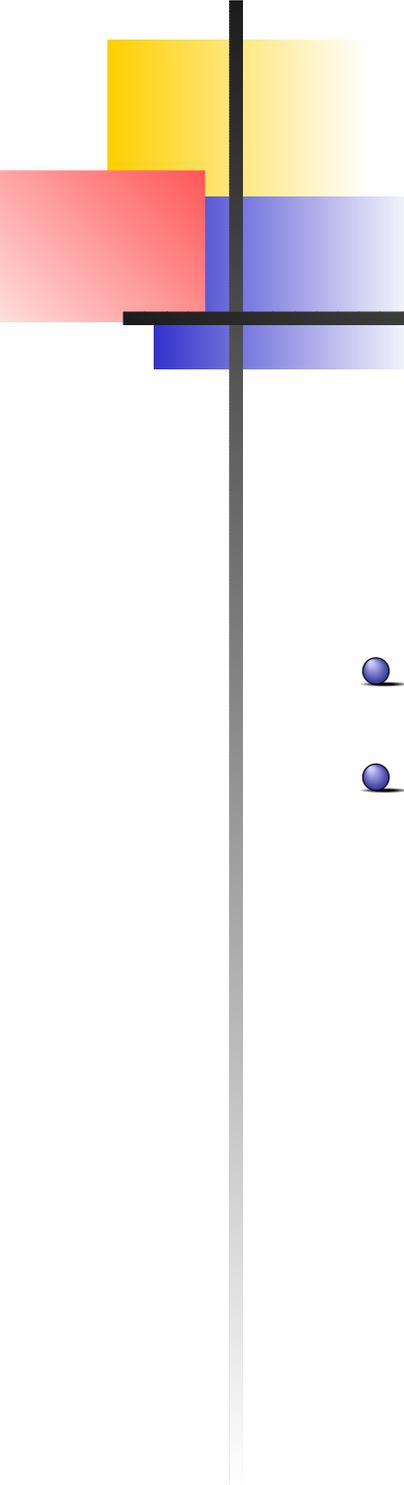


# **Stabilisation Globale de Systèmes Positifs Incertains Applications en Biologie**

Ludovic Mailleret

Université de Nice - COMORE / INRIA

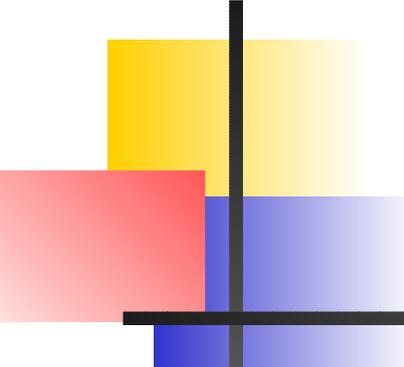


# La Modélisation en Biologie

Discipline encore jeune (début XX<sup>e</sup> siècle)

Confrontée à deux problèmes principaux :

- Phénomènes Biologiques ⇒ **Très Complexes**
- Phénomènes Biologiques ⇒ **Mal Mesurés**



# La Modélisation en Biologie

Discipline encore jeune (début XX<sup>e</sup> siècle)

Confrontée à deux problèmes principaux :

- Phénomènes Biologiques ⇒ **Très Complexes**
- Phénomènes Biologiques ⇒ **Mal Mesurés**

Modèles Biologiques  
**Mal Connus** et **Difficiles à Valider**

# La Modélisation en Biologie

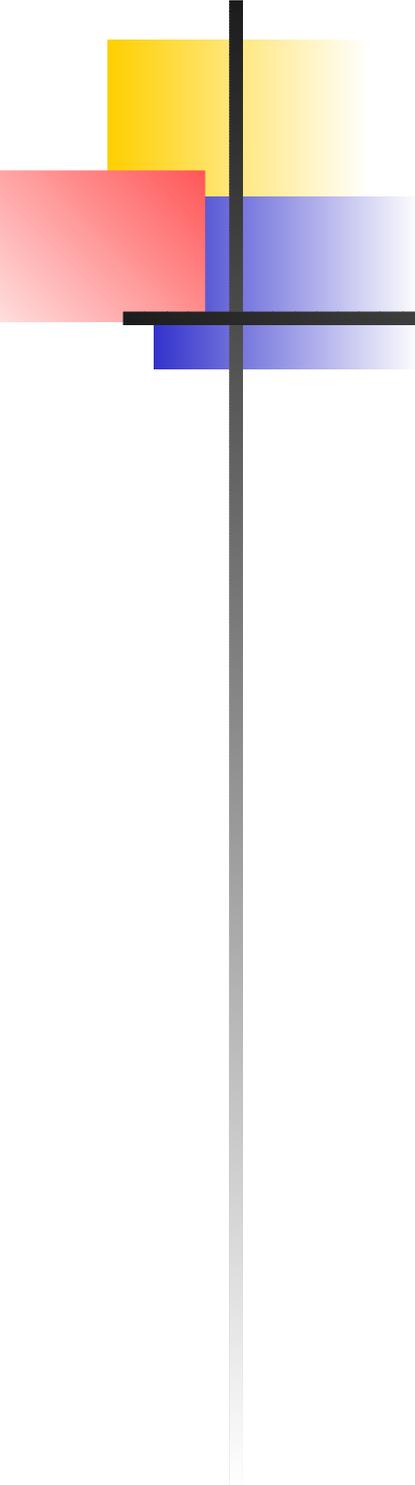
Modèles Biologiques  
**Mal Connus** et **Difficiles à Valider**



Modèles Biologiques  
doivent décrire des **Grandeurs Positives**

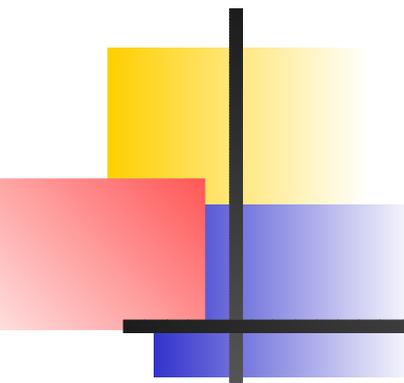


Malgré les incertitudes, garantir :  
Modèles Biologiques : **Positifs**



# Problématique

Comment Contrôler des Systèmes à la fois :  
**Incertains**  
et  
**Contraints à la Positivité**  
?



# Problématique

Comment Contrôler des Systèmes à la fois :

**Incertains**

et

**Contraints à la Positivité**

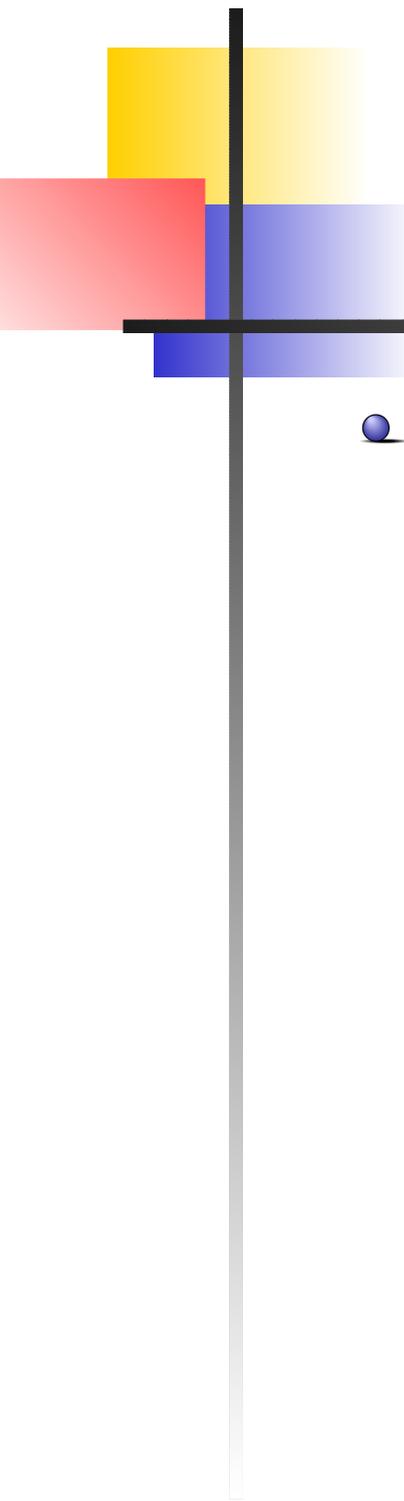
?

⇒ Par l'intermédiaire du Contrôle :

Exploiter les **propriétés qualitatives** des termes mal connus

↳ s'affranchir des incertitudes des modèles

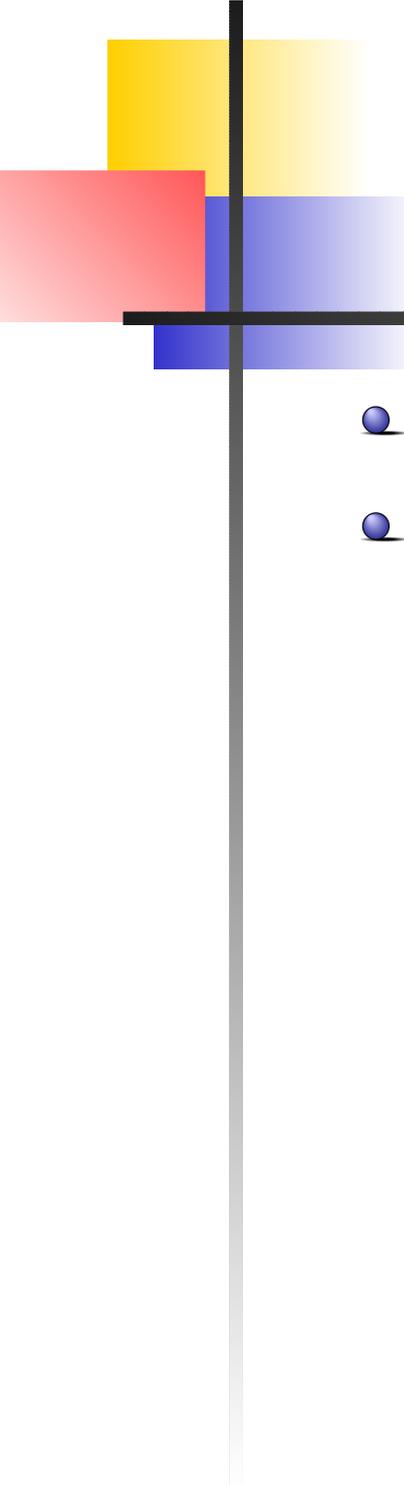
↳ garantir la stabilisation globale vers un équilibre choisi



# Plan de la Présentation

---

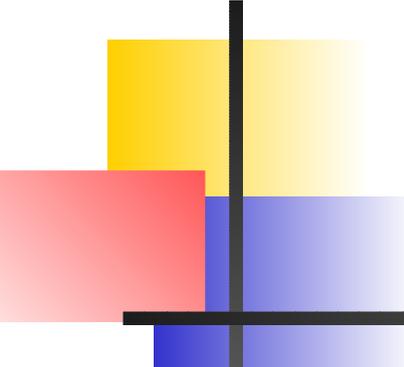
- Les Systèmes Dynamiques Positifs
  - Caractérisation
  - Cas des Systèmes Linéaires
  - Cas des Systèmes Non-Linéaires



# Plan de la Présentation

---

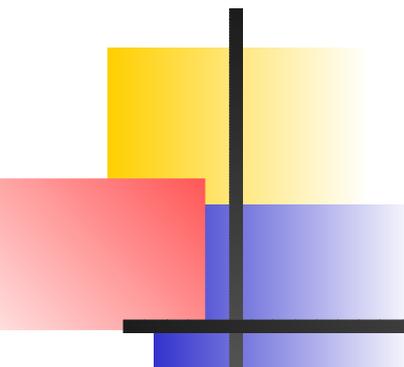
- Les Systèmes Dynamiques Positifs
- Une Classe Particulière de Systèmes Positifs
  - Modèle du Bioréacteur Mono-Espèce
  - Cas général



# Plan de la Présentation

---

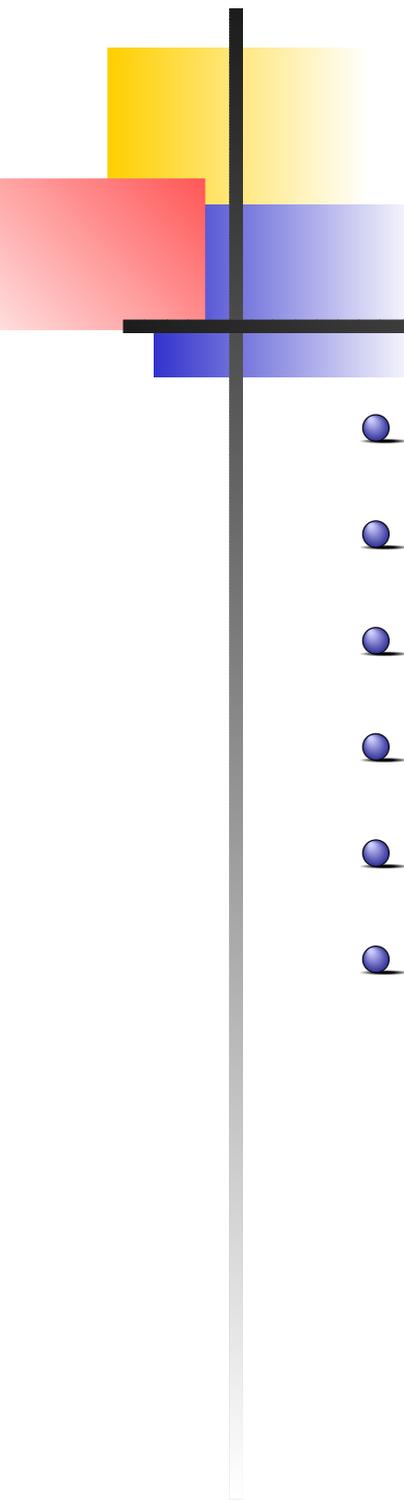
- Les Systèmes Dynamiques Positifs
- Une Classe Particulière de Systèmes Positifs
- Stabilisation Statique
  - Cas du Bioréacteur Mono-espèce
  - Cas Général
- Stabilisation Adaptative
  - Cas du Bioréacteur Mono-espèce
  - Cas Général



# Plan de la Présentation

---

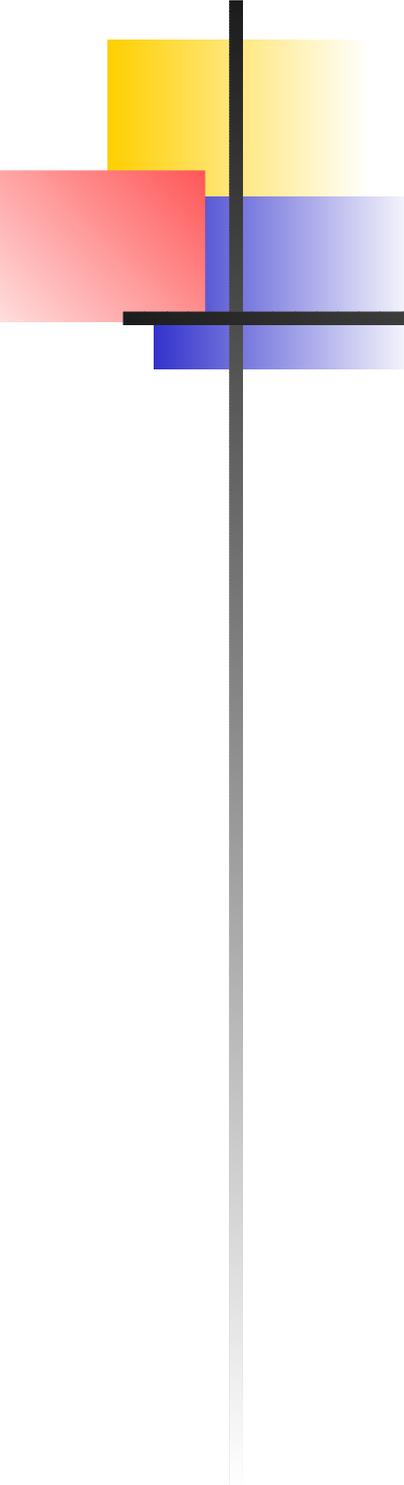
- Les Systèmes Dynamiques Positifs
- Une Classe Particulière de Systèmes Positifs
- Stabilisation Statique
- Stabilisation Adaptative
- Extension des Résultats
  - Principe
  - Cas des Bioréactions en Cascade
  - Validation : la Fermentation Anaérobie



# Plan de la Présentation

---

- Les Systèmes Dynamiques Positifs
- Une Classe Particulière de Systèmes Positifs
- Stabilisation Statique
- Stabilisation Adaptative
- Extension des Résultats
- Conclusion & Perspectives



# Les Systèmes Positifs

# Positivité des Vecteurs

- Positivité au sens classique dans  $\mathbb{R}^n$  :

$$x \geq 0 \Leftrightarrow \forall i, x_i \geq 0$$

- Orthant positif  $\mathbb{R}_+^n$  :

$$\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0\}$$

- Forte Positivité dans  $\mathbb{R}^n$  :

$$x \gg 0 \Leftrightarrow \forall i, x_i > 0$$

- Orthant fortement positif  $\mathbb{R}_{+*}^n$  :

$$\mathbb{R}_{+*}^n = \{x \in \mathbb{R}^n, x \gg 0\}$$

# Positivité d'un Système Dynamique

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t=0) = x_0 \end{cases}$$

Positivité au sens classique :

•  $\Sigma$  est un Système **Positif**

$\Leftrightarrow$

$$x_0 \geq 0 \Rightarrow \forall t \geq 0, x(t, x_0) \geq 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\forall x \geq 0, x_i = 0 \Rightarrow \dot{x}_i \geq 0$$

# Positivité d'un Système Dynamique

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t=0) = x_0 \end{cases}$$

Ma démarche requiert une *nouvelle propriété*

•  $\Sigma$  est un Système **Fortement Positif**

$\Leftrightarrow$

$$x_0 \geq 0 \Rightarrow \forall t > 0, x(t, x_0) \gg 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\forall x \geq 0, x_i = 0 \Rightarrow \dot{x}_i > 0$$

# Les Systèmes Linéaires Positifs

$$\Sigma : \dot{x} = Ax + b$$

$\Sigma$  est un système **positif**  $\Leftrightarrow \forall i, \dot{x}_i(x_i = 0) \geq 0$

Donc :

$$\forall i, a_{i,i} \times 0 + \sum_{j \neq i} a_{i,j} x_j + b_i \geq 0$$

- $b \geq 0$

- $A$  est Metzler : 
$$\begin{pmatrix} ? & & \geq 0 \\ & \ddots & \\ \geq 0 & & ? \end{pmatrix}$$

# Les Systèmes Linéaires Positifs

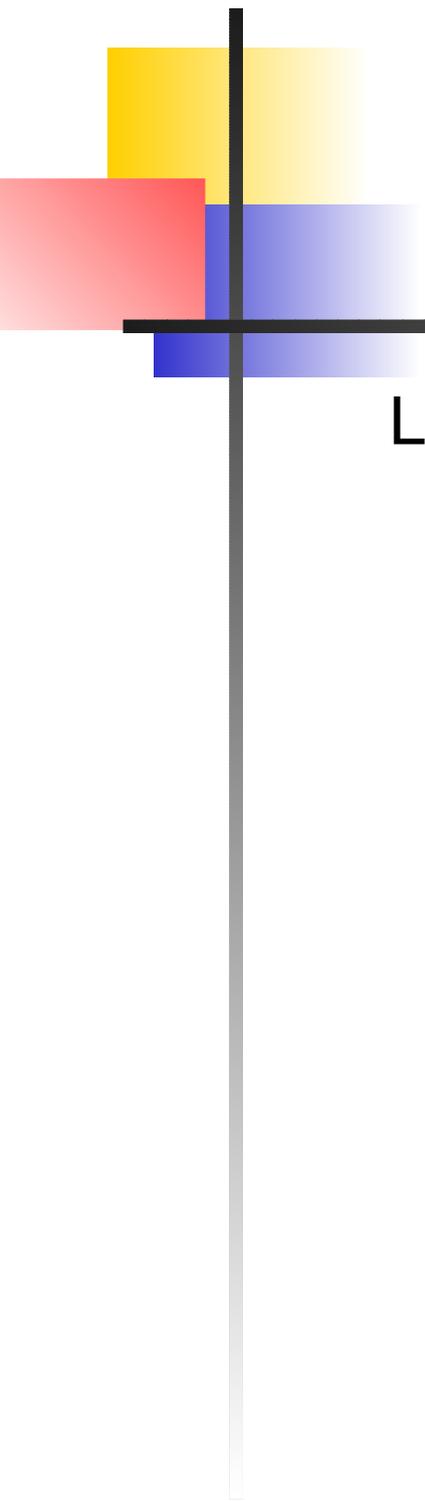
$$\Sigma : \dot{x} = Ax + b$$

$\Sigma$  est un système **fortement positif**  $\Leftrightarrow \forall i, \dot{x}_i(x_i = 0) > 0$

Donc :

- $b \gg 0$

- $A$  est Metzler : 
$$\begin{pmatrix} ? & & \geq 0 \\ & \ddots & \\ \geq 0 & & ? \end{pmatrix}$$



# Les Systèmes Linéaires Positifs

Lien entre **existence** et **stabilité** d'un équilibre positif  $x^*$

$$\Sigma : \dot{x} = Ax + b$$

# Les Systèmes Linéaires Positifs

Lien entre **existence** et **stabilité** d'un équilibre positif  $x^*$

$$\Sigma : \dot{x} = Ax + b$$

- Théorème : [Luenberger,1979] Si  $\Sigma$  est **positif** :

$$A \text{ stable} \Rightarrow \exists x^* \geq 0$$

- Théorème : Si  $\Sigma$  est **fortement positif** :

$$A \text{ stable} \Leftrightarrow \exists x^* \gg 0$$

# Les Systèmes Linéaires Positifs

Lien entre **existence** et **stabilité** d'un équilibre positif  $x^*$

$$\Sigma : \dot{x} = Ax + b$$

- Théorème : [Luenberger, 1979] Si  $\Sigma$  est **positif** :

$$A \text{ stable} \Rightarrow \exists x^* \geq 0$$

- Théorème : Si  $\Sigma$  est **fortement positif** :

$$A \text{ stable} \Leftrightarrow \exists x^* \gg 0$$

Contrairement aux systèmes linéaires classiques  
positivité  $\Rightarrow$  lien : **existence** et **stabilité**  
d'un équilibre "acceptable"

# Les Systèmes Non-Linéaires Positifs

Systèmes **linéaires** positifs : **peu de liberté** sur les comportements dynamiques

e.g.  $\exists x^* \gg 0 \Leftrightarrow x^*$  GAS, pas d'oscillations entretenues *etc...*

↳ Modèles **Non-Linéaires** positifs plus fréquents en Biologie où les dynamiques à reproduire sont souvent complexes

# Les Systèmes Non-Linéaires Positifs

Systèmes **linéaires** positifs : **peu de liberté** sur les comportements dynamiques

e.g.  $\exists x^* \gg 0 \Leftrightarrow x^*$  GAS, pas d'oscillations entretenues *etc...*

↳ Modèles **Non-Linéaires** positifs plus fréquents en Biologie où les dynamiques à reproduire sont souvent complexes

 Pas de Résultats Génériques

↳ Nécessité de se limiter à des classes particulières

- Systèmes de Kolmogorov (généralisation de Lotka-Volterra)
- Systèmes Coopératifs (généralisation du cas linéaire)

# Les Systèmes de Kolmogorov

Systèmes Positifs par construction :

$$\forall i, \dot{x}_i = x_i f_i(x) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_i(x_i = 0) = 0$$

⚠ systèmes positifs, jamais fortement positifs (0 équilibre)

# Les Systèmes de Kolmogorov

Systèmes Positifs par construction :

$$\forall i, \dot{x}_i = x_i f_i(x) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_i(x_i = 0) = 0$$

⚠ systèmes positifs, jamais fortement positifs (0 équilibre)

Cas Général des Systèmes de Lotka - Volterra où:

$$f(x) = Ax + b$$

# Les Systèmes de Kolmogorov

Systèmes Positifs par construction :

$$\forall i, \dot{x}_i = x_i f_i(x) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_i(x_i = 0) = 0$$

⚠ systèmes positifs, jamais fortement positifs (0 équilibre)

Cas Général des Systèmes de Lotka - Volterra où:

$$f(x) = Ax + b$$

↪ Grande variété de comportements dynamiques :

$x^*$  GAS sur  $\mathbb{R}_{+*}^n$ , comportement cyclique, cycle limite, chaos *etc...*

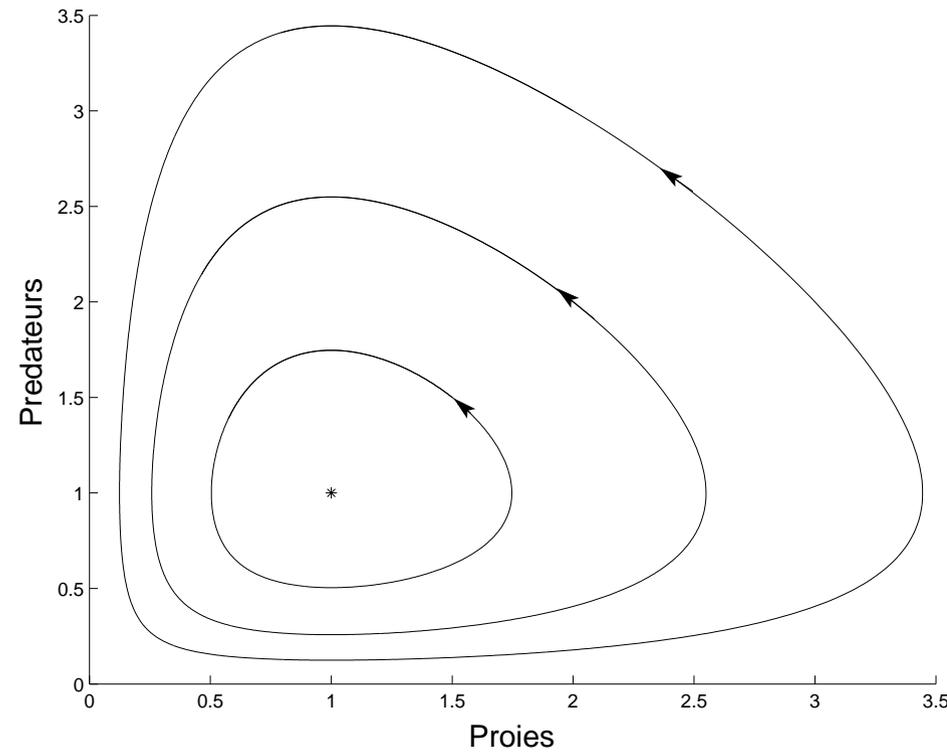
# Les Systèmes de Kolmogorov

## Exemples en Écologie Théorique

1 Proie  $x$ , 1 Prédateur  $y$   
(Lotka - Volterra) :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - y) \\ \dot{y} = y(x - 1) \end{cases}$$

Comportement Cyclique



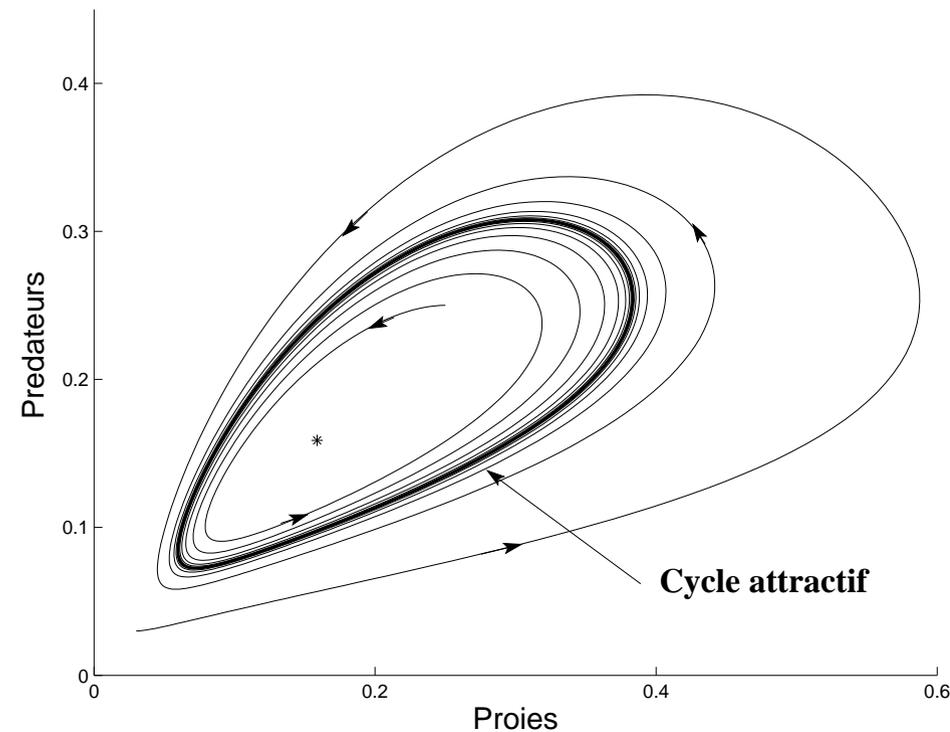
# Les Systèmes de Kolmogorov

## Exemples en Écologie Théorique

1 Proie  $x$ , 1 Prédateur  $y$   
(Kolmogorov) :

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(1 - x - \frac{y}{x+a}\right) \\ \dot{y} = y\left(b - \frac{by}{x}\right) \end{cases}$$

Cycle Limite Attractif



# Les Systèmes de Kolmogorov

## Exemples en Écologie Théorique

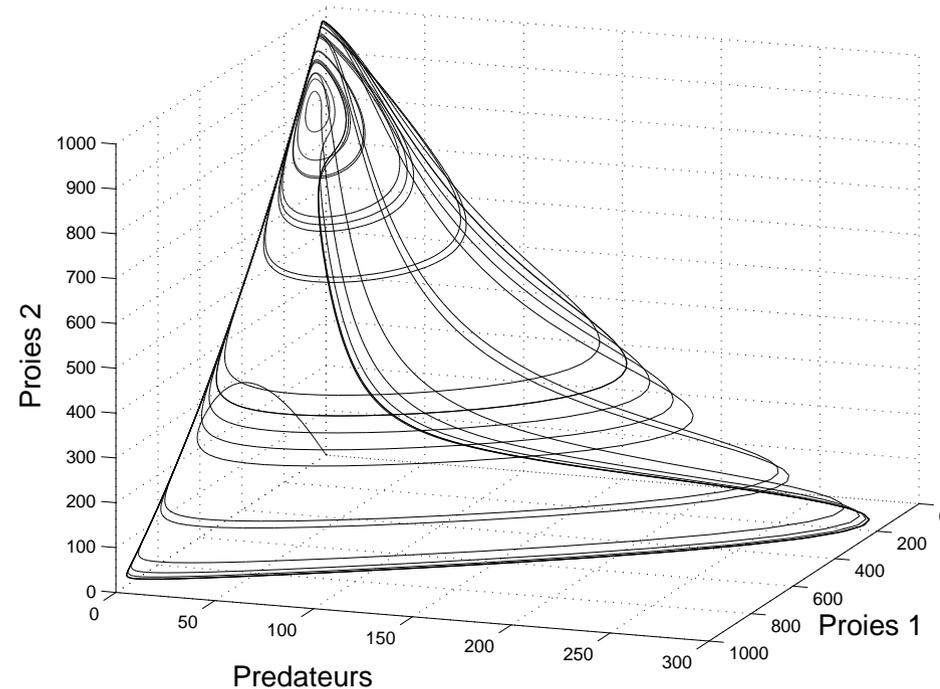
2 Proies  $x$  et  $y$   
(en compétition)

1 Prédateur  $z$

(Gilpin, de type L - V) :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(r_x - a_{xx}x) - a_{xy}y - a_{xz}z \\ \dot{y} = y(r_y - a_{yy}y) - a_{yx}x - a_{yz}z \\ \dot{z} = z(-r_z + a_{zx}x + a_{zy}y) \end{cases}$$

Spirale Chaotique



# Les Systèmes Coopératifs Positifs

$\Sigma : \dot{x} = f(x)$      $\Sigma$  est coopératif

(Kamke, 1932; Hale, 1980; Hirsh, 1982; Smith, 1986)



La Jacobienne  $Df(x)$  est Metzler pour tout  $x$

# Les Systèmes Coopératifs Positifs

$\Sigma : \dot{x} = f(x) \quad \Sigma \text{ est coopératif}$   
 (Kamke, 1932; Hale, 1980; Hirsh, 1982; Smith, 1986)



La Jacobienne  $Df(x)$  est Metzler pour tout  $x$

$\Sigma$  est coopératif **positif**



$\Sigma$  est coopératif et  $f(0) \geq 0$

Car :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(x_i = 0) &= f_i(0) + \left[ \int_0^1 Df_i(sx_{|x_i=0}) ds \right] x_{|x_i=0} \\ &= f_i(0) + \underbrace{\sum_{i \neq j} \left[ \int_0^1 Df_{i,j}(sx_{|x_i=0}) ds \right]}_{\geq 0} x_j|_{x_i=0} \end{aligned}$$

# Les Systèmes Coopératifs Positifs

$\Sigma : \dot{x} = f(x)$      $\Sigma$  est coopératif

(Kamke, 1932; Hale, 1980; Hirsh, 1982; Smith, 1986)



La Jacobienne  $Df(x)$  est Metzler pour tout  $x$

$\Sigma$  est coopératif **positif**



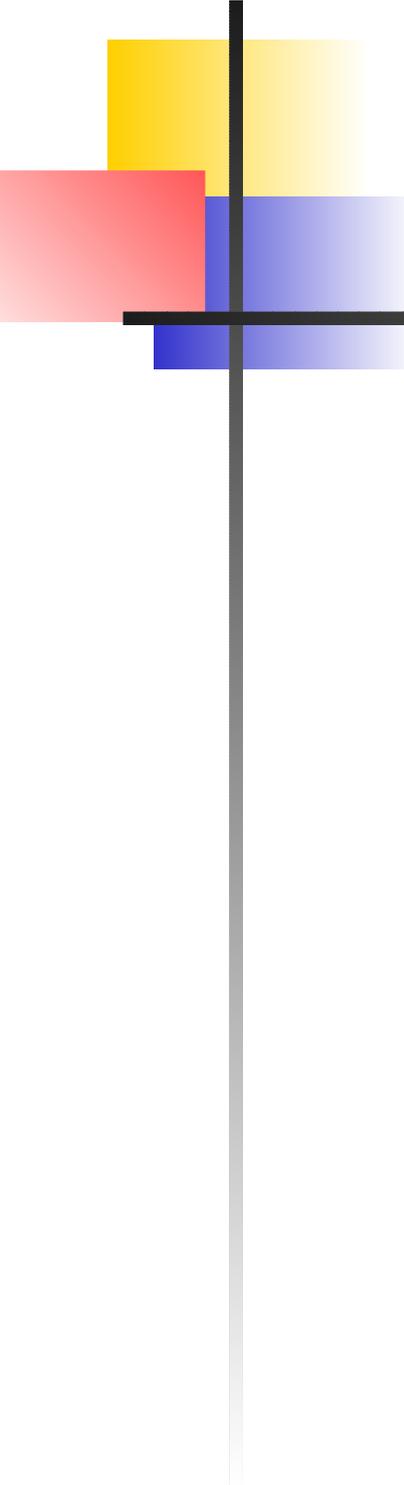
$\Sigma$  est coopératif et  $f(0) \geq 0$

De la même façon :

$\Sigma$  est coopératif **fortement positif**



$\Sigma$  est coopératif et  $f(0) \gg 0$



# Les Systèmes Coopératifs Positifs

Systemes linéaires positifs :  
cas particuliers des systèmes coopératifs positifs  
(  $Df(x) = A$ , Metzler )

# Les Systèmes Coopératifs Positifs

Systèmes linéaires positifs :  
cas particuliers des systèmes coopératifs positifs  
(  $Df(x) = A$ , Metzler )

Résultat similaire pour  $\Sigma$  coopératifs fortement positifs :

• **Théorème** :  $\Sigma$  coopératif fortement positif. Si  $Df(x) \searrow$  alors :

$$\exists x^* \gg 0 \Rightarrow x^* \text{ GAS sur } \mathbb{R}_+^n$$

# Les Systèmes Coopératifs Positifs

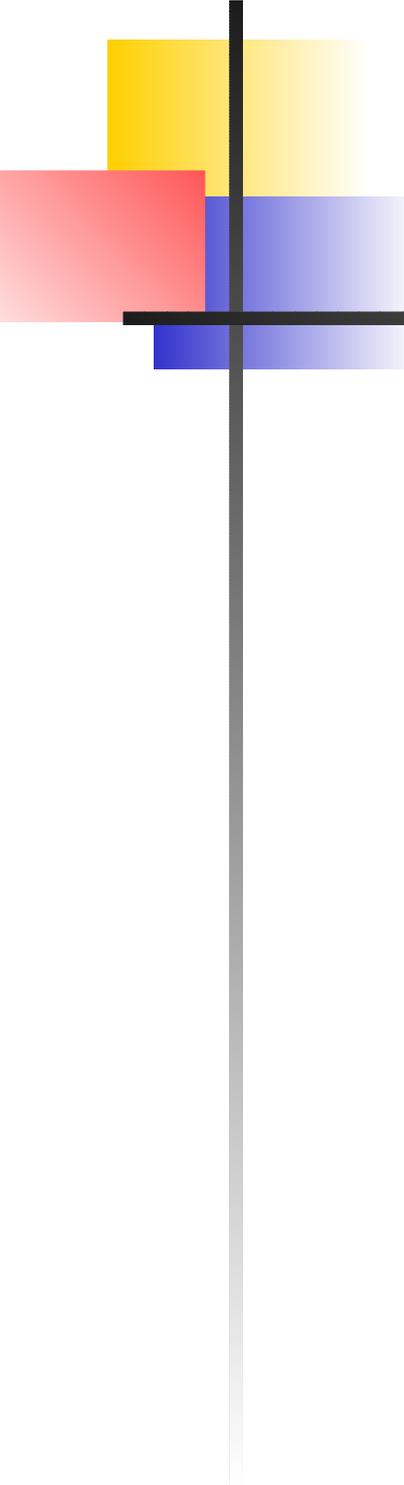
Systemes linéaires positifs :  
cas particuliers des systèmes coopératifs positifs  
(  $Df(x) = A$ , Metzler )

Résultat similaire pour  $\Sigma$  coopératifs fortement positifs :

● **Théorème** :  $\Sigma$  coopératif fortement positif. Si  $Df(x) \searrow$  alors :

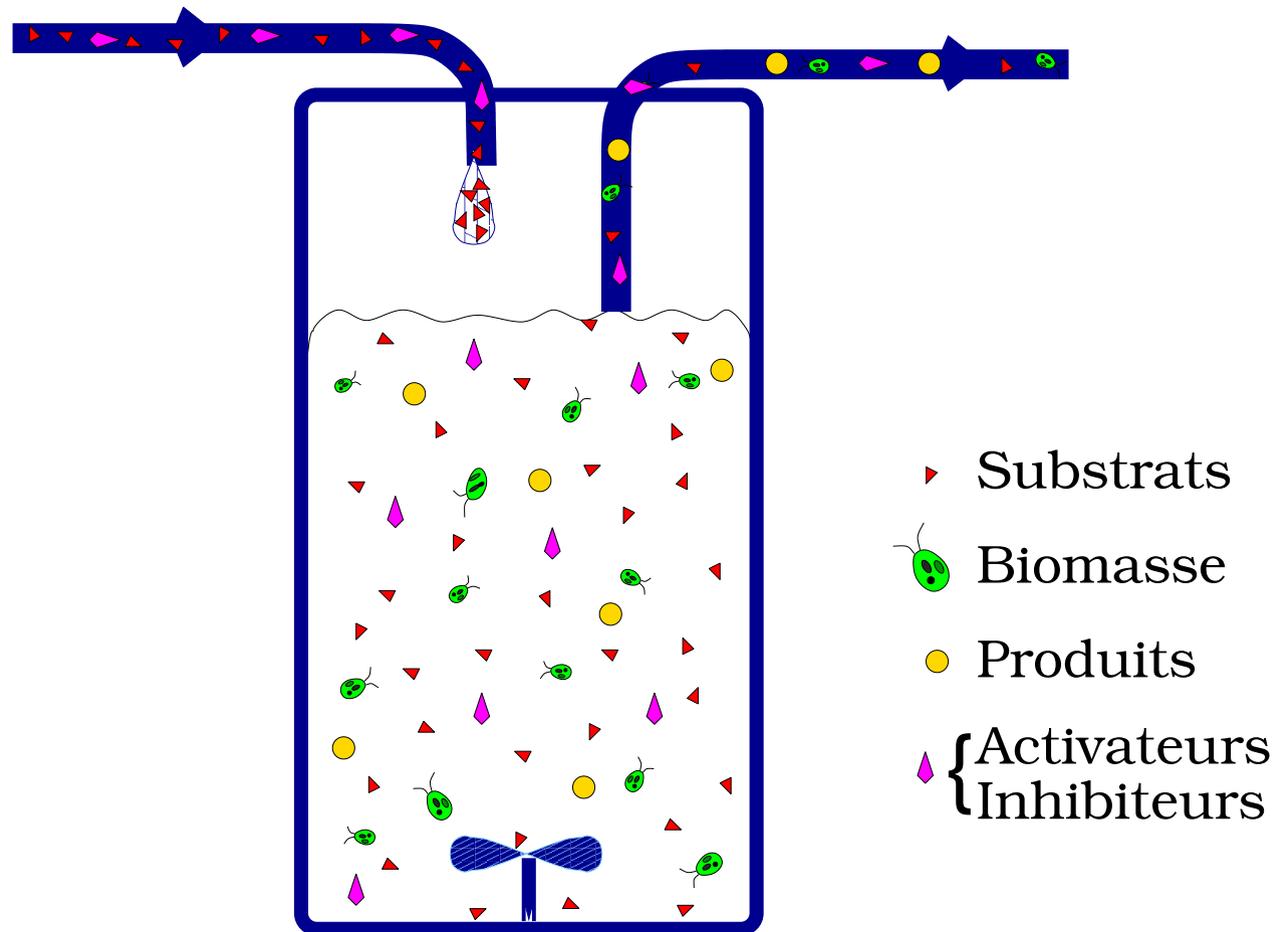
$$\exists x^* \gg 0 \Rightarrow x^* \text{ GAS sur } \mathbb{R}_+^n$$

À nouveau, contrainte de Positivité  
 $\Rightarrow$  lien existence équilibre “acceptable” et GAS



# **Une Classe Particulière de Systèmes Non-Linéaires Positifs**

# Les Bioréacteurs



# Les Bioréacteurs



Chemostats

LOV, Villefranche sur Mer

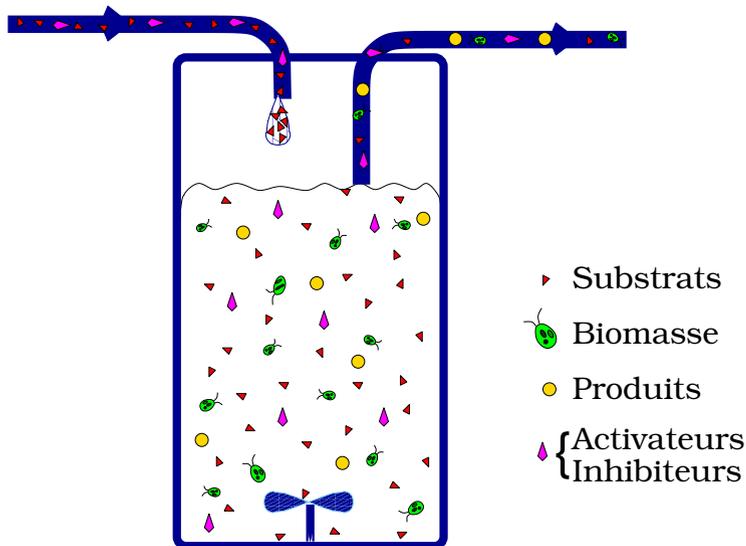


Fermenteur Anaérobie

LBE, Narbonne

Différents types d'installations

# Fonctionnement des Bioréacteurs Mono - Espèce

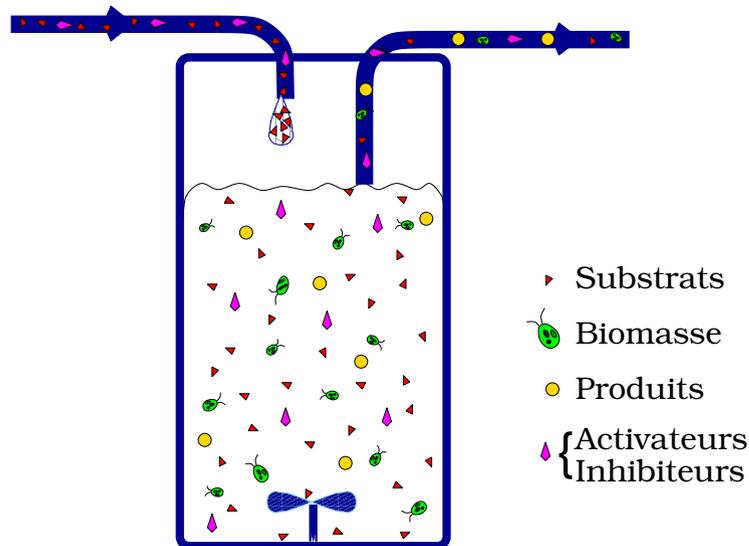


Mode de fonctionnement  
“Continu” :  
Flux entrant = Flux Sortant

Dilution (**commande**) :

$$u = \frac{\text{Flux}}{\text{Volume}} \geq 0$$

# Fonctionnement des Bioréacteurs Mono - Espèce



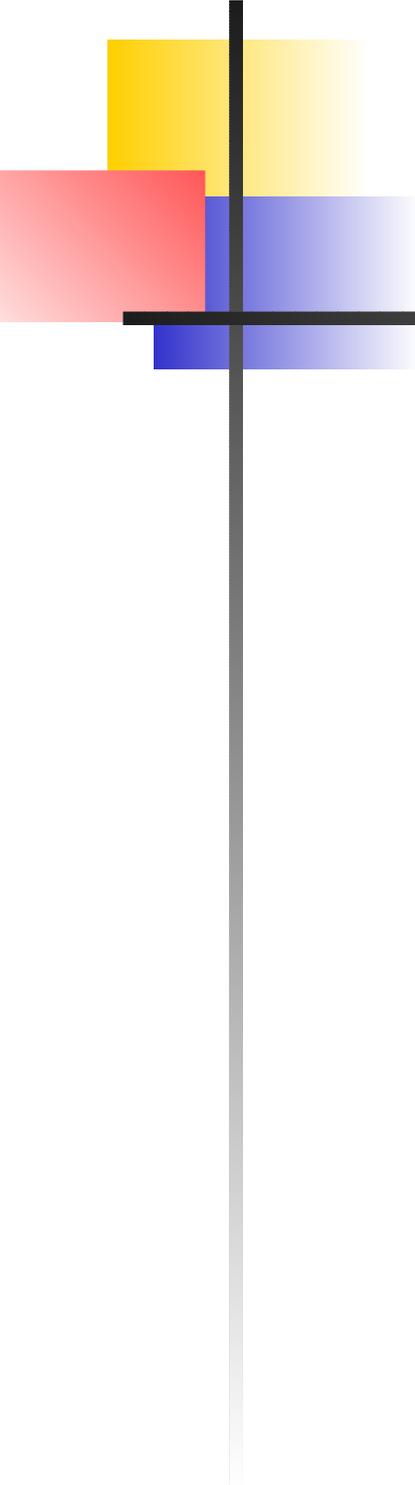
Mode de fonctionnement  
“Continu” :  
Flux entrant = Flux Sortant

Dilution (**commande**) :

$$u = \frac{\text{Flux}}{\text{Volume}} \geq 0$$

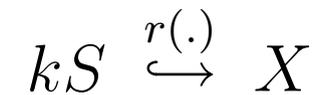
Modèle basé Bilans de Masses (deux types d'échanges):

- Echanges Biologiques (croissance, ingestion *etc...*)
- Echanges Physiques (Flux)



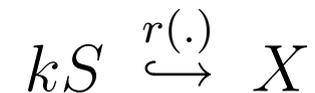
# Modèle des Bioréacteurs Mono - Espèce

“Bioréaction” se produisant à la vitesse  $r(\cdot)$  :



# Modèle des Bioréacteurs Mono - Espèce

“Bioréaction” se produisant à la vitesse  $r(\cdot)$  :

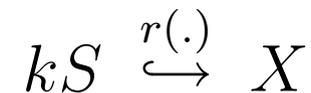


• Modèle décrivant les concentrations :

$$\begin{cases} \dot{s} = u(s_{in} - s) & \left| \begin{array}{l} -kr(\cdot) \\ +r(\cdot) \end{array} \right. \\ \dot{x} = -ux \end{cases}$$

# Modèle des Bioréacteurs Mono - Espèce

“Bioréaction” se produisant à la vitesse  $r(.)$  :



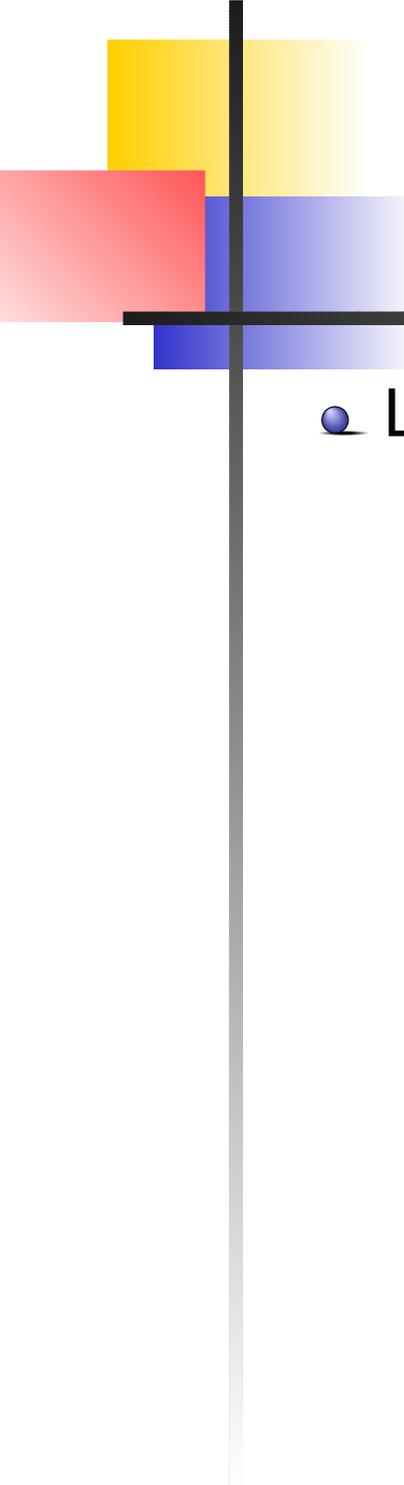
• Modèle décrivant les concentrations :

$$\begin{cases} \dot{s} = u(s_{in} - s) & \left| \begin{array}{l} -kr(.) \\ +r(.) \end{array} \right. \\ \dot{x} = -ux \end{cases}$$

⚠  $r(.)$  représente la partie Biologique ⚠

↪ dépend de nombreux facteurs

↪ très difficile à modéliser (incertitude...)



## Modélisation de $r(\cdot)$

- La Bioréaction se produit en sens unique

$$\Rightarrow r(\cdot) \geq 0$$

# Modélisation de $r(\cdot)$

- La Bioréaction se produit en sens unique

$$\Rightarrow r(\cdot) \geq 0$$

- La Bioréaction a lieu si la biomasse peut se nourrir

$$\Rightarrow \forall s, x > 0, r(\cdot) > 0$$

# Modélisation de $r(\cdot)$

- La Bioréaction se produit en sens unique

$$\Rightarrow r(\cdot) \geq 0$$

- La Bioréaction a lieu si la biomasse peut se nourrir

$$\Rightarrow \forall s, x > 0, r(\cdot) > 0$$

- Le Modèle **doit** être Positif,  $\forall u \geq 0$

$$\Rightarrow r(s = 0, \dots) = 0$$

Pas d'Hypothèses Supplémentaires

# Points Clefs du Modèle de Bioréacteur

- Modèle du bioréacteur mono-espèce avec  $\xi = (s, x)^T$

$$\dot{\xi} = u \left[ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} s_{in} \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} -k \\ 1 \end{pmatrix} r(.)$$

# Points Clefs du Modèle de Bioréacteur

- Modèle du bioréacteur mono-espèce avec  $\xi = (s, x)^T$

$$\dot{\xi} = \underbrace{u}_{\geq 0} \left[ \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} s_{in} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Système Positif Globalement Stable}} \right] + \begin{pmatrix} -k \\ 1 \end{pmatrix} \underbrace{r(\cdot)}_{> 0}$$

si  $\xi \gg 0$

# Points Clefs du Modèle de Bioréacteur

- Modèle du bioréacteur mono-espèce avec  $\xi = (s, x)^T$

$$\dot{\xi} = \underbrace{u}_{\geq 0} \left[ \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} s_{in} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Système Positif Globalement Stable}} \right] + \begin{pmatrix} -k \\ 1 \end{pmatrix} \underbrace{r(\cdot)}_{> 0}$$

si  $\xi \gg 0$

- De plus :

$$\forall \beta > \frac{k}{s_{in}}, \quad \beta \begin{pmatrix} s_{in} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -k \\ 1 \end{pmatrix} \gg 0$$

# Classe Générale de Systèmes

- Généralisation du modèle de Bioréacteur :

$$\dot{x} = \underbrace{u}_{\geq 0} \underbrace{f(x)}_{\text{Système Positif GAS}} + c \underbrace{\psi(.)}_{> 0}$$

si  $x \gg 0$

# Classe Générale de Systèmes

- Généralisation du modèle de Bioréacteur :

$$\dot{x} = \underbrace{u}_{\geq 0} \underbrace{f(x)}_{\text{Système Positif GAS}} + c \underbrace{\psi(.)}_{> 0}$$

si  $x \gg 0$

- Avec :

- $f(x)$  coopératif,  $f(0) \geq 0$  ( $\Rightarrow$  positif)

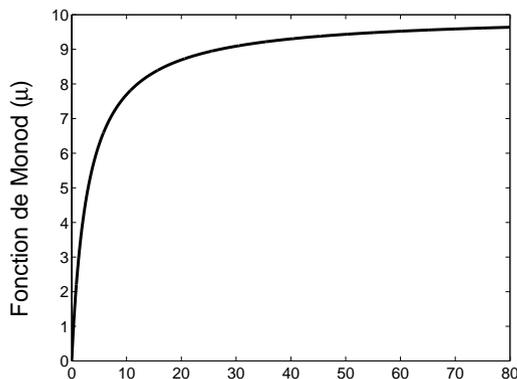
- $Df(x) \searrow$  ( $\Rightarrow$  globale stabilité)

- $\exists \beta_m > 0, \forall \beta > \beta_m, \beta f(0) + c \gg 0$

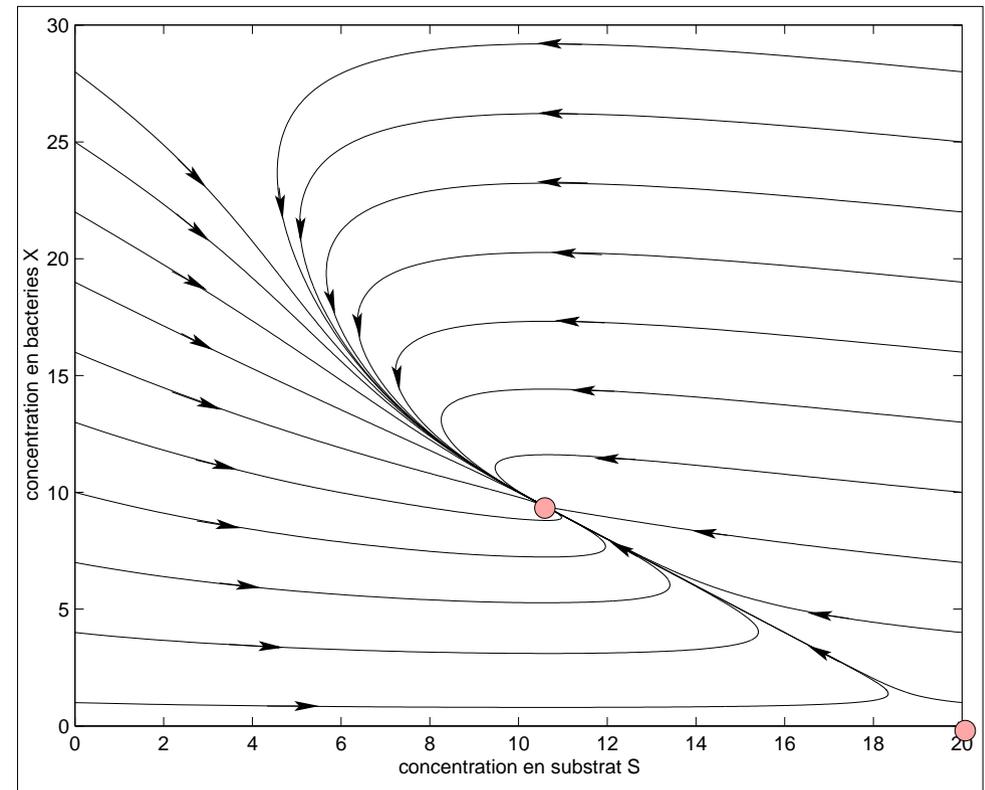
- Pas d'hypothèse Supplémentaire sur  $\psi(.)$

# Exemples de Dynamiques en Boucle Ouverte

- Cas du Bioréacteur :  $r(.) = \mu(s)x$  avec  $\mu(.)$  de “Monod”



$\mu(.)$  de “Monod”

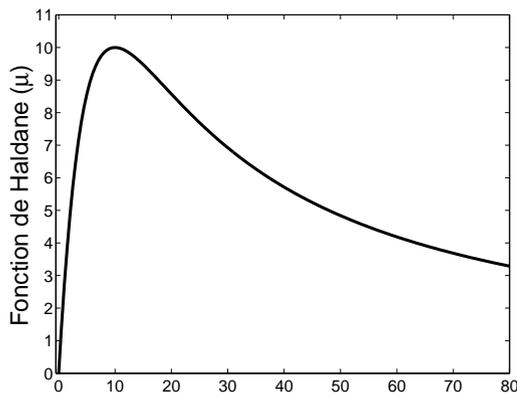


Comportement Généré

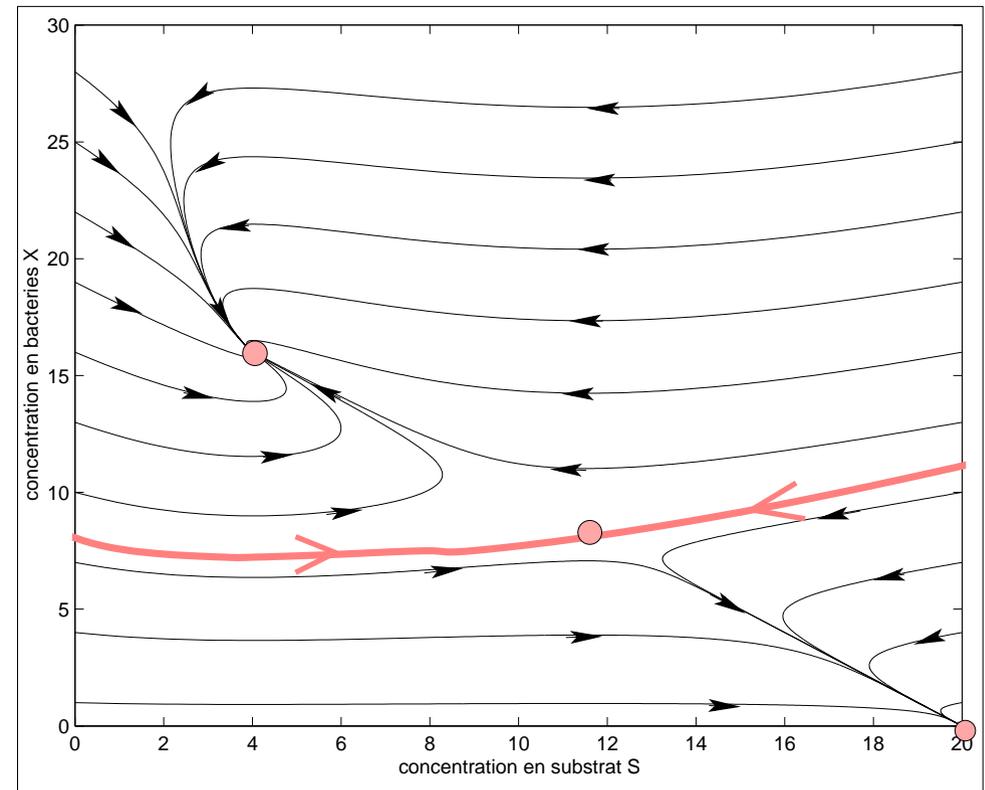
$\Rightarrow$  GAS sur  $\mathbb{R}_{+*}^n$

# Exemples de Dynamiques en Boucle Ouverte

- Cas du Bioréacteur :  $r(.) = \mu(s)x$  avec  $\mu(.)$  de “Haldane”



$\mu(.)$  de “Haldane”

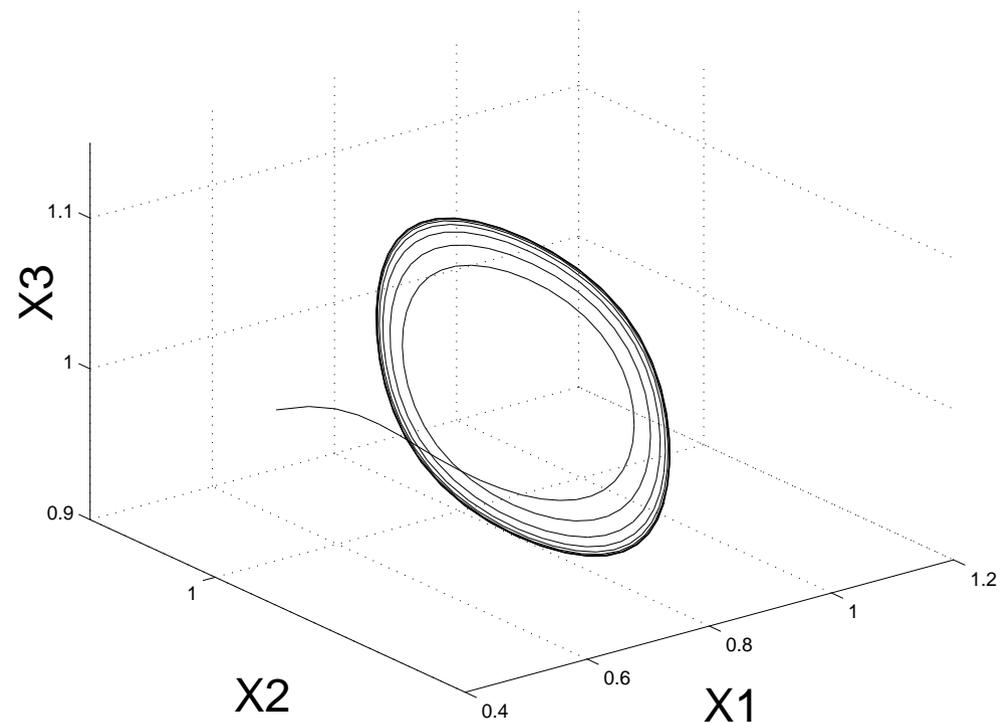


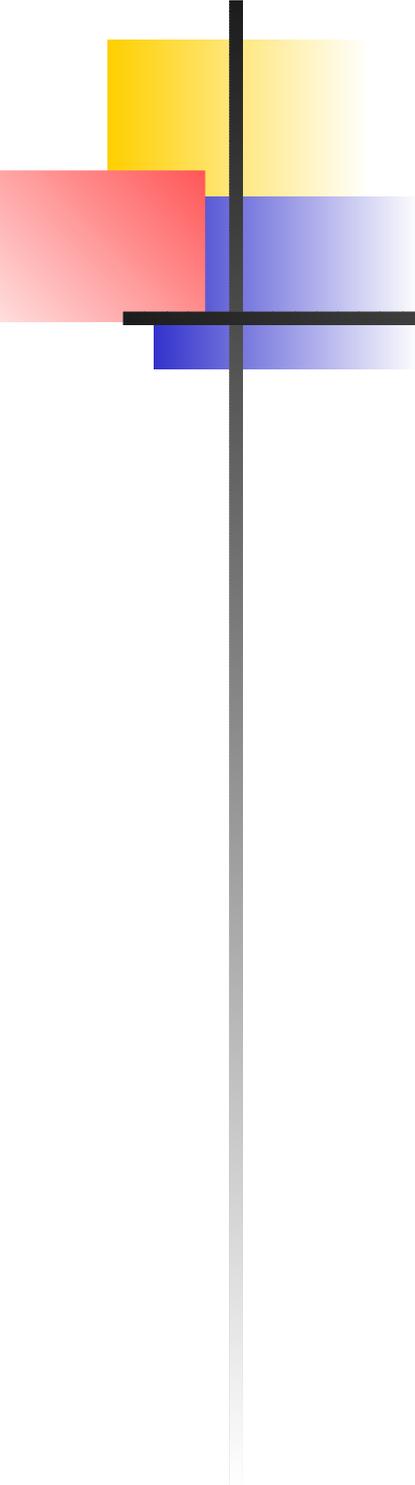
Comportement Généré  
⇒ Multi - Stabilité

# Exemples de Dynamiques en Boucle Ouverte

$$\dot{x} = u \left[ \begin{pmatrix} -0.625 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{1 + x_3^{30}}$$

Comportement  
Généré :  
Cycle Limite





# Stabilisation Statique

# Objectif

Sur la base d'un modèle **incertain** de type :

$$\dot{x} = u f(x) + c \psi(\cdot)$$

Où :

- $f(x)$  est bien connue
- $\psi(\cdot)$  est connu **qualitativement** ( $x \gg 0 \Rightarrow \psi(x) > 0$ )

Concevoir un contrôleur assurant :

**Stabilisation Globale** sur  $\mathbb{R}_{+*}^n$

vers un équilibre  $x^* \gg 0$  réglable

- **Idée** : mesurer  $y = \psi(\cdot)$  et l'utiliser pour le contrôle

# Contrôle Statique

• **Théorème** : *Considérons le Système Positif :*

$$\begin{cases} \dot{x} = u f(x) + c\psi(.) \\ y = \psi(.) \end{cases}$$

*Alors,  $\forall \gamma > \beta_m$ , le contrôle :*

$$u(.) = \gamma y = \gamma \psi(.) \quad (\geq 0)$$

*Stabilise Globalement sur  $\mathbb{R}_{+*}^n$  le Système vers l'unique équilibre  $x^* \gg 0$  tel que :*

$$f(x^*) = \frac{-1}{\gamma} c$$

*$x^*$  est réglable par l'intermédiaire du choix de  $\gamma$*

# Idée de Preuve :

## Cas du Modèle de Bioréacteur

• Preuve : modèle du bioréacteur en boucle fermée :

$$\begin{cases} \dot{s} = \gamma r(.) (s_{in} - s) - kr(.) \\ \dot{x} = r(.) - \gamma r(.) x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{s} = \gamma r(.) (s^* - s) \\ \dot{x} = \gamma r(.) (x^* - x) \end{cases}$$

avec :  $\xi^* = (s^*, x^*)^T = \left( s_{in} - \frac{k}{\gamma}, \frac{1}{\gamma} \right)^T$

# Idée de Preuve :

## Cas du Modèle de Bioréacteur

• Preuve : modèle du bioréacteur en boucle fermée :

$$\begin{cases} \dot{s} = \gamma r(.) (s_{in} - s) - kr(.) \\ \dot{x} = r(.) - \gamma r(.) x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{s} = \gamma r(.) (s^* - s) \\ \dot{x} = \gamma r(.) (x^* - x) \end{cases}$$

avec :  $\xi^* = (s^*, x^*)^T = \left( s_{in} - \frac{k}{\gamma}, \frac{1}{\gamma} \right)^T$

•  $\mathbb{R}_+^2$  positivement invariant  $\Rightarrow \forall t \geq 0, r(.) \geq 0$

# Idée de Preuve :

## Cas du Modèle de Bioréacteur

- Preuve : modèle du bioréacteur en boucle fermée :

$$\begin{cases} \dot{s} = \gamma r(.) (s_{in} - s) - kr(.) \\ \dot{x} = r(.) - \gamma r(.) x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{s} = \gamma r(.) (s^* - s) \\ \dot{x} = \gamma r(.) (x^* - x) \end{cases}$$

avec :  $\xi^* = (s^*, x^*)^T = \left( s_{in} - \frac{k}{\gamma}, \frac{1}{\gamma} \right)^T$

- $\mathbb{R}_+^2$  positivement invariant  $\Rightarrow \forall t \geq 0, r(.) \geq 0$

- d'où,  $\forall t \geq 0, \forall \xi_0 \gg 0$  :

$$\xi_i(t, \xi_0) \geq \min(\xi_i^*, \xi_{0,i}) > 0 \Rightarrow \exists \alpha_{\xi_0} > 0, r(.) > \alpha_{\xi_0} > 0$$

# Idée de Preuve :

## Cas du Modèle de Bioréacteur

- Preuve : modèle du bioréacteur en boucle fermée :

$$\begin{cases} \dot{s} = \gamma r(.) (s_{in} - s) - kr(.) \\ \dot{x} = r(.) - \gamma r(.) x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{s} = \gamma r(.) (s^* - s) \\ \dot{x} = \gamma r(.) (x^* - x) \end{cases}$$

avec :  $\xi^* = (s^*, x^*)^T = \left( s_{in} - \frac{k}{\gamma}, \frac{1}{\gamma} \right)^T$

- $\mathbb{R}_+^2$  positivement invariant  $\Rightarrow \forall t \geq 0, r(.) \geq 0$

- d'où,  $\forall t \geq 0, \forall \xi_0 \gg 0$  :

$$\xi_i(t, \xi_0) \geq \min(\xi_i^*, \xi_{0,i}) > 0 \Rightarrow \exists \alpha_{\xi_0} > 0, r(.) > \alpha_{\xi_0} > 0$$

- Or :  $\xi_i(t) = \xi_i^* + (\xi_{0,i} - \xi_i^*) \exp \left( \underbrace{-\gamma \int_0^t r(.) d\tau}_{\text{divergente}} \right)$

Donc  $\xi^*$  est GAS sur  $\mathbb{R}_{+*}^n$

# Idée de Preuve : Cas Général

- Preuve : modèle en boucle fermée :

$$\dot{x} = \gamma \psi(.) \underbrace{\left( f(x) + \frac{1}{\gamma} c \right)}_{\text{fortement positif GAS}}$$

- En utilisant la coopérativité et la forte positivité, on montre que :

$$x_0 \gg 0 \Rightarrow \forall t \geq 0, x(t, x_0) \gg 0$$

# Idée de Preuve : Cas Général

- Preuve : modèle en boucle fermée :

$$\dot{x} = \gamma \psi(.) \quad \underbrace{\left( f(x) + \frac{1}{\gamma} c \right)}_{\text{fortement positif GAS}}$$

- En utilisant la coopérativité et la forte positivité, on montre que :

$$x_0 \gg 0 \Rightarrow \forall t \geq 0, x(t, x_0) \gg 0$$

- D'où :  $x_0 \gg 0 \Rightarrow \exists \alpha_{x_0} > 0, \forall t \geq 0, \psi(.) > \alpha_{x_0} > 0$

# Idée de Preuve : Cas Général

- Preuve : modèle en boucle fermée :

$$\dot{x} = \gamma \psi(.) \quad \underbrace{\left( f(x) + \frac{1}{\gamma} c \right)}_{\text{fortement positif GAS}}$$

- En utilisant la coopérativité et la forte positivité, on montre que :

$$x_0 \gg 0 \Rightarrow \forall t \geq 0, x(t, x_0) \gg 0$$

- D'où :  $x_0 \gg 0 \Rightarrow \exists \alpha_{x_0} > 0, \forall t \geq 0, \psi(.) > \alpha_{x_0} > 0$

- Changement de temps :  $t' = \int_0^t \gamma \psi(.) d\tau$

$x(t, x_0)$  a le même comportement que la trajectoire, issue de  $x_0$ , de :

$$\frac{dx}{dt'} = f(x) + \frac{1}{\gamma} c \quad \text{qui converge vers } x^* \gg 0$$

# Idée de Preuve : Cas Général

- Preuve : modèle en boucle fermée :

$$\dot{x} = \gamma \psi(.) \quad \underbrace{\left( f(x) + \frac{1}{\gamma} c \right)}_{\text{fortement positif GAS}}$$

- En utilisant la coopérativité et la forte positivité, on montre que :

$$x_0 \gg 0 \Rightarrow \forall t \geq 0, x(t, x_0) \gg 0$$

- D'où :  $x_0 \gg 0 \Rightarrow \exists \alpha_{x_0} > 0, \forall t \geq 0, \psi(.) > \alpha_{x_0} > 0$

- Changement de temps :  $t' = \int_0^t \gamma \psi(.) d\tau$

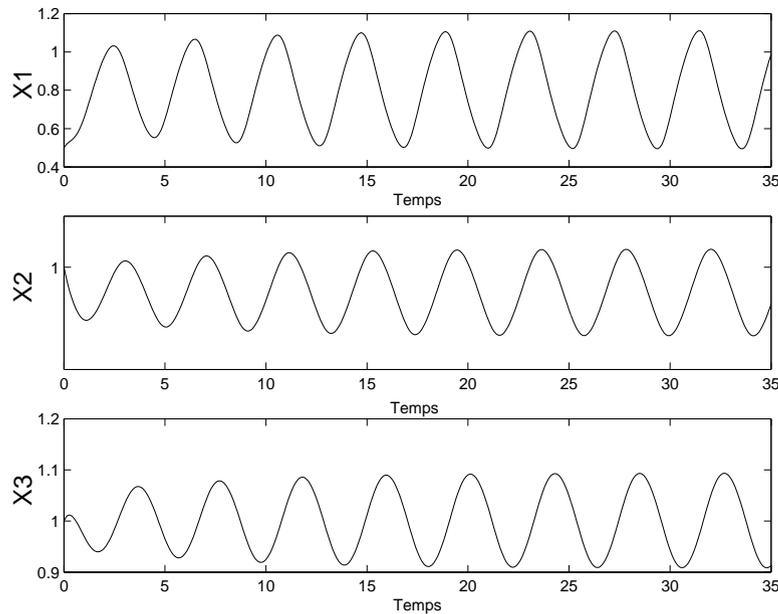
$x(t, x_0)$  a le même comportement que la trajectoire, issue de  $x_0$ , de :

$$\frac{dx}{dt'} = f(x) + \frac{1}{\gamma} c \quad \text{qui converge vers } x^* \gg 0$$

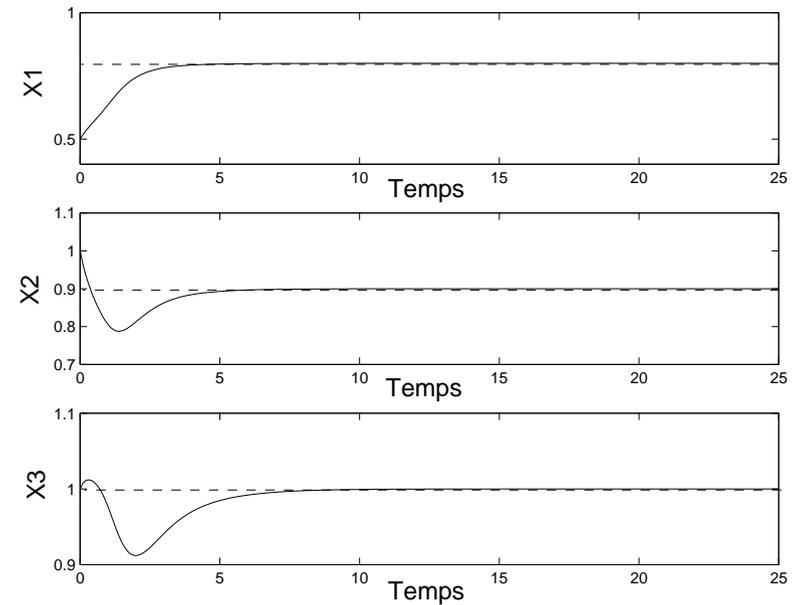
- Valable  $\forall x_0 \gg 0 \Rightarrow x^* \text{ GAS sur } \mathbb{R}_{+*}^n$

# Efficacité du Contrôleur

Retour sur l'exemple académique générant un cycle limite



**Système en  
Boucle Ouverte**



**Système  
Contrôlé**

# Choix de l'équilibre $x^*$

$x^* \gg 0$  est réglable par le choix de  $\gamma$  :

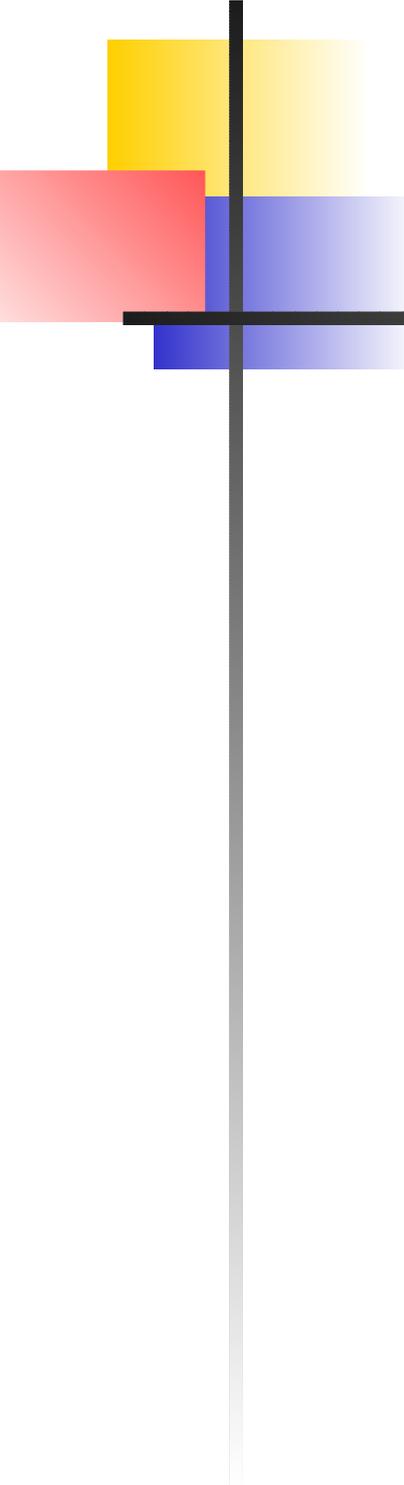
$$f(x^*) = \frac{-1}{\gamma} c$$

Si  $f(\cdot)$  et  $c$  bien connus  $\Rightarrow$  calcul possible du  $\gamma$  *ad hoc*

 Incertitudes paramétriques sur  $f(\cdot)$  ou  $c$  

$\Rightarrow$  Mauvais calcul de  $\gamma$

$\Rightarrow$  Erreur statique entre  $x^*$  atteint et  $x^*$  attendu



# Stabilisation Adaptative

# Objectif

Sur la base d'un modèle incertain de type :

$$\dot{x} = uf(x) + c\psi(.)$$

Concevoir un contrôleur assurant :

Stabilisation Globale sur  $\mathbb{R}_{+*}^n$

vers un  $x^* \gg 0$  correspondant à une consigne  $x_i^*$

- Idée : mesurer  $y_2 = x_i$  et l'utiliser pour ajuster  $\gamma$  en ligne

# Contrôle Adaptatif

• Théorème : *Considérons le Système Positif :*

$$\begin{cases} \dot{x} = uf(x) + c\psi(.) \\ y = (\psi(.), x_i)^T \end{cases}$$

Alors, pour tout  $x_i^*$  "admissible", le contrôle :

$$\begin{cases} u(.) = \gamma(t)\psi(.) & (\geq 0) \\ \dot{\gamma} = \delta K \psi(.)(x_i - x_i^*)(\gamma - \gamma_m)(\gamma_M - \gamma) \end{cases}$$

Avec :  $\delta = -\text{signe} \left( \frac{\partial x_i^* \text{ statique}}{\partial \gamma} \right)$ ,  $K > 0$ ,  $\gamma_M > \gamma_m > \beta_m > 0$

Et :  $\gamma(t=0) \in ]\gamma_m, \gamma_M[$

Stabilise Globalement sur  $\mathbb{R}_{+*}^n$  le Système vers  $x^* \gg 0$   
correspondant à la consigne  $x_i^*$

# Idée de Preuve :

## Cas du Modèle de Bioréacteur

- Preuve : Modèle en boucle fermée, état  $\chi$ , on mesure  $s$  :

$$\begin{cases} \dot{x} = r(.) (1 - \gamma x) \\ \dot{s} = r(.) (\gamma (s_{in} - s) - k) \\ \dot{\gamma} = K r(.) (s^* - s) (\gamma - \gamma_m) (\gamma_M - \gamma) \end{cases}$$

# Idée de Preuve :

## Cas du Modèle de Bioréacteur

- **Preuve :** Modèle en boucle fermée, état  $\chi$ , on mesure  $s$  :

$$\begin{cases} \dot{x} = r(.) (1 - \gamma x) \\ \dot{s} = r(.) (\gamma (s_{in} - s) - k) \\ \dot{\gamma} = K r(.) (s^* - s) (\gamma - \gamma_m) (\gamma_M - \gamma) \end{cases}$$

- On montre que :  $(x_0, s_0)^T \gg 0 \Rightarrow \forall t \geq 0, (x(t), s(t))^T \gg 0$
- D'où :  $(x_0, s_0)^T \gg 0 \Rightarrow \forall t \geq 0, r(.) > \alpha_{x_0} > 0$
- Changement de temps :  $t' = \int_0^t r(.) d\tau$

# Idée de Preuve :

## Cas du Modèle de Bioréacteur

- **Preuve :** Modèle en boucle fermée, état  $\chi$ , on mesure  $s$  :

$$\begin{cases} \dot{x} = r(.) (1 - \gamma x) \\ \dot{s} = r(.) (\gamma (s_{in} - s) - k) \\ \dot{\gamma} = K r(.) (s^* - s) (\gamma - \gamma_m) (\gamma_M - \gamma) \end{cases}$$

- $\chi(t, \chi_0)$  a le même comportement que la trajectoire, issue de  $\chi_0$ , de

$$\begin{cases} x' = (1 - \gamma x) \\ s' = (\gamma (s_{in} - s) - k) \\ \gamma' = K (s^* - s) (\gamma - \gamma_m) (\gamma_M - \gamma) \end{cases}$$

# Idée de Preuve :

## Cas du Modèle de Bioréacteur

- **Preuve :** Modèle en boucle fermée, état  $\chi$ , on mesure  $s$  :

$$\begin{cases} \dot{x} = r(.) (1 - \gamma x) \\ \dot{s} = r(.) (\gamma (s_{in} - s) - k) \\ \dot{\gamma} = K r(.) (s^* - s) (\gamma - \gamma_m) (\gamma_M - \gamma) \end{cases}$$

- $\chi(t, \chi_0)$  a le même comportement que la trajectoire, issue de  $\chi_0$ , de

$$\begin{cases} x' = (1 - \gamma x) \\ s' = (\gamma (s_{in} - s) - k) \\ \gamma' = K (s^* - s) (\gamma - \gamma_m) (\gamma_M - \gamma) \end{cases}$$

- **Fonction de LaSalle :** (avec  $\gamma^* = k / (s_{in} - s^*)$ )

$$V = (s_{in} - kx - s)^2 + \int_{s_{in} - s^*}^{s_{in} - s} \frac{w - (s_{in} - s)}{w} dw + \int_{\gamma^*}^{\gamma} \frac{w - \gamma^*}{K (w - \gamma_m) (\gamma_M - w)} dw$$

# Idée de Preuve :

## Cas du Modèle de Bioréacteur

- **Preuve :** Modèle en boucle fermée, état  $\chi$ , on mesure  $s$  :

$$\begin{cases} \dot{x} = r(.) (1 - \gamma x) \\ \dot{s} = r(.) (\gamma (s_{in} - s) - k) \\ \dot{\gamma} = K r(.) (s^* - s) (\gamma - \gamma_m) (\gamma_M - \gamma) \end{cases}$$

- $\chi(t, \chi_0)$  a le même comportement que la trajectoire, issue de  $\chi_0$ , de

$$\begin{cases} x' = (1 - \gamma x) \\ s' = (\gamma (s_{in} - s) - k) \\ \gamma' = K (s^* - s) (\gamma - \gamma_m) (\gamma_M - \gamma) \end{cases}$$

- **Fonction de LaSalle :** (avec  $\gamma^* = k / (s_{in} - s^*)$ )

$$V = (s_{in} - kx - s)^2 + \int_{s_{in} - s^*}^{s_{in} - s} \frac{w - (s_{in} - s)}{w} dw + \int_{\gamma^*}^{\gamma} \frac{w - \gamma^*}{K (w - \gamma_m) (\gamma_M - w)} dw$$

valable  $\forall (x_0, s_0)^T \gg 0 \Rightarrow$  équilibre correspondant à  $s^*$  GAS

# Cas Général

- Preuve par la même méthode dans un cas particulier :

$$\dot{x}_i = u(-a_{ii}x_i) + c_i\psi(.)$$

↪ utilisation d'un "principe de séparation non-linéaire"

- étude du sous système en  $x_i$  et  $\gamma$

↪ convergence vers  $x_i^*$  et  $\gamma^*$  (LaSalle)

- étude du sous système en  $x_{j \neq i}$  en  $x_i^*$  et  $\gamma^*$

↪ application du résultat statique

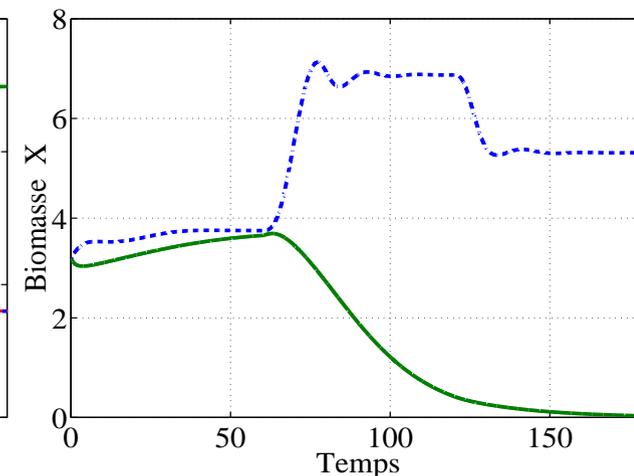
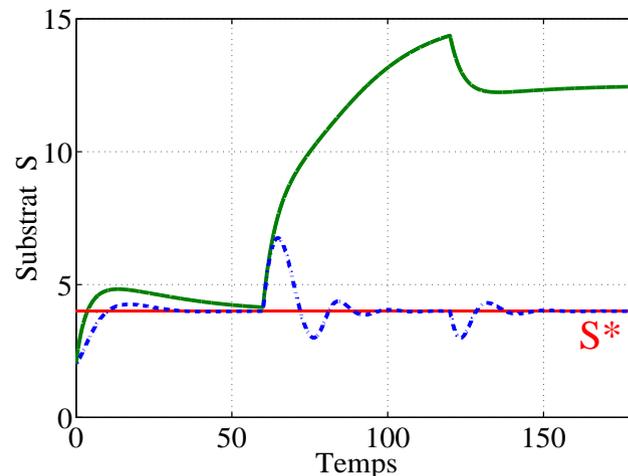
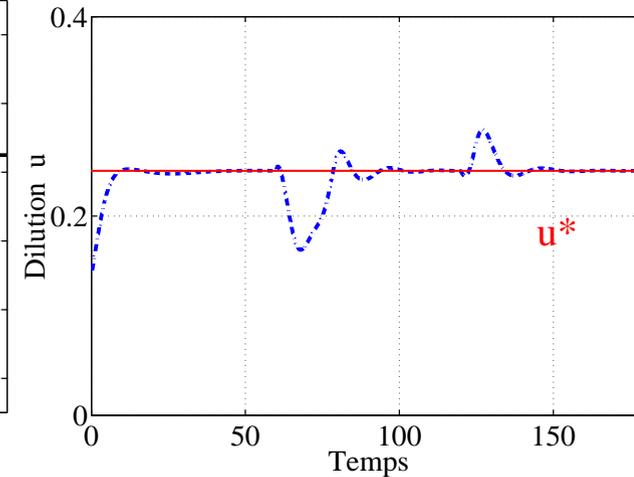
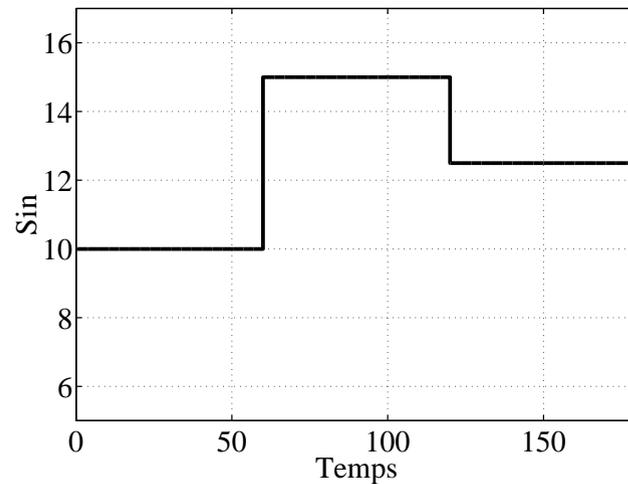
- Cas général : méthode différente requise



...

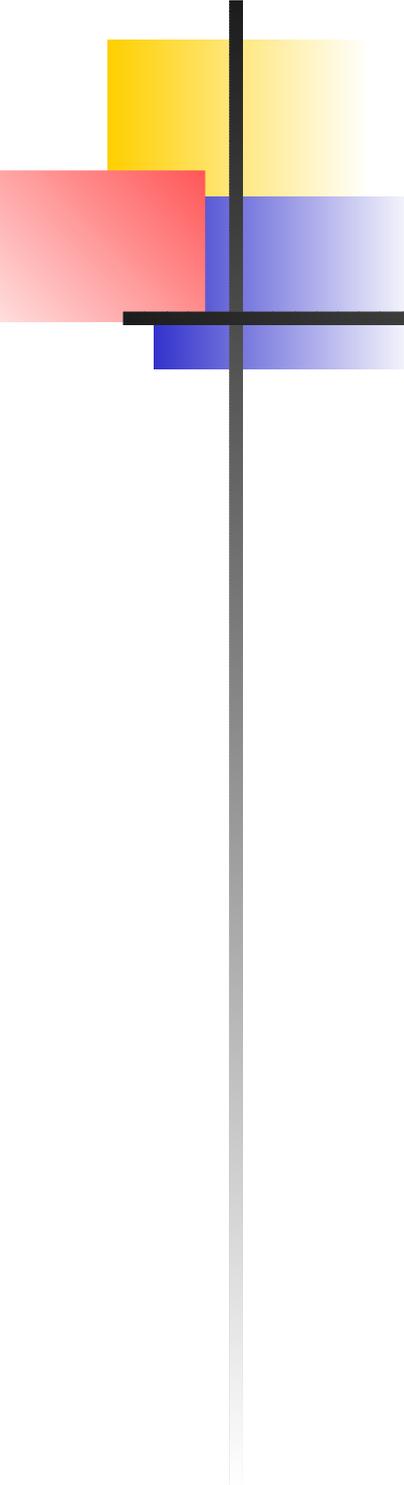
# Efficacité du Contrôleur

Bioréacteur type Haldane :  $\Delta^0$  concentration de l'influent



Non Contrôlé (lessivage)

Contrôlé (pérennité)



# Extension des Résultats

# Principe

Utilisation du “Principe de Séparation Non-Linéaire”

↪ Permet de stabiliser globalement des systèmes de type

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = g(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 = u f(x_2) + c\psi(x_1, x_2) \end{cases}$$

- Si  $u(.) = \gamma\psi(x_1, x_2)$  stabilise le sous-système  $\dot{x}_2$  vers  $x_2^* \gg 0$
- Et si le sous-système  $\dot{x}_1$  contrôlé, projeté sur  $x_2 = x_2^*$  :

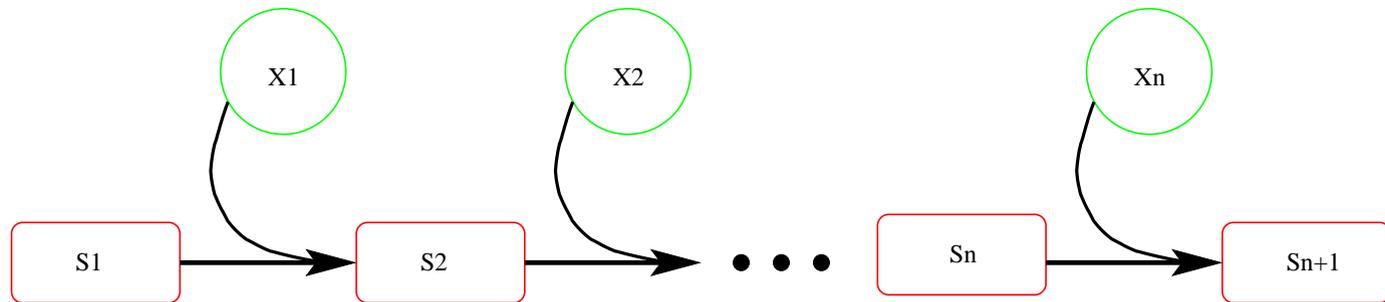
$$\dot{x}_1 = g(x_1, x_2, \gamma\psi(x_1, x_2^*))$$

admet un équilibre  $x_1^* \gg 0$  GAS

Etude dans le cas statique uniquement

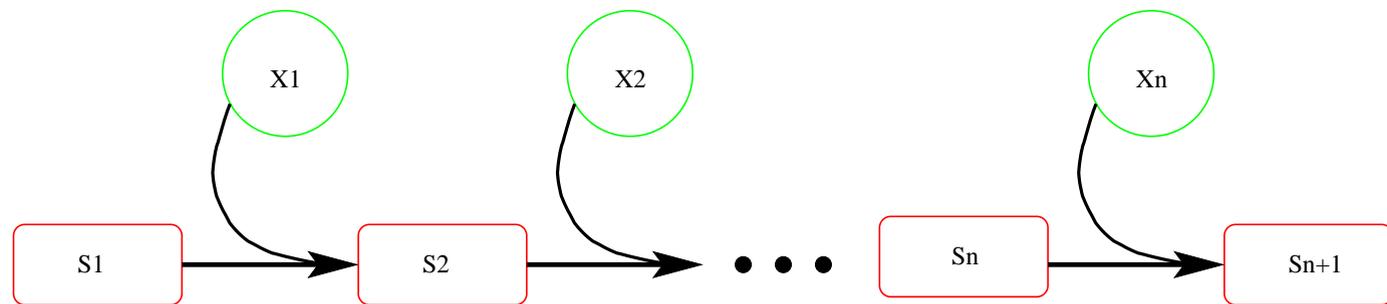
# Cas des Bioréactions en Cascade

Bioréaction en Cascade :



# Cas des Bioréactions en Cascade

Bioréaction en Cascade :



Modèle associé  
Avec :  $r_j(.) = \mu_j(s_j)x_j$

$$: \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -ux_1 \\ \dot{s}_1 = u(s_{1,in} - s_1) \\ \vdots \\ \dot{x}_j = -ux_j \\ \dot{s}_j = u(s_{j,in} - s_j) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = -ux_n \\ \dot{s}_n = u(s_{n,in} - s_n) \end{array} \right. \begin{array}{l} +r_1(.) \\ -k_1r_1(.) \\ \vdots \\ +r_j(.) \\ -k_jr_j(.) + l_jr_{j-1}(.) \\ \vdots \\ +r_n(.) \\ -k_nr_n(.) + l_nr_{n-1}(.) \end{array}$$



Multi-Stabilité Fréquente en Boucle Ouverte



# Changements de Variables

- (n-1) Changements :  $z_j = s_j + k_j x_j - l_j x_{j-1}$
- Substrat équivalent :  $s_T = s_n + \sum_{k=1}^{n-1} \left( \prod_{j=k}^{n-1} \frac{l_{j+1}}{k_j} \right) s_k$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -ux_1 + r_1(.) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = -ux_{n-1} + r_{n-1}(.) \end{array} \right\} \dot{x}_1 = g(x_1, x_2, u)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = u(s_{1,in} - z_1) \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = u(s_{n-1,in} - z_{n-1}) \\ \dot{x}_n = -ux_n + r_n(.) \\ \dot{s}_T = u(s_{T,in} - s_T) - k_n r_n(.) \end{array} \right\} \dot{x}_2 = uf(x_2) + c\psi(x_1, x_2)$$

# Stabilisation des Bioréactions en Cascade

- **Proposition :** *Si la condition suivante est remplie pour tout  $w$  petit*

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left( \prod_{j=k}^{n-1} \frac{l_{j+1}}{k_j} \right) \frac{1}{\mu'_k \circ \mu_k^{-1}(w)} < \frac{1}{\mu'_n \left( s_T^* - \sum_{k=1}^{n-1} \left( \prod_{j=k}^{n-1} \frac{l_{j+1}}{k_j} \right) \mu_k^{-1}(w) \right)}$$

Et si  $\gamma > \frac{k_n}{s_{T,in}}$  alors le contrôle :

$$u(\cdot) = \gamma r_n(\cdot) = \gamma \mu_n(s_n) x_n$$

*Stabilise Globalement le Modèle de Bioréaction en Cascade vers un unique équilibre  $\xi^* \gg 0$*

- **Remarque :**  $w$  “petit” est précisément quantifiable

# Idée de Preuve

- Système Contrôlé Positif  $\Rightarrow \forall t > 0, u(.) \geq 0$
- On montre par l'absurde que :  $\int_0^\infty u(.)d\tau$  diverge  
 $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = x_2^* \gg 0$

# Idée de Preuve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = x_2^* \gg 0$$

- Le sous-système :

$$\dot{x}_1 = g\left(x_1, x_2(t), u(x_1, x_2(t))\right)$$

“asymptotiquement autonome” (Markus, 1956); système limite

$$\dot{x}_1 = g\left(x_1, x_2^*, u(x_1, x_2^*)\right)$$

# Idée de Preuve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = x_2^* \gg 0$$

- Le sous-système :

$$\dot{x}_1 = g\left(x_1, x_2(t), u(x_1, x_2(t))\right)$$

“asymptotiquement autonome” (Markus, 1956); système limite

$$\dot{x}_1 = g\left(x_1, x_2^*, u(x_1, x_2^*)\right)$$

- Etude du sous système limite :

Petit Gain pour les systèmes monotones (Angeli & Sontag, 2003)

⇒ Condition Suffisante assurant la GAS de  $x_1^* \gg 0$

# Idée de Preuve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = x_2^* \gg 0$$

- Le sous-système :

$$\dot{x}_1 = g\left(x_1, x_2(t), u(x_1, x_2(t))\right)$$

“asymptotiquement autonome” (Markus, 1956); système limite

$$\dot{x}_1 = g\left(x_1, x_2^*, u(x_1, x_2^*)\right)$$

- Etude du sous système limite :

Petit Gain pour les systèmes monotones (Angeli & Sontag, 2003)

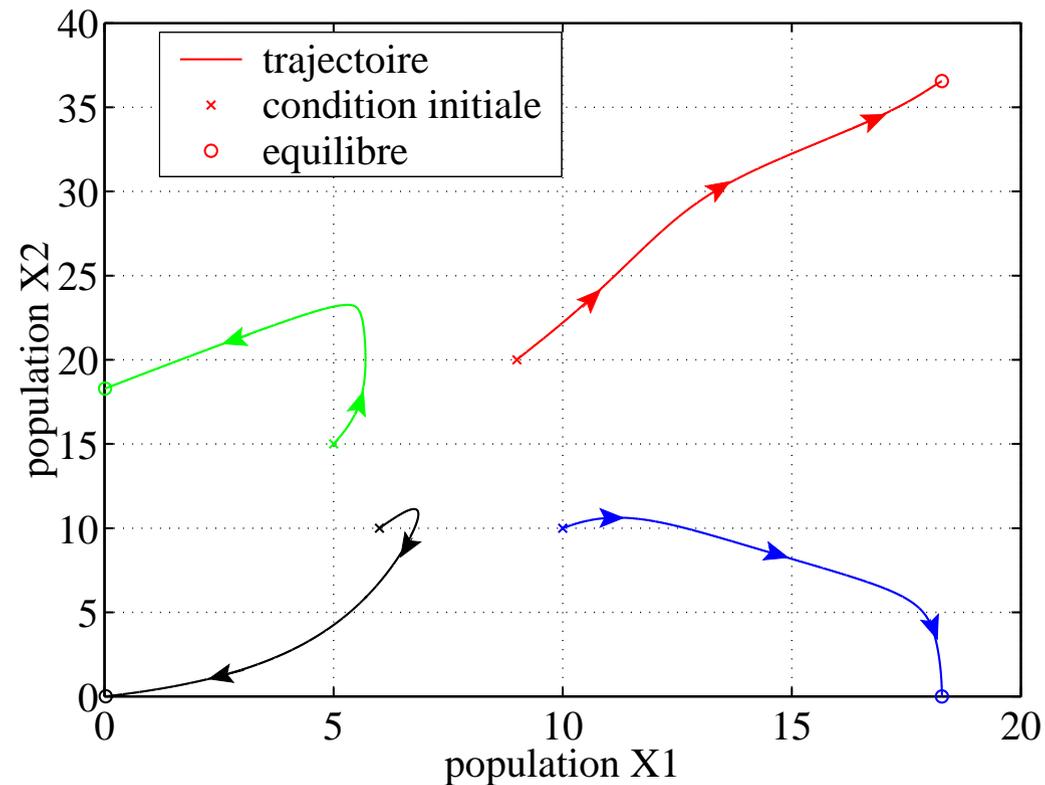
⇒ Condition Suffisante assurant la GAS de  $x_1^* \gg 0$

- Conclusion :

Attractivité Globale de  $(x_1^*, x_2^*)^T$  (Markus) et  $(x_1^*, x_2^*)^T$  Stable □

# Efficacité du Contrôleur

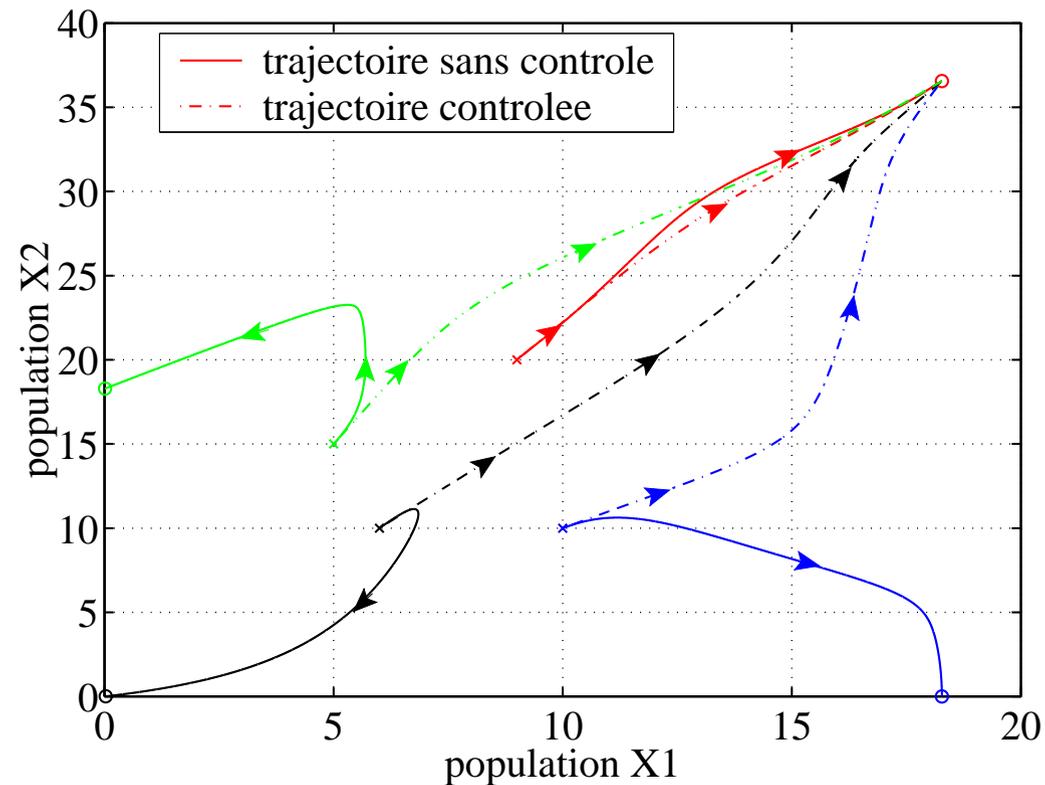
Cascade de deux Bioréactions type “Haldane”  
Modèle Non Contrôlé : Multi-Stabilité



(Projection dans le plan :  $(x_1, x_2)$ )

# Efficacité du Contrôleur

Cascade de deux Bioréactions type "Haldane"  
Modèle Contrôlé : GAS



(Projection dans le plan :  $(x_1, x_2)$ )

# Cas Particulier :

## La Fermentation Anaérobie

Procédé de Traitement Biologique des Eaux Usées

- Très Efficace
- Permet de récupérer de l'énergie

Mais **peu utilisé** au niveau industriel :

- Multi-Stabilité (fort risque de lessivage des biomasses)
- Contrôle difficile (non-linéarités non-monotones)

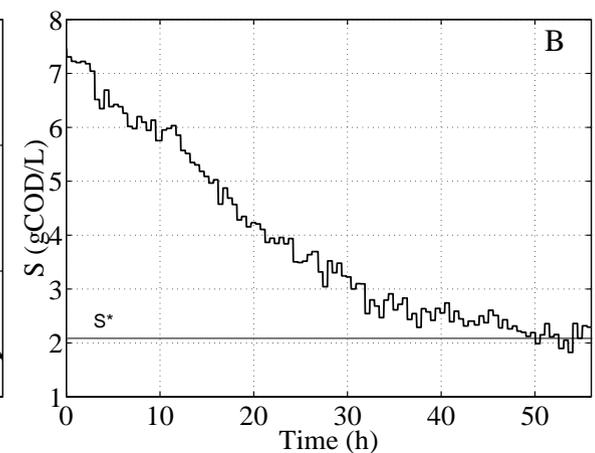
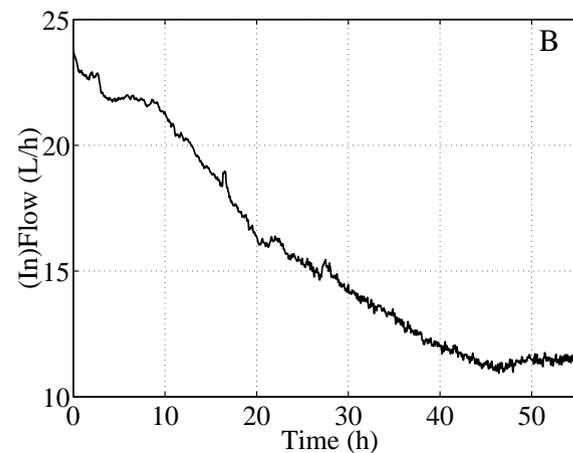
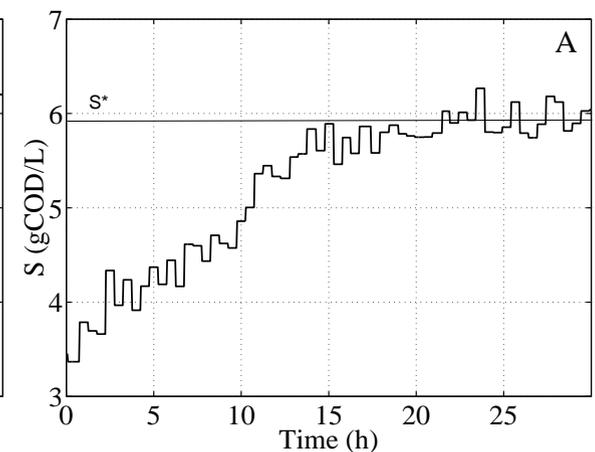
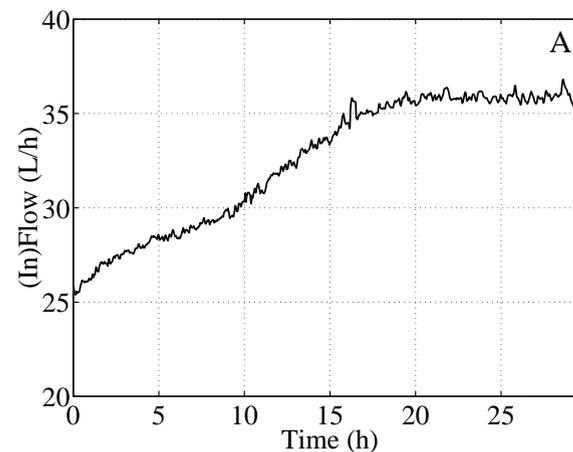
Modélisé par une **Bioréaction en Cascade** à deux étapes

↪ Mesure facile de  $r_2(\cdot) = \text{Flux de CH}_4 \text{ produit}$

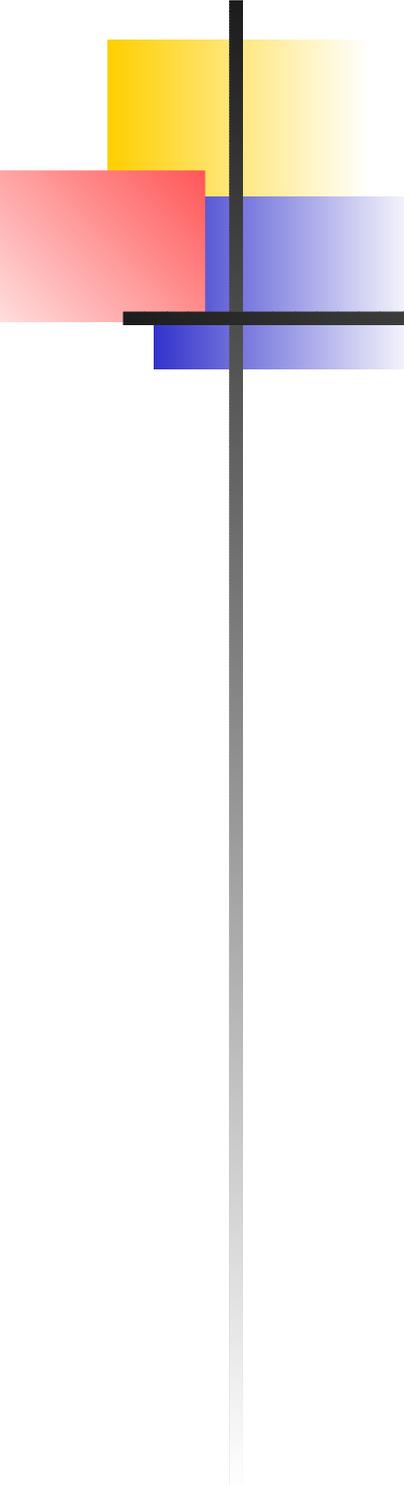
⇒ Procédé idéal pour tester la démarche proposée

# Cas Particulier : La Fermentation Anaérobie

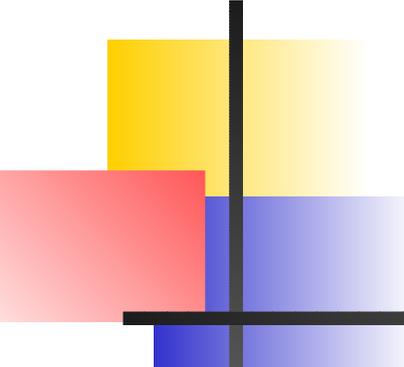
## Tests Expérimentaux sur le Fermenteur du LBE-INRA



⇒ Résultats conformes à ceux attendus



# Conclusion

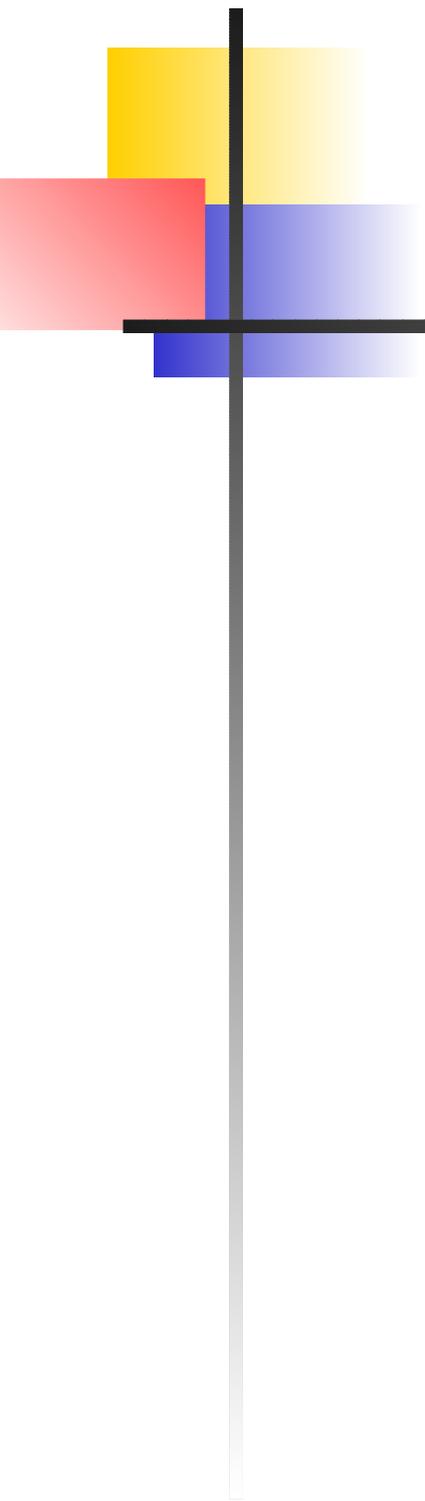


# Conclusion

- Mise en évidence d'une **nouvelle** classe de systèmes
- Exploitation de la **positivité** de ces systèmes
- Développement de procédures de stabilisation dédiées
  - vitesse de convergence non-réglable
  - **mais** comportement asymptotique garanti
- Résultats intéressants pour les Bioréacteurs
  - Robustesse aux **incertitudes** des modèles
  - Robustesse aux **structures** des modèles  
(*cf.* bioréactions en cascade)
- Application expérimentale convaincante  
(*cf.* fermentation anaérobie)

# Perspectives

- Poursuite de la validation : Fermentation anaérobie
  - “Simulateur” : modèle complexe “ADM1” IWA-2002
  - Expérimentale : cas adaptatif (le plus utile pour WWTP)
  - ⇒ Utilisation plus répandue à l’échelle industrielle ?
- Extension des résultats : Bioréactions Arborescentes
  - ↳ Exploitation de l’existence d’un “substrat équivalent”
- Application à d’autres procédés biologiques
  - e.g.* Cultures hors sol, écotrons...
- Proposer d’autres classes de systèmes “incertains”
- & Contrôleurs exploitant des propriétés qualitatives
  - ↳ Cas d’incertitudes de dimension supérieure...



**Merci...**