



**HAL**  
open science

# Etude theorique des phases de densite inhomogene dans les systemes a effet Hall quantique

Mark Oliver Goerbig

► **To cite this version:**

Mark Oliver Goerbig. Etude theorique des phases de densite inhomogene dans les systemes a effet Hall quantique. Matière Condensée [cond-mat]. Université Paris Sud - Paris XI, 2004. Français. NNT : . tel-00007072

**HAL Id: tel-00007072**

**<https://theses.hal.science/tel-00007072>**

Submitted on 8 Oct 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Département de Physique  
Université de Fribourg (Suisse)

Université Paris XI  
UFR Scientifique d'Orsay

## Etude théorique des phases de densité inhomogène dans les systèmes à effet Hall quantique

### THESE

en cotutelle, présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Fribourg (Suisse) et à l'Université Paris XI Orsay (France) pour l'obtention du grade de *Doctor rerum naturalium* et du grade de *Docteur en Science de l'Université de Paris XI Orsay*

par

Mark Oliver GOERBIG

de

Hambourg (Allemagne)

Soutenue le 23 septembre 2004 devant la Commission d'examen

Prof. Dionys BAERISWYL

Dr. Benoît DOUÇOT

Prof. Marc GABAY

Dr. Pascal LEDERER

Prof. Cristiane de MORAIS SMITH

Dr. Rudolf MORF

Rapporteur

Président du jury

Directeur de Thèse

Directrice de Thèse

Rapporteur

Numéro de la thèse (Fribourg) :  
1460

Numéro d'ordre (Orsay) :  
7613



Meinen Eltern Bärbel und Lutz,

à Mathilde,

à Anna



## Remerciements

Je remercie Benoît Douçot et Rudolf Morf d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse doctorale, ainsi que Marc Gabay pour sa lecture détaillée du manuscrit. Pendant mon doctorat, j'ai eu la chance de rencontrer beaucoup de chercheurs qui m'ont aidé à tracer peu à peu le chemin de ma recherche : c'est ainsi que, pendant une université d'été en Corse, Ramamurti Shankar a attiré mon attention sur sa théorie hamiltonienne. Merci également à Wei Pan, à Ramesh Mani et à Jim Eisenstein pour des discussions scientifiques très stimulantes et qui m'ont permis d'avoir un échange approfondi avec l'approche expérimentale des systèmes à effet Hall quantique. Du côté des théoriciens, les discussions avec Rudolf Morf et Vincent Pasquier ont été particulièrement enrichissantes, de même que celles avec Daniela Pfannkuche, qui a dirigé une partie de mon travail de diplôme à Hambourg.

Une recherche ne peut réussir que dans un entourage qui réunit à la fois la qualité scientifique et la générosité des rapports humains : la cotutelle m'a permis de travailler dans deux endroits qui correspondent à cet équilibre. Merci à Dionys Baeriswyl pour son accueil chaleureux dans le groupe de physique théorique à Fribourg pendant ces trois dernières années. Merci également à Lara Benfatto et à Vladimir Juricic pour l'amicale ambiance de travail. Du côté d'Orsay, merci à Jean-Paul Pouget de m'avoir accueilli au Laboratoire de Physique des Solides, ainsi qu'à mon "parrain", Nicolas Dupuis. Merci également à Karol Borejsza, non seulement pour une compagnie très agréable mais aussi pour de nombreuses discussions scientifiques dans notre bureau commun. A Fribourg comme à Orsay, les rapports avec les chercheurs et les thésards ont toujours été très agréables : merci à Marcello Rosenau da Costa, Ricardo Doretto et Claude Monney pour une collaboration stimulante et des discussions enrichissantes. J'aimerais remercier également les membres du Département de Physique et du groupe théorique de Fribourg, en particulier mes (anciens) "co-thésards" Vladimir, Benedikt, Christophe, Leo, Andrea, Paolo, Lionel, Joe. Du côté d'Orsay, j'aimerais remercier les membres du Laboratoire de Physique des Solides, notamment Jérôme, Jan Christoph, Eric, Luca, Mahassine, Imen, Nada, Seto, Stéphane, Samy, Aurélie et tous ceux qui ont formé un groupe à la fois très hétérogène et très uni. Comment oublier les séminaires de thésards "secrets", qui ont su éveiller la jalousie et la curiosité des "vieux" ...

J'aimerais enfin remercier tout particulièrement les deux personnes qui ont courageusement dirigé ce travail de thèse. La qualité scientifique des di-

recteurs de recherche est en effet essentielle pour la réussite du thésard, tout autant que leur passion et leur enthousiasme. Cristiane de Morais Smith me les a transmis dès notre premier contact, il y a déjà huit ans, à Hambourg, dans son cours de mécanique théorique - mon premier contact également avec la physique théorique. Merci aussi pour toute son amitié, sa générosité et sa bonne humeur qui ont toujours été une grande motivation pour mon travail scientifique. Depuis deux ans et demi, j'ai aussi la chance de pouvoir travailler avec Pascal Lederer, un chercheur non moins passionné. Merci pour toutes ces nouvelles perspectives scientifiques, intellectuelles et humaines, qui se sont ouvertes pendant notre collaboration, sans oublier les interminables débats politiques et philosophiques ... Je garderai un bon souvenir de cette collaboration à trois, de sa complémentarité à la fois stimulante et harmonieuse, toujours mouvementée, où nul n'a jamais connu l'ennui ni le repos.

Le dernier remerciement est dédié à Mathilde pour tout son amour et son soutien moral pendant ces années de thèse, mais aussi pour son courage d'avoir lu et corrigé ce manuscrit jusqu'à la dernière virgule.

## Résumé

*La physique de l'effet Hall quantique - l'étude des électrons bidimensionnels sous un champ magnétique fort - a révélé, pendant ces deux dernières décennies, nombre de phénomènes inattendus. Les plus remarquables sont les deux effets Hall quantiques, entier et fractionnaire (Prix Nobel respectivement en 1985 et 1998), qui ont été identifiés comme des phénomènes quantiques macroscopiques - avec la supraconductivité, la suprafluidité, deux des rares exemples connus. D'un point de vue théorique, ces systèmes font partie de la classe des systèmes électroniques à corrélations fortes : l'interaction Coulombienne, qui peut souvent être traitée comme une petite perturbation, devient l'échelle d'énergie pertinente, un grand défi pour une compréhension théorique mais aussi la source d'une extrême richesse du diagramme de phase. En quelque sorte, les systèmes à effet Hall quantique constituent une limite de corrélations infinies à cause de la quantification de Landau : tous les états du même niveau ont la même énergie cinétique. Dans le contexte du modèle de Hubbard, cela correspond à la limite d'une bande d'énergie infiniment plate, avec un paramètre de saut qui est zéro. Lorsque les électrons sont restreints à un seul niveau de Landau, on rencontre à la fois des phases électroniques solides, comme le cristal de Wigner, d'étranges phases d'îlots - des cristaux avec plusieurs électrons par site - et des phases de rubans, ainsi que des phases liquides quantiques de natures diverses. La description de ces dernières, qui sont à l'origine de l'effet Hall quantique fractionnaire, a nécessité l'introduction de nouveaux concepts théoriques qui n'avaient auparavant pas été utilisés en physique de la matière condensée. En effet, la fractionnalisation des nombres quantiques est mieux connue en physique des particules pour la description des quarks, qui semblent, à l'heure actuelle, être les constituants fondamentaux de la matière. Dans ce sens, les quasi-particules des liquides quantiques, portant une charge fractionnaire, ressemblent aux quarks même si ces derniers sont trouvés à de hautes énergies tandis que l'effet Hall quantique fractionnaire est un phénomène de basse énergie. Ces quasi-particules ont trouvé une classification dans la théorie des fermions composites, qui nous permet de comprendre l'effet Hall quantique fractionnaire d'électrons comme un effet Hall quantique entier de ces fermions composites. Un état d'effet Hall quantique fractionnaire de fermions composites, qui a récemment été observé de façon inattendue, indique la possibilité fascinante de générations d'ordre plus élevé de ces quasi-particules.*

*L'objet de cette thèse doctorale est précisément la description théorique de ces phases (chapitre 3 de cette thèse). Un calcul d'énergie des différentes phases électroniques a permis de comprendre une expérience récente qui a mis en évidence une réentrance de l'effet Hall quantique entier. Des transitions de phase multiples, entre phases électronique solides isolantes et liquides quantiques, en fonction*



du champ magnétique sont à l'origine de ce comportement non-monotone de la résistance de Hall. Sur la base de ces calculs, des transitions de premier ordre ont été prédites, ce qui a très récemment été confirmé dans des expériences de transport électronique sous irradiation micro-onde : une coexistence entre un cristal de Wigner et une phase d'îlot avec deux électrons par site donne lieu à deux résonances dans la conductivité optique pour la même valeur du champ, qui correspond à un point de la région de transition.

Un autre objet de cette thèse est la déduction d'un modèle de fermions composites en interaction dans le cadre d'une théorie hamiltonienne de l'effet Hall quantique fractionnaire (chapitre 2). Dans le passé, cette dernière a permis un traitement analytique de ce dernier phénomène, qui nécessite sinon des calculs numériques techniquement très élaborés. Le modèle de fermions composites en interaction a la même structure mathématique que le modèle originel d'électrons, duquel il a été déduit par une série de transformations, ce qui permet d'étudier l'auto-similarité de l'effet Hall quantique. En analogie avec le cas électronique, la compétition de différentes phases de fermions composites est analysée dans des calculs d'énergie dans le cadre du modèle (chapitre 4) et donne naissance à des plateaux d'effet Hall quantique inattendus, mais observés expérimentalement. Pour ces derniers plateaux, les liquides quantiques peuvent être interprétés comme la manifestation de fermions composites d'une deuxième génération. Des transitions de phases multiples entre ces phases et des solides de fermions composites, qui ont été mises en évidence dans cette thèse, pourraient donner lieu à un phénomène observable de réentrance dans le régime de l'effet Hall quantique fractionnaire.

## Abstract

Quantum Hall physics - the study of two-dimensional (2D) electrons in a strong magnetic field - has revealed a lot of unexpected phenomena during the last decades. Most saliently, the integral and the fractional quantum Hall effect (Nobel Prizes in 1985 and 1998, respectively) have been identified as macroscopic quantum phenomena, along with superconductivity and superfluidity - two of such known instances. From a theoretical point of view, these systems belong to the class of strongly-correlated electron systems : the Coulomb interaction, which may often be treated as a small perturbation, becomes the relevant energy scale - a challenge for the theoretical understanding but also the source of a rich variety of phases. In a certain sense, quantum Hall systems constitute a limit of infinite correlations because of the Landau quantisation : all states of the same level have the same kinetic energy. In the context of the Hubbard model, this corresponds to the infinitely flat band level, with a hopping parameter which is zero. Electron-solid phases, such as the Wigner crystal, strange bubble phases - crystals with several electrons per lattice site - and stripe phases, are found in quantum-Hall systems, as well as quantum-liquid phases if the electrons are restricted to a single Landau level. For the description of the latter, which are at the origin of the fractional quantum Hall effect, new concepts had to be introduced, which so far had not been used in the study of condensed matter physics. Indeed, fractionalization of quantum numbers is better known in the context of elementary-particle physics for the description of quarks, which, at present, appear to be one of the fundamental constituents of matter. The fractionally charged quasi-particle excitations of the quantum liquids are in this sense reminiscent of quarks with the caveat that quarks appear at high energies, whereas the fractional quantum Hall effect is a low-energy phenomenon. These quasi-particles may be classified in the theory of composite fermions, which allows us to understand the fractional quantum Hall effect of electrons as an integer quantum Hall effect of these composite fermions. A recently observed unexpected fractional quantum Hall effect of composite fermions indicates the fascinating possibility of higher generations of these quasi-particles.

The theoretical description of these phases is precisely one of the aims of this doctoral thesis (Chapter 3). The energy calculation of the different electron phases sheds light on a recent experiment which exhibits a reentrance of the integer quantum Hall effect. Multiple phase transitions between insulating electron-solid and quantum-liquid phases, as a function of the magnetic field, are at the origin of this non-monotonic behaviour of the Hall resistance. On the basis of these calculations, first-order phase transitions have been predicted - a scenario which has recently been confirmed in electronic-transport measurements under micro-wave irradiation. A coexistence between a Wigner crystal and a two-electron bubble phase

leads to the presence of two peaks in the frequency-dependent conductivity at the same value of the magnetic field, which corresponds to a point in the transition region.

Another issue of this thesis is the derivation of an interacting-composite-fermion model in the framework of the Hamiltonian theory of the fractional quantum Hall effect (Chapter 2). In the past, this theory has permitted an analytical treatment of this phenomenon, which otherwise requires highly technical numerical calculations. The interacting-composite-fermion model has the same mathematical structure as the original electronic one, from which it has been derived in a set of transformations, and allows one to study the self-similarity of the quantum Hall effect. In analogy with the electronic case, the competition between different composite-fermion phases is analysed by energy calculations within the model (Chapter 4) and gives rise to unexpected, yet observed, plateaus in the Hall resistance. For these plateaus, the emerging quantum liquids may be interpreted as a manifestation of a second generation of composite fermions. Multiple phase transitions between these phases and composite-fermion solids, which have been found in this thesis, may give rise to an observable reentrance phenomenon in the fractional quantum Hall effect regime.

## Zusammenfassung

Quanten-Hall-Physik, das Untersuchen von zweidimensionalen Elektronensystemen unter dem Einfluss eines starken Magnetfeldes, hat während der letzten zwei Jahrzehnte eine Anzahl neuer Phänomene hervorgebracht. Die beiden auffälligsten sind der ganz- und der gebrochenzahlige Quanten-Hall-Effekt (Nobelpreise jeweils 1985 und 1998), die als makroskopische Quantenphenomäne haben identifiziert werden können, ebenso wie die Supraleitung und die Suprafluidität - zwei der wenigen bekannten Beispiele dieses Phänomens. Von einem theoretischen Standpunkt aus betrachtet, handelt es sich bei Quanten-Hall-Systemen um Elektronensysteme mit starken Korrelationen : Die Coulomb-Wechselwirkung, die häufig als eine kleine Störung behandelt werden kann, stellt hier die relevante Energieskala dar - eine grosse Herausforderung für ein theoretisches Verständnis des Systems, aber auch die Quelle eines großen Reichtums an verschiedenen Phasen. In einem gewissen Sinne sind Quanten-Hall-Systeme sogar aufgrund der Landauquantisierung der Grenzfall unendlich starker Korrelationen : sämtliche Zustände desselben Niveaus haben die gleiche kinetische Energie. Mit Hinblick auf das Hubbardmodell entspricht dies dem Grenzfall eines unendlich flachen Energiebandes mit einem verschwindenden Sprungparameter. Sofern die Dynamik der Elektronen auf ein einzelnes Landauniveau beschränkt ist, werden Elektronenkristallphasen, wie der Wignerkristall, seltsame Blasenphasen - Kristalle mit mehreren Elektronen pro Gitterplatz - und Streifenphasen, angetroffen, ebenso wie Quantenflüssigkeiten unterschiedlicher Natur. Die Beschreibung letzterer, die den gebrochenzahligen Quanten-Hall-Effekt verursachen, bedingte das Einführen neuer theoretischer Konzepte, die der Physik der kondensierten Materie zuvor fremd gewesen waren. In der Tat ist die Fraktionalisierung von Quantenzahlen vielmehr ein Konzept der Elementarteilchenphysik zur Beschreibung der Quarks, die die eigentlichen Konstituenten der Materie zu sein scheinen. Die Quasiteilchen der Quantenflüssigkeiten mit fraktioneller Ladung sind in diesem Sinne den Quarks ähnlich, auch wenn letztere bei hohen Energien angetroffen werden, wohingegen der gebrochenzahlige Quanten-Hall-Effekt ein Tieftemperaturphänomen ist. Diese Quasiteilchen können im Rahmen der Theorie der "Composite Fermions" klassifiziert werden, die es uns ermöglicht, den gebrochenzahligen Quanten-Hall-Effekt der Elektronen als einen ganzzahligen eben dieser "Composite Fermions" zu verstehen. Ein gebrochenzahliger Quanten-Hall-Effekt von "Composite Fermions", der kürzlich beobachtet wurde, lässt die faszinierende Möglichkeit einer höherer Generationen dieser Quasiteilchen vermuten.

Die theoretische Beschreibung dieser Phasen ist genau ein Thema dieser Doktorarbeit (Kapitel 3). Energierechnungen für die verschiedenen Phasen haben es ermöglicht ein kürzlich veröffentlichtes Experiment zu verstehen, das eine Wie-

der Eintritt des ganzzahligen Quanten-Hall-Effektes bei mittleren Feldstärken aufzeigte. Multiple durch das Magnetfeld bestimmte Phasenübergänge zwischen isolierenden Elektronenkristallen und Quantenflüssigkeiten sind der Ursprung dieses nichtmonotonen Verhaltens des Hallwiderstandes. Auf der Grundlage dieser Rechnungen sind Phasenübergänge erster Ordnung vorhergesagt worden - ein Szenario, das kürzlich durch Elektronentransportmessungen unter Mikrowellenbestrahlung gestützt wurde : Eine Koexistenz von einem Wignerkristall und einer Blasenphase mit zwei Elektronen pro Gitterplatz erzeugt zwei Resonanzen in der frequenzabhängigen Leitfähigkeit bei festem Magnetfeldwert, der einem Punkt des Übergangsbereiches entspricht.

Ein weiteres Thema dieser Doktorarbeit ist die Ableitung eines Modells wechselwirkender "Composite Fermions" im Rahmen einer Hamilton'schen Theorie des gebrochenzahligen Quanten-Hall-Effektes. Letztere erwies sich als fruchtbar in der analytischen Beschreibung des Phänomens, dessen Untersuchung ansonsten technisch aufwendige numerische Berechnungen erfordert. Das Modell wechselwirkender "Composite Fermions" weist die gleiche mathematische Struktur auf wie das ursprüngliche Modell wechselwirkender Elektronen, was somit eine Untersuchung der Selbstähnlichkeit des Quanten-Hall-Effektes ermöglicht. In Analogie mit dem Elektronenmodell werden die verschiedenen "Composite-Fermion"-Phasen mittels Energieberechnungen im Rahmen des abgeleiteten Modells untersucht. Die auftretenden Quantenflüssigkeiten können als "Composite Fermions" der zweiten Generation aufgefasst werden. Multiple Phasenübergänge zwischen diesen und aus "Composite Fermions" gebildeten Kristallphasen, die in dieser Doktorarbeit zu finden sind, können zu dem möglichen Phänomen eines Wiedereintritts des gebrochenzahligen Quanten-Hall-Effektes führen.

# Table des matières

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>   | <b>15</b> |
| 1.1      | Motivation du travail de doctorat . . . . .   | 15        |
| 1.1.1    | Systèmes à effet Hall quantique et systèmes<br>d'électrons fortement corrélés . . . . .                             | 15        |
| 1.1.2    | Enjeux de cette thèse doctorale . . . . .   | 18        |
| 1.2      | Préliminaires . . . . .   | 26        |
| 1.2.1    | L'EHQE - un effet à une particule . . . . .   | 26        |
| 1.2.2    | L'EHQF - un effet à $N$ particules . . . . .  | 31        |
| <b>2</b> | <b>Auto-similarité dans le modèle d'électrons restreint à un seul<br/>niveau</b>                                    | <b>43</b> |
| 2.1      | Déduction du modèle . . . . .   | 44        |
| 2.2      | Le potentiel d'interaction effectif . . . . .   | 46        |
| 2.3      | La base des Fermions Composites dans la théorie hamiltonienne   | 55        |
| 2.4      | Une possible approche diagrammatique . . . . .  | 60        |
| 2.5      | Le modèle de FC en interaction à $\nu^* \neq p$ . . . . .   | 65        |
| <b>3</b> | <b>Phases électroniques solides et liquides dans des niveaux de<br/>Landau intermédiaires</b>                       | <b>69</b> |
| 3.1      | Solides électroniques dans l'approximation de Hartree-Fock . . .  | 70        |
| 3.1.1    | Energie des phases d'îlots . . . . .  | 71        |
| 3.1.2    | Energie des phases de rubans . . . . .  | 72        |
| 3.2      | Liquides quantiques . . . . .   | 73        |
| 3.2.1    | Energie des liquides de Laughlin à $\bar{\nu} = 1/(2s + 1)$ . . .   | 73        |
| 3.2.2    | Energie des liquides à $\bar{\nu} \neq 1/(2s + 1)$ : excitations de<br>quasi-particules et de quasi-trous . . . . . | 75        |
| 3.3      | Comparaison des énergies dans $n = 1, 2$ et $3$ . . . . .   | 76        |
| 3.3.1    | Résultats pour $n = 1$ . . . . .  | 79        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 3.3.2    | Résultats pour $n = 2$ . . . . .  | 84         |
| 3.3.3    | Résultats pour $n = 3$ . . . . .  | 88         |
| 3.3.4    | Approximation du potentiel d'échange . . . . .  | 89         |
| 3.3.5    | Effets d'impuretés . . . . .  | 89         |
| 3.3.6    | Diagramme de phase - comparaison aux arguments<br>d'échelle . . . . .                                   | 93         |
| 3.4      | Transitions de phases et expériences . . . . .  | 93         |
| <b>4</b> | <b>Fermions Composites de deuxième génération et phases so-<br/>lides de Fermions Composites</b>        | <b>99</b>  |
| 4.1      | Le potentiel d'interaction des FC . . . . .   | 102        |
| 4.2      | Energies des différentes phases de FC . . . . .   | 105        |
| 4.2.1    | Les phases pour $1/3 \leq \nu \leq 2/5$ ( $s = 1$ et $p = 1$ ) . . . .                                  | 107        |
| 4.2.2    | Les phases pour $2/5 \leq \nu \leq 3/7$ ( $s = 1$ et $p = 2$ ) . . . .                                  | 109        |
| 4.2.3    | Les phases pour $1/5 \leq \nu \leq 2/9$ ( $s = 2$ et $p = 1$ ) . . . .                                  | 110        |
| 4.3      | Gaps d'activation des états FC <sup>2</sup> . . . . .   | 111        |
| 4.3.1    | Excitations collectives à $4/11$ - approximation à un seul<br>mode . . . . .                            | 115        |
| <b>5</b> | <b>Conclusions et perspectives</b>  | <b>119</b> |
| 5.1      | Conclusions . . . . .   | 119        |
| 5.2      | Perspectives pour un travail futur . . . . .  | 123        |
| <b>A</b> | <b>Eléments de matrice</b>  | <b>133</b> |
| A.1      | L'élément de matrice<br>$\langle n, m   \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})   n', m' \rangle$ . . . . . | 133        |
| A.2      | Eléments de matrice dans la base de FC . . . . .  | 135        |
| <b>B</b> | <b>Détails de l'approche diagrammatique</b>   | <b>137</b> |
| B.1      | Niveaux de FC - le hamiltonien "libre" . . . . .  | 137        |
| B.2      | Calcul de la fonction de Green<br>de l'opérateur de densité projeté . . . . .                           | 138        |
| <b>C</b> | <b>Hamiltonien électronique dans l'approximation de Hartree-<br/>Fock</b>                               | <b>141</b> |

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Motivation du travail de doctorat

#### 1.1.1 Systèmes à effet Hall quantique et systèmes d'électrons fortement corrélés

Deux décennies après la découverte de l'effet Hall quantique entier (EHQE, en 1980) [1] et fractionnaire (EHQF, en 1983) [2], les systèmes bidimensionnels d'électrons soumis à un champ magnétique perpendiculaire restent un domaine de recherche intense tant au niveau expérimental que théorique [3]. Dans des échantillons de la meilleure qualité obtenue jusqu'à maintenant, les physiciens ont réussi à augmenter la mobilité  $\mu$  des électrons à l'interface des hétéro-structures de GaAs/AlGaAs, qui constitue un des prototypes dans lesquels un gas bidimensionnel d'électrons est réalisé, jusqu'à  $\mu \simeq 30 \times 10^6 \text{cm}^2/\text{Vs}$ . Cette mobilité accrue permet l'observation d'une structure beaucoup plus fine dans les courbes de résistance que celle trouvée au moment de la découverte de ces effets dans les années 80. Empruntant un terme du langage de la spectroscopie, une meilleure "résolution" est maintenant accessible, et il semble que le plafond ne soit pas encore atteint.

L'observation des effets Hall quantiques, notamment de l'EHQF, fait partie des découvertes qui ont bouleversé notre compréhension du fluide électronique en physique de la matière condensée. En effet, le comportement collectif des électrons dans les métaux a été décrit avec succès dans la théorie de Landau du liquide de Fermi [4] : les interactions entre électrons modifient *adiabatement* l'état fondamental déduit dans un modèle de par-



ticules libres, c'est-à-dire qu'elles peuvent être considérées comme une perturbation qui renormalise les paramètres du modèle sans interactions. D'un point de vue technique, les principales méthodes utilisées dans ce contexte sont la théorie de perturbation (les diagrammes de Feynman) et la théorie du groupe de renormalisation. La supraconductivité des métaux a également trouvé une explication dans le cadre des liquides de Fermi avec la théorie BCS (Bardeen-Cooper-Schrieffer) : à basse température, la mer de Fermi devient instable vers la formation de paires d'électrons, due à une attraction effective causée par échange de *phonons*, quanta des vibrations du réseau cristallin [5]. Les paires d'électrons, obéissant à une statistique bosonique, condensent dans un état suprafluide qui est à l'origine de la supraconductivité. Les liquides de Fermi semblaient donc être le point de départ inévitable pour la description du comportement collectif des électrons. A cette époque, les conducteurs unidimensionnels, qui sont plus correctement décrits par le concept du liquide de Luttinger, constituent la seule exception connue, avec les isolants de Mott et la physique de l'<sup>3</sup>He solide.

Cette image théorique n'a pas seulement été mise en cause par la découverte de l'EHQF mais aussi par celle de la supraconductivité à haute température critique par Bednorz et Müller en 1986 [6]. Les matériaux qui exhibent ce dernier phénomène consistent en des plans de cuivre-oxygène faiblement couplés et constituent donc un système quasi-bidimensionnel. Ils possèdent un diagramme de phase très varié en fonction de la température et du dopage, ce dernier étant la densité de trous dans les plans de cuivre-oxyde ; la plupart des phases ne se comprennent guère en termes de liquide de Fermi. En effet, ce dernier est trouvé uniquement à haute densité de trous. A faible dopage, ces systèmes sont des antiferromagnétiques isolants, tandis qu'à dopage intermédiaire, on trouve des liquides de spin, une phase supraconductrice et, à plus haute température, un métal *étrange* avec des propriétés très différentes d'un liquide de Fermi. Même si, à première vue, les matériaux qui révèlent cette forme de supraconductivité paraissent peu semblables aux hétéro-structures de semiconducteurs, dans lesquelles on observe les effets Hall quantiques, la physique des deux phénomènes est contrôlée par la présence de *corrélations fortes* entre les électrons. Contrairement au cas du liquide de Fermi, leurs interactions mutuelles ne peuvent donc être traitées comme une perturbation qui modifie un état fondamental obtenu pour des électrons libres, mais elles déterminent ce dernier. Un autre système, dont les propriétés sont affectées de façon essentielle par des corrélations fortes, avait été étudié peu avant les découvertes de l'EHQF et de la supraconducti-

tivité à haute température critique. Il s'agit des matériaux de *fermions lourds*, où les interactions entre électrons causent une augmentation de la masse électronique d'environ un facteur 100 dans la phase conductrice [7]. En raison d'une haute densité de moments magnétiques, cette phase fait place à une phase isolante avec un ordre antiferromagnétique sous certaines conditions expérimentales (par exemple sous pression ou application d'un champ magnétique).

D'un point de vue théorique, ces découvertes ont nécessité de *nouveaux concepts* pour traiter ces nouveaux phénomènes [8]. La méthode la plus intuitive s'est avérée être également la plus réussie : elle consiste à *deviner* une fonction d'onde à  $N$  particules pour l'état fondamental. C'est le chemin qui a mené Laughlin au Prix Nobel en 1983. Il a correctement deviné une telle fonction d'essai pour décrire l'EHQF [9]. C'est aussi dans le contexte de la supraconductivité à haute température critique que cette méthode a trouvé son application. En 1987, Anderson a proposé une fonction d'onde qui décrit des paires d'électrons dans un état singulet de spin sur des sites voisins de cuivre [10]. Cet état consiste en des *liens de valence résonants* et ressemble à une fonction d'onde du type BCS, où la *projection de Gutzwiller* interdit une double occupation de chaque site sur lequel les électrons ressentent précisément une forte répulsion coulombienne. Cette fonction est censée décrire l'état fondamental d'un modèle effectif, le modèle de Hubbard. L'étude de tels modèles effectifs, qui caractérisent des excitations de basse énergie en présence de corrélations fortes et qui sont parfois empruntés aux théories des champs quantiques, a suscité plus d'intérêt après les découvertes des années 80. Dans le contexte des systèmes à effet Hall quantique, ce sont les théories de Chern-Simons qui ont été utilisées avec le plus grand succès [11, 12, 13]. Ces théories ont mis en évidence nombre de phénomènes étranges, qui sont liés à leur caractère *topologique*, comme la fractionnalisation de la charge et la statistique fractionnaire satisfaite par les excitations élémentaires des liquides électroniques.

Un nouveau concept, émergeant des études de ces modèles effectifs, est celui des *transitions de phase quantiques* et du *point critique quantique* [14]. Contrairement à leur cousin classique, les transitions de phase quantiques ont lieu à température nulle et sont contrôlées par un paramètre différent de la température. Dans le contexte des fermions lourds, où ce concept a trouvé un vaste champ d'application [8, 14], ce paramètre peut être une pression variable, un champ magnétique appliqué ou le dopage chimique des matériaux. Le point critique quantique sépare une phase antiferromagnétique

isolante d'une phase conductrice. A température finie, il évolue en une région "critique quantique" sur une gamme plus large du paramètre de contrôle. Le concept des transitions de phase quantiques a également été appliqué au cas des matériaux supraconducteurs à haute température critique, où la phase supraconductrice couvrirait éventuellement un point critique quantique qui sépare une phase de liquide de spin d'une phase métallique (liquide de Fermi). Dans ce scénario, le métal étrange est associé à la région critique quantique. Pourtant, on ignore encore si le point critique quantique est un concept pertinent pour la compréhension de la phase supraconductrice dans ces matériaux.

### 1.1.2 Enjeux de cette thèse doctorale

Quand j'ai entrepris ce doctorat, l'état de la recherche sur les systèmes à effet Hall quantique était le suivant : la théorie avait su classifier les paliers connus dans la résistance transverse, dite de Hall, qui, à basse température, sont la signature de l'effet Hall quantique avec une résistance longitudinale nulle (Fig. 1.1). Tandis que l'EHQE, qui est trouvé à des rapports  $\nu = n_{el}/n_B$  entiers entre la densité surfacique d'électrons  $n_{el}$  et la densité de flux  $n_B = eB/h$ , peut être compris comme un effet à une particule, l'EHQF est dû aux corrélations fortes entre électrons. L'EHQF à  $\nu = 1/(2s + 1)$ , où  $s$  est un entier, a été expliqué avec succès en 1983 par Laughlin, qui a trouvé une fonction d'onde à  $N$  particules, tenant compte des corrélations [9]. Cette fonction d'essai, qui a un recouvrement de plus de 99% avec l'état fondamental obtenu par diagonalisation exacte, décrit un liquide quantique incompressible. Les états fractionnaires observés à  $\nu = p/(2sp + 1)$ , où  $p$  est un autre entier, ont trouvé une explication par une généralisation des fonctions de Laughlin, proposée par Jain en 1989 [15]. On lui doit de plus l'image des fermions composites (FCs) selon laquelle chaque électron forme un état lié avec un objet de type vortex qui porte  $2s$  quanta de flux. Dans cette image, l'EHQF serait un EHQE de FCs.

Tandis que ces FCs sont trouvés à haut champ magnétique, les corrélations entre électrons se manifestent différemment à des champs plus faibles : des calculs dans l'approximation de Hartree-Fock ont indiqué qu'une partie des électrons formait des phases solides avec une densité électronique inhomogène [17, 18]. Deux phases ont été prédites : un cristal de Wigner avec plusieurs électrons par site, aussi appelé "phase d'îlots" ou "phase de bulles", et une phase de rubans autour des valeurs  $\nu = N + 1/2$ , avec l'entier  $N \gg 1$

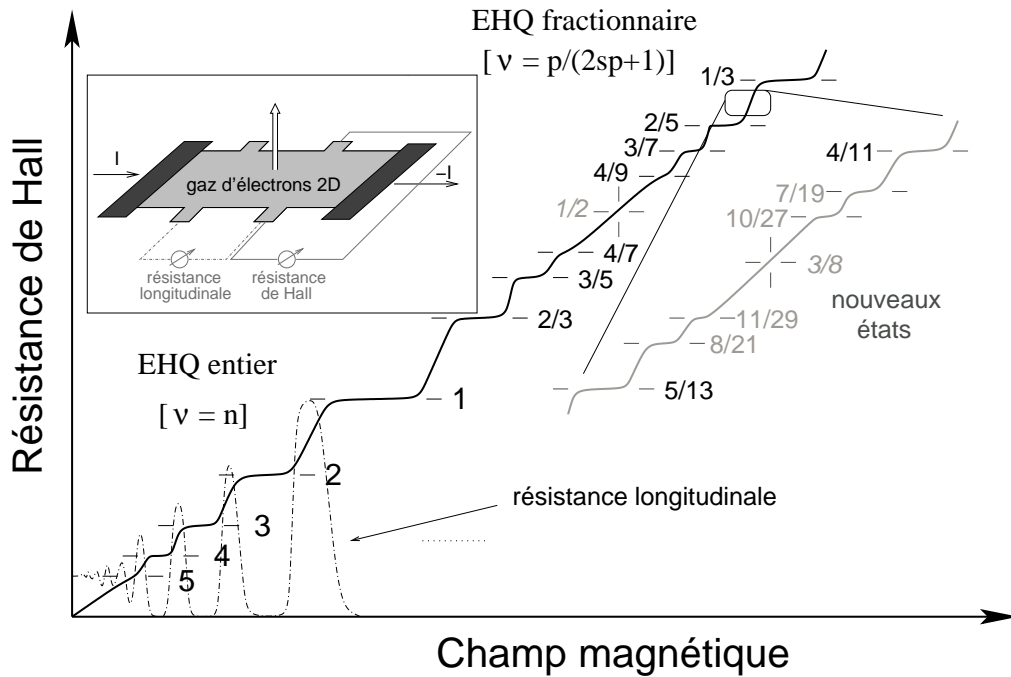


FIG. 1.1 – Esquisse de l’effet Hall quantique. Au lieu d’une dépendance linéaire en fonction du champ magnétique (effet Hall classique), la résistance de Hall montre des paliers autour de certaines valeurs du champ. Les paliers sont accompagnés d’une résistance longitudinale zéro (courbe en pointillé; la courbe n’est esquissée que pour des champs faibles, mais cette structure de zéros successifs persiste à des champs plus forts.) Si le rapport  $\nu = n_{el}/n_B$  entre la densité électronique et la densité de flux est entier,  $\nu = n$ , on parle de l’EHQE, tandis que l’EHQF est déterminé par  $\nu = p/(2sp + 1)$  avec des entiers  $s$  et  $p$ . Les états de l’EHQF à  $\nu = 1 - p/(2sp + 1)$  sont reliés aux états à  $\nu = p/(2sp + 1)$  par la symétrie particule-trou. L’agrandissement de la courbe entre  $\nu = 2/5$  et  $1/3$  montre une structure fine et son autosimilarité, qui a trouvé une vérification expérimentale avec l’observation de l’état  $4/11$  par Pan *et al.* [26]. Les états en gris clair n’ont pas encore été observés. *Encadré* : système bidimensionnel d’électrons sous champ magnétique. Le courant  $I$  passe par les deux contacts noirs. La résistance longitudinale est mesurée par deux contacts au même bord, et la résistance de Hall par deux contacts sur les deux bords opposés.

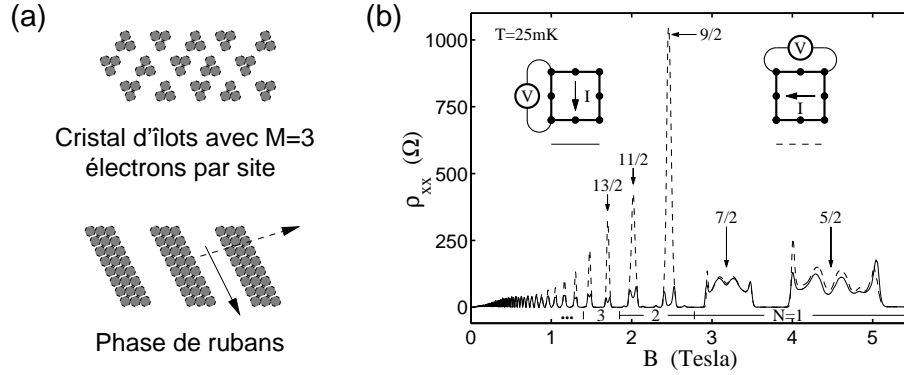


FIG. 1.2 – (a) Esquisse de la phase d’îlots avec  $M$  électrons par site (ici :  $M = 3$ ) et de la phase de rubans. (b) Anisotropie de la résistance longitudinale mesurée par Eisenstein *et al.* [19]. A  $\nu = 9/2, 11/2, 13/2, \dots$ , la résistance longitudinale montre une forte anisotropie par rapport à deux axes cristallographiques équivalents. Cela constitue une preuve indirecte de la formation de rubans : un électron est facilement transporté d’un bord à l’autre s’ils sont connectés par un ruban, ce qui donnerait lieu à une résistance faible (ligne continue). Perpendiculairement aux rubans, un électron ne peut être transporté que par effet tunnel, et l’on trouve une grande résistance (ligne en pointillé).

[Fig. 1.2(a)]. La prédiction théorique de formation de rubans a trouvé une vérification expérimentale avec l’observation d’une forte anisotropie dans la résistance longitudinale à  $\nu = 9/2, 11/2, 13/2, \dots$  [19], dont les résultats sont montrés dans la figure 1.2(b). Après sa découverte, cette anisotropie a suscité nombre de nouvelles études théoriques : Fradkin et Kivelson ont proposé que des fluctuations de la forme des rubans donnerait lieu à des phase de cristaux-liquides, qui restaureraient en partie les symétries brisées par la formation des rubans [20]. Les propriétés de transport d’une phase nématique ont été étudiées suite à cette proposition dans un modèle XY [21, 22] et dans une approche de Chern-Simons [23]. Les fluctuations de la phase de rubans ont également été examinées dans une théorie effective de liquides de Luttinger couplés [24]. Toutes ces études sont basées sur un développement des propriétés dynamiques à partir de la solution trouvée au niveau de l’approximation de champ moyen, qui donne précisément une phase de rubans statiques [17, 18].

Ce qui manquait dans la compréhension théorique était un lien entre phases électroniques solides et liquides incompressibles. Car même si les deux phases sont dues toutes les deux à la répulsion coulombienne entre électrons et ont comme base commune le même hamiltonien, l’approximation de Hartree-

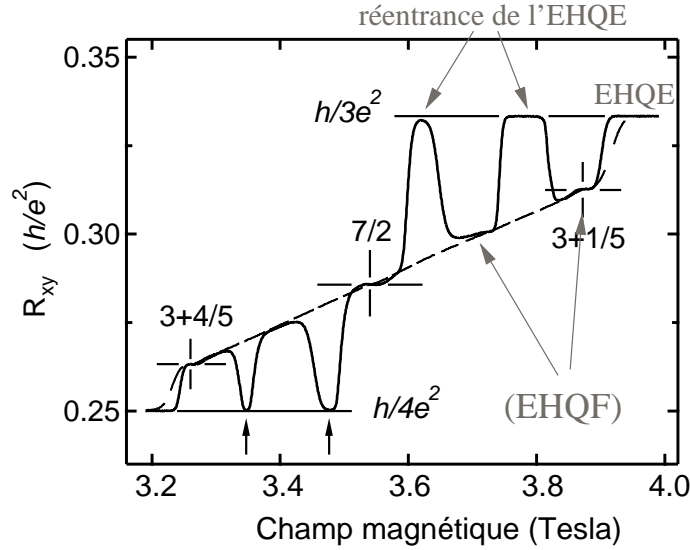


FIG. 1.3 – Réentrance de l’EHQE, mesurée par Eisenstein *et al.* [25].

Fock, qui fournit une description fiable des phases solides, est condamnée à l’échec dans le cas des liquides quantiques. Ce lien était une des motivations de ce travail de doctorat.

Pendant ces trois dernières années, deux observations ont marqué la suite de mes études. Un effet de réentrance de l’EHQE fut observé en 2001/2002 par Eisenstein *et al.* [25] : au lieu d’un comportement monotone de la résistance de Hall à l’endroit d’un saut d’un palier au palier voisin, comme esquissé dans la figure 1.1, on trouve que la résistance, quantifiée autour de 4T, saute d’abord, lorsqu’on abaisse le champ magnétique, sur un palier d’EHQF autour de  $\nu = 3 + 1/5$ , avant de retrouver sa valeur initiale à des valeurs du champ légèrement plus basses (Fig. 1.3). Ce comportement se répète autour de  $\nu = 3 + 1/3$  et est symétrique autour de  $\nu = 3 + 1/2$ . L’effet de réentrance indique une alternance de phases électroniques liquides, présentes autour de  $\nu = 3 + 1/5$  et  $3 + 1/3$ , et solides, qui donneraient lieu à l’EHQE. La deuxième expérience importante pour ce travail de thèse a été la découverte d’un EHQF à  $\nu = 4/11$  par Pan *et al.* en 2002 [26]. Cet état ne figure pas dans la série d’états proposée par Jain,  $\nu = p/(2sp + 1)$ , et constitue donc un défi pour la théorie de FCs ainsi que pour l’interprétation de l’EHQF comme un EHQE de cette sorte de particules. En effet, ce nouvel état est vu comme un EHQF de FCs [26]. La découverte de l’état  $4/11$  a de plus attiré l’attention sur l’au-

tosimilarité de l'EHQF et la structure fractale de la courbe de résistance de Hall, qui avait donné lieu à l'hypothèse de l'existence de cet état avant son observation [27].

Comme je l'ai indiqué plus haut, ce travail de thèse était principalement motivé par le lien entre les phases liquides quantiques, qui montrent l'EHQF, et les phases électroniques solides. Dans un premier temps, nous avons cherché à établir ce lien dans une analyse des excitations collectives du liquide quantique. Ces excitations sont séparées par un gap d'énergie de l'état fondamental, décrit par une fonction de Laughlin à  $\nu = 1/(2s + 1)$ . Or la dispersion des excitations montre un minimum, appelé minimum de *magnéto-roton*, à des vecteurs d'onde finis, qui peut être interprété comme une indication d'instabilité du liquide vers la formation d'un état avec une densité de charge modulée. La période de cette modulation étant déterminée par le vecteur d'onde au minimum de magnéto-roton coïncide avec le module du vecteur du réseau réciproque du cristal de Wigner, dont la formation est attendue à de très basses densités ( $\nu \ll 1$ ). En effet, les études théoriques de Girvin *et al.* dans l'approximation à un seul mode ont montré que le gap de magnéto-roton est abaissé si  $s$  augmente, c'est-à-dire quand  $\nu$  devient plus petit [28]. Nous avons généralisé cette approche pour le cas où  $\nu = N + \bar{\nu}$ , avec  $\bar{\nu} = 1/(2s + 1)$  [29]. On s'attendrait à trouver une semblable instabilité des liquides quantiques, mais dans ce cas vers la formation d'un cristal d'îlot. En accord avec des études antérieures dans le cadre de la théorie des FCs [30], nous avons trouvé que le vecteur d'onde au minimum de magnéto-roton est indépendant de  $N$ . La dispersion ne montre donc que des indications d'une instabilité vers la formation d'un cristal de Wigner avec un électron par site. Il ne s'agit pas d'une véritable instabilité, car le gap au minimum de magnéto-roton ne devient pas nul ou négatif. En revanche, une modulation de la densité de charge se révèle dans la susceptibilité statique, qui a des maxima à des vecteurs d'onde  $q_0$  variant comme on l'attendrait à partir des calculs de Hartree-Fock pour le cristal d'îlots,  $q_0 \sim 1/\sqrt{N}$  [17, 18].

Une autre façon d'établir le lien entre phases liquides et solides a été trouvée grâce à la mise en évidence d'une loi d'échelle [31] : même si les excitations de plus basse énergie ne sont déterminées que par l'échelle des interactions de Coulomb entre électrons, deux échelles de longueur sont pertinentes. La première est la distance moyenne  $d \propto 1/\sqrt{\bar{\nu}}$  entre les électrons, qui participent à la formation de ces phases liquides ou solides, et la deuxième est donnée par le rayon cyclotron  $R_C \propto \sqrt{N}$ . Ce dernier définit un rayon d'interaction forte entre électrons, qui se manifeste à des distances  $r < 2R_C$ . A

des distances plus grandes, les électrons interagissent par le potentiel de Coulomb habituel, qui varie comme  $1/r$ . On peut ainsi distinguer trois régimes ( $d \gg 2R_C$ ,  $d \ll 2R_C$  et  $d \sim 2R_C$ ) qui sont associés à des phases différentes. Dans le cas où  $d \gg 2R_C$ , les électrons peuvent être traités comme des objets classiques, qui forment un cristal de Wigner à cause de leur répulsion mutuelle. La limite  $d \ll 2R_C$  est associée aux phases d'îlots et de rubans. En effet, il s'agit d'une limite de champ moyen, car une particule choisie au hasard interagit fortement avec un grand nombre de particules voisines. Pour cette raison, l'approximation de Hartree-Fock devient plus fiable, et un critère de validité de cette approximation a été trouvé dans le cadre de cette analyse d'échelle [31]. Les liquides quantiques peuvent être associés à la limite  $d \sim 2R_C$ , dans laquelle des approches de champ moyen perdent leur validité. Ce raisonnement en échelles de longueur a permis d'esquisser un diagramme de phase, qui reproduit l'essentiel du diagramme de phase observé.

Or, comme je l'ai mentionné dans un paragraphe précédent, le phénomène de la réentrance de l'EHQE indique une alternance entre phases liquides et solides. Cette alternance n'est pas captée dans une simple approche d'échelle au diagramme de phase. Dans le cadre de ce travail de thèse, les énergies des différentes phases en fonction de  $N$  et  $\bar{\nu}$  ont donc été comparées [32], ce qui fournit une explication théorique de la réentrance de l'EHQE [25], ainsi que d'un effet semblable observé à des champs magnétiques plus faibles [33]. Une étude de l'influence des impuretés sur les cristaux d'îlots [34] a permis de prédire de nouveaux effets visibles si l'échantillon est soumis à une irradiation micro-onde : pour une onde de densité de charge faiblement accrochée par les impuretés, on trouve une résonance dans la conductivité longitudinale en fonction de la fréquence micro-onde [35, 36]. Une telle résonance était observée pour  $\nu \ll 1$  [37], ce qui est considéré comme une preuve indirecte de l'existence d'un cristal de Wigner à fort champ magnétique [38, 39]. Dans le cas d'un cristal d'îlots, la fréquence de cette résonance dépend du nombre d'électrons  $M$  par site; et comme nos calculs indiquent qu'il peut y avoir une coexistence entre îlots avec différent  $M$  aux points de transitions, on s'attendrait à trouver deux résonances différentes pour une telle phase mixte. Des expériences récentes par Lewis *et al.* [40] ont confirmé nos prédictions théoriques.

Un autre domaine de recherche abordé dans cette thèse est la physique à fort champ magnétique, notamment l'état observé à  $\nu = 4/11$  [26], qui est dû aux interactions entre FCs. Dans le cadre de la théorie hamiltonienne, qui a récemment été établie par Murthy et Shankar [41], nous avons déduit



un modèle de FC en interaction. Ce modèle a la même structure que le modèle originel d'électrons, ce qui peut rendre compte de l'auto-similarité de l'EHQF [42]. L'auto-similarité dans la structure du modèle a permis de calculer l'énergie de différentes phases de FCs solides et liquides [43]. De façon similaire au cas électronique, on trouve des phases d'îlots et de rubans de FCs ainsi que des phases liquides incompressibles, qui peuvent être interprétées en termes d'une deuxième génération de FCs (FC<sup>2</sup>s). Un tel liquide a la plus basse énergie à  $\nu = 4/11$ , ce qui explique l'observation de ce nouvel EHQF. De plus, nous avons prédit un phénomène de réentrance de l'EHQF dans ce régime, qui serait analogue à la réentrance de l'EHQE, en termes de FCs. Une observation de cet effet dépend néanmoins de l'amélioration de la qualité des échantillons. Dans le même modèle, les gaps d'activation des états de FC<sup>2</sup>s ont été calculés, qui sont plus d'un ordre de grandeur plus petits que ceux des FCs de la première génération [44]. Cela explique pourquoi l'EHQF hors la série  $p/(2sp + 1)$  est moins visible.

L'intérêt de ce dernier travail est également d'ordre méthodologique : la théorie hamiltonienne, qui fournit une image pertinente de la physique des FCs, a permis, dans le passé, de calculer analytiquement nombre de propriétés du système directement dans la limite thermodynamique et de confirmer ainsi des résultats connus par l'approche des fonctions d'onde de Laughlin et de Jain. En appliquant la théorie hamiltonienne aux FCs en interaction, cas où l'approche des fonctions d'onde de Jain fournit des résultats contradictoires [45, 46], nous avons donné un exemple de sa fécondité pour la description de la physique des FCs, au-delà de la confirmation de résultats connus.

La structure de ce mémoire de thèse est organisée de la manière suivante : la deuxième partie de cette introduction est consacrée aux notions préliminaires, comme la quantification de Landau, la structure de l'espace de Hilbert et les fonctions d'onde. Le lecteur y trouve un bref rappel de l'EHQE et de l'EHQF. Dans le chapitre 2, je décris le modèle d'électrons restreints à un seul niveau, qui est le cadre de mes études. J'y discute sa structure algébrique ainsi que ses propriétés d'auto-similarité, après avoir introduit la base de FCs et décrit le modèle de FCs en interaction. Le diagramme de phase y est esquissé en termes d'échelles de longueur. La description des phases électroniques solides et liquides à partir du modèle électronique est donnée dans le chapitre 3, ainsi qu'une comparaison aux expériences. Dans le chapitre 4, je présente les calculs d'énergie des différentes phases dans le modèle de FCs et des résultats pour les gaps d'activation des FC<sup>2</sup>s après avoir discuté le potentiel d'interaction entre FCs. Dans le chapitre 5, je présente

mes conclusions et des perspectives pour un travail futur.

## 1.2 Préliminaires

### 1.2.1 L'EHQE - un effet à une particule

La base théorique de l'EHQE est la quantification de Landau dont je donne ici un bref rappel. Un électron de masse de bande  $m_b$  et de charge  $-e$ , dont le mouvement est restreint à deux dimensions, est décrit par le hamiltonien<sup>1</sup>

$$\hat{h} = \frac{[\mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{r})]^2}{2m_b} + V_{ext}, \quad (1.1)$$

où  $\mathbf{r} = (x, y)$  est la position de l'électron dans le plan et  $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$  son impulsion. Tous les vecteurs comprennent désormais deux composantes sans indication explicite. Le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  est celui du champ magnétique  $B$  perpendiculaire au plan,  $B = \partial_x A_y - \partial_y A_x$ . Le choix du potentiel vecteur n'étant pas uniquement déterminé par le champ, il faut le fixer par une jauge. Deux jauges sont usuelles, la jauge de Landau  $\mathbf{A}_L = (-y, 0)B$  et la jauge symétrique  $\mathbf{A}_S = (-y, x)B/2$ , dont chacune satisfait à la jauge de Coulomb,  $\partial_x A_x + \partial_y A_y = 0$ . Le deuxième terme du hamiltonien (1.1) tient compte d'un éventuel potentiel électrostatique externe, par exemple dû à des impuretés chargées du cristal sous-jacent, mais la discussion est pour le moment limitée au cas  $V_{ext} = 0$ . Classiquement, l'électron décrit une trajectoire circulaire, le mouvement cyclotron, dont le rayon est déterminé par son énergie [Fig. 1.4(a)]. Or, à cause de la symétrie de translation, le centre de la trajectoire peut être choisi arbitrairement dans le plan. Ce centre  $\mathbf{R} = (X, Y)$ , appelé centre de guidage, est une constante de mouvement. Pour exprimer la position de l'électron, on introduit encore une variable relative  $\boldsymbol{\eta}$ , qui est reliée à la vitesse de l'électron,  $\eta_k = \epsilon_{kl}(p_l + eA_l)/eB$ , avec les indices  $k, l$  désignant les deux directions spatiales,  $1 = x$  et  $2 = y$ , et le tenseur antisymétrique  $\epsilon_{kl}$ .<sup>2</sup> On a donc  $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\eta}$ . Le hamiltonien (1.1) peut s'exprimer uniquement en termes de la variable relative,

$$\hat{h} = \frac{1}{2}m_b\omega_C^2\boldsymbol{\eta}^2, \quad (1.2)$$

avec la fréquence cyclotron  $\omega_C = eB/m_b$ .

<sup>1</sup>J'ai choisi le symbole  $\hat{h}$  pour désigner le hamiltonien à un électron. Le symbole plus commun  $\hat{H}$  est ainsi réservé pour le hamiltonien à  $N$  particules.

<sup>2</sup>En trois dimensions, cette relation s'écrirait à l'aide du produit vectoriel,  $\vec{\eta} = (\vec{p} + e\vec{A}) \times \vec{e}_z/eB$  avec le vecteur unité  $\vec{e}_z$  dans la direction  $z$ .

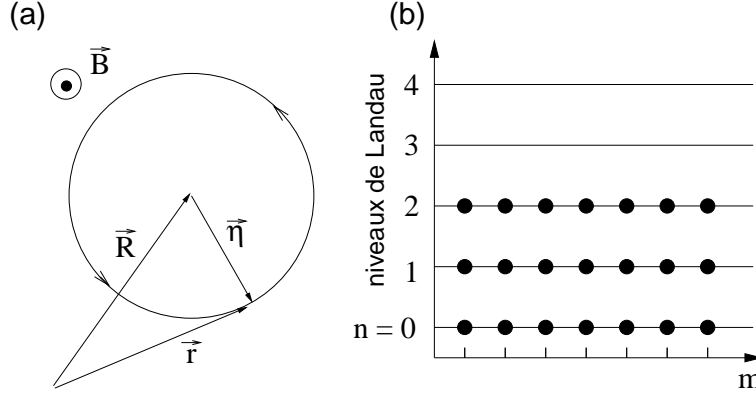


FIG. 1.4 – Electron dans un champ magnétique. (a) Classiquement, l'électron suit une trajectoire circulaire centrée autour du centre de guidage,  $\mathbf{R}$ , qui est une constante de mouvement. (b) Son énergie est quantifiée en niveaux de Landau, qui sont hautement dégénérés. La dégénérescence est déterminée par le nombre quantique  $m$ , associé au centre de guidage, tandis que le nombre  $n$  désigne les niveaux de Landau. L'esquisse montre le cas d'un remplissage  $\nu = 3$ .

La quantification canonique,  $[x_k, p_l] = i\hbar\delta_{k,l}$ , se traduit dans le cas présent par une non-commutativité des composantes de  $\boldsymbol{\eta}$  et  $\mathbf{R}$ ,

$$[\eta_x, \eta_y] = -il_B^2, \quad [X, Y] = il_B^2 \quad (1.3)$$

avec la longueur magnétique  $l_B = \sqrt{\hbar/eB}$ , tandis que les deux variables commutent entre elles,  $[\eta_k, R_l] = 0$ . Comme le hamiltonien (1.2) ne dépend que de  $\boldsymbol{\eta}$ , il commute avec l'opérateur centre de guidage,  $[\mathbf{R}, \hat{h}] = 0$ , ce qui est la formulation quantique du fait que  $\mathbf{R}$  est une constante de mouvement. En analogie avec le traitement quantique de l'oscillateur harmonique, on introduit des opérateurs d'échelle

$$\begin{aligned} \eta_x &= \frac{l_B}{\sqrt{2}}(a^\dagger + a), & \eta_y &= \frac{l_B}{i\sqrt{2}}(a^\dagger - a), \\ X &= \frac{l_B}{\sqrt{2}}(b^\dagger + b), & Y &= \frac{il_B}{\sqrt{2}}(b^\dagger - b), \end{aligned} \quad (1.4)$$

qui satisfont aux règles de commutation habituelles,  $[a, a^\dagger] = [b, b^\dagger] = 1$  et  $[a^{(\dagger)}, b^{(\dagger)}] = 0$ . De même, le hamiltonien s'écrit en termes de ces opérateurs d'échelles,

$$\hat{h} = \hbar\omega_C \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (1.5)$$

Ses états propres sont donc déterminés par les deux nombres quantiques entiers,  $n$  et  $m$ , associés aux deux sortes d'opérateurs d'échelle,

$$\begin{aligned} a^\dagger|n, m\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1, m\rangle, & a|n, m\rangle &= \sqrt{n}|n-1, m\rangle \quad (\text{pour } n > 0); \\ b^\dagger|n, m\rangle &= \sqrt{m+1}|n, m+1\rangle, & b|n, m\rangle &= \sqrt{m}|n, m-1\rangle \quad (\text{pour } m > 0). \end{aligned}$$

Dans le cas où  $n = 0$  ou  $m = 0$ , on trouve

$$a|0, m\rangle = 0, \quad b|n, 0\rangle = 0, \quad (1.6)$$

et des nombres négatifs sont exclus. Un état arbitraire peut par conséquent être construit à l'aide des opérateurs d'échelle à partir de l'état  $|0, 0\rangle$ ,

$$|n, m\rangle = \frac{(a^\dagger)^n (b^\dagger)^m}{\sqrt{n!} \sqrt{m!}} |0, 0\rangle. \quad (1.7)$$

Les fonctions d'ondes, qui sont la représentation de ces états dans l'espace réel, dépendent de la jauge choisie pour le potentiel vecteur. Elles peuvent être trouvées à partir des équations (1.6) et (1.7) après le remplacement  $p_k \rightarrow \hbar\partial_k/i$ , ce qui donne lieu à des équations différentielles. Les niveaux d'énergie déterminés par le nombre quantique  $n$ ,  $E_n = \hbar\omega_C(n + 1/2)$ , aussi appelés niveaux de Landau, sont hautement dégénérés à cause du grand choix possible pour  $m$  [Fig. 1.4(b)]. Le nombre d'états par niveaux peut néanmoins être trouvé à l'aide de la règle de commutation pour les composantes du centre de guidage (1.4), car celle-ci donne lieu à une relation d'incertitude de Heisenberg,  $\Delta X \Delta Y = 2\pi l_B^2$ . Cela signifie que chaque état occupe une surface minimale de  $2\pi l_B^2$ , de la même manière que chaque état quantique usuel, par exemple d'une particule libre, occupe une surface minimale de  $2\pi\hbar$  dans l'espace des phases. Le nombre d'états par niveau est donc donné par le rapport entre la surface totale  $A$  et la surface minimale,  $N_B = n_B A$ , où la densité d'états  $n_B = 1/2\pi l_B^2 = B/\phi_0$  a été introduite. Elle coïncide avec la densité de flux, mesurée en quanta de flux  $\phi_0 = 2\pi\hbar/e$ , et j'utilise désormais les deux termes de façon équivalente. Comme les électrons suivent la statistique fermionique, chaque état quantique peut être occupé au maximum par une seule particule à cause du principe de Pauli. Dans le cas où il y a plusieurs électrons dans le système, le remplissage  $\nu$  des niveaux de Landau est donc décrit par le rapport entre la densité surfacique d'électrons  $n_{el}$  et la densité de flux  $n_B$ ,  $\nu = n_{el}/n_B$ , comme je l'ai déjà indiqué dans l'introduction. Ce rapport est aussi appelé *facteur de remplissage*.

Les électrons étant des particules de spin  $1/2$ , chaque niveau de Landau se sépare en deux branches par l'effet Zeeman. Cette séparation est nettement plus petite que l'écart en énergie entre les niveaux de Landau dans les hétérostructures de semi-conducteurs parce que le gap de Zeeman  $\Delta_z = g\hbar eB/m$ , avec la constante de couplage<sup>3</sup>  $g$ , varie proportionnellement à l'inverse de la masse nue de l'électron,  $m$ . En revanche, la séparation entre les niveaux de Landau, dont la formation est due à un effet orbital, est déterminée par l'inverse de la masse de bande  $m_b$ . Pour *GaAs*, on trouve  $m_b = 0,068m$ . La séparation en deux branches de spin a pour conséquence que le facteur de remplissage ne dépend pas seulement du nombre de niveaux de Landau complètement remplis, mais il faut préciser dans quelle branche de spin se trouve le système à champ magnétique fixe. On a  $\nu = 2n + 1$  si la branche inférieure de spin du  $n$ -ième niveau de Landau est complètement remplie, et  $\nu = 2n + 2$  dans le cas où toutes les deux branches sont remplies.

L'EHQE est dû à un comportement isolant des électrons dans le dernier niveau peuplé, tandis que les niveaux complètement remplis contribuent chacun un quantum de conductance au transport transverse,  $G_{xy} = Ne^2/2\pi\hbar$ , qui est précisément mesuré par la résistance de Hall [47]. L'entier  $N$  est la partie intégrale du facteur de remplissage,  $N = [\nu]$ . Le transport étant balistique, la résistance longitudinale disparaît, ce qui se traduit par une conductance zéro, car les tenseurs de résistance et de conductance sont reliés par inversion matricielle,

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} 0 & Ne^2/2\pi\hbar \\ -Ne^2/2\pi\hbar & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{R} = \hat{G}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi\hbar/e^2N \\ 2\pi\hbar/e^2N & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Pour décrire la partie des électrons dans le dernier niveau partiellement peuplé, on introduit le facteur de remplissage partiel  $\bar{\nu} = \nu - N$ . Comme le remplissage peut être varié en changeant le champ magnétique, le comportement isolant de ces électrons, si  $\bar{\nu}$  est suffisamment petit, donne lieu aux paliers dans la résistance : l'équation (1.8), qui est indépendante du champ, reste valable dans un intervalle autour de  $\nu = N$ , et la résistance de Hall est donc quantifiée,  $R_H = 2\pi\hbar/e^2N$ . L'effet disparaît si la température est plus grande que la séparation entre niveaux de Landau,  $k_B T \gtrsim \hbar\omega_C$ , avec la constante de Boltzmann  $k_B$ .

Dans le cas où  $\bar{\nu} \ll 1$ , le comportement isolant des électrons dans le dernier niveau peuplé est dû à la localisation individuelle des particules par les

---

<sup>3</sup> $g \simeq -0,4$  dans *GaAs*.

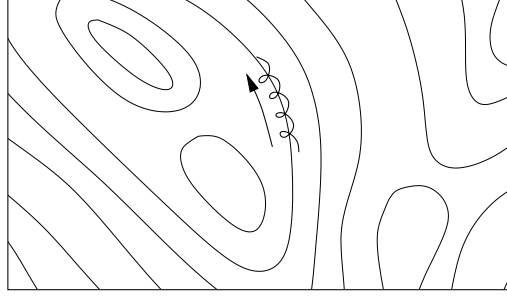


FIG. 1.5 – Mouvement semi-classique d'un électron dans un champ magnétique en présence d'un potentiel d'impuretés. Le centre de guidage suit les équipotentiels d'un paysage, qui modélise le potentiel d'impuretés. Cette dérive de Hall, indiquée par la flèche, est superposée au mouvement cyclotron de l'électron. Un transport électronique est uniquement possible dans le cas où l'équipotentielle connecte les deux bords de l'échantillon. Si l'électron occupe un puits de potentiel avec une équipotentielle fermée, il ne contribue pas au transport.

impuretés du cristal sous-jacent. Les électrons peuvent être décrits par un état cohérent dans le niveau  $n$ ,  $|n, \alpha\rangle = \exp[-(\alpha b^\dagger - \alpha^* b)]|n, 0\rangle$ , qui est centré à la position  $\alpha = \alpha_x - i\alpha_y$  dans le plan complexe. Un tel état est énergétiquement favorable si le potentiel d'impuretés a un minimum à  $\alpha$ . Dans une image semi-classique, le centre de guidage suit en effet les équipotentiels d'un potentiel externe  $V_{ext}(\mathbf{r})$  modélisant la présence des impuretés si ce dernier varie lentement dans l'espace à l'échelle de la longueur magnétique (Fig. 1.5). Dans ce cas, on peut remplacer  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{R}$  dans l'argument du potentiel, et le mouvement du centre de guidage est décrit par les deux équations de Heisenberg

$$i\hbar\dot{X} = [X, \hat{h}] = [X, V_{ext}(X, Y)] = i l_B^2 \frac{\partial V_{ext}}{\partial Y} \quad \text{et} \quad i\hbar\dot{Y} = -i l_B^2 \frac{\partial V_{ext}}{\partial X},$$

où on a utilisé la relation (1.3). Ce mouvement est précisément la dérive de Hall, qui est perpendiculaire au gradient du potentiel électrostatique et au champ magnétique. Si l'électron est dans un puits de potentiel, son centre de guidage suit une équipotentielle fermée. Cet électron ne contribue donc pas au transport, et la résistance de Hall reste accrochée à sa valeur initiale. Seuls les états étendus qui suivent les équipotentiels ouvertes peuvent contribuer au transport électronique, et s'ils commencent à être peuplés, la résistance de Hall saute sur un palier voisin. Cette transition est accompagnée d'une résistance longitudinale non nulle (voire figure 1.1), ce qui indique un

régime diffusif. En effet, les états étendus occupés à cette transition étant spatialement très proches, la rétrodiffusion devient possible. Même si cette interprétation de la transition dans une image de percolation semble pertinente [48], la valeur numérique des exposants critiques, associés à une transition de percolation classique, n'est pas en bon accord avec les exposants mesurés dans des expériences [49]. Cet accord est trouvé si l'on tient compte des corrections quantiques [49].

Une autre origine possible du comportement isolant est la formation d'un cristal électronique par les électrons dans un niveau de Landau partiellement rempli. Un tel cristal, comme par exemple un cristal de Wigner [50], peut, sous certaines conditions, être énergétiquement favorable par rapport à un état homogène à cause de la répulsion coulombienne entre électrons. Cette structure, étant accrochée par les impuretés, est un isolant à basse température parce que le nombre de défauts du cristal électronique, qui peuvent contribuer au transport, est exponentiellement supprimé. Une discussion détaillée des cristaux électroniques se trouve dans le chapitre 3.

### 1.2.2 L'EHQF - un effet à $N$ particules

Dans le cas où  $\nu < 1$ , le système est fortement dégénéré car tous les états dans le plus bas niveau de Landau ( $n = 0$ )  $|m_1, m_2, \dots, m_N\rangle$ , où  $m_k$  désigne l'état occupé par le  $k$ -ième électron, ont la même énergie cinétique. Ce fut donc une surprise lorsqu'un EHQF fut découvert à  $\nu = 1/3$  [2] et d'autres états à des valeurs  $p/(2ps + 1)$  dans la suite. Ces états sont dus à l'interaction coulombienne entre électrons, qui lève la dégénérescence originelle.

#### Fonctions de Laughlin

Le premier à avoir proposé une théorie pour la description de l'EHQF fut Laughlin [9], qui a construit une fonction d'essai pour  $N$  électrons à partir des fonctions d'onde du plus bas niveau de Landau,  $\phi_{n=0,m}(z, z^*) = \langle z, z^* | 0, m \rangle$ . La condition (1.6) pour ces états se traduit, dans la jauge symétrique, en l'équation différentielle

$$\left(z_k + 4l_b^2 \bar{\partial}_k\right) \phi_{n=0,m_k}(z_k, z_k^*) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (1.9)$$

où  $z_k = x_k - iy_k$  est la position du  $k$ -ième électron dans le plan complexe, et  $\bar{\partial}_k = (\partial/\partial x_k - i\partial/\partial y_k)/2$ . La solution de l'équation (1.9) sont les fonctions

$$\phi_{n=0,m_k}(z_k, z_k^*) = f_{m_k}(z_k) e^{-\sum_j |z_j|^2/4l_B^2}, \quad (1.10)$$



avec une fonction  $f_{m_k}(z_k)$  qui est analytique dans tous ses arguments,  $\bar{\partial}_k f_{m_k}(z_k) = 0$ . Une base convenable est donc donnée par les puissances en  $z_k$ ,  $f_{m_k}(z_k) = \prod_{k=1}^N z_k^{m_k}$ , avec les entiers  $m_k$  [51]. Un état à  $N$  électrons dans le plus bas niveau de Landau est décrit par une superposition antisymétrique de ces états de base,  $\phi(z_k) = \sum_{\{m_k\}} \mathcal{A}(m_1, \dots, m_N) z_1^{m_1} \dots z_N^{m_N}$ , avec les amplitudes  $\mathcal{A}(m_1, \dots, m_N)$ . Les fonctions de Laughlin

$$\phi_s^L(z_k) = \prod_{k < l} (z_k - z_l)^{2s+1} e^{-\sum_j |z_j|^2 / 4l_B^2} \quad (1.11)$$

satisfont aux conditions d'analyticité et d'antisymétrie si  $s$  est un entier, qui serait le paramètre libre de la fonction d'essai. Or, ce paramètre est fixé par le facteur de remplissage,  $\nu = 1/(2s + 1)$  [9]. Les fonctions de Laughlin, qui décrivent un liquide quantique incompressible, réduisent la répulsion coulombienne entre électrons, ce qui peut se voir dans la fonction de corrélation de paires,

$$\begin{aligned} g_s(r) &= \mathcal{N} \int dz_3 d\bar{z}_3 \dots dz_N d\bar{z}_N |\phi^L(z_1 = 0, z_2 = r, z_3, \dots, z_N)|^2 \\ &= \left(1 - e^{-r^2/2l_B^2}\right) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_{2m+1}^s}{(2m+1)!} \left(\frac{r^2}{4l_B^2}\right)^{2m+1} e^{-r^2/4l_B^2}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

où  $\mathcal{N}$  est une constante de normalisation, et la distance  $r$  est un nombre réel en raison de la symétrie de rotation. Le développement dans la deuxième ligne a été proposé par Girvin, et les coefficients  $c_{2m+1}^s$  caractérisent les états de Laughlin [52]. Le comportement de la fonction de corrélation de paires à courte distance est  $g_s(r) \sim r^{2(2s+1)}$ . On trouve donc une forte atténuation de cette fonction si l'on rapproche deux particules, ce qui est à l'origine de la minimisation de l'énergie coulombienne dans un état décrit par une fonction de Laughlin. En effet, Laughlin a montré que l'énergie d'un tel liquide quantique,

$$U_s^L = \frac{1}{2(2s+1)} \int_0^\infty dr r [g_s(r) - 1] V(r), \quad \text{avec} \quad V(r) = \frac{e^2}{\epsilon r}, \quad (1.13)$$

est plus basse que celle d'un cristal de Wigner, qui avait également été proposé comme état fondamental à  $\nu < 1$  [53]. Les paliers dans la résistance de Hall sont dus au fait que les états décrits par une fonction de Laughlin sont séparés par un gap d'énergie des états excités, notamment des excitations de quasi-particules ou de quasi-trous, qui sont formés si  $\nu \neq 1/(2s + 1)$ . De la même

manière que les électrons dans le cas de l'EHQE, ces quasi-particules sont localisées par les impuretés de l'échantillon, ce qui donne lieu à l'EHQF.

Une meilleure compréhension des fonctions de Laughlin, qui ont un recouvrement de plus de 99% avec l'état fondamental trouvé par diagonalisation exacte [47], peut être obtenue en analysant la fonction de corrélation de paires. Cette dernière se calcule numériquement de façon très précise par intégration Monte Carlo [54]. Nous avons proposé une détermination alternative de cette fonction en nous servant des règles de sommes imposées aux coefficients dans le développement (1.12) [52],

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1}^s &= -\frac{s}{2}, \\ \sum_{m=0}^{\infty} (2m+2)c_{2m+1}^s &= -\frac{s}{4}, \\ \sum_{m=0}^{\infty} (2m+3)(2m+2)c_{2m+1}^s &= \frac{s^2}{2}, \\ c_{2m+1}^s &= -1 \quad \text{pour } m < s, \end{aligned}$$

comme système d'équations linéaires [29]. Les trois premières règles de sommes décrivent respectivement la neutralité de charge, l'écrantage parfait et l'incompressibilité du système. La dernière ligne définit le comportement de la fonction de corrélation de paires à courte distance. Pour les coefficients avec  $m > s + 3$ , on choisit  $c_{2m+1}^s = 0$ . Par cette méthode, on trouve

|         | $c_1^s$ | $c_3^s$ | $c_5^s$ | $c_7^s$ | $c_9^s$ | $c_{11}^s$ | $c_{13}^s$ |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|------------|------------|
| $s = 1$ | -1      | 17/32   | 1/16    | -3/32   | 0       | 0          | 0          |
| $s = 2$ | -1      | -1      | 7/16    | 11/8    | -13/16  | 0          | 0          |
| $s = 3$ | -1      | -1      | -1      | -25/32  | 79/16   | -85/32     | 0          |
| $s = 4$ | -1      | -1      | -1      | -1      | -29/8   | 47/4       | 49/8       |

pour  $s = 1, \dots, 4$ . L'énergie ainsi calculée dévie de moins d'un pour cent des résultats numériques de Levesque *et al.* [54], comme il est montré dans la figure 1.6(a). La fonction de corrélation de paires exhibe, à part la probabilité diminuée d'avoir un électron dans le voisinage immédiat d'un autre, un maximum à distance finie, où il est plus probable de trouver une deuxième particule. Ce maximum se déplace vers des distances plus grandes et devient

plus prononcé si  $s$  est augmenté, donc si la densité électronique est abaissée [ $\nu = 1/(2s + 1)$ ]. Cela indique un ordre à courte portée qui devient plus important à basse densité, où l'on s'attendrait à la formation d'un cristal de Wigner. En effet, des calculs numériques plus précis montrent même des oscillations autour de la ligne cassée dans la figure 1.6(b) pour  $r$  plus grand, indiquant la présence de corrélations à longue distance [47].

Des états fractionnaires ont également été observés à  $\bar{\nu} = 1/3$  et  $1/5$  dans le premier niveau de Landau excité,  $n = 1$ . Ils peuvent être décrits par une généralisation des fonctions de Laughlin au niveau  $n$  en considérant les électrons des niveaux sous-jacents comme inertes. La fonction des électrons du dernier niveau peuplé est donnée par

$$\phi_{n,s}^L(z_k) = \left\langle \{z_k, \bar{z}_k\} \left| \prod_j \frac{(a_j^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \right| \Omega_s \right\rangle, \quad (1.14)$$

où  $a_j^\dagger$  est l'opérateur d'échelle de la  $j$ -ième particule, et  $\langle \{z_k, \bar{z}_k\} | \Omega_s \rangle = \phi_s^L(z_k)$  est la fonction de Laughlin dans le plus bas niveau de Landau [55].

### Charge et statistique fractionnaires

Deux propriétés remarquables de l'EHQF sont la charge et la statistique fractionnaires des excitations élémentaires du liquide quantique. Tandis que la fractionnalisation de la charge est un phénomène connu de la physique à haute énergie dans le contexte des *quarks*, constituants élémentaires de la matière, la statistique fractionnaire est plus étrange : elle est liée à un monde bidimensionnel [13, 56]. La statistique d'une particule se révèle dans des processus d'échange. On considère une particule  $A$  qui se déplace autour d'une deuxième  $B$  pour, à la fin du processus, retrouver sa position initiale [figure 1.7(a)]. La trajectoire de la particule  $A$  est choisie suffisamment éloignée de la position fixe de  $B$  pour pouvoir négliger le recouvrement de leurs fonctions d'onde. La fonction de  $A$  acquiert une phase *géométrique*, qui ne dépend que du chemin  $\mathcal{C}$ , est appelée phase de Berry et se calcule à partir de la fonction d'onde de la particule,

$$\gamma(\mathcal{C}) = i \int_{\mathcal{C}} \langle \psi_{\mathbf{R}(t)} | \nabla_{\mathbf{R}(t)} \psi_{\mathbf{R}(t)} \rangle \cdot d\mathbf{R}(t), \quad (1.15)$$

où  $\mathbf{R}(t)$  paramétrise le chemin parcouru [47]. Notons que  $\mathbf{R}$  n'est pas nécessairement un point dans l'espace réel, comme dans le cas considéré ici, mais ce

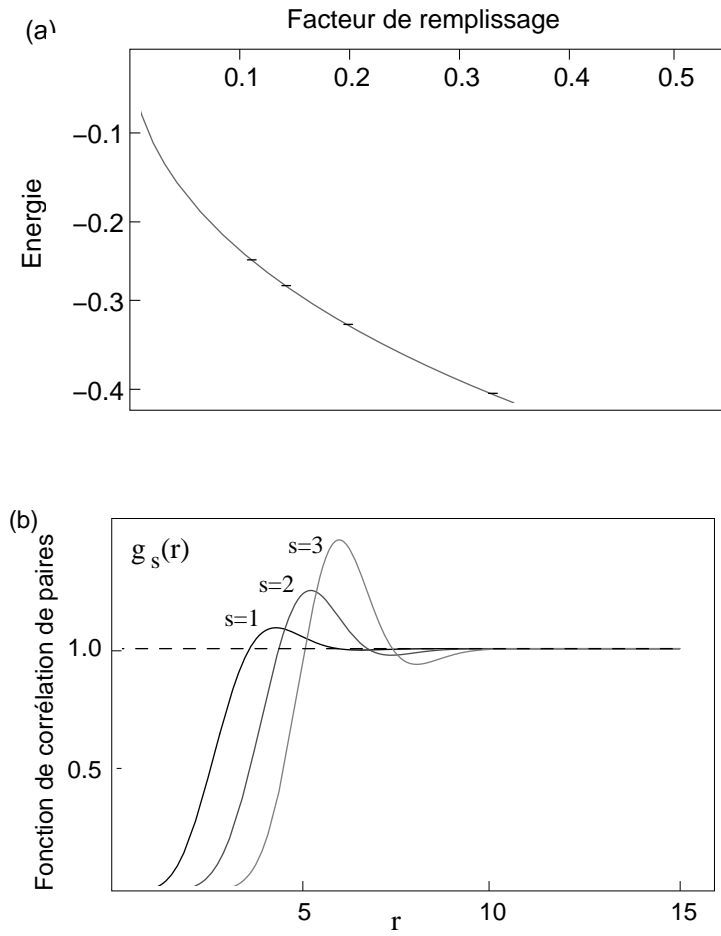


FIG. 1.6 - (a) Comparaison de nos résultats pour l'énergie (traits noirs) des états de Laughlin aux résultats numériques de Levesque *et al.* (ligne grise) en unités de  $e^2/\epsilon l_B$ . La ligne est donnée par les formules d'interpolation  $U(\nu) = -0,782133\sqrt{\nu}(1 - 0,211\nu^{0,74} + 0,012\nu^{1,7})$  pour les résultats de Levesque *et al.* [54]. (b) Fonctions de corrélation de paires pour différents  $s$ . La distance  $r$  est mesurée en unités de la longueur magnétique  $l_B$ . La ligne droite (tirets) indique la fonction pour un gaz d'électrons non corrélés.

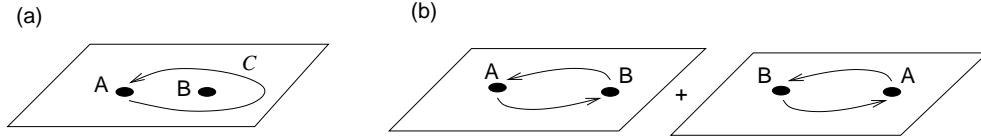


FIG. 1.7 – (a) Processus dans lequel la particule  $A$  se déplace sur un chemin  $C$  autour d’une deuxième particule. (b) Processus équivalent qui consiste en deux échanges successifs des particules  $A$  et  $B$ .

vecteur peut également regrouper un ensemble de paramètres continus. Ce processus qui consiste à déplacer  $A$  autour de  $B$ , où  $A$  acquiert une phase  $\gamma'$ , peut également être décrit - à une translation près - comme la somme de deux processus d’échange des deux particules  $A \leftrightarrow B$  [figure 1.7(b)]. Dans ce cas,  $A$  acquiert chaque fois une phase  $\gamma$ , et l’on a donc  $\gamma' = 2\gamma$ . En trois dimensions, ce processus ne se distingue pas, dans un sens *topologique*, d’un processus dans lequel les deux particules restent sur leurs positions, car la trajectoire de  $A$  peut être rétrécie en un seul point, en la “soulevant”, sans qu’elle passe par la position de la particule  $B$ . Cela nécessite que  $\gamma' = 0$  (modulo  $2\pi$ ), et par conséquent  $\gamma = 0$  ou  $\gamma = \pi$  pour les processus d’échange. Les particules qui ont  $\gamma = 0$  sont des *bosons*, et celles avec  $\gamma = \pi$  sont des *fermions*. Ces deux classes regroupent donc toutes les particules en trois dimensions.

Ce n’est pas le cas dans le monde bidimensionnel, où la trajectoire de  $A$  ne peut être rétrécie en un seul point sans passer par  $B$ . La phase  $\gamma$  reste donc indéterminée, et l’on appelle *anyons* les particules avec  $\gamma \neq 0, \pi$  [56]. C’est précisément ce que l’on veut dire quand on parle d’une statistique fractionnaire. En fait, ce terme n’est pas très bien choisi parce que la phase  $\gamma$  n’est pas restreinte à des valeurs fractionnaires.

Dans le cas de l’EHQF, les excitations élémentaires de type quasi-trou située à la position  $z_0$  peuvent être décrites par la fonction d’onde [9]

$$\phi_s^{q-t}(z_k) = \prod_{j=1}^N (z_0 - z_j) \phi_s^L(z_k), \quad (1.16)$$

où  $\phi_s^L(z_k)$  est la fonction de Laughlin [Eq. (1.13)]. Une excitation de type quasi-particule a une forme plus compliquée à cause de la condition d’analyticité (1.10) pour les fonctions d’onde dans le plus bas niveau de Landau, ce qui fait intervenir des dérivées par rapport aux positions  $z_j$ . Un calcul de la

phase de Berry (1.15) de ce quasi-trou sur un chemin clos donne [47]

$$\begin{aligned}\gamma(\mathcal{C}) &= i \int_{\mathcal{C}} \left\langle \phi_s^{q-t} \left| \frac{\partial}{\partial z_0} \phi_s^{q-t} \right. \right\rangle dz_0 \\ &= i \int d^2z \rho(z) \int_{\mathcal{C}} dz_0 \frac{1}{z_0 - z},\end{aligned}$$

où  $\rho(z)$  est la densité électronique à la position  $z$ . A l'aide du théorème des résidus, on trouve que l'intégrale sur  $\mathcal{C}$  est zéro si  $z$  n'est pas dans la surface  $S(\mathcal{C})$  entourée par le chemin d'intégration, et  $2\pi i$  sinon. On obtient par conséquent

$$\gamma(\mathcal{C}) = -2\pi \int_{S(\mathcal{C})} d^2z \rho(z). \quad (1.17)$$

Discutons d'abord le cas où il n'y a pas d'autre quasi-trou dans la surface  $S(\mathcal{C})$ . On a donc, à  $\nu = 1/(2s+1)$ ,  $\rho(z) = -n_{el} = -n_B/(2s+1)$  et  $\gamma(\mathcal{C}) = 2\pi n_{el} S(\mathcal{C}) = (BS(\mathcal{C})/\hbar)e/(2s+1)$  ou alternativement, en termes de quanta de flux,  $\gamma(\mathcal{C}) = 2\pi\phi(\mathcal{C})/\phi_0(2s+1)$ , où  $\phi(\mathcal{C}) = BS(\mathcal{C})$  est le flux à travers la surface. La charge  $e^*$  du quasi-trou est donc *positive*. Elle est une *fraction* de la charge élémentaire  $e$ ,  $e^* = e/(2s+1)$ . En revanche, si la surface contient également un quasi-trou, la densité est  $\rho(z) = -[n_{el} - e^*/e(2s+1)]S(\mathcal{C})$ , et l'on a  $\gamma(\mathcal{C}) = 2\pi[n_{el}S(\mathcal{C}) - 1/(2s+1)]$ . La fonction d'onde du quasi-trou, qui parcourt le chemin  $\mathcal{C}$ , acquiert donc une phase supplémentaire de  $2\pi/(2s+1)$  si sa trajectoire encercle un autre quasi-trou. En conclusion, *c'est la charge fractionnaire qui, dans le contexte de l'EHQF, donne lieu à une statistique fractionnaire.*

## Fermions Composites

Même si les fonctions de Laughlin décrivent de façon très précise l'état fondamental à des valeurs  $\nu = 1/(2s+1)$ , elles ne peuvent représenter l'EHQF observé à  $\nu = p/(2ps+1)$  si  $p > 1$ . Selon une première approche, due à Haldane [57] et Halperin [58], ces états peuvent être compris dans une hiérarchie : de même que les électrons à  $\nu = 1/(2s+1)$ , les quasi-particules et quasi-trous excités à  $\nu \neq 1/(2s+1)$  peuvent former un état de Laughlin pour réduire leur répulsion mutuelle. Dans cette théorie, l'état à  $2/5$  serait un "rejeton" de l'état à  $1/3$ . En principe, chaque rapport  $\nu = P/Q$ , avec  $P$  entier et  $Q$  entier impair, peut donner lieu à un EHQF si l'on monte suffisamment loin dans la hiérarchie [57]. L'existence d'un tel état dépend de la forme du potentiel entre les quasi-particules. Une variante de cette hiérarchie d'états a été

proposée par Jain en 1989 avec sa théorie de FCs [15, 16], qui est largement utilisée aujourd'hui. Elle est basée sur une réinterprétation des fonctions de Laughlin : ses zéros d'ordre  $2s+1$ ,  $\prod_{k<l}(z_k - z_l)^{2s+1}$ , peuvent être vus comme représentant des vortex parce que la phase de la fonction d'onde, ayant une singularité si  $(z_k - z_l) \rightarrow 0$ , change quand la  $k$ -ième particule tourne autour de la  $l$ -ième. Si l'on sépare la fonction d'onde de Laughlin en deux parties,

$$\phi_s^L(z_k) = \prod_{k<l} (z_k - z_l)^{2s} \phi_1^*(z_k), \quad (1.18)$$

la deuxième est simplement le déterminant de Slater, à un facteur de normalisation  $1/\sqrt{N!}$  près,

$$\phi_1^*(z_k) = \prod_{k<l} (z_k - z_l) = \det \left( z_i^j \right), \quad i = 1, \dots, N; j = 0, \dots, N-1, \quad (1.19)$$

où l'on a omis la gaussienne dans les fonctions d'onde. Ce déterminant décrit un système d'une nouvelle sorte de particules à un remplissage  $\nu^* = 1$ , et dans ce cas l'état est non dégénéré. Cette nouvelle particule est précisément le FC, qui consiste en un électron lié au vortex portant  $2s$  quanta de flux et qui a un couplage réduit  $(eB)^*$  au champ magnétique  $B$ . Deux interprétations de ce couplage réduit sont équivalentes : selon la première, qui est la plus courante, les  $2s$  quanta de flux liés à l'électron abaissent le nombre de flux libres dans le système. Le champ magnétique est donc réduit en moyenne à  $B^* = B - 2s\phi_0 n_{el}$ . Selon la deuxième interprétation, c'est la charge du FC qui est réduite, vu que le vortex est une région dans laquelle la densité électronique est abaissée. On peut donc associer au vortex une charge  $c^2 e$ , avec  $c^2 = 2s/(2s+1)$ , opposée à celle de l'électron, ce qui est à l'origine de l'attraction entre l'électron et le vortex. La charge totale du FC est par conséquent  $-e^* = (1 - c^2)e$  [41]. Le facteur de remplissage de FCs  $\nu^*$  est relié à celui des électrons par

$$\nu = \frac{\nu^*}{2s\nu^* + 1}. \quad (1.20)$$

En permettant aux FCs de peupler  $p$  niveaux de Landau de FCs,  $\nu^* = p$ , on trouve la série  $\nu = p/(2ps+1)$  pour les états d'EHQF. Les quasi-particules, dont la localisation donne lieu aux paliers dans la résistance de Hall, sont, dans cette image, les FCs promus dans un niveau supérieur, et l'EHQF d'électrons est considéré comme un EHQE de FCs (Fig. 1.8). La fonction d'onde pour  $p$  arbitraire est donnée par

$$\phi_{s,p}(z_k) = \mathcal{P} \prod_{k<l} (z_k - z_l)^{2s} \phi_p^*(z_k, \bar{z}_k), \quad (1.21)$$

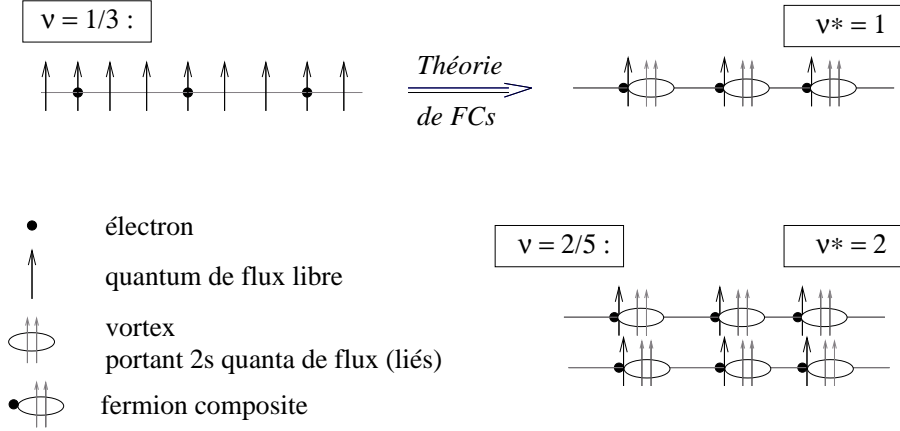


FIG. 1.8 – Fermions composites. L'état électronique à  $\nu = 1/3$  peut être compris comme un état avec un remplissage entier  $\nu^* = 1$  en termes de FCs, dont les vortex portent  $2s$  quanta de flux chacun. De même, un remplissage de FCs de  $\nu^* = 2$  donne lieu à l'état  $= 2/5$ .

où  $\phi_p^*(z_k)$  est le déterminant de Slater pour  $p$  niveaux complètement remplis. La fonction d'onde  $\phi_p^*(z_k, \bar{z}_k)$  possède des composantes dans des niveaux supérieurs, qui sont générées par les opérateurs d'échelle  $a_k^\dagger \propto (\bar{z}_k - 4l_B^2 \partial_k)$ , avec  $\partial_k = (\partial/\partial x_k + i\partial/\partial y_k)/2$ . La fonction n'est plus analytique, comme on l'a exigé pour une fonction du plus bas niveau de Landau (Eq. 1.10). Il faut donc projeter cette fonction dans le plus bas niveau, ce qui est formellement indiqué par le projecteur  $\mathcal{P}$ . Aussi ces fonctions d'onde ont-elles un grand recouvrement ( $\gtrsim 99\%$ ) avec l'état fondamental trouvé dans des calculs de diagonalisation exacte [16, 59].

A part la preuve indirecte de leur existence par l'EHQF, les FCs ont été mis en évidence dans des expériences de *collimation magnétique* [60], une technique mésoscopique qui a été proposée par van Houten *et al.* pour l'étude des hétéro-structures de semiconducteurs [61]. Elle consiste à injecter un courant dans le système bidimensionnel par un contact quantique ainsi que de le collecter par un deuxième, qui est placé au même bord de l'échantillon que le premier. Les deux contacts sont séparés l'un de l'autre par une distance  $d$  de quelques micro-mètres. A faible champ magnétique, la trajectoire d'un électron injecté par le premier contact est essentiellement classique et atteint donc le deuxième si son rayon cyclotron  $R_C = \hbar k_F / eB$ , en termes de vecteur d'onde de Fermi  $k_F$ , satisfait à  $R_C = d/2j$ , où  $j$  est en entier. Cet entier compte le nombre de réflexions ( $j - 1$ ) au bord que l'électron subit avant



d'atteindre le deuxième contact. Il y a donc une réponse électrique accrue à ce contact si le champ magnétique est un multiple de  $\Delta B = 2\hbar k_F / ed$ , et l'on observe donc des résonances en variant le champ [61]. Cet effet disparaît à plus haut champ magnétique, où la trajectoire cesse d'être classique en raison de la quantification de Landau. Or les FCs, à cause de leur couplage réduit au champ, sont soumis à un champ magnétique effectif  $B^*$ , qui est faible autour des valeurs de champ correspondant à  $\nu = 1/2$ , où le système se comporte donc comme un métal [12]. Des résonances dans une expérience de collimation magnétique, en variant le champ autour de cette valeur, ont en effet été trouvées par Goldman *et al.* [60]. Leur séparation  $\Delta B^*$  est bien celle à laquelle on s'attend sur la base de la théorie de FC.

### Transformations de Chern-Simons

Une formulation alternative de FCs a été proposée par Lopez et Fradkin dans le contexte d'une théorie de champs quantiques, basée sur les transformations de Chern-Simons [11]. Cette transformation porte sur le hamiltonien cinétique,

$$\hat{H}_0 = \int d^2r \psi^\dagger(\mathbf{r}) \frac{[-i\hbar\nabla + e\mathbf{A}(\mathbf{r})]^2}{2m_b} \psi(\mathbf{r}), \quad (1.22)$$

en termes du champ électronique  $\psi(\mathbf{r}) = \sum_{n,m} \langle \mathbf{r} | n, m \rangle e_{n,m}$ , avec les opérateurs de deuxième quantification obéissant à la statistique fermionique,  $\{e_{n,m}, e_{n',m'}^\dagger\} = \delta_{n,n'} \delta_{m,m'}$  et  $\{e_{n,m}, e_{n',m'}\} = 0$ . Le champ électronique est lié au champ de Chern-Simons par une transformation unitaire, mais singulière à la position de l'électron,

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{-i\tilde{\phi} \int d^2r' \theta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}')} \psi_{CS}(\mathbf{r}), \quad (1.23)$$

où  $\rho(\mathbf{r}) = \psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = \psi_{CS}^\dagger(\mathbf{r})\psi_{CS}(\mathbf{r})$  est l'opérateur densité, qui est invariant sous la transformation, et  $\theta(\mathbf{r})$  est l'angle entre le vecteur  $\mathbf{r}$  et l'axe  $x$ . La singularité de la transformation a son origine dans le fait que cet angle n'est pas défini pour le vecteur nul. Le facteur  $\tilde{\phi}$  détermine la statistique du champ de Chern-Simons : si  $\tilde{\phi} = 2s$ , le champ reste fermionique, et si  $\tilde{\phi} = 2s + 1$ , il est soumis à la statistique bosonique. Pour décrire des FCs, nous choisissons donc  $\tilde{\phi} = 2s$ . Comme le gradient  $\nabla$  agit également sur l'argument de l'exponentielle, on trouve le hamiltonien transformé

$$\hat{H}_0 = \int d^2r \psi_{CS}^\dagger(\mathbf{r}) \frac{[-i\hbar\nabla + e\mathbf{A}(\mathbf{r}) + e\mathbf{a}^{CS}(\mathbf{r})]^2}{2m_b} \psi_{CS}(\mathbf{r}), \quad (1.24)$$

avec le potentiel vecteur de Chern-Simons,  $\mathbf{a}^{CS}(\mathbf{r}) = -2s(\hbar/e)\nabla \int d^2r'\theta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')$ , qui donne lieu à un champ magnétique<sup>4</sup>

$$b(\mathbf{r}) = \partial_x a_y^{CS}(\mathbf{r}) - \partial_y a_x^{CS}(\mathbf{r}) = -2s\phi_0\rho(\mathbf{r}). \quad (1.25)$$

Parce que  $\rho(\mathbf{r})$  est un opérateur, ce nouveau champ magnétique en est aussi un. Dans l'approximation de champ moyen,  $\langle\rho(\mathbf{r})\rangle = n_{el}$ , on trouve donc le même abaissement du champ effectif que dans le cadre des fonctions d'onde, proposées par Jain,  $B^* = B + \langle b(\mathbf{r})\rangle = B - 2s\phi_0 n_{el}$ .

Les deux approches, fonctions d'essai et théorie de Chern-Simons, sont complémentaires et ont chacune des avantages et des inconvénients. Les fonctions d'onde de Laughlin et de Jain décrivent de façon très précise l'état fondamental déduit par diagonalisation exacte d'un petit ensemble d'électrons ainsi que ses propriétés physiques comme l'énergie des différentes excitations. Or des calculs dans cette approche exigent des calculs numériques très élaborés et sont souvent limités au traitement d'un petit nombre de particules, tout comme les calculs de diagonalisation exacte. Tandis que les résultats semblent converger vers une valeur qui peut être identifiée comme celle de la limite thermodynamique pour les états de la série  $\nu = p/(2sp + 1)$ , ils ne convergent pas dans le cas  $\nu \neq p$ , où les interactions résiduelles entre FCs deviennent importantes. L'interprétation des résultats ainsi obtenus dans la limite thermodynamique est donc parfois risquée et même erronée [45, 46]. Quant à la théorie de Chern-Simons, elle a d'une part l'avantage de permettre des calculs analytiques directement dans la limite thermodynamique. Son caractère topologique fournit par ailleurs une description élégante de la fractionnalisation de la charge des excitations élémentaire et de leur statistique fractionnaire. Mais par ailleurs, la transformation ne porte que sur le terme cinétique du hamiltonien, tandis que le terme d'interaction, étant quadratique en  $\rho(\mathbf{r})$ , reste invariant. Au niveau de l'approximation du champ moyen, la séparation entre niveaux de Landau est donc donnée par  $\hbar\omega_C^* = \hbar e B^*/m_b$  et non pas par l'énergie de Coulomb  $e^2/\epsilon l_B$ , qui est l'échelle pertinente de l'EHQF. Une renormalisation de la masse  $m_b \rightarrow m^*$ , en allant au-delà de l'approximation de champ moyen, n'est qu'un remède partiel [16, 62]. En revanche, la théorie de Chern-Simons fournit de bons résultats pour les fonctions de réponse dans le cas où ces dernières ne dépendent pas

---

<sup>4</sup>Ce résultat est obtenu à l'aide la relation  $(\partial_x \partial_y - \partial_y \partial_x)\theta(\mathbf{r}) = 2\pi\delta(\mathbf{r})$ , qui est déduite des équations différentielles de Cauchy-Riemann pour les fonctions analytiques dans la représentation polaire [13].

du gap d'énergie [63, 64]. Une solution à ce problème d'échelle d'énergie a été trouvée dans le cadre de la théorie hamiltonienne de Murthy et Shankar, dans laquelle la transformation de Chern-Simons est la première d'une série de transformations [41]. Cette théorie est discutée dans le chapitre suivant.

## Chapitre 2

# Auto-similarité dans le modèle d'électrons restreint à un seul niveau

Dans ce chapitre, je propose de discuter le modèle d'électrons restreint à un seul niveau de Landau, base de mes études sur les phases électroniques solides et liquides. Après sa description et une analyse du potentiel d'interaction effectif, la base de FCs est introduite dans le cadre de la théorie hamiltonienne de l'EHQF [41]. Même si les FCs sont la manifestation des corrélations fortes dans le système, ils peuvent être interprétés comme des particules quasiment libres à des facteurs de remplissage partiel  $\bar{\nu} = p/(2sp + 1)$ . Dans ce cas, les excitations élémentaires ont un spectre d'énergie qui ressemble aux niveaux de Landau des électrons. La stabilité des FCs en fonction du remplissage sera discutée dans le chapitre suivant. A  $\nu \neq p/(2sp + 1)$ , dans le plus bas niveau de Landau, les interactions entre FCs deviennent importantes, et l'image de FCs libres cesse d'être valable. Ici, je décris un modèle qui tient compte de ces interactions. Le modèle, ayant la même structure algébrique que le modèle originel, fournit ainsi une formulation mathématique de l'auto-similarité de l'EHQF [27]. Ce cadre permet l'introduction de la base d'une deuxième génération de FCs (FC<sup>2</sup>s) dont la stabilité, ainsi que leur compétition avec des phases solides de FCs, sera analysée dans le chapitre 4. J'utilise désormais un système d'unités dans lequel  $\hbar \equiv l_B \equiv 1$ , sauf dans quelques explications, qui deviennent plus compréhensibles si l'on tient explicitement compte de la longueur magnétique.

## 2.1 Dédution du modèle

Comme le but est de décrire les propriétés physiques du système dans la limite où la température tend vers zéro, seules les excitations de plus basse énergie sont prises en compte. En raison de la dégénérescence des niveaux de Landau, il s'agit des excitations restreintes à un seul niveau - ou plus précisément à une seule branche de spin - qui deviennent importantes si  $\nu \neq N$ . A remplissage entier  $\nu = N$ , ces excitations dans un seul niveau sont interdites par le principe de Pauli (Fig. 2.1). Comme elles ne couplent que les états du même niveau, l'énergie cinétique est une constante, qui ne joue plus aucun rôle pour la dynamique des électrons restreints à un niveau. Cette constante est désormais omise. Des excitations virtuelles inter-niveaux peuvent être considérées dans une approche perturbative et donnent lieu à une fonction diélectrique  $\epsilon(q)$ , qui modifie le potentiel d'interaction entre les électrons du même niveau [65]. Contrairement au cas des métaux, où l'on trouve un écrantage de la répulsion coulombienne à longue portée, l'écrantage de l'interaction entre électrons en présence d'un champ magnétique ne se manifeste qu'à des valeurs finies du vecteur d'onde : à  $q \rightarrow 0$  ainsi qu'à  $q \rightarrow \infty$ , il disparaît, et  $\epsilon(q) \rightarrow \epsilon$ , où  $\epsilon$  est la constante diélectrique du semi-conducteur sous-jacent. Même si cet écrantage de la répulsion coulombienne à une valeur  $q_0 \neq 0$  du vecteur d'onde était une explication plausible pour la tendance du système électronique à former des phases de densité de charge inhomogène, comme il avait été proposé au début par Fogler *et al.* [17], la formation de ces phases électroniques solides dans des niveaux de Landau intermédiaires n'en dépend pas [66]. Le spin de l'électron n'est pas changé pendant de tels processus dans une branche de spin, et il n'intervient donc pas dans le modèle. Formellement, je traiterai désormais des fermions sans spin.

Le hamiltonien d'électrons restreints à un seul niveau de Landau  $n$  est donc donné par

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^2r d^2r' \psi_n^\dagger(\mathbf{r}) \psi_n(\mathbf{r}) V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi_n^\dagger(\mathbf{r}') \psi_n(\mathbf{r}'), \quad (2.1)$$

où les champs électroniques ne comprennent que des états du  $n$ -ième niveau,  $\psi_n(\mathbf{r}) = \sum_m \langle \mathbf{r} | n, m \rangle e_{n,m}$  et  $\psi_n^\dagger(\mathbf{r}) = \sum_m \langle n, m | \mathbf{r} \rangle e_{n,m}^\dagger$ . Dans l'espace réciproque, le hamiltonien s'écrit

$$\hat{H} = \frac{1}{2A} \sum_{\mathbf{q}} v(\mathbf{q}) \rho_n(-\mathbf{q}) \rho_n(\mathbf{q}), \quad (2.2)$$

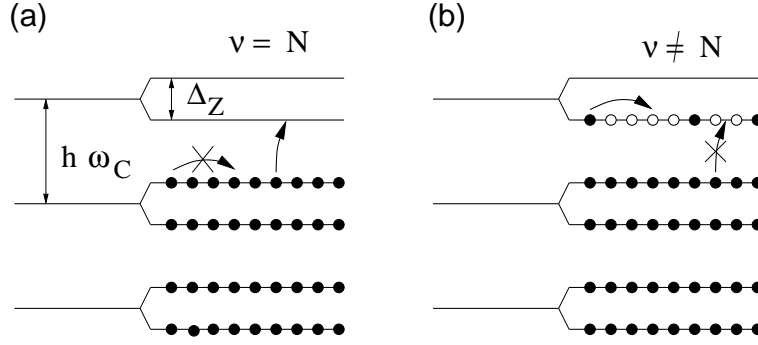


FIG. 2.1 – Excitations de plus basse énergie. Chaque niveau de Landau est séparé en deux branches de spin en raison de l'effet Zeeman. (a) A remplissage  $\nu = N$ , des excitations qui couplent des états du même niveau sont interdites par le principe de Pauli. Seules des excitations inter-niveaux sont possibles. (b) A remplissage partiel du dernier niveau peuplé ( $\nu \neq N$ ), des excitations dans un seul niveau étant permises définissent la physique de basse énergie, tandis que les excitations inter-niveaux, d'énergie  $\hbar\omega_C$  ou  $\Delta_z$ , sont omises dans le modèle (2.7).

avec la mesure  $\sum_{\mathbf{q}} = A \int d^2q / (2\pi)^2$  et le potentiel d'interaction coulombienne  $v(q) = 2\pi e^2 / \epsilon q$ . Les opérateurs  $\rho_n(\mathbf{q})$  étant des composantes de Fourier de la densité électronique du  $n$ -ième niveau,  $\rho_n(\mathbf{r}) = \psi_n^\dagger(\mathbf{r})\psi_n(\mathbf{r})$ , ils s'expriment en deuxième quantification à l'aide des éléments de matrice décrits dans l'annexe A.1,

$$\begin{aligned}
 \rho_n(\mathbf{q}) &= \sum_{m,m'} \langle n, m | e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} | n, m' \rangle e_{n,m}^\dagger e_{n,m'} \\
 &= \langle n | e^{-i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\eta}} | n \rangle \sum_{m,m'} \langle m | e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}} | m' \rangle e_{n,m}^\dagger e_{n,m'} \\
 &= F_n(q) \bar{\rho}(\mathbf{q}),
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

où  $F_n(q) = L_n(q^2/2) \exp(-q^2/4)$  est le facteur de forme en termes de polynômes de Laguerre  $L_n(x)$ . L'opérateur de densité *projeté* est défini comme

$$\bar{\rho}(\mathbf{q}) = \sum_{m,m'} \langle m | e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}} | m' \rangle e_{n,m}^\dagger e_{n,m'} \tag{2.4}$$

et satisfait à l'algèbre

$$[\bar{\rho}(\mathbf{q}), \bar{\rho}(\mathbf{k})] = 2i \sin\left(\frac{k_x q_y - k_y q_x}{2}\right) \bar{\rho}(\mathbf{q} + \mathbf{k}), \tag{2.5}$$

induite par la règle de commutation des composantes du centre de guidage (1.3),  $[X, Y] = i$ . Cette algèbre constitue aussi le groupe des translations magnétiques, car les translations du centre de guidage dans la direction  $x$  sont générées par  $Y$ , de même que celles dans la direction  $y$  sont générées par  $X$ , à cause de la relation (1.3). Il est remarquable que l'algèbre (2.5) est indépendante de l'indice du niveau de Landau  $n$  même si les opérateurs électroniques  $e_{n,m}^\dagger$  et  $e_{n,m}$  en dépendent. En absorbant le facteur de forme du  $n$ -ième niveau dans un potentiel d'interaction effectif

$$v_n(q) = \frac{2\pi e^2}{\epsilon q} [F_n(q)]^2, \quad (2.6)$$

on trouve pour le hamiltonien (2.2)

$$\hat{H} = \frac{1}{2A} \sum_{\mathbf{q}} v_n(q) \bar{\rho}(-\mathbf{q}) \bar{\rho}(\mathbf{q}), \quad (2.7)$$

qui, avec l'algèbre (2.5), définit le modèle d'électrons restreints à un seul niveau. Le point fort de ce modèle est qu'il constitue une *description commune pour tous les niveaux de Landau*. L'information qui indique dans quel niveau le système se trouve est encodée dans la forme du potentiel effectif (2.6) à travers le facteur de forme, qui tient compte du recouvrement des fonctions d'onde du  $n$ -ième niveau.

Les corrélations quantiques se manifestent dans les équations de mouvement de l'opérateur de densité projeté, qui sont non linéaires en raison des règles de commutation (2.5),

$$\begin{aligned} i \frac{d\bar{\rho}(\mathbf{q})}{dt} &= [\bar{\rho}(\mathbf{q}), \hat{H}] \\ &= \frac{i}{A} \sum_{\mathbf{k}} [v_n(k) - v_n(|\mathbf{k} + \mathbf{q}|)] \sin\left(\frac{k_x q_y - k_y q_x}{2}\right) \bar{\rho}(-\mathbf{k}) \bar{\rho}(\mathbf{q} + \mathbf{k}). \end{aligned}$$

## 2.2 Le potentiel d'interaction effectif

Pour mieux comprendre le modèle, je discuterai dans cette section quelques propriétés du potentiel d'interaction effectif  $v_n(q)$ . En raison des zéros des polynômes de Laguerre  $L_n(x)$ , la répulsion coulombienne disparaît à certaines valeurs du vecteur d'onde, notamment à  $q_0(n) \simeq 2, 4/\sqrt{2n+1}$ , ce qui correspond au premier zéro  $x \simeq 1, 2/(2n+1)$  [67]. Cela mène à des instabilités

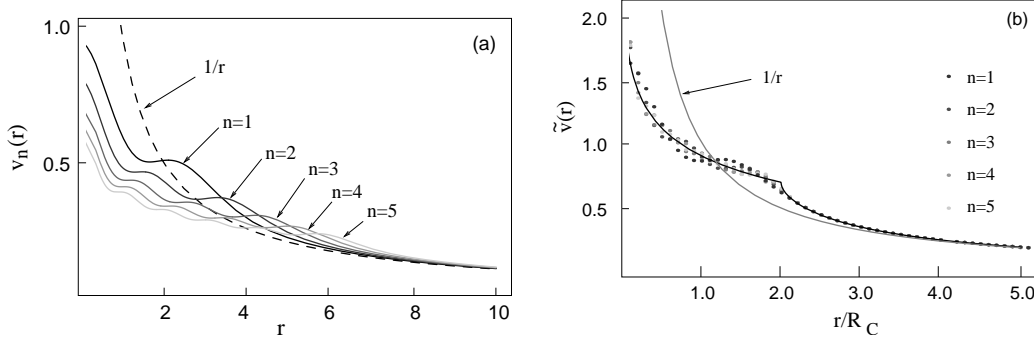


FIG. 2.2 – (a) Potentiel effectif dans l'espace réel pour les niveaux de Landau  $n = 1, \dots, 5$ , en unités de  $e^2/\epsilon$ . Le potentiel de Coulomb en  $1/r$  est montré pour comparaison (tirets). (b) Les résultats pour le potentiel (points) sont tracés après la transformation d'échelle (2.8). La ligne noire représente l'expression approchée  $\tilde{v}(x)$  et la ligne grise le potentiel de Coulomb.

du système pour la formation des phases de densité inhomogène avec une périodicité caractéristique  $\Lambda \simeq 2\pi/q_0(n)$ , car il est énergétiquement favorable pour la densité moyenne  $\langle \bar{\rho}(\mathbf{q}) \rangle$  d'avoir un maximum à  $q_0$ . La périodicité  $\Lambda$  varie proportionnellement avec le rayon cyclotron  $R_C = \sqrt{2n+1}$ . Une transformation dans l'espace réel du potentiel effectif,  $v_n(r) = \sum_{\mathbf{q}} \exp(i\mathbf{r} \cdot \mathbf{q}) v_n(q)$  confirme cette image. Pour des petites valeurs de  $n$ , cette transformation peut être effectuée de façon exacte, et l'on trouve une somme finie sur des fonctions de Bessel, dont les expressions exactes sont données dans l'annexe C. Dans des niveaux de Landau plus élevés,  $n \gg 1$ , on peut déduire une loi d'échelle pour le potentiel à l'aide de  $F_n(q) \simeq J_0(qR_C)$ , ce qui devient exact dans la limite  $n \rightarrow \infty$ ,

$$v_n(r) \simeq \frac{\tilde{v}(r/R_C)}{\sqrt{2n+1}}, \quad \text{avec} \quad \tilde{v}(x) = \frac{4e^2}{\pi\epsilon x} \text{Re} \left[ K \left( \frac{1 - \sqrt{1 - 4/x^2}}{2} \right) \right]^2, \quad (2.8)$$

où  $J_0(x)$  est la fonction de Bessel d'ordre zéro, et  $K(x)$  est l'intégrale elliptique complète de première espèce.

La figure 2.2(a) montre les résultats pour le potentiel effectif dans les niveaux  $n = 1, \dots, 5$ . On remarque la formation d'un palier - à part des petites oscillations - pour des distances moyennes, superposé au potentiel coulombien habituel,  $e^2/\epsilon r$ , qui est retrouvé à grande distance. Ce palier devient plus large dans des niveaux élevés cependant que sa hauteur est diminuée. La forme d'échelle  $\tilde{v}(x)$  est mise en évidence après la transformation



des résultats selon l'équation (2.8) : les points, qui représentent les résultats exacts, tombent approximativement sur la même courbe (noire). L'approximation (2.8), qui devient exacte dans la limite  $n \rightarrow \infty$ , décrit la forme du potentiel de façon suffisamment appropriée aussi pour de plus bas niveaux de Landau à condition que  $n > 0$ . Le point anguleux à  $r = 2R_C$  dans la forme approchée du potentiel est un artéfact mathématique - pour  $x \geq 2$ , l'argument de l'intégrale elliptique est réel tandis qu'il devient complexe pour  $x < 2$ , ce qui donne lieu à cette discontinuité. Cet effet pourrait engendrer des divergences artificielles dans d'éventuelles dérivées, mais on se sert de cette forme du potentiel uniquement comme support dans des intégrations, ce qui rend la discontinuité inoffensive.

La forme du potentiel peut être illustrée dans une image quasi-classique. Avec la restriction des champs électroniques au  $n$ -ième niveau de Landau, on a fait une moyenne sur le mouvement rapide de l'électron, déterminé par la variable  $\eta$  qui, sans cette restriction, couplerait des états de différents  $n$ . Les degrés de liberté du mouvement des électrons sont donc uniquement leurs centres de guidage. La fonction d'onde d'un électron dans un niveau de Landau  $n \geq 1$  tient compte de cette moyenne sur le mouvement cyclotron et a par conséquent une forme d'anneau de rayon  $R_C$ , représentant une densité électronique moyenne (Fig. 2.3). Si la distance  $r$  entre les centres d'anneaux, qui sont précisément les centres de guidage du mouvement cyclotron de chaque particule, est suffisamment grande ( $r > 2R_C$ ), la forme des fonctions d'onde de deux particules n'est qu'une faible correction du potentiel coulombien. A  $r \sim R_C$ , les anneaux commencent à se recouvrir et la répulsion devient donc plus forte. En revanche, si l'on rapproche les centres de guidage, ce recouvrement ne devient pas plus grand et la répulsion n'augmente donc pas de façon significative, ce qui explique la formation du palier dans le potentiel effectif. La répulsion devient à nouveau plus importante quand le recouvrement est complet à très petite distance. Or les centres de guidage étant étalés sur la surface minimale  $2\pi l_B^2$  ne peuvent pas être approchés à des distances plus petites que  $l_B$ . Pour  $n = 0$ , cette image quasi-classique devient plus problématique parce que les fonctions d'onde sont de forme gaussienne avec une extension spatiale de l'ordre de la longueur magnétique. Les électrons devraient donc plutôt être représentés par un disque de rayon  $l_B$ , qui constitue également la longueur minimale, comme il a été décrit plus haut.

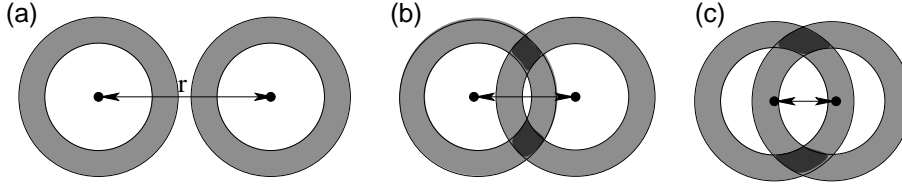


FIG. 2.3 – Les fonctions d’onde des électrons dans un niveau de Landau  $n \geq 1$  peuvent être représentées par des anneaux. (a) Si  $r > 2R_C$ , les anneaux ne se recouvrent pas. (b) Pour  $r \lesssim 2R_C$ , les anneaux commencent à avoir un recouvrement, représenté par la surface grise foncée. (c) Le recouvrement n’augmente pas de façon significative lorsque les anneaux sont rapprochés davantage.

### Echelles de longueur

Même s’il n’y a qu’une échelle d’énergie - celle des interactions de Coulomb  $e^2/\epsilon$  - dans le modèle (2.7), deux échelles de longueur interviennent : la première est le rayon cyclotron  $R_C = \sqrt{2n+1}$ , qui détermine la portée de l’interaction “forte” du potentiel (2.8). La deuxième est donnée par la distance moyenne  $d$  entre électrons dans le dernier niveau de Landau peuplé, qui dépend de la densité partielle  $\bar{n}_{el} = \bar{\nu}n_B = \bar{\nu}/2\pi$ . On a par conséquent  $d = 1/\sqrt{\bar{n}_{el}} \propto 1/\sqrt{\bar{\nu}}$ . Trois régimes peuvent donc être distingués,  $d \gg 2R_C$ ,  $d \ll 2R_C$  et  $d \sim 2R_C$  [31]. Le premier régime,  $d \gg 2R_C$  ou  $\bar{\nu} \ll 1/(2n+1)$ , est la limite de densité diluée : les électrons du  $n$ -ième niveau sont éloignés l’un de l’autre et peuvent être considérés comme des objets classiques parce que le recouvrement de leurs fonctions d’onde devient négligeable. Ils interagissent par la queue coulombienne du potentiel effectif et ne ressentent donc pas sa structure à courte distance,  $r \lesssim 2R_C$ . On s’attend donc à la formation d’un cristal électronique, aussi appelé cristal de Wigner [50]. Classiquement, un cristal triangulaire est énergétiquement favorisé [68]. Dans la limite de haute densité,  $d \ll 2R_C$  ou  $\bar{\nu} \gg 1/(2n+1)$ , les électrons interagissent surtout par le palier dans le potentiel effectif (2.8). Cette limite constitue un régime dans lequel l’approximation de champ moyen devient fiable : une particule arbitrairement choisie voit un grand nombre

$$N_{n,n} \sim \pi(2R_C)^2 \bar{n}_{el} = 2(2n+1)\bar{\nu} \quad (2.9)$$

de particules voisines dans son rayon d’interaction forte. Ces particules voisines créent le champ moyen tandis que leurs mouvements individuels n’influencent guère celui de la particule choisie. Cet argument intuitif est soutenu par un critère qui se déduit de la forme d’échelle du potentiel [31] :

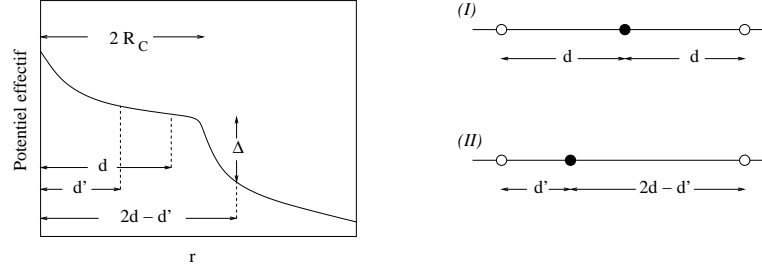


FIG. 2.4 – Formation d’amas. A cause de la forme particulière du potentiel effectif, la configuration (II) est énergétiquement plus favorable que la configuration (I). Même si l’électron décrit par le cercle noir est rapproché d’un de ces voisins, ce rapprochement coûte seulement une petite quantité d’énergie à cause du palier dans le potentiel. En revanche, cet électron est séparé par une grande distance de son deuxième voisin. Le gain d’énergie est de l’ordre de  $\Delta$ .

en remplaçant  $F_n(q) \rightarrow J_0(qR_C)$ , le modèle devient, après la transformation  $q' = q\sqrt{2n+1}$  dans l’intégrale,

$$\hat{H} = \frac{1}{2A\sqrt{2n+1}} \sum_{\mathbf{q}'} \frac{2\pi e^2}{\epsilon q'} [J_0(q')]^2 \bar{\rho} \left( -\frac{\mathbf{q}'}{\sqrt{2n+1}} \right) \bar{\rho} \left( \frac{\mathbf{q}'}{\sqrt{2n+1}} \right).$$

L’algèbre (2.5), qui détermine les corrélations quantiques, devient donc moins pertinente lorsque  $n$  augmente,

$$\left[ \bar{\rho} \left( \frac{\mathbf{q}}{\sqrt{2n+1}} \right), \bar{\rho} \left( \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{2n+1}} \right) \right] \simeq i \frac{(k_x q_y - k_y q_x)}{2n+1} \bar{\rho} \left( \frac{\mathbf{q} + \mathbf{k}}{\sqrt{2n+1}} \right) = \mathcal{O} \left( \frac{1}{n} \right), \quad (2.10)$$

où le sinus a été développé en série de Taylor. Dans cette limite, il suffit donc de tenir compte des corrélations quantiques au niveau de l’approximation de champ moyen, comme par exemple dans l’approximation de Hartree-Fock. Ce régime n’existe pas dans le plus bas niveau de Landau où le rayon cyclotron coïncide avec la longueur magnétique, en-dessous de laquelle deux électrons ne peuvent pas être approchés. L’approximation de champ moyen cesse d’être valable dans le régime  $d \sim 2R_C$  ou  $\bar{\nu} \sim 1/(2n+1)$ . Comme des processus à ces distances entre centres de guidage sont déterminés par des vecteurs d’onde  $ql_B^2 \sim d \sim \sqrt{2n+1}$ , le terme à droite de l’équation (2.10) ne devient pas petit même dans la limite  $n \rightarrow \infty$ . Dans ce cas, le régime de champ moyen couvre pourtant la plus large gamme de facteurs de remplissage partiel.

De même que le régime  $d \gg 2R_C$  est associé à la formation d’un cristal de Wigner, les deux autres limites sont liées à des phases spécifiques. Le

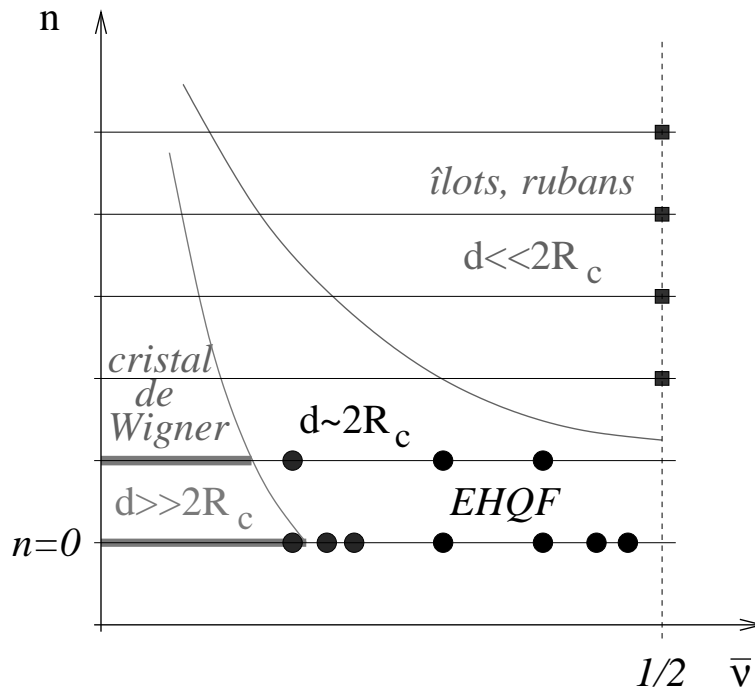


FIG. 2.5 – Esquisse du diagramme de phase selon la classification en trois régimes à base des échelles de longueur. Le diagramme est limité à l'intervalle  $0 \leq \bar{\nu} \leq 1/2$ , car les phases à  $n + 1 - \bar{\nu}$  sont reliées à celles à  $n + \bar{\nu}$  par la symétrie particule-trou, pour le cas d'électrons polarisés de spin discuté ici. Les cercles noirs représentent les endroits où l'EHQF a été mesuré. Le trait large en gris indique le régime dans lequel il y a des indications expérimentales de la présence d'un cristal de Wigner, et les carrés montrent l'endroit où l'observation d'une résistance longitudinale anisotrope est associée à la formation de rubans.

régime  $d \sim 2R_C$  est celui dans lequel on trouve des liquides quantiques qui donnent lieu à l'EHQF et, dans la limite  $d \ll 2R_C$ , on observe des cristaux électroniques différents du cristal de Wigner, comme les phases d'îlots et de rubans. Qualitativement, on peut comprendre cette formation d'amas malgré la répulsion entre électrons à partir de la forme du potentiel effectif (voir figure 2.4) : une configuration dans laquelle les électrons sont répartis de façon homogène [configuration (I) dans la figure 2.4] est énergétiquement moins favorable qu'une configuration (II) où deux électrons sont rapprochés. En raison du palier dans le potentiel effectif, un tel rapprochement ne coûte pas une grande énergie. Si en revanche cet amas est séparé d'un autre par une distance  $r \gg 2R_C$ , le gain d'énergie est de l'ordre de la hauteur du palier ( $\Delta$ ). Le diagramme de phase qui résulte de ces arguments d'échelles de longueur est esquissé dans la figure 2.5. La ligne de transition entre le cristal de Wigner et les liquides quantiques suit la loi d'échelle  $\bar{\nu}_n^{CW} \simeq \nu_0^{CW}/(2n+1)$ , où  $\nu_0^{CW} \simeq 1/6,5$  est la valeur du facteur de remplissage pour lequel on s'attend à la transition dans le plus bas niveau de Landau [69]. La ligne de transition entre les liquides quantiques et la phase d'îlots et celle des rubans a été déterminée à partir de l'expression (2.9), où  $N_{n.n.}$  représente maintenant le plus petit nombre de voisins d'une particule choisie pour que l'approximation de champ moyen reste valable. Pour le diagramme de phase (figure 2.5), on a choisi  $N_{n.n.} \sim 5$ , ce qui est motivé par les expériences de Lilly *et al.* [19]. Notons que ces lignes de transition dépendent également des impuretés dans le cristal sous-jacent : les solides électroniques peuvent abaisser leur énergie par déformation de leur structure cristalline pour suivre le potentiel d'impuretés, tandis que l'énergie des liquides incompressibles reste inchangée. Pour cette raison, la région des liquides quantiques dans le diagramme de phase peut devenir très étroite dans des niveaux de Landau élevés et même disparaître. Malgré le caractère qualitatif de cette approche d'échelle, elle réussit à classifier les phases observées [31]. La détermination plus précise d'un diagramme de phase, qui tient également compte des phénomènes de réentrance, requiert néanmoins des calculs d'énergie des différentes phases, ce qui sera l'objet du chapitre 3.

### Effets à température finie

Jusqu'à maintenant, j'ai discuté le diagramme de phase à  $T = 0$ . Or il est connu qu'un cristal fond à température suffisamment élevée, et l'on peut donc se poser la question de savoir comment décrire la fusion d'un

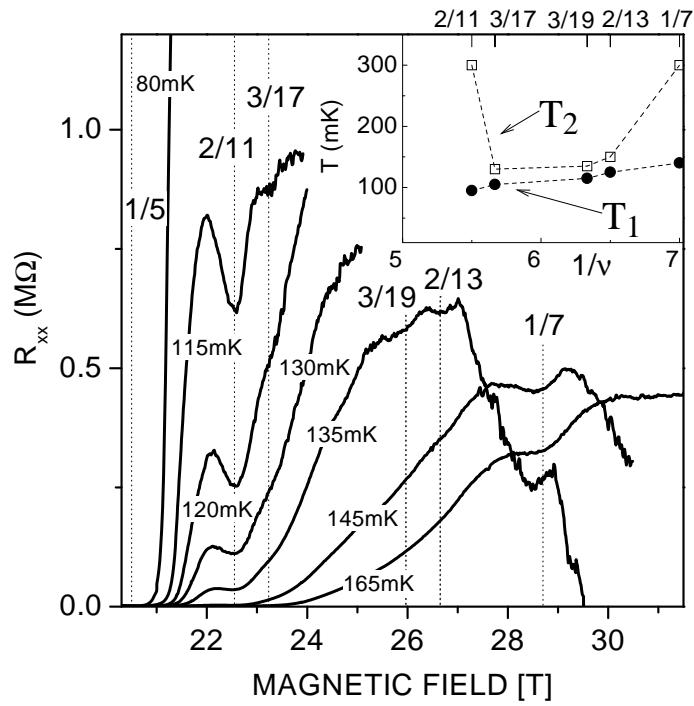


FIG. 2.6 – Résistance longitudinale dans le régime du cristal de Wigner (plus bas niveau de Landau) à température finie, mesurée par Pan *et al.* [70]. On observe des minima locaux à des facteurs de remplissages magiques  $\nu = p/(2sp + 1)$ . L'encadré montre les températures  $T_1$  et  $T_2$ , entre lesquelles ces minima sont observés.

cristal électronique dans le contexte des systèmes à effet Hall quantique. Cette question est particulièrement pertinente parce que des expériences de Pan *et al.* dans le plus bas niveau de Landau ont montré que le cristal de Wigner à  $\nu < 1/5$  fond à  $T_1 \sim 100\text{mK}$  et que le liquide exhibe au-dessus de cette température quelques propriétés qui ressemblent à celles d'un liquide de Laughlin : il y a des minima locaux dans la résistance longitudinale aux remplissages magiques  $\nu = p/(2sp + 1)$  [70]. Ces mesures sont montrées dans la figure 2.6. Notons qu'on ne peut pourtant pas, à présent, parler d'un EHQP induit à température finie dans le régime du cristal de Wigner parce qu'aucun palier n'a encore été observé. D'un point de vue théorique, la fusion d'un cristal bidimensionnel n'est pas simple à décrire parce qu'elle implique une transition de Kosterlitz-Thouless [71, 72] à cause du théorème de Mermin-Wagner [73]. Ce dernier constate qu'il n'y a pas d'ordre à longue portée dans des systèmes bidimensionnels si  $T \neq 0$ . Il y a pourtant un ordre à quasi-longue portée qui nous permet de maintenir le concept de cristal électronique, aussi à température finie.

Malgré ces difficultés, on peut se servir dans une première approche du critère de Lindemann pour décrire la fusion du cristal de Wigner, selon lequel un cristal fond si les fluctuations thermiques  $\sqrt{\langle \Delta r^2 \rangle}$  d'une particule autour de sa position d'équilibre sont une fraction suffisante du pas du réseau,  $\sqrt{\langle \Delta r^2 \rangle} = c_L d$  [74]. Empiriquement, on trouve  $c_L \sim 0,1$ . La température de fusion se déduit en égalisant l'énergie d'un petit déplacement de l'électron dans le cristal,  $e^2 \langle \Delta r^2 \rangle / \epsilon d^3$  et l'énergie thermique  $k_B T$ . Cela donne  $T_1 \simeq c_L^2 e^2 / \epsilon k_B d$ , indépendamment du champ magnétique, ce qui est en accord avec les observations expérimentales (encadré dans la figure 2.6). La température  $T_2$  est essentiellement déterminée par le gap d'activation du liquide quantique. Une relation d'échelle pour les gaps d'activation [12, 41],  $\Delta^a \simeq C(s) e^2 / \epsilon l_B (2ps + 1)$ , donne  $T_2 = T_C(s) / (2ps + 1)$ , où  $C(s)$  est une constante qui ne dépend que du nombre quantique  $s$ . La comparaison avec les expériences suggère  $T_C(s = 2) \sim 2\text{K}$  autour de  $\nu = 1/4$ .

Le critère de Lindemann, dont la validité n'est *a priori* pas assurée, trouve un soutien dans un raisonnement en énergie des deux phases, cristal de Wigner et liquide quantique, qui, à basse densité, varient comme  $\sim \sqrt{\nu}$  [54, 69]. La différence entre l'énergie du liquide quantique et celle du cristal de Wigner peut donc être approchée par  $\Delta_{l-s} \simeq \delta \sqrt{\nu} e^2 / \epsilon l_B$ , où  $\delta$  est un nombre qui varie très peu avec le facteur de remplissage. A cause de  $d \sim 1/\sqrt{n_{el}} \sim l_B/\sqrt{\nu}$ , la longueur magnétique peut s'exprimer en termes de distance moyenne

entre particules,  $l_B \sim \sqrt{\nu}d$ . On trouve donc pour la différence en énergie  $\Delta_{l-s} \simeq \delta e^2/\epsilon d$ , qui ne dépend pas du champ magnétique, en accord avec le critère de Lindemann. Les paramètres sont liés par  $\delta = c_L^2 \sim 0,01$ . Pour cette valeur, la différence en énergie autour de  $\nu = 1/5$  serait  $\Delta_{l-s} \simeq 0,0045e^2/\epsilon l_B$ , ce qui est de l'ordre de 600mK à  $B = 10\text{T}$ . Des calculs plus détaillés de Lam et Girvin ont permis une estimation de l'écart en énergie de 300mK pour un champ magnétique  $B = 20\text{T}$  [69], ce qui est du même ordre de grandeur. Ma conclusion est donc que les observations de Pan *et al.* [70] semblent confirmer une fusion d'un ordre cristallin, trouvé à basse température ( $T < T_1$ ), vers un liquide quantique, qui perd ses corrélations à une température supérieure  $T_2$ .

## 2.3 La base des Fermions Composites dans la théorie hamiltonienne

Le modèle (2.7) peut être représenté dans la base de FC dans le cadre de la théorie hamiltonienne, établie par Murthy et Shankar dans une série d'articles [75, 76, 77, 78, 79, 80, 81]. La motivation de cette théorie était d'unir les avantages de l'approche des fonctions d'onde d'essai et ceux de la théorie de Chern-Simons. Tandis que la théorie de Chern-Simons fournit une image simple de la nature des FCs, ainsi que de la fractionalisation de charge et leurs propriétés statistiques, l'approche des fonctions d'onde de Laughlin et Jain est plus adaptée pour des calculs de gaps d'activation et d'énergie des excitations [16]. La théorie hamiltonienne est à la fois située dans le cadre des théories de Chern-Simons et va même au-delà : la transformation de Chern-Simons est suivie d'une deuxième transformation unitaire qui a pour but de faire disparaître le potentiel vecteur  $\mathbf{a}^{CS}(\mathbf{r})$ , généré par la première. Pour définir cette transformation, Murthy et Shankar ont introduit un potentiel vecteur auxiliaire ainsi que son champ conjugué, qui peut être vu comme le générateur des translations des potentiels vecteurs. L'espace de Hilbert étant élargi par les degrés de liberté de ce champ, une contrainte doit être introduite pour définir le sous-espace des états physiques. Le modèle final permet d'être traité analytiquement par les méthodes standard de la deuxième quantification, ce qui fournit des résultats pour les énergies d'excitation et les gaps d'activation comparables à ceux obtenus numériquement dans l'approche des fonctions d'onde [41].



Je me limite à donner une brève esquisse de la théorie hamiltonienne sans discuter sa déduction du modèle microscopique. Le lecteur intéressé peut se référer à la revue [41] pour les détails.

De même que la densité électronique peut être décrite en première quantification à l'aide des centres de guidage  $\mathbf{R}_j^{(e)}$  du  $j$ -ième électron,

$$\bar{\rho}(\mathbf{q}) = \sum_j e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}_j^{(e)}},$$

une deuxième sorte de particules de charge  $c^2$  en unités de la charge élémentaire  $e$  donnerait lieu à une densité projetée

$$\bar{\chi}(\mathbf{q}) = \sum_j e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}_j^{(v)}},$$

où  $\mathbf{R}_j^{(v)}$  désigne le centre de guidage d'une telle particule. Dans le contexte des FCs, cette particule est précisément un objet de type vortex, qui est attaché à l'électron. En raison de sa charge  $c^2$ , les composantes de son centre de guidage satisfont à la règle de commutation  $[X_k^{(v)}, Y_l^{(v)}] = -i\delta_{k,l}/c^2$ , en analogie avec celles du centre de guidage de l'électron (1.3). Cette règle de commutation induit également une algèbre pour les composantes de la densité projetée  $\bar{\chi}(\mathbf{q})$ ,

$$[\bar{\chi}(\mathbf{q}), \bar{\chi}(\mathbf{k})] = -2i \sin\left(\frac{k_x q_y - k_y q_x}{2c^2}\right) \bar{\chi}(\mathbf{q} + \mathbf{k}). \quad (2.11)$$

Un problème doit être souligné dans cette approche : le vortex n'est pas indépendant des électrons, car il doit être compris comme une sorte de tourbillon du liquide électronique. Pour cette raison, un espace de Hilbert qui contient à la fois les degrés de liberté des électrons et ceux des vortex est trop grand. Formellement, le sous-espace des états physiques  $|\phi\rangle$  reste donc déterminé par la contrainte

$$\bar{\chi}(\mathbf{q})|\phi\rangle = 0, \quad (2.12)$$

comme il a été indiqué plus haut,<sup>1</sup> et il est plus approprié de parler de "pseudo-vortex" quand on se réfère au champ  $\bar{\chi}$ . Dans la théorie microscopique, qui est la base de la théorie hamiltonienne, cette dépendance entre les

---

<sup>1</sup>Dans le cadre de la théorie microscopique, cette contrainte est en effet imposée par l'introduction du champ de jauge auxiliaire pour faire disparaître le potentiel vecteur de Chern-Simons  $\mathbf{a}^{CS}(\mathbf{r})$ .

degrés de liberté des électrons et ceux des pseudo-vortex se manifeste par le fait que les deux centres de guidage,  $\mathbf{R}^{(e)}$  et  $\mathbf{R}^{(v)}$ , sont des fonctions de la même variable  $\Pi = \mathbf{p} + e(\mathbf{A} + \langle \mathbf{a}^{CS} \rangle)$ , où  $\langle \mathbf{a}^{CS} \rangle$  est la valeur du potentiel vecteur de Chern-Simons au niveau de l'approximation de champ moyen,

$$\mathbf{R}^{(e)} = \left( x + \frac{\Pi_y}{1+c}, y - \frac{\Pi_x}{1+c} \right) \quad \text{et} \quad \mathbf{R}^{(v)} = \left( x - \frac{\Pi_y}{c(1+c)}, y + \frac{\Pi_x}{c(1+c)} \right).$$

Les centres de guidages de l'électron et du pseudo-vortex ne coïncident donc pas (voire figure 2.7), ce qui donne lieu à une structure interne dipolaire du FC [82]. Sa charge globale est  $e^* = (1-c^2)$  en unités de la charge de l'électron  $-e$ . Comme il a été mentionné dans l'introduction, la charge du pseudo-vortex est liée aux deux nombres quantiques  $s$  et  $p$ , par  $c^2 = 2ps/(2ps+1)$ . Aussi cette valeur de la charge du vortex se déduit-elle dans la description microscopique [41]. Le modèle complet de la théorie hamiltonienne est donc donné par le hamiltonien (2.7) et les algèbres (2.5) et (2.11) avec la contrainte (2.12),<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2A} \sum_{\mathbf{q}} v_0(q) \bar{\rho}(-\mathbf{q}) \bar{\rho}(\mathbf{q}), & (2.13) \\ [\bar{\rho}(\mathbf{q}), \bar{\rho}(\mathbf{k})] &= 2i \sin \left( \frac{k_x q_y - k_y q_x}{2} \right) \bar{\rho}(\mathbf{q} + \mathbf{k}), \\ [\bar{\chi}(\mathbf{q}), \bar{\chi}(\mathbf{k})] &= -2i \sin \left( \frac{k_x q_y - k_y q_x}{2c^2} \right) \bar{\chi}(\mathbf{q} + \mathbf{k}), \\ [\bar{\chi}(\mathbf{q}), \bar{\rho}(\mathbf{k})] &= 0 \quad \text{et} \quad \bar{\chi}(\mathbf{q})|\phi\rangle = 0. \end{aligned}$$

A  $\nu = 1/2$ , où  $c = 1$  et  $e^* = 0$ , le modèle coïncide avec un modèle proposé par Pasquier et Haldane, qui ont examiné le problème de bosons à remplissage  $\nu = 1$  en les traitant comme des fermions à  $\nu = 1/2$ , après l'attachement d'un tube de flux à chaque boson [83].

Au lieu de tenir explicitement compte de la contrainte (2.12) dans un traitement du modèle, Murthy et Shankar ont proposé un "raccourci" en introduisant la combinaison "préférentielle"

$$\bar{\rho}^{CF}(\mathbf{q}) = \bar{\rho}(\mathbf{q}) - c^2 \bar{\chi}(\mathbf{q}) \quad (2.14)$$

---

<sup>2</sup>Je discute ici le cas du plus bas niveau de Landau,  $n = 0$ . Pour généraliser la théorie hamiltonienne à des niveaux arbitraires, il suffit de remplacer le potentiel d'interaction effectif,  $v_0(q) \rightarrow v_n(q)$ .

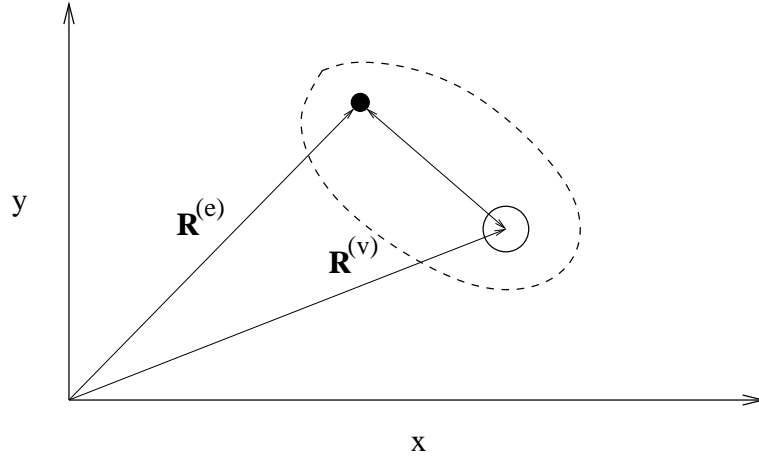


FIG. 2.7 – Fermion composite dans la théorie hamiltonienne.

dans le hamiltonien (2.7). A priori, toutes les combinaisons  $\bar{\rho}^\gamma(\mathbf{q}) = \bar{\rho}(\mathbf{q}) - \gamma\bar{\chi}(\mathbf{q})$ , avec  $\gamma$  arbitraire, sont équivalentes à cause de la contrainte. L'avantage du choix  $\gamma = c^2$  est que les éléments de matrice de l'opérateur de densité projeté satisfont à  $\langle N | \bar{\rho}^{CF}(\mathbf{q}) | 0 \rangle \propto q^2$  dans la limite  $q \rightarrow 0$ . C'est la condition pour que le facteur de structure  $S(\mathbf{q}, \omega) = \sum_N |\langle N | \bar{\rho}^{CF}(\mathbf{q}) | 0 \rangle|^2 \delta(\omega - E_N)$  varie comme  $q^4$  pour de petits vecteurs d'onde, ce qu'exige la projection dans le plus bas niveau de Landau [28, 52].

Notons que le raccourci de la combinaison préférentielle est une approximation valable seulement dans le cas où l'état fondamental est séparé des excitations par un gap, comme à  $\nu = p/(2sp + 1)$ . En revanche, il faut explicitement tenir compte de la contrainte si l'on veut étudier le système à  $\nu = 1/2$ , où il est décrit par une surface de Fermi de FCs [12]. En effet, le système devient *compressible* à cette valeur du remplissage, ce qui est correctement décrit dans une approximation conservante [80, 84, 85], tandis que la compressibilité n'est pas finie si le rôle de la contrainte n'est pas pris en compte [86].

Dans les calculs, présentés dans la suite, on se servira de la combinaison préférentielle dans la mesure où on ne décrit pas le système à  $\nu = 1/2$ . Bien qu'en remplaçant  $\bar{\rho}(\mathbf{q}) \rightarrow \bar{\rho}^{CF}(\mathbf{q})$  le hamiltonien ne commute plus avec la densité des pseudo-vortex dans un sens strict, le commutateur s'annule dans le sous-espace défini par la contrainte. Le modèle reste ainsi *faiblement invariant de jauge*. Une autre raison algébrique peut être évoquée pour le choix  $\gamma = c^2$  : par ce choix, l'algèbre (2.5) des  $\bar{\rho}(\mathbf{q})$  est reproduite à l'ordre

le plus bas en  $q$ ,

$$\begin{aligned} [\bar{\rho}^{CF}(\mathbf{q}), \bar{\rho}^{CF}(\mathbf{k})] &\simeq i(k_x q_y - k_y q_x) \bar{\rho}^{CF}(\mathbf{q} + \mathbf{k}) \\ &\simeq 2i \sin\left(\frac{k_x q_y - k_y q_x}{2}\right) \bar{\rho}^{CF}(\mathbf{q} + \mathbf{k}) + \mathcal{O}(q^3, k^3). \end{aligned}$$

Les ordres plus élevés en  $q$  sont supprimés dans le hamiltonien à cause de la gaussienne dans le potentiel effectif (2.6). L'opérateur  $\bar{\rho}^{CF}(\mathbf{q})$  est désormais interprété comme l'opérateur de densité de FCs.

La base des FCs s'introduit après une transformation des variables  $\mathbf{R}^{(e)}$  et  $\mathbf{R}^{(v)}$  en centre de guidage du FC,  $\mathbf{R}^{(CF)}$ , et variable relative,  $\boldsymbol{\eta}^{(CF)}$ . On exige de cette transformation que ces nouvelles variables satisfassent aux règles de commutation en termes de longueur magnétique du FC,  $l_B^* = 1/\sqrt{1-c^2}$ ,

$$[\eta_x^{(CF)}, \eta_y^{(CF)}] = -il_B^{*2} \quad \text{et} \quad [X^{(CF)}, Y^{(CF)}] = il_B^{*2}, \quad (2.15)$$

en analogie avec les variables électroniques (1.3). La transformation qui respecte ces règles est donnée par [41]

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{(CF)} &= \frac{\mathbf{R}^{(e)} - c^2 \mathbf{R}^{(v)}}{1 - c^2} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\eta}^{(CF)} = \frac{c}{1 - c^2} (\mathbf{R}^{(e)} - \mathbf{R}^{(v)}) \\ \Leftrightarrow \quad \mathbf{R}^{(e)} &= \mathbf{R}^{(CF)} - \boldsymbol{\eta}^{(CF)} c \quad \text{et} \quad \mathbf{R}^{(v)} = \mathbf{R}^{(CF)} - \boldsymbol{\eta}^{(CF)}/c. \end{aligned} \quad (2.16)$$

De la même façon que pour la base électronique, l'opérateur de densité de FCs peut s'écrire en deuxième quantification,

$$\bar{\rho}^{CF}(\mathbf{q}) = \sum_{j,j';m,m'} \langle m | e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}^{CF}} | m' \rangle \langle j | \bar{\rho}^p(\mathbf{q}) | j' \rangle c_{j,m}^\dagger c_{j',m'},$$

où les états  $|j\rangle$  sont associés à l'opérateur  $\boldsymbol{\eta}^{(CF)}$  et les états  $|m\rangle$  à  $\mathbf{R}^{(CF)}$ . Une description détaillée des éléments de matrice se trouve dans l'annexe A.2 [Eqs. (A.9) et (A.10)]. Les opérateurs  $c_{j,m}^\dagger$  et  $c_{j,m}$ , avec  $\{c_{j,m}, c_{j',m'}^\dagger\} = \delta_{j,j'} \delta_{m,m'}$  et  $\{c_{j,m}, c_{j',m'}\} = 0$ , sont respectivement les opérateurs de création et d'annihilation de FCs dans l'état  $|j, m\rangle = |j\rangle \otimes |m\rangle$ .

En raison de la règle de commutation (2.15) pour les composantes du centre de guidage d'un FC, chaque état occupe une surface minimale  $1/n_{B^*} = 2\pi l_B^{*2}$ , en analogie avec le cas électronique. Il existe donc  $An_{B^*}$  états par "niveau de FC"  $j$ , et un facteur de remplissage des niveaux de FC peut être défini,  $\nu^* = n_{el}/n_{B^*}$ , qui est lié au facteur de remplissage électronique par

$$\nu = \frac{\nu^*}{2s\nu^* + 1}. \quad (2.17)$$

Quand  $p$  niveaux de FC sont complètement remplis,  $\nu^* = p$ , l'état fondamental peut donc être décrit par la moyenne

$$\langle c_{j,m}^\dagger c_{j',m'} \rangle = \delta_{j,j'} \delta_{m,m'} \Theta(p - 1 - n), \quad (2.18)$$

avec la fonction de Heavyside  $\Theta(x) = 1$  pour  $x \geq 0$  et  $\Theta(x) = 0$  pour  $x < 0$ . Shankar a montré que l'approximation de Hartree-Fock de ce modèle fournit de bons résultats pour les gaps d'activation des états fractionnaires à  $\nu = p/(2sp + 1)$ , comparés à ceux trouvés en utilisant les fonctions d'onde de Jain ou la diagonalisation exacte [79].

## 2.4 Une possible approche diagrammatique

Dans le cadre d'une approche diagrammatique, l'état non dégénéré à  $\nu^* = p$ , décrit par la moyenne (2.18) peut être vu comme l'état fondamental d'une théorie "libre" autour duquel on fait un développement perturbatif. Cette approche diagrammatique se construit en interprétant le hamiltonien de Hartree-Fock

$$\begin{aligned} \hat{H}^0 &= \frac{1}{2} \sum_{\nu_1, \dots, \nu_4} v_{\nu_1, \dots, \nu_4} \left[ \langle c_{\nu_1}^\dagger c_{\nu_3} \rangle c_{\nu_2}^\dagger c_{\nu_4} + \langle c_{\nu_2}^\dagger c_{\nu_4} \rangle c_{\nu_1}^\dagger c_{\nu_3} \right. \\ &\quad \left. - \langle c_{\nu_1}^\dagger c_{\nu_4} \rangle c_{\nu_2}^\dagger c_{\nu_3} - \langle c_{\nu_2}^\dagger c_{\nu_3} \rangle c_{\nu_1}^\dagger c_{\nu_4} \right] \\ &= \sum_{n,m} \varepsilon_n c_{n,m}^\dagger c_{n,m} \end{aligned} \quad (2.19)$$

comme le hamiltonien de la théorie libre, où  $\nu_i \equiv (n_i, m_i)$ , et le vertex d'interaction est défini comme

$$\begin{aligned} v_{\nu_1, \dots, \nu_4} &= \frac{1}{A} \sum_{\mathbf{q}} v_0(q) \langle n_1 | \bar{\rho}^p(-\mathbf{q}) | n_3 \rangle \langle n_2 | \bar{\rho}^p(\mathbf{q}) | n_4 \rangle \\ &\quad \times \langle m_1 | e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_{CF}} | m_3 \rangle \langle m_2 | e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_{CF}} | m_4 \rangle. \end{aligned} \quad (2.20)$$

La preuve que le hamiltonien libre est diagonal en  $n$  et  $m$  se trouve dans l'annexe B.1, ainsi que des détails sur cette approche diagrammatique. On trouve pour les "niveaux"

$$\varepsilon_n = 2 \sum_{\mathbf{q}} v_0(q) \sum_{n'=0}^{p-1} |\langle n' | \bar{\rho}^p(\mathbf{q}) | n \rangle|^2 \simeq n\omega^*(s, p) + C, \quad (2.21)$$

où  $C$  est une constante qui définit le zéro d'énergie. Deux remarques sont à faire : premièrement, les énergies ne dépendent pas du nombre quantique  $m$ , qui est lié au centre de guidage du FC. La dégénérescence de chaque niveau est donc  $N_{B^*} = An_{B^*} = A/2\pi l_B^{*2}$ , en accord avec ce qui a été mentionné dans la section précédente. Deuxièmement, les niveaux sont approximativement équidistants pour de petites valeurs de  $n$  avec une séparation entre niveaux de  $\omega^*(s, p)$ . Les résultats pour différentes valeurs de  $s$  et  $p$  sont tracés dans la figure 2.8. Dans ce sens seulement, on peut interpréter  $\hat{H}^0$  comme le hamiltonien de FCs libres, dont une masse effective peut être définie par  $\omega^*(s, p) = (eB)^*/m^*(s, p)$ .

Les termes au-delà de l'approximation de Hartree-Fock peuvent être regroupés dans un hamiltonien "d'interaction",

$$\begin{aligned} \hat{H}^{int} = & \frac{1}{2} \sum_{\nu_1, \dots, \nu_4} v_{\nu_1, \dots, \nu_4} \left[ c_{\nu_1}^\dagger c_{\nu_2}^\dagger c_{\nu_4} c_{\nu_3} \right. \\ & \left. - \langle c_{\nu_1}^\dagger c_{\nu_3} \rangle c_{\nu_2}^\dagger c_{\nu_4} - \langle c_{\nu_2}^\dagger c_{\nu_4} \rangle c_{\nu_1}^\dagger c_{\nu_3} + \langle c_{\nu_1}^\dagger c_{\nu_4} \rangle c_{\nu_2}^\dagger c_{\nu_3} + \langle c_{\nu_2}^\dagger c_{\nu_3} \rangle c_{\nu_1}^\dagger c_{\nu_4} \right]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Dans l'approche diagrammatique, ce hamiltonien est traité comme une perturbation du hamiltonien  $\hat{H}^0$ , dont l'état fondamental est donné par la moyenne (2.18). Il faut souligner qu'un tel traitement dans le cadre de la théorie de perturbation est problématique par rapport à d'autres modèles dans lesquels un couplage, introduit par le hamiltonien d'interaction, est un paramètre petit. Dans le cas présent, l'échelle d'énergie des interactions dans  $\hat{H}^{int}$  est intrinsèquement la même que celle de  $\hat{H}^0$ . Les fonctions de Green pour les opérateurs de FCs sont décrites à l'aide de la matrice  $S$  dans la représentation d'interaction [87]

$$S(t - t') = \mathcal{T} \exp \left( -i \int_t^{t'} d\tau \hat{H}^{int}(\tau) \right),$$

où  $\mathcal{T}$  est l'opérateur chronologique,

$$\begin{aligned} G(\nu, \nu'; t) &= -i \frac{\langle \mathcal{T} c_\nu(t) c_{\nu'}^\dagger(t=0) S(-\infty, \infty) \rangle}{\langle S(-\infty, \infty) \rangle} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^{k+1}}{k!} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_k \frac{\langle \mathcal{T} c_\nu(t) \hat{H}^{int}(\tau_1) \dots \hat{H}^{int}(\tau_k) c_{\nu'}^\dagger(t=0) \rangle}{\langle S(-\infty, \infty) \rangle}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

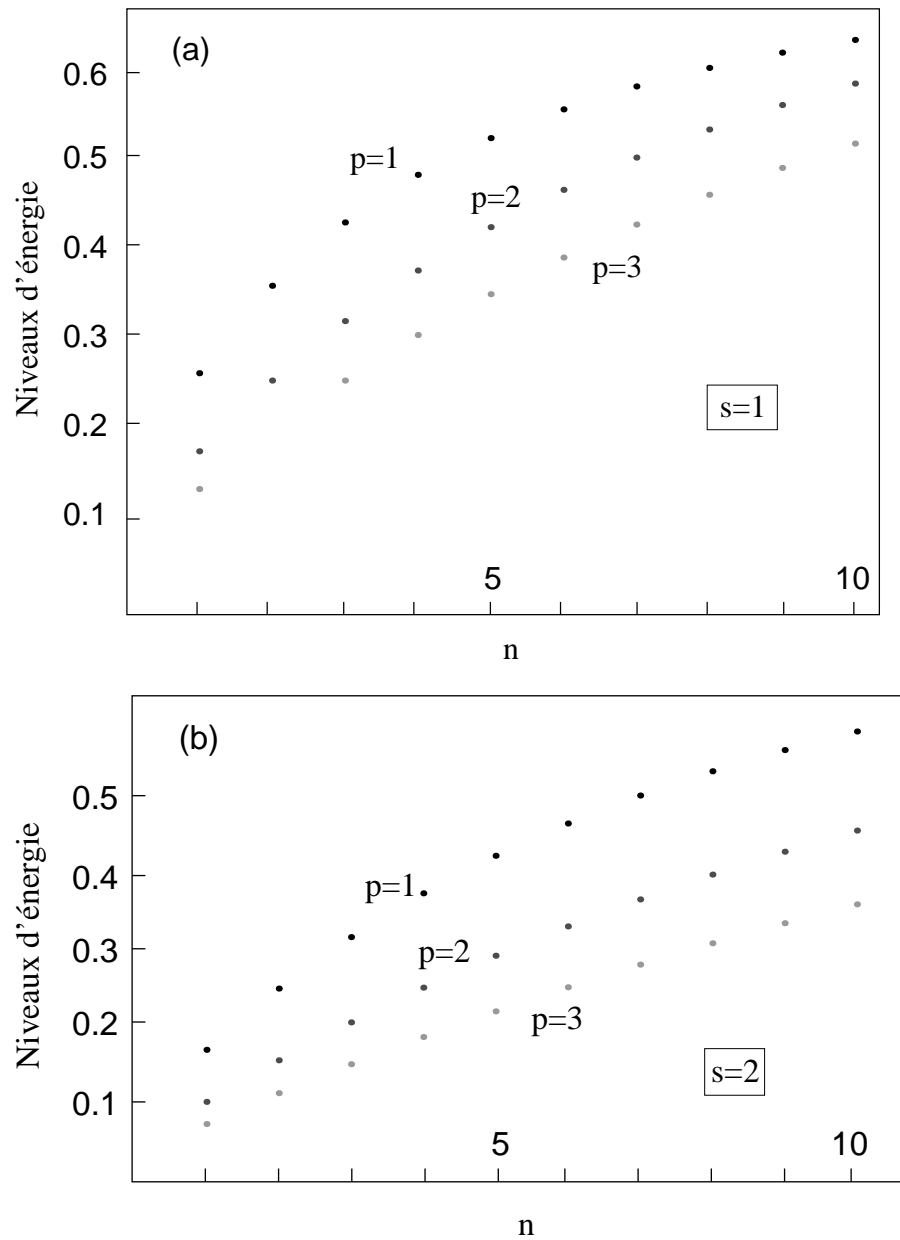


FIG. 2.8 – Niveaux de FCs dans l'approximation de Hartree-Fock pour différentes valeurs de  $s$  (nombre de paires de quanta de flux portés par chaque FC) et  $p$  (nombre de niveaux de FC complètement remplis).

Le numérateur  $\langle S(-\infty, \infty) \rangle$  a pour effet que seuls les diagrammes connectés sont sommés. On trouve pour les fonctions de Green “libres”,

$$\begin{aligned} G^0(\nu, \nu'; t) &= -i \langle \mathcal{T} c_\nu(t) c_{\nu'}^\dagger(t=0) \rangle \\ &= -i \delta_{\nu, \nu'} e^{-i\varepsilon_n t} \{ \Theta(t) [1 - \Theta(p-1-n)] - \Theta(-t) \Theta(p-1-n) \}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

et dans l'espace de Fourier

$$G^0(\nu, \nu'; \omega) = \delta_{\nu, \nu'} \left[ \frac{1 - \Theta(p-1-n)}{\omega - \varepsilon_n + i0^+} + \frac{\Theta(p-1-n)}{\omega - \varepsilon_n - i0^+} \right]. \quad (2.25)$$

La forme spécifique du hamiltonien  $\hat{H}^{int}$  a pour effet que les diagrammes contenant les contractions à temps égaux  $\langle \mathcal{T} c_\nu(\tau) c_{\nu'}^\dagger(\tau) \rangle$  ne contribuent pas. Il s'agit précisément des diagrammes qui contiennent le diagramme de Hartree ou de Fock à l'ordre le plus bas si l'on coupe deux lignes continues, qui représentent les fonctions de Green libres [voir figure 2.9(a)].

Cette approche diagrammatique est utilisée pour calculer la fonction diélectrique, qui modifie le potentiel d'interaction, dans l'approximation de phases aléatoires (RPA),<sup>3</sup> qui tient compte des diagrammes de bulles. Le diagramme à l'ordre le plus bas est esquissé dans la figure 2.9(b). Dans cette approximation, tous les diagrammes de bulles sont sommés, ce qui donne lieu à une série géométrique pour le potentiel modifié,

$$v_0^\varepsilon(q, \omega) = \frac{v_0(q)}{1 - v_0(q)D(q, \omega)} = \frac{v_0(q)}{\epsilon_{RPA}(q, \omega)},$$

où la fonction diélectrique est définie par

$$\epsilon_{RPA}(q, \omega) = 1 - v_0(q)D(q, \omega),$$

avec la fonction de Green (retardée) des opérateurs de densité projetés,

$$\begin{aligned} D(q, \omega) &= \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} \int dt e^{i\omega t} D(\mathbf{q}, \mathbf{q}', t) \quad \text{avec} \\ D(\mathbf{q}, \mathbf{q}', t) &\equiv -i\Theta(t) \langle [\bar{\rho}(\mathbf{q}, t), \bar{\rho}^\dagger(\mathbf{q}', t=0)] \rangle. \end{aligned} \quad (2.26)$$

L'évaluation de cette expression (voir annexe B.2) donne le résultat

$$D(q, \omega) = 2 \sum_{n>0} \mathcal{F}_n^p(q) \frac{n\omega^*(s, p)}{\omega^2 - n^2\omega^{*2}(s, p)} \quad (2.27)$$

---

<sup>3</sup>J'emploie l'abréviation “RPA” de l'anglais (*random phase approximation*), largement utilisée dans la littérature.



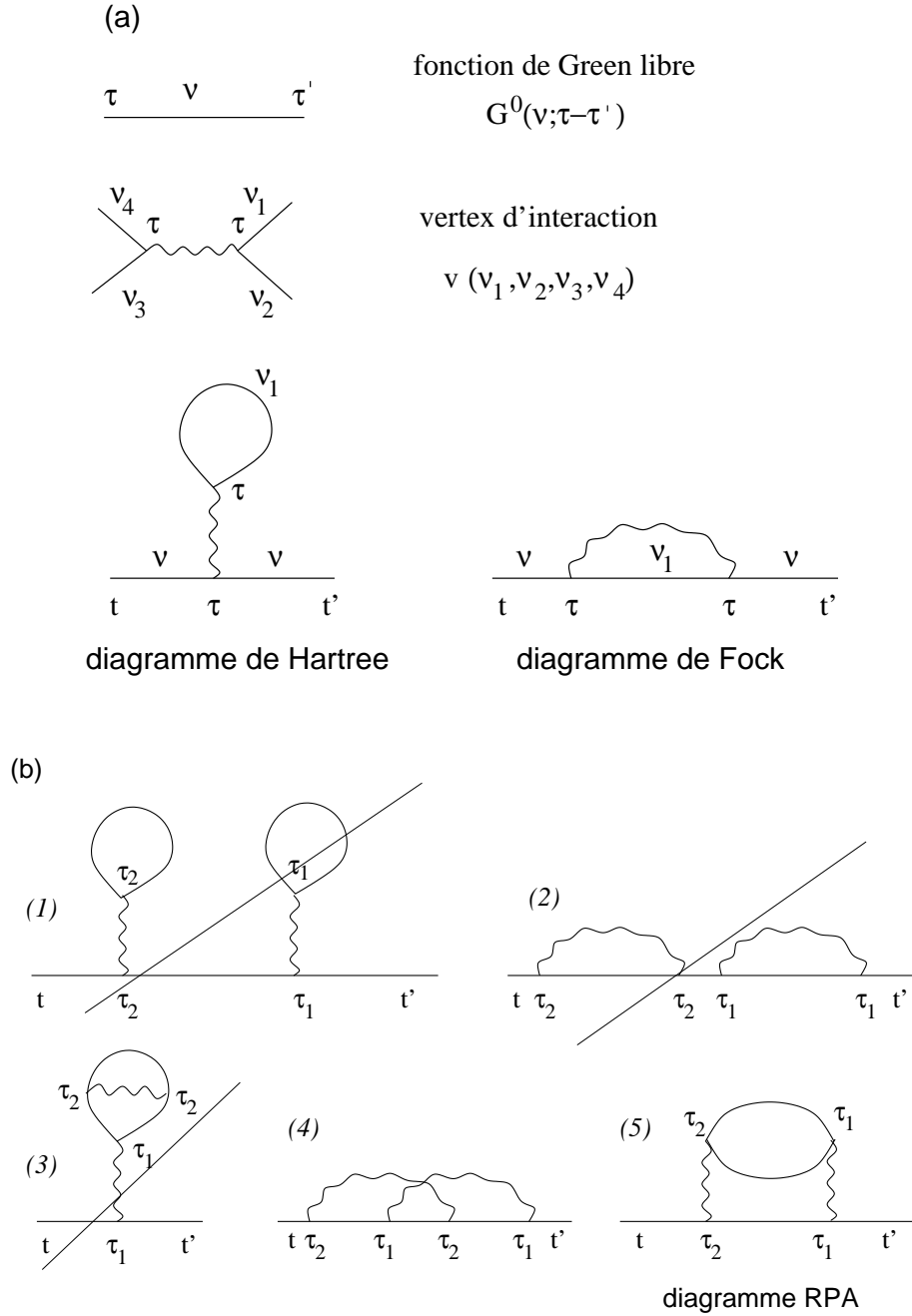


FIG. 2.9 – (a) Diagrammes de premier ordre. Les diagrammes de Hartree et de Fock sont comptés dans  $\hat{H}^0$ . (b) Diagrammes de deuxième ordre. Les diagrammes (1), (2) et (3), qui contiennent des contractions à temps égaux, ne contribuent pas à un développement perturbatif, tandis que les (4) et (5) y contribuent.

avec les amplitudes

$$\mathcal{F}_n^p(q) = n_B^* \sum_{n'=p-n}^{p-1} |\langle n' + n | \bar{\rho}^p(\mathbf{q}) | n' \rangle|^2. \quad (2.28)$$

Pour les plus bas niveaux  $p$ , la somme dans l'expression (2.28) ne contient que peu de termes, et l'on trouve pour  $p = 1$ , dans la limite  $\omega \rightarrow 0$ , la fonction diélectrique *statique*

$$\epsilon_{RPA}^{(p=1)}(q) = 1 + \frac{v_0(q)(ql_B^*c)^2 n_B^*}{\omega^*(s, p=1)} \left[ L_1 \left( \frac{q^2 l_B^{*2} c^2}{2} \right) - e^{-q^2/2c^2} L_1 \left( \frac{q^2 l_B^{*2}}{2c^2} \right) \right]^2 e^{-q^2 l_B^{*2} c^2 / 2}. \quad (2.29)$$

Dans des niveaux plus élevés, on peut utiliser une approximation en fonctions de Bessel  $J_n(x)$  pour les éléments de matrice [88],

$$\mathcal{F}_n^p(q) \simeq n_B^* n \left[ J_n(ql_B^*c\sqrt{2p+1}) - c^2 J_n \left( \frac{ql_B^*}{c} \sqrt{2p+1} \right) \right]^2,$$

et l'on trouve pour la fonction diélectrique statique

$$\begin{aligned} \epsilon_{RPA}^p(q) \simeq & 1 + \frac{v_0(q)n_B^*}{\omega^*(s, p)} \left\{ 1 + c^4 - 2c^2 J_0 \left[ qR_C^* \left( c - \frac{1}{c} \right) \right] \right. \\ & \left. - \left[ J_0(qR_C^*c) - c^2 J_0 \left( \frac{qR_C^*}{c} \right) \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.30)$$

avec le rayon cyclotron du FC,  $R_C^* = l_B^* \sqrt{2p+1}$ . Cette fonction diélectrique ressemble à celle des électrons dans des niveaux de Landau élevés, qui a été déduite par Aleiner et Glazman [65].

## 2.5 Le modèle de FC en interaction à $\nu^* \neq p$

Dans la partie précédente, j'ai examiné le système à des remplissages de FC  $\nu^* = p$  et commenté sur la similarité entre l'EHQF et l'EHQE : dans le cadre de l'approximation de Hartree-Fock, les niveaux de FCs ressemblent aux niveaux de Landau avec une densité d'états  $n_{B^*} = 1/2\pi l_B^{*2}$ , renormalisée par la longueur magnétique des FCs. Pour le cas  $\nu^* \neq p$ , il faut pourtant affronter à nouveau le problème de dégénérescence, car tous les états  $m$  sont équivalents dans le modèle de FCs libres. Les interactions résiduelles entre FCs deviennent donc importantes à ces remplissages.

Une hypothèse serait que ces FCs puissent former eux-mêmes un liquide quantique, qui pourrait être interprété en termes de deuxième génération de FCs. Pour vérifier une telle hypothèse, il faut décrire le potentiel d'interaction entre ces particules. Le modèle de FC en interaction à  $\nu^* \neq p$  est basé sur des hypothèses similaires à celles formulées pour déduire le modèle d'électrons restreints à un seul niveau : seules les excitations de plus basse énergie, qui couplent les états du même niveau de FC, sont considérées. Cette hypothèse est plus délicate que pour le cas d'électrons, car les interactions résiduelles, étant déterminées par la même échelle d'énergie que celle de la séparation entre niveaux, peuvent donner lieu à un important mélange de niveaux. Ces excitations peuvent être incluses au niveau de la RPA dans la fonction diélectrique, qui a été déduite dans la section précédente et qui modifie le potentiel d'interaction entre FCs. A  $\nu^* = p + \bar{\nu}^*$ , où  $\bar{\nu}^*$  désigne le facteur de remplissage partiel du niveau  $p$ , l'opérateur de densité de FCs  $\bar{\rho}^{CF}(\mathbf{q})$  est donc restreint à ce niveau, et l'on trouve pour le hamiltonien effectif

$$\hat{H}^{CF} = \frac{1}{2A} \sum_{\mathbf{q}} v_0(q) \bar{\rho}_p^{CF}(-\mathbf{q}) \bar{\rho}_p^{CF}(\mathbf{q}), \quad (2.31)$$

où  $\bar{\rho}_p^{CF}(\mathbf{q}) = F_p^{CF}(q) \bar{\rho}(\mathbf{q})$  avec le facteur de forme de FCs dans le niveau  $p$ ,  $F_p^{CF}(q) \equiv \langle p | \bar{\rho}^p(\mathbf{q}) | p \rangle$ , et les opérateurs de densité de FCs projetés,

$$\bar{\rho}(\mathbf{q}) = \sum_{m,m'} \langle m | e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}^{CF}} | m' \rangle c_{p,m}^\dagger c_{p,m'}. \quad (2.32)$$

En absorbant le carré du facteur de forme  $F_p^{CF}(q)$  dans le potentiel d'interaction, le hamiltonien de FC en interaction s'écrit

$$\hat{H}^{CF} = \frac{1}{2A} \sum_{\mathbf{q}} \frac{v_{s,p}^{CF}(q)}{\epsilon^p(q)} \bar{\rho}(-\mathbf{q}) \bar{\rho}(\mathbf{q}), \quad (2.33)$$

avec le *potentiel d'interaction entre FCs* du niveau  $p$

$$\begin{aligned} v_{s,p}^{CF}(q) &= v_0(q) [F_p^{CF}(q)]^2 \\ &= \frac{2\pi e^2}{\epsilon q} e^{-q^2 l_B^{*2}/2} \left[ L_p \left( \frac{q^2 l_B^{*2} c^2}{2} \right) - c^2 e^{-q^2/2c^2} L_p \left( \frac{q^2 l_B^{*2}}{2c^2} \right) \right]^2. \end{aligned} \quad (2.34)$$

De même que dans le cas électronique, le commutateur (2.15) entre les composantes du centre de guidage  $\mathbf{R}^{CF}$  induit une algèbre pour les opérateurs

$\bar{\rho}(\mathbf{q})$ ,

$$[\bar{\rho}(\mathbf{q}), \bar{\rho}(\mathbf{k})] = 2i \sin \left( \frac{(k_x q_y - k_y q_x) l_B^{*2}}{2} \right) \bar{\rho}(\mathbf{q} + \mathbf{k}), \quad (2.35)$$

qui, avec le hamiltonien (2.33), définit le modèle de FC en interaction. Ce modèle a donc la même structure que le modèle d'électrons restreints à un seul niveau - il suffit de remplacer le potentiel d'interaction effectif par le potentiel  $v_{s,p}^{CF}(q)$  et d'utiliser la longueur magnétique des FCs,  $l_B^*$ . Cette auto-similarité au niveau de la structure du modèle peut donner lieu sous certaines conditions à l'auto-similarité de la courbe de résistance de Hall, qui a été suggérée initialement par Mani et v. Klitzing dans une analyse basée sur une transformation d'échelle [27]. Notons que le potentiel d'interaction entre FCs (2.34) ayant une forme différente de celle de l'interaction électronique dans le niveau de Landau  $n$  (2.6), cette auto-similarité de la courbe de Hall n'est pas automatiquement obtenue par l'auto-similarité mathématique du modèle.

Le modèle de FC en interaction est utilisé dans le chapitre 4 pour la description des différentes phases de FC. A cause de l'auto-similarité, on peut s'attendre à la formation de liquides quantiques incompressibles, qui seraient analogues au liquide de Laughlin en termes de FCs. Formellement, de tels liquides peuvent être décrits comme des FCs de deuxième génération ( $FC^2$ ), et la base de  $FC^2$  se déduit du modèle (2.33), de la même façon que celle des FCs du modèle électronique (2.13) : l'espace de Hilbert est élargi par des degrés de liberté du pseudo-vortex de FC  $\bar{\chi}(\mathbf{q})$ , qui porte  $2\tilde{s}$  quanta de flux et qui possède une charge de  $\tilde{c}^2 = 2\tilde{p}\tilde{s}/(2\tilde{p}\tilde{s} + 1)$ . Cela mène à une nouvelle contrainte,  $\bar{\chi}(\mathbf{q})|\phi\rangle = 0$ , pour les états physiques  $|\phi\rangle$ . Les composantes de l'opérateur de pseudo-vortex satisfont à l'algèbre

$$[\bar{\chi}(\mathbf{q}), \bar{\chi}(\mathbf{k})] = -2i \sin \left( \frac{k_x q_y - k_y q_x l_B^{*2}}{2\tilde{c}^2} \right) \bar{\chi}(\mathbf{q} + \mathbf{k}), \quad (2.36)$$

induite par la règle de commutation pour les composantes du centre de guidage du pseudo-vortex  $\mathbf{R}^{v-CF}$ ,  $[X^{v-CF}, Y^{v-CF}] = -il_B^{*2}/\tilde{c}^2$ . Pour décrire le  $FC^2$ , qui consiste en un FC de la première génération situé au centre de guidage  $\mathbf{R}^{CF}$  et en un pseudo-vortex à  $\mathbf{R}^{v-CF}$ , on introduit une nouvelle combinaison préférentielle,  $\bar{\rho}^{C^2F}(\mathbf{q}) = \bar{\rho}(\mathbf{q}) - \tilde{c}^2 \bar{\chi}(\mathbf{q})$ . La charge globale du  $FC^2$  est donc  $\tilde{e} = (1 - \tilde{c}^2)e^* = (1 - \tilde{c}^2)(1 - c^2)$ , en unités de la charge de l'électron  $-e$ . La variable relative et la variable du centre de guidage du  $FC^2$ , respectivement  $\boldsymbol{\eta}^{C^2F}$  et  $\mathbf{R}^{C^2F}$ , se déduisent à partir des centres de guidage du FC et du pseudo-vortex de la même manière que pour les FCs [voir Eq.

(2.16)]. La nouvelle combinaison préférentielle, qui est interprétée comme la densité de FC<sup>2</sup>, s'écrit donc en deuxième quantification

$$\bar{\rho}^{C^2F}(\mathbf{q}) = \sum_{j,j';m,m'} \langle m | e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}^{C^2F}} | m' \rangle \langle j | \tilde{\rho}^p(\mathbf{q}) | j' \rangle d_{j,m}^\dagger d_{j',m'}, \quad (2.37)$$

où les opérateurs  $d_{j,m}^\dagger$  et  $d_{j,m}$ , avec  $\{d_{j,m}, d_{j',m'}^\dagger\} = \delta_{j,j'}\delta_{m,m'}$  et  $\{d_{j,m}, d_{j',m'}\} = 0$ , sont respectivement les opérateurs de création et d'annihilation d'un FC<sup>2</sup> dans l'état  $|j, m\rangle$ . Les éléments de matrice dans l'équation (2.37) sont les mêmes que pour les FCs [Eqs. (A.9) et (A.10)] si l'on remplace  $l_B^* \rightarrow \tilde{l}_B = l_B^*/\sqrt{1-\tilde{c}^2} = 1/\sqrt{(1-\tilde{c}^2)(1-c^2)}$ , la longueur magnétique de FC<sup>2</sup>, et  $c^2 \rightarrow \tilde{c}^2$ . Un effet Hall quantique serait donc attendu pour quelques facteurs de remplissage de FC  $\nu^* = p + \tilde{p}/(2\tilde{s}\tilde{p} + 1)$ , où l'entier  $\tilde{p}$  est le nombre de niveaux de FC<sup>2</sup>s complètement remplis. Un tel effet Hall quantique peut être interprété à la fois comme un EHQF de FCs [26] ou comme un EHQE de FC<sup>2</sup>s [34]. Les remplissages  $\nu^*$  sont reliés aux facteurs de remplissage électronique par la relation (2.17), et  $\nu^* = 1 + 1/3$  correspond donc à  $\nu = 4/11$ . Pour voir à quel remplissage un EHQF est réalisé, il faut pourtant comparer l'énergie d'une telle phase liquide à des phases en compétition, ce qui sera le sujet du chapitre 4.

Le formalisme décrit est générique et peut être utilisé pour des générations de FCs suivantes. On trouve donc une hiérarchie d'états, qui est différente des hiérarchies de Haldane et Halperin [57, 58], à des remplissages qui sont déterminés par la formule de récurrence

$$\nu_j = p_j + \frac{\nu_{j+1}}{2s_{j+1}\nu_{j+1} + 1}, \quad (2.38)$$

où  $s_{j+1}$  désigne le nombre de paires de quanta de flux portés par le pseudo-vortex dans le FC de la  $(j+1)$ -ième génération (FC <sup>$j+1$</sup> ), et  $p_j$  est le nombre de niveaux de FC <sup>$j$</sup> s complètement remplis. L'EHQE de FC <sup>$j$</sup> s est déterminé par  $\nu_j = p_j$ . Formellement, le facteur de remplissage électronique correspond à  $j = 0$ , et donc  $\nu_0 = \nu$  et  $\nu_1 = \nu^*$ . L'équation (2.38) est une généralisation de la relation entre les facteurs de remplissage électroniques et de FCs [Eq. (2.17)].

## Chapitre 3

# Phases électroniques solides et liquides dans des niveaux de Landau intermédiaires

Ce chapitre est consacré à la discussion des différentes phases électroniques solides et liquides quantiques, dont l'énergie se calcule dans le cadre du modèle (2.7). Pour décrire les phases solides, comme le cristal de Wigner, les phases d'îlots et de rubans, je propose de calculer leurs énergies dans l'approximation de Hartree-Fock du modèle en fonction du niveau de Landau  $n$  et du facteur de remplissage partiel  $\bar{\nu}$ , suivant les lignes des Refs. [17, 66]. Ces courbes d'énergie sont comparées à l'énergie de la phase liquide quantique, qui, comme il a été indiqué dans l'introduction, ne peut se calculer dans une approche effective à une particule. A  $\bar{\nu} = 1/(2s + 1)$ , cette énergie du liquide quantique se trouve à l'aide des fonctions de Laughlin (1.14), généralisées au niveau  $n$ , tandis qu'à  $\bar{\nu} \neq 1/(2s + 1)$  il faut tenir compte de l'énergie des quasi-particules [pour  $\bar{\nu} > 1/(2s + 1)$ ] ou des quasi-trous [pour  $\bar{\nu} < 1/(2s + 1)$ ]. Les quasi-particules et quasi-trous sont interprétés comme des FCs dans le niveau  $p = 1$  ou comme des trous de FC dans  $p = 0$ , et leur énergie est calculée dans l'approche hamiltonienne, décrite dans le chapitre précédent. Après la présentation des résultats et du diagramme de phase dans les niveaux  $n = 1, 2$  et  $3$ , il s'agira de discuter le lien avec des études expérimentales.

### 3.1 Solides électroniques dans l'approximation de Hartree-Fock

Dans l'approximation de Hartree-Fock, le hamiltonien d'électrons restreints à un seul niveau (2.7) s'écrit

$$\hat{H}^{HF} = \frac{1}{2A} \sum_{\mathbf{q}} u_n^{HF}(\mathbf{q}) \langle \bar{\rho}(-\mathbf{q}) \rangle \bar{\rho}(\mathbf{q}). \quad (3.1)$$

Le potentiel de Hartree-Fock  $u_n^{HF}(\mathbf{q}) \equiv v_n(\mathbf{q}) - \sum_{\mathbf{p}} v_n(\mathbf{p}) e^{-i(p_x q_y - p_y q_x)} / (n_B A)$  tient compte des effets d'échange quantique. Comme le potentiel d'interaction  $v_n(\mathbf{q})$  est isotrope, le potentiel d'échange est précisément sa transformée de Fourier, et il est par conséquent proportionnel à l'interaction effective dans l'espace réel. Une déduction détaillée du hamiltonien (3.1) et les expressions exactes pour le potentiel d'échange dans  $n = 1, 2$  et  $3$  se trouvent dans l'annexe C. Au lieu de préciser la fonction d'onde à  $N$  particules qui minimise le hamiltonien de Hartree-Fock, les états quantiques sont déterminés par le paramètre d'ordre

$$\Delta(\mathbf{q}) = \frac{\langle \bar{\rho}(\mathbf{q}) \rangle}{n_B A}, \quad (3.2)$$

qui est la transformée de Fourier d'un remplissage local  $\bar{v}(\mathbf{r})$  du  $n$ -ième niveau,

$$\Delta(\mathbf{q}) = \int \frac{d^2 r}{A} \bar{v}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}. \quad (3.3)$$

Ce dernier est lié au facteur de remplissage partiel  $\bar{v}$  par  $\bar{v} = \int d^2 r \bar{v}(\mathbf{r}) / A$ . L'énergie par particule est donc une fonctionnelle du paramètre d'ordre et s'écrit

$$E^{\text{solides}}(n; \bar{v}) = \frac{\langle \hat{H}^{HF} \rangle}{N_{el}} = \frac{n_B}{2\bar{v}} \sum_{\mathbf{q}} u_n^{HF}(q) |\Delta(\mathbf{q})|^2. \quad (3.4)$$

A partir de cette expression, on peut comprendre que la forme spécifique du potentiel effectif favorise la formation des phases de densité de charge modulée. Le potentiel  $v_n(q)$  s'annule à des valeurs finies du vecteur d'onde,  $q_0(n) \sim 1/R_C$ , où le facteur de forme  $F_n(q)$  dans l'expression (2.3) a des zéros et où le potentiel de Hartree-Fock  $u_n^{HF}(q)$  est donc déterminé par l'attraction d'échange. Par conséquent, il est énergétiquement favorable que le paramètre d'ordre ait un maximum précisément à ces vecteurs d'onde. A cause de la relation (3.3), cela se traduit par une modulation de la densité de charge

dans l'espace réel, avec une périodicité caractéristique  $\Lambda$ , déterminée par ces valeurs du vecteur d'onde,  $\Lambda \sim 1/q_0(n) \sim R_C$ . Cet argument et celui donné dans le chapitre précédent sont complémentaires, car la largeur du palier du potentiel effectif est essentiellement déterminée par le premier zéro du facteur de forme.

On peut traiter des phases solides avec une grande variété de symétries différentes, mais la discussion est limitée à des phases de rubans et à des phases d'îlots, avec des amas de  $M$  électrons qui forment un réseau triangulaire. Tandis que la symétrie triangulaire s'impose naturellement à partir des analyses classiques [68], des calculs dans l'approximation de Hartree-Fock indiquent que la phase de rubans, qui consiste en une modulation de la densité de charge unidirectionnelle, est énergétiquement favorable autour de  $\bar{\nu} = 1/2$  [17, 18, 66]. Ceci est lié au fait qu'à  $\bar{\nu} = 1/2$ , la symétrie particule-trou devient pertinente. Même si d'autres phases qui satisfont à cette symétrie peuvent être envisagées, comme par exemple un damier, et que certaines analyses théoriques indiquent qu'à  $T = 0$ , cette symétrie peut être brisée pour former un cristal de Wigner anisotrope [24], c'est la phase de rubans qui est réalisée, comme le montre l'anisotropie de la résistance longitudinale [19].

### 3.1.1 Energie des phases d'îlots

Pour décrire les cristaux d'îlots avec  $M$  électrons par amas, on peut utiliser l'ansatz proposé par Fogler, Koulakov et Shklovskii [17]

$$\bar{\nu}(\mathbf{r}) = \sum_j \Theta(r_B - |\mathbf{r} - \mathbf{R}_{k,l}|) \quad (3.5)$$

pour le facteur de remplissage local, où  $r_B$  est le rayon de chaque amas, et  $\mathbf{R}_{k,l} = k\mathbf{a}_1 + l\mathbf{a}_2$ , avec les entiers  $k$  et  $l$ , est un vecteur du réseau. Pour le réseau triangulaire, on a  $\mathbf{a}_1 = \Lambda_B \mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{a}_2 = \Lambda_B (\mathbf{e}_x/2 + \sqrt{3}\mathbf{e}_y/2)$ , où  $\Lambda_B$  est la longueur du pas de réseau. La taille de la cellule élémentaire du réseau triangulaire est  $A_c = \sqrt{3}\Lambda_B^2/2$ . Les paramètres  $\Lambda_B$  et  $r_B$  sont reliés par le facteur de remplissage  $\bar{\nu} = A_B/A_c$ , où  $A_B = \pi r_B^2$  est la taille d'un îlot, et l'on a donc  $r_B^2/\Lambda_B^2 = \sqrt{3}\bar{\nu}/2\pi$ . Parce que chaque électron occupe une surface  $2\pi$ , en unités du carré de la longueur magnétique, la taille de l'îlot est déterminée par le nombre d'électrons  $M$ ,  $A_B = \pi r_B^2 = 2\pi M$ , et le pas du réseau est donc



défini par les paramètres  $M$  et  $\bar{\nu}$ ,

$$\Lambda_B = \sqrt{\frac{4\pi M}{\sqrt{3}\bar{\nu}}}. \quad (3.6)$$

Le paramètre d'ordre pour la phase d'îlots se calcule à partir des équations (3.3) et (3.5),

$$\Delta_M^B(\mathbf{q}) = \frac{2\pi\sqrt{2M}}{Aq} J_1(q\sqrt{2M}) \sum_{k,l} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}_{k,l}}, \quad (3.7)$$

où  $J_1(x)$  est la fonction de Bessel de premier ordre. A l'aide de la relation de Laplace

$$\sum_{k,l} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}_{k,l}} = \frac{(2\pi)^2}{A_c} \sum_{\mu,\nu} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{G}_{\mu,\nu}), \quad (3.8)$$

où  $\mathbf{G}_{\mu,\nu} = \mu\mathbf{g}_1 + \nu\mathbf{g}_2$ , avec  $\mathbf{g}_1 = 2\pi(\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y/\sqrt{3})/\Lambda_B$  et  $\mathbf{g}_2 = 4\pi\mathbf{e}_y/\sqrt{3}\Lambda_B$ , sont les vecteurs du réseau réciproque, on trouve pour l'énergie par particule

$$E^{\text{îlots}}(n; M, \bar{\nu}) = \frac{n_B\bar{\nu}}{M} \sum_{\mu,\nu} u_n^{HF}(\mathbf{G}_{\mu,\nu}) \frac{J_1^2(\sqrt{2M}|\mathbf{G}_{\mu,\nu}|)}{|\mathbf{G}_{\mu,\nu}|^2}. \quad (3.9)$$

L'énergie se calcule donc par une simple somme sur les vecteurs du réseau réciproque. Il n'y a pas de contribution à  $\mathbf{G} = 0$ , qui est annulée par la densité homogène de l'arrière-plan.

### 3.1.2 Energie des phases de rubans

L'énergie des phases de rubans se calcule de façon analogue à celle des îlots, à partir de l'ansatz

$$\bar{\nu}(\mathbf{r}) = \sum_j \Theta(a/2 - |x - x_j|), \quad (3.10)$$

où  $a$  est la largeur d'un ruban, aligné dans la direction  $y$ , et  $x_j = j\Lambda_S$ , avec l'entier  $j$ . La périodicité des rubans  $\Lambda_S$  est liée à la largeur par  $\bar{\nu} = a/\Lambda_S$ . Le paramètre d'ordre de la phase de rubans est obtenu après une transformation de Fourier,

$$\Delta^S(\mathbf{q}) = \frac{2}{L_x} \delta_{q_y,0} \frac{\sin(q_x\Lambda_S\bar{\nu}/2)}{q_x} \sum_j e^{iq_x j\Lambda_S}, \quad (3.11)$$

où  $L_x$  est l'extension du système dans la direction  $x$ . A l'aide de la relation de Laplace (3.8) dans une dimension,  $\sum_n \exp(inx) = 2\pi \sum_{n'} \delta(x - 2\pi n')$ , on trouve l'énergie par particule de la phase de rubans

$$E^{\text{rubans}}(n; \Lambda_S, \bar{\nu}) = \frac{n_B}{2\pi^2 \bar{\nu}} \sum_{l \neq 0} u_n^{HF} \left( q = \frac{2\pi}{\Lambda_S} l \right) \frac{\sin^2(\pi \bar{\nu} l)}{l^2}. \quad (3.12)$$

Contrairement au cas des îlots, la périodicité n'est pas fixée par les autres paramètres à travers des raisonnements géométriques. C'est un paramètre variationnel, qui est déterminé par la minimisation de l'énergie (3.12),

$\partial E^{\text{rubans}} / \partial \Lambda_S = 0$ . Autour de  $\bar{\nu} = 1/2$ , on trouve  $\Lambda_S = 2,84R_C$  pour  $n = 1$ ,  $\Lambda_S = 2,76R_C$  pour  $n = 2$  et  $\Lambda_S = 2,74R_C$  pour  $n = 3$ . Dans la limite  $n \rightarrow \infty$ , la périodicité converge vers  $\Lambda_S = 2,7R_C$ , en accord avec des résultats de Fogler *et al.* [17].

## 3.2 Liquides quantiques

### 3.2.1 Energie des liquides de Laughlin à $\bar{\nu} = 1/(2s + 1)$

Aux remplissages "magiques"  $\bar{\nu}_s = 1/(2s + 1)$ , la différence en énergie entre le liquide de Laughlin et un liquide non corrélé peut s'écrire en termes de facteur de structure statique projeté,  $\bar{s}(q) = s(q) - [1 - \exp(-q^2/2)] = \langle \bar{\rho}(-\mathbf{q}) \bar{\rho}(\mathbf{q}) \rangle / A n_{el}$ , comme [28]

$$U = \frac{1}{2A} \sum_{\mathbf{q}} v_n(q) [\bar{s}(q) - 1].$$

Comme le facteur de structure statique  $s(q)$  est relié à la fonction de corrélation de paires  $g_s(r)$  [Eq. (1.12)] par transformation de Fourier [87],

$$s(q) - 1 = \frac{\bar{\nu}}{2\pi} \int d^2r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} [g_s(r) - 1],$$

l'expression pour l'énergie coïncide avec celle pour le plus bas niveau de Landau, formulée dans l'introduction [Eq. (1.13)]. On trouve que le facteur de structure statique projeté s'exprime en termes de coefficients de développement  $c_{2m+1}^s$ , qui caractérisent l'état de Laughlin,

$$\bar{s}(q) = (1 - \bar{\nu}) + 4\bar{\nu} \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1}^s L_{2m+1}(q^2) e^{-q^2/2},$$

ainsi que la différence d'énergie

$$U = -\frac{\bar{\nu}}{2A} \sum_{\mathbf{q}} v_n(q) + E^{\text{Laughlin}}(n; s).$$

Le deuxième terme est l'énergie du liquide quantique

$$E^{\text{Laughlin}}(n; s) = \frac{\bar{\nu}}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1}^s V_{2m+1}^n \quad (3.13)$$

qui doit être comparée à celle des solides électroniques (3.4). On trouve un développement de l'énergie en *pseudo-potentiels* de Haldane,

$$V_{2m+1}^n = \frac{2\pi}{A} \sum_{\mathbf{q}} v_n(q) L_{2m+1}(q^2) e^{-q^2/2}, \quad (3.14)$$

qui signifient la force du potentiel d'interaction entre particules qui se trouvent dans un état de moment angulaire relatif  $\ell = 2m + 1$  [57].

Avec les valeurs pour les coefficients de développement données dans la section 1.2.2, on trouve pour les énergies des liquides de Laughlin  $E^{\text{Laughlin}}(n; s)$

|             | $s = 1$  | $s = 2$  | $s = 3$  | $s = 4$  |
|-------------|----------|----------|----------|----------|
| $\bar{\nu}$ | 1/3      | 1/5      | 1/7      | 1/9      |
| $n = 0$     | -0, 1998 | -0, 2012 | -0, 1907 | -0, 1799 |
| $n = 1$     | -0, 1678 | -0, 2002 | -0, 1950 | -0, 1854 |
| $n = 2$     | -0, 1306 | -0, 1695 | -0, 1837 | -0, 1798 |
| $n = 3$     | -0, 1179 | -0, 1349 | -0, 1630 | -0, 1697 |

en unités de  $e^2/\epsilon l_B$ . Dans les niveaux  $n = 0, 1$  et  $2$ , les résultats pour  $s = 1$  et  $2$  peuvent être comparés aux résultats numériques, déduits des calculs de Monte Carlo des Refs. [28, 55]. La différence est de moins de 0,5% dans  $n = 0$  et  $1$  et de l'ordre de 1% dans  $n = 2$ . Cette précision est suffisante pour la comparaison des énergies des différentes phases liquides et solides, dont la différence est typiquement de l'ordre de 10%.

### 3.2.2 Énergie des liquides à $\bar{\nu} \neq 1/(2s+1)$ : excitations de quasi-particules et de quasi-trous

Pour calculer l'énergie des phases liquides quantiques à des remplissages différents des valeurs magiques,  $\bar{\nu} \neq \bar{\nu}_s$ , il faut tenir compte des quasi-particules, excitées à  $\bar{\nu} > \bar{\nu}_s$ , et des quasi-trous à  $\bar{\nu} < \bar{\nu}_s$ . Ces excitations élémentaires sont séparées de l'état de Laughlin par un gap d'énergie, qui se calcule dans la théorie hamiltonienne [32, 34]. Dans cette image, une quasi-particule de charge  $1/(2s+1)$ , en unités de la charge de l'électron, est considérée comme un FC ajouté dans le prochain niveau de FC supérieur à celui complètement rempli. De même, un quasi-trou de charge  $-1/(2s+1)$  est interprété comme des trous de FC. Tenant compte de leurs énergies  $\Delta_{qp/qh}^n(s)$ , l'énergie du liquide quantique s'écrit

$$E^{\text{liquides}}(n; s, \bar{\nu}) = E^{\text{Laughlin}}(n; s) + [\bar{\nu}(2s+1) - 1]\Delta_{qp/qh}^n(s; p=1). \quad (3.15)$$

L'énergie d'une quasi-particule est donnée par

$$\Delta_{qp}^n(s; p) = \langle c_{p,m} \hat{H}_n c_{p,m}^\dagger \rangle - \langle \hat{H}_n \rangle, \quad (3.16)$$

et celle d'un quasi-trou par

$$\Delta_{qh}^n(s) = \langle c_{p-1,m}^\dagger \hat{H}_n c_{p-1,m} \rangle - \langle \hat{H}_n \rangle, \quad (3.17)$$

où  $\hat{H}_n$  est le hamiltonien du modèle (2.13), et  $c_{j,m}^\dagger$  l'opérateur de création d'un FC dans l'état  $|j, m\rangle$ , pour rappeler la notation du chapitre précédent. Les moyennes sont définies par rapport à l'état fondamental,  $\langle c_{j,m}^\dagger c_{j',m'} \rangle = \delta_{j,j'} \delta_{m,m'} \Theta(p-1-j)$  (ici :  $p=1$ ), et les expressions (3.16) et (3.17) peuvent être évaluées dans l'approximation de Hartree-Fock à l'aide de contractions de Wick. Cela donne, pour  $p$  arbitraire,

$$\Delta_{qp}^n(s; p) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{q}} v_n(q) \langle p | \bar{\rho}^p(-\mathbf{q}) \bar{\rho}^p(\mathbf{q}) | p \rangle - \int_{\mathbf{q}} v_n(q) \sum_{j=0}^{p-1} |\langle p | \bar{\rho}^p(\mathbf{q}) | j \rangle|^2 \quad (3.18)$$

et

$$\Delta_{qh}^n(s, p) = -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{q}} v_n(q) \langle p-1 | \bar{\rho}^p(-\mathbf{q}) \bar{\rho}^p(\mathbf{q}) | p-1 \rangle + \int_{\mathbf{q}} v_n(q) \sum_{j=0}^{p-1} |\langle p-1 | \bar{\rho}^p(\mathbf{q}) | j \rangle|^2, \quad (3.19)$$

où  $f_{\mathbf{q}} \equiv (1/A) \sum_{\mathbf{q}} = \int d^2q / (2\pi)^2$ . Les éléments de matrice sont discutés dans l'annexe A.2 [Eq. (A.10)]. Ces expressions coïncident avec celles de Murthy et Shankar pour le plus bas niveau de Landau,  $n = 0$  [41]. Pour l'énergie des liquides quantiques (3.15), on s'intéresse au cas  $p = 1$ . On trouve dans les niveaux de Landau  $n = 1, 2$  et  $3$  pour les énergies des quasi-particules

| $\Delta_{qp}^n(s; p = 1)$ | $s = 1$ | $s = 2$ | $s = 3$ | $s = 4$ |
|---------------------------|---------|---------|---------|---------|
| $n = 1$                   | 0,2267  | 0,1868  | 0,1550  | 0,1316  |
| $n = 2$                   | 0,1903  | 0,1728  | 0,1543  | 0,1376  |
| $n = 3$                   | 0,1691  | 0,1560  | 0,1453  | 0,1342  |

et pour celles des quasi-trous

| $\Delta_{qh}^n(s; p = 1)$ | $s = 1$  | $s = 2$  | $s = 3$  | $s = 4$  |
|---------------------------|----------|----------|----------|----------|
| $n = 1$                   | -0,07172 | -0,07032 | -0,05887 | -0,04959 |
| $n = 2$                   | -0,07876 | -0,07853 | -0,06728 | -0,05765 |
| $n = 3$                   | -0,07720 | -0,07944 | -0,07004 | -0,06124 |

en unités de  $e^2/\epsilon l_B$ .

### 3.3 Comparaison des énergies dans $n = 1, 2$ et $3$

Dans cette section, il s'agit de discuter les énergies des différentes phases et leur lien avec les expériences sur la réentrance de l'effet Hall quantique dans les niveaux  $n = 1$  [25, 89] et  $n = 2$  [33]. De même les phases dans  $n = 3$  sont-elles examinées même s'il n'y a à présent pas de résultats expérimentaux sur une éventuelle réentrance dans ce niveau.

Comme cela a déjà été évoqué dans l'introduction, les cristaux d'îlots - le cristal de Wigner est formellement traité comme un cristal d'îlot avec un seul électron par amas - sont des phases isolantes. Le mode de glissement, qui *a priori* pourrait contribuer à un transport électronique, est supprimé à cause de l'accrochage de la structure électronique par des impuretés dans le cristal sous-jacent. Une autre contribution possible serait celle des défauts cristallins. Or leur nombre étant donné par le poids de Boltzmann  $e^{-\Delta/k_B T}$ , avec l'énergie  $\Delta$  d'un défaut, leur conductivité  $\sigma_{xx} \propto e^{-\Delta/k_B T}$  est exponentiellement supprimée à  $T = 0$ . A cause de la relation (1.7) entre les matrices de conductance et de résistance, la résistance longitudinale est également

supprimée,  $R_{xx} \propto e^{-\Delta/k_B T}$ . Le transport électronique du système à effet Hall quantique est donc entièrement effectué par les électrons dans les plus bas niveaux de Landau complètement remplis, comme pour le cas de la localisation individuelle des électrons dans le niveau partiellement peuplé. Ce dernier phénomène est à l'origine de l'EHQE, et l'on s'attend donc à la même réponse du système, c'est à dire à une quantification entière de la résistance de Hall, accompagnée d'une résistance longitudinale zéro, si les électrons du dernier niveau forment un cristal isolant. Notons que le comportement isolant d'un cristal de Wigner se manifeste de façon différente dans la branche de spin inférieure du plus bas niveau de Landau : il n'y pas de niveau complètement rempli, qui peut contribuer au transport électronique, et la résistance longitudinale *diverge* donc comme  $R_{xx} \propto e^{\Delta'/k_B T}$  lorsque  $T \rightarrow 0$  [90]. Si ces électrons forment un liquide quantique, le système exhibe l'EHQF avec une quantification de la résistance de Hall<sup>1</sup>  $R_H = h/e^2 [N + (2s + 1)^{-1}]$  : chaque branche de spin complètement remplie de chaque niveau de Landau contribue au transport avec un quantum de conductance, et le niveau partiellement peuplé y contribue avec une fraction du quantum de conductance  $e^2/h(2s + 1)$ , à cause de la charge fractionnaire des quasi-particules. Dans ce scénario, la réentrance de l'EHQE peut être expliquée comme une alternance de phases d'îlots et de liquides en fonction du champ magnétique. Cette alternance peut se comprendre qualitativement à partir de la forme en zig-zag de la courbe d'énergie des liquides quantiques. Lorsqu'on s'éloigne des valeurs magiques  $\bar{\nu}_s$ , l'énergie de la phase liquide quantique, à cause de l'excitation de quasi-particules ou quasi-trous, devient supérieure à celle des solides électroniques. La courbe d'énergie des liquides étant non monotone, il y a plusieurs points de croisement avec la courbe des solides électroniques. On notera que les interactions des quasi-particules et des quasi-trous sont négligées et la courbe d'énergie des liquides quantiques augmente donc linéairement lorsqu'on s'éloigne des remplissages magiques. L'incompressibilité des liquides quantiques à  $\nu_s$  se manifeste exactement à ces remplissages par des points anguleux de leur courbe d'énergie, qui donnent lieu à une discontinuité dans la première dérivée.

Le cas des rubans est particulier à cause de l'existence d'une direction privilégiée de transport : ce transport est facile parallèlement aux rubans dont les bords servent de canaux, tandis qu'il est supprimé perpendiculairement à

---

<sup>1</sup>Rappelons la notation :  $N$  est la partie intégrale du facteur de remplissage, en tenant compte des deux branches de spin par niveau de Landau  $n$ . On a donc  $N = 2n + 1$  si la branche de spin inférieure du niveau  $n$  est complètement remplie et  $N = 2n + 2$  pour le cas du remplissage complet des deux branches.

l'orientation des rubans. Cela cause l'anisotropie mesurée dans la résistance longitudinale pour  $n \geq 2$  [19].

Pour le moment, je me limite au cas sans impuretés. Les effets d'impuretés, qui abaissent l'énergie des phases solides par rapport aux liquides quantiques, seront discutés dans le paragraphe 3.3.5. Les courbes d'énergie sont tracées dans l'intervalle  $0 \leq \bar{\nu} \leq 0,5$ , car le régime de remplissage  $0,5 \leq \bar{\nu} \leq 1$  est relié au premier par la symétrie particule-trou, qui est pertinente dans le cas d'électrons polarisés de spin étudié ici.

### 3.3.1 Résultats pour $n = 1$

La figure 3.1 montre les résultats pour le niveau  $n = 1$ , en comparaison avec les expériences d'Eisenstein *et al.* [25]. On remarque que les liquides quantiques sont énergétiquement favorisés dans l'intervalle  $0,3 \lesssim \bar{\nu} \lesssim 0,37$  et à plus basse densité  $\bar{\nu} \lesssim 0,23$ . La phase d'îlots avec un électron par site ( $M = 1$ ) a une énergie plus basse que celle des liquides quantiques dans l'intervalle  $0,23 \lesssim \bar{\nu} \lesssim 0,3$ , tandis que pour  $0,37 \lesssim \bar{\nu} \lesssim 0,5$ , une phase d'îlots avec  $M = 2$  est favorisée par rapport aux liquides. Elle est pourtant en compétition directe avec la phase de rubans, qui a une énergie encore plus basse lorsqu'on approche  $\bar{\nu} = 1/2$ . En effet, on trouve dans les expériences un EHQF autour de  $\bar{\nu} = 1/3$  et  $\bar{\nu} = 1/5$  [Fig 3.1(b)], ce qui indique l'existence d'une phase liquide quantique. Dans l'intervalle  $0,23 \lesssim \bar{\nu} \lesssim 0,3$ , une phase isolante d'électrons dans le dernier niveau est observée, ce qui se traduit par la quantification entière de la résistance de Hall. Elle est associée à l'existence du cristal de Wigner, trouvé dans les calculs d'énergie [Fig 3.1(a)] dans ce régime de remplissage. Autour de  $\bar{\nu} = 0,42$ , un deuxième point de réentrance, moins marqué que le premier, est observé, qui peut être associé à la phase d'îlots avec  $M = 2$ . Pour des densités électroniques basses ( $\bar{\nu} \lesssim 0,15$ ), les mesures indiquent une phase isolante, tandis que les calculs théoriques montrent que des liquides quantiques ont une énergie plus basse que celle du cristal de Wigner. Notons que les résultats tracés dans la figure 3.1(a) ont été obtenus pour le cas sans impuretés. Si l'on en tient compte, ce désaccord disparaît (voir paragraphe 3.3.5).

Un autre effet remarquable se produit si l'on analyse les transitions entre phases d'îlots avec différents  $M$  : à cause des points anguleux entre les courbes d'énergie à  $\bar{\nu} \simeq 0,31$ , on s'attendrait à une discontinuité dans la première dérivée de l'énergie. C'est précisément une propriété caractéristique d'une *transition de phase de premier ordre*. Cette transition est *quantique* car elle se produit à  $T = 0$ , en variant un paramètre différent de la température (ici : le remplissage partiel ou le champ magnétique). Une conséquence d'une telle transition est la possibilité d'une *coexistence de phase* entre phases d'îlots de différents  $M$ .<sup>2</sup> L'énergie d'une telle phase mixte est représentée par la tangente aux courbes  $M = 1$  et  $M = 2$  [ligne pointillée dans la figure 3.1(a)]. Les conséquences expérimentales d'une telle phase mixte ainsi que des transitions entre liquides quantiques et îlots seront analysées dans la section

---

<sup>2</sup>En fait, la possibilité d'une coexistence de phases d'îlots de différents  $M$ , ainsi que d'une coexistence entre îlots et rubans, a déjà été évoquée par Fogler [91].



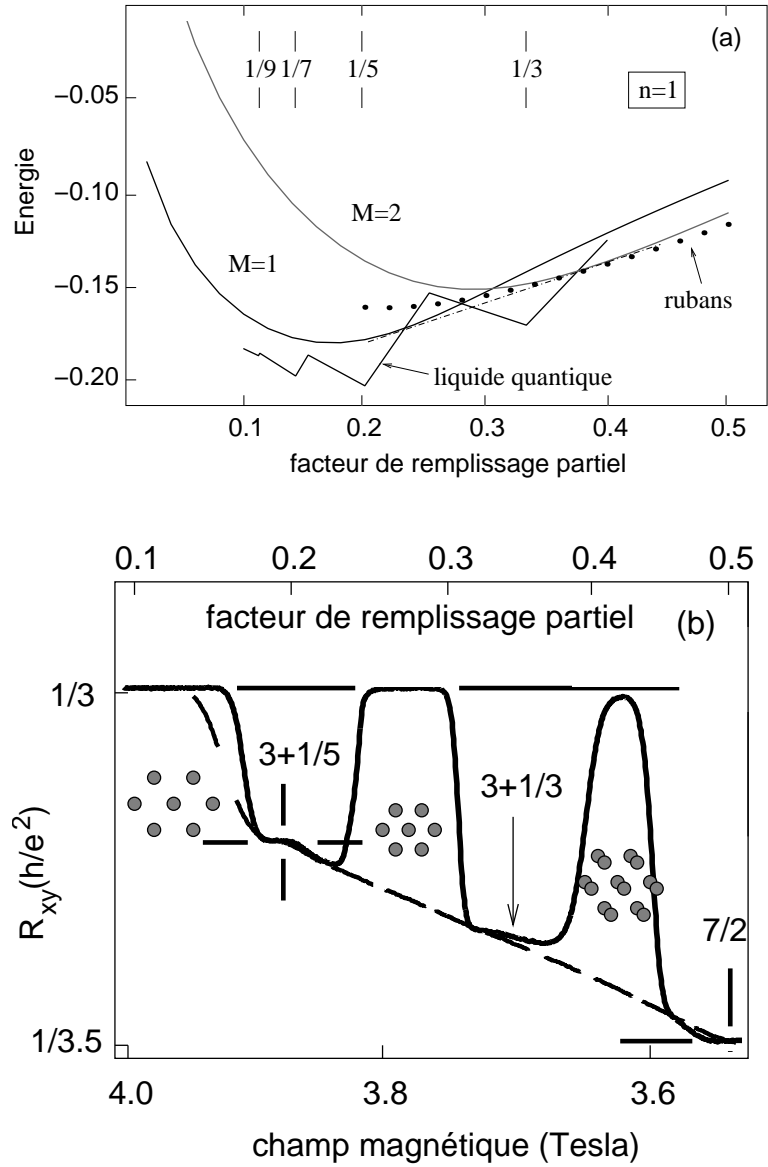


FIG. 3.1 – (a) Energies par particule des phases d'îlots à  $M$  électrons et de la phase de rubans en comparaison avec celle du liquide quantique dans  $n = 1$ , en unités de  $e^2/\epsilon l_B$ . La tangente (tirets) indique l'énergie d'une phase mixte d'îlots à un et deux électrons. (b) Réentrance de l'EHQE dans la branche de spin supérieure du niveau  $n = 1$ , mesurée par Eisenstein *et al.* [25].

## 3.4.

A  $\bar{\nu} = 1/2$ , on observe un EHQF, mais avec un dénominateur *pair*. Il s'agit de l'état  $7/2$ , équivalent à l'état  $5/2$  dans la branche inférieure de spin,<sup>3</sup> et qui a été trouvé par Willet *et al.* [92]. Cet état est resté mystérieux pendant longtemps. Tandis que Haldane et Rezayi ont proposé comme origine de cet état un appariement de type onde  $s$  [93], décrit par une fonction de Halperin [94], Moore et Read l'ont décrit comme un état pfaffien [95]. Greiter *et al.* ont montré que cet état pfaffien peut être interprété comme un appariement de type onde  $p$  [96]. Dans l'image de FCs, un tel appariement est dû à une instabilité de la surface de Fermi de FCs dans  $n = 1$  [97]. La différence entre les deux scénarii est que l'appariement de type onde  $s$  est associé à un état singulet de spin, tandis que l'appariement de type onde  $p$  nécessite un état triplet. En principe, cette question pourrait être tranchée par des expériences déterminant la polarisation de spin. Or les mesures existantes semblent contradictoires. Dans un premier temps, Eisenstein *et al.* ont examiné le comportement de l'état  $5/2$  en présence d'un champ magnétique dans le plan [98]. Cette technique est largement utilisée pour déterminer si un état fractionnaire est polarisé de spin ou non, car un état non polarisé est possible uniquement si l'effet Zeeman est faible. Contrairement aux effets orbitaux, qui ne sont susceptibles qu'à la composante du champ perpendiculaire au plan, l'effet Zeeman est déterminé par le champ total. En augmentant le champ dans le plan, l'effet Zeeman devient donc plus important, et si un état fractionnaire disparaît, il est interprété comme non polarisé. Les expériences d'Eisenstein *et al.* ont montré précisément la disparition de l'état  $5/2$ , ce qui favoriserait un appariement de type onde  $s$  [98]. En revanche, des expériences plus récentes de Pan *et al.* ont montré que l'état  $5/2$  n'est pas sensible à l'effet Zeeman [99] : contrairement aux expériences d'Eisenstein, ils n'ont pas augmenté le gap de Zeeman par une composante du champ dans le plan, mais ils ont augmenté la composante perpendiculaire tout en variant la densité électronique par une tension de grille pour fixer le remplissage à  $\nu = 5/2$ . Dans ce cas, l'état ne disparaît plus, et il devrait donc être vu comme un état polarisé de spin, résultant d'un appariement de type onde  $p$ . Ce désaccord entre les expériences est probablement dû au fait que la composante du champ magnétique dans le plan n'affecte pas seulement l'effet Zeeman mais aussi les degrés de liberté orbitaux de l'électron.

---

<sup>3</sup>Les mesures de la réentrance pour la branche inférieure, qui ne sont pas présentées ici, donnent des résultats semblables à ceux de la branche supérieure [25].

En fait, à cause de l'épaisseur finie du système, les fonctions d'onde des électrons sont modifiées par cette composante du champ [100, 101]. Cela peut se comprendre par une image semi-classique : le mouvement cyclotron de l'électron est perpendiculaire à la direction du champ. Une inclinaison du champ par rapport au plan a donc pour effet une inclinaison de la trajectoire électronique, représentée par sa fonction d'onde. Cette inclinaison est impossible dans le cas d'un système parfaitement bi-dimensionnel, mais elle est partiellement permise dans un système de largeur finie. Le recouvrement entre deux particules voisines dépend donc de la direction de la composante du champ dans le plan. Cela affecte le facteur de forme électronique  $F_n(q)$  et par conséquent le potentiel d'interaction effectif (2.6), qui devient anisotrope. Expérimentalement, cet effet se traduit par une anisotropie dans la résistance longitudinale induite par le champ dans le plan [102]. Cette anisotropie apparaît à une valeur du champ comparable à celle de la disparition de l'état  $5/2$ . Il est donc probable que le système a une transition de phase entre l'état  $5/2$  et une phase de rubans, qui devient énergétiquement favorable à des valeurs plus grandes du champ magnétique dans le plan, même si les électrons du niveau  $n = 1$  restent polarisés de spin dans les deux phases. Ce scénario, qui favoriserait un état  $5/2$  résultant d'un appariement de type onde  $p$ , a également trouvé un soutien par des calculs de diagonalisation exacte de Morf, qui ont montré que l'état pfaffien a un grand recouvrement avec l'état fondamental obtenu numériquement [103].

Tout récemment, Xia *et al.* ont confirmé le phénomène de réentrance dans des expériences de transport à  $T = 9\text{mK}$  [89]. Leurs résultats sont montrés dans la figure 3.2. Deux propriétés sont remarquables par rapport aux expériences d'Eisenstein *et al.* [25] : premièrement, l'EHQF à  $\bar{\nu} = 1/5$  disparaît, et la résistance de Hall retrouve essentiellement sa valeur classique. Les électrons restent pourtant dans un état liquide, qui sépare deux phases isolantes avec une quantification entière de la résistance de Hall. La disparition de l'état fractionnaire n'est pas comprise à présent. Deuxièmement, à cause d'une meilleure résolution par rapport aux mesures d'Eisenstein *et al.*, on observe une structure plus fine de la courbe de Hall. Sa propriété la plus remarquable est la présence d'un plateau à  $\bar{\nu} = 2/5$ , qui n'avait pas été observé auparavant. Cette observation est particulièrement surprenante parce que des calculs numériques de Scarola *et al.* ont indiqué qu'un tel état devrait être *instable* s'il est interprété dans le cadre de la théorie de FC [30]. En fait, le gap d'activation mesuré pour cet état est d'environ un ordre de grandeur plus petit que celui à  $\bar{\nu} = 1/3$ , ce qui indique la possibilité pas-

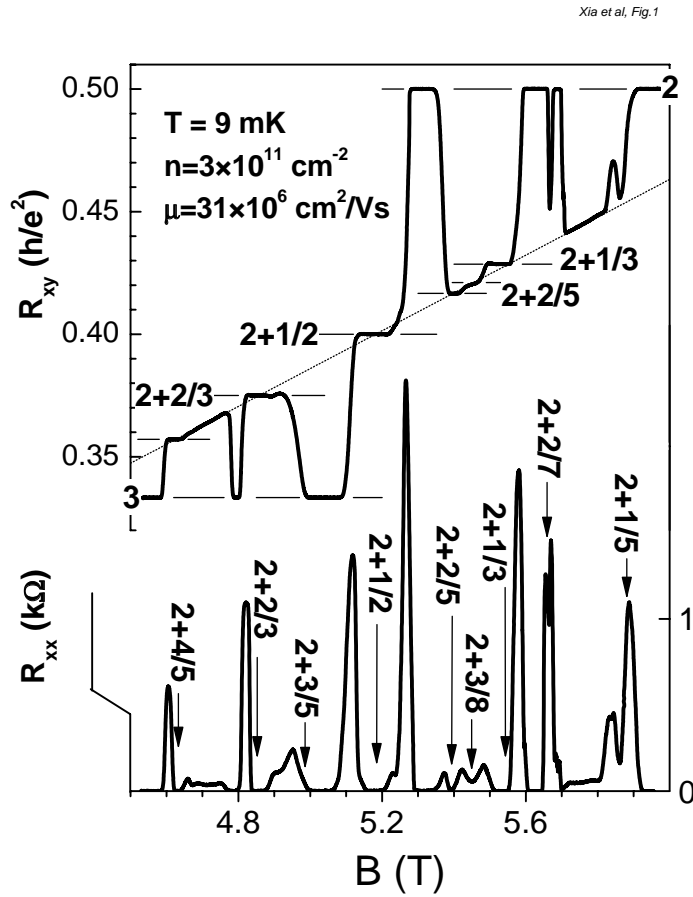


FIG. 3.2 – Observation de la réentrance de l’EHQE dans le niveau  $n = 1$  à  $T = 9$  mK, par Xia *et al.* [89]. Contrairement aux mesures d’Eisenstein *et al.* [25], l’EHQF est trouvé à  $\bar{\nu} = 1/3$ , mais non pas à  $\bar{\nu} = 1/5$  où la résistance de Hall retrouve sa valeur classique. De plus, un EHQF à  $\bar{\nu} = 2/5$  a été mis en évidence.

sionnante d'une origine différente de cet état. Notons que, dans le plus bas niveau, le gap d'activation de l'état à  $\nu = 2/5$  est seulement d'un facteur 3 plus petit que celui de l'état à  $\nu = 1/3$  [79]. D'un point de vue théorique, Read et Rezayi ont proposé un état *parafermionique* comme état fondamental à  $\bar{\nu} = 2/5$  dans  $n = 1$  [104]. Un tel état a en effet un recouvrement plus important avec l'état fondamental, obtenu par des calculs de diagonalisation exacte, qu'un état hiérarchique, comme celui proposé par la théorie des FCs [104]. L'état parafermionique à  $\bar{\nu} = k/(k+2)$  est une généralisation de l'état pfaffien [95] et peut être compris comme un liquide incompressible d'amas qui regroupent  $k$  électrons dans chaque amas. Dans ce scénario, l'état à  $\bar{\nu} = 2/5$ , qui est l'état symétrique de celui à  $\bar{\nu} = 3/5$  pour le cas d'électrons polarisés de spin, consisterait en trois trous ou respectivement deux électrons par amas. Même si de telles phases étranges ne sont pas considérées ici, la figure 3.1(a) ainsi que les raisonnements d'échelles, exposés dans la section 2.2, indiquent que la formation d'amas avec deux électrons est attendue pour  $\bar{\nu} = 2/5$ . Le scénario d'états parafermioniques, en termes de liquide d'amas, est donc compatible avec les résultats trouvés dans le cadre de cette thèse, mais un lien entre les phases d'îlots et ces liquides étranges reste à établir.

### 3.3.2 Résultats pour $n = 2$

La figure 3.3 représente les résultats pour les différentes phases dans le niveau  $n = 2$ , en comparaison avec les mesures de transport électronique de Cooper *et al.* [33]. Contrairement au niveau  $n = 1$ , l'état de Laughlin cesse d'être l'état de plus basse énergie à  $\bar{\nu} = 1/3$ , où une phase d'îlots avec deux électrons est favorisée. Un EHQF à  $\bar{\nu} = 1/3$  n'a pas été observé dans  $n = 2$  [voir Fig. 3.3(b)]. Autour de  $\bar{\nu} = 1/2$ , la phase de rubans a la plus basse énergie, en accord avec les expériences qui indiquent l'anisotropie de la résistance longitudinale à  $\nu = 9/2$  [19]. Cette anisotropie est bien visible dans la figure 3.3(b) autour de 2, 45T, où l'on trouve une grande résistance dans la direction  $x$  (*ligne continue*) et une résistance faible dans la direction  $y$  (*ligne cassée*). Selon nos calculs, un liquide quantique est énergétiquement favorable dans une région étroite autour de  $\bar{\nu} = 1/5$  ( $0,19 \lesssim \bar{\nu} \lesssim 0,21$ ) même si l'écart en énergie avec la phase mixte d'îlots à un et deux électrons est très petit. En absence d'impuretés, les liquides quantiques seraient également les phases de plus basse énergie pour  $\bar{\nu} \lesssim 0,16$ , où l'on observe pourtant l'EHQE.

Dans la figure 3.3(b), on remarque une faible réentrance à 2, 36T et 2, 6T [agrandissements (c) et (d)]. Ces valeurs de champ magnétique correspondent

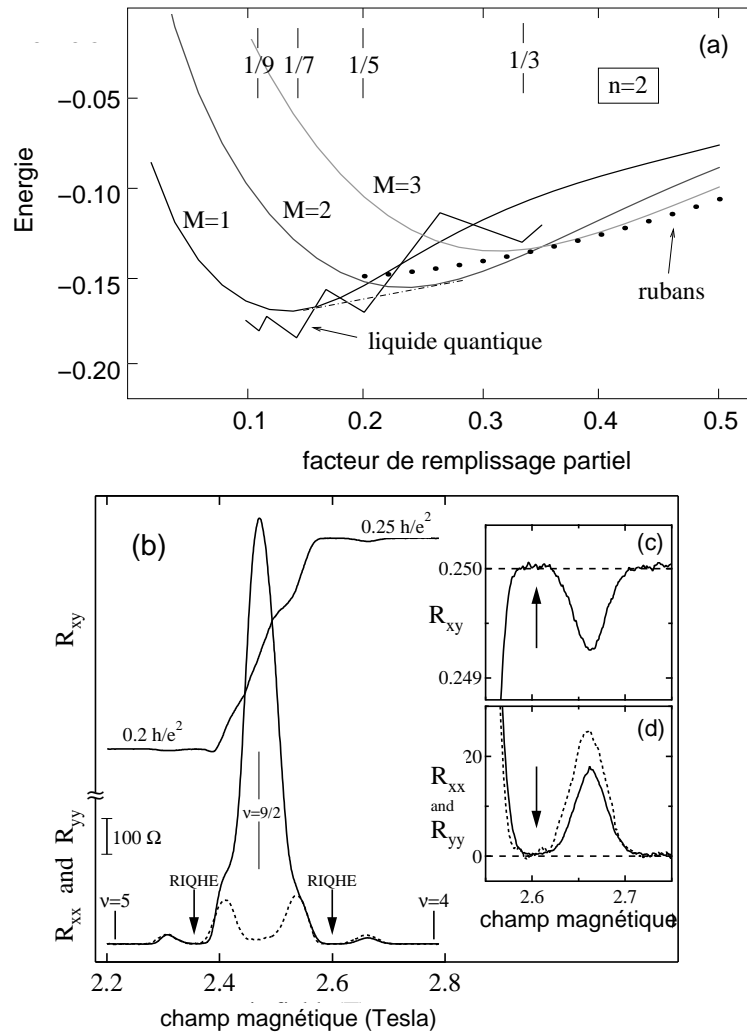


FIG. 3.3 – (a) Énergies par particule des différentes phases dans  $n = 2$ , en unités de  $e^2/\epsilon l_B$ . La tangente (tirets) indique l'énergie d'une phase mixte d'îlots à un et deux électrons. (b) Réentrance de l'EHQE dans la branche de spin inférieure du niveau  $n = 2$ , mesurée par Cooper *et al.* [33]; (c) et (d) sont des agrandissements respectivement de la résistance de Hall et de la résistance longitudinale au deuxième point de réentrance (RIQHE, indiqué par des flèches).

respectivement à  $\bar{\nu} = 1/4$  et  $\bar{\nu} = 3/4$ . Selon les calculs d'énergie [Fig. 3.3(a)], ce comportement isolant est dû à l'existence d'un cristal d'îlots de deux électrons par site. En effet, des mesures de transport sous irradiation micro-onde indiquent une résonance dans la conductivité longitudinale, qui est associée au mode d'accrochage du cristal électronique [105]. Ces régions de quantification entière de la résistance de Hall sont séparées du plateau voisin de même quantification par un petit minimum à  $B \sim 2,32\text{T}$  et  $2,65\text{T}$  [Fig. 3.3(c)], accompagné d'un petit maximum dans la résistance longitudinale [Fig. 3.3(d)]. En termes de facteur de remplissage, il s'agit respectivement de  $\bar{\nu} = 4/5$  et  $1/5$ . Comme à ces valeurs le liquide quantique est énergétiquement favorable, ces anomalies peuvent être associées à un début de fusion de la phase cristalline. Cette interprétation en termes de fusion a récemment été soutenue par des expériences de Gervais *et al.* [106], qui ont mesuré une structure plus complexe du maximum dans la résistance longitudinale à  $\bar{\nu} = 1/5$  (voir figure 3.4). En abaissant la température, le maximum disparaît exponentiellement, tandis qu'il sature si la température est augmentée au-dessus de  $T \sim 65\text{mK}$ . Si l'on augmente davantage la température, le maximum se sépare en deux maxima alors qu'il y a un petit minimum exactement à  $\bar{\nu} = 1/5$ , indiquant la présence de corrélations quantiques, qui ressemblent à celles du liquide de Laughlin. Des propriétés semblables avaient déjà été observées par Pan *et al.* dans le plus bas niveau de Landau [70] : dans le régime de basse densité électronique  $\nu \lesssim 1/5$ , où le cristal de Wigner se manifeste à  $T = 0$  par un comportement isolant du système, on observe à haute température des minima locaux à des valeurs de la série  $\nu = p/(2ps + 1)$ .

L'interprétation de ces données n'est pourtant pas évidente : tandis que Mandal *et al.* pensent que ces résultats indiquent un liquide quantique comme état fondamental à  $T = 0$  même pour de petites valeurs de  $\nu$  [107],<sup>4</sup> il est plus probable que cet effet soit dû à une fusion d'un état fondamental cristallin à une température suffisamment basse qui permette d'observer des corrélations quantiques dans l'état fondu, comme il a été mentionné dans la section 2.2. Ces corrélations disparaissent à une température plus élevée, comme l'indique l'expérience [70]. Même si les deux scénarii sont *a priori* possibles, un état fondamental liquide à basse densité n'est pas réalisé en présence d'impuretés, qui favorisent les phases électroniques solides. Le même problème

---

<sup>4</sup>Ces auteurs montrent que l'énergie du liquide quantique peut être abaissée en superposant à la fonction d'onde des composantes dans un niveau de FC supérieur. L'énergie du liquide serait donc plus basse que celle d'un cristal de Wigner corrélé, que l'on pense être l'état fondamental en-dessous de  $\nu \sim 1/6,5$  [69].

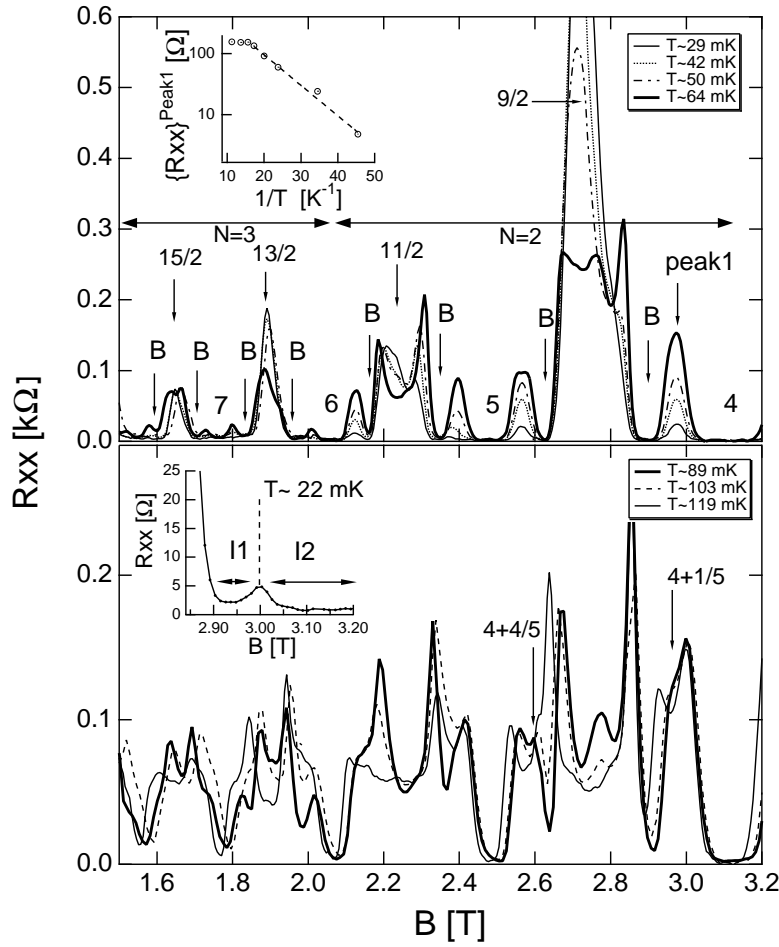


FIG. 3.4 – Résistance longitudinale dans la branche de spin inférieure du niveau de Landau  $n = 2$ , mesurée par Gervais *et al.* pour différentes températures [106]. La partie supérieure montre les mesures pour des températures en-dessous de la température de saturation  $T \sim 0,65$  mK du maximum à  $B \simeq 3$  T (“peak 1”), et la partie inférieure celles pour  $T > 65$  mK. Tandis que le maximum est exponentiellement atténué à basse température (voir figure insérée en haut à gauche), il se sépare en deux maxima à  $T \sim 119$  mK. Les lettres “B” indiquent des phases isolantes, que les expérimentateurs associent à des cristaux d’îlots.



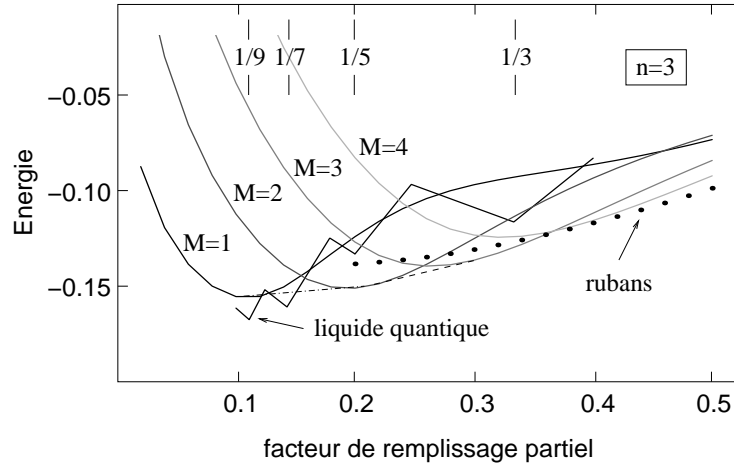


FIG. 3.5 – (a) Energies par particule des différentes phases dans  $n = 3$ , en unités de  $e^2/\epsilon l_B$ . Les tangentes (tirets) indiquent l'énergie d'une phase mixte d'îlots à un et deux électrons ainsi que celle d'une phase mixte à deux et trois électrons.

d'interprétation se pose à l'égard des expériences de Gervais *et al.* : l'état fondamental à  $\bar{\nu} = 1/5$  dans  $n = 2$  est-il un liquide quantique, comme prédisent les calculs d'énergie, ou est-il un solide électronique avec un état excité liquide ? Dans le deuxième cas, une partie des électrons serait thermiquement excitée dans l'état liquide et contribuerait ainsi au transport électronique. Pour trancher cette question, il faut améliorer la qualité des échantillons.

### 3.3.3 Résultats pour $n = 3$

Les résultats pour les énergies dans le niveau  $n = 3$  sont esquissés dans la figure 3.5. Ni à  $\bar{\nu} = 1/3$  ni à  $1/5$ , un liquide quantique n'est réalisé. Les phases électroniques solides se trouvent sur une gamme de remplissage plus large, et ce n'est qu'en-dessous de  $\bar{\nu} \sim 0,15$  qu'un liquide quantique aurait une plus basse énergie. Comme pour l'état liquide à  $\bar{\nu} = 1/5$  dans  $n = 2$ , il n'est pas clair qu'un état fractionnaire  $1/7$  dans  $n = 3$  survive lorsqu'on tient compte des impuretés, qui favorisent les phases solides. La phase de rubans est à nouveau trouvée à demi-remplissage et donne lieu à une résistance longitudinale anisotrope, qui a en effet été observée à  $\nu = 13/2$  et  $15/2$  [19].

### 3.3.4 Approximation du potentiel d'échange

Dans des niveaux de Landau plus élevés, le potentiel d'échange peut être approché par

$$u_n^F(q) \simeq \frac{4e^2}{\epsilon\pi^2 n_B q} \operatorname{Re} \left[ K \left( \frac{1 - \sqrt{1 - 4(2n+1)/q^2}}{2} \right) \right]^2, \quad (3.20)$$

comme pour le potentiel effectif (2.8) dans l'espace direct. Cette approximation devient exacte dans la limite  $n \rightarrow \infty$ , mais fournit des résultats fiables même dans des niveaux de Landau intermédiaires. La figure 3.6 montre une comparaison entre les résultats exacts pour les phases d'îlots (*lignes continues*) et ceux obtenus à l'aide de l'approximation (*lignes cassées*). Même si le désaccord entre ces résultats est du même ordre que la différence entre les énergies des différentes phases, l'emploi de l'approximation ne change pas l'interprétation physique : l'alternance des phases est inchangée, mais la position exacte des points de transition peut varier. Comme on peut s'y attendre, le désaccord entre les résultats est moins pertinent pour  $n = 3$  [Fig. 3.6(b)] que pour  $n = 1$  [Fig. 3.6(a)]. A cause de sa forme compacte, comparée à celle des expressions exactes (C.5), cette approximation pourrait donc servir à l'analyse théorique des propriétés physiques du système dans des niveaux intermédiaires.

### 3.3.5 Effets d'impuretés

Tandis que les liquides quantiques sont incompressibles et par conséquent peu affectés par les impuretés du cristal sous-jacent,<sup>5</sup> les solides électroniques peuvent abaisser leur énergie par déformation. En effet, l'influence des impuretés sur les ondes de densité de charge a largement été discutée dans la littérature [36, 108, 109], ainsi que celle sur les cristaux de vortex dans le contexte des matériaux supra-conducteurs [110]. Un autre effet des impuretés, à part l'abaissement de l'énergie des solides électroniques, est l'ouverture d'un gap d'énergie du mode de Goldstone, qui est le mode de glissement. En absence d'impuretés, les cristaux électroniques, brisant la symétrie de translation, seraient de bons conducteurs, comme il a été mentionné plus

---

<sup>5</sup>Les impuretés ont pourtant une influence sur l'énergie des quasi-particules excitées à  $\bar{\nu} \neq \bar{\nu}_s$ . Cette modification de leur énergie est négligée autant que celle causée par les interactions entre quasi-particules.

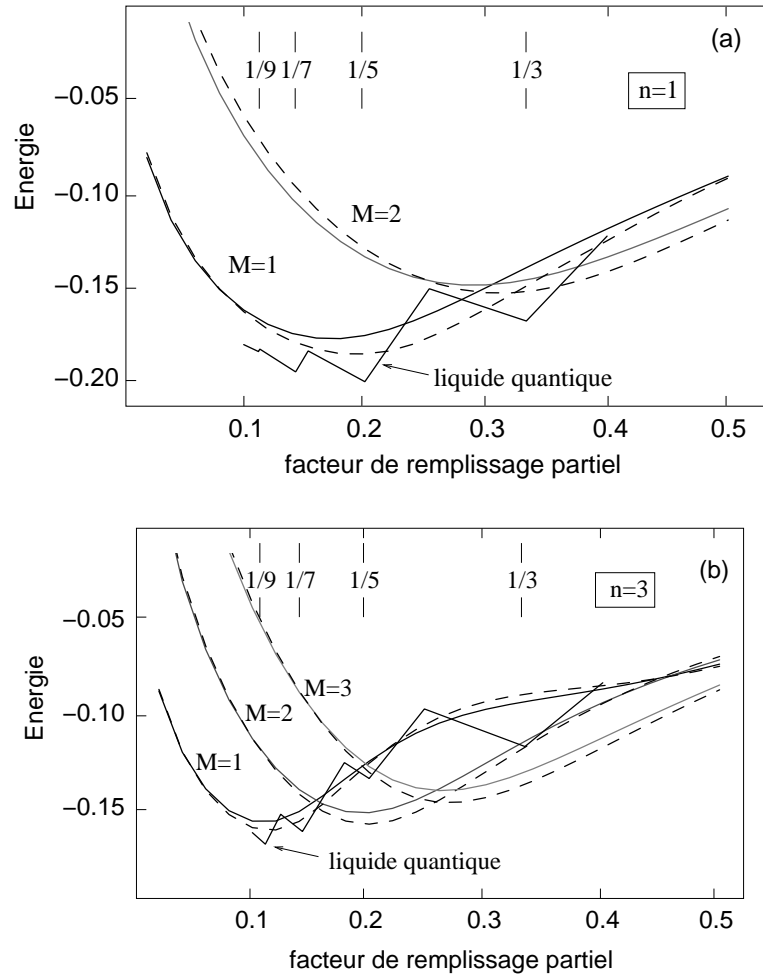


FIG. 3.6 – Comparaison des résultats d'énergie pour les phases d'îlots obtenus sans (*lignes continues*) et avec (*tirets*) l'approximation du potentiel d'échange. (a) Résultats pour  $n = 1$ . (b) Résultats pour  $n = 3$ .

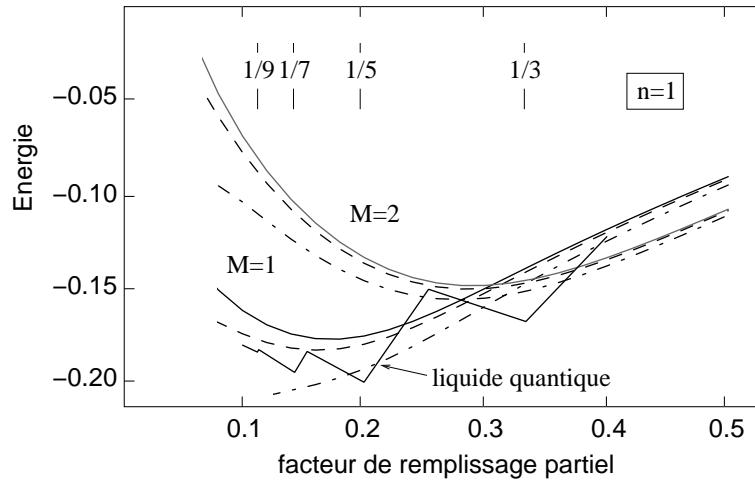


FIG. 3.7 – Energies des phases d'îlots dans  $n = 1$  en présence d'un potentiel d'impuretés gaussien de courte portée. Ligne continue : sans impuretés ; tirets : force d'impuretés  $V_0/\xi = 0,005e^2/\epsilon l_B^2$  et  $V_0/\xi = 0,010e^2/\epsilon l_B^2$ .

haut : la conductivité présenterait une résonance de forme  $\delta$  à la fréquence  $\omega = 0$ . Si l'on tient compte des impuretés, cette résonance est décalée vers des fréquences finies,  $\omega_p$ , tout en étant élargie [36]. Cette résonance du *mode d'accrochage* a en effet été observée dans les systèmes à effet Hall quantique à des remplissages pour lesquels on s'attend à la formation d'un cristal de Wigner [37, 111] ou à celle d'un cristal d'îlots [105].

Les îlots sont désormais considérés comme des objets classiques de charge  $Me$  : le recouvrement entre électrons de deux îlots différents est négligé. La constante d'élasticité est donc approchée par sa valeur classique  $\mu \simeq 0,25M^2e^2n_M^{3/2}/\epsilon$ , où  $n_M = \bar{\nu}/2\pi M$  est la densité d'îlots [68]. Les impuretés peuvent être modélisées par un potentiel gaussien de courte portée avec une longueur de corrélation  $\xi$  [112, 113]. La force du potentiel est paramétrisée par l'énergie caractéristique  $V_0$ . L'abaissement de l'énergie des cristaux d'îlots s'obtient par minimisation de la densité d'énergie [112, 113]

$$\varepsilon(L_0) = \frac{\mu\xi^2}{L_0^2} - V_0 \frac{\sqrt{n_{el}L_0^2}}{L_0^2} \quad (3.21)$$

par rapport à la longueur de Larkin  $L_0$  [36, 108]. Le premier terme représente le coût en énergie d'une déformation du cristal électronique dans un "volume"

$L_0^2$ , tandis que le deuxième terme caractérise le gain en énergie dû aux impuretés. La longueur de Larkin définit le volume caractéristique dans lequel on a un ordre cristallin et s'obtient par minimisation de la densité d'énergie (3.21),

$$L_0 \simeq \frac{1}{4\pi} \frac{\sqrt{M}\bar{\nu}e^2\xi^2}{\epsilon V_0}. \quad (3.22)$$

On trouve donc pour l'abaissement de l'énergie par particule des cristaux d'îlots

$$\delta E_{coh}^B(M, \bar{\nu}) = \frac{\varepsilon(L_0)}{n_{el}} \simeq -\frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{M}\bar{\nu}^{3/2}} \frac{V_0^2/\xi^2}{e^2/\epsilon}. \quad (3.23)$$

Deux régimes différents peuvent être distingués [36, 109] : si la longueur de Larkin est plus grande que le pas du réseau,  $L_0 \gtrsim \Lambda_B$ , on parle d'un régime d'accrochage faible. Malgré la déformation, un ordre cristallin persiste localement, tandis que dans la limite d'accrochage fort,  $L_0 \lesssim \Lambda_B$ , celui-ci disparaît. Dans le cas du cristal de Wigner,  $M = 1$ , ce régime peut être identifié comme étant la réalisation de la localisation individuelle d'électrons, qui est à la base de l'EHQE. Comme la longueur de Larkin varie linéairement avec le facteur de remplissage partiel [voir Eq. (3.22)], le régime d'accrochage fort et donc de localisation individuelle d'électrons est trouvé à basse densité, en accord avec ce qu'on attendrait intuitivement : les électrons sont distants les uns des autres, et leur répulsion mutuelle est par conséquent moins pertinente que l'interaction avec les impuretés.

Les résultats pour l'abaissement de l'énergie des phases d'îlots dans le niveau  $n = 1$  sont tracés dans la figure (3.7), en comparaison avec l'énergie du liquide quantique. Cet abaissement est moins important pour des cristaux d'îlots avec un grand nombre  $M$  d'électrons par site que pour le cristal de Wigner parce que l'élasticité du cristal varie avec le carré de  $M$ ,  $\mu \propto M^2$ . De même, leur énergie est plus basse lorsque  $\bar{\nu} \rightarrow 0$ . Pour cette raison, les liquides quantiques cessent d'être les phases de plus basse énergie dans cette limite : le cristal de Wigner devient énergétiquement favorable, et l'on observe donc l'EHQE et non pas l'EHQF. La détermination exacte de ce point de transition entre les liquides quantiques et le cristal de Wigner à basse densité requiert pourtant une connaissance plus détaillée de la nature du potentiel d'impuretés ainsi que de sa force. De plus, les effets de corrélation dans la phase du cristal de Wigner ont été négligés dans cette discussion. Pourtant, comme il a été montré pour le cas du plus bas niveau de Landau, ils modifient également son énergie [69, 114].

### 3.3.6 Diagramme de phase - comparaison aux arguments d'échelle

Le diagramme de phase en fonction des paramètres  $\bar{\nu}$  et  $n$  a déjà été esquissé dans la section 2.2 sur la base d'arguments d'échelles de longueur (figure 2.5). La forme du diagramme de phase est confirmée par le diagramme que l'on déduit des calculs d'énergie (figure 3.8) : pour de plus grandes valeurs de  $n$ , *i.e.* dans des niveaux de Landau élevés, les liquides quantiques sont stables à plus basse densité, ainsi que le cristal de Wigner. Tandis qu'un liquide quantique, et donc l'EHQF, est stable autour de  $\bar{\nu} = 1/3$  et  $1/5$  dans  $n = 1$ , il cesse d'être l'état de plus basse énergie à  $1/3$  dans  $n = 2$  et également à  $1/5$  dans  $n = 3$ , où des cristaux d'îlots ont une énergie plus basse. De plus, on trouve que des îlots avec un plus grand nombre d'électrons  $M$  par site sont réalisés si  $n$  augmente. En effet, les calculs d'énergie confirment la loi  $M_{max} = n + 1$ , trouvée par Côté *et al.* [115], pour la plus grande taille d'îlots réalisée dans le niveau  $n$ . Cette phase, trouvée autour de  $\bar{\nu} = 1/2$ , est pourtant supprimée par la phase de rubans qui y est énergétiquement plus favorable. L'alternance entre phases solides et liquides dans le niveau  $n = 1$  a également été étudiée de manière numérique par Shibata et Yoshioka dans la technique du groupe de renormalisation de la matrice densité [116], qui fournit des résultats semblables à ceux présentés ici. Les phases de densité modulée s'y révèlent par une forte oscillation dans la fonction de corrélation de paires. La symétrie de la phase électronique solide entre  $\bar{\nu} \simeq 0,15$  et  $0,4$  ne coïncide pourtant pas avec celle trouvée à partir des calculs dans l'approximation de Hartree-Fock : tandis que ces derniers favorisent une phase d'îlots à un et deux électrons, Shibata et Yoshioka plaident pour une deuxième phase de rubans avec une forte modulation de la densité parallèlement aux rubans [116]. Un transport anisotrope, qui favoriserait une interprétation en termes de rubans dans ce régime de remplissage, n'a pourtant pas été observé.

## 3.4 Transitions de phases et expériences

Comme il a été indiqué plus haut, les transitions entre cristaux d'îlots avec différents  $M$  sont de premier ordre. Une conséquence déjà évoquée est la coexistence de phase avec des régions de cristaux à  $M$  électrons qui sont spatialement séparées de celles avec  $M + 1$  électrons, autour de la transition  $M \rightarrow M + 1$ . Pour voir une telle phase mixte, nous avons proposé

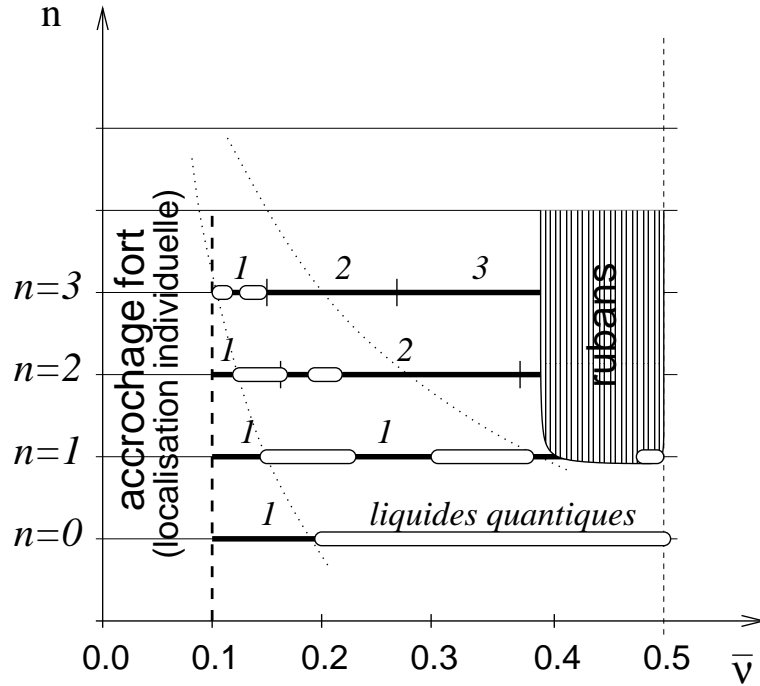


FIG. 3.8 – Diagramme de phase résultant des calculs d'énergie des différentes phases. Les phases dans  $n = 0$  n'ont pas été déduites des calculs, mais des mesures expérimentales. Les liquides quantiques sont représentés par des barres blanches. La phase liquide autour de  $\bar{\nu} = 1/2$  dans  $n = 1$  n'est pas décrite dans les calculs ; il s'agit de l'état fractionnaire  $5/2$  (et  $7/2$ ) discuté dans la section 3.3.1. Autour de  $\bar{\nu} = 1/2$ , on trouve la phase de rubans, tandis que les phases d'îlots sont situées entre  $0, 1 \lesssim \bar{\nu} \lesssim 0, 4$  (traits noirs, les chiffres indiquent le nombre  $M$  d'électrons par îlot). Le régime de l'accrochage fort, qui est interprété comme celui de la localisation individuelle d'électrons, se trouve à  $\bar{\nu} \lesssim 0, 1$ . Cette valeur pour  $\bar{\nu}$  n'est pas universelle, mais dépend de la force du potentiel d'impuretés. De plus, les transitions entre phases d'îlots de différents  $M$  sont couvertes par une phase mixte, comme il est décrit dans le texte. Les lignes pointillées séparent les régions déterminées par les arguments d'échelle,  $d \gg R_C$ ,  $d \sim R_C$  et  $d \ll R_C$  (voir figure 2.5).

une expérience de mesure de transport sous irradiation micro-onde [34] : comme la présence d'un cristal d'électrons se manifeste par une résonance dans la conductivité optique  $\text{Re}[\sigma_{xx}(\omega)]$  à une fréquence caractéristique  $\omega_p$ , une phase mixte donne lieu à des résonances à deux fréquences différentes si la fréquence  $\omega_p$  dépend explicitement du nombre  $M$ . Des propriétés de cette résonance ont été étudiées par Fogler et Huse pour le cas du cristal de Wigner [113]. Ces résultats peuvent être généralisés au cas de la phase d'îlots en remplaçant les valeurs de l'élasticité  $\mu$  et de la longueur de Larkin  $L_0$  du cristal de Wigner par celles de la phase d'îlots, déduites dans la section précédente. Une complication provient du fait qu'il faut distinguer deux régimes de champ magnétique [113], définis par le rapport du carré de la séparation entre niveaux de Landau et le produit du potentiel d'impuretés et l'interaction coulombienne,  $\alpha = (\hbar\omega_c)^2 / [(V_0/\xi)(e^2/\epsilon)]$ . On trouve que la fréquence de résonance dépend de  $\bar{\nu}$  et  $M$ ,

$$\frac{\omega_p}{\omega_c} \sim \sqrt{\frac{\Pi_0}{m_B \bar{\nu} \omega_c^2}} \sim M^{-1/4} \bar{\nu}^{-3/4}, \quad \text{pour des champs faibles } (\alpha \ll 1), \quad (3.24)$$

et

$$\frac{\omega_p}{\omega_c} \sim \frac{\Pi_0}{m_B \bar{\nu} \omega_c^2} \sim M^{-1/2} \bar{\nu}^{-3/2}, \quad \text{pour des champs forts } (\alpha \gg 1), \quad (3.25)$$

où  $\Pi_0 \sim \mu/L_0^2$  est l'auto-énergie caractéristique des phonons du cristal d'îlots. Le nombre d'électrons peut donc en principe être déterminé par la fréquence de résonance dans la conductivité optique, de même qu'une phase mixte donnerait en effet lieu à *deux résonances* provenant des régions avec des îlots à  $M$  et  $M+1$  électrons. En l'absence de liquides quantiques, les calculs d'énergie montrent une coexistence de phases possible entre le cristal de Wigner et une phase d'îlots avec deux électrons par site entre  $0,15 \lesssim \bar{\nu} \lesssim 0,27$  pour  $n = 2$  (Fig 3.3) ainsi qu'entre  $0,11 \lesssim \bar{\nu} \lesssim 0,19$  pour  $n = 3$  (Fig 3.5). Une coexistence entre deux phases d'îlots à deux et trois électrons est également possible entre  $0,22 \lesssim \bar{\nu} \lesssim 0,30$  dans le niveau  $n = 3$ .

Des expériences récentes de Lewis *et al.*, postérieures à notre travail, ont montré deux résonances dans la conductivité optique, indiquant une phase mixte, entre  $0,16 \lesssim \bar{\nu} \lesssim 0,28$  dans la branche de spin inférieure du niveau  $n = 2$  [40], en accord avec nos prédictions théoriques. Les résultats expérimentaux sont montrés dans la figure 3.9 pour cinq valeurs différentes du facteur de remplissage entre  $0,1 < \bar{\nu} < 0,3$ . Tandis qu'on observe une



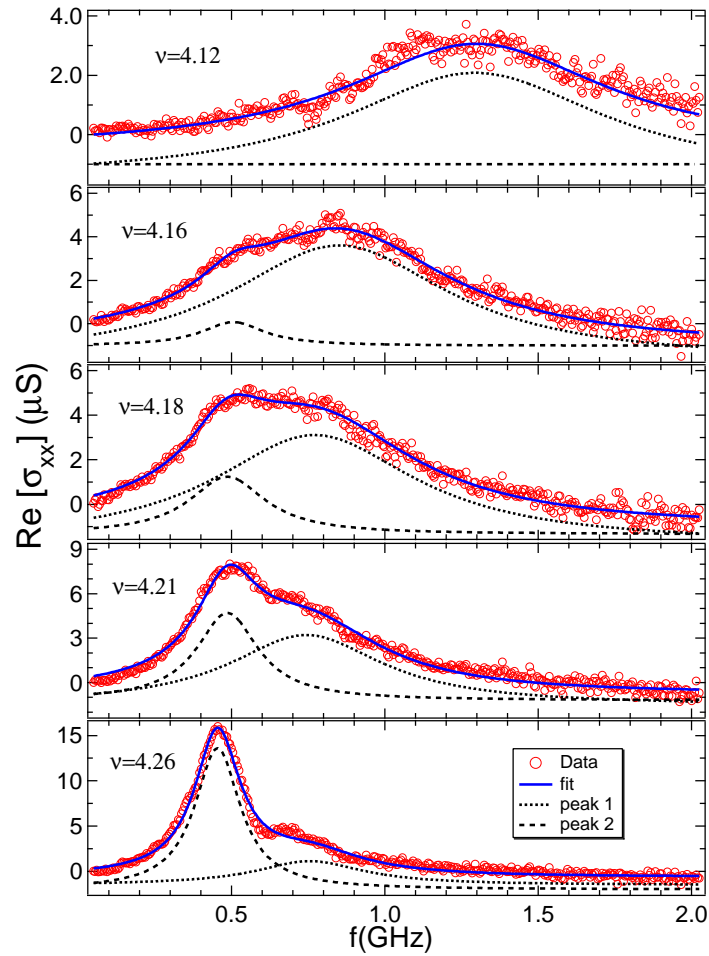


FIG. 3.9 – D’après Lewis *et al.* [40]. Résonances dans la conductivité optique pour cinq valeurs différentes de  $\nu$  entre 4,1 et 4,3 (branche de spin inférieure du niveau de Landau  $n = 2$ ). Les cercles ouverts représentent les données expérimentales, tandis que la ligne continue indique l’ajustement par deux résonances (“peak 1” et “peak 2”) de forme lorentzienne. La première résonance est attribuée au mode d’accrochage du cristal de Wigner et la deuxième à un cristal d’îlots avec deux électrons par site. La présence de deux résonances au même facteur de remplissage est interprétée comme indication d’une coexistence de phases.

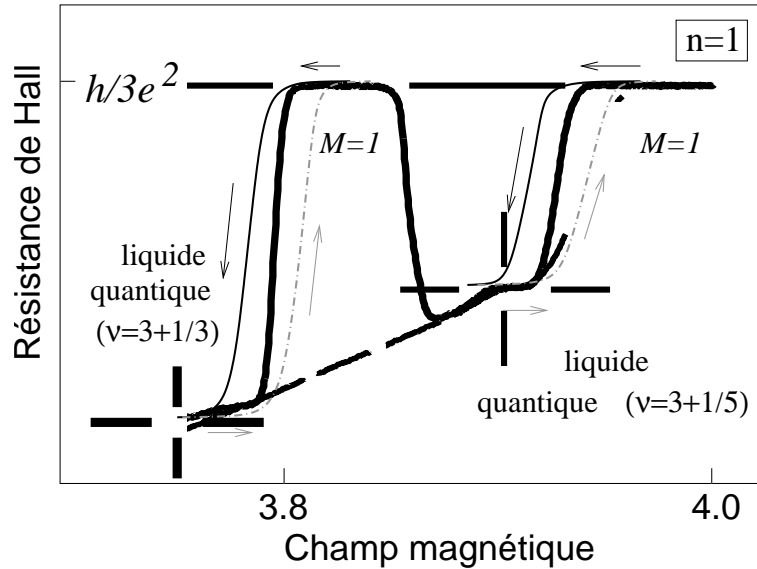


FIG. 3.10 – Hystérésis dans la résistance de Hall dans  $n = 1$  dans une expérience imaginée. Une telle hystérésis est attendue pour des transitions de phase de premier ordre entre les liquides quantiques et cristaux d'îlots. La courbe en trait plein gras est la courbe mesurée par Eisenstein *et al.* [25].

seule résonance à  $\bar{\nu} = 0,12$  ( $\nu = 4,12$ ), qui est attribuée au cristal de Wigner, deux résonances sont superposées pour de plus grandes valeurs de  $\bar{\nu}$ . La deuxième résonance, dont le poids devient plus important par rapport à celui de la première lorsqu'on augmente  $\bar{\nu}$ , est interprétée comme provenant d'un cristal d'îlots avec deux électrons par site. La différence entre les fréquences des deux résonances  $\omega_{p1}$  et  $\omega_{p2}$  est de l'ordre de 30%, ce qui est en accord avec un régime de champ magnétique fort pour lequel on attend un rapport  $\omega_{p1}/\omega_{p2} = \sqrt{2}$  [Eq. (3.25)]. Nous n'expliquons pas pourquoi il devrait s'agir de cette limite, car le régime de champ fort dépend de l'origine microscopique du potentiel d'impuretés, qui varie avec les échantillons.

De même que les transitions entre phases d'îlots de différents  $M$ , celles entre phases électroniques solides et liquides quantiques sont des transitions de phase quantique de premier ordre. Une conséquence de cela est le phénomène de *sur-fusion quantique* lorsqu'on fait varier le champ magnétique : en analogie avec l'eau qui reste liquide si l'on abaisse lentement la température en-dessous de  $0^\circ\text{C}$  (jusqu'à  $-4^\circ\text{C}$ ), le liquide quantique peut persister à des valeurs de champ où une phase cristalline a en réalité une plus basse énergie.

Si l'on commence par exemple une mesure de transport à  $\nu = 3 + 1/3$  et que l'on augmente le champ magnétique, la transition vers la phase d'îlots (Fig. 3.1) a lieu à une valeur du champ plus haute que dans le cas inverse, dans lequel on commence une telle mesure en abaissant le champ à partir de la phase d'îlots. Cela donnerait lieu à une *hystérésis* dans la résistance de Hall, esquissée dans la figure 3.10. Une telle expérience, qui confirmerait davantage le scénario de transitions de phase quantiques de premier ordre, n'a jusqu'à présent pas été rapportée.

# Chapitre 4

## Fermions Composites de deuxième génération et phases solides de Fermions Composites

De même que le modèle d'électrons restreints à un seul niveau de Landau (2.7) révèle un diagramme de phase très riche, qui a été discuté dans le chapitre précédent, on peut s'attendre pour le modèle de FC en interaction (Sec. 2.5) à une richesse semblable à  $\nu^* \neq p$ . Dans ce cas, des phases solides de FC seraient en compétition avec des phases liquides quantiques, qui peuvent être interprétées en termes de deuxième génération de FCs (FC<sup>2</sup>s). Cette compétition est pourtant déterminée par la forme exacte du potentiel d'interaction entre FCs (2.34), qui est différente de celle du potentiel électronique (2.6). L'objet de ce chapitre est l'analyse de telles phases sur la base des interactions entre FCs.

L'idée de générations de FCs d'ordre plus élevé n'est pas nouvelle : en effet, peu après la théorie de Laughlin [9], qui a donné naissance à des quasi-particules de charge fractionnaire, Haldane et Halperin ont proposé une hiérarchie d'états d'EHQF [57, 58]. Selon cette théorie, les quasi-particules des états à  $\nu = 1/(2s + 1)$  formeraient elles-mêmes des liquides quantiques corrélés pour minimiser leur répulsion mutuelle. Pour que la formation de liquides quantiques à un niveau élevé de la hiérarchie soit possible, il est nécessaire que l'interaction entre ces quasi-particules soit de portée suffisamment courte [57]. Tandis que cette condition semble satisfaite pour les états de la série  $\nu = p/(2sp + 1)$ , des calculs numériques ont montré que des états hors de cette série n'étaient pas stables : dans une première étude en

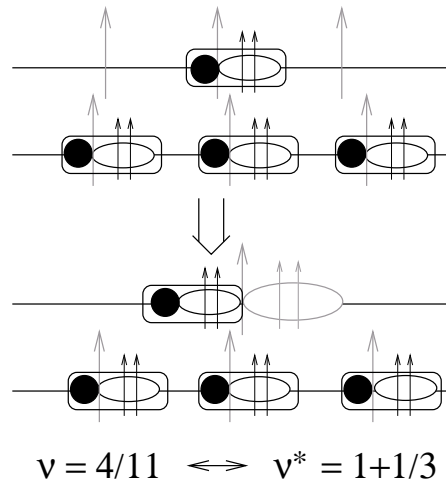


FIG. 4.1 – Fermions composites de deuxième génération à  $\nu^* = 1 + 1/3$  ( $\nu = 4/11$ ). Le FC<sup>2</sup>, formé dans le niveau partiellement rempli, consiste en un FC de la première génération et un vortex de FC portant deux quanta de flux. Les FCs dans le plus bas niveau sont traités comme inertes.

1991, Béran et Morf ont trouvé par exemple que l'état  $4/11$  serait instable si les électrons étaient complètement polarisés de spin, tandis qu'ils ont mis en évidence un petit gap d'énergie pour des particules non polarisées [117]. Ces analyses ont été confirmées par des calculs numériques de Wójs et Quinn en 2000 [118]. Un critère de stabilité *topologique* des états à des niveaux élevés dans la hiérarchie a été établi par Haldane en 1995 [119] : selon ce critère, seuls les états de la série  $\nu = p/(2sp + 1)$  seraient topologiquement stables et pourraient donc donner lieu à un EHQF. Les analyses dans la hiérarchie de Haldane et Halperin semblent donc nier la possibilité d'un EHQF hors de cette série.

Une approche complémentaire est celle des FCs, dans laquelle les états à  $\nu = p/(2sp + 1)$  sont tous traités sur le même niveau de hiérarchie. La possibilité d'états incompressibles de FC est donc déterminée par l'interaction entre FCs, les quasi-particules de cette théorie. Même si cette possibilité a déjà été évoquée par Jain en 1989 [15], ce n'est qu'en 2002 que Mandal et Jain l'ont étudiée de façon quantitative. Contrairement à une diagonalisation exacte dans la base électronique, qui ne permet pas un traitement de plus de 12 particules [120], ils proposent une diagonalisation numérique dans la

base de FC. Jusqu'à 24 FCs peuvent être analysés par cette technique. Les résultats de ces calculs sont surprenants : tandis qu'un état incompressible à  $\nu = 4/11$  émerge pour  $N = 12$  et 20 particules, l'état est compressible pour  $N = 8, 16$  et 24. Les résultats pour  $N = 8$  et 12 sont en accord avec ceux obtenus par diagonalisation exacte [120]. Bien que ces résultats ne permettent pas une extrapolation à la limite thermodynamique, Mandal et Jain les ont interprétés en termes d'état *compressible* dans cette limite. Notons que cette interprétation est particulièrement risquée parce qu'à  $\nu = 4/11$  trois FCs sur quatre peuplent le plus bas niveau de FC et restent donc dynamiquement inertes (voir figure 4.1). Le nombre maximal de FCs qui contribuent effectivement à la formation d'un tel état corrélé est  $\bar{N} = 6$  ou 7 [45, 121]. Mandal et Jain justifient leur interprétation en termes d'état *compressible* avec la remarque qu'une alternance entre états compressibles et incompressibles avec la taille du système diagonalisé avait auparavant été observée pour des états qui finalement étaient compressibles dans la limite thermodynamique [45]. Une publication plus récente du même groupe révèle que ces arguments soient inadaptés pour un traitement de l'état  $4/11$  : influencés par des expériences de Pan *et al.*, qui indiquent un EHQF polarisé de spin à  $\nu = 4/11$  [26], ainsi que par nos propres études théoriques [43, 44] et celles de Lopez et Fradkin [122], Chang et Jain plaident maintenant en faveur d'un état *incompressible* [46]. Leur nouvel argument est qu'une alternance entre états compressibles et incompressibles en fonction de la taille du système a également été trouvée pour l'état d'EHQF à  $\bar{\nu} = 1/3$  dans le niveau de Landau  $n = 1$ . Ce dernier, qui est en effet incompressible (voir figure 3.1), est l'analogue de l'état  $4/11$ , qui correspond à un remplissage  $\nu^* = 1 + 1/3$  en termes de FCs.

Un traitement alternatif, directement dans la limite thermodynamique, de l'état  $4/11$  et d'autres états, qui peuvent être interprétés comme des manifestations de FC<sup>2</sup>, a été proposé dans le cadre de mes études doctorales. Ces résultats, qui seront présentés dans la suite de ce chapitre, et l'interprétation de l'état  $4/11$  en termes de FC<sup>2</sup>s polarisés de spin, ont trouvé un soutien dans les analyses menées par Lopez et Fradkin dans l'approche de théorie de Chern-Simons [122]. Lopez et Fradkin ont montré que des états hors de la série  $\nu = p/(2sp + 1)$  sont en effet topologiquement stables s'ils sont interprétés comme des FC<sup>2</sup>, contrairement aux résultats de Haldane [119] pour les quasi-particules de la théorie de Laughlin [9].

Après une discussion du potentiel d'interaction entre FCs en termes de pseudo-potentiels de Haldane, je présenterai les résultats pour les énergies des différentes phases pour  $1/3 \leq \nu \leq 2/5$  ( $s = 1$  et  $p = 1$ ),  $2/5 \leq \nu \leq 3/7$

( $s = 1$  et  $p = 2$ ) et  $1/5 \leq \nu \leq 2/9$  ( $s = 2$  et  $p = 1$ ). Contrairement à une étude antérieure, où un potentiel d'interaction a été construit sur la base de quelques pseudo-potentiels d'indice impair, calculés numériquement [123], on y trouve des FC<sup>2</sup>s, ainsi que des phases de rubans et d'îlots de FCs. *Une alternance entre ces phases, FC<sup>2</sup>s et solides de FC, pourrait donner lieu à un phénomène de réentrance de l'EHQF, qui n'a pas été observé jusqu'à présent.* Les gaps d'activation des états FC<sup>2</sup>, calculés dans le cadre de la théorie hamiltonienne [41], ainsi qu'un traitement des excitations collectives dans l'approximation à un seul mode seront étudiés dans la dernière section de ce chapitre. J'y discuterai également l'influence des excitations inter-niveau de FC et de la largeur finie du gaz d'électrons sur les propriétés physiques des états FC<sup>2</sup>.

## 4.1 Le potentiel d'interaction des FC

Le potentiel d'interaction de FC a été déduit dans la section 2.5 [Eq. (2.34)]. Ses propriétés se révèlent dans un développement en pseudo-potentiels de Haldane [57],

$$V_{2m+1}^{CF} = \frac{2\pi}{A} \sum_{\mathbf{q}} v_{s,p}^{CF}(\mathbf{q}) L_{2m+1}(q^2 l_B^{*2}) e^{-q^2 l_B^{*2}/2}, \quad (4.1)$$

qui peuvent être interprétés comme le potentiel d'interaction entre deux particules qui se trouvent dans un état de moment angulaire relatif  $\ell = 2m + 1$ , comme il a été décrit dans la section 3.2.1. Les pseudo-potentiels exhibent également la structure de l'interaction dans l'espace réel parce que la distance moyenne entre deux FCs avec  $\ell = 2m + 1$  est  $\langle r \rangle = \sqrt{2m + 1} l_B^{*2}$ , en analogie avec l'interaction entre électrons [47, 57]. Dans le cas électronique, l'amplitude de la fonction d'onde de Laughlin, qui représente le liquide quantique à  $\nu = 1/(2s + 1)$ , est maximale dans l'état  $\ell = 2s + 1$ , et le liquide écranterait complètement les pseudo-potentiels avec un indice  $m < 2s + 1$ . Celui-ci est donc stabilisé si  $V_{2s+1} \ll V_m$ , pour  $m < 2s + 1$ . En effet, Haldane a montré que les fonctions d'onde de Laughlin représentent exactement les états fondamentaux pour toute une classe de potentiels d'interaction avec  $V_m > 0$  pour  $m < 2s + 1$  et  $V_m = 0$  pour  $m \geq 2s + 1$  [57]. Cette condition est par exemple satisfaite dans le plus bas niveau de Landau électronique ainsi que pour  $n = 1$ . Dans  $n = 2$ , on a  $V_1 \simeq V_3$ , et c'est pour cette raison que le

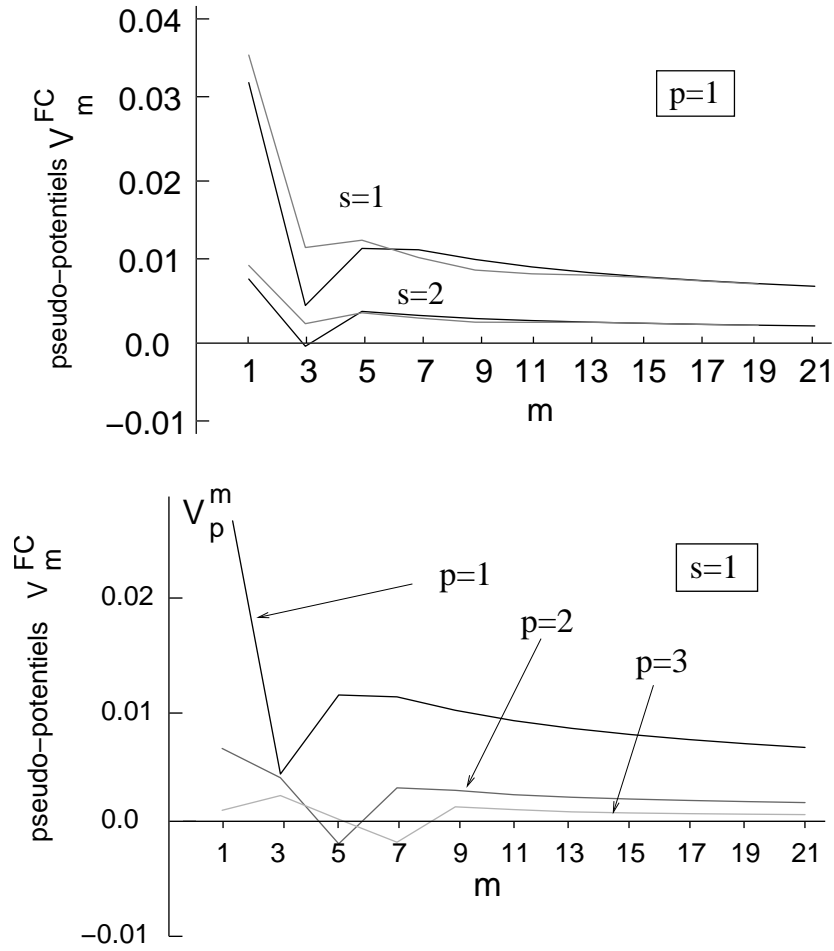


FIG. 4.2 – (a) Développement en pseudo-potentiels de l'interaction entre FCs pour  $p = 1$ . Les lignes noires représentent le cas sans écrantage par des excitations inter-niveau de FC. Les lignes grises montrent les résultats en tenant compte de l'écrantage. (b) Pseudo-potentiels de l'interaction entre FCs pour  $s = 1$  en absence d'écrantage.



liquide quantique cesse d'être la phase de plus basse énergie à  $\bar{\nu} = 1/3$  (voir figure 3.3).

La figure 4.2 représente le développement en pseudo-potentiels de l'interaction de FC. La figure 4.2(a) montre les pseudo-potentiels dans le cas où le plus bas niveau de FC est complètement rempli, pour des FCs portant deux ( $s = 1$ ) et quatre ( $s = 2$ ) quanta de flux, ce qui correspond à l'interaction entre FCs respectivement dans l'intervalle  $1/3 < \nu < 2/5$  et  $1/5 < \nu < 2/9$ . Dans le cas sans écrantage par des excitations virtuelles inter-niveau (*lignes noires*), on trouve un minimum dans les pseudo-potentiels à  $m = 3$  avec  $V_1^{CF} \gg V_3^{CF}$ . Un état liquide quantique devrait donc être *stabilisé* pour  $\nu^* = 1 + 1/3$  ( $\nu = 4/11$  pour  $s = 1$  et  $\nu = 4/19$  pour  $s = 2$ ), tandis qu'un tel état semble moins stable à  $\nu^* = 1 + 1/5$  ( $\nu = 6/17$  pour  $s = 1$  et  $\nu = 6/29$  pour  $s = 2$ ). Les expériences de Pan *et al.* ont en effet montré que l'EHQF à  $4/11$  est plus visible qu'à  $\nu = 6/17$ , où seul un faible minimum dans la résistance longitudinale indique la présence d'un état fractionnaire [26]. Pour de plus grandes valeurs de  $p$  [figure 4.2(b)], on trouve le minimum dans les pseudo-potentiels à  $m = 5$  pour  $p = 2$  et  $m = 7$  pour  $p = 3$ , ce qui déstabiliserait un état fractionnaire à  $\nu^* = p + 1/3$ . En revanche, un état  $\nu^* = 2 + 1/5$  pourrait être stable dans  $p = 2$  et un état  $\nu^* = 2 + 1/7$  dans  $p = 3$ . On remarque que ces minima deviennent *négatifs* pour  $p \geq 2$ , ce qui indique une attraction effective entre deux FCs s'il se trouvent dans l'état de ce moment angulaire relatif.

L'origine physique des minima dans les pseudo-potentiels pour l'interaction entre FCs n'est pas évidente. Notons qu'un comportement non monotone n'est pas trouvé dans le cas des interactions d'électrons. Une origine possible est la structure *dipolaire* du FC (voir figure 2.8) [41, 82, 83]; dans ce cas, un faible potentiel d'attraction dipolaire serait superposé au potentiel de répulsion coulombienne. Cette explication demeure pourtant hautement hypothétique, et des analyses plus détaillées seraient nécessaires pour trouver une explication satisfaisante. Si l'on tient compte de l'écrantage avec la fonction diélectrique (2.29), calculée dans l'approximation RPA, les minima persistent mais sont moins perceptibles [figure 4.2(a)]. Le potentiel d'interaction de FC reste pourtant de portée suffisamment courte pour stabiliser un état fractionnaire à  $\nu = 4/11$ .<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Dans la Ref. [44], l'écrantage a été *suresstimé* à cause d'un facteur  $n_B^*$  qui manque dans l'expression pour les amplitudes  $\mathcal{F}_n^p(q)$  [Eq. (8)]. Cette erreur affecte également les valeurs des gaps d'activation dans la Ref. [44].

## 4.2 Energies des différentes phases de FC

Même si l'étude des pseudo-potentiels de l'interaction des FCs fournit un critère de stabilité pour les liquides quantiques de FC, il est nécessaire de comparer l'énergie de ces derniers à celles des phases solides, notamment des phases d'îlots et de rubans de FC. Pour calculer ces énergies, on peut se servir des expressions déduites dans le chapitre précédent, en remplaçant  $l_B \rightarrow l_B^*$  et  $v_n(q) \rightarrow v_{s,p}^{CF}(q)$ .

L'énergie des liquides quantiques autour d'un facteur de remplissage partiel  $\bar{\nu}^* = 1/(2\tilde{s} + 1)$  du niveau de FC  $p$  ( $\nu^* = p + \bar{\nu}^*$ ), avec l'entier  $\tilde{s}$ , est donnée par l'équation (3.15),

$$E_{CF}^{\text{liquides}}(s, p; \tilde{s}, \bar{\nu}^*) = E_{CF}^L(s, p; \tilde{s}) + [\bar{\nu}^*(2\tilde{s} + 1) - 1] \Delta_{s,p}^{qp/qh}(\tilde{s}, \tilde{p} = 1), \quad (4.2)$$

où, en termes de pseudo-potentiels (4.1),

$$E_{CF}^L(s, p; \tilde{s}) = \frac{\bar{\nu}^*}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1}^{\tilde{s}} V_{2m+1}^{CF}(s, p) \quad (4.3)$$

est l'énergie par particule du liquide de Laughlin de FCs, portant  $2s$  quanta de flux, exactement à  $\bar{\nu}^* = 1/(2\tilde{s} + 1)$ . A  $\bar{\nu}^* \neq 1/(2\tilde{s} + 1)$ , il faut à nouveau tenir compte de l'énergie  $\Delta_{s,p}^{qp/qh}(\tilde{s}, \tilde{p})$  des FC<sup>2</sup>s (ou des trous de FC<sup>2</sup>) excités dans un niveau supérieur. Leurs énergies se calculent de la même façon que pour les FCs [Eqs. (3.18) et (3.19)], et l'on trouve

$$\Delta_{s,p}^{qp}(\tilde{s}, \tilde{p}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{q}} v_{s,p}^{CF}(q) \langle \tilde{p} | \bar{\rho}^p(-\mathbf{q}) \bar{\rho}^p(\mathbf{q}) | \tilde{p} \rangle - \int_{\mathbf{q}} v_{s,p}^{CF}(q) \sum_{j=0}^{\tilde{p}-1} |\langle \tilde{p} | \bar{\rho}^p(\mathbf{q}) | j \rangle|^2 \quad (4.4)$$

pour les énergies des FC<sup>2</sup>s et

$$\begin{aligned} \Delta_{s,p}^{qh}(\tilde{s}, \tilde{p}) &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{q}} v_{s,p}^{CF}(q) \langle \tilde{p} - 1 | \bar{\rho}^p(-\mathbf{q}) \bar{\rho}^p(\mathbf{q}) | \tilde{p} - 1 \rangle \\ &\quad + \int_{\mathbf{q}} v_{s,p}^{CF}(q) \sum_{j=0}^{\tilde{p}-1} |\langle \tilde{p} - 1 | \bar{\rho}^p(\mathbf{q}) | j \rangle|^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

pour celles des trous de FC<sup>2</sup>. Les éléments de matrice pour  $j \geq j'$  sont les mêmes que pour le cas des FCs [Eq. (A.10)],

$$\begin{aligned} \langle j | \bar{\rho}(\mathbf{q}) | j' \rangle &= \sqrt{\frac{j!}{j'}} \left( \frac{i(q_x - iq_y) \tilde{c}}{\sqrt{2}} \right)^{j-j'} e^{-q^2 \tilde{l}^2 \tilde{c}^2 / 4} \\ &\quad \times \left[ L_{j'}^{j-j'} \left( \frac{q^2 \tilde{l}^2 \tilde{c}^2}{2} \right) - \tilde{c}^{2(1-j+j')} e^{-q^2 / 2\tilde{c}^2} L_{j'}^{j-j'} \left( \frac{q^2 \tilde{l}^2}{2\tilde{c}^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.6)$$

en termes de charge du vortex de FC<sup>2</sup>,  $\tilde{c}^2 = 2\tilde{s}\tilde{p}/(2\tilde{s}\tilde{p} + 1)$ , et de longueur magnétique de FC<sup>2</sup>,  $\tilde{l} = l_B^*/\sqrt{1 - \tilde{c}^2} = 1/\sqrt{(1 - \tilde{c}^2)(1 - c^2)}$ . La charge du FC<sup>2</sup>, qui consiste en un FC et un vortex de FC, est donc  $\tilde{e} = (1 - \tilde{c}^2)e^* = (1 - \tilde{c}^2)(1 - c^2)$ , en unités de la charge de l'électron.

De la même manière, on peut utiliser les expressions déduites dans la section 3.1 pour décrire les phases solides de FC. L'énergie par particule de ces phases dans l'approximation de Hartree-Fock du modèle (2.33) est donnée par

$$E_{CF}^{\text{solides}}(s, p; \bar{\nu}^*) = \frac{n_B^*}{2\bar{\nu}^*} \sum_{\mathbf{q}} u_{s,p}^{HF}(\mathbf{q}) |\Delta^*(\mathbf{q})|^2,$$

où  $u_{s,p}^{HF}(\mathbf{q}) = v_{s,p}^{CF}(\mathbf{q}) - \sum_{\mathbf{p}} v_{s,p}^{CF}(\mathbf{p}) e^{-i(p_x q_y - p_y q_x) l_B^{*2}} / (n_B^* A)$  est le potentiel de Hartree-Fock de l'interaction de FC, et  $\Delta^*(\mathbf{q})$  désigne le paramètre d'ordre de la phase solide. Le paramètre d'ordre de la phase d'îlots de FC,

$$\Delta_B^*(\mathbf{q}) = \frac{2\pi\sqrt{2M}l_B^*}{Aq} J_1(q\sqrt{2M}l_B^*) \sum_j e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}_j},$$

donne lieu à l'énergie par particule

$$E_{CF}^{\text{îlots}}(s, p, M; \bar{\nu}^*) = \frac{n_B^* \bar{\nu}^*}{M} \sum_{\mathbf{G}_l \neq 0} u_{s,p}^{HF}(\mathbf{G}_l) \frac{J_1^2(\sqrt{2M}|\mathbf{G}_l|l_B^*)}{|\mathbf{G}_l|^2 l_B^{*2}}, \quad (4.7)$$

pour des cristaux triangulaires avec  $M$  FCs par îlot. De même, on trouve à l'aide du paramètre d'ordre de la phase de rubans de FC,

$$\Delta_S^*(\mathbf{q}) = \frac{2}{L_x} \delta_{q_y, 0} \frac{\sin(q_x \Lambda_S \bar{\nu}^*/2)}{q_x} \sum_j e^{iq_x j \Lambda_S},$$

son énergie par particule

$$E_{CF}^{\text{rubans}}(s, p, \Lambda_S; \bar{\nu}^*) = \frac{n_B^*}{2\pi^2 \bar{\nu}^*} \sum_{j \neq 0} u_{s,p}^{HF} \left( q = \frac{2\pi}{\Lambda_S} j \right) \frac{\sin^2(\pi \bar{\nu}^* j)}{j^2}. \quad (4.8)$$

La minimisation de cette énergie par rapport à la périodicité des rubans,  $\Lambda_S$ , donne  $\Lambda_S(s = 1, p = 1) = 1, 95R_C^*$ ,  $\Lambda_S(s = 1, p = 2) = 1, 8R_C^*$  et  $\Lambda_S(s = 2, p = 1) = 1, 9R_C^*$  pour la périodicité optimale à  $\bar{\nu}^* = 1/2$ . Elle varie donc en fonction du rayon cyclotron de FC,  $R_C^* = l_B^* \sqrt{2p + 1}$ .

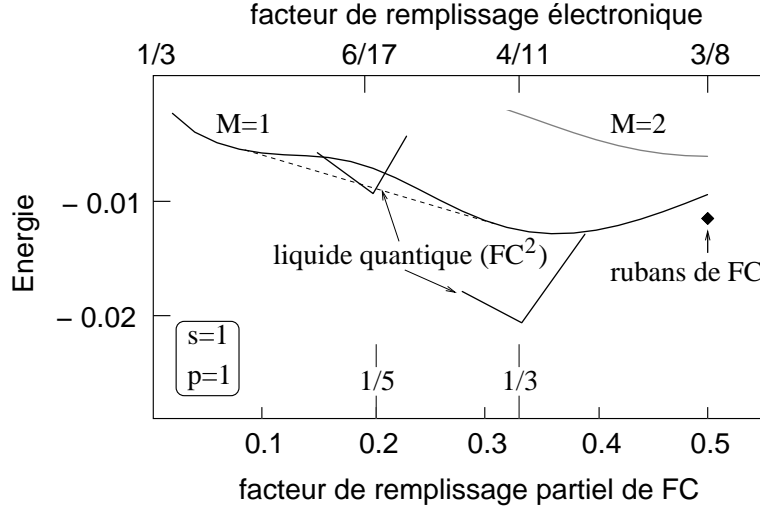


FIG. 4.3 – Energies des différentes phases pour  $1/3 \leq \nu \leq 2/5$  ( $s = 1$  et  $p = 1$ ), en unités de  $e^2/\epsilon l_B$ . La tangente (tirets) indique l'énergie d'une phase définie à partir de la construction de Maxwell.

#### 4.2.1 Les phases pour $1/3 \leq \nu \leq 2/5$ ( $s = 1$ et $p = 1$ )

La figure 4.3 montre les résultats pour les énergies des différentes phases de FC portant  $s = 1$  paire de quanta de flux dans le niveau  $p = 1$ . Dans un premier temps, l'écrantage de l'interaction par des excitations inter-niveau de FC est négligé. Comme pour le cas électronique, seul l'intervalle  $0 \leq \bar{\nu}^* \leq 1/2$  est représenté dans la figure, car l'intervalle  $1/2 \leq \bar{\nu}^* \leq 1$  est relié au premier par la symétrie particule-trou. Comme on peut s'y attendre à partir de la forme des pseudo-potentiels, un état de  $FC^2$  est énergétiquement favorisé autour de  $\bar{\nu}^* = 1/3$ , ce qui correspond à l'état  $4/11$ . En revanche, l'énergie du liquide quantique à  $\bar{\nu}^* = 1/5$  est très proche de celle d'un cristal de Wigner de FC ( $M = 1$ ), et il n'est donc pas certain qu'il soit stable. Notons que la courbe de l'énergie du cristal de Wigner n'est pas convexe, contrairement au cas électronique. On pourrait donc utiliser la construction de Maxwell pour définir une phase thermodynamique, dont l'énergie serait la tangente à cette courbe (tirets). Cette phase aurait à peu près la même énergie que le liquide quantique à  $\bar{\nu}^* = 1/5$  et probablement une énergie plus basse si l'on tient compte des impuretés dans le système. Or la nature d'une telle phase thermodynamique est plus obscure que dans le cas électronique, où elle

représente une phase mixte entre îlots de différents  $M$ . Une interprétation possible dans le cas de FC est un cristal de Wigner déformé avec deux longueurs caractéristiques pour le pas du réseau. Des études plus détaillées, qui sortent du cadre de cette thèse, sont nécessaires pour trancher la question de la structure d'une telle phase. Une phase d'îlots avec deux FCs a une énergie plus élevée que le cristal de Wigner sur toute la gamme de facteurs de remplissage. A  $\bar{\nu}^* = 1/2$ , une phase de rubans a la plus basse énergie. Contrairement au cas électronique, où l'énergie de la phase de rubans a été discutée sur une gamme de facteurs de remplissage (Chap.3.3), seule l'énergie à  $\bar{\nu}^* = 1/2$  est représentée ici. A cause de la périodicité des rubans de FCs, qui est plus petite que celle des rubans électroniques, leur largeur atteint rapidement la valeur minimale de  $l_B^*$  en abaissant le facteur de remplissage  $\bar{\nu}^*$ . Il est donc peu probable qu'une phase de rubans de FCs soit bien définie pour des valeurs de  $\bar{\nu}^* \neq 1/2$ . Une anisotropie dans la résistance longitudinale - la signature d'une phase de rubans - a en effet récemment été observée par Fischer *et al.* à  $\nu = 13/8$  dans la branche de spin supérieure du plus bas niveau de Landau [124]. Ce remplissage est lié à  $\nu = 3/8$  par la symétrie particule-trou,  $\nu \leftrightarrow 2 - \nu$ . On peut pourtant s'attendre à une compétition entre phases de rubans de FC et liquide quantique également à  $\nu = 3/8$ , comme pour le cas électronique à  $\bar{\nu} = 1/2$  dans le niveau de Landau  $n = 1$  (voir section 3.3.1). D'un point de vue théorique, il faudrait donc calculer l'énergie d'un état métallique de FC<sup>2</sup> [12] et celle d'un état pfaffien [95] pour trancher la question de l'état fondamental à  $\nu = 3/8$ . Une telle étude sort du cadre de cette thèse même si elle a un intérêt considérable : si un état métallique est réalisé à cette valeur du remplissage, et non pas une phase de rubans de FC, une expérience de *collimation magnétique* [60, 61] *peut en principe mettre en évidence l'existence de FC<sup>2</sup>*, en analogie avec le cas de FCs autour de  $\nu = 1/2$ , comme il a été décrit dans la section 1.2.2.

Le fait que le cristal de Wigner de FC n'est pas seulement favorisé à de petites valeurs de  $\bar{\nu}^*$  mais aussi à  $\bar{\nu}^* \gtrsim 0,4$  pourrait donner lieu à un phénomène de *réentrance de l'EHQF*, où des phases avec une quantification de la résistance  $R_H = 3h/e^2$  entourent le plateau à  $4/11$  [43], en analogie avec la réentrance de l'EHQE dans  $n = 1$  et  $n = 2$ , discutée dans la section 3.3.

La figure 4.4 montre l'énergie des différentes phases de FC, en tenant compte des excitations inter-niveau de FC qui donnent lieu à un potentiel d'interaction de FC écranté  $v_{s,p}^{CF}(\epsilon; q) = v_{s,p}^{CF}(q)/\epsilon_{RPA}^p(q)$ , où  $\epsilon_{RPA}^p(q)$  désigne la fonction diélectrique calculée dans l'approximation RPA [Eq. (2.29)]. Con-

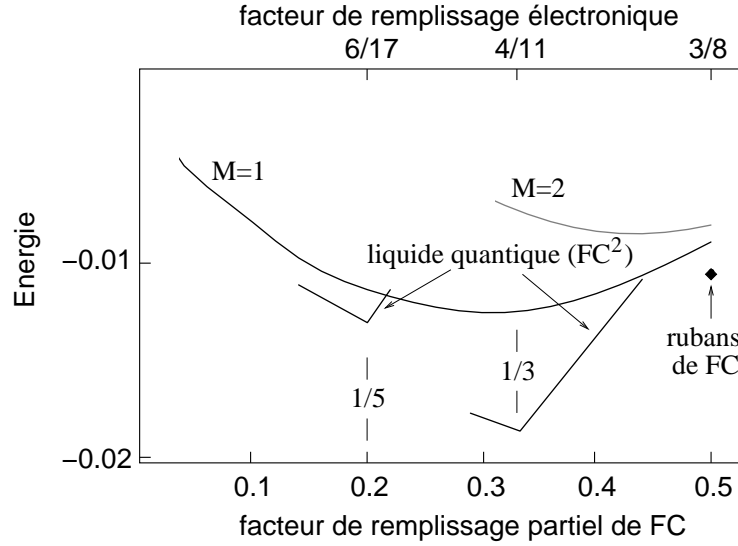


FIG. 4.4 – Energies des différentes phases pour  $1/3 \leq \nu \leq 2/5$  ( $s = 1$  et  $p = 1$ ) en tenant compte de l'écrantage, en unités de  $e^2/\epsilon l_B$ .

trairement au cas électronique où l'écrantage dû aux excitations inter-niveau de Landau est caractérisé par le paramètre  $(e^2/\epsilon l_B)/(\hbar\omega_c) \propto 1/\sqrt{B}$ , qui devient petit pour des champs magnétiques forts, l'écrantage du potentiel d'interaction de FC n'est *a priori* pas négligeable : autant que la séparation entre niveaux de FC, ces interactions sont déterminées par la seule échelle d'énergie pertinente, qui est l'interaction de Coulomb. On remarque en effet des différences entre les résultats d'énergie sans et avec écrantage. L'énergie du cristal de Wigner de FC ( $M = 1$ ) perd sa structure à deux minima et devient convexe, ce qui fait disparaître la phase décrite par la tangente dans la figure 4.3. De plus, l'écrantage stabilise l'état de  $FC^2$  à  $\bar{\nu}^* = 1/5$ , dont l'énergie est plus nettement en-dessous de l'énergie du cristal de Wigner de FC. La succession des phases reste pourtant inchangée par rapport aux résultats obtenus en négligeant l'écrantage. Dans la suite de cette section, les énergies sont calculées pour un potentiel non écranté.

#### 4.2.2 Les phases pour $2/5 \leq \nu \leq 3/7$ ( $s = 1$ et $p = 2$ )

Comme on s'y attend à partir de la discussion des pseudo-potentiels, un liquide quantique n'est pas stable à  $\bar{\nu}^* = 1/3$  dans le niveau de FC  $p = 2$ , tandis que l'état de  $FC^2$  est énergétiquement favorisé à  $\bar{\nu}^* = 1/5$  (figure 4.5).

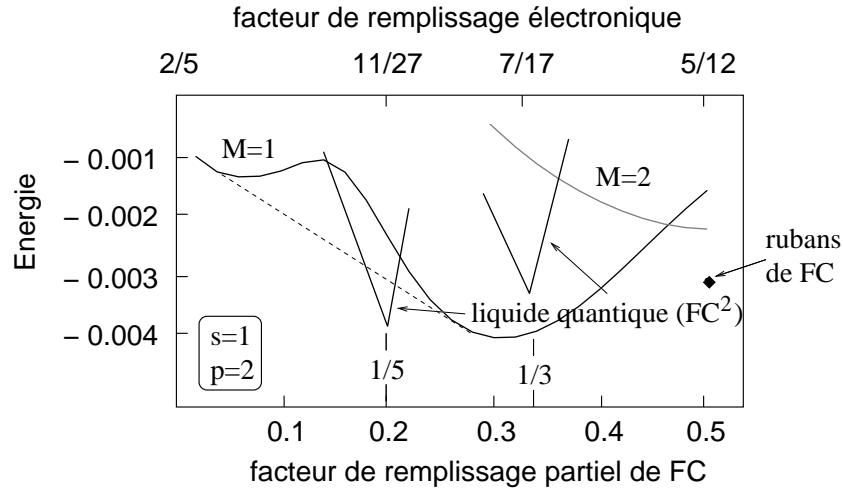


FIG. 4.5 – Energies des différentes phases pour  $2/5 \leq \nu \leq 3/7$  ( $s = 1$  et  $p = 2$ ), en unités de  $e^2/el_B$ . La tangente (tirets) indique l'énergie d'une phase définie à partir de la construction de Maxwell.

Cet état a également une plus basse énergie qu'une phase thermodynamique dont l'énergie est représentée par la tangente à la courbe  $M = 1$  (tirets). Le cristal de Wigner de FC est énergétiquement favorisé à basse densité ( $\bar{\nu}^* \lesssim 0,16$ ) ainsi que dans l'intervalle  $0,22 \lesssim \bar{\nu}^* \lesssim 0,46$ . Une réentrance de l'EHQF avec  $R_H = 5/2(h/e^2)$  est donc principalement possible, mais un état de FC<sup>2</sup> à  $\bar{\nu}^* = 1/5$ , qui se manifesterait par un EHQF à  $\nu = 11/27$ , n'a pas encore été observé. Une phase d'îlots avec deux FCs par site a une plus basse énergie que le cristal de Wigner à  $\bar{\nu} \gtrsim 0,47$ . Elle est pourtant supprimée par la phase de rubans, qui a la plus basse énergie autour de  $\bar{\nu}^* = 1/2$ .

#### 4.2.3 Les phases pour $1/5 \leq \nu \leq 2/9$ ( $s = 2$ et $p = 1$ )

Les résultats pour des FCs portant quatre quanta de flux ( $s = 2$ ) dans  $p = 1$ , présentés dans la figure 4.6, sont semblables à ceux obtenus pour  $s = 1$ . Un état de FC<sup>2</sup> a la plus basse énergie autour de  $\bar{\nu}^* = 1/3$ , tandis qu'à  $\bar{\nu}^* = 1/5$  il a presque la même énergie que le cristal de Wigner de FC et une énergie plus haute qu'une phase représentée par la tangente à la courbe  $M = 1$  (tirets). Le cristal de Wigner, qui est la phase naturellement réalisée à basse densité (petit  $\bar{\nu}^*$ ), est également trouvé à  $\bar{\nu} \gtrsim 0,37$ . Un phénomène de réentrance de l'EHQF serait donc en principe aussi observable

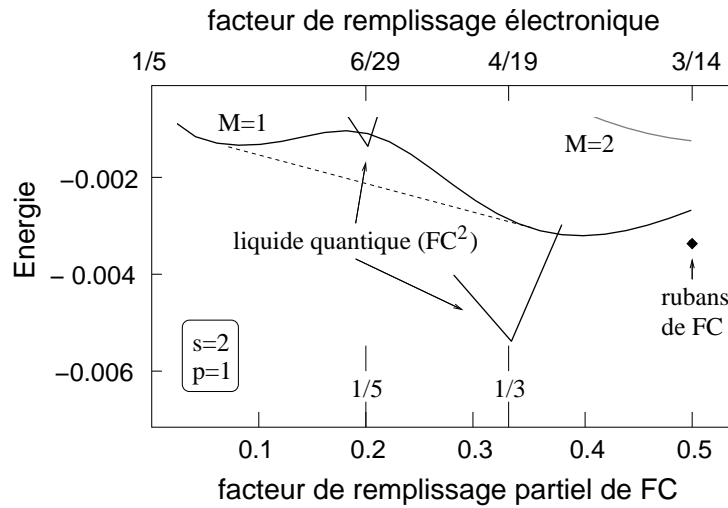


FIG. 4.6 – Energies des différentes phases pour  $1/5 \leq \nu \leq 2/9$  ( $s = 1$  et  $p = 2$ ), en unités de  $e^2/\epsilon l_B$ . La tangente (tirets) indique l'énergie d'une phase définie à partir de la construction de Maxwell.

dans l'intervalle  $1/5 < \nu < 3/14$  : un éventuel plateau à  $\nu = 4/19$  avec  $R_H = 19/4(h/e^2)$  serait entouré par des phases avec une résistance de Hall quantifiée comme  $R_H = 5h/e^2$ . La phase de rubans de FC est à nouveau la plus stable autour du demi-remplissage. Notons qu'une anisotropie dans la résistance longitudinale n'a pas été observée pour  $\nu = 3/14$ , ni pour des remplissages liés à ce dernier par la symétrie particule-trou. De même, un EHQP à  $\nu = 4/19$  n'a pas été observé, tandis que Pan *et al.* ont trouvé un minimum dans la résistance longitudinale à  $\nu = 5/13$ , qui pourrait indiquer une phase liquide quantique à  $\nu^* = 1 + 2/3$ , un remplissage symétrique à  $\nu^* = 1 + 1/3$  en termes de FC [26]. Ce minimum n'est pourtant pas accompagné d'un plateau dans la résistance de Hall, et une preuve expérimentale définitive de l'existence d'une telle phase liquide reste donc à donner.

### 4.3 Gaps d'activation des états $FC^2$

Dans cette section, je présente les calculs pour les gaps d'activation des états de  $FC^2$ , une quantité qui est directement accessible aux expériences. Il s'agit de l'énergie qu'il faut fournir au système pour créer une particule



et un trou qui, indépendants l'un de l'autre, peuvent contribuer au transport. Expérimentalement, cette quantité est mesurée en traçant la résistance longitudinale à la valeur du champ magnétique qui correspond à un état d'EHQF en fonction de la température. Cette résistance est d'ordinaire thermiquement activée,  $R_{xx} \propto \exp(-\Delta^a/k_B T)$ , où  $\Delta^a$  représente précisément ce gap d'activation. Dans la théorie hamiltonienne, cette quantité se calcule de façon simple : le gap d'activation des FC<sup>2</sup>s, avec les nombres quantiques  $s, p, \tilde{s}$  et  $\tilde{p}$ , est la somme de l'énergie pour créer un FC<sup>2</sup> dans un niveau supérieur  $\tilde{p} + 1$  [Eq. (4.4)] et de celle pour créer un trou dans  $\tilde{p}$  [Eq. (4.5)],  $\Delta_{s,p}^a(\tilde{s}, \tilde{p}) = \Delta_{s,p}^{qp}(\tilde{s}, \tilde{p}) + \Delta_{s,p}^{qh}(s; \tilde{s}, \tilde{p})$ . On trouve donc pour les gaps d'activation

$$\Delta_{s,p}^a(\tilde{s}, \tilde{p}) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} v_{s,p}^{CF}(\mathbf{q}) [\langle \tilde{p} | \bar{\rho}^p(-\mathbf{q}) \bar{\rho}^p(\mathbf{q}) | \tilde{p} \rangle - \langle \tilde{p} - 1 | \bar{\rho}^p(-\mathbf{q}) \bar{\rho}^p(\mathbf{q}) | \tilde{p} - 1 \rangle] - \sum_{\mathbf{q}} v_{s,p}^{CF}(\mathbf{q}) \sum_{n=0}^{\tilde{p}-1} [|\langle \tilde{p} | \bar{\rho}^p(\mathbf{q}) | n \rangle|^2 - |\langle \tilde{p} - 1 | \bar{\rho}^p(\mathbf{q}) | n \rangle|^2]. \quad (4.9)$$

Dans le cas d'un système parfaitement bi-dimensionnel et en l'absence de l'écrantage dû aux excitations inter-niveaux de FC, on trouve pour les gaps d'activation de la série avec<sup>2</sup>  $p = 1$

|                 |                 |                 |                 |                 |                 |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $\tilde{s} = 1$ | $\tilde{p} = 1$ | $\tilde{p} = 2$ | $\tilde{s} = 2$ | $\tilde{p} = 1$ | $\tilde{p} = 2$ |
| $\nu^*$         | $1 + 1/3$       | $1 + 2/5$       | $\nu^*$         | $1 + 1/5$       | $1 + 2/9$       |
| $\nu$           | $4/11$          | $7/19$          | $\nu$           | $6/17$          | $11/31$         |
| $\Delta^a$      | 0.026           | 0.0094          | $\Delta^a$      | 0.018           | 0.0091          |

pour  $s = 1$  (entre  $1/3 < \nu < 2/5$ ) et

|                 |                 |                 |                 |                 |                 |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $\tilde{s} = 1$ | $\tilde{p} = 1$ | $\tilde{p} = 2$ | $\tilde{s} = 2$ | $\tilde{p} = 1$ | $\tilde{p} = 2$ |
| $\nu^*$         | $1 + 1/3$       | $1 + 2/5$       | $\nu^*$         | $1 + 1/5$       | $1 + 2/9$       |
| $\nu$           | $4/19$          | $7/33$          | $\nu$           | $6/29$          | $11/53$         |
| $\Delta^a$      | 0.0087          | 0.0030          | $\Delta^a$      | 0.0072          | 0.0028          |

pour  $s = 2$  (entre  $1/5 < \nu < 2/9$ ), en unités de  $e^2/\epsilon l_B$ . Notons que les gaps d'activation de FC<sup>2</sup>s sont d'environ un ordre de grandeur plus petits que ceux de la première génération de FCs. Dans la théorie hamiltonienne,

<sup>2</sup>Il n'y a pour le moment aucune indication expérimentale d'un état d'EHQF pour  $p > 1$ , c'est-à-dire pour le cas où deux ou plusieurs niveaux de FC sont complètement remplis.

on trouve par exemple  $\Delta^a = 0, 21e^2/\epsilon l_B$  pour l'EHQF à  $\nu = 1/3$  et  $\Delta^a = 0, 10e^2/\epsilon l_B$  à  $\nu = 2/5$  [41]. Ces valeurs sont plus grandes que celles obtenues dans l'approche des fonctions d'onde [125], mais l'accord entre les résultats calculés par les deux techniques complémentaires devient meilleur si l'on tient compte de la largeur finie du système [41].

Avant de discuter le rôle de la largeur finie du système, je propose de considérer des excitations inter-niveau de FC qui écrantent le potentiel d'interaction de FC. On trouve pour les gaps d'activation, calculés en tenant compte de l'écrantage,<sup>3</sup>

|                 |                 |                 |                 |                 |                 |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $\tilde{s} = 1$ | $\tilde{p} = 1$ | $\tilde{p} = 2$ | $\tilde{s} = 2$ | $\tilde{p} = 1$ | $\tilde{p} = 2$ |
| $\nu^*$         | $1 + 1/3$       | $1 + 2/5$       | $\nu^*$         | $1 + 1/5$       | $1 + 2/9$       |
| $\nu$           | $4/11$          | $7/19$          | $\nu$           | $6/17$          | $11/31$         |
| $\Delta^a$      | 0.018           | 0.0064          | $\Delta^a$      | 0.011           | 0.0052          |

pour  $s = 1$  et  $p = 1$ , et

|                 |                 |                 |                 |                 |                 |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $\tilde{s} = 1$ | $\tilde{p} = 1$ | $\tilde{p} = 2$ | $\tilde{s} = 2$ | $\tilde{p} = 1$ | $\tilde{p} = 2$ |
| $\nu^*$         | $1 + 1/3$       | $1 + 2/5$       | $\nu^*$         | $1 + 1/5$       | $1 + 2/9$       |
| $\nu$           | $4/19$          | $7/33$          | $\nu$           | $6/29$          | $11/53$         |
| $\Delta^a$      | 0.0057          | 0.0020          | $\Delta^a$      | 0.0041          | 0.0021          |

pour  $s = 2$  et  $p = 1$ , en unités de  $e^2/\epsilon l_B$  [44]. L'écrantage abaisse donc les gaps d'activation pour  $\tilde{s} = 1$  d'environ 50%.

Finalement, on considère la largeur finie du système. Celle-ci peut être modélisée par un potentiel d'interaction modifié en remplaçant  $v(q)$  par  $v(q)f_\lambda(q)$ , avec  $f_\lambda(q) = \exp(\lambda^2 q^2)[1 - \text{Erf}(\lambda q)]$  en termes de fonction d'erreur  $\text{Erf}(x)$  [41, 126]. Le paramètre  $\lambda$  caractérise la largeur du système. Cette expression se déduit si l'on considère un potentiel de confinement quadratique dans la direction  $z$ , perpendiculaire au plan [126]. Les résultats pour les gaps d'activation, calculés avec un potentiel d'interaction écranté, sont tracés dans la figure 4.7 en fonction du paramètre  $\lambda$ . Comme on peut s'y attendre à partir des résultats connus pour les gaps d'activation de la première génération de FCs [41, 125], les gaps des états de  $FC^2$ s diminuent si la largeur du système augmente.

<sup>3</sup>Je tiens à rappeler que le désaccord entre ces valeurs et celles de la Ref. [44] est dû à un facteur  $n_B^*$  qui manque dans les amplitudes  $\mathcal{F}_n^p(q)$  [Eq. (8)] et par conséquent dans la fonction diélectrique. Cela mène à une surestimation du rôle de l'écrantage.

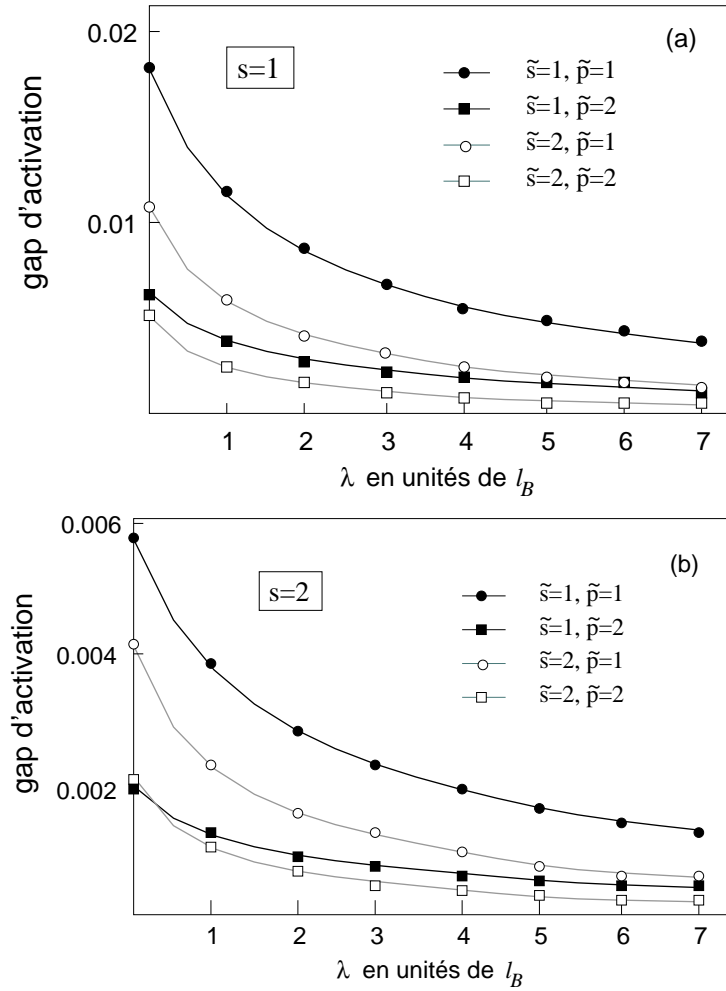


FIG. 4.7 – Gaps d'activation, en unités de  $e^2/\epsilon l_B$ , en fonction du paramètre de largeur  $\lambda$ , pour différents facteurs de remplissage. (a)  $s = 1$  :  $\nu = 4/11$  (cercles noirs),  $\nu = 6/17$  (cercles blancs),  $\nu = 7/19$  (carrés noirs),  $\nu = 11/31$  (carrés blancs); (b)  $s = 2$  :  $\nu = 4/19$  (cercles noirs),  $\nu = 6/29$  (cercles blancs),  $\nu = 7/33$  (carrés noirs),  $\nu = 11/53$  (carrés blancs).

Jusqu'à présent, les expériences ne permettent pas d'évaluer de façon fiable les gaps d'activation de ces nouveaux états. Seul l'état  $4/11$  se manifeste par un plateau dans la résistance de Hall, mais le minimum dans la résistance longitudinale ne diminue pas suffisamment en abaissant la température pour observer un comportement activé [26]. Les expérimentateurs ont pourtant pu déduire un ordre de grandeur pour ce gap (environ 50mK) à partir de l'évolution de la largeur du minimum en fonction de la température. La largeur du système examiné est donnée par  $\sim 500\text{\AA}$  [26], ce qui correspond à un paramètre de largeur de  $\lambda \simeq 6,3l_B$  pour  $B = 10\text{T}$ . Le gap théorique pour cette largeur est  $\Delta^a(s = 1; \tilde{s} = 1, \tilde{p} = 1) \simeq 0,0040e^2/\epsilon l_B$ , ce qui est de l'ordre de 600mK et donc un ordre de grandeur plus grand que celui estimé par des expériences. Notons que l'ordre de grandeur du gap théorique à  $\nu = 4/11$  pour un paramètre de largeur  $\lambda = 0$  a récemment été confirmé par des calculs de Chang et Jain dans l'approche des fonctions d'onde [46]. Le désaccord entre les valeurs théoriques et les estimations expérimentales du gap pour l'état  $4/11$  est probablement dû au fait que les effets d'impuretés ont été omis dans nos calculs, ainsi que dans ceux de Chang et Jain. En effet, des études de Morf et d'Ambrumenil ont montré que des impuretés donnent lieu à une réduction du gap d'activation qui peut être du même ordre de grandeur que le gap lui-même [127]. On peut s'attendre à ce que des impuretés affectent les états de  $FC^2$  plus que les états correspondants de FC de première génération.

### 4.3.1 Excitations collectives à $4/11$ - approximation à un seul mode

Pour décrire la dispersion des excitations collectives des états de Laughlin à  $\nu = 1/(2s + 1)$  dans le plus bas niveau de Landau, Girvin *et al.* [28] ont proposé une méthode qui était stimulée par le traitement de Feynman des modes phononiques dans  $^4\text{He}$  [128]. La méthode consiste à construire l'état excité en agissant avec une composante de Fourier de l'opérateur de densité projeté sur l'état fondamental, décrit par une fonction de Laughlin  $\langle\{z_k, \bar{z}_k\}|\Omega_s\rangle$ ,

$$|\psi_{\mathbf{q}}^s\rangle = \bar{\rho}(\mathbf{q})|\Omega_s\rangle. \quad (4.10)$$

L'interprétation des excitations collectives en termes de tel état s'appelle l'approximation à un seul mode [28, 128]. Cette méthode a été également utilisée pour décrire les excitations collectives des liquides quantiques dans

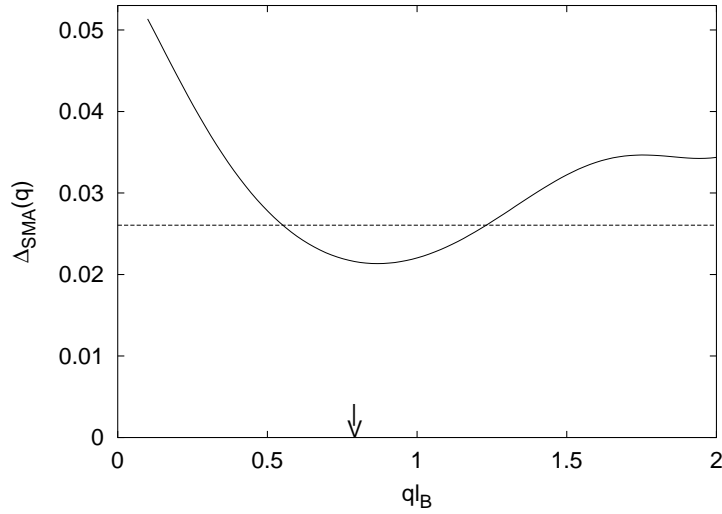


FIG. 4.8 – Dispersion des excitations collectives de l'état 4/11, calculée dans l'approximation à un seul mode. La ligne en pointillé représente l'énergie du gap d'activation, obtenu dans la théorie hamiltonienne. La flèche indique le module du vecteur du réseau réciproque d'un cristal de Wigner de FCs.

le niveau de Landau  $n = 1$  [129] et dans des niveaux plus élevés [29].

Dans le cas d'états de FC, on peut utiliser le même ansatz [Eq. (4.10)] si l'on interprète  $|\Omega_{\tilde{s}}\rangle$  comme l'état de Laughlin de FCs à  $\tilde{\nu}^* = 1/(2\tilde{s} + 1)$  et que l'on remplace  $\bar{\rho}(\mathbf{q}) \rightarrow \bar{\bar{\rho}}(\mathbf{q})$ . Son énergie par rapport à celle de l'état fondamental,  $E_0(s, p; \tilde{s})$ , est donnée par

$$\Delta_{\tilde{s}}(q) = \frac{\langle \psi_{\mathbf{q}}^s | \hat{H}^{CF} - E_0(s, p; \tilde{s}) | \psi_{\mathbf{q}}^s \rangle}{\langle \psi_{\mathbf{q}}^s | \psi_{\mathbf{q}}^s \rangle} = \frac{\bar{\bar{f}}_{\tilde{s}}(q)}{\bar{\bar{s}}_{\tilde{s}}(q)}, \quad (4.11)$$

où  $\bar{\bar{s}}_{\tilde{s}}(q) = \langle \bar{\bar{\rho}}(-\mathbf{q}) \bar{\bar{\rho}}(\mathbf{q}) \rangle / An_{el}$  est le facteur de structure de l'état de Laughlin de FCs,  $|\Omega_{\tilde{s}}\rangle$ .<sup>4</sup> Le numérateur dans l'Eq. (4.11) peut s'exprimer comme  $\bar{\bar{f}}_{\tilde{s}}(q) = \langle \bar{\bar{\rho}}(-\mathbf{q}) [\hat{H}^{CF}, \bar{\bar{\rho}}(\mathbf{q})] \rangle / An_{el}$ , dans le cas où  $|\Omega_{\tilde{s}}\rangle$  est un état propre du hamiltonien  $\hat{H}^{CF}$ . C'est une bonne approximation pour l'état de Laughlin, qui a un recouvrement de plus de 99% avec l'état fondamental exact. En tenant compte de la symétrie de rotation, satisfaite par le hamiltonien, ainsi que par l'état de Laughlin, cette expression peut être réécrite en termes de

<sup>4</sup>Les moyennes sont définies par rapport à cet état.

deux commutateurs

$$\begin{aligned}\bar{f}_{\bar{s}}(q) &= \frac{\langle [\bar{\rho}(-\mathbf{q}), [\hat{H}^{CF}, \bar{\rho}(\mathbf{q})]] \rangle}{2An_{el}} \\ &= \frac{2}{A} \sum_{\mathbf{k}} [v_{s,p}^{CF}(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) - v_{s,p}^{CF}(k)] \sin^2 \left( \frac{(k_x q_y - k_y q_x) l_B^{*2}}{2} \right) \bar{s}_{\bar{s}}(k),\end{aligned}$$

où la dernière ligne a été obtenue à l'aide des règles de commutation (2.35). La dispersion des excitations collectives (4.11) est donc une fonctionnelle du facteur de structure de l'état de Laughlin de FC,

$$\bar{s}(q) = (1 - \bar{\nu}^*) + 4\bar{\nu}^* \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1}^{\bar{s}} L_{2m+1} \left( q^2 l_B^{*2} \right) e^{-q^2 l_B^{*2}/2}.$$

Cette expression a déjà été mentionnée dans la section 3.2.1 pour caractériser l'état de Laughlin électronique. On trouve finalement pour la dispersion des excitations collectives dans l'approximation à un seul mode

$$\Delta_{\bar{s}}(q) = \frac{2}{A} \sum_{\mathbf{k}} [v_{s,p}^{CF}(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) - v_{s,p}^{CF}(k)] \sin^2 \left( \frac{(k_x q_y - k_y q_x) l_B^{*2}}{2} \right) \frac{\bar{s}_{\bar{s}}(k)}{\bar{s}_{\bar{s}}(q)}. \quad (4.12)$$

Le résultat pour la dispersion des excitations collectives de l'état liquide quantique à  $\nu = 4/11$  est représenté dans la figure 4.8. Seul le cas d'un système bidimensionnel parfait ( $\lambda = 0$ ) est considéré ici, et le potentiel d'interaction de FC est celui sans écrantage. On trouve bien un minimum de roton à un vecteur d'onde  $q_0 l_B \simeq 0,8$ . Dans le cas des états de Laughlin électroniques, ce minimum peut être interprété comme une tendance du système à cristalliser [28]. En effet, le vecteur d'onde du minimum de roton correspond au module du vecteur du réseau réciproque d'un cristal de Wigner,  $q_0^{CW} l_B = 2\pi/\Lambda = (\sqrt{3}\pi\nu)^{1/2}$ , dans le cas électronique, et le gap au minimum de roton devient plus petit dans la limite de basse densité, où l'on s'attend à ce que le cristal de Wigner soit l'état fondamental. Dans le cas de FCs, le vecteur du réseau réciproque d'un cristal de Wigner est donné par  $q_0^{CW} = (\sqrt{3}\pi\bar{\nu}^*)/l_B^*$ , ce qui donne pour l'état 4/11 ( $\bar{\nu}^* = 1/3$ )  $q_0^{CW} = \sqrt{\pi/3^{3/2}} \simeq 0,78$ . Cette valeur est indiquée par la flèche dans la figure 4.8, et elle se compare bien à la valeur du vecteur d'onde au minimum de roton. La ligne en pointillé dans la figure 4.8 montre l'énergie du gap d'activation, calculé dans la théorie hamiltonienne en absence de l'écrantage.

En principe, ce gap devrait coïncider avec la dispersion des excitations collectives dans la limite de grands vecteurs d'onde,  $\Delta^a = \Delta_{\bar{s}}(q \rightarrow \infty)$ , mais l'approximation à un seul mode fournit des résultats moins fiables dans cette limite. En effet, cette approximation surestime le gap d'activation des liquides électroniques [28], ce que l'on observe donc également dans le cas des FCs. L'énergie du minimum de roton est néanmoins plus basse que le gap d'activation, trouvé dans la théorie hamiltonienne, ce qui donne confiance en la validité de l'approximation pour ces valeurs du vecteur d'onde.

# Chapitre 5

## Conclusions et perspectives

### 5.1 Conclusions

En conclusion, cette thèse doctorale a porté sur l'étude théorique de différentes phases possibles dans les systèmes à effet Hall quantique, qui sont constitués d'un gaz électronique bidimensionnel, soumis à un champ magnétique perpendiculaire. La richesse des phases réalisées est due au caractère fortement corrélé qu'exhibe le système, en raison de la quantification de l'énergie cinétique en niveaux de Landau, avec une grande dégénérescence par niveau. Si les niveaux ne sont pas complètement remplis, l'interaction de Coulomb entre les électrons est la seule échelle d'énergie pertinente dans le système, ce qui caractérise le cas limite des corrélations fortes.

Deux raisons motivent l'étude de ces systèmes à effet Hall quantique : premièrement, les systèmes électroniques bidimensionnels qui exhibent des corrélations fortes restent mal compris, sur un plan théorique autant qu'expérimental. L'exemple le plus connu de cette classe, les céramiques comme les cuprates, révèle une supra-conductivité qui persiste à des températures élevées comparées aux matériaux supraconducteurs normaux. Après presque deux décennies de recherche intense depuis sa découverte, ce phénomène n'est toujours pas entièrement compris. Comme les systèmes à effet Hall quantique, ces matériaux possèdent un diagramme de phase très riche : une phase de pseudo-gap à dopage faible semble être la manifestation d'un liquide de spin quantique. Le lien entre cette phase et les liquides quantiques responsables de l'EHQF a été souligné par Laughlin [130]. De plus, nombre de ces matériaux montrent sous certaines conditions des phases de densité de charge modulée,



qui ressemblent à celles des systèmes à effet Hall quantique. Même s'il y a aujourd'hui des indications expérimentales de la présence de telles phases inhomogènes dans ces systèmes, la connexion avec le phénomène de supraconductivité reste un domaine de recherche actuel.

Une deuxième motivation de l'étude des systèmes à effet Hall quantique est l'intérêt du phénomène en soi : les effets Hall quantiques sont - avec les phénomènes de supraconductivité et de suprafluidité, dont des études théoriques ont été couronnées par le Prix Nobel de 2003 - une des rares manifestations de cohérence quantique à l'échelle macroscopique. Les modèles décrivant ces effets sont pourtant relativement simples : l'EHQE est décrit par un modèle d'électrons libres soumis à un champ magnétique [Eq. (1.1)] - sa solution étant un exemple des manuels de mécanique quantique, l'observation inattendue de l'effet a pourtant dû attendre l'année 1980 [1]. Le modèle théorique qui est à la base de l'EHQF consiste en un seul terme dans le hamiltonien (2.7), les interactions de Coulomb entre électrons restreints à un seul niveau de Landau. Malgré sa simplicité, ce modèle n'est pas exactement soluble et porte en soi une énorme richesse de phases.

Cette richesse de phases était l'objet de ma thèse. Dans le chapitre 3, j'ai examiné les phases électroniques dans le modèle d'électrons restreints à un seul niveau : des phases liquides quantiques, qui montrent l'EHQF, sont en compétition avec des phases électroniques solides, comme des cristaux d'îlots ou des phases de rubans. Tandis que les rubans donnent lieu à une forte anisotropie dans la résistance longitudinale [19], les cristaux d'îlots, autant que le cristal de Wigner et une phase désordonnée d'électrons individuellement piégés, se manifestent par un comportement isolant des électrons dans le niveau de Landau partiellement rempli. Dans ce cas, les propriétés de transport électronique sont déterminées par les particules dans les niveaux complètement remplis, et l'on observe l'EHQE. Dans des mesures de transport direct, il est donc impossible de distinguer entre une phase électronique cristalline, accrochée par les impuretés résiduelles, et une phase désordonnée avec localisation des électrons. En revanche, des mesures sous irradiation micro-onde permettent d'observer des propriétés d'un cristal électronique parce que son mode d'accrochage donne lieu à une résonance dans la conductivité en fonction de la fréquence. De telles expériences ont servi de preuve indirecte de l'existence du cristal de Wigner dans le plus bas niveau de Landau [37], ainsi que dans des niveaux élevés [111]. Une résonance a également été observée dans le niveau de Landau  $n = 2$  autour de  $\bar{\nu} = 1/4$  et  $3/4$  [105], où l'on s'attend à la présence d'un cristal d'îlots avec deux électrons par site

[66, 32, 34]. Une coexistence de phases d'îlots avec différents  $M$  est attendue autour des points de transition, qui sont de premier ordre [91]. Dans le cadre des études de cette thèse, on a montré qu'une telle coexistence devrait se manifester par *deux résonances* dans la conductivité optique [34], une prédiction qui a été vérifiée dans des expériences récentes par Lewis *et al.* [40].

Les phases liquides quantiques, qui exhibent l'EHQF, ont parfois une énergie plus basse autour des remplissages  $\bar{\nu} = 1/(2s + 1)$ . Les courbes d'énergie de ces liquides sont pourtant fortement non-monotones à cause des quasi-particules et quasi-trous excités lorsque  $\bar{\nu} \neq 1/(2s + 1)$ . Ils sont séparés par un gap d'énergie de l'état fondamental, qui peut être décrit par une fonction d'onde de Laughlin [9], et les phases liquides deviennent donc énergétiquement moins favorables pour  $\bar{\nu} \neq 1/(2s + 1)$ . Lorsque leur énergie dépasse celle de la phase d'îlots quand le facteur de remplissage varie, l'EHQF disparaît, et l'on trouve une quantification entière de la résistance de Hall. L'alternance entre ces phases donne lieu au phénomène de *réentrance de l'EHQE*, observé dans les niveaux  $n = 1$  [25] et  $n = 2$  [33]. Les calculs d'énergie des phases en compétition, présentés dans le chapitre 3, ont fourni une base théorique à l'analyse de ce phénomène [32, 34].

Le modèle d'électrons restreints à un seul niveau (2.7) a de plus été étudié dans la base de FC à l'aide de la théorie hamiltonienne de Murthy et Shankar [41]. Sa formulation approchée consiste à utiliser une combinaison préférentielle des deux densités, électronique et de pseudo-vortex, et à négliger la contrainte (2.12) imposée sur les états du sous-espace physique. C'est justifié pour les situations étudiées ici, où l'on a une séparation entre niveaux de FC, mais cette approximation cesse d'être valable pour la description de l'état à  $\nu = 1/2$ , qui consiste en une mer de Fermi de FCs et qui n'est donc pas séparé par un gap des états excités. La théorie hamiltonienne a permis, dans le passé, une compréhension physique du FC et des raisons pour lesquelles l'EHQF peut être interprété comme un EHQE de FCs quasi-libres à  $\nu^* = p$ . Elle a par ailleurs fourni une méthode analytique qui permet de calculer de façon simple et fiable nombre de propriétés physiques des FCs, ce qui nécessite des calculs numériques très élaborés dans la théorie complémentaire des fonctions d'onde de Jain [15]. Ce qui a été montré dans cette thèse, c'est la simplicité et l'utilité de la théorie hamiltonienne, qui va bien au-delà de la confirmation de résultats connus : elle fournit un cadre pour traiter des FCs en interaction. Ces interactions deviennent essentielles à remplissage partiel de niveaux de FC,  $\nu^* \neq p$ . Tandis que des analyses numériques dans l'approche des fonctions d'onde, qui sont restreintes à une étude d'un

petit nombre de particules, ne sont pas suffisamment adaptées pour décrire les interactions de FC dans la limite thermodynamique, la théorie hamiltonienne a permis de déduire analytiquement un modèle de FCs polarisés de spin en interaction. Une auto-similarité, discutée dans le chapitre 2, est remarquable au niveau de la structure du modèle : le hamiltonien de FCs en interaction (2.33) est le même que celui des électrons restreints à un niveau (2.7) si l'on remplace le potentiel d'interaction  $v_n(q) \rightarrow v_{s,p}^{CF}(q)$  et que l'on renormalise la longueur magnétique  $l_B \rightarrow l_B^*$ . Cette auto-similarité au niveau de la structure du modèle donne lieu également à une auto-similarité entre les états d'EHQF, suivant de la forme exacte du potentiel d'interaction entre FCs (2.34). Une telle auto-similarité a déjà été évoqué en 1996 par Mani et v. Klitzing, dans le cadre de transformations d'échelle [27]. Ce dernier a en effet une forme qualitativement différente de l'interaction électronique originelle (2.6), et l'auto-similarité de la courbe de résistance de Hall n'est donc pas garantie par la construction mathématique, proposée dans la section 2.3.

Pour trancher la question de cette auto-similarité et donc de la possibilité d'un nouvel effet de réentrance de l'EHQF, encore non observé, il est nécessaire d'étudier les énergies des différentes phases de FC, comme des liquides quantiques ( $FC^2$ ) et des phases solides de FC. Dans le chapitre 4, j'ai présenté une telle étude dans le cadre du modèle de FCs en interaction. Les calculs d'énergie indiquent non seulement la stabilité d'états de  $FC^2$ , comme celui à  $\nu = 4/11$ , mais montrent également la *possibilité de nouveaux phénomènes de réentrance dans le régime de l'EHQF*. A part l'énergie des différentes phases de FC, le modèle de FCs en interaction permet de calculer de façon simple certaines propriétés physiques des états de  $FC^2$ , comme ses gaps d'activation ou la dispersion de ses excitations collectives. Les gaps d'activation de ces nouveaux états, qui sont en principe accessibles dans des études expérimentales, sont à peu près d'un ordre de grandeur plus petits que leurs "parents" FC de la série  $\nu = p/(2sp + 1)$ . Pour cette raison, les états de  $FC^2$  sont moins visibles que les états de FC. Des estimations à partir de la seule expérience sur les états de  $FC^2$  rapportée jusqu'à présent [26] indiquent que le gap de l'état à  $\nu = 4/11$ , qui paraît être polarisé de spin, est d'environ un ordre de grandeur plus petit que celui que nous avons calculé en tenant compte de la largeur finie du gaz d'électrons ainsi que de l'écrantage de l'interaction entre FCs, à cause des excitations inter-niveau de FC [34]. Notons que ces estimations sont relativement peu précises pour le moment parce que le gap d'activation a été déduit de façon indirecte à partir de la largeur du minimum dans la résistance longitudinale et non pas à partir de

sa profondeur en fonction de la température [26]. Pour déduire une valeur plus précise du gap d'activation expérimental, il faut améliorer la qualité des échantillons. La raison du désaccord entre les deux gaps d'activation, expérimental et théorique, est probablement leur sensibilité aux impuretés, négligées dans nos calculs. Des impuretés peuvent réduire considérablement le gap d'activation de nombre d'états, comme il a été montré par Morf et d'Ambrumenil [127]. Cet effet est également attendu pour les états de  $FC^2$  qui, à cause de leur sensibilité, sont probablement plus affectés par les impuretés que les états de FC habituels. Une compréhension complète du rôle des impuretés n'est pourtant pas acquise jusqu'à présent et demeure une question de recherche pour l'avenir.

## 5.2 Perspectives pour un travail futur

Le rôle des impuretés et leur analyse dans un modèle microscopique mis à part, plusieurs questions pourraient guider un travail futur dans les systèmes à effet Hall quantique. Une technique pour déterminer la polarisation de spin de divers états d'EHQF est l'inclinaison de l'échantillon par rapport à la direction du champ magnétique. Tandis que la séparation entre niveaux de Landau dépend uniquement de la composante perpendiculaire du champ, le gap de Zeeman est déterminé par le champ total. Or la composante du champ magnétique n'affecte pas seulement le spin des électrons mais aussi ses degrés de liberté orbitaux à cause de la largeur finie du gaz électronique. Les fonctions d'onde des électrons, dont le mouvement cyclotron est de préférence dans le plan perpendiculaire au champ *total*, sont donc inclinées par rapport au plan dans la mesure où la largeur du gaz est suffisamment importante. Cela affecte également le recouvrement des fonctions d'onde, et par conséquent le potentiel d'interaction effectif (2.6) par l'intermédiaire du facteur de forme  $F_n(q)$  [Eq. (2.3)], qui devient *anisotrope* [131]. Cette anisotropie du potentiel d'interaction peut être à l'origine du renversement de l'anisotropie, induit par un champ magnétique dans le plan, dans la résistance longitudinale autour de demi-remplissage d'un niveau de Landau élevé [102]. Dans l'image des rubans, cet effet peut être dû à une orientation des rubans perpendiculaire au champ dans le plan, comme il a été trouvé dans des calculs numériques de Jungwirth *et al.* [100] et Stanescu *et al.* [101]. Le champ dans le plan peut également induire une anisotropie dans la résistance longitudinale à  $\nu = 5/2$  et  $7/2$  tout en détruisant l'EHQF, observé en absence de cette

composante du champ [102]. Une comparaison des énergies d'une phase de rubans et d'un liquide quantique, responsable de cet EHQF, en fonction de la composante du champ dans le plan manque jusqu'à présent et pourrait fournir une explication de cet effet.

Un autre aspect à traiter dans l'avenir est la généralisation de l'approche hamiltonienne au cas de FCs avec spin. Le degré de liberté du spin a été négligé dans les études de cette thèse avec l'argument que le gap de Zeeman est grand et que les excitations de spin font donc partie d'un secteur de "haute" énergie. Il y a pourtant des situations dans lesquelles il faut explicitement tenir compte de ce degré de liberté, par exemple dans le cas où seule la branche de spin inférieure du plus bas niveau de Landau est complètement remplie ( $\nu = 1$ ) : les excitations dans la même branche sont donc interdites par le principe de Pauli et celles de plus basse énergie - par exemple la promotion d'une particule dans la branche de spin supérieure - consistent en un spin renversé. En effet, une grande richesse de phénomènes physiques s'est révélée à  $\nu = 1$ . A part les magnons, quanta des ondes de densité de spin, qui deviennent massifs à cause du gap de Zeeman, la formation de "skyrmions" a été prédite [132, 133] et donne probablement lieu à des phénomènes de polarisation du système qui ont été observés autour de  $\nu = 1$  dans des expériences de résonance magnétique nucléaire [134]. L'étude de cette sorte d'excitation dans le contexte de FCs, par exemple autour de  $\nu = 1/3$ , serait donc un nouveau défi pour la théorie hamiltonienne, généralisée au cas de FC avec spin [135]. Cette généralisation permettrait également de traiter des systèmes à effet Hall quantique avec deux gaz d'électrons parallèles - les "bi-couches" - dont l'indice de couche peut être formellement traité comme la composante d'un "iso-spin" [136]. Ces systèmes suscitent beaucoup d'intérêt parce qu'ils révèlent de nouveaux états d'effet Hall quantique. Quelques-uns peuvent être compris en termes d'états superfluides, comme celui à  $\nu = 1$  [136], qui est dû aux interactions de Coulomb, comme les états d'EHQF. Dans la logique de cette thèse, on peut se poser la question si un tel état superfluide existerait également à  $\nu = 1/3$ , en termes de FCs.

# Bibliographie

- [1] K. v. Klitzing, G. Dorda et M. Pepper, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980).
- [2] D. C. Tsui, H. Stormer et A. C. Gossard, Phys. Rev. Lett. **48**, 1559 (1982).
- [3] S. Das Sarma et A. Pinczuk, eds., *Perspectives in Quantum Hall Effects*, Wiley, New York (1997).
- [4] L. D. Landau et E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik, Bd. 9 - Statistische Physik (Teil II)*, Akademie Verlag, Berlin (1992).
- [5] J. Bardeen, L. N. Cooper et J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
- [6] J. G. Bednorz et K. A. Müller, Z. Phys. **64**, 189 (1986).
- [7] F. Steglich, J. Aarts, C. D. Bredl, W. Leike, D. E. Meshida, W. Franz et H. Schäfer, Phys. Rev. Lett. **43**, 1892 (1976).
- [8] P. Coleman, Ann. Henri Poincaré **4**, 1 (2003).
- [9] R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **50**, 1395 (1983).
- [10] P. W. Anderson, Science **235**, 1196 (1987).
- [11] A. Lopez et E. Fradkin, Phys. Rev. B **44**, 5246 (1991).
- [12] B. I. Halperin, P. A. Lee et N. Read, Phys. Rev. B **47**, 7312 (1993).
- [13] Z. F. Ezawa, *Quantum Hall Effects - Field Theoretical Approach and related Topics*, World Scientific, Singapore (2000).
- [14] S. Sachdev, *Quantum Phase Transitions*, Cambridge University Press, Cambridge (1999).
- [15] J. K. Jain, Phys. Rev. Lett. **63**, 199 (1989); Phys. Rev. B **41**, 7653 (1990).
- [16] O. Heinonen, ed., *Composite Fermions*, World Scientific, Singapore (1998).

- [17] A. A. Koulakov, M. M. Fogler et B. I. Shklovskii, Phys. Rev. Lett. **76**, 499 (1996) ; M. M. Fogler, A. A. Koulakov et B. I. Shklovskii, Phys. Rev. B **54**, 1853 (1996).
- [18] R. Moessner et J. T. Chalker, Phys. Rev. B **54**, 5006 (1996).
- [19] M. P. Lilly, K. B. Cooper, J. P. Eisenstein, L. N. Pfeiffer et K. W. West, Phys. Rev. Lett. **82**, 394 (1999) ; R. R. Du, D. C. Tsui, H. L. Stormer, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin et K. W. West, Solid State Commun. **109**, 389 (1999).
- [20] E. Fradkin et S. A. Kivelson, Phys. Rev. B **59**, 8065 (1999).
- [21] E. Fradkin, S. A. Kivelson, E. Manousakis et K. Nho, Phys. Rev. Lett. **84**, 1982 (2000).
- [22] C. Wexler et A. T. Dorsey, Phys. Rev. B **64**, 115312 (2001).
- [23] B. Rosenow et S. Scheidl, Int. J. Mod. Phys. B **15**, 1905 (2001).
- [24] A. H. MacDonald et M. P. A. Fisher, Phys. Rev. B **61**, 5724 (2000) ; F. v. Oppen, B. I. Halperin et A. Stern, Phys. Rev. Lett. **84**, 2937 (2000).
- [25] J. P. Eisenstein, K. B. Cooper, L. N. Pfeiffer et K. W. West, Phys. Rev. Lett. **88**, 076801 (2002).
- [26] W. Pan, H. L. Stormer, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin et K. W. West, Phys. Rev. Lett. **90**, 016801 (2003).
- [27] R. G. Mani et K. v. Klitzing, Z. Phys. B **100**, 635 (1996).
- [28] S. M. Girvin, A. H. MacDonald et P. M. Platzman, Phys. Rev. B **33**, 2481 (1986).
- [29] M. O. Goerbig et C. Morais Smith, Phys. Rev. B **66**, 241101 (2002).
- [30] V. W. Scarola, K. Park et J. K. Jain, Phys. Rev. B **62**, 16259 (2000).
- [31] M. O. Goerbig et C. Morais Smith, Europhys. Lett. **63**, 736 (2003).
- [32] M. O. Goerbig, P. Lederer et C. Morais Smith, Phys. Rev. B **68**, 241302 (2003).
- [33] K. B. Cooper, M. P. Lilly, J. P. Eisenstein, L. N. Pfeiffer et K. W. West, Phys. Rev. B **60**, 11285 (1999).
- [34] M. O. Goerbig, P. Lederer et C. Morais Smith, Phys. Rev. B **69**, 115327 (2004).
- [35] H. Fukuyama, J. Phys. Soc. Jpn. **41**, 513 (1976).

- [36] H. Fukuyama et P. A. Lee, Phys. Rev. B **17**, 535 (1977) ; *ibid.* **18**, 6245 (1978).
- [37] L. W. Engel, C. C. Li, D. Shahar , D. C. Tsui et M. Shayegan, Solid State Commun. **104**, 167 (1997).
- [38] H. A. Fertig, dans [3].
- [39] M. Shayegan, dans [3].
- [40] R. M. Lewis, Y. P. Chen, L. W. Engel, D. C. Tsui, P. D. Ye et L. N. Pfeiffer, cond-mat/0401462.
- [41] G. Murthy et R. Shankar, Rev. Mod. Phys. **75**, 1101 (2003).
- [42] M. O. Goerbig, P. Lederer et C. Morais Smith, Europhys. Lett. **68**, 72 (2004).
- [43] M. O. Goerbig, P. Lederer et C. Morais Smith, accepté pour publication dans *Phys. Rev. Lett*, cond-mat/0403016.
- [44] M. O. Goerbig, P. Lederer et C. Morais Smith, Phys. Rev. B **69**, 155324 (2004).
- [45] S. S. Mandal et J. K. Jain, Phys. Rev. B **66**, 155302 (2002).
- [46] C.-C. Chang et J. K. Jain, Phys. Rev. Lett. **92**, 196806 (2004).
- [47] D. Yoshioka, *The Quantum Hall Effect*, Springer, Berlin (2002).
- [48] S. A. Trugman, Phys. Rev. B **27**, 7539 (1983).
- [49] S. Das Sarma, dans [3]
- [50] E. P. Wigner, Phys. Rev. **46**,1002 (1934).
- [51] S. M. Girvin et T. Jach, Phys. Rev. B **29**, 5617 (1984).
- [52] S. M. Girvin, Phys. Rev. B **30**, 558 (1984).
- [53] H. Fukuyama, P. M. Platzman et P. W. Anderson, Phys. Rev. B **19**, 5211 (1979).
- [54] D. Levesque, J. J. Weis et A. H. MacDonald, Phys. Rev. B **30**, 1056 (1984).
- [55] A. H. MacDonald, Phys. Rev. B **30**, 3550 (1984).
- [56] J. M. Leinaas et J. Myrheim, Nuovo Cim. **39B**, 1 (1977) ; F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **48**, 1144 (1982) ; *ibid.* **49**, 957 (1982) ; D. P. Arovas, J. R. Schrieffer et F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **53**, 722 (1984) ;
- [57] F. D. Haldane, Phys. Rev. Lett. **51**, 605 (1983).



- [58] B. I. Halperin, Phys. Rev. Lett. **52**, 1583 (1984).
- [59] G. Dev, J. K. Jain, Phys. Rev. Lett. **69**, 2843 (1992).
- [60] V. J. Goldman, B. Su et J. K. Jain, Phys. Rev. Lett. **72**, 2065 (1994).
- [61] H. van Houten, C. W. J. Beenakker, J. G. Williamson, M. E. Broekaart, P. H. M. van Loosdrecht, B. J. van Wees, J. E. Mooij, C. T. Foxon et J. J. Harris, Europhys. Lett. **5**, 721 (1988); Phys. Rev. B **39**, 8556 (1989).
- [62] S. H. Simon et B. I. Halperin, Phys. Rev. B **48**, 17368 (1993); S. H. Simon dans [16].
- [63] A. Lopez et E. Fradkin, Phys. Rev. B **47**, 7080 (1993).
- [64] B. I. Halperin, P. A. Lee et N. Read, Phys. Rev. B **47**, 7312 (1993).
- [65] I. L. Aleiner et L. I. Glazman, Phys. Rev. B **52**, 11296 (1995).
- [66] M. M. Fogler et A. A. Koulakov, Phys. Rev. B **55**, 9326 (1997).
- [67] M. Abramowitz et I. Stegun, *Handbook of Mathematical functions*, neuvième édition, Dover Publications (1970).
- [68] L. Bonsall et A. A. Maradudin, Phys. Rev. B **15**, 1959 (1977).
- [69] P. K. Lam et S. M. Girvin, Phys. Rev. B **30**, 473 (1984); **31**, 613(E) (1985).
- [70] W. Pan, H. L. Stormer, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin et K. W. West, Phys. Rev. Lett. **88**, 176802 (2002).
- [71] J. M. Kosterlitz et D. J. Thouless, J. Phys. C **6**, 1181 (1973).
- [72] K. J. Strandburg, Rev. Mod. Phys. **60**, 161 (1988).
- [73] N. D. Mermin et H. Wagner, Phys. Rev. Lett. **17**, 1133 (1966).
- [74] F. Lindemann, Phys. Z. (Leipzig) **11**, 69 (1910).
- [75] R. Shankar et G. Murthy, Phys. Rev. Lett. **79**, 4437 (1997).
- [76] G. Murthy et R. Shankar, dans [16].
- [77] G. Murthy et R. Shankar, Phys. Rev. B **59**, 12260 (1999).
- [78] G. Murthy, Phys. Rev. B **60**, 13702 (1999).
- [79] R. Shankar, Phys. Rev. B **63**, 085322 (2001).
- [80] G. Murthy, Phys. Rev. B **64**, 195310 (2001).
- [81] G. Murthy et R. Shankar, Phys. Rev. B **65**, 245309 (2002).
- [82] N. Read, Semi. Sci. Tech. **9**, 1859 (1994).

- [83] V. Pasquier et F. D. M. Haldane, Nucl. Phys. B **516**, 719 (1998).
- [84] N. Read, Phys. Rev. B **58**, 16262 (1998).
- [85] A. Stern, B. I. Halperin, F. v. Oppen et S. H. Simon, Phys. Rev. B **59**, 12547 (1999).
- [86] B. I. Halperin et A. Stern, Phys. Rev. Lett. **80**, 5457 (1998); R. Shankar et G. Murthy, *ibid.* **80**, 5458; (1998); *ibid.* **79**, 4437 (1997).
- [87] G. D. Mahan, *Many-Particle Physics*, deuxième édition, Plenum Press (1993).
- [88] I. S. Gradshteyn et I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, cinquième édition, Academic Press (1994).
- [89] J. S. Xia, W. Pan, C. L. Vincente, E. D. Adams, N. S. Sullivan, H. L. Stormer, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin et K. W. West, cond-mat/0406724.
- [90] H. Jiang, R. L. Willett, H. L. Stormer, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer et K. W. West, Phys. Rev. Lett. **65**, 633 (1990); H. Jiang, H. L. Stormer, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer et K. W. West, Phys. Rev. B **44**, 8107 (1991).
- [91] M. M. Fogler, dans C. Berthier, L. P. Lévy et G. Martinez, eds., “*High Magnetic Fields - Applications in Condensed Matter Physics and Spectroscopy*”, Springer (2001).
- [92] R. L. Willett, J. P. Eisenstein, H. L. Stormer, D. C. Tsui, A. C. Gossard et J. H. English, Phys. Rev. Lett. **59**, 1776 (1987).
- [93] F. D. M. Haldane et E. H. Rezayi, Phys. Rev. Lett. **60**, 956 (1988); *ibid.* **60**, 1886 (1988).
- [94] B. I. Halperin, Helv. Phys. Acta **56**, 75 (1983).
- [95] G. Moore et N. Read, Nucl. Phys. B **360**, 362 (1991).
- [96] M. Greiter, X. G. Wen et F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **66**, 3205 (1991); Nucl. Phys. B **374**, 567 (1992).
- [97] V. W. Scarola, K. Park et J. K. Jain, Nature **406**, 863 (2000).
- [98] J. P. Eisenstein, R. L. Willett, H. L. Stormer, D. C. Tsui, A. C. Gossard et J. H. English, Phys. Rev. Lett. **61**, 997 (1988); J. P. Eisenstein, R. L. Willett, H. L. Stormer, L. N. Pfeiffer et K. W. West, Surf. Sci. **229**, 31 (1990).
- [99] W. Pan, H. L. Stormer, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin et K. W. West, Solid State Commun. **119**, 641 (2001).

- [100] T. Jungwirth, A. H. MacDonald, L. Smrcka et S. M. Girvin, *Phys. Rev. B* **60**, 15574 (1999).
- [101] T. D. Stanescu, I. Martin et P. Phillips, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1288 (2000).
- [102] W. Pan, R. R. Du, H. L. Stormer, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin et K. W. West, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 820 (1999); M. P. Lilly, K. B. Cooper, J. P. Eisenstein, L. N. Pfeiffer et K. W. West, *ibid.* **83**, 824 (1999).
- [103] R. Morf, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1505 (1998).
- [104] N. Read et E. Rezayi, *Phys. Rev. B* **59**, 8084 (1999).
- [105] R. M. Lewis, P. D. Ye, L. W. Engel, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer et K. W. West, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 136804 (2002).
- [106] G. Gervais, L. W. Engel, H. L. Stormer, D. C. Tsui, K. W. Baldwin, K. W. West et L. N. Pfeiffer, Preprint : cond-mat/0402169.
- [107] S. S. Mandal, M. R. Peterson et J. K. Jain, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 106403 (2003).
- [108] A. I. Larkin, *Zh. Éksp. Teor. Fiz.* **58**, 1466 (1970) [*Sov. Phys. JETP* **31**, 784 (1970)].
- [109] G. Grüner, *Rev. Mod. Phys.* **60**, 1129 (1988).
- [110] G. Blatter, M. V. Feigelman, V. B. Geshkenbein, A. I. Larkin et V. M. Vinokur, *Rev. Mod. Phys.* **66**, 1125 (1994).
- [111] Y. P. Chen, R. M. Lewis, L. W. Engel, D. C. Tsui, P. D. Ye et L. N. Pfeiffer, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 016801 (2003); R. M. Lewis, Y. P. Chen, L. W. Engel, D. C. Tsui, P. D. Ye, L. N. Pfeiffer, cond-mat/0307182.
- [112] R. Chitra, T. Giamarchi et P. Le Doussal, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 3827 (1998).
- [113] M. M. Fogler et D. A. Huse, *Phys. Rev. B* **62**, 7553 (2000).
- [114] R. Narevitch, G. Murthy et H. A. Fertig, *Phys. Rev. B* **64**, 245326 (2001).
- [115] R. Côté, C. Doiron, J. Bourassa et H. A. Fertig, *Phys. Rev. B* **68**, 155327 (2003).
- [116] N. Shibata et D. Yoshioka, *J. Phys. Soc. Jpn.* **72**, 664 (2003).
- [117] P. Béran et R. Morf, *Phys. Rev. B* **43**, 12654 (1991).

- [118] A. Wójs et J. J. Quinn, Phys. Rev. B **61**, 2846 (2000).
- [119] F. D. Haldane, Phys. Rev. Lett. **74**, 2090 (1995).
- [120] R. Morf, *communication privée*; E. H. Rezayi, *non-publié*, les résultats de diagonalisation exacte ont été rapportés dans la Ref. [121].
- [121] J. K. Jain, C.-C. Chang, G. S. Jeon et M. R. Peterson, Solid State Commun. **127**, 805 (2003).
- [122] A. Lopez et E. Fradkin, Phys. Rev. B **69**, 155322 (2004).
- [123] S.-Y. Lee, V. W. Scarola et J. K. Jain, Phys. Rev. Lett. **87**, 256803 (2001); Phys. Rev. B **66**, 085336 (2002).
- [124] F. Fischer, M. Grayson, E. Schuberth, D. Schuh, M. Bichler et G. Abstreiter, Physica E **22**, 108 (2004).
- [125] K. Park, N. Meskini et J. K. Jain, J. Phys. Cond. Mat. **11**, 7283 (1999).
- [126] R. Morf, N. d'Ambrumenil et S. Das Sarma, Phys. Rev. B **66**, 075408 (2002).
- [127] R. Morf et N. d'Ambrumenil, Phys. Rev. B **68**, 113309 (2003).
- [128] R. P. Feynman, Phys. Rev. **91**, 1291 (1953); *Statistical Mechanics*, Benjamin, Reading, Mass. (1972).
- [129] A. H. MacDonald et S. M. Girvin, Phys. Rev. B **33**, 4009 (1986).
- [130] R. B. Laughlin, Science **242**, 525 (1988).
- [131] C. Monney, M. O. Goerbig, P. Lederer et C. Morais Smith, *travail en cours*.
- [132] D. H. Lee et C. L. Kane, Phys. Rev. Lett. **64**, 1313 (1990).
- [133] S. L. Sondhi, A. Karlhede, S. A. Kivelson et E. H. Rezayi, Phys. Rev. B **47**, 16419 (1993).
- [134] S. E. Barrett, G. Dabbagh, L. N. Pfeiffer, K. W. West et R. Tycko, Phys. Rev. Lett. **74**, 5112 (1995).
- [135] R. Doretto, M. O. Goerbig, P. Lederer, A. O. Caldeira et C. Morais Smith, cond-mat/0408659.
- [136] K. Moon, H. Mori, K. Yang, S. M. Girvin, A. H. MacDonald, I. Zheng, D. Yoshioka et S.-C. Zhang, Phys. Rev. B **51**, 5138 (1995); S. M. Girvin et A. H. MacDonald, dans [3].



# Annexe A

## Eléments de matrice

### A.1 L'élément de matrice

$$\langle n, m | \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) | n', m' \rangle$$

Les éléments de matrice  $\langle n, m | \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) | n', m' \rangle$ , qui interviennent dans l'expression pour l'opérateur de densité électronique, se calculent à l'aide des équations (1.4) après avoir séparé la position de l'électron en position du centre de guidage et variable relative,  $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\eta}$ . Avec  $q \equiv q_x + iq_y$  et  $\bar{q} = q_x - iq_y$ ,<sup>1</sup> on trouve dans la jauge symétrique

$$\begin{aligned} \langle n, m | e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} | n', m' \rangle &= \langle m | e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}} | m' \rangle \otimes \langle n | e^{-i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\eta}} | n' \rangle \\ &= \langle m | e^{-\frac{i}{\sqrt{2}}(qb^\dagger + \bar{q}b)} | m' \rangle \otimes \langle n | e^{-\frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{q}a^\dagger + qa)} | n' \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

où  $l_B \equiv 1$ . Les deux éléments de matrice se simplifient avec la formule de Baker-Hausdorff  $\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B)\exp([A, B]/2)$ , pour le cas où  $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ . Le deuxième élément de matrice devient pour  $n \geq n'$

$$\begin{aligned} \langle n | e^{-i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\eta}} | n' \rangle &= \langle n | e^{-\frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{q}a^\dagger + qa)} | n' \rangle \\ &= e^{-|q|^2/4} \langle n | e^{-\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{q}a^\dagger} e^{-\frac{i}{\sqrt{2}}qa} | n' \rangle \\ &= e^{-|q|^2/4} \sum_j \langle n | e^{-\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{q}a^\dagger} | j \rangle \langle j | e^{-\frac{i}{\sqrt{2}}qa} | n' \rangle \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Nous utilisons cette convention uniquement dans cette annexe. Dans les autres chapitres,  $q$  désigne le module du vecteur  $\mathbf{q}$ ,  $q = |\mathbf{q}|$ .

$$\begin{aligned}
&= e^{-|q|^2/4} \sqrt{\frac{n!}{n!}} \left(\frac{-i\bar{q}}{\sqrt{2}}\right)^{n-n'} \sum_{j=0}^{n'} \frac{n!}{(n-j)!(n'-j)!j!} \left(-\frac{|q|^2}{2}\right)^{n'-j} \\
&= e^{-|q|^2/4} \sqrt{\frac{n!}{n!}} \left(\frac{-i\bar{q}}{\sqrt{2}}\right)^{n-n'} L_{n'}^{n-n'} \left(\frac{|q|^2}{2}\right), \tag{A.2}
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé

$$\langle n | e^{-\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{q}a^\dagger} | j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{pour } j > n \\ \sqrt{\frac{n!}{j!}} \frac{1}{(n-j)!} \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{q}\right)^{n-j} & \text{pour } j \leq n \end{cases}$$

dans la troisième ligne et la définition des polynômes de Laguerre [88],

$$L_{n'}^{n-n'}(x) = \sum_{m=0}^{n'} \frac{n!}{(n'-m)!(n-n'+m)!} \frac{(-x)^m}{m!}.$$

De même, nous trouvons pour  $m \geq m'$

$$\begin{aligned}
\langle m | e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}} | m' \rangle &= \langle m | e^{-\frac{i}{\sqrt{2}}(qb^\dagger + \bar{q}b)} | m' \rangle \\
&= e^{-|q|^2/4} \sqrt{\frac{m!}{m!}} \left(\frac{-iq}{\sqrt{2}}\right)^{m-m'} L_{m'}^{m-m'} \left(\frac{|q|^2}{2}\right). \tag{A.3}
\end{aligned}$$

Avec la définition des fonctions

$$\mathcal{G}_{n,n'}(q) \equiv \sqrt{\frac{n!}{n!}} \left(\frac{-iq}{\sqrt{2}}\right)^{n-n'} L_{n'}^{n-n'} \left(\frac{|q|^2}{2}\right),$$

on peut également écrire, sans les conditions  $n \geq n'$  et  $m \geq m'$ ,

$$\langle n | e^{-i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\eta}} | n' \rangle = [\Theta(n-n')\mathcal{G}_{n,n'}(\bar{q}) + \Theta(n'-n-1)\mathcal{G}_{n',n}(-q)] e^{-|q|^2/4} \tag{A.4}$$

et

$$\langle m | e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}} | m' \rangle = [\Theta(m-m')\mathcal{G}_{m,m'}(q) + \Theta(m'-m-1)\mathcal{G}_{m',m}(-\bar{q})] e^{-|q|^2/4}. \tag{A.5}$$

Pour le cas  $n = n'$ , on trouve dans (A.4) le facteur de forme du  $n$ -ième niveau de Landau

$$F_n(|q|) \equiv \langle n | e^{-i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\eta}} | n \rangle = L_n \left(\frac{|q|^2}{2}\right) e^{-|q|^2/4}. \tag{A.6}$$

## A.2 Eléments de matrice dans la base de FC

A l'aide de (2.16), on trouve pour les opérateurs projetés  $\bar{\rho}(\mathbf{q})$  et  $\bar{\chi}(\mathbf{q})$ ,

$$\begin{aligned}\bar{\rho}(\mathbf{q}) &= \sum_j e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}_j^{(e)}} = \sum_j e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}_j^{(CF)}} e^{i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\eta}_j^{(CF)c}}, \\ \bar{\chi}(\mathbf{q}) &= \sum_j e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}_j^{(v)}} = \sum_j e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}_j^{(CF)}} e^{i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\eta}_j^{(CF)}/c},\end{aligned}$$

ce qui fournit l'expression de la combinaison préférentielle en deuxième quantification,

$$\begin{aligned}\bar{\rho}^{CF}(\mathbf{q}) &= \bar{\rho}(\mathbf{q}) - c^2 \bar{\chi}(\mathbf{q}) \\ &= \sum_{m,m';j,j'} \langle m | e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}^{CF}} | m' \rangle \\ &\quad \times \langle j | e^{i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\eta}^{(CF)c}} - c^2 \tilde{f}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\eta}^{(CF)}/c} | j' \rangle c_{j,m}^\dagger c_{j',m'},\end{aligned}\quad (\text{A.7})$$

où un facteur de forme du vortex  $\tilde{f}(\mathbf{q}) = \exp[-|q|^2 l_B^{*2}/8ps(2ps+1)]$  a été introduit pour tenir compte du fait que la longueur magnétique du vortex de charge  $c^2$  ne coïncide pas avec celle de l'électron [41].

Pour trouver les éléments de matrice dans l'expression (A.7), nous procédons de la même manière que pour la base électronique en représentant les variables (2.15) par des opérateurs d'échelle [voir Eq. (1.4)],

$$\begin{aligned}\eta_x^{(CF)} &= \frac{l_B^*}{\sqrt{2}}(a^\dagger + a), & \eta_y^{(CF)} &= \frac{l_B^*}{i\sqrt{2}}(a^\dagger - a), \\ X^{(CF)} &= \frac{l_B^*}{\sqrt{2}}(b^\dagger + b), & Y^{(CF)} &= \frac{il_B^*}{\sqrt{2}}(b^\dagger - b).\end{aligned}\quad (\text{A.8})$$

On trouve donc pour  $m \geq m'$  [voir Eqs. (A.2) et (A.3)]

$$\begin{aligned}\langle m | e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}^{(CF)}} | m' \rangle &= \langle m | e^{-\frac{il_B^*}{\sqrt{2}}(qb^\dagger + \bar{q}b)} | m' \rangle \\ &= e^{-|ql_B^*|^2/4} \sqrt{\frac{m!}{m'}} \left( \frac{-iq l_B^*}{\sqrt{2}} \right)^{m-m'} L_{m'}^{m-m'} \left( \frac{|ql_B^*|^2}{2} \right)\end{aligned}\quad (\text{A.9})$$

et pour  $j \geq j'$

$$\langle j | \bar{\rho}^p(\mathbf{q}) | j' \rangle \equiv \langle j | e^{i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\eta}^{(CF)c}} - c^2 \tilde{f}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\eta}^{(CF)}/c} | j' \rangle$$



$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{j'!}{j!}} \left( \frac{i\bar{q}l_B^*c}{\sqrt{2}} \right)^{j-j'} e^{-|ql_B^*|^2c^2/4} \\
&\quad \times \left[ L_{j'}^{j-j'} \left( \frac{|ql_B^*c|^2}{2} \right) - e^{2(1-j+j')} e^{-|q|^2/2c^2} L_{j'}^{j-j'} \left( \frac{|ql_B^*|^2}{2c^2} \right) \right].
\end{aligned} \tag{A.10}$$

# Annexe B

## Détails de l'approche diagrammatique

Une relation utile est la somme sur les éléments de matrice d'un opérateur de densité projeté,

$$\text{Tr } \bar{\rho}(\mathbf{q}) = \sum_m \langle m | e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}^{CF}} | m \rangle = n_B^* \delta_{\mathbf{q},0}. \quad (\text{B.1})$$

Cette équation se déduit à partir des relations de commutation (2.35) et du fait que la trace d'un commutateur s'annule,

$$\text{Tr } [\bar{\rho}(\mathbf{q}_1), \bar{\rho}(\mathbf{q}_2)] = 0 = 2i \sin \left( \frac{q_{2,x}q_{1,y} - q_{2,y}q_{1,x}}{2} l_B^{*2} \right) \text{Tr } \bar{\rho}(\mathbf{q}),$$

avec  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2$ . La trace de  $\bar{\rho}(\mathbf{q})$  doit donc s'annuler sauf si  $\mathbf{q} = 0$  pour que l'argument du sinus s'annule. Dans le cas  $\mathbf{q} = 0$ , la trace donne le nombre d'état par niveau,  $\sum_m = n_B^* A$ , et avec  $\delta_{\mathbf{q},\mathbf{q}'} = (2\pi)^2 A \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}')$ , on trouve l'équation (B.1).

### B.1 Niveaux de FC - le hamiltonien "libre"

Le hamiltonien libre de FC est donné par le hamiltonien dans l'approximation de Hartree-Fock (2.19), qui devient à l'aide de l'équation (2.18)

$$\hat{H}^0 = \frac{1}{2} \sum_{\nu_1, \dots, \nu_4} v_{\nu_1, \dots, \nu_4} \left[ \delta_{\nu_1, \nu_3} \Theta(p-1-n_1) c_{\nu_2}^\dagger c_{\nu_4} + \delta_{\nu_2, \nu_4} \Theta(p-1-n_2) c_{\nu_1}^\dagger c_{\nu_3} - \delta_{\nu_1, \nu_4} \Theta(p-1-n_1) c_{\nu_2}^\dagger c_{\nu_3} - \delta_{\nu_2, \nu_3} \Theta(p-1-n_2) c_{\nu_1}^\dagger c_{\nu_4} \right].$$

Les deux premiers termes (de Hartree) contiennent des sommes  $\sum_m \langle m | e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}^{CF}} | m \rangle = n_B^* \delta_{\mathbf{q},\mathbf{q}'}$  [Eq. (B.1)]. Ils ne contribuent pas parce que le terme  $\mathbf{q} = 0$  est omis de la somme sur les vecteurs d'onde si l'on tient compte des ions dans le cristal sous-jacent et donc de la neutralité de charge globale. Les deux derniers termes (de Fock) impliquent des sommes

$$\sum_{m,m';m''} \langle m | e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}^{CF}} | m'' \rangle \langle m'' | e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}^{CF}} | m' \rangle = \sum_{m,m'} \langle m | m' \rangle = n_B^* A \delta_{m,m'},$$

et l'on trouve donc

$$\hat{H}^0 = 2 \sum_{\mathbf{q}} v_0(q) \sum_{n=0}^{p-1} \sum_{m;n',n''} \langle n | \bar{\rho}^p(-\mathbf{q}) | n' \rangle \langle n'' | \bar{\rho}^p(\mathbf{q}) | n \rangle c_{n',m}^\dagger c_{n'',m}.$$

A l'aide des éléments de matrice (A.10), on trouve que

$$\langle n | \bar{\rho}^p(-\mathbf{q}) | n' \rangle \langle n'' | \bar{\rho}^p(\mathbf{q}) | n \rangle \propto \bar{q}^{n'-n''} f(|\mathbf{q}|),$$

où la fonction  $f(|\mathbf{q}|)$  ne dépend que du module du vecteur d'onde, et  $\bar{q} = |\mathbf{q}| e^{-i\phi}$ . Dans le cas d'un potentiel isotrope, tous les termes s'annulent donc dans l'intégration sur l'angle  $\phi$  du vecteur d'onde, sauf celui avec  $n' = n''$ . On trouve finalement

$$\hat{H}^0 = \sum_{n,m} \varepsilon_n c_{n,m}^\dagger c_{n,m}, \quad (\text{B.2})$$

avec

$$\varepsilon_n = 2 \sum_{\mathbf{q}} v_0(q) \sum_{n'=0}^{p-1} |\langle n' | \bar{\rho}^p(\mathbf{q}) | n \rangle|^2. \quad (\text{B.3})$$

## B.2 Calcul de la fonction de Green de l'opérateur de densité projeté

La fonction de Green (retardée) des opérateurs de densité projetés est donnée par [Eq. (2.24)]

$$\begin{aligned} D(\mathbf{q}, \mathbf{q}', t) &\equiv -i\Theta(t) \left\langle \left[ \bar{\rho}(\mathbf{q}, t), \bar{\rho}^\dagger(\mathbf{q}', t=0) \right] \right\rangle \\ &= \sum_{n,n'} \left\{ e^{-in\omega^*t} \left[ D_{n,n'}^{--}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') + D_{n,n'}^{+-}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}') \right] \right. \\ &\quad \left. + e^{in\omega^*t} \left[ D_{n,n'}^{+-}(-\mathbf{q}, -\mathbf{q}') + D_{n,n'}^{++}(-\mathbf{q}, \mathbf{q}') \right] \right\}, \quad (\text{B.4}) \end{aligned}$$

où l'on a mis  $\omega^* = \omega^*(s, p)$  pour simplifier la notation. Les opérateurs de densité  $\bar{\rho}(\mathbf{q})$  sont réécrits comme une somme des modes “plasmoniques”,  $\bar{\rho}(\mathbf{q}) = \sum_{n>0} [\rho_n(\mathbf{q}) + \rho_n^\dagger(-\mathbf{q})]$ , dont les fonctions de Green (retardées) sont données par

$$\begin{aligned} D_{n,n'}^{-+}(\mathbf{q}, \mathbf{q}', t) &= -i\Theta(t) \langle [\rho_n(\mathbf{q}, t), \rho_{n'}^\dagger(\mathbf{q}', t=0)] \rangle, \\ D_{n,n'}^{+-}(\mathbf{q}, \mathbf{q}', t) &= -i\Theta(t) \langle [\rho_n^\dagger(\mathbf{q}, t), \rho_{n'}(\mathbf{q}', t=0)] \rangle, \\ D_{n,n'}^{--}(\mathbf{q}, \mathbf{q}', t) &= -i\Theta(t) \langle [\rho_n(\mathbf{q}, t), \rho_{n'}(\mathbf{q}', t=0)] \rangle, \\ D_{n,n'}^{++}(\mathbf{q}, \mathbf{q}', t) &= -i\Theta(t) \langle [\rho_n^\dagger(\mathbf{q}, t), \rho_{n'}^\dagger(\mathbf{q}', t=0)] \rangle. \end{aligned}$$

Ces fonctions de Green sont reliées par les deux relations de symétrie

$$D_{n,n'}^{+-}(\mathbf{q}, \mathbf{q}', t) = -D_{n',n}^{-+}(\mathbf{q}', \mathbf{q}, -t), \quad D_{n,n'}^{++}(\mathbf{q}, \mathbf{q}', t) = [D_{n',n}^{--}(\mathbf{q}', \mathbf{q}, -t)]^* \quad (\text{B.5})$$

et se calculent à l'aide des équations de mouvement pour les modes plasmoniques et de la forme du hamiltonien libre (2.19),

$$\begin{aligned} i \frac{d\rho_n(\mathbf{q})}{dt} &= [\rho_n(\mathbf{q}), \hat{H}^0] \\ &= \sum_{n',n'';m,m',m''} \rho_{n',n'+n}^{m,m'}(\mathbf{q}) \varepsilon_{n''} [c_{n',m}^\dagger c_{n'+n,m'}, c_{n'',m''}^\dagger c_{n'',m''}] \\ &= \sum_{n';m,m'} \rho_{n',n'+n}^{m,m'}(\mathbf{q}) (\varepsilon_{n'+n} - \varepsilon_{n'}) c_{n',m}^\dagger c_{n'+n,m'}, \end{aligned}$$

où  $\rho_{n',n'+n}^{m,m'}(\mathbf{q}) \equiv \langle m | e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}_{CF}} | m' \rangle \langle n' | \bar{\rho}^p(\mathbf{q}) | n' + n \rangle$ . A cause de la linéarité approximative des niveaux de FCs [Eq. (2.21)], cela donne lieu à l'équation différentielle

$$i \frac{d\rho_n(\mathbf{q})}{dt} = n\omega^* \rho_n(\mathbf{q}),$$

ce qui s'intègre facilement,

$$\rho_n(\mathbf{q}, t) = e^{-in\omega^*t} \rho_n(\mathbf{q}, t=0). \quad (\text{B.6})$$

On trouve donc pour l'opérateur de densité projeté

$$\bar{\rho}(\mathbf{q}, t) = \sum_{n>0} [e^{-in\omega^*t} \rho_n(\mathbf{q}, t=0) + e^{in\omega^*t} \rho_n^\dagger(-\mathbf{q}, t=0)]. \quad (\text{B.7})$$

A l'aide des équations (2.18) et (B.1), on déduit les fonctions de Green des modes plasmoniques

$$\begin{aligned}
D_{n,n'}^{-+}(\mathbf{q}, \mathbf{q}', t) &= -i\Theta(t)\delta_{n,n'} \sum_{m,m'} \langle m | e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}^{CF}} | m' \rangle \langle m' | e^{-i\mathbf{q}'\cdot\mathbf{R}^{CF}} | m \rangle \\
&\quad \times \sum_{n''=p-n}^{p-1} |\langle n'' + n | \bar{\rho}^p(\mathbf{q}) | n'' \rangle|^2 \\
&= -i\Theta(t)\delta_{n,n'} \delta_{\mathbf{q},\mathbf{q}'} \mathcal{F}_n^p(q),
\end{aligned} \tag{B.8}$$

où l'on a défini  $\mathcal{F}_n^p(q) = n_B^* \sum_{n''=p-n}^{p-1} |\langle n'' + n | \bar{\rho}^p(\mathbf{q}) | n'' \rangle|^2$ .

De façon similaire, on trouve  $D_{n,n'}^{++}(\mathbf{q}, \mathbf{q}', t) = 0$ , et la fonction de Green (B.4) s'écrit

$$D(\mathbf{q}, \mathbf{q}', t) = -i\Theta(t)\delta_{\mathbf{q},\mathbf{q}'} \sum_{n>0} \mathcal{F}_n^p(q) \left( e^{-in\omega^*t} - e^{in\omega^*t} \right) \tag{B.9}$$

et dans l'espace de Fourier

$$\begin{aligned}
D(\mathbf{q}, \mathbf{q}', \omega) &= \delta_{\mathbf{q},\mathbf{q}'} \sum_{n>0} \mathcal{F}_n^p(q) \left( \frac{1}{\omega - n\omega^* + i0^+} - \frac{1}{\omega + n\omega^* + i0^+} \right) \\
&= 2\delta_{\mathbf{q},\mathbf{q}'} \sum_{n>0} \mathcal{F}_n^p(q) \frac{n\omega^*}{\omega^2 - n^2\omega^{*2}}.
\end{aligned} \tag{B.10}$$

## Annexe C

# Hamiltonien électronique dans l'approximation de Hartree-Fock

Pour déduire le hamiltonien de Hartree-Fock (3.1), je propose d'utiliser la base de fonctions d'onde dans la jauge de Landau,  $\mathbf{A}_L = (-y, 0)B$ , pour représenter les opérateurs de densité projeté comme

$$\bar{\rho}(\mathbf{q}) = \sum_{y_0} e^{-iq_y y_0} e_{y_0+q_x/2}^\dagger e_{y_0-q_x/2},$$

où les indices  $n$ , désignant le niveau de Landau, ont été omis des opérateurs électroniques  $e_{y_0}^\dagger$  et  $e_{y_0}$  pour une meilleure lisibilité. Dans la jauge de Landau, les états à une particule  $|n, y_0\rangle$  sont localisés autour de  $y_0$  dans la direction  $y$  et étendus dans la direction  $x$ .

En termes d'opérateurs électroniques, le hamiltonien (2.7) s'écrit donc

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} v_n(\mathbf{q}) \sum_{y_0, y'_0} e^{iq_y(y_0-y'_0)} e_{y_0-q_x/2}^\dagger e_{y_0+q_x/2} e_{y'_0+q_x/2}^\dagger e_{y'_0-q_x/2}, \quad (\text{C.1})$$

Dans l'approximation de Hartree-Fock, ce hamiltonien devient

$$\begin{aligned} \hat{H}_{HF} &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} v_n(\mathbf{q}) \sum_{y_0, y'_0} e^{iq_y(y_0-y'_0)} \left[ \langle e_{y_0-q_x/2}^\dagger e_{y_0+q_x/2} \rangle e_{y'_0+q_x/2}^\dagger e_{y'_0-q_x/2} \right. \\ &\quad \left. - \langle e_{y_0-q_x/2}^\dagger e_{y'_0-q_x/2} \rangle e_{y'_0+q_x/2}^\dagger e_{y_0+q_x/2} \right] \\ &= \hat{H}_H - \hat{H}_F. \end{aligned}$$

Le terme de Hartree s'écrit directement en termes d'opérateur de densité

$$\hat{H}_H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} u_n^H(\mathbf{q}) \langle \bar{\rho}(-\mathbf{q}) \rangle \bar{\rho}(\mathbf{q}),$$

avec le potentiel de Hartree  $u_n^H(\mathbf{q}) = v_n(\mathbf{q})$ . La moyenne  $\langle \bar{\rho}(\mathbf{q}) \rangle$  est proportionnelle au paramètre d'ordre de la théorie au niveau de l'approximation de champ moyen, comme il a été expliqué dans le texte. Afin d'écrire le terme de Fock,  $\hat{H}_F$  de la même façon, on peut introduire une transformation de variables,

$$p_x = y_0 - y'_0, \quad R = \frac{y_0 + y'_0}{2}$$

et ensuite

$$y_{\pm} = R \pm \frac{q_x}{2}, \quad \frac{1}{N_B} \sum_{y_+, p_y} e^{ip_y(y_+ - y_- - q_x)} = 1,$$

où  $N_B = n_B A$  est le nombre d'états par niveau de Landau. On obtient donc

$$\begin{aligned} \hat{H}_F &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} v_n(\mathbf{q}) \sum_{y_0, y'_0} e^{iq_y(y_0 - y'_0)} \langle e_{y_0 - q_x/2}^{\dagger} e_{y'_0 - q_x/2} \rangle e_{y'_0 + q_x/2}^{\dagger} e_{y_0 + q_x/2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} v_n(\mathbf{q}) \sum_{R, p_x} e^{iq_y p_x} \langle e_{R - q_x/2 + p_x/2}^{\dagger} e_{R - q_x/2 - p_x/2} \rangle e_{R + q_x/2 - p_x/2}^{\dagger} e_{R + q_x/2 + p_x/2} \\ &= \frac{1}{2N_B} \sum_{\mathbf{q}} v_n(\mathbf{q}) \sum_{p_y, p_x} e^{i(q_y p_x - q_x p_y)} \\ &\quad \times \sum_{y_+, y_-} e^{ip_y(y_+ - y_-)} \langle e_{y_- + p_x/2}^{\dagger} e_{y_- - p_x/2} \rangle e_{y_+ - p_x/2}^{\dagger} e_{y_+ + p_x/2}. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\hat{H}_F = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} u_n^F(\mathbf{p}) \langle \bar{\rho}(-\mathbf{p}) \rangle \bar{\rho}(\mathbf{p}),$$

et l'on trouve que le potentiel de Fock est la transformée de Fourier, accompagnée d'un échange entre les axes  $x$  et  $y$

$$u_n^F(\mathbf{p}) = \frac{1}{N_B} \sum_{\mathbf{q}} v_n(\mathbf{q}) e^{-i(p_x q_y - p_y q_x)}.$$

Les potentiels de Hartree et de Fock sont reliés par une transformation de Fourier dans le cas d'une interaction isotrope, comme cela a déjà été constaté

dans les travaux de Fogler *et al.* [17] et de Moessner et Chalker [18]. Si elle est anisotrope, il faut pourtant tenir compte de cette rotation de  $\pi/2$  du référentiel.<sup>1</sup> Le hamiltonien de Hartree-Fock peut donc s'écrire uniquement en termes de paramètre d'ordre et d'opérateur de densité,

$$\hat{H}_{HF} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} u_n^{HF}(\mathbf{q}) \langle \bar{\rho}(-\mathbf{q}) \rangle \bar{\rho}(\mathbf{q}), \quad (\text{C.2})$$

avec le potentiel effectif de Hartree-Fock

$$u_n^{HF}(\mathbf{q}) = u_n^H(\mathbf{q}) - u_n^F(\mathbf{q}) = v_n(\mathbf{q}) - \frac{1}{N_B} \sum_{\mathbf{p}} v_n(\mathbf{p}) e^{i(p_x q_y - p_y q_x)}. \quad (\text{C.3})$$

Pour  $n \rightarrow 0$ , le potentiel de Fock peut être approché de la même façon que le potentiel effectif dans l'espace réel (2.8) par

$$u_n^F(q) \simeq \frac{4e^2}{\epsilon \pi^2 n_B q} \text{Re} \left[ K \left( \frac{1 - \sqrt{1 - 4(2n+1)/q^2}}{2} \right) \right]^2 \quad (\text{C.4})$$

En revanche, il se calcule de façon précise pour  $n = 1, 2$  et  $3$ , les cas analysés dans le texte,

$$\begin{aligned} u_{n=1}^F(q) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^2}{\epsilon n_B} \frac{e^{-q^2/4}}{8} \left[ (6 - 2q^2 + q^4) I_0 \left( \frac{q^2}{4} \right) - q^4 I_1 \left( \frac{q^2}{4} \right) \right], \\ u_{n=2}^F(q) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^2}{\epsilon n_B} \frac{e^{-q^2/4}}{128} \left[ (82 - 52q^2 + 44q^4 - 10q^6 + q^8) I_0 \left( \frac{q^2}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. - q^4 (30 - 8q^2 + q^4) I_1 \left( \frac{q^2}{4} \right) \right], \\ u_{n=3}^F(q) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^2}{\epsilon n_B} \frac{e^{-q^2/4}}{4608} \left[ (2646 - 2430q^2 + 2889q^4 \right. \\ &\quad \left. - 1236q^6 + 270q^8 - 26q^{10} + q^{12}) I_0 \left( \frac{q^2}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. - q^4 (1539 - 828q^2 + 224q^4 - 24q^6 + q^8) I_1 \left( \frac{q^2}{4} \right) \right], \quad (\text{C.5}) \end{aligned}$$

avec les fonctions de Bessel modifiées  $I_0(x)$ .

---

<sup>1</sup>L'interaction entre électrons restreints à un seul niveau devient par exemple anisotrope dans des gaz d'électrons d'une largeur finie en présence d'un champ magnétique dans le plan [100, 101].