



HAL
open science

Endomorphismes de complexes determines par leurs homologies

Intan Muchtadi-Alamsyah

► **To cite this version:**

Intan Muchtadi-Alamsyah. Endomorphismes de complexes determines par leurs homologies. Mathématiques [math]. Université de Picardie Jules Verne, 2004. Français. NNT : . tel-00006933

HAL Id: tel-00006933

<https://theses.hal.science/tel-00006933>

Submitted on 21 Sep 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE PICARDIE JULES VERNE
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE

THÈSE

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PICARDIE JULES VERNE
Spécialité : Mathématiques

ENDOMORPHISMES DE COMPLEXES DÉTERMINÉS PAR LEURS HOMOLOGIES

présentée et soutenue publiquement le 9 avril 2004
par

Intan Detiena MUCHTADI-ALAMSYAH

Laboratoire Amiénois de Mathématiques Fondamentaux et Appliqués
CNRS UMR 6140

Jury

M. Serge BOUC	
M. Bernhard KELLER	<i>Rapporteur</i>
M. Steffen KÖNIG	<i>Rapporteur</i>
M. André LEROY	
M. François ZARA	
M. Alexander ZIMMERMANN	<i>Directeur</i>

Remerciements

Je voudrais, tout d'abord, exprimer mes reconnaissances à Alexander Zimmermann. Il m'a accordé sa confiance depuis le début de mon DEA, puis il m'a soutenu en toute situation. Je dois beaucoup à ses précieux conseils et sa disponibilité tout au long de ce travail.

Je tiens aussi à exprimer toute ma gratitude envers Steffen König et Bernhard Keller, les rapporteurs de cette thèse, pour leurs lectures attentives, leurs conseils et leurs remarques détaillés. Mes remerciements vont également à Serge Bouc, François Zara et André Leroy, d'avoir accepté de siéger à mon jury de thèse.

Je ne saurais oublier de remercier tous les membres de LAMFA pour leur accueil et leur soutien, en particulier mes collègues de bureaux, Béatrice, David, Claire, Vincent, Maryem et les ex-doctorants Eddy Goddelle et Karine Sorlin, et aussi Xiuping Su.

Je termine en remerciant les personnes de mon entourage, mes parents pour leurs soutiens sans faille et tout spécialement à Andry et Sandra.

Abstract/Résumé

Abstract

From Rickard's work, we know that two rings are derived equivalent if there is a tilting complex, constructed from projective modules over the first ring such that the second ring is the endomorphism ring of this tilting complex.

In this thesis I describe, under some conditions, the endomorphism ring of n -term complexes via the endomorphism ring of some more elementary structures, the homologies of the complexes.

The case of 2-term tilting complexes over Gorenstein order with torsion free homologies has been done by S.König and A.Zimmermann.

Résumé

D'après le travail de Rickard, nous savons que deux anneaux possèdent la même catégorie dérivée s'il existe un complexe basculant, construit à partir de modules projectifs sur le premier anneau de telle sorte que le deuxième anneau soit l'anneau des endomorphismes de ce complexe basculant.

Dans cette thèse je décris, sous certaines conditions, l'anneau des endomorphismes de complexes à n termes à partir de l'anneau des endomorphismes d'une structure plus élémentaire, les homologies des complexes.

Le cas de complexes basculants à 2 termes sur un ordre de Gorenstein tel que les homologies sont sans torsion a été fait par S.König et A.Zimmermann.

Table des matières

Abstract/Résumé	1
Introduction	5
1 Rappels et Notations	11
1.1 Equivalences dérivées	11
1.1.1 Complexes	12
1.1.2 Catégories dérivées	15
1.1.3 Théorème de Rickard	22
1.2 Produits fibrés et sommes amalgamées	24
1.3 Ordres et Réseaux	31
1.3.1 Ordres de Gorenstein et ordres symétrique	32
1.3.2 Catégorie stable de modules sur un ordre de Gorenstein	36
1.3.3 Complexes basculants de modules sur un ordre	39
2 Complexes à deux termes	43
2.1 Le calcul de $End_{D^b(\Lambda)}(T)$	43
2.2 Un produit fibré plus explicite	60
2.3 Le cas où Λ est un ordre symétrique	64
3 Complexes à n termes	71
3.1 Le calcul de $End_{D^b(\Lambda)}(T)$	75
3.2 Des produits fibrés plus explicites	93
3.3 La structure d'anneau de $End_{D^b(\Lambda)}(T)$	100
3.4 Le cas où Λ est un ordre de Gorenstein	101
3.5 Le cas où Λ est un ordre symétrique	103
4 Exemples	109

A	Morphismes dans la catégorie dérivée par une suite spectrale	121
A.1	Complexes à deux termes	121
A.2	Complexes à trois termes	122
A.2.1	Déterminer E_2^{pq}	123
A.2.2	Identification de E_3^{pq}	130
	Bibliographie	133
	Index	135

Introduction

En 1980, S. Brenner et M. Butler [2] ont découvert des similitudes entre les représentations des algèbres qui utilisent les carquois d’Auslander-Reiten, qu’ils ont alors appelé “tiltings”, c’est-à-dire “bascullements” [8]. Plus tard, dans sa thèse d’habilitation, D. Happel a interprété ces basculements comme des équivalences entre les catégories dérivées $D^b(\Lambda)$ et $D^b(\Gamma)$ de modules sur les algèbres Λ et Γ [6].

C’était la première fois que les catégories dérivées étaient utilisées dans le contexte de représentation des algèbres. Motivés par ce développement, J. Rickard [16] et B. Keller [7] ont, dans leurs thèses respectives, donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux algèbres possèdent des catégories dérivées équivalentes.

Le critère de Rickard est : les catégories dérivées $D^b(\Lambda)$ et $D^b(\Gamma)$ sont équivalentes en tant que catégories triangulées si et seulement si il existe un objet T dans $D^b(\Lambda)$, nommé complexe basculant, vérifiant des propriétés semblables aux propriétés d’un module de Morita, et tel que Γ soit isomorphe à l’anneau des endomorphismes de T .

Déterminer à priori l’anneau des endomorphismes d’un complexe basculant sur un anneau Λ donné est difficile. Il n’existe que très peu de cas où l’on connaît des Γ possibles, avec $D^b(\Gamma) \cong D^b(\Lambda)$ pour un Λ donné.

Il est donc souhaitable que l’on puisse, pour certaines classes d’algèbres qui interviennent dans des applications spécifiques, caractériser les Γ possibles par des moyens plus simples que la classification des complexes basculants et calculer leurs anneaux des endomorphismes à posteriori.

Une possibilité serait de restreindre le problème au calcul de l’anneau des endomorphismes des homologies des complexes. L’homologie étant un module, son anneau des endomorphismes se détermine beaucoup plus facilement.

Ceci est le but de cette thèse. Nous allons donner des critères simples pour que l’anneau des endomorphismes d’un complexe soit un produit fibré

des anneaux des endomorphismes de ses homologies sur certaines algèbres.

Ceci est intéressant surtout pour une classe d'algèbres spécifiques : les ordres classiques. Ces algèbres interviennent en théorie de nombres pour l'étude des modules Galoisien et aux représentations des groupes finis comme anneaux de groupes sur un anneau de Dedekind R .

Un ordre classique Λ sur un anneau de Dedekind R est une R -algèbre projective de type fini comme R -module, et si K est le corps de fractions de R , alors $A = K \otimes_R \Lambda$ est une K -algèbre semisimple. Donc, Λ se plonge dans un produit fini d'anneaux de matrices sur des corps (éventuellement non commutatifs) contenant K .

L'image de Λ dans A est donc donnée par des idéaux fractionnaires dans chaque composantes de A et par des congruences linéaires dans un anneau de R -torsion entre ces composantes. Ces congruences peuvent être visualisées comme des produits fibrés itérés par une méthode bien connue [5]. Notre description s'inscrit dans cette philosophie.

S.König et A.Zimmermann dans [12] ont utilisé cette approche pour un complexe basculant de longueur 2 sur un ordre de Gorenstein Λ sur un anneau de Dedekind local complet.

Un R -ordre est **de Gorenstein** si $Ext_{\Lambda}^1(Y, \Lambda) = 0$ pour tout Λ -module Y projectif de type fini en tant que R -module. Le résultat [12] détermine l'anneau des endomorphismes d'un complexe basculant T en tant que produit fibré des anneaux des endomorphismes des homologies de T sur l'anneau des endomorphismes de l'homologie dans la catégorie stable. Ce résultat utilise le fait que l'homologie de T est sans R -torsion.

Klaus Lux a posé la question suivante : Existe-il une généralisation du résultat de S.König et A.Zimmermann [12] pour un complexe à n termes ? Dans cette thèse, nous présentons cette généralisation pour un complexe T de longueur n sur une algèbre qui n'est pas nécessairement un ordre de Gorenstein (Théorème 3.3).

Au lieu de considérer cette hypothèse, nous supposons quelques hypothèses plus faibles sur les extensions entre les homologies et les modules qui com-

posent le complexe. Nous utilisons également des complexes T^i qui sont en fait les troncatures $\tau_{\geq i}T$.

La méthode pour obtenir ce résultat principal repose sur la construction de diagrammes commutatifs variés qui donnent lieu à des produits fibrés.

Pour $n = 2$, nous trouvons un résultat analogue à celui de König et Zimmermann, mais avec un complexe et une algèbre plus généraux et l'homologie n'est pas forcément sans R -torsion. Contrairement au Théorème de König et Zimmermann, l'application $\psi^i : \text{End}_{D^b(\Lambda)}(T^i) \rightarrow \text{End}_{\Lambda}(H^{i+1}T)$ n'est pas surjective en général, comme le montre l'Exemple 4.4 du chapitre 4.

En effet, l'image de ψ^i , que nous notons par A^i , est formée par les morphismes dans $\text{End}_{\Lambda}(H^{i+1}T)$ qui induisent des morphismes dans $\text{End}_{D^b(\Lambda)}(T^i)$. Ces images A^i forment un anneau et par conséquent déterminent la structure d'anneau de $\text{End}_{D^b(\Lambda)}(T^i)$, et donc la structure d'anneau de $\text{End}_{D^b(\Lambda)}(T)$.

Le cas où l'algèbre Λ est un ordre symétrique et T est de longueur 2 est traité séparément, car, même si nous ne supposons pas que l'homologie est sans R -torsion, nous pouvons la remplacer par sa partie sans R -torsion. Pour cela, nous ajoutons l'hypothèse que T est un complexe basculant et nous utilisons le résultat de Zimmermann sur une algèbre qui possède une catégorie dérivée équivalente à celle d'un ordre symétrique (voir [28]).

Pour des complexes à n termes sur un ordre symétrique, si nous ajoutons l'hypothèse que les homologies au milieu sont de R -torsion, l'anneau des endomorphismes du complexe basculant T est le produit fibré de A^0 et de la partie sans torsion de l'anneau des endomorphismes de la plus grande homologie, $\text{End}_{\Lambda}(H^n T)/\text{torsion}$ qui est isomorphe à $\text{End}_{\Lambda}(H^n T/\text{torsion})$ (Théorème 3.26).

Avec des hypothèses et une démonstration analogues à celles du théorème principal (Théorème 3.3), nous pouvons aussi déterminer $\text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(X, Y)$ pour deux complexes X et Y de longueur n (voir Théorème 3.15).

Pendant la dernière phase de la rédaction de cette thèse, B.Keller a suggéré une approche alternative pour déterminer $\text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(X, Y)$ en passant par une suite spectrale. Nous trouvons à titre d'exemple, pour X et Y

de longueur 3, un résultat similaire au Théorème 3.15. Les arguments pour obtenir le Théorème 3.3 trouvent ainsi une interprétation alternative.

Cette thèse est organisée de façon suivante :

Le chapitre 1 est essentiellement constitué de rappels. Dans la section 1.1, nous donnons une introduction aux catégories dérivées : la définition de ses objets : des complexes, et des morphismes entre ces objets, les classes d'équivalences homotopiques où les quasi-isomorphismes sont inversibles, et la définition des catégories triangulées. Puis, à propos des équivalences dérivées, nous donnons une introduction aux complexes basculants et nous citons le Théorème de Rickard.

Dans la section 1.2, nous rappelons la notion de produit fibré et de somme amalgamée et nous rappelons un résultat élémentaire et bien connu qui est utile pour la démonstration du théorème principal.

Dans la section 1.3, nous introduisons des ordres et des réseaux, notamment les ordres de Gorenstein et les ordres symétriques. Nous donnons leur définitions et quelques exemples. Nous décrivons la catégorie stable de modules sur un ordre de Gorenstein, et nous donnons aussi les résultats relatifs aux équivalences dérivées sur un ordre. Parmi ces résultats, on trouvera le Théorème de relèvement d'un complexe basculant de Rickard [18, Théorème 3.3] et le Théorème de König et Zimmermann [12].

Afin de faciliter la lecture du chapitre 3 plus technique, le chapitre 2 comporte la démonstration du théorème principal pour $n = 2$. Nous explicitons également l'image de $End_{D^b(\Lambda)}(T)$ dans $End_{\Lambda}(H^1T)$ que nous notons A . Nous en déduisons un produit fibré plus explicite : $End_{D^b(\Lambda)}(T)$ est le produit fibré de A et de $End_{\Lambda}(H^2T)$. Enfin, nous traitons le cas où Λ est un ordre symétrique pour lequel nous pouvons remplacer H^2T par sa partie sans R -torsion.

Le théorème principal et sa démonstration sont donnés dans le chapitre 3. Nous introduisons les sous anneaux A^i de $End_{\Lambda}(H^{i+1}T)$, formés par les morphismes qui induisent des morphismes dans $End_{D^b(\Lambda)}(T^i)$ et nous explicitons des produits fibrés plus explicites en termes de A^i dans la section 3.2.

La structure d'anneau de $End_{D^b(\Lambda)}(T)$ induite par celle des A^i est traitée dans la section 3.3. Puis, dans la section 3.4, nous abordons le cas où Λ est un ordre de Gorenstein. Le cas où Λ est un ordre symétrique et les homologies de milieu sont de torsion est étudié dans la section 3.5.

Nous donnons des exemples de l'utilisation du théorème principal dans le chapitre 4. Ces exemples utilisent des Λ qui sont des ordres de Gorenstein. Parmi eux, on trouvera un exemple qui montre que l'hypothèse du théorème principal est suffisante et un exemple qui montre que $A^0 = End_{\Lambda}(H^1T)$ tandis que $A^1 \neq End_{\Lambda}(H^2T)$.

Enfin, nous trouverons dans l'annexe une approche alternative suggérée par B.Keller pour déterminer $Hom_{D^b(\Lambda)}(X, Y)$ par une suite spectrale. Pour des complexes à deux termes cette approche a été détaillée par B.Keller. A titre d'exemple nous expliquons les démarches pour des complexes à trois termes.

Chapitre 1

Rappels et Notations

Ce chapitre nous sert à introduire les notations qui seront utilisées tout au long de cette thèse et à rappeler les résultats relatifs aux équivalences dérivées et aux complexes basculants, en particulier le Théorème de Rickard et le Théorème de König et Zimmermann sur les complexes basculants sur un ordre de Gorenstein [12].

Dans la section 1.1 nous introduisons des équivalences dérivées. Nous rappelons des produits fibrés et des sommes amalgamées dans la section 1.2. Puis, dans la section 1.3, nous introduisons des ordres et des réseaux, en particulier des ordres de Gorenstein et des ordres symétriques.

Les catégories seront notées par $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \dots$, les objets d'une catégorie seront notés par X, Y, Z, L, M, \dots , les objets projectifs par P, Q , et les morphismes par $\varphi, \delta, \gamma, \psi, \dots$. Pour les anneaux et les algèbres nous utilisons les lettres R, Λ, Γ . En général, les modules sont des modules à gauche de type fini. Quelques cas dans lesquels nous utilisons des modules à droite seront mentionnés explicitement. Nous écrivons les morphismes à droite, et la composition $\varphi\gamma$ pour $\varphi : X \rightarrow Y$ et $\gamma : Y \rightarrow Z$.

1.1 Equivalences dérivées

Nous proposons ici une introduction sur la construction des catégories dérivées afin de pouvoir fixer les notations. Le lecteur pourra trouver un traitement analogue pour la section 1.1.1 dans [13], [24], et [27]; pour la

section 1.1.2 dans [9] et pour la section 1.1.3 dans [13], [16] et [9].

1.1.1 Complexes

Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne.

Définition 1.1 Un **complexe** X dans \mathcal{C} est une suite d'objets de \mathcal{C} $(X^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et de morphismes $(\alpha^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ dans $(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^{k-1}, X^k))_{k \in \mathbb{Z}}$:

$$\dots \rightarrow X^{k-1} \xrightarrow{\alpha^{k-1}} X^k \xrightarrow{\alpha^k} X^{k+1} \rightarrow \dots$$

tels que $\alpha^{k-1} \alpha^k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Soient X et Y deux complexes. Un morphisme de complexes $\varphi : X \rightarrow Y$ est une suite $(\varphi^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de morphismes $\varphi^k \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^k, Y^k)$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X^{k-1} & \xrightarrow{\alpha_X^{k-1}} & X^k & \xrightarrow{\alpha_X^k} & X^{k+1} \\ \downarrow \varphi^{k-1} & & \downarrow \varphi^k & & \downarrow \varphi^{k+1} \\ Y^{k-1} & \xrightarrow{\alpha_Y^{k-1}} & Y^k & \xrightarrow{\alpha_Y^k} & Y^{k+1} \end{array}$$

soit commutatif $\forall k$.

Avec ces définitions, nous formons la catégorie de complexes $\mathcal{C}(\mathcal{C})$, qui est encore abélienne. En effet, si $\varphi : X \rightarrow Y$ est un morphisme dans $\mathcal{C}(\mathcal{C})$, le complexe Z défini par $Z^k = \text{Ker}(\varphi^k : X^k \rightarrow Y^k)$, avec le différentiel induit de celui de X , va être le noyau de φ , et de façon similaire nous pouvons construire $\text{Coker}(\varphi)$.

Un complexe est **borné** (resp. **borné à gauche**, **borné à droite**) si $X^k = 0$ pour $|k| \gg 0$ (resp. $k \ll 0$, $k \gg 0$). On note par $\mathcal{C}^*(\mathcal{C})(* \in \{b, +, -\})$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}(\mathcal{C})$ formée par les complexes bornés si $* = b$, bornés à gauche si $* = +$, bornés à droite si $* = -$.

La catégorie \mathcal{C} peut être considérée comme étant une sous-catégorie pleine et fidèle de $\mathcal{C}(\mathcal{C})$ si on identifie un objet $M \in \mathcal{C}$ avec le complexe X dont $X^1 = M$ et les autres X^k sont 0 (M est de degré 1).

$$X := \dots \rightarrow 0 \rightarrow M \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Soient X un objet de $C(\mathcal{C})$ et $i \in \mathbb{Z}$. Le **foncteur de décalage** $[i]$ est un automorphisme de la catégorie $C(\mathcal{C})$ où l'image d'un complexe X est un autre complexe $X[i]$ tel que

$$\begin{aligned} X[i]^k &:= X^{k+i} \\ \alpha_{X[i]}^k &:= (-1)^i \alpha_X^{k+i} \end{aligned}$$

Alors, un décalage par un nombre positif i déplace un complexe à gauche.

Pour un complexe X dans $C(\mathcal{C})$ et $k \in \mathbb{Z}$, on note

$$H^k(X) := \text{Ker}(\alpha_X^k) / \text{Im}(\alpha_X^{k-1})$$

On dit que $H^k(X)$ est la **k -ième homologie** de X . Si $\varphi : X \rightarrow Y$ est un morphisme dans $C(\mathcal{C})$, il induit des morphismes $H^k(\varphi) : H^k(X) \rightarrow H^k(Y)$. Ceci nous donne un foncteur additif

$$H^k(\cdot) : C(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}.$$

On remarque que

$$H^k(X) = H^0(X[k])$$

où $X[k]$ est le complexe obtenu de X par un décalage par k .

Exemple 1.1 Le complexe $0 \rightarrow M \rightarrow 0$ a l'homologie M concentrée en degré 1.

Exemple 1.2 Le complexe de groupes abéliens dont tous les composantes sont $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et le différentiel est la multiplication par 2, a des homologies qui sont tous 0.

$$\dots \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \dots$$

Un complexe dont tous les homologies sont 0 est dit **acyclique**.

Une suite exacte $0 \rightarrow X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\gamma} Z \rightarrow 0$ de $C(\mathcal{C})$ est donnée par un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} X^{k-1} & \xrightarrow{\alpha_X^{k-1}} & X^k & \xrightarrow{\alpha_X^k} & X^{k+1} & & \\ \varphi^{k-1} \downarrow & & \downarrow \varphi^k & & \downarrow \varphi^{k+1} & & \\ Y^{k-1} & \xrightarrow{\alpha_Y^{k-1}} & Y^k & \xrightarrow{\alpha_Y^k} & Y^{k+1} & & \\ \gamma^{k-1} \downarrow & & \downarrow \gamma^k & & \downarrow \gamma^{k+1} & & \\ Z^{k-1} & \xrightarrow{\alpha_Z^{k-1}} & Z^k & \xrightarrow{\alpha_Z^k} & Z^{k+1}, & & \end{array}$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Le foncteur homologie associe à une suite exacte $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ une suite exacte longue

$$\cdots \rightarrow H^k(X) \rightarrow H^k(Y) \rightarrow H^k(Z) \rightarrow H^{k+1}(X) \rightarrow \cdots$$

Homotopie entre complexes, catégorie homotopique

Définition 1.2 Soient X et Y deux complexes et φ et γ deux morphismes $X \rightarrow Y$. Le morphisme φ est dit **homotope** à γ si il existe une suite $(h^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de morphismes $h^k : X^k \rightarrow Y^{k-1}$ tels que

$$\forall k \quad \varphi^k - \gamma^k = h^k \alpha_Y^{k-1} + \alpha_X^k h^{k+1}.$$

$$\begin{array}{ccccc} & & X^k & \xrightarrow{\alpha_X^k} & X^{k+1} \\ & & \downarrow \varphi^k - \gamma^k & \nearrow h^{k+1} & \\ & Y^{k-1} & \xrightarrow{\alpha_Y^{k-1}} & Y^k & \end{array}$$

Si une telle suite existe, elle est nommée **homotopie**. Si γ est 0, on dit que φ est homotope à 0. Un morphisme $\varphi : X \rightarrow Y$ est une **équivalence homotopique** s'il existe $\gamma : Y \rightarrow X$ tel que $\varphi\gamma - id_X$ et $\gamma\varphi - id_Y$ soient homotope à 0. Un objet X est dit **homotope à 0** si id_X est homotope à 0.

Exemple 1.3 Soient X' et X'' des objets dans \mathcal{C} . Le complexe scindé $0 \rightarrow X' \rightarrow X' \oplus X'' \rightarrow X'' \rightarrow 0$ avec les morphismes canoniques est homotope à 0.

On construit une nouvelle catégorie quotient $K(\mathcal{C})$ de $C(\mathcal{C})$ où les complexes homotopes à 0 deviennent isomorphes à 0.

Définition 1.3 Fixons une catégorie abélienne \mathcal{C} et la catégorie de complexes $C(\mathcal{C})$. Pour deux complexes X et Y , on note

$$Ht(X, Y) := \{\varphi : X \rightarrow Y : \varphi \text{ est homotope à } 0\}$$

La collection de tous les $Ht(X, Y)$ forme un idéal de $C(\mathcal{C})$. La **catégorie homotopique** $K(\mathcal{C})$ est la catégorie quotient de $C(\mathcal{C})$ modulo cet idéal, où

$$\begin{aligned} Ob(K(\mathcal{C})) &= Ob(C(\mathcal{C})) \\ Hom_{K(\mathcal{C})}(X, Y) &= Hom_{C(\mathcal{C})}(X, Y)/Ht(X, Y) \end{aligned}$$

C'est à dire, un morphisme homotope à 0 dans $C(\mathcal{C})$ devient le morphisme 0 dans $K(\mathcal{C})$ et une équivalence homotopique devient un isomorphisme.

On définit de façon similaire $K^*(\mathcal{C})$, ($* \in \{b, +, -\}$), comme quotient de $C^*(\mathcal{C})$. La catégorie homotopique $K(\mathcal{C})$ est une catégorie additive qui n'est pas abélienne en général. Elle est munie d'un automorphisme, le foncteur de décalage $[1] : X \mapsto X[1]$.

La propriété homotope à 0 est plus forte que acyclique. Par exemple, le complexe défini dans l'Exemple 1.2 est acyclique, mais il n'est pas homotope à 0. Néanmoins, un complexe homotope à 0 est acyclique d'après le lemme suivant.

Lemme 1.1 [27, Lemme 1.45]

Soient X et Y des objets de $C(\mathcal{C})$ et $\varphi : X \rightarrow Y$ un morphisme de $C(\mathcal{C})$ qui est homotope à 0. Alors, $H^k(\varphi) : H^k(X) \rightarrow H^k(Y)$ est le morphisme 0.

1.1.2 Catégories dérivées

Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne qui possède suffisamment d'objets projectifs. Soient X un objet de \mathcal{C} et

$$\dots \rightarrow P^{-2} \rightarrow P^{-1} \rightarrow P^0 \rightarrow 0$$

une résolution projective de X .

Nous avons un morphisme de complexes φ donné par

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & P^{-2} & \rightarrow & P^{-1} & \rightarrow & P^0 & \rightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \varphi^0 & & \downarrow \\ & & & & 0 & \rightarrow & X & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Le morphisme φ induit un isomorphisme sur l'homologie ($H^k(\varphi)$ est un isomorphisme pour tout k), mais φ n'est pas inversible dans $K(\mathcal{C})$.

Par exemple, pour $\mathcal{C} = \mathbb{Z}\text{-mod}$, le morphisme φ donné par ce diagramme n'est pas inversible dans $K(\mathbb{Z}\text{-mod})$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{2} & \mathbb{Z} & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \varphi^0 & & \\ & & 0 & \rightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \rightarrow & 0 \end{array}$$

La catégorie dérivée donne une méthode pour surmonter cette difficulté.

Fixons \mathcal{C} une catégorie abélienne, avec $C(\mathcal{C})$ sa catégorie de complexes et $K(\mathcal{C})$ sa catégorie homotopique.

Définition 1.4 Soit $\varphi : X \rightarrow Y$ un morphisme dans $K(\mathcal{C})$. On dit que φ est un **quasi-isomorphisme** (ou **qis**) si $H^k(\varphi) : H^k(X) \rightarrow H^k(Y)$ est un isomorphisme pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

On note par \mathcal{S} la famille de tous les quasi-isomorphismes dans $K(\mathcal{C})$. Notre but est de définir la catégorie dérivée $D(\mathcal{C})$ comme étant la localisation de $K(\mathcal{C})$ à \mathcal{S} .

Le lemme suivant est une propriété de \mathcal{S} qui est analogue à la condition d'Ore dans la théorie de localisation des anneaux.

Lemme 1.2 *La classe \mathcal{S} satisfait les axiomes suivants :*

1. *Pour tout objet X de $K(\mathcal{C})$, le morphisme id_X est dans \mathcal{S} .*
2. *Pour tout $\varphi : X \rightarrow Y$ et $\gamma : Y \rightarrow Z$ dans \mathcal{S} , la composition $\varphi\gamma$ est dans \mathcal{S} .*
3. *Etant donnés deux morphismes $\varphi : X \rightarrow Y$ et $\gamma : Z \rightarrow Y$, où γ est dans \mathcal{S} , c.-à.-d. un diagramme*

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & & \downarrow \gamma \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

Alors, il existe $\delta : W \rightarrow X$ dans \mathcal{S} et $\eta : W \rightarrow Z$ tels que $\eta\gamma = \delta\varphi$, c'est à dire le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\eta} & Z \\ \delta \downarrow & & \downarrow \gamma \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array} \tag{1.1}$$

Le dual est aussi valable : Si $\delta : W \rightarrow X$ dans \mathcal{S} et $\eta : W \rightarrow Z$, il existe $\gamma : Z \rightarrow Y$ dans \mathcal{S} et $\varphi : X \rightarrow Y$ tels que le diagramme (1.1) soit commutatif.

4. Pour tout $\varphi, \gamma \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Il existe un $\delta \in \mathcal{S}$ où $\delta \in \text{Hom}_{K(\mathcal{C})}(Y, Y')$ pour un Y' tel que $\varphi\delta = \gamma\delta$.

(b) Il existe un $\eta \in \mathcal{S}$ où $\eta \in \text{Hom}_{K(\mathcal{C})}(X', X)$ pour un X' tel que $\eta\varphi = \eta\gamma$.

$$X' \xrightarrow{\eta} X \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi} \\ \rightarrow \\ \xrightarrow{\gamma} \end{array} Y \xrightarrow{\delta} Y'$$

On définit la **catégorie dérivée** de \mathcal{C} , $D(\mathcal{C})$, comme étant la localisation de la catégorie homotopie à la famille des quasi-isomorphismes, c'est à dire les objets de $D(\mathcal{C})$ sont les objets de $K(\mathcal{C})$ et un morphisme $\varphi : X \rightarrow Y$ est donné par une classe d'équivalence de triplets (X', δ, φ') , où X' est un objet dans $K(\mathcal{C})$, $\delta : X' \rightarrow X$ dans \mathcal{S} et $\varphi' : X' \rightarrow Y$ dans $K(\mathcal{C})$, c.à.d.

$$X \xleftarrow{\delta} X' \xrightarrow{\varphi'} Y$$

et la relation d'équivalence est défini par : (X', δ, φ') et $(X'', \delta'', \varphi'')$ sont équivalents si et seulement s'il existe un objet X''' et morphismes $X''' \rightarrow X$, $X''' \rightarrow X'$ et $X''' \rightarrow X''$ tels que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & \nearrow & \uparrow & \nwarrow & \\ X' & & X''' & & X'' \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & Y & & \end{array}$$

(Les flèches sont étiquetées : δ (X' → X), δ' (X'' → X), δ (X''' → X), δ'' (X''' → X''), φ' (X' → Y), φ'' (X'' → Y), φ (X''' → Y).)

Nous avons un foncteur canonique $K(\mathcal{C}) \rightarrow D(\mathcal{C})$ qui associe à un morphisme $\varphi : X \rightarrow Y$ un triple $(X, 1_X, \varphi)$. Nous avons rendu inversible les quasi-isomorphismes par ce foncteur. Le lemme suivant donne une description plus précise sur des morphismes de la catégorie dérivée.

Lemme 1.3 1. La catégorie $D(\mathcal{C})$ est additive et le foncteur canonique $\mathcal{C} \rightarrow K(\mathcal{C}) \rightarrow D(\mathcal{C})$ est additif.

2. Si un complexe I est borné à gauche de composantes injectives, alors le morphisme canonique

$$\text{Hom}_{K(\mathcal{C})}(X, I) \rightarrow \text{Hom}_{D(\mathcal{C})}(X, I)$$

est un isomorphisme pour tout complexe X . Dualement, le morphisme canonique

$$\text{Hom}_{K(\mathcal{C})}(P, Y) \rightarrow \text{Hom}_{D(\mathcal{C})}(P, Y)$$

est un isomorphisme pour tout complexe Y si P est un complexe borné à droite de composantes projectives.

3. Pour tout X, Y objets dans \mathcal{C} , et $k \in \mathbb{Z}$, il existe un isomorphisme canonique

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^k(X, Y) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{D(\mathcal{C})}(X, Y[k]).$$

La proposition suivante nous donne une identification d'un objet de \mathcal{C} comme étant un objet de $D(\mathcal{C})$.

Proposition 1.4 La catégorie \mathcal{C} est isomorphe à la sous-catégorie pleine de $D(\mathcal{C})$ contenant les objets X dont $H^k(X) = 0$ pour $k \neq 1$ par le foncteur composé $\mathcal{C} \rightarrow K(\mathcal{C}) \rightarrow D(\mathcal{C})$.

La structure triangulée de la catégorie dérivée

Un **triangle distingué** de $D(\mathcal{C})$ est une suite de morphismes

$$X \xrightarrow{Q} Y \xrightarrow{Q\phi} Z \xrightarrow{\delta\epsilon} X[1]$$

où $Q : \mathcal{C}(\mathcal{C}) \rightarrow D(\mathcal{C})$ est le foncteur canonique,

$$\epsilon : 0 \rightarrow X \xrightarrow{\iota} Y \xrightarrow{\phi} Z \rightarrow 0$$

est une suite exacte courte de complexes, et $\delta\epsilon$ est le triple (δ, M, ξ) où M dans $C(\mathcal{C})$ donné pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} M^k &:= X^{k+1} \oplus Y^k \\ \alpha_M^k &:= \begin{pmatrix} \alpha_{X[1]}^k & \iota^{k+1} \\ 0 & \alpha_Y^k \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

δ est le morphisme $(0 \ \phi)$ et ξ est la projection $M \rightarrow X[1]$.

(On le note aussi $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightsquigarrow X[1]$).

Un **triangle** de $D(\mathcal{C})$ est une suite des morphismes

$$X' \xrightarrow{\varphi} Y' \xrightarrow{\gamma} Z' \xrightarrow{\rho} X'[1]$$

qui est isomorphe à un triangle distingué, c.-à.-d. telle que les flèches verticales du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} X' & \xrightarrow{\varphi} & Y' & \xrightarrow{\gamma} & Z' & \xrightarrow{\rho} & X'[1] \\ \downarrow \eta & & \downarrow \theta & & \downarrow \chi & & \downarrow \eta[1] \\ X & \rightarrow & Y & \rightarrow & Z & \rightarrow & X[1] \end{array}$$

sont des isomorphismes de $D(\mathcal{C})$ et la deuxième ligne est un triangle distingué.

Définition 1.5 [10] Une catégorie additive \mathcal{D} est dite **suspendue** si elle est munie d'un foncteur $S : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ et d'une famille de suites (appelée triangle) de la forme

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow S(X)$$

qui est stable par isomorphismes et satisfait les conditions suivantes

TR1 Pour tout objet X , la suite

$$X \xrightarrow{id_X} X \rightarrow 0 \rightarrow S(X)$$

est un triangle.

TR2 Pour tout morphisme $\varphi : X \rightarrow Y$, il existe un triangle

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \rightarrow Z \rightarrow S(X)$$

TR3 La suite

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\gamma} Z \xrightarrow{\rho} S(X)$$

est un triangle si est seulement si la suite

$$Y \xrightarrow{\gamma} Z \xrightarrow{\rho} S(X) \xrightarrow{-S(\varphi)} S(Y)$$

est un triangle.

TR4 Si

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \rightarrow Z \rightarrow S(X)$$

et

$$X' \xrightarrow{\varphi'} Y' \rightarrow Z' \rightarrow S(X')$$

sont des triangles, et si $\eta : X \rightarrow X'$ et $\theta : Y \rightarrow Y'$ des morphismes tels que

$$\varphi\theta = \eta\varphi',$$

alors il existe un morphisme $\chi : Z \rightarrow Z'$ tel que

$$\theta\gamma' = \gamma\chi \text{ et } \rho S(\eta) = \chi\rho'$$

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y & \xrightarrow{\gamma} & Z & \xrightarrow{\rho} & S(X) \\ \downarrow \eta & & \downarrow \theta & & \downarrow \chi & & \downarrow S(\eta) \\ X' & \xrightarrow{\varphi'} & Y' & \xrightarrow{\gamma'} & Z' & \xrightarrow{\rho'} & S(X') \end{array}$$

TR5 (axiome de l'octaèdre) Etant donnés trois triangles

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y & \rightarrow & Z' & \rightarrow & S(X) \\ Y & \xrightarrow{\gamma} & Z & \rightarrow & X' & \rightarrow & S(Y) \\ X & \xrightarrow{\varphi\gamma} & Z & \rightarrow & Y' & \rightarrow & S(X), \end{array}$$

alors il existe un triangle

$$Z' \xrightarrow{u} Y' \xrightarrow{v} X' \xrightarrow{w} S(Z')$$

tel que le diagramme ci-dessous commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y & \rightarrow & Z' & \rightarrow & S(X) \\ \downarrow id_X & & \downarrow \gamma & & \downarrow u & & \downarrow id_{S(X)} \\ X & \xrightarrow{\varphi\gamma} & Z & \rightarrow & Y' & \rightarrow & S(X) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow id_Z & & \downarrow v & & \downarrow S(\varphi) \\ Y & \xrightarrow{\gamma} & Z & \rightarrow & X' & \rightarrow & S(Y) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow id_{X'} & & \downarrow \\ Z' & \rightarrow & Y' & \rightarrow & X' & \xrightarrow{w} & S(Z') \end{array}$$

Nous avons la notion duale de celle de la catégorie suspendue :

Définition 1.6 Une catégorie additive \mathcal{D} munie d'un foncteur $S : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ et d'une famille de suites de la forme

$$S(X) \rightarrow Z \rightarrow Y \rightarrow X$$

qui est stable sous des isomorphismes est dite **cosuspendue** si elle satisfait les propriétés duales de TR1-TR5.

Définition 1.7 Si le foncteur S est une équivalence, on dit que \mathcal{D} est **triangulée**. Dans ce cas, les notions de la catégorie suspendue et de la catégorie cosuspendue sont équivalentes.

Théorème 1.5 ([13, Théorème 2.3.1] et [9, Lemme 3])

La catégorie $K(\mathcal{C})$ et la catégorie $D(\mathcal{C})$ munies de l'automorphisme $S = [1]$ sont triangulées.

Définition 1.8 Soient \mathcal{B}, \mathcal{D} des catégories triangulées. Un **foncteur triangulé** est une paire (F, φ) formé par un foncteur additif $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}$ et un isomorphisme fonctoriel

$$\varphi_X : F(S(X)) \xrightarrow{\sim} S(FX),$$

tel que la suite

$$FX \xrightarrow{Fu} FY \xrightarrow{Fv} FZ \xrightarrow{(\varphi_X)Fw} S(FX)$$

soit un triangle de \mathcal{D} pour tout triangle $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} S(X)$ de \mathcal{B} .

Un foncteur triangulé (F, φ) est une **équivalence de la catégorie triangulée** si le foncteur F est une équivalence.

Définition 1.9 Un foncteur additif F de $D(\mathcal{C})$ à une catégorie abélienne est **cohomologique** si pour tout triangle

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1],$$

la suite

$$F(X) \rightarrow F(Y) \rightarrow F(Z)$$

est exacte.

Remarque D'après l'axiome TR3, un foncteur cohomologique donne lieu à une suite exacte longue

$$\cdots \rightarrow F(Z[-1]) \rightarrow F(X) \rightarrow F(Y) \rightarrow F(Z) \rightarrow F(X[1]) \rightarrow \cdots$$

Proposition 1.6 *Pour tout objet W dans $D(\mathcal{C})$, le foncteur $\text{Hom}_{D(\mathcal{C})}(W, \bullet)$ et $\text{Hom}_{D(\mathcal{C})}(\bullet, W)$ sont cohomologiques.*

1.1.3 Théorème de Rickard

Désormais, toutes les catégories sont additives. On associe à un objet X d'une catégorie additive \mathcal{C} une sous-catégorie pleine de \mathcal{C} : $\text{Sum} - X$ contenant toutes les sommes directes de copies de X , $\text{Add} - X$ contenant tous les facteurs directs des sommes directes des copies de X , et $\text{add} - X$ contenant tous les facteurs directs des sommes finies de copies de X .

Par exemple : si \mathcal{C} est la catégorie de modules sur un anneau, et X est un module libre de rank 1, alors $\text{Sum} - X$ est la catégorie de tous les modules libres, $\text{Add} - X$ est la catégorie de tous les modules projectifs, $\text{add} - X$ est la catégorie de tous les modules projectifs de type fini.

Soit Λ un anneau. On note par $\Lambda - \text{Proj}$ la catégorie de tous Λ -modules projectifs, $P(\Lambda)$ la catégorie de tous les Λ -modules projectifs de type fini, $K^b(\Lambda - \text{Proj})$ et $K^b(P(\Lambda))$ les catégories homotopiques de complexes de longueur fini de Λ -modules projectifs (resp. projectifs de type fini), et $D^b(\Lambda)$ la catégorie dérivée de complexes de longueur finie de Λ -modules.

Définition 1.10 Soit B une sous-catégorie (ou plus généralement une famille des objets) de $K^b(P(\Lambda))$. On dit que B **engendre** $K^b(P(\Lambda))$ en tant que catégorie triangulée si $K^b(P(\Lambda))$ est la plus petite sous-catégorie triangulée de $K^b(P(\Lambda))$, stable sous isomorphismes, qui contient B .

Définition 1.11 Soit Λ un anneau. Un **complexe basculant partiel** T sur Λ est un objet de $K^b(P(\Lambda))$ qui satisfait :

T1 pour tout $k \neq 0$, nous avons $\text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T, T[k]) = 0$.

Un complexe basculant partiel qui satisfait

T2 la catégorie $\text{add} - T$ engendre $K^b(P(\Lambda))$ en tant que catégorie triangulée. est un **complexe basculant**.

Théorème 1.7 (Rickard [16])

Soient Λ et Γ deux anneaux. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. les catégories triangulées $K^-(\Lambda\text{-Proj})$ et $K^-(\Gamma\text{-Proj})$ sont équivalentes,
2. les catégories triangulées $D^b(\Lambda)$ et $D^b(\Gamma)$ sont équivalentes,
3. les catégories triangulées $K^b(\Lambda\text{-Proj})$ et $K^b(\Gamma\text{-Proj})$ sont équivalentes,
4. les catégories triangulées $K^b(P(\Lambda))$ et $K^b(P(\Gamma))$ sont équivalentes,
5. il existe un complexe basculant T sur Λ avec $\text{End}_{D^b(\Lambda)}(T) \cong \Gamma$.

Pour la démonstration, nous avons besoin de démontrer les faits suivants :

- (a) Si un complexe basculant dans la condition 5 du théorème existe, alors il existe une équivalence de la catégorie triangulée entre $K^-(\Lambda\text{-Proj})$ et $K^-(\Gamma\text{-Proj})$.
- (b) Il existe des caractérisation de sous-catégories mentionnées dans le théorème qui donnent la restriction de l'équivalence entre K^- à l'équivalence entre les différentes sous-catégories comme $D^b(\Lambda)$, etc.
- (c) S'il existe une équivalence, alors l'image de Γ est un complexe basculant T avec $\text{End}_{D^b(\Lambda)}(T) \cong \Gamma$.

Nous allons donner la démonstration de (c). Les démonstrations de (a) et (b) se trouvent dans [16] et [13] ; puis une démonstration plus élégante dans [7] et [9].

Démonstration de (c)

Soit F une équivalence $F : D^b(\Gamma) \xrightarrow{\cong} D^b(\Lambda)$. La restriction de F à $K^b(P(\Gamma))$ est une équivalence

$$F|_{K^b(P(\Gamma))} : K^b(P(\Gamma)) \xrightarrow{\cong} K^b(P(\Lambda)).$$

En particulier, l'image $F(\Gamma)$ de Γ est un objet T de $K^b(P(\Lambda))$, et $\Gamma \cong \text{End}(T)$. En plus, $\text{add } -T$ engendre $K^b(P(\Lambda))$, car Γ possède une propriété analogue. La propriété T1 pour T vient de la propriété analogue de Γ car Γ est projectif et $\text{Ext}_{\Gamma}^i(\Gamma, \Gamma) = 0$.

1.2 Produits fibrés et sommes amalgamées

Dans cette section nous allons donner la définition du produit fibré et de la somme amalgamée et leurs propriétés suivant [1].

Soient R un anneau et Λ une R -algèbre. On note par $\Lambda\text{-mod}$ la catégorie de tous Λ -modules de type fini.

Dans cette section, tous les objets et les morphismes sont de $\Lambda\text{-mod}$.

Définition 1.12 Soient $\varphi : X \rightarrow Y, \gamma : Z \rightarrow Y$ deux morphismes de Λ -modules. Un **produit fibré** de φ et γ est la donnée d'un objet W et de deux morphismes $\delta : W \rightarrow X, \eta : W \rightarrow Z$ tels que

1. $\delta\varphi = \eta\gamma$.
2. pour tout objet U et toute paire de morphismes $\rho : U \rightarrow X, \lambda : U \rightarrow Z$ tels que $\rho\varphi = \lambda\gamma$, il existe un unique morphisme $\chi : U \rightarrow W$ tel que $\chi\delta = \rho$ et $\chi\eta = \lambda$.

$$\begin{array}{ccccc}
 U & & & & \\
 \chi \searrow & & \lambda \searrow & & \\
 & W & \xrightarrow{\eta} & Z & \\
 \rho \searrow & \downarrow \delta & & \downarrow \gamma & \\
 & X & \xrightarrow{\varphi} & Y &
 \end{array}$$

Il résulte de l'unicité dans la définition que, si un tel produit existe, il est unique à isomorphisme près.

Exemple 1.4 Soit $\varphi : X \rightarrow Y$ un morphisme. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 W & \rightarrow & 0 \\
 \downarrow \delta & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{\varphi} & Y
 \end{array}$$

définit un produit fibré si et seulement si W est le noyau de φ . Les noyaux sont donc des cas particuliers de produits fibrés.

Théorème 1.8 Dans $\Lambda\text{-mod}$, toute paire de morphismes (φ, γ) admet un produit fibré W qui peut s'écrire

$$W = \{(x, z) \in X \times Z : \varphi(x) = \gamma(z)\}$$

Lemme 1.9 *Soit*

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\eta} & Z \\ \delta \downarrow & & \downarrow \gamma \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

un produit fibré de φ et γ . Alors, si φ est injectif (resp. surjectif), η est injectif (resp. surjectif) aussi.

Théorème 1.10 *A un diagramme*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & Z & & \\ & & & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \rightarrow & K & \xrightarrow{\mu} & X & \xrightarrow{\varphi} & Y \rightarrow 0 \end{array}$$

avec la ligne du bas exacte, correspond un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & K & \xrightarrow{\iota} & W & \xrightarrow{\eta} & Z & \rightarrow & 0 \\ & & id_K \downarrow & & \downarrow \delta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \rightarrow & K & \xrightarrow{\mu} & X & \xrightarrow{\varphi} & Y & \rightarrow & 0 \end{array}$$

où W est un produit fibré de φ et γ .

Réciproquement, tout diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & K & \xrightarrow{\iota'} & W' & \xrightarrow{\eta'} & Z & \rightarrow & 0 \\ & & id_K \downarrow & & \downarrow \delta' & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \rightarrow & K & \xrightarrow{\mu} & X & \xrightarrow{\varphi} & Y & \rightarrow & 0 \end{array}$$

est de cette forme : il existe un isomorphisme $\chi : W' \xrightarrow{\cong} W$ tel que

$$\iota = \iota' \chi, \quad \chi \delta = \delta', \quad \chi \eta = \eta'.$$

Démonstration Soit un diagramme à ligne exacte

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & Z & & \\ & & & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \rightarrow & K & \xrightarrow{\mu} & X & \xrightarrow{\varphi} & Y \rightarrow 0 \end{array}$$

Pour compléter ce diagramme, on utilise la propriété universelle de W appliquée à $\mu : K \rightarrow X$ et au morphisme nul $K \rightarrow Z$, et le fait que, par le Lemme 1.9, η est surjectif. Ceci nous donne $\iota : K \rightarrow W$ tel que

$$\iota \delta = \mu$$

$$\begin{array}{ccccc}
 K & & 0 & & \\
 \downarrow \iota & \searrow & \searrow \eta & & \\
 W & & & & Z \\
 \downarrow \delta & & & & \downarrow \gamma \\
 X & \xrightarrow{\varphi} & & & Y
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & K & \xrightarrow{\iota} & W & \xrightarrow{\eta} & Z & \rightarrow 0 \\
 id_K \downarrow & & & \downarrow \delta & & \downarrow \gamma & \\
 0 \rightarrow & K & \xrightarrow{\mu} & X & \xrightarrow{\varphi} & Y & \rightarrow 0
 \end{array}$$

Il reste à montrer que $K = Ker(\eta)$.

Par construction, $\iota\eta = 0$. Soit $\theta : U \rightarrow W$ tel que $\theta\eta = 0$.

$$\begin{array}{ccccc}
 U & & & & \\
 \downarrow \theta & \searrow & & & \\
 K & \longrightarrow & 0 & & \\
 \downarrow \iota & & \downarrow & & \\
 W & \xrightarrow{\eta} & Z & &
 \end{array}$$

Alors $\theta\delta\varphi = \theta\eta\gamma = 0$.

Donc, il existe $\theta' : U \rightarrow K$ tel que

$$\theta\delta = \theta'\mu$$

$$\begin{array}{ccccc}
 U & & 0 & & \\
 \downarrow \theta' & \searrow & \searrow \eta & & \\
 K & \longrightarrow & 0 & & \\
 \downarrow \mu & & \downarrow & & \\
 X & \xrightarrow{\varphi} & Y & &
 \end{array}$$

On a $\theta'\iota\eta = 0 = \theta\eta$ et

$$\theta'\iota\delta = \theta'\mu = \theta\delta.$$

$$\begin{array}{ccccc}
 U & & 0 & & \\
 \downarrow \theta' \iota & \searrow & \searrow \eta & & \\
 W & \xrightarrow{\eta} & Z & & \\
 \downarrow \delta & & \downarrow \gamma & & \\
 X & \xrightarrow{\varphi} & Y & &
 \end{array}$$

Par l'unicité de W , $\theta'\iota = \theta$. Cela montre l'existence de θ' .

$$\begin{array}{ccccc}
 U & & & & \\
 \theta' \searrow & & & & \\
 & K & \longrightarrow & 0 & \\
 \theta \searrow & \downarrow \iota & & \downarrow & \\
 & W & \xrightarrow{\eta} & Z &
 \end{array}$$

L'unicité de θ' vient de ce que, $\iota\delta = \mu$ est injectif, donc ι l'est aussi.
 (Si $\theta''\iota = \theta'\iota$, alors $\theta'' = \theta'$).

Pour la réciproque, étant donné un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \rightarrow & K & \xrightarrow{\iota'} & W' & \xrightarrow{\eta'} & Z & \rightarrow & 0 \\
 & & id_K \downarrow & & \downarrow \delta' & & \downarrow \gamma & & \\
 0 & \rightarrow & K & \xrightarrow{\mu} & X & \xrightarrow{\varphi} & Y & \rightarrow & 0
 \end{array}$$

La propriété universelle du produit fibré donne un morphisme $\chi : W' \rightarrow W$ tel que

$$\chi\delta = \delta' \text{ et } \chi\eta = \eta'$$

$$\begin{array}{ccccc}
 W' & & & & \\
 \chi \searrow & & & & \\
 & W & \xrightarrow{\eta} & Z & \\
 \delta' \searrow & \downarrow \delta & & \downarrow \gamma & \\
 & X & \xrightarrow{\varphi} & Y &
 \end{array}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 (\iota'\chi)\delta &= \iota'\delta' = \mu = \iota\delta \\
 \text{et } (\iota'\chi)\eta &= \iota'\eta' = 0 = \iota\eta
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 K & & & & \\
 \iota'\chi \searrow & & & & \\
 & W & \xrightarrow{\eta} & Z & \\
 \iota\delta \searrow & \downarrow \delta & & \downarrow \gamma & \\
 & X & \xrightarrow{\varphi} & Y &
 \end{array}$$

D'où, par l'unicité de W ,

$$\iota = \iota' \chi.$$

Nous obtenons donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & K & \xrightarrow{\iota'} & W' & \xrightarrow{\eta'} & Z & \rightarrow & 0 \\ & & id_K \downarrow & & \downarrow \chi & & \downarrow id_Z & & \\ 0 & \rightarrow & K & \xrightarrow{\iota} & W & \xrightarrow{\eta} & Z & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Et comme nous avons un diagramme commutatif à lignes exactes où les flèches verticales à gauche et à droite sont des isomorphismes, alors χ est un isomorphisme. Ceci termine la démonstration. ■

Corollaire 1.11 *Etant donné un diagramme commutatif à lignes exactes*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & H & \xrightarrow{\iota} & W & \xrightarrow{\eta} & Z & \rightarrow & 0 \\ & & \zeta \downarrow & & \downarrow \delta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \rightarrow & K & \xrightarrow{\mu} & X & \xrightarrow{\varphi} & Y & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Alors, W est un produit fibré de φ et γ si et seulement si ζ est un isomorphisme.

La notion duale de celle de produit fibré est la suivante

Définition 1.13 Soient $\varphi : X \rightarrow Y$ et $\gamma : X \rightarrow Z$ deux morphismes de Λ -mod. Une **somme amalgamée** de φ et γ est la donnée d'un objet Q et de deux morphismes $\delta : Y \rightarrow Q$, $\eta : Z \rightarrow Q$ tels que

1. $\varphi\delta = \gamma\eta$.
2. pour tout objet V et toute paire de morphismes $\rho : Y \rightarrow V$, $\lambda : Z \rightarrow V$ tels que $\varphi\rho = \gamma\lambda$, il existe un unique morphisme $\chi : Q \rightarrow V$ tel que $\delta\chi = \rho$ et $\eta\chi = \lambda$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \downarrow \gamma & & \delta \downarrow \\ Z & \xrightarrow{\eta} & Q \end{array} \begin{array}{l} \searrow \rho \\ \searrow \chi \\ \searrow \lambda \end{array} \rightarrow V$$

Si la somme amalgamée de deux morphismes existe, elle est unique à isomorphisme près. Les conoyaux sont des cas particuliers de sommes amalgamées.

Théorème 1.12 *Dans Λ -mod toute paire de morphismes admet une somme amalgamée qui peut s'écrire*

$$Q = (Y \oplus Z)/Y' \text{ avec } Y' = \left\{ \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ -\gamma(x) \end{pmatrix} \in Y \oplus Z : x \in X \right\}.$$

Lemme 1.13 *Soit*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\gamma} & Z \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \eta \\ Y & \xrightarrow{\delta} & Q \end{array}$$

une somme amalgamée de φ et γ .

Alors, si γ est surjectif (resp. injectif), δ est surjectif (resp. injectif) aussi.

Théorème 1.14 *A un diagramme*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & X & \xrightarrow{\gamma} & Z & \xrightarrow{\pi} & L \rightarrow 0 \\ & & \varphi \downarrow & & & & \\ & & Y & & & & \end{array}$$

avec la ligne du haut exacte correspond un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & \rightarrow & X & \xrightarrow{\gamma} & Z & \xrightarrow{\pi} & L & \rightarrow 0 \\ & & \varphi \downarrow & & \downarrow \eta & & \downarrow 1_L & \\ 0 & \rightarrow & Y & \xrightarrow{\delta} & Q & \xrightarrow{\nu} & L & \rightarrow 0 \end{array}$$

où Q est une somme amalgamée de φ et γ .

Réciproquement, tout diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & \rightarrow & X & \xrightarrow{\gamma} & Z & \xrightarrow{\pi} & L & \rightarrow 0 \\ & & \varphi \downarrow & & \downarrow \eta' & & \downarrow 1_L & \\ 0 & \rightarrow & Y & \xrightarrow{\delta'} & Q' & \xrightarrow{\nu'} & L & \rightarrow 0 \end{array}$$

est de cette forme : il existe un isomorphisme $\xi : Q \xrightarrow{\cong} Q'$ tel que

$$\nu = \xi\nu', \quad \eta\xi = \eta', \quad \delta\xi = \delta'.$$

Corollaire 1.15 *Etant donné un diagramme commutatif à lignes exactes*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \rightarrow & X & \xrightarrow{\gamma} & Z & \xrightarrow{\pi} & L & \rightarrow & 0 \\
 & & \varphi \downarrow & & \downarrow \eta & & \downarrow \nu & & \\
 0 & \rightarrow & Y & \xrightarrow{\delta} & Q & \xrightarrow{\nu} & M & \rightarrow & 0
 \end{array}$$

Alors, Q est une somme amalgamée de φ et γ si et seulement si $L \cong M$.

1.3 Ordres et Réseaux

Nous donnons ici les définitions et les propriétés des ordres et des réseaux. La notion des ordres de Gorenstein et des ordres symétriques ainsi que des exemples sont introduits dans la section 1.3.1. Nous expliquons la catégorie stable de modules sur un ordre de Gorenstein et une propriété des morphismes de cette catégorie dans la section 1.3.2. Dans la section 1.3.3 nous citons des résultats relatifs aux complexes basculants sur un ordre. Nous suivons [5] pour la plupart de cette section.

Définition 1.14 Soit R anneau de Dedekind avec corps de fractions K . Un R -**ordre** Λ est une R -algèbre R -projective de type finie tel que $K \otimes_R \Lambda$ est une K -algèbre semisimple.

Exemple 1.5 1. Soient I un idéal de R et

$$\Lambda = \begin{pmatrix} R & R \\ I & R \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, d \in R, c \in I \right\}.$$

Alors Λ est un R -ordre, $K \otimes_R \Lambda = M_2(K)$.

2. Soient G un groupe fini, et $\Lambda = RG$ l'anneau de groupe sur R , c.-à.-d. l'ensemble de tous les $\sum_{x \in G} \alpha_x x$, $\alpha_x \in R$. L'algèbre Λ est un R -ordre et $K \otimes_R \Lambda$ est $KG = \{\sum_{x \in G} \alpha_x x : \alpha_x \in K\}$.

Fixons R un anneau de Dedekind.

Définition 1.15 Soit Λ un R -ordre. Un Λ -**réseau** est un Λ -module de type fini sans R -torsion.

Les théorèmes suivants nous donnent une possibilité d'identifier les Λ -réseaux avec les Λ -modules R -projectif.

Théorème 1.16 [14, Théorème 7.7] Soit R un anneau de Dedekind. Soit M un R -module projectif. Si M est de type fini, $M \cong R^{n-1} \oplus I$ où $n \geq 1$ et I est un idéal de R .

Théorème 1.17 (Steinitz) [5, Théorème 4.13]

Si R est un anneau de Dedekind, alors tout R -module sans R -torsion est R -projectif.

Corollaire 1.18 *Si Λ est un ordre sur un anneau de Dedekind, les Λ -réseaux sont les Λ -modules R -projectifs.*

Nous donnons quelques propriétés de Λ -réseaux.

Lemme 1.19 *Si Λ est une R -algèbre, M est un Λ -module de R -torsion et N est un Λ -réseau, alors*

$$\text{Hom}_\Lambda(M, N) = 0$$

Lemme 1.20 *Si Λ est un ordre, M et N sont des Λ -réseaux, alors*

$$\text{Hom}_\Lambda(M, N) = 0 \Leftrightarrow \text{Hom}_\Lambda(N, M) = 0.$$

Démonstration En effet

$$\begin{aligned} \text{Hom}_\Lambda(M, N) = 0 &\Leftrightarrow K \otimes_R \text{Hom}_\Lambda(M, N) = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{Hom}_\Lambda(K \otimes_R M, K \otimes_R N) = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{Hom}_\Lambda(K \otimes_R N, K \otimes_R M) = 0 \\ &\Leftrightarrow K \otimes_R \text{Hom}_\Lambda(N, M) = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{Hom}_\Lambda(N, M) = 0 \end{aligned}$$

■

1.3.1 Ordres de Gorenstein et ordres symétrique

Définition 1.16 [5] Soient R un anneau de Dedekind et Λ un R -ordre. On dit que Λ est **de Gorenstein** s'il satisfait une des conditions équivalentes suivantes

1. $\text{Ext}_\Lambda^1(Y, \Lambda) = 0$ pour tout Λ -réseau Y
2. toute suite exacte courte

$$0 \rightarrow \Lambda \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow 0$$

de Λ -modules est Λ -scindée si Y est un R -module projectif.

Remarque

1. La condition $\text{Ext}_\Lambda^1(Y, \Lambda) = 0$ n'implique pas que $\text{Ext}_\Lambda^1(-, \Lambda) = 0$ en tant que foncteur appliqué à tout Λ -module.

2. La condition $Ext_{\Lambda}^1(Y, \Lambda) = 0$ implique que $Ext_{\Lambda}^1(Y, P) = 0$ pour tout Λ -module projectif P .

Lemme 1.21 *Si $\Lambda^* = Hom_R(\Lambda, R)$ est projectif en tant que Λ -module à droite, alors Λ est de Gorenstein.*

Démonstration Si M est un Λ -réseau à gauche, son dual M^* est un Λ -réseau à droite ([5, Lemme 10.26]). Etant donnée une suite exacte de Λ -modules

$$0 \rightarrow \Lambda \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow 0 \quad (1.2)$$

où Y est un Λ -réseau. Comme Y est Λ -réseau, X l'est aussi, et la suite 1.2 est donc une suite exacte de Λ -réseaux.

Elle est donc R -scindée, et en appliquant $Hom_R(-, R)$ elle donne lieu à une suite exacte de Λ -réseaux à droite

$$0 \rightarrow Y^* \rightarrow X^* \rightarrow \Lambda^* \rightarrow 0$$

La première suite est Λ -scindée si et seulement si la deuxième suite est Λ -scindée. Si Λ^* est projectif en tant que Λ -module à droite, elle est scindée. Ceci termine la démonstration. ■

Exemple 1.6 Tout ordre héréditaire est de Gorenstein.

Exemple 1.7 Soient R un anneau de valuation discrète complet avec idéal maximal \mathcal{M} , $k \in \mathbb{N}$ et

$$\Lambda = \begin{pmatrix} R & R \\ \mathcal{M}^k & R \end{pmatrix}.$$

Soient $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc

$$\Lambda e_1 = \begin{pmatrix} R \\ \mathcal{M}^k \end{pmatrix}, \Lambda e_4 = \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}.$$

Alors

$$(\Lambda e_1)^* = Hom_R(\Lambda e_1, R) \cong (R \ \mathcal{M}^{-k})$$

en tant que Λ -modules à droite, où l'isomorphisme vient de la formule

$$(R \ \mathcal{M}^{-k}) \begin{pmatrix} R \\ \mathcal{M}^k \end{pmatrix} = R.$$

Comme $(R \ \mathcal{M}^{-k}) \cong (\mathcal{M}^k \ R) \cong e_4\Lambda$, alors $(\Lambda e_1)^*$ est un Λ -réseau à droite. Avec le même argument, $(\Lambda e_4)^*$ est un Λ -réseau à droite, et Λ est donc de Gorenstein.

Définition 1.17 Soient R un anneau de Dedekind et Λ une R -algèbre. Un homomorphisme t de Λ vers R est **central** s'il satisfait

$$t(aa') = t(a'a) \quad \forall a, a' \in \Lambda$$

Un homomorphisme central $t : \Lambda \rightarrow R$ définit un morphisme \hat{t} de $\Lambda - \Lambda$ -bimodules comme suivant :

$$\begin{aligned} \hat{t} : \Lambda &\rightarrow \Lambda^* \\ a &\mapsto \hat{t}(a) : a' \mapsto t(aa') \end{aligned}$$

Définition 1.18 [3] On dit qu'une R -algèbre Λ est une **algèbre symétrique** si

1. Λ est R -projectif.
2. Il existe un homomorphisme central $t : \Lambda \rightarrow R$ tel que \hat{t} soit un isomorphisme, c'est à dire, $\Lambda \cong \Lambda^*$ sont isomorphes en tant que $\Lambda - \Lambda$ -bimodules.

Un R -ordre Λ est un **ordre symétrique** s'il est une algèbre symétrique.

Evidemment, tout ordre symétrique est de Gorenstein.

Exemple 1.8 Si G est un groupe fini, l'anneau de groupe RG est un ordre symétrique, donc de Gorenstein. L'homomorphisme central $t : RG \rightarrow R$ est donné par

$$\sum_{g \in G} \lambda_g g \mapsto \lambda_1$$

Exemple 1.9 Λ défini dans Exemple 1.7 n'est pas symétrique.

En effet, soient e_1 et e_4 comme ci-dessus, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \pi^k & 0 \end{pmatrix} \text{ où } \mathcal{M}^k = \langle \pi^k \rangle.$$

Soit pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, f_i la base duale de e_i (c'est à dire $f_i(e_j) = \delta_{ij}$).

Si t est central, $t = r(f_1 + f_4)$ pour un $r \in R$, mais \hat{t} n'est pas surjectif. Un exemple est donné par $\varphi \in \Lambda^*$ où $\varphi = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$.

S'il existe un $\bar{a} = \begin{pmatrix} a & b \\ \pi^k c & d \end{pmatrix} \in \Lambda$ tel que $\hat{t}(\bar{a}) = \varphi$, alors pour tout $\bar{a}' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ \pi^k c' & d' \end{pmatrix} \in \Lambda$,

$$\hat{t}(\bar{a})(\bar{a}') = \varphi(\bar{a}')$$

et ceci implique

$$r(aa' + b\pi^k c' + \pi^k cb' + dd') = a' + b' + c' + d' \quad \forall a', b', c', d' \in R$$

Donc, $raa' = a'$, $rb\pi^k c' = c'$, $r\pi^k cb' = b'$ et $rdd' = d'$, $\forall a', b', c', d' \in R$

Prenons $a' = b' = c' = d' = 1$, on obtient $ra = 1$, $rb = 1/\pi^k$, $rc = 1/\pi^k$, $rd = 1$, et r est un multiple de π^k . Par conséquent, $a \notin R$. Donc, $\bar{a} \notin \Lambda$, ceci est une contradiction.

1.3.2 Catégorie stable de modules sur un ordre de Gorenstein

Fixons R un anneau de Dedekind et Λ une R -algèbre.

Définition 1.19 Pour deux Λ -modules X et Y , on note

$$\mathcal{P}(X, Y) := \{\varphi : X \rightarrow Y : \varphi \text{ factorise vers un } \Lambda\text{-module projectif}\}.$$

La **catégorie stable** de Λ -modules, $\Lambda - \underline{mod}$, est la catégorie quotient de Λ -modules modulo $\mathcal{P}(X, Y)$, c'est à dire

$$\begin{aligned} Ob(\Lambda - \underline{mod}) &= Ob(\Lambda - mod) \\ \underline{Hom}_\Lambda(X, Y) &= Hom_\Lambda(X, Y) / \mathcal{P}(X, Y) \end{aligned}$$

Si Λ est un ordre de Gorenstein, la catégorie stable de modules sur Λ est une catégorie cosuspendue qui n'est pas triangulée en général.

Soit X dans $\Lambda - \underline{mod}$ et prenons sa résolution projective P . On définit $S(X) = Ker(P \rightarrow X)$.

Soient X et Y dans $\Lambda - mod$ et $\varphi : Y \rightarrow X$. Prenons P une résolution projective de X , nous formons un produit fibré

$$\begin{array}{ccc} U & \rightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ P & \rightarrow & X \end{array}$$

et nous le complétons en un diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & S(X) & \rightarrow & U & \rightarrow & Y & \rightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & S(X) & \rightarrow & P & \rightarrow & X & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Alors la suite $S(X) \rightarrow U \rightarrow Y \rightarrow X$ est un triangle dans $\Lambda - \underline{mod}$.

Si Λ est une algèbre auto-injective, le foncteur S est un automorphisme et $\Lambda - \underline{mod}$ est triangulée. Dans ce cas, Rickard a montré dans [19] que les catégories stables sont des quotients des catégories dérivées de Λ -modules.

Pour les morphismes dans la catégorie stable de modules sur un ordre de Gorenstein, nous avons le lemme suivant :

Lemme 1.22 Soit R un anneau de Dedekind et Λ un ordre de Gorenstein. Soient X et W des Λ -modules et

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{\iota} Y \rightarrow Z \rightarrow 0$$

une suite exacte de Λ -modules où Z est un Λ -réseau. Alors,

$$\mathcal{P}(X, W) \subset \iota.Hom_{\Lambda}(Y, W)$$

Si Y est Λ -projectif,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X, W) &= \iota.Hom_{\Lambda}(Y, W) \\ \text{et } \underline{Hom}_{\Lambda}(X, W) &= Hom_{\Lambda}(X, W) / \iota.Hom_{\Lambda}(Y, W) \end{aligned}$$

où $\iota.Hom_{\Lambda}(Y, W) = \{\iota\gamma : \gamma \in Hom_{\Lambda}(Y, W)\}$.

Démonstration Etant donné une suite exacte de Λ -modules

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{\iota} Y \rightarrow Z \rightarrow 0$$

où Z est un Λ -réseau.

Si $\gamma \in Hom_{\Lambda}(X, W)$ factorise vers un projectif \tilde{P} , il factorise vers Y . En effet, soit $\gamma \in Hom_{\Lambda}(X, W)$ tel que

$$\gamma = \chi\delta$$

où $\chi \in Hom_{\Lambda}(X, \tilde{P})$ et $\delta \in Hom_{\Lambda}(\tilde{P}, W)$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\chi} & \tilde{P} \\ \downarrow \gamma & & \searrow \delta \\ W & & \end{array}$$

Nous formons une somme amalgamée

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\iota} & Y \\ \downarrow \chi & & \downarrow \\ \tilde{P} & \rightarrow & U \end{array}$$

et nous la complétons en un diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & X & \xrightarrow{\iota} & Y & \rightarrow & Z & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \chi & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \rightarrow & \tilde{P} & \rightarrow & U & \rightarrow & Z & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Comme \tilde{P} est Λ -projectif, Z est un Λ -réseau, et Λ étant de Gorenstein, la suite en bas est scindée, ce qui nous donne un homomorphisme $\epsilon : Y \rightarrow \tilde{P}$ tel que

$$\iota\epsilon = \chi.$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\iota} & Y \\ \downarrow \chi & & \searrow \epsilon \\ \tilde{P} & & \end{array}$$

Comme

$$\begin{aligned} \gamma &= \chi\delta \\ &= \iota\epsilon\delta \in \iota.Hom_{\Lambda}(Y, W), \end{aligned}$$

γ factorise vers Y . D'où $\mathcal{P}(X, W) \subset \iota.Hom_{\Lambda}(Y, W)$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\iota} & Y \\ \downarrow \gamma & & \searrow \epsilon\delta \\ W & & \end{array}$$

Evidemment, si Y est Λ -projectif, $\iota.Hom_{\Lambda}(Y, W) \subseteq \mathcal{P}(X, W)$. Dans ce cas,

$$\mathcal{P}(X, W) = \iota.Hom_{\Lambda}(Y, W) \text{ et } \underline{Hom}_{\Lambda}(X, W) = Hom_{\Lambda}(X, W) / \iota.Hom_{\Lambda}(Y, W)$$

■

Remarque Si Y n'est pas projectif, l'inclusion sera propre en général. Par exemple, si X est un Λ -module de R -torsion, $\mathcal{P}(X, W) = 0$, mais $\iota.Hom_{\Lambda}(Y, W)$ n'est pas toujours 0.

1.3.3 Complexes basculants de modules sur un ordre

Soit Λ un R -ordre. Dans cette section on étudie les équivalences dérivées de complexes de Λ -modules.

Une des outils pour étudier les équivalences dérivées sur des ordres sont les théorèmes suivants :

Théorème 1.23 [18, Théorème 3.3]

Soit R un anneau noethérien local commutatif complet avec idéal maximal \mathcal{M} et corps résiduel $k = R/\mathcal{M}$. Supposons que Λ est une R -algèbre qui est libre de rank fini en tant que R -module. On note $\Lambda_1 := k \otimes_R \Lambda$.

Si T_1 est un complexe basculant sur Λ_1 , alors il existe un complexe basculant T sur Λ , unique à isomorphisme près, tel que

$$T_1 \cong k \otimes_R T.$$

L'anneau des endomorphismes de T_1 est libre en tant que R -module et

$$\text{End}_{D^b(\Lambda_1)}(T_1) \cong k \otimes_R \text{End}_{D^b(\Lambda)}(T).$$

Théorème 1.24 [23, II 5 Théorème 3]

Si k est un corps parfait de caractéristique p , alors il existe un anneau de valuation discrète R de caractéristique 0, qui admet k comme corps résiduel.

D'après ces théorèmes, étant donné un corps parfait k , nous pouvons toujours trouver un anneau de valuation discrète R tel que k soit son corps résiduel et un complexe basculant sur $k \otimes_R \Lambda$ peut se relever à un complexe basculant sur Λ .

Concernant des équivalences dérivées de complexes de modules sur un ordre symétrique, nous avons le théorème suivant :

Théorème 1.25 [28] *Soit R un anneau intègre. Si Λ et Γ sont des R -algèbres R -projectives tels qu'il existe une équivalence dérivée $D^b(\Lambda) \cong D^b(\Gamma)$, alors*

$$\text{Hom}_R(\Lambda, R) \cong \Lambda \text{ si et seulement si } \text{Hom}_R(\Gamma, R) \cong \Gamma.$$

Ceci veut dire que toutes les algèbres qui ont une catégorie dérivée équivalente avec celle d'un ordre symétrique sont aussi des ordres symétriques, sous condition que R soit héréditaire.

Steffen König et Alexander Zimmermann ont étudié l'anneau des endomorphismes d'un complexe basculant T sur un ordre de Gorenstein. Par leur résultat nous pouvons déterminer l'anneau des endomorphismes de T à partir des anneaux des endomorphismes des homologies de T .

Théorème 1.26 [12] *Soient R un anneau de Dedekind local complet et Λ un ordre de Gorenstein.*

Soit L un Λ -module qui est projectif de type fini en tant que R -module.

On note par

$$\cdots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P \xrightarrow{\varphi} Q \xrightarrow{\pi} L \rightarrow 0$$

les premiers termes d'une résolution projective de L .

Soit P' un Λ -module projectif tel que $P' \oplus Q$ soit un progénérateur pour Λ et tel que P soit un facteur direct de P' mais Q et P' n'ont pas de facteur direct commun.

On définit le complexe T

$$0 \rightarrow P \oplus P' \xrightarrow{(\varphi, 0)} Q \rightarrow 0$$

où l'homologie est concentrée en degrés -1 et 0. On note $C := \text{Ker}(\varphi)$, $C' := C \oplus P'$, et ι l'inclusion $C' \hookrightarrow P \oplus P'$.

Supposons que

$$\text{Hom}_\Lambda(P \oplus P', L) = 0 = \text{Hom}_\Lambda(L, P \oplus P').$$

Alors, T est un complexe basculant et $\text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T, T)$ est le produit fibré dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \text{Hom}_\Lambda(P \oplus P', C') \cdot \iota & = & \iota \cdot \text{Hom}_\Lambda(P \oplus P', C) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \pi \cdot \text{Hom}_\Lambda(L, Q) & \rightarrow & \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T, T) & \rightarrow & \text{Hom}_\Lambda(C', C') \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \text{Hom}_\Lambda(L, Q) \cdot \pi & \rightarrow & \text{Hom}_\Lambda(L, L) & \rightarrow & \text{Hom}_\Lambda(L, L) / \text{Hom}_\Lambda(L, Q) \cdot \pi \rightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

L'application

$$\text{Hom}_\Lambda(C', C') \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(L, L) / \text{Hom}_\Lambda(L, Q). \pi$$

est définie en relevant un endomorphisme de C' à travers la suite exacte

$$0 \rightarrow C' \rightarrow P \oplus P' \rightarrow Q \rightarrow L \rightarrow 0.$$

En utilisant le fait que Λ est de Gorenstein, l'endomorphisme de L ainsi obtenu est bien défini modulo $\text{Hom}_\Lambda(L, Q). \pi$.

Ce théorème utilise le fait que L est sans R -torsion, et utilise un complexe basculant de longueur 2. Nous voulons obtenir un résultat analogue si Λ n'est qu'une algèbre sur un anneau commutatif et L est un Λ -module arbitraire et si T est un complexe de longueur n qui satisfait certaines conditions. Dans le chapitre 2, nous enlevons la plupart des hypothèses du Théorème 1.26 et nous allons la remplacer par une condition plus faible. Nous donnons une généralisation pour des complexes basculants partiels de longueur n dans le chapitre 3.

Chapitre 2

Complexes à deux termes

Dans ce chapitre nous allons étudier l'anneau des endomorphismes des complexes à deux termes. Ceci est un cas particulier du cas étudié au chapitre 3 et cette étude n'est donc pas indispensable. Néanmoins, afin d'illustrer les démarches et de pouvoir établir plus clairement les arguments nécessaires sans surcharge notationnelle il nous paraissait instructif de séparer ce cas ici.

2.1 Le calcul de $End_{D^b(\Lambda)}(T)$

Soit R un anneau commutatif et Λ une R -algèbre. Soit T un complexe

$$0 \rightarrow P \xrightarrow{\alpha} Q \rightarrow 0$$

où P et Q sont des Λ -modules projectives et l'homologie de T est concentrée en degrés 1 et 2.

On note $C = Ker(\alpha)$, $L = Coker(\alpha)$ et ι l'inclusion $C \hookrightarrow P$.

Nous allons donner une condition suffisante pour que T soit un complexe basculant partiel. Pour alléger la présentation, notons pour tous deux complexes de Λ -modules X et Y

$$(X, Y) := Hom_{D^b(\Lambda)}(X, Y), \quad \beta.(X, Y) := \{\beta\varphi : \varphi \in (X, Y)\}$$

et notons

$$Ext^1(M, N) = Ext_{\Lambda}^1(M, N)$$

pour deux Λ -modules M et N , si ceci n'implique pas de confusions.

Lemme 2.1 *Si $(P, L) = 0$ et $(L, P) = 0$ alors T est un complexe basculant partiel.*

Démonstration

L'hypothèse $(P, L) = 0$ implique que chaque homomorphisme de P à Q factorise à travers $P \xrightarrow{\alpha} Q$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & P & \rightarrow & Q & \rightarrow & 0 & & T \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \rho \\ 0 & \rightarrow & P & \xrightarrow{\alpha} & Q & \rightarrow & 0 & & T[1] \end{array}$$

et donc un morphisme $\rho \in (T, T[1])$ est homotope à 0.

L'hypothèse $(L, P) = 0$ implique qu'un homomorphisme $\gamma : Q \rightarrow P$ avec $\alpha\gamma = 0$ est 0 :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & P & \xrightarrow{\alpha} & Q & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \gamma & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & P & \rightarrow & Q & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Donc $\gamma = 0$ implique $(T, T[-1]) = 0$.

Ceci montre que T est un complexe basculant partiel. ■

Remarque

1. Si T est un complexe basculant partiel, la réciproque n'est pas toujours vraie. Un exemple sera donné dans le chapitre 4 (Exemple 4.2).
2. Si Λ est un ordre, alors $\text{Hom}_{\Lambda}(P, L) = 0$ implique $\text{Hom}_{\Lambda}(L, P) = 0$.

En fait,

$$\begin{aligned} (P, L) = 0 &\Rightarrow (P, L/tL) = 0 \\ &\Rightarrow (L/tL, P) = 0 \\ &\Rightarrow (L, P) = 0 \end{aligned}$$

où L/tL est la partie sans R -torsion de L .

Lemme 2.2 *Il existe un triangle de $D^b(\Lambda)$*

$$T \rightarrow L[-1] \rightarrow C[1] \rightsquigarrow T[1]$$

Démonstration En effet, nous avons une suite exacte de complexes de Λ -modules

$$\epsilon : 0 \rightarrow C \xrightarrow{\iota} T \xrightarrow{\phi} L[-1] \rightarrow 0$$

où $L[-1]$ est présenté par le complexe $0 \rightarrow \text{Im}(\alpha) \rightarrow Q \rightarrow 0$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & & 0 \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & C & \rightarrow & 0 & & C \\
 \downarrow & & \downarrow \iota & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & P & \xrightarrow{\alpha} & Q & \rightarrow & 0 & T \\
 \downarrow & & \downarrow \phi & & \parallel & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & \text{Im}(\alpha) & \rightarrow & Q & \rightarrow & 0 & L[-1] \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Cette suite exacte donne lieu au triangle

$$C \rightarrow T \rightarrow L[-1] \xrightarrow{\delta\epsilon} C[1]$$

où $\delta\epsilon$ est le triple (δ, M, ζ) tel que M est le complexe

$$0 \rightarrow C \xrightarrow{\iota} P \xrightarrow{\alpha} Q \rightarrow 0$$

(C est de degré 0), δ est le morphisme $(0 \rightarrow \phi)$ et ζ est la projection $M \rightarrow C[1]$.
D'après l'axiome TR3, $T \rightarrow L[-1] \rightarrow C[1] \rightsquigarrow T[1]$ est un triangle. ■

On note par

$$\dots \rightarrow P^{-1} \rightarrow P^0 \xrightarrow{\alpha^0} P \xrightarrow{\alpha} Q \rightarrow L \rightarrow 0$$

les premiers termes d'une résolution projective de L .

Nous allons regarder l'application $(C, C) \rightarrow (L, C[2])$ qui est plus explicitement donnée par l'homomorphisme

$$\begin{array}{ccc}
 (C, C) & \xrightarrow{\zeta} & (L, C[2]) \\
 \varphi & \mapsto & \eta\varphi
 \end{array}$$

où η est l'application d'enveloppe projective $P^0 \rightarrow C$ satisfaisant $\eta\iota = \alpha^0$, où α^0 est l'homomorphisme $P^0 \rightarrow P$, et où l'on remplace L par sa résolution projective.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots & \rightarrow & P^{-1} & \rightarrow & P^0 & \xrightarrow{\alpha^0} & P & \xrightarrow{\alpha} & Q & \rightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow \eta & & \downarrow & & & & \\
& & 0 & \rightarrow & C & \rightarrow & 0 & & & & \\
& & \downarrow & & \downarrow \varphi & & \downarrow & & & & \\
& & 0 & \rightarrow & C & \rightarrow & 0 & & & &
\end{array}$$

Lemme 2.3 *L'homomorphisme $(C, C) \xrightarrow{\zeta} (L, C[2])$ donne lieu à une suite exacte*

$$0 \rightarrow \iota.(P, C) \rightarrow (C, C) \xrightarrow{\zeta} (L, C[2]) \rightarrow 0$$

Démonstration

1. $Ker(\zeta) = \iota.(P, C)$.

En effet,

$$Ker(\zeta) = \{\varphi \in (C, C) : \eta\varphi \text{ est homotope à } 0\}.$$

Maintenant, si $\iota\delta \in \iota.(P, C)$, alors $\eta\iota\delta$ est homotope à zero par la homotopie δ , et nous obtenons

$$\iota.(P, C) \subseteq Ker(\zeta).$$

En revanche, si $\varphi \in Ker(\zeta)$, il existe un $h \in (P, C)$ tel que

$$\eta\varphi = \alpha^0 h = \eta\iota h,$$

et comme η est surjectif, cela nous donne

$$\varphi = \iota h \in \iota.(P, C)$$

et nous obtenons donc $Ker(\zeta) \subseteq \iota.(P, C)$. D'où l'égalité.

2. ζ est surjectif

En effet, un élément de $(L, C[2])$ est donné par un diagramme comme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots & \rightarrow & P^{-1} & \rightarrow & P^0 & \xrightarrow{\alpha^0} & P & \rightarrow & Q & \rightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
& & 0 & \rightarrow & C & \rightarrow & 0 & & & &
\end{array}$$

Comme ce diagramme est commutatif, le morphisme $P^0 \rightarrow C$ factorise à travers le conoyau du morphisme $P^{-1} \rightarrow P^0$, qui est égal à C . Alors, si $\varphi \in (L, C[2])$, il existe un $\gamma \in (C, C)$ tel que

$$\varphi = \eta\gamma.$$

D'où la surjectivité de ζ .

Nous avons donc la suite exacte

$$0 \rightarrow \iota.(P, C) \rightarrow (C, C) \xrightarrow{\zeta} (L, C[2]) \rightarrow 0$$

■

Lemme 2.4 *Si R est un anneau de Dedekind et Λ est un ordre de Gorenstein, $(L, C[2]) = \underline{Hom}_\Lambda(C, C)$.*

Démonstration Nous appliquons le Lemme 1.22 à C et à la suite exacte

$$0 \rightarrow C \xrightarrow{\iota} P \rightarrow \text{Im}(\alpha) \rightarrow 0$$

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} \underline{Hom}_\Lambda(C, C) &= (C, C)/\iota.(P, C) \\ &= (L, C[2]) \text{ d'après Lemme 2.3.} \end{aligned}$$

■

Nous avons un morphisme $\theta : (L, L) \rightarrow (L, C[2])$ qui est défini en appliquant le foncteur $(L[-1], -)$ au triangle $T \rightarrow L[-1] \rightarrow C[1] \rightsquigarrow T[1]$.

Théorème 2.5 *Si $\text{Ext}_\Lambda^1(L, C) = 0$, l'anneau des endomorphismes de T est un produit fibré de θ et ζ*

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T, T) & \rightarrow & \text{Hom}_\Lambda(L, L) \\ \downarrow \psi & & \downarrow \theta \\ \text{Hom}_\Lambda(C, C) & \xrightarrow{\zeta} & \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(L, C[2]) \end{array}$$

En plus, si R est un anneau de Dedekind et Λ est un ordre de Gorenstein $\text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T, T)$ est un produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T, T) & \rightarrow & \text{Hom}_{\Lambda}(L, L) \\ \downarrow \psi & & \downarrow \theta \\ \text{Hom}_{\Lambda}(C, C) & \xrightarrow{\zeta} & \underline{\text{Hom}}_{\Lambda}(C, C) \end{array}$$

où $\underline{\text{Hom}}_{\Lambda}(C, C)$ est l'anneau des endomorphismes de C dans la catégorie stable de Λ -modules. Dans ce cas, tous les morphismes sont des morphismes d'anneaux.

Remarque

1. En général ψ n'est pas surjectif. La question de déterminer l'image est délicate et sera traité dans la section 2.2.
Attention : Le fait que ψ n'est pas surjectif induit des problèmes pour le calcul de $\text{End}_{D^b(\Lambda)}(T)$ comme il est montré dans l'Exemple 4.4 au chapitre 4.
2. Si Λ n'est pas un ordre de Gorenstein, la structure multiplicative de $(L, C[2])$ n'est pas claire ici. On verra dans le Lemme 2.15 un autre produit fibré qui définit la structure multiplicative de (T, T) .

La démonstration du Théorème 2.5 suit en partie la démonstration du Théorème 1.26 [12].

Lemme 2.6 *Le triangle dans le Lemme 2.2 induit une suite exacte*

$$0 \rightarrow (T, C) \rightarrow (T, T) \rightarrow (L, L) \rightarrow 0$$

Démonstration On applique le foncteur $(T, -)$ au triangle

$$T \rightarrow L[-1] \rightarrow C[1] \rightsquigarrow T[1]$$

ce qui nous donne une suite exacte longue dont une partie est :

$$\cdots \rightarrow (T, L[-2]) \rightarrow (T, C) \rightarrow (T, T) \rightarrow (T, L[-1]) \rightarrow (T, C[1]) \rightarrow \cdots$$

1. $(T, L[-2]) = 0$

En effet, comme le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & \rightarrow & P & \rightarrow & Q & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \rightarrow & P^{-1} & \rightarrow & P^0 & \rightarrow & P & \rightarrow & Q & \rightarrow & 0 \end{array}$$

est commutatif, le morphisme vertical $Q \rightarrow P$ factorise à travers le noyau du morphisme horizontal $P \rightarrow Q$, donc vers son enveloppe projectif P^0 . Le morphisme dans $(T, L[-2])$ est donc homotope à un morphisme qui est 0 en degré 2. On peut alors supposer que l'homomorphisme vertical $Q \rightarrow P$ est 0. Maintenant, un argument analogue appliqué à l'homomorphisme vertical $P \rightarrow P^0$ implique que l'homomorphisme vertical $P \rightarrow P^0$ est homotope à 0 avec une homotopie $h : P \rightarrow P^{-1}$.

2. $(T, C[1]) = 0$

Ceci est clair, parce que T est concentré en degrés 1 et 2 et dans ces degrés-là la résolution projective de $C[1]$ est 0.

3. $(T, L[-1]) \cong (L, L)$

L'application

$$\begin{array}{ccc} (T, L[-1]) & \xrightarrow{H^2} & (L, L) \\ \varphi & \mapsto & H^2(\varphi) \end{array}$$

est bijective.

En effet, soit φ un endomorphisme de L et $\phi : Q \rightarrow L$ l'application d'enveloppe projective. Comme Q est projectif, et ϕ est un épimorphisme, l'application $\phi\varphi : Q \rightarrow L$ factorise à travers ϕ , cela veut dire qu'il existe un $\rho : Q \rightarrow Q$ tel que

$$\rho\phi = \phi\varphi.$$

A commutative triangle diagram with vertices Q (top), Q (bottom-left), and L (bottom-right). The map from the top Q to the bottom-left Q is labeled ρ . The map from the top Q to the bottom-right L is labeled $\phi\varphi$. The map from the bottom-left Q to the bottom-right L is labeled ϕ .

Comme $\alpha : P \rightarrow Q$ est le différentiel de T , nous avons

$$(\alpha\rho)\phi = \alpha(\rho\phi) = \alpha(\phi\varphi) = (\alpha\phi)\varphi = 0$$

car $\alpha\phi = 0$. Comme P est l'enveloppe projective du noyau de ϕ , l'application $\alpha\rho$ factorise à travers P . Alors, il existe un homomorphisme $\sigma : P \rightarrow P$ tel que

$$\sigma\alpha = \alpha\rho.$$

$$\begin{array}{ccccccc} P & \xrightarrow{\alpha} & Q & \xrightarrow{\phi} & L \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \rho & & \downarrow \varphi \\ P & \xrightarrow{\alpha} & Q & \xrightarrow{\phi} & L \end{array}$$

Ceci montre la surjectivité de H^2 .

Nous allons montrer l'injectivité de H^2 . Soit $(\sigma, \rho) \in (T, L[-1])$ tel que $H^2(\sigma, \rho) = 0$. Alors, comme $\rho\phi = 0$, on obtient $\rho : Q \rightarrow Q$ factorise à travers $\text{Ker}(\phi)$, et comme P est son enveloppe projective, il existe un homomorphisme $\rho' : Q \rightarrow P$ tel que $\rho'\alpha = \rho$.

$$\begin{array}{ccc} & & Q \\ & \nearrow \rho' & \downarrow \rho \\ P & \xrightarrow{\alpha} & \text{Ker}(\phi) \end{array}$$

Alors, on obtient une homotopie (nommée ρ') et nous pouvons supposer que $\rho = 0$. Le même argument appliqué à σ implique que (σ, ρ) est homotope à 0.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & P & \xrightarrow{\alpha} & Q & \xrightarrow{\phi} & L \\ & & \downarrow & & \downarrow \rho & & \downarrow \varphi \\ \dots & \rightarrow & P^0 & \rightarrow & P & \xrightarrow{\alpha} & Q & \xrightarrow{\phi} & L \end{array}$$

Alors, H^2 est un isomorphisme.

Les trois premiers énoncés impliquent que la suite courte

$$0 \rightarrow (T, C) \rightarrow (T, T) \rightarrow (L, L) \rightarrow 0$$

est exacte. ■

Nous allons regarder l'application $(T, C) \rightarrow (C, C)$ qui provient du foncteur $(-, C)$ appliqué au triangle

$$T \rightarrow L[-1] \rightarrow C[1] \rightsquigarrow T[1]$$

Cette application est plus explicitement donnée par l'homomorphisme

$$\begin{array}{ccc} (T, C) & \xrightarrow{H^1} & (C, C) \\ \varphi & \mapsto & H^1(\varphi) \end{array}$$

Lemme 2.7 $Im(H^1) = \iota.(P, C)$

Démonstration L'homomorphisme H^1 associé à φ la composition $\iota\varphi\lambda$ dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & C & & & \\ & & & \downarrow \iota & & & \\ & 0 & \rightarrow & P & \rightarrow & Q & \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & \downarrow \varphi & & \downarrow & \\ \dots & \rightarrow & P^{-1} & \rightarrow & P^0 & \rightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow \lambda & & \\ & & & & C & & \end{array}$$

où λ est l'application d'enveloppe projective donnant un isomorphisme entre le complexe $\dots \rightarrow P^{-1} \rightarrow P^0 \rightarrow 0$ et C .

Cette observation donne

$$Im(H^1) \subseteq \iota.(P, C)$$

En revanche, soit $\chi \in \iota.(P, C)$, donc $\chi = \iota\chi'$ pour un $\chi' : P \rightarrow C$. Comme $P^0 \xrightarrow{\lambda} C \rightarrow 0$ est exact, et P est projectif, χ' factorise à travers P^0 .

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & \nearrow \bar{\chi} & \downarrow \chi' \\ P^0 & \xrightarrow{\lambda} & C \end{array}$$

Par conséquent, il existe un $\bar{\chi} : P \rightarrow P^0$ tel que $\bar{\chi}\lambda = \chi'$. Alors, $\chi = \iota\bar{\chi}\lambda$. Ceci montre que

$$\iota.(P, C) \subseteq \text{Im}(H^1).$$

D'où l'égalité. ■

Lemme 2.8 *Il existe une suite exacte*

$$0 \rightarrow (L[-1], C) \rightarrow (T, C) \rightarrow \iota.(P, C) \rightarrow 0$$

Démonstration Nous avons une suite exacte longue

$$\cdots \rightarrow (C[1], C) \rightarrow (L[-1], C) \rightarrow (T, C) \rightarrow (C, C) \rightarrow \cdots$$

qui provient de foncteur $(-, C)$ appliqué au triangle

$$T \rightarrow L[-1] \rightarrow C[1] \rightsquigarrow T[1].$$

1. $(C[1], C) = 0$

En effet, comme le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & P^{-1} & \rightarrow & P^0 & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \rightarrow & P^{-2} & \rightarrow & P^{-1} & \rightarrow & P^0 \rightarrow 0 \end{array}$$

est commutatif, le morphisme vertical $P^0 \rightarrow P^{-1}$ factorise à travers le noyau du morphisme horizontal $P^{-1} \rightarrow P^0$, donc vers son enveloppe projectif P^{-2} . On peut donc supposer que l'homomorphisme vertical $P^0 \rightarrow P^{-1}$ est 0. Maintenant, un argument analogue appliqué à l'homomorphisme vertical $P^i \rightarrow P^{i-1}$ pour tout $i < 0$ implique que l'homomorphisme vertical $P^i \rightarrow P^{i-1}$ est homotope à 0 avec une homotopie $h^i : P^i \rightarrow P^{i-2}$ pour tout $i \leq 0$.

2. D'après le Lemme 2.7, l'image de $(T, C) \rightarrow (C, C)$ est $\iota.(P, C)$

D'après les deux énoncés ci-dessus, la suite

$$0 \rightarrow (L[-1], C) \rightarrow (T, C) \rightarrow \iota.(P, C) \rightarrow 0$$

est exacte. ■

Lemme 2.9 *Le morphisme $T \rightarrow L[-1]$ donne lieu à une suite exacte*

$$0 \rightarrow (L[-1], T) \rightarrow (T, T) \xrightarrow{\psi} (C, C)$$

Démonstration On applique le foncteur $(-, T)$ au triangle

$$T \rightarrow L[-1] \rightarrow C[1] \rightsquigarrow T[1]$$

ce qui donne une suite exacte longue dont une partie est :

$$\cdots \rightarrow (C[1], T) \rightarrow (L[-1], T) \rightarrow (T, T) \rightarrow (C, T) \rightarrow (L[-2], T) \rightarrow \cdots$$

1. $(C[1], T) = 0$ parce que T est concentré en degré 1 et 2, où chaque résolution projective de $C[1]$ est 0.
2. $(C, T) = (C, C)$.

Nous avons l'application $(C, C) \rightarrow (C, T)$ qui est plus explicitement donné par l'homomorphisme

$$\begin{array}{ccc} (C, C) & \xrightarrow{\iota} & (C, T) \\ \varphi & \mapsto & (\varphi\iota, 0). \end{array}$$

Il est clair que cette application est injective.

Maintenant, un élément de (C, T) est donné par un diagramme commutatif comme ci-dessous

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C & \rightarrow & 0 & & \\ & & \downarrow \varphi & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & P & \xrightarrow{\alpha} & Q & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Comme $\varphi\alpha = 0$, on obtient un $\gamma \in (C, C)$ tel que $\gamma\iota = \varphi$. L'application ι est donc surjective. D'où $(C, T) = (C, C)$.

3. Si R est un anneau de Dedekind et Λ est un ordre de Gorenstein,

$$(L[-2], T) = \frac{(Im(\alpha), Q)}{j \cdot (Q, Q) + (Im(\alpha), P) \cdot \alpha}$$

où j est l'inclusion $Im(\alpha) \hookrightarrow Q$.

En effet, un element $\gamma \in (L[-2], T)$ est donné par une suite d'applications $(\gamma^i)_{i \leq 2}$ où $\gamma^2 = 0$, $\gamma^1 \in (P, Q)$, $\gamma^0 \in (P^0, P)$ et $\gamma^i = 0$ pour tout $i < 0$.

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \rightarrow & P^{-1} & \rightarrow & P^0 & \xrightarrow{\alpha^0} & P & \rightarrow & Q & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \gamma^0 & & \downarrow \gamma^1 & & \downarrow & & \\ & & 0 & \rightarrow & P & \xrightarrow{\alpha} & Q & \rightarrow & 0 & & \end{array}$$

Alors, γ^0 induit une application $\bar{\gamma}^0 \in \text{Hom}(\text{Coker}(P^{-1} \rightarrow P^0), P)$. En fait, $\text{Coker}(P^{-1} \rightarrow P^0) = C$.

Nous formons une somme amalgamée

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\iota} & P \\ \downarrow \bar{\gamma}^0 & & \downarrow \\ P & \rightarrow & X \end{array}$$

et nous la complétons dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & C & \xrightarrow{\iota} & P & \rightarrow & \text{Im}(\alpha) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \bar{\gamma}^0 & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \rightarrow & P & \rightarrow & X & \rightarrow & \text{Im}(\alpha) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Comme $\text{Im}(\alpha)$ est un Λ -réseau, P étant Λ -projectif et Λ de Gorenstein, la suite exacte en bas est devenue scindée, et nous obtenons un $h \in (P, P)$ qui donne $\bar{\gamma}^0$ (et aussi γ^0) homotope à 0. On supposera donc dans la suite que $\gamma^0 = 0$.

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \rightarrow & P^{-1} & \rightarrow & P^0 & \xrightarrow{\alpha^0} & P & \xrightarrow{\alpha} & Q & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow 0 & & \downarrow \gamma^1 & & \downarrow & & \\ & & 0 & \rightarrow & P & \rightarrow & Q & \rightarrow & 0 & & \end{array}$$

Du fait que $\gamma^0 = 0$, le morphisme γ^1 induit une application dans $\text{Hom}(\text{Coker}(P^0 \rightarrow P), Q)$. Et comme $\text{Coker}(P^0 \rightarrow P) = \text{Im}(\alpha)$, on identifie $(L[-2], T)$ avec $(\text{Im}(\alpha), Q)$ modulo une homotopie, c.-à.-d

$$(L[-2], T) = \frac{(\text{Im}(\alpha), Q)}{j \cdot (Q, Q) + (\text{Im}(\alpha), P) \cdot \alpha}$$

où j est l'inclusion $\text{Im}(\alpha) \hookrightarrow Q$.

Comme $(L[-2], T)$ n'est pas toujours 0, l'application $(T, T) \rightarrow (C, C)$ n'est pas toujours surjectif. Nous obtenons la suite exacte

$$0 \rightarrow (L[-1], T) \rightarrow (T, T) \rightarrow (C, C)$$

■

Remarque

1. Si Λ est un ordre de Gorenstein et L est sans R -torsion, alors $(L[-2], T) = 0$, c'est à dire l'application $\psi : (T, T) \rightarrow (C, C)$ est toujours surjectif. Ceci est le cas du Théorème 1.26 montré dans [12].
2. Nous donnons un exemple (Exemple 4.4) dans le chapitre 4 pour lequel ψ n'est pas surjectif.

Lemme 2.10 *Si $Ext^1(L, C) = 0$, le morphisme $T \rightarrow L[-1]$ donne lieu à une suite exacte*

$$0 \rightarrow (L[-1], T) \rightarrow (L, L) \rightarrow (L[-1], C[1])$$

Démonstration Ceci est montré en appliquant $(L[-1], -)$ au triangle

$$T \rightarrow L[-1] \rightarrow C[1] \rightsquigarrow T[1]$$

qui donne une suite exacte longue dont une partie est :

$$\cdots \rightarrow (L[-1], C) \rightarrow (L[-1], T) \rightarrow (L[-1], L[-1]) \rightarrow (L[-1], C[1]) \rightarrow (L[-1], T[1]) \rightarrow \cdots$$

L'énoncé vient maintenant du fait que $(L[-1], C) = Ext^1(L, C) = 0$. ■

Nous écrivons les suite exactes dans le Lemme 2.3, 2.6, 2.8, 2.9 et 2.10 en diagramme pour lequel nous allons montrer la comutativité

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & Hom_{D^b(\Lambda)}(L[-1], C) & & Hom_{D^b(\Lambda)}(L[-1], T) & & Hom_{D^b(\Lambda)}(L[-1], T) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & Hom_{D^b(\Lambda)}(T, C) & \rightarrow & Hom_{D^b(\Lambda)}(T, T) & \rightarrow & Hom_{\Lambda}(L, L) & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & \iota.Hom_{\Lambda}(P, C) & \rightarrow & Hom_{\Lambda}(C, C) & \rightarrow & Hom_{D^b(\Lambda)}(L, C[2]) & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & &
 \end{array}$$

Lemme 2.11 *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} (T, T) & \rightarrow & (L, L) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (C, C) & \rightarrow & (L, C[2]) \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration Soit φ un élément de (T, T) . Il est donné par des applications $\varphi^1 \in (P, P)$ et $\varphi^2 \in (Q, Q)$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & P & \xrightarrow{\alpha} & Q & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi^1 & & \downarrow \varphi^2 & & \\ 0 & \rightarrow & P & \xrightarrow{\alpha} & Q & \rightarrow & 0 \end{array}$$

L'image de φ dans $(T, L[-1])$ est $\varphi^2\phi$ où ϕ est l'application d'enveloppe projective $Q \xrightarrow{\phi} L$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & P & \xrightarrow{\alpha} & Q & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \varphi^2\phi & & \\ & & 0 & \rightarrow & L & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Dans la démonstration du Lemme 2.6, nous avons montré que H^2 induit une bijection entre $(T, L[-1])$ et (L, L) . Par conséquent, on peut identifier l'image de φ avec $\bar{\varphi} \in (L, L)$ qui est donné par une suite d'applications $(\varphi^i)_{i \leq 2}$ où $(\varphi^1, \varphi^2) = \varphi$, $\varphi^i \in (P^i, P^i)$, pour tout $i \leq 0$.

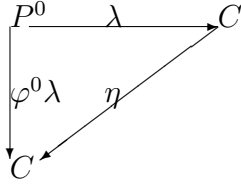
$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & P^0 & \xrightarrow{\alpha^0} & P & \xrightarrow{\alpha} & Q & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi^0 & & \downarrow \varphi^1 & & \downarrow \varphi^2 & & \\ \dots & \rightarrow & P^0 & \xrightarrow{\alpha^0} & P & \xrightarrow{\alpha} & Q & \rightarrow & 0 \end{array}$$

L'image de $\bar{\varphi}$ dans $(L, C[2])$ est $\varphi^0\lambda$ où λ est l'application d'enveloppe projective $P^0 \xrightarrow{\lambda} C$.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & P^{-1} & \xrightarrow{\alpha^{-1}} & P^0 & \xrightarrow{\alpha^0} & P & \xrightarrow{\alpha} & Q & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \varphi^0\lambda & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & \rightarrow & C & \rightarrow & 0 & & & & \end{array}$$

Comme $\alpha^{-1}\varphi^0\lambda = 0$, l'application $\varphi^0\lambda$ induit une application dans $\text{Hom}(\text{Coker}(P^{-1} \rightarrow P^0), C)$, et comme $\text{Coker}(P^{-1} \rightarrow P^0) = C$, il existe un $\eta \in (C, C)$ tel que

$$\lambda\eta = \varphi^0\lambda. \quad (2.1)$$



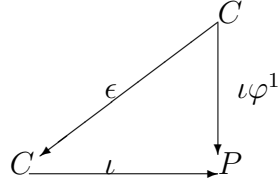
L'image de $\bar{\varphi}$ dans $(L, C[2])$ est donc $\eta + \iota.(P, C)$.

De l'autre coté, l'image de φ dans (C, T) est $\iota\varphi^1$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C & \rightarrow & 0 & & \\ & & \downarrow \iota\varphi^1 & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & P & \xrightarrow{\alpha} & Q & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Comme $\iota\varphi^1\alpha = 0$, il existe un $\epsilon \in (C, C)$ tel que

$$\epsilon\iota = \iota\varphi^1.$$



L'image de ϵ dans $(L, C[2])$ est $\epsilon + \iota.(P, C)$.

On va montrer que $\epsilon = \eta$. En effet, comme $\lambda\iota = \alpha^0$, et $\alpha^0\varphi^1 = \varphi^0\alpha^0$

$$\begin{aligned} \lambda\epsilon\iota &= \lambda\iota\varphi^1 \\ &= \alpha^0\varphi^1 \\ &= \varphi^0\alpha^0 \\ &= \varphi^0\lambda\iota. \end{aligned}$$

Et comme ι est injectif, nous obtenons

$$\lambda\epsilon = \varphi^0\lambda$$

Or, d'après (2.1), $\varphi^0\lambda = \lambda\eta$, alors

$$\lambda\epsilon = \lambda\eta$$

Et comme λ est surjectif, nous obtenons $\epsilon = \eta$. Ceci termine la démonstration.

■

Lemme 2.12 *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} (T, C) & \rightarrow & (T, T) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \iota.(P, C) & \rightarrow & (C, C) \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration Soit $\varphi \in (T, C)$. Il est donné par le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & P & \xrightarrow{\alpha} & Q & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & C & \rightarrow & 0 & & \end{array}$$

L'image de φ dans (T, T) est $\varphi\iota$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & P & \xrightarrow{\alpha} & Q & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi\iota & & \downarrow 0 & & \\ 0 & \rightarrow & P & \xrightarrow{\alpha} & Q & \rightarrow & 0 \end{array}$$

L'image de $\varphi\iota$ dans (C, T) est $\iota\varphi\iota$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C & \rightarrow & 0 & & \\ & & \downarrow \iota\varphi\iota & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & P & \xrightarrow{\alpha} & Q & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Comme $(\iota\varphi\iota)\alpha = \iota\varphi(\iota\alpha) = 0$, il existe un $\bar{\varphi} \in (C, C)$ tel que

$$\bar{\varphi}\iota = \iota\varphi\iota$$

Comme ι est injectif, nous avons donc

$$\bar{\varphi} = \iota\varphi$$

Comme l'image de φ dans $\iota.(P, C)$ est $\iota\varphi$. Ceci termine la démonstration. ■

Nous venons de montrer que ce diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(L[-1], C) & & \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(L[-1], T) & & \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(L[-1], T) \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \rightarrow & \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T, C) & \rightarrow & \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T, T) & \rightarrow & \text{Hom}_{\Lambda}(L, L) & \rightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & \iota.\text{Hom}_{\Lambda}(P, C) & \rightarrow & \text{Hom}_{\Lambda}(C, C) & \rightarrow & \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(L, C[2]) & \rightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & & & & & \\
& & 0 & & & & & &
\end{array}$$

est commutatif.

Maintenant supposons que $\text{Ext}^1(L, C) = 0$.

D'après le Lemme de serpent, nous avons donc une application $\text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(L, T) \rightarrow \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(L, T)$ qui est injectif car

$$\text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(L[-1], C) = \text{Ext}^1(L, C) = 0$$

et d'ailleurs surjectif car $\text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T, C) \rightarrow \iota.\text{Hom}_{\Lambda}(P, C)$ est surjectif.

Du fait que $\text{Ext}^1(L, C) = 0$, nous obtenons aussi

$$\text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T, C) \cong \iota.\text{Hom}_{\Lambda}(P, C)$$

Ceci et le fait que les suites horizontales sont exactes nous donnent, d'après le Corollaire 1.11, un produit fibré

$$\begin{array}{ccc}
\text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T, T) & \rightarrow & \text{Hom}_{\Lambda}(L, L) \\
\downarrow & & \downarrow \theta \\
\text{Hom}_{\Lambda}(C, C) & \xrightarrow{\zeta} & \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(L, C[2])
\end{array}$$

Remarque En fait, le lemme de serpent montre que $\text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(L, T) \rightarrow \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(L, T)$ est surjectif. Si R est un anneau noethérien, un endomorphisme surjectif pour un module noethérien est un isomorphisme. Donc $\text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(L[-1], C) = 0$. Mais nous avons déjà utilisé $\text{Ext}^1(L, C) = 0$ pour établir la suite exacte verticale à droite.

2.2 Un produit fibré plus explicite

Dans la section 2.1 nous obtenons que $End_{D^b(\Lambda)}(T)$ est un produit fibré de θ et ζ

$$\begin{array}{ccc} Hom_{D^b(\Lambda)}(T, T) & \rightarrow & Hom_{\Lambda}(L, L) \\ \downarrow \psi & & \downarrow \theta \\ Hom_{\Lambda}(C, C) & \xrightarrow{\zeta} & Hom_{D^b(\Lambda)}(L, C[2]) \end{array}$$

Dans la suite, nous allons déterminer l'image de ψ .

Notons

$$A := Im(\psi) = Ker((C, C) \rightarrow (L[-2], T)).$$

Lemme 2.13

$A = \{\varphi \in End_{\Lambda}(C) : \exists \gamma : P \rightarrow P \text{ tel que } \varphi\iota = \iota\gamma \text{ et } \exists \delta : Q \rightarrow Q \text{ tel que } \gamma\alpha = \alpha\delta\}$.

Démonstration On note par ϕ l'application d'enveloppe projective $P^0 \rightarrow C$, et par α^0 l'application $P^0 \rightarrow P$ où $\alpha^0 = \phi\iota$.

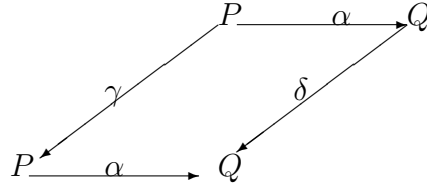
$$\begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow & P^{-1} & \rightarrow & P^0 & \xrightarrow{\alpha^0} & P & \xrightarrow{\alpha} & Q & \rightarrow & 0 & L[-2] \\ & \downarrow & & \downarrow \phi & & \downarrow & & & & & \\ & 0 & \rightarrow & C & \rightarrow & 0 & & & & & C \\ & \downarrow & & \downarrow \varphi & & \downarrow & & & & & \\ & 0 & \rightarrow & C & \rightarrow & 0 & & & & & C \\ & \downarrow & & \downarrow \iota & & \downarrow & & & & & \\ & 0 & \rightarrow & P & \xrightarrow{\alpha} & Q & \rightarrow & 0 & & & T \end{array} \quad (2.2)$$

Si $\varphi \in A$ donc $\varphi \in (C, C)$ tel qu'il existe un $\gamma : P \rightarrow P$ où

$$\phi\varphi\iota = \alpha^0\gamma$$

$$\begin{array}{ccc} P^0 & \xrightarrow{\alpha^0} & P \\ \downarrow \phi\varphi\iota & & \downarrow \gamma \\ P & & P \end{array}$$

et un $\delta : Q \rightarrow Q$ où $\gamma\alpha = \alpha\delta$.



Comme ϕ est surjectif et $\alpha^0 = \phi\iota$,

$$\begin{array}{l} \phi\varphi\iota = \alpha^0\gamma \\ \phi\iota\gamma \end{array}$$

on obtient donc $\varphi\iota = \iota\gamma$. Alors

$$\begin{aligned} A &= \{\varphi \in \text{End}_\Lambda(C) : \exists \gamma : P \rightarrow P \text{ tel que } \phi\varphi\iota = \alpha^0\gamma \text{ et } \exists \delta : Q \rightarrow Q \text{ tel que } \gamma\alpha = \alpha\delta\} \\ &= \{\varphi \in \text{End}_\Lambda(C) : \exists \gamma : P \rightarrow P \text{ tel que } \varphi\iota = \iota\gamma \text{ et } \exists \delta : Q \rightarrow Q \text{ tel que } \gamma\alpha = \alpha\delta\} \end{aligned}$$

■

Un élément de A est donc un endomorphisme de C qui induit un endomorphisme du complexe $C \hookrightarrow P \xrightarrow{\alpha} Q$ comme suit

$$\begin{array}{ccccc} C & \hookrightarrow & P & \xrightarrow{\alpha} & Q \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta \\ C & \hookrightarrow & P & \xrightarrow{\alpha} & Q \end{array}$$

En plus, A possède une structure multiplicative en tant que sous-anneau de (C, C) . En effet, soient φ_1 et $\varphi_2 \in A$. Alors il existe $\gamma_1, \gamma_2 \in (P, P)$ et $\delta_1, \delta_2 \in (Q, Q)$ tels que

$$\varphi_i\iota = \iota\gamma_i \text{ et } \gamma_i\alpha = \alpha\delta_i \quad i = 1, 2$$

Maintenant il est clair que $\varphi_1\varphi_2 \in A$ parce que nous avons $\gamma_1\gamma_2 \in (P, P)$ et $\delta_1\delta_2 \in (Q, Q)$ tels que

$$\varphi_1\varphi_2\iota = \varphi_1(\iota\gamma_2) = (\varphi_1\iota)\gamma_2 = (\iota\gamma_1)\gamma_2$$

et

$$\gamma_1\gamma_2\alpha = \gamma_1(\alpha\delta_2) = (\gamma_1\alpha)\delta_2 = (\alpha\delta_1)\delta_2$$

$$\begin{array}{ccccc}
C & \xrightarrow{\iota} & P & \xrightarrow{\alpha} & Q \\
\downarrow \varphi_1 \varphi_2 & & \downarrow \gamma_1 \gamma_2 & & \downarrow \delta_1 \delta_2 \\
C & \xrightarrow{\iota} & P & \xrightarrow{\alpha} & Q
\end{array}$$

Aussi, $1_{\text{End}(C)} \in A$ car

$$1_{\text{End}(C)} \iota = \iota 1_{\text{End}(P)} \text{ et } 1_{\text{End}(P)} \alpha = \alpha 1_{\text{End}(Q)}.$$

On note

$$\Omega := \text{Ker}((L, C[2]) \rightarrow (L, T[2])).$$

On remarque que si Λ est un ordre, Ω est un Λ -module de torsion, $K \otimes_R \Omega = 0$.

Lemme 2.14 *Il existe une suite exacte*

$$0 \rightarrow \iota.(P, C) \rightarrow A \xrightarrow{\rho} \Omega \rightarrow 0$$

Démonstration D'après le Lemme 2.3 et les définitions de A et C nous obtenons le diagramme suivant qui est d'ailleurs commutatif grâce à (2.2).

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & 0 & & 0 & \\
& & & \downarrow & & \downarrow & \\
& & & A & \xrightarrow{\rho} & \Omega & \\
& & & \downarrow \beta & & \downarrow \mu & \\
0 & \rightarrow & \iota.(P, C) & \xrightarrow{\nu} & (C, C) & \xrightarrow{\eta} & (L, C[2]) \rightarrow 0 \\
& & & & \downarrow \chi & & \downarrow \gamma \\
& & & & (L, T[2]) & = & (L, T[2])
\end{array}$$

Comme $(\beta\eta)\gamma = \beta(\eta\gamma) = \beta(\chi \text{id}) = 0$, il existe une application $\rho : A \rightarrow \Omega$ telle que

$$\rho\mu = \beta\eta.$$

L'application ρ est la restriction de η à A . Donc,

$$\text{Ker}(\rho) \subseteq \iota.(P, C).$$

Maintenant on va montrer $\iota.(P, C) \subseteq \text{Ker}(\rho)$. Il suffit de montrer que $\iota.(P, C) \subseteq A$. En effet, $\nu\chi = \nu\eta\gamma = 0$, donc il existe $\phi : \iota.(P, C) \rightarrow A$ tel que

$$\phi\beta = \nu.$$

Comme ν est injectif, ϕ l'est aussi. Alors $\text{Ker}(\rho) = \iota.(P, C)$ et on obtient donc une suite exacte

$$0 \rightarrow \iota.(P, C) \rightarrow A \rightarrow \Omega \rightarrow 0$$

■

D'après le Théorème 2.5 et le Lemme 2.14 nous obtenons donc un produit fibré plus explicite.

Lemme 2.15 *$\text{End}_{D^b(\Lambda)}(T)$ est un produit fibré de θ et ρ*

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T, T) & \rightarrow & \text{Hom}_{\Lambda}(L, L) \\ \downarrow & & \downarrow \theta \\ A & \xrightarrow{\rho} & \Omega \end{array}$$

La structure multiplicative de (T, T) est déterminée par celle de A , de (L, L) et de Ω . Nous allons voir, dans la section 3.3, le cas plus général qui montre que $\iota.(P, C)$ est un idéal bilatère de A et ceci donne la structure multiplicative de Ω .

2.3 Le cas où Λ est un ordre symétrique

Supposons que R est un anneau de Dedekind et le complexe T défini dans le Théorème 2.5 est un complexe basculant. Si Λ est un ordre symétrique, nous allons voir que nous pouvons remplacer $End_{\Lambda}(L)$ par $End_{\Lambda}(L/tL)$ où L/tL est la partie sans R -torsion de L .

D'abord, rappelons le produit fibré obtenu du Lemme 2.15

$$\begin{array}{ccc} (T, T) & \rightarrow & (L, L) \\ \downarrow & & \downarrow \theta \\ A & \xrightarrow{\rho} & \Omega \end{array} \quad (2.3)$$

Supposons que Λ est un ordre symétrique. D'après le Théorème 1.25, $End_{D^b(\Lambda)}(T)$ est un ordre, donc sans R -torsion. Dans cette section, on suppose que $(Im(\alpha), L) = 0$.

On définit comme d'habitude la partie torsion de (L, L)

$$t(L, L) = \{\varphi \in M : \exists r \in R, r \neq 0 \ r \cdot \varphi = 0\}$$

et on note par tL la partie R -torsion de L .

Soit $\xi : (L[-1], T) \rightarrow (L, L)$ l'application du Lemme 2.10 .

Lemme 2.16 $t(L, L) \cap \xi((L[-1], T)) = 0$

Démonstration Ceci est une conséquence du fait que (T, T) est sans R -torsion. Comme $(L[-1], T)$ est un idéal de (T, T) par le Lemme 2.10, on a $(L[-1], T)$ est sans R -torsion aussi. En particulier $\xi((L[-1], T))$ n'a pas de R -torsion car ξ est injectif, tandis que $t(L, L)$ est de torsion. ■

Soit $\theta : (L, L) \rightarrow \Omega$ l'application du Lemme 2.15 et $\theta' = \theta|_{t(L, L)}$.

Lemme 2.17 $\theta' : t(L, L) \rightarrow Im(\theta')$ est bijectif.

Démonstration Si $f \in Ker(\theta')$, on a $f \in Ker(\theta) = \xi((L[-1], T))$. Or, $f \in t(L, L)$. Alors,

$$f \in t(L, L) \cap \xi((L[-1], T)) = 0$$

Nous obtenons $Ker(\theta') = 0$ et $t(L, L) \cong Im(\theta')$. ■

L'application θ induit une application

$$\hat{\theta} : \frac{(L, L)}{t(L, L)} \rightarrow \frac{\Omega}{Im(\theta')}$$

$$f + t(L, L) \mapsto \theta(f) + Im(\theta')$$

Lemme 2.18 *L'application $\hat{\theta}$ est surjectif.*

Démonstration En effet, soit $f + Im(\theta') \in \Omega/Im(\theta')$, donc $f \in \Omega$ et comme θ est surjectif,

$$\exists g \in (L, L) \text{ tel que } \theta(g) = f,$$

on obtient donc

$$g + t(L, L) \in (L, L)/t(L, L) \text{ et}$$

$$\hat{\theta}(g + t(L, L)) = \theta(g) + \theta(t(L, L)) = f + Im(\theta').$$

■

Lemme 2.19 $Ker(\hat{\theta}) \cong (L[-1], T)$

Démonstration Soit $\bar{\theta} : (L, L) \rightarrow \Omega/Im(\theta')$ où $\bar{\theta}$ est la composition $\bar{\theta} = \gamma\hat{\theta}$ et $\gamma : (L, L) \rightarrow (L, L)/t(L, L)$.

Alors

$$\begin{aligned} Ker(\bar{\theta}) &= Ker(\theta) + \theta^{-1}(Im(\theta')) \\ &= \xi((L[-1], T)) + \theta^{-1}(\theta(t(L, L))) \\ &= \xi((L[-1], T)) + t(L, L) \end{aligned}$$

En conséquence

$$\frac{(L, L)}{\xi((L[-1], T)) + t(L, L)} \cong \frac{\Omega}{Im(\theta')}$$

puisque $\bar{\theta}$ est surjectif. Ensuite, comme

$$\frac{(L, L)/t(L, L)}{[\xi((L[-1], T)) + t(L, L)]/t(L, L)} \cong \frac{(L, L)}{\xi((L[-1], T)) + t(L, L)} \cong \frac{\Omega}{Im(\theta')}$$

on obtient

$$Ker\hat{\theta} = \frac{\xi((L[-1], T)) + t(L, L)}{t(L, L)}$$

Alors,

$$\text{Ker}(\hat{\theta}) = \xi((L[-1], T)) \cong (L[-1], T)$$

car $\xi((L[-1], T)) \cap t(L, L) = 0$. Ceci termine la démonstration. ■

Par conséquent, nous obtenons un diagramme où les morphismes induits sur les noyaux de ses suites exactes verticales sont des isomorphismes.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & (L[-1], T) & = & \frac{(L[-1], T) + t(L, L)}{t(L, L)} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & t(L, L) & \rightarrow & (L, L) & \rightarrow & \frac{(L, L)}{t(L, L)} \rightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \hat{\theta} \\
 0 & \rightarrow & \text{Im}(\theta') & \rightarrow & \Omega & \rightarrow & \frac{\Omega}{\text{Im}(\theta')} \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Ceci nous donne un produit fibré

$$\begin{array}{ccc}
 (L, L) & \rightarrow & \frac{(L, L)}{t(L, L)} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \Omega & \rightarrow & \frac{\Omega}{\text{Im}(\theta')}
 \end{array}$$

Nous composons le diagramme (2.3) avec le diagramme ci-dessus

$$\begin{array}{ccccc}
 (T, T) & \rightarrow & (L, L) & \rightarrow & \frac{(L, L)}{t(L, L)} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 A & \rightarrow & \Omega & \rightarrow & \frac{\Omega}{\text{Im}(\theta')}
 \end{array}$$

Comme nous avons le diagramme où les deux carrés sont des produit fibrés, et où les noyaux des applications verticales sont égaux, alors d'après Corollaire 1.11, ce diagramme composé est aussi un produit fibré

$$\begin{array}{ccc}
 (T, T) & \rightarrow & \frac{(L, L)}{t(L, L)} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A & \rightarrow & \frac{\Omega}{\text{Im}(\theta')}
 \end{array}$$

Maintenant, nous allons montrer que $\text{End}_\Lambda(L)/\text{torsion} \cong \text{End}_\Lambda(L/\text{torsion})$.

Lemme 2.20 $(L, L)/t(L, L) \cong (L/tL, L/tL)$

Démonstration

1. La suite $0 \rightarrow (L, tL) \rightarrow (L, L) \rightarrow (L, L/tL) \rightarrow 0$ est exacte.
On applique le foncteur $(L, -)$ à la suite exacte

$$0 \rightarrow tL \rightarrow L \rightarrow L/tL \rightarrow 0$$

et on obtient une suite exacte longue

$$0 \rightarrow (L, tL) \rightarrow (L, L) \rightarrow (L, L/tL) \rightarrow \text{Ext}^1(L, tL) \rightarrow \dots \quad (2.4)$$

En appliquant $(-, tL)$ à la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Im}(\alpha) \rightarrow Q \rightarrow L \rightarrow 0$$

on obtient une suite exacte longue

$$\dots \rightarrow (\text{Im}(\alpha), tL) \rightarrow \text{Ext}^1(L, tL) \rightarrow \text{Ext}^1(Q, L) \rightarrow \dots$$

(a) $(\text{Im}(\alpha), tL) = 0$

Ceci est clair car $(\text{Im}(\alpha), tL) \subseteq (\text{Im}(\alpha), L) = 0$.

(b) $\text{Ext}^1(Q, L) = 0$ car Q est projectif.

Les deux énoncés impliquent que $\text{Ext}^1(L, tL) = 0$, et ceci appliqué à (2.4) implique que la suite

$$0 \rightarrow (L, tL) \rightarrow (L, L) \rightarrow (L, L/tL) \rightarrow 0 \quad (2.5)$$

est exacte.

2. $(L, L/tL) \cong (L/tL, L/tL)$

On applique $(-, L/tL)$ à la suite exacte

$$0 \rightarrow tL \rightarrow L \rightarrow L/tL \rightarrow 0$$

on obtient une suite exacte longue

$$0 \rightarrow (L/tL, L/tL) \rightarrow (L, L/tL) \rightarrow (tL, L/tL) \rightarrow \dots$$

Comme $(tL, L/tL) = 0$, on a $(L, L/tL) = (L/tL, L/tL)$.

3. $t(L, L) = (L, tL)$

Il est clair que

$$t(L, L) \subseteq (L, tL).$$

En effet, si $\varphi \in t(L, L)$, il existe un r , $r \neq 0$, tel que $r\varphi = 0$.

Donc, il existe un r tel que pour tout $l \in L$, $r\varphi(l) = 0$. Ceci implique que pour tout $l \in L$ $\varphi(l) \in tL$. On a donc $\varphi \in (L, tL)$.

Maintenant si $f \in (L, tL)$ et $x \in L$, $f(x) \in tL$ c.-à.-d. il existe un $r \in R - \{0\}$ tel que $rf(x) = 0$. Comme L est de type fini, il existe un $s \in R - \{0\}$ tel que $sf = 0$. Alors, $f \in t(L, L)$. Nous avons donc $t(L, L) = (L, tL)$.

Les lignes du diagramme suivant sont donc exactes,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & (L, tL) & \rightarrow & (L, L) & \rightarrow & (L/tL, L/tL) \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ 0 & \rightarrow & t(L, L) & \rightarrow & (L, L) & \rightarrow & (L, L)/t(L, L) \rightarrow 0 \end{array}$$

et ceci implique que

$$\frac{(L, L)}{t(L, L)} = (L/tL, L/tL)$$

■

Par conséquent, on obtient un produit fibré

$$\begin{array}{ccc} (T, T) & \rightarrow & (L/tL, L/tL) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \rightarrow & \frac{\Omega}{\text{Im}(\theta')} \end{array}$$

Nous avons donc le théorème pour le cas où Λ est symétrique :

Théorème 2.21 *Soient R un anneau de Dedekind et Λ un ordre symétrique. Soit T un complexe basculant*

$$0 \rightarrow P \xrightarrow{\alpha} Q \rightarrow 0$$

où l'homologie est concentrée en degrés 1 et 2. On note $C = \text{Ker}(\alpha)$ et $L = \text{Coker}(\alpha)$, et pour tout Λ -module X , $tX =$ la partie torsion de X .

On note

$A = \{\varphi \in \text{End}_{\Lambda}(C) : \exists \gamma : P \rightarrow P \text{ tel que } \varphi\iota = \iota\gamma \text{ et } \exists \delta : Q \rightarrow Q \text{ tel que } \gamma\alpha = \alpha\delta\}$,

et $\Omega = A/\iota.(P, C)$. Alors,

1. Il existe un morphisme $\theta' : t(\text{Hom}_\Lambda(L, L)) \rightarrow \Omega$.
2. Si $\text{Hom}_\Lambda(\text{Im}(\alpha), L) = 0$, il existe un morphisme

$$\text{Hom}_\Lambda(L/tL, L/tL) \rightarrow \Omega/\text{Im}(\theta')$$

et un morphisme

$$A \rightarrow \Omega/\text{Im}(\theta')$$

qui définissent $\text{End}_{D^b(\Lambda)}(T)$ en tant que produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T, T) & \rightarrow & \text{Hom}_\Lambda(L/tL, L/tL) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \rightarrow & \frac{\Omega}{\text{Im}(\theta')} \end{array}$$

Rémarque $\text{Ext}^1(L, C)$ est un R -module de torsion car $K \otimes \text{Ext}^1(L, C) = 0$. Or, (T, T) est un Λ -module sans R -torsion d'après le Théorème 1.25 et nous avons l'inclusion

$$\text{Ext}^1(L, C) \hookrightarrow (T, C) \hookrightarrow (T, T)$$

par le Lemme 2.8 et Lemme 2.9 .

Alors $\text{Ext}^1(L, C) = 0$ est automatique si Λ est un ordre symétrique.

Chapitre 3

Complexes à n termes

Dans ce chapitre, nous allons montrer notre résultat principal. Ceci est une généralisation du Théorème 2.5. Nous expliquons les démarches de la construction de $End_{D^b(\Lambda)}(T)$ en tant que produit fibré de ses homologies dans la section 3.1 et nous donnons des produits fibrés plus explicites dans la section 3.2. A l'aide de la connaissance de la section 3.2, nous expliquons dans la section 3.3 la structure d'anneau de $End_{D^b(\Lambda)}(T)$.

Dans la section 3.4, nous traitons le cas où Λ est un ordre de Gorenstein. Le cas où Λ est un ordre symétrique et les homologies au milieu sont de torsion sera expliqué dans la section 3.5.

Soit R un anneau commutatif et Λ une R -algèbre. Soit T un complexe

$$0 \rightarrow P^1 \xrightarrow{\alpha^1} P^2 \xrightarrow{\alpha^2} \dots \xrightarrow{\alpha^{n-1}} P^n \rightarrow 0$$

où P^i sont des Λ -modules projectifs et l'homologie de T est concentrée en degrés $1, \dots, n$.

On note $C = Ker(\alpha^1) = H^1T$, ι l'inclusion $C \hookrightarrow P^1$,

$\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$, $L^i = Coker(\alpha^i)$ et ι^i l'inclusion $H^{i+1} \hookrightarrow L^i$.

Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on note par T^i le complexe

$$0 \rightarrow Im(\alpha^i) \rightarrow P^{i+1} \xrightarrow{\alpha^{i+1}} \dots \xrightarrow{\alpha^{n-1}} P^n \rightarrow 0$$

Nous donnons une condition suffisante pour que T soit un complexe basculant partiel.

Lemme 3.1 *Si*

$$\text{Hom}_\Lambda(P^i, L^j) = \text{Hom}_\Lambda(L^j, P^i) = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \quad j \geq i,$$

alors le complexe T est un complexe basculant partiel.

Démonstration Comme $H^{j+1}T \subseteq L^j$, l'hypothèse $(P^i, L^j) = 0$ implique que $(P^i, H^{j+1}T) = 0, \forall i \in \{1, \dots, n-1\}, j \geq 1$, et ceci implique que chaque homomorphisme de P^i à P^{j+1} factorise à travers $\text{Im}(\alpha^j)$, donc vers son enveloppe projective P^j :

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & \rightarrow & P^1 & \rightarrow & \dots & \rightarrow & P^{i-1} & \rightarrow & P^i & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \dots & \rightarrow & P^n & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & P^1 & \rightarrow & \dots & \rightarrow & P^j & \rightarrow & P^{j+1} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & P^n & \rightarrow & 0 & & \end{array}$$

Du fait que $(L^j, P^i) = 0$, un homomorphisme $\gamma^i : P^{j+1} \rightarrow P^i$ avec $\alpha^j \gamma^i = 0$ est 0.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & \rightarrow & P^1 & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \dots & \xrightarrow{\alpha^j} & P^{j+1} & \rightarrow & P^{j+2} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & P^n & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & & & & & \downarrow \gamma^i & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ & & 0 & \rightarrow & P^1 & \rightarrow & \dots & \rightarrow & P^i & \rightarrow & P^{i+1} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \dots & \rightarrow & P^n & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Ceci montre que T est un complexe basculant partiel. ■

Remarque

1. La réciproque n'est pas toujours vraie.
2. Si Λ est un ordre, alors $\text{Hom}_\Lambda(P^i, L^j) = 0$ implique $\text{Hom}_\Lambda(L^j, P^i) = 0$.

Lemme 3.2 *Pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, il existe un triangle de $D^b(\Lambda)$*

$$T^i \rightarrow T^{i+1} \rightarrow H^{i+1}T[-i+1] \rightsquigarrow T^i[1]$$

où l'on note $T^0 := T$.

Démonstration

1. Pour $i = 0$, il existe une suite exacte de complexes

$$\epsilon : 0 \rightarrow C \xrightarrow{\iota} T \xrightarrow{\phi} T^1 \rightarrow 0$$

qui se prolonge au triangle

$$C \rightarrow T \rightarrow T^1 \xrightarrow{\delta\epsilon} C[1] \quad (3.1)$$

où $\delta\epsilon$ est le triple (δ, M, ξ) tel que M est le complexe

$$0 \rightarrow C \xrightarrow{\iota} P^1 \xrightarrow{\alpha^1} P^2 \xrightarrow{\alpha^2} \dots \xrightarrow{\alpha^{n-1}} P^n \rightarrow 0$$

(C est de degré 0), δ est le morphisme $(0 \rightarrow \phi)$ et ξ est la projection $M \rightarrow C[1]$.

Le triangle (3.1) donne lieu au triangle

$$T \rightarrow T^1 \rightarrow C[1] \xrightarrow{\sim} T[1]$$

2. Pour $i > 0$, il existe une suite exacte

$$\epsilon^i : 0 \rightarrow H^{i+1}T[-i] \xrightarrow{\iota^i} T^i \xrightarrow{\phi^i} T^{i+1} \rightarrow 0,$$

où $H^{i+1}T$ est présenté par $0 \rightarrow \text{Im}(\alpha^i) \rightarrow \text{Ker}(\alpha^{i+1}) \rightarrow 0$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & 0 & & 0 & & & & & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \text{Im}(\alpha^i) & \rightarrow & \text{Ker}(\alpha^{i+1}) & \rightarrow & 0 & & & & H^{i+1}T[-i] & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \text{Im}(\alpha^i) & \rightarrow & P^{i+1} & \rightarrow & P^{i+2} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & P^n & \rightarrow & 0 & & T^i & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & & & \parallel & & & & \downarrow & & \\ & & 0 & \rightarrow & \text{Im}(\alpha^{i+1}) & \rightarrow & P^{i+2} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & P^n & \rightarrow & 0 & & T^{i+1} & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & 0 & & & & & & & & 0 & & \end{array}$$

Cette suite exacte nous donne un triangle

$$H^{i+1}T[-i] \rightarrow T^i \rightarrow T^{i+1} \xrightarrow{\delta\epsilon^i} H^{i+1}T[-i+1] \quad (3.2)$$

où $\delta\epsilon$ est le triple (δ^i, M^i, ξ^i) tel que M^i est le complexe

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \rightarrow & \text{Im}(\alpha^i) & \rightarrow & \text{Ker}(\alpha^{i+1}) & \rightarrow & 0 & & & & & & \\ & & \oplus & \searrow id & \oplus & \searrow & \oplus & & & & & & \\ & & 0 & \rightarrow & \text{Im}(\alpha^i) & \rightarrow & P^{i+1} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & P^n & \rightarrow & 0, \end{array}$$

δ^i est le morphisme $(0 \rightarrow \phi^i)$ et ξ^i est la projection $M^i \rightarrow H^{i+1}T[-i+1]$.
Par l'axiome TR3, la suite

$$T^i \rightarrow T^{i+1} \rightarrow H^{i+1}T[-i+1] \rightsquigarrow T^i[1]$$

est un triangle.

■

Nous formulons maintenant le résultat principal de cette thèse.

Théorème 3.3 *Si pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$,*

$$\begin{aligned} \text{Hom}_\Lambda(L^i, \text{Im}(\alpha^i)) &= \text{Hom}_\Lambda(\text{Im}(\alpha^i), L^i) = 0 \text{ et} \\ \text{Ext}_\Lambda^1(L^i, H^i T) &= \text{Hom}_\Lambda(L^i, P^i) = 0, \end{aligned}$$

alors, pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, il existe des morphismes

$$\begin{aligned} \zeta^i &: (H^{i+1}T, H^{i+1}T) \rightarrow (L^{i+1}, H^{i+1}T[2]) \\ \text{et } \theta^{i+1} &: (T^{i+1}, T^{i+1}) \rightarrow (L^{i+1}, H^{i+1}T[2]) \end{aligned}$$

qui définissent l'anneau des endomorphismes de T en tant que produit fibré de θ^1 et ζ^0

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T, T) & \rightarrow & \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T^1, T^1) \\ \downarrow \psi^0 & & \downarrow \theta^1 \\ \text{Hom}_\Lambda(C, C) & \xrightarrow{\zeta^0} & \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(L^1, C[2]) \end{array}$$

et définissent pour tout $i \in \{1, \dots, n-2\}$, l'anneau des endomorphismes de T^i en tant que produit fibré de θ^{i+1} et ζ^i

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T^i, T^i) & \rightarrow & \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T^{i+1}, T^{i+1}) \\ \downarrow \psi^i & & \downarrow \theta^{i+1} \\ \text{Hom}_\Lambda(H^{i+1}T, H^{i+1}T) & \xrightarrow{\zeta^i} & \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(L^{i+1}, H^{i+1}T[2]) \end{array}$$

Remarque

1. Comme dans le cas où T n'a que deux termes, l'application ψ^i n'est pas toujours surjective. Nous allons déterminer l'image de ψ^i dans la section 3.2 .
2. La structure multiplicative de $(L^j, H^j[2])$ pour tout $j \in \{1, \dots, n-1\}$ n'est pas claire ici. On verra dans la section 3.2 des autres produits fibrés qui donnent la structure multiplicative de (T, T) . On expliquera cette structure dans la section 3.3.
3. Si Λ est un ordre, $(L^i, P^i) = 0$ implique que $(L^i, \text{Im}(\alpha^i)) = 0$. En fait,

$$\begin{aligned}
(L^i, P^i) = 0 &\Rightarrow (L^i/tL^i, P^i) = 0 \\
&\Rightarrow (P^i, L^i/tL^i) = 0 \\
&\Rightarrow (\text{Im}(\alpha^i), L^i/tL^i) = 0 \\
&\Rightarrow (L^i/tL^i, \text{Im}(\alpha^i)) = 0 \\
&\Rightarrow (L^i, \text{Im}(\alpha^i)) = 0.
\end{aligned}$$

où L^i/tL^i est la partie sans R -torsion de L^i .

3.1 Le calcul de $\text{End}_{D^b(\Lambda)}(T)$

Maintenant on suppose que pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$\text{Hom}_{\Lambda}(\text{Im}(\alpha^i), L^i) = \text{Hom}_{\Lambda}(L^i, \text{Im}(\alpha^i)) = \text{Hom}_{\Lambda}(L^i, P^i) = 0.$$

On note $T^0 := T$, $L^0 = P^1$, et $\iota^0 = \iota$.

Nous allons définir pour tout $i \in \{0, \dots, n-2\}$ les morphismes ζ^i et θ^{i+1} et montrer que pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ l'anneau des endomorphismes de T^i est un produit fibré de ζ^i et θ^{i+1}

$$\begin{array}{ccc}
\text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T^i, T^i) & \rightarrow & \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T^{i+1}, T^{i+1}) \\
\downarrow \psi^i & & \downarrow \theta^{i+1} \\
\text{Hom}_{\Lambda}(H^{i+1}T, H^{i+1}T) & \xrightarrow{\zeta^i} & \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(L^{i+1}, H^{i+1}T[2]).
\end{array}$$

Fixons $i \in \{0, \dots, n-2\}$.

On note par

$$\dots \rightarrow \bar{P}^0 \rightarrow \bar{P}^1 \rightarrow \dots \rightarrow \bar{P}^{i-1} \rightarrow \text{Ker}(\alpha^i) \rightarrow 0$$

les premiers termes d'une résolution projective de $\text{Ker}(\alpha^i)$, et par

$$\dots \rightarrow \tilde{P}^0 \rightarrow \tilde{P}^1 \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{P}^{i-1} \rightarrow \tilde{P}^i \rightarrow \text{Ker}(\alpha^{i+1}) \rightarrow 0$$

les premiers termes d'une résolution projective de $\text{Ker}(\alpha^{i+1})$.

Lemme 3.4 1. $(T^i, H^{i+1}T[-i+1]) = 0$

2. Le triangle dans le Lemme 3.2 induit une suite exacte

$$0 \rightarrow (T^i, H^{i+1}T[-i]) \rightarrow (T^i, T^i) \rightarrow (T^i, T^{i+1}) \rightarrow 0$$

Démonstration On applique le foncteur $(T^i, -)$ au triangle

$$T^i \rightarrow T^{i+1} \rightarrow H^{i+1}T[-i+1] \rightsquigarrow T^i[1]$$

ce qui nous donne une suite exacte longue dont une partie est :

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow (T^i, T^{i+1}[-1]) \rightarrow (T^i, H^{i+1}T[-i]) \rightarrow \\ \rightarrow (T^i, T^i) \rightarrow (T^i, T^{i+1}) \rightarrow (T^i, H^{i+1}T[-i+1]) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

1. $(T^i, H^{i+1}T[-i+1]) = 0$

Pour $i = 0$ ceci est clair parce que T^0 est concentré en degrés $1, \dots, n$ et dans ces degrés-là la résolution projective de $H^1T[1]$ est 0.

Pour $i > 0$, le morphisme $P^i \rightarrow H^{i+1}T$ factorise à travers le conoyau de $(\bar{P}^{i-1} \rightarrow P^i)$ qui est $\text{Im}(\alpha^i)$.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & \bar{P}^{i-1} & \rightarrow & P^i & \rightarrow & P^{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow P^n \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & \rightarrow & H^{i+1}T & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Donc

$$(T^i, H^{i+1}T[-i+1]) = \frac{(\text{Im}(\alpha^i), H^{i+1}T)}{j^i.(P^{i+1}, H^{i+1}T)}$$

où j^i est l'inclusion $\text{Im}(\alpha^i) \hookrightarrow P^{i+1}$.

Or, d'après l'hypothèse $(\text{Im}(\alpha^i), L^i) = 0$ et ceci implique $(\text{Im}(\alpha^i), H^{i+1}T) = 0$. D'où $(T^i, H^{i+1}T[-i+1]) = 0$.

2. $(T^i, T^{i+1}[-1]) = 0$

En effet, comme le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 \dots & \rightarrow & P^{i+1} & \xrightarrow{\alpha^{i+1}} & P^{i+2} & \xrightarrow{\alpha^{i+2}} & P^{i+3} & \xrightarrow{\alpha^{i+3}} & \dots & \rightarrow & P^n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & \longrightarrow & \text{Im}(\alpha^{i+1}) & \longrightarrow & P^{i+2} & \xrightarrow{\alpha^{i+2}} & \dots & \rightarrow & P^{n-1} & \xrightarrow{\alpha^{n-1}} & P^n \rightarrow 0
 \end{array}$$

est commutatif, le morphisme $P^{i+2} \rightarrow \text{Im}(\alpha^{i+1})$ factorise à travers $\text{Coker}(\alpha^{i+1})$. Comme $(L^{i+1}, \text{Im}(\alpha^{i+1})) = 0$, on peut donc supposer que l'homomorphisme $P^{i+2} \rightarrow \text{Im}(\alpha^{i+1})$ est 0. Maintenant, un argument analogue appliqué à l'homomorphisme $P^{j+1} \rightarrow P^j \forall j = i+2, \dots, n-1$, et du fait que $(L^j, P^j) = 0, \forall j = i+2, \dots, n-1$ nous avons donc $(T^i, T^{i+1}[-1]) = 0$.

Les deux énoncés impliquent que la suite courte

$$0 \rightarrow (T^i, H^{i+1}[-i]) \rightarrow (T^i, T^i) \rightarrow (T^i, T^{i+1}) \rightarrow 0$$

est exacte. ■

On note par

$$\dots \rightarrow \hat{P}^{i-2} \rightarrow \hat{P}^{i-1} \rightarrow \tilde{P}^i \rightarrow H^{i+1}T \rightarrow 0$$

les premiers termes d'une résolution projective de $H^{i+1}T$.

Lemme 3.5 1. $(H^{i+1}T[-i+1], T^{i+1}) = 0$.

2. $(H^{i+1}T[-i], T^{i+1}) = 0$.

3. $(T^i, T^{i+1}) \cong (T^{i+1}, T^{i+1})$.

Démonstration On applique le foncteur $(-, T^{i+1})$ au triangle

$$T^i \rightarrow T^{i+1} \rightarrow H^{i+1}T[-i+1] \rightsquigarrow T^i[1]$$

ce qui nous donne une suite exacte longue dont une partie est :

$$\dots \rightarrow (H^{i+1}T[-i+1], T^{i+1}) \rightarrow (T^{i+1}, T^{i+1}) \rightarrow (T^i, T^{i+1}) \rightarrow (H^{i+1}[-i]T, T^{i+1}) \rightarrow \dots$$

$$1. (H^{i+1}T[-i+1], T^{i+1}) = 0.$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \rightarrow & \hat{P}^{i-1} & \rightarrow & \tilde{P}^i & \rightarrow & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ \dots & \rightarrow & \tilde{P}^{i-1} & \rightarrow & \tilde{P}^i & \rightarrow & P^{i+1} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & P^n & \rightarrow & 0 \end{array}$$

En effet, le morphisme $\tilde{P}^i \rightarrow \tilde{P}^i$ factorise à travers le noyau du morphisme $\tilde{P}^i \rightarrow P^{i+1}$ donc vers son enveloppe projective \tilde{P}^{i-1} . Un argument analogue appliqué à l'homomorphisme $\hat{P}^j \rightarrow \tilde{P}^j$ pour tout $j < i$ implique que $\hat{P}^j \rightarrow \tilde{P}^j$ est homotope à 0 avec une homotopie $\hat{P}^j \rightarrow \tilde{P}^{j-1}$.

$$2. (H^{i+1}T[-i], T^{i+1}) = 0.$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \rightarrow & \hat{P}^{i-1} & \rightarrow & \tilde{P}^i & \rightarrow & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ \dots & \rightarrow & \tilde{P}^i & \rightarrow & P^{i+1} & \rightarrow & P^{i+2} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & P^n & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Par le même argument que celui dans 1., l'homomorphisme $\tilde{P}^i \rightarrow P^{i+1}$ est homotope à 0 avec l'homotopie $h : \tilde{P}^i \rightarrow \tilde{P}^i$, et $\hat{P}^j \rightarrow \tilde{P}^{j+1}$ pour tout $j < i$ est homotope à 0 avec une homotopie $\hat{P}^j \rightarrow \tilde{P}^j$.

Alors, nous obtenons $(T^i, T^{i+1}) \cong (T^{i+1}, T^{i+1})$. ■

Corollaire 3.6 *La suite*

$$0 \rightarrow (T^i, H^{i+1}T[-i]) \rightarrow (T^i, T^i) \rightarrow (T^{i+1}, T^{i+1}) \rightarrow 0$$

est exacte.

Lemme 3.7 1. $Ext^1(Im(\alpha^{i+1}), H^{i+1}T) = (L^{i+1}, H^{i+1}T[2])$.

2. L'application $H^{i+1}T \hookrightarrow L^i$ induit une suite exacte

$$0 \rightarrow \iota^i.(L^i, H^{i+1}T) \rightarrow (H^{i+1}T, H^{i+1}T) \xrightarrow{\zeta^i} (L^{i+1}, H^{i+1}T[2]) \rightarrow 0$$

Démonstration On applique le foncteur $(-, H^{i+1}T)$ à la suite exacte

$$0 \rightarrow H^{i+1}T \rightarrow L^i \rightarrow \text{Im}(\alpha^{i+1}) \rightarrow 0$$

et on obtient une suite exacte dont une partie est

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow (\text{Im}(\alpha^{i+1}), H^{i+1}T) \rightarrow (L^i, H^{i+1}T) \rightarrow (H^{i+1}T, H^{i+1}T) \rightarrow \\ \rightarrow \text{Ext}^1(\text{Im}(\alpha^{i+1}), H^{i+1}T) \rightarrow \text{Ext}^1(L^i, H^{i+1}T) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

1. $\text{Ext}^1(\text{Im}(\alpha^{i+1}), H^{i+1}T) = (L^{i+1}, H^{i+1}T[2])$.

En effet en appliquant le foncteur $(-, H^{i+1}T)$ à la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Im}(\alpha^{i+1}) \rightarrow P^{i+2} \rightarrow L^{i+1} \rightarrow 0$$

on obtient une suite exacte dont une partie est

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \text{Ext}^1(P^{i+2}, H^{i+1}T) \rightarrow \text{Ext}^1(\text{Im}(\alpha^{i+1}), H^{i+1}T) \rightarrow \\ \rightarrow \text{Ext}^2(L^{i+1}, H^{i+1}T) \rightarrow \text{Ext}^2(P^{i+2}, H^{i+1}T) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Comme P^{i+2} est un Λ -module projectif, $\text{Ext}^j(P^{i+2}, H^{i+1}T) = 0$, $\forall j \in \{1, 2\}$. Ceci implique

$$\text{Ext}^1(\text{Im}(\alpha^{i+1}), H^{i+1}T) = \text{Ext}^2(L^{i+1}, H^{i+1}T) = (L^{i+1}, H^{i+1}T[2]).$$

2. Si $i = 0$, il est clair que $\text{Ext}^1(L^0, H^1T) = \text{Ext}^1(P^1, C) = 0$.
Si $i > 0$, l'hypothèse $(\text{Im}(\alpha^i), L^i) = 0$ implique $(\text{Im}(\alpha^i), H^{i+1}T) = 0$ et ceci implique $\text{Ext}^1(L^i, H^{i+1}T) = 0$.

3. Le noyau de $(H^{i+1}T, H^{i+1}T) \rightarrow (L^{i+1}, H^{i+1}T[2])$ est l'image de $(L^i, H^{i+1}T) \rightarrow (H^{i+1}T, H^{i+1}T)$ et celle-ci est $\iota^i.(L^i, H^{i+1}T)$.

Ces trois énoncés impliquent que la suite

$$0 \rightarrow \iota^i.(L^i, H^{i+1}T) \rightarrow (H^{i+1}T, H^{i+1}T) \xrightarrow{\zeta^i} (L^{i+1}, H^{i+1}T[2]) \rightarrow 0$$

est exacte. ■

Lemme 3.8 1. $(T^{i+1}, H^{i+1}T[-i]) = Ext^1(L^{i+1}, H^{i+1}T)$.

2. $(T^{i+1}, H^{i+1}T[-i+1]) = (L^{i+1}, H^{i+1}T[2])$.

3. Il existe une suite exacte

$$0 \rightarrow Ext^1(L^{i+1}, H^{i+1}T) \rightarrow (T^i, H^{i+1}T[-i]) \rightarrow \iota^i.(L^i, H^{i+1}T) \rightarrow 0$$

Démonstration Nous appliquons le foncteur $(-, H^{i+1}T[-i])$ au triangle

$$T^i \rightarrow T^{i+1} \rightarrow H^{i+1}T[-i+1] \rightsquigarrow T^i[1]$$

ce qui donne une suite exacte dont une partie est

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow (H^{i+1}T[-i+1], H^{i+1}T[-i]) &\rightarrow (T^{i+1}, H^{i+1}T[-i]) \rightarrow (T^i, H^{i+1}T[-i]) \rightarrow \\ &\rightarrow (H^{i+1}T[-i], H^{i+1}T[-i]) \rightarrow (T^{i+1}[-1], H^{i+1}T[-i]) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

1. $(T^{i+1}, H^{i+1}T[-i]) = Ext^1(L^{i+1}, H^{i+1}T)$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \rightarrow & \tilde{P}^{i-1} & \rightarrow & \tilde{P}^i & \xrightarrow{\tilde{\alpha}^i} & P^{i+1} & \xrightarrow{\alpha^{i+1}} & P^{i+2} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & P^n & \rightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \\ & & & & 0 & \rightarrow & H^{i+1}T & \rightarrow & 0 & & & & & & \end{array}$$

En effet le morphisme $P^{i+1} \rightarrow H^{i+1}T$ factorise à travers $Coker(\tilde{\alpha}^i)$ qui est $Im(\alpha^{i+1})$. Donc,

$$(T^{i+1}, H^{i+1}T[-i]) = \frac{(Im(\alpha^{i+1}), H^{i+1}T)}{j^{i+1}.(P^{i+2}, H^{i+1}T)} = Ext^1(Coker(\alpha^{i+1}), H^{i+1}T)$$

où j^{i+1} est l'inclusion $Im(\alpha^{i+1}) \hookrightarrow P^{i+2}$.

2. $(T^{i+1}[-1], H^{i+1}T[-i]) = (T^{i+1}, H^{i+1}T[-i+1]) = (L^{i+1}, H^{i+1}T[2])$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \rightarrow & \tilde{P}^{i-1} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}^{i-1}} & \tilde{P}^i & \xrightarrow{\tilde{\alpha}^i} & P^{i+1} & \rightarrow & P^{i+2} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & P^n & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \gamma & & \downarrow & & & & & & & & \\ & & 0 & \rightarrow & H^{i+1}T & \rightarrow & 0 & & & & & & & & \end{array}$$

Comme $\tilde{\alpha}^{i-1}\gamma = 0$, γ factorise à travers $Coker(\tilde{\alpha}^{i-1}) = Im(\tilde{\alpha}^i)$. Donc

$$(T^{i+1}, H^{i+1}T[-i+1]) = \frac{(Im(\tilde{\alpha}^i), H^{i+1}T)}{\rho^i.(P^{i+1}, H^{i+1}T)} = Ext^1(Im(\alpha^{i+1}), H^{i+1}T).$$

où ρ^i est l'inclusion $Im(\tilde{\alpha}^i) \hookrightarrow P^{i+1}$.

D'après le Lemme 3.7 $Ext^1(Im(\alpha^{i+1}), H^{i+1}T) = (L^{i+1}, H^{i+1}T[2])$.
D'où $(T^{i+1}[-1], H^{i+1}T[-i]) = (L^{i+1}, H^{i+1}T[2])$.

3. $(H^{i+1}T[-i+1], H^{i+1}T[-i]) = 0$

La démonstration est analogue à la première partie de la démonstration du Lemme 2.8.

4. L'image de $(T^i, H^{i+1}T[-i]) \rightarrow (H^{i+1}T, H^{i+1}T)$ est le noyau de

$$(H^{i+1}T, H^{i+1}T) \rightarrow (L^i, H^{i+1}T[2])$$

qui est $\iota^i.(L^i, H^{i+1}T)$ d'après le Lemme 3.7.

Les énoncés ci-dessus impliquent que la suite

$$0 \rightarrow Ext^1(L^{i+1}, H^{i+1}) \rightarrow (T^i, H^{i+1}T[-i]) \rightarrow \iota^i.(L^i, H^{i+1}T) \rightarrow 0$$

est exacte. ■

Lemme 3.9 *Le morphisme $T^i \rightarrow T^{i+1}$ et le foncteur H^{i+1} donnent lieu à une suite exacte*

$$0 \rightarrow (T^{i+1}, T^i) \rightarrow (T^i, T^i) \xrightarrow{\psi^i} (H^{i+1}T, H^{i+1}T)$$

Démonstration On applique le foncteur $(-, T^i)$ au triangle

$$T^i \rightarrow T^{i+1} \rightarrow H^{i+1}T[-i+1] \rightsquigarrow T^i[1]$$

ce qui donne une suite exacte longue dont une partie est :

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow (H^{i+1}T[-i+1], T^i) &\rightarrow (T^{i+1}, T^i) \rightarrow (T^i, T^i) \rightarrow \\ &\rightarrow (H^{i+1}T[-i], T^i) \rightarrow (T^{i+1}[-1], T^i) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

$$1. (H^{i+1}T[-i+1], T^i) = 0$$

Pour $i = 0$, ceci est clair car T^0 est concentré en degré $1, \dots, n$ où chaque résolution projective de $H^1T[1]$ est 0.

Pour $i > 0$, $(H^{i+1}T[-i+1], T^i)$ est donné par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \rightarrow & \tilde{P}^{i-1} & \rightarrow & \tilde{P}^i & \rightarrow & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ \dots & \rightarrow & \bar{P}^{i-1} & \rightarrow & P^i & \rightarrow & P^{i+1} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & P^n & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Avec le même argument comme dans la première partie de la démonstration du Lemme 3.5 appliquée à $\tilde{P}^i \rightarrow P^i$ et $\tilde{P}^j \rightarrow P^j$, $\forall j < i$, on obtient $(H^{i+1}T[-i+1], T^i) = 0$

$$2. (H^{i+1}T[-i], T^i) = (H^{i+1}T, H^{i+1}T).$$

En effet, on applique au triangle

$$T^i \rightarrow T^{i+1} \rightarrow H^{i+1}T[-i+1] \rightsquigarrow T^i[1]$$

le foncteur $(H^{i+1}T[-i], -)$ ce qui nous donne une suite exacte longue

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow (H^{i+1}T[-i], T^{i+1}[-1]) &\rightarrow (H^{i+1}T[-i], H^{i+1}T[-i]) \rightarrow \\ &\rightarrow (H^{i+1}T[-i], T^i) \rightarrow (H^{i+1}T[-i], T^{i+1}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

On a démontré dans le Lemme 3.5 que,

$$(H^{i+1}T[-i], T^{i+1}[-1]) = (H^{i+1}[-i+1], T^{i+1}) = 0,$$

$$\text{et } (H^{i+1}T[-i], T^{i+1}) = 0.$$

$$\text{D'où } (H^{i+1}T[-i], T^i) = (H^{i+1}T, H^{i+1}T).$$

Nous obtenons la suite exacte

$$0 \rightarrow (T^{i+1}, T^i) \rightarrow (T^i, T^i) \xrightarrow{\psi^i} (H^{i+1}T, H^{i+1}T)$$

■

Remarque Nous allons donner un exemple dans le chapitre 4 (Exemple 4.5) qui montre que $(T^i, T^i) \rightarrow (H^{i+1}T, H^{i+1}T)$ n'est pas surjectif en général, c'est-à-dire la flèche $(H^{i+1}T[-i], T^i) \rightarrow (T^{i+1}[-1], T^i)$ n'est pas toujours 0.

Lemme 3.10 Si $Ext^1(L^{i+1}, H^{i+1}T) = 0$, alors le morphisme $T^i \rightarrow T^{i+1}$ donne lieu à une suite exacte

$$0 \rightarrow (T^{i+1}, T^i) \rightarrow (T^{i+1}, T^{i+1}) \xrightarrow{\theta^{i+1}} (L^{i+1}, H^{i+1}T[2])$$

Démonstration Ceci est montré en appliquant $(T^{i+1}, -)$ au triangle

$$T^i \rightarrow T^{i+1} \rightarrow H^{i+1}T[-i+1] \rightsquigarrow T^i[1]$$

qui donne une suite exacte longue dont une partie est :

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow (T^{i+1}, H^{i+1}T[-i]) \rightarrow (T^{i+1}, T^i) \rightarrow (T^{i+1}, T^{i+1}) \rightarrow \\ \rightarrow (T^{i+1}, H^{i+1}T[-i+1]) \rightarrow (T^{i+1}, T^i[1]) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

1. D'après le Lemme 3.8 et notre hypothèse,

$$(T^{i+1}, H^{i+1}T[-i]) = Ext^1(L^{i+1}, H^{i+1}T) = 0.$$

2. $(T^{i+1}, H^{i+1}T[-i+1]) = (L^{i+1}, H^{i+1}T[2])$ d'après le Lemme 3.8.

Ces deux énoncés impliquent que la suite

$$0 \rightarrow (T^{i+1}, T^i) \rightarrow (T^{i+1}, T^{i+1}) \xrightarrow{\theta^{i+1}} (L^i, H^{i+1}[2])$$

est exacte. ■

Nous écrivons les suite exactes dans Corollaire 3.6, Lemmes 3.7, 3.8, 3.9 et 3.10 en diagramme pour lequel nous allons montrer la commutativité :

(3.3)

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & Ext^1(L^{i+1}, H^{i+1}T) & & (T^{i+1}, T^i) & & (T^{i+1}, T^i) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & (T^i, H^{i+1}T[-i]) & \rightarrow & (T^i, T^i) & \rightarrow & (T^{i+1}, T^{i+1}) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \psi^i & & \downarrow \theta^{i+1} & & \\ 0 & \rightarrow & \iota^i.(L^i, H^{i+1}T) & \rightarrow & (H^{i+1}T, H^{i+1}T) & \xrightarrow{\zeta^i} & (L^{i+1}, H^{i+1}T[2]) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & \end{array}$$

Nous allons séparer le cas où $i = 0$. Rappelons que $C := H^1T$ et $P^1 = L^0$.

Lemme 3.11 *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} (T, T) & \rightarrow & (T^1, T^1) \\ \downarrow & & \downarrow \theta^1 \\ (C, C) & \xrightarrow{\zeta^0} & (L^1, C[2]) \end{array}$$

est commutatif.

La démonstration est analogue au cas à deux termes. Afin de faciliter la lecture, nous allons donner les détails tout de même.

Démonstration Soit φ un élément de (T, T) . Il est donné par des applications $\varphi^i \in (P^i, P^i)$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \rightarrow & P^1 & \xrightarrow{\alpha^1} & P^2 & \xrightarrow{\alpha^2} & \dots & \xrightarrow{\alpha^{n-1}} & P^n & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi^1 & & \downarrow \varphi^2 & & & & \downarrow \varphi^n & & \\ 0 & \rightarrow & P^1 & \xrightarrow{\alpha^1} & P^2 & \xrightarrow{\alpha^2} & \dots & \xrightarrow{\alpha^{n-1}} & P^n & \rightarrow & 0 \end{array}$$

L'image de φ dans (T, T^1) est $(\varphi^1\phi, \varphi^2, \dots, \varphi^n)$ où ϕ est l'application d'enveloppe projective $P^1 \xrightarrow{\phi} \text{Im}(\alpha^1)$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \rightarrow & P^1 & \xrightarrow{\alpha^1} & P^2 & \xrightarrow{\alpha^2} & \dots & \xrightarrow{\alpha^{n-1}} & P^n & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi^1\phi & & \downarrow \varphi^2 & & & & \downarrow \varphi^n & & \\ 0 & \rightarrow & \text{Im}(\alpha^1) & \xrightarrow{\alpha^1} & P^2 & \xrightarrow{\alpha^2} & \dots & \xrightarrow{\alpha^{n-1}} & P^n & \rightarrow & 0 \end{array}$$

D'après le Lemme 3.4 il existe une bijection entre (T, T^1) et (T^1, T^1) . Par conséquent, on peut identifier l'image de φ avec $\bar{\varphi} \in (T^1, T^1)$ qui est donné par une suite d'applications $(\bar{\varphi}^k)_{k \leq n}$ où $\bar{\varphi}^j = \varphi^j$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, et $\bar{\varphi}^k \in (P^k, P^k)$, $\forall k \leq 0$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \rightarrow & P^0 & \xrightarrow{\alpha^0} & P^1 & \xrightarrow{\alpha^1} & P^2 & \xrightarrow{\alpha^2} & \dots & \xrightarrow{\alpha^{n-1}} & P^n & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi^0 & & \downarrow \varphi^1 & & \downarrow \varphi^2 & & & & \downarrow \varphi^n & & \\ \dots & \rightarrow & P^0 & \xrightarrow{\alpha^0} & P^1 & \xrightarrow{\alpha^1} & P^2 & \xrightarrow{\alpha^2} & \dots & \xrightarrow{\alpha^{n-1}} & P^n & \rightarrow & 0 \end{array}$$

L'image de $\bar{\varphi}$ dans $(L^1, C[2])$ est $\varphi^0\lambda$ où λ est l'application d'enveloppe projective $P^0 \xrightarrow{\lambda} C$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \rightarrow & P^{-1} & \rightarrow & P^0 & \rightarrow & P^1 & \rightarrow & \dots & \rightarrow & P^n & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \varphi^0\lambda & & \downarrow & & & & & & \\ & & 0 & \rightarrow & C & \rightarrow & 0 & & & & & & \end{array}$$

L'application $\varphi^0\lambda$ induit une application dans $\text{Hom}(\text{Coker}(P^{-1} \rightarrow P^0), C)$, et comme $\text{Coker}(P^{-1} \rightarrow P^0) = C$, il existe un $\eta \in (C, C)$ tel que

$$\lambda\eta = \varphi^0\lambda. \quad (3.4)$$

A commutative triangle diagram with vertices P^0 (top), C (bottom left), and C (bottom right). The top edge is a horizontal arrow from P^0 to C labeled λ . The left edge is a vertical arrow from P^0 down to C labeled $\varphi^0\lambda$. The right edge is a diagonal arrow from P^0 down to C labeled η .

L'image de $\bar{\varphi}$ dans $(L^1, C[2])$ est donc $\eta + \iota.(P^1, C)$.

De l'autre coté, l'image de φ dans (C, T) est $\iota\varphi^1$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \rightarrow & C & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \iota\varphi^1 & & \downarrow & & & & & & & & \\ 0 & \rightarrow & P^1 & \xrightarrow{\alpha^1} & P^2 & \xrightarrow{\alpha^2} & \dots & \xrightarrow{\alpha^{n-1}} & P^n & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Comme $\iota\varphi^1\alpha^1 = 0$, il existe un $\epsilon \in (C, C)$ tel que

$$\epsilon\iota = \iota\varphi^1.$$

A commutative triangle diagram with vertices C (top), C (bottom left), and P (bottom right). The top edge is a diagonal arrow from C down to C labeled ϵ . The right edge is a vertical arrow from C down to P labeled $\iota\varphi^1$. The bottom edge is a horizontal arrow from C to P labeled ι .

L'image de ϵ dans $(L^1, C[2])$ est $\epsilon + \iota.(P^1, C)$.

On va montrer que $\epsilon = \eta$. En effet, comme $\lambda\iota = \alpha^0$, et $\alpha^0\varphi^1 = \varphi^0\alpha^0$

$$\begin{aligned}\lambda\epsilon\iota &= \lambda\iota\varphi^1 \\ &= \alpha^0\varphi^1 \\ &= \varphi^0\alpha^0 \\ &= \varphi^0\lambda\iota.\end{aligned}$$

Et comme ι est injectif, nous obtenons

$$\lambda\epsilon = \varphi^0\lambda$$

Or, d'après (3.4), $\varphi^0\lambda = \lambda\eta$, alors

$$\lambda\epsilon = \lambda\eta$$

Et comme λ est surjectif, nous obtenons $\epsilon = \eta$. Ceci termine la démonstration.

■

Lemme 3.12 *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}(T, C) & \rightarrow & (T, T) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \iota.(P^1, C) & \rightarrow & (C, C)\end{array}$$

est commutatif.

Démonstration La démonstration est identique à la démonstration du Lemme 2.12 . ■

Nous allons montrer la commutativité du diagramme (3.3) pour $i > 0$. La démonstration ne se montre pas de façon si évidente que le cas où $i = 0$ parce qu'il utilise notre hypothèse $(Im(\alpha^i), L^i) = 0$.

Lemme 3.13 *Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$, le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}(T^i, T^i) & \rightarrow & (T^{i+1}, T^{i+1}) \\ \downarrow & & \downarrow \theta^{i+1} \\ (H^{i+1}T, H^{i+1}T) & \xrightarrow{\zeta^i} & (L^{i+1}, H^{i+1}T[2])\end{array}$$

est commutatif.

Démonstration Soit φ un élément de (T^i, T^i) . Il est donné par des applications $\varphi^j \in (P^j, P^j)$, $j \in \{i, i+1, \dots, n\}$ et $\bar{\varphi}^k \in (\bar{P}^k, \bar{P}^k)$, $k < i$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \rightarrow & \bar{P}^{i-1} & \xrightarrow{\bar{\alpha}^{i-1}} & P^i & \xrightarrow{\alpha^i} & \dots & \xrightarrow{\alpha^{n-1}} & P^n & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \bar{\varphi}^{i-1} & & \downarrow \varphi^i & & & & \downarrow \varphi^n & & \\ \dots & \rightarrow & \bar{P}^{i-1} & \xrightarrow{\bar{\alpha}^{i-1}} & P^i & \xrightarrow{\alpha^i} & \dots & \xrightarrow{\alpha^{n-1}} & P^n & \rightarrow & 0 \end{array}$$

L'image de φ dans (T^i, T^{i+1}) est $(\varphi^{i+1}\phi, \varphi^{i+2}, \dots, \varphi^n)$ où ϕ est l'application d'enveloppe projective $P^{i+1} \xrightarrow{\phi} Im(\alpha^{i+1})$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \rightarrow & \bar{P}^{i-1} & \xrightarrow{\bar{\alpha}^{i-1}} & P^i & \xrightarrow{\alpha^i} & P^{i+1} & \xrightarrow{\alpha^{i+1}} & \dots & \xrightarrow{\alpha^{n-1}} & P^n & \rightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \varphi^{i+1}\phi & & & & \downarrow \varphi^n & & \\ & & & & 0 & \rightarrow & Im(\alpha^{i+1}) & \rightarrow & \dots & \xrightarrow{\alpha^{n-1}} & P^n & \rightarrow & 0 \end{array}$$

D'après le Lemme 3.4, $T^i \rightarrow T^{i+1}$ induit une bijection entre (T^i, T^{i+1}) et (T^{i+1}, T^{i+1}) . Par conséquent, on peut identifier l'image de φ avec $\tilde{\varphi} \in (T^{i+1}, T^{i+1})$ qui est donné par une suite d'applications $(\tilde{\varphi}^i)_{i \leq n}$ où $\tilde{\varphi}^j = \varphi^j$, $\forall j \in \{i+1, i+2, \dots, n\}$, et $\tilde{\varphi}^k \in (\tilde{P}^k, \tilde{P}^k)$, $\forall k \leq i$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \rightarrow & \tilde{P}^i & \xrightarrow{\tilde{\alpha}^i} & P^{i+1} & \xrightarrow{\alpha^{i+1}} & \dots & \xrightarrow{\alpha^{n-1}} & P^n & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \tilde{\varphi}^i & & \downarrow \varphi^{i+1} & & & & \downarrow \varphi^n & & \\ \dots & \rightarrow & \tilde{P}^i & \xrightarrow{\tilde{\alpha}^i} & P^{i+1} & \xrightarrow{\alpha^{i+1}} & \dots & \xrightarrow{\alpha^{n-1}} & P^n & \rightarrow & 0 \end{array}$$

(3.5)

L'image de $\tilde{\varphi}$ dans $(L^{i+1}, H^{i+1}T[2])$ est $\tilde{\varphi}^i \lambda \nu$ où λ est l'application d'enveloppe projective $\tilde{P}^i \xrightarrow{\lambda} Ker(\alpha^{i+1})$ et $\nu : Ker(\alpha^{i+1}) \rightarrow (H^{i+1}T)[-i+1]$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \rightarrow & \tilde{P}^{i-1} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}^{i-1}} & \tilde{P}^i & \xrightarrow{\tilde{\alpha}^i} & P^{i+1} & \xrightarrow{\alpha^{i+1}} & \dots & \xrightarrow{\alpha^{n-1}} & P^n & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \tilde{\varphi}^i \lambda \nu & & \downarrow & & & & & & \\ & & 0 & \rightarrow & H^{i+1}T & \rightarrow & 0 & & & & & & \end{array}$$

L'application $\tilde{\varphi}^i \lambda \nu$ induit une application dans $Hom(Coker(\tilde{P}^{i-1} \rightarrow \tilde{P}^i), H^{i+1}T)$, et comme $Coker(\tilde{P}^{i-1} \rightarrow \tilde{P}^i) = Ker(\alpha^{i+1})$, il existe un $\eta \in (Ker(\alpha^{i+1}), H^{i+1}T)$ tel que

$$\lambda \eta = \tilde{\varphi}^i \lambda \nu. \quad (3.6)$$

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{P}^i & \xrightarrow{\lambda} & Ker(\alpha^{i+1}) \\
\downarrow \tilde{\varphi}^i \lambda \nu & \searrow \eta & \\
H^{i+1}T & &
\end{array}$$

L'image de η dans $(L^i, H^{i+1}[2])$ est $\eta + \mu^{i+1} \cdot (P^{i+1}, H^{i+1}T)$, où μ^{i+1} est l'inclusion $Ker(\alpha^{i+1}) \hookrightarrow P^{i+1}$.

De l'autre coté, l'image de φ dans $(H^{i+1}[-i], T^i)$ est $(\dots, \delta^{i-2}\bar{\varphi}^{i-1}, \delta^{i-1}\varphi^i, \tilde{\alpha}^i\varphi^{i+1})$, où $\delta^j : \hat{P}^j \rightarrow \bar{P}^{j+1}, \forall j \leq i-2, \delta^{i-1} : \hat{P}^{i-1} \rightarrow P^i$, et $\tilde{\alpha}^i : \tilde{P}^i \rightarrow P^{i+1}$.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\dots & \rightarrow & \hat{P}^{i-2} & \rightarrow & \hat{P}^{i-1} & \rightarrow & \tilde{P}^i & \rightarrow & 0 & & \\
& & \downarrow \delta^{i-2} & & \downarrow \delta^{i-1} & & \downarrow \tilde{\alpha}^i & & \downarrow & & \\
\dots & \rightarrow & \bar{P}^{i-1} & \rightarrow & P^i & \rightarrow & P^{i+1} & \rightarrow & P^{i+2} & \rightarrow \dots & \rightarrow P^n \rightarrow 0 \\
& & \downarrow \bar{\varphi}^{i-1} & & \downarrow \varphi^i & & \downarrow \varphi^{i+1} & & \downarrow \varphi^{i+2} & & \downarrow \varphi^n \rightarrow 0 \\
\dots & \rightarrow & \bar{P}^{i-1} & \rightarrow & P^i & \rightarrow & P^{i+1} & \xrightarrow{\alpha^{i+1}} & P^{i+1} & \rightarrow \dots & \rightarrow P^n \rightarrow 0
\end{array}$$

Comme $\tilde{\alpha}^i\varphi^{i+1}\alpha^{i+1} = 0$, il existe un $\epsilon : \tilde{P}^i \rightarrow Ker(\alpha^{i+1})$ tel que

$$\epsilon\mu^{i+1} = \tilde{\alpha}^i\varphi^{i+1}, \quad (3.7)$$

où μ^{i+1} est l'inclusion $Ker(\alpha^{i+1}) \hookrightarrow P^{i+1}$.

$$\begin{array}{ccc}
& & \tilde{P}^i \\
& \swarrow \epsilon & \downarrow \tilde{\alpha}^i\varphi^{i+1} \\
Ker(\alpha^{i+1}) & \xrightarrow{\mu^{i+1}} & P^{i+1}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \rightarrow & \hat{P}^{i-2} & \rightarrow & \hat{P}^{i-1} & \rightarrow & \tilde{P}^i & \rightarrow 0 \\
& & \downarrow \delta^{i-2} & & \downarrow \delta^{i-1} & & \downarrow \epsilon & \downarrow \\
\dots & \rightarrow & \bar{P}^{i-1} & \rightarrow & P^i & \rightarrow & Ker(\alpha^{i+1}) & \rightarrow 0
\end{array}$$

On identifie le complexe en bas avec le complexe

$$0 \rightarrow H^{i+1}T \rightarrow 0$$

où $H^{i+1}T$ est de degré i .

On note par $\tilde{\epsilon} : \tilde{P}^i \rightarrow H^{i+1}T$, la composition $\tilde{\epsilon} = \epsilon\nu$,
où $\nu : Ker(\alpha^{i+1}) \rightarrow H^{i+1}T[-i+1]$.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & \hat{P}^{i-2} & \rightarrow & \hat{P}^{i-1} & \xrightarrow{\hat{\alpha}^{i-1}} & \tilde{P}^i & \rightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \tilde{\epsilon} & & \\ & & & & 0 & \rightarrow & H^{i+1}T & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Comme $\hat{\alpha}^{i-1}\tilde{\epsilon} = 0$, $\tilde{\epsilon}$ factorise à travers $Coker(\hat{\alpha}^{i-1})$ qui est $H^{i+1}T$ donc il existe un $\hat{\epsilon} : H^{i+1}T \rightarrow H^{i+1}T$ tel que

$$\lambda\nu\hat{\epsilon} = \tilde{\epsilon},$$

où λ est l'application d'enveloppe projective $\tilde{P}^i \rightarrow Ker(\alpha^{i+1})$.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{P}^i & \xrightarrow{\lambda\nu} & H^{i+1}T \\ \downarrow \tilde{\epsilon} & \searrow \hat{\epsilon} & \\ H^{i+1}T & & \end{array}$$

L'image de $\hat{\epsilon}$ dans $(L^{i+1}, H^{i+1}[2])$ est $\hat{\epsilon} + \iota^i.(L^i, H^{i+1}T)$.

Comme $(Im(\alpha^i), H^{i+1}T) = 0$,

$$(Ker(\alpha^{i+1}), H^{i+1}T) \cong (H^{i+1}T, H^{i+1}T),$$

on identifie donc $\hat{\epsilon} + \iota^i.(L^i, H^{i+1}T)$ avec

$$\nu\hat{\epsilon} + \mu^{i+1}.(P^{i+1}, H^{i+1}T) \in \frac{(Ker(\alpha^{i+1}), H^{i+1}T)}{\mu^{i+1}.(P^{i+1}, H^{i+1}T)}.$$

On va montrer que $\nu\hat{\epsilon} = \eta$.

En effet, comme $\tilde{\alpha}^i\varphi^{i+1} = \tilde{\varphi}^i\tilde{\alpha}^i$ d'après (3.5), et $\tilde{\alpha}^i = \lambda\mu^{i+1}$ d'après (3.7),

$$\begin{aligned} \epsilon\mu^{i+1} &= \tilde{\alpha}^i\varphi^{i+1} \\ &= \tilde{\varphi}^i\tilde{\alpha}^i \\ &= \tilde{\varphi}^i\lambda\mu^{i+1} \end{aligned}$$

où $\mu^{i+1} : Ker(\alpha^{i+1}) \hookrightarrow P^{i+1}$. Et comme μ^{i+1} est injectif, nous obtenons

$$\epsilon = \tilde{\varphi}^i \lambda$$

Donc

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon \nu = \tilde{\varphi}^i \lambda \nu$$

Or, d'après (3.6), $\tilde{\varphi}^i \lambda \nu = \lambda \eta$, alors

$$\tilde{\epsilon} = \lambda \eta$$

Et comme $\tilde{\epsilon} = \lambda \nu \hat{\epsilon}$, et λ est surjectif, nous obtenons

$$\eta = \nu \hat{\epsilon}.$$

Ceci termine la démonstration. ■

Lemme 3.14 *Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$, le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} (T^i, H^{i+1}T[-i]) & \rightarrow & (T^i, T^i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \iota^i.(L^i, H^{i+1}T) & \rightarrow & (H^{i+1}T, H^{i+1}T) \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration Soit $\varphi \in (T^i, H^{i+1}T[-i])$. Il est donné par $(\varphi^i, \varphi^{i+1})$ où $\varphi^i \in (Im(\alpha^i), Im(\alpha^i))$ et $\varphi^{i+1} \in (P^{i+1}, Ker(\alpha^{i+1}))$.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & Im(\alpha^i) & \rightarrow & P^{i+1} & \rightarrow & P^{i+2} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & P^n & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi^i & & \downarrow \varphi^{i+1} & & \downarrow & & & & & & & \\ 0 & \rightarrow & Im(\alpha^i) & \rightarrow & Ker(\alpha^{i+1}) & \rightarrow & 0 & & & & & & & \end{array}$$

L'image de φ dans (T^i, T^i) est $\hat{\varphi} = (\varphi^i, \varphi^{i+1}\bar{\iota})$, où $\bar{\iota}$ est l'inclusion $Ker(\alpha^{i+1}) \hookrightarrow P^{i+1}$.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & Im(\alpha^i) & \rightarrow & P^{i+1} & \rightarrow & P^{i+2} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & P^n & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi^i & & \downarrow \varphi^{i+1}\bar{\iota} & & \downarrow 0 & & & & \downarrow 0 & & & \\ 0 & \rightarrow & Im(\alpha^i) & \rightarrow & P^{i+1} & \rightarrow & P^{i+2} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & P^n & \rightarrow & 0 \end{array}$$

L'image de $\hat{\varphi}$ dans $(H^{i+1}T[-i], T^i)$ est $(\varphi^i, \bar{\iota}\varphi^{i+1}\bar{\iota})$.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & Im(\alpha^i) & \rightarrow & Ker(\alpha^{i+1}) & \rightarrow & 0 & & & & & & & \\ & & \downarrow \varphi^i & & \downarrow \bar{\iota}\varphi^{i+1}\bar{\iota} & & \downarrow & & & & & & & \\ 0 & \rightarrow & Im(\alpha^i) & \rightarrow & P^{i+1} & \xrightarrow{\alpha^{i+1}} & P^{i+2} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & P^n & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Comme $(\bar{\iota}\varphi^{i+1}\bar{\iota})\alpha^{i+1} = \bar{\iota}\varphi^{i+1}(\bar{\iota}\alpha^{i+1}) = 0$, il existe un $\bar{\varphi} \in (Ker(\alpha^{i+1}), Ker(\alpha^{i+1}))$ tel que

$$\bar{\varphi}\bar{\iota} = \bar{\iota}\varphi^{i+1}\bar{\iota}$$

Comme $\bar{\iota}$ est injectif, nous avons donc

$$\bar{\varphi} = \bar{\iota}\varphi^{i+1}$$

L'image de φ dans $(H^{i+1}T, H^{i+1}T)$ est donc $(\varphi^i, \bar{\iota}\varphi^{i+1})$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & Im(\alpha^i) & \rightarrow & Ker(\alpha^{i+1}) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi^i & & \downarrow \bar{\iota}\varphi^{i+1} & & \\ 0 & \rightarrow & Im(\alpha^i) & \rightarrow & Ker(\alpha^{i+1}) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Comme l'image de φ dans $\iota^i.(L^i, H^{i+1}T)$ est $(\varphi^i, \bar{\iota}\varphi^{i+1})$,

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \rightarrow & Im(\alpha^i) & \rightarrow & Ker(\alpha^{i+1}) & \rightarrow & 0 & & & & \\ & & \parallel & & \downarrow \bar{\iota} & & \downarrow & & & & \\ 0 & \rightarrow & Im(\alpha^i) & \rightarrow & P^{i+1} & \rightarrow & P^{i+2} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & P^n & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi^i & & \downarrow \varphi^{i+1} & & \downarrow & & & & \\ 0 & \rightarrow & Im(\alpha^i) & \rightarrow & Ker(\alpha^{i+1}) & \rightarrow & 0 & & & & \end{array}$$

ceci termine la démonstration. ■

Nous venons de montrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & Ext^1(L^{i+1}, H^{i+1}T) & & (T^{i+1}, T^i) & & (T^{i+1}, T^i) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & (T^i, H^{i+1}T[-i]) & \rightarrow & (T^i, T^i) & \rightarrow & (T^{i+1}, T^{i+1}) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \theta^{i+1} & & \\ 0 & \rightarrow & \iota^i.(L^i, H^{i+1}T) & \rightarrow & (H^{i+1}T, H^{i+1}T) & \xrightarrow{\zeta^i} & (L^{i+1}, H^{i+1}T[2]) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & \end{array}$$

est commutatif.

Si $Ext^1(L^{i+1}, H^{i+1}T) = 0$, le lemme de serpent nous donne un isomorphisme $(T^{i+1}, T^i) \xrightarrow{\cong} (T^{i+1}, T^i)$, et nous obtenons aussi

$$(T^i, H^{i+1}T[-i]) \cong \iota^i.(L^i, H^{i+1}T)$$

Ceci et le fait que les suites horizontales sont exactes nous donnent, d'après le Corollaire 1.11, un produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T^i, T^i) & \rightarrow & \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T^{i+1}, T^{i+1}) \\ \downarrow & & \downarrow \theta^{i+1} \\ \text{Hom}_{\Lambda}(H^{i+1}T, H^{i+1}T) & \xrightarrow{\xi^i} & \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(L^{i+1}, H^{i+1}T[2]) \end{array}$$

Remarque Avec une démonstration analogue, étant donnés deux complexes différents qui satisfaisaient des hypothèses similaires à celles du Théorème 3.3 nous pouvons déterminer $\text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(X, Y)$ en tant que produit fibré de morphismes de ses homologies :

Théorème 3.15 *Soient*

$$\begin{aligned} X : 0 \rightarrow X^1 \xrightarrow{\alpha^1} X^2 \xrightarrow{\alpha^2} \dots \xrightarrow{\alpha^{n-1}} X^n \rightarrow 0 \text{ et} \\ Y : 0 \rightarrow Y^1 \xrightarrow{\beta^1} Y^2 \xrightarrow{\beta^2} \dots \xrightarrow{\alpha^{n-1}} Y^n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

des complexes qui satisfont $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\Lambda}^1(\text{Coker}(\alpha^i), H^i Y) = \text{Hom}_{\Lambda}(\text{Coker}(\alpha^i), Y^i) = 0 \text{ et} \\ \text{Hom}_{\Lambda}(\text{Im}(\alpha^i), \text{Coker}(\beta^i)) = \text{Hom}_{\Lambda}(\text{Coker}(\alpha^i), \text{Im}(\beta^i)) = 0. \end{aligned}$$

Soient

$$\begin{aligned} {}^i X : 0 \rightarrow \text{Im}(\alpha^i) \rightarrow X^{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow X^n \rightarrow 0 \text{ et} \\ {}^i Y : 0 \rightarrow \text{Im}(\beta^i) \rightarrow Y^{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow Y^n \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Alors, $\text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(X, Y)$ est un produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(X, Y) & \rightarrow & \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}({}^1 X, {}^1 Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_{\Lambda}(H^1 X, H^1 Y) & \rightarrow & \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(\text{Coker}(\alpha^1), H^1 Y[2]) \end{array}$$

où pour tout $i \in \{1, \dots, n-2\}$, $\text{Hom}_{D^b(\Lambda)}({}^i X, {}^i Y)$ est un produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}({}^i X, {}^i Y) & \rightarrow & \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}({}^{i+1} X, {}^{i+1} Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_{\Lambda}(H^{i+1} X, H^{i+1} Y) & \rightarrow & \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(\text{Coker}(\alpha^{i+1}), H^{i+1} Y[2]) \end{array}$$

3.2 Des produits fibrés plus explicites

Dans la section 3.1 nous avons obtenu que $End_{D^b(\Lambda)}(T)$ est un produit fibré de θ^1 et ζ^0 :

$$\begin{array}{ccc} Hom_{D^b(\Lambda)}(T, T) & \rightarrow & Hom_{D^b(\Lambda)}(T^1, T^1) \\ \downarrow \psi^0 & & \downarrow \theta^1 \\ Hom_{\Lambda}(C, C) & \xrightarrow{\zeta^0} & Hom_{D^b(\Lambda)}(L^1, C[2]) \end{array}$$

et pour tout $i \in \{1, \dots, n-2\}$, l'anneau des endomorphismes de T^i est un produit fibré de θ^{i+1} et ζ^i

$$\begin{array}{ccc} Hom_{D^b(\Lambda)}(T^i, T^i) & \rightarrow & Hom_{D^b(\Lambda)}(T^{i+1}, T^{i+1}) \\ \downarrow \psi^i & & \downarrow \theta^{i+1} \\ Hom_{\Lambda}(H^{i+1}T, H^{i+1}T) & \xrightarrow{\zeta^i} & Hom_{D^b(\Lambda)}(L^{i+1}, H^{i+1}T[2]) \end{array}$$

Dans la suite, nous allons déterminer l'image de ψ^i , $i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$. Le cas où $i = 0$ sera traité séparément.

Notons pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$,

$$A^i := Im(\psi^i) = Ker((H^{i+1}T, H^{i+1}T) \rightarrow (T^{i+1}, T^i[1])).$$

Lemme 3.16

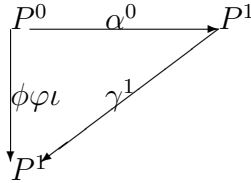
$$A^0 = \{ \varphi \in (C, C) : \exists (\gamma^j)_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} \gamma^j : P^j \rightarrow P^j \text{ tels que } \varphi \iota = \iota \gamma^1 \\ \text{et } \forall j \in \{1, 2, \dots, n-1\} \gamma^j \alpha^j = \alpha^j \gamma^{j+1} \}.$$

Démonstration On note par ϕ l'application d'enveloppe projective $P^0 \rightarrow C$, et par α^0 l'application $P^0 \rightarrow P$ où $\alpha^0 = \phi \iota^1$.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow & P^{-1} & \rightarrow & P^0 & \xrightarrow{\alpha^0} & P^1 & \xrightarrow{\alpha^1} & P^2 & \rightarrow \dots \rightarrow & P^n & \rightarrow & 0 & & T^1 \\ & \downarrow & & \downarrow \phi & & \downarrow & & & & & & & & \downarrow \\ & 0 & \rightarrow & C & \rightarrow & 0 & & & & & & & & C \\ & \downarrow & & \downarrow \varphi & & \downarrow & & & & & & & & \downarrow \\ & 0 & \rightarrow & C & \rightarrow & 0 & & & & & & & & C \\ & \downarrow & & \downarrow \iota^1 & & \downarrow & & & & & & & & \downarrow \\ & 0 & \rightarrow & P^1 & \xrightarrow{\alpha^0} & P^2 & \rightarrow \dots \rightarrow & P^n & \rightarrow & 0 & & & & T[1] \end{array} \quad (3.8)$$

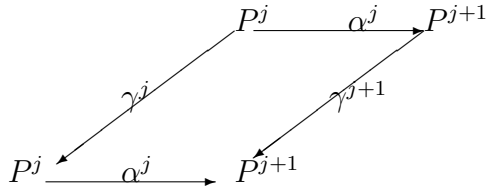
Si $\varphi \in A^0$ donc $\varphi \in (C, C)$ tel qu'il existe un $\gamma^1 : P^1 \rightarrow P^1$ où

$$\phi\varphi\iota = \alpha^0\gamma^1$$



et une suite $(\gamma^j)_{j \in \{2, \dots, n\}}$, $\gamma^j : P^j \rightarrow P^j$ où

$$\forall j \in \{2, \dots, n-1\} \quad \gamma^j \alpha^j = \alpha^j \gamma^{j+1}.$$



Comme ϕ est surjectif et $\alpha^0 = \phi\iota$,

$$\begin{aligned} \phi\varphi\iota &= \alpha^0\gamma^1 \\ &= \phi\iota\gamma^1 \end{aligned}$$

on obtient donc $\varphi\iota = \iota\gamma^1$.

Alors

$$\begin{aligned} A^0 &= \{ \varphi \in \text{End}_\Lambda(C) : \exists \gamma^1 : P^1 \rightarrow P^1 \text{ tel que } \phi\varphi\iota = \alpha^0\gamma^1 \text{ et } \exists (\gamma^j)_{j \in \{2, \dots, n\}} \\ &\quad \gamma^j : P^j \rightarrow P^j \text{ tels que } \forall j \in \{2, \dots, n-1\} \quad \gamma^j \alpha^j = \alpha^j \gamma^{j+1} \}. \\ &= \{ \varphi \in \text{End}_\Lambda(C) : \exists (\gamma^j)_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} \quad \gamma^j : P^j \rightarrow P^j \text{ tels que } \varphi\iota = \iota\gamma^1 \\ &\quad \text{et } \forall j \in \{2, \dots, n-1\} \quad \gamma^j \alpha^j = \alpha^j \gamma^{j+1} \} \end{aligned}$$

■

Pour tout $i \in \{1, \dots, n-2\}$, on note par σ^i la composition $L^i \rightarrow \text{Im}(\alpha^{i+1}) \rightarrow P^{i+2}$.

Lemme 3.17 Pour tout $i \in \{1, \dots, n-2\}$

$$A^i = \{\varphi^i \in (H^{i+1}T, H^{i+1}T) : \exists (\gamma^j)_{j \in \{i+1, i+2, \dots, n\}}, \gamma^{i+1} \in (L^i, L^i), \\ \gamma^j \in (P^j, P^j), \forall j \in \{i+2, \dots, n\}, \text{ tels que } \varphi^i \iota^i = \iota^i \gamma^{i+1}, \gamma^{i+1} \sigma^i = \sigma^i \gamma^{i+2} \text{ et} \\ \forall j \in \{i+2, \dots, n-1\}, \gamma^j \alpha^j = \alpha^j \gamma^{j+1}\}.$$

Démonstration Fixons $i \in \{1, \dots, n-2\}$. On note par ϕ^i l'application d'enveloppe projective $\tilde{P}^i \rightarrow \text{Ker}(\alpha^{i+1})$, par ϵ^i l'application $\text{Ker}(\alpha^{i+1}) \rightarrow H^{i+1}T$, par ν^i l'inclusion $\text{Ker}(\alpha^{i+1}) \hookrightarrow P^{i+1}$, par $\tilde{\alpha}^i$ l'application $\tilde{P}^i \rightarrow P^{i+1}$ où $\tilde{\alpha}^i = \phi^i \nu^i$, et par π^i l'application $P^{i+1} \rightarrow L^i$. On a $\alpha^{i+1} = \pi^i \sigma^i$.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow & \tilde{P}^{i-1} \rightarrow \tilde{P}^i & \xrightarrow{\tilde{\alpha}^i} P^{i+1} & \xrightarrow{\alpha^{i+1}} P^{i+2} \rightarrow \dots \rightarrow P^n \rightarrow 0 & & T^{i+1} \\ & \downarrow & \downarrow \phi^i \epsilon^i & \downarrow & & \downarrow \\ & 0 \rightarrow H^{i+1}T & \rightarrow 0 & & & H^{i+1}T \\ & \downarrow & \downarrow \varphi^i & \downarrow & & \downarrow \\ & 0 \rightarrow H^{i+1}T & \rightarrow 0 & & & H^{i+1}T \\ & \downarrow & \downarrow \iota^i & \downarrow & & \downarrow \\ & 0 \rightarrow L^i & \rightarrow P^{i+2} \rightarrow \dots \rightarrow P^n \rightarrow 0 & & & T^i[1] \end{array} \quad (3.9)$$

Si $\varphi^i \in A^i$ donc $\varphi^i \in (H^{i+1}, H^{i+1}T)$ tel qu'il existe un $\bar{\gamma}^{i+1} : P^{i+1} \rightarrow L^i$ où

$$\phi^i \epsilon^i \varphi^i \iota^i = \tilde{\alpha}^i \bar{\gamma}^{i+1}$$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{P}^i & \xrightarrow{\tilde{\alpha}^i} & P^{i+1} \\ \downarrow \phi^i \epsilon^i \varphi^i \iota^i & \searrow \bar{\gamma}^{i+1} & \downarrow \\ L^i & & \end{array}$$

et une suite $(\gamma^j)_{j \in \{i+2, \dots, n-1\}}$ $\gamma^j : P^j \rightarrow P^j$ où

$$\bar{\gamma}^{i+1} \sigma^i = \alpha^{i+1} \gamma^{i+2}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P^{i+1} & \xrightarrow{\alpha^{i+1}} & P^{i+2} \\
 & & \searrow^{\bar{\gamma}^{i+1}} & & \searrow^{\gamma^{i+2}} \\
 L^i & \xrightarrow{\sigma^i} & P^{i+2} & &
 \end{array}$$

$$\text{et } \forall j \in \{i+2, \dots, n-1\} \quad \gamma^j \alpha^j = \alpha^j \gamma^{j+1}.$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P^j & \xrightarrow{\alpha^j} & P^{j+1} \\
 & & \searrow^{\gamma^j} & & \searrow^{\gamma^{j+1}} \\
 P^j & \xrightarrow{\alpha^j} & P^{j+1} & &
 \end{array}$$

Comme ϕ^i est surjectif et $\tilde{\alpha}^i = \phi^i \nu^i$,

$$\begin{aligned}
 \phi^i \epsilon^i \varphi^i \iota^i &= \tilde{\alpha}^i \bar{\gamma}^{i+1} \\
 &= \phi^i \nu^i \bar{\gamma}^{i+1}
 \end{aligned}$$

on obtient donc

$$\epsilon^i \varphi^i \iota^i = \nu^i \bar{\gamma}^{i+1}. \quad (3.10)$$

Maintenant en appliquant $(-, L^i)$ à la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Im}(\alpha^i) \rightarrow P^{i+1} \rightarrow L^i \rightarrow 0,$$

on obtient une suite exacte longue

$$0 \rightarrow (L^i, L^i) \rightarrow (P^{i+1}, L^i) \rightarrow (\text{Im}(\alpha^i), L^i) \rightarrow \dots$$

L'image de $\delta \in (L^i, L^i)$ dans (P^{i+1}, L^i) est $\pi^i \delta$. Comme $(\text{Im}(\alpha^i), L^i) = 0$, il existe un $\gamma^{i+1} \in (L^i, L^i)$ tel que

$$\bar{\gamma}^{i+1} = \pi^i \gamma^{i+1}. \quad (3.11)$$

Comme le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Ker}(\alpha^{i+1}) & \xrightarrow{\epsilon^i} & H^{i+1}T \\
 \downarrow \nu^i & & \downarrow \iota^i \\
 P^{i+1} & \xrightarrow{\pi^i} & L^i
 \end{array}$$

est commutatif, on obtient donc, d'après (3.10) et (3.11)

$$\begin{aligned}\epsilon^i \varphi^i \iota^i &= \nu^i \bar{\gamma}^{i+1} \\ &= \nu^i \pi^i \gamma^{i+1} \\ &= \epsilon^i \iota^i \gamma^{i+1},\end{aligned}$$

et comme ϵ^i est surjectif, alors

$$\varphi^i \iota^i = \iota^i \gamma^{i+1}.$$

On obtient aussi

$$\begin{aligned}\pi^i \gamma^{i+1} \sigma^i &= \bar{\gamma}^{i+1} \sigma^i \\ &= \alpha^{i+1} \gamma^{i+2} \\ &= \pi^i \sigma^i \gamma^{i+2},\end{aligned}$$

et comme π^i est surjectif, on obtient

$$\gamma^{i+1} \sigma^i = \sigma^i \gamma^{i+2}.$$

Ceci termine la démonstration. ■

Un élément de A^0 est donc un endomorphisme de C qui induit un endomorphisme du complexe $C \hookrightarrow P^1 \xrightarrow{\alpha^1} P^2 \rightarrow \dots \rightarrow P^n$ comme suit

$$\begin{array}{cccccccc} C & \xhookrightarrow{\iota} & P^1 & \xrightarrow{\alpha^1} & P^2 & \xrightarrow{\alpha^2} & \dots & \xrightarrow{\alpha^{n-1}} & P^n \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \gamma^1 & & \downarrow \gamma^2 & & & & \downarrow \gamma^n \\ C & \xhookrightarrow{\iota} & P^1 & \xrightarrow{\alpha^1} & P^2 & \xrightarrow{\alpha^2} & \dots & \xrightarrow{\alpha^{n-1}} & P^n \end{array}$$

et un élément de A^i est donc un endomorphisme de $H^{i+1}T$ qui induit un endomorphisme du complexe $H^{i+1}T \hookrightarrow L^i \rightarrow P^{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow P^n$ comme suit

$$\begin{array}{cccccccc} H^{i+1}T & \xhookrightarrow{\iota^i} & L^i & \xrightarrow{\sigma^i} & P^{i+2} & \xrightarrow{\alpha^{i+2}} & \dots & \xrightarrow{\alpha^{n-1}} & P^n \\ \downarrow \varphi^i & & \downarrow \gamma^{i+1} & & \downarrow \gamma^{i+2} & & & & \downarrow \gamma^n \\ H^{i+1}T & \xhookrightarrow{\iota^i} & L^i & \xrightarrow{\sigma^i} & P^{i+2} & \xrightarrow{\alpha^{i+2}} & \dots & \xrightarrow{\alpha^{n-1}} & P^n \end{array}$$

En plus, pour tout $i \in \{0, \dots, n-2\}$, A^i possède une structure multiplicative en tant que sous-anneau de $(H^{i+1}T, H^{i+1}T)$, par le même argument que dans le cas de complexes à deux termes. Aussi, $1_{\text{End}(H^{i+1}T)} \in A^i$.

On note pour tout $i \in \{0, \dots, n-2\}$,

$$\Omega^i := \text{Ker}((L^{i+1}, H^{i+1}T[2]) \rightarrow (T^{i+1}, T^i[1])).$$

On remarque que si Λ est un ordre, Ω^i est un Λ -module de torsion, $K \otimes_R \Omega^i = 0$.

Lemme 3.18 *Il existe une suite exacte*

$$0 \rightarrow \iota.(P^1, C) \rightarrow A^0 \xrightarrow{\rho^0} \Omega^0 \rightarrow 0$$

et pour tout $i \in \{1, \dots, n-2\}$, une suite exacte

$$0 \rightarrow \iota^i.(L^i, H^{i+1}T) \rightarrow A^i \xrightarrow{\rho^i} \Omega^i \rightarrow 0$$

Démonstration La démonstration est analogue à la démonstration du Lemme 2.14. Nous donnons ici la démonstration pour la deuxième suite exacte.

D'après le Lemme 3.7 et les définitions de A^i et $H^{i+1}T$ nous obtenons le diagramme suivant qui est d'ailleurs commutatif grâce à (3.9).

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & & 0 \\
 & & & \downarrow & & & \downarrow \\
 & & & A^i & \xrightarrow{\rho^i} & & \Omega^i \\
 & & & \downarrow \beta^i & & & \downarrow \mu^i \\
 0 & \rightarrow & \iota^i.(L^i, H^{i+1}T) & \xrightarrow{\nu^i} & (H^{i+1}T, H^{i+1}T) & \xrightarrow{\eta^i} & (L^{i+1}, H^{i+1}T[2]) \rightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow \chi^i & & \downarrow \gamma^i \\
 & & & & (T^{i+1}, T^i[1]) & = & (T^{i+1}, T^i[1])
 \end{array}$$

Comme $(\beta^i \eta^i) \gamma^i = \beta^i (\eta^i \gamma^i) = \beta^i (\chi^i \text{id}) = 0$, il existe une application $\rho^i : A^i \rightarrow \Omega^i$ telle que

$$\rho^i \mu^i = \beta^i \eta^i.$$

L'application ρ^i est la restriction de η^i à A^i . Donc

$$\text{Ker}(\rho^i) \subseteq \iota^i.(L^i, H^{i+1}T).$$

Maintenant on va montrer que $\iota^i.(L^i, H^{i+1}T) \subseteq \text{Ker}(\rho)$. Il suffit de montrer que $\iota^i.(L^i, H^{i+1}T) \subseteq A^i$. En effet, $\nu^i\chi^i = \nu^i\eta^i\gamma^i = 0$, donc il existe $\phi^i : \iota^i.(L^i, H^{i+1}T) \rightarrow A^i$ tel que

$$\phi^i\beta^i = \nu^i.$$

Comme ν^i est injectif, ϕ^i l'est aussi. Alors $\text{Ker}(\rho^i) = \iota^i.(L^i, H^{i+1}T)$ et on obtient donc une suite exacte

$$0 \rightarrow \iota^i.(L^i, H^{i+1}T) \rightarrow A^i \xrightarrow{\rho^i} \Omega^i \rightarrow 0$$

■

D'après le Théorème 3.3 et le Lemme 3.18 nous obtenons donc des produits fibrés plus explicites.

Lemme 3.19 $\text{End}_{D^b(\Lambda)}(T)$ est un produit fibré de θ^1 et ρ^0

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T, T) & \rightarrow & \text{Hom}_{\Lambda}(T^1, T^1) \\ \downarrow & & \downarrow \theta^1 \\ A^0 & \xrightarrow{\rho^0} & \Omega^0 \end{array}$$

où pour tout $i \in \{1, \dots, n-2\}$, $\text{End}_{D^b(\Lambda)}(T^i)$ est un produit fibré de θ^{i+1} et ρ^i

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T^i, T^i) & \rightarrow & \text{Hom}_{\Lambda}(T^{i+1}, T^{i+1}) \\ \downarrow & & \downarrow \theta^{i+1} \\ A^i & \xrightarrow{\rho^i} & \Omega^i \end{array}$$

Remarque On obtient ainsi des morphismes

$$\Sigma^i : \text{End}_{D^b(\Lambda)}(T) \rightarrow \text{End}_{\Lambda}(H^{i+1}T) \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$$

et on obtient du fait que $\text{End}_{D^b(\Lambda)}(T^i) \rightarrow \text{End}_{D^b(\Lambda)}(T^{i+1})$ est surjectif $\forall i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$, que

$$\text{Im}(\Sigma^i) = A^i$$

et donc le Lemme 3.9 d'écrit le conoyau de Σ^i comme étant un sous-module de $\text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T^{i+1}[-1], T^i)$.

3.3 La structure d'anneau de $End_{D^b(\Lambda)}(T)$

La structure d'anneau de $End_{D^b(\Lambda)}(T)$ est induite par celles de A^0 et de $End_{D^b(\Lambda)}(T^1)$, donc aussi de celles de A^i et $End_{D^b(\Lambda)}(T^{i+1})$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Nous allons voir la structure d'anneau de $End_{D^b(\Lambda)}(T^i)$ pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$. En effet, cette structure est induite par la structure d'anneau de A^i et de Ω^i . Donc il nous faut regarder la structure d'anneau de Ω^i , et pour cela, comme $\Omega^i = A^i/\iota^i.(L^i, H^{i+1}T)$, il ne reste qu'à montrer que $\iota^i.(L^i, H^{i+1}T)$ est un idéal bilatère de A^i .

Lemme 3.20 $\iota^i.(L^i, H^{i+1}T)$ est un idéal bilatère de A^i .

Démonstration Il est clair que $\iota^i.(L^i, H^{i+1}T)$ est stable par la composition. Soient $\varphi \in A^i$ et $\gamma = \iota^i\gamma' \in \iota^i.(L^i, H^{i+1}T)$. Nous avons

$$\gamma\varphi = \iota^i\gamma'\varphi \in \iota^i.(L^i, H^{i+1}T).$$

Donc, $\iota^i.(L^i, H^{i+1}T)$ est un idéal à droite.

Il nous reste à montrer que $\varphi\gamma \in \iota^i.(L^i, H^{i+1}T)$. En effet, comme $\varphi \in A^i$, il existe un $\delta \in (L^i, L^i)$ tel que

$$\varphi\iota^i = \iota^i\delta$$

Alors,

$$\begin{aligned} \varphi\gamma &= \varphi(\iota^i\gamma') \\ &= (\varphi\iota^i)\gamma' \\ &= (\iota^i\delta)\gamma' \\ &= \iota^i(\delta\gamma') \in \iota^i.(L^i, H^{i+1}T) \end{aligned}$$

D'où la structure d'idéal de $\iota^i.(L^i, H^{i+1}T)$. ■

Par conséquent, pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, Ω^i possède une structure d'anneau comme anneau quotient et $End_{D^b(\Lambda)}(T^i)$ possède une structure d'anneau ; ceux-ci induisent la structure d'anneau de $End_{D^b(\Lambda)}(T)$.

3.4 Le cas où Λ est un ordre de Gorenstein

On note pour tous deux Λ -modules X et Y ,
 $\underline{Hom}_\Lambda(X, Y) :=$ l'ensemble de tous les morphismes de X à Y dans la catégorie stable de Λ -modules.

Supposons que R est un anneau de Dedekind et Λ est un ordre de Gorenstein.

Lemme 3.21 1. $(L^1, C[2]) = \underline{Hom}_\Lambda(C, C)$.

2. Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, si $(Im(\alpha^i), L^i) = 0$, alors

$$(L^{i+1}, H^{i+1}T[2]) = \underline{Hom}_\Lambda(Ker(\alpha^{i+1}), H^{i+1}T).$$

Démonstration Pour le point 1, la démonstration est analogue à la démonstration du Lemme 2.4 . Nous allons démontrer le point 2.

En effet, on applique le Lemme 1.22 à $Ker(\alpha^{i+1})$, $H^{i+1}T$ et à la suite exacte

$$0 \rightarrow Ker(\alpha^{i+1}) \xrightarrow{\mu^i} P^{i+1} \rightarrow Im(\alpha^{i+1}) \rightarrow 0$$

On obtient donc

$$\mathcal{P}(Ker(\alpha^{i+1}), H^{i+1}T) = \mu^i.(P^{i+1}, Ker(\alpha^{i+1}))$$

$$\begin{aligned} \text{et } \underline{Hom}_\Lambda(Ker(\alpha^{i+1}), H^{i+1}T) &= (Ker(\alpha^{i+1}), H^{i+1}T) / \mu^i.(P^{i+1}, Ker(\alpha^{i+1})) \\ &= Ext^1(Im(\alpha^i), H^{i+1}T) \\ &= (L^{i+1}, H^{i+1}T[2]) \text{ d'après le Lemme 3.7,} \end{aligned}$$

où μ^i signifie l'inclusion $Ker(\alpha^{i+1}) \hookrightarrow P^{i+1}$. Ceci termine la démonstration.

■

Corollaire 3.22 Si Λ est un ordre de Gorenstein et pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$Ext_\Lambda^1(L^i, H^i T) = Hom_\Lambda(L^i, P^i) = Hom_\Lambda(Im(\alpha^i), L^i) = 0,$$

alors, l'anneau des endomorphismes de T est un produit fibré de θ^1 et ζ^0

$$\begin{array}{ccc} Hom_{D^b(\Lambda)}(T, T) & \rightarrow & Hom_{D^b(\Lambda)}(T^1, T^1) \\ \downarrow \psi^0 & & \downarrow \theta^1 \\ Hom_\Lambda(C, C) & \xrightarrow{\zeta^0} & \underline{Hom}_\Lambda(C, C) \end{array}$$

où pour tout $i \in \{1, \dots, n-2\}$, l'anneau des endomorphismes de T^i est un produit fibré de θ^{i+1} et ζ^i .

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T^i, T^i) & \rightarrow & \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T^{i+1}, T^{i+1}) \\ \downarrow \psi^i & & \downarrow \theta^{i+1} \\ \text{Hom}_{\Lambda}(H^{i+1}T, H^{i+1}T) & \xrightarrow{\zeta^i} & \underline{\text{Hom}}_{\Lambda}(\text{Ker}(\alpha^{i+1}), H^{i+1}T) \end{array}$$

Remarque

1. $\mathcal{P}(H^{i+1}T, H^{i+1}T) \subset \mathcal{P}(\text{Ker}(\alpha^{i+1}), H^{i+1}T)$.

En effet, en appliquant le Lemme 1.22 à la suite exacte

$$0 \rightarrow H^{i+1}T \xrightarrow{\iota^i} L^i \rightarrow \text{Im}(\alpha^{i+1}) \rightarrow 0,$$

nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(H^{i+1}T, H^{i+1}T) \subset \iota^i(L^i, H^{i+1}T) &= \mu^i.(P^{i+1}, \text{Ker}(\alpha^{i+1})) \\ &= \mathcal{P}(\text{Ker}(\alpha^{i+1}), H^{i+1}T) \end{aligned}$$

2. En général, $\mathcal{P}(H^{i+1}T, H^{i+1}T) \stackrel{\subset}{\neq} \iota^i(L^i, H^{i+1}T)$, donc

$$\underline{\text{Hom}}_{\Lambda}(H^{i+1}T, H^{i+1}T) \rightarrow (L^{i+1}, H^{i+1}T[2])$$

est surjectif, mais il n'est pas toujours injectif.

3. Il n'y a pas de changement par rapport à A^i défini dans la section 3.2, et comme nous supposons que $(\text{Im}(\alpha^i), H^{i+1}T) = 0$, nous avons

$$(H^{i+1}T, H^{i+1}T) \cong (\text{Ker}(\alpha^{i+1}), H^{i+1}T)$$

et le morphisme ζ^i est le morphisme canonique de $(\text{Ker}(\alpha^{i+1}), H^{i+1}T)$ à $(\text{Ker}(\alpha^{i+1}), H^{i+1}T)$ modulo les morphismes qui factorisent vers un module projectif.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\Lambda}(H^{i+1}T, H^{i+1}T) & \xrightarrow{\zeta^i} & \underline{\text{Hom}}_{\Lambda}(\text{Ker}(\alpha^{i+1}), H^{i+1}T) \\ \parallel & \nearrow & \\ \text{Hom}_{\Lambda}(\text{Ker}(\alpha^{i+1}), H^{i+1}T) & & \end{array}$$

3.5 Le cas où Λ est un ordre symétrique et les homologies au milieu sont de R -torsion

Supposons que R est un anneau de Dedekind, le complexe T défini au début de ce chapitre est un complexe basculant et les homologies au milieu sont de R -torsion. Si Λ est un ordre symétrique, nous allons voir que $End_{D^b(\Lambda)}(T)$ est un produit fibré de A^0 défini dans la section 3.3 et $End_{\Lambda}(H^n T/torsion)$.

D'abord, rappelons le produit fibré obtenu du Lemme 3.19

$$\begin{array}{ccc} Hom_{D^b(\Lambda)}(T, T) & \rightarrow & Hom_{\Lambda}(T^1, T^1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A^0 & \rightarrow & \Omega^0 \end{array} \quad (3.12)$$

où pour tout $i \in \{1, \dots, n-2\}$, $End_{D^b(\Lambda)}(T^i)$ est un produit fibré

$$\begin{array}{ccc} Hom_{D^b(\Lambda)}(T^i, T^i) & \rightarrow & Hom_{\Lambda}(T^{i+1}, T^{i+1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A^i & \rightarrow & \Omega^i \end{array} \quad (3.13)$$

Dans cette section, nous supposons que Λ est un ordre symétrique. Comme le cas de complexes à deux termes, d'après le Théorème 1.25 $End_{D^b(\Lambda)}(T)$ est un ordre, donc sans R -torsion.

Supposons que $H^j T$ sont de R -torsion $\forall j \in \{2, \dots, n-1\}$.

Pour tout $i \in \{1, \dots, n-2\}$, on définit la partie torsion de (T^i, T^i)

$$t(T^i, T^i) = \{\varphi \in (T^i, T^i) : \exists r \in R, r \neq 0 \ r \cdot \varphi = 0\}$$

Soit $\xi : (T^1, T) \rightarrow (T^1, T^1)$ l'application du Lemme 3.10.

Lemme 3.23 $t(T^1, T^1) \cap \xi((T^1, T)) = 0$.

Démonstration Ceci est clair car (T, T) est sans R -torsion, donc $(T^1, T) \hookrightarrow (T, T)$ aussi, en particulier $\xi((T^1, T))$ aussi car ξ est injectif, tandis que $t(T^1, T^1)$ est de R -torsion. ■

On note $\theta := \theta^1$, où $\theta^1 : (T^1, T^1) \rightarrow \Omega^0$ l'application du Lemme 3.19, et $\theta' := \theta|_{t(T^1, T^1)}$.

Lemme 3.24 $\theta' : t(T^1, T^1) \rightarrow Im(\theta')$ est bijectif.

Démonstration La démonstration suit la démonstration du Lemme 2.17

■

L'application θ induit

$$\hat{\theta} : \frac{(T^1, T^1)}{t(T^1, T^1)} \rightarrow \frac{\Omega^0}{Im(\theta')}$$

$$f + t(T^1, T^1) \mapsto \theta(f) + Im(\theta')$$

Lemme 3.25 1. L'application $\hat{\theta}$ est surjectif.

2. $Ker(\hat{\theta}) \cong (T^1, T)$

Démonstration La démonstration des Lemmes 2.18 et 2.19 s'applique verbatim. ■

Par conséquent, nous obtenons le diagramme où les noyaux des ses suites exactes verticales sont isomorphes.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & (T^1, T) & = & \frac{(T^1, T) + t(T^1, T^1)}{t(T^1, T^1)} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & t(T^1, T^1) & \rightarrow & \frac{(T^1, T^1)}{t(T^1, T^1)} & \rightarrow & 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow \hat{\theta} & & \\
 0 & \rightarrow & Im(\theta') & \rightarrow & \frac{\Omega^0}{Im(\theta')} & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Ceci nous donne un produit fibré

$$\begin{array}{ccc}
 (T^1, T^1) & \rightarrow & \frac{(T^1, T^1)}{t(T^1, T^1)} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \Omega^0 & \rightarrow & \frac{\Omega^0}{Im(\theta')}
 \end{array}$$

Nous composons le diagramme (3.12) avec le diagramme ci-dessus

$$\begin{array}{ccccc} (T, T) & \rightarrow & (T^1, T^1) & \rightarrow & \frac{(T^1, T^1)}{t(T^1, T^1)} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A^0 & \rightarrow & \Omega^0 & \rightarrow & \frac{\Omega^0}{Im(\theta')} \end{array}$$

Comme nous avons le diagramme où les deux carrés sont des produit fibrés, et où les noyaux des applications verticales sont égaux, alors d'après le Corollaire 1.11, le diagramme composé est aussi un produit fibré

$$\begin{array}{ccc} (T, T) & \rightarrow & \frac{(T^1, T^1)}{t(T^1, T^1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A^0 & \rightarrow & \frac{\Omega^0}{Im(\theta')} \end{array}$$

Maintenant fixons $i \in \{1, \dots, n-2\}$. Soit $\Phi : (T^i, T^i) \rightarrow (T^{i+1}, T^{i+1})$ l'application du Lemme 3.6 et $\Phi' = \Phi|_{t(T^i, T^i)}$.

Nous avons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & t(T^i, T^i) & \xrightarrow{\Phi'} & Im(\Phi') & & \\ & & \downarrow \eta & & \downarrow \nu & & \\ 0 & \rightarrow & (T^i, T^i) & \xrightarrow{\Phi} & (T^{i+1}, T^{i+1}) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \lambda & & \downarrow \tau & & \\ & & (T^i, T^i)/t(T^i, T^i) & \xrightarrow{\delta} & (T^{i+1}, T^{i+1})/Im(\Phi') & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array} \tag{3.14}$$

Comme $\eta(\Phi\tau) = (\eta\Phi)\tau = (\Phi'\nu)\tau = \Phi'(\nu\tau) = 0$, il existe un $\delta : (T^i, T^i)/t(T^i, T^i) \rightarrow (T^{i+1}, T^{i+1})/Im(\Phi')$ tel que

$$\Phi\tau = \lambda\delta.$$

Comme Φ et τ sont surjectifs, δ est surjectif aussi.

Le noyau de δ et $[\mu(\iota^i.(L^i, H^{i+1}T)) + t(T^i, T^i)]/t(T^i, T^i)$. Comme $H^{i+1}T$ est de R -torsion, $\mu(\iota^i.(L^i, H^{i+1}T))$ l'est aussi, donc $\text{Ker}(\delta) = 0$. Ceci implique

$$(T^i, T^i)/t(T^i, T^i) \cong (T^{i+1}, T^{i+1})/Im(\Phi')$$

Comme $Im(\Phi') \subseteq t(T^{i+1}, T^{i+1})$, nous avons une application surjective

$$(T^i, T^i)/t(T^i, T^i) \rightarrow (T^{i+1}, T^{i+1})/t(T^{i+1}, T^{i+1})$$

dont le noyau est $t(T^i, T^i)/Im(\Phi')$.

Ce dernier est formé par des éléments de R -torsion tandis que $(T^i, T^i)/t(T^i, T^i)$ est sans R -torsion. Alors $t(T^i, T^i) = Im(\Phi')$, et nous obtenons

$$(T^i, T^i)/t(T^i, T^i) \cong (T^{i+1}, T^{i+1})/t(T^{i+1}, T^{i+1}) \quad \forall i \in \{1, \dots, n-2\}$$

Par conséquent

$$(T^1, T^1)/t(T^1, T^1) \cong (T^{n-1}, T^{n-1})/t(T^{n-1}, T^{n-1}),$$

or $T^{n-1} = \text{Coker}(\alpha^{n-1}) = H^n T$, alors

$$(T^1, T^1)/t(T^1, T^1) \cong (H^n T, H^n T)/t(H^n T, H^n T).$$

Par le même argument comme dans la démonstration du Lemme 2.20,

$$(H^n T, H^n T)/t(H^n T, H^n T) = (H^n T/t(H^n T), H^n T/t(H^n T))$$

où $H^n T/t(H^n T)$ signifie la partie sans R -torsion de $H^n T$.

Nous obtenons donc que $\text{End}_{D^b(\Lambda)}(T)$ est un produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T, T) & \rightarrow & \text{Hom}_{\Lambda}(H^n T/t(H^n T), H^n T/t(H^n T)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A^0 & \rightarrow & \frac{\Omega^0}{Im(\theta')} \end{array}$$

Nous avons donc le théorème pour le cas où Λ est symétrique :

Théorème 3.26 *Soit R un anneau de Dedekind et Λ un R -ordre symétrique. Soit T un complexe basculant*

$$0 \rightarrow P^1 \xrightarrow{\alpha^1} P^2 \xrightarrow{\alpha^2} \dots \xrightarrow{\alpha^{n-1}} P^n \rightarrow 0$$

où P^i sont des Λ -modules projectives et l'homologie de T est concentrée en degrés $1, \dots, n$.

On note $C = \text{Ker}(\alpha^1)$, ι l'inclusion $C \hookrightarrow P$, et $L^i = \text{Coker}(\alpha^i)$, $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Supposons que $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$\text{Ext}_{\Lambda}^1(L^{i+1}, H^{i+1}T) = \text{Hom}_{\Lambda}(L^i, P^i) = \text{Hom}_{\Lambda}(\text{Im}(\alpha^i), L^i) = 0,$$

et que $H^i T$ est de R -torsion $\forall i \in \{2, \dots, n-2\}$.

Alors, l'anneau des endomorphismes de T est un produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T, T) & \rightarrow & \text{Hom}_{\Lambda}(H^n T/t(H^n T), H^n T/t(H^n T)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A^0 & \rightarrow & \frac{\Omega^0}{\text{Im}(\theta')} \end{array}$$

où

$$A^0 = \left\{ \varphi \in \text{End}_{\Lambda}(C) : \begin{array}{l} \exists (\gamma^j)_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} \quad \gamma^j : P^j \rightarrow P^j \text{ tels que } \varphi \iota = \iota \gamma^1 \\ \text{et } \forall j \in \{2, \dots, n-1\} \quad \gamma^j \alpha^j = \alpha^j \gamma^{j+1} \end{array} \right\}$$

et $\Omega^0 = A^0 / \iota^1.(P^1, C)$.

Remarque

1. Si pour tout $i \in \{1, \dots, n-2\}$, les $\text{End}_{D^b(\Lambda)}(T^i)$ sont sans R -torsion, nous pouvons obtenir $\text{End}_{D^b(\Lambda)}(T^i)$ en tant que produit fibré

$$\begin{array}{ccc} (T^i, T^i) & \rightarrow & (T^{i+1}, T^{i+1})/t(T^{i+1}, T^{i+1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A^i/tA^i & \rightarrow & \tilde{\Omega}^i \end{array}$$

où A^i/tA^i est la partie sans R -torsion de A^i . Mais le fait que Λ est symétrique n'implique pas que les $\text{End}_{D^b(\Lambda)}(T^i)$ soient sans R -torsion, comme montre l'Exemple 4.4 avec $n = 2$ et $T^1 = \text{Coker}(\alpha)$.

2. $Ext^1(L^{i+1}, H^{i+1}T) = 0$ est automatique si $i = 0$ car nous avons l'inclusion

$$Ext^1(L^1, H^1T) \hookrightarrow (T, H^1T) \hookrightarrow (T, T)$$

par le Lemme 3.8 et Lemme 3.9, et (T, T) est un Λ -module sans R -torsion d'après le Théorème 1.25.

3. Le fait que $H^{i+1}T$ sont de torsion pour tout $i \in \{1, \dots, n-2\}$ implique que les applications Φ' et δ sont des isomorphismes et le diagramme (3.14) devient

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & 0 & & & 0 \\
& & & \downarrow & & & \downarrow \\
& & 0 & \rightarrow & t(T^i, T^i) & \xrightarrow{\Phi'} & Im(\Phi') & \rightarrow & 0 \\
& & & & \downarrow \eta & & \downarrow \xi & & \\
0 & \rightarrow & \iota^i.(L^i, H^{i+1}T) & \xrightarrow{\mu} & (T^i, T^i) & \xrightarrow{\Phi} & (T^{i+1}, T^{i+1}) & \rightarrow & 0 \\
& & & & \downarrow \lambda & & \downarrow \tau & & \\
& & 0 & \rightarrow & (T^i, T^i)/t(T^i, T^i) & \xrightarrow{\delta} & (T^{i+1}, T^{i+1})/Im(\Phi') & \rightarrow & 0 \\
& & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Alors, d'après le Lemme de serpent, $\iota^i.(L^i, H^{i+1}T) = 0$.

4. Le fait que $H^{i+1}T$ sont de torsion pour tout $i \in \{1, \dots, n-2\}$ implique aussi que

$$End_{\Lambda}(H^jT) = \underline{End}_{\Lambda}(H^jT).$$

Donc, dans le cas où Λ est symétrique et $H^{i+1}T$ sont de torsion pour tout $i \in \{1, \dots, n-2\}$

$$\mathcal{P}(H^{i+1}T, H^{i+1}T) = \iota^i.(L^i, H^{i+1}T) = 0,$$

$$\text{et } (L^{i+1}, H^{i+1}[2]) = \underline{End}_{\Lambda}(H^{i+1}T).$$

Chapitre 4

Exemples

Nous donnons quelques exemples d'utilisation du théorème principal (Théorème 3.3). Nous utilisons des Λ qui sont des ordres de Gorenstein. La présentation de Λ dans Exemple 4.3 se trouve dans [29] et les présentations de Λ dans Exemple 4.4 et Exemple 4.5 se trouvent dans [20] et [13, section 4.4].

Dans Exemple 4.1, on verra l'importance des hypothèses dans Théorème 3.3, l'Exemple 4.2 sera un exemple qui montre que l'hypothèse dans le Lemme 2.1 n'est que suffisante. Dans Exemple 4.3 l'application $End_{D^b(\Lambda)}(T) \xrightarrow{\psi} End_{\Lambda}(H^1T)$ est surjectif ce qui n'est pas le cas dans Exemple 4.4. L'Exemple 4.5 sera un exemple de complexe à trois termes où $End_{D^b(\Lambda)}(T) \xrightarrow{\psi^0} End_{\Lambda}(H^1T)$ est surjectif tandis que $End_{D^b(\Lambda)}(T^1) \xrightarrow{\psi^1} End_{\Lambda}(H^2T)$ ne l'est pas.

On note pour deux complexes X et Y

$$(X, Y) = Hom_{D^b(\Lambda)}(X, Y) \text{ et } Ext^1(X, Y) = Ext_{\Lambda}^1(X, Y)$$

Exemple 4.1 Soient R un anneau de valuation discrète complet avec idéal maximal \mathcal{M} , $k \in \mathbb{N}$ et

$$\Lambda = \begin{pmatrix} R & R \\ \mathcal{M}^k & R \end{pmatrix}.$$

On remarque que si $k = 1$ cet exemple est identique à l'exemple donné par S.König (voir [28]).

Soient $P_1 = \begin{pmatrix} R \\ \mathcal{M}^k \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}$, et T est le complexe $T_1 \oplus T_2$:

$$\begin{array}{ccccccc} T_1 & : & 0 & \rightarrow & P_1 & \xrightarrow{\alpha} & P_2 & \rightarrow & 0 \\ \oplus & & & & \oplus & & \oplus & & \\ T_2 & : & 0 & \rightarrow & P_1 & \rightarrow & 0 & & \end{array}$$

où α est l'inclusion $P_1 \hookrightarrow P_2$.

On note $\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc,

$$Ker(\bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} 0 \\ P_1 \end{pmatrix}, \quad Im(\bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} Im(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et}$$

$$Coker(\bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} Coker(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R/\mathcal{M}^k \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le complexe T est un complexe basculant d'après Théorème 1.26, pourtant nous ne pouvons pas utiliser le Théorème 3.3 car

$$\begin{aligned} Ext^1(Coker(\bar{\alpha}), Ker(\bar{\alpha})) &= (Im(\bar{\alpha}), Ker(\bar{\alpha})) / j.(P_2, Ker(\bar{\alpha})) \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 0 & R \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{M}^k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & R/\mathcal{M}^k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \end{aligned}$$

où j est l'inclusion $Im(\bar{\alpha}) \hookrightarrow \begin{pmatrix} P_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Nous utilisons le Théorème 3.3 pour calculer $End_{D^b(\Lambda)}(T_1)$. Comme $End_{\Lambda}(Ker(\alpha)) = 0$ et $End_{\Lambda}(Coker(\alpha)) = R/\mathcal{M}^k$, alors

$$End_{D^b(\Lambda)}(T_1) = R/\mathcal{M}^k.$$

Maintenant

$$End_{D^b(\Lambda)}(T) = \begin{pmatrix} End_{D^b(\Lambda)}(T_1) & Hom_{D^b(\Lambda)}(T_1, T_2) \\ Hom_{D^b(\Lambda)}(T_2, T_1) & End_{D^b(\Lambda)}(T_2) \end{pmatrix}$$

Comme

$$\text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T_1, T_2) = (P_1, P_1)/[\alpha.(P_2/P_1)] = R/\mathcal{M}^k,$$

$$\text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T_2, T_1) = (P_1, \text{Ker}(\alpha)) = 0, \text{ et } \text{End}_{D^b(\Lambda)}(T_2) = (P_1, P_1) = R,$$

alors

$$\text{End}_{D^b(\Lambda)}(T) = \begin{pmatrix} R/\mathcal{M}^k & R/\mathcal{M}^k \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

Cet exemple montre qu'il existe une algèbre qui a une catégorie dérivée équivalente avec celle d'un ordre de Gorenstein mais qui n'est pas un ordre.

■

Remarque Le premier exemple de ce type a été donné par S.König (voir [28]) et a conduit à la rédaction de [11].

Exemple 4.2 Soient R , Λ , P_1 , et P_2 comme dans Exemple 4.1. Soit T le complexe $T_1 \oplus T_2$

$$\begin{array}{ccccccc} T_1 & : & 0 & \rightarrow & P_1 & \xrightarrow{\alpha} & P_2 & \rightarrow & 0 \\ & & \oplus & & \oplus & & \oplus & & \\ T_2 & : & & & 0 & \rightarrow & P_2 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

où α est l'inclusion $P_1 \hookrightarrow P_2$.

Du fait que $(P_2, \text{Ker}(\alpha)) = 0$,

$$(T_2[1], T_1) = 0$$

et $(P_1, P_2) = \alpha.(P_2, P_2)$, implique que

$$(T_1, T_2[1]) = 0.$$

Ceux-ci et le fait que

$$(T_i, T_i[k]) = 0 \quad \forall i \in \{1, 2\} \text{ et } k \neq 0,$$

impliquent que T est un complexe basculant partiel.

On note $\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc,

$$\text{Coker}(\bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} \text{Coker}(\alpha) \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R/\mathcal{M}^k \\ P_2 \end{pmatrix}.$$

Comme $(P_2, P_1) \neq 0$, il est clair que $\left(\text{Coker}(\bar{\alpha}), \begin{pmatrix} P_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \neq 0$.

Cet exemple montre qu'il est possible que T est un complexe basculant partiel même si

$$\left(\text{Coker}(\bar{\alpha}), \begin{pmatrix} P_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \neq 0.$$

Maintenant

$$\text{End}_{D^b(\Lambda)}(T) = \begin{pmatrix} \text{End}_{D^b(\Lambda)}(T_1) & \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T_1, T_2) \\ \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T_2, T_1) & \text{End}_{D^b(\Lambda)}(T_2) \end{pmatrix}$$

En effet,

$$(T_1, T_1) = (\text{Coker}(\alpha), \text{Coker}(\alpha)) = R/\mathcal{M}^k, \quad (T_1, T_2) = (\text{Coker}(\alpha), P^2) = 0,$$

$$(T_2, T_1) = (P_2, P_2)/(P_2, P_1) \cdot \alpha = R/\mathcal{M}^k, \quad (T_2, T_2) = (P_2, P_2) = R$$

Donc

$$\text{End}_{D^b(\Lambda)}(T) = \begin{pmatrix} R/\mathcal{M}^k & 0 \\ R/\mathcal{M}^k & R \end{pmatrix}$$

■

Dans Exemple 4.3 et 4.4, nous n'avons pas besoin de montrer que

$$\text{Ext}^1(\text{Coker}(\alpha), H^1T) = 0$$

parce que les Λ dans ces exemples sont des ordres symétriques et cette condition est automatique pour les ordres symétriques.

Désormais, on utilise des indices aux composantes de matrices d'un ordre Λ , à l'anneau R , à son radical π et à l'anneau quotient R/π pour distinguer les caractères différents, c'est-à-dire, par exemple R_4 indique l'anneau R où l'algèbre $K \otimes_R \Lambda$ agit par le caractère 4.

Exemple 4.3 Soient R l'extension non ramifiée de degré 2 des entiers 2-adiques, $\pi = \text{Rad}(R) = \langle f \rangle$, pour un $f \in R$, et $\pi^2 = \langle f^2 \rangle$. Notons par A_4 le groupe alterné d'ordre 12.

$\Lambda = RA_4$ est présenté comme suivant [29] :

$$\begin{array}{c}
 R \xrightarrow{\pi^2} \\
 \left(\begin{array}{c|cc}
 R & \pi & \pi \\
 \pi & R & \pi \\
 \pi & \pi & R
 \end{array} \right) \xrightarrow{\pi^2} R
 \end{array}$$

c'est-à-dire avec un choix de base approprié Λ est égal à

$$\left\{ \left(x_1, x_2, x_3, \begin{pmatrix} y_{11} & fy_{12} & fy_{13} \\ fy_{21} & y_{22} & fy_{23} \\ fy_{31} & fy_{32} & y_{33} \end{pmatrix} \right) : x_i, y_{ij} \in R, x_i - y_{ii} \in \pi^2, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3 \right\}.$$

Soit T un complexe donné par

$$T : 0 \rightarrow P_1 \oplus P_3 \xrightarrow{\alpha} P_2 \rightarrow 0$$

où P_1, P_2 , et P_3 sont des Λ -modules projectifs

$$\begin{array}{c}
 R_1 \xrightarrow{\pi^2} \\
 \left(\begin{array}{c} R \\ \pi \\ \pi \end{array} \right)^2, \quad \left(\begin{array}{c} R_4 \\ \pi^2 \\ \pi \\ R \\ \pi \end{array} \right)^2 \text{ et } \left(\begin{array}{c} \pi \\ \pi \\ R \end{array} \right)^2 \xrightarrow{\pi^2} R_3
 \end{array}$$

Les caractères de P_1 sont notés 1 et 2, de P_2 sont notés 2 et 4, de P_3 sont notés 2 et 3.

On peut montrer que

$$\text{Ker}(\alpha) = \begin{array}{c} \pi_1 \xrightarrow{\pi^2} \\ \left(\begin{array}{c} \pi \\ \pi \\ \pi \end{array} \right)^2 \xrightarrow{\pi^2} \pi_3 \end{array}$$

et $Coker(\alpha) = R_4$.

On a

$$\begin{aligned} End_{\Lambda}(Ker(\alpha)) &= \pi_1 \overset{\pi^2}{-} \pi_2 \overset{\pi^2}{-} \pi_3 \\ &\cong R_1 \overset{\pi}{-} R_2 \overset{\pi}{-} R_3 \end{aligned}$$

$$\text{et } Ext^2(Coker(\alpha), Ker(\alpha)) = (R/\pi^2)_4 = (R/\pi^2)_2.$$

Comme $Coker(\alpha)$ est sans torsion, l'application $\psi : (T, T) \rightarrow (Ker(\alpha), Ker(\alpha))$ est donc surjectif et ceci implique que $End(T)$ est un produit fibré de $R_1 \overset{\pi}{-} R_2 \overset{\pi}{-} R_3$ et R_4 sur $(R/\pi^2)_2$. Alors,

$$End_{D^b(\Lambda)}(T) = R \overset{\pi}{-} \begin{array}{c} R \overset{\pi}{-} R \\ | \pi^2 \\ R \end{array}$$

■

Exemple 4.4 Soient $R = \mathbb{Z}_5$, $\pi = Rad(R) = \langle 5 \rangle$, Λ une R -ordre qui est Morita équivalent à $B_0(\mathbb{Z}_5 S_5)$. Alors, Λ est présenté comme suivant [20] :

$$R \left(\begin{array}{cc} R & R \\ \pi & R \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} R & R \\ \pi & R \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} R & R \\ \pi & R \end{array} \right) R$$

c'est-à-dire Λ est

$$\left\{ \left(d_0, \left(\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{array} \right), a_4 \right), a_i, b_i, c_i, d_i \in R, 5|(d_i - a_{i+1}), 5|c_i \right\}.$$

Soient

$$\begin{aligned} P_0 &= R \left(\begin{array}{c} R \\ \pi \end{array} \right), & P_1 &= \left(\begin{array}{c} R \\ R \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} R \\ \pi \end{array} \right), \\ P_2 &= \left(\begin{array}{c} R \\ R \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} R \\ \pi \end{array} \right), & P_3 &= \left(\begin{array}{c} R \\ R \end{array} \right) R, \end{aligned}$$

où les caractères de P_0 sont notés 1 et 2, de P_1 sont notés 2 et 3, de P_2 sont notés 3 et 4, et de P_3 sont notés 4 et 5.

Soit T est le complexe $T_1 \oplus T_2 \oplus T_3$:

$$\begin{array}{ccccccc} T_1 & : & 0 & \rightarrow & P_1 \oplus P_3 & \xrightarrow{\alpha} & P_2 & \rightarrow & 0 \\ & & \oplus & & \oplus & & \oplus & & \\ T_2 & : & 0 & \rightarrow & P_1 \oplus P_3 & \rightarrow & 0 & & \\ & & \oplus & & \oplus & & & & \\ T_3 & : & 0 & \rightarrow & P_0 & \rightarrow & 0 & & \end{array}$$

Le complexe T est un complexe basculant d'après [13, Lemme 5.1.2] et sa démonstration.

On note $\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc,

$$Ker(\bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} Ker(\alpha) \\ P_1 \oplus P_3 \\ P_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\begin{matrix} R \\ \pi \end{matrix} \right)_2 \oplus \pi_5 \\ P_1 \oplus P_3 \\ P_0 \end{pmatrix},$$

$$Im(\bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} Im(\alpha) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\begin{matrix} R \\ \pi \end{matrix} \right)_3 \oplus \left(\begin{matrix} \pi \\ \pi \end{matrix} \right)_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$Coker(\bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} Coker(\alpha) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R/\pi)_3 \oplus (R/\pi)_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

où les indices signifient les caractères.

On obtient donc,

$$End_{\Lambda}(Ker(\bar{\alpha})) = \begin{pmatrix} R_2 \oplus R_5 & R_2 \oplus R_5 & \pi_2 \\ \pi_2 \oplus \pi_5 & R_2 - R_3 \oplus R_4 - R_5 & \pi_2 \\ R_2 & R_2 & R_1 - R_2 \end{pmatrix}.$$

L'anneau des endomorphismes de $Coker(\bar{\alpha})$, $End_{\Lambda}(Coker(\bar{\alpha}))$, est un Λ -module de torsion. En effet,

$$End_{\Lambda}(Coker(\bar{\alpha})) = \begin{pmatrix} (R/\pi)_3 \oplus (R/\pi)_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ceci implique d'après le Théorème 2.21 que $End_{D^b(\Lambda)}(T) \cong A$ où A est défini dans la section 2.2. Si l'application ψ définie dans le Lemme 2.9 est surjective, alors

$$End_{D^b(\Lambda)}(T) \cong A = End_{\Lambda}(Ker(\bar{\alpha})).$$

Ceci est décomposable.

Or, T est l'image d'un $End_{D^b(\Lambda)}(T)$ -module projectif indécomposable sous l'équivalence dérivée. Ceci est une contradiction. Alors ψ n'est pas surjectif.

En effet,

$$End_{D^b(\Lambda)}(T) \cong A = \begin{pmatrix} R_2 - R_5 & R_2 \oplus R_5 & \pi_2 \\ \pi_2 \oplus \pi_5 & R_2 - R_3 \oplus R_4 - R_5 & \pi_2 \\ R_2 & R_2 & R_1 - R_2 \end{pmatrix}$$

où la congruence $R_2 - R_5$ est une conséquence de la congruence dans P_2 .

L'anneau des endomorphismes $End_{D^b(\Lambda)}(T)$ est donc

$$R_4 \left(\begin{array}{cc} R & R \\ \pi & R \end{array} \right)_5 \begin{array}{c} R_3 \\ \left(\begin{array}{ccc} R & R & \pi \\ \pi & R & \pi \\ R & R & R \end{array} \right)_2 R_1 \end{array}$$

Exemple 4.5 Soient $R = \mathbb{Z}_7$, $\pi = Rad(R) = \langle 7 \rangle$, Λ un R -ordre qui est Morita équivalent à $B_0(\mathbb{Z}_7 S_7)$. Alors Λ est présenté comme suivant [20] :

$$R \left(\begin{array}{cc} R & R \\ \pi & R \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} R & R \\ \pi & R \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} R & R \\ \pi & R \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} R & R \\ \pi & R \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} R & R \\ \pi & R \end{array} \right) R$$

Soit T le complexe $T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4 \oplus T_5$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 T_1 & : & 0 & \rightarrow & P_0 & \xrightarrow{\alpha} & P_1 & \rightarrow & 0 \\
 \oplus & & & & \oplus & & \oplus & & \\
 T_2 & : & 0 & \rightarrow & P_0 & \rightarrow & 0 & & \\
 \oplus & & & & \oplus & & \oplus & & \\
 T_3 & : & & & 0 & \rightarrow & P_2 \oplus P_4 & \xrightarrow{\beta} & P_3 & \rightarrow & 0 \\
 \oplus & & & & \oplus & & \oplus & & \oplus & & \\
 T_4 & : & & & 0 & \rightarrow & P_2 \oplus P_4 & \rightarrow & 0 & & \\
 \oplus & & & & \oplus & & \oplus & & \oplus & & \\
 T_5 & : & & & 0 & \rightarrow & P_5 & \rightarrow & 0 & &
 \end{array}$$

où P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5 sont des Λ -modules projectifs :

$$P_0 = R_1 \left(\begin{array}{c} R \\ \pi \end{array} \right)_2, \quad P_1 = \left(\begin{array}{c} R \\ R \end{array} \right)_2 \left(\begin{array}{c} R \\ \pi \end{array} \right)_3,$$

$$P_2 = \left(\begin{array}{c} R \\ R \end{array} \right)_3 \left(\begin{array}{c} R \\ \pi \end{array} \right)_4, \quad P_3 = \left(\begin{array}{c} R \\ R \end{array} \right)_4 \left(\begin{array}{c} R \\ \pi \end{array} \right)_5,$$

$$P_4 = \left(\begin{array}{c} R \\ R \end{array} \right)_5 \left(\begin{array}{c} R \\ \pi \end{array} \right)_6, \quad P_5 = \left(\begin{array}{c} R \\ R \end{array} \right)_6 R_7,$$

et les indices signifient les caractères.

$$\text{On note } \bar{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \bar{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$Ker(\bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ P_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Im(\bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} \left(\begin{array}{c} R \\ \pi \end{array} \right)_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Ker(\bar{\beta}) = \begin{pmatrix} P_1 \\ 0 \\ \left(\begin{array}{c} R \\ \pi \end{array} \right)_3 \oplus \left(\begin{array}{c} \pi \\ \pi \end{array} \right)_6 \\ P_2 \oplus P_4 \\ P_5 \end{pmatrix},$$

$$H^2T = \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} R \\ \pi \end{array} \right)_3 \\ 0 \\ \left(\begin{array}{c} R \\ \pi \end{array} \right)_3 \oplus \left(\begin{array}{c} \pi \\ \pi \end{array} \right)_6 \\ P_2 \oplus P_4 \\ P_5 \end{array} \right), \quad \text{Im}(\bar{\beta}) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \left(\begin{array}{c} R \\ \pi \end{array} \right)_4 \oplus \left(\begin{array}{c} \pi \\ \pi \end{array} \right)_5 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right),$$

$$\text{Coker}(\bar{\beta}) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ (R/\pi)_4 \oplus (R/\pi)_5 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \text{Coker}(\bar{\alpha}) = \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} R \\ \pi \end{array} \right)_3 \\ 0 \\ P_2 \oplus P_4 \\ P_2 \oplus P_4 \\ P_5 \end{array} \right).$$

On voit que

$$\text{End}_\Lambda(\text{Ker}(\bar{\alpha})) = \left(\begin{array}{ccccc} R_1 & R_1 & 0 & 0 & 0 \\ \pi_1 & R_1 - R_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

$$\text{End}_\Lambda(H^2T) = \left(\begin{array}{ccccc} R_3 & 0 & R_3 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_3 & 0 & R_3 \oplus R_6 & R_3 \oplus R_6 & R_6 \\ \pi_3 & 0 & \pi_3 \oplus \pi_6 & R_3 - R_4 \oplus R_5 - R_6 & R_6 \\ 0 & 0 & \pi_6 & \pi_6 & R_6 - R_7 \end{array} \right),$$

$$\text{End}_\Lambda(\text{Coker}(\bar{\beta})) = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (R/\pi)_4 \oplus (R/\pi)_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{et}$$

$$\text{End}_\Lambda(\text{Coker}(\bar{\alpha})) = \left(\begin{array}{ccccc} R_3 & 0 & R_3 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pi_3 & 0 & R_3 - R_4 \oplus R_5 - R_6 & R_3 - R_4 \oplus R_5 - R_6 & R_6 \\ \pi_3 & 0 & R_3 - R_4 \oplus R_5 - R_6 & R_3 - R_4 \oplus R_5 - R_6 & R_6 \\ 0 & 0 & \pi_6 & \pi_6 & R_6 - R_7 \end{array} \right).$$

Comme $(Im(\bar{\alpha}), Ker(\bar{\alpha})) = (Im(\bar{\beta}), H^2T) = 0$, alors

$$Ext^1(Coker(\bar{\alpha}), Ker(\bar{\alpha})) = Ext^1(Coker(\bar{\beta}), H^2T) = 0.$$

$$\text{Soit } T^1 : 0 \rightarrow Im(\bar{\alpha}) \rightarrow \begin{pmatrix} P_1 \\ 0 \\ P_2 \oplus P_4 \\ P_2 \oplus P_4 \\ P_5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow 0.$$

D'après le Théorème 3.3, $End_{D^b(\Lambda)}(T^1)$ est un produit fibré de $End_{\Lambda}(H^2T)$ et $End_{\Lambda}(Coker(\bar{\beta}))$ sur $Ext^2(Coker(\bar{\beta}), H^2T)$.

L'application $(Coker(\bar{\beta}), Coker(\bar{\beta})) \xrightarrow{\theta^1} Ext^2(Coker(\bar{\beta}), H^2T)$ est induite par $Ker(\bar{\beta}) \rightarrow H^2T$ et celle-ci n'est que la multiplication par un $r \in R$.

Alors, θ^1 est injectif, et $End_{D^b(\Lambda)}(T^1) \cong Im(\psi^1)$ où $\psi^1 : (T^1, T^1) \rightarrow (H^2T, H^2T)$.

En effet,

$$A^1 = Im(\psi^1) = \begin{pmatrix} R_3 & 0 & R_3 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pi_3 & 0 & R_3 - R_6 & R_3 \oplus R_6 & R_6 \\ \pi_3 & 0 & \pi_3 \oplus \pi_6 & R_3 - R_4 \oplus R_5 - R_6 & R_6 \\ 0 & 0 & \pi_6 & \pi_6 & R_6 - R_7 \end{pmatrix}$$

où la congruence de $R_3 - R_6$ vient de la congruence dans P_3 , et π_3 dans la position (3,1) vient du π_3 dans la position correspondante dans $End_{\Lambda}(Coker(\bar{\alpha}))$.

Maintenant $End_{D^b(\Lambda)}(T)$ est un produit fibré de $End_{\Lambda}(Ker(\bar{\beta}))$ et $End_{D^b(\Lambda)}(T^1)$ sur $Ext^2(Coker(\bar{\alpha}), Ker(\bar{\alpha}))$.

La seule composante différente de 0 de $Ext^2(Coker(\bar{\alpha}), Ker(\bar{\alpha}))$ est R/π qui est en position (1,1), ceci donne la congruence $R_1 - R_3$. Alors,

$$End(T) = \begin{pmatrix} R_1 - R_3 & R_1 & R_3 & R_3 & 0 \\ \pi_1 & R_1 - R_2 & 0 & 0 & 0 \\ \pi_3 & 0 & R_3 - R_6 & R_3 \oplus R_6 & R_6 \\ \pi_3 & 0 & \pi_3 \oplus \pi_6 & R_3 - R_4 \oplus R_5 - R_6 & R_6 \\ 0 & 0 & \pi_6 & \pi_6 & R_6 - R_7 \end{pmatrix}$$

$$= R_2 \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc} R & R \\ \pi & R \end{array} \right)_1 \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} R & R & R \\ \pi & R & R \\ \pi & \pi & R \end{array} \right)_3 \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} R & R & R \\ \pi & R & R \\ \pi & \pi & R \end{array} \right)_6 R_7 \end{array} \end{array}$$

$\begin{array}{c} R_4 \\ \nearrow \\ R \\ \searrow \\ R \end{array}$
 $\begin{array}{c} R_5 \\ \nearrow \\ R \\ \searrow \\ R \end{array}$

Remarque

1. Le complexe T est un complexe basculant. Si $\psi^1 : (T^1, T^1) \rightarrow (H^2T, H^2T)$ est surjectif, nous obtenons $(T^1, T^1) \cong (H^2T, H^2T)$ qui est décomposable et ceci implique que (T, T) est décomposable. Or, T est l'image d'un (T, T) -module indecomposable sous l'équivalence dérivée. Donc, dans ce cas, ψ^1 n'est pas surjectif.
2. L'application $\psi^0 : (T, T) \rightarrow (H^1T, H^1T)$ est surjectif tout de même.

Annexe A

Morphismes dans la catégorie dérivée par une suite spectrale

Une approche alternative a été suggéré par B.Keller pendant la dernière phase de la rédaction de la démonstration du Théorème 3.3. Dans cette annexe nous allons détailler cette approche alternative pour des complexes de longueur deux et trois.

Soient X, Y deux complexes bornés sur une catégorie abélienne \mathcal{C} (avec assez d'objets projectifs). Soit $D(\mathcal{C})$ la catégorie dérivée de \mathcal{C} . Si X et Y sont des complexes filtrés, alors d'après [26], $\mathbf{R}Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est présenté par un complexe filtré Z , qui donne une suite spectrale calculant l'homologie de $\mathbf{R}Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$. En prenant les filtrations de X et Y donné par les troncatures naturelles, $F_p X = \tau_{\geq p} X$, $p \in \mathbb{Z}$, la suite spectrale devient

$$E_1^{pq} = \prod_{l \in \mathbb{Z}} Ext^{2p+q}(H^{l+p}(X), H^l(Y)) \Rightarrow Hom_{D(\mathcal{C})}(X, Y[n])$$

A.1 Complexes à deux termes

Le cas où les homologies de X et Y sont concentrées en degrés 1 et 2 nous a été communiqué par B.Keller. Les termes non zéro de E_1^{pq} sont donnés par

$$\begin{array}{ccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\begin{array}{c} (-1, 2) \\ \text{Hom}(H^1 X, H^2 Y) \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} (0, 2) \\ \prod_{l=1,2} \text{Ext}^2(H^l X, H^l Y) \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} (1, 2) \\ \text{Ext}^4(H^2 X, H^1 Y) \end{array} \\
\begin{array}{c} (-1, 1) \\ 0 \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} (0, 1) \\ \prod_{l=1,2} \text{Ext}^1(H^l X, H^l Y) \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} (1, 1) \\ \text{Ext}^3(H^2 X, H^1 Y) \end{array} \\
\begin{array}{c} (-1, 0) \\ 0 \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} (0, 0) \\ \prod_{l=1,2} \text{Hom}(H^l X, H^l Y) \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} (1, 0) \\ \text{Ext}^2(H^2 X, H^1 Y) \end{array} \\
\begin{array}{c} (-1, -1) \\ 0 \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} (0, -1) \\ 0 \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} (1, -1) \\ \text{Ext}^1(H^2 X, H^1 Y) \end{array}
\end{array}$$

En particulier, pour $p + q = 0$, le différentiel δ_2 est 0 et on obtient $E_2 = E_\infty$. Alors, nous obtenons une suite exacte :

$$\begin{aligned}
0 \rightarrow \text{Ext}^1(H^2 X, H^1 Y) &\rightarrow \text{Hom}_{D(\mathcal{C})}(X, Y) \\
&\rightarrow \prod_{l=1,2} \text{Hom}(H^l X, H^l Y) \rightarrow \text{Ext}^2(H^2 X, H^1 Y) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Si $\text{Ext}^1(H^2 X, H^1 Y) = 0$ cette suite présente $\text{Hom}_{D(\mathcal{C})}(X, Y)$ comme produit fibré analogue au Théorème 2.5

A.2 Complexes à trois termes

Maintenant nous allons étudier le cas où les homologies sont concentrés en degrés 1,2,3. Comme \mathcal{C} est abélienne avec suffisamment d'objets projectifs, $\mathcal{C} = \Lambda - \text{mod}$ où Λ est une algèbre.

On note pour deux complexes M, N

$$(M, N) := \text{Hom}_{D(\Lambda)}(M, N) \text{ et } \text{Ext}^i(M, N) := \text{Ext}_\Lambda^i(M, N).$$

Les termes différents de 0 de E_1^{pq} sont donnés par

$$\begin{array}{ccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\begin{array}{c} (-1,1) \\ 0 \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} (0,1) \\ \prod_{l=1,2,3} Ext^1(H^l X, H^l Y) \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} (1,1) \\ \prod_{l=1,2} Ext^3(H^{l+1} X, H^l Y) \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} (2,1) \\ Ext^5(H^3 X, H^1 Y) \end{array} \\
\begin{array}{c} (-1,0) \\ 0 \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} (0,0) \\ \prod_{l=1,2,3} (H^l X, H^l Y) \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} (1,0) \\ \prod_{l=1,2} Ext^2(H^{l+1} X, H^l Y) \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} (2,0) \\ Ext^4(H^3 X, H^1 Y) \end{array} \\
\begin{array}{c} (-1,-1) \\ 0 \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} (0,-1) \\ 0 \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} (1,-1) \\ \prod_{l=1,2} Ext^1(H^{l+1} X, H^l Y) \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} (2,-1) \\ Ext^3(H^3 X, H^1 Y) \end{array} \\
\begin{array}{c} (-1,-2) \\ 0 \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} (0,-2) \\ 0 \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} (1,-2) \\ \prod_{l=1,2} (H^{l+1} X, H^l Y) \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} (2,-2) \\ Ext^2(H^3 X, H^1 Y) \end{array} \\
\begin{array}{c} (-1,-3) \\ 0 \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} (0,-3) \\ 0 \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} (1,-3) \\ 0 \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} (2,-3) \\ Ext^1(H^3 X, H^1 Y) \end{array}
\end{array}$$

A.2.1 Déterminer E_2^{pq}

Soient

$$\begin{array}{l}
X : 0 \rightarrow X^1 \xrightarrow{\alpha^1} X^2 \xrightarrow{\alpha^2} X^3 \rightarrow 0 \\
Y : 0 \rightarrow Y^1 \xrightarrow{\beta^1} Y^2 \xrightarrow{\beta^2} Y^3 \rightarrow 0
\end{array}$$

où X^i et Y^i sont des Λ -module projectifs.

Supposons que $\forall i \in \{1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned}
(Im(\alpha^i), Coker(\beta^i)) &= (Coker(\alpha^i), Im(\beta^i)) = (Coker(\alpha^i), Y^i) = \\
&= Ext^1(Coker(\alpha^i), H^i Y) = Ext^1(Im(\alpha^2), Y^1) = Ext^1(H^1 X, H^1 Y) = 0
\end{aligned}$$

Nous allons montrer que $E_1^{2,-3} = E_1^{2,-2} = E_1^{1,-2} = 0$.

Lemme A.1 $Ext^2(H^3 X, H^1 Y) = 0$

Démonstration En appliquant le foncteur $(Im(\alpha^2), -)$ à la suite exacte

$$0 \rightarrow Ker(\beta^1) \rightarrow Y^1 \rightarrow Im(\beta^1) \rightarrow 0$$

on obtient

$$\dots \rightarrow (Im(\alpha^2), Im(\beta^1)) \rightarrow Ext^1(Im(\alpha^2), Ker(\beta^1)) \rightarrow Ext^1(Im(\alpha^2), Y^1) \rightarrow \dots$$

Comme $(Im(\alpha^2), Im(\beta^1)) \subseteq (Coker(\alpha^1), Im(\beta^1)) = 0$ et d'après l'hypothèse $Ext^1(Im(\alpha^2), Y^1) = 0$, on a donc

$$Ext^2(H^3X, H^1Y) = Ext^2(Coker(\alpha^2), Ker(\beta^1)) = Ext^1(Im(\alpha^2), Ker(\beta^1)) = 0.$$

■

Lemme A.2 $(H^2X, H^1Y) = 0$.

Démonstration On applique le foncteur $(-, H^1Y)$ à la suite exacte

$$0 \rightarrow H^2X \rightarrow Coker(\alpha^1) \rightarrow Im(\alpha^2) \rightarrow 0$$

et on obtient

$$\cdots \rightarrow (Coker(\alpha^1), H^1Y) \rightarrow (H^2X, H^1Y) \rightarrow Ext^1(Im(\alpha^2), H^1Y) \rightarrow \cdots$$

1. $(Coker(\alpha^1), H^1Y) = 0$ car $(Coker(\alpha^1), H^1Y) \subseteq (Coker(\alpha^1), Y^1) = 0$.
2. D'après le Lemme A.1 $Ext^1(Im(\alpha^2), H^1Y) = 0$,

Ces deux énoncés impliquent $(H^2X, H^1Y) = 0$. ■

Lemme A.3 $(H^3X, H^2Y) = 0$.

Démonstration On applique le foncteur $(H^3X, -)$ à la suite exacte

$$0 \rightarrow Im(\beta^1) \rightarrow Ker(\beta^2) \rightarrow H^2Y \rightarrow 0$$

et on obtient

$$\cdots \rightarrow (H^3X, Ker(\beta^2)) \rightarrow (H^3X, H^2Y) \rightarrow Ext^1(H^3X, Im(\beta^1)) \rightarrow \cdots$$

1. $(H^3X, Ker(\beta^2)) = 0$ car

$$(H^3X, Ker(\beta^2)) \subseteq (H^3X, Y^2) = (Coker(\alpha^2), Y^2) = 0.$$

2. $Ext^1(H^3X, Im(\beta^1)) = 0$.

En fait

$$\begin{aligned} Ext^1(H^3X, Im(\beta^1)) &= Ext^1(Coker(\alpha^2), Im(\beta^1)) \\ &= (Im(\alpha^2), Im(\beta^1))/j.(X^3, Im(\beta^1)) \end{aligned}$$

où j est l'inclusion $Im(\alpha^2) \hookrightarrow X^3$.

Comme $(Coker(\alpha^1), Im(\beta^1)) = 0 \Rightarrow (Im(\alpha^2), Im(\beta^1)) = 0$, ceci implique $Ext^1(H^3X, Im(\beta^1)) = 0$.

Les deux énoncés impliquent $(H^3X, H^2Y) = 0$. ■

Lemme A.4 $Ext^1(H^3X, H^1Y) = 0$

Démonstration On applique le foncteur $(-, H^1Y)$ à la suite exacte

$$0 \rightarrow Im(\alpha^2) \rightarrow X^3 \rightarrow Coker(\alpha^2) \rightarrow 0$$

et on obtient

$$\dots \rightarrow (Im(\alpha^2), H^1Y) \rightarrow Ext^1(Coker(\alpha^2), H^1Y) \rightarrow Ext^1(X^3, H^1Y) \rightarrow \dots$$

1. $(Im(\alpha^2), H^1Y) \subseteq (Coker(\alpha^1), H^1Y) \subseteq (Coker(\alpha^1), Y^1) = 0$.
2. $Ext^1(X^3, H^1Y) = 0$ car X^3 est projectif.

Les deux énoncés impliquent $Ext^1(H^3X, H^1Y) = 0$. ■

La suite spectrale E_1^{pq} devient

$$\begin{array}{ccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (0, 1) & & (1, 1) & & (2, 1) \\ \prod_{l=1,2,3} Ext^1(H^lX, H^lY) & \rightarrow & \prod_{l=1,2} Ext^3(H^{l+1}X, H^lY) & \rightarrow & Ext^5(H^3X, H^1Y) \\ \\ (0, 0) & & (1, 0) & & (2, 0) \\ \prod_{l=1,2,3} (H^lX, H^lY) & \xrightarrow{\delta_1^{0,0}} & \prod_{l=1,2} Ext^2(H^{l+1}X, H^lY) & \rightarrow & Ext^4(H^3X, H^1Y) \\ \\ (0, -1) & & (1, -1) & & (2, -1) \\ 0 & \rightarrow & \prod_{l=1,2} Ext^1(H^{l+1}X, H^lY) & \xrightarrow{\delta_1^{1,-1}} & Ext^3(H^3X, H^1Y) \end{array}$$

Soient

$${}^1X : 0 \rightarrow Im(\alpha^1) \rightarrow X^2 \rightarrow X^3 \rightarrow 0,$$

$${}^1Y : 0 \rightarrow Im(\beta^1) \rightarrow Y^2 \rightarrow Y^3 \rightarrow 0,$$

$${}^2X : 0 \rightarrow Im(\alpha^2) \rightarrow X^3 \rightarrow 0 \text{ et}$$

$${}^2Y : 0 \rightarrow Im(\beta^2) \rightarrow Y^3 \rightarrow 0$$

En fait, ${}^jX = F_jX$ et ${}^jY = F_jY \forall j \in \{1, 2\}$.

D'après l'étude menée pour des complexes à deux termes, la suite spectrale pour $\mathbf{R}Hom({}^1X, {}^1Y)$ donne lieu à une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow Ext^1(H^3X, H^2Y) &\rightarrow Hom_{D(\Lambda)}({}^1X, {}^1Y) \rightarrow \\ &\rightarrow \prod_{l=2,3} Hom(H^lX, H^lY) \rightarrow Ext^2(H^3X, H^2Y) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Comme on suppose que $Ext^1(H^3X, H^2Y) = 0$, on obtient

Lemme A.5 *La suite*

$$0 \rightarrow Hom_{D(\Lambda)}({}^1X, {}^1Y) \rightarrow \prod_{l=2,3} Hom(H^lX, H^lY) \rightarrow Ext^2(H^3X, H^2Y) \rightarrow 0$$

est exacte.

Lemme A.6

$$Ker(\delta_1^{1,-1}) = Ext^1(Coker(\alpha^1), H^1Y) \oplus Ext^1(Coker(\alpha^2), H^2Y) = 0.$$

Démonstration

$$\prod_{l=1,2} Ext^1(H^{l+1}X, H^lY) = Ext^1(H^2X, H^1Y) \oplus Ext^1(H^3X, H^2Y).$$

D'après l'hypothèse, $Ext^1(H^3X, H^2Y) = Ext^1(Coker(\alpha^2), H^2Y) = 0$.
On identifie

$$Ext^3(H^3X, H^1Y) = Ext^3(Coker(\alpha^2), H^1Y) = Ext^2(Im(\alpha^2), H^1Y)$$

L'application $\delta_1^{1,-1}$ est défini en appliquant $(-, H^1Y[1])$ au triangle

$$H^2X \rightarrow {}^1X[1] \rightarrow {}^2X[1] \rightsquigarrow H^2X[1].$$

Ce triangle induit une suite exacte longue

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow ({}^2X[1], H^1Y[1]) &\rightarrow ({}^1X[1], H^1Y[1]) \rightarrow \\ &\rightarrow (H^2X, H^1Y[1]) \xrightarrow{\delta_1^{1,-1}} ({}^2X, H^1Y[1]) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Avec une méthode analogue à celle de la démonstration du Lemme 3.10, nous pouvons montrer que

$$\begin{aligned}({}^2X[1], H^1Y[1]) &= Ext^1(Im(\alpha^2), H^1Y) \text{ et} \\({}^1X[1], H^1Y[1]) &= Ext^1(Coker(\alpha^1), H^1Y).\end{aligned}$$

D'après Lemme A.1, $Ext^1(Im(\alpha^2), H^1Y) = Ext^2(H^3X, H^1Y) = 0$.

Ceci implique

$$\begin{aligned}Ker(\delta_1^{1,-1}) &= ({}^1X[1], H^1Y[1]) \\ &= Ext^1(Coker(\alpha^1), H^1Y) \\ &= 0 \text{ d'après l'hypothèse.}\end{aligned}$$

■

Le foncteur $(-, H^1Y)$ appliqué au triangle $H^1X \rightarrow X \rightarrow {}^1X \rightsquigarrow H^1X[1]$ induit une application

$$\varphi_1 : (H^1X, H^1Y) \rightarrow ({}^1X[-1], H^1Y),$$

et au triangle $H^2X[-1] \rightarrow {}^1X \rightarrow {}^2X \rightsquigarrow H^2X$ induit une application

$$\varphi_2 : ({}^1X[-1], H^1Y) \rightarrow (H^2X[-2], H^1Y).$$

Le morphisme $\varphi : (H^1X, H^1Y) \rightarrow Ext^2(H^2X, H^1Y)$ est donnée par

$$\varphi = \varphi_1\varphi_2.$$

Nous allons étudier $Ker(\delta_1^{00})$ et pour ceci nous avons besoin de lemme suivant :

Lemme A.7 *Etant donné un morphisme $t : (L \oplus M \oplus N) \rightarrow (F \oplus G)$ où $t = (z, u, v, w)$ donné par*

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{z} & F \\ \oplus & \nearrow u & \oplus \\ M & \xrightarrow{v} & G \\ \oplus & \nearrow w & \\ N & & \end{array}$$

et L, M, N, F, G sont des modules. On note $\bar{v} = (v, w)$. Si $Coker(z) = 0$ alors

$$Ker(t) = Ker(z) \oplus Ker(\bar{v})$$

Démonstration Nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} L \oplus M \oplus N & \xrightarrow{t} & F \oplus G \\ \downarrow & & \downarrow \\ M \oplus N & \xrightarrow{\bar{v}} & G \end{array}$$

où les flèches verticales sont des projections.

Nous le complétons en diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & Ker(z) & \rightarrow & L & \xrightarrow{z} & F & \rightarrow & Coker(z) \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & Ker(t) & \xrightarrow{j} & L \oplus M \oplus N & \xrightarrow{t} & F \oplus G & & \\ & & & & \downarrow p_1 & & \downarrow p_2 & & \\ 0 & \rightarrow & Ker(\bar{v}) & \xrightarrow{i} & M \oplus N & \xrightarrow{\bar{v}} & G & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Comme $Coker(z) = 0$, la suite

$$0 \rightarrow Ker(z) \rightarrow Ker(t) \xrightarrow{\pi} Ker(\bar{v}) \rightarrow 0 \quad (\text{A.1})$$

est exacte.

Comme la deuxième et la troisième suite verticale sont scindées, il existe $q_1 : M \oplus N \rightarrow L \oplus M \oplus N$ et $q_2 : G \rightarrow F \oplus G$ tels que

$$q_1 p_1 = 1_{M \oplus N}, \quad q_2 p_2 = 1_G, \quad \text{et} \quad q_1 t = \bar{v} q_2.$$

Ceux-ci donne lieu à $b : Ker(\bar{v}) \rightarrow L \oplus M \oplus N$ où

$$b = i q_1.$$

Du fait que $i q_1 t = i \bar{v} q_2 = 0$, b factorise par j , c'est à dire

$$b = s j$$

pour un $s : Ker(\bar{v}) \rightarrow Ker(t)$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \rightarrow & Ker(z) & \rightarrow & L & \xrightarrow{z} & F & \rightarrow & Coker(z) \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & Ker(t) & \xrightarrow{j} & L \oplus M \oplus N & \xrightarrow{t} & F \oplus G & & \\
 & & \downarrow \pi \uparrow s & & \downarrow p_1 \uparrow q_1 & & \downarrow p_2 \uparrow q_2 & & \\
 0 & \rightarrow & Ker(\bar{v}) & \xrightarrow{i} & M \oplus N & \xrightarrow{\bar{v}} & G & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

De plus

$$s\pi i = s j p_1 = b p_1 = i q_1 p_1 = i$$

et comme i est injectif,

$$s\pi = id.$$

Alors, la suite exacte (A.1) est scindée. ■

Lemme A.8 *Si $Coker(\varphi) = 0$, alors*

$$Ker(\delta_1^{0,0}) = Ker(\varphi) \oplus ({}^1X, {}^1Y)$$

Démonstration

$$\begin{array}{ccc}
 (H^1X, H^1Y) & \xrightarrow{\varphi} & Ext^2(H^2X, H^1Y) \\
 \oplus & \nearrow u & \oplus \\
 (H^2X, H^2Y) & \xrightarrow{v} & Ext^2(H^3X, H^2Y) \\
 \oplus & \nearrow w & \\
 (H^3X, H^3Y) & &
 \end{array}$$

L'application $\delta_1^{0,0}$ est donné par (φ, u, v, w) .

On note par Φ l'application

$$(H^2X, H^2Y) \oplus (H^3X, H^3Y) \rightarrow Ext^2(H^3X, H^2Y).$$

D'après le Lemme A.5, $Ker(\Phi) = ({}^1X, {}^1Y)$.

Alors, d'après Lemme A.7, si $Coker(\varphi) = 0$,

$$Ker(\delta_1^{0,0}) = Ker(\varphi) \oplus ({}^1X, {}^1Y).$$

■

A.2.2 Identification de E_3^{pq}

Contrairement au cas de complexes à deux termes, nous allons devoir déterminer la page $E_3^{pq} = E_\infty^{pq}$ et pour ceci, il nous faut déterminer le différentiel δ_2^{pq} . Il nous suffit de considérer $p + q = 0$, et pour ceci, seul δ_2^{00} est différent de 0. En effet,

$$\delta_2^{00} : Ker(\delta_1^{0,0}) \rightarrow Coker(\delta_1^{1,-1}),$$

En appliquant le foncteur $(-, H^1Y)$ au triangle

$$H^2X \rightarrow {}^1X[1] \rightarrow {}^2X[1] \rightsquigarrow H^2X[1]$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow (H^2X[-1], H^1Y) \xrightarrow{\delta_1^{1,-1}} ({}^2X[-1], H^1Y) \xrightarrow{\gamma} ({}^1X[-1], H^1Y) \xrightarrow{\varphi_2} \\ H^2X[-2], H^1Y) \xrightarrow{\mu} ({}^2X[-2], H^1Y) \xrightarrow{\nu} ({}^1X[-2], H^1Y) \rightarrow \cdots \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Cette suite exacte longue nous donne

$$Ker(\varphi_2) = Im(\gamma) = Coker(\delta_1^{1,-1})$$

et ceci implique

$$\begin{aligned} Ker(\varphi) &= \{f \in (H^1X, H^1Y) : \varphi_1(f) \in Ker(\varphi_2)\} \\ &= \{f \in (H^1X, H^1Y) : \varphi_1(f) \in Coker(\delta_1^{1,-1})\} \end{aligned}$$

Maintenant, nous allons déterminer $Coker(\delta_1^{1,-1}) = Im(\gamma)$. Soient

$$\cdots \rightarrow X^{-1} \rightarrow X^0 \rightarrow X^1 \rightarrow X^2 \rightarrow Coker(\alpha^1) \rightarrow 0$$

une résolution projective de $Coker(\alpha^1)$ et

$$\cdots \rightarrow \bar{X}^{-1} \rightarrow \bar{X}^0 \rightarrow \bar{X}^1 \rightarrow X^2 \rightarrow Im(\alpha^2) \rightarrow 0$$

une résolution projective de $Im(\alpha^2)$.

L'application $\gamma : Ext^2(Im(\alpha^2), H^1Y) \rightarrow Ext^2(Coker(\alpha^1), H^1Y)$ est donné par

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\dots & \rightarrow & X^{-1} & \rightarrow & X^0 & \xrightarrow{\alpha^0} & X^1 & \rightarrow & X^2 & \rightarrow & 0 & & Coker(\alpha^1) \\
& & \downarrow & & \downarrow \chi' & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
\dots & \rightarrow & \bar{X}^{-1} & \rightarrow & \bar{X}^0 & \xrightarrow{\bar{\alpha}^0} & \bar{X}^1 & \rightarrow & X^2 & \rightarrow & 0 & & Im(\alpha^2) \\
& & \downarrow & & \downarrow \xi' & & \downarrow & & & & & & \downarrow \\
& & 0 & \rightarrow & H^1Y & \rightarrow & 0 & & & & & & H^1Y[2]
\end{array}$$

On note par i_X l'inclusion $H^1X \hookrightarrow X^1$ et par \bar{i}_X l'inclusion $K \hookrightarrow \bar{X}^1$ où $K :=$ le premier syzygy de $Ker(\alpha^2)$ (\bar{X}^1 est l'enveloppe projective de $Ker(\alpha^2)$).

Donc,

$$\begin{aligned}
Coker(\delta_1^{1,-1}) &= Im(\gamma) = \\
&= \{f' \in (X^0, H^1Y)/\alpha^0.(X^1, H^1Y) : \\
&\quad \exists \xi' \in (\bar{X}^0, H^1Y)/\bar{\alpha}^0.(\bar{X}^1, H^1Y) \text{ tel que } f' = \chi'\xi'\} \\
&= \{f \in (H^1X, H^1Y)/i_X.(X^1, H^1Y) : \\
&\quad \exists \xi \in (K, H^1Y)/\bar{i}_X.(\bar{X}^1, H^1Y) \text{ tel que } f = \chi\xi\} \quad (A.3)
\end{aligned}$$

où $\chi : H^1X \rightarrow K$ induit par $\chi' : X^0 \rightarrow \bar{X}^0$.

Ceci implique que

$$\begin{aligned}
Ker(\varphi) &= \{f \in (H^1X, H^1Y) : \\
&\quad \exists \xi \in (K, H^1Y)/\bar{i}_X.(\bar{X}^1, H^1Y) \text{ tel que } \varphi_1(f) = \chi\xi\}. \quad (A.4)
\end{aligned}$$

La suite exacte longue A.2 nous donne aussi

$$Coker(\varphi_2) = Im(\mu) = Ker(\nu). \quad (A.5)$$

En appliquant le foncteur $(-, H^1Y)$ au triangle

$$H^1X \rightarrow X \rightarrow {}^1X \rightsquigarrow H^1X[1]$$

on obtient une suite exacte longue

$$\cdots \rightarrow (X[-1], H^1Y) \rightarrow (H^1X[-1], H^1Y) \rightarrow ({}^1X[-2], H^1Y) \rightarrow (X[-2], H^1Y) \rightarrow \cdots$$

Avec une démonstration analogue à celle du Lemme 3.6, on peut montrer que $(X[-1], H^1Y) = 0$, et aussi $(X[-2], H^1Y) = 0$.

Ceux-ci implique

1. $Coker(\varphi_1) = (X[-1], H^1Y) = 0$.
2. $({}^1X[-2], H^1Y) \cong Ext^1(H^1X, H^1Y) = 0$ d'après l'hypothèse.
3. $Coker(\varphi_2) = 0$ car $Coker(\varphi_2) \subseteq ({}^1X[-2], H^1Y)$ d'après (A.5) et (A.2).

Alors, $Coker(\varphi) = 0$ et ceci donne lieu à la proposition suivante :

Proposition A.9 *Les termes de E_∞ donnent une suite exacte*

$$0 \rightarrow Hom_{D(\Lambda)}(X, Y) \rightarrow Ker(\varphi) \oplus ({}^1X, {}^1Y) \xrightarrow{\delta_2^{00}} Coker(\delta_1^{1,-1}) \rightarrow 0$$

Alors, $Hom_{D(\Lambda)}(X, Y)$ est un produit fibré de $Ker(\varphi)$ et $Hom_{D(\Lambda)}({}^1X, {}^1Y)$ sur $Coker(\delta_1^{1,-1})$ où

1. $Hom_{D(\Lambda)}({}^1X, {}^1Y)$ est un produit fibré de $Hom(H^2X, H^2Y)$ et $Hom(H^3X, H^3Y)$ sur $Ext^2(H^3X, H^2Y)$,
2. $Ker(\varphi)$ est donné par (A.4) et $Coker(\delta_1^{1,-1})$ est donné par (A.3).

Remarque En général, pour des complexes X et Y de n termes, nous allons devoir calculer la suite spectrale jusqu'à la page $E_n^{pq} = E_\infty^{pq}$.

Bibliographie

- [1] I.Assem, *Algèbres et modules*, Masson, Paris (1997).
- [2] S.Brenner et M.C.R.Buttler, *Generalization of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors*, Springer Lecture Notes **832** (1980), 103-169.
- [3] M.Broué, *Symmetric Algebras*, dans “Introduction to Representation Theory,” disponible sur <http://www.math.jussieu.fr/~broue/2Sym.pdf>
- [4] H.Cartan et S.Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press (1956).
- [5] C.W.Curtis et I.Reiner, *Methods in Representation Theory* Vol I, John Wiley, NY (1982).
- [6] D.Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras*, London Math. Soc. Lect. Note Series **119** (1988).
- [7] B.Keller, *A remark on tilting theory and DG algebras*, Manus. Math. **79** (1993), 247-253.
- [8] B.Keller, *Basculement et homologie cyclique*, Exposé de synthèse donné au Colloque du contact Franco-Belge, Reims (1995), disponible sur [http : www.math.jussieu.fr/~keller/publ/bhc.dvi](http://www.math.jussieu.fr/~keller/publ/bhc.dvi)
- [9] B.Keller, *Introduction to abelian and derived categories*, disponible sur [hhttp://www.math.jussieu.fr/~keller/publ/cam.dvi](http://www.math.jussieu.fr/~keller/publ/cam.dvi)
- [10] B.Keller et D.Vossieck, *Sous les catégorie dérivées*, C.R. Acad. Sci. Paris **305** (1987), 225-228.
- [11] S.König et A.Zimmermann, *Tilting hereditary orders*, Communications in Algebra **24** (6) (1996) 1897-1913.
- [12] S.König et A.Zimmermann, *Tilting self-injective algebras and Gorenstein orders*, Oxford Quaterly Journal of Maths. **48** (1997) 351-361.

- [13] S.König et A.Zimmermann, *Derived equivalences for group rings*, Springer Lecture Notes in Mathematics **1685** (1998).
- [14] D.Passmann, *A course in ring theory*, Wadsworth and Brooks/Cole, California (1991).
- [15] I.Reinier, *Maximal orders*, Academic Press, NY (1975).
- [16] J.Rickard, *Morita theory for derived equivalences*, J. London Math. Soc. **39** (1989), 436-456.
- [17] J.Rickard, *Derived categories and stable equivalences*, J. of Pure and Appl. Alg. **61** (1989), 303-317.
- [18] J.Rickard, *Lifting theorems for tilting complexes*, J. of Alg. **142** (1991), 383-393.
- [19] J.Rickard, *Derived equivalences as derived functors*, J. London Math. Soc. **43** (1991), 37-48.
- [20] K.W.Roggenkamp, *Blocks of cyclic defect and Green ordres*, Comm. in Alg. **20** (1992), 1715-1734.
- [21] K.W.Roggenkamp et V.Huber-Dyson, *Lattices over orders I*, Springer Lecture Notes in Mathematics **115** (1970).
- [22] J.Rotman, *Introduction to homological algebra*, Academic Press, San Diego (1979).
- [23] J.P.Serre, *Corps Locaux*, Hermann, Paris (1962).
- [24] P.Schapira, *Categories and homological algebra*, disponible sur <http://www.math.jussieu.fr/~schapira/polycopies/cat.dvi>
- [25] J.L.Verdier, *Catégories dérivées, état 0, SGA 4 1/2*, Springer Lecture Notes in Mathematics **569** (1977), 262-311.
- [26] J.L.Verdier, *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*, Astérisque **239** (1997)
- [27] C.A.Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge studies in advanced mathematics **38**, Cambridge University Press (1994).
- [28] A.Zimmermann, *Tilted symmetric orders are symmetric orders*, Archiv der Mathematik **73** (1999), 15-17.
- [29] A.Zimmermann, *Braid groups as self-equivalences of derived categories*, in Roggenkamp and Stefanescu (eds.), *Algebra-Representation Theory*, Kluwer Academic Publishers (2001), 419-438.

Index

- (X, Y) , 43
- A , 60
- A^i , 93
- $C(\mathcal{C})$, 12
- $D(\mathcal{C})$, 17
- $D^b(\Lambda)$, 22
- $K(\mathcal{C})$, 15
- $P(\Lambda)$, 22
- T^i , 71
- $\Lambda - Proj$, 22
- $\Lambda - mod$, 36
- Ω , 62
- Ω^i , 98
- $\beta.(X, Y)$, 43
- $\mathcal{P}(X, Y)$, 36
- $\underline{Hom}_\Lambda(X, Y)$, 36
- iX , 92
- $add - X$, 22
- $t(L, L), tL$, 64

- acyclique, 13
- algèbre symétrique, 34

- catégorie cosuspendue, 21
- catégorie dérivée, 17
- catégorie de complexes, 12
- catégorie homotopique, 15
- catégorie stable, 36
- catégorie suspendue, 19
- catégorie triangulée, 21
- complexe, 12

- complexe basculant, 22
- complexe basculant partiel, 22

- équivalence de la catégorie triangulée, 21
- équivalence homotopique, 14

- foncteur cohomologique, 21
- foncteur de décalage, 13
- foncteur triangulé, 21

- homologie, 13
- homotope à zéro, 14
- homotopie, 14

- ordre, 31
- ordre de Gorenstein, 32
- ordre symétrique, 34

- produit fibré, 24

- quasi-isomorphisme, 16

- réseau, 31

- somme amalgamée, 28

- Théorème de König et Zimmermann, 40
- Théorème de relèvement, 39
- Théorème de Rickard, 23
- Théorème de Zimmermann, 39
- théorème principal, 74
- triangle, 19
- triangle distingué, 18