

Vibrations forcées de structures minces, élastiques, non linéaires

Franck Pérignon

sous la direction de Bruno Cochelin et Sergio Bellizzi



06 juillet 2004

Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique - Equipes MN et SACADS



Région

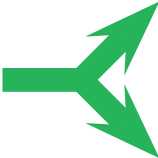



Provence-Alpes-Côte d'Azur

Motivations de l'étude (1/2)

Vibrations non linéaires

► Pourquoi ?

vibrations à l'origine de ...  **bruits**
dégradations (fatigue, rupture ...)

-  Enjeux :
- prédiction et/ou contrôle
 - dimensionnement, estimation de durée de vie ...

► Non linéaire ?

- **Linéaire** \Rightarrow concepts bien maîtrisés, (modes propres, analyse modale ...), outils nombreux.
- **Non linéaire** \Rightarrow plus complexe, domaine encore très ouvert, pas d'approche systématique.

Pourquoi ? \Rightarrow allègement, optimisation des structures, contacts, jeux ...

Motivations (2/2)

- ▶ Quelques exemples de problèmes concrets de vibrations non linéaires ...

Motivations (2/2)

- ▶ Quelques exemples de problèmes concrets de vibrations non linéaires ...

Aéronautique



Motivations (2/2)

- ▶ Quelques exemples de problèmes concrets de vibrations non linéaires ...

Aéronautique



Nucléaire



Motivations (2/2)

- ▶ Quelques exemples de problèmes concrets de vibrations non linéaires ...

Aéronautique



Nucléaire



Instruments de musique



Motivations (2/2)

- ▶ Quelques exemples de problèmes concrets de vibrations non linéaires ...

Aéronautique



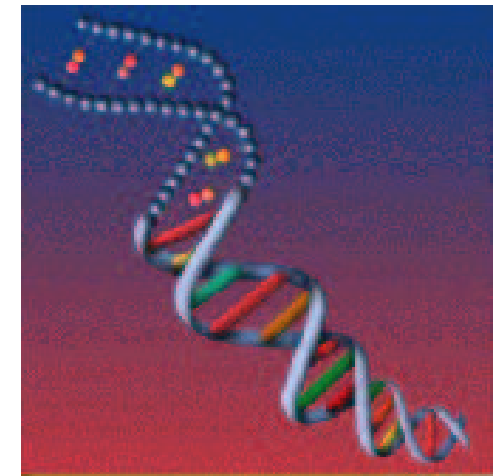
Nucléaire



Instruments de musique



Biophysique



Cadre de l'étude

- ▶ LMA : Opération de Recherche “vibrations non linéaires”

Structures non linéaires sous sollicitation externe



Expérimental :

- observation du comportement dynamique non linéaire
- identification/validation du modèle



Numérique :

description du
comportement dynamique
↓
méthodes et outils de
simulation

Cadre de l'étude

- ▶ LMA : Opération de Recherche “vibrations non linéaires”

Structures non linéaires sous sollicitation externe



Expérimental :

- observation du comportement dynamique non linéaire
- identification/validation du modèle

Numérique :

description du comportement dynamique
↓
méthodes et outils de simulation



Principaux axes de recherche :

→ “modes non linéaires”

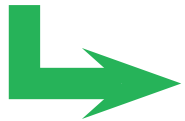
{
définition et calcul
utilisation (modèles réduits ...)
analyse des bifurcations

→ réponse forcée à une excitation stochastique ou déterministe

Objectifs de la thèse

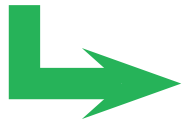
Étude de la réponse forcée :

- **structures** quelconques \Rightarrow grands nombre de degrés de liberté
- non linéarités **géométriques**
- sollicitation harmonique
- recherche de solutions **périodiques**



Numérique :

développement d'un outil de simulation,
par application de la méthode de l'**équilibrage harmonique**,
intégré à un code éléments finis généraliste.



Expérimental :

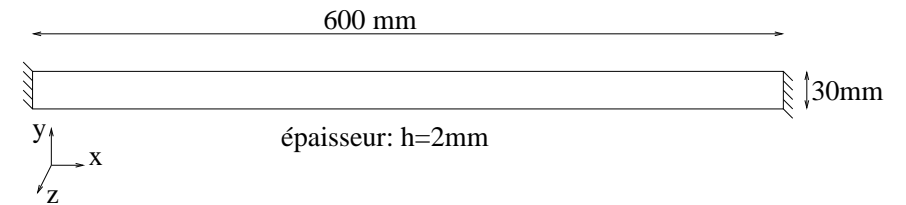
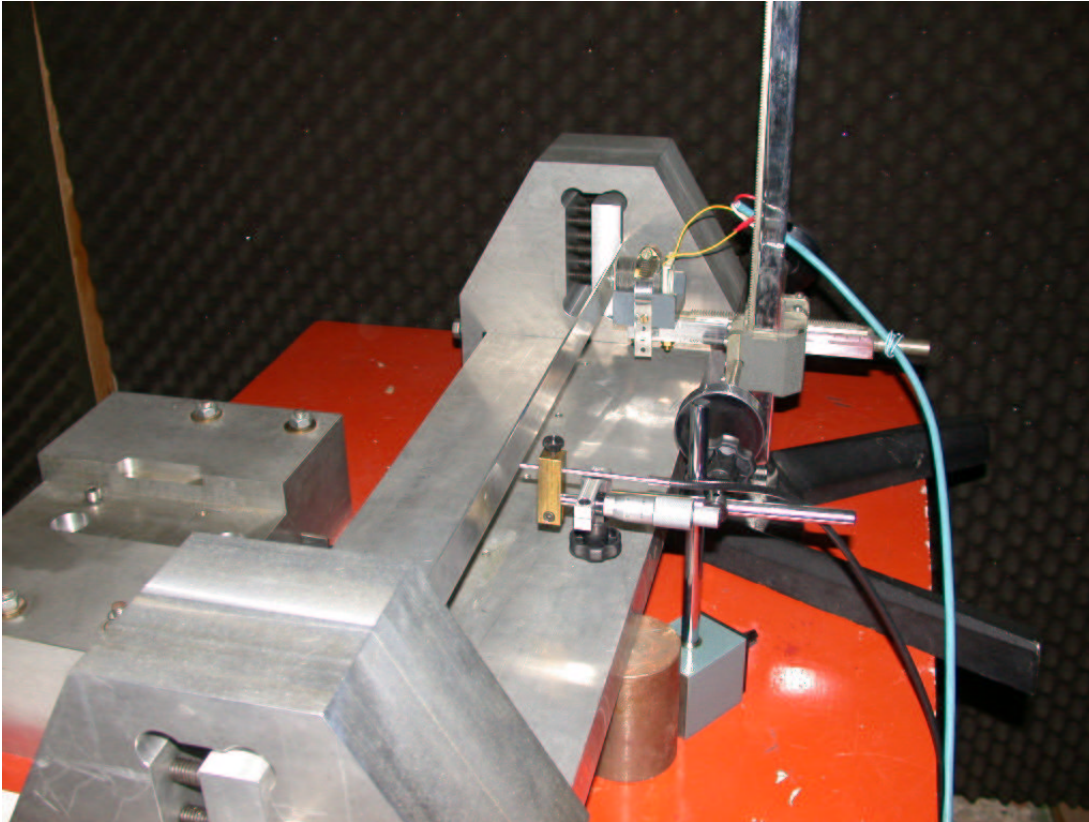
conception et démarrage d'essais sur des structures minces

- ▶ **Motivations et cadre de l'étude**
- ▶ **Approche expérimentale**
- ▶ **Cadre mécanique**
- ▶ **Méthodes de résolution numérique**
 - ▷ Présentation
 - ▷ La méthode de l'Equilibrage Harmonique (EH)
 - ▷ La Méthode Asymptotique Numérique (MAN)
- ▶ **Exemples de simulations**
 - ▷ Étude d'une poutre
 - ▷ Recalage avec les résultats expérimentaux
- ▶ **Conclusions et perspectives**

Approche expérimentale

Etude expérimentale

- ▶ poutre droite bi-encastée, en aluminium

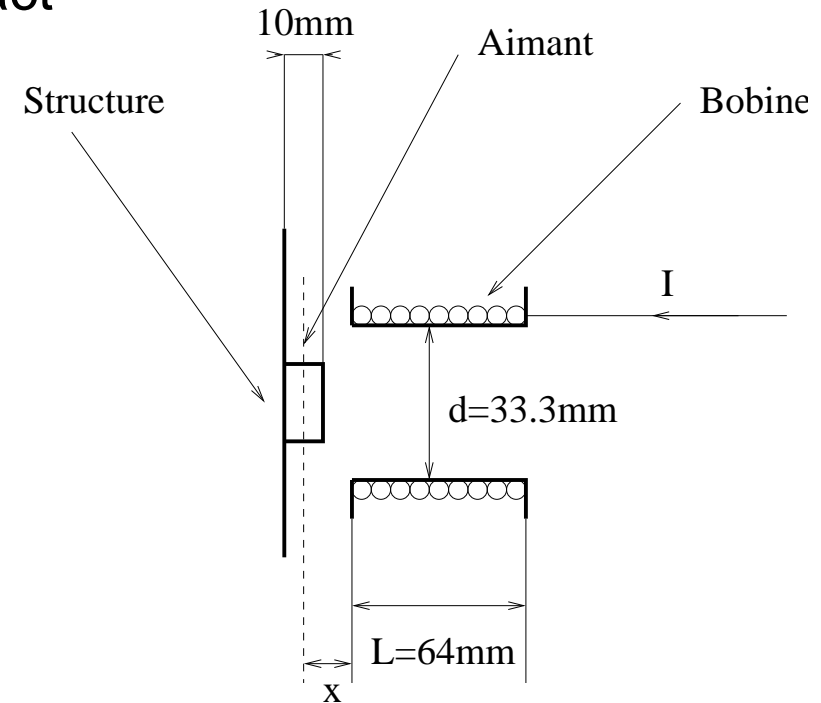
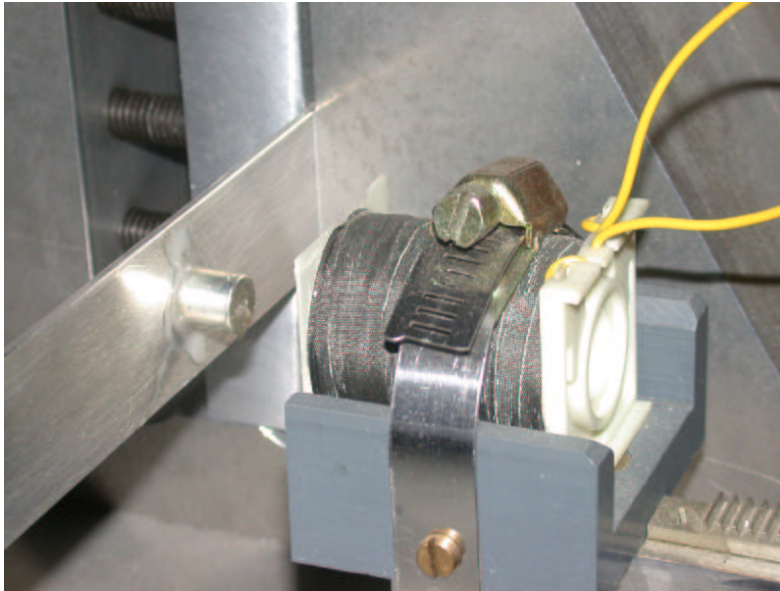


$$\frac{h}{L} = \frac{1}{300}$$

⇒ comportement non linéaire

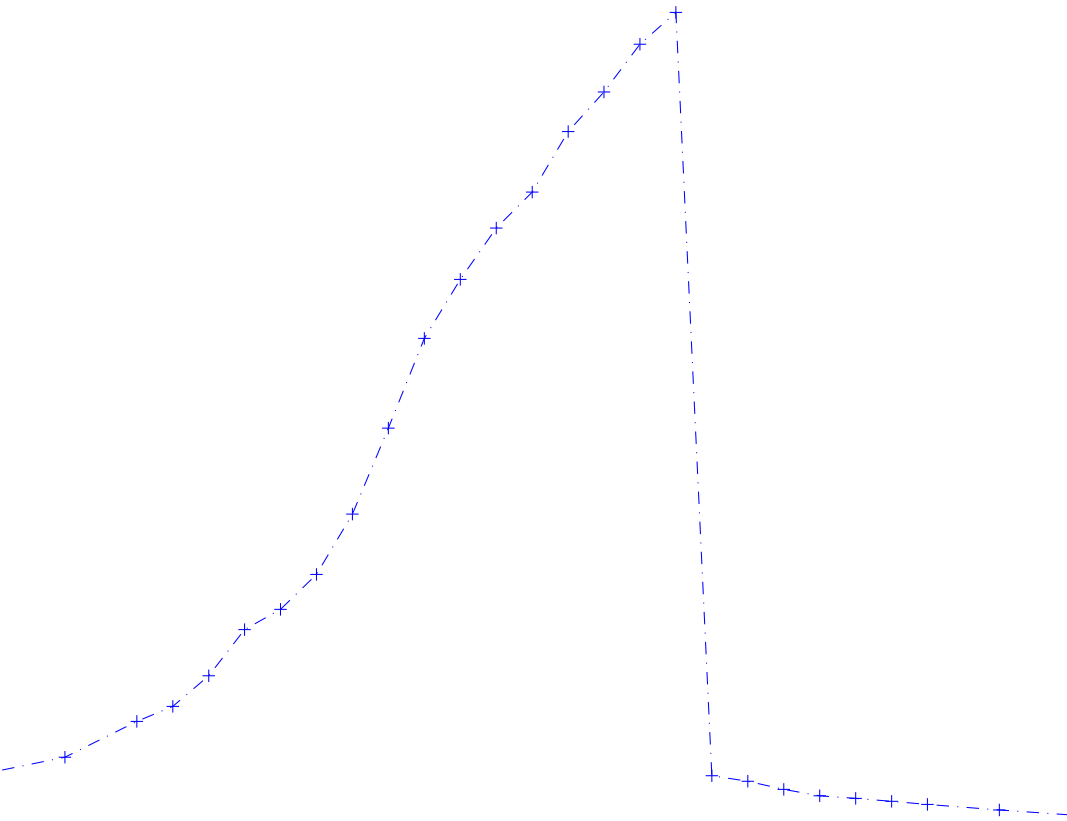
Système d'excitation

- ▶ Excitation ponctuelle, mono-harmonique : système bobine-aimant \Rightarrow sans contact

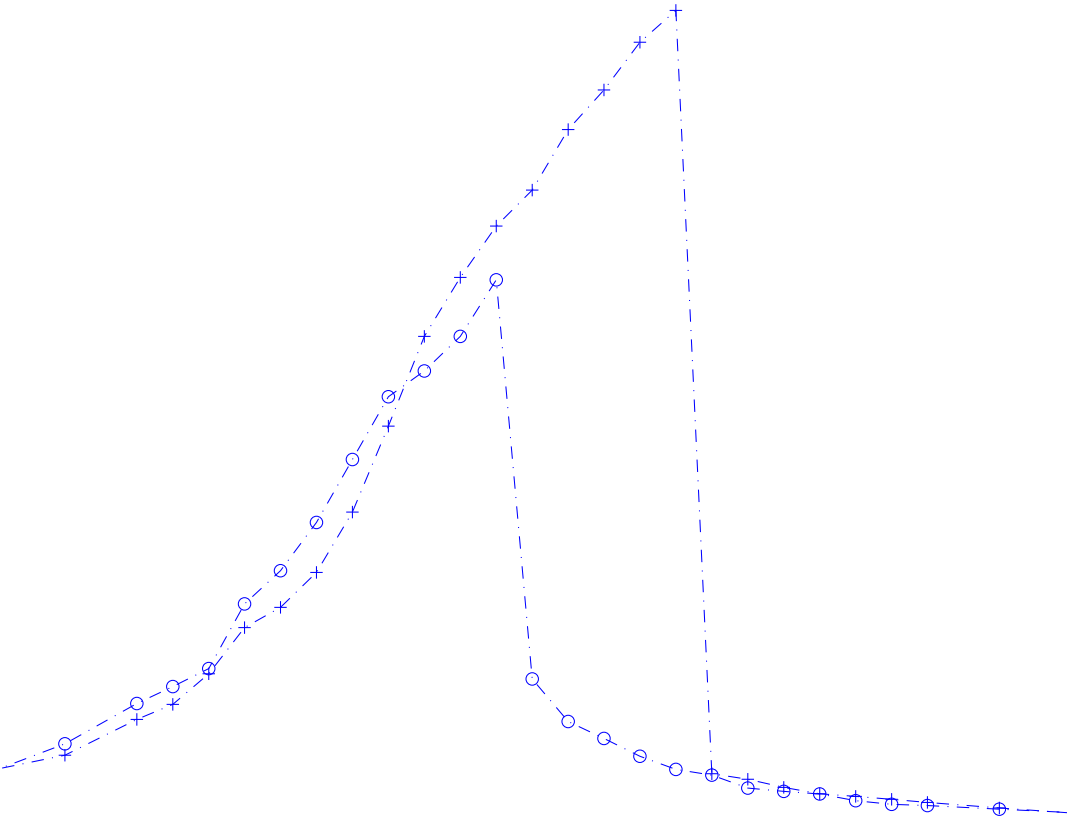


Deux paramètres de contrôle : amplitude (λ) et pulsation (Ω)

Démarche expérimentale



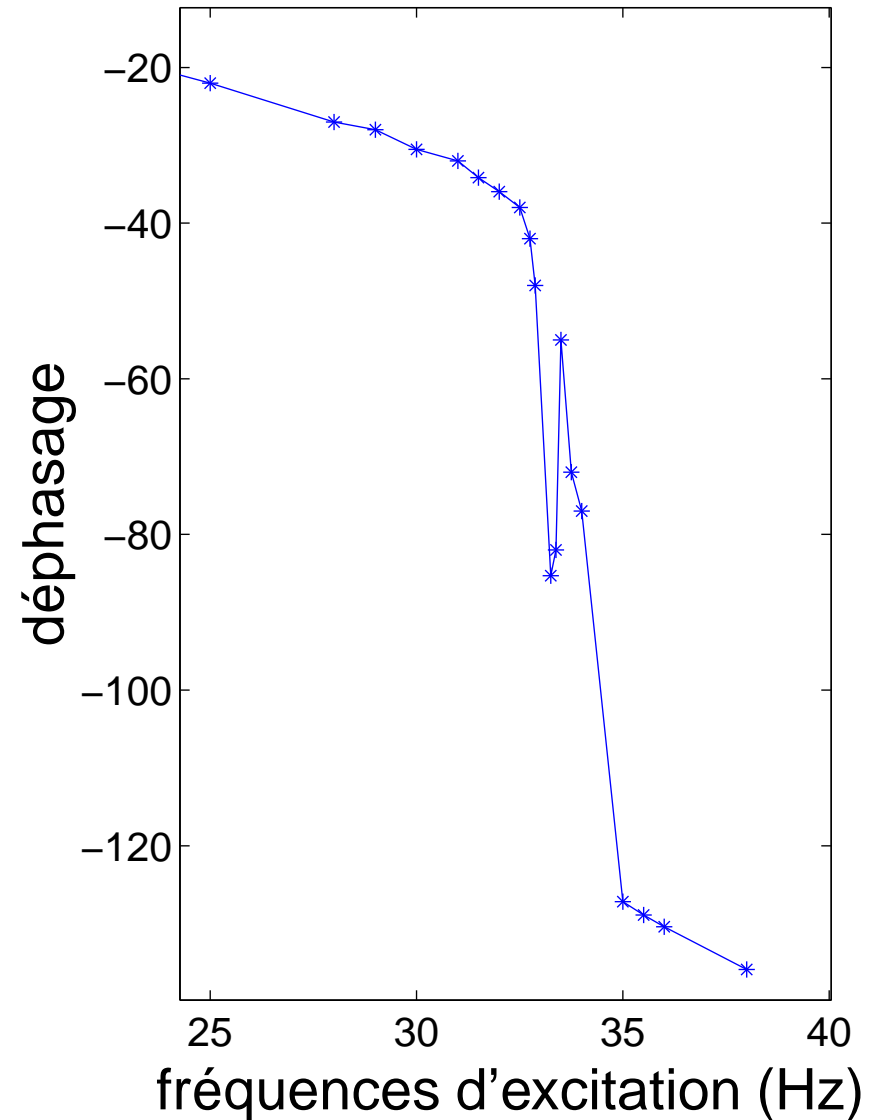
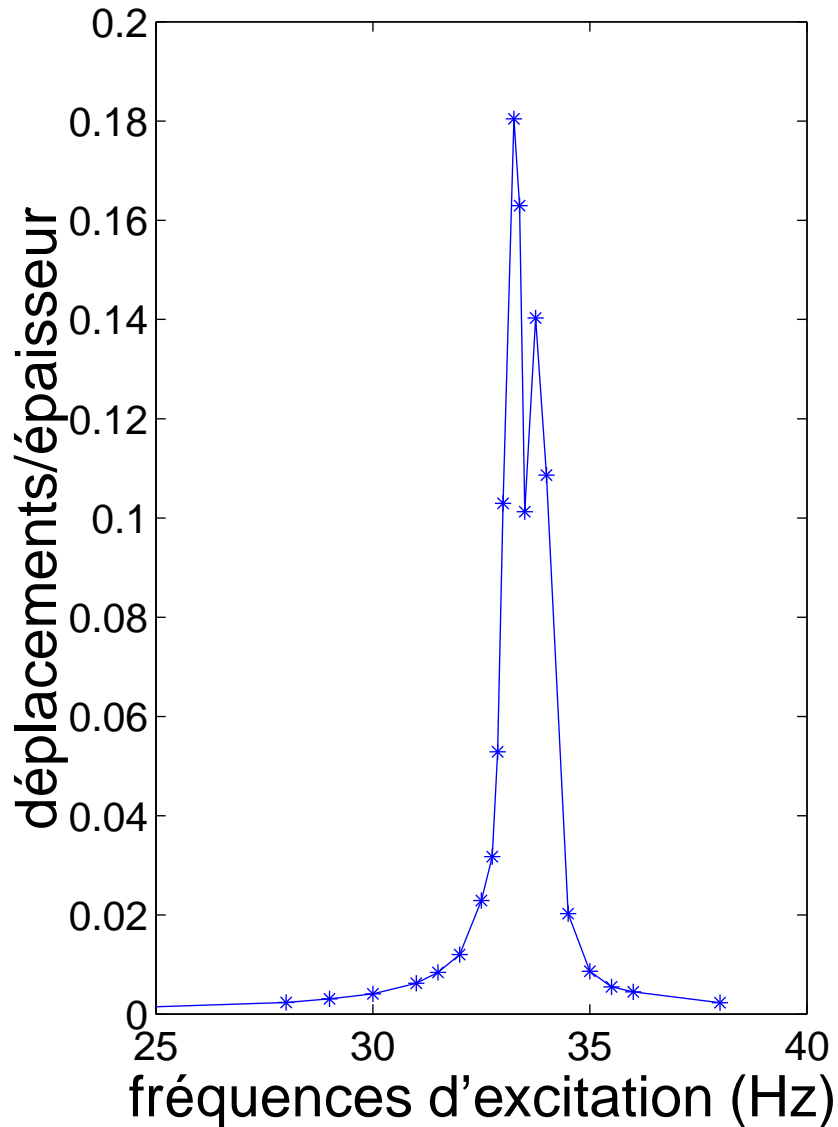
Démarche expérimentale



Quelques résultats (1/4)

► En régime linéaire :

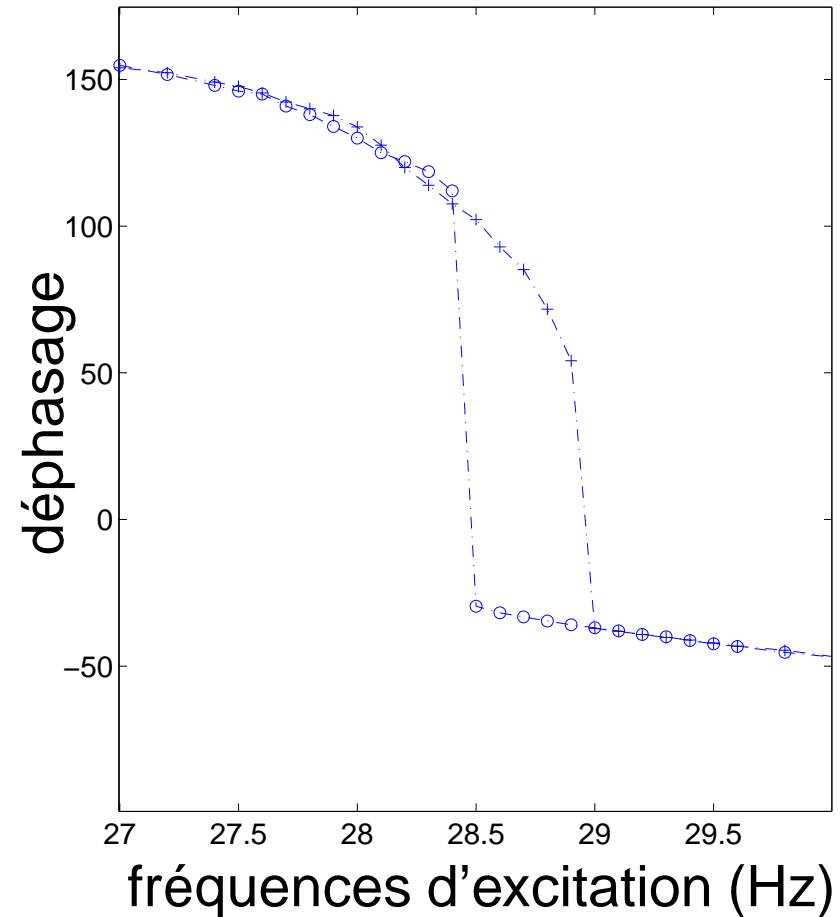
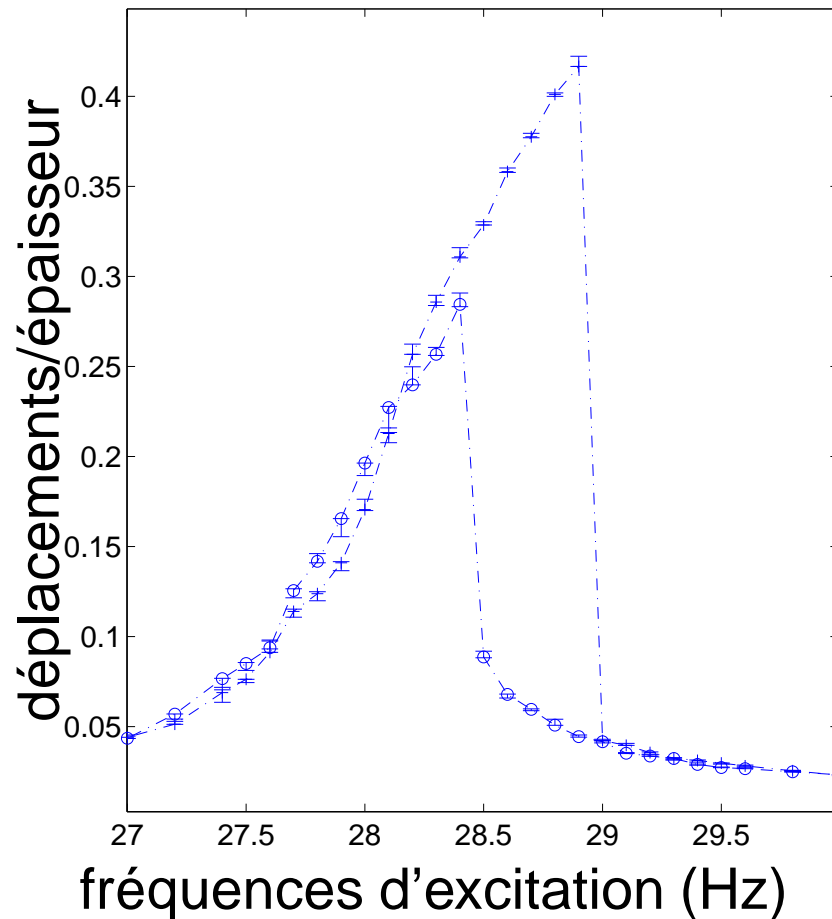
(faible amplitude d'excitation : 0.03 N)



Quelques résultats (2/4)

► En régime non linéaire :

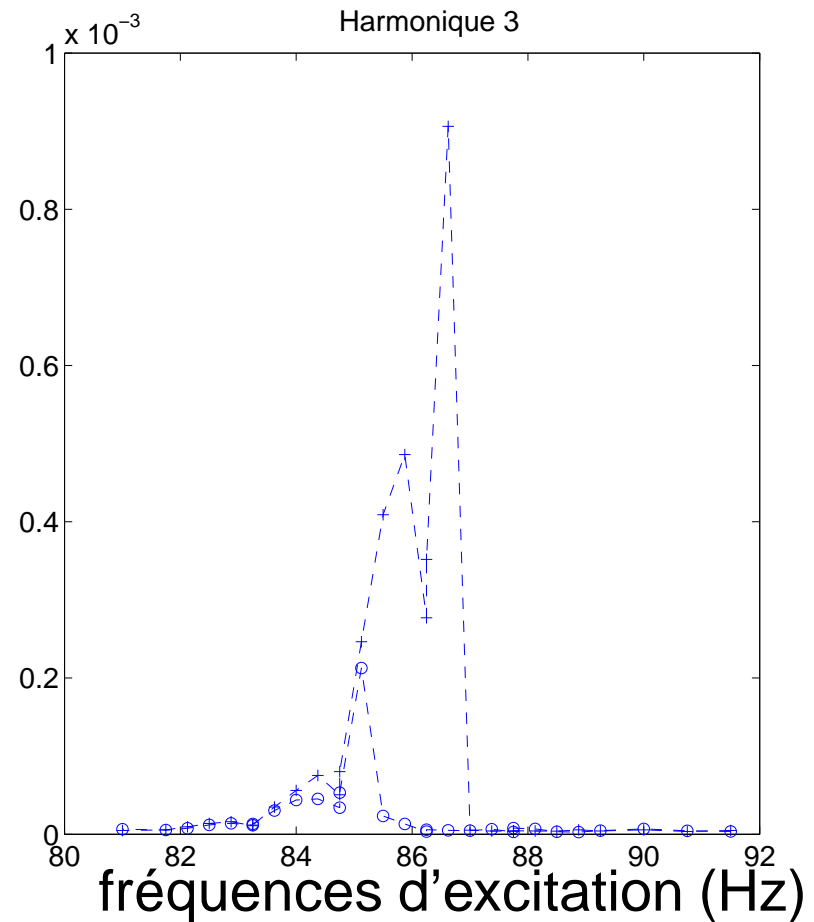
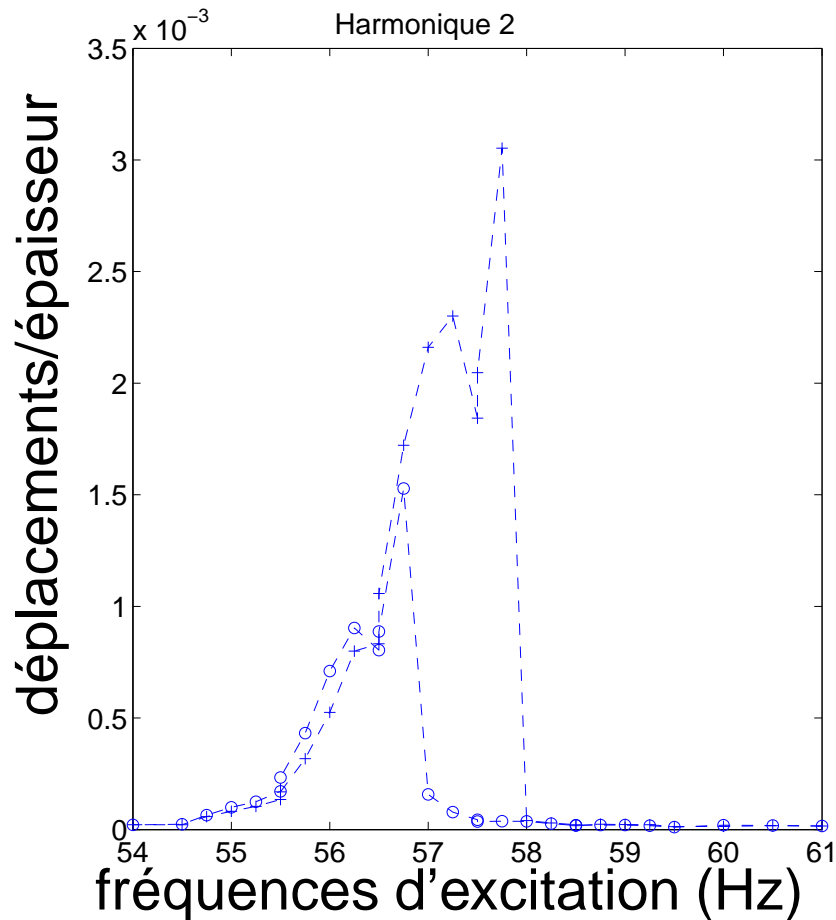
harmonique 1 (fondamentale)



Amplitude de la force : 0.18 N

Quelques résultats (3/4)

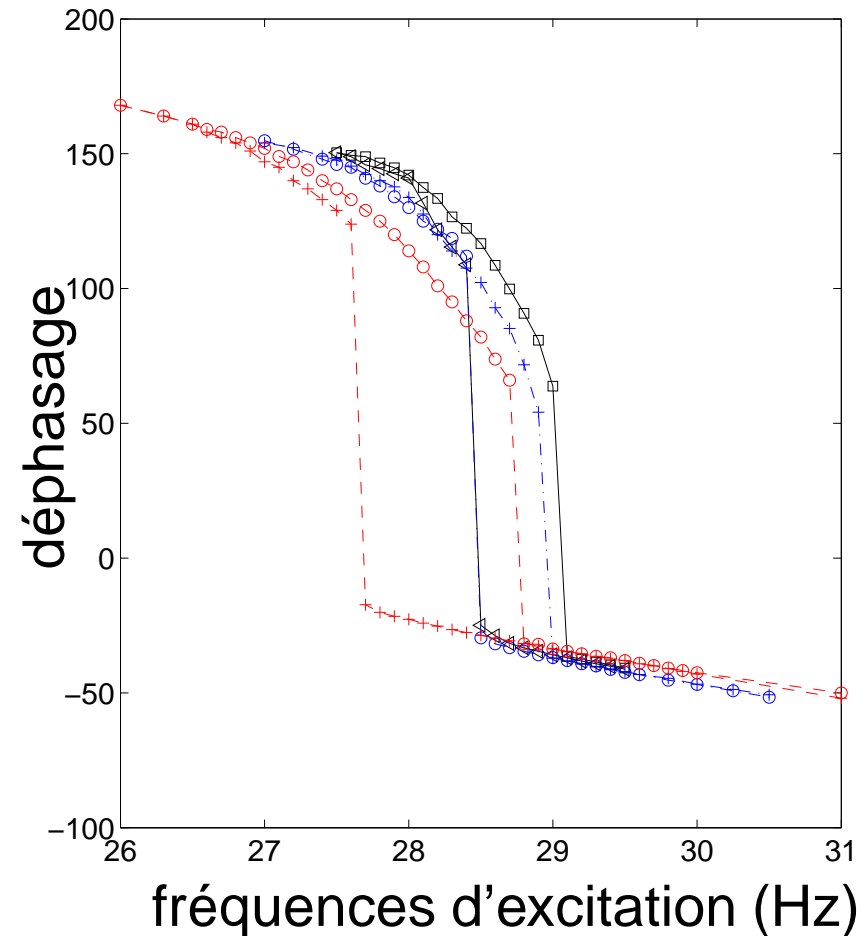
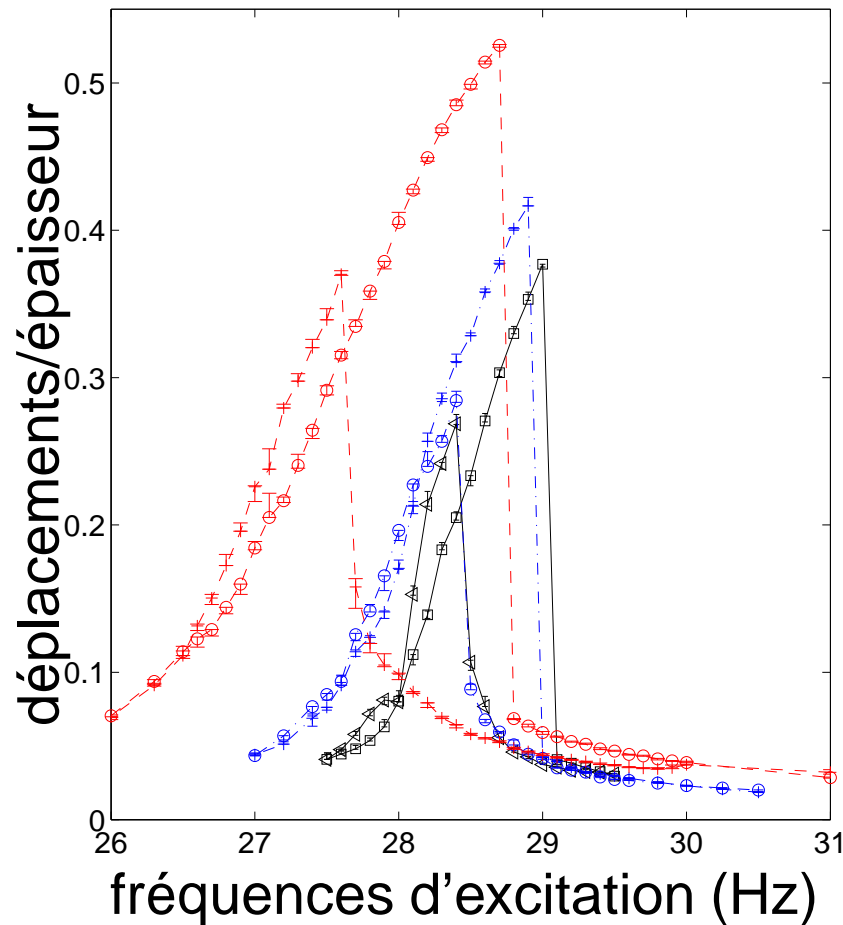
► harmoniques 2 et 3...



Quelques résultats (4/4)

► En régime non linéaire :

harmonique 1 (fondamentale)



Amplitude de la force : 0.12, 0.18 et 0.35 N

Variation des fréquences propres linéaires

► Variations ...

- relativement aux valeurs théoriques/simulées
- d'un essai à l'autre
- au cours d'un même essai

<i>Force</i> (N)	f_1 (Hz)	f_2 (Hz)	f_3 (Hz)
réf. numérique	28.8-29.8	79.5-82.3	156.2-161.8
0.032	31.4	83.2	160.4
0.12	28.4	79	156
0.12	28.1 (29.5)	78.2 (80.75)	155.25 (157.5)
0.35	27.5	78	155

► Quelques explications ...

- mise en place de la structure imparfaite ?
- influence de la température ?
- défaut de forme ?
- précontrainte ?

Bilan de l'approche expérimentale

▶ Essais sur la poutre :



Observation du comportement non linéaire

- réponse hystérétique (sauts ...)
- présence d'harmoniques



Aide à la conception d'un nouveau banc

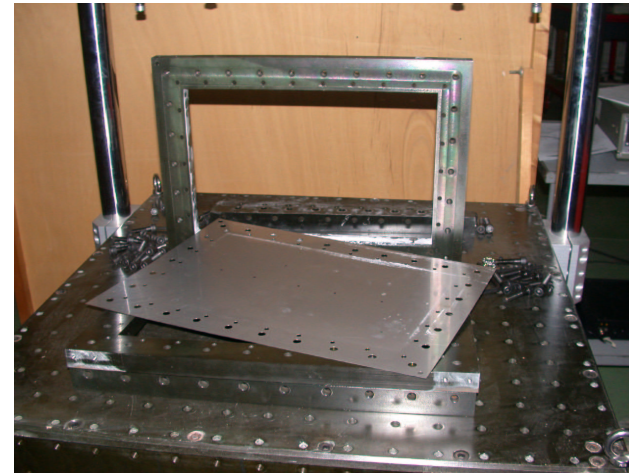
- Choix du matériel (excitation ...)
- Mise en place d'un mode opératoire
- Identification de problèmes (fréquences propres ...)

Plaque encastrée précontrainte

Montage :



Encastrement dans un cadre :



Dispositif de précontrainte :

→ interaction de modes





Poursuite des essais sur la poutre

- observation des déformées
- vers un changement de régime ?
(amplitude d'excitation plus grande)



Exploitation du banc "plaque"

- interaction de modes
- confrontation avec des simulations numériques

- ▶ **Motivations et cadre de l'étude**
- ▶ **Approche expérimentale**
- ▶ **Cadre mécanique**
- ▶ **Méthodes de résolution numérique**
 - ▷ Présentation
 - ▷ La méthode de l'Equilibrage Harmonique (EH)
 - ▷ La Méthode Asymptotique Numérique (MAN)
- ▶ **Exemples de simulations**
 - ▷ Étude d'une poutre
 - ▷ Recalage avec les résultats expérimentaux
- ▶ **Conclusions et perspectives**

Cadre mécanique

Quelles non linéarités ?

▶ non linéarités dans les structures

- **matériau** (contraintes fonctions non linéaires des déformations)
- **conditions aux limites** (chocs, jeux, frottements)
- **géométriques** \Rightarrow grands déplacements, petites déformations

Quelles non linéarités ?

▶ non linéarités dans les structures

- **matériau** (contraintes fonctions non linéaires des déformations)
- **conditions aux limites** (chocs, jeux, frottements)
- **géométriques** \Rightarrow grands déplacements, petites déformations

▶ non linéarités géométriques

↳ représentatives de nombreux cas

↳ forme polynomiale \Rightarrow équations quadratiques ou cubiques

Relation déformations-déplacements non linéaire :

$$\begin{aligned}\gamma(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + {}^t\nabla\mathbf{u}) + \frac{1}{2}\nabla^t\mathbf{u}\nabla\mathbf{u} \\ &= \underbrace{\gamma^l(\mathbf{u})}_{\text{linéaire}} + \underbrace{\gamma^{nl}(\mathbf{u}, \mathbf{u})}_{\text{termes non linéaires}}\end{aligned}$$

$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$: déplacements

$\gamma(\mathbf{x}, t)$ déformations de Green-Lagrange.

Écriture du problème de l'élastodynamique (1/2)

► Hypothèses

Formulation 3D, Lagrangienne totale

- comportement **élastique linéaire**
- **non linéarités géométriques**
- pas d'amortissement

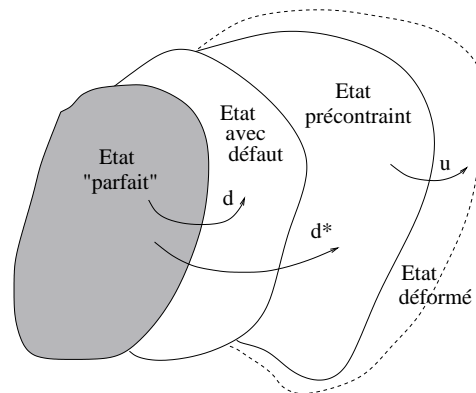
► Inconnues

- déplacements, $u(x, t)$
- déformations $\gamma(x, t)$ de Green-Lagrange
- contraintes $S(x, t)$, Piola-Kirchhoff II

Discrétisation spatiale q

par γ
éléments finis S

► Prise en compte d'un défaut et/ou d'une précontrainte :



d : défaut géométrique
 (d^*, S^*) : état précontraint

Écriture du problème de l'élastodynamique (2/2)

- Relation déformations-déplacements :

$$\begin{aligned}\gamma &= (\mathbf{B}^l + \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{d}^*))\mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q})\mathbf{q} & \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q}) \text{ opérateur} \\ \delta\gamma &= (\mathbf{B}^l + \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{d}^*))\delta\mathbf{q} + \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q})\delta\mathbf{q} & \text{linéaire en } \mathbf{q}\end{aligned}$$

- Formulation du problème :


$$\begin{aligned}- \int_V ({}^t(\mathbf{B}^l + \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{d}^*))\mathbf{S} + {}^t\mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q})\mathbf{S})dV + \mathbf{F}_{ext} &= M\ddot{\mathbf{q}} & \text{PPV} \\ \mathbf{S} &= \mathbf{S}^* + \mathbf{D}(\mathbf{B}^L + \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{d}^*))\mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{D}\mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q})\mathbf{q} & \text{loi de comportement}\end{aligned}$$

Écriture du problème de l'élastodynamique (2/2)

- Relation déformations-déplacements :

$$\begin{aligned}\gamma &= (\mathbf{B}^l + \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{d}^*))\mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q})\mathbf{q} & \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q}) \text{ opérateur} \\ \delta\gamma &= (\mathbf{B}^l + \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{d}^*))\delta\mathbf{q} + \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q})\delta\mathbf{q} & \text{linéaire en } \mathbf{q}\end{aligned}$$

- Formulation du problème :


$$\begin{aligned}- \int_V ({}^t(\mathbf{B}^l + \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{d}^*))\mathbf{S} + {}^t\mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q})\mathbf{S})dV + \mathbf{F}_{ext} &= M\ddot{\mathbf{q}} & \text{PPV} \\ \mathbf{S} &= \mathbf{S}^* + \mathbf{D}(\mathbf{B}^L + \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{d}^*))\mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{D}\mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q})\mathbf{q} & \text{loi de comportement}\end{aligned}$$

$$M\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{L}_0 + \mathbf{L}_1^*(\mathbf{S}^*) + \mathbf{L}_2^*(\mathbf{d}^*))\mathbf{q} + \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) + \mathbf{Q}_1^*(\mathbf{d}^*, \mathbf{q}, \mathbf{q}) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{q}) = \mathbf{F}_{ext}$$

\mathbf{L} : linéaire

\mathbf{Q} : quadratique

\mathbf{C} : cubique

Écriture du problème de l'élastodynamique (2/2)

- Relation déformations-déplacements :

$$\begin{aligned} \gamma &= (\mathbf{B}^l + \mathbf{B}^{nl}(d^*))\mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q})\mathbf{q} & \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q}) \text{ opérateur} \\ \delta\gamma &= (\mathbf{B}^l + \mathbf{B}^{nl}(d^*))\delta\mathbf{q} + \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q})\delta\mathbf{q} & \text{linéaire en } \mathbf{q} \end{aligned}$$

- Formulation du problème :

$$\begin{aligned} - \int_V ({}^t(\mathbf{B}^l + \mathbf{B}^{nl}(d^*))\mathbf{S} + {}^t\mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q})\mathbf{S})dV + \mathbf{F}_{ext} &= M\ddot{\mathbf{q}} & \text{PPV} \\ \mathbf{S} &= \mathbf{S}^* + \mathbf{D}(\mathbf{B}^L + \mathbf{B}^{nl}(d^*))\mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{D}\mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q})\mathbf{q} & \text{loi de comportement} \end{aligned}$$

$$M\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{L}_0 + \mathbf{L}_1^*(\mathbf{S}^*) + \mathbf{L}_2^*(d^*))\mathbf{q} + \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) + \mathbf{Q}_1^*(d^*, \mathbf{q}, \mathbf{q}) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{q}) = \mathbf{F}_{ext}$$

\mathbf{L} : linéaire

\mathbf{Q} : quadratique

\mathbf{C} : cubique

→ décalage des
fréquences propres

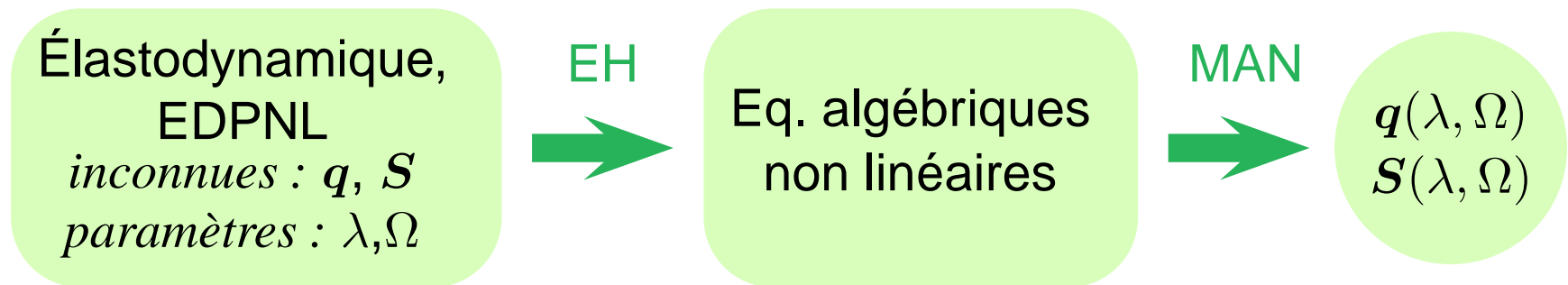
→ ajout d'un
terme quadratique

Méthodes et outils numériques

de résolution

Méthodes de résolution

- ▶ **Objectif** : calcul de la réponse forcée \Rightarrow résolution d'un système d'équations différentielles non linéaires.
- ▶ Combinaison de deux méthodes :
 - EH : **Equilibre Harmonique**, recherche de solutions périodiques sous forme de **séries harmoniques**.
 - MAN : **Méthode Asymptotique Numérique**, recherche de solutions sous forme de séries entières.
Méthode de **perturbation-continuation**.



- ▶ implémentation dans un **code éléments finis** "maison", *eve* (*Fortran 90*).

Application de l'Équilibrage Harmonique

pour $F_{ext} = \lambda \sum_{k=0}^{H-1} F_k \cos k\Omega t$,

$$q(t) = \sum_{k=0}^{H-1} q^k \cos k\Omega t$$

$$S(t) = \sum_{k=0}^{H-1} s^k \cos k\Omega t$$

Développements des inconnues
en séries harmoniques

- pas de sinus,
- tous les termes, pairs et impairs,
- paramètres de contrôle : λ et Ω .

Application de l'Équilibrage Harmonique

pour $F_{ext} = \lambda \sum_{k=0}^{H-1} F_k \cos k\Omega t$,

$$q(t) = \sum_{k=0}^{H-1} q^k \cos k\Omega t$$

$$S(t) = \sum_{k=0}^{H-1} s^k \cos k\Omega t$$



n EDNL
 n inconnues
 $+2$ paramètres

$$\begin{cases} - \int_V {}^t(B^L + B^{nl}(q) + B^{nl}(d^*)) S dV + F_{ext} = M\ddot{q} \\ S = S^* + D(B^L + \frac{1}{2}B^{nl}(q) + B^{nl}(d^*))q \end{cases}$$

Application de l'Équilibrage Harmonique

pour $F_{ext} = \lambda \sum_{k=0}^{H-1} F_k \cos k\Omega t$,

$$q(t) = \sum_{k=0}^{H-1} q^k \cos k\Omega t$$

$$S(t) = \sum_{k=0}^{H-1} s^k \cos k\Omega t$$

n EDNL
 n inconnues
 $+2$ paramètres

$$\begin{cases} - \int_V {}^t(B^L + B^{nl}(q) + B^{nl}(d^*)) S dV + F_{ext} = M\ddot{q} \\ S = S^* + D(B^L + \frac{1}{2}B^{nl}(q) + B^{nl}(d^*))q \end{cases}$$

$$Q = \{q^k\}_{k=0..H-1}$$

$$S = \{s^k\}_{k=0..H-1}$$

Application de l'Équilibrage Harmonique

pour $F_{ext} = \lambda \sum_{k=0}^{H-1} F_k \cos k\Omega t$,

$$q(t) = \sum_{k=0}^{H-1} q^k \cos k\Omega t$$

$$S(t) = \sum_{k=0}^{H-1} s^k \cos k\Omega t$$

n EDNL
 n inconnues
 +2 paramètres

$$\begin{cases} - \int_V {}^t(B^L + B^{nl}(q) + B^{nl}(d^*)) S dV + F_{ext} = M\ddot{q} \\ S = S^* + D(B^L + \frac{1}{2}B^{nl}(q) + B^{nl}(d^*))q \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \{q^k\}_{k=0..H-1} \\ \mathcal{S} &= \{s^k\}_{k=0..H-1} \end{aligned}$$

$n \times H$ EANL
 $n \times H$ inconnues
 +2 paramètres

même
 "forme"

$$\begin{cases} - \int_V {}^T(\mathcal{B}^l + \mathcal{B}^{nl}(\mathcal{Q}) + \mathcal{B}^{nl}(d^*)) \mathcal{S} dV - \Omega^2 \mathcal{M} \mathcal{Q} = \lambda \mathcal{F} \\ \mathcal{S} = \mathcal{S}^* + \mathcal{D}(\mathcal{B}^l + \frac{1}{2}\mathcal{B}^{nl}(\mathcal{Q}) + \mathcal{B}^{nl}(d^*)) \mathcal{Q} \end{cases}$$

EH : construction des nouveaux opérateurs

► Exemple pour $H = 3\dots$

$$B^{nl}(q)S = (\dots) + (\dots) \cos \Omega t + (\dots) \cos 2\Omega t$$

↓

termes constants → $(B^{nl}(q)S)^0$
 “ en $\cos \Omega t$ → $(B^{nl}(q)S)^1$
 “ en $\cos 2\Omega t$ → $(B^{nl}(q)S)^2$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} B^{nl}(q^0) & \frac{1}{2}B^{nl}(q^1) & \frac{1}{2}B^{nl}(q^2) \\ B^{nl}(q^1) & B^{nl}(q^0 + \frac{1}{2}q^2) & \frac{1}{2}B^{nl}(q^1) \\ B^{nl}(q^2) & \frac{1}{2}B^{nl}(q^1) & B^{nl}(q^0) \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}^{nl}(Q)S} \begin{bmatrix} S^0 \\ S^1 \\ S^2 \end{bmatrix}$$

Écriture généralisable $\forall H \Rightarrow$ construction automatique

► Autres opérateurs ...(matrices diagonales par blocs)

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots \\ 0 & D & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \quad \mathcal{B}^l = \begin{bmatrix} B^l & 0 & \dots \\ 0 & B^l & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \quad \mathcal{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots \\ 0 & M & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & 4M & \\ \vdots & & & 9M \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

MAN : principe général

?

$$R(U, \eta) = 0 \longrightarrow U(\eta)$$

$$U \in \mathcal{R}^n \quad (n + 1) \text{ inconnues}$$

$$\eta \in \mathcal{R} \quad n \text{ équations}$$

Problème algébrique non linéaire

MAN : principe général

?

$$R(U, \eta) = \mathbf{0} \longrightarrow U(\eta)$$

$U \in \mathcal{R}^n$ $(n + 1)$ inconnues

$\eta \in \mathcal{R}$ n équations

Développements en **séries entières**

$$U = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a^k U_k \quad (U_0, \eta_0) : \text{point solution}$$

$$\eta = \eta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a^k \eta_k \quad a : \text{paramètre de chemin}$$

Problème algébrique non linéaire

MAN : principe général

?

$$R(U, \eta) = 0 \rightarrow U(\eta)$$

$U \in \mathcal{R}^n$ $(n + 1)$ inconnues

$\eta \in \mathcal{R}$ n équations

Développements en **séries entières**

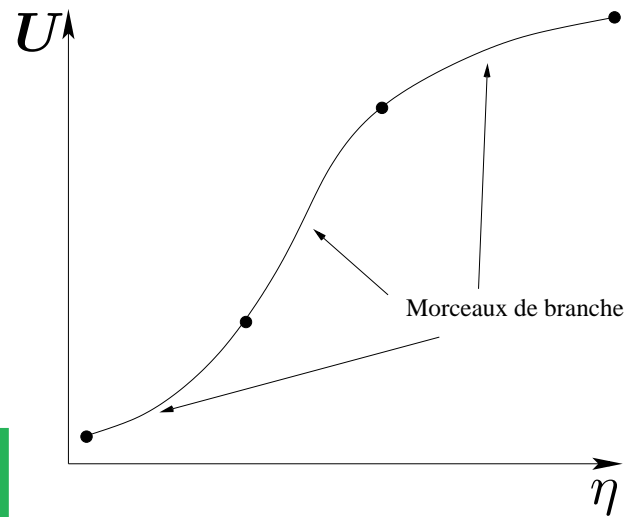
$$U = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a^k U_k \quad (U_0, \eta_0) : \text{point solution}$$

$$\eta = \eta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a^k \eta_k \quad a : \text{paramètre de chemin}$$

$$R(U, \eta) = aR_1 + a^2R_2 + \dots = 0$$

$$\text{ie } R_p = \left. \frac{\partial R}{\partial U} \right|_0 U_p + \left. \frac{\partial R}{\partial \eta} \right|_0 \eta_p - F_p^{nl} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K_{t(0)} \begin{bmatrix} U_p \\ \eta_p \end{bmatrix} = F_p^{nl}$$

Problème algébrique non linéaire \rightarrow Succession de **problèmes linéaires**

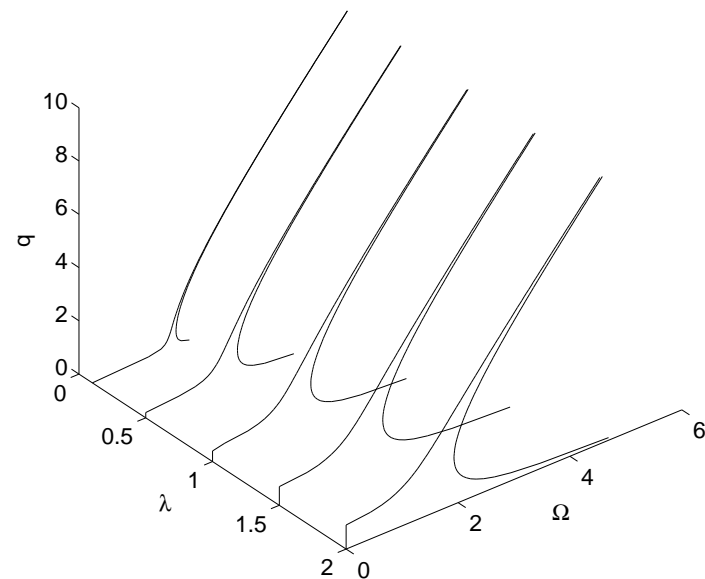
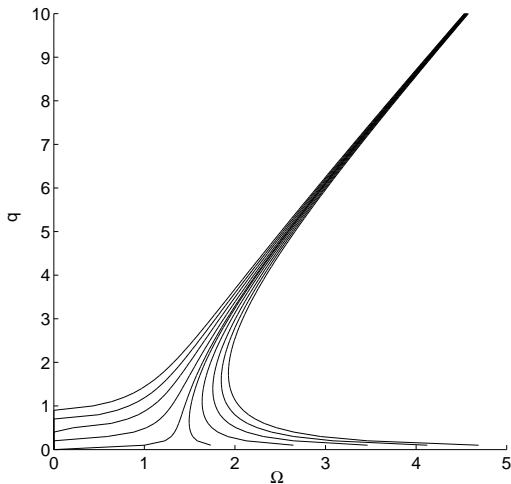


MAN (2)

► Application au problème de vibrations forcées :

$$\begin{cases} - \int_V T (\mathcal{B}^l + \mathcal{B}^{nl}(\mathcal{Q}) + \mathcal{B}^{nl}(d^*)) \mathcal{S} dV - \Omega^2 \mathcal{M} \mathcal{Q} = \lambda \mathcal{F} \Rightarrow \text{surfaces (2 paramètres),} \\ \mathcal{S} = \mathcal{S}^* + \mathcal{D}(\mathcal{B}^l + \frac{1}{2} \mathcal{B}^{nl}(\mathcal{Q}) + \mathcal{B}^{nl}(d^*)) \mathcal{Q} \end{cases} \text{adaptation de la MAN}$$

$$\eta = \sum_{k=1}^N a^k \eta_k = \begin{cases} \lambda = \lambda_0 + \sum_{k=1}^N a^k \lambda_k & \Omega \text{ fixé} \\ \text{ou} \\ \Omega^2 = \Omega_0^2 + \sum_{k=1}^N a^k \nu_k & \lambda \text{ fixé} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \mathcal{Q} = \mathcal{Q}_0 + \sum_{k=1}^N a^k \mathcal{Q}_k \\ \mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \sum_{k=1}^N a^k \mathcal{S}_k \end{cases}$$



MAN (3)

- Problèmes linéarisés à chaque ordre

Ordre 1 :

$$\begin{cases} \left[\mathcal{K}_{t(0)} - \Omega_0^2 \mathcal{M} \right] \mathcal{Q}_1 = \eta_1 \mathcal{F}_{man} \\ {}^t \mathcal{Q}_1 P \mathcal{Q}_1 + \alpha \eta_1^2 = 1 \end{cases}$$

Ordre p :

$$\begin{cases} \left[\mathcal{K}_{t(0)} - \Omega_0^2 \mathcal{M} \right] \mathcal{Q}_p = \eta_p \mathcal{F}_{man} + \mathcal{F}_p^{nl} \\ {}^t \mathcal{Q}_1 P \mathcal{Q}_p + \alpha \eta_1 \eta_p = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{K}_{t(0)} = - \int_{\Omega_0} {}^T \mathcal{B}^*(\mathcal{Q}_0) \mathcal{D} \mathcal{B}^*(\mathcal{Q}_0) d\Omega_0 - \mathcal{K}_\sigma$$

$$\mathcal{f}_p^{nl} = - \int_{\Omega_0} ({}^T \mathcal{B}^*(\mathcal{Q}_0) \mathcal{S}_p^{nl} + \sum_{r=1}^{p-1} {}^T \mathcal{B}^{nl}(\mathcal{Q}_{p-r}) \mathcal{S}_r) d\Omega_0$$

Continuation ...	en force	en pulsation
$\eta_k = \dots$	λ_k	ν_k
$\mathcal{F}_{man} = \dots$	\mathcal{F}	$\mathcal{M} \mathcal{Q}_0$
$\mathcal{F}_p^{nl} = \dots$	\mathcal{f}_p^{nl}	$\mathcal{f}_p^{nl} + \sum_{r=1}^{p-1} \nu_r \mathcal{M} \mathcal{Q}_{p-r}$

Intégration de la méthode à Eve

Eve : code éléments finis, généraliste, en Fortran 90

Apports :

► Equilibrage Harmonique :



► **MAN** : adaptation au problème en dynamique \Rightarrow solveur non linéaire

► Autres :

- défaut et précontrainte
- nouveau type de stockage
- solveur linéaire pour des matrices non symétriques
- post-traitement (interface Matlab)

Eléments “Harmoniques”

- construction **automatique** des opérateurs, $\forall H$
- procédure **indépendante de l'élément** de base
- taille des systèmes fonction de H
⇒ augmentation du temps de calcul



MAN

- simplicité d'utilisation et de pilotage
- **solutions analytiques** : séries riches en informations
- **une seule inversion** de matrice par morceau de branche
- traitement des **bifurcations**



Outil

- ▶ Intégré à un code **éléments finis**
⇒ capable de traiter une **large classe de structures**
- ▶ **Validé** sur des exemples issus de la littérature
- ▶ Améliorations possibles : ajout de nouveaux éléments
‘optimisation’ (solveur, stockage ...)

Exemples de simulations

Introduction

► Réponse forcée d'une poutre mince, bi-encastée



40 éléments DKQ-EH

$$E = 0.7e11\text{Pa}$$

$$\nu = 0.33$$

$$\rho = 2762\text{kg.m}^{-3}$$

Cas traités :

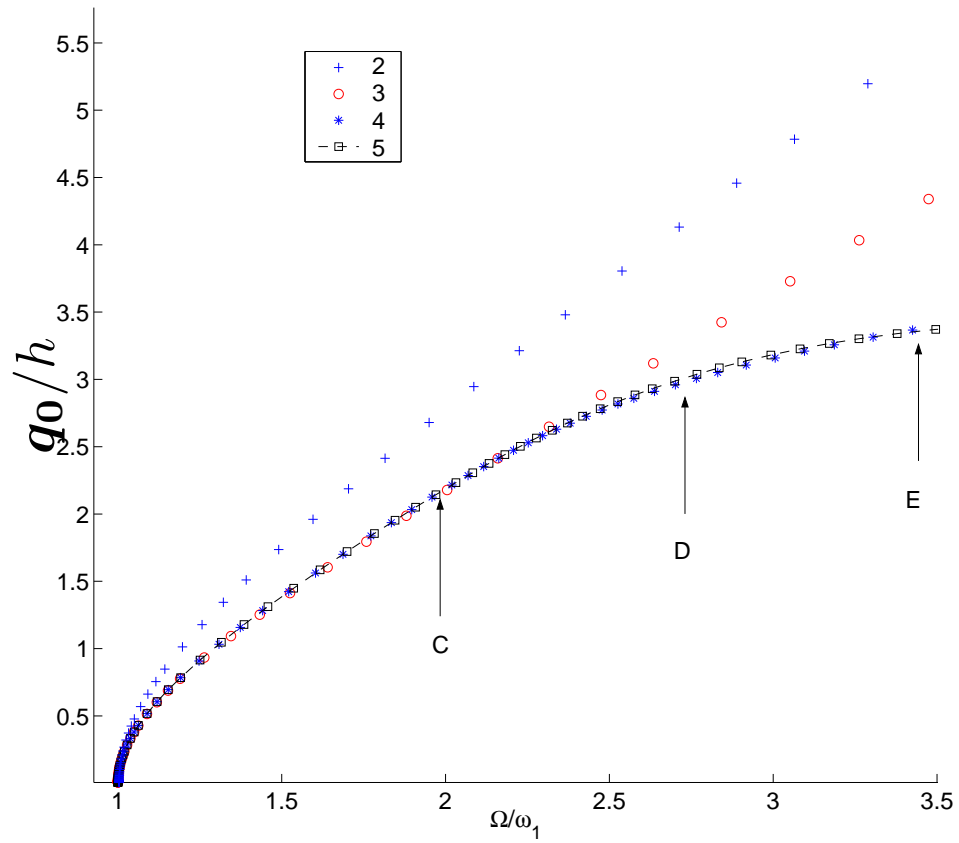
- excitation ≈ 0 \Rightarrow “mode non linéaire”
- excitation $\neq 0$, fixée \Rightarrow réponse forcée

Rappel :

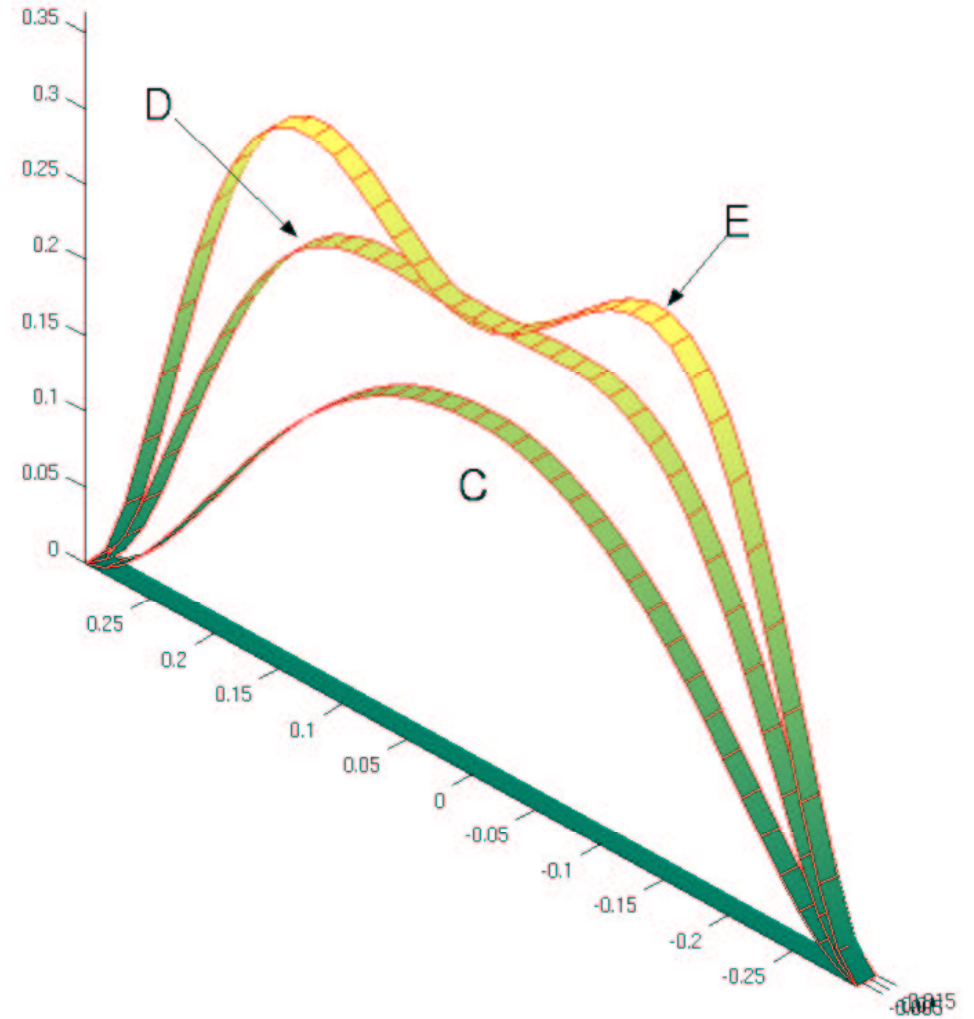
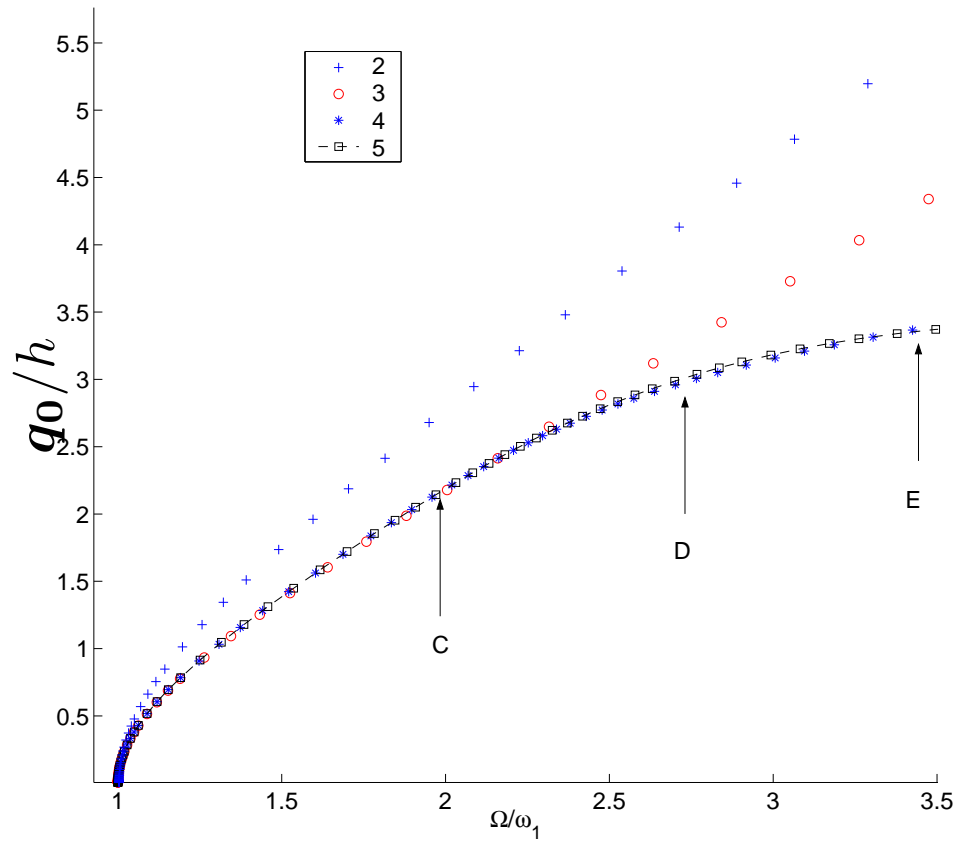
$$q(t, \Omega) = \sum_{k=0}^{H-1} q^k \cos j\Omega t$$

- $q_0(\Omega) = q(0, \Omega) = \sum_{k=0}^{H-1} q^k$ en un point
- déformées de la structure à Ω fixé

Premier mode

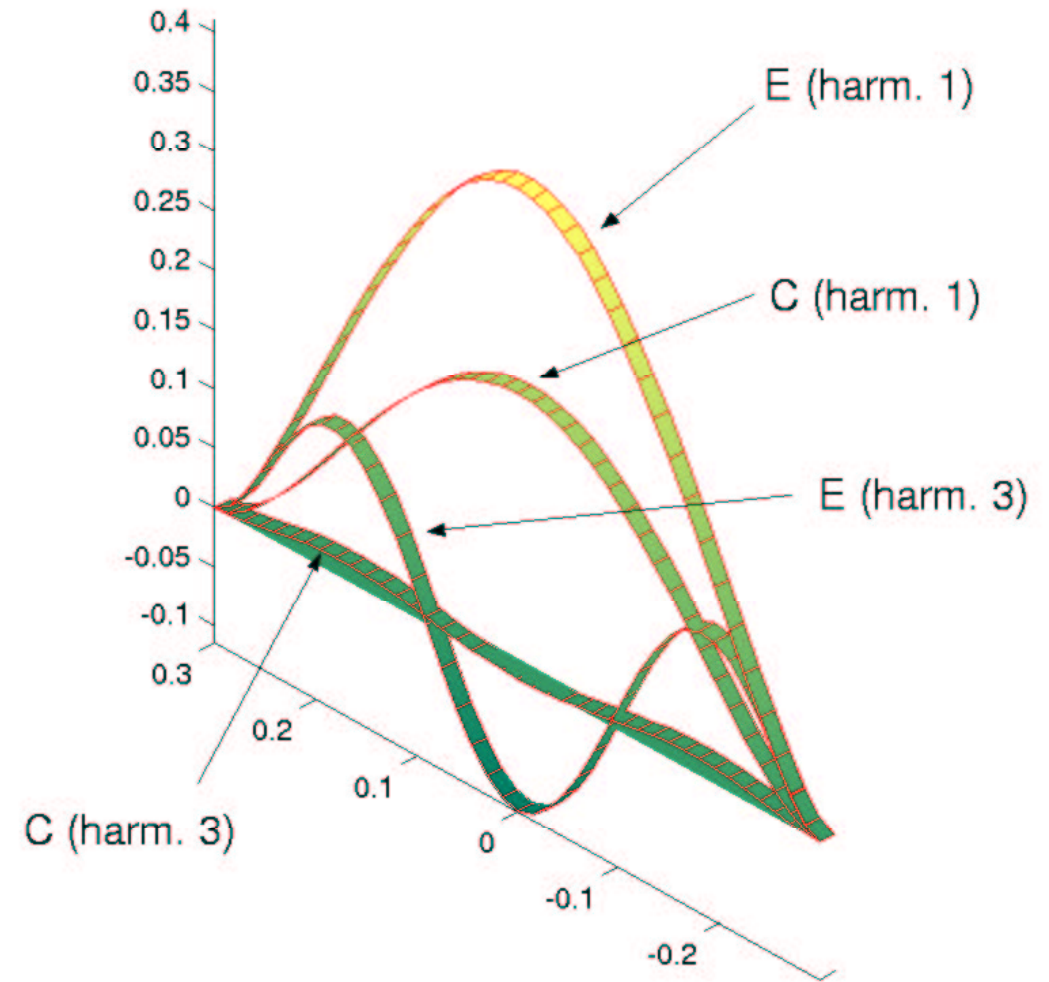
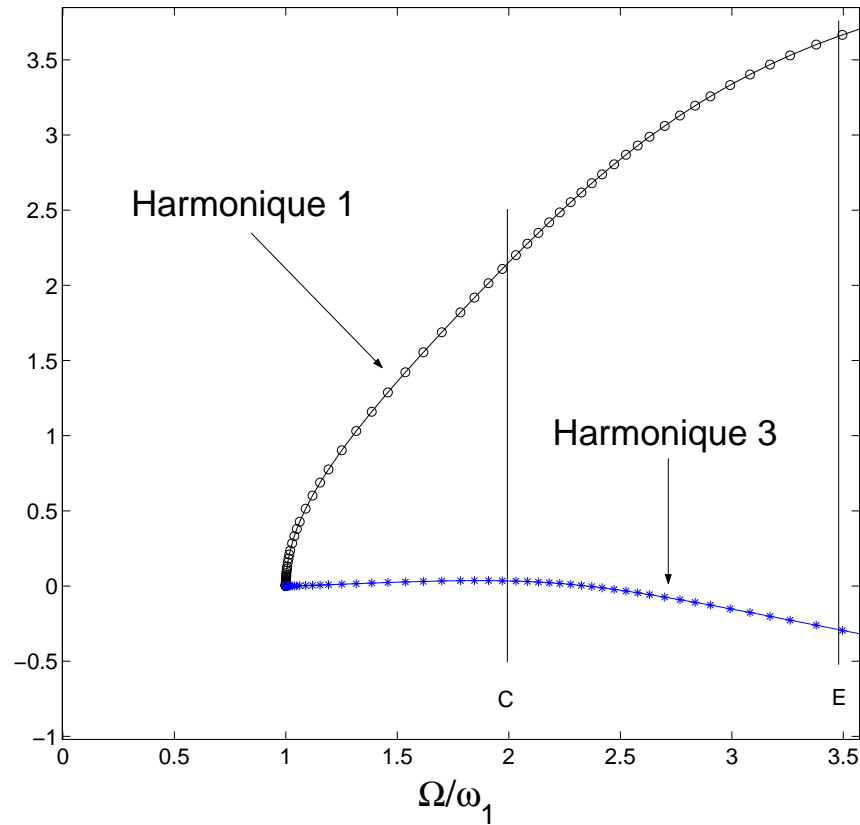


Premier mode

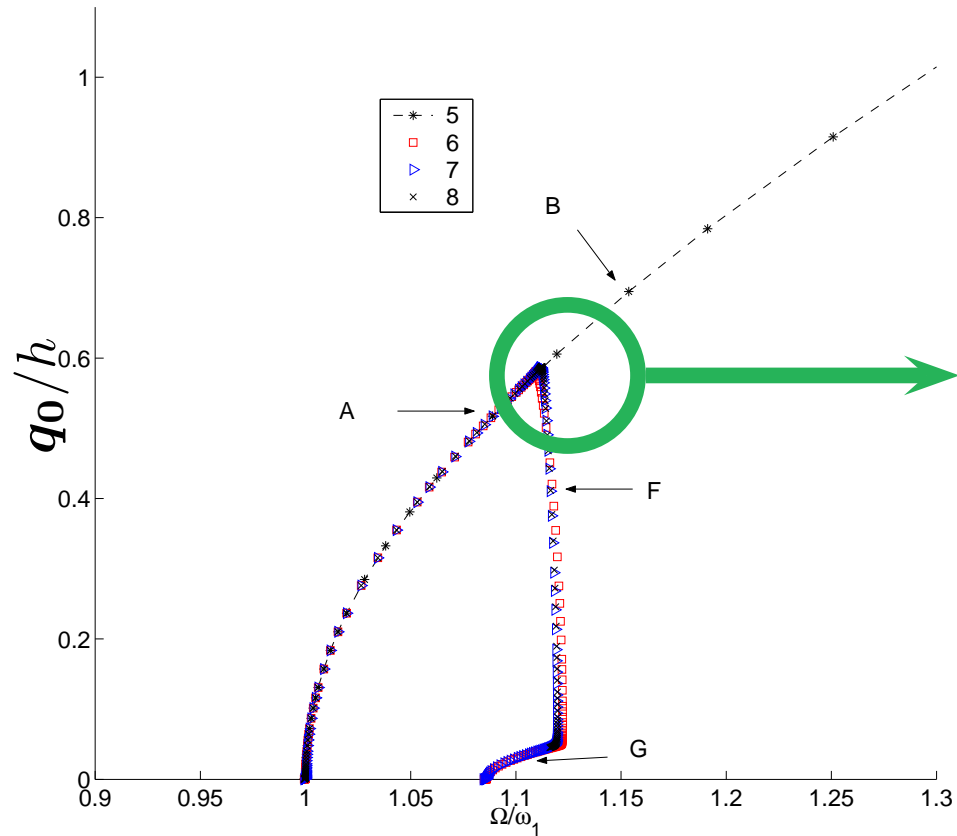


Premier mode : harmoniques

$$H = 5$$

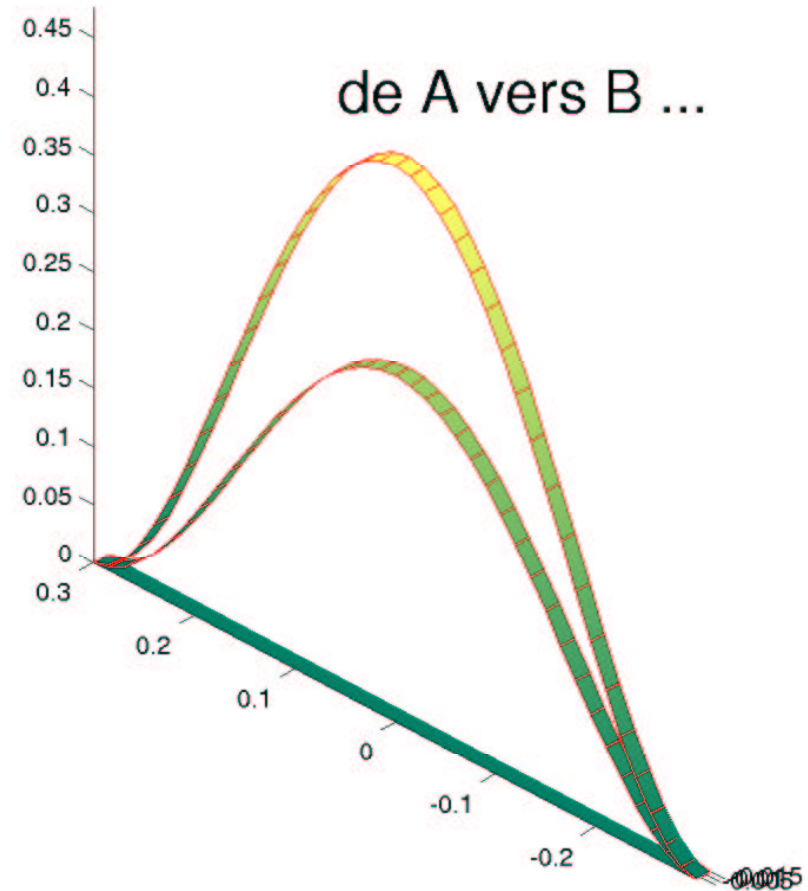
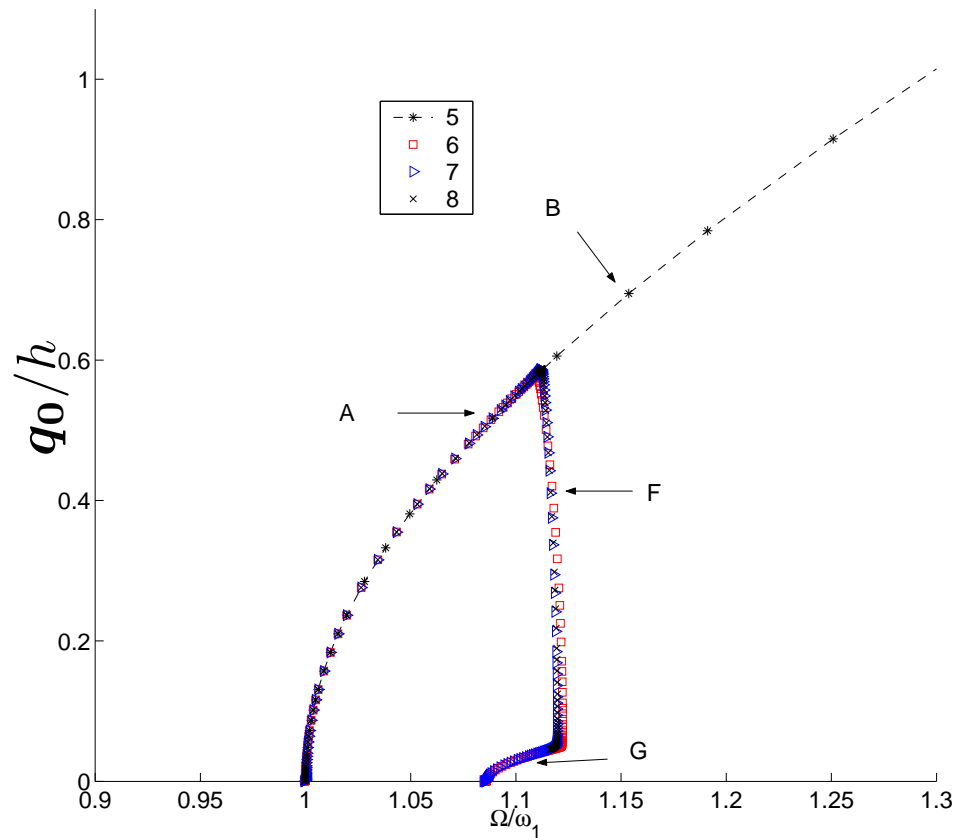


Premier mode : bifurcation

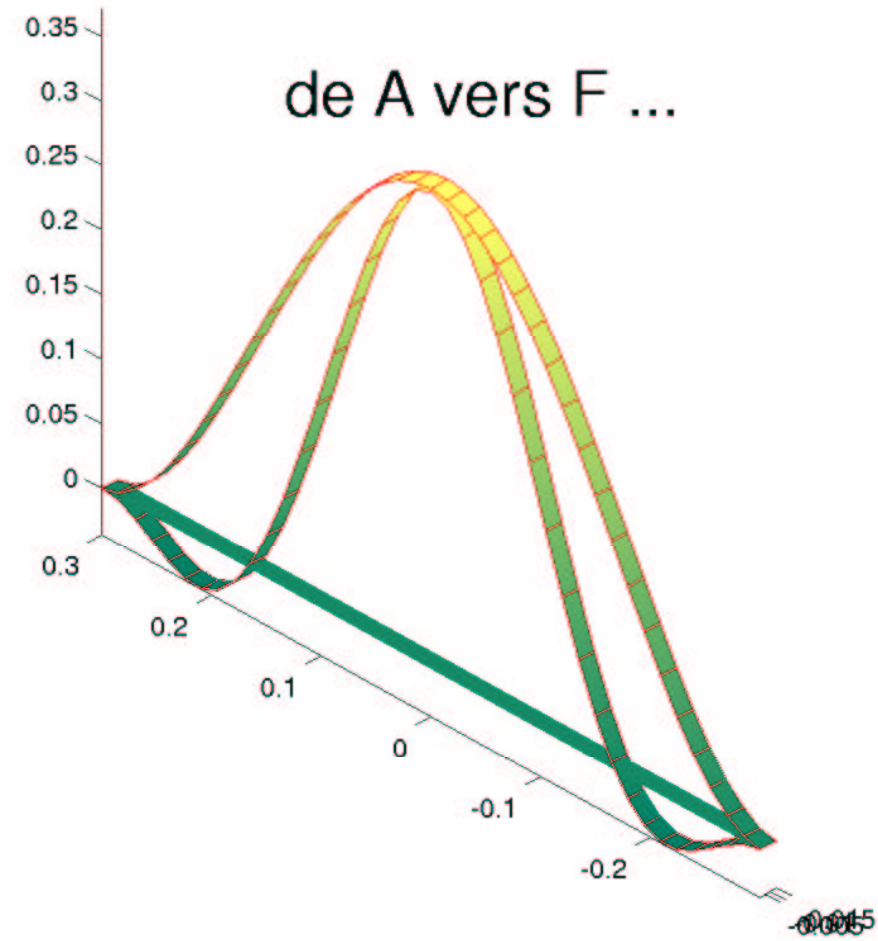
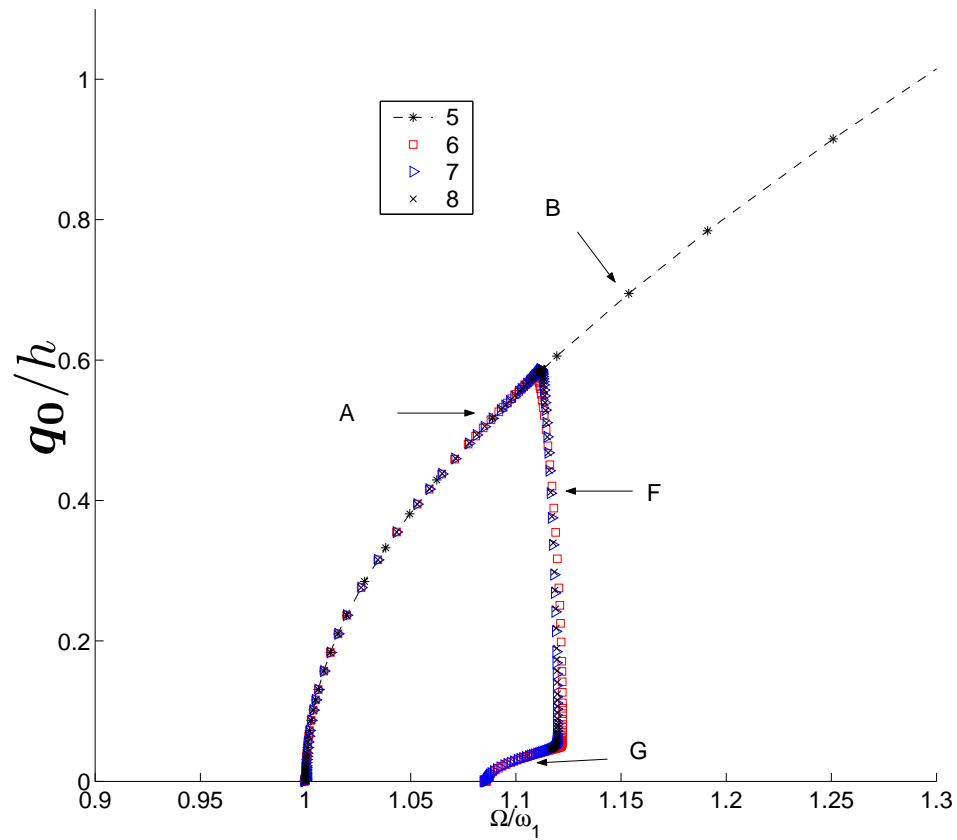


$\Omega \approx \frac{\omega_3}{5}$,
résonance interne 1 : 5
entre les modes 1 et 3.

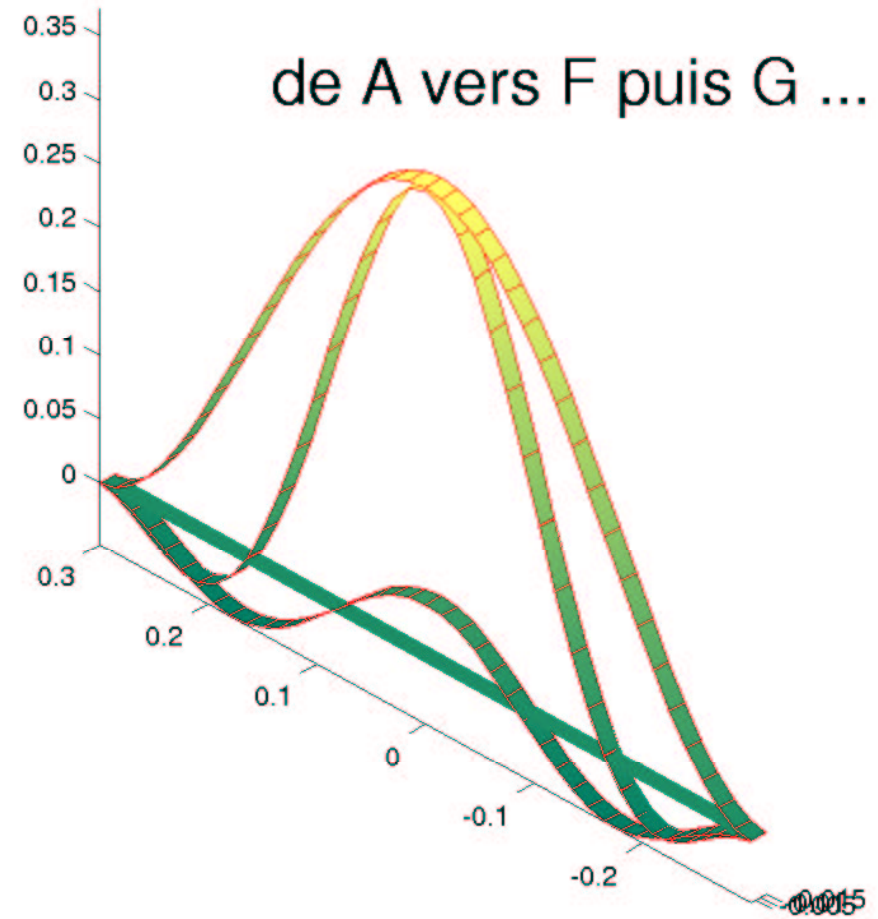
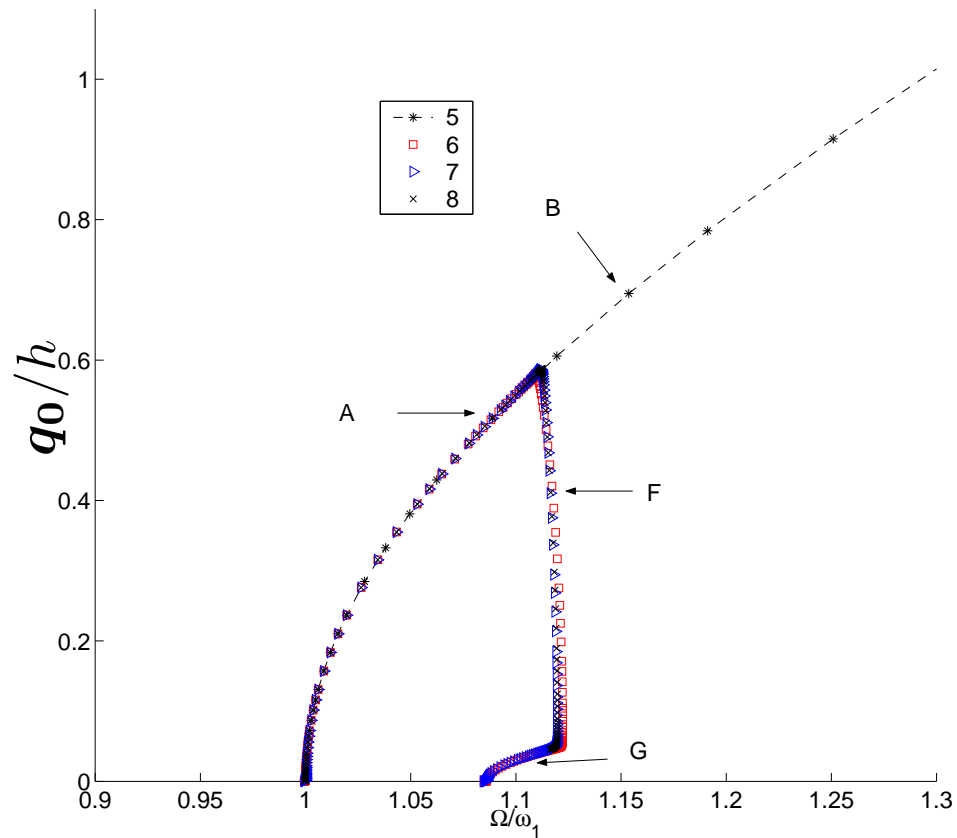
Premier mode : bifurcation



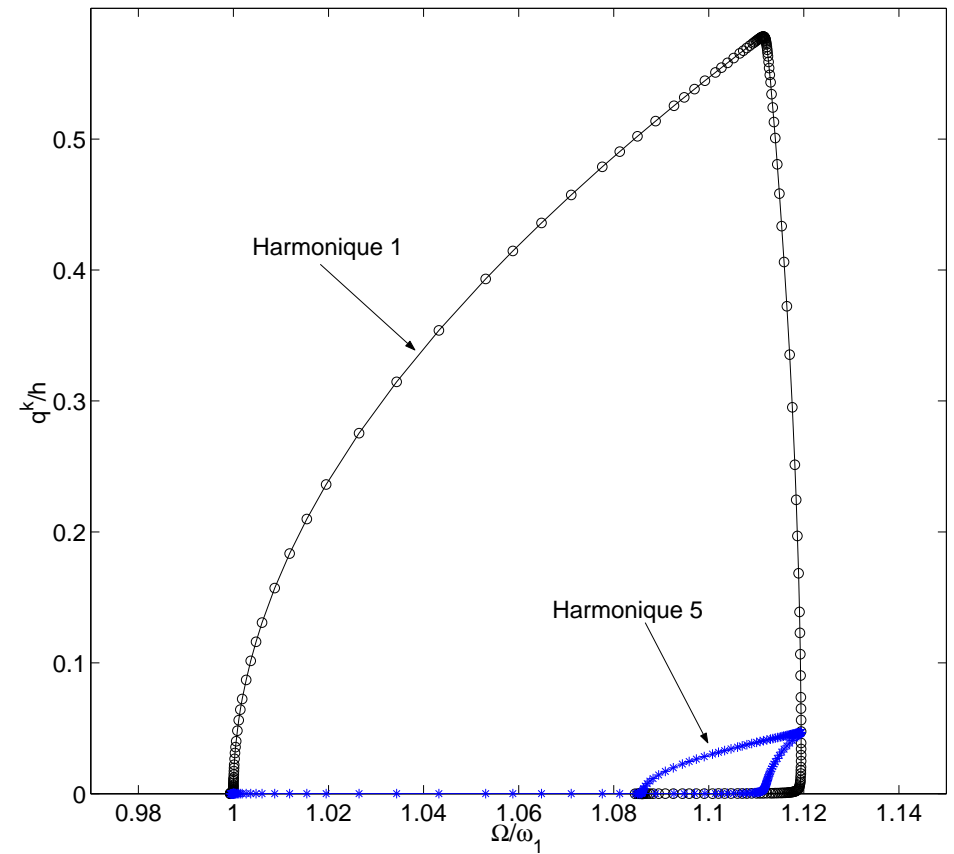
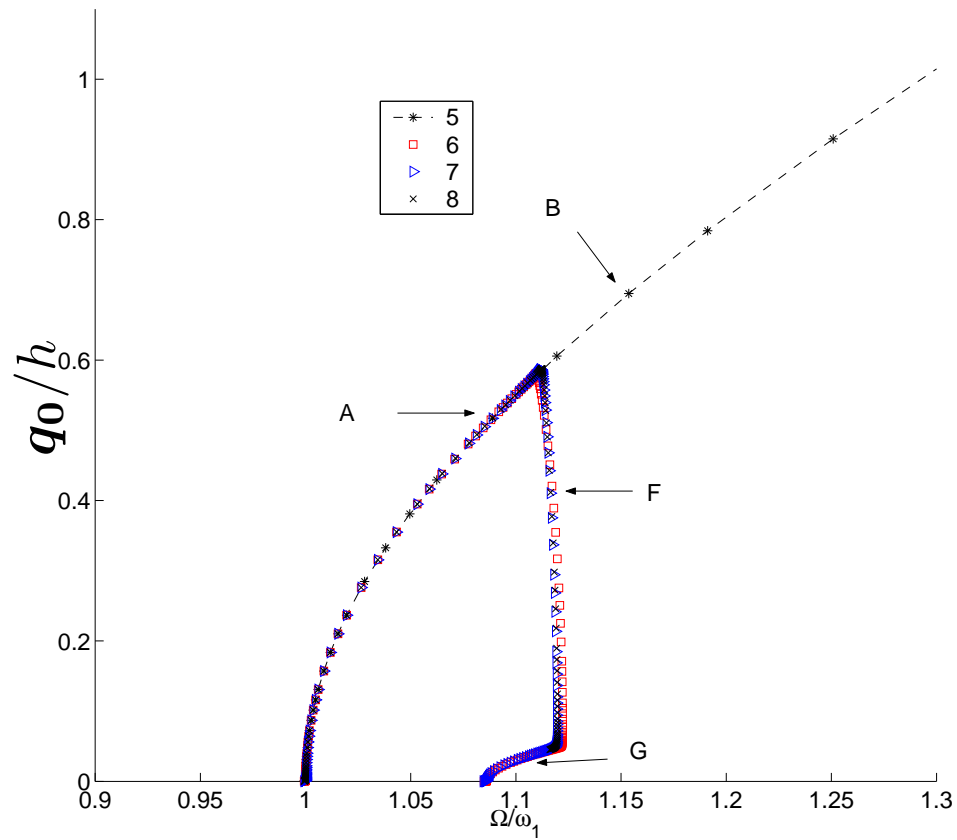
Premier mode : bifurcation



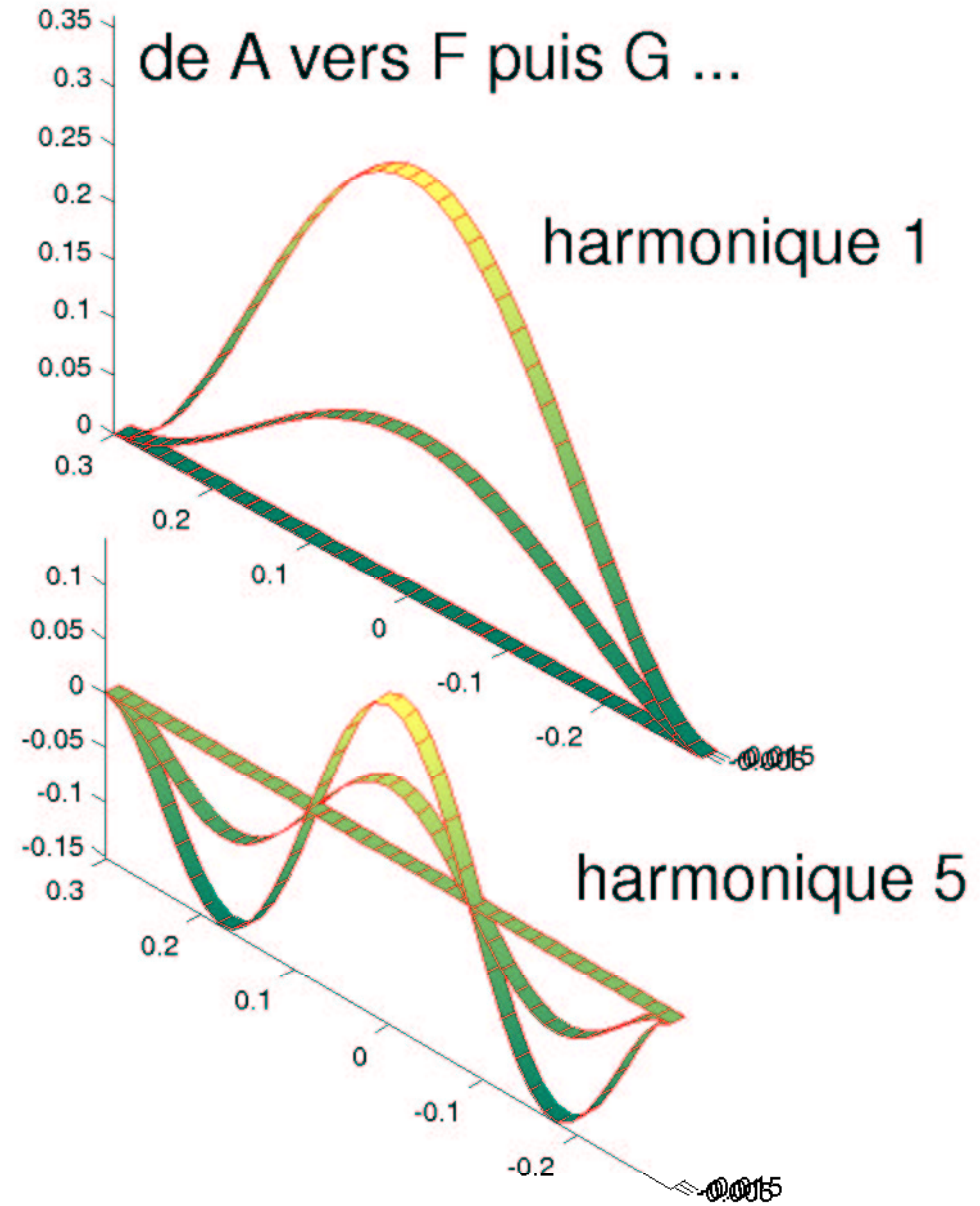
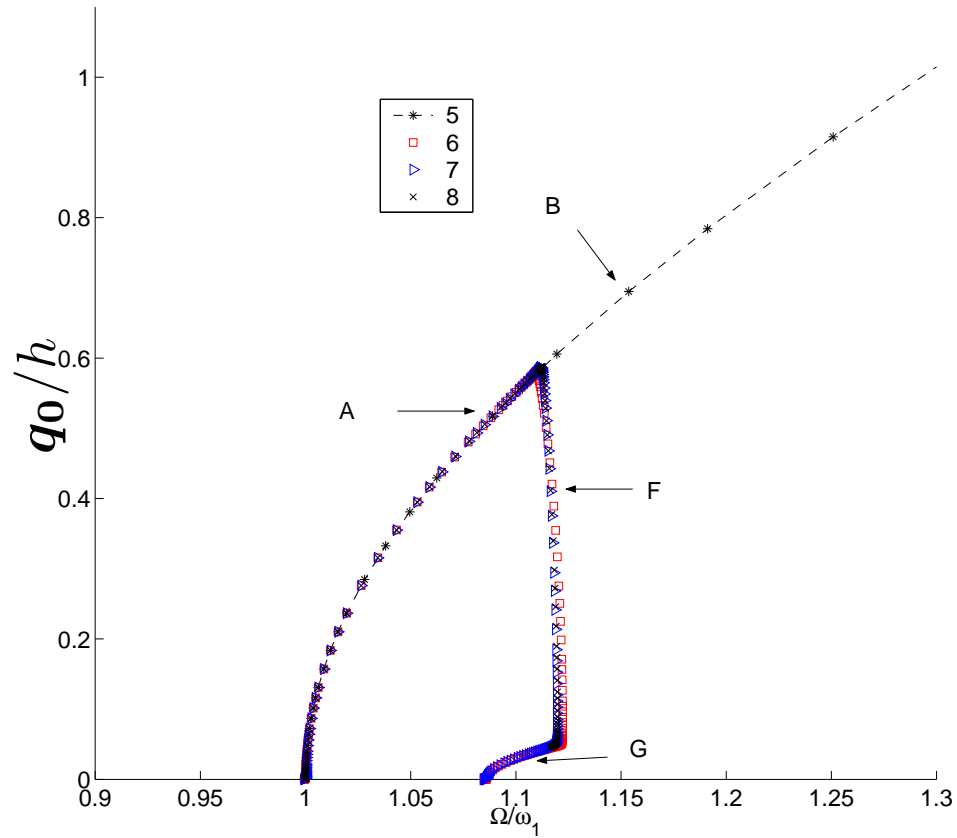
Premier mode : bifurcation



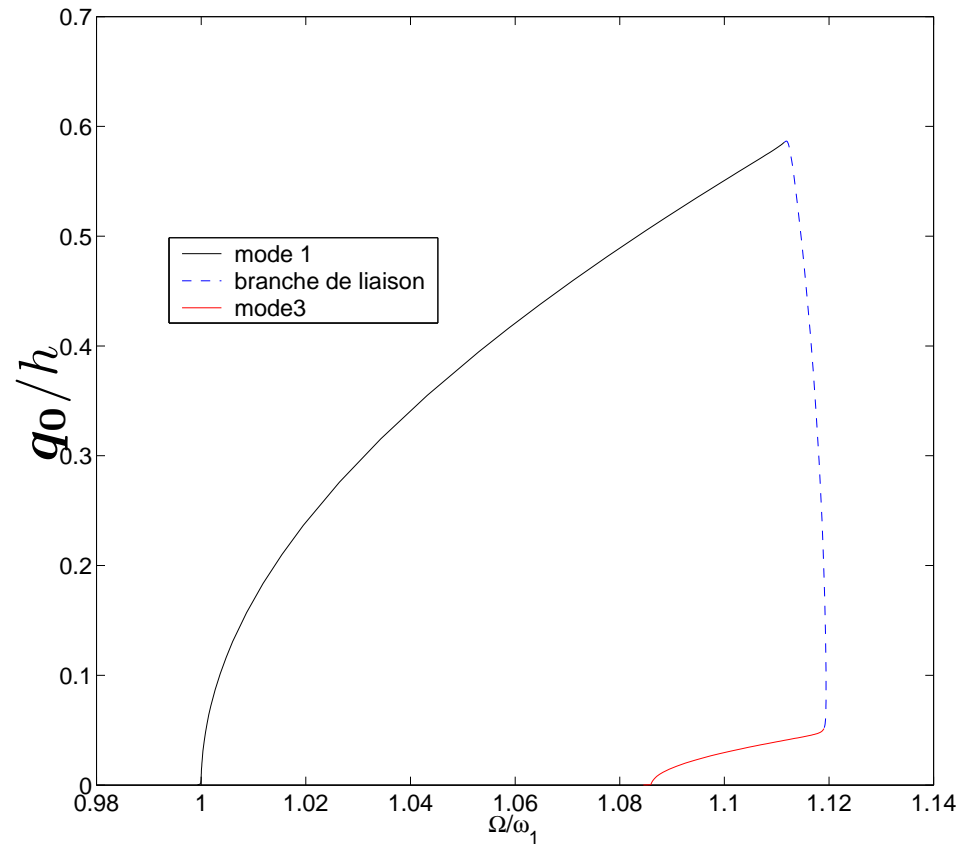
Premier mode : bifurcation



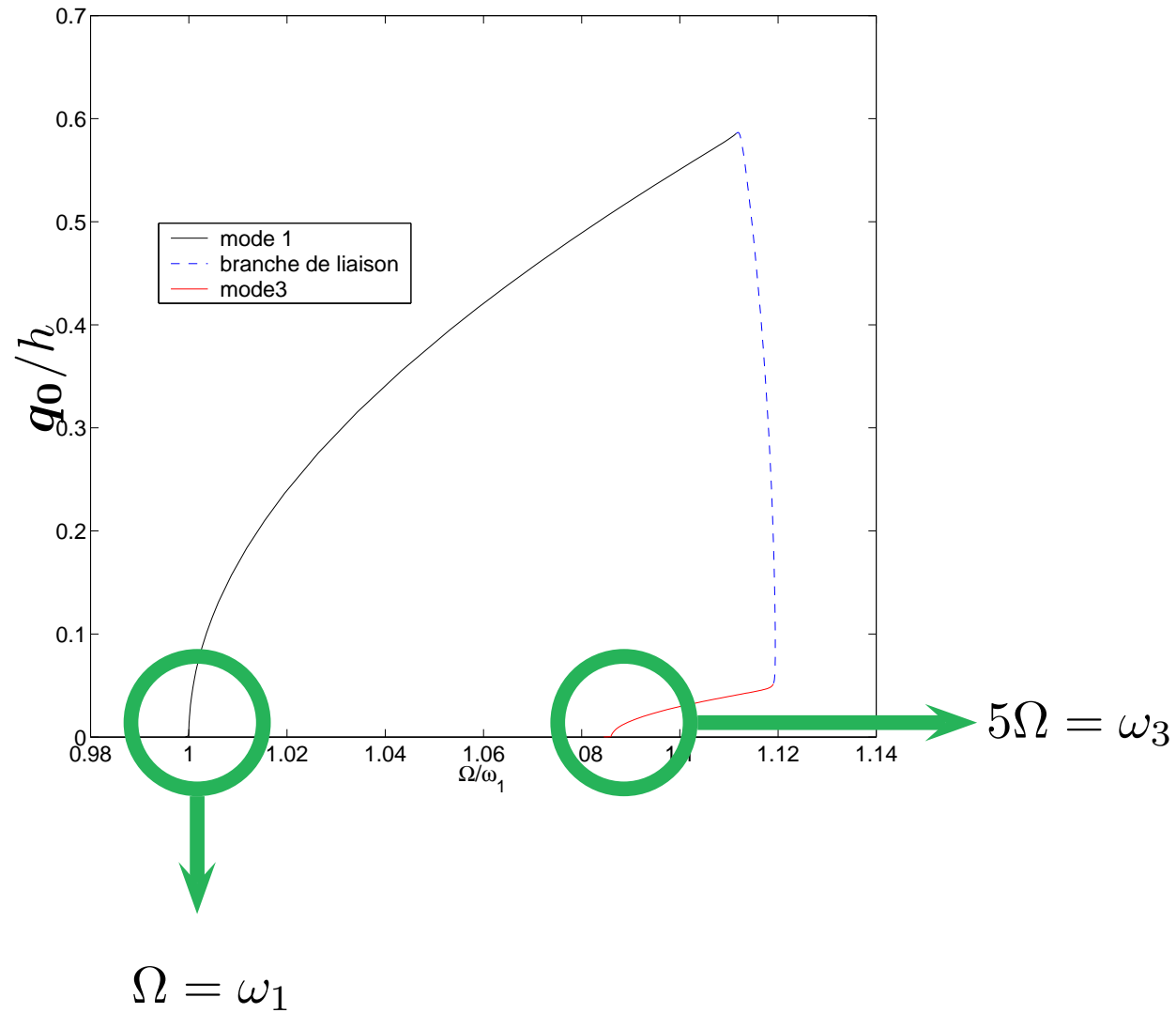
Premier mode : bifurcation



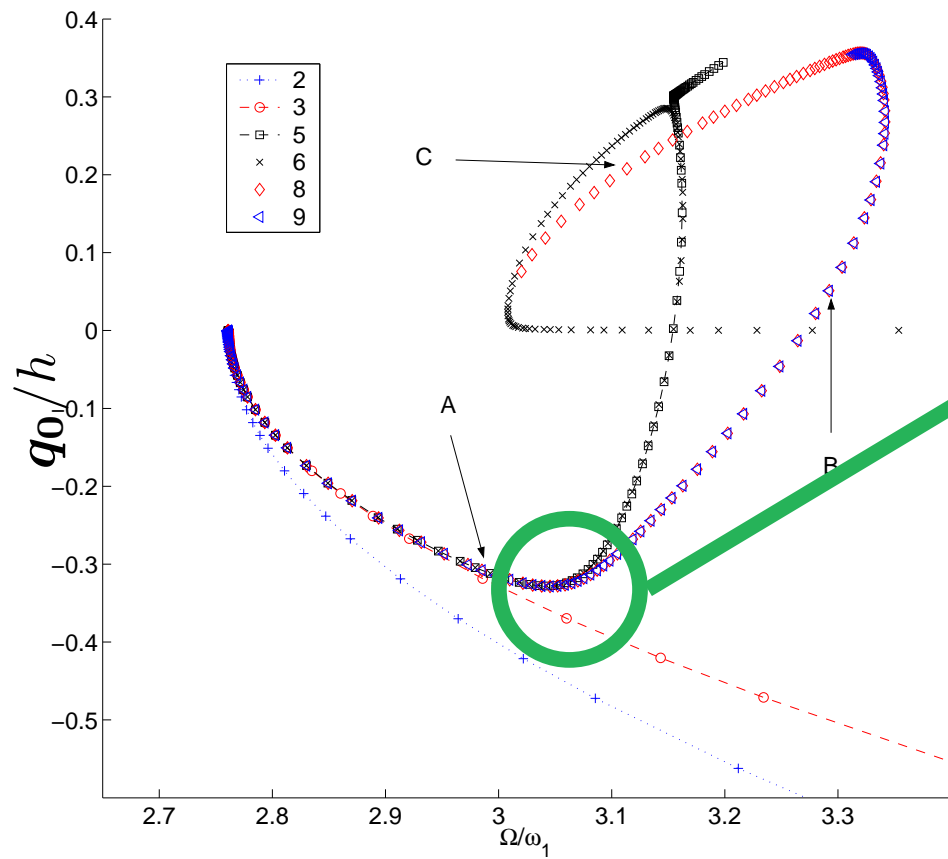
Premier mode : bifurcation



Premier mode : bifurcation

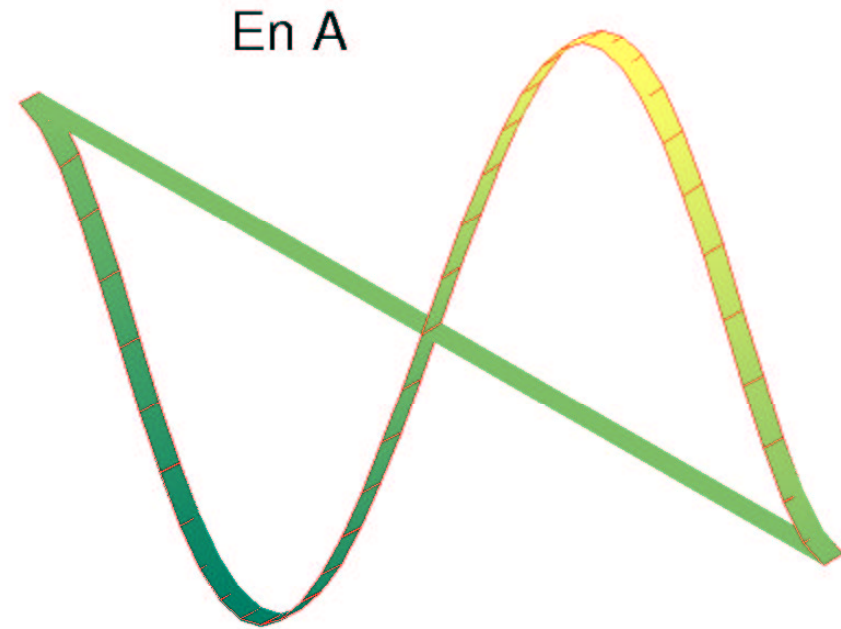
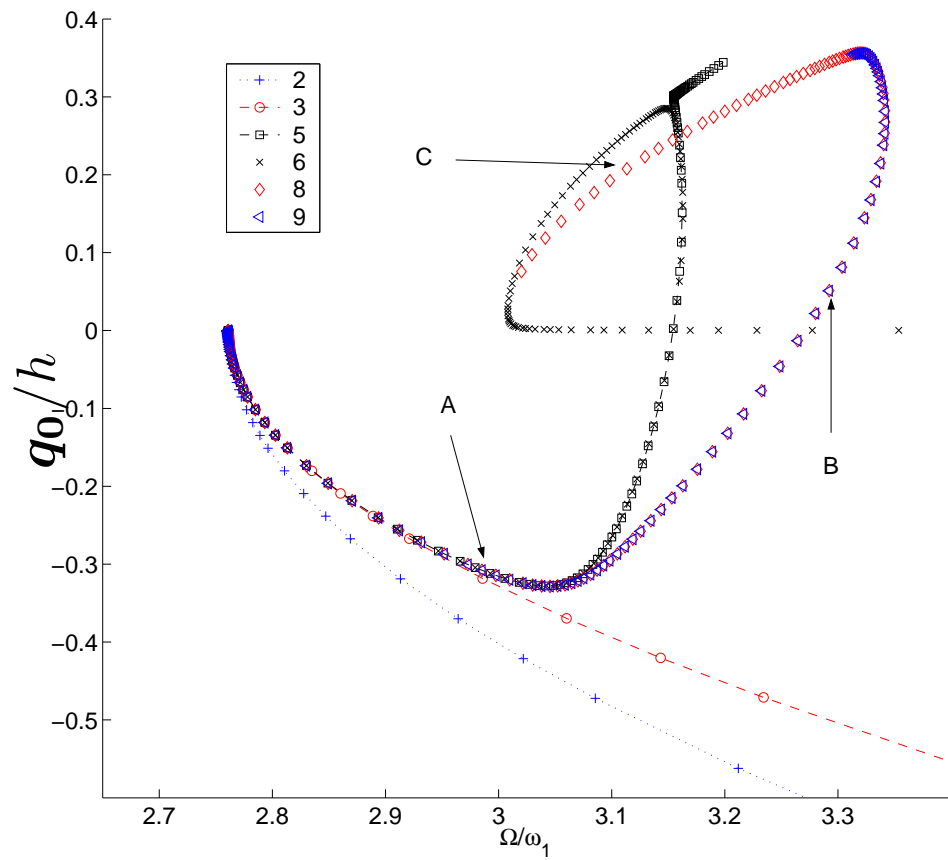


Mode 2

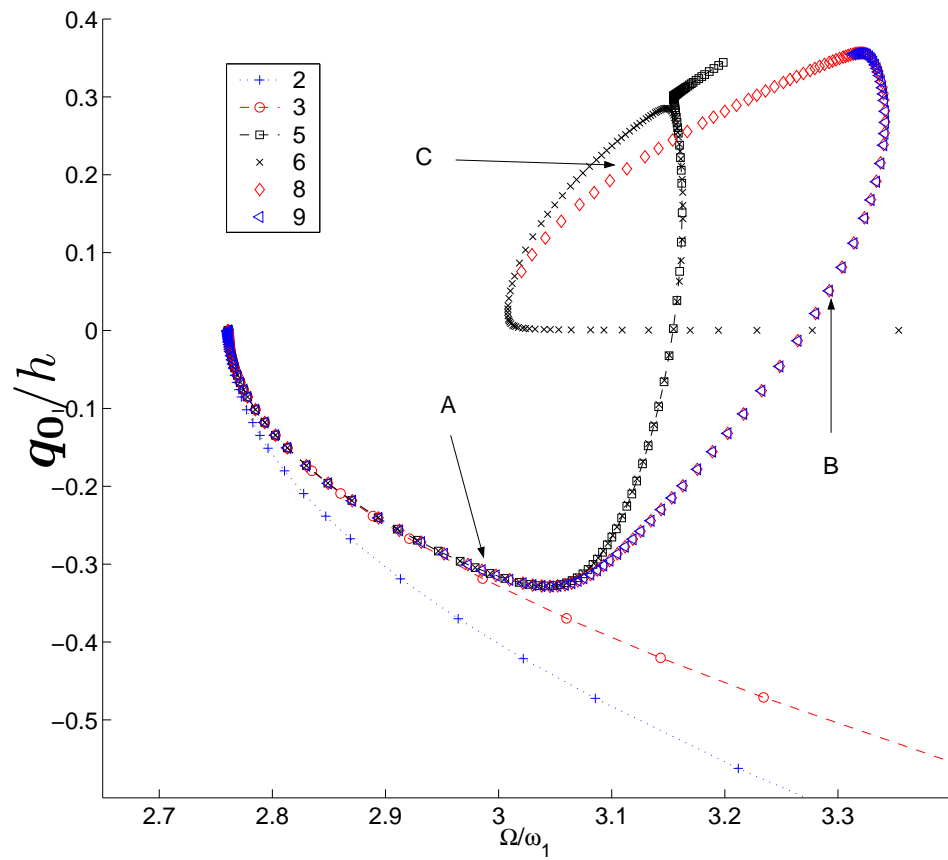


$\Omega \approx \frac{\omega_4}{3}$,
résonance interne 1 : 3
entre les modes 2 et 4.

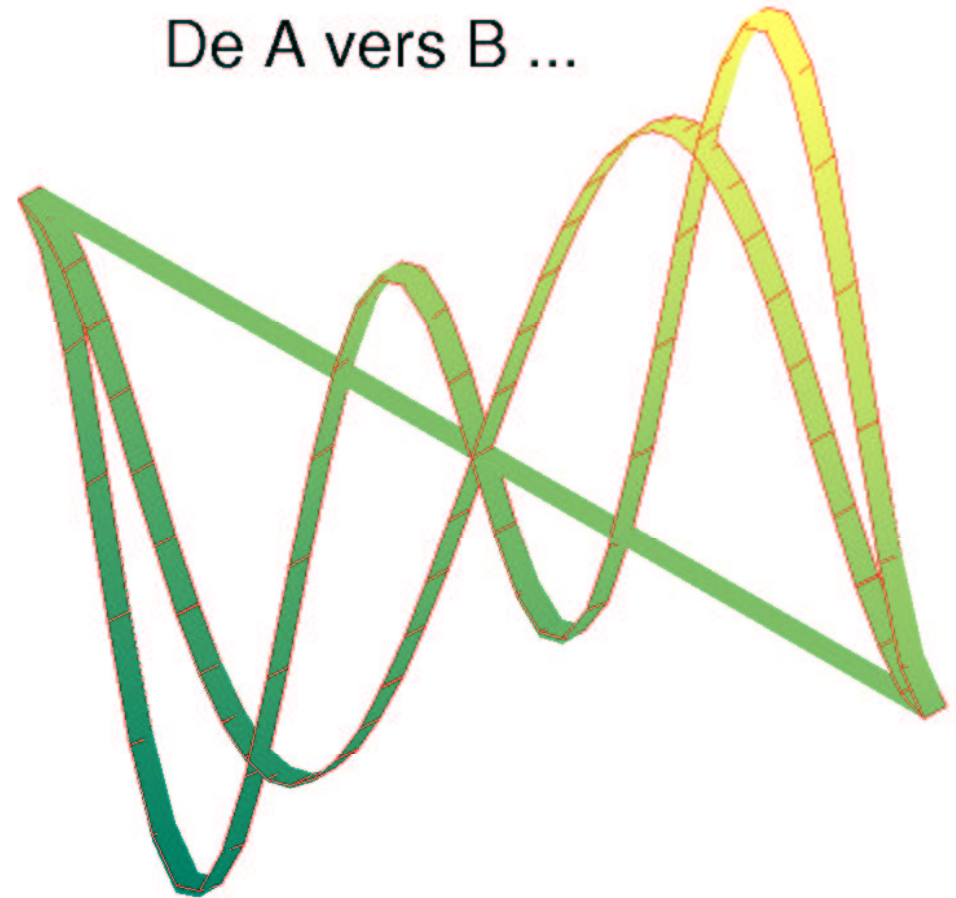
Mode 2



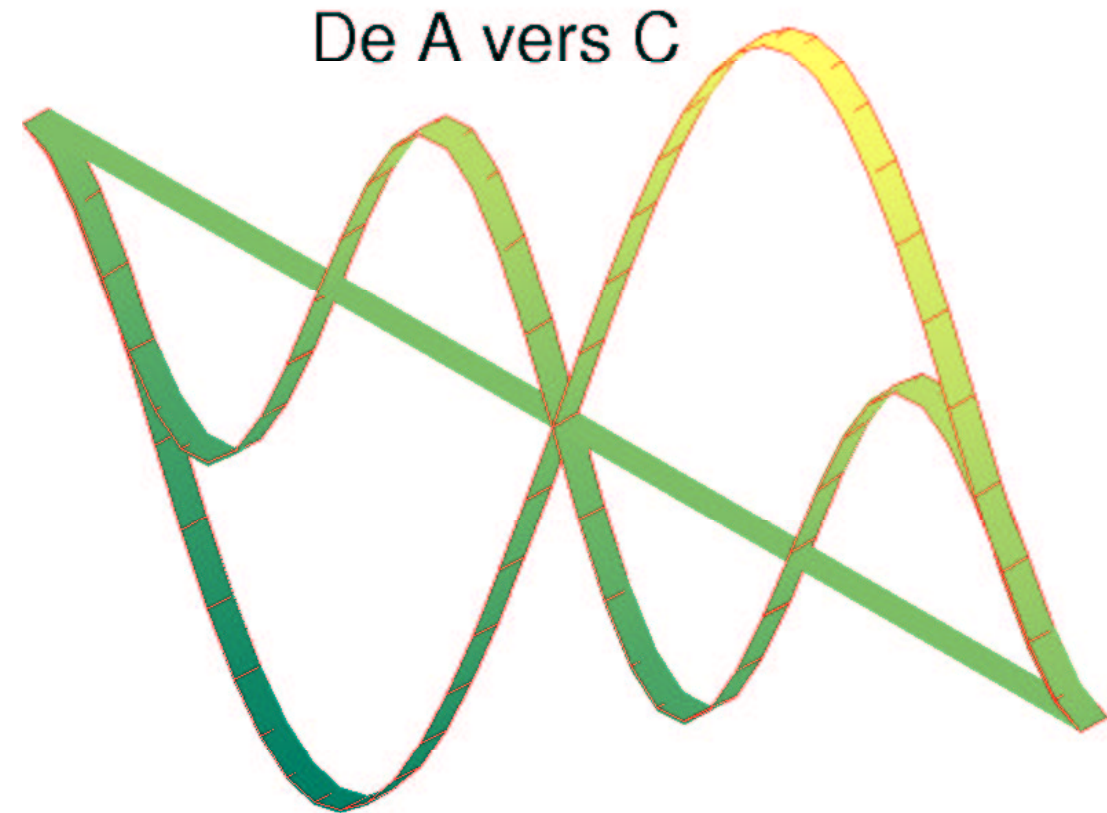
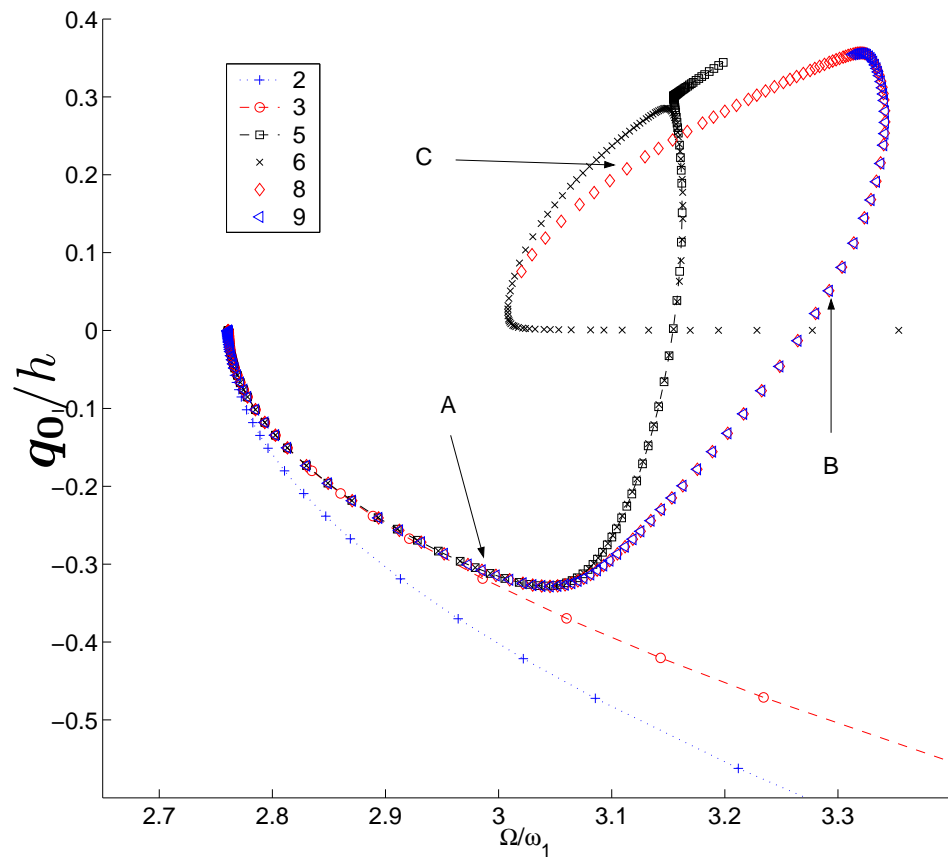
Mode 2



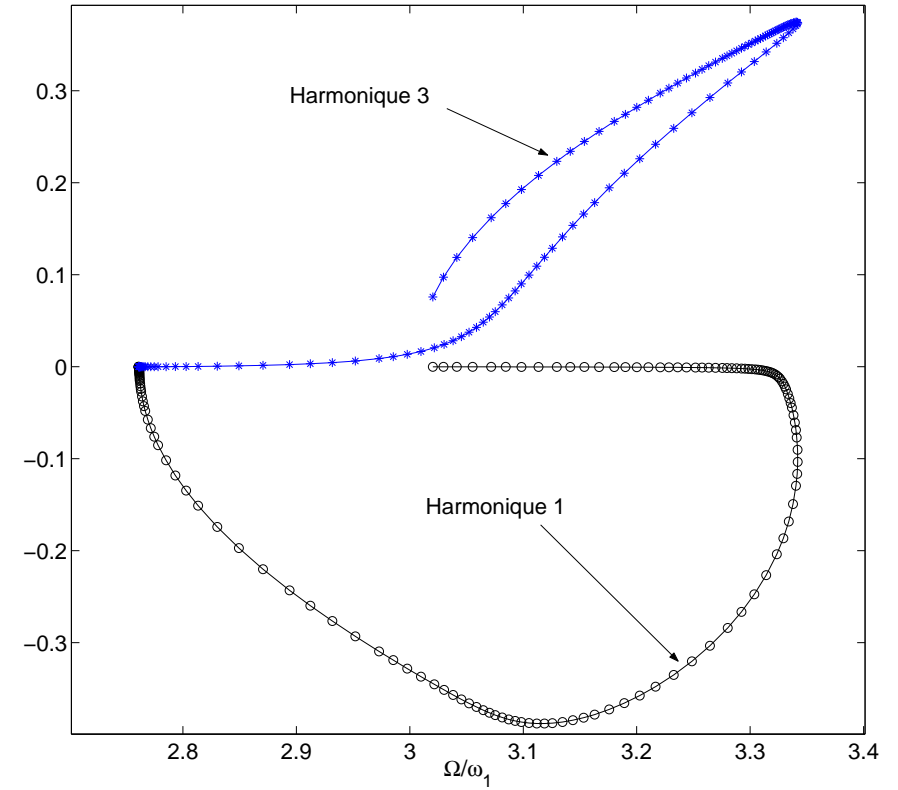
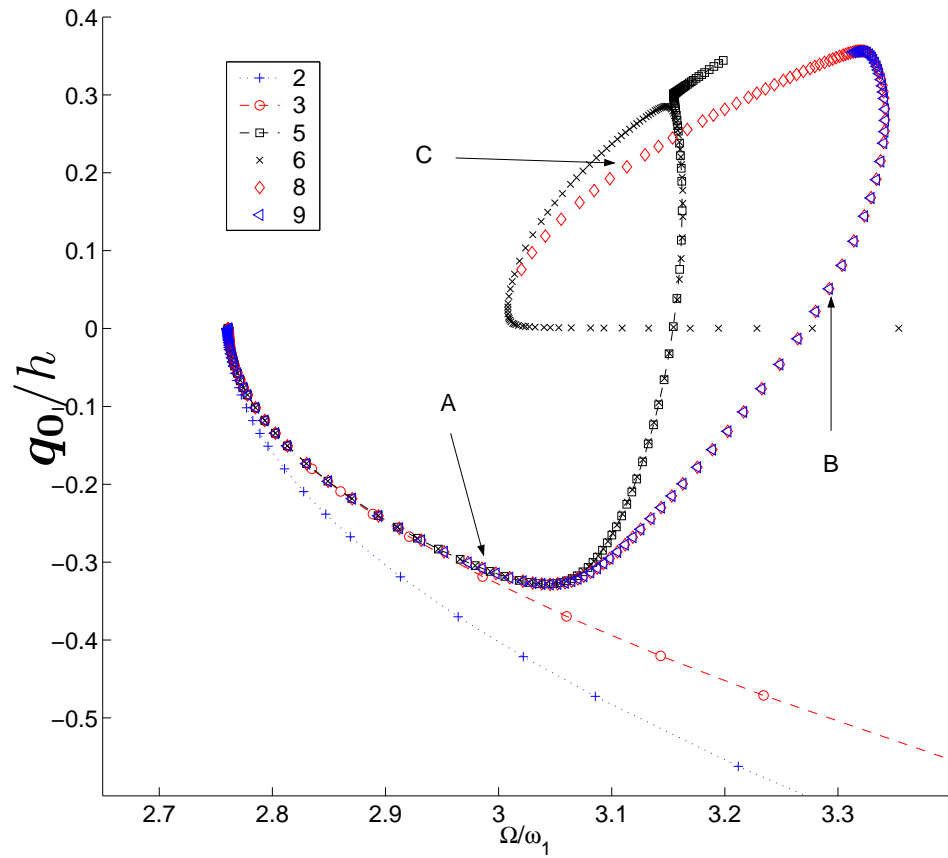
De A vers B ...



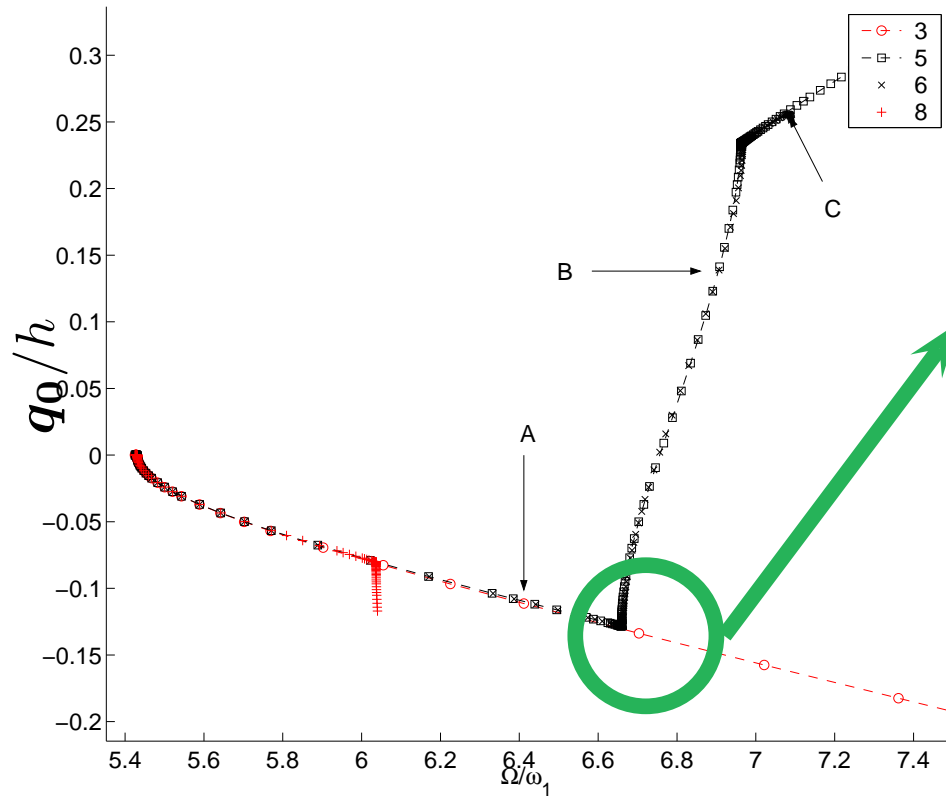
Mode 2



Mode 2

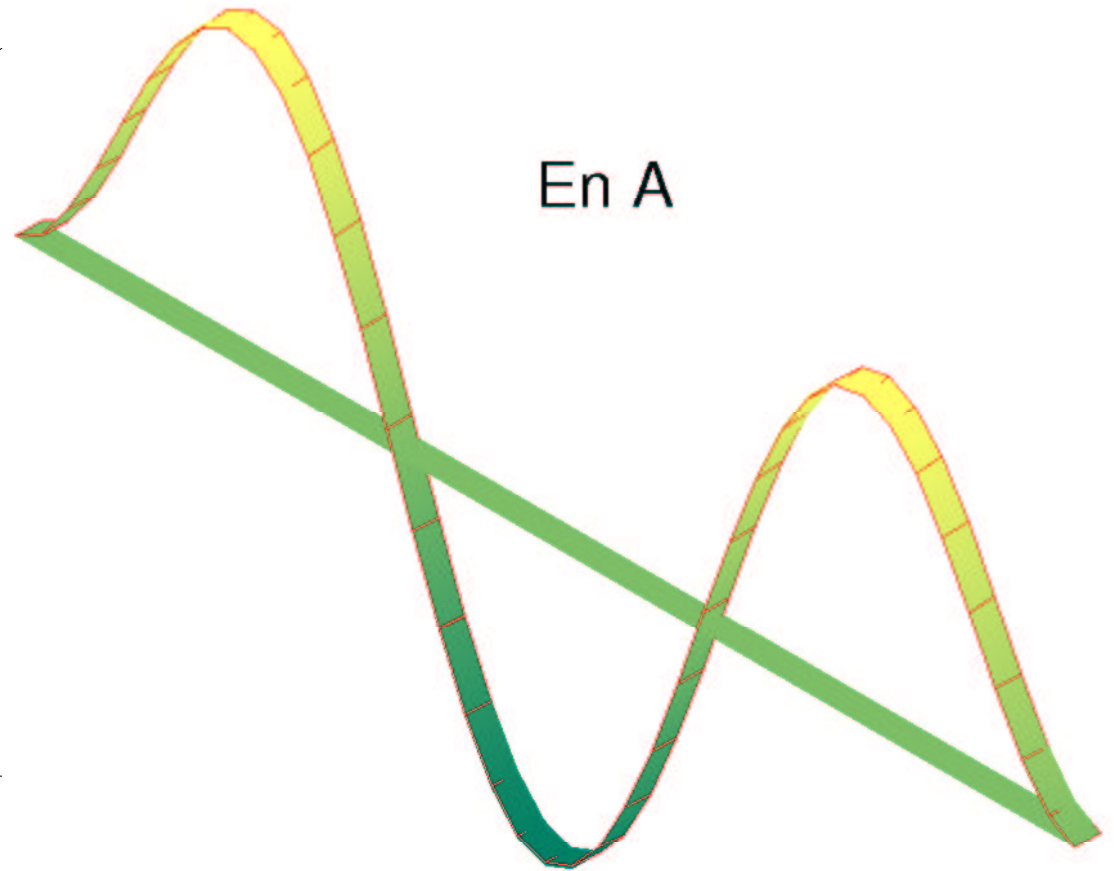
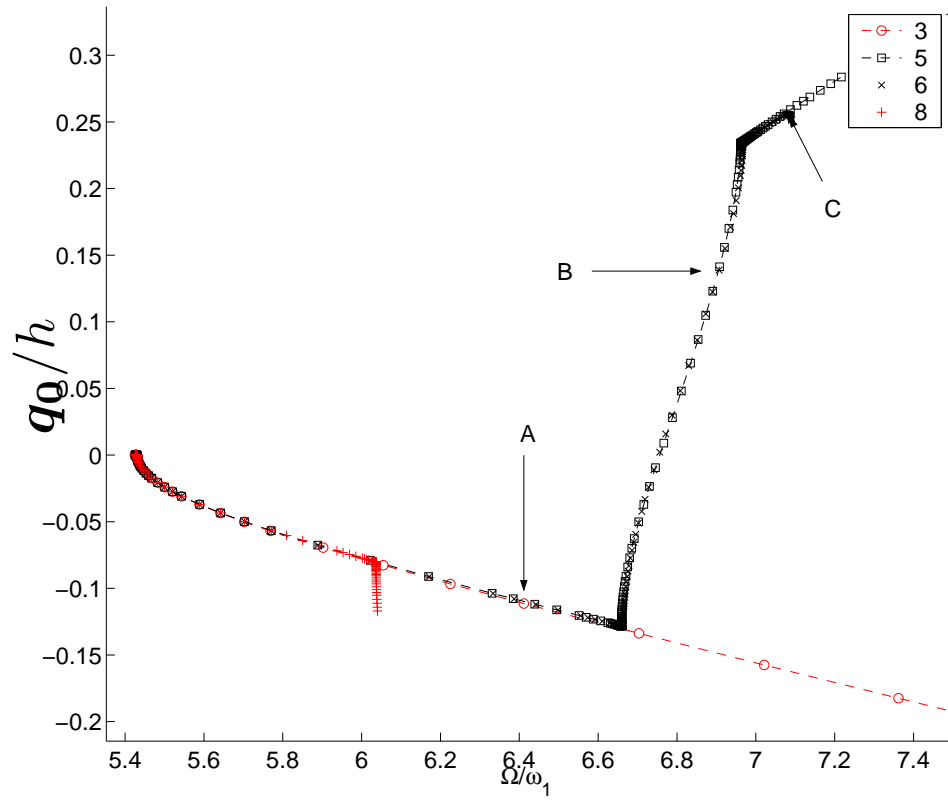


Mode 3

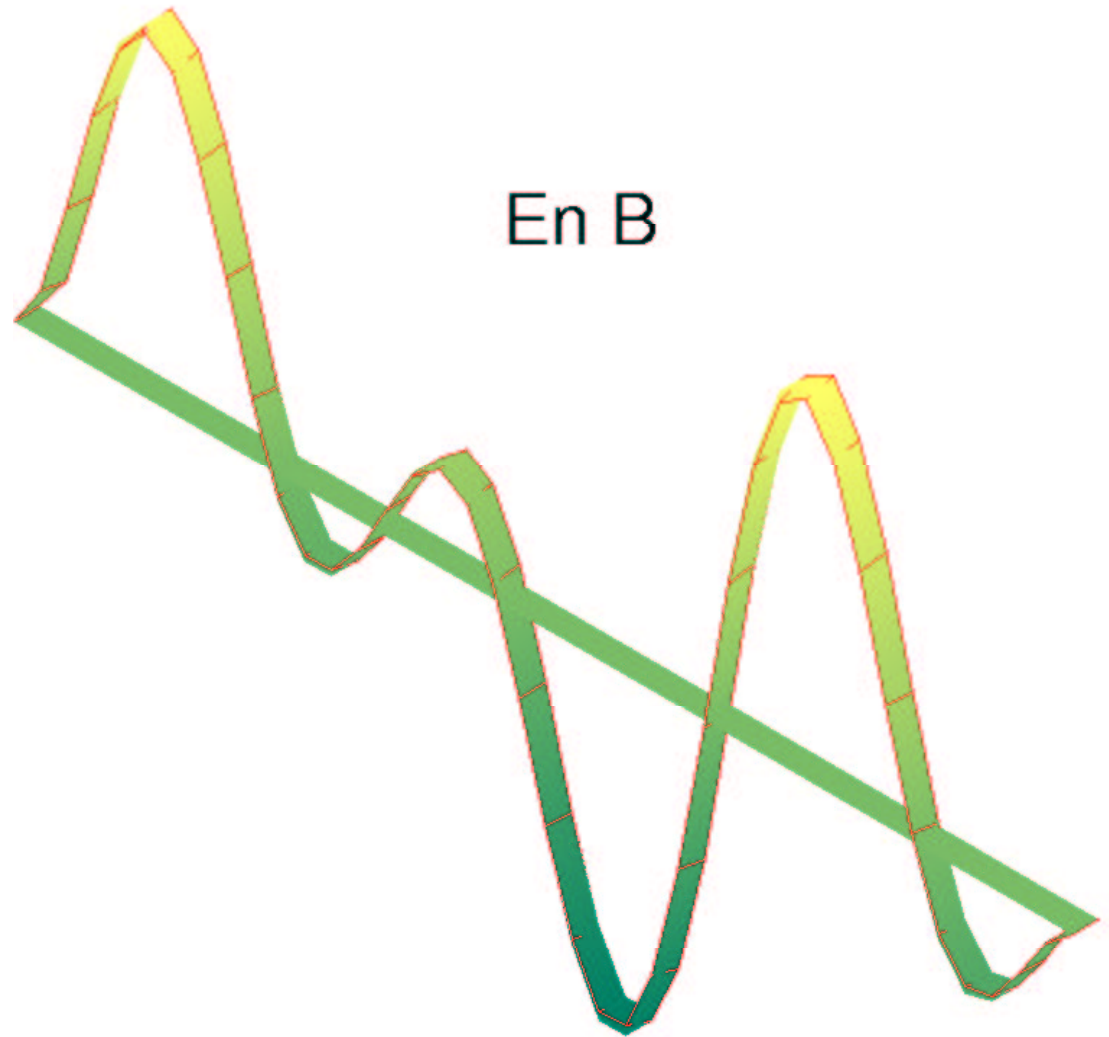
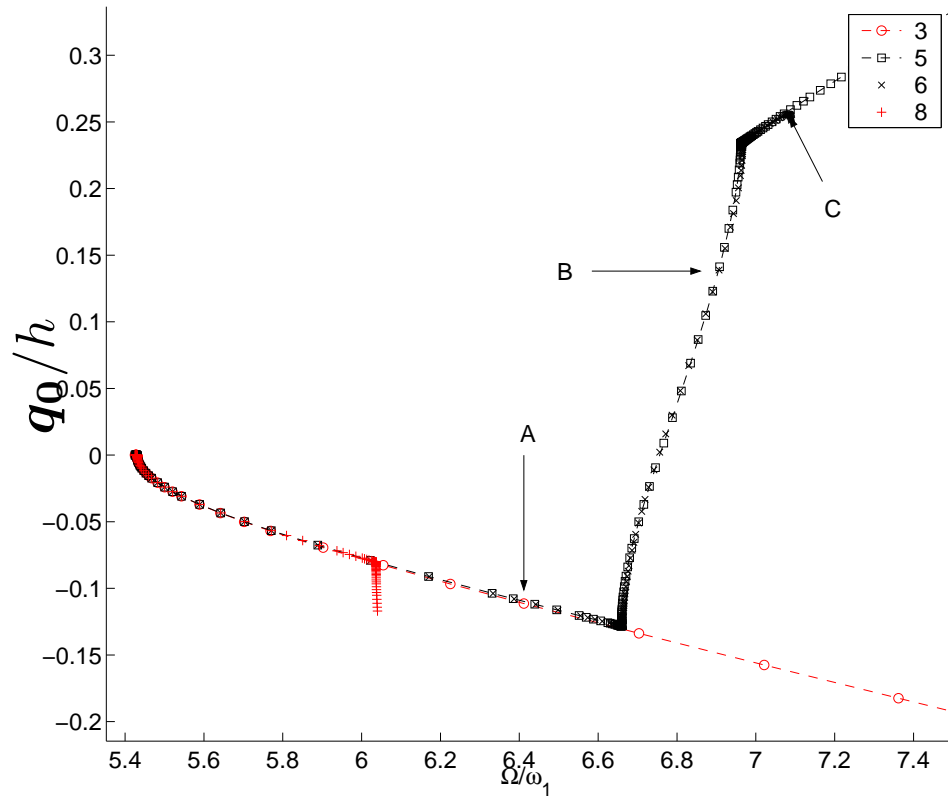


$\Omega \approx \frac{\omega_6}{2}$,
résonance interne 1 : 2
entre les modes 3 et 6.

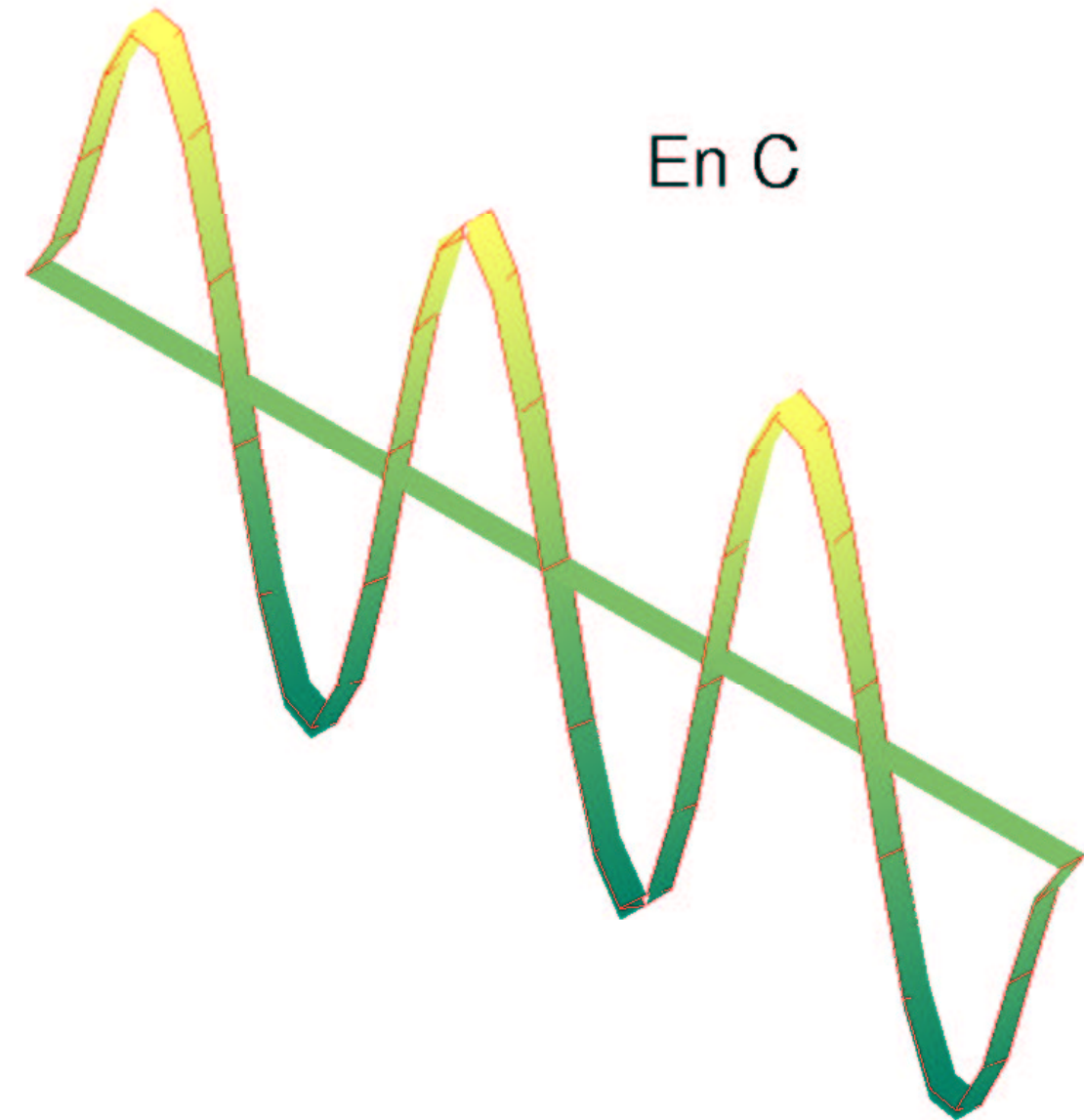
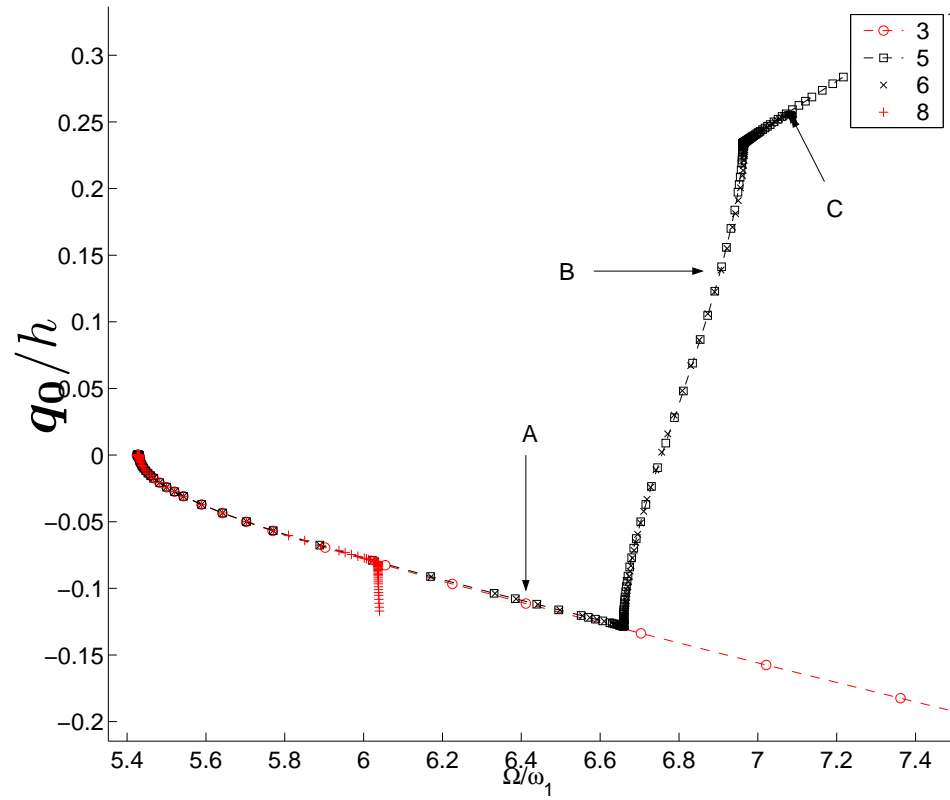
Mode 3



Mode 3

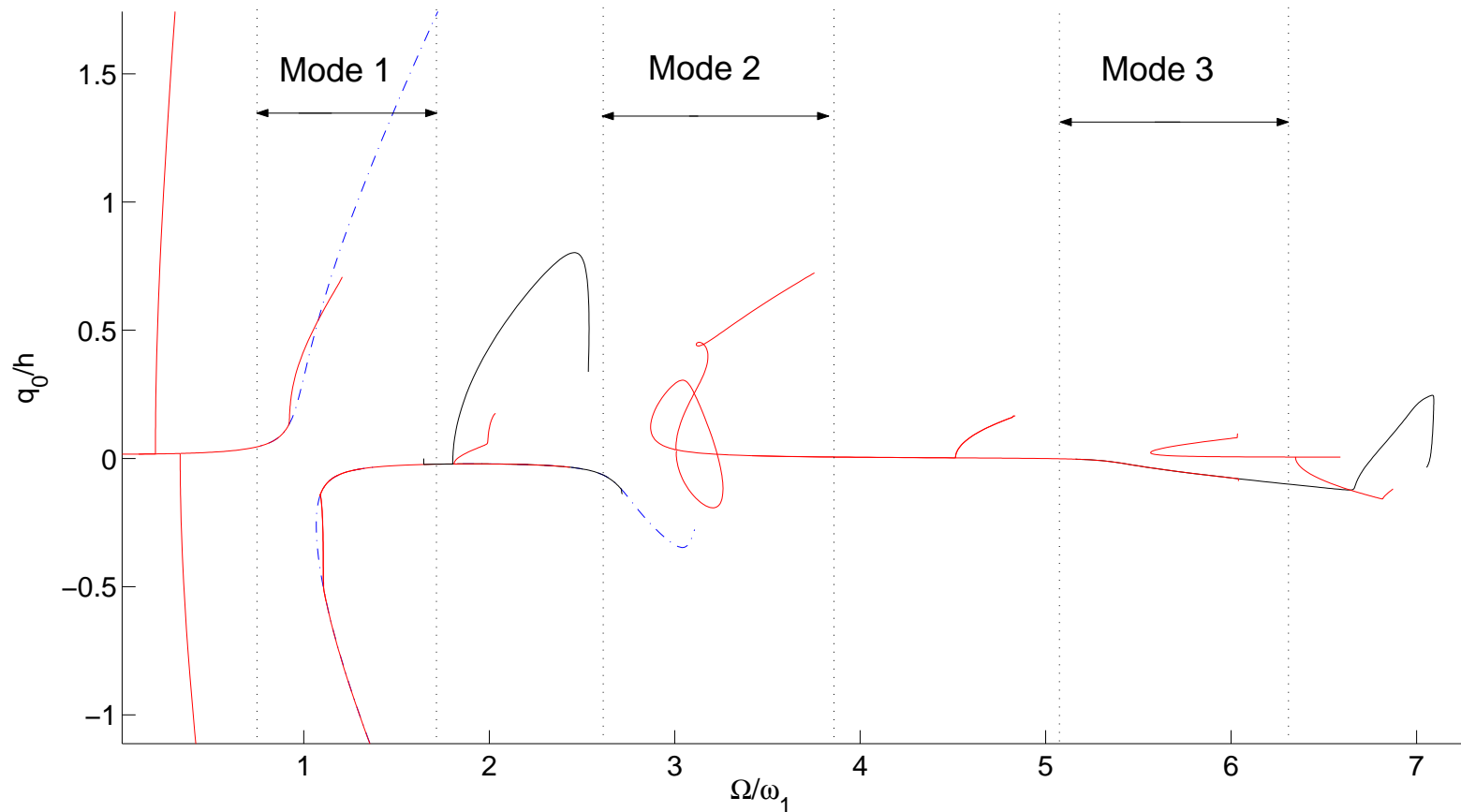


Mode 3

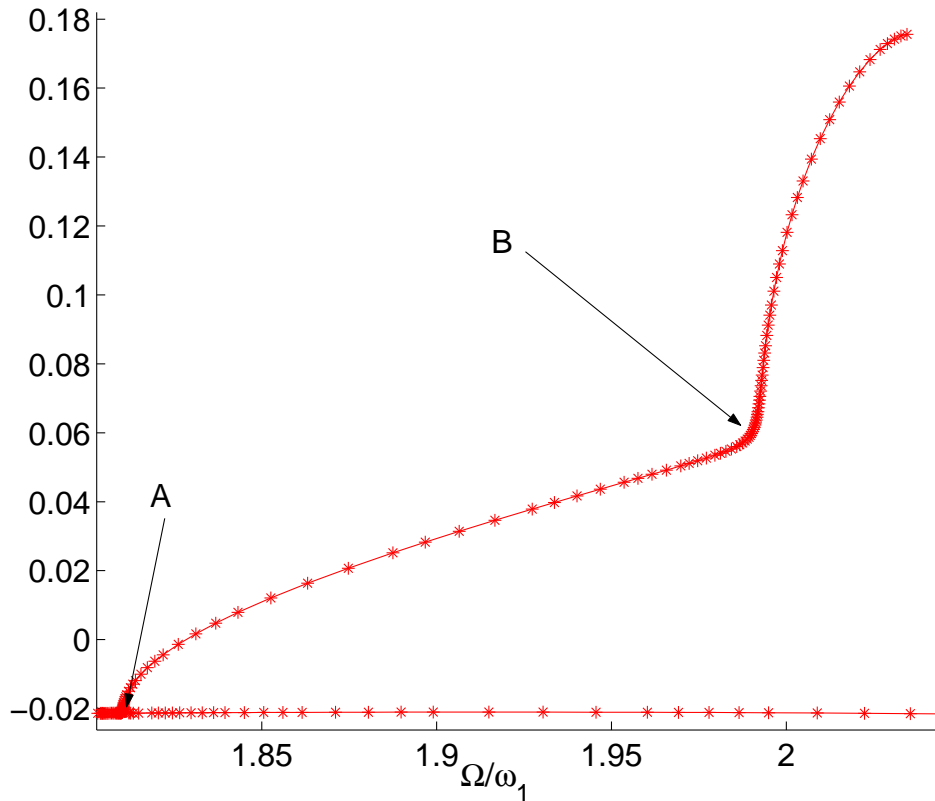


Réponse forcée

- ▶ Réponse forcée, excitation d'amplitude 1 N
- ⇒ résonances autour des modes
- ⇒ résonances secondaires



Résonances secondaires

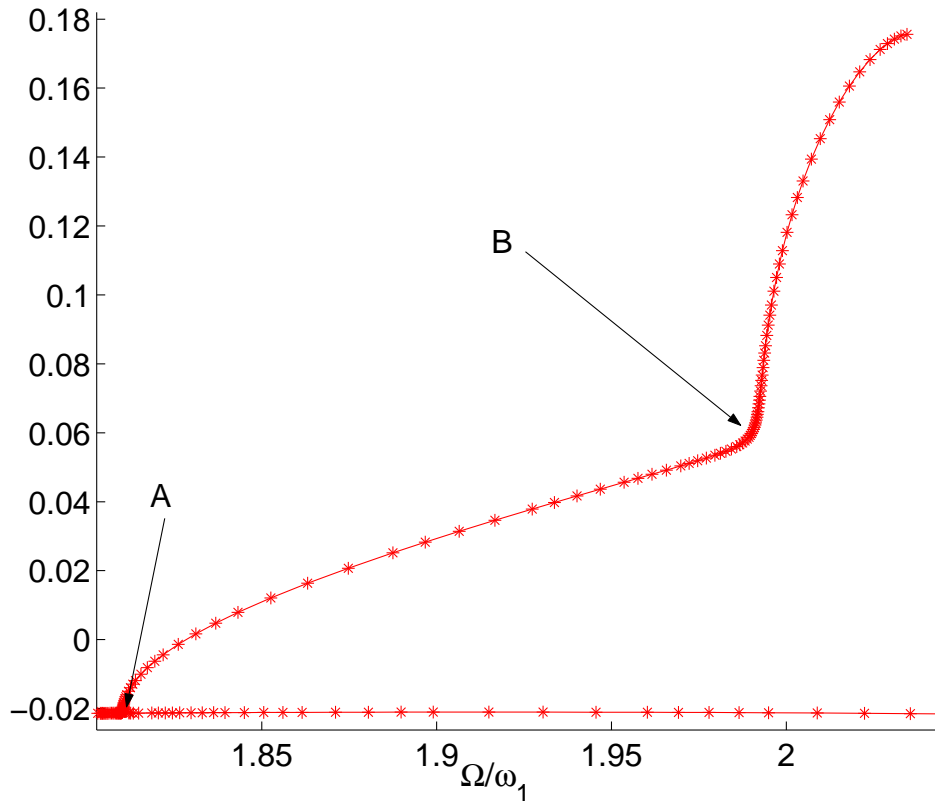


Résonances super-harmoniques :

$$A : \Omega = \frac{\omega_3}{3}$$

$$B : \Omega = \frac{\omega_5}{6}$$

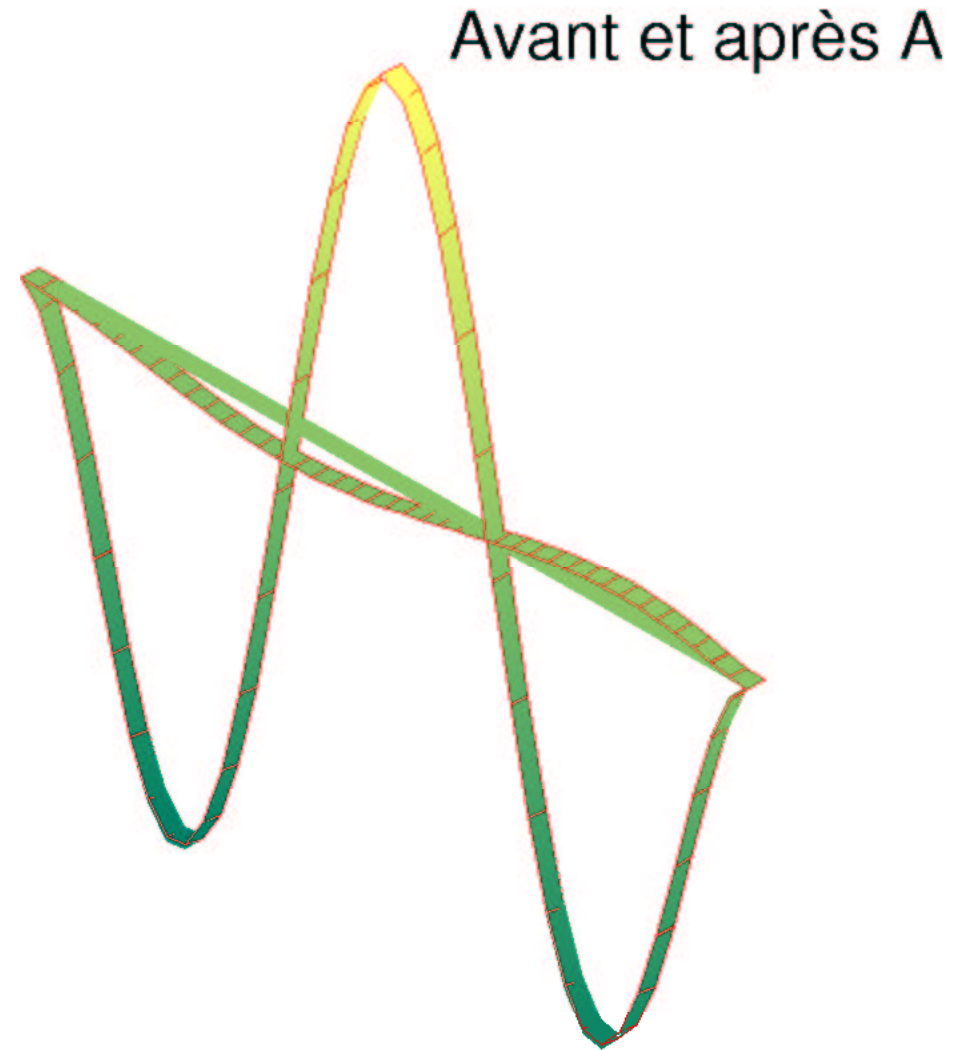
Résonances secondaires



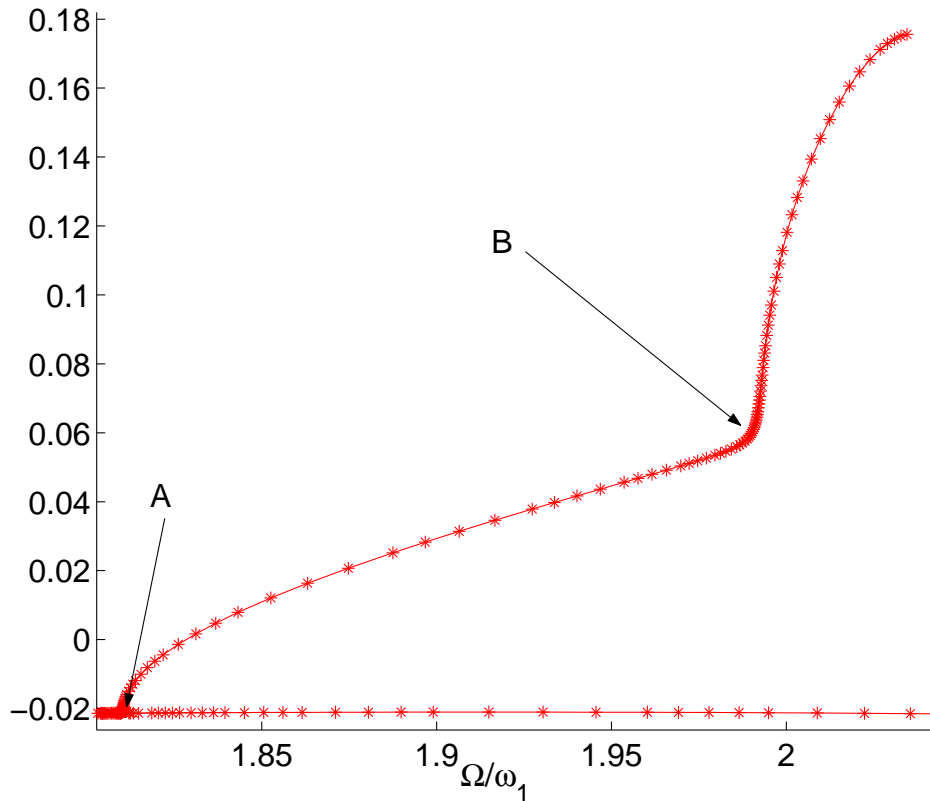
Résonances super-harmoniques :

$$A : \Omega = \frac{\omega_3}{3}$$

$$B : \Omega = \frac{\omega_5}{6}$$



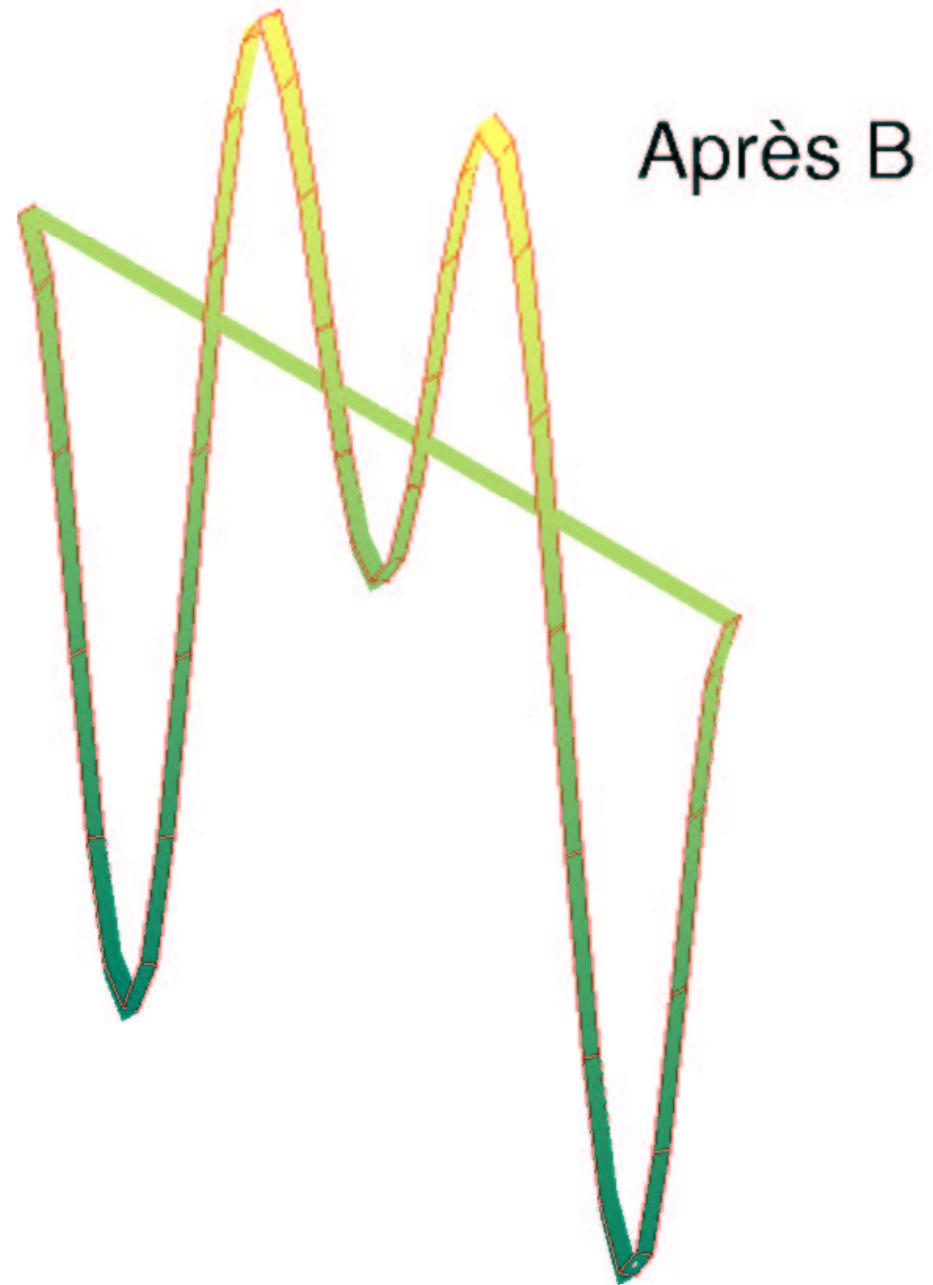
Résonances secondaires



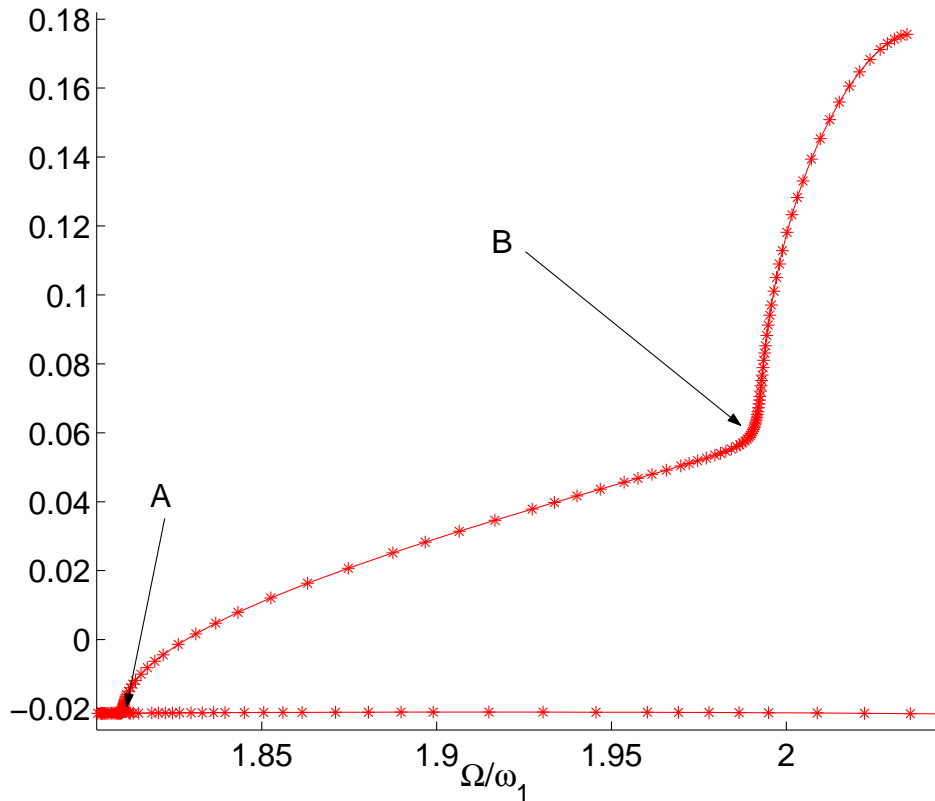
Résonances super-harmoniques :

$$A : \Omega = \frac{\omega_3}{3}$$

$$B : \Omega = \frac{\omega_5}{6}$$



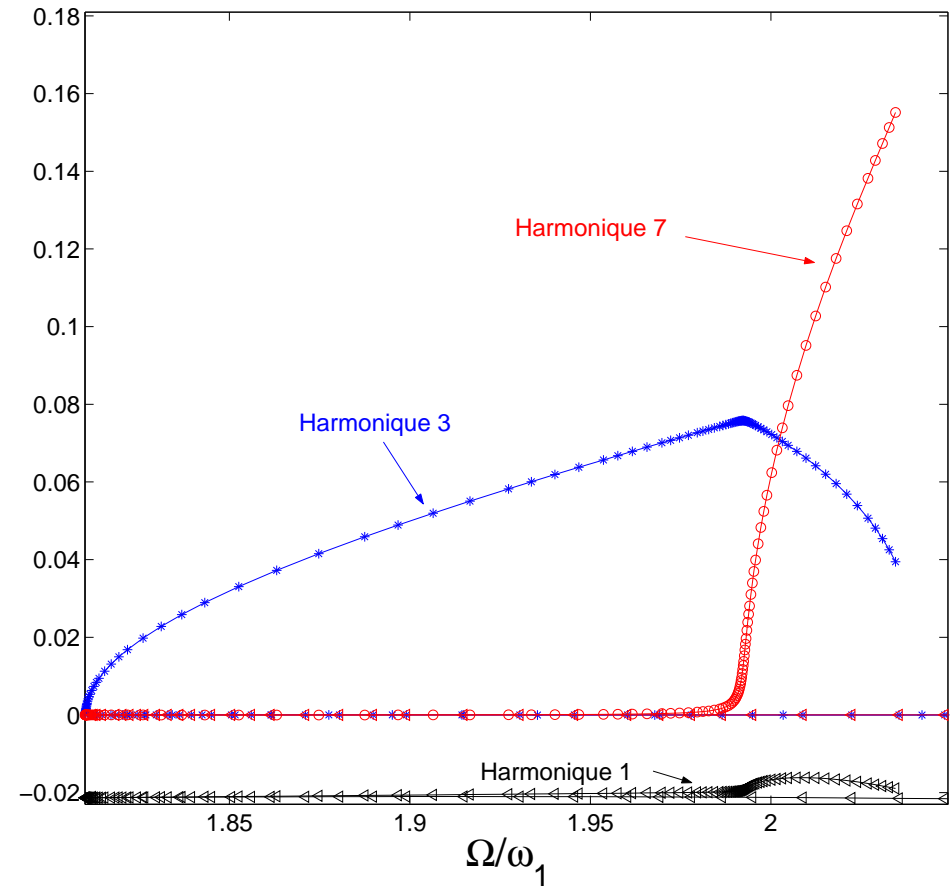
Résonances secondaires



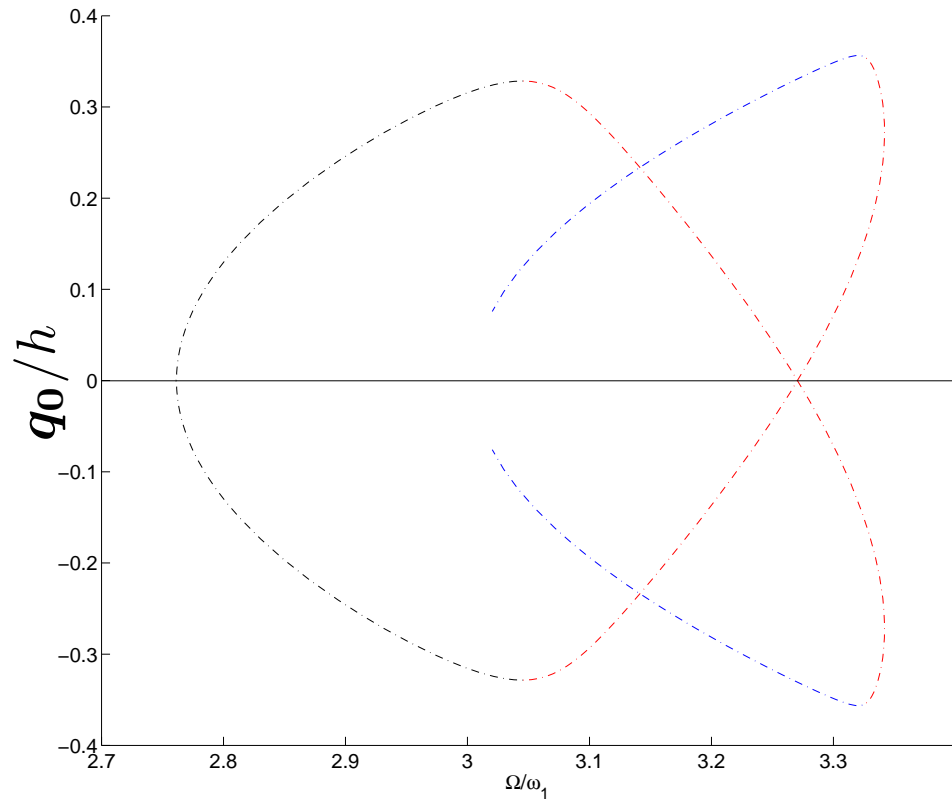
Résonances super-harmoniques :

$$A : \Omega = \frac{\omega_3}{3}$$

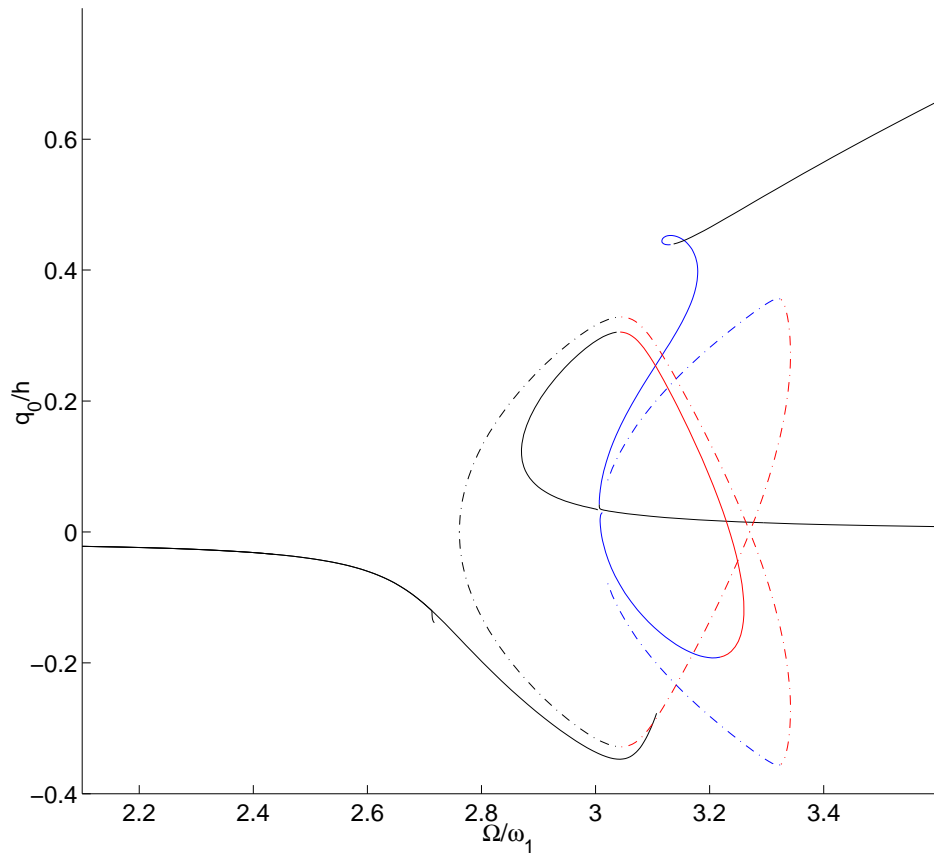
$$B : \Omega = \frac{\omega_5}{6}$$



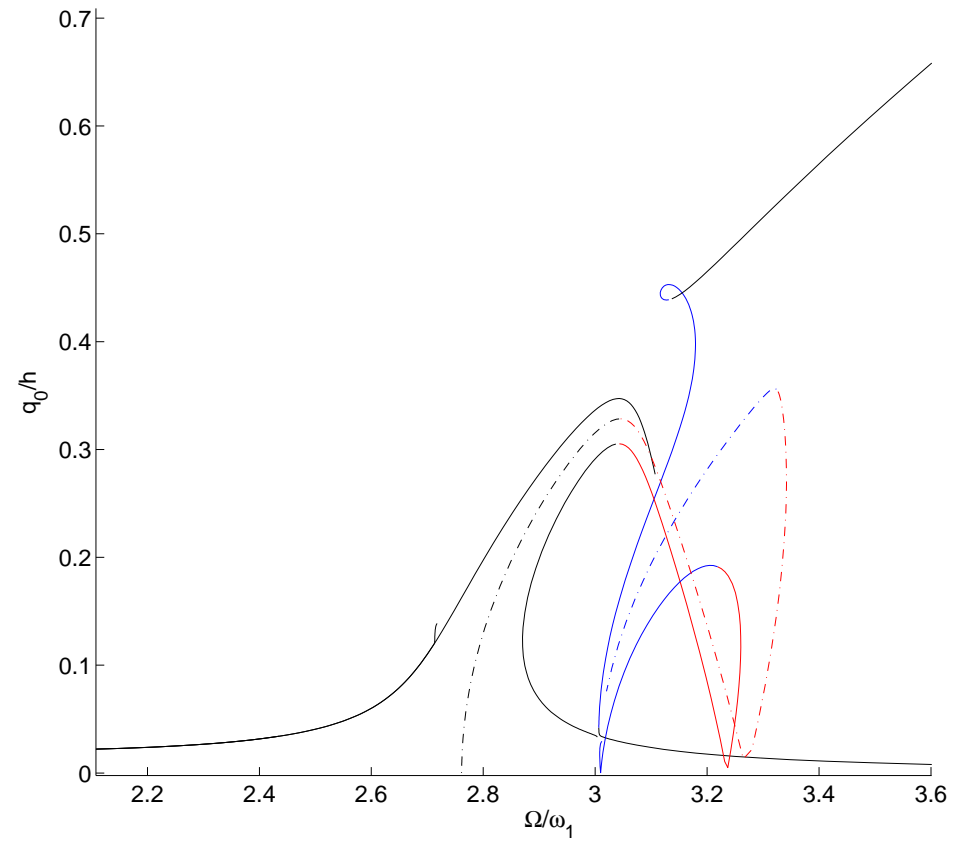
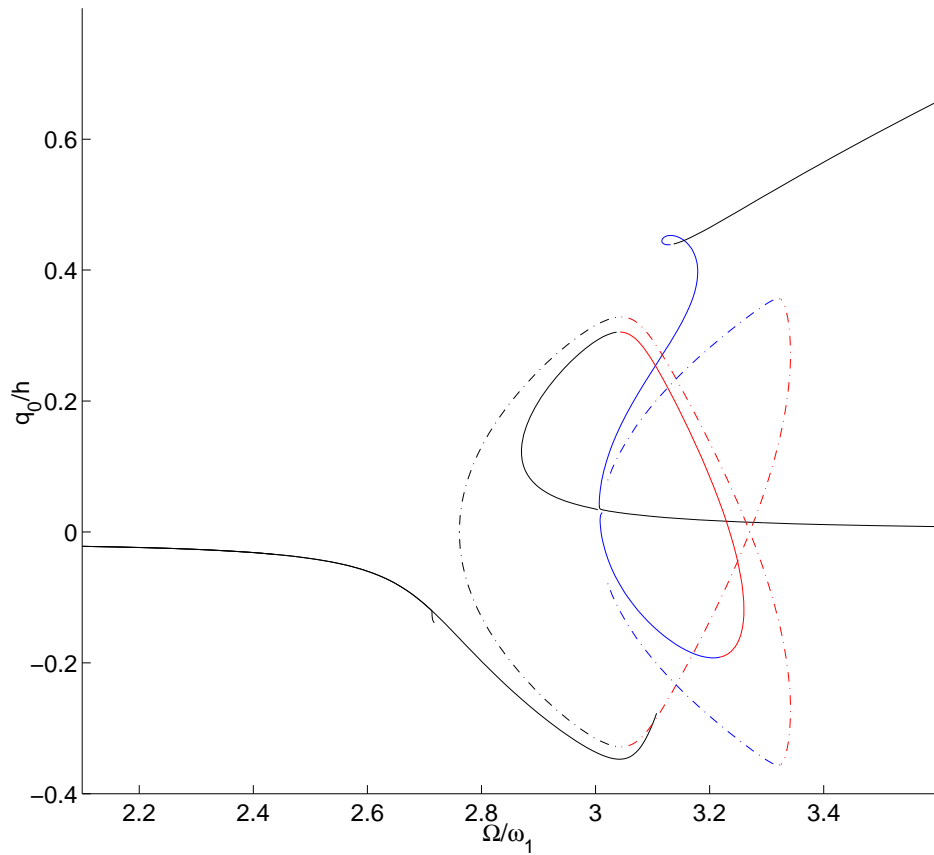
Réponse forcée autour du mode 2



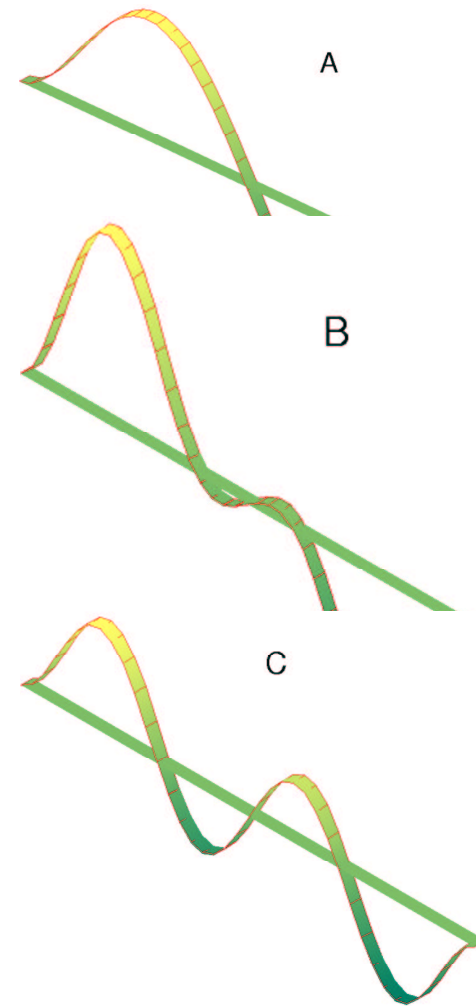
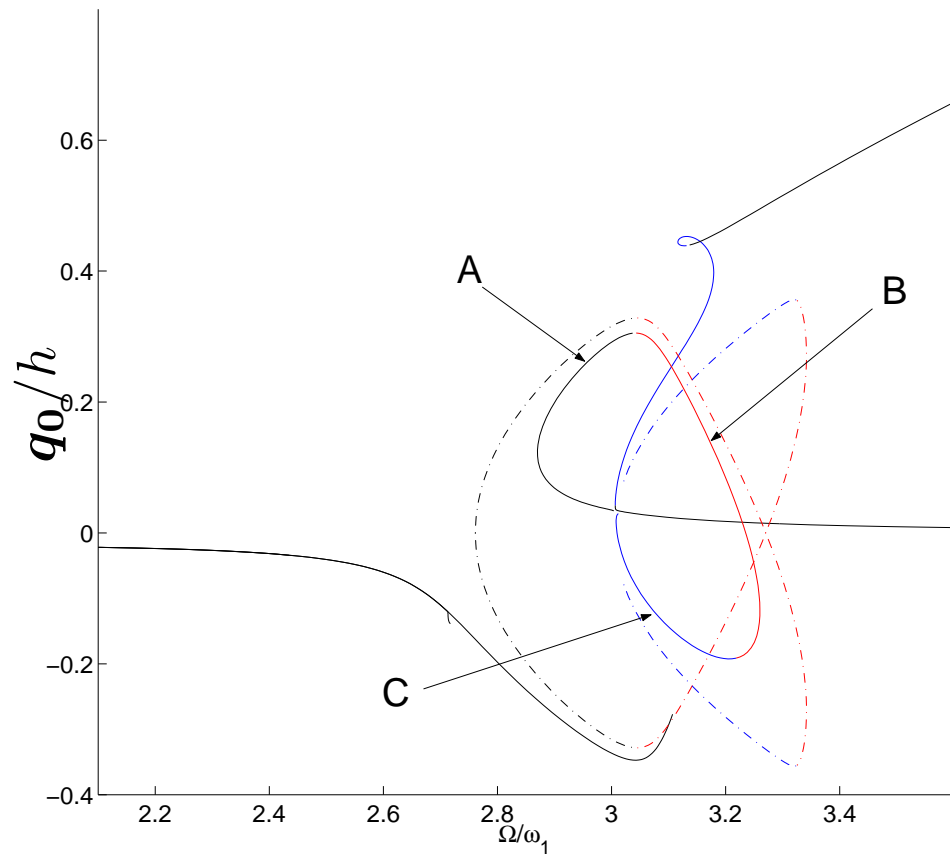
Réponse forcée autour du mode 2



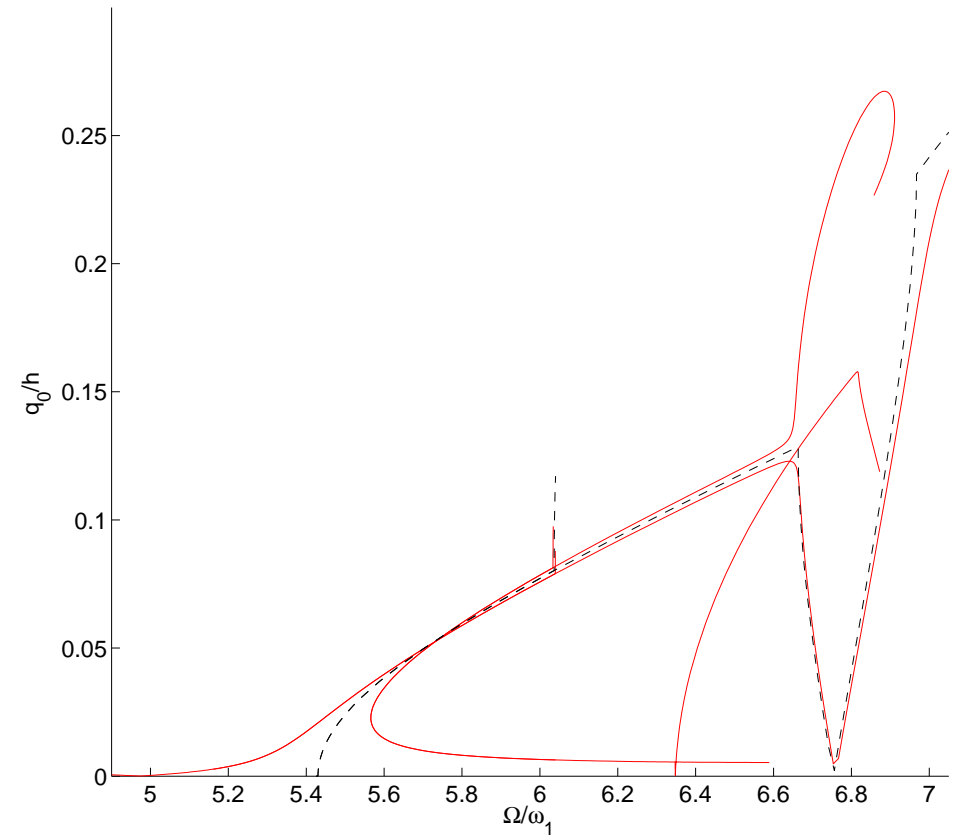
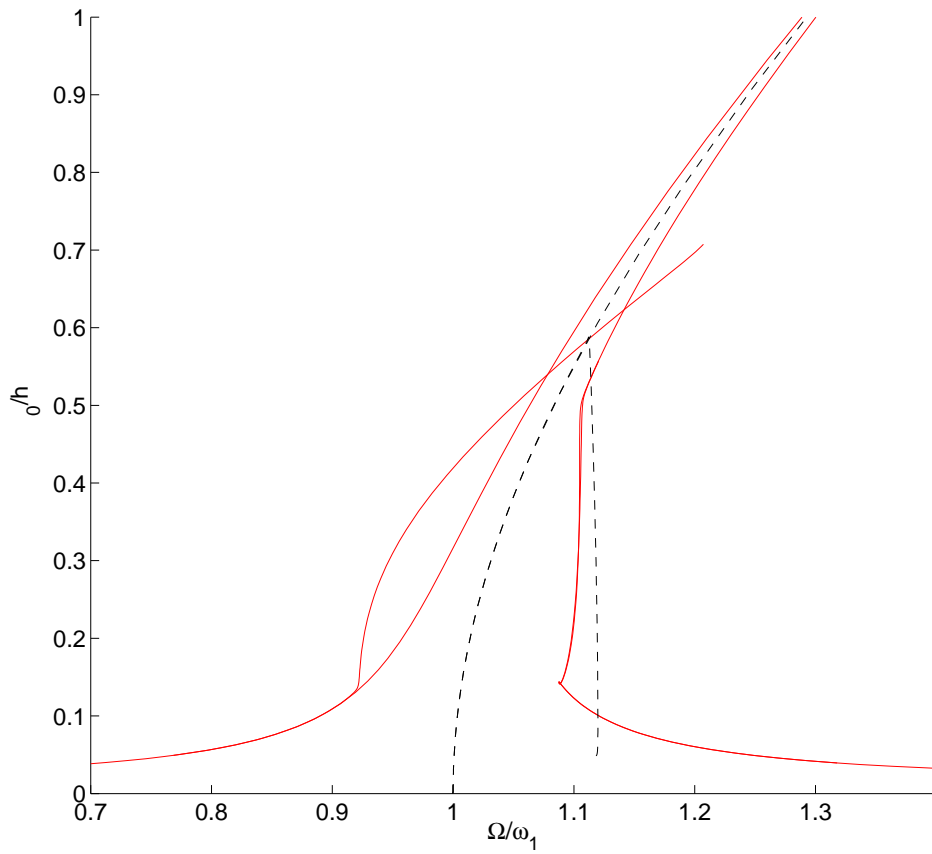
Réponse forcée autour du mode 2



Réponse forcée autour du mode 2



Résonances autour des modes 1 et 3

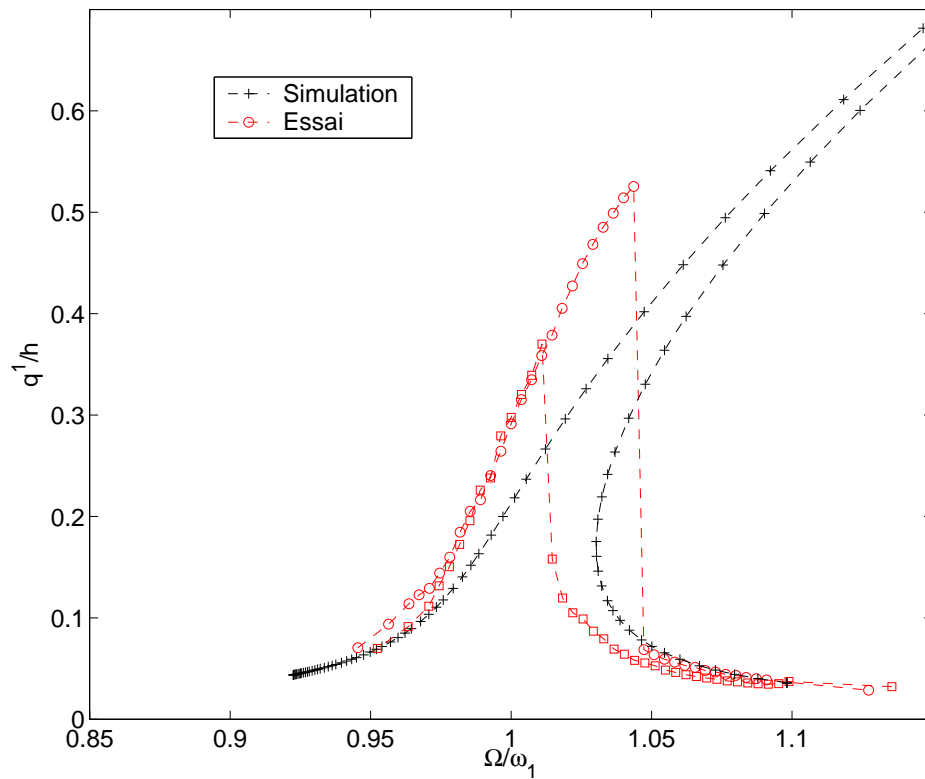


Comparaison avec les résultats expérimentaux

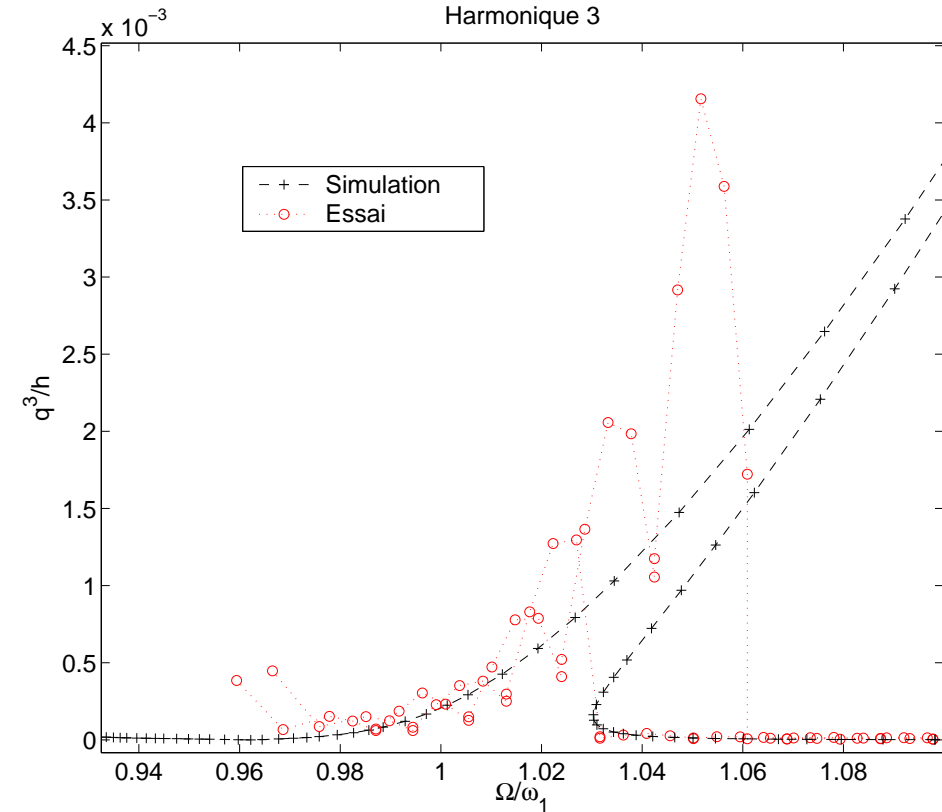
Force : 0.3 N

	f_1 (Hz)	f_2 (Hz)	f_3 (Hz)
num .	29	80	157
Exp.	27.5	78	155

Harmonique 1



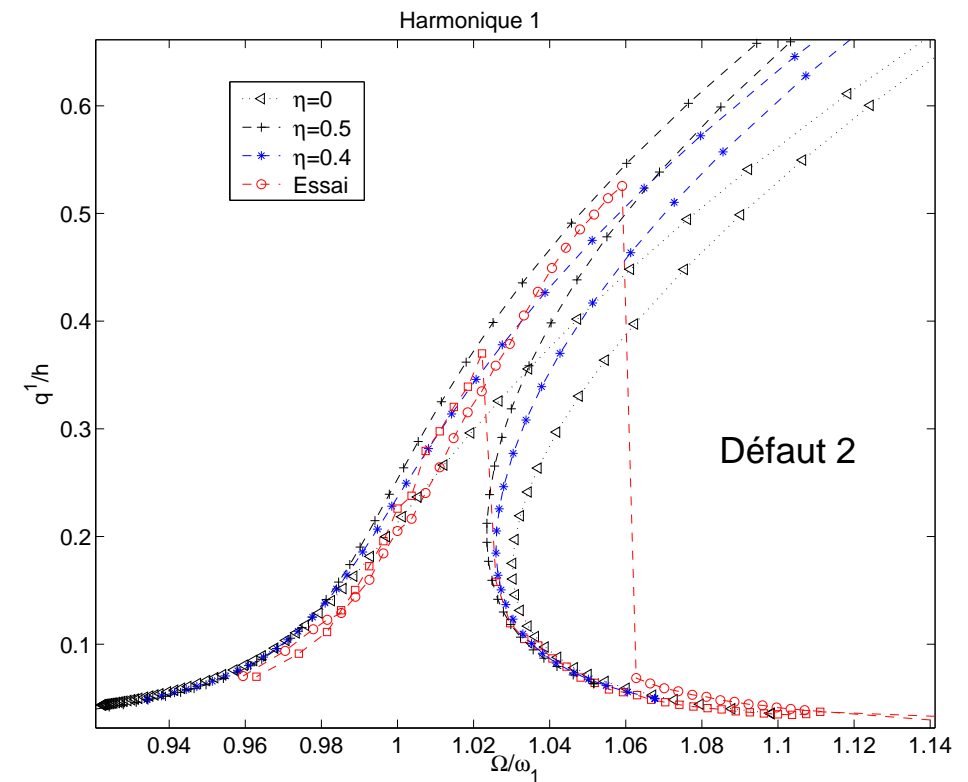
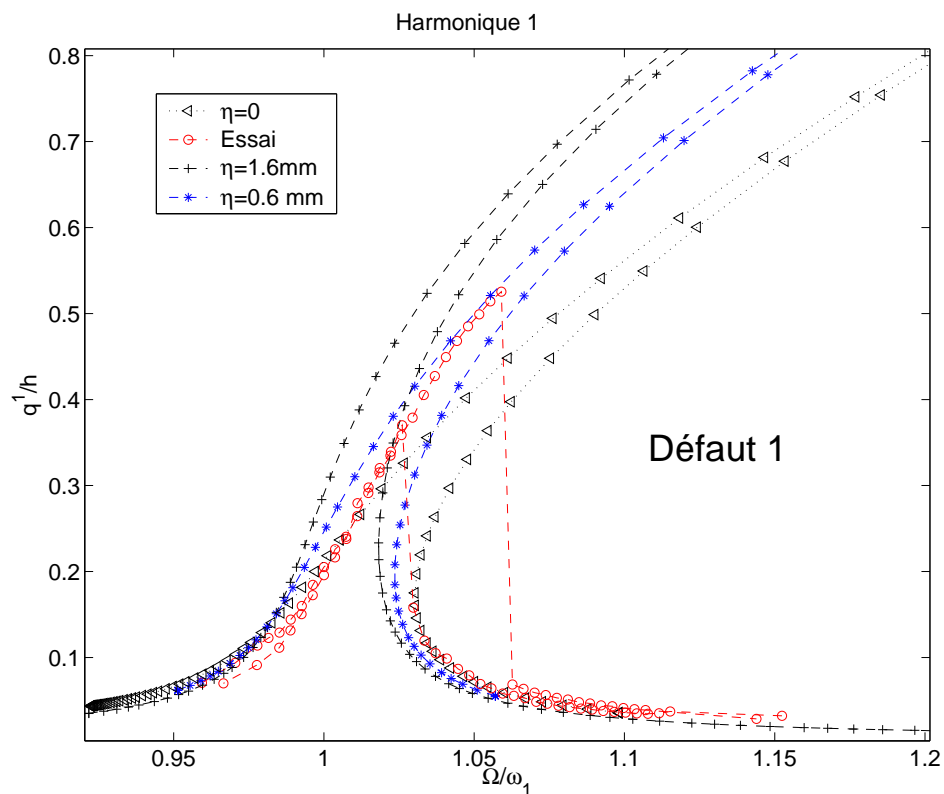
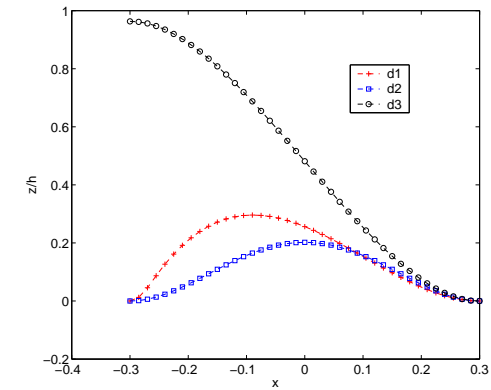
Harmonique 3



Recalage du modèle ...

► Défaut géométrique d'amplitude maximale η

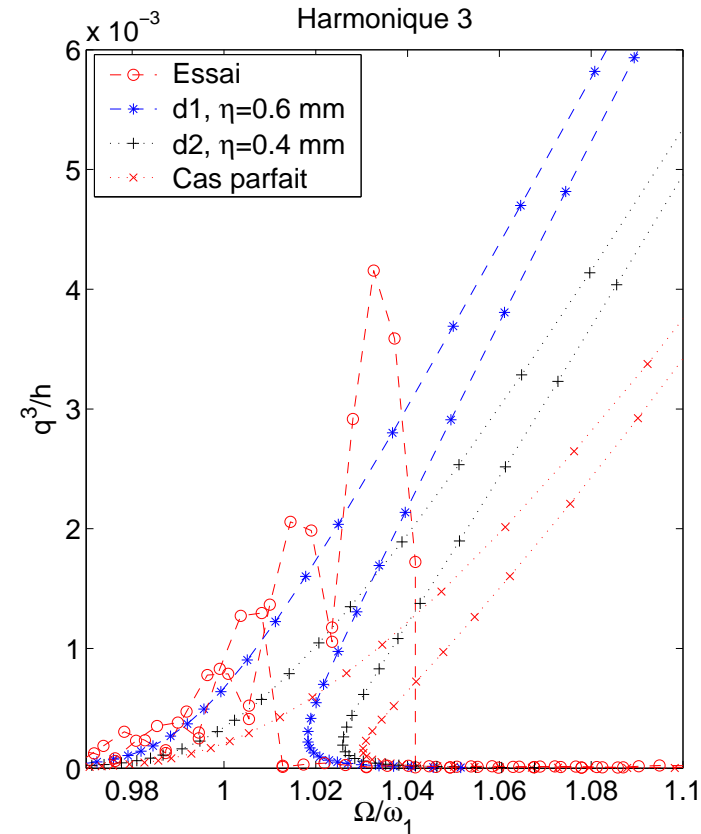
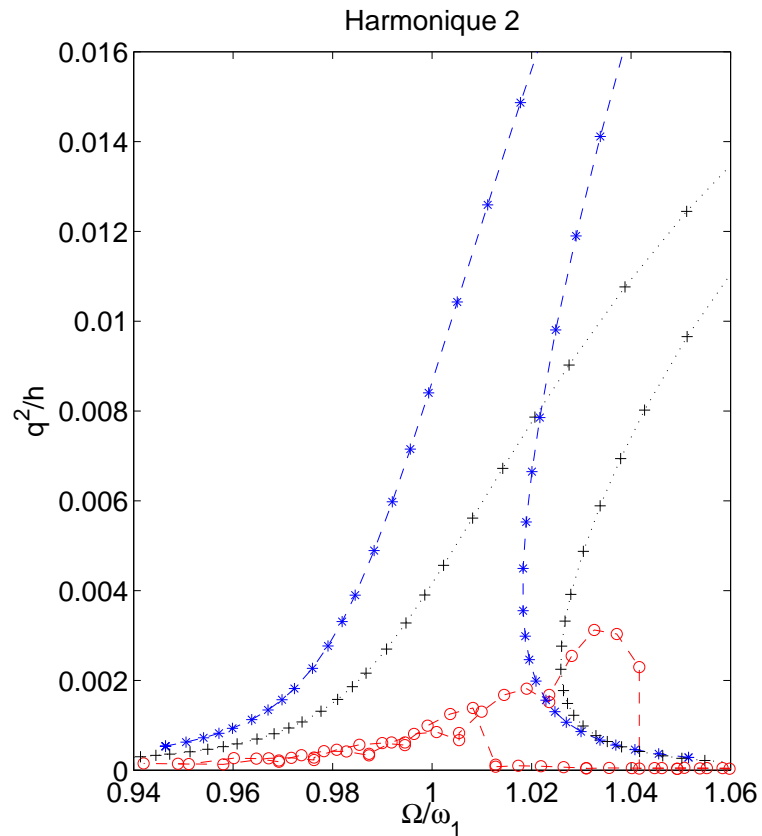
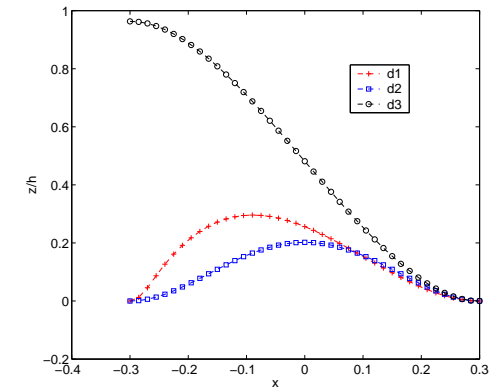
- correction de la courbure
- augmentation des fréquences propres



Recalage du modèle ...

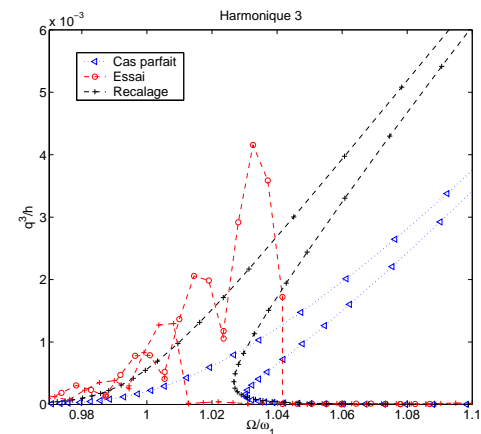
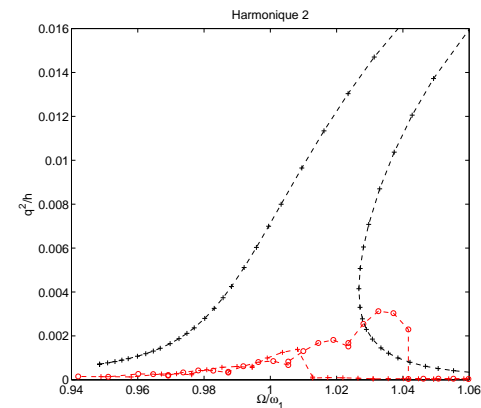
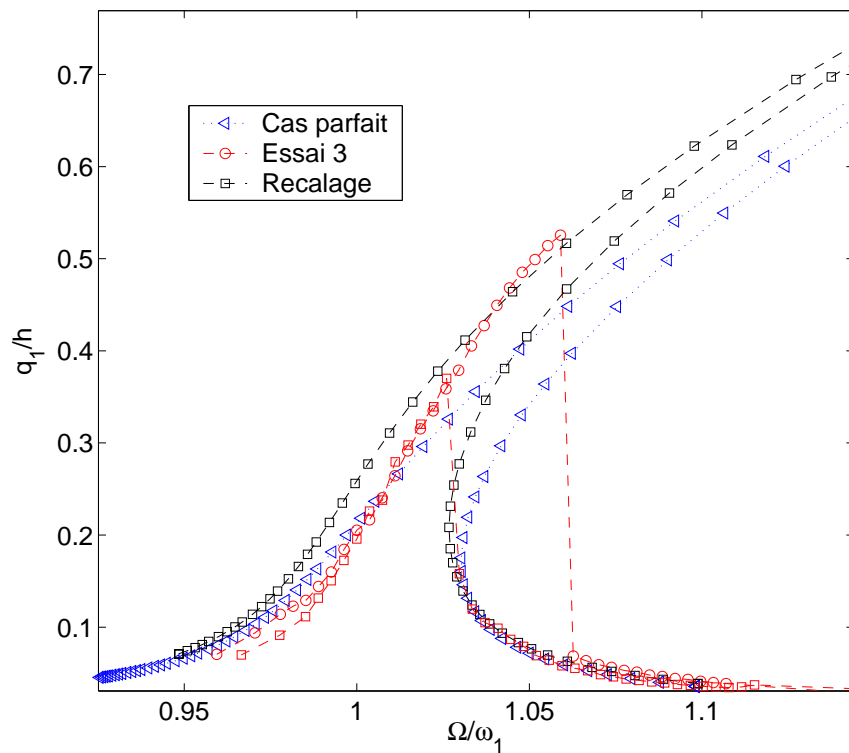
► Défaut géométrique d'amplitude maximale η

- correction de la courbure
- augmentation des fréquences propres



Recalage (2)

- ▶ **Précontrainte** seule (compression)
 - recalage des fréquences propres,
 - pas ou peu d'effet sur la réponse forcée.
- ▶ **Précontrainte** (compression, $d_x=4.6e-3\text{mm}$) + **défaut géométrique**, amplitude max : 0.4mm (mode 1)



Conclusion des simulations



Observation de phénomènes non linéaires :

- scenari de bifurcation compliqués
- résonances internes et secondaires
- MNL : support de la réponse forcée



Recalage du modèle sur les résultats expérimentaux



Limites :

- Pas d'amortissement
- Pas d'étude de stabilité

Conclusion générale



Réalisation d'un banc d'essai



Outil numérique pour le calcul de la réponse forcée, en non linéaire

- éléments finis
- EH+MAN



Observation/simulation de phénomènes non linéaires

- expérimentale et numérique
- bifurcations (résonances internes, secondaires ...)
- intérêt des “modes non linéaires”



Améliorations du code

- amortissement
- stabilité
- optimisation (stockage, solveurs ...)



Poursuite des études ...

- expérimentale (plaque ...)
- numérique : traitement de structures complexes



Comparaison avec d'autres méthodes

- intégration temporelle d'orbites périodiques
- "sous-espaces invariants"



Autres types d'excitation

- multi-périodique
- aléatoire



Reflexion sur l'utilisation des modes non linéaires

Fin