



HAL
open science

Etude des mouvements à la surface du noyau terrestre : du 17ème au 21ème siècle

Céline Eymin

► **To cite this version:**

Céline Eymin. Etude des mouvements à la surface du noyau terrestre : du 17ème au 21ème siècle. Géophysique [physics.geo-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2004. Français. NNT : . tel-00007173

HAL Id: tel-00007173

<https://theses.hal.science/tel-00007173>

Submitted on 21 Oct 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse

Présentée pour obtenir le titre de
Docteur de l'Institut de Physique du Globe de Paris
Spécialité : Géophysique Interne

par

Céline Eymin-Petot-Tourtollet

Étude des mouvements
à la surface du noyau terrestre :
du 17ème au 21ème siècle

Soutenue le 1er juillet 2004 devant le jury composé de :

M. Claude Jaupart	Président
M. Philippe Cardin	Rapporteur
M. Dominique Gibert	Rapporteur
M. Andrew Tangborn	Examineur
M. Gauthier Hulot	Directeur de thèse

“Unwary readers should take warning that ordinary language undergoes modification to a high-pressure form when applied to the interior of the Earth; a few examples of equivalent follow:

High-Pressure form:

certain

undoubtedly

positive proof

unanswerable argument

Ordinary meaning:

dubious

perhaps

vague suggestion

trivial objection. . .”

Francis Birch, 1952.

Remerciements

Sans Jean Schmittbuhl, Claude Jaupart et Jean-Pierre Vilotte, cette thèse aurait probablement été interrompue en cours de route. Je souhaite maintenant commencer par leur adresser mes remerciements, pour l'intérêt qu'ils m'ont porté et pour leurs conseils avisés. En suggérant d'appliquer une technique d'assimilation de données au noyau, Jean-Pierre Vilotte m'a donné la motivation nécessaire pour poursuivre cette thèse jusqu'au bout.

Ce travail sur l'assimilation de données a été mené en étroite et agréable collaboration avec Alexandre Fournier. Merci pour les nombreuses discussions, les conseils numériques, mais aussi pour le soutien et les encouragements tout au long de cette fin de thèse.

J'ai également beaucoup apprécié de travailler sur les secousses magnétiques avec Aude Chambodut, ma «voisine d'en face».

Mon travail a largement bénéficié de discussions lors de congrès scientifiques. Merci particulièrement à Hagay Amit, Julien Aubert, Christopher Finlay, Richard Holme et Alexandra Pais pour les idées que nous avons échangées et pardon à ceux que j'aurais oubliés. À ce propos, je remercie également les organisateurs du SEDI 2002 et de l'école d'hiver sur les dynamos planétaires au cours desquels j'ai beaucoup appris.

Je remercie Philippe Cardin et Dominique Gibert d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail, ainsi que Claude Jaupart et Andy Tangborn pour leur participation à mon jury de soutenance. Merci à Gauthier Hulot d'avoir dirigé cette thèse.

Hagay Amit, Julien Aubert, Alexandra Pais et Kathy Whaler m'ont fourni des figures originales ou en cours de publication pour étayer ma discussion dans le chapitre 5 : merci à eux.

Merci aussi à Arnaud Chulliat, Alexandre Fournier, Gauthier Hulot, Dominique Jault et Mioara Manda qui ont relu tout ou partie de ce manuscrit avant la soutenance et qui m'ont fait part de leur remarques.

Je remercie également Cécile Grigné, Vincent Morin, Aude Chambodut et Hélène Rouby, dont j'ai partagé le bureau, pour les discussions, pas seulement scientifiques. Merci aussi à mes «collègues paléomagnéticiennes» pour leurs visites régulières.

Je tiens également à remercier Marie-Pierre Doin et Rob van der Hilst qui m'ont initié à la recherche au cours de stages qui ont précédés cette thèse, Anne Demolliens et Pierre Dubier, mes professeurs de clarinette, qui m'ont appris à travailler de manière rigoureuse, et puis aussi, les vallons sauvages du massif des Écrins, pour tous les week-ends que j'y ai passé.

Enfin, merci à mes parents, ma sœur et ma famille pour leur soutien constant au cours de ces longues années. Et puis surtout, un énorme merci à Guillaume, pour tout, plus que tout.

Table des matières

1	Introduction	7
1.1	Le champ magnétique terrestre	7
1.1.1	Observations et modèles magnétiques	8
1.1.2	Le champ magnétique principal et ses variations temporelles	9
1.2	La dynamique du noyau	10
1.2.1	Les modélisations	10
1.2.2	Les «observations» des mouvements à la surface du noyau	11
1.3	Organisation du mémoire	12
2	Des observations magnétiques aux mouvements de la surface du noyau	15
2.1	Bases théoriques	15
2.1.1	Équations et hypothèses	15
2.1.2	Mouvements visibles et invisibles	18
2.2	Méthode spectrale	22
2.2.1	Formulation dans le domaine spectral	22
2.2.2	Résolution du problème inverse	25
2.3	Méthode locale	27
2.3.1	Intégration locale de la pression	28
2.3.2	Contraintes pratiques	29
3	Mouvements historiques, comparaison des méthodes spectrale et locale	31
3.1	Reconstruction des mouvements à la surface du noyau depuis 1590	31
3.1.1	Modèle magnétique historique de Jackson <i>et al.</i>	31
3.1.2	Paramètres utilisés lors des inversions	32
3.1.3	Séries temporelles obtenues	35
3.2	Interprétation des désaccords entre les deux séries temporelles	35
3.2.1	Caractérisation des désaccords locaux existants	38
3.2.2	Tests synthétiques	40
3.3	Conclusions : dynamique de surface du noyau depuis 400 ans	48
4	Mouvements actuels, structures fiables à la surface du noyau	51
4.1	Observations magnétiques satellitaires	51
4.1.1	Satellites magnétiques	51
4.1.2	Modèle de variation séculaire différentielle	52
4.1.3	Modèles de variation séculaire instantanée	53
4.2	Nouvelle méthode de choix des paramètres de l'inversion	54
4.2.1	Incertitudes associées aux modèles de variation séculaire	54
4.2.2	Champs de vitesse obtenus avec la procédure classique	55

4.2.3	Incohérence des champs de vitesses issus de la procédure classique	57
4.2.4	Modèles cohérents des mouvements à la surface du noyau	59
4.3	Fiabilité des structures des modèles de mouvement	62
4.3.1	Méthodologie	62
4.3.2	Caractérisation moyenne de l'erreur de troncature	63
4.3.3	Répartition spatiale de l'erreur de troncature	63
4.4	Structures dynamiques fiables à la surface du noyau	67
5	Discussion géophysique	73
5.1	Autres modèles de mouvements à la surface du noyau	73
5.2	Implications pour la dynamique actuelle du noyau	78
5.2.1	Dérive vers l'Ouest	78
5.2.2	Dynamique globale du noyau	78
5.2.3	Dynamique dans le cylindre tangent	81
5.2.4	Mouvements zonaux	83
5.3	Jerks et mouvements	87
6	Une méthode pour le futur : l'assimilation variationnelle de données	95
6.1	Vers l'inversion de dynamos numériques	95
6.1.1	Motivations à long terme	95
6.1.2	Méthodes d'assimilation de données	96
6.1.3	Premier objectif : séries temporelles de mouvements à la surface du noyau	98
6.2	Implémentation de la méthode	100
6.2.1	Principe général	101
6.2.2	Calcul du gradient de la fonction coût grâce aux modèles adjoints	102
6.2.3	Expression des modèles adjoints dans un cas unidimensionnel	106
6.2.4	Comportement de la méthode	109
6.3	Perspectives	117
6.4	Annexes	120
	Conclusions	125
	Bibliographie	129
A	Génération des champs synthétiques aléatoires	137
A.1	Petites échelles du champ magnétique	137
A.2	Mouvements à la surface du noyau	138
A.2.1	Mouvements non-géostrophiques	138
A.2.2	Mouvements géostrophiques	138
A.3	Variation séculaire bruitée	139
B	Small-scale structure of the geodynamo inferred from Oersted and Magsat satellite data	141

Chapitre 1

Introduction

«Dans certaines géométries, des écoulements de fluides conducteurs, tels que le fer liquide, peuvent engendrer des courants électriques qui créent, à leur tour, des champs magnétiques, lesquels renforcent les courants qui leur ont donné naissance, et ainsi de suite.»

Jault et al. [2004] résument ainsi le mécanisme de la dynamo terrestre, à l'origine de la plus grande partie du champ magnétique observé à la surface de la planète. Si ce mécanisme est aujourd'hui majoritairement accepté, de nombreuses questions restent encore sans réponse. Comment ce phénomène est-il apparu? Pourquoi le champ magnétique créé est-il presque identique à celui d'un dipôle légèrement incliné par rapport à l'axe de rotation terrestre? Pourquoi ce champ s'est-il inversé de nombreuses fois au cours de l'histoire de la Terre?

Notre ambition n'est pas de trouver une réponse exhaustive et définitive à ces grandes questions. Plus modestement, nous cherchons à déterminer les mouvements à la surface du noyau compatibles avec le champ magnétique observé à la surface terrestre. Il est ensuite possible de chercher les mouvements, dans le volume du noyau, compatibles avec nos reconstructions surfaciques. Enfin, les processus permettant de générer un champ magnétique à partir de tels mouvements pourraient être étudiés. Mais cette dernière étape, qui ne suffirait probablement pas pour répondre aux questions évoquées, ne fait déjà plus partie des études présentées dans ce mémoire.

1.1 Le champ magnétique terrestre

Le noyau est à l'origine d'environ 99% du champ magnétique observé à la surface de la Terre. L'intensité de ce champ, appelé champ principal, est d'environ 60000 nT aux pôles et 30000 nT à l'équateur. Les roches aimantées de la croûte terrestre constituent l'autre source du champ interne. En moyenne, l'intensité de ce champ crustal est très inférieure à celle du champ principal (de l'ordre de 100 nT), mais elle peut localement atteindre quelques milliers de nT. À ce champ interne s'ajoute un champ d'origine externe, créé par des courants de particules chargées dans l'ionosphère et la magnétosphère. L'intensité de ces champs magnétiques externes est très variable, elle peut passer d'environ 40 nT en période calme à près de 2000 nT pendant

les orages magnétiques Chapman et Bartels [*e.g.* 1962].

Du fait des différentes sources participant au champ magnétique terrestre, il n'est pas possible d'utiliser des mesures magnétiques *brutes* pour essayer de caractériser la dynamique du noyau. C'est pourquoi, tout au long de ce manuscrit, nous utilisons des *modèles* magnétiques, permettant de séparer, au mieux, les contributions des différentes sources, plutôt que des *observations* magnétiques.

1.1.1 Observations et modèles magnétiques

Actuellement, il existe deux grandes familles d'observations magnétiques : les observations terrestres, effectuées principalement dans les observatoires magnétiques, et les observations spatiales, réalisées par des magnétomètres embarqués à bord de satellites. La connaissance du champ magnétique terrestre a très largement bénéficié de l'apport de ces satellites. Ils permettent en effet de déterminer le champ avec une résolution spatiale bien meilleure que les seules observations terrestres, qui ne couvrent qu'une faible portion de la surface du globe (figure 1.1).

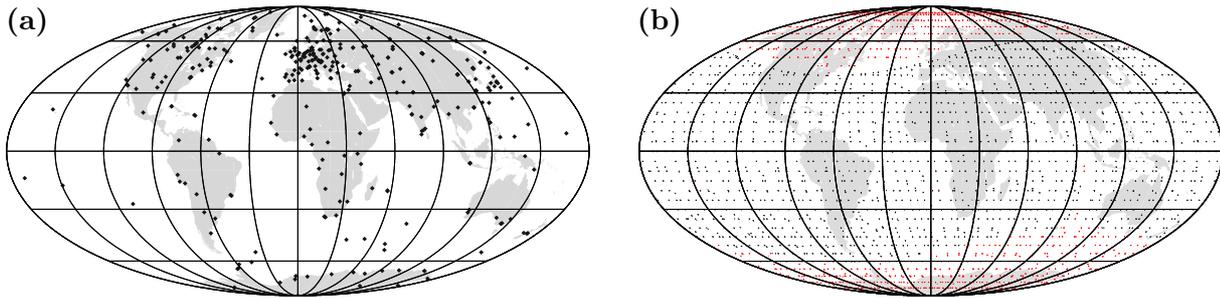


FIG. 1.1 – *Apport des satellites magnétiques pour la résolution spatiale du champ magnétique. (a) Localisation des 138 observatoires magnétiques ayant effectué des mesures continues pendant au moins 5 années consécutives [Chambodut, comm. pers.]. (b) Couverture satellitaire : observations vectorielles (points noirs) et scalaires (points rouges) du satellite Ørsted (février-mars 2001) sélectionnées pour l'estimation d'un modèle magnétique [Rouby, comm. pers.].*

Afin d'obtenir un modèle du champ magnétique interne, il est nécessaire d'isoler la contribution des sources externes. Les courants électriques à l'origine du champ externe, sont principalement contrôlés par le soleil, du fait de l'ensoleillement et du vent solaire (qui est un flux de particules chargées). De ce fait, une partie du champ externe peut être éliminée en utilisant des observations effectuées pendant les périodes magnétiquement calmes (de nuit, en absence d'orage magnétique). À partir des mesures ainsi sélectionnées, un modèle magnétique peut être construit. Ceci signifie traditionnellement chercher le jeu de coefficients, appelés coefficients de Gauss, permettant au développement en harmoniques sphériques du champ de reproduire, au mieux, les observations sélectionnées. Le champ magnétique dérivant d'un potentiel harmonique, l'utilisation de cette décomposition permet de séparer les sources d'origine interne et externe et de filtrer ainsi les grandes échelles spatiales résiduelles du champ externe (ou seulement de la contribution magnétosphérique pour les observations des satellites, ceux-ci étant situés au-dessus de l'ionosphère). Les coefficients de Gauss obtenus permettent d'estimer le champ en dehors des

points de mesure et de disposer ainsi d'un modèle global du champ magnétique d'origine interne (figure 1.2).

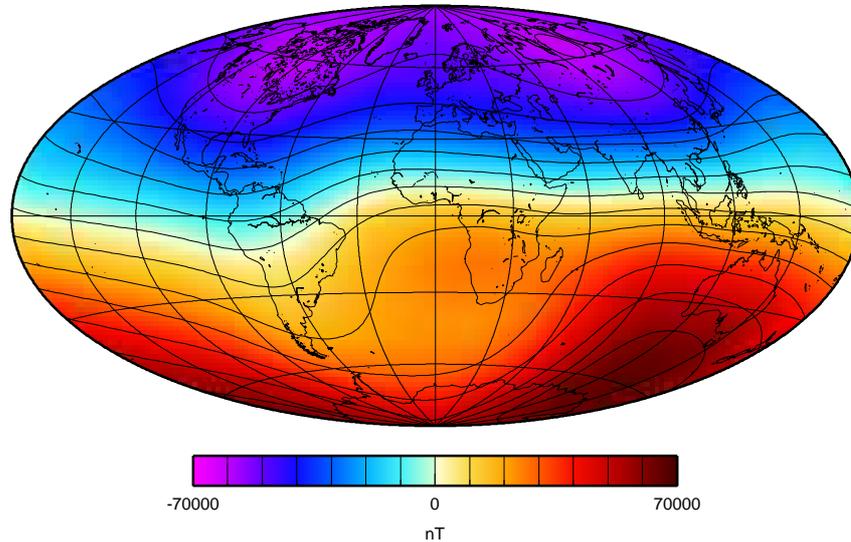


FIG. 1.2 – *Champ magnétique radial d'origine interne à la surface de la Terre en 2001 (modèle magnétique de Olsen et al. [2002]). En pratique, seul le champ issu du noyau est visible, celui-ci masquant le champ crustal (figure 1.3).*

1.1.2 Le champ magnétique principal et ses variations temporelles

Nous intéressant à la dynamique du noyau, il nous reste encore à filtrer les contributions du champ magnétique crustal présentes dans les modèles de champ magnétique interne. Ceci peut s'effectuer en ne conservant que les grandes échelles spatiales du champ interne. Le spectre d'énergie de ce champ (figure 1.3) possède en effet une transition nette autour du degré 14 de la décomposition en harmoniques sphériques qui est interprétée comme la *limite* entre le champ du noyau et le champ crustal [Langel et Estes, 1982]. Il s'agit plus exactement des échelles spatiales autour desquelles la contribution du noyau devient inférieure à la contribution de la croûte. Dans les études présentées dans ce manuscrit, les modèles géomagnétiques seront ainsi toujours utilisés jusqu'au degré 13. Évidemment, ceci n'élimine pas toute contribution de la croûte mais assure néanmoins que le champ principal soit dominant.

Les études paléomagnétiques, archéomagnétiques et les observations magnétiques récentes montrent que le champ magnétique principal varie sur une très large gamme de périodes [*e.g.* Merrill et al., 1998]. Nous ne serons néanmoins confrontés au cours de ce mémoire qu'aux variations se produisant sur des périodes inférieures à la centaine d'années. La variation «séculaire» du champ principal, observée depuis environ 400 ans grâce à des mesures terrestres et maintenant satellitaires, est produite par l'action des mouvements du noyau sur le champ magnétique. Elle est utilisée dans toutes les études présentées dans ce manuscrit pour reconstruire les mouvements à la surface du noyau. La variation séculaire du champ principal est elle-même affectée de «secousses» rapides appelées *jerks*. Les phénomènes à l'origine de ces événements rapides restent pour l'instant inconnus. Dans le chapitre 5 (§5.3), nous montrons que ces jerks ont une signature

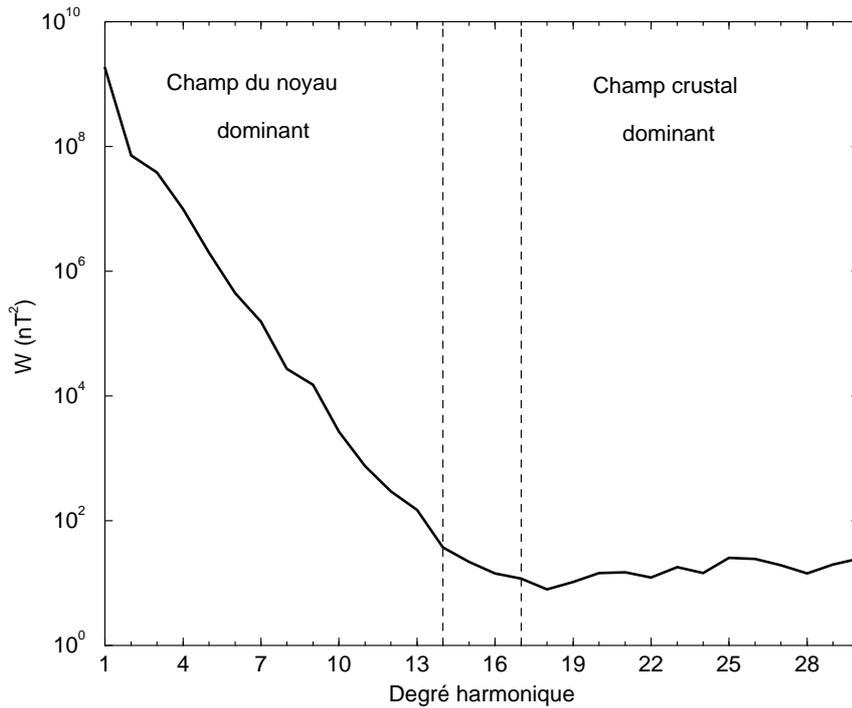


FIG. 1.3 – Spectre d'énergie du champ magnétique d'origine interne à la surface de la Terre (spectre du modèle représenté dans la figure 1.2). Le spectre d'énergie W est défini par $W(n) = (n + 1) \sum_{m=0}^n ((g_n^m)^2 + (h_n^m)^2)$, g_n^m et h_n^m étant les coefficients de Gauss de degré n et d'ordre m (§2.2.1).

dynamique très claire à la surface du noyau.

1.2 La dynamique du noyau

Dans ce travail nous essayons de contraindre la dynamique du noyau en reconstituant les mouvements du fluide à la surface de celui-ci. Afin d'interpréter les résultats *surfaci*ques obtenus, il est indispensable de les comparer aux différentes expériences et simulations modélisant la dynamique *tridimensionnelle* du noyau.

1.2.1 Les modélisations

Du fait de la complexité et de la diversité des phénomènes à prendre en compte pour modéliser la géodynamo, il n'existe à l'heure actuelle ni expérience, ni simulation numérique dont les résultats sont directement applicables au noyau terrestre. Il faut donc se contenter d'études se focalisant sur une partie des phénomènes en jeu. Nous présentons ici un bref aperçu des différents types de mouvements pouvant être actifs dans le noyau, le chapitre 5 (§5.2) en donnant une description plus détaillée.

Les études de convection dans une sphère en rotation rapide mettent en évidence les fortes

contraintes imposées aux mouvements par la rotation rapide de la Terre. La rotation impose en effet une rigidité axiale aux mouvements qui varient très peu parallèlement à l'axe de rotation terrestre. Au seuil de convection, les mouvements s'organisent ainsi en colonnes de convection parallèles à l'axe de rotation [Busse, 1970] (figure 1.4a). D'autres mouvements rigides prenant la forme de cylindres centrés sur l'axe de rotation terrestre peuvent coexister avec ces colonnes (figure 1.4b).

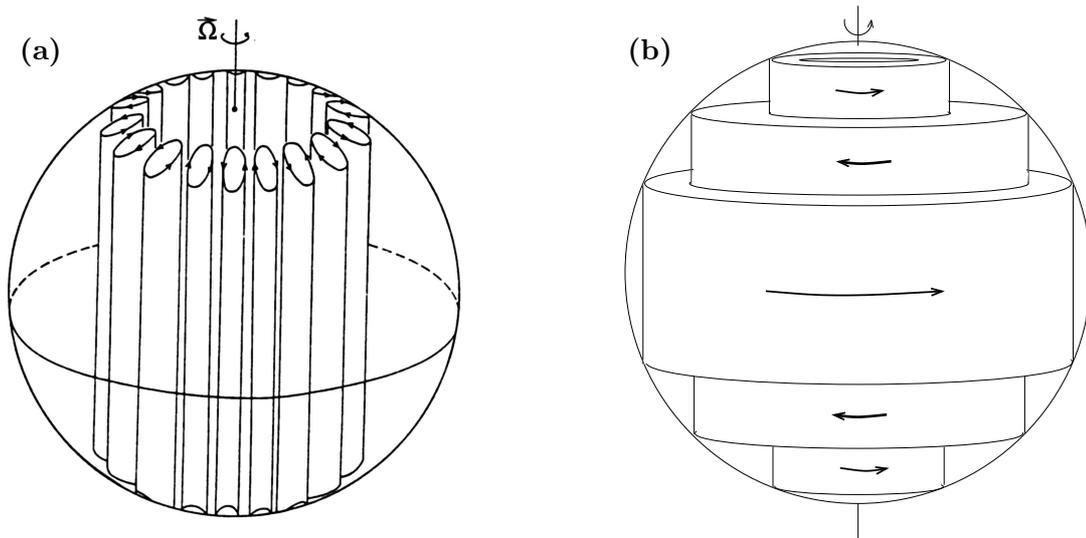


FIG. 1.4 – *Mouvements de convection rigides apparaissant dans une sphère en rotation rapide. (a) Colonnes de convection. (b) Cylindres axiaux.*

Dans le noyau terrestre, les mouvements subissent en plus l'influence du champ magnétique. Les modélisations numériques de la géodynamo, dans lesquelles les forces visqueuses ont un rôle beaucoup plus important que dans le noyau, montrent que des colonnes de convection plus ou moins rigides peuvent exister [e.g. Olson et Aurnou, 1999] et que les mouvements en cylindre axiaux sont toujours possibles. Une famille de mouvements rigides, connue sous le nom d'oscillations de torsion, peut également apparaître du fait de la présence du champ magnétique [Braginsky, 1970]. Il s'agit de mouvements de morphologie analogue à celle des cylindres axiaux, mais avec des oscillations temporelles de la vitesse de rotation de chaque cylindre.

1.2.2 Les «observations» des mouvements à la surface du noyau

Plutôt que d'observations, il conviendrait mieux de parler d'interprétations des modèles du champ magnétique en terme de mouvements à la surface du noyau. Il s'agit en effet de déterminer les mouvements qui, en agissant sur le champ magnétique à la surface du noyau, permettent d'expliquer au mieux la variation séculaire observée. Ceci nécessite donc d'estimer le champ principal à la surface du noyau. Le manteau ne contenant pas de sources magnétiques, ce prolongement vers le bas est possible (§2.1.1). La figure 1.5 montre le champ magnétique à la surface du noyau ainsi estimé. Le chapitre 2 étant consacré à une description détaillée des méthodes de reconstruction des mouvements à la surface du noyau et des différentes hypothèses qu'elles impliquent, nous ne développons pas ce sujet plus avant ici.

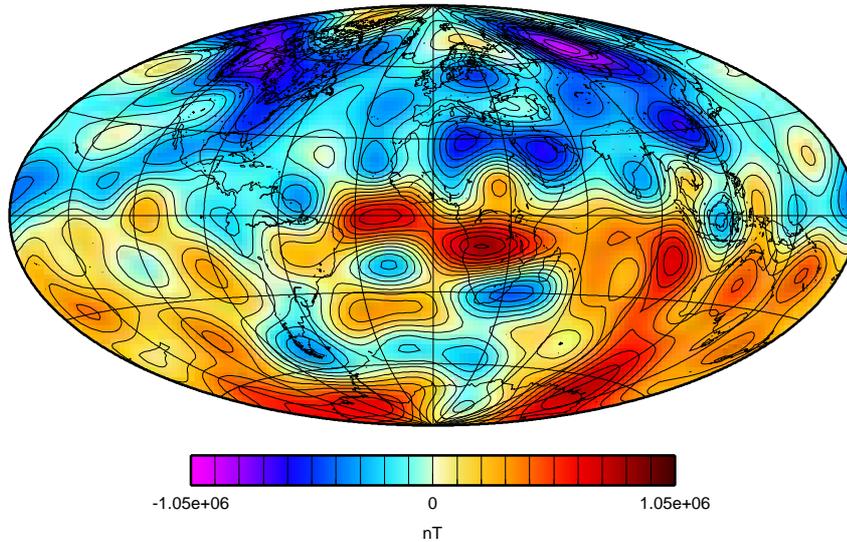


FIG. 1.5 – *Champ magnétique radial à la surface du noyau en 2001 (modèle magnétique de Olsen et al. [2002]).*

Les reconstructions des mouvements à la surface du noyau reposant sur de nombreuses hypothèses, leur validité peut être facilement contestée. Nous rappelons simplement ici que le meilleur argument en leur faveur tient dans leur capacité à expliquer les variations de la longueur du jour ayant lieu sur des périodes décennales [Jault et al., 1988; Jackson et al., 1993; Pais et Hulot, 2000]. À l'inverse des variations plus rapides, ces variations décennales ne peuvent en effet pas résulter d'échanges de moment cinétique entre le manteau et les enveloppes superficielles fluides.

Dans ce mémoire nous essayons de tirer parti de modèles magnétiques récents afin de contraindre les mouvements à la surface du noyau. Nous utilisons ainsi le modèle magnétique historique de Jackson et al. [2000] qui fournit une estimation du champ magnétique principal au cours des 400 dernières années. Par ailleurs, nous utilisons également des modèles issus des observations satellitaires récentes. Ces deux approches sont complémentaires. On peut en effet espérer étudier l'évolution temporelle des mouvements à la surface du noyau depuis le 17^{ème} siècle avec la première, tandis que la seconde devrait nous permettre d'obtenir la meilleure estimation possible des mouvements actuels et de raffiner ainsi les modèles de mouvements antérieurs (figure 1.6).

1.3 Organisation du mémoire

Le chapitre 2 est consacré à la présentation des méthodes et des hypothèses utilisées dans ce travail afin d'estimer les mouvements à la surface du noyau. Deux méthodes indépendantes, la méthode spectrale et la méthode locale, sont détaillées.

Les comportements de ces deux méthodes sont ensuite comparés en utilisant le modèle magnétique historique de Jackson et al. [2000] (chapitre 3). Des tests synthétiques sont également

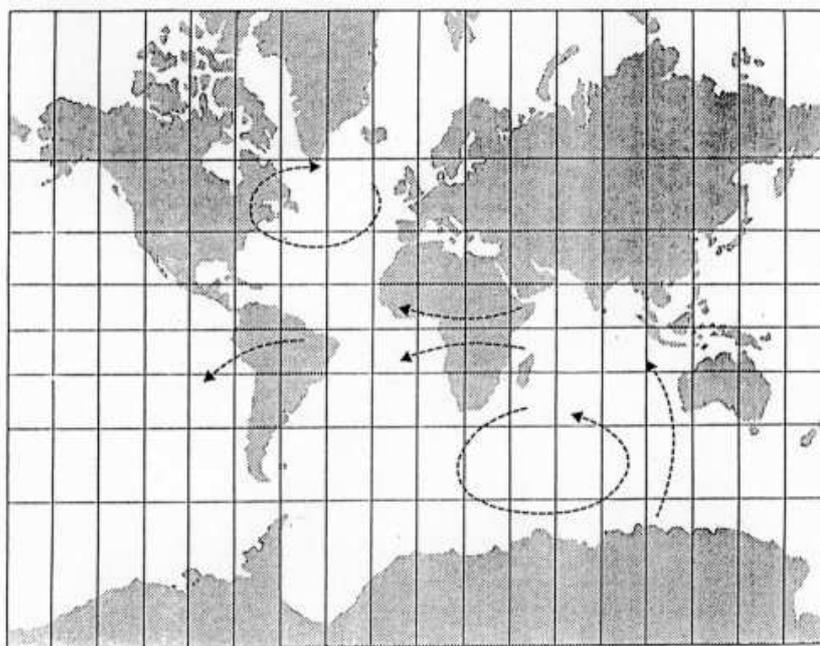


FIG. 1.6 – Cartes synthétisant les grands traits des mouvements à la surface du noyau admis par la plupart des équipes en 1990 [Jault, 1990].

effectués afin de tester la validité respective des deux méthodes de reconstruction.

Dans le chapitre suivant, les mouvements actuels sont estimés grâce à l'utilisation de modèles magnétiques satellitaires. Une méthode permettant de prendre en compte l'excellente résolution spatiale de la variation séculaire est mise en place. Une nouvelle série de tests synthétiques est également effectuée afin d'évaluer la fiabilité des différentes structures dynamiques présentes dans le modèle de mouvement obtenu.

Ce modèle des mouvements actuels est comparé à d'autres modèles récents au début du chapitre 5. Dans la suite de ce même chapitre, les différents mouvements obtenus dans les chapitres 3 et 4 sont confrontés à des études traitant de la dynamique dans le volume du noyau. L'accent est mis sur la recherche d'éventuelles colonnes de convections et de mouvements en cylindres rigides, temporellement stables et oscillants. Il est également question de la dynamique se produisant dans le cylindre tangent à la graine. Enfin, nous cherchons l'expression des jerks géomagnétiques dans la série temporelle des mouvements historiques à la surface du noyau.

Pour finir, le chapitre 6 pose les bases d'une technique d'assimilation variationnelle de données qui pourrait être utilisée, non seulement pour le calcul de séries temporelles cohérentes des mouvements à la surface du noyau, mais également afin d'essayer de contraindre certains processus dynamiques profonds du noyau.

Chapitre 2

Des observations magnétiques aux mouvements de la surface du noyau

Enfoui sous presque 3000 km de manteau, le noyau liquide de la Terre n'est pas accessible à l'observation directe. Son observation *à distance* est possible grâce à l'étude des ondes sismiques l'ayant traversé. Malheureusement, ces ondes ne fournissent actuellement que des indications sur sa structure moyenne et n'apportent de ce fait pas d'information sur sa dynamique interne.

Deux phénomènes observables à la surface de la Terre contiennent néanmoins des informations indirectes sur la dynamique du noyau externe. Les mouvements du noyau sont tout d'abord susceptibles de perturber la rotation terrestre. Ces mouvements peuvent en effet être à l'origine de couples appliqués au manteau terrestre et modifier ainsi son moment cinétique. Les irrégularités de la rotation terrestre observées contiennent donc des informations sur la dynamique du noyau. D'autres informations sur cette dynamique sont contenues dans le champ magnétique principal de la Terre, qui est généré par les mouvements du noyau liquide.

Dans cette thèse, nous utilisons des mesures du champ magnétique terrestre et de ses variations afin de reconstruire les mouvements de la surface du noyau. Le but de ce chapitre est de présenter les méthodes utilisées à cette fin.

2.1 Bases théoriques

2.1.1 Équations et hypothèses

Les modifications du champ magnétique \mathbf{B} à l'intérieur du noyau sont décrites par l'équation de l'induction magnétique qui découle des équations de Maxwell pour un conducteur en mouvement [*e.g.* Gubbins et Roberts, 1987, pp. 16–20]:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (2.1)$$

où η est la diffusivité électrique du noyau. En tout point du noyau, le champ magnétique peut ainsi être modifié par l'action des mouvements \mathbf{u} du fluide conducteur sur les lignes de champ

(terme $\nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{B})$) et par diffusion magnétique ($\eta \nabla^2 \mathbf{B}$). Si \mathbf{B} et ses variations temporelles étaient connus en tout point du noyau, il pourrait être possible d'en déduire le champ de vitesse \mathbf{u} du fluide. Malheureusement, il n'est pas possible de mesurer \mathbf{B} à l'intérieur du noyau, et seules des mesures à la surface ou à l'extérieur de la Terre sont réalisables.

Hypothèse du manteau isolant

Dans une région dépourvue de sources magnétiques, le champ \mathbf{B} dérive d'un potentiel harmonique. Ceci impose de fortes contraintes sur sa géométrie. En particulier, la connaissance de \mathbf{B} sur une surface fermée contenant les sources permet de connaître \mathbf{B} partout, sauf à l'intérieur des sources [*e.g.* Blakely, 1995]. Il est donc théoriquement possible de définir parfaitement le champ principal \mathbf{B} à la base du manteau si l'on considère que le manteau est totalement isolant et que les sources crustales ne perturbent pas les grandes longueurs d'ondes du champ magnétique issu du noyau (§1.1.2). Comme par ailleurs la composante radiale de \mathbf{B} est continue à travers la limite noyau-manteau [*e.g.* Gubbins et Roberts, 1987, pp. 21, 109, 143], la valeur de B_r à la surface du noyau peut être déduite des mesures du champ magnétique à la surface de la Terre.

Cette hypothèse de manteau isolant est relativement raisonnable puisque les estimations de la conductivité électrique du manteau varient entre 0.1 S.m^{-1} à son sommet et $10\text{-}20 \text{ S.m}^{-1}$ à sa base [Xu et al., 2000]. D'éventuelles infiltrations du liquide conducteur du noyau dans le manteau ne semblent pas à même de modifier significativement ces estimations [Poirier et Le Mouél, 1992, p. 267].

En considérant que le manteau est isolant, nous avons donc accès aux valeurs de B_r à la surface du noyau. Il faut aussi garder à l'esprit que le prolongement vers le bas du champ observé en surface, renforçant les courtes longueurs d'onde, est un processus relativement instable, puisque susceptible de propager et d'accentuer les erreurs de mesures de surface [*e.g.* Blakely, 1995, p. 319]. Notons que le terme *surface du noyau* que nous utilisons désigne en fait plus rigoureusement la région située juste sous la couche limite visqueuse du sommet du noyau, cette couche limite étant considérée très peu épaisse et transparente pour le champ magnétique [*e.g.* Chulliat, 2000]. Nous considérons de plus que le fluide *libre* du noyau ne peut pas pénétrer cette couche limite. La vitesse \mathbf{u} est de ce fait purement tangentielle à la surface du noyau. La composante radiale de l'équation (2.1) d'induction à la surface du noyau devient ainsi :

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -\nabla_H \cdot (\mathbf{u} B_r) + \frac{\eta}{r} \nabla^2 (r B_r), \quad (2.2)$$

$\nabla_H \cdot (\mathbf{u} B_r)$ étant la composante horizontale de la divergence $\nabla \cdot (\mathbf{u} B_r)$.

Hypothèse du flux gelé

Le terme de diffusion de l'équation (2.2) est problématique puisqu'il fait intervenir la dérivée verticale de B_r qui ne sont pas accessibles à partir des mesures de surface. Il semble toutefois raisonnable de penser que ce terme diffusif peut être négligé près de la surface du noyau pour

des échelles temporelles plus courtes que le temps diffusif du noyau qui est de l'ordre de 10^4 ans [e.g. Gubbins et Roberts, 1987, p. 104]. Cette hypothèse, dite du *flux gelé* [Roberts et Scott, 1965], permet d'obtenir l'équation de la variation séculaire :

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -\nabla_H \cdot (\mathbf{u} B_r). \quad (2.3)$$

Ainsi, sous les hypothèses déjà mentionnées, les variations du champ magnétique observées en surface résultent uniquement de l'action des mouvements du fluide sur le champ magnétique à la surface du noyau. Cette seule équation n'est néanmoins pas suffisante pour reconstruire \mathbf{u} à partir des observations de la variation séculaire puisqu'elle contient deux inconnues : les deux composantes horizontales de \mathbf{u} . Des contraintes supplémentaires sur la nature du mouvement sont donc nécessaires.

Hypothèse du mouvement tangentiellement géostrophique

Plusieurs hypothèses sur la nature du mouvement sont envisageables. Dans cette étude, nous utilisons l'hypothèse du mouvement tangentiellement géostrophique [Le Mouél, 1984; Backus et Le Mouél, 1986] qui découle de considérations sur les ordres de grandeur des différents termes intervenant dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement du fluide dans le noyau¹. Pour un fluide conducteur en rotation rapide, l'équation de Navier-Stokes dans le cadre de l'approximation de Boussinesq peut s'écrire [voir par exemple Gubbins et Roberts, 1987, pp. 5–16] :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + (\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}) - 2\rho(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \Delta \rho \mathbf{g}, \quad (2.4)$$

ρ étant la masse volumique du fluide.

L'ordre de grandeur des termes d'inertie $(\partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})$ de l'équation (2.4) est largement inférieur à celui associé à la force de Coriolis $(2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u})$ engendrée par la rotation terrestre $\boldsymbol{\Omega}$. Dimensionnellement, le rapport entre ces deux termes est en effet de l'ordre de $U/(L\Omega)$. Ainsi, même pour des échelles spatiales L aussi petites que 100 km, il faudrait des vitesses U de l'ordre de 40000 km/an pour que ce rapport soit de l'ordre de l'unité². Par ailleurs, la viscosité du noyau étant très faible, de l'ordre de 10^3 Pa s [Poirier, 2000], les termes visqueux $(\mu \nabla^2 \mathbf{u})$ sont eux-aussi négligeables pour les grandes échelles spatiales.

L'ordre de grandeur de la force de Lorentz $((\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}), \mathbf{j}$ étant la densité de courant électrique) est plus difficile à contraindre. En effet, dans le volume du noyau cette force n'est certainement pas négligeable et joue un rôle important dans la génération du champ magnétique [Jault et Le

1. D'autres hypothèses ont été envisagées afin de contraindre les mouvements de la surface du noyau. On peut notamment citer l'hypothèse des mouvements stratifiés ou toroïdaux (pas de mouvements radiaux sous la surface, $\nabla_H \cdot \mathbf{u} = 0$) [e.g. Whaler, 1982], celle des mouvements constants pendant une période de temps donnée [e.g. Gubbins, 1982; Voorhies et Backus, 1985] ou encore celle des mouvements stables dans un repère en rotation [Holme et Whaler, 2001]

2. Les estimations de vitesses à la surface du noyau obtenues en négligeant ainsi les termes d'inertie, et qui ne permettent pas d'atteindre des échelles spatiales aussi petites, indiquent des vitesses maximales à la surface du noyau de l'ordre de 50 km/an (chapitre 4).

Mouël, 1991]. L'estimation précise du rapport entre les ordres de grandeur de cette force et de la force de Coriolis à la surface du noyau nécessite de connaître la composante horizontale de \mathbf{B} à la surface du noyau, ce qui n'est malheureusement pas possible à partir des observations de surface³. Les estimations de ce rapport varient ainsi entre $5 \cdot 10^{-4}$ et $5 \cdot 10^{-2}$ en utilisant respectivement l'amplitude du champ poloïdal ou cent fois cette amplitude comme estimation de la composante horizontale du champ magnétique à la surface du noyau [Chulliat, 2000]. Dans les deux cas, ce rapport reste relativement faible et ceci semble permettre de négliger la contribution de la force de Lorentz. On peut aussi avancer que cette force étant nulle dans le manteau isolant, il faut bien qu'elle décroisse près de la surface du noyau afin de satisfaire les conditions aux limites. La poussée d'Archimède ($\Delta\rho\mathbf{g}$), liée aux hétérogénéités de densité et à l'origine des mouvements, ne peut-être négligée, mais elle n'intervient que dans la direction radiale.

La composante horizontale de l'équation de Navier-Stokes à la surface du noyau peut donc se réduire à un équilibre entre la force de Coriolis et le gradient de pression appelé équilibre géostrophique :

$$\nabla_{HP} = -2\rho(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u})_H. \quad (2.5)$$

Cet équilibre peut également s'écrire sous les deux formes équivalentes suivantes :

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2\rho\Omega \cos\theta} \mathbf{n} \wedge \nabla_{HP} \quad (2.6)$$

$$\nabla_H \cdot (\mathbf{u} \cos\theta) = 0, \quad (2.7)$$

\mathbf{n} étant un vecteur radial unitaire et θ la colatitude du point considéré. L'équation (2.6) montre que sous l'hypothèse géostrophique le mouvement est perpendiculaire au gradient de pression. Il est donc tangent aux lignes d'isovaleur de p (isobares)⁴. L'équation (2.7) montre quant à elle plus clairement l'apport de cette hypothèse géostrophique à la reconstruction des mouvements à la surface du noyau puisqu'avec l'équation (2.3) elles constituent un système de deux équations à deux inconnues (les deux composantes horizontales de \mathbf{u}).

Notons toutefois que l'équilibre géostrophique ne peut être valable à proximité de l'équateur où la force de Coriolis est nulle. Dans cette région, le gradient de pression est vraisemblablement équilibré par la force de Lorentz [Chulliat et Hulot, 2000].

2.1.2 Mouvements visibles et invisibles

Les méthodes de reconstruction des mouvements à la surface du noyau se basent sur l'équation (2.3) pour reconstruire le mouvement du fluide \mathbf{u} à partir des modifications du champ magnétique radial B_r enregistrées à la surface de la Terre. Il peut néanmoins exister des mouvements qui ne soient pas restructuribles, soit parce qu'ils ne sont pas contraints par les équations

3. Hulot et Chulliat [2003] présentent une méthode permettant théoriquement d'estimer la force de Lorentz à la surface du noyau. Cette méthode nécessite toutefois de supposer que la diffusion magnétique est totalement nulle. À notre connaissance, elle n'a pas encore été mise en pratique.

4. Ce lien entre la vitesse et le gradient de pression est identique à l'équilibre géostrophique de l'atmosphère où le vent de grande échelle est tangent aux isobares [*e.g.* Pedlosky, 1987, pp. 45–53].

(2.3) et (2.7), soit parce que les modifications du champ magnétique qu'ils génèrent ne sont pas observables depuis la surface de la Terre. Nous étudions maintenant quels peuvent être ces mouvements *invisibles*.

Mouvements non-contraints

Développons maintenant l'équation (2.3) afin de chercher s'il peut exister un mouvement ne modifiant pas B_r à la surface du noyau :

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla_H B_r - B_r \nabla_H \cdot \mathbf{u} . \quad (2.8)$$

Sous cette forme, on voit qu'en un point donné, les modifications de B_r sont liées à son transport à la surface du noyau par le fluide ($\mathbf{u} \cdot \nabla_H B_r$) et à la divergence horizontale de la vitesse ($B_r \nabla_H \cdot \mathbf{u}$). Cette divergence est liée à la présence de mouvements radiaux sous la surface puisque $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ pour un fluide incompressible. La figure 2.1 illustre ces deux modes de modification de B_r par \mathbf{u} .

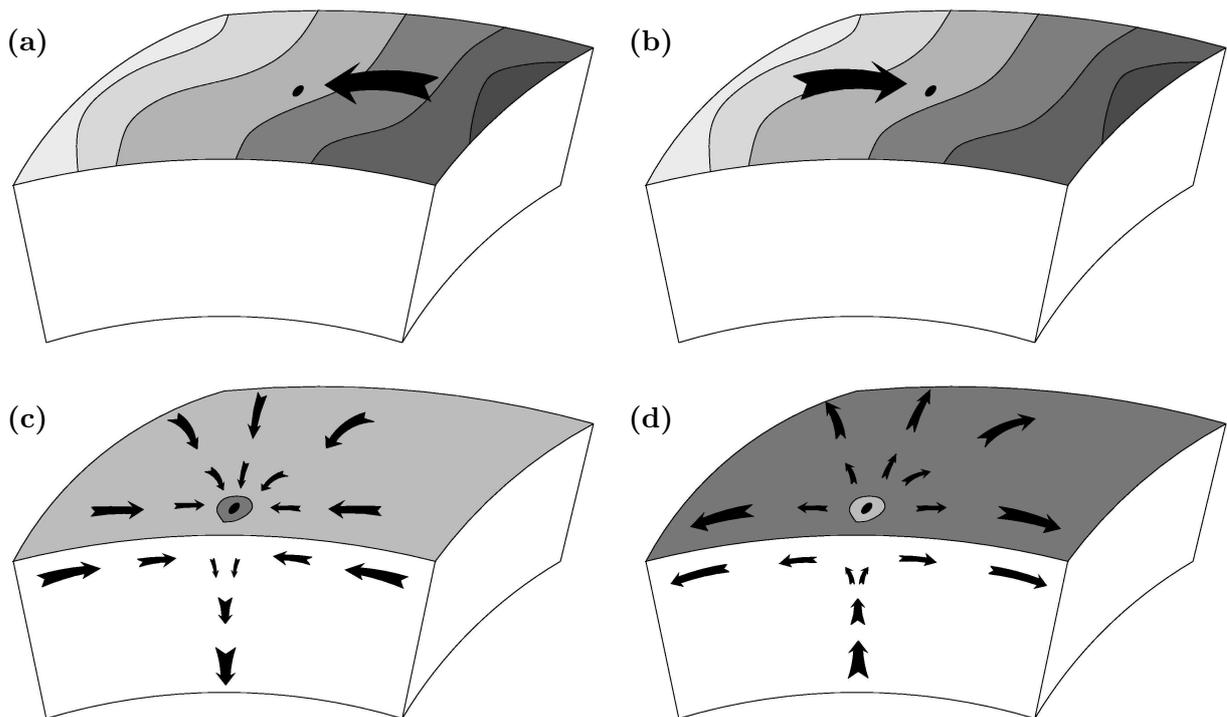


FIG. 2.1 – Mécanismes de modification du champ magnétique radial B_r en un point fixe de la surface du noyau. (a) Augmentation de B_r par advection. (b) Diminution de B_r par advection. (c) Augmentation de B_r par convergence horizontale du champ de vitesse. (d) Diminution de B_r par divergence horizontale du champ de vitesse. B_r est considéré positif et augmente du gris clair au gris foncé. Le champ de vitesse est représenté par les flèches noires, la pastille noire représente le point fixe considéré à la surface du noyau considéré.

Le terme d'advection de l'équation (2.8) est nul si la vitesse est perpendiculaire au gradient horizontal de B_r , c'est-à-dire si le mouvement est parallèle aux lignes iso- B_r . Le terme lié à la

divergence du mouvement s'annule si B_r est lui-même égal à zéro ou si la divergence horizontale de la vitesse est nulle, ce qui correspond au cas où le noyau est complètement stratifié sous sa surface. Ainsi, dans l'hypothèse du flux gelé, un mouvement parallèle à la courbe d'isovaleur $B_r = 0$ est un mouvement invisible. Avec l'hypothèse d'un mouvement toroïdal, correspondant à un noyau stratifié sous sa surface ($\nabla_H \cdot \mathbf{u} = 0$), un mouvement le long de n'importe quelle iso- B_r serait invisible. Ce n'est pas le cas dans l'hypothèse de mouvement tangentiellement géostrophique que nous avons choisie.

Après quelques manipulations, l'équation (2.8) peut s'écrire de manière équivalente sous la forme :

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = \cos \theta \mathbf{u} \cdot \nabla_H \left(\frac{B_r}{\cos \theta} \right) - B_r \nabla_H \cdot (\mathbf{u} \cos \theta). \quad (2.9)$$

Un mouvement tangentiellement géostrophique, pour lequel $\nabla_H \cdot (\mathbf{u} \cos \theta) = 0$, et perpendiculaire au gradient horizontal de $B_r / \cos \theta$ ne modifie donc pas B_r à la surface du noyau. Sous cette hypothèse, un mouvement le long des lignes iso- ζ est donc un mouvement invisible, ζ étant défini comme la quantité $B_r / \cos \theta$. Les courbes iso- ζ sont des courbes matérielles, emportées par le fluide. Ceci se voit aisément en combinant les équations (2.9) et (2.7) :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \mathbf{u} \cdot \nabla_H \zeta = \frac{d\zeta}{dt} = 0, \quad (2.10)$$

d/dt étant la dérivée dans un repère fixé à la particule de fluide considérée.

En se contentant de ceci, seule la composante du mouvement perpendiculaire aux courbes iso- ζ pourrait donc être déterminée, laissant donc une grande indétermination sur les mouvements de la surface du noyau. Revenons néanmoins sur l'hypothèse du mouvement tangentiellement géostrophique. L'équation (2.8) peut également se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -\frac{1}{2\rho\Omega} (\mathbf{n} \wedge \nabla_H \zeta) \cdot \nabla_H p, \quad (2.11)$$

ou encore :

$$\|\nabla_\zeta p\| = -\frac{2\rho\Omega}{\|\mathbf{n} \wedge \nabla_H \zeta\|} \frac{\partial B_r}{\partial t}, \quad (2.12)$$

∇_ζ étant le gradient le long d'une iso- ζ . La pression p peut donc être connue, à une constante près, sur toute courbe iso- ζ par intégration de (2.12) le long de cette courbe. Cette propriété est intéressante du fait de la morphologie particulière de certaines courbes iso- ζ à la surface du noyau.

En effet, ζ diverge sur l'équateur géographique où $\cos \theta = 0$, sauf aux points, appelés nœuds, où $B_r = 0$. Vers chacun de ces nœuds convergent les courbes iso- ζ correspondant à toutes les valeurs entre $-\infty$ et $+\infty$. Il est ainsi possible de distinguer deux types de courbes iso- ζ à la surface du noyau, celles qui convergent vers un nœud à chacune de leurs extrémités et celles qui, fermées sur elles-mêmes, ne convergent jamais vers l'équateur (figure 2.2).

Toutes les courbes iso- ζ convergeant vers l'équateur sont ainsi connectées les unes aux autres par les nœuds. La pression p est donc ainsi déterminée à la même constante près dans toute la zone de la surface du noyau occupée par des courbes iso- ζ convergeant vers l'équateur. Le champ de vitesse étant complètement déterminé par la connaissance du champ de pression (équation

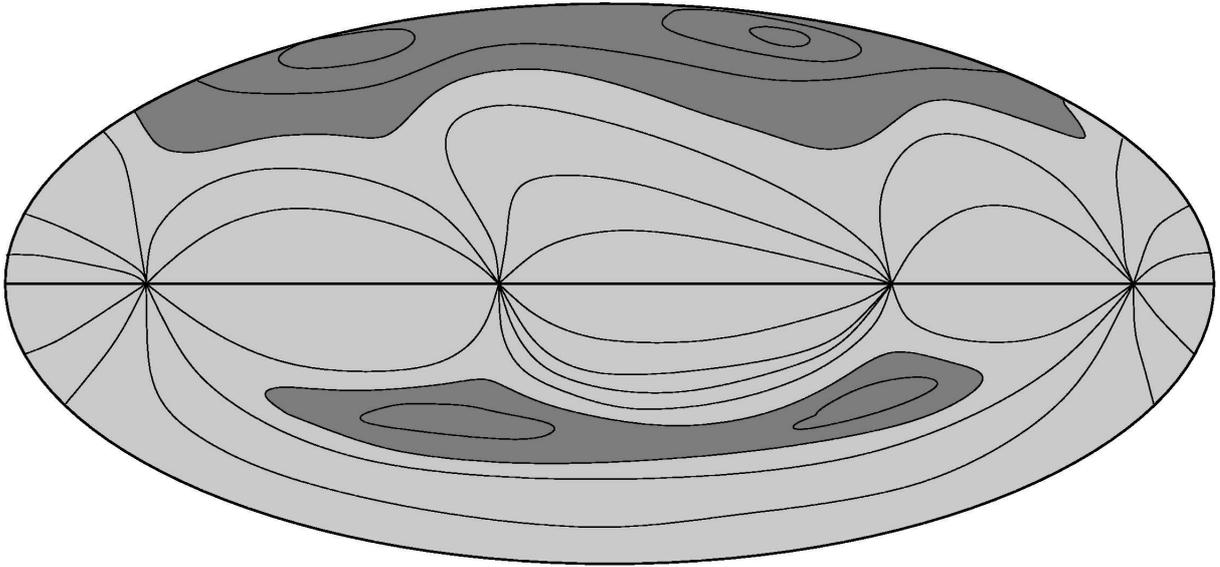


FIG. 2.2 – Morphologie des iso- ζ à la surface du noyau. La ceinture visible, zone dont les iso- ζ convergent vers l'équateur, est représentée en gris clair, les zones ambiguës, correspondant aux iso- ζ fermées sur elles-mêmes, en gris foncé.

(2.6)), il n'existe donc pas de mouvement invisible dans cette zone, appelée de ce fait *ceinture visible* [Backus et Le Mouël, 1986]. Dans la ceinture visible, les mouvements parallèles aux iso- ζ , ne produisant donc pas de variation séculaire, sont néanmoins visibles du fait des contraintes induites par les hypothèses du flux gelé et du mouvement tangentiellement géostrophique. En revanche, le long des iso- ζ ne coupant pas l'équateur, la composante de la vitesse tangente aux iso- ζ est bien invisible, ces iso- ζ n'ayant pas de point de connection entre elles. Ces zones sont ainsi appelées *zones ambiguës* [Backus et Le Mouël, 1986].

Sous les hypothèses du flux gelé et du mouvement tangentiellement géostrophique, les mouvements du fluide non-contraints par $\partial B_r / \partial t$ et B_r (et donc invisibles) sont les mouvements parallèles aux iso- ζ des zones ambiguës, et seulement ceux-ci.

Mouvements non-perceptibles

En plus des mouvements strictement indécélables évoqués dans le paragraphe précédent, il existe des mouvements qui ne sont pas détectables depuis la surface de la Terre. En effet, le manteau et la croûte terrestre filtrent temporellement et spatialement B_r et $\frac{\partial B_r}{\partial t}$ entre la surface du noyau et celle de la Terre.

Le filtrage spatial du signal magnétique issu du noyau résulte des propriétés des champs potentiels. Le prolongement d'un tel champ vers le haut, de la surface du noyau à la surface de la Terre, atténué en effet préférentiellement les petites échelles spatiales. Par cet effet, un spectre plat du champ magnétique à la surface du noyau se traduit par un spectre décroissant à la surface de la Terre, tel le spectre du champ magnétique observé. Pour une certaine longueur d'onde, le champ magnétique principal se retrouve donc masqué par le champ magnétique crustal (§1.1.2).

On estime ainsi que le champ magnétique observé en surface correspond au champ du noyau jusqu'au degré 13 ou 14 de sa décomposition en harmoniques sphériques (§2.2.1). Les petites échelles spatiales de la variation séculaire sont également invisibles mais le degré de troncature peut être un peu plus grand, le champ crustal ne variant pas sur des échelles de temps aussi courtes que le champ du noyau.

Du fait du filtrage des petites échelles de B_r et de $\partial B_r/\partial t$, les petites échelles du mouvement ne peuvent pas être reconstituées. Le couplage entre \mathbf{u} et B_r étant non-linéaire, il n'est pas possible de définir le degré précis de troncature du mouvement connaissant ceux du champ magnétique et de ses variations. En effet, même si les différentes composantes de \mathbf{u} participant à une composante de $\partial B_r/\partial t$ donnée sont parfaitement définies, ces composantes ne sont pas complètement contraintes, participant à des composantes de la variation séculaire non-observables (voir figure 2.4). Cette question de la résolution spatiale maximale des mouvements reconstituables sera discutée de manière plus approfondie dans le chapitre 4. Il est néanmoins clair que les mouvements de très petite échelle sont totalement indétectables depuis la surface.

La faible conductivité électrique du manteau (§2.1.1) agit sur les signaux magnétiques issus du noyau comme un filtre temporel passe-bas [*e.g.* Gubbins et Roberts, 1987, p. 38 et 51]. Ce filtrage, créé par un effet de peau, atténue préférentiellement les hautes fréquences. Bien que ses effets dépendent largement du modèle de conductivité électrique choisi pour le manteau, on peut considérer que seuls les signaux dont la période est plus longue que 6 à 12 mois atteignent la surface de la Terre. Un mouvement du noyau agissant pendant une période plus courte que cela sera donc invisible, la variation qu'il engendre ne parvenant pas jusqu'en surface [Mandea Alexandrescu et al., 1999].

2.2 Méthode spectrale

La méthode spectrale de reconstruction des mouvements à la surface du noyau résout \mathbf{u} grâce à l'équation de la variation séculaire (2.3) exprimée dans le domaine spectral. Nous utilisons dans cette thèse l'implémentation de cette méthode développée par Le Mouél et al. [1985], Gire et al. [1986] et Gire et Le Mouél [1990].

2.2.1 Formulation dans le domaine spectral

Développements en harmoniques sphériques

Le passage d'un champ scalaire de l'espace physique à l'espace spectral en géométrie sphérique se fait classiquement au moyen des harmoniques sphériques. On peut ainsi exprimer le potentiel V dont dérive le champ magnétique principal \mathbf{B} en dehors des sources comme :

$$V(r, \theta, \phi) = a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} (g_n^m(a) \cos(m\phi) P_n^m(\theta) + h_n^m(a) \sin(m\phi) P_n^m(\theta)), \quad (2.13)$$

où g_n^m et h_n^m sont les coefficients de Gauss, définis à la surface de la Terre (où $r = a$). Dans l'espace spectral, le potentiel V est ainsi complètement défini par l'ensemble de ces coefficients. À

chaque coefficient de Gauss sont associées deux longueurs d'ondes spatiales. La longueur d'onde longitudinale est définie par l'ordre m intervenant dans dans les termes $\cos(m\phi)$ et $\sin(m\phi)$ de la décomposition (2.13). Cette longueur d'onde varie donc en fonction de la colatitude θ , elle est maximale à l'équateur. La longueur d'onde latitudinale est déterminée par le degré n , intervenant dans les polynômes associés de Legendre⁵ P_n^m [voir par exemple Langel, 1987, pour l'expression détaillée de ces polynômes]. On appelle harmoniques sphériques, les fonctions $Y_n^{m,c} = P_n^m(\theta) \cos(m\phi)$ et $Y_n^{m,s} = P_n^m(\theta) \sin(m\phi)$. Une harmonique sphérique de degré n et d'ordre m possède ainsi $2m$ zéros en longitude et $(n - m)$ zéros en latitude (figure 2.3).

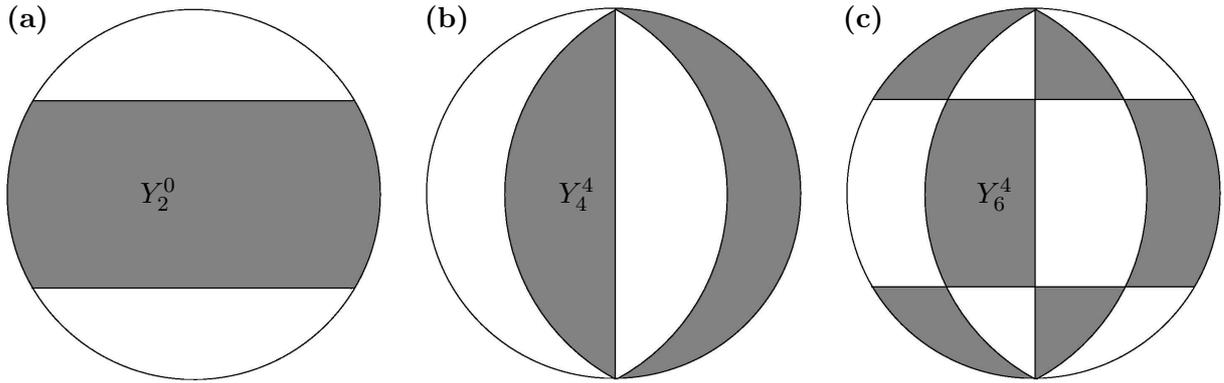


FIG. 2.3 – Quelques harmoniques sphériques. (a) Harmonique sphérique zonale ($m=0$). (b) Harmonique sphérique sectorielle ($n - m = 0$). (c) Harmonique sphérique tessérale (cas général, $m \neq 0$ et $n - m \neq 0$) Les zones où la fonction est positive sont représentées en blanc, les autres en gris.

À la surface du noyau (en $r = c$), le champ magnétique radial B_r peut s'exprimer en fonction des coefficients de Gauss du potentiel magnétique interne g_n^m et h_n^m mesurés à la surface de la Terre :

$$B_r(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{n_b} \sum_{m=0}^n (n+1) \left(\frac{a}{c}\right)^{n+2} (g_n^m Y_n^{m,c}(\theta, \phi) + h_n^m Y_n^{m,s}(\theta, \phi)). \quad (2.14)$$

De même, la variation séculaire peut se décomposer sur la base des harmoniques sphériques en fonction des coefficients \dot{g}_n^m et \dot{h}_n^m :

$$\frac{\partial B_r}{\partial t}(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{n_b} \sum_{m=0}^n (n+1) \left(\frac{a}{c}\right)^{n+2} (\dot{g}_n^m Y_n^{m,c}(\theta, \phi) + \dot{h}_n^m Y_n^{m,s}(\theta, \phi)). \quad (2.15)$$

Ces développements sont limités à l'ordre n_b et n_i , les échelles plus petites étant masquées par le champ crustal. Dans cette étude, les degrés de troncature n_b et n_i sont généralement égaux à 13.

Afin d'obtenir la décomposition spectrale du champ de vitesse \mathbf{u} horizontal à la surface du noyau, nous devons auparavant l'exprimer au moyen de scalaires. Le théorème de Helmholtz [e.g.

5. La normalisation adoptée dans ce manuscrit pour les polynômes de Legendre est la quasi-normalisation de Schmidt [e.g. Langel, 1987].

Backus et al., 1996, pp. 15-16], permettant d'écrire :

$$\mathbf{u} = \nabla_H S - \mathbf{n} \wedge \nabla_H T, \quad (2.16)$$

l'expression de \mathbf{u} sur la base des harmoniques sphériques peut être déduite des décompositions des scalaires poloïdal S et toroïdal T sur cette base, soit :

$$\mathbf{u} = c \sum_{n=0}^{n_u} \sum_{m=0}^n (s_n^{m,c} \mathbf{S}_n^{m,c} + s_n^{m,s} \mathbf{S}_n^{m,s} + t_n^{m,c} \mathbf{T}_n^{m,c} + t_n^{m,s} \mathbf{T}_n^{m,s}) \quad (2.17)$$

en ayant introduit les vecteurs élémentaires $\mathbf{S}_n^m = \nabla_H Y_n^m$ et $\mathbf{T}_n^m = -\mathbf{n} \wedge \nabla_H Y_n^m$.

L'introduction des développements en harmoniques sphériques de B_r , $\partial B_r / \partial t$ et \mathbf{u} (équations (2.14), (2.15) et (2.17)) dans l'équation (2.3) permet d'obtenir l'équation matricielle :

$$\dot{\mathbf{b}} = \mathcal{B}(b) \mathbf{v}, \quad (2.18)$$

dans laquelle le vecteur $\dot{\mathbf{b}}$ contient les coefficients \dot{g}_n^m et \dot{h}_n^m associés à la variation séculaire et le vecteur \mathbf{v} les coefficients $s_n^{m,c}$, $s_n^{m,s}$, $t_n^{m,c}$ et $t_n^{m,s}$ associés à \mathbf{u} . La matrice d'interaction $\mathcal{B}(b)$ définit la contribution de chaque élément de \mathbf{v} à chaque élément de $\dot{\mathbf{b}}$. Elle dépend des coefficients g_n^m et h_n^m de B_r .

Implémentation de l'hypothèse géostrophique

Le développement de \mathbf{u} sur la base des vecteurs poloïdaux et toroïdaux (2.17) n'impose pas que le mouvement soit tangentiellement géostrophique. Pour cela, il est possible de développer \mathbf{u} sur la base des vecteurs tangentiellement géostrophiques $\mathbf{W}_n^{m,c}$ et $\mathbf{W}_n^{m,s}$ [Backus et Le Mouél, 1986], définis par :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_n^{m,c} &= \mathbf{S}_n^{m,c} - a_n^m \mathbf{T}_{n-1}^{m,s} - b_n^m \mathbf{T}_{n+1}^{m,s}, \\ \mathbf{W}_n^{m,s} &= \mathbf{S}_n^{m,s} - a_n^m \mathbf{T}_{n-1}^{m,c} - b_n^m \mathbf{T}_{n+1}^{m,c} \end{aligned} \quad (2.19)$$

[l'expression des coefficients a_n^m et b_n^m est détaillée dans Gire et Le Mouél, 1990]. Sur cette base tangentiellement géostrophique, \mathbf{u} s'exprime ainsi

$$\mathbf{u} = c \sum_{n=1}^{n_u} w_n^0 \mathbf{T}_n^0 + c \sum_{n=1}^{n_u} \sum_{m=1}^n (w_n^{m,c} \mathbf{W}_n^{m,c} + w_n^{m,s} \mathbf{W}_n^{m,s}) \quad (2.20)$$

Cette décomposition de \mathbf{u} sur la base tangentiellement géostrophique impose la condition géostrophique sur toute la surface du noyau, y compris près de l'équateur où la force de Coriolis est pourtant nulle (§2.1.1). Le gradient de pression est donc nul lui aussi dans cette région : la pression retrouvée par cette méthode est ainsi forcément constante à l'équateur.

L'équation (2.18) doit être réécrite pour \mathbf{w} , vecteur contenant les coefficients w_n^0 , $w_n^{m,c}$ et $w_n^{m,s}$ afin de prendre en compte l'hypothèse géostrophique :

$$\dot{\mathbf{b}} = \mathcal{A}(b) \mathbf{w}, \quad (2.21)$$

où $\mathcal{A}(b)$ est la matrice d'interaction dans la base géostrophique, équivalent de $\mathcal{B}(b)$ de l'équation (2.18). Ainsi, le mouvement retrouvé en résolvant l'équation (2.21) respectera automatiquement la condition géostrophique.

2.2.2 Résolution du problème inverse

L'estimation des mouvements à la surface du noyau à partir des observations de la variation séculaire grâce à l'équation (2.21) constitue un problème inverse, par opposition au problème direct, plus simple physiquement, qui nous a permis de formuler cette équation. La résolution du problème inverse impose d'inverser l'équation (2.21). Le problème ne se limite néanmoins pas à calculer $\mathbf{w} = \mathcal{A}(b)^{-1} \dot{\mathbf{b}}$ car la matrice $\mathcal{A}(b)$ n'est généralement pas inversible du fait de la mauvaise détermination du problème [par exemple Menke, 1984, pp. 46–48].

Sous- et sur-détermination du problème

La première difficulté est liée à la sous-détermination du problème, plusieurs mouvements pouvant expliquer de manière équivalente la variation séculaire observée. Une partie de cette sous-détermination est introduite par la présence des zones ambiguës dans lesquelles le mouvement n'est pas complètement contraint (§2.1.2). Or, l'utilisation des décompositions spectrales impose de travailler sur toute la surface du noyau, y compris dans les zones ambiguës où tous les mouvements parallèles aux courbes iso- ζ sont solutions de l'équation (2.21). Une autre partie de la sous-détermination du problème vient de la non-linéarité de l'équation (2.3) et de la troncature de la variation séculaire observée. En effet, une partie du champ de vitesse que l'on cherche à reconstruire est responsable de petites échelles non-observables de la variation séculaire (figure 2.4b). Une partie des informations qui permettrait de déterminer complètement \mathbf{u} en dehors des zones ambiguës est donc manquante.

Afin de lever ces indéterminations, une contrainte supplémentaire est introduite: le mouvement doit être le plus possible un mouvement de grande échelle. De la sorte, on sélectionne un mouvement parmi tous ceux qui sont solutions. Le mouvement dans les zones ambiguës est ainsi déterminé par prolongement des mouvements voisins visibles, ce qui suppose que les zones ambiguës restent de petite échelle.

À l'inverse, la seconde difficulté est liée à l'absence de solution exacte de l'équation (2.21) et s'apparente donc à un problème de sur-détermination. En effet, les hypothèses utilisées pour dériver cette équation peuvent très bien ne pas être totalement respectées. Par exemple, une part de la variation séculaire observée peut avoir été créée par diffusion et de ce fait ne pas pouvoir être explicable par l'action d'un mouvement sur le champ magnétique. Par ailleurs, la non-linéarité de l'équation (2.3) et la troncature du champ magnétique observé contribuent aussi à cette possible absence de solutions exactes. En effet, une partie de la variation séculaire observée provient d'interactions qui ne peuvent pas être prises en compte du fait de la troncature de B_r (figure 2.4a) [voir Hulot et al., 1992, pour plus de précisions sur les différentes interactions possibles]. Il n'existe pas forcément de mouvement pouvant expliquer cette part de la variation séculaire non-modélisée par des interactions avec le champ magnétique de grande échelle observé (si un tel mouvement fictif existait, il n'aurait de toute façon aucune réalité physique).

Afin de pallier cette absence de solution exacte, on cherche le mouvement qui explique *le mieux possible* la variation séculaire observée. Une nouvelle contrainte *a priori* est donc nécessaire afin de définir précisément un tel mouvement.

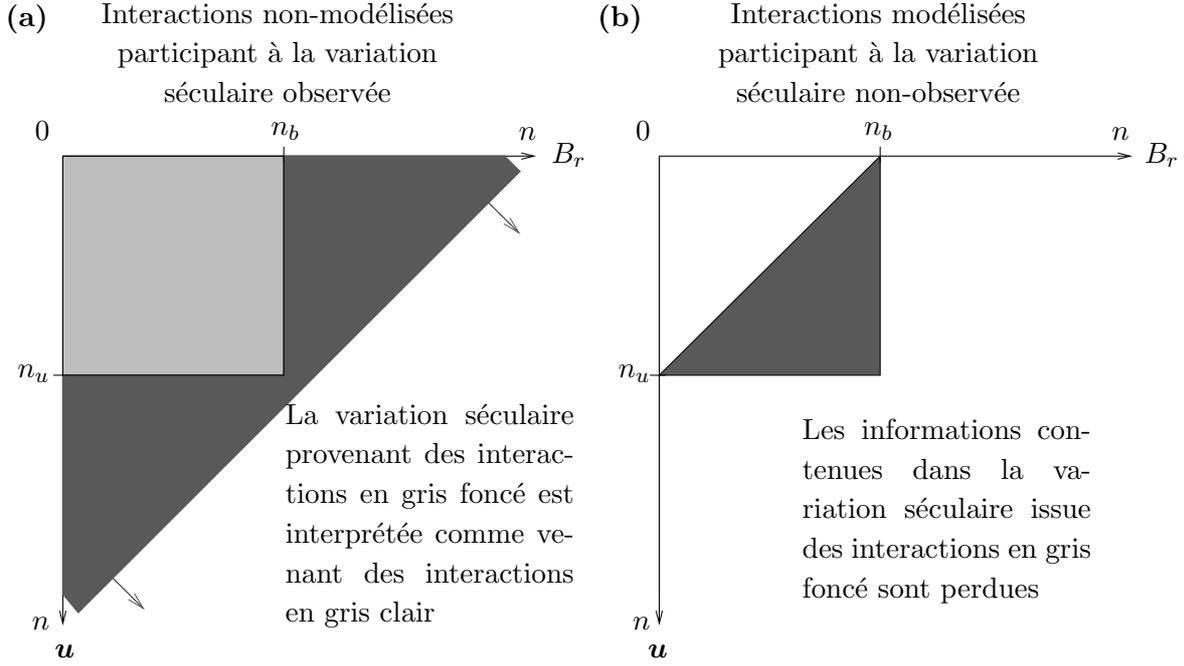


FIG. 2.4 – Interactions entre \mathbf{u} et B_r incorrectement prises en compte lors de la reconstruction de \mathbf{u} du fait de l'impossibilité d'observer les petites échelles de : (a) B_r ($n > n_b$) et (b) $\partial B_r / \partial t$ ($n > n_b$). Les interactions problématiques sont représentées en gris foncé. Les schémas correspondent au cas où $n_b = n_j$ et où l'on cherche le mouvement \mathbf{u} jusqu'au degré n_u .

Introduction de contraintes *a priori* supplémentaires

Les deux problèmes soulevés dans le paragraphe précédent impliquent de rechercher le modèle de mouvement $\hat{\mathbf{u}}$ (dont le vecteur $\hat{\mathbf{w}}$ contient les coefficients) qui soit *le plus possible* de grande échelle et qui explique *le mieux possible* la variation séculaire observée. Ceci est réalisé en minimisant simultanément une norme de $\hat{\mathbf{u}}$ pénalisant préférentiellement les petites échelles et l'erreur de prédiction \mathbf{e} du modèle $\hat{\mathbf{u}}$, définie par $\mathbf{e} = \mathcal{A}(b)\hat{\mathbf{w}} - \dot{\mathbf{b}}$. La norme utilisée est une norme quadratique et la minimisation de \mathbf{e} se fait au sens des moindres carrés. De plus, une matrice de covariance sur les données \mathcal{C}_b est introduite afin d'accorder plus d'importance aux coefficients les mieux connus de la variation séculaire. Ainsi, $\hat{\mathbf{w}}$ est déterminé en recherchant le minimum de la fonction coût ϕ :

$$\phi(\hat{\mathbf{w}}) = \lambda \hat{\mathbf{w}}^T \mathcal{C}_w \hat{\mathbf{w}} + (\mathcal{A}(b)\hat{\mathbf{w}} - \dot{\mathbf{b}})^T \mathcal{C}_b^{-1} (\mathcal{A}(b)\hat{\mathbf{w}} - \dot{\mathbf{b}}), \quad (2.22)$$

le paramètre λ fixant l'importance relative des deux contraintes lors de la minimisation. Dans la pratique, la valeur de λ est déterminée après plusieurs essais, en fonction de l'amplitude souhaitée de l'erreur de prédiction calculée *a posteriori*.

La matrice de normalisation \mathcal{C}_w est diagonale et contient le poids relatif de chaque coefficient de \mathbf{w} dans la norme utilisée. Par commodité, nous présentons ici la norme quadratique $\|\hat{\mathbf{u}}^2\|$

équivalente à $\hat{\boldsymbol{w}}^T \mathcal{C}_w \hat{\boldsymbol{w}}$ mais exprimée dans la base poloïdale-toroïdale :

$$\|\hat{\boldsymbol{u}}^2\| = E_0^{-1} \sum_{n=0}^{n_u} n^{(p+1)} (n+1) \sum_{m=0}^n ((s_n^{m,c})^2 + (s_n^{m,s})^2 + (t_n^{m,c})^2 + (t_n^{m,s})^2) \text{ avec } p = 3, \quad (2.23)$$

où E_0 est uniquement un paramètre d'adimensionnalisation. Cette normalisation a été choisie dans un souci de cohérence avec le travail antérieur de Pais et Hulot [2000].

La matrice de covariance \mathcal{C}_i est elle aussi une matrice diagonale, les erreurs de prédictions sur les différentes composantes de la variation séculaire étant considérées indépendantes les unes des autres. Chaque terme de cette matrice est ainsi égal à la variance, choisie *a priori*, de l'erreur du coefficient concerné de $\dot{\boldsymbol{b}}$. Cette variance σ^2 peut ainsi être choisie proportionnellement à l'erreur d'observation. Dans le cas où σ^2 ne dépend que de n , le deuxième terme de ϕ dans l'équation (2.22) peut ainsi se développer comme :

$$\boldsymbol{e}^T \mathcal{C}_i^{-1} \boldsymbol{e} = \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{m=0}^n \frac{((\dot{g}_n^m - \hat{g}_n^m)^2 + (\dot{h}_n^m - \hat{h}_n^m)^2)}{\sigma^2(n)}, \quad (2.24)$$

\hat{g}_n^m et \hat{h}_n^m étant les coefficients associés à la variation séculaire prédite par le modèle $\hat{\boldsymbol{u}}$ recherché.

Le modèle de vitesse à la surface du noyau pour lequel la fonction coût est minimum se calcule finalement grâce à l'équation suivante :

$$\hat{\boldsymbol{w}} = \left(\mathcal{A}(b)^T \mathcal{C}_i^{-1} \mathcal{A}(b) + \lambda \mathcal{C}_w \right)^{-1} \mathcal{A}(b)^T \mathcal{C}_i^{-1} \dot{\boldsymbol{b}} \quad (2.25)$$

[voir par exemple Menke, 1984, pour plus de détails]. Il ne reste ensuite plus qu'à convertir les coefficients de $\hat{\boldsymbol{w}}$ en coefficients poloïdaux-toroïdaux plus facilement interprétables grâce une matrice de changement de base :

$$\hat{\boldsymbol{v}} = \mathcal{Q} \hat{\boldsymbol{w}}. \quad (2.26)$$

Cette même matrice \mathcal{Q} est utilisée pour la conversion de contrainte de normalisation (2.23) dans la base tangentielllement géostrophique.

Ainsi, le modèle de mouvement associé au vecteur $\hat{\boldsymbol{v}}$ obtenu représente le mouvement tangentielllement géostrophique qui explique la variation séculaire observée avec la marge d'erreur préalablement définie tout en possédant le moins possible de petites échelles.

2.3 Méthode locale

Afin de s'affranchir de certaines contraintes requises par la méthode spectrale (hypothèse de mouvement de grande échelle, hypothèse géostrophique imposée sur toute la surface du noyau), Chulliat et Hulot [2000] ont récemment développé une méthode de reconstruction locale des mouvements de la surface du noyau.

2.3.1 Intégration locale de la pression

Le principe de cette méthode est contenu dans l'équation (2.12) exprimant le gradient de pression géostrophique p le long d'une courbe iso- ζ . L'intégration de ce gradient le long d'une iso- ζ à partir d'un nœud N de l'équateur (§2.1.2) conduit à :

$$p(M) = 2\rho\Omega \int_N^M \frac{1}{\|\mathbf{n} \wedge \nabla_H \zeta\|} \frac{\partial B_r}{\partial t} dl + p(N), \quad (2.27)$$

qui permet ainsi d'évaluer la pression en tout point M de cette iso- ζ , à condition de connaître la pression $p(N)$ au nœud de départ. La pression au nœud d'arrivée, servant de point de départ à d'autres intégrations, est donc aussi contrainte. La pression peut être ainsi déterminée dans toute la ceinture visible à une constante près, la pression au premier nœud. Cette constante est choisie de manière à ce que la pression moyenne soit nulle.

Grâce à l'intégrale (2.27), la pression peut être déterminée dans toute la ceinture visible, parcourue par les courbes iso- ζ convergeant vers l'équateur. Elle n'est en revanche pas déterminée dans les zones ambiguës⁶. Du fait de son principe, la méthode locale ne requiert pas d'hypothèse *a priori* sur le contenu spectral du champ de vitesse, contrairement à la méthode spectrale. Le contenu spectral des champs de pression obtenus est néanmoins implicitement limité par l'absence de petites longueurs d'onde des observations de B_r (et donc de ζ) et de $\partial B_r / \partial t$. Les petites échelles du mouvement restent invisibles quelle que soit la méthode utilisée. Cette méthode limite toutefois le risque que les échelles intermédiaires de la ceinture visible soient contaminées par la seule présence des zones ambiguës.

Du fait du caractère local du calcul, l'hypothèse géostrophique n'a pas besoin d'être imposée sur toute la surface du noyau. Ceci est particulièrement intéressant autour de l'équateur géographique où la force de Coriolis est nulle, mais aussi dans d'autres zones de la surface du noyau où la force de Lorentz peut ne pas être négligeable devant la force de Coriolis. Le rapport des normes de ces deux forces peut s'estimer au moyen du paramètre ζ [Chulliat, 2000]. La *ceinture géostrophique*, zone dans laquelle l'hypothèse géostrophique est valable, peut ainsi être définie comme la région où $|\zeta| < 10^{-3}\text{T}$. Ceci correspond à la région dans laquelle la force de Lorentz est estimée à moins de 10% de la force de Coriolis. Définie ainsi, la zone non-géostrophique s'étend autour de l'équateur mais aussi au centre de certaines zones ambiguës, où le mouvement n'est de toute façon pas calculé (figure 2.5). Les nœuds de l'équateur sont inclus dans la ceinture géostrophique puisque vers eux convergent des courbes iso- ζ prenant toutes les valeurs entre $-\infty$ et $+\infty$.

Une fois le champ de pression estimé dans la ceinture géostrophique et visible, il est théoriquement facile d'en déduire le champ de vitesse \mathbf{u} à partir de la relation (2.6). Pratiquement, des problèmes liés à des artefacts de petite échelle rendent cette transformation délicate. Il n'y a en revanche pas de difficulté à convertir en champ de pression les mouvements obtenus avec la méthode spectrale et obtenir ainsi deux représentations équivalentes.

6. En théorie, il est possible de déterminer la composante du gradient de pression perpendiculaire aux iso- ζ dans les zones ambiguës [Chulliat, 2004]. Cette possibilité n'est toutefois pas utilisée dans cette étude.

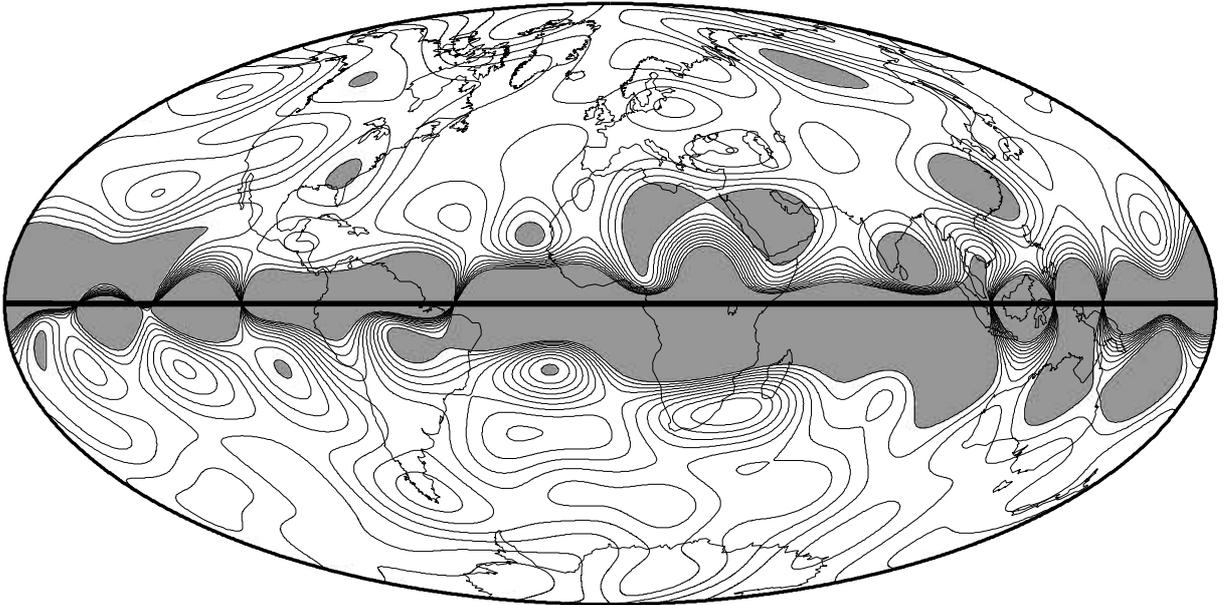


FIG. 2.5 – Estimation de la ceinture géostrophique en 2000 (zone laissée blanche). Dans les zones grisées, la force de Lorentz estimée est supérieure au dixième de la force de Coriolis ($|\zeta| > 10^{-3} T$). Les iso- ζ sont représentés tous les $2 \cdot 10^{-4} T$ et la trace des continents est projetée sur la surface du noyau pour faciliter la localisation des structures.

2.3.2 Contraintes pratiques

Comme nous venons de le voir, la méthode locale impose moins de contraintes *a priori* sur la nature du mouvement que la méthode spectrale. Cette méthode possède néanmoins d'autres inconvénients pratiques qui nous ont incité à utiliser plus fréquemment la méthode spectrale au cours de cette thèse.

Le calcul de la pression par l'intégrale (2.27) est exact si les hypothèses du flux gelé et du mouvement tangentiellement géostrophiques, qui ont permis d'obtenir cette expression, sont parfaitement respectées. Dans ce cas, l'intégration le long de deux courbes iso- ζ partant du même nœud, aboutit bien à la même pression au nœud final commun. Si au contraire, ces deux hypothèses ne sont pas totalement respectées le long des iso- ζ concernées, des erreurs vont être introduites dans p , aboutissant à deux valeurs différentes de la pression au nœud final.

Afin d'éviter cela, il convient d'utiliser une variation séculaire qui soit compatible avec les hypothèses de flux gelé et de mouvement géostrophique. Une telle variation séculaire vérifie des contraintes intégrales le long des iso- ζ [Chulliat et Hulot, 2001]. Une inversion préliminaire est réalisée afin de déterminer un modèle de variation séculaire qui satisfasse ces contraintes tout en restant compatible avec les observations [voir Chulliat, 2000, p. 125, pour les détails techniques]. Cette inversion préliminaire permet également d'estimer la pression en chacun des nœuds de l'équateur.

La sélection des courbes iso- ζ le long desquelles appliquer ces contraintes se fait manuellement. Elle doit garantir une couverture spatiale satisfaisante (voir figure 2.6) sans pour autant

rendre le problème trop long à inverser. Cette sélection s'avère être en pratique assez fastidieuse et demande un temps non négligeable.

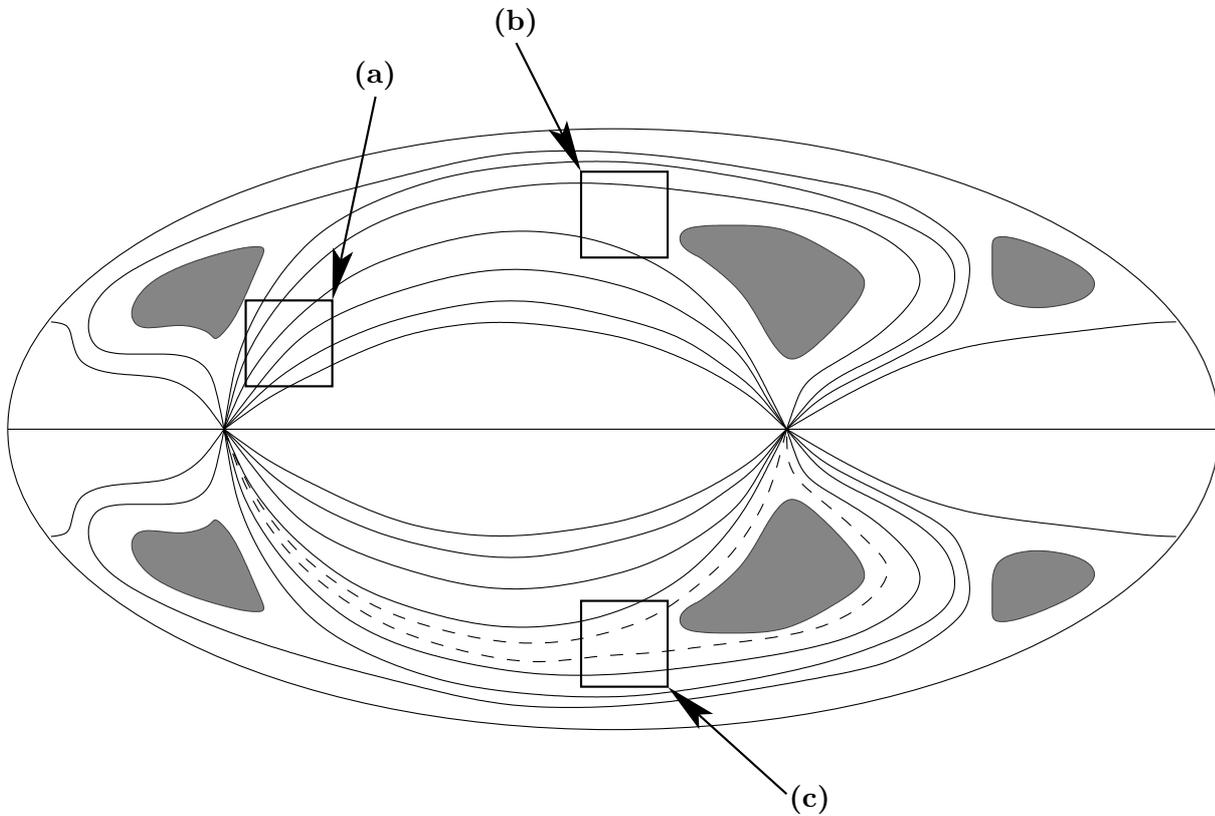


FIG. 2.6 – Sélection des iso- ζ le long desquelles la variation séculaire est contrainte (voir texte). Sur ce schéma, l'écart entre les courbes iso- ζ représentées en trait plein est constant. La résolution spatiale est meilleure en (a) qu'en (b) du fait d'un gradient de ζ plus fort. En (c), la résolution spatiale est améliorée par l'ajout des deux courbes iso- ζ intermédiaires représentées en pointillé.

Notons aussi que le processus d'intégration a tendance à propager une erreur en un point de la surface du noyau sur toute la courbe iso- ζ , en aval de ce point. Cela peut se produire par exemple sur une courbe iso- ζ où la variation séculaire n'a pas été contrainte et créer ainsi des structures artificielles, allongées parallèlement aux iso- ζ .

Chapitre 3

Mouvements historiques, comparaison des méthodes spectrale et locale

L'objectif de ce chapitre est double. Il s'agit tout d'abord de comparer la méthode locale de reconstruction des mouvements de la surface du noyau récemment développée par Chulliat et Hulot [2000] avec la *classique* méthode spectrale. Cette comparaison nous permet de mettre en évidence les artefacts propres à chaque méthode. Les données magnétiques utilisées sont celles du modèle de Jackson et al. [2000]. Ce modèle propose une estimation du champ magnétique et de sa variation séculaire au cours des 400 dernières années. Le deuxième objectif est ainsi de fournir une estimation de l'évolution des mouvements de la surface du noyau au cours de cette période historique. Cette série temporelle, obtenue par deux méthodes indépendantes et un modèle géomagnétique récent, complète l'étude antérieure de Pais et Hulot [2000]. Les interprétations géophysiques découlant de l'étude de cette série temporelle seront, quant à elles, présentées dans le chapitre 5.

3.1 Reconstruction des mouvements à la surface du noyau depuis 1590

3.1.1 Modèle magnétique historique de Jackson *et al.*

Les modèles du champ magnétique et de la variation séculaire utilisés dans ce chapitre sont issus du modèle *gufm1* de Jackson et al. [2000] qui couvre une période de 400 ans, de 1590 à 1990.

Ce modèle magnétique historique a été construit grâce à une importante compilation de données magnétiques de différentes origines. Pour la période la plus ancienne, les mesures disponibles sont des mesures de la déclinaison et de l'inclinaison magnétique effectuées, pour la plupart, lors de traversées maritimes. Pour les périodes plus récentes, les données proviennent

d'observatoires terrestres, de campagnes de mesure et enfin des satellites magnétiques POGO et MAGSAT. Pour la période antérieure à 1840, seule la géométrie du champ magnétique est contrainte par les observations, les mesures de l'intensité du champ magnétique n'existant pas [Hulot et al., 1997]. Afin d'obtenir un modèle cohérent et continu pour toute la période couverte, les auteurs supposent une décroissance régulière du terme dipolaire entre 1590 et 1840.

Ce modèle représente la solution globale la plus lisse, spatialement et temporellement, rendant compte des diverses observations avec la précision choisie par les auteurs. Il est néanmoins évident, du fait de la diversité des observations disponibles pour les différentes époques, que la résolution spatiale de ce modèle augmente à mesure que l'on se rapproche de la période actuelle. Ceci doit être pris en compte lors de l'interprétation géophysique des champs de mouvements obtenus. Cela nous permet en revanche de bénéficier de différents champs ayant des morphologies variées afin de tester les deux méthodes de reconstruction des mouvements à la surface du noyau.

Les figures 3.1 et 3.2 montrent, à la surface du noyau, les différents champs magnétiques et variations séculaires utilisés dans cette étude.

3.1.2 Paramètres utilisés lors des inversions

Avec les deux méthodes, les champs magnétiques et les variations séculaires issus du modèle *gufm1* ont été utilisés jusqu'au degré 13 de leur développement en harmoniques sphériques. Pour la méthode spectrale, ces champs ont ensuite été projetés sur une grille spatiale ayant un pas fixe de 0.5° .

Pour la méthode spectrale, des paramètres doivent être ajustés en fonction des modèles de champ utilisés. Il s'agit de la matrice de covariance sur les données \mathcal{C}_b intervenant dans le calcul de l'erreur de prédiction et du paramètre λ fixant le rapport entre la minimisation de l'erreur de prédiction et la minimisation de la norme choisie (§2.2.2). Les très grandes similitudes entre l'étude présentée ici et le travail de Pais et Hulot [2000] nous ont conduit à adopter les mêmes paramètres que ces auteurs.

En effet, Pais et Hulot utilisent des modèles magnétiques dont les caractéristiques sont très semblables à *gufm1*¹ et une méthode d'inversion en tous points identique. L'incertitude sur les modèles de variation séculaire les plus récents est inférieure à celle des modèles plus anciens. Il est néanmoins difficile d'estimer précisément ces incertitudes. Dans leur étude, Pais et Hulot ont donc choisi d'utiliser la même matrice de covariance pour toutes les dates considérées. Cette matrice est diagonale et contient les variances σ^2 (2.24) associées aux différents coefficients de la variation séculaire en fonction de leur degré n du développement en harmoniques sphériques,

$$\sigma^2(n) = M_0/(n + 1), \text{ avec } M_0 = 1.69 \text{ (nT/an)}^2. \quad (3.1)$$

Ces incertitudes représentent une moyenne pour les différentes périodes et nous avons choisi de les conserver telles quelles. Ceci nous permet également d'utiliser le paramètre λ (équation (2.22))

1. Les modèles de Bloxham et Jackson [1992] utilisés par Pais et Hulot [2000] constituent une version antérieure de *gufm1* [Jackson et al., 2000] utilisé ici.

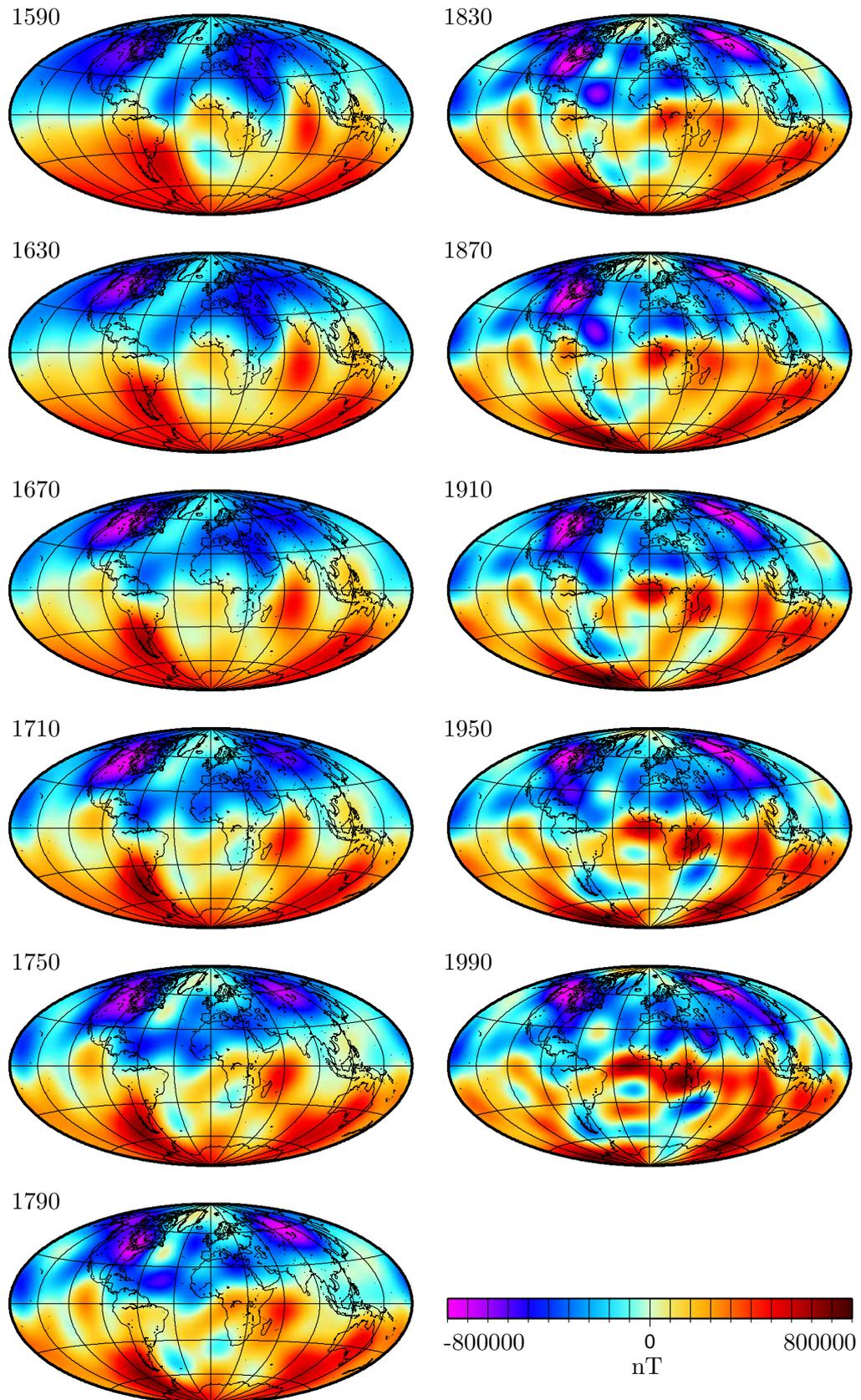


FIG. 3.1 – Champ magnétique radial B_r à la surface du noyau de 1590 à 1990, modèle *gufm1* de Jackson et al. [2000].

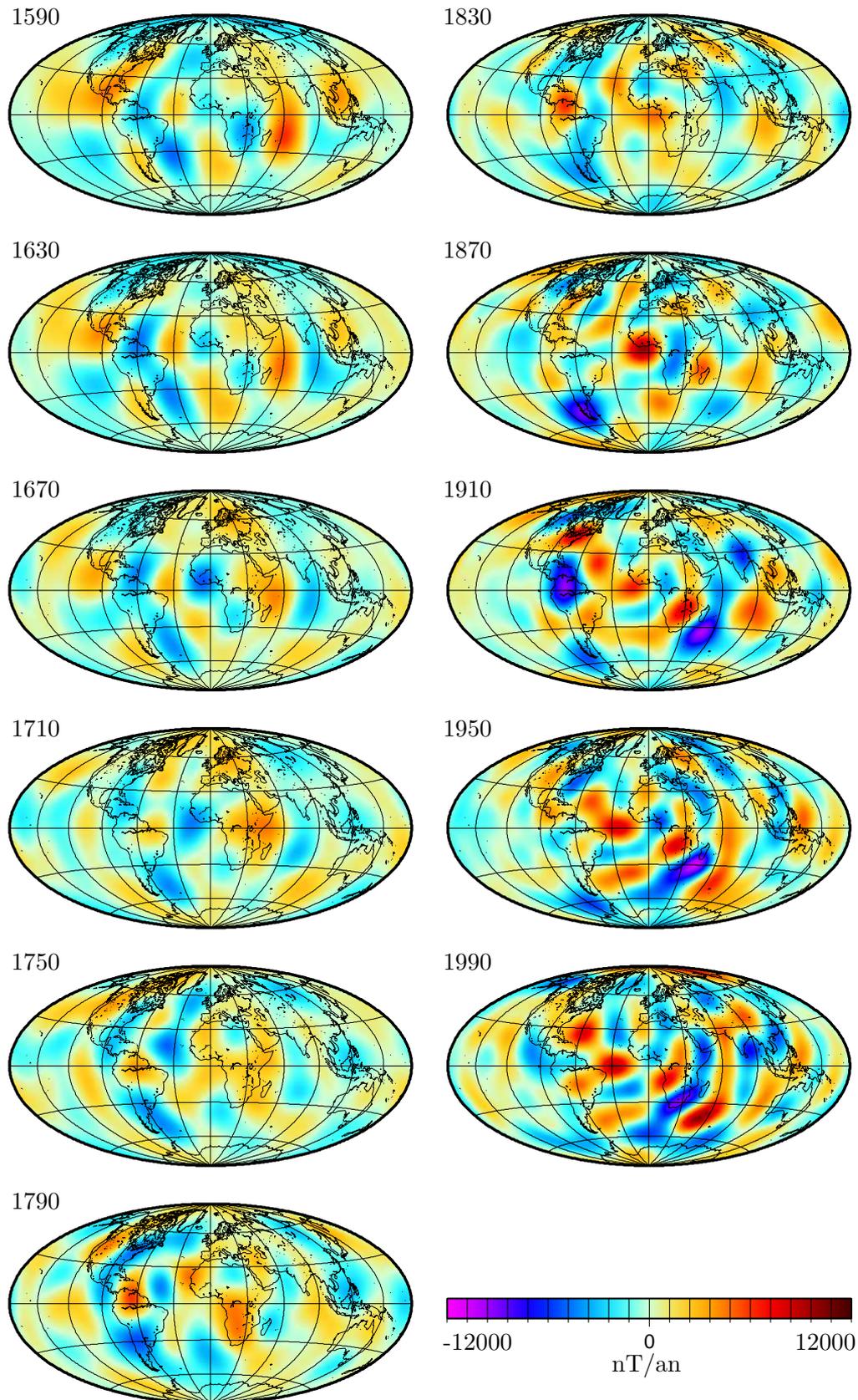


FIG. 3.2 – Variation séculaire $\partial B_r/\partial t$ à la surface du noyau de 1590 à 1990, modèle *gufm1* de Jackson et al. [2000].

sélectionné par Pais et Hulot après différents essais². La valeur retenue assure que l'erreur de prédiction du modèle calculé soit du même ordre que l'incertitude sur les observations (équation (3.1)).

3.1.3 Séries temporelles obtenues

Les figures 3.3 et 3.4 présentent les séries temporelles de mouvement à la surface du noyau obtenues respectivement avec les méthodes spectrale et locale. Plus exactement, nous représentons la pression géostrophique associée au mouvement à la surface du noyau³. Les zones ambiguës et les zones non-géostrophiques sont également représentées sur les deux séries de cartes pour en faciliter la comparaison. Certaines courbes iso- ζ sont également tracées.

Une première manière de tester la validité et la fiabilité de chacune ces deux méthodes est de comparer directement les résultats fournis par l'une et par l'autre. Ces deux méthodes reposent en effet sur des modes de calculs complètement différents et la méthode spectrale nécessite une hypothèse de grande échelle, absente de la méthode locale. En revanche, il ne peut évidemment être question ici de mettre en cause ou non les hypothèses du flux gelé et de mouvements tangentiels géostrophiques puisque ces hypothèses sont communes aux deux méthodes.

Les deux séries temporelles (figures 3.3 et 3.4) présentent de nombreux points communs. Le plus visible est certainement la persistance durant toute la période étudiée d'une zone de haute pression située sous les Océans atlantique et indien aux latitudes moyennes à hautes de l'hémisphère sud. Les deux méthodes s'accordent à la fois sur la stabilité globale de ce vaste anticyclone et, au moins au premier ordre, sur ses changements de forme et de position au cours de ces 400 ans. Au sujet de l'hémisphère nord et de la zone située sous l'Océan pacifique dans l'hémisphère sud, l'accord des méthodes est moins frappant. Néanmoins, la plupart des structures de grande échelle sont présentes dans les deux séries temporelles.

3.2 Interprétation des désaccords entre les deux séries temporelles

Malgré ce bon accord global, il existe également des points de désaccord entre les deux méthodes.

2. $\lambda = 4.7 \cdot 10^{-2}$ pour $E_0 = 8 \cdot 10^{-6}$ (rad/an)² (voir équation (2.23)).

3. Le mouvement étant tangent aux isobares (§2.1.1), une zone localisée de basse ou haute pression correspond à un vortex (cyclone ou anticyclone respectivement).

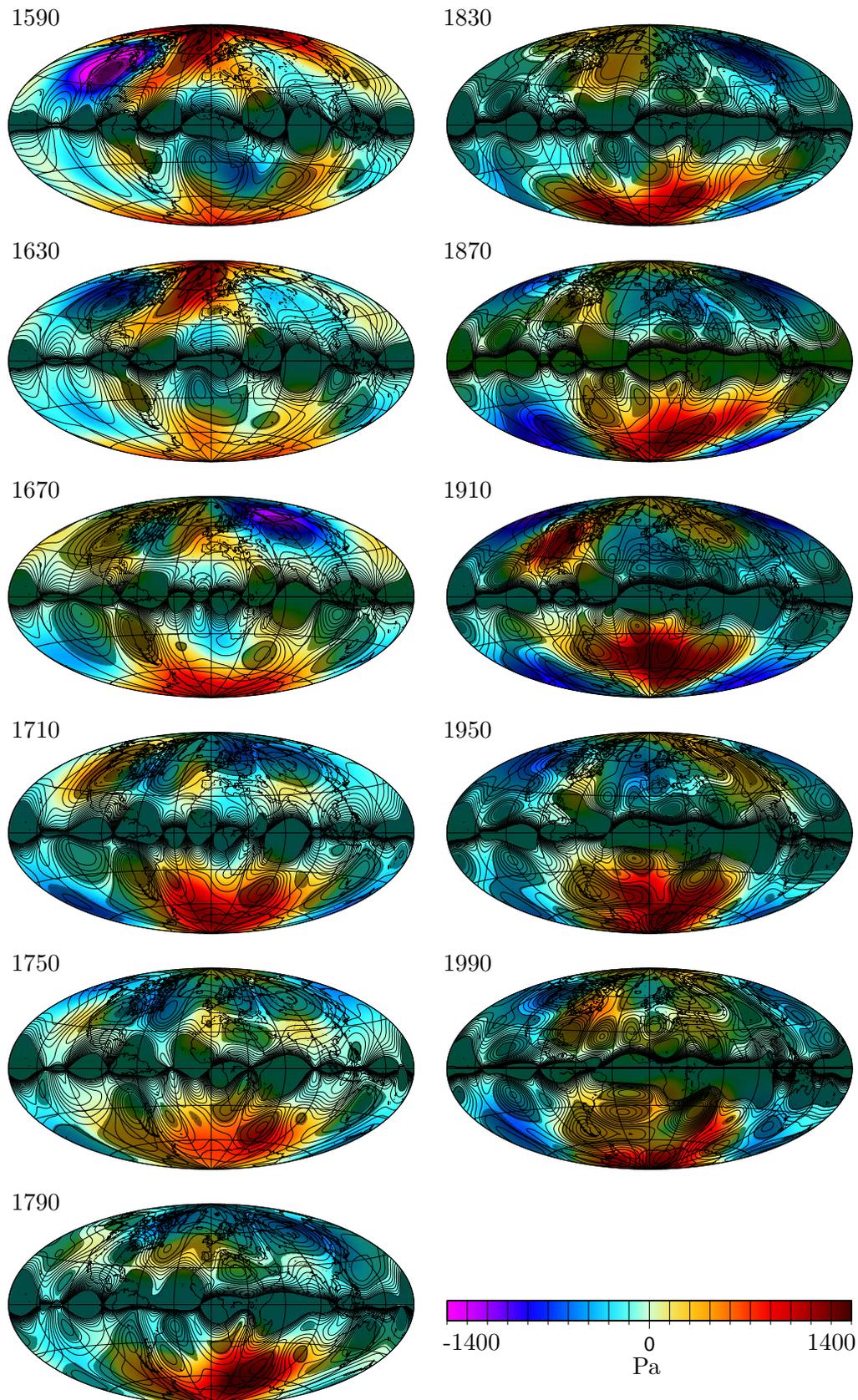


FIG. 3.3 – Pression géostrophique à la surface du noyau de 1590 à 1990 obtenue avec la méthode spectrale et le modèle géomagnétique de Jackson et al. [2000]. Les zones ambiguës et les zones non-géostrophiques sont ombrées. Équidistance des courbes iso- ζ : 100000 nT.

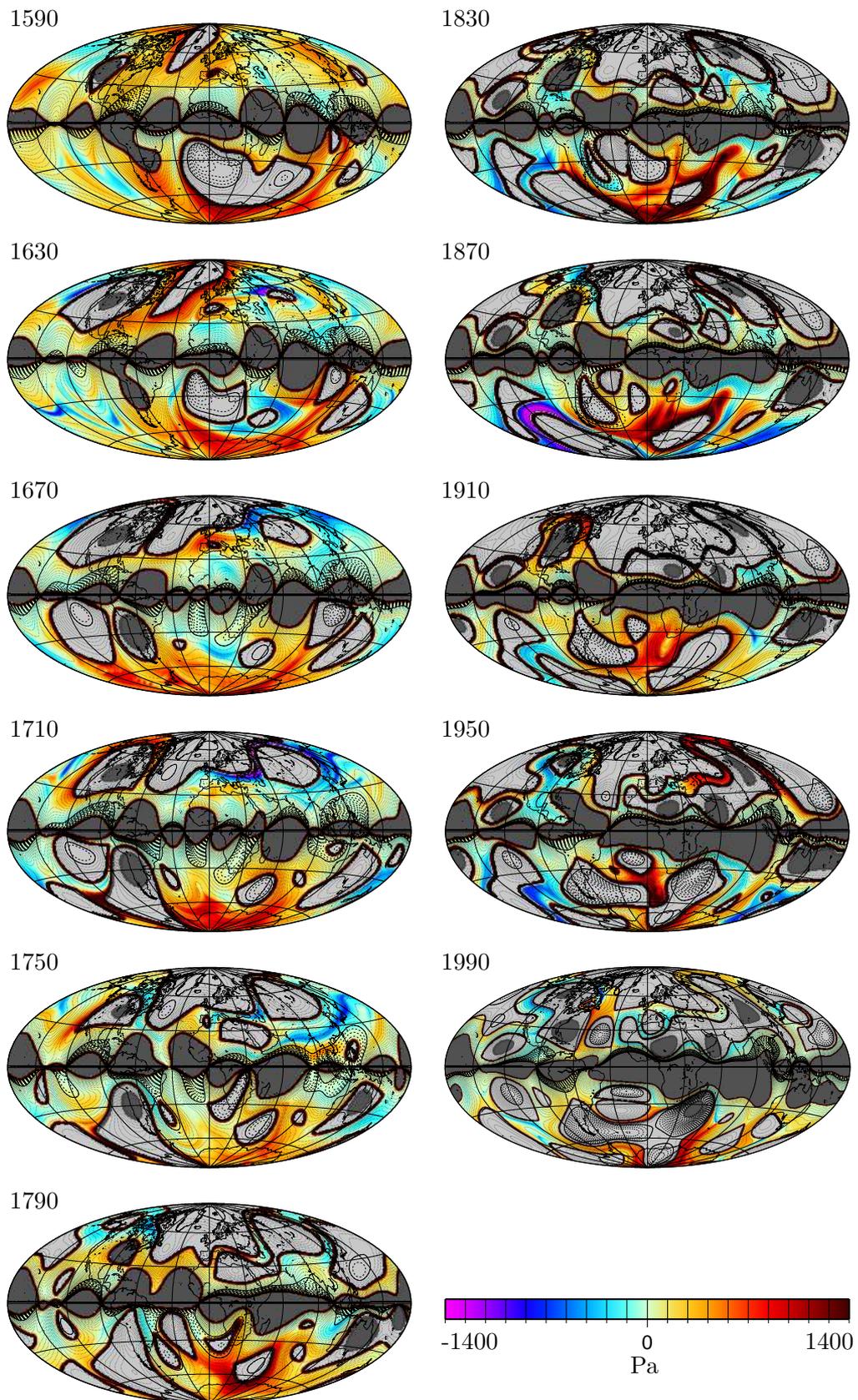


FIG. 3.4 – Pression géostrophique à la surface du noyau de 1590 à 1990 obtenue avec la méthode locale et le modèle géomagnétique de Jackson et al. [2000]. Les zones ambiguës et non-géostrophiques sont représentées respectivement en gris clair et gris foncé. Équidistance des courbes iso- ζ : 50000 nT.

3.2.1 Caractérisation des désaccords locaux existants

Désaccords au niveau des zones ambiguës

Un premier type de désaccord présent dans les séries temporelles concerne les zones ambiguës. Il existe en effet des zones de haute ou de basse pression, centrées sur une zone ambiguë, dans les reconstructions de la méthode spectrale, qui ne sont pas retrouvées par la méthode locale. La figure 3.5a montre un exemple d'un tel désaccord dans les champs de pression de 1590.

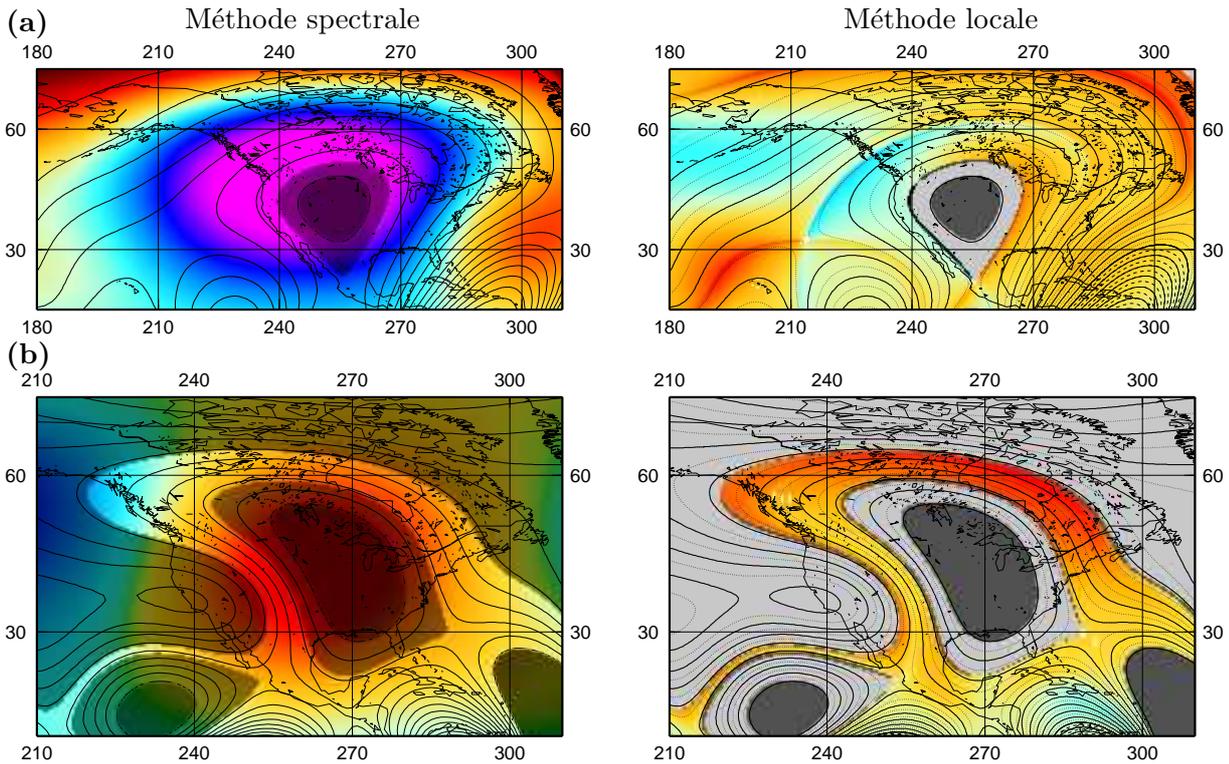


FIG. 3.5 – Deux exemples de vortex centrés sur une zone ambiguë retrouvés par la méthode spectrale (colonne de gauche) et (a) non retrouvé ou (b) retrouvé par la méthode locale (colonne de droite). Ces exemples sont extraits du champ de pression de (a) 1590 et (b) 1910. Les codes de couleurs sont identiques à ceux des figures 3.3 et 3.4.

Dans un tel cas, le vortex retrouvé par la méthode spectrale est vraisemblablement un artefact, créé par l'hypothèse de grande échelle et le caractère global de cette méthode. En effet, la décomposition spectrale d'une zone de haute pression placée à côté d'une zone de pression constante à la surface du noyau (figure 3.6a) ne peut se faire sans l'introduction de petites échelles (figure 3.6b). Ces petites échelles sont très pénalisantes pour la fonction coût lors de l'inversion. Néanmoins, leur omission créerait une oscillation longitudinale de pression fictive qui pénaliserait elle aussi la fonction coût. En revanche, si les isobares de ces vortex fictifs se trouvent plus ou moins alignés avec les iso- ζ de zones ambiguës (figure 3.6c), ils ne participent que très peu à la fonction coût, ne créant presque pas de variation séculaire. Des vortex fictifs sous les zones ambiguës peuvent ainsi être présents dans les champs de pression obtenus avec la méthode spectrale.

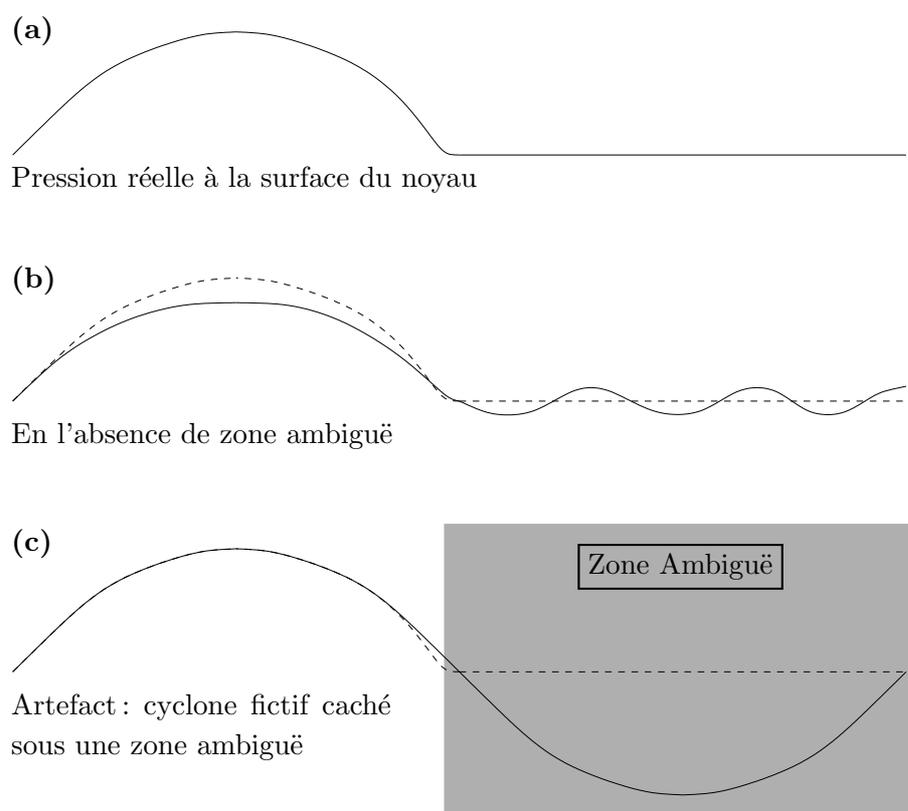


FIG. 3.6 – Mécanisme de création de vortex fictifs sous les zones ambiguës par la méthode spectrale. Pour restituer le champ de pression réel (a) au moyen d'une décomposition spectrale, l'introduction de petites échelles est nécessaire (b). Une zone ambiguë "bien placée" (iso- ζ parallèles aux isobares) permet de se dispenser des petites échelles, couteuses du point de vu de la norme, sans pour autant pénaliser l'erreur de prédiction (c).

Ce mécanisme de création de vortex fictifs sous les zones ambiguës n'a pas de raison d'exister avec la méthode locale, celle-ci n'utilisant pas de développement en harmoniques sphériques. Un vortex, même centré sur une zone ambiguë, retrouvé par les deux méthodes (figure 3.5b) a donc plus de chance d'avoir une signification que s'il n'apparaît qu'avec la méthode spectrale.

Le mécanisme de génération de vortex fictif par la méthode spectrale semble adapté au cas présenté par la figure 3.5a. En effet, à côté du cyclone présumé fictif se situent deux vortex sensiblement de même longueur d'onde et retrouvés par les deux méthodes (figures 3.3 et 3.4, 1590, anticyclone sous l'Atlantique nord et cyclone sous le Pacifique nord-ouest).

Désaccords de petite échelle

Un autre type de désaccord entre les deux séries temporelles présentées peut être observé. Il s'agit de structures de petite échelle présentes dans les champs de pression de la méthode locale mais absents de ceux de la méthode spectrale. Ces structures sont généralement étirées parallèlement aux courbes iso- ζ . La figure 3.7 montre deux exemples de telles structures. Bien

que le mode de calcul de la méthode locale soit susceptible de créer des artefacts allongés le long des iso- ζ (§2.3), il n'est pas facile de déterminer la fiabilité ou la non-fiabilité de ces structures. En effet, s'agissant de structures de petite échelle, elles peuvent aussi ne pas avoir été retrouvées par la méthode spectrale, du fait de la pénalisation importante des petites échelles du mouvement imposée par le critère de la norme. Afin d'étudier dans quelle mesure la méthode locale peut créer des structures fictives allongées et la méthode spectrale ignorer des structures de petite taille, le recours à des tests synthétiques, à partir de champs de pression connus, est nécessaire.

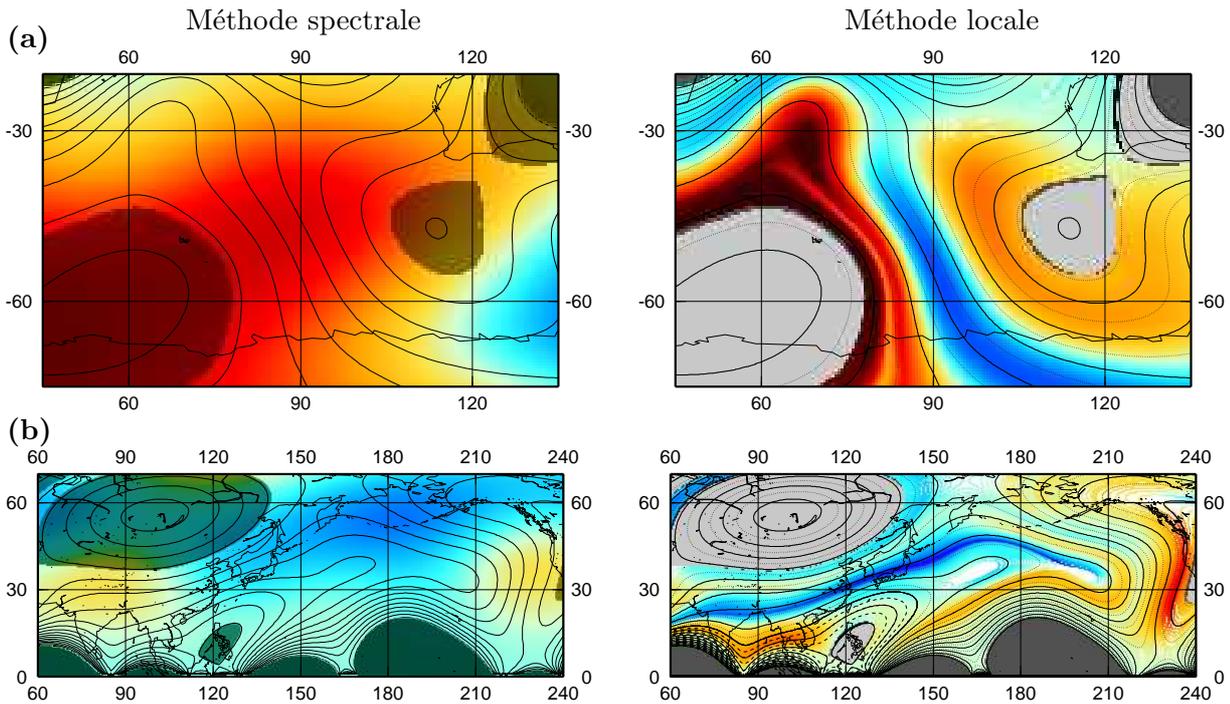


FIG. 3.7 – Deux exemples de structures de petite échelle dans le champ de pression de la méthode locale (colonne de droite) qui sont absentes du champ de pression de la méthode spectrale (colonne de gauche). (a) Exemple issu des champs de pression de 1870. (b) Exemple issu des champs de pression de 1750. Les codes de couleurs sont identiques à ceux des figures 3.3 et 3.4.

3.2.2 Tests synthétiques

Principe

Le principe des tests synthétiques mis en place afin d'étudier les artefacts introduits dans les champs de pression calculés par les méthodes spectrale et locale est résumé par le schéma 3.8. Il s'agit de calculer la variation séculaire créée par l'action de mouvements imposés sur un champ magnétique. L'inversion de cette variation séculaire synthétique avec le champ magnétique permet d'obtenir un modèle de mouvements. Les artefacts générés par la méthode utilisée peuvent finalement être mis en évidence en comparant les mouvements restitués par l'inversion avec les mouvements imposés.

Le choix des mouvements imposés constitue le point le plus délicat de ces tests synthétiques.

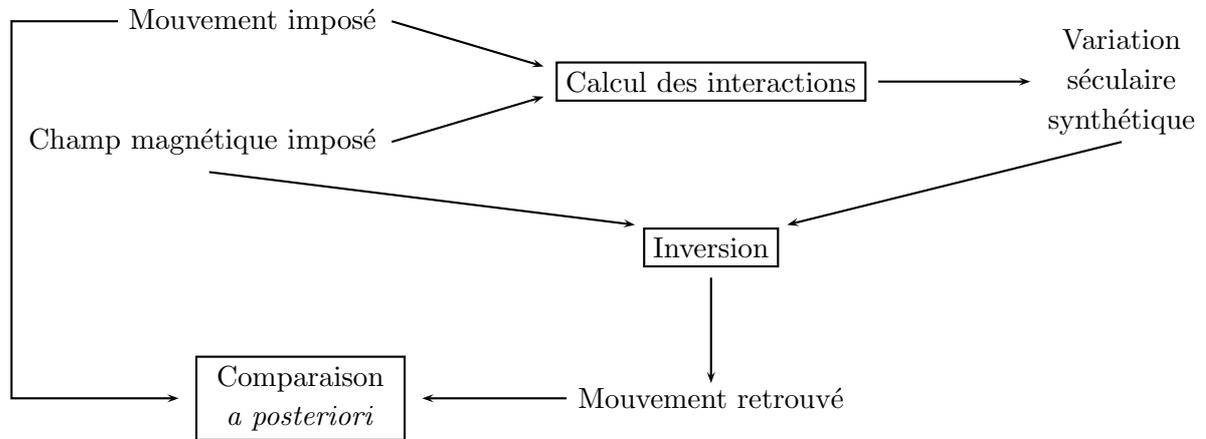


FIG. 3.8 – Principe des tests synthétiques effectués afin d’étudier les artefacts introduits par les méthodes spectrale et locale dans le champ de pression restitué.

En premier lieu, il convient de ne pas utiliser un mouvement obtenu par une inversion précédente. En effet, l’utilisation d’un tel champ conduit toujours à sous-estimer les erreurs introduites par l’inversion, ces mouvements étant forcément compatibles avec la méthode. À titre d’exemple, la figure 3.9 montre que les erreurs moyennes relatives⁴ obtenues lors d’un test synthétique avec un mouvement imposé aléatoire sont plus de trois fois supérieures à celles obtenues avec un mouvement imposé issu d’une inversion précédente.

Il est donc nécessaire de générer des mouvements synthétiques. Cette génération est elle-même délicate puisque toute notre connaissance sur les propriétés supposées des mouvements à la surface du noyau provient d’inversions du type de celles que nous essayons justement de tester. Nous sommes ainsi contraints de générer des mouvements synthétiques en utilisant des contraintes arbitraires, sans qu’il soit vraiment possible de juger de leur pertinence.

Étude des artefacts générés avec une variation séculaire parfaite

Dans un premier temps, nous souhaitons tester les méthodes spectrale et locale avec des variations séculaires synthétiques respectant parfaitement toutes les hypothèses requises par les méthodes d’inversion. Pour cela, nous devons donc générer des mouvements tangentiellement géostrophiques. Ces mouvements doivent également être compatibles avec l’hypothèse de grande échelle de la méthode spectrale. À défaut de mieux, nous générons aléatoirement des mouvements synthétiques tangentiellement géostrophiques dont les spectres sont proches de ceux des mouvements retrouvés⁵. Par ailleurs, les mouvements et le champ magnétique imposés sont tronqués au degré 13. Ainsi, toutes les interactions à l’origine de la variation séculaire synthétique peuvent

4. Nous appelons erreur moyenne relative la quantité définie par : $\int_S |p_r - p_i| dS / \int_S |p_i| dS$, p_r étant la pression reconstruite, p_i la pression imposée et S la surface du noyau.

5. Les détails techniques concernant cette génération de mouvements aléatoires sont présentés dans l’annexe A.

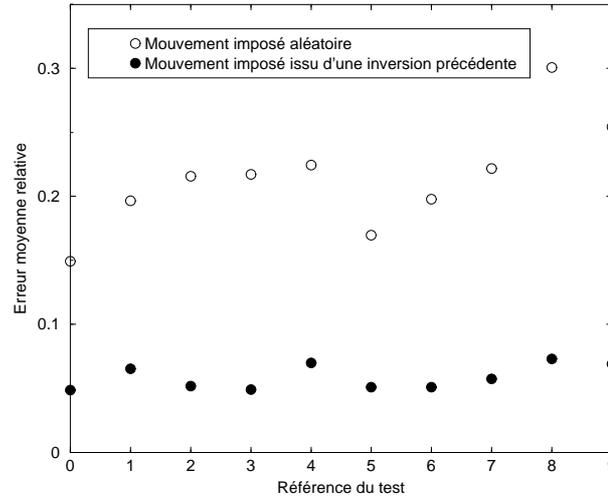


FIG. 3.9 – Comparaison des erreurs moyennes relatives obtenues avec un champ de pression imposé aléatoire (en traits pleins) ou un champ de pression imposé issu d'une inversion précédente (en traits pointillés). Les champs «issus d'une inversion précédente» sont les champs de pression retrouvés lors de l'inversion avec un champ de pression imposé aléatoire. Les inversions sont faites avec la méthode spectrale et le champ magnétique de 1990. Les variations séculaires inversées satisfont pleinement toutes les hypothèses requises par l'inversion.

être prises en compte lors des inversions (§2.2.2).

Dix variations séculaires parfaites, résultant de l'action du champ magnétique de 1990 par dix mouvements générés aléatoirement ont été inversées par les méthodes spectrale et locale. Dans ces cas idéaux, les deux méthodes retrouvent les différents champs de pression imposés de manière très satisfaisante. L'erreur moyenne générée par la méthode locale est supérieure à celle de la méthode spectrale (figure 3.10a), mais dans les deux cas cette erreur ne représente que quelques pourcents des maxima des champs de pression imposés (environ 2% pour la méthode spectrale et 6% pour la méthode locale).

La comparaison visuelle des champs de pression imposés et retrouvés par la méthode spectrale ne permet pas d'identifier d'artefacts. Toutes les structures du champ de pression imposé sont retrouvées, y compris celles situées sous les zones ambiguës (figure 3.11a). Pour la méthode locale l'accord est également très bon, mais des structures fictives de petite taille alignées avec les iso- ζ sont visibles (figure 3.11b). Ces petits artefacts expliquent vraisemblablement l'erreur moyenne relative plus importante de la méthode locale.

Les différentes structures du champ de pression étant toutes correctement retrouvées, la différence entre les amplitudes moyennes des champs de pression imposés et retrouvés (figure 3.12) s'explique principalement par légère atténuation, de l'ordre de 5%, des amplitudes dans les champs retrouvés. Pour la méthode locale, la différence plus importante entre les amplitudes moyennes des champs de pression ne résulte pas uniquement de différences au niveau des amplitudes, mais probablement principalement des artefacts de petite échelle.

Les champs de pression retrouvés par les deux méthodes dans ces cas idéaux sont, à quelques exceptions de petite échelle près, toujours très similaires. Les différences observées dans les

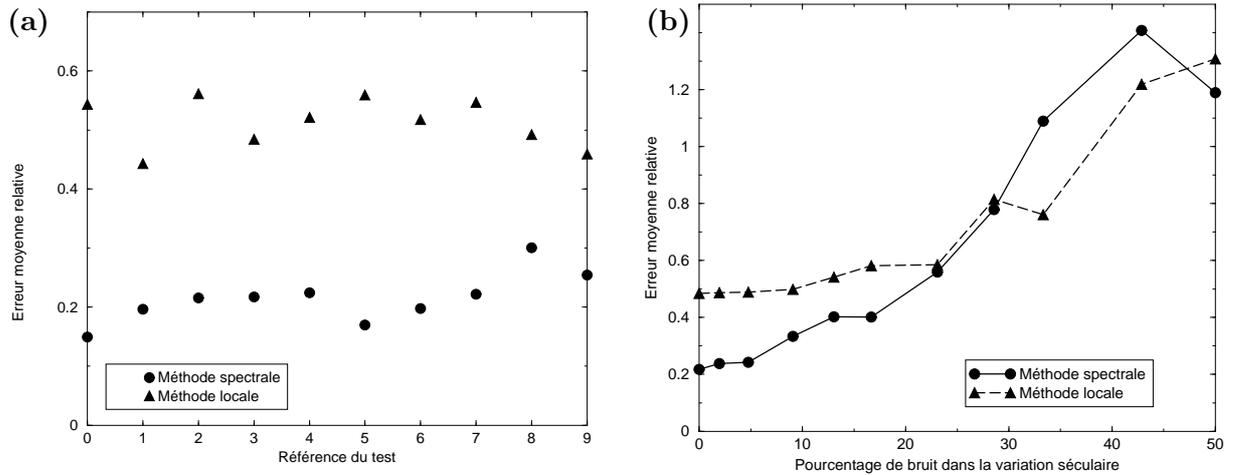


FIG. 3.10 – Comparaison des erreurs moyennes relatives obtenues avec les méthodes spectrale et locale. (a) Les 10 variations séculaires testées respectent parfaitement toutes les hypothèses des inversions. (b) Un pourcentage de bruit variable est ajouté à une variation séculaire respectant toutes les hypothèses des inversions (la variation séculaire n° 3 de (a)).

mouvements historiques (figures 3.3 et 3.4) doivent donc trouver leur origine dans la manière différente dont chacune de ces méthodes s'adapte à une variation séculaire qui n'est pas parfait-

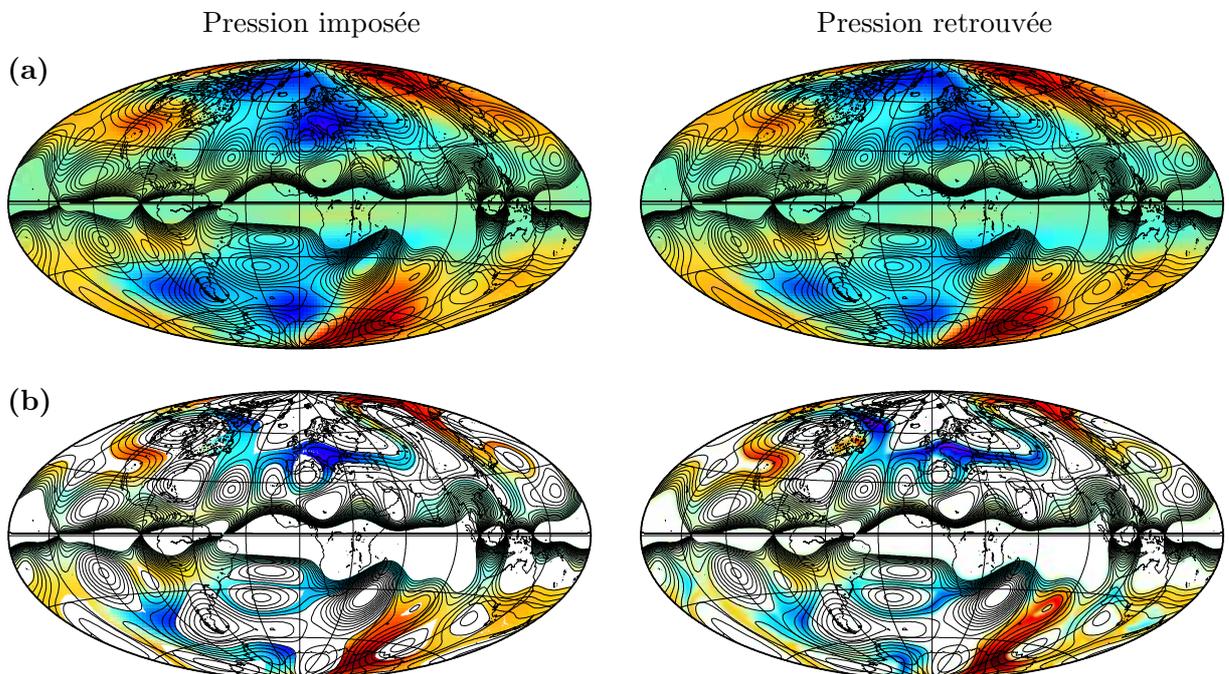


FIG. 3.11 – Exemple de champ de pression aléatoire parfaitement retrouvé, (a) par la méthode spectrale et (b) par la méthode locale, lorsque la variation séculaire synthétique respecte toutes les hypothèses des inversions. Le champ de pression aléatoire présenté correspond au n° 3 de la figure 3.10a. L'échelle de couleurs est la même pour toutes les cartes. Les zones laissées blanches sur les cartes de la méthode locale correspondent aux zones ambiguës et aux zones non-géostrophiques.

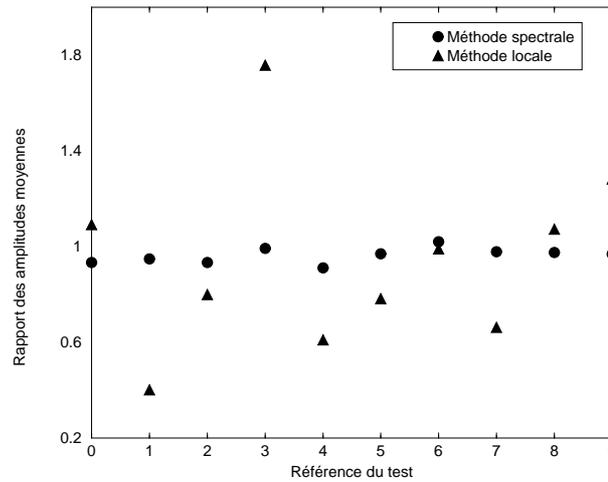


FIG. 3.12 – Rapport entre l'amplitude moyenne des champs de pression retrouvés et imposés avec les méthodes spectrale et locale.

tement compatible avec toutes les hypothèses requises par l'inversion.

Étude des artefacts générés avec une variation séculaire bruitée

Afin d'étudier les artefacts générés par les méthodes spectrale et locale lorsque la variation séculaire n'est pas totalement compatible avec les hypothèses imposées⁶, une deuxième série de variations séculaires synthétiques *bruitées* a été générée. Un bruit aléatoire a été ajouté à l'une des variations séculaires parfaites de la série de tests précédente (voir l'annexe A). Dans les variations séculaires bruitées ainsi obtenues, le niveau de bruit représente entre 2% et 50% de la variation séculaire totale.

Les erreurs générées par chacune des méthodes augmentent évidemment avec le pourcentage de bruit présent dans la variation séculaire inversée (figure 3.10b). L'observation visuelle des champs de pression retrouvés confirme que les artefacts suivent le même type d'évolution et représentent une portion de plus en plus grande du champ de pression reconstruit.

Pour les faibles niveaux de bruit dans la variation séculaire (jusqu'à environ 20%), la méthode locale génère plus d'artefacts que la méthode spectrale (figures 3.10b et 3.13a). En accord avec les résultats des tests idéaux, ces artefacts sont principalement des structures allongées le long des iso- ζ et de taille relativement modeste. La taille, le nombre et l'amplitude de ces artefacts augmentent avec le niveau de bruit. Dans ces faibles niveaux de bruit, la méthode spectrale ne génère pas de structure complètement fictive. L'amplitude retrouvée de certains vortex est un peu faible, la position de certains autres un peu décalée.

Le comportement de la méthode spectrale se dégrade rapidement dans des niveaux de bruit

6. Parmi ces hypothèses figure l'hypothèse de grande échelle, appliquée pour les variations séculaires *parfaites* en générant un mouvement de spectre identique à celui des mouvements historiques. Ces variations séculaires bruitées aléatoirement permettent, entre autres effets, de prendre en compte les artefacts générés par des mouvements dont le spectre est différent du spectre sélectionné par le paramètre λ de l'inversion (2.22).

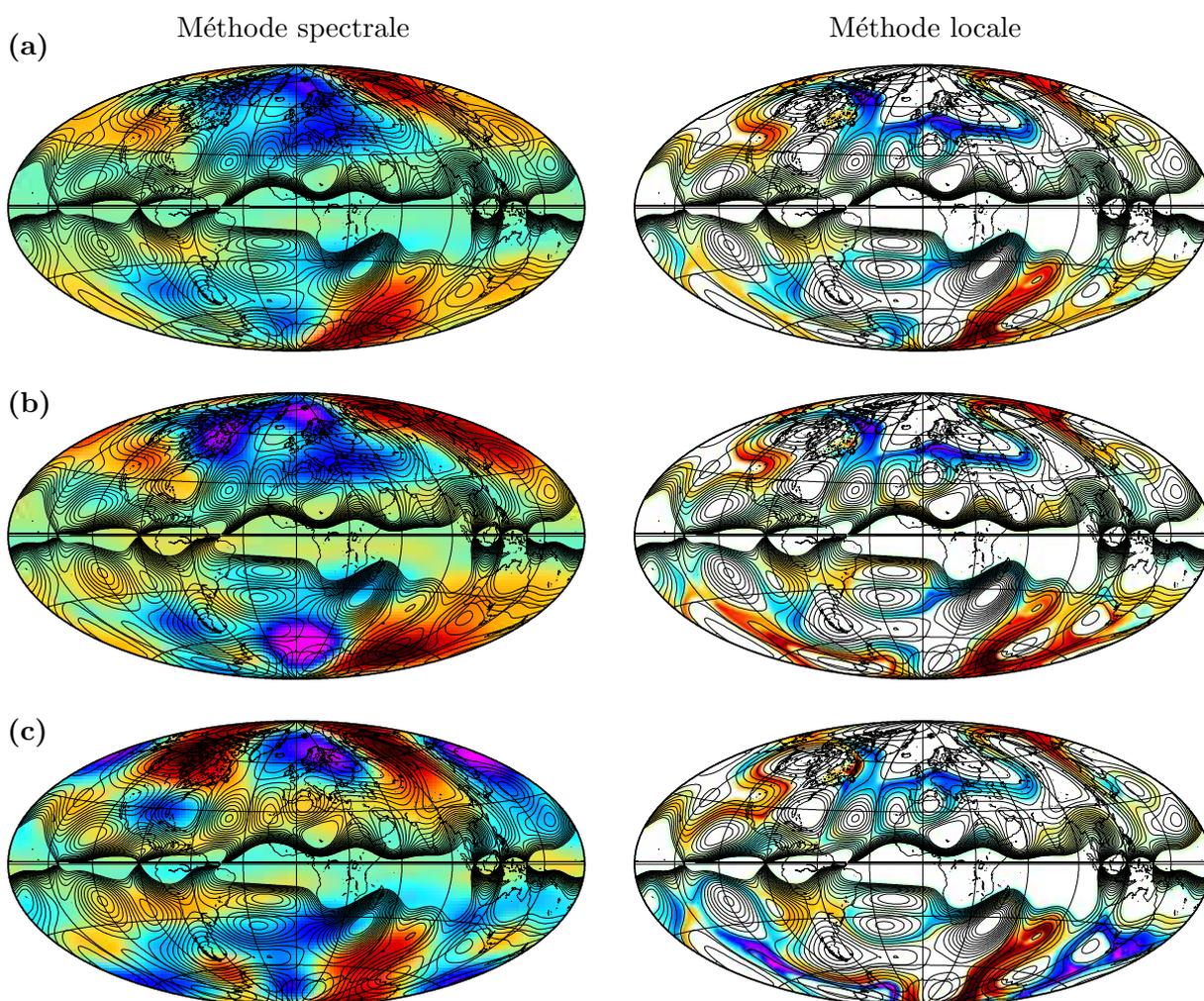


FIG. 3.13 – Champs de pression retrouvés par les méthodes spectrale (colonne de gauche) et locale (colonne de droite) lorsque la variation séculaire contient, en plus de la partie respectant les hypothèses des inversions, un bruit aléatoire. Ce bruit représente statistiquement (a) 9%, (b) 29% et (c) 43% de la variation séculaire totale. Le champ de pression imposé est celui présenté dans la figure 3.11 (colonne de gauche). L'échelle de couleurs est identique à celle de la figure 3.11.

intermédiaires, de l'ordre de 20% à 40% (figure 3.13b). Les amplitudes des vortex sont de moins en moins bien contraintes : certains vortex ne sont quasiment pas retrouvés tandis que l'amplitude de certains autres est beaucoup trop forte. Des structures purement fictives apparaissent également sous les zones ambiguës ou alignées avec les courbes iso- ζ . Pour la méthode locale, les artefacts allongés continuent également de se développer. Malgré ces artefacts, les deux méthodes retrouvent encore globalement bien la structure générale du champ de pression.

Lorsque le bruit représente plus de 40% de la variation séculaire, la situation devient critique (figure 3.13c). Certaines structures du champ de pression imposé sont encore retrouvées mais les artefacts deviennent si nombreux qu'il serait impossible de faire le tri entre structures réelles et fictives si l'on ne connaissait pas le champ de pression imposé. De par la taille et l'amplitude des

artefacts, les deux méthodes ne s'accordent plus sur la structure globale du champ de pression pour ces forts niveaux de bruit.

Du fait des nombreuses inconnues, il n'est pas possible de déterminer dans quelle mesure la variation séculaire observée est compatible avec les hypothèses des inversions. En effet, s'il est possible de déterminer la part de la variation séculaire compatible avec les hypothèses du flux gelé et du mouvement tangentiellement géostrophique, il n'est pas possible de déterminer si le mouvement réel est compatible avec l'hypothèse de grande échelle ni d'estimer la part de la variation séculaire observée provenant d'interactions non modélisées lors des inversions. Il n'est pas non plus possible d'estimer les éventuelles distorsions de la variation séculaire et du champ magnétique induites par la faible conductivité électrique du manteau (§2.1.1). Le bon accord global des deux séries temporelles historiques semble néanmoins nous indiquer que nous ne sommes pas dans le cas des forts niveaux de bruit présenté ci-dessus.

Conséquences pour l'interprétation des séries historiques

Dans le paragraphe 3.2.1, nous avons mis en évidence les deux principaux types de désaccords présents dans les reconstructions historiques des mouvements à la surface du noyau par les méthodes spectrale et locale. Nous étudions maintenant des exemples de désaccords similaires entre les deux méthodes dans les résultats des différents tests synthétiques effectués.

La figure 3.14 montre le détail de trois exemples de désaccord au niveau d'une zone ambiguë dans les champs de pression issus des méthodes spectrale et locale. Ces exemples montrent qu'il n'est en fait pas facile de trancher en faveur d'une méthode ou l'autre dans un tel cas. Il existe en effet des cas où la méthode spectrale génère un vortex fictif centré sur une zone ambiguë (figure 3.14a), des cas où la méthode spectrale tout en amplifiant un vortex existant est plus proche de la réalité que la méthode locale (figure 3.14b) et enfin des cas où la méthode locale elle-même génère un vortex fictif centré sur une zone ambiguë (figure 3.14c). Il n'est donc pas facile de savoir comment interpréter un tel désaccord dans les séries historiques, surtout si la structure douteuse n'est pas de grande échelle.

Au sujet des structures de petite échelle visible dans les champs de pression de la méthode locale, il s'agit effectivement dans presque tous les cas d'artefacts. La figure 3.15 montre deux des nombreux exemples présents dans les tests synthétiques effectués. Lorsque le niveau de bruit présent dans la variation séculaire est important, il est fréquent que ces artefacts de petite échelle existent également, sous une forme moins étirée, dans le champ de pression de la méthode spectrale (figure 3.15b). Pour l'interprétation des séries historiques, il convient de se rappeler que dans ces tests synthétiques, les champs de pression à retrouver ne contiennent absolument pas de petites échelles. Ce n'est probablement pas le cas du champ de pression réel et toutes les structures de petite taille des reconstructions historiques ne sont pas forcément des artefacts. Il est néanmoins très vraisemblable que les structures très étirées présentes dans les champs de pression de la méthode locale n'aient pas de réalité physique, cette méthode pouvant générer de tels artefacts même avec une variation séculaire *parfaite* (figure 3.11b).

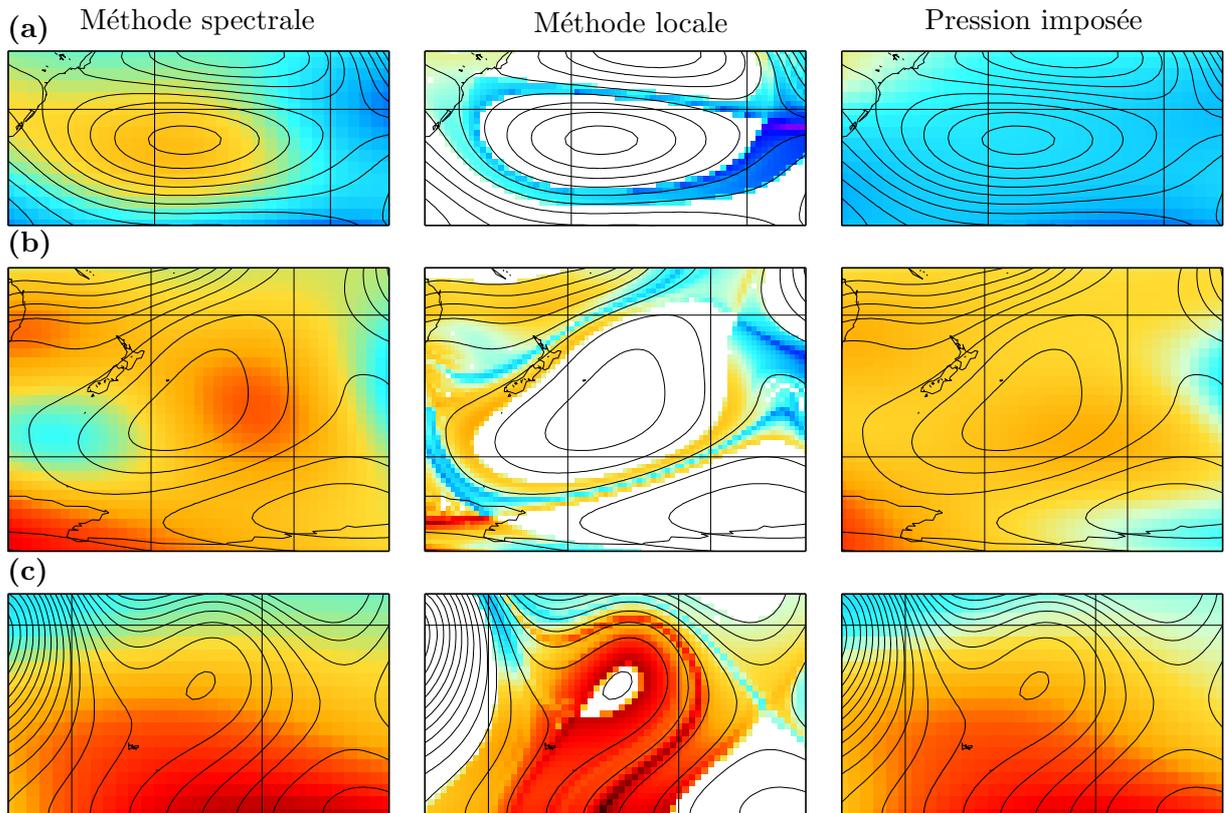


FIG. 3.14 – Exemples d’artefacts au voisinage des zones ambiguës avec les méthodes spectrale (colonne de gauche) et locale (colonne du milieu) issus des tests synthétiques avec une variation séculaire bruitée. Les détails présentés correspondent à un niveau de bruit dans la variation séculaire totale de (a) 33%, (b) 17%, et (c) 5%. Le champ de pression imposé et l’échelle de couleurs sont identiques à ceux de la figure 3.11.

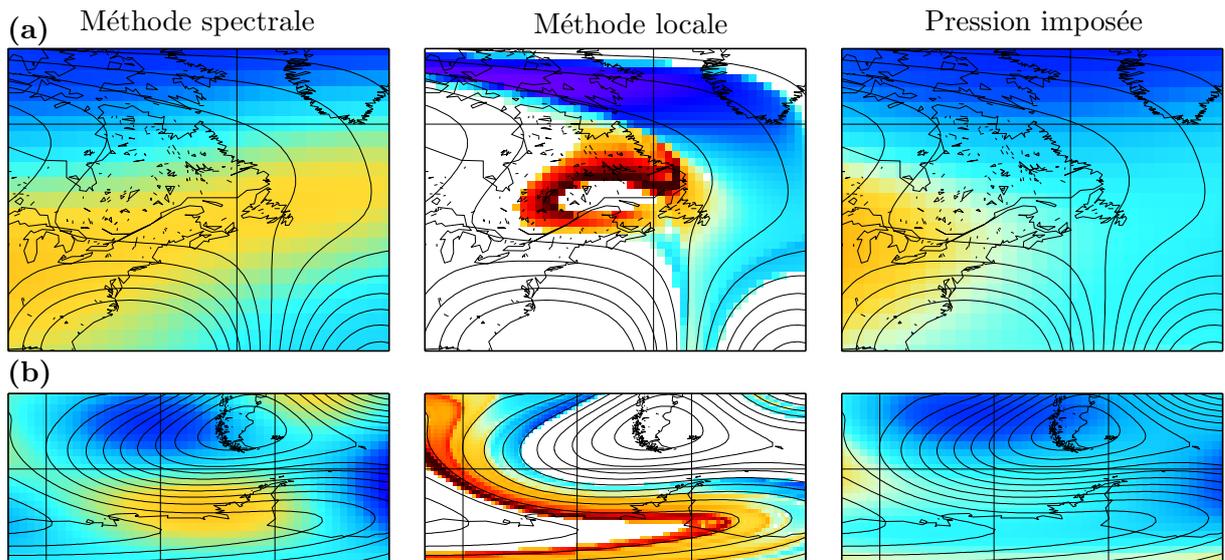


FIG. 3.15 – Exemples d’artefacts de petite échelle générés par les méthodes spectrale (colonne de gauche) et locale (colonne du milieu). Les variations séculaires utilisées contiennent (a) 17% et (b) 29% de bruit aléatoire. Le champ de pression imposé et l’échelle de couleurs sont identiques à ceux de la figure 3.11.

3.3 Conclusions : dynamique de surface du noyau depuis 400 ans

L'existence de désaccords locaux dans les champs de pression obtenus avec les méthodes spectrale et locale ne doit pas faire oublier le bon accord général de ces deux méthodes de calcul indépendantes. Ce point est très positif. En effet, les tests synthétiques effectués ont montré que les deux méthodes accommodent différemment une variation séculaire qui ne respecte pas toutes les conditions imposées⁷. Chacune des méthodes crée alors, à sa manière, un nombre important de structures fictives d'échelle intermédiaire. Dans ce cas, les nombreux artefacts générés masquent l'accord résiduel des méthodes au sujet des quelques structures *réelles* correctement retrouvées. Le bon accord général obtenu confirme donc la pertinence des hypothèses utilisées et la relative fiabilité des structures des mouvements obtenus.

Les tests synthétiques confirment également l'intérêt d'utiliser la méthode spectrale pour reconstruire les mouvements de la surface du noyau, y compris sous les zones ambiguës. En effet, dans les niveaux de *bruit* de la variation séculaire supposés, cette méthode ne génère que très peu de vortex purement fictifs centrés sous les zones ambiguës.

Enfin, la comparaison des deux séries historiques nous permet d'éliminer certaines structures vraisemblablement fictives. Nous proposons ainsi dans la figure 3.16 une reconstruction du champ de pression géostrophique à la surface du noyau au cours des 400 dernières années. Pour cette reconstruction les zones de désaccord important entre les deux méthodes ont été omises, à l'exception des désaccords venant de structures très étirées et de petite échelle de la méthode locale, ces structures étant probablement des artefacts dûs à cette méthode exclusivement (§3.2.2). Le champ de pression sous les zones ambiguës a été conservé lorsque les résultats de la méthode locale au voisinage immédiat de la zone ambiguë concernée sont concordants. Le champ de pression situé sous des zones ambiguës de taille trop importante n'a ainsi pas été conservé.

Dans la série proposée, le gros anticyclone situé au sud de l'Afrique constitue la structure la plus remarquable, tant par son intensité que par sa stabilité au cours de la période étudiée. Les vortex de l'hémisphère nord sont moins stables dans le temps et de taille plus modeste. Pour la zone de l'hémisphère sud située sous l'Océan pacifique, la situation n'est pas très claire, les mouvements n'y étant pas souvent correctement déterminés.

7. La méthode spectrale retrouve en effet le mouvement qui explique le mieux possible, dans le cadre des hypothèses imposées, la variation séculaire bruitée, tandis que la méthode locale inverse une variation séculaire *parfaite* qui soit le plus proche possible de la variation séculaire bruitée imposée (§2.3.1).

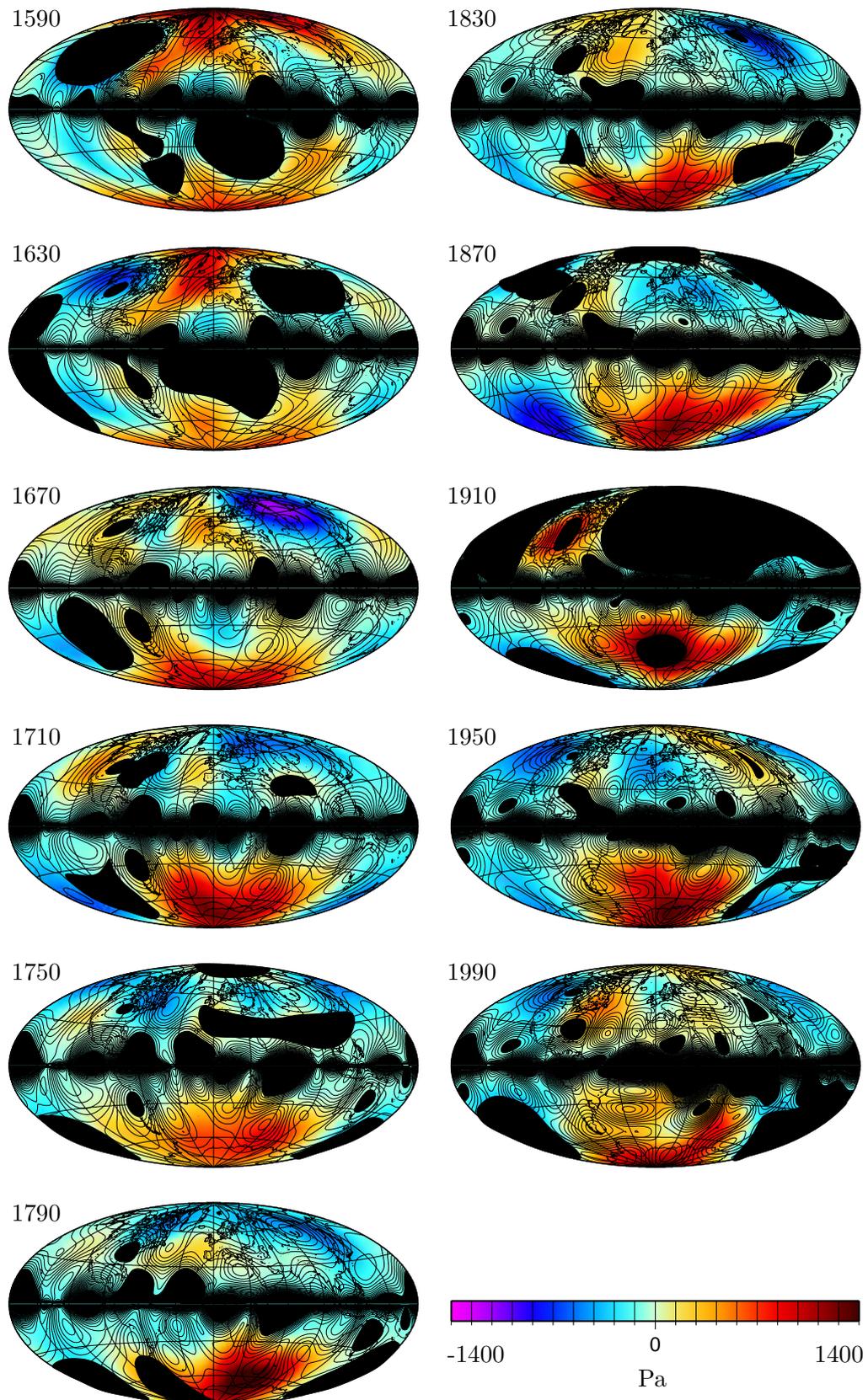


FIG. 3.16 – Évolution de la pression géostrophique au cours de 1590 à 1990 obtenue par comparaison des séries historiques spectrale (figure 3.3) et locale (figure 3.4). Les zones où la pression n'est pas correctement déterminée (zones non-géostrophiques et zones de désaccord entre les deux méthodes) sont noircies.

Chapitre 4

Mouvements actuels, structures fiables à la surface du noyau

*La plupart des résultats présentés dans ce chapitre sont repris dans un article soumis à *Physics of the Earth and Planetary Interiors*.*

Dans ce chapitre, nous utilisons des observations magnétiques récentes issues de différentes missions satellitaires afin d'estimer, de manière aussi précise que possible, la dynamique actuelle de la surface du noyau. Les tests du chapitre précédent ayant confirmé la validité de la méthode spectrale, tous les mouvements de cette étude sont obtenus avec cette méthode d'inversion. La très bonne résolution spatiale des modèles satellitaires de variation séculaire requiert un traitement spécifique des erreurs introduites par l'invisibilité des petites échelles des différents champs utilisés et une modification de la procédure permettant de sélectionner les paramètres optimaux de l'inversion. La fiabilité des différentes structures des modèles de mouvements obtenus est ensuite évaluée à l'aide de tests synthétiques.

4.1 Observations magnétiques satellitaires

4.1.1 Satellites magnétiques

Depuis 25 ans, la connaissance du champ magnétique terrestre a largement bénéficié de l'apport des satellites magnétiques vectoriels. Ceux-ci permettent en effet d'observer le champ terrestre avec une meilleure résolution spatiale que les observatoires terrestres tout en garantissant une couverture géographique plus homogène.

Le satellite MAGSAT, lancé en 1979 [Langel et al., 1980], a ainsi permis d'observer, pour la première fois les petites échelles du champ magnétique du noyau¹[Langel et Estes, 1982], difficilement accessibles avec les seules observations terrestres. Ce satellite n'a malheureusement

1. Degrés 9 à 13 de la décomposition en harmoniques sphériques.

pas fonctionné assez longtemps pour permettre d'estimer correctement la variation séculaire [Barraclough, 1985].

Ceci est possible grâce aux satellites magnétiques en orbite actuellement. Depuis 1999, le satellite Ørsted [Neubert et al., 2001] enregistre ainsi le champ magnétique terrestre en continu. Depuis 2000, il est complété par les satellites CHAMP [Reigber et al., 2003] et Ørsted 2-SAC-C.

4.1.2 Modèle de variation séculaire différentielle

Afin de tirer parti des observations magnétiques détaillées fournies par les satellites magnétiques pour le calcul des mouvements à la surface du noyau, il est nécessaire de disposer d'un modèle de champ magnétique ainsi que d'un modèle de variation séculaire. Si le premier peut être obtenu assez rapidement, le second nécessite des observations couvrant plusieurs années et des traitements plus poussés.

Dans un premier temps, ne disposant pas de modèle de variation séculaire satellitaire, nous avons utilisé un modèle de variation séculaire différentielle. Ce modèle correspond simplement à la différence des champs magnétiques observés en 2000 par le satellite Ørsted et en 1980 par le satellite MAGSAT (figure 4.1). Les deux modèles de champ magnétique utilisés ont été calculés de manière similaire tant du point de vue de la sélection des données que de la méthode employée, par Langlais et al. [2003]. Ceci permet de limiter, au maximum, les différences qui ne seraient pas dues aux modifications du champ magnétique lui-même.

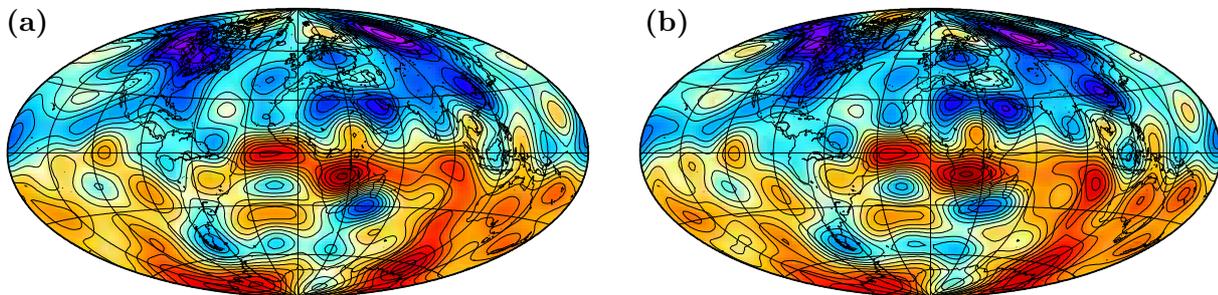


FIG. 4.1 – Modèles de champ magnétique radial B_r à la surface du noyau obtenus par Langlais et al. [2003] grâce aux observations (a) du satellite MAGSAT pour l'année 1980, (b) du satellite Ørsted pour l'année 2000. Échelles de couleur variant entre -1050 et $+1050 \mu T$, équidistance des courbes $iso-B_r$: $100 \mu T$. Les champs sont représentés jusqu'au degré 13 de leur développement en harmoniques sphériques.

La variation différentielle obtenue (figure 4.2b) présente une très forte dissymétrie entre les hémisphères atlantique et pacifique, les modifications du champ magnétique étant beaucoup plus faibles sous l'Océan pacifique que dans l'hémisphère atlantique opposé. Cette dissymétrie est d'amplitude trop forte pour pouvoir être attribuée à des contaminations crustales ou externes [Hulot et al., 2002]. Il est donc pertinent d'essayer de l'interpréter en termes de mouvements à la surface du noyau.

Lors des inversions pour retrouver le champ de vitesse à la surface du noyau, ce modèle de variation séculaire différentielle, qui représente une variation séculaire moyenne sur la période

considérée, est complétée par un modèle de champ magnétique moyen (figure 4.2a), moyenne arithmétique des champs de 1980 et de 2000.

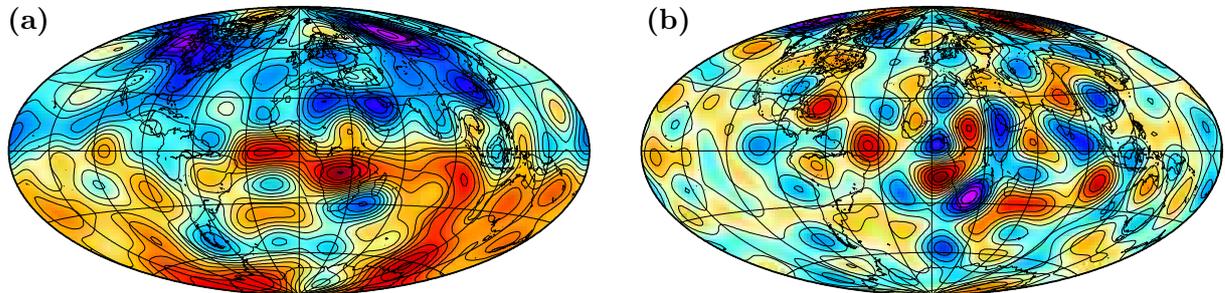


FIG. 4.2 – Modèles de champ magnétique moyen et de variation séculaire différentielle utilisés dans cette étude, représentés à la surface du noyau. (a) Champ magnétique radial. Échelle de couleur de -1050 à $+1050 \mu\text{T}$, équidistance des iso- B_r : $100 \mu\text{T}$. (b) Variation séculaire radiale. Échelle de couleur de -17 à $+17 \mu\text{T}/\text{an}$, équidistance des courbes d'iso-variation : $2.5 \mu\text{T}/\text{an}$. Les champs sont représentés jusqu'au degré 13.

4.1.3 Modèles de variation séculaire instantanée

Aujourd'hui, des modèles de variation séculaire instantanée, dérivés des observations des différents satellites magnétiques en opération, sont disponibles. Nous en présentons ici trois, qui seront utilisés dans des calculs de mouvements à la surface du noyau et permettront ainsi de compléter l'étude réalisée avec la variation séculaire différentielle.

Ces modèles, obtenus par différentes équipes, utilisent une partie des observations des satellites Ørsted et CHAMP effectuées entre 1999 et 2002. Ils diffèrent principalement entre eux par les critères de sélection des données incorporées et leur manière de filtrer les composantes externes du champ magnétique, d'origines ionosphérique et magnétosphérique. Les variations séculaires ainsi obtenues par Langlais [2003], Maus et al. [2004]² (modèle POMME1.4) et Olsen et al. [2002]³ (modèle IDEMM), présentées dans la figure 4.3, sont relativement semblables, au moins jusqu'au degré 10. Elles présentent également de nombreux points communs avec la variation séculaire différentielle (figure 4.2b), en particulier la dissymétrie entre les hémisphères atlantique et pacifique.

Ces modèles de variation séculaire instantanée présentent l'avantage de fournir vraiment une estimation de $\partial B_r / \partial t$ à un instant donné, ce qui est plus discutable pour la variation séculaire différentielle. Ils ne permettent en revanche pas encore de déterminer précisément les plus petites échelles de la variation séculaire du noyau théoriquement visibles. En effet, certains coefficients de degré supérieur à 10 des modèles utilisés contiennent vraisemblablement plus de bruit que de signal produit par le noyau.

2. Voir aussi <http://www.gfz-potsdam.de/pb2/pb23/SatMag/pomme14.html>.

3. Voir aussi Olsen [2002] et http://www.dsri.dk/Ørsted/Field_models/IDEMM/index.html.

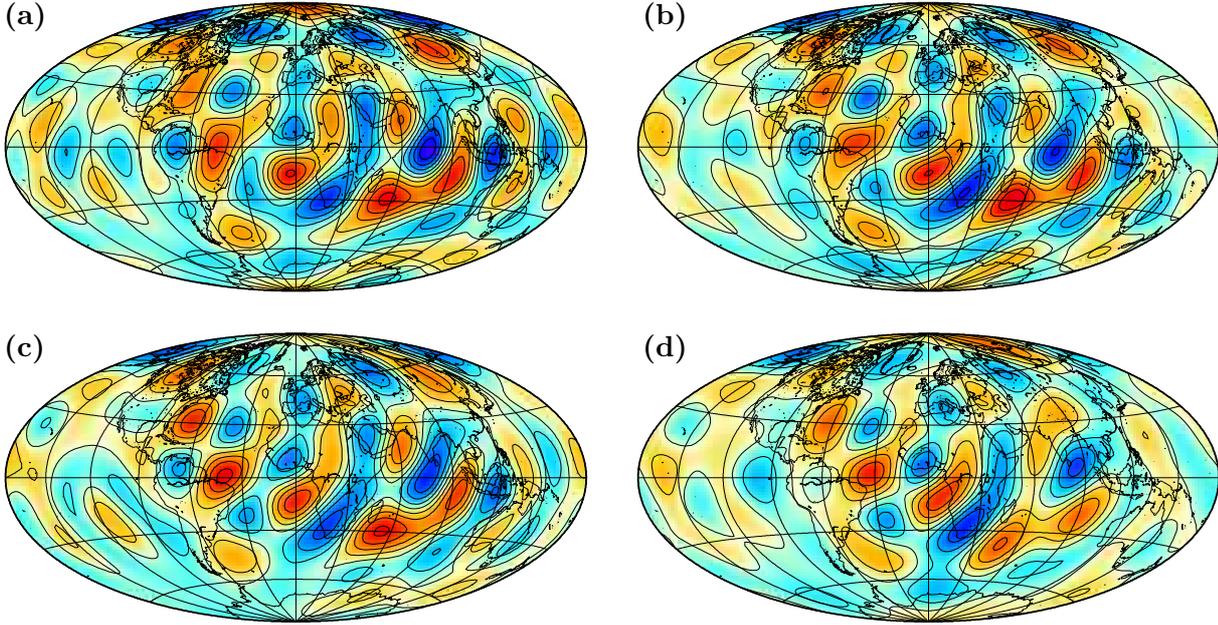


FIG. 4.3 – Modèles de variation séculaire instantanée obtenus avec des données satellitaires. (a) Modèle de Langlais [2003] pour 2001 (b) modèle POMME1.4 de Maus et al. [2004] pour 2002, et (c) Modèle IDEMM de Olsen et al. [2002] pour 2001. (d) Variation séculaire différentielle 1980–2000, pour comparaison (voir figure 4.2). Les champs sont représentés, à la surface du noyau, juqu’au degré 10 de leur décomposition en harmoniques sphériques. Échelles de couleur de -17 à $17 \mu\text{T}/\text{an}$, équidistance des courbes d’iso-variation : $2.5 \mu\text{T}/\text{an}$.

4.2 Nouvelle méthode de choix des paramètres de l’inversion

4.2.1 Incertitudes associées aux modèles de variation séculaire

Il est nécessaire d’évaluer les erreurs d’observation associées aux nouveaux modèles satellitaires de variation séculaire. Ces erreurs, qui sont utilisées durant l’inversion pour le calcul de l’erreur de prédiction (équation (2.24)), ne sont en effet manifestement pas identiques à celles des modèles terrestres de variation séculaire utilisés dans le chapitre 3.

Nous disposons d’estimations des incertitudes associées à chacun des deux modèles de champ magnétique utilisés [voir Langlais et al., 2003]. La figure 4.4 présente les spectres d’énergie $W(n)$ de ces incertitudes pour les différents champs utilisés dans le calcul de la variation séculaire différentielle. Le spectre d’énergie du champ magnétique est défini par [Langel et Estes, 1982] :

$$W(n) = (n + 1) \sum_{m=0}^n ((g_n^m)^2 + (h_n^m)^2) = (n + 1) (2n + 1) \overline{(g_n)^2}, \quad (4.1)$$

$\overline{(g_n)^2}$ étant le coefficient de Gauss au carré moyen du degré n considéré. Le spectre d’énergie des incertitudes s’obtient en remplaçant, dans la formule (4.1), les coefficients de Gauss g_n^m et h_n^m par l’écart-type σ qui leur est associé.

La variance σ_{diff}^2 de chaque coefficient de la variation séculaire différentielle peut s’estimer

grâce aux variances des deux champs magnétiques :

$$\sigma_{diff}^2 = \frac{\sigma_{2000}^2 + \sigma_{1980}^2}{(\Delta t)^2}, \quad (4.2)$$

σ_{2000}^2 et σ_{1980}^2 étant les variances associés aux différents coefficients des modèles de champ magnétique pour les années 2000 et 1980, Δt la période de 20 ans séparant ces deux modèles. Les variances ainsi obtenues sont très inférieures à celles utilisées avec le modèle *gufm1* [Jackson et al., 2000] dans le chapitre précédent : plus de deux ordres de grandeur les séparent (figure 4.5).

Les incertitudes des deux modèles de champ magnétique prennent en compte les erreurs d'observation du champ magnétique interne, qu'il soit issu du noyau ou de la croûte. Afin d'estimer l'erreur d'observation sur le champ principal, il convient donc de rajouter aux erreurs d'observation globales σ_{1800} et σ_{2000} l'amplitude du champ crustal pour le degré considéré. En supposant que le spectre du champ crustal soit plat pour toutes les échelles, comme les degrés supérieurs à 13 le laisse supposer (§1.1.2), l'amplitude de la contribution crustale serait supérieure aux erreurs globales d'observation, sauf pour les degrés 1 et 2 (figure 4.4). De ce fait, nous choisissons plutôt d'utiliser l'amplitude potentielle du champ crustal comme incertitude de chaque coefficient du champ principal. Les variances σ_{cr}^2 de la variation séculaire qui en découlent peuvent s'exprimer par :

$$\sigma_{cr}^2(n) = \frac{2 W_{cr}}{(2n+1)(n+1)\Delta t^2}, \quad (4.3)$$

W_{cr} représentant le niveau du spectre d'énergie du champ crustal, soit en l'occurrence 25 (nT)² (figure 4.4).

Ne disposant pas d'informations détaillées sur les incertitudes associées aux différents modèles de variation séculaire instantanée, nous utiliserons la même incertitude que celle du modèle de variation séculaire différentielle, à savoir σ_{cr}^2 .

4.2.2 Champs de vitesse obtenus avec la procédure classique

Les erreurs d'observations, et ainsi la matrice de covariance sur les données \mathcal{C}_b (§2.2.2), définies, il reste à déterminer le paramètre λ , définissant le rapport entre les minimisations de l'erreur de prédiction et de la norme lors de l'inversion (équation (2.22)), adéquat. Dans la procédure classique, il s'agit d'ajuster l'erreur de prédiction du modèle de mouvement sur l'erreur d'observation de la variation séculaire, cette dernière étant supérieure aux autres sources d'erreur [Hulot et al., 1992]. Le paramètre λ permettant de satisfaire au mieux cet ajustement est ainsi déterminé, *a posteriori*, en se basant sur la valeur moyenne de l'erreur de prédiction associée à chaque coefficient de la variation séculaire (figure 4.6).

Afin d'obtenir une erreur de prédiction comparable à la très bonne détermination des variations séculaires satellitaires, les mouvements à la surface du noyau obtenus (figure 4.7a) contiennent de nombreuses structures de petite échelle (figure 4.7c). Ces structures, couteuses du point de vu de la norme du mouvement, ne seraient pas nécessaires pour ajuster l'erreur de prédiction sur le niveau d'incertitude des modèles terrestres de variation séculaire (figures 4.7b et 4.7c).

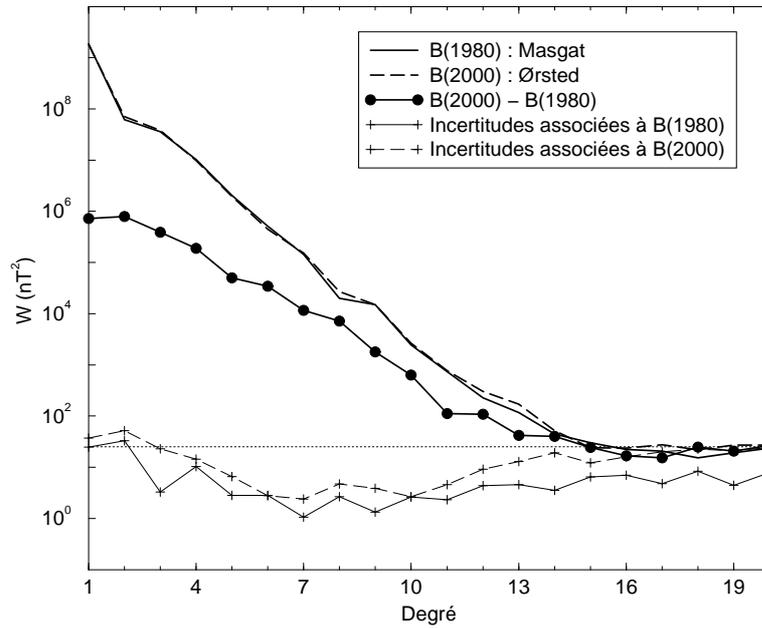


FIG. 4.4 – Spectres d'énergie $W(n)$ des différents champs magnétiques utilisés pour l'estimation de la variation séculaire différentielle. La courbe intitulée « $B(2000)-B(1980)$ » représente la différence brute des deux champs (en nT) et non la variation séculaire (en nT/an). La ligne horizontale en traits pointillés représente le niveau énergétique du champ crustal W_{cr} .

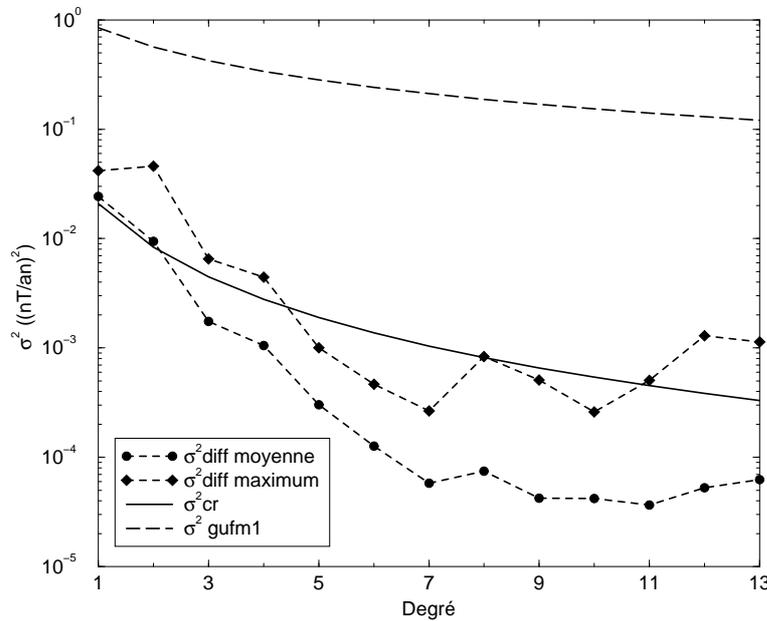


FIG. 4.5 – Incertitudes associées aux modèles satellitaires de variation séculaire. Les variances des courbes « σ_{diff}^2 moyenne» et « σ_{diff}^2 maximum» sont estimées grâce à la formule (4.2), en calculant la moyenne des variances associées aux différents coefficients d'un même degré pour la première et en utilisant la valeur maximale des ces variances pour la seconde. La courbe « σ_{cr}^2 » correspond à la variance définie par (4.3), la courbe « σ^2 gufm1» aux variances utilisées dans l'étude historique du chapitre 3 (3.1).

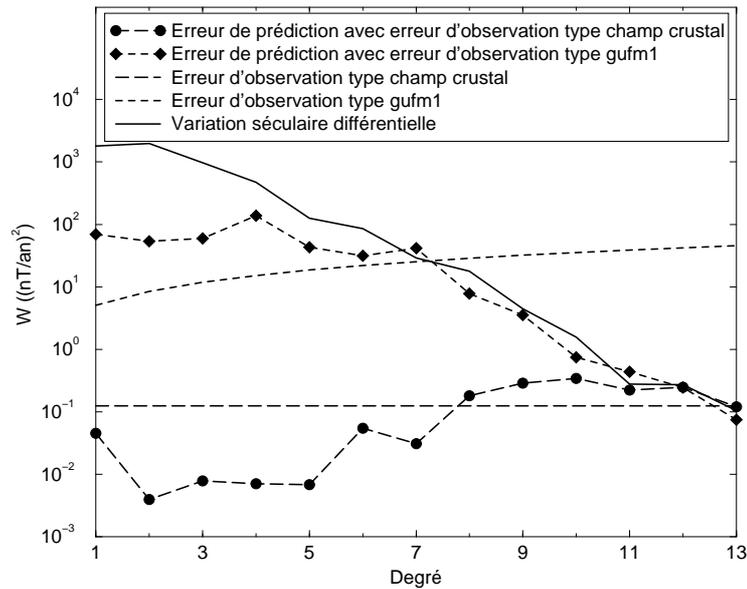


FIG. 4.6 – Spectres d'énergie des erreurs de prédiction et d'observation : ajustement *a posteriori* « optimal » de l'erreur de prédiction sur l'erreur d'observation satellitaire (σ_{cr}^2 «type champ crustal») ou terrestre («type gufm1»). Les mouvements ont été calculés avec la variation séculaire différentielle.

4.2.3 Incohérence des champs de vitesses issus de la procédure classique

Les petites échelles très énergétiques présentes dans le champ de vitesse exploitant au maximum la variation séculaire différentielle (figure 4.7a) sont problématiques. En effet, puisqu'il n'y a pas de raison de supposer que le spectre d'énergie des mouvements⁴ chute brutalement au-delà du degré de troncature, les petites échelles invisibles du mouvement sont probablement assez énergétiques elles aussi. Ces petites échelles invisibles sont donc susceptibles de participer activement à la variation séculaire observée (figure 2.4). Suivant l'amplitude de cette variation séculaire non-modélisée, le modèle de mouvement obtenu peut donc être incohérent. Celui-ci explique en effet en totalité la variation séculaire observée alors qu'il implique en même temps qu'une partie de cette variation provient d'interactions non-modélisées et ne devrait donc pas être expliquée par le mouvement obtenu.

Afin d'évaluer l'amplitude de la variation séculaire non-modélisée, des petites échelles synthétiques ont été générées pour le mouvement et le champ magnétique. Ces prolongements synthétiques aléatoires respectent un spectre d'énergie choisi *a priori*. Le champ magnétique du noyau est prolongé en imposant la même décroissance que celle observée pour les grandes échelles à la surface de la Terre (figure 4.8a). Pour les champs de vitesse, le prolongement est plus problématique puisque l'on ne dispose d'aucune information sur leur spectre indépendante des inversions. Nous avons de ce fait testé différents cas, depuis le spectre plat jusqu'à l'absence

4. Pour les mouvements, le spectre d'énergie de la composante poléoïdale (toroïdale) est défini par $E_p(n) = n(n+1)/(2n+1) \sum_{m=0}^n ((s_n^{m,c})^2 + (s_n^{m,s})^2)$ ($E_t(n) = n(n+1)/(2n+1) \sum_{m=0}^n ((t_n^{m,c})^2 + (t_n^{m,s})^2)$), en utilisant les coefficients de la décomposition du mouvement sur la base poléoïdale-toroïdale (2.17).

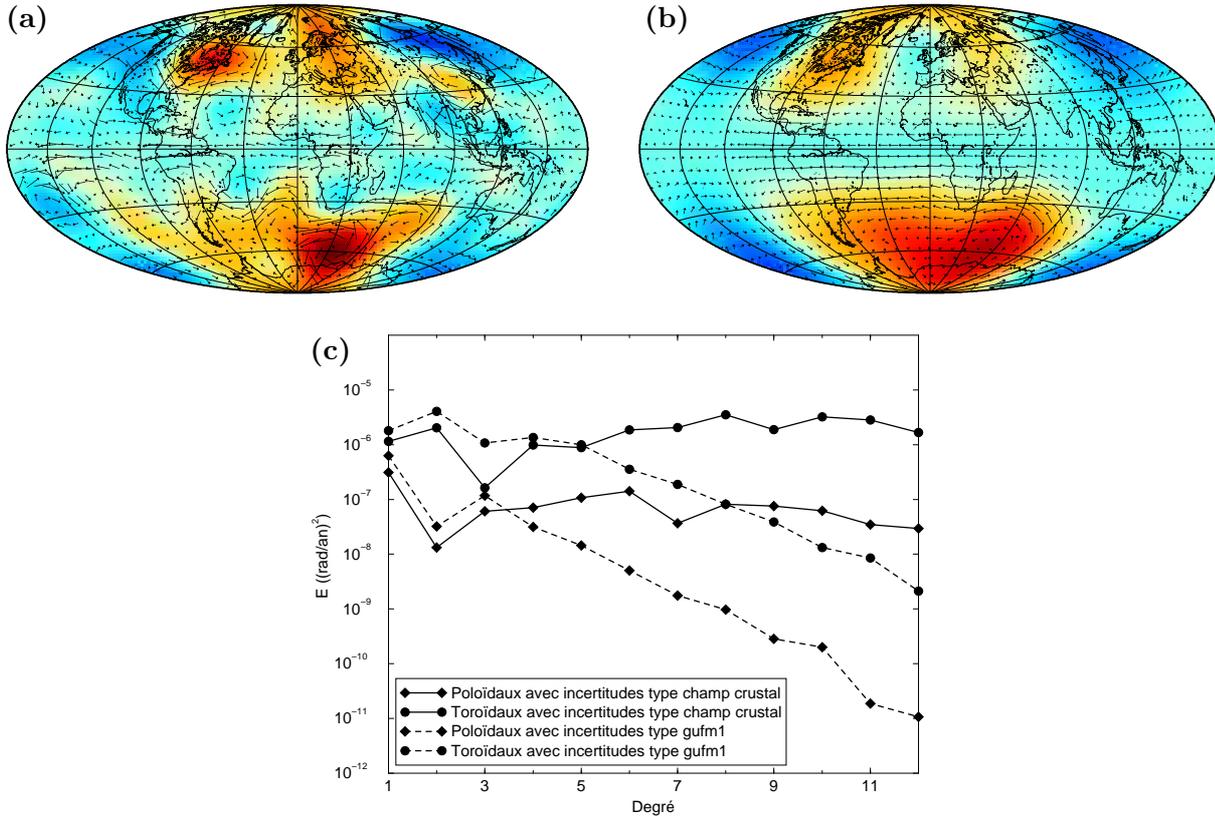


FIG. 4.7 – Mouvements à la surface du noyau obtenus avec la variation séculaire différentielle en ajustant l'erreur de prédiction (a) sur l'erreur d'observation de la variation séculaire différentielle (type champ crustal σ_{cr}^2) et (b) sur l'erreur d'observation utilisée dans l'étude historique (type gufm1, équation (3.1)). Échelles de couleurs entre -1400 et 1400 Pa, flèches proportionnelles à la vitesse (vitesse maximum: (a) 53 km/an, (b) 27 km/an). (c) Spectres d'énergie E des composantes poloïdale et toroïdale des deux modèles de mouvements présentés.

totale d'énergie au delà du degré de troncature⁵ (figure 4.8b).

La figure 4.9a montre l'amplitude de la partie non-modélisée de la variation séculaire estimée en faisant interagir les différents champs magnétiques et de vitesse prolongés aléatoirement. Cette figure montre que le modèle de mouvement obtenu en ajustant l'erreur de prédiction sur l'erreur d'observation de type crustal σ_{cr}^2 est effectivement incohérent. En effet, la variation séculaire non-modélisée est très largement supérieure à l'erreur de prédiction et ceci pour tous les prolongements de mouvements testés, y compris en l'absence d'énergie au delà du degré de troncature (figure 4.9a). Cette contribution non négligeable de la variation séculaire non-modélisée est essentiellement due au caractère très énergétique du mouvement requis pour expliquer la variation séculaire au niveau de l'erreur d'observation satellitaire. Ainsi, pour les mouvements

5. Les prolongements des mouvements utilisés ici ne sont pas géostrophiques, ceci afin de permettre un prolongement des composantes toroïdales et poloïdales (voir annexe A). Ceci ne constitue pas un problème puisque nous cherchons simplement à estimer l'ordre de grandeur de la variation séculaire pouvant être générée par ces mouvements.

moins énergétiques obtenus avec les incertitudes adaptées aux données terrestres, la part de la variation séculaire non-modélisée est beaucoup plus faible, et très largement inférieure à l'erreur de prédiction (figure 4.9b).

Ainsi, du fait de la très bonne détermination des modèles de variation séculaire satellitaires, l'ajustement de l'erreur de prédiction des modèles de mouvements sur l'erreur d'observation produit des mouvements incohérents. L'erreur de prédiction doit donc au contraire être ajustée sur le niveau de la variation séculaire non prise en compte durant l'inversion et potentiellement induite par le mouvement.

4.2.4 Modèles cohérents des mouvements à la surface du noyau

Afin d'obtenir un modèle cohérent des mouvements à la surface du noyau avec une variation séculaire satellitaire, il faut donc s'assurer que l'erreur de prédiction soit environ de même amplitude que la partie non-modélisée de la variation séculaire. La part de la variation séculaire non-modélisée a donc été évaluée pour différents mouvements, correspondant à différentes valeurs du paramètre λ . Cette évaluation est effectuée à partir de prolongements synthétiques des différents champs suivant la procédure précédemment décrite (§4.2.3).

Les modèles de mouvements présentés ici ont été calculés jusqu'au degré 13. Afin de diminuer l'amplitude de la variation séculaire non-modélisée, il pourrait sembler utile de calculer ces mouvements jusqu'au degré 26, des informations sur ces petites échelles étant contenues dans la variation séculaire observée (figure 2.4a). Les petites échelles qui pourraient ainsi être obtenues ne représenteraient néanmoins qu'une fraction des petites échelles réelles, la majorité des informations les concernant étant contenue dans les petites échelles invisibles de la variation séculaire⁶.

La figure 4.10 présente les mouvements obtenus avec la variation séculaire différentielle pour lesquels l'ajustement est le meilleur possible⁷. Le mouvement sélectionné contient plus de détails qu'un modèle obtenu avec les incertitudes de type *gufm1*, même s'il ne permet pas d'exploiter au maximum la très bonne détermination de la variation séculaire. La figure 4.11 montre les modèles cohérents de mouvements à la surface du noyau obtenus avec les différents modèles de variation séculaire instantanée. Pour ces mouvements, l'ajustement entre l'erreur de prédiction et la partie non-modélisée de la variation séculaire est semblable à celui obtenu avec la variation séculaire différentielle (figure 4.10b). Ces trois modèles, très semblables entre eux, diffèrent légèrement du modèle obtenu avec la variation séculaire différentielle, principalement dans la région du noyau située sous l'Asie. Il n'est néanmoins pas possible de déterminer, au vu de ces seuls résultats, si ces différences sont significatives. La fiabilité des mouvements obtenus avec les observations satellitaires doit être testée avant de tenter d'interpréter ces différences, par exemple en termes d'évolution temporelle des mouvements.

6. Les mouvements calculés jusqu'au degré 26 lors de l'inversion sont ainsi très semblables aux mouvements calculés jusqu'au degré 13, très peu d'énergie étant attribuée aux très petites échelles.

7. Quelle que soit la valeur du paramètre λ , l'ajustement n'est jamais parfait pour toutes les échelles. La valeur retenue est finalement la même que celle utilisée avec les modèles magnétiques terrestres dans le chapitre 3, soit $\lambda = 4.7 \cdot 10^{-2}$ pour $E_0 = 8 \cdot 10^{-6}$ (rad/an)² (équations (2.22) et (2.23)).

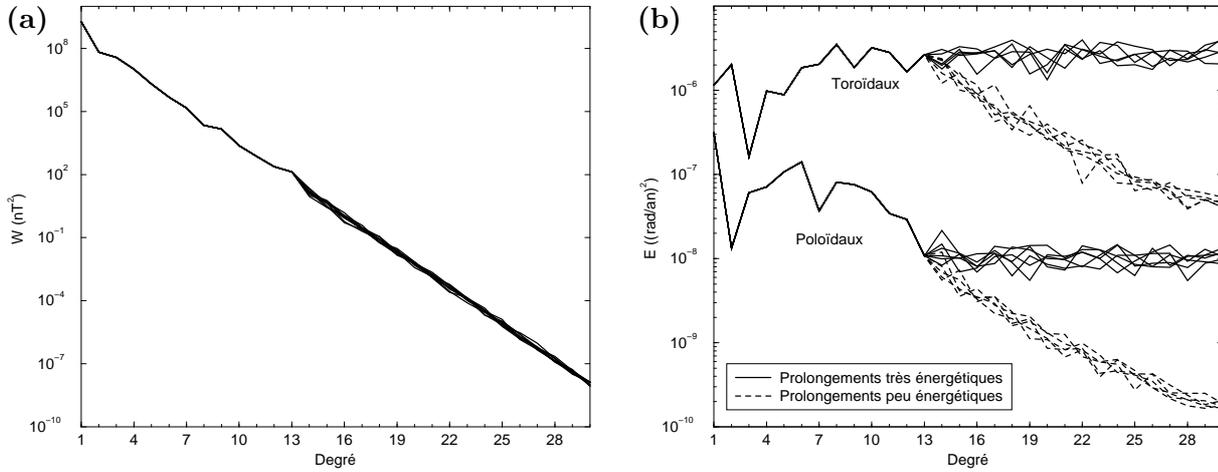


FIG. 4.8 – Spectres d'énergie de différents prolongements aléatoires synthétiques utilisés pour l'évaluation de l'amplitude de la variation séculaire non-modélisée. (a) Prolongements du champ magnétique représentés à la surface de la Terre. (b) Prolongements des composantes poloidale et toroïdale du mouvement obtenu avec les incertitudes de type champ crustal (figure 4.7a).

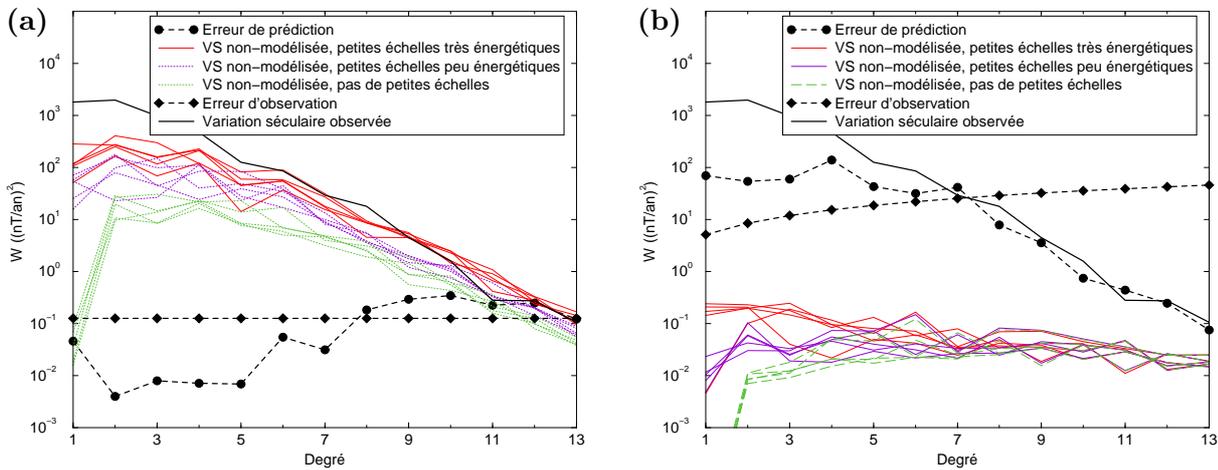


FIG. 4.9 – Énergie potentiellement contenue dans la variation séculaire produite par les interactions non-modélisées lors de l'inversion. Spectres de la partie non-modélisée des variations séculaires obtenues en faisant interagir le champ magnétique observé et les mouvements retrouvés, prolongés par des petites échelles synthétiques. Les mouvements prolongés sont ceux obtenus avec les incertitudes (a) de type champ crustal (figure 4.7a) et (b) de type gufm1 (figure 4.7b).

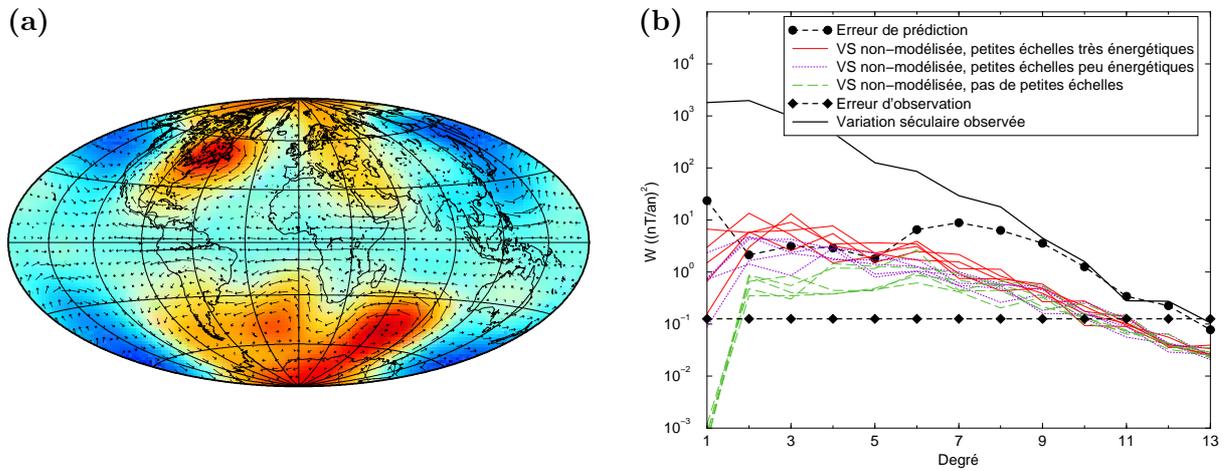


FIG. 4.10 – Modèle cohérent des mouvements à la surface du noyau obtenu à partir du modèle de variation séculaire différentielle. (a) Échelle de couleur entre -1400 et 1400 Pa, vitesse maximum : 37 km/an. (b) Ajustement de l'amplitude de l'erreur de prédiction sur l'amplitude potentielle de la variation séculaire non-modélisée.

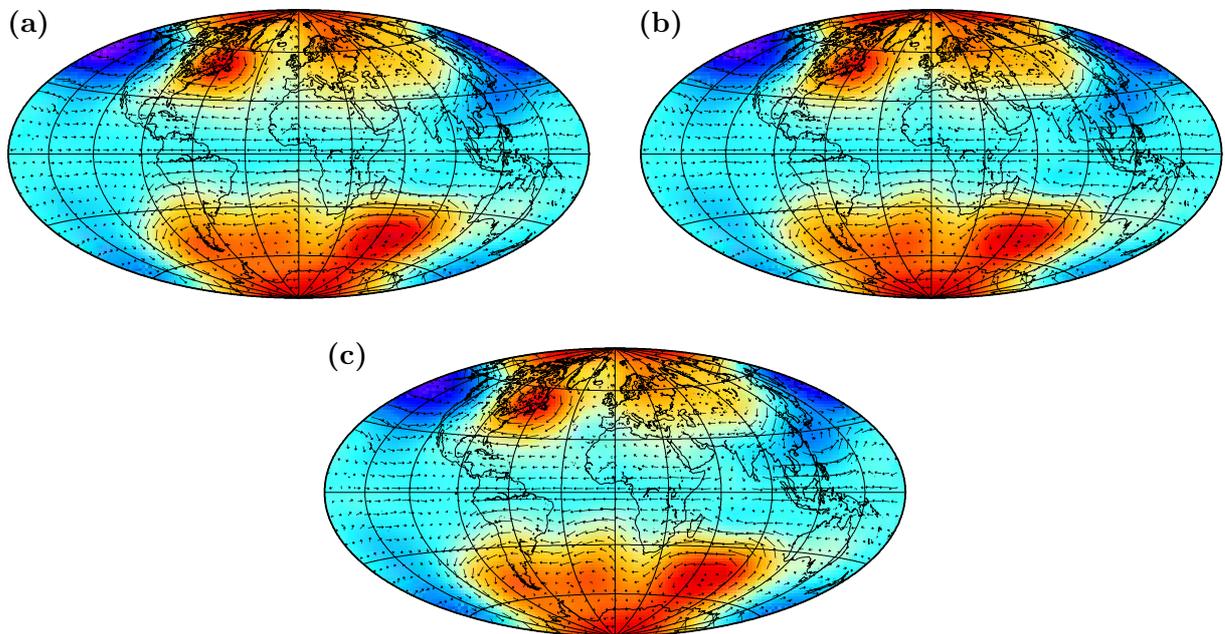


FIG. 4.11 – Modèles cohérents des mouvements à la surface du noyau obtenus à partir des modèles de variation séculaire instantanée. (a) Variation séculaire de Langlais [2003], (b) de Maus et al. [2004], (c) de Olsen et al. [2002]. Échelles de couleurs de -1400 à 1400 Pa, vitesses maximales : (a) 42 km/an, (b) 40 km/an et (c) 39 km/an.

4.3 Fiabilité des structures des modèles de mouvement

L'utilisation des modèles de variation séculaire satellitaire pour les reconstructions des mouvements à la surface du noyau nécessite de prendre en compte les conséquences éventuelles des petites échelles non-observables des différents champs utilisés. La procédure présentée dans le paragraphe précédent permet d'obtenir des modèles de mouvements pour lesquels l'amplitude potentielle des manifestations de ces petites échelles invisibles reste compatible avec les autres informations disponibles. Cependant, cette procédure de dérivation de champs de vitesse cohérents s'appuie uniquement sur des comparaisons d'ordres de grandeur : elle ne garantit donc pas que les mouvements obtenus ne contiennent pas des artefacts liés à ces problèmes de troncature.

La variation séculaire observée provient en effet d'une part d'interactions prises en compte dans l'inversion et d'autre part d'interactions non-modélisées (figure 2.4). Il n'est ainsi pas certain qu'une partie de la variation séculaire non-modélisée résulte en des structures fictives alors qu'une part de la variation séculaire modélisée reste inexpliquée par les champs de mouvements obtenus. Dans cette partie, nous tentons ainsi de quantifier l'amplitude des structures fictives potentiellement générées par l'interprétation erronée de la variation séculaire non-modélisée⁸.

4.3.1 Méthodologie

Le principe des estimations effectuées repose sur la linéarité de la relation permettant l'estimation d'un modèle de mouvement $\hat{\mathbf{v}}$ à partir de la variation séculaire observée $\dot{\mathbf{b}}$:

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathcal{D} \dot{\mathbf{b}}, \quad (4.4)$$

la matrice \mathcal{D} dépendant, entre autre, du champ magnétique⁹. Ainsi, si $\dot{\mathbf{b}}_1$ et $\dot{\mathbf{b}}_2$ représentent les vecteurs associés respectivement à la variation séculaire produite par les interactions modélisées et à la variation séculaire produite par des interactions non-modélisées, on peut écrire :

$$\hat{\mathbf{v}} = \underbrace{\mathcal{D} \dot{\mathbf{b}}_1}_{\hat{\mathbf{v}}_1} + \underbrace{\mathcal{D} \dot{\mathbf{b}}_2}_{\hat{\mathbf{v}}_2}. \quad (4.5)$$

Dans le cas idéal où l'inversion ne mélange pas les parties modélisées et non-modélisées de la variation séculaire, la composante $\hat{\mathbf{v}}_2$ du modèle de mouvement est nulle et $\hat{\mathbf{v}}_1$ représente exactement les grandes échelles du mouvement, à condition que la variation séculaire respecte par ailleurs toutes les hypothèses nécessaires (§2.1.1).

Afin d'estimer l'amplitude de l'erreur de troncature $\hat{\mathbf{v}}_2$ dans les modèles de mouvements satellitaires, nous avons mené une nouvelle série de tests synthétiques dont le principe est présenté par le schéma 4.12. Ces tests ont été réalisés pour trois types de comportement des petites échelles du mouvement géostrophique synthétique (figure 4.13). Pour chaque type, 100 variations séculaires

8. Nous nous limitons ici à l'étude des artefacts générés par les différentes troncatures. Nous considérons que les résultats du chapitre 3 sur le comportement de la méthode face à une variation séculaire non parfaitement compatible avec les autres hypothèses requises restent valables.

9. $\mathcal{D} = \mathcal{Q} \left(\mathcal{A}(b)^T \mathcal{C}_i^{-1} \mathcal{A}(b) + \lambda \mathcal{C}_w \right)^{-1} \mathcal{A}(b)^T \mathcal{C}_i^{-1}$, avec les notations des équations (2.25) et (2.26).

différentes ont été générées. Les mouvements synthétiques ont été utilisés jusqu'au degré 27. L'ajout de degrés supplémentaires ne changerait rien pour l'estimation de l'erreur de troncature pour des mouvements à petites échelles moyennement énergétiques. En revanche, pour des mouvements aux petites échelles très énergétiques, l'erreur de troncature serait plus forte si des composantes de degré plus élevé étaient incluses¹⁰ (figure 4.14).

4.3.2 Caractérisation moyenne de l'erreur de troncature

La figure 4.15 montre les erreurs de troncature, exprimées en terme d'amplitude des champs de pression et de vitesse, générées au cours des 300 tests d'évaluation effectués. Le spectre des petites échelles du champ de vitesse ayant servi à générer la variation séculaire synthétique contrôle ici directement l'amplitude des artefacts. Ainsi, les mouvements aux petites échelles très énergétiques génèrent une erreur de troncature environ cinq fois plus forte que les mouvements aux petites échelles peu énergétiques. Ceci n'est pas très encourageant puisque le comportement réel des petites échelles du mouvement est inconnu et que l'on ne peut exclure que ces petites échelles soient très énergétiques.

En moyenne, les artefacts générés par les troncatures sont d'amplitude inférieure au champ de pression ou de vitesse des modèles cohérents (figure 4.15a et 4.15c). Il est donc impossible que les mouvements cohérents ne soient que des artefacts liés aux problèmes de troncature, à moins que les petites échelles des mouvements, ou du champ magnétique, soient plus énergétiques que les cas envisagés. En revanche, les maxima des artefacts obtenus avec les mouvements à petites échelles très énergétiques sont du même niveau que les maxima des champs de pression et de vitesse des modèles cohérents (figure 4.15b et 4.15d). Il est donc possible que certaines structures de ces mouvements soient des artefacts.

4.3.3 Répartition spatiale de l'erreur de troncature

Puisqu'il apparaît que certaines structures des modèles de mouvements cohérents peuvent n'être que des artefacts, nous cherchons maintenant à caractériser la répartition spatiale de l'erreur de troncature à la surface du noyau. Les champs de mouvement fictifs retrouvés au cours des différents tests d'évaluation de l'erreur de troncature montrent une très grande variabilité spatiale (figure 4.16).

Malgré la variabilité spatiale de l'erreur de troncature entre les différents tests d'évaluation, l'erreur de troncature est statistiquement plus importante dans certaines zones de la surface du noyau. La figure 4.17 montre ainsi que la zone du noyau située sous l'Europe constitue la région dans laquelle l'erreur de troncature est statistiquement la plus forte. À l'inverse, la région équatoriale comprise entre les longitudes de l'Amérique et de l'Inde est la région dans laquelle l'amplitude de l'erreur de troncature est en moyenne la plus faible. Cette zonation de la surface

10. Du fait du spectre quasiment plat de ces petites échelles, il faudrait utiliser des développements allant jusqu'à des degrés très élevés afin que l'erreur de troncature se stabilise. Nous nous limitons au degré 27 pour des raisons de coût numérique.

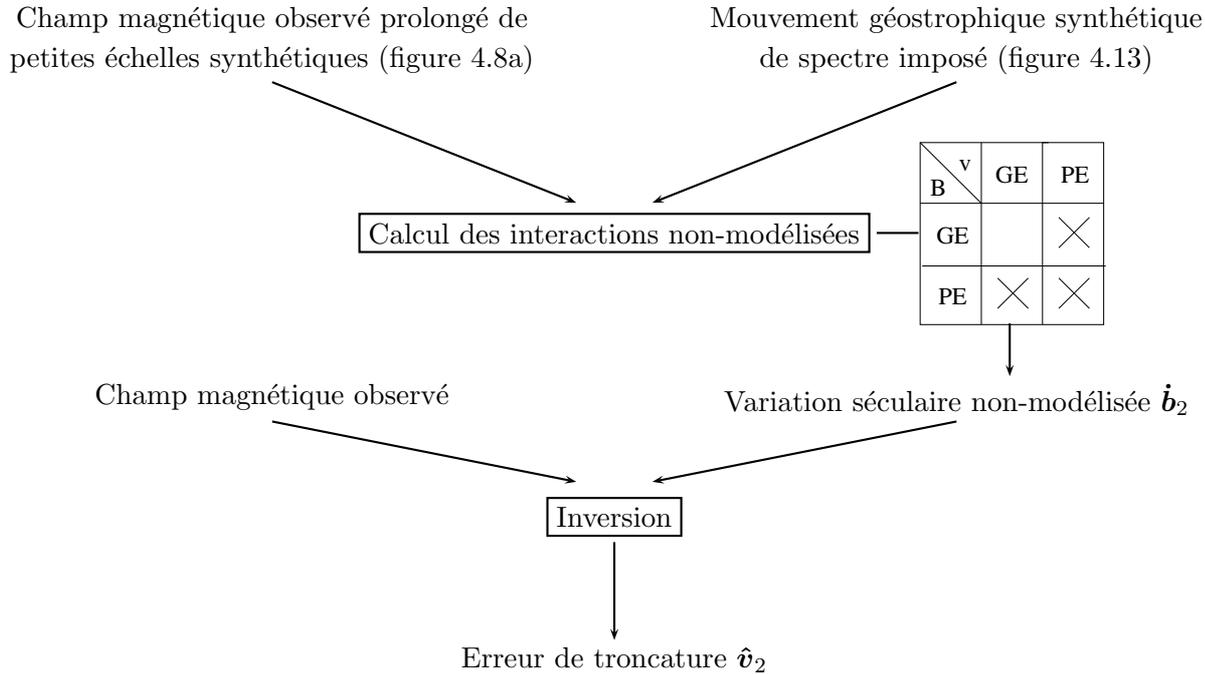


FIG. 4.12 – Principe des tests synthétiques effectués afin d’estimer l’amplitude de l’erreur de troncature $\hat{\mathbf{v}}_2$ contenue dans les modèles de mouvement à la surface du noyau obtenus avec des observations magnétiques satellitaires. GE: grandes échelles ($n \leq 13$), PE: petites échelles ($n > 13$). Pour plus de détails sur le mode de calcul des champs synthétiques, voir l’annexe A.

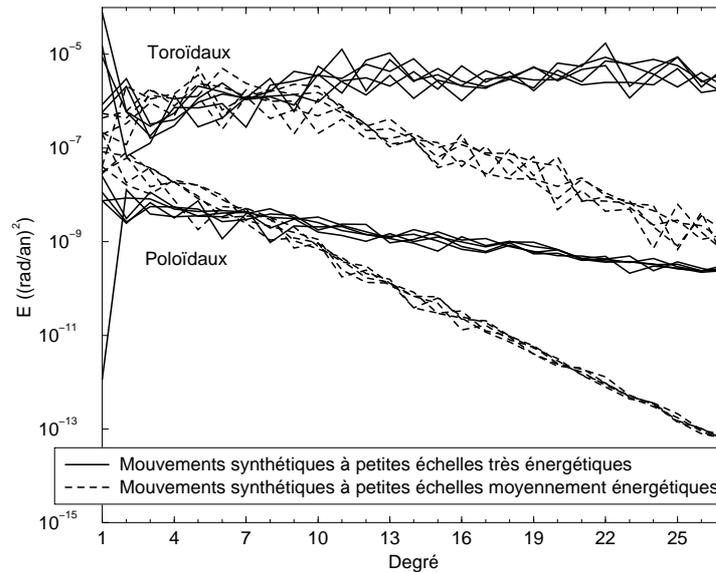


FIG. 4.13 – Spectres d’énergie de 10 mouvements géostrophiques aléatoires utilisés pour l’estimation de l’amplitude de l’erreur de troncature. Au total, 100 mouvements synthétiques de chaque type (petites échelles très énergétiques, petites échelles moyennement énergétiques ou sans petites échelles) ont été utilisés.

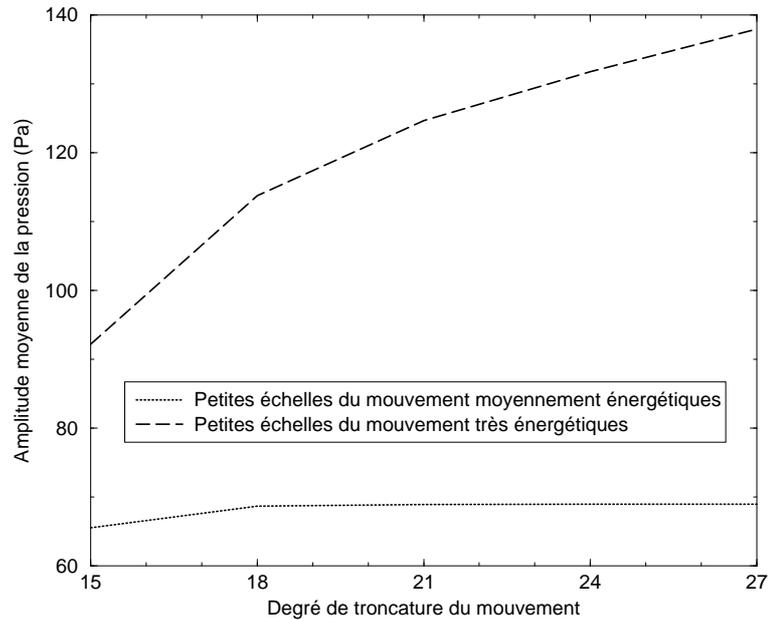


FIG. 4.14 – Évolution de l'amplitude moyenne de la pression en fonction du degré de troncature du mouvement synthétique utilisé pour générer la variation séculaire. Les valeurs présentées correspondent à un même mouvement imposé, tronqué à différents degrés de son développement en harmoniques sphériques.

du noyau en fonction de l'amplitude potentielle de l'erreur de troncature dépend peu du type de comportement énergétique du mouvement synthétique utilisé pour générer la variation séculaire non-modélisable.

La répartition spatiale de l'erreur de troncature doit être mise en relation avec l'amplitude du signal présent localement dans les modèles satellitaires de mouvements à la surface du noyau. La figure 4.18 présente ainsi la répartition spatiale du rapport de l'amplitude de l'erreur de troncature et de l'amplitude de la vitesse du modèle cohérent obtenu avec la variation séculaire différentielle. L'étendue des régions de la surface du noyau où le mouvement cohérent est fiable, c'est-à-dire où l'amplitude du champ de vitesse est supérieure à l'amplitude de l'erreur de troncature, dépend évidemment des hypothèses sur le comportement énergétique des petites échelles invisibles du mouvement. Si ces petites échelles sont très énergétiques, il n'existe qu'une très faible portion de la surface du noyau où le mouvement est toujours plus énergétique que les artefacts.

Bien que le comportement réel des petites échelles du mouvement soit inconnu, il est néanmoins possible de définir les régions où les mouvements retrouvés sont les plus fiables. Elles correspondent à peu près aux zones dans lesquelles les mouvements du fluide sont les plus rapides, à condition que la variation séculaire respecte relativement bien les différentes hypothèses requises par l'inversion¹¹.

11. Les tests du chapitre 3 (§3.2.2) montrent en effet que dans le cas d'une variation séculaire fortement non-compatible avec les différentes hypothèses requises par l'inversion, les structures les plus fiables ne sont pas forcément celles dont l'amplitude est la plus forte.

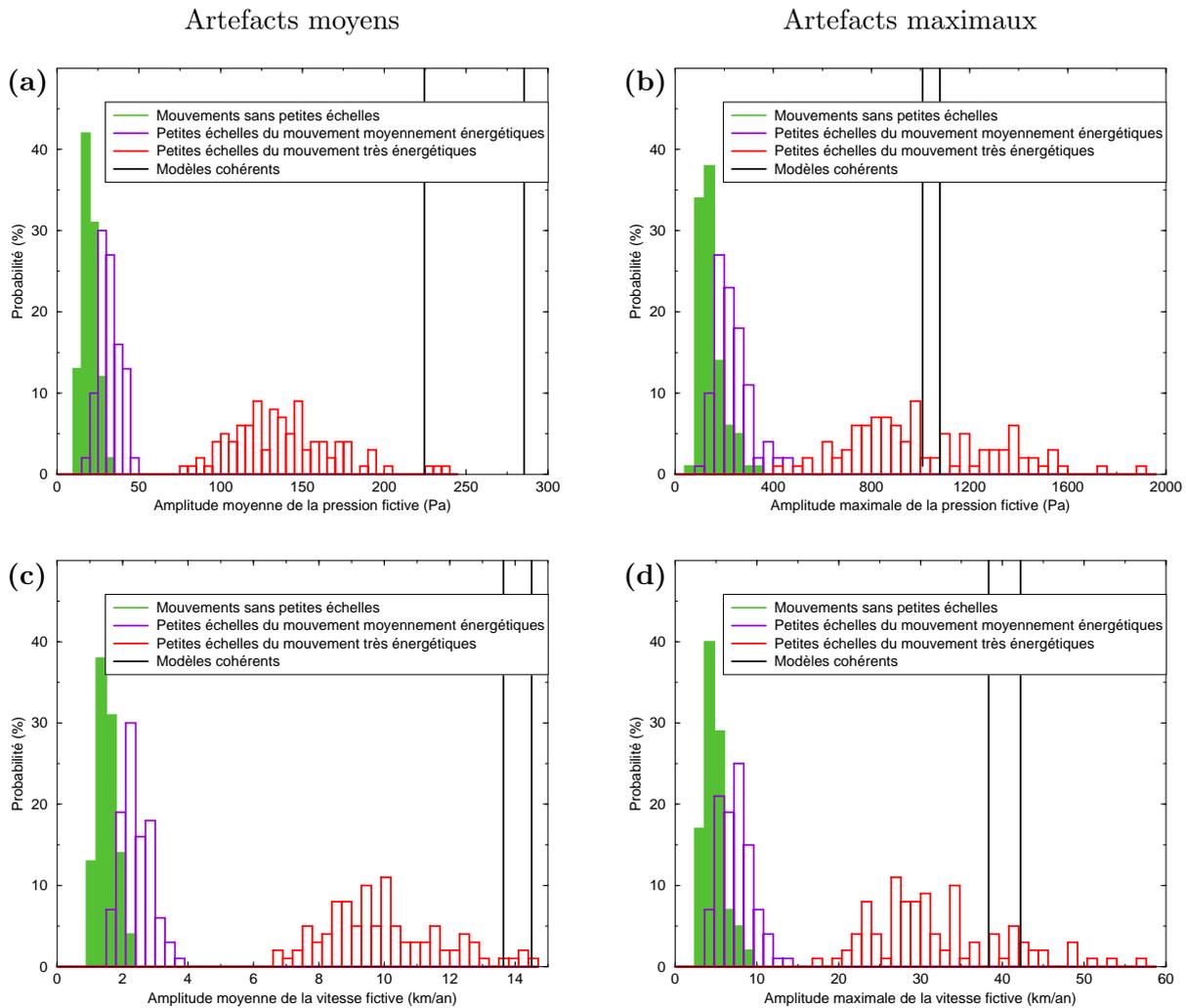


FIG. 4.15 – Amplitude des artefacts liés aux problèmes de troncature. Erreur de troncature moyenne (colonne de gauche) et maximale (colonne de droite) obtenue lors de l'inversion des 300 variations séculaires synthétiques non-modélisables. Cette erreur est exprimée (a) et (b) en terme d'amplitude du champ de pression, (c) et (d) en terme d'amplitude du champ de vitesse. Les deux droites «modèles cohérents» correspondent aux moyennes (colonne de gauche) ou aux maxims (colonne de droite) des champ de pression (en haut) ou de vitesse (en bas) des modèles cohérents.

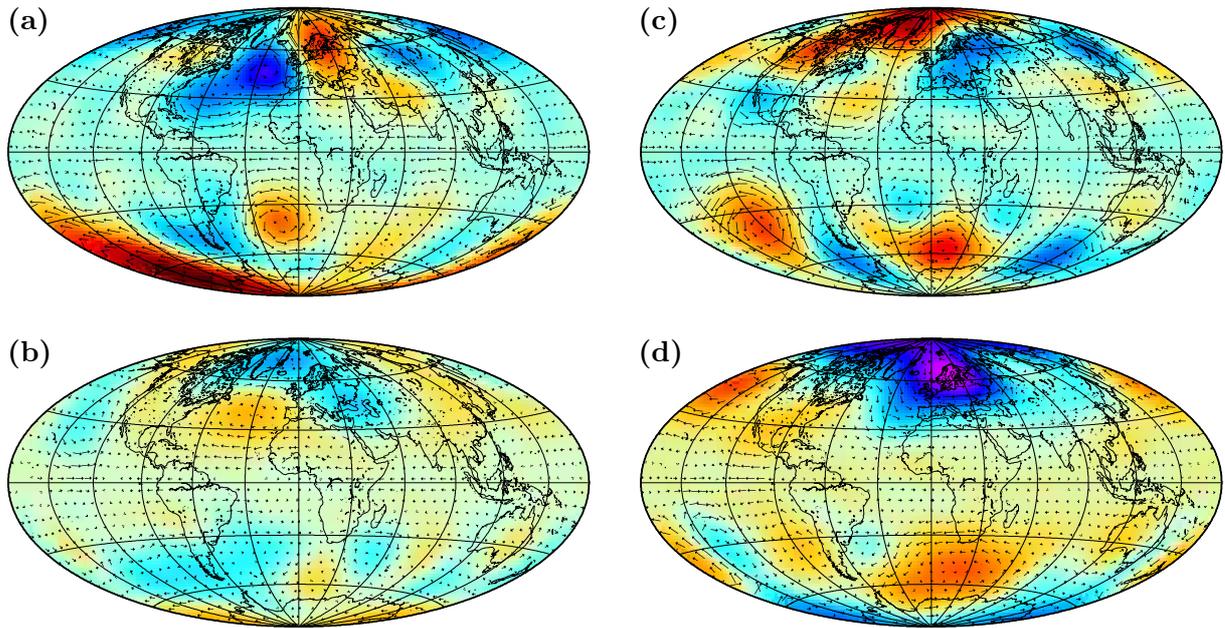


FIG. 4.16 – Exemples d'artefacts liés aux problèmes de troncature. Les champs de pressions présentés sont extraits des 100 évaluations effectuées avec des mouvements synthétiques aléatoires ayant des petites échelles moyennement énergétiques. Échelles de couleurs entre -140 et 140 Pa, vitesses maximales : (a) 8.5 , (b) 3.9 , (c) 8.5 et (d) 7.2 km/an.

4.4 Structures dynamiques fiables à la surface du noyau

Les tests d'évaluation de l'erreur de troncature potentiellement présente dans les modèles de mouvements cohérents permettent d'évaluer la fiabilité des différentes structures dynamiques de la surface du noyau. Cette fiabilité dépend du comportement énergétique des petites échelles invisibles du mouvement réel, puisque l'erreur de troncature en dépend. Nous utilisons ici l'erreur de troncature dérivée des maxima des artefacts obtenus pour des mouvements dont les petites échelles sont moyennement énergétiques. Ce choix, évidemment discutable, permet de sélectionner les structures qui ont une probabilité très faible d'être fictives, si l'énergie du mouvement décroît vers les petites échelles. Si les petites échelles du mouvement réel sont plus énergétiques, la probabilité que ces structures soient des artefacts augmente, mais reste encore acceptable¹².

La figure 4.19 montre ainsi que les structures les plus fiables à la surface du noyau sont deux anticyclones situés sous l'Amérique du nord et au sud du continent africain, une circulation globalement cyclonique sous l'Océan pacifique dans l'hémisphère nord et un courant équatorial vers l'ouest sous les régions comprises entre l'Océan indien et l'Océan atlantique. Ces structures fiables sont présentes dans les modèles cohérents obtenus avec les variations séculaires différentielle et instantanées. Il apparaît également que les différences entre les modèles de mouvements obtenus avec ces deux types de variation séculaire ne sont pas significatives. Les mouvements ne sont

12. Les erreurs locales de troncature définies à partir des artefacts moyens pour des petites échelles du mouvement très énergétiques sont en effet assez proches de celles définies à partir des artefacts maximaux pour des petites échelles moyennement énergétiques (figure 4.18).

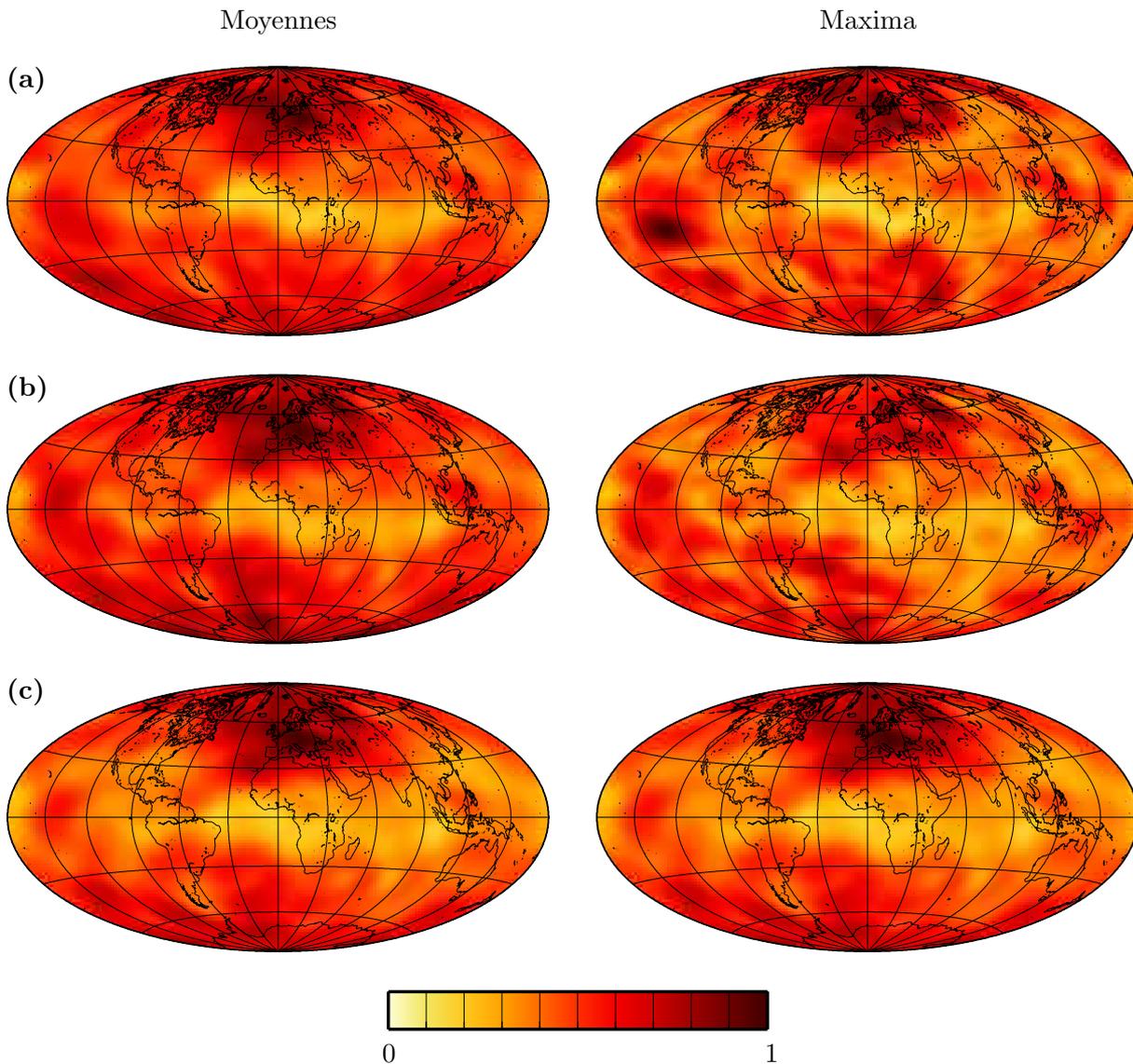


FIG. 4.17 – *Inhomogénéité spatiale des artefacts moyens. Moyennes et maxima locaux de l'amplitude des 100 champs de vitesses fictifs dans les cas d'un mouvement (a) sans petites échelles, (b) avec des petites échelles moyennement énergétiques et (c) avec des petites échelles très énergétiques (voir figure 4.13). Tous les champs sont normalisés de manière à varier entre 0 et 1. Amplitude réelle maximale des artefacts (a) 2.9 et 8.8 km/an, (b) 4.4 et 14.2 km/an, (c) 20.2 et 56.7 km/an.*

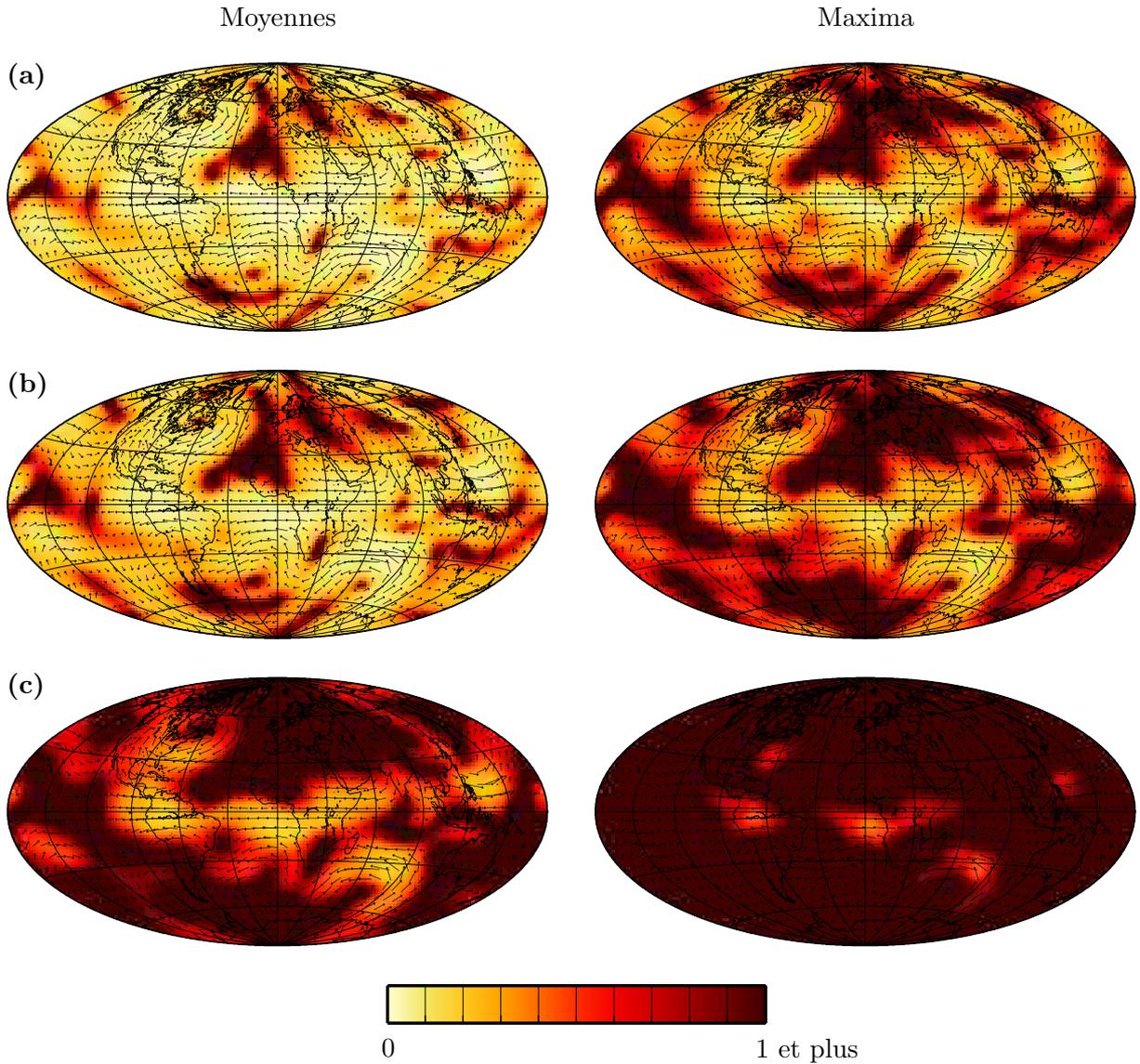


FIG. 4.18 – Rapport local entre l'erreur de troncature et l'amplitude de la vitesse du modèle cohérent obtenu avec la variation séculaire différentielle. L'erreur de troncature utilisée correspond à la valeur locale moyenne (colonne de gauche) ou maximale (colonne de droite), au cours des 100 tests effectués, de l'amplitude du champ de vitesse fictif. Les interactions non-modélisées, à l'origine des artefacts étudiés, font intervenir un mouvement (a) sans petites échelles, (b) avec des petites échelles moyennement énergétiques et (c) avec des petites échelles très énergétiques (voir figure 4.13). Les rapports supérieurs à 1 sont représentés avec la même couleur que les rapports égaux à 1. Les flèches correspondent au champ de vitesse cohérent (figure 4.10a).

en effet pas correctement déterminés dans la principale zone de désaccord, située sous l'Asie (figures 4.2 et 4.3).

Rappelons pour finir que ces structures sont fiables au vu des estimations de l'erreur de troncature réalisées. Les erreurs introduites par un non-respect partiel des différentes hypothèses nécessaires à ces reconstructions de mouvements devraient être ajoutées. Leur amplitude ne peut malheureusement pas être estimée directement. Il est néanmoins probable que la répartition spatiale de ces erreurs soit semblable à celle des erreurs de troncature. Dans les deux cas, l'inversion doit en effet s'accommoder d'une variation séculaire *imparfaite*, qui n'est pas totalement compatible avec toutes les hypothèses utilisées. Les structures présentées ci-dessus correspondent donc aux structures *les plus fiables* de la surface du noyau, dans le cas où toutes les hypothèses requises ne seraient pas parfaitement respectées.

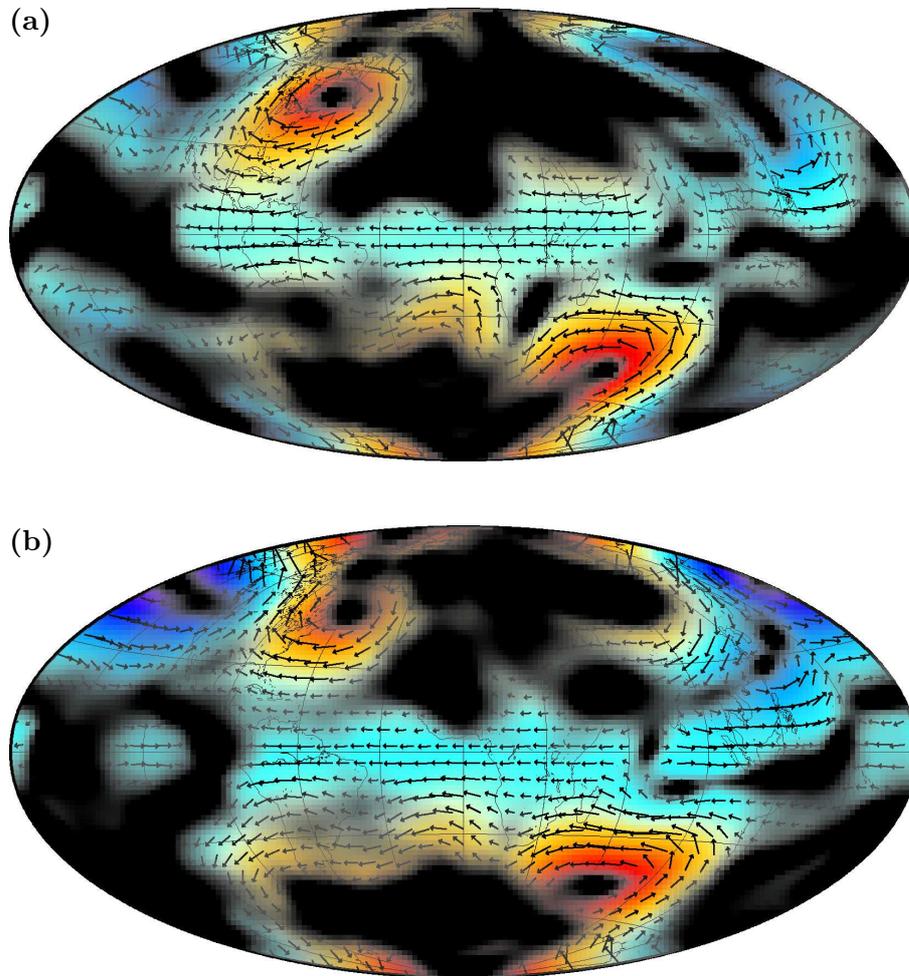


FIG. 4.19 – Mouvements fiables à la surface du noyau obtenus avec le modèle de variation séculaire (a) différentielle et (b) instantannée de Maus et al. [2004]. Les zones noires représentent les régions où l'erreur de troncature est potentiellement supérieure à l'amplitude du mouvement, les zones grisées les régions où l'erreur de troncature représente plus de 50% de l'amplitude du mouvement. L'erreur de troncature est estimée grâce aux maxima des artefacts pour un mouvement à petites échelles moyennement énergétique (figure 4.17b). Représentations des mouvements identiques à celles des figures 4.10a et 4.11b.

Chapitre 5

Discussion géophysique

Les reconstructions des mouvements à la surface du noyau obtenues dans les chapitres précédents sont maintenant confrontées à d'autres études observationnelles, théoriques, numériques et expérimentales afin d'en tirer des informations sur les phénomènes actifs dans le noyau. Les comparaisons effectuées ne sont que qualitatives. En effet, aux nombreuses incertitudes concernant les mouvements de surface obtenus, s'ajoute la question de la pertinence pour le noyau de certains résultats utilisés, soit parce que la modélisation n'est qu'incomplète, soit parce que les paramètres utilisés sont éloignés des paramètres réels.

5.1 Autres modèles de mouvements à la surface du noyau

Un modèle cohérent des mouvements actuels à la surface du noyau a été présenté dans le chapitre précédent (figure 4.19). Des tests de fiabilité ont permis d'établir que les structures dynamiques les plus fiables de ce modèle sont deux anticyclones situés respectivement au sud-est du continent africain et sous l'Amérique du Nord, un cyclone sous l'Océan pacifique nord et un courant équatorial vers l'ouest, de l'Océan indien à l'Océan atlantique.

Afin de compléter cette étude, nous cherchons maintenant si ces structures sont également présentes dans les modèles de mouvements récents proposés par d'autres équipes. En particulier, nous présentons ici (figures 5.1 à 5.4) des modèles ne reposant pas, ou pas totalement, sur l'hypothèse des mouvements tangentiellement géostrophiques¹. Ceci nous permet d'évaluer la pertinence des structures dites fiables dans le cas où cette hypothèse ne serait pas satisfaite, et ce de manière plus détaillée qu'avec les tests synthétiques du chapitre 3. La présence ou l'absence des structures étudiées dans les différents modèles est synthétisée dans le tableau 5.1.

L'anticyclone situé au sud-est du continent africain est visible dans tous les modèles présentés. Sa position fluctue un peu d'un modèle à l'autre. Dans les modèles obtenus avec l'hypothèse des

1. Toutes les études présentées reposent sur l'hypothèse du flux gelé. Dans une étude récente, Olson et al. [2002] présentent une méthode d'imagerie de la dynamique du noyau n'utilisant pas l'hypothèse du flux gelé pour les petites échelles du mouvement. Cette méthode, fondée sur le comportement de dynamos numériques, permettrait d'illustrer les courants radiaux sous la surface du noyau et n'a, pour cette raison, pas été considérée ici.

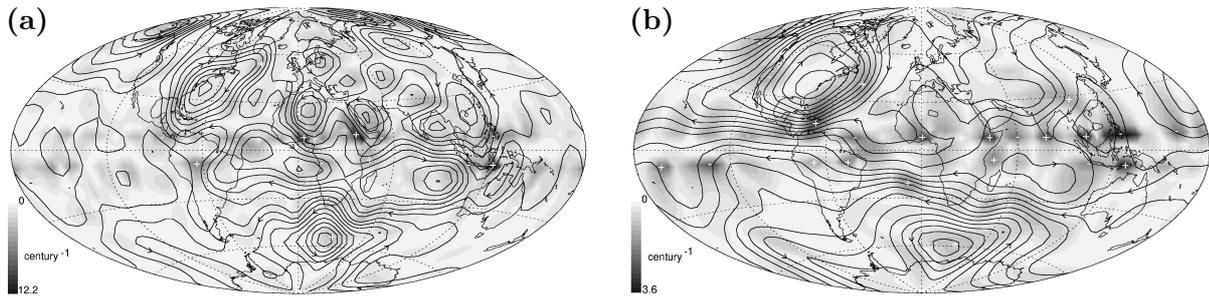


FIG. 5.1 – Mouvements à la surface du noyau obtenus par Amit et Olson [2004]. Ces mouvements sont obtenus avec une combinaison des hypothèses des mouvements hélicoïdaux et géostrophiques. Les mouvements présentés ont été obtenus (a) à partir de modèles magnétiques issus des satellites MAGSAT (1980) et Ørsted (2000) jusqu'au degré 14 de leur développement en harmoniques sphériques et (b) avec une version filtrée passe-bas de ces modèles. Ils ont été calculés sur une grille spatiale de 5° . Les contours représentent les lignes de courant auxquelles la vitesse est tangente et l'échelle de gris la dérivée radiale de la vitesse radiale $\partial u_r / \partial r$.

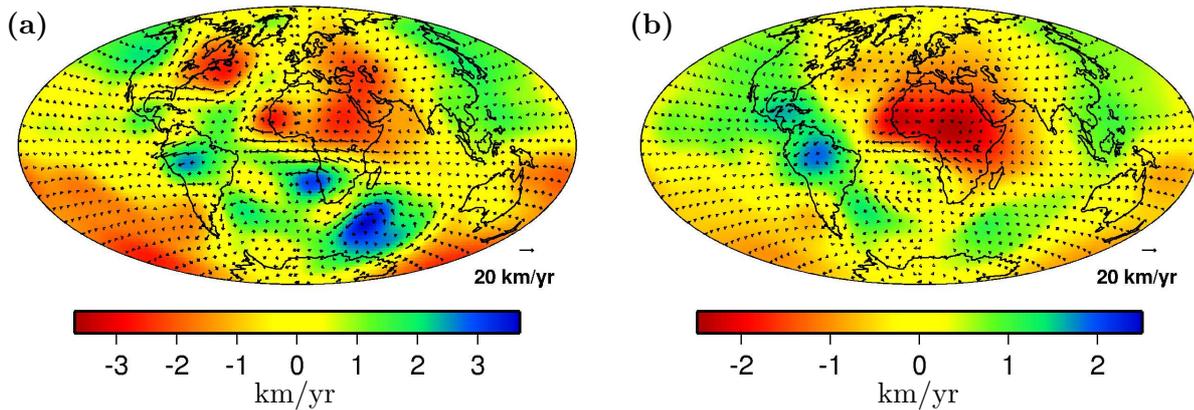


FIG. 5.2 – Mouvements à la surface du noyau en 1980 obtenus par Pais et al. [2004]. Ces modèles sont obtenus en minimisant l'énergie cinétique des mouvements et (a) avec une contrainte géostrophique «faible», (b) sans contrainte géostrophique. L'échelle de couleur représente le scalaire toroidal non zonal (ce scalaire représente une version filtrée passe-bas de la vortacité radiale $\omega_r = \mathbf{n} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{u})$ des mouvements \mathbf{u}). Les modèles magnétiques utilisés sont ceux du modèle *ufm1* de Bloxham et Jackson [1992].

mouvements hélicoïdaux et géostrophiques² par Amit et Olson [2004] (figure 5.1), ce vortex est situé 1000 km plus à l'ouest que dans les autres modèles. Les vitesses associées à cet anticyclone sont généralement parmi les plus grandes du modèle, sauf pour le modèle de Pais et al. [2004] en imposant seulement une minimisation de l'énergie cinétique du mouvement (figure 5.2b).

2. L'hypothèse hélicoïdale, déduite du comportement des champs de vitesse de dynamos numériques [Olson et al., 1999], stipule que la dérivée radiale de la vitesse radiale est proportionnelle à la vortacité radiale ω_r du champ de vitesse ($\partial u_r / \partial r \propto \omega_r = (\nabla \wedge \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}$). La condition imposée par la combinaison des hypothèses hélicoïdales et géostrophiques peut s'exprimer ainsi : $\nabla_H \cdot \mathbf{u} = \pm k_0 \omega_r + \tan \theta u_\theta / c$, θ étant la colatitude, u_θ la vitesse azimutale, c le rayon du noyau et k_0 le paramètre fixant le rapport entre les deux hypothèses (le signe + s'applique à l'hémisphère nord, le signe - à l'hémisphère sud).

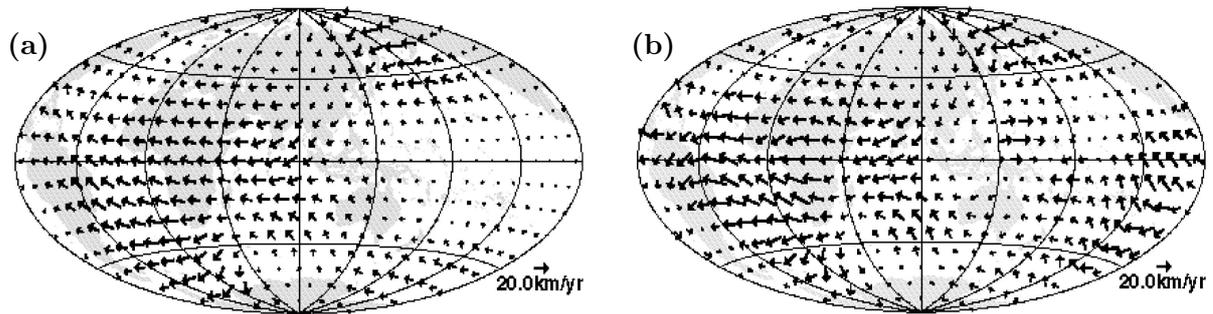


FIG. 5.3 – Mouvements à la surface du noyau en 1990 obtenus par Whaler et al. [2002]. Les mouvements présentés sont obtenus en minimisant une norme $L1$ de l'erreur de prédiction [Walker et Jackson, 2000] et une norme liée à la complexité spatiale du modèle de mouvement [Bloxham, 1988]. Les modèles présentés ont été obtenus (a) avec le modèle *gufm1* de Jackson et al. [2000] et (b) avec des mesures issues des observatoires magnétiques et de stations de répétition.

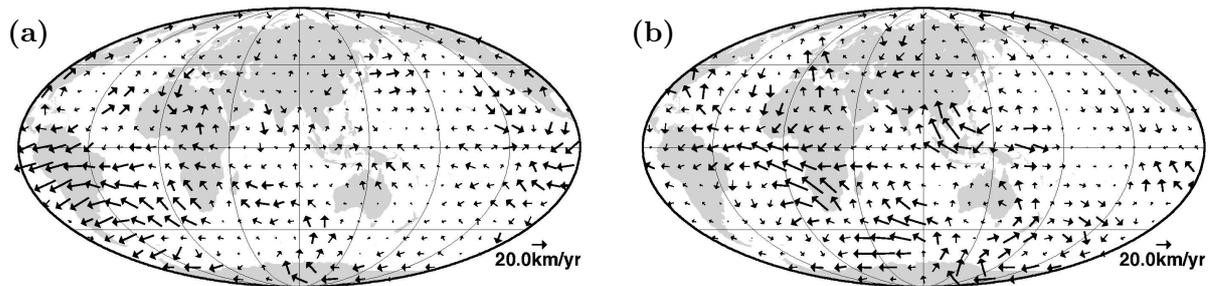


FIG. 5.4 – Mouvements à la surface du noyau en 1980 obtenus par Holme et Whaler [2001]. Les mouvements présentés sont des mouvements stationnaires (entre 1900 et 1980) dans un repère en rotation axiale (a) vers l'ouest et (b) vers l'est. Les flèches représentent les mouvements apparents dans le référentiel du manteau. Les modèles magnétiques de Bloxham et Jackson [1992] ont été utilisés.

L'autre anticyclone, situé sous le continent nord-américain, semble lui aussi robuste. Il est en effet visible dans tous les modèles présentés. Il convient néanmoins de remarquer que ce *vortex* est très dissymétrique dans certains modèles non-géostrophiques (figures 5.2b, 5.3 et 5.4a), la vitesse du courant septentrional étant très supérieure à celle du courant méridional, qui est parfois presque inexistant. La circulation cyclonique sous le nord de l'Océan Pacifique semble quant à elle sujette à caution. Elle n'apparaît en effet pas dans trois des huit modèles examinés (figures 5.3a et 5.4).

Enfin, le courant équatorial vers l'ouest est présent dans tous les modèles étudiés, à l'exception d'un modèle hélicoïdal et géostrophique de Amit et Olson [2004] (figure 5.1a)³. Il est

3. Dans ce modèle, obtenu avec des modèles magnétiques satellitaires développés jusqu'au degré 14, il est possible que la dérive vers l'ouest soit masquée par des petites échelles, très énergétiques, introduites dans le mouvement pour expliquer les petites échelles de la variation séculaire (§4.2). Cette dérive est en effet présente dans le modèle obtenu avec les mêmes hypothèses et une version filtrée passe-bas des modèles magnétiques (figure 5.1b).

Modèle de mouvement	AC-AN	AC-AF	CY-PN	CO-EQ
Amit et Olson [2004] : géostrophique et hélicoïdal (figure 5.1a)	x	x (décalé)	x	
Amit et Olson [2004] : hélicoïdal (figure 5.1b)	x	x	x	x
Pais et al. [2004] : faiblement géostrophique (figure 5.2a)	x	x	x (faible)	x
Pais et al. [2004] : non-géostrophique (figure 5.2b)	x (faible)	x (faible)	x (faible)	x
Whaler et al. [2002] : norme L1 de l'erreur prédiction et $ufm1$ (figure 5.3a)	x (faible)	x		x
Whaler et al. [2002] : norme L1 de l'erreur prédiction et données terrestres (fig. 5.3b)	x (faible)	x	x	x
Holme et Whaler [2001] : stationnaire dans repère en rotation vers l'Ouest (figure 5.4a)		x	x (faible)	x
Holme et Whaler [2001] : stationnaire dans repère en rotation vers l'Est (figure 5.4b)	x	x		x
Jault [1990] : grand traits des mouvements à la surface du noyau (figure 5.5)	x	x		x
Cette étude (chapitre 4, figure 4.19)	x	x	x	x

TAB. 5.1 – *Présence des structures les plus fiables du modèle satellitaire cohérent des mouvements à la surface du noyau dérivé dans le chapitre 4 (figure 4.19) dans les modèles de différents auteurs. AC-AN : anticyclone de l'Amérique du nord, AC-AF : anticyclone au sud-est de l'Afrique, CY-PN : cyclone de l'Océan pacifique nord, CO-EQ : courant équatorial atlantique vers l'ouest.*

intéressant de retrouver cette structure dans les modèles ne faisant pas appel à l'hypothèse géostrophique. En effet, cette hypothèse, imposée globalement et donc également dans la région équatoriale où elle n'est pas valable, interdit aux mouvements de traverser l'équateur. La présence d'un fort courant parallèle à l'équateur dans les modèles géostrophiques pourrait ainsi n'être que la trace d'un courant plus faible, mais traversant l'équateur. Ceci ne semble néanmoins pas être le cas puisque ce courant existe même dans les modèles totalement non-géostrophiques (figures 5.2b, 5.3 et 5.4). Il semble donc que cette dérive équatoriale vers l'Ouest soit une structure robuste des modèles de mouvements à la surface du noyau⁴. Les différents modèles présentés s'accordent également sur le fait que les vitesses de ce courant sont parmi les plus rapides à la surface du noyau, de l'ordre de 20 à 30 km/an.

4. Après avoir testé les méthodes de reconstruction des mouvements à la surface du noyau à partir de champs de vitesse issus de dynamos numériques, Rau et al. [2000] suggèrent que cette dérive vers l'Ouest pourrait être un artefact introduit par l'impossibilité d'observer les petites échelles du champ magnétique. Au vu des tests réalisés dans le chapitre 4, la vitesse de ce courant apparaît néanmoins trop rapide pour n'être qu'un artefact lié aux problèmes de troncature, et ce même si les petites échelles invisibles étaient très énergétiques (figure 4.18c).

Les structures fiables de notre modèle cohérent des mouvements à la surface du noyau sont présentes dans la plupart des modèles étudiés, bien que ceux-ci reposent sur des hypothèses variées concernant la nature des mouvements. Ces structures doivent donc être des structures majeures de la dynamique du noyau, indispensables pour rendre compte de la variation séculaire observée par advection du champ magnétique, quelles que soient les contraintes imposées sur la dynamique. La pertinence de ces structures dépend donc de la manière dont l'hypothèse du flux gelé (§2.1.1) est respectée à la surface du noyau. À ce sujet, les résultats de Roberts et Glatzmaier [2000] sont encourageants. Ils démontrent en effet que l'hypothèse du flux gelé peut être appliquée de manière satisfaisante à la surface du noyau d'une dynamo numérique, dans laquelle la diffusivité magnétique n'est pas nulle. Indépendamment, Rau et al. [2000] montrent que des champs de vitesse, issus de dynamos numériques ne satisfaisant pas complètement l'hypothèse du flux gelé, peuvent être retrouvés de manière satisfaisante avec des méthodes d'inversion similaires à celles discutées ici. Ainsi, les deux anticyclones *atlantiques*, la dérive vers l'ouest, et, dans une moindre mesure, le cyclone *pacifique*, peuvent raisonnablement être considérés comme des structures robustes de la surface du noyau, même dans le cas où l'hypothèse du flux gelé ne serait pas totalement satisfaite [voir, par exemple, Bloxham et Gubbins, 1986].

Par ailleurs, il est intéressant de noter qu'il n'existe pas d'autre structure qui soit commune à un grand nombre de modèles. Les structures identifiées constituent donc probablement les seuls mouvements robustes à la surface du noyau identifiés à l'heure actuelle. Remarquons que Jault [1990] arrivait déjà à la même conclusion : seul le cyclone pacifique, la moins robuste de nos structures fiables, n'avait pas été identifié (figure 5.5).

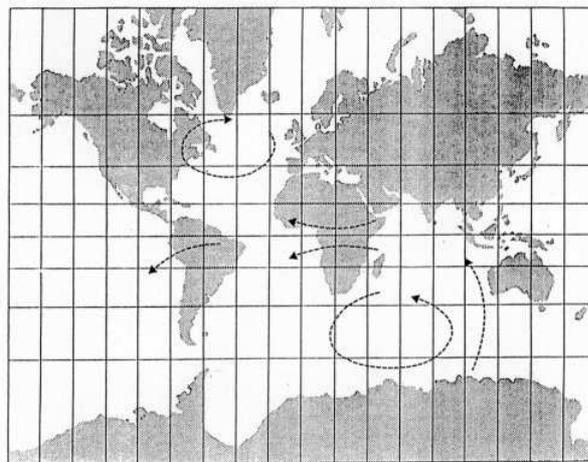


FIG. 5.5 – Carte des grands traits du mouvement à la surface du noyau admis par la plupart des équipes en 1990. Figure extraite de la thèse de D. Jault [1990].

5.2 Implications pour la dynamique actuelle du noyau

5.2.1 Dérive vers l'Ouest

À la surface de la Terre, la trace du courant équatorial atlantique a été observée dès la fin du XVII^{ème} siècle [*e.g.* Dormy et al., 2000]. Cette dérive vers l'ouest de certaines structures caractéristiques du champ magnétique a été quantifiée pour la première fois par Bullard et al. [1950]. Des études ultérieures ont permis de montrer que cette dérive vers l'ouest n'est pas globale, mais dépend de la latitude et de la longitude [*e.g.* Bloxham et Gubbins, 1985; Jault et al., 1988]. L'étude de Finlay et Jackson [2003], basée sur un traitement poussé des observations magnétiques, confirme que ce décalage des structures magnétiques vers l'ouest est principalement concentré dans la région équatoriale de l'hémisphère atlantique (figure 5.6). Notons enfin que la dynamo numérique étudiée par Christensen et Olson [2003] montre également une dérive vers l'ouest des structures du champ magnétique aux basses latitudes, pour la même bande de longitude que la dérive vers l'ouest terrestre. Dans ce modèle numérique, les conditions aux limites thermiques déduites de modèles tomographiques [Olson et Christensen, 2002] sont probablement à l'origine de ces variations longitudinales.

Cette dérive des structures caractéristiques du champ magnétique a logiquement été interprétée en terme de courant équatorial, en accord avec les reconstructions des mouvements à la surface du noyau. Cependant, il ne peut être exclu que cette dérive apparente soit due non pas à un courant du fluide mais à une onde de type MAC⁵, comme le suggèrent Jackson [2003] et Finlay et Jackson [2003]. Dans la dynamo numérique présentée par Christensen et Olson [2003], les deux types de mécanismes participent à la dérive apparente du champ magnétique. Si de telles ondes sont réellement responsables des modifications du champ magnétique observées en surface, elles seraient de toute manière interprétées, à tort, comme un courant du fluide par les méthodes de reconstructions des mouvements à la surface du noyau⁶.

5.2.2 Dynamique globale du noyau

La contrainte forte imposée par la rotation rapide de la Terre justifie que l'on essaie de tirer des informations sur la dynamique globale du noyau à partir de sa dynamique de surface. La rotation rapide, par l'intermédiaire de la force de Coriolis, limite en effet les variations de vitesse dans la direction parallèle à l'axe de rotation terrestre. Ainsi, juste au dessus du seuil de convection dans une sphère en rotation rapide, les mouvements sont organisés en colonnes parallèles à l'axe de rotation (en l'absence de champ magnétique) [Busse, 1970] (figure 5.7a). Il a également été observé, à la fois expérimentalement [Cardin et Olson, 1992, 1994] et numériquement [Christensen, 2002], que cette invariance axiale est conservée au-delà du seuil de convection⁷. Cette

5. MAC pour Magnétique, Archimède, Coriolis [voir par exemple Gubbins et Roberts, 1987, pp. 122–140].

6. Ces ondes sont en effet filtrées lorsque l'on néglige les termes d'inertie et les forces de Lorentz dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour aboutir à l'équilibre géostrophique (équation 2.4).

7. Au moins jusqu'à 50 fois le nombre de Rayleigh critique Ra_c définissant le seuil de convection [Cardin et Olson, 1994].

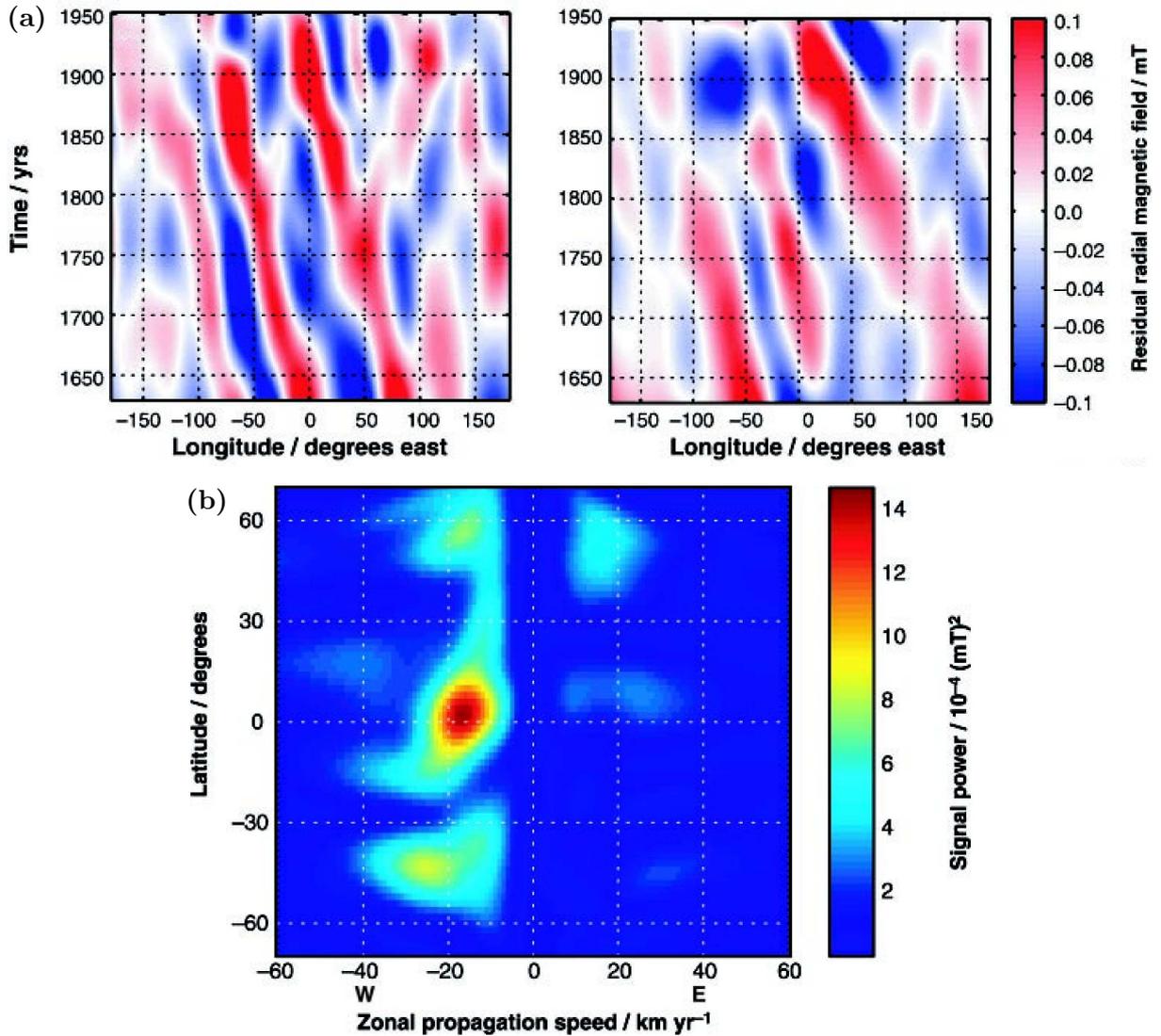


FIG. 5.6 – Caractérisation de la dérive vers l’ouest du champ magnétique radial à la surface du noyau par Finlay et Jackson [2003]. (a) Diagrammes temps-longitude du champ magnétique radial résiduel à l’équateur (figure de gauche) et à 40° de latitude sud (figure de droite). Le champ magnétique résiduel est défini par la différence entre le champ total et la moyenne du champ axisymétrique sur les 400 ans considérés. (b) Puissance du champ magnétique se déplaçant vers l’est avec une vitesse zonale comprise entre -60 et 60 km/an. Le maximum, à l’équateur, correspond à un déplacement vers l’Ouest à la vitesse de 17 km/an [voir Finlay et Jackson, 2003, pour plus de précisions].

particularité des mouvements est également observée en présence de champ magnétique, en particulier dans les écoulements de dynamos numériques [*e.g.* Olson et al., 1999] (figure 5.7b). La force de Lorentz tend néanmoins à limiter cette rigidité axiale des écoulements qui peuvent alors présenter des variations axiales au-delà du seuil de convection (figure 5.7c). Le champ de vitesse à la surface du noyau correspondant à ce dernier régime n'est ainsi pas totalement symétrique par rapport à l'équateur.

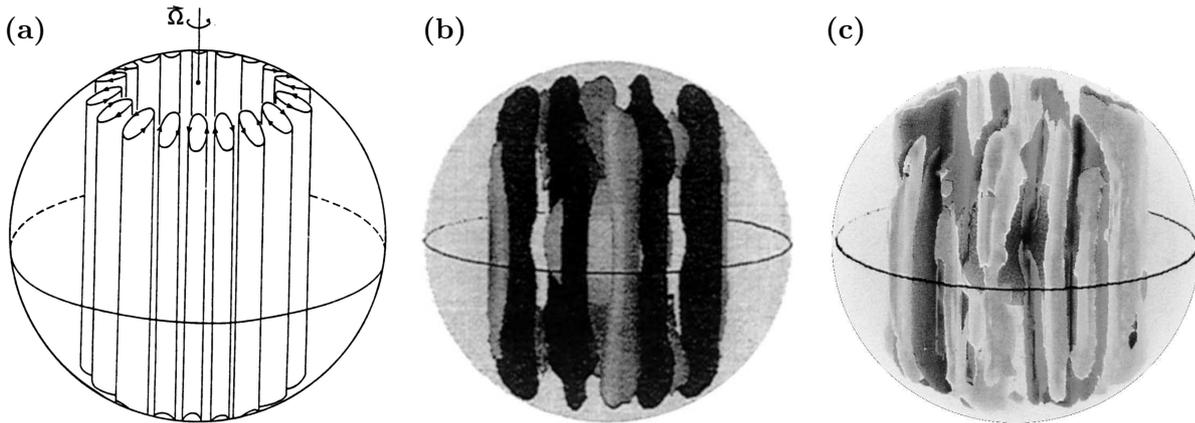


FIG. 5.7 – Convection : dans une sphère en rotation rapide (a) en l'absence de champ magnétique, au seuil de convection ($Ra = Ra_c$) [Busse, 1970], (b) dans une dynamo numérique [Olson et al., 1999] dans le régime à colonnes très marquées ($Ra = 4.8 Ra_c$) et (c) dans le régime de convection développée ($Ra = 10.8 Ra_c$). Les colonnes des cas (b) et (c) sont représentées par des surfaces d'iso-vorticité axiale positives (gris clair) et négatives (gris foncé).

Comme les mouvements ne peuvent être déterminés de manière satisfaisante que dans des zones relativement réduites de la surface du noyau, il est difficile de tirer des conclusions sur la présence ou l'absence de colonnes de convection dans le noyau. On peut toutefois noter qu'il est peu probable que le champ de vitesse soit parfaitement symétrique par rapport à l'équateur, comme le suggéraient Hulot et al. [1990], bien que les mouvements cohérents ne soient pas correctement déterminés dans les zones symétriques des deux vortex atlantiques (figure 4.19). En effet, si des colonnes de convection parfaitement invariantes axialement existaient, les mouvements de ces zones seraient vraisemblablement fiables, leur indétermination étant principalement due à une vitesse insuffisante (§4.4). Il est donc probable que la circulation globale du noyau ne soit pas organisée en colonnes parfaites, à l'image du schéma 5.7a. Il n'est néanmoins pas possible de quantifier l'écart par rapport à ce cas idéal ni d'affirmer l'existence de pseudo-colonnes, à l'image de celles de la figure 5.7c.

D'autre part, en se basant sur le même type de raisonnement, il semble peu probable que l'intensité de la convection soit homogène longitudinalement, comme dans les modèles présentés par la figure 5.7. En effet, aux moyennes latitudes où sont localisés les différents vortex, alternent des zones aux mouvements rapides et bien déterminés avec des zones aux mouvements mal déterminés, et donc probablement moins rapides. De telles variations longitudinales apparaissent épisodiquement dans certaines modélisations numériques de convection en rotation rapide [Busse, 2002; Morin et Dormy, 2004] et de dynamos [Grote et Busse, 2001; Kuang et Bloxham, 1998]

(figure 5.8). Cette localisation de la convection apparaît spontanément dans certains régimes de paramètres et ne nécessite pas de conditions aux limites hétérogènes. Au vu des modèles de mouvements à la surface du noyau, il n'est pas impossible que la convection soit actuellement plus active dans l'hémisphère atlantique que dans l'hémisphère pacifique du noyau.

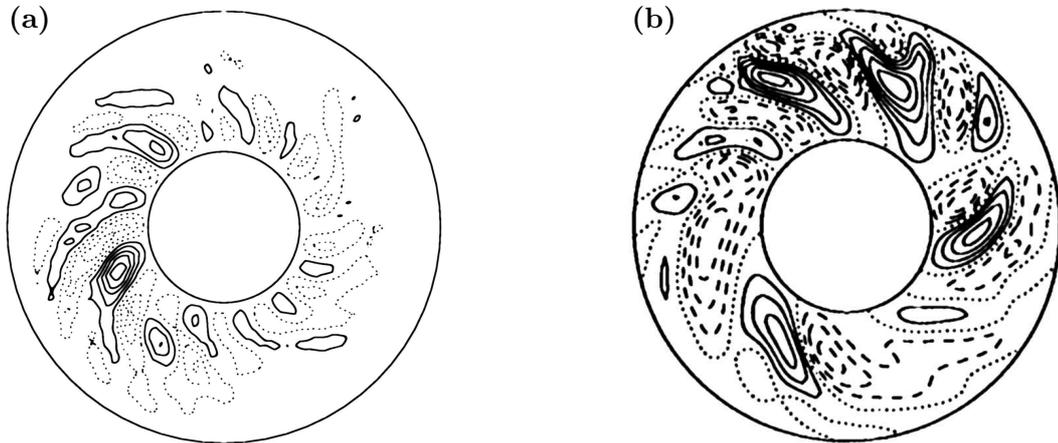


FIG. 5.8 – Coupes équatoriales montrant une convection localisée (a) dans une coquille sphérique en rotation rapide en l'absence de champ magnétique [Morin et Dormy, 2004], (b) dans une dynamo numérique [Grote et Busse, 2001].

5.2.3 Dynamique dans le cylindre tangent

Du fait de la rigidité axiale des mouvements imposée par la rotation rapide, la région du noyau située dans le cylindre tangent à la graine, et donc coupée en deux par celle-ci, est particulière. Différentes études expérimentales et numériques montrent que les mouvements de cette région peuvent être découplés des mouvements du reste du noyau [Cardin et Olson, 1994; Olson et Aurnou, 1999]. Cet éventuel découplage et la nature des mouvements dans le cylindre tangent dépendent des paramètres utilisés. Près du seuil de convection, le fluide du cylindre tangent reste en effet au repos alors que des colonnes se développent dans le reste du noyau [e.g. Cardin et Olson, 1994; Olson et Aurnou, 1999]. Pour des régimes de convection plus développée, des mouvements finissent par envahir ce cylindre. Les expériences menées par Aurnou et al. [2003] montrent en particulier que la convection dans le cylindre tangent, en l'absence de champ magnétique, génère un vent zonal vers l'ouest à la surface du noyau dont l'intensité augmente avec l'intensité de la convection dans le cylindre tangent. Un tel courant est également présent dans certaines dynamos numériques [en particulier, Christensen et Olson, 2003].

Plusieurs études rapportent la présence de vortex polaires rétrogrades, pouvant correspondre au vent zonal évoqué ci-dessus, à la surface du noyau. Un vortex polaire nord a d'abord été identifié dans l'hémisphère nord grâce à une technique *ad hoc* par Olson et Aurnou [1999]. Des reconstructions de mouvements à la surface du noyau trouvent un vortex polaire rétrograde dans chaque hémisphère [e.g. Pais et Hulot, 2000; Hulot et al., 2002]⁸. Au vu des résultats des études

8. L'article de Hulot, Eymin, Langlais, Manda, et Olsen [2002] est reproduit dans l'annexe B.

de cohérence et de fiabilité présentées dans le chapitre 4, nous souhaitons cependant réexaminer cette question ici.

La figure 5.9 montre les mouvements des régions polaires pour les modèles cohérents présentés dans le chapitre 4. Dans les zones où l'erreur de troncature reste acceptable, les mouvements à l'intérieur du cylindre tangent sont effectivement principalement azimutaux et vers l'ouest. Les profils latitudinaux de la vitesse azimutale axisymétrique (figure 5.9) indiquent également la présence de vortex polaires. L'amplitude de la vitesse azimutale zonale augmente en effet des pôles au cylindre tangent puis diminue à l'extérieur de celui-ci.

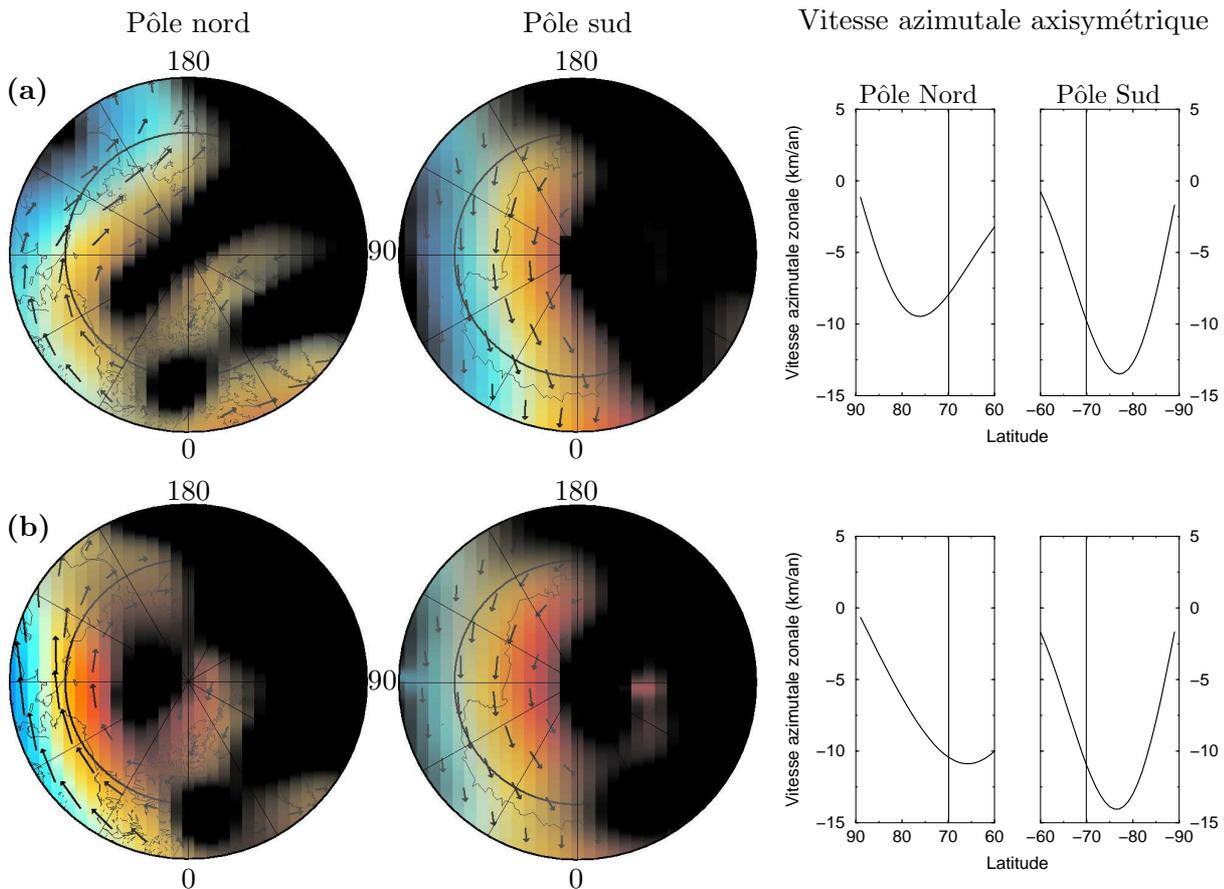


FIG. 5.9 – *Mouvements cohérents dans les régions polaires de la surface du noyau. Champs de vitesse et de pression vus d'un point situé au-dessus du Pôle Nord (colonne de gauche), au-dessus du Pôle Sud (colonne du milieu) et (colonne de droite) composante azimutale axisymétrique du mouvement (ces profils sont réalisés sans prendre en compte les erreurs de troncature). Les mouvements présentés sont ceux des modèles cohérents obtenus avec les variations séculaires (a) différentielle, (b) instantanée de Maus et al. [2004] (chapitre 4). L'amplitude de l'erreur de troncature est supérieure à celle de la vitesse dans les zones en noir. L'erreur de troncature est estimée à partir des maxima des artefacts pour un mouvement à petites échelles moyennement énergétiques (comme pour la figure 4.19). La trace du cylindre tangent est indiquée sur les figures.*

Cependant, la forme des profils de vitesse azimutale zonale associés aux différents coefficients toroïdaux zonaux (2.17) les définissant, nous a conduit à effectuer des tests supplémentaires.

L'amplitude des oscillations de ces profils augmente en effet de l'équateur aux pôles. L'amplitude des mouvements associés à un coefficient est ainsi toujours maximale à proximité du cylindre tangent et l'écart entre les amplitudes équatoriale et quasi-polaire augmente avec le degré n du coefficient considéré. Il est donc envisageable que les maxima au niveau du cylindre tangent des modèles cohérents (figure 5.9) soient des artefacts introduits par les oscillations des latitudes moyennes et le nombre de termes limité des développements utilisés. Des tests à partir des variations séculaires synthétiques *parfaites* (§3.2.2) ont ainsi été effectués afin d'évaluer la capacité intrinsèque de la méthode d'inversion à retrouver les mouvements azimutaux zonaux des régions polaires pour des mouvements aux caractéristiques proches de celles des modèles cohérents. Ces tests montrent effectivement que les mouvements étudiés ici sont très mal contraints. En effet, dans presque 50% des cas, le sens de rotation des *vortex polaires* n'est pas correctement retrouvé (tableau 5.2, «mouvement zonal typique»). Cette mauvaise détermination est due principalement au fait que ces mouvements ne sont responsables que d'une faible part de la variation séculaire observée [Jault, 1990]. Ces mêmes mouvements sont en effet très correctement retrouvés lorsqu'ils sont à l'origine de la quasi-totalité de la variation séculaire observée (tableau 5.2, «mouvements zonaux dominants»).

	Amplitude et sens du vortex retrouvés		Sens du vortex retrouvé		Sens du vortex incorrect	
	Nord	Sud	Nord	Sud	Nord	Sud
Mouvement zonal typique	22%	16%	36%	31%	42%	53%
Vortex polaires plus rapides	19%	12%	50%	36%	31%	52%
Mouvements zonaux dominants	41%	23%	51%	47%	8%	30%

TAB. 5.2 – *Fiabilité intrinsèque des vortex polaires. Probabilité de pouvoir tirer des informations exactes des vortex polaires des modèles cohérents déduite de tests synthétiques réalisés avec des variations séculaires «parfaites» (§3.2.2). Trois séries de 100 variations séculaires synthétiques, obtenues respectivement avec des mouvements semblables à ceux des modèles cohérents (1ère ligne du tableau), avec des mouvements aux vortex polaires renforcés (coefficients t_{11}^0 , t_{12}^0 et t_{13}^0 multipliés par 10, 2ème ligne) et des mouvements essentiellement zonaux (tous les t_n^0 multipliés par 1000, 3ème ligne), ont été utilisées. Amplitude du vortex retrouvée signifie que l'erreur sur l'amplitude est inférieure à 50% de l'amplitude imposée.*

Au vu des résultats de ces tests synthétiques, les vortex polaires apparaissant dans les modèles cohérents sont donc très mal contraints. L'existence réelle de vortex polaires rétrogrades à la surface du noyau reste donc très spéculative, les résultats des autres études faisant apparaître de tels vortex [Aurnou et al., 2003; Christensen et Olson, 2003] ne pouvant pas être appliqués directement au noyau terrestre.

5.2.4 Mouvements zonaux

De nombreuses études expérimentales [*e.g.* Sumita et Olson, 2000; Aubert et al., 2001, 2002] et numériques [*e.g.* Aurnou et Olson, 2001; Christensen, 2002; Aubert et al., 2003] de convec-

tion en rotation rapide mettent en évidence l'existence de mouvements axisymétriques rigides, stables au cours du temps. Il s'agit de mouvements azimutaux invariants dans la direction parallèle à l'axe de rotation du fait de la contrainte de Proudman-Taylor imposée par la rotation rapide (figure 5.10). Ces mouvements peuvent ainsi être vus comme des rotations axiales de cylindres rigides centrés sur l'axe de rotation. Plusieurs mécanismes permettent de générer de tels mouvements. Dans le régime de convection développée dans une sphère en rotation rapide, ces mouvements sont excités par les contraintes de Reynolds associées aux mouvements convectifs de petite échelle [Aurnou et Olson, 2001; Christensen, 2001; Aubert et al., 2002]. Ce mécanisme pourrait être à l'origine des forts courants zonaux, alternativement prograde et rétrogrades, visibles à la surface des planètes géantes [Christensen, 2001]. Des mouvements azimutaux rigides temporellement stables sont également observés dans des modélisations numériques de la géodynamo [Aubert, comm. pers.; Dumberry et Bloxham, 2003]. Il s'agit dans ce cas d'un vent thermique qui apparaît lorsque les équipotentielles de gravité recourent les isothermes⁹ [Busse, 1970].

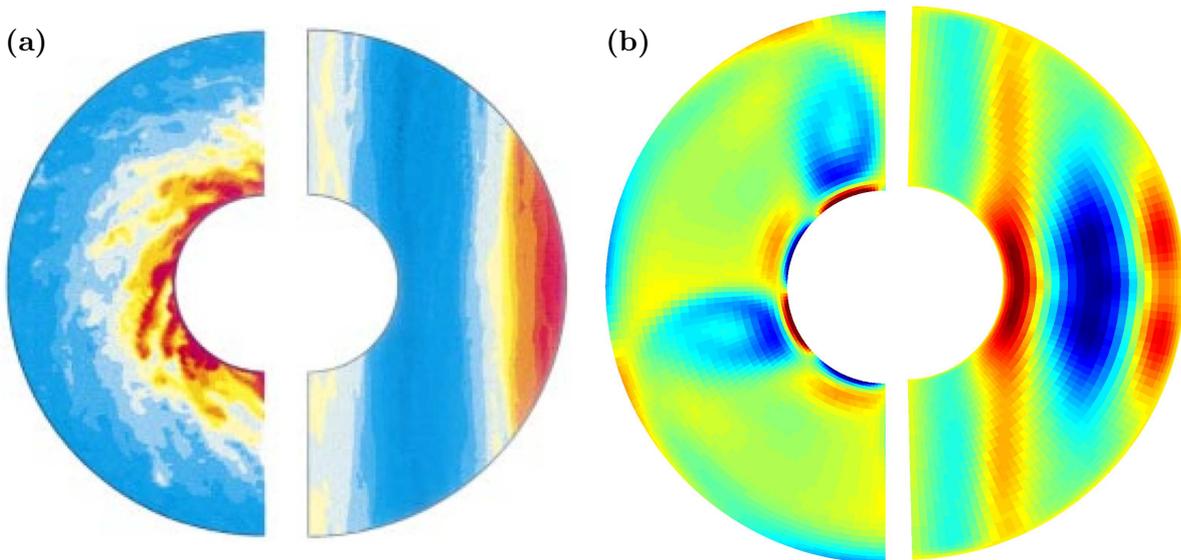


FIG. 5.10 – *Mouvements zonaux rigides.* (a) *Modèle numérique de convection dans une sphère en rotation rapide [Christensen, 2002] : température dans le plan équatorial (gauche) et vitesse azimutale dans un plan méridien (droite).* (b) *Dynamo numérique [Christensen et al., 2001] : vorticité axiale dans le plan équatorial (gauche) et mouvements zonaux dans un plan méridien (droite) [Aubert, comm. pers.]. Les vitesses azimutales progrades (rétrogrades) sont représentées en rouge (bleu).*

Pour chercher la trace de mouvements de ce type dans le noyau terrestre à partir des reconstructions de mouvements à la surface du noyau, il faut s'intéresser à leur composante toroïdale zonale. Cette composante est malheureusement assez mal déterminée, du fait de sa faible contribution à la variation séculaire totale. Il apparaît néanmoins, au vu des résultats des tests men-

9. Ce vent thermique existe aussi en l'absence de champ magnétique mais il est masqué par les mouvements zonaux plus forts engendrés par les contraintes de Reynolds.

tionnés ci-dessus (§5.2.3) que les mouvements zonaux sont mieux contraints à l'extérieur qu'à l'intérieur du cylindre tangent. Les mouvements zonaux des modèles cohérents sont représentés, en terme de vitesse angulaire, dans la figure 5.11. Les profils des deux modèles présentés sont assez différents alors que l'allure générale des mouvements de ces deux modèles est très semblable (figure 4.19). Cette différence peut être due à la mauvaise détermination de cette composante des mouvements, mais il est aussi envisageable que la moyenne sur 20 ans induite par l'utilisation de la variation séculaire différentielle soit à l'origine de ce désaccord. L'instantanéité du modèle obtenu avec la variation séculaire satellitaire de Maus et al. [2004] ne permet pas, de toute manière, de mettre en évidence des structures stables si des structures temporellement variables coexistent.

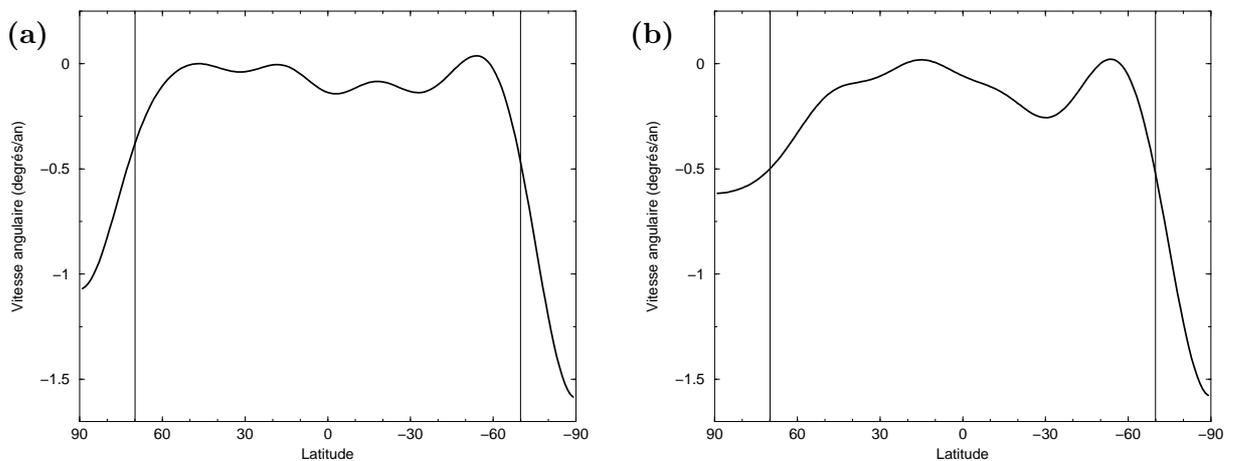


FIG. 5.11 – *Mouvements azimutaux axisymétriques des modèles cohérents de mouvements à la surface du noyau obtenus (a) avec la variation séculaire différentielle, (b) avec la variation séculaire instantanée de Maus et al. [2004].*

Il est en revanche possible de chercher s'il existe des mouvements zonaux temporellement stables dans les reconstructions historiques de mouvements à la surface du noyau obtenues dans le chapitre 3. Les moyennes des mouvements azimutaux zonaux obtenues à partir de ces mouvements ne sont pas symétriques par rapport à l'équateur (figure 5.12a). La composante symétrique par rapport à l'équateur (figure 5.12b) possède néanmoins une amplitude non négligeable, de l'ordre de ± 2 km/an pour la moyenne des 100 dernières années, les plus fiables au vu des observations magnétiques disponibles (§3.1.1). Il est également intéressant de noter que pour cette moyenne la rotation a lieu dans le sens prograde à l'équateur et rétrograde à proximité du cylindre tangent, ce qui semble être une caractéristique commune aux diverses simulations numériques et expérimentales [*e.g.* Aurnou et Olson, 2001; Christensen, 2002; Aubert et al., 2003, voir aussi figure 5.10], que le mouvement zonal soit lié à un vent thermique ou aux petites échelles de la convection.

Sur cette composante temporellement stable des mouvements zonaux, peuvent se superposer des rotations différentielles rigides oscillant au cours du temps, connues sous le nom d'oscillations de torsion [Braginsky, 1970] (figure 5.13). Dans la limite d'un fluide parfait, la contrainte de Taylor [Taylor, 1963] impose en effet que le couple de Lorentz axial appliqué sur un cylindre axial de fluide conducteur soit nul [Roberts, 1987, p.263–268]. Ainsi, si un couple existe à un instant,

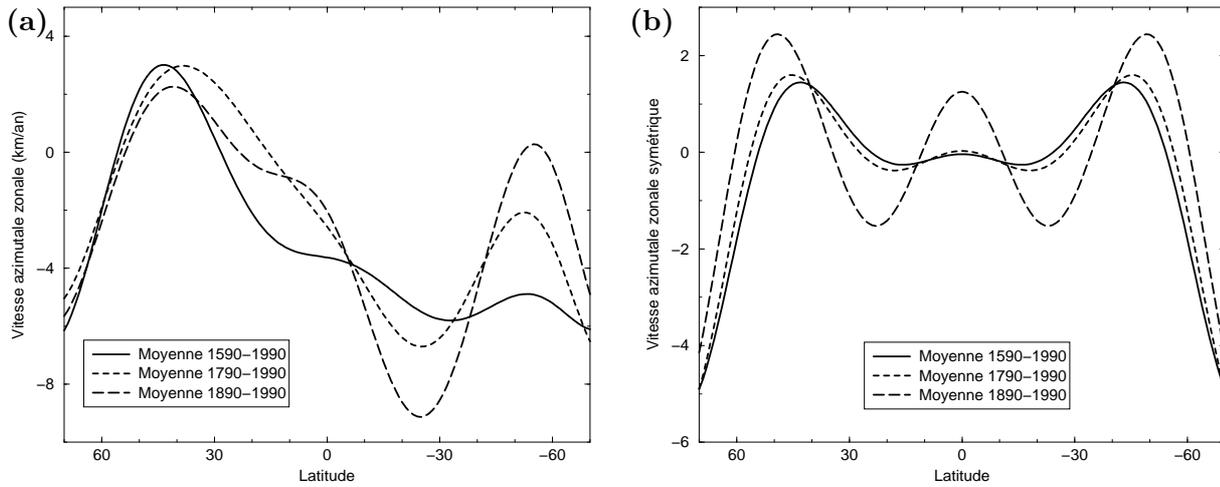


FIG. 5.12 – *Mouvements azimutaux axisymétriques moyens, à l'extérieur du cylindre tangent, dans les modèles historiques de mouvements à la surface du noyau (obtenus avec le modèle *gufm1* de Jackson et al. [2000]). (a) Vitesses azimutales axisymétriques et (b) Composante symétrique par rapport à l'équateur (sans la rotation en bloc).*

ce cylindre doit être accéléré afin que cette contrainte soit de nouveau vérifiée [e.g. Dumberry et Bloxham, 2003]. Ce mouvement est freiné par la composante du champ magnétique perpendiculaire à l'axe de rotation. Cette force de rappel est à l'origine des oscillations temporelles.

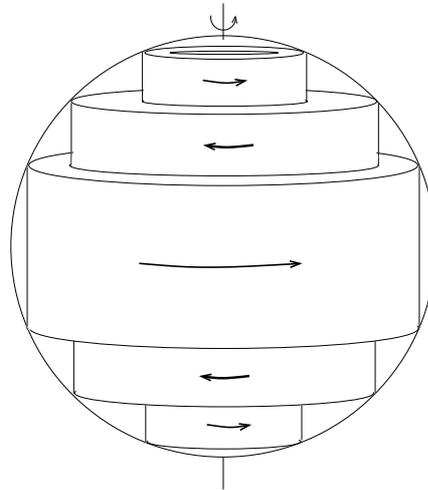


FIG. 5.13 – *Représentation schématique des oscillations de torsion dans le noyau.*

Plusieurs études antérieures ont mis en évidence que les reconstructions de mouvements à la surface du noyau peuvent contenir la trace de telles oscillations [Zatman et Bloxham, 1997; Hide et al., 2000; Pais et Hulot, 2000]. Par ailleurs, les excellentes corrélations obtenues entre les variations décennales de la longueur du jour et les variations du moment cinétique du noyau, déduit des grandes échelles de ces oscillations en supposant un prolongement rigide [Jault et al., 1988; Jackson et al., 1993; Pais et Hulot, 2000] justifient le passage des observations de surface aux oscillations de torsion.

La figure 5.14a présente les variations temporelles des mouvements axisymétriques zonaux de nos modèles historiques, couvrant une période plus longue que les études précédentes. La figure 5.14b montre ces mêmes variations temporelles au cours des 40 dernières années avec une résolution temporelle plus fine, obtenue grâce à l'utilisation du modèle magnétique CM4 de Sabaka et al. [2004] pour le calcul des mouvements¹⁰. Les oscillations obtenues présentent une similitude remarquable avec celles provoquées par les oscillations de torsion observées dans une dynamo numérique par Dumberry et Bloxham [2003] (figure 5.15). Les périodes beaucoup plus longues de ces oscillations dans la simulation s'expliquent par la viscosité importante utilisée.

5.3 Jerks et mouvements

Les résultats présentés ici sont issus d'une collaboration avec Aude Chambodut.

Parmi les caractéristiques remarquables du champ magnétique à la surface de la Terre figurent les jerks. Appelés aussi «secousses magnétiques», ces phénomènes se caractérisent par une variation brutale de la variation séculaire du champ observé (figure 5.16). De telles variations sont d'origine interne [Courillot et al., 1978] et concernent simultanément de vastes régions de la surface terrestre.

Plusieurs études antérieures ont analysé le comportement des mouvements à la surface du noyau au moment d'un jerk [Courillot et Le Mouél, 1984; Hulot et al., 1993; Le Huy et al., 2000; Bloxham et al., 2002], sans toutefois parvenir à caractériser de manière indiscutable la signature dynamique de ces phénomènes. Sans chercher à identifier les processus à leur origine, nous montrons ici que l'évolution temporelle de l'amplitude moyenne de la pression à la surface du noyau est un indicateur de ces événements. L'amplitude moyenne de la pression obtenue avec le modèle de Sabaka et al. [2004] (figure 5.17) présente en effet des maxima en 1969, 1978, 1985, 1991, 1999. Toutes ces dates, à l'exception de 1985, correspondent aux jerks s'étant produits depuis 1965 [Alexandrescu et al., 1996; De Michelis et al., 1998; Mandea et al., 2000]. La date de 1985 ne fait pas partie des jerks répertoriés. Afin de déterminer si la remarquable corrélation observée entre la pression et les dates des jerks est valable, nous cherchons si un jerk pourrait être passé inaperçu en 1985, du fait de la faible portion de la surface du globe couverte par des observatoires magnétiques.

Pour déterminer les régions pouvant être concernées par un éventuel jerk en 1985, nous utilisons le modèle magnétique de CM3 de Sabaka et al. [2002]¹¹. Un jerk est une transition rapide entre une phase de croissance et une phase de décroissance de la variation séculaire, ou inversement. Il peut de ce fait être caractérisé par le passage d'une ligne d'iso-accélération nulle de la composante considérée (par exemple, la ligne $d^2Y/dt^2=0$), sur une région donnée. La figure 5.18 montre le balayage de l'Europe par une de ces lignes entre 1989 et 1992.

Afin de vérifier que le modèle magnétique utilisé intègre bien les caractéristiques des différents

10. Ces mouvements ont été obtenus en appliquant des paramètres identiques à ceux utilisés avec le modèle *gufm1* de Jackson et al. [2000] (§3.1.2).

11. CM3 ne diffère de CM4 que par l'ajout d'observations satellitaires récentes.

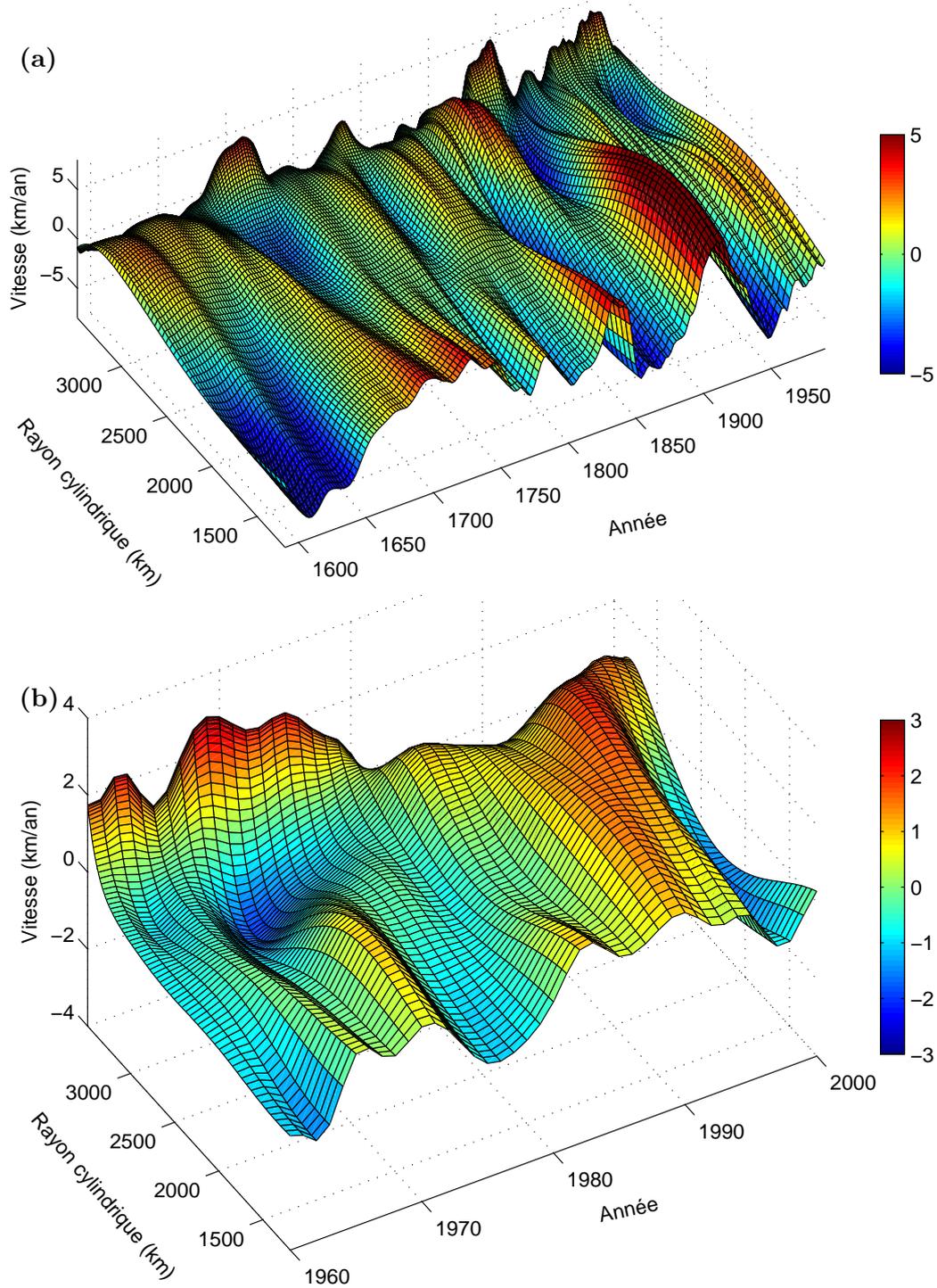


FIG. 5.14 – Composante azimutale axisymétrique symétrique par rapport à l'équateur des mouvements historiques à la surface du noyau, en dehors du cylindre tangent. La composante stationnaire et la rotation en bloc ont été soustraites. Les mouvements présentés ont été obtenus avec les modèles magnétiques (a) *gufm1* de Jackson et al. [2000] et (b) *CM4* de Sabaka et al. [2004].

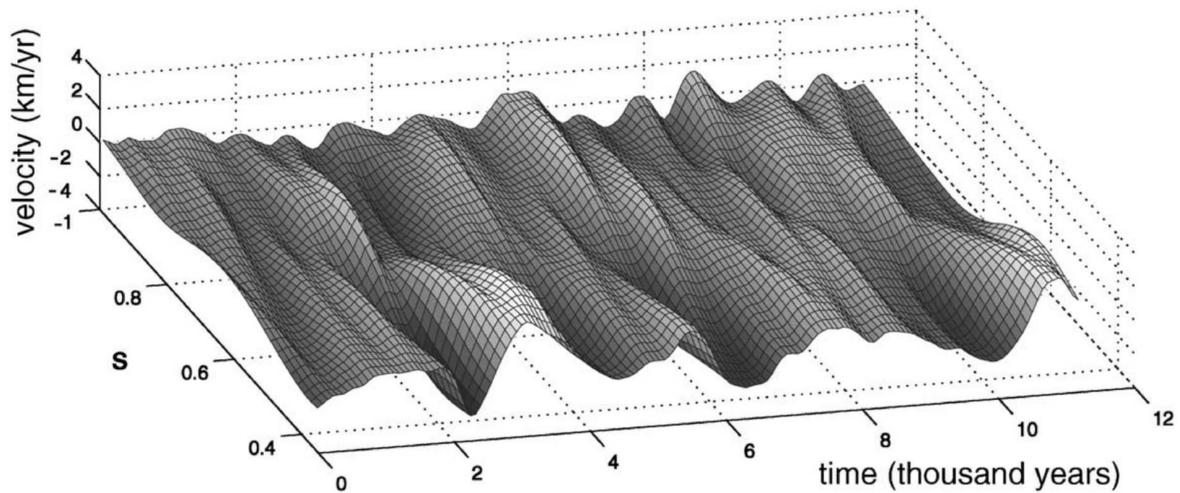


FIG. 5.15 – Vitesse azimuthale rigide en fonction du rayon (s) et du temps en dehors du cylindre tangent dans une dynamo numérique [Dumberry et Bloxham, 2003].

jerks connus, nous repérons les lieux de la surface du globe pour lesquels l'accélération de la composante Y, suivant laquelle les jerks sont souvent le plus visibles, change de signe. La figure 5.19 montre qu'au moment des jerks identifiés (1969, 1979 et 1990) de grandes surfaces sont concernées par ces changements de tendance de la variation séculaire. Entre ces jerks existent des périodes «calmes» durant lesquelles les lignes d'iso-accelération nulle se déplacent beaucoup plus lentement, ne créant ainsi pas de changement brusque dans les observations (figure 5.20). En 1985, une grande partie de l'Océan pacifique semble concernée par un phénomène similaire

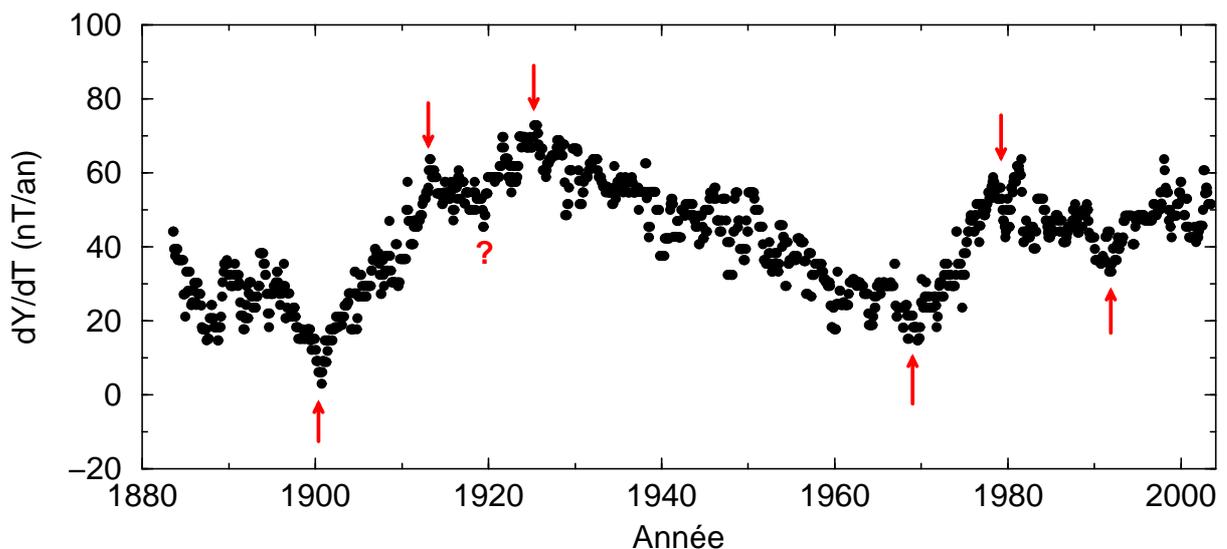


FIG. 5.16 – Variation séculaire de la composante Y (vers l'est) du champ magnétique à Chambon la Forêt (CLF, latitude: 48.02° , longitude: 2.27°). Les flèches indiquent les changements de pente rapide de la tendance moyenne: les jerks géomagnétiques.

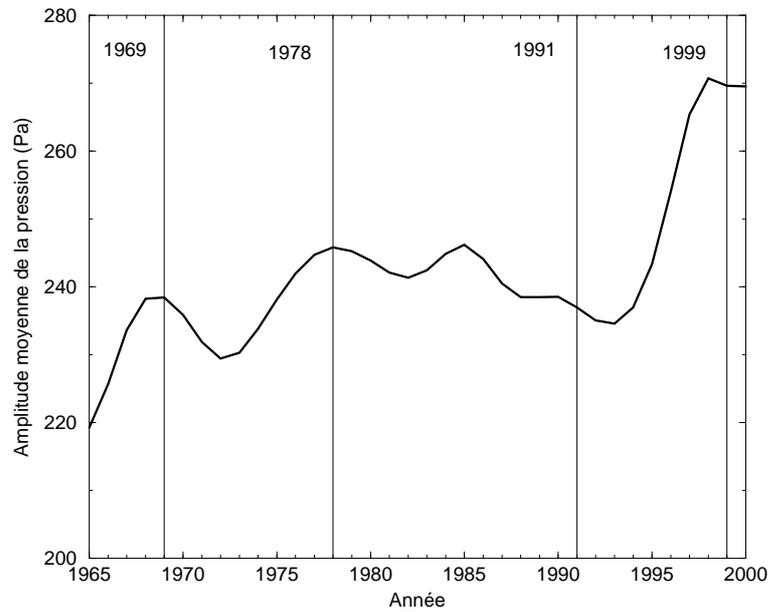


FIG. 5.17 – Évolution temporelle de l'amplitude moyenne de la pression à la surface du noyau obtenue avec le modèle magnétique CM4 [Sabaka et al., 2004] depuis 1965. Les lignes verticales représentent les dates des jerks magnétiques identifiés durant cette période.

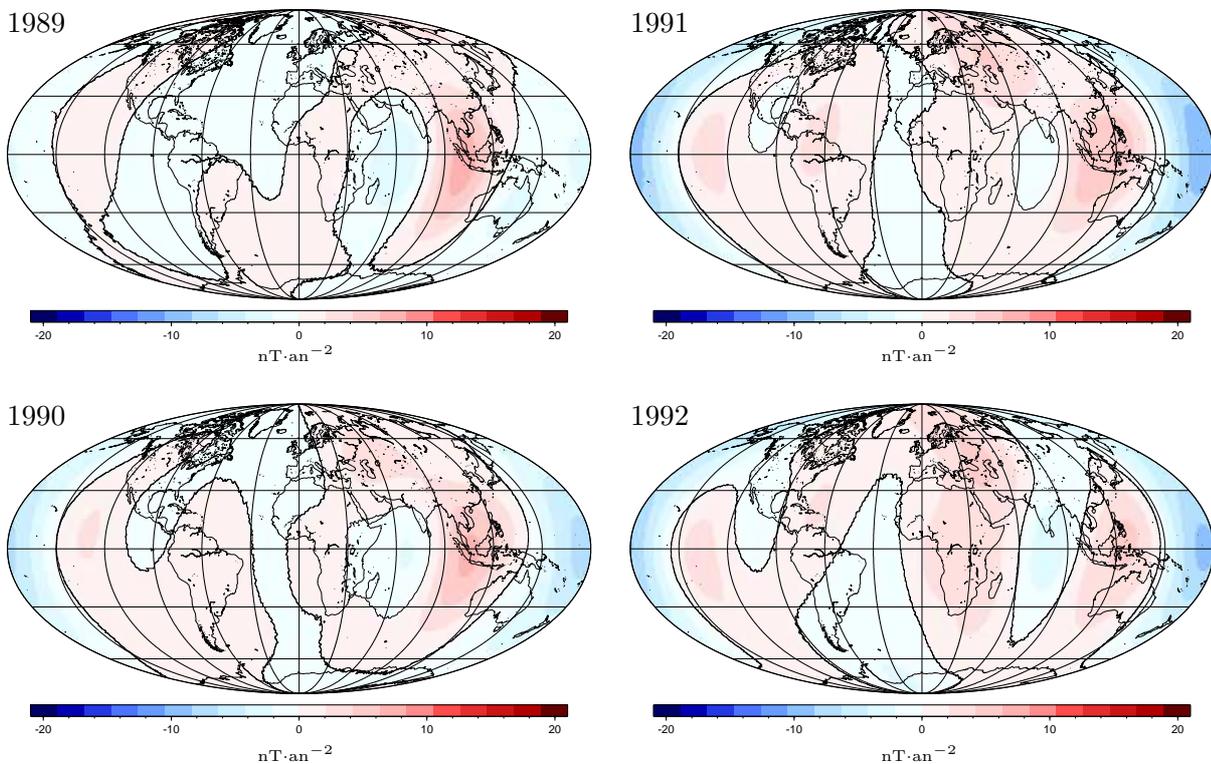


FIG. 5.18 – Valeur de la dérivée seconde de la composante Y (vers l'est) du champ magnétique à la surface de la terre d'après le modèle magnétique CM3 [Sabaka et al., 2002]. Les lignes noires représentent les lieux où $d^2Y/dt^2 = 0$. Le jerk de 1991 correspond au balayage du continent européen par une de ces lignes [Chambodut, comm. pers.].

aux jerks connus. Cette région est malheureusement très mal couverte par les observatoires magnétiques. L'Europe du nord et l'Amérique du nord sont également impliquées. Les séries temporelles de trois observatoires magnétiques situés dans la zone ainsi déterminée confirment des changements de tendance brusques de la variation séculaire (figure 5.21).

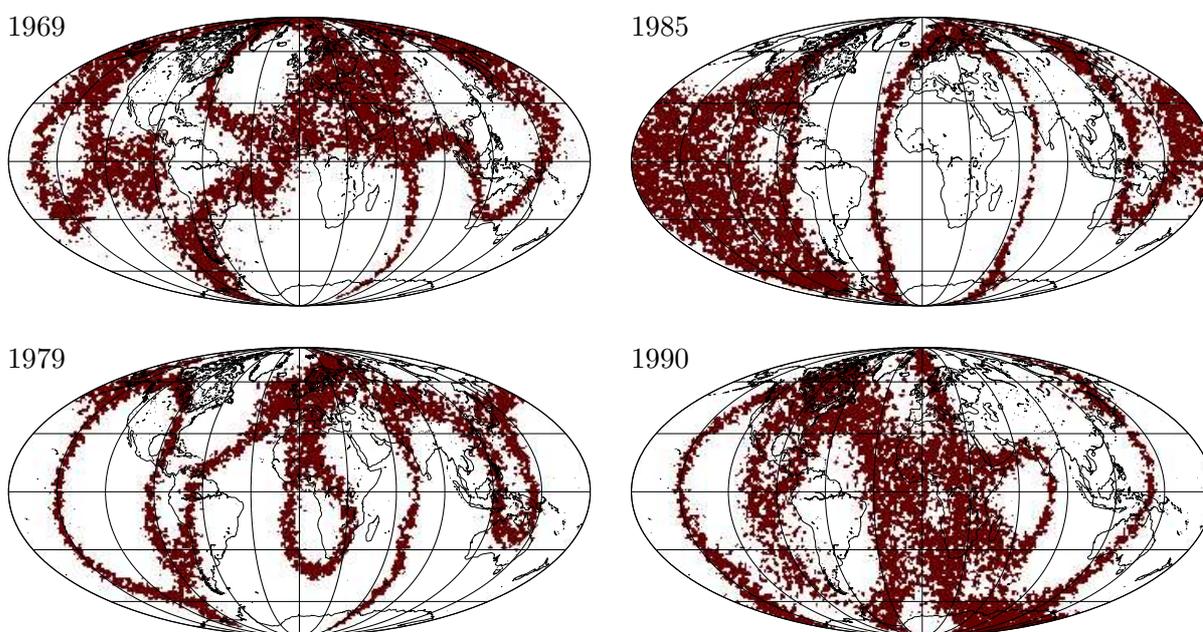


FIG. 5.19 – Lieux de la surface du globe pour lesquels la dérivée seconde de la composante Y du champ magnétique change de signe en décembre 1969, mars 1979, juin 1985 et mars 1990. Calculs effectués avec le modèle magnétique CM3 de Sabaka et al. [2002].

Puisqu'un événement semblable aux jerks répertoriés a vraisemblablement eu lieu en 1985, l'amplitude moyenne de la pression associée aux mouvements à la surface du noyau semble donc effectivement être un bon indicateur de ces phénomènes magnétiques rapides. Il est donc tentant de regarder plus loin en arrière grâce aux reconstructions des mouvements des 400 dernières années obtenues avec le modèle gufm1 de Jackson et al. [2000], même si ce modèle magnétique est moins bien contraint pour les périodes plus anciennes. La figure 5.22 montre ainsi l'évolution

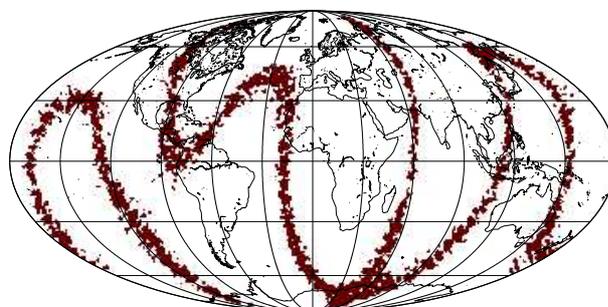


FIG. 5.20 – Situation «calme»: la dérivée seconde de la composante Y du champ magnétique change de signe uniquement le long de bandes étroites (ici durant mars 1993). Comparer avec les périodes «agitées» de la figure 5.19.

temporelle de l'amplitude moyenne de la pression depuis 1700. Les jerks de 1901, 1913 et 1925 [Alexandrescu et al., 1995, *e.g.*] sont associés à des maxima de la pression, comme ceux des périodes plus récentes.

Notons pour finir que les spectres de puissance des deux séries temporelles de pression étudiées ne font pas ressortir de fréquence dominante et la décroissance vers les courtes périodes se fait très lentement. Ces spectres ne sont pas très éloignés de spectres en loi puissance. Ils sont ainsi en accord avec les études de Barraclough et De Santis [1997]; De Santis et al. [2003, 2004] qui, à partir de spectres de ce type, plaident pour un comportement chaotique du champ magnétique terrestre et des processus dynamiques qui le génèrent.

Cette étude pourra être complétée de manière très intéressante, tant du point de vue de la morphologie du champ magnétique que des mouvements à la surface du noyau, lors du prochain jerk. Les observations satellitaires permettront en effet de s'affranchir de la répartition très inhomogène des observatoires terrestre. La question de l'étendue géographique de ces phénomènes, qui a été effleurée ici, pourra ainsi être étudiée de manière indiscutable. Par ailleurs, les méthodes d'assimilation de données, présentées dans le chapitre suivant, permettront d'obtenir des séries temporelles des mouvements à la surface du noyau plus cohérentes, rendant alors l'étude du lien entre l'évolution de la pression et les jerks plus rigoureuse encore.

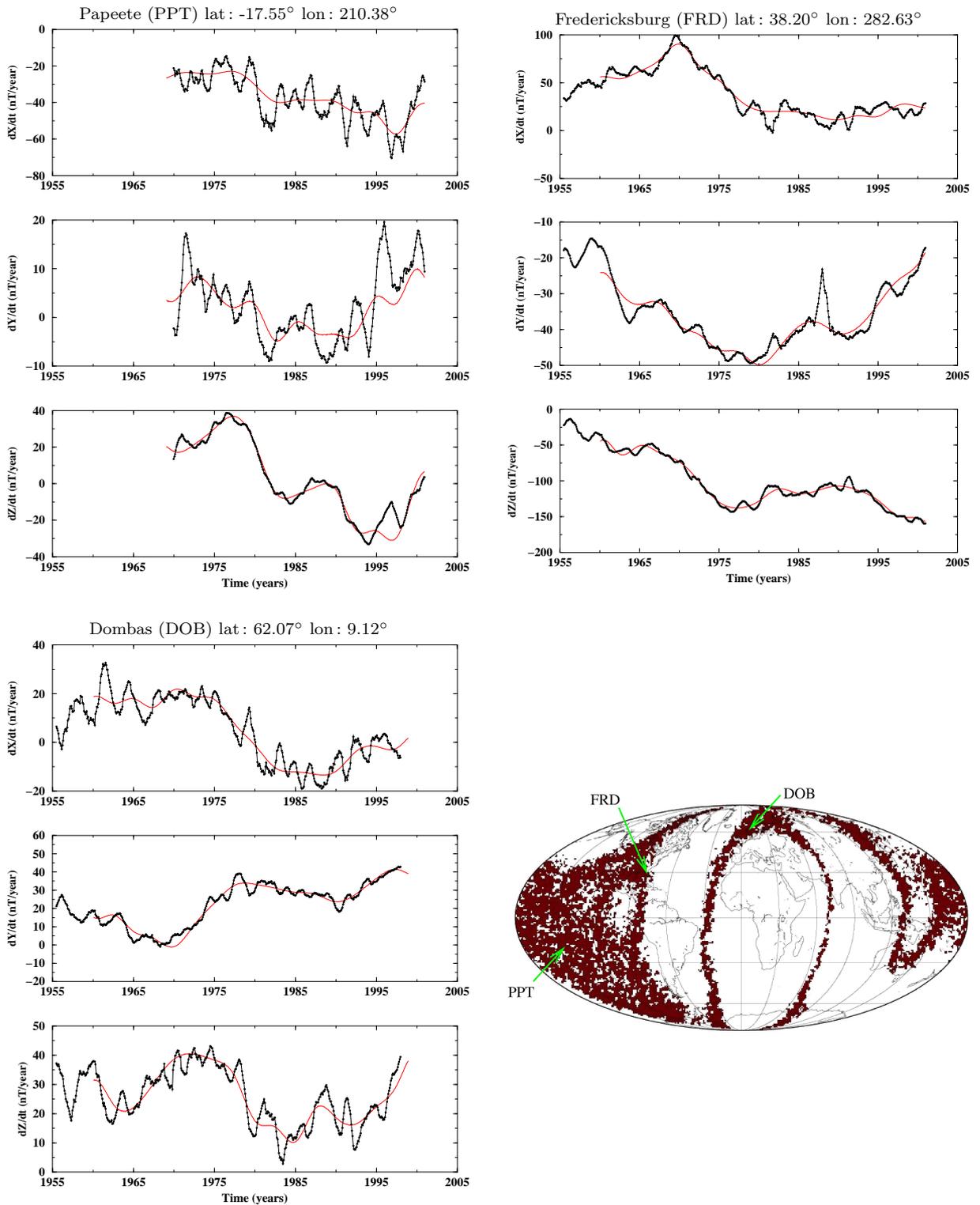


FIG. 5.21 – Variation séculaire observée (courbe noire) en trois observatoires situés dans la région où un jerk en 1985–1986 pourrait exister. Le changement de pente de la tendance générale de la variation séculaire est surtout visible dans la composante Z (verticale) à Papeete et à Dombas, dans la composante Y (vers l'est) à Fredericksburg. La courbe rouge représente la variation séculaire prédite par le modèle CM3 [Sabaka et al., 2002] [Chambodut, comm. pers.].

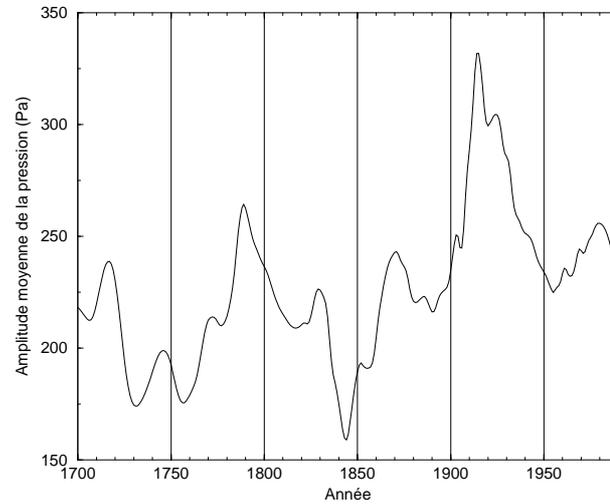


FIG. 5.22 – *Évolution temporelle de l'amplitude moyenne de la pression à la surface du noyau obtenue avec le modèle magnétique gufm1 [Jackson et al., 2000] depuis 1700. Le jerk de 1913 apparaît comme un événement majeur.*

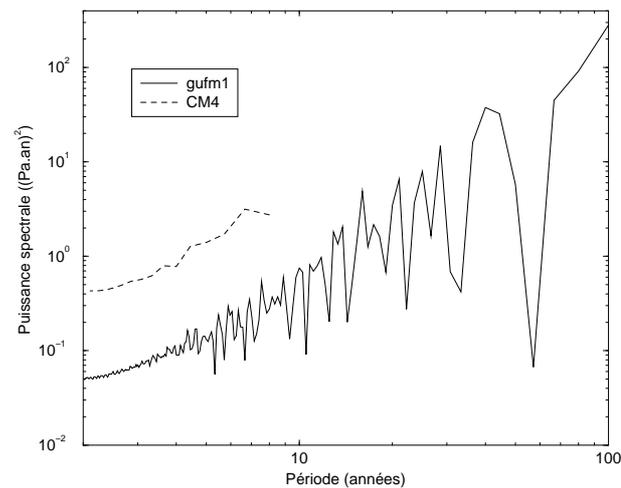


FIG. 5.23 – *Spectre de puissance des séries temporelles d'évolution de l'amplitude moyenne de la pression obtenues avec les modèles gufm1 [Jackson et al., 2000] (trait continu) et CM4 [Sabaka et al., 2004] (trait pointillé).*

Chapitre 6

Une méthode pour le futur : l'assimilation variationnelle de données

L'étude présentée dans ce chapitre a été réalisée en collaboration avec Alexandre Fournier.

Dans ce chapitre sont présentés des résultats préliminaires concernant l'utilisation d'une méthode d'assimilation variationnelle de données adaptée à l'étude du noyau terrestre. Ce type de méthode permettra de contraindre des modèles numériques de la géodynamo avec des observations magnétiques. À plus court terme, cette méthode pourra être appliquée au calcul de mouvements à la surface du noyau. Elle permettra d'obtenir des séries temporelles de mouvements cohérentes avec toute une série temporelle d'observations magnétiques. Ces séries temporelles de mouvement seraient particulièrement intéressantes pour caractériser les modifications rapides de la dynamique à la surface du noyau (oscillations de torsion, jerks) et permettraient d'exploiter au mieux les observations magnétiques réalisées en continu par les satellites.

6.1 Vers l'inversion de dynamos numériques

6.1.1 Motivations à long terme

Les reconstructions de mouvements présentées et utilisées dans les chapitres précédents apportent des renseignements sur la dynamique du noyau au niveau de sa surface. Il est néanmoins délicat d'en tirer des informations sur la dynamique dans le volume du noyau et ainsi sur les mécanismes intervenant dans la génération du champ magnétique. Afin d'étudier ces mécanismes, des simulations numériques de la dynamo terrestre sont utilisées depuis une dizaine d'années [Glatzmaier et Roberts, 1995]. Les paramètres employés dans ces simulations sont encore loin des paramètres du noyau terrestre. On peut néanmoins espérer que cette situation s'améliore grâce

au développement de nouveaux algorithmes plus efficaces et à l'augmentation de la puissance des ordinateurs.

À l'heure actuelle, ces simulations numériques n'utilisent pas directement les observations du champ magnétique. Seules des comparaisons *a posteriori* entre les résultats de ces dynamos et les observations magnétiques sont effectuées [Dormy et al., 2000]. L'incorporation d'observations magnétiques dans un modèle numérique de la géodynamo permettrait certainement de mieux contraindre certains phénomènes actifs dans le noyau, tout comme l'incorporation d'observations dans les modèles atmosphériques et océaniques depuis plus de 20 ans a permis une meilleure connaissance de la dynamique de ces enveloppes superficielles [Ghil, 2000].

Par ailleurs, depuis 1999, la qualité et la quantité des observations du champ magnétiques disponibles augmentent rapidement grâce aux missions satellitaires (Ørsted, CHAMP et SAC-C). Ceci devrait se poursuivre dans le futur, permettant ainsi une observation du champ magnétique terrestre en continu avec une excellente résolution spatiale. Cette masse d'observations de bonne qualité n'est pas exploitée au maximum par les calculs de reconstruction des mouvements de la surface du noyau qui ont aujourd'hui quasiment atteint leur résolution spatiale maximale¹ du fait de la présence du champ crustal. L'utilisation de ces données comme contrainte des dynamos numériques, en donnant accès à des phénomènes profonds, permettrait sans doute un nouveau pas en avant dans la compréhension de la dynamique du noyau.

Du fait des nouvelles données disponibles, des progrès attendus dans le domaine des dynamos numériques et du temps nécessaire à la mise en place de méthodes permettant l'intégration des observations magnétiques dans ces modèles numériques, il nous semble judicieux de commencer dès à présent des études dans ce sens, même si les dynamos numériques sont encore imparfaites.

6.1.2 Méthodes d'assimilation de données

Le but de ce paragraphe est de faire un rapide tour d'horizon des principales méthodes d'assimilation de données existantes [pour plus de détails, voir par exemple Ghil et Malanotte-Rizzoli, 1991; Bouttier et Courtier, 1999]. Depuis plus de 20 ans, de nombreuses méthodes d'assimilation ont été mises en place et développées afin d'améliorer des modèles numériques météorologiques et océanographiques grâce à la prise en compte d'observations pertinentes. Ces méthodes peuvent être classées en deux grandes familles : les méthodes basées sur la théorie de l'estimation [Kalman, 1960], aussi appelées méthodes séquentielles, et les méthodes issues de la théorie du contrôle [Lions, 1968; Marchuk, 1975] ou méthodes variationnelles.

Les méthodes séquentielles ont été les premières à être utilisées pour des problèmes géophysiques [Ghil et al., 1981]. Elles procèdent en deux étapes. À partir d'un état initial, une prédiction de l'état du système à un pas de temps ultérieur est réalisée grâce au modèle dynamique direct. Dans une seconde étape, les prédictions obtenues sont modifiées en prenant en compte les observations disponibles, ce qui permet d'obtenir une estimation de l'état du système. À partir de

1. L'observation en continu du champ magnétique peut permettre d'obtenir des modèles de variation séculaire un peu mieux résolus, les sources du champ crustal des échelles concernées étant supposées constantes temporellement. La résolution des modèles de mouvement pourrait ainsi être légèrement améliorée.

cette estimation, une nouvelle prédiction peut être réalisée pour le pas de temps suivant (figure 6.1). Il existe plusieurs manières de modifier la prédiction dans le sens des observations, de la plus rudimentaire qui consiste simplement à remplacer les variables prédites par les observations correspondantes, au filtre de Kalman qui permet de déterminer l'estimation pour laquelle les erreurs sont minimales au vu des incertitudes du modèle dynamique et de celles des observations [e.g. Ghil, 1989]. Des méthodes intermédiaires sont également utilisées. Il s'agit par exemple de l'interpolation optimale, pour lesquelles les poids relatifs des prédictions et des observations dans l'estimation sont déterminés empiriquement [par exemple, Bouttier et Courtier, 1999].

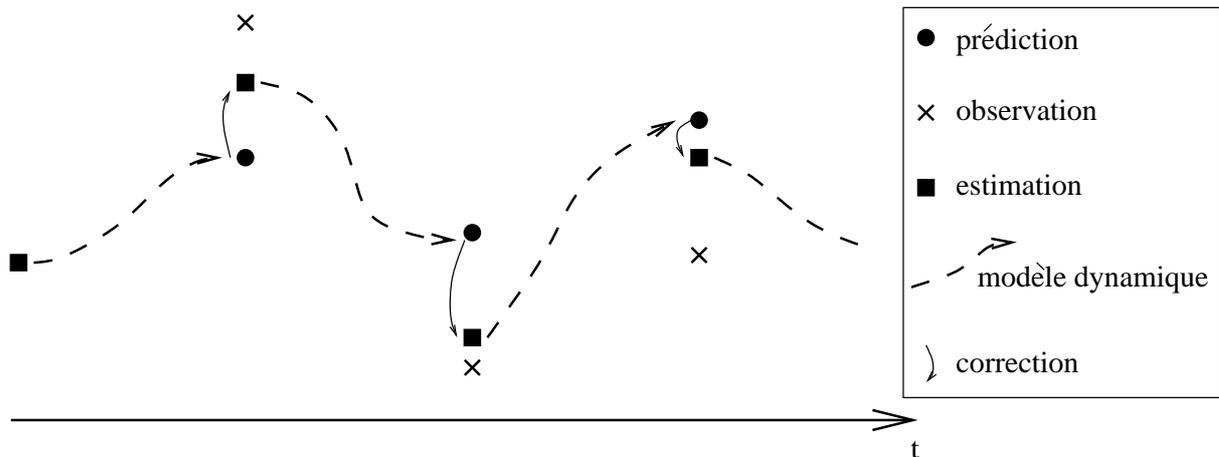


FIG. 6.1 – Principe des méthodes d'assimilation de données séquentielles (d'après Giering et Kaminski [1998]).

Le principe des méthodes variationnelles est de minimiser une fonction coût caractérisant l'écart entre les observations et les prédictions du modèle direct pour l'ensemble de la période considérée. Cette minimisation est généralement effectuée itérativement, les paramètres du modèles étant modifiés à chaque itération de manière à faire diminuer la fonction coût (figure 6.2). Le gradient de la fonction coût, dont la connaissance est requise pour effectuer ces modifications, est calculé grâce aux modèles adjoints du modèle direct. Les modèles adjoints peuvent être mis en place de diverses manières. Il est en effet possible, soit de déterminer les équations adjointes des équations différentielles analytiques du problème, soit de calculer les opérateurs adjoints des opérateurs discrets associés aux équations analytiques, soit enfin d'implémenter directement le code adjoint à partir du code numérique du problème direct. La première solution pose des problèmes lors de la discrétisation des équations obtenues, tandis que la seconde, qui fait intervenir les multiplicateurs de Lagrange et les équations d'Euler-Lagrange, nécessite un codage numérique long et difficile [Giering et Kaminski, 1998]. Comme pour les méthodes séquentielles, des informations concernant les incertitudes des différentes observations peuvent être prises en compte, ici par l'intermédiaire de la fonction coût. En revanche, la prise en compte des erreurs introduites par le modèle dynamique n'est pas évidente avec ces méthodes adjointes [Ghil et Malanotte-Rizzoli, 1991].

Ces deux familles de méthodes diffèrent également par la façon dont elles utilisent les observations. En effet, les méthodes séquentielles utilisent uniquement des observations antérieures

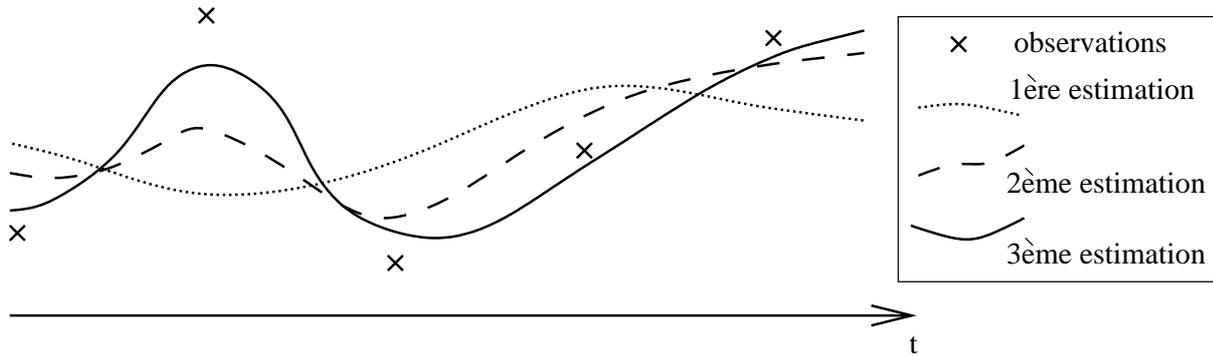


FIG. 6.2 – Principe des méthodes d'assimilation de données variationnelles (d'après Giering et Kaminski [1998]).

ou contemporaines à l'estimation. Ceci est tout à fait adapté au problème de la prévision météorologique en temps réel, où les données postérieures ne sont évidemment pas encore disponibles. Pour une étude du noyau terrestre, il semble en revanche plus intéressant d'utiliser toutes les informations disponibles, quelles soient antérieures ou postérieures à la période étudiée. Pour cela, nous choisissons dans ce qui suit d'utiliser une méthode variationnelle.

6.1.3 Premier objectif: séries temporelles de mouvements à la surface du noyau

Afin de se familiariser avec l'assimilation variationnelle de données, notre premier objectif est d'appliquer cette technique à la reconstruction de séries temporelles de mouvements à la surface du noyau. Ceci pour deux raisons. Tout d'abord, ce problème est bidimensionnel², et donc plus aisé à mettre en place qu'un modèle de dynamo, même cinématique. Ensuite, les résultats obtenus pourront facilement être comparés à ceux obtenus avec les méthodes traditionnelles de reconstruction des mouvements à la surface du noyau, présentées dans les chapitres précédents.

Définition du problème

Les variations de la composante radiale du champ magnétique radial B_r à la surface du noyau résultent de phénomènes d'advection et de diffusion, exprimés dans l'équation de l'induction magnétique que nous rappelons ici :

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -\nabla_H \cdot (\mathbf{u}B_r) + \frac{\eta}{r} \nabla_H^2 (rB_r), \quad (6.1)$$

\mathbf{u} étant la vitesse, tangentielle, à la surface du noyau, η la diffusivité électrique et ∇_H^2 la composante horizontale du laplacien. Dans cette équation, le terme de diffusion verticale, qui n'est pas contraint par les observations, est négligé (voir §2.1.1 pour plus de détails). Cette équation (6.1) peut être utilisée pour calculer le champ magnétique radial au cours du temps si le champ de

2. À condition de négliger la diffusion radiale du champ magnétique (équation (6.1)).

vitesse à la surface du noyau \mathbf{u} est connu. Pour cela, la dérivée temporelle de (6.1) est estimée à l'aide d'une différence finie du premier ordre :

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} \simeq \frac{B_r^{n+1} - B_r^n}{\Delta t}, \quad (6.2)$$

Δt étant le pas de temps de la discrétisation temporelle, $B_r^n = B_r(t = t^n)$ et $t^n = n\Delta t$. Avec une méthode d'Euler explicite du premier ordre, il est ainsi possible de calculer numériquement le champ magnétique en fonction des valeurs de ce même champ et du champ de vitesse au pas de temps précédent :

$$B_r^{n+1} = B_r^n - \Delta t \nabla_H \cdot (\mathbf{u}^n B_r^n) - \Delta t \frac{\eta}{r} \nabla_H^2 (r B_r^n), \quad (6.3)$$

soit, en introduisant l'opérateur \mathcal{N} :

$$B_r^{n+1} = \mathcal{N}(B_r^n, \mathbf{u}^n). \quad (6.4)$$

Le modèle dynamique représenté par l'équation (6.4) et la figure 6.3 permet de calculer l'évolution de B_r au cours du temps. Le champ de vitesse intervient comme un forçage externe. Son évolution temporelle n'est pas contrainte par (6.4).

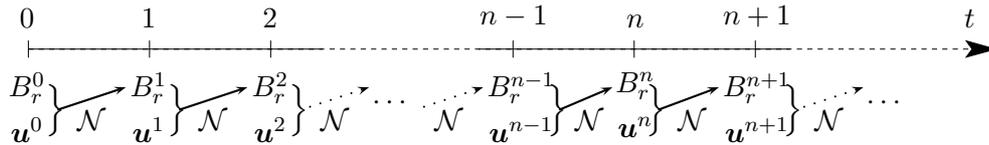


FIG. 6.3 – Calcul d'une série temporelle de B_r , connaissant B_r^0 et \mathbf{u}^n , grâce à l'opérateur \mathcal{N} .

Le but de ce travail est de retrouver une série temporelle du champ de vitesse à la surface du noyau capable de reproduire au mieux une série temporelle du champ magnétique radial à la surface du noyau observée depuis la surface de la Terre (§2.1.1) grâce au modèle dynamique (6.4). Ceci est réalisable en utilisant une méthode d'assimilation variationnelle de données.

Apport par rapport aux méthodes existantes

En plus de permettre une familiarisation avec les méthodes d'assimilation variationnelle de données, cette nouvelle technique de reconstruction des mouvements à la surface du noyau présente également des intérêts propres, malgré les nombreuses méthodes déjà existantes.

Parmi les précédentes études cherchant les mouvements à la surface du noyau pouvant expliquer une série temporelle d'observations du champ magnétique terrestre, trois types de traitement du comportement temporel du mouvement recherché sont rencontrés. Les méthodes les plus *radicales* recherchent un mouvement stationnaire sur la période de temps considérée [*e.g.* Voorhies, 1986b; Waddington et al., 1995], ceci principalement car cette hypothèse permet de lever l'indétermination des mouvements, au même titre que les hypothèses géostrophiques ou toroïdales³ [Voorhies et Backus, 1985]. Il apparaît néanmoins que cette hypothèse est trop forte

3. Voir chapitre 2.

et ne permet pas d'expliquer convenablement les observations, même sur des périodes de temps relativement courtes, de l'ordre de 10 ans [Jackson, 1997]. Cette hypothèse est en effet incompatible avec celle du flux gelé [Gubbins et Kelly, 1996; Love, 1999]. D'autres études, comme celle présentée dans le chapitre 3, calculent des mouvements indépendants les uns des autres, pour différents instants de la série temporelle [voir aussi, par exemple, Pais et Hulot, 2000; Le Huy et al., 2000]. D'autres méthodes, enfin, prennent explicitement en compte le comportement temporel du mouvement recherché, soit en cherchant un mouvement de base uniformément accéléré au cours de la période temporelle étudiée [Voorhies, 1995], soit en cherchant un mouvement qui évolue le moins possible au cours de la période considérée [Jackson, 1997], ou encore, en cherchant un mouvement stationnaire dans un repère en rotation [Holme et Whaler, 2001].

La méthode proposée ici permet évidemment de chercher un mouvement dépendant du temps, en laissant le choix de fixer ou non des contraintes supplémentaires sur son évolution temporelle. Son intérêt par rapport aux méthodes existantes tient néanmoins surtout dans le fait que les mouvements recherchés ne sont pas indépendants les uns des autres, dans le sens où le champ magnétique prédit par le mouvement d'un pas de temps donné est utilisé pour la reconstruction du mouvement au pas de temps suivant. À l'inverse, avec les méthodes traditionnelles [*e.g.* Jackson, 1997; Pais et Hulot, 2000, ainsi que les chapitres 3 et 5 de ce manuscrit], c'est uniquement le champ magnétique observé qui est utilisé pour reconstruire les mouvements aux différents pas de temps. Ainsi une structure dynamique stable dans le temps qui n'est jamais retrouvée car l'erreur de prédiction qu'elle engendre reste toujours dans la marge tolérée ne pourra jamais être détectée (figure 6.4a). En revanche, une méthode cherchant une série cohérente de mouvements pourra la détecter, l'erreur de prédiction étant propagée et finissant par dépasser la limite autorisée (figure 6.4b). L'application d'une méthode d'assimilation variationnelle de données permettrait ainsi de reconstituer une série temporelle de mouvements qui soit cohérente avec toute la série temporelle des observations, ce qui, à notre connaissance, n'est pas possible avec les autres méthodes⁴. Ces séries temporelles cohérentes seraient très intéressantes pour raffiner les études sur les oscillations de torsion et les jerks présentées dans le chapitre 5.

Notons, pour finir, que cette méthode permet aussi d'introduire facilement la diffusion horizontale du champ magnétique à la surface du noyau⁵. Ceci peut par exemple permettre de rechercher, en plus du champ de vitesse, une estimation de la diffusivité électrique du noyau.

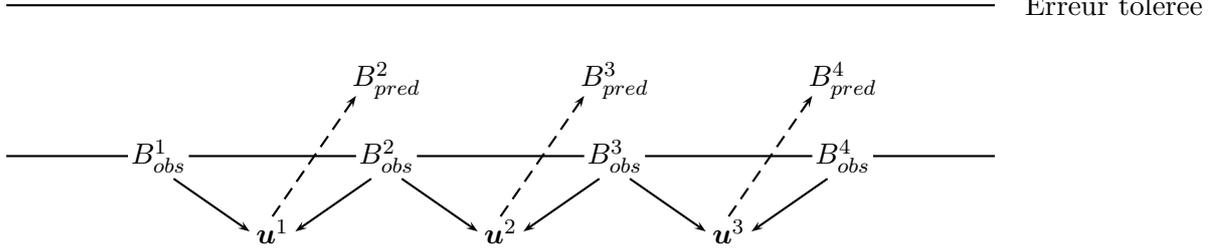
6.2 Implémentation de la méthode

Nous montrons ici comment reconstruire, à l'aide d'une méthode d'assimilation variationnelle de données, les termes de forçage \mathbf{u} permettant d'expliquer l'évolution temporelle observée d'une

4. Signalons cependant que certaines méthodes cherchant un mouvement temporellement constant reposent sur le même principe de «série» cohérente, tout en employant un formalisme différent [entre autres, Voorhies, 1986a; Bloxham, 1989].

5. Gubbins [1996] propose une méthode pour prendre la diffusion en compte dans les reconstructions des mouvements de la surface du noyau. Elle n'a pour l'instant pas été mise en pratique.

(a)



(b)

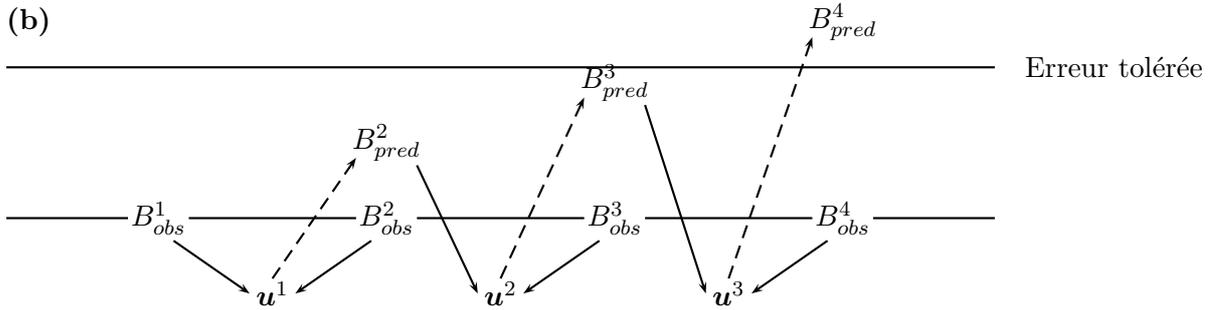


FIG. 6.4 – Intérêt d’une méthode dont les champs de vitesse successifs ne sont pas indépendants les uns des autres. En (a), une structure persistante systématiquement non-décélée par l’inversion peut conduire à une erreur de prédiction toujours dans la marge de tolérance. En (b), les erreurs sont propagées, conduisant ainsi à une erreur inacceptable.

quantité ϕ , connaissant le mécanisme par lequel l’évolution de ϕ est influencée par \mathbf{u} :

$$\phi^{n+1} = \mathcal{N}(\phi^n, \mathbf{u}^n). \quad (6.5)$$

Les modifications du champ magnétique radial par les mouvements du fluide à la surface du noyau constituent une illustration géophysique d’un tel phénomène.

6.2.1 Principe général

Puisque l’on recherche la série temporelle des termes de forçage permettant de rendre compte au mieux des observations, il est nécessaire de quantifier l’écart entre les valeurs de ϕ observées et celles prédites par les termes de forçage considérés, en introduisant une fonction coût. Comme avec la méthode spectrale de reconstruction des mouvements à la surface du noyau (chapitre 2), le but est de minimiser le plus possible cette fonction coût. La manière dont cette minimisation est effectuée est en revanche différente, les termes de forçage \mathbf{u} étant ajustés itérativement afin de faire diminuer la fonction coût.

Ainsi, à partir d’un choix initial *a priori* des valeurs des termes de forçage aux différents pas de temps, le modèle dynamique direct (6.4) est intégré, fournissant une série temporelle des valeurs de ϕ prédites. La fonction coût correspondant à ce choix initial des termes de forçage est évaluée. L’intégration de modèles adjoints au modèle direct permet de calculer le gradient

de cette fonction coût en fonction des différents paramètres ajustables du modèle, que sont les différents termes de forçage (ce calcul est détaillé dans le paragraphe suivant (§6.2.2)). Ces derniers sont modifiés selon ce gradient, de manière à faire diminuer la fonction coût. Le modèle direct (6.4) est intégré de nouveau avec les nouvelles valeurs des termes de forçage, ce qui permet de calculer la nouvelle valeur de la fonction coût, dont le gradient est réévalué grâce à l'intégration des modèles adjoints. Ce processus est réitéré jusqu'à ce qu'un minimum soit atteint. La figure 6.5 schématise ce processus.

Différentes méthodes d'optimisation peuvent être employées pour déterminer comment modifier les termes de forçage à partir de la connaissance du gradient de la fonction coût. Dans ce qui suit, nous employerons une méthode de gradient conjugué ainsi qu'une méthode de plus grande pente, plus simple, pour certains tests.

Contrairement à la méthode spectrale qui détermine directement le minimum global de la fonction coût, cette méthode itérative peut ne trouver qu'un minimum local de celle-ci⁶. Afin de caractériser la pertinence du minimum atteint, il est possible de tester plusieurs choix initiaux *a priori* des paramètres ajustables. En contrepartie, cette méthode permet de s'intéresser à des systèmes dynamiques complexes, non-inversibles par des méthodes plus traditionnelles.

6.2.2 Calcul du gradient de la fonction coût grâce aux modèles adjoints

Dans le cas où le modèle dynamique décrit l'évolution temporelle des paramètres que l'on souhaite ajuster, le gradient de la fonction coût peut être calculé grâce à l'opérateur adjoint de l'opérateur linéaire tangent \mathcal{N}' du modèle dynamique considéré, du type $\phi^{n+1} = \mathcal{N}'(\phi^n)$ [e.g. Huang et Yang, 1996]. Nous montrons maintenant que dans le cas où l'on souhaite ajuster des termes de forçage, dont l'évolution temporelle n'est pas contrainte, deux modèles adjoints interviennent dans le calcul du gradient de la fonction coût.

Le but recherché est de minimiser la norme du gradient de la fonction coût $\|\nabla J\|$ par rapport aux différents paramètres ajustables \mathbf{u} . Pour une fonction coût de la forme :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n_{max}} (\phi^n - \phi_{obs}^n)^T (\phi^n - \phi_{obs}^n), \quad (6.6)$$

n_{max} étant l'indice du dernier pas de temps de la série ($t^{n_{max}} = n_{max}\Delta t$), la relation suivante peut être obtenue :

$$[\nabla J(\mathbf{u})]^T \delta \mathbf{u} = \sum_{n=1}^{n_{max}} (\phi^n - \phi_{obs}^n)^T \delta \phi^n, \quad (6.7)$$

ϕ_{obs}^n représentant les observations et ϕ^n les prédictions des paramètres de contrôle au pas de temps n .

6. La fonction coût de la méthode spectrale, qui est une méthode d'inversion linéaire, n'a en effet qu'un seul minimum, alors que la fonction coût associée à la méthode d'assimilation de données, qui est une méthode d'inversion non-linéaire, peut avoir plusieurs minima locaux.

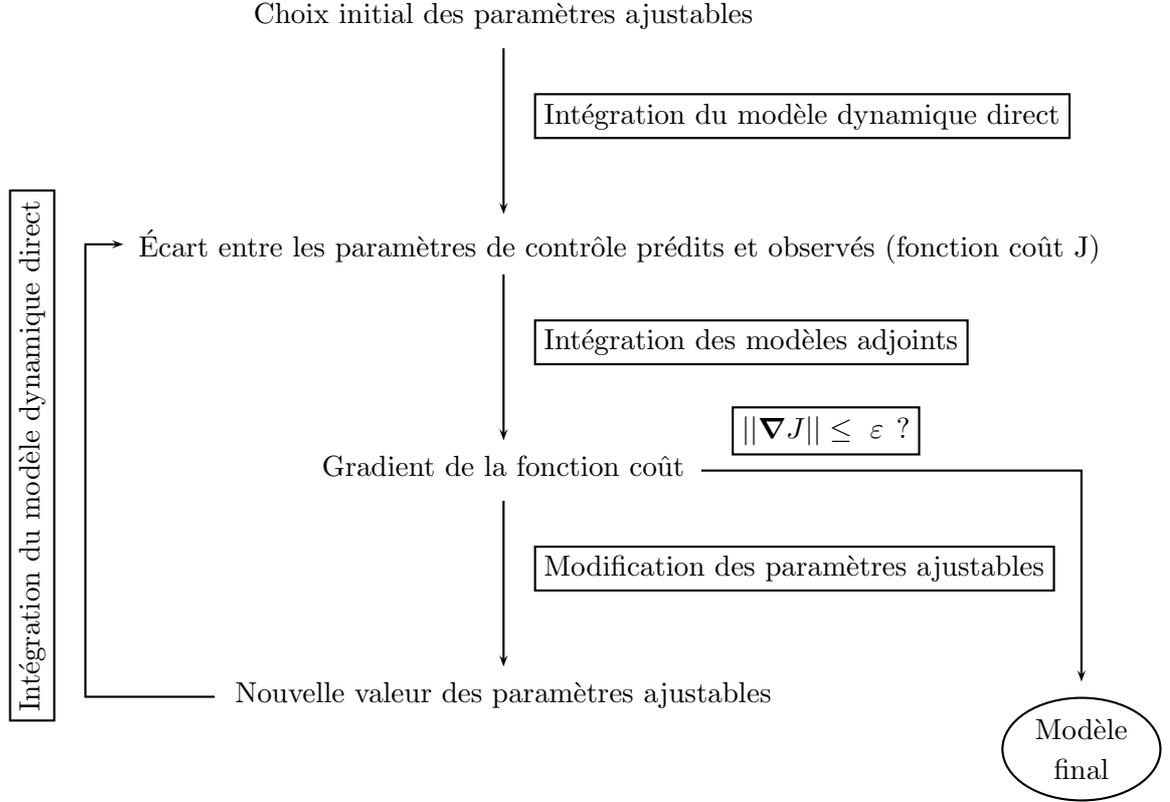


FIG. 6.5 – Principe général de la méthode d’assimilation variationnelle de données mise en place. Les paramètres ajustables sont les différents termes de forçage (\mathbf{u} dans notre cas), les paramètres de contrôle les quantités observées (ϕ), ε est le critère d’arrêt, fixé a priori, des itérations d’optimisation.

Il est possible d’exprimer les perturbations des paramètres de contrôle $\delta\phi$ en fonction des perturbations imposées aux paramètres ajustables $\delta\mathbf{u}$ grâce à l’opérateur linéaire tangent. Celui-ci exprime en effet les répercussions au pas de temps $n + 1$ d’une perturbation des différents paramètres du modèle au pas de temps n . Dans le modèle dynamique considéré (6.4), \mathcal{N} dépend de ϕ^n et de \mathbf{u}^n . Deux opérateurs linéaires tangents \mathcal{L} et \mathcal{M} peuvent ainsi être introduits, exprimant respectivement l’influence d’une variation $\delta\phi^n$ de la quantité considérée et d’une variation $\delta\mathbf{u}$ des termes de forçage :

$$\delta\phi^{n+1} = \frac{\partial\mathcal{N}(\phi^n, \mathbf{u}^n)}{\partial\phi^n} \delta\phi^n + \frac{\partial\mathcal{N}(\phi^n, \mathbf{u}^n)}{\partial\mathbf{u}^n} \delta\mathbf{u}^n, \quad (6.8)$$

$$\delta\phi^{n+1} = \mathcal{L}\delta\phi^n + \mathcal{M}\delta\mathbf{u}^n. \quad (6.9)$$

Une perturbation de ϕ au pas de temps $n + 1$ résulte de la perturbation de ϕ au pas de temps n et de la perturbation de \mathbf{u} à ce même pas de temps n . Puisque $\delta\phi^n$ dépend lui-même de $\delta\phi^{n-1}$ et de $\delta\mathbf{u}^{n-1}$, on peut par récurrence exprimer la perturbation des paramètres de contrôle à un

pas de temps donné $\delta\phi^n$ produite par une modification des différents paramètre ajustables $\delta\mathbf{u}$:

$$\begin{aligned}\delta\phi^n &= \mathcal{L}(\phi^{n-1}, \mathbf{u}^{n-1})\delta\phi^{n-1} + \mathcal{M}(\phi^{n-1}, \mathbf{u}^{n-1})\delta\mathbf{u}^{n-1} \\ &= \mathcal{L}(\phi^{n-1}, \mathbf{u}^{n-1})\mathcal{L}(\phi^{n-2}, \mathbf{u}^{n-2})\delta\phi^{n-2} + \mathcal{L}(\phi^{n-1}, \mathbf{u}^{n-1})\mathcal{M}(\phi^{n-2}, \mathbf{u}^{n-2})\delta\mathbf{u}^{n-2} \\ &\quad + \mathcal{M}(\phi^{n-1}, \mathbf{u}^{n-1})\delta\mathbf{u}^{n-1}\end{aligned}\tag{6.10}$$

$$\begin{aligned}\delta\phi^n &= \mathcal{L}(\phi^{n-1}, \mathbf{u}^{n-1})\mathcal{L}(\phi^{n-2}, \mathbf{u}^{n-2})\mathcal{L}\dots\mathcal{L}(\phi^1, \mathbf{u}^1)\mathcal{M}(\phi^0, \mathbf{u}^0)\delta\mathbf{u}^0 \\ &\quad + \mathcal{L}(\phi^{n-1}, \mathbf{u}^{n-1})\mathcal{L}(\phi^{n-2}, \mathbf{u}^{n-2})\mathcal{L}\dots\mathcal{L}(\phi^2, \mathbf{u}^2)\mathcal{M}(\phi^1, \mathbf{u}^1)\delta\mathbf{u}^1 \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \mathcal{L}(\phi^{n-1}, \mathbf{u}^{n-1})\mathcal{M}(\phi^{n-2}, \mathbf{u}^{n-2})\delta\mathbf{u}^{n-2} \\ &\quad + \mathcal{M}(\phi^{n-1}, \mathbf{u}^{n-1})\delta\mathbf{u}^{n-1}\end{aligned}\tag{6.11}$$

$$\delta\phi^n = \sum_{l=0}^{n-1} \left(\prod_{j=n-1}^{l+1} \mathcal{L}(\phi^j, \mathbf{u}^j) \right) \mathcal{M}(\phi^l, \mathbf{u}^l)\delta\mathbf{u}^l.\tag{6.12}$$

En insérant la formule de récurrence (6.11) dans l'expression (6.7) du gradient de la fonction coût, on obtient

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}^n} \right]^T \delta\mathbf{u}^n &= (\phi^{n+1} - \phi_{obs}^{n+1})^T \mathcal{M}(\phi^n, \mathbf{u}^n)\delta\mathbf{u}^n \\ &\quad + (\phi^{n+2} - \phi_{obs}^{n+2})^T \mathcal{L}(\phi^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1})\mathcal{M}(\phi^n, \mathbf{u}^n)\delta\mathbf{u}^n \\ &\quad + (\phi^{n+3} - \phi_{obs}^{n+3})^T \mathcal{L}(\phi^{n+2}, \mathbf{u}^{n+2})\mathcal{L}(\phi^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1})\mathcal{M}(\phi^n, \mathbf{u}^n)\delta\mathbf{u}^n \\ &\quad + \dots \\ &\quad + (\phi^{n_{max}} - \phi_{obs}^{n_{max}})^T \mathcal{L}(\phi^{n_{max}-1}, \mathbf{u}^{n_{max}-1})\mathcal{L}\dots\mathcal{L}(\phi^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1})\mathcal{M}(\phi^n, \mathbf{u}^n)\delta\mathbf{u}^n\end{aligned}\tag{6.13}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}^n} &= \mathcal{M}^T(\phi^n, \mathbf{u}^n)(\phi^{n+1} - \phi_{obs}^{n+1}) \\ &\quad + \mathcal{M}^T(\phi^n, \mathbf{u}^n)\mathcal{L}^T(\phi^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1})(\phi^{n+2} - \phi_{obs}^{n+2}) \\ &\quad + \mathcal{M}^T(\phi^n, \mathbf{u}^n)\mathcal{L}^T(\phi^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1})\mathcal{L}^T(\phi^{n+2}, \mathbf{u}^{n+2})(\phi^{n+3} - \phi_{obs}^{n+3}) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \mathcal{M}^T(\phi^n, \mathbf{u}^n)\mathcal{L}^T(\phi^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1})\mathcal{L}^T\dots\mathcal{L}^T(\phi^{n_{max}-1}, \mathbf{u}^{n_{max}-1})(\phi^{n_{max}} - \phi_{obs}^{n_{max}})\end{aligned}\tag{6.14}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}^n} = \sum_{l=n+1}^{n_{max}} \mathcal{M}^T(\phi^n, \mathbf{u}^n) \left(\prod_{j=n+1}^{l-1} \mathcal{L}^T(\phi^j, \mathbf{u}^j) \right) (\phi^l - \phi_{obs}^l),\tag{6.15}$$

qui exprime le gradient de la fonction coût par rapport aux paramètres ajustables grâce aux opérateurs adjoints \mathcal{L}^T et \mathcal{M}^T des opérateurs linéaires tangents \mathcal{L} et \mathcal{M} .

Le calcul du gradient de la fonction coût est ainsi possible grâce à des intégrations successives des deux modèles adjoints ADL et ADM associés aux opérateurs \mathcal{L}^T et \mathcal{M}^T :

$$\text{ADL: } \phi_{ad}^{n-1} = \mathcal{L}^T(\phi^{n-1}, \mathbf{u}^{n-1})\phi_{ad}^n,\tag{6.16}$$

$$\text{ADM: } \mathbf{u}_{ad}^{n-1} = \mathcal{M}^T(\phi^{n-1}, \mathbf{u}^{n-1})\phi_{ad}^n,\tag{6.17}$$

où ϕ_{ad}^n représente le vecteur des variables adjointes associé au vecteur ϕ au pas de temps n et \mathbf{u}_{ad} est la variable adjointe associée à \mathbf{u} . Pratiquement, le calcul du gradient de la fonction coût se fait en initialisant les variables adjointes $\phi_{ad}^{n_{max}}$ aux valeurs de $(\phi^{n_{max}} - \phi_{obs}^{n_{max}})$. L'intégration de ADM durant un pas de temps, de n_{max} à $n_{max} - 1$ permet d'obtenir la valeur de $\partial J / \partial \mathbf{u}^{n_{max}-1}$. Les variables adjointes ϕ_{ad} sont ensuite calculées au pas de temps $n_{max} - 1$ par l'intégration de ADL pendant un pas de temps et par l'ajout de $(\phi^{n_{max}-1} - \phi_{obs}^{n_{max}-1})$ aux valeurs obtenues. Une nouvelle intégration de ADM fournira $\partial J / \partial \mathbf{u}^{n_{max}-2}$. Ces opérations sont ensuite répétées jusqu'au premier pas de temps. La figure 6.6 résume cette procédure.

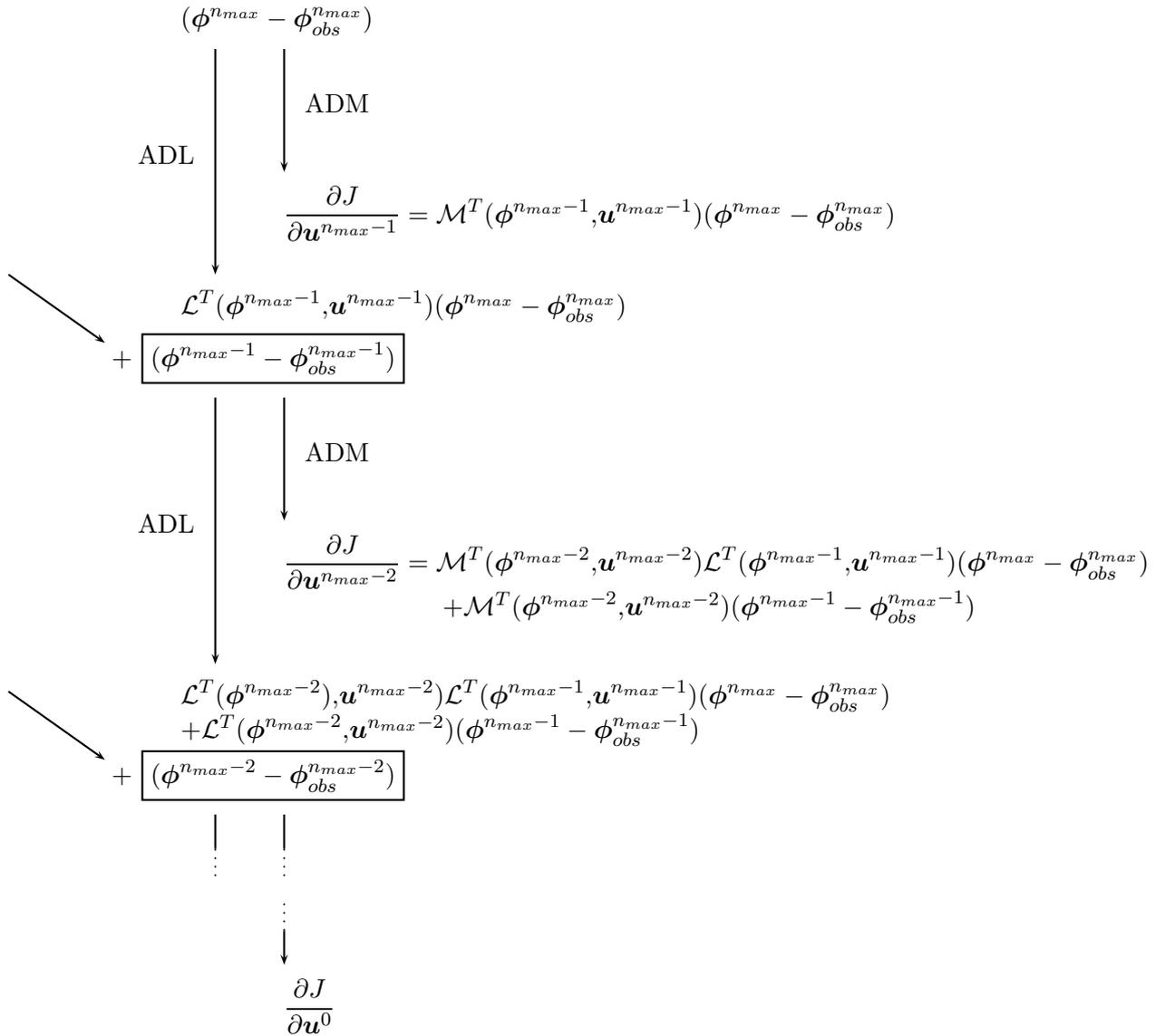


FIG. 6.6 – Principe de calcul du gradient de la fonction coût par rapport aux différents paramètres de contrôle grâce aux intégrations successives des modèles adjoints ADL et ADM.

Dans le cas où l'on souhaite utiliser une fonction coût plus évoluée que celle de (6.6), afin par exemple de donner des poids différents aux différentes composantes du désaccord prédit par

le modèle, les variables adjointes devront être initialisées et complétées à chaque pas de temps par la fonction adéquate. Ainsi, pour une fonction coût

$$J = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n_{max}} (\phi^n - \phi_{obs}^n)^T \mathcal{C}_1 (\phi^n - \phi_{obs}^n), \quad (6.18)$$

la matrice \mathcal{C}_1 étant symétrique, la variable adjointe est initialisée par

$$\phi_{ad}^{n_{max}} = \mathcal{C}_1^T (\phi^{n_{max}} - \phi_{obs}^{n_{max}}). \quad (6.19)$$

Il est également possible d'imposer des conditions sur \mathbf{u} par l'intermédiaire de la fonction coût. Dans ce cas, il est nécessaire de rajouter cette contribution au gradient obtenu par l'intégration des modèles adjoints. Si la fonction coût est de la forme

$$J = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n_{max}} (\phi^n - \phi_{obs}^n)^T \mathcal{C}_1 (\phi^n - \phi_{obs}^n) + \frac{\lambda}{2} \sum_{n=0}^{n_{max}-1} (\mathbf{u})^T \mathcal{C}_2 (\mathbf{u}), \quad (6.20)$$

les composantes finales du gradient de la fonction coût s'obtiennent par :

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}^n} = \left(\frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}^n} \right)_{adjoints} + \lambda \mathcal{C}_2 \mathbf{u}^n, \quad (6.21)$$

$(\partial J / \partial \mathbf{u}^n)_{adjoints}$ étant la composante du gradient due au désaccord entre les valeurs de ϕ prédites et observées (équation (6.15)), $\lambda \mathcal{C}_2 \mathbf{u}^n$, la composante due au non-respect des conditions imposées⁷ par la matrice \mathcal{C}_2 sur le modèle \mathbf{u} .

6.2.3 Expression des modèles adjoints dans un cas unidimensionnel

Afin de tester facilement le comportement de la méthode d'assimilation variationnelle de données décrite précédemment, nous l'appliquons à un problème parabolique unidimensionnel, présentant des similarités avec les modifications du champ magnétique radial à la surface du noyau décrite par l'équation (6.1) :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -u \frac{\partial \phi}{\partial x} + Pe \nabla^2 \phi, \quad (6.22)$$

Pe étant le nombre sans dimension de Peclet qui caractérise le rapport entre les modifications de ϕ dues à de diffusion et celles dues à l'advection par le champ de vitesse u . Le milieu est considéré périodique ($x \in [0; 2\pi[$). Cette équation peut représenter par exemple la concentration ϕ d'un traceur dans un tube à essai torique capable de tourner autour de son axe de symétrie. Cette concentration évolue sous l'action des mouvements du tube et par diffusion. Le but est de retrouver l'histoire des mouvements du tube à essai à partir de mesures de la concentration dans le tube.

⁷ \mathcal{C}_2 peut permettre, par exemple, d'imposer des conditions sur la forme du spectre de \mathbf{u} ou encore d'imposer la condition de mouvement tangentiellement géostrophique.

L'approximation de la dérivée temporelle de (6.22) est faite à l'aide d'une différence finie du premier ordre :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t}, \quad (6.23)$$

où Δt est le pas de temps utilisé et ϕ^n la valeur de la concentration au pas de temps n . Le temps physique t et l'indice n du pas de temps sont reliés par $t(n) = n\Delta t$.

Par analogie avec les reconstructions des mouvements du fluide à la surface du noyau, nous utilisons des décompositions spectrales des différentes variables du problème. Nous utilisons pour cela des séries de Fourier, du fait de la géométrie choisie. La concentration $\phi^n(x)$ peut ainsi s'écrire :

$$\phi^n(x) = \phi^{0,n} + \sum_{k=1}^{k_{max}} \left(\phi_c^{k,n} \cos kx + \phi_s^{k,n} \sin kx \right), \quad (6.24)$$

k_{max} étant le degré de troncature, c'est-à-dire le mode ayant la plus petite longueur d'onde utilisée dans cette décomposition, $\phi_c^{k,n}$ et $\phi_s^{k,n}$ les coefficients du mode k de la décomposition spectrale de ϕ au pas de temps n . De même :

$$u^n(x) = u^{0,n} + \sum_{k=1}^{k_{max}} \left(u_c^{k,n} \cos kx + u_s^{k,n} \sin kx \right). \quad (6.25)$$

Le terme d'advection de (6.22) est un terme non-linéaire impliquant, dans le cas général, des couplages entre les différents modes⁸. Cela n'est pas le cas si la vitesse u est constante spatialement. Nous étudions ainsi successivement le cas linéaire, plus simple, où le tube à essai est indéformable (la vitesse est uniforme spatialement), puis le cas non-linéaire, plus général, dans lequel le tube à essai est déformable (la vitesse du tube à essai n'est alors pas uniforme).

Modèles adjoints dans le cas linéaire

Dans le cas où la vitesse u du tube est la même partout ($u^n = u_0^n$), la combinaison des équations (6.22), (6.23) et (6.24) permet d'aboutir à k_{max} systèmes discrets, indépendants les uns des autres :

$$\begin{cases} \frac{\phi_c^{k,n+1} - \phi_c^{k,n}}{\Delta t} = -k u^n \phi_s^{k,n} - Pe k^2 \phi_c^{k,n+1} \\ \frac{\phi_s^{k,n+1} - \phi_s^{k,n}}{\Delta t} = k u^n \phi_c^{k,n} - Pe k^2 \phi_s^{k,n+1} \end{cases}, \quad \forall k \in \{1, k_{max}\}, \quad (6.26)$$

le laplacien du terme de diffusion étant calculé au pas de temps $n+1$. Quelques réarrangements permettent de réécrire le système (6.26) sous la forme

$$\begin{cases} \phi_c^{k,n+1} = \frac{1}{1 + Pe k^2 \Delta t} \left(\phi_c^{k,n} - u^n k \Delta t \phi_s^{k,n} \right) \\ \phi_s^{k,n+1} = \frac{1}{1 + Pe k^2 \Delta t} \left(\phi_s^{k,n} + u^n k \Delta t \phi_c^{k,n} \right) \end{cases}. \quad (6.27)$$

8. Dans ce qui suit, les termes non-linéaire et linéaire sont employés en référence au terme d'advection du problème direct qui fait intervenir, ou non, des couplages entre les différents modes de Fourier de u et ϕ .

Dans ce cas unidimensionnel linéaire, il est facile d'exprimer analytiquement les opérateurs linéaires tangents \mathcal{L} et \mathcal{M} du système dynamique discret (6.27) :

$$\begin{bmatrix} \delta\phi_c^{k,n+1} \\ \delta\phi_s^{k,n+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{1+Pe k^2\Delta t} \begin{bmatrix} 1 & -u^n k\Delta t \\ u^n k\Delta t & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}} \begin{bmatrix} \delta\phi_c^{k,n} \\ \delta\phi_s^{k,n} \end{bmatrix} + \underbrace{\frac{1}{1+Pe k^2\Delta t} \begin{bmatrix} -k\Delta t\phi_s^{k,n} \\ k\Delta t\phi_c^{k,n} \end{bmatrix}}_{\mathcal{M}} [\delta u^n]. \quad (6.28)$$

Les opérateurs adjoints associés \mathcal{L}^T et \mathcal{M}^T intervenant dans ADL et ADM peuvent ainsi être eux aussi facilement explicités :

$$\text{ADL: } \begin{bmatrix} \phi_c^{k,n-1} \\ \phi_s^{k,n-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{1+Pe k^2\Delta t} \begin{bmatrix} 1 & u^{n-1}k\Delta t \\ -u^{n-1}k\Delta t & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}^T} \begin{bmatrix} \phi_c^{k,n} \\ \phi_s^{k,n} \end{bmatrix}, \quad (6.29)$$

$$\text{ADM: } [u_{ad}^{n-1}] = \underbrace{\frac{1}{1+Pe k^2\Delta t} \begin{bmatrix} -k\Delta t\phi_s^{k,n-1} & k\Delta t\phi_c^{k,n-1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{M}^T} \begin{bmatrix} \phi_c^{k,n} \\ \phi_s^{k,n} \end{bmatrix}. \quad (6.30)$$

Modèles adjoints dans le cas non-linéaire

Dans le cas général où la vitesse n'est pas uniforme le long de tout le tube à essai, il existe un terme non-linéaire NL couplant les différents modes dans le système dynamique direct discret :

$$\begin{cases} \phi_c^{k,n+1} = \frac{1}{1+Pe k^2\Delta t} \left(\phi_c^{k,n} + k\Delta t (NL)_c^{k,n} \right) \\ \phi_s^{k,n+1} = \frac{1}{1+Pe k^2\Delta t} \left(\phi_s^{k,n} + k\Delta t (NL)_s^{k,n} \right) \end{cases}. \quad (6.31)$$

Les composantes $(NL)_c^{k,n}$ et $(NL)_s^{k,n}$ du terme non linéaire terme sont définies par

$$(NL)_c^{k,n} = \left\{ u^n \frac{\partial \phi^n}{\partial x} \right\}_c^k \quad \text{et} \quad (NL)_s^{k,n} = \left\{ u^n \frac{\partial \phi^n}{\partial x} \right\}_s^k, \quad (6.32)$$

le terme non-linéaire s'exprimant lui-même

$$(NL)^n = \left(u^{0,n} + \sum_{k=1}^{k_{max}} \left(u_c^{k,n} \cos kx + u_s^{k,n} \sin kx \right) \right) \left(\sum_{k=1}^{k_{max}} \left(\phi_s^{k,n} \cos kx - \phi_c^{k,n} \sin kx \right) \right). \quad (6.33)$$

Du fait des nombreux modes susceptibles d'intervenir dans le calcul d'une composante du terme non-linéaire, le calcul de celui-ci se fait dans l'espace physique. Ceci implique de calculer le champ de vitesse u et la dérivée spatiale de la concentration $\partial\phi/\partial x$ dans l'espace physique au moyen d'une transformée de Fourier inverse, de multiplier entre eux les deux champs ainsi obtenus puis de calculer la décomposition de ce produit dans l'espace spectral grâce à une transformée de Fourier. Du fait de cette procédure, il n'est pas possible d'exprimer analytiquement

les opérateurs linéaires tangents de ce modèle dynamique, ni les opérateurs adjoints qui en découlent. Ceux-ci peuvent en revanche être calculés grâce à un codage *ligne à ligne* à partir des programmes implémentant les modèles linéaires tangents [pour plus de détails, voir Huang et Yang, 1996; Giering et Kaminski, 1998]. Cette procédure rend possible la mise en place de méthode d'assimilation variationnelle de données pour des problèmes physiques modélisés par des modèles dynamiques complexes.

6.2.4 Comportement de la méthode

Les principales caractéristiques de la méthode d'assimilation variationnelle de données sont explorées grâce à sa mise en place pour le cas unidimensionnel présenté ci-dessus (§6.2.3). La plupart des essais sont effectués avec l'implémentation du cas linéaire, mise en place en premier. L'implémentation du cas non-linéaire est principalement utilisée afin de vérifier la validité de l'algorithme avant son application au calcul des mouvements de la surface du noyau.

Implémentation pratique

L'algorithme complet mis en place pour la résolution du cas linéaire est détaillé dans l'annexe de ce chapitre (§6.4). Un seul mode k est utilisé puisque dans ce cas chaque mode est indépendant des autres. La méthode d'optimisation détaillée dans l'annexe est une méthode de gradient conjugué non-linéaire [*e.g.* Shewchuk, 1994].

Afin de tester cet algorithme, des *observations* synthétiques sont générées par le système dynamique direct (6.27) avec des vitesses imposées. La figure 6.7 présente les *observations* ainsi générées avec une vitesse u constante et une vitesse u oscillante au cours du temps (les autres paramètres utilisés sont détaillés dans la légende de la figure).

En partant d'une série temporelle de vitesse initiale aléatoire, la méthode converge bien vers la solution exacte (figure 6.8) pour les deux séries *observées* présentées dans la figure 6.7. Pour ces premiers tests une méthode d'optimisation de plus grande pente⁹, plus simple que la méthode de gradient conjugué détaillée dans l'algorithme, est utilisée.

La figure 6.9 montre l'évolution de la fonction coût en fonction du nombre d'itérations d'optimisation effectuées. La fonction coût J décroît dans un premier temps puis se stabilise à un niveau seuil du fait des erreurs d'arrondis numériques. La figure 6.8a confirme qu'après 500000 itérations, le seuil de la fonction coût étant atteint, la série temporelle de vitesse est retrouvée de manière très satisfaisante.

Dans le cas unidimensionnel non-linéaire, la structure générale de l'algorithme reste la même que dans le cas linéaire, seules les procédures de calcul du modèle dynamique direct et des modèles adjoints sont modifiées (voir l'annexe de ce chapitre, §6.4, pour les détails). Dans ce cas,

9. Après chaque intégration de l'ensemble modèle direct-modèles adjoints, u est modifié dans la direction du gradient de la fonction coût : $u = u - \gamma \nabla J$ (nous utilisons $\gamma = 2 \cdot 10^{-1}$, déterminé empiriquement comme étant la plus grande valeur possible pour que la méthode converge).

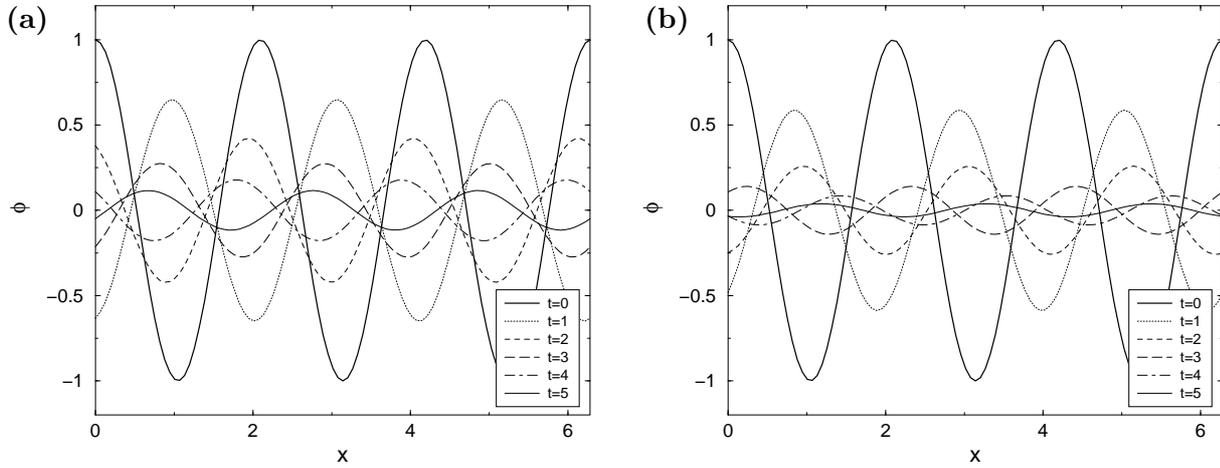


FIG. 6.7 – Évolution temporelle de ϕ le long du tube à essai torique (“observations”) au cours de 50 pas de temps dans les cas où (a) $u = 1$ et (b) $u = \cos(10^{-1}t)$. Le modèle dynamique direct est intégré à partir de la condition initiale $\phi(0) = \cos 3x$ avec un pas de temps $\Delta t = 10^{-1}$ et un nombre de Peclet $Pe = 10^{-1}$.

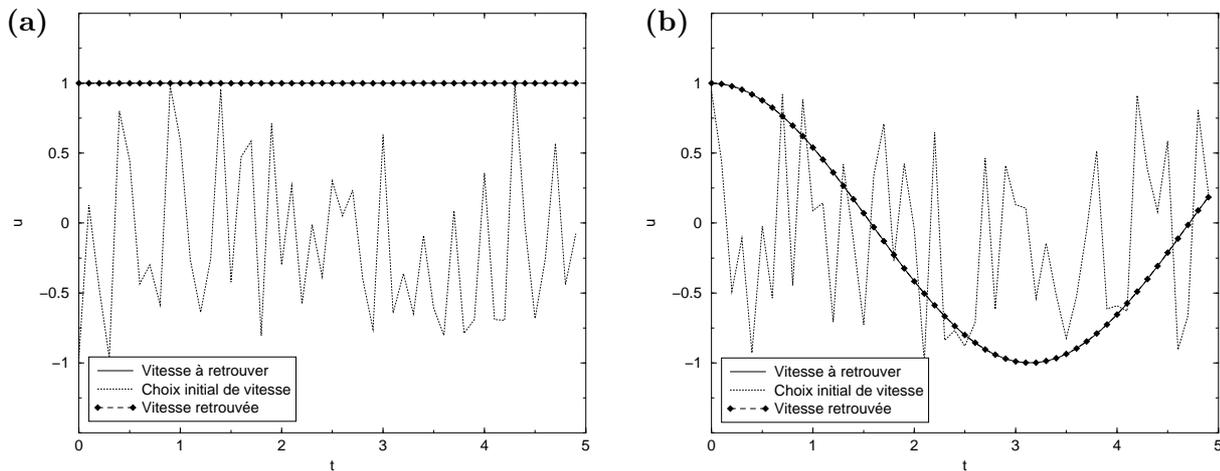


FIG. 6.8 – Convergence de la méthode d’assimilation variationnelle de données dans le cas unidimensionnel linéaire : séries temporelles (a) constante et (b) oscillante correctement retrouvées après 500000 itérations d’optimisation avec une méthode simple de plus grande pente ($\Delta t = 10^{-1}$, $Pe = 10^{-1}$). Les “observations” utilisées sont celles présentées dans la figure 6.7.

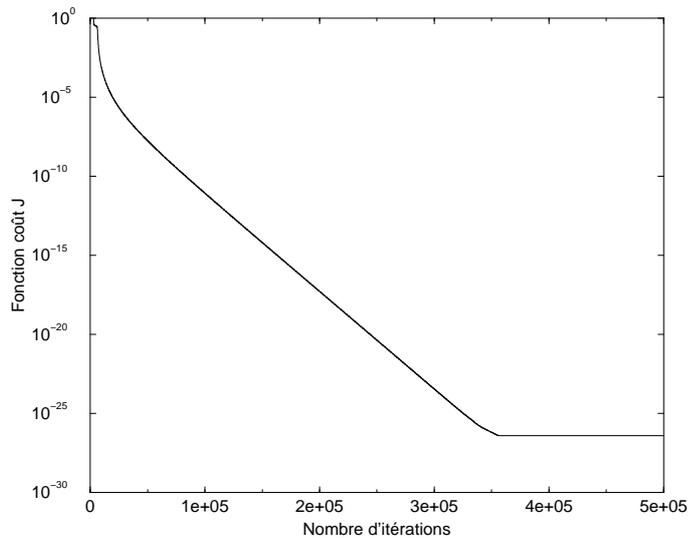


FIG. 6.9 – Évolution de la fonction coût J en fonction du nombre d'itérations d'optimisation (mêmes paramètres que ceux de la figure 6.8a).

il peut exister des points pour lesquels la vitesse ne peut pas être retrouvée : les points de la grille spatiale pour lesquels $\nabla\phi = \mathbf{0}$. En effet, pour un tel point de la grille, le calcul du gradient de la fonction coût par rapport à la vitesse en ce point est nul ($ad_u_x^n = \partial J / \partial u_x^n = (\nabla\phi)_x^n ad_N L_x^n = 0$, voir §6.4). La vitesse en ce point pour le pas de temps concerné ne sera donc jamais modifiée au cours des différentes itérations d'optimisation¹⁰. En dehors de ces points particuliers, la méthode d'assimilation variationnelle de donnée converge bien vers la solution (figure 6.10).

Choix initial des paramètres ajustables

Le choix initial *a priori* des paramètres ajustables influence de plusieurs manières la convergence de la méthode. Du fait de la recherche itérative du minimum de la fonction coût, la solution est retrouvée correctement à condition de ne pas partir de valeurs trop éloignées de cette solution. Dans le cas contraire la méthode peut converger vers un minimum local différent de la solution réelle. Toutefois, la vitesse de convergence de la méthode d'optimisation ne semble pas liée à l'écart entre le choix initial de vitesse et la solution réelle.

Par ailleurs, au cours des itérations d'optimisation, les paramètres ajustables peuvent prendre des valeurs pour lesquelles le problème numérique direct n'est pas stable, en raison du traitement explicite des termes non-linéaires et de la condition de stabilité qui en découle¹¹. Dans ce cas la méthode ne converge évidemment pas vers la solution réelle. Il existe également certains choix

10. Cette indétermination ponctuelle des mouvements dans ce cas unidimensionnel est l'équivalent de l'indétermination concernant les mouvements parallèles aux iso- ζ des zones ambiguës dans les reconstruction de mouvements à la surface du noyau basées sur les hypothèses du flux gelé et des mouvements tangentiellement géostrophiques (§2.1.2).

11. Dans le cas unidimensionnel linéaire cela se produit par exemple quand on part d'un choix initial de vitesse constant $u \geq 1.2$, les autres paramètres étant similaires à ceux de la figure 6.8a.

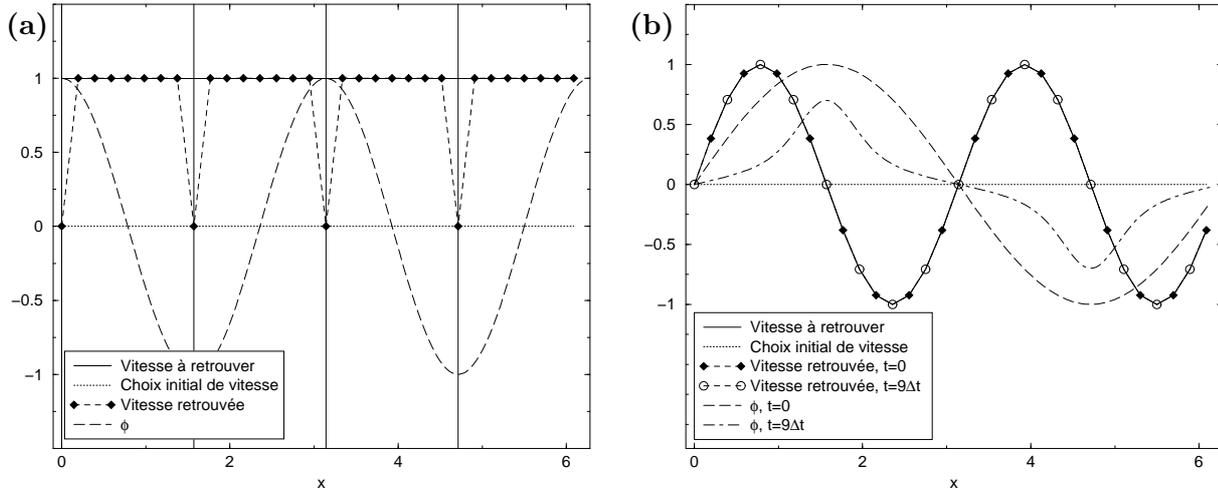


FIG. 6.10 – Convergence de la méthode d’assimilation variationnelle de données dans le cas unidimensionnel non-linéaire. (a) Cas d’une vitesse constante spatialement, au premier pas de temps de la série temporelle. Les points où la vitesse n’est pas correctement retrouvée sont les point où le gradient de ϕ est nul (lignes verticales). (b) Cas d’une vitesse oscillante spatialement pour deux pas de temps de la série temporelle. Dans les deux cas, les “observations” sont générées avec une vitesse constante temporellement, durant 10 pas de temps ($\Delta t = 10^{-1}$, $Pe = 10^{-1}$). L’optimisation est faite grâce à la méthode de plus grande pente pendant 500000 itérations

initiaux de vitesse qui ne permettent pas la convergence vers la solution alors qu’un choix initial très légèrement différent le permet.

Lors de l’utilisation d’une telle méthode à un cas réel dont la solution est inconnue, il semble donc important de tester plusieurs choix initiaux des paramètres ajustables et de comparer les minima de la fonction coût atteints dans les différents cas. Ceci en raison du caractère non-linéaire du problème étudié.

Influence de la méthode d’optimisation employée

La vitesse de convergence de la méthode peut être grandement améliorée en utilisant une méthode d’optimisation plus efficace que la méthode de la plus grande pente, par exemple une méthode de gradient conjugué non-linéaire [e.g. Press et al., 1986; Shewchuk, 1994]. À partir du gradient de la fonction coût, cette méthode permet de déterminer la direction dans laquelle modifier les paramètres ajustables, cette direction étant indépendante des directions utilisées lors des itérations d’optimisation précédentes. Une minimisation linéaire dans cette direction permet de déterminer les nouvelles valeurs des paramètres ajustables à partir desquelles une nouvelle direction, indépendante de la précédente, est déterminée. Cette procédure est répétée jusqu’à ce que la norme euclidienne du gradient de la fonction coût ait suffisamment diminué¹². Les détails techniques de cette méthode d’optimisation sont présentés dans l’algorithme du cas

12. Les itérations d’optimisation ont lieu jusqu’à ce que le critère de convergence ε_{gc} , fixé *a priori*, soit atteint.

unidimensionnel linéaire (§6.4).

La figure 6.11 illustre l'amélioration apportée par la méthode du gradient conjugué par rapport à la méthode de plus grande pente pour des séries temporelles de différentes longueurs. Le nombre d'itérations dans le cas du gradient conjugué est la somme du nombre d'itérations de la boucle d'optimisation générale, permettant de déterminer les directions de minimisation, et des itérations d'optimisation linéaires dans la direction déterminée (voir §6.4). Dans tous les cas, la convergence est meilleure et plus rapide avec la méthode du gradient conjugué.

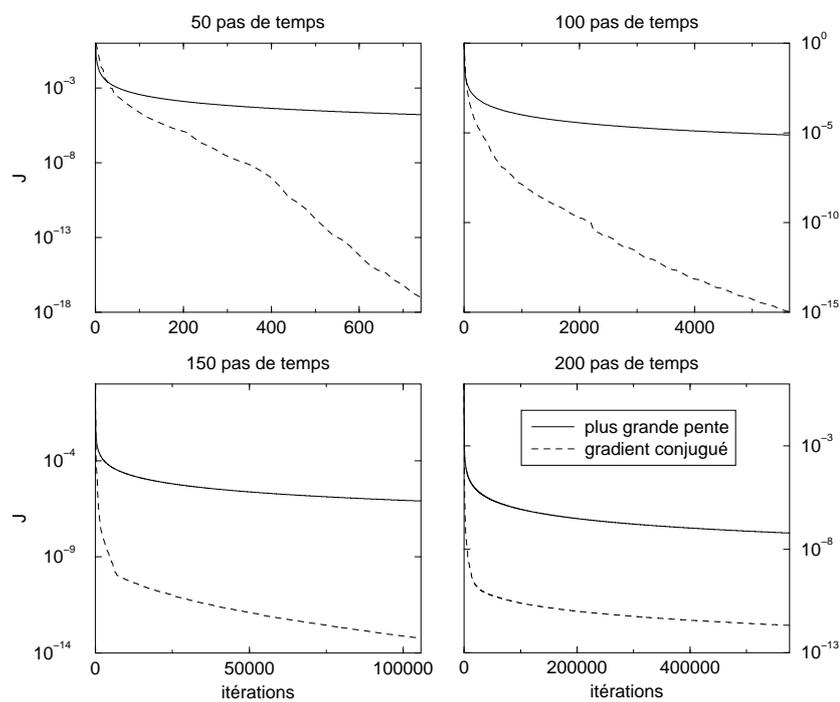


FIG. 6.11 – Valeur de la fonction coût en fonction du nombre d'itérations d'optimisation avec les méthodes de la plus grande pente et du gradient conjugué pour des séries temporelles de 50, 100, 150 et 200 pas de temps (vitesse à retrouver $u = 1$ pour tous les pas de temps, choix initial $u = 0.9$ pour tous les pas de temps, $\Delta t = 10^{-1}$, $Pe = 10^{-1}$). Le critère d'arrêt de l'optimisation par gradient conjugué ε_{gc} est fixé à 10^{-20} .

Assez logiquement, on remarque également que le nombre d'itérations nécessaires pour satisfaire le critère d'arrêt augmente en fonction du nombre de pas de temps de la série temporelle à reconstituer. Le critère d'arrêt peut également être défini en imposant la poursuite des itérations tant que la fonction coût n'est pas inférieure à une valeur seuil au lieu d'attendre comme nous le faisons ici que la norme du gradient de la fonction coût ait suffisamment diminué comme suggéré par Shewchuk [1994]. Dans tous les cas, la valeur optimale du critère de convergence ε_{gc} change avec les différents paramètres utilisés (longueur de la série temporelle, choix de vitesse initial) et doit être déterminé empiriquement par des essais avec différentes valeurs.

Influence de la forme de la fonction coût sur la vitesse de convergence

En étudiant plus en détail la manière dont le choix initial de vitesse est modifié, on observe que les premiers pas de temps corrigés sont ceux du début de la série temporelle (proches de $t = 0$). Au fil des itérations d'optimisation, le nombre de pas de temps correctement corrigés augmente jusqu'à ce que toute la série temporelle soit retrouvée (figure 6.12). Les derniers pas de temps de la série sont de ce fait retrouvés avec une précision inférieure à celle des premiers pas de temps, même lorsque le seuil de la fonction coût a été atteint. Cette propagation de l'ajustement dans la série temporelle est compréhensible. En effet, un mauvais choix de la vitesse au premier pas de temps u^0 perturbe les paramètres de contrôle du pas de temps suivant ϕ^1 , qui va lui-même perturber les paramètres de contrôle du pas de temps ultérieur ϕ^2 , et ainsi de suite. Ainsi, ce mauvais choix du paramètre ajustable du premier pas de temps perturbe toute la série temporelle des paramètres de contrôle et intervient de ce fait dans toutes les contributions à la fonction coût. À l'inverse, un mauvais choix du paramètre ajustable de l'avant-dernier pas de temps $u^{n_{max}-1}$ ne perturbe que les paramètres de contrôle $\phi^{n_{max}}$ du dernier pas de temps. Il est donc logique que $|\partial J / \partial u^0| > |\partial J / \partial u^{n_{max}-1}|$ au début des itérations d'optimisation et que u^0 soit modifié prioritairement. La figure 6.13 montre les valeurs des différentes composantes du gradient de la fonction coût avant la première itération d'optimisation.

Afin d'améliorer la convergence de la méthode, en particulier pour les derniers pas de temps de la série temporelle, il est possible de modifier la forme de la fonction coût. Nous définissons ainsi une nouvelle fonction coût :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n_{max}} (\phi^n - \phi_{obs}^n)^T n (\phi^n - \phi_{obs}^n). \quad (6.34)$$

Cette fonction est appelée fonction coût 2 dans les figures 6.15 et 6.14, qui montrent que la vitesse de convergence et la convergence elle-même sont améliorées. Une recherche systématique de la meilleure fonction coût possible n'a pas été menée. Signalons tout de même que l'utilisation d'une puissance de n plus élevée dans la formule (6.34) améliore la convergence pour les derniers pas de temps mais dégrade celle des premiers pas de temps de la série¹³. La convergence peut évidemment aussi être améliorée en diminuant le critère d'arrêt ε_{gc} . Néanmoins les tous derniers points de la série temporelle sont toujours retrouvés avec une précision inférieure à celle des points précédents.

Cette modification de la fonction coût permet une réduction non négligeable du nombre d'itérations d'optimisation. Pour une série temporelle de 200 pas de temps, le nombre d'itérations est ainsi réduit d'un ordre de grandeur (figure 6.15), tout comme le temps de calcul. Cette amélioration n'est évidemment pas négligeable.

13. Lors de l'emploi d'une telle fonction coût, il convient d'adapter la taille des pas d'optimisation déterminés empiriquement pour la fonction coût initiale, en les divisant par n_{max} , n_{max}^2 ... suivant la forme de la fonction coût choisie. Dans le cas contraire, la convergence peut ne pas avoir lieu, les pas d'optimisation trop grands ayant conduit à des paramètres ajustables pour lesquels le problème direct est instable.

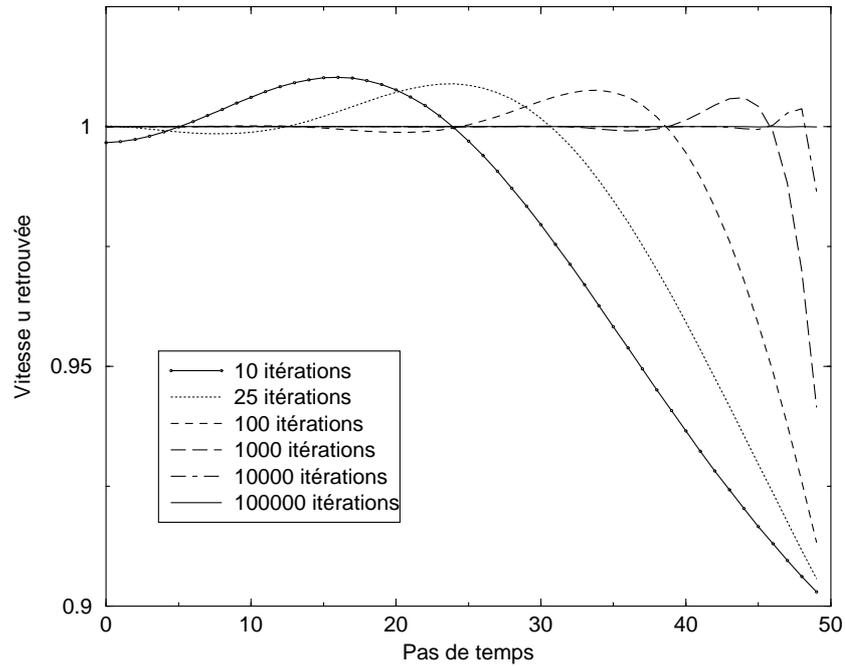


FIG. 6.12 – Évolution de la série temporelle des paramètres ajustables u retrouvés en fonction du nombre d'itérations d'optimisation (vitesse à retrouver $u = 1$ pour les 50 pas de temps, choix initial de vitesse $u = 0.9$ pour tous les pas de temps, méthode d'optimisation de la plus grande pente).

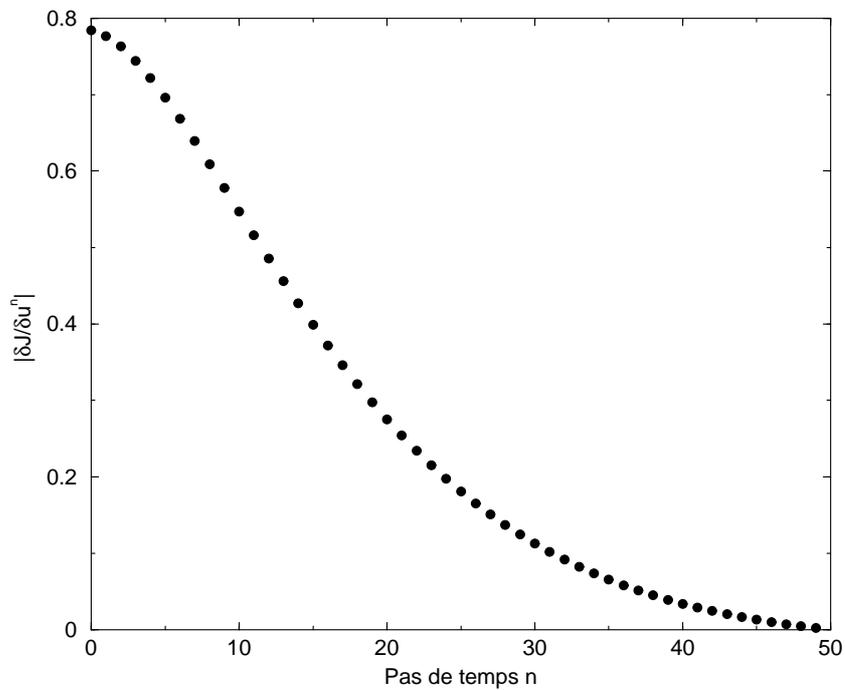


FIG. 6.13 – Norme des différentes composantes du gradient de la fonction coût J avant la première itération d'optimisation (paramètres identiques à ceux de la figure 6.12).

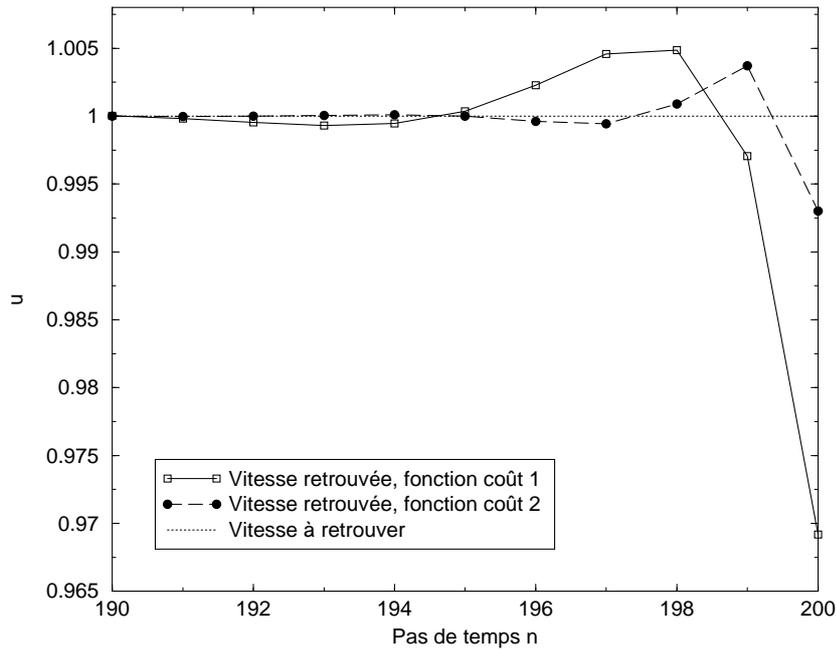


FIG. 6.14 – Amélioration de la convergence pour les derniers pas de temps de la série temporelle par l'emploi d'une fonction coût modifiée. Fonction coût 1: $J = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n_{max}} (\phi^n - \phi_{obs}^n)^T (\phi^n - \phi_{obs}^n)$, fonction coût 2: $J = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n_{max}} (\phi^n - \phi_{obs}^n)^T n (\phi^n - \phi_{obs}^n)$ (vitesse à retrouver $u = 1$ pour les 200 pas de temps de la série, choix initial de vitesse $u = 0.9$ pour tous les pas de temps, $\varepsilon_{gc} = 10^{-20}$, $\Delta t = 10^{-1}$, $Pe = 10^{-1}$).

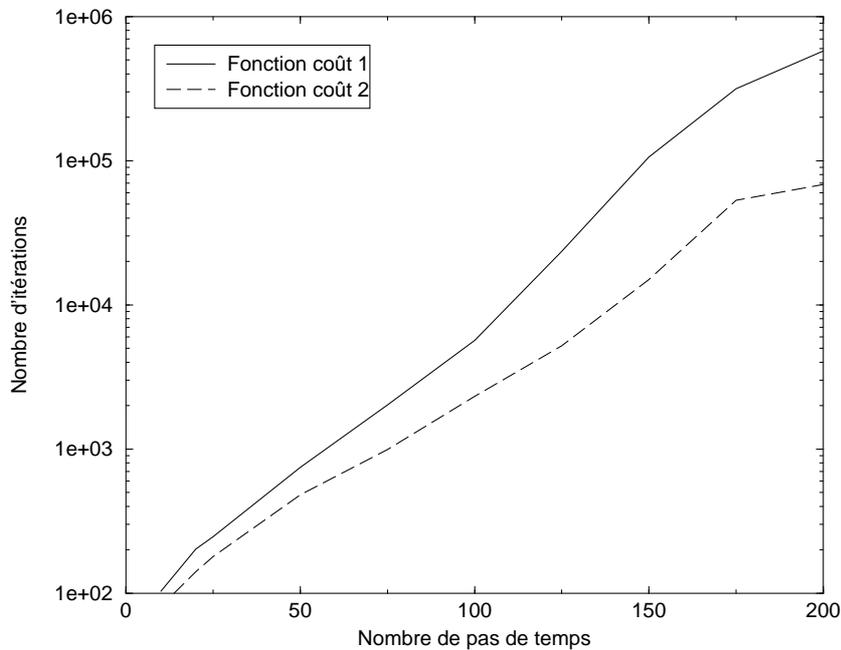


FIG. 6.15 – Amélioration de la vitesse de convergence par l'emploi d'une fonction coût modifiée : nombre d'itérations d'optimisation pour satisfaire le critère de convergence $\varepsilon_{gc} = 10^{-20}$ avec la méthode du gradient conjugué en fonction de la longueur de la série temporelle à reconstituer (vitesse à retrouver $u = 1$ pour tous les pas de temps, choix initial de vitesse $u = 0.9$ pour tous les pas de temps, $\Delta t = 10^{-1}$, $Pe = 10^{-1}$).

Évolution de la solution en fonction du critère de convergence

Pour finir, nous étudions l'évolution de la solution en fonction de la valeur du critère de convergence ε_{gc} . En effet, nous avons pour l'instant utilisé une valeur très faible de ce paramètre, ce qui impose de nombreuses itérations d'optimisation. Ceci est possible avec notre problème unidimensionnel, mais sera probablement plus délicat dans le cas bidimensionnel, chaque itération demandant alors un temps de calcul beaucoup plus important.

Ce critère de convergence ε_{gc} , qui définit quand arrêter les itérations d'optimisation, peut être défini de différentes manières. Nous utilisons ici la définition donnée dans l'algorithme du problème unidimensionnel linéaire (§6.4) : l'optimisation se poursuit tant que $|\nabla J|^2/|\nabla J_0|^2 > \varepsilon_{gc}$, $|\nabla J_0|$ étant la norme quadratique initiale du gradient de la fonction coût. Il est également possible d'utiliser le rapport J/J_0 , ou même J lui-même. Ce choix n'influence pas la solution finale, à condition de choisir une valeur du seuil ε_{gc} adaptée.

La figure 6.16 montre l'allure de la solution pour différentes valeurs du critère de convergence ε_{gc} . Les pas de temps les plus récents de la série temporelle sont toujours les plus longs à converger vers la solution exacte, bien que la fonction coût 2 ait été utilisée ici. Pour une valeur donnée du critère de convergence, la méthode du gradient conjugué donne un résultat plus satisfaisant que la méthode de la plus grande pente, sauf pour de très faibles valeurs de ε_{gc} . À $\varepsilon_{gc} = 10^{-10}$ la solution fournie est tout à fait satisfaisante¹⁴. Un autre point en faveur de la méthode d'optimisation du gradient conjugué vient du nombre d'itérations nécessaires afin d'obtenir une solution satisfaisante. La figure 6.17 montre en effet qu'avec cette méthode, le nombre d'itérations n'augmente que lentement quand ε_{gc} augmente, ce qui n'est pas le cas avec la méthode de la plus grande pente. Ainsi, pour obtenir une solution satisfaisante, il faut 170 fois moins d'itérations avec la méthode du gradient conjugué qu'avec celle de la plus grande pente.

6.3 Perspectives

Les résultats de cette étude préliminaire sont très prometteurs. La méthode d'assimilation variationnelle de données étudiée semble bien adaptée au calcul des mouvements à la surface du noyau. Les séries temporelles de mouvements qui seraient ainsi obtenues à partir des observations satellitaires permettraient d'étudier, entre autres, les oscillations de torsion ou le lien entre les jerks et les mouvements avec une résolution temporelle et une cohérence meilleures que celles des études présentées dans le chapitre 5.

Les perspectives de cette méthode d'assimilation de données ne se limitent néanmoins pas au raffinement des techniques de calcul des mouvements à la surface du noyau. Cette méthode pourrait en effet donner accès à des phénomènes profonds du noyau en étant utilisée avec des modèles numériques de la géodynamo.

Des séries temporelles d'observations magnétiques pourraient également être inversées dans un contexte de dynamo cinématique, le schéma d'intégration successive des deux modèles ad-

14. Ce qui correspond à $|\nabla J|/|\nabla J_0| = 10^{-5}$.

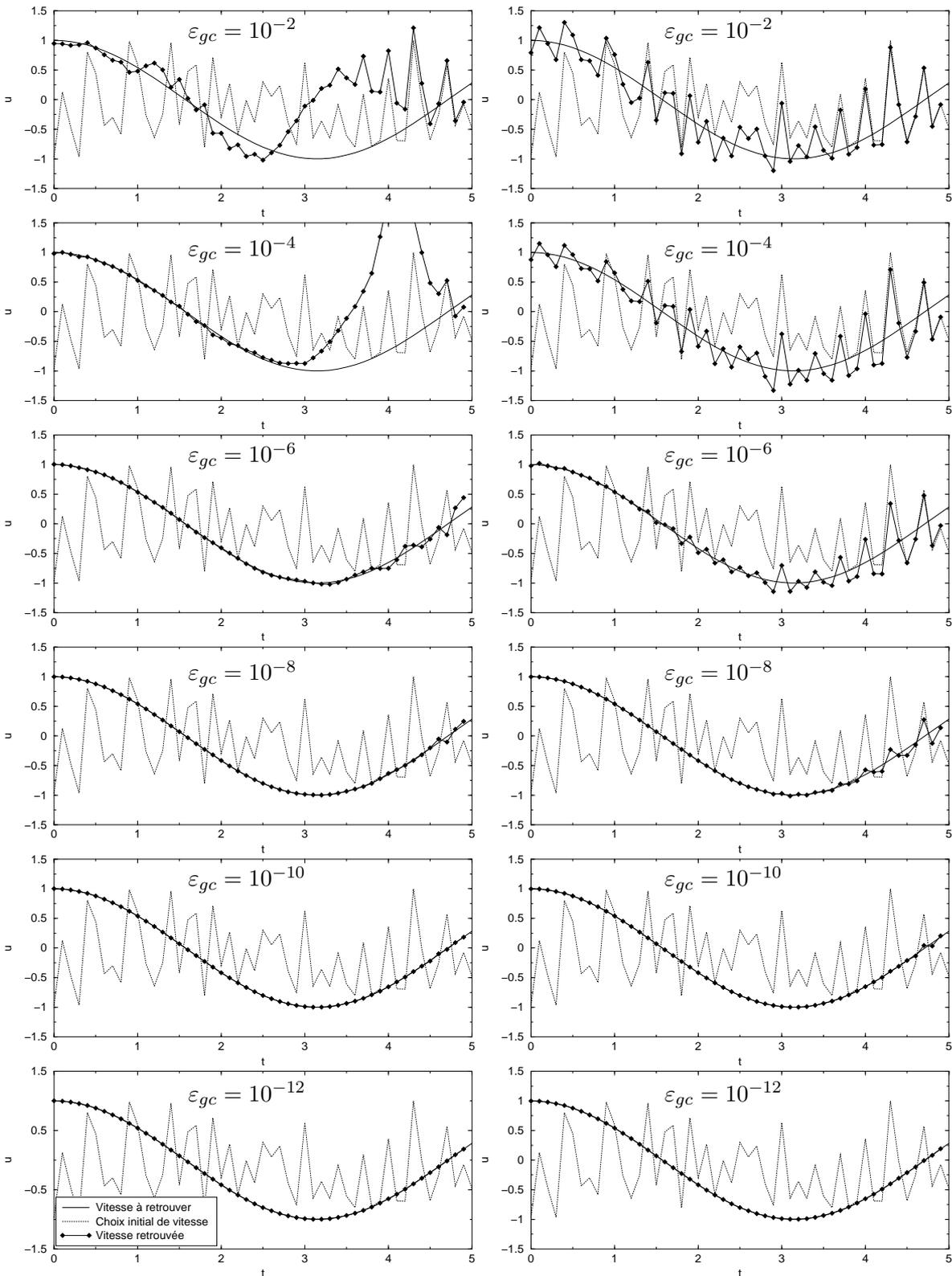


FIG. 6.16 – Évolution de la solution en fonction de la valeur du critère d'arrêt des itérations d'optimisation ε_{gc} avec la méthode du gradient conjugué (colonne de gauche) et la méthode de la plus grande pente (colonne de droite). La fonction coût 2 est utilisée (voir figure 6.14), les autres paramètres sont identiques à ceux de la figure 6.8.

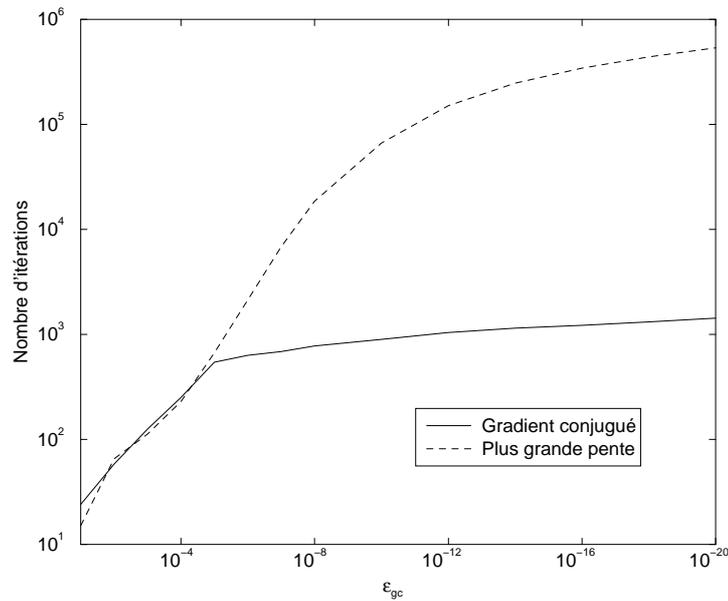


FIG. 6.17 – Nombre d'itérations nécessaires pour satisfaire le critère de convergence ε_{gc} avec les méthodes d'optimisation du gradient conjugué et de la plus grande pente (paramètres identiques à ceux de la figure 6.16). Une solution satisfaisante est obtenue après 892 itérations avec le gradient conjugué ($\varepsilon_{gc} = 10^{-10}$) et 150228 itérations avec la méthode de la plus grande pente ($\varepsilon_{gc} = 10^{-12}$).

jointes développé dans le paragraphe 6.2.2 s'appliquant directement. Cette technique devrait ainsi permettre d'inverser une dynamo cinématique. Il serait par exemple intéressant de chercher quelles sont les contraintes imposées par les observations magnétiques actuelles sur les prolongements en profondeur des mouvements à la surface du noyau.

Il est également envisageable de contraindre des modèles complets de géodynamo par des observations magnétiques ou par des mouvements à la surface du noyau grâce à une méthode d'assimilation variationnelle de données. Dans ce cas, l'évolution dynamique de ces deux quantités est contrainte par le modèle dynamique direct. De ce fait, le champ de vitesse à la surface ne devrait plus être incorporé comme un paramètre ajustable mais comme un paramètre de contrôle, au même titre que le champ magnétique. Bien que les paramètres de ces dynamos numériques soient encore éloignés des paramètres réels, cette assimilation de données permettrait peut-être de faire ressortir des processus participant à la génération et à la modification du champ magnétique terrestre actuel.

6.4 Annexes

Algorithme complet du cas unidimensionnel linéaire

- Initialisation de u :

$$u = u_{guess\ initial}$$

- Lecture des observations ϕ_{obs}

- Initialisation de ϕ_c et ϕ_s pour $t = 0$

$$\phi_c^0 = \phi_{obs}^0$$

$$\phi_s^0 = \phi_{obs}^0$$

- Première intégration du modèle direct et calcul de la fonction coût J

$$\alpha = \frac{1}{1 + Pe\ k^2 \Delta t}$$

$$J = 0$$

$$n = 0$$

while ($n < (n_{max} - 1)$)

$$\phi_c^{n+1} = \alpha(\phi_c^n - u^n k \Delta t \phi_s^n)$$

$$\phi_s^{n+1} = \alpha(\phi_s^n + u^n k \Delta t \phi_c^n)$$

$$J = J + (\phi_c^{n+1} - \phi_{c\ obs}^{n+1})^2 + (\phi_s^{n+1} - \phi_{s\ obs}^{n+1})^2$$

$$n = n + 1$$

end

- Intégration des modèles adjoints pour le calcul du gradient de la fonction coût ∇J

$$\phi_{c\ ad} = 0$$

$$\phi_{s\ ad} = 0$$

$$n = n_{max}$$

while ($n > 0$)

$$ad_phi_c = ad_phi_c + (\phi_c^n - \phi_{c\ obs}^n)$$

$$ad_phi_s = ad_phi_s + (\phi_s^n - \phi_{s\ obs}^n)$$

$$\partial J / \partial u^{n-1} = \alpha k \Delta t (-\phi_s^{n-1} ad_phi_c + \phi_c^{n-1} ad_phi_s) \} \text{ ADM}$$

$$\left. \begin{aligned} ad_phi_c &= \alpha(ad_phi_c + u^{n-1} k \Delta t ad_phi_s) \\ ad_phi_s &= \alpha(-u^{n-1} k \Delta t ad_phi_c + ad_phi_s) \end{aligned} \right\} \text{ ADL}$$

$$n = n - 1$$

end

- Minimisation de J par une méthode de gradient conjugué

$$\nu_0 = (\nabla J)^T \nabla J$$

$$\nu = \nu_0$$

$$d = -\nabla J$$

$$\delta_d = d^T d$$

$$i = 0$$

- Boucle d'optimisation générale (méthode de Polak-Ribière)

while ($(i < i_{max}) \& ((\nu/\nu_0) > \varepsilon_{gc})$)

$$\gamma = \gamma_0 \text{ (fixé a priori)}$$

$$\sigma = -\gamma$$

$$\eta = (\nabla J)^T d$$

$$j = 0$$

- Boucle d'optimisation linéaire (méthode de la sécante)

while $((j < j_{max})) \& (\gamma^2 \delta_d > \varepsilon_{lin})$

$$u = u + \gamma d$$

- Intégration du modèle direct et calcul de la fonction coût J

$$J = 0$$

$$n = 0$$

while $(n < (n_{max} - 1))$

$$\phi_c^{n+1} = \alpha(\phi_c^t - u^n k \Delta t \phi_s^t)$$

$$\phi_s^{n+1} = \alpha(\phi_s^t + u^n k \Delta t \phi_c^t)$$

$$J = J + (\phi_c^{n+1} - \phi_{c\ obs}^{n+1})^2 + (\phi_s^{n+1} - \phi_{s\ obs}^{n+1})^2$$

$$n = n + 1$$

end

- Intégration des modèles adjoints pour le calcul de ∇J_{new}

$$ad_phi_c = 0$$

$$ad_phi_s = 0$$

$$n = n_{max}$$

while $(n > 0)$

$$ad_phi_c = ad_phi_c + (\phi_c^t - \phi_{c\ obs}^t)$$

$$ad_phi_s = ad_phi_s + (\phi_s^t - \phi_{s\ obs}^t)$$

$$(\partial J / \partial u^{t-1})_{new} = \alpha k \Delta t (-\phi_s^{n-1} ad_phi_c + ad_phi_c^{n-1} \phi_s) \} \text{ ADM}$$

$$\left. \begin{aligned} ad_phi_c &= \alpha(ad_phi_c + u^{t-1} k \Delta t ad_phi_s) \\ ad_phi_s &= \alpha(-u^{t-1} k \Delta t ad_phi_c + ad_phi_s) \end{aligned} \right\} \text{ ADL}$$

$$n = n - 1$$

end

- Calcul de la taille du pas γ de l'optimisation linéaire

$$\eta_{new} = (\nabla J_{new})^T d$$

$$\gamma = \sigma \eta_{new} / (\eta_{new} - \eta) \text{ méthode de la sécante pour la minimisation linéaire}$$

$$\sigma = -\gamma$$

$$\eta = \eta_{new}$$

$$j = j + 1$$

end

- Calcul de la nouvelle direction d selon laquelle u sera modifié

$$r_{num} = (\nabla J_{new})^T (\nabla J_{new} - \nabla J) \quad (\text{Polak-Ribière})$$

$$r_{den} = (\nabla J)^T \nabla J$$

$$\beta = \max(r_{num} / r_{den}, 0) \quad (\text{pour garantir la convergence de la méthode de Polak-Ribière})$$

if $(\text{mod}(i, n_{max}) = 0) \beta = 0$ (car il n'y a que n_{max} directions indépendantes)

$$d = -\nabla J_{new} + \beta d$$

$$\delta_d = d^T d$$

$$\nabla J = \nabla J_{new}$$

$$\nu = (\nabla J)^T \nabla J$$

$$i = i + 1$$

end

Algorithmes des modèles adjoints dans le cas unidimensionnel non-linéaire

Nous présentons ici l'algorithme du calcul du modèle dynamique direct et des deux modèles adjoints dans le cas unidimensionnel non-linéaire. Les algorithmes des modèles linéaires tangents servant à coder les modèles adjoints sont aussi présentés. La structure générale du programme est la même que dans le cas linéaire. Par commodité, nous utilisons l'indice k pour signifier toutes les composantes de la variable concernée dans le domaine spectral et l'indice x pour toutes les valeurs de la variable sur la grille physique. \mathcal{F} représente la transformée de Fourier et \mathcal{F}^{-1} la transformée de Fourier inverse (calculées grâce à des algorithmes transformées de Fourier rapides).

Modèle direct

$$u_x^n = \mathcal{F}^{-1}(u_k^n)$$

$$k = 0$$

while ($k < k_{max}$)

$$(\nabla\phi)_c^{k,n} = k\phi_s^{k,n}$$

$$(\nabla\phi)_s^{k,n} = -k\phi_c^{k,n}$$

$$k = k + 1$$

end

$$(\nabla\phi)_x^n = \mathcal{F}^{-1}((\nabla\phi)_k^n)$$

$$NL_x^n = u_x^n \times (\nabla\phi)_x^n$$

$$NL_k^n = \mathcal{F}(NL_x^n)$$

$$k = 0$$

while ($k < k_{max}$)

$$\phi_c^{k,n+1} = \alpha(\phi_c^{k,n} - k\Delta t (NL)_c^{k,n})$$

$$\phi_s^{k,n+1} = \alpha(\phi_s^{k,n} - k\Delta t (NL)_s^{k,n})$$

$$k = k + 1$$

end

Modèle linéaire tangent \mathcal{L}

$$u_x^n = \mathcal{F}^{-1}(u_k^n)$$

$$k = 0$$

while ($k < k_{max}$)

$$\delta(\nabla\phi)_c^{k,n} = k\delta\phi_s^{k,n}$$

$$\delta(\nabla\phi)_s^{k,n} = -k\delta\phi_c^{k,n}$$

$$k = k + 1$$

end

$$\delta(\nabla\phi)_x^n = \mathcal{F}^{-1}(\delta(\nabla\phi)_k^n)$$

$$\delta NL_x^n = u_x^n \times \delta(\nabla\phi)_x^n$$

$$\delta NL_k^n = \mathcal{F}(\delta NL_x^n)$$

$$k = 0$$

while ($k < k_{max}$)

$$\delta\phi_c^{k,n+1} = \alpha(\delta\phi_c^{k,n} - k\Delta t (\delta NL)_c^{k,n})$$

$$\delta\phi_s^{k,n+1} = \alpha(\delta\phi_s^{k,n} - k\Delta t (\delta NL)_s^{k,n})$$

$$k = k + 1$$

end

Modèle linéaire tangent \mathcal{M}

$$\delta u_x^n = \mathcal{F}^{-1}(u_k^n)$$

$$k = 0$$

while ($k < k_{max}$)

$$(\nabla\phi)_c^{k,n} = k\phi_s^{k,n}$$

$$(\nabla\phi)_s^{k,n} = -k\phi_c^{k,n}$$

$$k = k + 1$$

end

$$(\nabla\phi)_x^n = \mathcal{F}^{-1}((\nabla\phi)_k^n)$$

$$\delta NL_x^n = \delta u_x^n \times (\nabla\phi)_x^n$$

$$\delta NL_k^n = \mathcal{F}(\delta NL_x^n)$$

$$k = 0$$

while ($k < k_{max}$)

$$\delta\phi_c^{k,n+1} = -\alpha k\Delta t (\delta NL)_c^{k,n}$$

$$\delta\phi_s^{k,n+1} = -\alpha k\Delta t (\delta NL)_s^{k,n}$$

$$k = k + 1$$

end

Modèle adjoint ADL

$$u_x^{n-1} = \mathcal{F}^{-1}(u_k^{n-1})$$

$$ad_NL_k^{n-1} = \alpha k \Delta t ad_phi_k^n$$

$$ad_NL_x^{n-1} = \mathcal{F}^{-1}(ad_NL_k^{n-1})$$

$$ad_(\nabla\phi)_x^{n-1} = u_x^n ad_NL_x^{n-1}$$

$$ad_(\nabla\phi)_k^{n-1} = \mathcal{F}(ad_(\nabla\phi)_x^{n-1})$$

$$k = 0$$
while ($k < k_{max}$)
$$ad_phi_c^{k,n-1} = -k ad_(\nabla\phi)_c^{k,n-1} + \alpha ad_phi_c^{k,n}$$

$$ad_phi_s^{k,n-1} = k ad_(\nabla\phi)_s^{k,n-1} + \alpha ad_phi_s^{k,n}$$

$$k = k + 1$$
end

Modèle adjoint ADM

$$k = 0$$
while ($k < k_{max}$)
$$(\nabla\phi)_c^{k,n-1} = k\phi_s^{k,n-1}$$

$$(\nabla\phi)_s^{k,n-1} = -k\phi_c^{k,n-1}$$

$$k = k + 1$$
end

$$(\nabla\phi)_x^n = \mathcal{F}^{-1}((\nabla\phi)_k^n)$$

$$ad_NL_k^{n-1} = -\alpha k \Delta t ad_phi_k^n$$

$$ad_NL_x^{n-1} = \mathcal{F}^{-1}(ad_NL_k^{n-1})$$

$$ad_u_x^{n-1} = (\nabla\phi)_x^{n-1} \times ad_NL_x^{n-1}$$

$$ad_u_k^{n-1} = \mathcal{F}(ad_u_x^{n-1})$$

$$k = 0$$
while ($k < k_{max}$)
$$\partial J / \partial u_c^{k,n-1} = ad_u_c^{k,n-1}$$

$$\partial J / \partial u_s^{k,n-1} = ad_u_s^{k,n-1}$$

$$k = k + 1$$
end

Conclusions

Comme nous l'avons vu tout au long de ce manuscrit, il n'est pas facile de tirer des conclusions au sujet de la dynamique du noyau. En particulier, les reconstructions des mouvements à la surface du noyau restent, même à l'heure des satellites magnétiques, très imprécises. Au cours des travaux présentés, nous avons toujours tenté d'évaluer le niveau d'incertitude présent dans les modèles obtenus, même si cette évaluation est elle-même très délicate. Finalement, les *conclusions* viennent plus de la convergence des résultats obtenus par des études indépendantes que des seules reconstructions des mouvements à la surface du noyau.

Dans un premier temps, nous avons utilisé le modèle magnétique de Jackson et al. [2000], qui synthétise des observations magnétiques effectuées au cours des 400 dernières années, pour tester et comparer deux méthodes de reconstruction. Les résultats obtenus sont encourageants. Les résultats fournis par ces deux méthodes indépendantes sont effectivement assez semblables, ce qui, en plus de valider la méthode de calcul de chacune d'elles, tend à montrer que la variation séculaire du champ magnétique est en assez bon accord avec les différentes hypothèses nécessaires à ces inversions. Cette comparaison montre également que la méthode spectrale est tout aussi valable que la méthode locale, tout en étant beaucoup plus rapide et agréable à utiliser. Le calcul des mouvements à la surface du noyau par la méthode spectrale ne demande en effet que quelques secondes alors qu'il faut deux jours de travail pour arriver au même résultat avec la méthode locale. De ce fait, seule la méthode spectrale a été utilisée dans la suite du manuscrit.

Nous avons ensuite utilisé des modèles géomagnétiques obtenus avec des observations satellitaires afin d'estimer les mouvements actuels à la surface du noyau. La résolution spatiale de ces modèles étant bien meilleure que celle des modèles utilisant uniquement des observations terrestres, il était possible d'espérer obtenir ainsi une image haute résolution de la dynamique à la surface du noyau. Malheureusement, le champ magnétique crustal masquant les petites échelles du champ principal, les petites échelles des mouvements restent elles aussi invisibles. Les modèles de mouvements obtenus sont néanmoins un peu plus détaillés que les modèles antérieurs. Cette étude a également mis en avant la nécessité de modifier la procédure de détermination des mouvements, l'erreur d'observation de la variation séculaire n'étant plus la principale cause d'incertitudes. Enfin, une étude détaillée de ces incertitudes nous a permis d'estimer l'amplitude des erreurs présentes dans le modèle proposé et de faire ainsi ressortir les structures dynamiques les plus fiables à la surface du noyau. Il s'agit d'un courant équatorial vers l'ouest sous l'Océan atlantique et deux vortex anticycloniques situés respectivement sous l'Amérique du Nord et au sud-est du continent africain. Une circulation cyclonique sous l'Océan pacifique nord est également envisageable.

Les modèles des mouvements historiques et actuels ont finalement été comparés aux résultats d'autres études observationnelles, expérimentales et numériques. La confrontation du modèle des mouvements actuels que nous avons obtenu avec les modèles d'autres équipes fait ressortir que les structures les plus fiables apparaissent dans quasiment toutes les reconstructions, quelles que soient les hypothèses sur la nature du mouvement utilisées.

Partant de ces structures de surface, il apparaît que les mouvements dans le noyau ne sont probablement pas organisés en colonnes axiales parfaitement rigides. Il semble par ailleurs exister une dissymétrie entre les hémisphères atlantique et pacifique. Cette dissymétrie peut résulter d'une convection localisée, plus active dans l'hémisphère atlantique. Les mouvements étant particulièrement mal contraints près des pôles, il nous est impossible de tirer des conclusions sur la dynamique à l'intérieur du cylindre tangent.

À partir de la série temporelle des mouvements historiques, nous avons étudié la partie des mouvements à la surface qui pourrait correspondre à des mouvements du fluide en cylindres axiaux rigides. La composante temporellement stable de ces mouvements présente des caractéristiques semblables aux mouvements de ce type observés dans des simulations de convection en rotation rapide et de dynamo : une alternance de bandes alternativement progrades et rétrogrades, la bande équatoriale étant prograde. Nous avons également mis en évidence la présence d'oscillations temporelles de ces mouvements rigides. Ces oscillations peuvent être la trace d'oscillations de torsion susceptibles d'apparaître en présence de champ magnétique. Il faudrait néanmoins évaluer plus précisément les marges d'erreurs associées à cette composante des modèles de mouvements avant de pouvoir affirmer catégoriquement leur présence.

Enfin, revenant à des caractéristiques moyennes et donc, nous l'espérons, mieux contraintes, nous avons montré que l'évolution temporelle de l'amplitude moyenne de la pression constitue un excellent indicateur des événements rapides que sont les jerks. Ceci nous a également amené à développer une nouvelle approche permettant de caractériser globalement ces événements rapides.

Finalement, nous avons mis en place les bases d'une méthode d'assimilation variationnelle de données qui pourrait être utilisée pour étudier le noyau terrestre. Après avoir développé théoriquement le schéma de calcul nécessaire, nous l'avons appliqué à un cas unidimensionnel. Les résultats préliminaires ainsi obtenus sont très positifs. L'application aux calculs des mouvements à la surface du noyau de la méthode développée ici devrait permettre d'obtenir des séries temporelles de mouvements à la surface du noyau qui soient plus cohérentes que celles résultant du calcul de mouvements indépendants les uns des autres utilisées au cours de nos autres études.

Les travaux présentés ouvrent ainsi de nombreuses perspectives pour des recherches futures. L'application de la méthode d'assimilation de données permettrait tout d'abord de raffiner les études utilisant la série temporelle des mouvements historiques (mouvements rigides temporellement stables, oscillations de torsions, jerks...). Elle pourrait également permettre d'utiliser les observations satellitaires continues déjà effectuées et à venir. Il serait par exemple particulièrement intéressant de suivre de cette manière les modifications se produisant dans les mouvements lors du prochain jerk.

Des études pourraient également être menées afin de chercher à comprendre pourquoi l'am-

plitude de la pression est maximale au moment d'un jerk et remonter ainsi au mécanisme qui les génère. Une piste serait d'étudier l'évolution de l'amplitude de la pression dans des simulations de convection en rotation rapide et de dynamo. Si des variations similaires à celles mises en évidence à la surface du noyau sont visibles, il serait intéressant de chercher si elles se traduisent, dans les dynamos numériques, par des variations du champ magnétique analogues aux jerks. Pour cela, la méthode d'analyse globale de ces phénomènes présentée dans ce manuscrit serait tout à fait appropriée.

Enfin, les perspectives de la méthode d'assimilation de données ne se limitent pas au calcul des mouvements à la surface du noyau. Il serait en effet probablement très instructif, comme nous l'avons déjà évoqué, de tenter d'inverser des dynamos cinématiques ou encore de contraindre des dynamos complètes avec des observations du champ magnétique ou des reconstructions des mouvements à la surface du noyau. Ceci ne permettrait probablement pas de résoudre complètement «l'énigme de la dynamo terrestre», mais pourrait néanmoins aider à faire un pas dans cette direction.

Bibliographie

- Alexandrescu, M., D. Gibert, G. Hulot, J.-L. Le Mouél, et G. Saracco (1995). Detection of geomagnetic jerks using wavelet analysis. *J. Geophys. Res.* *100*, 12557–12572.
- Alexandrescu, M., D. Gibert, G. Hulot, J.-L. Le Mouél, et G. Saracco (1996). Worldwide wavelet analysis of geomagnetic jerks. *J. Geophys. Res.* *101*, 21975–21994.
- Amit, H. et P. Olson (2004). Helical core flow from geomagnetic secular variation. *Phys. Earth Planet. Inter.*, sous presse.
- Aubert, J., D. Brito, H.-C. Nataf, P. Cardin, et J.-P. Masson (2001). A systematic experimental study of rotating spherical convection in water and liquid gallium. *Phys. Earth Planet. Inter.* *128*, 51–74.
- Aubert, J., N. Gillet, et P. Cardin (2003). Quasigeostrophic models of convection in rotating spherical shells. *Geochem. Geophys. Geosyst.* *4*, 10.1029/2002GC000456.
- Aubert, J., S. Jung, et L. Swinney (2002). Observations of zonal flow created by potential vorticity mixing in a rotating fluid. *Geophys. Res. Lett.* *29*, 1876, 10.1029/2002GL015422.
- Aurnou, J., S. Andreadis, L. Zhu, et P. Olson (2003). Experiments on convection in Earth's core tangent cylinder. *Earth Planet. Sci. Lett.* *212*, 119–134.
- Aurnou, J. et P. Olson (2001). Strong zonal winds from thermal convection in a rotating spherical shell. *Geophys. Res. Lett.* *28*, 2557–2559.
- Backus, G. et J.-L. Le Mouél (1986). The region on the core-mantle boundary where a geostrophic velocity field can be determined from frozen-flux magnetic data. *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* *85*, 617–628.
- Backus, G., R. Parker, et C. Constable (1996). *Foundations of geomagnetism*. Cambridge University Press.
- Barraclough, D. (1985). A comparison of satellite and observatory estimates of geomagnetic secular variation. *J. Geophys. Res.* *90*, 2523–2526.
- Barraclough, D. et A. De Santis (1997). Some possible evidence for a chaotic geomagnetic field from observational data. *Phys. Earth Planet. Inter.* *99*, 207–220.
- Birch, F. (1952). Elasticity and constitution of the Earth's interior. *J. Geophys. Res.* *57*, 277–286.
- Blakely, R. (1995). *Potential theory in gravity & magnetic applications*. Cambridge University Press.

- Bloxham, J. (1988). The determination of the fluid flow at the core surface from geomagnetic observations. In *Mathematical geophysics, a survey of recent developments in seismology and geodynamics*, N. Vlaar, G. Nolet, M. Wortel, et S. Cloething (Eds.). Dordrecht: Reidel.
- Bloxham, J. (1989). Simple models of fluid flow at the core surface derived from field models. *Geophys. J. Int.* 99, 173–182.
- Bloxham, J. et D. Gubbins (1985). The secular variation of the Earth's magnetic field. *Nature* 317, 777–781.
- Bloxham, J. et D. Gubbins (1986). Geomagnetic field analysis-IV: Testing the frozen-flux hypothesis. *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* 84, 139–152.
- Bloxham, J. et A. Jackson (1992). Time-dependent mapping of the magnetic field at the core-mantle boundary. *J. Geophys. Res.* 97, 19537–19568.
- Bloxham, J., S. Zatman, et M. Dumberry (2002). The origin of geomagnetic jerks. *Nature* 420, 65–68.
- Bouttier, F. et P. Courtier (1999). Data assimilation concepts and methods. In *Meteorological training course lecture series*. European Center for Medium-Range Weather Forecasts.
- Braginsky, S. I. (1970). Torsional magnetohydrodynamics vibrations in the Earth's core and variations in day length. *Geomagn. Aeron.* 10, 3–12 (Eng. Trans. 1–8).
- Bullard, E., C. Freedman, H. Gellman, et J. Nixon (1950). The westward drift of the Earth's magnetic field. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* A243, 67–92.
- Busse, F. (1970). Thermal instabilities in rapidly rotating systems. *J. Fluid Mech.* 44, 441–460.
- Busse, F. (2002). Convective flows in rapidly rotating spheres and their dynamo action. *Phys. Fluids* 14, 1301–1314.
- Cardin, P. et P. Olson (1992). An experimental approach of thermo-chemical convection in the Earth's core. *Geophys. Res. Lett.* 19, 1995–1998.
- Cardin, P. et P. Olson (1994). Chaotic thermal convection in a rapidly rotating spherical shell: Consequences for flow in the outer core. *Phys. Earth Planet. Inter.* 82, 235–259.
- Chapman, S. et J. Bartels (1962). *Geomagnetism, Volume I*. Oxford University Press.
- Christensen, U. (2001). Zonal flow driven by deep convection in the major planets. *Geophys. Res. Lett.* 28, 2553–2556.
- Christensen, U. (2002). Zonal flow driven by strongly supercritical convection in rotating spherical shells. *J. Fluid Mech.* 470, 115–133.
- Christensen, U., J. Aubert, P. Cardin, E. Dormy, S. Gibbons, G. Glatzmaier, E. Grote, Y. Honkura, C. Jones, M. Kono, M. Matsushima, A. Sakuraba, F. Takahashi, A. Tilgner, J. Wicht, et K. Zhang (2001). A numerical dynamo benchmark. *Phys. Earth Planet. Inter.* 128, 25–34.
- Christensen, U. et P. Olson (2003). Secular variation in numerical geodynamo models with lateral variations of boundary heat flow. *Phys. Earth Planet. Inter.* 138, 39–54.

- Chulliat, A. (2000). *Étude locale du champ magnétique et des mouvements à la surface du noyau terrestre*. Ph. D. thesis, Institut de Physique du Globe de Paris.
- Chulliat, A. (2004). Geomagnetic secular variation generated by a tangentially geostrophic flow under the frozen-flux assumption—II. Sufficient conditions. *Geophys. J. Int.*, sous presse.
- Chulliat, A. et G. Hulot (2000). Local computation of the geostrophic pressure at the top of the core. *Phys. Earth Planet. Inter.* 117, 309–328.
- Chulliat, A. et G. Hulot (2001). Geomagnetic secular variation generated by a tangentially geostrophic flow under the frozen-flux assumption—I. Necessary conditions. *Phys. Earth Planet. Inter.* 147, 237–246.
- Courillot, V., J. Ducruix, et J.-L. Le Mouél (1978). Sur une accélération récente de la variation séculaire du champ magnétique terrestre. *C. R. Acad. Sci. D287*, 1095–1098.
- Courillot, V. et J.-L. Le Mouél (1984). Geomagnetic secular variation impulses. *Nature* 311, 709–716.
- De Michelis, P., L. Cafarella, et A. Meloni (1998). Worldwide character of the 1991 geomagnetic jerk. *Geophys. Res. Lett.* 25, 377–380.
- De Santis, A., D. Barraclough, et R. Tozzi (2003). Spatial and temporal spectra of the geomagnetic field and their scaling properties. *Phys. Earth Planet. Inter.* 135, 125–134.
- De Santis, A., R. Tozzi, et L. Gaya-Piqué (2004). Information content and K-entropy of the present geomagnetic field. *Earth Planet. Sci. Lett.* 218, 269–275.
- Dormy, E., J.-P. Valet, et V. Courillot (2000). Numerical models of the geodynamo and observational constraints. *Geochem. Geophys. Geosyst.* 1, 10.1029/2000GC000062.
- Dumberry, M. et J. Bloxham (2003). Torque balance, Taylor’s constraint and torsional oscillations in a numerical model of the geodynamo. *Phys. Earth Planet. Inter.* 140, 29–51.
- Finlay, C. et A. Jackson (2003). Equatorially dominated magnetic field change at the surface of Earth’s core. *Science* 300, 2084–2086.
- Ghil, M. (1989). Meteorological data assimilation for oceanographers. Part I: Description and theoretical framework. *Dyn. Atmos. Oceans* 13, 171–218.
- Ghil, M. (2000). The essence of data assimilation or why combine data with models? In *Proc. 3rd WMO Int’l Symp. Assimilation of Observations in Meteorology & Oceanography*, pp. 1–4.
- Ghil, M., S. Cohn, J. Tavantzis, K. Bube, et E. Isaacson (1981). Applications of estimation theory to numerical weather prediction. In *Dynamic Meteorology: Data Assimilation Methods*, L. Bengtsson, M. Ghil, et E. Källén (Eds.), pp. 139–224. Springer Verlag.
- Ghil, M. et P. Malanotte-Rizzoli (1991). Data assimilation in meteorology and oceanography. *Adv. Geophys.* 33, 141–266.
- Giering, R. et T. Kaminski (1998). Recipes for adjoint code construction. *ACM Trans. Math. Software* 24, 437–474.
- Gire, C. et J.-L. Le Mouél (1990). Tangentially geostrophic flow at core-mantle boundary com-

- patible with the observed geomagnetic secular variation: The large-scale component of the flow. *Phys. Earth Planet. Inter.* 59, 259–287.
- Gire, C., J.-L. Le Mouél, et T. Madden (1986). Motions at the core surface from SV data. *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* 84, 1–29.
- Glatzmaier, G. et P. Roberts (1995). A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle. *Phys. Earth Planet. Inter.* 91, 63–75.
- Grote, E. et F. Busse (2001). Dynamics of convection and dynamos in rotating spherical fluid shells. *Fluid Dyn. Res.* 28, 249–368.
- Gubbins, D. (1982). Finding core motions from magnetic observations. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* A306, 247–254.
- Gubbins, D. (1996). A formalism for the inversion of geomagnetic data for core motions with diffusion. *Phys. Earth Planet. Inter.* 98, 193–206.
- Gubbins, D. et P. Kelly (1996). A difficulty with using the frozen flux hypothesis to find steady core motions. *Geophys. Res. Lett.* 23, 1825–1828.
- Gubbins, D. et P. Roberts (1987). Magnetohydrodynamics of the Earth's core. In *Geomagnetism, Volume 2*, P. Jacobs (Ed.). Academic Press.
- Hide, R., D. Boggs, et J. Dickey (2000). Angular momentum fluctuations within the Earth's liquid core and torsional oscillations of the core-mantle system. *Geophys. J. Int.* 143, 777–786.
- Holme, R. et K. Whaler (2001). Steady core flow in an azimuthally drifting reference frame. *Geophys. J. Int.* 145, 560–569.
- Huang, X. et X. Yang (1996). Variational data assimilation with the Lorentz model. Technical report, Danish Meteorological Institute, Copenhagen.
- Hulot, G. et A. Chulliat (2003). On the possibility of quantifying diffusion and horizontal Lorentz forces at the Earth's core surface. *Phys. Earth Planet. Inter.* 135, 47–54.
- Hulot, G., C. Eymin, B. Langlais, M. Mandea, et N. Olsen (2002). Small-scale structure of the geodynamo inferred from Oersted and Magsat satellite data. *Nature* 416, 620–623.
- Hulot, G., A. Khokhlov, et J.-L. Le Mouél (1997). Uniqueness of mainly dipolar magnetic fields recovered from directional data. *Geophys. J. Int.* 129, 347–354.
- Hulot, G., M. Le Huy, et J.-L. Le Mouél (1993). Secousses (jerks) de la variation séculaire et mouvements dans le noyau terrestre. *C. R. Acad. Sci.* 317, 333–341.
- Hulot, G., J.-L. Le Mouél, et D. Jault (1990). The flow at the core-mantle boundary: Symmetry properties. *J. Geomagn. Geoelectr.* 42, 857–874.
- Hulot, G., J.-L. Le Mouél, et J. Wahr (1992). Taking into account truncation problems and geomagnetic model accuracy in assessing computed flows at the core-mantle boundary. *Geophys. J. Int.* 108, 224–246.
- Jackson, A. (1997). Time-dependency of tangentially geostrophic core surface motions. *Phys. Earth Planet. Inter.* 103, 293–311.

- Jackson, A. (2003). Intense equatorial flux spots on the surface of Earth's core. *Nature* 424, 760–763.
- Jackson, A., J. Bloxham, et D. Gubbins (1993). Time-dependent flow at the core surface and conservation of angular momentum in the coupled core-mantle system. In *Dynamics of Earth's Deep interior and Earth Rotation, Geophys. Monogr. Ser.*, J.-L. Le Mouél, D. Smylie, et T. Herring (Eds.), Vol. 72, pp. 97–107. AGU.
- Jackson, A., A. Jonkers, et M. Walker (2000). Four centuries of geomagnetic secular variation from historical records. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A358*, 957–990.
- Jault, D. (1990). *Variation séculaire du champ géomagnétique et fluctuations de la longueur du jour*. Ph. D. thesis, Université Paris VII.
- Jault, D., D. Brito, P. Cardin, et H.-C. Nataf (2004). Le moteur de la dynamo terrestre. *Pour la Science* 318, 64–69.
- Jault, D., C. Gire, et J.-L. Le Mouél (1988). Westward drift, core motions and exchanges of angular momentum between core and mantle. *Nature* 333, 353–356.
- Jault, D. et J.-L. Le Mouél (1991). Physical properties at the top of the core and core surface motions. *Phys. Earth Planet. Inter.* 68, 76–84.
- Kalman, R. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Trans. ASME, Ser. D: J. Basic Eng.* 82D, 35–45.
- Kuang, W. et J. Bloxham (1998). Numerical dynamo modeling: Comparison with the Earth's magnetic field. In *The core-mantle boundary region*, Vol. 28 of *Geodynamics*, pp. 197–208. American Geophysical Union.
- Langel, R. (1987). The main field. In *Geomagnetism, Volume 1*, P. Jacobs (Ed.). Academic Press.
- Langel, R., R. Estes, G. Mead, E. Fabiano, et E. Lancaster (1980). Initial geomagnetic field model from MAGSAT vector data. *Geophys. Res. Lett.* 7, 793–796.
- Langel, R. A. et R. H. Estes (1982). A geomagnetic field spectrum. *Geophys. Res. Lett.* 9, 250–253.
- Langlais, B. (2003). Magnetic field secular variation: The satellite perspective. In *IUGG XXIII assembly*.
- Langlais, B., M. Manda, et P. Ultré-Guérard (2003). High-resolution magnetic field modelling: Application to MAGSAT and /Orsted data. *Phys. Earth Planet. Inter.* 135, 77–91.
- Le Huy, M., M. Manda, J.-L. Le Mouél, et A. Pais (2000). Time evolution of the fluid flow at the top of the core. Geomagnetic jerks. *Earth Planets Space* 52, 163–173.
- Le Mouél, J.-L. (1984). Outer core geostrophic flow and secular variation of Earth's magnetic field. *Nature* 311, 734–735.
- Le Mouél, J.-L., C. Gire, et T. Madden (1985). Motions at core surface in the geostrophic approximation. *Phys. Earth Planet. Inter.* 39, 270–287.

- Lions, J.-L. (1968). *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Dunod.
- Love, J. (1999). A critique of frozen-flux inverse modelling of a nearly steady geodynamo. *GJI* 138, 353–365.
- Mandea, M., E. Bellanger, et J.-L. Le Mouél (2000). A geomagnetic jerk for the end of the 20th century? *Phys. Earth Planet. Inter.* 183, 369–373.
- Mandea Alexandrescu, M., D. Gilbert, J.-L. Le Mouél, G. Hulot, et G. Saracco (1999). An estimate of average lower mantle conductivity by wavelet analysis of geomagnetic jerks. *J. Geophys. Res.* 104, 17735–17746.
- Marchuk, G. (1975). Formulation of theory of perturbations for complicated models. *Appl. Math. Optimization* 2, 1–33.
- Maus, S., H. Lühr, G. Balasis, M. Rother, et M. Mandea (2004). Introducing POMME, the Potsdam Magnetic Model of the Earth. In *CHAMP mission results II*. Springer Verlag.
- Menke, W. (1984). *Geophysical data analysis: Discrete inverse theory*. Academic Press.
- Merill, R., M. McElhinny, et P. McFadden (1998). *The magnetic field of the Earth*. Academic Press.
- Morin, V. et E. Dormy (2004). Time dependent β -convection in rapidly rotating spherical shells. *Phys. Fluids* 16, 1603–1609.
- Neubert, T., M. Mandea, G. Hulot, R. von Frese, F. Primdahl, J.-L. Jorgenson, E. Friis-Christensen, P. Stauning, N. Olsen, et T. Risbo (2001). High precision geomagnetic field data from the Ørsted satellite. *EOS* 82, 81–87.
- Olsen, N. (2002). A model of the geomagnetic field and its secular variation for epoch 2000 estimated from Ørsted data. *Geophys. J. Int.* 149, 454–462.
- Olsen, N., R. Holme, et H. Lühr (2002). A magnetic field model derived from Ørsted, CHAMP and Ørsted-2/SAC-C observations. In *Eos Trans. AGU, Spring Meet. Suppl.*, Vol. 83.
- Olson, P. et J. Aurnou (1999). A polar vortex in the Earth's core. *Nature* 402, 170–173.
- Olson, P. et U. Christensen (2002). The time-averaged magnetic field in numerical dynamos with non-uniform boundary heat flux. *Geophys. J. Int.* 151, 809–823.
- Olson, P., U. Christensen, et G. Glatzmaier (1999). Numerical modelling of the geodynamo: Mechanisms of field generation and equilibrium. *J. Geophys. Res.* 104, 10383–10404.
- Olson, P., I. Sumita, et J. Aurnou (2002). Diffusive magnetic images of upwelling pattern in the core. *J. Geophys. Res.* 107, 2348, 10.1029/2001JB000384.
- Pais, A. et G. Hulot (2000). Length of day decade variations, torsional oscillations and inner core superrotation: Evidence from recovered core surface zonal flows. *Phys. Earth Planet. Inter.* 118, 291–316.
- Pais, M. A., O. Oliveira, et F. Nogueira (2004). Non-uniqueness of inverted CMB flows and deviations from tangential geostrophy. *J. Geophys. Res., sous presse*.

- Pedlosky, J. (1987). *Geophysical fluid dynamics (second edition)*. Springer.
- Poirier, J.-P. (2000). *Introduction to the physics of the Earth's interior (second edition)*. Cambridge University Press.
- Poirier, J.-P. et J.-L. Le Mouél (1992). Does infiltration of core material into the lower mantle affect the observed geomagnetic field? *Phys. Earth Planet. Inter.* 73, 29–37.
- Press, W., S. Teukolsky, W. Vetterling, et B. Flannery (1986). *Numerical recipes in Fortran 77: The art of scientific computing*. Cambridge University Press.
- Rau, S., U. Christensen, A. Jackson, et J. Wicht (2000). Core flow inversion tested with numerical dynamo models. *Geophys. J. Int.* 141, 485–497.
- Reigber, C., H. Lühr, et P. Schwintzer (Eds.) (2003). *First CHAMP Mission Results for Gravity, Magnetic and Atmospheric Studies*. Springer.
- Roberts, P. (1987). Origin of the Main Field: Dynamics. In *Geomagnetism, Volume 2*, P. Jacobs (Ed.). Academic Press.
- Roberts, P. et G. Glatzmaier (2000). A test of the frozen-flux approximation using a new geodynamo model. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* A358, 1109–1121.
- Roberts, P. H. et S. Scott (1965). On analysis of the secular variation. *J. Geomagn. Geoelectr.* 17, 137–151.
- Sabaka, T., N. Olsen, et R. Langel (2002). A comprehensive model of the quiet-time, near-earth magnetic field: Phase 3. *Geophys. J. Int.* 151, 32–68.
- Sabaka, T., N. Olsen, et M. Purucker (2004). Extending comprehensive models of the Earth's magnetic field with Oersted and CHAMP data. *Geophys. J. Int.*, sous presse.
- Shewchuk, J. (1994). An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain. Technical report, School of Computer Science, Carnegie Mellon University, Pittsburgh.
- Sumita, I. et P. Olson (2000). Laboratory experiments on high Rayleigh number thermal convection in a rapidly rotating hemispherical shell. *Phys. Earth Planet. Inter.* 117, 153–170.
- Taylor, J. (1963). The magnetohydrodynamics of a rotating fluid and the Earth's dynamo problem. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* A274, 274–283.
- Voorhies, C. (1986a). Steady flows at the top of Earth's core derived from geomagnetic field models. *J. Geophys. Res.* 15, 12444–12466.
- Voorhies, C. (1986b). Steady superficial core motions: An alternate method. *Geophys. Res. Lett.* 13, 1537–1540.
- Voorhies, C. (1995). Time-varying fluid flow at the top of Earth's core derived from definitive geomagnetic reference field models. *J. Geophys. Res.* 100, 10029–10039.
- Voorhies, C. et G. Backus (1985). Steady flows at the top of the core from geomagnetic field models: The steady motions theorem. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics* 32, 163–175.
- Waddington, R., D. Gubbins, et D. Barber (1995). Geomagnetic field analysis—V. Determining

- steady core-surface flows directly from geomagnetic observations. *Geophys. J. Int.* 122, 326–350.
- Walker, M. et A. Jackson (2000). Robust modelling of the Earth's magnetic field. *Geophys. J. Int.* 143, 799–808.
- Whaler, K. (1982). Geomagnetic secular variation and fluid motion at the core surface. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A306*, 235–246.
- Whaler, K., R. Holme, et A. Jackson (2002). One-norm modelling of flow at the core-mantle boundary. In *SEDI 2002, Study of the Earth's deep interior 8th symposium*.
- Xu, Y., T. Shankland, et B. Poe (2000). Laboratory-based electrical conductivity in the Earth's mantle. *J. Geophys. Res.* 105, 27865–27875.
- Zatman, S. et J. Bloxham (1997). Torsional oscillations and the magnetic field within the Earth's core. *Nature* 388, 760–763.

Annexe A

Génération des champs synthétiques aléatoires

Les champs magnétiques et les mouvements synthétiques utilisés dans ce manuscrit sont tous générés aléatoirement de manière à ce que leur spectre d'énergie suivent un spectre choisi *a priori*.

A.1 Petites échelles du champ magnétique

Des petites échelles synthétiques du champ magnétique ont été générées afin d'évaluer l'amplitude de la variation séculaire non-modélisée (§4.2) et les artefacts créés par les troncatures des champs magnétique et de vitesse (§4.3) dans les inversions utilisant des observations satellitaires. La forme du spectre de ces petites échelles est choisie de manière à prolonger la décroissance exponentielle du champ principal à la surface de la Terre. Les petites échelles doivent ainsi suivre le spectre d'énergie :

$$W_B(n) = W_B^0 \exp(-kn) \text{ avec } W_B^0 = 1.35 \cdot 10^{-8} \text{ nT}^2 \text{ et } k = 1.31, \quad (\text{A.1})$$

les constantes W_B^0 et k ayant été déterminées par une régression sur les degrés 2 à 13 du spectre d'énergie du champ magnétique moyen utilisé conjointement à la variation séculaire différentielle (§4.1.2). Puisque par ailleurs,

$$W_B(n) = (n+1) \sum_{m=0}^n ((g_n^m)^2 + (h_n^m)^2) = (n+1)(2n+1) \overline{(g_n)^2}, \quad (\text{A.2})$$

le coefficient de Gauss moyen $\overline{g_n}$ de chaque degré du prolongement synthétique doit suivre

$$\overline{g_n} = \sqrt{\overline{(g_n)^2}} = \sqrt{\frac{W_B^0 \exp(-kn)}{(n+1)(2n+1)}} \quad (\text{A.3})$$

afin que le champ suive le spectre défini par (A.1).

Cherchant un champ aléatoire, nous tirons au hasard chaque coefficient du prolongement dans une distribution normale centrée dont l'écart-type est égal au coefficient de Gauss moyen $\overline{g_n}$ du degré considéré. La figure 4.8a montre les spectres d'énergie de cinq prolongements synthétiques du champ magnétique ainsi obtenus.

A.2 Mouvements à la surface du noyau

Le processus décrit ci-dessus pour le champ magnétique a également été utilisé pour les champs de vitesse synthétiques, à la différence que ceux-ci se décomposent en deux parties, poloïdale et toroïdale, dont les amplitudes sont très différentes. Deux stratégies ont été utilisées, permettant, soit de contrôler rigoureusement l'amplitude de chacune de ces composantes, soit d'obtenir un mouvement tangentiellement géostrophique. Pour un tel mouvement les composantes poloïdale et toroïdale ne sont en effet pas indépendantes et le spectre choisi pour l'une d'entre elle impose le spectre de l'autre.

A.2.1 Mouvements non-géostrophiques

Afin d'évaluer l'amplitude de la variation séculaire non-modélisée induite par les mouvements obtenus avec des modèles magnétiques satellitaires (§4.2), des prolongements synthétiques indépendants ont été générés pour les composantes poloïdale et toroïdale. Les prolongements très énergétiques suivent un spectre

$$W_{U1}(n) = W_{U1}^0 \quad (\text{A.4})$$

et les prolongements peu énergétiques

$$W_{U2}(n) = W_{U2}^0 n^{-5}. \quad (\text{A.5})$$

Les constantes W_{U1}^0 et W_{U2}^0 sont déterminées, pour chaque composante, de manière à assurer la continuité des spectres entre les grandes échelles issues de l'inversion et les petites échelles synthétiques (figure 4.8b).

A.2.2 Mouvements géostrophiques

Les mouvements synthétiques utilisés pour l'étude des artefacts inhérents à la méthode d'inversion (§3.2.2) et résultant des différentes troncatures (§4.3) doivent être tangentiellement géostrophiques. Pour ces mouvements, les coefficients poloïdaux et toroïdaux ne sont pas indépendants (les relations existant entre ces coefficients sont détaillés par Gire et Le Mouél [1990]).

Les mouvements synthétiques utilisés dans le chapitre 3 ont été générés en imposant à la composante poloïdale le spectre correspondant du mouvement obtenu par la méthode spectrale pour 1990, puis en divisant les coefficients obtenus par 2, de manière à ce que la composante toroïdale, plus énergétique que la composante poloïdale, ait une amplitude semblable à celle du mouvement de 1990 (l'amplitude des poloïdaux est alors deux fois *trop* faible).

Pour les mouvements utilisés dans le chapitre 4, nous avons cherché empiriquement le spectre à imposer à la composante poloïdale pour que les grandes échelles de la composante toroïdale soient du même ordre de grandeur que celles du mouvement satellitaire cohérent et que les petites échelles de cette composante aient un spectre plat («mouvement à petites échelles très énergétiques») ou un spectre dont la décroissance soit identique à celle des grandes échelles du mouvement cohérent («mouvement à petites échelles moyennement énergétiques»). La figure 4.13 présente les spectres d'énergie de 10 des 200 mouvements ainsi générés.

A.3 Variation séculaire bruitée

La variation séculaire bruitée utilisée dans le paragraphe 3.2.2 est obtenue en ajoutant à chaque coefficient de la variation séculaire *parfaite* un bruit aléatoire représentant statistiquement une fraction β fixée de celui-ci :

$$\tilde{g}_n^m = \dot{g}_n^m + \alpha \beta |\dot{g}_n^m|, \quad (\text{A.6})$$

où \dot{g}_n^m et \tilde{g}_n^m représentent l'un des coefficients de Gauss des variations séculaires respectivement *parfaite* et bruitée et où α est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée de variance 1. Dix variations séculaires ont été générées avec

$$\beta = \{0.02, 0.05, 0.1, 0.15, 0.20, 0.30, 0.40, 0.50, 0.75, 1\}.$$

Ces variations séculaires bruitées contiennent ainsi un bruit représentant statistiquement 2%, 5%, 9%, 13%, 17%, 23%, 29%, 33%, 43% et 50% de la variation séculaire totale.

Annexe B

Small-scale structure of the geodynamo inferred from Oersted and Magsat satellite data

letters to nature

Projected down to the surface of the Earth's core, we found these variations to be small below the Pacific Ocean, and large at polar latitudes and in a region centred below southern Africa. The flow pattern at the surface of the core that we calculate to account for these changes is characterized by a westward flow concentrated in retrograde polar vortices and an asymmetric ring where prograde vortices are correlated with highs (and retrograde vortices with lows) in the historical (400-year average) magnetic field^{4,5}. This pattern is analogous to those seen in a large class of numerical dynamo simulations⁶, except for its longitudinal asymmetry. If this asymmetric state was reached often in the past, it might account for several persistent patterns observed in the palaeomagnetic field^{7–10}. We postulate that it might also be a state in which the geodynamo operates before reversing.

Thanks to the recent launch of the Danish Oersted satellite³ (inclination 96.5°, altitude 638–849 km), 20 years after the 1979/80 US Magsat² analogous mission (97°, 325–550 km), two data sets at two different epochs are now available that can be used to construct high-degree spherical harmonic models of the geomagnetic field. (Degree 1 is the dipole field; the larger the degree, the smaller the length scale.) Taking advantage of this opportunity and relying on models¹¹ well suited for that purpose, we compute and investigate the changes that have occurred in the geomagnetic field between 1980 and 2000, focusing on the large to medium scales (that is, up to

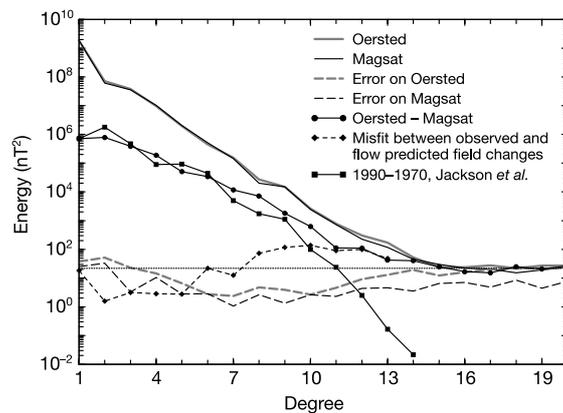


Figure 1 Spectra of the Oersted and Magsat models¹¹, of their error, of their difference, and of how well flows predict this difference. The spectrum of a model is constructed by plotting the contribution of each degree n of the spherical harmonic expansion to the average $\langle B^2 \rangle$ of the predicted field \mathbf{B} over the Earth's surface^{1,2}. Errors in the Oersted and Magsat models are computed by analysing differences between models based on various data subsets¹¹. Note the well-known² knee within the Oersted and Magsat spectra, showing that the main field probably dominates the signal for degrees less than 13, whereas the crustal field dominates for degrees larger than 15. A similar knee is seen around degree 15, in the Oersted–Magsat spectrum of the difference between the Oersted and Magsat fields. This knee, and the flat section of the spectrum beyond it, reveals disagreements between the high-degree signal sensed by Oersted and Magsat at a level slightly less than that of the crustal signal itself¹². Up to degree 13, however, the Oersted–Magsat spectrum is well above the level (dotted line) defined by both that flat section and the crustal spectrum (the contribution of which is believed to be weaker at low degrees than at high degrees³). It is also well above the error level. It thus cannot be attributed to noise or a crustal source. By contrast, it can be explained by core surface flows, as is illustrated by the spectrum of the misfit between the predicted and the observed Oersted minus Magsat field difference. This misfit is at a level comparable to that of the errors in the models and of crustal contributions, but relaxed at the largest degrees to account for 'truncation errors'¹⁷. For reference, the spectrum of the less-resolved field variations⁵ between 1970 and 1990 is also shown.

Small-scale structure of the geodynamo inferred from Oersted and Magsat satellite data

Gauthier Hulot*, Céline Eymin*, Benoît Langlais*, Mioara Mandea* & Niels Olsen†

* Département de Géomagnétisme et Paléomagnétisme, CNRS UMR 7577, Institut de Physique du Globe de Paris, 4 Place Jussieu, B89, Tour 2A, 75252 Paris cedex 05, France

† Center for Planetary Science, Danish Space Research Institute, Julianes Maries Vej 30, DK-2100 Copenhagen, Denmark

The 'geodynamo' in the Earth's liquid outer core produces a magnetic field that dominates the large and medium length scales of the magnetic field observed at the Earth's surface^{1,2}. Here we use data from the currently operating Danish Oersted³ satellite, and from the US Magsat² satellite that operated in 1979/80, to identify and interpret variations in the magnetic field over the past 20 years, down to length scales previously inaccessible.

letters to nature

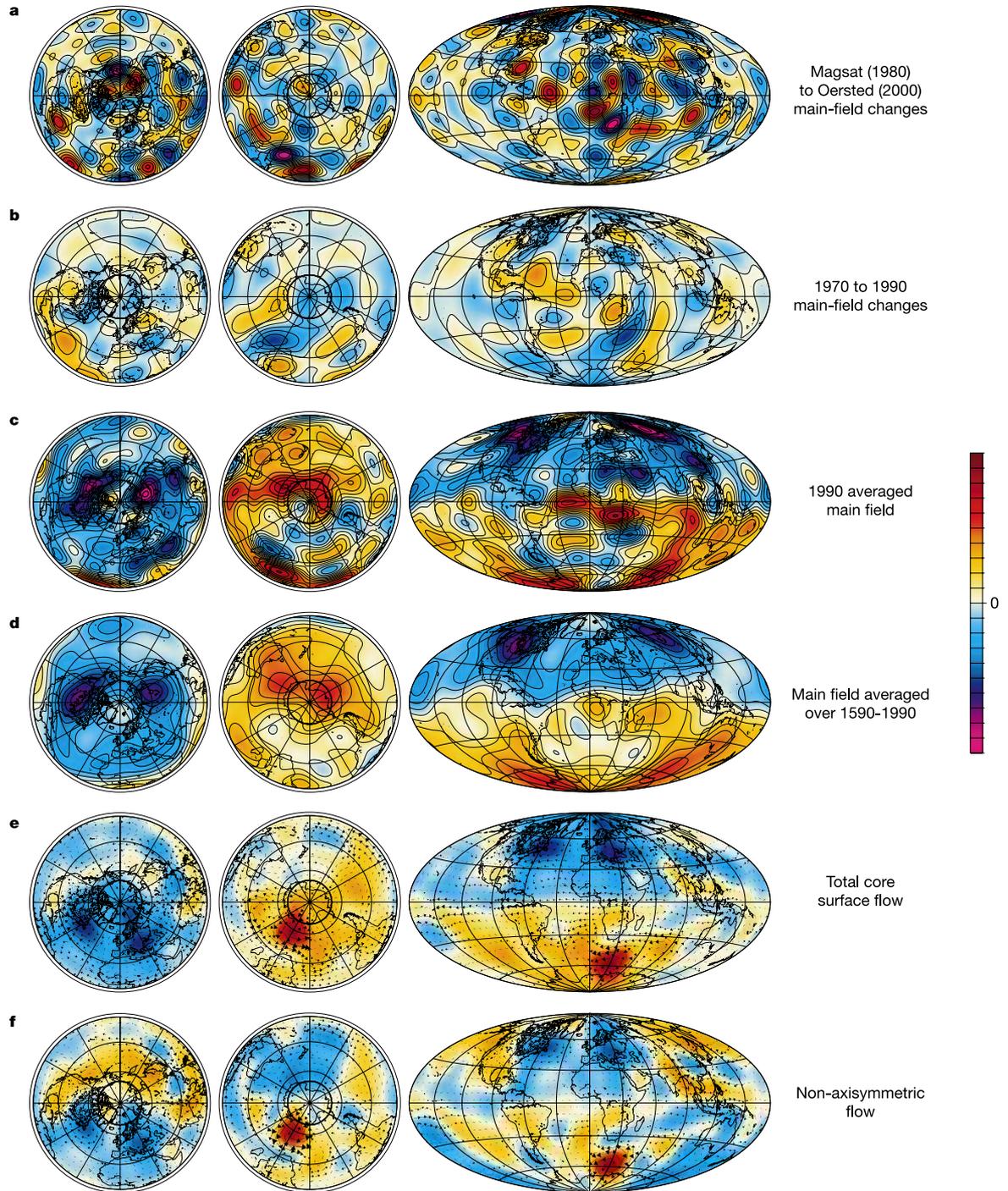


Figure 2 Polar (north and south) and Hammer views of the small-scale structure of the geodynamo at the core surface. **a**, Changes in the radial component of the field between 1980 (Magsat) and 2000 (Oersted) ($-340 \mu\text{T}$ to $333 \mu\text{T}$). **b**, Analogous but less-resolved field changes between 1970 and 1990 (computed from the historical model of ref. 5, $-186 \mu\text{T}$ to $147 \mu\text{T}$). **c**, The radial component of the average 1990 main field computed by averaging the Magsat and Oersted main-field models¹¹ ($-1,032 \mu\text{T}$ to $908 \mu\text{T}$). **d**, The main field averaged over the historical period 1590–1990 (computed from the model of ref. 5, $-745 \mu\text{T}$ to $594 \mu\text{T}$). **e**, Core surface flow accounting for the

main-field changes in **a** by advecting the 1990 main field in **c** (arrows for the flow, maximum of 50 km yr^{-1} , colour code for the toroidal scalar associated to the flow). **f**, Same as in **e** but for the non-axisymmetric component of the flow (maximum 65 km yr^{-1}). In all figures, there is a linear colour code: red positive, blue negative, renormalized to the maximum absolute value, except for **b** (respectively **d**) which uses the same scale as **a** (respectively **c**). Contours every $50 \mu\text{T}$ in **a** and **b**, every $100 \mu\text{T}$ in **c** and **d**. Also shown in each polar plot, the surface trace of the tangent cylinder.

letters to nature

degree 13) thought to be dominated by the main field produced by the geodynamo^{1,2} (Fig. 1).

Figure 2a shows the radial component of those changes plotted at the core surface where the main field originates. Most remarkable are the large changes, which occurred at high, especially northern, latitudes, and in a hemispheric region centred below Africa. These regions contrast strongly with a wide region below the Pacific, where far fewer changes occurred. This pattern could not be resolved as clearly before the Oersted mission (ref. 5, Fig. 2b), and is robust against model uncertainties (Fig. 1).

We now consider if this pattern could have been produced by sources other than the geodynamo—perhaps in the crust, ionosphere or magnetosphere. Although formal separation of the signals from these sources is only possible in part, over many years a framework for practical separation has been constructed², and the results of such separation suggest that this could hardly be the case. First, we consider crustal signals. These are thought to dominate the field at degree 15 and above (Fig. 1). But there is no evidence at these wavelengths for any large changes in the field between 1980 and 2000¹², and at longer wavelengths, even a 100% change in the estimated crustal signal would produce weak field changes (Fig. 1). Second, ionospheric signals. In the field models on which we rely¹¹, these signals have been carefully minimized by using night-side measurements on magnetically quiet days, and field-aligned currents at high latitudes have specifically been removed by using only field intensity data there. The remaining ionospheric contamination at the Earth's surface can then be estimated to be less than 10 nT at all latitudes in the Magsat (1980) model², and probably less in the Oersted (2000) model. Much of this field would in addition show up in zonal fields in Fig. 2a, as the data for each model were recorded at similar local times. Such characteristics do not match the typical 100-nT change (mainly in the degrees 8 to 13 and dominantly not in zonal fields) implied at the Earth's surface by the intense small-scale structures seen in Fig. 2a. Magnetospheric signals can also easily be dismissed, as they are large-scale and can be formally separated from the core signal². Finally, signals from electrical currents induced in the crust and upper mantle by all those external sources can again be shown to be too weak^{13,14}. Therefore, the results in Fig. 2a are most likely to be due to the temporal (secular) variation of the main field.

This secular variation is the combined consequence of main-field diffusion through ohmic dissipation and main-field advection by flows at the core surface¹⁵. Previous studies^{16,17} have shown that much of the short-term large-scale variations of the main field could be explained in terms of its advection by surface flows satisfying the tangentially geostrophic balance¹⁸ (which assumes that the horizontal component of the Coriolis forces is mainly balanced by a dynamical pressure gradient), in the so-called 'frozen-flux approximation'¹⁵ (which assumes diffusion to be negligible). Core flows inferred in this way have further been shown to account for length of day variations on decade timescales (by angular momentum exchange with the mantle)^{19–21}, and to reflect dynamical features, akin to torsional oscillations predicted by dynamo theory^{22,21}. We thus decided to try and compute a tangentially geostrophic flow, which would account for the observed main-field changes (Fig. 2a).

To do this, we computed the average of the two 1980 and 2000 main-field models (Fig. 2c), together with the average secular variation accounting for the 1980 to 2000 main-field changes. We finally computed the flow producing this average secular variation by advection of the average main-field model. We relied on the numerical procedure of ref. 21 with some adjustments. More details about this computation will be provided elsewhere (C.E. and G.H., manuscript in preparation). Most important here is the fact that the flow that we computed (Fig. 2e) succeeds at predicting the field changes at a satisfactory level (see Fig. 1).

Figure 2e reveals a flow with a number of strong vortices embedded in a mainly westward axisymmetric flow. This axisymmetric flow (detailed in Fig. 3) is remarkably symmetric with respect

to the equator. It consists mainly of a westward body rotation of the core with respect to the mantle (of order 0.1°yr^{-1}) and two strong westward ('retrograde' when compared to the Earth's daily rotation) polar vortices (of order 0.9°yr^{-1} , the northern vortex being slightly larger) within the 'tangent cylinder' (tangent to the inner core and intersecting the core surface at latitude $\pm 69.5^\circ$). The body rotation is a well-known feature. It varies with time as a result of core–mantle coupling acting on decade timescales^{16,19–21}. Far less is known about the polar vortices, which confine most of the westward drift at high latitude and appear to be important in explaining the changes seen near both poles in Fig. 2a. Recently, similar vortices have been tentatively found with the help of computations based on less-resolved historical models^{21,23}. These vortices may thus have been active over at least the past century, and could be permanent features of the geodynamo. Figure 3 also shows a small-scale zonal flow that we believe is the result of a Gibbs effect produced by the flow computation, which still fails to resolve the finest details of the probably sharp boundaries of the polar vortices²¹. We finally note that no significant medium-scale zonal flow is present in Fig. 3. This suggests that the torsional oscillations are currently of low amplitude, a result consistent with both the general trend seen in core flows computed over the past century²¹ and the relatively short decay time which has been inferred for those oscillations²².

Plotting the non-axisymmetric flow alone leads to another interesting result (Fig. 2f). This part of the flow displays a medium-to-high-latitude ring of vortices roughly, but not exactly, symmetrical with respect to the equator, and clustering around the tangent cylinder. This is best seen by also plotting the toroidal scalar associated with the flow, which can be viewed as a filtered (low-pass) measure of the radial vorticity $\omega_r = \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{u})$ of the flow \mathbf{u} . The colour code in Fig. 2e and f is then such that prograde and retrograde vortices appear respectively red and blue in the Northern Hemisphere, and respectively blue and red in the Southern Hemisphere (note that equatorial-symmetric flows translate into anti-symmetric radial vorticity). Computations based on historical models could not resolve these vortices as clearly^{16,17}. They are reminiscent of analogous vortices seen in many numerical simulations of the geodynamo^{6,24,25}. The class of simulations that are referred to in ref. 6 as being in a 'fully developed regime' (see also ref. 24) also display retrograde polar vortices analogous to those

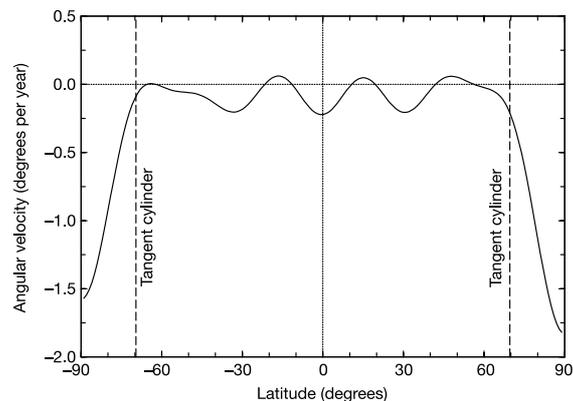


Figure 3 Axisymmetric component of the flow at the core surface. This azimuthal flow is plotted in terms of angular velocity about the Earth's rotation axis (positive for eastward with respect to the mantle, negative for westward) as a function of latitude. Note the general westward trend, and the strong westward flows at high latitudes. These flows correspond to retrograde polar vortices occurring within the tangent cylinder (beyond $\pm 69.5^\circ$ of latitude); see text.

letters to nature

identified in Fig. 3. Also, for such dynamos, computing surface flows as we did has been shown to lead to a reasonable surface picture of the full dynamo flows, provided those flows are not too small scale²⁶. Even though it is known that such numerical simulations are still forced to use unrealistic dimensionless numbers²⁷, this suggests that the geodynamo could belong to a similar 'class' of dynamos.

For such dynamos, it has also been observed that prograde vortices are associated with slow downwelling flows, which concentrate the flux inside the vortices on the long term. By contrast, retrograde vortices are associated with slow upwelling flows, which tend to expel field of reversed polarity (compared to that of the main dipole field) from within the core. It has been speculated that a similar phenomenon could take place in the Earth's core²⁸. In Fig. 2f, prograde vortices (red in the North, blue in the South) tend to occur in a region where maxima are seen in the main field (where the so-called 'flux bundles'^{24,28} are found, Fig. 2c). By contrast, retrograde vortices (blue in the North, red in the South) occur where the main field tends to be minimum, if not of reversed polarity. This correlation is much clearer when made with the main field averaged over the past 400 years (Fig. 2d). Analogous up- and downwelling flows (weak and non-geostrophic, hence not directly visible in Fig. 2f which shows the first-order flow computed under the tangentially geostrophic assumption) could thus be responsible for the global structure of the main field averaged over secular timescales.

One characteristic of the geodynamo remains puzzling: its azimuthal asymmetry. In most numerical dynamos, prograde and retrograde vortices tend to alternate around the tangent cylinder. In Fig. 2f, the flow in the 'Pacific hemisphere' is mainly made up of prograde vortices, contrasting with the flow in the other hemisphere where strong retrograde vortices are found. This is also where the strongest field changes are seen at present (Fig. 2a), and where most of the reversed polarity field has been produced in the past 400 years (which led to the creation of the large reverse patch now seen below South Africa in Fig. 2c)⁴. Archaeomagnetic data further suggest that significant changes have occurred in the (large-scale) main field over the past 3,000 years (ref. 29), and that the present main-field pattern is a relatively recent feature. This leads us to speculate that in the past millennium, retrograde vortices could have progressively vanished in the Pacific hemisphere, while gaining momentum and increasing the rate of creation of reversed polarity field in the other hemisphere. At the present time, the changes that this would have produced in the main field would still be affected by the strong main flow associated with the vortices, leading to the locally enhanced field changes seen in Fig. 2a. It could thus be that the asymmetry at present observed in all maps of Fig. 2 is only temporary. This would be consistent with the results of the only dynamo explicitly displaying a similar azimuthal asymmetry, which is indeed only temporarily observed²⁵.

Palaeomagnetic data can then be used to try and gain further insight into this question. The present asymmetric main field is also associated with a significantly enhanced order 1 (that is, $\cos\phi$) non dipole field component^{1,7}. If this were to happen often enough, it could explain most of the behaviour of the palaeosecular variation over the past 5 Myr (refs 1, 7). This then further suggests that, although possibly temporary, the present asymmetric state of the geodynamo could be frequently reached. If this state were preferentially reached in a fixed way with respect to the mantle, as a result of its likely influence on the core, it could also eventually produce an averaged palaeomagnetic field showing traces of 'flux bundles'^{4,28} as in Fig. 2d. But whether such traces can in fact be seen in the palaeomagnetic field remains an open question^{8,30}.

The growth of the South African patch could also be associated with the present rapid decrease of the dipole field—a decrease that some^{9,10} have suggested could eventually lead to a reversal sharing characteristics with the last known reversal (780 kyr ago¹). Although this does not prove that a new reversal is impending, it suggests

that the asymmetric state we are witnessing at present is one through which the geodynamo could also possibly go just before reversing. □

Received 4 December 2001; accepted 4 February 2002.

- Merrill, R. T., McElhinny, M. W. & McFadden, P. L. *The Magnetic Field of the Earth, Paleomagnetism, the Core and the Deep Mantle* (Academic, San Diego, 1996).
- Langel, R. A. & Hinze, W. J. *The Magnetic Field of the Earth's Lithosphere, The Satellite Perspective* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998).
- Neubert, T. *et al.* Oersted satellite captures high-precision geomagnetic field data. *Eos* **82**, 81, 87–88 (2001).
- Bloxham, J., Gubbins, D. & Jackson, A. Geomagnetic secular variation. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **329**, 415–502 (1989).
- Jackson, A., Jonkers, A. R. T. & Walker, M. R. Four centuries of geomagnetic secular variation from historical records. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **358**, 957–990 (2000).
- Olson, P., Christensen, U. & Glatzmaier, G. Numerical modeling of the geodynamo: Mechanisms of field generation and equilibration. *J. Geophys. Res.* **104**, 10383–10404 (1999).
- Hulot, G. & Gallet, Y. On the interpretation of virtual geomagnetic pole (VGP) scatter curves. *Phys. Earth Planet. Inter.* **95**, 37–53 (1996).
- Gubbins, D. & Kelly, P. Persistent pattern in the geomagnetic field over the past 2.5 Myr. *Nature* **365**, 829–832 (1993).
- Gubbins, D. & Coe, R. Longitudinally confined geomagnetic reversal paths from non-dipole transition fields. *Nature* **362**, 51–53 (1993).
- Constable, C. Link between geomagnetic reversal paths and secular variation of the field over the past 5 Myr. *Nature* **358**, 230–233 (1992).
- Langlais, B., Mandea, M. & Ulfré-Guérard, P. High-resolution magnetic field modelling: application to MAGSAT and Oersted data. *Phys. Earth Planet. Inter.* (in the press).
- Purucker, M., Langlais, B., Olsen, N., Hulot, G. & Mandea, M. The southern edge of cratonic North America: Evidence from new satellite magnetometer observations. *Geophys. Res. Lett.* (in the press).
- Olsen, N. Induction studies with satellite data. *Surv. Geophys.* **20**, 309–340 (1999).
- Tarits, P. & Naphsica, G. Electromagnetic induction effects by the solar quiet magnetic field at satellite altitude. *Geophys. Res. Lett.* **27**, 4009–4012 (2000).
- Roberts, P. H. & Scott, S. On the analysis of the secular variation. 1. A hydromagnetic constraint: Theory. *J. Geomagn. Geoelectr.* **17**, 137–151 (1965).
- Bloxham, J. & Jackson, A. Fluid flow near the surface of Earth's outer core. *Rev. Geophys.* **29**, 97–120 (1991).
- Hulot, G., Le Mouél, J. L. & Wicht, J. Taking into account truncation problems and geomagnetic model accuracy in assessing computed flows at the core-mantle boundary. *Geophys. J. Int.* **108**, 224–246 (1992).
- Le Mouél, J. L. Outer core geostrophic flow and secular variation of Earth's magnetic field. *Nature* **311**, 734–735 (1984).
- Jault, D., Gire, C. & Le Mouél, J. L. Westward drift, core motions and exchanges of angular momentum between core and mantle. *Nature* **333**, 353–356 (1988).
- Jackson, A., Bloxham, J. & Gubbins, D. in *Dynamics of Earth's Deep Interior and Earth Rotation* (eds Le Mouél, J.-L. *et al.*) 97–107 (IUGG Vol. 12, AGU Geophysical Monograph 72, American Geophysical Union, Washington DC, 1993).
- Pais, A. & Hulot, G. Length of day decade variations, torsional oscillations and inner core superrotation: evidence from recovered core surface zonal flows. *Phys. Earth Planet. Inter.* **118**, 291–316 (2000).
- Zatman, S. & Bloxham, J. Torsional oscillations and the magnetic field within the Earth's core. *Nature* **388**, 760–763 (1997).
- Olson, P. & Aurnou, J. A polar vortex in the Earth's core. *Nature* **402**, 170–173 (1999).
- Glatzmaier, G. & Roberts, P. A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle. *Phys. Earth Planet. Inter.* **91**, 63–75 (1995).
- Kiang, W. & Bloxham, J. in *The Core-Mantle Boundary Region* (eds Gurnis, M. *et al.*) 187–208 (Geodyn. Ser. 28, American Geophysical Union, Washington DC, 1998).
- Rau, S., Christensen, U., Jackson, A. & Wicht, J. Core flow inversion tested with numerical dynamo models. *Geophys. J. Int.* **141**, 485–497 (2000).
- Dormy, E., Valet, J. P. & Courtillot, V. Numerical models of the geodynamo and observational constraints. *Geochim. Geophys. Geosyst.* **1**, 62 (2000).
- Gubbins, D. & Bloxham, J. Morphology of the geomagnetic field and implications for the geodynamo. *Nature* **325**, 509–511 (1987).
- Constable, C. G., Johnson, C. L. & Lund, S. P. Global geomagnetic field models for the past 3000 years: transient or permanent flux lobes? *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **358**, 991–1008 (2000).
- Carlut, J. & Courtillot, V. How complex is the Earth's average magnetic field? *Geophys. J. Int.* **134**, 527–544 (1998).

Acknowledgements

We thank those involved in the Oersted project for their contribution to this work. The Oersted project is funded by the Danish Ministry of Transport, the Ministry of Research and Information Technology, and the Ministry of Trade and Industry of Denmark. Additional support for Oersted came from NASA, the Centre National d'Etudes Spatiales (CNES) and DARA. We also thank R. Holme for comments and suggestions.

Competing interests statement

The authors declare that they have no competing financial interests.

Correspondence and requests for materials should be addressed to G.H. (e-mail: gh@ippg.jussieu.fr).

Résumé

Afin d'étudier la dynamique du noyau terrestre, nous reconstruisons les mouvements à la surface du noyau liquide compatibles avec les observations du champ magnétique. La similitude des mouvements obtenus par deux méthodes indépendantes et les résultats de tests synthétiques confirment la pertinence de ces reconstructions. Deux types d'observations sont utilisées : des observations terrestres couvrant la période 1590-1990 et des observations satellitaires haute-résolution récentes. Une série temporelle des mouvements historiques et un modèle détaillé des mouvements actuels sont obtenus. L'estimation des marges d'erreurs associées permet d'identifier les structures fiables. Nos reconstructions sont en accord avec différents phénomènes mis en évidence par des modélisations 3D du noyau. Nous montrons aussi que les jerks géomagnétiques ont une signature dynamique très nette. Enfin, nous posons les bases d'une méthode d'assimilation variationnelle de données adaptée à l'étude du noyau.

Abstract

In order to study the dynamics of the Earth's outer core, we compute core surface flows from observations of the main magnetic field. The relevance of these computations is confirmed by the similarities of the flows obtained with two independent methods and the results of different synthetic tests. Two different kind of observations are used: ground-based observations for the time period 1590-1990 and recent high-resolution satellite observations. We thus obtain a time series of the historical flows as well as a detailed model of the present flow. The evaluation of errors associated to these flows enable us to identify their reliable features. The velocity fields we obtain are in good agreement with different phenomena appearing in 3D-simulations of core dynamics. We also show that geomagnetic jerks have an explicit signature in core surface dynamics. In the last chapter, a variational data assimilation method for the study of the Earth's core is introduced.