Laboratoire de Physique Statistique
Département de physique de l'École normale supérieure

Stabilité et dynamique d'écoulements de fluides parfaits barotropes autour d'un obstacle en présence de dispersion

Chi-Tuong PHAM

Sous la direction de Marc-Étienne BRACHET

0. Un exemple de bifurcation nœud-col

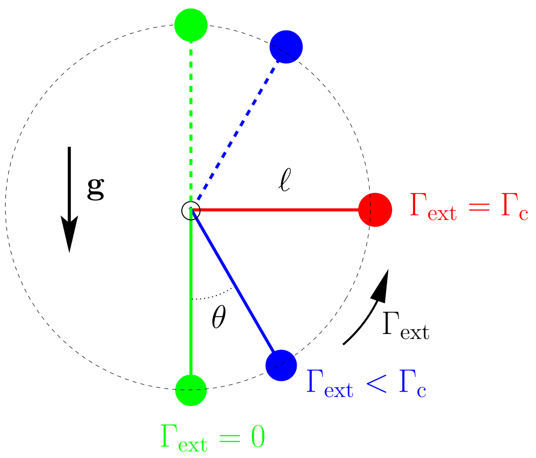
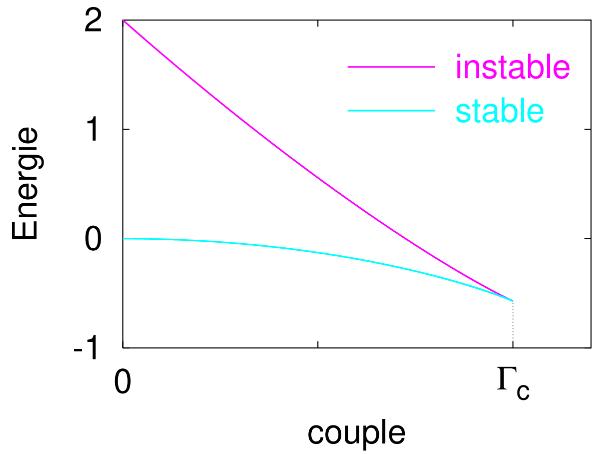


diagramme de bifurcation



- Pendule simple pesant forcé par un couple extérieur $\Gamma_{\rm ext}$

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell \sin\theta + \Gamma_{\rm ext}$$

- Solutions stationnaires $\Longleftrightarrow \sin\theta = \dfrac{\Gamma_{\rm ext}}{mg\ell}$

$\Longrightarrow \Gamma_{\rm ext} \leqslant mg\ell = \Gamma_{\rm c}$

$\Longrightarrow$ 2 solutions stationnaires : 1 stable, 1 instable

- Pour $\Gamma_{\rm ext} > \Gamma_{\rm c}$, mouvement de révolution du pendule

$\longrightarrow$ Bifurcation nœud-col

Lois d'échelle caractéristiques

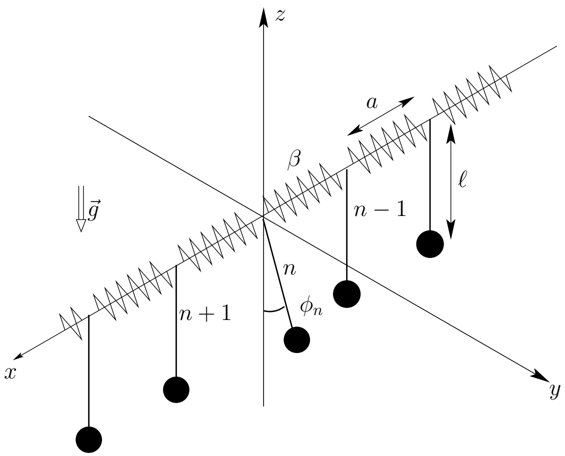
- Pendule hamiltonien (sans frottement)

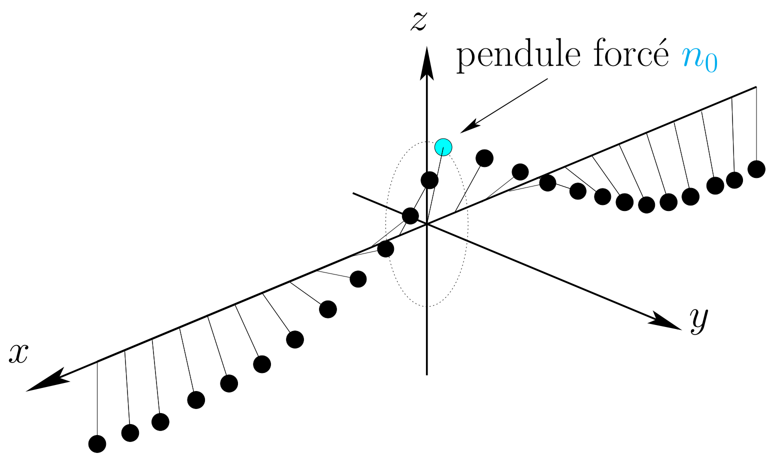
$\longrightarrow T \sim |\Gamma_{\rm ext} - \Gamma_{\rm c}|^{-1/4}$ (loi d'échelle non dissipative)

- Pendule suramorti : $f\dot{\theta} = -mg\ell\sin\theta + \Gamma_{\rm ext}$

$\longrightarrow T \sim |\Gamma_{\rm ext} - \Gamma_{\rm c}|^{-1/2}$ (loi d'échelle dissipative)

1. Chaîne de pendules forcée localement





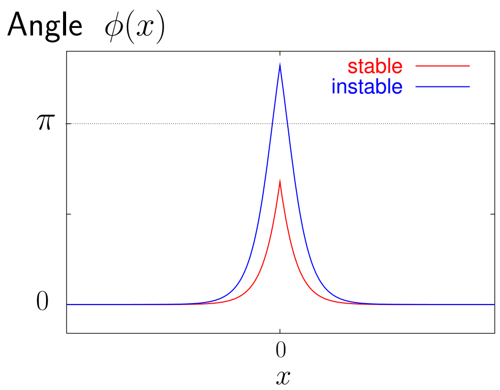
- Équation du pendule n — Couple constant appliqué sur le pendule n_0 (paramètre de contrôle)

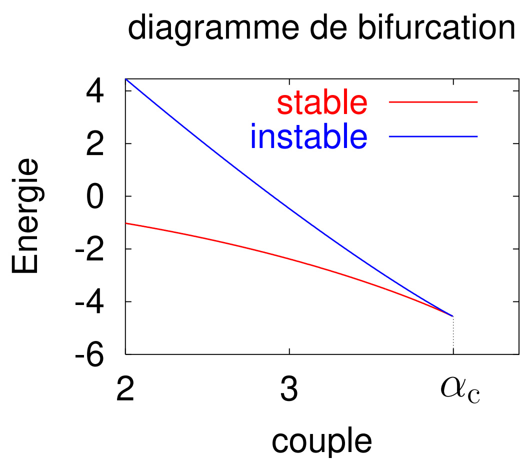
$$m\ell^2 \frac{\mathrm{d}^2\phi_n}{\mathrm{d}t^2} = -mg\ell \sin\phi_n - \beta[\phi_n - \phi_{n+1}] - \beta[\phi_n - \phi_{n-1}] + \alpha\delta_{n,n_0}$$

- Limite continue $=$ équation de sine-Gordon avec un terme en $\alpha\delta(x)$ supplémentaire

$$\partial_{tt}\phi - \partial_{xx}\phi + \sin\phi - \alpha\,\delta(x) = 0\,,$$

Solutions stationnaires analytiques





$\Longrightarrow$ bifurcation nœud-col

Perturbation de ces solutions

- Perturbation d'une solution stable :

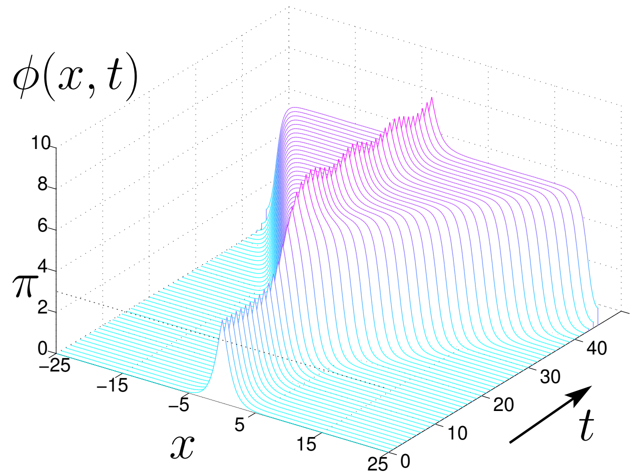
  $\longrightarrow$ oscillations autour de la branche stable

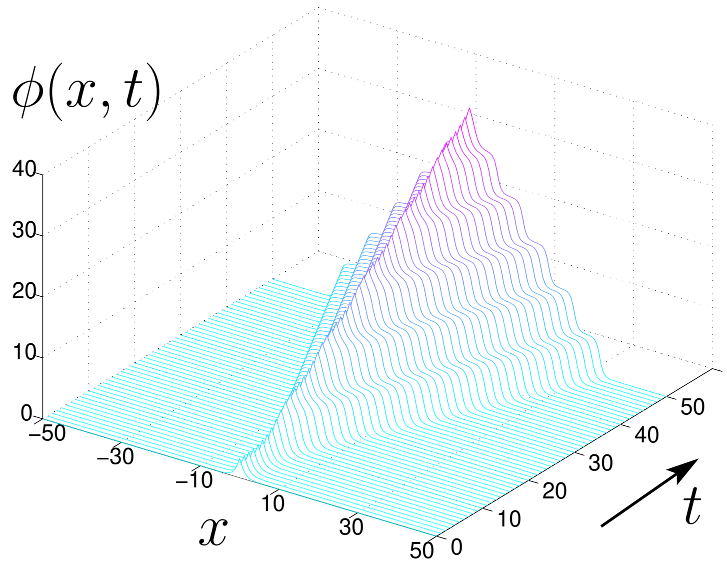
- Perturbation d'une solution instable :

  $\longrightarrow$ émission d'une paire de solitons $+$ oscillations autour d'une solution stable déphasée de 2π

- Temps caractéristiques : $T \sim |\alpha - \alpha_c|^{-1/4}$

  $\longrightarrow$ Typique des systèmes non dissipatifs





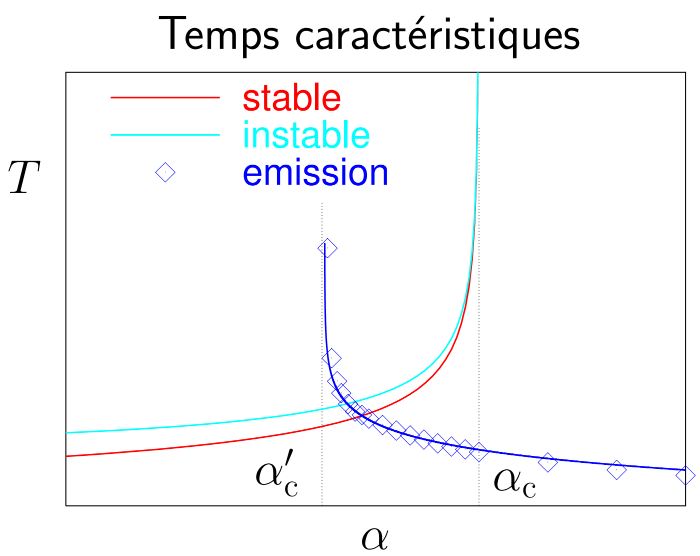
- Au-delà du seuil critique ?

Il n'y a plus de solutions stationnaires

Mouvement de révolution du pendule forcé

$\longrightarrow$ émission périodique de solitons

(transition vers la dissipation)



- Nouveau seuil $\alpha'_c < \alpha_c \Longrightarrow$ Phénomène d'hystérésis

Période d'émission : $T_{\text{émission}} \sim \frac{1}{\lambda_+} \log(\alpha - \alpha'_c)$

$\longrightarrow$ bifurcation globale d'Andronov homocline

$\longrightarrow$ déjà connu dans les systèmes dissipatifs

[Argentina, Coullet, Mahadevan, *PRL* 1997]

$\longrightarrow$ ici : système hamiltonien

Remarque : perturbation d'une solution instable

$\Longrightarrow$ lâcher d'1 paire de solitons (valable pour $\alpha < \alpha'_c$)

2. Modèle unidimensionnel de superfluide traversé par une impureté

- Modélisation : équation de Schrödinger non linéaire (ESNL) dans le référentiel de l'impureté

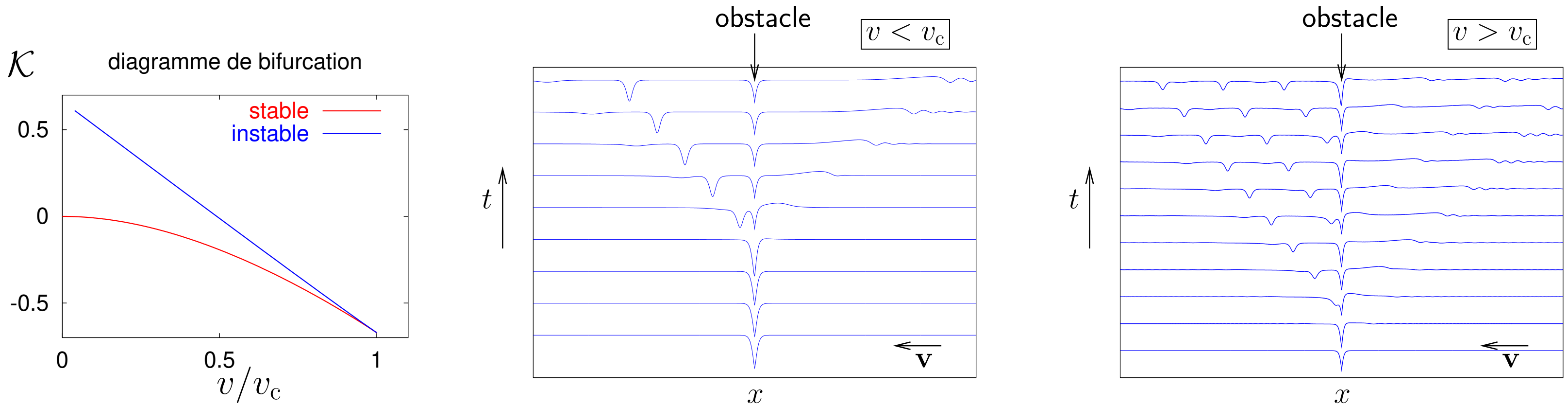
$$\mathrm{i}\partial_t\psi = -\,\partial_{xx}\psi + \mathrm{i}v\,\partial_x\psi - \psi + |\psi|^2\psi + g\delta(x)\psi = \frac{\delta\mathcal{K}}{\delta\psi^*}$$

ψ : champ complexe

g : intensité du potentiel $\delta(x)$

v : vitesse de l'impureté (paramètre de contrôle)

$\longrightarrow$ Solutions stationnaires qui disparaissent par bifurcation nœud-col [Hakim, PRE 1997]



$\longrightarrow$ Transition vers la dissipation

- *Remarque* : pas de symétrie $(x \longmapsto -x)$ $\longrightarrow$ émission en aval

- La transition se fait sans hystérésis : arrêt du régime périodique au seuil v_c
- Lois d'échelle

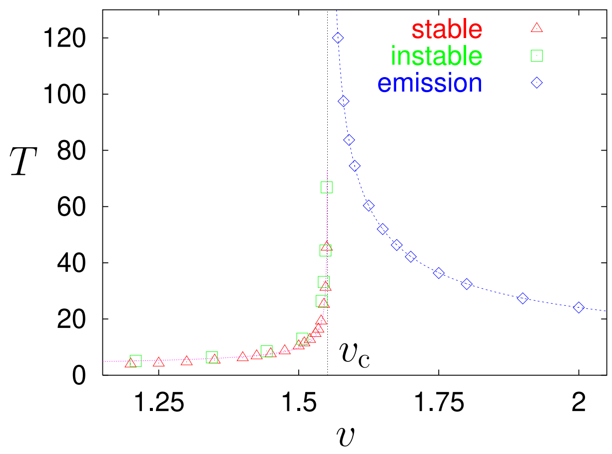
– branche stable : relaxation vers la solution stable : $\mathrm{e}^{-t/T_\mathrm{S}}$

– branche instable : $\mathrm{e}^{+t/T_\mathrm{I}}$ (puis émission d'un soliton)

– émission périodique de solitons, période $T_\text{émission}$

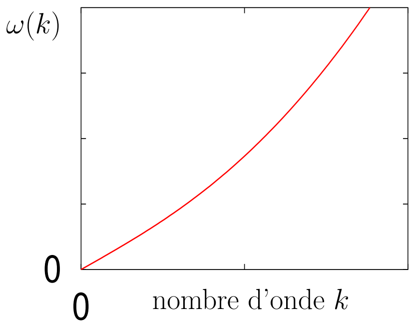
$$T \sim |v - v_\mathrm{c}|^{-1/2}$$

$\Longrightarrow$ Lois d'échelles dissipatives inattendues pour un système hamiltonien



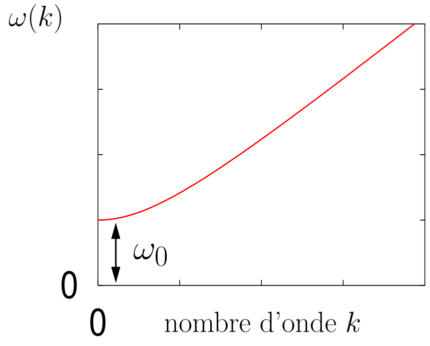
Influence de l'émission d'ondes sur la dynamique

Superfluide



Onde sonore

Chaine de pendules



Perturbation autour de la chaîne au repos

3. Généralisation

Modification des équations de façon à avoir une fréquence de coupure variable

- ESNL avec fréquence de coupure variable :

  $\longrightarrow$ considérer un superfluide chargé

$$i\partial_t \psi = -\partial_{xx}\psi + iv\,\partial_x \psi - \psi + |\psi|^2\psi$$
$$+g\,\delta(x)\psi + qV\psi$$

avec $\partial_{xx}V = -q\left(\,|\psi|^2 - \langle|\psi|^2\rangle\right)$

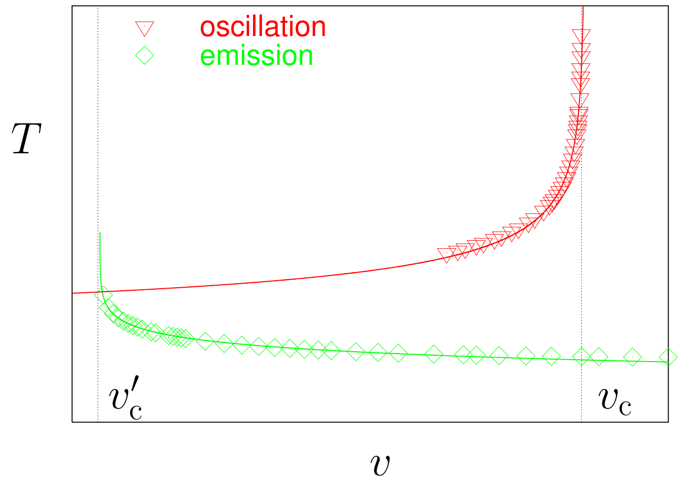
- SG sans fréquence de coupure :

  $\longrightarrow$ changer le potentiel périodique

$$V(\phi) = 1 - \cos\phi \longrightarrow V(\phi) = (1-\cos\phi)^2$$

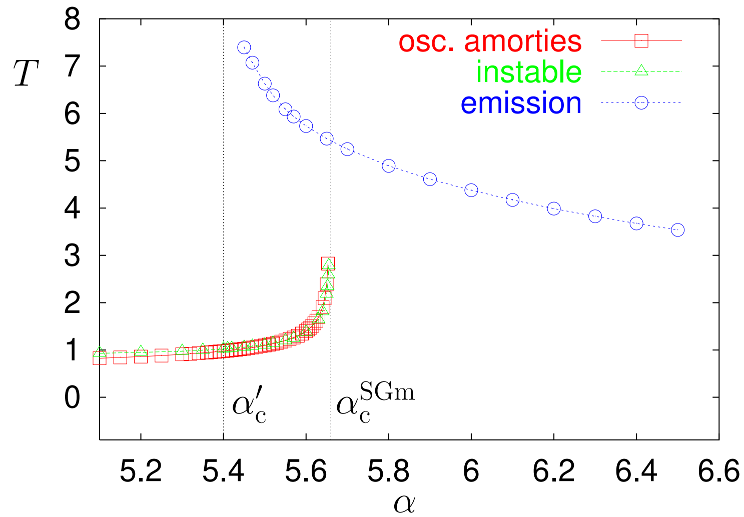
Résultats

Superfluide chargé



$\longrightarrow$ Comme la chaîne de pendules

Chaîne de pendules sans fréquence de coupure



$\longrightarrow$ Toujours une hystérésis, mais oscillations amorties

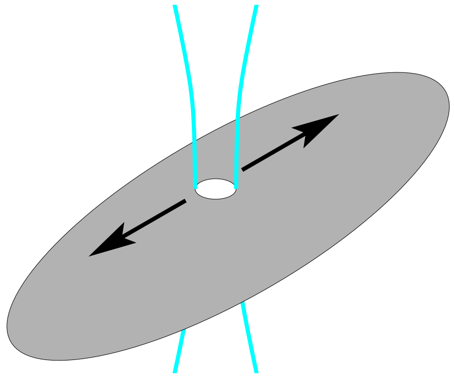
- **Conclusion :**

1. L'absence de fréquence de coupure introduit effectivement des effets à caractères dissipatifs dans la dynamique des systèmes près de la bifurcation nœud-col.
2. Néanmoins, dans le cas de la chaîne de pendules modifiée, les effets dissipatifs sont insuffisants pour avoir une dynamique suramortie.

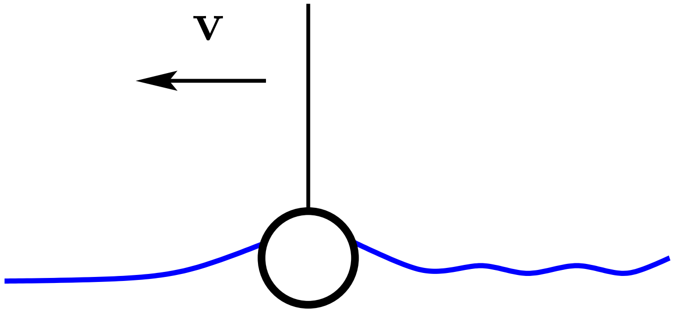
Partie II : Écoulements bidimensionnels

• Systèmes physiques plus réalistes en rapport avec deux expériences :

Laser se déplaçant dans un condensat de Bose-Einstein [Raman et coll., *PRL* 1999]



Expérience en eau profonde : traînée d'onde derrière un obstacle [Burghelea & Steinberg, *PRL* 2001]



4. Écoulement superfluide bidimensionnel autour d'un disque

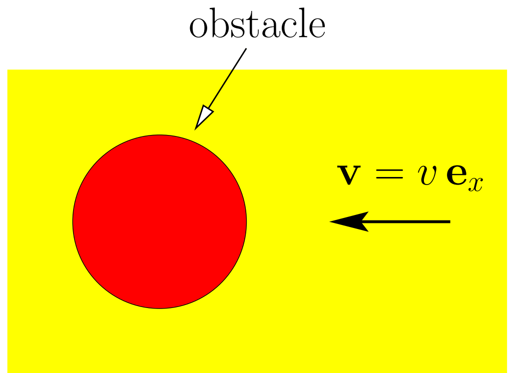
- Superfluide 2D traversé par un disque de diamètre D en translation uniforme
- Dans le référentiel du disque : ESNL à 2D

$$\mathrm{i}\partial_t\psi = \frac{c}{\sqrt{2}\xi}\left[-\xi^2\Delta\psi - \psi + |\psi|^2\psi\right] + \mathrm{i}\,\mathbf{v}\cdot\nabla\psi$$

ψ : champ complexe $\quad c =$ vitesse du son

$\xi =$ longueur de cohérence = taille des vortex quantiques

$\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_x =$ vitesse de translation de l'obstacle



dans le référentiel de l'obstacle

- 2 nombres sans dimension :

  – nombre de Mach, $\mathcal{M} = |\mathbf{v}|/c$

  – rapport longueur de cohérence sur diamètre de l'obstacle, ξ/D

- Transformation de Madelung (singulière lorsque $\rho = 0$) :

$$\psi = \sqrt{\rho}\,\exp(\mathrm{i}\frac{\phi}{\sqrt{2}c\xi})$$

$\rho =$ densité

$\phi =$ potentiel des vitesses [tel que $\mathbf{U} = \nabla\phi - \mathbf{v} =$ vitesse du fluide]

$\longrightarrow$ variables hydrodynamiques, équations du mouvement :

$$\partial_t\phi = -\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + c^2(1-\rho) + c^2\xi^2\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} + \mathbf{v}\cdot\nabla\phi \qquad \text{(Bernoulli)}$$

$$\partial_t\rho = -\rho\Delta\phi - \nabla\rho\cdot\nabla\phi + \mathbf{v}\cdot\nabla\rho \qquad \text{(Continuité)}$$

- Conditions aux limites sur le bord du disque $\partial\mathbb{D}$:

Dirichlet	**Neumann**
(conditions physiques habituelles)	(autre condition, plus académique)
$\psi\rvert_{\partial\mathbb{D}} = 0 \Longleftrightarrow \rho\rvert_{\partial\mathbb{D}} = 0$	$\partial_r\rho\rvert_{\partial\mathbb{D}} = 0$
$\Longrightarrow \mathbf{U}_\perp\rvert_{\partial\mathbb{D}} = 0$	$\mathbf{U}_\perp\rvert_{\partial\mathbb{D}} = 0$

Approche couche limite pour les solutions stationnaires

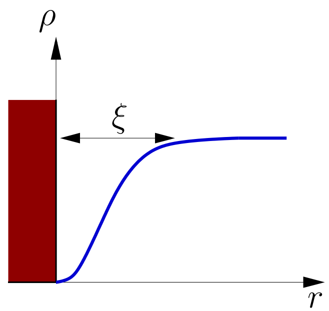
$$0 = \xi^2 \frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} + 1 - \rho + \frac{\mathcal{M}^2}{2}[1 - (\nabla\varphi)^2] \qquad\qquad 0 = \nabla(\rho\nabla\varphi)$$

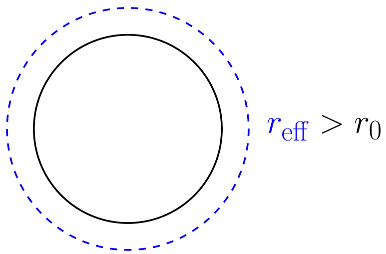
$\xi = 0 \Longrightarrow$ équations d'un fluide parfait compressible, sans dispersion (fluide eulérien) [Rica, Physica D 2001]

$\xi \to 0 \Longrightarrow$ développement perturbatif à faible nombre de Mach

- **Résultats au 1[er] ordre :** solutions Euler + couches limites

Dirichlet : $\rho|_{\partial\mathbb{D}} = 0$

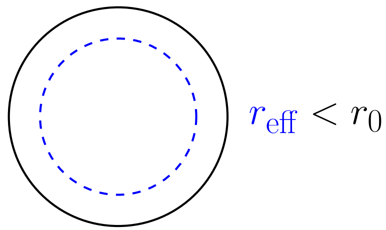




$$\mathcal{M} \neq 0 : r_{\text{eff}}^2 = 1 + 2\sqrt{2}\xi$$

$+$ couche limite de taille ξ

Neumann : $\partial_r\rho|_{\partial\mathbb{D}} = 0$



$$\mathcal{M} \neq 0 : r_{\text{eff}}^2 = 1 - 3\mathcal{M}^2\xi^2$$

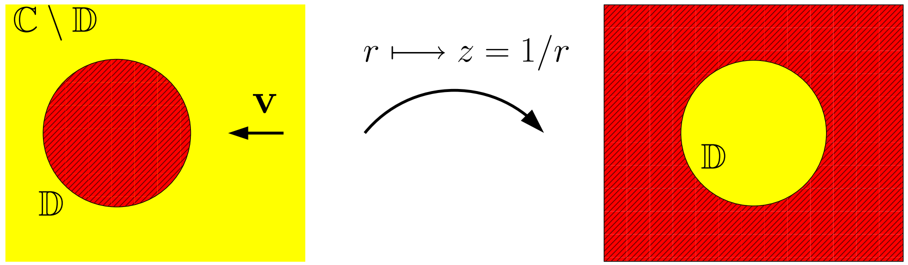
$+$ couche limite de taille ξ

Méthodes numériques

- Idée 1 : Ramener le domaine infini dans un domaine fini [coordonnées polaires : $(\theta, r) \longmapsto (\theta, z = 1/r)$]
- Idée 2 : Décomposition des champs :

$$\psi(\theta, z) = \sum_n \left[\sum_p \psi_{n,p} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \, T_p(z) \right]$$

T_p : polynômes de Tchebycheff



- Avantage de la méthode :
  - bonne description de l'écoulement Euler (polynômes en $z = 1/r$)
  - bonne résolution de la couche limite

- Méthodes de suivi de branches [Mamun & Tuckerman, Phys. Fluids 1995]

  $\longrightarrow$ accès aux solutions stationnaires instables

Efficacité de la méthode

- Euler : détermination du nombre de Mach critique (singularité de type choc)

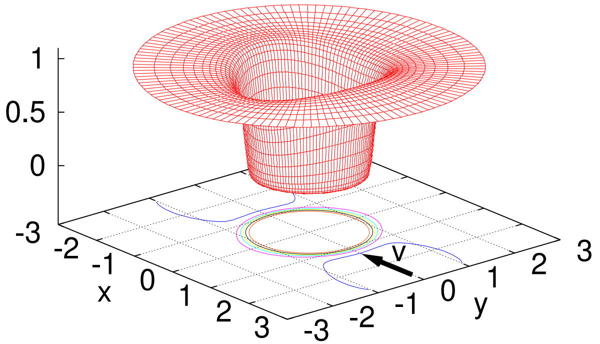
$$\mathcal{M}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{Euler}} = 0{,}36969705259(9)$$

avec $N_\theta = 512$ modes de Fourier et seulement $N_r = 32$ polynômes de Tchebycheff.
(Rica, 5 chiffres significatifs. Avec notre méthode, équivalent avec résolution $N_\theta \times N_r$ = 128 $\times$ 16)

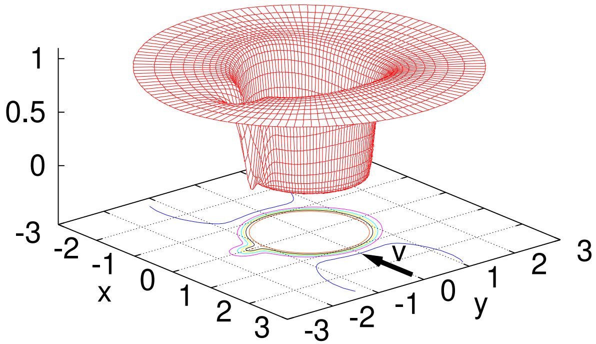
- ESNL : $\xi/D = 1/20$ pour une résolution $N_\theta \times N_r$ = 64$\times$64 [Huepe & Brachet, *Physica D* 2000 : 256 $\times$ 128]

Solutions stationnaires & diagrammes de bifurcation (grands obstacles)

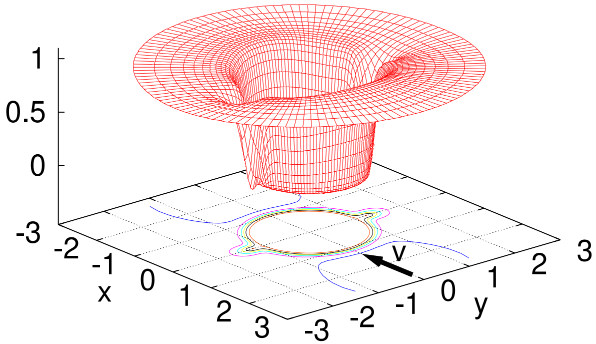
Conditions Dirichlet



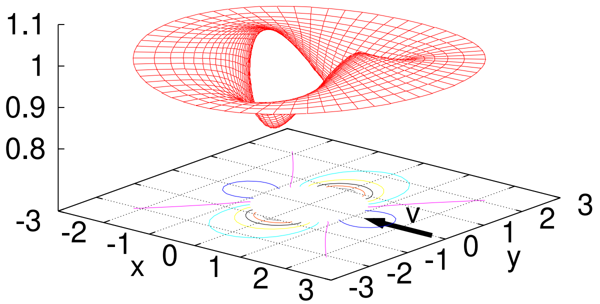
Stable

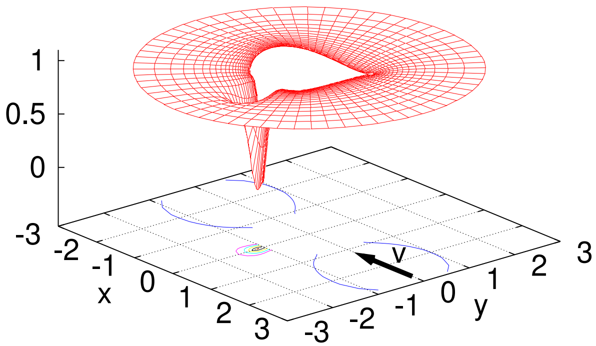


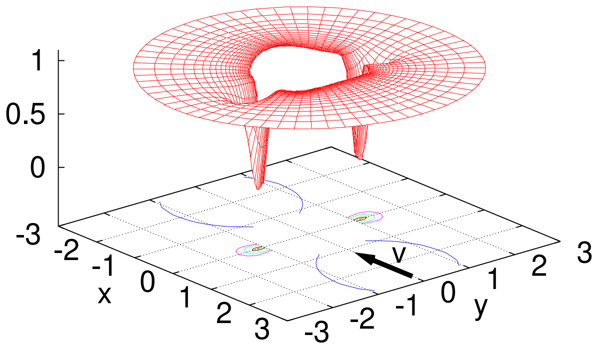
1 vortex



2 vortex



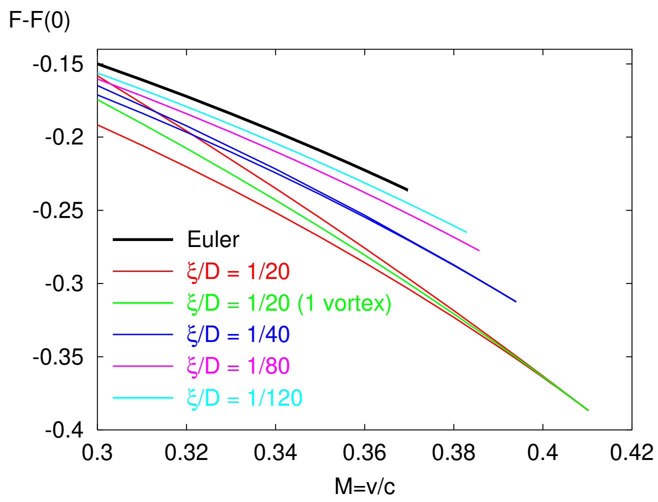




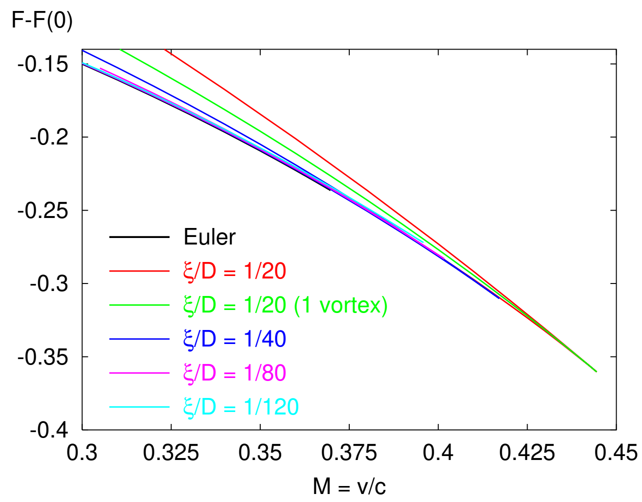
Conditions Neumann

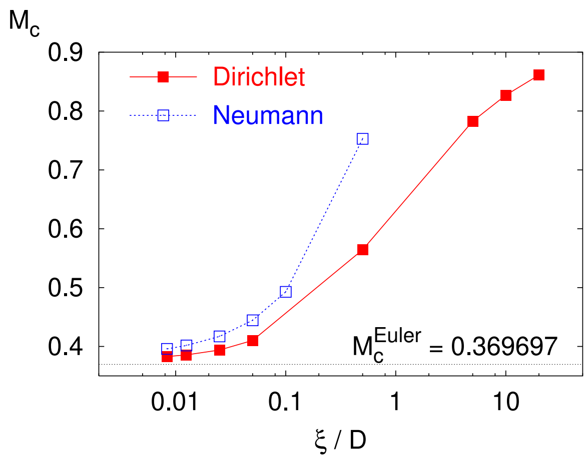
4. Écoulement superfluide 2D autour d'un disque

Dirichlet



Neumann





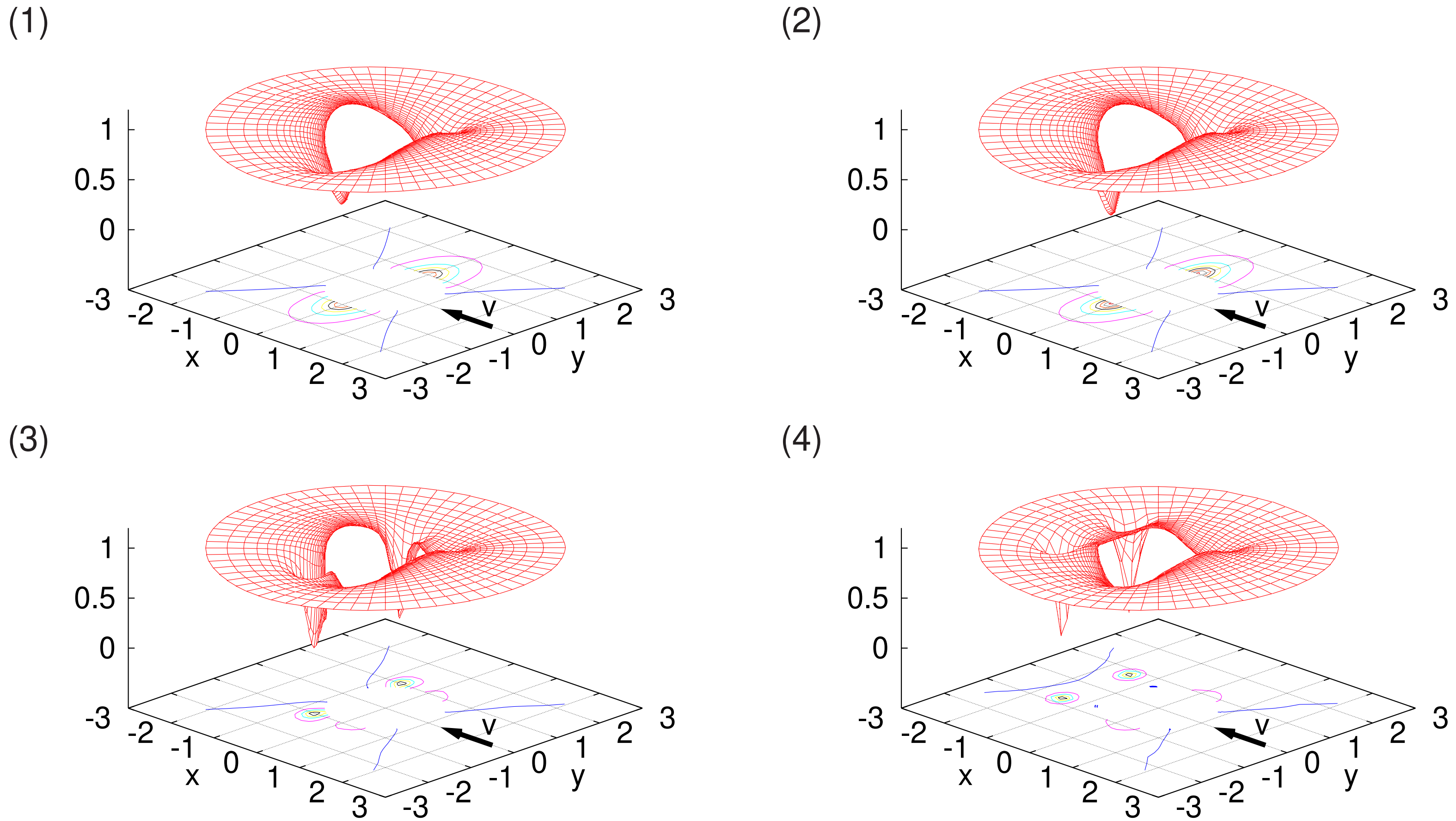
- **Dirichlet**

$\mathcal{M} \neq 0 : \quad r_{\text{eff}}^2 = 1 + 2\sqrt{2}\xi$ à l'infini

- **Neumann**

$\mathcal{M} \neq 0 : \quad r_{\text{eff}}^2 = 1 - 3\mathcal{M}\xi^2$

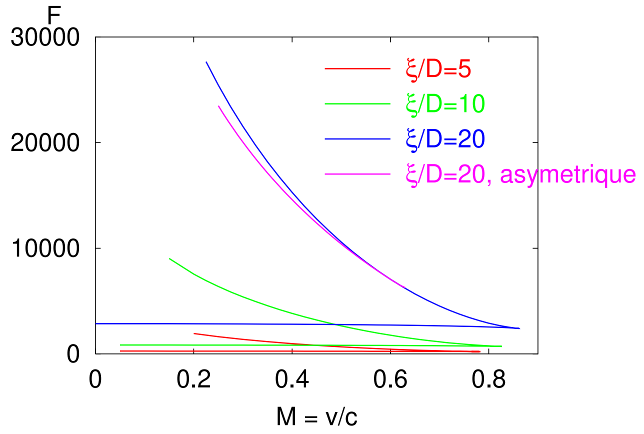
Dynamique pour de grands obstacles, conditions Neumann : émission de vortex



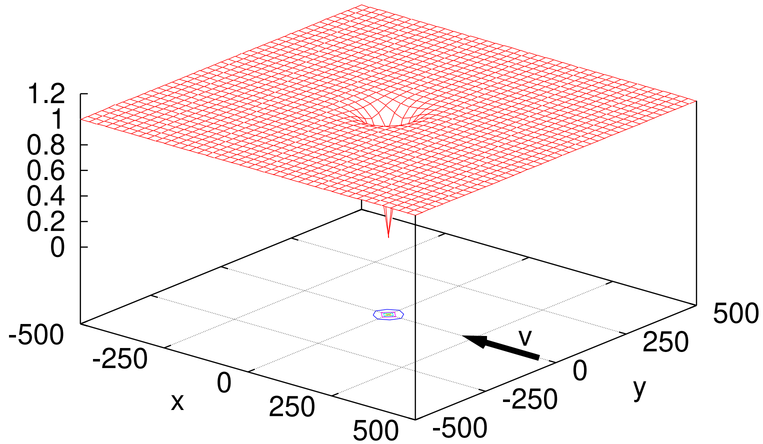
$\Longrightarrow$ Comportement identique aux travaux faits en boîte périodique avec un potentiel ($\Longleftrightarrow$ Dirichlet)

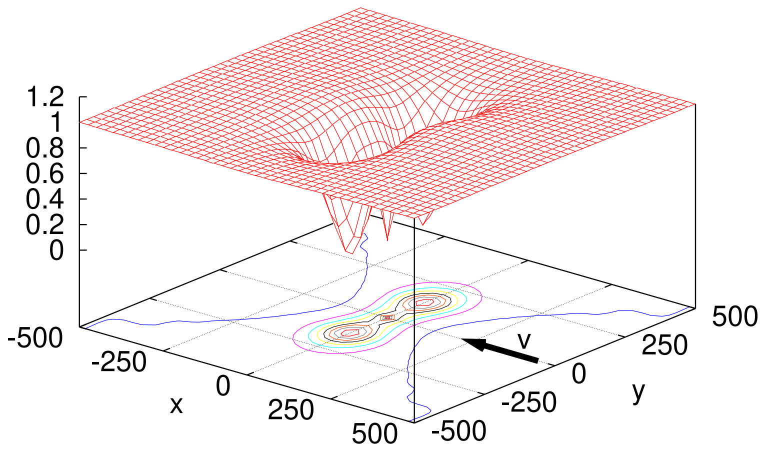
[Frisch, Pomeau & Rica, *PRL* 1992 ; Huepe & Brachet, *Physica D* 2000]

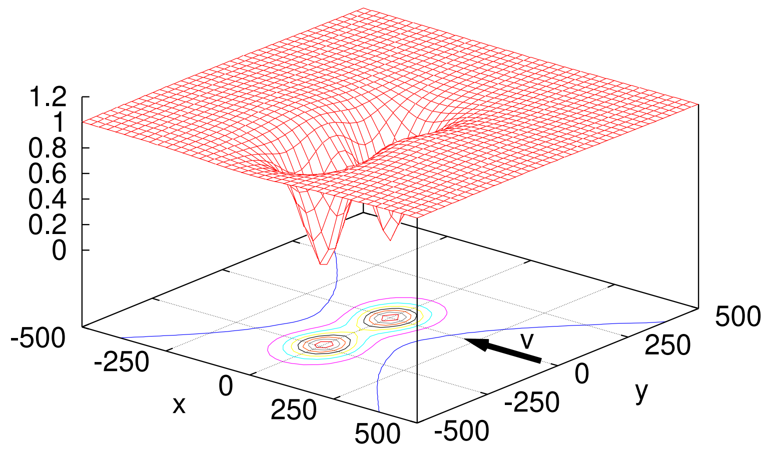
Solutions stationnaires & diagramme de bifurcation conditions Dirichlet (petits obstacles)



(stable)



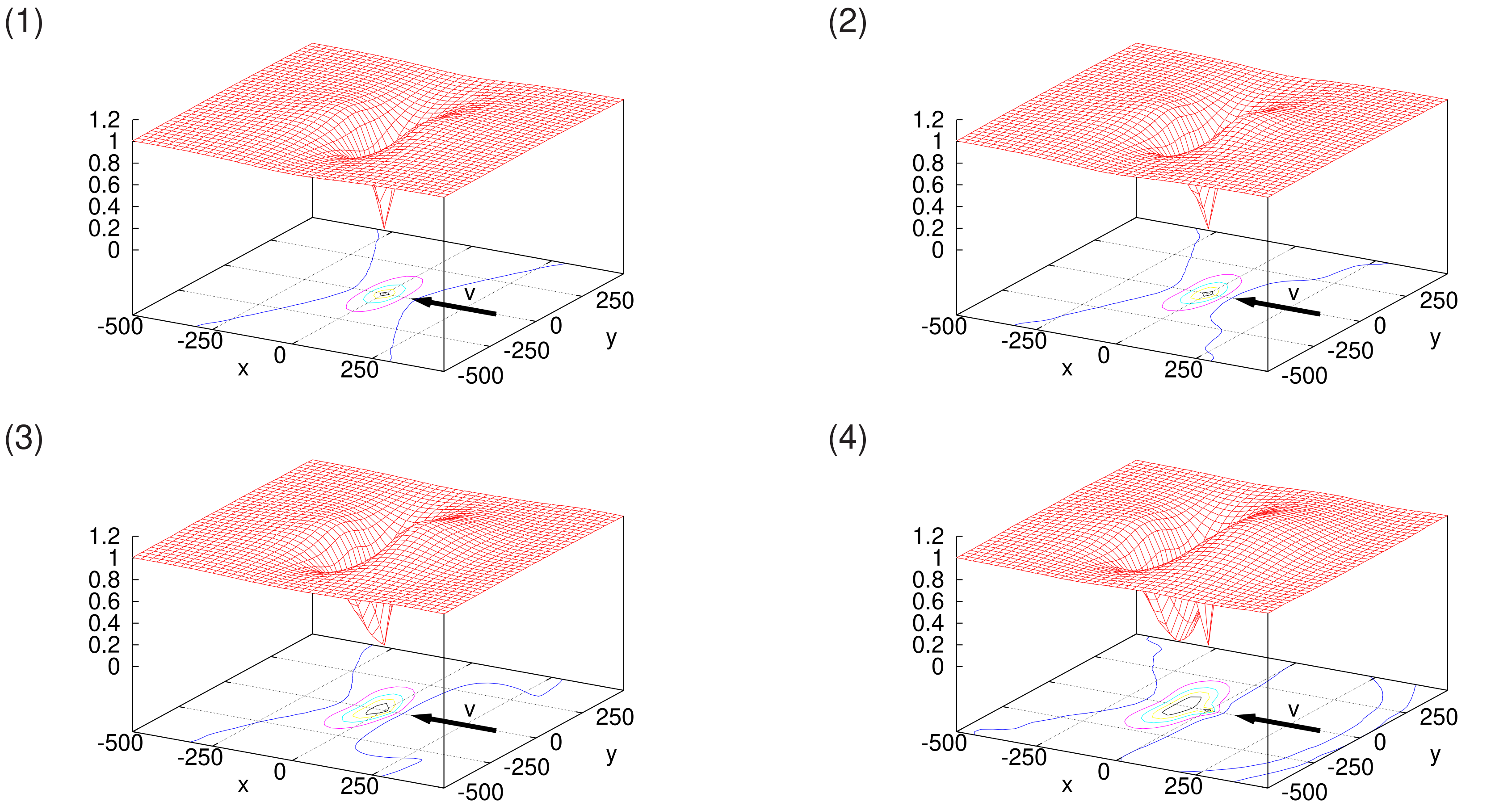




(instable symétrique) $\xi/D = 20, \mathcal{M} = 0{,}25$ (instable asymétrique)

Dynamique pour de petits obstacles (conditions Dirichlet)

- Il existe 2 types d'excitations en translation uniforme dans un superfluide 2D [Jones & Roberts, *J. Phys. A* 1982]
  - les paires de vortex
  - les ondes de raréfaction



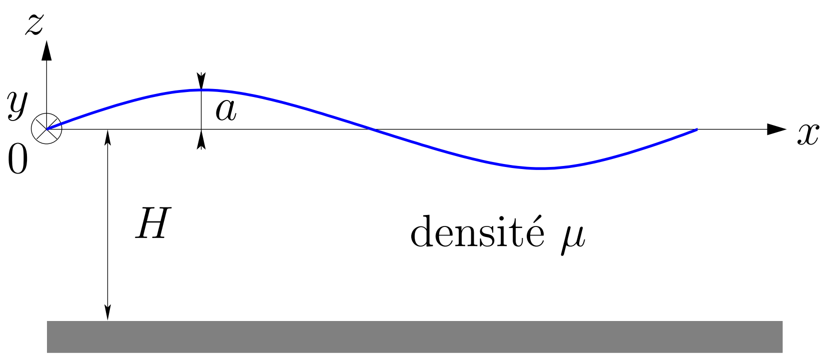
Principaux résultats sur ESNL 2D

- Mécanisme : bifurcation qui existe pour les deux conditions aux limites considérées (Conditions Neumann impossibles à considérer avec les codes préexistants)

- Influence des conditions aux limites : effet de renormalisation de la taille de l'obstacle

- Dans le régime supercritique, la nature des excitations émises dépend du rapport ξ/D

5. Écoulement en eau peu profonde autour d'un cylindre



• Équations décrivant l'écoulement à surface libre d'un fluide parfait *incompressible* de masse volumique μ de tension superficielle s

$$\partial_{xx}\phi + \partial_{zz}\phi = 0 \qquad \forall(x,z,t)$$

$$\partial_z \phi = 0 \qquad \forall(x,t) \text{ en } z = -H$$

$$\partial_t \eta + \partial_x \phi \partial_x \eta - \partial_z \phi = 0 \qquad \forall(x,t) \text{ en } z = \eta$$

$$\partial_t \phi + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + g\eta - \frac{s}{\mu}\partial_{xx}\eta = 0 \qquad \forall(z,x,t)$$

- Relation de dispersion générale :

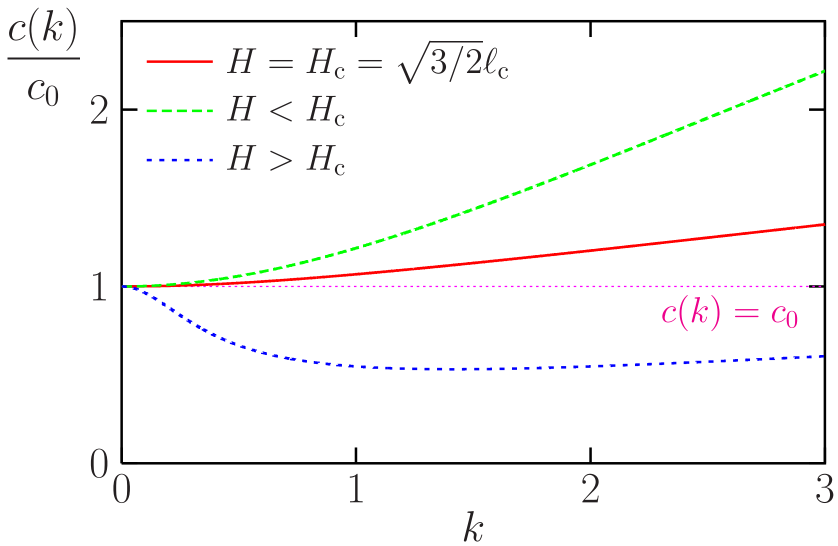
$$\omega^2(k) = gk(1 + \frac{1}{2}\ell_c^2 k^2) \tanh Hk$$

$\ell_c = \sqrt{\dfrac{2s}{\mu g}}$ = longueur capillaire   Ordre de grandeur pour l'eau : $\ell_c \simeq 5$ mm

- Développement à petit k :

$\Longrightarrow \omega^2 \simeq c_0^2 k^2 \left[1 + (\frac{1}{2}\ell_c^2 - \frac{1}{3}H^2)k^2\right]$ $c_0 = \sqrt{gH}$ = vitesse des ondes de gravité

$\Longrightarrow$ Profondeur critique $H_c = \sqrt{3/2}\ell_c \Longrightarrow$ changement de signe du terme dispersif



Régime eau peu profonde en présence de dispersion

- Nous étudions dans le régime eau peu profonde ($H < H_\mathrm{c}$) l'écoulement autour d'un cylindre
- Relation de dispersion :

$$\omega^2(k) = c_0^2 \left[k^2 + \frac{1}{2}\xi^2 k^4 \right] \qquad \xi = \sqrt{\ell_\mathrm{c}^2 - \frac{2}{3}H^2}$$

$\Longrightarrow$ identique à ESNL

- Équations 2D d'un fluide *compressible* (sans viscosité) :

$$\partial_t \phi = \frac{1}{2}c^2\xi^2\Delta\rho - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + c^2(1-\rho) + \mathbf{v}\cdot\nabla\phi$$

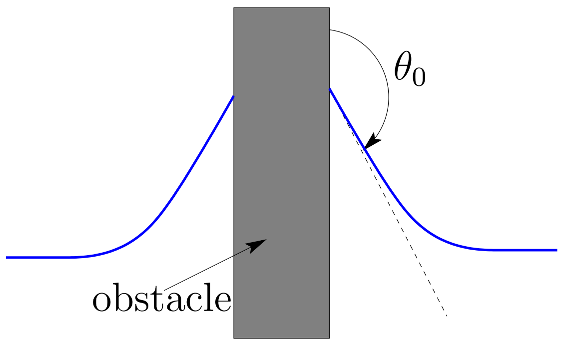
(ESNL : pression quantique $c^2\xi^2\dfrac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}$)

$$\partial_t \rho = -\rho\Delta\phi - \nabla\rho\cdot\nabla\phi + \mathbf{v}\cdot\nabla\rho$$

- Conditions aux limites sur l'obstacle :

$$\partial_r(\phi - \mathbf{v}\cdot\mathbf{r})|_{\partial\Omega} = 0 \qquad \text{(vitesse tangentielle)}$$

$$\partial_r \rho|_{\partial\Omega} = \operatorname{cotan}\theta_0 / H = \rho'_0 \qquad \text{(angle de contact)}$$



(*Remarque* : ESNL Neumann $\Longleftrightarrow$ $\rho'_0 = 0$)

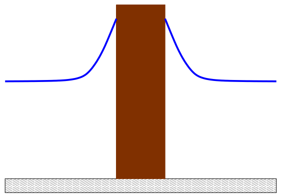
Superfluide	**Eau peu profonde**
ESNL non locale (rotons) [Pomeau & Rica, *PRL* 93]	$H > H_\mathrm{c}$ [Burghelea & Steinberg, *PRL* 2001]
ESNL	$H < H_\mathrm{c}$
Bifurcation nœud-col	**?**
Émission de vortex	**?**

Problème stationnaire

- Couche limite à faible Mach, dans la limite $\xi \to 0$:

Résultat équivalent à l'ESNL : effet de renormalisation de la taille du cylindre par rapport à un écoulement eulérien

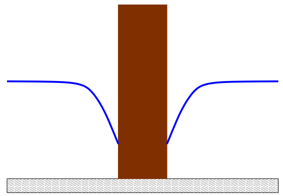
Obstacle hydrophile



$\rho_0' < 0, r_\mathrm{eff} < r_0$

$$r_\mathrm{eff}^2 = 1 + \rho_0' \xi^2$$

Obstacle hydrophobe



$\rho_0' > 0, r_\mathrm{eff} > r_0$

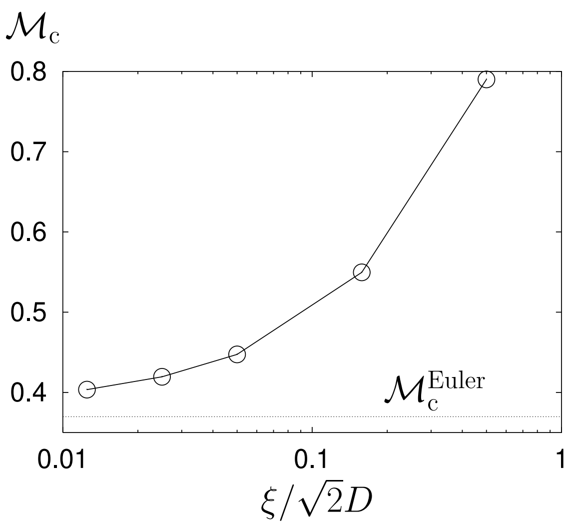
- Pour avoir toutes les solutions : calculs numériques de suivi de branche (même méthode que ESNL)

Remarque : ESNL, variable $\psi \quad \neq \quad$ eau peu profonde, variables (ρ, ϕ)

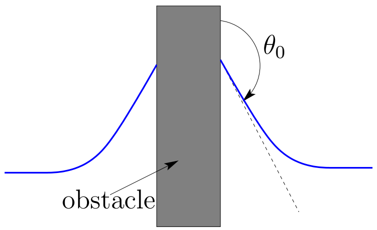
Résultats numériques

- Comme dans le cas du superfluide, on a une bifurcation nœud-col

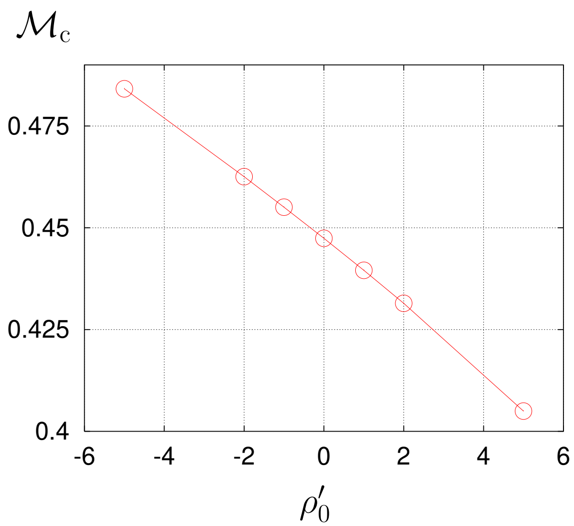
$(\rho_0' = 0)$



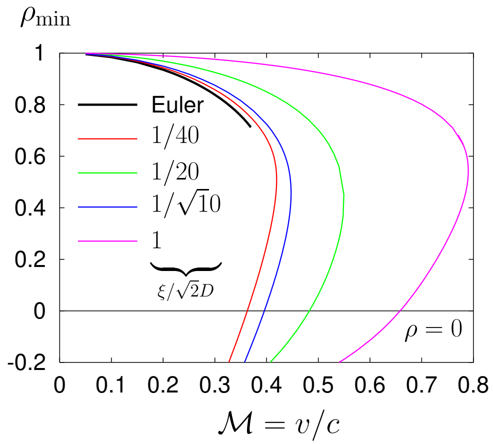
$\rho_0' = \mathrm{cotan}\,\theta_0/H$



$(\xi/\sqrt{2}D = 1/10)$



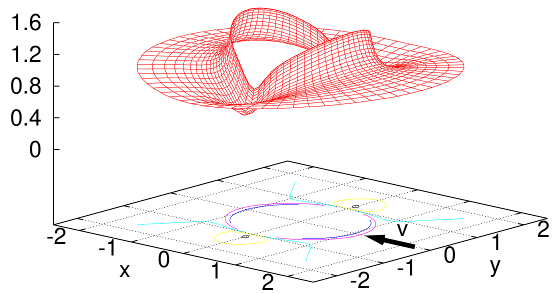
Solutions stationnaires

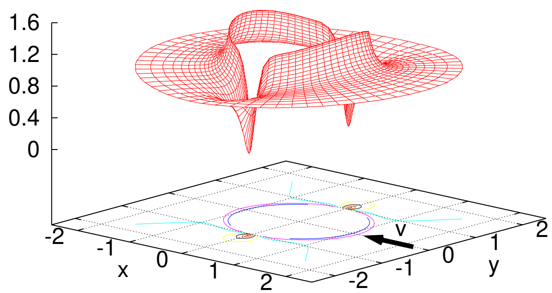


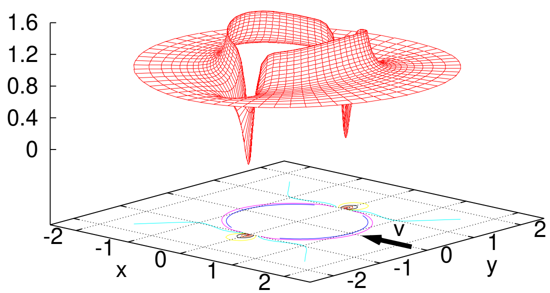
(conditions aux limites $\rho'_0 = 0$)

$\longrightarrow$ Les équations admettent des solutions stationnaires avec une hauteur de fluide négative, quel que soit l'angle de contact (solutions non physiques)

• Cas hydrophile : $\mathcal{M} = \mathcal{M}_c$ instable $\rho_{\min} > 0$ instable $\rho_{\min} < 0$

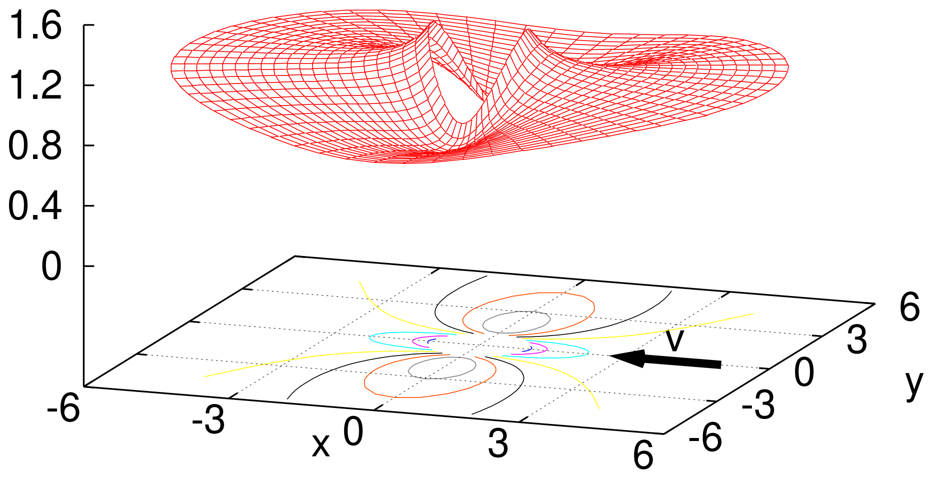




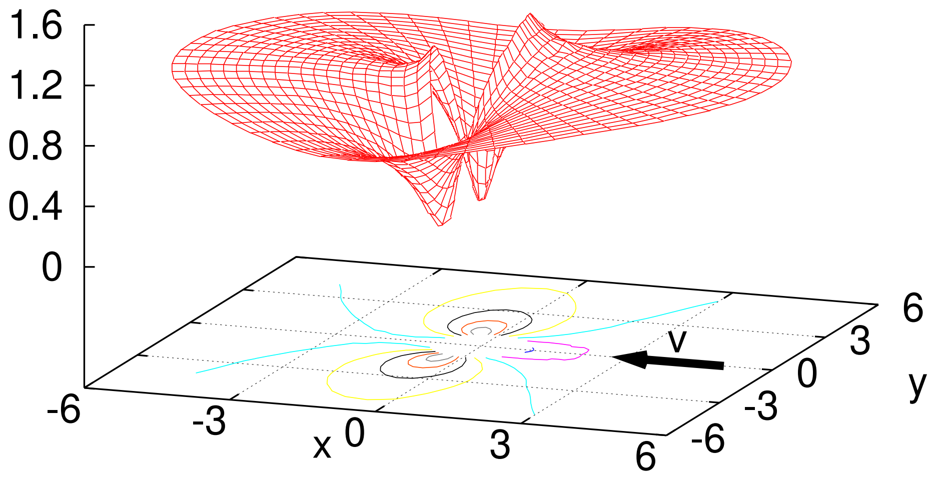


Singularité à temps fini de démouillage

(t_0)



(t_f)



Conclusion & perspectives

Problèmes unidimensionnels

- Transition à la dissipation
- Les lois d'échelle dépendant de la forme de la relation de dispersion

$\longrightarrow$ Reste a comprendre la différence des amortissements en l'absence de fréquence de coupure

Problèmes bidimensionnels

- **Superfluide :**
  - Calculs analytiques de couches limites
  - Bifurcation nœud-col pour les 2 conditions aux limites (auparavant impossible pour Neumann)
  - On a nucléation d'excitations de 2 natures possibles

- **Eau peu profonde :**
  - Bifurcation nœud-col = propriété robuste

  $\longrightarrow$ Expérience ?