, se donner une action de G sur P revient à se donner, pour tout schéma $Y \to X$, une action du groupe $G(Y)$ sur l'ensemble $P(Y)$ de telle manière que pour tout X-morphisme $\psi : Y' \to Y$, l'application d'ensembles $\psi(Y) : P(Y) \to P(Y')$ soit compatible avec l'homomorphisme de groupes $\psi(Y) : G(Y) \to G(Y')$.

A.2.3. Une fois de plus, si $g : G \to X$ et $p : P \to X$ sont tous deux affines sur X, correspondant respectivement à des $\mathcal{O}_X$-algèbres quasi-cohérente $\mathcal{A} = g_*\mathcal{O}_G$ et $\mathcal{B} = p_*\mathcal{O}_P$, alors la donnée de l'action σ équivaut à la donnée d'un homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbres quasi-cohérentes

$$\tilde{\phi} : \mathcal{B} \to p_*\left(\phi_*\mathcal{O}_{G\times_X P}\right) \simeq \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B},$$

appelé co-action, tel que les deux diagrammes suivants soient commutatifs.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, "\tilde{\phi}"] \arrow[d, "\tilde{\phi}"'] & \mathcal{B}\otimes\mathcal{A} \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\tilde{\mu}"] \\ \mathcal{B}\otimes\mathcal{A} \arrow[r, "\tilde{\phi}\otimes\mathrm{Id}"] & \mathcal{B}\otimes\mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, "\tilde{\phi}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & \mathcal{B}\otimes\mathcal{A} \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\varepsilon"] \\ \mathcal{B} \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{B}\otimes\mathcal{O}_X \end{tikzcd}$$

Définition A.2.4. Soient G et G' deux X-groupes et $u : G' \to G$ un morphisme de X-groupes. Étant donnés deux X-schémas P et P' munis d'actions

$$\phi : G \times_X P \to P \quad \text{et} \quad \phi' : G' \times_X P' \to P'$$

de G et G' respectivement, nous dirons qu'un X-morphisme $v : P' \to P$ est *u-équivariant* si le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} G' \times_X P' \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "u\times v"'] & P' \arrow[d, "v"] \\ G \times_X P \arrow[r, "\phi"] & P \end{tikzcd} .$$

Si $G = G'$, nous dirons qu'un X-morphisme $v : P' \to P$ est *équivariant* s'il est Id_G-équivariant.

La notion d'élément invariant pour l'action d'un groupe sur un ensemble se généralise comme suit :

Définition A.2.5. Soient G un X-groupe et P un X-schéma sur lequel G agit via $\phi : G \times_X P \to P$. On dit qu'un sous-schéma $i : Q \hookrightarrow P$ de P est G-invariant s'il admet une G-action $\phi' : G \times_X Q \to Q$ faisant de i un X-morphisme équivariant.

A.2.6. Lorsque G, P sont tous deux affines sur X, correspondant à des $\mathcal{O}_X$-algèbres quasi-cohérentes $\mathcal{A} = g_*\mathcal{O}_G$ et $\mathcal{B} = p_*\mathcal{O}_P$ et que Q est un sous-schéma fermé de P affine au dessus de X, défini par un idéal $\mathcal{I} \subset p_*\mathcal{O}_P$, ce qui revient à dire que

$q_*\mathcal{O}_Q \simeq \mathcal{B}/\mathcal{I}$, la définition ci-dessus équivaut à l'existence d'un homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbres $\bar{\phi} : \mathcal{B}/\mathcal{I} \to (\mathcal{B}/\mathcal{I}) \otimes \mathcal{A}$ rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, "\tilde{\phi}"] \arrow[d, "\tilde{i}"'] & \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \arrow[d, "\tilde{i}\otimes \mathrm{Id}"] \\ \mathcal{B}/\mathcal{I} \arrow[r, "\bar{\phi}"] & (\mathcal{B}/\mathcal{I}) \otimes \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

A.3. Fibrés principaux homogènes

Définition A.3.1. Soit G un X-groupe. Un schéma $\rho : P \to X$ muni d'une action $\phi : G \times_X P \to V$ de G est appelé un *espace formellement principal homogène sous* G si le morphisme $\phi \times p_2 : G \times_X P \to P \times_X P$ est un isomorphisme.

On dit que P est trivial sous G s'il est isomorphe à G sur lequel G opère par translations à gauche. On dit que P est un G-torseur s'il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (X_i)_{i\in I}$ de X tel que pour tout $i \in I$, $P \times_X X_i$ soit trivial sous $P \times_X X_i$.

A.3.2. Une nouvelle fois, dire que P est formellement principal homogène sous G revient alors à dire que pour tout $Y \to X$, l'ensemble $P(Y)$ est soit vide soit un ensemble principal homogène sous le groupe $G(Y)$. Dire que P est trivial revient à dire que $P(Y)$ est non vide pour tout $Y \to X$, cette dernière condition étant satisfaite si et seulement si $P(X)$ est non vide, c'est à dire, si et seulement si P admet une section sur X.

Définition A.3.3. Deux G-torseurs $\rho : P \to X$ et $\rho' : P' \to X$ sont dits *isomorphes* s'il existe un X-isomorphisme G-équivariant $\psi : P' \xrightarrow{\sim} P$. L'ensemble des classes d'isomorphisme de G-torseur sera noté $PH(G/X)$.

Remarque A.3.4. La définition (A.3.1) est celle d'un torseur localement trivial pour la topologie de Zariski. En général, de tels torseurs sont assez peu intéressants à étudier. Il existe en effet des notions plus générales, dans lesquelles on s'autorise différentes topologies de Grothendieck pour trivialiser les torseurs. On peut, par exemple, étudier les G-schémas $\rho : P \to X$ qui deviennent triviaux après changement de base par un morphisme étale $Y \to X$. On parle alors de torseurs localement triviaux pour la topologie étale. De même, un torseur localement trivial pour la topologie fidèlement plate et quasi-compacte (f.p.q.c.) est un G-schéma $\rho : P \to X$ devenant trivial après un changement de base fidèlement plat et quasi-compact $Y \to X$. Ce point de vue plus général ne nous servira que très peu dans cette thèse. En effet, les schémas en groupes G que nous considérons dans cette thèse sont tous *spéciaux*, ceci signifiant que tout G-torseur $\rho : P \to X$ f.p.q.c.-localement trivial (resp. étale-localement trivial) est en fait déjà Zariski-localement trivial ([**43**]). On notera que même dans cette situation plus simple, l'introduction du formalisme général présente un avantage, puisque pour vérifier qu'un G-schéma $\rho : P \to X$, où G est un groupe spécial, est un G-torseur, il suffira de vérifier que P devient trivial après un changement de base f.p.q.c adéquat.

A.4. Espaces fibrés associés

Étant donné un X-groupe commutatif G et un X-schéma Q avec une action $\phi : G \times_X Q \to Q$ de G, nous pouvons munir $G \times_X Q$ de l'action de G définie ensemblistement par la formule $g \cdot (g', q) = \left(\mathrm{mult}(g, g'), \mu\left(g^{-1}, q\right)\right)$. Le quotient $G \vee^G Q = (G \times_X Q)/G$ est isomorphe à Q, et l'action de G sur $G \times_X Q$ via $g \cdot (g', q) = (\mathrm{mult}(g, g'), q)$ (ou, ce qui revient au même, via $g \cdot (g', q) = (g', \mu(g, q)))$ induit une action de G sur $G \vee^G Q$ rendant l'isomorphisme $G \vee^G Q \simeq Q$ équivariant.

A.4.1. Plus généralement, si G est un X-groupe affine alors, pour tout G-torseur P, et tout X-schéma Q avec action de G, le quotient $P \vee^G Q = P \times_X Q/G$ existe (cf. SGA 1 Exposé XI, page 11.) et est naturellement muni d'une G-action. On dit habituellement que $P \vee^G Q$ est "l'espace fibré de base X, de fibre localement isomorphe à Q".

En particulier, si Q est aussi un G-torseur, alors $P \vee^G Q$ est encore un G-torseur, et l'application qui à toute paire (P, Q) de G-torseurs associe le G-torseur $P \vee^G Q$ induit une structure de groupe sur l'ensemble $\mathrm{PH}\,(G/X)$ des classes d'isomorphismes de G-torseurs.

ANNEXE B

Cycles et diviseurs

Afin de fixer les notations utilisées dans cette thèse, nous passons ici brièvement en revue les notions importantes concernant les diviseurs sur un schéma .

B.1. Diviseurs de Cartier

Étant donné un schéma X, le *faisceau des germes de fonctions méromorphes sur* X est le faisceau d'anneaux $\mathcal{K}_X = \mathcal{O}_X\left[\mathcal{S}^{-1}\right]$ où, $\mathcal{S}$ est le sous-faisceau de $\mathcal{O}_X$ tel que pour tout ouvert U, $\Gamma(U, \mathcal{S})$ est l'ensemble des éléments réguliers, i.e. non diviseurs de zéro, de l'anneau $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. Par construction, l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_X \to \mathcal{K}_X$ est alors injectif. Il est clair que si X est intègre, alors $\mathcal{K}_X$ est simplement le faisceau constant $\mathcal{R}_X$ des fonctions rationnelles sur X.

Pour tout $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{F}$, on appelle $\mathcal{K}_X(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K}_X$ le *faisceau des germes de sections méromorphes de* $\mathcal{F}$. Nous désignons par $\mathcal{K}_X^*$ le faisceau de groupes multiplicatifs des éléments inversibles de $\mathcal{K}_X$, qui est appelé le *faisceau des germes de fonctions méromorphes régulières* sur X.

Définition B.1.1. Un *diviseur de Cartier* sur X est une section globale D du groupe $\mathrm{Div}(X) = \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$ des diviseurs sur X. Le support $\mathrm{Supp}(D) = |D|$ de D est le sous-ensemble fermé des points x de X tels $D_x \notin \mathcal{O}_{X,x}^*$.

Notation B.1.2. Dans toute cette thèse, lorsque que nous dirons soit D un diviseur sur X, nous sous-entendrons toujours que D est un diviseur de Cartier.

B.1.3. Un tel diviseur D est déterminé par une *donnée locale* $\left\{(X_i, f_i)_{i\in I}\right\}$ constituée d'un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (X_i)_{\in I}$ de X et de sections $f_i \in \Gamma(X_i, \mathcal{K}_X^*)$ pour tout $i \in I$, telles que $f_i^{-1} f_j \in \Gamma(X_i \cap X_j, \mathcal{O}_X^*)$ pour tout i, j. Ces sections f_i, $i \in I$ sont appelées *équations locales* de D. Rappelons que deux diviseurs sont dits linéairement équivalents s'ils diffèrent d'un diviseur principal $\mathrm{div}(f)$, i.e. d'un diviseur admettant un donnée locale $\{(X, f)\}$. Le groupe des classes de diviseurs modulo équivalence linéaire est noté $\mathrm{CaCl}(X)$. Un diviseur est dit *effectif* (ou *positif*) s'il admet une donnée locale $\left\{(X_i, f_i)_{i\in I}\right\}$ telle que $f_i \in \Gamma(X_i, \mathcal{K}_X^* \cap \mathcal{O}_X)$ pour tout $i \in I$. On note $\mathrm{Div}^+(X)$ l'ensemble des diviseurs effectifs sur X.

B.1.4. Un diviseur D détermine un sous $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{O}_X(D)$ de $\mathcal{K}_X$. Rappelons que pour une donnée locale $\left\{(X_i, f_i)_{i\in I}\right\}$ de D, $\mathcal{O}_X(D)$ se définit comme le sous-faisceau de $\mathcal{K}_X$ engendré par f_i^{-1} sur X_i, i.e. $\mathcal{O}_X(D)\,|_{X_i} = f_i^{-1}\mathcal{O}_X\,|_{X_i}$, cette définition ne dépendant pas du choix d'une telle donnée locale.

Si D est effectif, $\mathcal{O}_X(D)$ admet une *section canonique* notée s_D, partout non nulle sur le complémentaire du support de D. Pour une donnée locale $\left\{(X_i, f_i)_{i\in I}\right\}$ de D, cette section s_D de $\mathcal{O}_X(D) \subset \mathcal{K}_X$ correspond à la section constante $1 = f_i^{-1} f_i \in \Gamma(X_i, \mathcal{O}_X(D))$, $i \in I$, de $\mathcal{K}_X$. Dans ce cas, le dual $\mathcal{J}_X(D) = \mathcal{O}_X(D)^\vee$ de $\mathcal{O}_X(D)$ est un faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_X$, engendré par f_i sur X_i, définissant donc un sous-schéma localement principal $Y(D)$ de X. Par la suite, lorsque D est effectif et non nul, nous ferons l'abus de notation usuel qui consiste à noter encore par D ce sous-schéma $Y(D)$.

B.1.5. Si D n'est pas effectif, s_D peut néanmoins toujours être définie comme une section de $\mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{K}_X^*$. Rappelons que réciproquement, pour se donner, à isomorphisme près, un diviseur D il suffit de se donner un $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}$ et *une section méromorphe régulière* de $\mathcal{L}$, c'est à dire une section de $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K}_X^*$ (EGA IV.21.2.11).

B.1.6. Étant donné un morphisme $f : Y \to X$, il n'est en général pas possible de définir convenablement l'image inverse d'un diviseur D sur X. Pour le faire, il suffirait par exemple que l'on puisse remonter les équations locales de D, ce qui n'est manifestement pas possible si l'image de f est contenue dans le support de D. Par contre, si l'homomorphisme $f^\sharp : \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$ se prolonge en un homomorphisme $\mathcal{K}_X \to f_*\mathcal{K}_Y$, ce qui le cas par exemple lorsque X et Y sont intègres et f dominant ou lorsque f est plat, alors, puisque $f^\sharp\left(\mathcal{O}_X^*\right) \subset f_*\mathcal{O}_Y^*$, il existe un homomorphisme naturel $\mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^* \to f_*\left(\mathcal{K}_Y^*/\mathcal{O}_Y^*\right)$.L'image de $D \in \mathrm{Div}\left(X\right) = \Gamma\left(X, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*\right)$ par cet homomorphisme est un diviseur sur Y , noté f^*D , et appelé image inverse de D par f.

B.2. Cycles et diviseurs de Weil

Étant donné un schéma X, on note $X^{(1)}$ l'ensemble des parties fermées irréductibles de X de codimension 1. Cet ensemble est en correspondance avec l'ensemble des $x \in X$ tel que $\mathrm{codim}\left(\overline{\{x\}}, X\right) = \dim\left(\mathcal{O}_{X,x}\right) = 1$. Une telle partie fermée est encore appelée un 1-cycle premier. Un 1-cycle sur X est une combinaisons formelle à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de 1-cycles premiers, autrement dit, un élément du groupe abélien libre $\mathcal{Z}^1\left(X\right)$ engendré par les 1-cycles premiers.

B.2.1. Rappelons qu'à tout diviseur effectif $D \in \mathrm{Div}^+\left(X\right)$ est associé le 1-cycle à coefficients positifs

$$\mathrm{cyc}\left(D\right) = \sum_{x \in X^{(1)}} \mathrm{mult}_x\left(D\right) \cdot \overline{\{x\}} = \sum_{x \in X^{(1)}} \mathrm{long}\left(\mathcal{O}_{Y_D,x}\right) \cdot \overline{\{x\}},$$

où $Y_D = D$ désigne le sous-schéma fermé de X d'idéal $\mathcal{J}_X\left(D\right)$ défini par D. L'entier $\mathrm{mult}_x\left(D\right)$ est appelé la multiplicité de D au point x. On définit ainsi un homomorphisme de monoïdes $\mathrm{cyc} : \mathrm{Div}^+\left(X\right) \to \mathcal{Z}^1\left(X\right)$, et donc, par symétrisation, un homomorphisme de groupe $\mathrm{cyc} : \mathrm{Div}\left(X\right) \to \mathcal{Z}^1\left(X\right)$.

B.2.2. Un 1-cycle sur un schéma nœthérien séparé, intègre et régulier en codimension 1 est encore appelé un *diviseur de Weil*. Lorsque X est de plus localement factoriel, i.e. $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau factoriel pour tout $x \in X$, les notions de diviseur de Weil et de diviseur de Cartier coïncident (EGA IV.21.6.9).

ANNEXE C

Arbres orientés pondérés

C.1. Arbres finis orientés

Dans ce paragraphe nous rassemblons les définitions classiques sur les arbres orientés, sous une forme appropriée aux besoins de cette thèse. Nous introduisons ensuite une classe de morphismes entre ces arbres, ce qui nous permet de définir, de manière raisonnable, une "catégorie des arbres orientés".

C.1.1. Soit $G = (N, \leq)$ un ensemble fini, non vide, partiellement ordonné. On dit qu'un sous-ensemble totalement ordonné C_n de N à $n \geq 2$ éléments est *une chaîne* de longueur $l(C_n) = n - 1$. On dit qu'une chaîne est *maximale* si elle l'est pour la relation d'inclusion. Pour tout $e \in N$, les sous-ensembles partiellement ordonnés $(\uparrow e)_G = \{e' \in N,\ e' \geq e\}$ et $(\downarrow e)_G = \{e' \in N,\ e' \leq e\}$ sont appelés respectivement *sous-ensemble supérieur de* e et *sous ensemble-inférieur de* e. Un sous ensemble à deux éléments $\{e, e'\} \subset N$ tels que $e' < e$ et $(\uparrow e')_G \cap (\downarrow e)_G = \{e, e'\}$ est appelé une arête de G. Par la suite, nous utiliserons les notations $\overrightarrow{ee'}$ où $[e', e]$ pour désigner une telle arête, notations dans lesquelles il sera sous entendu que $e' < e$. L'ensemble des arêtes de G sera noté $E(G)$.

Définition C.1.2. Un *morphisme d'ensembles partiellement ordonnés*

$$\beta : G = (N, \leq_G) \to G' = (N', \leq_{G'})$$

est une application croissante $\beta : N \to N'$, i.e. $e' \leq_G e \Rightarrow \beta(e') \leq_{G'} \beta(e)$. Un morphisme d'ensembles partiellement ordonnés injectif est appelé un *plongement*. Un *isomorphisme* d'ensembles partiellement ordonnés est un morphisme admettant un inverse à gauche et à droite. Un morphisme d'ensembles partiellement ordonnés $\tau : G \to G$ idempotent (i.e. $\tau^2 = \tau$) est appelé une *rétraction* de G.

Remarque C.1.3. On se gardera de croire qu'un morphisme d'ensembles partiellement ordonnés bijectif β est automatiquement un isomorphisme. Pour que cela soit le cas, il faut effet que l'inverse ensembliste β^{-1} soit une application croissante. Cette dernière condition est satisfaite si et seulement si on a l'équivalence $e' \leq_G e \Leftrightarrow \beta(e') \leq_{G'} \beta(e)$.

Définition C.1.4. Un arbre (enraciné) est un ensemble partiellement ordonné $\Gamma = (N(\Gamma), \leq)$ possédant un unique élément minimal e_0, appelé racine de Γ, et tel que pour tout $e \in N(\Gamma)$, le sous-ensemble partiellement ordonné $(\downarrow e)_\Gamma$ soit une chaîne.

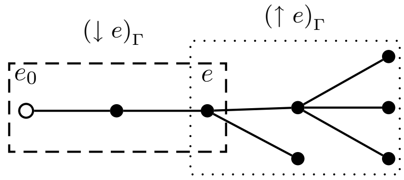


Fig. C.1.1. Un arbre Γ enraciné en e_0.

C.1.5. Les éléments de $N(\Gamma)$ sont appelés ses *sommets*. Les sommets maximaux d'un arbre Γ sont appelés les *feuilles* de Γ, et nous notons l'ensemble de ces feuilles par $\mathrm{Fe}(\Gamma)$. Étant donné $e \in N(\Gamma) \setminus \{e_0\}$, les éléments de la chaîne $\mathrm{Anc}_\Gamma(e) = (\downarrow e)_\Gamma \setminus \{e\}$ sont appelés les *ancêtres* de e. L'unique élément maximal $\mathrm{Par}_\Gamma(e)$ de $\mathrm{Anc}_\Gamma(e)$ est appelé le *parent* de e. Plus généralement, le n-ième ancêtre $\mathrm{Par}^n(e)$ de e est défini récursivement par la formule $\mathrm{Par}^n(e) = \mathrm{Par}\left(\mathrm{Par}^{n-1}(e)\right)$. Pour tout sous-ensemble $N' \subset N(\Gamma) \setminus \{e_0\}$, l'unique élément maximal $\mathrm{Anc}_\Gamma(N')$ de la chaîne

$$C = \bigcap_{e \in N'} \mathrm{Anc}_\Gamma(e)$$

est appelé le *premier ancêtre commun* des éléments de N'. Réciproquement, pour tout sommet $e \in N(\Gamma) \setminus \mathrm{Fe}(\Gamma)$, les éléments du sous-ensemble partiellement ordonné

$$\mathrm{Des}_\Gamma(e) = (\uparrow e)_\Gamma \setminus \{e\}$$

sont appelés les *descendants* de e. Les éléments minimaux de $\mathrm{Des}_\Gamma(e)$ sont appelés les fils de e, et le sous ensemble de $\mathrm{Des}_\Gamma(e)$ correspondant est noté $\mathrm{Fils}_\Gamma(e)$. Le nombre des fils d'un sommet $e \in N(\Gamma)$ est appelé le *degré* de e.

DÉFINITION C.1.6. Soit $\Gamma = (N(\Gamma), \leq)$ un arbre. Un sous-ensemble partiellement ordonné $\Gamma' = (N', \leq)$ de Γ qui est un arbre pour l'ordre induit est appelé un *sous-arbre* de Γ. On dit que Γ' est un *sous-arbre maximal* de Γ s'il existe $e \in N(\Gamma)$ tel que $\Gamma' = (\uparrow e)_\Gamma$, on dit alors que $\Gamma' = \Gamma(e)$ est le *sous-arbre maximal de* Γ *enraciné en* e.

C.1.7. On dit qu'un sommet $e \in N(\Gamma)$ est *au niveau* n si $(\downarrow e)_\Gamma$ est une chaîne de longueur n. Le sous-ensemble de $N(\Gamma)$ formé des sommets de Γ qui sont au niveau n est noté $N_n(\Gamma)$. Les chaînes maximales de Γ sont les chaînes

$$\Gamma_e = (\downarrow e)_\Gamma = \{e_0 < e_1 < \cdots < e_{n_e - 1} < e_{n_e} = e\}, \quad e \in \mathrm{Fe}(\Gamma).$$

La hauteur $h(\Gamma)$ de Γ est le supremum des longueurs $l(\Gamma_e) = n_e$ des chaînes maximales de Γ.

DÉFINITION C.1.8. Étant donné un arbre non trivial Γ enraciné en e_0, on appelle sous-arbre maximal essentiel de Γ, noté $\mathrm{Es}(\Gamma)$, le sous-arbre maximal de Γ enraciné, soit en l'unique feuille $\tilde{e}_0$ de Γsi Γ est une chaîne, soit en le premier ancêtre commun $\tilde{e}_0$ des feuilles de Γ.

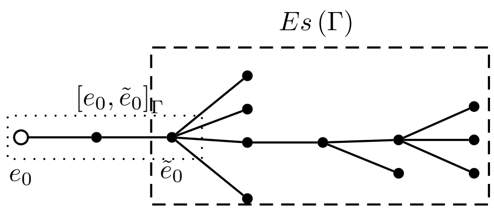


FIG. C.1.2. Un arbre Γ et son sous-arbre essentiel.

REMARQUE C.1.9. Si Γ est une chaîne, alors $\mathrm{Es}(\Gamma)$ est l'arbre trivial à un élément $\{e_0\}$. Plus généralement, un arbre Γ se déduit de son sous-arbre essentiel $\mathrm{Es}(\Gamma)$ en remplaçant la racine $\tilde{e}_0$ de ce dernier par la chaîne $[e_0, \tilde{e}_0]_\Gamma$.

DÉFINITION C.1.10. Un *morphisme d'arbres*

$$\beta : \Gamma' = (N(\Gamma'), \leq_{\Gamma'}) \to \Gamma = (N(\Gamma), \leq_\Gamma)$$

est un morphisme d'ensembles partiellement ordonnés tel que l'image d'une chaîne maximale de Γ' soit une chaîne maximale de Γ. On dira aussi que β est un morphisme *dominant*.

Remarque C.1.11. Puisque les chaînes maximales d'un arbre Γ sont les chaînes $\Gamma_e = (\downarrow e)_\Gamma$, $e \in \mathrm{Fe}(\Gamma)$, l'image de la racine e'_0 de Γ' par un morphisme d'arbres $\beta : \Gamma' \to \Gamma$ est la racine e_0 de Γ. De même l'image d'une feuille de Γ' par β est une feuille de Γ. En particulier, la longueur de l'image $\beta(\Gamma'_e)$ d'une chaîne maximale Γ'_e de e est inférieure ou égale à la longueur de la chaîne initiale. De plus l'image d'une arête $\overrightarrow{ee'}$ de Γ' est soit un unique élément $\beta(e') = \beta(e)$, soit l'arête $\overrightarrow{\beta(e)\beta(e')}$ de Γ.

Lemme C.1.12. *Un morphisme d'arbres $\beta : \Gamma' \to \Gamma$ est un isomorphisme si et seulement si il est bijectif.*

Démonstration. Il suffit de montrer que si β est bijectif, alors pour tout couple de sommets $e, e' \in N(\Gamma')$ tels que $\beta(e') \leq_\Gamma \beta(e)$, on a $e' \leq e$. Puisque β est croissant, il suffit finalement de montrer que e et e' sont comparables. Or $\beta(e')$ et $\beta(e)$ sont comparables, ce qui implique qu'il existe au moins une chaîne maximale C de Γ les contenant. Puisque β est un morphisme d'arbres, nous pouvons de plus supposer que C est l'image d'une chaîne maximale C' de Γ' contenant e'. Par conséquent, $\beta^{-1}(C) = C'$ car β est bijectif, et donc $e \in C'$ est comparable avec e'. □

Définition C.1.13. On dit qu'un morphisme d'arbres $\beta : \Gamma' \to \Gamma$ est une *contraction* s'il se factorise par une rétraction $\tau : \Gamma' \to \Gamma'$ de Γ' suivie d'un plongement dominant $i : \tau(\Gamma') \to \Gamma$.

On dit qu'une contraction $\beta : \Gamma' \to \Gamma$ est *maximale* si pour tout $e \in N(\Gamma')$, $\beta^{-1}(\beta(e))$ est soit réduit à e lui-même, soit un sous-arbre maximal de Γ'.

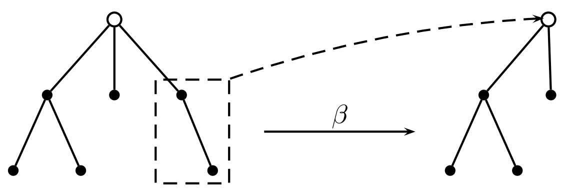


Fig. C.1.3. Une contraction non maximale.

Lemme C.1.14. *Soient $\beta : \Gamma' \to \Gamma$ une contraction maximale, et $e \in N(\Gamma)$ un élément de Γ. Si $\beta^{-1}(e)$ contient deux éléments, alors e est une feuille de Γ.*

Démonstration. En effet, si $\beta^{-1}(e)$ contient deux éléments alors $\beta^{-1}(e)$ est un sous-arbre maximal de Γ', qui contient donc une feuille e' de Γ'. Ceci implique que $e = \beta(e')$ est une feuille de Γ' puisque β est en particulier un morphisme d'arbres. □

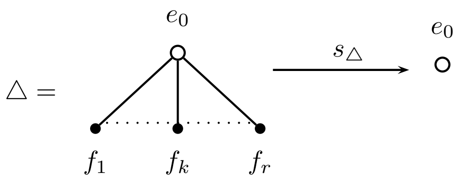
C.1.15. Il est clair que la composée de deux contractions maximales est encore une contraction maximale. Nous notons $\mathcal{T}$ la catégorie dont les objets sont les arbres enracinés, et dont les morphismes sont les contractions maximales. Tout objet Γ de $\mathcal{T}$ admet un morphisme constant canonique $s_\Gamma : \Gamma \to \{e_0\}$ dans $\mathcal{T}$, où $\{e_0\}$ désigne l'arbre trivial à un élément.

Définition C.1.16. Soit $\Gamma = (N(\Gamma), \leq)$ un arbre et soit $e \in N(\Gamma) \setminus \mathrm{Fe}(\Gamma)$ un sommet tel que $\mathrm{Fils}_\Gamma(e) = \{f_1, \dots, f_r\} \subset \mathrm{Fe}(\Gamma)$. Soit $\hat{\Gamma}(e)$ le sous-arbre de Γ d'ensemble sous-jacent $N\left(\hat{\Gamma}(e)\right) = N(\Gamma) \setminus \mathrm{Fils}_\Gamma(e)$. On appelle *contraction des* *feuilles en* e, la contraction maximale $\tau_e : \Gamma \to \hat{\Gamma}(e)$ définie ensemblistement par

$$\tau_e(e') = \begin{cases} e' & \text{si } e' \notin \mathrm{Fils}_\Gamma(e) \\ e & \text{sinon} \end{cases} .$$

On dira aussi, de façon réciproque, que Γ est obtenu à partir de $\hat{\Gamma}(e)$ en effectuant *l'éclatement de la feuille* $e \in \mathrm{Fe}\left(\hat{\Gamma}(e)\right)$, *de feuilles exceptionnelles* $f_1, \ldots, f_r$.

EXEMPLE C.1.17. Si $\triangle$ est un arbre de hauteur 1, de feuilles $\mathrm{Fe}(\triangle) = \{f_1, \ldots, f_r\}$ et de racine e_0, alors le morphisme constant canonique $s_\triangle : \triangle \to \{e_0\}$ réalise $\triangle$ comme l'éclatement de l'arbre trivial $\{e_0\}$, de feuilles exceptionnelles $\{f_1, \ldots, f_r\}$.



Intuitivement, tout arbre Γ peut être obtenu à partir de l'arbre trivial $\{e_0\}$ à un élément en éclatant successivement des feuilles. Ceci revient à dire que l'homomorphisme constant canonique $s_\Gamma : \Gamma \to \{e_0\}$ se factorise en une succession de contractions de feuilles. Plus généralement, le résultat suivant décrit la structure des morphismes dans la catégorie $\mathcal{T}$.

PROPOSITION C.1.18. *Tout morphisme* $\beta : \Gamma' \to \Gamma$ *dans* $\mathcal{T}$ *se factorise dans* $\mathcal{T}$ *par une succession de contractions de feuilles suivie d'un plongement.*

DÉMONSTRATION. L'inclusion $\beta(\Gamma') \subset \Gamma$ étant un plongement, nous pouvons remplacer Γ par $\tilde{\Gamma} = \beta(\Gamma')$ et le morphisme β par la contraction maximale surjective $\tilde{\beta} = \beta \mid^{\tilde{\Gamma}} : \Gamma' \to \tilde{\Gamma}$. Soit maintenant $e \in N(\Gamma')$ un sommet tel que $\mathrm{Fils}_{\Gamma'}(e) \subset \mathrm{Fe}(\Gamma')$, et soit $\triangle(e) = \{e\} \cup \mathrm{Fils}_{\Gamma'}(e)$. Puisque $\tilde{\beta}$ est une contraction maximale, soit $\tilde{\beta}(\triangle(e)) = \tilde{\beta}(e)$, soit $\tilde{\beta}$ induit un isomorphisme de $\triangle(e)$ sur son image. Dans le premier cas, $\tilde{\beta}$ se factorise dans $\mathcal{T}$ via la contraction $\tau_e : \Gamma' \to \hat{\Gamma}'(e)$ des feuilles en e. Si la contraction maximale induite $\tilde{\beta}_e : \hat{\Gamma}'(e) \to \tilde{\Gamma}$ est injective, alors $\tilde{\beta}_e$ est bijectif, donc, d'après (C.1.12), est un isomorphisme. Sinon, nous pouvons répéter la même construction partout où cela s'avère nécessaire. On obtient finalement, après un nombre fini d'étapes un arbre $\bar{\Gamma}'$, une contraction maximale surjective $\tau : \Gamma' \to \bar{\Gamma}$ et un isomorphisme $\bar{\beta} : \bar{\Gamma}' \xrightarrow{\sim} \tilde{\Gamma}$. □

C.2. Construction d'arbres par recollements

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, tout arbre peut être obtenu à partir de l'arbre trivial à un élément en effectuant une succession d'éclatements. D'autre part, l'intuition suggère qu'un arbre Γ peut être obtenu en "recollant" des chaînes de façon adéquate, et que tout morphisme $\beta : \Gamma' \to \Gamma$ dans $\mathcal{T}$ est uniquement déterminé par son effet sur les chaînes maximales de Γ'. Dans ce paragraphe, nous établissons deux résultats techniques simples justifiant cette intuition. Il s'agit pour l'essentiel d'énoncés classiques de recollement, adaptés pour la catégorie $\mathcal{T}$.

LEMME C.2.1. *Soient* Γ *et* Γ' *deux arbres. Soit* $(\beta_e)_{e \in Fe(\Gamma')}$ *une collection de morphismes d'ensembles partiellement ordonnés* $\beta_e : \Gamma'_e = (\downarrow e)_{\Gamma'} \to \Gamma$, $e \in Fe(\Gamma')$ *satisfaisant les conditions suivantes :*

a) Pour tout $e \in Fe(\Gamma')$, $\beta_e : \Gamma'_e \to \Gamma$ *est dans* $\mathcal{T}$ *;*

b) Pour tout couple $e, e' \in Fe(\Gamma')$ *de feuilles distinctes de* Γ', *la restriction* $\beta_{e,e'}$ *de* β_e *à la chaîne* $\Gamma'_e \cap \Gamma'_{e'}$ *de* Γ' *coïncide avec la restriction de* $\beta_{e'}$ *à cette même chaîne ;*

c) Pour tout couple $e, e' \in Fe(\Gamma')$ de feuilles distinctes de Γ', le morphisme d'ensembles partiellement ordonnés

$$\beta_{e,e'} = \beta_{e',e} : \Gamma'_e \cap \Gamma'_{e'} = (\downarrow Anc_{\Gamma'}(\{e, e'\})) \to \beta_e(\Gamma'_e) \cap \beta_{e'}(\Gamma'_{e'})$$

est dans $\mathcal{T}$.

Alors il existe un unique morphisme $\beta : \Gamma' \to \Gamma$ dans $\mathcal{T}$ dont la restriction $\beta|_{\Gamma'_e}$ à la chaîne maximale Γ'_e coïncide avec β_e pour tout $e \in Fe(\Gamma')$.

Démonstration. Les conditions a) et b) impliquent que les morphismes d'ensembles partiellement ordonnés β_e et $\beta_{e'}$ sont des morphismes d'arbres qui coïncident sur l'intersection des deux chaînes maximales Γ'_e et $\Gamma'_{e'}$. Il est alors clair qu'il existe un unique morphisme d'arbre $\beta : \Gamma' \to \Gamma$ dont la restriction à la chaîne Γ'_e coïncide avec β_e pour tout $e \in \mathrm{Fe}(\Gamma')$. Il suffit donc de montrer que β est une contraction maximale. Supposons que la préimage $\beta^{-1}(g)$ d'un élément $g \in N(\Gamma)$ contienne deux sommets $a \in N(\Gamma'_e)$ et $b \in N(\Gamma'_{e'})$. Si a et b ne sont pas comparables alors c) entraîne que leur premier ancêtre commun $c \in N(\Gamma'_e \cap \Gamma'_{e'})$ appartient à $\beta^{-1}(g)$. Ainsi $\beta^{-1}(g)$ a un unique élément minimal c_0 et $\beta^{-1}(g) \subset (\uparrow c_0)_{\Gamma'}$. Il suffit maintenant de montrer l'inclusion inverse. Soit donc $c' \in N((\uparrow c_0)_{\Gamma'})$. Choisissons $e \in \mathrm{Fe}(\Gamma')$ tel que $c' \in N(\Gamma'_e)$. Puisque la restriction de β à Γ'_e est dans $\mathcal{T}$ nous concluons que $\beta^{-1}(g) \cap \Gamma'_e$ est un sous-arbre maximal de Γ'_e, donc est égal à la sous-chaîne maximale $(\uparrow c_0)_{\Gamma'} \cap \Gamma'_e$ de Γ'_e, qui contient c'. □

Lemme C.2.2. *Soit C_i une collection de chaînes de longueur $n_i \geq 1$, indexée par un ensemble fini I, et satisfaisant les condition suivantes :*

a) Pour tout couple d'indices $i \neq j$, il existe un élément $a_{ij} \in N(C_i) \backslash \max(N(C_i))$ et un isomorphisme de chaînes $\phi_{ij} : C_{ij} = (\downarrow a_{ij})_{C_i} \xrightarrow{\sim} C_{ji} = (\downarrow a_{ji})_{C_j}$ tel que $\phi_{ji} = \phi_{ij}^{-1}$;

b) Pour tout triplet d'indices i,j et k

$$\phi_{ij}(C_{ij} \cap C_{ik}) = C_{ji} \cap C_{jk} \quad et \quad \phi_{ik} = \phi_{jk} \circ \phi_{ij} \ sur\ C_{ij} \cap C_{ik}.$$

Alors il existe une arbre Γ, unique à isomorphisme près, enraciné en e_0 et de feuilles e_i, $i \in I$, et des morphismes d'arbres $\psi_i : C_i \to \Gamma$ tels que :

a') Pour tout $i \in I$, ψ_i induit un isomorphisme d'arbres entre C_i et la chaîne maximale $\Gamma_{f_i} = (\downarrow e_i)_\Gamma$;

b') $\psi_i(C_{ij}) = \Gamma_{e_i} \cap \Gamma_{e_j}$ et $\psi_i = \psi_j \circ \phi_{ij}$ sur C_{ij}.

Démonstration. Prises conjointement, les conditions a) et b) signifient que la relation binaire $C_{ij} \ni g_i \sim \phi_{ij}(g_i) \in C_{ji}$ est une relation d'équivalence sur la réunion disjointe $\bigsqcup_{i \in I} C_i$, compatible avec les relations d'ordre sur les chaînes C_i, $i \in I$. Ainsi, l'application quotient

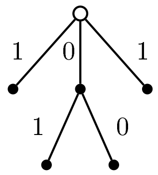
$$\psi : \bigsqcup_{i \in I} C_i \to \Gamma = (N(\Gamma), \leq_\Gamma) := \bigsqcup_{i \in I} C_i / \sim,$$

où $N(\Gamma)$ est muni de la relation d'ordre quotient, est un morphisme d'ensembles partiellement ordonnés. Notons $\psi_i : C_i \to \Gamma$ les morphismes induits par restriction aux chaînes C_i, $i \in I$. Puisque les chaînes sont de longueur $n_i \geq 1$, nous concluons que la racine $e_{0,i}$ de C_i appartient à C_{ij} pour tout $i \neq j$. Par conséquent, il existe un unique élément minimal $e_0 \in N(\Gamma)$ tel que $\psi_i(e_{0,i}) = e_0$ pour tout $i \in I$. D'autre part la condition a) implique que les images $e_i = \psi_i(e_{i,n_i})$ des feuilles e_{i,n_i} des chaînes C_i, $i \in I$, sont toutes distinctes. Il est alors clair que Γ est un arbre enraciné en e_0, de feuilles e_i, $i \in I$, et que les deux assertions a') et b') sont satisfaites. Finalement, l'unicité à isomorphisme près est une conséquence de (C.2.1). □

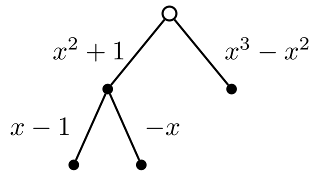
C.3. Arbres enracinés pondérés

Dans ce paragraphe, nous rappelons la notion d'arbre pondéré.

DÉFINITION C.3.1. Soient Γ un arbre et A un ensemble. On appelle *pondération de Γ à valeurs dans A* (ou A-pondération) une application d'ensembles $w : E(\Gamma) \to A$, i.e. une application qui à toute arête $\overrightarrow{ee'}$ de Γ associe un élément $w\left(\overrightarrow{ee'}\right)$ de A. Un arbre Γ muni d'une pondération $w : E(\Gamma) \to A$ est appelé un arbre A-pondéré. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble A des poids, nous dirons simplement que Γ est un arbre pondéré. Pour désigner un tel arbre pondéré, nous utiliserons alternativement les trois notations γ, Γ_w, ou encore (Γ, w).



Un arbre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -pondéré



Un arbre $\mathbb{R}[x]$ -pondéré

Rappelons qu'étant donnée une contraction maximale $\beta : \Gamma' \to \Gamma$, l'image d'une arête $\overrightarrow{ee'}$ de Γ' est soit réduite à un élément de $N(\Gamma)$, soit l'arête $\overrightarrow{\beta(e)\beta(e')}$ de Γ. Ceci donne un sens à la définition suivante :

DÉFINITION C.3.2. Un *morphisme d'arbres A-pondérés* $\beta : (\Gamma', w') \to (\Gamma, w)$ est une contraction maximale telle que $w\left(\overrightarrow{\beta(e)\beta(e')}\right) = w'\left(\overrightarrow{ee'}\right)$ pour toute arête $\overrightarrow{ee'}$ de Γ' telle que $\beta(e) \neq \beta(e')$.

On note alors $\mathcal{T}_w^A$ la catégorie dont les éléments sont les arbres A-pondérés, et dont les morphismes sont les morphismes d'arbres A-pondérés.

Il est clair que toutes les constructions sur les arbres introduites dans le premier paragraphe de ce chapitre peuvent être effectuées sur des arbres A-pondérés. Citons, en particulier le résultat utile suivant, corollaire direct de (C.1.18).

PROPOSITION C.3.3. *Tout morphisme $\beta : \gamma' \to \gamma$ dans $\mathcal{T}_w^A$ se factorise dans $\mathcal{T}_w^A$ par une succession de contractions de feuilles suivie d'un plongement.*

Les techniques de recollement (C.2.1) et (C.2.2) dans la catégorie $\mathcal{T}$ se généralisent de même de façon évidente dans la catégorie $\mathcal{T}_w^A$.

DÉFINITION C.3.4. Une pondération $w : E(\Gamma) \to A$ d'un arbre Γ est dite fine si pour toute paire d'éléments $e_1, e_2 \in N(\Gamma)$, fils d'un même élément $e \in N(\Gamma)$, on a $w(\overrightarrow{e_1 e}) \neq w(\overrightarrow{e_2 e})$. Un arbre muni d'une A-pondération fine est appelé un arbre *finement A-pondéré.* On note $\mathcal{T}_{w,f}^A$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{T}_w^A$ dont les objets sont les arbres finement A-pondérés.

Le procédé (C.2.2) de construction d'arbres par recollement s'adapte sous la forme suivante aux arbres finement A-pondérés.

LEMME C.3.5. *Soit (C_i, w_i) une collection de chaînes A-pondérées de longueur $n_i \geq 1$, indexée par un ensemble fini I, et satisfaisant les conditions suivantes :*

a) Pour tout couple d'indices $i \neq j$, il existe un élément $a_{ij} \in N(C_i) \backslash \max(N(C_i))$ et un isomorphisme de chaînes A-pondérées $\phi_{ij} : C_{ij} = (\downarrow a_{ij})_{C_i} \xrightarrow{\sim} C_{ji} = (\downarrow a_{ji})_{C_j}$ tel que $\phi_{ji} = \phi_{ij}^{-1}$;

b) Pour tout triplet d'indices i,j et k

$$\phi_{ij}(C_{ij} \cap C_{ik}) = C_{ji} \cap C_{jk} \quad et \quad \phi_{ik} = \phi_{jk} \circ \phi_{ij} \ sur\ C_{ij} \cap C_{ik}.$$

c) Pour tout couple d'indices $i \neq j$, $w_i\left(\overrightarrow{e_i a_{ij}}\right) \neq w_j\left(\overrightarrow{e_j a_{ji}}\right)$, où $e_i \in N(C_i)$ et $e_j \in N(C_j)$ désigne les fils de a_{ij} et a_{ji} respectivement.

Alors il existe un arbre finement A-pondéré $\gamma = (\Gamma, w)$, unique à isomorphisme près, enraciné en e_0 et de feuilles e_i, $i \in I$, et des morphismes d'arbres A-pondérés $\psi_i : (C_i, w_i) \to \gamma$ tels que :

a') Pour tout $i \in I$, ψ_i induit un isomorphisme d'arbres A-pondérés entre (C_i, w_i) et la sous-chaîne maximale A-pondérée $\Gamma_{f_i} = (\downarrow e_i)_\Gamma$ de γ ;

b') $\psi_i(C_{ij}) = \Gamma_{e_i} \cap \Gamma_{e_j}$ et $\psi_i = \psi_j \circ \phi_{ij}$ sur C_{ij}.

Démonstration. Les conditions a) et b) assurent que l'arbre Γ, dont l'existence est garantie par (C.2.1), peut être muni de manière unique d'une pondération "quotient" $w : E(\Gamma) \to A$, la condition c) garantissant quant à elle que cette dernière est une A-pondération fine. $\square$

ANNEXE D

Caractérisation des surfaces affines normales d'invariant de Makar-Limanov trivial

La présente annexe reproduit le texte original de l'article [**13**] consacré à la caractérisation des surfaces affines normales complexes S d'invariant de Makar-Limanov trivial en terme de la structure du diviseur de bord d'un complétion minimale d'une surface de ce type. Nous y établissons qu'une surface affine normale a un invariant de Makar-Limanov trivial si et seulement si elle admet une complétion $\bar{S}$, non singulière le long du bord $B = \bar{S} \setminus S$, et telle que B soit un zigzag, c'est-à-dire une chaîne de courbes rationnelles complètes non singulières.

Historiquement, les surfaces non singulières admettant un complétion de ce type apparaissent pour la première dans [**20**], dans lequel elles sont caractérisées comme étant les surfaces quasi-homogènes, *i.e.* les surfaces S dont le groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(S)$ possède une orbite dense, dont le complémentaire est constitué d'un nombre fini de points fermés de S. Plus récemment, ces surfaces complètables par un zigzag on acquis un rôle central dans l'étude des surfaces affines S dont l'invariant de Makar-Limanov $\mathrm{ML}(S)$ est trivial, Bandman et Makar-Limanov [**1**] ayant en effet montré qu'une surface affine complexe non singulière, d'invariant de Makar-Limanov trivial, est quasi-homogène au sens ci-dessus, donc complètable par un zigzag. Réciproquement, une construction déjà utilisée par Gizatullin [**20**] permet de conclure qu'une surface non singulière complètable par un zigzag a un invariant de Makar-Limanov trivial.

L'article reproduit ici donne un preuve complète et indépendante des deux caractérisations réciproque ci-dessus, en les généralisant au cas des surfaces affine complexes normales. Bien que dans sa version originale le résulat ne concerne que ce type de surfaces, il est aisé de se convaincre que les même arguments conduisent au même résulat pour des surfaces affines normales définies sur un corps algébriquement clos de caractérisque nulle, à savoir la caractérisation suivante, dont nous faisons usage dans cette thèse.

Théorème D.0.6. *Une surface affine normale S/k, définie sur un corps algébriquement clos $k = \bar{k}$ de caractéristique nulle et non isomorphe à $\left(\mathbb{A}^1_k\right)_* \times \mathbb{A}^1_k$, où $\left(\mathbb{A}^1_k\right)_* = \mathrm{Spec}\left(k\left[x, x^{-1}\right]\right)$, a un invariant de Makar-Limanov trivial si et seulement si S admet une complétion par une surface projective $\bar{S}$, non singulière le long du diviseur $B = \bar{S} \setminus S$, et telle B soit un zigzag, i.e. une chaîne de courbes rationnelles non singulières. Si cela est le cas, alors, pour toute complétion minimale $\bar{S}'$ de S, $B' = \bar{S}' \setminus S$ est aussi un zigzag.*

Completions of normal affine surfaces with a trivial Makar-Limanov invariant

We study normal affine surfaces with non-trivial algebraic $\mathbb{C}_+$-actions in term of their completions. As a generalization of a result of Gizatullin [**20**] and Bertin [**2**], we prove that a normal affine surface has a trivial Makar-Limanov invariant if and only if it is completable by a zigzag.

Introduction

For a connected normal affine surface $V = Spec\,(A)$ over $\mathbb{C}$, the Makar-Limanov invariant of V **[31]** is the subalgebra $ML\,(V) \subset A$ of all regular functions invariant under every algebraic $\mathbb{C}_+$-actions on V. Constant functions are certainly contained in $ML\,(V)$, and we say that the Makar-Limanov invariant of V is *trivial* (or that V is an *ML-surface*) if $ML\,(V) = \mathbb{C}$. In **[1]**, Bandman and Makar-Limanov have re-discovered a link between nonsingular ML-surfaces and *geometrically quasihomogeneous* surfaces studied by Gizatullin in **[20]**, that is surfaces whose automorphism group has a Zariski open orbit with a finite complement. More precisely, they have established that, on a nonsingular ML-surface V, there exist at least two non-trivial algebraic $\mathbb{C}_+$-actions which generate a subgroup H of the automorphism group $Aut\,(V)$ of V such that the orbit $H.v$ of a general closed point $v \in V$ has finite complement. By Gizatullin **[20]** such a surface is rational and either isomorphic to $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$or can be obtained from a nonsingular projective surface $\bar{V}$ by deleting an ample divisor of a special form, called a *zigzag.* This is just a linear chain of non-singular rational curves. Thus the following theorem, whose original proof is due to Bertin, holds:

Théorème. *(*[**1, 2, 20**]*) A nonsingular affine surface V non isomorphic to $\mathbb{C}^* \times \mathbb{A}^1$ has a trivial Makar-Limanov invariant if and only if it is completable by a zigzag.*

More generally, in this paper we prove the following theorem:

Théorème. *A normal affine surface V non isomorphic to $\mathbb{C}^* \times \mathbb{A}^1$ has a trivial Makar-Limanov invariant if and only if it is completable by a zigzag.*

We are grateful to the referee for pointing us out that this theorem is also proved in a recent preprint, namely **[10]**, but under the additional assumption that V is rational. However the fact that the existence of a completion of V by a zigzag implies that V is rational is proved in **[20]**, at least under the assumption that V is nonsingular. Since this last assumption is not needed for this point it follows that, at the time we write this final version, the general case can be more or less deduced by gathering the necessary results from the previously mentioned papers. However, in order to set up a good framework for a more detailed study of ML-surfaces, we give hereafter a self-contained and straightforward proof of the theorem.

D.1. Rulings and completions of normal surfaces

We use the following terminology :

• A surface is a connected, reduced, normal $\mathbb{C}$-scheme of finite type and of dimension 2.

• The intersection number of two divisors D_1 and D_2 on a surface V regular at the points of $D_1 \cap D_2$ is denoted by $(D_1 \cdot D_2)$. The self-intersection number of a divisor $D \subset V_{reg}$ is denoted by $\left(D^2\right) = (D \cdot D)$.

• For a morphism $f : W \to V$ between normal varieties and for a divisor D on V we denote by $q^{-1}\,(D)$ the set-theoretic preimage of D, whereas $q^*\,(D)$ denotes its preimage considered as a cycle.

• An $\mathbb{A}^1$-fibration (a $\mathbb{P}^1$-fibration) on a surface V is a surjective morphism $\rho : V \to Z$ on a nonsingular curve Z with general fibers isomorphic to the affine line $\mathbb{A}^1$ (to the projective line $\mathbb{P}^1$, respectively). The fibers of ρ which either are not isomorphic to $\mathbb{A}^1$ (respectively $\mathbb{P}^1$) or are not reduced are called *degenerate.*

• An SNC-divisor D on a surface is a divisor with normal crossing singularities whose irreducible components are nonsingular.

• For a normal affine surface V we call a *completion* of V an open embedding $i : V \hookrightarrow \bar{V}$ of V into a normal projective surface $\bar{V}$, nonsingular along $B = \bar{V} \setminus i\,(V)$

and such that B is an SNC-divisor. We say that the completion is minimal if B contains no (-1)-curve which meets at most two other components transversally in a single point.

- For an isolated singularity (V,P) of a normal surface, a minimal embedded resolution of p is a birational morphism $\pi : W \to V$ such that W is nonsingular, $W \backslash \pi^{-1}(P) \simeq V \backslash \{P\}$ and $\pi^{-1}(P)$ is an SNC-divisor which contains no (-1)-curve meeting at most two other components transversally in a single point.

DÉFINITION D.1.1. A *zigzag* B on a normal projective surface $\bar{V}$ is a connected SNC-divisor with nonsingular rational curves as irreducible components and whose dual graph is a linear chain. If $Supp(B) = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, the irreducible components B_i, $1 \leq i \leq n$, of B can be ordered in such a way that

$$(B_i \cdot B_j) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad |i-j| = 1 \\ 0 & \text{if} \quad |i-j| > 1 \end{cases}.$$

A zigzag with such an ordering on the set of its components is called *oriented* and the sequence $\left(\left(B_1^2\right), \ldots, \left(B_n^2\right)\right)$ is called the *type* of B. For an oriented zigzag B, the components B_1 and B_n are called the boundaries of B. Given an irreducible component B_{i_0} of B we denote by $B_{i_0}^{\pm}$ the component $B_{i_0 \pm 1}$ provided it does exist. A zigzag B is called minimal if it contains no (-1)-curve.

Let $C \subset \bar{V}$ be an SNC-divisor. A zigzag B of C is a zigzag with support contained in C and such that no irreducible component of B corresponds to a ramification vertex of the dual graph of C. A zigzag B which is maximal for the inclusion of supports is called maximal. If C itself is not a zigzag, then we call a maximal zigzag B of C simple if only one boundary of B meets a ramification vertex of the dual graph of C. We call it double if this happens for both boundaries of B.

We say that a normal affine surface V is completable by a zigzag if there exists a completion $\bar{V}$ of V such that $B := \bar{V} \setminus V$ is a zigzag.

D.1.1. Properties of $\mathbb{P}^1$-fibrations on normal projective surfaces. We recall some properties of $\mathbb{P}^1$-fibrations on a normal projective surface. The following lemma is well known for a nonsingular surface $\bar{V}$ (see [**36**, Lemma 1.4.1, p.195]).

LEMME D.1.2. *Let $\bar{q} : \bar{V} \to \bar{Z}$ be a $\mathbb{P}^1$-fibration. If $F := \sum_{1=1}^{p} n_i C_i$ is a fiber of $\bar{q}$ with irreducible components C_i then the following hold.*

1. *The morphism $\bar{q}$ admits a section $S \subset \bar{V}$.*
2. *If F is irreducible and $P = F \cap S$ is a regular point of $\bar{V}$ then F is non-degenerate.*
   Now assume that F is degenerate, then :
3. *The support of F is connected.*
4. *If a singular point P of $\bar{V}$ is contained in a unique curve C_i then it is a cyclic quotient singularity. In this case the proper transform of C_i in a minimal embedded resolution $\pi : \bar{W} \to \bar{V}$ of P meets a terminal component of $\pi^{-1}(P)$.*
5. *If C_i does not contain any singular point of $\bar{V}$ then it is nonsingular ($C_i \simeq \mathbb{P}^1$) and $\left(C_i^2\right) < 0$.*
6. *If C_i and C_j, $i \neq j$, are nonsingular and do not contain any singular point of $\bar{V}$ then $(C_i \cdot C_j) = 0$ or 1.*
7. *For any three distinct indices i, j and l, either $C_i \cap C_j \cap C_l = \emptyset$ or $C_i \cap C_j \cap C_l$ is a singular point P of $\bar{V}$.*
8. *If F is contained in $\bar{V} \setminus Sing\left(\bar{V}\right)$ then at least one of the C_i, say C_1, is a (-1)-curve. If $\tau : \bar{V} \to \bar{V}_1$ denotes the contraction of C_1 then $\bar{q}$ factors as*

$$\bar{q} : \bar{V} \xrightarrow{\tau} \bar{V}_1 \xrightarrow{\bar{q}_1} \bar{Z},$$

where $\bar{q}_1 : \bar{V}_1 \to \bar{Z}$ is a $\mathbb{P}^1$-fibration. Hence all but one irreducible component of F can be contracted succesively to obtain a non-degenerate fiber. Therefore F is an SNC-divisor whose dual graph $\Gamma(F)$ is a tree.

(9) *If F is contained in $\bar{V} \setminus Sing\left(\bar{V}\right)$ and if one of the n_i, say n_1, is equal to 1, then there exists a (-1)-curve among the C_i, $2 \leq i \leq p$.*

PROOF. We let $\phi : \bar{W} \to \bar{V}$ be a minimal embedded resolution of singularities. We denote by $\tilde{q}$ the $\mathbb{P}^1$-fibration on $\bar{W}$ lifting $\bar{q}$ and by $\tilde{S}$ a section of $\tilde{q}$. Then $S := \phi\left(\tilde{S}\right)$ is a section of $\bar{q}$, and so (1) follows. In the nonsingular case, (2) is a consequence of the existence of a section of $\bar{q}$ and $(3)-(9)$ follow from the genus formula.

In the normal case, (3) and $(5)-(9)$ follow at once from the nonsingular case and (4) can be proved in the same way as Lemma 1.4.4 in [**36**, p.196]. To show (2) we let $F = \bar{q}^{-1}(z_0)$, $z_0 \in Z$, be an irreducible fiber of $\bar{q}$. Its total transform $\phi^{-1}(F)$ is the fiber $\tilde{F} = \tilde{q}^{-1}(z_0)$ of $\tilde{q}$. If $P \in F$ is a singular point of $\bar{V}$ then $\phi^{-1}(P) \subset \bar{W}$ contains no (-1)-curve which meets at most two other components transversally in a single point. Then assertions (7) and (8) on $\bar{W}$ imply that $\phi^{-1}(P)$ contains no (-1)-curve at all. It follows from (8) that the proper transform F' of F is the unique (-1)-curve in $\tilde{F}$. Thus F has to be a non-reduced fiber of $\bar{q}$ for otherwise F' has multiplicity one in $\tilde{F}$ which contradicts (9). Provided that $P_0 = S \cap F$ is a regular point of $\bar{V}$, F does not contain any singular point of $\bar{V}$ and so is non-degenerate, which proves (2). □

REMARQUE D.1.3. Note that by (7) and (8), a (-1)-curve E contained in a degenerate fiber $F \subset \bar{V}_{reg}$ of $\bar{q}$ cannot be a ramification vertex of the dual graph of $F \cup S$.

We introduce the following :

DÉFINITION D.1.4. Let $F \subset \bar{V}_{reg}$ be a degenerate fiber of a $\mathbb{P}^1$-fibration $\bar{q} : \bar{V} \to \bar{Z}$ over a nonsingular projective curve $\bar{Z}$ and S be a section of $\bar{q}$. A maximal zigzag D of F (see D.1.1) is called terminal if either $D = F$ or D is a maximal simple zigzag of F which does meet S.

In the following lemma we precise the position of (-1)-curves in a degenerate fiber of a $\mathbb{P}^1$-fibration.

LEMME D.1.5. *Let $\bar{q} : \bar{V} \to \bar{Z}$ be a $\mathbb{P}^1$-fibration on a normal projective surface $\bar{V}$ over a nonsingular projective curve $\bar{Z}$. Let S be a section of $\bar{q}$ and let $F \subset \bar{V}_{reg}$ be a degenerate fiber of $\bar{q}$. If $F \cup S$ is not a zigzag then the following assertions hold.*

1) At least one (-1)-curve E in F is contained in a maximal terminal zigzag of F .

2) If all such (-1)-curve are contained in the same maximal terminal zigzag D of F then every ramification vertex of the dual graph $\Gamma(F \cup S)$ of $F \cup S$ belongs to the shortest path in $\Gamma(F \cup S)$ which joins D and S.

PROOF. Given a (-1)-curve E in F we let $\tau_E : \bar{V} \to \bar{V}_1$ be the contraction of E and we consider the factorization

$$\bar{q} : \bar{V} \overset{\tau_E}{\to} \bar{V}_1 \overset{\bar{q}_1}{\to} \bar{Z},$$

where $\bar{q}_1 : \bar{V}_1 \to \bar{Z}$ is a $\mathbb{P}^1$-fibration with a degenerate fiber $F_1 := \tau_E(F) \subset \left(\bar{V}_1\right)_{reg}$ and a section $S_1 = \tau_E(S)$. By our assumption the graph $\Gamma(F \cup S)$ has a ramification vertex so that $F \cup S$ has at least 4 irreducible components. By D.1.3, E is a component of a maximal zigzag D of F.

We consider first the case that $F \cup S = E_1 \cup E_2 \cup E_S \cup S$ has 4 irreducible components, where E_S meets S . It is easily seen that E_S corresponds to a ramification vertex of $\Gamma(F \cup S)$. Then E_1 and E_2 are both maximal terminal zigzags of F and at least one of them is a (-1)-curve, which proves the first assertion in this case. The second assertion follows then at once since E_S is a unique ramification vertex of $\Gamma(F \cup S)$.

To show (1) we may assume that F is not a zigzag for otherwise our statement is evidently true. We also suppose that $F \cup S$ has $n > 4$ irreducible components, and we assume on the contrary that every (-1)-curve E in F is contained either in a maximal simple zigzag of F which meets S or in a maximal double zigzag of F. We denote this maximal zigzag by $D = D(E)$. By our assumption the contraction τ_E of E gives a one-to-one correspondance between the maximal simple zigzags of $F \cup S$ and the maximal simple zigzags of $F_1 \cup S_1$. Moreover none of the maximal terminal zigzags of F is affected by this contraction. Since F_1 has one less irreducible components that F we can conclude by induction that there is a (-1)-curve E_1 in F_1 which belongs to a maximal terminal zigzag of F_1. Then $\tau_E^{-1}(E_1)$ is a (-1)-curve contained in a maximal terminal zigzag of F, a contradiction. Thus assertion (1) is proved.

To prove (2) we may suppose that F is not a zigzag and that $F \cup S$ has $n > 4$ irreducible components. We let E be a (-1)-curve in D. If $D \neq E$ then the contraction τ_E of E yields a bijection between maximal terminal zigzags of F_1 and those of F. Since D is the only maximal terminal zigzag of F affected by the contraction of E it follows from (1) that $\tau_E(D)$ contains a (-1)-curve. In fact it contains all (-1)-curves as in (1), and so we are done by induction.

In case $D = E$ we let H be a ramification vertex of $\Gamma(F \cup S)$ such that E is a branch of $\Gamma(F \cup S)$ at H. Then H has valency 3 for otherwise $\tau_E(H)$ is a ramification vertex of $\Gamma(F_1 \cup S_1)$ and hence none of the maximal terminal zigzags of F_1 contains a (-1)-curve which contradicts (1). Thus if $F_1 \cup S_1$ is a zigzag then we are done. If $F_1 \cup S_1$ is not a zigzag then $\tau_E(H)$ is contained in a maximal zigzag D_1 of F_1. If either D_1 meets S_1 or D_1 is double then τ_E provides a bijective correspondance between the maximal terminal zigzags of F different from E and those of F_1. Since these maximal zigzags of F were not affected by the contraction of E it follows that none of the maximal terminal zigzags of F_1 contains a (-1)-curve which again contradicts (1). Therefore D_1 is a maximal terminal zigzag of F_1 and it contains a (-1)-curve E_1 by (1). Our induction hypothesis then implies that every ramification vertex of $\Gamma(F_1 \cup S_1)$ belongs to the shortest path from E_1 to S_1 in $\Gamma(F_1 \cup S_1)$. As H is the only ramification vertex of $\Gamma(F \cup S)$ which is eliminated by the contraction of E, we conclude that every such ramification vertex belongs to the shortest path from E to S in $\Gamma(F \cup S)$. This proves the second assertion. $\square$

D.1.2. Properties of $\mathbb{A}^1$-fibrations on normal affine surfaces. Given a normal affine surface V together with an $\mathbb{A}^1$-fibration $q : V \to Z$ over a nonsingular affine curve Z, we let $\bar{V}$ be a minimal completion of V. Since V is affine the divisor $B := \bar{V} \setminus V$ is connected. The $\mathbb{A}^1$-fibration q on V induces a rational map $\bar{q} : \bar{V} \dashrightarrow \bar{Z}$, where $\bar{Z}$ denotes a nonsingular projective model of Z. The closures of the fibers of q in $\bar{V}$ define a pencil of nonsingular rational curves with at most one base point on B. If necessary, this base point and all infinitely near ones can be eliminated by a succession of blow-ups with centers outside of V. Thus we may suppose that $\bar{q}$ is a well-defined $\mathbb{P}^1$-fibration on $\bar{V}$.

D.1.6. In this way we arrive at a completion $\bar{V}$ of V with the following properties
:

(1) $\bar{V}$ is a normal projective surface, nonsingular along $B := \bar{V} \setminus V$, with a $\mathbb{P}^1$-fibration $\bar{q} : \bar{V} \to \bar{Z}$ such that the following diagram commutes

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook] \arrow[d, "q"'] & \bar{V} \arrow[d, "\bar{q}"] \\ Z \arrow[r, hook] & \bar{Z} \end{tikzcd}$$

(2) B is a connected SNC-divisor and can be written as $B = H \cup S \cup G$, where S is a section of $\bar{q}$, $H = \bigcup H_j$, where $H_j := \bar{q}^{-1}(z_j)$ with $z_j \in \bar{Z} \setminus Z$,and the connected components of G are trees of nonsingular rational curves.
(3) We can write $G = \bigcup_{i=}^{s} G_i$, where $\bar{q}(G_i) = z_i \in Z$ and where $z_1, \ldots, z_s \in Z$ are the points such that the fiber $q^{-1}(z_i) \subset V$ is degenerate. Thus $\bar{q}^{-1}(z_i) = G_i \cup \overline{q^{-1}(z_i)}$, $1 \leq i \leq s$, where $\overline{q^{-1}(z_i)}$ denotes the closure of $q^{-1}(z_i)$ in $\bar{V}$.

One can moreover assume that the boundary divisor B contains no (-1)-curve except maybe the section S. Since B contains no singular point of $\bar{V}$, it follows that every H_j is a nonsingular rational curve. In the sequel, such a completion will be called a *good completion of V with respect to q*.

For degenerate fibers of an $\mathbb{A}^1$-fibration on a normal affine surface V, there exists the following description.

LEMME D.1.7. *(Miyanishi* [**36**, Lemmas 1.4.2 and 1.4.4, p.196]*) If $q : V \to Z = \mathbb{A}^1$ is an $\mathbb{A}^1$-fibration then the following assertions hold :*

(1) *Every irreducible component C of $q^{-1}(z)$ is a connected component of $q^{-1}(z)$ and is a rational curve with only one place at infinity. Hence C is isomorphic to $\mathbb{A}^1$ provided it is nonsingular.*
(2) *Every such component C contains at most one singular point of V.*
(3) *The surface V has at most cyclic quotient singularities.*
(4) *IfC contains a singular point P of V and if $\pi : W \to V$ is a minimal embedded resolution of P then the closure $\bar{C}'$ in W of the proper transform C' of C meets a terminal component of $\pi^{-1}(P)$.*

D.2. Completions of ML-surfaces

This section is devoted to the proof of the following theorem :

THÉORÈME D.2.1. *A normal affine surface V has a trivial Makar-Limanov invariant if and only if it is completable by a zigzag.*

To reformulate our statement we need the following lemma.

LEMME D.2.2. *If V is a normal affine surface then the following assertions are equivalent :*

(1) *There exists an $\mathbb{A}^1$-fibration $q : V \to Z$ over a nonsingular affine curve Z.*
(2) *The surface V contains a principal Zariski open subset U which is a cylinder : $U \simeq C \times \mathbb{A}^1$.*
(3) *There exists a non-trivial algebraic $\mathbb{C}_+$-action on V.*

As a consequence we obtain :

COROLLAIRE D.2.3. *For a normal affine surface V the following assertions are equivalent :*

(1) *The Makar-Limanov invariant of V is trivial.*
(2) *There exists at least two nontrivial algebraic $\mathbb{C}_+$-actions on V such that their general orbits do not coincide.*
(3) *There exists at least two $\mathbb{A}^1$-fibrations $q_1 : V \to Z_1$ and $q_2 : V \to Z_2$ over nonsingular affine curves Z_1 and Z_2, such that the general fibers of q_1 and q_2 do not coincide.*

Thus, Theorem D.2.1 can be equivalently formulated as follows.

THÉORÈME D.2.4. *A normal affine surface is completable by a zigzag if and only if it admits two $\mathbb{A}^1$-fibrations whose general fibers do not coincide.*

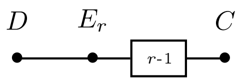
D.2.1. Normal affine surfaces completable by a zigzag.

This section is closely related to the work of Danilov and Gizatullin [**20**] and [**21**], where the case of nonsingular surfaces completable by a zigzag was treated. Let us mention first some usefull technical results about zigzags on normal projective surfaces. The following construction will be frequently used in the sequel.

DÉFINITION D.2.5. Let $\bar{V}$ be a normal projective surface, and let C and D be two irreducible nonsingular curves on $\bar{V}$ which intersect transversally at a single nonsingular point of $\bar{V}$. By the *iterative modification* of $\bar{V}$ *with center* (C,D), *lenght* $r \in \mathbb{N}^*$ *and divisors* $E_1, \ldots E_r$, we mean the birational morphism $\sigma : \bar{W} \to \bar{V}$, where $\bar{W}$ is a normal projective surface, obtained by the following blow-up procedure :

- ◦ Step 1 is the blow-up $\sigma_1 : \bar{W}_1 \to \bar{V}$ of the intersection point of C and D with exceptional curve $E_1 \subset \bar{W}_1$.
- ◦ Step k for $2 \leq k \leq r$ is the blow-up $\sigma_k : \bar{W}_k \to \bar{W}_{k-1}$ of the intersection point of E_{k-1} and the proper transform of D in $\bar{W}_{k-1}$, with exceptional curve $E_k \subset \bar{W}_k$.

We let $\sigma := \sigma_r \circ \cdots \circ \sigma_1 : \bar{W} := \bar{W}_r \to \bar{V}$. If $C' \subset \bar{W}$ ($D' \subset \bar{W}$) denotes the proper transform of $C \subset \bar{V}$ (of $D \subset \bar{V}$ respectively) then $\left(C'^2\right) = \left(C^2\right) - 1$, $\left(D'^2\right) = \left(D^2\right) - r$, $\left(E_r^2\right) = -1$ and $\left(E_i^2\right) = -2$, $1 \leq i \leq r-1$. For the dual graph of the total transform of $C \cup D$ in $\bar{W}$ we use the following notation :



In D.2.6-D.2.9 below we establish some usefull properties of affine surfaces completable by a zigzag.

LEMME D.2.6. *Let $\bar{V}$ be a normal projective surface and $B \subset \bar{V}$ be a zigzag such that $\bar{V}$ is nonsingular along B and $V := \bar{V} \setminus B$ is affine. If B is irreducible then $\left(B^2\right) > 0$. If B is reducible then it contains an irreducible component C with $\left(C^2\right) \geq -1$.*

PROOF. Since $V = \bar{V} \setminus B$ is affine, by a theorem of Goodman [**23**] there exists an ample divisor D on $\bar{V}$ such that $Supp\,(D) = B$. Thus the first assertion follows. Let further B be reducible : $B = \cup_{i=1}^n C_i$ with C_i irreducible, $n \geq 2$, and let $D = \sum_{i=1}^n m_i C_i$ with $m_i > 0$ for all $1 \leq i \leq n$. Since B is a zigzag we have $\left(C_i \cdot \sum_{j \neq i} C_j\right) \leq 2$. From

$$(D \cdot B) = \sum_{i=1}^n m_i \,(C_i \cdot B) = \sum_{i=1}^n m_i \left(\left(C_i^2\right) + \left(C_i \cdot \sum_{j \neq i} C_j \right) \right) > 0$$

we conclude that there exists i_0 with $\left(C_{i_0}^2\right) > -\left(C_{i_0} \cdot \sum_{j \neq i_0} C_j\right) \geq -2$, whence $\left(C_{i_0}^2\right) \geq -1$. □

LEMME D.2.7. *Given a normal affine surface V completable by a zigzag, there exists a minimal completion $\bar{V}$ of V by an oriented zigzag B such that its left boundary C_1 has non-negative self-intersection.*

Proof. If B is irreducible then the assertion follows from lemma D.2.6. Thus we may assume that $B = \cup_{i=1}^{n} C_i$ with $n \geq 2$. By lemma D.2.6, $\left(C_{i_0}^2\right) \geq -1$ for some i_0, $1 \leq i_0 \leq n$. In fact $\left(C_{i_0}^2\right) \geq 0$ as B is minimal. If $i_0 = 1$ or $i_0 = n$ then, up to reversing the ordering, we are done. If not, we let i_0 be the minimal indice such that $\left(C_i^2\right) \geq 0$, and we denote $C(B) := C_{i_0}$ and $d(B) = d(C_1, C(B)) = i_0 - 1$. Thus $\left(C_i^2\right) \leq -2$ for every component C_i to the left of $C(B)$.

Since $C(B)$ is not a boundary of B, the successor $C(B)^+$ of $C(B)$ exists, and so we can perform the iterative modification $\sigma : \bar{W} \to \bar{V}$ of $\bar{V}$ with center $\left(C(B), C(B)^+\right)$, length $c+1$ and divisors $E_1, \ldots, E_c, E_{c+1}$ with $c := \left(C(B)^2\right)$. Then we get that $\left(C(B)'^2\right) = \left(E_{c+1}^2\right) = -1$. If $\tau : \bar{W} \to \bar{W}_1$ is the contraction of $C(B)'$ then $\left(\tau\left(C(B)'^-\right)^2\right) = \left(\left(C(B)^-\right)^2\right) + 1$ and $\left(\tau(E_{c+1})^2\right) = 0$. By iterating this procedure, we obtain that $\left(\left(C(B)^-\right)^2\right) = -1$ and $\left(C(B)^2\right) = 0$. Contracting $C(B)^-$ and all (-1)-curves that arise successively to the left of $C(B)$ we arrive at a new completion $\bar{V}_1$ of V by a zigzag B_1 with $d(B_1) < d(B)$. Since under this procedure, no (-1)-curve has been created on the right of $C(B_1)$, it follows that $\bar{V}_1$ is a minimal completion of V. Now the proof can be completed by induction. □

Corollaire D.2.8. *A normal affine surface completable by a zigzag is rational.*

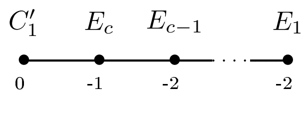
Proof. It is enough to show that there exists a completion $\bar{W}$ of V and a nonsingular rational curve $C \subset \bar{W}_{reg}$ with $\left(C^2\right) > 0$. Let $\bar{V}$, B and C_1 be as in lemma D.2.7. If $\left(C_1^2\right) > 0$ then we are done. If not then B is reducible as it is the support of an ample divisor. By our assumptions $\left(C_1^2\right) = 0$ and $\left(C_2^2\right) \leq 0$. After blowing-up with center in $C_1 \setminus C_2$, the proper transform of C_1 becomes a (-1)-curve, and we contract it, obtaining a completion of V with $\left(C_2^2\right)$ increased by one. By iterating this procedure we get a completion $\bar{W}$ of V and a nonsingular rational curve $C \subset \bar{W}_{reg}$ with $\left(C^2\right) > 0$. □

Lemme D.2.9. *If V is a normal affine surface completable by a zigzag then the following assertions hold.*

(1) *If V is completable by a zigzag of type $(0,0)$ then $V \simeq \mathbb{A}^2$.*
(2) *If V is completable by a zigzag of type $(0,0,0)$ then $V \simeq \mathbb{C}^* \times \mathbb{A}^1$.*
(3) *If $V \not\simeq \mathbb{C}^2$ and $V \not\simeq \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ then there exists a completion $\bar{V}$ of V by an oriented zigzag of type $(0,0,k_1,\ldots k_m)$, where $k_i \leq -2$, $1 \leq i \leq m$.*

Proof. We let $\bar{W}$ be a minimal completion of V by an oriented zigzag $B = \cup_{i=1}^{n} C_i$ such that its left boundary C_1 is a curve with non-negative self-intersection.

(1) If $B = C_1$ then $c := \left(B^2\right) > 0$ because B is the support of an ample divisor. Let $D \subset \bar{W}$ be a nonsingular curve germ meeting C_1 transversally in a single point, and consider the iterative modification $\sigma : \bar{W}_1 \to \bar{W}$ of $\bar{W}$ with center (D, C_1), length c and divisors $E_1, \ldots E_c$ (see D.2.5). Then the total transform B_1 of B is a zigzag whose left boundary is the proper transform $C_1'$of C_1. Moreover $\left(C_1'^2\right) = 0$, $\left(E_c^2\right) = -1$ and $\left(E_i^2\right) = -2$, $1 \leq i \leq c-1$. Thus B is now replaced by a zigzag with the following dual graph:



Let $\pi : \bar{W}_2 \to \bar{W}_1$ be the blow-up of a point $v \in C_1' \setminus E_c$ with exceptional component $E \subset \bar{W}_2$. Then the proper transform of C_1' in $\bar{W}_2$ is a (-1)-curve that can be contracted to obtain a completion $\bar{V}$ of V by a zigzag of type $(0, 0, -2, \ldots, -2)$.

(2) If $B \neq C_1$ and $c = \left(C_1^2\right) > 0$ then by applying the same procedure as in (1) we obtain a new minimal completion $\bar{W}_1$ of V by a reducible zigzag such that $\left(C_1^2\right) = 0$. Performing, if necessary, elementary transformations we obtain a minimal completion by a zigzag with $\left(C_1^2\right) = \left(C_2^2\right) = 0$. We must distinguish then the following three cases :

- $B = C_1 \cup C_2$. Since $\bar{W}_1$ is rational the linear system $|C_1|$ defines a $\mathbb{P}^1$-fibration $\bar{q} : \bar{W}_1 \to \bar{Z} = \mathbb{P}^1$ whose restriction to V is an $\mathbb{A}^1$-fibration $q : V \to Z = \bar{Z} \setminus \{\bar{q}(C_1)\} \simeq \mathbb{A}^1$. Thus $\bar{W}_1$ is a good completion of V with respect to q. Moreover, every fiber $\bar{q}^{-1}(z)$, $z \in Z$, coincides with the closure of $q^{-1}(z)$ in $\bar{V}$, and, being connected, it is irreducible. Therefore, by virtue of lemma D.1.2(2), $\bar{q}$ has no degenerate fiber, and hence $\bar{W}_1$ is nonsingular. From $\left(C_1^2\right) = \left(C_2^2\right) = 0$ we finally deduce $\bar{W}_1 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ so that $V = \bar{W}_1 \setminus (C_1 \cup C_2)$ is isomorphic to $\mathbb{A}^2$.
- If $B = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ and $\left(C_3^2\right) = 0$ then the linear system $|C_1|$ defines a $\mathbb{P}^1$-fibration $\bar{q} : \bar{W}_1 \to \bar{Z} = \mathbb{P}^1$ whose restriction to V is an $\mathbb{A}^1$-fibration $q : V \to Z = \bar{Z} \setminus \{\bar{q}(C_1), \bar{q}(C_3)\} \simeq \mathbb{C}^*$. Thus $\bar{W}_1$ is a good completion of V with respect to q and we can again conclude that $\bar{q}$ has no degenerate fiber. Hence $\bar{W}_1$ is a nonsingular surface isomorphic to $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Finally we have $V = \bar{W}_1 \setminus (C_1 \cup C_2 \cup C_3) \simeq \mathbb{C}^* \times \mathbb{A}^1$.
- It remains to consider the case $B = C_1 \cup C_2 \cup G$, where either $G = C_3$ with $\left(C_3^2\right) \neq 0$ or $G = \cup_{i=3}^n C_i$ with $n > 3$. The linear system $|C_1|$ defines a $\mathbb{P}^1$-fibration $\bar{q} : \bar{W}_1 \to \mathbb{P}^1$ having C_2 as a cross-section. Since G is connected and does not intersect C_1 it must be contained in a fiber F of $\bar{q}$. Moreover, F must be a singular fiber of $\bar{q}$ for otherwise, we would have $F = C_3$ and hence, $0 = \left(F^2\right) = \left(C_3^2\right) \neq 0$, a contradiction. In virtue of lemma D.1.2, every C_i with $3 \leq i \leq n$ has negative self-intersection. Since the initial completion $\bar{W}$ has been assumed minimal and since our transformations do not affect the curves C_i for $3 \leq i \leq n$, we conclude that $\left(C_i^2\right) \leq -2$ for all $3 \leq i \leq n$.

□

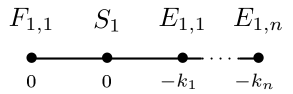
The next proposition proves one of the two implications of theorem D.2.1.

PROPOSITION D.2.10. *If V is a normal affine surface non-isomorphic to $\mathbb{C}^* \times \mathbb{A}^1$ and completable by a zigzag then V has a trivial Makar-Limanov invariant.*

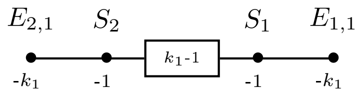
PROOF. If V admits a completion $\bar{V}$ by a zigzag of type $(0, 0)$ then, by case (1) of lemma D.2.9, $V \simeq \mathbb{C}^2$ which has a trivial Makar-Limanov invariant. Therefore we may assume from now on that case (3) of lemma D.2.9 holds, that is V has a completion $\bar{V}_1$ by a zigzag B_1 of type $(0, 0, -k_1, \ldots, -k_n)$ with $k_i \geq 2$, $1 \leq i \leq n$. As in (D.1.6) we write

$$B_1 = F_{1,1} \cup S_1 \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_{1,i} \right),$$

where $\left(F_{1,1}^2\right) = \left(S_1^2\right) = 0$ and $\left(E_{1,i}^2\right) = -k_i$, $1 \leq i \leq n$. The dual graph $\Gamma(B_1)$ is the following:

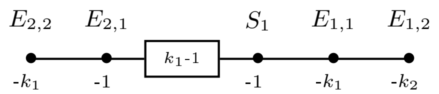


The linear system $|F_{1,1}|$ defines a $\mathbb{P}^1$-fibration $\bar{q}_1 : \bar{V}_1 \to \mathbb{P}^1$ with S_1 as a cross-section so that the restriction $q_1 : V \to \mathbb{A}^1$ of $\bar{q}_1$ to V is an $\mathbb{A}^1$-fibration. Thus it remains to find a second $\mathbb{A}^1$-fibration $q_2 : V \to \mathbb{A}^1$ such that the general fibers of q_1 and q_2 do not coincide. To do this we construct a completion $\bar{W}$ of V together with a birational morphism $\sigma_1 : \bar{W} \to \bar{V}_1$ which will also dominate a good completion $\bar{V}_2$ of V with respect to this $\mathbb{A}^1$-fibration q_2. It will be convenient in the sequel to denote the component $F_{1,1}$ of B by $E_{2,n}$.
If $n = 1$ then $\sigma_1 : \bar{W} \to \bar{V}_1$ is the iterative modification of $\bar{V}_1$ with center $(S_1, E_{2,1})$, length k_1 and divisors $D_1, \ldots, D_{k_1-1}, S_2$. For the total transform B of B_1 we obtain the following symmetrical dual graph:

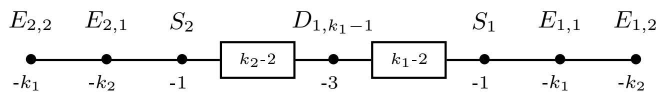


In case $n = 2$ we obtain $\sigma_1 : \bar{W} \to \bar{V}_1$ by the following procedure :

- Step 1 is the iterative modification $\pi_1 : \bar{W}_1 \to \bar{V}_1$ with center $(S_1, E_{2,2})$, length k_1 and divisors $D_{1,1}$, D_{1,k_1-1}, $E_{2,1}$. The dual graph of the total transform of B_1 is the following :

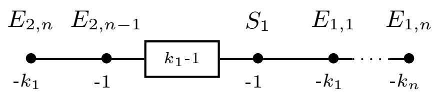


- Step 2 is the iterative modification $\pi_2 : \bar{W}_2 \to \bar{W}_1$ of $\bar{W}_1$ with center $\left(E_{2,1}^{+} = D_{1,k_1-1}, E_{2,1}\right)$, length $k_2 - 1$ and divisors $D_{2,1}, \ldots, D_{2,k_2-2}, S_2$ if $k_2 > 2$ or just S_2 if $k_2 = 2$.We then let $\bar{W} := \bar{W}_2$ and $\sigma_1 = \pi_1 \circ \pi_2 : \bar{W} \to \bar{V}_1$. The dual graph of the total transform $B = \sigma_1^{-1}(B_1)$ of B_1 has the following structure:



We observe that the same dual graph can be obtained from a zigzag of type $(0, 0, -k_2, -k_1)$ by reversing the ordering and the blow-up procedure.
In case $n \geq 3$, $\bar{W}$ is obtained from $\bar{V}_1$ by the following procedure :

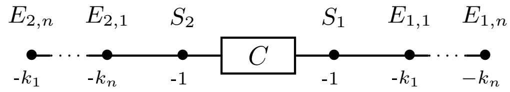
-Step 1 is the iterative modification $\pi_1 : \bar{W}_1 \to \bar{V}_1$ with center $(S_1, E_{2,n})$, length k_1 and divisors $D_{1,1}, \ldots, D_{1,k_1-1}, E_{2,1}$. Then the dual graph of the total transform of B_1 is the following one:



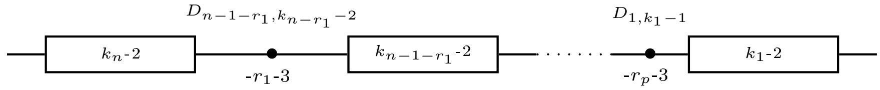
-Step m, where $2 \leq m \leq n-1$, is the iterative modification $\pi_m : \bar{W}_m \to \bar{W}_{m-1}$ of $\bar{W}_{m-1}$ with center $\left(E_{2,n-m}^{+}, E_{2,n-m}\right)$, length $k_m - 1$ and divisors $D_{m,1}, \ldots, D_{m,k_m-2}, E_{2,n-m-1}$ if $k_m > 2$ or just $E_{2,n-m-1}$ if $k_m = 2$.

- Step n is the last step and consists of the iterative modification $\pi_n : \bar{W}_n \to \bar{W}_{n-1}$ of $\bar{W}_{n-1}$ with center $\left(E_{2,1}^{+}, E_{2,1}\right)$, length $k_n - 1$ and divisors $D_{n,1}, \ldots, D_{n,k_n-2}, S_2$ if $k_n > 2$ or just S_2 if $k_n = 2$.

Then we let $\bar{W} := \bar{W}_n$ and $\sigma_1 := \pi_1 \circ \cdots \circ \pi_n : \bar{W} \to \bar{V}_1$. For the total transform $B := \sigma_1^{-1}(B_1)$ of B_1 we obtain the following dual graph:



The dual graph of C looks like:



where $r_j \geq 0$ $(0 \leq j \leq p)$ depend on the number of (-2)-curves among the $E_{1,i}$, $1 \leq i \leq n$. Obviously, $V = \bar{W} \setminus B$. We observe as before that the same dual graph can be obtained from a zigzag of type $(0, 0, -k_n, \ldots, -k_1)$ by a symmetric blow-up procedure. Henceforth, the sub-zigzag

$$D := C \cup S_1 \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} E_{1,i}$$

of B can be contracted to a nonsingular point. We denote this contraction by $\sigma_2 : \bar{W} \to \bar{V}_2$, and we let

$$B_2 = F_{2,1} \cup S_2 \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_{2,n-i+1} \right)$$

be the image of B by σ_2, where $F_{2,1} := E_{1,n}$. Then $V = \bar{V}_2 \setminus B_2$ where B_2 is a zigzag of type $(0, 0, -k_n, \ldots, -k_1)$.

The linear system $|F_{2,1}|$ defines then a $\mathbb{P}^1$-fibration $\bar{q}_2 : \bar{V}_2 \to \mathbb{P}^1$ whose restriction to V is a second $\mathbb{A}^1$-fibration $q_2 : V \to \mathbb{A}^1$. Moreover, since

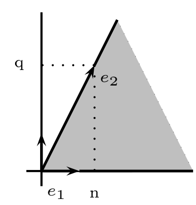
$$\sigma_2 \left(\sigma_1^* \left(F_{1,1} \right) \right) = \alpha S_2 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i E_{2,i}$$

with $\alpha > 0$ and $\beta_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$, it follows that $\left(F_{2,1} \cdot \sigma_2 \left(\sigma_1^* \left(F_{1,1} \right) \right) \right) \geq 1$. Thus the general fibers of q_1 and q_2 do not coincide, whence V has a trivial Makar-Limanov invariant. $\square$

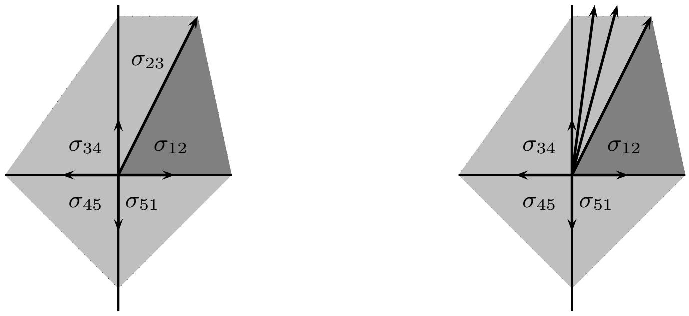
Finally we have the following proposition :

Proposition D.2.11. *Every normal affine toric surface except for $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ and $\mathbb{C}^* \times \mathbb{A}^1$ has a trivial Makar-Limanov invariant. Consequently, every cyclic quotient singularity appears as a singular point of an ML-surface.*

Proof. Recall that, given a 2-dimensional lattice N, an affine toric surface corresponds to a strictly convex rational polyhedral cone in $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. If V is a normal affine toric surface non-isomorphic to $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ or $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, then there exists a basis of N such that V is given by the cone $\sigma_{12} = \langle e_1, e_2 \rangle$ with $e_1 = (1, 0)$ and $e_2 = (n, q)$ where n and q are coprime integers.



In order to construct a completion of V we need to include σ_{12} into a complete fan Δ in $N_{\mathbb{R}}$. This can be done *e.g.* in the following way.



We let $\sigma_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$ with $e_3 = (0,1)$, $e_4 = (-1,0)$ and $e_5 = (0,-1)$.The only possibly singular cones (*i.e.* cones whose generators do not form a basis of N) in Δ are σ_{12} and σ_{23}. We can subdivide the cone σ_{23} if necessary to obtain a new fan $\tilde{\Delta}$ such that σ_{12} is the only possibly singular cone in $\tilde{\Delta}$.We denote by e_i for $6 \leq i \leq r$ the new generators introduced in this subdivision procedure. Then $\bar{V} := V\left(\tilde{\Delta}\right)$ is a completion of $V := V(\sigma_{12})$. We let $D_i = V(\tau_i)$ be the divisor on $\bar{V}$ corresponding to the cone $\tau_i = \langle e_i \rangle$ for $3 \leq i \leq r$. Then $B := \bar{V} \setminus V = D_3 \cup D_4 \cup \cdots \cup D_r$ is a zigzag, whence V has a trivial Makar-Limanov invariant by proposition D.2.10. $\square$

D.2.2. Completion of a normal affine surface with a trivial Makar-Limanov invariant. In this subsection we prove that, conversely, every ML-surface V is completable by a zigzag.

D.2.12. By corollary D.2.3 there exist two $\mathbb{A}^1$-fibrations $q_1 : V \to Z_1 \simeq \mathbb{A}^1$ and $q_2 : V \to Z_2 \simeq \mathbb{A}^1$ whose general fibers do not coincide. We denote by $\bar{V}_1$ a good completion of V with respect to q_1, with a boundary divisor $B = H \cup S \cup G \subset (\bar{V}_1)_{reg}$ as in D.1.6. Thus q_1 extends to a $\mathbb{P}^1$-fibration $\bar{q}_1 : \bar{V}_1 \to \bar{Z}_1 = \mathbb{P}^1$ so that $H = \bar{q}_1^{-1}(\infty) =: F_\infty$ is a non-degenerate fiber of $\bar{q}_1$ over the point $\infty := \bar{Z}_1 \setminus Z_1$, and $S \simeq \mathbb{P}^1$ is a section.

We let $\bar{q}_2 : \bar{V}_1 \dashrightarrow \bar{Z}_2 \simeq \mathbb{P}^1$ be the rational map which extends $q_2 : V \to Z_2$. We let $\bar{T}_2$ be the closure in $\bar{V}_1$ of a general fiber T_2 of q_2. The point $\bar{T}_2 \setminus T_2$ belongs to F_∞, for otherwise the restriction of q_1 to a general fiber of q_2 would be constant and the general fibers of these two $\mathbb{A}^1$-fibration would coincide, in contrary to our assumption. As G is disjoint from F_∞, the map $\bar{q}_2$ has no base point on G, and so $\bar{q}_2|_G$ must be locally constant. Moreover $\bar{q}_2|_{S \setminus \{P_0\}} = \infty$, for otherwise q_2 would be bounded whence constant along a general fiber of q_1. Since $S \cup G$ is connected, it follows that $\bar{q}_2|_{(S \cup G) \setminus \{P_0\}} = \infty$.

Lemme D.2.13. *If $\bar{q}_2 : \bar{V}_1 \dashrightarrow \bar{Z}_2$ is a morphism then $G = \emptyset$, $B = F_\infty \cup S$ is a zigzag and $V \simeq \mathbb{A}^2$.*

Proof. If $\bar{q}_2 : \bar{V}_1 \to \bar{Z}_2$ is a morphism then it is a $\mathbb{P}^1$-fibration and its general fiber meets F_∞ at one point. It follows that F_∞ is a section of $\bar{q}_2$ and $S \cup G$ is contained in the fiber $\bar{q}_2^{-1}(\infty) \subset (\bar{V}_1)_{reg}$. Moreover $\bar{q}_2^{-1}(\infty) = S \cup G$ as $\bar{q}_2^{-1}(\infty) \subset \bar{V}_1 \setminus V$. Since $\bar{V}_1$ is a minimal completion of V it follows that $S \cup G$ contains no (-1)-curve whence is a non-degenerate fiber of $\bar{q}_2$ (see (5) of D.1.2). Thus $(S^2) = 0$, $G = \emptyset$ and $\bar{q}_2^{-1}(\infty) = S$ so that the zigzag $B = F_\infty \cup S$ is of type $(0,0)$ and $V \simeq \mathbb{A}^2$ by lemma D.2.9. $\square$

D.2.14. If $\bar{q}_2$ is not a morphism then $\bar{q}_2$ defines a linear pencil with a unique base point $P \in F_\infty$. Suppose that $P = P_0 := S \cap F_\infty$. If we blow-up the point P_0 into an exceptional component E, the proper transform F'_∞ of F_∞ is a (-1)-curve. By contracting F'_∞, we obtain a new completion of V in which (S^2) has decreased by one. By applying these transformations with center P_0 several times, we arrive at the situation that the linear pencil $\bar{q}_2 : \bar{V}_1 \dashrightarrow \bar{Z}_2 \simeq \mathbb{P}^1$ has no base point on the proper transform of S. So we may assume from the very beginning that $\bar{V}_1$ is a good completion of V with respect to q_1 such that $\bar{q}_2$ has a unique base point $P \in F_\infty \setminus S$. Note that this new completion $\bar{V}_1$ of V is not necessarily minimal, but anyhow the only possible (-1)-curve in the boundary B is a section S of $\bar{q}_1$. Observe also that, as $\bar{V}_1$ is obtained from a given good completion $\bar{V}$ of V with respect to $\bar{q}_1$ by means of elementary transformations with centers in F_∞, $\bar{V}_1 \setminus V$ is a zigzag if and only if $\bar{V} \setminus V$ is.

The following proposition proves the second implication of theorem D.2.1.

Proposition D.2.15. *If V is a ML-surface with an $\mathbb{A}^1$-fibration $q : V \to Z \simeq \mathbb{A}^1$ then, for any good completion $\bar{V}$ of V with respect to q as in D.1.6, the divisor $B = \bar{V} \setminus V$ is a zigzag. Moreover the $\mathbb{A}^1$-fibration q has at most one degenerate fiber.*

Proof. If $\bar{q}_2 : \bar{V} \to \bar{Z}_2$ is a morphism then, by lemma D.2.13, B is a zigzag and we are done. We now suppose that $\bar{q}_2$ is not a morphism. Due to D.2.14 we can also suppose that the unique base point P of the linear pencil $\bar{q}_2$ belongs to $F_\infty \setminus S$. We let $\pi : \bar{W} \to \bar{V}_1$ be a minimal resolution of the base points of $\bar{q}_2$, and we denote by $\tilde{q}_2 : \bar{W} \to \bar{Z}_2$ the $\mathbb{P}^1$-fibration which lifts $\bar{q}_2$. The last (-1)-curve arising from this elimination procedure gives rise to a section S_2 of $\tilde{q}_2$, and it is a unique (-1)-curve in $\pi^{-1}(P)$. Since $\bar{q}_2|_{S \cup G} = \infty$, the proper transform of $S \cup G$ in $\bar{W}$ is contained in the fiber $\tilde{q}_2^{-1}(\infty)$. If $\tilde{T}_2$ is a general fiber of $\tilde{q}_2$ then the point $\tilde{T}_2 \setminus T_2$ belongs to $\pi^{-1}(P)$. It follows that the proper transform of F_∞ in $\bar{W}$ is disjoint from $\tilde{T}_2$ whence is contained in a fiber of $\tilde{q}_2$. Since $P \in F_\infty \setminus S$ the proper transform of $B = F_\infty \cup S \cup G$ is connected and so is contained in $\tilde{q}_2^{-1}(\infty) \subset \bar{W}_{reg}$. As $\tilde{q}_2^{-1}(\infty) \subset \bar{W} \setminus V$ is then degenerate, by (8) of lemma D.1.2 it must contain a (-1)-curve. Since no such curve can be contained in $G \cup \left(\pi^{-1}(P) \cap \tilde{q}_2^{-1}(\infty)\right)$ it follows that the proper transform of S or F_∞ is a (-1)-curve. Since these two curves meet and are contained in a maximal simple zigzag of $\tilde{q}_2^{-1}(\infty)$ which intersects the section S_2, we deduce from lemma D.1.5 that $\tilde{q}_2^{-1}(\infty) \cup S_2$ is a zigzag. Therefore G is connected and is a zigzag, whence q has a unique degenerate fiber. It follows that $B = F_\infty \cup S \cup G$ is a zigzag. $\square$

More generally we have the following theorem.

Théorème D.2.16. *If V is an ML-surface then the boundary divisor $C := \bar{V} \setminus V$ of any minimal completion $\bar{V}$ of V is a zigzag.*

The proof is done in D.2.17-D.2.20 below. Remind that $\bar{V}$ is a minimal completion of V iff C is an SNC-divisor containing no (-1)-curve which meets at most two other irreducible components transversally in a single point (see D.1.1). Since V is affine C is connected. The $\mathbb{A}^1$-fibration $q_1 : V \to \mathbb{A}^1$ extends to a rational map $\bar{q}_1 : \bar{V} \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ with at most one base point P on C.

Lemme D.2.17. *If $\bar{q}_1 : \bar{V} \to \mathbb{P}^1$ is a morphism then C is a zigzag.*

Proof. Since the closure $\bar{T}_1$ of a general fiber T_1 of q_1 intersects C in a single point it follows that there exists a unique irreducible component S of C which is a section of $\bar{q}_1$. If $C = S$ we are done.

If S is a terminal component of C then $C \setminus S$ is connected whence contained in a unique fiber F of $\bar{q}_1$. Moreover since $\bar{q}_1^{-1}(\infty) \subset C$ we get that $F = F_\infty = \bar{q}_1^{-1}(\infty)$

and $F_\infty = \overline{C \setminus S} \subset \bar{V}_{reg}$. By the minimality of C, it then follows from D.1.3 that $\overline{C \setminus S}$ cannot contain a (-1)-curve. Hence the fiber F_∞ of $\bar{q}_1$ is nondegenerate, and so $C = S \cup F_\infty$ is a zigzag with two components.

If S is not a terminal component of C we denote by $G_1, \ldots, G_n$ the connected components of $\overline{C \setminus S}$. Then every G_i is contained in a fiber F_i of $\bar{q}_1$, whence with the same argument as above G_i cannot contain a (-1)-curve. Since one of the F_i, say F_n, is the fiber $F_\infty = \bar{q}_1^{-1}(\infty) \subset \bar{V}_{reg}$ it follows that $G_n = F_\infty \simeq \mathbb{P}^1$. Hence $\bar{V}$ is a minimal good completion of V with respect to q_1 (see D.1.6). Thus according to proposition D.2.15 $n = 2$ and $C = F_\infty \cup S \cup G_1$ is a zigzag. □

D.2.18. Therefore we may suppose in the sequel that that neither q_1 nor q_2 extends to a morphism on $\bar{V}$. We let $P \in C$ be the unique base point of the rational map $\bar{q}_1 : \bar{V} \dashrightarrow \bar{Z}_1$, and $\pi : \bar{W} \to \bar{V}$ be a minimal resolution of P. That is $\bar{q}_1$ lifts to a $\mathbb{P}^1$-fibration $\tilde{q}_1 : \bar{W} \to \bar{Z}_1$ and $\pi^{-1}(P)$ contains a unique (-1)-curve S which is a section of $\tilde{q}_1$. Since the closure $\tilde{T}_1$ in $\bar{W}$ of a general fiber of q_1 meets $\pi^{-1}(C)$ in a single point it follows that every connected component of the proper transform C' of C in $\bar{W}$ is contained in a fiber of $\tilde{q}_1$.

Lemme D.2.19. *If P belongs to just one irreducible component D of C then C is a zigzag.*

Proof. In this case C' is connected whence contained in the fiber F_∞ of $\tilde{q}_1$. Thus $F_\infty \subset \bar{W}_{reg}$ does not contain (-1)-curves except maybe for the proper transform D' of D. Indeed, by the minimality of C and of the resolution of P, such a (-1)-curve in F_∞, different from D', must be a ramification point of C', which is excluded by D.1.3. If the fiber F_∞ does not contain a (-1)-curve then it is nondegenerate, so $F_\infty = D'$ with $\left(D'^2\right) = 0$ and $C = D$ is a zigzag. We now suppose that $C \neq D$. Then F_∞ is degenerate and D' is a unique (-1)-curve in F_∞. Therefore D is a terminal component of C for otherwise D' is a ramification vertex of $\Gamma(F_\infty \cup S)$, which contradicts D.1.3. If C is not a zigzag then $F_\infty \cup S$ is not a zigzag either since it contains C'. To eliminate this possibility we note that if $\pi^{-1}(P)$ is a zigzag then D' is contained in a maximal simple zigzag of F_∞ which meets S, and otherwise D' is contained in a maximal double zigzag of F_∞. But both these possibilities are excluded by lemma D.1.5. Hence C is a zigzag. □

The following lemma completes the proof of theorem D.2.16.

Lemme D.2.20. *In the situation of D.2.18, if P belongs to two irreducible components say D_1 and D_2 of C then C is a zigzag.*

Proof. In this case the proper transform C' of C has two connected components C_1' and C_2', where D_i' is a terminal component of C_i', $i = 1, 2$. Therefore either C' is entirely contained in the fiber F_∞ of $\tilde{q}_1$, or there exists another fiber F_1 of $\tilde{q}_1$ such that say $C_1' \subset F_1$ and $C_2' \subset F_\infty$. The latter happens if and only if $D_1' \cup \pi^{-1}(P) \cup D_2'$ is a zigzag. Indeed, otherwise at some step $k \geq 2$ of the resolution procedure, we must have blown-up a simple point $P_k \in \pi_{k-1}^{-1}(D_1 \cup D_2)$ into an exceptional component E_k. As E_k is terminal in the dual graph of $D_1' \cup \pi_k^{-1}(P) \cup D_2'$ we then conclude that $\pi_k^{-1}(C) \setminus E_k$ is connected. Since all further blow-ups have their centers over E_k it follows that the proper transform of $\pi_{k-1}^{-1}(C)$ in $\bar{W}$ contains C' and is connected. This implies that C' is entirely contained in a fiber of $\tilde{q}_1$.

1) We first suppose that C' is contained in the fiber $F_\infty \subset \bar{W}_{reg}$ of $\tilde{q}_1$. For $i = 1, 2$ we consider the shortest paths joining D_i' to S in the tree $\Gamma(F_\infty \cup S)$, and we denote by D_0 the vertex where they meet. Since C' is not connected it follows that D_0 is contained in $\overline{F_\infty \setminus C'}$ and is a ramification vertex of $\Gamma(F_\infty \cup S)$. Moreover F_∞ is degenerate and the only possible (-1)-curves in F_∞ are D_1' and D_2'. So by (1) of lemma D.1.5 at least one of the D_i', say D_1' is a (-1)-curve

contained in a maximal terminal zigzag of F_∞. Clearly, this zigzag contains also C_1'. This implies that D_1 is not a ramification vertex of $\Gamma(C)$ for otherwise D_1' is a ramification vertex of $\Gamma(F_\infty \cup S)$ which contradicts D.1.3.

If either C_2' is not a zigzag or D_2 is a ramification vertex of $\Gamma(C)$ then D_1' is a unique (-1)-curve contained in a maximal terminal zigzag of F_∞ and there exists a ramification vertex H' of $\Gamma(F_\infty \cup S)$ which is not contained in the shortest path joining D_1' to S in $\Gamma(F_\infty \cup S)$. Indeed in the first case C_2' is not a zigzag whence it contains such a ramification vertex H', and in the second case we can choose $H' = D_2'$. This contradicts (2) of lemma D.1.5 hence, C_2' is a zigzag and D_2 is not a ramification vertex of $\Gamma(C)$. Thus $C = C_1 \cup C_2$ is a zigzag too.

2) We now suppose that C' is not entirely contained in a fiber of $\tilde{q}_1$. Thus $\underline{D_1' \cup \pi^{-1}(P) \cup D_2'}$ is a zigzag. Moreover there exist two connected components, say G_1 and G_2, of $\overline{\pi^{-1}(C) \setminus S}$ and two different fibers F_1 and $F_2 = F_\infty$ of $\tilde{q}_1$ such that $C_i' \subset G_i \subset F_i$ for $i = 1, 2$. Since $F_\infty \subset \bar{W}_{reg}$ we can deduce similarly as in lemma D.2.19 that $F_\infty \cup S$ is a zigzag. This implies that C_2 is a zigzag and D_2 is not a ramification vertex of $\Gamma(C)$. We let $\tau_\infty : \bar{W} \to \bar{W}_1$ be the contraction of F_∞ to a nondegenerate fiber of a $\mathbb{P}^1$-fibration. That is, $\tau_\infty(F_\infty) \simeq \mathbb{P}^1$ is a nondegenerate fiber $\hat{F}_\infty = \hat{q}_1^{-1}(\infty)$ of the resulting $\mathbb{P}^1$-fibration $\hat{q}_1 : \bar{W}_1 \to \bar{Z}_1$. Since the components of F_1 are not affected by this contraction it follows that $\tau_\infty(D_1')$ is the only possible (-1)-curve in $\tau_\infty(G_1) \subset \hat{F}_1 = \tau_\infty(F_1)$. Moreover as $D_1' \cup \pi^{-1}(P) \cup D_2'$ is a zigzag, $\tau_\infty(D_1')$ is contained in the maximal simple zigzag of $\tau_\infty(G_1)$ which meets the section $\hat{S}$ of $\hat{q}_1$.

If $\tau_\infty(G_1)$ contains no (-1)-curve then $\bar{W}_1$ is a good completion of V with respect to q_1, and it follows from proposition D.2.15 that $\tau_\infty\left(G_1 \cup \hat{S}\right)$ is a zigzag. Thus C_1 is a zigzag too and D_1 is not a ramification vertex of $\Gamma(C)$.

Otherwise $\tau_\infty(D_1')$ is a unique (-1)-curve of $\tau_\infty(G_1)$. Starting with $\tau_\infty(D_1')$ we can succesively contract the (-1)-curves which arise in $\tau_\infty(G_1)$ to obtain a minimal good completion $\bar{W}_2$ of V with respect to q_1. Hence the image of $\tau_\infty\left(G_1 \cup \hat{S}\right)$ in $\bar{W}_2$ is a zigzag by proposition D.2.15. Since $\tau_\infty(D_1')$ is contained in a maximal simple zigzag of $\tau_\infty(G_1)$ which meets $\hat{S}$ it follows that none of the possible ramification vertices of $\tau_\infty\left(G_1 \cup \hat{S}\right)$ has been eliminated by the above contractions. This means that $\tau_\infty\left(G_1 \cup \hat{S}\right)$ is also a zigzag. Thus C_1 is a zigzags and D_1 is not a ramification vertex of $\Gamma(C)$. Hence $C = C_1 \cup C_2$ is a zigzag too. □

We complete our discussion by a characterization of the affine plane. We need the following lemma.

Lemme D.2.21. *(see also* [**1**]*)Let V be an ML-surface and $q_i : V \to Z_i \simeq \mathbb{A}^1$, $i = 1, 2$, be two $\mathbb{A}^1$-fibrations whose general fibers do not coincide. Then $\phi_{12} := q_1 \times q_2 : V \to \mathbb{A}^2$ is a surjective, quasi-finite morphism.*

Proof. We let $\bar{V}$ be a good completion of V with respect to q_1 by a zigzag $B = G \cup S \cup F_\infty$ as in D.2.12, and we denote by $\bar{q}_1 : \bar{V} \to \bar{Z}_1 \simeq \mathbb{P}^1$ the $\mathbb{P}^1$-fibration which extends q_1. If the $\mathbb{A}^1$-fibration $q_2 : V \to Z_2 \simeq \mathbb{A}^1$ extends to a $\mathbb{P}^1$-fibration $\bar{q}_2 : \bar{V} \to \bar{Z}_2 \simeq \mathbb{P}^1$ then $V \simeq \mathbb{A}^2$ by lemma D.2.13 and q_1 and q_2 are coordinates on V which proves the assertion. So we may assume from now on that $\bar{q}_2 : \bar{V} \dashrightarrow \bar{Z}_2 \simeq \mathbb{P}^1$ is a linear pencil with a unique base point $P \in F_\infty \setminus S$ (see D.2.14). Therefore $\bar{q}_2|_{S \cup G} = \infty$ and $\bar{T}_2 \setminus T_2 = P$ for the closure $\bar{T}_2$ of a general fiber T_2 of q_2.

To prove that ϕ_{12} is quasi-finite it is sufficient to show that none of the irreducible components of a fiber of q_2 is contained in a fiber of q_1. Suppose on the contrary that there exists an irreducible component C of a fiber F_1 of q_1 which is contained in a fiber F_2 of q_2. If F_1 were a nondegenerate fiber of q_1 then its closure

$\bar{F}_1 = \bar{C}$ in $\bar{V}$ would meet S in a single point P_1. Since $\bar{q}_2|_C$ is constant and finite and $\bar{q}_2\left(\bar{C} \cap S\right) = \infty$ it follows that P_1 would be a base point of $\bar{q}_2$ which is impossible. Thus by proposition D.2.15 F_1 is a unique degenerate fiber of q_1 and hence, $\bar{C}$ meets G (see D.2.12). Since $q_2|_C$ is constant and finite and $\bar{q}_2\left(G \cap \bar{C}\right) = \infty$ it follows that $Q = G \cap \bar{C}$ is a base point of $\bar{q}_2$ which is again impossible. Thus there is no such curve C on V and hence, ϕ_{12} is quasi-finite.

The normalisation of every irreducible component C of a fiber of q_2 is isomorphic to $\mathbb{A}^1$ by lemma D.1.7. Hence the restriction of q_1 to C is nonconstant and surjective, and so $\phi : V \to \mathbb{A}^2$ is a surjection as required. □

COROLLAIRE D.2.22. *A normal affine surface V is isomorphic to $\mathbb{A}^2$ if and only if it admits two $\mathbb{A}^1$-fibrations whose general fibers meet in a single point.*

PROOF. We let $q_i : V \to Z_i \simeq \mathbb{A}^1$, $i = 1, 2$ be two $\mathbb{A}^1$-fibrations as above. The morphism $\phi := q_1 \times q_2 : V \to \mathbb{A}^2$ is surjective and quasi-finite by lemma D.2.21. Since the general fibers of q_1 and q_2 meet in a single point it follows that ϕ is birational. By the Zariski Main Theorem there exists a factorization

$$\phi : V \xrightarrow{\phi'} X \xrightarrow{u} \mathbb{A}^2$$

where ϕ' is an open immersion and $u : X \to \mathbb{A}^2$ is finite and birational whence an isomorphism. Then $\phi' = \phi$ is an isomorphism too as ϕ is surjective. □

To conclude we provide a series of examples of nonsingular affine surfaces in $\mathbb{A}^3$ with easily computable completions, and we distinguish ML-surfaces among these.

EXEMPLE D.2.23. We consider the hypersurface $V := V_{P,n}$ of $\mathbb{A}^3 = Spec\mathbb{C}\left[x, y, z\right]$, with equation $x^n z = P\left(y\right)$, where $P = \prod_{i=1}^{r}\left(y - y_i\right)$ is a polynomial with r simple roots. Let us show if that V has a nontrivial Makar-Limanov invariant provided $n, r \geq 2$ (see **[33]** and **[34]** for a purely algebraic proof of this result). By theorem D.2.16 it is sufficient to find a minimal completion $\bar{V}$ of V such that $B = \bar{V} \setminus V$ is not a zigzag. We proceed as follows. We consider the birational morphism

$$\begin{array}{ccl} V & \overset{\phi_0}{\to} & V_0 := \mathbb{A}^2 \subset \bar{V}_0 := \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x, y) \end{array}$$

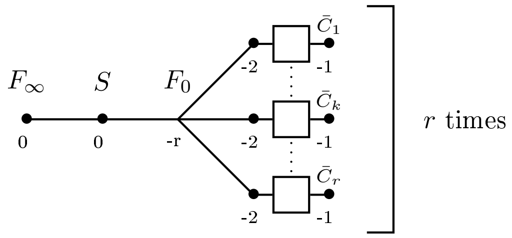
and we let $S = \mathbb{P}^1 \times \{\infty\} \subset \bar{V}_0$, $F_\infty = \{\infty\} \times \mathbb{P}^1 \subset \bar{V}_0$ and $F_0 = \{0\} \times \mathbb{P}^1 \subset \bar{V}_0$. We denote by $C_i \subset V$ the curve $x = 0, y = y_i$ for $1 \leq i \leq r$; these are the irreducible components of the degenerate fiber of the $\mathbb{A}^1$-fibration $pr_1 \circ \phi_0$ on V . Then $\phi_0\left(C_i\right) = \left(0, y_i\right) \subset F_0$ is a point. We let $V_i = V \setminus \left(\bigcup_{j \neq i} C_i\right) \simeq \mathbb{A}^2$ with coordinates $\left(x, u_i\right)$, where $u_i := x^{-n}\left(y - y_i\right) = \prod_{j \neq i}\left(y - y_j\right)^{-1} z$. The restriction of ϕ_0 to V_i is given by

$$\begin{array}{ccc} V_i \simeq \mathbb{A}^2 & \overset{\phi_0|_{V_i}}{\to} & \mathbb{A}^2 \\ (x, u_i) & \mapsto & (x, x^n u_i + y_i) \end{array}.$$

We let $\pi_1 : \bar{V}_1 \to \bar{V}_0$ be the blow-up of $\bar{V}_0$ in the points $\phi_0\left(C_i\right)$ with exceptional divisors $E_{1,i}$ for $1 \leq i \leq r$. Clearly $\phi_0 : V \to V_0$ lifts to a morphism $\phi_1 : V \to V_1 \subset \bar{V}_1 \setminus \left(F'_\infty \cup S' \cup F'_0\right)$. Moreover $\phi_1\left(V_i\right) \subset V_{1,i} := \bar{V}_1 \setminus \left(F'_\infty \cup S' \cup F'_0 \cup \left(\bigcup_{j \neq i} E_{1,j}\right)\right) \simeq \mathbb{A}^2$, and ϕ_1 is given by

$$\begin{array}{ccc} V_i \simeq \mathbb{A}^2 & \overset{\phi_1|_{V_i}}{\to} & \mathbb{A}^2 \\ (x, u_i) & \mapsto & \left(x, x^{n-1} u_i + y_{1,i}\right) \end{array}$$

for some $y_{1,i} \in \mathbb{C}$. Iterating the construction, after n blow-ups as above we arrive at an open embedding $\phi_n : V \hookrightarrow \bar{V}$ of V in a nonsingular projective surface $\bar{V}$. We let $B = \bar{V} \setminus V$. If $\bar{C}_i$ denotes the closure of $\phi_n\left(C_i\right)$ in $\bar{V}$ then the dual graph of $B \cup \bar{C}_1 \cup \cdots \cup \bar{C}_r$ has the following structure:



where $\square$ stands for a linear chain of (-2)-curves of length $n-3$ (provided $n \geq 3$) .

Thus $\bar{V}$ is a minimal completion of V by an SNC-divisor B, which is a zigzag iff $r=1$. Hence by proposition D.2.10 and D.2.15 V has a trivial Makar-Limanov invariant iff $n=1$ or $n>1$ and $r=1$. The interested reader is referred to [**1**] for a more systematic study of these surfaces and to [**2**] for more explicit examples of surfaces with $\mathbb{C}_+$-actions.

Bibliographie

1. T. Bandman and L. Makar-Limanov, *Affine surfaces with $AK(S) = \mathbb{C}$*, Michigan J. Math. **49** (2001), 567–582.
2. J. Bertin, *Pinceaux de droites et automorphismes des surfaces affines*, J. reine angew. Math. **341** (1983), 32–53.
3. P. Bonnet, *Surjectivity of quotient maps for algebraic $(\mathbb{C},+)$-actions and polynomial maps with contractible fibers*, Transformation Groups **7** (2002), no. 1, 3–14.
4. N Bourbaki, *Algèbre commutative*, Eléments de Math., vol. 27, 28, 30, 31, Herman, Paris, (1961-1965).
5. A. Crachiola, *On automorphisms of Danielewski surfaces*, (2004), E-Print math.AG/0406415.
6. D. Daigle, *Homogeneous locally nilpotent derivations of $k[x,y,z]$*, J. Pure Appl. Algebra **128** (1998), 109–132.
7. ______, *Locally nilpotent derivations and Danielewski surfaces*, to appear in Osaka J. Math. (2003).
8. ______, *On locally nilpotent derivations of $k[x,y,z]/(xy-p(z))$*, JPPA **181** (2003), 181–208.
9. D. Daigle and G. Freudenburg, *A counterexample to Hilbert's Fourteenth Problem in dimension five*, J. Algebra **221** (1999), 528–535.
10. D. Daigle and P. Russell, *On log $\mathbb{Q}$-homology planes and weighted projective planes*, (2002), To appear in Canadian J. Math.
11. W. Danielewski, *On a cancellation problem and automorphism groups of affine algebraic varieties*, Preprint Warsaw, 1989.
12. J.K. Deveney and D.R. Finston, *A proper $\mathbb{G}_a$ action on $\mathbb{C}^5$ which is not locally trivial*, manuscrit.
13. A. Dubouloz, *Completions of normal affine surfaces with a trivial Makar-Limanov invariant*, Michigan Math. J. **52** (2004), no. 2, 289–308, Prepub. Inst. Fourier n°579, 2002.
14. ______, *Danielewski-Fieseler surfaces*, To appear in Transformation Groups (2004), 26p, E-print math.AG/0401225.
15. ______, *Embeddings of Danielewski surfaces in affines spaces*, (2004), E-Print math.AG/0403208.
16. A. Dubouloz and P.M. Poloni, *Hypersurfaces de Danielewski*, En préparation.
17. K.H. Fieseler, *On complex affine surfaces with $\mathbb{C}_+$-actions*, Comment. Math. Helvetici **69** (1994), 5–27.
18. G. Freudenburg, *Local slice constructions in $k[x,y,z]$*, Osaka J. Math. **34** (1997), 757–767.
19. G. Freudenburg and L. Moser-Jauslin, *Embeddings of Danielewski surfaces*, preprint Univ. Bourgogne (2002), no. n° 298.
20. M.H. Gizatullin, *Quasihomogeneous affine surfaces*, Math. USSR Izvestiya **5** (1971), 1057–1081.
21. M.H. Gizatullin and V.I. Danilov, *Automorphismes of affine surfaces I*, Math. USSR Izvestiya **9** (1975), 493–534.
22. ______, *Automorphismes of affine surfaces II*, Math. USSR Izvestiya **1** (1977), 51–98.
23. J.E. Goodman, *Affine open subsets of algebraic varieties and ample divisors*, Ann. of Maths. **89** (1969), 160–183.
24. A. Grothendieck and J. Dieudonné, *EGA III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents*, vol. 11 (1961), 17 (1963).
25. ______, *EGA IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas*, vol. 20 (1964), 24 (1965), 28 (1966), 32 (1967).
26. ______, *EGA II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*, vol. 8, 1961.

27. A. Grothendieck et al., *SGA 3, Schémas en Groupes I,II,III*, Lecture Notes in Math., no. 151,152,153, Springer-Verlag, 1970.
28. ———, *SGA1. Revêtements Étales et Groupe Fondamental*, Lecture Notes in Math., vol. 224, Springer-Verlag, 1971.
29. R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Grad. Texts in Math., vol. 52, Springer, New York, 1977.
30. S. Kaliman, *Free $\mathbb{C}_+$-actions on $\mathbb{C}^3$ are translations*, Invent. Math. **156** (2004), no. 1, 163–173.
31. S. Kaliman and L. Makar-Limanov, *On the Russel-Koras contractible threefolds*, J. Algebraic Geom. **6** (1997), 247–268.
32. S. Kaliman and M. Zaidenberg, *Affine modifications and affine hypersurfaces with a very transitive automorphism group*, Transformation Groups **4** (1999), 53–95.
33. L. Makar-Limanov, *On groups of automorphisms of a class of surfaces*, Israel J. Math. **69** (1990), 250–256.
34. ———, *On the group of automorphisms of a surface $x^n y = p(z)$*, Israel J. Math. **121** (2001), 113–123.
35. J.S. Milne, *Etale Cohomology*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1980.
36. M. Miyanishi, *Open Algebraic Surfaces*, vol. 12, CRM Monograph Series, 2001.
37. M. Miyanishi and K. Masuda, *The additive group actions on $\mathbb{Q}$-Homology planes*, Ann. Inst Fourier **53** (2003), no. 2, 429–464.
38. D. Mumford and J. Fogarty, *Geometric Invariant Theory*, Spinger-Verlag, 1994.
39. F. Oort, *Commutative group schemes*, Lect. notes in Math. no 15, Springer, 1966.
40. R. Rentschler, *Opérations du groupe additif sur le plan affine*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris **267** (1968), 384–387.
41. M. Rosenlicht, *A remark on quotient spaces*, An. Acad. Brasil. Ciênc. **35** (1963), 487–489.
42. P. Russell, *On a class of $\mathbb{C}^3$-like threefolds*, Tech. report, Preliminary Report, Berlin, 1992.
43. J.P Serre, *Espaces fibrés algébriques*, Anneaux de Chow et Applications (Secrétariat Math., ed.), Séminaire Chevalley, 1958.
44. W.C. Waterhouse, *Introduction to affine group schemes*, GTM no. 66, Springer-Verlag, 1979.
45. D. Wright, *On the Jacobian conjecture*, Illinois J. of Math. **25** (1981), 423–440.