



HAL
open science

Contribution à l'étude des oscillations des instruments à vent à anche simple

Sébastien Ollivier

► **To cite this version:**

Sébastien Ollivier. Contribution à l'étude des oscillations des instruments à vent à anche simple. Mécanique [physics.med-ph]. Université du Maine, 2002. Français. NNT: . tel-00007208

HAL Id: tel-00007208

<https://theses.hal.science/tel-00007208>

Submitted on 25 Oct 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE DE L'UNIVERSITÉ DU MAINE
LABORATOIRE D'ACOUSTIQUE DE L'UNIVERSITÉ DU MAINE
UMR CNRS 6613

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : ACOUSTIQUE

présentée par

Sébastien OLLIVIER

pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université du Maine

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES OSCILLATIONS DES INSTRUMENTS À
VENT À ANCHE SIMPLE
VALIDATION D'UN MODÈLE ÉLÉMENTAIRE

Soutenue le 27 septembre 2002

devant le jury composé de :

D. M. CAMPBELL	Professeur, Université d'Edimbourg	Président du Jury
X. BOUTILLON	Directeur de Recherche CNRS, LAM, Paris	Rapporteur
R. CAUSSÉ	Chargé de Recherche IRCAM, Paris	Rapporteur
J. KERGOMARD	Directeur de Recherche CNRS, LMA, Marseille	Directeur de thèse
J-P. DALMONT	Maître de Conférence, LAUM, Le Mans	Co-directeur de thèse
J. GILBERT	Chargé de Recherche CNRS, LAUM, Le Mans	Examinateur
C. J. NEDERVEEN	Ingénieur, Pays-Bas	Invité

Table des matières

Table des matières	i
Avant propos	v
1 Introduction générale	1
1.1 Contexte	1
1.2 Modélisation élémentaire	2
1.2.1 Le système exciteur	3
1.2.2 Le résonateur	5
1.2.3 Solutions périodiques	6
1.3 Organisation du document	9
2 Idealized models of reed woodwinds. Part I : Analogy with the bowed string	11
2.1 Introduction	13
2.2 Bowed string and woodwinds : a generic model	13
2.3 The nonlinear excitor	14
2.3.1 Reed instruments : the pressure-flow characteristics	14
2.3.2 Bowed string instruments : the stick-slip characteristics	17
2.3.3 Analogy	19
2.4 Resonators	20
2.4.1 The string	21
2.4.2 Woodwind resonators	22
2.4.3 Analogy	23
2.5 Periodic solutions	25
2.5.1 Periodic solutions in the dispersionless case	25
2.5.2 Two-step oscillations	28
2.5.3 Second register of conical-like reed woodwinds	33
2.6 Conclusion	34
3 Idealized models of reed woodwinds. Part II : On the stability of two-step oscillations	35
3.1 Introduction	38

3.2	Idealized models of woodwinds	39
3.3	Method	40
3.3.1	Time domain approach	41
3.3.2	Stability criterion for the static regime	43
3.3.3	Stability criterion for the case of the clarinet ($N = 1$)	44
3.3.4	Stability criterion in the case of conical-like woodwinds ($N \neq 1$)	46
3.4	Application to particular nonlinear models	51
3.4.1	The case of the clarinet ($a = b$)	52
3.4.2	The case $a = 1, b = 2$ (conical-like resonator)	54
3.4.3	Non integer values of N	57
3.4.4	Octaves of stepped cones	58
3.5	Conclusion	59
3.6	Appendix : Stability for $\lambda = 1$ with an infinite derivative	61
3.6.1	The clarinet	61
3.6.2	The inverted motion	62
4	Non-linear characteristics of single reed instruments	65
4.1	Introduction	67
4.2	State of art	68
4.2.1	Elementary model	68
4.2.2	Quasi-stationary model of air flow	69
4.2.3	Quasi-static response of the reed	71
4.3	Experimental device and procedure	72
4.3.1	The artificial mouth	72
4.3.2	Flow measurement	73
4.3.3	The choice of the diaphragm	74
4.3.4	Reed opening measurement	75
4.3.5	Experimental procedure	76
4.4	Experimental results	77
4.4.1	A typical experimental result	77
4.4.2	Viscoelasticity of the reed	78
4.4.3	Reed stiffness	78
4.4.4	Air flow	81
4.4.5	Typical parameters range values	82
4.5	Conclusion and perspectives	83
4.6	Complément : caractéristique mesurée et stabilité	84
5	Données expérimentales sur la vibration de l'anche	91
5.1	Introduction	91
5.2	Description du dispositif expérimental	93

5.2.1	Commentaire sur l'usage du vibromètre LASER	93
5.2.2	Dispositif expérimental mis en œuvre	93
5.3	Contact anche-table en régime statique	95
5.3.1	Principe de la mesure et représentation graphique	95
5.3.2	Observations	96
5.4	Contact anche-table en régime dynamique	100
5.5	Ouverture anche-table en régime dynamique dans le cas de la clarinette	101
5.5.1	Ouverture dans le cadre du modèle sans pertes	101
5.5.2	Ouverture mesurée	103
5.5.3	Le problème de la détermination de la pression de plaquage	103
5.6	Conclusion et perspectives	105
6	Spectre d'une clarinette au voisinage du seuil	107
6.1	Introduction	107
6.2	Méthodes de calcul	108
6.2.1	Le modèle physique de référence	108
6.2.2	Le modèle sans pertes comme cas limite	110
6.2.3	La méthode d'équilibrage harmonique	111
6.2.4	La méthode d'équilibrage harmonique à troncature variable	113
6.2.5	Calcul par perturbation du mouvement de Helmholtz	115
6.2.6	Comparaison des méthodes	116
6.3	Etude expérimentale	123
6.3.1	Dispositif expérimental	123
6.3.2	Protocole de mesure	124
6.3.3	Analyse	125
6.4	Comparaison théorie / expérience	125
6.4.1	Evaluation des paramètres du modèle élémentaire équivalent	125
6.4.2	Spectre interne (harmoniques impairs)	126
6.4.3	Evolution de la fréquence de jeu	137
6.5	Conclusion / perspectives	139
	Conclusion générale	141
	Annexes	145
A	Signaux expérimentaux	147
B	Saturation mechanism in reed instruments	153
C	Calculation of the spectrum of self-sustained oscillators using a variable truncation method : application to cylindrical reed instruments	161

D Bibliographie personnelle	181
Table des figures	183
Bibliographie	188

Avant propos

Ce mémoire présente des travaux de recherche effectués au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM) depuis octobre 1998 sous la direction de Jean Kergomard et de Jean-Pierre Dalmont. Ces travaux ont été financés par le Ministère de l'Education Nationale de la Recherche et de la Technologie, d'abord sous la forme d'une allocation de recherche, puis d'un contrat d'Attaché Temporaire de Enseignement et de Recherche.

Je remercie Jean Kergomard et Jean Pierre Dalmont pour tout ce que que j'ai pu apprendre à leurs cotés, pour leur enthousiasme et pour la confiance qu'il m'ont accordé. Leur contribution scientifique à ce travail est loin d'être "epsilonesque". Je remercie particulièrement Jean pour son investissement et sa participation à ces travaux, malgré l'éloignement et un emploi du temps chargé. Je remercie également Jean-Pierre pour sa bonne humeur, les soirées à la Guierche, et surtout pour sa présence active et les discussions interminables mais passionnantes. Je tiens à souligner également les grandes qualités humaines et scientifiques de Joël Gilbert, qui s'est rendu disponible pour répondre de façon toujours pertinente à mes interrogations, qu'elles soient scientifiques ou non, et qui m'a fait profiter de son expérience.

Je remercie les étudiants stagiaires avec qui j'ai eu le plaisir de collaborer, ainsi que les techniciens et ingénieurs de l'atelier de mécanique et du service d'électronique pour leur contribution.

Je remercie également les rapporteurs et membres du jury qui ont accepté de juger ces travaux.

Choisir d'effectuer une thèse en acoustique musicale résulte généralement d'une passion conjointe pour la musique et la science. Au cours de ces quatre années j'ai découvert le plaisir de la pratique musicale au sein de formations diverses en tant que contrebassiste. Si cette activité annexe demande beaucoup de temps et d'énergie, il me semble que la pratique d'un instrument de musique est essentielle à la compréhension des enjeux de l'acoustique musicale et des problématiques à résoudre. Le fait de jouer d'un instrument à archet m'a également permis de m'approprier le thème de l'analogie entre les instruments à anche et les instruments à archet, qui fut l'objet de discussions enrichissantes avec Jean-Pierre Dalmont, lui-même hautboïste.

Durant ces quatre années j'ai également eu la chance d'enseigner, d'abord en tant que moniteur, puis en qualité d'ATER. Enseigner en DEUST VAS avait quelque chose de particulier puisque c'est au sein de cette formation que j'ai découvert l'acoustique. J'espère avoir réussi à transmettre aux étudiants un peu de cette passion pour l'acoustique qui m'a conduit à poursuivre mes études.

Je remercie enfin mes parents, qui m'ont toujours soutenu, et Poline, qui a accepté de sacrifier le peu de temps que nous pouvions passer ensemble.

Chapitre 1

Introduction générale

L'objet de ce premier chapitre est de présenter le cadre et les objectifs de ce travail de thèse. Les travaux antérieurs réalisés au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM) sur l'étude des instruments à vent à anche simple sont d'abord évoqués afin de situer mon travail dans leur continuité. Une présentation succincte de la modélisation des instruments à vent à anche simple situe ensuite plus largement les problèmes étudiés et permet de préciser les choix de modélisation. Finalement, l'organisation du document est détaillée.

1.1 Contexte

L'acoustique musicale a fait son apparition au LAUM au début des années 80 avec la venue au Mans de J. Kergomard. D'emblée le thème privilégié a été la physique des instruments à vents et en particulier des instruments à anches simples. Les travaux de cet équipe, enrichie de nombreuses collaborations extérieures, ont portés d'une part sur la modélisation des résonateurs et de l'excitateur (bec et anche) et d'autre part sur la recherche des solutions.

En ce qui concerne le résonateur les travaux réalisés ont notamment permis d'améliorer la modélisation par la prise en compte d'inductances de discontinuités. L'étude d'effets non-linéaires localisés au niveau des trous latéraux est actuellement en cours dans le cadre de la thèse de M. Atig [Ati].

En ce qui concerne l'excitateur, les travaux de Meynial [Mey87], Gilbert [Gil91] et Gazengel [Gaz94] ont permis, même si de nombreuses questions restent ouvertes, de mieux appréhender la dynamique de l'écoulement et la mécanique de l'anche. L'un des objectifs de cette thèse est de prolonger ces travaux. Dans le chapitre 4 de ce mémoire nous analysons notamment des résultats expérimentaux concernant la relation pression-débit à l'entrée de l'instrument et dans le chapitre 5 nous présentons des résultats expérimentaux relatifs à la mécanique de l'anche.

Parallèlement la recherche de solutions a été l'objet d'une attention soutenue, en particulier voisinage du seuil d'oscillation [GGL97, DGK00]. Ce travail a été prolongé par J. Kergomard dans le cas la clarinette [Ker95, KOG00] en s'intéressant notamment à l'évolution du spectre en fonction de

la pression d'alimentation. Dans le chapitre 6 de ce mémoire nous présentons une méthode permettant de comparer les spectres mesurés sur un instrument en situation de jeu avec les prévisions théoriques et présentons les premiers résultats.

Une autre démarche a consisté en l'étude de modèles aux résonateurs simplifiés afin de mettre en évidence l'influence des paramètres de l'excitateur [Ker95, DK95]. Kergomard [Ker95] a proposé une étude complète d'un modèle de clarinette dont le résonateur est modélisé sans pertes. Cette étude a notamment conduit à l'analyse de la stabilité des oscillations. Une réflexion sur l'inharmonicité a permis de trouver des résonateurs, les "cônes en escalier" dont les propriétés remarquables ont permis de faire avancer la compréhension du fonctionnement des instruments coniques [DK94], notamment en ce qui concerne la nature des bifurcations (directe ou inverse) au seuil [DGK00] et la forme temporelle des solutions [DK95]. Ces travaux ont également permis de faire ressortir l'analogie entre les instruments coniques et la corde frottée, dont une conséquence est la similitude des solutions ("mouvements de Helmholtz") [DK95]. Le chapitre 2 de cette thèse précise et complète cette analogie par une analyse comparée des modèles simplifiés d'instruments à anche et de corde frottée. Le chapitre 3 prolonge les travaux sur la stabilité initiés par J. Kergomard [Ker95, DK95], en s'intéressant notamment aux instruments de type conique et au rôle de la relation non-linéaire caractérisant l'excitateur.

Au cours de ces études, un certain nombre d'outils d'investigation ont été développés au LAUM : pont d'impédance pour la mesure d'impédance d'entrée [Dal88], logiciel de calcul de l'impédance d'entrée [Res], programmes pour le calcul des solutions périodiques par équilibrage harmonique [GKN91, Mén98], bouches artificielles pour instruments à anche simple [Gaz94, Mey87]. Certains de ces outils ont été utilisés au cours de cette thèse, notamment la bouche artificielle conçue par B. Gazengel, que nous avons légèrement modifiée, et le programme d'équilibrage harmonique écrit par S. Ménigoz [Mén98] d'après un programme de J. Gilbert [GKN91].

Dans ce mémoire on s'intéresse principalement au rôle de l'excitateur non-linéaire, et notamment à l'influence de paramètres de jeu sur la nature des solutions périodiques. L'objectif est plus particulièrement de tester la capacité d'un modèle élémentaire à prévoir le comportement des instruments à vent à anche simple. Afin de réduire la complexité du système couplé, les résonateurs sont simplifiés : ils n'ont ni trous latéraux ni pavillon.

Avant de détailler le plan du document, une présentation succincte de la modélisation des instruments à anche simple situe plus précisément les sujet abordés dans les chapitres suivants.

1.2 Modélisation élémentaire

Un instrument à anche est constitué essentiellement de deux parties : le système excitateur (bec+anche) et le résonateur. Le débit entrant dépend de la géométrie du canal d'entrée et est modulé par le mouvement de l'anche. Le résonateur agit en contre-réaction. Les instruments à anche sont donc généralement assimilés à des systèmes bouclés [MSW83] constitués de deux sous-systèmes, l'un fortement non-linéaire, l'autre principalement linéaire. La figure 1.1 en donne une représentation

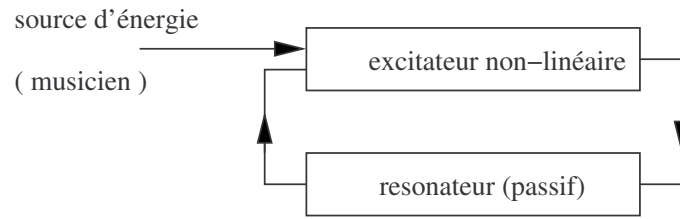


FIG. 1.1 – Représentation schématique d'un instrument de musique auto-oscillant

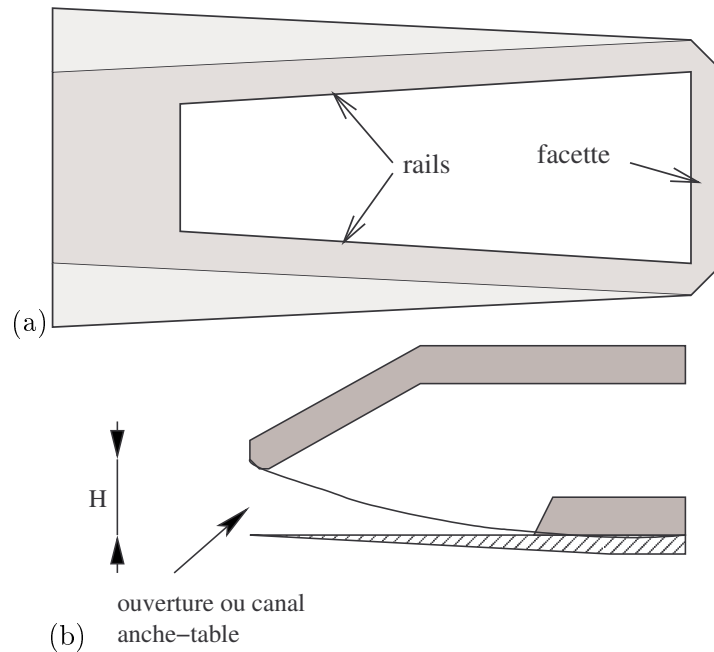


FIG. 1.2 – Notations. L'ensemble rails+facette constitue la table.

usuelle.

1.2.1 Le système excitateur

Le système excitateur est caractérisé par le comportement du jet entrant de part et d'autre du canal anche-table (voir la figure 1.2 pour les notations). On trouvera une discussion des phénomènes physiques mis en jeu dans [Hir95]. Le chapitre 4 de ce mémoire présente également des éléments bibliographiques. Le système excitateur est supposé compact c'est-à-dire que ses dimensions sont petites devant la longueur d'onde. Il est également supposé localisé au niveau de la sortie du canal anche-table. Il est généralement modélisé dans le cadre d'une théorie quasi-stationnaire pour ce qui concerne l'écoulement. Le rôle de l'anche est de moduler le débit d'air entrant sous l'effet de la différence de pression entre la bouche et le bec. La source aéro-élastique ainsi constituée est caractérisée par une relation non-linéaire entre le débit et la différence de pression de part et d'autre de l'anche. Cette relation pression-débit est désignée par les termes "caractéristique non-linéaire", ou simplement "caractéristique". La lettre

F désigne, de façon générique, cette relation pression débit :

$$u = F(p). \quad (1.1)$$

Backus [Bac63] a proposé une relation semi-empirique reprise par de nombreux auteurs. Les travaux de Hirshberg et col. [HdLMMW90] et Gilbert [Gil91] conduisent à l'adoption d'un modèle élémentaire dérivé de l'équation de Bernoulli :

$$u = \sigma w H \sqrt{\frac{2|\Delta p|}{\rho}} \text{sign}(\Delta p), \quad (1.2)$$

où u est le débit entrant, ρ est la masse volumique de l'air, H est la hauteur du canal anche-table, $\Delta = P_m - p$ est l'écart de pression entre P_m dans la bouche et la pression p dans le bec. $\text{sign}(\Delta p) = 1$ si $\Delta p > 0$, et $\text{sign}(\Delta p) = -1$ si $\Delta p < 0$. La hauteur H est positive, ou nulle si le canal anche-table est fermé. Le coefficient σ est un terme qui tient compte de la contraction ou de l'élargissement du jet par rapport à la section d'entrée. Les surfaces latérales sont généralement négligées ou intégrées dans le terme de section d'entrée $\sigma w H$. Ce type de modèle avait auparavant été utilisé notamment par Wilson et Beavers [WB74]. Les hypothèses conduisant à ce modèle sont discutées au chapitre 4, qui présente une méthode permettant de mesurer la relation pression-débit F sur un instrument réel.

L'anche est une poutre en roseau ou en matériau composite dont la géométrie est complexe et dont les propriétés mécaniques sont inhomogènes. Son mouvement est limité par la table du bec, constituée de deux parties : les rails et la facette (voir la figure 1.2). Lorsque l'anche est en contact avec la totalité de la table, $H = 0$ et le débit entrant est nul. Pour déterminer la variation de la hauteur H certains auteurs modélisent l'anche comme une poutre en flexion [SS80, SS88], mais la plupart utilisent un oscillateur à un degré de liberté dont le mouvement est équivalent au mouvement de l'extrémité de l'anche (voir [WB74] par exemple). Gazengel [Gaz94] indique comment déduire les paramètres équivalents du modèle ponctuel à partir d'un modèle de poutre. Les paramètres de l'oscillateur peuvent être constants ou variables si l'on considère que les paramètres varient au cours du mouvement de l'anche [Duc90, vW02]. Ce problème est abordé aux chapitre 4 et 5. Lorsque la fréquence propre de l'oscillateur équivalent est très supérieure aux fréquences de jeu du registre fondamental, la modélisation de l'anche peut se réduire à une simple "raideur" k_r (dimension : pression/longueur). La relation entre la pression $\Delta p = P_m - p$ et la déviation y de l'extrémité de l'anche par rapport à sa position en l'absence de surpression est alors linéaire et indépendante du temps. La hauteur de l'ouverture anche-table est alors donnée par la relation

$$H = H_0 + y = H_0 \left(1 - \frac{\Delta p}{k_r H_0}\right), \quad (1.3)$$

où H_0 est la hauteur du canal anche-table en l'absence de surpression.

En remplaçant H dans l'équation (1.2) par l'expression (1.3) on obtient un modèle élémentaire dit "basse fréquence" ou "quasi-statique", dans lequel la dynamique de l'anche n'est pas considérée. C'est ce modèle qui est utilisé dans ce mémoire pour décrire le système exciteur : dans les chapitres 2, 3 et 6 les oscillations sont calculées sur la base de ce modèle, et dans les chapitres 4 et 5 on cherche à en déterminer les limites expérimentalement. Il est désigné comme étant le "modèle élémentaire".

1.2.2 Le résonateur

La géométrie interne du guide d'onde (la perce) et l'emplacement et la taille des trous latéraux déterminent en grande partie les qualités de justesse et de facilité d'émission des instruments à vent. Les parois du guide sont généralement supposées rigides. Cet élément a été abondamment étudié du point de vue de l'acoustique linéaire, notamment à l'aide du formalisme des analogies électro-acoustiques (voir [Ned98] par exemple). Il est généralement caractérisé par sa fonction de réflexion ou plus généralement par son impédance d'entrée. On trouvera de nombreuses références dans des ouvrages de synthèse [Ned98, FR98, Ben76]. La connaissance de cet élément est suffisamment avancée pour concevoir des logiciels d'aide à la facture instrumentale [Res, Kau01]. On notera tout de même qu'il est difficile de traiter analytiquement le cas des résonateurs à perce conique.

Les recherches sur les résonateurs visent maintenant à prendre en compte des effets non-linéaires liés à la propagation [HGMW96, MDCT00] ou localisés [II67, DND⁺02, Ati]. J'ai moi-même participé à des travaux préliminaires sur la mise en évidence d'effets non-linéaires au niveau des trous latéraux d'instruments à vent et sur leurs conséquences pratiques [OD00, DDO01, DND⁺02].

Dans ce mémoire on s'intéresse essentiellement au couplage entre le système exciteur et le résonateur. On se contente donc d'utiliser des résonateurs simples, sans trous latéraux ni pavillons, le rayonnement est modélisé sous la forme d'une correction de longueur et les éventuels effets non-linéaires ne sont pas considérés.

Les résonateurs considérés sont principalement des tubes cylindriques de différentes longueurs dont le diamètre est celui d'une clarinette soprano en sib (15 mm). Dans le chapitre 6 ils sont caractérisés dans le cadre de l'acoustique linéaire par leur impédance d'entrée, qui tient compte des pertes viscothermiques. L'impédance de rayonnement et le débit pompé par l'anche sont pris en compte sous la forme d'une correction de longueur [Ned98, DGGK95]. Dans les chapitres 2 et 3 les résonateurs sont simplifiés à l'extrême puisque l'on considère qu'ils sont sans pertes, ou que l'atténuation ne dépend pas de la fréquence (modèle de Raman). Cette "idéalisation" permet de considérer ces résonateurs comme de simples lignes à retard et il est alors possible de traiter analytiquement le problème couplé dans le domaine temporel sous la forme d'équations discrètes, comme dans le cas des travaux sur la corde frottée [Fri53, Woo93a, Woo93b].

Dans les chapitres 2 et 3 on s'intéresse également à des résonateurs particuliers : les "cônes en escalier" ou "stepped cones" (figure 1.3). Ceux-ci ont des propriétés très proches de celles d'un cône tronqué auquel on ajoute, à l'entrée, un volume équivalent au volume du cône manquant diminué du volume équivalent à l'anche [DK94]. Un tel résonateur est utilisé pour réaliser des expériences. Un autre résonateur possède la même impédance d'entrée, il s'agit d'un résonateur constitué de deux cylindres excités en parallèle (figure 1.3). La construction d'un tel résonateur pose des problèmes pratiques et il ne sera considéré que comme un objet théorique. Le lien entre l'impédance de ces résonateurs et celle des résonateurs coniques est précisé au chapitre 2. Ils sont considérés comme des instruments "de type conique" ("conical-like") dans l'étude de la stabilité des oscillations périodiques au chapitre 3. Outre leur similitude avec les cônes tronqués, l'intérêt de ces résonateurs est que leur impédance d'entrée est

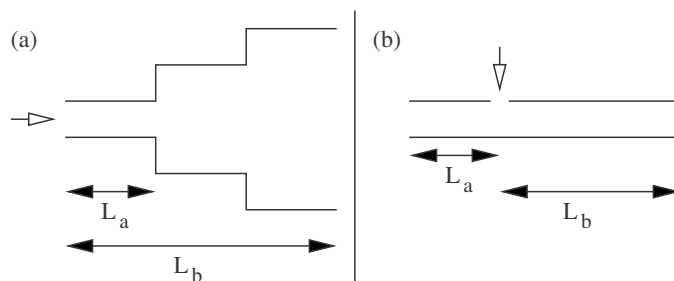


FIG. 1.3 – Deux résonateurs simplifiés aux propriétés proches de celles d'un résonateur d'instrument à vent à perce conique : (a) "cône en escalier", (b) "saxophone cylindrique". L'emplacement de l'embouchure est indiqué par une flèche blanche.

formellement identique à l'admittance d'entrée d'une corde tendue. Cette similitude permet de mettre en évidence de l'analogie entre les modèles idéaux d'instruments à vent et de corde frottée (chapitre 2). Lorsque ces résonateurs sont modélisés sans pertes ou à pertes indépendantes de la fréquence, ils peuvent être traités comme des lignes à deux retards de façon similaire à la corde frottée. (chapitres 2 et 3).

1.2.3 Solutions périodiques

Dans la mesure ou la dynamique de l'anche n'est pas considérée, le système complet (anche+bec) +résonateur s'écrit sous la forme d'un système de deux équations liant le débit entrant à la pression dans le bec :

$$\begin{cases} u(t) = F(p(t)) \\ P(\omega) = Z(\omega)U(\omega) \end{cases}, \quad (1.4)$$

où $p(t)$ et $P(\omega)$ d'une part, et $u(t)$ et $U(\omega)$ d'autre part sont la pression dans le bec et le débit entrant exprimés dans les domaines temporel et fréquentiel. Ce système d'équation dont l'une au moins est non-linéaire ne peut généralement pas être résolu de façon analytique. Une exception est lorsque le résonateur est considéré sans pertes.

La résolution du système (1.4) conduit à différentes solutions selon la valeur des paramètres de contrôle, qui sont ici les paramètres d'embouchure, la pression d'alimentation et les pertes. La solution la plus simple, appelée "solution triviale" ou "position d'équilibre", correspond au régime statique (non oscillant). L'objectif du musicien est de déstabiliser cette solution afin d'obtenir des oscillations, périodiques de préférence. Les oscillations de ce système peuvent être de plusieurs natures. Les plus simples sont des solutions périodiques dont la fréquence correspond approximativement à la fréquence de résonance fondamentale du résonateur ou à un de ses harmoniques. Des régimes plus complexes tels les régimes sous-harmoniques ou des régimes chaotiques peuvent être générées pour certaines valeurs des paramètres de contrôle. Dans ce document on s'intéresse principalement aux régimes périodiques de fréquence correspondant à la fréquence fondamentale du guide.

L'étude des modèles d'instrument à anche à résonateur sans pertes conduit notamment à des

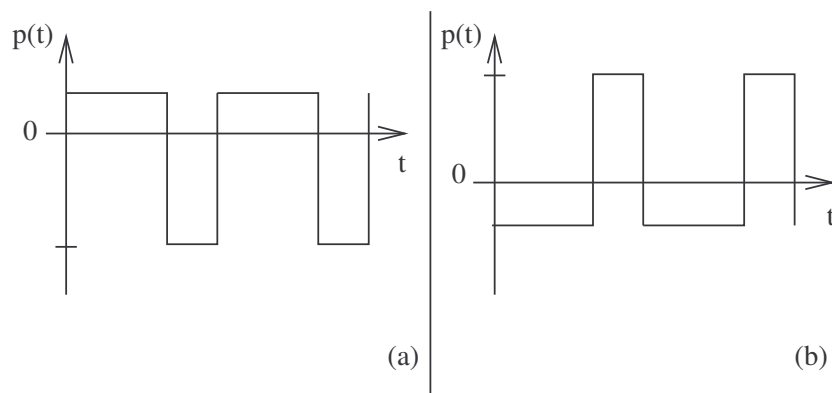


FIG. 1.4 – Deux exemples de solutions obtenues avec un modèle sans pertes de "cône en escalier" associé au modèle élémentaire : (a) mouvement de Helmholtz standard, (b) mouvement de Helmholtz inversé

signaux de pression internes (dans le bec) "rectangle" ou "carré" [Mag85, Ker95, DK95], c'est-à-dire à des oscillations à deux niveaux avec une transition instantanée de l'un à l'autre (voir par exemple la figure 1.4). Ces solutions sont similaires aux signaux de vitesse obtenus dans le cas de la corde frottée [Ram18], ou du moins à leur schématisation. Dans le cas de la corde frottée l'origine physique des oscillations entre deux états est relativement évidente puisque la corde oscille avec la même vitesse que l'archet durant la phase d'acrochage et glisse ensuite avec une vitesse qui dépend du frottement corde-archet. Il y a donc, de façon schématique, oscillation entre deux vitesses. Il faut noter que la durée de la phase d'acrochage est plus grande que la phase de glissement. Dans le cas des instruments à vent, et de façon schématique également, ces oscillations à deux niveaux de pression correspondent à la transition entre l'état "ouvert" ou "fermé" de l'anche (même si le canal anche table n'est pas complètement fermé). Dans le cas de la corde frottée, lorsque le rapport des durées de chaque état est égal au rapport des segments de corde de part et d'autre de l'archet, le signal à deux états est appelé "mouvement de Helmholtz", en référence aux observations de Helmholtz [Hel54]. Par analogie, les signaux à deux niveaux observés dans les instruments à vent sont appelés "mouvements de Helmholtz" également. Les observations sur les instruments à vent à perce tronconique montrent que le rapport de la durée des deux états correspond au rapport de la longueur du cône tronqué et de la longueur de la partie "manquante" (jusqu'à l'apex) [Bro84, Bro87, Roc85, DK95]. Dans le cas des cônes en escalier ce rapport est égal au nombre N de cylindres [DG98]. Dans le cas des instruments à vent la phase la plus longue correspond généralement à l'état "ouvert", on parle alors de mouvement de Helmholtz "standard". Un mouvement de Helmholtz, dit "inversé" tel que la phase la plus longue correspond à la fermeture a également été mis en évidence analytiquement et expérimentalement [DG98]. Ce type de mouvement n'a a priori jamais été observé dans le cas de la corde frottée. Cela correspondrait à une durée de la phase de glissement plus longue que la phase d'acrochage.

L'analogie entre les modèles de corde frottée et les instruments à anche simple a été mise en évidence par Mc Intyre et col [MSW83], mais leur étude vise surtout à montrer que le fonctionnement global du

système bouclé est identique. De plus leur analyse se limite à la clarinette et ne cherche pas à comparer les modèles d'excitateurs de façon détaillée. En limitant l'étude aux modèles simplifiés, le chapitre 2 présente une étude comparée des modèles d'instrument à anche et des modèles de corde frottée afin de préciser l'analogie entre les deux familles d'instrument, notamment en ce qui concerne les paramètres de jeu.

La résolution du système (1.4) peut conduire à différentes solutions pour un même jeu de paramètres. Certaines de ces solutions sont stables, d'autres sont instables. Cet aspect est important du point de vue de la jouabilité puisque selon les paramètres de jeu choisis par le musicien certains régimes pourront être obtenus, d'autres non. Dans le cas de la corde frottée, la détermination des paramètres de force minimum et maximum tels qu'il soit possible d'obtenir des solutions de type "mouvement de Helmholtz" est un problème qui a suscité plusieurs études, notamment celle de Schelleng [Sch73]. Les instruments à anche simple semblent pouvoir générer plus facilement des oscillations stables et peu de travaux se sont intéressés à l'étude de la stabilité des oscillations de ces instruments en fonction des paramètres de l'excitateur. Ceux-ci sont de plus limités à la clarinette [Mag85, Bro90, Ker95]. Dans le chapitre 3 la stabilité de différentes solutions du système (1.4) est étudiée dans le cadre de modèles sans pertes ou à pertes indépendantes de la fréquence (modèle de Raman). On s'intéresse notamment au cas des instruments à résonateurs de type conique en exploitant l'analogie avec la corde frottée. Cette étude met en évidence le rôle de la caractéristique non-linéaire sur les oscillations.

Les paramètres de jeu ont également une influence sur le timbre, et notamment sur le spectre des régimes stationnaires. Cet aspect est abordé dans le chapitre 6. Les modèles dont le résonateur est sans pertes ou dont les pertes ne dépendent pas de la fréquence conduisent à des solutions dont le spectre est fixe (signaux "carrés" ou "rectangle"), il faut donc modéliser les résonateurs de façon plus réaliste et prendre en compte notamment les pertes visco-thermiques. Dans ce cas les solutions exactes du système (1.4) ne peuvent pas être calculées analytiquement. On utilise donc soit des méthodes approchées [Wor71, GGL97, KOG00, DGK00], soit des méthodes numériques [Sch81, Sch78, GKN91, Gaz94].

L'étude des solutions au voisinage du seuil de déstabilisation du régime statique montre qu'il faut distinguer les solutions qui correspondent à une bifurcation directe et celles qui correspondent à une bifurcation inverse [GGL97]. D'un point de vue pratique, si le paramètre de contrôle est la pression d'alimentation P_m et si P_{th} désigne la pression d'alimentation à partir de laquelle le régime statique est instable, cela revient à distinguer les solutions telles qu'il existe des petites oscillations lorsque $P_m > P_{th}$ et les solutions telles qu'il existe des petites oscillations lorsque $P_m < P_{th}$ (voir la figure 1.5). La nature de la bifurcation dépend de l'excitateur, de l'admittance du résonateur et de la solution considérée [GGL97, DGK00]. Dans le cas de la clarinette, les oscillations correspondent à une bifurcation directe. Dans le cas des instruments coniques, le type de bifurcation dépend du régime considéré. Le mouvement de Helmholtz, qui est la solution généralement observée expérimentalement, correspond à une bifurcation inverse. En pratique, les petites oscillations sont instables dans le cas d'une bifurcation inverse. Cela est notamment démontré dans le cadre des modèles simplifiés au chapitre 3. Par conséquent, les instruments à anche à perce conique fonctionnent essentiellement en régime "anche battante", au moins en ce qui concerne le 1er registre. Donc si on s'intéresse au régime "anche non

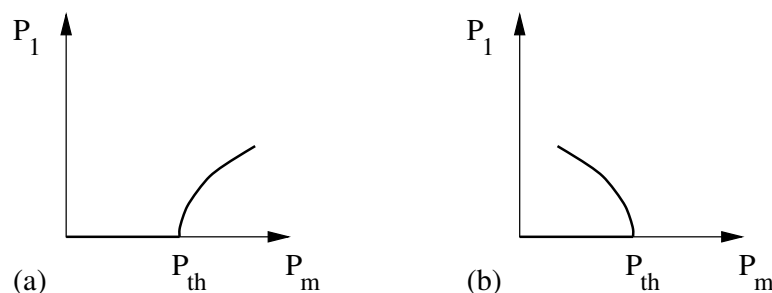


FIG. 1.5 – Deux types de bifurcation au seuil d’instabilité du régime statique : (a) bifurcation directe, (b) bifurcation inverse. P_m : pression d’alimentation, P_1 : amplitude du fondamental, P_{th} : pression de seuil.

battante" il est préférable de s’intéresser au cas de la clarinette.

1.3 Organisation du document

Outre ce chapitre d’introduction, le mémoire est composé de 5 chapitres qui peuvent être classés en deux parties. Les chapitres 2 et 3 constituent une partie théorique consacrée à l’étude des modèles sans pertes ou à pertes indépendantes de la fréquence. Les chapitres 4, 5 et 6 traitent plus particulièrement d’observations expérimentales sur différents aspects afin de tester la validité du modèle élémentaire à décrire le comportement des instruments à anche.

Le chapitre 2 est consacré à l’analogie entre les modèles d’instrument à anche et la corde frottée. Il s’agit d’un projet d’article rédigé en collaboration avec J-P. Dalmont et J. Kergomard soumis à la revue *ACUSTICA- acta acustica*. Il est rédigé en anglais. Dans ce chapitre nous faisons le bilan des analogies concernant les résonateurs et faisons apparaître les analogies au niveau des paramètres de jeu. Dans la dernière partie, nous présentons les solutions et leur évolution en fonction des paramètres du modèle. Cette étude s’est avérée nécessaire dans la mesure où il y avait une contradiction apparente entre les résultats de Kergomard [Ker95] et Friedlander [Fri53] concernant la stabilité des solutions périodiques, respectivement dans le cas d’une clarinette sans pertes et dans le cas d’une corde frottée sans pertes. Il fallait donc préciser les différences entre ces modèles. Par ailleurs, ce travail fut l’occasion d’adopter le modèle de Raman [Ram18] pour les instruments à vent de type conique.

Le chapitre 3 est consacré à l’étude de la stabilité des solutions périodiques dans le cas des modèles sans pertes ou à pertes indépendantes de la fréquence (modèle de Raman). Il s’agit également d’un projet d’article rédigé en collaboration avec J. Kergomard et J-P. Dalmont soumis à la revue *ACUSTICA- acta acustica*. Il est également rédigé en anglais. On cherche notamment à définir des critères permettant de déterminer à quelles conditions les différentes solutions sont stables. Dans un premier temps des critères sont établis sans préciser de modèle physique pour l’excitateur. Dans un deuxième temps les

limites de stabilité données par ces critères sont comparées à celles issues de simulations temporelles basées sur le modèle élémentaire. Les critères établis sont dépendants de la forme de la relation non-linéaire pression-débit. Nous avons donc cherché à mesurer cette caractéristique.

Le chapitre 4 présente une méthode de mesure de la relation pression débit en régime statique. Il s'agit d'un projet d'article rédigé en anglais soumis au *Journal of the Acoustical Society of America* (auteurs : J-P. Dalmont, J. Gilbert, S. Ollivier, M. Blondet). Les hypothèses conduisant à l'établissement du modèle élémentaire sont d'abord détaillées. Ensuite le protocole expérimental permettant de mesurer la caractéristique est décrit. Les résultats expérimentaux sont finalement comparés au modèle et la validité des hypothèses sont discutées. A partir de la mesure de la caractéristique pression-débit, les paramètres du modèle élémentaire équivalent sont estimés et la validité du modèle élémentaire à raideur constante est discutée. Un complément en français analyse succinctement les conséquences des différences observées entre le modèle élémentaire et les données expérimentales sur la stabilité.

Afin de mieux comprendre les limites de validité du modèle élémentaire, un dispositif expérimental a été mis en oeuvre afin d'observer le contact anche-table. Celui-ci est décrit au chapitre 5. Après avoir décrit le dispositif, le contact anche-table est observé en fonction de la pression en régime statique et dynamique. L'ouverture du canal anche-table est également observée. Ces observations nous permettent de discuter la validité de l'hypothèse d'un comportement quasi-statique et l'hypothèse d'une raideur équivalente constante pour l'anche. Le problème pratique de la détermination expérimentale de la pression de plaquage de l'anche est également abordé.

Disposant des paramètres de jeu mesurés, la capacité du modèle élémentaire à prévoir le spectre des oscillations d'une clarinette est testée au chapitre 6. Dans un premier temps différentes méthodes de calcul du spectre sont comparées. Ensuite un protocole expérimental permettant de mesurer le spectre et les paramètres du modèle équivalent est exposé. La méthode définie permet d'obtenir des données quantitatives sans paramètre d'ajustement. Quelques résultats expérimentaux sont présentés.

Enfin, nous dressons le bilan des contributions de ces travaux et indiquons des pistes pour les prolonger.

Chapitre 2

Idealized models of reed woodwinds. Part I : Analogy with the bowed string

Auteurs : S. Ollivier, J-P. Dalmont, J. Kergomard

Ce chapitre est la reproduction d'un article en anglais soumis à ACUTICA-acta acustica. Il est écrit en collaboration avec Jean Kergomard et Jean-Pierre Dalmont. Cet article est le fruit d'une analyse comparée de publications sur les instruments à anche et de publications traitant de la corde frottée. Dans cet article, nous faisons le bilan des analogies entre la corde frottée et les résonateurs d'instrument à vent [MSW83, Ker95, DK95, DG98]. Nous précisons également les analogies entre les paramètres de jeu. Dans la dernière partie nous présentons des solutions et leur évolution en fonction des paramètres de jeu.

L'analogie entre les modèles de corde frottée et d'instrument à anche simple a été mise en évidence par Mc Intyre et col. [MSW83]. Leur étude vise surtout à montrer que le fonctionnement global du système bouclé est identique et leur analyse dans le domaine temporel se limite en pratique à l'analogie entre la clarinette et la corde frottée en son milieu. Par ailleurs, les travaux de Kergomard et Dalmont sur l'inharmonicité [DK94, Ker95] ont permis de trouver des résonateurs dont les propriétés sont proches des résonateurs d'instruments coniques. Il s'agit de "cône en escalier" ("stepped cone"), ou de deux tubes cylindriques en parallèle ("cylindrical saxophones"). Ces résonateurs ont une impédance d'entrée qui est formellement analogue à l'admittance d'entrée d'une corde frottée en un autre point qu'en son milieu. Une conséquence de cette analogie est la similitude des signaux de vitesse de la corde au niveau du point de contact avec l'archet et des signaux de pression dans le bec d'un instrument à anche à résonateur conique. En particulier, il est possible d'observer des signaux du type "mouvement de Helmholtz" dans le cas des instruments à anche à résonateur conique [DK95]. La position de la troncature du cône est analogue à la position de l'archet. En décrivant ces résonateurs dans le domaine temporel comme des systèmes à deux retards, de la même façon que dans le cas de la corde frottée, nous montrons dans ce chapitre qu'il est possible d'adopter le modèle de Raman, pour lequel les pertes ne dépendent pas de la fréquence, pour décrire de façon simplifiée les résonateurs d'instruments à anche de type conique.

Une analyse comparée des modèles quasi-statiques d'excitateur dans le cas de la corde frottée et dans le cas des instruments à anche simple nous permet de mettre en évidence l'analogie entre les paramètres de contrôle. L'analogie entre les paramètres source "vitesse d'archet" v_b et "pression d'alimentation" P_m avait déjà été mentionnée par Mc Intyre et col. [MSW83]. Nous faisons apparaître ici l'analogie entre le paramètre "force d'archet exercée par l'instrumentiste" F_b et un paramètre d'embouchure U_{rme} homogène à un débit défini dans le cadre du modèle élémentaire. À notre connaissance l'analogie entre ces paramètres n'avait pas été mentionnée et certains auteurs attribuent même à tort un rôle analogue aux paramètres F_b et P_m . Il était donc nécessaire de clarifier ce point. Ainsi nous montrons que l'analogie entre les modèles simplifiés de corde frottée et d'instruments à anche simple est complète dans la mesure où pour chaque paramètre de contrôle et chaque variable, il existe un paramètre et une variable analogue dans l'autre famille d'instrument. La différence entre les deux systèmes réside essentiellement dans la forme de la caractéristique non-linéaire.

Ce résultat est très utile dans la mesure où de nombreux travaux sur la corde frottée se basent sur le modèle de Raman et une caractéristique de frottement quasi-statique, notamment pour étudier l'influence des paramètres de contrôle sur les oscillations. Des problèmes similaires peuvent être abordés dans le cas des instruments à vent de type conique et il est intéressant de s'inspirer des travaux traitant de la corde frottée. Ainsi nous avons pu transposer la méthode de recherche des solutions périodiques proposée par Woodhouse [Woo93a] dans le cadre du modèle de Raman (paragraphe 2.5.2). L'analogie a également grandement facilité l'étude de la stabilité des oscillations périodiques des instruments de type conique, notamment en ce qui concerne l'anche battante et dans le cas de résonateurs avec pertes (voir le chapitre 3).

2.1 Introduction

This paper deals with idealized models of woodwinds and their similarity with bowed string models. Some analogies between these families of self-sustained oscillators have been pointed out by McIntyre *et al* [MSW83]. The goal of this study is to show that the analogy can be extended if considering elementary models.

When studying complex systems such as bowed string instruments or wind instruments, many models can be chosen, depending on the simplifications. For the case of models which takes many parameters into account, few analytical calculations can be made but the influence of the various parameters can be studied by using time domain simulations. Nevertheless, a difficulty with this approach is the experimental determination of the values of the parameters needed to run the calculations. Consequently a potentially realistic model can become very unrealistic due to erroneous values of some parameters. Another approach consists in using simplified models. Depending on the degree of simplification, these models can differ significantly from real instruments. However, they can be useful in understanding the basics of physical phenomena involved in the oscillation mechanisms. In this paper, attention is focused on the simplest idealized models of bowed strings and woodwinds.

Mc Intyre *et al* [MSW83] have pointed out the analogy between the string bowed in the middle and the clarinet. In the present paper, this analogy is extended by comparing basic models of conical-like reed woodwinds to bowed string models. In section 2.3 we compare elementary models commonly used for the nonlinear elements and find that a flow parameter which characterizes the embouchure is analogous to the bow force parameter. In section 2.4 idealized models of a bowed string are briefly reviewed and compared to models of resonators. Two families of resonators, which can be considered as idealized truncated cones, are found to be analogous to a bowed string. Finally, in section 2.5, common solutions of the coupled system are examined within the scope of dispersionless models. The stability of these solutions is investigated in a companion paper [OKD02]¹.

2.2 Bowed string and woodwinds : a generic model

Bowed string and wind instruments are both self-sustained oscillators controlled by the instrumentalists throughout the duration of the notes. Basic models of such instruments consist in the feedback loop system of figure 2.1 resulting from the coupling between a passive resonator in which the oscillations take place and a nonlinear element driven by a static source of energy (the player) [MSW83]. The oscillating variables are calculated at the coupling point, where both the equations of the resonator and the excitator must be satisfied. The radiated sound is obtained by using transfer functions between this point and the radiating point. The separation of the systems into two distinct elements implies some assumptions. In simple bowed string models, the contact area between the bow and the string is usually assumed to be reduced to a point (see [PW98a, PW98b, PW98c] for the analysis of the differences between point bow and finite width models). In woodwind models, the nonlinear mechanism

¹Article constituant le chapitre 3.

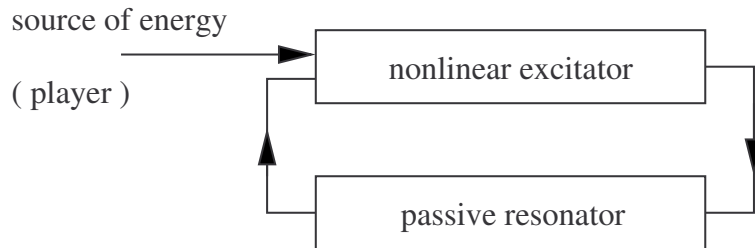


FIG. 2.1 – Schematic description of a self-sustained musical instrument

is assumed to be localized at the entrance of the mouthpiece, which volume is considered as a part of the resonator. With such assumptions, the nonlinear excitor and the resonator can be modelled separately.

2.3 The nonlinear excitor

The nonlinear element of self-sustained musical instruments can convert the static energy provided by the player into oscillating motion if it is properly coupled to a resonator. Physical phenomena involved in the nonlinear process are complex in the case of both the woodwinds and the bowed string. In addition, measurement of the state variables and the playing parameters in the dynamical regime is intricate. It is therefore difficult to model the nonlinear excitor in the dynamical regime. In the case of both reed woodwinds and the bowed string, basic models of the nonlinear excitor are derived from the static behaviour, and the models are thought to be valid for the dynamical regime.

2.3.1 Reed instruments : the pressure-flow characteristics

The acoustic flow in the mouthpiece is the sum of the entering flow $u(t)$ and the flow $u_{reed}(t)$ created by the reed motion (see figure 2.2). The flow $u_{reed}(t)$ is a second order contribution and is often neglected or included in the resonator impedance [Ned98, DGGK95]. The nonlinear mechanism in woodwinds lies in the behaviour of the air flow u entering the instrument through the reed channel when there is a pressure difference between the static mouth pressure and the pressure in the mouthpiece. In the static regime, until the mouth pressure is so high that the reed closes the input channel, the entering flow is assumed to obey to the Bernoulli equation [Hir95]. If ρ is the air density, S_j the cross-sectional area of the jet formed downstream of the reed, and

$$\Delta p = P_m - p \quad (2.1)$$

is the difference between the mouth pressure P_m and the pressure in the mouthpiece p , the application of the Bernoulli equation between the mouth and the jet leads to

$$u = S_j \sqrt{2|\Delta p|/\rho} \operatorname{sign}(\Delta p) . \quad (2.2)$$

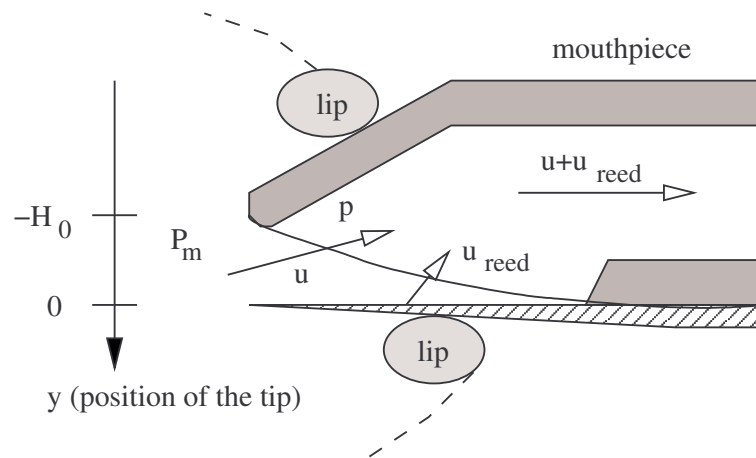


FIG. 2.2 – *Schematic view of a single reed mouthpiece.*

When the pressure difference Δp is greater than a "closing pressure" P_M , the reed closes the reed channel and the input flow is equal to zero. A difficulty is the determination of the cross-sectional area S_j , both for double and single reed instruments.

It is usually considered that the Bernoulli equation remains valid in the oscillating regime. A major difficulty for an experimental direct determination of the relationship between the pressure and the flow in the mouthpiece is the measurement of the volume velocity. Some authors measured the velocity in dynamical regime by using hot wires [Mey87, Gil91, IKKI93], but the available data are not sufficiently accurate to question the validity of the Bernoulli equation. When the pressure difference is Δp greater than a "beating pressure", the input channel is closed. When this occurs during a fraction of the period, the oscillation is called the "beating reed" regime. In the scope of this quasi-static model, the beating pressure is supposed to be equal to the static pressure P_M sufficient to keep the reed closed. Analytical description of the variation of the input section is quite complex. Some authors modelled the nonlinear behaviour of double reeds [Ned98, VA02], but few reliable experimental data are available. Therefore, interest is focused on single reed woodwinds in this paper, but similar analysis might be done in the case of double reed instruments.

The cross-sectional area of the jet depends on the geometry of the reed channel and on the position of the reed. As discussed in [Hir95], the cross-sectional area S_j of the jet may not be equal to the cross-sectional area of the reed channel because of the contraction of the jet and on the contribution of the lateral opening. Nevertheless, these areas are assumed to be proportional [Hir95]. Thus, the cross-sectional area of the jet is written

$$S_j = \sigma w [H_0 + y], \quad (2.3)$$

where H_0 is the height at rest of the reed channel, w its width, y is the deviation of the tip of the reed, and σ is a factor that can be greater or smaller than unity. See figure 2.2 for notations.

The playing frequencies of the first register of single reed instruments are about ten times lower than the first mechanical resonance frequency of the reed. Thus, only the first resonance of the reed

influences the oscillations [WB74] and the motion of the tip of the reed is often described as single degree of freedom valve (a mass/spring damped oscillator) as a first approximation. This assumption leads to a nonlinear relationship between p and u which is time dependent since some hysteresis effects, due to inertia and damping of the reed, appear in the relation between the flow and the pressure [Mey87, Gil91, Ned98]. Although this description gives satisfactory results when the signals are computed and compared to measured signals [Gaz94, Duc01, Sch81, BA89], analytical analysis of the mechanisms of oscillation remains difficult.

A simpler description of the relationship between the pressure and the flow can be used if the playing frequency is low compared to the reed first resonance frequency ($\simeq 2000Hz$). With this assumption, the reed is a valve completely characterized by a stiffness k_r (units : Pa/m) [Gaz94]. The relationship between pressure and volume velocity in the mouthpiece becomes then time independent because, until the reed beats, the variation of the channel height is proportional to the pressure difference Δp :

$$y(t) = -\Delta p/k_r. \quad (2.4)$$

The static pressure difference sufficient to keep the reed closed is such that the deviation y is equal to the height at rest H_0 . Thus, if k_r is assumed to be a constant, the closing pressure is

$$P_M = k_r H_0. \quad (2.5)$$

The assumption of a linear relationship between the acoustic pressure and the tip displacement is confirmed by experiments : figure 2.3 shows that the motion of the tip of the reed and the acoustic pressure in the mouthpiece are almost in phase when playing the first register. Finally, with the previous simplifications, the nonlinear relationship $u = F_{ber}(\Delta p)$ which characterizes the flow in the mouthpiece is :

$$\begin{cases} F_{ber}(\Delta p) &= U_{rme} \operatorname{sign}(\Delta p) \left(1 - \frac{\Delta p}{P_M}\right) \sqrt{\frac{|\Delta p|}{P_M}} & \text{if } \Delta p < P_M \\ F_{ber}(\Delta p) &= 0 & \text{if } \Delta p > P_M \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\text{with } U_{rme} = \sigma w (2k_r/\rho)^{1/2} H_0^{3/2}, \quad (2.7)$$

where ρ is the density of air. This function is plotted on figure 2.4. Equation (2.7) defines a global reed / mouthpiece / embouchure flow U_{rme} which depends on the mouthpiece geometry (H_0 , w , σ), the reed stiffness (k_r) and the embouchure (k_r , H_0). The value of U_{rme} can be deduced from the maximum flow since $U_{rme} = 3\sqrt{3}/2 U_{max}$. Such characterization of the embouchure with a global embouchure parameter was first given by Wilson and Beavers [WB74], and later by Kergomard [Ker95]. Another model, obtained empirically by Backus [Bac63] has been used up to now by many authors. The shape of the nonlinear characteristics is slightly different but many qualitative results are valid for both models, as explained in [KOG00]. When the reed is thought to be an ideal spring (equation (2.4)), the volume velocity u_{reed} created by the motion of the reed can be taken into account in the input impedance as an equivalent volume at the input of the resonator [DGGK95].

Despite its simplicity, this basic model gives some keys for the understanding of the oscillation mechanisms [Ker95, DGK00].

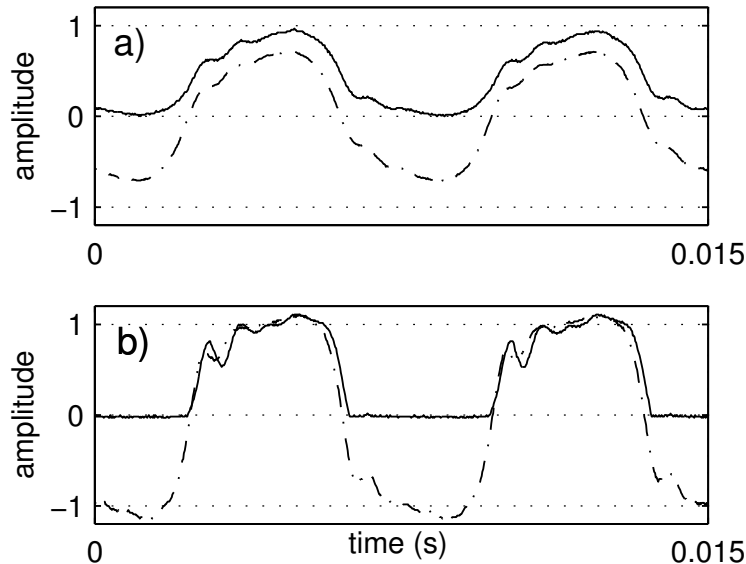


FIG. 2.3 – Simultaneous measurement of the pressure $p(t)$ in the mouthpiece (---) and of the opening $H_0 + y(t)$ of the reed channel by using an optical method (—). The instrument is a pure cylinder excited by a clarinet mouthpiece playing the first register. The instrument is blown by using an artificial mouth device described in [Gaz94]. The arbitrary ordinate scales are the same for the two figures. Figure a : non-beating reed regime, the reed channel is not completely closed. Figure b : beating reed regime, the reed channel is closed during a part of the period. In both cases, $p(t)$ and $y(t)$ are nearly in phase.

2.3.2 Bowed string instruments : the stick-slip characteristics

Concerning bowed string instruments, the nonlinear mechanism lies in the stick/slip transition between the string and the rosined hair of the bow. Recent works show that the friction characteristics obtained by studying the changes of the rosin properties during sticking and slipping [SW00], or the effect of the bow width or the differential slipping between bow hair must be considered [PW98a, PW98b, PW98c]. This characteristics was measured in the dynamical regime, and the results confirm that the nonlinear stick/slip transition is governed by more complex laws than by a simple (force,velocity) relationship [WSG00]. As we are interested in comparing idealized models, these results are not discussed hereafter and only usual idealized friction relationships are considered. Moreover, if the models use too many parameters the comparison between bowed string and woodwinds models is not possible.

In the scope of idealized models, the bow acts at a single point on the string. The friction behaviour is usually modelled with a relationship between the velocity v of the bowed point of the string and the transverse friction force f in the plane of the motion of the string. A model for the stick/slip process is found by assembling the sticking and the slipping friction behaviours of the string onto the bow hair. When the string sticks on the bow hair, the velocity v of the bowed point is equal to the velocity v_b of the bow and the transverse force f is indeterminate. When the transverse force is greater than

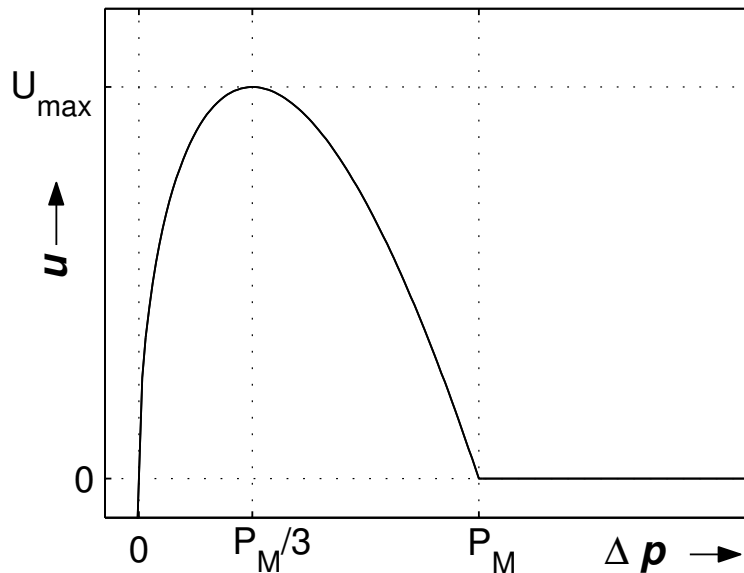


FIG. 2.4 – Nonlinear characteristics between Δp and u , from equation (2.6).

a "maximum bow force" F_{max} , the string slips onto the bow hair, and the sliding friction force is a decreasing function of the relative velocity $\Delta v = v_b - v$:

$$f(\Delta v) = F_b[\mu_d + (\mu_s - \mu_d)\phi(\Delta v)], \quad (2.8)$$

where μ_s and μ_d are respectively the static and the dynamic friction coefficients, and $\phi(\Delta v)$ is a function decreasing from 1 when $\Delta v = 0$ to 0 when $\Delta v = -\infty$ [Sch94]. A schematic representation of this function is plotted on figure 2.5. As in the case of woodwinds, the derivative of the nonlinear characteristics is not continuous.

The vertical portion of the curve describes the sticking state of the string, when the velocity of the point of the string in contact with the bow is equal to the bow speed v_b . Torsional effects can be taken into account as a modification of the nonlinear characteristics. A consequence is that the derivative of the nonlinear characteristic of the curve during sticking is not infinite but has a high but finite slope related to the impedance of the rotational waves [MSW83]. By using this argument, Weinreich and Caussé [WC91] proposed a relationship whose derivative is continuous and finite :

$$f(\Delta v) = F_b(\Delta v/v_0)[1 + (\Delta v/v_0)^2]^{-1}, \quad (2.9)$$

where v_0 is a control parameter (instead of μ_s and μ_d). A schematic representation of this function is plotted on figure 2.5. This kind of model is more convenient if a function with a continuous and finite derivative is needed, for example when driving an experimental "digital bow" [WC91, ML96].

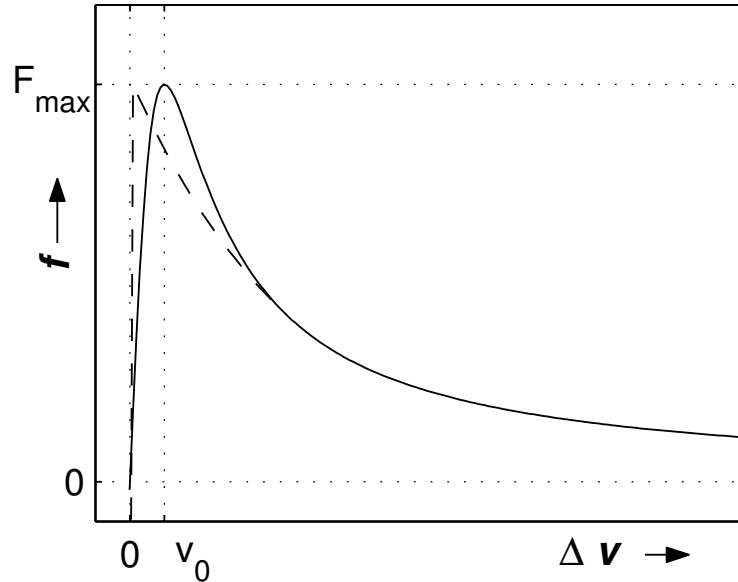


FIG. 2.5 – Two force-velocity characteristics. $--$: with perfect sticking (equation (2.8)). $---$ function given by Weinreich and Caussé [WC91] (equation (2.9)).

2.3.3 Analogy

As pointed out by Mc Intyre *et al* [MSW83], an analogy can be drawn between reed woodwinds and bowed string models. Within this analogy, the frictional force exerted by the bow on the string is analogous to the flow rate into the clarinet, and the transverse velocity is analogous to the acoustic pressure inside the mouthpiece. The mouth pressure P_m is analogous to the bow velocity v_b since both are continuous sources of energy. This analogy is consistent with the classical admittance electromechanical and impedance electroacoustical analogies, for strings and tubes respectively (see e.g. [Ber54]).

In addition, we have pointed out in equation (2.6) that the amplitude of the nonlinear characteristics of idealized models of single reed instruments is proportional to a global reed-embouchure flow U_{rme} . Similarly, the stick-slip relationship is proportional to the bow force F_b . Thus, the embouchure flow U_{rme} (or similar parameters like those defined in [WB74, Ker95]) plays the same role as the bow force F_b .

Both nonlinear characteristics are built by assembling two behaviours : the sticking and the sliding friction in the case of the bowed string, the non beating and the beating reed regime in the case of reed woodwinds. In both cases another parameter is needed to determine the transition. For the bow string, this parameter is the maximum force $F_{max} = F_b \mu_s$; in the case of reed woodwinds, it is the pressure $P_M = k_r H_0$ sufficient to keep the reed closed.

It may seem that the embouchure parameter U_{rme} depends on several parameters, whereas the bow force F_b is a well defined physical quantity. Nevertheless, the force applied by the bow on the string

	bowed string	woodwind
variables	string velocity $v(t)$ at the bowing point	acoustic pressure $p(t)$ in the mouthpiece
	transverse force $f(t)$ at the bowing point	volume velocity $u(t)$ in the mouthpiece
playing parameters	bow speed v_b	mouth pressure P_m
	bow force F_b	embouchure flow U_{rme}

TAB. 2.1 – *Summary of the formal analogy between the parameters and variables for the nonlinear characteristics of the bowed string and woodwind models*

depends on many parameters such as the bow width, differential slipping of bow hair, the mechanical behaviour of the bow, ... etc. Thus the bow force can be considered as a global force equivalent to the force that would be applied at a single point. Therefore, describing the embouchure with a single parameter is an approximation of the same order as the description of bowing with only a "bow force" parameter. Obviously, some aspects of bowing differ if using finite width models instead of point-bow [PW98a, PW98b, PW98c]. In the same way some aspects of the behaviour of reed woodwinds models differ when including the details of the reed motion [vW02]. The formal analogy between the models for the nonlinear element is useful for comparing references on idealized models of bowed strings to papers dealing with idealized woodwinds models. Another interest deals with the control, by using real instruments, of real-time synthesis by physical models. For example if one would control of a violin model by a saxophone with sensors for the mouthpressure and the embouchure (see for example [BS01]), a proper association of the parameters controlled by the musician with the analogous parameters of the models could increase the playability.

2.4 Resonators

Resonators are usually considered to be linear systems, though nonlinear phenomena can occur both in wind instruments and on bowed strings (see [HGMW96, DND⁺02, Val95] for example). Therefore, they are usually characterized by the input admittance or impedance in the frequency domain, or their impulse response or some reflection function(s) in the time domain. On bowed string instruments, the resonators are the strings. The bridge, and the body, act on the oscillations mainly as boundary conditions. In the case of woodwinds, the resonator is the main part of the instrument. The way those resonators are played is quite different. Even if bowed string instrument players sometimes play "natural" or "artificial" harmonics, strings are usually bowed to get the fundamental vibration. To change the frequency, the string instrument players change the length of the resonator with their fingers, or play another string. Woodwind instrument players change the effective length of their resonator too (by opening toneholes), but they also play several registers.

Both these resonators must have harmonically related resonances in order to produce powerful

and stable oscillations at high excitation level, and for having a playing frequency independent of the excitation level [Ben76, DGGK95]. Obtaining this property is one of the difficulties in making woodwinds, mainly because of toneholes and the truncation of conical tubes. This explains why most studies on woodwinds are focused on the resonator in the frequency domain. As a result, woodwind resonators are usually characterized by their input impedance $Z(\omega)$. Contrary to the bowed string, the description of the behaviour of wind instruments in the time domain is quite recent [Sch81] and is linked to the development of computational simulations.

2.4.1 The string

Many theoretical studies on the oscillations of the bowed string deal with the influence of the reflection functions at the fixed end of the string, and assume that the resonator is a perfect ideal string (no losses, no dispersion). Actually the main causes of dissipation and dispersion are the boundary conditions (the body and the fingers). A hierarchy of bowed string models can be established, depending on the choice of the model for the reflection functions [Woo93a] :

- The model presented separately by Keller [Kel53] and Friedlander [Fri53] assumes that the reflection functions at fingers (or nut) and bridge are unit delta functions : $r(t) = -\delta(t - \tau)$, where τ is the travel time from the bow to one boundary (finger or bridge) and back. Within this model, the string is a pure delay line for the transverse waves, rotational waves being not taken into account. Neither losses nor dispersion are taken into account. Friedlander showed that no stable oscillation can be produced by an instrument built with this model for the resonator if sticking is perfect, that is if $v = v_b$ during sticking [Fri53]. Therefore, it is used only when sticking is not perfect (see [WC91] for example).

- Raman's model [Ram18] is dispersionless too, but losses are introduced by means of a parameter $\lambda < 1$ independent of the frequency. Reflection functions can be written $r(t) = -\lambda\delta(t - \tau)$. The previous model is the lossless limit case of this one. Reflection of torsional waves can be modelled in the same way [Woo93b].

- The "rounded corners" model [MSW83] is more realistic. In this model, reflection functions are finite width functions in order to take dispersion into account. This model is convenient to study the influence of many parameters by using time domain simulations, but analytical analysis is intricate.

- A model which reflection function at the bridge is the combination of a narrow function and a decreasing oscillating function can be used to study the influence of the oscillation of the board occurring in the "wolf-note" phenomenon [MSW83].

In the frequency domain, strings can be characterized by their input admittance. If only transverse waves are considered, the input admittance of a lossless string of length L divided by the bow into two parts of lengths L_a and L_b is

$$Y_{st} = Y_c(\cot(kL_a) + \cot(kL_b))^{-1}, \quad (2.10)$$

where Y_c is the characteristic impedance of transverse waves, and k is the wavenumber. $Y_c = \sqrt{T/m}$, where T is the string tension and m its mass per unit area.

2.4.2 Woodwind resonators

Wind instrument resonators have been studied by many authors (see for example [Ned98, Ben76, KC86, FR98]) and can now be modelled accurately, at least within the scope of a linear theory. This knowledge leads to the development of softwares assisting instrument makers in improving their instruments or in designing new models [Res, Kau01]. Two basic shapes are used for the bore of reed woodwinds. One is the cylinder, which is used for the clarinet, the other one is the cone, which is used for single and double reed woodwinds. Obviously, a "complete" model of a wind instrument must take into account the influence of the details of the geometry like tone holes and the bell, but when only studying the mechanism of oscillations, resonators can be modelled as pure cones or cylinders.

The clarinet is the most studied wind instrument because cylindrical resonators are simpler than conical ones. Provided that losses are weak, the cylinder is a resonator with almost harmonically related resonance frequencies. Things are more complex for conical instruments. A complete cone has harmonically related resonance frequencies too, but since the conical resonator must be truncated to put in the mouthpiece, resonances are no longer harmonically related. Some corrections to the truncated cone allow this property to be approximately recovered. The main correction is the addition of an input volume (the mouthpiece or the volume of a double reed) which, added to the volume equivalent to the reed, must be nearly equal to the volume of the missing part of the cone [Ben76]. With such an input volume, the input impedance of a truncated cone of length L_b with a truncature of length L_a is

$$Z_{tc} = Z_c(1/kL_a - kL_a/3 + \tan kL_b)^{-1}, \quad (2.11)$$

where Z_c is here the impedance of an infinite cylinder with the same input impedance as the truncated cone. In relation (2.11), $1/kL_a - kL_a/3$ can be seen as the first terms of the expansion of $\cot(kL_a)$ with respect to kL_a [Ker88, DK95]. This is interesting because the impedance

$$Z_{icw} = Z_c(\cot(kL_a) + \cot(kL_b))^{-1}, \quad (2.12)$$

has harmonically related resonance frequencies, provided that losses and dispersion are weak. Harmonicity can be improved by slightly increasing the angle of the cone near the mouthpiece (or the reed in the case of double reed woodwinds). This modification of the bore induces a modification of the input impedance (2.11) such that an higher order of the expansion of $\cot(kL_a)$ is obtained [DGGK95].

Two of the present authors showed that two families of resonators have exactly the input impedance given by (2.12) [Dal92, DK94]. One consists in "stepped cones" of length L_b built with N cylinders, of identical length L_a , with cross-sections S_i such that $S_i = i(i+1)S_1/2$, where $i = 1 \dots N$, and S_1 is the section of the first cylinder (see figure 2.6a). For these resonators, $Z_c = 2\rho c/S_1$. Such resonators sound like saxophones when excited with a single reed mouthpiece. To our knowledge, few instrument makers use this kind of bore (see [dR] for example). When there is only one cylinder, the impedance of a clarinet ($\rho c/S_1$) $\tan(kL_a)$ is found with equation (2.12).

The other family of resonators whose impedance is also given by equation (2.12) consists of two cylindrical resonators of section S , and length L_a and L_b , excited by a mouthpiece with a volume reduced to zero (see figure 2.6b). These resonators are called "cylindrical saxophones" in this paper

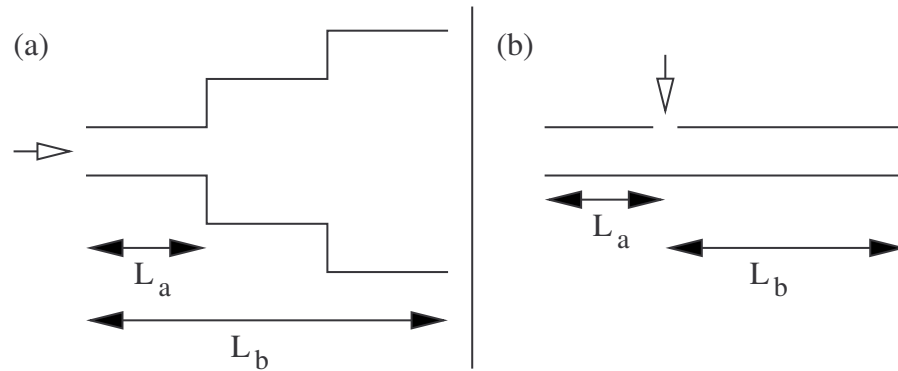


FIG. 2.6 – Idealized conical-like resonators. (a) : stepped cone, (b) : cylindrical saxophone. White arrows indicate the location of the mouthpiece.

and in [OKD02]². For these resonators, the ratio $N = L_b/L_a$ is not necessarily integer and $Z_c = \rho c/S$. If $L_a = L_b$, the impedance $(\rho c/2S) \tan(kL_a)$ of a clarinet of section $2S$ is found with equation (2.12). Cylindrical saxophones are convenient for theoretical analysis but, contrary to stepped cones, cannot be built easily for experimental observations because of the finite volume of a real mouthpiece.

Because instruments makers tend to obtain an input impedance close to that given by equation (2.12), the previous resonators are considered here as idealized conical resonators. One consequence is that an input impedance given by equation (2.12) allows simpler analytical study in the time domain than the impedance of a truncated cone, given by equation (2.11). Another remarkable property of such resonators is the analogy between impedance (2.12) and the admittance of a bowed string given by equation (2.10). Consequently, idealized conical-like resonators can be characterized in the time domain by two reflection functions, like a bowed string [MSW83].

2.4.3 Analogy

Similarly to the bowed string models, a hierarchy of models of resonators can be established :

- The simplest model, with neither dispersion nor losses, was used for the clarinet [Ker95, Mag85, MCL86] and for the stepped cone [DGK00]. This model, which is similar to Keller's or Friedlander's model, will be referred to as the "lossless model" both for woodwinds and the bowed string.

- A dispersionless model of a clarinet with a loss parameter independent of the frequency is given by Maganza et al [Mag85, MCL86] but not exploited. This is similar to Raman's model. Note that resonators which losses do not depend on the frequency have particular properties discussed in [GGL97]

- In more realistic models, resonators are modelled within the scope of a linear theory by means of their input impedance, taking dispersion and the influence of tone-holes and the bell into account. This is similar to the "rounded corners" model [MSW83], which has been used since the eighties for the calculation of transient oscillations and physical modelling synthesis [Gaz94, Sch81, BA89]. In a

²Chapitre 3

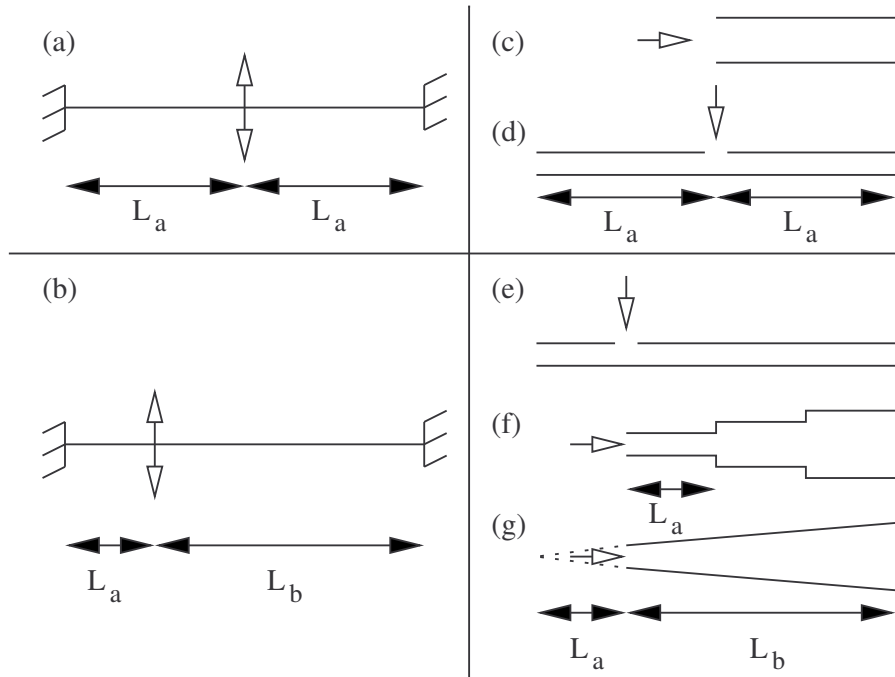


FIG. 2.7 – Summary of the formal analogy between the bowed string and woodwinds resonators. White arrows indicate the location of the mouthpiece or the bow. A string bowed at the middle (a) is analogous to a clarinet (c) or (d). A string bowed at a location such that $L_a \neq L_b$ (b) is analogous to a cylindrical saxophone (e). If $L_b/L_a = N$ is an integer, it is equivalent to a stepped cone with N cylinders (f). It is approximately analogous to a truncated cone (g) of length L_b , with L_a the length of the missing part of the cone.

simplified version of this model, the details of the geometry are left out, and a clarinet is modelled as a pure cylinder with neither bell nor tone-hole (see [KOG00]³ for example).

- More complete models can be used in order to take into account all the details of the geometry, nonlinear effects at tone-holes and at the bell [DND⁺02, Duc01], mechanical coupling between the fluid and the walls of the pipe [GT98], temperature gradient, effect of the concentration of CO₂ in the blown air [FS99], ... etc.

- In addition, a model of a wind instrument resonator close to the one used to study the "wolf-note" on bowed string instruments can be constructed to study the behaviour of some "pathological" organ pipe exhibiting wall vibrations [ND01].

From equations (2.12) and (2.10), the formal analogy with the bowed string can be extended to idealized conical-like resonators (see figure 2.7). A string bowed so that the ratio L_b/L_a is an integer N is analogous to a stepped cone with N cylinders. For any other ratio, a cylindrical saxophone can be constructed. Changing of the position of the bow is equivalent to the changing the length of the truncation for conical woodwinds. Contrary to bowed string instruments players, conical woodwind

³Article reproduit dans l'annexe C

players cannot control this parameter since the length of the truncation is fixed.

2.5 Periodic solutions

In the previous sections we have shown that the analogy is complete between the simplest models for the bowed string (without torsional motion nor flattening effect) and idealized models of reed woodwinds since there is an analog for each parameter or variable. The similarity between the measured waveforms of the pressure inside the mouthpiece of single reed woodwinds (or in double reeds) and the velocity of the string under the bow is a proof of the relevance of this analogy.

For the bowed string, many studies are based on Raman's model because it allows analytical analysis of many aspects of the oscillation mechanism. Although it is not suited for discussing all the subtleties of real instruments, this model can be used as a first approach to study conical-like woodwinds too. The lossless model ($\lambda = 1$) is not suitable for the bowed string because the periodic solutions are unstable [Fri53]. On the contrary, due to differences in the shape of the nonlinearity, it can be suitable for woodwinds since periodic solutions can be stable, as shown in the companion paper [OKD02]⁴.

In this last section we give a method to find the periodic solutions within the scope of Raman's model (after Woodhouse [Woo93a]), then we detail the case of "two-step" solutions.

2.5.1 Periodic solutions in the dispersionless case

The solutions of the coupled system must satisfy both the equation for the resonator and the nonlinear relationship. With the lossless or Raman's model, solutions can be found by use of recurrence equations [Fri53, Woo93a]. The waveforms obtained are somewhat unrealistic since they consist of a succession of constant values, with instantaneous jumps between consecutive values [Ram18]. Nevertheless, these solutions are interesting since they are schematizations of real waveforms [DK95].

At a given instant t , at the entrance of the resonator, the pressure is the sum of the instantaneous contribution $p_i(t)$ due the nonlinear process and the contribution $p_h(t)$ from the past history of the motion :

$$p(t) = p_i(t) + p_h(t). \quad (2.13)$$

The pressure p_h depends on the values of the flow $u(t')$ and the pressure $p(t')$ with $t' < t$ and can be evaluated by using reflection functions. Solutions must satisfy both the nonlinear relation and equation (2.13). In the case of the bowed string, there can be more than one solution to this system. When this occurs, a hysteresis rule must be applied [MSW83], and when dispersion is taken into account a flattening effect is observed. To our knowledge this effect has not been reported in the literature dealing with woodwinds but this possibility is not excluded. This problem has to be studied but it is not discussed in this paper.

In the scope of the Raman's model of a cylindrical saxophone or a stepped cone, equation (2.13)

⁴Chapitre 3

can be written

$$p(t) = \frac{Z_c}{2} \left\{ u(t) - \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{2j} [\lambda u(t - 2(L_a + jL)/c) + \lambda u(t - 2(L_b + jL)/c) - 2\lambda^2 u(t - 2(j+1)L/c)] \right\}, \quad (2.14)$$

where $Z_c = 2\rho c/S_1$ for stepped cones, $Z_c = \rho c/S$ for cylindrical saxophones. In equation (2.14), the summation is the contribution of the multiple reflections. Equation (2.14) can be reduced to a difference equation which can be written in a closed form [Woo93a]. The following notations are used in order to obtain discrete equations :

$$L = L_a + L_b, \quad (2.15)$$

$$L_a/L_b = a/b \quad (2.16)$$

where a and b are integers such that $a < b$,

$$m = a + b \quad (2.17)$$

$$\Delta t = 2L/mc, \quad (2.18)$$

$$p_n = p(n\Delta t), \quad (2.19)$$

$$u_n = u(n\Delta t). \quad (2.20)$$

For a stepped cone made with N cylinders : $a = 1$, $b = N$ and $m = N + 1$. With these definitions, equation (2.14) becomes

$$p_n = \frac{Z_c}{2} u_n - \frac{Z_c}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{2j} [\lambda u_{n-a-jm} + \lambda u_{n-b-jm} - 2\lambda^2 u_{n-(j+1)m}]. \quad (2.21)$$

The difference between equation (2.21) and λ^2 times equation (2.21) modified by replacing n by $n - m$ leads to [Woo93a] :

$$p_n - \lambda^2 p_{n-m} = \frac{Z_c}{2} (u_n - \lambda u_{n-a} - \lambda u_{n-b} + \lambda^2 u_{n-m}).$$

If the motion is periodic $p_n = p_{n-m}$ and $u_n = u_{n-m}$. Thus, with $u_n = F(p_n)$, a set of m nonlinear equations which link the m unknown values of the pressure during one period can be deduced from equation (2.22) [Woo93a] :

$$[S_\lambda] \begin{pmatrix} F(p_n) \\ F(p_{n-1}) \\ \vdots \\ F(p_{n-(m-1)}) \end{pmatrix} = \frac{2(1 - \lambda^2)}{Z_c} \begin{pmatrix} p_n \\ p_{n-1} \\ \vdots \\ p_{n-(m-1)} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

with, for the clarinet (*i.e.* if $a = b$),

$$[S_\lambda] = \begin{pmatrix} 1 + \lambda^2 & & -2\lambda & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ -2\lambda & & & \ddots & -2\lambda \\ & \ddots & & & \\ & & -2\lambda & & 1 + \lambda^2 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

where the non zero elements are the diagonal terms starting at rows 1 and a , or for stepped cones or cylindrical saxophones (*i.e.* if $a \neq b$)

$$[S_\lambda] = \begin{pmatrix} 1 + \lambda^2 & & -\lambda & & -\lambda & & \\ & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\ -\lambda & & & & & & -\lambda \\ & \ddots & & & & \ddots & \\ -\lambda & & & & & & -\lambda \\ & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\ & & -\lambda & & -\lambda & & 1 + \lambda^2 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

where the non zero elements are the diagonal terms starting at rows 1, a and b .

Another iteration equation, given in [DK95], can be useful for the stability calculation [OKD02]⁵. Its validity is less general because it is limited to the case $\lambda = 1$. Its advantage lies in the order of the recurrence, which is $m - 1$, instead of m for equation (2.22). It is derived below when $a = 1$. Starting from the division of the volume velocity $u(t)$ into two parts, $u_a(t)$ and $u_b(t)$, and from the reflections at the two extremities, the following equations can be written at each time n :

$$u_n = u_{a,n} + u_{b,n} \quad (2.26)$$

$$p_n - Z_c u_{a,n} = -\lambda(p_{n-a} + Z_c u_{a,n-a}) \quad (2.27)$$

$$p_n - Z_c u_{b,n} = -\lambda(p_{n-b} + Z_c u_{b,n-b}). \quad (2.28)$$

Combining equations (2.26) and (2.27) for $a = 1$ and $\lambda = 1$ for each time $i = n - b + 1$ to $i = n$, leads to the following set of equations :

$$-Z_c u_{b,i} + Z_c u_{b,i+1} = -Z_c u_i + Z_c u_{i+1} + p_i + p_{i-1} \quad (2.29)$$

Adding these b equations to equation (2.28) leads to the iteration equation :

$$\frac{Z_c}{2}(u_n - u_{n-b}) = \sum_{i=n-b}^{i=n} p_i. \quad (2.30)$$

⁵Chapitre 3

(adding this equation with the same equation with n shifted by $n - 1$, leads to equation (2.22) in the considered case). This result cannot be extended to the case $\lambda \neq 1$, except if $a = b$. When $a = b = 1$, $u_{a,n} = u_{b,n}$ and the following result is obtained :

$$p_n - \frac{Z_c}{2}u_n = -\lambda(p_{n-1} + \frac{Z_c}{2}u_{n-1}). \quad (2.31)$$

2.5.2 Two-step oscillations

As shown by Raman [Ram18], various waveforms can be observed on the bowed string. Some similar waveforms are observed on woodwinds [DK95], but actually both woodwind and bowed instrument players intend to produce a signal close to a "two-step" motion, that is the velocity of the string under the bow or the mouthpiece pressure takes alternatively two values (see figure 2.9). Thus, among the many possible solutions, attention is focused on these solutions.

Depending on the values of the playing parameters, different two-step solutions can be generated. Moreover, the pressure can oscillate with the fundamental frequency, with a frequency of higher registers, or with a subharmonic frequency. Interest is focused here on oscillations with a frequency corresponding to the first resonance of the resonator, the second register being discussed in section 2.5.3. With usual nonlinear functions, two kinds of two-step motions can be obtained (conditions for having this property is discussed in [DGK00, GGL97]). One is such that the duration T_o of the opening episode ($p > 0$) is longer than the duration T_c of the closing episode ($p < 0$). This waveform is called "standard motion" (figure 2.8a). Note that the opening and closing episodes correspond respectively to the sticking and slipping episodes on the bowed string. The motion such that the closing episode is longer than the opening one is called "inverted motion" (figure 2.8b). These motions are "caricatures" of waveforms observed on stepped cones (figure 2.9) but, to our knowledge, the inverted motion has not been observed on the bowed string. If T_o/T_c or $T_c/T_o = L_b/L_a$, the oscillation is called "Helmholtz motion", referring to the observations of Helmholtz on the bowed string [Hel54]. In the lossless case ($\lambda = 1$), the set of equation (2.23) is reduced to :

$$F(P_L) = F(P_S) \quad (2.32)$$

$$T_S P_S = -T_L P_L, \quad (2.33)$$

where P_L and P_S are respectively the values of the pressure in the mouthpiece during the longer and the shorter episodes, of respective duration T_L and T_S .

In the case of a lossless clarinet, one solution is a "square signal" such that $T_L = T_S = T_o = T_c$, and $P_c = -P_o$. If the nonlinear function is given by equation (2.6), the pressure during the opening episode is $P_o = \sqrt{(1-\gamma)(3\gamma-1)}$ if $\Delta p < P_M$, that is if $P_m < P_M/2$, and $P_o = P_m$ if $\Delta p > P_M$. Condition $\Delta p = P_M$ is the "beating reed" threshold. A convenient way to analyse influence of the playing parameters on the solutions is to draw bifurcation diagrams where the values P_o and P_c of the pressure corresponding to the opening and closing episodes respectively are plotted as a function of the blowing pressure P_m . Such a diagram is given for a lossless clarinet on figure 2.10. The bifurcation

from the static regime to the square signal is direct, that is there are small oscillations for $P_m > P_{th}$, the pressure P_{th} being the threshold of instability for the static solution. The threshold P_{th} is equal to $P_M/3$ with the nonlinear function (2.6) in the lossless case, and higher with losses [OKD02].

In the case of idealized stepped cones or cylindrical saxophones, the pressure P_L corresponding to the longer episode can take two values for a given ratio $N_T = T_L/T_S$. If the resonator is lossless ($\lambda = 1$), when the nonlinear function is the one given by equation (2.6) and if $\Delta p < P_M$, the possible pressures P_L are⁶

$$P_L^\pm = (2/m) \frac{\alpha(2 - 3\gamma) \pm \sqrt{\alpha^2 + (1 - \gamma)(3\gamma - 1)}}{1 + 3\alpha^2}, \quad (2.34)$$

with $\gamma = P_m/P_M$, and $\alpha = (T_L - T_S)/(T_L + T_S)$. Since losses are ignored, the pressure corresponding to the shorter episode is $P_S^\pm = -N_T P_L^\pm$. The solutions given by equation (2.34) are valid if P_L^\pm is real, thus if $P_m > P_{sc}$, where P_{sc} is the pressure such that the square root in (2.34) is equal to zero. For the case of solution P_L^+ , the beating reed regime occurs if $P_m > P_M/(N_T + 1)$. For the case of solution P_L^- , the beating reed regime occurs if $P_m > P_M N_T/(N_T + 1)$. In the beating reed regime, the opening pressure P_o is such that $P_o = P_m$, the closing pressure being $P_c = -N_T P_m$ if the motion is standard ($P_L > 0$), and $P_c = P_m/N_T$ if the motion is inverted ($P_L < 0$). The two solutions given by equation (2.34) behaves differently. With P_L^+ , the longer step is positive, thus the waveform is a standard motion (noted SM1 on the bifurcation diagram of figure 2.11). With P_L^- , the longer step is positive if $P_{sc} < P_m < P_{th}$, thus the waveform is a standard motion (noted SM2 on figure 2.11), and it is negative if $P_m > P_{th}$, thus the waveform is an inverted motion (noted IM on figure 2.11). The bifurcation from the static regime to the considered periodic solution is an inverse bifurcation for the standard motion since there are small oscillation (SM2) for $P_m < P_{th}$.

If $\lambda < 1$, solutions are obtained by using equation (2.23). The bifurcation diagram of figure 2.12, calculated in the case of a stepped cone with 2 cylinders, shows that the solutions converge toward the lossless case when $\lambda \rightarrow 1$. The main effect of losses is the reduction of the range of the non beating reed regime since P_{sc} increases and the beating reed threshold remains nearly unchanged. For discussions on the behaviour of solutions when dispersion is taken into account, including comparisons with measurements, see [DGK00].

⁶Note that equation (18) in [DGK00] contains a misprint.

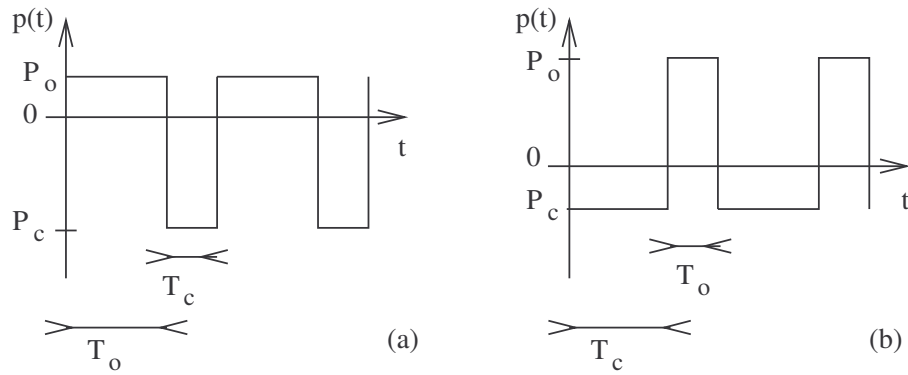


FIG. 2.8 – Possible waveforms of two-steps motions : (a) standard motion; (b) inverted motion.

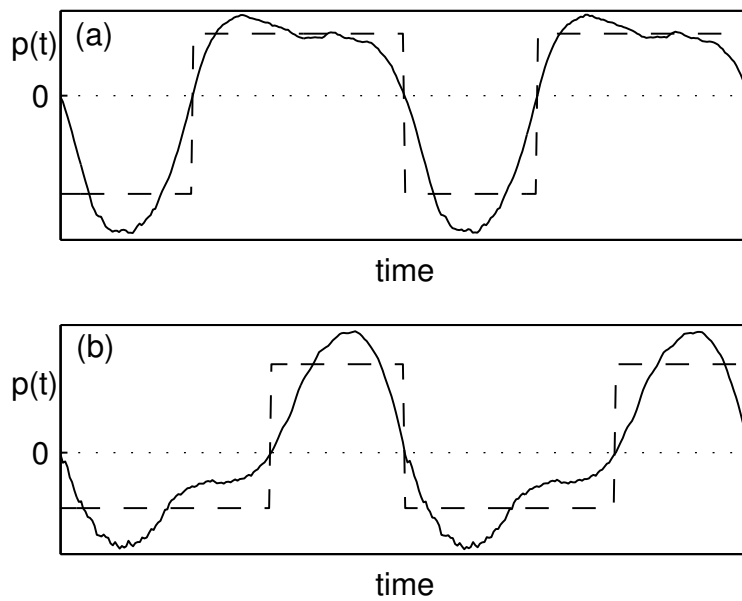


FIG. 2.9 – Pressure signals measured in the mouthpiece of a stepped cone saxophone made with 2 cylinders. Continuous lines : acoustic pressure in the mouthpiece, discontinuous lines : two-step motion with the same RMS pressure. (a) standard motion; (b) inverted motion.

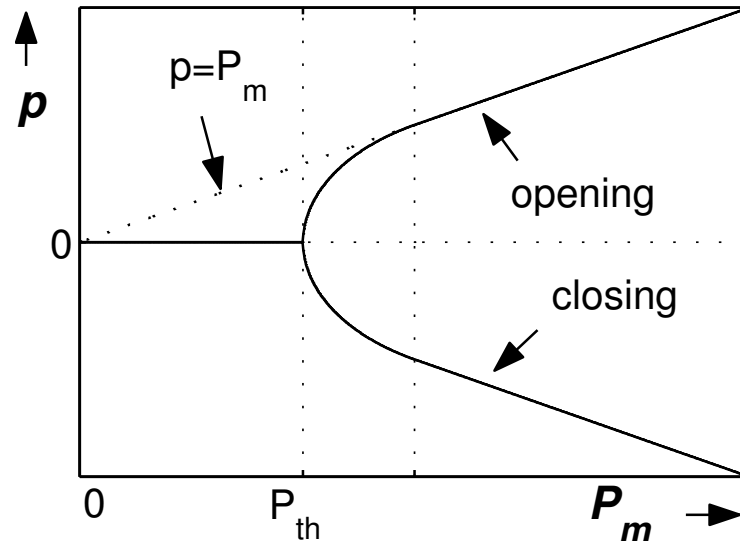


FIG. 2.10 – *Bifurcation diagram for a lossless clarinet. The pressure in the mouthpiece during the opening and the closing episodes (respectively $p > 0$ and $p < 0$) are plotted versus the blowing pressure P_m .*

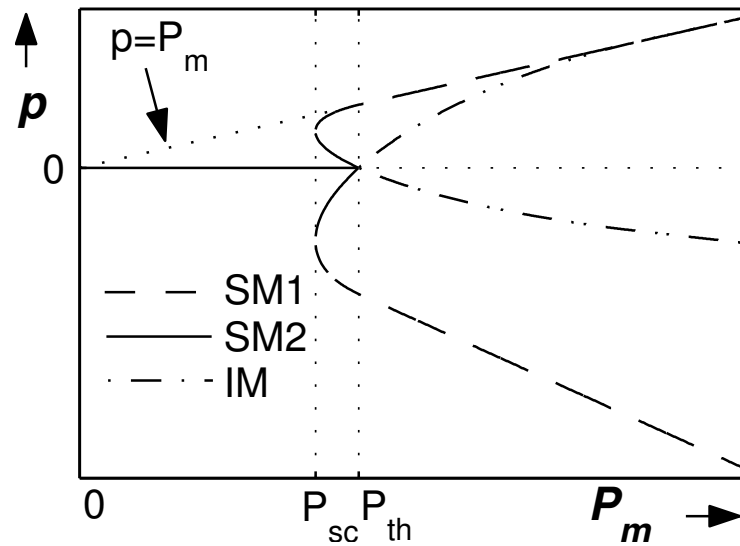


FIG. 2.11 – *Bifurcation diagram for the two Helmholtz solutions ($N_T = N$). The nonlinear model is F_{ber} (equation (2.6)), the resonator is lossless and such that $N = 2$. The values of the opening ($p > 0$) and closing ($p < 0$) episodes are plotted versus the blowing pressure.*

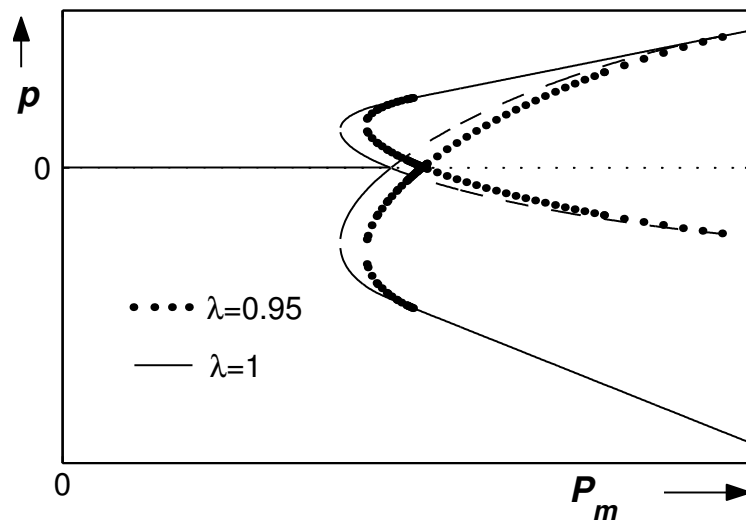


FIG. 2.12 – Bifurcation diagram obtained with a given embouchure in the lossless case (see figure 2.11) and with Raman's model (dots) with $\lambda = 0.95$.

2.5.3 Second register of conical-like reed woodwinds

When studying the second register, the validity of the low frequency model for the reed can be questioned because the reed resonance influence might not be negligible (see [WB74] for example). Nevertheless, we suppose that the nonlinear characteristics is the same for the fundamental oscillation (of frequency f_1) and for the octave (of frequency $f_2 = 2f_1$ since dispersion is not taken into account). In the case of dispersionless resonators, the waveform of the second register can be deduced from the input impedance of the resonator. If L_a and L_b are such that $L_a/L_b = a/b$ where a and b are co-prime integers, there are no resonances at the frequencies which are multiple of mf_1 , where $m = a + b$. Consequently, if m is odd, there are no multiples of mf_2 in the spectrum, and the second register can have the same waveform as the fundamental. If m is even, there are no frequency multiple of $mf_2/2$, and the waveform of the second register differs from the waveform of the fundamental. For example, the pressure signal of the second register of a stepped cone made with three cylinders ($a = 1$, $b = 3$, $m = 4$) is a square wave, like in a clarinet. Measurements of the pressure in the mouthpiece of stepped cones made with 2 and 3 cylinders confirm this analysis (see figure 2.13).

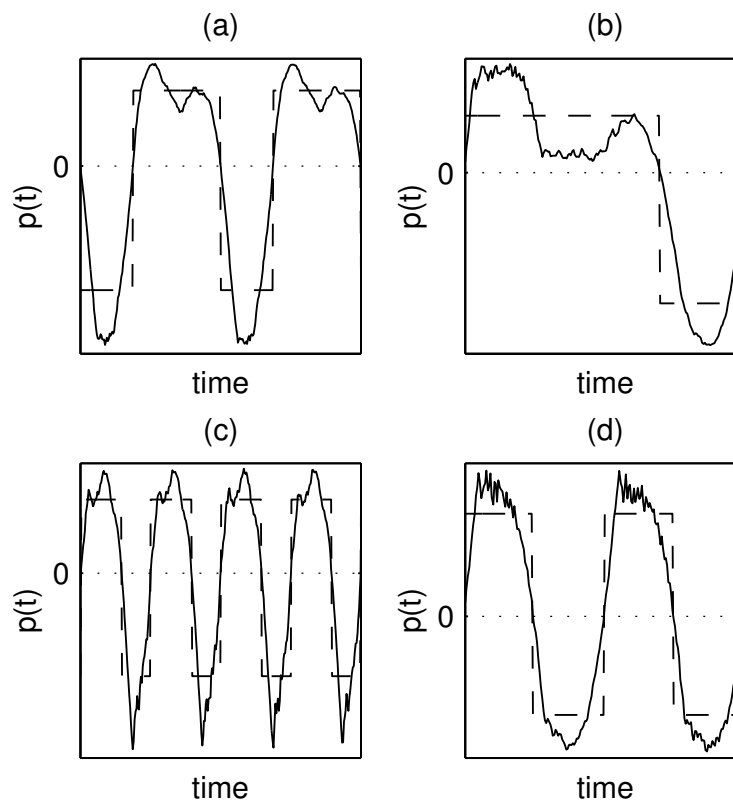


FIG. 2.13 – Measured waveforms of the first and the second register of stepped cones. Continuous lines : acoustic pressure in the mouthpiece, discontinuous lines : two-step motion with the same RMS pressure. (a) fundamental vibration of a step cone $N = 2$. (c) octave vibration of a stepped cone $N = 2$. (b) fundamental vibration of a stepped cone $N = 3$. (d) octave vibration of a step cone $N = 3$.

2.6 Conclusion

From the analysis of idealized models of bowed string and reed woodwinds, we showed that the analogy between these models is more complete than mentioned in [MSW83] if considering an elementary model for the reed, since a flow parameter characterizing the embouchure is found to be analogous to the bow force parameter. Moreover, it seems that conical woodwind makers tend to obtain resonators with an input impedance close to the impedance of idealised stepped cone resonators. Since these resonators are analogous to bowed strings, the analogy between bowed string models and conical woodwinds is straightforward. Thus, with this analogy, studies using Raman's model for bowed string can be useful for studies on conical reed woodwinds, and vice versa. This has been used, for example, to investigate the stability of two-step solutions in the companion paper [OKD02]. Nevertheless, a direct transposition of results from one family to the other is not obvious since the nonlinear characteristics differ.

A musical application of this formal analogy can be the use of two reflection functions for time domain synthesis of conical-like reed woodwinds. Another musical application is the possibility to control a bowed string model with a saxophone, or inversely, with a good playability if analogous parameters are associated. This can lead to strange, but easily playable, instruments like a virtual saxophone model with a variable length for the truncation, controlled by the position of the bow on a real bowed string instrument.

Chapitre 3

Idealized models of reed woodwinds. Part II : On the stability of two-step oscillations

Auteurs : S. Ollivier, J. Kergomard, J-P. Dalmont

Ce chapitre reproduit un article soumis à la revue ACUSTICA-acta acustica. Il est rédigé en anglais en collaboration avec Jean Kergomard et Jean-Pierre Dalmont. Nous proposons dans ce chapitre une étude de la stabilité des solutions oscillantes à deux états dans le cadre des modèles simplifiés présentés au chapitre précédent. Dans un premier temps l'analyse est faite sans préciser quelle est la relation non-linéaire (paragraphe 3.3), ainsi les critères de stabilité peuvent être appliqués à différents types d'instruments auto-oscillants, dont la corde frottée et les instruments à vent. Dans un deuxième temps (paragraphe 3.4) la validité des critères définis est vérifiée par comparaison avec des résultats issus de simulations dans le domaine temporel en considérant deux modèles d'excitateur non-linéaire d'instrument à anche, dont le modèle élémentaire.

Le problème de la stabilité des solutions périodiques a déjà été abordé dans le cas de la corde frottée, notamment pour déterminer dans quelles conditions le mouvement de Helmholtz peut être stable. En particulier on peut citer Friedlander [Fri53], qui montre qu'un modèle de corde frottée sans pertes n'est pas exploitable lorsque le modèle de non-linéarité suppose qu'il y a accrochage parfait entre la corde et l'archet, car les oscillations périodiques ne peuvent alors pas être stables. En ce qui concerne les instruments à anche, cet aspect a principalement été abordé dans le cas de la clarinette [MCL86, Ker95, Bro90]. Ces travaux montrent que dans ce cas des oscillations périodiques stables peuvent être générées lorsque le résonateur est sans pertes. Par ailleurs le mouvement de Helmholtz "standard" est observé à la fois dans le cas de la corde frottée et dans le cas des instruments à anche de type conique tandis que le mouvement de Helmholtz "inversé" n'est observé que dans le cas des instruments à anche. Nous cherchons donc à comprendre ces différences de comportement, en utilisant l'analogie entre la corde frottée et les instruments à anche.

Au paragraphe 3.3 nous établissons des critères de stabilité à partir d'une analyse dans le domaine

temporel. Ces critères mettent en évidence le rôle de la dérivée de la caractéristique non-linéaire calculée aux points correspondant aux valeurs entre lesquelles la pression oscille. Le seuil d'instabilité du régime statique (ou seuil d'oscillation) dans le cadre du modèle de Raman est calculé au paragraphe 3.3.2 .

Au paragraphe 3.3.3 nous complétons les travaux sur la stabilité des oscillations périodiques d'une clarinette en tenant compte des pertes dans le cadre du modèle de Raman. Dans le cas d'un résonateur sans pertes, les critères nécessaires donnés par Friedlander [Fri53], Keller [Kel53], and Kergomard [Ker95] sont retrouvés. Les pertes contribuent à stabiliser les solutions périodiques, mais ne changent pas de façon significative le comportement du système.

Au paragraphe 3.3.4 le cas des instruments de type conique est envisagé. La méthode s'inspire de l'annexe de [DK95] mais utilise la même formulation que dans le cas de la corde frottée [Woo93a]. L'analogie nous a permis de considérer des pertes indépendantes de la fréquences. Dans le cas d'un résonateur sans pertes, le critère nécessaire donné par Weinreich et Caussé [WC91] et celui donné par Friedlander [Fri53] et Keller [Kel53] dans le cas de la corde frottée sont retrouvés. Comme dans le cas de la clarinette nous mettons en évidence que les solutions du type mouvement de Helmholtz standard peuvent être stables même dans le cas d'un résonateur sans pertes. En revanche, le mouvement de Helmholtz inversé n'est pas stable en régime "anche non battante". Comme dans le cas de la clarinette, nous montrons que les signaux du type de mouvement de Helmholtz sont stables en anche battante.

Au paragraphe 3.4 deux modèles sont envisagés pour l'élément non-linéaire. L'un est le modèle élémentaire issu de la relation de Bernoulli, l'autre est un polynôme d'ordre 3 qui se distingue du modèle élémentaire principalement par une transition progressive entre les régimes "anche battante" et "anche non battante", et par une dérivée finie lorsque l'anche est complètement ouverte ($\Delta p = 0$) en régime anche battante dans le cas sans pertes. Pour la clarinette dans le cas du modèle élémentaire on retrouve le schéma donné par Maganza [Mag85] et Kergomard [Ker95] : la solution "signal carré" devient instable au voisinage de l'anche battante et est stable en anche battante, la transition étant discontinue. Par rapport aux travaux antérieurs nous considérons l'effet de pertes indépendantes de la fréquence. Celles-ci élèvent le seuil d'oscillation et le seuil d'instabilité : la zone d'instabilité est réduite par la présence de pertes. Le cas d'un cône en escalier sans pertes à deux cylindres est en suite détaillé. Nous montrons que seule une des deux solutions de type mouvement de Helmholtz standard peut être stable en régime anche non battante. Dans le cas du modèle élémentaire cette solution est stable au voisinage du seuil d'oscillation, instable au voisinage du seuil de battement, et stable en anche battante. En revanche, dans le cas où la relation non-linéaire est un polynôme d'ordre 3 elle est pratiquement toujours stable. Les critères basés sur les pentes de la non-linéarité sont en accord avec les résultats des simulations temporelles. En particulier, on vérifie que les solutions du type mouvement de Helmholtz inversé ne sont stables qu'en régime anche battante. Nous vérifions également, dans le cas des "saxophones cylindriques" en régime anche non battante, que lorsque le rapport des longueurs des deux cylindres n'est pas entier le mouvement de Helmholtz standard devient instable au profit d'une solution dont la durée de fermeture est plus courte. En revanche, comme dans le cas du mouvement de Helmholtz inversé, le mouvement de Helmholtz standard est stable en anche battante. Par ailleurs, nous mettons en évidence un comportement différent en ce qui concerne l'octave des "cônes en escalier"

selon que le nombre de sections soit pair ou impair. Dans le cas pair les conditions de stabilité sont similaires pour le régime fondamental et l'octave. Dans le cas impair l'octave n'est stable qu'en régime anche battante.

Le cas où une dérivée est infinie et le résonateur est sans pertes est traité en annexe. Ce cas correspond au régime anche battante pour le modèle élémentaire. Nous vérifions que la solution signal carré est stable en régime anche battante dans le cas de la clarinette, ainsi que le mouvement de Helmholtz inversé dans le cas des instruments de type conique. Par ailleurs nous montrons qu'il existe un continuum de solutions à trois niveaux stables en régime anche battante.

3.1 Introduction

This paper investigates the stability of periodic oscillations in reed woodwinds. This analysis can be seen as a contribution to the evaluation of the ease of playing, or the playability, of wind instruments. A global evaluation of the playability implies the study of the influence of many parameters on sound production, from the point of view of the player [Woo95]. Concerning the bowed string, a great interest lies in the determination of the limit values of the bow force F_b such that the Helmholtz motion is possible with steady bow force (see *e.g.* [Sch73]). Similarly, study of the playability of a wind instrument includes the determination of the threshold mouth pressure above which the instrument oscillates, and the determination of the values of the playing parameters such that periodic oscillations are possible. The determination of the threshold of oscillation is quite well known : a linear analysis is sufficient for the clarinet [GGL97], and the case of conical-like instruments is discussed in [DGK00]. On the contrary, stability of periodic oscillation in reed woodwinds has not been much studied. Moreover, the discussion of this problem is usually limited to the case of the clarinet [Mag85, Ker95, MCL86, Bro90].

The present paper investigates the stability of periodic solutions for the pressure in idealized models of woodwinds discussed in a companion paper [ODK02]. The analysis is limited here to the case of dispersionless resonators which losses do not depend on the frequency (lossless and Raman's model). These models differ from real instruments on many features but are convenient as a first attempt to study analytically some aspects of the oscillation mechanism in clarinet-like [MCL86, Ker95] and in conical-like systems [DK95, DG98]. In addition, as discussed in companion paper [ODK02], these models are analogous to idealized models of a bowed string [Woo93a], and reference to papers dealing with the bowed string can be used.

Many waveforms can be generated with the considered models but the discussion is focused here on the stability of "two-step" solutions, including the "Helmholtz motion", which are schematizations of waveforms observed both on bowed strings and in woodwinds [Ram18, DK95, Roc85, Bro87]. Stability of such solutions is discussed in the case of a lossless string by Keller [Kel53], Friedlander [Fri53], and Weinreich and Caussé [WC91]. These studies show that these solutions cannot be stable in the case of a nonlinear relationship between transverse force and velocity of the bowed point if sticking is assumed to be perfect. Woodhouse gives a more exhaustive study in [Woo93b], dealing with an extended Raman's model and also with models using more realistic reflection functions. The stability of periodic oscillations in the case of an idealized lossless model of a clarinet was studied analytically by Maganza et al [Mag85, MCL86], and by Kergomard [Ker95]. It comes out from their work that, when the reed does not beat, stability of periodic solutions depends on the shape of the nonlinear characteristics and on the values of the playing parameters. These authors conclude that oscillations are stable in the "beating reed regime", that is when the reed closes the tip opening during a fraction of the period. Dalmont and Kergomard proposed later in [DK95] a perturbation method in order to study the stability of oscillations in reed woodwinds with lossless "stepped cones" resonators [DK94]. This method is exploited here and generalized to another family of resonators called "cylindrical saxophones" and to models with frequency independent losses (Raman's model).

In section 3.2, the idealized models reviewed in [ODK02]¹ are briefly reminded. Then stability criteria are established and discussed in section 3.3, firstly for the clarinet, then for idealized conical-like woodwinds. Finally, in section 3.4, the validity of these criteria is checked up by comparison with time domain simulations in some particular cases.

3.2 Idealized models of woodwinds

Paper [ODK02]¹ points out the analogy between idealized models of bowed string [Woo93a] and reed wind instruments. These models are based on the description given in [MSW83], where the excitor is modelled by using a nonlinear function

$$u = NL(\Delta p) \quad (3.1)$$

relating the volume velocity u in the mouthpiece to the pressure difference

$$\Delta p = P_m - p \quad (3.2)$$

between the mouth pressure P_m and the pressure p in the mouthpiece. This function at a given instant is assumed to be independent on the previous state of the system (no hysteresis). Note that the reed can completely close the input channel if Δp is too high, then $u(\Delta p) = 0$. If this occurs during a part of the period when the system oscillates, the regime of oscillation is called the "beating reed" regime.

The resonators considered in this paper are idealized "stepped cones" and "cylindrical saxophones" drawn on figure 3.1. "Stepped cones" are made with N cylinders of equal length L_a with sections S_i such as $S_i = i(i+1)S_1/2$, where S_1 is the section of the first cylinder, and $i = 1, \dots, N$. The length of the resonator is $L_b = NL_a$. Cylindrical saxophones consist in two cylindrical resonators of section S , and length L_a and L_b , excited by a mouthpiece with zero thickness. There are two arguments for using these resonators instead of true conical waveguides. Firstly their input impedance is close to the impedance of conical instruments resonators but simpler. Thus both cylindrical saxophones and stepped cones can be considered as conical-like resonators. Secondly, their input impedance is similar to the admittance of a bowed sting at the bowed point. Consequently, these resonators can be characterized in the time domain by means of two reflection functions like a bowed string [ODK02]¹.

In this paper dispersion is not taken into account and losses are characterized by means of real parameters independent of the frequency (Raman's model). Within the scope of Raman's model, these reflection functions can be written

$$r_a(t) = -\lambda\delta(t - \tau_a) \quad (3.3)$$

$$r_b(t) = -\lambda\delta(t - \tau_b), \quad (3.4)$$

where δ is Dirac's distribution, τ_a and τ_b are time delays and $\lambda \leq 1$. If $\lambda = 1$, resonators are lossless. In the case of both stepped cones and cylindrical saxophones, the time delays are $\tau_a = 2L_a/c$ and

¹Chapitre 2.

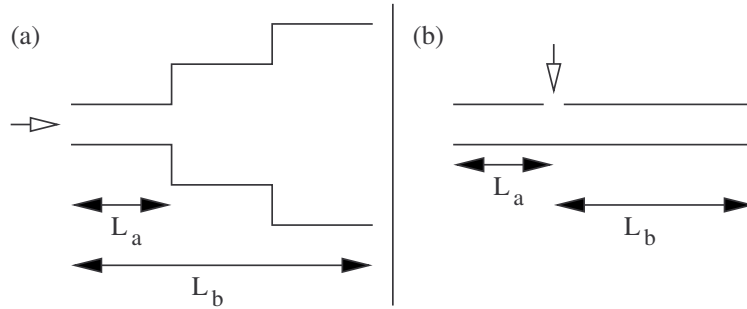


FIG. 3.1 – Idealized conical-like resonators. (a) : stepped cone, (b) : cylindrical saxophone. White arrows indicate the location of the mouthpiece.

$\tau_b = 2L_b/c$, where c is the sound velocity. For simplicity only one loss parameter λ is considered, but the following analysis can be made with two different parameters. Among other solutions, "two-step" oscillations can be solution of the coupled system (nonlinear excitator, resonator). The two steps correspond to the opening ($p > 0$) and the closing episodes ($p < 0$). We make a distinction between the oscillations such that the closing episode is shorter than the opening one (see figure 2.a) and the oscillations such that the closing episode is longer than the opening one (see figure 2.b). The first type of waveform is a schematization of the pressure signal observed in the mouthpiece of conical woodwinds and of the velocity of bowed strings at the bowed point. It is called "standard motion" (SM) in this paper. The second type is observed in reed woodwinds at rather high blowing pressure but not on the bowed string. This second type is called "inverted motion" (IM). If $T_o/T_c = L_b/L_a$ the solution is called "standard Helmholtz motion", and if $T_o/T_c = L_a/L_b$ it is called "inverted Helmholtz motion".

A convenient way to analyse the variation of the amplitude of these solutions versus the blowing pressure is to draw a bifurcation diagram where the values of the mouthpiece pressure during the opening and closing episodes ($p > 0$ and $p < 0$ respectively) are plotted as a function of the blowing pressure P_m . Such a diagram is plotted in figure 3.3 in the case of a stepped cone with two cylinders ($N=2$). In this case, for $P_m < P_{th}$ the static regime (no oscillation) is a possible solution. For a given ratio T_o/T_c , if $P_m > P_{sc}$ two two-step motions are possible solutions. One is a standard motion, noted SM1 on figure 3.3, which amplitude increases with P_m . If $P_{sc} < P_m < P_{th}$, the other solution is a standard motion which amplitude decreases when P_m increases. It is noted SM2 on figure 3.3. For $P_m > P_{th}$, this solution is an inverted motion and its amplitude increases with P_m . It is noted IM on figure 3.3. The particular pressure P_{sc} , for which SM1=SM2, is named "subcritical threshold pressure". If $P_m < P_{sc}$, only the static regime is possible. The stability of these two-step solutions is investigated in next sections.

3.3 Method

Attention is focused on linear stability analysis of two-step solutions. A known periodic solution is said to be stable if a perturbation to the motion decreases with time. A standard method consists

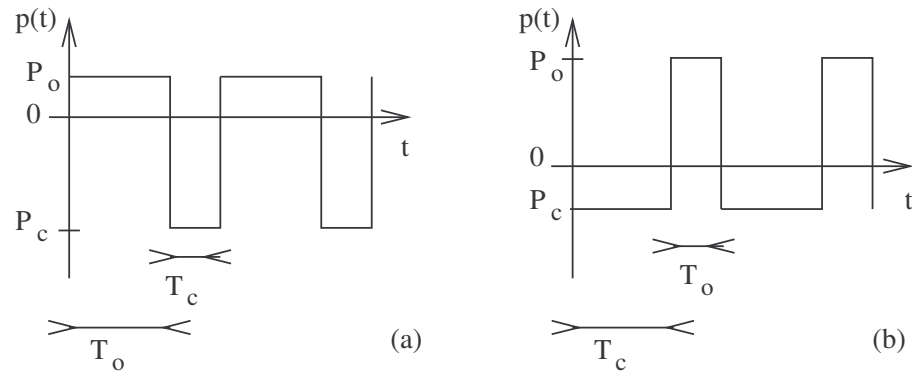


FIG. 3.2 – Possible waveforms of two-steps motions. (a) : standard motion (SM), duration of the opening episode $T_o >$ duration of the closing episode T_c . (b) : inverted motion (IM), duration of the opening episode $T_o <$ duration of the closing episode T_c .

in : (i) describing the periodic motion with discrete time steps ; (ii) adding a perturbation during one period ; (iii) calculating the evolution of the perturbation by using recurrence equations. The method is very close to the appendix of [DK95] but is generalized to a wider class of resonator and signals. Comparison of the results obtained by using this method with experimental observations on real instruments is difficult because real instruments depend on much more parameters than the present models. Therefore, in order to valid the stability criteria obtained with the perturbation method, oscillations are calculated by using time domain simulations and the limits of stability are compared in section 3.4.

3.3.1 Time domain approach

The method is summarized in [MSW83]. At a given instant t , at the entrance of the resonator, the pressure is the sum of the instantaneous contribution $p_i(t)$ due the nonlinear process and the contribution $p_h(t)$ from the past history of the motion :

$$p(t) = p_i(t) + p_h(t). \quad (3.5)$$

The pressure p_h depends on the values of the flow $u(t')$ and the pressure $p(t')$ with $t' < t$. It can be evaluated by using reflection functions. Solutions must satisfy both the nonlinear relation (3.1) and equation (3.5). In the case of the bowed string, there can be more than one solution to this system. When this occurs, a hysteresis rule must be applied [MSW83], and when dispersion is taken into account a flattening effect is observed. To our knowledge this effect has not been reported in the litterature dealing with woodwinds but this possibility is not excluded. This problem has to be studied but it is not discussed in this paper.

In the scope of the Raman's model of a cylindrical saxophone or a stepped cone, equation (3.5) can

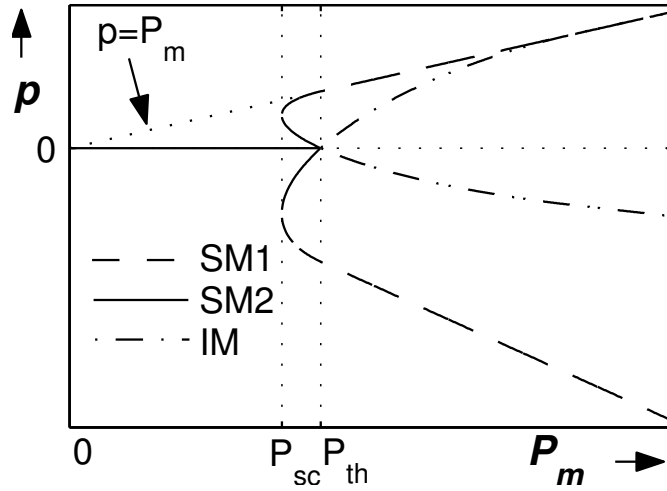


FIG. 3.3 – Bifurcation diagram. The values of the mouthpiece pressure during the opening and closing steps (respectively $p > 0$ and $p < 0$) are plotted versus the blowing pressure P_m . The resonator is lossless and such that $L_b/L_a = 2$.

be written

$$p(t) = \frac{Z_c}{2} \left\{ u(t) - \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{2j} [\lambda u(t - 2(L_a + jL)/c) + \lambda u(t - 2(L_b + jL)/c) - 2\lambda^2 u(t - 2(j+1)L/c)] \right\} \quad (3.6)$$

where $Z_c = 2\rho c/S_1$ for stepped cones (S_1 is the section of the first cylinder), $Z_c = \rho c/S$ for cylindrical saxophones (S is the section of the cylinders), and ρ is the density of air. In equation (3.6), the summation is the contribution of the multiple reflections. Equation (3.6) can be reduced to a difference equation which can be written in a closed form [Woo93a]. The following notations are used in order to obtain discrete equations :

$$L = L_a + L_b, \quad (3.7)$$

$$L_a/L_b = a/b \quad (3.8)$$

where a and b are integers such that $a < b$,

$$m = a + b, \quad (3.9)$$

$$\Delta t = 2L/mc, \quad (3.10)$$

$$p_n = p(n\Delta t), \quad (3.11)$$

$$u_n = \frac{Z_c}{2} u(n\Delta t). \quad (3.12)$$

For a stepped cone made with N cylinders : $a = 1$, $b = N$ and $m = N + 1$. With these definitions, equation (3.6) becomes

$$p_n = u_n - \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{2j} [\lambda u_{n-a-jm} + \lambda u_{n-b-jm} - 2\lambda^2 u_{n-(j+1)m}]. \quad (3.13)$$

The difference between equation (3.13) and λ^2 times equation (3.13) modified by replacing n by $n - m$ leads to [Woo93a] :

$$u_n - \lambda u_{n-a} - \lambda u_{n-b} + \lambda^2 u_{n-m} = p_n - \lambda^2 p_{n-m}. \quad (3.14)$$

For the case $a \neq b$, the pressure and the flow at the time step n depend on the previous values at the times $n - a$, $n - b$, $n - m$. If the resonator is lossless ($\lambda = 1$) another iteration equation can be found with an order of the recurrence $m - 1$ instead of m [ODK02, DK95]. In the case of the clarinet ($a = b$), the sum of equation (3.13) and λ times equation (3.13) modified by replacing n by $n - a$ leads to :

$$p_n + \lambda p_{n-a} = u_n - \lambda u_{n-a}. \quad (3.15)$$

In this equation, pressure and volume velocity at instant n depend only on the previous value at the time $n - a$, and the dynamical system can easily be written in the form of an iterated map [Mag85, MCL86, Bro90].

3.3.2 Stability criterion for the static regime

For the static regime (no oscillation), the steady state solution (constant pressure $p_n = p_{st}$ for all n) is obtained from equations (3.14) and (3.1), with $u_n = F(p_n) = Z_c NL(P_m - p_n)$ if P_m is constant :

$$(1 - \lambda)^2 F(p_{st}) = (1 - \lambda^2) p_{st}, \quad (3.16)$$

or if $\lambda \neq 1$:

$$\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} F(p_{st}) = p_{st}. \quad (3.17)$$

This equation is valid even when $\lambda = 1$, as indicated by equation (3.15) : this remark explains, for a simple particular case, why the iteration of order $(m - 1)$ is useful when $\lambda = 1$ (see the companion paper [ODK02]¹).

The stability of the static regime can be studied by using equation (3.14) : if a small perturbation e_n is produced at time n on the pressure p_{st} , *i.e.* if $p_n = p_{st} + e_n$, the volume velocity is

$$u_n = F(p_{st}) + h e_n + O(e_n^2), \quad (3.18)$$

$$\text{where } h = \left. \frac{dF(p)}{dp} \right|_{p=p_{st}}. \quad (3.19)$$

Equation (3.14) is written at the first order of the perturbations :

$$h [e_n - \lambda(e_{n-a} + e_{n-b}) + \lambda^2 e_{n-m}] = e_n - \lambda^2 e_{n-m} \quad (3.20)$$

If we seek for an eigenvector solution $e_i = \Omega e_{i-1}$, we obtain :

$$(h - 1)\Omega^m - \lambda h(\Omega^b + \Omega^a) + (h + 1)\lambda^2 = 0. \quad (3.21)$$

For $h = 0$ and $\lambda = 1$, the solutions are

$$\Omega_{0q} = e^{2i\pi \frac{q}{m}}, \quad (3.22)$$

where $0 \leq q < m - 1$. For small h , an approximation to the first order can be calculated, and if in addition λ is assumed to be close to unity (*i.e.* $\lambda = 1 - \varepsilon$ with $\varepsilon \ll 1$), the solution at the first order of h and ε is found to be :

$$\Omega_q = \Omega_{0q} \left\{ 1 - \frac{2\varepsilon}{m} + \frac{2h}{m} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi qa}{m} \right) \right] \right\}. \quad (3.23)$$

The stability is ensured if all eigenvalues are smaller than unity. A similar calculation for a different case but with similar equations was done by Woodhouse [Woo93b], and the result is found to be :

$$h < \frac{\varepsilon}{\sup_q \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi qa}{m} \right) \right]}. \quad (3.24)$$

As an example, if $a = 1$,

$$h < \frac{\varepsilon}{2} \text{ for even } m \quad (3.25)$$

$$h < \frac{\varepsilon}{2 \sin^2 \left(\frac{\pi(m-1)}{2m} \right)} \text{ for odd } m. \quad (3.26)$$

The calculation of the derivative for small ε needs to take into account that ε is a factor in the left-side member of equation (3.17). As an example if $F(p)$ is a polynomial

$$F(p) = F_0 + Ap + Bp^2 + O(p^3), \quad (3.27)$$

the limit pressure p_{st} is of order ε and an elementary calculation leads to

$$h = A + 2B\varepsilon F_0. \quad (3.28)$$

For classical models of reed and mouthpiece, one can show that conditions (3.25) or (3.26) combined with equation (3.28) lead as expected to an increase of the instability threshold when losses are present ($\varepsilon > 0$). Otherwise it can be concluded from these conditions that for $\varepsilon = 0$ the instability threshold is independent of m : its value is given by the condition $A = 0$. This is consistent with previous works [Ker95, GGL97].

3.3.3 Stability criterion for the case of the clarinet ($N = 1$)

The case $N = L_a/L_b = 1$ corresponds to a clarinet and to a string bowed at the middle. This case has been studied by Keller [Kel53], Friedlander [Fri53], Kergomard [Ker95], and Maganza [Mag85, MCL86] in the case of lossless resonators. A stability criterion is easily obtained from equation (3.15).

The solution which stability is tested is a square signal with two steps of equal duration T_o and T_c , and equal magnitudes p_o and p_c , respectively during the opening and closing episodes. In the case of a lossless model, both sides of (3.15) are equal to zero for the steady-state regime. If a perturbation e_n is added to a known periodic solution, the pressure p_n becomes

$$\tilde{p}_n = p_n + e_n, \quad (3.29)$$

and the acoustic flow is

$$\tilde{u}_n = F(\tilde{p}_n), \quad (3.30)$$

Assuming the perturbation is small, \tilde{u}_n is calculated at first order of e_n :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n = F(p_n + e_n) &\simeq \left. \frac{dF}{dp} \right|_{p_n} e_n + F(p_n) \\ &= h_n e_n + F(p_n), \\ \text{where } h_n &= \left. \frac{dF}{dp} \right|_{p_n} \end{aligned} \quad (3.31)$$

is the slope of F calculated for $p = p_n$, the pressure of the unperturbed signal. Combining equations (3.15), (3.29) and (3.31) gives

$$e_n = -\lambda \frac{h_{n-a} + 1}{h_n - 1} e_{n-a}. \quad (3.32)$$

e_{n-a} can be related to e_{n-2a} in the same way, thus equation (3.32) gives with $n - m = n - 2a$:

$$e_n = \lambda^2 \left(\frac{h_{n-a} + 1}{h_n - 1} \right) \left(\frac{h_{n-m} + 1}{h_{n-a} - 1} \right) e_{n-m}. \quad (3.33)$$

Since the derivatives are calculated for the pressures corresponding to the unperturbed signal, the evolution of the amplitude of the perturbation during one period is finally :

$$e_n = \lambda^2 \left(\frac{h_o + 1}{h_o - 1} \right) \left(\frac{h_c + 1}{h_c - 1} \right) e_{n-m}, \quad (3.34)$$

$$\text{with } h_o = \left. \frac{dF}{dp} \right|_{p_o} \text{ and } h_c = \left. \frac{dF}{dp} \right|_{p_c}. \quad (3.35)$$

The studied solution is stable if the amplitude of the perturbation decreases when n increases, thus a necessary criterion for the stability of the square oscillation is

$$\lambda^2 \left| \frac{h_o + 1}{h_o - 1} \frac{h_c + 1}{h_c - 1} \right| < 1. \quad (3.36)$$

In the lossless case ($\lambda = 1$), this is the criterion given independently by Keller [Kel53], Friedlander [Fri53] for the string bowed in the middle and by Kergomard [Ker95] for the clarinet.

As done by Keller [Kel53], condition (3.36) is plotted in figure 3.4 as a function of the slopes h_o and h_c calculated for p_o and p_c , where a white area indicates if condition (3.36) is satisfied and a grey area if it is not. This representation is convenient because it does not depend on the nonlinear function F . In the scope of the present model, the derivative h_c is smaller than unity for realistic embouchure parameters, thus the following discussions are limited to values of $h_c < 1$. Moreover, the case $h_c > 1$ has already been studied by Maganza [Mag85, MCL86].

Limits of stability are given by relations (3.37) :

$$\begin{aligned} h_c = \frac{\theta h_o - 1}{h_o - \theta} \quad \text{and} \quad h_c = \frac{h_o - \theta}{\theta h_o - 1}, \\ \text{with } \theta = \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

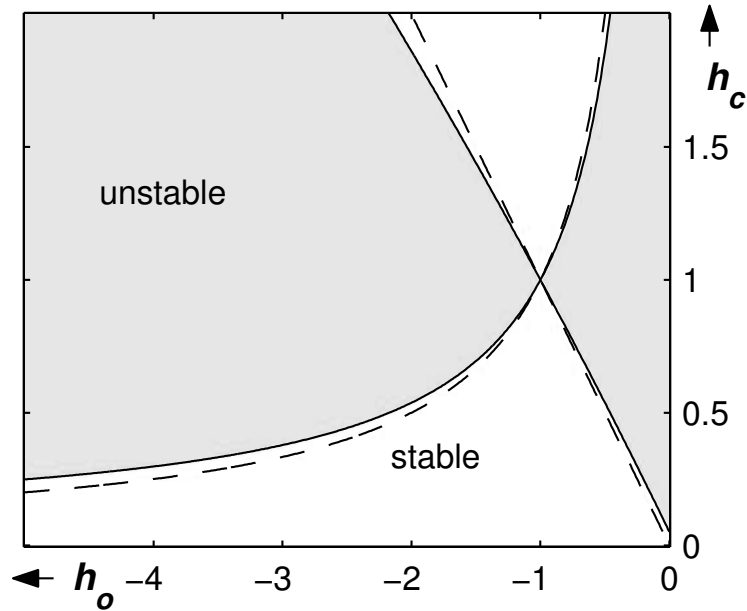


FIG. 3.4 – Stability of the square oscillation in a clarinet ($a = b$), $\lambda = 0.95$ plotted as a function of h_o and h_c . Grey area : the solution is unstable, white area : the solution is stable. Continuous line : limits of stability given by equations (3.37) for $\lambda = 0.95$, dashed line : limits of stability for $\lambda = 1$ (lossless case).

Contrary to the case of the bowed string with the assumption of a perfect sticking, the lossless case ($\theta = 0$) is the limit case of Raman's model if the derivative of the nonlinear function is finite [Woo93b]. In order to point out the effect of losses, stability limits in the lossless case are plotted with dashed lines on figure 3.4. The range of stability is increased when losses are taken into account, but the diagram remains close to the diagram obtained in the lossless case, provided losses are small.

3.3.4 Stability criterion in the case of conical-like woodwinds ($N \neq 1$)

A stability criterion can be established from equation (3.14) in the same way as for the case $N = 1$. For this purpose, we use the vectors

$$\mathbf{P}_n = \begin{pmatrix} p_n \\ \vdots \\ p_{n-(m-1)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n-(m-1)} \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad \mathbf{E}_n = \begin{pmatrix} e_n \\ \vdots \\ e_{n-(m-1)} \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

which contains m elements, which are the values of the variables p_i , u_i and e_i during one period. If a perturbation \mathbf{E}_n is added to a known periodic solution \mathbf{P}_n , the pressure vector during one cycle becomes

$$\tilde{\mathbf{P}}_n = \mathbf{P}_n + \mathbf{E}_n, \quad (3.39)$$

and the acoustic flow vector is

$$\tilde{\mathbf{U}}_n = F(\tilde{\mathbf{P}}_n). \quad (3.40)$$

Similarly to the case $a = b$, components \tilde{u}_i of the volume velocity vector $\tilde{\mathbf{U}}_n$ are calculated at first order of e_i as in the case $a = b$:

$$\tilde{u}_i = F(p_i + e_i) \simeq \left. \frac{dF}{dp} \right|_{p_i} e_i + F(p_i) = h_i e_i + F(p_i). \quad (3.41)$$

Up to now, the derivatives h_o and h_c of the nonlinear function are assumed to be finite. The case of infinite derivative is discussed in section 3.3.4.2. This assumption excludes the case of the beating reed regime in the scope of some lossless models of reed instruments, and the case of the bowed string if sticking is perfect. The limit case $h_n = 1$ is not studied, and we assume $h_n \neq 1$ in the following analysis.

Combination of equations (3.14), (3.39) and (3.41) gives

$$e_n = \frac{1}{h_n - 1} [\lambda h_{n-a} e_{n-a} + \lambda h_{n-b} e_{n-b} - \lambda^2 (h_{n-m} + 1) e_{n-m}], \quad (3.42)$$

which can be written as a matricial relationship between the vector \mathbf{E}_n and the vector \mathbf{E}_{n-1} :

$$\mathbf{E}_n = \mathbf{M}_n \mathbf{E}_{n-1}, \quad (3.43)$$

with

$$\mathbf{M}_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_a & 0 & \dots & 0 & \alpha_b & 0 & \dots & 0 & \alpha_m \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & & \vdots \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

$$\text{where } \begin{cases} \alpha_a = \lambda h_{n-a} / (h_n - 1) \\ \alpha_b = \lambda h_{n-b} / (h_n - 1) \\ \alpha_m = -\lambda^2 (h_n + 1) / (h_n - 1) \end{cases} \quad (3.45)$$

are the first elements of the rows a , b , and m respectively. Matrices \mathbf{M}_n are periodic with the same period as the studied signal since their elements only depend on the values of the derivative of the nonlinear relation calculated for the values of the unperturbed pressure signal. Thus the matrix

$$\mathbf{M} = \prod_{s=0}^{m-1} \mathbf{M}_{n-s} \quad (3.46)$$

links the perturbation vector at the time step n to the vector one period earlier :

$$\mathbf{E}_n = \mathbf{M}\mathbf{E}_{n-m}. \quad (3.47)$$

If the modulus of the determinant of the matrix is greater than unity, the perturbation increases with time. This gives a necessary condition for stability of a given periodic motion :

$$\begin{cases} |\det(\mathbf{M})| > 1 & \rightarrow \text{unstable,} \\ |\det(\mathbf{M})| \leq 1 & \rightarrow \text{stable or unstable.} \end{cases} \quad (3.48)$$

If the modulus of a given eigenvalue of \mathbf{M} is greater than unity, there is a change in the shape of the signal, and the initial state is unstable. On the contrary, if no eigenvalue has a modulus greater than unity, the studied periodic oscillation is stable. This is a sufficient stability condition :

$$|\text{eigenvalues}(\mathbf{M})| < 1. \quad (3.49)$$

In the case of two-step oscillations, the necessary condition (3.48) for a two-step motion is :

$$\lambda^{2m} \left| \left(\frac{h_o + 1}{h_o - 1} \right)^{n_o} \left(\frac{h_c + 1}{h_c - 1} \right)^{n_c} \right| < 1, \quad (3.50)$$

where n_o is the number of opening steps and n_c is the number of closing steps. If $n_c < n_o$, the motion is standard, if $n_c > n_o$ it is inverted. Necessary condition (3.48) can either be written

$$\lambda^{2m} \left| \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1 - Q_2} \right| < 1, \quad (3.51)$$

where Q_1 and Q_2 are polynomials of h_o and h_c depending on n_o and n_c .

This method can be considered as an application of the Floquet theory in a phase space where the coordinates are the m successive values of p_n . The sampling rate is minimum when there are $m = a + b$ samples during one period with a and b co-prime integers such as $b/a = L_b/L_a$. In this case, there are m eigenvalues. If $\lambda = 1$, one of them is unity, it corresponds to a displacement along the phase trajectory and is not source of instability [BPV88]. When the sampling rate is q times the minimum sampling rate, eigenvalues are the same as in the previous case but are q times degenerated.

3.3.4.1 The case $N = 2$ (conical-like resonator)

For high values of a and b , various solutions can be found, but we limit the details of the discussion in the particular case of an instrument with a stepped cone made with two cylinders, which is the first approximation of conical instruments. In this case, $a = 1$ and $b = 2$. Most features of this instrument can be extended to instruments with other values of a and b . If $a = 1$ and $b = 2$, solutions which frequency corresponds to the first resonance are only the static regime, standard and inverted Helmholtz motions. As seen in the case of the clarinet, losses do not change greatly the stability conditions, thus, for convenience, the following analysis is made in the scope of a lossless resonator ($\lambda = 1$). If $\lambda = 1$, the standard Helmholtz motion is such that $p_c = (T_o/T_c)p_o$ and $F(p_o) = F(p_c)$.

With $\lambda = 1$, condition (3.51) is equivalent to

$$Q_1 Q_2 < 0 \quad (3.52)$$

If $a = 1$ and $b = 2$, we get for the standard Helmholtz motion ($n_o = 2$ and $n_c = 1$) :

$$Q_1 = h_o^2 h_c + 2h_o + h_c \quad (3.53)$$

$$Q_2 = h_o^2 + 2h_o h_c + 1 \quad (3.54)$$

thus

$$Q_1 > 0 \iff h_c > -2h_o/(h_o^2 + 1), \quad (3.55)$$

$$Q_2 > 0 \iff \begin{cases} h_c > -(1 + h_o^2)/2h_o & \text{if } h_o > 0 \\ h_c < -(1 + h_o^2)/2h_o & \text{if } h_o < 0 \end{cases} . \quad (3.56)$$

If $|h_c| < 1$, $Q_2 > 0$ whatever the value of h_o , thus the necessary condition $Det(\mathbf{M}) \leq 1$ is completely determined by the condition $Q_1 < 0$. The limit $Q_1 = 0$ is plotted as a function of h_o and h_c on figure 3.5 with a dashed line. The calculation of eigenvalues of \mathbf{M} shows that all combinations of h_o and h_c such that $h_c > -h_o/2$ give unstable solutions (see figure 3.5). This result can be generalized to any value of T_o and T_c : to get a stable solution a necessary condition is

$$h_c > -(T_c/T_o)h_o. \quad (3.57)$$

This condition is the criterion given by Weinreich and Caussé [WC91], which is deduced from the estimation of the decreasing of the modes when a positive resistance h_c is inserted on the resonator during T_c and a negative resistance h_o during T_o . It can be shown that the slopes of the nonlinear function are such that $h_c = (-T_o/T_c)h_o$ when the blowing pressure is equal to the subcritical pressure P_{sc} (see figure 3.3). In the scope of usual nonlinear models of woodwinds, condition (3.57) is not satisfied for the smaller standard solution (SM2 on figure 3.3). The instability of this solution is consistent with the properties of inverse bifurcations (see *e.g.* [BPV88]).

The calculation of eigenvalues of \mathbf{M} in the case of the inverted motion (IM on figure 3.3) shows that this solution cannot be stable in the scope of lossless models, whatever the non-linearity such that $h_c < 1$, at least in the non beating reed regime. Nevertheless, it must be noted that this waveform can be observed in real stepped cones [ODK02, DGK00, DDO02].

For other values of b/a and T_o/T_c , the same method is applied, but mathematical expressions are intricate and eigenvalues of \mathbf{M} are found numerically.

3.3.4.2 The case of infinite derivatives

Is it possible to use the previous formulae when one of the derivatives of the nonlinear function tends toward infinity? We show that a general approach is possible if the inverse function $p = F^{-1}(u)$ exists.

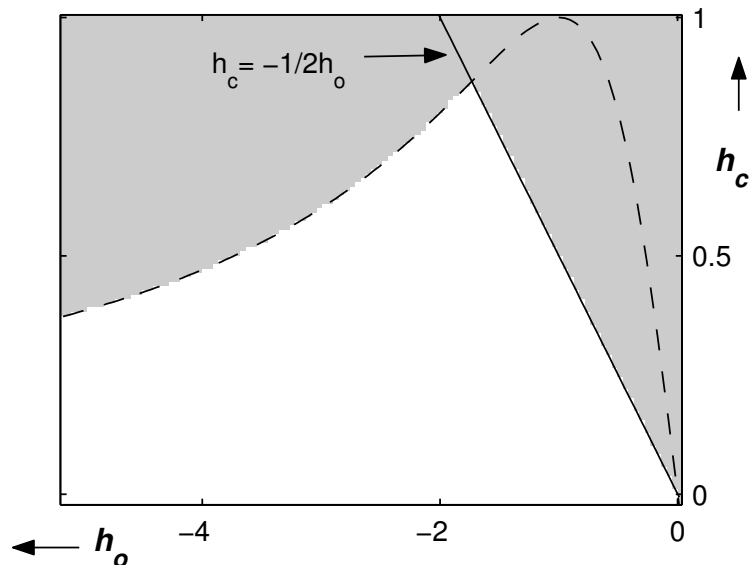


FIG. 3.5 – Stability map in the case $a = 1$ $b = 2$ for the standard Helmholtz motion plotted as a function of h_o and h_c . Grey area : the solution is unstable, white area : the solution is stable. Dashed line : $h_c = -2h_o/(h_o^2 + 1)$, continuous line : $h_c = -h_o/2$.

If the derivative of $F(p)$ tends toward infinity, the derivative of F^{-1} vanishes. The Floquet method remains possible, by writing $\tilde{u}_n = u_n + e'_n$, and $\tilde{p}_n = F^{-1}(u_n) + \frac{dp}{dF} |_{u_n} e'_n$. With this approach in the case of finite derivatives, the results remain unchanged, e.g. equation (3.36) is found back. For a beating reed, one derivative is infinite (for the open reed), the other one is zero (for the closed reed). Thus for the closed reed the expansion of $F(p)$ is used (remember that $F(p)$ is zero around all the limit values), and for the open reed the expansion of $F^{-1}(u)$ is used. The equivalent of equation (3.42) is obtained by using equation (3.14) and replacing : i) if the reed is closed at time i , u_i by zero and p_i by e_i ; ii) if the reed is open at time i , u_i by e'_i , and p_i by 0, because the derivative is zero. As a consequence, the equivalent of equation (3.42) can be written :

$$-\lambda e'_{i-a} - \lambda e'_{i-b} = e_i - \lambda^2 e_{i-m} \quad (3.58)$$

if the reed is closed, or

$$e'_i - \lambda e'_{i-a} - \lambda e'_{i-b} + \lambda^2 e'_{i-m} = 0 \quad (3.59)$$

if the reed is open (depending of the considered case, the terms with $(i-a)$ or $(i-b)$ indices can vanish). It appears that the equation for the opening reed does not involve any term in e . The Floquet method can be used by considering a vector $E_n = (e'_n, e'_{n-1}, \dots, e'_{n-n_c}, \dots, e'_{n-n_o+1}, e_{n-m+n_o}, \dots, e_{n-m+1})^t$, where n_o and n_c are the numbers of opening and closing steps respectively.

The following analysis is valid only for the Helmholtz motions : it is assumed that there are $n_c = a$ times with closed reed and $n_o = b$ times with open reed (standard Helmholtz motion), or $n_c = b$ times with closed reed and $n_o = a$ times with open reed (inverted Helmholtz motion). The study of the

matrix relating E_n and E_{n-m} leads to the following eigenvalues equation, valid for the more general case :

$$(\mu^{q+1} - \lambda^{2q+2})^{n_o-r} (\mu^{q+2} - \lambda^{2q+4})^r = 0 \quad (3.60)$$

where μ is an eigenvalue, and $n_o = n_c q + r$, where q and r are two integers, with $0 \leq q$ and $0 \leq r < n_c$ (q and r/n_c are respectively the floor and the remainder of n_o/n_c). A consequence is that all eigenvalues have their modulus equal to λ^2 . Thus if $\lambda \leq 1$, all Helmholtz motions are stable in the beating reed regime.

3.3.4.3 Limits of the method

The method based upon the series expansion at the first order of the perturbation can fail if eigenvalues reach unity. It is the case when $\lambda = 1$, and more generally it can happen for particular values of λ , h_0 , and h_c . As an example, in equation (3.36) it happens when $\lambda = 1$ and $h_0 = -h_c$. In order to treat such cases an expansion to a higher order is required, and a general approach becomes impossible. In section 3.6² such a particular case is studied with a nonlinear function given by equation (3.61).

3.3.4.4 Non integer values of N

As mentionned in [Woo93b] for the bowed string, the standard Helmholtz motion (with $n_o/n_c = b/a$) can give way to a periodic regime with a shorter slipping interval. In order to investigate this possibility, the study of the stability of a woodwind such that $a = 2$ and $b = 5$ is investigated as in section 3.3.4.1. The Helmholtz motion ($n_o/n_c = 5/2$) appears to be unstable in the lossless case and stable only for very low values of h_c if λ is close to unity. On the contrary, the two-step motion such that $n_o/n_c = 6$ is stable for a wide range of (h_o, h_c) , and a stability map similar to the one of figure 3.5 is obtained. The possibility of the transition from the Helmholtz motion toward such two-step motion is confirmed by time domain simulations using a particular model for the nonlinear function (see section 3.4.3).

3.4 Application to particular nonlinear models

In order to illustrate the influence of the shape of the nonlinear function, we discuss the stability of the Helmholtz motion generated by models built with stepped cones or cylinders and the two nonlinear functions plotted on figure 3.6. The first function is the nonlinear model F_{ber} discussed in companion paper [ODK02]¹, which is deduced from the assumption of a quasi-static behaviour of the reed and the fluid at the entrance of the mouthpiece :

$$F_{ber}(\Delta p) = \begin{cases} Z_c U_{rme} \text{sign}(\Delta p) (1 - \frac{\Delta p}{P_M}) \sqrt{\frac{|\Delta p|}{P_M}} & \text{if } \Delta p < P_M \\ 0 & \text{if } \Delta p > P_M \end{cases} \quad (3.61)$$

²Annexe reproduite en fin de chapitre

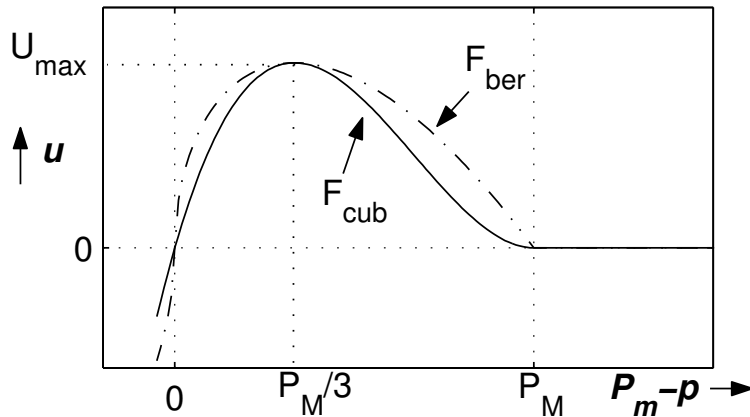


FIG. 3.6 – Two models for the non linear relationship $u = F(p)$

with the global embouchure parameter

$$U_{rme} = \sigma H_0 w \sqrt{2P_M/\rho}, \quad (3.62)$$

where H_0 is the opening of the reed at rest, w is the width of the reed channel, σ is a contraction factor for the incoming jet. P_M is the pressure difference above which the reed is closed (beating reed regime threshold). For our purpose, it is more convenient to characterize the embouchure by using the dimensionless parameter

$$\zeta = (Z_c/P_M)U_{rme}, \quad (3.63)$$

as defined in [Ker95].

The other nonlinear model, noted F_{cub} , is not a physical model but is deduced from the previous one. It is a third order polynomial in p chosen so as : (i) the beating pressure P_M is the same as for F_{ber} ; (ii) F_{ber} and F_{cub} are maximum for the same blowing pressure ($P_M/3$). With these hypotheses, it comes that

$$F_{cub}(\Delta p) = \begin{cases} Z_c U_{rme} \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{sign}(\Delta p) (1 - \frac{\Delta p}{P_M})^2 (\frac{|\Delta p|}{P_M}) & \text{if } \Delta p < P_M \\ 0 & \text{if } \Delta p > P_M \end{cases}. \quad (3.64)$$

For a given mouth pressure, the acoustic pressure is the same with both functions if resonators are lossless, and slightly different when losses are taken into account. One difference is that dF_{cub}/dp is continuous while dF_{ber}/dp is not. But, as far as stability is concerned, the main difference lies in the finite value of dF_{cub}/dp when $p = P_m$ (near the beating threshold), while dF_{cub}/dp tends toward infinity when p tends toward P_m .

3.4.1 The case of the clarinet ($a = b$)

Using time domain simulations of a lossless clarinet model with a nonlinear element described with the function F_{ber} , Kergomard [Ker95] verified that, when criterion (3.36) is not satisfied, period

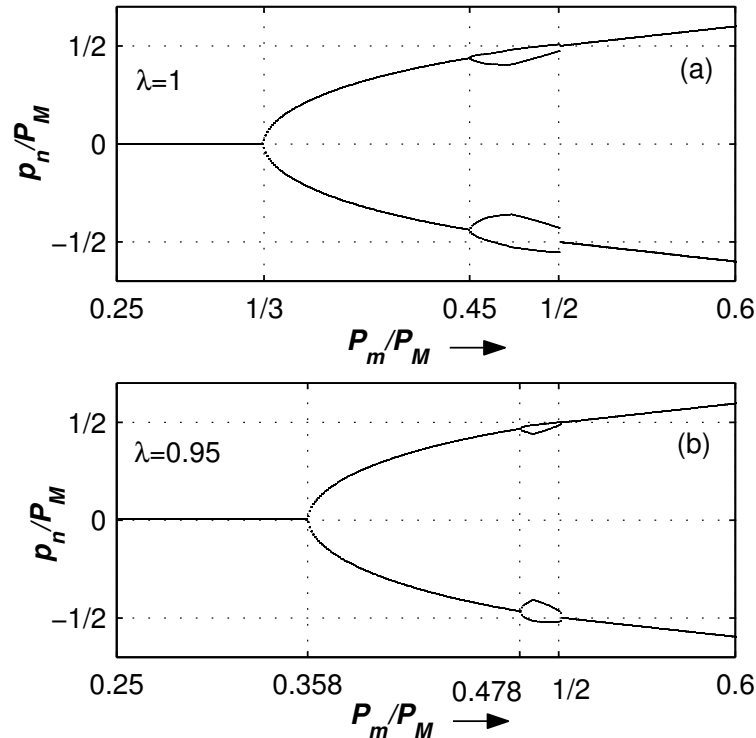


FIG. 3.7 – Bifurcation diagrams in the case of the clarinet. The nonlinear function is F_{ber} , $\zeta = 0.5$. (a) : using the lossless model ($\lambda = 1$), (b) : using Raman's model with $\lambda = 0.95$. The beating threshold is $P_m/P_M = 1/2$. The limits of stability $P_m/P_M = 0.450$ and 0.478 respectively for $\lambda = 1$ and $\lambda = 0.95$ are calculated with equation (3.37). The threshold of instability of the static regime calculated with equations (3.16), (3.25) and (3.28) gives $P_{th} = 1/3$ if $\lambda = 1$, and 0.358 if $\lambda = 0.95$, in accordance with time domain simulations.

doubling and non periodic oscillations can occur in the non beating reed regime. He also showed that a square signal of frequency equal to the first resonance frequency of the resonator is a stable solution in the beating reed regime, the transition between the non beating and the beating reed regime being discontinuous. The range of blowing pressure such that the square signal is not a stable solution depends on the embouchure parameter ζ , thus on the shape of the nonlinear function.

To complete these results, a similar analysis is made here with a loss parameter $\lambda < 1$. Oscillations are calculated by using recurrence equations (3.15), the nonlinear function being F_{ber} . After 100 to 1000 iterations, the signal does not evolve any more and the last 40 values of p_n are plotted for each value of P_m . By this way we draw a bifurcation diagram. If a two-step motion is a stable solution for a given P_m , then p_n takes only two different values : one for the opening episode ($p_n > 0$), and one for the closing episode ($p_n < 0$). If, for a given value of P_m , there is more than two different values of p_n then the two-step motion is not stable.

Figure 3.7 compares the bifurcation diagrams obtained in the lossless case and in the scope of

Raman's model. One effect of losses is the increase of the threshold pressure. Since the beating reed threshold remains nearly unchanged ($P_m \simeq P_M/2$), a consequence is the narrowing of the range of P_m corresponding to the non beating reed regime of oscillation. Concerning stability, the same scenario is observed in the lossless case (Fig. 3.7a) and when losses are taken into account (Fig. 3.7b). In both cases, the two-step solution is unstable in a range of P_m such that $P_m < P_M/2$, for which the oscillation is a "four-step" motion which is a subharmonic of the initial two-step motion. The two-step motion is stable in both cases for $P_m > P_M/2$, the value $P_m = P_M/2$ being the beating reed regime threshold. As expected, losses reduce the range of mouth pressure for which two-step motions are not stable. Both the instability threshold of the static regime, or threshold of oscillation, given by equation (3.25), and the limit of stability of the two-step oscillation given by equations (3.37) are in accordance with time domain simulations (see the caption of figure 3.7).

Note that the values of the embouchure parameter ζ are chosen to get stable and also unstable two-step oscillations. A method has been recently developed to measure the nonlinear characteristics $u(p)$ [DGO02]³, and first results show that typical values of the embouchure parameter ζ is of the order of magnitude of 0.5 and confirms that it is smaller than unity. It remains to explain why subharmonic oscillations are usually not observed in real woodwinds. Losses and discrepancies between the model and the real pressure-flow relationship could be the causes⁴.

3.4.2 The case $a = 1$, $b = 2$ (conical-like resonator)

As done previously in section 3.3.4.1, the discussion is limited to the particular case of an instrument with a stepped cone made with two cylinders ($a = 1$, $b = 2$). Most of its features can be extended to instruments with other values of a and b . The following analysis is limited to the lossless case ($\lambda = 1$).

In order to analyse the stability of the two standard motions (SM1 and SM2), the evolution with P_m of the points defined by the coordinates (h_o, h_c) is plotted on the same stability map as figure 3.5. This is done on figure 3.8 for the two nonlinear functions F_{ber} and F_{cub} , for two values of the embouchure parameter ($\zeta = 0.5$ and $\zeta = 0.8$), for the first standard motion and for the second one (respectively SM1 and SM2 on figure 3.3). For this purpose, the two values of the pressure in the mouthpiece are calculated for each solution and each nonlinear function as indicated in the companion paper [ODK02]⁵, and the corresponding derivatives h_o and h_c are deduced. Accordingly to the results of section 3.3.4.1, the smaller Helmholtz motion (SM2) is unstable with both functions. When the nonlinear function is F_{ber} , the higher standard Helmholtz solution (SM1) is firstly stable, then becomes unstable when the blowing pressure increases so that condition (3.49) is not satisfied. This occurs near the beating reed regime threshold, which corresponds to $P_m = P_M/3$ in this case, where $h_o \rightarrow \infty$ and $h_c \rightarrow \zeta$. As expected, the smaller is the embouchure parameter, the higher is the stability range. With the same embouchures, a different scenario is observed with the nonlinear function F_{cub} for the same solution (SM1). In this case, when P_m increases, h_o tends toward a finite value while $h_c \rightarrow 0$, and oscillations

³Chapitre 4.

⁴Voir le paragraphe 4.6.

⁵Chapitre 2.

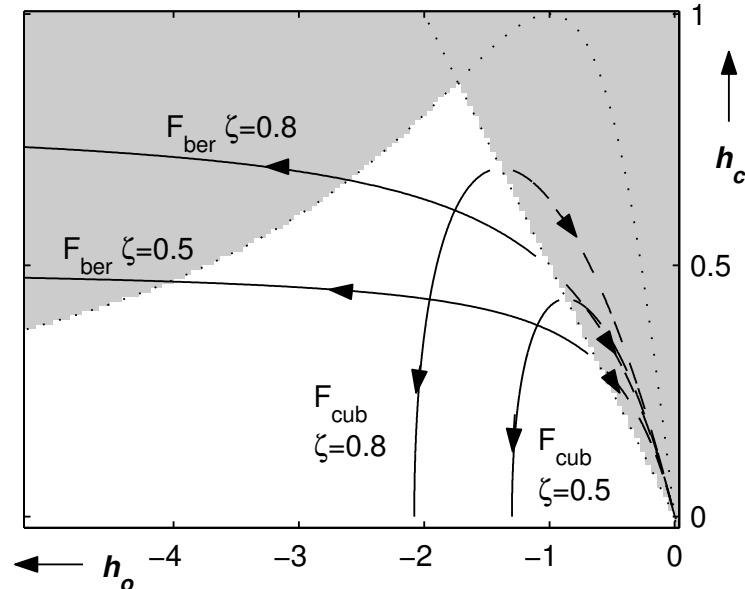


FIG. 3.8 – Evolution of the points (h_o^{cub}, h_c^{cub}) and (h_o^{ber}, h_c^{ber}) calculated for solutions SM1 (continuous lines) and SM2 (dashed lines) when P_m increases. Arrows indicates the evolution when P_m increases. Grey area : the solution is unstable, white area : the solution is stable.

remain stable. This behaviour is due to the finiteness of the slope $dF_{cub}/dp|_{p=P_m}$ and to the smooth transition from the non beating to the beating reed regime (see figure 3.6). This analysis points out that slight variations of the shape of the nonlinear function induce very different behaviours concerning stability. Note that this analysis is limited to the non beating reed regime, *i.e.* for $P_m < P_M/3$ in this case.

In order to valid the previous analysis, oscillations are calculated in the time domain by using the recurrence equation (3.14) and bifurcation diagrams are plotted in the same way as in the case of the clarinet (section 3.4.1). Diagrams of figure 3.9 are calculated for two values of the embouchure parameter ($\zeta = 0.5$ and $\zeta = 0.8$) in the case of the higher Helmholtz motion (SM1). When P_m increases from the lowest mouth pressure for which the mouthpiece pressure oscillates (P_{sc}), the solution SM1 is stable until it reaches the value above which condition (3.55) is not satisfied, then the system generates subharmonics and non periodic motions. Finally, when P_m is higher than the value above which the reed beats (*i.e.* $P_m > P_M/3$), the oscillation is stable again. As expected from figure 3.8, the range of stability is the greatest for the smallest embouchure parameter. This behaviour is consistent with the previous analysis based on the study of the derivatives (h_o and h_c) of the nonlinear characteristics : in both cases, the limits of stability deduced from (3.49) are in accordance with time domain simulations. Similar simulations are done for a model using the nonlinear function F_{cub} (the figure is not given here). In this case, as expected from the analysis based on the derivatives, the solution SM1 is unstable only for values of ζ very close to unity and for values of P_m close to P_{sc} .

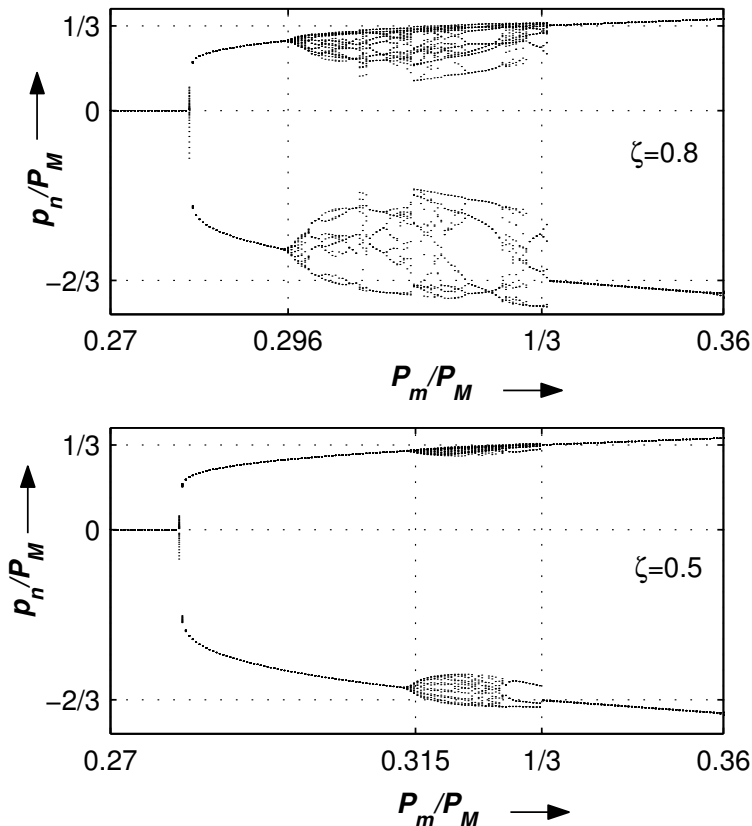


FIG. 3.9 – Bifurcation diagrams for the standard Helmholtz motion SM1 in a stepped cone $N = 2$ obtained for two embouchures ($\zeta = 0.5$ and $\zeta = 0.8$). The nonlinear function is F_{ber} , and $\zeta = 0.5$. Condition (3.55) is not satisfied for $P_m/P_M > 0.296$ when $\zeta = 0.8$, and for $P_m/P_M > 0.315$ when $\zeta = 0.5$. $P_m/P_M = 1/3$ is the beating threshold.

In order to verify that the lowest standard Helmholtz motion and the inverted one (respectively SM2 and IM on figure 3.3) are not stable in the non beating reed regime, time domain simulations are used again. The nonlinear function is F_{ber} . The signal is initially set to 99% of the value of the solution for each value of P_m . Such initial state is consistent with the method of section 3.3.4, the perturbation being here 1% of the amplitude. Note that it is the same mathematical solution that leads to SM2 (if $P_{sc} < P_m < P_M/3$) and to IM (if $P_m > P_M/3$), and that the beating threshold corresponds to $P_m = 2P_M/3$ for HI in the considered case [ODK02]⁶.

The bifurcation diagram of figure 3.3 shows that the solution SM2, valid in the range $P_{sc} < P_m < P_M/3$, is unstable and the acoustic pressure decreases toward 0. The inverted Helmholtz motion (IM) is unstable in the range $1/3 < P_m/P_M < 2/3$ and the iterative process converges toward the highest standard Helmholtz motion (SM1). Note that within this range of blowing pressure, the static solution ($p = 0$) is not stable. If $P_m > 2P_M/3$, that is in the beating reed regime, IM is stable. These results

⁶Voir le chapitre 1, paragraphe 2.5.2.

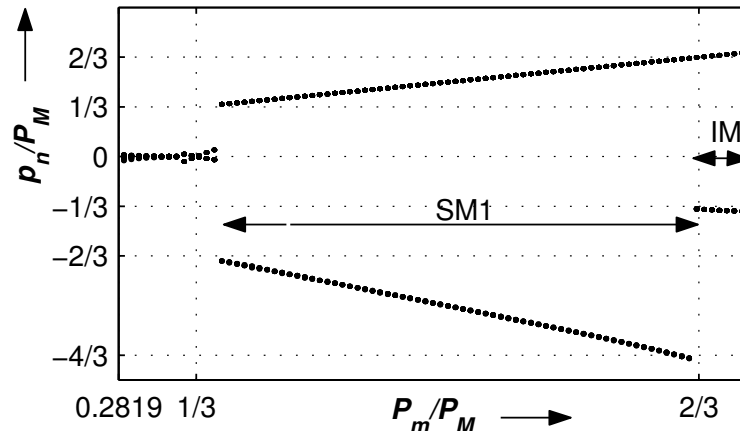


FIG. 3.10 – Bifurcation diagram for a stepped cone $N = 2$ when the pressure signal is initially set to *SM2* if $P_m/P_M \leq 1/3$, and *IM* if $P_m/P_M > 1/3$. The nonlinear function is F_{ber} , and $\zeta = 0.5$. The limit $P_m = P_M/3$ is the transition between the standard Helmholtz motion (*SM2*) and the inverted Helmholtz motion (*IM*), it is also the beating threshold for the solution *SM1*. The pressure $P_m = 2P_M/3$ is the beating reed threshold for the inverted Helmholtz motion (*IM*).

are consistent with the analysis based on the derivatives of the nonlinear characteristics, which shows that the inverted motion cannot be stable except in the beating reed regime (sections 3.3.4.2 and 3.6). This is in accordance too with experimental observations on stepped cones since the inverted motion is observed only at high levels, in the beating reed regime [ODK02, DGK00, DDO02].

3.4.3 Non integer values of N

In order to valid the results of section 3.3.4.4, the stability of the Helmholtz motion is investigated in the case of a cylindrical saxophone such that $b/a = 5/2$. As done previously, the initial solution is set to 99% of the Helmholtz solution for each value of P_m and the the evolution of the perturbation is calculated. The bifurcation diagram is not reproduced here, but the results are given : In the non beating reed regime (*i.e.* for $P_m < 2P_M/7$), the Helmholtz motion ($n_o = 5$, $n_c = 2$) evolves rapidly toward a waveform with a shorter closing episode ($n_o = 6$ and $n_c = 1$), which confirms the analysis of 3.3.4.4 where the standard Helmholtz solution has been found to be unstable in the non beating reed regime if b/a is not an integer. This behaviour is similar to the observations on a bowed string [WC91, Woo93b]. Nevertheless, as for the inverted motion, in the beating reed regime the Helmholtz motion ($n_o = 5$, $n_c = 2$) is stable, even in the lossless case. Note that, for two-step motions, the shorter is the closing episode the lower is the mouth pressure corresponding to the beating threshold. For example, the beating reed threshold corresponds to $P_m = P_M/7$ if $n_o = 6$ and $n_c = 1$, and to $P_m = 2P_M/7$ if $n_o = 5$ and $n_c = 2$.

3.4.4 Octaves of stepped cones

To complete this study, stability of the second register of woodwinds with stepped cones is investigated. For those resonators, $N = b/a$ is an integer. When studying the second register, the validity of the low frequency model for the reed can be discussed because reed resonance might not be negligible (see [WB74] for example). Nevertheless, we suppose that the nonlinear function is the same for the fundamental oscillation, of frequency f_1 , and for the octave, of frequency $f_2 = 2f_1$ since dispersion is not taken into account. The method of section 3.3.4 can be used to test the stability of solutions of frequency f_2 . The first step is to find the waveform. From the discussion in [ODK02] about the second register, we consider that the ratio n_o/n_c is the same for the first and the second register if N is even, and it is equal to $(N - 1)/2$ if N is odd. This property induces different behaviours as stability is concerned.

Even N : In the scope of lossless models, waveforms can be the same for the fundamental register and the octave if $N = b/a$ is even [ODK02]. In this case the ratios n_o/n_c are equal, and the stability analysis based on the derivative of the non linear function shows that the stability criterion for the octave is the same as for the fundamental vibration. This conclusion is quite well confirmed by the bifurcation diagram of figure 3.11a obtained for the case $N = 2$ when the signal is initially set to 99% of the value of the periodic solution. This bifurcation diagram is very similar to the one obtained for the standard Helmholtz motion of frequency f_1 (see Fig. 3.9). Nevertheless, contrary to the case of the fundamental oscillation, the octave oscillation is not stable as soon as the reed beats (*i.e.* for $P_m > P_M/3$), but for slightly higher mouth pressures. Another difference with the theoretical predictions is the presence of a component of frequency f_1 in the spectrum, with an amplitude of about 3% of the component of frequency f_2 . Therefore the signal is not exactly the octave, but an oscillation of frequency f_1 with a weak amplitude for the fundamental component compared to the second harmonic of frequency f_2 . Because of this component the pressure during the closing episode takes alternatively two slightly different values, which is the reason why the lower part of the curve of figure 3.11a is "doubled". Note that both the amplitude of the component of frequency f_1 , and the range of P_m such that the octave is not stable in the beating reed regime (*i.e.* for $P_m > P_M/3$) decrease with the amplitude of the initial perturbation.

Odd N : When N is odd, waveforms cannot be the same for the fundamental register and the octave [ODK02]. For example, the second register in the case $N = 3$ is a square wave ($n_o = 1$, $n_c = 1$), and such that $n_o = 2$ and $n_c = 1$ in the case $N = 5$. A consequence is that the values of the three components of the matrices M_n which depend on the derivatives of the nonlinear function are not equal for the fundamental and the octave, even if the matrices have the same structure. Using the perturbation method, stability maps were calculated for the second registers of stepped cones with 3, and with 5 cylinders. This analysis shows that the solutions corresponding to the second register are not stable, at least when the reed does not beat. To check up on the validity of this result, time domain simulation are calculated for the case of a stepped cone with 3 cylinders as for the case $N = 2$. Results

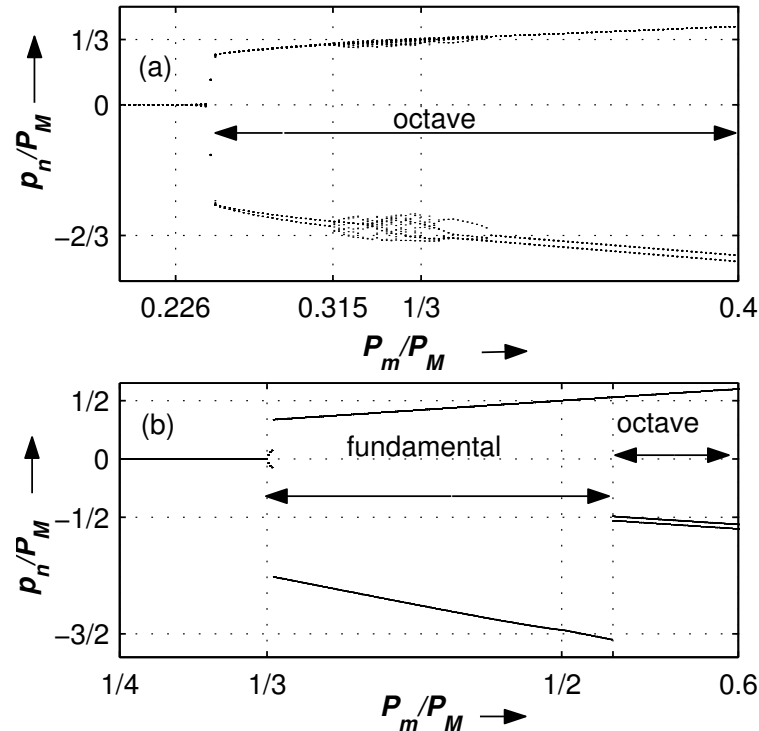


FIG. 3.11 – Bifurcation diagram of the second register for two stepped cones : (a) in the case $N = 2$ (or $a = 1, b = 2$), (b) in the case $N = 3$ (or $a = 1, b = 3$).

are plotted as bifurcation diagrams on figure 3.11b. In this case, the pressure waveform of the second register solution is supposed to be a square signal such as $p_o = -p_c$ and $n_o = n_c$. For $P_m < P_M/3$, there is no oscillation : the iterative process converges toward the static solution ($p = 0$). For $P_m > P_M/3$, the solution corresponding to the octave in the non beating reed regime is not stable, and the waveform evolves rapidly toward the Helmholtz motion (SM1) with the fundamental frequency f_1 . The shape of the pressure signal is then such that $n_o = 3n_c$ and $p_c = -3p_o$. For the second register, the beating reed threshold is $P_m = P_M/2$. For mouth pressures slightly higher than this threshold, the second register is a stable solution, in the beating reed regime. Like in the case N even, there is a weak component of frequency f_1 in the spectrum in the beating regime, and its amplitude decreases with the amplitude of the initial perturbation.

3.5 Conclusion

Using idealized models, a first attempt in investigating the stability of oscillations in conical woodwinds has been given. The analysis based on the derivative of the nonlinear characteristics is in accordance with time domain simulations. In the non beating reed regime, the stability of solutions depends on the nonlinear characteristics. In this regime, the standard Helmholtz motion can be stable,

depending on the playing parameters, while the inverted motion is not. A difference between the behaviour of bowed string and woodwinds models lies in the beating reed regime, which helps to stabilize the oscillations, even if the resonator is lossless. Even if the demonstration in the general case remains to be done, all the examined solutions are stable in the beating reed regime. In the scope of idealized models this has been proven for : standard and inverted motions and some three steps motions. The results for the octave are less clear.

The discussion was limited to dispersionless models. It would be interesting to investigate the stability in the scope of more sophisticated models. As suggested in [Woo93b], one solution could be the extend of the method of section 3.3.4 with a higher sampling rate and finite width reflection functions. This leads to an increase of the number of non zero elements in the matrices M_n , the solutions being calculated by using the harmonic balance technique [KOG00, GKN91]. Then comparison with more realistic time domain simulations could be done.

In order to validate our theoretical approach, comparison with experiments using a "digital bow" [WC91, ML96] or a "digital mouthpiece" [Mag85, MCL86] would be interesting too. Moreover, experiments on real instruments, by using a blowing machine, would be of great interest. To achieve a relevant comparison with theory, the knowledge of the nonlinear characteristics of real instruments is needed. We have recently developed a method for measuring pressure-flow characteristics of real reed woodwinds [DGO02], and the measurement of various characteristics, with different reed and mouthpiece combinations, would be useful for this purpose⁷.

⁷Voir le chapitre 4.

3.6 Appendix : Stability for $\lambda = 1$ with an infinite derivative

When $\lambda = 1$ and one derivative is infinite, stability of the beating reed regime is difficult to study in the general case. Hereafter the study is limited to the case of the clarinet ($a = b = 1$) and to the case of the inverted Helmholtz motion when $a = 1$ and $b = 2$. Instead of the variables defined by equations (3.11) and (3.12), dimensionless variables are used :

$$p_n = p(n\Delta t)/P_M, \quad (3.65)$$

$$u_n = \frac{Z_c}{2}u(n\Delta t)/P_M, \quad (3.66)$$

leading to dimensionless equations :

$$u_n - u_{n-1} - u_{n-b} + u_{n-m} = p_n - p_{n-m} \quad (3.67)$$

$$u_n - u_{n-b} = \sum_{i=n-b}^{i=n} p_i \quad (3.68)$$

(see equation (2.22) and equation (2.30) of the companion paper [ODK02]⁸). When the reed is open, the function F_{ber} can be written with dimensionless parameters :

$$u_n = -\zeta(1 + e_n)\sqrt{|e_n|}\text{sign}(e_n) \quad (3.69)$$

where

$$p_n = \gamma + e_n \quad \text{and} \quad \gamma = P_m/P_M. \quad (3.70)$$

When the reed is closed, $u_n = 0$ (it is assumed that the perturbation is small and that the reed beats although the perturbation). The function vanishes when the perturbation vanishes, and the derivative is infinite for $e_n = 0$. In section 3.3.4.2 it has been found that the Floquet method cannot be applied. Hereafter the second order expansion of the nonlinear function will be used.

3.6.1 The clarinet

Considering first the case of a clarinet ($a = b = 1$, $m = 2$), the solution corresponding to the fundamental regime is a periodic square wave of period m . It is such that : $p_o = \gamma$, $u_o = 0$; $p_c = -\gamma$, $u_c = 0$, where p_o , p_c , u_o and u_c are the values of the pressure and the flow during the opening (o) and the closing (c) episodes. For the perturbed regime, the starting point is an open reed at time with index 0, and a beating reed at time with index 1. Equation (3.69) is used for even n , and $u_n = 0$ for odd n . Equation (3.67) leads to :

$$\begin{aligned} -u_2 - u_1 &= +\zeta\sqrt{|e_2|}\text{sign}(e_2) + O(e_2^{3/2}) + \\ &\quad \zeta\sqrt{|e_0|}\text{sign}(e_0) + O(e_0^{3/2}) \\ &= e_0 - e_2. \end{aligned} \quad (3.71)$$

⁸Chapitre 2

At the first order in $e^{1/2}$ the result is : $e_2 = -e_0$; at the second order in $e^{1/2}$, the following result is obtained by identification :

$$e_2 = -e_0 \left(1 - \frac{4}{\zeta} \sqrt{|e_0|}\right). \quad (3.72)$$

The decreasing of the perturbation is therefore proven for even indices. It remains to study odd indices. Using equation (3.68), the following equations can be written :

$$-u_2 = e_3 + e_2 \quad \text{and} \quad -u_0 = e_1 + e_0. \quad (3.73)$$

Thus

$$\begin{aligned} \frac{e_3}{e_1} &= \frac{-u_0 + 2e_2 - e_0}{u_0 + e_0} = -1 + \frac{2e_2}{u_0 + e_0} \\ &= -1 + \frac{2e_0 \left(1 - \frac{4}{\zeta} \sqrt{|e_0|}\right)}{\zeta \sqrt{|e_0|} \text{sign}(e_0) - e_0}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Finally,

$$\begin{aligned} \frac{e_3}{e_1} &= -1 + \frac{2\sqrt{|e_0|}}{\zeta} + O(e_0) \\ &= -1 + \frac{2e_1 \text{sign}(e_1)}{\zeta^2} \end{aligned} \quad (3.75)$$

Thus $|e_3| < |e_1|$. The last result was given in [Ker95], but equation (3.72) is also necessary to a complete proof of the stability.

3.6.2 The inverted motion

The stability of the inverted Helmholtz motion in a lossless stepped cone such that $a = 1$ and $b = 2$ is investigated. The solution, of period m , is such that : $p_n = \gamma$, $u_n = 0$; $p_{n+1} = -\gamma/2$, $u_{n+1} = 0$; $p_{n+2} = -\gamma/2$, $u_{n+2} = 0$. Let us first note that for any value of b , when $a = 1$, the inverse Helmholtz motion is partly a generalization of the clarinet case. If index 2 is replaced by $m = b + 1$ in equations (3.71) and (3.72), one part of the proof of the stability is obtained, by using equation (3.67) : $|e_m| < |e_0|$. But it remains to prove the decreasing of the perturbation for other indices. For $b = 2$, it would mean that : $|e_4| < |e_1|$ and $|e_5| < |e_2|$. From equation (3.67) the two following equations are obtained :

$$-u_3 = e_4 - e_1 = e_5 - e_2, \quad (3.76)$$

thus

$$e_5 - e_4 = e_2 - e_1. \quad (3.77)$$

As a consequence, the difference between $e_{n+2} - e_{n+1}$ does not decrease when n tends to infinity. This result can be related to the fact that for the steady-state regime equation (3.15) leads effectively to $e_{n+2} = e_{n+1}$, except if $\lambda = 1$, the result being undetermined! Actually we prove hereafter that any regime such as : $p_n = \gamma$, $u_n = 0$; $p_{n+1} = -\gamma/2 + \delta$, $u_{n+1} = 0$; $p_{n+2} = -\gamma/2 - \delta$, $u_{n+2} = 0$ is

stable, provided that δ is small enough in order for the reed to be in the beating regime. One gets a continuum of stable regimes, depending on the initial conditions. This can be related to the "between the raindrops motion" discussed in [Woo93b, WC91]. This fact is surprising, but we have seen that when $\lambda < 1$ only one regime exists, with zero δ . For the proof, let us write as a starting point :

$$\begin{aligned} p_0 &= \gamma + e_0; p_1 = -\gamma/2 + \tilde{e}_1; u_1 = 0; \\ p_2 &= -\gamma/2 + \tilde{e}_2, u_2 = 0. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Writing

$$2\delta = \tilde{e}_1 - \tilde{e}_2, \quad (3.79)$$

$$e_1 = \tilde{e}_1 - \delta = e_2, \quad (3.80)$$

the new starting point is written as :

$$\begin{aligned} p_0 &= \gamma + e_0; p_1 = -\gamma/2 + \delta + e_1; u_1 = 0; \\ p_2 &= -\gamma/2 - \delta + e_1; u_2 = 0. \end{aligned} \quad (3.81)$$

We know that

$$e_3 = -e_0 \left(1 - \frac{4}{\zeta} \sqrt{|e_0|}\right). \quad (3.82)$$

Then, from equation (3.68) :

$$2e_1 = u_3 - e_3, \quad e_1 + e_4 = -e_3, \quad 2e_4 = -e_3 - u_3. \quad (3.83)$$

The calculation of e_4/e_1 is done in a similar way that for the clarinet :

$$\frac{e_4}{e_1} = -\frac{u_3 + e_3}{u_3 - e_3} = -1 + \frac{2\sqrt{|e_3|}}{\zeta} + O(e_3). \quad (3.84)$$

Thus e_4/e_1 is less than unity, as well as $e_5/e_2 = e_4/e_1$ (see equation 3.77), and the proof is achieved.

Chapitre 4

Non-linear characteristics of single reed instruments : quasi-static volume flow and reed opening measurements

auteurs : J-P. Dalmont, J. Gilbert, S. Ollivier.

Ce chapitre reproduit un article rédigé en anglais soumis à la revue Journal of the Acoustical Society of America. Cet article présente une méthode de mesure de la relation pression-débit caractérisant le système excitateur (bec+anche) en régime statique. Dans une première partie nous rappelons l'état de l'art concernant la modélisation de l'écoulement entrant et la modélisation de l'anche. Ensuite nous décrivons un dispositif expérimental et un protocole permettant de mesurer la relation pression-débit caractérisant l'embouchure. L'originalité de la méthode tient à l'utilisation d'un diaphragme placé à la sortie du bec à la place du résonateur. Le diaphragme joue un double rôle : il permet d'une part d'empêcher la mise en oscillation de l'anche et d'autre part de mesurer le débit à l'aide de deux capteurs de pression. Grâce à ce dispositif il est possible de mesurer l'intégralité de caractéristique non-linéaire d'un véritable bec, avec son anche, en régime statique. Ceci est à notre connaissance une première. À l'aide d'un dispositif optique la hauteur du canal d'entrée est également mesurée, ce qui permet d'évaluer notamment la raideur de l'anche.

Concernant le comportement du fluide, les mesures sur un bec réel sont en accord avec les précédentes études menées sur des géométries simplifiées. Ces mesures confirment qu'un modèle basé sur la relation de Bernoulli avec un coefficient de vena contracta constant est une approximation valable sauf pour les très petites ouvertures, pour lesquelles le dispositif de mesure optique n'est plus fiable.

En ce qui concerne l'anche, les résultats expérimentaux confirment la validité de l'hypothèse d'une raideur constante sur une grande partie de la caractéristique non-linéaire. Pour certaines embouchures la raideur est constante quasiment jusqu'à la fermeture, tandis que pour d'autres la raideur de l'anche augmente à partir d'un certain seuil au fur et à mesure que l'ouverture diminue. Dans ce cas l'accord avec le modèle élémentaire est plus limité même si la caractéristique non-linéaire s'en éloigne

relativement peu. Par ailleurs les résultats expérimentaux mettent en évidence un comportement visco-élastique de l'anche [MGBG94]. Deux temps de relaxation grands devant la période d'oscillation ont été mis en évidence : l'un de l'ordre de 10 s, l'autre de l'ordre de 10^3 s. Ces observations sur l'anche seront à compléter par une étude en régime dynamique.

Le bon accord des résultats expérimentaux avec le modèle élémentaire permet une estimation relativement précise de la valeur des paramètres du modèle élémentaire équivalent. Nous en donnons quelques valeurs typiques. L'estimation des paramètres du modèle est utilisée dans le chapitre 6 pour calculer le spectre d'une clarinette, que nous comparons au spectre mesuré.

En fin de chapitre un complément en français analyse succinctement les conséquences des différences entre le modèle élémentaire et les caractéristiques mesurées en ce qui concerne la stabilité.

4.1 Introduction

Sound production in reed wind instruments is the result of self-sustained oscillations. A mechanical oscillator, the reed, acts as a valve which modulates the air flow entering into the mouthpiece. The destabilization of the mechanical element is the result of a complex aeroelastic coupling between the reed, the air flow into the instrument driven by the mouth pressure of the musician, and the resonant acoustic field in the instrument itself. Following McIntyre et al. [MSW83], wind instruments can be described in terms of lumped model formed by a closed feedback loop operating as a self-sustained oscillator. In their model the loop is made up with two elements, a lumped non-linear element - the mouthpiece - and a linear passive element - the resonator, that is the instrument itself. The modeling and the measurement of the resonator has been extensively studied since Bouasse [Bou29] by many authors (see for example references in Nederveen [Ned98], or Fletcher and Rossing [FR98]). On the contrary, the non-linear element has only recently been the subject of thorough studies (see for example the review given by Hirshberg [Hir95]) and the knowledge of this elements action is considerably less than that of the resonator. The non-linear element can be defined by a relationship between the pressure difference across the reed and the volume flow at the inlet of the pipe of the instrument. Assuming a quasi-static response of the reed which neglects inertia and damping, the volume flow is thus an explicit function of the pressure difference. This function is called the characteristics of the reed. The dynamic aspects related to the reed are not considered in the present paper. These aspects are certainly not negligible with regard to the spectrum of the instrument [Tho79]. However when the playing frequency is small compared to the reed resonance frequency, it has been shown that these aspects are not essential from the strict point of view of the auto-oscillation [WB74, DGGK95]. Most authors converge on an elementary model of the characteristics presented in section 4.2.1 [WB74, Fle79, Fle93, STY87, Ker95, KOG00, ODK02, OKD02]. It is based on a quasi-stationary model of the air flow through the mouthpiece, and on a mechanical model of the reed discussed respectively in sections 4.2.2 and 4.2.3. The aim of the present paper is to obtain experimental data for the non-linear element in order to check the validity of the elementary model and to find realistic values of the parameters useful for physical modeling synthesis. The data may also give information helpful for the understanding of the physical phenomena involved. In the present paper, a method for measuring the characteristics is proposed, the measurements being done in quasi-stationary conditions. An artificial blowing machine is used (section 4.3.1). To perform the volume flow measurements, a diaphragm (orifice) taking the place of the resonator is used as a pressure reducing element for a differential pressure flowmeter (section 4.3.2). The major advantage of such a device is that the diaphragm also plays the role of a non-linear absorber [II67] which thwarts a possible standing wave in the mouthpiece. Oscillations of the reed are thus in most cases impeded and avoided if the diaphragm is well chosen. This makes it possible the measurement of the complete characteristics of real clarinet mouthpieces. The choice and dimensions of the diaphragm which depends on the reed properties are discussed section 4.3.3. The diaphragm does not induce additional sensors than those commonly present in an artificial mouth. In addition to the flow measurement, the opening of the reed is measured optically. Then the

measurements of the reed opening and of the pressure difference across the reed gives information on the evolution of the reed stiffness, which is important for the understanding of the quasi-static reed mechanics. For obtaining relevant results, an accurate calibration of the sensors has to be done. Thus a specific experimental procedure has been developed which is discussed in section 4.3.5. Some typical experimental results are presented section 4.4.1. Sections 4.4.2 and 4.4.3 are focused on two aspects of the mechanics of the reed, viscoelasticity and stiffness respectively. Section 4.4.4 is dedicated to the flow aspects. Finally in section 4.4.5 typical values of the parameters of the model are summarized and the accuracy of their determination is discussed.

4.2 State of art

4.2.1 Elementary model

Backus [Bac63] has presented the first measurements of the characteristics of a single reed instrument under steady flow conditions. The main result of Backus is a non-linear expression relating the volume flow u through the reed and two variables : the pressure difference Δp across the reed, and the opening H between the tip of the reed and the mouthpiece. The pressure difference Δp is equal to the mouth pressure P_m minus the pressure in the mouthpiece p . Backus fitted the experimental data by means of an expression in which u is proportional to $\Delta p^{4/3}$ and to $H^{2/3}$. There are good arguments to abort Backus formula [HdLMMW90, Hir95] and most flow models are now based on the stationary Bernoulli equation [WB74, Fle79, STY87, Fle93] which states that the volume flow u in the reed channel is given by :

$$u = wH \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \quad (4.1)$$

where w is the width of the reed channel, and ρ is the air density. The steps leading to equation (4.1) are summarized by Hirschberg [Hir95]. A reasonable prediction of the flow through the reed channel is obtained by assuming flow separation at the neck of the flow channel (figure 4.1a). For a uniform reed channel of height H , the pressure in the reed channel is equal to the pressure in the mouthpiece. Assuming a total turbulent dissipation of the kinetic energy in the jet without pressure recovery and neglecting friction in the reed channel, from Bernoulli equation, the velocity v_b is found to be :

$$v_b = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}. \quad (4.2)$$

Multiplying v_b by the jet cross section S_j provides a prediction for the volume flow entering into the mouthpiece. If there are rounded corners at the inlet of the reed channel, it is furthermore assumed that the jet cross section S_j is equal to wH , where w is independent of H . The motion of the reed determines the opening cross-section area and controls the volume flow entering in the mouthpiece.

Assuming the mechanical response of the reed to be reduced to its stiffness (see section 4.2.3 for discussion), the variation of the reed opening $y = H_0 - H$, where H is the reed opening and H_0 its

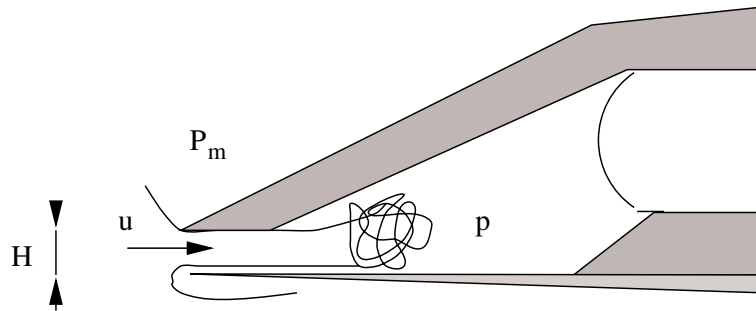


FIG. 4.1 – Flow control by the clarinet reed involving free jet formation and turbulent dissipation.

value in the absence of flow, is proportional to the pressure difference Δp :

$$y = \frac{\Delta p}{k_r} \quad (4.3)$$

where k_r is the stiffness (in Pa/m). Equation (4.3) is meaningful until H is equal zero (reed blocked on the lay). This corresponds to a limit value P_M of the pressure difference Δp given by :

$$P_M = k_r H_0 . \quad (4.4)$$

If the pressure difference is larger than P_M , the reed closes the opening and no flow enters into the mouthpiece. Finally the volume flow u can be written as a function of the pressure difference Δp :

$$\begin{cases} u = w(H_0 - \frac{\Delta p}{k_r})\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = wH_0(1 - \frac{\Delta p}{P_M})\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} & \text{if } \Delta p \leq P_M \\ u = 0 & \text{if } \Delta p \geq P_M \end{cases} . \quad (4.5)$$

This non-linear characteristics is displayed figure 4.2. Notice that the derivative is not continuous around the particular value of the pressure difference $\Delta p = P_M$. The maximum value of the flow $U_{max} = \frac{2}{3}wH_0\sqrt{\frac{2P_M}{3\rho}}$ is obtained for difference $\Delta p = \frac{P_M}{3}$ which is just below the threshold of oscillation [KOG00].

4.2.2 Quasi-stationary model of air flow

Hirschberg et al. [HdLMMW90] and Van Zon et al. [vZHGW90] have studied experimentally and theoretically the volume flow control by the motion of the reed in order to explore the limits of validity of the elementary model presented above, and to provide a better understanding of the results of Backus [Bac63]. Following Van Zon et al. [vZHGW90], due to the abrupt transition from the narrow reed channel of height H to the inner part of the mouthpiece of diameter D , flow separation occurs for sufficiently high Reynolds numbers ($Re = \rho u / (\mu w) > 10$ where μ is the shear viscosity of air) and a free jet is formed in the mouthpiece. For large values of $D/H > 10$, which is a typical value for single reed instruments, the pressure recovery upon deceleration of the flow in the mouthpiece is negligible. Hence the pressure p in the mouthpiece is assumed uniform and equal to the pressure at the end of the reed channel. Measurements by Van Zon et al. [vZHGW90] confirm this assumption : the pressure

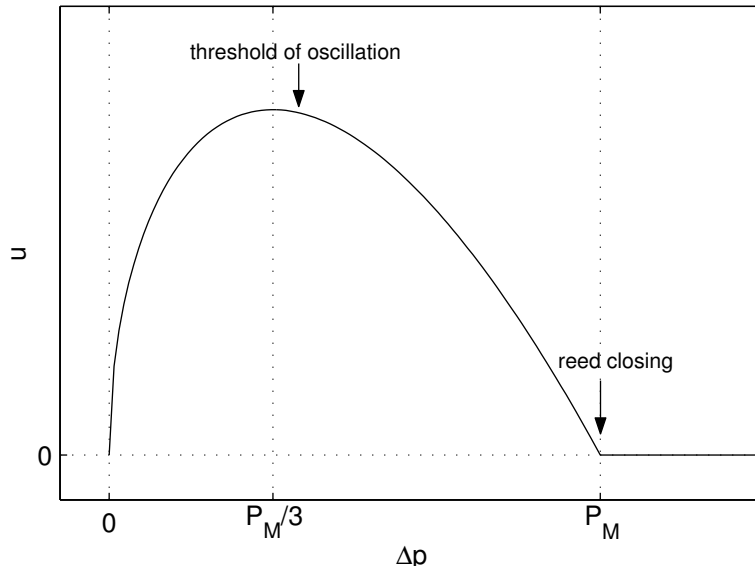


FIG. 4.2 – *Theoretical characteristics (equation (4.5)) : volume flow u as a function of the pressure difference Δp (arbitrary scales). P_M is the value of the pressure difference corresponding to the reed blocked on the mouthpiece.*

variations within the mouthpiece are less than 3% of the dynamic pressure in the jet. In the limit of high Reynolds numbers and a short channel ($ReH/L > 1000$ where L is the length of the reed channel) the volume flow can be estimated by assuming a uniform flow in the reed channel and by applying Bernoulli's equation. Ignoring the flow separation at the entrance of the channel, the volume flow is found to be given by equation (4.1) (elementary model). As noted in Hirschberg et al. [HdLMMW90] separation occurs when the edges at the entrance are sharp, which is the case for clarinet mouthpiece and its reed. A free jet with a section S_j lower than the reed-mouthpiece opening cross-section S is formed within in the channel. For short reed channels ($L/H < 3$) no reattachment of the flow occurs within the channel and the volume flow u is given by :

$$u = \sigma w H \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \quad \text{where } \sigma = \frac{S_j}{S}. \quad (4.6)$$

The coefficient σ is a "contraction" coefficient which is strongly dependent on the geometry of the reed channel inlet. For typical 2D mouthpiece geometry, values in the range $0.5 < \sigma < 0.61$ are expected. Laser Doppler flow measurements and flow visualisation experiments by Van Zon [vZHGW90] confirm the typical values of σ for the geometry considered. For low Reynolds number ($Re < 10$) and long reed channel ($L/H > 10$), the flow is well approximated by a fully developed Poiseuille flow. This corresponds to the case of the reed almost closed for which the volume flow is thus given by :

$$u = \frac{wH^3 \Delta p}{12\mu L}. \quad (4.7)$$

Both Poiseuille and Bernoulli limits were also found by Gilbert [Gil91] and Maurin [Mau92]. The intermediate flows between the two extreme cases mentioned above are discussed in Van Zon et al [vZHGW90] and Hirschberg et al. [HGWH91]. For $L/H > 4$, the jet formed by the separation of the flow from the sharp edge of the reed at the entrance of the reed channel reattaches to the wall after a distance of about $2H$. If the channel is short the friction is negligible, the volume flow u approaches the value given by equation (4.1) then the section S_j of the jet is equal to the reed-mouthpiece opening cross-section S . The quasi-stationary models described above assume a fixed separation point at the inlet or at the exit of the reed channel and a uniform section of the reed channel. This hypothesis is questionable in the case of the clarinet mouthpiece. The transition between the "reed channel" and the mouthpiece can be smooth. In such a case the reed channel height is not uniform, and for $L/H > 4$ the separation point is not easy to determine. As a consequence the coefficient σ is not easy to predict precisely and can take values larger than unity. In other words, in such a case the volume flow u can be larger than predicted with the elementary model (equation (4.1)). In the case of a fully separated jet flow (short reed channels situation, $L/H < 2$), the channel geometry is not expected to be critical and the result given in equation (4.6) could remain valid. All the theoretical results described before have been successfully compared with experimental results obtained with a two-dimensional mouthpiece geometry. A particularity of clarinet mouthpieces has to be mentioned. The reed channel consists of two parts : *a*) the front slit delimited by the edge of the mouthpiece tip and the reed and *b*) the lateral slits between the lay and the reed. Then the effective section S_j can be larger than the opening cross-section S . In such a case the contraction coefficient σ as defined by equation (4.6) can be larger than unity.

4.2.3 Quasi-static response of the reed

The mechanics of the reed is complex. The material is orthotropic and the dimension irregular. Prediction of the deformation of the reed is difficult because reed is an essentially inhomogeneous material [Hei91]. Its mechanical properties are variable and also depend strongly on the amount of water in the material [Hei91, ON99, MGBG94]. Marandas et al. [MGBG94] suggest that a dry reed displays a viscoelastic behaviour whereas a wet reed has a viscoplastic behaviour. The reed rolls up (or not) on the lay of the mouthpiece whose geometry is said to be very critical : from the experience of craftsmen it seems that variations of some hundredths of millimeters on dimensions of the curvature of the lay lead to change of behaviour perceptible by the musician [HGWH91]. In addition the lips of the musician are pressed on the reed. This means that the mechanical behaviour of the reed is also dependent on the coupling with the lip, a mechanical system which is also not easy to characterize. The reed is usually considered to be a one degree of freedom oscillator, that is the reed tip displacement y is related to the pressure difference Δp by the following equation :

$$\ddot{y} + g\dot{y} + \omega_r^2 y = \frac{\Delta p}{\mu_r} \quad (4.8)$$

where ω_r is the angular resonance frequency of the reed, g a viscous-damping coefficient and μ_r is a mass per area. The dynamic aspects related to the reed are not considered in the present paper and

equation (4.8) is then reduced to equation (4.3) with

$$k_r = \mu_r \omega_r^2 . \quad (4.9)$$

The determination of the reed stiffness k_r is difficult and only orders of magnitude for these parameters can be found in the literature. The difficulty lies in the fact that these parameters are generally found only in an indirect way and under experimental conditions which are not always realistic. Thus, equation (4.9) suggests that the stiffness can be deduced from the reed resonance frequency. In fact this is questionable because the surface per area μ_r is itself badly known. In addition the validity of the parameter obtained from the resonance frequency for low frequencies is also questionable. The stiffness was measured by Nederveen [Ned98] but not in a playing situation. Another solution for determining the stiffness k_r consists in measuring the impedance of reed [DGGK95, BG96]. Unfortunately the stiffness is obtained by using an equivalent surface whose value is badly known. Moreover, contrary to what one could suppose, the resonance frequency of the reed itself is difficult to determine. Thus Facchinetti and Boutillon [FBC01] showed that the frequency of a squeak depends as much on the resonator as on the reed. A simple method to determine the stiffness consists in determining the closing pressure P_M and the opening at rest H_0 . The closing pressure can be estimated with an artificial mouth by seeking the pressure for which the reed starts to oscillate after having been plated. This rather inaccurate method, based on the equation (4.4), is used implicitly by Kergomard [Ker95]. In the present paper another method allowing an accurate determination of the beating pressure is given. In the elementary model presented the reed stiffness k_r is assumed to be constant. A priori, it seems natural to think they are not. The most commonly admitted idea is that the vibrating length of the reed decreases with the opening. This would lead to an increase in the stiffness [Ned98]. To go further in the analysis various authors propose to model the reed as a bar [SS80, SS88, Stu89, Gaz94, Duc01, vW02]. Their results tend to show [Gaz94, Duc01, vW02] that the reed rolls up on the table of the mouthpiece only under certain conditions which are satisfied for only very particular reed geometries. With the dimensions of a real reed and table [Duc01] showed that the reed deforms without sticking to the table until a given point near the tip touches the table. This result is confirmed by numerical simulations [vW02] which show that the stiffness is nearly constant as long as the end of the reed does not touch the table and takes a larger value afterwards. This leads to a deviation from the model given by equation (4.5) as shown in figure 4.3. These studies would justify the "simplistic" approach of the model suggested (equation (4.5)) at least until the reed tip touches the lay. It remain to verify whether the transverse bending of the reed which is supported only on the side by the table does not modify this two dimensional behaviour.

4.3 Experimental device and procedure

4.3.1 The artificial mouth

The artificial mouth consists of a Plexiglas box with metal reinforcement [Gaz94]. The artificial lip consists of a cylindrical latex balloon of small diameter (10mm) in which a piece of foam saturated

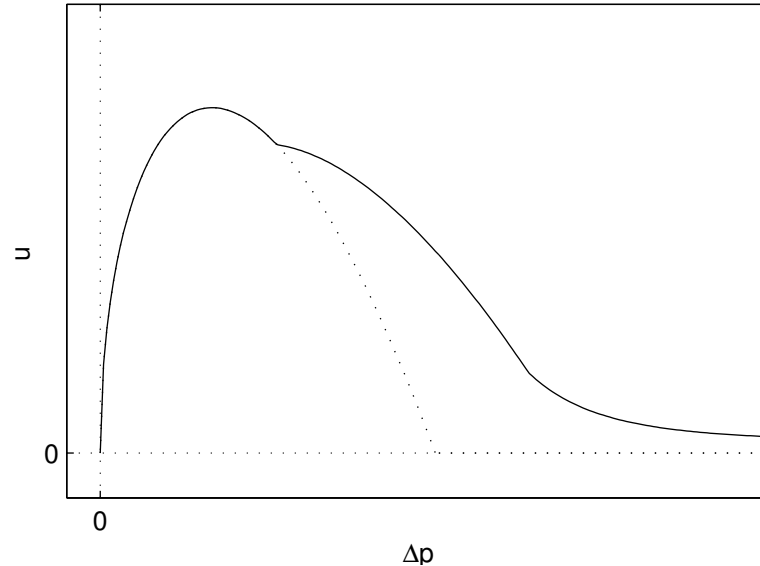


FIG. 4.3 – Theoretical characteristics with constant stiffness k_r (dotted line, equation (4.5)) and with a stiffness k_r increasing discontinuously with the pressure difference Δp (continuous line), according to Van Walstijn [vW02] (see text).

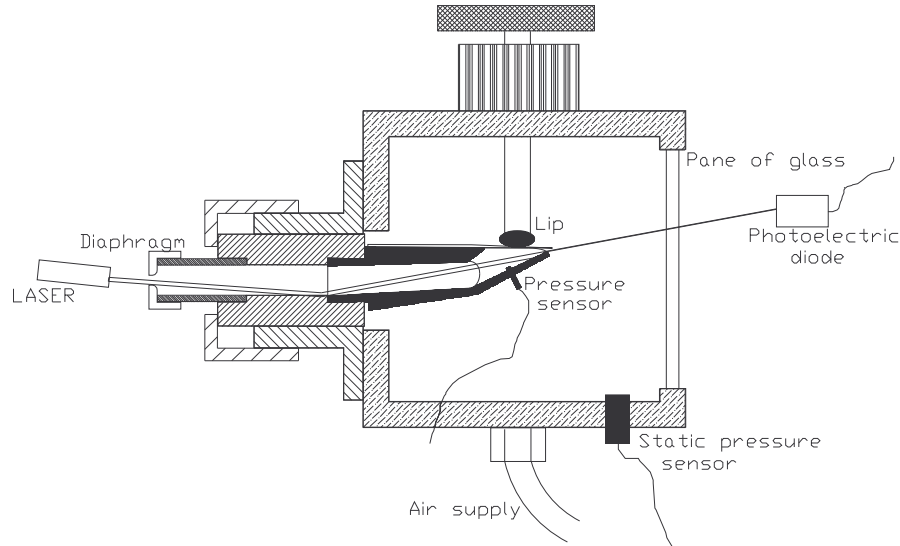
with water is inserted. The lip is fixed on a rigid support which position can be translated vertically by means of a screw. The mouthpiece is inserted in a metal barrel whose horizontal position can be adjusted. Resonators can be fixed onto the other end of the barrel. The air is supplied by a high pressure system through a sonic valve. The pressure P_m in the mouth is measured by a static pressure sensor. A miniature differential pressure sensor mounted in the wall of the mouthpiece measures the pressure difference $\Delta p = P_m - p$ between the mouth cavity and the inside of the mouthpiece. The reed slit opening is measured using a LASER beam and a photoelectric diode. This is the method used by Backus [Bac63] (see figure 4.4).

4.3.2 Flow measurement

To determine the volume flow, the resonator is replaced by a diaphragm playing the role of a pressure reducing element. Using the pressure measurements, the flow through the reed is calculated by using Bernoulli's equation :

$$p = \frac{1}{2} \rho \frac{u^2}{S_{dia}^2} \quad (4.10)$$

where the atmospheric pressure is used as a reference, S_{dia} being the section of the opening of the diaphragm. Compared to another flowmeter placed upstream of the cavity, the diaphragm, apart from its simplicity of implementation, has several advantages. It makes it possible, if its dimensions are well chosen, to obtain a complete characteristics since it avoids oscillations. Indeed apart from its pressure reducing effect the diaphragm plays, for acoustics, the role of a non-linear resistance damping standing

FIG. 4.4 – *Experimental device.*

wave inside the barrel. This makes our experiment similar to the one suggested by Benade ([Ben76], page 437).

4.3.3 The choice of the diaphragm

The diameter of the diaphragm is the result of a compromise. If this diameter is too large the pressure difference p created by the diaphragm is too small to be measured. If, on the contrary, it is too narrow the reed closes suddenly above a critical threshold and part of the non-linear characteristics cannot be explored [Hir95]. This phenomenon occurs when :

$$\frac{\partial P_m}{\partial u} = \frac{\partial(\Delta p + p)}{\partial u} = 0 . \quad (4.11)$$

Considering that the pressure Δp and p are given respectively by equations (4.5) and (4.10), it is thus necessary, to avoid phenomenon of sudden closure, that :

$$S_{dia} > wH_0/\sqrt{3} . \quad (4.12)$$

In practice the section of the opening of the diaphragm can be chosen to be close to the section of the reed slit at rest position. This might avoid the sudden closing of the reed while ensuring a sufficiently

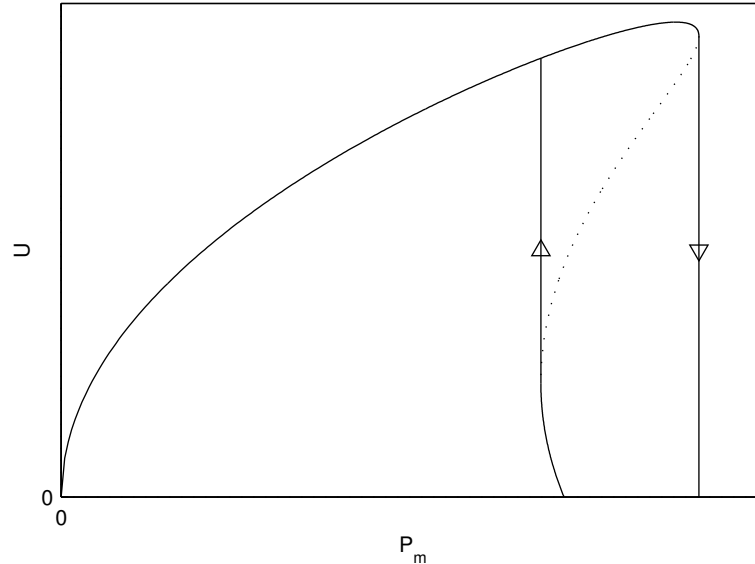


FIG. 4.5 – Volume flow u as a function of the mouth pressure P_m for the clarinet mouthpiece ended with a diaphragm (arbitrary scales).

large pressure difference. The cross section area of the jet formed by the diaphragm is assumed here to be equal to the section of the opening of the diaphragm. This assumption is valid only in the absence of a vena contracta. To avoid a vena contracta, the diaphragm has been chamfered (conical orifice). This chamfer suppresses the vena contracta and also extends the range in which the coefficient of discharge is constant [OME95]. In order to check this, the diaphragms have been calibrated by means of a volume gas meter. The calibration of the various diaphragms proves that the vena contracta coefficient is constant and equal to unity within 1% uncertainty for all the diaphragms except for the 3.5mm diameter diaphragm for which it is estimated to be 0.97.

4.3.4 Reed opening measurement

Reed opening is measured by means of a LASER and a photoelectric diode. This measurement is likely to give information on the behaviour of the jet entering the instrument. In particular the opening can be compared to the effective section of the jet entering in the mouthpiece. This measurement also makes it possible to relate the opening H and the pressure difference Δp on both sides of the reed. This allows the determination of the evolution of the reed stiffness with the pressure difference. The sensitivity of the optical system used to measure the opening H is calibrated by comparison with measurements done with a small ruler placed next to the front of the mouthpiece, the observation being made with a camera in macro mode. This was used for checking the linearity of the optical system and to determine the opening at rest H_0 . A difficulty with the optical system is that the light beam can be fully stopped while the reed slit is not completely closed. To limit this problem, it is checked by visual inspection, before each experiment, that, when the reed is almost closed, the diode

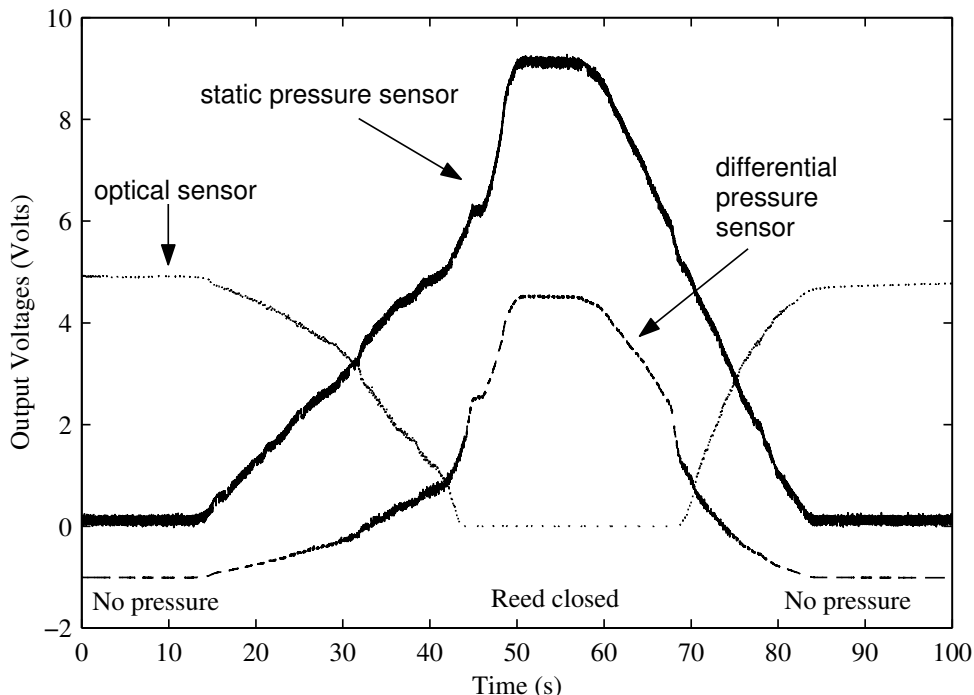


FIG. 4.6 – *Experimental signals.*

still detects a signal.

4.3.5 Experimental procedure

The two pressure signals and the optical signal are collected on a computer via a data acquisition card. The opening at rest having been measured as described above, the experiment starts without blowing pressure ($\Delta p = 0$). This state is maintained for a few seconds. This is used for the determination of the zeros of the pressure sensors and the value of the optical signal corresponding to the opening at rest. The pressure in the mouth cavity P_m is then increased gradually until the reed closes completely the opening. This state is also maintained for a few seconds. This is done for the relative calibration of the differential pressure sensor measuring Δp : since in that case $p = 0$ and $\Delta p = P_m$, the sensitivity of the static pressure sensor measuring P_m being supposed to be known, the sensitivity of the differential pressure sensor can be deduced. This calibration is necessary because the pressure p is obtained by making the difference between the signals from the two pressure sensors. The pressure in the mouth is then gradually brought back to zero. A typical duration of such an experiment is 50 to 100s with a sampling frequency of 100Hz (see figure 4.6). For some embouchures, when the reed is almost closed, reed oscillations occur which make the corresponding part of the non-linear characteristics not exploitable.

4.4 Experimental results

4.4.1 A typical experimental result

The non-linear characteristics was measured for various mouthpieces, reeds and embouchures. Before each measurement of the characteristics, the embouchure is tested with a cylindrical pipe of 30cm in order to check that the instrument produces a realistic sound of good musical quality. The phenomena observed are globally reproducible even if one observes a large variation in the numerical values of the various parameters. The goal of this section is to present a typical case in order to stress the most significant results. A more detailed analysis of the experimental results is provided in the following sections. On the figure 4.7a, a non-linear characteristics $u = NL(\Delta p)$ is shown for an opening at rest of $H_0 = 6$ mm. The reed is a Rico Plasticover TM (reed covered with plastic) of strength 3. This type of reed has been chosen because it is less influenced by moisture than a standard reed. The clarinet mouthpiece is a C80 by Selmer. The curve shows an hysteresis, the maximum flow being larger for increasing pressure than for decreasing pressure. This hysteresis can be attributed to the viscoplastic behaviour of the reed. This point is discussed section 4.4.2. The curves are similar to the theoretical curves coming from equation (4.5), which are also plotted for reference in figure 4.7a. The parameters of these theoretical curves are chosen so that the maximum of the theoretical curves matches with those of the experiments. It appears that the closing is never total and that even when the reed can be considered as closed (beyond 60mbar) a weak flow remains. This flow decreases when the maximum pressure is maintained a few seconds. The theoretical model is thus valid until the reed is nearly closed. It does not take into account the residual flow when the reed channel is closed. Figure 4.7b plots the reed opening as a function of the pressure difference. This curve shows that the stiffness of the reed can be considered as roughly independent on the pressure. This is emphasised on figure 4.7b by two straight lines of same slope, showing that the stiffness is approximately the same when the pressure is increasing and when it is decreasing. Only the rest position differs (4% difference). This is confirmed by the fact that between the two theoretical curves of figure 4.7a only the values of H_0 are different in the same ratio. This result is explained on the basis of a viscoelastic model in which the return to rest position is delayed (cf. section 4.4.2). It appears from figure 4.7b that the zero of the optical signal is reached for a pressure for which the flow is still significant. As noted section 4.3.4, this is due to the difficulty of adjustment of the optical set-up for which the zero is reached whereas the reed is still open. As explained section 4.2.2 the jet cross section S_j can be deduced from the volume flow using equation (4.2). Figure 4.7c plots the effective cross section as a function of the variation of the reed opening measured by the optical device. The results show systematically that the jet cross section varies linearly with the aperture. In some cases, when the optical adjustment was optimum, a line passing through zero within an uncertainty lower than 0.1mm was obtained. The assumption of a jet cross section proportional to the opening thus seems sensible. This assumption is used for the determination, by extrapolation, of the opening corresponding to the zero value of the optical signal.

4.4.2 Viscoelasticity of the reed

As noticed in section 4.4.1, some curves exhibit an hysteresis due to a change of the rest position. This result could seem contradictory with the assumption of a static measurement. Indeed the duration of the experiment and the speed of the pressure variations are such that the effects of the reed inertia are negligible during the experiment. The hysteresis can therefore only be explained as the result of a viscoelastic behaviour of the reed which only recovers its original rest position after a time delay larger than our experiments [MGBG94]. By analysing the opening as a function of time after the reed has been plated and then quickly slackened, it appears, for a given reed, that this one recovers its rest position in three steps. The reed slit opening reaches almost instantaneously 93% of its maximum value. An exponential decay of the difference between the opening value and the maximum opening with a relaxation time $\tau_1 \simeq 8$ s is then observed. At the end of this second phase the reed slit opening reaches 97% of its maximum value. Rest position is finally reached at the end of a last phase for which the relaxation time is $\tau_2 \simeq 900$ s. In this second case, taking into account the importance of the relaxation time, it is not unreasonable to speak of a quasi-plastic deformation [MGBG94]. Taking into account the typical duration of an experiment one can think that hysteresis observed in the experimental characteristics are due to a conjugation of these two effects. In particular the fact that when the reed is closed there remains a flow which tends to decrease if the maximum pressure is maintained a sufficiently long time. These phenomenon, essential for the musician [Duc01, MGBG94], are probably not relevant when considering a physical model of the auto-oscillation process. The actual characteristics might be found somewhere in between the two static characteristics obtained respectively upon increasing the pressure and decreasing the pressure. By chance the hysteresis being rather small the uncertainty on the relevant parameters of the model will be small. Typically it should not exceed few percent of H_0 . To limit this effect it is useful, before doing an experiment, to close the reed for a few seconds by applying a large pressure in the mouth volume in order to limit the quasi-plastic effect ($\tau_2 \simeq 900$ s). This is similar to some musicians practice which consists in pressing the reed with the thumb before playing. It is important to notice that the amplitude of the hysteresis can vary considerably with the reed. We observed that for some reeds, a priori not different from the others, the hysteresis did not appear. On the other hand our experiments have been done with a dry reed covered with plastic. A wet standard reed would probably have emphasised a slightly different behaviour [MGBG94].

4.4.3 Reed stiffness

As noted section 4.4.1, the reed stiffness can be regarded as a constant until the reed beats. With some mouthpieces and reeds a slightly different behaviour has been observed. Figure 4.8 shows a result with a clarinet mouthpiece B40 by Vandoren, a Plasticover reed of strength 3 and a reed opening at rest $H_0 = 0.6$ mm. In figure 4.8a, a plot of the non-linear characteristics is compared to the simple basic model (equation (4.5)) in which parameters P_M and wH_0 are chosen so that the maxima of the experimental and theoretical curves coincide. One can note that the theoretical curve and the model differ for a pressure slightly lower than $\Delta p = 40$ mb. Figure 4.8b plots the reed slit opening as a

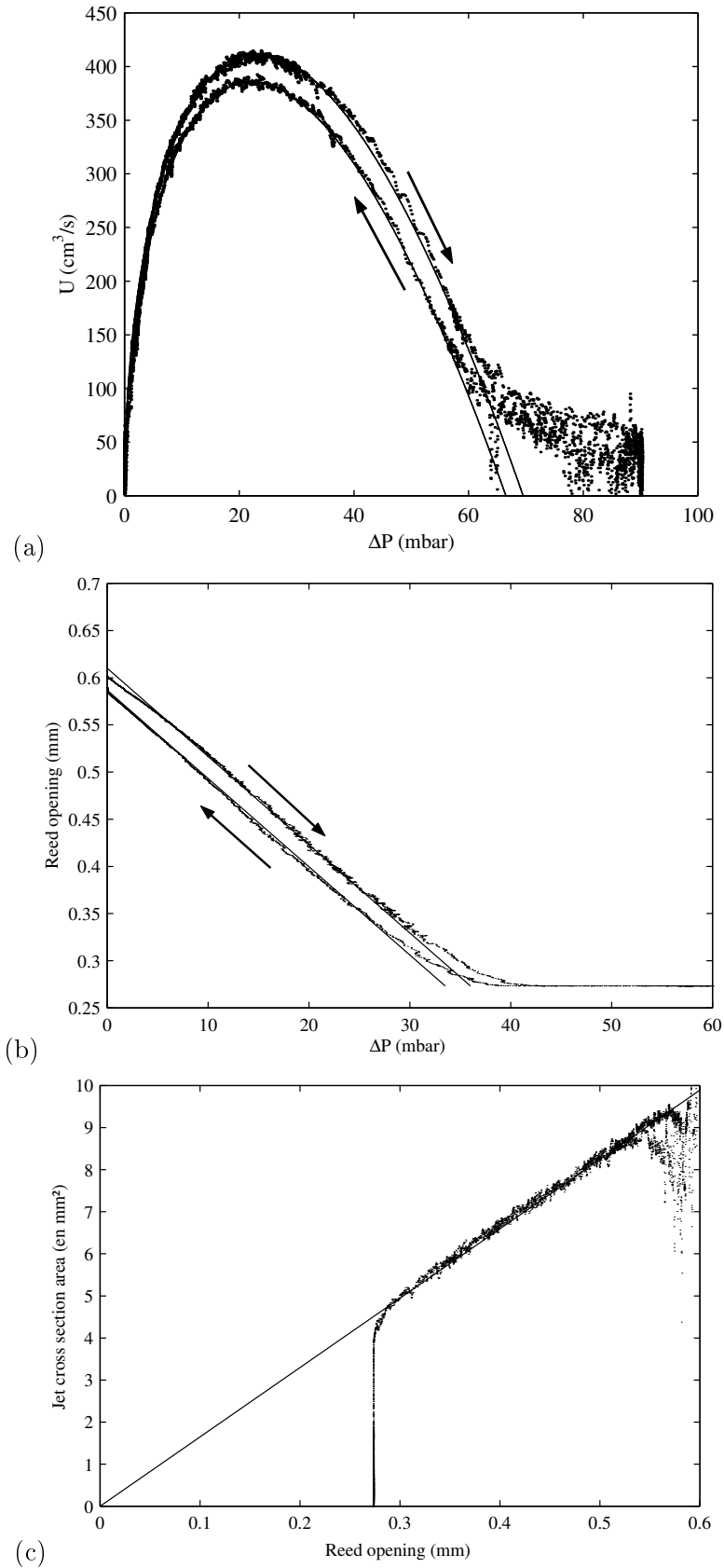


FIG. 4.7 – Typical experimental results (dots : experiments, continuous line : theory). (a) Non-linear characteristics, volume flow u versus pressure difference Δp , (b) reed opening H versus pressure difference, (c) jet cross section S versus reed opening H .

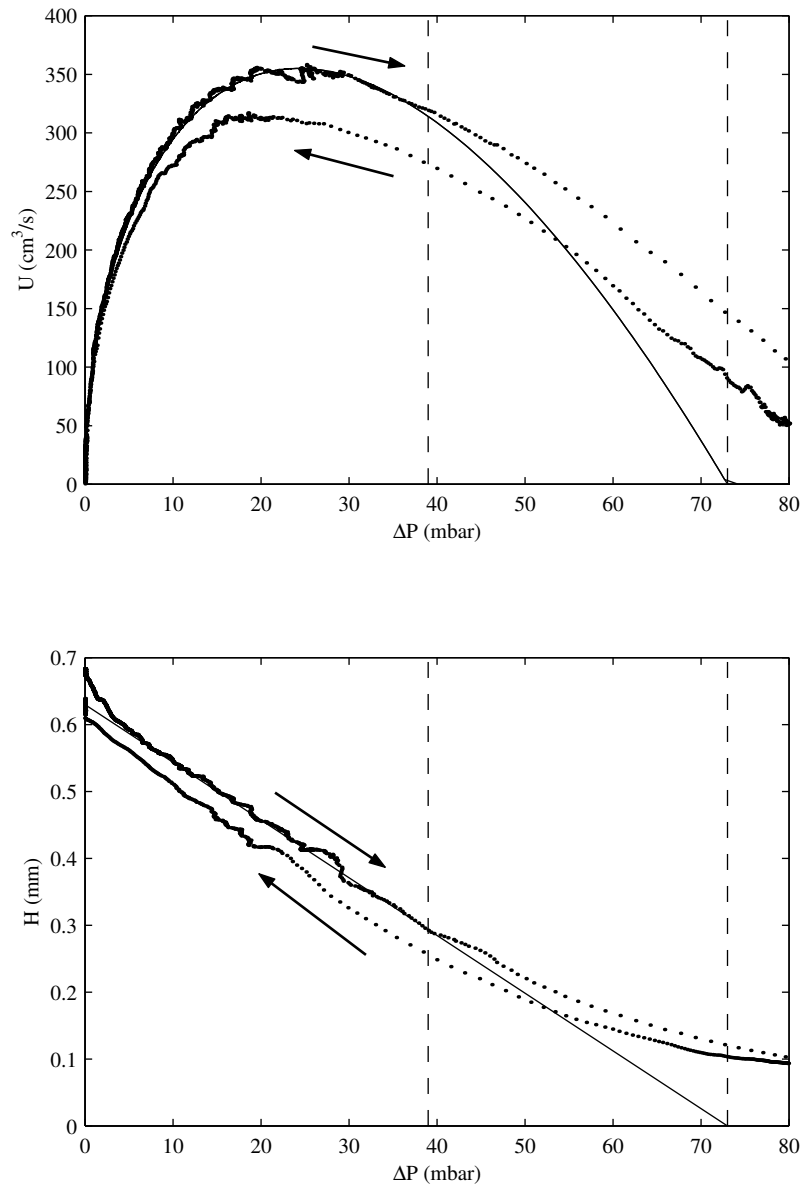


FIG. 4.8 – Experimental results (dots lines experiments; continuous line theory) : non-linear characteristics, (a) volume flow u versus pressure difference Δp , (b) reed opening H versus pressure difference Δp .

function of the pressure difference. One can note that the curve is linear for pressure lower than 40 mbar. The reed stiffness can be deduced from the slope of the curve. The following value for the reed stiffness is obtained : $k_r = 116$ mb/mm. The reed stiffness can also be deduced from the non-linear characteristics in which the extrapolated closing pressure is $P_M = 73$ mbar. With $H_0 = 0.6$ mm this leads to $k_r = P_M/H_0 = 122$ mbar/mm which is in agreement with the result deduced from reed slit opening measurement. This value is not very different from the result of another experiment plotted in figure 4.7b in which the reed stiffness is found to be $k_r = 107$ mb/mm. It is also noticed that the extrapolated line passes through zero for $\Delta p = P_M$ which validates the calibration method of the optical system based on the extrapolation of the function $S_j(H)$ (cf. section 4.4.1). The function $H(\Delta p)$ deviates from a linear behaviour above 40 mbar. This is in agreement with the observation made on figure 4.8a that the simple model is no more valid beyond $\Delta p = 40$ mb. We expect that beyond this pressure the reed stiffness increases as a result of a reduction of the free reed length due to contact with the lay. The remarkable result here is that the change in the reed stiffness value appears only for a pressure higher than the threshold of oscillation $\Delta p \simeq P_M/3$. According to various measurements it seems that this phenomenon is general. This result is to be compared with the analysis of various authors [Gaz94, Duc01, vW02] according to whom the curling up phenomenon is limited and has a small influence on the reed stiffness, the end of the reed touching the lay without smoothly curling up on the lay. Our measurements do not exclude this scenario but show that it should appear only for high pressures. Complementary measurements, allowing to determine directly the point of contact between the reed and the lay, are now in preparation to confirm this result¹.

4.4.4 Air flow

To evaluate the discrepancy between the model for the volume flow and the measurement, the measured volume flow u can be divided by the theoretical one u_b calculated using equation 4.1 where H is measured with the optical device and $w = 14$ mm is the external width of the mouthpiece inlet. The dimensionless quantity obtained is the vena contracta coefficient σ (see equation (4.6)). It is displayed versus the reed opening in figure 4.9 for the same experiment as in figure 4.8. Parameter σ remains constant along a large range of reed openings : $\sigma \simeq 0.95$ for $0.2 \text{ mm} < H < 0.65 \text{ mm}$. For $H < 0.15$ mm the optical measurements are no longer relevant. From the experiment of figure 4.7 the value $\sigma \simeq 1.2$ is found. The constant behaviour of σ has been observed for every embouchure tested, σ being in the range 0.85 to 1.30. These results confirm that a volume flow calculated from the Bernoulli law with a constant vena contracta coefficient σ is a reasonable approximation for sufficiently large reed opening. For a small reed opening the experimental device and particularly the reed opening measurement are, at this stage, not sufficient to draw conclusions.

It is interesting to compare the measured values of the vena contracta coefficient σ with that obtained for simplified geometries of mouthpieces and in less realistic playing conditions. As mentioned in Section 4.2.2 Van Zon [vZ89] has obtained values in the range 0.50 to 0.61 for typical 2D mouthpiece. Furthermore Maurin [Mau92] observed larger values, in the range 0.60 to 0.85 for a clarinet mouthpiece

¹Voir le chapitre 5.

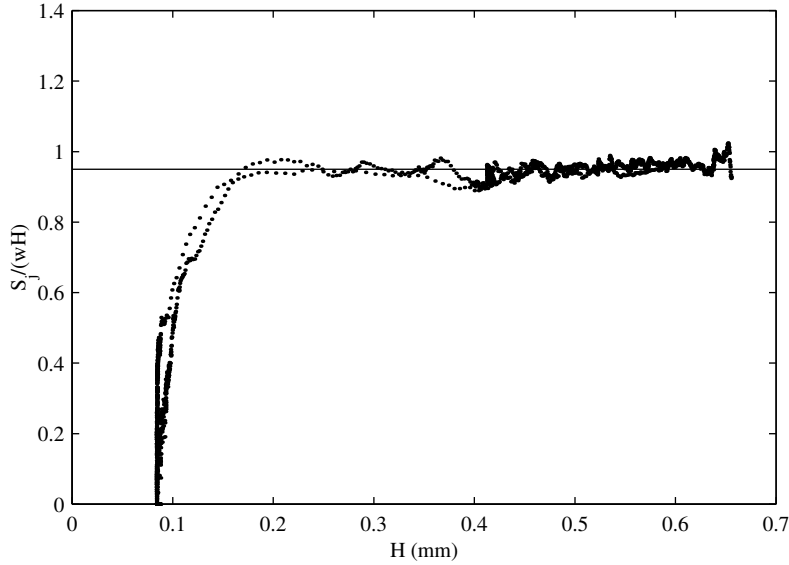


FIG. 4.9 – Contraction coefficient $\sigma = S_j/wH$ versus reed opening H (same embouchure set-up as in figure 4.8).

mounted in an artificial mouth, the lateral parts of the reed channel being waxed to approach a 2D geometrical situation. The larger value of σ could be explained by an effect of the confinement of the flow upstream of the inlet reed channel. This phenomenon would also occur in actual clarinet playing. Valkering [Val93] measured volume flows through a reed channel formed by a stiff flat metal reed with sharp edges placed on an actual clarinet mouthpiece. It is shown that the flow threw lateral sides can increase the flow within 50% which lead to values for σ compatible with our experimental results.

4.4.5 Typical parameters range values

The model formulated in equation (4.5) is based on parameters of which the values have to be defined when dealing with simulations or physical modelling synthesis. Our experiments allow the determination of some of these parameters. In the present section the range of these parameters and the accuracy with which they can be determined using our setup are discussed. Results are summarized in table 4.1. The reed parameters, that is the opening at rest H_0 and the reed stiffness k_r , are determined using the optical device (see sections 4.3.4 and 4.4.3). The reed opening is approximately $H_0 = 1$ mm when the reed is free, that is when the lips do not press the reed. When the lip presses the reed this value decreases but probably not much under $H_0 = 0.4$ mm, which corresponds to a rather tight embouchure. Because of the small value of the reed opening and of the geometrical irregularities of the reed this parameter H_0 cannot be determined with a great accuracy. The accuracy on this parameter H_0 is estimated to be only 10%. The reed stiffness which is deduced from $k_r = H_0/\Delta p$ is found to be in the range of 100 mbar/mm. From our measurements it appears that the range in which this parameter varies is rather small. In all the measurement realized it did not vary more than 50%. This

parameter being deduced from H_0 , its accuracy is in the same range that is 10%. The product of the two reed parameters H_0 and k_r is the beating pressure $P_M = k_r H_0$. This beating pressure P_M is found to be around 80 mb for a loose embouchure and around 60 mb for a tight embouchure. This parameter can be determined with a good accuracy from the flow measurement (see section 4.4.1). In some cases an accuracy of 2% can be reached (a little bit more if the hysteresis is considered, see section 4.4.2). From flow measurements the maximum flow can also be deduced, from which the value of the effective surface of the jet at rest $S_j = \sigma w H_0$ can be deduced with a good accuracy (3%). From this surface the effective width of the reed channel σw can be deduced (section 4.4.4). The uncertainty on this parameter is in the same range as for the reed opening H_0 from which it is deduced. In table 4.1 realistic values of the parameters of the model for the clarinet are summarized. These values are in agreement with those given by other authors [Ned98, SS80]. We guess that these values might be useful for physical modelling synthesis and simulations.

Quantity	Symbol	Typical values
Reed opening at rest	H_0	0.4-1.0 mm
Beating pressure	P_M	40-100 mbar
Reed surfacic stiffness	k_r	80-130 mbar/mm
Jet effective width	σw	12-18 mm
maximum flow	U_{max}	200-600 cm ³ /s

TAB. 4.1 – Summary of the parameter values for the clarinet

4.5 Conclusion and perspectives

The experiments presented in the present paper allow a better characterization of the clarinet mouthpiece behaviour. It also gives elements useful for a better comprehension of the physical phenomena involved. In the nineties a considerable effort has been carried out in parallel at the LAUM (Le Mans, France) and at the TUE (Eindhoven, Netherlands) to obtain a reliable model for the relationship between the jet section and the reed channel height characterized by the coefficient σ of equation (4.6) [vZ89, HdLMMW90, HGWV94, Hir95]. Using simplified 2D geometries, different stationary regimes have been identified experimentally and explained theoretically. We have now proposed an experimental procedure allowing to measure these characteristics with actual mouthpieces and reeds under conditions close to playing conditions. Our measurements with this new procedure seem to agree qualitatively with the earlier measurements in simplified geometries. The main problem in the interpretation of our results is the uncertainty in the geometry of the reed channel and of the lateral slits between the lay and the reed. However, our results confirm that a volume flow calculated from the Bernoulli law with a constant vena contracta coefficient σ is a reasonable first approximation for a sufficiently large reed opening. For a small reed opening the effect of friction becomes significant and a correction for viscous effects should be introduced.

In the quasi-stationary basic model, the behaviour of the reed is reduced to a spring with a constant stiffness. Rather surprisingly, experimental results confirm that the latter hypothesis is reasonable, a stiffness value being associated for each embouchure adjustment. Nevertheless for some of the embouchures, the hypothesis is correct up to a critical pressure threshold above which the equivalent stiffness is increasing when the reed-lay aperture is decreasing. Some authors proposed to consider a variable stiffness $k_r(H)$ to take into account the curvature of the lay (see for example the time domain simulations of Ducasse, [Duc90]). Our results show that this should be done with care. Indeed, a variation of the stiffness with the opening has been observed for some embouchures, but only when the reed is near closing. Supplementary investigations have to be done with different reeds and mouthpieces in order to check the variability of the results. A comparison with the recent theoretical works of Ducasse [Duc01] and Van Walstijn [vW02] should be done by using a reed and a lip of which characteristics would be measurable and controllable. Incidentally, our measurements confirm the visco-elastic behaviour of reeds reported by Marandas et al. [MGBG94]. It seems however that this behaviour is not relevant when predicting oscillations because the memory time scales involved are long compared to the oscillation period. Finally, our study allows to conclude that the "simplistic" model described in section 4.2 is valid at least on the major part of the characteristics. This result confirms the practical interest of theoretical studies based on this model [WB74, Fle79, STY87, Fle93, Ker95, KOG00, ODK02, OKD02]. Similar studies could be done for other instruments. For instance, a saxophone alto mouthpiece has been tested too : the same behaviour as for a clarinet mouthpiece has been observed both from the point of view of the air flow and the reed mechanics in stationary regime. This suggest that, except the size, there is no major difference between a clarinet and a saxophone mouthpiece. The case of the double reed of an oboe or a bassoon could also be investigated in the same way. This could allow to check if the hypothesis by Barjau and Agullo [BA89] of a cross section proportional to the opening to the power two is sensible. The conjecture that there is a significant pressure recovery inside the narrow pipes on which double reeds are mounted [Hir95] could also be checked.

Acknowledgments : Authors are indebted to X. Boutillon, A. Hirschberg, J. Kergomard and C.J. Nederveen for helpful discussions.

4.6 Complément : caractéristique mesurée et stabilité

L'objectif de ce paragraphe est de mettre en évidence les conséquences des différences entre les caractéristiques mesurées et le modèle élémentaire sur la stabilité des solutions périodiques.

Dans le chapitre précédent nous avons vu que les oscillations sont instables pour des pressions légèrement inférieures à la pression de plaquage dans le cas où la caractéristique est modélisée par l'équation (4.5) (modèle élémentaire noté F_{ber} dans le chapitre 3). Par exemple sur la figure 3.7 on observe un doublement de période lorsque la condition (3.36) n'est plus satisfaite. Si l'on observe les caractéristiques mesurées 4.7a et 4.8, on remarque que la transition vers l'anche plaquée se fait de façon

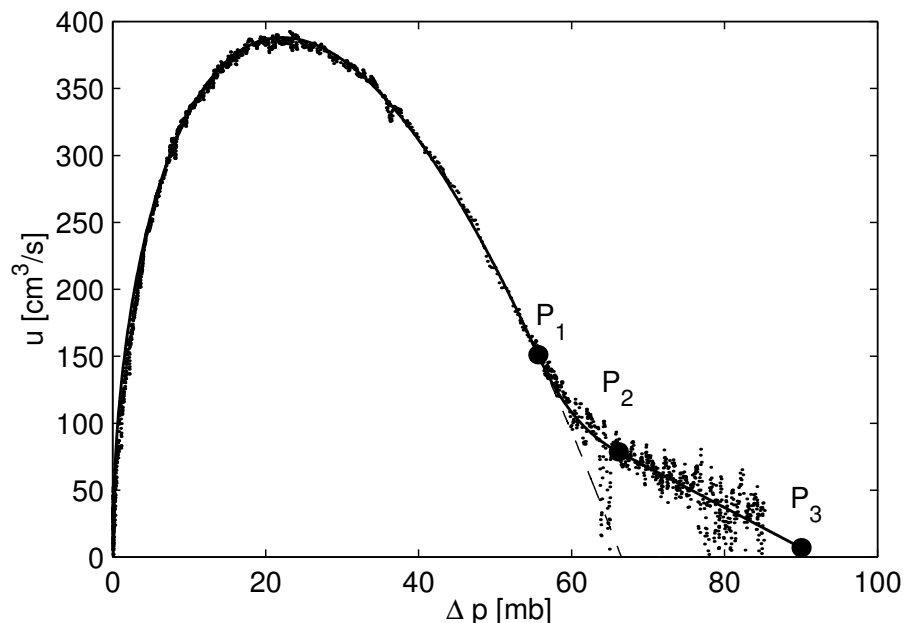


FIG. 4.10 – Approximation de la caractéristique mesurée par une fonction définie par morceaux (voir texte). ——— approximation de la courbe expérimentale, \cdots mesure, - - - modèle élémentaire.

progressive contrairement au modèle. En d'autres termes, la dérivée par rapport à p de la caractéristique mesurée est plus faible que celle du modèle lorsque l'anche est quasiment plaquée sur la table. Or si l'on considère les critères de stabilité définis au chapitre précédent (condition (3.36) par exemple pour la clarinette), il apparaît que plus la dérivée $du(p)/dp$ à la fermeture de l'anche est petite, plus grande est la plage de stabilité. La différence entre le modèle élémentaire et la caractéristique réelle lors de la fermeture de l'anche favorise donc la stabilité des solutions.

Pour illustrer ce résultat, on considère le cas de la caractéristique mesurée tracée sur la figure 4.7a. Comme l'indique la figure 4.10, il est possible d'approximer les données expérimentales par une fonction analytique définie par morceaux. Une première partie, de $\Delta p = 0$ jusqu'au point noté P_1 , est définie par le modèle élémentaire. Entre les points notés P_1 et P_2 , les données sont approximées par un polynôme de degré 3, et entre P_2 et P_3 par une droite. L'approximation des données pour $P_m > P_1$ par un polynôme et une droite est un choix qui n'est pas issu d'une modélisation physique. D'un point de vue technique, le point P_1 correspond au "décrochage" de la caractéristique mesurée par rapport au modèle élémentaire correspondant, le point P_2 est choisi comme la limite inférieure du segment linéaire, dont le coefficient directeur est obtenu en minimisant l'écart des points expérimentaux à la droite. Les coefficients du polynôme de degré 3 sont calculés de façon à ce que la fonction définie par morceaux soit continue ainsi que sa dérivée première.

Pour mettre en évidence les conséquences des différences entre le modèle élémentaire et la caractéristique déduite de la mesure, on considère d'abord le cas idéal d'un instrument à vent à résonateur sans pertes associé soit au modèle élémentaire, soit à la caractéristique déduite de la mesure.

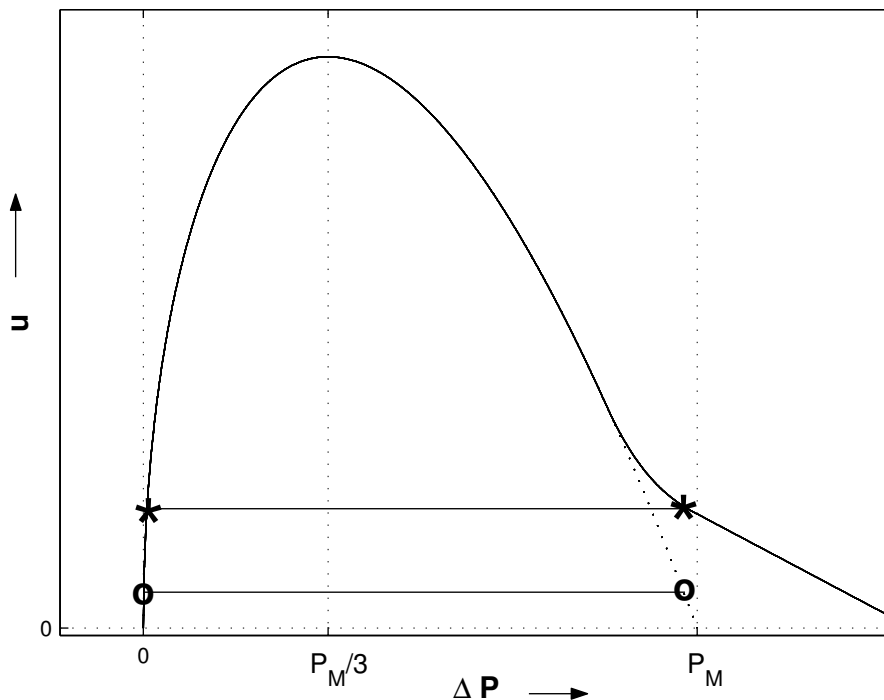


FIG. 4.11 – Points de fonctionnement $(P_m - p_o, u(P_m - p_o))$ et $(P_m - p_c, u(P_m - p_c))$ dans le cas de la caractéristique déduite de la mesure ($-*—$) et dans le cas du modèle élémentaire ($\cdots \circ \cdots$) pour une même amplitude d'oscillation $p_o - p_c$.

Pour une solution à deux niveaux de pression d'une amplitude crête à crête $p_o - p_c$ donnée, on reporte les "points de fonctionnement" définis par $(P_m - p_o, u(P_m - p_o))$ et $(P_m - p_c, u(P_m - p_c))$ sur les deux caractéristiques (voir la figure 4.11). On remarque d'abord que les débits associés sont différents. Une autre différence est que les valeurs absolues des pentes $h_o = du(p)/dp|_{p=p_o}$ et $h_c = du(p)/dp|_{p=p_c}$ sont plus faibles que dans le cadre du modèle élémentaire. Cela est la conséquence de la fermeture progressive de l'anche lorsque P_m augmente tandis que le modèle prévoit une fermeture totale dès que $\Delta p > P_M$. Cette différence va dans le sens d'une plus grande stabilité de cette solution pour le signal de pression.

On considère ensuite le cas d'un instrument dont les pertes sont indépendantes de la fréquence (modèle de Raman, voir les chapitres 2 et 3). Une conséquence due à la présence de pertes est l'extension de la zone de stabilité dans le plan (h_o, h_c) (voir la figure 3.4 au paragraphe 3.3.3). Une autre conséquence est que le débit u_o à l'ouverture est plus élevé qu'à la fermeture afin de compenser l'énergie dissipée dans le résonateur [FR98]. Comme cela est visible sur la figure qui représente schématiquement les points de fonctionnement dans le cas sans pertes et dans le cas avec pertes, l'augmentation du débit à l'ouverture a pour conséquence la diminution de la pente h_o associée à l'ouverture. Cette diminution contribue également à la stabilisation de la solution considérée.

Pour résumer les commentaires précédents, on considère la carte de stabilité 4.13, calculée au

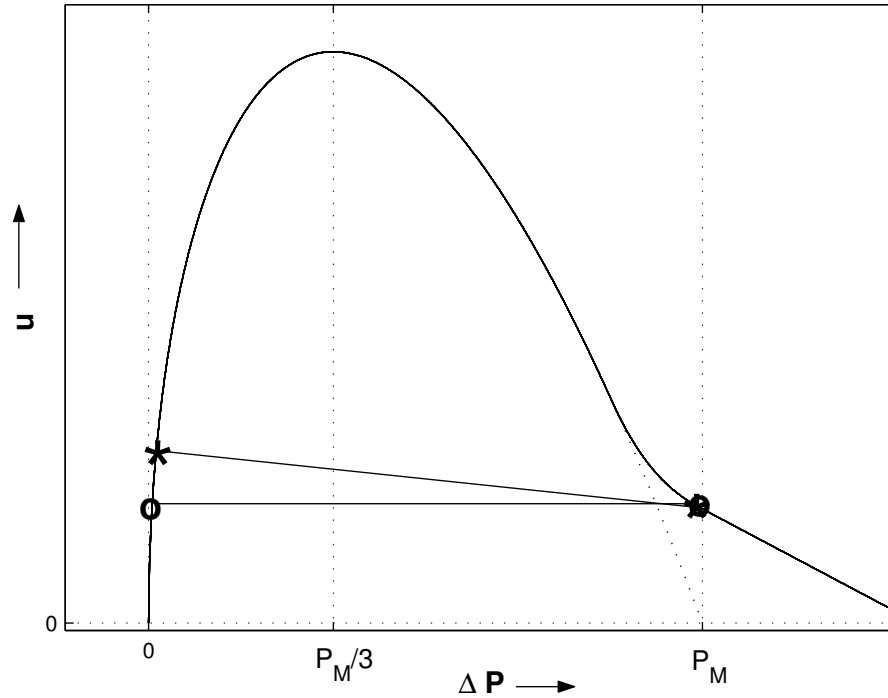


FIG. 4.12 – Points de fonctionnement $(P_m - p_o, u(P_m - p_o))$ et $(P_m - p_c, u(P_m - p_c))$ sur la caractéristique déduite de la mesure, dans le cas sans pertes (o) et dans un cas avec pertes (*), pour une même amplitude d'oscillation $p_o - p_c$.

chapitre 3, indiquant les zones de stabilité en fonction des pentes h_o et h_c pour un signal de pression à deux niveaux dans une clarinette. Sur cette carte on considère un point (O) défini par les pentes (h_o, h_c) calculées pour les valeurs p_o et p_c d'un signal carré d'amplitude donnée. Les flèches indiquent le sens de variation de la trajectoire de ce point (i) lorsque on considère une fermeture progressive lorsque P_m augmente telle que l'indiquent les mesures, plutôt qu'une fermeture "brutale" telle que le suppose le modèle élémentaire (flèche en pointillés); (ii) lorsque les pertes augmentent (flèche en traits tirets); la "résultante" de ces deux effets est tracée avec une flèche pleine. Les zones blanche et grise indiquent respectivement les zones de stabilité et d'instabilité dans le cas sans pertes. Le sens de variation de la limite de la zone de stabilité due à l'augmentation des pertes est également indiquée, la limite dans le cas d'un coefficient de réflexion $\lambda = 0.9$ étant tracée à titre d'exemple (courbe en trait plein).

Une autre façon de mettre en évidence l'effet de la différence entre la caractéristique mesurée et celle issue de la mesure en ce qui concerne la transition vers l'anche battante est de tracer, sur la carte de stabilité, la trajectoire des points définis par (h_o, h_c) calculée pour des valeurs de P_m croissantes depuis le seuil d'oscillation (cette représentation a déjà été utilisée sur la figure 3.8). L'analyse est limitée au cas de l'anche non battante. On considère pour la figure 4.14 le cas d'un modèle de clarinette constituée d'un résonateur sans pertes associé à une embouchure dont les paramètres ζ et P_M sont issus de la mesure ($\zeta = 0.35$, $P_M = 66.5$ mb), et caractérisée soit par le modèle élémentaire, soit

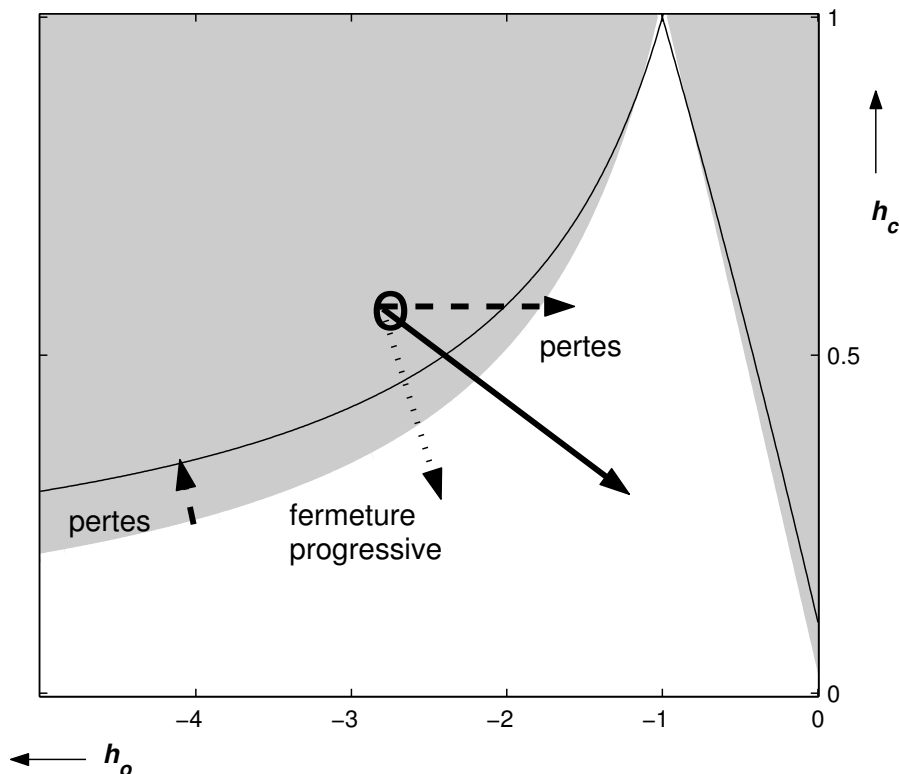


FIG. 4.13 – Effets des pertes et de la fermeture progressive de l'anche dans le plan (h_o, h_c) . La zone blanche et la zone grise indiquent respectivement les zones de stabilité et d'instabilité de la solution "signal carré" dans le cas sans pertes ($\lambda = 1$). La limite en trait plein indique la limite de stabilité dans le cas d'un résonateur avec pertes ($\lambda = 0.9$). Voir le texte pour la signification des flèches.

par la caractéristique déduite de la mesure. Les deux trajectoires diffèrent nettement dès que Δp est supérieure à la pression correspondant au point P_1 sur la figure 4.10. Conformément aux remarques du chapitre 3, avec le modèle élémentaire la solution "signal carré" est instable au-delà d'une certaine pression au voisinage de $P_M/2$. Dans le cas considéré ($\zeta = 0.35$, $P_M = 66.5$ mb), la solution "signal carré" est instable pour $31.41 < P_m < 33.25$ mb, où $P_M/2 = 33.25$ mb est le seuil du régime anche battante. Avec le modèle déduit de la mesure, la décroissance de la pente h_c à la fermeture de l'anche permet de stabiliser cette solution sur une plus grande plage de pression d'alimentation. Dans le cadre du modèle sans pertes et avec l'approximation linéaire retenue pour modéliser la relation pression-débit entre les points P_2 et P_3 de la figure 4.10, la solution "signal carré" est néanmoins instable lorsque le point de fonctionnement correspondant à la fermeture est proche de P_3 . En effet, la phase d'ouverture correspondante est telle que $\Delta p \rightarrow 0$, soit $h_o \rightarrow -\infty$. Par conséquent, la condition $h_f < -1/h_o$, qui est la limite de stabilité donnée par l'équation (3.37) avec $\lambda = 1$, n'est plus satisfaite à partir d'une certaine pression d'alimentation (44.1 mb dans le cas considéré). Néanmoins, dans le cadre d'un modèle de résonateur avec pertes et dans le cas des instruments réels, il est très probable que les pertes dans

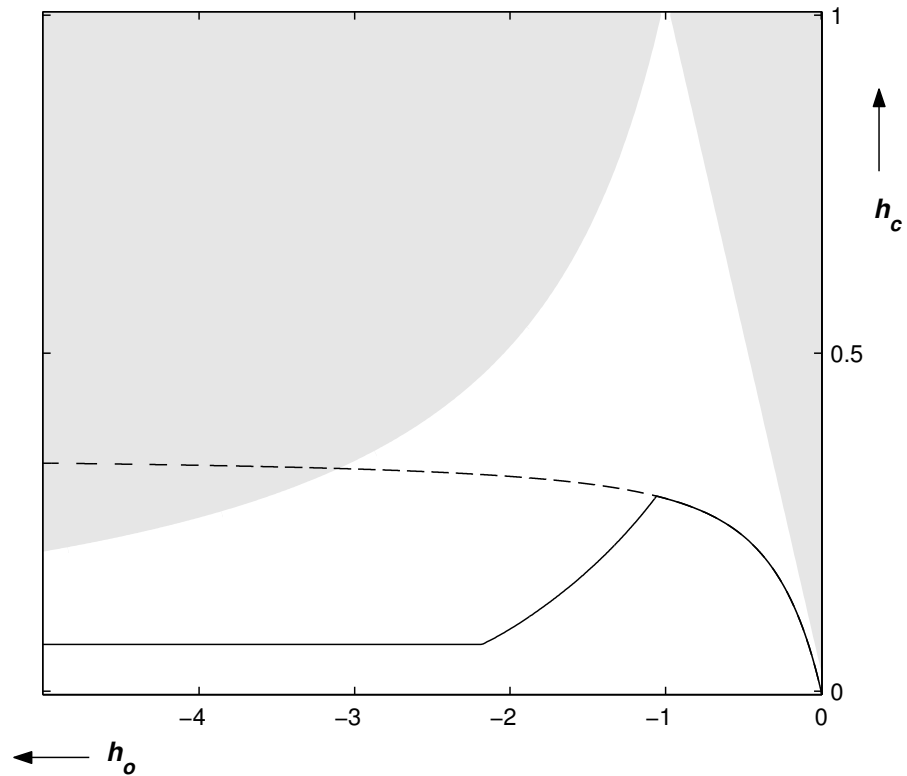


FIG. 4.14 – Trajectoire des points (h_o, h_c) pour la solution "signal carré" dans une clarinette sans pertes en régime "anche non battante" lorsque P_m augmente : --- modèle élémentaire, ——— modèle déduit de la mesure. Stabilité de la solution : zone blanche \rightarrow stable, zone grise \rightarrow instable.

le résonateur évitent d'atteindre ce seuil d'instabilité.

Chapitre 5

Données expérimentales sur la vibration de l'anche

5.1 Introduction

Le chapitre précédent met en évidence un relativement bon accord entre les caractéristiques non-linéaires mesurées et le modèle élémentaire utilisé dans les chapitre sur les modèles idéaux. Néanmoins, lorsque l'anche ferme presque entièrement le canal anche-table, les résultats expérimentaux s'écartent notablement du modèle. Dans le cadre du modèle élémentaire, la description physique de l'anche se limite à un paramètre de "raideur" (dimension : pression/longueur) indépendant de l'amplitude du déplacement de l'extrémité de l'anche (modèle dit "à paramètres constants"). Les résultats expérimentaux du chapitre précédent mettent en évidence que dans certains cas cette raideur augmente, à partir d'un certain point lorsque l'ouverture diminue. Ceci peut s'expliquer par une diminution de la longueur vibrante de l'anche (phénomène d'"enroulement"). C'est cette hypothèse qui conduit Ducasse [Duc90] à proposer un modèle de clarinette à paramètres d'anche variables pour la synthèse sonore. Dans le but de mieux comprendre le comportement de l'anche lorsqu'elle se ferme, nous avons mis au point un dispositif permettant de mesurer les zones de contact entre l'anche et la table du bec, en régime statique et en situation de jeu.

Plusieurs auteurs se sont intéressés à une description plus complète du mouvement de l'anche. Walstijn [vW02], en particulier, a réalisé une étude dans laquelle la valeur de la plupart des paramètres du modèle numérique développé sont estimés à partir de mesures mécaniques et géométriques effectuées sur une anche réelle. Suivant Gazengel [Gaz94], il met en évidence la validité d'un modèle d'oscillateur à paramètres équivalents variables par rapport à un modèle de poutre. Les paramètres équivalents qu'il obtient varient en fonction du déplacement de l'anche. Ceci est lié à la variation de la longueur vibrante de l'anche, qui entre en contact avec la table du bec à partir d'une certaine différence de pression $\Delta p = P_m - p$ entre la pression dans la bouche P_m et la pression dans le bec p . Dans l'hypothèse d'un enroulement progressif (figure 5.1b), les paramètres équivalents varient de façon continue en fonction de l'amplitude du mouvement. En contradiction avec cette hypothèse, les calculs de Walstijn [vW02]

mettent en évidence une variation brutale de la valeur des paramètres équivalents à partir d'une certaine amplitude de vibration. Ceci est dû au fait que l'anche se déforme de façon telle que l'extrémité de l'anche entre en contact avec la table avant sa partie centrale (figure 5.1c). La possibilité d'un tel comportement avait déjà été mentionnée par Gazengel [Gaz94] et Ducasse [Duc01]. A la différence des hypothèses du modèle élémentaire, il faut alors distinguer les trois situations, schématisées sur la figure 5.1. Pour désigner les trois types d'interaction anche/table on utilise les expressions : (a) "anche libre", (b) "anche s'enroulant", (c) "anche battante". Les simulations de Walstijn suggèrent que le mouvement de l'anche s'effectue d'abord selon le schéma (a), puis selon (b), puis selon (c). Durant la phase (b) il y a enroulement sur zone très limitée (environ 2 mm) et durant cette phase les paramètres équivalents, dont la raideur de l'anche, sont quasiment constants. En revanche il y a une brusque variation des paramètres équivalents lorsque le mouvement s'effectue selon le schéma (c). Ses simulations indiquent également que ce comportement existe aussi bien en régime statique qu'en régime dynamique. Le régime dynamique se différencie quelque peu par un hystérésis autour de la zone de transition entre le régime "anche s'enroulant" et le régime "anche battante".

Afin de vérifier la possibilité d'un tel scénario, un montage expérimental permettant d'observer le contact entre l'anche et la table a été réalisé. Il est décrit dans le paragraphe suivant. Les observations en régime dynamique et statique sont commentées respectivement dans les paragraphes 5.3 et 5.4. L'objectif initial était d'étudier différentes embouchures, afin notamment de déterminer l'origine des différences observées entre certaines caractéristiques non-linéaires. Des contraintes de calendrier ont réduit l'ambition originale et une seule embouchure est étudiée. Il s'agit d'une embouchure pour laquelle les résultats sont déjà présentés dans le chapitre précédent, et qui présente un accord remarquable avec le modèle élémentaire. Le comportement observé est assez général pour les différentes embouchures "réalistes" (c'est-à-dire qui permettent un jeu "standard") que l'on peut obtenir avec le bec (Selmer C80) et l'anche (Rico plasticover force 3) choisis. Néanmoins, il est possible de régler l'embouchure de façon à obtenir des schémas légèrement différents. Des mesures complémentaires à cette étude seraient donc bienvenues.

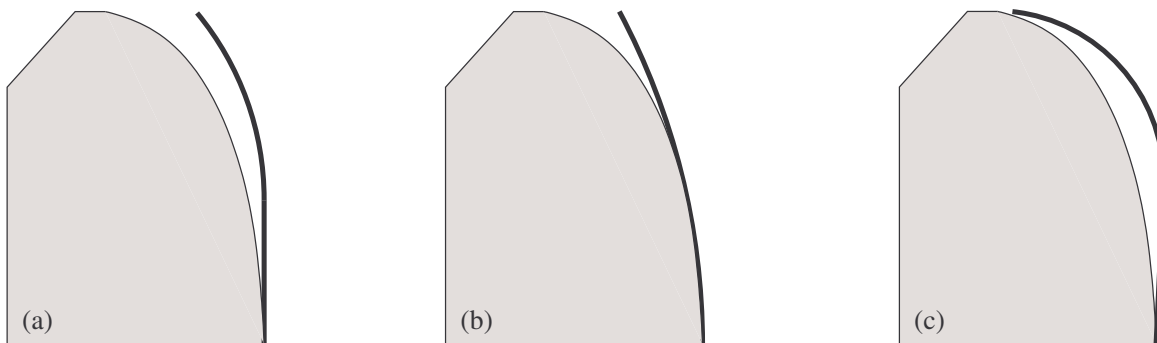


FIG. 5.1 – Trois types d'interaction anche/table : (a) l'anche oscille librement, il n'y a contact qu'au niveau de la ligature ; (b) l'anche s'enroule progressivement sur la table, sa longueur vibrante diminue ; (c) la courbure de l'anche est supérieure à celle de la table, l'anche "bat".

5.2 Description du dispositif expérimental

5.2.1 Commentaire sur l'usage du vibromètre LASER

Dans un premier temps, une observation directe de la déformée de l'anche à l'aide d'un vibromètre LASER a été envisagée. Cette technique est a priori intéressante, mais la mise en œuvre est difficile à cause de la présence de la lèvre, qui masque une large surface de l'anche. De plus, il est difficile de déterminer précisément s'il y a enroulement ou plaquage de l'anche puisque la pression entraîne un fléchissement de l'anche lorsqu'elle est plaquée sur la table. Il est donc nécessaire de pointer le faisceau LASER précisément sur les rails pour déterminer s'il y a contact. Si l'on veut déterminer s'il y a fermeture de l'anche, il faut viser précisément l'extrémité de l'anche, toujours à cause du fléchissement de l'anche. Il faut en outre s'assurer que les propriétés de la vitre qui constitue la paroi de la bouche artificielle au travers de laquelle la mesure est effectuée ne soit pas trop réfléchissante ni diffusante, et ne modifie pas la direction du faisceau. Même si l'on prend toutes ces précautions, il reste que le vibromètre effectue des mesures ponctuelles, et qu'un balayage spatial doit être effectué. Cela sous-entend que la vibration de l'anche est périodique et stationnaire. La stationnarité du mouvement de l'anche est directement liée à la stabilité de la pression d'alimentation, supposée constante. La source d'air comprimée du Laboratoire d'Acoustique ne satisfait actuellement pas cette contrainte.

A cause de ces difficultés, ce type d'observation n'a pas été retenu. Des mesures au vibromètre seraient néanmoins à envisager, à condition de réaliser un bec à fond transparent permettant d'avoir accès à toute la déformée sans être gêné par la présence de la lèvre, et à condition de disposer d'une source de pression parfaitement contrôlée. D'autres procédés ont donc été privilégiés afin d'obtenir des informations sur la vibration de l'anche.

5.2.2 Dispositif expérimental mis en œuvre

Le dispositif optique décrit au chapitre précédent permet d'obtenir une information liée à la section d'entrée. Néanmoins ce dispositif ne donne d'information que sur la section du canal anche-table au niveau de la facette et pas sur la déformée de l'anche. De plus, comme indiqué dans le chapitre précédent, le réglage du dispositif pour les faibles ouvertures est difficile et ne permet pas de mesurer précisément des ouvertures $H < 0.1$ mm. Donc, pour étudier l'enroulement de l'anche sur le bec, un dispositif original permettant de déterminer les zones de l'anche en contact avec la table a été conçu.

Le principe du dispositif est simple, la mise en œuvre s'est révélée délicate. Quatorze contacts électriques sont dessinés sur les rails à l'aide d'une peinture conductrice contenant des particules argentées. Ces contacts sont répartis depuis la zone d'appui de l'anche au repos jusqu'au bout (voir la figure 5.2). Ces contacts sont d'une largeur inférieure à 1 mm et sont espacés d'environ 2 mm les uns des autres. La face de l'anche qui entre en contact avec les rails est également métallisée. On réalise ainsi quatorze interrupteurs fermés sur les zones où l'anche est en contact avec la table, et ouverts sur les zones où il n'y a pas contact. Ces interrupteurs sont reliés à un convertisseur numérique analogique, qui convertit le codage numérique des contacts en tension. L'intérêt du convertisseur est de coder simultanément l'état de plusieurs contacts sur un seul signal. La reconversion des tensions analogiques

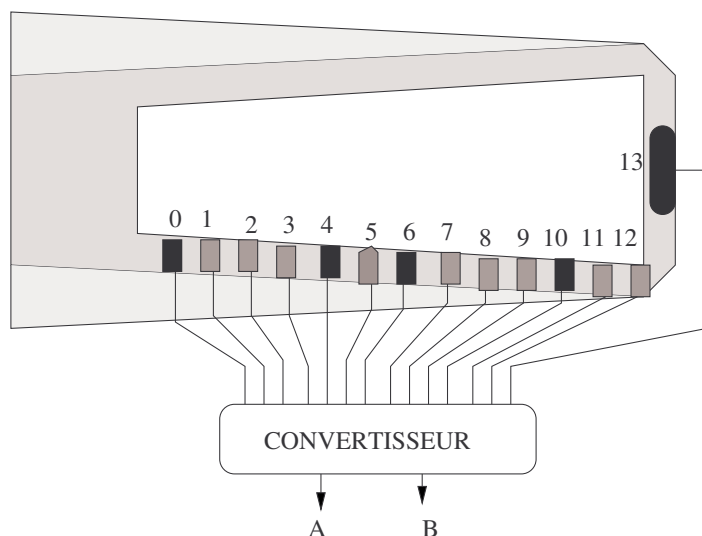


FIG. 5.2 – Schéma du dispositif permettant la mesure du contact anche-table. Les contacts indiqués en noir ne sont pas exploités.

en binaire après acquisition permet d'obtenir l'état des contacts. Pour assurer une conversion analogique numérique sans erreur, deux convertisseurs 8 bits sont utilisés de préférence à un seul convertisseur 16 bits. En effet, le pas de quantification d'un convertisseur 16 bits est de l'ordre de grandeur du bruit entachant les signaux analogiques de sortie, et la conversion analogique-numérique après acquisition conduirait à des résultats erronés.

Parmi les difficultés d'ordre technologique pour ce dispositif réalisé "au pinceau", on note qu'il est extrêmement difficile de garantir que l'épaisseur de peinture ne modifie pas du tout le comportement vibratoire de l'anche. Néanmoins, nous n'avons pas constaté de différence dans le comportement de l'instrument et la sonorité produite est similaire à ce que l'on peut obtenir sans le dispositif. Par conséquent l'influence du dispositif est supposée négligeable. En revanche, l'épaisseur de peinture n'étant pas maîtrisée, certains traits sont moins épais que ceux qui l'entourent, empêchant le contact avec l'anche (voir schéma 5.3a). Une conséquence pratique est que certains contacts sont inutilisables. Sur le dispositif réalisé, trois contacts présentent ce défaut. Il s'agit des contacts numérotés 4, 6 et 10, en noir sur la figure 5.2. Par ailleurs, le circuit électronique réalisant la conversion numérique/analogique présente un défaut qui nous a conduit à ne pas relever l'état du contact numéro 0, le plus proche de la ligature. Finalement, on constate que le contact numéro 13, peint sur la facette, n'est jamais réalisé. Ce contact est opérationnel, mais il semble que la déformation de l'anche soit telle que le bout de l'anche ne soit pas en contact avec le centre de la facette. Cette hypothèse est confirmée par la mesure de l'ouverture à l'aide du dispositif optique. L'observation de l'anche en position plaquée indique la que fermeture n'est pas totale. En effet, en vue de face on observe un comportement schématisé sur la figure 5.3b. On considère donc que c'est le contact 12 qui caractérise l'état "ouvert" ou "fermé" du canal anche-table au niveau de la facette. Il reste finalement 9 contacts opérationnels.

Pour palier à l'ensemble des défauts qui limitent la finesse d'observation, une métallisation par

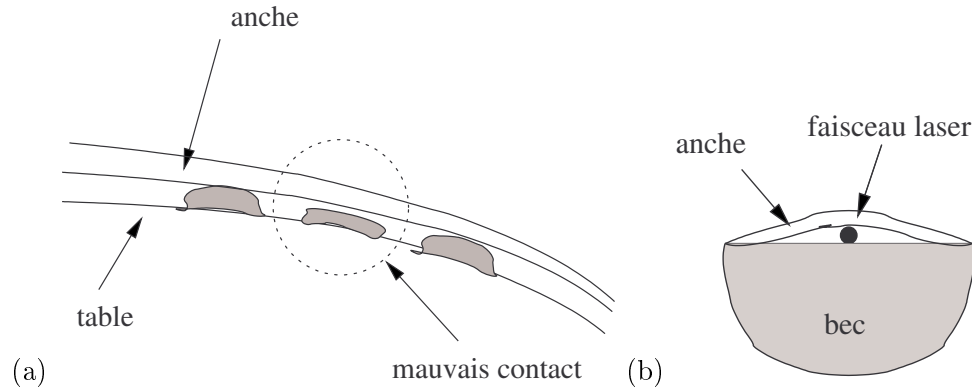


FIG. 5.3 – (a) Mauvais contact lié à l'irrégularité de l'épaisseur de peinture. (b) Configuration observée en vue de face lorsque l'anche est plaquée. Echelles non respectées.

dépôt pourrait être une solution. Cette technologie permettrait d'assurer un meilleur contrôle de l'épaisseur des contacts, l'espacement pourrait être maîtrisé, et le nombre de contacts augmenté pour une description plus fine des phénomènes. Une comparaison avec des calculs par élément finis de la vibration de l'anche serait alors envisageable.

5.3 Contact anche-table en régime statique

Dans ce paragraphe le contact entre l'anche et la table est observé en régime statique en fonction de la pression. Ces observations sont mises en relation avec la caractéristique non-linéaire mesurée selon le protocole décrit au chapitre précédent.

5.3.1 Principe de la mesure et représentation graphique

Le principe de l'expérience est le suivant :

- L'embouchure est réglée de façon telle qu'elle permet d'obtenir des sons réalistes pour une gamme de pressions comparable à celle que peut fournir un musicien.
- La caractéristique non-linéaire (pression, débit) est mesurée selon la procédure décrite au chapitre précédent : la pression d'alimentation est augmentée progressivement jusqu'à une pression telle que l'anche soit plaquée, puis à nouveau diminuée jusqu'à 0.
- Simultanément aux mesures de pressions, la mesure des zones de la table en contact avec l'anche est effectuée.

La représentation de l'état des contacts se fait à l'aide de diagrammes avec en abscisse la différence de pression $\Delta p = P_m - p$ entre la pression P_m dans la bouche et la pression p dans le bec, et en ordonnée le numéro des contacts, dont l'état (ouvert ou fermé) est indiqué par un code de couleurs. Un rectangle blanc indique qu'il y a contact. Un rectangle gris foncé indique qu'il n'y a pas de contact. Un rectangle de nuance intermédiaire représente les contacts défectueux, qui sont représentés afin de conserver graphiquement la répartition spatiale des contacts sur la table. Pour comprendre

cette représentation, on peut considérer le cas théorique d'un enroulement dépendant linéairement de la pression $\Delta p = P_m - p$. Dans ce cas, les contacts se ferment successivement, dans l'ordre de leur numérotation depuis le talon jusqu'au bout, à intervalles réguliers, jusqu'à ce que la table soit entièrement en contact avec l'anche, pour une pression telle que $P_m - p = P_M$. Le diagramme obtenu est alors celui de la figure 5.4

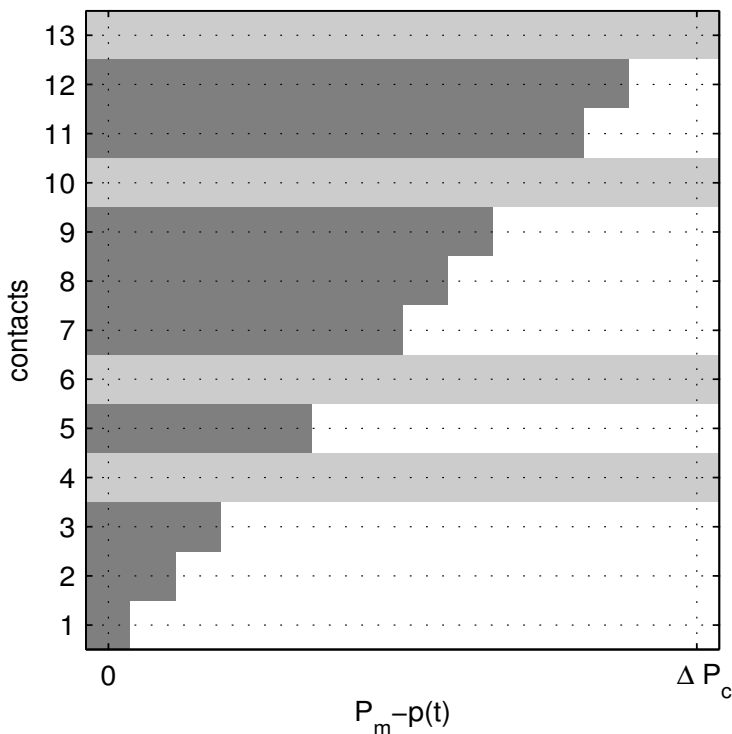


FIG. 5.4 – Figure d'enroulement qui serait observée dans le cas d'un enroulement progressant linéairement avec la pression $P_m - p$. Les zones blanches indiquent qu'il y a contact, les zones foncées indiquent qu'il n'y a pas contact, les zones de gris intermédiaire indiquent des contacts défectueux. Les contacts sont numérotés de 1 à 13, les numéros correspondants à ceux de la figure 5.2

5.3.2 Observations

Nous avons réalisé des mesures pour une embouchure réaliste permettant d'obtenir un son "standard". La force de l'anche associée au bec a été choisie par un clarinettiste expérimenté. La mesure de la caractéristique statique en augmentant puis en diminuant la pression d'alimentation conduit à deux relations pression-débit légèrement différentes (figures 5.6). Celle d'amplitude la plus grande correspond à la mesure réalisée en augmentant la pression P_m , celle d'amplitude la plus faible correspond à la mesure obtenue en diminuant la pression P_m . La différence entre les deux courbes est attribuée à la visco-élasticité de l'anche, qui conserve une déformation après relâchement de la

contrainte (c.f. paragraphe 4.4.2). Simultanément à la mesure de la caractéristique, le contact anche-table est mesuré. De façon à distinguer l'évolution du contact au cours de l'aller (pression croissante) et du retour (pression décroissante), les deux mesures sont tracées séparément sur la figure 5.5.

A partir des fichiers associés à ces graphes on relève les pressions successives $P_m - p$ qui correspondent aux changements d'état des contacts : transition ouverture \rightarrow fermeture pour la courbe obtenue en augmentant la pression P_m ; transition fermeture \rightarrow ouverture pour la courbe obtenue lorsque P_m décroît. Ces pressions sont ensuite repérées à l'aide de traits verticaux sur la caractéristique non-linéaire estimée à partir de la même acquisition (figure 5.6). Les numéros indiquent les points de contacts du dispositif qui changent d'état (voir la figure 5.2).

On note d'abord que cette embouchure présente un accord remarquable avec le modèle élémentaire sur une bonne partie de la courbe. Les paramètres équivalents au modèle élémentaire (P_M et ζ) sont déterminés selon la méthode décrite au chapitre précédent. Les paramètres ζ et P_M obtenus pour les caractéristiques "aller" ($P_m \nearrow$) et "retour" ($P_m \searrow$) sont respectivement : $\zeta = 0.36$, $P_M = 69.5mb$, et $\zeta = 0.35$, $P_M = 66.5mb$. Ces valeurs sont considérées comme un encadrement.

On remarque ensuite que lorsque l'anche s'enroule sur les premiers contacts, les points expérimentaux restent à peu près en accord avec le modèle théorique. En revanche les point expérimentaux s'écartent nettement du modèle dans la transition vers l'anche battante. Lorsque la pression augmente, il n'y a d'abord pas de contact entre l'anche et la table, puis il y a "enroulement" sur les contacts 1, 2, 3 et probablement 4. Ensuite les contacts 5 et 12 se ferment à peu près simultanément sans que la partie centrale de l'anche ne soit en contact avec la table, puis les contacts intermédiaires se ferment. La pression d'alimentation doit être augmentée de façon significative pour fermer tous les contacts, au-delà de ce que fournit habituellement le musicien [FS99]. Lorsque la pression diminue, le même scénario est observé. L'anche se "détache" de la table d'abord sur sa partie centrale (contacts 7, 8 et 5), puis à son extrémité (contact 12), puis à proximité du talon (contacts 1, 2 et 3). Il y a quelques différences dans l'ordre de changement d'état des contacts au cours des deux phases, notamment en ce qui concerne les contacts 3 et 5 d'une part et 2 d'autre part, mais le scénario est globalement le même. Ces différences sont probablement dues aux propriétés visco-élastiques de l'anche.

Il est généralement considéré que c'est l'enroulement de l'anche sur la table qui "adoucit" la transition entre le régime anche battante et le régime anche non battante (voir [FR98] par exemple). Il est également généralement admis que la diminution de la longueur vibrante entraîne une modification de la raideur équivalente à l'anche [Duc90]. Il apparait ici que la transition ne se fait pas par enroulement progressif, mais plutôt par la déformation de l'anche. Celle-ci fléchit jusqu'à ce que son extrémité touche le bout du bec, avant que sa partie centrale ne soit en contact avec la table. Le débit est alors non nul, bien que la section d'entrée au niveau de la facette soit nulle. Ce débit est néanmoins faible car l'anche est quasiment plaquée, et diminue au fur et à mesure que l'anche se plaque. Le même scénario est observé en sens inverse lorsque la pression P_m est diminuée : le décollement se fait d'abord au niveau de la partie centrale de l'anche, puis au bout, et enfin au talon.

On observe donc, en régime statique, le scénario décrit par Gazengel [Gaz94], Ducasse [Duc01] et Walstijn [vW02]. Par rapport au cas traité par Walstijn [vW02], on remarque que le contact anche-table

se fait à environ 1 mm de l'extrémité du bec pour l'embouchure étudiée dans ce paragraphe, tandis qu'il a lieu à environ 10 mm dans les simulations de Walstijn [vW02]. La conséquence est importante puisque l'écart au modèle se produit juste après le seuil d'oscillation dans ce dernier cas (voir la figure 4.3), tandis qu'il se produit pour des pressions plus élevées dans le cas étudié ici. Il est très probable que la position et les propriétés mécaniques de la lèvre aient une grande influence sur le mouvement de l'anche, et donc sur la limite de validité du modèle élémentaire à raideur constante. L'analyse d'autres embouchures, avec différentes positions de lèvre et différentes anches devrait permettre de préciser ce point.

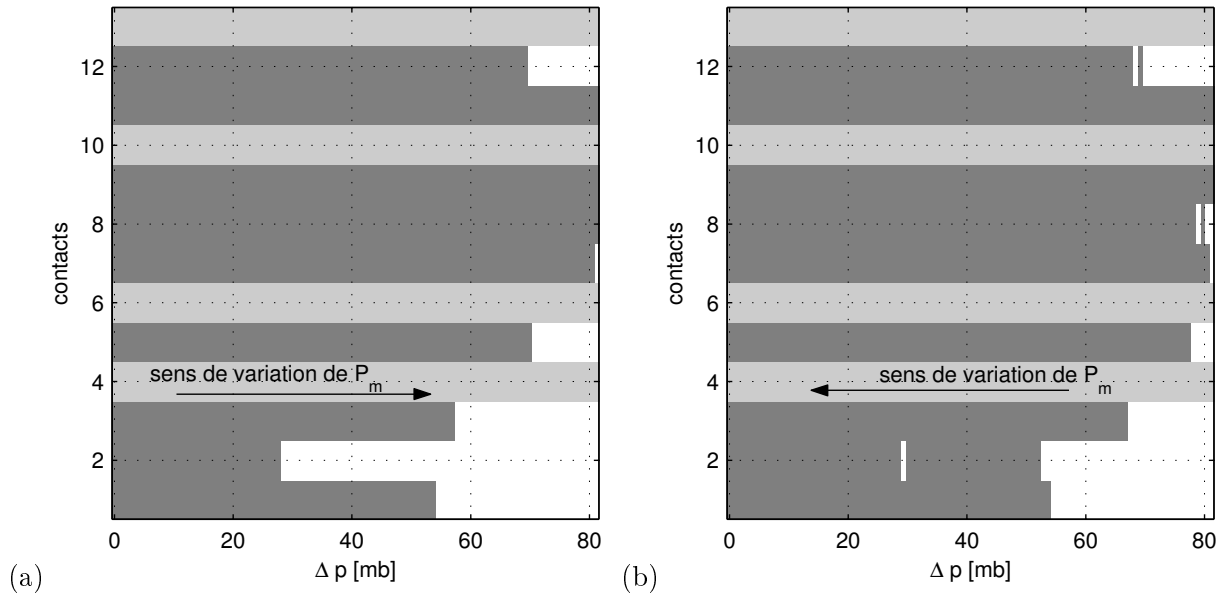


FIG. 5.5 – *Enroulement jusqu'au plaquage en statique (pression P_m croissante à gauche et décroissante à droite).*

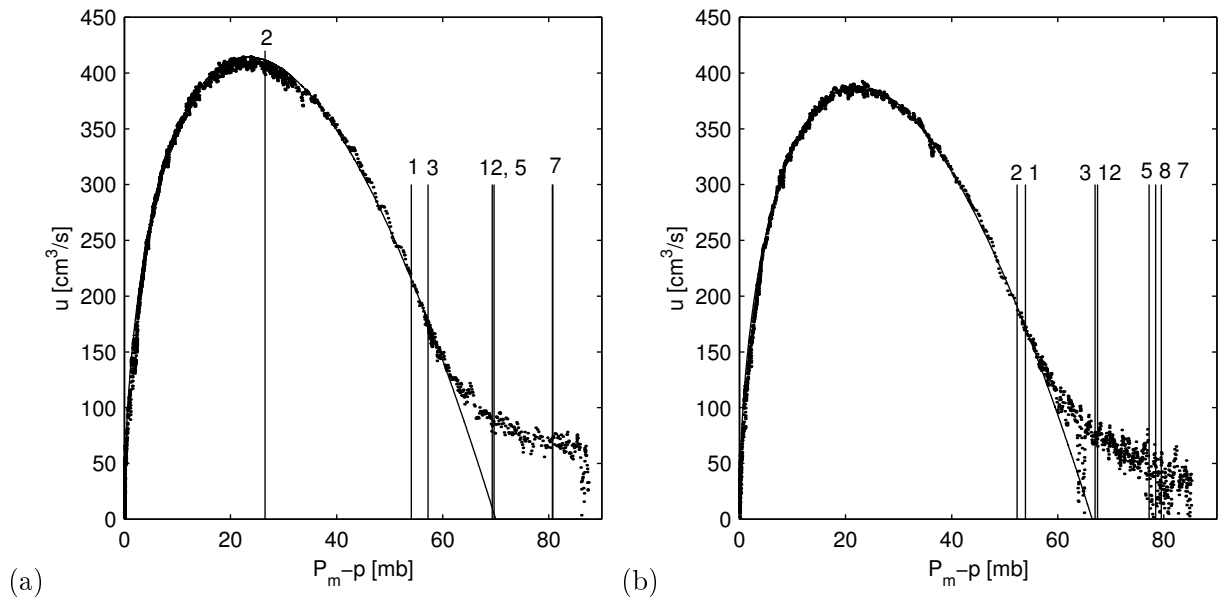


FIG. 5.6 – *Caractéristique non-linéaire mesurée (points), modèle élémentaire (trait continu) et pressions limites associées aux différents contacts (traits verticaux + numéros).*

5.4 Contact anche-table en régime dynamique

Dans ce paragraphe, le contact entre le bec et l'anche est observé en régime dynamique. On cherche notamment à vérifier la validité de l'hypothèse de base du modèle élémentaire qui suppose que le comportement de l'anche en régime dynamique est similaire au comportement en régime statique.

Le diaphragme utilisé pour l'étude en régime statique est remplacé par un tube cylindrique de 30 cm, de même diamètre que la perce du bec (15 mm), sans trou latéral ni pavillon. La longueur effective totale de l'instrument est de 45.5 cm. L'embouchure n'est pas modifiée. La pression d'alimentation P_m est ensuite augmentée progressivement. A partir du seuil d'oscillation les signaux issus des différents capteurs sont relevés pendant quelques périodes pour différentes valeurs de P_m . On relève la différence de pression $\Delta p(t) = P_m - p(t)$ où $p(t)$ est la pression dans la chambre (pression interne), le signal de la photodiode qui mesure la hauteur du canal anche table, et l'état des contacts. En raison de leur nombre, les figures sont reportées en annexe A. Sur ces figures sont représentés en fonction du temps pour différentes valeurs de P_m : le contact anche table, les signaux de pression $\Delta p(t)$ et l'ouverture mesurée par le dispositif optique. Les niveaux de pression prévus par le modèle élémentaire de clarinette sans pertes sont également tracés.

Pour des pressions d'alimentation proches du seuil (figure A.1a), l'anche oscille à la façon d'une poutre encastree libre selon le schéma de la figure 5.1a, sans contact avec la partie courbe de la table. A partir d'un certain seuil, l'anche "s'enroule" sur la table à proximité du talon selon le schéma de la figure 5.1b. Ce type de mouvement est observé sur les figures A.1b à A.2c. Lorsque P_m augmente encore, l'extrémité de l'anche touche la table avant sa partie centrale, de la même façon qu'en régime statique, selon le schéma de la figure 5.1c : l'anche "bat". Ce type de mouvement apparait sur la figure A.2d, mais on remarque que l'anche rebondit et ne reste pas plaquée. Il n'y a plus de rebond qu'au-delà de $P_m = 37$ mb (figures A.4a et suivantes). Lorsque la pression est encore augmentée, l'anche se plaque de plus en plus sur la table. On remarque également un phénomène de rebond sur le contact 8 (figure A.5). A plus fort niveau les contacts 7, 9 et 11 finissent par se fermer également.

Ainsi, comme dans les simulations de Walstijn [vW02], le scénario observé en régime dynamique est qualitativement identique à celui observé en régime statique. D'un point de vue quantitatif, la pression $P_m - p$ telle que l'anche commence à battre sur la figure A.2d est de 61 mb. Néanmoins, l'anche ne reste pas plaquée, elle "rebondit". L'analyse des figures A.3c, A.3d et A.4a montre que l'anche reste plaquée sans se "décoller" pour des pressions $P_m - p \geq 66$ mb. Ces valeurs sont à comparer aux valeurs issues de la mesure en régime statique, pour lesquelles le contact numéro 12 change d'état pour une pression comprise entre 67.5 et 69.4 mb. Ce comportement est attribué à l'inertie de l'anche, qui n'est pas prise en compte dans le modèle. Le fait que l'anche "rebondisse" est en contradiction avec l'hypothèse d'un choc inélastique. La dynamique de l'anche abaisse donc légèrement le seuil de battement, mais pas de façon significative. Il semble donc raisonnable de conclure que les comportements de l'anche en régime statique et dynamique sont quasiment identiques, au moins sur le premier registre.

Il est à noter que le seuil de battement est nettement perceptible à l'écoute. Cela se traduit par l'apparition d'une "coloration en hautes fréquences". Sur le signal de pression interne, des oscillations

amorties de haute fréquence apparaissent suite au battement, mais la fréquence d'échantillonnage de la carte d'acquisition utilisée est trop faible pour déterminer la fréquence de ces oscillations et leur niveau sur le microphone en bout de tube. Il faut néanmoins noter que cette coloration est fortement atténuée si le tube cylindrique est remplacé par un véritable corps de clarinette.

5.5 Ouverture anche-table en régime dynamique dans le cas de la clarinette

L'autre donnée dont nous disposons pour l'étude de la vibration de l'anche est l'ouverture anche-table mesurée à l'aide du dispositif optique. Dans ce paragraphe nous cherchons à tester la validité du modèle élémentaire à prévoir la variation de l'amplitude de l'ouverture $H(t)$ en fonction de la pression d'alimentation P_m . Le modèle sans pertes de clarinette (voir le chapitre 1) sert de référence.

Afin de visualiser l'évolution de l'ouverture anche-table en fonction de la pression d'alimentation, on s'intéresse à la position moyenne de l'anche et à l'amplitude de variation de $H(t) = H_0 + y(t)$, où $y(t)$ est la variation de la position de l'extrémité de l'anche par rapport à la position 0 en l'absence de surpression dans la bouche, et H_0 est la hauteur de l'ouverture dans les mêmes conditions. $y(t)$ est défini négativement si la variation se fait dans le sens d'une diminution de l'ouverture.

5.5.1 Ouverture dans le cadre du modèle sans pertes

Dans le cadre du modèle élémentaire, la position de l'anche $y(t)$ est donnée par la relation suivante :

$$\begin{cases} y = -\frac{P_m - p}{k_r} & \text{si } P_m - p < P_M \\ y = -H_0 & \text{si } P_m - p > P_M \end{cases} \quad (5.1)$$

Dans l'hypothèse où il n'y a pas de recouvrement de pression en sortie du canal anche-table, p est nulle en régime statique et la valeur moyenne $\langle p \rangle$ de $p(t)$ en régime oscillant est nulle. Dans le cadre du modèle élémentaire de clarinette sans pertes, le régime oscillant existe lorsque $P_m > P_M/3$. Pour $P_m < P_M/3$, il n'y a pas d'oscillation, donc $p = 0$, $y = -P_m/k_r$ et $H = H_0 - P_m/k_r$, soit $H/H_0 = 1 - P_m/P_M$ avec $P_M = k_r H_0$ (par définition). Au seuil d'oscillation $P_m = P_M/3$, l'ouverture adimensionnée par H_0 vaut $H/H_0 = 1 - 1/3 = 2/3$. Pour $P_m > P_M/3$, la pression $p(t)$ oscille entre deux niveaux de pression et passe de l'un à l'autre de façon instantanée. Tant que $P_M/3 < P_m < P_M/2$, la pression oscille entre p_o et $-p_o$, avec $p_o = \sqrt{(3P_m - P_M)(P_M - P_m)}$ [Ker95]. On en déduit que $H(t)/H_0$ oscille entre $H/H_0 = 1 - P_m/P_M - p_o/P_M$ et $H/H_0 = 1 - P_m/P_M + p_o/P_M$. la moyenne $\langle p \rangle$ de $p(t)$ étant supposée nulle, on trouve pour la valeur moyenne $\langle H/H_0 \rangle$ de $H(t)/H_0$: $\langle H/H_0 \rangle = 1 - P_m/P_M$. Pour $P_m > P_M/2$, l'anche "bat" et $p(t) = \pm P_m$. Donc $y = -H_0$ à la fermeture, soit $H/H_0 = 0$, et $y = 0$ à l'ouverture, soit $H/H_0 = 1$. La valeur moyenne vaut $\langle H/H_0 \rangle = 1/2$. Il faut noter qu'il n'y a pas de limitation du niveau sonore le modèle sans pertes.

Suite à cette analyse, les valeurs théoriques minimales, maximales et moyennes de $H(t)/H_0$ sont tracées en fonction de la pression adimensionnée Pm/P_M sur la figure 5.7.

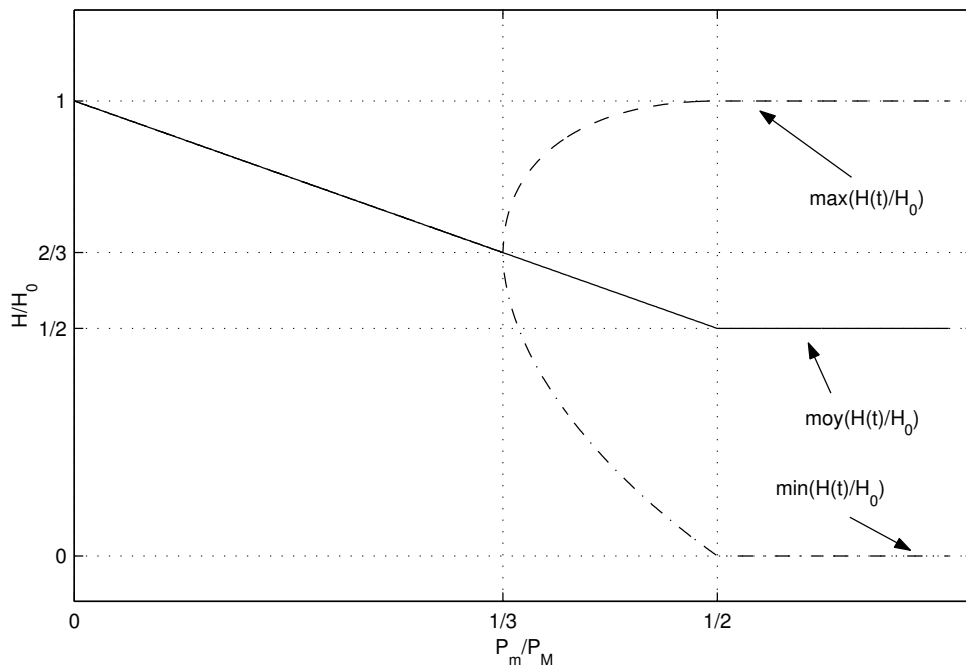


FIG. 5.7 – Amplitude de variation de l'ouverture $H(t)/H_0$ en fonction de P_m/P_M dans le cadre du modèle sans pertes

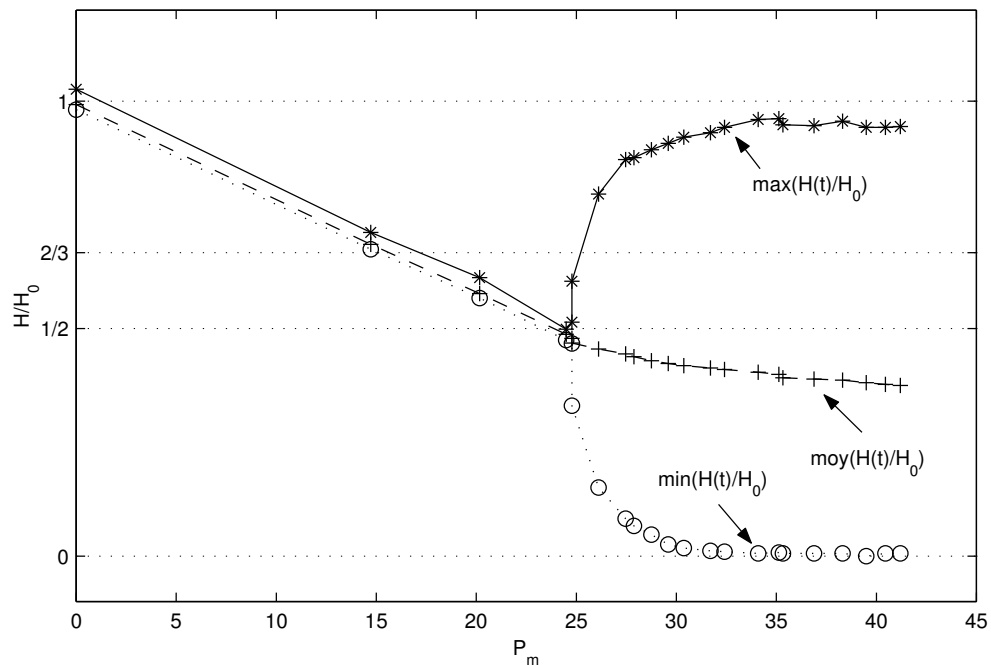


FIG. 5.8 – Amplitude de variation et valeur moyenne de l'ouverture mesurée $H(t)/H_0$ en fonction de P_m dans le cas de l'embouchure étudiée ($L_{tube} = 30\text{cm}$)

5.5.2 Ouverture mesurée

Le même type de courbe que dans le cas du modèle sans pertes est tracé à partir des données expérimentales sur la figure 5.8. Les valeurs maximales, minimales et moyennes des signaux d'ouverture des figures A.1 à A.5 sont tracées en fonction de la pression d'alimentation P_m . Comme on peut s'y attendre, le seuil d'oscillation étant supérieur à $P_M/3$ compte tenu des pertes, la position de l'anche au seuil d'oscillation est inférieure à $2/3$, qui est la position au seuil dans le cas sans pertes. Le fait que H/H_0 au seuil soit de l'ordre de 0.5 est plus inattendu puisqu'il s'agit de la valeur prévue pour le régime "anche battante". Compte tenu de l'incertitude liée au dispositif optique, notamment en ce qui concerne le "zéro" (voir le chapitre 4), il est difficile d'en tirer des conclusions.

L'évolution de $H(t)/H_0$ mesurée est par ailleurs assez semblable à l'évolution dans le cas du modèle sans pertes. On remarque notamment que le niveau maximum à l'ouverture est proche de 1 en régime "anche battante" ($P_m > 33.5$ mb), mais inférieur. Cette différence s'explique par la présence de pertes acoustiques, et aussi probablement mécaniques dans l'anche et au niveau de la lèvre. En effet, en présence de pertes lorsque l'anche est ouverte la différence de pression de part et d'autre de l'anche n'est pas nulle (voir les figures A.3 à A.5), et donc l'anche n'est pas à sa position d'équilibre.

Lorsque la pression d'alimentation P_m augmente à partir du seuil, l'amplitude d'oscillation de l'anche augmente jusqu'à ce que son extrémité entre en contact avec la table ($P_m \simeq 33.5$ mb), puis l'amplitude maximum atteint une valeur constante. La valeur moyenne cependant décroît légèrement. Cette décroissance s'explique par la diminution de la durée d'ouverture de l'anche. Cette diminution est directement liée aux pertes acoustiques. En effet, lorsque P_m augmente en régime "anche battante", la pression p dans le bec n'est plus suffisante pour assurer la réouverture de l'anche durant toute la phase durant laquelle p est positive. On peut y voir la conséquence de l'"arrondissement" des coins du signal carré. Cette diminution de la durée d'ouverture est d'abord sans effet notable sur le signal de pression, mais conduit la déformation du signal puis à l'étouffement des oscillations. Dans le cas des instruments coniques, ce phénomène peut expliquer l'apparition du mouvement de Helmholtz inversé vu aux chapitres 2 et 3. Ce mécanisme de saturation étant a priori d'avantage lié aux pertes dans le résonateur qu'à la non-linéarité pression-débit, il n'est pas discuté ici. Le lecteur intéressé par ce sujet pourra consulter [DDO02], reproduit en annexe B.

En résumé, mis à part le phénomène de saturation, que l'on peut attribuer essentiellement au résonateur, la similitude entre les figures 5.7 et 5.8 est un élément qui confirme la validité du modèle élémentaire pour ce type d'embouchure sans enroulement.

5.5.3 Le problème de la détermination de la pression de plaquage

Les mesures dynamiques discutées jusqu'ici sont limitées à des valeurs de P_m inférieures à 45mb, l'intérêt étant focalisé sur la transition vers le régime anche battante. La figure 5.9, met d'avantage le phénomène de saturation en évidence. Cette figure est tracée à partir de données mesurées sur une clarinette simplifiée de longueur effective de environ 55.5cm, soit 10 cm de plus que la clarinette correspondant à la figure 5.8, et pour une embouchure différente (non mesurée). La courbe présente

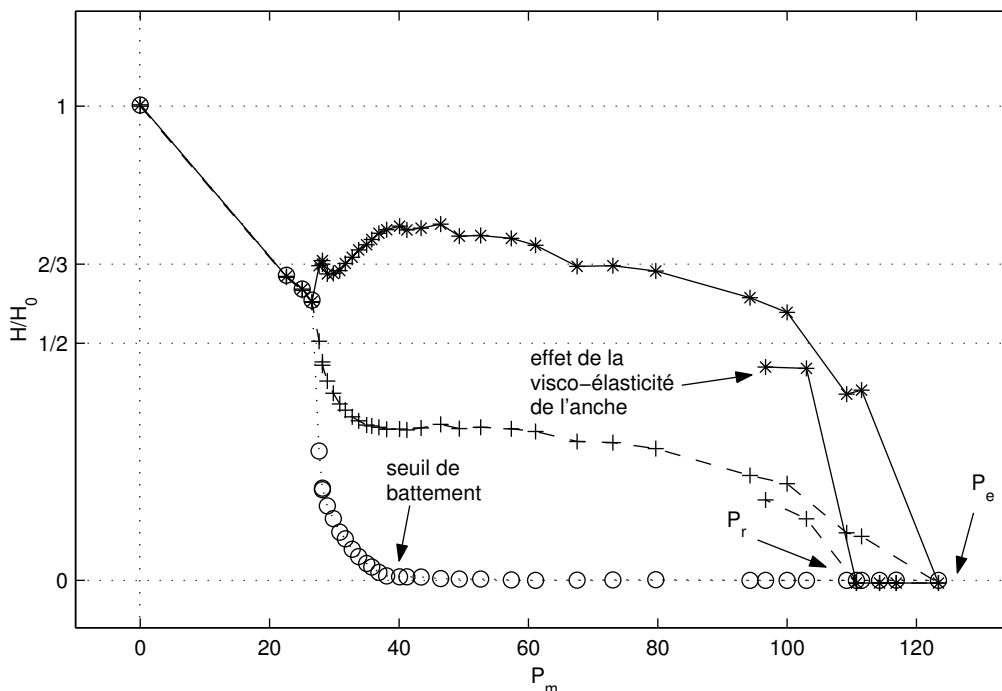


FIG. 5.9 – Amplitude de variation de l'ouverture $H(t)/H_0$ en fonction de P_m dans le cas d'une embouchure non mesurée ($L_{tube} = 40\text{cm}$)

les mêmes caractéristiques que sur la figure 5.8 jusqu'à $P_m \simeq 50\text{mb}$, puis l'amplitude d'oscillation de l'anche diminue d'abord faiblement, puis de façon importante au-delà de 100mb jusqu'à l'"étouffement" complet des oscillations. La pression P_m pour laquelle les oscillations s'éteignent est notée P_e sur la figure 5.9 ($e = \text{"étouffement"}$).

Lorsque P_m est diminuée l'anche reste plaquée jusqu'à ce P_m atteigne la valeur P_r en-dessous de laquelle l'anche s'ouvre et le système oscille à nouveau ($r = \text{"réouverture"}$). On notera que l'amplitude d'oscillation est plus faible après le plaquage qu'avant, pour une même pression P_m . Cette diminution est attribuée aux propriétés visco-élastiques de l'anche (paragraphe 4.4.2). La mesure de la "pression de réouverture" P_r semblait, jusqu'à la mise au point de la méthode de mesure présentée au chapitre précédent, un moyen simple d'évaluer la pression de plaquage P_M définie dans le cadre du modèle élémentaire. En effet cette procédure correspond à la définition de P_M puisqu'il s'agit, dans le cadre du modèle élémentaire, de la pression statique suffisante pour maintenir l'anche fermée. Or, du fait de la différence entre le comportement réel de l'anche lorsqu'elle se ferme et le modèle élémentaire, cette pression est plus élevée que la valeur P_M extrapolée selon la méthode décrite au chapitre précédent. Dans le cas de la figure 5.9 les paramètres d'embouchure n'ont pas été mesurés. Néanmoins, compte tenu de la similitude avec la figure 5.8, on peut estimer que P_M vaut environ 80mb , tandis que la pression P_r est de l'ordre de 110mb , soit une valeur plus élevée de 40% environ.

Une autre pression d'alimentation est caractéristique de la non-linéarité, il s'agit de la "pression de

battement" mesurée en régime dynamique. Dans le cas de l'embouchure correspondant à la figure 5.8 celle-ci est d'environ 33.5mb, qui est à comparer à $P_m = P_M/2$ dans le cadre du modèle élémentaire. La pression P_M extrapolée étant comprise dans l'intervalle [66.5mb, 69.5mb], on trouve $33.3 < P_M/2 < 34.7$. L'accord est bon, mais il faut se garder de généraliser l'équivalence car celle-ci n'est probablement valable que lorsqu'il n'y a quasiment pas d'enroulement comme dans le cas étudié.

En conclusion, lorsque des formules théoriques déduites du modèle élémentaire sont utilisées, il faut, pour la pression de plaquage, utiliser la valeur extrapolée P_M , qui ne correspond à aucune des pressions caractéristiques qu'il est possible de mesurer.

5.6 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre nous avons montré la faisabilité d'une mesure du contact entre l'anche et la table du bec. Avec ce dispositif nous avons observé la possibilité d'un mouvement de l'anche tel qu'il n'y a pas d'enroulement continu sur toute la longueur de la table mais battement au-delà d'un certain seuil. Bien que prévu par plusieurs auteurs de façon théorique ou numérique, la possibilité d'un tel mouvement n'avait pas été confirmée expérimentalement jusqu'ici. Bien qu'un autre scénario ne soit pas exclu, ce type de mouvement est le mode de fonctionnement le plus courant avec la combinaison (ananche, bec) choisie. Dans ce cas, l'hypothèse généralement admise selon laquelle les propriétés mécaniques de l'ananche varient au cours de son mouvement du fait de la diminution de sa longueur vibrante n'est pas justifiée. Ainsi le fait que l'ananche ne s'enroule pas (ou peu) sur la table permet finalement de comprendre pourquoi le modèle élémentaire à raideur constante est valable sur une large plage de pression.

La mesure de contact indique que le comportement de l'ananche en régime dynamique est similaire au comportement en régime statique, d'un point de vue qualitatif et quantitatif. Ceci est un élément qui tend à confirmer la validité d'un modèle quasi-statique, au moins tant que la fréquence de jeu est petite devant la fréquence propre de l'ananche [WB74].

La variation de l'ouverture ananche-table en fonction de la pression a été observée en régime dynamique. Un modèle de clarinette associant le modèle élémentaire de caractéristique non-linéaire à un résonateur sans perte s'est avéré être un outil permettant d'analyser de façon simple les données expérimentales en première approche. Cela confirme l'intérêt de l'étude de ce type de modèle afin de comprendre les mécanismes de base des instruments à ananche [Ker95, DK95].

Enfin, nous avons comparé les différentes méthodes de détermination de la pression de plaquage équivalente au modèle. En particulier, nous avons mis en évidence l'invalidité de la méthode employée jusqu'à la mise au point de celle présentée au chapitre précédent.

La mesure du contact entre l'ananche et la table ouvre de nombreuses perspectives, à court terme en utilisant le dispositif mis en oeuvre, et à plus long terme avec un dispositif plus précis.

Les mesures discutées dans ce chapitre indiquent que la caractéristique non-linéaire mesurée "s'écarte" du modèle uniquement lorsque le canal ananche-table est quasiment fermé. Néanmoins, nous

avons vu au paragraphe 4.4.3 du chapitre précédent que dans certains cas la raideur de l'anche augmente lorsque $\Delta p > 40$ mb. Des mesures complémentaires dans le cas d'une embouchure telle que l'anche s'enroule d'avantage avant de battre permettraient de vérifier que la déviation par rapport au modèle est liée à l'enroulement.

La déformée de l'anche et la géométrie de la table du bec déterminent le type de mouvement ("anche libre", "anche s'enroulant", ou "anche battante") [Gaz94]. La déformée de l'anche semble en pratique être très dépendante de la position, de la dimension et de l'amortissement de la lèvre. Nous avons réalisé des mesures préliminaires qui nous ont permis de différencier de façon objective le comportement de lèvres artificielles de nature différente mais ce thème de recherche n'a pas été approfondi. Une étude spécifiquement consacrée à la caractérisation des propriétés mécaniques des lèvres humaines et la conception de lèvres artificielles aux propriétés comparables nous semble être d'un intérêt majeur, notamment en vue d'une comparaison avec des simulations numériques. On notera d'ailleurs qu'une session était principalement consacrée à l'étude des lèvres artificielles pour les instruments de type cuivre à l'ISMA 2001.

Afin de mieux comprendre l'influence des différents paramètres sur le système excitateur il serait également souhaitable de réaliser un dispositif de mesure d'enroulement plus élaboré qui permettrait d'obtenir des données quantitatives précises sur la variation de la position du point de contact anche-table. Ces données pourraient alors être comparées à des simulations numériques. La conception d'un bec modulable tel que la table puisse être changée sans modifier l'appui de la lèvre sur l'anche est également à envisager si l'on veut mieux comprendre l'influence de la forme de la table sur le mouvement de l'anche. Une telle démarche permettrait d'abord de mieux comprendre la mécanique de l'anche, et à plus long terme d'envisager des applications à la facture instrumentale.

Chapitre 6

Évolution du spectre d'une clarinette simplifiée au voisinage du seuil d'oscillation. Confrontation théorie / expérience

6.1 Introduction

Dans une clarinette, au seuil d'oscillation les signaux de pression dans l'embouchure sont quasi-sinusoidaux, tandis qu'il sont proches d'un signal carré lorsque la pression est proche du seuil de battement. En anche battante le signal est proche d'un signal carré, jusqu'à ce que la pression dans la bouche soit si importante que l'anche reste fermée, conduisant à l'"étouffement" des oscillations [DDO02]¹. Plusieurs auteurs ont cherché à analyser cette évolution du spectre. Worman est le premier à avoir calculé théoriquement le spectre des instruments à anche [Wor71]. Ses travaux ont suscité d'autres études, notamment les études expérimentales de Benade et Kouzoupis [BK88] et Benade et Lutgen [BL88]. Ces derniers ont utilisé les résultats de Worman et ont déduit des formules semi-empiriques en accord avec des résultats expérimentaux. Leur formules dépendent de plusieurs paramètres d'ajustement empiriques mais il s'agit des premières descriptions analytiques de l'ensemble du spectre. Plus récemment, Grand et col. [GGL97] ont complété les travaux de Worman. En utilisant la même technique de développement en séries, mais avec un modèle et des hypothèses légèrement différentes, ils étudient les oscillations à proximité du seuil d'instabilité du régime non-oscillant et déterminent le type de bifurcation (directe ou inverse) ainsi que le spectre des petites oscillations. Par ailleurs, Kergomard [Ker95] a étudié les propriétés d'un modèle de clarinette à résonateur sans pertes. Si ce type de modèle est utile pour l'étude de l'influence des paramètres de jeu sur les auto-oscillations et sur les bifurcations vers les différents régimes (voir les chapitres 1 et 2 par exemple), il n'est pas

¹Voir l'annexe B

adapté à l'étude du spectre en fonction des paramètres de contrôle puisque celui-ci est constant dans le cadre de ce modèle. En revanche, on peut considérer ce modèle comme un cas limite au voisinage et au-delà de l'anche battante. Afin de décrire la transition entre les comportements "petites oscillations" et "signal carré", Kergomard et col. [KOG00] ont proposé une méthode approchée pour le calcul du spectre. Le principe et l'application à la clarinette sont donnés dans la publication reproduite dans l'annexe C. Cette méthode, qui permet de calculer les solutions du problème couplé au-delà du seuil d'oscillation, est une version approchée de la méthode d'équilibrage harmonique (ou "balance harmonique"), présentée succinctement au paragraphe 6.2.3.

Dans ce chapitre, il s'agit essentiellement de comparer les régimes d'oscillation théoriques obtenus avec le modèle élémentaire et les régimes permanents mesurés dans un instrument en situation de jeu, en anche non battante. Afin de comparer les spectres expérimentaux aux spectres calculés par différentes méthodes, les instruments étudiés sont des clarinettes simplifiées, constituées d'une embouchure de clarinette, d'un barillet et d'un tube cylindrique sans trous latéraux ni pavillon. Les premiers résultats de cette étude ont été présentés à l'ISMA2001 [OKD01], mais l'analyse des résultats expérimentaux était alors limitée car les paramètres d'embouchure (ζ et P_M) n'étaient pas connus. La mise au point de la méthode de détermination de la caractéristique non-linéaire présentée au chapitre 4 lève cette difficulté et permet de tester la capacité du modèle théorique à décrire précisément le comportement d'un instrument réel. Ainsi, l'originalité des mesures ne réside pas dans les observations sur l'évolution du spectre, que de précédents travaux ont déjà mis en évidence de façon *qualitative* [BK88, Ben76, Mey87], mais sur la possibilité de comparer *quantitativement* les données expérimentales et théoriques.

La première partie de ce chapitre présente le modèle utilisé pour décrire l'instrument et compare les prédictions théoriques de l'amplitude des harmoniques obtenue à partir d'approches différentes. La deuxième partie présente des résultats expérimentaux. Lorsque cela a un sens, ceux-ci sont comparés aux prévisions théoriques.

6.2 Méthodes de calcul

6.2.1 Le modèle physique de référence

6.2.1.1 L'embouchure

On utilise le même modèle physique élémentaire que dans les autres chapitres. Dans l'article [KOG00] présenté en annexe ainsi que dans [Ker95], les variables débit entrant u et pression acoustique dans le bec p sont adimensionnées par la pression de plaquage statique, notée P_M . Cette pression est supposée égale à la pression de battement en régime dynamique dans le cadre du modèle.

La pression de plaquage étant supposée connue, la relation pression-débit du modèle élémentaire s'écrit à l'aide de paramètres adimensionnés :

$$\mathbf{u} = F(\mathbf{p}) = \begin{cases} \zeta(1 - \gamma + \mathbf{p})\sqrt{|\gamma - \mathbf{p}|}\text{sign}(\gamma - \mathbf{p}) & \gamma - \mathbf{p} < 1 \\ 0 & \gamma - \mathbf{p} \geq 1 \end{cases} \quad (6.1)$$

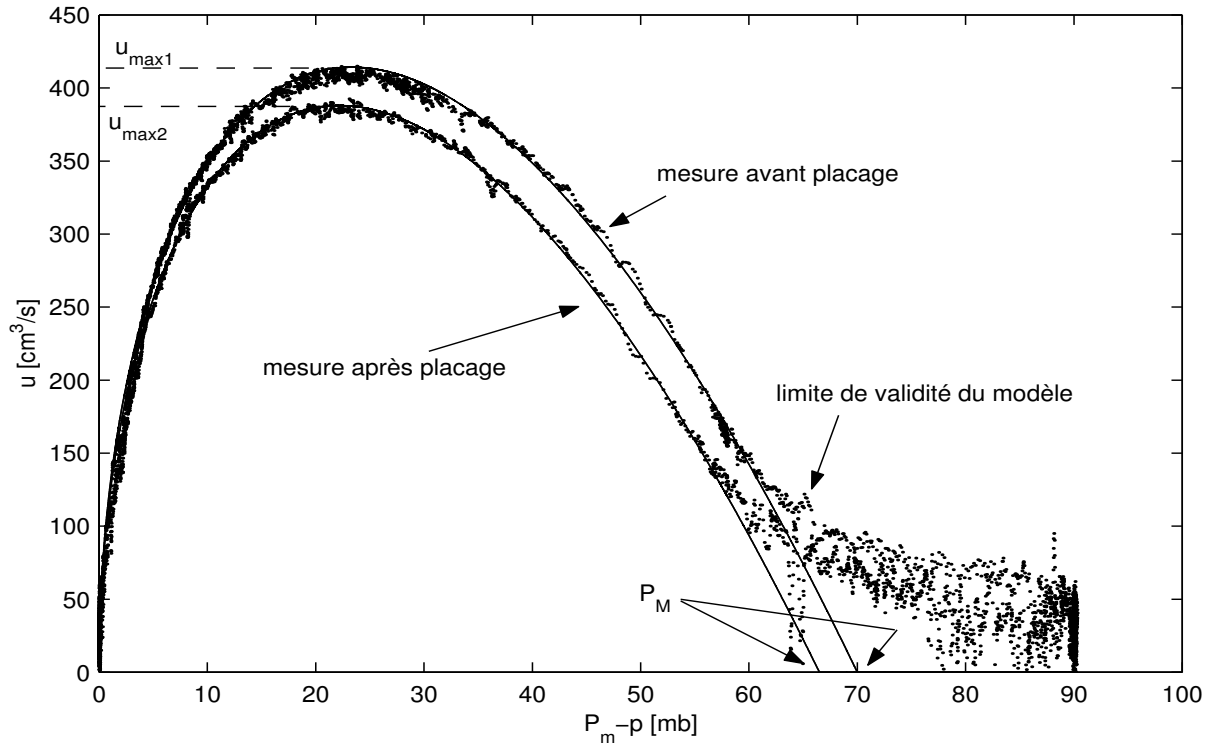


FIG. 6.1 – Caractéristique non-linéaire mesurée (points) et modèle élémentaire (trait continu).

avec

$$\mathbf{p} = p/P_M, \quad \mathbf{u} = Z_c u/P_M, \quad \text{et} \quad \gamma = P_m/P_M. \quad (6.2)$$

$Z_c = \rho c/S$, où S est le diamètre du cylindre, est l'impédance caractéristique du résonateur. La détermination de la pression de plaquage P_M est un facteur important pour une utilisation correcte des formules théoriques. A cause du comportement visco-élastique de l'anche (voir le paragraphe 4.4.2), la mesure de la caractéristique non-linéaire fournit deux valeurs de P_M (voir la figure 6.1) qui sont considérées comme les limites d'un encadrement. On note que P_M ne correspond ni à la pression de plaquage mesurée en statique, ni à la pression de battement évaluée en régime dynamique (voir le chapitre précédent). Il s'agit d'une valeur extrapolée (voir la figure 6.1). Lorsque $P_m > P_M/2$ (c'est-à-dire $\gamma > 1/2$), le modèle suppose que l'anche est fermée durant une fraction de la période. Il faut noter que dans le cadre du modèle théorique, les phénomènes d'enroulement et de battement tels qu'il sont discutés dans le chapitre 5 ne sont pas considérés. De plus, la mesure de la caractéristique non-linéaire montre clairement que le modèle élémentaire ne décrit plus correctement la relation pression-débit lorsque l'anche ferme quasiment le canal d'entrée. Par conséquent, l'analyse comparée théorie / expérience n'a de sens qu'en régime "ananche non battante" (voir la figure 6.1). La pression P_M est ainsi appelée la "pression de battement" ou "pression de plaquage" puisque le modèle suppose que les comportements dynamique et statique sont identiques. La pression P_M est également désignée comme le "seuil de battement", bien qu'il ne s'agisse pas d'un changement de comportement par bifurcation.

6.2.1.2 Le résonateur

Pour la modélisation du résonateur, les notations sont celles de [KOG00] (annexe C). Le résonateur est décrit dans le domaine fréquentiel par son impédance d'entrée :

$$P(\omega) = Z(\omega)U(\omega), \quad (6.3)$$

où $P(\omega)$ et $U(\omega)$, sont les transformées de Fourier de $u(t)$ et $p(t)$ respectivement. Si les pertes en bout de tube sont ignorées et si la correction de longueur due au rayonnement est prise en compte dans la longueur effective du tube, l'impédance d'un guide purement cylindrique peut s'écrire

$$Z(\omega) = Z_c j \tan(kL), \quad (6.4)$$

où L est la longueur effective du résonateur, $k = \omega/c + (1 - j)\sqrt{\omega\ell_{vt}/2c}/r$, r étant le rayon du tube, et ℓ_{vt} la longueur caractéristique des pertes visco-thermiques : $\ell_{vt} = (1 + (\gamma_m - 1)\sqrt{P_r})\mu/\rho c$, où μ est le coefficient de viscosité, P_r est le nombre de Prandtl et γ_m est le rapport des chaleurs spécifiques. Un coefficient sans dimension η est défini comme suit :

$$\eta = \sqrt{\frac{\ell_v L}{r^2}}, \quad (6.5)$$

avec $\ell_v = \mu/\rho c$. L'argument kL dans l'équation (6.4) peut être écrit en fonction de η :

$$kL = \omega\ell/c + (1 - j)\psi\eta\sqrt{\frac{2\omega L}{\pi c}}, \quad (6.6)$$

où, pour des conditions normales de température et de pression de l'air,

$$\psi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\ell_{vt}\ell_v} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\left(1 + \frac{\gamma_m - 1}{\sqrt{P_r}}\right) \simeq 1.3. \quad (6.7)$$

En remplaçant kL par (6.6) dans (6.3), et en considérant que $\eta \ll 1$ (typiquement $\eta = 0.02$ pour une clarinette), on obtient pour l'admittance (adimensionnée par $1/Z_c$) $Y = Z_c/Z$ aux fréquences $n f_1$ des harmoniques n :

$$Y_n \simeq \psi\eta(\sqrt{n} - j(n - \sqrt{n})) \text{ pour } n \text{ impair, et} \quad (6.8)$$

$$Y_n \simeq [\psi\eta(\sqrt{n} - j(n - \sqrt{n}))]^{-1} \text{ pour } n \text{ pair.} \quad (6.9)$$

Dans le cadre du modèle choisi, seule l'inharmonicité liée aux pertes visco-thermiques est prise en compte. Dans une description plus détaillée, il faudrait prendre en compte l'effet de l'anche et du bec, et dans le cas d'un modèle avec trous latéraux, l'inharmonicité liée à ces éléments. On note également que ce modèle ne tient pas compte d'éventuels effets dissipatifs non-linéaires en bout de tube [II67].

6.2.2 Le modèle sans pertes comme cas limite

Comme cela est mentionné dans le chapitre 2, un résonateur cylindrique sans pertes couplé au modèle élémentaire (équation (6.1)) conduit, quelque soit P_m , à des signaux "carrés" tels que la pression

adimensionnée \mathbf{p} dans le bec oscille entre deux valeurs. Le seuil d'instabilité du régime statique est $\gamma_{th} = 1/3$ [Ker95]. Les valeurs \mathbf{p}_o et $-\mathbf{p}_o$ entre lesquelles la pression \mathbf{p} oscille dans le cas d'un modèle de clarinette sans pertes sont trouvées en recherchant les solutions de l'équation $F(\mathbf{p}) = F(-\mathbf{p})$. On trouve ainsi [Ker95] :

$$\begin{cases} \mathbf{p}_o &= \sqrt{(1-\gamma)(3\gamma-1)} & \text{si } 1/3 < \gamma < 1/2 \\ \mathbf{p}_o &= \gamma & \text{si } \gamma \geq 1/2 \end{cases} . \quad (6.10)$$

On remarque que la solution du modèle sans pertes ne dépend pas du paramètre d'embouchure ζ , mais seulement de la pression de plaquage P_M puisque $\gamma = P_m/P_M$ et $\mathbf{p} = p/P_M$. Le spectre des oscillations "carrées" est obtenu à l'aide d'un développement en série de Fourier. Pour un signal d'amplitude \mathbf{p}_o , l'amplitude réelle P'_n des harmoniques adimensionnés par P_m est donnée par

$$P'_{2n+1} = (-1)^n \frac{4}{\pi(2n+1)} \mathbf{p}_o \quad (6.11)$$

$$P'_{2n} = 0, \quad (6.12)$$

où n est un entier positif ou nul. Le modèle sans pertes est un cas limite lorsque les pertes tendent vers 0. Comme indiqué dans le paragraphe 2.5.2, dans le cadre d'un modèle de Raman les pertes ont a priori un effet plus significatif au seuil d'oscillation qu'au seuil du régime "anche battante". Si l'inharmonicité n'est pas trop importante, on s'attend à observer le même type de comportement avec un modèle de résonateur plus réaliste. Le seuil d'oscillation d'un modèle avec pertes doit forcément être supérieur au seuil du modèle sans pertes, soit $\gamma > 1/3$. De même, une modélisation raisonnable doit conduire, lorsque les pertes visco-thermiques sont prises en compte, à des amplitudes d'oscillation inférieures à celles prévues par un modèle sans pertes.

6.2.3 La méthode d'équilibrage harmonique

Lorsque le résonateur est décrit par une relation d'impédance ou par une fonction de réflexion prenant en compte les effets dissipatifs et dispersifs, il n'est pas aisé de résoudre le système complet pour trouver les solutions du régime permanent. Une méthode possible est la simulation du comportement du système dans le domaine temporel [MSW83]. Cette approche n'est pas retenue dans cette étude. Une autre approche consiste à rechercher uniquement des régimes permanents satisfaisant à la fois la relation d'impédance (6.3) et la relation non-linéaire (6.1). C'est cette approche qui est mise en oeuvre dans la méthode d'"équilibrage harmonique", appelée aussi "balance harmonique". Il s'agit d'une méthode très générale de recherche de solutions périodiques sous la forme de séries de Fourier [Mee81].

Les signaux de pression et de débit des régimes permanents sont supposés périodiques. Ils sont développés en série de Fourier comme suit :

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} P_n e^{jn\omega t}, \quad (6.13)$$

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n e^{jn\omega t}, \quad (6.14)$$

où P_n est l'amplitude complexe de la pression pour l'harmonique n adimensionnée par P_M , U_n est l'amplitude du débit pour l'harmonique n adimensionnée par P_M/Z_c . La pression $\mathbf{p}(t)$ étant réelle, $P_{-n} = P_n^*$ où P_n^* est le complexe conjugué de P_n , de même pour U_n . Il faut remarquer qu'il existe un rapport 2 entre les amplitudes complexes ainsi définies et les amplitudes réelles. Ce sont les amplitudes réelles qui sont représentées sur les graphiques. Les solutions périodiques doivent satisfaire à la fois la relation linéaire caractérisant le résonateur et la relation non-linéaire caractérisant l'excitateur. Le problème est donc ramené à un système d'équations non-linéaires avec pour inconnues les amplitudes P_n :

$$\begin{cases} U_n = Y_n P_n & -\infty < n < +\infty \\ \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} U_n e^{jn\omega t} = F\left(\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} P_n e^{jn\omega t}\right) \end{cases}, \quad (6.15)$$

où $Y_n = Y(n\omega)$ désigne l'admittance d'entrée adimensionnée du résonateur à la fréquence nf_1 . Ce système d'équations est infini, il faut donc introduire des hypothèses simplificatrices permettant d'obtenir des solutions approchées. D'un point de vue pratique, l'impédance du résonateur opère généralement un filtrage passe-bas qui permet de réduire le système à un nombre fini d'équations. Néanmoins, il n'est pas possible de résoudre analytiquement ce système d'équations à un ordre de troncature supérieur ou égal à 3. Dans ce cas, le problème est traité numériquement.

Le calcul numérique des solutions périodiques a été appliquée par Schumacher dans le cas de la clarinette, en supposant que la fréquence de jeu est connue [Sch78]. Gilbert et col. [Gil91, GKN91] ont étendu cette méthode en considérant la fréquence de jeu comme inconnue. Il faut noter que la méthode d'équilibrage harmonique permet d'obtenir aussi bien les solutions stables que les solutions instables, contrairement aux simulations dans le domaine temporel.

Près du seuil d'oscillation, le problème peut être traité analytiquement de façon approchée en faisant l'hypothèse des "petites oscillations", valable tant que P_1/γ est un infiniment petit du premier ordre, et les P_n/γ sont des infiniment petits d'ordre supérieur ou égal. En étudiant l'ordre de grandeur des différents termes du système (6.15) et en ne conservant que les principaux, Grand et col. [GGL97] donnent pour le fondamental l'expression suivante :

$$P_1^2 = \frac{(Y_1 - A)(Y_2 - A)}{2B^2 + 3C(Y_2 - A)} \quad (6.16)$$

où A , B et C sont les coefficients du développement au troisième ordre de la fonction non-linéaire en série de Taylor au seuil d'oscillation :

$$u(t) = u_{00} + Ap(t) + Bp(t)^2 + Cp(t)^3. \quad (6.17)$$

L'étude du signe de P_1^2 permet de déterminer la nature (directe ou inverse) de la bifurcation correspondant à la solution étudiée [GGL97]. L'analyse des seuils de bifurcation dans le cas d'une bifurcation inverse est détaillée dans Dalmont et col. [DGK00]. Dans le cas la clarinette, la bifurcation du régime statique (ou "solution triviale") vers le régime d'oscillation de fréquence fondamentale est directe. Grand et col. [GGL97] étudient le spectre au seuil d'oscillation et vérifient la proportionnalité des amplitudes $|P_n|$ et $|P_1|^n$ ("loi de Worman" selon la terminologie de Benade). La validité de

cette approche est limitée au seuil et il est nécessaire d'adopter une autre méthode pour calculer analytiquement le spectre au-delà du seuil et l'amplitude des harmoniques $n > 3$. Kergomard et col. [KOG00] adoptent une démarche basée sur la troncature variable du système (6.15) selon l'harmonique considéré. Celle-ci est présentée dans le paragraphe suivant.

6.2.4 La méthode d'équilibrage harmonique à troncature variable

6.2.4.1 Principe

La résolution approchée du système (6.15) par la méthode d'équilibrage harmonique à troncature variable appliquée à la clarinette est exposée en détail dans l'annexe C. Il s'agit d'un article paru dans la revue *ACUSTICA-acta acustica* [KOG00]. Un des objectifs est d'établir une méthode approchée pour la résolution du système (6.15) au-delà du seuil d'oscillation. La méthode repose sur les hypothèses suivantes :

- L'amplitude des harmoniques pairs est très inférieure à celle des harmoniques impairs. Cette hypothèse n'est a priori pas exacte au seuil, mais comme les harmoniques pairs comme les impairs y sont très inférieurs au fondamental, la méthode reste valable.
- Le calcul de la pression ne tient compte, dans un premier temps, que des harmoniques impairs (c'est-à-dire que les impédances correspondant aux harmoniques pairs sont supposées nulles). Les harmoniques pairs peuvent néanmoins être calculés ensuite, en les considérant comme une perturbation du premier ordre.
- un harmonique $P_{n'}$ a une influence négligeable sur les harmoniques P_n si $n' > n$.

On obtient ainsi un système d'équations pouvant être résolu de façon itérative, la première équation ne dépendant que de l'harmonique 1, la deuxième des harmoniques 1 et 3, la troisième des harmoniques 1, 3 et 5, et ainsi de suite. L'approximation qui consiste à résoudre le système d'équations en ne tenant compte que du fondamental ("approximation du premier harmonique" ou "méthode de l'équivalent harmonique") est une méthode employée couramment en automatique. Appliqué à la résolution du système (6.15) dans le cas de la clarinette cette méthode donne pour le fondamental :

$$P_1^2 = \frac{Y_1 - A}{C}, \quad (6.18)$$

qui est la limite de l'équation (6.16) lorsque $Y_2 \rightarrow \infty$.

Dans [KOG00], l'analyse est détaillée dans le cas d'un modèle dont la non-linéarité est écrite sous la forme d'un polynôme d'ordre 3 (équation (6.17)). Les résultats de la méthode à troncature variable sont comparés aux résultats issus de calculs par équilibrage harmonique numérique, que l'on peut considérer comme "exacts" compte tenu de l'ordre de la troncature (fixe). L'application au modèle élémentaire est proposé en fin d'article (paragraphe 5.2) en remplaçant les coefficients A , B et C par des coefficients A' , B' et C' , dont les expressions sont données.

L'intérêt de la méthode à troncature variable est qu'elle permet d'obtenir des formules analytiques, à partir desquelles les amplitudes des harmoniques peuvent être calculées. Cela permet notamment de mettre en évidence l'influence des paramètres du modèle sur le spectre. Elles permettent également

d'éviter d'avoir recours au calcul numérique, coûteux en temps. Les solutions approchées peuvent également servir de vecteur d'initialisation pour le calcul par équilibrage harmonique numérique, dont la convergence dépend fortement de la "distance" séparant le vecteur initial et la solution "exacte". L'application de la méthode au cas des "cônes en escalier" ("stepped cones" dans les chapitres 1 et 2) est en cours [KO02]. Evidemment, dans ce cas l'hypothèse selon laquelle les amplitudes des harmoniques pairs sont très inférieures à celles des harmoniques impairs n'est plus valable. La validité des prévisions de la méthode à troncature variable est testée dans ce chapitre au paragraphe 6.2.6.1, dans le cadre du modèle élémentaire et pour un jeu de paramètres réalistes (mesurés). Pour cela, les solutions approchées sont comparées aux solutions obtenues par équilibrage harmonique numérique, qui fournit des solutions qui sont considérées comme des solutions "exactes" du problème couplé tant l'ordre de troncature est élevé (32 harmoniques sont pris en compte).

6.2.4.2 Résultats

Dans ce paragraphe sont donnés les résultats utilisés dans les paragraphes suivants. Les démonstrations de ces équations, données en annexe C, ne sont pas reproduites.

Amplitude des harmoniques Par application de la méthode on trouve, pour les harmoniques impairs, les expressions suivantes, où P_n est l'amplitude de l'harmonique n adimensionnée par la pression de plaquage P_M :

$$P_1 = \sqrt{\alpha_1/3} \quad (6.19)$$

$$x_3 = \frac{P_3}{P_1} = \frac{1}{3} \frac{\alpha_1}{\alpha_3 - 2\alpha_1} \quad (6.20)$$

$$x_5 = \frac{P_5}{P_1} = \frac{\alpha_1 x_3 (1 + x_3)}{\alpha_5 - 2\alpha_1 (1 + x_3^2)}, \quad (6.21)$$

$$x_7 = \frac{P_7}{P_1} = \frac{\alpha_1 (x_3^* x_5^2 + 2x_3 x_5 + x_3^2 + x_5)}{\alpha_7 - 2\alpha_1 (1 + x_3^2) + x_5^2}, \quad (6.22)$$

$$\text{avec } \alpha_n = \frac{Y_n - A'}{C'}, \quad (6.23)$$

où n est le numéro de l'harmonique, Y_n est l'admittance de l'harmonique n , et

$$A' = \zeta \frac{3\gamma - 1}{2\sqrt{\gamma}}, \quad (6.24)$$

$$C' = -\zeta \frac{7\gamma(\gamma - 1) + 2}{4\gamma^{3/2}(1 - \gamma)^2}. \quad (6.25)$$

Seuil d'oscillation Dans le cas de la clarinette, il y a coïncidence du seuil d'oscillation et du seuil d'instabilité du régime statique [GGL97]. Pour chercher le seuil d'instabilité du régime statique, la fonction non-linéaire est linéarisée autour de la position d'équilibre du système et le seuil d'instabilité est déterminé à partir du gain en boucle ouverte du système bouclé linéarisé [Fle79, STY87, EB82]. Ainsi

le seuil d'instabilité du régime statique (où "solution triviale"), qui est également le seuil d'oscillation dans le cas de la clarinette, est donné par la condition

$$Y_1 = A', \quad (6.26)$$

soit, dans le cadre du modèle considéré, lorsque $\gamma = \gamma_{th}$ avec

$$\begin{aligned} \gamma_{th} &= \frac{1}{9} \left(\psi \frac{\eta}{\zeta} + \sqrt{3 + \psi^2 \frac{\eta^2}{\zeta^2}} \right)^2 \\ &\simeq \frac{1}{3} + \frac{2}{3^{3/2}} \psi \frac{\eta}{\zeta} \simeq \frac{1}{3} + 0.5 \frac{\eta}{\zeta}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Les variables indicées $_{th}$ sont estimées au seuil d'oscillation ($_{th} = \text{"threshold"}$).

Fréquence de jeu du régime fondamental Au seuil d'oscillation, dans le cas d'une bifurcation directe, le signal de pression contient essentiellement le fondamental. C'est donc la fréquence du premier pic d'admittance qui détermine la fréquence de jeu (approximation du premier harmonique). L'équation (6.26) permet ainsi de déterminer la fréquence au seuil d'oscillation f_{th} , qui correspond à la fréquence de la première résonance du guide :

$$f_{th} = \frac{c}{4L} \left(1 - \frac{2}{\pi} \psi \eta \right). \quad (6.28)$$

Au-delà du seuil, la fréquence de jeu dépend de l'inharmonicité des fréquences de résonance du guide, et de l'inharmonicité induite par l'anche. Conformément au modèle choisi, seule l'inharmonicité liée aux pertes visco-thermiques dans le résonateur est considérée par la suite. La méthode de la puissance réactive [BG96] permet d'évaluer la variation de la fréquence de jeu. Moyennant certaines hypothèses, la fréquence de jeu peut être reliée à l'amplitude de l'harmonique 3 (voir le paragraphe 5.1. de l'article reporté en annexe C) :

$$f = \frac{c}{4L} \left(1 - \frac{2}{\pi} \psi \eta \frac{1 + 3^{3/2} |x_3|^2}{1 + 9 |x_3|^2} \right). \quad (6.29)$$

6.2.5 Calcul par perturbation du mouvement de Helmholtz

Pour le calcul des solutions près du seuil du régime "anche battante", une autre approche consiste à perturber le mouvement de Helmholtz, issu de l'analyse du modèle sans pertes (paragraphe 6.2.2). Cette méthode est cours d'élaboration par Jean Kergomard [Ker]. Dans le cas de la clarinette, le mouvement de Helmholtz est un signal carré. Cette méthode est donc désignée ici comme la "méthode de calcul par perturbation du signal carré", la désignation générale de la méthode appliquée aux instruments de type conique étant "méthode de calcul par perturbation du mouvement de Helmholtz". Le développement de la méthode n'étant pas achevé, les calculs ne sont pas donnés. Un résultat intéressant est néanmoins utilisé. Il s'agit d'une formule permettant d'estimer l'amplitude des harmoniques impairs pour des pression P_m inférieures mais proches du seuil d'anche battante $P_m = P_M/2$ [Ker] :

$$P_{2n+1} = \frac{2P_o}{(2n+1)\pi} (1 - Y_n/2A), \quad (6.30)$$

où P_{2n+1} est l'amplitude complexe des harmoniques impairs, et $\frac{2\mathbf{p}_o}{(2n+1)\pi}$ est l'amplitude des harmoniques du signal carré issu du modèle sans pertes, \mathbf{p}_o étant donné par l'équation (6.10).

6.2.6 Comparaison des méthodes

Le domaine de validité des formules issues de calculs par développement en séries dépend de la validité des hypothèses retenues pour la résolution du système d'équations, initialement à nombre infini d'inconnues. Il est intéressant de comparer les prévisions de ces méthodes entre elles avant de confronter leurs prévisions aux données expérimentales. On s'intéresse particulièrement aux harmoniques 1, 3 et 5 du signal de pression p dans l'embouchure, qui sont les plus importants en régime "anche non battante". Comme dans [KOG00], ce sont les solutions calculées par équilibrage harmonique numérique qui sont considérées comme des solutions "exactes"². On notera que le calcul par équilibrage harmonique converge difficilement lorsque P_m est proche de $P_M/2$, qui est le seuil du régime "anche battante". Avec les paramètres choisis, le calcul par équilibrage harmonique numérique n'a pas pu être utilisé pour des valeurs de $\gamma = P_m/P_M > 0.465$. Le modèle sans pertes est considéré comme un cas limite : (i) les amplitudes obtenues dans le cas d'un modèle avec pertes doivent être inférieures à celles obtenues avec le modèle sans pertes ; (ii) lorsque le spectre est constant (oscillations "carrées"), les solutions obtenues dans le cas d'un modèle avec pertes doivent se comporter de façon similaire au signal obtenu sans pertes vis-à-vis des variations des paramètres de contrôle. La validité des formules issues d'un développement en séries des solutions est limitée au comportement "anche non battante", c'est-à-dire pour $P_m - p < P_M$, soit pour $\gamma \lesssim 1/2$.

6.2.6.1 Fondamental

Les figures 6.2 et 6.3 permettent de comparer les prévisions des différentes méthodes pour le calcul de l'amplitude du fondamental. Un comportement de type "bifurcation directe" est bien observé puisqu'il existe des petites oscillations pour $P_m > P_{th}$. L'amplitude augmente très rapidement avec P_m et des niveaux supérieurs à 145 dB_{SPL} sont générés.

La méthode à troncature variable, qui pour le calcul du fondamental néglige l'influence des harmoniques, est en accord avec le calcul "exact" par équilibrage harmonique numérique sur une plage de pression assez importante. Jusqu'à $\gamma = 0.4$, l'écart au résultat "exact" est inférieur à 0.5 dB, soit environ 6% (voir la figure 6.3). Au-delà, cette approche surestime le niveau du fondamental, probablement parce que les harmoniques, notamment 3 et 5, ne sont plus négligeables. Au-delà de $\gamma = 0.44$ la surestimation devient physiquement inacceptable car le niveau du fondamental est supérieur à celui du cas sans pertes. Il convient de remarquer que la prédiction de P_1 est dépendante de la valeur des paramètres de jeu. Les courbes présentées ont été calculées en utilisant des paramètres de jeu mesurés (voir le paragraphe 6.4.1). Un autre choix de paramètres peut conduire à un accord plus ou moins bon entre le calcul numérique et la méthode à troncature variable. Néanmoins la méthode de

²Le programme d'équilibrage harmonique utilisé a été programmé par S. Ménigoz [Mén98], d'après un algorithme de J. Gilbert et col. [GKN91]

calcul par équilibrage harmonique à troncature variable permet d'obtenir une expression analytique de l'amplitude du fondamental valable sur une plage de pression qui ne se limite pas au seuil. La formule donnée par Grand et col. [GGL97] donne des résultats quasiment identiques car le terme correctif, qui ne dépend que de l'harmonique 2, est très petit devant le fondamental.

La méthode par perturbation du signal carré est intéressante car elle permet d'obtenir des amplitudes qui sont forcément plus faibles que celles calculées à partir du modèle sans pertes. Néanmoins, concernant le fondamental, il ne semble pas que le niveau calculé pour $\gamma = 1/2$ soit l'asymptote vers laquelle convergent les données numériques. Cette méthode sous-estime le niveau à la limite de l'anche battante d'environ 0.5 dB. Le niveau théorique calculé par équilibrage harmonique est approché à 0.7 dB près ($\simeq 8\%$) dans la plage de pression $0.38 < \gamma < 0.5$. Si une précision de 0.7 dB est suffisante, on peut donc envisager d'estimer le niveau du fondamental par cette méthode en complément de la méthode à troncature variable avec un raccordement vers $\gamma = 0.4$.

Comme on peut le constater sur la figure 6.3, le modèle sans pertes constitue une relativement bonne approximation du niveau atteint pour $\gamma > 0.45$. Evidemment le seuil d'oscillation dans le cas sans pertes est plus bas que le cas d'un modèle avec pertes, ce qui explique le décalage important avec les solutions "exactes". Si la courbe obtenue avec le modèle sans pertes est translatée de façon arbitraire pour faire coïncider le seuil d'oscillation (normalement à $\gamma = 1/3$) et le seuil exact γ_{th} , l'augmentation du niveau du fondamental est décrit de façon fidèle (voir les figures 6.4 et 6.5). Dans le cas étudié, l'estimation est à moins de 0.5 dB de la solution exacte entre $\gamma_{th} < \gamma < 1/2$. Cet écart dépend évidemment de l'importance des pertes. Bien qu'arbitraire cet ajustement fournit une méthode simple pour évaluer le niveau du fondamental. Si ce procédé n'apporte rien en ce qui concerne la compréhension physique du système, cela peut être utile pour définir un vecteur initial proche de la solution exacte, ce qui facilite la recherche de solutions par équilibrage harmonique près du seuil du régime "anche battante".

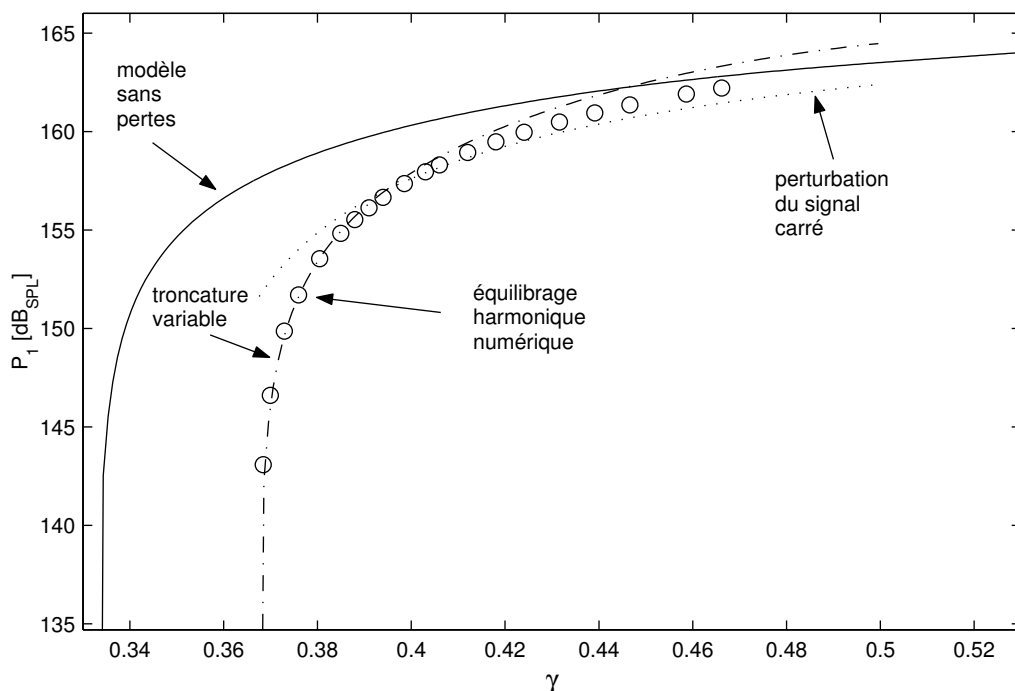


FIG. 6.2 – Comparaison des formules théoriques issues des différentes approches pour l'estimation du niveau du fondamental P_1 . En abscisse : la pression d'alimentation adimensionnée $\gamma = P_m/P_M$, en ordonnée le niveau de P_1 en dB_{SPL}. Paramètres : $\zeta = 0.35$, $P_M = 66.5$ mb, $\eta = 0.0228$, $L = 65.5$ cm.

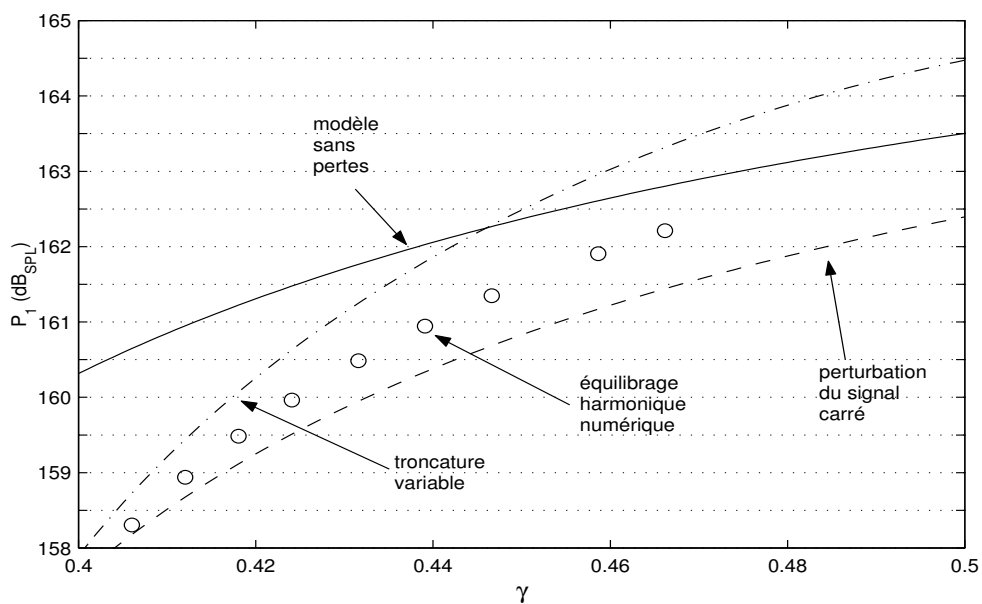


FIG. 6.3 – Même figure que 6.2, mais "zoomée" sur la zone de transition vers le régime "anche battante".

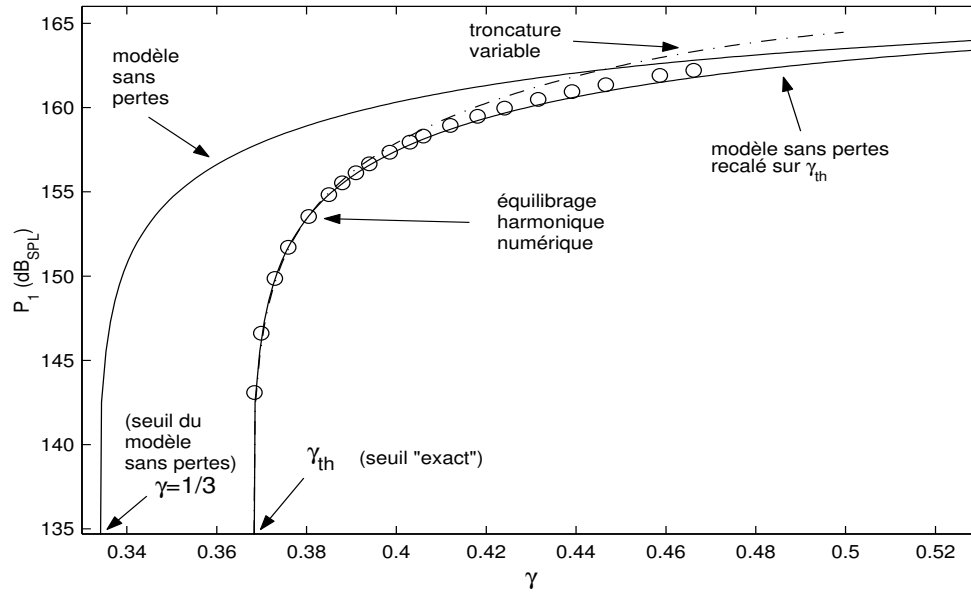


FIG. 6.4 – Estimation du niveau du fondamental P_1 par "recalage" de la courbe obtenue dans le cas sans pertes sur le seuil exact (translation de $\gamma_{\text{th}} - 1/3$). En abscisse : la pression d'alimentation adimensionnée $\gamma = P_m/P_M$, en ordonnée le niveau de P_1 en dB_{SPL} . Paramètres : $\zeta = 0.35$, $P_M = 66.5 \text{ mb}$, $\eta = 0.0228$, $L = 65.5 \text{ cm}$.

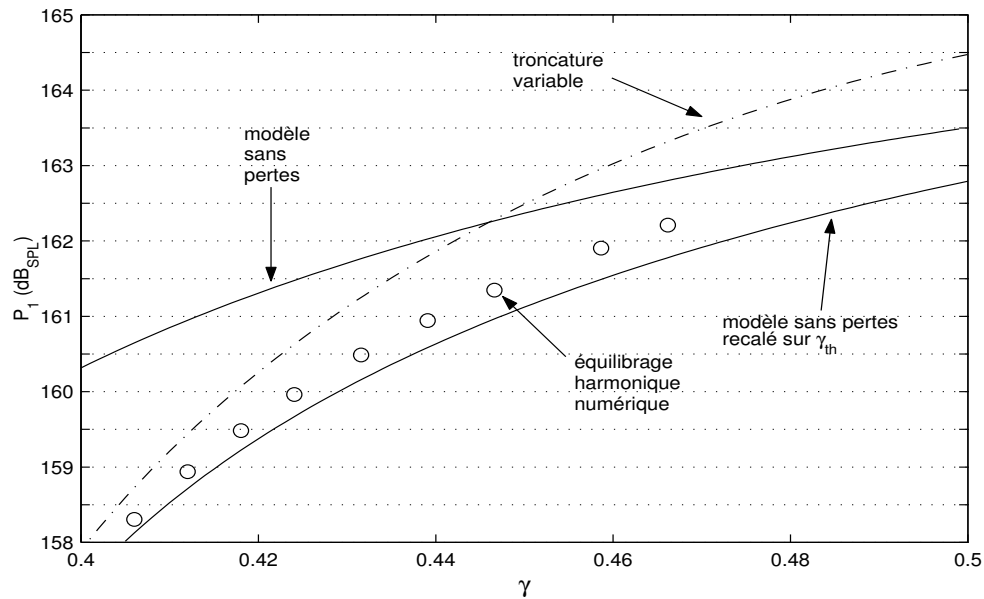


FIG. 6.5 – Même figure que 6.4, mais "zoomée" sur la zone de transition vers le régime "anche battante".

6.2.6.2 Harmoniques 3 et 5

Les figures 6.6 et 6.7 permettent de comparer les prévisions des différentes méthodes de calcul du rapport $x_3 = P_3/P_1$ entre l'amplitude de l'harmonique 3 et l'amplitude du fondamental. La "loi de Worman" $|P_n|/|P_1^n| = \text{constante}$ est indiquée. Suivant [KOG00] (equation (18a)), la constante est prise égale à $1/\alpha_3$ (α_3 est défini par l'équation (6.23)). La validité de cette loi est limitée au voisinage du seuil. La méthode à troncature variable donne de bons résultats jusqu'à $\gamma \simeq 0.4$, puis sous-estime l'amplitude de x_3 de environ 1.5 dB, soit environ 19%. Ceci peut s'expliquer par le fait que P_3 est calculé notamment à partir de P_1 , qui est surestimé pour $\gamma > 0.4$. La courbe obtenue par la méthode par perturbation du signal carré semble être l'asymptote de la solution exacte pour $\gamma = 0.5$, mais l'amplitude de x_3 est surestimée de environ 1.5 dB pour $\gamma < 0.44$.

De la même façon, les figures 6.8 et 6.9 permettent de comparer les prévisions des différentes méthodes de calcul du rapport $x_5 = P_5/P_1$. La "loi de Worman" n'est pas indiquée. L'accord entre l'équilibrage harmonique numérique et la méthode à troncature variable est correct à 1 dB près jusqu'à $\gamma = 0.46$. La méthode par perturbation du signal carré surestime le niveau de l'harmonique 5 de 1 à 2 dB pour $0.45 < \gamma < 0.5$.

6.2.6.3 Bilan

Cette étude succincte met en évidence que la méthode de calcul à troncature variable peut remplacer le calcul par équilibrage harmonique numérique pour des valeurs de $\gamma < 0.44$ si une précision de 1.5 dB est suffisante. Au-delà de $\gamma = 0.44$, cette méthode conduit à des résultats moins satisfaisants. On peut alors envisager d'utiliser la méthode de calcul par perturbation du signal carré, qui donne des résultats corrects à 1.5 dB près sauf pour l'harmonique 5, pour lequel la méthode à troncature variable donne de meilleurs résultats. Il faut néanmoins noter qu'il n'est pas évident d'associer ces deux méthodes pour le calcul du spectre. En effet, d'une part pour certains harmoniques il n'y a pas de point de raccordement entre les deux estimations (voir par exemple le cas de l'harmonique 3 sur la figure 6.6). D'autre part, lorsqu'il existe, le point de raccordement entre les deux méthodes varie selon l'harmonique considéré (voir les figures 6.2 et 6.8 respectivement pour le fondamental et l'harmonique 5). La méthode numérique reste donc la référence pour l'analyse des solutions "exactes". Pour extrapoler les valeurs du fondamental à proximité du seuil du régime anche battante, on peut considérer que le modèle sans pertes donne l'allure de la variation.

Les amplitudes calculées par les différentes méthodes sont comparées aux valeurs mesurées dans un instrument en situation de jeu au paragraphe 6.4.

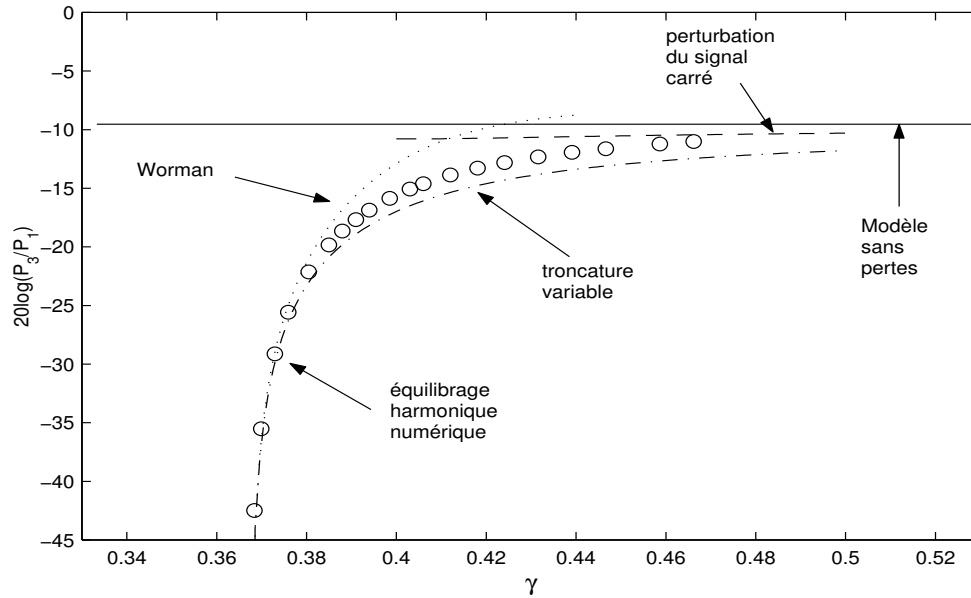


FIG. 6.6 – Comparaison des formules théoriques issues des différentes approches pour l'estimation du rapport $x_3 = P_3/P_1$. En abscisse : la pression d'alimentation adimensionnée $\gamma = P_m/P_M$, en ordonnée : $20\log(x_3)$. Paramètres : $\zeta = 0.35$, $P_M = 66.5$ mb, $\eta = 0.0228$, $L = 65.5$ cm.

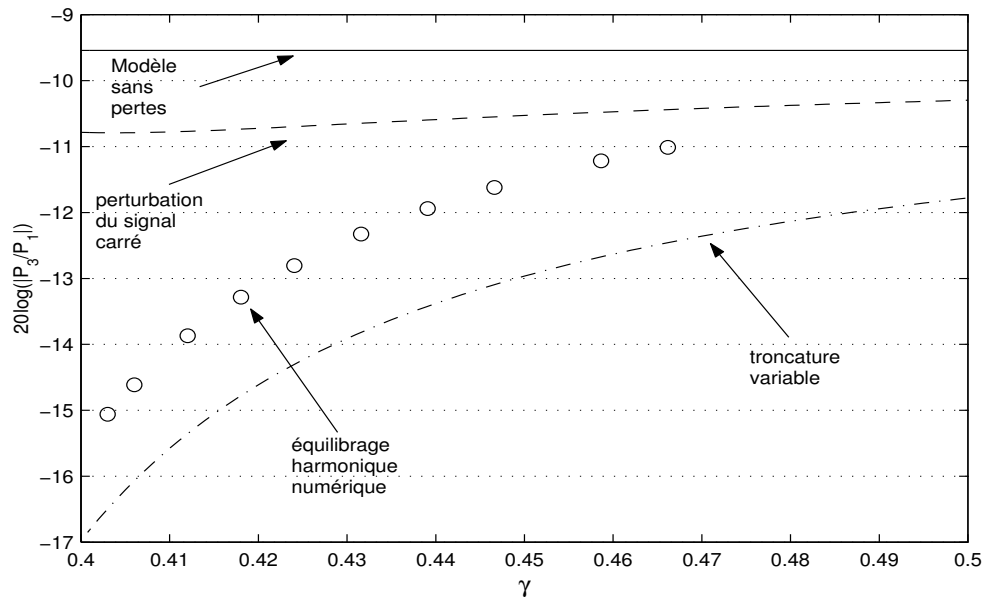


FIG. 6.7 – Même figure que 6.6, mais "zoomée" sur la zone de transition vers le régime "anche battante".

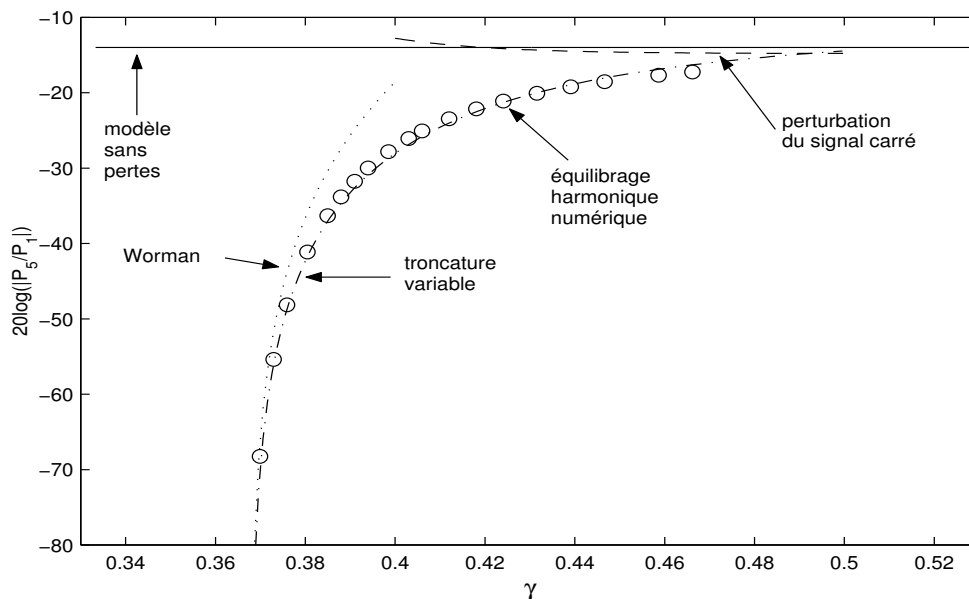


FIG. 6.8 – Comparaison des formules théoriques issues des différentes approches pour l'estimation du rapport $x_5 = P_5/P_1$. En abscisse : la pression d'alimentation adimensionnée $\gamma = P_m/P_M$, en ordonnée : $20 \log(x_5)$. Paramètres : $\zeta = 0.35$, $P_M = 66.5$ mb, $\eta = 0.0228$, $L = 65.5$ cm.

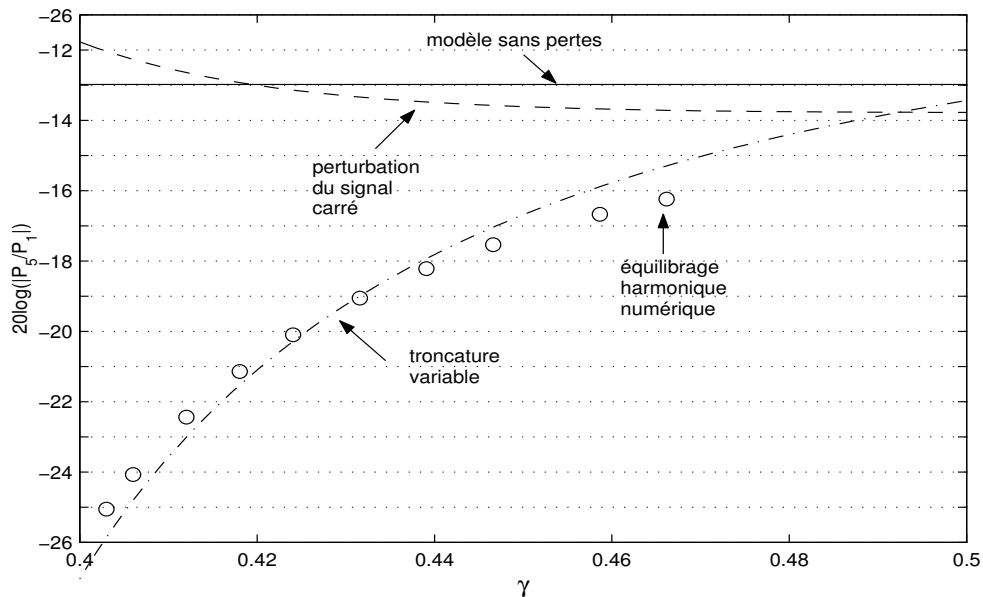


FIG. 6.9 – Même figure que 6.8, mais "zoomée" sur la zone de transition vers le régime "anche battante".

6.3 Etude expérimentale

6.3.1 Dispositif expérimental

L'étude expérimentale repose sur l'utilisation d'une bouche artificielle qui permet de réaliser des mesures à embouchure fixe. Le dispositif expérimental est celui décrit dans les chapitres 4 et 5. Une description plus détaillée du protocole d'étalonnage est proposée dans ce chapitre car cette question est critique dans le cadre d'une étude quantitative.

Un capteur de pression *ENTRAN* de 3 mm de diamètre est placé dans la chambre du bec, la membrane affleurant la paroi. C'est un capteur différentiel mesurant la différence de pression $\Delta p = (P_m - p)$, où P_m est la pression dans la bouche et p est la pression dans la chambre du bec. Ceci est intéressant car Δp est la grandeur physique qui commande le débit entrant et le mouvement de l'anche. Ce capteur mesure les composantes statique et dynamique des signaux de pression. Ceci permet un étalonnage en régime statique, plus précis et plus simple à mettre en œuvre qu'un étalonnage en régime dynamique. Ce capteur supporte les forts niveaux sonore enregistrés à l'intérieur de l'instrument, qui sont de l'ordre de 160 à 170 dB_{SPL} ($\simeq 20$ à 30 mb). Le même type de transducteur mesure la pression p_{ext} en bout de tube pour l'estimation de la pression rayonnée. Le choix de ce type de capteur pour la mesure en bout de tube se justifie par sa petite taille, qui permet un montage perturbant peu la géométrie du guide et également par sa capacité à mesurer les forts niveaux. Un autre capteur de pression (d'un type différent) mesure la pression statique P_m dans la bouche. La sensibilité de ce capteur est étalonnée avec une colonne d'eau. La précision est inférieure à 1 mb.

Les capteurs de pression sont étalonnés avant chaque série de mesure selon le protocole suivant :

- Les signaux de pression p dans le bec et P_m dans la bouche sont mesurés en l'absence de surpression. Ceci permet de mesurer le "zéro" des capteurs. Une correction est éventuellement apportée au niveau du préamplificateur.
- La pression P_m dans la bouche est ensuite augmentée jusqu'à ce que l'anche soit plaquée. La pression mesurée par le capteur situé dans le bec est alors égale à $-P_m$. Connaissant la valeur en zéro, on en déduit la sensibilité.
- Pour étalonner le capteur situé en bout de tube, l'extrémité du résonateur est bouchée. L'anche reste ouverte et la pression mesurée est alors P_m , ce qui permet de déterminer la sensibilité.

La sensibilité des capteurs de pression est déterminée avant chaque série de mesure, ce qui permet d'obtenir les niveaux absolus de pression avec une précision de l'ordre du dixième de dB.

Afin de tester la validité des modèles face à l'expérience, il est nécessaire de déterminer la pression d'alimentation limite au-delà de laquelle l'anche bat. En effet, le modèle théorique élémentaire n'est valable qu'en régime "anche non battante". Le dispositif optique constitué d'une diode laser et d'une photodiode décrit dans le chapitre 4 a d'abord été utilisé, mais comme cela est mentionné au paragraphe 4.4.1, ce dispositif n'est pas adapté à la mesure des petites ouvertures et la détermination du battement est peu précise. Par conséquent, le dispositif mesurant le contact anche-table présenté dans le chapitre précédent est utilisé.

6.3.2 Protocole de mesure

La mesure du spectre s'effectue en plusieurs étapes :

- Un tuyau cylindrique est associé au bec et l'embouchure est réglée de façon à obtenir un régime d'oscillation correspondant à ce que peut obtenir un instrumentiste. Les régimes correspondants à un jeu "standard" sont privilégiés (la force de l'anche a été choisie en fonction du bec par un clarinettiste expérimenté).
- Les capteurs de pression sont étalonnés.
- Le tuyau est remplacé par un diaphragme approprié et la relation pression-débit est mesurée selon le protocole décrit dans le chapitre 4. La mesure de la caractéristique permet d'estimer les paramètres du modèle équivalent.
- Le diaphragme est remplacé par un tuyau cylindrique, la pression d'alimentation P_m est augmentée jusqu'à la déstabilisation du régime statique. La pression d'alimentation et la fréquence des oscillations au seuil sont relevées (respectivement P_{th} et f_{th} , l'indice th signifiant "threshold").
- La pression d'alimentation P_m est augmentée par paliers, et pour chaque valeur de P_m on enregistre, sur une durée de 2 à 3 périodes, les valeurs de P_m , Δp , p_{ext} , le signal du dispositif optique et l'état du contact anche-table. Les signaux sont enregistrés sur un PC à l'aide d'une carte d'acquisition multivoies.
- Les signaux sont ensuite analysés à l'aide de programmes réalisés sous *MATLAB*.

Il faut noter que les mesures au seuil sont extrêmement délicates à réaliser. D'une part la variation $dp(t)/dP_m \rightarrow \infty$ lorsque $P_m \rightarrow P_{th}$, donc une très faible fluctuation de P_m entraîne des modifications importantes de $p(t)$. D'autre part, lorsque le système entre en auto-oscillation, la charge que constitue l'entrée de l'instrument pour la source de pression varie brutalement, ce qui provoque une augmentation de la pression P_m . Afin de minimiser cet effet, des fuites sont générées au niveau de la bouche artificielle, la salle d'expérimentation agissant comme un réservoir tampon absorbant les fluctuations de pression.

Une acquisition temporelle suivie d'un traitement numérique est préférée à une analyse spectrale directe. La raison principale est liée à la difficulté de maintenir constante la pression d'alimentation P_m durant toute la durée d'une mesure fréquentielle. En effet, un analyseur de spectre standard fournit des spectres de puissance, sans indication sur la phase. Il est donc nécessaire d'utiliser une méthode de détection synchrone pour obtenir toute l'information. Une première campagne de mesure avait été réalisée à l'aide d'un voltmètre vectoriel (qui effectue une analyse synchrone), mais la durée d'analyse est du même ordre de grandeur que la "période" des fluctuations de pression de la source d'air comprimé utilisée pour alimenter le dispositif (de l'ordre de 1 minute). Or de faibles variations de P_m ont une influence significative sur l'amplitude des harmoniques, en particulier près du seuil d'oscillation. Une seconde raison est liée à la difficulté de synchroniser le voltmètre vectoriel sur le signal de pression p , surtout près du seuil d'oscillation, lorsque le rapport signal sur bruit est assez faible, ceci même après filtrage.

6.3.3 Analyse

Les signaux mesurés sont d'abord traités. Les composantes continues propres aux capteurs sont soustraites et leurs sensibilités sont prises en compte. Ensuite les coefficients de Fourier des signaux de pression sont calculés. La première étape consiste à repérer la fréquence fondamentale, par repérage des "passages à zéro". A cause de l'écoulement certains signaux sont très bruités en hautes fréquences, notamment près du seuil d'oscillation, et plusieurs "passages à zéro" peuvent être détectés sur un simple front montant. Dans ce cas, un filtrage "passe bas" est appliqué. Ensuite une interpolation linéaire entre les échantillons situés de part et d'autre du "passage à zéro" permet de mesurer plus précisément la période. Des variations de fréquence de l'ordre de 0.2 % au seuil et 0.04 % au-delà peuvent ainsi être détectées, la précision dépendant de la fréquence d'échantillonnage et du rapport signal sur bruit. Connaissant la période, les coefficients de la série de Fourier correspondant au signal traité sont calculés. Afin de vérifier que le calcul est correct et que le nombre de coefficients pris en compte est suffisant, les signaux de pression mesurés dans le bec et en bout de tube sont comparés au signaux correspondants reconstruits par synthèse additive à partir des coefficients de Fourier.

6.4 Comparaison théorie / expérience

6.4.1 Evaluation des paramètres du modèle élémentaire équivalent

Le paramètre de pertes η est défini par l'équation (6.5). Pour déterminer sa valeur, il est nécessaire de connaître la longueur effective du guide. Afin de prendre en compte les longueurs équivalentes du bec et de l'anche, et la correction de longueur due au rayonnement, la longueur est écrite comme suit :

$$L = L_{anche} + L_{bec} + L_{barillet} + L_{tube} + L_{rayonnement}, \quad (6.31)$$

où L_{anche} est une longueur équivalente liée au débit pulsé par l'anche [Ned98, DGGK95], L_{bec} est la longueur équivalente au bec ramené à une géométrie cylindrique, $L_{barillet}$ est la longueur du barillet, L_{tube} est la longueur du tube cylindrique qui remplace le corps de l'instrument, et $L_{rayonnement}$ est la correction de longueur liée à l'impédance de rayonnement. La fréquence de jeu au seuil est relevée pour deux tubes de longueur différente ($L_{tube} = 30\text{cm}$ et $L_{tube} = 50\text{cm}$). Les pressions de seuil P_{th} et les fréquences de jeu au seuil sont mesurées dans les deux configurations (sans modifier l'embouchure). En utilisant les équations (6.5), (6.27) et (6.28), la longueur $L_{eq} = L_{anche} + L_{bec} + L_{barillet} + L_{rayonnement}$ est ajustée de façon à faire coïncider les valeurs de pression de seuil et de fréquence de jeu théoriques et expérimentales dans les deux configurations ($L_{tube} = 30\text{ cm}$ et $L_{tube} = 50\text{ cm}$).

Pour l'embouchure correspondant à la figure 6.1, les fréquences calculées à l'aide de l'équation (6.29) avec $L_{eq} = 15.5\text{ cm}$ sont $f_0^{30} = 187.1\text{ Hz}$ et $f_0^{50} = 129.6\text{ Hz}$ pour $L_{tube} = 30\text{ cm}$ et $L_{tube} = 50\text{ cm}$ respectivement. Ces valeurs sont à comparer aux fréquences mesurées au seuil : $f_0^{30} = 186.7 \pm 0.5\text{ Hz}$ et $f_0^{50} = 130.3 \pm 0.5\text{ Hz}$. L'ajustement est correct en ne considérant que les pertes visco-thermiques. Connaissant la longueur effective du résonateur, on en déduit les valeurs du paramètre de perte $\eta^{30} = 1.90 \cdot 10^{-2}$ et $\eta^{50} = 2.28 \cdot 10^{-2}$ pour les tubes de 30 et 50 cm respectivement. Au lieu de calculer le

paramètre de pertes η à partir de l'équation (6.5), il est possible de le mesurer à partir de la décroissance des oscillations libres dans le résonateur. Pour cela l'instrument est mis en oscillation et la pression est augmentée rapidement jusqu'à ce que l'anche se plaque. L'oscillation perdure quelques dixièmes de seconde après que l'anche soit complètement plaquée. La mesure de la décroissance permet d'obtenir le paramètre de pertes. Cette mesure conduisant à des valeurs très proches de celles déterminées par l'équation (6.5) c'est cette dernière qui est utilisée [Dal].

Les pressions de seuil dépendent non seulement du paramètre de perte, mais aussi du paramètre d'embouchure ζ et de la valeur de la pression P_M (équation (6.27)). Les paramètres P_M et ζ estimés à partir de la caractéristique mesurée *après* avoir plaqué l'anche durant quelques secondes sont plus faibles que ceux estimés *avant* avoir plaqué l'anche. Dans le chapitre 4, ce phénomène est attribué à la visco-élasticité de l'anche (paragraphe 4.4.2). On suppose que les valeurs de P_M et ζ caractéristiques du comportement en régime dynamique sont contenues dans les intervalles définis par les couples de valeurs mesurées en statique, soit $0.35 < \zeta < 0.36$ et $66.5 < P_M < 69.5$ mb dans le cas étudié. Avec ces paramètres, les encadrements de pressions de seuil calculées à l'aide de l'équation (6.27) sont $24.0 < P_{th}^{30} < 25.1$ mb et $24.4 < P_{th}^{50} < 25.6$ mb respectivement pour les tubes de 30 et 50 cm. Ces valeurs sont en accord avec les valeurs mesurées : $P_{th}^{30} = 24.7 \pm 0.5$ mb et $P_{th}^{50} = 25.9 \pm 0.5$ mb.

A partir de la mesure de la caractéristique pression-débit mesurée en régime statique et du relevé de la pression d'alimentation et de la fréquence au seuil, il est donc possible d'estimer les 3 paramètres du modèle (ζ , P_M et η) pour un instrument en situation de jeu. Ces mesures sont réalisées facilement, sans modifier l'embouchure. Grâce à cette procédure, il est possible d'étudier expérimentalement l'instrument en situation de jeu et de comparer son comportement au modèle analytique. Evidemment, lorsque $P_m - p > P_M$, soit $P_m \gtrsim P_M/2$, aucune comparaison n'est valide compte-tenu des différences entre le modèle élémentaire et les données expérimentales. Le paragraphe suivant présente, pour l'embouchure dont les paramètres ont été évalués, la comparaison des spectre des régimes permanents (de fréquence fondamentale) calculés par équilibrage harmonique numérique ou à troncature variable et ceux mesurés. Le modèle de référence est toujours le modèle élémentaire défini par l'équation (6.1).

6.4.2 Spectre interne (harmoniques impairs)

6.4.2.1 Fondamental

Sur la figure 6.10 est tracée l'évolution de l'amplitude du fondamental en fonction de la pression d'alimentation pour une clarinette dont le résonateur est remplacé par un tube cylindrique de 50 cm (longueur totale effective de l'instrument : 65.5 cm). Il y a un relativement bon accord entre les solutions calculées par équilibrage harmonique numérique et les valeurs mesurées. Au seuil, les valeurs mesurées sont dans l'encadrement, jusqu'à $P_m = 28$ mb, soit $\gamma \simeq 0.4$. Ensuite le niveau est limité à partir du moment où l'anche bat (soit ici lorsque $P_m > 33.5$ mb) : le niveau augmente comme P_m , de façon linéaire. Néanmoins, au seuil du régime "ananche battante", le niveau est inférieur de environ 1.5 dB ($\simeq 19\%$) à celui donné par l'équilibrage harmonique numérique. Plusieurs phénomènes non pris en compte dans le modèle peuvent expliquer cet écart.

Des termes de pertes ont été négligés, à commencer par les pertes par rayonnement, qui contiennent un terme non-linéaire. L'importance de ce dernier pourrait ne pas être négligeable compte-tenu du niveau sonore. En effet, aux niveaux sonores observés, l'amplitude de la vitesse acoustique v en sortie de tube est de l'ordre de 10 m/s. Le terme de perte non-linéaire R de l'impédance de rayonnement adimensionnée par Z_c est de l'ordre de 0.6 fois le nombre de Mach acoustique v/c [II67], soit de l'ordre de $2 \cdot 10^{-2}$. En utilisant la formule de l'impédance ramenée, cette résistance est à comparer à l'admittance d'entrée du guide. Pour le fondamental, l'admittance $Y_1 = \psi\eta$ (equation (6.8)) est de l'ordre de $3 \cdot 10^{-2}$ pour une clarinette. Ces deux quantités sont donc du même ordre de grandeur. Compte tenu de la dépendance de P_1 en Y_1 et en γ (via le coefficient A'), il peut résulter de la prise en compte des pertes non-linéaires en bout de tube une diminution de $|P_1|$ de 0.5 à 2 dB. Des travaux en cours au LAUM (thèse de M. Atig [Ati]) visent à caractériser des non-linéarités localisées à l'aide de mesures à deux microphones. Ces travaux concernent notamment l'impédance de rayonnement à fort niveau en sortie d'un tuyau cylindrique en oscillations forcées. Dans ce cadre, la mesure des pertes par rayonnement dans une clarinette simplifiée en situation de jeu est prévue. Une fois connues, ces pertes pourront être intégrées au programme d'équilibrage harmonique numérique.

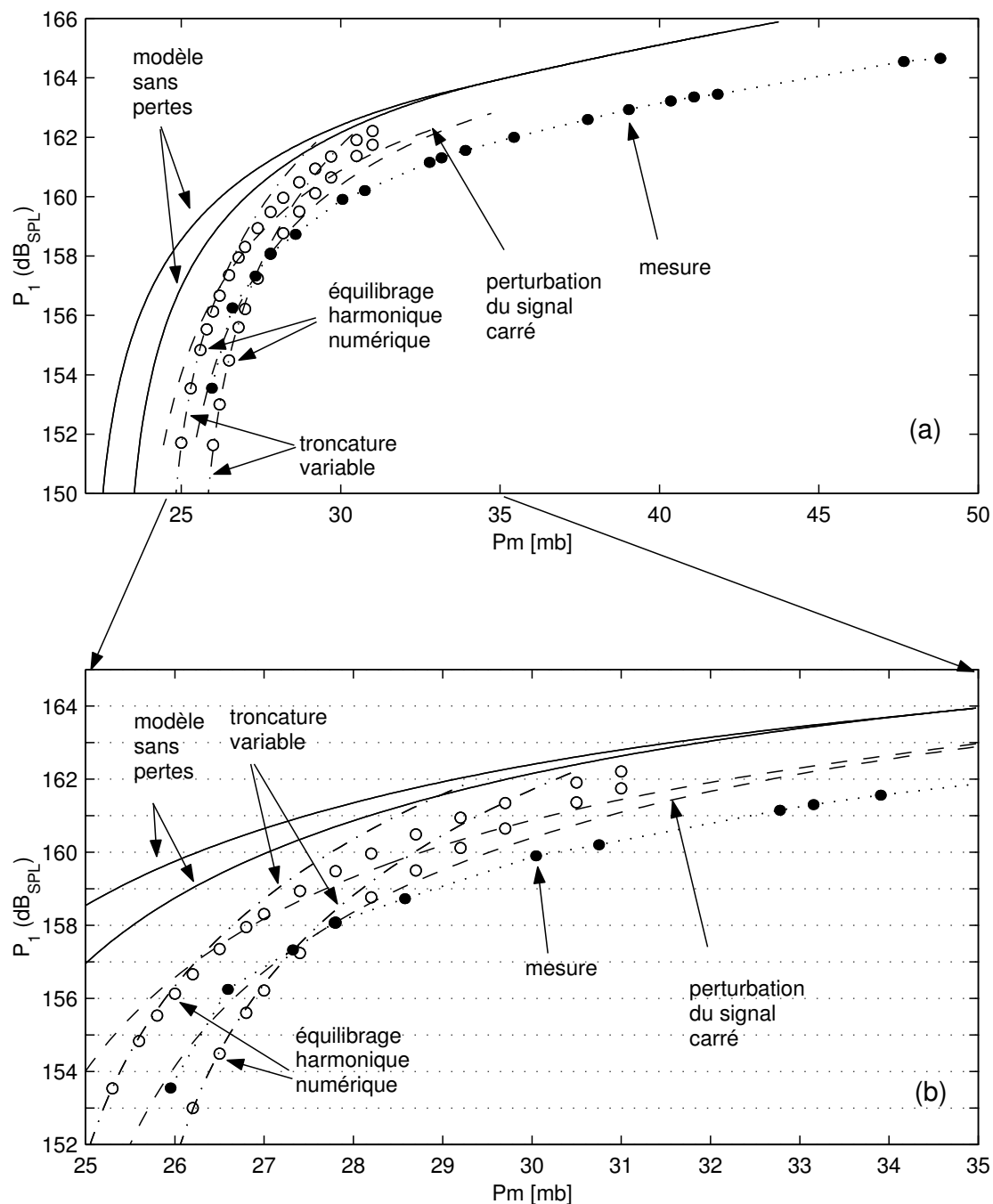


FIG. 6.10 – (a) : Comparaison des prévisions théoriques du niveau du fondamental et des données expérimentales. En abscisse : la pression d'alimentation P_m en mb, en ordonnée le niveau de P_1 en dB_{SPL}. Pour chaque modèle théorique, deux courbes sont tracées, elles correspondent à un encadrement lié à l'incertitude sur la détermination de P_M et ζ . (b) : zoom de (a) sur la zone "anche non battante".

6.4.2.2 Harmoniques impairs

La dépendance en P_m des harmoniques 3 et 5 en amplitude et en phase est tracée sur les figures 6.11 à 6.13. Ces figures illustrent le comportement généralement observé (pour les harmoniques impairs) [Ben76, BK88]. L'amplitude relative des harmoniques 3, 5, 7, et 9 pour une même embouchure mais deux longueurs différentes est tracée sur la figure 6.14. En régime "anche non battante" ($P_m \lesssim 35\text{mb}$), le spectre contient essentiellement les harmoniques 1, 3, 5, et dans une moindre mesure l'harmonique 7 (figure 6.14). Les autres harmoniques sont au même niveau que le bruit ($20 \log |P_i/P_1| < 40\text{dB}$). Pour cette raison la comparaison théorie/expérience est limitée aux harmoniques 1, 3 et 5.

harmonique 3 : Sur la figure 6.11 est tracée la variation de l'amplitude relative $|P_3/P_1|$ avec la pression P_m . La variation de la phase est tracée sur la figure 6.13a. Dès le seuil d'oscillation le niveau mesuré est plus faible que le niveau calculé, alors que le fondamental présente un relativement bon accord. L'augmentation de l'amplitude mesurée est qualitativement similaire à celle calculée par équilibrage harmonique : l'amplitude croît puis atteint une valeur constante. Il y a "saturation" de l'amplitude relative. Cette valeur n'est atteinte qu'en régime "anche battante", pour $P_m \simeq 37\text{mb}$. Néanmoins, l'amplitude relative vers laquelle convergent les données expérimentales ($\simeq 0.22$) est nettement plus basse que celle vers laquelle convergent les données numériques (probablement proche de $1/3$). Il faut noter que $|P_3/P_1| \simeq 0.2$ est une valeur "typique" lorsque les résonateurs sont d'une longueur comparable à une clarinette en Sib [DGK00], mais une valeur plus élevée peut être obtenue avec des tubes de longueur supérieure ($L_{tube} \simeq 1\text{m}$). L'évolution avec P_m de la phase mesurée est en accord avec le calcul numérique à environ 10% près au seuil et tend vers π , qui est la valeur obtenue dans le cas du modèle sans pertes, mais reste supérieure (figure 6.13a).

harmonique 5 : Sur la figure 6.12 est tracée la variation de l'amplitude relative $|P_5/P_1|$ avec la pression P_m . Au seuil d'oscillation ($P_m \simeq 25\text{mb}$) l'harmonique 5 n'est pas mesurable, il n'émerge du bruit de fond que pour $P_m \simeq 28\text{mb}$. L'allure de la courbe expérimentale suggère qu'il ne s'agit pas seulement d'un "masquage" dû au bruit de fond mais d'une sorte de seuil, l'amplitude tendant vers 0 pour $P_m > P_{th}$, de l'ordre de 28 mb. De la même façon que l'harmonique 3, l'amplitude augmente jusqu'à atteindre une valeur constante plus faible que celle vers laquelle semblent converger les valeurs numériques. La valeur expérimentale est de l'ordre de 0.9 tandis que la valeur théorique est probablement de l'ordre de 0.16 à 0.18. De même que pour l'harmonique 3, la saturation intervient en anche battante, ici pour $P_m \simeq 40\text{mb}$. La phase au seuil est trop bruitée pour être comparée au calcul numérique (figure 6.13b). En anche battante la phase est proche de 0, qui est la phase obtenue avec le modèle sans pertes (signal carré).

harmonique 7 : Compte tenu du faible nombre de point significatifs pour l'harmonique 7 en régime "anche non battante", la comparaison théorie/expérience n'est pas tracée, mais on peut observer sur la figure 6.14 (trait continu) que l'évolution de l'amplitude est comparable à celle de l'harmonique 5.

influence de la longueur : La figure 6.14 présente l'amplitude relative des harmoniques 3, 5, 7 et 9 en fonction de P_m pour deux clarinettes de longueur différente ($L_{tot} = 65.5$ cm et $L_{tot} = 45.5$ cm). La plus longue (trait continu) est celle que nous avons précédemment comparée au modèle. Cette figure met en évidence que la saturation de l'harmonique 3 est atteinte pour une pression P_m plus faible lorsque le tuyau est plus long. La pression d'alimentation n'a pas été suffisamment augmentée pour atteindre la saturation dans le cas du tuyau le plus court, mais il semble que les valeurs asymptotiques atteintes en anche battante soient peu différentes. On observe dans les deux cas une sorte de "seuil" propre à chaque harmonique

embouchures "extrêmes" : En complément, la figure 6.15 illustre le rôle de l'embouchure sur les amplitudes et phases des harmoniques 3 et 5. Deux embouchures "extrêmes" sont considérées, l'une est très "ouverte" l'autre très "fermée". Ces mesures sont antérieures à la mise au point de la méthode de mesure des paramètres d'embouchure. Les paramètres ζ et P_M du modèle élémentaire équivalent ne sont donc pas connus et il faut noter qu'il n'est pas certain que ces embouchures puissent être correctement décrites par le modèle élémentaire. Bien que différentes, d'un point de vue perceptif ces deux embouchures produisent des sonorités comparables à ce que peut produire un musicien. L'instrument est le même dans les deux cas (clarinette simplifiée d'environ 55.5 cm). L'amplitude et la phase des harmoniques sont tracées en fonction P_m . On observe des comportements similaires d'un point de vue qualitatif mais extrêmement différents en termes quantitatifs. Ces figures indiquent l'amplitude maximale de variation des amplitudes et des phases relatives en fonction de l'embouchure.

bilan : Les mesures suggèrent que les harmoniques n'émergent pas dès le seuil P_{th} correspondant au fondamental mais pour des pressions d'alimentation supérieures, comme s'il existait un seuil propre à chaque harmonique. En effet, s'il est normal que le "seuil" P_m à partir duquel les harmoniques émergent du bruit de fond soit d'autant plus décalé par rapport au seuil d'oscillation P_{th} que leur amplitude est faible, les courbes de la figure 6.14 indiquent assez clairement que les harmoniques 5 et 7 ne tendent pas vers 0 au seuil P_{th} , mais pour des valeurs de P_m supérieures. La plupart de harmoniques n'apparaissent qu'en régime "anche battante", leur amplitude augmentant jusqu'à atteindre une valeur limite. La pression P_m pour laquelle cette valeur limite est atteinte dépend de l'ordre de l'harmonique. Par conséquent, la notion de "spectre saturé" n'a de sens que si l'ordre de l'harmonique le plus élevé est précisé. Les valeurs limites vers lesquelles tendent les amplitudes des harmoniques sont plus faibles que celles vers lesquelles tendent les solutions exactes. Ces valeurs sont très dépendantes de l'embouchure. Les phases relatives à l'harmonique 1 mesurées varient en fonction de P_m de façon similaire à ce que prévoit le modèle en régime "anche non battante" (accord à 10% près sur les figures 6.11 et 6.12). Les phases relatives sont très proches des valeurs correspondant au signal carré pour des embouchures "relâchées" et peuvent en être assez éloignées dans le cas d'embouchures "serrées" (figure 6.15).

Il n'est pas évident de déterminer, sur la base des observations dont nous disposons, les phénomènes pouvant expliquer les écarts entre les prévisions théoriques et les données expérimentales. Des observations supplémentaires sont nécessaires. Une mauvaise description de la dépendance en fréquence

des pertes acoustiques ou le fait que les pertes mécaniques au niveau de l'anche ne soient pas négligeables sont des éléments qui peuvent expliquer le fait que l'amplitude relative mesurée soit plus faible que l'amplitude calculée.

Outre le contrôle du spectre en fonction de paramètres de jeu, un point important concernant la jouabilité est le contrôle de la fréquence. A cause notamment de l'inharmonicité des résonances, la fréquence de jeu peut varier en fonction du contenu spectral, et donc de la pression de la colonne d'air P_m . Ce problème est abordé dans le paragraphe suivant.

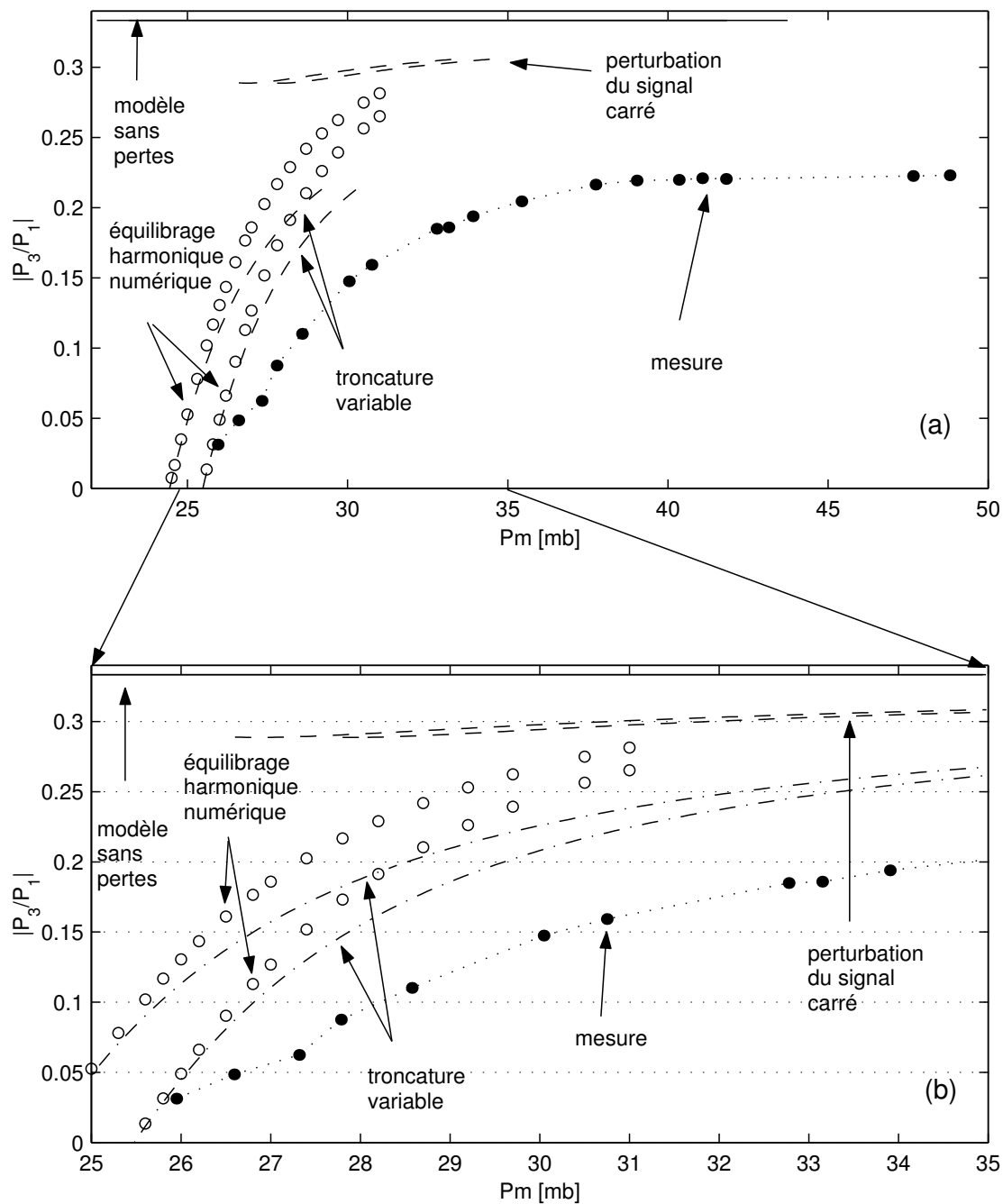


FIG. 6.11 – (a) : Comparaison des prévisions théoriques et des données expérimentales pour le rapport $x_3 = |P_3/P_1|$. En abscisse : la pression d'alimentation P_m en mb, en ordonnée : $|x_3|$. Pour chaque modèle théorique, deux courbes sont tracées, elles correspondent à un encadrement lié à l'incertitude sur la détermination de P_M et ζ . (b) : zoom de (a) sur la zone "anche non battante"

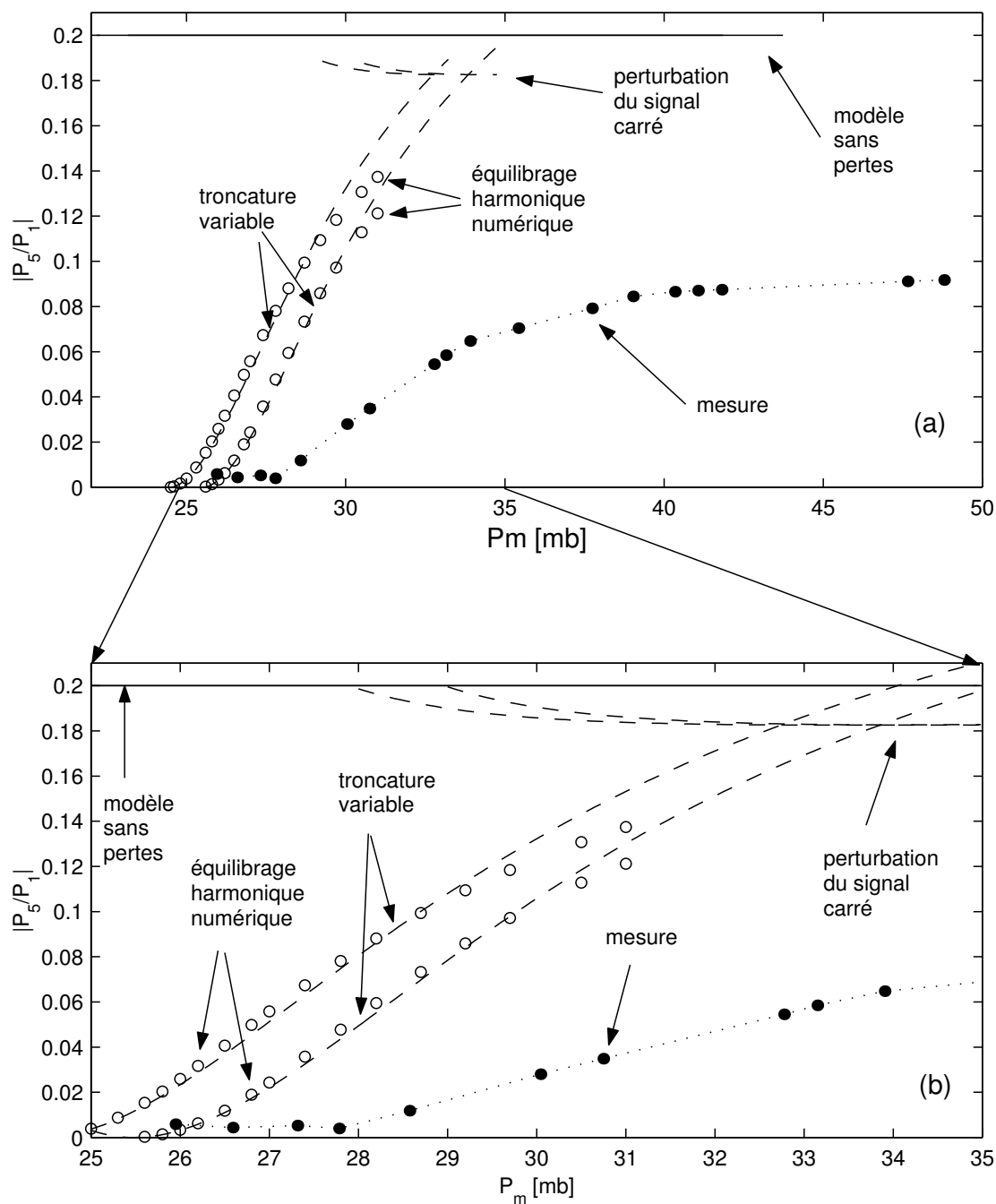


FIG. 6.12 – (a) : Comparaison des prévisions théoriques et des données expérimentales pour le rapport $|x_5| = |P_5/P_1|$. En abscisse : la pression d'alimentation P_m en mb, en ordonnée : $|x_5|$. Pour chaque modèle théorique, deux courbes sont tracées, elles correspondent à un encadrement lié à l'incertitude sur la détermination de P_M et ζ . (b) : zoom de (a) sur la zone "anche non battante"

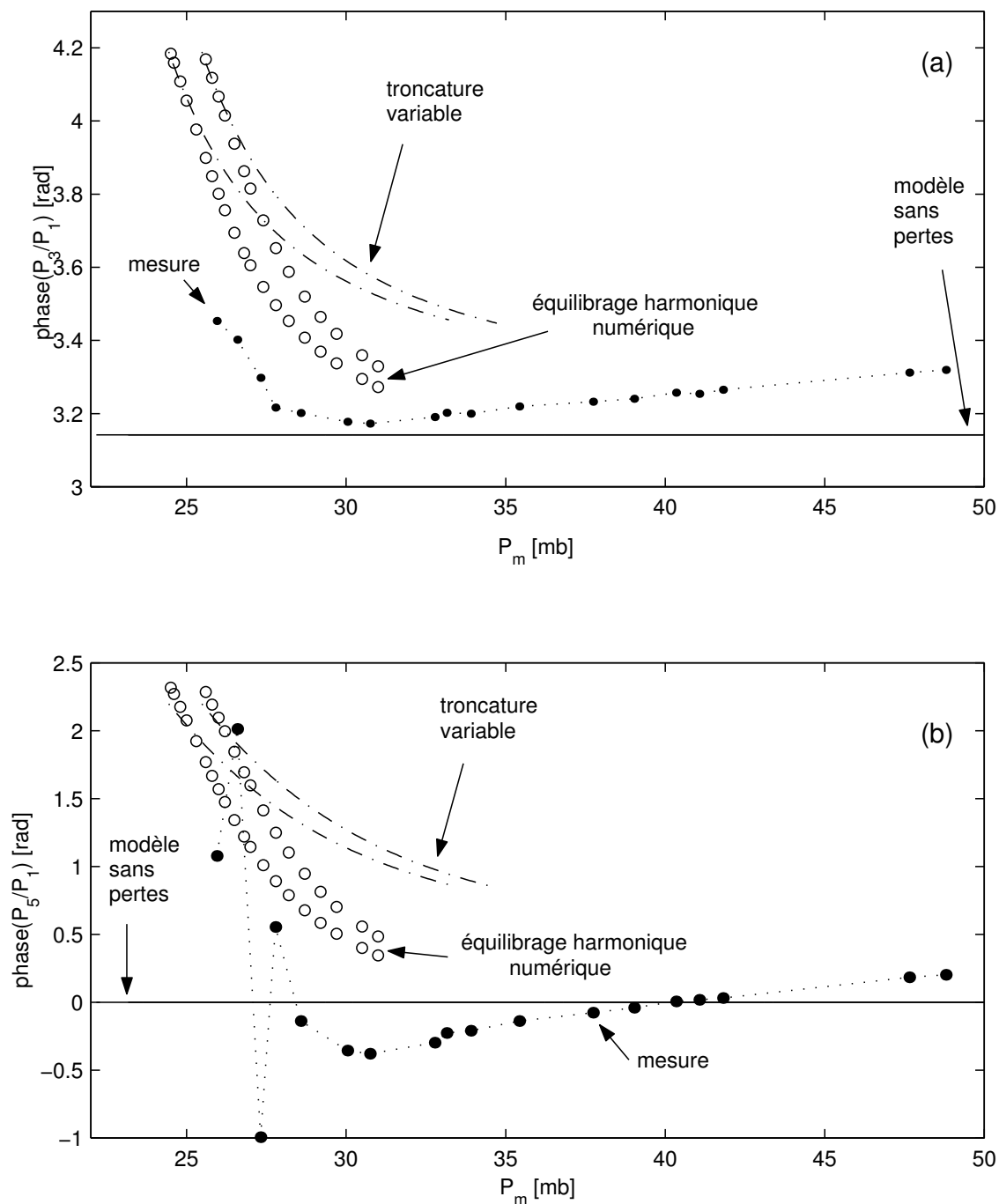


FIG. 6.13 – Comparaison des prévisions théoriques et des données expérimentales pour le déphasage entre le fondamental et les harmonique 3 (a) et 5 (b). En abscisse : la pression d'alimentation P_m en mb, en ordonnée la phase en radians. Pour chaque modèle théorique, deux courbes sont tracées, elles correspondent à un encadrement lié à l'incertitude sur la détermination de P_M et ζ .

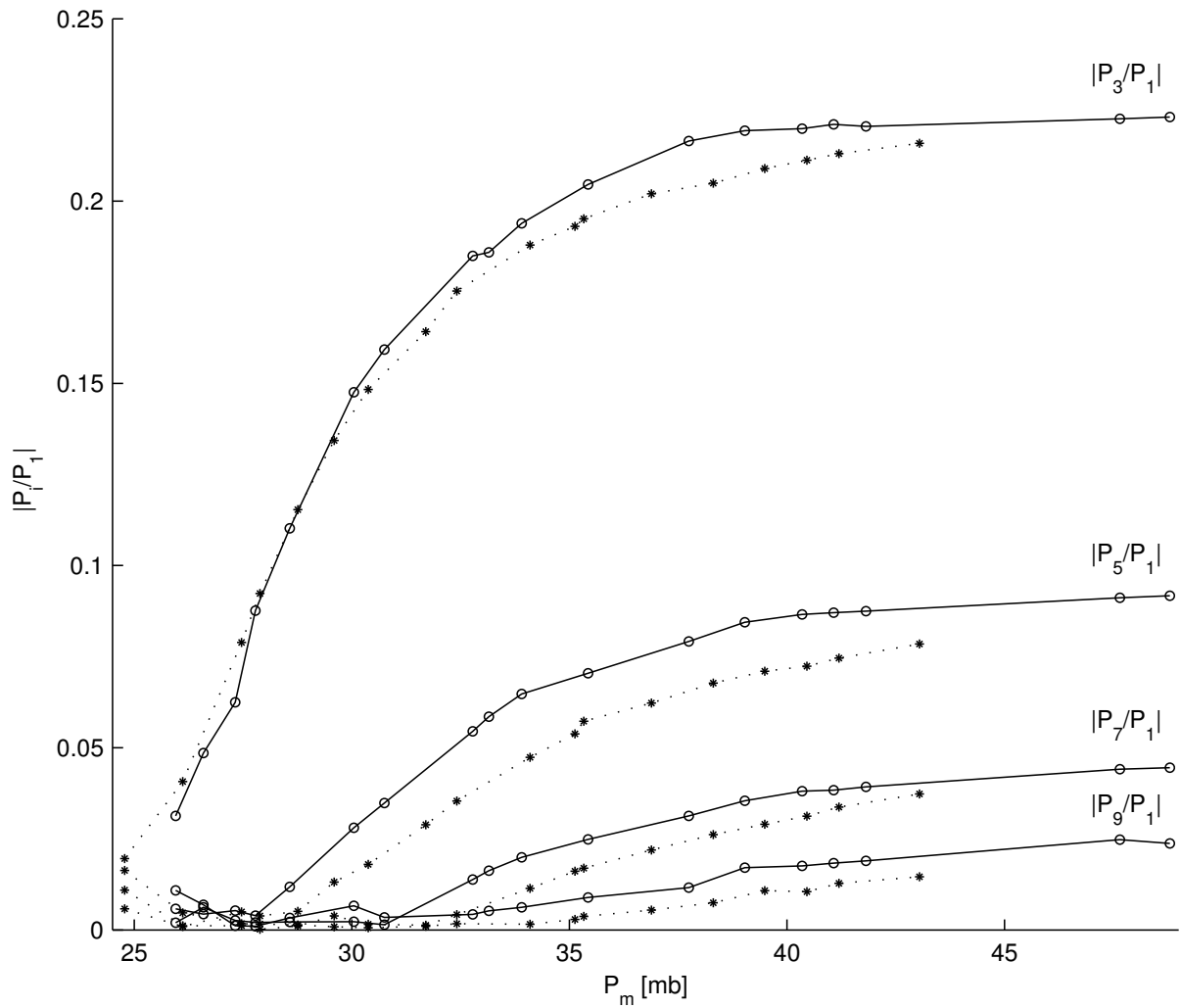


FIG. 6.14 – Evolution du rapport P_i/P_1 avec la pression P_m pour une même embouchure mais deux résonateurs de longueur différente : $L_{tot} = 45.5$ cm (pointillés) et $L_{tot} = 65.5$ cm (trait continu). $i = 3, 5, 7, 9$.

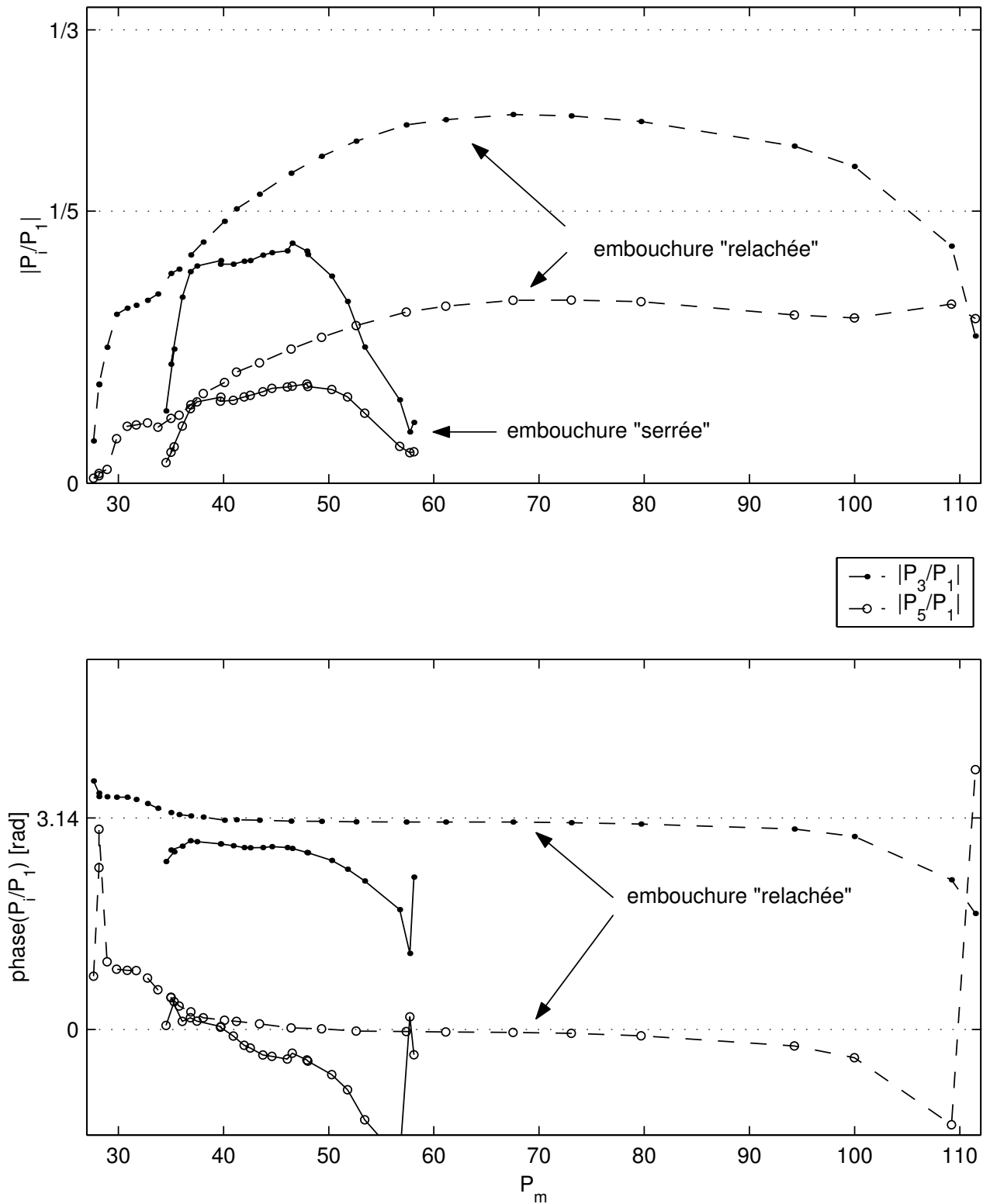


FIG. 6.15 – Comparaison de deux embouchures. * : x_3 , + : x_5

6.4.3 Evolution de la fréquence de jeu

La figure 6.16 montre une variation typique de la fréquence de jeu mesurée dans le bec d'une clarinette simplifiée. On distingue deux comportements contradictoires. Au seuil d'oscillation, la fréquence baisse, puis augmente lorsque l'écart $P_m - P_{th}$ augmente. En régime "anche battante" ($P_M > 32$ mb), la fréquence mesurée augmente de façon quasiment linéaire.

L'analyse de [KG00] montre que l'amortissement de l'anche provoque une baisse de la fréquence au-delà du seuil. Ceci est cohérent avec les observations de publications antérieures [Wor71, Sch78, Gil91]. L'augmentation de la fréquence, observée expérimentalement par d'autres auteurs [BD87], est attribuée à l'inharmonicité du résonateur, qui provoque un agrandissement de l'intervalle entre les fréquences de résonance. Une conséquence de cette inharmonicité est l'augmentation de la fréquence de jeu avec le niveau des harmoniques, donc lorsque P_m croît.

La figure 6.17 représente l'évolution de la fréquence de jeu pour l'instrument dont le spectre a été comparé aux prévisions théoriques. Le rapport signal sur bruit n'est pas assez bon pour observer correctement la baisse de fréquence au seuil. Néanmoins ces données permettent de comparer les variations de fréquences mesurées à celles calculées par équilibrage harmonique ou par l'équation (6.29), la validité de ces calculs étant limitée au régime "anche non battante". Les fréquences calculées par la méthode d'équilibrage harmonique numérique et par la formule approchée (6.29) sont croissantes monotones, ce qui est logique puisque seules les pertes viscothermiques sont prises en compte dans le modèle de résonateur. L'amplitude de la variation calculée par équilibrage harmonique à partir des paramètres physiques mesurés en régime statique est en accord avec celles mesurées. La formule approchée (6.29) sous-estime l'augmentation de la fréquence de jeu. La variation de fréquence, bien que perceptible, est relativement faible et une équation approchée du type de (6.29) est très sensible aux paramètres de jeu. De plus cette relation se base sur la valeur de $|x_3|$, qui n'est estimée qu'à 25% près par la méthode de calcul à troncature variable. On ne peut donc en attendre une évaluation précise de la variation de la fréquence de jeu, mais l'ordre de grandeur et le sens de la variation de la fréquence sont corrects.

On note que l'incertitude sur le relevé de la fréquence de jeu au seuil (0.5 Hz) estimé en réalisant plusieurs mesures successives, correspond en fait à l'ordre de grandeur de la variation au seuil due à l'amortissement de l'anche. On pourrait penser qu'une étude expérimentale fine de la variation de la fréquence au seuil permettrait d'estimer un paramètre d'amortissement de l'anche vue comme un oscillateur à un degré de liberté puisque la variation de la fréquence au seuil en dépend [KG00]. Néanmoins, les mesures précises au seuil d'oscillation sont extrêmement délicates à réaliser et cette approche est a priori difficilement applicable. En effet, au seuil d'oscillation, d'une part le rapport signal sur bruit est généralement assez mauvais, et d'autre part de très faibles variations de la pression d'alimentation induisent des modifications importantes au niveau du signal.

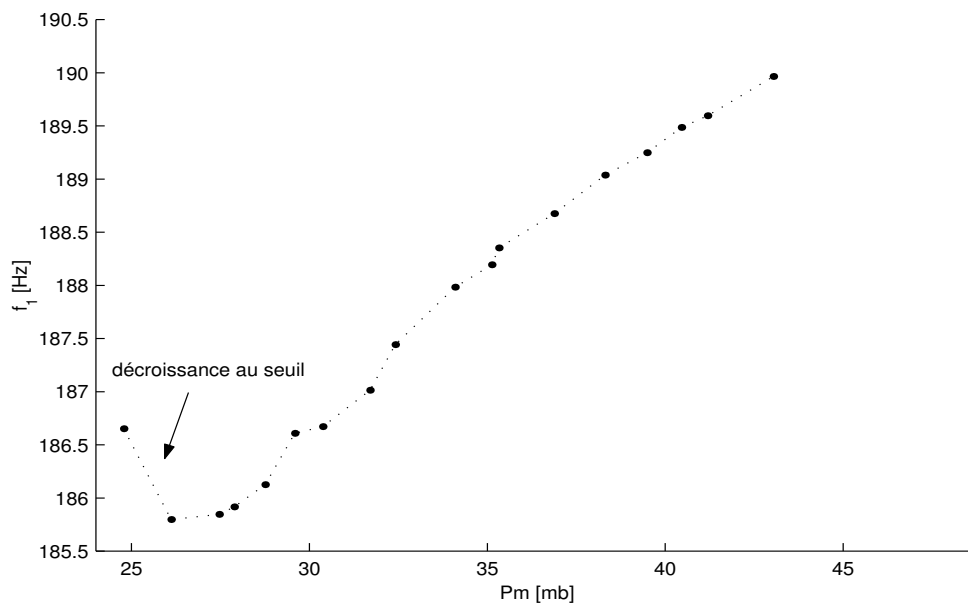


FIG. 6.16 – Evolution de la fréquence de jeu "typique" pour une clarinette de longueur totale $L = 45.5$ cm.

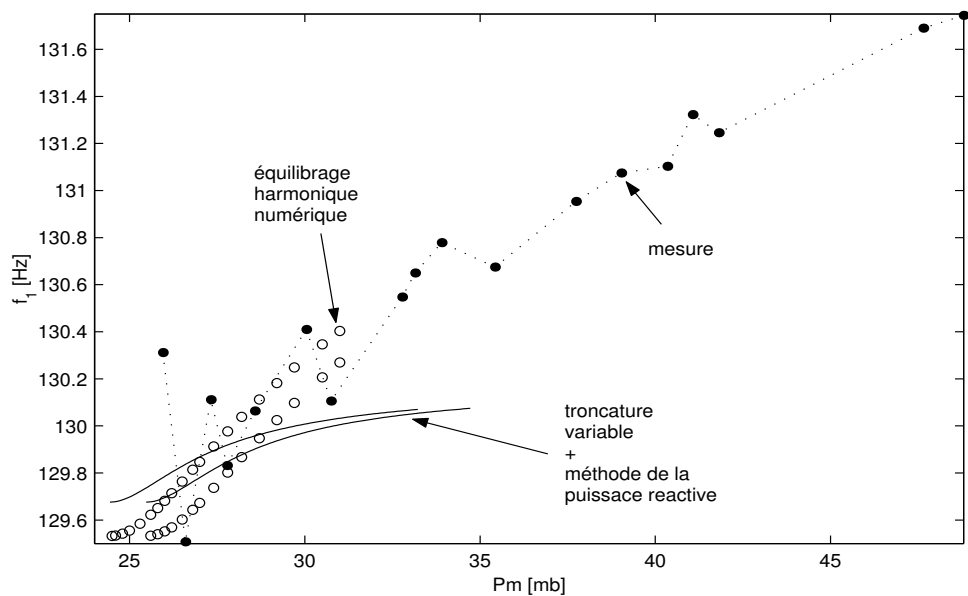


FIG. 6.17 – Evolution de la fréquence de jeu pour une clarinette de longueur totale $L = 65.5$ cm. Mesures et prévisions théoriques.

6.5 Conclusion / perspectives

Dans ce chapitre nous avons cherché à comparer les régimes d'oscillation obtenus avec un modèle simple basé sur le modèle de non-linéarité élémentaire aux régimes permanents mesurés dans une clarinette en situation de jeu, en régime "anche non battante". Cet objectif nous a d'abord conduit à déterminer le domaine de validité de différentes méthodes de calcul du spectre, en considérant les solutions calculées par équilibrage harmonique à troncature fixe comme les solutions "exactes" (troncature à l'ordre 32). La méthode de calcul par équilibrage harmonique à troncature variable fournit des résultats proches des solutions "exactes" sur environ la moitié de la plage de pression correspondant au régime "anche non battante". La méthode de calcul par perturbation du signal sans pertes donne des résultats satisfaisants lorsque la méthode à troncature variable est déficiente, mais le raccordement entre ces deux méthodes n'est pas évident.

Ensuite un protocole expérimental permettant de mesurer précisément le spectre et la fréquence des oscillations périodiques a été mis au point. Tous les paramètres du modèle ont été déterminés à partir de mesures afin de ne pas utiliser de paramètres d'ajustement. Grâce à ces précautions nous avons réuni les conditions permettant une comparaison quantitative.

Compte tenu de la mise au point tardive de la méthode de mesure de la caractéristique non-linéaire, seule une embouchure a pu être étudiée et l'exploitation des données acquises n'est que partielle (les signaux de pression en bout de tube n'ont pas été exploités). Concernant l'amplitude du fondamental, la comparaison fait apparaître un relativement bon accord entre ce que prévoit le modèle et les mesures. Néanmoins la prise en compte des pertes visco-thermique n'est apparemment pas suffisante. En ce qui concerne les harmoniques l'accord est moins satisfaisant. Des observations complémentaires sont à envisager afin de mieux cerner les lacunes du modèle. L'évolution de la fréquence de jeu en fonction de la pression d'alimentation mesurée fait apparaître une baisse de la fréquence au seuil d'oscillation, que l'on attribue à l'amortissement de l'anche [KG00], et une augmentation avec P_m au-delà du seuil que l'on attribue à l'inharmonicité.

Les résultats expérimentaux sur l'évolution du spectre présentés dans ce chapitre confirment les tendances observées par d'autres auteurs. Néanmoins, par rapport aux travaux antérieurs, nous avons montré qu'il est possible d'effectuer des comparaisons permettant de chiffrer les écarts entre les données mesurées et calculées. Ceci est rendu possible grâce à la mesure de la caractéristique non-linéaire qui fournit les paramètres du modèle. Connaissant ces écarts on peut alors envisager de modifier le modèle par étapes en tenant compte de phénomènes de "second ordre", la comparaison théorie / expérience permettant de vérifier la pertinence des modifications. Ce type d'approche nous incite par exemple à prendre en compte le terme de perte non-linéaire de l'impédance de rayonnement et l'inertie de l'anche.

Conclusion générale

À travers les études présentées dans ce mémoire nous avons cherché à acquérir une meilleure connaissance du système excitateur (bec + anche) des instruments à anche simple et de son rôle dans le mécanisme d'auto-oscillation. Sur la base de modèles simplifiés, nous avons cherché à déterminer les solutions du système couplé (excitateur + résonateur) et les conditions que doit satisfaire la relation non-linéaire caractérisant l'excitateur pour que ces solutions soient stables. Nous avons également réalisé des expériences qui valident l'usage d'un modèle élémentaire basé sur la relation de Bernoulli et une description quasi-statique de l'anche.

Concernant la stabilité des solutions, une première étape a consisté à faire le bilan des analogies existant entre les modèles simplifiés d'instruments à anche simple et de corde frottée afin de déterminer dans quelle mesure les travaux sur la corde frottée peuvent être exploités pour l'étude des oscillations des instruments à anche simple. En plus des analogies déjà connues, nous avons montré que le paramètre de force d'archet appliquée par le musicien est formellement analogue au paramètre d'embouchure dans le cas du modèle élémentaire d'instrument à anche simple. Avec cette analogie et en considérant des résonateurs simplifiés que l'on peut assimiler à des résonateurs coniques ("cônes en escaliers" et "saxophones cylindriques"), nous avons montré que l'analogie entre les instruments à anche et la corde frottée est complète dans la mesure où pour chaque paramètre de contrôle et chaque variable, il existe un paramètre et une variable analogue dans l'autre famille d'instrument. La différence entre les deux systèmes réside principalement dans la forme de la caractéristique non-linéaire. Cette analogie rend possible l'*exploitation* de certains travaux sur la corde frottée pour l'étude des instruments à anche, et en particulier les instruments coniques.

Nous avons étudié la stabilité des solutions périodiques dans le cadre de modèles simplifiés, d'abord sans préciser la relation caractéristique de l'excitateur, puis dans le cadre du modèle élémentaire avec des paramètres réalistes. L'analogie entre les modèles d'instrument à vent et de corde frottée a grandement facilité l'analyse de la stabilité pour les instruments de type conique. Des critères de stabilité ont été établis et nous avons montré que les modèles d'instrument à anche sans pertes peuvent générer des oscillations périodiques stables contrairement aux modèles similaires de corde frottée. Ce résultat justifie ainsi l'usage de modèles sans pertes pour étudier les instruments à anche en première approche. En ce qui concerne la stabilité des solutions périodiques des instruments de type conique nous avons notamment obtenu les résultats originaux suivants :

- Des deux signaux de type "mouvement de Helmholtz standard" qui peuvent être générés en régime "anche non battante", seul celui d'amplitude la plus élevée peut être stable.
- Dans le cas du modèle élémentaire, cette solution est stable au voisinage du seuil d'oscillation, instable en régime "anche non battante" à proximité du seuil de battement et stable en régime "anche battante".
- Le "mouvement de Helmholtz inversé" n'est stable qu'en régime "anche battante".
- De façon générale le régime "anche battante" favorise la stabilité des solutions périodiques.

Dans la mesure où la stabilité des solutions périodiques dépend fortement de la caractéristique non-linéaire, nous avons cherché à la mesurer. Nous avons validé une méthode de mesure de la caractéristique non-linéaire en régime statique. Cette méthode de mesure a permis de comparer les relations pression-débit obtenues dans le cas d'un système (bec+anche) réel à celles obtenues dans le cas de géométries simplifiées. Nous avons notamment pu constater la validité d'un modèle basé sur la relation de Bernoulli avec un coefficient de vena contracta constant pour les grandes ouvertures. La mesure de différentes embouchures permet également de montrer que l'anche peut être caractérisée par une raideur constante sur la majeure partie de la caractéristique, la variation de la raideur n'étant importante que lorsque l'anche est quasiment fermée. Ces résultats permettent de justifier l'usage du modèle élémentaire en régime "anche non battante". Par ailleurs, la mesure de la caractéristique non-linéaire permet d'évaluer le paramètre d'embouchure et la pression de plaquage correspondant au modèle. Cet apport est capital car il offre la possibilité de caractériser les embouchures à l'aide de critères objectifs. Ceux-ci pourront éventuellement être reliés à ceux du musicien ("ouvert", "fermé", "étouffé", "brillant", ...etc).

Nous avons également mis au point un dispositif expérimental original afin d'observer le contact anche-table. À l'aide de ce dispositif nous avons pu observer un mouvement tel que l'extrémité de l'anche touche la table sans être en contact avec celle-ci sur toute sa longueur. Ces observations confirment les prévisions théoriques ou numériques de précédents travaux [Gaz94, Duc01, vW02]. Elles permettent également de comprendre pourquoi la raideur est pratiquement constante jusqu'à ce que l'extrémité de l'anche ferme le canal anche table. Ce dispositif nous a de plus permis de vérifier que le comportement mécanique de l'anche est similaire en régime statique et dynamique. L'étude de différentes combinaisons de becs, d'anches et d'embouchures (position et nature des lèvres) est à envisager afin d'observer d'éventuelles différences de comportement lorsqu'il y a enroulement. Une étude expérimentale menée parallèlement à une étude numérique permettrait d'atteindre une meilleure compréhension de la mécanique de l'anche. À plus long terme on peut envisager le développement d'outils d'aide à la conception de becs ou d'anches en matériaux composites.

Les caractéristiques mesurées diffèrent du modèle élémentaire sur plusieurs aspects dans la zone correspondant à la fermeture de l'anche. L'analyse des conséquences de ces différences sur la stabilité des solutions est à approfondir, mais on peut noter que ces différences vont dans le sens d'une stabilisation des solutions périodiques.

L'estimation des paramètres du modèle élémentaire à partir de la mesure de la caractéristique non-linéaire a permis de comparer quantitativement les données expérimentales et les prévisions théoriques concernant le spectre d'une clarinette simplifiée en régime "anche non battante". Cette démarche permet d'évaluer la capacité du modèle élémentaire à décrire le comportement du système. Un relativement bon accord est obtenu pour le fondamental, mais son amplitude est surestimée si l'on ne considère que les pertes visco-thermiques. Les harmoniques sont également surestimés. Les écarts entre les prévisions théoriques et les mesures sont dus à des phénomènes qui ne sont pas considérés dans le modèle. La prise en compte du terme dissipatif non-linéaire dans l'impédance de rayonnement et des effets dynamiques liés à l'anche permettraient de faire coïncider d'avantage les données théoriques et expérimentales. La mesure des pertes par rayonnement dans une clarinette en situation de jeu est envisagée dans le cadre de la thèse de M. Atig [Ati]. La démarche consistant à comparer quantitativement les données expérimentales et les prévisions théoriques devrait permettre de déceler progressivement les phénomènes physiques supplémentaires à considérer pour converger vers une description plus fidèle du fonctionnement des instruments à anche simple.

Au terme de ces travaux il apparaît que le modèle élémentaire permet de décrire le fonctionnement des instruments à anche simple en régime "anche non battante" lorsque l'anche ne s'enroule pas ou peu. Pour prévoir plus précisément le spectre des oscillations on aura néanmoins intérêt à considérer les effets dynamiques liés à l'anche. Les travaux futurs devront s'intéresser à la modélisation du système exciteur en régime "anche battante", qui est le mode de fonctionnement le plus courant pour les instruments coniques, et dans le cas où il y a enroulement.

Annexes

Annexe A

Signaux expérimentaux

Dans cette annexe sont reproduits les figures d'enroulement et les signaux d'ouverture mesurés à l'aide du dispositif optique sur lesquels se base l'analyse du mouvement de l'anche en régime dynamique au chapitre 5. Les signaux de pressions $\Delta p = P_m - p$ correspondants, exploités au chapitre 6 pour le calcul du spectre, sont également donnés.

Chaque figure représente 3 signaux en fonction du temps :

- en haut : le contact anche-table
- au milieu : les signaux de pression $\Delta p = P_m - p$
- en bas : l'ouverture adimensionnée H/H_0 , où H est l'ouverture mesurée et H_0 est l'ouverture au repos (lorsque $\Delta p = 0$)

Sur les figures représentant les signaux de pression (au milieu), les traits horizontaux indiquent les niveaux maximum et minimum des signaux correspondant au modèle sans pertes.

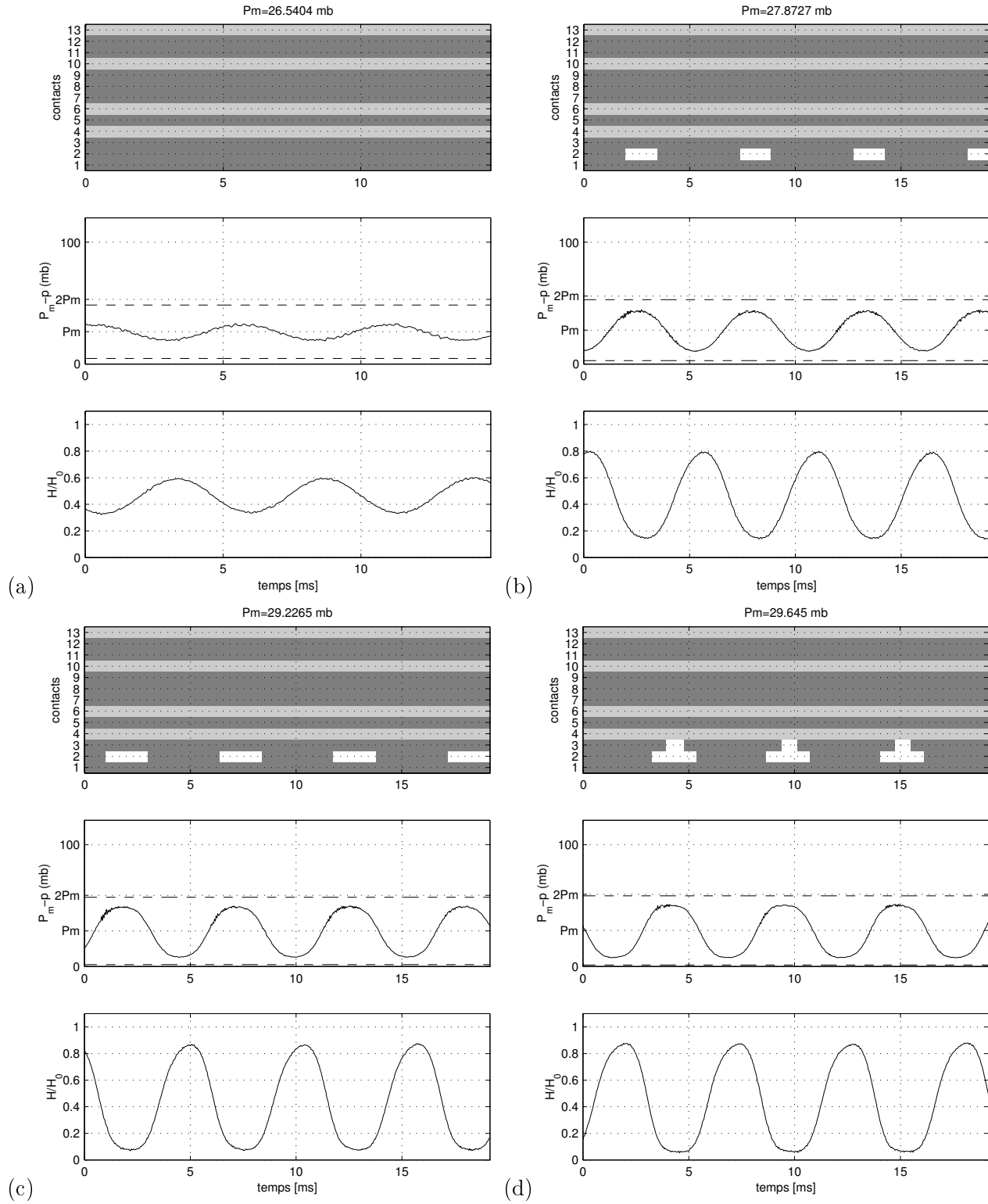


FIG. A.1 – figures d'enroulement pour P_m croissant (en mb) : (a) 26.5, (b) 27.8, (c) 29.2, (d) 29.6.

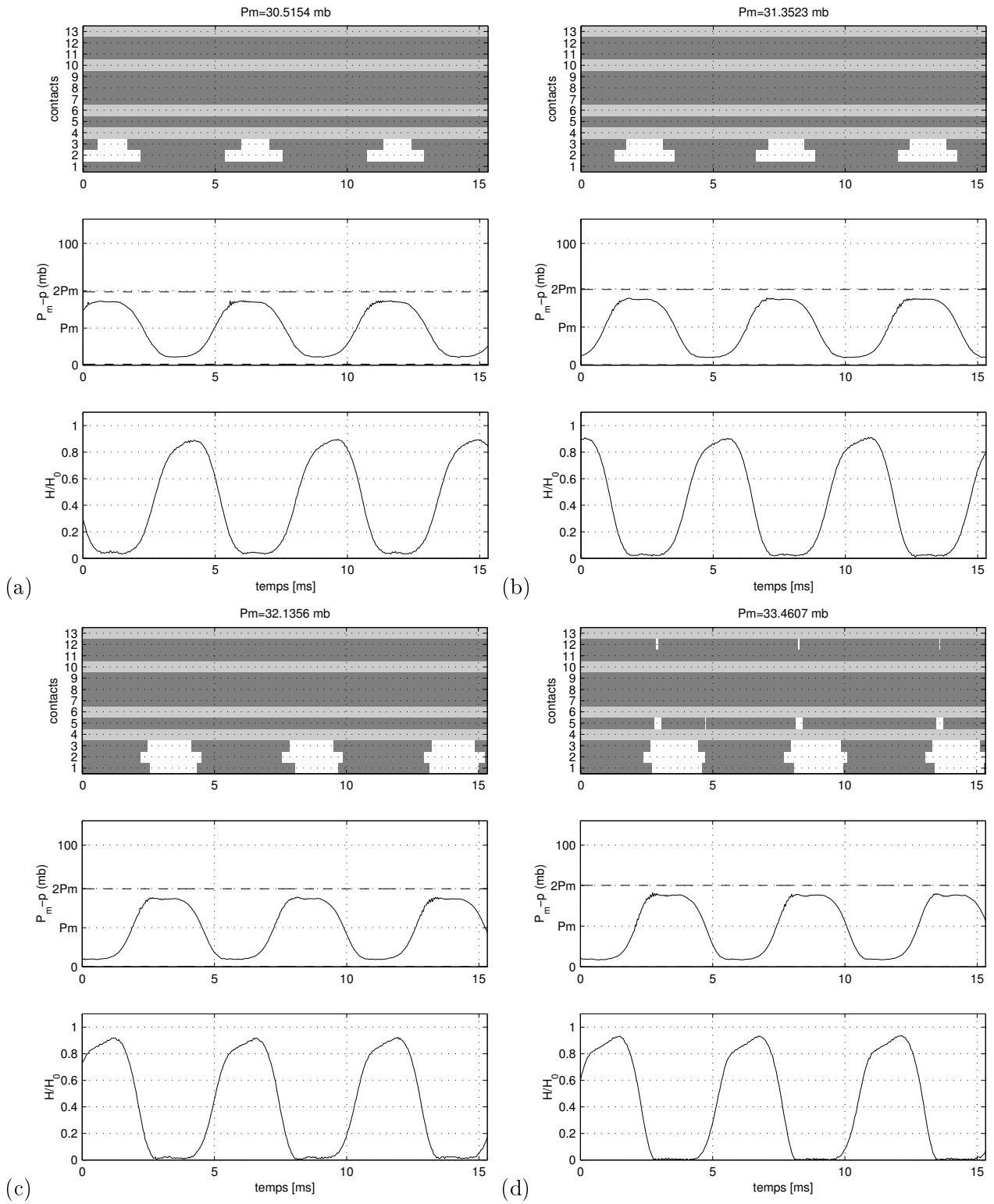


FIG. A.2 – figures d'enroulement pour P_m croissant (en mb) : (a) 30.5, (b) 31.4, (c) 32.1, (d) 33.5.

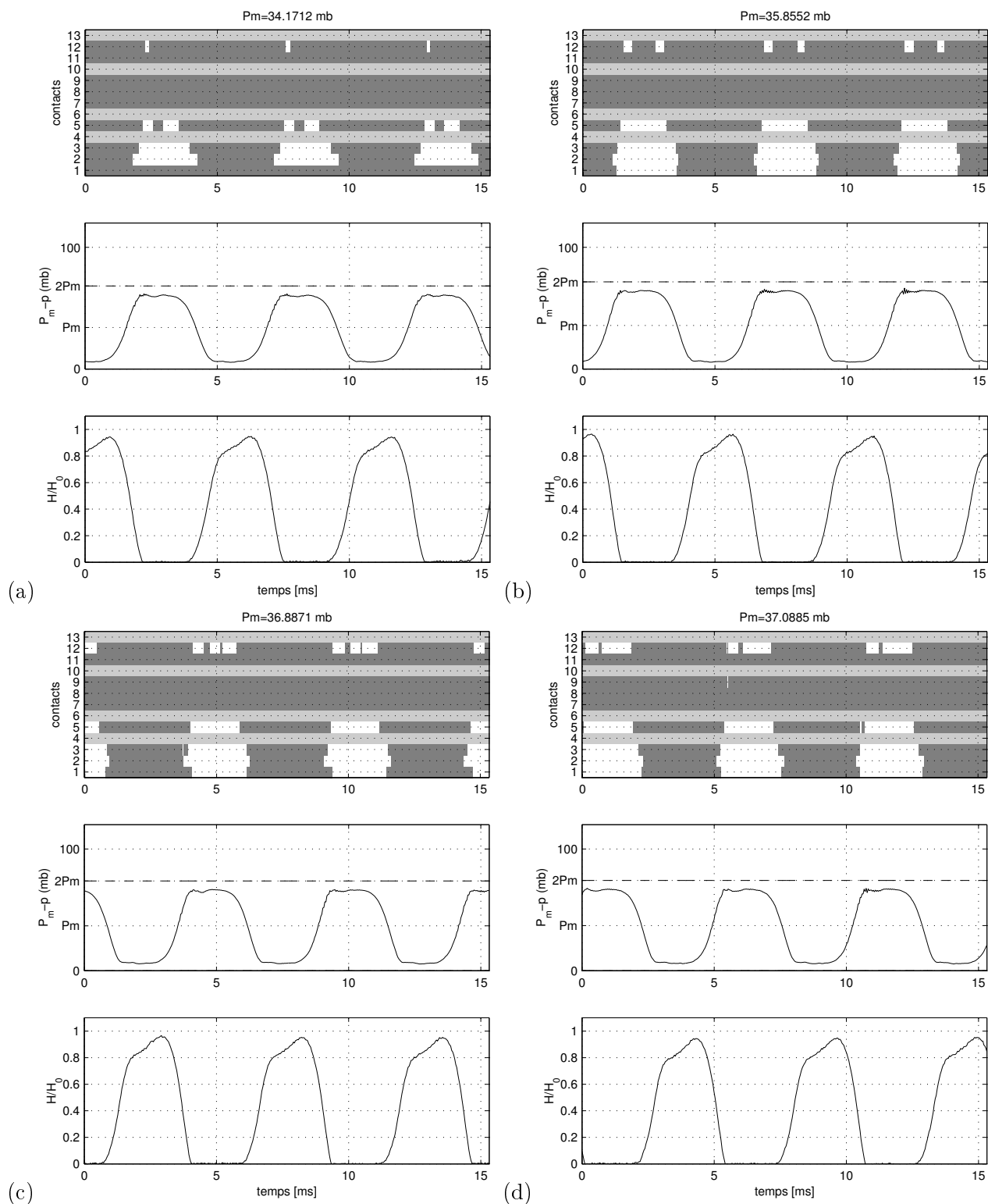


FIG. A.3 – figures d'enroulement pour P_m croissant (en mb) : (a) 34.2, (b) 35.9, (c) 36.9, (d) 37.1.

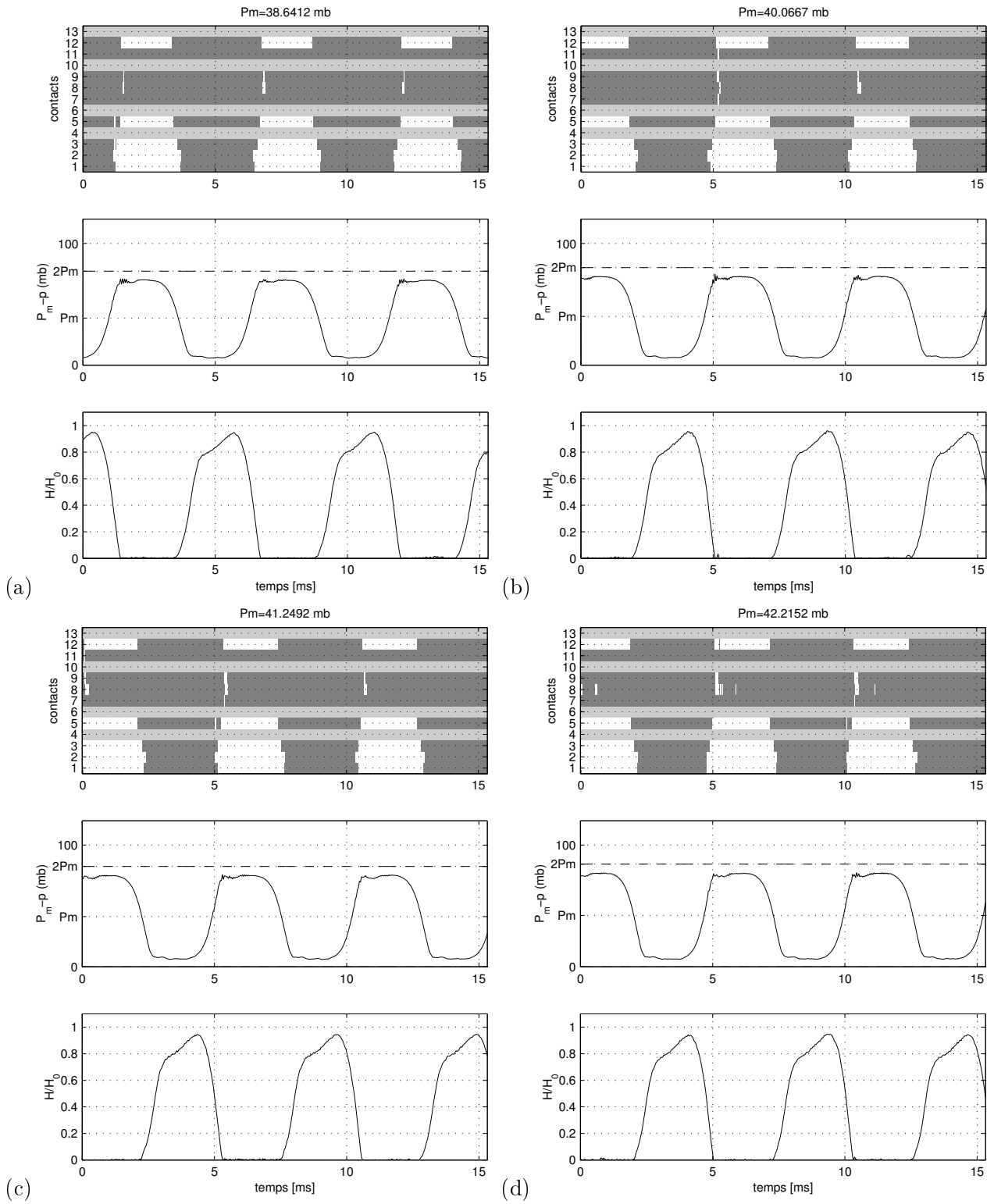


FIG. A.4 – figures d’enroulement pour P_m croissant (en mb) : (a) 38.6, (b) 40.1, (c) 41.2, (d) 42.2.

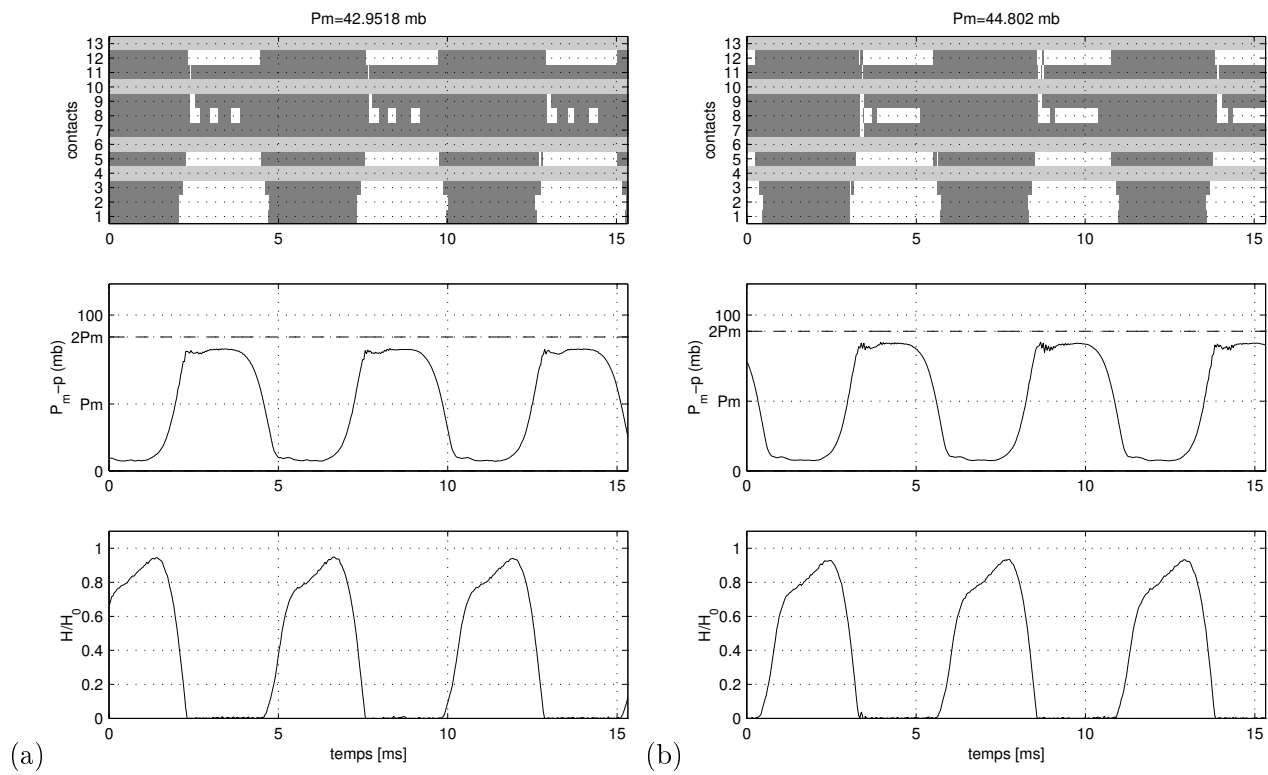


FIG. A.5 – figures d'enroulement pour P_m croissant (en mb) : (a) 43.0, (b) 44.8.

Annexe B

Saturation mechanism in reed instruments

Cette annexe reproduit la communication [DDO02] : J-P. Dalmont, E. Ducasse et S. Ollivier, Saturation mechanism in reed instruments, 3rd EEA European Congress on Acoustic, 2002, Seville. Cet article présente le mécanisme de saturation dans les instrument à anche.

SATURATION MECHANISM IN REED INSTRUMENTS

PACS 43.75 Ef and 43.75 Pq

Dalmont Jean-Pierre¹, Ducasse Eric², Ollivier Sébastien¹

1. Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, UMR CNRS 6613
Avenue Olivier Messiaen
72085 Le Mans Cedex 9, France
Tel: (33)2 43 83 32 77 and (33)2 43 83 36 12
Fax: (33)2 43 83 35 20
E-mail: jean-pierre.dalmont@univ-lemans.fr and sebastien.ollivier@univ-lemans.fr
2. Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers
Esplanade des Arts et Métiers
33405 Talence Cedex, France
Tel: 05 56 84 53 40
Fax: 05 56 84 53 97
E-mail: eric.ducasse@bordeaux.ensam.fr

ABSTRACT

When blowing a wind instrument, the sound level is limited by the fact that when the blowing pressure increases the level also increases until a maximum beyond which the reed closes suddenly. Time domain simulations and experiments using an artificial blowing machine are used to demonstrate that losses are responsible for this phenomenon. Due to losses the pressure in the mouthpiece becomes too low to ensure the reopening of the reed. It is shown that, in the case of conical instruments, the same mechanism is responsible for the bifurcation to unusual modes such as the inverted Helmholtz motion.

INTRODUCTION

When a beginner starts studying the clarinet, he needs to learn to control his breath so that the pressure is sufficient to maintain an oscillation but not too high which leads to the closing of the reed channel. In other words the player may deliver a pressure in between the threshold of oscillation and the saturation threshold. To our knowledge this saturation threshold has not been studied. Moreover, lossless models do not emphasise such a threshold. Introducing losses may explain the phenomenon but experiments show that the saturation threshold is much lower than expected with a model with standard losses parameters. In the case of conical woodwinds, the saturation threshold for the fundamental standard regime also exists but does not lead directly to the closing of the reed. The oscillation bifurcates to another regime in principle unstable when the standard regime is stable. This regime can be either the octave of the standard regime or a regime at the same frequency such as the inverted Helmholtz motion.

1. CYLINDRICAL CASE (CLARINET)

1.1 Lossless model

A lossless model in which losses and reed inertia are neglected and in which the clarinet is considered as a perfect cylinder have been exhaustively studied by Maganza and others [1-3]. In this model the reed is closed when the pressure drop between the mouth and the mouthpiece is larger than a pressure P_M characteristic of the embouchure. Up to the beating threshold, the standard regime alternates two states. For the first state, the reed is open and the pressure in the mouthpiece P is equal to the pressure P_m in the mouth. The pressure drop between the mouth and the mouthpiece $\Delta p = P_m - P$ is equal to zero. For the second state, the reed is closed $P = -P_m$ and the pressure drop is $\Delta p = P_m - P = 2P_m$ (see figure 1). This regime of oscillation is called "Helmholtz motion" because of the analogy with the bowed string [3, 4]. Nothing in the model points out a saturation threshold which is rejected to infinity.

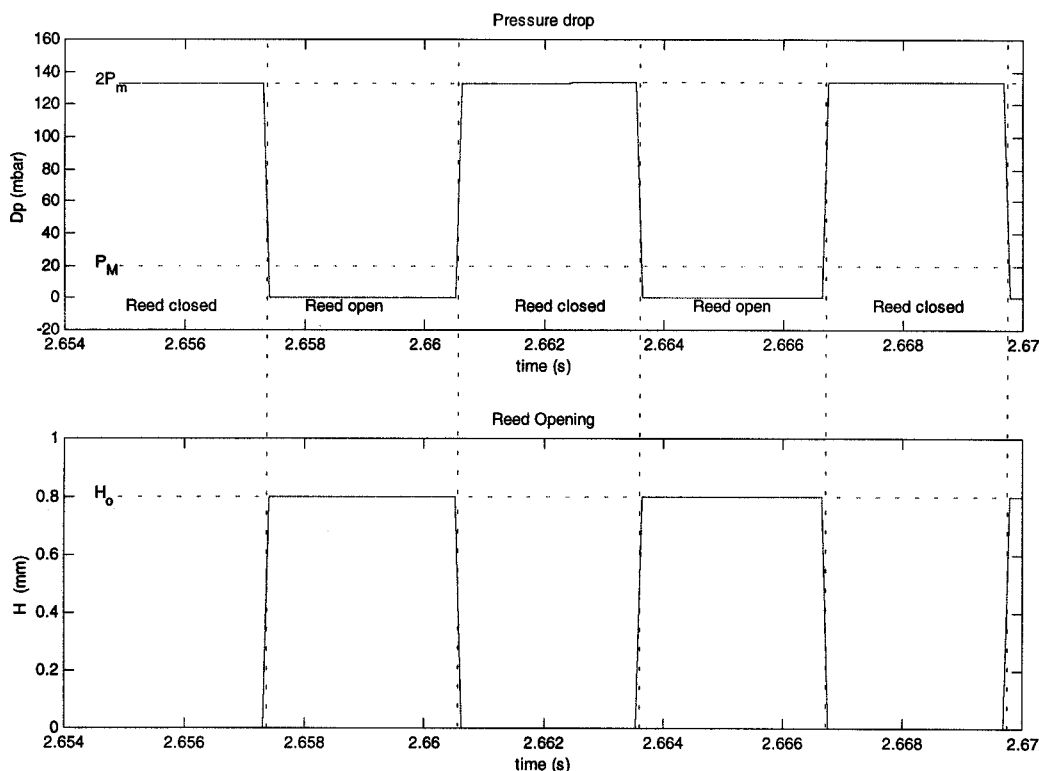


Figure 1 : Pressure drop and reed opening signals as a function of time in the case of lossless model.

1.2. Model with losses

Losses can be easily introduced in the model [5]. In our simulation standard visco-thermal losses are not sufficient to produce a saturation at a realistic pressure. Therefore the reflection coefficient at the open end of the tube has been decreased to $R=0.98$. This shall not be considered as shocking, as it has been demonstrated [6, 7] that the non-linear phenomena at the end of a tube may increase losses considerably. The difference with the lossless model lies in the fact that the pressure signal is not a square signal. It appears that when mouthpressure increases beyond the pressure P_M , the pressure drop is lower than P_M for a time lower than a half period (see figure 2). Consequently the reed opens for a decreasing duration when the mouthpressure increases. When this duration becomes too small the oscillation stop suddenly. We notice a small out of phasing between the opening episode and the time during which the pressure drop is lower than P_M . This, as well as the fact that the reed opening can be larger than its rest position, is due to the taking into account of the reed inertia.

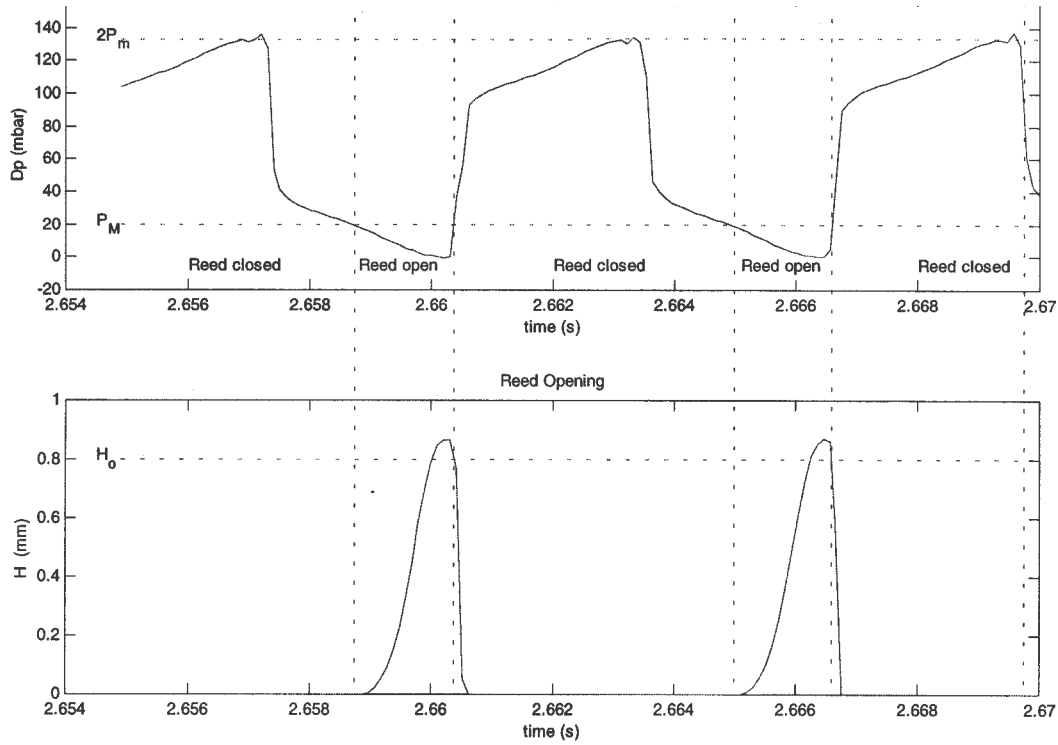


Figure 2 : Pressure drop and reed opening signals as a function of time near the saturation (simulation including losses and reed inertia).

1.3 Experiment

Experiments have been carried out with a blowing machine [8]. The pressure drop have been measured with a high sensitivity pressure transducer (ENTRAN EPE-541-M). The reed opening have

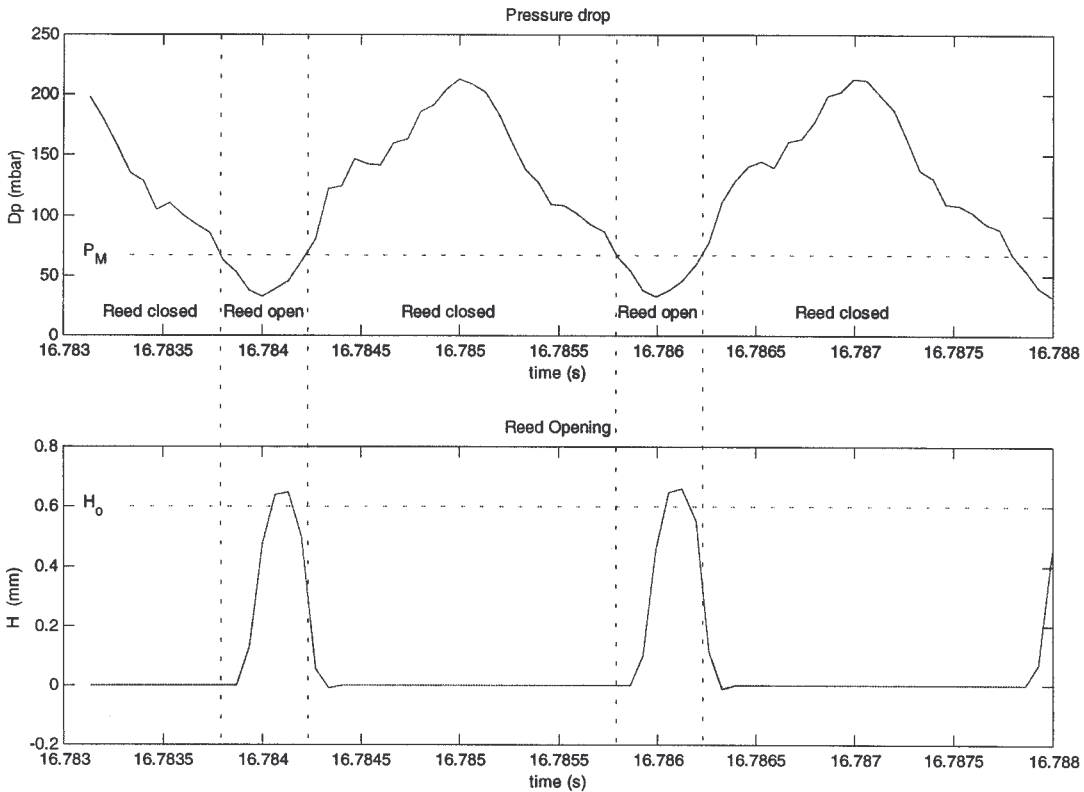


Figure 3 : Pressure drop and reed opening signals as a function of time near the saturation (experiment).

been measured with a LASER and a photo diode [9]. It appears that when the mouthpressure increases the pressure drop when the reed is open increases. When this pressure drop is larger than P_M , the reed do not reopen and the oscillations stop. The behaviour is similar to what is obtained with the model with losses but the saturation appear more suddenly and for a mouthpressure lower than in our simulation (see figure 3). The explanation is probably due to the fact that, due to the non linear losses [7], the reflection coefficient at the end of the tube is probably much lower than 0.98.

2. CONICAL CASE (SAXOPHONE)

2.1 Lossless model

We consider a model without losses in which the resonator is a succession of N cylinder of same length and such that $S_i = i(i+1)S_1/2$ where S_i is the cross section of the i^{th} cylinder. Such resonator are known to behave like a saxophone [3, 4, 10]. With such a model, as for the clarinet, up to the beating threshold, the standard regime alternates two states. First state, the reed is open and the pressure in the mouthpiece P is equal to the pressure P_m in the mouth. The pressure drop $\Delta p = P_m - P$ is equal to zero. Second state, the reed is closed $P = -NP_m$ and the pressure drop is $Dp = P_m - P = (N+1)P_m$ (see figure 4 for $N=2$). This regime of oscillation is called “Standard Helmholtz motion” because of the analogy with the bowed string and because another solution, the “Inverted Helmholtz motion”, may also exists [3, 4]. For the standard Helmholtz motion the reed is open the main part of the period i.e. $N/(N+1)$ times the period (see figure 4 for $N=2$).

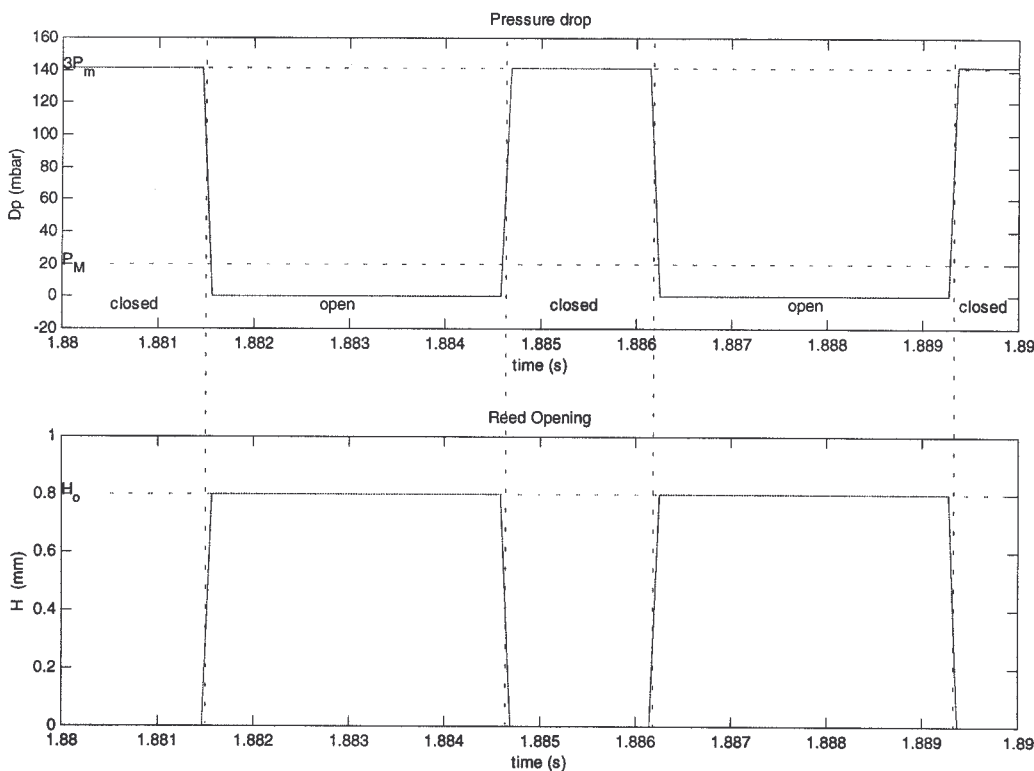


Figure 4 : Pressure drop and reed opening signals as a function of time in the case of a lossless model for a resonator made with two cylinders ($N=2$).

2.2. Model with losses

When losses are introduced, the same phenomenon as with the clarinet appears. The opening duration which should be $2/3$ of the period for a “standard Helmholtz motion” for $N=2$ diminishes when the mouthpressure increases until it reaches $1/3$ of the period. Then, the oscillations bifurcate to a “three step motion” (see figure 5). For this regime the duration of the opening is a third of the period and the pressure drop takes ideally three values $0, P_M, 2P_M$. When the mouthpressure keep increasing the opening duration keep diminishing until the oscillation vanishes.

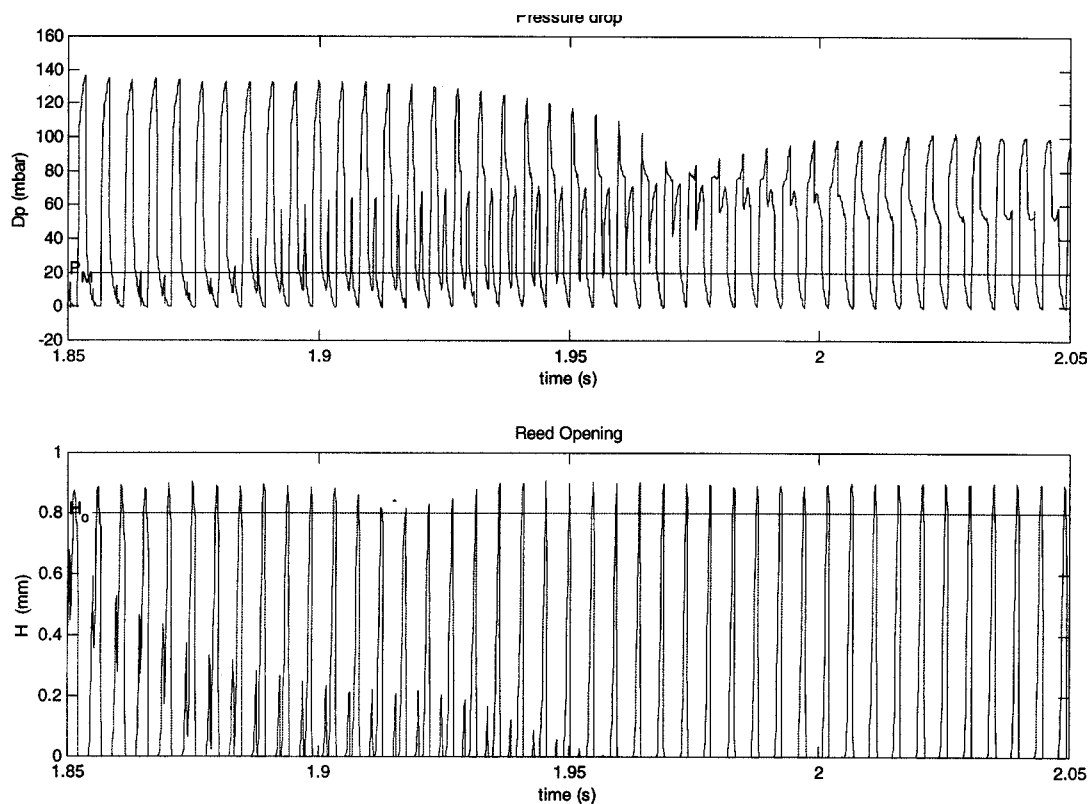


Figure 5 : Bifurcation from the standard Helmholtz motion to a “three step motion” (simulation including losses and reed inertia for a resonator made with two cylinders ($N=2$))

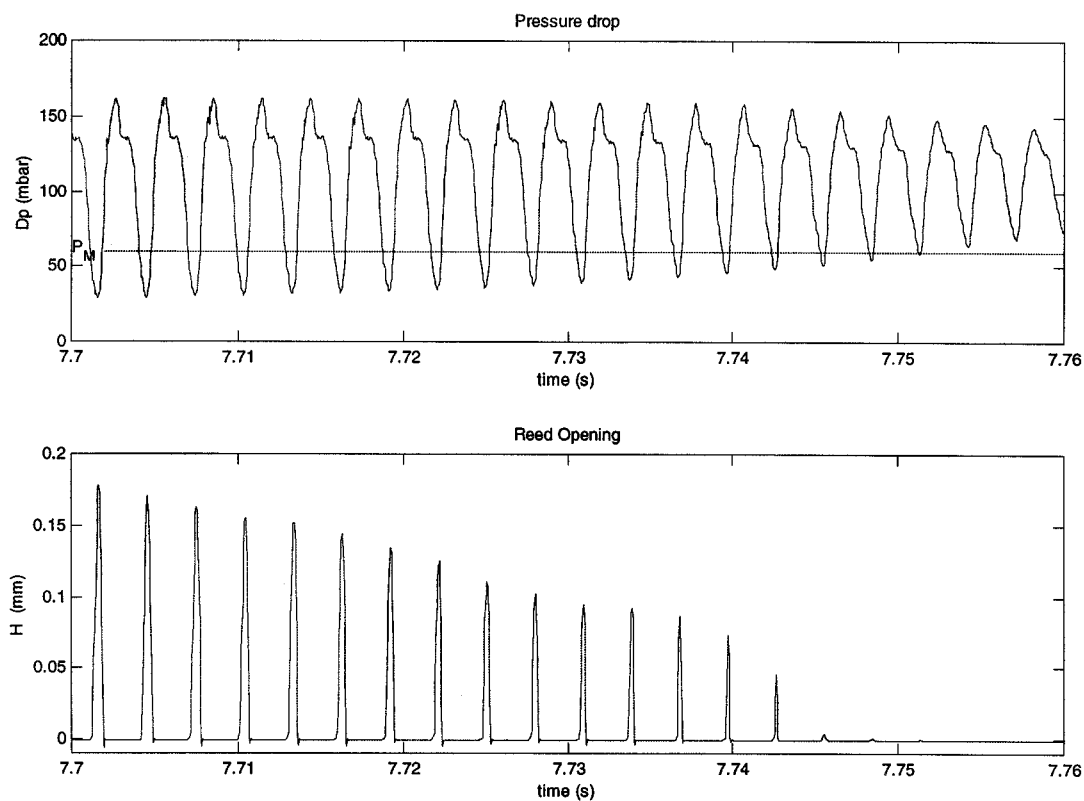


Figure 6 : Extinction of the oscillation (experiment with a resonator made with two cylinders ($N=2$))

2.3 Experiment

Experiments have been carried out with a saxophone made with two cylinders. Experiments show that when the opening time diminishes the shape of the pressure signal is modified and tends to a signal which can be more or less interpreted as an "inverted Helmholtz motion" (figure 6). As observed with the simulation, when the measured mouthpressure keep increasing the opening duration keep diminishing until the oscillation vanishes (figure 6).

CONCLUSION

The mechanism which leads to the saturation is due the finite value of the pressure drop between the mouth and the mouthpiece when the reed is open. When this pressure drop reaches the closing pressure P_M , the mouthpiece pressure is no more sufficient to ensure the reopening of the reed and the oscillation stops. Simulations shows that this phenomenon can be observed only if important losses, such as non linear losses on a side hole, are taken into account in the model. The saturation mechanism is also the cause of the bifurcation to non standard regimes such as the "inverted Helmholtz motion"

ACKNOWLEDGEMENTS

Authors would like to thank Mathieu Blondet for his help and Joël Gilbert for fruitful discussions.

REFERENCES

1. C. Maganza, R. Caussé, F. Laloë "Bifurcations, period doubling and chaos in clarinet-like systems", *Europhysics Letters*, 1, 295-302 (1986).
2. J. Kergomard "Elementary considerations on reed-instruments oscillations" in *Mechanics of musical instruments*, Lectures notes CISM, Springer (1995).
3. J.-P. Dalmont, J. Gilbert, J. Kergomard "Reed instruments, from small to large amplitude periodic oscillations and the Helmholtz motion analogy", *ACUSTICA-acta acustica*, **86**(4) 671-684 (2000).
4. S. Ollivier, J.-P. Dalmont, J. Kergomard "Idealised models of reed woodwinds. Part I: Analogy with the bowed string", submitted to *ACUSTICA-acta acustica* (2002).
5. E. Ducasse "Modélisation et simulation dans le domaine temporel d'instruments à vent à anche simple en situation de jeu : méthodes et modèles", Thèse de doctorat de l'Université du Maine (Le Mans (2001).
6. J.-P. Dalmont, C.J. Nederveen, V. Dubos, S. Ollivier, V. Meserette, E. te Sligte: "Experimental determination of the equivalent circuit of a side hole: linear and non linear behaviour", to be published in *ACUSTICA-acta acustica*.
7. J.-P. Dalmont, E. Ducasse S. Ollivier, "Practicle consequences of tone holes non linear behaviour", *International Symposium of Musical Acoustics*, Perugia (Septembre 2001).
8. J.-P. Dalmont, B. Gazengel, J. Gilbert et J. Kergomard "Some aspects of tuning and clean intonation in woodwinds", *Applied Acoustics* **46**, 19-60 (1995).
9. J.-S. Cullen, J. Gilbert, D.M. Campbell "Brass instruments : Linear stability and experiments with an artificial mouth", *ACUSTICA-acta acustica*, **86**(4) 704-724 (2000).
10. J.-P. Dalmont et J. Kergomard "Lattices of sound tubes with harmonically related eigenfrequencies", *Acta Acustica*, **2**, 421-430 (1994).

Annexe C

Calculation of the spectrum of self-sustained oscillators using a variable truncation method : application to cylindrical reed instruments

Cette annexe reproduit la référence [KOG00] : J. Kergomard, S. Ollivier et J. Gilbert, Calculation of the spectrum of self-sustained oscillators using a variable truncation method : application to cylindrical reed instruments, *ACUSTICA-Acta Acustica*, 86, 685-703, 2000. Cet article présente en détail le principe de calcul du spectre par équilibrage harmonique à troncature variable et son application au cas de la clarinette.

Calculation of the Spectrum of Self-Sustained Oscillators Using a Variable Truncation Method: Application to Cylindrical Reed Instruments

Jean Kergomard*, Sébastien Ollivier, Joël Gilbert

Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (UMR CNRS 6613) Av. Olivier Messiaen, 72085 Le Mans Cedex 9, France

Summary

Two limit cases are well known concerning the spectrum of cylindrical instruments excited by a reed: the small oscillations case, for which the n th odd harmonic has an amplitude proportional to a n th power of the first harmonic, and the non dissipation case, where the spectrum is that of a square signal. The present paper investigates the transition between these two cases, and proposes approximate formulae for the spectrum with respect to the mouth pressure and dissipation parameter. The method, called the "variable truncation method", is an intermediate one between the series expansion method, valid for small oscillations, and the general, numerical "harmonic balance" method for solving a system of nonlinear equations. The models used are classical, the nonlinear function describing the mouthpiece being first a polynomial of the third order, then a more complicated one based upon the Bernoulli law. It is first established that the operating frequency and the spectrum are in practice almost independent of the shape of the nonlinearity. Resonators with harmonically related resonance frequencies are first studied in order to justify as far as possible the calculation method. Rather simple formulae exhibit a two-slopes behaviour for the diagrams plotting the amplitude of the odd harmonics versus that of the first one. Then inharmonicity due to visco-thermal effects is considered, and its effect is found to be very important, independently on the aspect ratio of the cylindrical tube. It is shown to reduce the amplitudes of the odd harmonics of the external pressure compared to these of the even harmonics. However the amplitudes of the even harmonics of the pressure inside the mouthpiece are found to be very small, allowing great simplifications in the approximate calculations. Qualitative comparison with experiments published by some authors is given. A short investigation is also presented concerning the effect of changes in the shape of the resonator, the approximate method remaining useful.

PACS no. 43.75.Ef, 43.75.Pq

1. Introduction

The first attempt to derive theoretically the spectrum of reed instruments is due to Worman [1]. His results were at the origin of many works, such as the one by Benade and Kouzoupis [2]. These authors used Worman's results in order to derive semi-empirical formulae fitted with experimental results, and involving several fitting parameters. Few parameters with a physical significance were used, but the formulae were probably the first describing the complete spectrum of self-sustained oscillation instruments.

Recently Grand *et al.* [3] improved Worman's work by using systematically a series expansion technique in order to find both the nature of the bifurcation of the trivial, non-oscillating solution and the spectrum of small oscillations. They obtained interesting results, more precise and easier to use than those of Worman. Another study has been carried out in order to exhibit the main control parameters by Kergomard [4] on the square signal approximation, initiated by Mc Intyre *et al.* [5] essentially as a pedagogic tool. This approximation cannot provide information concerning the evolution of the spectrum when the parameters change but it is useful for the study of stability, transients, bifurcations, etc. . . This work was based upon the systematic use of dimensionless parameters. A first attempt *to connect the small oscillations*

approach and the square signal one was also given in the same reference [4], exhibiting some paradoxes.

The study presented hereafter extends this attempt with two goals:

- i). An approximated method, called "variable truncation method" is established for instruments described by a generic model of the excitation mechanism, based upon a third order nonlinear function, assumed to be independent of time, the cylindrical resonator being characterised by its input impedance. The paper discusses the validity of the method, and the possibility of generalisation for other shapes of resonators.
- ii). A model including physical parameters is used in order to both discuss some aspects of the physical interest of the approximate formulae and compare the results of the method to these of the numerical harmonic balance technique (HBT). The discussion is limited to a small number of parameters, especially the mouth pressure and the loss factor characterizing the visco-thermal dissipation, only purely cylindrical resonators being considered: for the case of clarinet-like instruments, the loss factor is the main parameter allowing non square shapes for the signal. The reed is assumed to be in a non-beating state, and to act as a simple spring: this second assumption implies a limitation of the discussion to relatively long tubes and low frequencies and excludes instruments with a great influence of the reed resonance, like organ pipes or brass lip-reed instruments.

The present paper is devoted to a pure theoretical work; nevertheless some experimental results concerning clarinetlike

Received 28 June 1999,
accepted 26 June 2000.

* Present address: Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, CNRS, 31 Chemin J. Aiguier, F-13402 Marseille Cedex 20

instruments can be compared, at least in a qualitative way: in particular new experimental results have been recently obtained for very strong blowing pressure, using an artificial mouth, exhibiting a second slope in the growing of the first odd harmonics (see references [6, 7, 8]), after the results obtained by Benade [9] with a real clarinet player. A precise, quantitative comparison with such experimental results is actually very difficult, in particular because of the difficulty of the modelling of the reed beat, and therefore the present paper is limited to the establishment and justification of a theoretical method and the application to a simple physical system described by its main parameters.

In section 2 the simplest, classical generic model of a cylindrical tube excited by a reed is stated. For this elementary model section 3 derives and tries to justify the new method of approximation, allowing to obtain the amplitudes of the different harmonics: great help is found from the fact that the first even harmonics of the acoustic pressure in the mouthpiece are small compared to the odd harmonics. In section 4 the approximate formulae of section 3 are applied to a physical model, each coefficient depending on physical quantities related to the reed and the tube, and simultaneously they are compared to numerical results obtained by the HBT: this allows to test the validity of the approximations explained in section 3, and as well to get new simplifications in order to exhibit the simplest dependence of the amplitude and the spectrum with respect to the main physical parameters. The resonator is first assumed to have harmonically-related resonances, then the effect of inharmonicity due to dispersion is studied.

In the last section 5 two short complements are given: a first investigation on an effect similar to a change in the shape of the resonator, with a way for generalising of the method, and a study of the use of a full nonlinear model instead of the one restricted to the cubic expression, used in section 3 and 4 for its generality and its simplicity.

The critical point of this paper is the derivation of approximated formulae for the internal spectrum of the pressure (in the mouthpiece) but the external spectrum is also briefly investigated.

2. Simplest generic model

It is often assumed that a generic model for a reed instrument can be built with only two equations: one for the nonlinear excitation mechanism and one for the resonator, regarded as a linear system (see [5]). In practice the main assumption lies in ignoring the reed dynamics.

Following many authors, we consider first the nonlinear equation to be a polynomial of the third order (as explained in references [5], [3] or [10] it is the minimum order for the modelling of oscillations of cylindrical instruments with direct bifurcation threshold from the non-oscillating regime to the (normal) oscillating regime):

$$u(t) = u_{00} + Ap(t) + Bp^2(t) + Cp^3(t), \quad (1)$$

where u is the volume velocity in the mouthpiece entrance, u_{00} the value of u for the non-oscillating regime, p is the

acoustic pressure in the mouthpiece, and A , B , and C are three coefficients. An important feature is that A , B , and C are time-independent, so that the relationship between $u(t)$ and $p(t)$ is valid at any value of the time t . The values of the coefficients depend on physical parameters included in the description of the excitation mechanism and will be presented in section 4.1.

In what follows, the coefficient C is assumed to be negative: for cylindrical instruments, this is in accordance with the physical model of excitation used in section 4 and a consequence is the existence of a direct bifurcation threshold from the non-oscillating regime (see [3]).

The resonator is classically described by its input impedance in the frequency domain (ω being the angular frequency):

$$P(\omega) = Z(\omega)U(\omega), \quad (2)$$

where $P(\omega)$ and $U(\omega)$ are the Fourier Transform of $p(t)$ and $u(t)$, respectively. This equation is valid for rather general situations, in particular when toneholes or flares are present, and can be modified in order to take into account the effects of the volume velocity created by the reed movement or of the pressure variations in the mouth.

For cylindrical instruments the resonance frequencies are assumed to be close to $c/4\ell$, $3c/4\ell$, $5c/4\ell$, \dots , where c is the speed of sound and ℓ is the length of the (one-sided open) cylinder. The corresponding values of the impedance maxima are decreasing when frequency increases. In general the visco-thermal effects at the walls are dominant at lower frequencies, so the maxima are proportional to $1/\sqrt{\omega}$ (see e.g. [9]). The even harmonics of the fundamental frequency equal to $c/4\ell$ are close to frequencies of impedance minima, $c/2\ell$, c/ℓ , $2c/\ell$, \dots . The corresponding values of the impedance are very small, except at higher frequencies where the input impedance reaches a constant value, equal to the characteristic impedance of the tube, because of the growing importance of both visco-thermal losses and radiation.

From the two equations (1) and (2) many regimes can be calculated, including overblown or period doubling regimes (see for a general discussion [4]). In the present paper the attention is focussed on the steady-state “normal”, periodic, fundamental regime with an operating (or playing) frequency f_1 close to the value $c/4\ell$. Several cases have been already studied in the past, two limit cases being very important for the sequel of the discussion:

- i). The square signal case (non dissipative tube): if $Z(\omega)$ is infinite for f_1 and its odd harmonics, and zero for its even harmonics, $u(t)$ is a constant, and $p(t)$ is a square signal with the following values:

$$p(t) = \pm p_{sq} = \pm \sqrt{-\frac{A}{C}} \quad (3)$$

(for a discussion of this case, including transient and stability behaviors, see reference [4]).

- ii). The small oscillations case, with a direct bifurcation behaviour, for which the fundamental frequency (close to

$c/4\ell$) is dominant, and the amplitude of the n th harmonics is proportional to the n th power of the amplitude of the fundamental frequency (according to the often called "Worman's law"). A condition is that the parameter A (in general an increasing function of the blowing pressure) is small, i.e. close to the oscillation-threshold value. This case has been studied by Worman [1] and recently Grand *et al.* [3] obtained an interesting formula which can be written as follows:

$$|P_1|^2 = \frac{Y_1 - A}{3C + \frac{4B^2}{Y_0 - A} + \frac{2B^2}{Y_2 - A}}, \quad (4)$$

where $P_n = P(\omega_n)$ and $Y_n = 1/Z(\omega_n)$ are the pressure amplitude and the input admittance of the n th harmonics $\omega_n = n\omega_1$, where $\omega_1 = 2\pi f_1$, and Y_0 is the admittance at zero frequency.

The starting point of the present paper is a remark coming from the study of the case of *small, square oscillations* (see reference [4]). In that case, using a Fourier Transform of equation (3), one obtains:

$$|P_1|^2 = \frac{4}{\pi^2} \left(-\frac{A}{C} \right).$$

It is remarkable that this result is not far from the approximated one ($|P_1|^2 \approx -A/3C$) found by putting $Y_1 = 0$ and $Y_0 = Y_2 = \infty$ in equation (4). Doing this, the ratio between the two values corresponding to the two limit cases is found to be:

$$\frac{P_1(\text{square signal})}{P_1(\text{small oscillations})} = \frac{2}{\pi} \sqrt{3} \simeq 1.102 \quad (5)$$

(corresponding to less than 1 dB). A similar comparison can be made for the ratio P_3/P_1 and leads to interesting (but rather curious) results as pointed out in reference [4] and developed hereafter using the variable truncation method.

3. Approximations for the internal pressure using the generic model

3.1. Simplifications of the basic equations

In the present section the following approximation is made: the spectrum of the internal pressure, $p(t)$, is firstly assumed to contain only odd harmonics. Nevertheless, the spectrum of the volume velocity can involve both even and odd harmonics: actually $u(t)$ is divided into two parts,

$$u(t) = u_s(t) + u_a(t), \quad (6)$$

where the indexes s and a correspond to the symmetrical part (even harmonics) and the anti-symmetrical part (odd harmonics), respectively. In other words, all the impedances are assumed to be zero for every even (and zero) frequencies, and the pressure is assumed to be anti-symmetrical. Equations (1) and (6) imply:

$$u_s = u_{00} + Bp^2, \quad (7)$$

$$u_a = A_p + Cp^3. \quad (8)$$

It turns out that equation (8) can be solved in a first step together with equation (2), then equation (7) is solved. Finally, if the impedance is small, but not zero, for the even (and zero) frequencies, the spectrum of the harmonics of the pressure can be deduced as a first perturbation of the system, by using equation (2) for these harmonics. This procedure leads to a great simplification of the calculation.

A rigorous general proof of the validity of this approximation is difficult: actually at higher frequencies the impedance of even harmonics is not far from that of the odd harmonics. Nevertheless, by using the intuitive idea that the higher order harmonics often have little importance in the oscillation production, the basis of this approximation can be understood. The results, compared with a complete numerical solution, presented below are a justification, at least for the case presently studied.

Moreover another criticism could be made: this approximation can be regarded as incompatible with the series expansion technique used in the limit of small oscillations, in the neighbourhood of the oscillation threshold, as done by Grand *et al.* [3], assuming that all the successive harmonics P_n are of the order of P_1^n , which means that e.g. P_2 is larger than P_3 . This is correct, but the coefficient of the second order term of the expansion is so small that it can be neglected in practice just above the threshold: for small oscillations the even harmonics are very small compared to P_1 , and we will check later that it is enough for justifying the hypothesis. Thus the two approximations are compatible, except in an extremely narrow range of the mouth pressure near the oscillation threshold.

The remaining task is to solve the following system:

$$\begin{aligned} u_a(t) &= Ap(t) + Cp^3(t), \\ U_n &= Y_n P_n, \end{aligned} \quad (9)$$

where

$$p(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ odd} \\ +\infty}} P_n e^{jn\omega_1 t}, \quad (10a)$$

$$u_a(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ odd} \\ +\infty}} U_n e^{jn\omega_1 t}. \quad (10b)$$

In the summation n is an odd integer (this precision will be omitted in the next section). Because the signals $p(t)$ and $u(t)$ are real, $P_{-n} = P_n^*$ and $U_{-n} = U_n^*$, where a star indicates complex conjugation. The unknowns are the P_n 's, for n positive, and the operating frequency f_1 . The phase of the first harmonic being without physical significance, P_1 is chosen to be real.

3.2. Solution of the simplified system by the HBT (or "constant truncation method")

The system (9) can be solved by the harmonic balance technique (HBT), which is basically a numerical method,

computing converging solutions of a truncated system while taking an increasing number of harmonics into account. In musical acoustics, Schumacher [11] used it for the calculation of the spectrum after the determination of the operating frequency, then Gilbert *et al.* [12] used it by including the operating frequency as an unknown. In order to get analytical approximations for small oscillations, a series expansion technique can be used, as in reference [3]. However oscillations of finite amplitude require a more general technique: the present paper is devoted to the discussion of an analytical approximation, which we called the “variable truncation method”, and compares it systematically to the numerical HBT. The present section 3.2 examines first the results of the HBT, corresponding for this case to the solving of the system (9) when equations (10a) and (10b) are truncated to a given (constant) order, N .

In order to calculate the nonlinear term of equation (8) with equations (10), the following formula is used:

$$p^3(t) = 6 \sum_{i \leq m \leq q} P_i P_m P_q w_{imq} e^{(i+m+q)j\omega_1 t}, \quad (11)$$

where i , m and q are odd integers, negative or positive, and

$$w_{imq} = \begin{cases} 1 & \text{if } i \neq m \text{ and } m \neq q, \\ 1/2 & \text{if } i = m \text{ or } m = q, \\ 1/6 & \text{if } i = m = q. \end{cases} \quad (12)$$

Then, by calculating the Fourier Transform of equation (8), and truncating each equation at the order N , the system (9) becomes a system of $(N + 1)/2$ nonlinear equations with $(N + 1)/2$ unknowns, P_n ($1 \leq n \leq N$) and f_1 , as follows (see proof in Appendix A1):

$$\frac{Y_n - A}{C} P_n = 6 \sum_i \sum_q P_i P_{n-q-i} P_q w_{i,n-q-i,q}, \quad (13)$$

where $1 \leq n \leq N$, $-N \leq i \leq N$, $q \leq n - 2i$, $q \leq N$, $q \geq (n - i)/2$.

The practical use of this formula is rather easy, by choosing successively n , i and q . For $N = 1$, a single equation is obtained:

$$P_1^2 = \frac{1}{3} \frac{Y_1 - A}{C}, \quad (14)$$

and is consistent with equation (4) when $Y_0 = Y_2 = \infty$. It gives both the amplitude, P_1 , of the first harmonic, and the frequency f_1 , because it implies that Y_1 is real. For $N = 3$, two equations are obtained:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 3P_1^2(1 + x_3 + 2|x_3|^2), \\ \alpha_3 x_3 = P_1^2(1 + 3x_3|x_3|^2 + 6x_3), \end{cases} \quad (15)$$

where the following general symbols for the n th harmonics are used:

$$\alpha_n = \frac{Y_n - A}{C}, \quad (16)$$

$$x_n = \frac{P_n}{P_1}. \quad (17)$$

Solving the two complex equations (15) give one complex quantity, x_3 , and two real ones, P_1 and f_1 . In appendix A the system for $N = 7$ is given.

The first important remark [13] is that x_3 and the operating frequency depend only on the ratios α_n/α_1 , i.e. do not depend on the coefficient C . The examination of system (9) leads to the conclusion that it is true for every x_n . It means that the operating frequency and the spectrum, i.e. the shape of the signal, does not depend on the shape of the nonlinear function: it depends only on the linear coefficient A (i.e. on the excitation level) and on the values of the input impedance! This fact will be discussed in section 5.2 in the light of a more general model. It can be emphasised that on the contrary the amplitude of the pressure obviously depends strongly on the coefficient C : P_1^2 is inversely proportional to C .

It is also interesting to solve analytically these systems of equations for the two limit above-defined cases (see section 2). The unknowns are the quantities f_1 , P_1^2 , x_1 , x_3 , etc. . . For small oscillations, α is small because the coefficient A is near the threshold value, Y_1 (see reference [3]). Thus $P_1^2 = \alpha_1/3$ (equation 14), giving both P_1 and f_1 . But α_3 is not small, thus x_3 is of the order of P_1^2 (P_3 is proportional to P_1^3 , see equations 15). Therefore, one obtains:

$$x_3 = \frac{P_1^2}{\alpha_3} = \frac{\alpha_1}{3\alpha_3} = \frac{Y_1 - A}{3(Y_3 - A)}, \quad (18a)$$

and similarly,

$$x_5 = \frac{\alpha_1^2}{3\alpha_3\alpha_5}, \quad (18b)$$

$$x_7 = \frac{\alpha_1^3}{3\alpha_3\alpha_7} \left(\frac{1}{\alpha_5} + \frac{1}{3\alpha_3} \right), \quad \text{etc.} \dots \quad (18c)$$

These results are in accordance with what Benade called “Worman’s theorem”, and allow a calculation based upon the series expansion method, as done by Grand *et al.* [3], who explained that a condition is that the impedance should decrease with respect to frequency. Nevertheless they are strictly limited to the small oscillations case. Kergomard [4] remarked that, for very weakly dissipative resonators (Y_n tends to zero for the odd harmonics), equation (18a) leads to $x_3 = 1/3$, and compared this value to the square signal value: $x_3 = -1/3$.

Actually, for a square signal the general result for the $(2\nu + 1)$ th component is as follows:

$$x_{2\nu+1} = \frac{(-1)^\nu}{2\nu + 1}, \quad (19)$$

because

$$P_{2\nu+1} = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^\nu}{2\nu + 1} p_{sq}$$

if $p(t) = \pm p_{sq}$ (see equation 3).

The equality of the amplitude of $x_3 = P_3/P_1$ in the two expressions might lead to the conclusion that equation

(18a) is valid also for oscillations of finite amplitude, but this conclusion of reference [4] is erroneous: the phase is also important, and we give below a correct formula for finite amplitudes. Furthermore the following question is interesting: what happens to x_3 in equation (18a) when A reaches Y_3 , i.e. when the assumption of small oscillations becomes no longer valid?

In order to answer this question we will first check that the HBT tends to the correct values for a square signal. For simplicity the resonator is assumed to have harmonically related frequencies, $f_1 = c/4\ell$ and its odd harmonics. If the resonator is lossless, all the admittances vanish for these frequencies, and all α 's are equal to $\alpha = -A/C$: because they are real all P_n 's are real too (and can be either positive or negative, i.e. the phase is either 0 or π). Consequently the system (13) can be reduced to a system of $(N-1)/2$ nonlinear equations. Table I gives the results for a truncation order $N = 1$ to 3, exhibiting the convergence. The results of more general numerical calculations confirm this convergence of the HBT for several cases (see Menigoz [14]) and indicates that the convergence is monotonous, for several values of the losses determining the values of the impedance extrema.

3.3. The "variable truncation method": recurrent approximations for the HBT results

From the above discussion it can be concluded that the HBT leads to a complicated system of nonlinear equations. Nevertheless by examining the particular case shown in Table I, it can be remarked that the results for the order $n(P_1^2/\alpha, x_3, x_5 \dots)$ are not bad for the square signal even for a truncation at the minimum order, i.e. when the order of truncation N is equal to the number n of the considered equation. It turns out that it is interesting to find useful approximated results by searching for simplifications of the HBT systems in the following way: a *truncation of variable order* is considered, i.e. a recurrent approximation is obtained by calculating P_1^2/α at the first order (therefore the operating frequency is determined as the frequency for which the input admittance Y_1 is real), x_3 at the third order, etc. . . This is the main simplification considered in what follows, and its significance is that *a harmonic of a given order has a negligible influence on the lower order ones* (another simplification of secondary importance will be further explained).

How to justify this simplification? We will show that it is rather satisfactory for the square-signal limit case, and "exact" for small oscillations. Because it can be noticed that the intermediate values between small oscillations and square signals correspond to a monotonous variation of the different quantities, the simplification is assumed to be valid also for intermediate values, and this is confirmed by the comparison with numerical results (see the following section 4). The procedure will be explained first for the case $N = 3$ (equations 15).

For the first unknown, P_1^2 , the truncation is made at the order 1 (equation 14):

$$P_1^2 = \frac{\alpha_1}{3} = \frac{Y_1 - A}{C}. \quad (20)$$

Table I. Convergence of the HBT to the true result for a square signal when the order of truncation, N , increases. The last line indicates the results obtained by the variable truncation method (equations (14), (21) and (A6) respectively). Abreviations: S.s.: Square signal (exact result); V.t.: Variable truncation method (section 3.3).

N	P_1^2/α_1	$x_3 = P_3/P_1$	$x_5 = P_5/P_1$
1	1/3	-	-
3	0.38	-0.278	-
5	0.39	-0.305	+0.16
S.s.	$4/\pi^2 = 0.405$	-1/3	1/5
V.t.	1/3	-1/3	0.182

This expression is excellent for small oscillations, where is small, and good for square signals (see equation 5): it is the classical "describing function method" for nonlinear systems, a sinusoidal solution being assumed. Then, for the second unknown, x_3 , the second equation (15) is used with the previous value (equation 20) of P_1^2 . The supplementary approximation consists in ignoring the term x_3^3 . The following formula is deduced:

$$x_3 = \frac{P_1^2}{\alpha_3 - 6P_1^2} = \frac{1}{3} \frac{\alpha_1}{\alpha_3 - 2\alpha_1}, \quad (21a)$$

or

$$x_3 = -\frac{1}{3} \frac{A - Y_1}{A - Y_1 + Y_3 - Y_1}. \quad (21b)$$

This formula can be analysed in comparison with the formulae corresponding to the two limit cases. The difference from the small oscillations formula (18a) lies in the existence of the term $(-2\alpha_1)$ and appears to be essential. Equation (21) is compatible with equation (18a), when $\alpha_3 \gg \alpha_1$, and for a square signal (when $\alpha_3 = \alpha_1$) the "true" value, $-1/3$, is obtained! Actually this excellent result is probably due to a mutual compensation of the different approximations. In section 4 this formula is shown to be very satisfactory also for the intermediate cases. We notice that no singularity occurs when $\alpha_3 = 0$, i.e. $A = Y_3$, explaining the apparent paradox observed by Kergomard [4]. It is interesting to note that the term $(-2\alpha_1)$ corresponds to the term $6CP_{-1}P_1P_3$ in the nonlinear equation (13), the third harmonic being determined mainly by the value of the first one, in a much wider range of the parameters than Worman [1] expected.

To extend this procedure to the higher order harmonics the following system is derived in appendix A (equation A5):

$$\left(\alpha_n - 6 \sum_{1 \leq m \leq n-2} |P_m|^2 \right) P_n = 6 \sum_i \sum_q P_i P_{n-q-i} P_q w_{i,n-q-i,q}, \quad (22)$$

where

$$\begin{aligned} -n + 4 &\leq i \leq n - 2, \\ q &\leq n - 2i, \quad q < n, \quad q \geq (n - i)/2. \end{aligned}$$

From system (22), it is possible to calculate successively the different harmonics without solving a system of nonlinear

equations, after the calculation of P_1 (equation 14) and x_3 (equation 21a), (see Appendix A1 for the formulae giving x_5 to x_{11}).

For the particular case of a square signal, all the α_n 's are equal, and the following values are obtained, the relative error being indicated in parenthesis: $x_5 = 0.182$ (10%, or 0.8 dB); $x_7 = -0.125$ (15% or 1.2 dB); $x_9 = 0.094$ (18% or 1.4 dB); $x_{11} = -0.075$ (21% or 1.7 dB). The relative error slowly increases with n but the reasoning seems to be justified if in addition the above approximations are proved to be compatible with the result obtained by series expansion for the case of small oscillations. We recall that in that case α_1 is of order 2 with respect to P_1 , $x_{2\nu+1}$ is of order 2ν , and α_n ($n < 1$) of order 0. Actually the results for x_3 , x_5 and x_7 can be approximated at the lowest order by the equations (18) and it is possible to prove for every n that the terms of the series expansion at the lowest order are always included in the terms of approximation (22). As a conclusion this approximation is a rigorous extension of the small oscillations one and matches well the square signal one. We can presume that it is rather good between the two cases, at least if the impedance is a decreasing function with respect to frequency: we notice that this condition is also necessary for the numerical HBT. A comparison between the analytical, approximated results and Numerical results obtained by HBT will be presented in section 4, in the framework of an explicit physical model.

Finally an important feature can be emphasised concerning the odd harmonics spectrum. If we look at the denominators of the equations (18) and compare them to these of equations (21), (A6), (A7), we notice that near the threshold the series expansion method exhibits a factor $(Y_n - A) = (Y_n - Y_1 + C\alpha_1)$ for the n th harmonics while the variable truncation method exhibits a factor $(\alpha_n - 2\alpha_1) \propto (Y_n - Y_1 - C\alpha_1)$. This is a very important difference because this last factor does not vanish when the mouth pressure increases, and this fact explains the smooth variations of the spectrum above the threshold.

3.4. Deduction of the even harmonics

Approximations for the even harmonics can be found from equation (7). Using a method similar to the one used for odd harmonics (i.e. equation 11 and Fourier Transform), the following general result is obtained:

$$Y_{2\nu}P_{2\nu} = u_{00}\delta_{0\nu} + 2B \sum_{i \leq \nu} P_i P_{2\nu-i} \theta_{i,2\nu-1}, \quad (23)$$

where $\nu \geq 0$, i is an odd integer (positive or negative), $\delta_{0\nu}$ is the Kronecker symbol and $\theta_{ij} = 1 - \delta_{ij}/2$.

If equation (23) is truncated at the N th order, it becomes:

$$Y_{2\nu}P_{2\nu} = u_{00}\delta_{0\nu} + 2B \sum_{2\nu-N \leq i \leq \nu} P_i P_{2\nu-i} \theta_{i,2\nu-1}. \quad (24)$$

As examples the following results are obtained for $\nu = 0$ and $N = 1$, $\nu = 1$ and $N = 3$, $\nu = 2$ and $N = 5$ successively:

$$Y_0P_0 = u_{00} + 2BP_1^2, \quad (25)$$

$$Y_2P_2 = B(P_1^2 + 2P_1P_3), \quad (26)$$

$$Y_4P_4 = 2BP_1(P_3 + P_5). \quad (27)$$

The amplitudes of the even harmonics of the pressure are small compared to those of the odd harmonics and therefore are absent in the right-hand members of these equations, but because their admittances are very large, they are present in the left-hand members: the amplitudes of the even harmonics of the volume velocity are at most of the same order of magnitude as those of the odd harmonics. For small oscillation a comparison can be made with the results of Grand *et al.* [3] obtained by using a series expansion technique but without the hypothesis of small impedances for the zero and even harmonics. Equation (25) is identical to equation (19) of this paper provided that $Y_0 \gg A$, in accordance with our hypothesis. Similarly, if equation (26) is truncated to $N = 1$, it is identical to equation (18) of the previous paper provided that $Y_2 \gg A$. Finally equation (27) truncated at $N = 3$ is also identical to equation (26) of paper [3] for large values of Y_2 and Y_4 .

Except for small oscillations, the choice of the order of truncation of equations (25) to (27) is not easy. For a square signal (equation 3), the volume velocity is a constant:

$$u(t) = u_{00} - BA/C,$$

thus all harmonics vanish. Examining the equation (23) it means that all quantities $Y_{2\nu}P_{2\nu}$ are zero (for $\nu \neq 0$), therefore no truncation of the infinite series is possible. This means that when the impedances are gradually changed to the values of a lossless resonator (in order for the signal to reach the square shape) it is necessary to take into account an increasing number of odd harmonics. This fact is in accordance with the fact that the even harmonics become smaller than every odd harmonic. The difficulty comes from any truncation method, not from the ignorance of the symmetrical part of the pressure.

The results (25) to (27) are consequently expected to be bad when the shape of the signal becomes close to the square one. Nevertheless in practice the shape is often round enough in order for the infinite series to converge rapidly, and the comparison with results of the HBT confirms that for small dissipation the results are not excellent but they are not very bad (see the section 4.2.3).

In section 4, the approximated results are compared with those of numerical HBT. For the 2nd harmonic the final result for the pressure spectrum is obtained from equations (14), and (26):

$$x_2 = BZ_2\sqrt{\alpha_1/3}(1 + 2x_3), \quad (28)$$

where $Z_2 = 1/Y_2$.

4. Discussion of the results for a physical model of a reed exciting a cylindrical resonator

The generic model presented in section 2 and used in section 3 is not related to physical quantities depending on both the excitation mechanism and the resonator. In the first subsection 4.1 the physical model, with few dimensionless parameters, we will use in the whole section is presented. Then

in subsection 4.2 the validity of the above-obtained approximate results is discussed by comparing them to numerical results of the HBT when the resonator is assumed to have harmonically related frequencies and simultaneously important features are deduced for the case of the nearly realistic model. In subsection 4.3 the effect of inharmonicity due to dispersion is discussed.

4.1. Physical model for the internal and external pressure

The physical model used is the classical one used by Wilson and Beavers [15], restricted to a reed without mass and damping, and written with dimensionless quantities by Kergomard [4]. The nonlinear equation is written as follows:

$$u = \zeta(1 - \gamma + p)\sqrt{\gamma - p}, \quad (29)$$

where u and p are the dimensionless acoustic volume velocity and pressure obtained from the physical quantities, \tilde{u} and \tilde{p} respectively, from the following definitions:

$$p = \tilde{p}/p_M, \quad u = \tilde{u}Z_c/p_M.$$

In these equations p_M is the beating reed static pressure, $Z_c = \rho c/S$ is the characteristic impedance of the tube (ρ is the air density, c the sound speed, S the cross section area of the cylindrical resonator). The model (29) involves two dimensionless parameters, γ and ζ , (noted r and 2β , respectively, in reference [15]). They are defined as follows:

$$\gamma = p_m/p_M, \quad (30)$$

where p_m is the pressure in the player's mouth, assumed to be static, and

$$\zeta = Z_c w H \sqrt{\frac{2}{\rho p_M}}, \quad (31)$$

where w and H are the width and the height, respectively, of the reed channel, i.e. the slit between reed and mouthpiece. γ depends only on the instrumentalist, whereas ζ depends on the instrument and mouthpiece construction but can be partly adjusted by the instrumentalist (see reference 4). γ plays the main rôle for the determination of the oscillation threshold, whereas ζ is important for the attack-transient duration and the possibility of getting period-doubling bifurcations. Obviously ζ is difficult to determine directly from experiments because of the complicated shape and properties of both the reed and the mouthpiece.

The use of dimensionless parameters is useful for the generality of the analysis. The parameter p_M is by itself essential and it can be also adjusted by the player: as noticed by Benade and Kouzoupis [2], "the embouchure tension when increased moves the reed closer to the mouthpiece facing so that a lower blowing pressure is required to produce beating by the reed", i.e. reduces the threshold of beating oscillating pressure (roughly proportional to $p_M/2$, see [4]). We can add that simultaneously the oscillation threshold is also decreased, as it will be proved hereafter.

Equation (29) is valid for a non-beating reed: for the square signal case the beating threshold is $\gamma = 1/2$ (see reference 4), but in general it is not known (as explained hereafter, using numerical HBT we found it to be a little smaller when dissipation is taken into account). Actually the whole following discussion is limited to the case of non-beating reed, corresponding to small and medium amplitudes. Equation (29) is not in the form of the generic equation (1), so a series expansion needs first to be carried out in order to use the results of section 3 (in section 5.2 the possibility of an extension of the approximation method to the model (29) will be examined). The series expansion of equation (29) leads to the following values for the coefficients of equation (1):

$$\begin{aligned} u_{00} &= \zeta(1 - \gamma)\sqrt{\gamma}, & A &= \zeta \frac{3\gamma - 1}{2\sqrt{\gamma}}, \\ B &= -\zeta \frac{3\gamma - 1}{8\sqrt{\gamma^3}}, & C &= -\zeta \frac{\gamma + 1}{16\sqrt{\gamma^5}}. \end{aligned} \quad (32)$$

When the mouth pressure parameter γ varies these coefficients vary slightly except for the coefficient A ; because of the factor $(2\gamma - 1)$ A increases from 0 at the lossless oscillation threshold ($\gamma = 1/3$) to the value $\zeta 2^{-3/2}$ when γ reaches $1/2$, the value of the lossless beating threshold, the interval $[1/3, 1/2]$ being the maximum range of variation considered in the present paper. Otherwise the coefficient C is always negative, as stated in the previous section.

It remains to choose a model for the resonator. The Appendix A2 gives all (classical) formulae used hereafter. They are based upon several assumptions:

i) very high frequencies being discarded from this study, and the simplified resonator being assumed to be purely cylindrical (without toneholes or bell, but we notice that the method could be applied without difficulties for a resonator with a more complicated shape), it is reasonable to neglect radiation losses in comparison with visco-thermal losses (see e.g. for such a comparison Fletcher [13]). Thus a single new dimensionless parameter, η , is introduced, as follows:

$$\eta = \sqrt{\frac{\ell_v \ell}{r^2}}, \quad (33)$$

where $\ell_v = \mu/\rho c$, μ is the viscosity coefficient, r the radius of the tube.

ii) the radiation end correction is assumed to be introduced in the length of the resonator, as well as the correction due to the volume velocity produced by the reed displacement (see for a discussion based upon experiments reference [16]) or the effect of the mouth, if the pressure within it is not constant.

Concerning the external pressure, the formulae are based upon the assumption that the tube radiates as a monopole source with a volume velocity calculated at the open end of the tube, where the pressure is assumed to be zero, by using the standard formulae of the transmission line theory. This approximation for the calculation of radiation is classical, and valid for small Hemholtz number kr .

Summarising the characteristics of the system and the model used, the considered resonator is purely cylindrical,

and the reed assumed to act as a pure spring: only 3 independent parameters γ , η , ζ are taken into account, describing a simplified clarinet without toneholes and bell, the frequencies of interest being assumed far from the reed resonance. For this system, the parameters such as reed damping, reed mass, reed area (for the volume velocity produced by the reed), and Helmholtz number, can be regarded to be of secondary importance.

4.2. Results for a resonator with harmonically related frequencies

4.2.1. Oscillation threshold and amplitude of the first harmonic

This section will present the results of section 3 concerning the internal pressure with respect to the influence of three parameters. The simple case where no inharmonicity exists is first considered: it means that no dispersion is taken into account, thus all resonance frequencies are harmonically related. Therefore the operating frequency f_1 is equal to $c/4\ell$, the admittance is real for every odd harmonic, and all the P_n 's are real.

Because the tube is rather narrow, the input impedance is inversely proportional to the parameter η (see equation B7a), so that the solution of equation (9) for the odd harmonics depends on two dimensionless parameters only, γ and η/ζ , the oscillation threshold γ_{th} being obtained by $A = Y_1$ (see equation 14), thus:

$$\begin{aligned} \gamma_{th} &= \frac{1}{9} \left(\psi \frac{\eta}{\zeta} + \sqrt{3 + \psi^2 \frac{\eta^2}{\zeta^2}} \right)^2 \\ &\simeq \frac{1}{3} + \frac{2}{3^{3/2}} \psi \frac{\eta}{\zeta} \simeq \frac{1}{3} + 0.5 \frac{\eta}{\zeta}, \end{aligned} \quad (34)$$

where ψ is a constant related to the Prandtl number (see equation B4).

The last expression is convenient because η/ζ is a small parameter (a realistic order of magnitude is 0.1). This formula shows a small possible action of the player on the value of γ_{th} through the adjustment of ζ but we recall that γ is dimensionless and therefore the threshold pressure itself is proportional to the beating reed static pressure p_M . Recalling the definition of γ (equation 30) and the fact that p_M is proportional to the reed stiffness and the reed channel height, equation (34) implies that the threshold blowing pressure is an increasing function of the stiffness and of the channel height. These theoretical behaviors are in accordance with the experimental results obtained by Backus (see [17], Figure 8).

It is now possible to adapt the different results of section 3 to the physical model. For doing this it is convenient to exhibit the difference $(\gamma - \gamma_{th})$ between the mouth pressure and its threshold value. In order to calculate P_1 from equation (20), starting from the fact that Y_1 is the threshold value of A and replacing A and γ by Y_1 and γ_{th} , respectively, in equation (32), a simple calculation leads to:

$$1 - \frac{Y_1}{A} = \frac{\gamma - \gamma_{th}}{3\gamma - 1} \frac{1 + 3\sqrt{\gamma\gamma_{th}}}{\sqrt{\gamma_{th}}(\sqrt{\gamma_{th}} + \sqrt{\gamma})}. \quad (35)$$

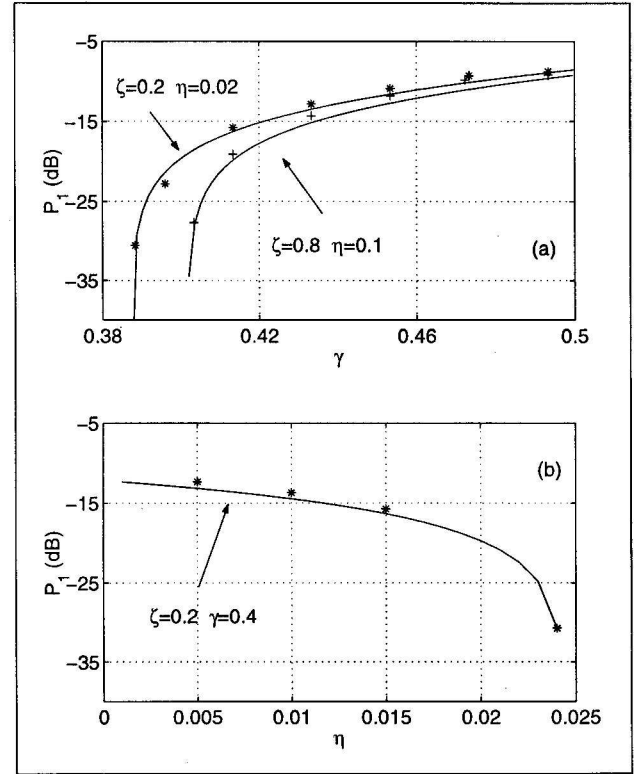


Figure 1. Amplitude P_1 of the first harmonic (internal spectrum, resonator with harmonic resonance frequencies). * and +: harmonic balance technique (HBT) results; —: equation (20), (a) $\zeta = 0.2$, $\eta = 0.02$ and $\zeta = 0.8$, $\eta = 0.1$, (b) $\zeta = 0.2$, $\gamma = 0.4$.

Then by using a series expansion of γ_{th} around the value of the threshold when no losses are taken into account (1/3), to the first order of $(\gamma_{th} - 1/3)$, we obtain:

$$\frac{1 + 3\sqrt{\gamma\gamma_{th}}}{\sqrt{\gamma_{th}}(\sqrt{\gamma_{th}} + \sqrt{\gamma})} = 3 \left(1 - \psi \frac{\eta}{\zeta} \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{1 + \sqrt{3}\gamma} \right). \quad (36)$$

From equation (20), we get for the first harmonic:

$$P_1^2 = (\gamma - \gamma_{th}) \frac{8\gamma^2}{\gamma + 1} \left(1 - \psi \frac{\eta}{\zeta} \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{1 + \sqrt{3}\gamma} \right). \quad (37)$$

This formula involves only two independent parameters, γ and η/ζ . Because the term in bracket is not far from unity, the main rôle of the second parameter lies in the value of the threshold. Figure 1 shows a comparison between equations (20) and results of the HBT computation for different values of the parameters γ , η and ζ (the equations (20) and (37) give very similar results). This computation takes into account a large number of harmonics, between 10 and 60, depending on the rapidity of the convergence. When η and ζ are fixed and γ varies, the curves correspond to what the instrumentalist can “feel” when he increases the mouth pressure. The case with the values $\eta = 0.02$ and $\zeta = 0.2$ (Figure 1a) is rather realistic for the lowest note of the clarinet, but the case $\eta = 0.1$ and $\zeta = 0.8$ (Figure 1b) is chosen in order to test a case with relatively strong even harmonics. When γ and ζ are fixed and η varies (Figure 1c) the curve corresponds roughly to what the player can feel when he keeps the mouth pressure

constant and increases the length of the tube by closing successive toneholes, if the effect of opening a hole is assumed to be equivalent to cutting off the tube near its position. It can be noticed that for a clarinet there is a frequency ratio of 3 between the lowest and highest tones of the first register, thus η is multiplied by a factor $3^{1/2}$. The central part of the curve corresponds to a rather realistic case; when η becomes high (e.g. if the length increases strongly) the threshold increases, therefore for a fixed value of the mouth pressure γ the amplitude P_1 decreases to the oscillation limit (see equation 37). This explains why for a given radius and a given range of mouth pressure there is a maximum length for a tube in order to obtain oscillations. Finally because the relevant independent parameter is η/ζ , it is also possible to change it and therefore the value of the threshold by modifying ζ , i.e. the position of the lips, but the interpretation is less easy.

Near the oscillation threshold the numerical results are also identical to the approximated ones, obtained by both equations (20) and (37), confirming the results of Grand *et al.* [3]. Far from the threshold the numerical results are slightly higher than the curves but the difference is less than 1 dB, as predicted by equation (5). Nevertheless it is here important to specify that for the numerical HBT a non-beating condition is imposed: the volume velocity cannot vanish when the pressure value is less than a certain negative value, thus the model is not rigorously that of equation (1). As an example, for $\gamma \geq 0.46$, the reed is found to start to beat at certain times of the period for the rather realistic case, and the comparison with approximate formulae becomes less rigorous.

We conclude finally that the approximation (37) for the first harmonic is excellent.

4.2.2. Spectrum: odd harmonics

For the third harmonic, by using equations (21b), (36) and (37) and ignoring the term in $(\psi\eta/\zeta)^2$ we get:

$$x_3 = \frac{1}{3} \frac{\gamma - \gamma_{th}}{\gamma - \gamma_{th} + \frac{Y_1}{\zeta} (\sqrt{3} - 1) \frac{2}{3} \sqrt{\gamma}}. \quad (38)$$

Using the value for the admittance (equation B7a) and neglecting the terms in $(\gamma - \gamma_{th})\eta/\zeta$, this equation becomes:

$$x_3 = \frac{1}{3} \frac{\gamma - \gamma_{th}}{\gamma - \gamma_{th} + 0.366\eta/\zeta}. \quad (39)$$

The shape of this expression is interesting: it suggests a simple way for fitting exact numerical results for the present model or for other models, or even for experimental results, with only two coefficients: one (here $-1/3$) corresponds to the result at *high amplitude* (large value of the difference $\gamma - \gamma_{th}$) or *without dissipation* ($\eta = 0$), and the other one (here 0.366) leads to the result near the oscillation threshold. Actually, a starting point of our work was the observation of a similar behaviour between experiment and theory (see references [6] and [7]). Notice that x_3 depends on two independent parameters only, i.e. γ and η/ζ . These remarks give many prospects for carrying out experiments.

Figure 2 shows a comparison between the equations (21b) and (39) with numerical results. For small ζ the results are

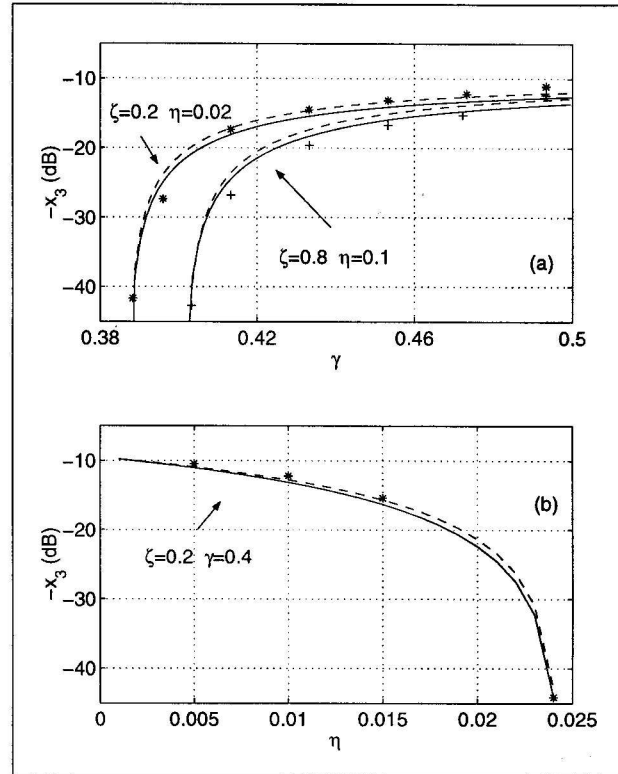


Figure 2. Ratio $x_3 = P_3/P_1$ (internal spectrum, resonator with harmonic resonance frequencies). * and +: harmonic balance technique (HBT) results — equation (21), ---: equation (39). (a) $\zeta = 0.2$, $\eta = 0.02$ and $\zeta = 0.8$, $\eta = 0.1$, (b) $\zeta = 0.2$, $\gamma = 0.4$.

excellent, the case of varying η being especially significant for the test of the method presented in this paper: the approximated results are very satisfactory both near the threshold and near the lossless case, as expected, with a smooth transition between them. For high ζ (and γ), the approximated results (for both equations 21b and 39) are less good: this is probably due to the rather high value of the even harmonics, as discussed below. The phase of the third harmonic, equal to π , is always well predicted and therefore it is not shown in the figure (for higher order odd harmonics, the phase is alternately 0 or π when n increases).

For the 5th and 7th harmonics, calculations similar to that of equation (38) are also possible but would be cumbersome. As an example for the 5th harmonic a result with the following shape is obtained:

$$x_5 = 0.182 \left[(\gamma - \gamma_{th})^2 (\gamma - \gamma_{th} + \beta_1 \eta/\zeta) \cdot \left[(\gamma - \gamma_{th})^3 + \beta_2 (\gamma - \gamma_{th})^2 \eta/\zeta + \beta_3 (\gamma - \gamma_{th}) \eta^2/\zeta^2 + \beta_4 \eta^3/\zeta^3 \right]^{-1} \right], \quad (40)$$

the coefficients β_i having a complicated expression. This result can be simplified by using a further approximation:

$$x_5 \simeq 0.182 \frac{(\gamma - \gamma_{th})^2}{(\gamma - \gamma_{th})^2 + \beta_5 (\gamma - \gamma_{th}) \eta/\zeta + \beta_6 \eta^2/\zeta^2}. \quad (41)$$

The new coefficients can be chosen in order to fit the results for both small and large values of the quantity $(\gamma - \gamma_{th})$.

The second expression is easier to use and probably enough for a fit of numerical or experimental results. This matter is difficult: the exact result of the complete HBT computation would be more complicated than equation (40) itself, i.e. with an infinite polynomial at both the numerator and denominator with the same order but with a factor $(\gamma - \gamma_{th})^2$ at the numerator. Nevertheless the form of the expression of equation (41) can be easily generalised to the higher order odd harmonics, in order to fit numerical or experimental results.

Comparison between numerical and approximated results has been made for the 5th and 7th harmonics, the variable truncation method being very satisfactory. Figures similar to Figures 1 and 2 are not reproduced in the present paper. In reference [6], experimental results confirm the shape of these theoretical results. However far from the threshold the amplitudes of the 3rd and 5th harmonics are smaller than those given by the present model, e.g. 0.2 instead of 0.3 for the 3rd one. The explanations can be sought in various directions: the effect of inharmonicity (see following subsection), the bad modelling of a beating reed (with curved mouthpiece), or other effects of the reed. It is beyond the scope of the present paper to analyse in detail these discrepancies.

Another representation of the results is shown in Figure 3. Following Benade [9], it displays the value of the harmonics P_n ($n > 1$) as a function of P_1 . This representation is interesting because the player can control his tone by hearing the amplitude of the sound, probably more than by adjusting directly the mouth pressure, and because it exhibits an interesting behaviour: as an example for the 3rd harmonic, by using the approximate expression (37) for P_1 , simplified by ignoring the term in η/ζ , the following result is obtained from equation (39):

$$P_3 = -\frac{1}{3} \frac{P_1^3}{P_1^2 + 0.55\eta/\zeta}. \quad (42)$$

This expression exhibits two simple asymptotic behaviours for P_3 with respect to P_1 , corresponding to two straight lines in a double logarithmic scale. The first straight line (for low amplitude) was found by Worman [1], the new feature here being the second line, parallel for the higher harmonics, because x_n tends to a constant value when the mouth pressure increases. In references [7, 8] this behaviour is reported to be found experimentally also: an important feature is that the second slope is extended for large values of the mouth pressure, thus of P_1 , when the reed is beating. Again quantitative comparison and analysis remain to do. It must be emphasised that the first results given by Benade for a real clarinet [9] exhibit a second feel but this is not a straight line as in references [7] and [8], obtained with an artificial mouth and a purely cylindrical resonator.

All the previous results concern the internal spectrum. For the odd harmonics of external spectrum, results can be directly derived by multiplying the result by the harmonic number (see equation B8a).

4.2.3. Spectrum: even harmonics

Figure 4 shows some results for the second harmonic, obtained by the numerical HBT for the same values of the

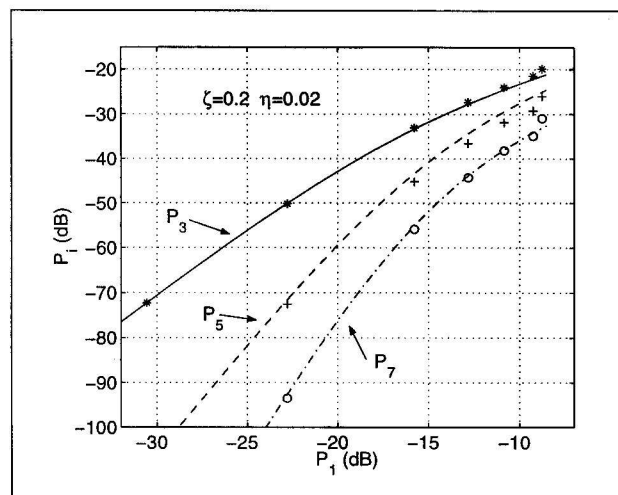


Figure 3. Evolution of the odd spectrum with respect to the amplitude of the first harmonic ($\zeta = 0.2$, $\eta = 0.02$, dispersion being ignored). For each harmonic P_3 , P_5 , P_7 , the lines correspond to the approximated formulae (21), (A6), (A7) respectively, and points correspond to numerical HBT results.

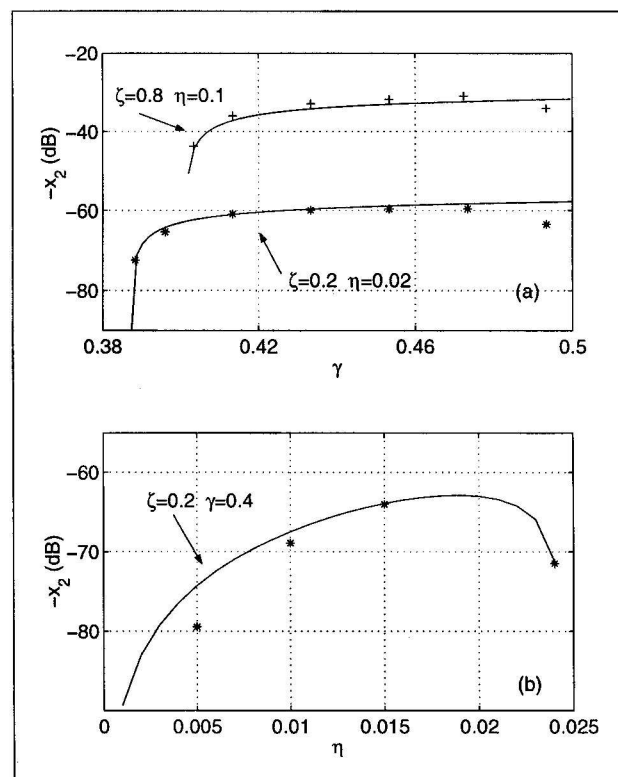


Figure 4. Ratio $x_2 = P_2/P_1$ (internal spectrum, resonator with harmonic resonance frequencies). * and +: harmonic balance technique (HBT) results —: equation (28). (a) $\zeta = 0.2$, $\eta = 0.02$ and $\zeta = 0.8$, $\eta = 0.1$, (b) $\zeta = 0.2$, $\gamma = 0.4$.

three parameters as for the Figures 1 and 2, and compared to the approximated results of equation (28). The approximated results are excellent near the oscillation threshold, and generally rather good, except for large values of ζ (0.8) or γ (>0.45): actually we recall that the hypothesis for the validity

of the approximated calculation is that x_2 is much smaller than unity. For very small values of η the discrepancy comes partially from the slow convergence of the HBT. Similar comments can be made for the fourth harmonic; nevertheless the discrepancies are amplified, all the causes of discrepancy becoming cumulative.

It is interesting to analyse the results by using the approximation given by equation (37) and in addition neglecting for simplicity the term in η/ζ , which is smaller than 5% in the cases studied. Limiting the discussion to the second harmonic, the following formula is obtained:

$$x_2 = -\frac{1}{2}\zeta \frac{3\gamma + 1}{\sqrt{\gamma(\gamma + 1)}} \psi \eta \sqrt{\gamma - \gamma_{th}} (1 + 2x_3), \quad (43)$$

or, because the factor involving γ varies only slightly,

$$x_2 \simeq -1.9\zeta \eta \sqrt{\gamma - \gamma_{th}} (1 + 2x_3). \quad (44)$$

As expected near the threshold these formulae show that the calculation method is compatible with the Wormans' law for small oscillations: P_1 is proportional to $\sqrt{\gamma - \gamma_{th}}$, P_2 to $(\gamma - \gamma_{th})$ and P_3 to $(\gamma - \gamma_{th})^{3/2}$, ... While the odd harmonics depend on two parameters only, γ and η/ζ , the even harmonics depend on three independent parameters, γ , η and ζ .

We have indicated some causes of discrepancies between numerical and approximated results, but in section 3.4 it has been pointed out that for a small dissipation parameter η , the signal is close to a square one and the validity of the truncation disappears. To discuss this difficulty it is now useful to consider the external spectrum. From equation (B8b), the following result is obtained:

$$|x_{D2}| = |x_2| \frac{2^{3/2}}{\sqrt{\pi\psi\eta}} = 2.3\zeta \sqrt{\gamma - \gamma_{th}} (1 + 2x_3). \quad (45)$$

This result could be surprising because the amplitude of the second harmonic does not vanish when no losses are taken into account ($\eta = 0$), but it is necessary to remember that the factor is very uncertain. Figure 5 compares the result of the HBT with the formula (45) and confirms the previous analysis, when the losses are very small or when the excitation level γ increases strongly.

However the formula (45) is satisfactory and useful in practical cases: it can be noticed that the external even harmonics increase with the parameter ζ , which can to a certain extent be modified by the instrumentalist. Actually ζ is acting on the threshold value γ_{th} , thus the dependence is rather complicated. It can be proved that $|x_{D2}|$ increases with ζ , for given γ and η , and that $|x_{D3}|$ increases too. Except in a very narrow region near the threshold, the second harmonic is smaller than the third one. In conclusion, when increasing ζ by lower lip pressure, the player increases both the odd and the even harmonics. This allows us partly to interpret the possibility known by the players of changing the tone colour from a normal, bright tone (called "timbré" in French) to another one (called "détimbré" in French), with less harmonics, without a change in mouth pressure.

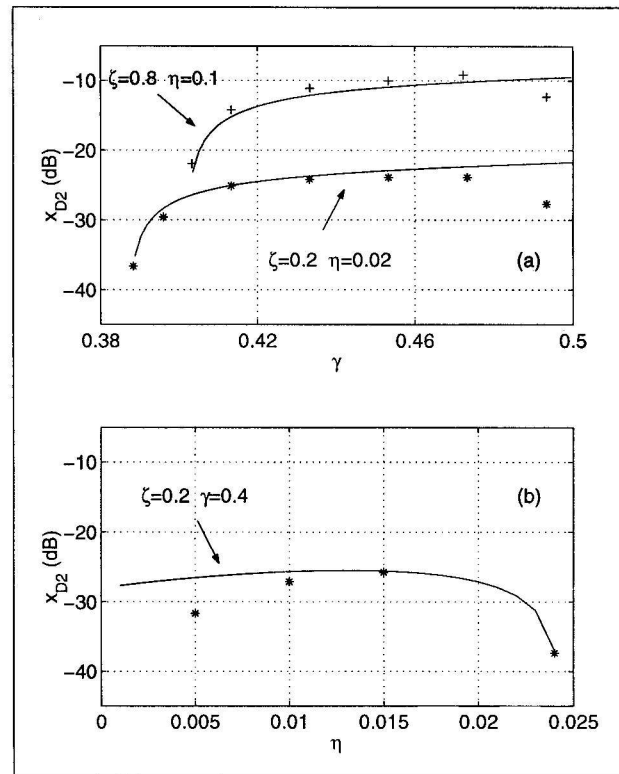


Figure 5. Ratio $|x_{D2}| = P_2/P_1$ (external spectrum, resonator with harmonic resonance frequencies). * and +: harmonic balance technique (HBT) results; —: equation (45). (a) $\zeta = 0.2$, $\eta = 0.02$ and $\zeta = 0.8$, $\eta = 0.1$, (b) $\zeta = 0.2$, $\gamma = 0.4$.

4.3. Resonator with non harmonically related resonance frequencies, effects of dispersion

The method can also be tested for a case where a small inharmonicity exists. An interesting case is that of a purely cylindrical resonator when dispersion is taken into account. Obviously its practical interest is limited because for instance toneholes produce a certain inharmonicity which can compensate for that due to dispersion, and moreover even for a cylindrical resonator the reed can produce inharmonicity. However this ideal case has often been discussed and some new features can be established, as presented hereafter, and enlighten the limit of the simple, rather standard model used in subsection 4.2.

Using the variable truncation, the operating frequency is the frequency of the first impedance peak, i.e.:

$$f_1 = \frac{c}{4\ell} \left(1 - \frac{2}{\pi} \psi \eta\right). \quad (46)$$

This frequency is slightly lower than $c/4\ell$ because of the variation of sound velocity with frequency. A consequence is that the minimum of the modulus of the admittance Y_1 is also slightly smaller than that obtained without dispersion and consequently the oscillation threshold is lowered somewhat. When γ is growing the oscillation frequency increases slightly from the first resonance frequency, because of the influence of the shift of the higher resonance frequencies, which become inharmonic. Thus the variation of the oper-

ating frequency is due to inharmonicity, which is obviously more interesting for the present purpose than the shift of the first resonance frequency.

Numerical computation (by HBT) of the exact operating frequency leads to the results shown in Figure 6. The variation with the excitation level is actually very small. In section 5.1 a short analysis of this variation is presented, going beyond the basic method.

Figure 7 shows the results for the amplitudes of the harmonics 1, 3 and 2 and confirms the interest of the method. For P_1 the effect of dispersion is only the shift of the first resonance frequency, thus of the oscillation threshold: it can be seen that the effect of dispersion is noticeable only near the threshold, because of its (very small) shift.

For the odd harmonics the effect of inharmonicity was already discussed in reference [3]. Near the threshold a quantitative estimation is easy: considering equation (21b), the denominator is proportional to $(Y_3 - Y_1)$, and is affected by dispersion. While Y_1 is almost unchanged (and remains real), Y_3 is rather strongly modified and becomes complex. Similarly for the higher order odd harmonics near the threshold the amplitude is inversely proportional to $|Y_n - Y_1|$.

Using equation (B11) and comparing with the formula obtained when inharmonicity is ignored (from equation B7a), the factor $\sqrt{(1+n)}$ is found to be the effect of dispersion near the threshold: it corresponds to -6 dB for the third harmonic, -7.8 dB for the 5th, -9 dB for the 7th, etc. . . This can be seen approximately on Figure 7 (taking into account the small variation of the threshold, which explains why the effect of inharmonicity on the odd harmonics seems to increase when γ increases from the threshold: it is actually not an effect of inharmonicity but of frequency shift). In conclusion the reasoning of reference [4] assuming that the inharmonicity effect is related to the modulus of the admittance instead of $|Y_n - Y_1|$ is not correct: it underestimates the effect for the first odd harmonics. Nevertheless, the explanation concerning the *independence of this effect with respect to the radius of the tube remains correct.*

Otherwise the approximation $|Y_n - Y_1| \simeq |Y_n - Y_1|$, interesting for its simplicity, is not bad, especially for higher order harmonics, and this explains “the surprising fact that the spectrum amplitudes are almost insensitive to the phases of the Z_n ’s”, as remarked by Benade and Kouzoupis [2].

The difference between the two formulae is 2.1 dB for the 3rd harmonic and it decreases when n increases: it is less than 1 dB above the 9th harmonic.

Finally the phase of the odd harmonics can be easily derived at threshold from the calculation of $(Y_n - Y_1)$. The simple following result is obtained:

$$\Im\{x_n\}/\Re\{x_n\} = \sqrt{n}$$

instead of 0 without dispersion. This shows an important effect of dispersion, but it decreases when the excitation level increases.

Figure 8 shows the results for the harmonics 3, 5 and 7 using the same representation as Figure 3: it exhibits the influence of dispersion on the asymptotic slopes discussed in section 4.2.

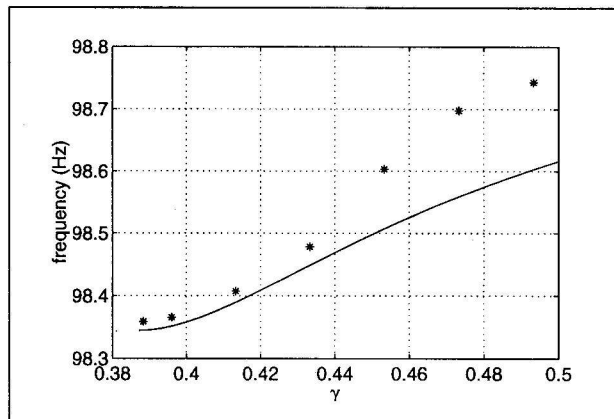


Figure 6. Playing frequency shift due to inharmonicity (basis 100 Hz for the first resonance frequency of the harmonic resonator). —: HBT calculation, *: equation (50).

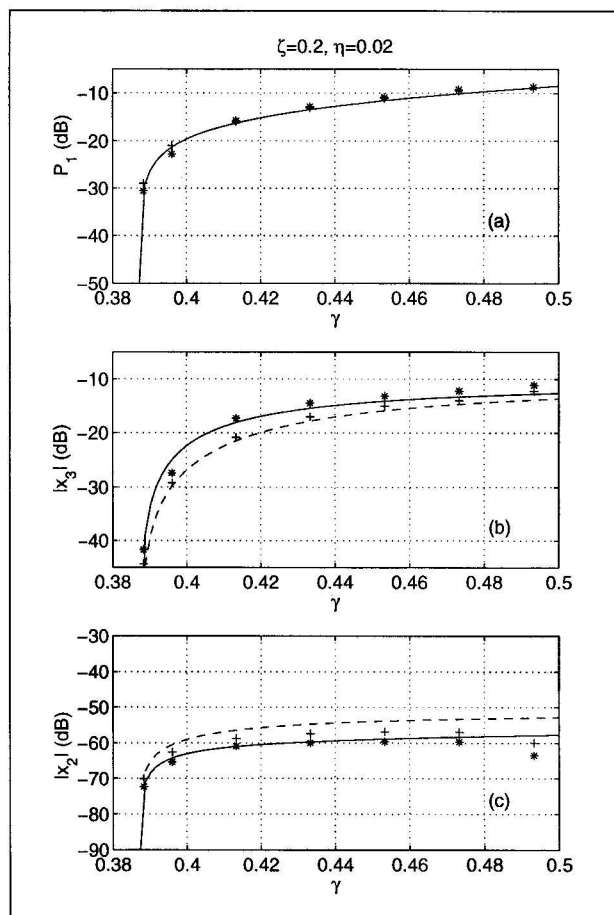


Figure 7. Effect of dispersion on the spectrum ($\zeta = 0.2, \eta = 0.02$). (a) Amplitude P_1 [dB] of the first harmonic, (b) $|x_3|$ [dB], (c) $|x_2|$ [dB], +: harmonic balance technique (HBT) results *: harmonic balance technique (HBT) results, dispersion being ignored —: approximated formulae: equations 14 (a), 21b (b), 28 (c) - - -: approximated formulae, dispersion being ignored.

Considering now the even harmonics, their amplitude is approximately proportional to Z_n . This corresponds to an effect of inharmonicity of $+0.7$ dB for second one, $+3$ dB for

the 4th, etc., according to the equations (B12) and (B13). This behaviour does not appear clearly from Figure 7c, but it can be proved that this is again due to the threshold shift.

Summarising the discussion, dispersion causes a strong decrease of the odd harmonics of the internal pressure, especially near the threshold. An increase of the even harmonics is important too, but the numerical results show that it is more important far from the threshold. Consequently dispersion causes a large reduction of the difference between odd and even harmonics, independently of the value of the radius.

All the previous discussion is concerned with the internal pressure. For the external pressure, using equation (B5) a similar analysis can be made with the following conclusions:

- i). the transfer function between internal and external pressures is not affected by inharmonicity for the odd harmonics. Consequently all the previous conclusions hold for these harmonics in the external spectrum.
- ii). Contrary to what was the case for the odd harmonics the even harmonics of the external pressure are not affected by inharmonicity, at least not far from the threshold.
- iii). As a consequence of i) and ii) the reduction of the difference between odd and even harmonics by inharmonicity is lower for the external spectrum than for the internal one.

Nevertheless this difference remains important.

These features can be observed on Figure 9, presenting the amplitude of the 25 first harmonics calculated by HBT. Obviously the validity of the calculation is rather limited when the fundamental frequency is not low, but this figure is interesting for a rather long tube, e.g. for a clarinet assumed without bell and with closed toneholes. We notice that the experimental results obtained by Benade and Kouzoupis [2] for the lowest note of the clarinet, in conditions summarised below, are similar to those corresponding to the high excitation level (taking dispersion into account). They claim that at higher frequencies the spectrum is expected to obey a frequency-dependence in f^{-3} , corresponding to a decrease of 18 dB per octave. The slope found here is not far from this value, between the 11th and the 19th harmonics.

For the lowest note, E_3 , the resonator is quasi-cylindrical, the main exception being the existence of a bell terminating the air column, meaning the existence of a cutoff frequency. The measurements of these authors have been made rather far from the instrument, and are influenced by the effect of the room: therefore the measurements are made at several locations in the room and averaged values are calculated. A comparison with our calculation corresponding to the free field is possible because averaged values are assumed to be not far from the free field values we have calculated, i.e. from the radiated power. The authors limited their investigation to one rather high value of the excitation level, probably not far from the beating threshold. We have ignored the effect of the radiation power on the input impedance, but far from the threshold it is not critical.

It seems to be evident that many further studies are necessary, both theoretical and experimental in order to go further in this analysis. First of all it is necessary to study the effective inharmonicity of real instruments, because it can be proved that both the toneholes and the bell reduce the in-

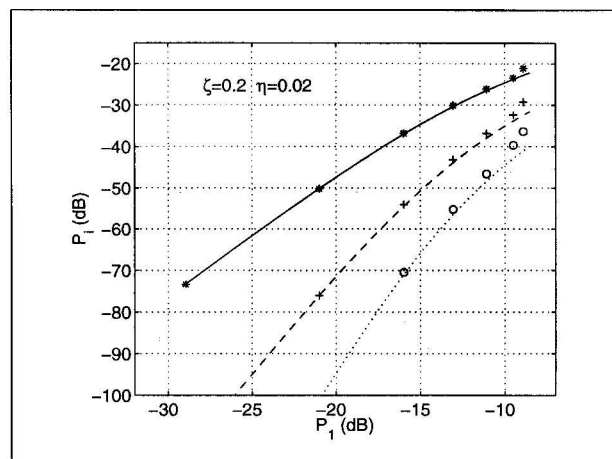


Figure 8. Evolution of the odd spectrum with respect to the amplitude of the first harmonic ($\zeta = 0.2$, $\eta = 0.02$, see Figure 3), dispersion being taken into account.

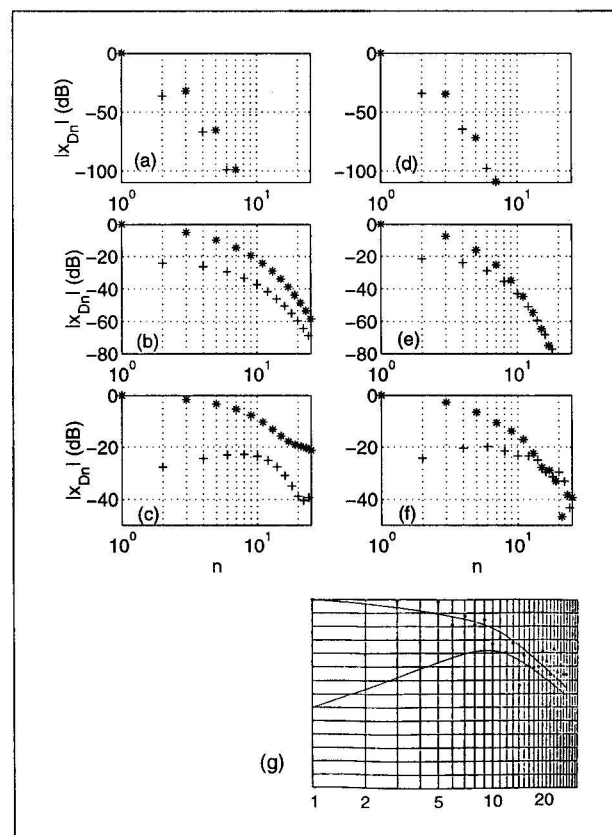


Figure 9. External spectrum at three pressure levels (HBT results) (logarithmic scale for the harmonic order n) $\zeta = 0.2$, $\eta = 0.02$, $\gamma = 0.3883$ (high, a and d), $\gamma = 0.4333$ (medium, b and e), $\gamma = 0.4933$ (low, c and f). (a to c): without dispersion; (d to f) with dispersion. *: odd harmonics, +: even harmonics. (g) Experimental results from reference [2] (note E3 of a clarinet). \cdot : experimental results, —: semi-empirical curves.

terval between two consecutive resonances, compensating partly for the effect of dispersion. In that sense the part of the present study ignoring inharmonicity could be also interesting in practice. We conclude this section by showing in

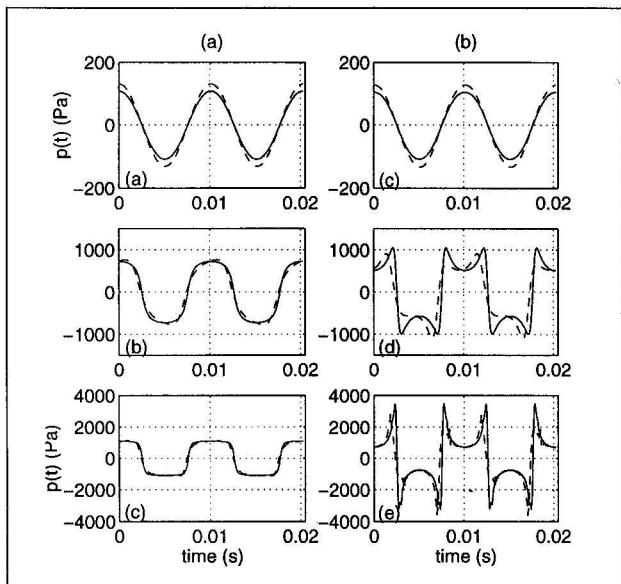


Figure 10. Shape of the signal (two periods). (a): internal spectrum corresponding to external spectrum: see (b). (b): external spectrum corresponding to figures 9a and 9d (high), 9b and 9e (medium), 9c and 9f (low). —: dispersion being ignored, - - -: dispersion being taken into account.

Figure 10 the shape of the signals corresponding to the spectra shown in Figure 9. For the internal spectrum the evolution from a sine signal to a square one can be observed when the excitation level increases, as well as the evolution to a sine signal to the derivative of a square signal for the external spectrum. The main effect of inharmonicity appears to be the suppression of the symmetry of the signal by the increase of the even harmonics.

5. Two extended applications of the method

The present section is devoted to possible extensions of the variable truncation method, when equations (1) or (2) are modified or when they do not fulfil all above-mentioned conditions. The first part 5.1 considers what happens when the input impedance curve is not monotonically decreasing, or when the third impedance peak has an influence on the operating frequency, and the second part 5.2 examines the use of a nonlinear curve different from a polynomial. In both parts the physical relevance of these modifications is explicated.

5.1. Particular case of change in the shape of the resonator

The formulae obtained in section 3 are exact for the small oscillations case and satisfactory for a small loss parameter, at every level of excitation. For small oscillations Grand *et al.* [3] have shown that the series expansion method is valid if the admittance increases with frequency, e.g. $Y_3 > Y_1$. For large oscillations there is no general idea of what happens if the admittance has arbitrary values, corresponding to other shapes of resonators than the cylindrical one, except

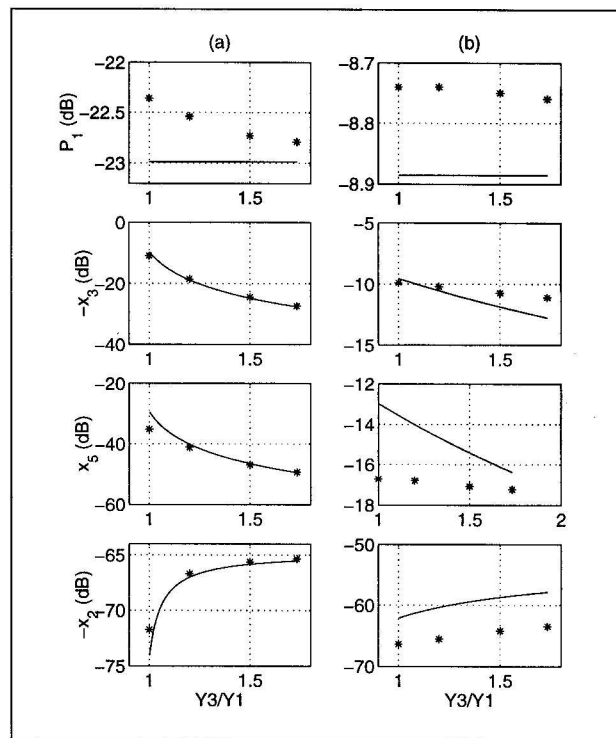


Figure 11. Effect of the change of the admittance Y_3 (no dispersion) on the spectrum. $\zeta = 0.2$, $\eta = 0.02$. (a): $\gamma = 0.3933$ (near the oscillation threshold), (b): $\gamma = 0.4933$ (near the beating threshold). —: approximated formulae, *: HBT results.

for shapes allowing a Helmholtz motion (see the companion paper [7]).

In the present section an attempt at treatment of a particular case is presented: the admittance Y_3 is artificially decreased from its normal value for a cylinder to that of Y_1 , assuming it remains real (no inharmonicity is considered). All the other admittances Y_n are those given in section 4.2. Results for the internal spectrum are shown in Figure 11. First the effect of this change appears to be very important near the threshold for all harmonics except the first one, but small far from it. This fact was already noticed in the context of the effect of inharmonicity (section 4.3). The general approximated results of section 3 seem to remain very satisfactory, especially near the oscillation threshold. An interesting explanation of the large influence of Y_3 on x_5 , x_7 , etc. . . near the threshold is the following: it can be shown that using the series expansion method the odd harmonic x_n is proportional to a factor which is an addition of terms of the same order with respect to P_1 (as an example, for x_7 , the terms x_3^2 and x_5 are of the same order, i.e. the fourth order with respect to P_1), and all terms of this addition have the same sign. Therefore increasing $|x_3|$ implies an increasing of $|x_5|$, etc. . . in a cumulative way.

It is rather surprising to discover that the variable truncation method remains good even when Y_3 reaches Y_1 . The reason is that x_3 remains rather small in comparison with unity. In that case Grand *et al.* [3] suggested that a better accuracy would be obtained if P_3 and P_1 are assumed to be of the same order. We will prove that it is true, but unfortunately there is a calculation error in the paper of these authors (in

their equation 66). If their idea is kept, the system (15) needs to be solved, and if $Y_3 = Y_1$ the Table I gives the following results (for a truncation at the order $N = 3$):

$$P_1^2 = 0.38\alpha_1 \quad \text{and} \quad x_3 = -0.278. \quad (47)$$

As a consequence P_1 is 0.56 dB higher than with the formulae (20) and this is exactly the result shown by Figure 11 near the threshold. For x_3 , the result of Table I corresponds to -11 dB but it was also correctly predicted by formulae (21), because x_3 remains much smaller than unity.

It can be concluded, following the general idea of these authors, that if Y_3 becomes of the same order of magnitude as Y_1 , one can simply use a modification of the variable truncation method: the truncation order needs to be modified, but only for the first harmonics. This seems to be logical and can be easily generalised: if the impedance curve is decreasing above a harmonic of a certain order, n_{lim} , the order of truncation can be kept to the value $N = n$ for the n th equation if $n > n_{lim}$. For $n < n_{lim}$, it is necessary to keep a *constant* truncation calculation, at the order $N = n_{lim}$. This means that all harmonics having an impedance of the same order of magnitude have a reciprocal influence on their amplitudes but if the impedance decreases above a certain frequency the harmonics above this frequency do not influence the lower harmonics. This simple idea allows a great generalisation of our method. It remains to validate it for other cases and to study if it is valid also for resonators with resonances corresponding to both odd and even harmonics. In general one can expect that the calculations become tedious, but we will hereafter give a simple example of such a treatment for the case studied in section 4.3.

In section 4.3 the operating frequency has been shown to be invariant when the excitation level increases, at least when the variable truncation method is used. Considering the next approximation, i.e. the same order of magnitude for the 1st and 3rd harmonics, it is possible to easily deduce from the complete system (15) the variation of the frequency by using the "reactive power" rule (see [18]). Truncated at the 3rd order, this is written as follows:

$$\Im\{Y_1\} + 3|x_3|^2\Im\{Y_3\} = 0 \quad (48)$$

(this equation can be also derived directly from system 15). Then, by searching for the frequency as follows:

$$\frac{\omega\ell}{c} = \frac{\pi}{2}(1 + \varepsilon),$$

the admittance can be written approximately, using equation (B9):

$$Y_n \simeq j(n\varepsilon\pi/2 + \psi\eta\sqrt{n} + \psi\eta\sqrt{n}). \quad (49)$$

Using equations (48) and (49), the following value is found for ε :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -\frac{2}{\pi}\psi\eta\frac{1 + 3^{3/2}|x_3|^2}{1 + 9|x_3|^2} \\ &\simeq -\frac{2}{\pi}\psi\eta[1 + (3^{3/2} - 9)|x_3|^2]. \end{aligned} \quad (50)$$

At the minimum order of approximation, it is possible to use for x_3 the value obtained for a fixed operating frequency (equation 21b). Figure 6 compares the result (50) with the result obtained by the HBT. It is satisfactory and it can be concluded that an extension of the variable truncation method when the 1st and 3rd harmonics are of the same order of magnitude is possible, even when the two resonance frequencies are not exactly harmonically related.

5.2. Analysis for the full nonlinear model

In sections 4 and 5.1 the model used for the nonlinearity is simplified in order to reduce it to a cubic curve with coefficients given by equations (32). In the present section it will be shown that the general method of section 3 can be extended to the full nonlinear equation (29) and a new system replacing equations (7) and (8) is derived. In section 3 the coefficient C has been proved to influence the amplitude of oscillations, but not to influence the spectrum. It would be possible to examine a more general equation than a cubic one, adding 4th and 5th orders to the polynomial (1) but it would be rather complicated. The full nonlinear model is a more interesting generalisation because it is obtained by a physical analysis and in addition it is simple.

Equation (29) can be written as follows:

$$u^2 = u_{00}^2 + A_2p + B_2p^2 + C_2p^3, \quad (51)$$

where

$$\begin{aligned} A_2 &= \zeta^2(1 - \gamma)(3\gamma - 1), \\ B_2 &= \zeta^2(3\gamma - 2), \quad C_2 = -\zeta^2. \end{aligned} \quad (52)$$

Equation (51) cannot be separated into symmetrical and anti-symmetrical parts as has been done for equation (1). Nevertheless it can be simplified also if again the even components of the internal pressure are assumed to be very small in comparison with the odd ones. Using the decomposition of the volume velocity (equation 6), equation (51) can be split into:

$$2u_a u_s = A_2p + C_2p^3, \quad (53a)$$

$$u_a^2 + u_s^2 = u_{00}^2 + B_2p^2. \quad (53b)$$

A further approximation can be made by considering that the symmetrical part u_s of $u(t)$ is much larger than the anti-symmetrical part u_a , for reasons reciprocal to these of the assumption that the pressure is anti-symmetrical. Now the equation (53a) can be written as follows:

$$u_a = \frac{1}{2u_{00}} \frac{A_2p + C_2p^2}{\sqrt{1 + \frac{B_2}{u_{00}^2}p^2}}. \quad (54)$$

A supplementary approximation, justified below, is obtained from a series expansion to the second order with respect to p^2 :

$$u_a = A'p + C'p^3, \quad (55)$$

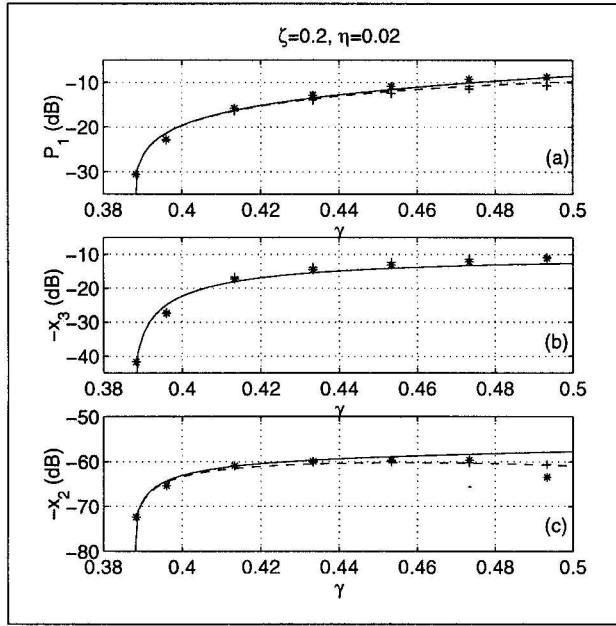


Figure 12. Comparison between the cubic model and the full nonlinear model (no dispersion, $\zeta = 0.2$, $\eta = 0.02$). (a): P_1 , (b): $-x_3$, (c): $-x_3^2$. +: HBT results (cubic model), *: HBT results (full nonlinear model). —: approximated results (cubic model), - - - : approximated results (full nonlinear model).

where

$$A' = \frac{A_2}{2u_{00}} = A \quad \text{and} \quad C' = \frac{C_2}{2u_{00}} - \frac{A_2 B_2}{4u_{00}^3}.$$

It can be surprising to use again a series expansion because the interest of the full nonlinear model is precisely to avoid it! Of course, both formulae (55) and (9) need to converge to the same results for small oscillations. For large oscillations, equation (54) is excellent for weakly dissipative resonators, and equation (55) is much closer to it and therefore is much better than equation (9).

It can be shown that:

$$C' = C \frac{8\gamma^2}{1-\gamma^2} \left[1 + \frac{(3\gamma-1)(3\gamma-2)}{2\gamma(1-\gamma)} \right]. \quad (56)$$

The coefficients C and C' are identical for $\gamma = 1/3$ (at the oscillation threshold for square signals, as expected) but the ratio C'/C increases to $4/3$ when γ increases to reach $1/2$.

Similarly equation (53b) can be approximated by:

$$u_s = u_{00}^2 + B' p^2, \quad (57)$$

where $B' = B_2/2u_{00}$.

The ratio B'/B is 1 for $\gamma = 1/3$ and increases to $4/5$ when γ increases to reach $1/2$. Finally equations (55) and (57) can be expected to be more accurate for the full nonlinear model than equations (8) and (7) respectively. Nevertheless the coefficient A being unchanged, no change in the values of the odd harmonics ($n \geq 3$) is expected when the full model is considered.

Figure 12 confirms these conclusions for all harmonics, from the comparison between these approximated formulae

and the numerical results obtained for both the cubic and the full nonlinear models. Concerning the first harmonic, inversely proportional to C and C' , the maximum difference is obtained for $\gamma = 1/2$, the new value being smaller than the initial one by -1.25 dB.

We conclude that the very small dependence of the odd spectrum on the shape of the nonlinearity is confirmed. For the amplitude of the first harmonic and the even spectrum the two models differ only slightly. It is possible that this is different for a beating reed (we notice that using the full nonlinear model no beating has been found using the HBT, contrary to what happens using the cubic curve, see section 4.2.1). More generally, if the shape of the nonlinear function is a polynomial, the independence of the spectrum with respect to the nonlinearity shape disappears when more than two nonlinear terms are important: for the example of equation (8), it disappears if a 5th order term is added.

6. Discussion and conclusion

The aim of the present paper was the study of the spectrum of a purely cylindrical resonator excited by a reed between its oscillation threshold and the amplitude where it just avoids beating the mouthpiece, and in particular we wanted to examine the transition between the two already known limit-cases, the simplest illustration of this transition being the equations (21) and (39).

We will first summarise the different approximations made in the general approach presented in section 3: the ignoring of the even harmonics in the first step, then the truncation of the nonlinear system of equations (9) to an order depending on the order of a considered equation, finally the ignoring of the cubic term (see equation A5). The variable truncation method has been found as an intermediate between the series expansion one (for small oscillations) and the numerical HBT (or constant truncation method). A great interest of a cylindrical resonator lies in the theoretical knowledge of two limit cases, the small oscillation one and also the square signal approximation. This improves the understanding of the respective rôles of the excitation parameter γ and the loss parameter η , as shown e.g. by equation (39), which is the simplest shape describing the effect of these essential parameters. Moreover this allows the building of fit formulae for experimental results.

Taking into account an effect of inharmonicity or of a change in the height of a third impedance peak, the application of the method has been proved to be useful also for cases for which the equivalent of the square signal (i.e. the lossless solution) is not known. Inharmonicity due to dispersion has been proved to play an essential rôle in the spectrum for a purely cylindrical resonator. Nevertheless, for a clarinet-like instrument, it can be compensated or modified, especially at rather high frequencies, by other causes (reed, toneholes). The generalisation of the present method to modifications of the input impedance function (effect of radiation, toneholes, flow induced by the reed displacement, etc. . .) is straightfor-

ward, because the 3rd harmonic remains lower than the first one.

For a cylindrical resonator the even harmonics are small in comparison with the odd ones in the internal spectrum, and this allows us to use systematically the first approximation, which provides a great simplification of the analytical calculation. However our approximations are not very good in comparison with the HBT for the even harmonics at high mouth pressures: this is due to the difficulty of the truncation when many harmonics are present, more than to the approximation of small even harmonics in the internal spectrum.

The odd harmonics have been shown to depend on the ratio of the parameters η and ζ , which means that the player has a minor possibility to act on them, except through the mouth pressure itself. The amplitudes of the even harmonics seem to be more dependent on the "embouchure" of the player. The parameter ζ is difficult to determine experimentally from the different physical quantities it involves. Hopefully by measurement of some properties of the spectrum it could be possible to get an estimation of it?

Concerning the choice of the physical model the conclusion is rather surprising: it is far from critical, especially for the spectrum, almost independent of the shape of the non-linear function. We have used a classical model based upon the equations of fluid mechanics with a certain number of assumptions (see reference [19]) but another, more empirical, model like that of Backus [17] would probably lead also to satisfactory results by comparison to experiment for the spectrum. Even if dynamical systems are known for their sensitivity to initial conditions (and parameters), at least the spectrum seems to have a robust behaviour.

This paper treats only a theoretical approach to the problem. Near the oscillation threshold many phenomena seem to be well understood, but far from it the model of a beating reed must be refined by using experiment. The companion paper [7] gives some experimental results in this way. We notice that far from the oscillation threshold the precise values of the impedance, i.e. the precise geometrical shape of the resonator, seem to be less important than near the threshold.

Restricting our study to a non-beating reed, we have limited the exploration to a small range of the mouth pressure, γ varying between roughly 0.38 and 0.49. Nevertheless this corresponds to a very wide variety of amplitudes and spectra, and perhaps it is one of the difficulties of the player in order to control the sound. Another parameter which can be interpreted as the control of the length of the tube by the change in fingering is the dissipation parameter η : it has been proved that in order to get a constant amplitude the player needs to reduce the mouth pressure when the length decreases, i.e. when the note becomes higher. This is in accordance with experimental results, obtained e.g. by Fuks and Sundberg [20] for the lower register of a real clarinet.

This paper has regarded the effects of reed damping and mass as of secondary importance. It is possible to generalise the method when a third basic equation is considered, with an increase of complexity: the comparison between experimental and theoretical results as initiated by Wilson and Beavers [15] could be extended (we notice that it has been seldom

studied). This can be an interesting future way of investigation, as well as the change in the shape of the resonator. The experimental results for a trumpet or an oboe obtained by Benade [9] in the same manner as Figure 3 can also encourage to try to extend the present method to instruments with all harmonics, but for instruments having inverse bifurcations from the non-oscillatory regime the method can be more intricate.

Appendix

A1. Derivation of the variable truncation formulae

Consider the equations (9) to (12). The Fourier Transform of equation (9) leads to the following equation, for every odd value of n :

$$Y_n P_n = A P_n + 6C \sum_i \sum_m \sum_q P_i P_m P_q w_{i,m,q}, \quad (\text{A1})$$

with $i \leq m \leq q$ and $i + m + q = n$.

All the indices are odd integers. n is positive, the equation for $(-n)$ providing no supplementary information because $P_{-i}^* = P_i$ for every i . The indices i, m, q are negative or positive. If the Fourier series (10) are truncated to the order N , necessarily

$$-N \leq i \quad \text{and} \quad q \leq N. \quad (\text{A2})$$

If i is chosen arbitrarily between $-N$ and $+N$, and m deduced from the value of q and i by $m = n - q - i$, the range of the integer q is found by using the following inequalities:

$$\begin{aligned} i \leq n - i - q &\Leftrightarrow q \leq n - 2i, \\ q \geq n - i - q &\Leftrightarrow q \geq (n - i)/2, \quad q \leq N. \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

The inequality $q \geq -N$ is automatically satisfied because $q \geq i$. Finally the range of the integer i can be reduced by eliminating $i = N$ because in that case $i = m = q = N$ and $n = 3N$, so that $n > N$. The equation (13) is therefore proven. As an example, the following system is obtained for $N = 7$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 P_1 &= 3(P_1^2 P_1^* + P_1^{*2} P_3 + P_3^2 P_5^* + 2P_3 P_3^* P_1 \\ &\quad + P_3^{*2} P_7 + 2P_5 P_5^* P_1 + 2P_7 P_7^* P_1 \\ &\quad + 2P_1^* P_3^* P_5 + 2P_3 P_5 P_7^* + 2P_1^* P_5^* P_7), \\ \alpha_3 P_3 &= P_1^3 + 3(P_3^2 P_3^* + 2P_1 P_1^* P_3 + P_1^* P_5 \\ &\quad + P_5^2 P_7^* + 2P_5 P_5^2 P_3 + 2P_7 P_7^* P_3 \\ &\quad + 2P_1^* P_3^* P_5 + 2P_1 P_3^* P_7 + 2P_1 P_5^* P_7), \\ \alpha_5 P_5 &= 3(P_5^2 P_5^* + P_1^2 P_3 + 2P_1 P_1^* P_5 \\ &\quad + P_1^{*2} P_7 + P_3^2 P_1^* + 2P_3 P_3^* P_5 \\ &\quad + 2P_7 P_7^* P_5 + 2P_1 P_3^* P_7 + 2P_3 P_5^* P_7), \\ \alpha_7 P_7 &= 3(P_7^2 P_7^* + P_1^2 P_5 + 2P_1 P_1^* P_7 + P_3^2 P_1 \\ &\quad + 2P_3 P_3^* P_7 + P_5^2 P_3^* \\ &\quad + 2P_5 P_5^* P_7 + 2P_1^* P_5 P_5). \end{aligned}$$

Now we consider a new system of equations (13) by using a variable truncation at $N = n$, viz.:

$$\alpha_n P_n = 6 \sum_i \sum_q P_i P_{n-q-1} P_q w_{i,n-q-i,q}, \quad (\text{A4})$$

where $-n \leq i \leq n$, $q \leq n - 2i$, $q \leq n$, $q \geq (n - i)/2$.

For $n \geq 3$, we first rearrange equation (A4) by identifying the terms involving P_n (or P_{-n}) in the right-hand member. They correspond to either $q = n$ or $i = -n$ (if $q < n$ and $i > -n$ neither terms P_n or P_{-n} appear).

i) For $q = n$, the inequalities of the systems (A4) lead to: $n1 \leq i \leq 0$, and the corresponding terms of the double series in (A4) are as follows:

$$6 \sum_{-n \leq i \leq 0} P_i^2 P_n w_{i,-i,q} = 6 \sum_{1 \leq i \leq n-2} |P_i|^2 P_n + 3|P_n|^2 P_n.$$

ii) For $i = -n$ (and $q < n$), (A4) implies $q \geq n$. Thus this case is impossible.

Finally we rewrite the equation (A4) as follows:

$$\left(\alpha_n - 6 \sum_{1 \leq m \leq n-2} |P_m|^2 \right) P_n = 3|P_n|^2 P_n + 6 \sum_i \sum_q P_i P_{n-q-1} P_q w_{i,n-q-i,q}, \quad (\text{A5})$$

where $-n+4 \leq i \leq n-2$, $q \leq n-2i$, $q < n$, $q \geq (n-i)/2$ (actually the case $i = -n + 2$ does not exist).

If for simplicity we suppress the cubic term in P_n , we obtain a succession of recursive equations, beginning from the equations (14) and (21), then:

$$\begin{aligned} [\alpha_5 - 6(P_1^2 + |P_3|^2)] P_5 &= 3P_1 P_3^2 + 3P_1^2 P_3, \\ [\alpha_7 - 6(P_1^2 + |P_3|^2 + |P_5|^2)] P_7 &= \\ 3[P_{-3} P_5^2 + 2P_1 P_3 P_5 + P_1 P_3^2 + P_1^2 P_5], \\ \text{etc.} \end{aligned}$$

As results, the following equations are obtained:

$$x_5 = \frac{\alpha_1 (x_3 + x_3^2)}{\alpha_5 - 2\alpha_1 (1 + |x_3|^2)}, \quad (\text{A6})$$

$$x_7 = \frac{\alpha_1 (x_3^* x_5^2 + 2x_3 x_5 + x_3^2 + x_5)}{\alpha_7 - 2\alpha_1 (1 + |x_3|^2) + |x_5|^2}, \quad (\text{A7})$$

$$x_9 = [\alpha_1 (x_3^3/3 + x_5^* x_7^2 + x_5^2 + x_7 + 2(x_3^* x_5 x_7 + x_3 x_7 + x_3 x_5))] \quad (\text{A8})$$

$$\begin{aligned} &\cdot [\alpha_9 - 2\alpha_1 (1 + |x_3|^2 + |x_5|^2 + |x_7|^2)]^{-1} \\ x_{11} &= [\alpha_1 (x_7^* x_9^2 + x_3^* x_7^2 + x_5^2 + x_3^2 x_5 + x_9 + 2(x_5^* x_7 x_9 + x_3^* x_5 x_9 + x_5 x_7 + x_3 x_9 + x_3 x_7))] \quad (\text{A9}) \\ &\cdot [\alpha_{11} - 2\alpha_1 (1 + |x_3|^2 + |x_5|^2 + |x_7|^2 + |x_9|^2)]^{-1} \end{aligned}$$

etc. . .

A2. Simple formulae for the input impedance and radiation of cylindrical tubes

If radiation losses are ignored at the output of the tube and the radiation end correction is included in the tube length, for simplicity, the following equation for the dimensionless impedance can be used:

$$Z(\omega) = j \tan k\ell, \quad (\text{A10})$$

where $k = \omega/c + (1 - j)\sqrt{\omega \ell_{vt}/2c}/r$, r being the radius of the tube, and ℓ_{vt} the characteristic length of the viscothermal losses: $\ell_{vt} = (1 + (\gamma_m - 1)\sqrt{P_r} \mu/\rho c)$, where μ is the viscosity coefficient, P_r the Prandtl number and γ_m the ratio of the specific heats.

The argument $k\ell$ in equation (A10) can be written with respect to the dimensionless loss-parameter η as follows:

$$k\ell = \frac{\omega \ell}{c} + (1 - j)\psi \eta \sqrt{\frac{2\omega \ell}{\pi c}}, \quad (\text{A11})$$

where, for common conditions in air ,

$$\psi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\frac{\ell_{vt}}{\ell_v}} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \left(1 + \frac{\gamma_m - 1}{\sqrt{P_r}} \right) \simeq 1.3. \quad (\text{A12})$$

For the external spectrum, i.e. for the transfer function between the internal pressure, p , (in the mouthpiece) and the external pressure, p_D , at the distance D from the open end of the tube (see e.g. reference [4]), the following formula is used:

$$\frac{p_D}{p} = \frac{\omega S}{4\pi c D} \frac{e^{-j\omega D/c}}{\sin(k\ell)}. \quad (\text{A13})$$

For the calculation of the spectrum the previous equations need to be used at the operating frequency. If dissipation is taken into account but dispersion is ignored, i.e. if $(1 - j)$ is replaced by $(-j)$ in equation (A11), the resonance frequencies are harmonically related. Thus the input impedance for the n th harmonic is:

$$Z_n = 1/(\tanh(\sqrt{n}\psi\eta)) \quad \text{if } n \text{ is odd}, \quad (\text{A14a})$$

$$Z_n = \tanh(\sqrt{n}\psi\eta) \quad \text{if } n \text{ is even}. \quad (\text{A14b})$$

An important feature is that at low frequencies, because η is in general small (typically 0.02 for a clarinet), these formulae can be simplified as follows:

$$Z_n = 1/(\sqrt{n}\psi\eta) \quad \text{if } n \text{ is odd}, \quad (\text{A15a})$$

$$Z_n = \sqrt{n}\psi\eta \quad \text{if } n \text{ is even}. \quad (\text{A15b})$$

Concerning the spectrum of the radiated pressure, the following results can be deduced from equation (A13):

$$\begin{aligned} \frac{p_D}{p} &= \frac{\omega S}{4\pi c D} (-1)^\nu e^{-j\omega D/c} \\ &\quad \text{for the odd harmonics } (n = 2\nu + 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{p_D}{p} &= \frac{\omega S}{4\pi c D} \frac{(-1)^\nu}{\sqrt{\nu\pi/2}\psi\eta} e^{-j\omega D/c} \\ &\quad \text{for the even harmonics } (n = 2\nu). \end{aligned}$$

We are interested in the ratio $x_{Dn} = p_{Dn}/p_{D1}$ of the n th harmonic of the external pressure to the first one. Its modulus is given by:

$$|x_{Dn} = n|x_n| \quad \text{for the odd harmonics,} \quad (\text{A16a})$$

$$|x_{Dn} = n|x_n| \quad \text{for the even harmonics.} \quad (\text{A16b})$$

Whereas it is possible to consider for the internal pressure the even harmonics to be small in comparison to the odd ones, this is a priori not the case for the external pressure, because the parameter η appears in the denominator in equation (A16b).

If dispersion is taken into account, the complete equation (A11) needs to be used, therefore:

$$Y = -j \cot \left(\frac{\omega \ell}{c} + (1-j)\psi\eta \sqrt{\frac{2\omega \ell}{\pi c}} \right). \quad (\text{A17})$$

Using the value of f_1 (equation 46), the following formula is obtained for the frequency $f_n = n f_1$ to the first order of the quantity η , as a substitute for formulae (A14a) and (A15a):

$$\begin{aligned} Y_n &= -j \tan(\psi\eta(n - \sqrt{n} + j\sqrt{n})) \\ &\simeq \psi\eta(\sqrt{n} - j(n - \sqrt{n})). \end{aligned} \quad (\text{A18})$$

Thus

$$|Y_n - Y_1| = \psi\eta(\sqrt{n} - 1)\sqrt{1+n}. \quad (\text{A19})$$

Considering now the even harmonics, the following formula is obtained:

$$Z_n = \psi\eta(\sqrt{n} - j(n - \sqrt{n})), \quad (\text{A20})$$

thus

$$|Z_n| = \psi\eta\sqrt{n}\sqrt{1 + (\sqrt{n} - 1)^2}. \quad (\text{A21})$$

Acknowledgement

This work is greatly indebted to F. Laloe, which was at the source of the reference [3] and thus of the present paper. The authors thank him and also J. P. Dalmont, C. Duval, S. Menigoz and C. J. Nederveen for many helpful discussions.

References

- [1] W. E. Worman: Self-sustained non-linear oscillations of medium amplitude in clarinet-like systems. PhD thesis, Case Western Reserve Univ., Cleveland, Ohio, 1971.
- [2] A. H. Benade, S. N. Kouzoupis: The clarinet spectrum: Theory and experiment. *J. Acoust. Soc. Am.* **83** (1988) 292–304.
- [3] N. Grand, J. Gilbert, F. Laloe: Oscillation threshold of woodwind instruments. *Acta Acustica* **1** (1997) 137–151.
- [4] J. Kergomard: Elementary considerations on reed-instruments oscillations. – In: *Mechanics of Musical Instruments, Lectures notes CISM*. Springer, 1995.
- [5] M. E. McIntyre, R. T. Schumacher, J. Woodhouse: On the oscillations of musical instruments. *J. Acoust. Soc. Am.* **74** (1983) 1325–1345.
- [6] J. Kergomard, J. Gilbert: Oscillations of reed-like cylindrical instruments: transition between cooperating modes and non-cooperating modes. 5th International Symposium on Musical Acoustics, Leavenworth, USA, 1998.
- [7] J. P. Dalmont, J. Gilbert, J. Kergomard: Reed instruments, from small to large amplitude periodic oscillations and the Helmholtz motion analogy. *Acustica - acta acustica* (2000) to appear.
- [8] D. M. Campbell: Nonlinear dynamics of musical reed and brass wind instruments. *Contemporary Physics* **40** (1999) 415–431.
- [9] A. H. Benade: *Fundamentals of musical acoustics*. Oxford Univ. Press, New York, 1976.
- [10] A. Barjau, V. Gibiat, N. Grand: Study of woodwind-like systems through nonlinear differential equations. Part I. Simple geometry. *J. Acoust. Soc. Am.* **102** (1997) 3023–3031.
- [11] R. T. Schumacher: Self sustained oscillations of the clarinet: an integral equation approach. *Acustica* **40** (1978) 298–309.
- [12] J. Gilbert, J. Kergomard, E. Ngoya: Calculation of the steady state oscillations of a clarinet using the harmonic balance technique. *J. Acoust. Soc. Am.* **86** (1989) 35–41.
- [13] C. Duval. personal communication.
- [14] S. Menigoz: Oscillations non-linéaires des instruments à vent à anche simple: étude par équilibrage harmonique (text in french). Rapport de stage de DEA d'Acoustique Appliquée, Université du Maine, Le Mans, France, 1998.
- [15] T. Wilson, G. S. Beavers: Operating modes of the clarinet. *J. Acoust. Soc. Am.* **56** (1974) 653–658.
- [16] J. P. Dalmont, B. Gazengel, J. Gilbert, J. Kergomard: Some aspects of tuning and clean intonation in reed instruments. *Applied acoustics* **46** (1995) 19–60.
- [17] J. Backus: Small-vibration theory of the clarinet. *J. Acoust. Soc. Am.* **35** (1963) 305–313.
- [18] X. Boutillon, V. Gibiat: Evaluation of the acoustical stiffness of saxophone reeds under playing conditions by using the reactive power approach. *J. Acoust. Soc. Am.* **100** (1996) 1178–1189.
- [19] A. Hirschberg: Aero-acoustics. – In: *Mechanics of Musical Instruments, Lectures notes CISM*. Springer, 1995.
- [20] L. Fuks, J. Sundberg: Blowing pressures in bassoon, clarinet, oboe and saxophone. *Acustica - acta acustica* **85** (1999) 267–277.

Annexe D

Bibliographie personnelle

Articles publiés dans des revues internationales à comité de lecture

- J. Kergomard, S. Ollivier et J. Gilbert, "Calculation of the spectrum of self-sustained oscillators using a variable truncation method : application to cylindrical reed instruments", *ACUSTICA-Acta Acustica*, 86, 2000, 685-703.
- J-P. Dalmont, C.J. Nederveen, V. Dubos, S. Ollivier, V. Meserette et E. te Sligte, "Experimental determination of the equivalent circuit of a side hole : linear and non linear behaviour", *ACUSTICA-Acta Acustica*, 88, 2002, 567-575.

Articles *soumis* à des revues internationales à comité de lecture

- S. Ollivier, J-P. Dalmont et J. Kergomard, "Idealized models of reed woodwinds. Part I : Analogy with the bowed string", soumis à *ACUSTICA-Acta Acustica*.
- S. Ollivier, J. Kergomard et J-P. Dalmont, "Idealized models of reed woodwinds. Part II : On the stability of two-step oscillations", soumis à *ACUSTICA-Acta Acustica*.
- J-P. Dalmont, J. Gilbert et S. Ollivier, "Non-linear characteristics of single reed instruments : quasi-static volume flow and reed opening measurement", soumis à *Journal of the Acoustical Society of America*.

Congrès internationaux avec actes

- S. Ollivier, J-P. Dalmont et J. Kergomard, "Idealized models of reed woodwinds and bowed string : analogy and stability", *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics*, 525-528, Perrugia, septembre 2001.
- S. Ollivier, J. Kergomard et J-P. Dalmont, "Spectrum of cylindrical reed instruments : comparison between theory and experiment", *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics*, 77-80, Perrugia, septembre 2001.

- J-P. Dalmont, E. Ducasse et S. Ollivier, "Practical consequences of tone holes non-linear behaviour", Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics, 153-156, Peggione, septembre 2001.
- J-P. Dalmont, E. Ducasse et S. Ollivier : "Saturation mechanism in reed instruments", 3rd EEA European Congress on Acoustic, Seville, 2002.
- J. Kergomard, S. Ollivier, "An approach of the calculation of the spectrum of conical reed instruments by using the variable truncation method", 3rd EEA European Congress on Acoustic, Seville, 2002.

Congrès national avec actes

- S. Ollivier et J.P. Dalmont, "Mise en évidence d'une non-linéarité localisée au niveau d'un trou latéral d'instrument à vent", Vème Congrès Français d'Acoustique, Lausanne, septembre 2000.

Congrès sans actes et journées d'études

- S. Ollivier, "Study of the stability of the fundamental regime of oscillations in reed instruments", Physics Of Musical Instruments, Institut of Physics Congress, Brighton, Angleterre, mars 2000
- Participation aux "Journées Jeunes Chercheurs en Acoustique Musicale" organisées par la SFA à Paris en Mai 2000 : Présentation de travaux réalisés sur la stabilité.
- Participation aux "Journées Jeunes Chercheurs en Acoustique Musicale" organisées par la SFA à Marseille en Mai 1999 : Exposé sur les modèles simplifiés d'instruments à vent.

Table des figures

1.1	Représentation schématique d'un instrument de musique auto-oscillant	3
1.2	Notations. L'ensemble rails+facette constitue la table.	3
1.3	Deux résonateur simplifiés aux propriétés proches de celles d'un résonateur d'instrument à vent à perce conique : (a) "cône en escalier", (b) "saxophone cylindrique". L'emplacement de l'embouchure est indiqué par une flèche blanche.	6
1.4	Deux exemples de solutions obtenues avec un modèle sans pertes de "cone en escalier" associé au modèle élémentaire : (a) mouvement de Helmholtz standard, (b) mouvement de Helmholtz inversé	7
1.5	Deux types de bifurcation au seuil d'instabilité du régime statique : (a) bifurcation directe, (b) bifurcation inverse. P_m : pression d'alimentation, P_1 : amplitude du fondamental, P_{th} : pression de seuil.	9
2.1	<i>Schematic description of a self-sustained musical instrument</i>	14
2.2	<i>Schematic view of a single reed mouthpiece.</i>	15
2.3	<i>Simultaneous measurement of the pressure $p(t)$ in the mouthpiece (---) and of the opening $H_0 + y(t)$ of the reed channel by using an optical method (—). The instrument is a pure cylinder excited by a clarinet mouthpiece playing the first register. The instrument is blown by using an artificial mouth device described in [Gaz94]. The arbitrary ordinate scales are the same for the two figures. Figure a : non-beating reed regime, the reed channel is not completely closed. Figure b : beating reed regime, the reed channel is closed during a part of the period. In both cases, $p(t)$ and $y(t)$ are nearly in phase.</i>	17
2.4	<i>Nonlinear characteristics between Δp and u, from equation (2.6).</i>	18
2.5	<i>Two force-velocity characteristics. --- : with perfect sticking (equation (2.8)). —function given by Weinreich and Caussé [WC91] (equation (2.9)).</i>	19
2.6	<i>Idealized conical-like resonators. (a) : stepped cone, (b) : cylindrical saxophone. White arrows indicate the location of the mouthpiece.</i>	23

2.7	<i>Summary of the formal analogy between the bowed string and woodwinds resonators. White arrows indicate the location of the mouthpiece or the bow. A string bowed at the middle (a) is analogous to a clarinet (c) or (d). A string bowed at a location such that $L_a \neq L_b$ (b) is analogous to a cylindrical saxophone (e). If $L_b/L_a = N$ is an integer, it is equivalent to a stepped cone with N cylinders (f). It is approximately analogous to a truncated cone (g) of length L_b, with L_a the length of the missing part of the cone. . . .</i>	24
2.8	<i>Possible waveforms of two-steps motions : (a) standard motion; (b) inverted motion. .</i>	30
2.9	<i>Pressure signals measured in the mouthpiece of a stepped cone saxophone made with 2 cylinders. Continuous lines : acoustic pressure in the mouthpiece, discontinuous lines : two-step motion with the same RMS pressure. (a) standard motion; (b) inverted motion.</i>	30
2.10	<i>Bifurcation diagram for a lossless clarinet. The pressure in the mouthpiece during the opening and the closing episodes (respectively $p > 0$ and $p < 0$) are plotted versus the blowing pressure P_m</i>	31
2.11	<i>Bifurcation diagram for the two Helmholtz solutions ($N_T = N$). The nonlinear model is F_{ber} (equation (2.6)), the resonator is lossless and such that $N = 2$. The values of the opening ($p > 0$) and closing ($p < 0$) episodes are plotted versus the blowing pressure. .</i>	31
2.12	<i>Bifurcation diagram obtained with a given embouchure in the lossless case (see figure 2.11) and with Raman's model (dots) with $\lambda = 0.95$.</i>	32
2.13	<i>Measured waveforms of the first and the second register of stepped cones. Continuous lines : acoustic pressure in the mouthpiece, discontinuous lines : two-step motion with the same RMS pressure. (a) fundamental vibration of a step cone $N = 2$. (c) octave vibration of a stepped cone $N = 2$. (b) fundamental vibration of a stepped cone $N = 3$. (d) octave vibration of a step cone $N = 3$.</i>	33
3.1	<i>Idealized conical-like resonators. (a) : stepped cone, (b) : cylindrical saxophone. White arrows indicate the location of the mouthpiece.</i>	40
3.2	<i>Possible waveforms of two-steps motions. (a) : standard motion (SM), duration of the opening episode $T_o >$ duration of the closing episode T_c. (b) : inverted motion (IM), duration of the opening episode $T_o <$ duration of the closing episode T_c.</i>	41
3.3	<i>Bifurcation diagram. The values of the mouthpiece pressure during the opening and closing steps (respectively $p > 0$ and $p < 0$) are plotted versus the blowing pressure P_m. The resonator is lossless and such that $L_b/L_a = 2$.</i>	42
3.4	<i>Stability of the square oscillation in a clarinet ($a = b$), $\lambda = 0.95$ plotted as a function of h_o and h_c. Grey area : the solution is unstable, white area : the solution is stable. Continuous line : limits of stability given by equations (3.37) for $\lambda = 0.95$, dashed line : limits of stability for $\lambda = 1$ (lossless case).</i>	46
3.5	<i>Stability map in the case $a = 1$ $b = 2$ for the standard Helmholtz motion plotted as a function of h_o and h_c. Grey area : the solution is unstable, white area : the solution is stable. Dashed line : $h_c = -2h_o/(h_o^2 + 1)$, continuous line : $h_c = -h_o/2$.</i>	50

3.6	<i>Two models for the non linear relationship $u = F(p)$</i>	52
3.7	<i>Bifurcation diagrams in the case of the clarinet. The nonlinear function is F_{ber}, $\zeta = 0.5$. (a) : using the lossless model ($\lambda = 1$), (b) : using Raman's model with $\lambda = 0.95$. The beating threshold is $P_m/P_M = 1/2$. The limits of stability $P_m/P_M = 0.450$ and 0.478 respectively for $\lambda = 1$ and $\lambda = 0.95$ are calculated with equation (3.37). The threshold of instability of the static regime calculated with equations (3.16), (3.25) and (3.28) gives $P_{th} = 1/3$ if $\lambda = 1$, and 0.358 if $\lambda = 0.95$, in accordance with time domain simulations.</i>	53
3.8	<i>Evolution of the points (h_o^{cub}, h_c^{cub}) and (h_o^{ber}, h_c^{ber}) calculated for solutions SM1 (continuous lines) and SM2 (dashed lines) when P_m increases. Arrows indicates the evolution when P_m increases. Grey area : the solution is unstable, white area : the solution is stable.</i>	55
3.9	<i>Bifurcation diagrams for the standard Helmholtz motion SM1 in a stepped cone $N = 2$ obtained for two embouchures ($\zeta = 0.5$ and $\zeta = 0.8$). The nonlinear function is F_{ber}, and $\zeta = 0.5$. Condition (3.55) is not satisfied for $P_m/P_M > 0.296$ when $\zeta = 0.8$, and for $P_m/P_M > 0.315$ when $\zeta = 0.5$. $P_m/P_M = 1/3$ is the beating threshold.</i>	56
3.10	<i>Bifurcation diagram for a stepped cone $N = 2$ when the pressure signal is initially set to SM2 if $P_m/P_M \leq 1/3$, and IM if $P_m/P_M > 1/3$. The nonlinear function is F_{ber}, and $\zeta = 0.5$. The limit $P_m = P_M/3$ is the transition between the standard Helmholtz motion (SM2) and the inverted Helmholtz motion (IM), it is also the beating threshold for the solution SM1. The pressure $P_m = 2P_M/3$ is the beating reed threshold for the inverted Helmholtz motion (IM).</i>	57
3.11	<i>Bifurcation diagram of the second register for two stepped cones : (a) in the case $N = 2$ (or $a = 1, b = 2$), (b) in the case $N = 3$ (or $a = 1, b = 3$).</i>	59
4.1	<i>Flow control by the clarinet reed involving free jet formation and turbulent dissipation.</i>	69
4.2	<i>Theoretical characteristics (equation (4.5)) : volume flow u as a function of the pressure difference Δp (arbitrary scales). P_M is the value of the pressure difference corresponding to the reed blocked on the mouthpiece.</i>	70
4.3	<i>Theoretical characteristics with constant stiffness k_r (dotted line, equation (4.5)) and with a stiffness k_r increasing discontinuously with the pressure difference Δp (continuous line), according to Van Walstijn [vW02] (see text).</i>	73
4.4	<i>Experimental device.</i>	74
4.5	<i>Volume flow u as a function of the mouthpressure P_m for the clarinet mouthpiece ended with a diaphragm (arbitrary scales).</i>	75
4.6	<i>Experimental signals.</i>	76
4.7	<i>Typical experimental results (dots : experiments, continuous line : theory). (a) Non-linear characteristics, volume flow u versus pressure difference Δp, (b) reed opening H versus pressure difference, (c) jet cross section S versus reed opening H.</i>	79

4.8	<i>Experimental results (dots lines experiments ; continuous line theory) : non-linear characteristics, (a) volume flow u versus pressure difference Δp, (b) reed opening H versus pressure difference Δp.</i>	80
4.9	<i>Contraction coefficient $\sigma = S_j/wH$ versus reed opening H (same embouchure set-up as in figure 4.8).</i>	82
4.10	<i>Approximation de la caractéristique mesurée par une fonction définie par morceaux (voir texte). — approximation de la courbe expérimentale, \cdots mesure, — — — modèle élémentaire.</i>	85
4.11	<i>Points de fonctionnement ($P_m - p_o, u(P_m - p_o)$) et ($P_m - p_c, u(P_m - p_c)$) dans le cas de la caractéristique déduite de la mesure ($-*—$) et dans le cas du modèle élémentaire ($\cdots \circ \cdots$) pour une même amplitude d'oscillation $p_o - p_c$.</i>	86
4.12	<i>Points de fonctionnement ($P_m - p_o, u(P_m - p_o)$) et ($P_m - p_c, u(P_m - p_c)$) sur la caractéristique déduite de la mesure, dans le cas sans pertes (\circ) et dans un cas avec pertes ($*$), pour une même amplitude d'oscillation $p_o - p_c$.</i>	87
4.13	<i>Effets des pertes et de la fermeture progressive de l'anche dans le plan (h_o, h_c). La zone blanche et la zone grise indiquent respectivement les zones de stabilité et d'instabilité de la solution "signal carré" dans le cas sans pertes ($\lambda = 1$). La limite en trait plein indique la limite de stabilité dans le cas d'un résonateur avec pertes ($\lambda = 0.9$). Voir le texte pour la signification des flèches.</i>	88
4.14	<i>Trajectoire des points (h_o, h_c) pour la solution "signal carré" dans une clarinette sans pertes en régime "anche non battante" lorsque P_m augmente : — — — modèle élémentaire, ——— modèle déduit de la mesure. Stabilité de la solution : zone blanche \rightarrow stable, zone grise \rightarrow instable.</i>	89
5.1	<i>Trois types d'interaction anche/table : (a) l'anche oscille librement, il n'y a contact qu'au niveau de la ligature ; (b) l'anche s'enroule progressivement sur la table, sa longueur vibrante diminue ; (c) la courbure de l'anche est supérieure à celle de la table, l'anche "bat".</i>	92
5.2	<i>Schéma du dispositif permettant la mesure du contact anche-table. Les contacts indiqués en noir ne sont pas exploités.</i>	94
5.3	<i>(a) Mauvais contact lié à l'irrégularité de l'épaisseur de peinture. (b) Configuration observée en vue de face lorsque l'anche est plaquée. Echelles non respectées.</i>	95
5.4	<i>Figure d'enroulement qui serait observée dans le cas d'un enroulement progressant linéairement avec la pression $P_m - p$. Les zones blanches indiquent qu'il y a contact, les zones foncées indiquent qu'il n'y a pas contact, les zones de gris intermédiaire indiquent des contacts defectueux. Les contacts sont numérotés de 1 à 13, les numéros correspondants à ceux de la figure 5.2</i>	96
5.5	<i>Enroulement jusqu'au plaquage en statique (pression P_m croissante a gauche et décroissante à droite).</i>	99

5.6	<i>Caractéristique non-linéaire mesurée (points), modèle élémentaire (trait continu) et pressions limites associées aux différents contacts (traits verticaux + numéros).</i>	99
5.7	<i>Amplitude de variation de l'ouverture $H(t)/H_0$ en fonction de P_m/P_M dans le cadre du modèle sans pertes</i>	102
5.8	<i>Amplitude de variation et valeur moyenne de l'ouverture mesurée $H(t)/H_0$ en fonction de P_m dans le cas de l'embouchure étudiée ($L_{\text{tube}} = 30\text{cm}$)</i>	102
5.9	<i>Amplitude de variation de l'ouverture $H(t)/H_0$ en fonction de P_m dans le cas d'une embouchure non mesurée ($L_{\text{tube}} = 40\text{cm}$)</i>	104
6.1	<i>Caractéristique non-linéaire mesurée (points) et modèle élémentaire (trait continu).</i> . .	109
6.2	<i>Comparaison des formules théoriques issues des différentes approches pour l'estimation du niveau du fondamental P_1. En abscisse : la pression d'alimentation adimensionnée $\gamma = P_m/P_M$, en ordonnée le niveau de P_1 en dB_{SPL}. Paramètres : $\zeta = 0.35$, $P_M = 66.5\text{ mb}$, $\eta = 0.0228$, $L = 65.5\text{ cm}$.</i>	118
6.3	<i>Même figure que 6.2, mais "zoomée" sur la zone de transition vers le régime "anche battante".</i>	118
6.4	<i>Estimation du niveau du fondamental P_1 par "recalage" de la courbe obtenue dans le cas sans pertes sur le seuil exact (translation de $\gamma_{\text{th}} - 1/3$). En abscisse : la pression d'alimentation adimensionnée $\gamma = P_m/P_M$, en ordonnée le niveau de P_1 en dB_{SPL}. Paramètres : $\zeta = 0.35$, $P_M = 66.5\text{ mb}$, $\eta = 0.0228$, $L = 65.5\text{ cm}$.</i>	119
6.5	<i>Même figure que 6.4, mais "zoomée" sur la zone de transition vers le régime "anche battante".</i>	119
6.6	<i>Comparaison des formules théoriques issues des différentes approches pour l'estimation du rapport $x_3 = P_3/P_1$. En abscisse : la pression d'alimentation adimensionnée $\gamma = P_m/P_M$, en ordonnée : $20 \log(x_3)$. Paramètres : $\zeta = 0.35$, $P_M = 66.5\text{ mb}$, $\eta = 0.0228$, $L = 65.5\text{ cm}$.</i>	121
6.7	<i>Même figure que 6.6, mais "zoomée" sur la zone de transition vers le régime "anche battante".</i>	121
6.8	<i>Comparaison des formules théoriques issues des différentes approches pour l'estimation du rapport $x_5 = P_5/P_1$. En abscisse : la pression d'alimentation adimensionnée $\gamma = P_m/P_M$, en ordonnée : $20 \log(x_5)$. Paramètres : $\zeta = 0.35$, $P_M = 66.5\text{ mb}$, $\eta = 0.0228$, $L = 65.5\text{ cm}$.</i>	122
6.9	<i>Même figure que 6.8, mais "zoomée" sur la zone de transition vers le régime "anche battante".</i>	122
6.10	<i>(a) : Comparaison des prévisions théoriques du niveau du fondamental et des données expérimentales. En abscisse : la pression d'alimentation P_m en mb, en ordonnée le niveau de P_1 en dB_{SPL}. Pour chaque modèle théorique, deux courbes sont tracées, elles correspondent à un encadrement lié à l'incertitude sur la détermination de P_M et ζ. (b) : zoom de (a) sur la zone "anche non battante".</i>	128

- 6.11 (a) : Comparaison des prévisions théoriques et des données expérimentales pour le rapport $x_3 = |P_3/P_1|$. En abscisse : la pression d'alimentation P_m en mb, en ordonnée : $|x_3|$. Pour chaque modèle théorique, deux courbes sont tracées, elles correspondent à un encadrement lié à l'incertitude sur la détermination de P_M et ζ . (b) : zoom de (a) sur la zone "anche non battante" 132
- 6.12 (a) : Comparaison des prévisions théoriques et des données expérimentales pour le rapport $|x_5| = |P_5/P_1|$. En abscisse : la pression d'alimentation P_m en mb, en ordonnée : $|x_5|$. Pour chaque modèle théorique, deux courbes sont tracées, elles correspondent à un encadrement lié à l'incertitude sur la détermination de P_M et ζ . (b) : zoom de (a) sur la zone "anche non battante" 133
- 6.13 Comparaison des prévisions théoriques et des données expérimentales pour le déphasage entre le fondamental et les harmonique 3 (a) et 5 (b). En abscisse : la pression d'alimentation P_m en mb, en ordonnée la phase en radians. Pour chaque modèle théorique, deux courbes sont tracées, elles correspondent à un encadrement lié à l'incertitude sur la détermination de P_M et ζ 134
- 6.14 Evolution du rapport P_i/P_1 avec la pression P_m pour une même embouchure mais deux résonateurs de longueur différente : $L_{tot} = 45.5$ cm (pointillés) et $L_{tot} = 65.5$ cm (trait continu). $i = 3, 5, 7, 9$ 135
- 6.15 Comparaison de deux embouchures. * : x_3 , + : x_5 136
- 6.16 Evolution de la fréquence de jeu "typique" pour une clarinette de longueur totale $L = 45.5$ cm. 138
- 6.17 Evolution de la fréquence de jeu pour une clarinette de longueur totale $L = 65.5$ cm. Mesures et prévisions théoriques. 138
- A.1 figures d'enroulement pour P_m croissant (en mb) : (a) 26.5, (b) 27.8, (c) 29.2, (d) 29.6. 148
- A.2 figures d'enroulement pour P_m croissant (en mb) : (a) 30.5, (b) 31.4, (c) 32.1, (d) 33.5. 149
- A.3 figures d'enroulement pour P_m croissant (en mb) : (a) 34.2, (b) 35.9, (c) 36.9, (d) 37.1. 150
- A.4 figures d'enroulement pour P_m croissant (en mb) : (a) 38.6, (b) 40.1, (c) 41.2, (d) 42.2. 151
- A.5 figures d'enroulement pour P_m croissant (en mb) : (a) 43.0, (b) 44.8. 152

Bibliographie

- [Ati] M. Atig. Non-linéarités localisées. Thèse, Université du Maine. Soutenance en 2003.
- [BA89] A. Barjau and J. Agullo. Calculation of the starting transients of a double-reed conical woodwind. *Acustica*, 69 :204–210, 1989.
- [Bac63] J. Backus. Small vibration theory of the clarinet. *J. Acoust. Soc. Am.*, 35 :305–313, 1963.
- [BD87] N. Bak and P. Domler. The relation between blowing pressure and blowing frequency in clarinet playing. *Acustica*, 63 :238–241, 1987.
- [Ben76] A. H. Benade. *Fundamentals of musical acoustics*. Oxford Univ. Press, New York, 1976.
- [Ber54] L. Beranek. *Acoustics*. Mc Graw and Hill, 1954.
- [BG96] X. Boutillon and V. Gibiat. Evaluation of the acoustical stiffness of saxophone reeds under playing conditions by using the reactive power approach. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1996.
- [BK88] A.H. Benade and S.N. Kouzoupis. The clarinet spectrum : Theory and experiment. *Journ. Acoust. Soc. Am.*, 83(1) :292–304, 1988.
- [BL88] A.H. Benade and S.J. Lutgen. The saxophone spectrum. *Journ. Acoust. Soc. Am.*, 83(5) :1900–1907, 1988.
- [Bou29] Bouasse. *Instruments à vent*. Librairies Delagrave, Paris, réédition blanchard, 1985 edition, 1929.
- [BPV88] P. Bergé, Y. Pomeau, and C. Vidal. *L'ordre dans le chaos*. Hermann, Paris, 1988.
- [Bro84] A. E. Brown. Some factors affecting inonation and tone-quality of the bassoon. In *Proceeding of the Institute of acoustics*, pages 37–40, 1984. Spring Conference.
- [Bro87] A. E. Brown. Reed action in the bassoon. In *Proceeding of the Institute of acoustics*, volume 9, pages 85–91, 1987.
- [Bro90] K. Brod. The clarinet as a bifurcating system : An application of the method of iterated maps. *Acustica*, 72 :72–78, 1990.
- [BS01] M. Burtner and S. Serafin. Extended techniques for physical modes using instrumental controller substitution. In *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics*, pages 251–254, Perrugia, 2001.

- [Dal] J-P. Dalmont. communication personnelle.
- [Dal88] J-P. Dalmont. *Etude et réalisation de capteurs d'impédance. Application à la mesure d'éléments localisés. Etude et réalisation d'une terminaison anéchoïque basses fréquences*. Thèse, Université du Maine, Le Mans, France, 1988.
- [Dal92] J-P. Dalmont. Une série infinie de résonateurs présentant des fréquences de résonance harmoniques. *J. Phys. IV*, pages C1–109–112, 1992.
- [DDO01] J-P. Dalmont, E. Ducasse, and S. Ollivier. Practical consequences of tone holes non-linear behaviour. In *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics*, pages 153–156, Perraugia, 2001.
- [DDO02] J-P. Dalmont, E. Ducasse, and S. Ollivier. Saturation mechanism in reed instruments. In *3rd EEA European Congress on Acoustic*, Seville, 2002.
- [DG98] J-P. Dalmont and J. Gilbert. Standard and inverted helmholtz motion in conical woodwinds. In *5th International Symposium of Musical Acoustics*, Leavenworth, USA, 1998.
- [DGGK95] J-P. Dalmont, B. Gazengel, J. Gilbert, and J Kergomard. Some aspects of tuning and clean intonation in reed instruments. *Applied Acoustics*, 46 :16–60, 1995.
- [DGK00] J-P. Dalmont, J. Gilbert, and J. Kergomard. Reed instruments, from small to large amplitude periodic oscillations and the Helmholtz motion analogy. *ACUSTICA-Acta Acustica*, 86 :671–684, 2000.
- [DGO02] J-P. Dalmont, J. Gilbert, and S. Ollivier. Non-linear characteristics of single reed instruments : quasi-static volume flow and reed opening measurements. *Soumis au J. Acoust. Soc. Am.*, 2002.
- [DK94] J-P. Dalmont and J. Kergomard. Lattices of tubes with harmonically related eigenfrequencies. *Acta Acustica*, 2 :421–430, 1994.
- [DK95] J-P. Dalmont and J. Kergomard. Elementary model and experiments for the helmholtz motion of single reed instruments. In *Proceeding of the International symposium on Musical Acoustics*, pages 114–120, Dourdan, 1995.
- [DND⁺02] J-P. Dalmont, C.J. Nederveen, V. Dubos, S. Ollivier, V. Meserette, and E. te Sligte. Experimental determination of the equivalent circuit of a side hole : linear and non linear behaviour. *ACUSTICA-Acta Acustica*, 88 :567–575, 2002.
- [dR] Angel Sampedro del Rio. <http://usuarios.arnet.com.ar/bambu/>.
- [Duc90] E. Ducasse. Modélisation d'instruments de musique pour la synthèse sonore : application aux instruments à vent. In *Sup. J. de Physique*, number 51 in C2, pages 837–840. Colloque de Physique, 1990.
- [Duc01] E. Ducasse. *Modélisation et simulation dans le domaine temporel d'instruments à vent à anche simple en situation de jeu : méthodes et modèles*. Thèse, Université du Maine, Le Mans, France, 2001.

- [EB82] S. J. Elliott and J. M. Bowsher. Regeneration in brass wind instruments. *J. Sound Vib.*, 83 :181–217, 1982.
- [FBC01] M. Facchinetti, X. Boutillon, and A. Constantinescu. Numerical and experimental modal analysis of the reed and pipe of a clarinet. *soumis au J. Acoust. Soc. Am.*, 2001.
- [Fle79] N.H. Fletcher. Air flow and sound generation in musical wind instruments. *Ann. Rev. Fluid Mech*, 11 :123 :135, 1979.
- [Fle93] N. H. Fletcher. Autonomous vibration of simple pressured controlled valves in gas flows. *J. Acoust. Soc. Am.*, 93 :2172–2180, 1993.
- [FR98] N. H. Fletcher and T. D. Rossing. *The physics of musical instruments*. Springer-Verlag, New-York, 1998.
- [Fri53] F. G. Friedlander. On the oscillations of a bowed string. *Proc. Cambridge. Philos. Soc.*, 49 :516–530, 1953.
- [FS99] L. Fuks and J. Sundberg. Blowing pressures in bassoon, clarinet, oboe and saxophone. *ACUSTICA-Acta Acustica*, 85(2) :267–277, 1999.
- [Gaz94] B. Gazengel. *Caractérisation objective de la qualité de justesse, de timbre et d'émission des instruments à vent à anche simple*. Thèse, Université du Maine, Le Mans, France, 1994.
- [GGL97] N. Grand, J. Gilbert, and F. Laloë. Oscillation threshold of woodwinds instruments. *Acta Acustica*, 1 :137–151, 1997.
- [Gil91] J. Gilbert. *Etude des instruments de musique à anche simple*. Thèse, Université du Maine, Le Mans, France, 1991.
- [GKN91] J. Gilbert, J. Kergomard, and E. N'Goya. Calculation of the steady state oscillations of a clarinet using the harmonic balance technique. *J. Acoust. Soc. Am.*, 86 :35–41, 1991.
- [GT98] F. Gautier and N. Tahani. Vibroacoustic of cylindrical pipes : intermodal coupling by internal radiation. *J. Sound Vib.*, 215 :1165–1179, 1998.
- [HdLMMW90] A. Hirschberg, R.W.A. Van de Laar, J. P. Marrou-Maurrières, and A. P. J. Wijnands. A quasi stationnary model of the air flow in the reed channel of single reed woodwind instruments. *Acustica*, 70 :146–154, 1990.
- [Hei91] J. M. Heinrich. Recherches sur les propriétés densitométriques du matériau cane de provence et ses similaires étrangers ; relation avec laqualité musicale ; étude associée d'une mesure de dureté. Ministère de la Culture, Direction de la Musique et de la Danse, 1991. Paris, France.
- [Hel54] H. Helmholtz. *On the sensation of tone (traduction anglaise de l'édition allemande)*. Dover, New York, 1954.
- [HGMW96] A. Hirshberg, J. Gilbert, R. Msallam, and A.P.J. Wijnands. Shockwaves in trombone. *J. Acoust. Soc. Am.*, 99 :1754–1748, 1996.

- [HGWH91] A. Hirschberg, J. Gilbert, A. P. J. Wijnands, and A. J. M. Houtsma. Non-linear behaviour of single-reed woodwind musical instruments. *Nederland Akoestisch Genootschap*, 107 :31–43, 1991.
- [HGWW94] A. Hirschberg, J. Gilbert, A. P. J. Wijnands, and A. M. C. Valkering. Musical aero-acoustics of the clarinet. *supplément au Journal de Physique III*, 4 :559–568, 1994.
- [Hir95] A. Hirschberg. *Aero-acoustics of wind instruments*, in "Mechanics of musical instruments", chapter 7. Springer, Wien, 1995.
- [II67] U. Ingard and H. Isingh. Acoustic nonlinearity of an orifice. *J. Acoust. Soc. Am.*, 42 :9–17, 1967.
- [IKKI93] T. Idogawa, T. Kobata, K. Komuro, and M. Iwaki. Nonlinear vibrations in the air column of a clarinet artificially blown. *J. Acoust. Soc. Am.*, 93 :540–551, 1993.
- [Kau01] W. Kausel. Bore reconstruction from acoustical input impedance; equipment, signal processing, algorithms and prerequisites. In *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics*, pages 373–378, Perugia, 2001.
- [KC86] J. Kergomard and R. Caussé. Measurement of acoustic impedance using a capillary : an attempt to achieve optimization. *J. Acoust. Soc. Am.*, 79 :1129–1140, 1986.
- [Kel53] J. B. Keller. Bowing of violin strings. *Comm. Pure Appl. Math.*, 6 :483–495, 1953.
- [Ker] J. Kergomard. communication personnelle.
- [Ker88] J. Kergomard. General equivalent circuit for acoustic horns. *J. Audio. Eng. Soc.*, 36 :948–955, 1988.
- [Ker95] J. Kergomard. *Elementary considerations on reed-instruments oscillations*, in "Mechanics of musical instruments", chapter 6. Springer, Wien, 1995.
- [KG00] J. Kergomard and J. Gilbert. Analyse de quelques aspects du rôle de l'anche d'un instrument à vent cylindrique. In *Vème Congrès Français d'Acoustique*, pages 294–297, Lausanne, Septembre 2000.
- [KO02] J. Kergomard and S. Ollivier. An approach of the calculation of the spectrum of conical reed instruments by using the variable truncation method. In *3rd EEA European Congress on Acoustic*, Seville, 2002.
- [KOG00] J. Kergomard, S. Ollivier, and J. Gilbert. Calculation of the spectrum of self-sustained oscillators using a variable truncation method : application to cylindrical reed instruments. *ACUSTICA-Acta Acustica*, 86 :685–703, 2000.
- [Mag85] C. Maganza. *Excitations non-linéaires d'un conduit acoustique cylindrique. Observations de doublements de période précédent un comportement chaotique. Application à la clarinette*. Thèse, Université du Maine, Le Mans, France, 1985.
- [Mau92] L. Maurin. Confrontation théorie-expérience des grandeurs d'entrée d'un exciteur à anche simple. Rapport de DEA d'acoustique appliquée, Université du Maine, Le Mans, France, 1992.

- [MCL86] C. Maganza, R. Caussé, and F. Laloë. Bifurcations, period doublings and chaos in clarinet-like systems. *Europhysics Letters*, 1(6) :295–302, 1986.
- [MDCT00] R. Msallam, S. Dequidt, R. Caussé, and S. Tassart. Physical model of the trombone including non-linear effects. application to the sound synthesis of loud tones. *Acustica*, pages 725–736, 2000.
- [Mee81] A. I. Mees. *Dynamics of feedback systems*. John Wiley, 1981.
- [Mey87] X. Meynial. *Systèmes micro-intervalles pour instruments à vent à trous latéraux. Oscillation d'une anche simple couplée à un résonateur de forme simple*. Thèse, Université du Maine, Le Mans, France, 1987.
- [MGBG94] E. Marandas, V. Gibiat, C. Besnainou, and N. Grand. Caractérisation mécanique des anches simples d'instruments à vent. In *Suppl. J. Physique III*, volume C5 of 4, pages 633–636, Toulouse, 1994.
- [ML96] G. Muller and W. Lauterborn. The bowed string as a non-linear dynamical system. *Acustica*, 82 :657–664, 1996.
- [Mén98] S. Ménigoz. Oscillations non-linéaires des instruments à anche simple : étude par équilibrage harmonique. Rapport de stage du DEA ATIAM, 1998.
- [MSW83] M. E. McIntyre, R. T. Schumacher, and J. Woodhouse. On the oscillations of musical instruments. *Journ. Acoust. Soc. Am.*, 74 :1325–1345, 1983.
- [ND01] C. J. Nederveen and J-P. Dalmont. Wolf-notes in organ pipes due to wall resonances. In *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics*, pages 345–348, Perugia, 2001.
- [Ned98] C. J. Nederveen. *Acoustical aspect of woodwind instruments*. Northern Illinois University Press, De Kalb, 1998.
- [OD00] S. Ollivier and J.P. Dalmont. Mise en évidence d'une non-linéarité localisée au niveau d'un trou latéral d'instrument à vent. In *Vème Congrès Français d'Acoustique*, pages 310–313, Lausanne, Septembre 2000.
- [ODK02] S. Ollivier, J-P. Dalmont, and J. Kergomard. Idealized models of reed woodwinds. Part I : Analogy with the bowed string. *soumis à ACUSTICA-Acta Acustica*, 2002.
- [OKD01] S. Ollivier, J. Kergomard, and J-P. Dalmont. Spectrum of cylindrical reed instruments : comparison between theory and experiment. In *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics*, pages 666–999, Perrugia, 2001.
- [OKD02] S. Ollivier, J. Kergomard, and J-P. Dalmont. Idealized models of reed woodwinds. Part II : On the stability of two-step oscillations. *soumis à ACUSTICA-Acta Acustica*, 2002.
- [OME95] OMEGA. *Flow and Level Measurement Handbook and Encyclopedia*. OMEGA Press, 1995.
- [ON99] E. Obataya and M. Norimoto. Acoustic properties of a reed (*arundo donax* l.) used for the vibrating plate of a clarinet. *J. Acoust. Soc. Am.*, pages 1106–1110, 1999.

- [PW98a] R. Pitteroff and J. Woodhouse. Mechanics of the contact area between a violin bow and a string. part I : Reflection and transmission behaviour. *Acustica-acta acustica*, 84 :543–562, 1998.
- [PW98b] R. Pitteroff and J. Woodhouse. Mechanics of the contact area between a violin bow and a string. part II : simulating the bowed string. *Acustica-acta acustica*, 84 :744–757, 1998.
- [PW98c] R. Pitteroff and J. Woodhouse. Mechanics of the contact area between a violin bow and a string. part III : parameter dependence. *Acustica-acta acustica*, 84 :929–938, 1998.
- [Ram18] C. V. Raman. On the mechanical theory of vibrations of bowed strings. *Indian Assoc. Cult. Sci. Bull.*, 15(1) :1–158, 1918.
- [Res] Resonans. *Logiciel d'aide à la conception d'instruments à vent*. Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine / IRCAM.
- [Roc85] F. Rocaboy. Proposed model for reed action in the bassoon. *JCAS*, 1(4) :20–25, 1985.
- [Sch73] J. C. Schelleng. The bowed string and the player. *J. Acoust. Soc. Am.*, 53 :26–41, 1973.
- [Sch78] R. T. Schumacher. Self-sustained oscillations of the clarinet : an integral equation approach. *Acustica*, 40 :298–309, 1978.
- [Sch81] R. T. Schumacher. Ab initio calculations of the oscillation of a clarinet. *Acustica*, 48 :71–85, 1981.
- [Sch94] R. T. Schumacher. Measurement of some parameters of bowing. *J. Acoust. Soc. Am.*, 96(4) :1985–1998, 1994.
- [SS80] S. E. Stewart and W. J. Strong. Fonctionnal model of a simplified clarinet. *J. Acoust. Soc. Am.*, 68(1) :109–120, 1980.
- [SS88] S. D. Sommerfeldt and W. J. Strong. Simulation of a player-clarinet system. *J. Acoust. Soc. Am.*, 83(5) :1908–1918, 1988.
- [Stu89] R. Stuifmeell. Vibration modes of a metal reed of a reed organ pipe : theory and experiment. Vakgroep Transportfysica, 1989. Eindhoven University of Technology.
- [STY87] J. Saneyoshi, H. Tamura, and S. Yoshikawa. Feedback oscillations in reed woodwind and brasswind instruments. *Acustica*, 62 :194–210, 1987.
- [SW00] J.H. Smith and J. Woodhouse. The tribology of rosin. *J. Mech. Phys. Solids.*, 48 :1633–1681, 2000.
- [Tho79] S. C. Thompson. The effect of the reed resonance on woodwind tone production. *J. Acoust. Soc. Am.*, 66 :1299–1307, 1979.
- [VA02] C. Vergez and A. Almeida. Modèle physique simple d'instrument de musique à anche : influence des pertes dans l'écoulement (en aval de l'anche) sur le couplage anche-résonateur. In *6ème Congrès Français d'Acoustique*, Lille, 2002.

- [Val93] A. M. C. Valkering. Characterization of a clarinet mouthpiece. Vakgroep Transportfysica, 1993. Eindhoven University of Technology.
- [Val95] C. Valette. *The mechanics of vibrating strings*, in "Mechanics of musical instruments", chapter 4. Springer, Wien, 1995.
- [vW02] M. van Walstijn. *Discret-time modelling of brass and reed woodwind instruments with application to musical sound synthesis*. PhD thesis, University of Edinburgh, United Kingdom, 2002.
- [vZ89] J. van Zon. Stromingsgeïnduceerde klepinstabiliteiten. Vakgroep Transportfysica, 1989. Eindhoven University of Technology.
- [vZHG90] J. van Zon, A. Hirschberg, J. Gilbert, and A. P. J. Wijnands. Flow through the reed channel of a single reed music instrument. In *Sup. J. de Physique*, number 51 in C2, pages 821–824, 1990.
- [WB74] T. A. Wilson and G. S. Beavers. Operating modes of the clarinet. *J. Acoust. Soc. Am.*, 56 :653–658, 1974.
- [WC91] G. Weinreich and R. Caussé. Elementary stability considerations for bowed instruments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 89(2) :887–895, 1991.
- [Woo93a] J. Woodhouse. Idealized models of a bowed string. *Acustica*, 79 :233–250, 1993.
- [Woo93b] J. Woodhouse. On the stability of bowed string motion. *Acustica*, pages 73–90, 1993.
- [Woo95] J. Woodhouse. *Self-sustained musical oscillators* in "Mechanics of musical instruments", chapter 5. Springer, New York, 1995.
- [Wor71] W. E. Worman. *Self-sustained non-linear oscillations of medium amplitude in clarinet-like systems*. PhD thesis, Case Western Univ., Cleveland, Ohio, 1971.
- [WSG00] J. Woodhouse, R. T. Schumacher, and S. Garoff. Reconstruction of bowing point friction force in a bowed string. *J. Acoust. Soc. Am.*, 108(1) :357–368, 2000.