THESE DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

présentée par :

LAURENT DOYEN

Modélisation et évaluation de l'efficacité de la maintenance des systèmes réparables

sous la direction de :

OLIVIER GAUDOIN

Préparée au sein du laboratoire LMC

Institut National Polytechnique de Grenoble

Les systèmes réparables complexes sont soumis à 2 types d'actions de maintenance :

- **Maintenances Correctives (MC, réparations) :**

  actions exécutées après détection d'une panne et destinées à remettre un bien dans un état dans lequel il peut accomplir une fonction requise (AFNOR[01]).

- **Maintenances Préventives (MP) :**

  actions exécutées à des intervalles de temps prédéterminés ou selon des critères prescrits et destinées à réduire la probabilité de défaillance ou la dégradation du fonctionnement d'un bien (AFNOR[01]).

Une gestion efficace des politiques de maintenance nécessite une modélisation réaliste et une évaluation précise de leur effet.

Plan

Introduction et notations

1. **MC uniquement :**
   – intensité de défaillance et processus ponctuel,
   – modèles ARI et ARA,
   – modèle de Brown-Proschan.
2. **MC et MP planifiées :**
   – modélisation par un processus ponctuel,
   – modèle d'âge virtuel généralisé,
   – les plans de MP classiques.
3. **MC et MP conditionnelles :**
   – modélisation par un processus ponctuel bivarié,
   – lien avec l'approche risques concurrents,
   – modèle d'âge virtuel généralisé,
   – loi identifiable de dépendance entre les risques.
4. **Etude du jeu de données EDF.**

Introduction et notations

Hypothèse : Les durées de maintenance ne sont pas prises en compte.

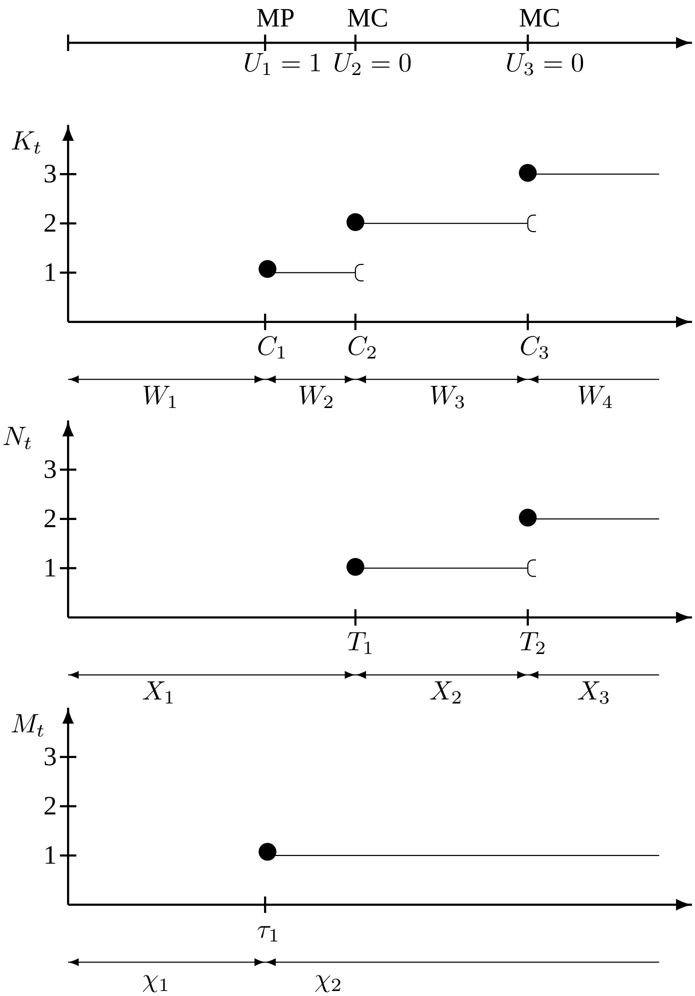
Exemple de données :

UNITES																
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
MP 2145	MP 853	MC 158	MP 311	MC 4120	MP 2689	MP 4394	MC 2602	MP 1462	MC 1667	MP 788	MC 82	MC 3011	MP 3528	MP 201	MC 321	MP 742
Cen 4582	Cen 4368	MP 1942	Cen 3273	Cen 5040	Cen 4643	Cen 5739	Cen 5130	MC 2259	MP 2073	MC 1090	MP 2921	MP 3559	Cen 5433	MP 298	Cen 5344	Cen 6348
		Cen 5009						Cen 5040	Cen 3607	MC 1207	MC 4454	Cen 4248		MC 2008		
										MP 1705	Cen 4703			Cen 2968		
										Cen 2483						

Problème :

– **Modéliser** le processus des MP et MC.

– **Evaluer** une efficacité globale de MP et une efficacité globale de MC.



Processus coloré

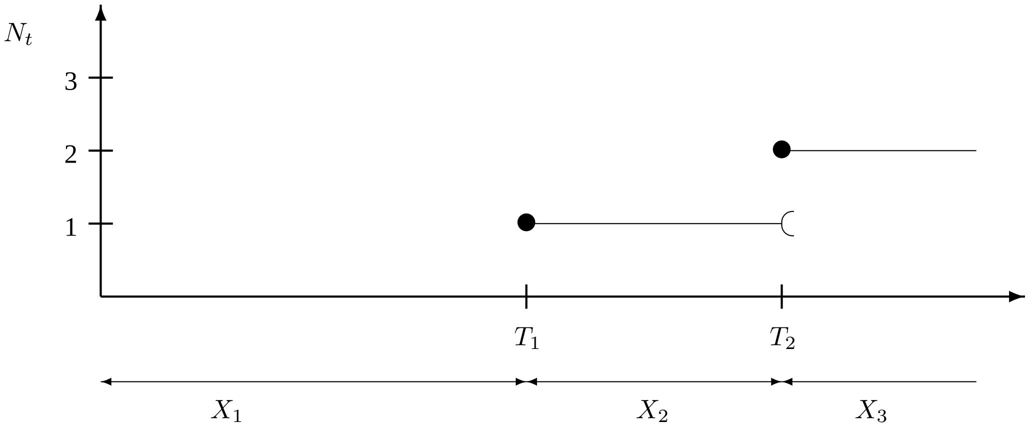
– Nb de maintenances : $\{K_t\}_{t\geq 0}$
– Instants de maintenance : $\{C_i\}_{i\geq 1}$
– Type de maintenance : $\{U_i\}_{i\geq 1}$
– Durées inter-maintenances : $\{W_i\}_{i\geq 1}$

Processus bivarié

– Nb de MC : $\{N_t\}_{t\geq 0}$
– Instants de MC : $\{T_i\}_{i\geq 1}$
– Durées inter-MC : $\{X_i\}_{i\geq 1}$

– Nb de MP : $\{M_t\}_{t\geq 0}$
– Instants de MP : $\{\tau_i\}_{i\geq 1}$
– Durées inter- MP : $\{\chi_i\}_{i\geq 1}$

1. MC UNIQUEMENT



– Instants de défaillance (= MC) : $\{T_i\}_{i\geq 1}$
– Durées inter-défaillances : $X_i = T_i - T_{i-1}$
– Nombre cumulé de défaillances survenues : $\{N_t\}_{t\geq 0}$ processus aléatoire ponctuel

1.A/ MODÉLISATION STOCHASTIQUE DU PROCESSUS DES DÉFAILLANCES

Intensité de défaillance :

$$\lambda_t^N = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P(N_{t+\Delta t} - N_{t^-} = 1 | \mathcal{H}_{t^-})$$

où $\mathcal{H}_{t^-}$ est l'histoire du processus des défaillances.

Processus ponctuel auto-excité : $\mathcal{H}_{t^-} = \sigma(\{N_s\}_{0 \leq s < t})$

$\lambda_t^N = \lambda_t$ caractérise alors complètement le processus des défaillances :

$$P(X_{n+1} > x \mid T_1, \ldots, T_n) = exp\left(-\int_{T_n}^{T_n+x} \lambda_u du\right)$$

$$L_t(\theta) = \left[\prod_{i=1}^{N_t} \lambda_{T_i}\right] e^{-\Lambda_t} \qquad \text{où } \Lambda_t = \int_0^t \lambda_u \, du$$

Le système neuf a une durée de vie Z,

de taux de défaillance :

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P(t < Z \leq t + \Delta t | Z > t)$$

$\lambda(t)$ est appelée **intensité initiale** et caractérise la qualité intrinsèque du système.

$\lambda(t)$ est supposée déterministe, croissante et non identiquement nulle.

Remarque : Z et T_1 ont la même loi.

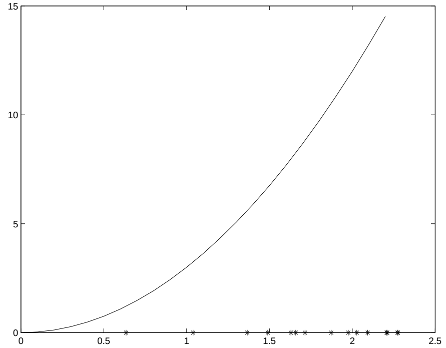
Applications : $\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$, avec $\alpha > 0$ et $\beta > 1$.

Hypothèse : **"As Bad As Old"**

Réparation minimale

$\Rightarrow$ Processus de Poisson Non Homogène (NHPP) :

$$\boxed{\lambda_t = \lambda(t)}$$

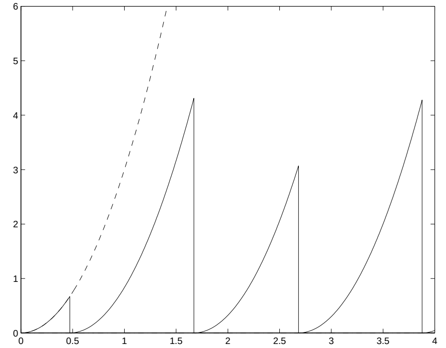


Hypothèse : **"As Good As New"**

Réparation optimale

$\Rightarrow$ Processus de Renouvellement (RP) :

$$\boxed{\lambda_t = \lambda(t - T_{N_{t-}})}$$



En pratique, on est entre ces deux extrêmes

Modèle d'âge virtuel :

Kijima [89]

– Le système neuf a une durée de vie Z,

– **La maintenance rajeunit le système.**

$$\forall i > 1, \quad P(X_{i+1} > x | A_i, X_1, ..., X_i) = P(Z > A_i + x | Z > A_i, A_i)$$

$$\boxed{\lambda_t^N(N, A) = \lambda(t - T_{N_{t^-}} + A_{N_{t^-}})}$$

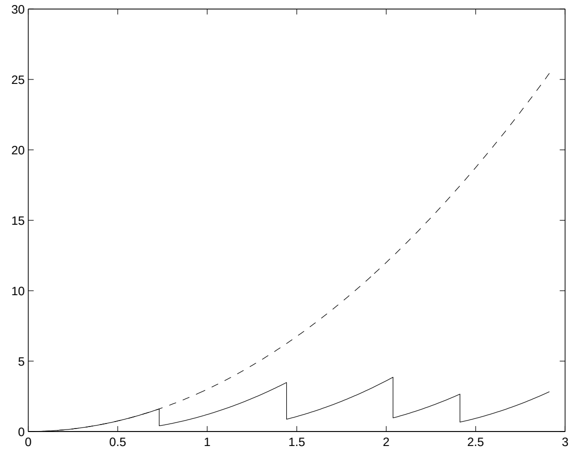
- ABAO : $A_i = T_i$
- AGAN : $A_i = 0$

- Brown-Mahoney-Sivazlian [83]

$$A_i = (1-\rho)(A_{i-1} + X_i)$$

$$A_i = \sum_{j=1}^{i} (1-\rho)^{i-j+1} X_j$$

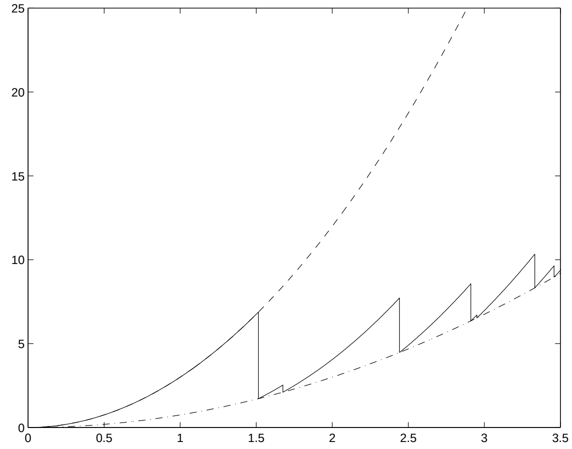
$$\boxed{\lambda_t = \lambda\left(t - \rho \sum_{j=0}^{N_{t-}-1} (1-\rho)^j T_{N_{t-}-j}\right)}$$



- PAR : Malik [79]

$$A_i = A_{i-1} + (1-\rho)X_i$$
$$A_i = (1-\rho)T_i$$

$$\boxed{\lambda_t = \lambda(t - \rho T_{N_{t-}})}$$

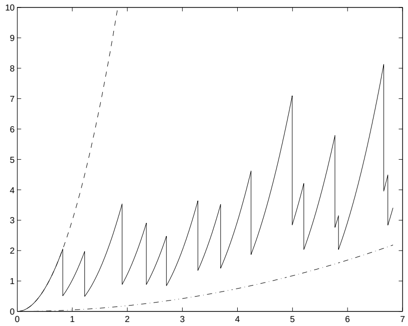


1.B/ MODÈLES ARI ET ARA

- ARA_m :

$$\boxed{\lambda_t = \lambda\Big(t - \rho \sum_{j=0}^{min(N_{t^-}-1, m-1)} (1-\rho)^j T_{N_{t^-}-j}\Big)}$$

$$\text{ARA}_1 \Rightarrow \text{PAR} \quad \text{et} \quad \text{ARA}_\infty \Rightarrow \text{BMS}$$



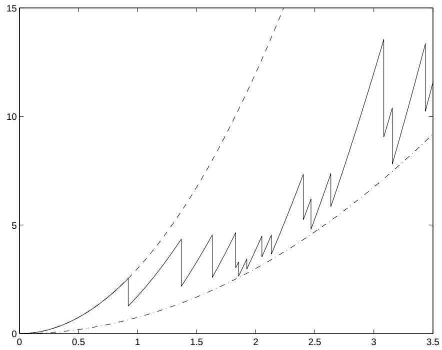
ρ facteur d'efficacité de maintenance :

– $0 < \rho < 1$: maintenance efficace
– $\rho = 1$: maintenance parfaite (AGAN)
– $\rho = 0$: maintenance minimale (ABAO)
– $\rho < 0$: maintenance nuisible

Evaluer l'efficacité de la maintenance c'est estimer ρ.

ARI_m :

$$\boxed{\lambda_t = \lambda(t) - \rho \sum_{j=0}^{min(N_{t^-}-1,m-1)} (1-\rho)^j \lambda(T_{N_{t^-}-j})}$$

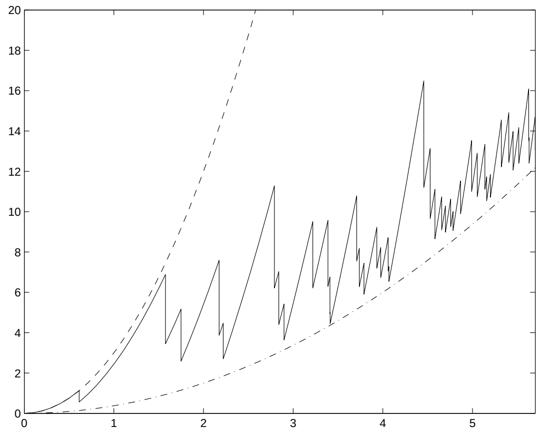


- ARI_1 : $\lambda_t = \lambda(t) - \rho\lambda(T_{N_{t^-}})$
- ARI_∞ : Chan-Shaw [93]

$$\lambda_t = \lambda(t) - \rho \sum_{j=0}^{N_{t^-}-1} (1-\rho)^j \lambda(T_{N_{t^-}-j})$$

ρ facteur d'efficacité de maintenance

Intensité asymptotique :



ARI_3, $\rho = 0.5$

ARI_m : $\lambda_\infty(t) = (1-\rho)^m \lambda(t)$

ARA_m : $\lambda_\infty(t) = \lambda((1-\rho)^m t)$

Hypothèses :

- $m < \infty$
- $\rho < 1$
- ARA_m : $\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$ $\quad \alpha > 0$ et $\beta > 1$
- ARI_m : • $\lambda(t) \to \infty$
  - • $\exists \beta \in \mathbb{R}^+, \ \forall x > 0, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\lambda(xt)}{\lambda(t)} = x^\beta$

$$\lambda_t = \lambda_\infty(t) + o(\lambda_\infty(t)) \quad (p.s.)$$

$$\Lambda_t = \Lambda_\infty(t) + \frac{1-(1+m\rho)(1-\rho)^m}{\rho(1-\rho)^m} ln(\lambda(t)) + o(ln(\lambda(t))) \quad (p.s.)$$

Hypothèses : – $m < \infty$

– $\lambda(t)$ connue

– On connaît un compact de $]-\infty, 1[$ contenant ρ

– ARA$_m$: $\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$ avec $\alpha > 0$ et $\beta > 1$

– ARI$_m$: • $\lambda(t) \to \infty$

• $\exists\beta \in \mathbb{R}^+, \ \forall x > 0, \quad \lim_{t\to\infty} \dfrac{\lambda(xt)}{\lambda(t)} = x^\beta$

$$\forall\epsilon > 0 \qquad |\rho - \hat{\rho}|\, \Lambda(t)^{0.5-\epsilon} \xrightarrow[t\to+\infty]{p.s.} 0$$

$$\sqrt{\frac{\Lambda(t)}{(1-\rho)^{m_\beta}}}\left((1-\rho)^{m_\beta} - (1-\hat{\rho})^{m_\beta}\right) \xrightarrow[t\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

où $\hat{\rho}$ peut être : • pour ARA$_m$ et ARI$_m$, l'EMV,

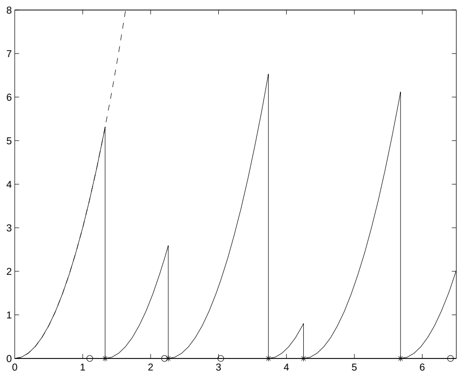
• pour ARA$_m$, $\hat{\rho} = 1 - \left(\frac{N_t}{\Lambda(t)}\right)^{\frac{1}{m(\beta-1)}}$,

• pour ARI$_m$, $\hat{\rho} = 1 - \left(\frac{N_t}{\Lambda(t)}\right)^{\frac{1}{m}}$,

• pour ARI$_1$, $\hat{\rho} = \frac{\Lambda(t)-N_t}{\int_0^t \Lambda(T_{N_{s^-}})\, ds}$,

et avec $m_\beta = m$ pour ARI$_m$ et $m_\beta = m(\beta - 1)$ pour ARA$_m$.

1.c/ Modèle BP



Brown-Proschan [83]

L'effet de la maintenance est :

- AGAN avec une probabilité p
- ABAO avec une probabilité $1-p$

$$\boxed{\lambda_t^N(N,B) = \lambda\left(t - T_{N_{t^-}} + \sum_{j=1}^{N_{t^-}}\left[\prod_{k=j}^{N_{t^-}}(1-B_k)\right]X_j\right)}$$

B_i représente l'efficacité de la i ème maintenance : $B_i = \begin{cases} 1 & \text{MC AGAN} \\ 0 & \text{MC ABAO} \end{cases}$

$B_i \sim \mathcal{B}(p)$, $B_i \perp B_j$ et $B_i \perp T_k$ pour tout $j \geq 1$ et $k \leq i$.

Mais en pratique on ne connaît pas la valeur des B_i !

Théorème d'innovation :

$$\lambda_t = E[\lambda_t^N(N,B)|\{N_s\}_{0\leq s\leq t}]$$

Intensité de défaillance propre du modèle BP :

$$\boxed{\lambda_t = \frac{-d}{dt}\Big[ln\Big(\sum_{j=0}^{N_{t-}} p^{\mathbb{1}\{j>0\}}(1-p)^{N_{t-}-j}\Big[\prod_{i=j+1}^{N_{t-}}\frac{\lambda(T_i-T_j)}{\lambda_{T_i}}\Big]e^{-\Lambda(t-T_j)-\Lambda_{T_j}}\Big)\Big]}$$

$$L_t(\theta) = (1-p)^{N_{t-}}\Big[\prod_{i=1}^{N_{t-}}\lambda(T_i)\Big]\lambda(t)^{\mathbb{1}_{\{t=T_{N_t}\}}}e^{-\Lambda(t)} + p\Big[\sum_{j=1}^{N_{t-}}(1-p)^{N_{t-}-j}$$

$$\Big[\prod_{i=j+1}^{N_{t-}}\lambda(T_i-T_j)\Big]\lambda(t-T_j)^{\mathbb{1}_{\{t=T_{N_t}\}}}e^{-\Lambda(t-T_j)}L_{T_j}(\theta)\Big]$$

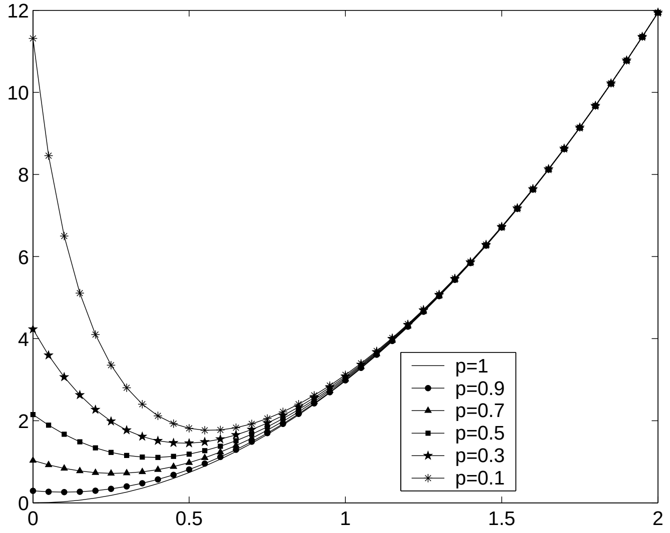
Convergence en loi des durées inter-défaillances :

Ainsi, si $p > 0$ et $e^{-\Lambda(x)} = o(1)$ alors :

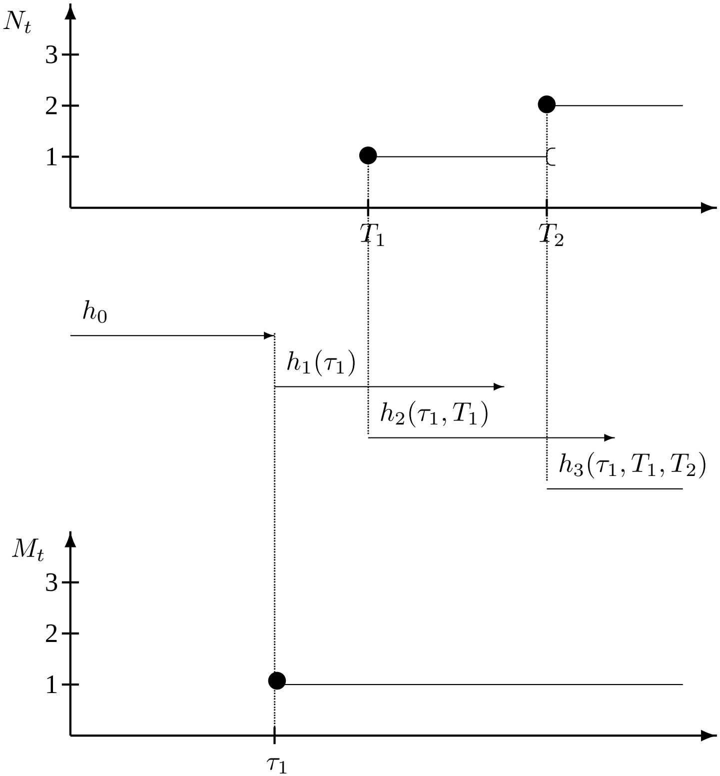
$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$

avec : $S_X(x) = p \int_0^{+\infty} \lambda(x+v)\, e^{-\Lambda(x+v)+(1-p)\,\Lambda(v)}\, dv$

Taux de défaillance de X pour $\lambda(t) = 3t^2$:



2/ MC ET MP PLANIFIÉES



La date prévue de la prochaine MP est une fonction déterministe du passé des observations :

$$U_{K_{t^-}+1} = 1 \Rightarrow$$
$$\tau_{M_{t^-}+1} = C_{K_{t^-}} + h_{K_{t^-}}(W_1, ..., U_{K_{t^-}})$$

avec $h_k(.)$ fonction déterministe.

$$\lambda_t^N(K,U) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P(N_{t+\Delta t} - N_{t^-} = 1 \,|\, K_{t^-}, W_1, ..., U_{K_{t^-}})$$

N est un processus ponctuel auto-excité.

Loi conditionnelle du temps d'attente jusqu'à la prochaine défaillance :

$$P(T_{N_{C_k}+1} > t | W_1, ..., U_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < C_k \\ e^{-\int_{C_k}^{t} \lambda_s^N(K,U)\, ds} & \text{sinon} \end{cases}$$

Fonction de vraisemblance :

$$L_t(\theta) \;=\; \left[\prod_{i=1}^{K_t} \lambda_{C_i}^N(i-1, W_1, ..., U_{i-1})^{1-U_i}\right] e^{-\sum_{j=1}^{K_{t^-}+1} \int_{C_{j-1}}^{C_j} \lambda_s^N(j-1, W_1, ..., U_{j-1})\, ds}$$

Modèle d'âge virtuel généralisé :

– Le système neuf, en l'absence de MP, a une durée de vie Z de taux de défaillance $\lambda(t)$.

– **La maintenance rajeunit le système** : pour $w \leq h_k(W_1, ..., U_k)$,

$$P(W_{k+1} > w | A_k(K, U), W_1, ..., U_k)$$
$$= P(Z > A_k(K, U) + w \mid Z > A_k(K, U), A_k(K, U))$$

avec $A_k(K, U) = a_k(W_1, ..., U_k)$, où $a_k(.)$ est une fonction déterministe et $a_0 = 0$.

$$\boxed{\lambda_t^N(K, U) = \lambda\left(t - C_{K_{t^-}} + A_{K_{t^-}}(K, U)\right)}$$

- MP ABAO, MC ABAO : $\quad A_k(K,U) = C_k$

$$\lambda_t^N = \lambda(t)$$

- MP ABAO, MC AGAN : $\quad A_k(K,U) = C_k - T_{N_{C_k}}$

$$\lambda_t^N(N) = \lambda(t - T_{N_{t-}})$$

- MP AGAN, MC AGAN : $\quad A_k(K,U) = 0$

$$\lambda_t^N(K) = \lambda(t - C_{K_{t-}})$$

- MP AGAN, MC ABAO : $\quad A_k(K,U) = C_k - \tau_{M_{C_k}}$

$$\lambda_t^N(M) = \lambda(t - \tau_{M_{t-}})$$

- MP ARA $_\infty$, MC ARA$_\infty$:

$$A_{k+1}(K,U) = \begin{cases} (1-\rho_c)[W_{k+1} + A_k(K,U)] & \textbf{si } U_{k+1} = 0 \textbf{ (MC)} \\ (1-\rho_p)[W_{k+1} + A_k(K,U)] & \textbf{si } U_{k+1} = 1 \textbf{ (MP)} \end{cases}$$

$$\lambda_t^N(K,U) = \lambda\left(t - C_{K_{t-}} + \sum_{j=1}^{K_{t-}} (1-\rho_p)^{M_t - M_{C_{j-1}}} (1-\rho_c)^{N_t - N_{C_{j-1}}} W_j \right)$$

Modèle BP généralisé :

$$B_i = \begin{cases} 1 & \text{si la maintenance est AGAN} \\ 0 & \text{si la maintenance est ABAO} \end{cases}$$

$$P(B_i = 1 \,|\, W_1, ..., U_i, B_1, ..., B_{i-1}) = \begin{cases} p_c & \textbf{si } U_{k+1} = 0 \textbf{ (MC)} \\ p_p & \textbf{si } U_{k+1} = 1 \textbf{ (MP)} \end{cases}$$

$$\lambda_t^N(K, U, B) = \lambda \left(t - C_{K_{t^-}} + \sum_{j=1}^{K_{t^-}} \left[\prod_{i=j}^{K_{t^-}} (1 - B_i) \right] W_j \right)$$

Théorème d'innovation :

$$\lambda_t^N(K, U) = E[\lambda_t^N(K, U, B) | \{K_s, U_{K_s}\}_{0 \leq s \leq t}]$$

Intensité de défaillance propre du modèle BP :

$$\lambda_t^N(K,U) = -\frac{d}{dt}\left[ln\left(\sum_{j=0}^{K_{t-}} p_{U_j}^{\mathbb{1}_{\{j>0\}}}\left[\prod_{i=j+1}^{K_{t-}}(1-p_{U_i})\left[\frac{\lambda(C_i-C_j)}{\lambda_{C_i}^N(K,U)}\right]^{1-U_i}\right] e^{-\Lambda(t-C_j)-\Lambda_{C_j}^N(K,U)}\right)\right]$$

Fonction de vraisemblance du modèle BP :

$$L_t(\theta) = \left[\prod_{i=1}^{K_{t-}}(1-p_{U_i})\lambda(C_i)^{1-U_i}\right]\lambda(t)^{(1-U_{K_t})\mathbb{1}_{\{t=C_{K_t}\}}}\, e^{-\Lambda(t)}$$
$$+\left[\sum_{j=1}^{K_{t-}} p_{U_j}\left[\prod_{i=j+1}^{K_{t-}}(1-p_{U_i})\lambda(C_i-C_j)^{1-U_i}\right]\lambda(t-C_j)^{(1-U_{K_t})\mathbb{1}_{\{t=C_{K_t}\}}}\, e^{-\Lambda(t-C_j)} L_{C_j}(\theta)\right]$$

Politiques classiques de MP

- MP à date fixée : Les dates de MP sont déterministes

$$h_k(W_1, ..., U_k) = \tau_{m_{C_k}+1} - C_k$$

Nakagawa [88], Chan-Shaw [93], Wang-Pham [96], Jack [97][98]

- MP à âge fixé : $t - C_{K_{t^-}} + A_{K_{t^-}}(K, U) \geq a_{K_{t^-}} \Rightarrow$ MP

$$h_k(W_1, ..., U_k) = a_k - A_k(K, U)$$

Brown-Mahoney-Sivazlian [83], Dagpunar-Jack [94], Lin-Zuo-Yam [00]

- MP à intensité fixée : $\lambda_t^N(K, U) \geq b_{K_{t^-}} \Rightarrow$ MP

$$h_k(W_1, ..., U_k) = \lambda^{-1}(b_k) - A_k(K, U)$$

Lie-Chun [86], Jayabalan-Chaudhuri [92], Lin-Zuo-Yam[00]

3/ MC et MP conditionnelles

La MP a lieu **en fonction d'une surveillance du système** :
– état de dégradation avancé,
– perte de performance,
– sortie des conditions standards de fonctionnement,...

$$\lambda_t^N(K,U) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P(N_{t+\Delta t} - N_{t^-} = 1 | K_{t^-}, W_1, ..., U_{K_{t^-}})$$
$$\lambda_t^M(K,U) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P(M_{t+\Delta t} - M_{t^-} = 1 | K_{t^-}, W_1, ..., U_{K_{t^-}})$$
$$\lambda_t^K(K,U) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P(K_{t+\Delta t} - K_{t^-} = 1 | K_{t^-}, W_1, ..., U_{K_{t^-}})$$

$$\lambda_t^K(K,U) = \lambda_t^N(K,U) + \lambda_t^M(K,U)$$

Formules de Jacod : Andersen-Borgan-Gill-Keiding [93]

$$P(W_{k+1} > w, U_{k+1} = 0 | W_1, ..., U_k) = \int_w^{+\infty} \lambda^N_{C_k+u}(k, W_1, ..., U_k)\, e^{-\int_0^w \lambda^K_{C_k+s}(k, W_1, ..., U_k)\, ds} du$$

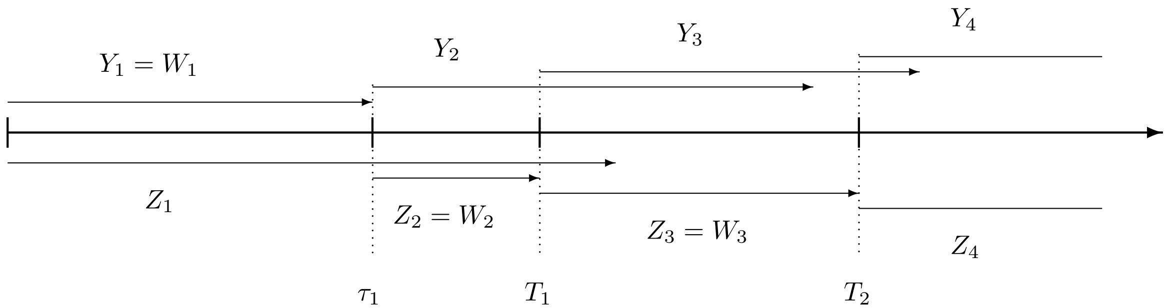
$$P(W_{k+1} > w, U_{k+1} = 1 | W_1, ..., U_k) = \int_w^{+\infty} \lambda^M_{C_k+u}(k, W_1, ..., U_k)\, e^{-\int_0^w \lambda^K_{C_k+s}(k, W_1, ..., U_k)\, ds} du$$

Fonction de vraisemblance :

$$L_t(\theta) = \left[\prod_{i=1}^{K_t} \lambda^N_{C_i}(i-1, W_1, .., U_{i-1})^{1-U_i}\, \lambda^M_{C_i}(i-1, W_1, ..., U_{i-1})^{U_i} \right] e^{-\sum_{j=1}^{K_{t-}+1} \int_{C_{j-1}}^{C_j} \lambda^K_s(j-1, W_1, .., U_{j-1})\, ds}$$

Approche risques concurrents : Cooke-Bedford [02]

– Y_i durée d'attente de la prochaine MP si une MC ne survient pas avant
– Z_i durée d'attente de la prochaine MC si une MP ne survient pas avant



Toutes les maintenances sont supposées AGAN

$$\forall k \geq 1 \qquad P(Y_k > y, Z_k > z) = P(Y_1 > y, Z_1 > z) = S(y, z)$$

- Modèle à risques indépendants : $Y_1 \perp Z_1$
- Modèle à signe aléatoire : Cooke [93], $(Y_1 - Z_1) \perp Z_1 \Leftrightarrow U_1 \perp Z_1$

Généralisation de l'approche risques concurrents :

$$S_{k+1}(y,z;W_1,...,U_k)=P(Y_{k+1}>y,Z_{k+1}>z|W_1,...,U_k)$$

Lien avec l'approche processus bivariés :

$$\lambda_t^N(K,U)=\frac{\Big[-\frac{\partial}{\partial z}S_{K_{t-}+1}(y,z;W_1,...,U_{K_{t-}})\Big]_{(t-C_{K_{t-}},t-C_{K_{t-}})}}{S_{K_{t-}+1}(t-C_{K_{t-}},t-C_{K_{t-}};W_1,...,U_{K_{t-}})}$$

$$\lambda_t^M(K,U)=\frac{\Big[-\frac{\partial}{\partial y}S_{K_{t-}+1}(y,z;W_1,...,U_{K_{t-}})\Big]_{(t-C_{K_{t-}},t-C_{K_{t-}})}}{S_{K_{t-}+1}(t-C_{K_{t-}},t-C_{K_{t-}};W_1,...,U_{K_{t-}})}$$

Modèle d'âge virtuel généralisé :

– Pour un système neuf, les variables de risque de MP et MC sont Y_1 et Z_1.

– **La maintenance rajeunit le système :**

$$P(\ Y_{k+1} > y\ ,\ Z_{k+1} > z \mid A_k(K,U), W_1, ..., U_k)$$

$$= P(\ Y_1 > A_k(K,U) + y\ ,\ Z_1 > A_k(K,U) + z \mid Y_1 > A_k(K,U)\ ,\ Z_1 > A_k(K,U)\ ,\ A_k(K,U))$$

$$\boxed{\begin{aligned}\lambda_t^N(K,U) &= \lambda_c(t - C_{K_{t^-}} + A_{K_{t^-}}(K,U))\\ \lambda_t^M(K,U) &= \lambda_p(t - C_{K_{t^-}} + A_{K_{t^-}}(K,U))\end{aligned}}$$

$$\lambda_c(x) = \frac{\left[\frac{\partial}{\partial z} S_1(y,z)\right]_{(t,t)}}{S_1(x,x)} \qquad \lambda_p(x) = \frac{\left[\frac{\partial}{\partial y} S_1(y,z)\right]_{(t,t)}}{S_1(x,x)}$$

- MP et MC AGAN :

$$\lambda_t^N(K) = \lambda_c(t - C_{K_{t-}}) \quad \text{et} \quad \lambda_t^M(K) = \lambda_p(t - C_{K_{t-}})$$

- MP et MC ABAO :

$$\lambda_t^N = \lambda_c(t) \quad \text{et} \quad \lambda_t^M = \lambda_p(t)$$

- MP et MC ARA$_\infty$:

$$\lambda_t^N(K,U) = \lambda_c\left(t - C_{K_{t-}} + \sum_{j=1}^{K_{t-}} (1-\rho_p)^{M_t - M_{C_{j-1}}}(1-\rho_c)^{N_t - N_{C_{j-1}}} W_j\right)$$

$$\lambda_t^M(K,U) = \lambda_p\left(t - C_{K_{t-}} + \sum_{j=1}^{K_{t-}} (1-\rho_p)^{M_t - M_{C_{j-1}}}(1-\rho_c)^{N_t - N_{C_{j-1}}} W_j\right)$$

Modèles identifiables de dépendance entre les risques :

On note $\lambda_{Z_1}(t)$ et $\lambda_{Y_1}(t)$ les taux de défaillance de Y_1 et Z_1.

• Modèle à risques indépendants :

$$\boxed{\lambda_c(t) = \lambda_{Z_1}(t) \quad \text{et} \quad \lambda_p(t) = \lambda_{Y_1}(t)}$$

$\lambda_c(t) = \alpha_c\, \beta_c\, t^{\beta_c - 1}$ avec $\alpha_c > 0$ et $\beta_c \geq 1$
$\lambda_p(t) = \alpha_p\, \beta_p\, t^{\beta_p - 1}$ avec $\alpha_p > 0$ et $\beta_p \geq 1$

• Généralisation du modèle de signe aléatoire :

Modèle à signe aléatoire : $U_1 \perp Z_1 \Rightarrow U_1 \perp W_1$

$$\boxed{\lambda_c(t) = (1-q)\lambda_{Z_1}(t) \quad \text{et} \quad \lambda_p(t) = q\,\lambda_{Z_1}(t)}$$

$q = P(U_1 = 1)$

- Modèle Langseth et Lindqvist :[03]

– hypothèse de signe aléatoire : $U_1 \perp Z_1$

– $P(Y_1 \leq y | Z_1 = z, Y_1 < Z_1) = \dfrac{\Lambda_{Z_1}(y)}{\Lambda_{Z_1}(z)}$, avec $\Lambda_{Z_1}(t) = \int_0^t \lambda_{Z_1}(s)\, ds$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_c(t) &= \frac{(1-q)\ \lambda_{Z_1}(t)\ e^{-\Lambda_{Z_1}(t)}}{e^{-\Lambda_{Z_1}(t)} - q\ \Lambda_{Z_1}(t)\ Ie(\Lambda_{Z_1}(t))} \\ \lambda_p(t) &= \frac{q\ \lambda_{Z_1}(t)\ Ie(\Lambda_{Z_1}(t))}{e^{-\Lambda_{Z_1}(t)} - q\ \Lambda_{Z_1}(t)\ Ie(\Lambda_{Z_1}(t))} \end{aligned}}$$

$q = P(U_1 = 1)$ et $Ie(t) = \displaystyle\int_t^{+\infty} \frac{e^{-s}}{s} ds$

Effets de maintenance non symétriques sur les processus de risque :

Pour un système neuf, les risques de MP et MC sont Y_1 et Z_1.

$$P(\ Y_{k+1} > y\ ,\ Z_{k+1} > z \mid A_k^p(K,U), A_k^c(K,U), W_1, ..., U_k)$$

$$= P(\ Y_1 > A_k^p(K,U) + y\ ,\ Z_1 > A_k^c(K,U) + z$$
$$\mid Y_1 > A_k^p(K,U)\ ,\ Z_1 > A_k^c(K,U)\ ,\ A_k^p(K,U),\ A_k^c(K,U))$$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_t^N(K,U) &= \frac{\left[\frac{\partial}{\partial y} S_1(y - C_{K_{t-}} + A^p_{K_{t-}}(K,U), z - C_{K_{t-}} + A^c_{K_{t-}}(K,U))\right]_{(t,t)}}{S_1(t - C_{K_{t-}} + A^p_{K_{t-}}(K,U), t - C_{K_{t-}} + A^c_{K_{t-}}(K,U))} \\ \lambda_t^M(K,U) &= \frac{\left[\frac{\partial}{\partial z} S_1(y - C_{K_{t-}} + A^p_{K_{t-}}(K,U), z - C_{K_{t-}} + A^c_{K_{t-}}(K,U))\right]_{(t,t)}}{S_1(t - C_{K_{t-}} + A^p_{K_{t-}}(K,U), t - C_{K_{t-}} + A^c_{K_{t-}}(K,U))} \end{aligned}}$$

L'analogie avec les travaux de Bedford-Lindqvist [04] tendrait à montrer que $S_1(y,z)$ est alors identifiable.

Modèle BP généralisé :

$$B_i = \begin{cases} 1 & \text{si la maintenance est AGAN} \\ 0 & \text{si la maintenance est ABAO} \end{cases}$$

$$P(B_i = 1 \,|\, W_1, ..., U_i, B_1, ..., B_{i-1}) = p_p^{U_i}\, p_c^{1-U_i}$$

$$\lambda_t^N(K, U, B) = \lambda_c\left(t - C_{K_{t-}} + \sum_{j=1}^{K_{t-}} \sum_{k=j}^{K_{t-}} (1 - B_k) W_k\right)$$

$$\lambda_t^M(K, U, B) = \lambda_p\left(t - C_{K_{t-}} + \sum_{j=1}^{K_{t-}} \sum_{k=j}^{K_{t-}} (1 - B_k) W_k\right)$$

Intensités propres de MP et MC :

$$\lambda_t^N(K,U) = \sum_{j=0}^{K_{t-}} p_{U_j}^{\mathbb{1}_{\{j>0\}}} \frac{\lambda_c(t-C_j)\, e^{-\Lambda_K(t-C_j)}}{e^{-\Lambda_t^K(K,U)+\Lambda_{C_j}^K(K,U)}}\, \Psi_{j+1,K_{t-}}$$

$$\lambda_t^M(K,U) = \sum_{j=0}^{K_{t-}} p_{U_j}^{\mathbb{1}_{\{j>0\}}} \frac{\lambda_p(t-C_j)\, e^{-\Lambda_K(t-C_j)}}{e^{-\Lambda_t^K(K,U)+\Lambda_{C_j}^K(K,U)}}\, \Psi_{j+1,K_{t-}}$$

avec $\Psi_{j,k} = \left[\prod_{i=j}^{k}(1-p_{U_i}) \left[\frac{\lambda_p(C_i-C_j)}{\lambda_{C_i}^M(K,U)}\right]^{U_i} \left[\frac{\lambda_c(C_i-C_j)}{\lambda_{C_i}^N(K,U)}\right]^{1-U_i}\right]$

et $p_{U_i} = p_p^{U_i}\, p_c^{1-U_i}$.

Fonction de vraisemblance :

$$
\begin{aligned}
L_t(\theta) \;=\; & \left[\sum_{j=1}^{K_{t-}} p_{U_j} \left[\prod_{i=j+1}^{K_{t-}} (1-p_{U_i})\lambda_p(C_i - C_j)^{U_i}\, \lambda_c(C_i - C_j)^{1-U_i}\right.\right. \\
& \left.\left. \qquad \left[\lambda_p(t-C_j)^{U_{K_t}} \lambda_c(t-C_j)^{1-U_{K_t}}\}\right) L_{C_j}(\theta)\right] \\
& + \left[\prod_{i=1}^{K_{t-}} (1-p_{U_i})\, \lambda_p(C_i)^{U_i}\, \lambda_c(C_i)^{1-U_i}\right] \\
& \quad \left[\lambda_p(t)^{U_{K_t}}\, \lambda_c(t)^{1-U_{K_t}}\right]^{\mathbb{1}_{\{t=C_{K_t}\}}} e^{-\Lambda_K(t)}
\end{aligned}
$$

4/ ETUDE DU JEU DE DONNÉES EDF

UNITES																
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
MP 2145	MP 853	MC 158	MP 311	MC 4120	MP 2689	MP 4394	MC 2602	MP 1462	MC 1667	MP 788	MC 82	MC 3011	MP 3528	MP 201	MC 321	MP 742
Cen 4582	Cen 4368	MP 1942	Cen 3273	Cen 5040	Cen 4643	Cen 5739	Cen 5130	MC 2259	MP 2073	MC 1090	MP 2921	MP 3559	Cen 5433	MP 298	Cen 5344	Cen 6348
		Cen 5009						Cen 5040	Cen 3607	MC 1207	MC 4454	Cen 4248		MC 2008		
										MP 1705	Cen 4703			Cen 2968		
										Cen 2483						

Hypothèses :

– Les dates des **MP** sont **déterministes** .

– Les 17 unités sont supposées similaires et indépendantes.

– On cherche à évaluer une efficacité globale de MP et une efficacité globale de MC.

MC et MP ARA$_\infty$ d'efficacités ρ_c et ρ_p :

$$\hat{\alpha} = 0.0012, \quad \hat{\beta} = 0.776, \quad \hat{\rho}_c = -366, \quad \hat{\rho}_p = 0.8$$

$\hat{\beta} < 1$: en l'absence de maintenance,
le matériel s'améliore au cours du temps !

Cela entraîne une valeur de ρ_c aberrante.

D'autres modèles (ARA$_1$, ARI$_1$, ARI$_\infty$,...)
donnent des résultats équivalents.

Suppression de la période de jeunesse :

Expert EDF :

– "Maintenances ≤ 1000 ème jour $\Rightarrow$ correction de défauts de jeunesse"

– "Ces maintenances éliminent de façon localisée les défauts de jeunesse sans changer le niveau d'usure global du système"

On supprime les MP et MC ayant lieu avant le $1000^{\text{ème}}$ jour.

UNITES																
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
MP 2145				MC 4120	MP 2689	MP 4394	MC 2602	MP 1462	MC 1667			MC 3011	MP 3528			
Cen 4582	Cen 4368	MP 1942	Cen 3273	Cen 5040	Cen 4643	Cen 5739	Cen 5130	MC 2259	MP 2073	MC 1090	MP 2921	MP 3559	Cen 5433		Cen 5344	Cen 6348
		Cen 5009						Cen 5040	Cen 3607	MC 1207	MC 4454	Cen 4248		MC 2008		
										MP 1705	Cen 4703			Cen 2968		
										Cen 2483						

Ensemble des données sans la période de jeunesse :

Modèle ARA$_\infty$:

$$\hat{\alpha} = 3.24\ 10^{-6}, \quad \hat{\beta} = 1.44, \quad \hat{\rho}_c = 0.16, \quad \hat{\rho}_p = 1$$

– **Les MP sont parfaites.**
– **Les MC sont peu efficaces.**

$\Rightarrow$ En accord avec l'expertise des ingénieurs spécialistes du composant.

– $1 \leq \hat{\beta} \leq 2$: le système en l'absence de maintenance s'use de moins en moins vite.

$\Rightarrow$ Observation fréquente lors de l'étude des phénomènes de fatigue.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES SUR MC UNIQUEMENT

Pour $\text{ARI}_{m<\infty}$: $\Lambda_t = \alpha(1-\rho)^m t^\beta + O(ln(t))$

Pour $\text{ARA}_{m<\infty}$: $\Lambda_t = \alpha(1-\rho)^{m(\beta-1)} t^\beta + O(ln(t))$

$\Rightarrow$ Modèles pour des systèmes où la maintenance ne stabilise pas l'usure.

$\Rightarrow$ Propriétés statistiques asymptotiques de $\hat{\rho}$ quand α et β sont connus.

Questions :

– Quelles sont les propriétés statistiques de $(\hat{\alpha}, \hat{\rho})$ quand β est connu ?

– Que se passe t'il pour des mémoires infinies ?

Pour le modèle BP :

$\Rightarrow$ Modèle pour des systèmes où la maintenance stabilise l'usure.

$\Rightarrow$ Surmortalité du système juste après l'action de maintenance.

$\Rightarrow$ Méthode d'estimation des paramètres généralisable et basée sur le théorème d'innovation.

Questions :

– La méthode fonctionne t'elle bien en pratique ? Mieux que la méthode proposée par Lim [98] ?

– Peut-on obtenir des propriétés théoriques pour les estimateurs de maximum de vraisemblance ?

Conclusions et Perspectives sur MC et MP

$\Rightarrow$ Définition et étude d'un cadre général de modélisation pour des MC et des MP planifiées ou conditionnelles.

$\Rightarrow$ Généralisation de l'approche risques concurrents pour modéliser des MP conditionnelles.

$\Rightarrow$ Méthode d'estimation pour les modèles définis à l'aide de variables externes

Questions :

– Mettre en œuvre, sur des cas pratiques, les modèles BP généralisés et les modèles avec MP conditionnelles.

– Mieux comprendre la notion de dépendance entre les risques de MP et MC afin de mieux la modéliser.

– Etude théorique des estimateurs.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES SUR L'ÉTUDE DES DONNÉES EDF

$\Rightarrow$ Résultats cohérents et en accord avec les exploitants du système.

Questions :

– Intégration d'une période de jeunesse pour le système neuf en l'absence de maintenance.

– Prise en compte dans la modélisation d'inspections régulières du système.