



**HAL**  
open science

# Influence de la variabilité spatiale en interaction sismique sol-structure

Eric Savin

► **To cite this version:**

Eric Savin. Influence de la variabilité spatiale en interaction sismique sol-structure. Matériaux. Ecole Centrale Paris, 1999. Français. NNT: . tel-00006636

**HAL Id: tel-00006636**

**<https://theses.hal.science/tel-00006636>**

Submitted on 4 Aug 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## THÈSE

présentée par

**Éric SAVIN**

pour l'obtention du Grade de

## DOCTEUR DE L'ÉCOLE CENTRALE DE PARIS

FORMATION DOCTORALE : Dynamique des Structures et Couplages  
SPÉCIALITÉ : Mécanique, Modélisation Numérique  
LABORATOIRE D'ACCUEIL : Mécanique des Sols, Structures et Matériaux

Titre

## INFLUENCE DE LA VARIABILITÉ SPATIALE EN INTERACTION SISMIQUE SOL-STRUCTURE

soutenue le 24 novembre 1999 devant la commission d'examen composée de

MM.	<b>C. SOIZE</b>	(Professeur École Centrale de Paris)	<b>Président</b>
	<b>R. GHANEM</b>	(Associate Professor Johns Hopkins University)	<b>Rapporteur</b>
	<b>L. JÉZÉQUEL</b>	(Professeur École Centrale de Lyon)	<b>Rapporteur</b>
	<b>D. AUBRY</b>	(Professeur École Centrale de Paris)	<b>Directeur de thèse</b>
	<b>D. CLOUTEAU</b>	(Chargé de Recherche CNRS)	<b>Examineur</b>
	<b>G. JACQUART</b>	(Électricité de France)	<b>Examineur</b>

n° 1999-31



# Avant-propos

Cette thèse a été réalisée au laboratoire de Mécanique des Sols, Structures et Matériaux de l'Ecole Centrale de Paris. Elle a été financée par la Direction des Etudes et Recherches d'EDF, sous son impulsion et celle du Septen d'EDF. Je tiens ainsi à remercier tout d'abord Georges DEVESA, Guillaume JACQUART et Jean-Pierre TOURET pour la confiance qu'ils m'ont témoignée et l'intérêt qu'ils ont porté à ces travaux ; et Denis AUBRY, qui a dirigé cette thèse, pour son accueil au sein du laboratoire et son encadrement scientifique.

Je remercie également MM. Roger GHANEM et Louis JÉZÉQUEL pour avoir accepté de rapporter ce travail.

Je remercie tout particulièrement Didier CLOUTEAU, qui a initié cette recherche, et qui par ses conseils, ses encouragements et sa disponibilité a très largement contribué à son développement et à ses conclusions.

Christian SOIZE m'a fait l'honneur d'accepter de présider le jury de ma soutenance ; ses cours et ses nombreuses suggestions ont grandement facilité mes premiers pas dans l'étude des problèmes de dynamique stochastique. Je le remercie ici vivement pour sa participation et son aide tout au long de ce travail.

Enfin je tiens à associer à ces remerciements tous les membres de l'équipe Structures au laboratoire MSS-MAT, permanents ou non, pour leurs conseils et leur aide au cours des trois années (plus ou moins) passées avec eux.



# Résumé

Les études des phénomènes d'interaction sismique sol-structure pour le dimensionnement d'ouvrages en génie civil sont fondées sur deux hypothèses simplificatrices fortes : l'homogénéité latérale du sol sous la fondation, et la représentation du mouvement sismique par des ondes planes à incidences verticales ou inclinées. Pour de grands ouvrages reposant sur des radiers flexibles étendus, ces hypothèses ne sont plus valides, d'autant que les observations *in situ* des ondes sismiques font apparaître une variabilité spatiale importante même sur de courtes distances et indépendamment de l'effet du passage d'onde. Dans ce travail sont développés les outils de modélisation et d'analyse numérique permettant de tenir compte de cette variabilité ainsi que de celle des caractéristiques mécaniques du sol. Une approche probabiliste est retenue, et leur influence est directement reliée à la réponse de la structure au séisme par une formulation intégrale incorporant ces deux aspects simultanément. Pour une mise en oeuvre numérique efficace, la dimension aléatoire des fluctuations – grandes ou petites – aléatoires des caractéristiques mécaniques du sol est réduite par l'introduction du développement de Karhunen-Loeve de l'opérateur de raideur dynamique associé. Cette technique est aussi appliquée au champ sismique incident. Les résultats obtenus pour des cas complexes réalistes permettent de mettre en évidence certains phénomènes dont l'appréhension apparaît indispensable dans le cadre d'une étude industrielle. Ils donnent notamment quelques indications utiles sur la sensibilité de la réponse de la structure à la variabilité spatiale du mouvement sismique ou des paramètres du sol.

**Mots-clés** : *interaction sol-structure, propagation d'ondes en milieux aléatoires, sous-structuration, équations intégrales, éléments finis de frontière, analyse spectrale, développement de Karhunen-Loeve, simulation de Monte-Carlo.*



# Abstract

Classical analysis of seismic soil-structure interaction phenomena for the design of civil engineering structures and lifelines are based on two simplifying assumptions : lateral homogeneity of the soil underneath the foundation and representation of the ground motion (free field) as a pulse train of vertically or obliquely incident plane waves. For large structures founded on flexible spread footings, these hypothesis are not valid any longer. Furthermore, data recorded after the installation of dense seismograph arrays have shown that seismic ground motions can have a strong spatial variability, even over short distances and irrespective of deterministic wave passage effects. We develop in this thesis some theoretical tools for the modelization and numerical analysis of the influence of the free field and soil spatial variabilities on the structural response. A probabilistic approach is chosen, and the structural response of interest is given by an integral formulation which considers these two aspects simultaneously. Relevancy of numerical implementations are enhanced by introducing a spectral reduction of the random dimension of the fluctuating part – large or small – of the uncertain soil mechanical parameters through its Karhunen-Loeve expansion. This technique is applied to the free field as well. The numerical results obtained for various realistic cases display some specific features whose consideration seems essential in the process of industrial design. Notably, some usefull trends and sensitivity of the structural response with the free field and soil spatial variabilities are derived.

**Keywords** : *soil-structure interaction, wave propagation in random media, sub-structuring method, boundary integral equations, boundary element method, random vibrations, Karhunen-Loeve expansion, Monte-Carlo simulation.*





# Table des matières

<b>Avant-propos</b>	<b>3</b>
<b>Résumé</b>	<b>5</b>
<b>Abstract</b>	<b>7</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>13</b>
<b>1 Aléas en interaction sismique sol-structure</b>	<b>17</b>
1.1 Motivations de l'étude . . . . .	17
1.2 Rappels : modélisation déterministe . . . . .	18
1.2.1 Elastodynamique dans le sol et la structure . . . . .	20
1.2.2 Dynamique de la fondation . . . . .	21
1.2.3 Equation algébrique de l'interaction sol-structure . . . . .	21
1.2.4 Equations intégrales de bord pour le calcul des champs rayonnés . . . . .	22
1.2.5 Influence de la variabilité spatiale sur l'interaction sol-structure . . . . .	23
1.2.6 Axes de recherches . . . . .	28
1.3 Modèles probabilistes de champs incidents . . . . .	28
1.3.1 Modèles théoriques . . . . .	29
1.3.2 Fonctions de cohérence . . . . .	31
1.3.3 Autres approches de la variabilité . . . . .	36
1.3.4 Simulation de champs incidents stochastiques . . . . .	38
1.4 Modèles probabilistes du comportement des sols . . . . .	39
1.5 Propagation d'ondes en milieux hétérogènes déterministes . . . . .	42
1.5.1 Fonctions de Green hétérogènes . . . . .	42
1.5.2 Cas d'un demi-espace stratifié . . . . .	44
1.6 Propagation d'ondes en milieux aléatoires . . . . .	46
1.6.1 Phénomènes caractéristiques . . . . .	47
1.6.2 Réflexion simple. Méthode des perturbations . . . . .	49
1.6.3 Réflexions multiples . . . . .	51
1.6.4 Milieux effectifs . . . . .	53
1.7 Equations différentielles stochastiques . . . . .	58
1.7.1 Cadre général . . . . .	59
1.7.2 Applications à la propagation d'ondes en milieux aléatoires . . . . .	61
1.8 Conclusion . . . . .	68

<b>2</b>	<b>Formulation de l'interaction sol-structure</b>	<b>71</b>
2.1	Définition du problème aux limites . . . . .	72
2.1.1	Equations de l'élastodynamique . . . . .	72
2.1.2	Caractérisation du champ sismique incident . . . . .	74
2.1.3	Décomposition des déplacements . . . . .	75
2.1.4	Conditions aux limites . . . . .	76
2.1.5	Conditions de radiation . . . . .	77
2.2	Réponse en fréquence . . . . .	77
2.2.1	Réponse stationnaire . . . . .	78
2.2.2	Transformées de Fourier-Laplace . . . . .	78
2.2.3	Problème aux limites en fréquence . . . . .	79
2.2.4	Modèle d'amortissement hystérétique et conséquences . . . . .	80
2.2.5	Unicité de la solution du problème de transmission . . . . .	82
2.3	Formulation variationnelle . . . . .	83
2.3.1	Espaces fonctionnels . . . . .	84
2.3.2	Relèvement du champ incident . . . . .	84
2.3.3	Formulation faible . . . . .	85
2.3.4	Fonction de réponse en fréquence . . . . .	86
2.3.5	Déplacement total du système sol-structure . . . . .	87
2.4	Conclusion : problème stochastique . . . . .	87
2.4.1	Champ incident de nature stochastique . . . . .	87
2.4.2	Modules du sol de nature stochastique . . . . .	88
<b>3</b>	<b>Modélisation stochastique et étude probabiliste</b>	<b>89</b>
3.1	Action d'un champ incident aléatoire . . . . .	90
3.1.1	Hypothèses complémentaires . . . . .	91
3.1.2	Filtrage linéaire et analyse spectrale . . . . .	92
3.1.3	Données générales sur le champ incident stochastique . . . . .	92
3.1.4	Réponse de la structure . . . . .	94
3.1.5	Déconvolution stochastique . . . . .	96
3.1.6	Réduction fonctionnelle pour l'étude de la réponse de la structure . . . . .	98
3.2	Perturbation des paramètres mécaniques du sol . . . . .	102
3.2.1	Définition de la perturbation . . . . .	103
3.2.2	Réduction du modèle par un développement de Karhunen-Loeve . . . . .	106
3.2.3	Représentations du champ rayonné réduit . . . . .	108
3.3	Simulation de Monte-Carlo . . . . .	114
3.3.1	Principe . . . . .	115
3.3.2	Exemples . . . . .	116
3.3.3	Simulation de nombres aléatoires . . . . .	117
3.3.4	Construction des observations . . . . .	118
3.3.5	Estimation . . . . .	118
3.3.6	Théorèmes de convergence . . . . .	120
3.3.7	Réduction de variance . . . . .	120
3.4	Prise en compte de l'aléa dans les méthodes numériques . . . . .	121
3.5	Conclusion . . . . .	123

<b>4</b>	<b>Méthodes de sous-structuration</b>	<b>125</b>
4.1	Solution du problème de transmission par sous-structuration . . . . .	126
4.1.1	Principe . . . . .	126
4.1.2	Problèmes locaux . . . . .	129
4.1.3	Recomposition sur un domaine . . . . .	130
4.1.4	Problème couplé sur l'interface . . . . .	130
4.1.5	Solution approchée . . . . .	131
4.2	Couplage avec une hétérogénéité . . . . .	134
4.2.1	Notations et définitions . . . . .	135
4.2.2	Décomposition de domaine et sous-structuration . . . . .	136
4.2.3	Formulation variationnelle en souplesse . . . . .	140
4.2.4	Formulation mixte hybride . . . . .	141
4.2.5	Formulation duale . . . . .	142
4.2.6	Formulations variationnelles réduites . . . . .	142
4.2.7	Éléments d'analyse mathématique . . . . .	143
4.2.8	Approximation en dimension finie . . . . .	144
4.3	Conclusion . . . . .	146
<b>5</b>	<b>Fonction de Green du domaine hétérogène</b>	<b>149</b>
5.1	Fonction de Green et opérateurs associés . . . . .	151
5.1.1	Définitions . . . . .	151
5.1.2	Propriétés . . . . .	154
5.1.3	Théorème de réciprocity et équations intégrales . . . . .	155
5.1.4	Régularisation . . . . .	158
5.1.5	Applications : équations intégrales dans le sol . . . . .	161
5.2	Fonction de Green du domaine composite . . . . .	164
5.2.1	Construction par sous-structuration . . . . .	165
5.2.2	Représentation par équations intégrales dans le sol . . . . .	167
5.2.3	Application à la résolution du problème de transmission par équations intégrales . . . . .	169
5.2.4	Application à la résolution du problème de couplage avec une hétéro- généité du sol . . . . .	171
5.3	Approximation des équations intégrales . . . . .	172
5.3.1	Discretisation de la géométrie . . . . .	173
5.3.2	Discretisation des champs . . . . .	173
5.3.3	Equation intégrale indirecte discrétisée . . . . .	174
5.3.4	Equation intégrale directe discrétisée . . . . .	176
5.3.5	Intégration des singularités . . . . .	178
5.4	Conclusion . . . . .	181
<b>6</b>	<b>Validations. Exemples de structures réelles</b>	<b>183</b>
6.1	Cinématique d'une fondation sous sollicitation sismique aléatoire . . . . .	184
6.2	Vibrations de structures sous sollicitation sismique aléatoire . . . . .	191
6.2.1	Exemple de la maquette de Hualien . . . . .	191
6.2.2	Exemple d'un bâtiment-réacteur . . . . .	195
6.2.3	Conclusion sur l'influence de la variabilité spatiale du champ incident	203
6.3	Influence d'une hétérogénéité déterministe du sol : validation . . . . .	205

6.3.1	Eléments de validation de la méthode de sous-structuration par volume	206
6.3.2	Comparaison avec les résultats tirés de la littérature . . . . .	209
6.4	Application à une hétérogénéité aléatoire . . . . .	210
6.4.1	Exemple basses fréquences d'après Antes & Von Erstorff 1994 . . . . .	210
6.4.2	Réponse aux moyennes fréquences . . . . .	218
6.4.3	Réponse d'un bâtiment-réacteur . . . . .	224
6.5	Conclusion . . . . .	233
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>239</b>
<b>A</b>	<b>Cadre mathématique</b>	<b>243</b>
A.1	Notations générales et rappels . . . . .	243
A.2	Espaces fonctionnels . . . . .	244
A.3	Processus stochastiques du second ordre . . . . .	246
<b>B</b>	<b>Réduction de variance</b>	<b>249</b>
B.1	Échantillonnage stratifié . . . . .	249
B.2	Méthode "Latin Hypercube Sampling" . . . . .	250
B.3	Méthode de quadrature . . . . .	251
<b>C</b>	<b>Simulation de processus stochastiques</b>	<b>255</b>
C.1	Représentation spectrale des processus gaussiens . . . . .	255
C.1.1	Représentation intégrale . . . . .	255
C.1.2	Approximation du champ stochastique . . . . .	256
C.1.3	Propriétés de l'approximation . . . . .	257
C.2	Processus non gaussiens . . . . .	258
C.2.1	Processus de Poisson filtré stationnaire . . . . .	258
C.2.2	Champ discrétisé . . . . .	259
C.3	Développement de Karhunen-Loeve . . . . .	259
C.3.1	Définition et résultats . . . . .	259
C.3.2	Simulation par un développement de Karhunen-Loeve tronqué . . . . .	261
C.3.3	Exemples . . . . .	261
<b>D</b>	<b>Compléments sur la méthode de sous-structuration</b>	<b>267</b>
D.1	Problèmes locaux . . . . .	267
D.2	Recomposition sur un domaine . . . . .	268
D.3	Impédances d'interface . . . . .	268
D.4	Forces induites . . . . .	268
	<b>Bibliographie</b>	<b>271</b>

# Introduction générale

Les avancées réalisées dans le domaine de la simulation numérique des systèmes mécaniques complexes permettent de traiter des modèles très détaillés de leurs comportements sous des sollicitations extrêmes, statiques ou dynamiques. La difficulté majeure est alors de caractériser ces sollicitations ainsi que les nombreux paramètres qui interviennent dans ces modèles. En effet les incertitudes relatives aux chargements, aux propriétés mécaniques et physiques des matériaux, à la géométrie ou encore aux conditions initiales et aux conditions aux limites, sont des caractéristiques intrinsèques de ces systèmes ; elles sont d'autant plus importantes que le raffinement des modèles tend à multiplier le nombre de paramètres à prendre en compte. Les simulations numériques, pour être suffisamment robustes et fiables, doivent incorporer cette *variabilité*, terme désignant l'aléa lié à la connaissance que l'on a de la répartition spatiale ou temporelle des grandeurs caractéristiques du système étudié.

De part son caractère général et la richesse des outils mathématiques théoriques et pratiques qu'elle fournit, une approche probabiliste apparaît particulièrement adaptée. Ainsi, les résultats d'essais en laboratoire ou *in situ* ne fournissant en générale que des statistiques plus ou moins précises sur les paramètres, cette approche se prête bien à des études de corrélation calculs/essais par exemple. Contrairement aux études de sensibilité classiques par des méthodes de linéarisation équivalente, elle n'est pas limitée à des paramètres continus et variant faiblement. Enfin la loi des grands nombres nous assure de l'existence, dans le pire des cas, d'au moins une méthode numérique constructive : la méthode de Monte-Carlo. Signalons par ailleurs que ce type d'approche a un caractère normatif établi, pour les aspects expérimentaux d'une part, mais est aussi de plus en plus présent dans les règles de dimensionnement au niveau européen d'autre part (Eurocode 8 notamment).

Les études de dimensionnement des grands ouvrages d'infrastructures, tels que les ponts, les barrages, les centrales nucléaires ou les installations industrielles, n'échappent pas à ces évolutions. Pour des structures de tailles importantes, les concepteurs sont conduits à considérer, pour les dimensionnements sous sollicitations sismiques en particulier, des aspects jusqu'ici ignorés par soucis de simplification : la variabilité spatiale du champ sismique d'un point à un autre de la fondation, et l'hétérogénéité latérale du sol sous l'ouvrage. Pour parvenir à une évaluation pertinente de leur influence, il est nécessaire d'avoir recours à des outils de modélisation et de simulation. En effet les données expérimentales en la matière sont très rares (retours d'expérience sur les séismes), ou très coûteuses (caractérisation des modules du sol), et de toute façon impossibles à reproduire tant sur le plan économique que matériel. Les méthodes de calcul doivent donc permettre de tester numériquement les différentes solutions proposées, et de les optimiser compte tenu de l'importance des enjeux économiques et sociaux qui les caractérisent. On propose ici, pour les applications du génie parasismique, une modélisation générale de la variabilité spatiale du séisme et des caractéristiques mécaniques du sol au voisinage de la fondation de l'ouvrage étudié, ainsi que sa

mise en oeuvre dans un code de calculs à vocation industrielle.

## Objectifs

Le travail de thèse poursuivi au Laboratoire de Mécanique des Sols, Structures et Matériaux (MSS-MAT) de l'Ecole Centrale de Paris a été soutenu financièrement par la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France (EDF). L'objectif assigné, comme mentionné brièvement ci-dessus, est la caractérisation qualitative, et si possible quantitative, de l'influence de la variabilité spatiale du mouvement ou des paramètres mécaniques du sol sur le comportement vibratoire de grands ouvrages tels que les bâtiments-réacteurs des nouveaux projets de centrales nucléaires. Il doit aussi être tenu compte des phénomènes d'interaction sol-structure qui jouent un rôle fondamental pour les grands radiers de fondation. Le choix des méthodes étant laissé libre, nous avons proposé une modélisation probabiliste de la variabilité spatiale dans la mesure où, hormis ses qualités théoriques déjà vues, cette approche se prête bien à la structure des données généralement disponibles pour caractériser le séisme ou le sol : typiquement une fonction de cohérence transversale et des tendances (moyennes, écarts-types variant spatialement) construites à partir de mesures ou d'enregistrements peu nombreux, relativement dispersés et souvent peu fiables. Ce type de démarche permet ensuite d'analyser la sensibilité du système sol-structure considéré aux fluctuations, petites ou grandes, de ses paramètres dans un cadre théorique rigoureux et constructif. Il apparaît en outre comme une alternative aux études de marges plus classiques couramment réalisées dans les applications industrielles, notamment en génie civil et en génie parasismique. La méthodologie développée doit aussi permettre d'aborder le cas pathologique d'une hétérogénéité marquée du sol au voisinage de la fondation, correspondant en fait au cas limite d'une variabilité spatiale des paramètres du sol parfaitement cohérente.

Pour les simulations numériques, on se propose de travailler avec le code de calcul d'interaction sol-structure MISS-3D, déjà utilisé par EDF.

## Le code MISS-3D

Les développements introduits dans ce travail ont pour finalité d'être compatibles avec les méthodes mises en oeuvre dans le code de calcul numérique MISS-3D, afin de pouvoir y être incorporés. Ce logiciel permet de traiter une large gamme de problèmes complexes tridimensionnels à vocation industrielle, notamment les aspects couplage multi-physique et multi-domaines en dynamique. Il est développé au laboratoire MSS-MAT depuis une dizaine d'années sous la coordination de Didier Clouteau, qui en a initié l'architecture dans sa thèse [40]. Il est commercialisé auprès de divers entreprises et bureaux d'études spécialisés, dont EDF où il est utilisé en liaison avec le Code ASTER® de la Direction des Etudes et Recherches.

Le code MISS-3D est fondé sur une méthode de décomposition de domaine par sous-structuration opérant dans le domaine des fréquences, couplant à la fois éléments finis volumiques et éléments finis de frontière. Il inclut le calcul des fonctions de Green d'un demi-espace visco-élastique stratifié horizontalement dans la méthode des éléments finis de frontière mise en oeuvre. Il permet également de traiter des domaines fluides parfaits non visqueux (compressibles ou incompressibles), des domaines visco-élastiques homogènes, ou encore des structures élancées modélisées par des poutres ou des coques. Les chargements imposés peuvent être des champs incidents sous forme d'ondes planes polarisées, des sources

ponctuelles, ou des sources mobiles. Enfin il permet de considérer des domaines bornés ou non, axisymétriques, stratifiés, ou invariants suivant une des directions horizontales. Les domaines traités par éléments finis volumiques sont quant à eux de géométries quelconques. Le code MISS-3D a essentiellement été mis en oeuvre pour traiter les différents phénomènes liés au génie parasismique, dont l'interaction sol-structure, l'interaction fluide-structure ou encore l'interaction sol-fluide-structure, la propagation d'ondes en milieux hétérogènes déterministes, les effets de site. Il a également été utilisé pour l'étude des phénomènes particuliers d'ondes guidées et de couplage liés à la sismique de puits en exploration pétrolière, ou l'analyse des vibrations émises dans le ballast et le sol environnant par le passage des métros ou des trains.

Les extensions récentes des fonctionnalités du code concernent la prise en compte de phénomènes non-linéaires tels que le décollement, de géométries complexes très étendues par une approche périodique (grands radiers, parois moulées, villes ...), le calcul intensif (méthodes de résolution itératives, calculs parallèles), et la prise en compte de la variabilité des données par des approches probabilistes, faisant plus particulièrement l'objet de ce travail.

## Plan du mémoire

Le contexte et les objectifs de la thèse étant fixés, nous avons articulés ce mémoire en six chapitres. Le deuxième et le troisième chapitre concernent la modélisation déterministe et stochastique du problème d'interaction sismique sol-structure, ainsi que son étude probabiliste. Les quatrième et cinquième chapitres décrivent les différents outils de simulation et de calcul utilisés pour construire numériquement la solution discrétisée du modèle développé précédemment.

Dans le premier chapitre, on résume la problématique de la modélisation de l'interaction sismique sol-structure et l'influence que peut avoir *a priori* la variabilité spatiale du champ incident et du sol sur les différents éléments introduits (chargement sismique équivalent et impédance dynamique de la fondation). On expose ensuite les différents modèles de variabilité proposés dans la littérature, et les méthodes retenues pour l'étude de son influence sur la propagation d'ondes en milieux aléatoires notamment.

Le modèle d'interaction sismique sol-structure est décrit plus en détail dans le deuxième chapitre, où l'on s'intéresse en particulier aux conditions de radiation imposées au champ des déplacements diffracté par la fondation. On donne également une formulation variationnelle du problème de transmission stationnaire correspondant.

Le troisième chapitre introduit la modélisation stochastique du problème variationnel établi précédemment, et les éléments pour son étude probabiliste. On développe notamment une méthode de réduction de la dimension aléatoire du champ incident imposé et de l'opérateur de raideur dynamique associé aux fluctuations aléatoires des modules du sol, et une méthode de projection du champ de déplacement solution du problème variationnel incluant cette perturbation.

Dans le quatrième chapitre, on présente la méthode de sous-structuration dynamique mise en oeuvre dans le code MISS-3D pour la résolution par sous-domaine du problème variationnel déterministe défini au deuxième chapitre. Une approche plus originale généralisant cette méthode à des interfaces volumiques est ensuite proposée, afin de pouvoir traiter de façon générique l'hétérogénéité aléatoire du sol au voisinage de la fondation par cette technique.



Les problèmes locaux issus des formulations par sous-domaines précédentes sont résolus, dans le cas des domaines non bornés, par une méthode d'équations intégrales de frontière et de représentation. Des résultats classiques sur cette méthode sont rappelés dans le cinquième chapitre, puis appliqués au cas d'un domaine composite non borné particulier : le sol non perturbé et la structure, dont on peut construire numériquement la fonction de Green par sous-structuration.

Dans le sixième et dernier chapitre sont proposées différentes applications effectuées à l'aide du code MISS-3D enrichi à partir des développements des quatre chapitres précédents. On présente quelques exemples de validation sur la base de résultats tirés de la littérature ou obtenus par des approches différentes, et l'on traite également des cas réalistes à vocation industrielle.

On termine enfin ce mémoire par quelques conclusions sur l'intérêt de ce travail et les résultats obtenus, et l'on dresse les perspectives offertes à courts ou moyens termes par les différents développements introduits.

Un certain nombre de points techniques sont reportés en annexe, les renvois sont indiqués dans le cours du texte chaque fois que jugé utile. Ils concernent essentiellement les méthodes de l'analyse stochastique. Dans l'Annexe A sont rappelées les principales définitions et notations mathématiques utilisées dans ce mémoire, l'Annexe B présente quelques techniques de réduction de variance et l'Annexe C trois méthodes de simulation de champs stochastiques du second ordre à valeurs vectorielles. Dans l'Annexe D sont donnés quelques résultats complémentaires relatifs à la méthode de sous-structuration présentée à la section §4.1 du chapitre §4.

# Chapitre 1

## Aléas en interaction sismique sol-structure

### 1.1 Motivations de l'étude

L'interaction sol-structure a une influence significative sur la réponse sismique de structures massives telles que les bâtiments réacteurs. Toutefois les centrales étudiées jusqu'à présent comportaient un bâtiment réacteur assez compact fondé sur un radier très rigide. Ce type de géométrie permettait, outre l'hypothèse simplificatrice de fondation parfaitement rigide déjà levée par ailleurs (voir notamment la thèse de Clouteau [40]), de supposer :

- l'homogénéité latérale des caractéristiques du sol, ramenant celui-ci à un modèle de stratifications horizontales ;
- le champ libre généré par des ondes planes à incidence verticale ou inclinée.

Les nouveaux projets de centrales nucléaires, tels REP-2000 pour lesquels l'ensemble des installations est regroupé dans un même bâtiment sur fondation très étendue, conduisent à revoir ces hypothèses. En effet, les expériences menées sur des sites instrumentés ont montré que le champ libre pouvait présenter de fortes incohérences spatiales sur des distances du même ordre que la taille de ces grandes fondations. Cette variabilité a pour effet, notamment, de solliciter la structure en torsion ou en balancement, comme dans le cas d'ondes planes à incidence inclinée [141]. Il convient donc de disposer d'outils numériques capables d'évaluer les caractéristiques de la réponse d'un ouvrage qui puissent impérativement prendre en compte ces phénomènes.

L'incohérence spatiale du mouvement sismique a pour origine, entre autres, la diffraction du champ issu de la source du fait des hétérogénéités du sol et de son comportement non linéaire, que ce soit lors de sa propagation jusqu'au site considéré (séismes profonds), ou au voisinage de la fondation (effet de site). Il convient alors de remettre également en cause l'hypothèse de stratification horizontale du sol afin de tenir compte d'hétérogénéités latérales susceptibles d'introduire un amortissement supplémentaire des ondes induit par leur *diffusion* sur celles-ci, ainsi que des amplifications en surface dues à leur confinement, ou *localisation*, au voisinage de la fondation par réflexion sur ces mêmes hétérogénéités. La variabilité spatiale des modules du sol influe donc non seulement sur le champ sismique incident, mais également sur l'interaction sol-structure. A ce titre, la réponse de la structure, supposée linéaire en fonction du chargement, ne dépendra par contre pas linéairement des caractéristiques mécaniques variables du sol.

Deux approches sont possibles pour un tel problème : une approche déterministe ou une approche probabiliste. La première n'est envisageable que dans le cas d'une connaissance parfaite des caractéristiques mécaniques du sol au voisinage de l'ouvrage étudié – objectif coûteux mais en principe réalisable. La seconde s'impose dès lors qu'il s'agit de traiter le cas d'hétérogénéités diffuses (mais pas nécessairement faibles) mal connues et d'un champ sismique incident réaliste inconnu lui *a priori*, identifiés par leurs caractéristiques statistiques et/ou leurs fonctions de cohérence. Les approches probabilistes sont en effet, de part leur caractère très général et l'importance des développements théoriques qu'elles ont suscités, les plus robustes lorsqu'il s'agit de modéliser l'incertitude relative à un système mécanique complexe.

Dans ce chapitre nous avons pour objectif de confronter les approches retenues jusqu'à présent par les différents auteurs afin de traiter ces aspects. Si l'effet de la variabilité spatiale du champ incident a fait l'objet de nombreux travaux récents, notamment grâce à une meilleure connaissance de celle-ci à la suite d'étude sur des réseaux denses d'accéléromètres, en revanche les effets de la variabilité du sol pour les applications à l'interaction sol-structure ont été très peu abordés. Par ailleurs, leur étude nécessite *a priori* des développements complexes afin de traiter les phénomènes de propagation d'ondes en milieux hétérogènes déterministes ou aléatoires qu'il convient ensuite d'appliquer à la formulation de l'interaction sol-structure telle qu'elle sera développée dans ce travail. Une difficulté supplémentaire tient au fait que, pour les applications de la propagation d'ondes en milieux élastiques, les hétérogénéités varient généralement à des échelles de l'ordre de la longueur d'onde du signal, contrairement aux applications des ondes électromagnétiques par exemple. Cette restriction réduit le champ d'application des méthodes asymptotiques classiques fondées sur une variation "lente" des propriétés du milieu de propagation.

Ce chapitre de nature bibliographique se divise donc comme suit :

- formulation de l'interaction sol-structure et identification des sources d'aléas issues de cette formulation, ainsi que des éléments permettant de les caractériser et dont la connaissance est nécessaire pour les applications envisagées ;
- la première source d'aléa est liée au chargement. On s'attachera donc à décrire les modèles de champs incidents aléatoires proposés dans la littérature, et en particulier les principales caractéristiques statistiques dont la connaissance est nécessaire en vue d'une application industrielle courante ;
- la deuxième source d'aléa est relative aux caractéristiques mécaniques du sol au voisinage de la fondation. Après avoir donné quelques éléments sur la modélisation probabiliste du comportement des sols, on s'intéressera dans un premier temps à la propagation d'ondes en milieux hétérogènes déterministes ;
- puis à la propagation d'ondes en milieux aléatoires ;
- la formulation pouvant être ramenée à un problème d'évolution standard (élastodynamique linéaire), on s'intéressera enfin aux équations différentielles à coefficients aléatoires, appelées par la suite équations différentielles stochastiques.

## 1.2 Rappels : modélisation déterministe

On rappelle, comme point de départ de cette étude, le modèle déterministe du problème complet d'interaction sol-structure telle qu'il est développé classiquement dans les applications au génie parasismique (Wolf [225], Aubry [8], Clouteau [40]). Les détails de la

formulation seront donnés aux chapitres suivants, §2 à §5, et l'on donnera ici pour les différents éléments de modélisation introduits le renvoi aux paragraphes, définitions ou équations concernées. Celle-ci est fondée sur une méthode de sous-structuration dynamique pour laquelle l'inconnue du problème est le champ de déplacements  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  de la fondation lorsque celle-ci est soumise à un champ sismique incident, noté  $\mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t)$ . Puis l'on verra, sur la base de cette formulation qui jouera un rôle central dans tous les développements futurs, quels sont les différents termes susceptibles d'être influencés par la variabilité spatiale du champ incident et des caractéristiques mécaniques du sol.

Le problème est résolu dans le domaine des fréquences après avoir effectué une transformée de Fourier en temps. On se place par ailleurs dans le cadre de l'élastodynamique linéaire pour des matériaux élastiques et isotropes. Le champ des déplacements dans le domaine sol non borné est obtenu par une méthode d'équation intégrale de frontière, la solution élémentaire retenue étant la fonction de Green d'un demi-espace stratifié évaluée numériquement par la méthode des coefficients de réflexion/transmission de Kennett [108] décrite ci-dessous à la section §1.5.2 ; celle-ci tient compte implicitement des conditions de surface libre, continuité aux interfaces entre les strates, et décroissance à l'infini. Le champ des déplacements dans la structure est décomposé sur la base de ses modes propres sur base fixe, et des relèvements élastostatiques dans la structure de modes caractéristiques du mouvement de la fondation (modes de corps rigide et modes de déformation). Le problème couplé d'interaction sol-structure est ainsi décomposé en deux sous-problèmes locaux relatifs à la structure  $\Omega_b$  et au demi-espace sol  $\Omega_s$ , et un problème couplé global ne faisant intervenir qu'un nombre réduit de degrés de liberté globaux sur l'interface  $\Gamma_{sf}$  entre les deux domaines.

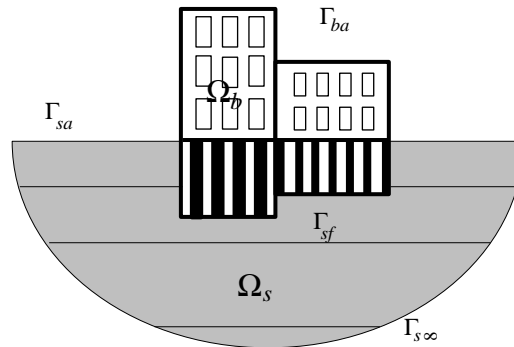


FIG. 1.1 – Modèle d'interaction sol-structure, géométrie et notations

Dans la suite  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$  désignera le champ de tenseur des contraintes associé au champ des déplacements recherché  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})$  désignera le champ de tenseur des déformations correspondantes, et  $\mathbf{t}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}$  le champ de vecteur contrainte exercé sur toute facette orientée par sa normale extérieure  $\mathbf{n}$ . Pour un matériau viscoélastique, on prendra des modules de Lamé complexes définis en fonction de l'amortissement visqueux  $\eta$  ou hystérétique  $\beta$ , voir la section §2.2.4 du chapitre §2.

### 1.2.1 Elastodynamique dans le sol et la structure

Sous l'action du champ incident  $\mathbf{u}_i$  se propageant dans le sol, le champ des déplacements  $\mathbf{u}$  dans le domaine  $\Omega_b \cup \Omega_s$  vérifie l'équation de Navier écrite dans le domaine fréquentiel :

$$\mathbf{Div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \rho\omega^2\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (1.1)$$

Sur la surface libre du demi-espace sol  $\Gamma_{sa}$  et à l'interface structure/air ambient  $\Gamma_{ba}$  s'applique la condition de surface libre :

$$\mathbf{t}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

S'appliquent en outre les conditions internes de continuité des déplacements et vecteurs contraintes à l'interface entre les couches du sol (mais le choix de la fonction de Green permet de les satisfaire implicitement) et à l'interface sol-structure. La condition de décroissance à l'infini dans le sol est écrite ici sous la forme,  $\forall\omega \in \mathbb{R}$  :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, \omega) \quad \text{quand } \|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty, \mathbf{x} \in \Omega_s$$

qui exprime simplement le fait que le champ des déplacements à l'infini doit se raccorder au champ sismique de site <sup>(1)</sup>. Celui-ci vérifie également l'équation de Navier, ainsi que la condition de surface libre sur tout  $\Gamma_{sa}^i$ , l'interface sol/air ambient avant construction de la fondation, mais il ne vérifie, par définition, aucune condition aux limites particulière à l'interface sol-structure  $\Gamma_{sf}$  ou à l'interface structure/air ambient. Afin de pouvoir vérifier ces conditions, le champ des déplacements dans le sol est décomposé en champ incident  $\mathbf{u}_i$  et champ diffracté total  $\mathbf{u}_d$  tel que détaillé en §2.1.3. Le champ diffracté total est lui-même décomposé (voir la section §2.3.3) en champ diffracté local  $\mathbf{u}_{di}$  et champ rayonné  $\mathbf{u}_{d*}$  par l'interface  $\Gamma_{sf}$ , le premier étant le champ des déplacements induit par la réflexion du champ incident sur l'interface maintenue fixe (voir la définition (2.35)), le second étant le champ des déplacements émis dans le sol par le mouvement de la fondation (voir la définition (2.37)). Les champs  $\mathbf{u}_{di}$  et  $\mathbf{u}_{d*}$  vérifient en outre l'équation de Navier dans le sol, Eq.(1.1), la condition de surface libre sur  $\Gamma_{sa}$ , et s'annulent à l'infini (condition de décroissance), soit donc :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{t}(\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{di}) = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{sa} \\ \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{di} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{sf} \\ \mathbf{t}(\mathbf{u}_{d*}) = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{sa} \\ \mathbf{u}_{d*} = \mathbf{u}_f & \text{sur } \Gamma_{sf} \\ \mathbf{u}_{di} + \mathbf{u}_{d*} = \mathbf{0} & \text{quand } \|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty \end{array} \right. \quad (1.2)$$

où  $\mathbf{u}_f$  désigne le champ des déplacements de la fondation (i.e. de l'interface  $\Gamma_{sf}$ ). Ces champs n'étant généralement pas connus analytiquement, ils seront évalués numériquement par une méthode d'équation intégrale décrite dans le chapitre §5. Ils constituent des inconnues auxiliaires du problème global, solutions dans le sous-domaine sol d'un problème aux limites particulier, permettant d'écrire simplement les déplacements de l'interface de couplage et leurs relèvements dans les deux sous-domaines.

<sup>1</sup>Ce point est crucial d'un point de vue mathématique afin d'assurer l'unicité de la solution du problème couplé lorsque l'un des sous-domaines traités est non borné. La condition aux limites "à l'infini" correspondante sera discutée plus précisément dans le chapitre §2.

### 1.2.2 Dynamique de la fondation

On suppose que la cinématique retenue dans le problème d'interaction sol-structure considéré (par exemple des mouvements de corps rigide) permet de décomposer le champ des déplacements de la fondation  $\mathbf{u}_f$  sur une base dite de modes d'interface, notée  $\{\Phi_p, p = 1, 2, \dots, P\}$ , telle que :

$$\mathbf{u}_f = \sum_{p=1}^P c_p \Phi_p, \quad \text{sur } \Gamma_{sf} \quad (1.3)$$

La condition de raccord cinématique sur l'interface  $\Gamma_{sf}$  permet alors de décomposer le champ rayonné total sous la forme :

$$\mathbf{u}_{d*} = \sum_{p=1}^P c_p \Phi_p^*$$

Les  $\{\Phi_p^*, p = 1, 2, \dots, P\}$  sont les champs rayonnés élémentaires dans le sol, qui vérifient l'équation de Navier dans  $\Omega_s$  et les conditions aux limites (1.2) avec  $\Phi_p^* = \Phi_p$  sur  $\Gamma_{sf}$  (ce sont des relèvements élastodynamiques) ; ils sont évalués numériquement par une équation intégrale de représentation. Le principe des travaux virtuels appliqué à l'équation d'équilibre dynamique de l'interface  $\Gamma_{sf}$  s'écrit :

$$\int_{\Gamma_{sf}} [\mathbf{t}_s(\mathbf{u}_s) + \mathbf{t}_b(\mathbf{u}_b)] \cdot \mathbf{v}_f dS = 0$$

pour tout champ de déplacement virtuel  $\mathbf{v}_f$  cinématiquement admissible ; l'indice  $b$  pour le vecteur contrainte se réfère à la normale extérieure pour le domaine  $\Omega_b$  et l'indice  $s$  à la normale extérieure pour le domaine  $\Omega_s$ , et  $\mathbf{u}_s$  (resp.  $\mathbf{u}_b$ ) est la restriction de  $\mathbf{u}$  à  $\Omega_s$  (resp.  $\Omega_b$ ).

### 1.2.3 Equation algébrique de l'interaction sol-structure

La procédure décrite ici est étudiée plus en détail dans le chapitre §4, section §4.1.4. A l'équation d'équilibre de la fondation ci-dessus est ajoutée celle de la structure, le champ des déplacements y étant décomposé sur la base (tronquée) de ses modes propres sur base fixe. En réécrivant ces équations d'équilibre au sens des travaux virtuels pour tout mode d'interface et mode propre sur base fixe respectivement, on en déduit le système linéaire suivant (voir l'Eq.(4.17)) :

$$[\mathbf{K}_b + \mathbf{K}_s] \{\mathbf{c}\} = \{\mathbf{f}_i\} \quad (1.4)$$

Les inconnues du système sont les *degrés de liberté (ddl) globaux* du problème  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_P)$ .  $[\mathbf{K}_b(\omega)]$  est la matrice d'impédance (raideur dynamique) symétrique de la structure.  $[\mathbf{K}_s(\omega)]$  est la matrice d'impédance de la fondation pour le problème d'interaction considéré, qui est symétrique, complexe et pleine (voir l'Eq.(4.21)) ; le vecteur colonne  $q$  est le vecteur des efforts que l'on doit appliquer à la fondation lorsqu'on souhaite la déplacer d'une unité dans la direction du mode d'interface  $\Phi_q$  :

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_s(\omega)]_{pq} &= \int_{\Gamma_{sf}} \mathbf{t}_s(\Phi_q^*) \cdot \Phi_p dS \\ &= -\omega^2 \int_{\Omega_s} \rho_s \Phi_p^* \cdot \Phi_q^* dV + \int_{\Omega_s} \boldsymbol{\sigma}_s(\Phi_p^*) : \boldsymbol{\epsilon}(\Phi_q^*) dV \end{aligned} \quad (1.4a)$$

Enfin  $\mathbf{f}_i$  est la *force sismique équivalente* appliquée à la fondation (voir l'Eq.(4.17b)), que l'on peut exprimer sous une forme indépendante de  $\mathbf{u}_{di}$  en tenant compte de la condition aux limites  $\Phi_p^* = \Phi_p$  sur  $\Gamma_{sf}$  :

$$\begin{aligned} \{\mathbf{f}_i\}_p &= - \int_{\Gamma_{sf}} \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{di}) \cdot \Phi_p \, dS \\ &= - \int_{\Gamma_{sf}} \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_i) \cdot \Phi_p \, dS + \int_{\Gamma_{sf}} \mathbf{t}_s(\Phi_p^*) \cdot \mathbf{u}_i \, dS \end{aligned} \quad (1.4b)$$

Tous ces éléments constituent *a priori* les données du problème. Par exemple les matrices de masse et raideur de la structure et de la fondation peuvent être calculés par tout code d'éléments finis standard, connaissant la géométrie de l'ensemble et la cinématique de la fondation. Par contre le calcul des vecteurs contraintes  $\mathbf{t}_s(\Phi_p^*)$ ,  $p = 1, \dots, P$ , nécessaire pour l'assemblage de l'impédance de la fondation, fait appel à un traitement particulier par équations intégrales de frontière résolu numériquement par éléments finis de frontière. Une fois le système (1.4) résolu pour toutes les fréquences de la plage considérée, le champ des déplacements de la fondation est reconstruit par l'Eq.(1.3) et une transformée de Fourier inverse afin d'obtenir des trajectoires dans le domaine temporel.

#### 1.2.4 Equations intégrales de bord pour le calcul des champs rayonnés

Les éléments introduits ici seront approfondis au chapitre §5, section §5.1, auquel on se reportera pour une bibliographie détaillée.

##### Fonction de Green

La formulation en équations intégrales de bord est fondée sur la connaissance explicite d'une solution particulière de l'équation de Navier dans le milieu considéré (ici le demi-espace sol homogène ou stratifié infini), appelée fonction de Green. La fonction de Green  $\mathbf{u}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; \mathbf{a})$  d'un milieu viscoélastique est le champ de déplacement induit en  $\mathbf{x}$  par une force ponctuelle unitaire de direction  $\mathbf{a}$  appliquée au point  $\boldsymbol{\xi}$  du milieu (voir la définition (5.1)). Elle vérifie l'équation de Navier hétérogène :

$$-\text{Div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^G) - \rho \omega^2 \mathbf{u}^G = \delta \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi} \mathbf{a} \quad (1.5)$$

On la construira également telle qu'elle vérifie les conditions aux limites homogènes sur le bord du domaine, et la condition de décroissance à l'infini (si le domaine est non borné) de la forme  $\mathbf{u}^G \rightarrow \mathbf{0}$  quand  $\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\| \rightarrow +\infty$ . Le premier tenseur de Green  $\mathbf{U}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$  est construit (voir la définition (5.2)) en parcourant, éventuellement, une base orthonormée  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  de telle sorte que :

$$[\mathbf{U}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})]_{jk} = \mathbf{u}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k$$

Le second tenseur de Green  $\mathbf{T}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$  est défini (voir la définition (5.3)) par :

$$\mathbf{T}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = \mathbf{t}_{\mathbf{n}(\mathbf{x})}(\mathbf{U}^G)(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$$

Le premier tenseur de Green n'est que faiblement singulier au point  $\boldsymbol{\xi}$ , malheureusement le second tenseur de Green l'est fortement. Ce point constitue une des difficultés majeures de la mise en oeuvre numérique de la méthode des équations intégrales exposées ci-dessous.

### Equation intégrale appliquée au domaine sol

Par application du principe de réciprocité de Maxwell-Betti au domaine sol  $\Omega_s$  et en traitant soigneusement la singularité au point  $\boldsymbol{\xi}$ , on obtient l'équation intégrale de bord :

$$\boldsymbol{\kappa}\mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Gamma_{sf}} \mathbf{U}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \mathbf{t}_s(\mathbf{v})(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) - \oint_{\Gamma_{sf}} \mathbf{T}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \quad (1.6)$$

valable pour les champs  $\mathbf{v} = \mathbf{u}_{di}$  ou  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Phi}_p^*$ ,  $p = 1, 2, \dots, P$ , avec :

$$\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} \mathcal{I}_d & \text{si } \boldsymbol{\xi} \in \Omega_s, \\ \mathbf{0} & \text{si } \boldsymbol{\xi} \notin \overline{\Omega_s}, \\ \frac{1}{2}\mathcal{I}_d & \text{si } \boldsymbol{\xi} \in \Gamma_{sf} \text{ supposée régulière.} \end{cases}$$

On trouvera par exemple dans Clouteau [41] ou Bonnet [19] une démonstration de ce résultat. Compte tenu de la forte singularité du second tenseur de Green, la deuxième intégrale du membre de droite est à évaluer au sens de la valeur principale de Cauchy. Les champs rayonnés élémentaires  $\boldsymbol{\Phi}_p^*$  étant connus sur la frontière  $\Gamma_{sf}$ , l'équation intégrale ci-dessus prise pour  $\boldsymbol{\xi} \in \Gamma_{sf}$  permet de calculer les champs de vecteurs contraintes recherchés  $\mathbf{t}_s(\boldsymbol{\Phi}_p^*)$  (de même pour  $\mathbf{t}_s(\mathbf{u}_{di})$  connaissant  $\mathbf{u}_{di} = -\mathbf{u}_i$  sur  $\Gamma_{sf}$ , Eq.(1.2)).

### Conséquences pour la prise en compte de l'aléa du sol

La fonction de Green n'est connue en pratique que pour les cas les plus simples : soit un milieu infini homogène, auquel cas elle est connue analytiquement, soit un demi-espace stratifié horizontalement, auquel cas elle n'est connue que numériquement. Si l'on souhaite tenir compte d'une hétérogénéité plus complexe du sol, il convient d'utiliser, pour une approche par équations intégrales, des fonctions de Green compatibles avec cette hétérogénéité. Ce point, ainsi que les limitations d'une telle formulation, sont abordés à la section §1.5.

#### 1.2.5 Influence de la variabilité spatiale sur l'interaction sol-structure

##### Les sources d'aléas

La formulation de l'interaction sol-structure par sous-structuration dynamique et équations intégrales telle qu'elle a été exposée précédemment fait apparaître deux sources possibles d'aléas liées à la variabilité spatiale des caractéristiques mécaniques du sol pour le problème considéré :

- l'aléa lié au champ sismique incident ;
- l'aléa lié à l'incertitude proprement dite sur les caractéristiques mécaniques du massif de sol adjacent à la fondation de la structure étudiée.

Le premier recouvre en fait deux niveaux d'incertitude, le premier dit à long terme, le second dit à court terme (voir Krée & Soize [115], Ch.VII). Les paramètres aléatoires à *long terme* du champ incident caractérisent le mécanisme proprement dit de génération du séisme, à savoir le type de rupture géomécanique, l'énergie libérée dans la zone du foyer, la durée pendant laquelle l'énergie se libère, la vitesse de propagation de la rupture qui est variable, l'amplitude totale de la dislocation le long de la faille, également variable, etc., ainsi que les caractéristiques de la propagation à grande échelle des ondes sismiques ainsi créées, telle que typiquement la distance épacentrale au site considéré ou la profondeur du foyer. Les



paramètres aléatoires à *court terme* caractérisent la propagation des ondes sismiques depuis la source jusqu'à la structure. En effet, du fait des fortes hétérogénéités du sol le long du parcours des ondes sismiques, celles-ci vont subir une multitude de diffractions, réflexions, interférences, atténuations dans les couches du sous-sol. Ces phénomènes extrêmement complexes, liés à l'incertitude de la connaissance du sol ne serait-ce qu'en profondeur, confère une nature stochastique évidente au champ incident. Ainsi deux accélérogrammes relatifs au même tremblement de terre, c'est-à-dire aux mêmes paramètres à long terme, et mesurés en deux points voisins d'un même site, sont généralement très différents.

Ceci nous amène donc à considérer le terme de chargement  $\mathbf{f}_i$  dans l'équation algébrique d'interaction sol-structure (1.4) comme un processus stochastique à énergie finie (du second ordre) dont on ne connaîtra généralement que la matrice de densité spectrale de façon totalement empirique, ainsi qu'éventuellement quelques trajectoires issues d'enregistrements si le site est instrumenté. Dans le cadre de ce travail, on se limitera à l'influence des paramètres à court terme uniquement et l'on ignorera le problème de l'occurrence d'un tremblement de terre : les paramètres à long terme sont fixés, et un séisme a effectivement lieu pour le site considéré.

Le deuxième type d'aléas influe sur les champs de déplacements  $\Phi_p^*$  et vecteurs contraintes  $\mathbf{t}_s(\Phi_p^*)$ ,  $p = 1, \dots, P$ , rayonnés par la fondation en mouvement, donc son impédance. Deux phénomènes dus à la présence d'hétérogénéités non identifiées du sol sont prévisibles dans un premier stade : un amortissement supplémentaire induit par la diffusion et la perte de cohérence sur les hétérogénéités, ainsi que des amplifications dues au confinement des ondes rayonnées au voisinage de la fondation par réflexion sur ces mêmes hétérogénéités. Ce problème peut être abordé formellement de deux manières :

- considérer un phénomène de propagation d'ondes en milieu aléatoire formulé de façon directe et traiter une équation de Navier à coefficients aléatoires (les modules non identifiés du sol, modélisés par des processus stochastiques) de manière à caractériser, dans la mesure du possible, les champs rayonnés aléatoires ;
- travailler directement sur l'équation intégrale de bord sur l'interface sol-structure  $\Gamma_{sf}$ .

### Variabilité spatiale du champ incident

Les méthodes classiques de dimensionnement des structures au séisme font appel au *spectre de réponse* de l'oscillateur simple associé à l'accélérogramme étudié (voir par exemple Labbé [120]). Celui-ci est défini pour un oscillateur simple de taux d'amortissement critique  $\zeta$  et de pulsation non amortie  $\omega_0$  par :

$$SR(\mathbf{x}, \zeta, \omega_0) = \frac{1}{\omega_0} \max_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \ddot{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}, \tau) \sin \omega_0 (t - \tau) e^{-\zeta \omega_0 (t - \tau)} d\tau \right|$$

en notant  $\ddot{\mathbf{u}}_i$  le vecteur d'accélération absolue du sol en un point donné (accélérogramme). Deux possibilités sont offertes : soit l'accélérogramme est tiré de l'enregistrement d'un tremblement de terre passé et connu, soit on utilise un spectre moyen issu de traitements statistiques de plusieurs spectres associés à des accélérogrammes connus mais relatifs à des séismes différents. Les structures multi-modales sont ensuite dimensionnées par des combinaisons linéaires ou quadratiques plus ou moins sophistiquées des spectres des différents modes pris seul à seul : combinaisons SRSS, CQC, etc. [120]. Ces méthodes considèrent que le tremblement de terre s'applique directement à la fondation supposée encastree dans

le sol, de façon ponctuelle ou alors parfaitement en phase pour tous les points de l'interface. Dans ces conditions, l'effet de la variabilité spatiale du champ incident n'est envisagé que pour des structures multi-supportées auxquelles, à chaque support, peuvent être par exemple appliqués des accélérogrammes différents. Sinon, la recombinaison quadratique des modes statiques pour l'évaluation de la réponse pseudo-statique maximale – SRSS, CQC ... – pourra faire intervenir un coefficient de corrélation entre les différentes excitations au niveau des appuis dues au séisme. On rentre alors dans le cadre des méthodes probabilistes.

L'approche stochastique classique est fondée sur les résultats du filtrage linéaire des processus stochastiques stationnaires. Si  $\mathbf{S}_{\mathbf{U}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)$  désigne la *fonction matricielle de densité spectrale transversale* (voir plus loin la section §1.3 et l'Annexe A pour plus de détails) du champ incident  $\mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t)$  – modélisé par un processus stochastique stationnaire en m.o.d. (voir la définition en Annexe A) et non-homogène  $\mathbf{U}_i(\mathbf{x}, t)$  – et définie par :

$$\mathbb{E} \{ \mathbf{U}_i(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{U}_i(\mathbf{x}', t') \} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega(t-t')} \mathbf{S}_{\mathbf{U}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) d\omega \quad (1.7)$$

$\mathbb{E} \{ \cdot \}$  désignant l'espérance mathématique, sa variabilité spatiale est caractérisée par la *fonction de cohérence transversale*  $\gamma_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)$  définie par :

$$[\mathbf{S}_{\mathbf{U}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)]_{jk} = [\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{U}_i}(\omega)]_{jj} \gamma_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)$$

pour deux directions  $j, k = 1, 2$  ou  $3$  du champ incident.  $\gamma_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \omega) = 1$  pour toutes les fréquences, ce qui est le cas pour un séisme appliqué au point d'encastrement de la structure dans le sol. On verra dans la section suivante (§1.3) quels sont les modèles et les propriétés de cette fonction de cohérence, établis à partir de divers enregistrements et réseaux d'accéléromètres.  $[\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{U}_i}(\omega)]_{jj} = [\mathbf{S}_{\mathbf{U}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \omega)]_{jj}$  est simplement la fonction de densité spectrale de puissance du champ incident au point  $\mathbf{x}$  dans la direction  $j$ , généralement supposée indépendante de ce point pour un site donné et de la direction  $j$ . Un modèle classique est celui dit de Kanai-Tajimi (Kanai [105], Clough & Penzien [39]). Si  $\tilde{h}_j(\omega)$  désigne la fonction de réponse en fréquence d'un mode de vibration particulier  $(\omega_j, \xi_j)$  donnée par :

$$\tilde{h}_j(\omega) = \frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2 + 2i\xi_j\omega_j\omega}$$

alors la fonction de densité spectrale de la réponse de la structure pour le mode considéré (coordonnée généralisée  $\mathbf{q}_j$ ) est :

$$\mathbf{S}_{\mathbf{q}_j}(\omega) = \left| \tilde{h}_j(\omega) \right|^2 \tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{U}_i}(\omega) \quad (1.8)$$

Si le champ incident est gaussien, la coordonnée généralisée l'est aussi par linéarité et l'on peut déduire de sa fonction de densité spectrale des résultats de taux de passage par un niveau et sur une période donnés pour un dimensionnement en fatigue, ou de niveau maximal attendu pour un dimensionnement aux états limites (voir par exemple Soize [192]). On trouvera par exemple dans Kahan *et al.* [102] une approche prenant en compte la variabilité spatiale du champ incident sous la forme d'une fonction de cohérence particulière, pour l'étude de la réponse d'un pont à plusieurs appuis. En effet dans ce cas interviennent les corrélations croisées des mouvements des différents appuis induits par le séisme lorsqu'on cherche à évaluer la réponse maximale attendue de la structure par des combinaisons quadratiques des maxima des modes statiques et dynamiques (modes propres sur base fixe),

calculés à partir d'expressions similaires à l'Eq.(1.8). Plus précisément interviennent ici des coefficients de corrélation entre les modes propres, non nuls pour des fréquences proches, et les déplacements imposés par le tremblement de terre aux différents appuis.

Certains auteurs (Hoshiya & Ishii [95], Harichandran [88], Veletsos & Prasad [217]) tiennent néanmoins compte de l'étendue de la fondation en moyennant sur sa surface le champ sismique incident  $\mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t)$  pour obtenir son mouvement  $\mathbf{u}_f(t)$  (fondation supposée rigide), dont ils déduisent la fonction de densité spectrale matricielle connaissant celle du champ incident stationnaire et non-homogène. Formellement, ceci se résume par :

$$\mathbf{u}_f(t) \approx \frac{1}{|\Gamma_{sf}|} \int_{\Gamma_{sf}} \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t) dS(\mathbf{x})$$

(auquel on peut rajouter un terme de la forme  $\int_{\Gamma_{sf}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G) \wedge \boldsymbol{\omega}_f dS(\mathbf{x})$  où  $\mathbf{x}_G$  est son centre de gravité et  $\boldsymbol{\omega}_f$  le vecteur rotation), et :

$$\mathbf{S}_{\mathbf{u}_f}(\omega) = \frac{1}{|\Gamma_{sf}|^2} \iint_{\Gamma_{sf} \times \Gamma_{sf}} \mathbf{S}_{\mathbf{u}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) dS(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}')$$

La fondation apparaît ainsi comme un filtre passe-bas de l'excitation du champ incident, d'autant plus performant que la fondation est étendue ou que les fréquences propres de la structure sont élevées. Par ailleurs, cet effet de filtrage sera plus prononcé pour les accélérations que pour les déplacements de la structure. Les réductions observées sont également significatives lorsque la vitesse apparente des ondes sismiques incidentes diminue, c'est-à-dire lorsque l'angle d'incidence par rapport à la verticale augmente.

Toutes ces méthodes simplifiées ne tiennent pas compte de l'interaction sol-structure. Pour de larges fondations, telles que celles de centrales nucléaires du type REP-2000, il devient nécessaire de tenir compte de ses effets. Une approche intéressante, fondée sur l'équation générale (1.4), a été développée par Luco & Wong [142] et Luco & Mita [140] pour une fondation rigide superficielle. L'équation d'interaction sol-structure cinématique s'écrit :

$$[\mathbf{K}_s(\omega)] \{\mathbf{c}_c\} = \{\mathbf{f}_i\} \quad (1.9)$$

où les  $\mathbf{c}_c$  sont les degrés de liberté globaux cinématiques et le chargement équivalent s'exprime pour une fondation superficielle ( $\Gamma_{sf} \subset \Gamma_{sa}^i$ ) :

$$\{\mathbf{f}_i\}_p = \int_{\Gamma_{sf}} \mathbf{t}_s(\boldsymbol{\Phi}_p^*) \cdot \mathbf{u}_i dS \quad (1.9a)$$

Cette équation est linéaire vis-à-vis du champ incident et permet d'accéder simplement aux moments du second ordre (moyenne et variance) des degrés de liberté globaux. Si le champ incident est de moyenne nulle, alors les degrés de liberté globaux cinématiques sont également de moyenne nulle. En particulier, leur fonction matricielle de densité spectrale est :

$$[\mathbf{S}_{\mathbf{c}_c}(\omega)] = [\mathbf{K}_s(\omega)]^{-1} [\mathbf{S}'_{\mathbf{u}_i}(\omega)] [\mathbf{K}_s(\omega)^*]^{-1} \quad (1.10)$$

où :

$$[\mathbf{S}'_{\mathbf{u}_i}(\omega)] = \iint_{\Gamma_{sf} \times \Gamma_{sf}} [\mathbf{T}_d(\mathbf{x}, \omega)] [\mathbf{S}_{\mathbf{u}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)] [\mathbf{T}_d(\mathbf{x}', \omega)]^* dS(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}')$$

avec  $[\mathbf{T}_d] = [\mathbf{t}_s(\boldsymbol{\Phi}_1^*), \dots, \mathbf{t}_s(\boldsymbol{\Phi}_p^*)]$  et \* désignant la matrice conjuguée transposée. On peut ensuite, pour une fonction de cohérence particulière, calculer les différents termes de la

matrice de densité spectrale des degrés de liberté globaux normalisés par les éléments de la matrice  $[\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{U}}(\omega)]$ . Les différents résultats obtenus montrent que la prise en compte des effets d'incohérence du champ incident tend à écrêter les modes de tamis et de pompage par rapport à un calcul purement déterministe pour une incidence verticale, tandis que les modes de torsion et balancement qui n'apparaissent pas dans ce dernier cas sont excités du fait de la variabilité spatiale. Ces conclusions sont tout à fait similaires aux effets obtenus pour des incidences obliques (Luco & Wong [141]) : on prend alors en compte une incohérence spatiale du champ incident dont l'origine est purement déterministe et correspond à l'effet du passage d'ondes. Elles ont été confirmées par Wang & Gantenbein [219] par une approche éléments finis dans le cas d'un sol stratifié. D'autres auteurs (Païs & Kausel [161]) sont encore parvenus à des conclusions identiques en considérant des ondes planes de type SH à incidences aléatoires et une fondation rigide sans masse superficielle ou enterrée. Ils montrent également que la prise en compte de l'effet d'interaction cinématique tend généralement à réduire la réponse de la structure, sauf pour le cas d'une structure relativement élevée et profondément enterrée dans une certaine bande de fréquences.

### Variabilité spatiale des caractéristiques du sol

Contrairement à la variabilité du champ incident, les effets de la variabilité des caractéristiques du sol ont été très peu étudiés dans la littérature. Celle-ci, si l'on se place dans le cadre de l'interaction sol-structure telle que formulée par l'Eq.(1.4), est susceptible d'influer sur la matrice d'impédance du sol  $[\mathbf{K}_s(\omega)]$ . Une première approche, ainsi que déjà mentionné, consiste à travailler sur l'équation intégrale permettant d'accéder aux champs rayonnés par la fondation. Pour cela, on peut utiliser les résultats analytiques ou numériques donnant les fonctions de Green d'un sol hétérogène particulier. On verra dans la section §1.5 quels sont les cas traités dans la littérature. Récemment, Savidis et Vrettos [181] ont traité le cas d'un profil de sol dont le module de cisaillement croît linéairement avec la profondeur, la densité et le coefficient de Poisson restant constants. La fonction de Green est connue analytiquement dans ce cas (Vrettos [218]). Ils montrent que les impédances de balancement et de pompage sont en partie réelle légèrement supérieures et en partie imaginaire légèrement inférieures au cas homogène dont le module de cisaillement est le module du sol hétérogène à la surface du sol. Pour un sol stratifié, les fonctions de Green sont connues numériquement et l'on peut en déduire de même les impédances d'une fondation superficielle ou enterrée pour un profil de sol déterminé (voir par exemple Chapel [32]).

Dans sa thèse, Toubalem [209, 210] considère un modèle de fondation de Winkler bi-dimensionnel pour lequel la densité de rigidité du sol admet une fluctuation aléatoire centrée, stationnaire. Sa fonction de cohérence étant donnée, on peut simuler des trajectoires de cette fluctuation par la méthode spectrale de représentation intégrale (Shinozuka [187], Poirion & Soize [171], voir section §1.3.4 et l'Annexe C) et en déduire :

- l'impédance de la fondation suivant un modèle de Winkler par intégration,
- ses fréquences de résonance par une équation aux valeurs propres,

le tout étant calculé pour l'ensemble des tirages effectués sur la fluctuation (Monte-Carlo).

Un traitement statistique immédiat permet d'accéder aux grandeurs du second ordre (moyennes et écarts-types) de ces valeurs. La fondation étant rigide et axisymétrique, un calcul déterministe aurait donné exactement les mêmes fréquences propres de balancement selon deux axes horizontaux perpendiculaires. L'approche probabiliste a permis de corroborer, au moins qualitativement, les résultats expérimentaux obtenus par ailleurs pour la maquette d'Hualien

à Lotung, Taiwan, à savoir que ces fréquences propres pouvaient être légèrement décalées. Néanmoins la méthode retenue ne permet pas d'affirmer que cette irrégularité est bien due à l'aléa du sol.

Le texte de Savidis et Vrettos [181] donne un rapide aperçu de quelques autres investigations déjà effectuées, sans pour autant faire apparaître des résultats plus globaux.

### 1.2.6 Axes de recherches

Ainsi, la formulation intégrale de l'interaction sismique sol-structure nous a permis d'aborder les sources d'aléas susceptibles d'influencer la réponse de la structure lors d'un tremblement de terre. On a vu dans un premier temps comment les effets des variabilités spatiales du champ incident et des caractéristiques mécaniques du massif de sol immédiatement adjacent à la fondation avaient été traités dans le cadre qui nous intéresse. Afin d'enrichir les modèles déjà proposés et que l'on a brièvement rappelés ci-dessus, plusieurs axes de recherches ont été dégagés :

- caractéristiques probabilistes du champ sismique incident lorsque les paramètres à long terme sont fixés : quels sont notamment les modèles stochastiques retenus, les lois de probabilité, les fonctions de cohérence et densités spectrales de puissance répertoriées dans la littérature ;
- modèles probabilistes du comportement des sols, notamment quelles sont les structures de corrélation entre les différents paramètres mécaniques mesurés *in situ* ou en laboratoire ;
- propagation d'ondes en milieux hétérogènes déterministe et aléatoire : en effet, il nous a semblé intéressant d'approfondir ces différents aspects, car nous avons vu que la variabilité spatiale des propriétés du sol influait sur l'impédance de la fondation par le biais des champs de déplacements et vecteurs contraintes rayonnés dans le massif de sol hétérogène. Nous nous sommes notamment intéressés aux modèles de fonction de Green pour des milieux hétérogènes, éventuellement intéressants pour le traitement des équations intégrales de bord (voir l'Eq.(1.6)).

Ces trois points sont approfondis dans les sections suivantes.

## 1.3 Modèles probabilistes de champs incidents

La connaissance des caractéristiques probabilistes des tremblements de terre, lorsque les paramètres à long terme sont supposés fixés, a été sensiblement améliorée grâce à la mise en place de quelques réseaux d'accéléromètres sur des sites donnés, tels que le réseau différentiel d'El Centro (Spudich & Cranswick [203]), SMART-1 et LSST à Lotung, Taiwan (Loh *et al.* [139], Harichandran & Vanmarcke [90], Loh & Yeh [138], Hao [86]) ou EURO-SEISTEST en Grèce (Pitilakis *et al.* [169]). Néanmoins, le nombre de ces réseaux reste encore assez réduit et la cohérence spatiale du mouvement sismique n'est connue que de façon le plus souvent empirique. L'installation de tels réseaux est économiquement réhivitoire notamment parce qu'elle n'a de sens, dans le cadre des objectifs fixés, que si le sous-sol du site instrumenté est parfaitement connu. On trouvera par exemple dans la thèse de Laouami [126] ou dans une communication récente de Zerva [229] une revue bibliographique assez complète des modèles expérimentaux et théoriques de fonctions de cohérence du champ incident. Notons d'ores et déjà que le caractère fortement non stationnaire des séismes, ainsi que la relative rareté des

données disponibles, font que le traitement numérique et statistique des enregistrements disponibles posent de nombreuses difficultés d'ordre théorique et pratique. De très nombreuses études, tant dans la communauté géophysicienne que mécanicienne, traitent de ces difficultés, et les résultats présentés sont souvent fortement liés à la méthodologie retenue pour l'analyse des données. Ainsi nous présenterons ici quelques-uns des modèles de fonction de cohérence les plus couramment référencés dans la littérature, mais aussi d'autres résultats concernant la variabilité des tremblements de terre faisant appel à des approches un peu différentes. On présentera également quelques méthodes de simulation de trajectoires des champs incidents.

### 1.3.1 Modèles théoriques

Les champs sismiques incidents, en déplacements ou en accélérations, sont modélisés par des champs stochastiques indexés sur la variable d'espace  $\mathbf{x}$  et le temps  $t$ . Ils sont :

1. *centrés*, c'est-à-dire de moyenne d'ensemble nulle (au sens de l'espérance mathématique),
2. *du second ordre*, c'est-à-dire d'énergie finie,
3. et souvent supposés *gaussiens*.

Par conséquent, ils sont entièrement décrits statistiquement par la donnée de leur fonction d'auto-corrélation, à valeurs matricielles dans le cas général de champs stochastiques à trois composantes. Ainsi les études expérimentales et théoriques de coefficients de corrélation ou de fonctions de cohérence se justifient pleinement dans la mesure où elles permettent d'accéder à la plus large information possible sur les processus correspondants. On verra donc dans le paragraphe suivant quelles en sont leurs principales caractéristiques. On rappelle ici (voir l'Annexe A et les références citées pour plus de détails) que pour un champ stochastique quelconque  $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$  indexé sur un sous-domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , du second ordre, centré, de fonction d'autocorrélation  $\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t' \mapsto \mathbf{R}_{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') : \Omega \times \Omega \rightarrow \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n, n)$ , le coefficient d'inter-corrélation des variables aléatoires  $U_j(\mathbf{x}, t)$  et  $U_k(\mathbf{x}, t)$  pour tout  $j$  et  $k$  dans  $\{1, 2, \dots, n\}$ , à valeurs dans  $[0, 1]$ , est défini par :

$$r_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') = \frac{|\mathbf{R}_{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t')_{jk}|}{\sqrt{[\mathbf{R}_{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t, t)]_{jj} [\mathbf{R}_{\mathbf{U}}(\mathbf{x}', \mathbf{x}', t', t')]_{kk}}}$$

Les deux termes au dénominateur sont les écarts-types du champ incident dans la direction  $j$  ou  $k$  et au point  $(\mathbf{x}, t)$ . Si par ailleurs le processus est stationnaire et continu en moyenne d'ordre deux, et si sa mesure spectrale admet une densité, notée  $\mathbf{S}_{\mathbf{U}}(\mathbf{k}, \omega)$ , définie sur  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\text{Mat}_{\mathbb{C}}(n, n)$  et telle que (voir aussi l'Eq.(1.7)) :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}} e^{i[\omega(t'-t) - \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})]} \mathbf{S}_{\mathbf{U}}(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k} d\omega \quad (1.11)$$

alors la fonction de cohérence ("coherency function" en Anglais) au point  $(\mathbf{k}, \omega)$  des processus  $U_j(\mathbf{x}, t)$  et  $U_k(\mathbf{x}, t)$ , à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , est définie par :

$$\tilde{\gamma}_{jk}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{[\mathbf{S}_{\mathbf{U}}(\mathbf{k}, \omega)]_{jk}}{\sqrt{[\mathbf{S}_{\mathbf{U}}(\mathbf{k}, \omega)]_{jj} [\mathbf{S}_{\mathbf{U}}(\mathbf{k}, \omega)]_{kk}}} \quad (1.12)$$

Notons qu'elle est identique pour des déplacements  $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$  ou des accélérations  $\ddot{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t)$ . Les deux termes au dénominateur sont les carrés des écarts-types dans l'espace des phases du champ incident dans la direction  $j$  ou  $k$  et au point  $(\mathbf{k}, \omega)$ .

La propriété 3 est souvent évoquée dans la littérature en vertu du théorème central limite, mais Papanicolaou *et al.* ([30], voir aussi la section §1.7) ont montré dans le cadre de l'équation de Helmholtz à coefficients aléatoires que celle-ci était plutôt conditionnée par le caractère fini de la vitesse de propagation des ondes. En revanche, les deux premières propriétés invoquées sont largement justifiées par la physique des phénomènes observés.

Une hypothèse de stationnarité vis-à-vis de la variable de temps  $t$  est souvent faite dans la littérature, qui a le mérite de simplifier avantageusement les développements théoriques mais n'est en rien justifiée par les résultats expérimentaux. Plus généralement, les tremblements de terre sont à la fois non stationnaires en temps, c'est-à-dire que leurs propriétés probabilistes ne sont pas invariantes par translation dans le temps, mais également non homogènes dans l'espace, c'est-à-dire que leurs propriétés probabilistes ne sont pas invariantes par translation dans l'espace. On supposera donc que, dans ce cas, la fonction d'autocorrélation du champ incident s'écrit plutôt sous la forme plus générale (voir Priestley [174] ou Poirion & Soize [171]) :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}} e^{i[\omega(t'-t) - \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})]} \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t, \mathbf{k}, \omega) \mathbf{S}_{\mathbf{U}}(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{Q}(\mathbf{x}', t', \mathbf{k}, \omega)^* d\mathbf{k} d\omega \quad (1.13)$$

$\mathbf{k}, \omega \mapsto \mathbf{S}_{\mathbf{U}}(\mathbf{k}, \omega) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n, n)$  a ici toutes les propriétés d'une fonction densité spectrale matricielle d'un processus stationnaire ;  $\mathbf{x}, t, \mathbf{k}, \omega \mapsto \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t, \mathbf{k}, \omega)$  est une fonction continue, à valeurs dans  $\text{Mat}_{\mathbb{C}}(n, n)$ , ayant la propriété suivante :

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t, -\mathbf{k}, -\omega) = \overline{\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t, \mathbf{k}, \omega)}$$

On peut reprendre les mêmes définitions pour les coefficients de corrélation et les fonctions de cohérence, en remplaçant  $\mathbf{S}_{\mathbf{U}}(\mathbf{k}, \omega)$  dans l'Eq.(1.12) par la *fonction de densité spectrale instantanée* (ou évolutive [174]), *locale* définie par :

$$\mathbf{S}_{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t, \mathbf{k}, \omega) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t, \mathbf{k}, \omega) \mathbf{S}_{\mathbf{U}}(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t, \mathbf{k}, \omega)^* \quad (1.14)$$

De nombreuses études statistiques sur les accélérogrammes de séismes passés ont montré (voir Kanai [105], Kubo & Penzien [118, 119] ou Yeh & Wen [227] et la section §3.1) que les composantes du champ sismique incident pouvaient se mettre sous la forme :

$$U_j(\mathbf{x}, t) = \varphi_j(t) V_j(\mathbf{x}, t) \quad (1.15)$$

où  $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = (V_1(\mathbf{x}, t), V_2(\mathbf{x}, t), V_3(\mathbf{x}, t))$  est un champ stochastique du second ordre, centré, stationnaire en m.o.d. en temps et non-homogène en espace ;  $t \mapsto \varphi_j(t)$  est une fonction déterministe continue, de carré intégrable, dite *fonction de modulation*. Cette représentation est couramment utilisée dans la littérature (voir par exemple Liu [136], Langley [125], Lin *et al.* [133]), et permet de se ramener à des traitements mathématiques et numériques tout à fait similaires à ceux des processus stationnaires bien connus. Par contre, une approche numérique plus réaliste exige la détermination expérimentale des fonctions de modulation et de cohérence du champ modulé stationnaire en temps [136]. L'effet de la non-stationnarité

est de faire varier le contenu fréquentiel du signal sismique, et donc de la réponse de la structure, en fonction du temps, contrairement au cas stationnaire. La gamme de fréquence ainsi mise en jeu peut être alors beaucoup plus étendue et d'autant plus pénalisante pour le dimensionnement de l'ouvrage étudié.

### 1.3.2 Fonctions de cohérence

On s'intéresse maintenant aux expressions retenues dans la littérature pour les fonctions de cohérence du champ incident. Celle-ci permet de décrire quantitativement la variabilité spatiale du champ sismique incident, aussi bien en terme d'amplitude qu'en terme de phase. Physiquement la variabilité spatiale se traduit simplement par l'observation de déplacements différentiels non nuls en deux points plus ou moins éloignés du site étudié lors d'un tremblement de terre. Elle dépend donc de phénomènes non-linéaires locaux tels que la présence en surface d'une faille induisant un mouvement relatif entre les points d'observations, ou la liquéfaction du sol sous l'action du séisme, ou bien encore les éventuels glissements de terrain engendrés. Généralement ces aspects sont ignorés dans l'étude de la variabilité spatiale des mouvements sismiques, ne serait-ce que parce qu'ils conservent un caractère très exceptionnel, sont plus facilement prévisibles et à ce titre peuvent être pris en compte directement par une approche purement déterministe dans un dimensionnement industriel. Les études se concentrent plus volontiers sur les aspects, beaucoup plus difficiles à caractériser, liés à la propagation des ondes sismiques depuis la source jusqu'en surface dans des régimes aussi bien linéaires (diffractions multiples par exemple) que non-linéaires (amortissement et dissipation par exemple). Compte tenu de cette limitation, on considère que la variabilité spatiale du champ incident dépend de quatre phénomènes distincts généralement identifiés comme suit :

1. *l'effet d'incohérence* pure : celui-ci englobe les effets des nombreuses diffractions, réflexions, interférences que l'onde sismique subit depuis la source, éventuellement très étendue, jusqu'à une distance du site étudié telle que globalement les données mécaniques des sols ne sont plus accessibles aux mesures ;
2. *l'effet de passage d'onde* : celui est lié aux différences des temps d'arrivée de l'onde sismique aux différentes stations de mesure. Il est purement déterministe dès lors que l'on connaît parfaitement la phase du signal ;
3. *l'effet d'atténuation*, correspondant à la dissipation en amplitude des ondes en fonction de la distance par amortissements géométrique et énergétique, à la diffusion et à la dispersion lorsque la vitesse de phase dépend de la fréquence ;
4. enfin *l'effet de site*, lié à la variabilité locale (géologie et stratigraphie) du profil du sol pour le site considéré.

Leur importance relative dépend essentiellement :

- de l'échelle d'observation : si elle est de quelques kilomètres, l'amortissement peut devenir le facteur prépondérant, tandis que si elle n'est que de quelques centaines de mètres il est plus probable que le contenu de la phase de l'onde aura un rôle important ;
- de la gamme fréquentielle : les hautes fréquences sont susceptibles d'être bien plus sensibles aux réflexions multiples et à l'amortissement que ne le sont les basses fréquences. Une conséquence immédiate est que les accélérations observées dues à un séisme sont bien plus incohérentes que les déplacements ou même les vitesses correspondantes.



Der Kiureghian [56] compare par exemple l'influence des effets du passage d'onde et du site sur la réponse sismique d'une structure étendue telle qu'un pont (déplacements différentiels des appuis par exemple) : ainsi l'effet de site sera plus important pour des travées relativement courtes correspondant à une fréquence fondamentale de vibration comprise entre  $0.5 \text{ Hz}$  et  $1.5 \text{ Hz}$  alors que l'effet du passage d'onde est plus pénalisant pour des travées plus longues. Quoi qu'il en soit la complexité des phénomènes mis en jeu justifie pleinement l'utilisation d'une approche probabiliste afin de caractériser l'influence de la variabilité spatiale des tremblements de terre liée à la propagation des ondes sismiques.

La fonction de cohérence globale du champ incident sera le produit des fonctions de cohérence particulières liées à ces quatre phénomènes dans la mesure où ils restent relativement indépendant les uns des autres. Si l'on cherche en plus à évaluer l'effet des paramètres à long terme, il suffit de multiplier cette fonction par la fonction de cohérence du mécanisme à la source - pourvu que celle-ci soit connue. C'est sur la base de cette classification que Der Kiureghian [56] a proposé un modèle théorique général de *fonction de cohérence transversale*, limité au cas stationnaire en temps et non-homogène en espace avec  $j = k$  dans l'Eq.(1.12), c'est-à-dire :

$$\gamma_V(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) = \frac{S_V(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)}{\sqrt{S_V(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \omega)S_V(\mathbf{x}', \mathbf{x}', \omega)}}$$

où dans l'Eq.(1.11) la transformée de Fourier n'est appliquée que pour la variable de temps ; pour une direction donnée du champ incident, la fonction de densité spectrale transversale  $S_V(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)$  a la forme correspondant à l'Eq.(1.14) :

$$S_V(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) = Q(\mathbf{x}, \omega)S(\omega)Q(\mathbf{x}', -\omega)$$

Dans ce modèle, la fonction de cohérence correspondant à l'effet d'incohérence pure est réelle, positive ou nulle ; l'effet du passage d'onde introduit un terme de phase pur, tandis que l'effet d'atténuation n'introduit lui qu'un terme réel relativement proche de 1 dans tous les cas ; enfin l'effet de site n'introduit lui généralement qu'un terme de phase ne dépendant, sous certaines hypothèses simplificatrices réalistes, que des paramètres mécaniques du sol au droit des points d'observation considérés indépendamment de leur distance et du mouvement du bedrock.

## Modèles empiriques

Dans le cas où l'on dispose d'enregistrements obtenus par des réseaux denses d'accéléromètres, on peut construire par des méthodes de régression des modèles empiriques de fonctions de cohérence transversale. Ceux-ci, ainsi que les modèles semi-empiriques introduits ci-après, sont fondés sur un certain nombre d'observations générales concernant les accélérations enregistrées à la surface libre. Ainsi, les effets d'incohérence, d'atténuation et de site sont de nature isotrope <sup>(2)</sup>, si bien que les fonctions de cohérence correspondantes ne dépendent en fait que de la distance  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$ . Pour ce qui concerne l'effet du passage d'onde, il est souvent possible d'identifier une vitesse apparente approximative et une direction de propagation depuis l'épicentre. On peut dès lors retenir la forme générale de la fonction de

<sup>2</sup>Ou plutôt c'est une hypothèse souvent faite *a priori* pour le traitement des données relatives à un site particulier.

cohérence transversale :

$$\gamma_V(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) = \rho_V(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|, \omega) e^{-i\omega \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{c_{\text{app}}}} \quad (1.16)$$

où  $c_{\text{app}}$  est la célérité apparente de l'onde sismique dans la direction radiale (épicentre - point d'observation) de vecteur directeur unitaire  $\mathbf{r}$ , et  $\rho_V(x, \omega)$  est la fonction de cohérence transversale englobant les effets d'incohérence pure, d'atténuation et de site. Notons à ce stade que l'on trouve par ailleurs dans la littérature anglo-saxonne différentes définitions associées à la fonction de cohérence transversale : la cohérence ("coherency") est le carré de la fonction de cohérence transversale, et est un nombre réel positif compris entre 0 et 1 ; en écrivant la fonction de cohérence transversale à valeurs complexes sous la forme :

$$\gamma_V(d, \omega) = |\gamma_V(d, \omega)| e^{i\theta(d, \omega)} \quad (1.17)$$

avec  $d = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$ ,  $\theta(d, \omega)$  défini alors le spectre de phase ("phase spectrum"),  $|\gamma_V(d, \omega)|$  la cohérence retardée ("lagged coherency") et  $\Re[\gamma_V(d, \omega)]$  la cohérence non retardée ("unlagged coherency"). Notons enfin que, d'un point de vue terminologique, l'étude de la cohérence ne porte généralement que sur le terme de phase tandis que l'étude de la variabilité spatiale se réfère quant à elle à la fois au terme d'amplitude et au terme de phase.

Dans le tableau ci-dessous sont reportés les distances caractéristiques considérées pour l'élaboration de ces modèles à partir des enregistrements issus des quatre principaux réseaux décrits dans la littérature. Plusieurs modèles empiriques fondés sur des enregistrements

nom du réseau	$\ \mathbf{x} - \mathbf{x}'\ _{\min}$ (m)	$\ \mathbf{x} - \mathbf{x}'\ _{\text{Max}}$ (m)
El Centro	7.6	312.6
SMART-1	100.	4000.
LSST	0.	100.
EURO-SEISTEST	8.-100.	100.-5500.

TAB. 1.1 – Distances caractéristiques entre stations de réseaux denses d'accéléromètres récents.

particuliers des réseaux cités ci-dessus ont été proposés :

- Hoshiya & Ishii [95],

$$|\gamma_V(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)| = \exp[-\alpha(|x - x'| + |y - y'| + |z - z'|)] \cos(\beta z) \cos(\beta z') \quad (1.18)$$

avec  $\alpha = \frac{a+b\omega}{c_{\text{app}}}$ , la particularité de ce modèle étant de proposer une expression de la cohérence en profondeur et non pas seulement en surface. Il est fondé sur des enregistrements pour des distances entre stations de l'ordre de 50 m ;

- Harichandran & Vanmarcke [90] et Harichandran [89] pour le réseau SMART-1,

$$\begin{aligned} |\gamma_V(d, \omega)|_1 &= A \exp\left(\frac{-2Bd}{a\beta(\omega)}\right) + (1 - A) \exp\left(\frac{-2Bd}{\beta(\omega)}\right) \\ |\gamma_V(d, \omega)|_2 &= A \exp\left(\frac{-2(1 - A)d}{a\beta(\omega)}\right) + (1 - A) \\ \beta(\omega) &= k \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^b\right]^{-\frac{1}{2}} \\ B &= 1 - A + aA \end{aligned} \quad (1.19)$$

où la relation pour  $|\gamma_V(d, \omega)|_2$  [89] s'applique au delà de certaines fréquence et distance de coupure ;

- Loh & Yeh [138] également pour le réseau SMART-1,

$$\gamma_V(d, \omega) = \exp [(-a - b\omega)d^c] \quad (1.20)$$

- Abrahamson *et al.* [1] pour le réseau LSST,

$$\tanh^{-1} |\gamma_V(d, \omega)| = (a_1 + a_2d) \left[ \exp ((b_1 + b_2d)\omega) + \frac{1}{3}\omega^c \right] + k \quad (1.21)$$

- Hao [86] pour le réseau SMART-1,

$$\begin{aligned} |\gamma_V(d, \omega)| &= \exp \left[ - (\alpha_1(\omega)d_l^2 + \alpha_2(\omega)d_t^2) \omega \right] \\ \alpha_j(\omega) &= \frac{a_j}{\ln(\omega) + b_j}, \quad j = 1, 2 \\ d_l &= |(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \mathbf{r}|, \quad d_t = \|(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - [(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \mathbf{r}] \mathbf{r}\| \end{aligned} \quad (1.22)$$

etc., avec les mêmes limitations que le modèle théorique de Der Kiureghian ; les différents paramètres intervenant dans ces expressions sont évalués à partir des enregistrements pour le site considéré. Certains auteurs déduisent de ces fonctions exprimées pour des mouvements de translation les fonctions de cohérence pour des mouvements de torsion (Laouami [126], Hao [86]) dont on sait par ailleurs qu'ils sont amplifiés par l'incohérence spatiale (voir la section §1.2) lorsqu'on s'intéresse à la réponse de la structure.

Globalement, la fonction de cohérence retardée tend à décroître quand la fréquence augmente et quand la distance entre les points d'observations augmente également. La décroissance en fonction de la distance est plus forte aux basses fréquences et s'atténue en hautes fréquences, tandis que la décroissance en fonction de la fréquence est plus prononcée passé une certaine fréquence et une certaine distance de coupure (Harichandran & Vanmarcke [90], Harichandran [89]). Par contre, l'écart-type dans l'espace des phases  $\sigma_V(\mathbf{x}, \omega) = \sqrt{S_V(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \omega)}$  tend à augmenter quand la fréquence augmente (Hoshiya & Ishii [95]). D'autres études (voir par exemple Toksöz *et al.* [208]) montrent plutôt que la fonction de cohérence dépend du produit  $\omega \frac{d}{\lambda}$ , où  $\lambda$  désigne la longueur d'onde, ce qui suggère une décroissance similaire en fonction de la fréquence et de la distance. Différents facteurs influent donc sur la perte de cohérence des ondes sismiques, et ceux-ci varient suivant les échelles utilisées ; par ailleurs les différents auteurs ayant proposé des modèles de fonction de cohérence reconnaissent qu'ils restent largement dépendant des enregistrements (pour un séisme particulier) choisis pour l'analyse, même si le site reste le même. On peut tout de même remarquer que la caractérisation de la variabilité de la phase pose quelques difficultés d'analyse lorsqu'on traite un jeu de données expérimentales. Ainsi, en théorie, non seulement l'extrapolation du modèle obtenu pour un évènement particulier à un autre évènement n'est pas justifiée, mais encore l'existence d'une fréquence ou distance de coupure interdit également l'extrapolation de ce même modèle à d'autres ordres de grandeur des distances de séparation ou des fréquences <sup>(3)</sup>. Nous insistons encore ici sur le fait que ces études ne concernent que la cohérence d'une direction particulière du mouvement sismique, généralement horizontale (par exemple direction radiale parallèle à l'azimut ou direction transversale), et qu'aucun résultat n'a à ce jour, à notre connaissance, été publié concernant la cohérence croisée de

<sup>3</sup>Notons néanmoins que la gamme des fréquences considérée en génie parasismique varie peu. On prendra typiquement  $[0, 20]$  Hz, voire  $[0, 10]$  Hz en sismologie.

deux directions du mouvement sismique. La prendre égale à zéro revient à négliger des informations, ce qui correspondrait à une approche conservatrice dans le sens de la sécurité pour le dimensionnement d'un ouvrage.

### Modèles semi-empiriques

D'autres auteurs proposent quant à eux des modèles semi-empiriques de fonctions de cohérence, dans le sens où ils cherchent à établir une formule analytique pour celles-ci à partir d'un modèle physique donné, en introduisant différents paramètres susceptibles d'être caractérisés par des approches expérimentales ou sur la base des enregistrements sismiques des réseaux denses présentés ci-dessus. Le modèle semi-empirique le plus couramment référencé dans la littérature est celui proposé par Luco & Wong [142] sur la base d'un modèle de propagation 1D (correspondant à une onde SH élastique) établi par Uscinski [212] :

$$|\gamma_V(d, \omega)| = \exp \left[ - \left( \frac{\eta \omega d}{c_{\text{app}}} \right)^2 \right] \quad (1.23)$$

$$\eta = \sqrt{\mu \frac{r}{\ell_{\text{cor}}}}$$

où  $c_{\text{app}}$  est la vitesse apparente de propagation en surface de l'onde SH,  $\ell_{\text{cor}}$  est la longueur de corrélation (échelle caractéristique) des hétérogénéités aléatoires le long de la trajectoire de l'onde,  $\mu$  est un coefficient caractérisant la variation relative déterministe des modules élastiques moyens du milieu, et  $\eta$  un paramètre caractérisant le degré d'incohérence du milieu ;  $r$  est la distance parcourue par l'onde. Le paramètre  $\frac{\eta}{c_{\text{app}}}$  contrôle essentiellement l'allure de la fonction de cohérence retardée (1.23) et peut être calé sur la base des accélérogrammes considérés. Ce modèle conduit à une valeur de la cohérence de 1 à la fréquence nulle quelle que soit la distance de séparation  $d$  et qui tend vers 0 quand la fréquence et/ou la distance de séparation augmente(nt), contrairement à certains des modèles empiriques proposés.

Zerva & Harada [231] proposent un modèle fondé sur l'étude analytique de la propagation d'ondes S à incidence verticale (impliquant un découplage complet des différentes polarisations possibles) dans un demi-espace constitué d'un bedrock rigide et d'une couche d'épaisseur constante dont les paramètres mécaniques (module de cisaillement et densité) varient aléatoirement suivant la direction horizontale. L'effet du passage d'onde est pris en compte, tandis que l'effet d'incohérence pure (1. page 31) est caractérisé par la fonction de cohérence retardée de Luco & Wong [142] ci-dessus, Eq.(1.23) ; l'effet d'atténuation (3. page 31) est lui négligé ; ainsi l'objectif de l'analyse effectuée est le calcul de la fonction de cohérence correspondant à l'effet de site pour le modèle proposé ; enfin la cohérence de la source sismique est prise en compte, mais les auteurs montrent que son effet sur les déplacements différentiels et les déformations en surface est négligeable. La fonction de cohérence des déplacements en surface obtenue est essentiellement pilotée par la fonction de cohérence au niveau du bedrock (effet d'incohérence pure) exceptée une décroissance marquée localisée au niveau de la fréquence dominante de la couche dont l'importance diminue avec la distance ; cette observation est en accord avec les observations expérimentales. La fonction de cohérence des déformations est quant à elle essentiellement pilotée par la fonction de cohérence locale liée au site (effet de la couche), c'est-à-dire que les déformations en surface dues au séisme sont principalement contrôlées par l'aléa sur les paramètres mécaniques de la couche au dessus du bedrock.

Récemment, Riepl [176] a essayé dans sa thèse de caractériser les variations en fonction du temps de la fonction de cohérence, tenant compte de la non-stationnarité effective du champ incident sur la base d'enregistrements du réseau européen EURO-SEISTEST en Grèce. En partant d'un modèle exponentiel de la fonction de cohérence sans le terme de passage d'onde :

$$\rho_V(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|, \omega) = e^{-[\alpha \omega r.(\mathbf{x} - \mathbf{x}')]^\beta}$$

l'auteur établit que, comparativement aux résultats expérimentaux obtenus pour quatre événements, la valeur la plus stable pour le paramètre d'atténuation spécifique du site,  $\alpha$ , est obtenue pour  $\beta = 1.0$  lorsque la durée du signal prise en compte ne varie pas. Par ailleurs, l'étude de l'influence de la durée  $T$  du signal prise en compte suggère une variation logarithmique de  $\ln \alpha$  en fonction de  $T$ . Ainsi la cohérence diminue quand  $T$  augmente, c'est-à-dire que la contribution de la coda <sup>(4)</sup> à l'incohérence spatiale du mouvement sismique augmente en fonction de la durée. On peut donc estimer qu'il est préférable de ne conserver que des durées courtes afin de n'évaluer la cohérence que sur la partie la plus énergétique du signal, si bien que dans ce cas l'hypothèse de stationnarité n'est plus du tout adaptée : la partie la plus énergétique du signal, sur une courte durée suivant l'arrivée de l'onde, est la plus cohérente tandis que la coda l'est beaucoup moins, même si elle contient des phases significatives. Ce résultat est corroboré par différentes analyses du paramètre  $\ln \alpha$  en faisant glisser une fenêtre de largeur 5s. Riepl note également, en accord avec d'autres études (par exemple Harichandran [89]), que la décroissance de la fonction de cohérence en fonction de la pulsation  $\omega$  est moins prononcée que celle en fonction de la distance entre stations ; elle relève l'existence d'une distance de coupure de l'ordre de  $d_c \simeq 100m$  (voir TAB. 1.1) au delà de laquelle la fonction de cohérence décroît continuellement en fonction de la distance alors qu'elle reste quasiment uniforme en dessous de  $d_c$ . Par ailleurs, l'influence relative de différents paramètres physiques à long terme tels que l'angle d'incidence, la distance épacentrale ou la magnitude du séisme a été analysée et il a été montré que ceux-ci n'avaient que peu d'effet sur la cohérence étudiée.

### 1.3.3 Autres approches de la variabilité

Certaines études reposent sur une analyse de la variabilité spatiale différente de la seule donnée d'une fonction de cohérence représentative des séismes pour un site donné. Parmi celles-ci, on peut citer les travaux de Kubo & Penzien [118] ou ceux plus récents de Zerva & Zhang [230], dont l'intérêt essentiel tient à ce qu'ils ne se limitent pas à une hypothèse simplificatrice, mais peu réaliste, de stationnarité en temps des séismes à mouvements forts ; au contraire, le facteur temps  $y$  est directement pris en compte.

Les premiers auteurs étudient la variabilité spatiale des séismes sur la base d'une analyse en composantes principales. Celles-ci correspondent aux trois directions propres de la matrice de covariance des signaux sismiques observés en surface. Les valeurs propres associées sont les variances du mouvement sismique le long de ses axes principaux, et caractérisent l'importance relative de chaque composante en terme énergétique (une composante majeure, une composante intermédiaire et une composante mineure). Les trois composantes principales sont non corrélées par construction, et sachant que le séisme définit un champ stochastique gaussien (voir le point 3, 29), elles sont également gaussiennes par linéarité et

<sup>4</sup>La coda est la partie d'un accélérogramme correspondant à l'énergie sismique qui suit l'arrivée de chaque train d'ondes, et qui généralement constitue la fin de l'enregistrement.

donc mutuellement indépendantes d'un point de vue statistique. A ce titre elles constituent un outil efficace pour l'analyse de la variabilité spatiale du séisme pour un site donné. Cette approche a été mise en oeuvre pour le cas du séisme de San Fernando (9 février 1971, région de Los Angeles) dans [118]. Les résultats de l'analyse en temps par une approche du type fenêtre glissante montrent que pour le début du séisme la composante la plus importante (par sa variance) est verticale, tandis que pour la queue du séisme les composantes principales sont plutôt parallèles à l'horizontale, la composante la moins énergétique étant elle verticale. Les résultats de l'analyse en fréquence montrent quant à eux qu'aux basses fréquences la direction principale est suivant l'horizontale, et qu'aux hautes fréquences elle est se positionne plutôt parallèlement à l'axe vertical, en accord avec les résultats de l'analyse temporelle. Enfin les auteurs relèvent une bonne corrélation entre la direction de la projection sur le plan horizontal de la composante majeure ou intermédiaire, et les directions des stations d'enregistrements par rapport à la principale faille de glissement du site étudié

Zerva & Zhang [230] ont proposé récemment une autre approche de l'estimation de la variabilité du champ sismique, qui se fonde également sur un traitement direct des accélérogrammes enregistrés plutôt que sur des estimations de la fonction de cohérence. L'objectif est ici de pouvoir caractériser la variabilité à la fois en terme de phase et en terme d'amplitude. Les signaux sismiques enregistrés en surface par les différentes stations du réseaux sont représentés sous la forme d'une superposition de sinusoïdes d'amplitudes et de phases inconnues :

$$\tilde{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^m \mathbf{A}_j \sin(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x} + 2\pi f_j t + \phi_j) \quad (1.24)$$

où le vecteur d'onde discrétisé  $\mathbf{k}_j$  est obtenu pour toutes les fréquences discrètes  $f_j = \frac{\omega_j}{2\pi}$  de la plage considérée après avoir identifié l'azimut et le spectre moyen de lenteur ("slowness" en Anglais) pour un événement (séisme) donné. Une composante moyenne cohérente représentative de l'évènement est construite en identifiant par une méthode de moindres carrés les amplitudes et phases  $(\mathbf{A}_j, \phi_j)$  permettant de reproduire la moyenne de l'ensemble des signaux enregistrés à toutes les stations du réseau. Le signal observé en un point particulier est reconstruit quant à lui en identifiant les amplitudes et phases permettant de reproduire l'enregistrement de la station considérée. La variabilité spatiale est alors définie comme l'écart observé entre le signal moyen cohérent reconstruit et les signaux reconstruits en chaque point du réseau. Cette définition incorpore ainsi la variabilité des temps d'arrivée des signaux aux différentes stations, la variabilité de l'amplitude et de la phase, ainsi que la variabilité de la coda (composante hautes fréquences). La méthodologie proposée est mise en oeuvre pour un séisme particulier enregistré par le réseau SMART-1. Les auteurs constatent une forte similarité des signaux cohérents moyens reconstruits pour deux ensembles de stations différents se référant à des distances entre stations d'ordres différents ( $\sim 100m$  et  $\sim 500m$ ), et en concluent à l'existence effective d'une composante cohérente dans les signaux enregistrés. Pour les basses fréquences ( $< 1.5Hz$ ) amplitude et phase des signaux reconstruits aux différentes stations prises individuellement coïncident avec l'amplitude et la phase du signal cohérent moyen, tandis que pour les moyennes fréquences ( $1.5 - 4.0Hz$ ) elles commencent à s'en écarter. Dans cette dernière gamme de fréquences, l'amplitude du signal cohérent moyen reconstruit selon l'Eq.(1.24) correspond à la moyenne de l'amplification du site. Enfin pour les fréquences au delà de  $4Hz$ , l'amplitude à chaque station est généralement supérieure à l'amplitude du signal cohérent moyen, tandis que la phase varie aléatoirement. Une analyse plus fine montre par ailleurs que les dispersions de la phase et

de l'amplitude à chaque station autour de l'amplitude et de la phase du signal cohérent moyen sont corrélées, et augmentent avec la fréquence. Pour plus de détails sur cette étude, on pourra se reporter à [229, 230].

### 1.3.4 Simulation de champs incidents stochastiques

La donnée des caractéristiques du second ordre – moyenne et fonction d'auto-corrélation ou fonction de densité spectrale, ou encore n'importe quelle fonction normalisée telle que la fonction de cohérence – du champ stochastique  $\mathbf{U}_i(\mathbf{x}, t)$  modélisant les séismes possibles pour un site donné, permet de déduire par linéarité, dans le cadre de l'analyse spectrale standard, les caractéristiques du second ordre de la réponse de la structure à ce chargement aléatoire. Elle permet également de simuler des trajectoires du champ stochastique  $\mathbf{U}_i(\mathbf{x}, t)$  afin de générer des trajectoires du processus modélisant la réponse de la structure. Ces trajectoires peuvent servir en retour à construire statistiquement (par la méthode de Monte-Carlo) les caractéristiques du second ordre de la réponse, ou bien servir à des calculs purement déterministes si une telle limitation s'avère suffisante pour l'étude réalisée. De nombreux travaux relatifs à la simulation des séismes sur la base de modèle probabiliste sont ainsi reportés dans la littérature. D'un point de vue théorique, la simulation de champ stochastique homogène ou non, gaussien ou non fait également l'objet d'une importante littérature. Quelques-uns des principaux résultats et méthodes disponibles sont décrites en Annexe C : la méthode de représentation intégrale des champs stochastiques gaussiens homogènes ou non [171, 187, 192], celle du filtrage linéaire d'un processus de Poisson [134, 170, 189] intéressante pour la simulation de champs non gaussiens, ou encore celle fondée sur le développement de Karhunen-Loeve du champ [192], qui sera mise en oeuvre dans le cadre de l'interaction sol-structure dans le chapitre §3, §3.1.6. On peut leur ajouter l'approche en composantes principales de Kubo & Penzien [119] qui permet de simuler des trajectoires suivant ces directions principales par la méthode de représentation intégrale déjà introduite ci-dessus, la technique de représentation sous la forme d'un développement sur la base des polynômes de Fourier-Hermite ou du chaos de Wiener fonctions du bruit blanc gaussien normalisé [2, 31, 221], la modélisation ARMA [114], ou encore la représentation sous forme d'une série de fonctions trigonométriques à coefficients aléatoires [81] pour des processus gaussiens non stationnaires.

Pour ce qui concerne plus spécifiquement les applications aux champs sismiques modélisés par des processus stochastiques, on peut signaler divers travaux [55, 83] qui se consacrent au développement de méthodes permettant de simuler des trajectoires compatibles avec la donnée d'un spectre de réponse classique  $SR_j(\omega)$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$ , afin de se ramener au cadre d'étude normalisée usuel. Elles sont essentiellement fondées sur des approches itératives (pour lesquelles on notera qu'aucun résultat de convergence n'est donné par leurs auteurs) :

- Deodatis [55], à partir de la donnée d'une fonction de cohérence  $[\gamma_{\mathbf{U}_i}(\omega)]_{jk}$  et des densités spectrales de puissance  $[\mathbf{S}_{\mathbf{U}_i}(\omega)]_{jj}$  du champ sismique  $\mathbf{U}_i(t)$  pour ses trois directions ( $j, k \in \{1, 2, 3\}$ ), construit à l'itération  $I$  des trajectoires  $t \mapsto \mathbf{u}_i^{(I)}(t)$  de ce champ par la méthode de représentation intégrale [171, 187, 192] éventuellement modulée en temps pour tenir compte de la non stationnarité. Puis l'auteur en déduit les spectres de réponse en accélération pour ces trajectoires, notés formellement  $SR_j * \mathbf{u}_i^{(I)}(\omega)$  pour la direction  $j$ . Les fonctions de densité spectrale de puissance du champ

$\mathbf{U}_i(t)$  sont modifiées à l'itération  $I + 1$  suivant :

$$[\mathbf{S}_{\mathbf{U}_i}^{(I+1)}(\omega)]_{jj} \leftarrow \left[ \frac{SR_j(\omega)}{SR_j * \mathbf{u}_i^{(I)}(\omega)} \right]^2 [\mathbf{S}_{\mathbf{U}_i}^{(I)}(\omega)]_{jj}$$

la procédure étant interrompue lorsqu'un critère de "convergence" de la forme

$$\|SR_j(\omega) - SR_j * \mathbf{u}_i^{(I)}(\omega)\| \leq \epsilon$$

est atteint pour une tolérance  $\epsilon$  donnée ;

- Gupta & Trifunac [83], par une approche plus évoluée, déduisent de la fonction de densité spectrale de puissance  $[\mathbf{S}_{\mathbf{U}_i}^{(I)}(\omega)]_{jj}$  pour la direction  $j$  de l'excitation (champ sismique) à l'itération  $I$  l'amplitude moyenne maximale  $\mathbb{E}\{U_{\max}\}^{(I)}$  de la réponse d'un oscillateur simple linéaire à une telle sollicitation, égale par définition à la valeur du spectre de réponse modifié à l'itération  $I$  :  $\mathbb{E}\{U_{\max}\}^{(I)} = SR_j^{(I)}(\omega)$ . Les fonctions de densité spectrale de puissance du champ  $\mathbf{U}_i(t)$  sont modifiées à l'itération  $I + 1$  suivant :

$$[\mathbf{S}_{\mathbf{U}_i}^{(I+1)}(\omega)]_{jj} \leftarrow \left[ \frac{SR_j(\omega)}{SR_j^{(I)}(\omega)} \right]^2 [\mathbf{S}_{\mathbf{U}_i}^{(I)}(\omega)]_{jj}$$

La fonction de densité spectrale de puissance  $S_U(\omega, T)$  de la réponse de l'oscillateur est obtenue par une approche spectrale tenant compte de la durée  $T$  de l'excitation non stationnaire selon

$$S_U(\omega, T) = |H(\omega, T)|^2 [\mathbf{S}_{\mathbf{U}_i}^{(I)}(\omega)]_{jj},$$

où  $H(\omega, T)$  est la fonction de réponse transitoire de l'oscillateur simple, et permet pour un modèle de distribution de probabilité des maxima locaux du processus de réponse correspondant [82] d'en déduire  $\mathbb{E}\{U_{\max}\}^{(I)}$ . Selon les auteurs, cette méthodologie présente l'avantage de définir une fonction de densité spectrale de puissance, compatible avec un spectre de réponse donné, tenant compte implicitement du caractère non stationnaire de l'excitation.

Rappelons que les approches fondées sur l'utilisation du spectre de réponse classique ne tiennent pas compte, par construction, de l'interaction sol-structure ; par contre il est tout à fait envisageable de les étendre à la force sismique équivalente  $\mathbf{f}_i(t)$  déduite de la formulation de l'interaction sol-structure que l'on retiendra pour ce travail. Leur intérêt réside essentiellement dans la souplesse d'utilisation qu'elles autorisent, notamment pour les applications industrielles, car la définition d'un spectre de réponse pour un site donné est beaucoup plus simple, économique et fiable que celle d'une fonction de densité spectrale. Ainsi dans l'état actuel des développements, la grande majorité des codes de dimensionnement en génie parasismique fournissent un spectre de réponse normalisé fonction des conditions locales du site. Néanmoins dans la suite, comme nous privilégierons les approches stochastiques, seule la donnée d'une fonction de cohérence (au moins) nous intéressera.

## 1.4 Modèles probabilistes du comportement des sols

Le sol n'est pas à proprement parler un matériau aléatoire. En revanche la *connaissance* que l'on peut avoir des paramètres de son comportement mécanique est affectée par plusieurs sources d'incertitude, de natures très différentes :



- variabilité spatiale inhérente des matériaux, liée aux variations à petites échelles de leurs structures minéralogiques, à l’historique des processus géologiques ou de sédimentation et des sollicitations imposées, aux variations de leur degré de saturation en eau, etc. ;
- rareté des données disponibles pour les sols sur un site donné, essentiellement liée à leur coût d’extraction. Notons également que les essais *in situ* sont souvent difficiles à mettre en oeuvre, tandis que ceux en laboratoire ne reproduisent que très partiellement les comportements réels des matériaux *in situ* à cause du remaniement. L’incertitude introduite à ce niveau est qualifiée d’erreur d’investigation en géostatistique ;
- erreurs aléatoire ou systématique (biais) commises lors des essais d’identification *in situ* ou en laboratoire, liées à l’instrumentation, l’observation ou l’interprétation. Celles-ci sont qualifiées d’erreur d’observation en géostatistique ;
- enfin modification des propriétés du sol remanié ou non au voisinage de l’ouvrage, notamment pendant la réalisation des travaux de fondation.

Ces différents aspects motivent les développements de modèles probabilistes du comportement des sols et leur prise en compte dans les études de fiabilité et de sécurité des ouvrages de génie civil (voir par exemple Magnan [143] et Favre [61] pour des revues récentes). Ces modèles sont fondés essentiellement sur la caractérisation de deux types de grandeur, la moyenne, ou tendance, et la variance d’une part, et la structure de corrélation spatiale d’autre part. Leurs propriétés respectives peuvent être très différentes (par exemple la tendance est certainement plus dépendante de la position que ne l’est sa covariance, c’est-à-dire la corrélation de la fluctuation par rapport à la tendance) et à ce titre ils ne peuvent généralement pas être donnés indépendamment l’un de l’autre lorsqu’il s’agit de caractériser un site particulier. Ainsi le premier type de grandeur, tendance et variance, est plus lié semble-t-il au type de sol étudié, alors que la structure de corrélation est elle plus liée au processus de formation.

Deux stratégies distinctes d’analyse géostatistique sont mises en oeuvre suivant les objectifs fixés et les données disponibles pour un site particulier [62] : la première est dite descriptive et a pour objectif d’enrichir, par interpolation essentiellement, la connaissance que l’on a déjà du sol ; la seconde est dite d’inférence et a pour objectif la caractérisation du modèle probabiliste d’un sol non connu (ou du moins que très partiellement) sur la base de données plus complètes disponibles pour d’autres sites. Les techniques descriptives, telle que la régression, l’estimation linéaire ou le krigeage [200] par exemple, sont par ailleurs souvent fondées sur la connaissance *a priori* d’une structure de corrélation pour le site étudié, et font donc appel aux techniques d’inférence.

Les processus stochastiques modélisant les paramètres mécaniques d’un sol sont quant à eux supposés généralement asymptotiquement homogènes (stationnaires) relativement à une échelle petite devant la stratification, inhomogènes à l’échelle de la sédimentation, et de nouveau homogènes à très grande échelle. Les densités de probabilité marginales sont prises non gaussiennes dans la mesure où, dans le cas contraire, les valeurs des paramètres mécaniques considérés pourraient être négatives. Une loi bien adaptée à des valeurs non négatives et non bornées est la loi log-normale, souvent retenue en géostatistique [62, 63]. Leur structure de corrélation est caractérisée, d’un point de vue strictement théorique, par deux modèles compétitifs :

- le modèle de Markov de coefficient de corrélation type exponentielle décroissante :

$$r(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}{\ell}\right)$$

où  $\ell$  la longueur de corrélation représente l'échelle des fluctuations des paramètres. Dans cette catégorie rentrent également les modèles gaussiens, triangulaires, sphériques [54] ou encore bruit blanc tronqué (voir Annexe C, §C.3) qui sont caractérisés par une échelle finie des fluctuations ;

- ou le modèle de bruit en  $\frac{1}{f}$ , appelé encore modèle fractal en ce sens que ses réalisations présentent des propriétés statistiques similaires à n'importe quelle échelle de résolution, et une longueur de corrélation infinie. Plus généralement, les processus dont la fonction de densité spectrale s'écrit sous la forme :

$$S(k) = \frac{S_0}{k^\alpha}$$

rentrent dans ce cadre. Ils sont de variance infinie et donc physiquement non réalisables, mais peuvent être rendus physiquement réalisables et stationnaires en tronquant cette fonction de densité spectrale aux hautes fréquences si  $0 \leq \alpha < 1$  ou aux basses fréquences si  $\alpha \geq 1$ .

Grabe [79] a montré qu'expérimentalement la raideur du sol mesurée par un compactomètre (ratio des amplitudes des accélérations mesurées à deux fréquences différentes) présentent effectivement une densité spectrale de la forme  $\frac{1}{f}$ . Un tel processus est stationnaire, et presque toujours gaussien [154] ce qui est contradictoire avec les hypothèses *a priori* mentionnées ci-dessus. Fenton [63] obtient un modèle similaire avec  $\alpha \approx 1.8$  pour des mesures de résistance de cône  $q_c$  au pénétromètre statique. Notons que les processus pour lesquels  $\alpha < 1$  ont les mêmes caractéristiques. En les moyennant spatialement sur une distance  $\Delta$  (suivant la profondeur  $z$ ), il est possible de calculer sous forme explicite leur coefficient de corrélation [145] :

$$r(d) = \frac{1}{2\Delta^{1+\alpha}} \left( |d + \Delta|^{1+\alpha} + |d - \Delta|^{1+\alpha} - 2|d|^{1+\alpha} \right)$$

avec  $d = |z - z'|$ . A partir de ce modèle analytique, ou de celui de Markov, on cherche à calibrer les paramètres significatifs correspondants, soit  $\alpha$  ou  $\ell$ , le plus souvent par une approche du type vraisemblance maximale [54, 63]. Enfin hormis le coefficient de corrélation, divers outils statistiques sont utilisés pour représenter la structure de corrélation du sol : Vanmarcke par exemple [213] définit le coefficient de corrélation pour des variables aléatoires qui sont les moyennes spatiales des paramètres mécaniques étudiés sur des volumes élémentaires, de l'ordre de ceux accessibles en laboratoire. On peut également citer la méthode du variogramme [200], celle de la fonction de variance ou de la représentation en ondelettes [62], ou encore celle du périodogramme (estimateur de la fonction de densité spectrale) [79, 195].

La modélisation développée au chapitre §3 pour la prise en compte de la variabilité du sol devra donc être adaptée aux types des données disponibles décrites ci-dessus. L'opérateur d'impédance dynamique  $\mathcal{K}_0$  du système couplé structure-sol non perturbé sera ainsi construit à partir des données relatives aux tendances observées des paramètres mécaniques du sol, tandis que sa perturbation  $d\mathcal{K}$  sera elle construite à partir de la structure de corrélation des fluctuations des paramètres du sol autour de leurs tendances, pondérée par leurs

variances (ou leurs coefficients de variation, donnant l'amplitude de la variance par rapport à la tendance). La donnée du coefficient de corrélation pour caractériser cette structure de corrélation permettra également de mettre en oeuvre la méthode de réduction présentée au chapitre §3 pour la représentation de la dimension aléatoire des fluctuations par un développement de Karhunen-Loeve.

## 1.5 Propagation d'ondes en milieux hétérogènes déterministes

La résolution du problème couplé d'interaction sol-structure tel qu'il a été exposé dans la section §1.2 impose notamment le calcul des champs rayonnés dans le massif de sol par la fondation, ou plus précisément par les différents modes de déplacement de l'interface sol-structure. La formulation intégrale retenue dans le cadre de ce travail est fondée sur la connaissance explicite de solutions élémentaires dans le sol vérifiant les conditions aux limites à l'infini de décroissance (flux d'énergie nul), les fonctions de Green. Si celles-ci ont une expression analytique classique pour un milieu viscoélastique homogène, isotrope et infini, ou des structures élastiques élancées (ce sont les fonctions d'influence de la résistance des matériaux), en revanche elles ne sont connues que numériquement pour des conditions aux limites ou des milieux hétérogènes particulièrement simples, sans pour autant que leurs coûts de calcul soient négligeables. Une des applications qui nous intéressera tout particulièrement ici est celle d'un demi-espace à stratifications horizontales homogènes avec condition de surface libre. Les outils numériques correspondant (code DOS2M) ont été développés successivement par Tsakalidis [211] puis Clouteau [40] sur la base des formulations de Thomson [207], Haskell [93] puis Kennett [108].

### 1.5.1 Fonctions de Green hétérogènes

#### Utilisation d'un domaine de référence

Soit  $\mathbf{u}_0^G(\boldsymbol{\xi}_s, \mathbf{x}; \mathbf{a})$  la fonction de Green stationnaire d'un milieu viscoélastique  $\Omega$  caractérisé par ses modules de Lamé complexes  $\lambda_0, \mu_0$  et sa densité  $\rho_0$ , et vérifiant l'équation de Navier stationnaire :

$$-\mathbf{Div} \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0^G) - \rho_0 \omega^2 \mathbf{u}_0^G = \delta_{\boldsymbol{\xi}_s} \mathbf{x} \mathbf{a} \quad (1.25)$$

Soit  $\mathbf{u}^G(\boldsymbol{\xi}_r, \mathbf{x}; \mathbf{b})$  la fonction de Green stationnaire d'un milieu viscoélastique de même géométrie caractérisé par ses modules de Lamé complexes  $\lambda, \mu$  et sa densité  $\rho$ , et vérifiant l'équation de Navier stationnaire :

$$-\mathbf{Div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^G) - \rho \omega^2 \mathbf{u}^G = \delta_{\boldsymbol{\xi}_r} \mathbf{x} \mathbf{b} \quad (1.26)$$

avec  $\boldsymbol{\xi}_r \neq \boldsymbol{\xi}_s$ . On en déduit alors l'expression :

$$\mathbf{u}^G(\boldsymbol{\xi}_s, \boldsymbol{\xi}_r; \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{u}_0^G(\boldsymbol{\xi}_s, \boldsymbol{\xi}_r; \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} - \langle \mathcal{K} \mathbf{u}_0^G(\boldsymbol{\xi}_s, \cdot; \mathbf{a}), \mathbf{u}^G(\boldsymbol{\xi}_r, \cdot; \mathbf{b}) \rangle_{\Omega} \quad (1.27)$$

avec l'opérateur  $\mathcal{K}$  défini par :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{K} \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} &= \langle \mathcal{K} \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega_0} \\ &= \omega^2 \int_{\Omega} (\rho - \rho_0) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dV \\ &\quad - \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u})) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) dV \end{aligned}$$

PREUVE – On multiplie l'équation de Navier (1.25) par  $\mathbf{u}^G(\boldsymbol{\xi}_r, \mathbf{x}; \mathbf{b})$ , l'équation de Navier (1.26) par  $\mathbf{u}_0^G(\boldsymbol{\xi}_s, \mathbf{x}; \mathbf{a})$ , puis l'on soustrait et intègre sur  $\Omega$ . Le principe de réciprocité applicable à l'une ou l'autre des fonctions de Green donne alors le résultat.  $\square$

Ce résultat est connu sous le nom d'équation de Lippmann-Schwinger en théorie de la diffraction de la mécanique quantique. Il permet d'évaluer formellement la fonction de Green d'un milieu hétérogène vérifiant par exemple des conditions de surface libre et de radiation de Sommerfeld à partir de la fonction de Green du même milieu pris avec des modules de Lamé et une densité homogènes, alors identifié à un certain milieu de référence.

### Exemples

Quelques auteurs ont établi des expressions exactes pour les fonctions de Green de milieux hétérogènes acoustiques ou plus rarement élastiques. Néanmoins, celles-ci sont limitées à des configurations très particulières du milieu étudié, permettant des simplifications mathématiques avantageuses mais n'ayant pas toujours une interprétation pratique immédiate. On citera pour mémoire les récents travaux de Li *et al.* [131], Vrettos [218] ou Manolis & Shaw [146, 147]. Les premiers obtiennent une expression analytique de la fonction de Green tridimensionnelle d'un milieu acoustique dont l'indice de réfraction  $n$  est fonction de la profondeur  $z$  selon :

$$n = \sqrt{1 + Az}$$

Un tel milieu fait apparaître une surface caustique au delà de laquelle le flux d'énergie transmise devient négligeable. Pour une source placée en amont de la surface caustique (points de retour), l'amplitude de la fonction de Green oscille du fait des interférences de l'onde incidente avec les ondes réfléchies. Par contre pour une source en aval de la surface caustique, l'onde s'atténue régulièrement suivant la distance parcourue sans osciller ; pour une incidence particulière, on observe un phénomène de guidage de l'onde émise.

Le second obtient une expression analytique pour un milieu de densité et de coefficient de Poisson constants, et un module de cisaillement qui croît linéairement avec la profondeur :

$$\mu(z) = \mu_0(z)(1 + \alpha z)$$

Les troisièmes obtiennent dans un premier temps une expression analytique de la fonction de Green tridimensionnelle d'un milieu viscoélastique dont les modules ne dépendent que d'une coordonnée d'espace ( $z$  par exemple) et sont caractérisés par les contraintes :

$$\lambda(z) = \mu(z) = (az + b)^2$$

la première égalité correspondant à un coefficient de Poisson  $\nu = 0.25$ , et :

$$\frac{\mu(z)}{\rho(z)} = \frac{\mu_0(z)}{\rho_0(z)} = C^{\text{ste}}$$

Celles-ci sont en fait équivalentes au cas d'un profil des vitesses constant en fonction de la profondeur. Puis ils établissent l'expression de la fonction de Green tridimensionnelle pour une équation d'onde scalaire avec une contrainte liant le module du milieu de propagation et sa densité  $\rho(\mathbf{x})$ , dépendants cette fois-ci des trois coordonnées d'espace, au nombre d'onde. Celle-ci autorise par contre des profils de vitesse pouvant varier avec la profondeur par

exemple, et atteindre des maxima ou minima locaux. Dans les deux cas, les solutions sont construites sur la base de solutions de référence pour des propriétés homogènes du milieu de propagation. Ainsi, elles nécessitent la connaissance a priori des caractéristiques  $\mu(\boldsymbol{\xi}_s) = \mu_0$  et  $\rho(\boldsymbol{\xi}_s) = \rho_0$  au point source constituant alors le milieu de référence, et des caractéristiques  $\mu(\boldsymbol{\xi}_r) = \mu_1$  et  $\rho(\boldsymbol{\xi}_r) = \rho_1$  au point récepteur afin d'établir explicitement les dépendances  $\mu = \mu(\mathbf{x})$  et  $\rho = \rho(\mathbf{x})$ .

### 1.5.2 Cas d'un demi-espace stratifié

Il s'agit ici du cas particulier le plus largement traité dans la littérature, car il intéresse de nombreuses applications en génie civil ou en mécanique des matériaux composites notamment. C'est notamment cette configuration qui sera retenue dans la suite de ce travail pour le sol sans perturbation de ses paramètres mécaniques. La fonction de Green correspondante est évaluée numériquement en se fondant sur une décomposition en ondes planes (cas bidimensionnel) ou cylindriques (cas tridimensionnel) de la solution élémentaire à l'intérieur de chaque couche. Les différentes variantes dans les méthodes proposées interviennent dans l'expression des conditions de couplage aux interfaces entre les couches. On rappelle ici brièvement le principe de la méthode mise en oeuvre dans le code DOS2M.

Les équations de Navier dans chaque couche homogène de la stratification sont dans un premier temps réécrites en coordonnées cylindriques afin d'exploiter au mieux l'axisymétrie du problème. Un changement de variable adéquat, consistant à prendre les opérateurs différentiels horizontaux  $\text{div}_{\mathbf{n}}$  et  $\text{rot}_{\mathbf{n}}$  des champs de déplacement et vecteur-contrainte sur une facette de normale extérieure  $\mathbf{n}$  perpendiculaire aux interfaces entre les couches,

$$\begin{aligned}\text{div}_{\mathbf{n}}\mathbf{u} &= \text{div}\mathbf{u} - \partial_{\mathbf{n}}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}) \\ \text{rot}_{\mathbf{n}}\mathbf{u} &= (\text{rot}\mathbf{u})\cdot\mathbf{n}\end{aligned}$$

puis la transformée de Hankel  $\mathbf{u}(r, \theta, z) \mapsto \mathcal{TH}(\mathbf{u})(k, m, z)$ , définie par :

$$\mathcal{TH}(\mathbf{u})(k, m, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^+} e^{im\theta} J_m(kr) \mathbf{u}(r, \theta, z) r dr d\theta$$

permettent de découpler les équations des ondes P-SV et SH et conduisent à des solutions analytiques dans le domaine spectral caractérisé par le nombre d'onde horizontal  $k$  et le mode de Fourier  $m$  ; dans les équations ci-dessus  $\partial_{\mathbf{n}}f = \partial_j f \cdot n_j$  (avec la convention de sommation sur les indices répétés) et  $x \mapsto J_m(x)$  est la fonction de Bessel d'ordre  $m$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , avec :

$$J_m(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^m}{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi e^{ix \cos \theta} \sin^{2m} \theta d\theta$$

où

$$\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \times 3 \times 5 \cdots \times (2m-1)}{2^m} \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Les conditions suffisantes d'existence de la transformée de Hankel sont rappelées dans [211]. La méthode du propagateur de Thomson-Haskell consiste à résoudre dans chaque couche une équation différentielle du type :

$$\partial_z \mathcal{B}_\alpha^{th} = \mathcal{A}_\alpha \mathcal{B}_\alpha^{th} - \mathcal{G}_\alpha, \quad \alpha = \text{P-SV ou SH} \quad (1.28)$$

$\mathcal{B}_{\text{P-SV}}^{\text{th}}$  et  $\mathcal{B}_{\text{SH}}^{\text{th}}$  sont respectivement les vecteurs de Thomson-Haskell des ondes P-SV et SH définis par :

$$\mathcal{B}_{\text{P-SV}}^{\text{th}}(\mathbf{u})(k, m, z) = -\frac{1}{k\omega} \mathcal{TH} \begin{pmatrix} \omega \operatorname{div}_{\mathbf{n}} \mathbf{u} \\ -k\omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \\ \operatorname{div}_{\mathbf{n}} \mathbf{t}(\mathbf{u}) \\ -k \mathbf{t}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}_{\text{SH}}^{\text{th}}(\mathbf{u})(k, m, z) = -\frac{1}{k\omega} \mathcal{TH} \begin{pmatrix} \omega \operatorname{rot}_{\mathbf{n}} \mathbf{u} \\ \operatorname{rot}_{\mathbf{n}} \mathbf{t}(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A}_{\alpha}$  est une matrice qui dépend des modules et de la densité de la couche considérée, de  $k$ , mais pas du mode de Fourier  $m$ . Enfin  $\mathcal{G}_{\alpha}$  est la discontinuité du vecteur-contrainte dans le domaine spectral induite par la présence éventuelle d'une source  $\mathbf{f}$  dans la couche étudiée :

$$\mathcal{G}_{\text{P-SV}}(\mathbf{f})(k, m, z) = -\frac{1}{k\omega} \mathcal{TH} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \operatorname{div}_{\mathbf{n}} \mathbf{f} \\ -k \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{G}_{\text{SH}}(\mathbf{f})(k, m, z) = -\frac{1}{k\omega} \mathcal{TH} \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{rot}_{\mathbf{n}} \mathbf{f} \end{pmatrix}$$

Ce système différentiel est résolu dans chaque couche en calculant les vecteurs et valeurs propres des matrices  $\mathcal{A}_{\alpha}$  qui s'écrivent alors :

$$\mathcal{A}_{\alpha} = \mathbf{M}_{\alpha}^{-1} \mathbf{L}_{\alpha} \mathbf{M}_{\alpha} \quad (1.29)$$

$\mathbf{M}_{\alpha}$  est la matrice des vecteurs propres de  $\mathcal{A}_{\alpha}$ ,  $\mathbf{L}_{\alpha}$  est une matrice diagonale faisant apparaître des termes de la forme  $\exp(\pm i k_{\mathbf{n}s} z)$  et  $\exp(\pm i k_{\mathbf{n}p} z)$  avec les nombres d'onde verticaux :

$$k_{\mathbf{n}\beta}^2 = \frac{\omega^2}{c_{\beta}^2} - k^2, \quad \beta = s, p$$

éventuellement imaginaires purs. Les vecteurs de Thomson-Haskell ont la particularité d'être continus au passage des différents interfaces entre les couches. Le propagateur de Thomson-Haskell  $\mathcal{P}_{\alpha}$  entre les niveaux  $z_1$  et  $z_2$  avec éventuellement un terme de source permet alors d'exprimer le vecteur de Thomson-Haskell au niveau  $z_2$  en fonction du vecteur de Thomson-Haskell au niveau  $z_1$  par :

$$\mathcal{B}_{\alpha}^{\text{th}}(k, m, z_2) = \mathcal{P}_{\alpha}(z_2, z_1) \mathcal{B}_{\alpha}^{\text{th}}(k, m, z_1) - \int_{z_1}^{z_2} \mathcal{P}_{\alpha}(z_2, z) \mathcal{G}_{\alpha}(k, m, z) dz \quad (1.30)$$

Il est égal au produit des propagateurs élémentaires pour chacune des couches comprises entre les niveaux  $z_1$  et  $z_2$ . Combinée aux conditions aux limites de surface libre et de radiation, l'Eq.(1.30) fournit complètement la fonction de Green du sol stratifié dans le domaine spectral transformé, puis dans le domaine fréquentiel original par transformée de Hankel inverse. Néanmoins cette méthode pose des problèmes numériques importants pour des couches épaisses et/ou des fréquences élevées dus à la présence des termes diagonaux en exponentielles. Il est alors préférable de travailler avec le vecteur d'onde de Kennett [108]  $\mathcal{V}_{\alpha}(k, m, z)$  défini par :

$$\mathcal{V}_{\alpha}(k, m, z) = \mathbf{M}_{\alpha}^{-1}(k, z) \mathcal{B}_{\alpha}^{\text{th}}(k, m, z) \quad (1.31)$$

et qui s'interprète comme des ondes élémentaires montantes et descendantes pour lesquelles les conditions de continuité aux interfaces s'expriment à l'aide de coefficients de réflexion-transmission et la propagation dans une couche donnée à l'aide de coefficients de transmission. Une fois calculés ces coefficients élémentaires pour chacune des couches et chaque interface (entre deux couches, ou pour une surface libre, un massif rigide ou encore un espace infini), on en déduit des coefficients de réflexion-transmission globaux pour un empilement de couches de part et d'autre du niveau source par des schémas récursifs montant et descendant à partir du niveau source. La discontinuité du vecteur d'onde  $y$  est exprimée par :

$$[\mathcal{V}_\alpha(k, mz_s)] = \mathbf{M}_\alpha^{-1}(k, z_s) \mathcal{G}_\alpha(k, m, z_s)$$

Le vecteur d'onde est ainsi connu pour chaque profondeur souhaitée et pour une source donnée, ainsi que le vecteur de Thomson-Haskell par l'Eq.(1.31), puis enfin les champs de déplacement et de vecteur-contrainte associé par une transformation inverse numérique de Hankel. Celle-ci est notamment décrite dans la thèse de Tsakalidis [211] qui montre qu'elle se ramène à une transformée de Fourier rapide et une intégration numérique.

L'approche des coefficients de réflexion/transmission de Kennett présentée ci-dessus a été reprise par la suite par Papanicolaou *et al.* [112, 113] pour l'étude d'un milieu stratifié semi-infini à caractéristiques stochastiques indexées sur la variable de profondeur  $z$ . Les auteurs étudient le coefficient global de réflexion du milieu pour une source ponctuelle située à sa surface. On se reportera à la section §1.7.2 pour plus de détails sur la méthode développée.

## 1.6 Propagation d'ondes en milieux aléatoires

L'étude de la propagation d'ondes en milieu hétérogène aléatoire trouve son application dans une très large gamme de problèmes mécaniques et physiques : élastodynamique, astrophysique, optique, physique atmosphérique, turbulence, radiocommunication, etc. Une littérature assez importante est donc disponible sur le sujet. Néanmoins la grande majorité des travaux effectués jusqu'à présent concerne essentiellement la propagation des ondes électromagnétiques ou acoustiques, traitée par une équation d'onde scalaire. L'extension des résultats obtenus au cas de l'élastodynamique ne pose à strictement parler pas de difficulté théorique majeure, mais conduit à des développements mathématiques souvent dissuasifs. Une autre limitation importante est liée aux hypothèses physiques adoptées lorsqu'il s'agit de traiter tel ou tel cas pratique : ainsi, alors que dans les applications des ondes électromagnétiques les variations spatiales significatives des propriétés du milieu de propagation ont souvent une échelle supérieure à celle des longueurs d'onde du signal, le cas contraire se rencontre dans la propagation d'ondes élastiques en géophysique ou en dynamique des matériaux composites. On peut noter également que l'apparition de fortes discontinuités – entre différentes phases par exemple – est plus une règle générale qu'une exception dans le cas des solides, ce qui limite la pertinence des méthodes fondées sur une hypothèse de variations "régulières", "lentes" ou encore "faibles" des propriétés du milieu.

L'état actuel des connaissances du phénomène de propagation d'ondes en milieu aléatoire est le résultat de recherches suivant trois axes principaux :

- la théorie de la diffraction fondée sur la décomposition du champ de déplacement en ondes planes. Ici, les différents champs conservent une certaine cohérence de phase et donc de direction, malgré les différentes interférences ;
- la théorie du transport ;

- la théorie de la diffusion.

### 1.6.1 Phénomènes caractéristiques

Les théories de diffraction et diffusion évoquées ci-dessus ont été initiées essentiellement par des travaux réalisés pour les applications de l'électromagnétisme et de la mécanique quantique. On essaye ici d'établir dans un premier temps une typologie des phénomènes caractéristiques apparaissant en propagation d'ondes élastiques dans les milieux hétérogènes, en se fondant principalement sur l'approche dite de O'Doherty & Anstey [158] en géophysique, et une revue récente de Papanicolaou [165]. On notera avant tout que les différentes définitions introduites peuvent varier suivant les disciplines physiques et les auteurs. On se fondera ici sur la notion d'échelles caractéristiques, d'autres approches restant toujours possibles. Trois échelles caractéristiques interviennent donc dans les phénomènes de propagation d'ondes :

- la longueur d'onde  $\lambda$  ;
- la distance de propagation observée  $L$  ;
- la taille caractéristique des hétérogénéités du milieu  $\ell$ , ou leur longueur de corrélation si elles sont de nature aléatoire.

Lorsque  $\lambda \gg L$  ou  $\lambda \approx L$  on entre typiquement dans le cadre de la diffraction. On peut alors identifier un régime de propagation déterministe, auquel s'ajoute des fluctuations fortes – réflexions multiples pour  $L \gg \ell$  – ou faibles – réflexion/transmission simple pour  $L \approx \ell$  – suivant également le contraste en impédance (écart-type) des hétérogénéités. Les approches du type milieu effectif et homogénéisation fonctionnent bien dans ce cas, même lorsque les hétérogénéités présentent un contraste important ; elles sont présentées succinctement à la section §1.6.4. Les opérateurs de réflexion/transmission utilisés dans une approche par diffraction sont globalement indépendants de la fréquence et les nombres d'ondes prennent des valeurs discrètes <sup>(5)</sup>. Les phénomènes de résonance ou localisation entrent quant à eux dans ce cadre, et résultent de l'interférence constructive entre plusieurs ondes à des fréquences particulières appelées fréquences de résonance, ou “scattering frequencies” en Anglais pour des milieux infinis. Ils ont lieu lorsque les ondes qui repassent par un point donné restent corrélées avec l'onde initiale, de manière à interférer constructivement à chaque instant.

Lorsque  $L \gg \lambda$  on entre dans le cadre de la propagation dite hautes fréquences. Pour des hétérogénéités marquées déterministes avec  $\ell \gg \lambda$ , la théorie des rayons (voir par exemple Chapman & Coates [33]) permet d'aborder relativement simplement les phénomènes observés. Pour de faibles fluctuations des hétérogénéités, les interactions entre l'onde et le milieu aléatoire les plus significatives se produisent lorsque  $\lambda \approx \ell$  [165]. Pour des distances de propagation importante, l'énergie associée à l'onde est essentiellement transférée dans sa partie fluctuante, et devient donc incohérente. C'est le régime dit du transfert radiatif dans lequel intervient une autre échelle caractéristique appelée parcours libre moyen  $\ell_f$ , et correspondant à la distance moyenne parcourue par l'onde sans rencontrer de nouvelle hétérogénéité. Cette nouvelle échelle est privilégiée par rapport à la longueur de corrélation  $\ell$  car contrairement à celle-ci elle peut être évaluée directement sur la base d'enregistrements sismiques par exemple. Un aspect important de la théorie du transport est la polarisation des ondes,

<sup>5</sup>Mathématiquement, il est montré que l'opérateur  $\mathcal{K}$  associé à la propagation d'ondes transitoire avec coefficients aléatoires homogènes (invariants par translation) dans un milieu non borné admet un spectre discret. Dans le cas tri-dimensionnel, ceci n'est vrai que si les fluctuations des paramètres mécaniques du milieu sont importantes [165].



qui est ici conservée en terme énergétique. Elle fixe notamment le ratio des densités spatiale d'énergie du mode S vis-à-vis du mode P (voir plus loin la section §1.7.2, Eq.(1.52)) pour les ondes élastiques.

Si maintenant  $L \gg \ell_f$ , les modes de polarisation observés dans le régime de transport subissent suffisamment de diffractions pour perdre toute cohérence les uns par rapport aux autres. Le champ d'onde est uniquement caractérisé par son énergie moyenne, qui satisfait alors une équation de diffusion.

Notons enfin un autre phénomène couramment observé en géophysique lorsque le milieu de propagation admet une invariance par translation dans une direction donnée de l'espace, par exemple un milieu périodique : les ondes guidées. Ce phénomène très important sort du cadre de cet étude et ne sera pas développé dans ce chapitre. Il se traduit par l'apparition d'un phénomène de propagation (par diffraction, rayons ou diffusion) suivant la direction d'invariance, et de localisation suivant les directions perpendiculaires. C'est par exemple le cas des ondes de Rayleigh observées dans un milieu stratifié [40], des ondes de tube le long des puits en sismique pétrolière [14], ou encore des ondes guidées le long de la voie ferrée lors du passage d'un train [124]. L'énergie associée reste confinée dans les zones de localisation et décroît plus lentement suivant la direction d'invariance que les ondes de volume classiques ; ainsi, au delà d'une certaine distance, ce sont les seules significatives.

Il est important de noter que le choix de la méthodologie est largement guidée par la configuration attendue des hétérogénéités du milieu de propagation. Ainsi une approche par réflexions multiples semblent particulièrement pertinente dans le cas d'inclusions discrètes à distribution aléatoire dans une matrice homogène (matériaux composites par exemple), tandis que l'approche transfert radiatif ou diffusion est probablement plus efficace dans le cas d'hétérogénéités ayant une certaine régularité (milieux turbulents par exemple). Les approches classiques pour les milieux composites de nature aléatoire se limitent au phénomènes de diffraction (réflexions simple ou multiples) et à la définition d'un milieu effectif équivalent. Les phénomènes de localisation, de transport ou de diffusion ne peuvent pas être traités par les techniques mises en oeuvre, et seront abordés dans la section suivante, §1.7. Quelles que soient les simplifications retenues pour l'équation de propagation, la méthode est invariablement la même et a été pour la première fois introduite par Foldy [64]. Il s'agit de rechercher la moyenne d'ensemble, ou espérance mathématique, du champ d'onde dans le milieu, puis de tenter de relier raisonnablement cette moyenne, ayant une signification mathématique globale, à des "moyennes locales" telles que celles qui seraient accessibles à l'expérience. On présente donc ici cette technique pour le traitement de la diffraction en réflexion simple, correspondant à une méthode de perturbations, puis en réflexions multiples et on donne enfin succinctement quelques exemples de milieux effectifs tirés de la littérature, en insistant sur la notion de bornes pour leurs caractéristiques mécaniques.

Dans cette section on se limite aux travaux traitant explicitement des ondes élastiques. En outre nous ne présentons que les résultats les plus classiques. En effet la problématique abordée constitue un thème majeur de la mécanique des milieux composites notamment, en continu développement, et l'on ne peut prétendre ici à l'exhaustivité. L'objectif est d'introduire de manière succincte les principales formulations envisageables pour traiter ce type de modèle, les définitions et le vocabulaire correspondant, ainsi que leurs principales limitations.

**remarque 1.1** – Dans cette section on note, par consistance avec la littérature, l'espérance mathématique  $\langle \cdot \rangle$  au lieu de  $\mathbb{E} \{ \cdot \}$  ■

### 1.6.2 Réflexion simple. Méthode des perturbations

L'approche par réflexion simple est privilégiée lorsque la fluctuation subie par le champ de déplacement due au milieu aléatoire est suffisamment faible. La méthode la plus ancienne et la plus largement exploitée est celle dite des perturbations. Cette terminologie fait généralement référence à deux approches sensiblement différentes.

1. La première consiste à rechercher, à partir d'une équation différentielle pour la moyenne d'ensemble des déplacements, une expression homogénéisée des caractéristiques qui seraient celles d'un milieu équivalent dans lequel se propagerait la moyenne d'ensemble du champ de déplacement. Cette expression homogénéisée s'écrit sous la forme d'une série de termes de perturbation venant corriger le terme d'ordre 0 correspondant au milieu parfaitement connu de référence.
2. La seconde consiste à rechercher directement la solution de l'équation différentielle de propagation à coefficients stochastiques (liés aux caractéristiques aléatoires du milieu étudié) sous forme d'une série de termes de perturbation, le premier terme étant la solution obtenue toujours dans le milieu de référence.

Dans les deux cas, il convient d'avoir au préalable décomposé les caractéristiques mécaniques ou physiques du milieu de propagation en un terme moyen, déterministe clairement identifié, et un terme de fluctuations faibles, modélisé par un processus stochastique. Ainsi la réflexion simple peut être assimilée à la réflexion dans un milieu continuellement hétérogène où les fluctuations sont vues comme une seule inclusion globale faiblement dispersive, par opposition aux réflexions multiples par des inclusions bien marquées et réparties de façon aléatoire (voir section suivante). Les "petites perturbations" sont assimilées à des termes itératifs issus d'une réflexion simple susceptible de ne générer que de faibles fluctuations des différents champs observés. Chaque ordre d'itération correspond au nombre de réflexions simples successives considéré. Cette approche est bien détaillée dans le livre de Chernov [35] ou les quelques articles suivants. L'analyse limitée au premier ordre est appelée dans la littérature approximation de Born, et l'on y fera parfois référence par la suite.

Karal & Keller [106] introduisent un développement au second ordre de l'opérateur différentiel linéaire noté  $\mathcal{K}$  de l'équation de Navier transitoire, autour d'une valeur moyenne caractérisant le milieu parfaitement homogène de référence  $\mathcal{K}_0$ , occupant un volume  $\Omega$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{K}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathcal{K}_0\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \Omega\end{aligned}$$

et

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 + \epsilon\mathcal{K}_1(a) + \epsilon^2\mathcal{K}_2(a) + o\epsilon^3$$

où  $a \in \mathcal{A}$  désigne un événement donné qui réalise  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_2$  étant des opérateurs linéaires stochastiques représentant les perturbations du milieu de référence. Par une méthode de lissage permettant d'exprimer  $\mathbf{u}$  en fonction de  $\mathbf{u}_0$ , ils obtiennent une équation intégral-différentielle pour  $\langle \mathbf{u} \rangle(\mathbf{x}, t)$  en éliminant  $\mathbf{u}_0$  et en introduisant le premier tenseur de Green  $\mathbf{U}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t)$  solution de l'équation :

$$\mathcal{K}_0\mathbf{U}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) + \delta t \delta \mathbf{y} - \mathbf{x} \mathcal{I}_d = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

où  $\mathcal{I}_d$  est l'identité. Les ondes moyennes planes solutions satisfont un problème aux valeurs propres associé à un nombre d'onde complexe fonction de la fréquence, équation de dispersion

que l'on peut expliciter pour le nombre d'onde P ou S. Ainsi le champ de déplacement moyen obtenu est dispersif et s'atténue de façon exponentielle en fonction de la distance. Néanmoins, il n'apparaît aucune dissipation physique, l'énergie cohérente de l'onde moyenne est dispersée en énergie incohérente par les hétérogénéités au cours de la propagation. Ces résultats sont restreints au cas des milieux faiblement hétérogènes mais ne sont pas limités en fréquence. Par ailleurs on peut déduire d'une telle approche une équation pour la moyenne  $\langle \mathbf{u} \rangle$  du champ des déplacements et sa fonction d'auto-corrélation  $\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x}', t') \rangle$ , voir par exemple Chen & Soong [34].

Plus tard, McCoy [152] introduit un développement à un ordre quelconque en fonction du rapport d'échelle  $\epsilon$  – longueur de corrélation des hétérogénéités sur longueur d'onde – et obtient de la même manière une solution formelle pour  $\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rangle$ . En ne retenant que les termes des premier et deuxième ordre pour les longueurs d'onde importantes, il montre que l'on peut assimiler le milieu à un matériau homogène équivalent de densité égale à la densité moyenne du milieu hétérogène et de tenseur élastique égal au tenseur d'ensemble  $\tilde{\mathbf{D}}$  défini par :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \tilde{\mathbf{D}} : \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle \quad (1.32)$$

vérifiant le résultat similaire à celui obtenu par Karal & Keller [106], et également donné dans [65, 117] :

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D}_0 + \epsilon \langle \mathbf{D}_1(a) \rangle - \epsilon^2 \langle \mathbf{D}_1(a) \mathcal{S}_{\mathbf{x}}(\mathbf{D}_1(a) - \langle \mathbf{D}_1(a) \rangle) \rangle + \dots \quad (1.33)$$

où l'on a écrit une réalisation du tenseur élastique du milieu aléatoire :

$$\mathbf{D}(a) = \mathbf{D}_0 + \epsilon \mathbf{D}_1(a)$$

et défini l'opérateur intégral lié au premier tenseur de Green du milieu homogène de référence :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathbf{x}} : \mathbf{v}(\mathbf{y}, t) &\mapsto \int_{\Omega} \mathbf{S}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) \star_t \mathbf{v}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} \\ \mathbf{S}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) &= \nabla_{\mathbf{x}} \otimes_s \nabla_{\mathbf{y}} \otimes_s \mathbf{U}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) \end{aligned}$$

$\otimes_s$  étant le produit tensoriel symétrisé,  $\star_t$  le produit de convolution en  $t$ , et avec :

$$\mathbf{U}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} \in \partial\Omega$$

Cette seconde hypothèse est obtenue après relèvement du champ de déplacement éventuellement imposé sur la frontière du milieu de propagation :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega$$

Aucune mention n'est faite du problème posé par la convergence de la série, Eq.(1.33). Celle-ci peut être mise en défaut dans le cas de fortes hétérogénéités.

Chu *et al.* [37] reprennent les principaux résultats de Karal & Keller [106] et McCoy [152] appliqués à la propagation d'ondes de cisaillement polarisée horizontalement (SH) dans une couche de matériau viscoélastique de module de cisaillement  $\mu$  et de densité  $\rho$  aléatoires, dont la première face est excitée par une force harmonique, et la deuxième face est libre. Ils obtiennent une équation intégral-différentielle pour la moyenne d'ensemble du vecteur contrainte dont la solution permet d'accéder à la moyenne d'ensemble du champ de déplacement. Cette approche faisant apparaître des produits de convolution, l'équation mentionnée est résolue par transformée de Laplace. La formulation est étendue au cas des multicouches

par une méthode de matrice de transfert pour la moyenne d'ensemble des vecteurs déplacement - contrainte dans chaque couche. Les auteurs examinent ensuite un modèle numérique de cinq couches différentes purement élastiques sur un bedrock. En ne conservant que l'aléa portant sur la densité des couches, ils montrent que celui-ci introduit un amortissement global du système considéré, correspondant à la dispersion de l'énergie de l'onde moyenne suivant différents modes de propagation aléatoires, mais pas à une dissipation physique, comme cela a déjà été signalé. La moyenne d'ensemble du champ de déplacement obtenu est par conséquent différente du champ de déplacement obtenu en ne retenant que la densité moyenne déterministe des cinq couches étudiées. Les auteurs remarquent encore que l'amortissement global observé, à savoir l'effet de diffusion du aux hétérogénéités, tend à augmenter quand la fréquence croît.

La méthode des perturbations appliquées directement à la solution de l'équation de propagation dont on ne cherche qu'une approximation conduit souvent à des résultats divergents dus à l'apparition de termes séculiers, ainsi que le rappellent Askar & Cakmak [7] dans un article de revue des différentes méthodes disponibles. Ils citent pour cela le cas simple de la propagation d'ondes planes en milieu infini pour laquelle les termes de perturbations (ordre supérieur à 0) sont rapidement divergents lorsque  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty$ .

### 1.6.3 Réflexions multiples

Lorsque le milieu aléatoire étudié est composé d'inclusions fixes de matériaux, tailles, géométries ou orientations différents, plongées dans une matrice donnée qui sera le milieu de référence, le champ de déplacement dans une telle structure subit de fortes fluctuations liées aux nombreuses réflexions qui se produisent sur les hétérogénéités si celles-ci sont assez concentrées. Le modèle de réflexion simple n'est tout simplement plus exploitable, car il ne permet pas de prendre en compte la perte de cohérence associée à ces fluctuations.

On introduit alors un modèle de réflexions multiples pour lequel le champ de déplacement dans le milieu est décomposé en champ incident initial (cohérent) et champs rayonnés par toutes les inclusions. Le champ rayonné par une inclusion donnée est quant à lui le champ venant exciter celle-ci, écrit comme la somme du champ incident initial et des champs rayonnés par toutes les autres inclusions, multiplié par les opérateurs de réflexion/transmission de l'inclusion choisie. En procédant de la même manière pour toutes les inclusions, on obtient un système infini d'équations intégrales. Celui-ci est ensuite réduit en prenant pour une inclusion  $A$  donnée l'espérance mathématique conditionnelle, sa position étant fixée, de l'équation intégrale associée. Le champ moyen dans le milieu s'exprime en fonction du champ moyen conditionnel en  $A$ , une inclusion étant fixée en  $A$  noté  $\langle \mathbf{u}^A \rangle_A$ , qui à son tour est fonction de la somme des champs moyens conditionnels en  $B$  pour des inclusions fixées en  $A$  et  $B$  notés  $\langle \mathbf{u}^B \rangle_{AB}$ , etc. Les statistiques des différentes grandeurs mécaniques observées sont ainsi ramenées à des probabilités liées à la configuration géométrique. Les moyennes mentionnées se réfèrent aux différentes configurations possibles pour les hétérogénéités. Au deuxième niveau intervient la mesure de probabilité :

$$P_{B/A}(d\mathbf{x}_B) = p_{B/A}(\mathbf{x}_B)d\mathbf{x}_B$$

d'avoir une inclusion en  $B$  sachant qu'il en existe une centrée en  $A$ . La densité  $p_{B/A} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{p_{AB}}{p_A}$  est la densité conditionnelle bi-particulaire qui fait intervenir la fonction de corrélation bi-particulaire  $g(d_{AB})$  uniquement dépendante de la distance entre  $A$  et  $B$ , sous réserve

d'hypothèses d'homogénéité (stationnarité spatiale) et d'isotropie :

$$p_{B/A} = n_1 \cdot g(d_{AB})$$

où  $n_1$  est le nombre d'inclusions par unité de volume de composite. Sa forme dépend elle de la nature des inclusions, des forces d'interaction, des mécanismes de formation ou de façonnage, etc. Quelques modèles ont été publiés, faisant appel à des hypothèses de sphères dures impénétrables, de faibles concentrations, etc., et adaptés à la physique du matériau considéré. Perkus & Yevick [168] ont obtenu une équation intégrale approchée pour cette fonction sur la base d'un modèle statistique de fluide en équilibre.

Néanmoins, différentes approximations à ce niveau permettent de fermer la hiérarchie. Les plus usitées sont l'approximation quasi-crystalline (QCA) introduite par Lax [127, 128] qui consiste à poser :

$$\langle \mathbf{u}^A \rangle_{AB} = \langle \mathbf{u}^A \rangle_A$$

ou encore l'approximation du mélange parfait ("well-stirred approximation" en Anglais) :

$$p_{B/A} = p_B$$

dès que l'on sort du volume occupé par l'inclusion centrée en  $A$ , soit  $g(d_{AB}) = H(d_{AB} - 2R)$  si  $R$  désigne le rayon d'inclusions rigides non interpénétrables, avec  $H$  la fonction d'Heaviside. Celles-ci ne sont néanmoins valables que pour une concentration des inclusions restant faible. Dans ce cas, un schéma au premier ordre pour lequel on retrouve l'approximation de Born est souvent retenu, permettant de se ramener au modèle de réflexion simple.

De nombreux auteurs ont ainsi traité le problème tant en électromagnétisme qu'en élasticité. Sobczyk [190] considère une configuration aléatoire de  $N$  inclusions identiques rigides, élastiques ou vides (cavités), disjointes, de même orientation mais de forme quelconque, et dont on connaît a priori les densités de probabilité conjointes  $p_{AB\dots}$  et conditionnelles  $p_{B\dots/A\dots}$  des positions qu'elles occupent. La hiérarchie est fermée par deux approximations, équivalentes à celle de Lax, l'une étant celle de l'indépendance statistique des positions des inclusions introduite par Foldy [64] :

$$p_{AB\dots} = p_A p_{B\dots}$$

l'autre étant d'approcher le champ excitant une inclusion donnée par le champ total qui serait obtenu dans son voisinage si elle n'y était plus. L'auteur examine ensuite le cas particulier d'inclusions sphériques réparties dans la matrice suivant une densité constante et soumises à un champ incident d'ondes planes. Il se limite dans un premier temps à l'approximation de Born pour une faible concentration d'hétérogénéités qui lui permet d'exprimer le champ venant exciter une inclusion donnée comme étant uniquement composé du champ incident initial. La polarisation du champ moyen est alors la même dans ces conditions que celle du champ incident et le milieu aléatoire peut être homogénéisé, c'est-à-dire vu comme un milieu homogène équivalent réfléchissant une partie de l'énergie du champ incident. En revenant ensuite au cas général, il obtient une équation intégrale pour le champ moyen global et en déduit pour une onde moyenne plane les propriétés effectives d'un milieu homogène équivalent au milieu hétérogène, après avoir résolu le problème élémentaire de la réflexion par une inclusion sphérique unique. Les résultats obtenus pour la densité et les modules de Lamé effectifs sont similaires à ceux de McCoy [152] dans le cas d'un milieu aléatoire continu.

Bose & Mal [22, 23] ont dans diverses publications simplifié le problème en ne considérant que des inclusions ponctuelles pour lesquelles ils retrouvent des résultats comparables à ceux de McCoy [152].

Varadan *et al.* [214, 215, 216] dans de nombreuses publications développent la même approche générale. Ils introduisent [216] un modèle de fonction de corrélation bi-particulaire unifiée, fonction de la concentration volumique sans limitation des inclusions élastiques ou des cavités. Celui-ci est fondé à la fois sur l'approximation quasi-crystalline de Lax et sur l'approximation intégrale due à Perkus & Yevick [168] pour des concentrations plus importantes. L'équation intégrale pour le champ moyen conditionnel émis par l'inclusion  $A$ , celle-ci étant fixée, est ensuite résolue de façon approchée pour une onde plane moyenne, caractérisée par un vecteur d'onde effectif  $\mathbf{k}_{\text{eff}}$  pour le milieu homogénéisé et se propageant dans la même direction que l'onde plane incidente. Les auteurs en déduisent une équation de dispersion pour le nombre d'onde complexe  $k_{\text{eff}}$  fonction du nombre d'onde de l'onde incidente  $k_i$  et de l'opérateur de réflexion  $\mathbf{T}$  de l'inclusion. Sa partie réelle définit classiquement la vitesse de phase tandis que sa partie imaginaire caractérise la dispersion de l'onde plane cohérente dans le milieu aléatoire. Des formules explicites pour les nombres d'onde de compression ou de cisaillement peuvent être établies dans des cas bi-phasiques simplifiés, par exemple des inclusions élastiques sphériques dont le rayon est petit devant la longueur d'onde du champ incident, c'est-à-dire dans le cas d'une limite à basses fréquences dite de Rayleigh. Pour les hautes fréquences, l'équation de dispersion est générée et résolue numériquement pour différentes distributions des tailles des inclusions ou cavités. La vitesse de phase tend à diminuer quand la concentration volumique des hétérogénéités augmente, et ce d'autant plus vite que l'écart-type de leurs tailles pour une distribution gaussienne augmente. Elle diminue aussi légèrement avec la fréquence. La dispersion augmente quant à elle avec la concentration et avec la fréquence. Les résultats théoriques obtenus sont en très bon accord avec quelques conclusions expérimentales publiées par ailleurs. On observe notamment que la résonance des inclusions pour de faibles concentrations contrôle largement les vitesses de phase homogénéisées, comme le montre et la résolution numérique et l'expérience. Cette caractéristique n'est pas prédite par les théories simplifiées fondées sur l'approximation de Rayleigh et éliminant la fonction de corrélation bi-particulaire au profit de l'approximation quasi-crystalline.

#### 1.6.4 Milieux effectifs

Les méthodes de réflexions multiples sont fondées la plupart du temps sur la connaissance explicite d'une solution pour un problème d'inclusions ponctuelles ou de géométries particulièrement simples. D'autre part, elles se limitent très largement au cas des matériaux bi-phasiques isotropes. Une approche plus générale fondée sur une formulation en polarisation et le principe variationnel de Hashin-Shtrikman [91] a été développée et permet d'accéder à des caractéristiques effectives du milieu liants le tenseur des contraintes moyennes au tenseur des déformations moyennes. On se référera essentiellement aux travaux assez représentatifs de Willis [222, 223, 224]. Pour une présentation théorique systématique et générale dans le cas statique, on se reportera à Kröner [117] ou François *et al.* [65]. Enfin pour des résultats originaux plus récents, on pourra consulter la thèse de Bornert [21].

### Formulation en polarisation

L'approche en polarisation est similaire à la formulation du problème adjoint d'une équation du mouvement de la forme :

$$-\mathbf{Div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (1.34)$$

à laquelle on associe la fonction de Green  $\mathbf{U}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t)$  solution de :

$$-\mathbf{Div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{U}^G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) + \rho \ddot{\mathbf{U}}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) = \delta t \delta \mathbf{y} - \mathbf{x} \mathcal{I}_d$$

et qui vérifie les conditions aux limites homogènes sur le bord  $\partial\Omega$  du domaine considéré, et la condition initiale  $\mathbf{U}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) \equiv \mathbf{0}$  dès que  $t < 0$ . La décomposition classique des tenseur élastique et masse volumique du matériau considéré en partie de référence supposée connue (pas forcément strictement homogène) et partie fluctuante incertaine est notée :

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \mathfrak{d}\mathbf{D} \quad (1.35)$$

$$\rho = \rho_0 + \mathfrak{d}\rho \quad (1.36)$$

Les tenseur de polarisation des contraintes et champ de polarisation de la quantité de mouvement sont alors définis respectivement par :

$$\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})$$

$$\boldsymbol{\pi} = (\rho - \rho_0) \dot{\mathbf{u}}$$

et non nuls uniquement dans les zones occupées par les inclusions. Ils vérifient un système d'équations intégrales couplées faisant intervenir les hétérogénéités sous la forme de fonctions généralisées :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_0)(\mathbf{x}) &= (\mathbf{D} - \mathbf{D}_0)^{-1} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} \mathbf{S}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) \star_t \boldsymbol{\tau}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} \\ &\quad + \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{x}}(\dot{\mathbf{U}}^G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) \star_t \boldsymbol{\pi}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (1.37)$$

et :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) &= (\rho - \rho_0)^{-1} \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{y}}(\dot{\mathbf{U}}^G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) \star_t \boldsymbol{\tau}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} \\ &\quad + \int_{\Omega} \ddot{\mathbf{U}}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) \star_t \boldsymbol{\pi}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (1.38)$$

où  $\mathbf{u}_0$  est la solution de l'équation du mouvement, Eq.(1.34), pour le matériau de référence vérifiant les conditions aux limites et les conditions initiales du problème considéré. La solution pour le matériau hétérogène est ensuite obtenue par une équation de Lippmann-Schwinger transitoire de la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) - \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{y}}(\mathbf{U}^G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) \star_t \boldsymbol{\tau}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} \\ &\quad - \int_{\Omega} \dot{\mathbf{U}}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) \star_t \boldsymbol{\pi}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (1.39)$$

Willis [222] a montré que la solution est unique pour le problème aux limites posé avec conditions initiales pour la quantité de mouvement. La solution moyenne d'ensemble, dans le sens de l'espérance mathématique, peut donc être écrite :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u} \rangle (\mathbf{x}) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) - \int_{\Omega} \epsilon_{\mathbf{y}}(\mathbf{U}^G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) \star_t \langle \boldsymbol{\tau} \rangle (\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} \\ &\quad - \int_{\Omega} \dot{\mathbf{U}}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) \star_t \langle \boldsymbol{\pi} \rangle (\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (1.40)$$

Cette équation et le système associé ci-dessus Eqs.(1.37–1.38) constituent une formulation générale de la propagation d'onde en milieu hétérogène. De l'Eq.(1.40) ci-dessus on peut par exemple déduire les expressions de  $\langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \rangle$  et  $\langle \dot{\mathbf{u}} \rangle$  en fonction de  $\langle \boldsymbol{\tau} \rangle$  et  $\langle \boldsymbol{\pi} \rangle$  pour ensuite éliminer  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_0)$  et  $\dot{\mathbf{u}}_0$  dans les Eqs.(1.37–1.38) (c'est l'approche dite du lissage). On peut alors caractériser le comportement effectif du matériau hétérogène considéré sous la forme d'un système *couplé* liant le tenseur des contraintes moyennes et la quantité de mouvement moyenne ( $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle, \langle \rho \dot{\mathbf{u}} \rangle$ ) au tenseur des déformations moyennes et à la vitesse moyenne ( $\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle, \langle \dot{\mathbf{u}} \rangle$ ) [224]. Néanmoins, ces développements ne restent pratiquement abordables que pour des cas particuliers assez simples, et en supposant généralement que les perturbations  $d\mathbf{D}$  et  $d\boldsymbol{\phi}$  restent faibles. Une autre difficulté importante est la détermination de la fonction de Green  $\mathbf{U}^G$  pour le domaine  $\Omega$ , qui n'est connue analytiquement que dans le cas où celui-ci est infini.

### Exemples d'applications

**Inclusion unique** – (Willis [222]) La formulation en polarisation se simplifie avantageusement dans le cas particulier d'une inclusion unique de géométrie quelconque plongée dans une matrice considérée comme infinie et excitée par une onde plane. Les résultats obtenus peuvent être étendus sans difficulté au cas d'un milieu dispersé à inclusions multiples dans lequel on suppose qu'il n'y a pas d'interaction entre celles-ci. L'auteur introduit la section réfléchissante  $Q$  du matériau ainsi constitué, définie comme le rapport du flux moyen (relativement à la surface délimitant un volume de matériau donné – moyenne "géométrique") d'énergie sortante associée au champ purement réfléchi  $\mathbf{v} = \langle \mathbf{u} \rangle - \mathbf{u}_0$  sur le flux moyen (idem) d'énergie entrante associée au champ incident. Sans chercher explicitement  $\mathbf{v}$ , il obtient une formule asymptotique formelle simplifiée pour  $Q$ , fonction des différents noyaux des opérateurs intégraux du système (1.37–1.38), dans le domaine des basses fréquences et pour le cas d'une inclusion ellipsoïdale. Aucune hypothèse d'isotropie de la matrice n'est requise à ce stade. Des résultats explicites sont reproduits pour le cas d'une inclusion sphérique, d'un disque plat élastique ou rigide, d'une fibre mince ou d'une cavité cylindrique plate sous incidence d'ondes P, SV ou SH, dans une matrice cette fois isotrope. Le principal intérêt que l'on peut voir dans ces développements est que l'auteur a pu obtenir différentes expressions de référence pour des cas très simples sans se limiter à l'approximation de Born en basses fréquences comme cela avait été le cas dans la majorité des travaux antérieurs, ainsi qu'une expression formelle de la section réfléchissante dans une matrice anisotrope.

**Inclusions multiples distribuées aléatoirement** – (Willis [223, 224]) Pour un matériau composite bi-phasique type, le matériau de référence sera la matrice et les hétérogénéités seront les inclusions supposées constituées d'un même matériau différent du matériau de référence. Par définition, les polarisations sont partout nulles sauf dans les inclusions. On



peut déterminer  $\boldsymbol{\tau}$  et  $\boldsymbol{\pi}$  par une méthode similaire à celle des réflexions multiples exposée plus haut, et qui conduit à exprimer  $\langle \boldsymbol{\tau} \rangle$  (respectivement  $\langle \boldsymbol{\pi} \rangle$ ) en fonction de sa valeur dans le volume occupé par une inclusion centrée en  $A$ , sa position étant fixée, notée par analogie  $\langle \boldsymbol{\tau}^A \rangle_A$  (resp.  $\langle \boldsymbol{\pi}^A \rangle_A$ ).  $\langle \boldsymbol{\tau}^A \rangle_A$  et  $\langle \boldsymbol{\pi}^A \rangle_A$  sont eux-mêmes fonctions des polarisations conditionnelles en  $B$   $\langle \boldsymbol{\tau}^B \rangle_{BA}$  et  $\langle \boldsymbol{\pi}^B \rangle_{BA}$  pour des inclusions fixées en  $A$  et  $B$  par l'intermédiaire du système ci-dessus, Eqs.(1.37–1.38), etc. Le schéma hiérarchique est bouclé par exemple en introduisant l'approximation quasi-cristalline consistant à poser :

$$\langle \boldsymbol{\tau}^B \rangle_{BA} \rightarrow \langle \boldsymbol{\tau}^B \rangle_B, \quad \langle \boldsymbol{\pi}^B \rangle_{BA} \rightarrow \langle \boldsymbol{\pi}^B \rangle_B$$

lorsque  $|\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B| \rightarrow \infty$ , et valable pour des concentrations volumiques restant faibles.

On peut ensuite rechercher les solutions  $\langle \boldsymbol{\tau}^A \rangle_A$  et  $\langle \boldsymbol{\pi}^A \rangle_A$ , puis  $\langle \boldsymbol{\tau} \rangle$ ,  $\langle \boldsymbol{\pi} \rangle$  et  $\langle \mathbf{u} \rangle$ , sous forme d'ondes planes en supposant le milieu de propagation infini ce qui revient à s'affranchir des conditions aux limites, soit  $\mathbf{w}$ , et à utiliser la fonction de Green connue analytiquement pour une matrice homogène infinie. Pour les basses fréquences, le système (1.37–1.38) se réduit, après application de la méthode de lissage, à :

$$\begin{cases} (\mathbf{D} - \mathbf{D}_0)^{-1} \boldsymbol{\tau}^A + \mathbf{S}_{\mathbf{x}, \text{stat}}^\infty \boldsymbol{\tau}^A = \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle \\ (\rho - \rho_0)^{-1} \boldsymbol{\pi}^A = \langle \dot{\mathbf{u}} \rangle \end{cases}$$

L'auteur déduit de ce système une estimation du tenseur élastique homogénéisé équivalent au milieu hétérogène avec inclusions sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D}_0 + C_d \left[ (\mathbf{D} - \mathbf{D}_0)^{-1} + (1 - C_d) \mathbf{G} \right]^{-1}$$

où  $C_d \stackrel{\text{déf}}{=} |\Omega| p_A$  désigne la concentration volumique des inclusions;  $\mathbf{G}$  est un tenseur constant lié au tenseur élastique de la matrice  $\mathbf{D}_0$  et à la géométrie des inclusions, appelé tenseur de Hill. Des formules explicites de  $\tilde{\mathbf{D}}$  sont données pour une matrice isotrope et des inclusions sphériques (auquel cas  $\tilde{\mathbf{D}}$  est aussi isotrope), puis des inclusions sphéroïdales (auquel cas  $\tilde{\mathbf{D}}$  est transversalement isotrope) du type disques plats élastiques ou rigides, cavités cylindriques plates (fissures), fibres minces. Ces estimations coïncident avec les résultats obtenus par une formulation variationnelle de Hashin-Shtrikman <sup>(6)</sup> [91, 92]. Le matériau homogène équivalent complet est obtenu en ajoutant pour sa densité la densité moyenne :

$$\tilde{\rho} = \rho_0 + C_d (\rho - \rho_0)$$

Encore une fois, ceci est conforme aux résultats de McCoy [152] dans le cas des basses fréquences, avec en plus une estimation directe des paramètres du matériau équivalent. Par ailleurs, une formule similaire au cas de l'inclusion unique est obtenue pour  $Q$  dans le cas d'un alignement d'ellipsoïdes, celle-ci approchant la section réfléchissante du cas de l'inclusion simple lorsque la concentration volumique des inclusions  $C_d$  diminue.  $Q$  peut être explicitée pour différentes simplifications telles qu'une matrice isotrope contenant des inclusions sphériques.

### Formulation systématique et bornes

Ainsi que nous avons déjà pu l'entrevoir brièvement dans les sections précédentes, une autre approche pour traiter la propagation d'ondes en milieu hétérogène couramment mise

<sup>6</sup>Celle-ci correspond à la formulation variationnelle des Eqs.(1.37–1.38).

en oeuvre dans la littérature est de définir un milieu équivalent. Les formulations variationnelles classiques fondées sur les principes d'énergie minimale et d'énergie complémentaire, ou la formulation variationnelle de Hashin-Shtrikman, permettent d'obtenir des bornes pour le tenseur élastique du matériau "homogénéisé" équivalent  $\tilde{\mathbf{D}}$  tel que  $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \tilde{\mathbf{D}} : \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle$  (voir l'Eq.(1.32)). Généralement  $\tilde{\mathbf{D}}$  n'a aucune raison d'être homogène sur l'ensemble du domaine  $\Omega$  considéré ; les résultats classiques présentés ci-dessous montrent également qu'il s'exprime sous la forme d'un tenseur non local qui peut dépendre, par exemple, des conditions aux limites imposées. Dans la suite on se limite au cas statique, aucun résultat comparable concernant la dynamique n'ayant été publié à notre connaissance. Si l'on revient au problème tel qu'introduit dans le cadre de la méthode des réflexions simples, les Eqs.(1.37) et (1.39) permettent d'exprimer le tenseur élastique du milieu aléatoire homogénéisé défini par l'Eq.(1.32) sous la forme générale (Kröner [117], Willis [224], François *et al.* [65]) :

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D}_0 + \langle \mathfrak{d}\mathbf{D} [\mathcal{I}_d + \mathcal{S}_x \mathfrak{d}\mathbf{D}]^{-1} \rangle \otimes \langle [\mathcal{I}_d + \mathcal{S}_x \mathfrak{d}\mathbf{D}]^{-1} \rangle^{-1}$$

PREUVE – De l'Eq.(1.39) en statique on déduit :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_0 - \mathcal{S}_x \mathfrak{d}\mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}$$

soit formellement :

$$\boldsymbol{\epsilon} = [\mathcal{I}_d + \mathcal{S}_x \mathfrak{d}\mathbf{D}]^{-1} : \boldsymbol{\epsilon}_0 \quad (a)$$

Comme par ailleurs :

$$\boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{D}_0 + \mathfrak{d}\mathbf{D}] : \boldsymbol{\epsilon} = [\mathbf{D}_0 + \mathfrak{d}\mathbf{D}] [\mathcal{I}_d + \mathcal{S}_x \mathfrak{d}\mathbf{D}]^{-1} : \boldsymbol{\epsilon}_0 \quad (b)$$

on en déduit en prenant la moyenne d'ensemble dans les deux relations (a) et (b) ci-dessus et en éliminant  $\boldsymbol{\epsilon}_0$  le résultat annoncé pour  $\tilde{\mathbf{D}}$  liant  $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$  et  $\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle$ .  $\square$

Pour  $\|\mathfrak{d}\mathbf{D}\|$  suffisamment faible (la norme restant à définir), on peut formellement développer en série cette expression et retrouver une formule identique à l'Eq.(1.33) :

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D}_0 + \langle \mathfrak{d}\mathbf{D} \rangle - \langle (\mathfrak{d}\mathbf{D} - \langle \mathfrak{d}\mathbf{D} \rangle) \mathcal{S}_x (\mathfrak{d}\mathbf{D} - \langle \mathfrak{d}\mathbf{D} \rangle) \rangle + \dots$$

qui fait intervenir les distributions de probabilité de trouver une inclusion en un point donné  $A$ , une inclusion en un point donné  $B$  sachant qu'il y en a déjà une en  $A$ , etc. Ainsi, les termes successifs dans l'expression ci-dessus font intervenir les probabilités conjointes successives pour un nombre croissant de points. La simplicité formelle de ces équations ne doit pas masquer leur complexité intrinsèque : elles font intervenir en effet des opérateurs intégraux et exigent une information très complète sur la distribution de probabilité du champ de tenseur  $\mathbf{D}_1(\mathbf{x})$ , qui n'est généralement pas accessible. Deux types de développements sont généralement envisagés pour surmonter ces difficultés :

- la recherche de bornes pour le tenseur d'élasticité effectif  $\tilde{\mathbf{D}}$  et le tenseur de souplesse effective  $\tilde{\mathbf{D}}^{-1}$ , associées à une connaissance partielle de la distribution de  $\mathfrak{d}\mathbf{D}(\mathbf{x})$  ou  $\mathfrak{d}\mathbf{D}(\mathbf{x})^{-1}$  ;
- ou bien la formulation d'hypothèses simplificatrices permettant une résolution effective pour des distributions spatiales particulières d'inclusions dont la forme est connue, par exemple.

On donne ici quelques unes des bornes les plus référencées.

**Borne de Voigt** – Si dans le développement ci-dessus on se limite au second terme (soit un développement au premier ordre), on obtient pour la borne élémentaire supérieure de

Voigt :

$$\mathbf{D}_V \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{D}_0 + \langle \mathbf{dD} \rangle$$

pour laquelle  $\mathbf{D}_V - \tilde{\mathbf{D}}$  est défini non négatif sachant que  $\tilde{\mathbf{D}}$  minimise l'énergie de déformation du matériau équivalent pour une condition aux limites en déplacement qui permet à  $\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle$  d'être uniforme dans tout  $\Omega$ .

**Borne de Reuss** – La borne élémentaire inférieure de Reuss est obtenue de la même manière pour le tenseur de souplesse  $\mathbf{D}^{-1}$  inverse du tenseur élastique, soit :

$$\mathbf{D}_R \stackrel{\text{déf}}{=} [\mathbf{D}_0^{-1} + \langle \mathbf{dD}^{-1} \rangle]^{-1}$$

$\mathbf{D}_R - \tilde{\mathbf{D}}$  est défini non négatif sachant que  $\tilde{\mathbf{D}}$  maximise l'énergie complémentaire pour une condition aux limites en traction qui permet à  $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$  d'être uniforme dans tout  $\Omega$ .

**Bornes de Hashin-Shtrikman** – Les bornes de Hashin-Shtrikman [91, 92] sont obtenues à partir de la décomposition en partie locale  $\mathbf{S}_x^l$  et régulière  $\mathbf{S}_x^r$  du noyau  $\mathbf{S}_x$ , où :

$$\mathbf{S}_x^r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = o\left(\frac{1}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|}\right) \text{ quand } \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \rightarrow +\infty$$

Kröner [117] définit la condition de désordre gradué de rang  $n$  comme :

$$\langle (\mathbf{dD} - \langle \mathbf{dD} \rangle) [\mathbf{S}_x^r (\mathbf{dD} - \langle \mathbf{dD} \rangle)]^p \rangle = 0, \quad \forall p = 1, 2, \dots, n-1$$

Si le milieu satisfait à cette condition au rang  $n = 2$ , on obtient la borne supérieure de Hashin-Shtrikman sous la forme :

$$\mathbf{D}_{HS}^+ \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{D}_0 + \langle \mathbf{dD} [\mathcal{I}_d + \mathbf{S}_x^l \mathbf{dD}^{-1}] \rangle \otimes \langle [\mathcal{I}_d + \mathbf{S}_x^l \mathbf{dD}^{-1}] \rangle^{-1}$$

La borne inférieure  $\mathbf{D}_{HS}^-$  s'obtient par une démarche analogue, mais formulée en terme de souplesse dans une relation déformation en fonction de la contrainte.

## 1.7 Equations différentielles stochastiques

Les différentes approches présentées dans la section précédente, §1.6, et développées pour l'étude du comportement dynamique des matériaux composites se prêtent bien au traitement des phénomènes de diffraction en général. Par contre elles sont mal adaptées à l'étude des phénomènes de localisation, ou de transport et diffusion suivant la terminologie adoptée en section §1.6.1. Ceux-ci nécessitent des traitements particuliers, abordés ici dans le cadre des équations différentielles linéaires à coefficients aléatoires. L'équation de Navier homogène (1.34) pour la propagation d'ondes dans un milieu visco-élastique à caractéristiques aléatoires peut être étudiée dans un tel cadre. Les équations différentielles linéaires à coefficients aléatoires font l'objet de développements mathématiques différents des cas habituels des équations différentielles déterministes dans la mesure où il s'agit de manipuler des processus stochastiques incarnant l'ensemble des trajectoires possibles pour les grandeurs étudiées, et donc, en particulier, de travailler dans des espaces de dimensions infinies.

### 1.7.1 Cadre général

On donne ici brièvement les principales méthodes permettant de traiter les équations différentielles à coefficients aléatoires en se référant à l'équation de Navier homogène écrite sous sa forme canonique pour la variable d'état  $\mathbf{Y}(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma})$  (vitesse, tenseur des contraintes) :

$$\begin{cases} \rho \dot{\mathbf{v}} = \text{Div } \boldsymbol{\sigma} \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \end{cases} \quad (1.41)$$

$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = (\mathbf{D}(\mathbf{x}), \rho(\mathbf{x}))$ , tenseur d'élasticité et densité, sont ici les coefficients champs aléatoires considérés ; on tient éventuellement compte d'une condition initiale généralement de la forme  $\mathbf{Y}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{Y}_0(\mathbf{x}) = (\mathbf{0}, \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{x}))$ . Les champs aléatoires  $\mathbf{Y}(\mathbf{x}, t)$  et  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  sont définis sur le même espace probabilisé  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$ . Les principales difficultés liées à ce type de problème sont :

- la connaissance des lois de probabilité des coefficients stochastiques  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ . Le plus souvent celle-ci est indispensable sachant qu'une description partielle du type second ordre (moyenne et variance) est insuffisante : même si l'on ne cherche que la moyenne  $\mathbf{m}_{\mathbf{Y}(\mathbf{x})}(\mathbf{x}, t) = \mathbb{E} \{ \mathbf{Y}(\mathbf{x}, t) \}$ , il reste nécessaire de connaître l'ensemble du système de lois marginales du processus  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ . Plus généralement la donnée de la loi de probabilité conjointe de  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{Y}_0$ , si la condition initiale est de nature aléatoire, caractérisée par la mesure  $P_{\mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{Y}(\mathbf{x})}(\mathbf{x}; d\mathbf{p}, d\mathbf{y})$  est nécessaire ;
- la stabilité de la solution [198, 193] : stabilité en m.o.d., stabilité presque sûre.

Les méthodes de "résolution" disponibles, à savoir celles qui permettent d'accéder à des descriptions en termes de probabilités du processus  $\mathbf{Y}(\mathbf{x}, t)$ , dépendent de la nature de l'opérateur liant  $\dot{\mathbf{Y}}$  à  $\mathbf{Y}$  et du processus stochastique  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ , et sont toutes fondées sur les représentations particulières que l'on peut en faire : développement de Karhunen-Loeve, filtrage linéaire d'un bruit blanc, représentation markovienne. On rappelle ici brièvement les principaux résultats issus des théories générales des équations différentielles stochastiques et susceptibles d'être appliqués à l'équation de Navier que l'on souhaite traiter ici. On pourra se référer aux ouvrages de Arnold [4], Soong [198] ou Soize [192] et les références citées pour une description complète. L'objectif est d'introduire les différentes applications récentes de la littérature traitant de la propagation d'ondes en milieu aléatoire, d'en faciliter la compréhension car elles font appel à des notions mathématiques délicates et peu usitées en génie parasismique, et d'en voir leurs limitations pour ce qui concerne ce travail.

#### Coefficients variables aléatoires

Si le champ stochastique  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  est indépendant de  $\mathbf{x}$ , alors c'est en fait une variable aléatoire notée simplement  $\mathbf{P}$ . Ce cas ne nous intéresse pas directement dans l'étude de l'influence de la variabilité spatiale en interaction sol-structure dans la mesure où les modules du sol seront variables en fonction de la coordonnée d'espace et donc représentés par des champs, mais il constitue le modèle de référence pour l'étude de l'équation de Navier à coefficients aléatoires de l'Eq.(1.41). La méthode consiste à prendre comme nouvelle variable d'état le processus  $\mathbf{Z}(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{Y}(\mathbf{x}, t), \mathbf{P})$  avec  $\dot{\mathbf{Z}} = (\dot{\mathbf{Y}}, \mathbf{0})$ , et la condition initiale  $\mathbf{Z}_0 = [\mathbf{Y}_0, \mathbf{P}]$ , de loi de probabilité conjointe supposée connue si  $\mathbf{Y}_0$  est aléatoire. On est ainsi ramené à une équation différentielle non linéaire à condition initiale aléatoire seulement, que l'on sait en principe résoudre de façon constructive par différentes méthodes classiques : calcul direct de l'image d'une mesure de probabilité, méthode des fonctions caractéristiques, méthode

de l'équation de Liouville, ou méthode des perturbations, suivant les données probabilistes disponibles pour la condition initiale.

### Coefficients processus stochastiques non-homogènes

Si  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  est un champ stochastique du second ordre non-homogène dans le milieu  $\Omega$  considéré, on peut le représenter par son développement de Karhunen-Loeve (voir l'Annexe C) :

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \boldsymbol{\gamma}_j(\mathbf{x})$$

avec  $\{\xi_j, j \geq 1\}$  des variables aléatoires du second ordre définies sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$  à valeurs réelles, non-corrélées et de variance unité, i.e.  $\mathbb{E}\{\xi_j \xi_k\} = \delta_{jk}$ , et  $\boldsymbol{\gamma}_j(\mathbf{x})$  des fonctions ortho-normées déterministes formant une base hilbertienne de  $L^2(\Omega)$ . En tronquant ce développement à l'ordre  $N$ , l'Eq.(1.41) est traitée avec la nouvelle variable d'état  $\mathbf{Z}(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{Y}(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\xi})$  où  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ , et l'on retrouve le cas homogène traité dans le paragraphe précédent. Notons que l'erreur quadratique moyenne commise en troncant la série de Karhunen-Loeve au rang  $N$  est minimisée par les fonctions  $\boldsymbol{\gamma}_j$  (Annexe C). Le champ  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  peut donc être approché d'aussi près que l'on veut dans  $L^2(\mathcal{A} \otimes \Omega)$  par un nombre fini de termes.

### Coefficients processus gaussiens stationnaires

Si maintenant  $\mathbf{P}(t)$  est un champ stochastique gaussien du second ordre indexé sur  $\mathbb{R}$ , stationnaire en m.o.d., continu en m.o.d., centré et physiquement réalisable (<sup>7</sup>), on peut le remplacer par une réalisation markovienne notée  $\mathbf{X}(t)$ , liée à  $\mathbf{P}(t)$  par une transformation linéaire déterministe et solution d'une équation différentielle stochastique d'Itô. En effet tout processus stochastique gaussien du second ordre, centré, stationnaire en m.o.d. et continu en m.o.d., physiquement réalisable, admet au moins une représentation markovienne. L'Eq.(1.41) est traitée cette fois-ci avec la variable d'état  $\mathbf{Z}_x(t) = (\mathbf{Y}(\mathbf{x}, t), \mathbf{X}(t))$ , avec la condition initiale  $\mathbf{Z}_0 = (\mathbf{Y}_0, \mathbf{X}_0)$  de loi conjointe supposée connue si  $\mathbf{Y}_0$  est aléatoire, elle-même solution d'une équation différentielle stochastique d'Itô. Sous certaines conditions portant sur l'opérateur liant  $\dot{\mathbf{Y}}$  et  $\mathbf{Y}$ , le processus solution  $\mathbf{Z}_x(t)$  est unique et a la propriété d'être un processus de diffusion ayant presque sûrement ses trajectoires continues. Il est ainsi entièrement caractérisé par la donnée de la loi de  $\mathbf{Z}_0$  et par sa probabilité de transition  $D \mapsto Q(\tau, \mathbf{z}_\tau, t; D)$  vérifiant pour toute partition ordonnée  $0 \leq t_1 < \dots < t_k < \tau < t$  de  $\mathbb{R}^+$  la propriété de Markov :

$$\begin{aligned} Q(\tau, \mathbf{z}_\tau, t; D) &= P(\mathbf{Z}_x(t) \in D | \mathbf{Z}_x(t_1) = \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{Z}_x(t_k) = \mathbf{z}_k, \mathbf{Z}_x(\tau) = \mathbf{z}_\tau) \\ &= P(\mathbf{Z}_x(t) \in D | \mathbf{Z}_x(\tau) = \mathbf{z}_\tau) \end{aligned}$$

Celle-ci signifie que la connaissance que l'on a du processus  $\mathbf{Z}_x(t)$  au point  $t > \tau$  n'augmente pas si l'on ajoute des observations du processus en des points quelconques inférieurs à  $\tau$ . Le résultat final qui nous intéresse est que si la probabilité de transition admet une densité  $q(\tau, \mathbf{z}_\tau, t; \mathbf{z}) d\mathbf{z} = Q(\tau, \mathbf{z}_\tau, t; d\mathbf{z})$ , alors la densité de probabilité de la variable aléatoire  $\mathbf{Z}_x(t)$  pour tout  $t$  positif fixé, donnée par :

$$p(\mathbf{z}, t) = \int q(0, \mathbf{z}_0, t; \mathbf{z}) P_{\mathbf{z}_0}(d\mathbf{z}_0)$$

<sup>7</sup> Cette dernière propriété signifie que l'on peut représenter  $\mathbf{P}(t)$  comme le filtrage d'un bruit blanc gaussien normalisé par un filtre linéaire causal.

est solution d'une équation de Fokker-Planck d'évolution, ou Kolmogorov directe dans la littérature anglo-saxonne. On a de plus la convergence en probabilité :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} p(\mathbf{z}, t) d\mathbf{z} = P_{\mathbf{Z}_0}(d\mathbf{z})$$

Cette équation peut être résolue par des méthodes mathématiques et des méthodes d'analyse numérique standards. Néanmoins, il devient impossible de construire une solution explicite dès que la dimension de  $\mathbf{Z}_x(t)$  dépasse quelques unités et seule une approche numérique est possible, rendant d'autant plus difficile le passage à des grandeurs type second ordre intéressants l'ingénieur.

L'application de cette méthode au cas de l'équation de Navier pose une difficulté sérieuse liée au fait que les coefficients aléatoires ne dépendent pas *a priori* de  $t$ . Dans la section suivante §1.7.2, cette difficulté est surmontée, moyennant certaines transformations de l'équation d'évolution, en introduisant une direction privilégiée de variation des paramètres, soit la profondeur  $z$  (milieux stratifiés), qui est reliée au temps par la célérité des ondes dans un profil déterministe moyen selon cette même direction.

### 1.7.2 Applications à la propagation d'ondes en milieux aléatoires

Dans une série d'articles, Papanicolaou *et al.* [5, 6, 30, 111, 112, 113, 130, 164, 186, 220] ont mis en oeuvre les techniques des équations différentielles stochastiques et notamment la méthode de l'équation de Fokker-Planck afin de résoudre des problèmes directs et inverses d'élastodynamique. Ils obtiennent un ensemble de résultats originaux [165] fondés principalement sur l'utilisation d'un théorème de passage à la limite pour les équations différentielles stochastiques dépendant d'un petit paramètre  $\varepsilon$  dû à Khasminskii (Burridge *et al.* [30], Khasminskii [109]) :

**Théorème 1.42** *Pour un processus stochastique  $\mathbf{P}(x, y)$  centré, stationnaire en  $y$  quel que soit  $x$ , le processus stochastique  $\mathbf{Y}_\varepsilon$  solution d'une équation différentielle stochastique non linéaire de la forme :*

$$D\mathbf{Y}_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{F} \left( \mathbf{P} \left( t, \frac{t}{\varepsilon^2} \right), \mathbf{Y}_\varepsilon \right) dt$$

*converge en loi vers un processus de diffusion  $\mathbf{Y}$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , dont la densité de probabilité est solution de l'équation de Fokker-Planck d'évolution :*

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}, t) = \mathcal{L}^* p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}, t)$$

*où  $\mathcal{L}^*$  est l'adjoint de l'opérateur dit générateur infinitésimal du processus  $\mathbf{Y}$ , défini par :*

$$\mathcal{L}f(\mathbf{y}) = \lim_{v_0 \rightarrow +\infty} \frac{1}{v_0} \int_0^{+\infty} \mathbb{E} \left\{ \int_0^{v_0} \mathbf{F}(\mathbf{P}(u, v), \mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{F}(\mathbf{P}(u + u', v), \mathbf{y}) dv \right\} du' \nabla_{\mathbf{y}} f(\mathbf{y})$$

Le principal phénomène mis en évidence dans ces études est celui de la localisation des ondes. Or celui-ci est très différent suivant qu'il s'agit d'examiner la propagation d'ondes en 1D, 2D ou 3D [199]. En effet dans les cas 1D ou 2D, les expériences montrent que la fraction  $R(t)$  du champ d'onde qui repasse par un point donné jusqu'à l'instant  $t$  augmente sans borne

pour des temps très longs, alors que dans le cas 3D  $R(t)$  tend plutôt à se stabiliser autour d'une valeur de 1. Il convient donc de bien distinguer ces différents modes de propagation lorsqu'est appliqué le théorème (1.42) ci-dessus à l'équation de Navier (1.41). La nature de l'excitation considérée, sous la forme d'une impulsion ou d'une onde harmonique par exemple, joue également un rôle dans le phénomène de localisation, et les observations peuvent être assez différentes suivant les cas [165].

### Propagation 1D

Cet exemple sera plus particulièrement détaillé par la suite afin de présenter les principaux résultats établis par les auteurs. Asch *et al.* [6] considèrent donc dans un premier temps le cas d'un milieu acoustique stratifié 1D à caractéristiques aléatoires (dans le demi-espace  $z < 0$ ) excité à  $t = 0$  par une onde plane incidente en pression et vitesse se propageant à  $t < 0$  dans un milieu homogène (demi-espace  $z > 0$ ) de caractéristiques déterministes  $\rho_0$  et  $K_0$ , respectivement sa densité et son module de compression ; la célérité des ondes de compression et l'impédance acoustique associées sont respectivement :

$$c_0 = \sqrt{\frac{K_0}{\rho_0}}, \quad I_0 = \sqrt{\rho_0 K_0} = \rho_0 c_0.$$

$v(z, t)$  et  $p(z, t)$  désignant respectivement les champs de vitesse et de pression, les équations d'équilibre traitées sont :

$$\begin{cases} \rho(z) \partial_t v(z, t) + \partial_z p(z, t) = 0 \\ \frac{1}{K(z)} \partial_t p(z, t) + \partial_z v(z, t) = 0 \end{cases}$$

tandis que l'onde plane incidente est de la forme :

$$\begin{cases} p_i(z, t) = -\varepsilon^{-\gamma} \sqrt{I_0} f\left(\frac{t + \frac{z}{c_0}}{\varepsilon}\right) \\ v_i(z, t) = \varepsilon^{-\gamma} \frac{1}{\sqrt{I_0}} f\left(\frac{t + \frac{z}{c_0}}{\varepsilon}\right) \end{cases}$$

L'énergie ainsi injectée est de l'ordre de  $\varepsilon^{1-2\gamma}$ , le cas  $\gamma = \frac{1}{2}$  correspond à une énergie fixée indépendante de  $\varepsilon$  et le cas  $\gamma = 0$  correspond à une amplitude fixée. L'hypothèse fondamentale gouvernant l'ensemble des développements est celle de la séparation d'échelle caractérisée par le petit paramètre  $\varepsilon$ . La micro-échelle est celle des fluctuations locales des hétérogénéités dans chaque couche, de l'ordre de  $\varepsilon^2$ , la macro-échelle est celle des variations régulières de la stratification, de l'ordre de 1. Ainsi les densité  $\rho$  et module de compression  $K$  du milieu aléatoire ( $z < 0$ ) varient en fonction de  $z$  suivant les deux échelles :

$$\begin{cases} \rho(z) = \rho_0(z) \left(1 + \eta\left(z, \frac{z}{\varepsilon^2}\right)\right) \\ \frac{1}{K(z)} = \frac{1}{K_0(z)} \left(1 + \nu\left(z, \frac{z}{\varepsilon^2}\right)\right) \end{cases}$$

$\rho_0(z)$  et  $K_0(z)$  sont les densité et module moyens, déterministes, du milieu stratifié aléatoire tels que  $\rho_0(0) = \rho_0$  et  $K_0(0) = K_0$ , et qui varient suivant la macro-échelle.  $\eta$  et  $\nu$  sont respectivement les fluctuations aléatoires bornées des densité et module dans chaque couche ; ce sont des processus stochastiques centrés et supposés localement stationnaires en  $\frac{z}{\varepsilon^2}$  (micro-échelle) pour tout  $z$  (macro-échelle) fixé. Elles sont également supposées bornées, mais pas nécessairement faibles. Le champ incident caractérisée par l'impulsion  $f$  a une

durée intermédiaire entre les deux échelles, de l'ordre de  $\varepsilon$ , afin de pouvoir à la fois exciter l'ensemble du milieu stratifié, et "moyenner" dans chaque couche les effets des fluctuations locales des hétérogénéités. Cette séparation d'échelles correspond à une hypothèse limite de basses fréquences vis-à-vis des fluctuations locales, ou de hautes fréquences vis-à-vis des variations macroscopiques. En effet  $\varepsilon \ll 1$  est le ratio de la longueur de corrélation ( $\sigma\varepsilon^2$ ) des processus  $z \mapsto \eta(\cdot, \frac{z}{\varepsilon^2})$  et  $z \mapsto \nu(\cdot, \frac{z}{\varepsilon^2})$  par la longueur d'onde du champ incident ( $\sigma\varepsilon$ ), ou le ratio de la longueur d'onde du champ incident par la distance de propagation ( $\sigma 1$ ).

**Signal réfléchi** – (Papanicolaou *et al.* [30, 5, 6, 164, 220]) Sous ces conditions, les auteurs montrent que la pression réfléchi par le milieu aléatoire, caractérisée par son coefficient de réflexion  $R_\varepsilon(0, t)$  à l'interface  $z = 0$  :

$$R_\varepsilon(z, t) = \frac{1}{\sqrt{I_0}} (p(z, t) - p_i(z, t))$$

est un processus stochastique non stationnaire qui converge faiblement (en loi), pour  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , vers un processus stochastique  $R(t)$  gaussien, centré, localement stationnaire à l'échelle intermédiaire caractérisant la largeur du signal incident, ce que les auteurs écrivent alors sous la forme d'un processus "fenêtré"  $R_t(\tau) = R(t + \varepsilon\tau)$ ; en effet les signaux réfléchis sont non corrélés pour des ouvertures en temps  $\varepsilon\tau$  de l'ordre de  $\varepsilon$ . Sa fonction d'autocorrélation, égale à la fonction de covariance puisque le processus est centré, est pour chaque instant  $t > 0$  :

$$C_t(\tau) = \mathbb{E} \{R_t(\tau/2) R_t(-\tau/2)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega\tau} |\hat{f}(\omega)|^2 S_R(t, \omega) d\omega \quad (1.43)$$

Sa fonction de densité spectrale instantanée normalisée  $S_R(t, \omega)$  ne dépend que des caractéristiques déterministes  $\rho_0(z)$  et  $K_0(z)$  du milieu aléatoire suivant la macro-échelle, et de l'intensité de leurs fluctuations aléatoires caractérisée par la fonction  $\alpha(z)$  avec :

$$\alpha(z) = \int_{-\infty}^0 \mathbb{E} \{n(z, y)n(z, y + y')\} dy' \quad (1.44)$$

pour  $n(z, y) = \frac{1}{2} (\eta(z, y) - \nu(z, y))$ . Elle est solution d'un système hyperbolique d'équations de transport, appelées "W-equations", et peut être déterminée analytiquement lorsque le profil déterministe macroscopique est uniforme ( $c_0$  et  $\alpha$  indépendants de  $z$ ); dans ce cas (White *et al.* [220]) :

$$S_R(t, \omega) = \frac{\alpha c_0 \omega^2}{(c_0 + \alpha \omega^2 t)^2} \quad (1.45)$$

Les auteurs établissent également le résultat remarquable suivant :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{S_R(t, \omega)}{\omega^2} = \frac{\alpha(z_t)}{c_0(z_t)} \quad (1.46)$$

et  $z_t$  la profondeur atteinte par l'onde dans le profil déterministe du milieu aléatoire à l'instant  $t$  :  $z_t = \frac{1}{2} c_0(z) t$  (aller et retour). Ainsi, en estimant correctement la fonction de densité spectrale normalisée du signal réfléchi à partir d'observations du coefficient de réflexion  $R_\varepsilon(0, t)$ , on peut résoudre le problème inverse [164] consistant à estimer le profil macroscopique du milieu aléatoire grâce à l'Eq.(1.46). Un estimateur de  $S_{R_\varepsilon}(t, \omega)$  est ainsi



proposé par Asch *et al.* [6] sous la forme d'une distribution de Wigner-Ville [85], ou par Clouet *et al.* [38] sous la forme d'une transformée en ondelettes.

Pour établir ces résultats, les auteurs montrent que la transformée de Fourier en temps du coefficient de réflexion  $\hat{R}_\varepsilon(z, \omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} R_\varepsilon(z, t) d\omega$  est solution d'une équation différentielle stochastique non linéaire à coefficients aléatoires de type Riccati :

$$\frac{d}{dz} \hat{R}_\varepsilon(z, \omega) = \frac{1}{\varepsilon} \varphi \left( \eta \left( z, \frac{z}{\varepsilon^2} \right), \nu \left( z, \frac{z}{\varepsilon^2} \right), \hat{R}_\varepsilon, \hat{R}_\varepsilon^2 \right)$$

Compte tenu du caractère hyperbolique des équations acoustiques de propagation pour le demi-espace infini  $z < 0$  considéré,  $|\hat{R}_\varepsilon(z, \omega)| = 1$  et le coefficient de réflexion dans le domaine fréquentielle peut s'écrire  $\hat{R}_\varepsilon(z, \omega) = e^{-i\psi_\varepsilon(z, \omega)}$  où  $\psi_\varepsilon(z, \omega)$  est un processus stochastique indexé en  $z$  sur  $]-\infty, 0[$  qui vérifie une équation différentielle stochastique non linéaire à coefficients aléatoires de la forme :

$$\frac{d}{dz} \psi_\varepsilon(z, \omega) = \frac{1}{\varepsilon} \varphi \left( \eta \left( z, \frac{z}{\varepsilon^2} \right), \nu \left( z, \frac{z}{\varepsilon^2} \right), \psi_\varepsilon \right) \quad (1.47)$$

Le théorème (1.42) énoncé plus haut est appliqué à l'Eq.(1.47) ci-dessus réécrite plutôt pour le processus  $\bar{\psi}_\varepsilon(z, h) = \psi_\varepsilon(z, \omega_2) - \psi_\varepsilon(z, \omega_1)$ , avec  $\omega_1 = \omega - \frac{\varepsilon h}{2}$  et  $\omega_2 = \omega + \frac{\varepsilon h}{2}$ . Sa densité de probabilité vérifie une équation de Fokker-Planck dont on cherche la solution stationnaire  $p_{\bar{\psi}_\varepsilon}^s(\bar{\psi}, \omega)$  pour laquelle  $\partial_z p_{\bar{\psi}_\varepsilon}^s = 0$ , et qui permet d'accéder à la densité spectrale de puissance instantanée du coefficient de réflexion à la surface du milieu aléatoire grâce à :

$$\hat{S}_R(h, \omega) = \mathbb{E} \left\{ e^{i\psi_\varepsilon^s(\omega_1)} e^{-i\psi_\varepsilon^s(\omega_2)} \right\} = \int_0^{2\pi} e^{i\bar{\psi}} p_{\bar{\psi}_\varepsilon}^s(\bar{\psi}, \omega) d\bar{\psi}$$

avec :

$$S_R(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iht} \hat{S}_R(h, \omega) dh$$

Les résultats obtenus sont confirmés par une méthode de simulation de Monte-Carlo (Asch *et al.* [6]).

**Signal transmis** – Le signal transmis par le milieu aléatoire  $-L < z < 0$  décrit ci-dessus est étudié par Lewicki *et al.* [130]. Le coefficient de transmission noté  $T_\varepsilon(-L, t_0(L) + \varepsilon\tau)$ , où  $t_0(z)$  est le temps de parcours de l'onde dans le milieu déterministe :

$$t_0(z) = \int_{-z}^0 \frac{ds}{c_0(s)}$$

converge en loi quand  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  vers le signal incident (avec  $\gamma = 0$ ) convolué par une densité gaussienne auquel s'ajoute une variable aléatoire gaussienne. Les variances de la loi de cette variable aléatoire additionnelle et de la densité gaussienne de convolution dépendent à la fois de  $L$  et des covariances du milieu aléatoire.

### Propagation 3D

**Ondes acoustiques** – Le cas de la propagation d'ondes acoustiques dans un milieu 3D est ensuite traitée par Asch *et al.* [6], Kohler *et al.* [111], toujours dans le cadre d'une limite basses fréquences telle que décrite ci-dessus. Les densité et module de compression du milieu

aléatoire (demi-espace  $z < 0$ ) sont assujettis à ne varier qu'en fonction de la profondeur  $z$ . Les équations d'équilibre ainsi traitées sont :

$$\begin{cases} \rho(z)\partial_t \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \nabla p(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \\ \frac{1}{K(z)}\partial_t p(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0 \end{cases} \quad (1.48)$$

pour les champs de pression  $p(\mathbf{x}, t)$  (scalaire) et de vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  (vectorielle) et une source ponctuelle de direction  $\mathbf{e}$  située dans le milieu homogène  $z \geq 0$  :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \delta x \delta y \delta z - z_s f(t) \mathbf{e}.$$

La méthodologie suivie est exactement la même que dans le cas du milieu 1D. Le coefficient de réflexion est défini à partir du rapport des amplitudes incidente et réfléchi des champs de pression et de vitesse transversale exprimés dans le domaine de Fourier  $(\mathbf{k}, \omega)$  où  $\mathbf{k}$  est le vecteur d'onde horizontal. Celui vérifie une équation différentielle stochastique à coefficients aléatoires de type Riccati et sa phase une équation différentielle stochastique non linéaire à coefficients aléatoires à laquelle est appliqué le théorème (1.42). La fonction de densité spectrale instantanée normalisée du champ de pression réfléchi à la surface du milieu aléatoire est calculée analytiquement à partir de l'équation de Fokker-Planck pour un profil déterministe homogène et numériquement à partir de l'équation de Kolmogorov indirecte (adjointe de l'équation de Kolmogorov directe) si le profil varie en fonction de  $z$ .

L'équation de propagation d'ondes scalaire en 3D est également traitée par Bailly *et al.* [13] dans le cadre d'une limite hautes fréquences : les longueurs d'onde restent petites devant la taille des hétérogénéités. Par contre les fluctuations aléatoires des caractéristiques du milieu restent toujours faibles. L'équation traitée est l'équation elliptique de Helmholtz :

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi(\mathbf{x}) + k_0^2 n^2(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) = 0 \\ \psi(x, y, 0) = \psi_0(x, y) \end{cases} \quad (1.49)$$

avec  $k_0$  le nombre d'onde dans le profil homogène déterministe et  $n$  l'indice de réfraction défini en fonction des vitesses des ondes dans le profil déterministe et le milieu aléatoire, et un petit paramètre  $\varepsilon$ , par :

$$n(\mathbf{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{c(\mathbf{x})}{c_0(\mathbf{x})} = 1 + \varepsilon^p \eta(\alpha x, \alpha y, z) \quad (1.50)$$

On prend  $1 < p \leq 3$ ,  $\varepsilon < \alpha \leq 1$  un paramètre d'échelle fixant la taille des hétérogénéités, et  $\eta(x, y, z)$  un bruit blanc indexé sur la variable de profondeur du milieu aléatoire  $z$ , modélisant les fluctuations aléatoires de l'indice de réfraction. Dans ces conditions, les auteurs recherche la solution de l'équation de Helmholtz qui se propage principalement dans la direction  $z$ , soit  $v_\varepsilon$  tel que  $\psi_\varepsilon(\mathbf{x}) = e^{ik_0 z} v_\varepsilon(\mathbf{x})$  et négligent les ondes diffractées par le milieu suivant ce même axe, ce qui revient à négliger les dérivées secondes en  $z$  de  $v_\varepsilon$ . En outre les auteurs imposent une condition de radiation (aucun signal réfléchi) en  $z \leq -L$  avec  $L$  une échelle de longueur pour les distances de propagation suivant  $z$ , de l'ordre de  $\varepsilon^{-2}$ . Ils prouvent que la solution du problème ainsi posé converge en loi vers l'unique solution d'une équation différentielle stochastique parabolique exprimée comme une intégrale stochastique d'Itô.

**Ondes élastiques** – Le dernier cas traité est celui de la propagation d'ondes élastiques dans un milieu aléatoire dont les paramètres mécaniques varient aléatoirement en fonction

paramètres	basses fréquences	hautes fréquences
longueur d'onde	$\mathbf{o}\varepsilon$	$\mathbf{o}\varepsilon^{p-1}$
longueur de corrélation des hétérogénéités	$\mathbf{o}\varepsilon^2$	$\mathbf{o}\varepsilon^{\frac{3-p}{2}}$

TAB. 1.2 – Comparaison des approximations basses fréquences et hautes fréquences de la propagation d'ondes en milieu aléatoire pour un petit paramètre  $\varepsilon$ .

de la profondeur. Kohler *et al.* [112, 113] reprennent l'approximation en basses fréquences et la séparation d'échelles permettant d'exprimer la densité et les modules de Lamé du milieu aléatoire  $z < 0$  sous la forme :

$$\begin{cases} \rho(x) = \rho_0(\mathbf{x}) \left(1 + p_1 \left(\frac{z}{\varepsilon^2}\right)\right) \\ \lambda(x) = \lambda_0(\mathbf{x}) \left(1 + p_2 \left(\frac{z}{\varepsilon^2}\right)\right) \\ \mu(x) = \mu_0(\mathbf{x}) \left(1 + p_3 \left(\frac{z}{\varepsilon^2}\right)\right) \end{cases} \quad (1.51)$$

Le profil déterministe est supposé stratifié horizontalement tandis que les  $p_j$  sont des processus stochastiques centrés, stationnaires modélisant les fluctuations des paramètres du milieu autour de ceux du profil de référence, et ayant des amplitudes quelconques par rapport au petit paramètre  $\varepsilon$ . Le milieu est excité à sa surface par un champ incident d'ondes planes harmoniques à incidence et polarisation quelconques et de longueur d'onde de l'ordre de  $\varepsilon$ . Le mode SH est entièrement découplé des modes P-SV pour une incidence oblique et est traité suivant les méthodes déjà exposées ci-dessus pour le cas des ondes acoustiques. En revanche les modes P-SV ne sont découplés qu'à incidence normale, ce qui nous ramène également aux cas déjà traités si tel est le cas. Plus généralement, ces modes restent couplés et leur propagation en milieu aléatoire est étudiée par la méthode des coefficients de réflexion/transmission de Kennett déjà exposée dans le cas déterministe, voir la section §1.5.2.

En reprenant donc les notations de cette section, on réécrit l'équation différentielle linéaire vérifiée par le vecteur de Thomson-Haskell P-SV sous la forme (voir l'Eq.(1.28)) :

$$\frac{d}{dz} \mathbf{B}_{\text{P-SV}}^{\text{th}}(k, z) = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{A}_{\text{P-SV}} \left(k, \frac{z}{\varepsilon^2}\right) \mathbf{B}_{\text{P-SV}}^{\text{th}}(k, z)$$

où  $k$  est le nombre d'onde horizontal, et pour un terme de source uniquement en surface. La matrice  $\mathbf{A}_{\text{P-SV}}$  est ensuite décomposée en partie homogène déterministe et partie fluctuante aléatoire :

$$\mathbf{A}_{\text{P-SV}} \left(k, \frac{z}{\varepsilon^2}\right) = \mathbf{A}_0(k) + \mathbf{A}_1 \left(k, \frac{z}{\varepsilon^2}\right)$$

la première étant diagonalisée par (voir l'Eq.(1.29)) :

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{L}_0 \mathbf{M}_0$$

De la même manière que dans le cas déterministe, les auteurs introduisent le vecteur d'onde de Kennett  $\mathbf{V}_\varepsilon(k, z) = e^{i\frac{\omega}{\varepsilon}z\mathbf{L}_0} \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{B}_{\text{P-SV}}^{\text{th}}(k, z)$  (voir l'Eq.(1.31)) vérifiant une équation différentielle stochastique :

$$\frac{d}{dz} \mathbf{V}_\varepsilon(k, z) = \frac{1}{\varepsilon} e^{i\frac{\omega}{\varepsilon}z\mathbf{L}_0} \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{A}_{\text{P-SV}} \left(k, \frac{z}{\varepsilon^2}\right) \mathbf{M}_0 e^{-i\frac{\omega}{\varepsilon}z\mathbf{L}_0} \mathbf{V}_\varepsilon(k, z)$$

Une équation différentielle stochastique non linéaire à coefficients aléatoires de type Riccati est ensuite établie pour la matrice de réflexion globale  $\mathbf{R}_\varepsilon(z)$  du milieu, à valeurs dans  $\text{Mat}_{\mathbb{C}}(2, 2)$ , symétrique et supposée normée à 1 lorsque les ondes restent localisées, c'est-à-dire quand le milieu est totalement réfléchissant. Les auteurs appliquent enfin le théorème (1.42) aux éléments de  $\mathbf{R}_\varepsilon(z)$  et obtiennent des expressions analytiques pour leur densité de probabilité conjointe et leurs moments d'ordre 2 et 4 en fonction d'un paramètre de réflexion et conversion de modes.

Néanmoins ces résultats restent limités à un chargement plan harmonique, et leur extension à une analyse dans le domaine temporel, pour des ondes générées par exemple par une source ponctuelle, pose d'importantes difficultés mathématiques, non résolues pour l'instant [165], essentiellement à cause du couplage fort entre les modes de propagation P et S du aux hétérogénéités.

### Localisation et transfert radiatif

L'approche par séparation d'échelle développée ci-dessus pour la propagation d'ondes acoustiques ou élastiques permet de mettre en évidence un phénomène de localisation de l'énergie élastique dans une partie finie du domaine aléatoire, lorsque les hétérogénéités empêchent celle-ci de se diffuser normalement. La localisation est tout particulièrement importante pour un milieu stratifié, et peut être déduite de l'observation du signal réfléchi : il est alors très perturbé et son enveloppe ne décroît que lentement en fonction du temps. Pour les signaux sismiques par exemple, ces caractéristiques sont apparentes dans la coda lorsqu'un tel phénomène se produit effectivement. Si  $T(z, \omega)$  désigne le coefficient de transmission d'un signal harmonique à la profondeur  $z$ , la longueur de localisation  $\ell_{\text{loc}}(\omega)$  peut être définie sous la forme :

$$-\frac{1}{\ell_{\text{loc}}(\omega)} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \log |T(L, \omega)|$$

Elle augmente lorsque la fréquence diminue et à la fréquence  $\omega_M(t)$  pour laquelle la fonction de densité spectrale du signal réfléchi, Eq.(1.45), est maximale à l'instant  $t$  (contribution maximale à l'énergie incohérente réfléchie), elle vaut :  $\ell_{\text{loc}}(\omega_M) = \frac{1}{2}c_0t$ , c'est-à-dire la distance moyenne parcourue par l'onde dans le milieu aléatoire stratifié à l'instant considéré.  $\ell_{\text{loc}}(\omega)$  est la profondeur de pénétration d'une onde harmonique dans le milieu stratifié, dépendante de la célérité moyenne  $c_0$  et du niveau de bruit des fluctuations  $\alpha$  défini en (1.44) (cas acoustique).

Le principal avantage de l'approche par séparation d'échelle est de pouvoir traiter le cas de fortes hétérogénéités du milieu de propagation. Elle n'en conserve pas moins de sérieuses limitations, liées d'une part à l'échelle de séparation  $\varepsilon$  qu'il est très difficile d'identifier pratiquement pour un sol par exemple, et d'autre part à l'impossibilité d'étendre la méthode à une stratification moyenne (paramètres  $\rho_0(z)$ ,  $\lambda_0(z)$  et  $\mu_0(z)$ ) imparfaite ou une anisotropie plus marquée des hétérogénéités.

Le développement d'une théorie généralisée de type transfert radiatif pour la propagation d'ondes (Ryzhik *et al.* [178]) a permis de soulever partiellement ces difficultés. Elle s'applique aux hautes fréquences pour des distances de propagation bien supérieures à la longueur d'ondes considérée, et pour de faibles fluctuations dont la longueur de corrélation est elle comparable à la longueur d'onde afin de pouvoir prendre en compte les effets d'interaction les plus significatifs. La variable d'état traitée dans ce cas n'est plus un champ de pression

ou de vitesse, mais une densité angulaire d'énergie, solution d'une équation de transport qui se réduit à l'équation de Liouville en l'absence d'hétérogénéité. Les auteurs montrent que la densité peut être décomposée suivant deux modes de propagation, une onde progressive et une onde rétrograde pour chacune des polarisations en compression P ou en cisaillement S. Ils sont caractérisés par une distance appelée parcours libre moyen définie comme le rapport de la célérité des ondes et de la section efficace totale du milieu. Ils démontrent par ailleurs que les densités spatiales d'énergie en compression et en cisaillement sont liées par un ratio constant :

$$\frac{\mathcal{E}_p}{\mathcal{E}_s} = \frac{c_s^3}{2c_p^3} \quad (1.52)$$

en accord avec les observations courantes faites en géophysique ;  $c_p$  est la vitesse de l'onde de compression et  $c_s$  est la vitesse de l'onde de cisaillement. La relation ci-dessus est indépendante du type de source étudiée et de l'allure des fluctuations du milieu aléatoire, pourvu que les effets de bord – par exemple la présence d'une surface libre – ne soient pas trop importants. Pour des valeurs usuelles de  $c_p$  et  $c_s$  en géophysique (distance de propagation de l'ordre de 1000 km, profondeur de l'ordre de quelques dizaines de km), le ratio est d'environ 10%. L'équation de transport pour les hautes fréquences ne propage que l'enveloppe des signaux observés sans reproduire tous les détails des fluctuations, même si elles demeurent importantes pour des petites perturbations du milieu mais des distances de propagation significatives. Elle permet par exemple de calculer l'enveloppe de la coda des signaux sismiques. Le parcours libre moyen est une mesure bien plus significative dans ce cas que la longueur de corrélation.

La théorie du transfert radiatif, globalement plus robuste que la théorie de la localisation parce qu'indépendante de toute notion de séparation d'échelle et capable de traiter des discontinuités ou des imperfections de même taille que le signal, comporte néanmoins quelques limitations. La plus importante est relative aux conditions aux limites, qu'il est difficile de définir physiquement et mathématiquement dans un tel cadre. Ceci est particulièrement pénalisant pour la prise en compte d'une condition de surface libre, en génie parasismique par exemple. Par ailleurs le fait qu'elle n'est pas valide pour les milieux stratifiés (auquel cas la section efficace de diffraction serait singulière) constitue également une importante limitation de la théorie pour les applications du génie civil. Enfin on peut signaler qu'il n'existe en l'état actuel des développements aucun critère fiable de discrimination entre l'approche par localisation et l'approche par l'équation de transport. Par contre si la distance de propagation est de l'ordre de la longueur d'onde, cette dernière peut être assimilée à une théorie de type milieu effectif, telle que présentée dans la section §1.6.4.

## 1.8 Conclusion

Nous avons ici présenté les différents axes d'approfondissement possibles pour le traitement du problème d'interaction sol-structure sous champ incident aléatoire et avec des caractéristiques du massif de sol adjacent à la fondation également aléatoires. Le cadre fixé est celui des méthodes déjà développées au laboratoire MSS-MAT pour l'analyse déterministe des phénomènes d'interaction sol-structure : sous-structuration dynamique et équations intégrales de frontière, implantées dans la famille de codes MISS-3D. Les difficultés principales sont liées à l'étude de la propagation d'ondes en milieux aléatoires, d'une part pour le champ sismique incident, et d'autre part pour les champs rayonnés par le mouvement de la

fondation qui interviennent dans l'expression générale de son impédance.

L'étude bibliographique présentée à la section §1.3 montre que la principale donnée disponible permettant de caractériser l'aléa spatiale des tremblements de terre est leur fonction de cohérence transversale en surface. Elle n'est connue la plupart du temps que de manière empirique, sur la base d'enregistrements sismiques pour des événements passés, ou encore par des modèles paramétrés semi-empiriques. Cette donnée tient compte implicitement du phénomène de propagation en milieu hétérogène de l'onde sismique depuis sa source jusqu'au site étudié et suffit à caractériser les vibrations aléatoires générées dans un ouvrage particulier en termes de moyenne, écart-type et fonction de densité spectrale. Nous avons également présentés quelques méthodes simplifiées qui permettent d'approcher ces grandeurs pour la réponse des structures. L'objectif de la suite de ce travail est d'en donner une formulation générale non approchée qui tiennent compte de manière exacte – dans la limite des hypothèses physiques retenues pour cette étude – des phénomènes de couplage entre le sol et la structure, et permettent d'accéder à des grandeurs directement utilisables par un projeteur pour un dimensionnement industriel.

L'étude bibliographique présentée aux sections §1.5, §1.6 et §1.7 concernant la propagation d'ondes élastiques en milieux hétérogènes déterministes ou aléatoires a montré que les résultats obtenus sont généralement limités à des configurations particulières du milieu de propagation, et aux types de sollicitations imposées (conditions aux limites ou chargements volumiques). Les méthodologies présentées permettent de mettre en évidence certains phénomènes caractéristiques tels que la diffraction, la localisation ou le transport. Par exemple, en liaison avec la caractérisation de la propagation des ondes sismiques en milieux aléatoires, une approche du type transfert radiatif a permis de mettre en évidence le caractère universel de la répartition des énergies associées aux modes longitudinal et transversaux, en accord avec certaines observations courantes des sismologues. Néanmoins elles ne permettent pas d'établir des critères discriminatoires entre les différents phénomènes afin de pouvoir traiter un problème complexe donné, et encore moins de formuler correctement les transitions possibles entre ceux-ci. En particulier, il n'est pas possible de sélectionner, pour le champ rayonné dans le sol par le mouvement de la fondation qui conditionne le comportement vibratoire du système couplé sol-structure, un régime spécifique entre les deux limites, localisation d'une part et diffusion d'autre part. On pourrait ainsi envisager qu'il s'établisse un régime de localisation de l'énergie rayonnée entre la fondation et les hétérogénéités du sol proches de celle-ci, mais également un régime de diffusion qui irradie l'énergie loin du site considéré. Les hypothèses spécifiques aux approches développées, par exemple la distribution aléatoires d'inclusions élastiques identiques pour l'étude de la diffraction ou l'existence d'une échelle de séparation caractéristique  $\varepsilon$  pour l'étude de la localisation, sont en outre trop restrictives pour pouvoir être raisonnablement invoquées dans notre cas. Dans la suite de ce travail, l'effort est porté sur le développement d'une modélisation robuste suffisamment générale pour pouvoir aborder une large gamme de problèmes industriels pratiques par des méthodes numériques intensives, du type simulation de Monte-Carlo, sans avoir à trancher entre telle ou telle configuration particulière.



## Chapitre 2

# Formulation de l'interaction sol-structure

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit brièvement le modèle d'interaction sismique sol-structure utilisé dans cette étude. Il nous a permis d'identifier les enjeux de la prise en compte de la variabilité spatiale du séisme et du sol et de présenter les méthodes constructives abordables pour traiter un tel système. En particulier, la complexité du problème traité ne permet pas d'envisager sa résolution par les méthodes analytiques classiques des équations différentielles à coefficients aléatoires et l'on se concentrera dans la suite de ce travail sur des approches par simulation numérique. La prise en compte des incertitudes liées à un modèle complexe de structures industrielles par une approche probabiliste, que ce soit pour les lois de comportement, les conditions aux limites, les conditions initiales ou encore les chargements, est un élément important de la simulation numérique [149, 148, 184] et fait l'objet de nombreux travaux de recherche (voir par exemple [191, 196, 72, 187, 162, 201, 202]). Dans le chapitre suivant, §3, on se restreint à deux types d'incertitude, l'une liée aux paramètres mécaniques du modèle, l'autre aux chargements sismiques, et l'on met en oeuvre quelques techniques de simulation probabiliste de ces incertitudes. Cette étape requiert tout d'abord la définition précise du modèle déterministe retenu en vue de sa discrétisation numérique d'une part, et afin de pouvoir étendre l'analyse en prenant en compte l'aléa du système correspondant d'autre part. L'objet de ce chapitre est de montrer que le problème d'interaction sol-structure peut rigoureusement se mettre sous la forme (voir l'Eq.(2.42)) :

$$-\mathcal{K}(p_s)\mathbf{u} = \mathbf{f}_s(\mathbf{u}_s)$$

avec  $p_s$  les paramètres aléatoires du sol ;  $\mathbf{u}_s$  le champ sismique également aléatoire et  $\mathbf{f}_s$  linéaire ;  $\mathcal{K}$  un opérateur linéaire, qui peut être inversé pour obtenir (voir l'Eq.(2.46)) :

$$\mathbf{u} = \mathcal{T}^s(p_s)\mathbf{u}_s.$$

La première section de ce chapitre est donc consacrée à la formulation détaillée du problème d'interaction sol-structure sous sollicitation sismique considéré. On donne notamment les équations d'équilibre du système, les conditions aux limites qui lui sont imposés, ses équations de comportement, et la définition des chargements pris en compte. La formulation transitoire initiale ainsi obtenue est réécrite, dans la section suivante, dans le domaine fréquentiel permettant de se ramener à un problème de transmission stationnaire pour le champ des déplacements diffracté par l'interface entre le sol et l'ouvrage. L'existence d'une



solution pour ce problème est conditionnée par le comportement qui lui est imposé “à l’infini” dans le domaine sol non borné. Ainsi la définition d’une condition de radiation à l’infini sous la forme d’une relation d’impédance d’onde plane constitue la principale difficulté du modèle, mais la prise en compte de l’amortissement hystérétique dans le sol dans la formulation stationnaire permet de l’écrire plus simplement en terme énergétique. Cette condition assure l’existence d’au moins une solution au problème de transmission, et l’unicité est ensuite établie par le théorème de Lax-Milgram dans un cadre variationnel classique, décrit dans une troisième section. On en déduit également l’expression générique de la fonction de réponse en fréquence du système couplé sol-structure sollicité par un champ incident ou un champ de force. Cette formulation en terme d’opérateur permet d’introduire de façon naturelle l’aléa considéré dans ce travail : celui lié au chargement sismique d’une part et celui lié au sol d’autre part, qui intervient dans l’expression de la fonction de réponse en fréquence de tout le système.

L’analyse du problème de transmission déterministe modélisant l’interaction sismique sol-structure est conduite dans un certain souci de rigueur mathématique, néanmoins les différents résultats présentés sont classiques – au moins pour le cas de l’équation de Helmholtz [17, 48, 52, 99]. L’objectif est de garder un caractère suffisamment général à la formulation afin de montrer qu’il est possible de traiter les aspects probabilistes dans ce cadre sans pour autant simplifier à l’extrême le modèle introduit. Cette approche nous permet par ailleurs d’anticiper sur la construction d’une approximation numérique de la solution du problème de transmission déterministe pour chacune des réalisations de l’aléa. Les principales définitions mathématiques auxquelles il est fait référence dans ce chapitre sont rappelées en Annexe A.

## 2.1 Définition du problème aux limites

On s’intéresse ici aux vibrations linéarisées formulées dans le domaine fréquentiel d’un système sol-structure (FIG. 2.1) autour d’une position moyenne d’équilibre statique. On donne dans un premier temps la formulation transitoire du problème considéré avant d’introduire les hypothèses qui nous permettent de la réécrire effectivement en fonction de la fréquence dans la section suivante.

### 2.1.1 Equations de l’élastodynamique

Le sol visco-élastique est représenté par un demi-espace ouvert non borné de  $\mathbb{R}^3$  noté  $\Omega_s$ . La structure étudiée, également visco-élastique, est représentée par un domaine ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  noté  $\Omega_b$ . La frontière entre le demi-espace sol et la structure est une surface bornée notée  $\Gamma_{sf}$  ; la frontière entre le sol et l’air ambiant est notée  $\Gamma_{sa}$  et celle entre la structure et l’air ambiant  $\Gamma_{ba}$ . Ces trois surfaces sont supposées régulières et telles que  $\Gamma_{sf} \cap \Gamma_{sa} \cap \Gamma_{ba} = \emptyset$  : la régularité doit assurer l’existence et l’unicité d’une normale en tout point de la surface considérée, qui sera donc choisie de classe  $\mathcal{C}^2$  par morceaux. Elles sont dans toute la suite orientées conventionnellement par la normale extérieure au domaine qu’elles délimitent. Enfin par convention on introduit la frontière du sol à l’infini notée  $\Gamma_{s\infty}$ . La variable d’espace est notée  $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$  en coordonnées cartésiennes dans  $\mathbb{R}^3$ , la variable de temps  $t$  (dans tout  $\mathbb{R}$  *a priori*) et la variable fréquentielle (pulsation)  $\omega$  (dans  $\mathbb{R}$ ).

On note  $\Omega = \Omega_s \cup \Omega_b \cup \Gamma_{sf}$  l’ouvert non borné de  $\mathbb{R}^3$  pour le *système composite sol-structure*. Il est soumis à un champ d’ondes sismiques incidentes  $\mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t)$  et éventuellement

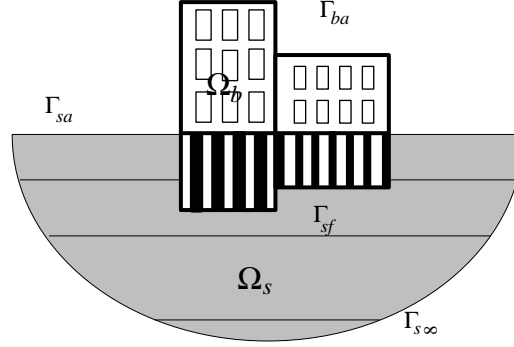


FIG. 2.1 – Modèle d'interaction sol-structure, géométrie et notations.

à un champ de force volumique  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  ayant tous les deux leurs valeurs définies dans  $\mathbb{R}^3$ . Le champ incident est caractérisé plus en détail dans la section §2.1.2, mais on peut supposer à ce stade qu'il est généré par un champ de force volumique ou surfacique à support compact noté  $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}, t)$ . Le champ de force volumique est également supposé défini sur un support compact de  $(\Omega_s \cup \Omega_b) \times \mathbb{R}$  (pour  $\mathbf{x}$  et  $t$ ). Sous l'effet de ces deux actions, le champ des déplacements  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  du système autour de sa position d'équilibre statique vérifie en tout point de  $\Omega_s \cup \Omega_b$  et à chaque instant  $t$  l'équation de Navier hétérogène :

$$-\text{Div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})(\mathbf{x}, t) + \rho \partial_t^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}_i(\mathbf{x}, t) \quad (2.1)$$

$\rho(\mathbf{x})$  est la densité des matériaux qui constituent le sol ou la structure ;  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$  est le tenseur d'ordre 2 des contraintes pour les matériaux sol ou structure associé en tout point  $\mathbf{x} \in \Omega_s \cup \Omega_b$  et à chaque instant  $t$  au champ des déplacements  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ . On lui associe également le tenseur linéarisé d'ordre 2 des déformations noté  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})$  lui aussi fonction de  $\mathbf{x}$  et de  $t$ . Ces champs sont continus sur l'ensemble du domaine <sup>(1)</sup> et définis par :

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\text{Grad} \mathbf{u} + \text{Grad}^T \mathbf{u}) \stackrel{\text{déf}}{=} \nabla \otimes_s \mathbf{u} \quad (2.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \quad (2.3)$$

où  $\mathbf{D}^e$  est le champ de tenseur d'ordre 4 d'élasticité pure des matériaux (du sol ou de la structure), réel, symétrique et positif [68]. Si les matériaux sont supposés isotropes, ce tenseur ne dépend plus que de deux paramètres, les modules de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ , et ses coefficients s'écrivent :

$$D_{ijkl}^e(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\mathbf{x}) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

ou avec la relation (2.3) :

$$\mathbf{D}^e(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\epsilon} = \lambda(\mathbf{x}) \text{tr} \boldsymbol{\epsilon} + 2\mu(\mathbf{x}) \boldsymbol{\epsilon}$$

Dans ce cas on introduit les célérités des ondes de compression et de cisaillement des maté-

<sup>1</sup>Cette hypothèse physique ne sera pas nécessairement maintenue dans la suite pour la formulation du problème d'interaction sol-structure. En revanche les équations (2.2) et (2.3) auront toujours un sens en terme de distributions.

riaux, notées respectivement  $c_p$  et  $c_s$ , telles que :

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (2.4)$$

$$c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.5)$$

Afin d'assurer la régularité globale du champ des déplacements  $\mathbf{u}$  solution de l'Eq.(2.1), il convient de prendre *a priori* les modules de Lamé et la densité des matériaux dans  $L^\infty(\Omega_b)$  et  $L^\infty(\Omega_s)$  respectivement, sachant que le plus souvent, dans les applications, ceux-ci sont simplement constants par morceaux. Cette régularité des paramètres mécaniques des matériaux est également nécessaire pour la construction de la fonction de Green du domaine correspondant dans un cadre variationnel, telle que décrite au chapitre §5 (voir la section §5.1.1). Pour  $\mathbf{u}$  recherché au sens des distributions, ils sont pris de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\Omega_b$  et  $\Omega_s$  [52].

Enfin le vecteur contrainte s'appliquant sur une facette de normale extérieure  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  au point  $\mathbf{x}$  est défini par :

$$\mathbf{t}(\mathbf{u})(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$$

Dans toute la suite, l'indice  $s$  ou  $b$  permettra de se référer à une quantité – un paramètre mécanique, ou un champ, ou une sollicitation – relative au domaine sol ou structure respectivement. Lorsque la quantité indicée sera le champ de vecteur contrainte sur une interface, on supposera implicitement que la normale définissant ce champ est la normale extérieure au domaine auquel correspond l'indice.

### 2.1.2 Caractérisation du champ sismique incident

Le champ sismique incident  $\mathbf{u}_i$ , appelé encore champ libre de site, est défini comme le champ des déplacements qui régnerait dans le demi-espace sol en l'absence de la fondation (noté  $\Omega_s^i$ , voir FIG. 2.2) lorsque celui-ci subit un tremblement de terre. Il est en toute rigueur généré par des sources de type volumique ou surfacique à supports compacts, telles que des forces réparties ou des dipôles associant deux forces de sens opposés et de points d'application très proches. Ces modèles permettent de représenter différents mécanismes de source sismique, par exemple une explosion ou une rupture de faille sur laquelle apparaît un saut des déplacements. Si l'on connaît une telle description de la source sismique, ainsi que de la géométrie et des caractéristiques mécaniques du sous-sol en son voisinage, alors le champ

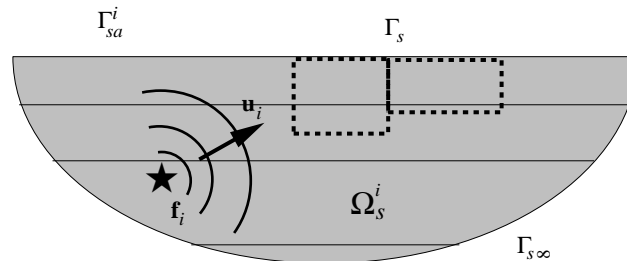


FIG. 2.2 – Demi-espace sol compatible avec la définition du champ incident, notations.

incident vérifie une équation de Navier hétérogène similaire à l'Eq.(2.1) mais s'appliquant dans le domaine sol avant construction de la structure :

$$-\mathbf{Div}\boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{u}_i)(\mathbf{x}, t) + \rho_s \partial_t^2 \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}, t) \quad (2.6)$$

où  $\mathbf{f}_i$  est le champ de forces caractérisant les différentes sources sismiques du modèle qui se déclenchent à partir de  $t = t_0$ . Les conditions initiales peuvent s'écrire pour ce modèle de sources :

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{0}, \quad \partial_t \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_s^i$$

Généralement, le mécanisme de source du tremblement de terre est *a priori* indéterminé,  $t_0$  est inconnu, mais on connaît éventuellement quelques enregistrements passés et données statistiques sur  $\Gamma_{sa}^i$ , l'interface entre le sol non remanié – avant construction de la fondation – et l'air ambiant (voir FIG. 2.2). Pour cette raison, la modélisation stochastique retenue pour le champ incident est dans tout ce qui suit une modélisation à court terme [115] qui ignore les phénomènes de génération et d'occurrence du séisme. Par ailleurs comme la source est souvent très éloignée du site étudié, il est classique d'approcher le champ incident par un train d'ondes (planes) équivalent provenant de l'infini, ce qui se justifie par le fait que suffisamment loin de la source la courbure des fronts d'ondes est faible. Par un développement asymptotique au voisinage de la normale au front d'onde on obtient ainsi une représentation du champ incident permettant de s'affranchir du manque d'informations disponibles sur la source, et qui est généralement suffisante dans le cadre d'un dimensionnement en service. Par contre il est plus délicat dans ce cas de définir les bonnes conditions initiales et l'instant  $t_0$ . Mais comme on s'intéressera uniquement par la suite à la solution du problème stationnaire (voir ci-dessous), il n'est pas nécessaire à ce stade de les fixer et l'on peut prendre formellement  $t_0 = -\infty$ , ce qui revient à choisir  $t$  dans tout  $\mathbb{R}$ . Notons enfin que le champ incident n'est connu dans la plupart des cas qu'à la surface libre  $\Gamma_{sa}^i$ . Pour la modélisation, seul la connaissance d'un "relèvement continu" de  $\mathbf{u}_i$  dans  $\Omega_s$  compatible avec l'équation de Navier (2.6) est utile, sans autre condition particulière si ce n'est de vérifier la condition de surface libre (voir (2.11) ci-dessous).

### 2.1.3 Décomposition des déplacements

Grâce à cette définition, et en vertu du théorème de superposition, il est possible de décomposer le champ des déplacements en tout point du système en la somme de deux champs, respectivement  $\mathbf{u}_i$  et  $\mathbf{u}_d$ , le premier étant le champ incident vérifiant l'équation de Navier hétérogène (2.6) pour les forces  $\mathbf{f}_i$ , le second étant le *champ diffracté total* vérifiant l'équation de Navier :

$$-\mathbf{Div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_d)(\mathbf{x}, t) + \rho \partial_t^2 \mathbf{u}_d(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (2.7)$$

On a donc  $\forall t \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}_d(\mathbf{x}, t) & \mathbf{x} \in \Omega_s \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_d(\mathbf{x}, t) & \mathbf{x} \in \Omega_b \end{cases} \quad (2.8)$$

$\mathbf{u}_d$  est discontinu sur  $\Gamma_{sf}$ , mais cette contrainte ne pose pas de difficulté lorsqu'on se place dans un cadre variationnel ou au sens des distributions. Cette décomposition permet éventuellement de définir pour  $\mathbf{u}_d$  des conditions initiales de la forme :

$$\mathbf{u}_d(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \quad \partial_t \mathbf{u}_d(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_s \cup \Omega_b \quad (2.9)$$

pour l'instant initial  $t = 0$  tel que  $\mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$  sur  $\Gamma_{sf}$  dès que  $t < 0$ . Le champ total lui ne les vérifie pas. Pour la caractérisation du champ diffracté total stationnaire, ces conditions sont remplacées par des conditions de radiation, sans ou avec amortissement.

### 2.1.4 Conditions aux limites

#### Conditions de surface libre

Sur les interfaces  $\Gamma_{ba} \cup \Gamma_{sa} \stackrel{\text{déf}}{=} \Gamma_a$  du système sol-structure avec l'air ambiant s'applique une condition aux limites de type Neumann homogène :

$$\mathbf{t}(\mathbf{u})(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{ba} \cup \Gamma_{sa}, \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.10)$$

Le champ incident vérifie par définition cette condition sur la surface libre du demi-espace sol avant construction des fondations (FIG. 2.2) qui s'exprime par :

$$\mathbf{t}(\mathbf{u}_i)(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{sa}^i, \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.11)$$

On en déduit les conditions de surface libre pour le champ diffracté total :

$$\mathbf{t}(\mathbf{u}_d)(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{ba} \cup \Gamma_{sa}, \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (2.12)$$

#### Continuité à l'interface sol-structure

L'équilibre global du système sol-structure est assuré par des conditions de continuité, ou de transmission, des champs de déplacements et des vecteurs contraintes à l'interface entre les deux domaines sol et structure qui traduisent la conservation de la masse et de la quantité de mouvement. L'équilibre cinématique traduit la continuité de la vitesse normale à l'interface sol-structure, la matière ne pouvant pas la traverser. L'adhérence parfaite au niveau de l'interface  $\Gamma_{sf}$  s'écrit :

$$\mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_b(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{sf}, \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.13)$$

et implique la continuité de la vitesse normale. L'équilibre dynamique traduit la continuité de la quantité de mouvement à l'interface sol-structure, et s'écrit quant à lui :

$$\mathbf{t}_s(\mathbf{u})(\mathbf{x}, t) + \mathbf{t}_b(\mathbf{u})(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{sf}, \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.14)$$

Ces deux équations se traduisent pour le champ diffracté total sur  $\Gamma_{sf}$  en :

$$[\mathbf{u}_d](\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t) \quad (2.15)$$

$$[\mathbf{t}(\mathbf{u}_d)](\mathbf{x}, t) = -\mathbf{t}_s(\mathbf{u}_i)(\mathbf{x}, t) \quad (2.16)$$

où  $[\mathbf{u}]$  désigne le saut des déplacements  $\mathbf{u}$  à la frontière  $\Gamma_{sf}$  défini par  $[\mathbf{u}] = \mathbf{u}_b - \mathbf{u}_s$  ;  $[\mathbf{t}]$  désigne le saut du vecteur contrainte  $\mathbf{t}$  à la frontière  $\Gamma_{sf}$  orientée par la normale extérieure au domaine structure,  $[\mathbf{t}] = \mathbf{t}_b + \mathbf{t}_s$ . On remarquera que si l'interface sol-structure est confondue avec la surface libre du demi-espace sol (cas des fondations superficielles,  $\Gamma_{sf} \subset \Gamma_{sa}^i$ ), l'équation d'équilibre (2.16) se simplifie grâce à l'Eq.(2.11).

### 2.1.5 Conditions de radiation

Si l'on ne définit pas de condition initiale du type (2.9) pour le champ diffracté total, on peut par contre introduire des conditions sur l'allure du champ des déplacements "sur  $\Gamma_{s\infty}$ ". Elles expriment le fait qu'en dehors d'un champ incident provenant éventuellement d'une source très lointaine (c'est-à-dire "à l'infini" pour notre modèle) il n'existe pas d'onde se propageant depuis l'infini vers l'intérieur de  $\Omega_s$ . Une condition équivalente pour un milieu homogène non borné consiste à supposer qu'à l'infini le champ diffracté vérifie la relation d'impédance d'une onde plane liant le champ de vecteur contraint sur une facette de normale extérieure  $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$  au champ des déplacements, dans les directions radiale et transverse par rapport à cette facette. Ces conditions, appelées conditions de Sommerfeld sortantes (voir par exemple [46, 52, 94, 179]), sont de la forme :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\|\mathbf{x}\|=R} (\mathbf{t}_{\mathbf{n}(\mathbf{x})}(\mathbf{u}_d) + \mathbf{K}_s \partial_t \mathbf{u}_d) dS = \mathbf{0} \quad (2.17)$$

où  $\mathbf{K}_s$  est le tenseur d'ordre 2 défini sur  $\Omega_s$  par :

$$\mathbf{K}_s(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) [(c_p(\mathbf{x}) - c_s(\mathbf{x}))\mathbf{n}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{x}) + c_s(\mathbf{x})\mathcal{I}_d] \quad (2.18)$$

avec pour conséquence  $\forall t$  :

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\| = o\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\right) \quad \text{quand } \|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty \quad (2.19)$$

**remarque 2.1** – La condition de Sommerfeld (2.17) traduit la condition de compatibilité des caractéristiques dans un domaine plan pour les problèmes hyperboliques. Pour un milieu homogène isotrope, elle traduit le fait que l'impédance acoustique  $\mathcal{Q}(\mathbf{k})$  est celle des ondes planes, de la forme  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - ct)$  ■

## 2.2 Réponse en fréquence

Le problème d'interaction sismique sol-structure transitoire est donc résumé par les équations d'équilibre (2.7), la condition de surface libre (2.12), les conditions de saut (2.15) et (2.16), et les conditions initiales (2.9) ou de radiation (2.17). Pour la gamme d'applications industrielles considérées, on peut sans nuire à la généralité se limiter à des chargements (dont le séisme) ayant une dépendance harmonique en fonction du temps. Dans ce cas, lorsque l'on passe du problème hyperbolique avec condition initiale de l'équation de Navier en temps, au problème elliptique stationnaire correspondant, on perd l'unicité de la solution (voir par exemple Giroire [75]). On montre ici que celle-ci est de nouveau assurée lorsque l'on introduit l'amortissement hystérétique du sol par une formulation compatible en terme énergétique uniquement mais qui n'a pas d'équivalent en régime transitoire, contrairement à un modèle d'amortissement visqueux par exemple. Le modèle permet alors de définir une condition de radiation en régime stationnaire de la forme de l'Eq.(2.17), *a priori* plus faible car réécrite en terme énergétique, mais suffisante pour garantir l'unicité de la solution du problème d'interaction sismique sol-structure ainsi définie.

### 2.2.1 Réponse stationnaire

L'étude de l'état stationnaire correspond à la recherche pour notre problème du champ diffracté  $\mathbf{u}_d$  pour un champ de forces imposées ayant une dépendance harmonique avec le temps, caractérisée par la pulsation ou fréquence circulaire  $\omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Si par exemple le champ de force volumique appliqué est représenté par :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \omega)e^{-i\omega t}$$

où  $\hat{\mathbf{f}}$  est éventuellement à valeurs complexes  $\mathbb{C}^3$  et  $t \in \mathbb{R}$ , alors il est suffisant de rechercher le champ diffracté total solution du problème aux limites constitué par les équations (2.7), (2.12) et (2.17) (si ce champ existe) sous la forme :

$$\mathbf{u}_d(\mathbf{x}, t) = \Re(\hat{\mathbf{u}}_d(\mathbf{x}, \omega)e^{-i\omega t})$$

où  $\hat{\mathbf{u}}_d$  peut être une fonction à valeurs  $\mathbb{C}^3$ .  $\hat{\mathbf{u}}_d$  est appelée solution stationnaire. Les conditions aux limites et les conditions de Sommerfeld exprimées sous forme harmonique sont attachées à cette solution, ainsi que l'équation de Navier hétérogène stationnaire :

$$-\text{Div}\sigma(\hat{\mathbf{u}}_d)(\mathbf{x}) - \rho \omega^2 \hat{\mathbf{u}}_d(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \quad (2.20)$$

### 2.2.2 Transformées de Fourier-Laplace

#### Transformée de Fourier

Compte tenu des hypothèses de linéarité introduite dans la section §2.1 et des considérations précédentes, il est possible de représenter un champ de déplacements  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  comme la superposition de champs stationnaires  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \omega)$  obtenus pour toutes les pulsations réelles. Ceci nous permet d'introduire la transformée de Fourier inverse, limitée dans notre cas aux fonctions de carré intégrable  $t \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  (correspondant à une énergie finie, ce qui sera toujours le cas des ondes physiques) définis sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$  dont l'ensemble est noté  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$  :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \omega) d\omega \quad (2.21)$$

La transformée de Fourier est alors donnée par :

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dt \quad (2.22)$$

avec  $\omega \mapsto \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \omega)$  une fonction de  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^3)$ . Par la suite, et afin d'alléger les notations, on omettra le signe  $(\cdot)$ , sous-entendu que la dépendance en  $\omega$  (fréquence) ou en  $t$  (temps) suffira à indiquer le domaine dans lequel on travaille.

**remarque 2.2** –(Transformée de Laplace) Pour les cas où  $t$  n'est défini que sur  $\mathbb{R}^+$  (par exemple avec des conditions initiales), on utilisera plutôt une transformée de Laplace unilatérale <sup>(2)</sup>. Elle est définie pour un champ  $t \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  de  $L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^3)$ , l'espace des classes d'équivalence des fonctions intégrables sur  $\mathbb{R}^+$ , par :

$$\mathcal{L}\mathbf{u}(\mathbf{x}, p) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{ipt} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dt \quad (2.23)$$

<sup>2</sup>On peut aussi utiliser la transformée de Fourier dans  $L^1(\mathbb{R})$  en prolongeant par 0 pour  $t < 0$ .

et la transformée de Laplace inverse, dont l'unicité est garantie par le choix de l'espace quotient  $L^1$ , par :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\bar{p}t} \mathcal{L}\mathbf{u}(\mathbf{x}, p) dp_r \quad (2.24)$$

avec  $p = p_r + ip_i$  dans  $\mathcal{D} = \{p \in \mathbb{C} / p_i \in ]s_0, s_1[ \}$  où éventuellement  $s_0 = -\infty$  et/ou  $s_1 = +\infty$ . La fonction  $p \mapsto \mathcal{L}\mathbf{u}(\mathbf{x}, p)$  est analytique (ou holomorphe) dans  $\mathcal{D}$ , c'est-à-dire définie et dérivable en tout point de  $\mathcal{D}$ . Pour les fonctions de  $L^1(\mathbb{R}^+)$   $s_0 \leq 0$  et  $s_1 = +\infty$ ; de plus la transformée de Laplace existe sur l'axe  $p_i = 0$ , pour lequel on retrouve la transformée de Fourier de  $L^1(\mathbb{R}^+)$ . L'introduction d'une pulsation complexe n'a pas de réelle interprétation physique <sup>(3)</sup> mais permet par exemple, en vertu du principe d'absorption limite [94, 179], de s'affranchir d'un certain nombre de difficultés numériques liées à la transformée de Fourier, notamment au point singulier de la fonction de Green (voir le chapitre §5, section §5.1.1, pour sa définition) ■

### 2.2.3 Problème aux limites en fréquence

L'application de la transformée de Fourier (2.22) aux équations d'équilibre (2.7) et des conditions aux limites (2.12), (2.15), (2.16) et (2.17) nous conduit au problème suivant :

**Problème 2.25** Pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$  trouver  $\mathbf{u}_d$  tel que :

$$\begin{cases} -\mathbf{Div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_d)(\mathbf{x}) - \rho \omega^2 \mathbf{u}_d(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega) & \text{dans } \Omega_s \cup \Omega_b \\ \mathbf{t}(\mathbf{u}_d)(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{ba} \cup \Gamma_{sa} \\ [\mathbf{u}_d](\mathbf{x}) = \mathbf{u}_i(\mathbf{x}); [\mathbf{t}(\mathbf{u}_d)](\mathbf{x}) = -\mathbf{t}_s(\mathbf{u}_i)(\mathbf{x}) & \text{sur } \Gamma_{sf} \\ \int_{\|\mathbf{x}\|=R} (\mathbf{t}(\mathbf{u}_d) - i\omega \mathbf{K}_s \mathbf{u}_d) dS = \mathbf{0} & \text{quand } R \rightarrow +\infty \end{cases}$$

où  $\mathbf{K}_s(\mathbf{x})$  est défini en (2.18).

pour le champ diffracté total dans le système sol-structure. Le champ incident en fréquence est quant à lui construit dans le domaine sol initial  $\Omega_s^i$  suivant :

$$\begin{cases} -\mathbf{Div}\boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{u}_i)(\mathbf{x}) - \rho_s \omega^2 \mathbf{u}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega_s^i \\ \mathbf{t}(\mathbf{u}_i)(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{sa}^i \end{cases} \quad (2.26)$$

mais ne vérifie pas *a priori* les conditions de radiation de Sommerfeld lorsqu'on le représente par un train d'ondes planes incidentes.

**remarque 2.3** – Les conditions initiales exprimées en temps pour le champ diffracté total ont été remplacées par les conditions de radiation de Sommerfeld sortantes donnant l'allure des champs rayonnés à l'infini dans un espace homogène non borné. Elles s'expriment de manière équivalente par les relations d'impédance suivantes :

$$\begin{cases} |\mathbf{t}_s(\mathbf{u}_d) \cdot \mathbf{n} - i\omega \rho_s c_p \mathbf{u}_d \cdot \mathbf{n}| = O\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}^2\|}\right) \\ \|\mathbf{t}_s^\perp(\mathbf{u}_d) - i\omega \rho_s c_s \mathbf{u}_d^\perp\| = O\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}^2\|}\right) \\ \|\mathbf{u}_d\| = O\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\right) \end{cases} \quad \text{pour tout } \|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty \quad (2.27)$$

<sup>3</sup>Sauf si par exemple les efforts extérieurs imposés sont de la forme  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \omega) e^{-(i\omega + \alpha)t}$ , avec un terme d'amortissement  $e^{-\alpha t} = e^{-i\omega_i t}$  ( $\omega_i = -i\alpha$  et  $\alpha > 0$ ), auquel cas on cherchera les solutions oscillatoires amorties en  $e^{-(i\omega + \alpha)t}$ .



avec  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ . Ici  $\mathbf{v}^\perp$  désigne la composante tangentielle de  $\mathbf{v}$  sur une facette de normale extérieure  $\mathbf{n}$  :  $\mathbf{v}^\perp = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ . On montre [46, 179] que ces conditions sont suffisantes pour assurer l'unicité de la solution du problème de propagation dans un milieu homogène non borné du champ diffracté total, mais pas nécessaires comme on va le voir dans la section suivante et la section §2.3 ■

**remarque 2.4** – Les conditions de Sommerfeld, exprimées ci-dessus en fréquence, sont imposées uniformément pour toutes les directions  $\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$  dans un milieu homogène. Or pour les applications au génie civil qui nous intéressent, le demi-espace sol est généralement modélisé par un milieu homogène par morceaux, stratifié horizontalement. Dans ce cas les conditions de radiations sortantes (2.27) ne s'écrivent pas simplement dans toutes les couches, notamment pour les ondes de surface ou les ondes guidées. Une possibilité permettant de s'affranchir de cette difficulté consiste à appliquer le principe d'absorption limite [94, 179], en faisant tendre vers 0 la partie imaginaire de la fréquence. Néanmoins, et dans la mesure où cela reste largement justifié pour les sols [167], on préfère imposer la décroissance à l'infini en introduisant un terme dissipatif complexe s'ajoutant à l'énergie de déformation, voir la section §2.2.4 suivante ■

## 2.2.4 Modèle d'amortissement hystérétique et conséquences

Si on introduit l'amortissement visqueux des matériaux (modèle de Kelvin-Voigt), de coefficient noté  $\eta > 0$  indépendant de la fréquence, alors le tenseur des contraintes est réécrit sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})(\mathbf{x}, t) = (1 + \eta \partial_t) \mathbf{D}^e(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})(\mathbf{x}, t) \quad (2.28)$$

pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega_s \cup \Omega_b$  et  $t$ . Cette définition est celle de l'amortissement proportionnel classique. Plus généralement on écrit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) &= \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) + \mathbf{D}^v : \boldsymbol{\epsilon}(\partial_t \mathbf{u}) \\ &= (\mathbf{D}^e + \mathbf{D}^v \partial_t) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

où  $\mathbf{D}^v$  est le champ de tenseur d'ordre 4 de viscosité des matériaux. Par la transformée de Fourier, le tenseur visco-élastique des matériaux sol ou structure est d'après l'Eq.(2.28) :

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, \omega) = (1 + i\omega\eta) \mathbf{D}^e(\mathbf{x}) \quad (2.29)$$

où l'on voit que l'amortissement visqueux introduit un déphasage croissant avec la fréquence. Avec ce modèle, la perte d'énergie par cycle de chargement est proportionnelle à la fréquence. Ce comportement n'est pas représentatif de celui du sol notamment lorsqu'on observe des ondes sismiques pour lesquelles il apparaît plutôt, et pour une large gamme de fréquences usuelles du génie civil, un amortissement à peu près constant [167, 185]. Celui-ci correspond à un processus dissipatif transformant l'énergie cinétique et potentielle des ondes élastiques en chaleur dans le milieu de propagation. L'énergie ainsi dissipée ne dépend pas de la vitesse de déformation (ou de  $\omega$ ). Ce processus traduit le comportement non-linéaire réel des sols pour de petites déformations, avec une rigidité décroissante en fonction du niveau de déformation imposé faisant apparaître des boucles hystérétiques dans un diagramme contrainte-déformation sous chargement cyclique. Il est alors commode d'introduire un coefficient d'amortissement hystérétique  $\beta_s$  mesurant l'aire de la boucle, et qui permet de représenter une vitesse complexe de propagation. Il est inversement proportionnel au facteur

de qualité utilisé en géophysique. Ainsi dans le diagramme contrainte-déformation cyclique de la FIG. 2.3, le coefficient de perte, égal par définition au rapport de l'énergie dissipée  $\Delta W$  au cours d'un cycle, à  $2\pi$  fois l'énergie emmagasinée  $W = \frac{1}{2}\mu_s\epsilon_{\max}^2$ , est :

$$2\beta_s \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\Delta W}{2\pi W} = \frac{\Delta W}{\pi\mu_s\epsilon_{\max}^2} > 0$$

Comme par ailleurs  $\Delta W = \pi\omega\eta_s\mu_s\epsilon_{\max}^2$ , où  $\omega\eta_s\mu_s$  est la partie imaginaire du module de

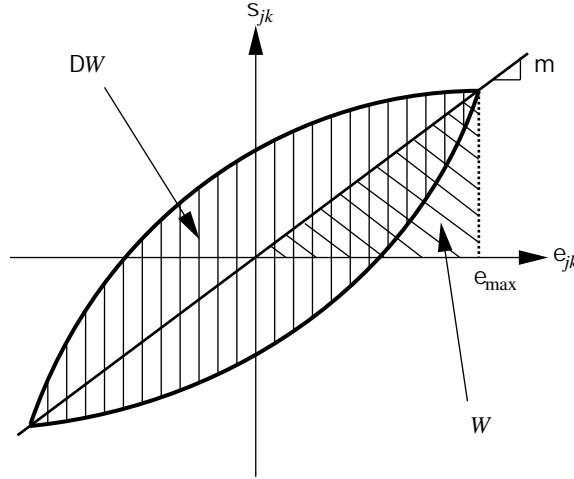


FIG. 2.3 – Diagramme type contrainte-déformation cyclique en cisaillement  $(\sigma_{jk} - \epsilon_{jk})$ ,  $j \neq k$ , pour un sol.

cisaillement complexe du modèle de Kelvin-Voigt pour le sol, on doit donc avoir [167] :

$$2\beta_s = \omega\eta_s = C^{\text{ste}}$$

Notons qu'avec ce modèle l'énergie dissipée par le matériau sol de caractéristiques  $\mu_s$  et  $2\beta_s$  est égale à celle dissipée à la résonance par un oscillateur simple de raideur  $\mu_s$  et de pourcentage d'amortissement critique  $\beta_s$ . Le tenseur élastique pour le sol est alors réécrit dans le domaine fréquentiel sous la forme :

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = (1 + 2i\beta_s)\mathbf{D}^e(\mathbf{x}) \quad (2.30)$$

L'inélasticité réelle du comportement des matériaux devrait être introduite dans la loi de comportement, sachant que le choix d'un amortissement  $\beta_s$  indépendant de la fréquence n'est pas entièrement satisfaisant dans la mesure où ce modèle n'a pas d'équivalent dans le domaine temporel : il correspond en effet à un comportement non causal du matériau (la réponse commence avant le chargement). Néanmoins  $\beta_s$  est en principe dépendant du niveau de déformation et permet ainsi de reproduire les dissipations observées expérimentalement afin de construire un modèle consistant en terme énergétique (c'est le principe de correspondance, voir par exemple Germain [68]).

Grâce à cette représentation linéarisée du comportement réel non linéaire, le champ diffracté total vérifie des conditions d'énergie finie sur le domaine sol non borné et de flux

d'énergie nul pour  $R(\omega)$  suffisamment grand de la forme (voir par exemple [99, 179]) :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \Im \left\{ \int_{\|\mathbf{x}\|=R} \mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{t}(\mathbf{u})} dS \right\} = 0 \quad (2.31)$$

à toute les pulsations  $\omega \in \mathbb{R}$ , et avec  $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ . Elles peuvent se substituer aux conditions de radiation de Sommerfeld sortantes pour assurer l'unicité de la solution (si elle existe) du problème (2.25). C'est ce point que nous abordons maintenant, sous entendu que dans tout ce qui suit il sera tenu compte de l'amortissement hystérétique, au moins pour le domaine sol non borné, par le principe de correspondance explicité ci-dessus. On reformule finalement le *problème de transmission* complet d'interaction sismique sol-structure stationnaire pour un champ incident  $\mathbf{u}_i$  supposé connu par :

**Problème 2.32 (transmission)** *Pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ , trouver  $\mathbf{u}_d \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega_b}) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega_s}) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$  tel que :*

$$\begin{cases} -\mathbf{Div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_d) - \rho \omega^2 \mathbf{u}_d = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega_s \cup \Omega_b \\ \mathbf{t}(\mathbf{u}_d) = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{ba} \cup \Gamma_{sa} \\ [\mathbf{u}_d] = \mathbf{u}_i; [\mathbf{t}(\mathbf{u}_d)] = -\mathbf{t}_s(\mathbf{u}_i) & \text{sur } \Gamma_{sf} \\ \mathbf{u}_d \text{ vérifie (2.31) quand } \|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty \end{cases}$$

où les ensembles  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  et  $\mathcal{S}'(\Omega)$  sont définis en Annexe A. Pour la structure, il sera tenu compte de l'amortissement visqueux suivant l'Eq.(2.29). Nous avons alors le :

**Théorème 2.33** *Le problème de transmission (2.32) a au plus une solution.*

Le théorème (2.33) ci-dessus est démontré dans la section suivante.

## 2.2.5 Unicité de la solution du problème de transmission

Afin de démontrer l'unicité de la solution, si elle existe, du problème de transmission (2.32), on rappelle dans un premier temps le lemme suivant [41, 46], analogue au lemme de Rellich :

**Lemme 2.34** *Soit  $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega_s})$  une solution de l'équation de Navier stationnaire homogène dans le domaine sol non borné vérifiant également les conditions de décroissance (2.31) :*

$$\begin{cases} \mathbf{Div} \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{u}) + \rho_s \omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_s \\ \Im \left\{ \int_{\|\mathbf{x}\|=R} \mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{t}(\mathbf{u})} dS \right\} \rightarrow 0 & \text{quand } R \rightarrow +\infty \end{cases}$$

et la condition :

$$\Im \left\{ \int_{\Gamma_{sf}} \mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{t}(\mathbf{u})} dS \right\} \geq 0$$

Alors  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  dans  $\Omega_s$ .

PREUVE – Soit  $B(r)$  la boule de rayon  $r$  centrée en  $\mathbf{0}$  avec  $r$  suffisamment grand pour contenir tout  $\Gamma_{sf}$ , on note  $\Omega_s^r = \Omega_s \cap B(r)$ . En multipliant le conjugué de l'équation de Navier par  $\mathbf{u}$  et en intégrant par partie sur  $\Omega_s^r$ , on obtient :

$$\int_{\|\mathbf{x}\|=r} \mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{t}(\mathbf{u})} dS + \int_{\Gamma_{sf}} \mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{t}(\mathbf{u})} dS = \int_{\Omega_s^r} \overline{\boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{u})} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) dV - \omega^2 \int_{\Omega_s^r} \rho_s |\mathbf{u}|^2 dV \quad (a)$$

En prenant ensuite la partie imaginaire des différents termes de l'Eq.(a), puis la limite quand  $r \rightarrow \infty$  on obtient avec la condition de radiation (2.31) :

$$\Im \left\{ \int_{\Gamma_{sf}} \mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{t}(\mathbf{u})} dS \right\} = \lim_{r \rightarrow \infty} \Im \left\{ \int_{\Omega_s^r} \overline{\boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{u})} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) dV \right\} = -2\beta_s \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Omega_s^r} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}_s^e : \boldsymbol{\epsilon}(\overline{\mathbf{u}}) dV$$

car  $\int_{\Omega_s^r} \rho_s |\mathbf{u}|^2 dV \geq 0$  pour tout  $r$ . Dans l'équation ci-dessus, le membre de gauche est positif ou nul avec la deuxième condition imposée du lemme, et le membre de droite est négatif ou nul par la définition de  $\beta_s$  et par les propriétés usuelles de  $\mathbf{D}^e$  (voir la section §2.1.1). On en déduit alors que nécessairement :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_s^r} |\mathbf{u}|^2 dV = 0$$

et donc  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  dans  $\Omega_s$ . □

Nous pouvons maintenant établir la preuve du théorème (2.33) :

**PREUVE –(unicité de la solution du problème de transmission)** On se ramène aussitôt au cas homogène suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{Div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \rho \omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_s \cup \Omega_b \\ \mathbf{t}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{ba} \cup \Gamma_{sa} \\ [\mathbf{u}] = \mathbf{0}, [\mathbf{t}_n(\mathbf{u})] = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{sf} \end{cases} \quad (a)$$

Le conjugué de la première équation de (a) est multipliée par  $\mathbf{u}$  et intégrée sur  $\Omega_b$ , puis on retranche le conjugué de l'expression obtenue. Avec les conditions aux limites homogènes de (a), on en déduit :

$$\Im \left\{ \int_{\Gamma_{sf}} \mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{t}(\mathbf{u})} dS \right\} = \omega \eta_b \int_{\Omega_b} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}_b^e : \boldsymbol{\epsilon}(\overline{\mathbf{u}}) dV \quad (b)$$

Le terme de droite étant positif ou nul pour  $\omega \in \mathbb{R}^+$ , le lemme (2.34) s'applique et l'on en déduit  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  dans  $\Omega_s$ . Les conditions de saut homogènes impliquent alors  $\mathbf{u}|_{\Omega_b} = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{t}_b(\mathbf{u}|_{\Omega_b}) = \mathbf{0}$  sur  $\Gamma_{sf}$ , et donc  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  dans  $\Omega_b$  (solution d'un problème aux limites homogènes de Cauchy, voir par exemple [179]). □

Il reste maintenant à définir les bons espaces fonctionnels dans lesquels on cherchera la solution du problème (2.32). Pour les problèmes elliptiques de cette forme, la solution forte d'énergie finie, lorsqu'elle existe, est dans un sous-espace de  $H^2(\Omega_b)$  dans  $\Omega_b$  et dans un sous-espace de  $W_1^2(\Omega_s)$  dans  $\Omega_s$ ,  $H^2(\Omega_b)$  et  $W_1^2(\Omega_s)$  étant définis en Annexe A (voir par exemple [52, 157]) <sup>(4)</sup>. Cet espace est trop restrictif si l'on souhaite approcher numériquement la solution, et l'on préfère travailler dans un espace  $H^1$  (les dérivées jusqu'à l'ordre 1 sont de carré intégrable) afin de construire une approximation faible au sens du principe des travaux virtuels.

## 2.3 Formulation variationnelle

L'existence d'une solution au problème de transmission est maintenant établie dans un cadre variationnel classique. Celui-ci garantit également l'existence d'une approximation numérique qu'il est possible de rendre aussi précise que l'on veut. On introduit donc dans un premier temps les différents espaces fonctionnels dont on aura besoin par la suite avant de donner la formulation au sens faible du problème (2.32) et d'établir l'existence (et l'unicité) d'une solution par le théorème de Lax-Milgram. On en déduit une expression en terme d'opérateurs valable au sens des distributions qui permet d'identifier précisément les sources d'aléa du phénomène de l'interaction sismique sol-structure telles qu'elles seront traitées par la suite.

<sup>4</sup>En fait ce résultat de régularité dépend de la régularité des coefficients d'élasticité des domaines, de la géométrie et des conditions aux limites.

### 2.3.1 Espaces fonctionnels

Les principales définitions et notations mathématiques utilisées dans cette section sont rappelées dans un cadre abstrait en Annexe A. Grâce à la condition de décroissance (2.31) introduite pour le domaine sol, il est possible de se limiter à l'espace :

$$V(\Omega_s) \stackrel{\text{déf}}{=} \{ \mathbf{u} \in [H^1(\Omega_s, \mathbb{C})]^3; \mathbf{u} \text{ vérifie (2.31)} \}$$

pour la recherche de la solution faible du problème de transmission (2.32) restreinte à  $\Omega_s$ . La solution pour tout  $\Omega$  est donc recherchée dans :

$$V(\Omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \{ \mathbf{u} \in [H^1(\Omega, \mathbb{C})]^3; \mathbf{u} \text{ vérifie (2.31)} \}$$

En accord avec les définitions données ci-dessous pour les champs rayonné total et diffracté local, nous sommes amené à introduire les espaces  $V_0(\Omega_b)$  et  $V_0(\Omega_s)$ , adhérences de  $\mathcal{D}(\Omega_b)$  et  $\mathcal{D}(\Omega_s)$  dans  $V(\Omega_b)$  et  $V(\Omega_s)$  respectivement. L'espace des traces sur  $\Gamma_{sf}$  des éléments de  $V(\Omega)$  est noté quant à lui  $V(\Gamma_{sf})$ . Leurs espaces anti-dual et dual respectifs sont notés  $V'(\Omega)$  et  $V'(\Gamma_{sf})$  pour les produits d'anti-dualité et de dualité  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_{sf}}$  respectivement. On définit enfin  $H(\Omega)$  comme étant l'ensemble des classes de fonctions à valeurs dans  $\mathbb{C}^3$  de carré intégrable.

### 2.3.2 Relèvement du champ incident

On rappelle que  $\Omega = \Omega_s \cup \Omega_b \cup \Gamma_{sf}$  et l'on suppose maintenant que pour tout  $\omega$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $\{ \mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega) \}$  est dans  $V'(\Omega)$ ,  $\{ \mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, \omega) \}$  est dans  $V(\Gamma_{sf})$  et  $\{ \mathbf{x} \mapsto \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_i)(\mathbf{x}, \omega) \}$  est dans  $V'(\Gamma_{sf})$ . Afin d'écrire une formulation variationnelle du problème (2.32) dans  $V(\Omega)$ , il est nécessaire dans un premier temps de relever les conditions de saut sur  $\Gamma_{sf}$ . Pour cela on introduit  $\mathbf{u}_{d\ddot{i}} = -R_s(\mathbf{u}_i)$  le relèvement du champ incident  $\mathbf{u}_i$  de  $\Gamma_{sf}$  dans le domaine sol  $\Omega_s$  qui vérifie l'équation de Navier homogène dans  $\Omega_s$ , les conditions de surface libre sur  $\Gamma_{sa}$  et les conditions de décroissance (2.31) ; par ailleurs ce champ est supposé nul dans  $\Omega_b$ .

**Définition 2.35 (champ diffracté local)** *On appelle champ diffracté local dans le sol le champ  $\mathbf{u}_{d\ddot{i}} = -R_s(\mathbf{u}_i)$  tel que :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{Div} \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{u}_{d\ddot{i}}) + \rho_s \omega^2 \mathbf{u}_{d\ddot{i}} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_s \\ \mathbf{u}_{d\ddot{i}} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_b \\ \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_{d\ddot{i}}) = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{sa} \\ \mathbf{u}_{d\ddot{i}} = -\mathbf{u}_i & \text{sur } \Gamma_{sf} \end{array} \right.$$

$\mathbf{u}_{d\ddot{i}}$  est solution d'un problème extérieur mixte pour un domaine non borné ; ce problème admet une unique solution dans  $V(\Omega_s)$  lorsque la donnée sur le bord, ici  $\mathbf{u}_i$  sur  $\Gamma_{sf}$ , est dans  $V(\Gamma_{sf})$  (voir [52] et également la section §5.1.3). Ainsi  $\mathbf{u}_{d\ddot{i}}$  est déterminé de manière unique par le problème aux limites de la définition (2.35).

**remarque 2.5** – En fait le seul élément dont on ait besoin par la suite est un champ incident  $\mathbf{u}_i^\Omega \in V(\Omega)$  défini sur tout  $\Omega$ , tel que  $[\mathbf{u}_i^\Omega] = \mathbf{0}$  sur  $\Gamma_{sf}$ . On pourrait par exemple envisager d'introduire un relèvement de  $\mathbf{u}_i$  dans  $\Omega_b$ , néanmoins il ne sera pas possible de le construire pour des fondations rigides. La définition de  $\mathbf{u}_{d\ddot{i}}$  ci-dessus permet de traiter n'importe quelle cinématique de l'interface  $\Gamma_{sf}$  et est particulièrement adaptée à un traitement par équations

intégrales, par exemple un potentiel de double couche, tel que décrit à la section §5.1.3 du chapitre §5 ■

Le champ diffracté total est ensuite lui-même décomposé suivant :

$$\mathbf{u}_d = \mathbf{u}_{d*} + \mathbf{u}_{d\ddagger} \quad (2.36)$$

où  $\mathbf{u}_{d*}$  vérifie alors l'équation de Navier hétérogène stationnaire (2.20) dans  $\Omega$ , les conditions de surface libre sur  $\Gamma_{sa}$  et les conditions de décroissance (2.31). Les conditions de saut sur  $\Gamma_{sf}$  pour  $\mathbf{u}_d$  se traduisent pour  $\mathbf{u}_{d*}$  en  $[\mathbf{u}_{d*}] = \mathbf{0}$  et  $[\mathbf{t}(\mathbf{u}_{d*})] = -\mathbf{t}_s(\mathbf{u}_{\ddagger} + \mathbf{u}_{d\ddagger})$ .

**Définition 2.37 (champ rayonné total)** *On appelle champ rayonné total dans le domaine composite sol-structure le champ  $\mathbf{u}_{d*}$  tel que :*

$$\begin{cases} -\mathbf{Div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_{d*}) - \rho \omega^2 \mathbf{u}_{d*} = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_{d*}) = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{sa} \\ [\mathbf{t}(\mathbf{u}_{d*})] = -\mathbf{t}_s(\mathbf{u}_{\ddagger} + \mathbf{u}_{d\ddagger}) & \text{sur } \Gamma_{sf} \end{cases}$$

### 2.3.3 Formulation faible

La formulation variationnelle dans  $V(\Omega)$  associée à la définition (2.37) s'écrit :

**Problème 2.38** *Pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ , trouver  $\mathbf{u}$  dans  $V(\Omega)$  tel que  $\forall \mathbf{v} \in V(\Omega)$  :*

$$k_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) + f_{\ddagger}(\mathbf{v})$$

avec :

$$\begin{aligned} k_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= -\omega^2 \int_\Omega \rho \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} dV + \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\bar{\mathbf{v}}) dV \\ f(\mathbf{v}) &= \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}} dV \\ f_{\ddagger}(\mathbf{v}) &= - \int_{\Gamma_{sf}} \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_{\ddagger} + \mathbf{u}_{d\ddagger}) \cdot \bar{\mathbf{v}} dS \end{aligned}$$

Remarquons que par l'égalité de l'opérateur de trace des deux côtés de  $\Gamma_{sf}$ , on a  $[\mathbf{u}] = \mathbf{0}$  pour tout  $\mathbf{u}$  de  $V(\Omega)$ . La forme anti-linéaire des forces appliquées  $f$  est continue sur  $V(\Omega)$ , et  $f(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_\Omega$ ,  $\mathbf{f} \in V'(\Omega)$ , pour tout  $\mathbf{v} \in V(\Omega)$  et  $\omega \in \mathbb{R}$ . Par application du théorème de Lax-Milgram au problème variationnel ci-dessus, on a le :

**Théorème 2.39** *Le problème (2.38) a une unique solution dans  $V(\Omega)$ .*

PREUVE – Les paramètres mécaniques du domaine total  $\Omega$  sont tels que la forme sesqui-linéaires  $k_\Omega$  est continue sur  $V(\Omega) \times V(\Omega)$ . Reste à montrer sa coercivité. On a  $\forall \mathbf{v} \in V(\Omega)$  :

$$\Re \{-ik_\Omega(\mathbf{v}, \mathbf{v})\} = \int_\Omega 2\beta_s \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) : \mathbf{D}_s^e : \boldsymbol{\epsilon}(\bar{\mathbf{v}}) dV(\mathbf{x}) \geq \alpha |\mathbf{v}|_\Omega^2$$

avec  $\alpha > 0$ , et  $|\mathbf{v}|_\Omega$  la semi norme  $|\mathbf{v}|_\Omega^2 = (\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{v})_H$ . On peut montrer suivant Giroire [76] que  $|\mathbf{v}|_\Omega$  est une norme sur  $V(\Omega)$  équivalente à la norme  $\|\mathbf{v}\|_\Omega$ , donc  $k_\Omega$  est coercitive (voir la définition en Annexe A) avec  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ . Elle est donc également coercive. □

La forme anti-linéaire  $f_{\ddagger}$  des forces sismiques induites est continue sur  $V(\Omega)$ . Avec la continuité de  $\mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{v})$  on en déduit qu'il existe donc un unique élément  $\mathbf{f}'$  de  $V'(\Omega)$  tel que :

$$f(\mathbf{v}) + f_{\ddagger}(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}', \mathbf{v} \rangle_\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega) \quad (2.40)$$

mais *a priori*  $\mathbf{f}'$  n'est pas nécessairement dans  $H(\Omega)$ .

**remarque 2.6** – Si l'on choisit un relèvement  $\mathbf{u}_i^\Omega$  du champ incident dans  $V(\Omega)$  au lieu de  $\mathbf{u}_{di}$  dans  $V(\Omega_s)$ , la forme anti-linéaire des forces sismiques induites s'écrit :

$$f_i(\mathbf{v}) = - \int_{\Omega_b} \boldsymbol{\sigma}_b(\mathbf{u}_i^\Omega) : \boldsymbol{\epsilon}(\bar{\mathbf{v}}) dV + \omega^2 \int_{\Omega_b} \rho_b \mathbf{u}_i^\Omega \cdot \bar{\mathbf{v}} dV + \int_{\Gamma_{sf}} \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_i^\Omega) \cdot \bar{\mathbf{v}} dS$$

pour tout champ  $\mathbf{v} \in V(\Omega)$  ■

**remarque 2.7** – Avec les notations du problème (2.38), on peut donner une formulation variationnelle de la définition du champ diffracté local sous la forme : pour tout  $\omega \in \mathbb{R}^*$ , trouver  $\mathbf{u} \in V_0(\Omega_s)$  tel que  $\forall \mathbf{v} \in V_0(\Omega_s)$  :

$$k_{\Omega_s}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = k_{\Omega_s}(\mathbf{u}_i, \mathbf{v})$$

avec alors  $\mathbf{u}_{di} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_i$  ■

### 2.3.4 Fonction de réponse en fréquence

On identifie à partir de maintenant la forme sesqui-linéaire  $k_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \omega)$  continue sur  $V(\Omega) \times V(\Omega)$  avec la fonction à valeurs opérateurs  $\omega \mapsto -\mathcal{K}(\omega)$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathcal{L}(V(\Omega), V'(\Omega))$  telle que pour tous les  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  de  $V(\Omega)$  on ait :

$$-\langle \mathcal{K}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_\Omega = k_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

Cet opérateur, appelé impédance dynamique, est symétrique et est décomposé classiquement en opérateurs de masse/raideur  $\mathbf{M}$  et dissipation  $\mathbf{C}$  dans  $\mathcal{L}(V(\Omega), V'(\Omega))$  où :

$$\mathbf{M}(\omega) = \Re[-\mathcal{K}(\omega)], \quad \mathbf{C}(\omega) = \Im[-\mathcal{K}(\omega)] \quad (2.41)$$

et on peut montrer que l'opérateur  $\mathbf{C}$  est symétrique, positif :  $\langle \mathbf{C}(\omega)\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_\Omega \geq 0$ . On verra au chapitre §5 que la construction de  $\mathcal{K}$  par des opérateurs intégraux conduit à le séparer en une partie (masse, raideur, dissipation) classique pour le domaine borné de la structure, et une partie type impédance élastodynamique de bord pour le domaine sol non borné, condensée sur  $\Gamma_{sf}$ . Celle-ci peut elle-même être décomposée en une partie masse/raideur ajoutée symétrique, et une partie dissipative par rayonnement à l'infini, symétrique et positive. Quoi qu'il en soit, le problème (2.38) est alors réécrit en terme d'opérateur sous la forme :

$$-\mathcal{K}\mathbf{u}_{d*} = \mathbf{f}' \quad (2.42)$$

Des résultats de la section §2.3.3 on déduit que pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$  l'opérateur  $-\mathcal{K}(\omega)$  est inversible dans  $V(\Omega)$  :

$$\mathcal{U}(\omega) = [-\mathcal{K}(\omega)]^{-1} \quad (2.43)$$

et que  $\mathcal{U}$  est continu de  $V'(\Omega)$  dans  $V(\Omega)$ . La solution du problème (2.38) dans  $V(\Omega)$  est ainsi construite par :

$$\mathbf{u}_{d*} = \mathcal{U}\mathbf{f}' \quad (2.44)$$

pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ .

### 2.3.5 Déplacement total du système sol-structure

A partir des Eq.(2.44) et (2.8) dans le domaine des fréquences on obtient le champ des déplacements total dans le système sol structure :

$$\mathbf{u} = \mathbf{1}_s \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{d_i} + \mathcal{U} \mathbf{f}' \quad (2.45)$$

où  $\mathbf{1}_s(\mathbf{x}) = \mathcal{I}_d$  (identité) si  $\mathbf{x} \in \Omega_s$ ,  $\mathbf{1}_s = \mathbf{0}$  sinon. En outre l'application  $\mathbf{v} \mapsto f_i(\mathbf{v}) : [\mathcal{D}(\Omega)]^3 \rightarrow \mathbb{C}$  est une forme anti-linéaire continue sur  $[\mathcal{D}(\Omega)]^3$ , donc il existe  $\mathcal{U}^i \mathbf{u}_i \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^3$  (voir Dautray & Lions [52], Chapitre VII, §1.3) tel que  $\langle \mathcal{U}^i \mathbf{u}_i, \mathbf{v} \rangle = f_i(\mathbf{v})$  pour tout  $\mathbf{v} \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$ , où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne ici l'anti-dualité entre  $[\mathcal{D}'(\Omega)]^3$  et  $[\mathcal{D}(\Omega)]^3$ . Par la linéarité de  $f + f_i$ , on écrit alors  $\mathcal{U} \mathbf{f}' = \mathcal{U} \mathbf{f} + \mathcal{U}^i \mathbf{u}_i$  où  $\mathcal{U}^i : V(\Gamma_{sf}) \rightarrow [\mathcal{D}'(\Omega)]^3$  définit une application linéaire continue, c'est-à-dire que seule la connaissance du champ incident  $\mathbf{u}_i$  sur  $\Gamma_{sf}$  est nécessaire. Ce résultat est une conséquence des propriétés de continuité du vecteur-contrainte sur la frontière  $\mathbf{t}_s(\mathbf{u}_i)$  pour un champ  $\mathbf{u}_i$  solution d'un problème elliptique avec une condition aux limites du type Dirichlet (voir par exemple Costabel [47], Lemme 3.7, et références citées). Si par exemple  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$  on en déduit la représentation formelle du champ des déplacements total en fonction du champ incident dans le sol et à l'interface sol-structure :

$$\mathbf{u} = (\mathbf{1}_s - R_s + \mathcal{U}^i) \mathbf{u}_i$$

que l'on note, en introduisant l'opérateur de transmission sous sollicitation sismique défini par l'application linéaire et continue  $\mathcal{T}^i : V(\Gamma_{sf}) \rightarrow [\mathcal{D}'(\Omega)]^3$  :

$$\mathbf{u} = \mathcal{T}^i \mathbf{u}_i \quad (2.46)$$

pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ . La réponse du système est donc linéaire vis-à-vis de la sollicitation imposée sur l'interface entre les sous-domaines. L'enjeu du chapitre §4 est la construction de cet opérateur et son approximation numérique. Il représente la réponse en fréquence du système couplé sol-structure sollicité par un champ sismique incident connu uniquement sur l'interface entre le sol et la structure.

## 2.4 Conclusion : problème stochastique

Nous avons établi dans ce chapitre l'existence et l'unicité d'une solution dans  $V(\Omega)$  du problème de transmission déterministe caractérisant l'interaction sismique sol-structure, dans le cadre de l'élastodynamique. Pour cela, nous avons introduit un modèle de comportement du sol compatible en terme énergétique avec les observations expérimentales courantes, et qui permet d'écrire une condition de flux d'énergie sortant nul pouvant se substituer, dans le cas d'un demi-espace sol stratifié, aux conditions de radiation de Sommerfeld classiques. Ces résultats sont résumés par les équations en terme d'opérateur (2.42) pour le champ rayonné total  $\mathbf{u}_{d*}$  ou (2.46) pour le champ total  $\mathbf{u}$  dans la structure ou le sol. Celles-ci font apparaître explicitement les sources d'aléa possible pour ce problème.

### 2.4.1 Champ incident de nature stochastique

Le résultat de l'Eq.(2.46) nous permet de traiter le problème des vibrations du système sol-structure sous chargement sismique aléatoire par les techniques classiques de l'analyse spectrale, moyennant certaines hypothèses fortes (mais réalistes) sur le champ incident  $\mathbf{u}_i$ .



Pour cela la connaissance de ses propriétés du second ordre sur  $\Gamma_{sf}$ , c'est-à-dire moyenne et fonction d'auto-corrélation ou fonction de cohérence, est nécessaire. Comme par contre celles-ci ne sont connues *a priori* qu'en surface, il est nécessaire de mettre en oeuvre une méthode de déconvolution pour accéder, par exemple, à la fonction de cohérence en profondeur lorsque les fondations de l'ouvrage sont enterrées. Par la représentation (2.46), on va alors pouvoir en déduire les propriétés du second ordre de la réponse du système sol-structure. La connaissance de l'opérateur  $\mathbf{U}^{\delta}$  est indispensable et s'obtient par une analyse purement déterministe.

## 2.4.2 Modules du sol de nature stochastique

Le résultat de l'Eq.(2.42) nous permet de traiter le cas des vibrations du système sol-structure incluant une perturbation aléatoire des modules élastiques du sol sur un domaine borné <sup>(5)</sup> sous chargements déterministes ou aléatoires. Formellement cela se traduit pour l'opérateur  $\mathcal{K}$  par la décomposition :

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 + \mathfrak{d}\mathcal{K}$$

où  $\mathcal{K}_0$  correspond à la partie déterministe non perturbée de  $\Omega$  et  $\mathfrak{d}\mathcal{K}$  correspond à la perturbation des modules du sol. (2.42) est maintenant un problème non-linéaire vis-à-vis des paramètres aléatoires, et de grande dimension une fois discrétisé. Dans ce cas la seule approche ayant un caractère constructif général, c'est-à-dire valable pour n'importe quel type de perturbations (décrites par leurs lois, leurs moments ...), est la méthode de simulation numérique de Monte-Carlo. Celle-ci impose néanmoins que l'on sache construire des trajectoires des perturbations des modules du sol modélisés par des champs stochastiques définis sur l'espace probabilisé  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$  ( $\mathcal{A}$  désignant l'ensemble des événements élémentaires, voir les notations en Annexe A), soit des réalisations  $\{\mathfrak{d}\mathcal{K}(a); a \in \mathcal{A}\}$  de la perturbation de l'opérateur  $\mathcal{K}_0$ . Une fois cette étape franchie, le problème stochastique correspondant est une série de problèmes déterministes :

$$\{- [\mathcal{K}_0 + \mathfrak{d}\mathcal{K}(a)] \mathbf{u}_d = \mathbf{f}'; a \in \mathcal{A}\}$$

que l'on sait résoudre moyennant la connaissance de l'opérateur  $\mathcal{K}_0$  en fonction des modules, de sa perturbation  $\mathfrak{d}\mathcal{K}$  en fonction des trajectoires des perturbations, et de  $\mathbf{f}'$ . Ainsi la méthode de Monte-Carlo s'apparente à une approche par collocation sur les trajectoires des paramètres aléatoires (observées ou construites) du problème considéré.

Les constructions de  $\mathbf{U}^{\delta}$  et  $\mathcal{K}_0 + \mathfrak{d}\mathcal{K}$  respectivement pour l'une et l'autre des situations que l'on souhaite examiner sont traitées dans les chapitres §4 et §5. Nous abordons au chapitre §3 les aspects strictement liés à la modélisation stochastique du problème aux limites de transmission et à l'étude probabiliste de ses "solutions", dans un certain sens à définir.

---

<sup>5</sup>On pourrait également introduire à ce stade une perturbation des modules élastiques de la structure, mais ce n'est pas l'objet de ce travail.

## Chapitre 3

# Modélisation stochastique et étude probabiliste

Ce chapitre est consacré à la modélisation stochastique du problème d'interaction sismique sol-structure présenté en détail dans le chapitre précédent, et à son étude probabiliste. La première consiste à définir les propriétés essentielles des différentes entrées et caractéristiques aléatoires du système sol-structure considéré, la seconde consiste à étudier les propriétés utiles de ses sorties. On montre principalement que l'ensemble du problème peut être traité en considérant une dimension supplémentaire correspondant à sa dimension aléatoire suivant  $\mathcal{A}$ , l'ensemble des événements élémentaires dont dépendent les états des paramètres aléatoires du système et du chargement  $\mathbf{u}_i$ .

L'influence d'une sollicitation sismique de nature aléatoire est analysée par la méthode classique de l'analyse spectrale, la réponse du système étant linéaire vis-à-vis de cette sollicitation. Sa finalité est de calculer la fonction de densité spectrale de la réponse du système couplé sol-structure en fonction de celle du champ sismique incident, qui caractérise sa variabilité spatiale (voir chapitre §1). Après avoir introduit quelques unes des propriétés probabilistes d'un tel champ, on développe, dans la première section de ce chapitre, cette approche pour le cas spécifique de la réponse impulsionnelle du système couplé sol-structure. Celle-ci est déduite de la fonction de réponse en fréquence de la structure pour un champ incident par transformée de Fourier inverse, et exprimée sous la forme d'un opérateur intégral défini sur l'interface sol-structure seulement. La méthode étant par ailleurs établie classiquement pour l'étude de la réponse stationnaire du second ordre (au sens probabiliste) à un chargement également stationnaire du second ordre, elle est étendue au cas d'un champ incident du second ordre instationnaire modulé en temps. On présente ensuite une méthode de réduction fonctionnelle de sa dimension aléatoire qui permet de calculer à moindre coût les caractéristiques du second ordre – fonction de densité spectrale – de la réponse.

La fonction de réponse en fréquence du système couplé sol-structure dépend de façon non-linéaire des paramètres du sol que l'on se propose ensuite de modéliser par des champs stochastiques. La réponse de ce système est donc elle aussi non linéaire vis-à-vis de l'aléa introduit, et les techniques utilisées précédemment ne s'appliquent plus. Compte tenu de la complexité du système étudié, la méthode retenue dans ce cas est la simulation de Monte-Carlo. Elle consiste à construire un ensemble de réalisations du système aléatoire complet, pour chacune desquelles est calculée la solution (puisqu'elle existe et est unique) correspondante. Une analyse statistique de l'ensemble des réalisations des solutions ainsi obtenu

permet d'accéder à des grandeurs telles que moyenne ou écart-type de la réponse du système. Chacune de ces réalisations exige la simulation d'un opérateur stochastique, correspondant à l'impédance dynamique (inverse de la fonction de réponse en fréquence) du système. On donne dans la section suivante une méthode de réduction de sa dimension aléatoire qui n'est alors plus portée que par un nombre réduit de variables aléatoires réelles, nettement moins coûteuses à simuler. La réponse du système est encore une fonction non linéaire de ces variables aléatoires que l'on peut représenter simplement, moyennant quelques hypothèses sur ces dernières, par une approximation spectrale utilisant une base particulière de l'espace des variables aléatoires du second ordre.

Une fois les éléments de réduction de l'aléa introduits, il est possible de mettre en oeuvre de façon efficace et économique la méthode de Monte-Carlo, qui est décrite pour finir dans une troisième et dernière section.

Les principales définitions et notations mathématiques relatives aux champs stochastiques du second ordre utilisées dans toute la suite de ce chapitre sont rappelées dans l'Annexe A. Ces modèles sont privilégiés dans la mesure où ils correspondent aux processus d'énergie finie, donc physiques.

### 3.1 Action d'un champ incident aléatoire

Nous nous limitons dans cette partie à l'étude de la réponse de la *structure* à une excitation sismique caractérisée par le champ incident  $\mathbf{u}_i$  modélisé par un champ stochastique  $\mathbf{U}_i$  dont on précisera par la suite les propriétés. L'analyse montre que cette réponse résulte d'un pseudo (à cause des bornes de l'intégrale en temps, voir ci-dessous) filtrage linéaire de convolution du champ incident  $\mathbf{u}_i$ . Cette approche joue un rôle théorique central dans l'analyse spectrale des vibrations aléatoires linéaires des milieux élastiques excités par des processus stochastiques stationnaires en m.o.d. (définis en Annexe A, ou certains processus instationnaires tels que les processus évolutifs [174]). On y fera ainsi constamment référence, ne serait-ce que par consistance avec les ouvrages de base traitant de ces aspects (voir par exemple [192, 195] et les références citées). On introduit dans un premier temps quelques hypothèses complémentaires concernant l'opérateur résolvant du problème couplé complet, en reprenant les arguments classiques d'analyse fonctionnelle développés dans [52] qui nous seront utiles pour l'approximation numérique de la solution  $\mathbf{u}_{d*}$  du problème variationnel (2.38). Puis l'on précise les principales hypothèses nécessaires pour la caractérisation, d'un point de vue probabiliste, du champ incident et l'application des techniques de l'analyse spectrale pour l'étude de la fonction de densité spectrale de la réponse de la structure sous cette action. La seule originalité de cette section tient dans l'identification de la fonction de transfert – ou de la réponse impulsionnelle – pour le problème complet d'interaction sismique sol-structure sous la forme d'un opérateur intégral défini sur l'interface  $\Gamma_{sf}$  uniquement, ce qui constitue un élément de simplification essentiel pour la suite de l'étude. La mise en oeuvre des techniques d'analyse spectrale est elle tout à fait classique. On développe ensuite une méthode de déconvolution stochastique qui permet d'accéder aux caractéristiques du second ordre du champ incident en profondeur à partir de celles mesurées généralement en surface. Bien que limités à une configuration particulière du sol, ces résultats sont utiles pour les cas des fondations enterrées où  $\Gamma_{sf}$  n'est pas dans  $\Gamma_{sa}^{\mathfrak{n}}$ . Afin de réduire le coût numérique de l'analyse probabiliste de la réponse de la structure, on présente enfin une méthode de réduction fonctionnelle de la dimension aléatoire du champ incident, qui permet d'accéder

à la fois à des trajectoires de la réponse, et à ses grandeurs du second ordre.

### 3.1.1 Hypothèses complémentaires

On suppose donc que  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$  dans  $\Omega$  et on ne s'intéresse qu'au champ des déplacements dans la structure  $\mathbf{u}_b = \mathbf{u}_{d*}|_{\Omega_b}$ , Eq.(2.8), de  $V(\Omega_b)$ ,  $\Omega_b$  étant rappelons-le un domaine ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$ . Ainsi la solution de l'Eq.(2.42) est dans  $[H^2(\Omega_b)]^3$  si  $\mathbf{f}' \in H(\Omega_b)$ . Afin de construire une approximation numérique de l'opérateur  $\mathcal{U}$  et par là même du champ des déplacements dans la structure sous l'action du champ sismique  $\mathbf{u}_i$ , il est nécessaire de le réduire afin d'utiliser par exemple une décomposition spectrale. Celle-ci est obtenue grâce au résultat suivant :

**Proposition 3.1** *L'opérateur borné  $\mathcal{U}_2^i(\omega)$  de  $\mathcal{L}(H(\Gamma_{sf}), H(\Omega_b))$  tel que le champ des déplacements dans le bâtiment  $\mathbf{u}_b$  s'écrit  $\forall \omega \in \mathbb{R}$  :*

$$\mathbf{u}_b(\omega) = \mathcal{U}_2^i(\omega)\mathbf{u}_i(\omega)$$

*est de Hilbert-Schmidt.*

La définition d'un opérateur de Hilbert-Schmidt est rappelée dans l'Annexe A (voir [52]). La preuve de la proposition (3.1) ci-dessus est reportée en fin de section. La fonction à valeurs opérateurs  $\omega \mapsto \mathcal{U}_2^i(\omega)$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathcal{L}_2(H(\Gamma_{sf}), H(\Omega_b))$  est en outre supposée telle que  $\mathcal{U}_2^i$  est défini pour tout  $\mathbf{u}$  de  $H(\Gamma_{sf})$  et  $\mathbf{v}$  de  $H(\Omega_b)$  par la forme sesqui-linéaire :

$$k_i(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathcal{U}_2^i \mathbf{u}, \mathbf{v})_H = \iint_{\Gamma_{sf} \times \Omega_b} \mathbf{Q}^i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{u}(\mathbf{y}) \cdot \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{y}) dV(\mathbf{x}) \quad (3.2)$$

c'est-à-dire sous la forme d'un opérateur intégral dont le noyau  $\mathbf{Q}^i(\omega) : \Omega_b \times \Gamma_{sf} \rightarrow \text{Mat}_{\mathbb{C}}(3, 3)$  vérifie  $\forall \omega \in \mathbb{R}$  :

$$\iint_{\Gamma_{sf} \times \Omega_b} \|\mathbf{Q}^i(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega)\|^2 dS(\mathbf{y}) dV(\mathbf{x}) < +\infty$$

avec la norme matricielle  $\|\mathbf{Q}^i\|^2 = \text{tr} \mathbf{Q}^i \mathbf{Q}^{i*}$  (norme de Frobenius). Il sera explicité au chapitre §5, section §5.2.3. On note que les opérateurs intégraux de la forme  $\mathbf{G} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega')$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  et  $\Omega' \subset \mathbb{R}^m$  ouverts, sont bien de Hilbert-Schmidt. Ils sont donc compacts, la propriété essentielle de tels opérateurs d'un point de vue constructif étant que leur spectre est purement ponctuel, et la série du carré de leurs valeurs propres est convergente. Le champ des déplacements dans la structure s'écrit ainsi :

$$\mathbf{u}_b(\mathbf{x}, \omega) = \int_{\Gamma_{sf}} \mathbf{Q}^i(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega) \mathbf{u}_i(\mathbf{y}, \omega) dS(\mathbf{y})$$

et peut être décomposé sur une base de modes de déplacement de la structure, typiquement des modes statiques et des modes propres de vibration sur base fixe. On suppose également que la fonction  $t \mapsto \mathbf{Q}^i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  est de carré intégrable, et par application de la transformée de Fourier inverse dans  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^3)$  (2.21) on en déduit :

$$\mathbf{u}_b(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_{\Gamma_{sf}} \mathbf{Q}^i(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t - \tau) \mathbf{u}_i(\mathbf{y}, \tau) dS(\mathbf{y}) d\tau \quad (3.3)$$

Les bornes de l'intégrale en temps sont imposées *a fortiori* par le choix de conditions initiales nulles pour les vibrations dans la structure à  $t_0 = 0$ . Le modèle de champ incident modulé introduit ci-après justifie formellement un tel choix, sans incidence sur le traitement du filtrage et les commentaires qui en découlent.

**remarque 3.1** – Les résultats exposés dans cette section sont tout à fait standards pour un domaine borné avec conditions aux limites non homogènes du type Neumann ou Dirichlet par exemple. En revanche ils sont étendus ici, de façon moins classique nous semble-t-il, à la formulation du couplage en élastodynamique entre un domaine borné (la structure) et un domaine non borné (le sol) sollicités par un champ incident provenant de l' "infini" ■

On donne pour finir les éléments de preuve de la proposition (3.1).

PREUVE – Nous sommes amenés à considérer classiquement la restriction de  $-\mathcal{K}$  à un sous-espace de  $V_0(\Omega_b)$  tel que  $-\mathcal{K}\mathbf{u}$  soit dans  $H(\Omega_b)$ . Plus précisément, on pose :

$$D(\mathcal{K}) = \{\mathbf{u} \in V_0(\Omega_b); -\mathcal{K}\mathbf{u} \in H(\Omega_b)\}$$

et  $-\mathcal{K}_H$  est la restriction de  $-\mathcal{K}$  à  $D(\mathcal{K})$ . Alors  $-\mathcal{K}_H \in \mathcal{L}(D(\mathcal{K}), H(\Omega_b))$  <sup>(1)</sup> et est inversible avec  $\mathcal{U}_H(\omega) = [-\mathcal{K}_H(\omega)]^{-1} \in \mathcal{L}(H(\Omega_b), D(\mathcal{K}))$ . On définit  $\mathcal{U}_H \mathbf{f}' = \mathcal{U}^\natural \mathbf{u}_i$  où  $\mathcal{U}^\natural \in \mathcal{L}(H(\Gamma_{sf}), D(\mathcal{K}))$  est identifié à l'opérateur introduit en §2.3.5, ce qui est licite car  $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega_b})$  est dense dans  $D(\mathcal{K})$ , voir [47]. Par ailleurs l'injection compacte  $\mathbf{j}_0 : [H^k(\Omega_b)]^3 \rightarrow [H^0(\Omega_b)]^3$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt dès lors que  $k > \frac{3}{2}$ . On identifie ici  $[H^0(\Omega_b)]^3 = H(\Omega_b)$  et comme  $D(\mathcal{K}) = [H^2(\Omega_b)]^3 \cap V_0(\Omega_b)$ , avec  $k = 2$   $\mathbf{j}_0 \in \mathcal{L}_2(D(\mathcal{K}), H(\Omega_b))$ . Ainsi  $\mathcal{U}_2^\natural = \mathbf{j}_0 \circ \mathcal{U}^\natural$  est un opérateur continu, de Hilbert-Schmidt de  $H(\Gamma_{sf})$  dans  $H(\Omega_b)$ . □

### 3.1.2 Filtrage linéaire et analyse spectrale

Les différentes notions élémentaires du filtrage et de l'analyse spectrale des systèmes linéaires sous sollicitations aléatoires mises en oeuvre dans la suite sont exposées par exemple dans [192], auquel on pourra se reporter pour une description détaillée.

Un résultat important de la théorie est que pour une sollicitation stationnaire et une réponse impulsionnelle causale et stable associée au filtre linéaire représentant le système étudié, le processus stochastique modélisant la réponse forcée de ce système n'est pas stationnaire. En revanche il converge asymptotiquement en m.o.d. (c'est-à-dire au sens de l'erreur quadratique moyenne) vers un processus qui lui est stationnaire en m.o.d., et appelé réponse stationnaire du système. Ainsi en revenant au problème qui nous intéresse, Eq.(3.3), on voit donc que même si le champ incident  $\mathbf{u}_i$  peut être modélisé par un processus stationnaire en m.o.d., la réponse de la structure n'est pas stationnaire et ne l'est qu'au sens de la convergence en m.o.d.

### 3.1.3 Données générales sur le champ incident stochastique

Le séisme est modélisé par un champ stochastique  $\mathbf{U}_i(\mathbf{x}, t)$  défini sur un espace probabilisé  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$ , indexé sur  $\Gamma_{sf} \times \mathbb{R}^+$  <sup>(2)</sup>, du second ordre, centré, gaussien <sup>(3)</sup>, non stationnaire

<sup>1</sup> Mais  $-\mathcal{K}_H \notin \mathcal{L}(H(\Omega_b))$ ; par contre c'est un opérateur fermé de  $H(\Omega_b)$  dont l'inverse est borné, voir [52].

<sup>2</sup> dans la mesure où seule sa connaissance sur  $\Gamma_{sf}$  est nécessaire.

<sup>3</sup> cette propriété issue d'observations expérimentales est corroborée par certains résultats théoriques, voir par exemple [30].

par rapport à la variable de temps, non homogène par rapport à la variable d'espace, et continu en m.o.d. Sa fonction d'auto-corrélation transversale, égale à sa fonction de covariance transversale puisque le champ est centré, est définie sur  $\Gamma_{sf} \times \Gamma_{sf} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  et notée :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{U}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') = \mathbb{E} \{ \mathbf{U}_i(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{U}_i(\mathbf{x}', t') \} \quad (3.4)$$

On suppose que le champ s'écrit  $\forall \mathbf{x} \in \Gamma_{sf}$  sous la forme [136] :

$$\mathbf{U}_i(\mathbf{x}, t) = \varphi(t) \mathbf{V}_i(\mathbf{x}, t) \quad (3.5)$$

où  $t \mapsto \varphi(t)$  est une fonction déterministe continue de  $L^2(\mathbb{R}^+)$  à valeurs dans  $[0, 1]$ , appelée *fonction de modulation*;  $\mathbf{V}_i(\mathbf{x}, t)$  est un champ stochastique défini sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$ , indexé sur  $\Gamma_{sf} \times \mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ , du second ordre, centré, gaussien, stationnaire par rapport à la variable de temps, non homogène par rapport à la variable d'espace, et continu en m.o.d. Sa fonction d'auto-corrélation transversale, égale à sa fonction de covariance transversale puisque le champ est centré, est notée :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \mathbb{E} \{ \mathbf{V}_i(\mathbf{x}, t' + t) \otimes \mathbf{V}_i(\mathbf{x}', t') \} \quad (3.6)$$

et est définie sur  $\Gamma_{sf} \times \Gamma_{sf} \times \mathbb{R}$ . On note tout de suite que l'on a par conséquent la relation :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{U}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') = \varphi(t)\varphi(t')\mathbf{R}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t - t') \quad (3.7)$$

La fonction d'auto-corrélation transversale  $\mathbf{R}_{\mathbf{V}_i}$  vérifie la propriété générale :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', -t) = [\mathbf{R}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t)]^T \quad (3.8)$$

et comme le champ stochastique  $\mathbf{V}_i(\mathbf{x}, t)$  est dans  $L^2(\mathcal{A}, \mathbb{R}^3)$ , on a :

$$\|\mathbf{V}_i(\mathbf{x}, t)\|^2 = \text{tr } \mathbf{R}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, 0) < +\infty, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{sf} \quad (3.9)$$

Ainsi  $\|\mathbf{U}_i(\mathbf{x}, t)\|^2 = \varphi^2(t) \text{tr } \mathbf{R}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, 0) < +\infty$  pour tout  $\mathbf{x} \in \Gamma_{sf}$  et  $t > 0$  et donc  $\mathbf{U}_i(\mathbf{x}, t)$  est bien du second ordre. On introduit en outre les propriétés de régularité suivantes :

1. L'application  $\mathbf{x} \mapsto \text{tr } \mathbf{R}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, u) : \Gamma_{sf} \rightarrow \mathbb{R}^+$  est continue pour tout  $u \in \mathbb{R}$ , ce qui assure la continuité en m.o.d. de  $\mathbf{V}_i(\mathbf{x}, t)$  et de  $\mathbf{U}_i(\mathbf{x}, t)$  grâce à la continuité de  $u \mapsto \varphi(u)$ .
2. La mesure spectrale transversale du processus stochastique  $\mathbf{V}_i(\mathbf{x}, t)$  admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue  $d\omega$  pour tout  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$  sur  $\Gamma_{sf}$ , notée  $\omega \mapsto \mathbf{S}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)$ , intégrable et à valeurs dans  $\text{Mat}_{\mathbb{C}}(3, 3)$ . On a donc  $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$  dans  $\Gamma_{sf} \times \Gamma_{sf} \times \mathbb{R}$  la relation :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} \mathbf{S}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) d\omega \quad (3.10)$$

La fonction de densité spectrale transversale du processus stochastique  $t \mapsto \mathbf{V}_i(\mathbf{x}, t)$  a les propriétés usuelles suivantes ( $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in \Gamma_{sf} \times \Gamma_{sf}$ ) :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', -\omega) &= \overline{\mathbf{S}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)} \\ \mathbf{S}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) &= [\mathbf{S}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, \omega)]^* \end{aligned} \quad (3.11)$$

La fonction de densité spectrale transversale évolutive [174] du processus stochastique  $t \mapsto \mathbf{U}_i(\mathbf{x}, t)$  est donnée pour tout  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  dans  $\Gamma_{sf} \times \Gamma_{sf}$  par :

$$\mathbf{S}_{\mathbf{U}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, \omega) = \varphi^2(t) \mathbf{S}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \quad (3.12)$$

et l'on a le résultat :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{U}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{S}_{\mathbf{U}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, \omega) d\omega \quad (3.13)$$

qui est bien définie avec les hypothèses précédentes sur  $\varphi$  et  $\mathbf{S}_{\mathbf{V}_i}$ . Enfin les observations montrent que les trajectoires  $\mathbf{x}, t \mapsto \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t; a)$  (et  $\mathbf{x}, t \mapsto \mathbf{v}_i(\mathbf{x}, t; a)$ ) sont continues (pour tout  $a$  dans une partie  $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{A}$  telle que  $P(\mathcal{A}_0) = 1$ , i.e. les trajectoires sont presque sûrement continues).

### 3.1.4 Réponse de la structure

#### Filtre linéaire de convolution associé au problème d'interaction sol-structure

On donne dans un premier temps l'expression formelle de la réponse impulsionnelle du système couplé sol-structure en introduisant une discrétisation spatiale de l'opérateur de transmission correspondant. Celle-ci constitue en effet la donnée fondamentale pour la poursuite de l'analyse des caractéristiques du second ordre de la réponse stochastique du système couplé que l'on se propose d'effectuer dans cette section. Ainsi le noyau  $\mathbf{Q}^i$  de l'opérateur intégral  $\mathcal{U}_2^i$  donnant la réponse de la structure sous l'action d'un champ incident, Eq.(3.3), est approché dans le chapitre §5 par un champ  $\tilde{\mathbf{Q}}^i$  solution d'une équation intégrale de représentation discrétisée sur un maillage d'éléments finis de frontière à  $N_s$  noeuds de  $\Gamma_{sf}$  (on pose alors  $d_s = 3N_s$ ). Cette interpolation géométrique est décrite plus en détail dans la section §5.3, mais on peut noter d'ores et déjà que cela revient à écrire  $\tilde{\mathbf{Q}}^i$  sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{Q}}^i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \sum_{J,j=1,1}^{d_s} \sum_{k=1}^3 Q_{Jj,k}^i(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\omega}_{Jj}(\mathbf{y}) \otimes \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{y} \in \Gamma_{sf} \quad (3.14)$$

pour  $\mathbf{x} \in \Omega_b$ ;  $\{\boldsymbol{\omega}_{Jj}; 1 \leq J \leq N_s, 1 \leq j \leq 3\}$  sont les fonctions de base des éléments finis utilisés;  $[\mathbf{Q}^i(\mathbf{x}, t)]$  (où  $[\mathbf{Q}^i(\mathbf{x}, t)]_{Jjk} = Q_{Jj,k}^i$ ) est la matrice de  $\text{Mat}_{\mathbb{R}}(d_s, 3)$  des valeurs aux noeuds du maillage du noyau  $\mathbf{Q}^i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  à l'instant  $t$  lorsqu'on observe les déplacements de la structure au point  $\mathbf{x}$ . Si l'on désigne par  $[\mathbf{U}_i(t)]$  la matrice de  $\text{Mat}_{\mathbb{R}}(d_s, 3)$  représentant à l'instant  $t$  le *champ sismique incident équivalent* issue de la projection du champ incident  $\mathbf{u}_i$  sur la base d'éléments finis et sommé sur  $\Gamma_{sf}$ , tel que :

$$[\mathbf{U}_i(t)]_{Jjk} = \int_{\Gamma_{sf}} (\mathbf{u}_i(\mathbf{y}, t) \cdot \mathbf{e}_k) \boldsymbol{\omega}_{Jj}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \quad (3.15)$$

alors la fonction de réponse impulsionnelle au point  $\mathbf{x}$  du filtre linéaire de convolution associé au problème d'interaction sol-structure est ici  $t \mapsto [\mathbf{Q}^i(\mathbf{x}, t)]^T$ . Il est stable. Le nombre d'entrées est égal au nombre d'inconnues nodales du maillage qui peut être relativement élevé. Dans la section §3.1.6, on met en oeuvre une méthode de réduction fonctionnelle afin de limiter le nombre d'entrée du système discrétisé. Dans la section suivante, on donne les caractéristiques du second ordre de la réponse structurelle en revenant à un calcul explicite direct et en tenant compte des hypothèses précédemment énoncées relatives aux caractéristiques du second ordre de l'excitation aléatoire.

### Analyse spectrale pour une excitation aléatoire modulée en temps

La réponse de la structure  $\mathbf{u}_b(\mathbf{x}, t)$  au point  $\mathbf{x}$  est modélisée par un processus stochastique  $\mathbf{U}_b(t)$  défini sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$  et indexé sur  $\mathbb{R}^+$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ . La principale difficulté est de s'assurer qu'il s'agit bien, avec les hypothèses précédentes relatives au champ incident stochastique  $\mathbf{U}_i$  et à la transformation intégrale de noyau  $\mathbf{Q}^{\ddagger}$ , d'un processus du second ordre. La proposition (3.16) ci-dessous énonce ainsi les principales propriétés de  $\mathbf{U}_b$ .

**Proposition 3.16** *Le processus  $t \mapsto \mathbf{U}_b(t)$  est du second ordre, gaussien, centré, non stationnaire et sa fonction d'auto-corrélation  $t, t' \mapsto \mathbf{R}_{\mathbf{U}_b}(t, t') : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \text{Mat}_{\mathbb{R}}(3, 3)$  est donnée par :*

$$\mathbf{R}_{\mathbf{U}_b}(t, t') = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} d\omega \iint_{\Gamma_{sf} \times \Gamma_{sf}} \mathbf{T}(\mathbf{y}, t, \omega) \mathbf{S}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \omega) \mathbf{T}^*(\mathbf{y}', t', \omega) dS(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}')$$

avec l'expression suivante pour la pseudo-force équivalente déterministe  $\mathbf{T}$  appliquée à la fondation [133] :

$$\mathbf{T}(\mathbf{y}, t, \omega) = \int_0^t e^{-i\omega\tau} \varphi(\tau) \mathbf{Q}^{\ddagger}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d\tau$$

PREUVE – Il s'agit ici essentiellement de montrer que  $\mathbf{U}_b$  est bien un processus du second ordre. L'intérêt des hypothèses d'intégrabilité du noyau  $\mathbf{Q}^{\ddagger}$  et de régularité de la fonction d'auto-corrélation de  $\mathbf{U}_i$  apparaît à ce stade. Le processus  $t \mapsto \mathbf{U}_b(t)$  est défini d'après l'Eq.(3.3) comme une intégrale en m.o.d. du champ stochastique  $\mathbf{x}, t \mapsto \mathbf{U}_i(\mathbf{x}, t)$  qui est localement borné sur  $\Gamma_{sf} \times \mathbb{R}^+$  puisqu'il est continu en m.o.d. La fonction  $\mathbf{x} \mapsto \text{tr} \mathbf{R}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, u)$  étant continue sur  $\Gamma_{sf}$  borné, on en déduit que  $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \mapsto \mathbf{R}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', u)$  est continue sur  $\Gamma_{sf} \times \Gamma_{sf}$  et est donc bornée. Comme par ailleurs  $\mathbf{V}_i(\mathbf{x}, t)$  est stationnaire et continu en m.o.d. par rapport à  $t$ , et  $u \mapsto \varphi(u)$  est bornée, on en déduit que  $\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t' \mapsto \mathbf{R}_{\mathbf{U}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t')$  est bornée sur  $\Gamma_{sf} \times \Gamma_{sf} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ . L'intégrale :

$$\iint_{K_t \times K_t} \iint_{\Gamma \times \Gamma'} [\mathbf{Q}^{\ddagger}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau)] \mathbf{R}_{\mathbf{U}_i}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \tau, \tau') [\mathbf{Q}^{\ddagger}(\mathbf{x}, \mathbf{y}', t - \tau')]^T dS(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}') d\tau d\tau' \quad (a)$$

où  $K_t$  est le compact  $[0, t]$  à  $t$  fixé, reste donc définie quand les compacts  $\Gamma, \Gamma' \rightarrow \Gamma_{sf}$  avec les propriétés d'intégrabilité de  $\mathbf{y}, u \mapsto \mathbf{Q}^{\ddagger}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, u)$  car  $L^2(K_t) \subset L^1(K_t)$  (la notation  $\Gamma \rightarrow \Gamma_{sf}$  signifie que l'on considère une suite quelconque croissante  $\{\Gamma_j\}_j$  de compacts  $\Gamma_j \subset \Gamma_{sf}$  de réunion  $\Gamma_{sf}$ ). Donc  $\mathbf{U}_b(t)$  est du second ordre. Il est gaussien comme transformation linéaire d'un processus gaussien. Il est centré car :

$$\mathbb{E} \{ \mathbf{U}_b(t) \} = \int_0^t \int_{\Gamma_{sf}} \mathbf{Q}^{\ddagger}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \mathbb{E} \{ \mathbf{U}_i(\mathbf{y}, \tau) \} dS(\mathbf{y}) d\tau = \mathbf{0}$$

puisque  $\mathbf{U}_i(\mathbf{y}, t)$  est centré. On obtient l'expression de  $\mathbf{R}_{\mathbf{U}_b}(t, t')$  en injectant la relation (3.10) avec l'Eq.(3.7) dans l'expression (a) ci-dessus, et l'on voit qu'elle ne dépend pas de  $t - t'$ .  $\square$

De l'expression de  $\mathbf{R}_{\mathbf{U}_b}(t, t')$  ci-dessus on déduit que la mesure spectrale instantanée  $\mathbf{M}_{\mathbf{U}_b}(t, d\omega)$  du processus  $\mathbf{U}_b(t)$  admet une densité instantanée  $\mathbf{S}_{\mathbf{U}_b}(t, \omega)$  définie sur  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  et donnée par :

$$\mathbf{S}_{\mathbf{U}_b}(t, \omega) = \iint_{\Gamma_{sf} \times \Gamma_{sf}} \mathbf{T}(\mathbf{y}, t, \omega) \mathbf{S}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \omega) \mathbf{T}^*(\mathbf{y}', t, \omega) dS(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}') \quad (3.17)$$

On vérifie aisément qu'elle a les propriétés usuelles :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\mathbf{U}_b}(t, \omega) &= [\mathbf{S}_{\mathbf{U}_b}(t, \omega)]^* \\ \mathbf{S}_{\mathbf{U}_b}(t, -\omega) &= \mathbf{S}_{\mathbf{U}_b}(t, \omega) \end{aligned} \quad (3.18)$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ . Les écarts-types de la réponse de la structure sont ensuite donnés par :

$$\sigma_j^2(t) = 2 \int_0^{+\infty} [\mathbf{S}_{\mathbf{U}_b}(t, \omega)]_{jj} d\omega, \quad j \in \{1, 2, 3\}, t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.19)$$



### Remarques sur les applications de l'analyse spectrale

La courbe d'évolution de l'écart-type de la réponse donne une première information sur l'influence de la variabilité spatiale du champ incident, mais qui n'est généralement pas interprétable en termes de dimensionnement dans l'état actuel des règlements parasismiques. Par contre elle permet d'accéder à des grandeurs directement exploitables telles que les valeurs extrêmes moyennes (dimensionnement aux états limites) ou les taux de passage dans un intervalle de temps donné (dimensionnement en fatigue). Ces résultats sont fondés sur les formules dites de S.O. Rice (voir [192] et références citées), ayant un caractère très général mais dont il n'existe que très peu d'expressions analytiques explicites. Typiquement celles-ci sont limitées au cas d'un processus gaussien stationnaire et ont été rappelées, dans ce cadre, dans [182]. Les résultats portants, par exemple, sur les valeurs extrêmes moyennes de la réponse ainsi obtenues interviennent dans un dimensionnement au même niveau que ceux issus de la méthode classique du spectre de réponse (décrite à la section §1.2.5). Ils sont cependant beaucoup plus fiables dans la mesure où :

- ils incorporent l'aléa complet du séisme par l'intermédiaire de la donnée de sa fonction de cohérence transversale ;
- la formulation donnée tient compte des effets d'interaction sol-structure ;
- ils ne sont pas assujettis à une méthode particulière choisie par le projeteur pour la combinaison des spectres de réponse associés aux différents modes propres structurels, telle que la méthode SRSS ou CQC [120]. En effet la formulation combine implicitement les différentes réponses modales en une seule expression résumée par l'opérateur  $\mathcal{U}_2^{\mathfrak{I}}$ , et qui elle est statistiquement toujours exacte.

#### 3.1.5 Déconvolution stochastique

En pratique, les données probabilistes dont on dispose pour caractériser le champ incident sont limitées au seul tenseur de cohérence de  $\mathbf{V}_{\mathfrak{I}}(\mathbf{x}, t)$  de matrice  $\mathfrak{V}\mathbf{V}_{\mathfrak{I}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)$  dans une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$ . Celle-ci est évaluée le plus souvent de façon plus ou moins empirique à partir de divers enregistrements sismiques sur un site instrumenté particulier.

**Définition 3.20 (tenseur de cohérence)** Soit  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$ . Le tenseur de cohérence transversale du champ stochastique  $\mathbf{V}_{\mathfrak{I}}(\mathbf{x}, t)$  a pour matrice dans cette base  $\mathfrak{V}\mathbf{V}_{\mathfrak{I}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)$  dont les éléments s'écrivent :

$$\gamma_{jkk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) = \frac{\left| [\mathbf{S}\mathbf{V}_{\mathfrak{I}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)]_{jk} \right|^2}{[\mathbf{S}\mathbf{V}_{\mathfrak{I}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \omega)]_{jj} [\mathbf{S}\mathbf{V}_{\mathfrak{I}}(\mathbf{x}', \mathbf{x}', \omega)]_{kk}} \stackrel{\text{déf}}{=} [\mathfrak{V}\mathbf{V}_{\mathfrak{I}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)]_{jk}$$

à valeurs dans  $[0, 1]$  pour  $j, k \in \{1, 2, 3\}$ .

**Définition 3.21 (longueur de corrélation)** La longueur de corrélation spatiale du champ stochastique  $\mathbf{V}_{\mathfrak{I}}(\mathbf{x}, t)$  dans la direction  $\mathbf{e}_j$ , à la fréquence  $\omega$  et au point  $\mathbf{x}$  est le réel :

$$\ell_j(\mathbf{x}, \omega) = \int_0^{+\infty} \gamma_{jj}(\mathbf{x} + r\mathbf{e}_j, \mathbf{x}, \omega) dr$$

On suppose en outre que la fonction de modulation  $\varphi$  est connue. Une méthode permettant de déterminer cette fonction à partir d'enregistrements est par exemple proposée dans [136].

Généralement les trajectoires sont relevées en surface uniquement, si bien que la matrice de cohérence transversale n'est en fait connue qu'en surface avant construction des fondations. Or l'Eq.(3.17) entre autres montre que sa connaissance sur tout  $\Gamma_{sf}$  est nécessaire. Dans le cas d'une fondation enterrée, on est donc amené à expliciter la matrice de cohérence transversale en profondeur. On montre dans cette section que celle-ci peut être obtenue analytiquement à partir de la matrice de cohérence transversale en surface sous certaines hypothèses simplificatrices concernant le mécanisme de propagation d'ondes et la géométrie du sol pour le site étudié. La méthode est appelée déconvolution stochastique par Kausel & Pais [107].

### Hypothèses

La géométrie retenue pour le sol est celle d'une stratification horizontale et connue. Le champ incident est exprimé comme la superposition d'ondes planes se propageant dans toutes les directions possibles. Il est supposé homogène en surface, c'est-à-dire que sa fonction de densité spectrale transversale  $\mathbf{S}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)$  vérifie pour tous  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$  sur  $\Gamma_{sa}^i$  :

$$\mathbf{S}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) = \mathbf{S}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (3.22)$$

On suppose également que sa mesure spectrale  $\mathbf{M}_{\mathbf{V}_i}(d\mathbf{k}, d\omega)$  admet une densité notée  $\Sigma_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{k}, \omega)$  <sup>(4)</sup> qui vérifie compte tenu de la relation ci-dessus :

$$\Sigma_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{k}, \omega) = \int_{\Gamma_{sa}^i} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{S}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{r}, \omega) d\mathbf{r} \quad (3.23)$$

où  $\mathbf{k}$  désigne le vecteur d'onde horizontal. Les réflexions dans chaque couche dues aux hétérogénéités locales (à une échelle de grandeur d'ordre inférieur à celle de la stratification) sont négligées. Enfin on suppose qu'il n'y a aucune source sismique entre la surface libre du demi-espace sol et la profondeur  $z$  considérée, limitée à la profondeur des fondations.

Dans ces conditions, le champ de déplacement se propageant à n'importe quelle profondeur peut être évalué par la méthode du propagateur de Thomson-Haskell vu au chapitre §1. En introduisant la transformée de Fourier spatiale dans le plan horizontal :

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, z, \omega) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, z, \omega) d\mathbf{r}$$

on a de manière générale :

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, z, \omega) = \mathcal{P}(\mathbf{k}, z, \omega) \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, 0, \omega) \quad (3.24)$$

La matrice de transfert  $\mathcal{P}(\mathbf{k}, z, \omega)$  ne dépend, hormis les variables de la transformée de Fourier dans le plan horizontal, que des caractéristiques des matériaux constituant les différentes couches du sol entre la surface libre et la profondeur  $z$ .

<sup>4</sup>Cette hypothèse est vérifiée si sa fonction d'auto-corrélation  $\mathbf{R}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{r}, t)$  définie sur  $\Gamma_{sa}^i \times \mathbb{R}$  est intégrable ou de carré intégrable. On peut raisonnablement supposé, compte tenu des observations faites notamment sur la décroissance de cette fonction ou de la fonction de cohérence (voir quelques modèles à la section §1.3.2 du chapitre §1), que c'est effectivement le cas.

### Densité spectrale et fonction de cohérence en profondeur

**Proposition 3.25** *La fonction de densité spectrale transversale du champ  $\mathbf{V}_i$  en profondeur est :*

$$\mathbf{S}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{x}_h - \mathbf{x}_{h'}, z, z', \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_h - \mathbf{x}_{h'})} \mathcal{P}(\mathbf{k}, z, \omega) \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{k}, \omega) \mathcal{P}^*(\mathbf{k}, z', \omega) d\mathbf{k}$$

avec  $\mathbf{x}_h = \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_3$ .

PREUVE – La transformée de Fourier inverse s'écrit pour le champ  $\mathbf{v}_i(\mathbf{x}, t)$  :

$$\mathbf{v}_i(\mathbf{x}_h, z, t) = \frac{1}{(8\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_h)} \hat{\mathbf{v}}_i(\mathbf{k}, z, \omega) d\mathbf{k} d\omega$$

En injectant cette relation dans l'expression générique de la fonction d'auto-corrélation transversale du champ  $\mathbf{V}_i(\mathbf{x}_h, z, t)$ , à savoir  $\mathbf{R}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', z, z', t - t')$  on obtient la relation de la proposition.  $\square$

Cette expression montre notamment que le champ en profondeur n'est pas nécessairement homogène, même s'il l'est en surface. Avec l'hypothèse d'homogénéité en surface du champ stochastique  $\mathbf{V}_i(\mathbf{x}, t)$  conduisant à l'Eq.(3.22), la matrice de cohérence transversale a pour éléments :

$$\gamma_{jk}(\mathbf{x}_h, z, z', \omega) = \frac{\left| [\mathbf{S}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{x}_h, z, z', \omega)]_{jk} \right|^2}{[\mathbf{S}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{0}, z, z, \omega)]_{jj} [\mathbf{S}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{0}, z', z', \omega)]_{kk}} \quad (3.26)$$

L'expression de la proposition (3.25) peut être utilisée avec l'Eq.(3.17), ou dans la procédure de réduction fonctionnelle décrite dans la section suivante.

La méthode de déconvolution stochastique est mise en oeuvre par Zendagui *et al.* [228] pour des ondes planes polarisées SH dans un demi-espace homogène ou stratifié, et pour des ondes planes P-SV dans un demi-espace homogène. Les résultats montrent notamment que la stratification augmentent la cohérence des ondes sismiques, à toutes les profondeurs observées, et qu'elle induit un phénomène de désamplification des densités spectrales lorsque la profondeur augmentent. Ces effets, quoique moins prononcés, sont qualitativement similaires dans le cas d'un demi-espace homogène.

### 3.1.6 Réduction fonctionnelle pour l'étude de la réponse de la structure

Les méthodes de réduction fonctionnelle d'un champ stochastique [197, 194] ont pour effet de diminuer la dimension aléatoire de l'excitation permettant ainsi, lorsque celle-ci devient suffisamment petite devant le nombre d'éléments de la discrétisation géométrique, des gains substantiels en termes de coûts de calcul. On reprend ici les développements de Soize *et al.* [197] en les adaptant au domaine des basses fréquences et au cas d'une excitation modulée en temps.

#### Données complémentaires sur le champ incident stochastique

On reprend les hypothèses fondamentales concernant le modèle stochastique du champ incident exposées dans le paragraphe §3.1.3. Afin de se ramener aux conditions de la section §C.3 de l'Annexe C, on introduit par ailleurs la donnée suivante :

**Définition 3.27 (opérateur de covariance du champ  $\mathbf{V}_i$ )** *L'opérateur de covariance de  $\mathbf{V}_i$  noté  $\mathbf{C}_i(\omega) \in \mathcal{L}(H(\Gamma_{sf}, \mathbb{R}^3))$  à la pulsation  $\omega \in \mathbb{R}$ , où  $H(\Gamma_{sf}, \mathbb{R}^3) \stackrel{\text{déf}}{=} [L^2(\Gamma_{sf}, \mathbb{R})]^3$ , est l'opérateur intégral de noyau  $\mathbf{C}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \mathbf{S}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) + \mathbf{S}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, -\omega)$ .*

Compte tenu des propriétés de symétrie de la fonction de densité spectrale transversale  $\mathbf{S}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$ , Eq.(3.11), on vérifie que  $\mathbf{C}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = 2\Re(\mathbf{S}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega))$ ,  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma_{sf}$  et  $\forall \omega \in \mathbb{R}$ , ce qui va nous permettre de simuler des champs à valeurs réelles. L'opérateur  $\mathbf{C}_i(\omega)$  est linéaire, continu, auto-adjoint, positif et de Hilbert-Schmidt, et admet à ce titre un spectre discret et dénombrable. Les vecteurs propres de  $\mathbf{C}_i(\omega)$  notés  $\{\chi_j(\mathbf{x}, \omega)\}_{j \geq 1}$  forment donc une base hilbertienne de  $H(\Gamma_{sf}, \mathbb{R}^3)$  et on leur associe les valeurs propres réelles positives  $\{\mu_j(\omega)\}_{j \geq 1}$ , dont la série des carrés est convergente. L'équation aux valeurs propres à la pulsation  $\omega$  s'écrit :

$$\mathbf{C}_i(\omega)\chi_j(\mathbf{x}, \omega) = \mu_j(\omega)\chi_j(\mathbf{x}, \omega) \quad (3.28)$$

pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$ . Les vecteurs propres sont quant à eux normalisés selon :

$$\begin{aligned} (\chi_j, \chi_k)_H &= \delta_{jk} \\ (\mathbf{C}_i \chi_j, \chi_k)_H &= \mu_j(\omega)\delta_{jk} \end{aligned}$$

Enfin comme la fonction  $\omega \mapsto \mathbf{C}_i(\omega)$  est paire, on en déduit que les fonctions  $\omega \mapsto \mu_j(\omega)$  et  $\omega \mapsto \chi_j(\mathbf{x}, \omega)$  sont elles aussi paires pour chaque  $j \geq 1$ .

**remarque 3.2** – Pour les applications du génie parasismique qui nous intéressent, le domaine fréquentiel d'étude est limité aux basses fréquences (typiquement  $[0, 20]Hz$ ) pour lesquelles les pulsations propres de vibration de la structure sur base fixe sont supposées clairement identifiées. Nous sommes amenés ainsi à considérer par la suite une réduction fonctionnelle du champ incident par un développement en composantes principales explicité fréquence par fréquence, d'où la définition ci-dessus de l'opérateur de covariance. Dans [197], les auteurs travaillent plutôt dans le domaine des moyennes fréquences pour l'étude des vibrations aléatoires linéaires stationnaires en interaction fluide-structure. L'opérateur de covariance est alors défini à partir d'un noyau exprimé comme la somme des fonctions de densité spectrale sur une bande de fréquence donnée. Par ailleurs les résultats obtenus seront étendus ici au cas d'un champ non-stationnaire modulé ■

## Réduction fonctionnelle du champ incident

**Développement en composantes principales du champ incident** – Le développement en composantes principales du champ incident est obtenu en projetant le champ stochastique  $\mathbf{V}_i(\mathbf{x}, t)$  sur la base des vecteurs propres de l'opérateur de covariance  $\mathbf{C}_i(\omega)$ . L'analyse étant faite pour chaque fréquence de la bande considérée, il convient néanmoins de prendre quelques précautions quant à la définition du champ effectivement projeté. On introduit donc le champ stochastique  $\mathbf{V}_i^\omega(\mathbf{x}, t)$  défini sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$ , du second ordre, centré, gaussien, stationnaire en m.o.d. et continu par rapport à la variable de temps, non homogène par rapport à la variable d'espace, et tel que sa fonction de densité spectrale transversale est exactement la fonction de densité spectrale transversale  $\mathbf{S}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$  du processus  $\mathbf{V}_i(\mathbf{x}, t)$  à la pulsation  $\omega$  courante. Avec cette définition, et comme les champs stochastiques  $\mathbf{V}_i^\omega(\mathbf{x}, t)$  et  $\mathbf{V}_i(\mathbf{x}, t)$  sont centrés, tout filtrage linéaire de  $\mathbf{V}_i(\mathbf{x}, t)$  résulte en une grandeur dont la fonction de densité spectrale coïncide à la pulsation  $\omega$  avec la fonction de densité spectrale de la grandeur résultant du même filtrage linéaire de  $\mathbf{V}_i^\omega(\mathbf{x}, t)$ . Pour le calcul des fonctions de densité spectrale et interspectrale de la réponse structurelle, il est donc équivalent d'utiliser  $\mathbf{V}_i(\mathbf{x}, t)$  et  $\mathbf{V}_i^\omega(\mathbf{x}, t)$ , mais ceci est entièrement faux pour tout autre grandeur probabiliste. En se référant à l'Annexe C.3 on introduit la :

**Définition 3.29** La projection du champ stochastique  $\mathbf{V}_i^\omega(\mathbf{x}, t)$  sur la base des  $\{\chi_j(\mathbf{x}, \omega)\}_{j \geq 1}$  de  $H(\Gamma_{sf}, \mathbb{R}^3)$  définit le **développement en composantes principales** de ce champ à la pulsation  $\omega$  et est notée :

$$\mathbf{V}_i^\omega(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\mu_j(\omega)} Y_j(t) \chi_j(\mathbf{x}, \omega)$$

où :

$$\sqrt{\mu_j(\omega)} Y_j(t) = (\mathbf{V}_i^\omega, \chi_j)_H$$

Les processus stochastiques  $\{Y_j(t)\}_{j \geq 1}$  sont définis sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$ , indexés sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , du second ordre, centrés, gaussiens, stationnaires en m.o.d., et corrélés.

Les fonctions d'auto-corrélation et d'inter-corrélation des processus  $\{Y_j(t)\}_{j \geq 1}$ , soit  $R_{Y_j Y_k}^\omega(\tau) = \mathbb{E} \{Y_j(t + \tau) Y_k(t)\}$ , s'écrivent alors  $\forall j, k \in \mathbb{N}^*$  :

$$R_{Y_j Y_k}^\omega(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\mu_j(\omega) \mu_k(\omega)}} \iint_{\Gamma_{sf} \times \Gamma_{sf}} \mathbf{R}_{\mathbf{V}_i}^\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) \chi_k(\mathbf{y}, \omega) \cdot \chi_j(\mathbf{x}, \omega) dS(\mathbf{x}) dS(\mathbf{y})$$

$\mathbf{R}_{\mathbf{V}_i}^\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) = \mathbb{E} \{\mathbf{V}_i^\omega(\mathbf{x}, t + \tau) \otimes \mathbf{V}_i^\omega(\mathbf{x}, t)\}$  est la fonction d'auto-corrélation du champ stochastique  $\mathbf{V}_i^\omega(\mathbf{x}, t)$  et s'écrit :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{V}_i}^\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) = \frac{1}{\pi} [\cos(\omega\tau) \Re(\mathbf{S}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)) - \sin(\omega\tau) \Im(\mathbf{S}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega))]$$

Les fonctions de densité interspectrale des processus  $\{Y_j(t)\}_{j \geq 1}$  sont  $\forall j, k \in \mathbb{N}^*$  :

$$S_{Y_j Y_k}^\omega = \frac{1}{\sqrt{\mu_j(\omega) \mu_k(\omega)}} \iint_{\Gamma_{sf} \times \Gamma_{sf}} \mathbf{S}_{\mathbf{V}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) \chi_k(\mathbf{y}, \omega) \cdot \chi_j(\mathbf{x}, \omega) dS(\mathbf{x}) dS(\mathbf{y})$$

pour chaque pulsation  $\omega \in \mathbb{R}$ ; elles vérifient  $S_{Y_j Y_k}^\omega = \overline{S_{Y_j Y_k}^{-\omega}}$  et notamment  $S_{Y_j Y_j}^\omega \geq 0$ . La puissance du processus  $Y_j(t)$  est :

$$\|Y_j(t)\|^2 = 1$$

tandis que la puissance totale  $P_{\mathbf{V}_i}^\omega$  sur  $\Gamma_{sf}$  du champ stochastique  $\mathbf{V}_i^\omega(\mathbf{x}, t)$  est :

$$P_{\mathbf{V}_i}^\omega = \|\mathbf{V}_i^\omega(t)\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j(\omega) = \text{tr } \mathbf{C}_i(\omega) \quad (3.30)$$

On introduit maintenant les processus stochastiques  $\{X_j(t)\}_{j \geq 1}$ , définis sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$ , indexés sur  $\mathbb{R}^+$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , du second ordre, centrés, gaussiens, non stationnaires, tels que  $\forall j \in \mathbb{N}^*$  :

$$X_j(t) = \varphi(t) Y_j(t) \quad (3.31)$$

**Définition 3.32** le développement en composantes principales du champ incident stochastique approché  $\mathbf{U}_i^\omega(\mathbf{x}, t)$  à la pulsation  $\omega$  est, compte tenu de la définition (3.29) :

$$\mathbf{U}_i^\omega(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\mu_j(\omega)} X_j(t) \chi_j(\mathbf{x}, \omega)$$

Les fonctions d'auto-corrélation et d'inter-corrélation, ainsi que les fonctions de densité interspectrale instantanée des processus  $\{X_j(t)\}_{j \geq 1}$  sont respectivement  $\forall j, k \in \mathbb{N}^*$  :

$$R_{X_j X_k}^\omega(t, t') = \varphi(t)\varphi(t')R_{Y_j Y_k}^\omega(t - t')$$

et :

$$S_{X_j X_k}^\omega(t) = \varphi(t)^2 S_{Y_j Y_k}^\omega$$

Enfin la puissance instantanée du processus  $X_j(t)$  est :

$$\|X_j(t)\|^2 = \varphi(t)^2$$

tandis que la puissance totale  $P_{\mathbf{U}}^\omega(t)$  sur  $\Gamma_{sf}$  du champ stochastique  $\mathbf{U}_i^\omega(\mathbf{x}, t)$  est quant à elle :

$$P_{\mathbf{U}}^\omega(t) = \varphi(t)^2 P_{\mathbf{V}_i}^\omega \quad (3.33)$$

**Développement en composantes principales tronqué** – Les vecteurs propres de l'opérateur de covariance  $\mathcal{C}_i(\omega)$  ne sont en fait calculés que jusqu'au rang  $N_\omega$ . On approche donc le champ stochastique  $\mathbf{V}_i^\omega(\mathbf{x}, t)$  par le processus  $\mathbf{V}_i^{N_\omega}(\mathbf{x}, t)$  tel que :

**Définition 3.34** *Le champ stochastique approché réduit à la pulsation  $\omega$  du champ stochastique  $\mathbf{V}_i(\mathbf{x}, t)$  est :*

$$\mathbf{V}_i^{N_\omega}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{N_\omega} \sqrt{\mu_j(\omega)} Y_j(t) \boldsymbol{\chi}_j(\mathbf{x}, \omega)$$

Le critère de tolérance relative  $\varepsilon$  sur l'approximation faite est choisi relativement à la puissance totale du champ sur  $\Gamma_{sf}$  par :

$$\|\mathbf{V}_i^\omega(t) - \mathbf{V}_i^{N_\omega}(t)\|^2 = \sum_{j=N_\omega+1}^{\infty} \mu_j(\omega) \leq \varepsilon P_{\mathbf{V}_i}^\omega$$

soit :

$$1 - \frac{\sum_{j=1}^{N_\omega} \mu_j(\omega)}{P_{\mathbf{V}_i}^\omega} \leq \varepsilon \quad (3.35)$$

On note de la même manière le développement en composantes principales tronqué du champ  $\mathbf{U}_i^\omega$  :

**Définition 3.36** *Le champ stochastique approché réduit à la pulsation  $\omega$  du champ stochastique  $\mathbf{U}_i(\mathbf{x}, t)$  est :*

$$\mathbf{U}_i^{N_\omega}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{N_\omega} \sqrt{\mu_j(\omega)} X_j(t) \boldsymbol{\chi}_j(\mathbf{x}, \omega)$$

### Réduction fonctionnelle de la réponse de la structure

On introduit le processus stochastique  $\mathbf{U}_b^{N_\omega}(t)$  défini sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$ , indexé sur  $\mathbb{R}^+$  et centré et gaussien, issu du filtrage linéaire du champ stochastique approché réduit  $\mathbf{U}_i^{N_\omega}(\mathbf{x}, t)$ , simulant le champ incident stochastique  $\mathbf{U}_i(\mathbf{x}, t)$ , par le filtre défini par l'Eq.(3.3) et étudié par une approche spectrale au paragraphe §3.1.4. De l'application directe des résultats précédents et de la proposition (3.16) on déduit la :

**Proposition 3.37** *La fonction de densité interspectrale du processus approché réduit  $\mathbf{U}_b^{N_\omega}(t)$  décrivant la réponse aléatoire de la structure au champ incident stochastique  $\mathbf{U}_i(\mathbf{x}, t)$  est :*

$$\begin{cases} \mathbf{S}_{\mathbf{U}_b}^{N_\omega}(t, \omega) = \sum_{j=1}^{N_\omega} \sum_{k=1}^{N_\omega} S_{Y_j Y_k}^\omega \mathbb{T} \boldsymbol{\chi}_j(t, \omega) \otimes \overline{\mathbb{T} \boldsymbol{\chi}_k(t, \omega)}, & \omega \in \mathbb{R}^+ \\ \mathbf{S}_{\mathbf{U}_b}^{N_\omega}(t, \omega) = \overline{\mathbf{S}_{\mathbf{U}_b}^{N_\omega}(t, -\omega)}, & \omega \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , avec l'opérateur continu  $\mathbb{T} : H(\Gamma_{sf}, \mathbb{R}^3) \rightarrow H(\Gamma_{sf})$  tel que :

$$\mathbb{T} \boldsymbol{\chi}_j(t) = \int_{\Gamma_{sf}} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \omega) \boldsymbol{\chi}_j(\mathbf{x}, \omega) dS(\mathbf{x})$$

Pour une précision relative  $\varepsilon$  telle que l'Eq.(3.35) tient, on vérifie suivant [197] que :

$$\|\mathbf{U}_i^\omega(t) - \mathbf{U}_i^{N_\omega}(t)\|^2 \leq \varepsilon \|\mathbb{T}\|^2 \sum_{j=1}^{N_\omega} \mu_j(\omega) \quad (3.38)$$

Le gain essentiel de la méthode de réduction présentée dans cette section est que l'on obtient une discrétisation de moindre dimension de la sollicitation aléatoire, voir la définition (3.34) ; par conséquent, si l'on s'intéresse par exemple à la fonction de densité spectrale de la réponse, la double sommation de la proposition (3.37) porte sur les modes propres de l'opérateur de covariance et non pas, comme dans l'Eq.(3.17), sur les éléments finis de l'interpolation géométrique de la frontière  $\Gamma_{sf}$  une fois celle-ci discrétisée pour l'intégration numérique (voir chapitre §5). Son efficacité est d'autant plus grande que le nombre de modes  $N_\omega$  à prendre en compte est très inférieur au nombre de degrés de liberté introduit, sachant que vient néanmoins s'y ajouter le coût d'extraction des vecteurs propres de l'opérateur de covariance. De manière générale il n'est pas possible d'obtenir une information sur la vitesse de décroissance des valeurs propres correspondantes, et donc du rang de la troncature  $N_\omega$  pour une tolérance relative donnée. Néanmoins, par l'examen d'un cas particulier simple [197], on peut établir la tendance suivante : plus les longueurs de corrélation spatiale (définies en (3.21)) du champ incident pour la pulsation  $\omega$  sont grandes et plus la vitesse de décroissance des valeurs propres est grande. Enfin remarquons que la finesse du maillage utilisé sur l'interface  $\Gamma_{sf}$  et le degré d'interpolation des éléments finis utilisés devront être compatibles avec les longueurs de corrélations spatiales du champ.

La technique de réduction de la dimension aléatoire utilisée ici est maintenant mise en oeuvre dans le cas d'une hétérogénéité de nature aléatoire du sol. Néanmoins les résultats obtenus en terme de grandeur du second ordre pour la réponse ne peuvent pas être étendus à ce cas directement, car la dépendance vis-à-vis de l'aléa est maintenant non-linéaire si bien que les techniques de l'analyse spectrale standard ne s'appliquent pas.

## 3.2 Perturbation des paramètres mécaniques du sol

On traite ici le cas où le sol présente une perturbation de ses paramètres mécaniques sur une zone bornée proche de la fondation de la structure. L'essentiel du travail porte ici sur le cas où cette perturbation est de nature aléatoire. La construction de l'opérateur de perturbation correspondant est reportée aux chapitres suivants, et on se limite ici aux

outils d'analyse stochastique dans un tel cadre. La définition de cet opérateur est tout d'abord rappelée, puis l'on montre qu'il est possible d'en construire une représentation réduite par rapport à sa dimension aléatoire en introduisant le développement de Karhunen-Loeve de la densité et des modules de Lamé de la perturbation. La solution du problème de transmission réduit correspondant, en tant que fonction non linéaire des poids aléatoires de la réduction utilisée, peut être ensuite approchée par une représentation spectrale sur la base des polynômes orthogonaux de l'espace  $L^2(\mathcal{A})$  des variables aléatoires du second ordre, qui s'écrit comme la famille des polynômes d'Hermite multi-dimensionnels fonctions des poids aléatoires supposés gaussiens. Cette représentation permet ensuite d'accéder aux grandeurs du second ordre de la solution du second ordre du problème de transmission, notamment sa variance par une formule du type Parseval. Elle s'interprète comme une généralisation de la méthode de Monte-Carlo présentée dans la section suivante. Dans le cas particulier de faibles perturbations, il est possible de la construire directement par un développement de Neumann, dans lequel interviennent d'autres polynômes fonctions des poids aléatoires de la réduction précédente que les polynômes d'Hermite.

### 3.2.1 Définition de la perturbation

#### Modules de sol perturbés

Le domaine composite sol-structure  $\Omega$  a sa frontière maintenant notée  $\partial\Omega = \Gamma_a \cup \mathbf{u}$  avec ici  $\Gamma_a = \Gamma_{sa} \cup \Gamma_{ba}$  et, formellement,  $\mathbf{u} = \Gamma_{s\infty}$  (voir FIG. 3.1) la frontière "à l'infini". On note par ailleurs  $\mathfrak{s} = \partial\Omega_{sf} \cap \Gamma_{sa}^i = \Gamma_{sa}^i / \Gamma_{sa}$ . Il contient sur une zone donnée du sol une perturbation élastique, grande ou petite, des paramètres mécaniques du système composite, typiquement la densité et les modules de Lamé. Elle est donc représentée par un domaine ouvert borné de  $\Omega$  noté  $\Omega_d$ , de frontière  $\partial\Omega_d$ , sur lequel les paramètres mécaniques du milieu composite réel s'écrivent :

$$p(\mathbf{x}) = p_0(\mathbf{x}) + p_d(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_d \quad (3.39)$$

où  $p$  désigne la densité  $\rho$  ou les modules de Lamé  $\lambda, \mu$ ;  $p_0$  désigne les paramètres mécaniques du milieu composite de référence sans perturbation, à savoir :

$$p(\mathbf{x}) = p_0(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega / \Omega_d \quad (3.40)$$

Par la suite, on introduit le vecteur générique des paramètres mécaniques de la perturbation donné par  $\mathbf{p}_d = (\rho_d, \lambda_d, \mu_d)$ , et défini sur  $\Omega_d$  à valeurs éventuellement dans  $\mathbb{C}^3$  si l'on

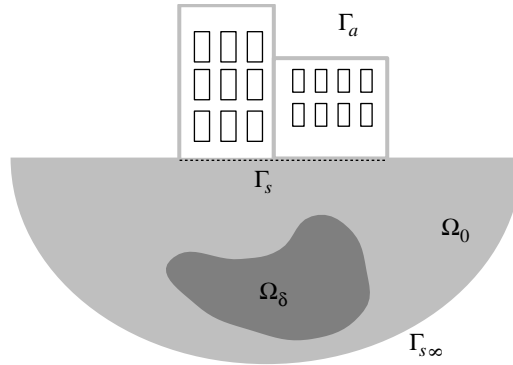


FIG. 3.1 – Domaine composite réel : géométrie et notations.



tient compte de l'amortissement. Avec ce choix de la définition des paramètres mécaniques perturbés du sol  $\mathbf{p}_d$ , l'opérateur associé est linéaire vis-à-vis de cette perturbation ce qui est essentiel pour la mise en oeuvre de la méthode de réduction ci-dessous.

Si l'hétérogénéité est de nature aléatoire, alors  $\mathbf{p}_d$  est modélisé par un champ stochastique  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  défini sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$ , du second ordre et centré, indexé sur  $\Omega_d$  à valeurs dans  $\mathbb{C}^3$ , non homogène, et dont on suppose connue la fonction d'auto-corrélation  $\mathbf{R}_P$  définie sur  $\Omega_d \times \Omega_d$  à valeurs dans  $\text{End}(\mathbb{C}^3)$ . Elle s'écrit :

$$\mathbf{R}_P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbb{E} \{ \mathbf{P}(\mathbf{x}_1) \otimes \overline{\mathbf{P}}(\mathbf{x}_2) \}$$

On suppose en outre que les trajectoires  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{p}_d(\mathbf{x}; a)$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , des paramètres mécaniques du second ordre de la zone hétérogène sont dans  $L^2(\Omega_d, \mathbb{C}^3)$  ce qui se traduit pour le champ stochastique du second ordre  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  par la condition suivante [192] sur sa fonction d'auto-corrélation :

$$\text{tr} \int_{\Omega_d} \mathbf{R}_P(\mathbf{x}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} < +\infty$$

### Opérateur associé

La formulation du couplage sol-structure nous a conduit au problème variationnel (2.38) correspondant à l'Eq.(2.42) en terme d'opérateur :

$$-\mathcal{K}\mathbf{u}_{d*} = \mathbf{f}', \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (3.41)$$

Avec les notations de l'Eq.(3.39), la forme sesqui-linéaire associée  $k_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  peut être décomposée en deux termes, respectivement  $k_0$  et  $k_d$  avec :

$$\begin{aligned} k_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= -\omega^2 \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{v}} dV + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\overline{\mathbf{v}}) dV \\ k_d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= -\omega^2 \int_{\Omega_d} \rho_d \mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{v}} dV + \int_{\Omega_d} \boldsymbol{\sigma}_d(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\overline{\mathbf{v}}) dV \end{aligned} \quad (3.42)$$

tous les deux continus sur  $V(\Omega) \times V(\Omega)$ . On identifie maintenant les formes sesqui-linéaires  $k_0(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  et  $k_d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  avec les fonctions à valeurs opérateurs  $\omega \mapsto -\mathcal{K}_0(\omega)$  et  $\omega \mapsto -\mathcal{d}\mathcal{K}(\omega)$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathcal{L}(V(\Omega), V'(\Omega))$  telles que pour tous les  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  de  $V(\Omega)$  on ait :

$$\begin{aligned} -\langle \mathcal{K}_0 \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} &= k_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ -\langle \mathcal{d}\mathcal{K} \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} &= k_d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Le problème (3.41) dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  est alors réécrit en terme d'opérateurs sous la forme :

$$-[\mathcal{K}_0 + \mathcal{d}\mathcal{K}] \mathbf{u}_{d*} = \mathbf{f}' \quad (3.44)$$

$\mathcal{d}\mathcal{K}$  représente la perturbation de l'opérateur  $\mathcal{K}_0$  associé par définition au *système composite de référence (non perturbé)* induite par une perturbation des modules du sol. Cet opérateur est linéaire vis-à-vis de ces perturbations, propriété essentielle pour la mise en oeuvre de la méthode de réduction développée par la suite.

### Conséquences pour la résolution du problème de transmission

Dans toute la suite on s'intéresse au cas où  $\mathcal{d}\mathcal{K}$  est un opérateur aléatoire, c'est-à-dire que les perturbations des modules du système de référence induites par l'hétérogénéité sont modélisées par des processus stochastiques indexés sur le domaine occupé par l'hétérogénéité.

Ici les techniques classiques mises en oeuvre dans le paragraphe §3.1 pour le cas d'un chargement aléatoire (champ sismique incident) ne s'appliquent pas car la solution de l'Eq.(3.44) n'est pas linéaire vis-à-vis des paramètres aléatoires introduits. Ce problème entre de façon générale dans le cadre des équations différentielles à coefficients de type *processus* aléatoires (Il est en effet toujours possible de ramener l'Eq.(3.44), écrite dans le domaine temporel, à une équation différentielle du premier ordre homogène avec conditions initiales particulières). On a vu au premier chapitre §1 que les méthodes classiques de résolution – dans un certain sens, et dans la mesure du possible – de tels problèmes commencent par la réduction de la dimension aléatoire de ces processus en se ramenant à des coefficients de type *variables* aléatoires. Le type d'information probabiliste que l'on peut obtenir ensuite pour leur(s) processus solution(s) (recherché(s) dans  $L^2(\mathcal{A} \otimes \Omega)$ , s'il(s) existe(nt)) dépend bien sûr de l'information probabiliste dont on dispose pour ces coefficients (et éventuellement pour les conditions initiales si elles sont aléatoires, cas que l'on ne considère pas ici). L'information la plus complète permettant de décrire entièrement le processus solution, défini sur le même espace probablisé que les coefficients aléatoires du problème, est son système de lois marginales. On ne peut espérer l'obtenir que si le système de lois marginales des coefficients variables aléatoires est lui-même entièrement connu, ce qui dans la pratique n'est jamais le cas. On se limitera donc aux seuls produits du second ordre (moyenne, écart-type) de la solution – mais dans ce cas également la connaissance de la loi de probabilité des coefficients aléatoires reste nécessaire. Donc si l'on ne dispose pas d'information sur la loi de probabilité de ses coefficients, le problème est par définition insoluble. Si par contre les coefficients sont des processus bruits blancs normalisés ou gaussiens stationnaires, alors on sait caractériser dans certains cas la loi de probabilité de la solution, par exemple par la méthode de l'équation de Fokker-Planck (voir le chapitre §1).

Pour nos applications, *a priori* seules les fonctions d'auto et d'inter-corrélation des perturbations des modules du sol dans la zone hétérogène sont connues (ainsi en fait que leurs moyennes, nulles par définition de  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ ). La méthode constructive la plus générale dans ce cas de figure est la méthode de Monte-Carlo. Si l'on ne s'intéresse qu'aux produits du second ordre de la réponse, et moyennant certaines hypothèses sur les coefficients aléatoires, il est toujours possible d'obtenir des informations par des développements purement asymptotiques, par exemple par une méthode de perturbations ou un développement de Neumann. Néanmoins les solutions de référence permettant de valider ces approches seront toujours construites par une simulation du type Monte-Carlo : par exemple un sous-ensemble du système de loi marginale de la réponse, sa moyenne, sa fonction d'auto-corrélation, etc.

La suite de cette section se divise donc comme suit : on introduit une méthode de réduction de la dimension aléatoire des paramètres mécaniques (*champs* stochastiques) associés à l'opérateur aléatoire  $\{\mathbf{d}\mathcal{K}(a); a \in \mathcal{A}\}$ ; cette technique est appliquée au système considéré (3.44) afin d'en obtenir un modèle réduit sur l'espace probablisé  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$  ne dépendant plus que de *variables* aléatoires. De ce modèle réduit sont déduites quelques représentations constructives de la solution du problème de transmission en fonction des variables aléatoires introduites. Celles-ci peuvent être utilisées pour calculer ses moments du second ordre ou simuler des réalisations par la méthode de Monte-Carlo, mais dans le cas de perturbations gaussiennes ou faibles on peut obtenir ces caractéristiques directement sous forme de développements algébriques.

### 3.2.2 Réduction du modèle par un développement de Karhunen-Loeve

La simulation de l'opérateur aléatoire  $\mathbf{d}\mathcal{K}$  de l'Eq.(3.44) nécessite l'échantillonnage du champ de la perturbation des modules  $\mathbf{p}_d$  suivant sa loi de probabilité. Celle-ci n'est pas connue, mais comme défini en §3.2.1 on connaît la fonction d'auto-corrélation du champ stochastique qui la modélise. On donne en Annexe C différentes méthodes de simulation de processus stochastiques gaussiens ou non, stationnaires ou non, caractérisés par leurs grandeurs du second ordre.

#### Développement de Karhunen-Loeve de la perturbation

Le champ des perturbations des modules du sol sur  $\Omega_d$  est simulé ici par son développement de Karhunen-Loeve (voir Annexe C.3). On note  $\{\gamma_j\}_{j \geq 1}$  et  $\{\lambda_j\}_{j \geq 1}$  respectivement les modes propres et valeurs propres (réelles, positives) de son opérateur de corrélation tels que :

$$\mathbf{R}_P(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j \gamma_j(\mathbf{x}) \otimes \overline{\gamma_j(\mathbf{x}')} \quad (3.45)$$

Le champ d'approximation des perturbations des modules du sol pour le rang  $N$  est écrit suivant l'Eq.(C.28) :

$$\mathbf{P}^N(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \xi_j \sqrt{\lambda_j} \gamma_j(\mathbf{x}) \quad (3.46)$$

où  $N$  est choisi de manière à satisfaire le critère (C.31) pour une précision relative  $\varepsilon$  fixée ; les  $\{\xi_j\}_{1 \leq j \leq N}$  sont des variables aléatoires du second ordre, centrées, réduites (de variance unité), non corrélées :

$$\mathbb{E} \{\xi_j\} = 0 \quad (3.47)$$

$$\mathbb{E} \{\xi_j \bar{\xi}_k\} = \delta_{jk} \quad (3.48)$$

et définies par :

$$\xi_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \int_{\Omega_d} \mathbf{P}(\mathbf{x}) \cdot \overline{\gamma_j(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \quad (3.49)$$

Leur loi de probabilité n'est en général pas connue – sauf si  $\mathbf{P}$  est gaussien auquel cas elles sont gaussiennes comme transformation linéaire d'un champ gaussien. Notons que dans ce cas les  $\xi_j$  sont aussi mutuellement indépendantes.

La représentation de l'Eq.(3.46) s'interprète simplement de la manière suivante : les modes propres de l'opérateur de corrélation des perturbations des modules du sol sont les tendances de variation de ces modules, dont les longueurs d'onde sont de l'ordre de leurs longueurs de corrélation puis diminuent progressivement (voir les exemples en Annexe C.3). Ils représentent ainsi les différentes échelles de fluctuation des paramètres aléatoires. Ils sont ensuite pondérés par des poids aléatoires qui concentrent la dimension aléatoire des champs correspondants.

#### Opérateur de perturbation réduit

En suivant les notations du §3.2.1, on déduit de l'Eq.(3.46) le développement de Karhunen-Loeve tronqué au rang  $N$  de l'opérateur de perturbation aléatoire.

**Définition 3.50** *L'opérateur aléatoire de perturbation réduit au rang  $N$ , du second ordre, est noté  $\mathfrak{d}\mathcal{K}^N$  avec :*

$$\mathfrak{d}\mathcal{K}^N = \sum_{j=1}^N \xi_j \mathfrak{d}\mathcal{K}_j$$

où  $\{\omega \mapsto \mathfrak{d}\mathcal{K}_j(\omega)\}_{1 \leq j \leq N}$  est une famille de fonctions à valeurs opérateurs déterministes de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathcal{L}(V(\Omega), V'(\Omega))$  définies par les formes sesqui-linéaires suivantes :

$$k_j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{\lambda_j} \left[ -\omega^2 \int_{\Omega_d} \rho_j \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} dV + \int_{\Omega_d} \boldsymbol{\sigma}_j(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\bar{\mathbf{v}}) dV \right]$$

avec :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}_j(\mathbf{x}) &= (\rho_j(\mathbf{x}), \lambda_j(\mathbf{x}), \mu_j(\mathbf{x})) \\ \boldsymbol{\sigma}_j(\mathbf{u}) &= (\lambda_j(\mathbf{x})) \operatorname{tr} \mathbf{u} \boldsymbol{\mathcal{I}}_d + 2(\mu_j(\mathbf{x})) \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Ces opérateurs sont symétriques et peuvent être décomposés classiquement en opérateurs de masse  $\mathfrak{d}\mathbf{M}_j$ , raideur  $\mathfrak{d}\mathbf{K}_j^e$  et dissipation  $\mathfrak{d}\mathbf{C}_j$  symétriques dans  $\mathcal{L}(V(\Omega), V'(\Omega))$ . Ils sont alors définis par les formes sesqui-linéaires  $m_j(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ,  $k_j^e(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  et  $c_j(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ , hermitiennes et continues sur  $V(\Omega) \times V(\Omega)$  telles que :

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{d}\mathbf{M}_j \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} &= m_j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{\lambda_j} \int_{\Omega_d} \rho_j \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} dV \\ \langle \mathfrak{d}\mathbf{K}_j^e \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} &= k_j^e(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{\lambda_j} \int_{\Omega_d} \Re(\boldsymbol{\sigma}_j)(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\bar{\mathbf{v}}) dV \\ \langle \mathfrak{d}\mathbf{C}_j \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} &= c_j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{\lambda_j} \int_{\Omega_d} \Im(\boldsymbol{\sigma}_j)(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\bar{\mathbf{v}}) dV \end{aligned} \quad (3.51)$$

et qui sont *a priori* sans signature. On en déduit  $-\mathfrak{d}\mathcal{K}_j(\omega) = -\omega^2 \mathfrak{d}\mathbf{M}_j + i \mathfrak{d}\mathbf{C}_j + \mathfrak{d}\mathbf{K}_j^e$  pour  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ .

### Problème de transmission réduit

La réduction (3.50) de l'opérateur de perturbation aléatoire est injectée dans (3.44) pour obtenir le problème de transmission réduit caractérisé par l'équation suivante en terme d'opérateurs.

**Définition 3.52** *On appelle **problème de transmission réduit** caractéristique de l'interaction sismique sol-structure l'équation en terme d'opérateurs :*

$$- \left[ \mathcal{K}_0 + \sum_{j=1}^N \xi_j \mathfrak{d}\mathcal{K}_j \right] \mathbf{U}_{d*}^N = \mathbf{f}'$$

et  $\mathbf{U}_{d*}^N$  est le champ rayonné aléatoire du second ordre solution du problème réduit.

Avec ce système,  $\mathbf{U}_{d*}^N$  peut être caractérisé par une simulation de Monte-Carlo pour laquelle nous n'avons plus à échantillonner l'opérateur aléatoire  $\mathfrak{d}\mathcal{K}$  mais  $N$  variables aléatoires centrées réduites  $\{\xi_j\}_{1 \leq j \leq N}$ .

### 3.2.3 Représentations du champ rayonné réduit

On construit dans cette section diverses représentations du champ rayonné réduit  $\mathbf{u}^N$  en tant que fonction non linéaire de la dimension aléatoire portée par les poids aléatoires du développement de Karhunen-Loeve de l'opérateur de perturbation réduit  $d\mathcal{K}^N$ . Celles-ci sont écrites sous la forme générique :

$$\mathbf{U}_{d^*}^N(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{U}_k \Psi_k(a)$$

où  $a \in \mathcal{A}$  est l'aléa pris en compte. Les  $\{\Psi_k\}_{k \geq 0}$  représentent une base donnée, suivant la dimension aléatoire, de fonctions mesurables sur l'ensemble des événements élémentaires  $\mathcal{A}$  et à valeurs réelles. Dans un premier temps, on examine le cas pour lequel ces fonctions sont choisies comme les polynômes d'Hermite multi-dimensionnels fonctions des poids  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ , puis lorsqu'elles sont construites par un développement de Neumann, et enfin la méthode de collocation correspondant à la méthode de Monte-Carlo pour laquelle  $\Psi_k(a) = \delta(a - a_k)$  où  $\delta$  désigne la mesure de Dirac sur  $\mathcal{A}$ .

#### Représentation sur la base des polynômes d'Hermite

**Définitions préliminaires** – Soient  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  et  $\alpha' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_N)$  deux multi-indices de  $\mathbb{N}^N$  dont les éléments  $\alpha_i$  et  $\alpha'_i$  sont tous nuls à partir du rang  $N + 1$ , on note leurs longueurs  $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$  et  $|\alpha'| = \sum_{i=1}^N \alpha'_i$  respectivement. On pose :

$$\begin{aligned} \alpha! &= \prod_{i=1}^N \alpha_i! \\ \sqrt{\alpha!} &= \sqrt{\alpha_1!} \times \dots \times \sqrt{\alpha_N!} \\ \delta_{\alpha, \alpha'} &= \delta_{\alpha_1, \alpha'_1} \times \dots \times \delta_{\alpha_N, \alpha'_N} \end{aligned}$$

et :

$$\sum_{|\alpha|=0}^p = \sum_{\alpha_1} \sum_{\alpha_2} \dots \sum_{\alpha_N}$$

les entiers  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  décrivant toutes les valeurs de  $\mathbb{N}$  telles que  $|\alpha| = p$ .  $(\alpha)^j$  désigne enfin dans toute la suite de cette section le multi-indice :

$$(\alpha)^j = (\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_j - 1, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_N).$$

Soit  $n \geq 0$  un entier quelconque, on note  $\mathcal{H}_n^*$  le polynôme d'Hermite d'ordre  $n$  défini par :

$$\mathcal{H}_n^*(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Soit également  $\{\xi_j(a)\}_{1 \leq j \leq N}$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , un ensemble de variables aléatoires gaussiennes centrées, réduites (de variance unité), non corrélées (donc mutuellement indépendantes), du second ordre, et mesurables par rapport à l'ensemble des événements

élémentaires  $\mathcal{A}$ . Si maintenant on note  $\mathcal{H}_n(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{H}_n^*\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ , alors les polynômes d'Hermite multi-dimensionnels :

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\alpha!}} \mathcal{H}_\alpha(\boldsymbol{\xi}); \alpha \in \mathbb{N}^N \right\}$$

définis par :

$$\mathcal{H}_\alpha(\boldsymbol{\xi}) = \prod_{i=1}^N \mathcal{H}_{\alpha_i}(\xi_i) \quad (3.53)$$

constitue une famille orthonormée centrée complète de  $L^2(\mathcal{A})$ , l'espace de Hilbert des variables aléatoires du second ordre. On a notamment :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{ \mathcal{H}_\alpha(\boldsymbol{\xi}) \} &= 0, \quad |\alpha| \geq 1 \\ \mathbb{E} \{ \mathcal{H}_0(\boldsymbol{\xi}) \} &= \mathcal{H}_0(\boldsymbol{\xi}) = 1 \\ \mathbb{E} \{ \mathcal{H}_\alpha(\boldsymbol{\xi}) \mathcal{H}_{\alpha'}(\boldsymbol{\xi}) \} &= \alpha! \delta_{\alpha, \alpha'} \end{aligned}$$

Cette décomposition de  $L^2(\mathcal{A})$  est issue de la théorie du chaos homogène de Wiener [221] et d'un théorème d'analyse fonctionnel dû à Cameron & Martin [31]. Elle est couramment utilisée dans l'étude du problème de filtrage non linéaire (voir par exemple Fung & Lototsky [67]) ou la méthode spectrale des éléments finis stochastiques [100, 73, 74, 69, 70, 71, 151, 72, 205].

Dans la suite de cette section, on utilise les polynômes d'Hermite construits à partir de la famille  $\{\xi_j\}_{1 \leq j \leq N}$  des poids aléatoires du développement de Karhunen-Loeve de l'opérateur de perturbation réduit  $d\mathcal{K}^N$ . Ils sont supposés gaussiens, c'est-à-dire que le vecteur  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  des perturbations des modules de Lamé et de la densité est supposé définir un champ gaussien sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$ . Ainsi les fonctions de base utilisées s'écrivent :

$$\Psi_{k(\alpha)}(a) = \frac{1}{\sqrt{\alpha!}} \mathcal{H}_\alpha(\boldsymbol{\xi}(a))$$

en construisant une bijection  $\mathbb{N}^N \rightarrow \mathbb{N} : \alpha \mapsto k(\alpha)$ , et sont encore appelées polynômes du chaos homogène dans la littérature.

**Projection du champ rayonné réduit** – La solution du problème de transmission réduit  $\mathbf{u}^N$  dans  $L^2(\mathcal{A})$  est maintenant projetée sur la base des polynômes d'Hermite multi-dimensionnels introduite ci-dessus.  $\mathbf{u}^N$  étant une fonction non linéaire de l'aléa porté par les poids  $\{\xi_j\}_{1 \leq j \leq N}$ , le développement ainsi obtenu converge en moyenne quadratique lorsque le nombre de polynômes considérés croît [31]. Les coefficients des polynômes dans cette nouvelle représentation sont des fonctions déterministes de la variable d'espace dans un sous-espace de  $H(\Omega)$ . La projection étant écrite suivant [70, 151] :

$$\mathbf{U}_{d^*}^N(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^N} \mathbf{U}_\alpha(\mathbf{x}) \frac{\mathcal{H}_\alpha(\boldsymbol{\xi})}{\sqrt{\alpha!}}, \quad P\text{-p.s.}$$

elle est ensuite tronquée au rang  $A \in \mathbb{N}$  afin d'obtenir la *représentation filtrée* du champ rayonné réduit suivante :

$$\mathbf{U}_{d^*}^{N,A}(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=0}^A \mathbf{U}_\alpha(\mathbf{x}) \frac{\mathcal{H}_\alpha(\boldsymbol{\xi})}{\sqrt{\alpha!}}, \quad P\text{-p.s.} \quad (3.54)$$

Les coefficients  $\mathbf{U}_\alpha \in H(\Omega)$  de la projection sont construits par une approche du type Ritz-Galerkin pour les fonctions de base  $\{\frac{1}{\sqrt{\alpha!}}\mathcal{H}_\alpha(\boldsymbol{\xi})\}_{|\alpha|\leq A}$ , en imposant au résidu d'être orthogonal au sous-espace qu'elles engendrent.  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_0, \dots, \mathbf{U}_A)$  est alors solution du système :

$$-[\mathbf{B}^A]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}^A\} \quad (3.55)$$

avec :

$$[\mathbf{B}^A]_{\alpha,\alpha'} = W_{\alpha,\alpha'}\mathcal{K}_0 + \sum_{j=1}^N X_{j,\alpha,\alpha'}\mathcal{K}_j \quad (3.55a)$$

$$W_{\alpha,\alpha'} = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\mathcal{H}_\alpha(\boldsymbol{\xi})}{\sqrt{\alpha!}} \frac{\mathcal{H}_{\alpha'}(\boldsymbol{\xi})}{\sqrt{\alpha'!}} P_\xi(d\boldsymbol{\xi}) \quad (3.55b)$$

$$X_{j,\alpha,\alpha'} = \int_{\mathbb{R}^N} \xi_j \frac{\mathcal{H}_\alpha(\boldsymbol{\xi})}{\sqrt{\alpha!}} \frac{\mathcal{H}_{\alpha'}(\boldsymbol{\xi})}{\sqrt{\alpha'!}} P_\xi(d\boldsymbol{\xi}) \quad (3.55c)$$

et

$$\{\mathbf{F}^A\}_{\alpha'} = V_{\alpha'}\mathbf{f}' \quad (3.55d)$$

$$V_{\alpha'} = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\mathcal{H}_{\alpha'}(\boldsymbol{\xi})}{\sqrt{\alpha'!}} P_\xi(d\boldsymbol{\xi}) \quad (3.55e)$$

où dans les expressions ci-dessus, la loi de probabilité conjointe des variables aléatoires  $\{\xi_j\}_{1\leq j\leq N}$  est :

$$P_\xi(d\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N}} \exp\left(-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\xi}\|_N^2\right) d\xi_1 \dots d\xi_N$$

Avec les propriétés de normalisation et d'orthogonalité des polynômes d'Hermite, on en déduit :

$$V_{\alpha'} = \begin{cases} 0 & \text{si } |\alpha| \geq 1 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

$$W_{\alpha,\alpha'} = \delta_{\alpha,\alpha'}$$

$$X_{j,\alpha,\alpha'} = \sqrt{\alpha_j} \delta_{(\alpha)j,\alpha'} + \sqrt{\alpha'_j} \delta_{\alpha,(\alpha')j}$$

Ces différents termes peuvent être stockés sous forme tabulée pourvu que  $A$  ne soit pas trop grand. De l'expression (3.54) de la solution filtrée réduite et des propriétés de la base utilisée, on déduit les expressions suivantes de sa moyenne :

$$\mathbb{E}\{\mathbf{U}_{d^*}^N\} = \mathbb{E}\{\mathbf{U}_{d^*}^{N,A}\} = \mathbf{U}_0, \quad \forall A \in \mathbb{N} \quad (3.56)$$

et de sa matrice de corrélation par une formule de la forme de l'égalité de Parseval :

$$\mathbb{E}\{\mathbf{U}_{d^*}^N \otimes \bar{\mathbf{U}}_{d^*}^N\} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^N} \mathbf{U}_\alpha \otimes \bar{\mathbf{U}}_\alpha \quad (3.57)$$

dont on déduit immédiatement l'expression tronquée de la matrice de corrélation pour le champ rayonné filtré et réduit  $\mathbf{U}_{d^*}^{N,A}$ . Ces expressions ont l'avantage de donner des formules "exactes" pour les grandeurs du second ordre du champ rayonné réduit filtré, qui ne nécessitent aucun travail statistique d'estimations. Les simulations du type Monte-Carlo (voir les détails en section §3.3) sont limitées à la seule construction de réalisations de  $\mathbf{U}_{d^*}^{N,A}$  suivant l'Eq.(3.54).

Le champ rayonné réduit filtré est ainsi construit sur la base de deux approximations successives :

- la première traduit la dépendance du champ rayonné total vis-à-vis des différentes échelles de fluctuations aléatoires des perturbations des paramètres mécaniques du sol, par l'intermédiaire de leur développement de Karhunen-Loeve ;
- la seconde traduit la dépendance non linéaire du champ rayonné total vis-à-vis de ces fluctuations et des interactions entre les différentes échelles associées. Elle contribue au couplage de tous les  $\mathbf{U}_\alpha$  dans le système de l'Eq.(3.55).

La représentation peut être ensuite raffinée soit en augmentant l'ordre de la représentation des perturbations par leur développement de Karhunen-Loeve, soit en augmentant l'ordre de la troncature dans la base des polynômes d'Hermite multi-dimensionnels, avec pour effets dans l'un ou l'autre des cas d'augmenter la résolution suivant la dimension aléatoire en terme d'échelles représentatives ou en terme de couplage non linéaire entre ces différentes échelles.

**remarque 3.3** – Dans le cas où les poids aléatoires sont non gaussiens, il est possible de construire une représentation du champ rayonné réduit filtré analogue à l'Eq.(3.54), mais sa convergence en moyenne quadratique n'est plus garantie. En revanche si les perturbations aléatoires des paramètres du sol sont issues du filtrage non linéaire d'une variable aléatoire gaussienne, on peut alors les représenter elles aussi par leur projection sur la base des polynômes d'Hermite au lieu de la base des modes de Karhunen-Loeve, et construire le champ rayonné réduit et le champ rayonné réduit filtré avec cette projection. C'est par exemple ce que propose Ghanem pour la définition d'une interface géométrique aléatoire [74] ou pour le cas du problème de conduction de la chaleur dans un milieu dont la capacité calorifique et la conductivité sont des champs stochastiques suivant une loi log-normale [71]. Néanmoins la méthodologie exige une connaissance précise de la dépendance des paramètres aléatoires considérés en fonction d'une variable aléatoire gaussienne sous-jacente, afin d'accéder aux coefficients de la projection sur la base des polynômes d'Hermite ■

### Cas d'une petite perturbation

L'opérateur déterministe  $\mathcal{K}_0$  est symétrique, continu sur  $V(\Omega)$ . De plus les paramètres mécaniques  $\mathbf{p}_0$  sont supposés tels que la fonction  $\omega \mapsto \mathcal{K}_0(\omega)$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ . Elle est donc localement bornée sur tout intervalle compact  $B$  de  $\mathbb{R}$ .  $\mathcal{K}_0$  est inversible et  $\mathbf{u}_0 \stackrel{\text{déf}}{=} [-\mathcal{K}_0]^{-1} \in \mathcal{L}(V'(\Omega), V(\Omega))$  pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ , la fonction  $\omega \mapsto \mathbf{u}_0(\omega)$  est elle aussi continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ . On en déduit l'existence d'une constante strictement positive  $c$  indépendante de  $\omega$  telle que pour tout compact  $B$  de  $\mathbb{R}$  on ait :

$$\forall \omega \in B, \quad \|\mathbf{u}_0\|_{\mathcal{L}(V'(\Omega), V(\Omega))} \leq \frac{1}{c} \quad (3.58)$$

On pose :

$$\mathbf{A} = \mathbf{u}_0 d\mathcal{K}^N = [-\mathcal{K}_0]^{-1} d\mathcal{K}^N \quad (3.59)$$



de telle sorte que l'opérateur aléatoire défini sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$  :

$$[\mathcal{K}_0 + d\mathcal{K}^N] = \mathcal{K}_0 [\mathcal{I}_d - \mathbf{A}]$$

est ( $P$ -presque sûrement) inversible sur  $B$  si :

$$\forall \omega \in B, \|\mathbf{A}(\omega)\|_{\mathcal{L}(V(\Omega))} < 1, \quad P\text{-p.s.} \quad (3.60)$$

Si cette condition est remplie, on a pour tout  $\omega$  dans  $B$  le développement de Neumann :

$$[\mathcal{I}_d - \mathbf{A}]^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{A}^k, \quad P\text{-p.s.} \quad (3.61)$$

et la série est ( $P$ -p.s.) convergente dans  $\mathcal{L}(V(\Omega))$ . La solution du second ordre  $\mathbf{u}^N$  du problème de transmission réduit peut donc s'écrire si (3.60) est vrai :

$$\mathbf{u}^N = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{A}^k \mathbf{u}_0, \quad P\text{-p.s.} \quad (3.62)$$

où  $\mathbf{u}_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{U}_0 \mathbf{f}'$ . Le calcul des produits du second ordre de l'approximation  $\mathbf{u}^{N,K}$  au rang  $K$  de  $\mathbf{u}^N$  par l'Eq.(3.62) :

$$\mathbf{u}^{N,K} = \sum_{k=0}^K \mathbf{A}^k \mathbf{u}_0 \quad (3.63)$$

nécessite le calcul de moments des poids aléatoires  $\xi_j$  du développement de Karhunen-Loeve de l'opérateur aléatoire  $d\mathcal{K}^N$  de la forme :

$$\mathbb{E} \left\{ \prod_{k=1}^m \xi_{j_k} \right\} \quad (3.64)$$

pour  $m \in \{1, 2, \dots, K\}$ . Il n'est pas possible de les évaluer si l'on ne connaît pas le système de lois marginales de la variable aléatoire  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ . Si les  $\xi_j$  sont gaussiennes, orthogonales, alors le système de lois marginales de  $\boldsymbol{\xi}$  est entièrement connu et l'on peut obtenir une expression analytique des moments ci-dessus. On obtient ainsi  $\forall m \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{cases} \mathbb{E} \left\{ \prod_{k=1}^{2m+1} \xi_{j_k} \right\} = 0 \\ \mathbb{E} \left\{ \prod_{k=1}^{2m} \xi_{j_k} \right\} = \sum_{l=2}^{2m} \left( \mathbb{E} \{ \xi_{j_1} \xi_{j_l} \} \mathbb{E} \left\{ \prod_{k \neq l} \xi_{j_k} \right\} \right) \end{cases} \quad (3.65)$$

Par exemple :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{ \xi_j \xi_k \xi_l \xi_m \} &= \delta_{jk} \delta_{lm} + \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{jm} \delta_{kl} \\ \mathbb{E} \{ \xi_j^{2n} \} &= (2n-1) \mathbb{E} \{ \xi_j^{2n-2} \} = 1 \times 3 \times \dots \times (2n-1) \\ \mathbb{E} \{ \xi_j^{2n+1} \} &= 0. \end{aligned}$$

La condition (3.60) est remplie si l'on peut trouver un réel strictement positif  $c_N$  tel que l'on ait :

$$\sup_{\omega \in B} \|d\mathcal{K}^N(\omega)\|_{\mathcal{L}(V(\Omega), V'(\Omega))} \leq c_N < c, \quad P\text{-p.s.} \quad (3.66)$$

L'existence d'un tel réel est conditionnée par deux facteurs :

- l'écart-type de la perturbation  $\mathbf{P}$ , centrée par définition, relativement à  $\mathbf{p}_0$  et qui pilote l'amplitude des composantes principales  $\gamma_j$  de son opérateur de corrélation ;
- le support de la mesure de probabilité  $P_{\xi}(d\xi)$  des poids aléatoires du développement de Karhunen-Loeve de l'opérateur aléatoire  $d\mathcal{K}^N$ , voir la définition (3.50).

Si  $\xi$  est une variable aléatoire gaussienne, le support de  $P_{\xi}(d\xi)$  est  $\mathbb{R}$  tout entier et les  $\xi_j$  peuvent atteindre, avec une probabilité faible mais jamais nulle, des valeurs importantes pour lesquelles la condition (3.66) n'est plus remplie que pour des écarts-types très faibles. Si  $\xi$  est simulée suivant (C.29), alors le support de  $P_{\xi}(d\xi)$  est  $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ ,  $\xi$  est  $P$ -p.s. à valeurs bornées et l'on peut encore obtenir la condition (3.66) pour des écarts-types relativement importants.

### Représentation de Monte-Carlo

La mise en oeuvre d'une méthode de collocation suivant la dimension aléatoire conduit aux choix des fonctions de base de la forme  $\Psi_k(a) = \delta(a - a_k)$  tel que déjà mentionné en introduction. Les coefficients  $\mathbf{U}_k \in H(\Omega)$  de la projection (c'est-à-dire ici les différentes réalisations de  $\mathbf{U}_{d^*}^N$ ) sont solutions du système :

$$- [\mathbf{B}^K] \mathbf{U} = \mathbf{F}^K \quad (3.67)$$

avec  $[\mathbf{B}^K]$  une matrice qui s'écrit :

$$[\mathbf{B}^K] = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_0 + d\mathcal{K}^N(a_1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{K}_0 + d\mathcal{K}^N(a_2) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathcal{K}_0 + d\mathcal{K}^N(a_K) \end{bmatrix} \quad (3.67a)$$

où  $K$  est le nombre de tirages, et  $d\mathcal{K}^N(a_k) = \sum_{j=1}^N \xi_j(a_k) d\mathcal{K}_j$  avec la définition (3.50) ; le terme de force s'écrit quant à lui :

$$\mathbf{F}^K(\omega) = \left. \begin{matrix} \mathbf{F}^K \\ \mathbf{F}^K \\ \vdots \\ \mathbf{F}^K \end{matrix} \right\} K \text{ fois} \quad (3.67b)$$

Dans cette approche, les différentes interactions d'ordres élevés entre les échelles de fluctuations sont inexistantes, contrairement au cas de la projection du chaos homogène.

Ainsi la matrice  $[\mathbf{B}^A]$  de la méthode de projection sur la base des polynômes d'Hermite est pleine, mais le nombre de blocs sur chaque côté est le nombre de polynômes dans la base tronquée. La méthode de Monte-Carlo, pour laquelle la matrice correspondante  $[\mathbf{B}^K]$  est simplement bloc-diagonale, ne converge en pratique que pour  $K$  de l'ordre de plusieurs centaines (voir la section §3.3). Le choix de l'une ou l'autre base de projection dépend donc, hormis les propriétés probabilistes des perturbations, gaussiennes ou non, d'un compromis entre le degré d'interactions entre les différentes échelles de l'aléa que l'on souhaite reproduire, et le coût associé à la résolution de  $K$  problèmes déterministes par rapport à l'inversion d'une matrice pleine par bloc mais de taille inférieure en général. Si par exemple la matrice  $d\mathcal{K}^N$  est de taille  $d \times d$ , le coût de l'inversion du système de l'Eq.(3.55) (représentation sur les polynômes d'Hermite) est, au pire, en  $\mathfrak{o}A^3d^3$  et celui de l'inversion du système (3.67) (Monte-Carlo) est en  $\mathfrak{o}Kd^3$ , donc les coûts relatifs des deux approches sont évalués en comparant  $A^3$  et  $K$ .

### Choix de la représentation

Le choix de la représentation utilisée par la suite, parmi les trois méthodes présentées ci-dessus, est guidé par les propriétés probabilistes des perturbations des modules du sol, et donc des poids aléatoires  $\xi$ . S'ils sont gaussiens, alors les deux premières méthodes sont privilégiées. La difficulté inhérente de ce modèle de loi de probabilité a déjà été mentionnée ci-dessus, et tient au fait que son support est  $\mathbb{R}$  tout entier. Ainsi les poids aléatoires peuvent atteindre des valeurs importantes avec une probabilité faible mais non nulle, si bien que certaines conditions purement mécaniques sur les paramètres peuvent être violées avec une probabilité non nulle. Par exemple il convient de s'assurer que l'on a bien :

$$\begin{cases} \mu(\mathbf{x}) > 0 \\ 3\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x}) > 0 \\ \rho(\mathbf{x}) > 0 \end{cases}$$

en tout point  $\mathbf{x}$  de la zone perturbée  $\Omega_d$ . Ceci montre que le modèle de loi gaussienne pour les perturbations de la rigidité et la densité du sol n'est physiquement pas acceptable en général, sauf, approximativement, pour de faibles fluctuations. Pour des fluctuations importantes, telles que celles des paramètres mécaniques d'un sol réel, on retient plutôt une représentation de Karhunen-Loeve des perturbations telle que le champ simulé n'a que les bonnes caractéristiques du second ordre (moyenne, fonction d'auto-corrélation). Le champ rayonné réduit est alors défini strictement dans ce cadre, et est construit par la méthode de Monte-Carlo ci-dessus. Les poids aléatoires  $\xi$  sont simulés "au second ordre" par l'Eq.(C.29) (voir l'Annexe C.3) qui n'assure que la condition de moyenne nulle et d'orthogonalité dans  $L^2(\mathcal{A})$ . Une autre méthode [172] consiste à simuler le champ non gaussien  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  par la méthode du processus de Poisson filtré décrite en Annexe C, section §C.2, pour en déduire des réalisations des poids aléatoires  $\xi$  par la relation (3.49); cette approche assure la compatibilité des poids simulés avec la donnée de la fonction d'auto-corrélation de  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  et de ses premiers moments.

Dans les applications numériques du chapitre §6, on met également en oeuvre, à titre comparatif seulement, l'approche par un développement de Neumann pour des poids gaussiens, mais en gardant bien à l'esprit les limitations de cette représentation.

### 3.3 Simulation de Monte-Carlo

La méthode de simulation de Monte-Carlo est donc mise en oeuvre pour la construction d'une représentation du champ rayonné réduit  $\mathbf{U}_{d*}^N$  de la définition 3.52, que ce soit :

- pour le calcul des coefficients de la forme de l'Eq.(3.64) de la projection de Neumann ;
- ou pour la construction de réalisations du champ rayonné réduit par l'une des trois approches, Eq.(3.54) par la projection sur la base des polynômes du chaos homogène, Eq.(3.63) par la projection de Neumann, ou encore Eq.(3.67) par la méthode de Monte-Carlo.

Celle-ci est présentée ici pour ce dernier cas, sachant qu'il constitue le cadre le plus général de la méthode pour les applications présentées dans ce travail (voir les remarques ci-dessus sur le choix de la représentation). Les autres calculs font eux appels aux mêmes outils de simulation de nombres aléatoires et d'estimation.

### 3.3.1 Principe

Notons, comme en §2.3.4,  $\mathbf{u}^N$  l'opérateur inverse associé à la définition (3.52) qui est ici de nature aléatoire, défini sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$ . Il dépend de la variable aléatoire  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_N)$  du développement de Karhunen-Loeve tronqué de la perturbation des modules du sol et est défini par  $\{\mathbf{u}^N(\boldsymbol{\xi}(a); \omega); a \in \mathcal{A}\}$ . La loi de probabilité  $P_{\boldsymbol{\xi}}(d\boldsymbol{\xi})$ , où  $d\boldsymbol{\xi}$  désigne la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{C}^N$ , étant supposée donnée, le problème stochastique (3.52) :

$$- [\mathcal{K}_0 + \mathfrak{d}\mathcal{K}^N(\boldsymbol{\xi}(a))] \mathbf{u}^N(\omega) = \mathbf{f}'$$

est "résolu" si l'on peut en déduire la loi de probabilité  $P_{\mathbf{u}^N}(d\mathbf{u}^N)$  (en fait le système de lois marginales) de la réponse sur tout  $\Omega$ . A défaut, on cherchera à caractériser les premières grandeurs du second ordre de  $\mathbf{u}^N$ , par exemple une moyenne sous la forme :

$$\mathbb{E} \{ \mathbf{u}^N \} = \int_{\mathbb{C}^N} \mathbf{u}^N(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{f}' P_{\boldsymbol{\xi}}(d\boldsymbol{\xi})$$

Le calcul explicite de cette intégrale pose deux difficultés : l'échantillonnage de  $\boldsymbol{\xi}$  sur le sous-ensemble de  $\mathbb{C}^N$  où il prend ses valeurs, et le calcul de  $\mathbf{u}^N(\boldsymbol{\xi})$  pour chacun des échantillons. Formellement, le problème auquel on s'intéresse ici peut être ramené par un changement de variable au calcul de la valeur de :

$$I = \int_{[0,1]^N} f(x) dx. \quad (3.68)$$

C'est par exemple ce qui est fait dans la méthode des éléments finis lorsque l'on passe de la configuration réelle à la configuration de référence d'un élément donné. Il existe de nombreuses méthodes d'approximation de cette intégrale par des formules du type  $\sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$  où les  $w_i$  sont des réels positifs dont la somme vaut 1 et  $x_i$  des points de l'intervalle  $[0, 1]^N$ . La méthode de Monte-Carlo est l'une d'elle, et correspond à  $w_i = \frac{1}{n}$  et des  $x_i$  choisis au hasard, suivant une loi uniforme, dans  $[0, 1]^N$ . Elle converge avec une vitesse en  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ . Evidemment cette vitesse est faible comparée à d'autres méthodes en dimension 1 par exemple, mais dès que  $N$  devient plus important toutes les autres méthodes s'effondrent : typiquement il faut  $n^N$  points d'échantillonnage pour conserver une erreur constante, alors que la méthode de Monte-Carlo est totalement insensible à la dimension [166]. Ainsi pour notre problème, si l'on suppose dans un premier temps que l'on peut ramener l'aléa lié au champ des perturbations des modules du sol à 10 variables aléatoires  $\boldsymbol{\xi}$  de loi uniforme,  $N = 10$ , l'intégration complète (3.68) par une méthode de trapèzes est inabordable pour la fonction définie formellement par :

$$f(\boldsymbol{\xi}) \stackrel{\text{déf}}{=} p_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}^N(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{f}' \quad (3.69)$$

et qui caractérise le problème de la définition (3.52) ;  $p_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi})$  est la densité de la loi de probabilité  $P_{\boldsymbol{\xi}}(d\boldsymbol{\xi})$ .

Afin de mieux cerner les enjeux d'une telle simulation, on donne dans un premier temps deux exemples, l'un géométrique l'autre comme calcul d'une moyenne, de la méthode de Monte-Carlo puis l'on introduit quelques principes de simulation, d'estimation et les méthodes de réduction de variance de l'estimateur de la moyenne.

### 3.3.2 Exemples

**Interprétation géométrique** – Pour simplifier, on se limite ici au cas  $N = 1$  et à l'évaluation de la valeur de :

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

où l'on suppose que la fonction  $f$  à intégrer est bijective et bornée :

$$c \leq f(x) \leq d, \quad a \leq x \leq b$$

En notant  $\bar{\Omega} = \{(x, y) / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ , on définit le point aléatoire  $(X, Y)$  distribué uniformément sur  $\bar{\Omega}$  avec la densité de probabilité :

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(d-c)(b-a)} & \text{si } (x, y) \in \bar{\Omega} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors la probabilité  $P_{<}$  pour que le point  $(X, Y)$  de  $\bar{\Omega}$  soit sous la courbe décrite par  $x \mapsto f(x)$ , c'est-à-dire dans le sous-domaine  $\{(x, y); a \leq x \leq b, c \leq y \leq f(x)\}$  de  $\bar{\Omega}$ , est :

$$P_{<} = \frac{I}{(d-c)(b-a)}$$

Un estimateur de cette probabilité est :

$$\hat{\theta}(P_{<}) = \frac{n_{<}}{n}$$

où  $n_{<}$  est le nombre de points tirés  $(x_i, y_i)$  sur un total de  $n$  pour lesquels  $f(x_i) \geq y_i$  avec  $i = 1, \dots, n$ . On en déduit l'estimateur de l'intégrale :

$$\hat{\theta}(I) = (d-c)(b-a) \frac{n_{<}}{n}$$

dont on peut montrer qu'il est non biaisé (voir plus loin) et de variance en  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ .

**Interprétation comme une moyenne** – La valeur de l'intégrale recherchée peut aussi être vue comme le calcul d'une moyenne pour une certaine densité de probabilité  $p_X(x)$  en remarquant que l'on peut toujours la réécrire sous la forme :

$$I = \int_a^b \frac{f(x)}{p_X(x)} p_X(x) dx$$

en prenant  $p_X(x) > 0$  quand  $f(x) \neq 0$ . Alors :

$$I = \mathbb{E} \left\{ \frac{f(X)}{p_X(X)} \right\}$$

Un estimateur non biaisé de l'intégrale est donné par :

$$\hat{\theta}(I) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{p_X(x_i)}$$

Les  $x_i$  sont des points échantillonnés sur l'intervalle  $[a, b]$  suivant la densité de probabilité  $p_X(x)$ .

Comme on le voit dans les deux exemples précédents, la méthode de simulation de Monte-Carlo peut se décomposer en trois étapes :

1. Dans un premier temps, on tire des réalisations des paramètres aléatoires  $x(a_i) = x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , dont dépend la fonction à évaluer. Pour cela, la connaissance de leur distribution de probabilité est nécessaire (à moins qu'ils ne soient déjà le résultat d'une première simulation).  $n$  est le nombre de tirages effectués ;
2. On construit les observations  $f(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . La principale difficulté tient ici à la méthode d'évaluation de la fonction  $f$ , qu'elle soit analytique ou numérique, mais c'est une étape purement déterministe liée à la nature du problème traité ;
3. On construit l'estimateur  $\hat{\theta}$  de la quantité recherchée sous la forme :

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(f(x_1), \dots, f(x_n))$$

Le choix de l'estimateur n'est pas neutre et dépend de la précision, de la dispersion ou encore du risque *a priori* que l'on souhaite atteindre pour une simulation donnée.

Ces trois points sont brièvement abordés dans les sections suivantes.

### 3.3.3 Simulation de nombres aléatoires

**Génération suivant une loi uniforme** – Toutes les méthodes de simulation d'une variable aléatoire ou d'un champ stochastique que nous verrons par la suite commencent par la génération de nombres distribués uniformément sur  $[0, 1]$  à partir de la même variable aléatoire  $X_U$  définie sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$  et dont la loi de probabilité s'écrit :

$$P_{X_U}(dx) = p_{X_U}(x)dx, \quad p_{X_U}(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \quad (3.70)$$

Sa moyenne et son écart-type sont respectivement :

$$m_{X_U} = \mathbb{E}\{X_U\} = \frac{1}{2}, \quad \sigma_{X_U} = \mathbb{E}\left\{(X_U - m_{X_U})^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad (3.71)$$

Pour construire un vecteur aléatoire  $(X_{U1}, \dots, X_{Ud})$  de  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$ , où chacune des composantes suit une loi uniforme sur  $[0, 1]$  et où toutes les variables aléatoires sont indépendantes dans leur ensemble, il suffit de prendre  $d$  versions indépendantes de la même variable aléatoire  $X_U$ .

Pour les applications pratiques de la mécanique ou de la physique, les générateurs congruentiels linéaires sont généralement suffisants. Une série de "nombres aléatoires" entiers  $\{I_i\}_{0 \leq i \leq m-1}$  est obtenue comme suit :

$$I_{i+1} = aI_i + b \pmod{m} \quad (3.72)$$

où  $a$ ,  $b$  et  $m$  sont fixés *a priori* avec les conditions suivantes :  $m$  fixe l'intervalle où les nombres de la suite vont être engendrés et  $a$  et  $b$  sont pris entre 0 et  $m - 1$ . Un quatrième nombre doit également être choisi, le germe  $I_0$ . On obtient une suite de nombres réels distribués sur  $]0, 1[$  en prenant  $X_i = I_i/m$  (la valeur 0 est exclue pour un choix de  $b = 0$ ), ou sur  $]c, d[$  en prenant  $X_i = c + \frac{d-c}{m}I_i$ . Les limitations de tels générateurs sont bien connues (voir par exemple [129]). Notons essentiellement qu'ils sont périodiques : il ne peut y avoir qu'un nombre fini de valeurs possibles pour les  $I_i$  (tous les entiers entre 0 et  $m-1$ ) et dès qu'apparaît une valeur déjà obtenue, la suite repasse par les mêmes valeurs. Il est néanmoins possible d'obtenir la période maximale ( $m$ ) par un choix approprié de  $a$  et  $b$ . Les nombres générés n'ont quoi qu'il arrive rien d'aléatoires et la même suite peut bien sûr être reproduite en choisissant le même germe. Enfin plusieurs méthodes existent permettant de tester la qualité de la suite générée, voir Rubinstein [177].

**Génération suivant une loi quelconque** – La construction de réalisations d’une variable aléatoire  $X_Q$  définie sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$  et de loi quelconque  $P_{X_Q}(dx)$  est effectuée à partir de sa fonction de répartition  $F_{X_Q}(x)$ . Celle-ci est une application monotone croissante de  $\mathbb{R}$  dans  $]0, 1[$ . On la suppose également bijective, sachant qu’il est toujours possible de se ramener à ce cas. Alors en utilisant les résultats sur le calcul direct de l’image d’une mesure [192], on peut simuler la variable aléatoire  $X_Q$  par :

$$X_Q = F_{X_Q}^{-1}(X_U) \quad (3.73)$$

On est ainsi ramené à la simulation de la variable aléatoire uniforme  $X_U$ , ce qui justifie au passage la simplification introduite pour l’intégrale (3.68). Par exemple deux réalisations indépendantes  $y_1$  et  $y_2$  de la variable aléatoire normale  $X_N$  (loi gaussienne) sont obtenues à partir de deux réalisations indépendantes  $x_1$  et  $x_2$  de la variable aléatoire uniforme  $X_U$  par la transformation dite de Box-Muller :

$$\begin{cases} y_1 = \sqrt{-2 \ln x_1} \cos 2\pi x_2 \\ y_2 = \sqrt{-2 \ln x_1} \sin 2\pi x_2 \end{cases} \quad (3.74)$$

Pour plus de détails, on peut se référer à [57, 177].

### 3.3.4 Construction des observations

Cette étape est en fait l’objet de la section §3.2.2 et des chapitres §4 et §5 pour le problème de transmission considéré. Nous n’y reviendrons donc pas.

### 3.3.5 Estimation

On donne dans un premier temps les définitions essentielles puis on introduit rapidement quelques estimateurs usuels. Pour plus de détails sur la théorie statistique de l’estimation et le traitement du signal, on peut se référer à [166, 177, 180] et aux références citées. L’objectif est ici de rappeler les outils qui seront utilisés dans la mise en oeuvre numérique de la méthode de Monte-Carlo, voir chapitre §6.

**Définitions** – Étant donnée une variable aléatoire  $Y = (Y_1, \dots, Y_d)$  définie sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$  à valeurs  $\mathbb{R}^d$  dont la loi de probabilité  $P_Y(dy; \theta)$  dépend d’un paramètre  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ , le problème de l’estimation est celui de déterminer la valeur de  $\theta$  connaissant une ou plusieurs réalisations  $y(a_i)$  de  $Y$ , avec  $a_i \in \mathcal{A}$ . Pour cela on introduit une règle d’estimation qui aux réalisations  $y(a_i)$  fait correspondre l’estimateur  $\hat{\theta}(y(a_i))$  du paramètre  $\theta$  relativement aux observations  $y(a_i)$ . L’estimation  $\hat{\theta}(Y)$  est elle-même une variable aléatoire définie sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$  dont on mesure la qualité par l’erreur d’estimation  $\hat{\theta}(Y) - \theta$ . Le biais  $b_{\hat{\theta}}$  de l’estimateur est défini comme la moyenne d’ensemble de l’erreur d’estimation :

$$b_{\hat{\theta}} = \mathbb{E} \{ \hat{\theta}(Y) - \theta \}$$

L’estimateur est sans biais ssi  $b_{\hat{\theta}} = 0$ . La variance de l’estimateur est la matrice de covariance de la variable aléatoire  $\hat{\theta}(Y)$  :

$$C_{\hat{\theta}(Y)} = \mathbb{E} \left\{ \left( \hat{\theta}(Y) - \mathbb{E} \{ \hat{\theta}(Y) \} \right) \otimes \left( \hat{\theta}(Y) - \mathbb{E} \{ \hat{\theta}(Y) \} \right) \right\}$$

La dispersion  $V_{\hat{\theta}}$  de l'estimateur  $\hat{\theta}(Y)$  autour du paramètre à estimer  $\theta$  est l'opérateur de corrélation de l'erreur d'estimation :

$$V_{\hat{\theta}} = R_{\hat{\theta}(Y)-\theta} = \mathbb{E} \left\{ \left( \hat{\theta}(Y) - \theta \right) \otimes \left( \hat{\theta}(Y) - \theta \right) \right\}$$

On vérifie aisément :

$$C_{\hat{\theta}(Y)} = V_{\hat{\theta}} - b_{\hat{\theta}} \otimes b_{\hat{\theta}}$$

si bien que si l'estimateur est non biaisé, sa variance et sa dispersion sont égales.

**Estimateurs usuels** – Considérons  $n$  observations (réalisations) de la variable aléatoire  $Y$  définie sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$  notées  $y(a_i) = y_i$ ,  $\{a_i \in \mathcal{A}; i = 1, \dots, n\}$ . La moyenne de  $Y$  est  $m_Y$  et la loi de probabilité de  $Y$  dépend de  $m_Y$ . Un estimateur usuel de  $m_Y$  est :

$$\hat{m}_Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (3.75)$$

Cet estimateur est non biaisé et sa variance (ou sa dispersion) est :

$$V_{\hat{m}_Y} = \frac{1}{n} (R_Y - m_Y \otimes m_Y) \quad (3.76)$$

où  $R_Y$  est la fonction d'auto-corrélation de  $Y$ . La matrice de covariance de  $Y$  est  $C_Y$  et la loi de probabilité de  $Y$  dépend des  $[C_Y]_{kl}$ ,  $k, l = 1, \dots, d$ . Un estimateur usuel non biaisé de  $C_Y$  est :

$$\hat{C}_Y^{(1)} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{m}_Y) \otimes (y_i - \hat{m}_Y)$$

si la moyenne  $m_Y$  est inconnue, ou bien :

$$\hat{C}_Y^{(2)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - m_Y) \otimes (y_i - m_Y)$$

si la moyenne  $m_Y$  est connue. L'estimateur utilisé par la suite (voir chapitre §6) et qui permet de réduire sensiblement les erreurs d'arrondis numériques, est le suivant :

$$\hat{C}_Y^{(3)} = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{m}_Y) \otimes (y_i - \hat{m}_Y) - \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{m}_Y) \right] \otimes \left[ \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{m}_Y) \right] \right\} \quad (3.77)$$

Ces estimateurs peuvent être utilisés par exemple pour estimer la variance de l'estimateur de la moyenne. Celle-ci nous indique que l'erreur relative atteinte par l'estimateur usuel de la moyenne est en  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ . Ce résultat est issu de deux théorèmes fondamentaux en calcul des probabilités, la loi forte des grands nombres et le théorème de la limite centrale, sur lesquels repose, d'un point de vue strictement théorique, la méthode de Monte-Carlo.



### 3.3.6 Théorèmes de convergence

**Théorème 3.78 (loi forte des grands nombres)** Soit  $y(a_i) = y_i$ ,  $a_i \in \mathcal{A}$ ,  $i \geq 1$ , une suite d'observations (réalisations) indépendantes de la variable aléatoire  $Y$  définie sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$  et supposée telle que  $\mathbb{E}\{|Y|\} < +\infty$ . Alors :

$$\mathbb{E}\{Y\} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad P\text{-presque sûrement.}$$

Le théorème de la limite centrale (voir par exemple [166]) caractérise l'erreur asymptotique commise en approchant la moyenne par l'estimateur usuel (3.75). Celle-ci est elle-même une variable aléatoire définie par :

$$\varepsilon_n = \mathbb{E}\{Y\} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

**Théorème 3.79 (de la limite centrale)** Soit  $Y$  une variable aléatoire définie sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$  à valeurs réelles. On suppose  $\mathbb{E}\{Y^2\} < +\infty$  (variable aléatoire du second ordre) et on note  $C_Y = \mathbb{E}\{Y^2\} - \mathbb{E}\{Y\}^2$  la variance de  $Y$ . Alors  $\sqrt{\frac{n}{C_Y}} \varepsilon_n$  converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée réduite et pour tous  $x_1$  et  $x_2$  réels :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left( \sqrt{\frac{C_Y}{n}} x_1 \leq \varepsilon_n \leq \sqrt{\frac{C_Y}{n}} x_2 \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Ce théorème fournit une approximation fiable de l'erreur et permet d'estimer assez facilement la vitesse de convergence à l'aide des tirages déjà réalisés. Néanmoins il ne donne aucune indication sur la borne de l'erreur, puisque le support de la loi gaussienne est  $\mathbb{R}$  tout entier :  $\varepsilon_n$  peut ainsi devenir très grand, avec une probabilité d'autant plus faible mais théoriquement jamais nulle. Ici apparaît également le rôle prépondérant joué par la variance  $C_Y$  de la variable aléatoire considérée. Comme on cherche en fait à estimer  $\mathbb{E}\{Y\}$ , la loi de  $Y$  est indifférente pourvu que cette grandeur reste inchangée. On a donc intérêt à choisir une loi telle que  $C_Y$  est la plus petite possible. L'objectif des techniques de réduction de variance est d'améliorer cette convergence par un choix approprié de l'estimateur. Plus précisément, il s'agit d'adopter une stratégie particulière de génération des observations  $a_i \in \mathcal{A}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , afin d'améliorer le taux de convergence de l'estimateur (3.75).

### 3.3.7 Réduction de variance

De nombreuses méthodes de réduction de variance sont développées dans la littérature, pour des applications aussi bien en biologie qu'en physique des particules ou en finance. Pour un aperçu plus complet, on peut se référer à McKay *et al.* [153], Rubinstein [177] ou Owen [159] et aux ouvrages et articles cités. Le problème générique est le suivant : on suppose que l'on a à échantillonner  $n$  fois une variable aléatoire  $X$  définie sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  selon une loi uniforme  $P_X(dx)$ , de support  $S$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  (éventuellement égal à  $\mathbb{R}^d$ ), afin d'évaluer l'intégrale :

$$I = \int_S f(x) P_X(dx) \tag{3.80}$$

Elle est estimée dans un premier temps par l'estimateur usuel, Eq.(3.75), pour des  $x(a_i) = x_i$  issus de  $n$  tirages indépendants suivant  $P_X(dx)$ , que l'on note désormais  $\hat{\theta}_r$  :

$$\hat{\theta}_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad (3.81)$$

On désire construire un nouvel estimateur  $\hat{\theta}'_r$  améliorant la qualité de  $\hat{\theta}_r$  dans le sens  $\|V_{\hat{\theta}'_r}\| \leq \|V_{\hat{\theta}_r}\|$ . Trois méthodes réalisant cet objectif sont présentées en Annexe B : l'échantillonnage stratifié, la méthode dite du "Latin Hypercube Sampling" et les approches par quadrature.

### 3.4 Prise en compte de l'aléa dans les méthodes numériques

La prise en compte, dans les méthodes numériques, de l'aléa des paramètres mécaniques du système traité pose de sérieuses difficultés mathématiques et de modélisation, dont certaines ont pu être abordées brièvement dans le chapitre §1. Les techniques mises en oeuvre ont rarement un caractère général dans la mesure où elles restent souvent limitées à des configurations (géométrie, lois de comportement, discrétisation ...) bien particulières. Dans cette section on ne s'intéresse pas à la modélisation probabiliste proprement dite de l'aléa, mais aux formulations déterministes qui permettent d'en tenir compte de façon plus ou moins efficace. Cela va nous permettre de dégager les approches les plus pertinentes pour l'analyse du problème de transmission étudié, sans pour autant nuire à la généralité des résultats de la section §3.2 qui pourront donc être appliqués au schéma de discrétisation retenu par la suite. Ainsi les développements des sections précédentes doivent nous permettre de traiter désormais l'aléa comme une dimension supplémentaire du problème de transmission de l'interaction sol-structure. Les quelques remarques qui suivent ont pour objectif de dégager la méthodologie la mieux adaptée pour la discrétisation de la dimension spatiale du problème de transmission, afin qu'elle conserve par ailleurs le plus de latitude possible vis-à-vis de la discrétisation de sa dimension aléatoire telle qu'elle a été abordée précédemment.

Dans le cas de domaines bornés, il est classique d'exprimer  $\mathcal{U}_0$  et/ou  $d\mathcal{K}$  en fonction soit des modes propres de ces domaines, soit des opérateurs de masse, raideur et dissipation approchés par une méthode d'éléments finis usuelle. Celle-ci permet notamment de traiter des géométries complexes pour des milieux fortement hétérogènes, type composites, et peut être étendue sans trop de difficultés aux cas de matériaux et/ou chargements aléatoires. La méthode des éléments finis stochastiques regroupe dans la littérature, sous la même terminologie, différentes approches dont la nature peut être très différente suivant les objectifs fixés. Ainsi les auteurs se limitent le plus souvent aux deux premiers moments du second ordre de la réponse du système (moyenne et variance), qu'il est possible d'obtenir (i) soit par des développements algébriques directes, (ii) soit par des statistiques réalisées sur les réalisations de la réponse observées pour différentes valeurs des paramètres aléatoires. Dans le premier cas (i), le développement de formulations particulières de la méthode des éléments finis s'avère nécessaire. Dans cette optique, on peut citer :

- les méthodes de perturbation (voir par exemple [137]) qui consistent à introduire un développement de Taylor des différents opérateurs et fonctions dépendants des paramètres aléatoires autour de leurs valeurs moyennes. Le système algébrique complet est ensuite résolu séquentiellement en identifiant les termes polynomiaux de même degré. Cette approche, quoiqu'extrêmement lourde à implémenter numériquement et

- peu robuste, donne des résultats satisfaisants tant que les variations des paramètres aléatoires du matériau considéré restent faibles. On trouvera ainsi dans [193] un critère général de validité du développement au premier ordre, en fonction du degré de non linéarité de la fonction approchée par rapport aux paramètres aléatoires et du niveau de confiance autorisé ;
- une approche fondée elle aussi sur une hypothèse de petites perturbations des paramètres est celle consistant à introduire un développement de Neumann de l'opérateur de raideur élastodynamique (voir par exemple [188, 226]) afin d'obtenir une expression algébrique de la réponse du système dont on peut déduire aisément ses caractéristiques du second ordre ;
  - plus récemment Elishakoff *et al.* [59, 60, 175] obtiennent, pour un modèle d'Euler de poutre en flexion, des équations différentielles exactes pour la moyenne et la variance de la flèche en fonction des moyenne et variance de la rigidité supposée aléatoire. Celles-ci sont ensuite intégrées numériquement par une formulation variationnelle adaptée.

Dans le deuxième cas (ii) seul, en toute rigueur, un code de traitement statistique encapsulant le calcul éléments finis proprement dit est à prévoir. La principale difficulté est ici liée à la simulation des paramètres variables sous forme de processus ou de champs stochastiques. Les différentes procédures applicables dans les cas les plus courants ont été rappelées à la section §1.3.4 pour l'exemple des chargements sismiques, et dans l'Annexe C. Cette approche type simulation de Monte-Carlo a par ailleurs été présentée dans un cadre général à la section §3.3. Pour sa mise en oeuvre numérique dans le cadre de la méthode des éléments finis usuelle, on peut citer les travaux initiaux de Shinozuka [187] qui le premier a appliqué au calcul des structures la technique de Monte-Carlo pour un chargement aléatoire simulé par une représentation spectrale. Pour des applications plus récentes, on peut citer, par exemple, les travaux de Papadrakakis & Papadopoulos [163] simulant l'aléa des caractéristiques mécanique du matériau par une représentation spectrale moyennée spatialement sur les éléments, Ghanem & Spanos [72] ou Tarman [206] par un développement de Karhunen-Loeve, Ghanem [69] ou Matthies & Bucher [151] par une représentation en polynômes du chaos homogène, Lallemand *et al.* [123] par une approche du type ensemble flou, ou encore Huntington & Lyrantzis [98] couplant paramètres et chargement aléatoires du système étudié. Enfin Soize [196] propose quant à lui, pour des systèmes complexes de conditions aux limites, caractéristiques mécaniques ou lois de comportement de nature aléatoire, de simuler leurs matrices de masse, raideur et dissipation stochastiques suivant des lois de probabilités compatibles avec, d'une part, leurs propriétés algébriques – symétrie, positivité – et, d'autre part, leurs caractéristiques probabilistes – moyenne et variance notamment.

Dans le cas des domaines non bornés, la méthode des éléments finis ne s'applique pas directement car il convient de ramener dans un premier temps le domaine non borné à un domaine borné. Pour ce faire il est classique d'imposer des conditions aux limites absorbant les ondes sortantes à sa frontière, mais les méthodes associées ne permettent généralement pas d'absorber tous les types d'ondes et certaines sont réfléchies à l'intérieur du domaine. Frankel & Clayton [66] par exemple utilisent un schéma du type différences finies pour traiter la propagation d'ondes dans des milieux aléatoires infinis et étudier l'influence de l'aléa sur l'atténuation apparente des ondes due aux réflexions multiples, et sur la coda sismique. Si l'on tient compte de la dissipation, nous avons déjà vu que grâce à l'Eq.(2.31) tout se passe comme si le domaine sol était effectivement borné. Néanmoins si l'amortissement est faible sans être négligeable, il reste très étendu et sa discrétisation peut vite devenir fastidieuse, tout en introduisant un très grand nombre de degrés de liberté. On privilégiera donc dans

ce cas les méthodes d'équations intégrales de bord qui une fois discrétisées limitent l'effort de modélisation à la seule frontière du domaine étudié. La prise en compte de l'aléa dans les méthodes d'éléments finis de frontière pose en revanche de sérieuses difficultés et n'a à ce titre que très peu été abordée dans la littérature. Concernant l'effet d'un chargement ou de conditions aux limites aléatoires, l'approche ne pose *a priori* aucune difficulté et peut être étendue directement aux équations intégrales directes ou indirectes usuelles. La prise en compte de l'aléa portant sur les caractéristiques du milieu nécessite elle des développements particuliers dont on peut trouver un aperçu rapide dans [29]. Ils consistent dans la plupart des cas en une méthode de perturbations [103, 122] introduisant un développement de Taylor du potentiel recherché autour de sa valeur moyenne ; les termes perturbatifs sont ensuite considérés comme des termes de source et l'on obtient ainsi une hiérarchie d'équations intégrales résolues séquentiellement ("équations intégrales stochastiques" dans la littérature). Comme pour les éléments finis usuels, ces approches sont difficiles à mettre en oeuvre numériquement, et par ailleurs aucun résultat de convergence, même pour des petites perturbations des paramètres, n'est disponible. On peut aussi citer ici les travaux plus avancés de Breitung *et al.* [24] qui utilisent une formule de représentation intégrale élastostatique afin de ramener l'intégrale sur le domaine à une intégrale de frontière, ainsi qu'un développement de Karhunen-Loeve pour représenter la perturbation des paramètres mécaniques du milieu aléatoire. Rappelons que nous avons également vu dans la section §1.5.1 que certains auteurs proposaient d'utiliser une fonction de Green hétérogène dont nous avons précisé les limites.

La méthode de sous-structuration que nous présentons dans le chapitre suivant va nous permettre de choisir, pour chacun des sous-domaines du problème de transmission (la structure et le sol), le schéma de discrétisation le plus adapté. La prise en compte de l'aléa relatif aux paramètres mécaniques du sol, en liaison avec l'approche numérique retenue, nécessite quant à lui des développements plus originaux, présentés également dans le chapitre §4. Il sera montré que ceux-ci entrent, sans limitation, dans le cadre général de la modélisation probabiliste développée à la section §3.2.

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons donné tous les éléments nécessaires pour le traitement probabiliste de la réponse sismique d'un système couplé sol-structure dans les cas (i) d'un chargement sous forme de champ incident de nature stochastique, et (ii) de modules de sol proches de la fondation de nature également aléatoire.

Dans le cas (i), la réponse aléatoire de la structure est linéaire vis-à-vis de la sollicitation imposée. Elle est alors caractérisée par les méthodes standards de l'analyse spectrale. La donnée fondamentale permettant de conduire une telle analyse est la fonction de réponse en fréquence, ou fonction de transfert, du système composite sol-structure pour un champ imposé à l'interface sol-fondation  $\Gamma_{sf}$ . Les outils de réduction de la dimension aléatoire du chargement dans  $L^2(\mathcal{A} \otimes \Gamma_{sf})$  ont été introduits. Ils ont permis de construire une représentation réduite de la dimension aléatoire de la réponse de la structure dans  $L^2(\mathcal{A}, \mathbb{C}^{N_w})$ , avec  $N_w \in \mathbb{N}$  de l'ordre de quelques unités.

Dans le cas (ii), la réponse aléatoire de la structure est non-linéaire vis-à-vis des modules aléatoires du sol, introduits sous la forme d'une perturbation (pas nécessairement petite) de ses modules déterministes moyens sur une zone bornée  $\Omega_d$ . Elle est alors caractérisée

par une approche type simulation de Monte-Carlo. La donnée fondamentale permettant de conduire cette analyse est l'opérateur de raideur dynamique aléatoire du système composite sol-structure. Les outils de réduction de la dimension aléatoire dans  $L^2(\mathcal{A})$  de l'opérateur de raideur dynamique correspondant à la perturbation ont été introduits. Ils ont également permis de construire une représentation réduite de la dimension aléatoire de la réponse de la structure dans  $L^2(\mathcal{A}, \mathbb{C}^N)$ , avec  $N \in \mathbb{N}$  de l'ordre de quelques unités.

Dans les deux cas, les modèles réduits obtenus peuvent être exploités pour simuler des réalisations de la réponse de la structure et construire éventuellement ses caractéristiques du second ordre par une approche numérique de type Monte-Carlo. Les deux chapitres suivants sont consacrés aux constructions de la fonction de réponse en fréquence pour un champ imposé à l'interface sol-fondation, et de l'opérateur de raideur dynamique du système composite sol-structure. Elles vont nous permettre d'en déduire une représentation réduite dans l'espace  $[L^2(\Omega_b)]^3 \equiv H(\Omega_b)$  de la dimension spatiale du champ des déplacements dans la structure.

## Chapitre 4

# Méthodes de sous-structuration

Dans le chapitre §2 relatif à la formulation du problème de transmission pour l'interaction sismique sol-structure, nous avons pu établir, moyennant un certain degré d'abstraction, une formulation globale découplant complètement la dimension spatiale et temporelle du problème de sa dimension aléatoire. L'objectif est de pouvoir traiter la discrétisation de l'aléa de manière indépendante et générique, telle que présentée au chapitre §3 à la section §3.2 pour la perturbation des modules du sol. Par ailleurs cette formulation permet de conserver une écriture générale du problème élastodynamique déterministe d'origine, posé sur tout le domaine d'étude (le sol et la structure). Elle laisse ainsi la possibilité de mettre en oeuvre les approches numériques jugées les plus adaptées sans introduire de limitations particulières pour le modèle. Nous abordons donc ici la discrétisation des opérateurs définissant le système couplé sol-structure, en essayant de tirer parti des outils numériques existants au travers de la méthode de sous-structuration. Il est entendu que le choix particulier de cette méthode n'enlève rien au caractère général des résultats présentés aux chapitres §2 et §3. Nous nous attacherons toutefois à montrer que cette méthode s'avère à la fois originale, élégante et efficace ainsi que le montreront les résultats numériques obtenus au chapitre §6.

La première section (§4.1) de ce chapitre est consacrée à la discrétisation de l'équation en terme d'opérateur (2.42) pour le problème de transmission étudié au chapitre §2. Celle-ci étant posée sur tout le domaine couplé sol-structure, on s'intéresse plus particulièrement à une formulation par sous-structuration qui permet d'utiliser, dans chaque sous-domaine, la méthode numérique la plus appropriée. Cette approche est classique, elle est rappelée pour faciliter la compréhension de la démarche introduite par la suite. Ainsi dans une deuxième section (§4.2), on généralise la méthodologie introduite au cas du couplage avec la zone hétérogène bornée du sol telle qu'elle a été définie à la section §3.2. Le problème de transmission initial avec sol hétérogène dans une zone bornée au voisinage de la fondation peut ainsi être traité en ne discrétisant plus que l'"interface volumique" constituée par cette zone et couplant le domaine composite structure-sol non perturbé, dit *de référence*, et l'hétérogénéité caractérisée par une perturbation générique – déterministe ou aléatoire, petite ou grande – des modules élastiques de sol. Le problème local relatif au domaine composite de référence peut ensuite être étudié, par exemple, par la méthode de sous-structuration de la section §4.1.

Dans tout ce chapitre, on reprend les notations d'espaces fonctionnels introduites à la section §2.3.1 et en Annexe A.

## 4.1 Solution du problème de transmission par sous-structuration

Dans cette section on introduit dans un premier temps le principe de la méthode de sous-structuration, notamment la définition des hypothèses cinématiques sur les deux sous-domaines traités, la réécriture de l'équilibre global au sens des travaux virtuels et la décomposition du problème en deux problèmes locaux de rayonnement à l'intérieur de chaque sous-domaine. On donne ensuite le cadre et les outils de résolution des problèmes locaux, avant de reformuler le problème global sous la forme d'un problème posé uniquement sur l'interface entre les sous-domaines. On donne également les éléments pour la construction d'une solution approchée par cette méthode. Les développements présentés ici pour un système décomposé en deux sous-domaines reprennent directement ceux de la thèse de Clouteau [40] dans laquelle on trouvera un exposé général complet pour un modèle multi-domaines sous-structuré.

### 4.1.1 Principe

On reprend dans cette section les différentes notations introduites au chapitre §1, section §2.1. Celles-ci sont résumées dans la FIG. 2.1, reproduite ici (FIG. 4.1). Le sol visco-élastique est représenté par un demi-espace ouvert non borné noté  $\Omega_s$ . La structure étudiée, également visco-élastique, est représentée par un domaine ouvert borné noté  $\Omega_b$ . La frontière entre le demi-espace sol et la structure est une surface bornée notée  $\Gamma_{sf}$ ; la frontière entre le sol et l'air ambiant est notée  $\Gamma_{sa}$  et celle entre la structure et l'air ambiant  $\Gamma_{ba}$ . Ces trois surfaces sont supposées telles que  $\Gamma_{sf} \cap \Gamma_{sa} \cap \Gamma_{ba} = \emptyset$ . Enfin par convention on introduit la frontière du sol "à l'infini" notée  $\Gamma_{s\infty}$ .

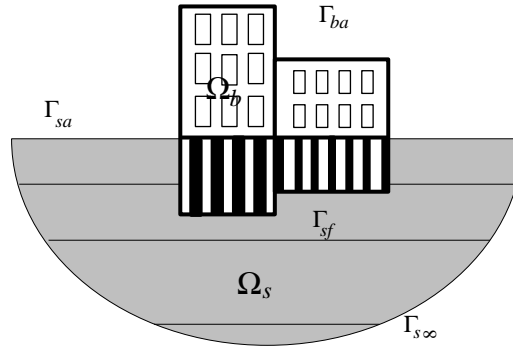


FIG. 4.1 – Modèle d'interaction sol-structure, géométrie et notations.

On rappelle ici le problème de transmission (2.38) sous sa forme variationnelle qui s'écrit pour le champ rayonné total  $\mathbf{u}_{d*}$  défini en (2.37) :

**Problème 4.1** *Pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ , trouver  $\mathbf{u}_{d*} \in V(\Omega)$  tel que  $\forall \mathbf{v} \in V(\Omega)$  :*

$$k_b(\mathbf{u}_{d*}, \mathbf{v}) + k_s(\mathbf{u}_{d*}, \mathbf{v}) = f_b(\mathbf{v}) + f_s(\mathbf{v}) + f_i(\mathbf{v})$$

avec pour tous  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  de  $V(\Omega)$  :

$$\begin{aligned} k_b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= -\omega^2 \int_{\Omega_b} \rho_b \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} dV + \int_{\Omega_b} \boldsymbol{\sigma}_b(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\bar{\mathbf{v}}) dV \\ k_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= -\omega^2 \int_{\Omega_s} \rho_s \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} dV + \int_{\Omega_s} \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\bar{\mathbf{v}}) dV \\ f_b(\mathbf{v}) &= \langle \mathbf{f}_b, \mathbf{v} \rangle_{\Omega_b} \\ f_s(\mathbf{v}) &= \langle \mathbf{f}_s, \mathbf{v} \rangle_{\Omega_s} \\ f_i(\mathbf{v}) &= -\langle \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{d_i}), \bar{\mathbf{v}} \rangle_{\Gamma_{sf}} \end{aligned}$$

et avec la condition de raccord sur  $\Gamma_{sf}$  qui s'écrit :

$$[\mathbf{t}(\mathbf{u}_{d*})] = -\mathbf{t}_s(\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{d_i})$$

$\mathbf{u}_i$  est le champ incident libre imposé (voir la section §2.1.2) et  $\mathbf{u}_{d_i}$  est le champ diffracté local défini en (2.35) ;  $\mathbf{f}_b$  et  $\mathbf{f}_s$  sont les champs de forces volumiques extérieures éventuellement imposés dans  $\Omega_b$  et  $\Omega_s$  respectivement. Dans le chapitre §2, le problème de transmission ci-dessus est écrit en terme d'opérateur sous la forme :

$$-\mathcal{K}\mathbf{u}_{d*} = \mathbf{f}'$$

avec  $\mathcal{K} \in \mathcal{L}(V(\Omega), V'(\Omega))$  défini par :

$$\begin{aligned} -\langle \mathcal{K}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} &= k_b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + k_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ &= k_{\Omega}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V(\Omega) \times V(\Omega) \end{aligned}$$

et  $\mathbf{f}' \in V'(\Omega)$  défini par :

$$\langle \mathbf{f}', \mathbf{v} \rangle_{\Omega} = f_b(\mathbf{v}) + f_s(\mathbf{v}) + f_i(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega)$$

Enfin dans les développements qui suivent la forme sesqui-linéaire  $k_b$  sera décomposée classiquement en termes de masse  $m_b$ , raideur  $k_b^e$  et dissipation  $c_b$ , telles que  $k_b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\omega^2 m_b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + i\omega c_b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + k_b^e(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  avec pour tous  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  de  $V(\Omega_b)$  :

$$\begin{aligned} m_b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega_b} \rho_b \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} dV \\ k_b^e(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega_b} \boldsymbol{\sigma}_b^e(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\bar{\mathbf{v}}) dV \\ c_b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega_b} \eta \boldsymbol{\sigma}_b^e(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\bar{\mathbf{v}}) dV \end{aligned}$$

où l'amortissement visqueux  $\eta$  pour la structure a été introduit au paragraphe §2.2.4, Eq.(2.29). Les formes sesqui-linéaires  $m_b$ ,  $k_b^e$  et  $c_b$  sont hermitiennes, définies positives et continues sur  $V_0(\Omega_b) \times V_0(\Omega_b)$  ;  $k_b^e$  et  $c_b$  sont également  $V_0(\Omega_b)$ -coercives ; dans  $V(\Omega_b)$ ,  $k_b^e$  et  $c_b$  sont seulement positives. La forme sesqui-linéaire  $k_s$  sera quant à elle décomposée en termes de masse  $m_s$ , raideur  $k_s^e$  et dissipation  $c_s$ , telles que  $k_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\omega^2 m_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + i c_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + k_s^e(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  avec pour tous  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  de  $V(\Omega_s)$  :

$$\begin{aligned} m_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega_s} \rho_s \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} dV \\ k_s^e(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega_s} \boldsymbol{\sigma}_s^e(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\bar{\mathbf{v}}) dV \\ c_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega_s} 2\beta \boldsymbol{\sigma}_s^e(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\bar{\mathbf{v}}) dV \end{aligned}$$

$m_s$ ,  $k_s^e$  et  $c_s$  sont hermitiennes, définies positives et continues sur  $V(\Omega_s) \times V(\Omega_s)$ .



**remarque 4.1** – Si l'on tient compte d'une perturbation des modules du sol sur un sous-domaine  $\Omega_d \subset \Omega$  borné du sol telle que modélisée à la section §3.2.1, alors  $\mathcal{K}$  est décomposé de la manière suivante :

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 + \mathfrak{d}\mathcal{K}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

où  $\mathcal{K}_0$  est relatif au domaine couplé structure-sol non perturbé dit *domaine composite de référence* et  $\mathfrak{d}\mathcal{K}$  est relatif à la zone perturbée  $\Omega_d$  pour les fluctuations des paramètres mécaniques introduites. Dans toute la suite de cette section, on suppose que ces fluctuations sont nulles auquel cas  $\mathcal{K} \equiv \mathcal{K}_0$  ■

### Sous-structuration dynamique

Le principe de la méthode de sous-structuration est de reformuler le problème global de transmission (2.38) en un problème global posé uniquement sur les interfaces entre les sous-domaines, et des problèmes locaux à chaque sous-domaine. L'inconnue est le champ sur les interfaces, soit  $\mathbf{u}$  dans  $V(\Gamma_{sf})$  pour la sous-structuration dynamique soit dans  $V'(\Gamma_{sf})$  pour la sous-structuration cinématique. (et on écrit alors l'équilibre au sens faible de  $\mathbf{u}$  sur  $\Gamma_{sf}$ ). Ici on donnera une formulation par sous-structuration dynamique conforme. Soit donc  $\Phi \in V(\Gamma_{sf})$  arbitraire, le problème de transmission sur  $\Omega$  pour le champ total  $\mathbf{u}$  est réécrit sous la forme de deux problèmes aux limites :

**Problème 4.2** Trouver  $\mathbf{u}_b(\Phi)$  tel que :

$$\begin{cases} -\mathbf{Div} \sigma_b(\mathbf{u}_b) - \rho_b \omega^2 \mathbf{u}_b = \mathbf{f}_b & \text{dans } \Omega_b \\ \mathbf{t}_b(\mathbf{u}_b) = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{ba} \\ \mathbf{u}_b = \Phi & \text{sur } \Gamma_{sf} \end{cases}$$

et

**Problème 4.3** Trouver  $\mathbf{u}_s(\Phi)$  tel que :

$$\begin{cases} -\mathbf{Div} \sigma_s(\mathbf{u}_s) - \rho_s \omega^2 \mathbf{u}_s = \mathbf{f}_s + \mathbf{f}_i & \text{dans } \Omega_s \\ \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_s) = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{sa} \\ \mathbf{u}_s = \Phi & \text{sur } \Gamma_{sf} \\ (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_i) \text{ vérifie (2.31)} \end{cases}$$

$\mathbf{f}_i$  est le champ de forces caractérisant les différentes sources sismiques, dont le champ incident  $\mathbf{u}_i$ , et caractérisé à la section §2.1.2. Enfin le couplage est assuré par la condition d'équilibre dynamique suivante, pour les champs de déplacement totaux  $\mathbf{u}_b$  et  $\mathbf{u}_s$  respectivement dans la structure et le sol :

$$\mathbf{t}_b(\mathbf{u}_b(\Phi)) + \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_s(\Phi)) = \mathbf{0} \quad (4.4)$$

Une telle décomposition suppose que l'on est capable de vérifier de façon "exacte" la condition de raccord cinématique  $\mathbf{u}_b(\Phi) = \mathbf{u}_s(\Phi) = \Phi$  sur l'interface  $\Gamma_{sf}$ . S'il existe donc des champs cinématiquement admissibles satisfaisant *a priori* cette condition, on réécrit l'équation d'équilibre dynamique ci-dessus sous sa forme faible :

**Problème 4.5** Trouver  $\Phi = \gamma \mathbf{u}_b = \gamma \mathbf{u}_s \in V(\Gamma_{sf})$  tel que :

$$\int_{\Gamma_{sf}} [\mathbf{t}_b(\mathbf{u}_b(\Phi)) + \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_s(\Phi))] \cdot \Psi \, dS = 0, \quad \forall \Psi \in V(\Gamma_{sf})$$

où  $\gamma$  désigne la trace sur la frontière  $\Gamma_{sf}$  (voir la définition en Annexe A). La détermination du champ total  $\mathbf{u}$  – ou du champ rayonné total  $\mathbf{u}_{d*}$  – par la formulation variationnelle conforme du problème (4.1) ci-dessus impose donc la résolution de deux problèmes locaux dans le sol et la structure, traduisant l'équilibre à l'intérieur de ces sous-domaines, et la résolution d'un problème global posé sur  $\Gamma_{sf}$  et traduisant l'équilibre dynamique global entre les sous-domaines. Les problèmes locaux et le problème global sont découplés, dans la mesure où l'on est conduit à introduire les relèvements élastodynamiques permettant de faire correspondre à un champ défini sur l'interface un champ équilibré à l'intérieur de chacun des sous-domaines. Notons que cette dernière procédure a déjà été mise en oeuvre dans le chapitre §2 pour le relèvement du champ incident imposé dans le sous-domaine sol et permet de ramener son action à une force induite imposée sur l'interface seulement (c'est la forme anti-linéaire  $f_i$ ).

#### 4.1.2 Problèmes locaux

On s'intéresse donc dans un premier temps aux problèmes locaux posés sur chacun des sous-domaines structure et sol et aux conditions d'existence d'une solution correspondante. On donne d'abord les définitions des champs qui vont permettre de construire ces solutions. Dans le cas des domaines bornés, il est classique de les projeter sur une base de modes propres bien que d'autres approches soient toujours possibles. On choisit donc de présenter ici cette technique.

**Définition 4.6 (relèvement élastodynamique)** Soit  $\Phi \in V(\Gamma_{sf})$ . On appelle *relèvement élastodynamique* de  $\Phi$  dans  $\Omega_\alpha$ ,  $\alpha = b, s$ , un champ  $\mathbf{u}^\alpha(\Phi) \in V(\Omega_\alpha)$  tel que  $\forall \omega \in \mathbb{R}$  :

$$k_\alpha(\mathbf{u}^\alpha(\Phi), \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V_0(\Omega_\alpha)$$

avec  $\gamma \mathbf{u}^\alpha(\Phi) = \Phi$ .

Notamment un champ élastodynamique (correspondant à des forces de volume nulles) peut toujours apparaître sous la forme d'un relèvement élastodynamique (théorème de trace (A.1)); la réciproque est fautive en général car un relèvement élastodynamique ne vérifie pas nécessairement des conditions aux limites homogènes sur  $\partial\Omega_\alpha/\Gamma_{sf}$ .

**Définition 4.7 (relèvement élastostatique)** Soit  $\Phi \in V(\Gamma_{sf})$ . On appelle *relèvement élastostatique* de  $\Phi$  dans  $\Omega_\alpha$ ,  $\alpha = b, s$ , un champ  $\mathbf{u}_o^\alpha(\Phi) \in V(\Omega_\alpha)$  tel que :

$$k_\alpha^e(\mathbf{u}_o^\alpha(\Phi), \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V_0(\Omega_\alpha)$$

avec  $\gamma \mathbf{u}_o^\alpha(\Phi) = \Phi$ .

Les modes propres sur base fixe constituent une base de  $V_0(\Omega_b)$  et seront normalisés par rapport à la masse.

**Définition 4.8 (mode propre)** Les *modes propres sur base fixe* de  $\Omega_b$  sont les champs  $\{\varphi_{Al}^b \in V_0(\Omega_b); A \in \mathbb{N}^*, l = 1, \dots, n_A\}$  solutions du problème conservatif : trouver les couples  $(\varphi_{Al}^b, \omega_A)$ ,  $A \in \mathbb{N}^*, l = 1, \dots, n_A$  tels que

$$\begin{cases} \text{Div } \sigma_b^e(\varphi_{Al}^b) + \rho_b \omega_A^2 \varphi_{Al}^b = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_b \\ \mathbf{t}_b(\varphi_{Al}^b) = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{ba} \\ \varphi_{Al}^b = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{sf} \\ m_b(\varphi_{Al}^b, \varphi_{Bm}^b) = \delta_{AB} \delta_{lm} \end{cases}$$

où  $\sigma_b$  est réduit à sa partie non dissipative :  $\sigma_b^e(\varphi_{Al}^b) = \mathbf{D}_b^e : \epsilon(\varphi_{Al}^b)$  ;  $n_A$  est l'ordre de multiplicité de la pulsation propre  $\omega_A$ .

Leur existence est donnée par les résultats de la théorie spectrale [52]. Par la suite, et afin d'alléger les notations, on comptera tous les modes (y compris ceux associés aux fréquences propres multiples s'il y en a) avec l'indice  $A$ , en admettant que  $\omega_A = \omega_B$  éventuellement, sauf lorsque le double indiçage est nécessaire. Par ailleurs de la condition de normalisation on déduit  $k_b^e(\varphi_A^b, \varphi_B^b) = \omega_A^2 \delta_{AB}$  et  $c_b(\varphi_A^b, \varphi_B^b) = 2\zeta_A \omega_A \delta_{AB}$  avec classiquement par définition du taux d'amortissement critique  $\zeta_A = \frac{\eta}{2\omega_A}$ , si toutefois il y a lieu de tenir compte d'un amortissement visqueux proportionnel dans la structure. Dans toute cette section on suppose  $\eta \neq 0$  ; le cas  $\eta = 0$  est détaillé en Annexe D. L'existence d'un relèvement élastodynamique dans le domaine structure borné est établie à partir des résultats classiques d'existence et d'unicité pour le problème de Dirichlet intérieur avec dissipation [46, 52]. L'existence d'un relèvement élastodynamique dans le domaine sol non borné est quant à elle établie à partir des résultats classiques d'existence et d'unicité pour le problème de Dirichlet extérieur [46, 52]. On résume ces résultats dans le théorème suivant :

**Théorème 4.9** *Soit  $\Phi \in V(\Gamma_{sf})$ . Alors il existe un unique relèvement élastodynamique  $\mathbf{u}^\alpha(\Phi)$  dans  $V(\Omega_\alpha)$ .*

Afin de pouvoir relever également les chargements volumiques  $\mathbf{f}_b$  et  $\mathbf{f}_s$  imposés dans chacun des sous-domaines, on introduit les champs locaux  $\mathbf{u}_b^f$  et  $\mathbf{u}_s^f$  solutions des problèmes :

**Définition 4.10 (champs locaux)** *Pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ , trouver  $\mathbf{u}_\alpha^f \in V_0(\Omega_\alpha)$  tel que :*

$$k_\alpha(\mathbf{u}_\alpha^f, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}_\alpha, \mathbf{v} \rangle_{\Omega_\alpha}, \quad \forall \mathbf{v} \in V_0(\Omega_\alpha)$$

Pour la structure et le sol, l'existence et l'unicité des champs locaux dans  $V_0(\Omega_\alpha)$  sont données par le théorème (4.9) ci-dessus, dans le cas avec second membre.

### 4.1.3 Recomposition sur un domaine

Une fois connue le champ d'interface  $\Phi$  par la résolution du problème global de couplage entre les sous-domaines (voir section suivante), le champ des déplacements rayonnés totaux sur chaque sous-domaine est recomposé suivant :

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{u}_b^f + \mathbf{u}^b(\Phi) \quad (4.11)$$

pour la structure, et :

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{di} + \mathbf{u}_s^f + \mathbf{u}^s(\Phi) \quad (4.12)$$

pour le sol,  $\mathbf{u}_{di}$  étant le relèvement du champ incident  $\mathbf{u}_i$  défini en (2.35).

### 4.1.4 Problème couplé sur l'interface

Afin de déterminer effectivement l'inconnue  $\Phi$ , il convient d'imposer maintenant la réciprocity des contraintes sur l'interface  $\Gamma_{sf}$ . Pour cela, on utilise les champs locaux et relèvements élastodynamiques définis précédemment à partir d'un tel champ, et on introduit les opérateurs d'impédance et de force induite qui traduisent respectivement l'action d'un sous-domaine sur son interface avec l'autre sous-domaine, et l'action des sollicitations imposées dans un sous-domaine sur cette interface.

### Impédances d'interface

On définit dans un premier temps les impédances d'interface pour chacun des sous-domaines.

**Définition 4.13** *L'impédance dynamique d'interface du sous-domaine  $\Omega_\alpha$  vis-à-vis de l'interface  $\Gamma_{sf}$  est  $\forall \omega \in \mathbb{R}$  :*

$$\kappa_\alpha(\Phi, \Psi) = \langle \mathbf{t}_\alpha(\mathbf{u}^\alpha(\Phi)), \Psi \rangle_{\Gamma_{sf}}.$$

### Forces induites

Parallèlement aux impédances dynamiques d'interface, on peut définir les forces induites sur l'interface liées aux champs locaux.

**Définition 4.14** *La force induite par le sous-domaine  $\Omega_\alpha$  sur l'interface  $\Gamma_{sf}$  est  $\forall \omega \in \mathbb{R}$  :*

$$\phi_\alpha(\Psi) = - \langle \mathbf{t}_\alpha(\mathbf{u}_\alpha^f), \Psi \rangle_{\Gamma_{sf}}.$$

### Equilibre de l'interface

Avec les définitions précédentes, le problème variationnel global (4.1) posé uniquement en terme de champs d'interface s'écrit maintenant :

**Problème 4.15** *Trouver  $\Phi \in V(\Gamma_{sf})$  tel que :*

$$\kappa_b(\Phi, \Psi) + \kappa_s(\Phi, \Psi) = \phi_b(\Psi) + \phi_s(\Psi) + \phi_i(\Psi), \quad \forall \Psi \in V(\Gamma_{sf})$$

avec la forme linéaire  $\phi_i(\Psi) = f_i(\bar{\Psi})$  pour tout  $\Psi \in V(\Gamma_{sf})$ .

Quelques remarques sur l'existence et l'unicité d'une solution pour ce problème sont donnés dans la thèse de Clouteau [40].

#### 4.1.5 Solution approchée

On présente ici quelques éléments pour la construction d'une solution approchée du problème (4.15) ci-dessus.  $\Phi$  est dans un premier temps projeté dans un sous-espace de dimension finie de  $V(\Gamma_{sf})$  noté  $V_P(\Gamma_{sf})$ ; ainsi on introduit  $\{\Phi_p\}_{1 \leq p \leq P}$  une famille de fonctions linéairement indépendantes de  $V(\Gamma_{sf})$ ,  $V_P(\Gamma_{sf}) = \text{Vect}\{\Phi_1, \dots, \Phi_P\}$  de dimension  $P \geq 1$ , et l'on a une approximation  $\tilde{\Phi}$  de  $\Phi$  dans cet espace qui s'écrit :

$$\tilde{\Phi} = \sum_{p=1}^P c_p \Phi_p \tag{4.16}$$

Les coordonnées généralisées  $\mathbf{c} = \{c_1, \dots, c_P\}$ , à valeurs complexes, sont obtenues par la méthode de projection de Ritz-Galerkin de la formulation variationnelle du problème (4.15). Nous en déduisons pour ces coefficients le système linéaire suivant :

$$[\mathbf{K}_b + \mathbf{K}_s] \{\mathbf{c}\} = \{\mathbf{F}_b\} + \{\mathbf{F}_s\} + \{\mathbf{F}_i\} \tag{4.17}$$

où pour  $p, q \in \{1, 2 \dots P\}$ ,  $\alpha = b, s$  ou  $\mathfrak{f}$  :

$$[\mathbf{K}_\alpha]_{pq} = \kappa_\alpha(\Phi_q, \Phi_p) \quad (4.17a)$$

$$F_{\alpha,p} = \phi_\alpha(\Phi_p) \quad (4.17b)$$

Le calcul des impédances dynamiques d'interface projetées dans  $V_P(\Gamma_{sf})$  nécessite le calcul des contraintes sur  $\Gamma_{sf}$  associées aux relèvements  $\mathbf{u}^\alpha(\Phi_p)$ , ou alternativement, avec la définition (4.6), le calcul d'intégrales posées sur le volume des sous-domaines. Dans la suite de ce travail, on envisagera deux méthodes distinctes pour ce calcul :

- pour le domaine sol non borné, on utilisera une méthode d'équation intégrale de frontière qui permettra de calculer directement  $\mathbf{t}_s(\mathbf{u}^s(\Phi_p))$  connaissant  $\Phi_p$  sur  $\Gamma_{sf}$ , et ainsi d'assembler l'impédance dynamique de bord du sol par l'Eq.(4.13) (voir le chapitre §5) ;
- pour le domaine structure borné, on cherchera une approximation  $\tilde{\mathbf{u}}_b$  de la solution  $\mathbf{u}_b$  dans  $\Omega_b$  sur une base de fonctions cinématiquement admissibles locales  $\{\varphi_A^b\}_{1 \leq A \leq N_A}$  (les modes propres sur base fixe de la structure tronqués au rang  $N_A$ ) sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{u}}_b = \mathbf{u}^b(\tilde{\Phi}) + \sum_{A=1}^{N_A} \alpha_A(\tilde{\Phi}) \varphi_A^b$$

où  $\mathbf{u}^b(\tilde{\Phi})$  est un relèvement régulier de  $\tilde{\Phi}$  et les coefficients  $\alpha_A$  sont obtenus en écrivant l'équilibre de la structure au sens des travaux virtuels, une fois connu  $\tilde{\Phi}$ .

Concernant la première méthode, les équations intégrales de frontière utilisées ainsi que leurs discrétisations seront abordées dans la section §5.1. La connaissance d'une solution fondamentale, ou fonction de Green [52], pour le demi-espace sol non borné s'avèrera nécessaire. Concernant la seconde méthode, il est classique dans les méthodes de synthèse modale, par exemple l'approche par sous-structuration proposée par Craig & Bampton [50], de décomposer  $\tilde{\mathbf{u}}_b$  sur une base de modes propres sur base fixe, et sur les  $\{\mathbf{u}_o^b(\Phi_p)\}_{1 \leq p \leq P}$  choisis comme étant les relèvements *élastostatiques* des  $\{\Phi_p\}_{1 \leq p \leq P}$  dans  $\Omega_b$ . En particulier, les modes de corps rigide, permettant de tenir compte des effets d'inertie, sont des combinaisons linéaires de ces modes. Le champ  $\tilde{\mathbf{u}}_b$  est donc décomposé sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{u}}_b = \sum_{p=1}^P c_p \mathbf{u}_o^b(\Phi_p) + \sum_{A=1}^{N_A} \alpha_A \varphi_A^b \quad (4.18)$$

### Impédance d'interface et force induite projetées de la structure

L'impédance dynamique d'interface de la structure projetée sur ces modes  $[\mathbf{K}_b]$  s'écrit alors pour  $p, q \in \{1, 2 \dots P\}$  :

$$[\mathbf{K}_b]_{pq} = k_b(\mathbf{u}_o^b(\Phi_q), \mathbf{u}_o^b(\Phi_p)) - \omega^2 \left( \sum_{A=1}^{N_A} \frac{\omega^2}{\omega_A^2 - \omega^2 + 2i\zeta_A \omega \omega_A} m_b(\varphi_A^b, \mathbf{u}_o^b(\Phi_p)) m_b(\varphi_A^b, \mathbf{u}_o^b(\Phi_q)) \right) \quad (4.19)$$

et la force induite correspondante  $\{\mathbf{F}_b\}$  :

$$F_{b,p} = -f_b(\mathbf{u}_o^b(\Phi_p)) + \sum_{A=1}^{N_A} \frac{\omega^2}{\omega_A^2 - \omega^2 + 2i\zeta_A\omega\omega_A} m_b(\varphi_A^b, \mathbf{u}_o^b(\Phi_p)) f_b(\varphi_A^b) \quad (4.20)$$

en remarquant que les modes propres  $\{\varphi_A^b\}_{1 \leq A \leq N_A}$  et les “modes statiques”  $\{\mathbf{u}_o^b(\Phi_p)\}_{1 \leq p \leq P}$  de la structure sont orthogonaux pour le produit scalaire de  $V_0(\Omega_b)$  induit par  $k_b^e$  (par application de la définition (4.7)). Les modes propres et “modes statiques” structuraux, ainsi que les facteurs de participation :

$$m_b(\varphi_A^b, \mathbf{u}_o^b(\Phi_q))$$

qui vérifient :

$$-\omega_A^2 m_b(\varphi_A^b, \mathbf{u}_o^b(\Phi_q)) = \langle \mathbf{t}_b(\varphi_A^b), \Phi_q \rangle_{\Gamma_{sf}}$$

sont construits numériquement par une discrétisation spatiale de  $\Omega_b$  du type éléments finis usuels.

**remarque 4.2** – Dans l’expression (4.17), les coordonnées généralisées  $\boldsymbol{\alpha}(\omega) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{N_A}\}$  ont été condensées sur l’interface  $\Gamma_{sf}$ . Elles s’écrivent :

$$\alpha_A(\tilde{\Phi}) = \frac{1}{\omega_A^2 - \omega^2 + 2i\zeta_A\omega\omega_A} \left( \omega^2 m_b(\varphi_A^b, \mathbf{u}_o^b(\tilde{\Phi})) + f_b(\varphi_A^b) \right)$$

pour  $A \in \{1, 2, \dots, N_A\}$  ■

**remarque 4.3** – En partant d’une formulation variationnelle du problème local (4.2) relatif à la structure, et en y injectant la projection de l’Eq.(4.18), on montre que :

$$[\mathbf{K}_b]_{pq} = k_b^e(\mathbf{u}_o^b(\Phi_q), \mathbf{u}_o^b(\Phi_p)) - \omega^2 \left( \sum_{A=1}^{N_A} \frac{\omega_A^2 + 2i\zeta_A\omega\omega_A}{\omega_A^2 - \omega^2 + 2i\zeta_A\omega\omega_A} m_b(\varphi_A^b, \mathbf{u}_o^b(\Phi_p)) m_b(\varphi_A^b, \mathbf{u}_o^b(\Phi_q)) \right)$$

Dans [51] est présentée une méthode numérique permettant d’assembler la matrice  $[\mathbf{K}_b]$  en s’affranchissant du calcul des “modes statiques”, et adaptable à des architectures parallèles. Néanmoins celui-ci reste nécessaire en vue de la recombinaison de  $\tilde{\mathbf{u}}_b$  par l’Eq.(4.18) ■

### Impédance dynamique d’interface projetée du sol

L’impédance dynamique d’interface du sol projetée sur les  $\{\Phi_p\}_{1 \leq p \leq P}$ , soit  $[\mathbf{K}_s]$ , s’écrit d’après l’Eq.(4.13) sous la forme, pour  $p, q \in \{1, 2, \dots, P\}$  :

$$[\mathbf{K}_s]_{pq} = \langle \mathbf{t}_s(\mathbf{u}^s(\Phi_q)), \Phi_p \rangle_{\Gamma_{sf}} = \langle \mathbf{t}_s(\mathbf{u}^s(\Phi_p)), \Phi_q \rangle_{\Gamma_{sf}} \quad (4.21)$$

et est donc symétrique.

## 4.2 Couplage avec une hétérogénéité

La méthode de sous-structuration dynamique classique présentée dans la section précédente pour le couplage des deux sous-domaines sol  $\Omega_s$  et structure  $\Omega_b$ , peut être étendue à une analyse multi-domaines. Nous pourrions ainsi envisager de traiter la zone hétérogène bornée du sol  $\Omega_d$  par cette approche, celle-ci étant alors couplée aux deux autres sous-domaines - le sol sans perturbation  $\Omega_s/\Omega_d$  et la structure - par sa frontière  $\partial\Omega_d$ . Le champ des déplacements dans  $\Omega_d$  est projeté sur une base type éléments finis <sup>(1)</sup>, ainsi que les opérateurs de masse, raideur et dissipation pour le domaine  $\Omega_d$ , et l'opérateur d'impédance dynamique de l'interface  $\partial\Omega_d$ . Pour des perturbations  $\mathbf{p}_d$  complexes, aléatoires, cette dernière opération s'avère extrêmement coûteuse et mal adaptée. On peut néanmoins citer à ce stade les travaux récents de Papadarakakis & Kotsopoulos [162] en vue d'un assemblage optimum tirant profit des techniques de parallélisation. Une autre difficulté, propre aux équations intégrales utilisées pour l'évaluation de l'impédance de frontière du domaine sol non borné (voir le chapitre §5 suivant), est le calcul des termes fortement singuliers qui interviennent dans l'expression de certains opérateurs intégraux, d'autant plus difficiles à évaluer correctement si l'on utilise une fonction de Green connue uniquement numériquement (comme ce sera le cas par la suite pour le demi-espace sol stratifié sans perturbation). Enfin l'équation d'équilibre de l'interface  $\Gamma_{sf} \cup \partial\Omega_d$  obtenue par cette méthode (Eq.(4.15)) se prête mal à un traitement probabiliste générique de la forme de l'Eq.(3.44) (réduction, §3.2.2, et représentations de la solution filtrée réduite du second ordre, §3.2.3).

Dans cette section, nous proposons donc une méthode originale de couplage par sous-structuration du système sol-structure non perturbé avec la zone perturbée bornée. Elle est fondée sur la connaissance de l'opérateur de réponse en fréquence, ou *souplesse dynamique*, noté  $\mathbf{U}_0$  pour le domaine composite sol-structure sans perturbation. Si l'objectif est ici de pouvoir traiter efficacement une hétérogénéité du sol de nature aléatoire, on peut néanmoins noter que dans le cadre général présenté aux chapitres §2 et §3, où le système sol-structure complet est analysé, il est possible de prendre en compte, par la même approche, une hétérogénéité aléatoire de la structure. L'extension à l'analyse multi-domaines est également possible, mais ne sera pas abordée dans ce travail.

Après avoir introduit quelques définitions et notations, on propose ainsi dans cette section une extension à des volumes du principe de sous-structuration présenté en §4.1.1. Puis l'on en déduit une nouvelle formulation du problème aux limites considéré en (i) deux problèmes locaux et (ii) un problème global imposant au sens faible la compatibilité des solutions des problèmes locaux sur leur zone de recouvrement, c'est-à-dire la partie du sol où est modélisée l'hétérogénéité. Cette approche conduit à la résolution d'un système hybride mixte qui est ensuite reformulé dans l'espace dual pour le "sous-domaine" de référence non perturbé afin d'exploiter les résultats du chapitre §3. Une approche conforme permet de simplifier le nouveau système ainsi obtenu, et l'on donne enfin quelques éléments pour la construction d'une solution approchée en dimension finie.

---

<sup>1</sup>On pourrait aussi envisager sa projection sur un sous-espace engendré par des relèvements élastodynamiques du type de ceux introduits en §4.1.4 et construits par une représentation intégrale à condition de connaître une fonction de Green pour  $\Omega_d$ . Dans la pratique, celle-ci n'est connue que pour des cas simples (domaines homogènes, stratifiés ou certaines configurations particulières [131, 146, 147, 218]) et cette approche n'a ainsi que peu d'intérêt pour les problèmes que l'on se propose de traiter ici.

### 4.2.1 Notations et définitions

La méthodologie présentée ici peut être développée dans le cadre général d’une formulation multi-domaine comme pour la méthode de sous-structuration plus classique de la section précédente (Clouteau [40]). Néanmoins on se limitera dans cette section à l’étude du couplage entre deux sous-domaines : le domaine composite de référence structure-sol non perturbé, et la zone bornée du sol sur laquelle sont définies les perturbations de ses paramètres mécaniques. Leurs définitions respectives sont données au chapitre §3 à la section §3.2.1 et l’on reprend ici les notations des FIG. 4.1 et FIG. 3.1. On considère donc le domaine ouvert non borné  $\Omega_0$ , de frontière non bornée notée  $\Gamma$ . Il est plongé dans un milieu élastique donné dont on connaît les paramètres mécaniques (tenseur d’élasticité et densité) notés comme à la section §3.2.1  $\mathbf{p}_0(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega_0$  <sup>(2)</sup>.  $\Omega_0$  sera appelé dans toute la suite, et comme déjà introduit brièvement aux sections §3.2.1 et §4.1.1, *domaine composite de référence* ou *domaine de référence*. On considère également la même région notée  $\Omega$  pour laquelle les paramètres mécaniques sont modifiés en  $\mathbf{p}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} (\lambda, \mu, \rho) = \mathbf{p}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{p}_d(\mathbf{x})$  sur un sous-domaine  $\Omega_d$  de  $\Omega_0$ .  $\Omega$  sera quant à lui appelé *domaine réel*, et ne se différenciera de  $\Omega_0$  que par les valeurs des paramètres mécaniques. Grâce à ce choix de la définition des paramètres mécaniques perturbés du sol, l’opérateur associé est linéaire vis-à-vis de cette perturbation. Sur la surface  $\Gamma_a \stackrel{\text{déf}}{=} \Gamma_{ba} \cup \Gamma_{sa}$  est imposée une condition aux limites de surface libre (Neumann homogène). On note alors  $\Gamma_{\partial d} = \partial\Omega_d \cap \Gamma_a$ , cette surface pouvant éventuellement être l’ensemble vide (voir FIG. 4.2), et conventionnellement  $\Gamma_{s\infty}$  la surface du sol “à l’infini”. On a ainsi formellement “ $\Gamma = \Gamma_a \cup \Gamma_{s\infty}$ ”. Enfin pour un vecteur-contrainte évalué avec ces paramètres, nous utiliserons la convention d’indice 0 ou d suivant que l’on considère les modules du domaine sans perturbation ou de la perturbation seule. Comme à la section

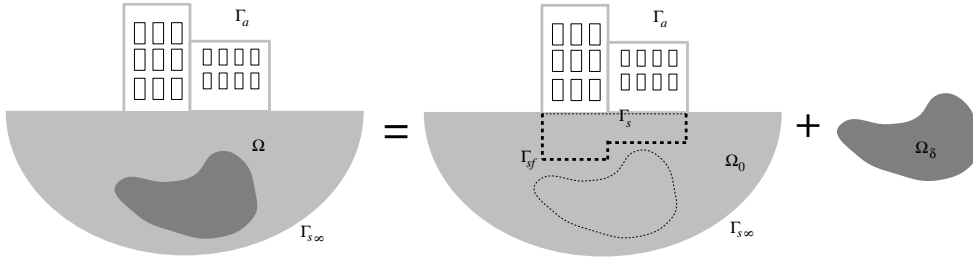


FIG. 4.2 – Domaine hétérogène complexe, notations.

§3.2.1, si l’hétérogénéité  $\Omega_d$  est de nature aléatoire, alors la perturbation  $\mathbf{p}_d$  est modélisé par un champ stochastique  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  défini sur l’espace probabilisé  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$  lui-même défini en Annexe A, du second ordre et centré, indexé sur  $\Omega_d$  à valeurs dans  $\mathbb{C}^3$ , non homogène, borné ( $P$ -p.s.). Ses propriétés sont les mêmes que celles introduites à la section §3.2.1.

Le problème aux limites à résoudre pour ce système complexe s’écrit :

**Problème 4.22** Soit  $\mathbf{f} \in [\mathcal{D}'(\Omega_0)]^3$ . Trouver  $\mathbf{u}$  tel que :

$$\begin{cases} -\text{Div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \rho \omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{t}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_a \\ \mathbf{u} \text{ vérifie (2.31) lorsque } \|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty \end{cases}$$

<sup>2</sup>à valeurs éventuellement complexes si l’on tient compte de la dissipation.



La normale  $\mathbf{n}$  sur  $\partial\Omega$  sera ici la normale extérieure à  $\Omega$ . Comme jusqu'à présent, il sera tenu compte de la dissipation dans  $\Omega$  ce qui assurera que les conditions de décroissance (2.31) sont satisfaites par les champs de  $V(\Omega)$  (ou  $V(\Omega_0)$ ).

### 4.2.2 Décomposition de domaine et sous-structuration

L'objectif de cette section est de donner une formulation de ce problème par sous-structuration permettant de construire sa solution numérique par éléments finis classiques sur  $\Omega_d$ , et équations intégrales et éléments finis de frontière sur  $\Omega_0$ . Nous proposons à cet effet une approche originale qui permet de s'affranchir de l'assemblage d'une matrice d'impédance de bord pour la zone hétérogène. Elle peut être vue comme une méthode de discrétisation de l'équation de Lippmann-Schwinger pour laquelle la perturbation des paramètres mécaniques est discrétisée par une méthode d'éléments finis usuelle tandis que la propagation dans le domaine de référence est traitée par une méthode d'équations intégrales. Cette approche a été choisie car elle constitue une extension naturelle de la méthode de sous-structuration présentée dans la section précédente à des "interfaces volumiques". Elle a été récemment mise en oeuvre pour la propagation des ondes acoustiques dans un milieu incluant une distribution aléatoire d'hétérogénéités (inclusions ou fissures à petite échelle) par Muijres *et al.* [155]. Elle s'apparente aux méthodes de domaines fictifs, ou "embedding methods" (Glowinski *et al.* [78]), qui consiste, pour des géométries complexes, à étendre la solution du problème aux limites recherchée à un domaine de géométrie plus simple en introduisant une nouvelle inconnue (typiquement un multiplicateur de Lagrange) afin de ne prendre en compte qu'au sens faible la condition aux limites imposée. On trouvera par exemple dans Joly *et al.* [101] une application récente au cas d'une fissure en élastodynamique transitoire. On notera également les similarités avec les méthodes proposées par Ben Dhia [58, 16] et Lions [135], dont nous nous inspirons pour certains éléments d'analyse mathématique de l'approche introduite ici.

#### Principe

Pour simplifier l'exposé, on suppose dans toute la suite que  $\Gamma_{\text{ext}} = \emptyset$ . Nous donnerons néanmoins, sous forme de remarques, les éléments nécessaires pour traiter le cas  $\Gamma_{\text{ext}} \neq \emptyset$ . Le problème (4.22) est réécrit sous la forme de deux problèmes couplés sur l'"interface" volumique généralisée  $\Sigma = \Omega_d$  par un champ  $\Phi$  dans  $H(\Sigma)$  arbitraire, par analogie avec les problèmes locaux (4.2) et (4.3) de la méthode de sous-structuration présentée à la section §4.1. Ainsi en notant  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}|_{\Omega_0}$  et  $\mathbf{u}_d = \mathbf{u}|_{\Omega_d}$  où  $\mathbf{u}$  est solution du problème (4.22) on se ramène à :

**Problème 4.23** *Pour tout champ de force  $\mathbf{f}$ , trouver  $\Phi$ ,  $\mathbf{u}_0(\Phi)$  et  $\mathbf{u}_d(\Phi)$  tels que :*

$$\begin{cases} -\text{Div } \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0) - \rho_0 \omega^2 \mathbf{u}_0 = \mathbf{f} + \Phi & \text{dans } \Omega_0 \\ \mathbf{t}_0(\mathbf{u}_0) = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_a \end{cases}$$

où  $\Gamma_a$  est orientée par la normale extérieure à  $\Omega_0$ ,

$$\begin{cases} -\text{Div } \boldsymbol{\sigma}_d(\mathbf{u}_d) - \rho_d \omega^2 \mathbf{u}_d = -\Phi & \text{dans } \Omega_d \\ \mathbf{t}_d(\mathbf{u}_d) = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega_d \end{cases}$$

où  $\partial\Omega_d$  est orientée par la normale extérieure à  $\Omega_d$ , et enfin :

$$\mathbf{u}_0(\Phi) - \pi_d^0 \mathbf{u}_d(\Phi) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Sigma$$

Remarquons que sur  $\partial\Omega_d$  les perturbations des modules du sol  $\mathbf{p}_d(\mathbf{x})$  sont nulles par définition ; d'où la condition  $\mathbf{t}_d(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$  sur  $\partial\Omega_d$ .  $\pi_d^0$  est l'opérateur de jonction [58] défini comme suit : pour tout  $\mathbf{v}$  dans  $V(\Omega_d)$ ,  $\pi_d^0\mathbf{v}$  est sa projection orthogonale, au sens du produit scalaire  $L^2$ , dans l'espace des restrictions à  $\Omega_d$  des champs de  $V(\Omega_0)$ , noté  $V(\Omega_0|\Omega_d)$ . En dimension infinie, dans le cadre continu, l'opérateur de jonction est égal à l'identité, par contre ce ne sera plus le cas en dimension finie, notamment pour la discrétisation du problème variationnel (4.24) ci-dessous. Notons enfin que le champ d'interface  $\Phi$  est ici un champ de force volumique, contrairement à celui de la section précédente qui est un champ de déplacement. L'objectif de cette section est de donner une formulation variationnelle de ce problème éliminant l'inconnue  $\mathbf{u}_0$  afin de pouvoir discrétiser  $\Phi$  et  $\mathbf{u}_d$  sur  $\Omega_d$  uniquement.

### Approche formelle

Pour cela, on commence par réécrire le problème (4.23) ci-dessus sous forme variationnelle, ce qui conduit au problème (4.24) ci-dessous. Formellement, il peut être résolu de la manière suivante. La solution du premier problème local relatif au sous-domaine composite de référence  $\Omega_0$  est construite à partir des résultats du chapitre §2. On y a en effet établi l'existence d'un opérateur de souplesse noté  $\mathcal{U}_0$  tel que l'on peut écrire  $\mathbf{u}_0(\Phi) = \mathcal{U}_0\mathbf{f} + \mathcal{U}_0\Phi$ . En introduisant  $\mathcal{U}_0$  dans la formulation variationnelle (4.24) de (4.23), on obtient le problème (4.28) ci-dessous. La solution du deuxième problème local relatif au sous-domaine  $\Omega_d$  peut elle être construite de deux manières :

- par une méthode d'éléments finis usuelle, conduisant à un système de la forme  $-\mathfrak{d}\mathcal{K}\mathbf{u}_d = -\Phi$ . Les expressions obtenues pour  $\mathbf{u}_0$  et  $\mathbf{u}_d$  sont ensuite injectées dans l'équation de compatibilité  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_d$  écrite au sens faible sur l'interface  $\Sigma$  pour en déduire le champ de force inconnu  $\Phi$  équilibrant les deux sous-domaines. Néanmoins cette approche n'est pas applicable dans le cas général car  $\mathfrak{d}\mathcal{K}$  correspond à une perturbation, donc est un opérateur sans signature éventuellement nul, auquel cas le système  $-\mathfrak{d}\mathcal{K}\mathbf{u}_d = -\Phi$  n'est pas inversible ;
- en revenant à une équation de Lippmann-Schwinger, on peut réécrire le problème local dans  $\Omega_0$  sous la forme :

$$\mathcal{U}_0 (\text{Div}\sigma_d(\mathbf{u}_d) + \rho_d\omega^2\mathbf{u}_d) = \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^f$$

d'inconnue  $\mathbf{u}_d$ . Sa résolution par une méthode de collocation n'est pas possible car elle exige le calcul de termes de la forme  $\int_{\Omega_d} \boldsymbol{\epsilon}(\mathcal{U}_0) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_d) dV$ , soit des déformations associées à  $\mathcal{U}_0$ , qui n'est pas abordable pratiquement compte-tenu de la complexité de cet opérateur. De plus le système obtenu dans ce cas est non symétrique, et pose les mêmes difficultés liées à l'inversibilité de  $\mathfrak{d}\mathcal{K}$  que dans le cas précédent.

La méthode retenue par la suite consiste à résoudre le problème local dans  $\Omega_d$  pour  $\mathbf{u}_d = \mathcal{U}_0\mathbf{f} + \mathcal{U}_0\Phi \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{u}_0^f + \mathcal{U}_0\Phi$ , soit en imposant la condition de compatibilité au sens fort. On obtient ainsi l'équation :

$$\Phi - (\text{Div}\sigma_d(\mathcal{U}_0\Phi) + \rho_d\omega^2\mathcal{U}_0\Phi) = \text{Div}\sigma_d(\mathbf{u}_0^f) + \rho_d\omega^2\mathbf{u}_0^f$$

d'inconnue  $\Phi$ . La difficulté liée à l'inversibilité de  $\mathfrak{d}\mathcal{K}$  est résorbée car maintenant le terme de fluctuation est une perturbation de l'opérateur identité. On intègre ensuite cette équation sous forme variationnelle en choisissant des champs tests de la forme  $\mathcal{U}_0\Psi$  afin d'obtenir un système symétrique d'une part, et de se ramener à des intégrales de termes très réguliers

ne nécessitant aucun effort d'intégration particulier, de la forme  $\int_{\Omega_d} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{U}_0 \boldsymbol{\Phi}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{U}_0 \boldsymbol{\Psi}) dV$ , d'autre part. Cette approche conduit au problème variationnel symétrique (4.30), avec la définition (4.32) lorsqu'on y intègre la réduction de l'opérateur de perturbation  $\mathfrak{d}\mathcal{K}$  présentée au chapitre §3 lorsque celui-ci est de nature aléatoire.

La démarche présentée ci-dessus est détaillée dans les paragraphes suivants, où l'on essaiera de conserver un certain degré d'abstraction mathématique. Les résultats présentés constituent une première tentative de justification de la méthode proposée, et à ce titre ne peuvent être considérés comme une étude complète. Les principales difficultés rencontrées sont liées à la définition du support des champs  $\boldsymbol{\Phi}$  et  $\boldsymbol{\Psi}$ , et à leur régularité. Le lecteur non intéressé par ces développements peut directement passer au chapitre suivant, où sont donnés les éléments nécessaires à la construction de l'opérateur de souplesse  $\mathbf{U}_0$ , qui constitue maintenant le principal effort numérique de cette formulation.

### Formulation variationnelle

L'équilibre des deux domaines  $\Omega_0$  et  $\Omega_d$  est réécrit au sens faible ainsi que la condition de raccord cinématique entre  $\mathbf{u}_0$  et  $\mathbf{u}_d$ . En reprenant les notations de la section §3.2.1, Eq.(3.42), et en notant  $f_0$  la forme anti-linéaire continue sur  $V(\Omega_0)$  définie par :

$$f_0(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_0} \mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}} d\mathbf{x} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega_0}$$

le problème (4.23) ci-dessus est résumé dans la formulation variationnelle hybride mixte ci-dessous :

**Problème 4.24** *Trouver  $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_d, \boldsymbol{\Phi}) \in V(\Omega_0) \times V(\Omega_d) \times V'(\Sigma)$  tels que :*

$$\begin{cases} k_0(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) & - \langle \boldsymbol{\Phi}, \mathbf{v}_0 \rangle_{\Sigma} & = & f_0(\mathbf{v}_0) \\ & k_d(\mathbf{u}_d, \mathbf{v}_d) & + \langle \boldsymbol{\Phi}, \pi_d^0 \mathbf{v}_d \rangle_{\Sigma} & = & 0 \\ - \langle \mathbf{u}_0, \boldsymbol{\Psi} \rangle_{\Sigma} & + \langle \pi_d^0 \mathbf{u}_d, \boldsymbol{\Psi} \rangle_{\Sigma} & = & 0 \end{cases}$$

pour tous  $(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_d, \boldsymbol{\Psi}) \in V(\Omega_0) \times V(\Omega_d) \times V'(\Sigma)$ .

Le produit d'anti-dualité sur  $V(\Sigma)$  est ici défini par :

$$\langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\Phi} \rangle_{\Sigma} = \int_{\Omega_d} \mathbf{u} \cdot \bar{\boldsymbol{\Phi}} d\mathbf{x}$$

### Souplesse dynamique et applications

L'inconvénient de cette formulation est qu'elle requiert la discrétisation du domaine  $\Omega_0$  non borné. Néanmoins nous savons d'après le chapitre §2 que la formulation variationnelle associée au problème local sur  $\Omega_0$  dans le problème couplé global (4.23) admet une unique solution dans  $V(\Omega_0)$ . Plus précisément, on a montré dans la section §2.3.3 que la forme bilinéaire  $k_0$  était continue et  $V(\Omega_0)$ -coercive. Par application du théorème de Lax-Milgram, on en déduit que l'opérateur d'impédance dynamique  $\mathcal{K}_0$  de  $\mathcal{L}(V(\Omega_0), V'(\Omega_0))$  tel que :

$$- \langle \mathcal{K}_0 \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega_0} = k_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (4.25)$$

est un isomorphisme de  $V(\Omega_0)$  sur  $V'(\Omega_0)$ . Il admet un inverse continu noté  $\mathbf{U}_0 \stackrel{\text{déf}}{=} [-\mathcal{K}_0]^{-1}$  dans  $\mathcal{L}(V'(\Omega_0), V(\Omega_0))$  et appelé ici souplesse dynamique.  $\mathcal{K}_0$  étant par ailleurs symétrique,

$\mathbf{u}_0$  le sera également. D'un point de vue pratique, cela signifie que pour résoudre le problème local relatif au domaine de référence  $\Omega_0$ , il est possible de remplacer les champs des déplacements par des champs de force dans  $V'(\Omega_0)$  par un simple changement de variable, puis de construire les déplacements correspondants à l'aide de l'opérateur  $\mathbf{u}_0$ . On verra par la suite que cet opérateur est un opérateur intégral dont on peut évaluer numériquement le noyau, l'intérêt étant alors de pouvoir s'affranchir de la discrétisation du domaine non borné  $\Omega_0$  par éléments finis en se limitant à la seule discrétisation de l'interface généralisée  $\Sigma$ , bornée. Ce dernier point constitue l'objectif principal des développements qui suivent.

On donne donc dans la section suivante diverses formulations du problème (4.24) utilisant l'opérateur de souplesse dynamique. Elles vont nous permettre d'en déduire une formulation variationnelle hybride mixte (section §4.2.4) et une formulation variationnelle duale (section §4.2.5) simplifiées du problème couplé global initial, posées uniquement sur l'interface  $\Sigma$  et donc numériquement abordables. Puis l'on donne leurs versions réduites pour la prise en compte d'une hétérogénéité aléatoire suivant la méthode de réduction développée au chapitre §3. Les propriétés mathématiques des différents opérateurs introduits – dont  $\mathbf{u}_0$  – intéressantes pour la discrétisation du problème de couplage considéré ici sont rassemblées dans la section §4.2.7, avec des éléments de démonstration. L'étude mathématique détaillée des formulations variationnelles obtenues dans cette section (existence et unicité d'une solution, stabilité, régularité, estimation d'erreur ...) dépasse le cadre de ce travail. Néanmoins nous nous sommes attachés à faire clairement apparaître, dans la mesure du possible, les principales difficultés associées et les éléments de réponse que nous avons pu obtenir.

**remarque 4.4** – Si  $\partial\Omega_d \cap \Gamma_a = \Gamma_{\sigma d} \neq \emptyset$ , alors l'interface généralisée  $\Sigma$  est définie par  $\Sigma = \Omega_d \cup \Gamma_{\sigma d}$ . Dans ce cas, les champs d'interface  $\Phi$  sont choisis arbitrairement dans  $V'(\Sigma) \stackrel{\text{déf}}{=} V'(\Omega_d) \times V'(\Gamma_{\sigma d})$  avec ainsi  $\Phi = (\phi, \tau)$ ,  $\phi \in V'(\Omega_d)$  et  $\tau \in V'(\Gamma_{\sigma d})$ . Le problème couplé global (4.23) est réécrit :

**Problème 4.26** *Trouver  $\Phi$ ,  $\mathbf{u}_0(\Phi)$  et  $\mathbf{u}_d(\Phi)$  tels que :*

$$\begin{cases} -\mathbf{Div} \sigma_0(\mathbf{u}_0) - \rho_0 \omega^2 \mathbf{u}_0 = \mathbf{f} + \Phi & \text{dans } \Omega_0 \\ \mathbf{t}_0(\mathbf{u}_0) = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_a / \Gamma_{\sigma d} \\ \mathbf{t}_0(\mathbf{u}_0) = \tau & \text{sur } \Gamma_{\sigma d} \end{cases}$$

dans  $\Omega_0$ ,

$$\begin{cases} -\mathbf{Div} \sigma_d(\mathbf{u}_d) - \rho_d \omega^2 \mathbf{u}_d = -\Phi & \text{dans } \Omega_d \\ \mathbf{t}_d(\mathbf{u}_d) = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega_d / \Gamma_{\sigma d} \\ \mathbf{t}_d(\mathbf{u}_d) = -\tau & \text{sur } \Gamma_{\sigma d} \end{cases}$$

dans  $\Omega_d$ , et :

$$\mathbf{u}_0(\Phi) - \pi_d^0 \mathbf{u}_d(\Phi) = \mathbf{0}$$

sur  $\Sigma$ .

Le produit d'anti-dualité sur  $\Sigma$  étant défini par :

$$\langle \mathbf{u}, \Phi \rangle_\Sigma = \int_{\Omega_d} \mathbf{u} \cdot \bar{\phi} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{\sigma d}} \gamma \mathbf{u} \cdot \bar{\tau} \, dS(\mathbf{x})$$

avec  $\gamma$  l'opérateur de trace défini en Annexe A, la formulation variationnelle (4.24) est alors inchangée, avec pour le champ d'interface virtuel  $\Psi = (\psi, \pi)$  où  $\psi \in V'(\Omega_d)$  et  $\pi \in V'(\Gamma_{\sigma d})$

■

### 4.2.3 Formulation variationnelle en souplesse

#### Forme sesqui-linéaire de souplesse

Compte tenu des remarques précédentes, on donne dans cette section une formulation variationnelle du problème couplé global (4.23) ne faisant plus intervenir que l'opérateur  $\mathcal{U}_0$  dans  $\Omega_0$ . On note ainsi  $h_0$  la forme sesqui-linéaire de  $V'(\Omega_0) \times V'(\Omega_0)$  définie par :

$$h_0(\phi, \psi) \stackrel{\text{déf}}{=} \langle \mathcal{U}_0 \phi, \psi \rangle_{\Omega_0} = k_0(\mathcal{U}_0 \phi, \mathcal{U}_0 \psi)$$

qui est continue par la continuité de l'opérateur  $\mathcal{U}_0 : V'(\Omega_0) \rightarrow V(\Omega_0)$ .

#### Changement de variable et relèvement des efforts imposés dans le domaine de référence

Avec cette définition, on pose :

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0^{\mathbf{f}} + \mathcal{U}_0 \phi_0 \tag{4.27}$$

où l'inconnue est maintenant le champ de force  $\phi_0$  de  $V'(\Omega_0)$ .  $\mathbf{u}_0^{\mathbf{f}}$  est un relèvement de  $\mathbf{f}$  solution de l'équation de Navier non homogène dans  $\Omega_0$  avec conditions aux limites de Neumann homogène sur  $\Gamma_a$  et qui n'est pas *a priori* dans  $V(\Omega_0)$  (c'est-à-dire qu'il ne vérifie pas la condition de décroissance (2.31)). Celui-ci permet d'isoler, notamment, la réponse du système de référence à une sollicitation sismique se propageant dans le sol non perturbé. En pratique le champ incident que l'on mesure à la surface du sol n'est pas ce champ, car il comprend la partie réfléchiée par les hétérogénéités du sol caractérisant la perturbation introduite, déterministe ou aléatoire.  $\mathbf{u}_0^{\mathbf{f}}$  comprend donc la partie du champ incident non perturbée par les hétérogénéités du sol au voisinage de la structure.

Si le champ sismique incident considéré est de nature aléatoire, cette décomposition ne pose pas de difficulté particulière pour la modélisation probabiliste. En effet, le champ incident dans ce cas est caractérisé par sa fonction de cohérence, définie à la section §1.3, qui s'exprime comme le produit des fonctions de cohérence associées aux différents effets influant sur ses caractéristiques probabilistes. Ainsi l'effet local de site est associé aux hétérogénéités locales du sol au voisinage de l'ouvrage étudié, et donc le champ incident stochastique se propageant dans le sol non perturbé est caractérisé par le produit des fonctions de cohérence relatives aux autres effets (voir la section §1.3.2).

D'autre part la seule modélisation déterministe qui tienne pour le champ incident est celle correspondant à la propagation dans un milieu non perturbé, éventuellement stratifié horizontalement, sous forme d'ondes planes par exemple. Le champ sismique se propageant dans un milieu fortement hétérogène, même déterministe, au voisinage de la fondation ne peut plus être représenté avec de tels modèles. Dans ce cas également, la décomposition (4.27) ci-dessus se justifie donc.

#### Formulation variationnelle avec changement de variable

Avec les définitions de  $h_0$ ,  $\phi_0$  et  $\mathbf{u}_0^{\mathbf{f}}$  ci-dessus, le problème hybride mixte (4.24) est reformulé sous la forme :

**Problème 4.28** Trouver  $(\phi_0, \mathbf{u}_d, \Phi) \in V'(\Omega_0) \times V(\Omega_d) \times V'(\Sigma)$  tels que :

$$\begin{cases} h_0(\phi_0, \psi_0) - \langle \Phi, \mathcal{U}_0 \psi_0 \rangle_\Sigma = 0 \\ k_d(\mathbf{u}_d, \mathbf{v}_d) + \langle \Phi, \pi_d^0 \mathbf{v}_d \rangle_\Sigma = 0 \\ -\langle \mathcal{U}_0 \phi_0, \Psi \rangle_\Sigma + \langle \pi_d^0 \mathbf{u}_d, \Psi \rangle_\Sigma = \langle \mathbf{u}_0^f, \Psi \rangle_\Sigma \end{cases}$$

pour tous  $(\psi_0, \mathbf{v}_d, \Psi) \in V'(\Omega_0) \times V(\Omega_d) \times V'(\Sigma)$ ,

qui est exactement (4.24) avec le changement de variable  $\mathbf{u}_0 \rightarrow \phi_0$ .

### Forme sesqui-linéaire de souplesse restreinte

Une simplification supplémentaire de la formulation variationnelle (4.28) ci-dessus peut être introduite à ce stade. Comme le champ de force  $\Phi$  introduit dans la section précédente §4.2.2 est choisi arbitrairement dans  $V'(\Sigma)$ , donc de support borné, il apparaît intéressant, toujours en vue de la discrétisation en dimension finie, de restreindre les champs  $\phi_0$  et  $\psi_0$  à des champs de support également borné. A cet effet, on introduit la forme sesqui-linéaire  $h_0^d$  de  $V'(\Sigma) \times V'(\Sigma)$  définie par :

$$\begin{aligned} h_0^d(\Phi, \Psi) &= h_0(r_d^T \Phi, r_d^T \Psi) \\ &= \langle r_d \mathcal{U}_0 r_d^T \Phi, \Psi \rangle_\Sigma \end{aligned}$$

où  $r_d : V(\Omega_0) \rightarrow V(\Omega_0|\Omega_d)$  est l'opérateur de restriction à  $\Omega_d$  des champs de  $V(\Omega_0)$ . Elle est continue car  $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{L}(V'(\Omega_0), V(\Omega_0))$  et  $r_d \in \mathcal{L}(V(\Omega_0), V(\Omega_0|\Omega_d))$ . On peut établir sa coercivité sur  $V'(\Sigma)$  pourvu que  $\Omega_d$  soit suffisamment régulier. Dans la suite on note  $V_0'(\Omega_d)$  l'anti-dual continu de :

$$V_0(\Omega_d) \stackrel{\text{déf}}{=} \{\mathbf{v} \in V(\Omega_d); \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega_d\}.$$

Grâce à cette nouvelle définition, nous allons maintenant pouvoir reformuler le problème couplé global initial sous des formes variationnelles abordables en terme de coût numérique et de discrétisation car posées uniquement sur  $\Sigma$ . La première, dite formulation hybride mixte, est une simple tentative de généralisation de (4.28) avec  $h_0^d$  ci-dessus. La seconde, dite formulation duale, est obtenue en imposant pour  $\mathbf{u}_d$  une condition de compatibilité au sens fort.

**remarque 4.5** – Si toujours  $\Gamma_{\text{sd}} \neq \emptyset$ , alors la forme sesqui-linéaire  $h_0^d$  est définie par :

$$h_0^d(\Phi, \Psi) = h_0(r_d^T \phi, r_d^T \psi) + h_0(\gamma^T \boldsymbol{\tau}, \gamma^T \boldsymbol{\pi})$$

pour tous les champs  $\Phi = (\phi, \boldsymbol{\tau})$  et  $\Psi = (\psi, \boldsymbol{\pi})$ , et où  $\gamma : V(\Omega_d) \rightarrow V(\Gamma_{\text{sd}})$  désigne l'opérateur de trace (voir le théorème de trace (A.1)) ■

#### 4.2.4 Formulation mixte hybride

Avec la définition de  $h_0^d$ , le problème (4.28) est ramené à la formulation variationnelle suivante :

**Problème 4.29** Trouver  $(\mathbf{u}_d, \Phi) \in V(\Omega_d) \times V_0'(\Omega_d)$  tels que  $\forall (\mathbf{v}_d, \Psi) \in V(\Omega_d) \times V_0'(\Omega_d)$  :

$$\begin{cases} -h_0^d(\Phi, \Psi) + \langle \pi_d^0 \mathbf{u}_d, \Psi \rangle_\Sigma = \langle \mathbf{u}_0^f, \Psi \rangle_\Sigma \\ \langle \Phi, \pi_d^0 \mathbf{v}_d \rangle_\Sigma + k_d(\mathbf{u}_d, \mathbf{v}_d) = 0 \end{cases}$$

La forme linéaire  $f'_0(\Psi) \stackrel{\text{déf}}{=} \langle \mathbf{u}_0^f, \Psi \rangle_\Sigma$  est continue sur  $V'_0(\Omega_d)$ . Le problème mixte ci-dessus admet alors une solution unique dans  $V(\Omega_d) \times V'_0(\Omega_d)$  si la forme sesqui-linéaire  $\langle \pi_d^0 \mathbf{v}, \mathbf{q} \rangle_\Sigma$  est continue sur  $V(\Omega_d) \times V'_0(\Omega_d)$  et vérifie la condition inf-sup classique de type Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi (condition LBB, voir par exemple [12, 25, 26]) :

$$\inf_{\substack{\mathbf{v} \in V(\Omega_d) \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \sup_{\substack{\mathbf{q} \in V'_0(\Omega_d) \\ \mathbf{q} \neq \mathbf{0}}} \frac{\langle \pi_d^0 \mathbf{v}, \mathbf{q} \rangle_{\Omega_d}}{\|\mathbf{v}\|_{V(\Omega_d)} \|\mathbf{q}\|_{V'_0(\Omega_d)}} > 0$$

Elle est bien vérifiée au niveau continue car (voir [26]) :

$$K \stackrel{\text{déf}}{=} \{ \mathbf{q} \in V'_0(\Omega_d); \langle \pi_d^0 \mathbf{v}, \mathbf{q} \rangle_\Sigma = 0 \forall \mathbf{v} \in V(\Omega_d) \} = \{ \mathbf{0} \}.$$

Au niveau discret, la condition est vérifiée pour un choix approprié de l'opérateur de jonction ; elle exige notamment de choisir une discrétisation de  $V'_0(\Omega_d)$  plus fine que celle de  $V(\Omega_d)$ .

#### 4.2.5 Formulation duale

On peut établir, à partir de la formulation mixte duale du problème (4.29) une formulation duale sur  $\Omega_d$  en imposant à  $\mathbf{u}_d$  d'y être de la forme  $\mathcal{U}_0 \Phi$ . Plus précisément, la condition de compatibilité au sens faible du problème (4.24) est imposée au sens fort sous la forme :

$$r_d \mathbf{u}_0 = r_d \left( \mathbf{u}_0^f + \mathcal{U}_0 \Phi \right) = \pi_d^0 \mathbf{u}_d$$

On impose ensuite aux champs tests de la formulation variationnelle du problème couplé global initial (4.23) d'être de la forme  $\mathcal{U}_0 \Psi$ . On en déduit le problème variationnel suivant :

**Problème 4.30** *Trouver  $\Phi \in V'_0(\Omega_d)$  tel que  $\forall \Psi \in V'_0(\Omega_d)$  :*

$$k'_d(\Phi, \Psi) = f'_d(\Psi)$$

avec :

$$\begin{aligned} k'_d(\Phi, \Psi) &= h_d^d(\Phi, \Psi) + k_d(\mathcal{U}_0 \Phi, \mathcal{U}_0 \Psi) \\ f'_d(\Psi) &= -k_d(\mathbf{u}_0^f, \mathcal{U}_0 \Psi) \end{aligned}$$

La forme sesqui-linéaire  $k'_d$  est continue sur  $V'_0(\Omega_d) \times V'_0(\Omega_d)$  et l'on peut vérifier aisément que  $k'_d(\Phi, \Psi) = k_\Omega(\mathcal{U}_0 \Phi, \mathcal{U}_0 \Psi)$  où la forme sesqui-linéaire  $k_\Omega = k_0 + k_d$  de  $V(\Omega) \times V(\Omega)$  est définie à la section §2.3.3, problème (2.38). On montre alors qu'elle est  $V'_0(\Omega_d)$ -coercive, si bien que le problème ci-dessus admet une unique solution dans  $V'_0(\Omega_d)$ .

#### 4.2.6 Formulations variationnelles réduites

On s'intéresse maintenant au cas où la forme bilinéaire  $k_d$  définit un opérateur aléatoire sur l'espace probabilisé  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$  introduit en Annexe A. Sa dimension aléatoire est alors réduite suivant la méthodologie exposée à la section §3.2.2, dont on reprend ici les notations. Les formes réduites correspondantes des problèmes variationnels hybride mixte (4.29) et dual (4.30) sont définies respectivement par :

**Définition 4.31 (formulation hybride mixte réduite)** *Trouver*  $(\mathbf{u}_d^N, \Phi^N) \in V(\Omega_d) \times V'_0(\Omega_d)$  et du second ordre tels que  $\forall (\mathbf{v}_d, \Psi) \in V(\Omega_d) \times V'_0(\Omega_d)$  :

$$\begin{cases} -h_0^d(\Phi^N, \Psi) + \langle \pi_d^0 \mathbf{u}_d^N, \Psi \rangle_\Sigma = \langle \mathbf{u}_0^f, \Psi \rangle_\Sigma \\ \langle \Phi^N, \pi_d^0 \mathbf{v}_d \rangle_\Sigma + \sum_{j=1}^N \xi_j k_j(\mathbf{u}_d^N, \mathbf{v}_d) = 0 \end{cases}$$

et :

**Définition 4.32 (formulation duale réduite)** *Trouver*  $\Phi^N \in V'_0(\Omega_d)$  et du second ordre tel que  $\forall \Psi \in V'_0(\Omega_d)$  :

$$h_0^d(\Phi^N, \Psi) + \sum_{j=1}^N \xi_j k_j(\mathcal{U}_0 \Phi^N, \mathcal{U}_0 \Psi) = - \sum_{j=1}^N \xi_j k_j(\mathbf{u}_0^f, \mathcal{U}_0 \Psi)$$

où les  $\{\xi_j\}_{1 \leq j \leq N}$  sont des variables aléatoires centrées réduites définies sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{I}, P)$ . Ces définitions montrent que, sur le plan numérique, l'élément le plus coûteux à évaluer pour l'inversion des systèmes correspondants, est l'opérateur associé à la forme sesqui-linéaire  $h_0^d$ , qui exige le calcul de  $\mathcal{U}_0$  discrétisé. La prise en compte de l'aléa, grâce à la réduction introduite au chapitre §3, n'exige que l'assemblage, par la méthode des éléments finis usuelle, de matrices de masse, raideur, dissipation déterministes associées aux formes sesqui-linéaires  $\{k_j\}_{1 \leq j \leq N}$ . Cette opération est de manière générale nettement moins coûteuse que la précédente.

#### 4.2.7 Eléments d'analyse mathématique

La formulation variationnelle en souplesse (4.28) apparaît sous la forme d'un problème hybride mixte dont l'inversibilité est régie par la condition LBB (inf-sup) classique. En sommant les trois équations dans (4.28), on obtient la forme sesqui-linéaire associée :

$$h_0(\phi_0, \phi_0) + k_d(\mathbf{u}_d, \mathbf{u}_d) + 2i\Im \left\{ \langle \Phi, \mathcal{U}_0 \phi_0 - \pi_d^0 \mathbf{u}_d \rangle_\Sigma \right\}$$

qui n'est autre que la forme sesqui-linéaire  $k_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{u})$  associée au problème (4.22) (les deux premiers termes) plus un terme de contrainte (le troisième). Le problème (4.28) admet alors une unique solution sous réserve que cette contrainte vérifie la condition LBB. L'ellipticité de la forme sesqui-linéaire  $h_0$  est également nécessaire pour établir ce résultat. Elle est obtenue par la :

**Proposition 4.33** *La forme sesqui-linéaire  $h_0$  est  $V'(\Omega_0)$ -coercive.*

PREUVE – Soit  $\mathbf{u}_0 \in V(\Omega_0)$  tel que  $\forall \mathbf{v} \in V(\Omega_0)$  on ait :

$$k_0(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) = \langle \phi, \mathbf{v} \rangle_{\Omega_0}$$

Par la continuité de la forme sesqui-linéaire  $k_0$ , on déduit de la définition ci-dessus :

$$|\langle \phi, \mathbf{v} \rangle_{\Omega_0}| \leq C(\omega) \|\mathcal{U}_0 \phi\|_{V(\Omega_0)} \|\mathbf{v}_0\|_{V(\Omega_0)}$$

avec  $C(\omega) > 0$ , donc

$$\sup_{\substack{\mathbf{v} \in V(\Omega_0) \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{|\langle \phi, \mathbf{v} \rangle_{\Omega_0}|}{\|\mathbf{v}\|_{V(\Omega_0)}} \leq C(\omega) \|\mathcal{U}_0 \phi\|_{V(\Omega_0)}$$



soit

$$\|\mathbf{U}_0\phi\|_{V(\Omega_0)} \geq \frac{1}{C(\omega)} \|\phi\|_{V'(\Omega_0)}$$

Comme par ailleurs  $k_0$  est  $V(\Omega_0)$ -coercitive, on en déduit :

$$\begin{aligned} \Re \{-ih_0(\phi, \phi)\} &= \Re \{ik_0(\mathbf{U}_0\phi, \mathbf{U}_0\phi)\} \geq \alpha(\omega) \|\mathbf{U}_0\phi\|_{V(\Omega_0)}^2 \\ &\geq \frac{\alpha(\omega)}{C(\omega)} \|\phi\|_{V'(\Omega_0)}^2 \end{aligned}$$

donc  $h_0$  est coercitive, donc coercive (voir l'Annexe A).  $\square$

Pour assurer l'inversibilité du problème hybride mixte (4.29), nous avons par ailleurs la :

**Proposition 4.34** *La forme sesqui-linéaire  $h_0^d$  est  $V_0'(\Omega_d)$ -coercive.*

PREUVE – Soit  $\mathbf{v}_d$  quelconque dans  $V_0(\Omega_d)$ . On construit à partir de ce champ son prolongement à tout  $\Omega_0$  défini par :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 &= \mathbf{v}_d && \text{sur } \Omega_d \\ \mathbf{v}_0 &= \mathbf{0} && \text{sur } \Omega_0/\Omega_d \end{aligned}$$

Alors :

$$\sup_{\substack{\mathbf{v} \in V(\Omega_0) \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{|\langle r_d^T \Phi, \mathbf{v} \rangle_{\Omega_0}|}{\|\mathbf{v}\|_{V(\Omega_0)}} \geq \frac{|\langle r_d^T \Phi, \mathbf{v}_0 \rangle_{\Omega_0}|}{\|\mathbf{v}_0\|_{V(\Omega_0)}} = \frac{|\langle \Phi, r_d \mathbf{v}_0 \rangle_{\Omega_d}|}{\|\mathbf{v}_0\|_{V(\Omega_0)}} = \frac{|\langle \Phi, \mathbf{v}_d \rangle_{\Omega_d}|}{\|\mathbf{v}_d\|_{V_0(\Omega_d)}}$$

dont on déduit :

$$\|r_d^T \Phi\|_{V'(\Omega_0)} \geq \sup_{\substack{\mathbf{v}_d \in V_0(\Omega_d) \\ \mathbf{v}_d \neq \mathbf{0}}} \frac{|\langle \Phi, \mathbf{v}_d \rangle_{\Omega_d}|}{\|\mathbf{v}_d\|_{V_0(\Omega_d)}} = \|\Phi\|_{V_0'(\Omega_d)} \quad (a)$$

Enfin par la coercivité de  $h_0$  sur  $V_0'(\Omega_0)$  nous avons :

$$\Re \{-ih_0^d(\Phi, \Psi)\} \geq \frac{\alpha(\omega)}{C(\omega)} \|r_d^T \Phi\|_{V_0'(\Omega_0)}$$

d'où le résultat avec (a).  $\square$

La coercivité de  $h_0^d$  sur  $V'(\Gamma_{\partial\Omega})$  sera donnée dans le cadre de la représentation intégrale de l'opérateur  $\mathbf{U}_0$  étudiée en §5.1.

Soulignons enfin que les principales difficultés mathématiques soulevées par les formulations variationnelles (4.29) et (4.30), non résolues ici, sont à notre sens :

- le choix de la régularité, tant au niveau continu que discret, des champs d'interface  $\Phi$  ;
- la validité du choix d'une représentation de la forme  $\mathbf{U}_0\Phi$  pour les champs de déplacement de  $V(\Omega_d)$ , notamment dans la formulation (4.30).

### 4.2.8 Approximation en dimension finie

On présente ici, pour finir cette section, la discrétisation en dimension finie des formulations variationnelles (4.29) et (4.30) obtenues précédemment. La méthode utilisée du type Galerkin est classique et ne pose pas de difficulté particulière dans ces deux cas.

On suppose toujours, pour simplifier, que  $\Gamma_{\partial\Omega} = \emptyset$ . La construction des opérateurs  $\mathbf{U}_0$  et  $d\mathcal{K}$  en vue d'un traitement numérique des problèmes variationnels (4.29) et (4.30) ((4.31) et (4.32) dans leurs versions réduites) passe par leurs approximations en dimension finie. Celle-ci résulte d'une approximation de la géométrie du problème d'une part, et des espaces fonctionnels introduits d'autre part, et permet d'assembler sous forme matricielle les différents opérateurs par la méthode de Ritz-Galerkin, par exemple en introduisant une projection du type éléments finis. On considère donc les sous-espaces :

- $V_K(\Omega_d) \subset V(\Omega_d)$  de dimension finie  $K \geq 1$  engendré par une famille de fonctions linéairement indépendantes  $\{\mathbf{u}_k\}_{1 \leq k \leq K}$  de  $H(\Omega_d)$  ;
- $V_M(\Omega_d) \subset V'_0(\Omega_d)$  de dimension finie  $M \geq 1$  engendré par une famille de fonctions linéairement indépendantes  $\{\Phi_m\}_{1 \leq m \leq M}$  de  $H(\Omega_d)$ .

### Formulation hybride mixte approchée

En notant :

$$\tilde{\mathbf{u}}_d = \sum_{k=1}^K U_k \mathbf{u}_k, \quad \tilde{\Phi} = \sum_{m=1}^M \Phi_m \Phi_m$$

la projection de la solution  $(\mathbf{u}_d, \Phi) \in V(\Omega_d) \times V'_0(\Omega_d)$  dans  $V_K(\Omega_d) \times V_M(\Omega_d)$ , la formulation variationnelle (4.29) s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{0M} & -\mathbf{\Pi}^T \\ -\mathbf{\Pi} & \mathfrak{d}\mathcal{K}_K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{F} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

avec  $\{\mathbf{U}\} = (U_1, \dots, U_K)^T$  et  $\{\mathbf{F}\} = (\Phi_1, \dots, \Phi_M)^T$ .

Une condition *nécessaire* pour avoir l'inversibilité du système linéaire ci-dessus, en liaison avec la condition LBB en dimension finie, est  $M \geq K$  [26]. En effet si l'on note :

$$\mathbf{K}_M \stackrel{\text{déf}}{=} \{ \mathbf{F} \in \mathbb{C}^M; \mathbf{\Pi}^T \mathbf{F} = \mathbf{0} \} = \text{Ker } \mathbf{\Pi}^T$$

et  $\mathbf{T}_M$  son orthogonal dans  $\mathbb{C}^M$  :

$$\mathbb{C}^M = \mathbf{K}_M \oplus \mathbf{T}_M$$

une condition nécessaire d'existence et d'unicité de la solution du système linéaire de l'Eq.(4.35) est  $K = \text{rg } \mathbf{\Pi}^T = \text{Dim } \mathbf{T}_M$ .

Les différentes matrices introduites dans le système ci-dessus sont définies de la manière suivante :

- La restriction à  $V_K(\Omega_d) \times V_K(\Omega_d)$  de la forme sesqui-linéaire  $k_d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\langle \mathfrak{d}\mathcal{K}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega_d}$  définie sur  $V(\Omega_d) \times V(\Omega_d)$  est représentée par la matrice  $(K \times K)$  complexe, symétrique  $[\mathfrak{d}\mathcal{K}_K]$  telle que :

$$-[\mathfrak{d}\mathcal{K}_K]_{kl} = k_{\Omega_d}(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_l), \quad k, l \in \{1, \dots, K\}$$

qui peut encore s'écrire, avec les notations du §2.3.4 :

$$-[\mathfrak{d}\mathcal{K}_K] = -\omega^2 [\mathfrak{d}\mathbf{M}_K] + i [\mathfrak{d}\mathbf{C}_K] + [\mathfrak{d}\mathbf{K}_K^e]$$

où  $[\mathfrak{d}\mathbf{M}_K]$ ,  $[\mathfrak{d}\mathbf{C}_K]$  et  $[\mathfrak{d}\mathbf{K}_K^e]$ , sont des matrices réelles, symétriques, *a priori* sans signature avec (pour  $k, l \in \{1, \dots, K\}$ ) :

$$\begin{aligned} [\mathfrak{d}\mathbf{M}_K]_{kl} &= \int_{\Omega_d} \rho_d \mathbf{u}_k \cdot \bar{\mathbf{u}}_l dV \\ [\mathfrak{d}\mathbf{K}_K^e]_{kl} &= \int_{\Omega_d} \Re(\sigma_d)(\mathbf{u}_k) : \epsilon(\bar{\mathbf{u}}_l) dV \\ [\mathfrak{d}\mathbf{C}_K]_{kl} &= \int_{\Omega_d} \Im(\sigma_d)(\mathbf{u}_k) : \epsilon(\bar{\mathbf{u}}_l) dV \end{aligned}$$

- La projection sur  $V_M(\Sigma) \times V_M(\Sigma)$  de la forme sesqui-linéaire  $h_0^d$  définie sur  $V_0'(\Omega_d) \times V_0'(\Omega_d)$  est représentée par la matrice  $(M \times M)$  complexe, symétrique  $[\mathbf{U}_{0M}]$  telle que :

$$[\mathbf{U}_{0M}]_{mn} = \langle \mathbf{u}_0 r_d^T \Phi_m, r_d^T \Phi_n \rangle_{\Omega_0}, \quad m, n \in \{1, \dots, M\}$$

- La projection sur  $V_M(\Omega_d) \times V_K(\Omega_d)$  de la forme sesqui-linéaire  $\langle \pi_d^0 \mathbf{v}, \Phi \rangle_{\Sigma}$  définie sur  $V_0'(\Omega_d) \times V(\Omega_d)$  est représentée par la matrice  $(K \times M)$  complexe  $[\mathbf{\Pi}]$  telle que :

$$[\mathbf{\Pi}]_{km} = \langle \pi_d^0 \mathbf{u}_k, \Phi_m \rangle_{\Sigma}$$

- La projection sur  $V_M(\Omega_d)$  de la forme anti-linéaire  $\Phi \mapsto -\langle \mathbf{u}_0^f, \Phi \rangle_{\Omega_d}$  définie sur  $V_0'(\Omega_d)$  est représentée par le vecteur  $\{\mathbf{L}\} = (L_1, \dots, L_M)^T$  de  $\mathbb{C}^M$  où :

$$L_m = -\langle \mathbf{u}_0^f, \Phi_m \rangle_{\Sigma}$$

### Formulation duale approchée

La solution du problème variationnel (4.30) projeté sur  $V_M(\Omega_d)$  est quant à elle obtenue par :

$$[\mathbf{U}_M] \{\mathbf{F}\} = \{\mathbf{L}'_M\} \quad (4.36)$$

Ce système linéaire peut être comparé au système matriciel condensé de l'Eq.(4.17) (§4.1.5) écrit pour l'interface "surfacique"  $\Gamma_{sf}$ .

La différente matrice introduite dans le système ci-dessus et le second membre sont définis comme suit :

- La projection sur  $V_M(\Omega_d) \times V_M(\Omega_d)$  de la forme sesqui-linéaire  $k'_d(\Phi, \Psi)$  définie sur  $V_0'(\Omega_d) \times V_0'(\Omega_d)$  est caractérisée par la matrice  $(M \times M)$  complexe, symétrique  $[\mathbf{U}_M]$  telle que :

$$[\mathbf{U}_M] = [\mathbf{U}_{0M}] - [\mathbf{U}_{0M}] [\mathbf{\Pi}]^T [\mathbf{d}\mathcal{K}_M] [\mathbf{\Pi}] [\mathbf{U}_{0M}]$$

- La projection sur  $V_M(\Omega_d)$  de la forme anti-linéaire  $\Phi \mapsto f'_d(\Phi)$  définie sur  $V_0'(\Omega_d)$  est représentée par le vecteur  $\{\mathbf{L}'_M\} = (F_1, \dots, F_M)^T$  de  $\mathbb{C}^M$  où :

$$\{\mathbf{L}'_M\} = [\mathbf{U}_{0M}] [\mathbf{\Pi}]^T [\mathbf{d}\mathcal{K}_M] [\mathbf{\Pi}] \{\mathbf{L}\}$$

## 4.3 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les principaux outils de modélisation déterministe de l'interaction sismique sol-structure en vue de son traitement par une approche probabiliste générique telle que décrite dans le chapitre §3. La méthode de sous-structuration développée ici est classique, par contre son extension à des interfaces "volumiques" est plus originale. Celle-ci, bien qu'écrite spécifiquement pour le couplage de l'hétérogénéité du sol avec le domaine composite de référence sans perturbation, peut être étendue, au même titre que la méthode de sous-structuration classique [40], à l'analyse multi-domaines. Nous avons donné dans l'exposé quelques éléments d'analyse mathématique des formulations variationnelles obtenues, étant posé qu'une étude complète (existence, unicité, stabilité de leurs solutions, régularité, estimateurs d'erreur et schémas de discrétisation) reste nécessaire mais dépasse largement le cadre de ce travail.

La formulation retenue a donc été appliquée à une hétérogénéité élastique venant perturber le milieu de référence constitué de la structure et du sol sans la perturbation de ses paramètres mécaniques. Néanmoins on peut envisager de l'étendre à une perturbation non linéaire du comportement des matériaux telle que les efforts internes induits par une déformation visco-plastique. L'analyse de l'influence d'une non-linéarité géométrique telle que la présence d'une fissure entre également dans ce cadre, les méthodes de résolution pour ce type d'hétérogénéité étant quant à elles plus classiques : équations intégrales (potentiels de simple ou de double couche, voir le chapitre suivant pour plus de détails), méthode des domaines fictifs, etc. Son application au problème inverse d'identification des paramètres du sol au voisinage d'une structure testée en vibrations forcées par exemple constitue également une perspective intéressante, en liaison avec certains travaux présentés dans la littérature (de Barros & Luco [53]).

La méthode de sous-structuration permet maintenant de traiter les problèmes locaux d'élastodynamique relatifs à chacun des sous-domaines introduits – la structure, le sol de référence non perturbé et l'hétérogénéité – par la méthode numérique la plus adaptée à leurs géométries notamment. Pour le domaine sol de référence non borné, ou pour le domaine composite de référence structure-sol non perturbé, non borné également, l'approche la plus efficace est une formulation par équations intégrales. Celles-ci sont fondées sur la connaissance de la solution fondamentale de l'élastodynamique, ou fonction de Green, dans chacun de ces sous-domaines. Dans le chapitre suivant sont donnés les éléments nécessaires pour la mise en oeuvre de cette approche. On montre également que la méthode de sous-structuration permet de calculer la fonction de Green du domaine composite de référence et ainsi de caractériser l'opérateur de couplage avec l'hétérogénéité du sol introduit à la section précédente §4.2, par un potentiel de Newton classique.



## Chapitre 5

# Fonction de Green du domaine hétérogène

La résolution du problème global de transmission ramené sur l'interface sol-structure  $\Gamma_{sf}$  par la méthode présentée à la section §4.1 du chapitre précédent passe par l'assemblage de la matrice d'impédance dynamique de frontière du sous-domaine sol non borné condensée sur  $\Gamma_{sf}$ . La recomposition de la solution du problème local dans le sol par l'Eq.(4.12) exige quant à elle de calculer le relèvement élastodynamique du champ d'interface imposé sur  $\Gamma_{sf}$ , ainsi que le relèvement du champ incident  $\mathbf{u}_i$  sur cette même surface. La discrétisation en éléments finis volumiques du demi-espace sol infini n'étant pas abordable, pour les raisons déjà mentionnées (voir la section §3.4), il est classique d'avoir recours pour des domaines non bornés de  $\mathbb{R}^3$  ou  $\mathbb{R}^{3-}$  <sup>(1)</sup>, à une formulation par équation intégrale posée sur la partie de leur frontière où s'appliquent des conditions aux limites non homogènes. Celle-ci est ensuite discrétisée par éléments finis de frontière, ce qui permet de réduire de façon significative la taille du modèle. En revanche cette technique est fondée sur la connaissance d'une solution fondamentale pour le milieu considéré. La fonction de Green [52] élastique transitoire ou stationnaire d'un milieu homogène visco-élastique quelconque plongé dans  $\mathbb{R}^3$  est connue analytiquement et peut être utilisée comme solution fondamentale pour traiter par équations intégrales le cas d'un domaine homogène borné ou non de frontière bornée ; elle vérifie en outre des conditions de décroissance du type condition de radiation de Sommerfeld sortante (Eq.(2.17) en temps ou Eq.(2.27) en fréquence). Pour un milieu hétérogène quelconque, la fonction de Green correspondante n'est généralement pas connue. Une première solution pour s'affranchir de cette difficulté consiste à utiliser la méthode de sous-structuration de la section §4.1 étendue à tous les sous-domaines identifiés par la géométrie des différentes hétérogénéités. Les frontières non bornées sont alors traitées à l'infini soit par une troncature numérique, soit par des éléments infinis reproduisant les conditions de décroissance. Cette approche s'avère vite extrêmement coûteuse si les interfaces entre les sous-domaines sont étendues et/ou nombreuses, notamment pour un demi-espace stratifié tel que couramment rencontré en génie civil. Il est en revanche possible, dans ce cas, de construire numériquement la fonction de Green vérifiant la condition de surface libre à la frontière du demi-espace et les conditions de raccord cinématique et dynamique aux interfaces entre les couches horizontales, par la méthode des coefficients de réflexion/transmission de Kennett décrite brièvement à la section §1.5.2. On peut alors utiliser, en deuxième approche, une équation

---

<sup>1</sup> $\mathbb{R}^{3-} = \{\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z \leq 0\}$ .

intégrale posée uniquement sur  $\Gamma_{sf}$  avec cette solution fondamentale, afin de résoudre le problème local relatif au demi-espace sol stratifié sans perturbation.

La première section de ce chapitre est donc consacrée à l'introduction des principaux outils – fonction de Green, potentiels de simple et de double couche, potentiel de Newton ... – liés à l'utilisation des équations intégrales, ainsi que leurs différentes propriétés. Les opérateurs intégraux correspondants font intervenir des termes singuliers qui nécessitent un traitement particulier en vue de leur discrétisation par la méthode des éléments finis de frontière. On donne donc ensuite une méthode de régularisation qui réduit le degré de la singularité, et les formulations approchées correspondantes. Ils sont ensuite mis en oeuvre pour le problème de transmission présenté au chapitre §2 (voir le problème (2.32)) et la représentation des champs diffracté local  $\mathbf{u}_{di}$  et rayonné total  $\mathbf{u}_{d*}$  (définis respectivement en (2.35) et (2.37)).

Dans la deuxième section est déduite une représentation intégrale de l'opérateur  $\mathcal{U}^i$  (où plutôt  $\mathcal{U}_2^i$ , défini dans le chapitre §3, sans perturbation des modules du sol) à partir des équations intégrales de frontière introduites précédemment pour le sol non perturbé. Celle-ci justifie ainsi les hypothèses correspondantes de la section §3.1.1. Elle est fondée sur la connaissance d'une solution fondamentale pour le système couplé sol-structure sans perturbation qui ne peut être évaluée que numériquement dans les cas généraux. A cet effet on utilise la méthode de sous-structuration dynamique classique du chapitre §4, section §4.1, pour un chargement de la forme force unitaire ponctuelle imposée dans le sous-domaine sol ou le sous-domaine structure. La fonction de Green du domaine composite non perturbé ainsi construite est évaluée, dans le sous-domaine sol par exemple, par une équation intégrale ne faisant intervenir que la fonction de Green du domaine sol seul. Elle est ensuite utilisée afin de construire, par une représentation intégrale, la solution locale pour le domaine composite du problème global de couplage avec une hétérogénéité bornée de nature aléatoire, formulé par la méthode de sous-structuration "volumique" développée à la section §4.2 du chapitre précédent. Notamment l'opérateur  $\mathcal{U}_0$  introduit à ce stade s'écrit simplement sous la forme d'un potentiel de Newton pour la fonction de Green du domaine composite non perturbé. Cette approche permet de conserver les avantages que procurent les équations intégrales pour le traitement de domaines non bornés, et de s'affranchir des difficultés théoriques et numériques liées aux méthodes de perturbation tout en autorisant la prise en compte de fluctuations aléatoires de n'importe quelles amplitudes.

On rappelle enfin, dans une dernière section, les outils nécessaires à la discrétisation en dimension finie par collocation des équations intégrales de représentation et de frontière introduites, notamment la régularisation pour l'intégration des singularités propres à ces méthodes. Un schéma d'intégration numérique du potentiel de Newton faiblement singulier est proposé pour finir.

Les différents éléments introduits dans ce chapitre sont pour la plupart classiques : propriétés des potentiels de simple et de double couche, équations intégrales directes et indirectes, régularisation, méthode de collocation pour la résolution numérique. L'originalité tient ici dans l'utilisation d'une fonction de Green pour le domaine composite sol-structure non perturbé dans des équations intégrales de frontière et de représentation posées sur l'interface  $\Gamma_{sf}$  entre le sol et la structure. Le schéma d'intégration de la faible singularité sur des éléments finis de frontière est classique, en revanche son extension à des éléments de volume pour le potentiel de Newton associé à cette fonction de Green particulière est moins courante.

## 5.1 Fonction de Green et opérateurs associés

On présente dans cette section la technique des équations intégrales dans un cadre général, en commençant par définir la fonction de Green utilisée par la suite pour le domaine sol seul et les différents opérateurs intégraux associés. Leurs propriétés algébriques classiques sont également données dans ce cadre. Une méthode de régularisation pour ces équations est ensuite rappelée, suivant les développements initiaux de Bui *et al.* [28] et Clouteau [40, 9]. Ces opérateurs permettent enfin de construire des équations intégrales de représentation des solutions des problèmes locaux dans le sol coorespondants aux définitions (2.35) du relèvement élastodynamique  $\mathbf{u}_{d\ddot{\mathbf{u}}}$  du champ sismique imposé  $\mathbf{u}_{\ddot{\mathbf{u}}}$  et (4.6) du relèvement élastodynamique du champ d'interface imposé  $\Phi$ .

### 5.1.1 Définitions

Les résultats présentés dans cette section sont classiques et l'on pourra trouver des exposés plus complets par Bonnet *et al.* [18, 19, 20], Colton & Kress [46, 116], Costabel [47, 49], Giroire [75, 76, 77], Nédélec *et al.* [27, 156, 157], Wendland *et al.* [96, 110, 204]. Ils sont ainsi donnés sans démonstration.

La fonction de Green stationnaire pour un domaine élastique  $\Omega$  est la solution fondamentale de l'équation de Navier stationnaire pour l'élastodynamique, prise au sens des distributions. On reprend la notation  $\mathcal{K}$  introduite en §2.3.4 pour l'opérateur correspondant de  $\mathcal{L}(V(\Omega), V'(\Omega))$  :

$$\mathcal{K}\mathbf{u} \equiv \mathbf{Div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \rho\omega^2\mathbf{u}$$

et on note  $\mathcal{K}|_{\mathcal{D}(\Omega)}$  sa restriction à l'ensemble  $\mathcal{D}(\Omega) \subset V(\Omega)$  défini en Annexe A, avec ici  $\Omega$  un domaine hétérogène ouvert non borné de  $\mathbb{R}^{3-}$  (voir la FIG. 5.1 ci-dessous), de frontière notée  $\Gamma_a$  éventuellement non bornée sur laquelle s'applique une condition aux limites homogène du type Neumann (par exemple la surface libre  $\Gamma_a = \{\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$ ). Comme explicité dans le chapitre §2, la prise en compte de l'amortissement hystérétique permet de s'affranchir des difficultés posées par les conditions de radiation à l'infini dans des domaines hétérogènes non bornés ; la fonction de Green introduite ici vérifie donc les conditions de décroissance de l'Eq.(2.31). Elle vérifie également la condition aux limites homogène sur  $\Gamma_a$ .

**Définition 5.1 (fonction de Green)** *La fonction de Green stationnaire  $\mathbf{u}^G : \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; \mathbf{e})$  est la fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sauf sur la diagonale de  $\Omega \times \Omega$  <sup>(2)</sup> telle que :*

$$\begin{cases} -\mathcal{K}|_{\mathcal{D}(\Omega)}\mathbf{u}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; \mathbf{e}) = \delta_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{x}\mathbf{e} \\ \mathbf{t}_{\mathbf{n}(\mathbf{x})}(\mathbf{u}^G)(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; \mathbf{e}) = \mathbf{0} & \mathbf{x} \in \Gamma_a \end{cases}$$

où  $\delta_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{x} \in \mathcal{D}'(\Omega)$  est la mesure de Dirac au point  $\boldsymbol{\xi}$  ;  $\|\mathbf{e}\| = 1$  et  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure à  $\Omega$  sur  $\Gamma_a$ .

$\mathbf{u}^G$  est ainsi le déplacement au point  $\mathbf{x}$  induit par une force ponctuelle unitaire de direction  $\mathbf{e}$  appliquée au point  $\boldsymbol{\xi}$ . Dans toute la suite on postule l'existence d'une telle fonction pour le demi-espace hétérogène considéré.

**Définition 5.2 (premier tenseur de Green)** *Le premier tenseur de Green est le tenseur  $\mathbf{U}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$  tel que  $\forall (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  :*

$$\mathbf{U}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) : (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{u}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$$

<sup>2</sup>La diagonale D de  $\Omega \times \Omega$  est définie par  $D = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega \times \Omega; \mathbf{x} = \mathbf{y}\}$ .



**Définition 5.3 (second tenseur de Green)** *Le second tenseur de Green est le tenseur  $\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{T}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$  tel que  $\forall (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  :*

$$\mathbf{T}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) : (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{t}_{\mathbf{n}(\mathbf{x})}(\mathbf{u}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; \mathbf{a})) \cdot \mathbf{b}$$

On introduit une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$  notée  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  avec  $\mathbf{e}_3$  suivant l'axe vertical. Les premier et second tenseurs de Green seront considérés dans toute la suite relativement à cette base. On notera ainsi :

$$[\mathbf{E}]_{jk} = \mathbf{E} : (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k)$$

avec  $\mathbf{E} = \mathbf{U}^G$  ou  $\mathbf{T}^G$ . Ces définitions nous conduisent à introduire les opérateurs de simple et de double couche de la théorie du potentiel, qui permettent de construire numériquement la solution d'un problème elliptique aux limites type Dirichlet ou Neumann posé sur des domaines non bornés. Soit  $\Gamma \subset \Omega$  une surface régulière bornée et fermée quelconque. Elle divise le domaine  $\Omega$  en deux sous-domaines, l'un borné noté  $\Omega^+$ , l'autre non borné noté  $\Omega^-$  (voir Fig. 5.1). On reprend les notations d'espaces fonctionnels introduites en §2.3.1 en Annexe A et on rappelle que  $D(\mathcal{K})$  désigne l'ensemble  $\{\mathbf{u} \in V(\Omega); -\mathcal{K}\mathbf{u} \in H(\Omega)\}$ , domaine de définition de l'opérateur  $-\mathcal{K}$ . Cet espace est muni de la norme  $\|\mathbf{u}\|_{D(\mathcal{K})}^2 = \|\mathbf{u}\|_{\Omega}^2 + \|\mathcal{K}\mathbf{u}\|_H^2$ .

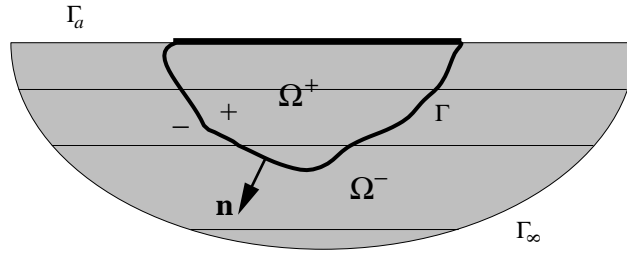


FIG. 5.1 – Problèmes aux limites intérieur et extérieur dans un demi-espace, géométrie.

**Définition 5.4 (potentiel de simple couche)** *Le potentiel de simple couche sur  $\Gamma$  noté  $\mathcal{U}^G$  est l'opérateur intégral de  $\mathcal{L}(V'(\Gamma), V(\Omega))$  défini par :*

$$\mathcal{U}^G \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Gamma} \mathbf{U}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \mathbf{q}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x})$$

avec  $\{\mathbf{x} \mapsto \mathbf{q}(\mathbf{x})\}$  une fonction de  $V'(\Gamma)$  à valeurs  $\mathbb{C}^3$  appelée densité du potentiel de simple couche.

**Définition 5.5 (potentiel de double couche)** *Le potentiel de double couche sur  $\Gamma$  noté  $\mathcal{T}^G$  est l'opérateur intégral de  $\mathcal{L}(V(\Gamma), V(\Omega))$  défini par :*

$$\mathcal{T}^G \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Gamma} \mathbf{T}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x})$$

avec  $\{\mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{x})\}$  une fonction de  $V(\Gamma)$  à valeurs  $\mathbb{C}^3$  appelée densité du potentiel de double couche.

**Définition 5.6 (potentiel de Newton)** *Le potentiel de Newton dans  $\Omega$  noté  $\mathcal{U}_\Omega^G$  est l'opérateur intégral de  $\mathcal{L}(V'(\Omega), V(\Omega))$  défini par :*

$$\mathcal{U}_\Omega^G \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) = \int_\Omega \mathbf{U}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

avec  $\{\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x})\}$  une fonction de  $V'(\Omega)$  à valeurs  $\mathbb{C}^3$  appelée densité du potentiel de Newton.

Enfin on introduit :

**Définition 5.7 (terme libre)** *Le terme libre est :*

$$\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon) \cap \Omega^+} \mathbf{T}_\mathbf{n}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, dS(\mathbf{x})$$

où  $S(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon)$  désigne la sphère de rayon  $\varepsilon$  centrée en  $\boldsymbol{\xi}$ .

Dans cette définition  $\mathbf{n}$  est la normale intérieure à la boule  $B(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon)$  de centre  $\boldsymbol{\xi}$  et de rayon  $\varepsilon$ . On peut montrer [40] que  $\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{I}_d$  dans  $\Omega^+ \cup \Omega^- \cup \Gamma_a$ ,  $\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0}$  sinon ; dans le cas d'un milieu homogène,  $\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} \mathcal{I}_d$  si  $\boldsymbol{\xi} \in \Gamma$  et  $\Gamma$  admet un plan tangent en ce point. Dans toute la suite on note  $\boldsymbol{\kappa}^+ = \boldsymbol{\kappa}$  et  $\boldsymbol{\kappa}^- = \boldsymbol{\kappa} - \mathcal{I}_d$ . Par application du théorème de trace (A.1), en notant  $\gamma_\pm \in \mathcal{L}(V(\Omega^\pm), V(\Gamma))$  l'application correspondante (ou plus simplement  $\gamma$  lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté), on peut alors introduire les opérateurs de frontière suivants [48] :

**Définition 5.8** *On note  $\mathbb{U}^G \in \mathcal{L}(V'(\Gamma), V(\Gamma))$  l'opérateur :*

$$\mathbb{U}^G \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}) = \gamma_\pm \mathcal{U}^G \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi})$$

et  $\mathbb{T}^G \in \mathcal{L}(V(\Gamma))$  l'opérateur tel que :

$$(\boldsymbol{\kappa}^\pm - \mathbb{T}^G) \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) = -\gamma_\pm \mathcal{T}^G \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})$$

avec

$$\gamma_\pm \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{x} \in \Omega^\pm}} \mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \Gamma$$

Pour  $\mathbf{n}$  désignant la normale à  $\Gamma$  extérieure à  $\Omega^+$ , on introduit le vecteur contrainte élastique orienté par  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{t}(\mathbf{u}) : D(\mathcal{K}) \rightarrow V'(\Gamma)$ , qui est une application continue [47, 52] pour tout champ de déplacement  $\mathbf{u} \in D(\mathcal{K})$ . En notant :

$$\mathbf{t}_\pm(\mathbf{u})(\boldsymbol{\xi}) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \mathbf{t}_\mathbf{n}(\mathbf{u})(\boldsymbol{\xi} \mp h\mathbf{n}(\boldsymbol{\xi})), \quad \boldsymbol{\xi} \in \Gamma$$

On introduit alors :

**Définition 5.9**  $\mathbb{T}^{G*} \in \mathcal{L}(V'(\Gamma))$  l'opérateur :

$$(\boldsymbol{\kappa}^\pm + \mathbb{T}^{G*}) \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{t}_\pm(\mathcal{U}^G \mathbf{q})(\boldsymbol{\xi})$$

et  $\mathbb{D}^G \in \mathcal{L}(V(\Gamma), V'(\Gamma))$  l'opérateur :

$$\mathbb{D}^G \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{t}_\pm(\mathcal{T}^G \mathbf{u})(\boldsymbol{\xi})$$

La continuité de ces opérateurs et des opérateurs de simple et de double couche est par exemple établie dans [47]. Enfin :

**Définition 5.10** *Les sauts de déplacement et du vecteur contrainte à travers la surface  $\Gamma$  sont définis par :*

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}] &= \gamma_+ \mathbf{u} - \gamma_- \mathbf{u} \\ [\mathbf{t}] &= \mathbf{t}_+(\mathbf{u}) - \mathbf{t}_-(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

### 5.1.2 Propriétés

On donne ici sans démonstration quelques propriétés algébriques classiques des opérateurs définis en §5.1.1 ainsi que des résultats de continuité pour les densités des potentiels de simple et de double couche. Pour plus de détails, on peut se reporter par exemple à [20, 47, 157, 156, 96, 204]. On notera dans toute la suite  $\mathbf{K}^*$  l'opérateur intégral dont le noyau à valeurs complexes est le conjugué du noyau de l'opérateur  $\mathbf{K}$  (définissant ainsi l'opérateur adjoint si le noyau est également symétrique, voir Annexe A et [52]).

**Théorème 5.11** *L'opérateur  $\mathbb{U}^G$  est symétrique,  $V'(\Gamma)$ -elliptique : pour tout  $\mathbf{q} \in V'(\Gamma)$ , il existe  $\beta_S > 0$  telle que :*

$$\Re \langle \mathbb{U}^G \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}} \rangle_\Gamma \geq \beta_S \|\mathbf{q}\|_{V'(\Gamma)}^2$$

*L'opérateur  $\mathbb{D}^G$  est symétrique,  $V(\Gamma)$ -elliptique <sup>(3)</sup> : pour tout  $\mathbf{u} \in V(\Gamma)$ , il existe  $\beta_D > 0$  telle que :*

$$\Re \langle \mathbb{D}^G \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}} \rangle_\Gamma \geq \beta_D \|\mathbf{u}\|_{V(\Gamma)}^2$$

Ils sont donc inversibles. Par ailleurs les opérateurs  $\mathbb{T}^{G*}$  et  $\mathbb{T}^G$  sont transposés l'un de l'autre :

**Théorème 5.12** *Pour tout  $\mathbf{u} \in V(\Gamma)$  et  $\mathbf{q} \in V'(\Gamma)$  on a :*

$$\langle \mathbb{T}^{G*} \mathbf{q}, \mathbf{u} \rangle_\Gamma = \langle \mathbf{q}, \mathbb{T}^G \mathbf{u} \rangle_\Gamma$$

On en déduit facilement que pour  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  dans  $V(\Omega)$  on a :

$$\langle \mathbb{T}^{G*} \mathbf{t}(\mathbf{u}_1), \mathbf{u}_2 \rangle_\Gamma = \langle \mathbb{T}^{G*} \mathbf{t}(\mathbf{u}_2), \mathbf{u}_1 \rangle_\Gamma$$

et

$$\langle \mathbb{T}^G \mathbf{u}_1, \mathbf{t}(\mathbf{u}_2) \rangle_\Gamma = \langle \mathbb{T}^G \mathbf{u}_2, \mathbf{t}(\mathbf{u}_1) \rangle_\Gamma.$$

Il est également possible d'établir, en utilisant les propriétés de symétrie de la fonction de Green, que :

**Théorème 5.13** *Pour tout  $\mathbf{f} \in V'(\Omega)$ ,  $\mathbf{u} \in V(\Gamma)$  et  $\mathbf{q} \in V'(\Gamma)$  on a :*

$$\begin{aligned} \langle \gamma \mathcal{U}_\Omega^G \mathbf{f}, \bar{\mathbf{q}} \rangle_\Gamma &= \langle \mathbf{f}, \mathcal{U}^{G*} \mathbf{q} \rangle_\Omega \\ \langle \mathbf{t}(\mathcal{U}_\Omega^G \mathbf{f}), \bar{\mathbf{u}} \rangle_\Gamma &= \langle \mathbf{f}, \mathcal{T}^{G*} \mathbf{u} \rangle_\Omega \end{aligned}$$

Enfin les relations de saut suivantes sont classiques :

**Théorème 5.14** *Les fonctions  $\mathbf{x} \mapsto \gamma \mathcal{U}^G \mathbf{q}(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{t}(\mathcal{T}^G \mathbf{u})(\mathbf{x})$  sont continues à la traversée de  $\Gamma$  :*

$$[\mathcal{U}^G \mathbf{q}] = \mathbf{0} \quad [\mathbf{t}(\mathcal{T}^G \mathbf{u})] = \mathbf{0}$$

*Les fonctions  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{t}(\mathcal{U}^G \mathbf{q})(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{x} \mapsto \gamma \mathcal{T}^G \mathbf{u}(\mathbf{x})$  sont discontinues à la traversée de  $\Gamma$  et :*

$$[\mathbf{t}(\mathcal{U}^G \mathbf{q})] = \mathbf{q} \quad [\mathcal{T}^G \mathbf{u}] = -\mathbf{u}$$

*pour tout  $\mathbf{q} \in V'(\Gamma)$  et  $\mathbf{u} \in V(\Gamma)$ .*

<sup>3</sup>Dans le cas d'une interface avec bord, par exemple ici  $\Gamma' = \Gamma/\Gamma \cap \Gamma_a$ , cette dernière propriété est vérifiée sur l'espace  $V_{00}(\Gamma') \stackrel{\text{déf}}{=} \{\mathbf{u} \in V(\Gamma'); \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\rho}} \in H(\Gamma')\}$  où  $\rho$  désigne la distance entre le point courant  $\mathbf{x} \in \Gamma'$  et le bord  $\partial\Gamma'$  au voisinage de celui-ci ; voir par exemple l'étude de Ha-Duong pour le cas d'une fissure dans un milieu homogène non borné [84].

Dans l'expression de l'opérateur intégral  $\mathbb{U}^G$ , l'intégrale est définie au sens usuel. Dans les expressions des opérateurs intégraux  $\mathbb{T}^{G*}$  et  $\mathbb{T}^G$ , elles sont définies au sens de la valeur principal de Cauchy. Dans l'expression de  $\mathbb{D}^G$ , elle est prise au sens de la partie finie d'Hadamard [20]. En posant  $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \rightarrow 0$ , on note formellement les singularités des opérateurs ci-dessus dans le cas tridimensionnel homogène [20] :

$$\begin{aligned} \mathbb{U}^G &= \mathfrak{o} \frac{1}{r} & \mathbb{T}^{G*} &= \mathfrak{o} \frac{1}{r^2} \\ \mathbb{T}^G &= \mathfrak{o} \frac{1}{r^2} & \mathbb{D}^G &= \mathfrak{o} \frac{1}{r^3} \end{aligned}$$

### 5.1.3 Théorème de réciprocité et équations intégrales

#### Formules de Green

**Définition 5.15 (champ élastodynamique)** *On appelle champ élastodynamique dans  $\Omega$  un champ  $\mathbf{u} \in H(\Omega)$  avec  $\mathbf{u}^+ = \mathbf{u}|_{\Omega^+} \in V(\Omega^+)$  et  $\mathbf{u}^- = \mathbf{u}|_{\Omega^-} \in V(\Omega^-)$  tel que :*

$$\begin{cases} -\mathcal{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{t}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_a \end{cases}$$

Par extension, si on se limite à  $\Omega^+$  ou  $\Omega^-$ , un champ est élastodynamique dans  $\Omega^+$  ou  $\Omega^-$  s'il vérifie l'équation de Navier stationnaire dans l'un ou l'autre de ces domaines (avec les conditions de décroissance automatiquement vérifiées dans le domaine non borné). La fonction de Green définie en (5.1) est par exemple élastodynamique dans  $\Omega/\{\xi\}$ . La première formule de Green ci-dessous est prouvée par exemple dans [52]. Pour l'opérateur  $-\mathcal{K}$  de l'équation de l'élastodynamique, elle s'écrit :

$$-\int_{\Omega} \mathcal{K}\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} dV = k_{\Omega}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \langle \mathbf{t}(\mathbf{u}), \bar{\mathbf{v}} \rangle_{\Gamma} \quad (5.16)$$

où  $k_{\Omega}$  est la forme sesqui-linéaire introduite dans la formulation du problème (2.38) et  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  sont quelconques respectivement dans  $D(\mathcal{K})$  et dans  $V(\Omega)$ . La seconde formule de Green, ou théorème de réciprocité de Maxwell-Betti, s'écrit :

**Théorème 5.17 (réciprocité)** *Soit  $\mathbf{u} \in D(\mathcal{K})$  et  $\mathbf{v} \in D(\mathcal{K})$  deux champs élastodynamiques. Alors :*

$$\langle \mathbf{t}(\mathbf{u}), \gamma \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} - \langle \mathbf{t}(\mathbf{v}), \gamma \mathbf{u} \rangle_{\Gamma} = 0$$

avec ici la symétrie de l'opérateur  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{K}^T = \mathcal{K}$ , soit  $\int_{\Omega} [\mathbf{u}\mathcal{K}\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathcal{K}\mathbf{u}] dV = 0$ . Du théorème de réciprocité, on déduit classiquement l'équation intégrale de représentation et les équations intégrales de frontière du théorème suivant :

**Théorème 5.18** *Soit  $\mathbf{u}$  un champ élastodynamique dans  $\Omega$ . Alors :*

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathcal{U}^G[\mathbf{t}(\mathbf{u})](\mathbf{x}) - \mathcal{T}^G[\mathbf{u}](\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega/\Gamma$$

et lorsque  $\mathbf{x} \in \Gamma$  :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa} \gamma_+ \mathbf{u} + (\mathcal{I}_d - \boldsymbol{\kappa}) \gamma_- \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathbb{U}^G[\mathbf{t}(\mathbf{u})](\mathbf{x}) - \mathbb{T}^G[\mathbf{u}](\mathbf{x}) \\ \boldsymbol{\kappa} \mathbf{t}_+(\mathbf{u}) + (\mathcal{I}_d - \boldsymbol{\kappa}) \mathbf{t}_-(\mathbf{u})(\mathbf{x}) &= \mathbb{T}^{G*}[\mathbf{t}(\mathbf{u})](\mathbf{x}) - \mathbb{D}^G[\mathbf{u}](\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Dans le théorème (5.18) ci-dessus  $\mathcal{I}_d$  est l'identité et l'on a repris la définition (5.7).

### Application à des problèmes aux limites

**Définition 5.19 (problème intérieur)** Soit  $\mathbf{w} \in V(\Gamma)$  et  $\mathbf{g} \in V'(\Gamma)$ . On appelle **problèmes intérieurs de Dirichlet et de Neumann respectivement** pour  $\mathbf{u} \in V(\Omega^+)$  :

$$\begin{cases} -\mathcal{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega^+ \\ \gamma_+ \mathbf{u} = \mathbf{w} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} -\mathcal{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega^+ \\ \mathbf{t}_+(\mathbf{u}) = \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

**Définition 5.20 (problème extérieur)** Soit  $\mathbf{w} \in V(\Gamma)$  et  $\mathbf{g} \in V'(\Gamma)$ . On appelle **problèmes extérieurs de Dirichlet et de Neumann respectivement** pour  $\mathbf{u} \in V(\Omega^-)$  :

$$\begin{cases} -\mathcal{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega^- \\ \gamma_- \mathbf{u} = \mathbf{w} & \text{sur } \Gamma \\ \mathbf{u} \text{ vérifie (2.31)} \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} -\mathcal{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega^- \\ \mathbf{t}_-(\mathbf{u}) = \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma \\ \mathbf{u} \text{ vérifie (2.31)} \end{cases}$$

Avec l'amortissement introduit pour les matériaux de  $\Omega^+$  (visqueux ou hystérétique), les problèmes intérieurs admettent une unique solution dans  $V(\Omega^+)$  [46, 52] <sup>(4)</sup>. Les problèmes extérieurs admettent quant à eux également une unique solution dans  $V(\Omega^-)$ . Celles-ci sont données par des représentations intégrales sous forme de potentiel de simple couche ou potentiel de double couche. Elles sont résumées dans les deux théorèmes suivants :

**Théorème 5.21** Les solutions des problèmes de Dirichlet et Neumann intérieurs et extérieurs sont données par la **représentation en potentiel de simple couche** :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathcal{U}^G \mathbf{q}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega/\Gamma$$

où  $\mathbf{q}$  est l'unique solution dans  $V'(\Gamma)$  de  $(\mathbf{x} \in \Gamma)$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{U}^G \mathbf{q}(\mathbf{x}) &= \mathbf{w}(\mathbf{x}) && \text{pour les problèmes de Dirichlet intérieur et} \\ &&& \text{extérieur} \\ \left( \boldsymbol{\kappa}^+ + \mathbb{T}^{G*} \right) \mathbf{q}(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}) && \text{pour le problème de Neumann intérieur} \\ \left( \boldsymbol{\kappa}^- + \mathbb{T}^{G*} \right) \mathbf{q}(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}) && \text{pour le problème de Neumann extérieur.} \end{aligned}$$

**Théorème 5.22** Les solutions des problèmes de Dirichlet et Neumann intérieurs et extérieurs sont données par la **représentation en potentiel de double couche** :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\mathcal{T}^G \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega/\Gamma$$

où  $\mathbf{v}$  est l'unique solution dans  $V(\Gamma)$  de  $(\mathbf{x} \in \Gamma)$  :

$$\begin{aligned} -\mathbb{D}^G \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}) && \text{pour les problèmes de Neumann intérieur et} \\ &&& \text{extérieur} \\ \left( \boldsymbol{\kappa}^+ - \mathbb{T}^G \right) \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= \mathbf{w}(\mathbf{x}) && \text{pour le problème de Dirichlet intérieur} \\ \left( \boldsymbol{\kappa}^- - \mathbb{T}^G \right) \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= \mathbf{w}(\mathbf{x}) && \text{pour le problème de Dirichlet extérieur.} \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Sans amortissement, l'unicité éventuelle de la solution est régie par l'alternative de Fredholm.

PREUVE – On donne quelques éléments de preuve des deux théorèmes ci-dessus. Pour plus de détails, on peut se référer à [46]. La résolution simultanée des problèmes de Dirichlet intérieur et extérieur revient à poser une équation intégrale de représentation de la forme du théorème (5.18) avec :

- $[\mathbf{u}] = \mathbf{0}$  et la solution est donnée sous la forme d'un potentiel de simple couche où  $\mathbf{q} = [\mathbf{t}(\mathbf{u})]$  ;
- $[\mathbf{t}(\mathbf{u})] = \mathbf{0}$  et la solution est donnée sous la forme d'un potentiel de double couche où  $\mathbf{v} = [\mathbf{u}]$  lorsque par exemple  $\gamma_- \mathbf{u} = \mathbf{w}$  est donné pour le problème extérieur.

De même la résolution simultanée des problèmes de Neumann intérieur et extérieur revient à poser une équation intégrale de représentation de la forme du théorème (5.18) avec :

- $[\mathbf{t}(\mathbf{u})] = \mathbf{0}$  et la solution est donnée sous la forme d'un potentiel de double couche où  $\mathbf{v} = [\mathbf{u}]$  ;
- $[\mathbf{u}] = \mathbf{0}$  et la solution est donnée sous la forme d'un potentiel de simple couche où  $\mathbf{q} = [\mathbf{t}(\mathbf{u})]$  lorsque par exemple  $\mathbf{t}_- (\mathbf{u}) = \mathbf{g}$  est donné pour le problème extérieur.

L'unicité des solutions des équations intégrales de première espèce  $\mathbb{U}^G \mathbf{q} = \mathbf{w}$  et  $\mathbb{D}^G \mathbf{v} = \mathbf{g}$  est donnée par le théorème (5.11). Les autres équations sont des équations intégrales de deuxième espèce de la forme  $(\lambda \mathcal{I}_d + \mathbf{K}) u = f$  qui rentrent dans le cadre général de la théorie de Fredholm pour un opérateur intégral  $\mathbf{K}$  compact (ce qui est le cas des opérateurs  $\mathbb{T}^{G*}$  et  $\mathbb{T}^G$  [156, 46]). Par exemple pour la résolution du problème de Dirichlet extérieur par un potentiel de double couche, on voit d'après la première équation intégrale de frontière du théorème (5.18) que si l'on pose  $\mathbf{v} = [\mathbf{u}]$ , on a :

$$\mathbf{w} = (\boldsymbol{\kappa} - \mathcal{I}_d - \mathbb{T}^G) \mathbf{v}$$

ce qui montre qu'une solution de  $(\boldsymbol{\kappa}^- - \mathbb{T}^G) \mathbf{v} = \mathbf{w}$  est de la forme  $[\mathbf{u}]$  ; elle est donc dans  $V(\Gamma)$ .  $\square$

Les représentations intégrales en potentiel de simple ou de double couche sont qualifiées de représentations intégrales *indirectes* car elles donnent les solutions des problèmes de Dirichlet ou de Neumann par le biais d'une variable intermédiaire, la densité de l'un ou l'autre des potentiels. On peut établir une représentation intégrale *directe* sous la forme de la somme d'un potentiel de simple couche et d'un potentiel de double couche faisant intervenir les inconnues de bord des problèmes aux limites considérés. Plus précisément, elle permet de construire l'application qui permet de passer de la donnée  $\mathbf{w}$  (problème de Dirichlet) ou  $\mathbf{g}$  (problème de Neumann) à la variable duale  $\mathbf{t}_\pm (\mathbf{u})$  ou  $\gamma_\pm \mathbf{u}$  respectivement. Cette application est appelée opérateur de capacité intérieure, ou opérateur de Steklov-Poincaré (matrice du complément de Schur en dimension finie), ou encore opérateur d'impédance élastodynamique de bord.

**Théorème 5.23** *L'opérateur d'impédance élastodynamique de bord  $\mathbb{K}^G$  est un isomorphisme de  $V(\Gamma)$  dans  $V'(\Gamma)$  tel que pour le problème de Dirichlet :*

$$\mathbf{t}_+ (\mathbf{u}) (\mathbf{x}) = \mathbb{K}^G \mathbf{w} (\mathbf{x}) = (\mathbb{U}^G)^{-1} (\boldsymbol{\kappa} + \mathbb{T}^G) \mathbf{w} (\mathbf{x})$$

et pour le problème de Neumann :

$$\gamma_+ \mathbf{u} (\mathbf{x}) = (\mathbb{K}^G)^{-1} \mathbf{g} (\mathbf{x}) = (\boldsymbol{\kappa} + \mathbb{T}^G)^{-1} \mathbb{U}^G \mathbf{g} (\mathbf{x})$$

avec  $\mathbf{x} \in \Gamma$ .

$(\mathbb{K}^G)^{-1} = \mathbb{C}^G$  est généralement appelé *opérateur de souplesse élastodynamique de bord* (“compliance” dans la littérature anglo-saxonne). Les propriétés de l'opérateur d'impédance  $\mathbb{K}^G$  sont étudiées par exemple dans [204]. Il est notamment symétrique.

**remarque 5.1** – L'opérateur de capacité intérieure est défini ci-dessus pour  $\Omega^+$  avec  $\Gamma$  orientée par la normale extérieure à  $\Omega^+$ . L'opérateur de capacité extérieure pour  $\Omega^-$  est lui :

$$\mathbb{K}^G = \mathbb{U}^{G^{-1}} (\mathcal{I}_d - \boldsymbol{\kappa} - \mathbb{T}^G) \tag{5.24}$$

Il définit un isomorphisme de  $V(\Gamma)$  dans  $V'(\Gamma)$  [52]  $\blacksquare$

### 5.1.4 Régularisation

Les équations intégrales directes et indirectes présentées ci-dessus et que l'on se propose de traiter numériquement par la suite, comportent deux intégrales :

- un potentiel de simple couche, faisant intervenir un noyau faiblement singulier en  $\frac{1}{r}$ ,  $r = \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|$  où  $\mathbf{x}$  est le point d'observation et  $\boldsymbol{\xi}$  le point d'application de la force unitaire, pour lequel l'intégrale existe au sens usuel,
- et/ou un potentiel de double, de noyau fortement singulier en  $\frac{1}{r^2}$  pour lequel l'intégrale n'existe qu'au sens de la valeur principale de Cauchy.

Dans notre cas, nous nous limiterons à des équations ne faisant pas intervenir l'opérateur  $\mathbb{D}^G$  pour lequel l'évaluation numérique du noyau pour des milieux hétérogènes (demi-espace stratifié visco-élastique pour le sol par exemple) est problématique. La méthode de régularisation des équations intégrales directes proposée par Bui *et al.* [28] est fondée sur les propriétés particulières de la fonction de Green statique. Elle permet de réduire la forte singularité du potentiel de double couche à une faible singularité similaire à celle du potentiel de simple couche, donc intégrable au sens usuel. Les résultats obtenus dans un premier temps pour des milieux homogènes ont été étendus au cas d'un milieu hétérogène stratifié dans [9, 40]. Ils sont rappelés ici pour ces deux cas.

Dans toute cette section, on note  $\mathbf{u}_{\text{stat}}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; \mathbf{e})$ , la fonction de Green statique d'un milieu visco-élastique  $\Omega$ , la fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sauf sur la diagonale de  $\Omega \times \Omega$  telle que :

$$\begin{cases} -\mathbf{Div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_{\text{stat}}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; \mathbf{e})) = \delta_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{x} \mathbf{e}, & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{t}_{\mathbf{n}(\mathbf{x})}(\mathbf{u}_{\text{stat}}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; \mathbf{e})) = \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \Gamma_a \end{cases}$$

avec les mêmes notations que pour la définition (5.1). De même on notera avec l'indice  $(\cdot)_{\text{stat}}$  les différents opérateurs intégraux construits avec cette fonction de Green statique.

### Identité de corps rigide

**Milieu homogène** – Dans le cas où le domaine considéré  $\Omega$  est plongé dans un milieu visco-élastique homogène, la fonction de Green choisie est la solution fondamentale du milieu infini de mêmes caractéristiques, ne vérifiant aucune condition aux limites hormis les conditions de décroissance (2.31). L'identité de corps rigide pour un tel domaine de frontière  $\Gamma$  s'écrit [28] :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{T}_{\text{stat}}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = c \mathcal{I}_d - \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}) \quad (5.25)$$

avec :

$$c = \begin{cases} 0 & \text{pour } \Omega \text{ borné} \\ 1 & \text{pour } \Omega \text{ non borné à frontière bornée} \\ \frac{1}{2} & \text{pour } \Omega \text{ non borné et } \Gamma \text{ une surface plane sauf sur une partie bornée} \end{cases}$$

l'intégrale étant prise au sens de la valeur principale de Cauchy, et  $\Gamma$  étant orientée par la normale extérieure au domaine  $\Omega$ . On tire partie de cette identité pour la régularisation des équations intégrales en remarquant maintenant que les solutions fondamentales statique et dynamique, toutes les deux connues analytiquement (pour tout  $\mathbb{R}^3$ ), ont la même singularité au point source  $\boldsymbol{\xi}$  [18], soit :

$$\mathbf{T}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) - \mathbf{T}_{\text{stat}}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = o1, \quad \text{pour } r = \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\| \rightarrow 0 \quad (5.26)$$

**Milieu hétérogène** – Dans le cas d'un milieu hétérogène, on peut s'affranchir du calcul de la fonction de Green statique pour le domaine hétérogène, qui doit vérifier l'équation de Navier statique dans chacun des sous-domaines homogènes (par exemple les différentes strates d'un demi-espace stratifié), des conditions de continuité aux interfaces entre ces sous-domaines et la condition aux limites sur  $\Gamma_a$ . Pour cela il suffit de choisir la solution fondamentale statique pour le domaine homogène infini de mêmes caractéristiques que le milieu correspondant à la position de la source  $\boldsymbol{\xi}$ , lorsque ce dernier est localement homogène à son voisinage. On la note également  $\mathbf{u}_{\text{stat}}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; \mathbf{e})$  et on vérifie que l'on a :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^G)(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = \frac{1}{r^2} \mathbf{U}_{\text{stat}}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) + o1, \quad \text{pour } r = \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\| \rightarrow 0 \quad (5.27)$$

On pose  $\mathbf{T}^0(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = \frac{1}{r^2} \mathbf{U}_{\text{stat}}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$ , appelé *tenseur régularisant*, et on montre alors que pour un domaine hétérogène borné  $\Omega$  de frontière bornée  $\partial\Omega = \Gamma$  sans bord [40] :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{T}^0(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = -\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}) \quad (5.28)$$

l'intégrale étant prise au sens de la valeur principale de Cauchy.

**remarque 5.2** – Cette méthode peut tout aussi bien être appliquée au cas homogène ■

### Application à une équation intégrale directe

**Milieu homogène** – L'application de l'identité de corps rigide (5.25) à la première équation intégrale de frontière du théorème (5.18) donne pour  $\boldsymbol{\xi} \in \Gamma$  [28] :

$$\begin{aligned} c\gamma_+ \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) + (1-c)\gamma_- \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) &= \int_{\Gamma} \mathbf{U}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) [\mathbf{t}(\mathbf{u})](\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \\ &\quad - \int_{\Gamma} (\mathbf{T}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) - \mathbf{T}_{\text{stat}}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})) [\mathbf{u}](\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \\ &\quad - \int_{\Gamma} \mathbf{T}_{\text{stat}}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) ([\mathbf{u}](\mathbf{x}) - [\mathbf{u}](\boldsymbol{\xi})) dS(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5.29)$$

Dans cette expression, les noyaux des deux premières intégrales sont faiblement singuliers, celui de la troisième est régulier grâce à l'Eq.(5.26), et enfin pour la quatrième la continuité de  $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{u}](\mathbf{x})$  permet de résorber la singularité. On dispose donc avec cette équation d'intégrales usuelles plus appropriées à un traitement numérique. On s'affranchit de plus du calcul du terme libre.

**Milieu hétérogène** – Pour un milieu hétérogène, la seule différence avec le cas homogène tient dans le choix du tenseur régularisant  $\mathbf{T}^0$ , qui ne vérifie pas par construction les conditions aux limites éventuellement vérifiées par le second tenseur de Green dynamique  $\mathbf{T}^G$ . Ainsi pour une équation intégrale posée sur une frontière  $\Gamma$  avec  $\Gamma \cap \Gamma_a \stackrel{\text{déf}}{=} \mathfrak{s} \neq \emptyset$  il restera à évaluer le terme  $\oint_{\Gamma_s} \mathbf{T}^0(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) dS(\mathbf{x})$  (qui sera nul dans le cas contraire  $\Gamma \cap \Gamma_a = \emptyset$ , voir FIG. 5.2). En posant donc :

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) = - \oint_{\Gamma_s} \mathbf{T}^0(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) dS(\mathbf{x})$$



où l'intégrale est prise au sens de la valeur principale de Cauchy et où  $\Gamma_s$  est orientée par la normale extérieure au domaine  $\Omega^+$ , on obtient l'équation intégrale de frontière régularisée du théorème (5.18) pour  $\xi \in \Gamma' = \Gamma/\Gamma_s$  (voir FIG. 5.2) [9, 40] :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\gamma_+\mathbf{u}(\xi) + (\mathcal{I}_d - \mathbf{C})\gamma_-\mathbf{u}(\xi) &= \int_{\Gamma'} \mathbf{U}^G(\xi, \mathbf{x})[\mathbf{t}(\mathbf{u})](\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \\ &\quad - \int_{\Gamma'} (\mathbf{T}^G(\xi, \mathbf{x}) - \mathbf{T}^0(\xi, \mathbf{x})) [\mathbf{u}](\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \\ &\quad - \int_{\Gamma'} \mathbf{T}^0(\xi, \mathbf{x}) ([\mathbf{u}](\mathbf{x}) - [\mathbf{u}](\xi)) dS(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5.30)$$

De même que pour le cas d'un milieu homogène, Eq.(5.29), les noyaux des deux premières intégrales sont faiblement singuliers, celui de la troisième est régulier grâce à l'Eq.(5.27), et enfin pour la quatrième la continuité de  $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{u}](\mathbf{x})$  permet de résorber la singularité. On dispose donc avec cette équation d'intégrales usuelles plutôt que d'intégrales au sens de la valeur principale de Cauchy, pouvant être traitées numériquement par une méthode de quadrature standard. On s'affranchit également du calcul du terme libre. Par contre

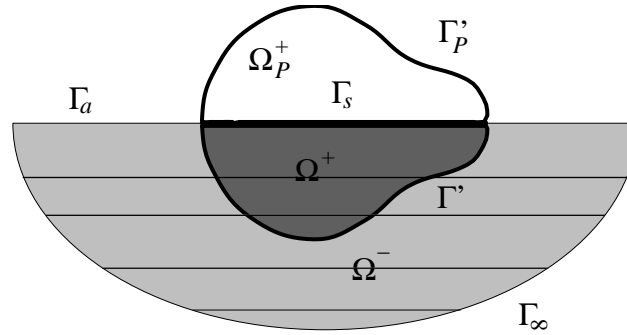


FIG. 5.2 – Exemple d'un demi-espace hétérogène, notations pour la régularisation.

l'équation intégrale régularisée ci-dessus fait intervenir la surface  $\Gamma_s$  pour le calcul de  $\mathbf{C}$ , ce qui est pénalisant pour l'approche numérique si l'on ne souhaite mailler que la surface  $\Gamma'$  par éléments finis de frontière. Clouteau a montré dans sa thèse [40] que ce terme pouvait être ramené à une intégrale sur  $\Gamma'$  dans le cas où  $\Gamma_a$  est contenue dans un plan  $P$ . Pour cela, on considère la symétrie  $S_P$  par rapport à ce plan,  $\Gamma'_P = S_P(\Gamma')$  et  $\Omega_P^+$  le domaine borné délimité par  $\Gamma_s \cup \Gamma'_P$  (voir FIG. 5.2). Par application de l'Eq.(5.28) à ce domaine pour  $\xi \notin \Omega_P^+$ , on en déduit :

$$\mathbf{C}(\xi) = - \int_{\Gamma'_P} \mathbf{T}_{\mathbf{n}(\mathbf{x})}^0(\xi, \mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \quad (5.31)$$

où l'intégrale est maintenant définie au sens usuelle si  $\xi \notin \partial\Gamma' = \partial\Gamma'_P$ , et  $\Gamma'_P$  est orientée par la normale  $\mathbf{n}$  extérieure à  $\Omega_P^+$ . En notant :

$$\mathbf{T}_P^0(\xi, \mathbf{x}) = \mathbf{T}_{S_P(\mathbf{n}(\mathbf{x}))}^0(\xi, S_P(\mathbf{x}))$$

on a alors :

$$\mathbf{C}(\xi) = - \int_{\Gamma'} \mathbf{T}_P^0(\xi, \mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \quad (5.32)$$

### Application à une équation intégrale indirecte

Pour les applications qui nous intéressent (par exemple l'application de la proposition (5.67) avec la définition (5.64), voir ci-dessous) nous nous limiterons à une représentation en potentiel de simple couche de la forme de celle du théorème (5.21).

**Milieu homogène** – Dans le cas d'un milieu homogène, le noyau de l'opérateur  $-\mathbb{T}_{stat}^{G*}$  vérifie également l'identité de corps rigide et nous obtenons l'équation intégrale de deuxième espèce régularisée pour les problèmes de Neumann intérieur ou extérieur :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}) = c' \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma} \mathbf{t}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi})(\mathbf{U}^G - \mathbf{U}_{stat}^G)(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \mathbf{q}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \\ + \int_{\Gamma} \mathbf{t}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi})(\mathbf{U}_{stat}^G)(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) (\mathbf{q}(\mathbf{x}) - \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi})) dS(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5.33)$$

avec :

$$c' = \begin{cases} c & \text{pour le problème de Neumann intérieur} \\ c - 1 & \text{pour le problème de Neumann extérieur} \end{cases}$$

et où  $c$  est donné avec l'identité de corps rigide en espace homogène (5.25). la singularité de l'Eq.(5.26) est la même pour  $\mathbf{t}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi})(\mathbf{U}^G - \mathbf{U}_{stat}^G)(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$  puisque le point source  $\boldsymbol{\xi}$  et le point d'observation  $\mathbf{x}$  jouent des rôles symétriques.

**Milieu hétérogène** – Dans le cas d'un milieu hétérogène, on choisit pour le tenseur régularisant  $\mathbf{t}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi})(\mathbf{U}^G)^0(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = \mathbf{T}^0(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$  pour obtenir :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{C}' \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma'} (\mathbf{t}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi})(\mathbf{U}^G)(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) - \mathbf{T}^0(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})) \mathbf{q}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \\ + \int_{\Gamma'} \mathbf{T}^0(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) (\mathbf{q}(\mathbf{x}) - \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi})) dS(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5.34)$$

avec :

$$\mathbf{C}'(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} \mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) & \text{pour le problème de Neumann intérieur} \\ \mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) - \mathcal{I}_d & \text{pour le problème de Neumann extérieur.} \end{cases}$$

#### 5.1.5 Applications : équations intégrales dans le sol

Les résultats des sections précédentes sont appliqués au cas du demi-espace sol stratifié horizontalement, en l'absence de perturbation. Ils vont nous permettre de construire

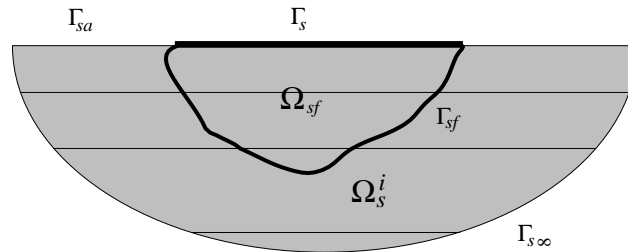


FIG. 5.3 – Demi-espace sol compatible avec la définition du champ incident, notations.

l'opérateur d'impédance élastodynamique de frontière du sous-domaine sol non perturbé de la définition (4.13), ou Eq.(4.21) dans sa version discrétisée. Celui-ci intervient dans l'équation d'équilibre dynamique global de l'interface sol-structure  $\Gamma_{sf}$  issue de la formulation par sous-structuration. La solution locale du problème de transmission dans le sous-domaine sol est également reconstruite par une équation intégrale de représentation, notamment pour ce qui concerne les champs rayonné total  $\mathbf{u}_{d*}$  et diffracté local  $\mathbf{u}_{d\ddagger}$ , définis respectivement en (2.37) et (2.35).

Les notations introduites, compatibles avec celles des FIG. 2.2 et FIG. 5.1, sont résumées sur la FIG. 5.3 ci-dessous. Le demi-espace sol en l'absence de la structure, avant construction des fondations, est noté  $\Omega_s^{\ddagger}$ . La surface libre, interface entre le sol et l'air ambiant, est notée  $\Gamma_{sa}^{\ddagger} \equiv \Gamma_a$  ici. La partie du sol occupée par la fondation de la structure est notée  $\Omega_{sf}$  avec  $\partial\Omega_{sf} = \bar{\mathfrak{s}} \cup \overline{\Gamma_{sf}}$ , où  $\mathfrak{s} = \partial\Omega_{sf} \cap \Gamma_{sa}^{\ddagger}$ . Sur  $\mathfrak{s}$  s'applique la condition de surface libre telle que définie sur  $\Gamma_{sa}^{\ddagger}$ . Tous les résultats obtenus en §5.1.3 et §5.1.4 notamment peuvent être étendus au cas des tenseurs de Green pour le domaine sol stratifié et la surface  $\partial\Omega_{sf}$ . Notamment  $\Omega^+$  correspond ici à  $\Omega_{sf}$  et  $\Omega^-$  à  $\Omega_s = \Omega_s^{\ddagger}/\overline{\Omega_{sf}}$ , et la fonction de Green utilisée est, en accord avec les notations du §5.1.1, la solution fondamentale de l'opérateur  $-\mathcal{K}_0|_{\mathcal{D}(\Omega_s^{\ddagger})}$ .

### Représentation pour le champ incident

Par définition le champ incident n'est *a priori* pas dans  $H(\Omega_s^{\ddagger})$  puisqu'il provient éventuellement de l'infini. Par contre il est élastodynamique dans  $\Omega_{sf}$ . Par application de la deuxième formule de Green du théorème (5.17), et si l'on suppose qu'aucune source sismique n'est présente dans  $\Omega_{sf}$ , on obtient l'équation intégrale de frontière :

$$\boldsymbol{\kappa}\mathbf{u}_{\ddagger} = \mathbb{U}^G \mathbf{t}(\mathbf{u}_{\ddagger}) - \mathbb{T}^G \mathbf{u}_{\ddagger}, \quad \text{sur } \Gamma_{sf} \quad (5.35)$$

avec  $\mathbf{n}$  la normale à  $\Gamma_{sf}$  extérieure à  $\Omega_{sf}$  et la condition de surface libre sur  $\mathfrak{s}$ . Sa version régularisée s'écrit d'après l'Eq.(5.30) :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\mathbf{u}_{\ddagger}(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma_{sf}} \mathbb{U}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{t}(\mathbf{u}_{\ddagger})(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \\ &\quad - \int_{\Gamma_{sf}} (\mathbb{T}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathbb{T}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \mathbf{u}_{\ddagger}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \\ &\quad - \int_{\Gamma_{sf}} \mathbb{T}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\mathbf{u}_{\ddagger}(\mathbf{y}) - \mathbf{u}_{\ddagger}(\mathbf{x})) dS(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

### Représentation pour le champ diffracté local

On rappelle que le champ diffracté local  $\mathbf{u}_{d\ddagger}$  est solution d'un problème aux limites de Dirichlet extérieur dans  $\Omega_s = \Omega_s^{\ddagger}/\overline{\Omega_{sf}}$  (voir sa définition (2.35)) :

**Problème 5.36** *Pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ , trouver  $\mathbf{u}$  tel que :*

$$\begin{cases} \mathbf{Div}\boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{u}) + \rho_s\omega^2\mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_s \\ \mathbf{t}_s(\mathbf{u}) = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{sa} \\ \gamma_-\mathbf{u} = -\mathbf{u}_{\ddagger} & \text{sur } \Gamma_{sf} \end{cases}$$

L'indice  $s$  se réfère ici à une quantité – un paramètre mécanique, ou un champ, ou une sollicitation – relative au domaine sol. Lorsque la quantité indiquée est le champ de vecteur

contrainte sur une interface, on suppose implicitement que la normale définissant ce champ est la normale extérieure au domaine. Des résultats du §5.1.3 on déduit l'équation intégrale de bord :

$$-(\mathcal{I}_d - \boldsymbol{\kappa}) \mathbf{u}_i = \mathbb{U}^G \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_{d\ddot{i}}) - \mathbb{T}^G \mathbf{u}_i, \quad \text{sur } \Gamma_{sf} \quad (5.37)$$

ou sa version régularisée d'après l'Eq.(5.30) :

$$\begin{aligned} -(\mathcal{I}_d - \mathbf{C}) \mathbf{u}_i(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma_{sf}} \mathbf{U}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_{d\ddot{i}})(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \\ &\quad - \int_{\Gamma_{sf}} (\mathbf{T}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathbf{T}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \mathbf{u}_i(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \\ &\quad - \int_{\Gamma_{sf}} \mathbf{T}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\mathbf{u}_i(\mathbf{y}) - \mathbf{u}_i(\mathbf{x})) dS(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

et l'équation intégrale de représentation :

$$\mathbf{u}_{d\ddot{i}} = \mathcal{U}^G \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_{d\ddot{i}}) - \mathcal{T}^G \mathbf{u}_i, \quad \text{dans } \Omega_s. \quad (5.38)$$

On rappelle que  $\mathbf{n} = \mathbf{n}^+$  est ici la normale à  $\Gamma_{sf}$  extérieure à  $\Omega_{sf}$ . Avec la définition de l'opérateur de capacité **extérieure** du théorème (5.23) pour le domaine sol  $\Omega_s$ , l'Eq.(5.37) est réécrite :

$$\mathbf{t}_s(\mathbf{u}_{d\ddot{i}}) = -\mathbb{K}^G \mathbf{u}_i, \quad \text{sur } \Gamma_{sf}. \quad (5.39)$$

Des équations intégrales (5.35), (5.37) et (5.38) on déduit pour le champ incident local  $\mathbf{u}_i^{\text{loc}} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{d\ddot{i}}$  dans le domaine sol (voir l'Eq.(2.8) et l'Eq.(2.36)) l'équation intégrale de frontière :

$$-\mathbf{u}_i = \mathbb{U}^G \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_i^{\text{loc}}), \quad \text{sur } \Gamma_{sf} \quad (5.40)$$

et l'équation intégrale de représentation :

$$\mathbf{u}_i^{\text{loc}} = \mathbf{u}_i + \mathcal{U}^G \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_i^{\text{loc}}), \quad \text{dans } \Omega_s. \quad (5.41)$$

### Représentation pour un relèvement élastodynamique dans le sol

Le relèvement élastodynamique dans le sol du champ d'interface  $\Phi$ , défini en (4.6), est solution d'un problème aux limites de Dirichlet extérieur dans  $\Omega_s$  :

**Problème 5.42** *Pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ , trouver  $\mathbf{u}^s(\Phi)$  tel que :*

$$\begin{cases} \mathbf{Div} \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{u}^s(\Phi)) + \rho_s \omega^2 \mathbf{u}^s(\Phi) = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_s \\ \mathbf{t}_s(\mathbf{u}^s(\Phi)) = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{sa} \\ \gamma_- \mathbf{u}^s(\Phi) = \Phi & \text{sur } \Gamma_{sf} \end{cases}$$

Des résultats du §5.1.3 on déduit l'équation intégrale de bord :

$$(\mathcal{I}_d - \boldsymbol{\kappa}) \Phi = \mathbb{U}^G \mathbf{t}_s(\mathbf{u}^s(\Phi)) + \mathbb{T}^G \Phi, \quad \text{sur } \Gamma_{sf} \quad (5.43)$$

ou sa version régularisée d'après l'Eq.(5.30) :

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_d - \mathbf{C}) \Phi(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma_{sf}} \mathbf{U}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{t}_s(\mathbf{u}^s(\Phi))(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \\ &\quad + \int_{\Gamma_{sf}} (\mathbf{T}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathbf{T}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \Phi(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \\ &\quad + \int_{\Gamma_{sf}} \mathbf{T}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\Phi(\mathbf{y}) - \Phi(\mathbf{x})) dS(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

ou encore :

$$\mathbf{t}_s(\mathbf{u}^s(\Phi)) = \mathbb{K}^G \Phi, \quad \text{sur } \Gamma_{sf} \quad (5.44)$$

et l'équation intégrale de représentation :

$$\mathbf{u}^s(\Phi) = (\mathcal{U}^G \mathbb{K}^G + \mathcal{T}^G) \Phi, \quad \text{dans } \Omega_s. \quad (5.45)$$

### Impédance d'interface du sol

De la représentation (5.44) ci-dessus et de l'Eq.(4.13) on déduit l'expression de la forme sesqui-linéaire d'impédance d'interface du sol sous la forme :

$$\kappa_s(\Phi, \Psi) \stackrel{\text{déf}}{=} \langle \mathbb{K}^G \Phi, \Psi \rangle_{\Gamma_{sf}} = \langle \mathbb{K}^G \Psi, \Phi \rangle_{\Gamma_{sf}}, \quad \forall (\Phi, \Psi) \in V(\Gamma_{sf}) \times V(\Gamma_{sf}) \quad (5.46)$$

L'opérateur d'impédance élastodynamique de bord associé  $\mathbb{K}^G$  est symétrique (voir le théorème (5.23)).

### Représentation pour le champ local

Le champ local dans le sol  $\mathbf{u}_s^f$ , défini en (4.10), est solution d'un problème aux limites homogène extérieur dans  $\Omega_s$  :

**Problème 5.47** *Pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ , trouver  $\mathbf{u}_s^f$  tel que :*

$$\begin{cases} -\text{Div } \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{u}_s^f) - \rho_s \omega^2 \mathbf{u}_s^f = \mathbf{f}_s & \text{dans } \Omega_s \\ \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_s^f) = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{sa} \\ \gamma_- \mathbf{u}_s^f = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{sf} \end{cases}$$

Des résultats du §5.1.3 on déduit l'équation intégrale de bord :

$$\mathbf{0} = \mathcal{U}^{G*} \mathbf{f}_s + \mathbb{U}^G \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_s^f), \quad \text{sur } \Gamma_{sf} \quad (5.48)$$

et l'équation intégrale de représentation :

$$\mathbf{u}_s^f = \mathcal{U}_{\Omega_s}^G \mathbf{f}_s + \mathcal{U}^G \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_s^f), \quad \text{dans } \Omega_s. \quad (5.49)$$

## 5.2 Fonction de Green du domaine composite

Les outils présentés dans la section précédente et la formulation par sous-structuration de la section §4.1 permettent désormais de construire effectivement le champ des déplacements dans la structure et le sol sous l'action d'un champ incident ou de forces volumiques imposées dans l'un ou l'autre des sous-domaines. La formulation variationnelle retenue pour la définition des champs locaux, voir (4.10), permet en outre d'étendre la méthode à des forces ponctuelles dans  $\mathcal{D}'(\Omega_b)$  ou  $\mathcal{D}'(\Omega_s)$ . Ainsi le problème variationnel global posé sur l'interface  $\Gamma_{sf}$  (4.15) peut servir à la construction numérique de la solution fondamentale  $\mathbf{u}^{Gc}$  du domaine composite sol-structure dans  $V(\Omega_0)$ ,  $\Omega_0 = \Omega_b \cup \Omega_s$ , en l'absence de perturbation dans le sol. Celle-ci peut être en fait identifiée à la fonction de Green du domaine composite de référence défini dans la section §4.2. Dans toute la suite, on postulera l'existence d'une telle fonction. Elle est élastodynamique (voir la définition (5.15)) dans  $\Omega_0 / \{\boldsymbol{\xi}\}$ , où  $\boldsymbol{\xi}$  est le

point d'application de la force unitaire ponctuelle dans  $\mathcal{D}'(\Omega_b)$  ou  $\mathcal{D}'(\Omega_s)$ , et il est donc possible de construire de façon formelle des équations intégrales de frontière et de représentation dans  $\Omega_0$  utilisant cette solution. Elles vont nous permettre ensuite de caractériser, sous la forme d'opérateurs intégraux, les opérateurs  $\mathbf{U}_0$  ou  $\mathbf{U}^{\mathfrak{b}}$  (sans perturbation du sol) introduits en §2.3 et §4.2, et ainsi de compléter la résolution numérique du problème stochastique défini au chapitre §3.

Dans cette section on commence donc par reformuler le problème de sous-structuration de la section §4.1 adapté au calcul de la fonction de Green du domaine composite de référence. Une fois celle-ci reconstruite sur l'interface  $\Gamma_{sf}$  par cette méthode, on montre qu'il est possible de représenter sa restriction au sous-domaine sol par une équation intégrale faisant intervenir la fonction de Green du demi-espace sol stratifié sans perturbation. Cette représentation permet ensuite de construire formellement la solution du problème de transmission initial de l'interaction sol-structure (2.32) sans perturbation du sol, par une équation intégrale directe ou indirecte. Pour finir, on en déduit également une construction de l'opérateur  $\mathbf{U}_0$  sous forme d'opérateurs intégraux similaires à ceux utilisés dans la section §5.1.

Les notations utilisées dans cette section sont résumées sur la FIG. 5.4 ci-dessous et sont compatibles avec celles introduites par ailleurs sur les FIG. 4.1 et 5.3. Le domaine composite de référence est donc ici  $\Omega_0 = \Omega_b \cup \Omega_s$  dans lequel est plongée la surface non fermée  $\Gamma_{sf}$ . La surface libre de  $\Omega_0$  est notée  $\Gamma_a = \Gamma_{sa} \cup \Gamma_{ba}$  avec par construction  $\Gamma_{sa} = \Gamma_{sa}^{\mathfrak{b}}/\bar{\mathfrak{s}}$ , où l'on rappelle que  $\mathfrak{s} = \partial\Omega_{sf} \cap \Gamma_{sa}^{\mathfrak{b}}$  (voir la FIG. 5.3). La frontière du domaine de référence "à l'infini" est quant à elle  $\Gamma_{s\infty}$ .

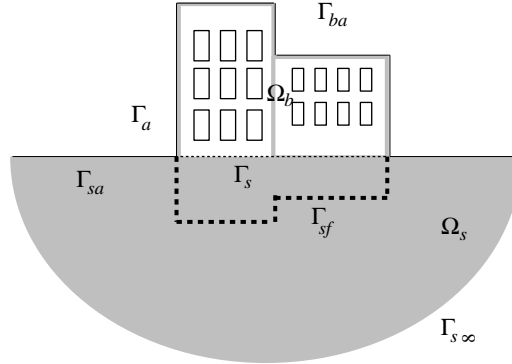


FIG. 5.4 – Domaine composite sol-structure de référence non perturbé, notations.

### 5.2.1 Construction par sous-structuration

L'approche par sous-structuration du §4.1 permet donc de construire la fonction de Green du domaine composite sol-structure. Rappelons qu'elle conduit au problème variationnel (4.15) posé uniquement en terme de champs définis sur  $\Gamma_{sf}$  : trouver  $\Phi \in V(\Gamma_{sf})$  tel que :

$$\kappa_b(\Phi, \Psi) + \kappa_s(\Phi, \Psi) = \phi_b(\Psi) + \phi_s(\Psi) + \phi_{\mathfrak{b}}(\Psi), \quad \forall \Psi \in V(\Gamma_{sf})$$

où  $\kappa_b$  et  $\kappa_s$  sont respectivement les impédances d'interface des sous-domaines sol et structure définies en (4.13),  $\phi_b$  et  $\phi_s$  sont respectivement les forces induites par la structure et le sol sur l'interface  $\Gamma_{sf}$  définies en (4.14), et  $\phi_{\mathfrak{b}}$  est la forme linéaire des forces sismiques induites

sur  $\Gamma_{sf}$ , définie en (4.15). On suppose alors :  $\mathbf{u}_i \equiv \mathbf{0}$  dans  $\overline{\Omega_s}$  ;  $\mathbf{f}_b = \delta_{\xi_b} \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_b$  définie dans  $\mathcal{D}'(\Omega_b)$  et  $\mathbf{f}_s = \delta_{\xi_s} \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_s$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega_s)$ .

### Formulation continue

Les forces induites sur l'interface  $\Gamma_{sf}$  par les champs locaux dans  $\Omega_b$  et  $\Omega_s$  respectivement sont donc, d'après les définitions (4.10) et (4.14) :

$$\begin{aligned}\phi_b(\Psi) &= \mathbf{u}^b(\Psi)(\xi_b) \cdot \mathbf{e}_b \\ \phi_s(\Psi) &= \mathbf{u}^s(\Psi)(\xi_s) \cdot \mathbf{e}_s\end{aligned}$$

pour tout champ  $\Psi \in V(\Gamma_{sf})$ . L'équilibre de l'interface  $\Gamma_{sf}$  s'écrit :

**Problème 5.50** *Pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ , trouver  $\Phi(\xi) \in V(\Gamma_{sf})$  tel que pour tout  $\Psi \in V(\Gamma_{sf})$  :*

$$\kappa_b(\Phi, \Psi) + \langle \mathbb{K}^G \Phi, \Psi \rangle_{\Gamma_{sf}} = \phi_b(\Psi) + \phi_s(\Psi).$$

avec l'Eq.(5.46). En utilisant les résultats de la section §4.1.3, la fonction de Green du domaine composite de référence est reconstruite grâce à :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{Gc}|_{\Omega_b} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{u}^{Gc+} = \mathbf{u}_b^f + \mathbf{u}^b(\Phi) \\ \mathbf{u}^{Gc}|_{\Omega_s} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{u}^{Gc-} = \mathbf{u}_s^f + \mathbf{u}^s(\Phi) \\ \gamma \mathbf{u}^{Gc\pm} = \Phi \end{cases} \quad (5.51)$$

où  $\mathbf{u}_b^f$  et  $\mathbf{u}_s^f$  sont les champs locaux dans la structure et le sol respectivement, définis en (4.10).  $\mathbf{u}^s(\Phi)$  et  $\mathbf{u}_s^f$  sont calculés par équations intégrales dans le sol suivant §5.1.5. On en déduit le vecteur-contrainte associé sur l'interface  $\Gamma_{sf}$  orienté par la normale extérieure au sous-domaine sol par :

$$\mathbf{t}_s(\mathbf{u}^{Gc-}) = \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_s^f) + \mathbb{K}^G \Phi \quad (5.52)$$

où  $\mathbf{t}_s(\mathbf{u}_s^f)$  est solution de l'Eq.(5.48). Par construction  $\mathbf{t}_s(\mathbf{u}^{Gc-}) = -\mathbf{t}_b(\mathbf{u}^{Gc+})$ . Lorsque la force unitaire est appliquée, par exemple, au sous-domaine structure, soit  $f_s \equiv 0$ , on a  $\mathbf{u}_s^f = \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_s^f) = \mathbf{0}$ .

### Fonction de Green approchée

La projection de  $\Phi$  dans un sous-espace de dimension finie de  $V(\Gamma_{sf})$ , soit  $V_P(\Gamma_{sf})$ , est notée  $\tilde{\Phi}$  comme dans la section §4.1.5 :

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^P c_p(\xi) \Phi_p(\mathbf{x})$$

Si la fonction de Green approchée  $\tilde{\mathbf{u}}^{Gc}$  du domaine composite de référence est construite sous la forme (voir l'Eq.(4.18)) :

$$\tilde{\mathbf{u}}^{Gc+}(\xi, \mathbf{x}) = \sum_{p=1}^P c_p(\xi) \mathbf{u}_o^b(\Phi_p)(\mathbf{x}) + \sum_{A=1}^{N_A} \alpha_A(\xi) \varphi_A^b(\mathbf{x}) \quad (5.53)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^{Gc-}(\xi, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_s^f(\mathbf{x}; \xi) + \sum_{p=1}^P c_p(\xi) \mathbf{u}^s(\Phi_p)(\mathbf{x}) \quad (5.54)$$

dans le cas d'une force ponctuelle unitaire appliquée au point  $\boldsymbol{\xi}$  de  $\Omega_0$ , alors les coordonnées généralisées à valeurs complexes  $\mathbf{c}(\boldsymbol{\xi})$  et  $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})$  sont déterminées par le système, non condensé sur l'interface :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_b^{\varphi\varphi} & -\omega^2 \mathbf{M}_b^{\varphi\Phi} \\ -\omega^2 \mathbf{M}_b^{\Phi\varphi} & \mathbf{K}_b^{\Phi\Phi} + \mathbf{K}_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{c} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^\varphi \\ \mathbf{F}^\Phi \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_s \end{Bmatrix} \quad (5.55)$$

où pour  $p, q \in \{1, 2 \dots P\}$  et  $A, B \in \{1, 2 \dots N_A\}$  :

$$[\mathbf{K}_b^{\varphi\varphi}]_{AB} = k_b(\varphi_A^b, \varphi_B^b) = (\omega_A^2 - \omega^2 + 2i\zeta_{A\omega}\omega_A) \delta_{AB} \quad (5.55a)$$

$$[\mathbf{M}_b^{\varphi\Phi}]_{Ap} = m_b(\varphi_A^b, \mathbf{u}_o^b(\Phi_p)) = [\mathbf{M}_b^{\Phi\varphi}]_{pA} \quad (5.55b)$$

$$[\mathbf{K}_s]_{pq} = \langle \mathbb{K}^G \Phi_q, \Phi_p \rangle_{\Gamma_{sf}} \quad (5.55c)$$

$$F_A^\varphi = \langle \mathbf{f}_b, \varphi_A^b \rangle_{\Omega_b} = \varphi_A^b(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{e}_b \quad (5.55d)$$

$$F_p^\Phi = \langle \mathbf{f}_b, \mathbf{u}_o^b(\Phi_p) \rangle_{\Omega_b} = \mathbf{u}_o^b(\Phi_p)(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{e}_b \quad (5.55e)$$

$$F_{s,p} = \langle \mathbf{f}_s, \bar{\mathbf{u}}^s(\Phi) \rangle_{\Omega_s} = - \langle \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_s^f), \Phi_p \rangle_{\Gamma_{sf}} \quad (5.55f)$$

Il est ensuite possible d'obtenir, grâce à la solution approchée de l'Eq.(5.54), une projection du vecteur contrainte de  $\tilde{\mathbf{u}}^{Gc}$  sur  $\Gamma_{sf}$  dans le même sous-espace de dimension fini de  $V'(\Gamma_{sf})$  que celui utilisé pour la discrétisation de l'opérateur de Steklov-Poincaré de l'Eq.(5.44) (ou pour la représentation en potentiel de simple couche ci-dessus) et la construction de  $\mathbf{u}_s^f$  par le système (5.48)–(5.49). Celle-ci s'écrit :

$$\mathbf{t}_s(\tilde{\mathbf{u}}^{Gc-}) = \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_s^f) + \sum_{p=1}^P c_p \mathbf{t}_s(\mathbf{u}^s(\Phi_p)) \quad (5.56)$$

## 5.2.2 Représentation par équations intégrales dans le sol

### Equations intégrales directes

La fonction de Green du domaine composite réduite au domaine sol, soit  $\mathbf{u}^{Gc-}$ , est élastodynamique dans  $\Omega_s / \{\boldsymbol{\xi}\}$  si éventuellement  $\boldsymbol{\xi} \in \Omega_s$ . On peut donc lui appliquer le théorème (5.18), et nous avons alors l'équation intégrale directe de frontière :

$$\boldsymbol{\kappa} \mathbf{u}^{Gc-}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; \mathbf{e}) = \boldsymbol{\kappa} \mathbf{u}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; \mathbf{e}) + \mathbb{U}^G \mathbf{t}_s(\mathbf{u}^{Gc-})(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; \mathbf{e}) + \mathbb{T}^G \mathbf{u}^{Gc-}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; \mathbf{e}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{sf} \quad (5.57)$$

L'équation intégrale directe de représentation correspondante est :

$$\mathbf{u}^{Gc-}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; \mathbf{e}) = \mathbf{u}^G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; \mathbf{e}) + \mathcal{U}^G \mathbf{t}_s(\mathbf{u}^{Gc-})(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; \mathbf{e}) + \mathcal{T}^G \mathbf{u}^{Gc-}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; \mathbf{e}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_s \quad (5.58)$$

La fonction de Green  $\mathbf{u}^G$  du demi-espace sol est nulle par définition si  $\boldsymbol{\xi} \notin \overline{\Omega_s}$ . Dans les équations (5.57)–(5.58)  $\mathbf{u}^{Gc-}$  et  $\mathbf{t}_s(\mathbf{u}^{Gc-})$  sont *a priori* inconnus sur  $\Gamma_{sf}$ . Néanmoins le résultat de la section précédente (application de la méthode de sous-structuration) nous donne  $\gamma \mathbf{u}^{Gc-}$  et  $\mathbf{u}^{Gc-}$  par un relèvement élastodynamique. En fait la représentation intégrale directe ci-dessus, Eq.(5.58), est équivalente à la représentation (5.51) dans le sol, où  $\mathbf{u}_s^f$  et  $\mathbf{u}^s(\Phi)$  sont évalués par équations intégrales comme dans la section §5.1.5.



### Equations intégrales indirectes

Il apparaîtra utile dans la suite de construire la fonction de Green du domaine composite de référence sur l'interface  $\Gamma_{sf}$  par une représentation en potentiel de simple couche du sol. On note  $\mathbf{q}^{Gc}$  la densité du potentiel telle que :

$$\mathbf{u}^s(\Phi) = \mathcal{U}^G \mathbf{q}^{Gc}, \quad \text{dans } \Omega_s \quad (5.59)$$

où  $\Phi$  est la solution du problème (5.50). Elle est obtenue de manière unique dans  $V'(\Gamma_{sf})$  (voir le théorème (5.11)) par l'équation intégrale de première espèce :

$$\mathbb{U}^G \mathbf{q}^{Gc} = \Phi, \quad \text{sur } \Gamma_{sf} \quad (5.60)$$

pourvu que  $\Phi$  soit donné dans  $V(\Gamma_{sf})$ . Le vecteur-contrainte associé sur  $\Gamma_{sf}$  orientée par la normale extérieure au sous-domaine sol est obtenu ensuite par :

$$\mathbf{t}_s(\mathbf{u}^s(\Phi)) = -(\boldsymbol{\kappa}^- + \mathbb{T}^{G*}) \mathbf{q}^{Gc}, \quad \text{sur } \Gamma_{sf} \quad (5.61)$$

On en déduit alors la fonction de Green et le vecteur-contrainte associé sur l'interface  $\Gamma_{sf}$  :

$$\gamma \mathbf{u}^{Gc^-} = \mathbb{U}^G \mathbf{q}^{Gc} \quad (5.62)$$

$$\mathbf{t}_s(\mathbf{u}^{Gc^-}) = \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_s^f) + (\mathcal{I}_d - \boldsymbol{\kappa} - \mathbb{T}^{G*}) \mathbf{q}^{Gc} \quad (5.63)$$

qui permettent de reconstruire la fonction de Green du domaine composite de référence réduite au sol par la représentation (5.58). Dans l'expression de  $\mathbf{t}_s(\mathbf{u}^{Gc^-})$  ci-dessus, l'orientation de la normale est inversée par rapport à la définition du théorème (5.21).

A partir de la donnée de  $\mathbf{q}^{Gc}$ , on définit alors :

**Définition 5.64 (tenseur de densité)** *Le tenseur de densité du potentiel de simple couche (5.59) représentant le tenseur de Green du domaine composite réduit au domaine sol est tel que  $\forall (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  :*

$$\mathbf{Q}^{Gc}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) : (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{q}^{Gc}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}; \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$$

et vérifie pour tout  $\boldsymbol{\xi} \in \Omega_b$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{Gc}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) &= \mathcal{U}^G \mathbf{Q}^{Gc}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_s \\ \mathbf{T}^{Gc}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) &= (\boldsymbol{\kappa} - \mathcal{I}_d + \mathbb{T}^{G*}) \mathbf{Q}^{Gc}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_{sf} \end{aligned}$$

On associe enfin au tenseur de densité  $\mathbf{Q}^{Gc}$  relativement à la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  l'opérateur  $\mathcal{Q}^{Gc} : V(\Gamma_{sf}) \rightarrow V(\Omega_b)$  tel que :

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{Q}^{Gc} \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Gamma_{sf}} \mathbf{Q}^{Gc}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x})$$

Il est borné grâce aux propriétés du potentiel de simple couche dans le sol. On montre maintenant que cet opérateur s'identifie en fait à l'opérateur  $\mathcal{U}^{\ddagger}$  introduit au chapitre §2.

### 5.2.3 Application à la résolution du problème de transmission par équations intégrales

Les résultats des sections §5.2.1 et §5.2.2 ci-dessus nous permettent d'exprimer la fonction de Green du domaine composite sol-structure de référence sans perturbation dans  $V(\Omega_0)$ . On peut alors définir formellement les opérateurs de simple et de double couche associés à cette solution et définis sur  $\Gamma_{sf}$ , ainsi que leurs traces et le potentiel de Newton. On les note, par analogie avec les notations de la section §5.1, respectivement  $\mathcal{U}^{Gc}$ ,  $\mathcal{T}^{Gc}$ ,  $\mathbb{U}^{Gc}$ ,  $\mathbb{T}^{Gc}$  et  $\mathcal{U}_\Omega^{Gc}$ .

#### Représentation intégrale directe

Le problème de transmission caractéristique de l'interaction sismique sol-structure est donné par (rappel du chapitre §2, problème (2.32)) :

**Problème 5.65** *Pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ , trouver  $\mathbf{u}$  tel que :*

$$\begin{cases} -\mathbf{Div} \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}) - \rho_0 \omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega_0 \\ \mathbf{t}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{ba} \cup \Gamma_{sa} \\ [\mathbf{u}] = \mathbf{u}_i ; [\mathbf{t}(\mathbf{u})] = -\mathbf{t}_s(\mathbf{u}_i) & \text{sur } \Gamma_{sf} \end{cases}$$

pour le champ diffracté total  $\mathbf{u}_d$  défini au paragraphe §2.1.3, et avec l'orientation des sauts compatible avec la définition (5.10). Si  $\mathbf{u}_i \in V(\Gamma_{sf})$  et  $\mathbf{t}_s(\mathbf{u}_i) \in V'(\Gamma_{sf})$ , alors on en déduit la représentation intégrale suivante pour le champ diffracté total :

$$\mathbf{u}_d = \mathcal{U}_\Omega^{Gc} \mathbf{f} - \mathcal{U}^{Gc} \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_i) - \mathcal{T}^{Gc} \mathbf{u}_i, \text{ dans } \Omega_0$$

et l'équation intégrale de frontière :

$$\boldsymbol{\kappa} \gamma_+ \mathbf{u}_d + (\mathcal{I}_d - \boldsymbol{\kappa}) \gamma_- \mathbf{u}_d = \mathcal{U}^{Gc*} \mathbf{f} - \mathbb{U}^{Gc} \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_i) - \mathbb{T}^{Gc} \mathbf{u}_i, \text{ sur } \Gamma_{sf}$$

où les différentes densités des potentiels de simple et de double couches dans ces équations ont pour support l'interface sol-structure  $\Gamma_{sf}$ . L'orientation de la surface  $\Gamma_{sf}$  est ici choisie en accord avec le §2, c'est-à-dire que le domaine  $\Omega^+$  correspond ici au domaine structure et le domaine  $\Omega^-$  correspond ici au domaine sol ; la surface  $\Gamma_{sf}$  est orientée par la normale extérieure à  $\Omega_b$ . Compte tenu de la définition de l'Eq.(2.8), nous avons donc la :

**Proposition 5.66** *Le champ de déplacements total dans le système couplé sol-structure est :*

$$\mathbf{u} = \mathcal{U}_\Omega^{Gc} \mathbf{f}, \text{ dans } \Omega_0$$

pour une force imposée  $\mathbf{f} \in V'(\Omega_0)$ , et :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_b &= -\mathcal{U}^{Gc} \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_i) - \mathcal{T}^{Gc} \mathbf{u}_i, & \text{dans } \Omega_b \\ \mathbf{u}_s &= -\mathcal{U}^{Gc} \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_i) - \mathcal{T}^{Gc} \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_i, & \text{dans } \Omega_s \end{aligned}$$

pour un champ incident imposé  $\mathbf{u}_i \in V(\Gamma_{sf})$ .

### Représentation intégrale indirecte

L'introduction du tenseur de densité du potentiel de simple couche pour la fonction de Green du domaine composite sol-structure nous permet d'obtenir une représentation intégrale indirecte du champ des déplacements total dans la structure ou le sol ne dépendant plus que de  $\mathbf{u}_i$ , et non pas  $\mathbf{t}_s(\mathbf{u}_i)$ . Cette expression est intéressante pour l'analyse spectrale car en général seule la fonction d'auto-corrélation de  $\mathbf{u}_i$  est connue alors que sa fonction d'inter-corrélation avec  $\mathbf{t}_s(\mathbf{u}_i)$  n'est jamais caractérisée. Le résultat obtenu est résumé dans la :

**Proposition 5.67** *Le champ des déplacements total dans le système couplé sol-structure est :*

$$\mathbf{u} = \mathcal{U}_\Omega^{Gc} \mathbf{f}, \quad \text{dans } \Omega_0$$

pour une force imposée  $\mathbf{f} \in V'(\Omega_0)$ , et :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_b &= \mathcal{Q}^{Gc} \mathbf{u}_i, & \text{dans } \Omega_b \\ \mathbf{u}_s &= \mathcal{Q}^{Gc} \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_i, & \text{dans } \Omega_s \end{aligned}$$

pour un champ incident imposé  $\mathbf{u}_i \in V(\Gamma_{sf})$ .

PREUVE – Le champ diffracté total au point  $\boldsymbol{\xi}$  dans la direction  $\mathbf{e}$  est d'après le théorème (5.17) :

$$\mathbf{u}_d(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{e} = - \langle \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_i), \mathbf{u}^{Gc-} \rangle_{\Gamma_{sf}} + \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{t}_s(\mathbf{u}^{Gc-}) \rangle_{\Gamma_{sf}} \quad (a)$$

De la définition de la densité du potentiel de simple couche représentant  $\mathbf{u}^{Gc-}$ , on déduit :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{t}_s(\mathbf{u}^{Gc-}) \rangle_{\Gamma_{sf}} &= - \langle \mathbf{u}_i, \mathbb{T}^{G*} \mathbf{q}^{Gc} \rangle_{\Gamma_{sf}} + \langle \mathbf{u}_i, (\mathcal{I}_d - \boldsymbol{\kappa}) \mathbf{q}^{Gc} \rangle_{\Gamma_{sf}} \\ &= - \langle \mathbb{T}^G \mathbf{u}_i, \mathbf{q}^{Gc} \rangle_{\Gamma_{sf}} + \langle (\mathcal{I}_d - \boldsymbol{\kappa}) \mathbf{u}_i, \mathbf{q}^{Gc} \rangle_{\Gamma_{sf}} \end{aligned} \quad (b)$$

Comme par ailleurs :

$$\langle \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_i), \mathbf{u}^{Gc-} \rangle_{\Gamma_{sf}} = \langle \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_i), \mathbb{U}^G \mathbf{q}^{Gc} \rangle_{\Gamma_{sf}} = \langle \mathbb{U}^G \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_i), \mathbf{q}^{Gc} \rangle_{\Gamma_{sf}} \quad (c)$$

avec (b) et (c) on obtient :

$$\mathbf{u}_d(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{e} = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{q}^{Gc} \rangle_{\Gamma_{sf}} - \langle \mathbb{T}^G \mathbf{u}_i + \mathbb{U}^G \mathbf{t}_s(\mathbf{u}_i) + \boldsymbol{\kappa} \mathbf{u}_i, \mathbf{q}^{Gc} \rangle_{\Gamma_{sf}} \quad (d)$$

Enfin le deuxième terme du membre de droite de l'égalité (d) s'annule grâce à l'Eq.(5.35). Le résultat final de la proposition est obtenu en faisant parcourir la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  à  $\mathbf{e}$ .  $\square$

Remarquons que le résultat de la proposition est bien compatible avec les hypothèses du paragraphe §3.1.1 : la restriction de l'opérateur  $\mathcal{Q}^{Gc}$  à  $H(\Omega_b)$  s'identifie à  $\mathcal{U}_2^i \in \mathcal{L}_2(H(\Gamma_{sf}), H(\Omega_b))$ , défini *sans perturbation* des modules du sol.

### Cas d'une fondation superficielle

Dans le cas d'une fondation superficielle pour laquelle  $\Gamma_{sf} \subset \Gamma_{sa}$ , nous avons par définition de la fonction de Green du domaine sol seul :

$$\mathbb{T}^{G*} \equiv \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbb{T}^G \equiv \mathbf{0}$$

donc  $\mathbf{T}^{Gc}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = -\mathbf{Q}^{Gc}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$  et :

$$\mathcal{Q}^{Gc} \equiv -\mathcal{T}^{Gc}|_{V(\Omega_b)} \quad (5.68)$$

### 5.2.4 Application à la résolution du problème de couplage avec une hétérogénéité du sol

La fonction de Green du domaine composite sol-structure non perturbé telle qu'elle a été construite aux paragraphes §5.2.1 et §5.2.2 permet également d'exprimer formellement l'opérateur  $\mathbf{U}_0$  défini et utilisé dans la section §4.2 sous la forme d'un opérateur intégral ; on étend donc ici les notations introduites à la section précédente §5.2.3 pour le potentiel de Newton associé défini maintenant sur  $\Omega_0$ . Ainsi on note  $\mathbf{U}_{\Omega_0}^{Gc}$  le potentiel de Newton construit sur le domaine composite de référence  $\Omega_0$  et sa "fonction de Green"  $\mathbf{u}^{Gc}$  qui vérifie la condition de surface libre sur  $\Gamma_a$  et la condition de décroissance (2.31) "sur  $\Gamma_{s\infty}$ " (voir la FIG. 5.4). On reprend également les notations du §5.1 pour les autres opérateurs associés.

#### Représentation intégrale par un potentiel de Newton

D'après le théorème (5.21),  $\mathbf{u}_0 \in V(\Omega_0)$  solution du problème (4.23) pour le domaine composite sol-structure de référence admet une représentation intégrale sous la forme d'un potentiel de Newton :

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{U}_{\Omega_0}^{Gc}(\mathbf{f} + \Phi), \quad \text{dans } \Omega_0 \quad (5.69)$$

Le champ des déplacements  $\mathbf{u}_0^f$  induit par  $\mathbf{f}$  dans le domaine de référence sans la perturbation  $\mathbf{p}_d$  est par cette même représentation intégrale :

$$\mathbf{u}_0^f = \mathbf{U}_{\Omega_0}^{Gc}\mathbf{f}, \quad \text{dans } \Omega_0 \quad (5.70)$$

Avec ces résultats, on en déduit une représentation formelle sous forme d'opérateurs intégraux de l'opérateur  $\mathbf{U}_0$ . Si maintenant le domaine composite sol-structure de référence ci-dessus est couplé avec une hétérogénéité telle que représentée sur la FIG. 5.5 (voir également la FIG. 3.1 de la section §3.2), nous avons avec les résultats de la section §4.2 :

$$\mathbf{U}_0 \equiv \mathbf{U}_{\Omega_0}^{Gc} \quad (5.71)$$

lorsque  $\partial\Omega_d \cap \Gamma_a \stackrel{\text{déf}}{=} \Gamma_{\sigma d} = \emptyset$ .

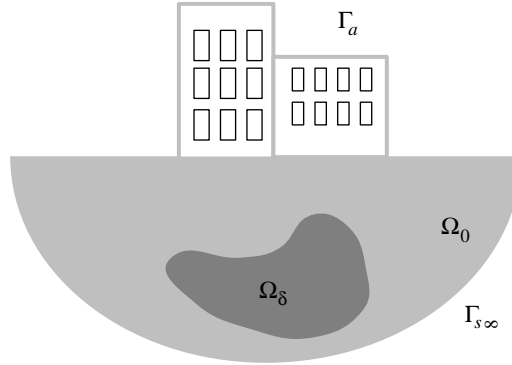


FIG. 5.5 – Domaine composite sol-structure de référence couplé avec une hétérogénéité.

**remarque 5.3** – Si  $\Gamma_{\sigma d} \neq \emptyset$  alors  $\mathbf{u}_0$  admet une représentation intégrale sous la forme de la somme d'un potentiel de Newton et d'un potentiel de simple couche sur  $\Gamma_{\sigma d}$ . Avec  $\Phi = (\phi, \tau)$ ,  $\phi \in V'(\Omega_0)$  et  $\tau \in V'(\Gamma_{\sigma d})$  on a la :

– représentation intégrale indirecte :

$$\mathbf{u}_0 = \mathcal{U}_{\Omega_0}^{Gc}(\mathbf{f} + \phi) + \mathcal{U}^{Gc} \mathbf{q}_a, \quad \text{dans } \Omega_0$$

où la densité du potentiel de simple couche  $\mathbf{q}_a \in V'(\Gamma_a)$  est solution de l'équation intégrale de deuxième espèce pour  $\mathbf{x} \in \Gamma_a$  :

$$(\boldsymbol{\kappa}_0 + \mathbb{T}_a^{Gc*}) \mathbf{q}_a = \boldsymbol{\tau} - \mathcal{U}^{Gc*}(\mathbf{f} + \phi)$$

le support de  $\mathbf{q}_a$  étant  $\Gamma_a$ . Le terme libre  $\boldsymbol{\kappa}_0$  est ici défini par :

$$\boldsymbol{\kappa}_0 \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon) \cap \Omega_0} \mathbb{T}^{Gc}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x})$$

où  $S(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon)$  désigne la sphère de rayon  $\varepsilon$  centrée en  $\boldsymbol{\xi}$ , et la normale sur  $\Gamma_a$  est extérieure à  $\Omega_0$  ;

– ou bien plus simplement la représentation intégrale directe :

$$\mathbf{u}_0 = \mathcal{U}_{\Omega_0}^{Gc}(\mathbf{f} + \phi) + \mathcal{U}^{Gc} \boldsymbol{\tau}, \quad \text{dans } \Omega_0$$

où  $\mathcal{U}^{Gc}$  est le potentiel de simple couche défini sur  $\Gamma_a$  de noyau la fonction de Green  $\mathbf{u}^{Gc}$  du domaine composite de référence ■

### 5.3 Approximation des équations intégrales

Les différentes équations intégrales directes ou indirectes introduites dans les sections précédentes n'ont pas de solutions analytiques connues. On construit donc des solutions approchées dans un sous-espace de dimension finie par une méthode d'éléments finis de frontière sur l'interface "surfactive"  $\Gamma$  et de volume sur l'interface volumique  $\Sigma$ . Pour cette approximation, deux étapes sont nécessaires et conduisent à deux niveaux d'erreur distincts : la première étape consiste à approcher les interfaces par des éléments de surface polygonaux ou de volume polyédriques ; la deuxième étape consiste à discrétiser, dans le cas d'une interface approchée, l'espace fonctionnel dans lequel est recherchée la solution continue.

Concernant l'intégration numérique du potentiel de double couche fortement singulier, trois méthodes sont envisageables : une intégration directe au sens de la valeur principale de Cauchy suivant un schéma particulier, une intégration par partie ou une intégration après régularisation qui permet de ramener l'intégrale singulière à une intégrale faiblement singulière ayant un sens usuel. Les deux premières méthodes sont présentées dans [40] et les références citées. Pour la troisième, les équations intégrales régularisées rappelées à la section §5.1.4 sont discrétisées par l'application d'une méthode d'éléments finis de frontière (§5.3.2) ne faisant intervenir que des intégrales usuelles. L'intégration numérique de la singularité en  $\frac{1}{r}$  (§5.3.5) ne pose pas de difficulté particulière, néanmoins il convient de prendre quelques précautions pour ce calcul. La méthode proposée par Bonnet [18] consiste à découper l'élément fini de surface du terme d'auto-influence en sous-éléments triangulaires sur lesquels les intégrales sont évaluées en coordonnées cylindriques par rapport à un repère local centré au point singulier dont les coordonnées sont données sur l'élément de référence. Elle permet ainsi de densifier le nombre de points d'intégration au voisinage de la singularité. Nous présentons ici l'extension de cette méthode au cas d'éléments finis volumiques pour les intégrales faisant intervenir un potentiel de Newton. Ce dernier point constitue la seule originalité de cette partie.

### 5.3.1 Discrétisation de la géométrie

On introduit les approximations géométriques suivantes : l'interface surfacique  $\Gamma$  est subdivisée en  $E_s$  éléments de frontière - des triangles ou des quadrangles - avec un total de  $N_s$  noeuds et l'interface "volumique"  $\Sigma$  est subdivisée en  $E_v$  éléments volumiques - des tétraèdres, des pentaèdres ou des hexaèdres - avec un total de  $N_v$  noeuds. Les interfaces approchées sont notées  $\Gamma_h$  et  $\Sigma_h$  respectivement :

$$\Gamma_h = \bigcup_{I=1}^{E_s} E_I, \quad \Sigma_h = \bigcup_{I=1}^{E_v} F_I$$

Les interfaces réelles étant supposées régulières par morceaux, les arêtes des éléments seront choisies tels qu'elles contiennent leurs lignes d'irrégularité. Les équations intégrales continues sont dans un premier temps réécrites sur les interfaces approchées par cette procédure. Notons qu'elles définissent par la même des sous-domaines de géométrie également approchée. Enfin dans la suite on supposera que les interfaces approchées sont définies par des éléments finis  $P_m$ .

### 5.3.2 Discrétisation des champs

On pose  $d_s = 3N_s$  et  $d_v = 3N_v$  pour les nombres de degrés de liberté associés aux deux maillages, celui de l'interface surfacique et celui de l'interface volumique. Les sous-espaces de projection des différents champs sur les interfaces discrétisées  $\Gamma_h$  et  $\Sigma_h$  sont notés respectivement  $V_n(\Gamma)$  et  $V_n(\Sigma)$ , espaces choisis comme ceux des fonctions continues qui sont la restriction sur chaque élément de la discrétisation des interfaces des polynômes de degré  $n$  :

$$\begin{aligned} V_n(\Gamma) &= \{ \tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{C}^0(\Gamma_h, \mathbb{C}^3); \tilde{\mathbf{u}}|_{E_I} \in P_n(E_I), \forall E_I \subset \Gamma_h \} \\ V_n(\Sigma) &= \{ \tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{C}^0(\Sigma_h, \mathbb{C}^3); \tilde{\mathbf{u}}|_{F_I} \in P_n(F_I), \forall F_I \subset \Sigma_h \} \end{aligned}$$

Ils sont construits par une méthode d'éléments finis utilisant des polynômes de degré  $n$ . Ainsi la fonction de base associée au noeud  $I$ ,  $I \in \{1, 2, \dots, N_s\}$  sur  $\Gamma_h$  ou  $I \in \{1, 2, \dots, N_v\}$  sur  $\Sigma_h$ , de coordonnées  $\mathbf{x}_I$  dans la direction  $\mathbf{e}_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , est définie par :

$$\boldsymbol{\omega}_{Ii}(\mathbf{x}) = \omega_I(\mathbf{x})\mathbf{e}_i \quad (5.72)$$

où la fonction de base scalaire  $\omega_I(\mathbf{x})$  est un polynôme de degré  $n$  qui vaut 1 au noeud  $I$  et est nul sur tous les éléments ne contenant pas le noeud  $I$ . Un élément de  $V_n(\Gamma)$  (respectivement  $V_n(\Sigma)$ ) est alors écrit sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{Ii=1,1}^{d_s} U_{Ii}\boldsymbol{\omega}_{Ii}(\mathbf{x}) \quad \left( \text{resp. } \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{Ii}^{d_v} U_{Ii}\boldsymbol{\omega}_{Ii}(\mathbf{x}) \right)$$

où  $\{\mathbf{U}\} = (U_1, \dots, U_{d_s})^T$  (resp.  $\{\mathbf{U}\} = (U_1, \dots, U_{d_v})^T$ ) est le vecteur des inconnues nodales du champ approché  $\mathbf{u}$ .

### 5.3.3 Equation intégrale indirecte discrétisée

On se limite ici à la seule description de la solution d'un problème aux limites de Dirichlet ou Neumann en potentiel de simple couche du théorème (5.21). En effet la représentation en potentiel de double couche du théorème (5.22) pose de sérieuses difficultés numériques pour l'intégration du terme hyper-singulier du noyau de l'opérateur  $\mathbb{D}^G$ , dans le cas où l'on utilise la fonction de Green du demi-espace stratifié.

Pour un problème Dirichlet, on note :

$$\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) = \sum_{Ii=1,1}^{d_s} W_{Ii} \boldsymbol{\omega}_{Ii}(\mathbf{x})$$

la projection de la condition aux limites  $\mathbf{w} \in V(\Gamma)$  dans  $V_n(\Gamma)$ , et pour un problème de Neumann on note :

$$\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = \sum_{Ii=1,1}^{d_s} G_{Ii} \boldsymbol{\omega}_{Ii}(\mathbf{x})$$

la projection de la condition aux limites  $\mathbf{w} \in V'(\Gamma)$  dans  $V_n(\Gamma)$ , sous-espace de  $H(\Gamma)$ . La discrétisation des équations intégrales indirectes de représentation et de frontière du théorème (5.21) donne respectivement pour  $\mathbf{x} \in \Sigma_h$  :

$$\sum_{Ii=1,1}^{d_v} U_{Ii} \boldsymbol{\omega}_{Ii}(\mathbf{x}) = \sum_{Ii=1,1}^{d_s} Q_{Ii} \mathcal{U}^G \boldsymbol{\omega}_{Ii}(\mathbf{x}) \quad (5.73)$$

et pour  $\mathbf{x} \in \Gamma_h$  :

$$\sum_{Ii=1,1}^{d_s} Q_{Ii} \mathcal{U}^G \boldsymbol{\omega}_{Ii}(\mathbf{x}) = \sum_{Ii=1,1}^{d_s} W_{Ii} \boldsymbol{\omega}_{Ii}(\mathbf{x}) \quad (5.74)$$

pour le problème de Dirichlet (équation intégrale de première espèce), et :

$$\sum_{Ii=1,1}^{d_s} Q_{Ii} (\boldsymbol{\kappa}^\pm + \mathbb{T}^{G*}) \boldsymbol{\omega}_{Ii}(\mathbf{x}) = \sum_{Ii=1,1}^{d_s} G_{Ii} \boldsymbol{\omega}_{Ii}(\mathbf{x}) \quad (5.75)$$

pour le problème de Neumann intérieur ou extérieur (équation intégrale de deuxième espèce). Les inconnues sont les coordonnées  $\{\mathbf{U}\} = (U_1, \dots, U_{d_v})^\top$  de la projection de  $\mathbf{u}$  sur  $V_n(\Sigma)$  sous-espace de  $V(\Sigma)$ , et  $\{\mathbf{Q}\} = (Q_1, \dots, Q_{d_s})^\top$  de la projection de la densité du potentiel de simple couche  $\mathbf{q}$  sur  $V_n(\Gamma)$  sous-espace de  $V'(\Gamma)$ . On construit ensuite, à partir des équations (5.74) ou (5.75) ci-dessus pour la densité du potentiel sur  $\Gamma_h$ , un système linéaire par une méthode de collocation. La principale difficulté d'une telle approche réside dans le choix des points de collocation en liaison avec les noeuds du maillage sur lesquels sont définis les fonctions de base (il faut autant de points de collocation que de noeuds sur  $\Gamma_h$ ). Le choix le plus simple que l'on puisse faire, aussi bien pour l'équation intégrale de première espèce que pour celle de seconde espèce, est celui de fonctions de base constantes ( $n = 0$ ) par élément ( $V_n(\Gamma)$  est alors le sous-espace des fonctions constantes par morceaux sur  $\Gamma_h$ , voir [156] ou [52], chapitre XIII). Dans ce cas le point de collocation par élément sera positionné au centre de gravité de l'élément afin d'assurer la convergence de la méthode. Concernant

l'équation intégrale de représentation (5.73), les points de collocation pourront également être choisis aux centres de gravité des éléments.

On note  $\boldsymbol{\xi}_I$ ,  $J \in \{1, 2, \dots, N_s\}$  les différents points de collocation sur  $\Gamma_h$ . Le système linéaire résolu en  $\{\mathbf{Q}\}$  ainsi obtenu s'écrit :

$$[\mathbf{U}^G] \{\mathbf{Q}\} = \{\mathbf{W}\} \quad (5.76)$$

pour le problème de Dirichlet, et :

$$\left([\boldsymbol{\kappa}^\pm] + [\mathbf{T}^G]^\top\right) \{\mathbf{Q}\} = \{\mathbf{G}\} \quad (5.77)$$

pour le problème de Neumann intérieur ou extérieur, avec :

$$[\mathbf{U}^G]_{IiJj} = \sum_{E \in \{E_J\}} \int_E \mathbf{U}^G(\boldsymbol{\xi}_I, \mathbf{x}) : (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \omega_J(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \quad (5.78)$$

$$[\mathbf{T}^G]_{IiJj} = \sum_{E \in \{E_J\}} \int_E \mathbf{T}^G(\boldsymbol{\xi}_I, \mathbf{x}) : (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \omega_J(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \quad (5.79)$$

$$[\boldsymbol{\kappa}^+]_{IiJj} = \delta_{IJ} \delta_{ij} \kappa(\boldsymbol{\xi}_I) \quad (5.80)$$

$$[\boldsymbol{\kappa}^-]_{IiJj} = \delta_{IJ} \delta_{ij} (\kappa(\boldsymbol{\xi}_I) - 1) \quad (5.81)$$

où  $\{E_J\}$  désigne l'ensemble des éléments dont  $J$  est un des sommets,  $I, J \in \{1, 2, \dots, N_s\}$  et  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . Si l'on met en oeuvre la technique de régularisation décrite en §5.1.4, le système linéaire ci-dessus pour les problèmes de Neumann intérieur et extérieur se réécrit :

$$\left([\mathbf{C}^\pm] + [\mathbf{T}_r^G]^\top\right) \mathbf{Q} = \mathbf{G} \quad (5.82)$$

où la matrice  $[\mathbf{T}_r^G]$  est identique à  $[\mathbf{T}^G]$  sauf pour les termes d'auto-influence sur  $\Gamma$  ( $I = J$  dans  $\{1, 2, \dots, N_s\}$ ) qui s'écrivent :

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}_r^G]_{IiIj} &= \sum_{E \in \{E_I\}} \int_E (\mathbf{T}^G(\boldsymbol{\xi}_I, \mathbf{x}) - \mathbf{T}_{\text{stat}}^G(\boldsymbol{\xi}_I, \mathbf{x})) : (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \omega_I(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \\ &+ \sum_{E \in \{E_I\}} \int_E \mathbf{T}_{\text{stat}}^G(\boldsymbol{\xi}_I, \mathbf{x}) : (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) (\omega_I(\mathbf{x}) - 1) dS(\mathbf{x}) \\ &- \sum_{E \notin \{E_I\}} \int_E \mathbf{T}_{\text{stat}}^G(\boldsymbol{\xi}_I, \mathbf{x}) : (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) dS(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5.83)$$

pour un milieu homogène, ou :

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}_r^G]_{IiIj} &= \sum_{E \in \{E_I\}} \int_E (\mathbf{T}^G(\boldsymbol{\xi}_I, \mathbf{x}) - \mathbf{T}^0(\boldsymbol{\xi}_I, \mathbf{x})) : (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \omega_I(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \\ &+ \sum_{E \in \{E_I\}} \int_E \mathbf{T}^0(\boldsymbol{\xi}_I, \mathbf{x}) : (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) (\omega_I(\mathbf{x}) - 1) dS(\mathbf{x}) \\ &- \sum_{E \notin \{E_I\}} \int_E \mathbf{T}^0(\boldsymbol{\xi}_I, \mathbf{x}) : (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) dS(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5.84)$$



pour un milieu hétérogène ; enfin  $[\mathbf{C}^+] = [\boldsymbol{\kappa}^+]$  et  $[\mathbf{C}^-] = [\boldsymbol{\kappa}^-]$  sauf encore une fois pour les termes d'auto-influence pour lesquels :

$$\begin{aligned} [\mathbf{C}^+]_{IiIj} &= 0 \\ [\mathbf{C}^-]_{IiIj} &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (5.85)$$

pour un milieu homogène, ou :

$$\begin{aligned} [\mathbf{C}^+]_{IiIj} &= - \int_{\Gamma_h} \mathbf{T}_P^0(\boldsymbol{\xi}_I, \mathbf{x}) : (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) dS(\mathbf{x}) \\ [\mathbf{C}^-]_{IiIj} &= \delta_{ij} - \int_{\Gamma_h} \mathbf{T}_P^0(\boldsymbol{\xi}_I, \mathbf{x}) : (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) dS(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5.86)$$

pour un milieu hétérogène.

### 5.3.4 Equation intégrale directe discrétisée

On note :

$$\gamma_+ \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{Ii=1,1}^{d_s} U_{Ii}^+ \boldsymbol{\omega}_{Ii}(\mathbf{x}), \quad \gamma_- \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{Ii=1,1}^{d_s} U_{Ii}^- \boldsymbol{\omega}_{Ii}(\mathbf{x})$$

pour  $\mathbf{x} \in \Gamma_h$ , les projections respectives de  $\gamma_+ \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u} \in V(\Omega^+)$ , et  $\gamma_- \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u} \in V(\Omega^-)$ , dans  $V_n(\Gamma)$ , et :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{Ii=1,1}^{d_v} U_{Ii} \boldsymbol{\omega}_{Ii}(\mathbf{x})$$

pour  $\mathbf{x} \in \Sigma_h$ , la projection du champ élastodynamique  $\mathbf{u} \in V(\Sigma)$  dans  $V_n(\Sigma)$ . De même :

$$[\tilde{\mathbf{u}}](\mathbf{x}) = \sum_{Ii=1,1}^{d_s} (U_{Ii}^+ - U_{Ii}^-) \boldsymbol{\omega}_{Ii}(\mathbf{x}), \quad [\tilde{\mathbf{t}}](\mathbf{x}) = \sum_{Ii=1,1}^{d_s} [T]_{Ii} \boldsymbol{\omega}_{Ii}(\mathbf{x})$$

pour  $\mathbf{x} \in \Gamma_h$ , désignent les projections des sauts imposés  $[\mathbf{u}] \in V(\Gamma)$  et  $[\mathbf{t}(\mathbf{u})] \in V'(\Gamma)$  dans le sous-espace  $V_n(\Gamma)$  ; enfin :

$$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \sum_{Ii=1,1}^{d_v} F_{Ii} \boldsymbol{\omega}_{Ii}(\mathbf{x})$$

pour  $\mathbf{x} \in \Sigma_h$ , désigne la projection du champ de force imposé  $\mathbf{f} \in V'(\Sigma)$  dans  $V_n(\Sigma)$ . Alors les discrétisations de l'équation intégrale de représentation et de la première équation intégrale de frontière du théorème (5.18) donnent respectivement pour  $\mathbf{x} \in \Sigma_h$  :

$$\begin{aligned} \sum_{Ii=1,1}^{d_v} U_{Ii} \boldsymbol{\omega}_{Ii}(\mathbf{x}) &= \sum_{Ii=1,1}^{d_v} F_{Ii} \boldsymbol{\mathcal{U}}_{\Omega_s}^G \boldsymbol{\omega}_{Ii}(\mathbf{x}) \\ &+ \sum_{Ii=1,1}^{d_s} [T]_{Ii} \boldsymbol{\mathcal{U}}^G \boldsymbol{\omega}_{Ii}(\mathbf{x}) - \sum_{Ii=1,1}^{d_s} (U_{Ii}^+ - U_{Ii}^-) \boldsymbol{\mathcal{T}}^G \boldsymbol{\omega}_{Ii}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5.87)$$

et pour  $\mathbf{x} \in \Gamma_h$  :

$$\begin{aligned} \sum_{Ii=1,1}^{d_s} (U_{Ii}^+ \boldsymbol{\kappa} + U_{Ii}^- (\mathcal{I}_d - \boldsymbol{\kappa})) \boldsymbol{\omega}_{Ii}(\mathbf{x}) &= \sum_{Ii=1,1}^{d_v} F_{Ii} \mathbf{U}^{G*} \boldsymbol{\omega}_{Ii}(\mathbf{x}) \\ &+ \sum_{Ii=1,1}^{d_s} [T]_{Ii} \mathbb{U}^G \boldsymbol{\omega}_{Ii}(\mathbf{x}) - \sum_{Ii=1,1}^{d_s} (U_{Ii}^+ - U_{Ii}^-) \mathbb{T}^G \boldsymbol{\omega}_{Ii}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5.88)$$

Les Eq.(5.87) et (5.88) forment un système d'inconnues  $\{\mathbf{U}\} = (U_1, \dots, U_{d_v})^T$  et  $\{\mathbf{U}^+\} = (U_1^+, \dots, U_{d_s}^+)^T$  (avec  $\mathbf{U}^- = \mathbf{U}^+ - [\mathbf{U}]$ ) ou  $\{\mathbf{U}^-\} = (U_1^-, \dots, U_{d_s}^-)^T$  (avec  $\mathbf{U}^- = \mathbf{U}^+ - [\mathbf{U}]$ ). A partir de ces équations est construit un système algébrique linéaire par une méthode de collocation, telle que décrite ci-dessus :

$$[\mathbf{U}_\Sigma^G] \{\mathbf{F}\} + [\mathbf{U}^G] \{\mathbf{T}\} - [\mathbf{T}^G] \{\mathbf{U}\} = \begin{cases} [\boldsymbol{\kappa}] \{\mathbf{U}^+\} + [\mathcal{I}_d - \boldsymbol{\kappa}] \{\mathbf{U}^-\} & \text{sur } \Gamma_h \\ \{\mathbf{U}\} & \text{sur } \Sigma_h \end{cases}$$

avec des notations identiques à celles du paragraphe précédent pour les matrices  $[\mathbf{U}^G]$ ,  $[\mathbf{T}^G]$  et  $[\boldsymbol{\kappa}]$ ; de plus :

$$[\mathbf{U}_\Sigma^G]_{IiJj} = \sum_{F \in \{F_J\}} \int_F \mathbf{U}^G(\boldsymbol{\xi}_I, \mathbf{x}) : (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \boldsymbol{\omega}_J(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) \quad (5.89)$$

pour des points de collocations  $\{\boldsymbol{\xi}_I\}_{1 \leq I \leq N_s + N_v}$  de  $\Gamma_h$  ou  $\Sigma_h$ . Si l'on utilise une équation intégrale régularisée de la forme de l'Eq.(5.29) en espace homogène ou (5.30) en espace hétérogène alors le système ci-dessus s'écrit pour l'interface  $\Gamma_h$  :

$$[\mathbf{U}_\Sigma^G] \{\mathbf{F}\} + [\mathbf{U}^G] \{\mathbf{T}\} - [\mathbf{T}_r^G] \{\mathbf{U}\} = [\mathbf{C}^+] \{\mathbf{U}^+\} + [\mathbf{C}^-] \{\mathbf{U}^-\}$$

avec encore une fois des notations identiques à celles du paragraphe précédent pour les matrices  $[\mathbf{T}_r^G]$  et  $[\mathbf{C}^+]$ .

### Application au problème de transmission

La solution du problème de transmission par la méthode de sous-structuration présentée dans la section §4.1 est approchée, sur  $\Gamma_{sf}$ , dans un sous-espace  $V_P(\Gamma_{sf})$  de  $V(\Gamma_{sf})$  et dans  $\Omega_b$  ou  $\Omega_s$  par les relèvements statiques ou dynamiques correspondants. Ces derniers sont construits, pour le sol, par une équation intégrale de représentation, Eq.(5.45). L'opérateur d'impédance dynamique de frontière du sol (capacité extérieure, Eq.(5.24))  $\mathbb{K}^G \in \mathcal{L}(V(\Gamma_{sf}), V'(\Gamma_{sf}))$  est discrétisé quant à lui sur  $V_n(\Gamma_{sf}) \times V_n(\Gamma_{sf})$ . Ainsi la solution approchée du problème de transmission sera construite sur  $\Gamma_{sf}$  dans un sous-espace  $V_n^P(\Gamma_{sf})$  de  $V_n(\Gamma_{sf})$  tel que :

$$V_n^P(\Gamma_{sf}) = \text{Vect} \{ \Phi_1^{(n)}, \dots, \Phi_P^{(n)} \}$$

où les  $\{\Phi_p^{(n)}\}_{1 \leq p \leq P}$  sont les projections des  $\{\Phi_p\}_{1 \leq p \leq P}$  dans  $V_n(\Gamma_{sf})$ .

### Tenseur de densité du potentiel de simple couche du domaine composite

La fonction de Green du domaine composite est elle aussi approchée, sur  $\Gamma_{sf}$ , dans un sous-espace  $V_P(\Gamma_{sf})$  de  $V(\Gamma_{sf})$ .  $\mathbb{U}^{G^{-1}} \in \mathcal{L}(V(\Gamma_{sf}), V'(\Gamma_{sf}))$  étant par ailleurs discrétisé sur  $V_n(\Gamma_{sf}) \times V_n(\Gamma_{sf})$ , la fonction de Green sur  $\Gamma_{sf}$  est finalement approchée dans le sous-espace  $V_n^P(\Gamma_{sf})$  défini ci-dessus, de même que la densité du potentiel de simple couche du domaine composite construite par l'Eq.(5.60) dans sa version discrétisée, de la forme de l'Eq.(5.76) ci-dessus. Enfin le vecteur-contrainte sur  $\Gamma_{sf}$  associé à la fonction de Green du domaine composite est projeté dans  $V_n^P(\Gamma_{sf})$  par la discrétisation de l'Eq.(5.61), de la forme de l'Eq.(5.77) ou (5.82) ci-dessus.

### Application au problème d'interaction avec une hétérogénéité

L'opérateur de couplage  $\mathbf{U}_0$  entre le domaine de référence  $\Omega_0$  et la zone perturbée  $\Omega_d$  étant représenté par l'opérateur intégral  $\mathbf{U}_{\Omega}^{Gc}$  défini en §5.2.4, il convient d'évaluer la fonction de Green du domaine de référence non perturbé. Celle-ci est obtenue par une équation intégrale de représentation de la forme de l'Eq.(5.87), en y injectant la discrétisation décrite ci-dessus pour les approximations sur  $\Gamma_{sf}$  de  $\mathbf{u}^{Gc^-}$  et  $\mathbf{t}_s(\mathbf{u}^{Gc^-})$ . Le champ d'interface  $\phi \in V_M(\Omega_d)$  (voir la section §4.2.8) est quant à lui approché par sa projection dans  $V_n^M(\Omega_d)$  tel que :

$$V_n^M(\Sigma) = \text{Vect} \{ \phi_1^{(n)}, \dots, \phi_M^{(n)} \}$$

où les  $\{ \phi_m^{(n)} \}_{1 \leq m \leq M}$  sont les projections des  $\{ \phi_m \}_{1 \leq m \leq M}$  dans  $V_n(\Sigma)$ .

### 5.3.5 Intégration des singularités

Les différents systèmes construits ci-dessus à partir d'équations intégrales régularisées directes ou indirectes ne font plus intervenir que des intégrales faiblement singulières sur les blocs diagonaux  $I = J$  (termes d'auto-influence) des matrices  $[\mathbf{U}_{\Sigma}^G]$ ,  $[\mathbf{U}^G]$  et  $[\mathbf{T}_r^G]$ . La méthodologie retenue pour effectuer ces calculs consiste à augmenter le nombre de points d'intégration au voisinage du point de collocation sur les éléments considérés en introduisant un découpage fin de ceux-ci. Dans la mesure où les expressions analytiques des noyaux des intégrales ne sont pas connues, il n'est en effet pas possible de retravailler directement sur les intégrales comme cela peut se faire lorsque la fonction de Green est connue analytiquement. La stratégie adoptée pour une surface consiste dans un premier temps en un changement de variable en coordonnées cylindriques qui permet de résorber la singularité par l'intermédiaire de l'élément de surface [18]. Elle est étendue ici à des intégrales de volume par une approche légèrement différente.

Concernant la définition des approximations géométriques des interfaces  $\Gamma$  et  $\Sigma$ , le choix le plus simple que l'on puisse faire est  $m = 1$  pour le degré des polynômes d'interpolation [52, 156]. Dans ce cas les éléments finis isoparamétriques utilisés sont soit des triangles **Tri**a3 à 3 noeuds et des quadrangle **Quad**4 à 4 noeuds pour les surfaces, soit des tétraèdres **Tétra**4 à 4 noeuds, des pentaèdres **Penta**6 à 6 noeuds et des hexaèdres **Hexa**8 à 8 noeuds pour les volumes. Dans le chapitre §6 on pourra également utiliser des éléments d'ordre  $m = 2$ , soit des triangles **Tri**a6 à 6 noeuds et des quadrangle **Quad**8 à 8 noeuds pour les surfaces, soit des tétraèdres **Tétra**10 à 10 noeuds, des pentaèdres **Penta**15 à 15 noeuds et des hexaèdres **Hexa**20 à 20 noeuds pour les volumes. On trouvera par exemple dans l'ouvrage de Hughes [97] une description de ces différents éléments.

Soit donc  $\int_E f(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) dV(\mathbf{x})$  l'intégrale à évaluer sur l'élément fini  $E$ ,  $dV$  étant une mesure de surface ou de volume, et  $f$  une fonction à valeurs  $\mathbb{C}^3$  telle que :

$$f(\mathbf{x}) = o\left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|}\right), \text{ pour } \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\| \rightarrow 0$$

Dans un premier temps cette intégrale est ramenée à l'élément de référence  $\tilde{E}$  par le changement de variable  $\tilde{\mathbf{x}} \mapsto \mathbf{x} = \Theta(\tilde{\mathbf{x}})$  tel que :

$$\int_E f(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) = \int_{\tilde{E}} f \circ \Theta(\tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tilde{\mathbf{x}}) J_{\Theta}(\tilde{\mathbf{x}}) dV(\tilde{\mathbf{x}}) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\tilde{E}} \tilde{f}(\tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tilde{\mathbf{x}}) dV(\tilde{\mathbf{x}})$$

où  $J_{\Theta}$  désigne le Jacobien de la transformation  $\Theta$ . L'élément de référence est ensuite dé-

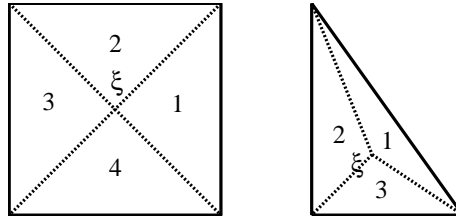


FIG. 5.6 – Découpage des éléments surfaciques en triangles.

composé en sous-éléments triangulaires s'il appartient à une surface, ou en sous-éléments pyramidaux à base rectangulaire ou triangulaire (tétraèdres) s'il appartient à un volume (voir FIG. 5.6 pour des éléments surfaciques et FIG. 5.7 pour des éléments volumiques). Ainsi un élément triangle **Tria3** ou **Tria6** est subdivisé en 3 sous-triangles, un élément quadrangle **Quad4** ou **Quad8** en 4 sous-triangles, un élément tétraèdre **Tétra4** ou **Tétra10** en 4 sous-tétraèdres, un élément pentaèdre **Penta6** ou **Penta15** en 2 sous-tétraèdres et 3 sous-pyramides et un élément hexaèdre **Hexa8** ou **Hexa20** en 6 sous-pyramides. Chacun des

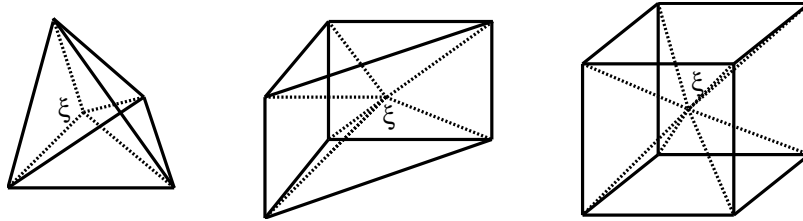


FIG. 5.7 – Découpage des éléments volumiques en pyramides et/ou tétraèdres.

sous-éléments est ensuite paramétré par l'homothétie  $\phi : \mathbf{X} = (X, Y, Z) \mapsto \tilde{\mathbf{x}} = \phi(\mathbf{X})$  de centre  $\tilde{\boldsymbol{\xi}} = (\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta})$  (point singulier dans l'élément de référence) et de rapport  $1 - \frac{Z}{\tilde{\zeta}}$ , telle que :

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{\xi} - X}{\tilde{\zeta}} Z + X \\ \frac{\tilde{\eta} - Y}{\tilde{\zeta}} Z + Y \\ Z \end{pmatrix}$$

et dont le Jacobien s'écrit  $J_\phi = \left(1 - \frac{Z}{\tilde{\zeta}}\right)^2$ . Nous avons donc :

$$\int_{\tilde{E}} \tilde{f}(\tilde{\xi}, \tilde{\mathbf{x}}) dV(\tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^{T_{\tilde{E}}} \int_{\tilde{E}_i} \tilde{f}(\tilde{\xi}, \tilde{\mathbf{x}}) dV(\tilde{\mathbf{x}}) =$$

$$\sum_{i=1}^{T_{\tilde{E}}} \int_0^{\tilde{\zeta}} \left(1 - \frac{Z}{\tilde{\zeta}}\right)^2 dZ \int_{X_i^-}^{X_i^+} dX \int_{Y_i^-}^{Y_i^+} dY \tilde{f}\left(\frac{\tilde{\xi} - X}{\tilde{\zeta}} Z + X, \frac{\tilde{\eta} - Y}{\tilde{\zeta}} Z + Y, Z\right)$$

avec  $T_{\tilde{E}}$  le nombre de sous-éléments  $\tilde{E}_i$  pour l'élément de référence  $\tilde{E}$ , et  $X_i^-$ ,  $X_i^+$ ,  $Y_i^-$  et  $Y_i^+$  les bornes de variation de l'homothétie :

$$S(Z) = \{(x, y); X_i^-(Z) \leq x \leq X_i^+(Z), Y_i^-(Z) \leq y \leq Y_i^+(Z)\}$$

pour une face carrée ou :

$$S(Z) = \{(x, y); X_i^-(Z) \leq x \leq X_i^+(Z), Y_i^-(Z) \leq y \leq X_i^-(Z) - x + Y_i^-(Z)\}$$

pour une face triangulaire, de la base d'un sous-élément (correspondant à une arête ou une face de  $\tilde{E}$ , voir la FIG. 5.8 pour la définition géométrique des  $X_i^-(Z)$ ,  $X_i^+(Z)$ ,  $Y_i^-(Z)$  et  $Y_i^+(Z)$ ); dans le cas des éléments surfaciques, la coordonnée  $\tilde{y}$  (et donc  $Y$ ) n'apparaît pas dans les expressions ci-dessus. Afin de se ramener à une quadrature de Gauss-Legendre classique, on pose maintenant  $\frac{Z}{\tilde{\zeta}} = \frac{1+u}{2}$ ,  $u \in [-1, 1]$ , de telle sorte que :

$$\int_{\tilde{E}_i} \tilde{f}(\tilde{\xi}, \tilde{\mathbf{x}}) dV(\tilde{\mathbf{x}}) = \int_{-1}^{+1} \frac{\tilde{\zeta}}{2} \left(\frac{1-u}{2}\right)^2 du$$

$$\times \iint_{S(u)} \tilde{f}\left(\frac{1+u}{2}(X - \tilde{\xi}) + X, \frac{1+u}{2}(Y - \tilde{\eta}) + Y, \frac{1+u}{2}\tilde{\zeta}\right) dXdY$$

et l'intégrale portant sur la surface  $S(u)$  est une intégrale évaluée par quadrature de Gauss-Legendre sur un segment (élément surfacique, auquel cas la composante  $Y$  n'apparaît pas), ou un triangle ou un quadrangle (élément volumique) (voir la FIG. 5.8 où  $\rho = \left(\frac{1+u}{2}\right)\tilde{\zeta}$ ). On

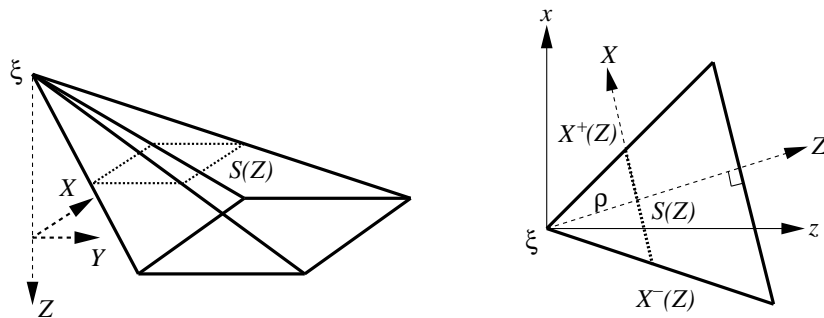


FIG. 5.8 – Coordonnées polaires sur un sous-élément : paramétrage de la surface  $S(Z)$ .

trouvera dans [132] une autre méthode d'intégration des singularités en  $\frac{1}{r}$  pour les équations intégrales régularisées, fondée elle aussi sur un découpage particulier de l'élément plan en sous-éléments triangles.

## 5.4 Conclusion

La résolution des problèmes locaux associés aux méthodes de sous-structuration présentée au chapitre §4 fait appel à des techniques d'équations intégrales de frontière et de représentation. Elles sont tout particulièrement adaptées au traitement des domaines non bornés, tels qu'ici le sol ou le domaine composite structure-sol non perturbé défini dans les chapitres précédents. Des résultats classiques sur les équations intégrales ont ainsi été rappelés, et nous avons donné leurs formulations explicites pour les applications étudiées.

La donnée de la fonction de Green d'un demi-espace stratifié, évaluée numériquement par la méthode des coefficients de réflexion/transmission de Kennett présentée au chapitre §1, permet de résoudre complètement, par cette approche, le problème de transmission introduit au chapitre §2 dans le cas d'un sol stratifié non perturbé. On peut donc en déduire la réponse de la structure à une sollicitation sismique décrite par le champ libre de site, ou en vibrations forcées. Ce dernier cas permet de calculer la fonction de Green du domaine composite sol-structure sans perturbation. Celle-ci est ensuite utilisée pour une équation intégrale de frontière dans le domaine composite posée sur l'interface sol-structure, dont on déduit une expression de l'opérateur  $\mathcal{U}_2^{\#}$  (sans perturbation du sol) introduit au chapitre §3, compatible avec les hypothèses correspondantes de la section §3.1.1. Cette fonction de Green permet également d'exprimer, sous forme intégrale en potentiel de Newton, l'opérateur de "couplage volumique"  $\mathcal{U}_0$  défini au chapitre §4 pour le couplage entre le domaine composite de référence et l'hétérogénéité bornée du sol.

Cette formulation peut être vue, en liaison avec la méthode de sous-structuration développée, comme une équation intégrale de frontière posée sur des volumes, ce qui facilite sa mise en oeuvre informatique et limite considérablement les développements nécessaires dans un code de calcul par éléments finis de frontière standards. Sa discrétisation a également été présentée pour une résolution par une méthode de collocation, ainsi que les schémas de régularisation des noyaux singuliers. La mise en oeuvre numérique pour le traitement des interfaces "volumiques" n'exige donc pas de développements plus poussés, si ce n'est l'intégration du potentiel de Newton faiblement singulier sur des éléments finis volumiques. Cette dernière technique correspond à la méthode bien connue des cellules d'intégration (voir notamment Bonnet [19]), qui permet de traiter numériquement les intégrales posées sur les volumes du domaine considéré, comme par exemple le poids propre.

Les différentes possibilités de la méthodologie et des formulations par équations intégrales retenues sont maintenant illustrées par quelques applications numériques à des cas industriels complexes.



## Chapitre 6

# Validations. Exemples de structures réelles

Les développements présentés dans les chapitres précédents ont été implémentés dans le code de calcul MISS-3D [40, 121] développé au laboratoire de Mécanique des Sols, Structures et Matériaux de l'Ecole Centrale de Paris. Ce code permet de traiter les différents phénomènes d'interaction dynamique solide-solide et/ou solide-fluide par une approche par sous-structuration dynamique [50]. Les problèmes locaux de l'élastodynamique dans les sous-domaines bornés sont traités par éléments finis classiques, décomposition en modes normaux ou équations intégrales de frontière, les problèmes locaux de l'élastodynamique dans les sous-domaines non bornés sont traités par équations intégrales de frontière. Ils sont traités dans le domaine des fréquences, une transformée de Fourier ou de Laplace (mise en oeuvre numériquement sous la forme d'une transformée de Fourier rapide) permet de synthétiser les solutions recherchées dans le domaine temporel : déplacements, vecteurs contraintes ... L'enrichissement principal apporté au code existant concerne donc le traitement des équations intégrales posées sur un volume borné donné faisant intervenir un potentiel de Newton, tel que formulé dans le chapitre §5. Néanmoins les développements informatiques restent limités dans la mesure où ce volume peut être formellement vu comme une "interface" au même titre que les interfaces surfaciques entre les différents sous-domaines non perturbés. Par ailleurs la discrétisation de l'opérateur linéaire  $\mathbf{U}^{\natural}$ , donnant la réponse de la structure en fonction du champ sismique incident  $\mathbf{u}_i$  sur l'interface sol-structure (voir la section §2.3.4), ne nécessite aucun travail supplémentaire hormis, pour l'analyse spectrale mise en oeuvre par la suite pour traiter l'influence d'une sollicitation sismique aléatoire, au niveau des post-traitements.

Dans ce chapitre sont présentées quelques applications des différents outils développés à des cas tests tirés de la littérature ainsi qu'à des modèles plus détaillés de structures existantes. Dans un premier temps on comparera les résultats obtenus avec le code MISS-3D pour la cinématique d'une fondation rigide sous l'action d'un champ incident aléatoire avec ceux publiés pour ce même cas dans la littérature [142] ; la comparaison permettra de valider le code utilisé pour la discrétisation de l'opérateur  $\mathbf{U}^{\natural}$ . On pourra ensuite l'appliquer à l'analyse du comportement vibratoire de structures réelles sous l'action d'une sollicitation sismique aléatoire caractérisée typiquement par sa fonction de cohérence (voir le chapitre §1). On étudiera plus précisément deux modèles, celui de la maquette SMART-2 de Hualien à Taiwan, et celui d'un bâtiment-réacteur de centrale nucléaire à l'échelle 1. Dans un deuxième temps, on donnera quelques éléments de validation numérique de la méthode de



sous-structuration sur interface volumique proposée au chapitre §4 dans le cas d'une hétérogénéité de nature déterministe par deux cas tests : la comparaison avec les résultats obtenus par une approche par sous-structuration usuelle par l'intermédiaire de la frontière de la zone occupée par l'hétérogénéité, et la comparaison avec des résultats tirés de la littérature [3] pour lesquels les auteurs appliquent une formulation plus classiques du couplage éléments finis/équations intégrales de frontière. Puis on étendra cette approche au cas d'une hétérogénéité de nature aléatoire. Quelques éléments bibliographiques récents de la description probabiliste des sols étant rappelés au chapitre §1, on reprendra tout d'abord l'exemple de validation tirée de [3] afin d'étudier le comportement du modèle stochastique et la méthode de simulation de Monte-Carlo. On traitera enfin l'exemple réaliste d'un bâtiment-réacteur reposant sur un sol de nature aléatoire au voisinage de sa fondation.

Pour ce qui est des aspects liés directement au génie parasismique proprement dit, on notera que dans la mesure où toute la modélisation introduite est fondée sur une hypothèse de linéarité du comportement des matériaux, des phénomènes très pénalisants tels que la liquéfaction du sol [173], l'apparition de déplacements résiduels [160], ou encore le décollement de la fondation [45], et qui sont eux aussi susceptibles d'introduire un certain niveau d'aléa dans les modèles, ne pourront pas être reproduits par les méthodes mises en oeuvre ici.

## 6.1 Cinématique d'une fondation sous sollicitation sismique aléatoire

### Principe

Dans cette section on reprend les développements de Luco & Wong [142] et Luco & Mita [140] déjà brièvement présentés dans la section §1.2.5. Le mouvement d'une fondation sans masse décomposé selon l'Eq.(4.16) sous l'action d'un champ incident  $\mathbf{u}_i(\mathbf{x}, \omega)$  quelconque est obtenu après la résolution du système algébrique de l'Eq.(4.17) qui se simplifie ici en (Eq.(1.9)) :

$$[\mathbf{K}_s(\omega)] \{\mathbf{c}_c\} = \{\mathbf{f}_i\}$$

Dans [140, 142] les auteurs calculent la fonction matricielle de densité spectrale  $[\mathbf{S}_{\mathbf{c}_c}(\omega)]$  (Eq.(1.10)) des degrés de liberté globaux cinématiques  $\mathbf{c}_c$  pour une fondation superficielle rectangulaire [142] ou circulaire [140] reposant sur un demi-espace élastique homogène par une approche semi-analytique. Dans [219]  $[\mathbf{S}_{\mathbf{c}_c}(\omega)]$  est calculée pour une fondation superficielle circulaire par une méthode d'éléments finis usuels. Ici on compare les résultats obtenus pour un calcul par la méthode des éléments finis de frontière présentée au chapitre §5. Les champs d'effort de contact sol-fondation  $\mathbf{t}_s(\Phi_p^*)$ ,  $p = 1, \dots, P$ , qui interviennent dans l'expression de  $[\mathbf{S}'_{\mathbf{U}_i}(\omega)]$ , Eq.(1.10), sont évalués à partir d'une équation intégrale de frontière posée sur l'interface  $\Gamma_{sf}$  de la forme de celle du théorème (5.23) :

$$\mathbf{t}_s(\Phi_p^*) = \mathbb{K}^G \Phi_p, \quad p = 1, \dots, P \quad (6.1)$$

On pose :

$$[\mathbf{C}_d] = [\mathbf{K}_s(\omega)]^{-1} [\mathbf{T}_d]^T$$

et

$$[\mathbf{S}'_{\mathbf{U}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)]_{jk} = \sqrt{[\mathbf{S}'_{\mathbf{U}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \omega)]_{jj} [\mathbf{S}'_{\mathbf{U}_i}(\mathbf{x}', \mathbf{x}', \omega)]_{kk}} \times \gamma_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)$$

où  $\gamma_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)$  est une des fonctions de cohérence transversale décrite à la section §1.3.2 ;  $[\mathbf{S}_{\mathbf{U}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \omega)]_{jj} = [\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{U}_i}(\omega)]_{jj}$  est la densité spectrale de puissance, réelle et positive, du champ sismique  $\mathbf{u}_i(\mathbf{x}, \omega)$  (modélisé par un processus stationnaire en m.o.d. en fonction du temps) dans la direction  $j$ , généralement supposée indépendante de la position  $\mathbf{x}$ . Alors les différents éléments de  $[\mathbf{S}_{\mathbf{c}_c}(\omega)]$  s'écrivent :

$$[\mathbf{S}_{\mathbf{c}_c}(\omega)]_{pq} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sqrt{[\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{U}_i}(\omega)]_{jj} [\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{U}_i}(\omega)]_{kk}} \times A_{jk}^{pq}(\omega) \quad (6.2)$$

avec :

$$A_{jk}^{pq}(\omega) = \iint_{\Gamma_{sf} \times \Gamma_{sf}} [\mathbf{C}_d(\mathbf{x}, \omega)]_{pj} [\overline{\mathbf{C}_d(\mathbf{x}', \omega)}]_{qk} \gamma_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) dS(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}') \quad (6.3)$$

Les coefficients de covariance  $\omega \mapsto A_{jk}^{pq}(\omega)$ ,  $j, k = 1, 2$  ou  $3$  et  $p, q = 1, \dots, P$ , vérifient :

$$\begin{aligned} A_{jk}^{pq}(\omega) &= \overline{A_{kj}^{qp}(\omega)} \\ A_{jj}^{pp}(\omega) &\geq 0 \end{aligned}$$

pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ . L'interprétation de ces coefficients est la suivante : supposons que  $\mathbf{u}_i = \{u_{i1}, 0, 0\}$ , alors  $[\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{U}_i}(\omega)]_{22} = [\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{U}_i}(\omega)]_{33} = 0$  et l'on en déduit :

$$\frac{[\mathbf{S}_{\mathbf{c}_c}(\omega)]_{pp}}{[\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{U}_i}(\omega)]_{11}} = A_{11}^{pp}(\omega)$$

et :

$$\frac{[\mathbf{S}_{\mathbf{c}_c}(\omega)]_{pq}}{\sqrt{[\mathbf{S}_{\mathbf{c}_c}(\omega)]_{pp} [\mathbf{S}_{\mathbf{c}_c}(\omega)]_{qq}}} = \frac{A_{11}^{pq}(\omega)}{\sqrt{A_{11}^{pp}(\omega) A_{11}^{qq}(\omega)}}, \quad p \neq q$$

Ainsi le coefficient  $A_{11}^{pp}$  donne l'amplitude du mouvement de la fondation suivant la composante  $p$  lorsqu'on lui applique un mouvement sismique suivant la direction  $\mathbf{e}_1$ , en terme de densité spectrale de puissance. Le coefficient  $A_{11}^{pq}$ ,  $p \neq q$ , mesure quant à lui la corrélation entre les mouvements de la fondation suivant les composantes  $p$  et  $q$ , lorsqu'on lui applique un mouvement suivant  $\mathbf{e}_1$ . En généralisant, on voit que le coefficient  $A_{jk}^{pq}$  est associé à l'effet que produit la corrélation du mouvement sismique entre ses composantes  $j$  et  $k$  sur la corrélation entre les composantes  $p$  et  $q$  de la réponse de la fondation.

### Résultats numériques pour un modèle gaussien de fonction de cohérence

On considère dans cette section le cas d'une fondation superficielle rigide ( $P = 6$  modes de corps rigide pour la cinématique) circulaire de rayon  $R$  reposant sur un demi-espace sol élastique homogène dont le coefficient de Poisson est  $\nu = \frac{1}{3}$ , la célérité des ondes  $S$   $c_s = 400 \text{ m/s}$  et la densité  $\rho = 1875 \text{ kg/m}^3$ . L'interface sol-fondation est maillé avec 100 éléments Quad4 et 20 éléments Tri3 (voir la FIG. 6.1). L'amortissement hystérétique du matériau sol est  $\beta = 1\%$ . Les FIG. 6.2 à FIG. 6.7 donnent l'allure des coefficients de covariance  $A_{jk}^{pq}$  en fonction de la fréquence adimensionnelle  $a_0 = \frac{\omega R}{c_s}$  pour la fonction de cohérence transversale de Luco & Wong [142] :

$$\gamma_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) = \exp \left[ - \left( \frac{\eta \omega \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}{c_s} \right)^2 \right], \quad \forall j, k \in \{1, 2, 3\} \quad (6.4)$$

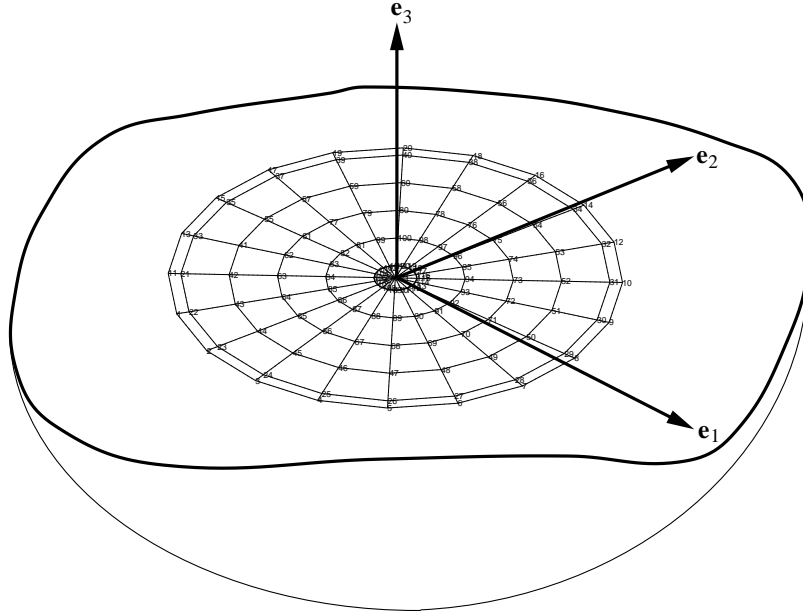


FIG. 6.1 – Fondation superficielle rigide circulaire,  $R = 5.41 \text{ m}$  ; maillage.

pour des ondes à incidence verticale, où  $\eta$  est un paramètre d'incohérence des caractéristiques mécaniques du sol, adimensionnel et que l'on fait varier entre 0.0 (cohérence parfaite) et 0.5. Avec une incidence verticale, on néglige ainsi le terme de cohérence transversale en  $\exp[-i\omega \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{c_{\text{app}}}]$  (voir l'Eq.(1.16)) lié à l'effet du passage d'ondes. Dans les FIG. 6.2 à FIG. 6.5 on reporte les valeurs des coefficients  $\sqrt{A_{11}^{11}}$ ,  $\sqrt{A_{11}^{66}}$ ,  $\sqrt{A_{33}^{44}}$  et  $\sqrt{|\Re(A_{31}^{46})|}$  respectivement telles que tabulées dans Luco & Mita [140] (symbole  $\diamond$  sur les graphes). On note un bon accord pour ces coefficients entre le calcul semi-analytique de Luco & Mita [140] et le calcul numérique par éléments finis de frontière.

Dans la FIG. 6.6 sont tracés les graphes des coefficients  $\sqrt{A_{22}^{11}}$ ,  $\sqrt{A_{33}^{11}}$ ,  $\sqrt{A_{11}^{33}}$  et  $\sqrt{A_{33}^{33}}$ . En comparant les FIG. 6.2, FIG. 6.6(a) et FIG. 6.6(b) on voit que le mouvement horizontal de la fondation suivant la direction  $\mathbf{e}_1$  est principalement induit par un mouvement sismique suivant cette même direction. On note néanmoins que lorsque la fréquence augmente celui-ci est filtré, et ce d'autant plus que l'incohérence  $\eta$  augmente. La variance (ou la densité spectrale de puissance) de la réponse en translation peut donc être inférieure à celle du mouvement sismique correspondant, la perte de puissance étant due à la contrainte cinématique imposée par la fondation rigide. Si l'on compare de même les FIG. 6.6(c) (avec par symétrie  $A_{11}^{33} = A_{22}^{33}$ ) et FIG. 6.6(d), on en déduit que le mouvement vertical de la fondation est principalement induit par le mouvement sismique suivant cette direction, avec les mêmes possibilités de filtrage que pour les translations horizontales. Dans la FIG. 6.7 sont tracés les graphes des coefficients  $\sqrt{A_{11}^{44}}$ ,  $\sqrt{A_{22}^{44}}$ ,  $\sqrt{A_{22}^{66}}$  et  $\sqrt{A_{33}^{66}}$ . En comparant les FIG. 6.7(a), FIG. 6.7(b) et FIG. 6.4 on voit que le mouvement de balancement de la fondation autour de l'axe  $\mathbf{e}_1$  est principalement induit par le mouvement sismique suivant la direction verticale  $\mathbf{e}_3$ . Compte tenu de la symétrie du problème, on vérifie aisément que  $A_{11}^{44} = A_{22}^{55}$ ,  $A_{22}^{44} = A_{11}^{55}$  et  $A_{33}^{44} = A_{33}^{55}$  et l'on peut faire la même remarque pour le balancement de la fondation suivant l'axe  $\mathbf{e}_2$ . Si l'on compare maintenant les FIG. 6.3, FIG. 6.7(c) ( $A_{22}^{66} = A_{11}^{66}$  par symétrie)

et FIG. 6.7(d), on en déduit que le mouvement de torsion de la fondation est quant à lui principalement induit par les mouvements sismiques de translation suivant les directions  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$ . La variabilité spatiale du champ incident a ainsi pour effet de solliciter les modes de rotation de la structure; cet effet est similaire à celui déjà mis en évidence par les mêmes auteurs (Luco & Wong [141]) pour le cas de sollicitations sismiques déterministes sous forme d'ondes planes à incidence inclinée.

### Conséquences pour les dimensionnements

Ces résultats montrent globalement que la variabilité spatiale du champ incident introduit :

- un filtrage des mouvements de translation de la fondation, d'autant plus prononcé que la fréquence ou l'incohérence (paramètre  $\eta$ ) sont élevées. Veletsos & Prasad [217] notent également que ce filtrage est plus important pour les vitesses ou les accélérations que pour les déplacements;
- des mouvements de rotation de la fondation, aussi bien en balancement qu'en torsion.

Si, en terme de dimensionnement des ouvrages, le premier effet est largement favorable, en revanche le second est lui beaucoup plus préjudiciable, dans la mesure où il est souvent ignoré par les concepteurs. Il est donc nécessaire de tenir compte de ces effets, même si des approches plus simples (telle que la méthode classique du spectre de réponse) sont toujours utilisées. On notera néanmoins que les tendances obtenues ici sont limitées à des hypothèses simplificatrices fortes sur la configuration du site, le type de sollicitations sismiques, les modèles d'incohérence, ou le comportement des matériaux notamment. Il convient donc de poursuivre des investigations détaillées pour des modèles plus complexes avant de pouvoir généraliser les conclusions présentées ici.

### Autres modèles de fonction de cohérence

Les résultats obtenus jusqu'à présent pour la fonction de cohérence de Luco & Wong [142] sont comparés avec ceux obtenus pour d'autres fonctions de cohérence proposées dans la littérature, et déjà vues au chapitre §1. La FIG. 6.8 donne ainsi les graphes des coefficients  $\sqrt{A_{11}^{11}}$ ,  $\sqrt{A_{11}^{66}}$ ,  $\sqrt{A_{33}^{44}}$  et  $\sqrt{|\Re(A_{31}^{46})|}$  pour la fonction de cohérence de Harichandran & Vanmarcke [90] (voir l'Eq.(1.19)) :

$$\gamma_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) = A \exp \left[ \frac{-2\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}{a\beta(\omega)} (1 - A + aA) \right] + (1 - A) \exp \left[ \frac{-2\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}{\beta(\omega)} (1 - A + aA) \right], \quad \forall j, k \in \{1, 2, 3\} \quad (6.5)$$

avec :

$$\beta(\omega) = \kappa \left[ 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^b \right]^{-\frac{1}{2}}$$

et les paramètres  $A = 0.626$ ,  $a = 0.022$ ,  $\kappa = 19700 \text{ m}$ ,  $\omega_0 = 2\pi \times 2.02 \text{ rad/s}$  et  $b = 3.47$  [55]. La FIG. 6.9 donne les graphes de ces mêmes coefficients pour la fonction de cohérence de Abrahamson *et al.* [1] (voir l'Eq.(1.21)) :

$$\tanh^{-1} |\gamma_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)| = (a_1 + a_2\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|) \left[ \exp((b_1 + b_2\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|)\omega) + \frac{1}{3}\omega^c \right] + \kappa, \quad \forall j, k \in \{1, 2, 3\} \quad (6.6)$$

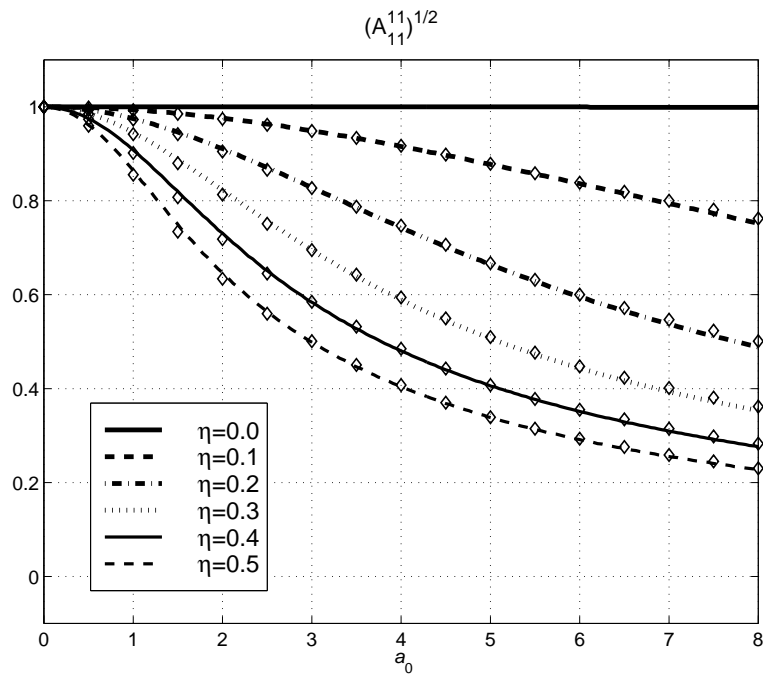


FIG. 6.2 – Racine carré du coefficient de covariance  $A_{11}^{11}$  en fonction de la fréquence adimensionnelle  $a_0 = \frac{\omega R}{c_s}$ ; fonction de cohérence de l'Eq.(6.4) avec  $\eta = 0.0$  à  $\eta = 0.5$ .  $\diamond$  idem d'après [140].

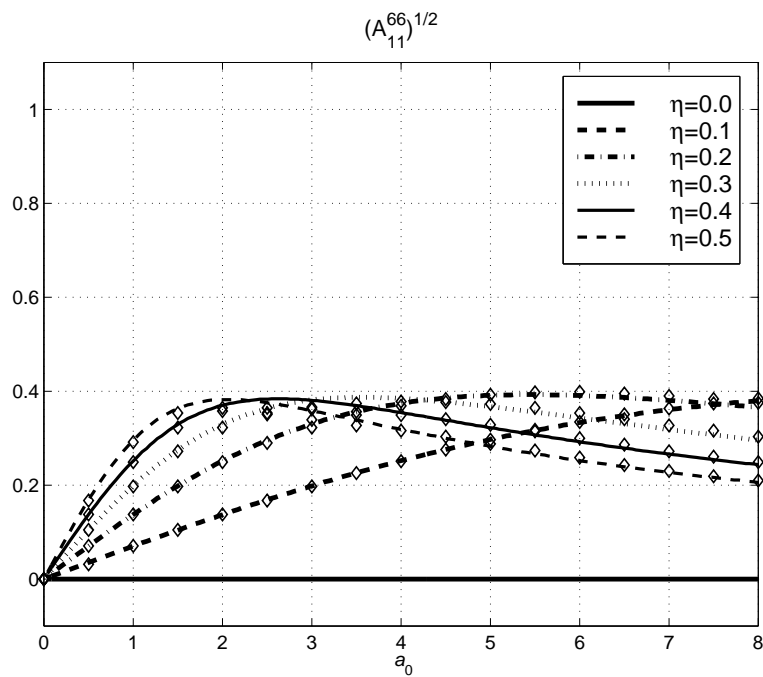


FIG. 6.3 – Racine carré du coefficient de covariance  $A_{11}^{66}$  en fonction de la fréquence adimensionnelle  $a_0 = \frac{\omega R}{c_s}$ ; fonction de cohérence de l'Eq.(6.4) avec  $\eta = 0.0$  à  $\eta = 0.5$ .  $\diamond$  idem d'après [140].

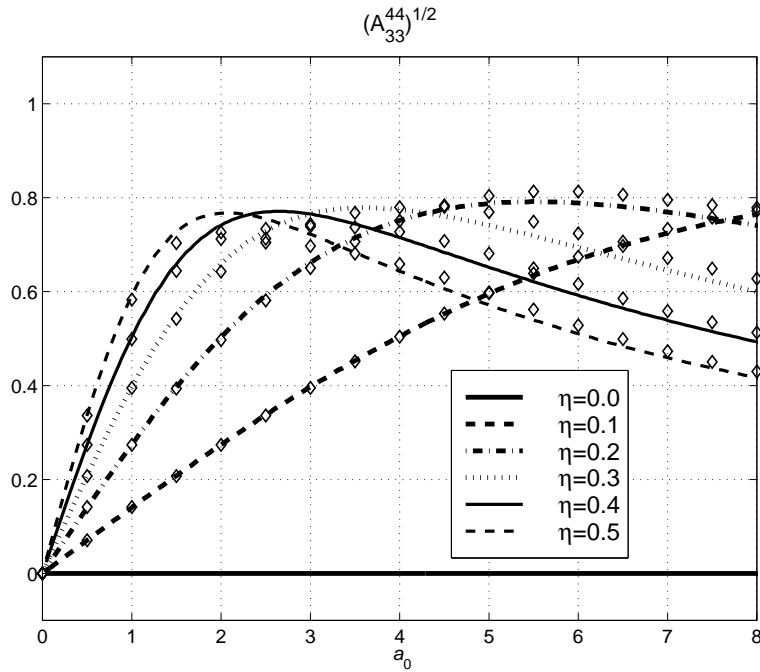


FIG. 6.4 – Racine carré du coefficient de covariance  $A_{33}^{44}$  en fonction de la fréquence adimensionnelle  $a_0 = \frac{\omega R}{c_s}$ ; fonction de cohérence de l'Eq.(6.4) avec  $\eta = 0.0$  à  $\eta = 0.5$ .  $\diamond$  idem d'après [140].

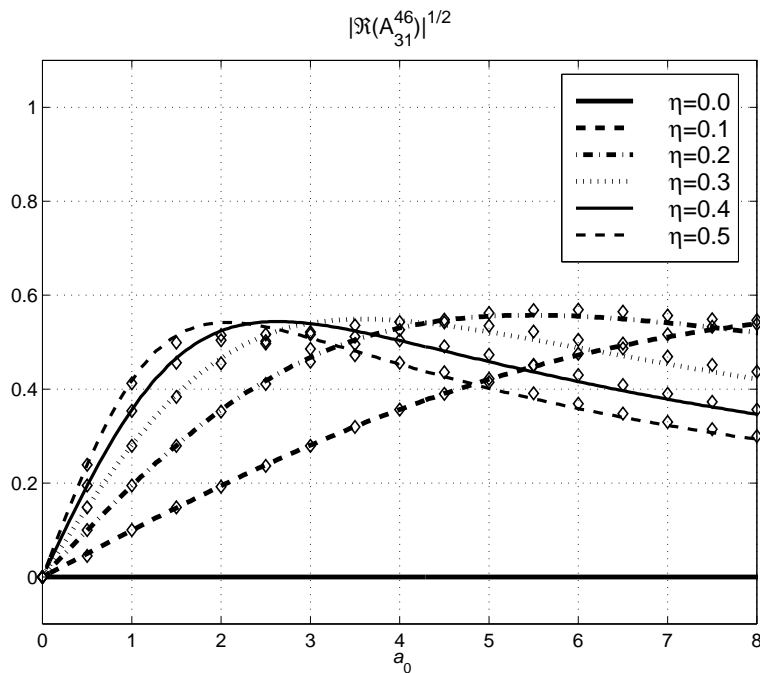


FIG. 6.5 – Racine carré de la valeur absolue de la partie réelle du coefficient de covariance  $A_{31}^{46}$  en fonction de la fréquence adimensionnelle  $a_0 = \frac{\omega R}{c_s}$ ; fonction de cohérence de l'Eq.(6.4) avec  $\eta = 0.0$  à  $\eta = 0.5$ .  $\diamond$  idem d'après [140].

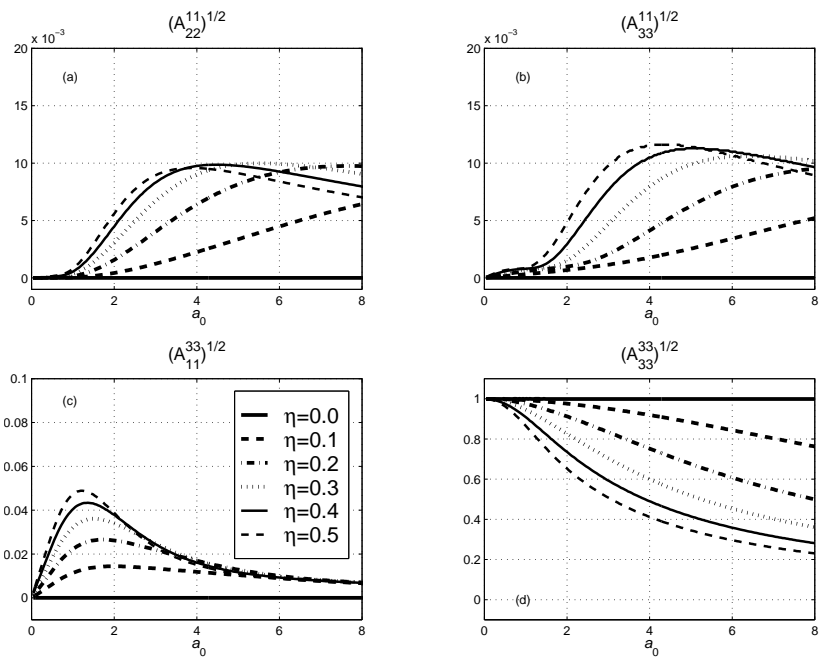


FIG. 6.6 – Racine carré des coefficients de covariance (a)  $A_{22}^{11}$ , (b)  $A_{33}^{11}$ , (c)  $A_{11}^{33}$  et (d)  $A_{33}^{33}$  en fonction de la fréquence adimensionnelle  $a_0 = \frac{\omega R}{c_s}$ ; fonction de cohérence de l'Eq.(6.4) avec  $\eta = 0.0$  à  $\eta = 0.5$ .

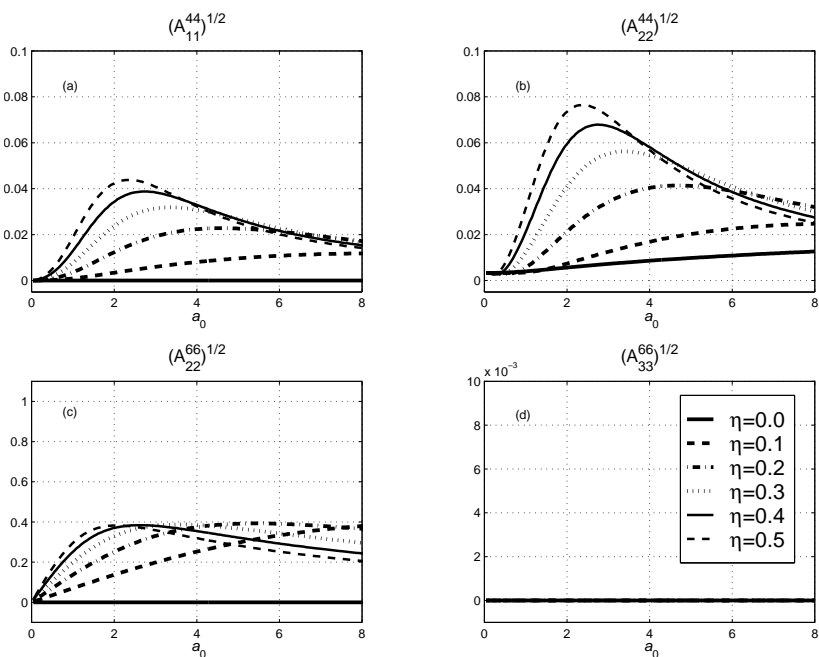


FIG. 6.7 – Racine carré des coefficients de covariance (a)  $A_{11}^{44}$ , (b)  $A_{22}^{44}$ , (c)  $A_{22}^{66}$  et (d)  $A_{33}^{66}$  en fonction de la fréquence adimensionnelle  $a_0 = \frac{\omega R}{c_s}$ ; fonction de cohérence de l'Eq.(6.4) avec  $\eta = 0.0$  à  $\eta = 0.5$ .

et les paramètres  $a_1 = 2.54$ ,  $a_2 = -0.012$ ,  $b_1 = -0.115$ ,  $b_2 = 0.00084$ ,  $c = -0.878$  et  $\kappa = 0.35$ . L'effet du passage d'onde est également ignoré pour ces cas. Ces résultats appellent les mêmes commentaires concernant les couplages entre les mouvements imposés par le champ incident et les mouvements de la fondation, avec toutefois des niveaux de filtrage sensiblement différents suivant la fonction de cohérence prise en considération.

## 6.2 Vibrations de structures sous sollicitation sismique aléatoire

L'exemple traité dans la section précédente et la comparaison avec les résultats obtenus dans la littérature permet de valider le code utilisé pour la discrétisation de l'opérateur  $\mathcal{U}^i$ . Une fois cette étape franchie, on s'attache ici à étendre le type d'analyse effectuée précédemment à l'examen de grandeurs intéressant directement l'ingénieur dans le cadre d'un dimensionnement industriel, telles que par exemple des déplacements structurels.

### 6.2.1 Exemple de la maquette de Hualien

Les résultats relatifs à cet exemple sont tirés de Aubry *et al.* [11] et Clouteau *et al.* [44].

La procédure décrite au chapitre §3 pour l'analyse de la réponse structurelle sous l'action d'un champ incident aléatoire est mise en oeuvre pour le cas de la maquette de Hualien à Taiwan (FIG. 6.10). Construite en béton armé dans le cadre d'un projet international regroupant notamment Electricité de France, elle reproduit à l'échelle  $\frac{1}{4}$  un bâtiment-réacteur de centrale nucléaire de hauteur totale  $h = 16.28\text{ m}$  et de rayon  $R = 5.4\text{ m}$ . Elle est coiffée d'une dalle de rayon  $6.64\text{ m}$  et d'épaisseur  $1.50\text{ m}$ . La fondation est circulaire de rayon  $5.41\text{ m}$ , rigide, superficielle. Le maillage éléments finis de frontière retenu pour l'interface sol-structure est le même que dans la section §6.1 (voir FIG. 6.1). Seuls les deux premiers modes propres de vibration sont pris en compte, à savoir un mode de flexion horizontale à la fréquence  $10.8\text{ Hz}$ , et un mode de compression verticale à la fréquence  $31.2\text{ Hz}$ . La structure repose sur un sol stratifié comportant deux couches, la première d'une épaisseur de  $7.0\text{ m}$ , la seconde figurant le substratum. Les données relatives à ce modèle sont récapitulées dans le TAB. 6.1 ci-dessous. La fonction de Green du demi-espace sol stratifié est évaluée numériquement par la méthode des coefficients de réflexion-transmission de Kennett [40] brièvement présentée dans le chapitre §1, section §1.5.2.

### Données sur le champ incident stochastique

Le champ incident stochastique homogène est caractérisé par sa fonction de cohérence transversale ayant pour éléments :

$$\gamma_{jk}(d, \omega) = \exp \left[ - \left( \frac{\eta \omega d}{c_s} \right)^2 \right], \quad \forall j, k \in \{1, 2, 3\} \quad (6.7)$$

suivant le modèle proposé par Luco & Wong [142] (voir Eq.(6.4)), avec  $d = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$  la distance entre deux points en surface. Ce modèle correspond à une longueur de corrélation spatiale en surface (voir la définition (3.21)) du champ incident, indépendante de la direction et du point d'observation, de la forme pour  $\eta \omega \neq 0$  :

$$\ell(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{c}{\eta \omega} = \frac{\lambda}{4\eta\sqrt{\pi}} \quad (6.8)$$



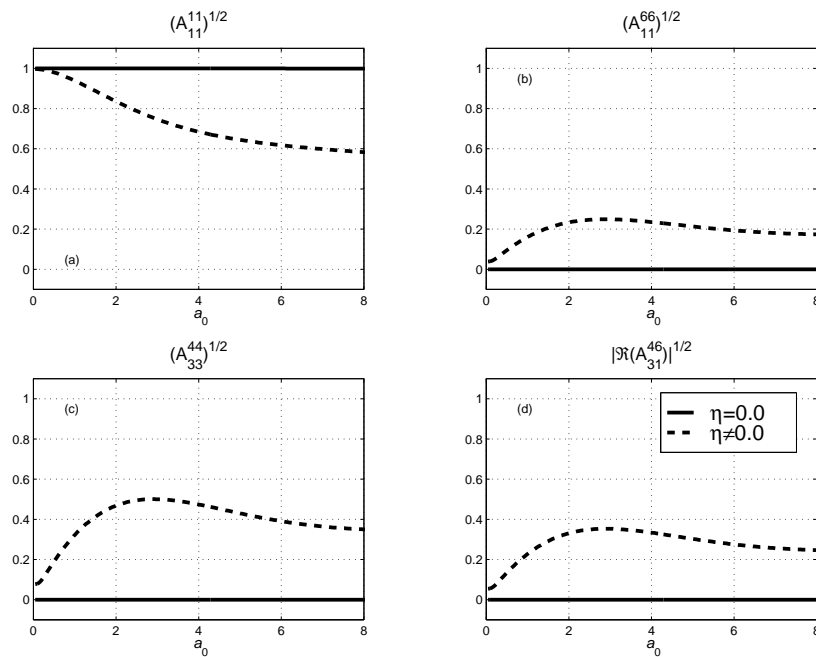


FIG. 6.8 – Racine carré des coefficients de covariance (a)  $A_{11}^{11}$ , (b)  $A_{11}^{66}$ , (c)  $A_{33}^{44}$  et (d)  $|\Re(A_{31}^{46})|$  en fonction de la fréquence adimensionnelle  $a_0 = \frac{\omega R}{c_s}$ ; fonction de cohérence de l'Eq.(6.5) avec  $\eta = 0$  ou  $\eta \neq 0$ .

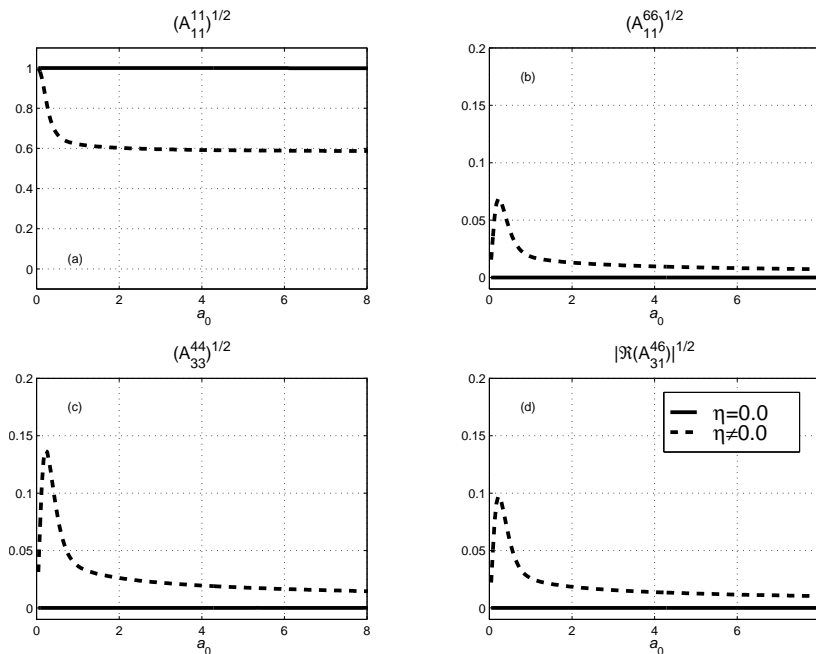


FIG. 6.9 – Racine carré des coefficients de covariance (a)  $A_{11}^{11}$ , (b)  $A_{11}^{66}$ , (c)  $A_{33}^{44}$  et (d)  $|\Re(A_{31}^{46})|$  en fonction de la fréquence adimensionnelle  $a_0 = \frac{\omega R}{c_s}$ ; fonction de cohérence de l'Eq.(6.6) avec  $\eta = 0$  ou  $\eta \neq 0$ .



FIG. 6.10 – Maquette SMART-2 de Hualien, Taiwan.

où  $\lambda$  désigne la longueur d'onde. Lorsque  $\eta$  augmente, l'incohérence du sol augmente et donc  $\ell(\omega)$  diminue, comme on pouvait s'y attendre. Lorsque la fréquence croît,  $\ell(\omega)$  diminue également, ce qui est compatible avec les observations couramment faites dans les gammes de fréquence usuelles intéressant le génie civil.

structure	$\rho = 2.40 T/m^3$		
	$\zeta_A$	fréquence propre (Hz)	
flexion horiz.	2%	10.8	
compr. vert.	2%	31.2	
sol	$\rho = 2.42 T/m^3$		$\beta = 2\%$
	$c_p$ (m/s)	$c_s$ (m/s)	épaisseur (m)
couche #1	1332	317	7
substratum	2001	476	$\infty$

TAB. 6.1 – Caractéristiques du modèle de Hualien (données : EDF/Septen).

On se donne également la fonction de modulation de l'Eq.(3.5) sous la forme [136] :

$$\begin{cases} \varphi(t) = \left(\frac{t}{t_1}\right)^2 & 0 < t \leq t_1 \\ \varphi(t) = 1 & t_1 < t \leq t_2 \\ \varphi(t) = e^{-a(t-t_2)} & t \geq t_2 \end{cases} \quad (6.9)$$

Pour cette application,  $a = 3.3$ ,  $t_1 = 0.2 s$  et  $t_2 = 1.0 s$ . Notons que la durée du signal sismique ( $\approx 2 s$ ) pour le choix de ces paramètres n'est pas représentative, par contre elle est compatible avec la gamme de fréquence ( $[0, 50] Hz$ ) relativement étendue retenue ici; l'objectif est d'étudier qualitativement l'influence du modèle de tremblement de terre non stationnaire par la fonction de modulation pour d'autres applications.

On note  $S_0(\omega) = S_{\ddot{V}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \omega)_{jj}$ ,  $j = 1, 2$  ou  $3$ , la fonction de densité spectrale de puissance du champ incident stationnaire supposée indépendante du point d'observation  $\mathbf{x}$  et de la direction  $j$ . Elle est choisie sous la forme du spectre de Kanai-Tajimi  $\omega \mapsto S_{KT}(\omega)$  [105], abondamment utilisé dans la littérature. C'est la fonction de densité spectrale de puissance

de la réponse stationnaire en accélération d'un oscillateur simple à 1 degré de liberté de taux d'amortissement critique  $\zeta_g$  et de pulsation propre  $\omega_g$ , sollicité par un bruit blanc normalisé et centré  $B(t)$  de densité spectrale de puissance constante  $S_B(\omega) = s_0$ . Il s'écrit :

$$S_{KT}(\omega) = s_0 \frac{\omega_g^4 + 4\zeta_g^2 \omega_g^2 \omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_g^2 \omega_g^2 \omega^2} \quad (6.10)$$

Les paramètres  $\zeta_g$  et  $\omega_g$  traduisent les propriétés dynamiques d'une colonne de sol sous le point de mesure  $\mathbf{x}$  en surface. L'excitation sismique aléatoire correspondante est le processus  $A_{KT}(t) = \ddot{X}(t) + B(t)$  où  $X(t)$  est le processus modélisant le déplacement relatif de l'oscillateur. Ce modèle présente une singularité au voisinage de  $\omega = 0$  lorsqu'on s'intéresse aux vitesse et déplacement correspondants, incompatible avec les enregistrements de séismes. En effet les densités spectrales de puissance des vitesse et déplacement sont respectivement  $\frac{S_{KT}(\omega)}{\omega^2}$  et  $\frac{S_{KT}(\omega)}{\omega^4}$ , non définies en 0. Afin de résorber cette singularité, Clough & Penzien [39] proposent de filtrer le processus  $A_{KT}(t)$  par un oscillateur simple ( $\zeta_f, \omega_f$ ). Le séisme est alors représenté par son accélération relative  $\dot{Y}(t)$  sous la sollicitation  $A_{KT}(t)$ , sa fonction de densité spectrale s'écrivant :

$$S_{CP}(\omega) = s_0 \left( \frac{\omega_g^4 + 4\zeta_g^2 \omega_g^2 \omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_g^2 \omega_g^2 \omega^2} \right) \left( \frac{\omega^4}{(\omega_f^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_f^2 \omega_f^2 \omega^2} \right) \quad (6.11)$$

qui a un comportement au voisinage de 0 consistant avec les enregistrements. En accord avec [55], on choisit  $\omega_g = 15.46 \text{ rd/s}$ ,  $\omega_f = 1.636 \text{ rd/s}$ ,  $\zeta_g = 0.623$  et  $\zeta_f = 0.619$ .

### Résultats pour le cas instationnaire

Les FIG. 6.12 à FIG. 6.15 représentent la racine carré de la fonction de densité spectrale évolutive  $t, \omega \mapsto \frac{S_{\mathbf{U}_b}(t, \omega)}{S_0(\omega)}$  avec la fonction de cohérence transversale de l'Eq.(6.7),  $\eta = 0.1$ , et la fonction de modulation de l'Eq.(6.9), pour respectivement le déplacement horizontal en tête de la structure, le déplacement vertical en tête de la structure, le déplacement horizontal en tête de la fondation et le déplacement vertical en tête de la fondation. Elles montrent que la modulation en temps, pour cet exemple, n'a d'effet que si les périodes fondamentales des pics énergétiques observés sont grandes devant la durée du signal, auquel cas les niveaux d'énergie atteints sont sensiblement réduits comparés au cas purement stationnaire. La FIG. 6.11 représente quant à elle l'écart-type normalisé  $t \mapsto \frac{\sigma_{\mathbf{U}_b}(t)}{\sqrt{s_0}}$  avec le spectre de Kanai-Tajimi pour les quatre mêmes déplacements.

### Résultats pour le cas stationnaire

Les FIG. 6.16 à FIG. 6.19 représentent la racine carré de la fonction de densité spectrale  $\omega \mapsto \frac{S_{\mathbf{U}_b}(\omega)}{S_0(\omega)}$  dans le cas stationnaire ( $\varphi(t) = 1$  sur tout  $\mathbb{R}$ ) avec la fonction de cohérence transversale (6.7) et  $\eta = 0.0$  à 0.5. La prise en compte du caractère instationnaire des séismes par la fonction de modulation de l'Eq.(3.5) a pour seul effet ici de répartir l'énergie associée au déplacement observé dans la fenêtre de temps correspondante, sans modifier son contenu fréquentiel. Dans la suite, on se limitera donc aux réponses stationnaires. A titre de comparaison, on donne également, FIG. 6.20, le même graphe  $\omega \mapsto \frac{S_{\mathbf{U}_b}(\omega)}{S_0(\omega)}$  pour une fonction

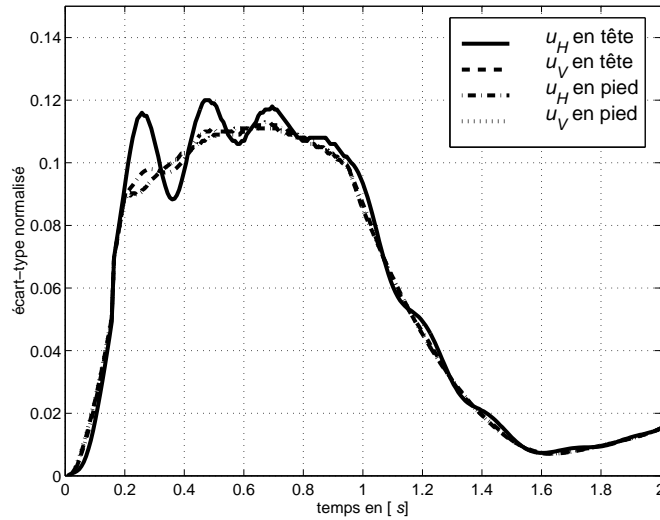


FIG. 6.11 – Ecart-type des réponses horizontale ( $u_H$ ) et verticale ( $u_V$ ) en tête et en pied de la structure de Hualien ; fonction de cohérence transversale de l'Eq.(6.7) avec  $\eta = 0.1$  ; fonction de modulation de l'Eq.(6.9) ; densité spectrale de puissance du séisme de l'Eq.(6.11).

de cohérence transversale consistante avec la forme générale proposée dans [56] :

$$\gamma_{jk}(d, \omega) = \exp \left[ - \left( \frac{\eta \omega d}{c} \right)^2 \right] \cos \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{\left( \frac{\eta \omega d}{c} \right)^\alpha}{1 + \left( \frac{\eta \omega d}{c} \right)^\alpha} \right) \right], \quad \forall j, k \in \{1, 2, 3\} \quad (6.12)$$

avec  $\alpha = 0.2$  et  $\eta = 0.0$  à  $0.5$ . Enfin la FIG. 6.21 donne toujours la racine carré de  $\omega \mapsto \frac{S_{U_b}(\omega)}{S_0(\omega)}$  dans le cas stationnaire avec la fonction de cohérence transversale empirique proposée par Harichandran & Vanmarke [90] sur la base d'enregistrements du réseau SMART-1 de Lotung, Taiwan (voir l'Eq.(6.5)) avec les mêmes paramètres  $\beta(\omega)$ ,  $A$ ,  $a$ ,  $k$ ,  $\omega_0$  et  $b$  que dans le §6.1. On observe très peu de différences entre les fonctions de densité spectrale pour ces trois modèles.

### 6.2.2 Exemple d'un bâtiment-réacteur

On traite ici le cas d'un bâtiment-réacteur réel reposant sur une fondation superficielle circulaire de rayon  $R \approx 25 m$ . Ses 30 premiers modes propres sont pris en compte, leurs caractéristiques étant résumées dans le TAB. 6.2 avec pour le taux d'amortissement critique  $\zeta_A = 7\%$  pour tous les modes ; on précise également la direction principale (translations  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ou rotation  $r_z$ ) de la déformée correspondante,  $0x$  et  $0y$  désignant les axes horizontaux et  $0z$  l'axe vertical. Les fréquences dédoublées correspondent notamment à des déformées identiques suivant des directions orthogonales, du fait de la symétrie du modèle. L'interface sol-fondation est discrétisée en 136 éléments **Tri4** (voir la FIG. 6.22). Le sol est lui constitué de 4 couches avec le substratum, dont les caractéristiques sont résumées dans le TAB. 6.3 (épaisseur, module d'Young, coefficient de Poisson et densité - pour toutes les couches, l'amortissement hystérétique est fixé à  $\beta = 5\%$ ). On note une inversion de rigidité inhabituelle au niveau de la deuxième couche, plus rigide que la troisième, qui peut éventuellement

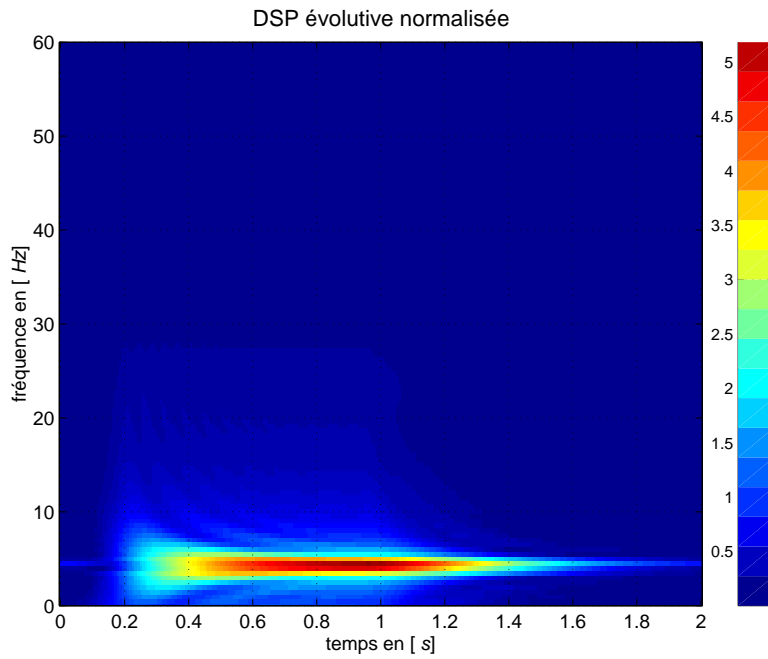


FIG. 6.12 – Racine carré de la fonction de densité spectrale évolutive normalisée de la réponse horizontale en tête de la structure de Hualien ; fonction de cohérence de l'Eq.(6.7) avec  $\eta = 0.1$  ; fonction de modulation de l'Eq.(6.9).

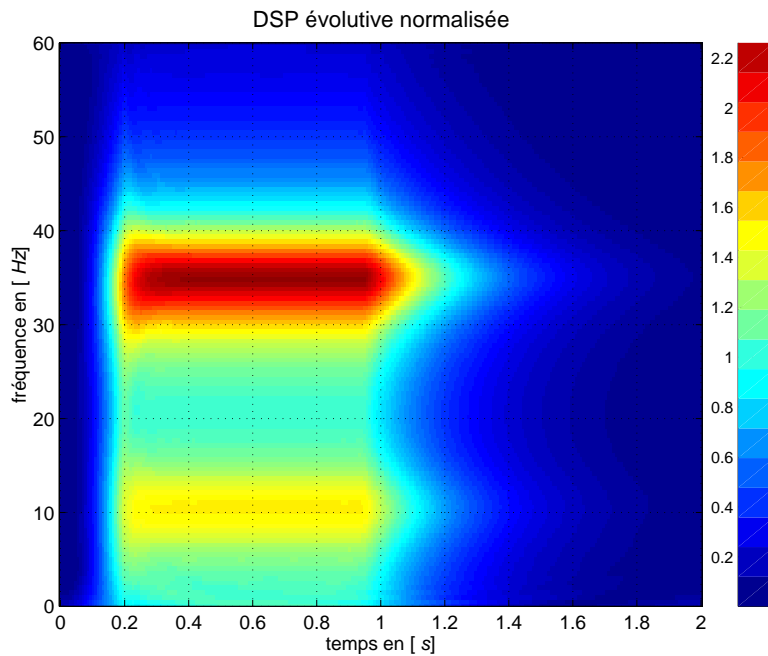


FIG. 6.13 – Racine carré de la fonction de densité spectrale évolutive normalisée de la réponse verticale en tête de la structure de Hualien ; fonction de cohérence transversale de l'Eq.(6.7) avec  $\eta = 0.1$  ; fonction de modulation de l'Eq.(6.9).

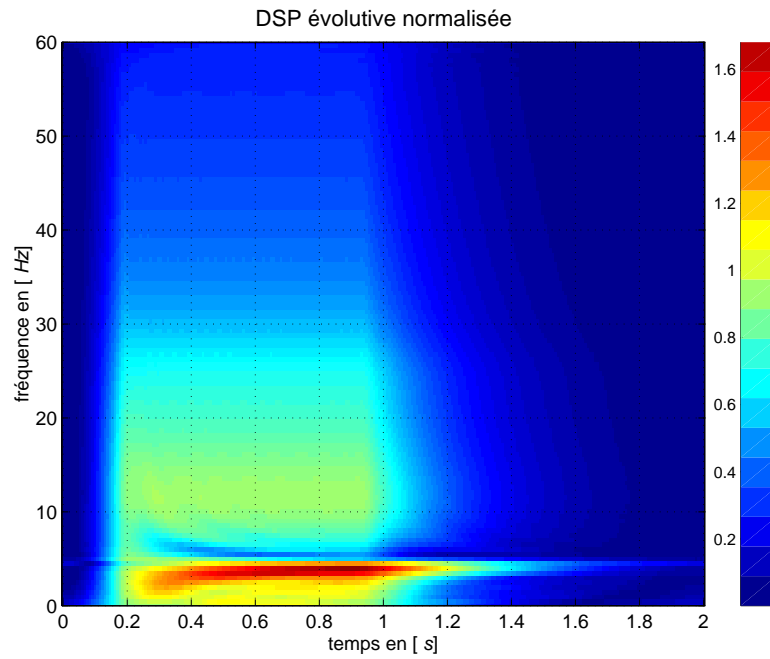


FIG. 6.14 – Racine carré de la fonction de densité spectrale évolutive normalisée de la réponse horizontale en tête de la fondation de Hualien ; fonction de cohérence transversale de l'Eq.(6.7) avec  $\eta = 0.1$  ; fonction de modulation de l'Eq.(6.9).

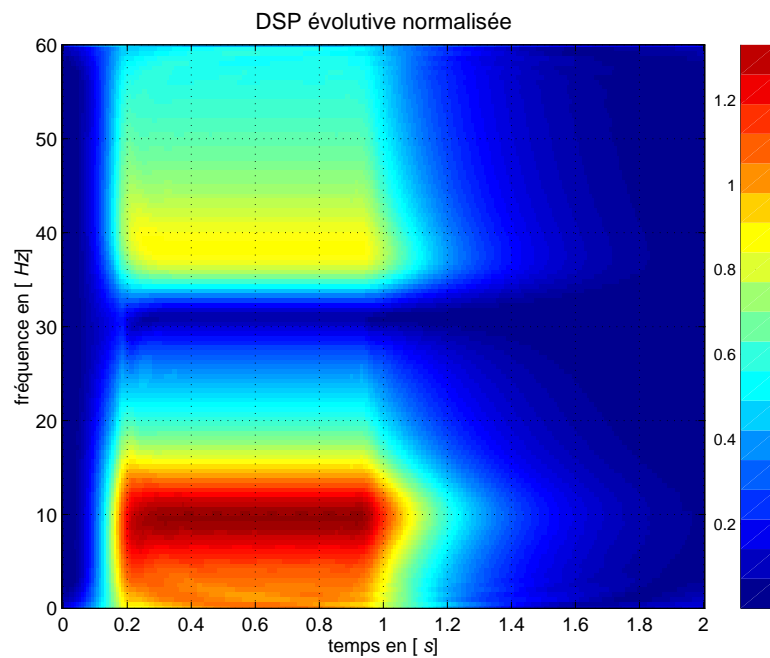


FIG. 6.15 – Racine carré de la fonction de densité spectrale évolutive normalisée de la réponse verticale en tête de la fondation de Hualien ; fonction de cohérence transversale de l'Eq.(6.7) avec  $\eta = 0.1$  ; fonction de modulation de l'Eq.(6.9).

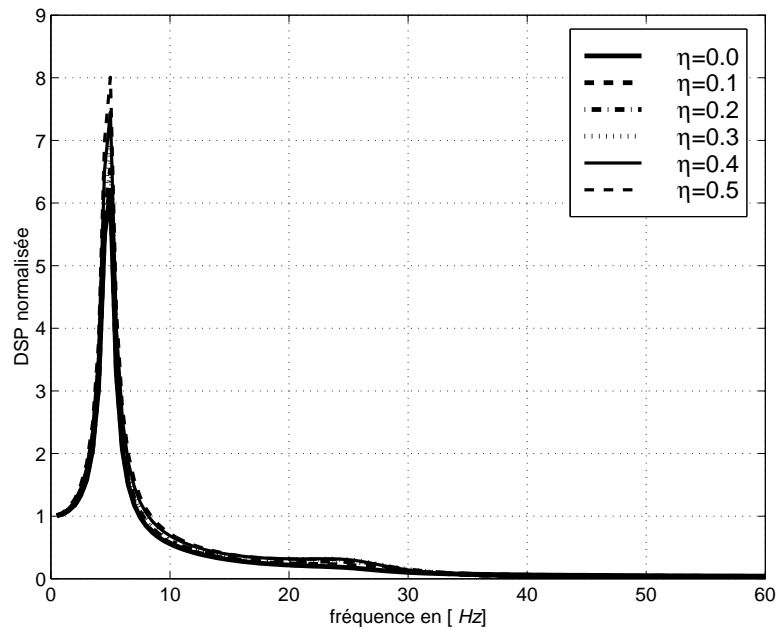


FIG. 6.16 – Racine carré de la fonction de densité spectrale normalisée de la réponse horizontale stationnaire en tête de la structure de Hualien ; fonction de cohérence transversale de l'Eq.(6.7) avec  $\eta = 0.0$  à  $\eta = 0.5$ .

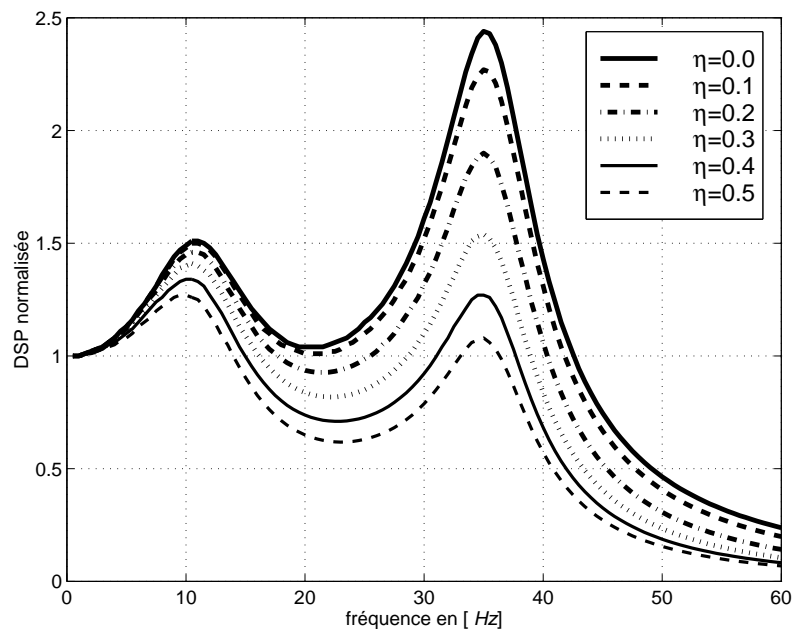


FIG. 6.17 – Racine carré de la fonction de densité spectrale normalisée de la réponse verticale stationnaire en tête de la structure de Hualien ; fonction de cohérence de l'Eq.(6.7) avec  $\eta = 0.0$  à  $\eta = 0.5$ .

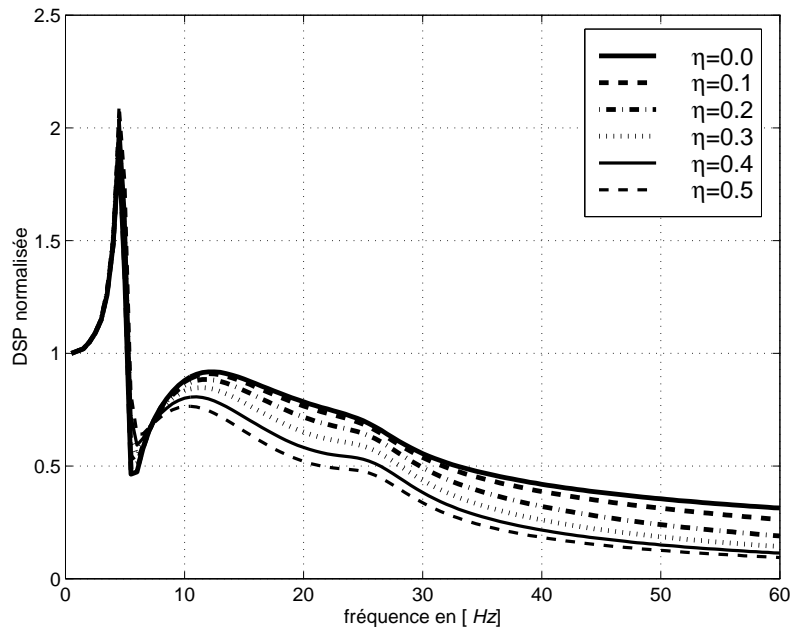


FIG. 6.18 – Racine carré de la fonction de densité spectrale normalisée de la réponse horizontale stationnaire en tête de la fondation de Hualien ; fonction de cohérence transversale de l'Eq.(6.7) avec  $\eta = 0.0$  à  $\eta = 0.5$ .

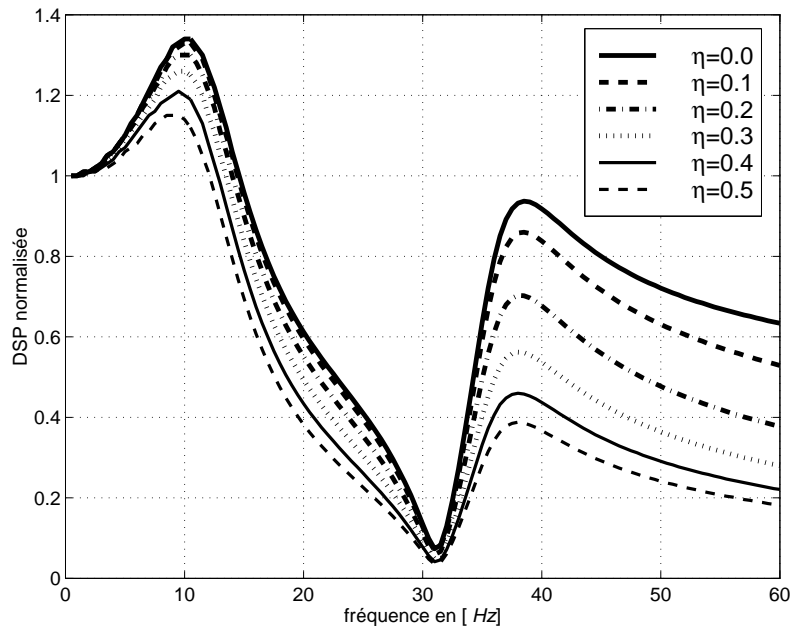


FIG. 6.19 – Racine carré de la fonction de densité spectrale normalisée de la réponse verticale stationnaire en tête de la fondation de Hualien ; fonction de cohérence transversale de l'Eq.(6.7) avec  $\eta = 0.0$  à  $\eta = 0.5$ .



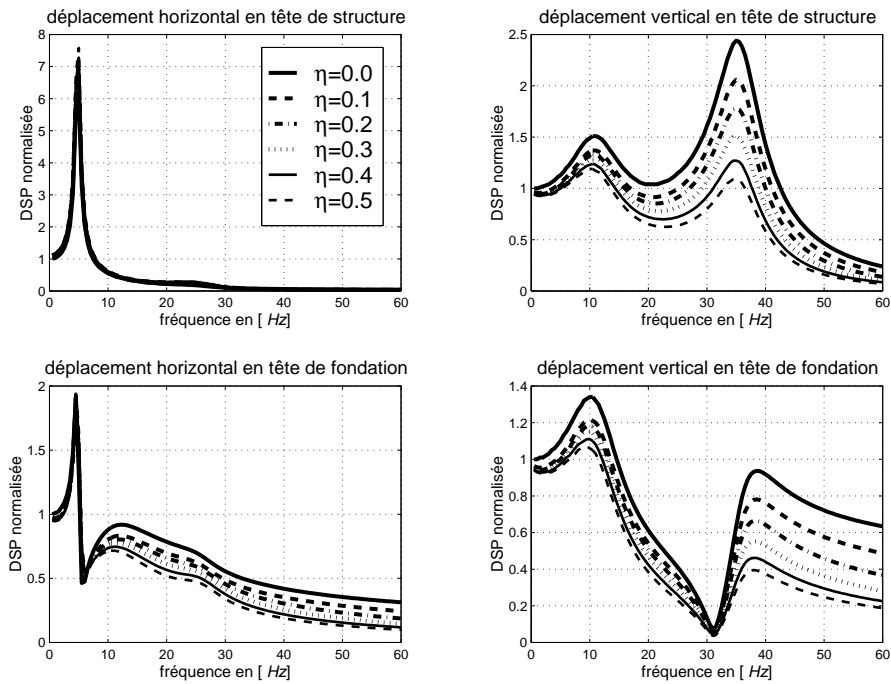


FIG. 6.20 – Racine carré de la fonction de densité spectrale normalisée de la structure de Hualien ; fonction de cohérence transversale de l'Eq.(6.12) avec  $\eta = 0.0$  à  $\eta = 0.5$ .

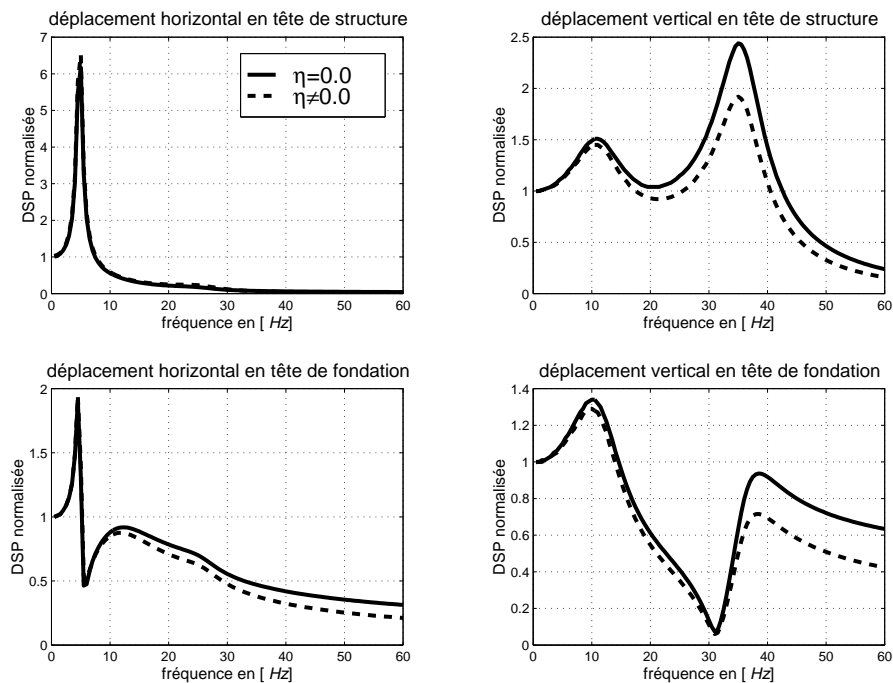


FIG. 6.21 – Racine carré de la fonction de densité spectrale normalisée de la structure de Hualien ; fonction de cohérence transversale de l'Eq.(6.5) avec  $\eta = 0$  ou  $\eta \neq 0$ .

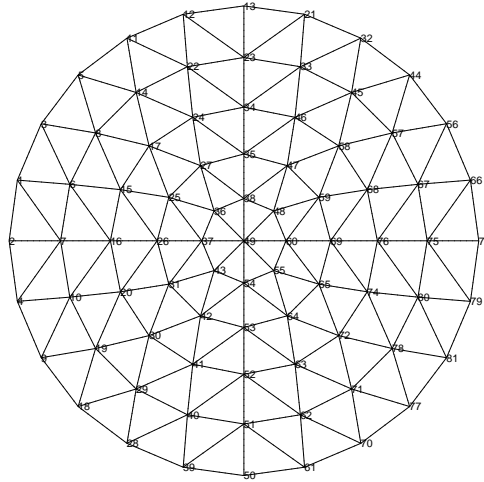


FIG. 6.22 – Fondation superficielle circulaire d'un bâtiment-réacteur,  $R \approx 25 \text{ m}$ ; maillage.

modifiée la portée des résultats présentés. Comme dans le cas du modèle de la maquette de Hualien, la fonction de Green du demi-espace sol stratifié est évaluée numériquement par la méthode des coefficients de réflexion-transmission de Kennett.

### Effet d'incohérence

La FIG. 6.23 représente la racine carré de la fonction de densité spectrale  $\omega \mapsto \frac{S_{\mathbf{U}_b}(\omega)}{S_0(\omega)}$  de la réponse stationnaire horizontale en tête du bâtiment-réacteur pour les fonctions de cohérence transversale du champ incident proposées par Luco & Wong, Eq.(6.7), avec  $\eta = 0.0$  à  $0.5$ , Der Kiureghian, Eq.(6.12), avec également  $\eta = 0.0$  à  $0.5$ , Harichandran & Vanmarcke, Eq.(6.5), avec  $\eta = 0$  ou  $\eta \neq 0$ , et enfin Abrahamson *et al.*, Eq.(6.6), avec  $\eta = 0$  ou  $\eta \neq 0$ . Ces graphes montrent que l'énergie de la réponse est concentrée autour du premier pic de résonance de la structure, et que l'incohérence du mouvement sismique n'a que peu d'influence sur sa répartition en fréquence. La FIG. 6.24 représente la racine de la fonction de densité spectrale de la réponse stationnaire horizontale en tête de la fondation, pour les mêmes fonctions de cohérence transversale. L'effet de l'incohérence est ici beaucoup plus marqué, les différentes fonctions donnant des résultats qualitativement et quantitativement similaires sauf aux basses fréquences pour lesquelles le modèle proposé par Abrahamson *et al.* [1] conduit à un filtrage plus important.

D'autres calculs (non présentés ici) ont été effectués en inversant les caractéristiques mécaniques des deuxième et troisième couches, pour les raisons mentionnées plus haut. Les résultats obtenus sont tout à fait identiques aux précédents.

### Effet du passage d'onde

Les FIG. 6.25 et 6.26 représentent la racine carré de la fonction de densité spectrale  $\omega \mapsto \frac{S_{\mathbf{U}_b}(\omega)}{S_0(\omega)}$  des réponses stationnaires horizontales en tête du bâtiment-réacteur et de la fondation respectivement pour la fonction de cohérence liée au passage d'onde. En supposant que celle-ci se propage suivant l'axe orienté par  $\mathbf{e}_1$  à la vitesse apparente  $c_{\text{app}}$  telle que

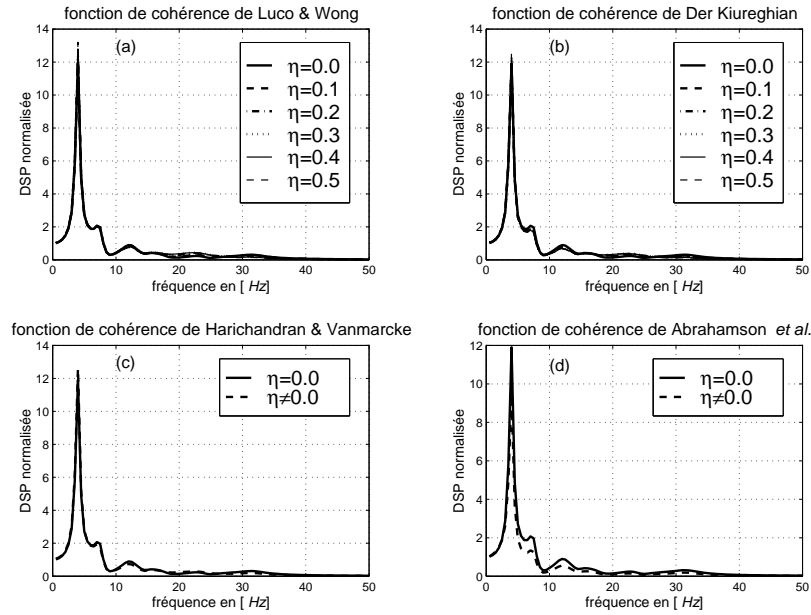


FIG. 6.23 – Racine carré de la fonction de densité spectrale normalisée de la réponse horizontale en tête du bâtiment-réacteur; fonction de cohérence transversale (a) de l'Eq.(6.7) avec  $\eta = 0.0$  à  $\eta = 0.5$ , (b) de l'Eq.(6.12) avec  $\eta = 0.0$  à  $\eta = 0.5$ , (c) de l'Eq.(6.5) avec  $\eta = 0$  ou  $\eta \neq 0$  et (d) de l'Eq.(6.6) avec  $\eta = 0$  ou  $\eta \neq 0$ .

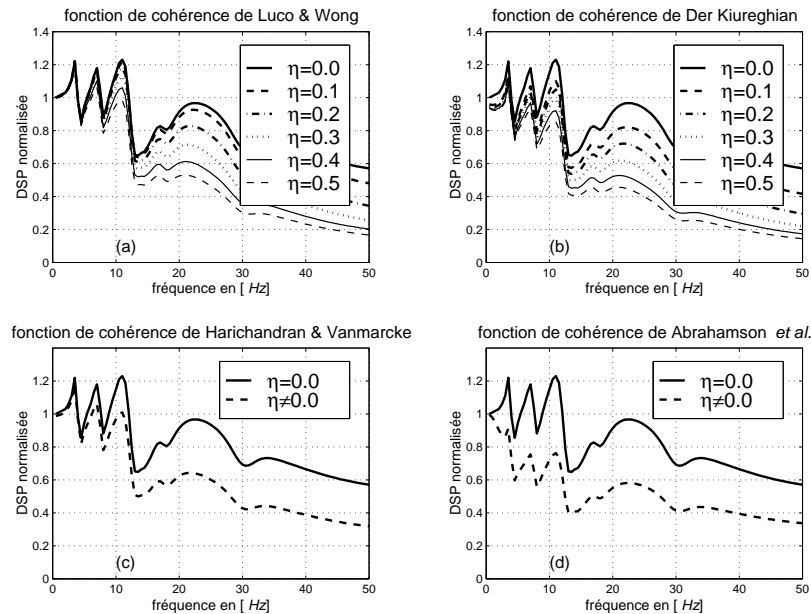


FIG. 6.24 – Racine carré de la fonction de densité spectrale normalisée de la réponse horizontale en tête de la fondation; fonction de cohérence transversale (a) de l'Eq.(6.7) avec  $\eta = 0.0$  à  $\eta = 0.5$ , (b) de l'Eq.(6.12) avec  $\eta = 0.0$  à  $\eta = 0.5$ , (c) de l'Eq.(6.5) avec  $\eta = 0$  ou  $\eta \neq 0$  et (d) de l'Eq.(6.6) avec  $\eta = 0$  ou  $\eta \neq 0$ .

mode #	1	2	3	4	5
fréquence propre [Hz]	4.58	4.58	4.83	4.83	7.27
déformée	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>
mode #	6	7	8	9	10
fréquence propre [Hz]	7.82	12.59	12.91	13.15	13.43
déformée	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>z</i>	<i>z</i>
mode #	11	12	13	14	15
fréquence propre [Hz]	14.27	14.27	14.88	15.33	17.08
déformée	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>
mode #	16	17	18	19	20
fréquence propre [Hz]	17.85	17.98	23.13	23.14	23.72
déformée	<i>x</i>	<i>z</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>
mode #	21	22	23	24	25
fréquence propre [Hz]	23.89	24.51	25.30	26.39	29.29
déformée	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>
mode #	26	27	28	29	30
fréquence propre [Hz]	30.26	30.26	31.24	31.43	33.55
déformée	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>

TAB. 6.2 – Fréquences propres du modèle de bâtiment-réacteur.

	<i>h</i> (m)	<i>E</i> (MPa)	$\nu$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
couche #1	10.5	1.01 10 <sup>4</sup>	0.38	2400
couche #2	10.5	2.06 10 <sup>4</sup>	0.36	2500
couche #3	19.5	1.66 10 <sup>4</sup>	0.39	2400
substratum	$\infty$	2.60 10 <sup>4</sup>	0.31	2500

TAB. 6.3 – Caractéristiques du sol stratifié pour le modèle de bâtiment-réacteur.

$0 \leq \frac{c_s}{c_{app}} \leq 1$ , la fonction de cohérence transversale correspondante est :

$$\gamma_{jk}(x, x', \omega) = \exp \left[ -i\omega \frac{(x - x')}{c_{app}} \right], \quad \forall j, k \in \{1, 2, 3\} \quad (6.13)$$

Ces résultats montrent que les effets d'incohérence pure du champ incident et du passage de l'onde associée sont très comparables et conduisent tous les deux à une réduction des niveaux énergétiques atteints par la réponse de la structure.

### 6.2.3 Conclusion sur l'influence de la variabilité spatiale du champ incident

L'influence de la variabilité spatiale du champ incident sur le comportement vibratoire d'une structure est ici caractérisée par l'étude de la fonction de densité spectrale de la réponse, ou de sa fonction de densité spectrale évolutive, selon que l'on considère une sollicitation sismique stationnaire ou instationnaire, modulée en temps. Les effets de la modulation en temps sont, pour les deux exemples traités dans cette section, relativement limités dans

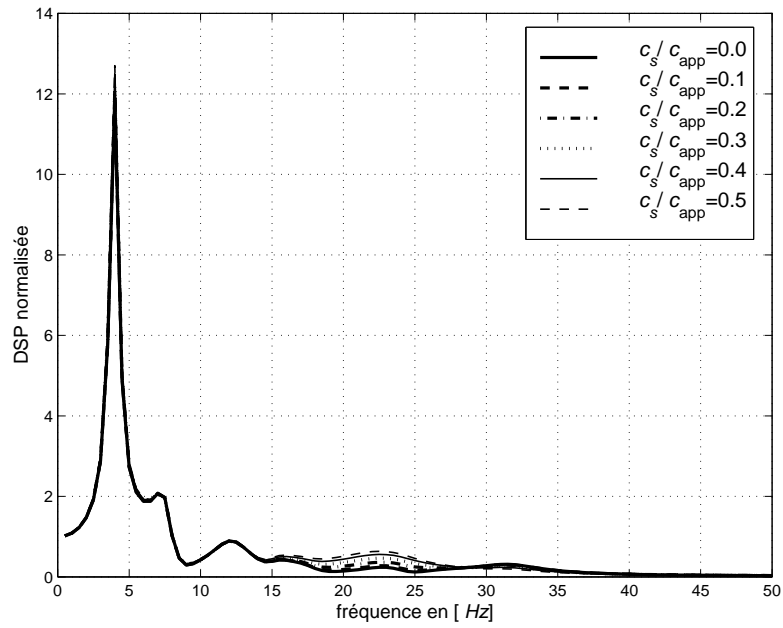


FIG. 6.25 – Racine carré de la fonction de densité spectrale normalisée de la réponse horizontale en tête du bâtiment-réacteur; fonction de cohérence transversale de l'Eq.(6.13) avec  $\frac{c_s}{c_{app}} = 0.0$  à  $\frac{c_s}{c_{app}} = 0.5$ .

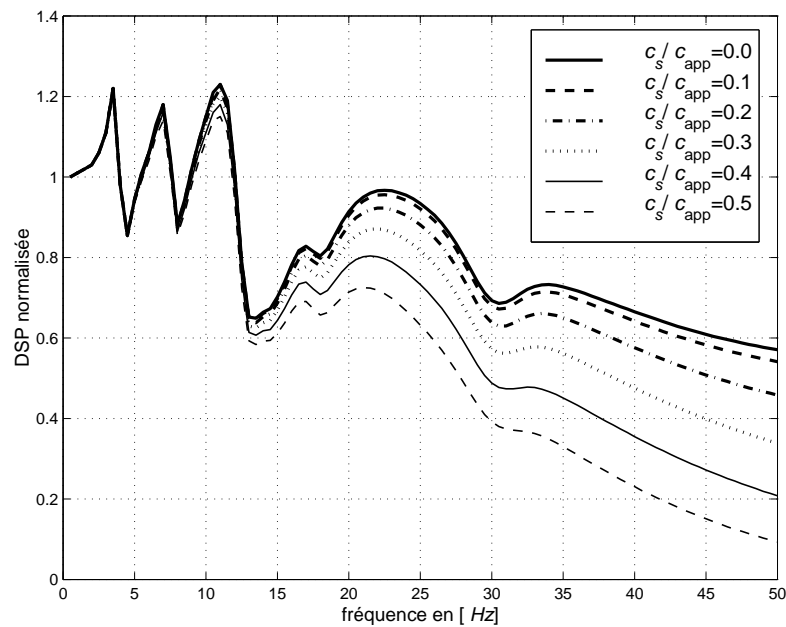


FIG. 6.26 – Racine carré de la fonction de densité spectrale normalisée de la réponse horizontale en tête de la fondation; fonction de cohérence transversale de l'Eq.(6.13) avec  $\frac{c_s}{c_{app}} = 0.0$  à  $\frac{c_s}{c_{app}} = 0.5$ .

la mesure où celle-ci ne modifie pas le contenu fréquentiel de la réponse observée. Cette conclusion n'augure pas en revanche des résultats que l'on pourrait obtenir avec d'autres modélisations, plus sophistiquées, du caractère fortement instationnaire des séismes. Ce type d'analyse reste quoi qu'il en soit très utile dans la mesure où il permet d'accéder à des quantités intéressantes pour le dimensionnement des structures, telle que l'écart-type de leur réponse en fonction du temps. On peut notamment mettre en évidence certains phénomènes couramment observés lors de tremblements de terre destructeurs. Le risque de chocs entre deux bâtiments adjacents ("pounding effect" dans la littérature anglaise) sous l'effet de la variabilité spatiale du séisme a ainsi été étudié par cette approche par Martinez [150]. Dans ce travail, on montre que l'écart-type du déplacement relatif au cours du temps entre deux structures adjacentes *identiques* peut devenir supérieur à la distance réglementaire minimale prévue entre les bâtiments, et donc ceux-ci peuvent éventuellement s'entrechoquer. Cet effet a par exemple été observé sur 40% des bâtiments endommagés lors du séisme de Mexico (1985), et a été la cause principale de 15% des destructions totales enregistrées (Hao & Zhang [87] et références citées).

Par ailleurs, les différents modèles de fonction de cohérence transversale du champ incident développés dans la littérature conduisent tous à des observations qualitativement et quantitativement très comparables. Enfin les effets de l'incohérence pure et du passage d'onde sont eux aussi comparables.

### 6.3 Influence d'une hétérogénéité déterministe du sol : validation

Dans cette section sont décrits deux exemples de validation de la méthode adoptée pour l'étude de l'influence de l'hétérogénéité du sol sur l'interaction sol-structure. Nous y traitons le cas d'une inclusion hétérogène déterministe dans un demi-espace sol infini et son influence sur le champ des déplacements émis par une fondation superficielle rigide chargée en son centre de gravité. Ces exemples s'inspirent du cas traité par Antes & von Erstorff [3]. Dans cet article, les auteurs considèrent une inclusion homogène dans le sol et étudient la réponse d'une fondation flexible par une formulation classique couplant éléments finis et équations intégrales, imposant le calcul de l'impédance de frontière du domaine borné occupé par l'inclusion. La formulation mise en oeuvre et testée ici est la formulation duale correspondant au problème (4.30), pour lequel on impose l'égalité au sens fort des champs de déplacement solutions des problèmes locaux dans le domaine composite de référence  $\Omega_0$  et dans le domaine représentant l'hétérogénéité  $\Omega_d$ . Sa version discrétisée est donnée par l'Eq.(4.36), et l'on considère dans toute la perturbation ne remonte pas jusqu'à la surface libre du sol ( $\partial\Omega_d \cap \Gamma_a = \emptyset$  avec les notations du chapitre §4, FIG. 4.2).

On notera que les possibilités de validation de la méthode restent limitées par le nombre très réduit de cas similaires traités dans la littérature. L'exemple étudié par Antes & Von Erstorff correspond en fait à la seule référence bibliographique récente traitant de ces aspects que nous ayons pu trouver. Avant de l'analyser, on propose une première tentative de validation qui consiste à comparer les résultats obtenus par la méthode de sous-structuration sur interface volumique proposée, à ceux obtenus par la méthode de sous-structuration classique par interface surfacique pour laquelle nous disposons du code MISS-3D déjà utilisé et validé dans de nombreux cas : interaction sol-structure, interaction sol-fluide-structure pour l'étude des effets de site, du comportement au séisme de barrages ou bâtiments-

réacteurs, d'une structure interne dans un fluide, des vibrations émises par des sources mobiles, etc. [10, 40, 43, 42, 45, 124].

### 6.3.1 Éléments de validation de la méthode de sous-structuration par volume

Dans ce premier exemple sont comparés les résultats obtenus par une méthode de sous-structuration classique pour laquelle seule la frontière de l'inclusion est discrétisée, et la méthode de sous-structuration par interface "volumique" proposée dans la section §4.2. Le modèle considéré pour cet exemple est représenté sur la FIG. 6.27. La fondation rigide  $2 \times 2 m^2$  est discrétisée en 4 éléments **Quad4**. L'inclusion est un bloc cubique  $2 \times 2 \times 2 m^3$  centré à  $-2 m$  sous la fondation, et constitué d'un matériau homogène. Sa frontière, pour l'application de la méthode de sous-structuration classique, est discrétisée dans un premier temps en 24 éléments **Quad4** (4 par face) (voir FIG. 6.27), et son volume, pour l'application de la méthode de sous-structuration "volumique", est lui discrétisé en 8 éléments **Hexa8**. Ces différents maillages sont volontairement choisis très grossiers afin de se placer dans le cas le plus défavorable *a priori*.

La fonction de Green du sol homogène de référence dans lequel est plongée l'inclusion est calculée analytiquement en prenant la solution fondamentale pour un domaine homogène infini (voir par exemple [40] pour son expression analytique). De même pour la fonction de Green de l'inclusion pour la méthode de sous-structuration classique. Une force verticale concentrée  $\mathbf{f}$  est appliquée au centre de la fondation rigide pour toutes les fréquences de la plage analysée, et l'on observe les champs de déplacements générés aux points  $A$ ,  $B$  et  $C$  enterrés entre la fondation et l'inclusion, aux profondeurs  $z = -0.25 m$ ,  $z = -0.5 m$  et  $z = -0.75 m$  respectivement du point d'application de la force. On prend pour le sol homogène de référence  $c_{p0} = 1000 m/s$ ,  $c_{s0} = 500 m/s$  et  $\rho_0 = 2000 kg/m^3$ , et pour l'inclusion  $c_p = n_c c_{p0}$ ,  $c_s = n_c c_{s0}$  et  $\rho = n_\rho \rho_0$ . Sur la FIG. 6.28 sont représentés les modules du déplacement vertical aux points  $A$ ,  $B$  et  $C$  en fonction de la fréquence calculés sans inclusion et avec inclusion par la méthode de sous-structuration classique ("BEM", calculs effectués avec la version courante de MISS-3D) et par la méthode de sous-structuration par interface "volumique" ("FEM", calculs effectués avec la version enrichie de MISS-3D) lorsque seule la raideur de l'hétérogénéité est prise en compte, soit pour  $n_c = 2$  et  $n_\rho = 1$ . On observe un accord assez satisfaisant des déplacements calculés par les deux approches, compte tenu du niveau de discrétisation choisi.

Afin néanmoins d'examiner la convergence de la méthode, on reprend les calculs décrits précédemment en doublant le nombre d'éléments par arête pour l'inclusion. Celle-ci est donc maintenant discrétisée en 96 éléments **Quad4** pour sa frontière, et 64 éléments **Hexa8** pour son volume (voir la FIG. 6.29). On reproduit sur la FIG. 6.30 les modules des déplacements verticaux observés aux mêmes points  $A$ ,  $B$  et  $C$  pour ce nouveau maillage. L'accord entre les deux méthodes de calcul ("FEM" et "BEM") est ici tout à fait satisfaisant, et permet de conclure *a priori* sur la convergence de la méthode de sous-structuration volumique introduite.

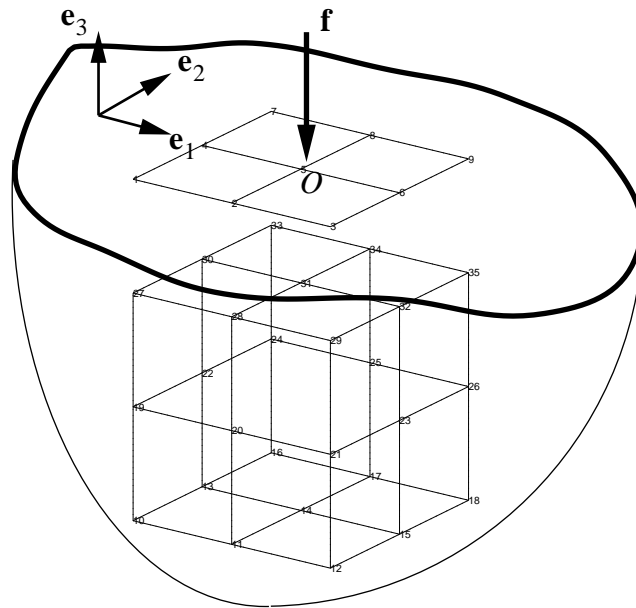


FIG. 6.27 – Exemple de validation : fondation rigide ( $2 \times 2 \text{ m}^2$ ) et inclusion ( $2 \times 2 \times 2 \text{ m}^3$ ) centrée à une profondeur de  $2 \text{ m}$ . Maillage grossier.  $f = 225 \text{ kN/m}^2$ ,  $OA = -0.25 \text{ m}$ ,  $OB = -0.5 \text{ m}$  et  $OC = -0.75 \text{ m}$ .

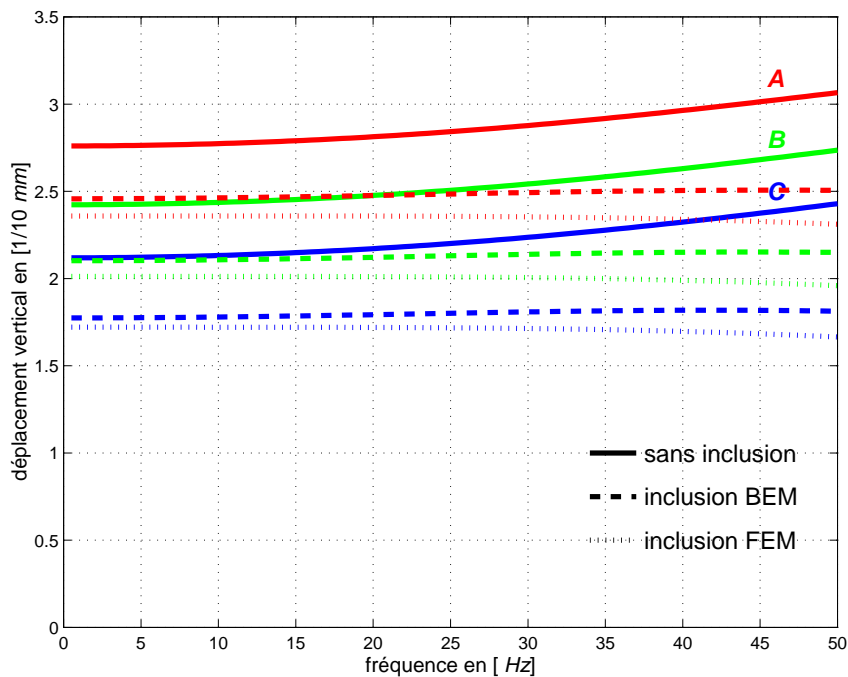


FIG. 6.28 – Modules du déplacement vertical aux points  $A$ ,  $B$  et  $C$  calculés sans inclusion, avec inclusion par sous-structuration classique, et avec inclusion par sous-structuration volumique;  $n_c = 2$  et  $n_\rho = 1$ . Maillage grossier.



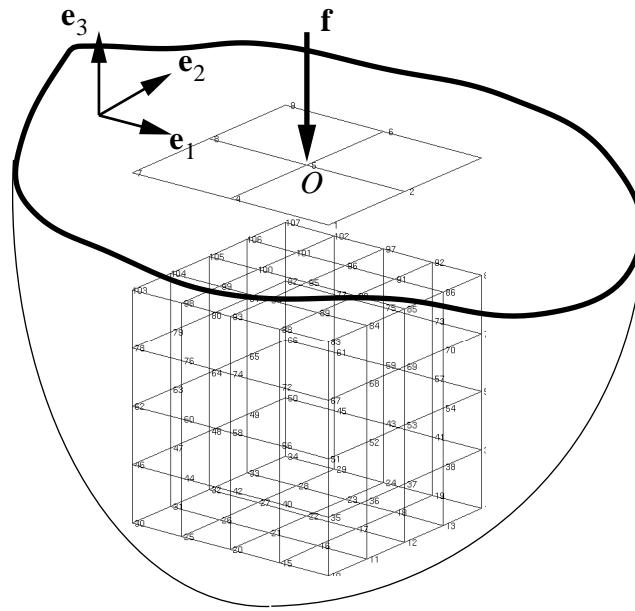


FIG. 6.29 – Exemple de validation : fondation rigide ( $2 \times 2 \text{ m}^2$ ) et inclusion ( $2 \times 2 \times 2 \text{ m}^3$ ) centrée à une profondeur de  $2 \text{ m}$ . Maillage affiné.  $f = 225 \text{ kN/m}^2$ ,  $OA = -0.25 \text{ m}$ ,  $OB = -0.5 \text{ m}$  et  $OC = -0.75 \text{ m}$ .

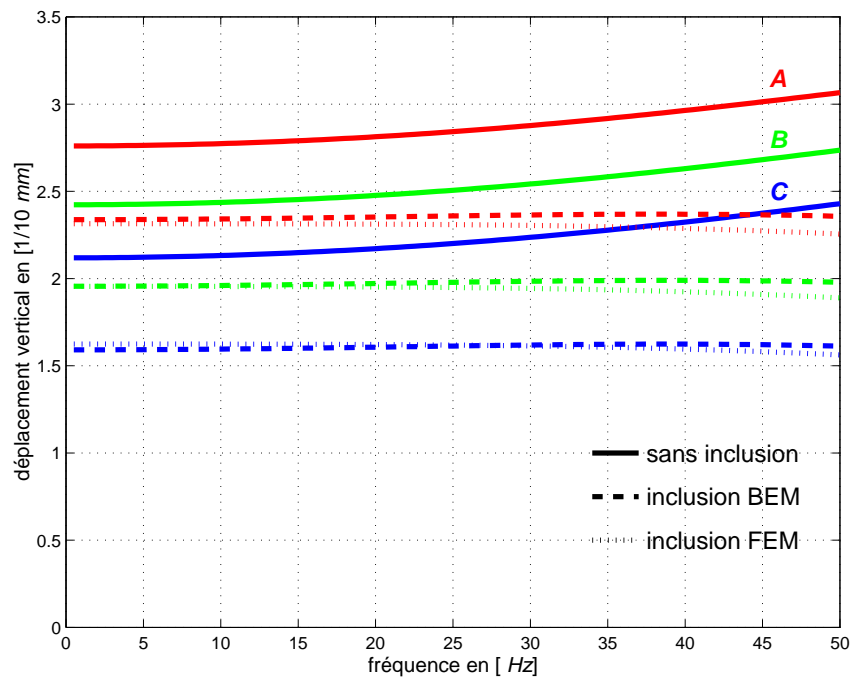


FIG. 6.30 – Modules du déplacement vertical aux points  $A$ ,  $B$  et  $C$  calculés sans inclusion, avec inclusion par sous-structuration classique, et avec inclusion par sous-structuration volumique;  $n_c = 2$  et  $n_\rho = 1$ . Maillage affiné.

### 6.3.2 Comparaison avec les résultats tirés de la littérature

#### Description du modèle

La géométrie traitée dans cet exemple est décrite sur la FIG. 6.31. L'interface sol-fondation est discrétisée en 16 éléments `Quad4` (48 ddl), et la zone hétérogène en 300 éléments `Hexa8` (900 ddl). On suppose que l'hétérogénéité n'introduit de perturbation que

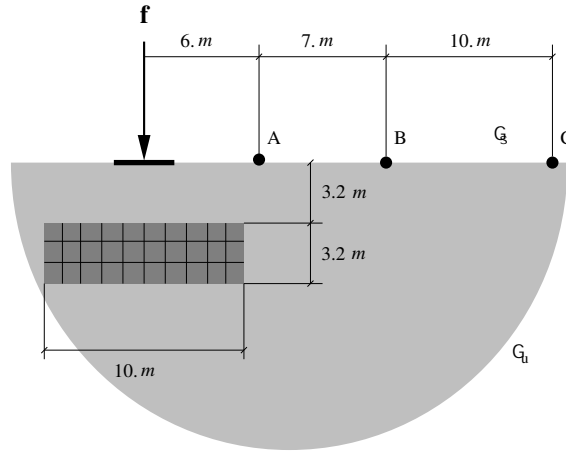


FIG. 6.31 – Exemple de validation 2 : fondation rigide ( $3 \times 3 \text{ m}^2$ ) et inclusion ( $10 \times 10 \times 3.2 \text{ m}^3$ ) centrée à une profondeur de  $4.8 \text{ m}$ .  $f = 100 \text{ kN/m}^2$ ,  $OA = 6.0 \text{ m}$ ,  $OB = 13.0 \text{ m}$  et  $OC = 23.0 \text{ m}$ .

pour la raideur du demi-espace sol. Cette perturbation est identifiée par le paramètre  $n$  tel que :

$$\begin{aligned} c_\alpha(\mathbf{x}) &= n c_{\alpha 0}(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \Omega_d \\ c_\alpha(\mathbf{x}) &= c_{\alpha 0}(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \Omega/\Omega_d \end{aligned}$$

où  $\alpha = p$  ou  $s$ . Le demi-espace sol de référence est considéré comme homogène, néanmoins la méthode proposée s'applique tout aussi bien au cas d'une stratification horizontale hétérogène quelconque. Sa fonction de Green est calculée numériquement par la méthode des coefficients de réflexion-transmission de Kennett, et vérifie donc la condition de surface libre à la frontière du demi-espace. Dans cet exemple, on prend  $c_{p0} = 340.6 \text{ m/s}$ ,  $c_{s0} = 171.6 \text{ m/s}$  et  $\rho_0 = 1800 \text{ kg/m}^3$ . Une force verticale concentrée  $\mathbf{f}$  est appliquée au centre de la fondation rigide pour toutes les fréquences de la plage analysée, et l'on observe les champs de déplacements générés aux points  $A$ ,  $B$  et  $C$  alignés à la surface du demi-espace. On rappelle que si  $r$  désigne la distance parcourue dans la direction radiale au point d'application de la force, les ondes de volume ont une décroissance en  $\frac{1}{r}$  et les ondes de surface une décroissance en  $\frac{1}{\sqrt{r}}$ . Dans le cas statique, la décroissance est en  $\frac{1}{r^2}$ . Ces points nous permettent donc de juger qualitativement et quantitativement du bon comportement du modèle numérique.

#### Résultats

Dans le cas traité par Antes & von Erstorff [3], la fondation est supposée flexible (module de cisaillement  $\mu = 3.392 \text{ MPa}$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0$  et poids total  $m = 4500 \text{ kg}$ ) et le volume occupé par la zone hétérogène est également ( $10 \times 10 \times 3.2 \text{ m}^3$ ). Néanmoins les

résultats présentés dans [3] concernant les modules des déplacements verticaux aux points  $B$  et  $C$  ne semblent pas cohérents avec les tendances auxquelles on pourrait s'attendre. En effet les graphes présentés (voir FIG. 6.32 et FIG. 6.33) donnent :

$$\frac{|u(C)|}{|u(B)|} \approx 0.1$$

alors que :

$$\frac{r_B^2}{r_C^2} \approx 0.25, \quad \frac{r_B}{r_C} \approx 0.5 \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{r_B}{r_C}} \approx 0.7$$

Les résultats obtenus pour les modules des déplacements verticaux et horizontaux (suivant la direction de  $\vec{OA}$ ) aux points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont rassemblés dans les FIG. 6.34 à FIG. 6.39. On peut observer que ces déplacements pour  $n > 1$  sont inférieurs au cas sans hétérogénéité ( $n = 1$ ), le sol étant globalement rigidifié par l'inclusion. Les comparaisons de ces déplacements en terme de propagation sont conformes aux observations attendues : ondes de type volumique dans un premier temps (soit  $r_B/r_A \times |u(B)/u(A)| \approx 1$ ) puis ondes de type surfacique lorsqu'on s'éloigne de la fondation (soit  $\sqrt{r_C/r_B} \times |u(C)/u(B)| \approx 0.8$ ). Les résultats obtenus pour les phases des déplacements verticaux et horizontaux aux points  $A$ ,  $B$  et  $C$  (entre  $-\pi$  et  $\pi$ ) sont rassemblés dans les FIG. 6.40 à FIG. 6.45. En l'absence de zone hétérogène ( $n = 1$ ), la phase est linéaire par rapport à la fréquence ce qui traduit une propagation à vitesses constantes en fonction de la fréquence. Pour  $n > 1$  un déphasage non linéaire par rapport à la fréquence est introduit, qui traduit une augmentation des vitesses de propagation en fonction de la fréquence et pour des  $n$  croissants.

## 6.4 Application à une hétérogénéité aléatoire

On s'intéresse maintenant aux cas où l'hétérogénéité du sol au voisinage de la fondation est de nature aléatoire. On reprend donc ici le problème de transmission réduit de la définition (3.52) avec les outils introduits aux chapitres §4 et §5. Dans un premier temps, on tâchera d'analyser le comportement de certains des modèles d'aléa du sol introduits à la section §1.4 du chapitre §1 sur la base de l'exemple tiré de Antes & Von Erstorff [3] et traité précédemment, en l'étendant au cas d'une inclusion de paramètres mécaniques aléatoires. On testera notamment la stabilité et la convergence de la méthode de simulation de Monte-Carlo, ainsi que la validité du développement de Neumann introduit en §3.2.3. Puis on présentera un exemple traitant du même bâtiment-réacteur que celui introduit en §6.2.2 mais analysant cette fois-ci l'influence d'une inclusion hétérogène aléatoire dans le sol sur son comportement vibratoire.

Dans toute cette section les estimateurs utilisés pour la moyenne et la variance calculée par une simulation de Monte-Carlo sont respectivement ceux des Eq.(3.75) et (3.77). La méthode de réduction de variance mise en oeuvre, s'il y a lieu, est la méthode du "Latin Hypercube Sampling".

### 6.4.1 Exemple basses fréquences d'après Antes & Von Erstorff 1994

On reprend ici l'exemple traité par Antes & Von Erstorff [3], déjà décrit à la section §6.3.2 et par la FIG. 6.31. Compte tenu des remarques de la section §1.4, le coefficient de

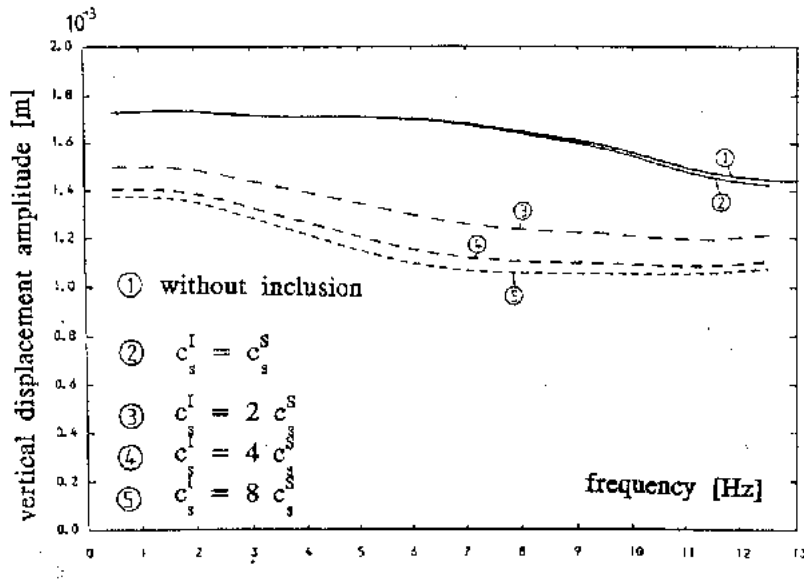


FIG. 6.32 – Module du déplacement vertical au point *B* d'après [3].

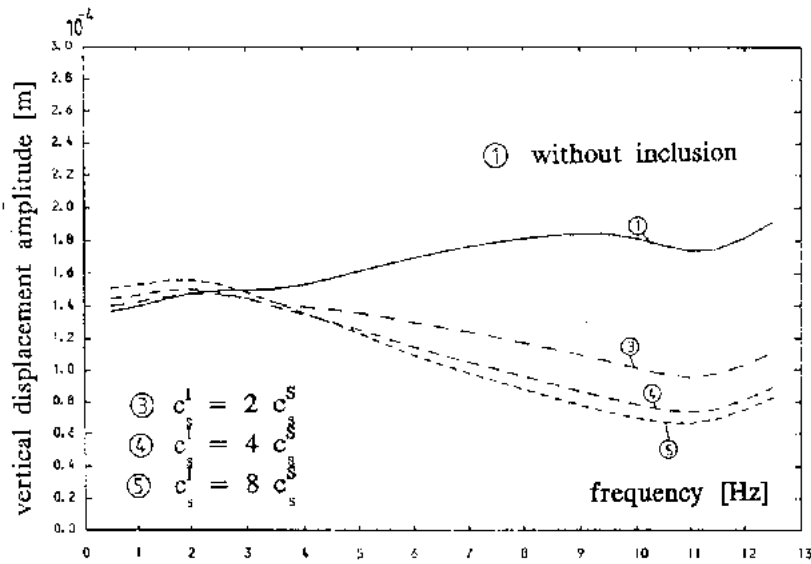
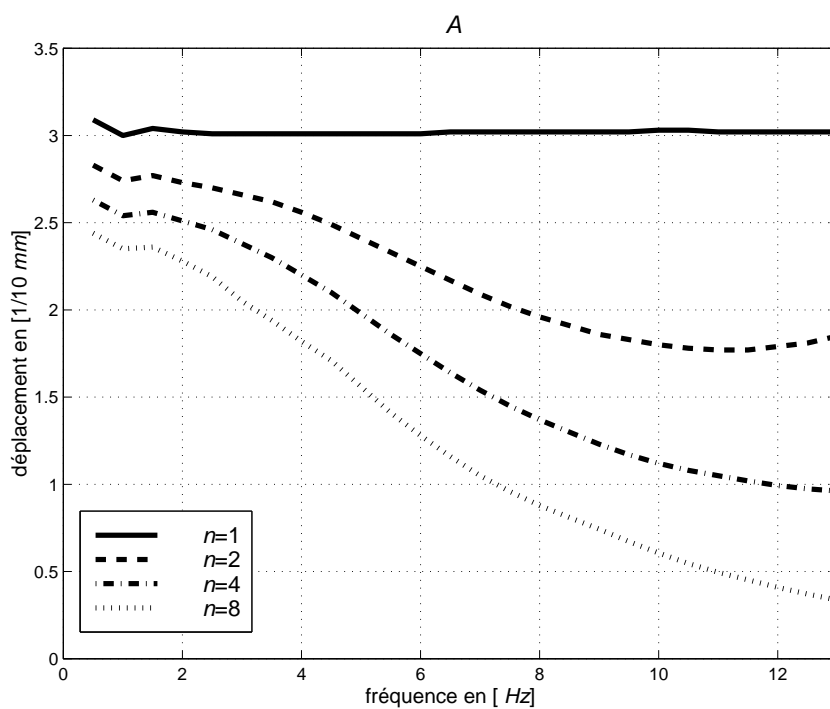
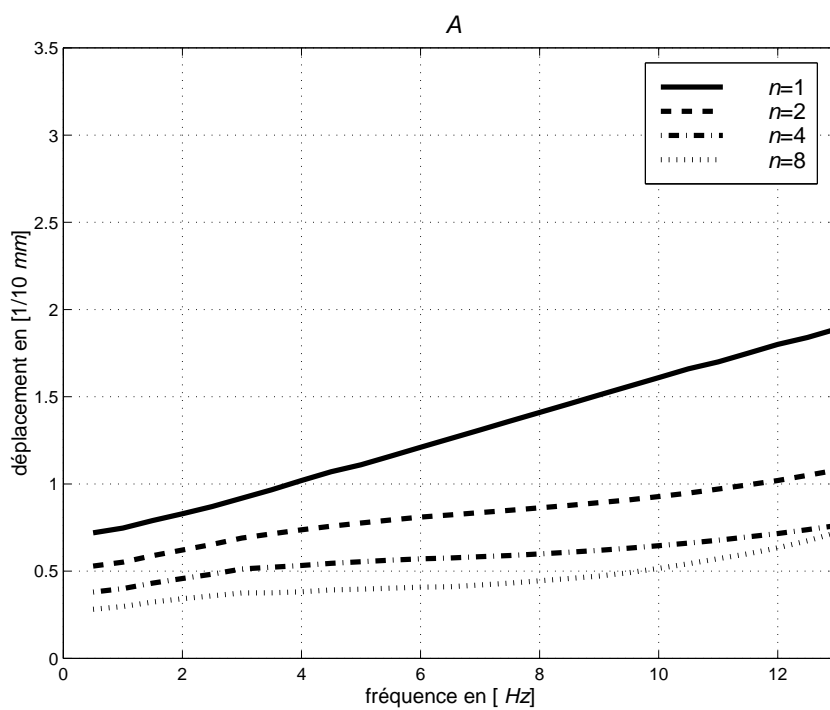
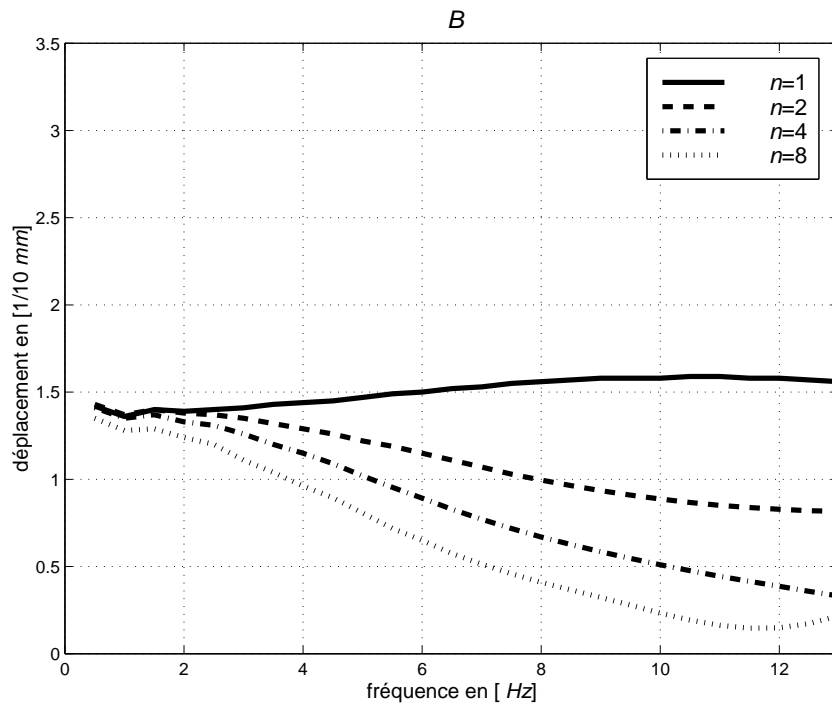
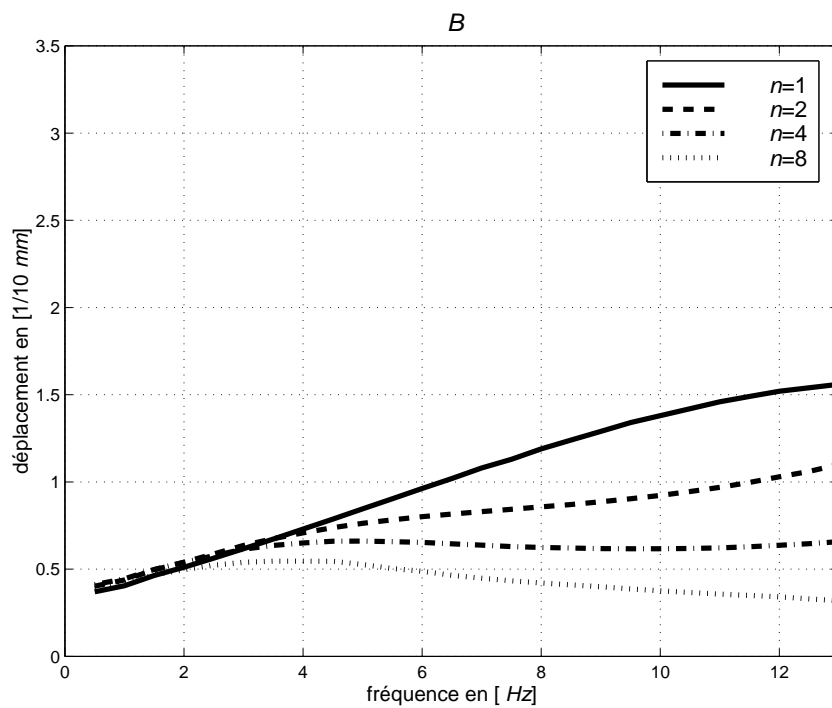


FIG. 6.33 – Module du déplacement vertical au point *C* d'après [3].

FIG. 6.34 – Module du déplacement vertical au point  $A$  pour  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 4$  et  $n = 8$ .FIG. 6.35 – Module du déplacement horizontal au point  $A$  pour  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 4$  et  $n = 8$ .

FIG. 6.36 – Module du déplacement vertical au point *B* pour  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 4$  et  $n = 8$ .FIG. 6.37 – Module du déplacement horizontal au point *B* pour  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 4$  et  $n = 8$ .

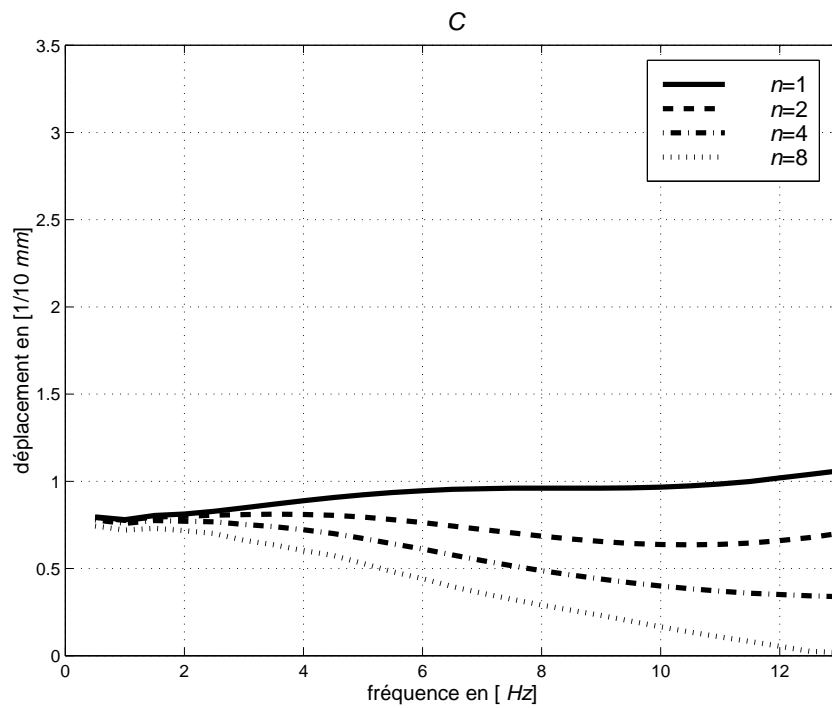


FIG. 6.38 – Module du déplacement vertical au point  $C$  pour  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 4$  et  $n = 8$ .

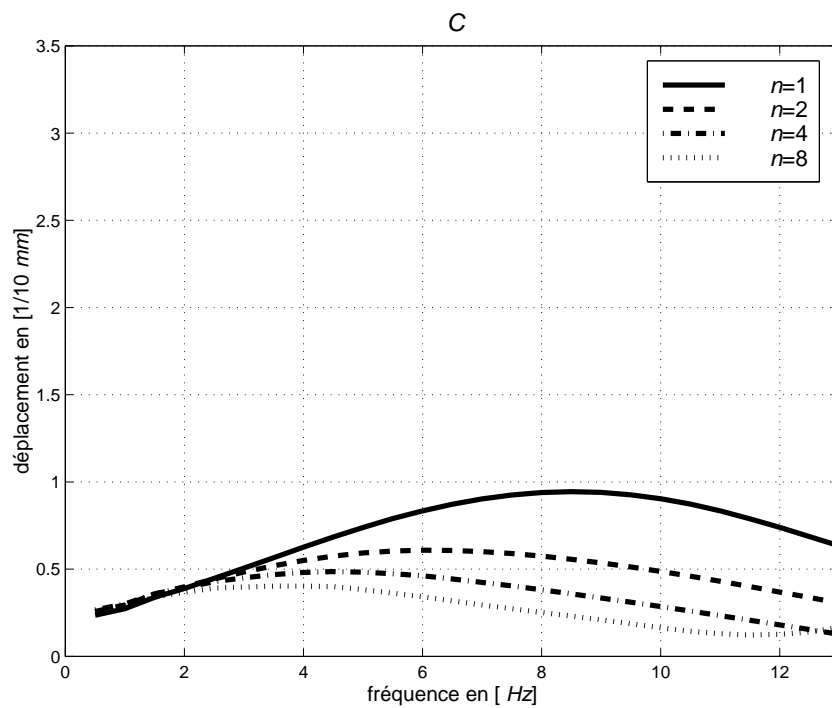
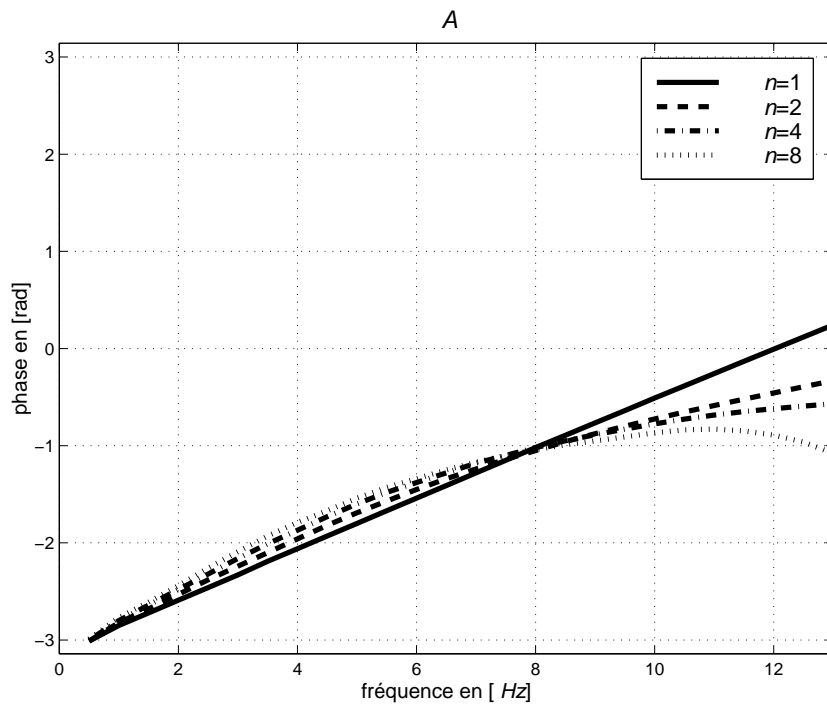
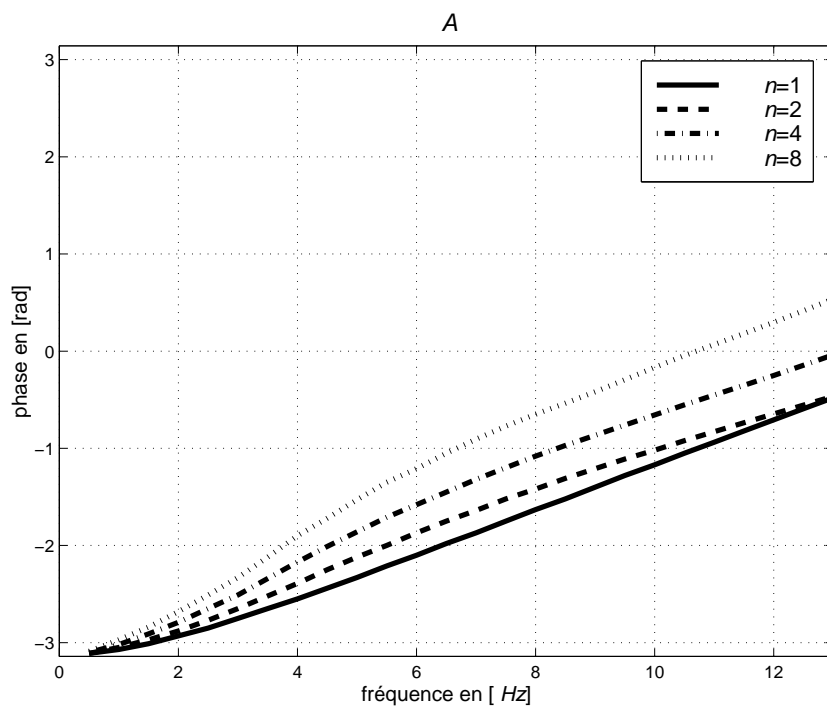
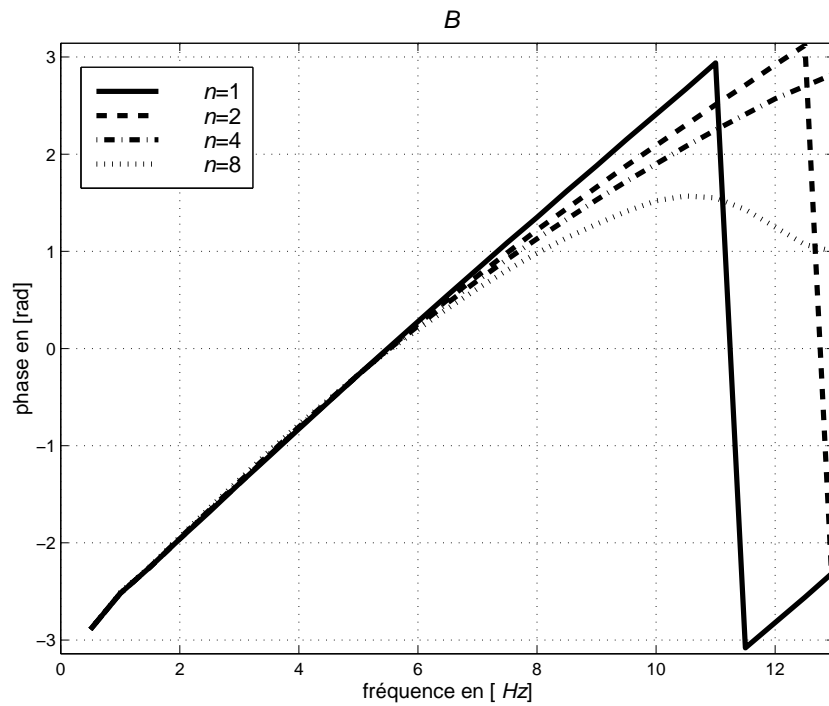
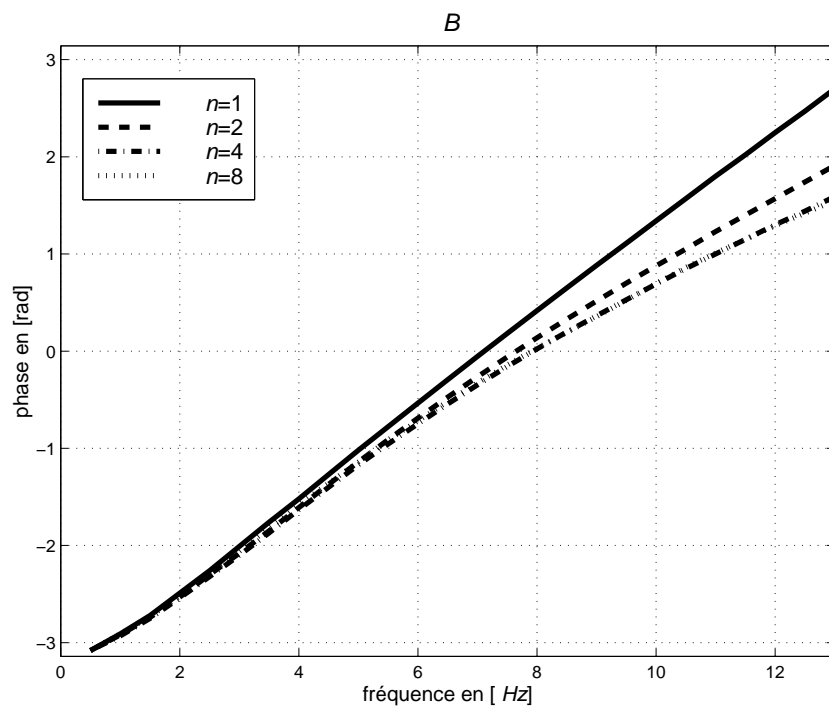
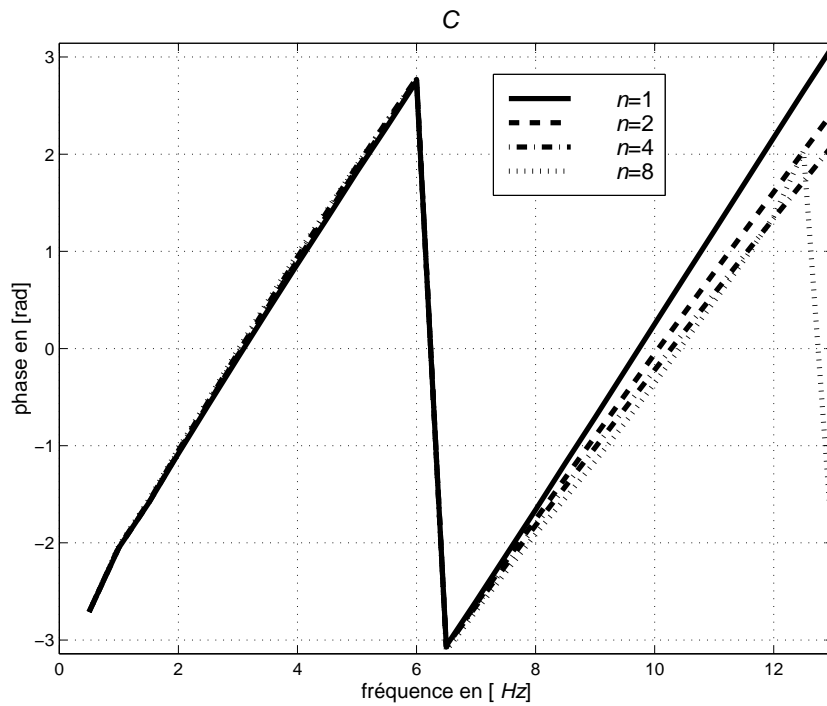
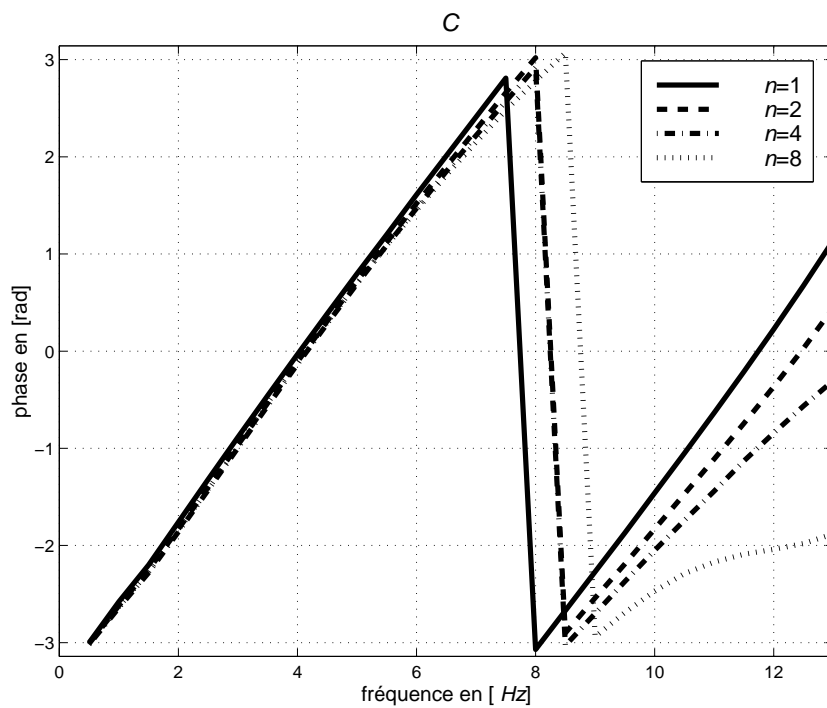


FIG. 6.39 – Module du déplacement horizontal au point  $C$  pour  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 4$  et  $n = 8$ .

FIG. 6.40 – Phase du déplacement vertical au point  $A$  pour  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 4$  et  $n = 8$ .FIG. 6.41 – Phase du déplacement horizontal au point  $A$  pour  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 4$  et  $n = 8$ .



FIG. 6.42 – Phase du déplacement vertical au point  $B$  pour  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 4$  et  $n = 8$ .FIG. 6.43 – Phase du déplacement horizontal au point  $B$  pour  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 4$  et  $n = 8$ .

FIG. 6.44 – Phase du déplacement vertical au point  $C$  pour  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 4$  et  $n = 8$ .FIG. 6.45 – Phase du déplacement horizontal au point  $C$  pour  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 4$  et  $n = 8$ .

corrélation des modules perturbés du sol est choisi sous la forme d'une exponentielle réelle :

$$r_{\mathbf{P}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \ell) = e^{-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|}{\ell}} \quad (6.14)$$

La fonction d'auto-corrélation matricielle des modules du sol a pour éléments :

$$[\mathbf{R}_{\mathbf{P}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')]_{ij} = \sigma_i \sigma_j r_{\mathbf{P}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \ell_{ij}) \quad (6.15)$$

où  $\sigma_i$  est l'écart-type du module  $i$  supposé constant dans la zone hétérogène. Les longueurs de corrélation  $\ell_{ij}$  sont toutes égales et fixées à  $\ell = 5.0 m$  pour cet exemple. Un seul cas est étudié : la raideur (modules de Lamé) de la zone hétérogène varie, et on compare les résultats obtenus par une analyse type Monte-Carlo et par un développement de Neumann du type de l'Eq.(3.62) au premier ordre  $K = 1$  ou au deuxième ordre  $K = 2$ . La précision relative obtenue pour le développement de Karhunen-Loeve avec  $N = 5$  modes est de 26 %. Elle est indépendante du choix des  $\sigma_i$ , qui sont fixés à 95 % dans toute la suite de cet exemple.

Dans la FIG. 6.46 et la FIG. 6.47, le nombre de tirages pour l'analyse de Monte-Carlo est fixé à 100. On reporte sur les graphes les moyennes obtenues par Monte-Carlo et par un développement de Neumann à l'ordre 1 et 2, ainsi que les courbes  $|\text{moyenne}| \pm |\text{écart-type}|$  obtenues par Monte-Carlo, pour les déplacements vertical et horizontal (direction radiale suivant  $\overrightarrow{OA}$ ) du point d'observation  $A$  indiqué sur la FIG. 6.31. Compte tenu des valeurs des écarts-types des perturbations (pour lesquels la condition de l'Eq.(3.60) est vérifiée) et des ordres d'approximation retenus pour le développement de Neumann, on peut estimer que les résultats obtenus pour cet exemple sont globalement satisfaisants. La qualité du développement de Neumann augmente assez sensiblement avec son ordre, comme cela apparaît sur la FIG. 6.46 même si l'ordre n'y est pas encore assez élevé. Dans la FIG. 6.48 et la FIG. 6.49 sont tracées les phases des déplacements vertical et horizontal au point  $A$  pour deux simulations de Monte-Carlo de respectivement 100 et 200 tirages et pour un développement de Neumann à l'ordre 1 et 2. L'influence de la variabilité de la raideur est très peu sensible sur la phase. Cette remarque reste valable pour les phases aux points  $B$  et  $C$ , non représentées ici.

La convergence de la simulation est analysée sur les FIG. 6.50 et FIG. 6.51 pour les modules des déplacements vertical et horizontal du point  $A$ . Les résultats de deux simulations de Monte-Carlo indépendantes de 100 et 200 tirages respectivement sont reportés. La bonne concordance d'ensemble des graphes permet de conclure à la convergence de l'analyse stochastique par un développement de Karhunen-Loeve. Enfin la stabilité de la simulation est analysée sur les FIG. 6.52 et FIG. 6.53 pour les modules des déplacements vertical et horizontal du point  $A$ . Les résultats de deux simulations de Monte-Carlo indépendantes de 100 tirages chacune sont reportés. Encore une fois, la bonne concordance d'ensemble des graphes permet de conclure à la relative stabilité de l'analyse stochastique par un développement de Karhunen-Loeve. Néanmoins une analyse plus fine avec un plus grand nombre de tirages et l'application des techniques de réduction de variance présentées en Annexe B devrait permettre d'obtenir des résultats plus significatifs.

## 6.4.2 Réponse aux moyennes fréquences

Afin de pouvoir observer les déplacements à plus hautes fréquences, on examine ici le cas d'une inclusion plus petite occupant cette fois-ci un volume ( $2 \times 2 \times 2 m^3$ ).

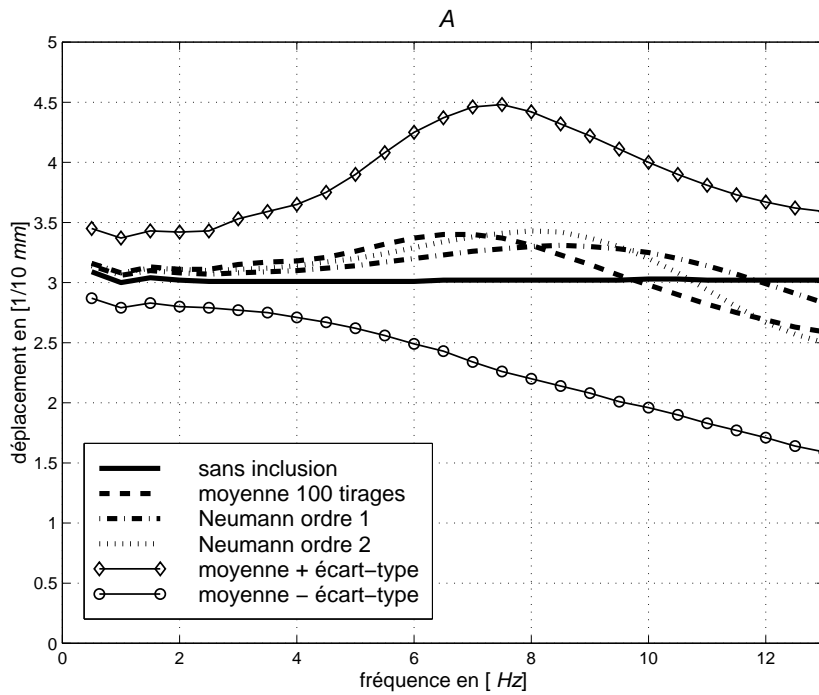


FIG. 6.46 – Variabilité de la raideur, module du déplacement vertical au point *A*. Comparaison Monte-Carlo (100 tirages) et Neumann (ordre 1 et 2).

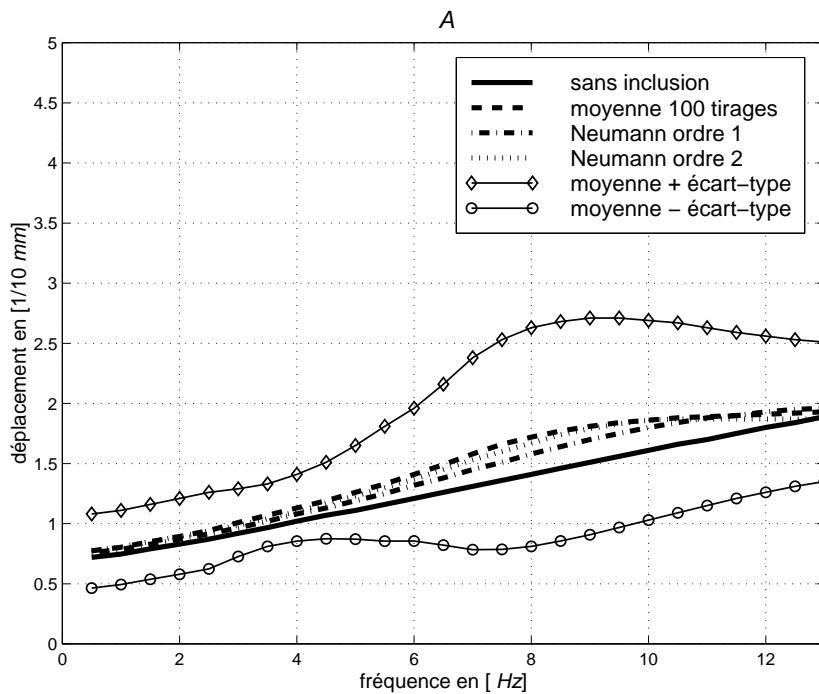


FIG. 6.47 – Variabilité de la raideur, module du déplacement horizontal au point *A*. Comparaison Monte-Carlo (100 tirages) et Neumann (ordre 1 et 2).

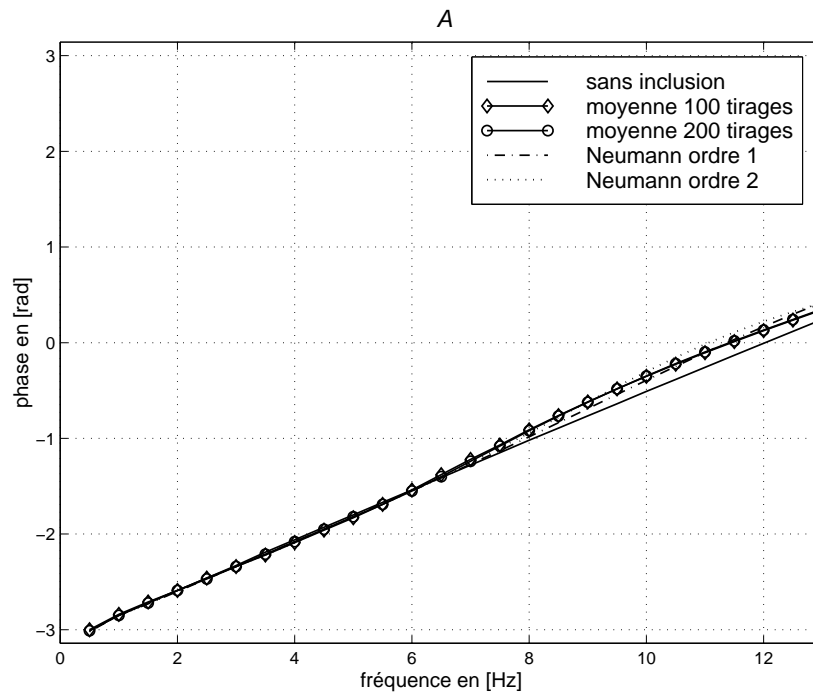


FIG. 6.48 – Variabilité de la raideur, phase du déplacement vertical au point  $A$ . Comparaison Monte-Carlo (100 et 200 tirages) et Neumann (ordre 1 et 2).

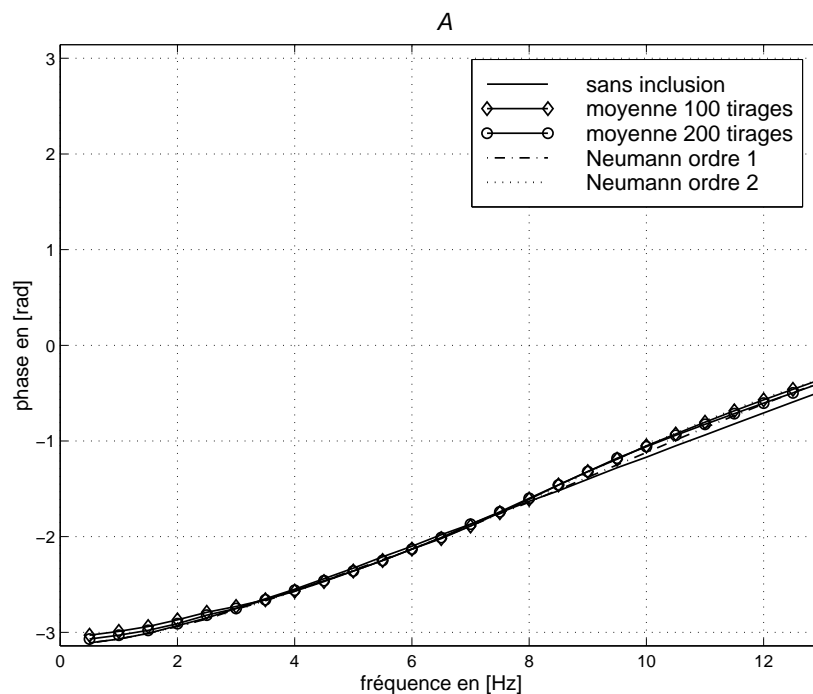


FIG. 6.49 – Variabilité de la raideur, phase du déplacement horizontal au point  $A$ . Comparaison Monte-Carlo (100 et 200 tirages) et Neumann (ordre 1 et 2).

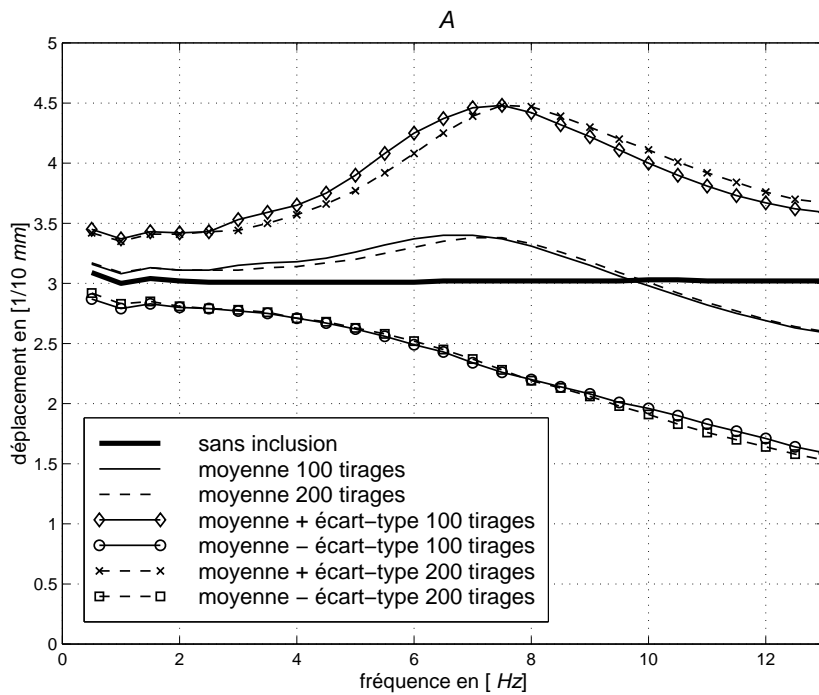


FIG. 6.50 – Variabilité de la raideur, module du déplacement vertical au point *A*. Comparaison Monte-Carlo pour 100 et 200 tirages.

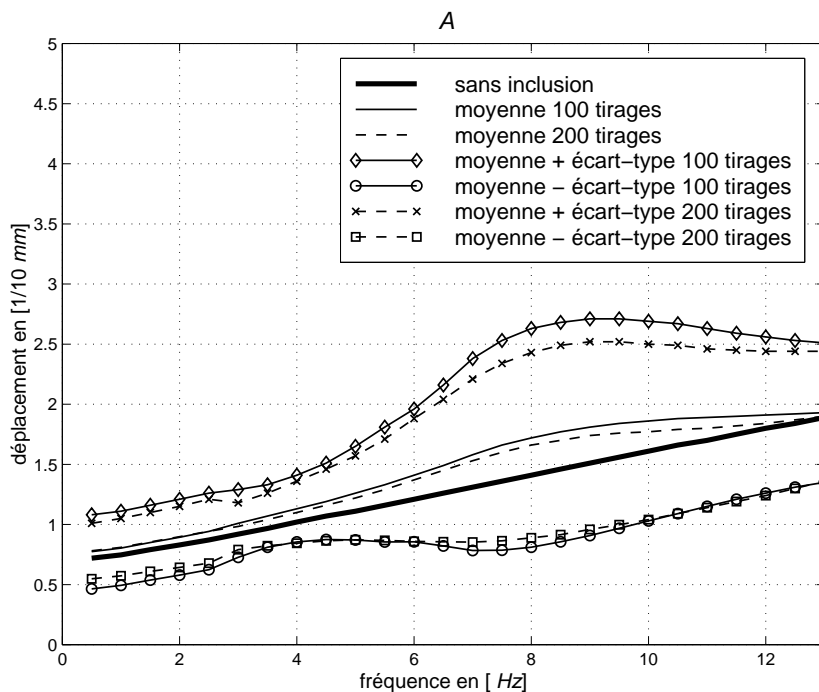


FIG. 6.51 – Variabilité de la raideur, module du déplacement horizontal au point *A*. Comparaison Monte-Carlo pour 100 et 200 tirages.

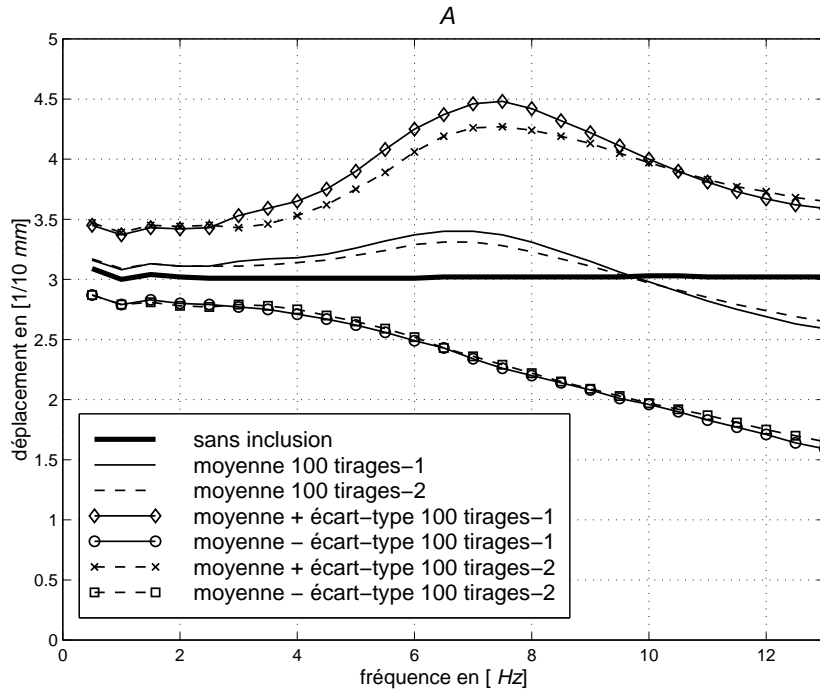


FIG. 6.52 – Variabilité de la raideur, module du déplacement vertical au point *A*. Comparaison Monte-Carlo pour deux simulations de 100 tirages.

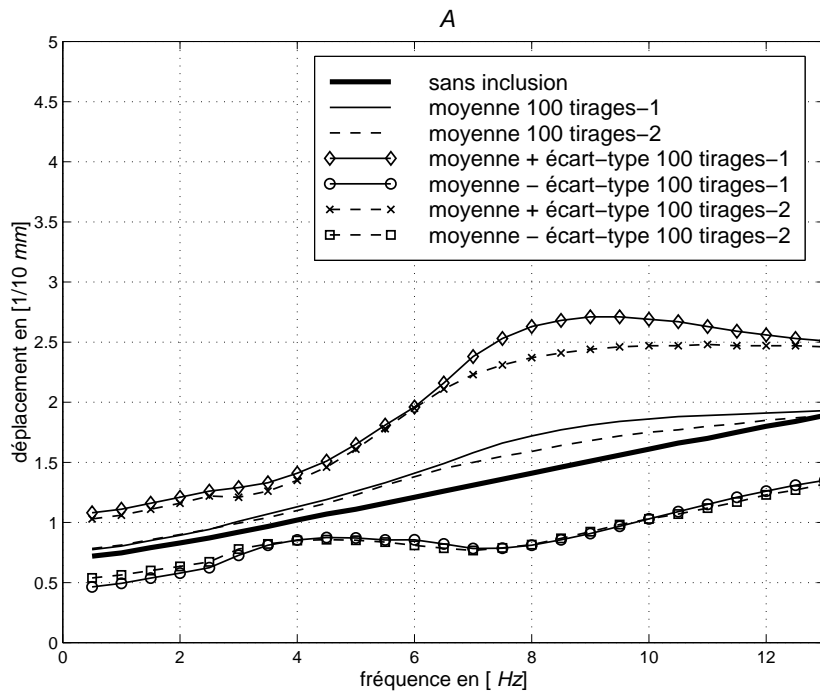


FIG. 6.53 – Variabilité de la raideur, module du déplacement horizontal au point *A*. Comparaison Monte-Carlo pour deux simulations de 100 tirages.

### Description du modèle

L'interface sol-fondation est discrétisée en 16 éléments **Quad4** (48 ddls), et la zone hétérogène en 125 éléments **Hexa8** (475 ddls). Le reste du modèle est strictement identique à l'exemple précédent (voir FIG. 6.54) pour sa partie déterministe. Le coefficient de corrél-

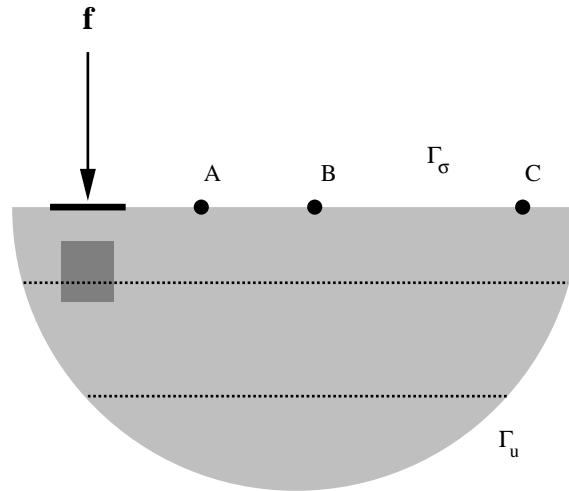


FIG. 6.54 – Exemple de validation : fondation rigide ( $3 \times 3 \text{ m}^2$ ) et inclusion ( $2 \times 2 \times 2 \text{ m}^3$ ) centrée à une profondeur de  $2.0 \text{ m}$ .  $f = 100 \text{ kN/m}^2$ ,  $OA = 6.0 \text{ m}$ ,  $OB = 13.0 \text{ m}$  et  $OC = 23.0 \text{ m}$ .

lation des modules perturbés du sol est, comme pour l'exemple précédent, choisi sous la forme d'une exponentielle réelle. La fonction d'auto-corrélation matricielle a donc la même structure. Les longueurs de corrélation  $\ell_{ij}$  sont toutes égales et fixées à  $\ell = 2.0 \text{ m}$  pour cet exemple. Deux cas sont étudiés : l'un où seule la raideur (modules de Lamé) de la zone hétérogène varie, l'autre où seule la densité de cette même zone varie. Dans les deux cas, on compare les résultats obtenus par une analyse type Monte-Carlo et par un développement de Neumann du type de l'Eq.(3.62) au premier ordre  $K = 1$ . La précision relative obtenue dans les deux cas pour le développement de Karhunen-Loeve avec  $N = 4$  modes est de 18 %, et avec  $N = 10$  modes de 10 %. Elle est encore une fois indépendante du choix des  $\sigma_i$ .

### Variabilité de la raideur

Dans la FIG. 6.55 à la FIG. 6.60, les écarts-types pour les perturbations des deux modules de Lamé dans la zone hétérogène  $\Omega_d$  sont fixés à  $\sigma_1 = \sigma_2 = 95 \%$ . Le nombre de tirages pour l'analyse de Monte-Carlo est fixé à 100, et le nombre de modes de Karhunen-Loeve à  $N = 4$  (pour lesquels la précision relative obtenue est de 18 %). On reporte sur les graphes les moyennes obtenues par Monte-Carlo et par un développement de Neumann, ainsi que les courbes  $|\text{moyenne}| \pm |\text{écart-type}|$  obtenues par Monte-Carlo, pour les trois points d'observation indiqués FIG. 6.54. Compte tenu des valeurs des écarts-types des perturbations (pour lesquels la condition de l'Eq.(3.60) est vérifiée) et de l'ordre d'approximation retenu pour le développement de Neumann, on peut estimer que les résultats obtenus pour cet exemple sont tout à fait satisfaisants.

Dans la FIG. 6.61 et la FIG. 6.62 sont tracés les modules des déplacements vertical et horizontal (direction radiale) au point A pour deux simulations de Monte-Carlo de respecti-



vement 100 et 200 tirages avec toujours  $N = 4$  pour le nombre de modes de Karhunen-Loeve. Les écarts-types des perturbations des modules sont inchangés. Les moyennes ainsi que les courbes  $|\text{moyenne}| \pm |\text{écart-type}|$  sont reportées. Ces résultats permettent de conclure à la bonne convergence de la méthode de Monte-Carlo pour 100 tirages.

Enfin la stabilité de la simulation est analysée sur les FIG. 6.63 et FIG. 6.64 pour les modules des déplacements vertical et horizontal du point  $A$ . Les résultats de deux simulations de Monte-Carlo indépendantes de 100 tirages chacune avec  $N = 4$  sont reportés. Les écarts-types des perturbations des modules sont inchangés. Encore une fois, la bonne concordance d'ensemble des graphes permet de conclure à la relative stabilité de l'analyse stochastique par un développement de Karhunen-Loeve. Toutefois les résultats obtenus pour ces deux simulations sont paradoxalement un peu moins bons que ceux obtenus pour 100 et 200 tirages. On peut l'interpréter par la moindre qualité de la deuxième simulation de 100 tirages qui semble avoir moins bien convergé que la première. Malheureusement il n'existe aucun critère d'arrêt général pour évaluer et borner l'erreur commise par une analyse du type Monte-Carlo, voir les commentaires relatifs au théorème de la limite centrale dans la section §3.3.6.

### Variabilité de la masse

Dans la FIG. 6.65 et la FIG. 6.66, l'écart-type pour la perturbation de la densité dans la zone hétérogène  $\Omega_d$  est fixé à  $\sigma_3 = 95\%$ . Le nombre de tirages pour l'analyse de Monte-Carlo est fixé à 100, et le nombre de modes de Karhunen-Loeve à  $N = 10$  (pour lesquels la précision relative obtenue est de 10%). On reporte sur les graphes les moyennes obtenues par Monte-Carlo et par un développement de Neumann au premier ordre, ainsi que les courbes  $|\text{moyenne}| \pm |\text{écart-type}|$  obtenues par Monte-Carlo, pour les modules des déplacements au point  $A$ . Compte tenu des valeurs des écarts-types des perturbations (pour lesquels la condition de l'Eq.(3.60) est vérifiée) et de l'ordre d'approximation retenu pour le développement de Neumann, on peut estimer que les résultats obtenus pour cet exemple sont, comme pour la variabilité de la raideur, tout à fait satisfaisants. L'écart entre les deux approches tend par ailleurs à augmenter avec la fréquence.

La stabilité de la simulation est analysée sur les FIG. 6.67 et FIG. 6.68 pour les modules des déplacements vertical et horizontal du point  $A$ . Les résultats de deux simulations de Monte-Carlo indépendantes de 100 tirages chacune avec  $N = 10$  sont reportés. L'écart-type de la perturbation de la densité est inchangé. Les résultats obtenus pour ces deux simulations sont nettement moins bons que ceux obtenus pour la variabilité de la raideur. Il semble qu'une analyse plus fine soit nécessaire lorsque l'on veut faire varier la masse : tester la méthode avec un plus grand nombre de tirages, ou adopter l'une des stratégies de réduction de variance présentées en Annexe B. Néanmoins on peut noter ici que les essais *in situ* montrent que dans la majorité des cas la densité du sol varie assez peu verticalement ou latéralement ; sa variabilité est donc négligeable par rapport à celle des modules de Lamé.

### 6.4.3 Réponse d'un bâtiment-réacteur

Les résultats relatifs à cet exemple sont eux tirés de Savin *et al.* [183].

On examine ici l'influence de la variabilité des modules du sol sur le comportement vibratoire du bâtiment-réacteur déjà décrit en §6.2.2. Les données déterministes pour la structure et le sol moyen de référence (voir le TAB. 6.3) sont inchangées. Un schéma général

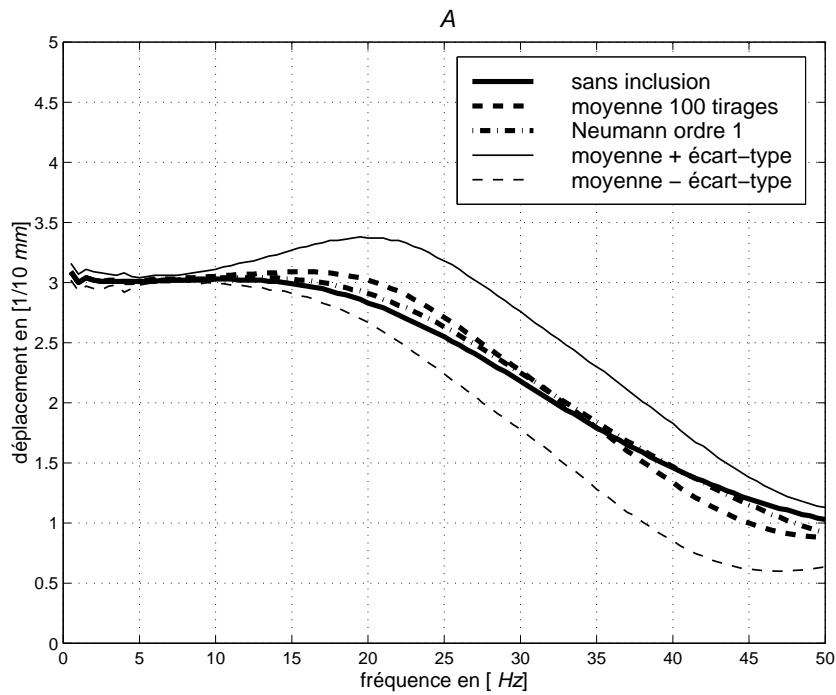


FIG. 6.55 – Variabilité de la raideur, module du déplacement vertical au point *A*. Comparaison Monte-Carlo (100 tirages) et Neumann ordre 1.

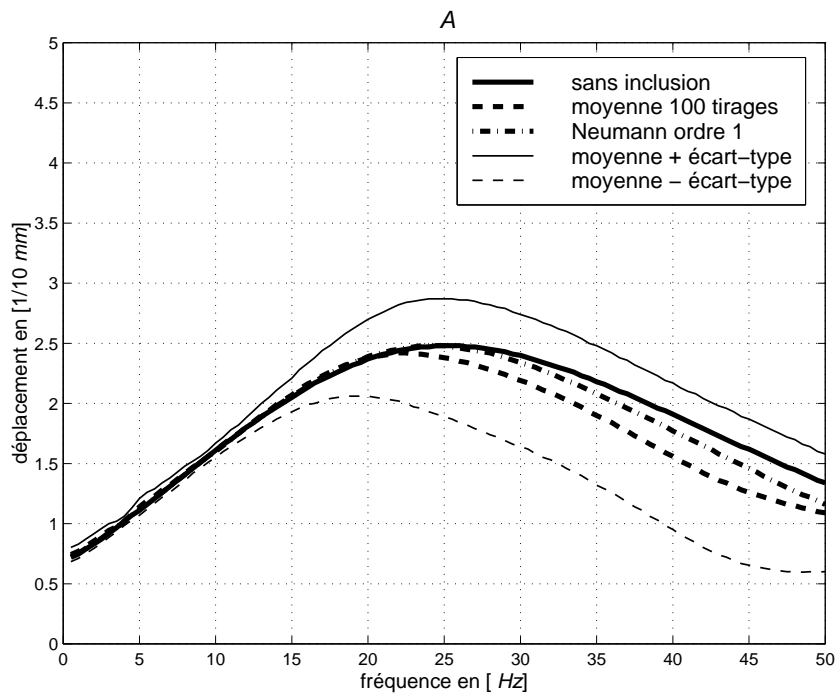


FIG. 6.56 – Variabilité de la raideur, module du déplacement horizontal au point *A*. Comparaison Monte-Carlo (100 tirages) et Neumann ordre 1.

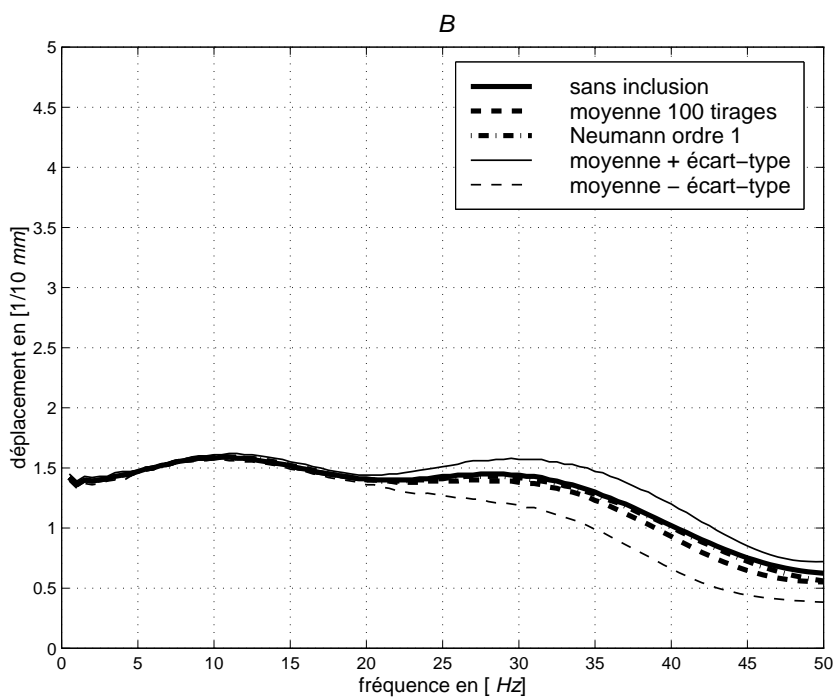


FIG. 6.57 – Variabilité de la raideur, module du déplacement vertical au point *B*. Comparaison Monte-Carlo (100 tirages) et Neumann ordre 1.

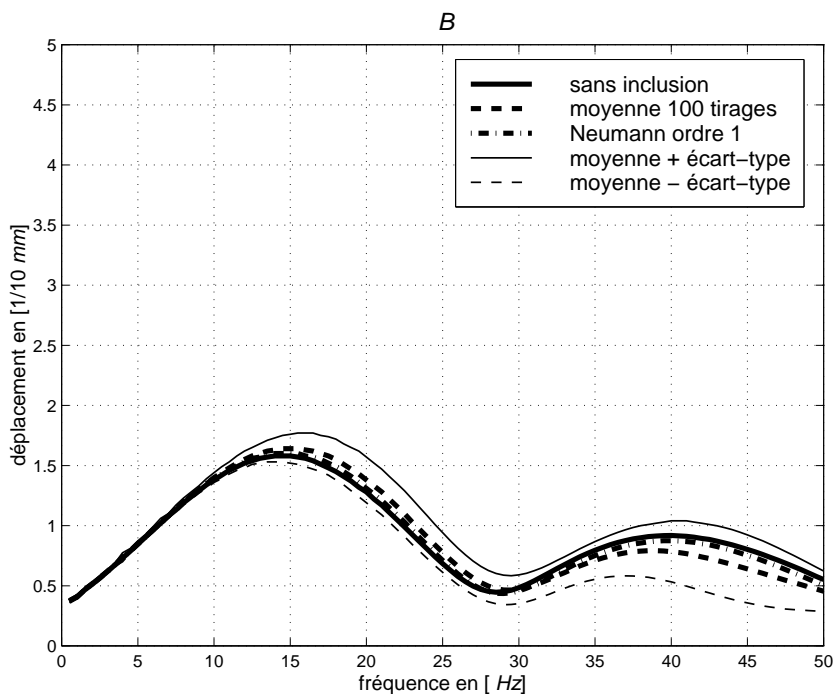


FIG. 6.58 – Variabilité de la raideur, module du déplacement horizontal au point *B*. Comparaison Monte-Carlo (100 tirages) et Neumann ordre 1.

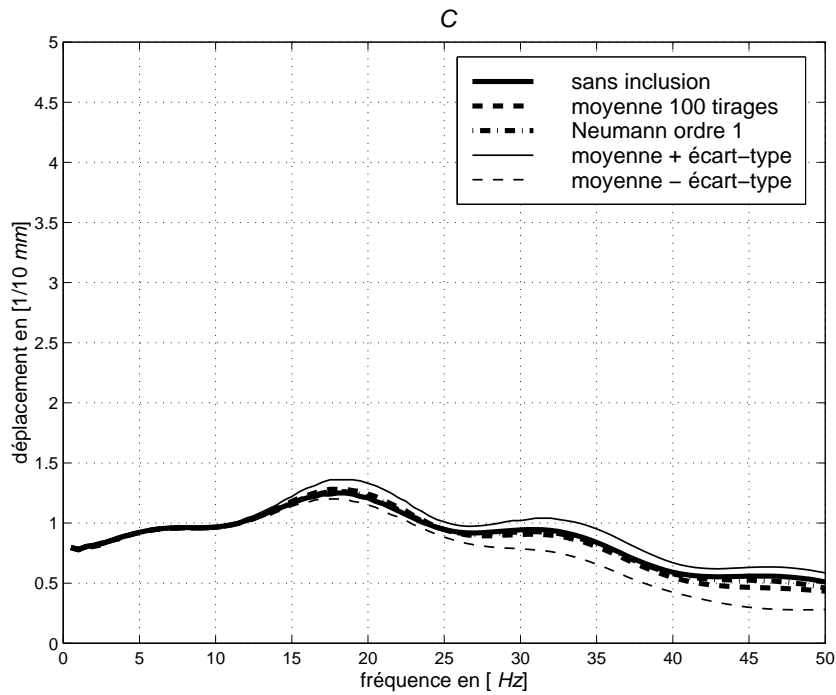


FIG. 6.59 – Variabilité de la raideur, module du déplacement vertical au point  $C$ . Comparaison Monte-Carlo (100 tirages) et Neumann ordre 1.

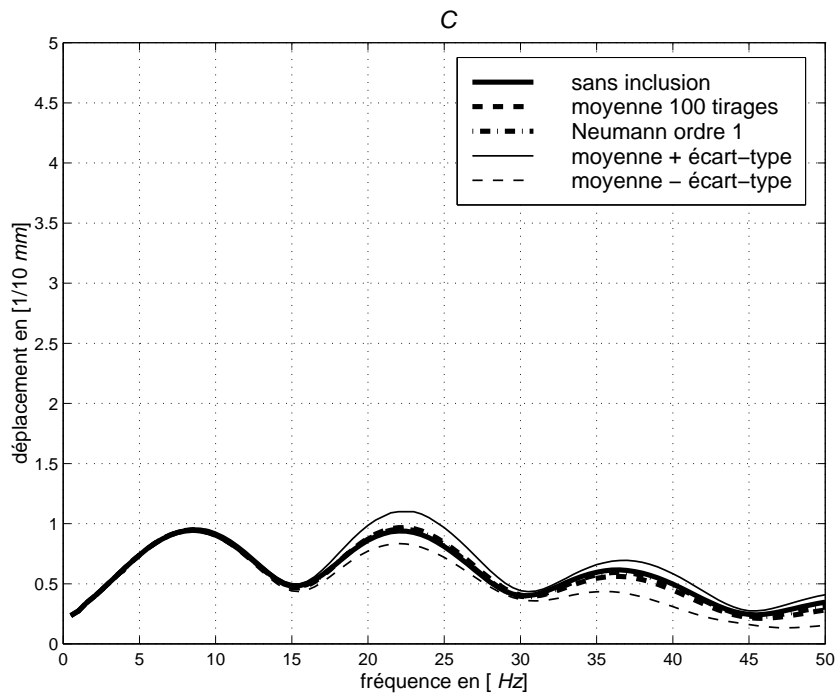


FIG. 6.60 – Variabilité de la raideur, module du déplacement horizontal au point  $C$ . Comparaison Monte-Carlo (100 tirages) et Neumann ordre 1.

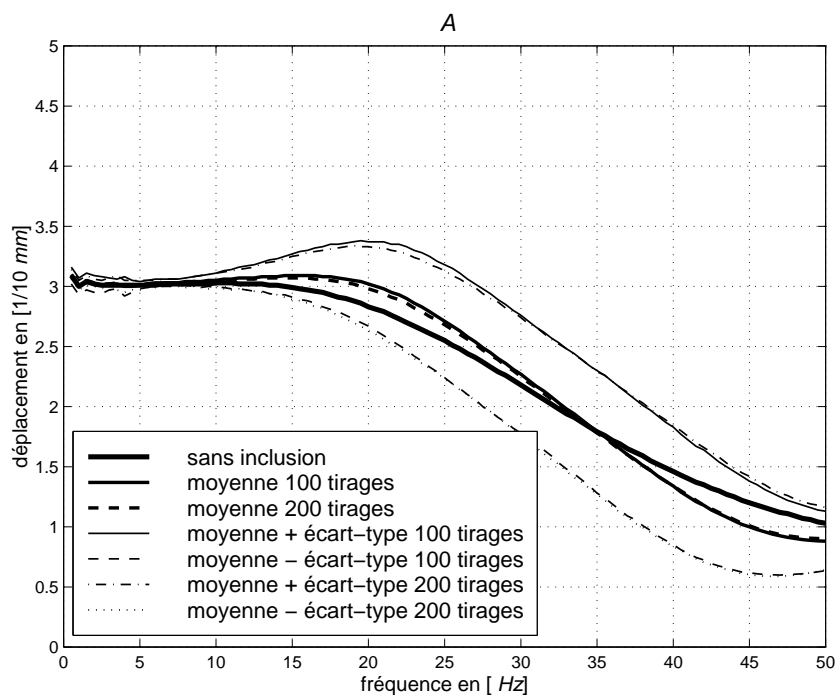


FIG. 6.61 – Variabilité de la raideur, module du déplacement vertical au point *A*. Comparaison Monte-Carlo pour 100 et 200 tirages.

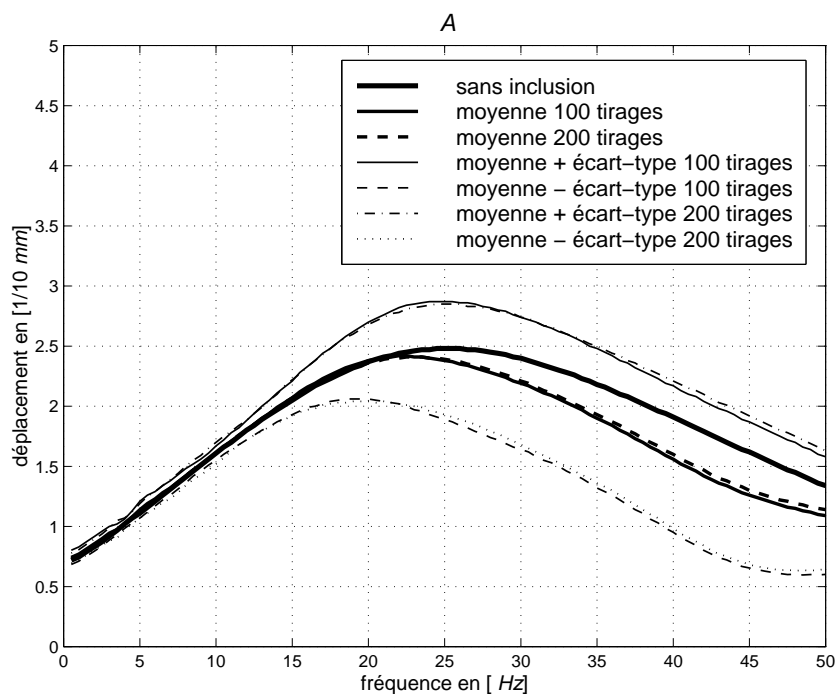


FIG. 6.62 – Variabilité de la raideur, module du déplacement horizontal au point *A*. Comparaison Monte-Carlo pour 100 et 200 tirages.

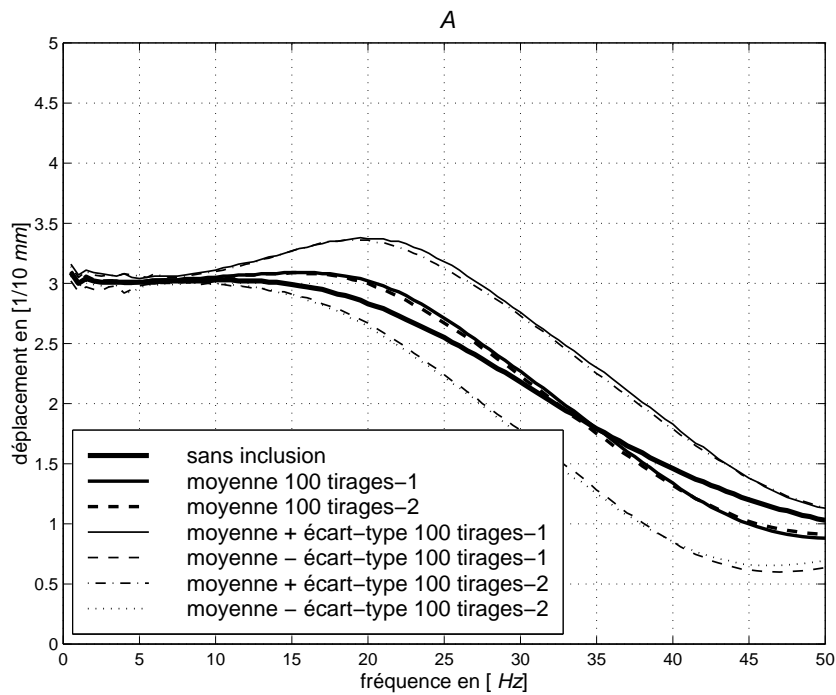


FIG. 6.63 – Variabilité de la raideur, module du déplacement vertical au point *A*. Comparaison Monte-Carlo pour deux simulations de 100 tirages.

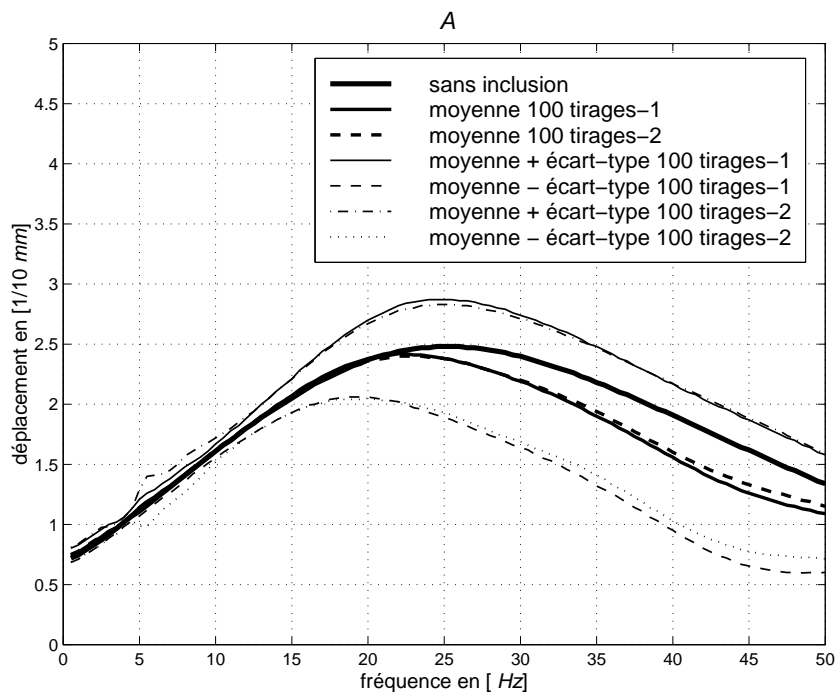


FIG. 6.64 – Variabilité de la raideur, module du déplacement horizontal au point *A*. Comparaison Monte-Carlo pour deux simulations de 100 tirages.

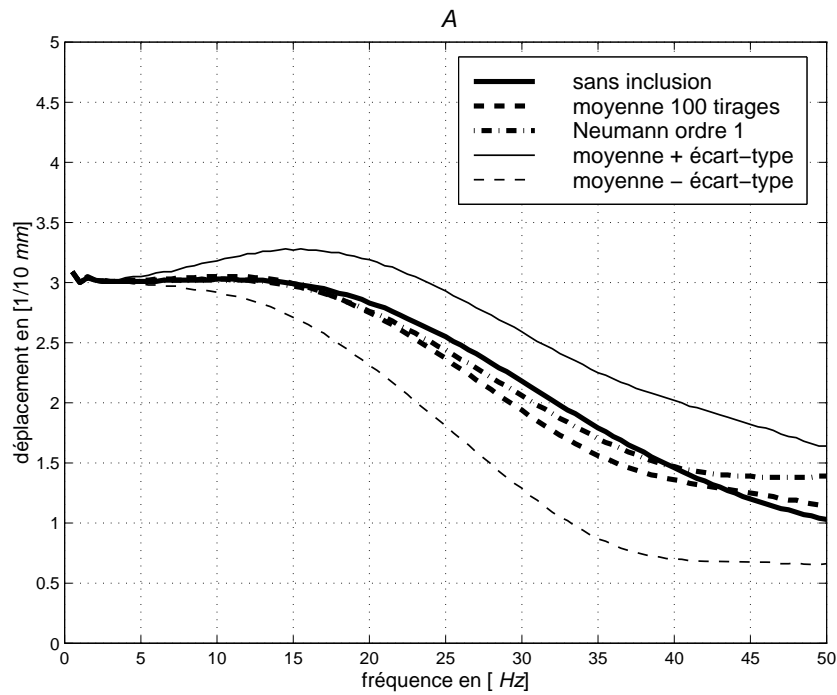


FIG. 6.65 – Variabilité de la masse, module du déplacement vertical au point  $A$ . Comparaison Monte-Carlo (100 tirages) et Neumann ordre 1.

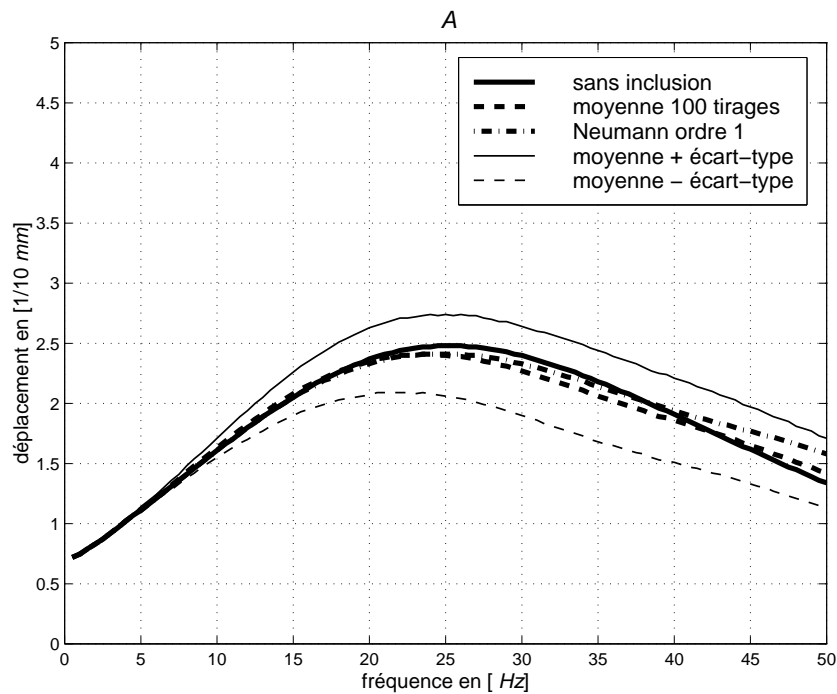


FIG. 6.66 – Variabilité de la masse, module du déplacement horizontal au point  $A$ . Comparaison Monte-Carlo (100 tirages) et Neumann ordre 1.

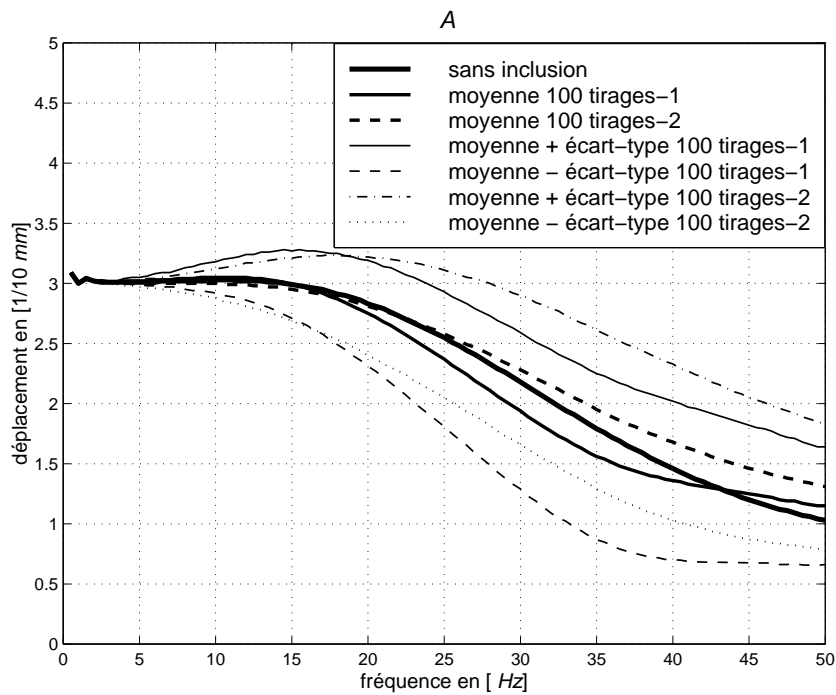


FIG. 6.67 – Variabilité de la masse, module du déplacement vertical au point *A*. Comparaison Monte-Carlo pour deux simulations de 100 tirages.

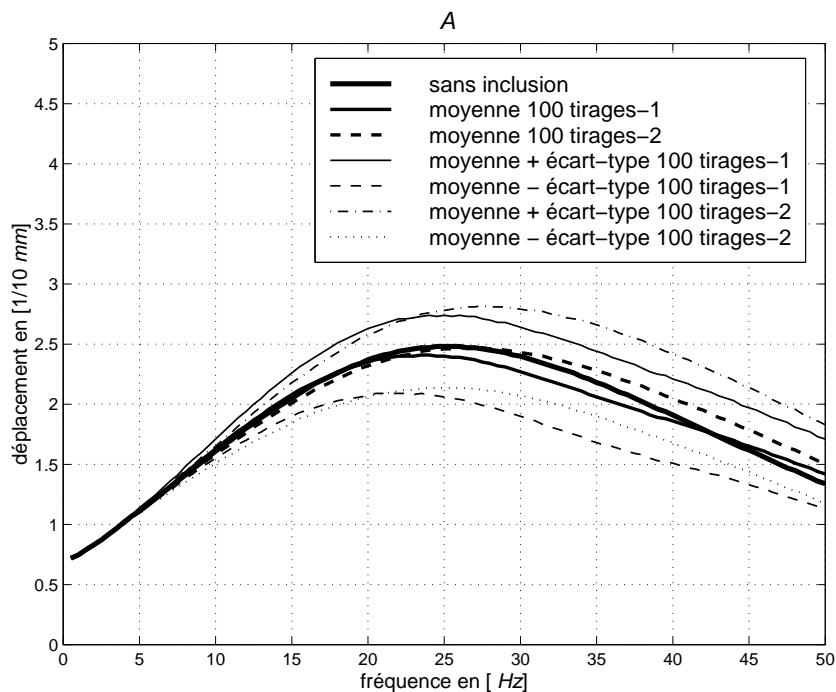


FIG. 6.68 – Variabilité de la masse, module du déplacement horizontal au point *A*. Comparaison Monte-Carlo pour deux simulations de 100 tirages.



du modèle complet et de sa discrétisation est donné à la FIG. 6.69.

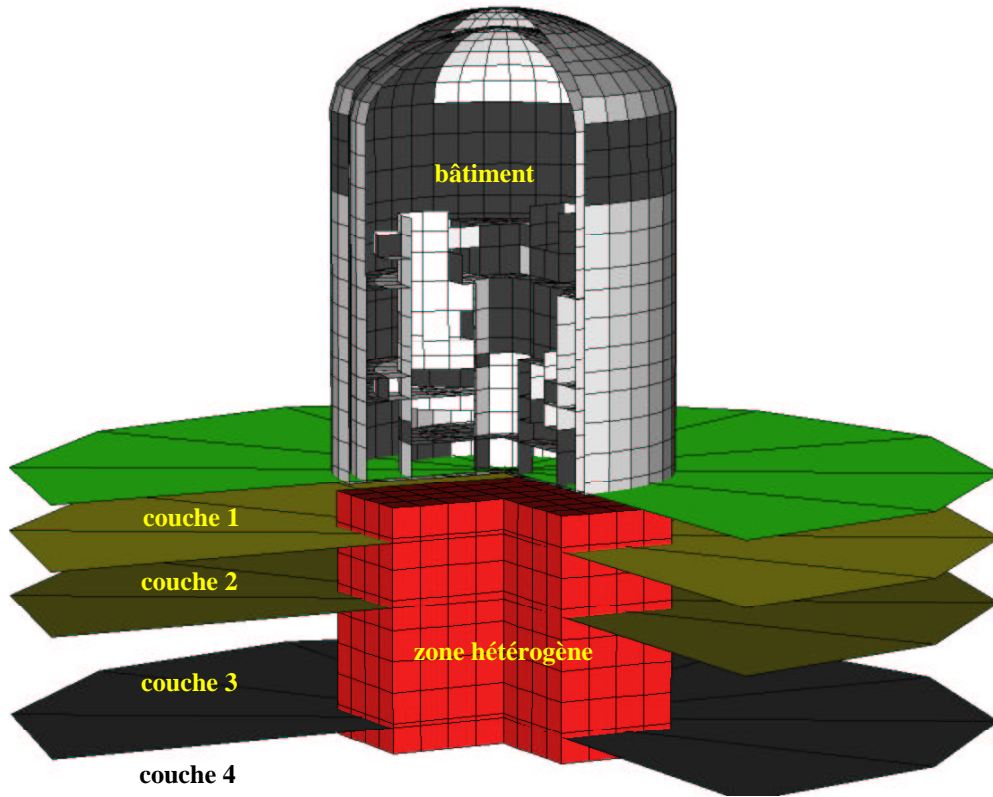


FIG. 6.69 – Modèle de bâtiment-réacteur : maillage de la structure, de la fondation et d'une inclusion hétérogène. Stratification horizontale du sol à 4 couches.

La variabilité du sol est limitée aux seuls modules de Lamé et est caractérisée par le coefficient de corrélation de l'Eq.(6.14) (modèle de corrélation du type exponentielle réelle) et la fonction d'auto-corrélation de l'Eq.(6.15). La longueur de corrélation est choisie  $\ell = 50 m$ . La zone de fluctuation par rapport à la rigidité du sol stratifié de référence est modélisée par un bloc cubique  $40 \times 40 \times 40 m^3$  centré à une profondeur de  $-25 m$ . Le nombre de modes du développement de Karhunen-Loeve des modules de Lamé est fixé à  $N = 5$ , soit ici une erreur relative de 11%. L'interface sol-fondation est discrétisée en 136 éléments **Tria3** (voir la FIG. 6.22) et l'inclusion cubique en 64 éléments **Hexa8** (voir FIG. 6.70). Les FIG. 6.71 et FIG. 6.72 représentent la variation en fonction de la fréquence du facteur de participation global  $\alpha_1$  (voir l'Eq.(4.18) pour sa définition) moyen sur le premier mode propre de la structure ( $f_1 = 4.6 Hz$ ) obtenu respectivement pour une perturbation de l'ordre de  $\sigma_j = 50\%$ ,  $j = 1, 2$ , avec 500 tirages de Monte-Carlo, et pour une perturbation de l'ordre de  $\sigma_j = 95\%$ ,  $j = 1, 2$ , avec encore 500 tirages de Monte-Carlo. Sur ces figures on reproduit également les graphes de  $\max\{0, |\alpha_1| \pm \sigma_{\alpha_1}\}$  où  $\sigma_{\alpha_1}$  désigne l'écart-type, à valeurs réelles, observé pour  $\alpha_1$  par la simulation de Monte-Carlo. On donne enfin la valeur moyenne de  $\alpha_1$  issue d'un développement de Neumann à l'ordre 2. Ces résultats montrent que le développement de Neumann donne des valeurs satisfaisantes dans les deux cas. Par la simulation de Monte-Carlo, on s'aperçoit que la prise en compte de la variabilité du sol a

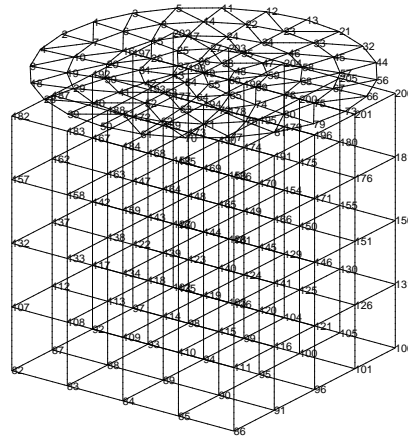


FIG. 6.70 – Influence de la variabilité du sol sur la réponse sismique d'un bâtiment-réacteur : maillage de la fondation circulaire de rayon  $R \approx 25 m$  et de l'hétérogénéité  $40 \times 40 \times 40 m^3$  du sol.

pour effet de réduire les niveaux vibratoires dans la structure de façon non négligeable, du moins pour cet exemple et pour des écarts-types des modules du sol certes importants mais néanmoins réalistes dans les applications du génie civil. Ainsi à la fréquence de résonance  $f'_1$  du système couplé sol-structure, la valeur de  $|\alpha_1|$  sans la perturbation du sol est 1.54, alors que pour une perturbation de l'ordre de 50% sa valeur est comprise dans l'intervalle  $1.45 \pm 0.05$  avec une probabilité de 95% et pour une perturbation de l'ordre de 95% sa valeur est comprise dans l'intervalle  $1.30 \pm 0.10$  avec une probabilité de 95% également (d'après le théorème de la limite centrale (3.79)) : on obtient donc avec une probabilité de 95% un facteur de réduction compris entre 5 et 10% avec une perturbation de 50% et entre 10 et 20% avec une perturbation de 95%.

On reprend les calculs précédents pour le cas d'une perturbation des modules de Lamé du sol de l'ordre de  $\sigma_j \simeq 95\%$  en appliquant dans un premier temps la technique de réduction de variance dite du "Latin Hypercube Sampling". Les résultats obtenus sont présentés, toujours pour le facteur de participation global  $\alpha_1$ , à la FIG. 6.73. L'incertitude sur le facteur de réduction  $C$  est réduite à l'intervalle  $9\% \leq C \leq 11\%$  avec la même probabilité de 95%. Si l'on modifie maintenant la longueur de corrélation des perturbations, en prenant  $\ell = 20 m$  et  $N = 20$  pour une erreur relative de 8%, le facteur de réduction  $C$  est plus dispersé et reste compris dans l'intervalle  $5\% \leq C \leq 19\%$  avec une probabilité de 95% lorsque les poids aléatoires du développement de Karhunen-Loeve de la perturbation de l'opérateur de raideur sont simulés par des réalisations d'une variable aléatoire uniforme sur  $[-1, +1]$  suivant l'Eq.(C.29). La FIG. 6.74 résume les résultats obtenus pour ce dernier exemple.

## 6.5 Conclusion

Plusieurs résultats obtenus à partir des modèles formulés aux chapitres §1 à §3 ont été présentés et permettent de légitimer les démarches proposées.

Ceux relatifs à l'influence de la variabilité spatiale du champ sismique incident sont présentés sous la forme de fonctions de densité spectrale (évolutive ou non) normalisée de

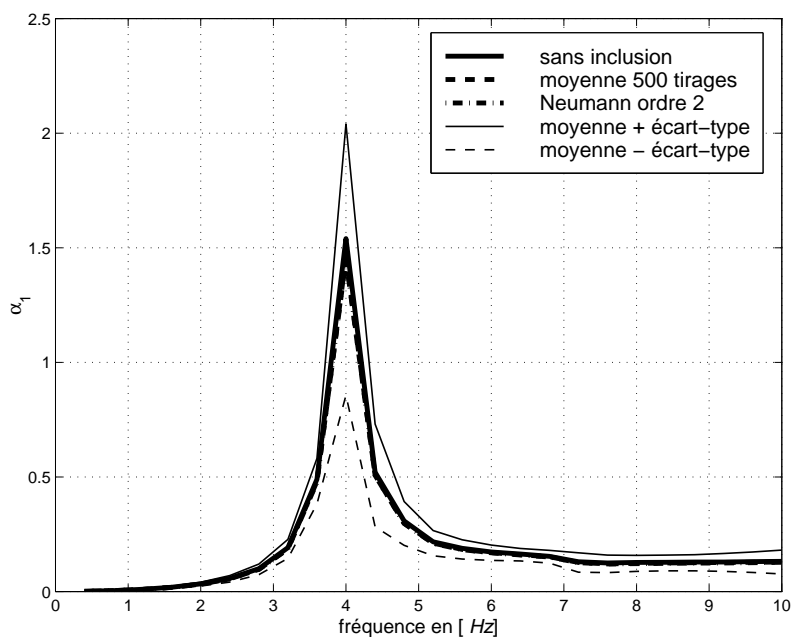


FIG. 6.71 – Influence de la variabilité du sol sur le facteur de participation du déplacement total sur le mode structurel 1; comparaison de la simulation de Monte-Carlo avec 500 tirages et du développement de Neumann à l'ordre 2 pour  $\sigma_j = 50\%$  et  $\ell = 50 m$ .

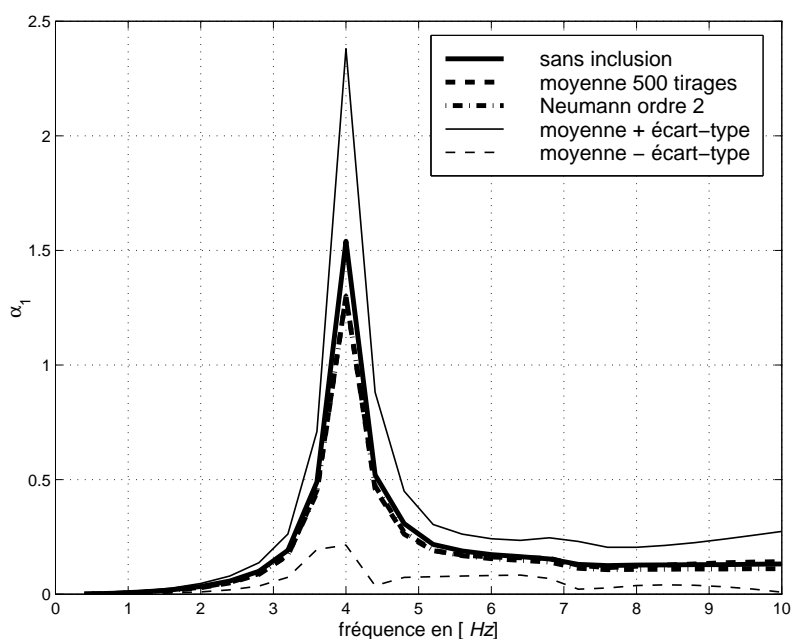


FIG. 6.72 – Influence de la variabilité du sol sur le facteur de participation du déplacement total sur le mode structurel 1; comparaison de la simulation de Monte-Carlo avec 500 tirages et du développement de Neumann à l'ordre 2 pour  $\sigma_j = 95\%$  et  $\ell = 50 m$ .

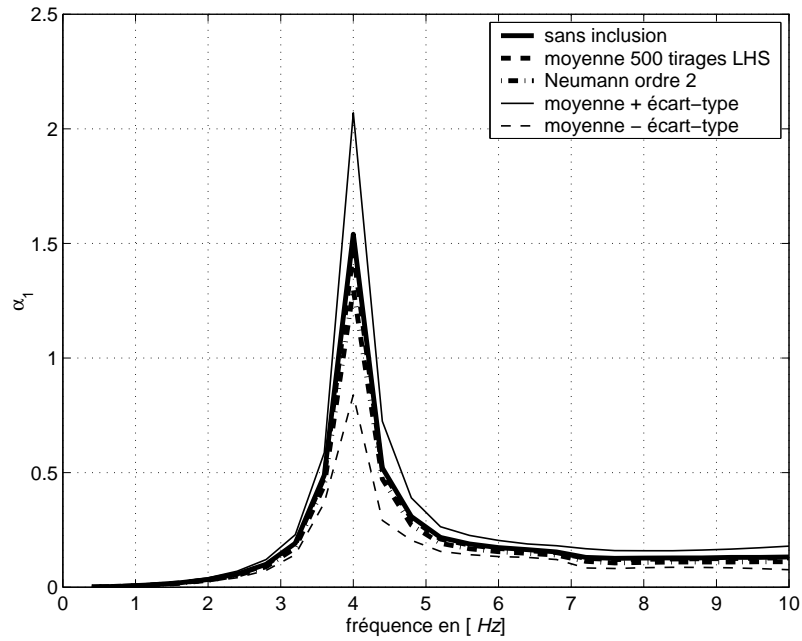


FIG. 6.73 – Influence de la variabilité du sol sur le facteur de participation du déplacement total sur le mode structurel 1; comparaison de la simulation de Monte-Carlo avec 500 tirages du type “Latin Hypercube Sampling” et du développement de Neumann à l’ordre 2 pour  $\sigma_j = 95\%$  et  $\ell = 50 m$ .

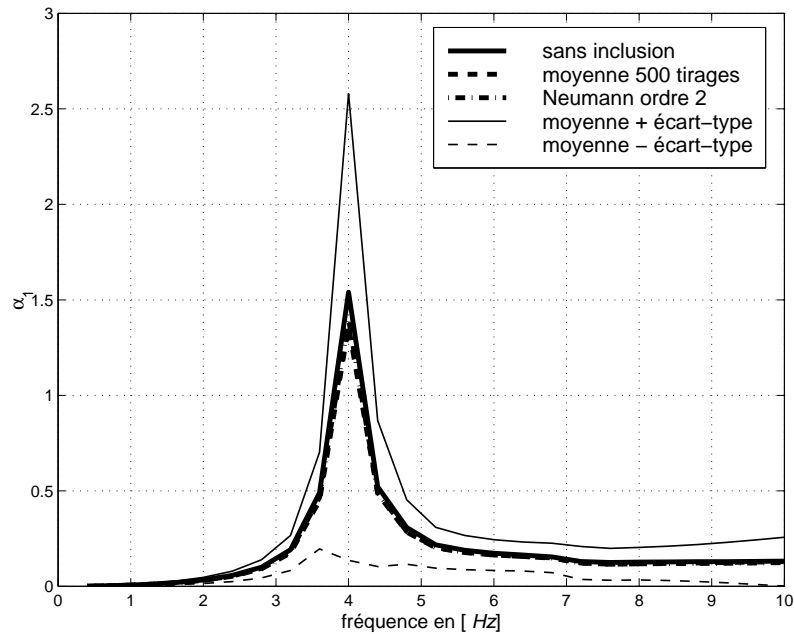


FIG. 6.74 – Influence de la variabilité du sol sur le facteur de participation du déplacement total sur le mode structurel 1; comparaison de la simulation de Monte-Carlo avec 500 tirages et du développement de Neumann à l’ordre 2 pour  $\sigma_j = 95\%$  et  $\ell = 20 m$ .

la réponse de la structure pour des directions particulières et en un point donné. Dans le cas stationnaire, c'est-à-dire pour un champ incident non modulé dans notre modèle, et si la réponse est un processus gaussien, alors la fonction de densité spectrale permet d'accéder à des grandeurs statistiques telles que :

- des valeurs extrêmes moyennes de la forme  $\mathbb{E}\{U_{\max}\}$ , où  $U_{\max}$  est la variable aléatoire réelle telle que :

$$U_{\max} = \max_{t \in I} U(t)$$

avec  $U(t)$  un processus stochastique réel indexé sur  $\mathbb{R}^+$  et  $I$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}^+$ . Cette information est utilisable dans le cadre d'un dimensionnement aux états limites (en supposant toutefois que le processus ponctuel de franchissement en croissant pour la réponse de la structure est asymptotiquement poissonnien, ce qui est bien le cas pour un processus gaussien stationnaire dont le moment d'ordre 4 existe et la fonction d'auto-corrélation est lentement décroissante) ;

- le nombre moyen de passages par des maxima ou minima locaux dans un intervalle de temps donné, de la forme :

$$\mathbb{E}\{\text{MAX}_{\mathbb{R}}(I, a)\} \quad (\text{respectivement } \mathbb{E}\{\text{MIN}_{\mathbb{R}}(I, a)\})$$

où  $\text{MAX}_B(I, a)$  (resp.  $\text{MIN}_B(I, a)$ ) est la variable aléatoire entière du nombre de maxima (resp. minima) locaux dans un intervalle  $B$  de  $\mathbb{R}$  atteints par la trajectoire du processus  $U(t) : t \mapsto u(t, a)$ ,  $a \in \mathcal{A}$  ensemble des événements, sur l'intervalle de temps  $I$ . Cette information est utilisable quant à elle dans le cadre d'un dimensionnement en fatigue <sup>(1)</sup>.

L'utilisation pratique de ces moyennes est conditionnée par le degré de confiance accordé par le projeteur par rapport à des méthodes d'enveloppe telle que par exemple celle du spectre de réponse. Dans le cas non stationnaire, la modulation en temps introduite n'induit aucune modification du contenu fréquentielle de la réponse, si ce n'est les niveaux atteints qui sont répartis sur toute la fenêtre temporelle considérée. Certains auteurs [15, 125] proposent dans ce cas, la réponse structurelle étant toujours supposée gaussienne, des expressions pour les taux de passage en fonction du temps, également fondées sur l'application des formules de S.O. Rice (voir [192] et références citées). Dans le cas général des processus non gaussiens, stationnaires ou non, l'étude des valeurs extrêmes moyennes ou des extrema locaux reste un problème largement ouvert. Une perspective intéressante à court terme est la mise en oeuvre de techniques particulières de traitement des signaux non stationnaires à l'expression générique (3.3), telles que les ondelettes ou la transformée de Wigner-Ville. On trouvera dans [85] une revue détaillée de certaines d'entre elles, et dans [15] notamment un exemple d'application de la méthode des ondelettes. Néanmoins ces approches exigent une étude préliminaire importante des caractéristiques non stationnaires des signaux sismiques qui dépasse très largement le cadre de ce travail.

Les résultats relatifs à l'influence de la variabilité spatiale des paramètres mécaniques du sol au voisinage de la fondation de la structure font apparaître pour celle-ci, dans les cas analysés, une réduction notable des niveaux vibratoires observés. Ils ont été obtenus pour un modèle particulier d'aléa du sol - coefficient de corrélation et longueur de corrélation - et doivent être confirmés pour d'autres exemples avant de pouvoir tirer des conclusions plus

<sup>1</sup>Ce type d'étude présente néanmoins un intérêt limité en génie parasismique, sauf peut-être pour les répliques comme on a pu l'observer lors des récents séismes en Turquie ou en Grèce (1999).

générales. Néanmoins, par une approche simplifiée différente, Toubalem *et al.* [209, 210] obtiennent des résultats qualitativement et quantitativement comparables pour un coefficient de corrélation de la perturbation aléatoire du module d'Young du sol de la même forme que l'Eq.(6.14). La démarche adoptée peut être vue comme une étude paramétrique particulière fondée sur la connaissance de tendances globales de variation de la raideur du sol (les modes propres de la fonction de corrélation) paramétrées par leurs poids relatifs aléatoires. Elle donne une allure de la *sensibilité* des déplacements observés à une amplitude donnée des fluctuations des caractéristiques du sol, en complément des études systématiques de marges effectuées dans un cadre plus réglementaire. L'utilisation des résultats obtenus sous la forme d'intervalle de confiance pour le coefficient de réduction attendu, dans le cas particulier analysé, est elle aussi conditionnée par le degré de confiance que peut lui accorder le projeteur par rapport à un dimensionnement classique sous conditions extrêmes. Une perspective intéressante de la méthode est son application à la caractérisation, pour un modèle donné d'aléa du sol, de la fonction de cohérence des tremblements de terre associée à l'effet local de site, tel que défini en §1.3.2. Les résultats obtenus pourraient être comparés à ceux déduits par Zerva & Harada [231] d'une approche semi-analytique pour la propagation d'ondes S. L'application à l'étude du problème inverse d'identification des paramètres mécaniques du sol au voisinage d'un ouvrage donné constitue également un axe de développement prometteur.



# Conclusions et perspectives

Nous avons présenté dans ce mémoire une modélisation complète de l'interaction sismique sol-structure prenant en compte la variabilité spatiale du mouvement du sol et de ses paramètres mécaniques. Une approche probabiliste a été retenue, et il a été montré que la formulation développée permet d'introduire l'aléa comme une dimension supplémentaire du modèle physique. Notamment des méthodes de réduction fonctionnelles ont pu être mises en oeuvre en vue de la discrétisation du problème considéré suivant cette nouvelle dimension, tant pour le champ incident aléatoire que pour les fluctuations également aléatoires des modules du sol. Cette caractéristique essentielle de la modélisation permet de réduire sensiblement les développements additionnels dans les codes de calculs déterministes actuellement disponibles, et n'impose aucune modification importante aux solveurs utilisés (contrairement à des approches du type méthode des petites perturbations et développement de Taylor autour d'une valeur moyenne). Enfin la démarche originale employée pour l'étude de l'influence des fluctuations aléatoires des modules du sol sur la réponse de l'ouvrage en particulier permet de traiter le cas d'une hétérogénéité déterministe marquée, remplissant en ce sens un des objectifs initiaux de ce travail.

Les résultats numériques obtenus pour des exemples tirés de la littérature ou traités par d'autres approches, ont montré la validité des développements proposés, et leur aptitude à mettre en évidence certains phénomènes déjà bien connus. En particulier ceux liés à la variabilité du champ sismique incident sont convenablement reproduits, comme les effets de sollicitation en torsion ou en balancement de la structure, et de filtrage des mouvements de translation aux hautes fréquences. Par ailleurs la prise en compte du caractère instationnaire des tremblements de terre par une fonction de modulation temporelle n'a pas semblé modifier significativement les spectres de puissance obtenus pour des exemples réalistes de bâtiments-réacteurs. Des modèles plus évolués de champs incidents instationnaires pourraient conduire à des conclusions différentes, mais peu d'études leur sont consacrés à notre connaissance. L'influence de la variabilité spatiale des modules du sol au voisinage de la fondation est évaluée pour ces mêmes exemples réalistes et conduit à des réductions significatives des niveaux vibratoires observés, pour des fluctuations d'amplitude certes importantes (de l'ordre de 50 à 90%) mais néanmoins réalistes pour les applications du génie civil. Les tendances observées, ainsi que la sensibilité des résultats aux différents paramètres introduits, comme par exemple la longueur de corrélation de ces fluctuations ou le nombre de modes de Karhunen-Loeve considéré, méritent cependant d'être confirmées par une analyse systématique plus complète, pour d'autres exemples éventuellement.



### Quelques perspectives pour l'analyse probabiliste

Deux perspectives d'évolution des outils d'analyse probabiliste mis en oeuvre dans ce travail se détachent : d'une part l'enrichissement des modèles utilisés, et d'autre part, en liaison avec les applications initialement fixées pour cette étude, les conséquences pour les dimensionnements des ouvrages de génie civil, notamment les aspects réglementaires.

Une perspective raisonnable à moyen terme de la démarche est la prise en compte de modèles de lois de probabilité des fluctuations aléatoires des paramètres du sol plus évolués, pour en déduire la loi conjointe des poids aléatoires correspondants de leur développement de Karhunen-Loeve. En effet, pour des coefficients de variation importants, tels que ceux abordés ici pour l'étude de l'influence de la variabilité de la raideur du sol, les lois de probabilité jouent un rôle déterminant dans la caractérisation de l'aléa. Par exemple une loi log-normale semble plus appropriée pour des données géomécaniques que la loi gaussienne ou simplement la loi uniforme sur  $[-1, +1]$  pour la simulation de ces poids. Ainsi l'élargissement de la gamme des outils de simulation de variables aléatoires et de traitements statistiques – techniques de réduction de variance par exemple – constitue sans doute une première étape nécessaire pour l'amélioration, au moins d'un point de vue qualitatif pour ce qui concerne la représentativité des modèles, des simulations réalisées.

Plus généralement, les perspectives qu'offrent les techniques de projection sur la base des polynômes du chaos homogène de l'espace des variables aléatoires du second ordre sont extrêmement intéressantes en vue du développement d'une méthode d'éléments finis stochastiques "universelle" transparente vis-à-vis des outils de résolution déterministe classiquement utilisés. Les résultats prometteurs obtenus en théorie du filtrage stochastique non linéaire (voir notamment Kallianpur [104]) ou par Ghanem *et al.* pour les applications mécaniques en particulier, les possibilités qu'offre cette méthode en terme d'adaptativité ou de hiérarchisation notamment, au même titre que la méthode des éléments finis classiques en mécanique, sont des gages de sa richesse et ouvrent la voie pour de futurs développements. En ajoutant à ces méthodes les approches du type flou structural (Soize [191]) ou caractérisation des matrices de masse, raideur et dissipation aléatoires par le principe du maximum d'entropie (Soize [196]), on dispose donc d'outils fiables et robustes pour la caractérisation de systèmes mécaniques complexes dont les paramètres incertains sont représentés par des processus stochastiques.

Pour les aspects directement liés aux objectifs premiers de la thèse, on peut noter qu'il reste encore un effort important à accomplir en vue de valider les résultats obtenus, brièvement résumés plus haut, pour la mise en oeuvre systématique des différentes techniques proposés dans un cadre industriel. Leurs possibles implications sur les méthodes de dimensionnement et la réglementation, ou leur confrontation avec des données expérimentales plus complètes constituent un axe important de développements futurs, tant sur le plan normatif (en accord avec les évolutions actuelles de la réglementation européenne par exemple) que pour les outils de simulation utilisés. Les approches citées ci-dessus constituent à ce titre des pistes intéressantes.

### Autres applications

Une perspective plus ambitieuse, mais à plus long terme, consisterait à étendre la méthode de sous-structuration sur une interface volumique proposée au chapitre §4 à l'analyse d'une perturbation de nature non plus seulement élastique, mais plus générale comme une

perturbation liée à une non linéarité de son comportement, soit typiquement un terme de contrainte de déformations plastiques. Elle peut également trouver des applications innovantes non seulement en dynamique des structures, mais dans les domaines de la mécanique des matériaux composites (voir l'équation de Lippmann-Schwinger utilisée par Willis, chapitre §1) ou des matériaux granulaires. Enfin le lien étroit de la démarche utilisée avec d'autres approches comme la méthode multi-échelles [58] ou celle des domaines fictifs laisse entrevoir de nombreux enrichissements possibles dans les années à venir. Un premier point déjà très brièvement abordé mais non décrit dans ce mémoire est son application à des problèmes inverses d'identification des paramètres d'un milieu donné sur la base d'enregistrements en vibrations forcées.

Enfin si elle a permis d'obtenir des résultats quantitatifs intéressants pour les exemples considérés, en revanche la méthode proposée n'apporte pas, dans l'état actuel des développements, de nouveaux éléments concernant les phénomènes particuliers liés à la propagation d'ondes en milieux hétérogènes aléatoires ou non, comme la localisation ou la diffusion telles qu'elles ont été abordées au chapitre §1. Dans cette optique, la confrontation de la technique de sous-structuration, notamment sur le plan numérique, avec les prévisions issues d'autres approches telles que les développements asymptotiques, aux hautes ou basses fréquences, ou fondés sur une séparation d'échelle, et les techniques purement énergétiques comme le transfert radiatif ou la SEA, constitue un autre point à approfondir dans les développements futurs. On pourrait notamment étudier le comportement de la méthode lorsqu'on cherche à se rapprocher des configurations limites conduisant à la localisation d'une part, ou à la diffusion d'autre part, et dans quelle mesure se réalisent les transitions entre ces différents états. Ce travail difficile dépasse largement le cadre de ce travail et requiert d'importants développements théoriques et méthodologiques complémentaires, mais néanmoins raisonnablement envisageables à plus longs termes.



# Annexe A

## Cadre mathématique

### A.1 Notations générales et rappels

Soient  $d$  et  $m$  deux entiers non nuls quelconques. L'espace Euclidien  $\mathbb{R}^d$  ou  $\mathbb{C}^d$  est muni du produit scalaire usuel  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_d = \sum_{j=1}^d u_j \bar{v}_j$  et de la norme associée  $\|\mathbf{u}\|_d = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_d}$ . Dans le cas  $d = 3$ , on notera plus volontiers le produit scalaire  $\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}}$  et la norme simplement  $\|\mathbf{u}\|$ . Pour tout élément  $z$  de  $\mathbb{C}$ , on note  $\Re(z)$  sa partie réelle,  $\Im(z)$  sa partie imaginaire et  $\bar{z}$  son conjugué.

Pour une partie ouverte  $\Omega$  quelconque ou un compact  $K$  de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\mathcal{C}^k(\Omega)$  et  $\mathcal{C}^0(K)$  désignent respectivement : l'espace des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\Omega$  borné ou non, et tendant vers 0 à l'infini ainsi que toutes leurs dérivées d'ordre inférieur à  $k$  sur  $\Omega$  non borné ; l'espace des fonctions continues sur  $K$ .  $\mathcal{D}(\Omega)$  est l'espace des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact inclus dans  $\Omega$ . L'espace des distributions est alors l'ensemble des formes linéaires continues de  $\mathcal{D}(\Omega)$  et est noté  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Enfin  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  est le sous-espace de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$  des fonctions à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^3) = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3); \forall k \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^k |D^\alpha f(x)| = 0 \right\}$$

et  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ , l'espace des distributions tempérées, l'ensemble des formes linéaires continues sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ .

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels topologiques quelconque,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . S'ils sont normés, on désignera par  $\|\cdot\|_E$  (respectivement  $\|\cdot\|_F$ ) une norme correspondante. On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'espace vectoriel des applications linéaires continues de  $E$  dans  $F$  et  $\text{End}(E)$  l'espace des endomorphismes continus lorsque  $F = E$ .  $\mathcal{L}(E, F)$  est normé pour la norme d'opérateur définie par :

$$\|a\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup_{\mathbf{u} \in E, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}} \frac{\|a(\mathbf{u})\|_F}{\|\mathbf{u}\|_E}$$

lorsque  $E$  et  $F$  sont normés. Dans ce cas les éléments de  $\mathcal{L}(E, F)$  sont, de manière équivalente, bornés. Pour tout élément  $a$  de  $\mathcal{L}(E, F)$  où  $E \sim \mathbb{K}^d$ ,  $F \sim \mathbb{K}^m$ , on notera généralement  $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{\mathbb{K}}(m, d)$  sa matrice relativement à une base orthonormée de  $E$  (la base canonique si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ), et dont les éléments  $A_{ij}$  sont dans  $\mathbb{K}$ . Une *forme linéaire*  $a$  est une application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{K}$  telle que  $a(\lambda \mathbf{u}) = \lambda a(\mathbf{u})$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $\mathbf{u} \in E$ ; une *forme antilinéaire*  $a$  est une application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{K}$  telle que  $a(\lambda \mathbf{u}) = \bar{\lambda} a(\mathbf{u})$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $\mathbf{u} \in E$ ; une *forme bilinéaire*  $b$  sur  $E$  est une application linéaire de  $E \times E$  dans  $\mathbb{K}$  telle que

$\mathbf{u} \mapsto b(\mathbf{u}, \cdot)$  et  $\mathbf{v} \mapsto b(\cdot, \mathbf{v})$  sont des formes linéaires; enfin une *forme sesqui-linéaire*  $b$  sur  $E$  est une application linéaire de  $E \times E$  dans  $\mathbb{K}$  telle que  $\mathbf{u} \mapsto b(\mathbf{u}, \cdot)$  est une forme linéaire et  $\mathbf{v} \mapsto b(\cdot, \mathbf{v})$  est une forme anti-linéaire. Une forme bilinéaire (respectivement sesqui-linéaire) est dite *symétrique* (resp. *hermitienne*) ssi  $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = b(\mathbf{v}, \mathbf{u})$  (resp.  $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{b(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$ ) pour tout  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E \times E$ , et *définie positive* ssi  $b(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$  pour tout  $\mathbf{u} \in E - \{\mathbf{0}\}$ .

On note  $E'$  le dual (resp. l'anti-dual) topologique de  $E$ , c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires (resp. anti-linéaires) continues sur  $E$ . Si  $\mathbf{u}'$  désigne un élément de  $E'$ , l'action de  $\mathbf{u}'$  sur tout élément  $\mathbf{u}$  de  $E$  est  $\mathbf{u}'(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}', \mathbf{u} \rangle_{E', E} \in \mathbb{K}$ . Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach et  $E'$  et  $F'$  leurs duaux respectifs. L'opérateur *transposé* de  $a \in \mathcal{L}(E, F)$  est l'opérateur  $a^T \in \mathcal{L}(F', E')$  tel que :

$$\langle \mathbf{v}', a(\mathbf{u}) \rangle_{F', F} = \langle a^T(\mathbf{v}'), \mathbf{u} \rangle_{E', E} \quad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}') \in E \times F'$$

que l'on identifie à sa matrice  $\mathbf{A}^T \in \text{Mat}_{\mathbb{K}}(d, m)$  si  $F \sim \mathbb{K}^m$ ,  $E \sim \mathbb{K}^d$ .  $a$  est *symétrique* ssi  $a^T = a$ . Un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel complet (espace de Banach) muni d'une forme bilinéaire ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ) ou sesqui-linéaire ( $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ )  $b$  définie positive est un espace de Hilbert  $(E, b)$ .  $b$  est alors appelé produit scalaire, et l'on peut montrer qu'il est nécessairement symétrique (ou hermitien). Si  $(E, b_E)$  et  $(F, b_F)$  sont deux espaces de Hilbert, l'opérateur *adjoint* de  $a \in \mathcal{L}(E, F)$  est l'opérateur  $a^* \in \mathcal{L}(F, E)$  tel que :

$$b_E(a^*(\mathbf{v}), \mathbf{u}) = b_F(\mathbf{v}, a(\mathbf{u})) \quad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E \times F$$

que l'on identifie à sa matrice  $\overline{\mathbf{A}}^T \in \text{Mat}_{\mathbb{K}}(d, m)$  si  $F \sim \mathbb{K}^m$ ,  $E \sim \mathbb{K}^d$ .  $a$  est *auto-adjoint* ssi  $a^* = a$ . L'opérateur trace d'une matrice est noté  $\text{tr } \mathbf{A}$ . En supposant les espaces  $E$  et  $F$  séparables (i.e. ils contiennent une famille totale dénombrable), on note  $\mathcal{L}_2(E, F)$  l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt, c'est-à-dire  $a \in \mathcal{L}_2(E, F)$  ssi il existe des bases orthonormales  $\{\mathbf{e}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\{\mathbf{f}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $E$  et  $F$  respectivement et une suite de scalaires  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}$  telles que  $a(\mathbf{u}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n b_E(\mathbf{e}_n, \mathbf{u}) \mathbf{f}_n$  pour tout  $\mathbf{u} \in E$ .

## A.2 Espaces fonctionnels

Les espaces fonctionnels de Sobolev classiques pour un domaine ouvert borné ou non borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$  (typiquement un volume  $d = 3$  ou une surface  $d = 2$ ), régulier et à frontière bornée  $\partial\Omega$  sont notés :

$$H^m(\Omega, \mathbb{C}) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ u \in L^2(\Omega, \mathbb{C}); \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq m \Rightarrow D^\alpha u \in L^2(\Omega, \mathbb{C}) \right\}$$

Plus particulièrement pour un domaine  $\Omega$  non borné on définit :

$$H_{\text{loc}}^1(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega); \forall K \text{ compact de } \Omega, u|_K \in H^1(K, \mathbb{C}) \right\}$$

L'espace des fonctions de carré intégrable à valeurs  $\mathbb{C}^3$  est noté :

$$H(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3); u_j \in L^2(\Omega, \mathbb{C}) \right\} \stackrel{\text{déf}}{=} [L^2(\Omega, \mathbb{C})]^3$$

le produit scalaire associé étant donné par :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_H = \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \overline{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x})$$

et la norme  $\|\mathbf{u}\|_H = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_H}$ . Si le domaine  $\Omega$  est non borné <sup>(1)</sup> les déplacements admissibles en l'absence d'amortissement sont choisis dans :

$$V(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in [H^1_{\text{loc}}(\bar{\Omega}, \mathbb{C})]^3; \mathbf{u} \text{ vérifie (2.27)} \right\}$$

mais si l'on tient compte de l'amortissement, ce que l'on fera par la suite, ils sont choisis dans :

$$V(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in [H^1(\Omega, \mathbb{C})]^3; \mathbf{u} \text{ vérifie (2.31)} \right\}$$

Si par contre le domaine  $\Omega$  est borné, alors on peut simplement prendre :

$$V(\Omega) = [H^1(\Omega, \mathbb{C})]^3$$

Cet espace est alors associé au produit scalaire :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_H + (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_H$$

avec  $(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_H = \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \bar{\mathbf{v}} dV$  et la norme correspondante  $\|\mathbf{u}\|_\Omega = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_\Omega}$ . L'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $V(\Omega)$  muni de la topologie de cette norme est notée  $V_0(\Omega)$ . On note  $V'(\Omega)$  l'antidual continu de  $V(\Omega)$  pour le produit de dualité  $\langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_\Omega$  qui est linéaire en  $\mathbf{f}$  pour tout  $\mathbf{u}$  fixé et anti-linéaire en  $\mathbf{u}$  pour tout  $\mathbf{f}$  fixé. L'espace des traces des éléments de  $V(\Omega)$  sur une partie  $\Gamma$  de la frontière  $\partial\Omega$  du domaine est noté :

$$V(\Gamma) \subset [H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)]^3$$

Le produit scalaire associé est :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Gamma = \int_\Gamma \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) + \iint_{\Gamma \times \Gamma} \frac{\|\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{y})\|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} dS(\mathbf{x}) dS(\mathbf{y})$$

pour la norme équivalente  $\|\mathbf{u}\|_\Gamma = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_\Gamma}$ . Le dual continu de  $V(\Gamma)$  est noté  $V'(\Gamma)$  pour le produit de dualité  $\langle \mathbf{t}_n, \mathbf{u} \rangle_\Gamma$  qui est linéaire en  $\mathbf{t}_n$  pour tout  $\mathbf{u}$  fixé et également linéaire en  $\mathbf{u}$  pour tout  $\mathbf{t}_n$  fixé. Pour une condition aux limites de type Dirichlet sur  $\mathbf{u} \subset \Gamma$ , on note :

$$V_0(\Gamma) = \{ \mathbf{u} \in V(\Gamma); \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma \}$$

En vue des méthodes variationnelles mises en oeuvre aux chapitres §2 et §3, on rappelle le théorème de trace de Gagliardo (voir [47, 52] par exemple) :

**Théorème A.1 (théorème de trace)** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$ . L'application trace  $\gamma : V(\Omega) \rightarrow V(\Gamma)$  (ou plus classiquement  $\gamma_0$  dans la littérature mathématique) est continue et surjective, de noyau  $V_0(\Omega)$ , et admet un inverse continu à droite. Si  $\Omega$  est non borné, le théorème reste vrai avec  $\gamma : W_0^1(\Omega) \rightarrow V(\Gamma)$ , de noyau l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $W_0^1(\Omega)$ .*

<sup>1</sup>Afin de résorber la difficulté liée aux conditions à l'infini dans un domaine non borné, il est encore possible d'introduire des espaces de Sobolev avec poids ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ) :

$$W_\lambda^m(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega); \forall \alpha \in \mathbb{N}^3, |\alpha| \leq m \Rightarrow (1 + \|\mathbf{x}\|^2)^{\frac{\lambda}{2}(\lambda - m + |\alpha|)} D^\alpha u \in L^2(\Omega, \mathbb{C}) \right\}$$

tels que proposés par Giroire [76], qui fixent le comportement à l'infini de  $u$  et de ses dérivées successives. Dans ce cas, il n'est plus nécessaire de tenir compte de l'amortissement et l'on peut établir l'inégalité de Korn pour la norme sur  $W_0^1(\Omega)$  :  $\|\mathbf{u}\|_{W_0^1(\Omega)}^2 = \int_\Omega \frac{|\mathbf{u}|^2}{1 + \|\mathbf{x}\|^2} d\mathbf{x} + \|\nabla \mathbf{u}\|_{H(\Omega)}^2$ .

Ainsi on peut écrire :

$$\forall \Phi \in V(\Gamma) \quad (\exists \mathbf{u} \in V(\Omega); \gamma \mathbf{u} = \Phi \Leftrightarrow \exists R \in \mathcal{L}(V(\Gamma), V(\Omega)); R\Phi = \mathbf{u})$$

où  $R$  est l'inverse à droite de  $\gamma$  appelé aussi relèvement dans  $\Omega$ . On rappelle également les définitions suivantes. La coercivité est définie par [52] :

**Définition A.2 (coercivité)** Une forme sesqui-linéaire continue  $b : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  est  $E$ -coercive (ou elliptique) si il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que :

$$\Re \{a(\mathbf{u}, \mathbf{u})\} \geq \alpha \|\mathbf{u}\|_E^2 \quad \forall \mathbf{u} \in E$$

tandis que la coercitivité est définie de la manière suivante [94] :

**Définition A.3 (coercitivité)** Une forme sesqui-linéaire continue  $b : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  est  $E$ -coercitive si il existe  $C \in \mathbb{R}$  et  $\theta \in ]-\pi, \pi]$  tels que :

$$\Re \{e^{i\theta} a(\mathbf{u}, \mathbf{u})\} \geq C \|\mathbf{u}\|_E^2 \quad \forall \mathbf{u} \in E$$

et implique la coercivité.

### A.3 Processus stochastiques du second ordre

On rappelle dans cette section les principales définitions et concepts liés au traitement des processus stochastiques du second ordre. Son seul objectif est de fixer les notations essentielles utilisées dans toute la suite de cette étude. On se référera aux textes de référence de Soize [192, 195] pour un exposé plus complet et rigoureux.

L'espace probabilisé est noté  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$  où  $\mathcal{A}$  désigne un ensemble quelconque (les événements élémentaires),  $\mathcal{T}$  désigne une tribu de parties sur cet ensemble (les combinaisons des événements élémentaires, ou événements) et  $P$  une probabilité, c'est-à-dire une mesure positive bornée de masse 1, sur l'espace probabilisable  $(\mathcal{A}, \mathcal{T})$ . L'ensemble  $\mathcal{A}$  symbolise le "hasard" et contient tous les événements possibles (1, 2, 3, 4, 5 ou 6 pour un dé), tandis qu'une partie de  $\mathcal{A}$  correspond à une certaine combinaison d'événements qui influent sur le résultat (par exemple 1 et 4 avec un dé). Une *variable aléatoire*  $X$  est une application  $a \mapsto X(a)$  qui associe à une combinaison  $a \in \mathcal{A}$  des états des causes (les événements de  $\mathcal{A}$ ), une combinaison  $X(a)$  des conséquences. Par cette définition, nous sommes amené à munir l'espace des combinaisons des conséquences des éléments de  $\mathcal{A}$  de la même structure (tribu, mesure de probabilité) que l'espace des aléas des causes  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$ , que l'on peut alors "oublier" au profit du nouvel espace probabilisé ainsi construit. C'est ce que l'on fera toujours implicitement lorsqu'on s'intéresse aux valeurs d'un paramètre plutôt qu'aux événements à l'origine de ces valeurs.

Soit  $T$  un ensemble d'indexation de  $\mathbb{R}^d$ , éventuellement égal à  $\mathbb{R}^d$  tout entier. Si  $d = 1$  (respectivement  $d > 1$ ), on appelle *processus* (resp. *champ*) *stochastique*  $t \mapsto \mathbf{X}(t)$  défini sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$ , indexé sur  $T$  à valeurs  $\mathbb{K}^m$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) la famille de variables aléatoires  $\{\mathbf{X}(t), t \in T\}$  définies sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$ .  $\mathbf{X}(t)$  étant une variable aléatoire, on note  $P_{\mathbf{X}(t)}(d\mathbf{x}, t)$  sa loi de probabilité. Soit  $I$  l'ensemble de toutes les parties finies et non ordonnées de  $T$ , c'est-à-dire si  $i \in I$  elle est de la forme  $i = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ . On considère la variable aléatoire  $\mathbf{X}^{(i)} = \{\mathbf{X}(t_1), \mathbf{X}(t_2), \dots, \mathbf{X}(t_k)\}$  à valeurs  $\mathbb{K}^{km}$ . Sa loi de probabilité est notée  $P_{\mathbf{X}^{(i)}}$ . On appelle *système de lois marginales* du processus (ou du champ)  $\mathbf{X}$  la collection de lois de probabilité

$\{P_{\mathbf{X}^{(i)}}(d\mathbf{x}^{(i)}), i \in I\}$ . La donnée de la loi de probabilité d'un processus (d'un champ) est équivalente à la donnée de tout le système de lois marginales du processus (du champ). Ainsi un processus  $\mathbf{X}$  n'est gaussien que si chacune de ses lois marginales est une probabilité gaussienne. De manière générale, les variables, les processus ou les champs stochastiques sont notés avec des majuscules. Une *réalisation* (respectivement une *trajectoire*) de la variable aléatoire  $X$  (resp. du champ stochastique  $\{\mathbf{X}(t), t \in T\}$  où  $T$  est l'ensemble d'indexation) est notée en minuscule  $x(a)$  (resp.  $\mathbf{x}(t; a)$ ) avec  $a \in \mathcal{A}$ .

L'*espérance mathématique*, ou moyenne d'ensemble, est notée dans toute la suite  $\mathbb{E}\{\cdot\}$  et est définie par :

$$\mathbb{E}\{\mathbf{X}(t)\} = \int_{\mathbb{K}^m} \mathbf{x} P_{\mathbf{X}(t)}(d\mathbf{x}, t)$$

Nous nous limiterons dans cet exposé aux seuls champs du *second ordre*  $\mathbf{X}(t)$  tels que :

$$\mathbb{E}\left\{\|\mathbf{X}(t)\|_m^2\right\} < +\infty$$

c'est-à-dire aux champs d'énergie finie. L'espace des champs du second ordre définis sur  $(\mathcal{A}, T, P)$ , indexés sur  $T$ , à valeurs  $\mathbb{K}^m$ , est noté  $L^2(\mathcal{A}, \mathbb{K}^m)$ . C'est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire :

$$((\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2))_m = \iint_{\mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^m} (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)_m P_{\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2}(d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2)$$

associé à la norme  $\|\mathbf{X}\|_m^2 = ((\mathbf{X}, \mathbf{X}))_m = \mathbb{E}\{\|\mathbf{X}\|_m^2\}$ . La *moyenne*  $\mathbf{m}_{\mathbf{X}} : T \rightarrow \mathbb{K}^m$  du champ stochastique  $\mathbf{X}(t)$  indexé sur  $T$  à valeurs  $\mathbb{K}^m$  est la fonction  $t \mapsto \mathbf{m}_{\mathbf{X}}(t) = \mathbb{E}\{\mathbf{X}(t)\}$ . Le champ est *centré* ssi  $\mathbf{m}_{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{0}$  pour tout  $t \in T$ . La *fonction d'auto-corrélation*  $\mathbf{R}_{\mathbf{X}} : T \times T \rightarrow \text{Mat}_{\mathbb{K}}(m, m)$  du champ stochastique  $\mathbf{X}(t)$  est la fonction  $t, t' \mapsto \mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t, t')$  telle que :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t, t') = \mathbb{E}\{\mathbf{X}(t) \otimes \overline{\mathbf{X}}(t')\}$$

Pour tout  $t \in T$  fixé,  $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t, t)$  est une matrice hermitienne, positive. On vérifie aisément que  $\text{tr} \mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t, t') = ((\mathbf{X}(t), \mathbf{X}(t')))_{m, m}$ . Les termes diagonaux définissent les auto-corrélations des composantes du champ stochastique, les termes extra diagonaux les inter-corrélations. La *fonction de covariance*  $\mathbf{C}_{\mathbf{X}} : T \times T \rightarrow \text{Mat}_{\mathbb{K}}(m, m)$  du champ stochastique  $\mathbf{X}(t)$  est la fonction  $t, t' \mapsto \mathbf{C}_{\mathbf{X}}(t, t')$  telle que :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{X}}(t, t') = \mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t, t') - \mathbf{m}_{\mathbf{X}}(t) \otimes \overline{\mathbf{m}_{\mathbf{X}}(t')}$$

Pour tout  $t \in T$  fixé,  $\mathbf{C}_{\mathbf{X}}(t, t)$  est aussi une matrice hermitienne, positive. Les termes diagonaux définissent les covariances des composantes du champ stochastique, les termes extra diagonaux les inter-covariances. Le *coefficient de corrélation*  $r_{jk}(t, t')$  des variables aléatoires  $X_j(t)$  et  $X_k(t')$  est :

$$r_{jk}(t, t') = \frac{|\mathbf{C}_{\mathbf{X}}(t, t')_{jk}|}{\sigma_j(t)\sigma_k(t')}$$

à valeurs dans  $[0, 1]$ , avec  $\sigma_j(t) = [\mathbf{C}_{\mathbf{X}}(t, t)]_{jj}^{1/2}$  définissant l'*écart-type* de la variable aléatoire  $X_j(t)$ ;  $[\mathbf{C}_{\mathbf{X}}(t, t)]_{jj}$  désigne sa *variance* et  $[\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t, t)]_{jj}$  son *moment d'ordre 2*.

Une classe de processus (ou champs) stochastiques du second ordre particulièrement intéressante dans la pratique est celle des processus (champs) *stationnaires en moyenne*



d'ordre deux (m.o.d.).  $\mathbf{X}(t)$  indexé sur  $T = \mathbb{R}^d$  à valeurs dans  $\mathbb{K}^m$  est un tel champ ssi il vérifie :

$$\begin{cases} \mathbf{m}_{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{m}_0 & \forall t \in T \\ \mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t, t') = \mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t - t') & \forall (t, t') \in T \times T \end{cases}$$

Le champ  $\mathbf{X}(t)$  est *continu en m.o.d.* sur  $T$  si l'application  $t \mapsto \mathbf{X}(t)$  est continue de  $T$  dans  $L^2(\mathcal{A}, \mathbb{K}^m)$ . On montre [195] qu'une condition nécessaire et suffisante pour que ce soit le cas est que la fonction d'autocorrélation  $t, t' \mapsto \mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t, t')$  doit être continue en chaque point  $(t, t)$  de  $T \times T$ . En particulier, si le champ est stationnaire en m.o.d.,  $T = \mathbb{R}^d$ , on doit avoir la continuité de  $t \mapsto \mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t)$  en  $t = 0$  pour avoir la continuité en m.o.d. du champ. Le théorème de Wiener-Khinchine indique que la fonction d'auto-corrélation d'un champ stochastique stationnaire et continu en m.o.d. admet la représentation intégrale :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(\omega, t)_d} \mathbf{M}_{\mathbf{X}}(d\omega)$$

$\mathbf{M}_{\mathbf{X}}(d\omega) \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(m, m)$  est la *mesure spectrale matricielle* du champ stochastique  $\mathbf{X}(t)$  et est hermitienne, positive. Si elle admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue  $d\omega$  sur  $\mathbb{R}^d$  :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{X}}(d\omega) = \mathbf{S}_{\mathbf{X}}(\omega) d\omega$$

alors la fonction  $\omega \mapsto \mathbf{S}_{\mathbf{X}}(\omega)$  de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\text{Mat}_{\mathbb{C}}(m, m)$  est la *fonction de densité spectrale* matricielle du champ  $\mathbf{X}(t)$ . Elle est hermitienne positive, ses termes diagonaux sont positifs et appelés densités spectrales de puissance. Si  $[\mathbf{S}_{\mathbf{X}}(\omega)]_{jj}$  et  $[\mathbf{S}_{\mathbf{X}}(\omega)]_{kk}$  ne sont pas nuls, on définit la *cohérence* des processus  $X_j(t)$  et  $X_k(t)$  par :

$$\gamma_{jk}^2(\omega) = \frac{|[\mathbf{S}_{\mathbf{X}}(\omega)]_{jk}|^2}{[\mathbf{S}_{\mathbf{X}}(\omega)]_{jj} [\mathbf{S}_{\mathbf{X}}(\omega)]_{kk}}$$

qui est un nombre réel compris entre 0 et 1.

## Annexe B

# Réduction de variance

### B.1 Échantillonnage stratifié

La méthode d'échantillonnage stratifié consiste à subdiviser le domaine  $S$  en  $M$  sous-domaines  $S_i$ ,  $i \in \{1, \dots, M\}$ , de poids respectifs  $p_i$  tels que :

$$p_i = \int_{S_i} P_X(dx), \quad \sum_{i=1}^M p_i = 1 \quad (\text{B.1})$$

Dans chacun des sous-domaines ne sont tirés que  $N_i$  réalisations de la variable aléatoire  $X$ , la somme des tirages restant égale au nombre total de tirages choisi à priori pour la simulation. Ainsi la variable aléatoire échantillonnée dans le sous-domaine  $S_i$ , notée  $X_i$ , suit la loi de probabilité :

$$\begin{cases} P_{X_i}(dx) = \frac{P_X(dx)}{p_i} & \text{sur } S_i \\ P_{X_i}(dx) = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On peut obtenir des réalisations de la variable aléatoire  $X_i$  en prenant par exemple :

$$X_i^j = \frac{i - X_U}{N}, \quad j = 1, \dots, d \quad (\text{B.2})$$

L'intégrale à évaluer par la méthode de Monte-Carlo étant réécrite sous la forme :

$$I = \sum_{i=1}^M \int_{S_i} f(x) P_X(dx) = \sum_{i=1}^M I_i$$

on a alors :

$$I_i = p_i \int_{S_i} f(x) P_{X_i}(dx) = p_i \mathbb{E} \{f(X_i)\} \stackrel{\text{déf}}{=} p_i m_i$$

L'intégrale  $I_i$  peut être estimée par :

$$\hat{\theta}_i = \frac{p_i}{N_i} \sum_{k_i=1}^{N_i} f(x_{i,k_i}), \quad i = 1, \dots, M$$

et la somme de ces intégrales par :

$$\hat{\theta}_s = \sum_{i=1}^M \hat{\theta}_i = \sum_{i=1}^M \frac{p_i}{N_i} \sum_{k_i=1}^{N_i} f(x_{i,k_i}) \quad (\text{B.3})$$

Cet estimateur est non biaisé et sa variance s'écrit :

$$V_{\hat{\theta}_s} = \sum_{i=1}^M \frac{p_i^2 \sigma_i^2}{N_i} \quad (\text{B.4})$$

où  $\sigma_i$  est par définition :

$$\sigma_i \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{\mathbb{E}\{f(X_i)^2\} - \mathbb{E}\{f(X_i)\}^2}$$

L'objectif de réduction de variance est atteint si par l'estimateur  $\hat{\theta}_s$  on obtient  $V_{\hat{\theta}_s} \leq V_{\hat{\theta}_r}$  où  $V_{\hat{\theta}_r}$  est la variance de l'estimateur Eq.(3.81) ; ceci dépend du choix des  $N_i$ . Le choix optimal qui permet de minimiser  $V_{\hat{\theta}_s}$  sous la contrainte (B.1) est :

$$\frac{N_i}{N} = \frac{p_i \sigma_i}{\sum_{j=1}^M p_j \sigma_j}$$

mais dans la pratique les  $\sigma_i$  ne sont pas connus, ou alors doivent d'abord être estimés lors d'une première simulation. Si  $d$  est grand (en fait  $d \gtrsim 4$ ) cette approche devient beaucoup trop coûteuse. Un choix naturel consiste plutôt à prendre  $N_i = p_i N$ , ce qui correspond à la méthode de l'échantillonnage systématique. On montre alors que :

$$V_{\hat{\theta}_s} = V_{\hat{\theta}_r} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^M p_i (m_i - I)^2 \quad (\text{B.5})$$

## B.2 Méthode “Latin Hypercube Sampling”

La méthode dite du “Latin Hypercube Sampling” (LHS) a été introduite par McKay *et al.* [153]. C'est une extension de la méthode de l'échantillonnage stratifié qui consiste à subdiviser chacune des  $d$  dimensions de la variable aléatoire  $X$  en  $N$  strates de poids respectifs  $\frac{1}{N}$  et ne prendre qu'un échantillon dans chaque strate. Par cette opération, le domaine d'échantillonnage  $S$  est divisé en  $N^d$  cellules équiprobables notées  $S_i$  ( $p_i = N^{-d}$ ) et repérées par leurs  $d$  coordonnées à valeurs dans  $\{1, \dots, N\}$ . Les tirages sont ensuite effectués comme suit : choisir au hasard une cellule et tirer le premier échantillon dans cette cellule ; éliminer toutes les cellules ayant une coordonnée en commun avec la première cellule choisie et choisir une nouvelle cellule au hasard parmi les  $(N - 1)^d$  restantes ; tirer le deuxième échantillon dans cette cellule et éliminer à nouveaux toutes les cellules ayant une coordonnée en commun avec cette dernière ; etc. . . On obtient ainsi les  $N$  réalisations désirées pour la variable aléatoire  $X$ . En notant  $X_i$  la variable aléatoire échantillonnée dans la cellule  $S_i$ , sa loi de probabilité est donnée par :

$$\begin{cases} P_{X_i}(dx) = N^d P_X(dx) & \text{sur } S_i \\ P_{X_i}(dx) = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On peut obtenir des réalisations de la variable aléatoire  $X_i$  en prenant par exemple :

$$X_i^j = \frac{\pi_j(i) - X_U}{N}, \quad j = 1, \dots, d \quad (\text{B.6})$$

où les  $\pi_j$  désignent des permutations uniformes aléatoires indépendantes (pour différents  $j$ ) des entiers  $1, 2, \dots, N$ . L'avantage de cette procédure est que si l'un des paramètres qui définissent la variable aléatoire  $X$  est prépondérant devant les autres, celui-ci pourra être identifié facilement. En effet elle permet de tester chacun des paramètres pour chacune des subdivisions de son intervalle de validité. Par contre s'il existe d'importantes interactions entre les paramètres on ne peut rien en déduire de plus par rapport à des tirages quelconques. L'estimateur de l'intégrale de l'Eq.(3.80) est noté :

$$\hat{\theta}_l = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \quad (\text{B.7})$$

les réalisations  $x_i$  ayant été obtenues suivant l'Eq.(B.6). Il est sans biais et on peut montrer [159] que :

$$V_{\hat{\theta}_l} \leq \frac{N}{N-1} V_{\hat{\theta}_r} \quad (\text{B.8})$$

La méthode LHS avec  $N$  tirages est toujours meilleure que la méthode de Monte-Carlo standard avec  $N - 1$  tirages.

### B.3 Méthode de quadrature

Les méthodes de quadrature sont une extension des méthodes dites de la variable de contrôle proposée Chorin [36] puis Maltz et Hitzl [144] pour le cas multi-dimensionnel. L'estimateur usuel (3.81) est remplacé par l'estimateur suivant, dépendant d'une variable de contrôle  $g$  :

$$\hat{\theta}_v = \mathbb{E}\{g\} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f(x_i) - g(x_i)) \quad (\text{B.9})$$

$g$  est une approximation satisfaisante de  $f$  choisie de telle sorte que  $\mathbb{E}\{g\}$  est "facile" à calculer. Alors que :

$$V_{\hat{\theta}_r} = \frac{1}{N} \left( \mathbb{E}\{f^2\} - \mathbb{E}\{f\}^2 \right)$$

on vérifie ici aisément que :

$$V_{\hat{\theta}_v} = \frac{1}{N} \left( \mathbb{E}\{(f - g)^2\} - (\mathbb{E}\{f\} - \mathbb{E}\{g\})^2 \right) \quad (\text{B.10})$$

si bien que si  $g$  est bien choisie ( $f - g$  "petit"), on obtient  $V_{\hat{\theta}_v} < V_{\hat{\theta}_r}$ . Mais ce choix n'est pas facile, et ce d'autant moins que la dimension est grande. Chorin [36] propose ainsi d'utiliser une quadrature de la forme :

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \phi_k(x) \quad (\text{B.11})$$

où les  $\phi_k$  sont des polynômes orthogonaux associés au poids  $P_X(dx)$  sur  $\bar{S}$  définis de manière unique sur l'espace fonctionnel :

$$E = L^2(S, P_X(dx)) = \left\{ \varphi; \int_{\bar{S}} |\varphi(x)|^2 P_X(dx) < +\infty \right\}$$

et son produit scalaire  $(\varphi_1, \varphi_2)_E = \int_{\bar{S}} \varphi_1(x) \overline{\varphi_2(x)} P_X(dx)$ . Les  $\phi_k$  sont de degré  $k$  et le coefficient de  $x^k$  est 1, les autres coefficients étant réels. En particulier  $\phi_0(x) = 1$ . Les coefficients du développement de l'Eq.(B.11) tronqué à l'ordre  $K$  sont obtenus par :

$$\alpha_k = (f, \phi_k)_E = \mathbb{E} \{ f \phi_k \} \quad (\text{B.12})$$

La simulation de Monte-Carlo est divisée en deux séries de tirages indépendantes  $N_1$  et  $N_2$  tels que  $N_1 + N_2 = 2N$  donnant les réalisations  $x_i, i \in \{1, \dots, N_1\}$ , et  $x'_i, i \in \{1, \dots, N_2\}$ , de la variable aléatoire  $X$ . La deuxième sert à estimer les coefficients  $\alpha_k$  (on note ces estimateurs  $\hat{\alpha}_k$ ) et la première sert à estimer la somme à droite de l'égalité (B.9). Comme  $\mathbb{E} \{ g \} = \alpha_0 = \mathbb{E} \{ f \}$  on en déduit la nouvelle forme de l'estimateur  $\hat{\theta}_v$ , maintenant notée  $\hat{\theta}_c$  :

$$\hat{\theta}_c = \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} f(x'_i) + \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} (f(x_i) - \hat{g}^K(x_i)) \quad (\text{B.13})$$

avec :

$$\hat{g}^K(x) = \sum_{k=0}^K \hat{\alpha}_k \phi_k(x) \quad (\text{B.14})$$

$$\hat{\alpha}_k = \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} f(x'_i) \phi_k(x'_i) \quad (\text{B.15})$$

Dans la méthode de quadrature originale due à Ermakov [177], un estimateur de  $\alpha_0 = \mathbb{E} \{ f \}$  est obtenu par collocation en résolvant le système algébrique déduit de :

$$g^K(x_i) = f(x_i)$$

écrit pour tous les  $x_i, i \in \{1, \dots, K+1\}$ . L'estimateur  $\hat{\theta}_c$  est non biaisé et sa variance est :

$$V_{\hat{\theta}_c} = \frac{1}{N_1} \left( \sum_{k=K+1}^{+\infty} \alpha_k^2 + \frac{1}{N_2} \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 \right) \quad (\text{B.16})$$

avec

$$\sigma_k^2 \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{E} \{ (f \phi_k)^2 \} - \mathbb{E} \{ f \phi_k \}^2$$

La première somme à droite de l'Eq.(B.16) donne l'erreur quadratique moyenne due à la troncature d'ordre  $K$  du développement (B.11) et la deuxième somme correspond à une pénalisation additionnelle introduite par l'estimation des coefficients  $\alpha_k$ , Eq.(B.15). Comme

$$\sum_{k=K+1}^{+\infty} \alpha_k^2 = NV_{\hat{\theta}_c} - \sum_{k=1}^K \alpha_k^2$$

est une somme qui ne croît jamais en fonction de  $K$ , on peut atteindre l'objectif de réduction de variance pour  $N_1 \simeq N_2$  grand car alors :

$$V_{\hat{\theta}_c} \simeq V_{\hat{\theta}_r} - \frac{1}{N_1} \sum_{k=1}^K \alpha_k^2$$

Maltz et Hiltz [144] ont encore montré qu'il était possible d'optimiser cette réduction de variance par un choix particulier de  $N_1$  et  $N_2$  différents, ou par une partition de l'espace d'échantillonnage  $S$  avec exactement  $N_1 = N_2 = N$  et en construisant deux estimateurs  $\hat{\theta}_c$  pour lesquels on inverse les rôles des échantillons  $x_i$  et  $x'_i$ . Le cas d'application le plus intéressant de cette technique est celui pour lequel la variable aléatoire  $X$  suit une loi de probabilité gaussienne et toutes ses composantes sont mutuellement indépendantes. En effet on connaît alors une expression explicite des polynômes orthogonaux, ce sont les polynômes d'Hermite multi-dimensionnels  $\mathcal{H}_k$  [80] donnés par :

$$\mathcal{H}_k(x_{j_1}, \dots, x_{j_k}) = (-1)^k \exp\left(\frac{1}{2}\|x\|_d^2\right) \frac{\partial^k}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}} \left[ \exp\left(-\frac{1}{2}\|x\|_d^2\right) \right]$$

pour  $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, d\}$ , orthogonaux par rapport à la mesure :

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \exp\left(-\frac{1}{2}\|x\|_d^2\right).$$



## Annexe C

# Simulation de processus stochastiques

Dans la présentation de la méthode de Monte-Carlo §3.3, nous avons supposé implicitement que l'aléa pouvait être réduit à un certain nombre de *variables aléatoires* de loi de probabilité connue. Dans les applications qui nous intéressent, nous avons en fait à simuler des champs stochastiques, stationnaires (homogènes) ou non stationnaires (non homogènes), que ce soit le champ sismique incident ou les perturbations des modules sur la zone hétérogène. On présente donc ici les méthodes de simulation retenues pour de tels champs, qui permettent de se ramener au cas de la simulation de variables aléatoires uniquement. Nous considérons dans cette annexe un champ stochastique  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  défini sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$ , indexé sur  $\mathbb{R}^d$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , du second ordre, centré, continu en moyenne d'ordre 2 dont la fonction d'auto-corrélation, supposée connue, s'écrit :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbb{E} \{ \mathbf{X}(\mathbf{x}_1) \otimes \mathbf{X}(\mathbf{x}_2) \}$$

### C.1 Représentation spectrale des processus gaussiens

La méthode de simulation des champs stochastiques stationnaires ( $d = 1$ ) ou homogènes ( $d > 1$ ) est fondée sur leur représentation intégrale [171, 187, 192]. Les hypothèses complémentaires introduites sur le champ  $\mathbf{X}$  sont :

- $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{R}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$  et  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{R}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  est continue, intégrable et de carré intégrable ;
- La mesure spectrale matricielle  $\mathbf{M}_{\mathbf{X}}(d\mathbf{k})$  du champ  $\mathbf{X}$  admet une densité  $\mathbf{S}_{\mathbf{X}}(\mathbf{k})$  à support compact noté  $\overline{\Omega}_{\mathbf{S}} = [-k_{1M}, k_{1M}] \times \cdots \times [-k_{dM}, k_{dM}]$  et à valeurs dans  $\text{End}(\mathbb{C}^n)$ . Elle vérifie :

$$\mathbf{S}_{\mathbf{X}}(-\mathbf{k}) = \overline{\mathbf{S}_{\mathbf{X}}(\mathbf{k})} \quad \forall \mathbf{k} \in \overline{\Omega}_{\mathbf{S}} \quad (\text{C.1})$$

#### C.1.1 Représentation intégrale

Comme tout champ homogène, le champ  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  admet la représentation intégrale suivante, vraie pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$   $P$ -presque sûrement :

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \int_{\overline{\Omega}_{\mathbf{S}}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{Z}(\mathbf{k}) \quad (\text{C.2})$$



où  $d\mathbf{Z}$  est la mesure spectrale stochastique du champ  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  définie sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$  et qui vérifie la propriété d'orthogonalité :

$$\mathbb{E} \{d\mathbf{Z}(\mathbf{k}_1) \otimes \overline{d\mathbf{Z}(\mathbf{k}_2)}\} = \begin{cases} d\mathbf{M}_{\mathbf{X}}(\mathbf{k}) & \text{si } \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = \mathbf{k} \\ \mathbf{0}_{(n \times n)} & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Elle s'interprète comme un champ aléatoire à incréments non corrélés et orthogonaux [134]. Donc un champ homogène est représenté par une somme de sinusoïdes pondérées par des coefficients aléatoires orthogonaux à valeurs vectoriels.

### C.1.2 Approximation du champ stochastique

Compte tenu des remarques précédentes, on voit que l'on peut construire une approximation du champ stochastique  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  à partir de sa représentation intégrale à condition d'avoir décomposé au préalable sa fonction de densité spectrale matricielle (en admettant qu'elle existe). Or celle-ci est une matrice hermitienne positive donc :

- Soit elle est de rang maximum et alors elle est définie positive et sa matrice admet une décomposition type Cholesky :

$$[\mathbf{S}_{\mathbf{X}}(\mathbf{k})] = [\mathbf{H}(\mathbf{k})] [\mathbf{H}(\mathbf{k})]^* \quad (\text{C.4})$$

où  $[\mathbf{H}(\mathbf{k})]$  est une matrice triangulaire inférieure ;

- Soit elle n'est pas de rang maximum et l'on se ramène au cas précédent en prenant la décomposition de Cholesky de la matrice de  $\mathbf{S}_{\mathbf{X}}(\mathbf{k})$  relativement à la base de  $\mathbb{C}^n$  constituée d'une base de  $\text{Ker } \mathbf{S}_{\mathbf{X}}(\mathbf{k})^\perp$  et d'une base de  $\text{Ker } \mathbf{S}_{\mathbf{X}}(\mathbf{k})$ . Dans ce cas la matrice  $[\mathbf{H}(\mathbf{k})]$  est généralement pleine. La base de projection peut être construite par exemple en séparant les modes propres de  $\mathbf{S}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  de valeurs propres strictement positives de ceux dont les valeurs propres sont nulles.

Chacun des côtés  $[-k_{jM}, k_{jM}]$  du support compact  $\bar{\Omega}_{\mathbf{S}}$  de la fonction de densité spectrale matricielle est partitionné en  $N_j$  parties égales de longueur :

$$\Delta_j = \frac{2k_{jM}}{N_j} \quad (\text{C.5})$$

et centrées en :

$$k_{j,p_j}^0 = -k_{jM} + \left(p_j + \frac{1}{2}\right) \Delta_j, \quad p_j \in \{0, 1, \dots, N_j - 1\} \quad (\text{C.6})$$

On note :

$$\begin{cases} N = N_1 \times \dots \times N_d \\ N_m = \inf \{N_1, \dots, N_d\} \\ B_N = \prod_{j=1}^d \{0, 1, \dots, N_j - 1\} \\ |\Delta| = \Delta_1 \times \dots \times \Delta_d \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

où  $|\Delta|$  est la surface totale d'une subdivision de  $\bar{\Omega}_{\mathbf{S}}$ . L'approximation du champ stochastique  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  est le champ stochastique  $\mathbf{X}^N(\mathbf{x})$  défini sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$  indexé sur  $\mathbb{R}^d$  à valeurs  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\forall p \in \{1, \dots, n\}$  :

$$X_p^N(\mathbf{x}) = \sqrt{2|\Delta|} \Re \left\{ \sum_{q=1}^n \sum_{j \in B_N} H_{pq}(\mathbf{k}_j^0) Z_{q,j} e^{i\mathbf{k}_j^0 \cdot \mathbf{x} + i\phi_{q,j}} \right\} \quad (\text{C.8})$$

où :

- $\phi_{q,j}$ ,  $q = 1, \dots, n$ ,  $j \in B_N$ , sont des variables aléatoires définies sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$  distribuées uniformément sur  $[0, 2\pi]$  et mutuellement indépendantes ;
- $Z_{q,j}$ ,  $q = 1, \dots, n$ ,  $j \in B_N$ , sont (i) soit des constantes égales à 1, (ii) soit des variables aléatoires définies par :

$$Z_{q,j} = \sqrt{-\ln \psi_{q,j}} \quad (\text{C.9})$$

avec  $\psi_{q,j}$ ,  $q = 1, \dots, n$ ,  $j \in B_N$ , des variables aléatoires définies sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$  distribuées uniformément sur  $[0, 1]$ , mutuellement indépendantes et indépendantes des  $\phi_{q,j}$ .

Avec le premier choix des  $Z_{q,j}$ , l'approximation du champ stochastique  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  ainsi construite est asymptotiquement un champ gaussien pour  $N_m \rightarrow +\infty$  alors qu'avec le second choix toutes les approximations pour tous les  $N$  sont des champs gaussiens.

**remarque C.1** – On peut identifier  $\mathbb{C}$  à  $\mathbb{R}^2$  auquel cas si le champ stochastique  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  est à valeurs  $\mathbb{C}^n$ , on se ramène aux développements précédents pour le champ stochastique  $\{\Re(\mathbf{X}(\mathbf{x})), \Im(\mathbf{X}(\mathbf{x}))\}$  à valeurs  $\mathbb{R}^{2n}$  ■

**remarque C.2** – La méthode introduite ci-dessus permet également de simuler des champs stochastiques non homogènes si l'on dispose d'une représentation intégrale sous la forme, pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  :

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_{\mathbf{S}}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) d\mathbf{Z}(\mathbf{k}), \quad P\text{-presque sûrement}$$

avec  $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) : \mathbb{R}^d \times \overline{\Omega}_{\mathbf{S}} \hookrightarrow \text{End}(\mathbb{C}^n)$  une fonction continue déterministe ■

### C.1.3 Propriétés de l'approximation

On donne sans démonstration les principales propriétés du champ d'approximation  $\mathbf{X}^N(\mathbf{x})$ . Pour plus de détails, on pourra se référer à [192, 171].

1. Le champ stochastique  $\mathbf{X}^N(\mathbf{x})$  est du second ordre, centré, homogène et continu en m.o.d. et sa mesure spectrale matricielle, sans densité, s'écrit :

$$d\mathbf{M}_{\mathbf{X}}^N(\mathbf{k}) = |\Delta| \sum_{j \in B_N} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_j^0) \mathbf{S}_{\mathbf{X}}(\mathbf{k}) \quad (\text{C.10})$$

2. La fonction d'auto-corrélation  $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^N(\mathbf{x})$  et la mesure spectrale  $d\mathbf{M}_{\mathbf{X}}^N(\mathbf{k})$  du champ stochastique  $\mathbf{X}^N(\mathbf{x})$  convergent respectivement vers la fonction d'auto-corrélation  $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  et la mesure spectrale  $\mathbf{S}_{\mathbf{X}}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$  du champ stochastique  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  quand  $N_m \rightarrow +\infty$ .
3. Par le théorème central limite, le champ stochastique  $\mathbf{X}^N(\mathbf{x})$  converge en loi vers un champ stochastique gaussien pour  $N_m \rightarrow +\infty$ , en l'occurrence  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  ; donc la méthode de représentation spectrale ne s'applique qu'à des champs gaussiens.
4. Pour tout compact  $\mathcal{K}$  de  $\mathbb{R}^d$ , la variable aléatoire  $\sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{K}} |X_p^N(\mathbf{x})|$  converge en loi vers la variable aléatoire  $\sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{K}} |X_p(\mathbf{x})|$  lorsque  $N_m \rightarrow +\infty$ , et ce pour tout  $p \in \{0, \dots, n\}$ .

## C.2 Processus non gaussiens

La méthode de simulation fondée sur la représentation intégrale des champs stochastiques ne s'applique que dans le cas de lois gaussiennes. Pour un champ homogène non gaussien dont on connaît la fonction de densité spectrale matricielle et les  $K$  premiers cumulants, on peut simuler ses trajectoires par la méthode proposée par Lin & Cai [134] (appelée simulation par une somme d'impulsions aléatoires, ou "random pulse train") ou Poirion [170].

### C.2.1 Processus de Poisson filtré stationnaire

En reprenant les notations de la section précédente, considérons le champ stochastique :

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \sum_{j \in \mathbb{N}^d} \mathbf{F}(\mathbf{x} - \mathbf{Y}_j) \mathbf{Z}_j \quad (\text{C.11})$$

où :

- $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x})$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}^d$  à valeurs dans  $\text{Mat}_{\mathbb{R}}(n, n)$  ;
- $j$  est un multi-indice de  $\mathbb{N}^d$  avec  $j = (j_1, \dots, j_d)$  ;
- les  $\mathbf{Z}_j = (Z_{1,j}, \dots, Z_{n,j})$  sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  dont chaque composante a la même loi de probabilité que la variable aléatoire à valeurs réelles  $\Theta$  telle que  $\mathbb{E}\{\Theta\} = 0$  et  $\mathbb{E}\{\Theta^2\} = \sigma^2$  ;
- les  $\mathbf{Y}_j = (Y_{1,j_1}, \dots, Y_{d,j_d})$  sont les temps d'arrivée de  $d$  processus de Poisson indépendants de paramètres respectifs  $\gamma_1, \dots, \gamma_d$ .

Alors le champ stochastique  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  converge en loi vers un champ stochastique non gaussien  $\mathbf{X}_s(\mathbf{x})$  stationnaire dont :

- la fonction de densité spectrale matricielle définie sur  $\mathbb{R}^d$  à valeurs dans  $\text{Mat}_{\mathbb{C}}(n, n)$  s'écrit :

$$\mathbf{S}_{\mathbf{X}_s}(\mathbf{k}) = \frac{\gamma \sigma^2}{(2\pi)^d} \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{k}) \tilde{\mathbf{F}}^*(\mathbf{k}) \quad (\text{C.12})$$

avec  $\gamma = \prod_{k=1}^d \gamma_k$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(\mathbf{x}, \mathbf{k})_d} \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  et  $\tilde{\mathbf{F}}^*(\mathbf{k}) = \overline{\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{k})}^T$  ;

- les moments  $\mathcal{M}_{\mathbf{X}_s, \alpha} = \mathbb{E}\{(X_{s,1}(\mathbf{x}))^{\alpha_1} \dots (X_{s,n}(\mathbf{x}))^{\alpha_n}\}$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ , sont donnés par :

$$\mathcal{M}_{\mathbf{X}_s, \alpha} = (-i)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \dots \partial \xi_n^{\alpha_n}} \exp \left[ \gamma \int_{\mathbb{R}^d} \left( \mathbb{E} \left\{ e^{i(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{F}(\mathbf{y}) \boldsymbol{\Theta})_n} \right\} - 1 \right) d\mathbf{y} \right] \Bigg|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}} \quad (\text{C.13})$$

On peut en déduire une relation linéaire entre les moments de la variable aléatoire  $\Theta$  et les cumulants du champ  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ .

Le problème inverse consiste donc à simuler des trajectoires de  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  connaissant sa fonction de densité spectrale matricielle  $\mathbf{S}_{\mathbf{X}}(\mathbf{k})$  et ses  $K$  premiers cumulants  $\mathcal{X}_{\mathbf{X}, \alpha}$ ,  $|\alpha| \leq K$ . Pour cela,  $\mathbf{S}_{\mathbf{X}}(\mathbf{k})$  est décomposée suivant l'Eq.(C.4) :

$$\mathbf{S}_{\mathbf{X}}(\mathbf{k}) = \mathbf{H}(\mathbf{k}) \mathbf{H}(\mathbf{k})^*$$

ce qui permet de définir la fonction  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x})$  à utiliser dans l'Eq.(C.11) sous la forme :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\sigma \sqrt{\gamma}}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})_d} \mathbf{H}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (\text{C.14})$$

Dans le cas où  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  est un champ scalaire  $X(\mathbf{x})$  ( $n = 1$ ), les moments  $\mathcal{M}_{\Theta, \alpha}$  sont liés, grâce à l'Eq.(C.13), aux cumulants du champ stochastique  $X(\mathbf{x})$  par une relation simple :

$$\mathcal{K}_{X, \alpha} = \gamma \left( \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{F}(\mathbf{x})^\alpha d\mathbf{x} \right) \mathcal{M}_{\Theta, \alpha} \quad (\text{C.15})$$

### C.2.2 Champ discrétisé

En pratique la fonction de densité spectrale  $\mathbf{S}_{\mathbf{X}}(\mathbf{k})$  a pour support le compact  $\bar{\Omega}_{\mathbf{S}} = \prod_{k=1}^d [-k_{kM}, k_{kM}]$  – et si ce n'est pas le cas on réduit son domaine de définition à un compact tel qu'en dehors de celui-ci elle est négligeable. Ainsi le pas de discrétisation de chacune des composantes de  $\mathbf{x}$  doit être choisi, en vertu du théorème d'échantillonnage, tel que  $\Delta x_k \leq \frac{\pi}{k_{kM}}$  pour  $k = 1, \dots, d$ . Le champ approché discrétisé est alors construit selon :

$$\mathbf{X}^N(\beta \Delta \mathbf{x}) = \sum_{j=(1, \dots, 1)}^N \mathbf{F}(\beta \Delta \mathbf{x} - \mathbf{Y}_j) \mathbf{Z}_j \quad (\text{C.16})$$

avec  $N = (N_1, \dots, N_d) \in \mathbb{N}^d$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{N}^d$  tel que  $\beta_k \in \{1, \dots, N_k\}$  et  $\Delta \mathbf{x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_d)$ . Afin que le nombre d'arrivée des impulsions dans l'intervalle  $\prod_{k=1}^d [0, N_k \Delta x_k]$  soit significatif, Poirion [170] montre qu'il convient de choisir :

$$\gamma_k = \frac{1}{\Delta x_k}, \quad k = 1, \dots, d \quad (\text{C.17})$$

## C.3 Développement de Karhunen-Loeve

On reprend les hypothèses données en introduction et l'on suppose que le champ stochastique  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  est maintenant indexé sur un ouvert quelconque  $\mathcal{O}$  de  $\mathbb{R}^d$  et à valeurs  $\mathbb{C}^n$ . Il vérifie en outre :

$$\text{tr} \int_{\mathcal{O}} \mathbf{R}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} < +\infty \quad (\text{C.18})$$

qui traduit le fait que les trajectoires  $\mathbf{x} \mapsto x(\mathbf{x}; a)$  du processus du second ordre  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  sont de carré intégrable. On notera classiquement  $L^2(\mathcal{A} \otimes \mathcal{O}, \mathbb{C}^n)$  l'ensemble des processus du second ordre qui vérifient (C.18).

**remarque C.3** – Supposons que le processus centré  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  soit homogène en m.o.d., c'est-à-dire que  $\mathcal{O} = \mathbb{R}^d$  et  $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \mathbf{R}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ . Alors  $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{R}_{\mathbf{X}}(\mathbf{0})$  et la condition de l'Eq.(C.18) n'est pas vérifiée. La méthode du développement de Karhunen-Loeve ne s'applique pas aux processus homogènes sur tout leur domaine d'indexation, par contre elle peut s'appliquer à la restriction d'un processus homogène sur un domaine borné ■

### C.3.1 Définition et résultats

On définit l'opérateur intégral  $\mathcal{C}_{\mathbf{X}} : L^2(\mathcal{O}, \mathbb{C}^n) \rightarrow L^2(\mathcal{O}, \mathbb{C}^n)$  de noyau la fonction d'auto-corrélation  $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  par :

$$(\mathcal{C}_{\mathbf{X}} u, v)_{L^2} = \iint_{\mathcal{O} \times \mathcal{O}} (\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') u(\mathbf{x}'), v(\mathbf{x}))_n d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \quad (\text{C.19})$$

et appelé opérateur de corrélation. Il est [192] linéaire, hermitien positif et de Hilbert-Schmidt (comme opérateur intégral [52]), donc compact. Alors le spectre des valeurs propres  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \rightarrow 0$  de  $\mathcal{C}_{\mathbf{X}}$  est discret et forme une suite monotone de nombres décroissants positifs d'ordre de multiplicité fini sans point d'accumulation, sauf peut-être 0 [46]. Les vecteurs propres  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  de  $\mathcal{C}_{\mathbf{X}}$  tels que  $\mathcal{C}_{\mathbf{X}}\varphi_j = \lambda_j\varphi_j$  forment une famille complète orthonormale de  $L^2(\mathcal{O}, \mathbb{C}^n)$  :

$$(\varphi_j, \varphi_k)_{L^2} = \delta_{jk} \quad (\text{C.20})$$

La fonction d'auto-corrélation se décompose alors comme suit :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j \varphi_j(\mathbf{x}) \otimes \overline{\varphi_j(\mathbf{x}')} \quad (\text{C.21})$$

et la série est convergente en norme dans  $L^2(\mathcal{O} \times \mathcal{O}, \text{End}(\mathbb{C}^n))$ . De ce développement on déduit le développement de Karhunen-Loeve du champ stochastique  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  qui s'écrit :

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_j} \xi_j \varphi_j(\mathbf{x}) \quad (\text{C.22})$$

La série ci-dessus est convergente dans  $L^2(\mathcal{A} \otimes \mathcal{O}, \mathbb{C}^n)$ , soit dans  $L^2(\mathcal{A}, \mathbb{C}^n)$  pour tout  $\mathbf{x}$  dans  $\mathcal{O}$ . La convergence en m.o.d. implique la convergence en probabilité et en loi pour tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{O}$ . Les  $\xi_j$  sont des variables aléatoires définies sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$ , à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , centrées, du second ordre, orthogonales (non corrélées) dans  $L^2(\mathcal{A}, \mathbb{C})$  :

$$\mathbb{E}\{\xi_j\} = 0 \quad (\text{C.23})$$

$$\mathbb{E}\{\xi_j \bar{\xi}_k\} = \delta_{jk} \quad (\text{C.24})$$

et telles que :

$$\xi_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \int_{\mathcal{O}} (\mathbf{X}(\mathbf{x}), \varphi_j(\mathbf{x}))_n d\mathbf{x} \quad (\text{C.25})$$

La base de projection définie par les vecteurs propres de l'opérateur de corrélation est optimale pour une représentation finie du champ stochastique  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  sur cette base, c'est-à-dire que l'erreur quadratique moyenne commise en prenant la troncature des vecteurs propres à un ordre quelconque  $N$  est minimale :

$$\inf_{\{u_j\}} \sum_{j=N+1}^{+\infty} \iint_{\mathcal{O} \times \mathcal{O}} (\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') u_j(\mathbf{x}'), u_j(\mathbf{x}))_n d\mathbf{x} d\mathbf{x}' = \int_{\mathcal{O}} \mathbb{E}\{\epsilon_N^2(\mathbf{x})\} d\mathbf{x} \quad (\text{C.26})$$

avec :

$$\epsilon_N(\mathbf{x}) = \sum_{j=N+1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_j} \xi_j \varphi_j(\mathbf{x}) \quad (\text{C.27})$$

et  $\{u_j\}$  une famille complète orthonormée de  $L^2(\mathcal{O}, \mathbb{C}^n)$ .

**remarque C.4** – Si le champ stochastique  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  est gaussien, alors les variables aléatoires  $\xi_j$  sont également gaussiennes comme transformation linéaire d'un champ gaussien, voir Eq.(C.25). Comme elles sont également non corrélées, Eq.(C.24), on en déduit qu'elles sont mutuellement indépendantes. De plus, dans ce cas la série de l'Eq.(C.22) est également presque sûrement convergente ■

### C.3.2 Simulation par un développement de Karhunen-Loeve tronqué

D'après les résultats précédents, on en déduit que l'on peut approcher d'aussi près que l'on veut le champ stochastique  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  par le champ :

$$\mathbf{X}^N(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \sqrt{\lambda_j} \xi_j \varphi_j(\mathbf{x}) \quad (\text{C.28})$$

La simulation du champ  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  est obtenue en tirant des réalisations des variables aléatoires  $\xi_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , vérifiant les propriétés d'orthogonalité Eq.(C.24). Pour cela, on peut utiliser dans le cas gaussien la formule de Box-Muller, Eq.(3.74). Si l'on souhaite uniquement reproduire par la simulation les propriétés du second ordre (moyenne et fonction d'auto-corrélation) du champ  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ , alors on peut prendre [192] :

$$\xi_j = 2\sqrt{3} \left( X_U - \frac{1}{2} \right) \quad (\text{C.29})$$

Une autre méthode (Poirion & Soize [172]) consiste à simuler le champ non gaussien  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  par la méthode du processus de Poisson filtré décrite à la section précédente, §C.2, pour en déduire des réalisations des poids aléatoires  $\{\xi_j\}$  par la relation (C.25) ; cette approche assure la compatibilité des poids simulés avec la donnée de la fonction d'auto-corrélation de  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  et de ses premiers moments.

Les seules limitations de la méthode tiennent dans le calcul des vecteurs propres de l'opérateur de corrélation, qui doit rester d'un coût numérique raisonnable. En l'occurrence il convient de choisir  $N$  pas trop grand (ceci dépend de la vitesse de décroissance des valeurs propres) et de se limiter à des valeurs de  $d$  et  $n$  abordables. Le nombre de vecteurs propres  $N$  de la base de projection tronquée peut être déterminé en fixant l'erreur relative souhaitable pour la simulation de l'Eq.(C.28), notée  $\varepsilon$  et définie par :

$$\|\epsilon_N\|^2 = \sum_{j=N+1}^{+\infty} \lambda_j \leq \varepsilon \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j \quad (\text{C.30})$$

Ainsi  $N$  est choisi tel que :

$$1 - \frac{1}{\text{tr } \mathcal{C}_{\mathbf{X}}} \sum_{j=1}^N \lambda_j \leq \varepsilon \quad (\text{C.31})$$

### C.3.3 Exemples

Il est possible de calculer analytiquement les vecteurs et valeurs propres de l'opérateur de corrélation pour un certain nombre de fonctions de corrélation usuelles. On trouvera quelques uns de ces résultats par exemple dans [72] et les références citées. On se limite ici au cas d'un processus stochastique centré, indexé sur  $\mathcal{O} = ]a, b[ \times ]a, b[ \subset \mathbb{R}^2$  à valeurs réelles. On donne l'allure de ces modes pour différentes formes du coefficient de corrélation défini par :

$$r_X(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{R_X(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\sqrt{R_X(\mathbf{x}, \mathbf{x})R_X(\mathbf{x}', \mathbf{x}')}} \quad (\text{C.32})$$

**corrélation type exponentielle réelle** – Le coefficient de corrélation est donné par :

$$r_X(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = e^{-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|}{\ell}}$$

La FIG. C.1 donne l'allure des 4 premiers modes propres et les valeurs propres associées pour  $b = -a = 5.0$  et  $\ell = 2.0$ .

**corrélation type exponentielle gaussienne** – Le coefficient de corrélation est donné par :

$$r_X(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = e^{-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|^2}{\ell^2}}$$

La FIG. C.2 donne l'allure des 4 premiers modes propres et les valeurs propres associées pour  $b = -a = 5.0$  et  $\ell = 2.0$ .

**corrélation type fonction triangle** – Le coefficient de corrélation est donné par :

$$r_X(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 1 - \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}{\ell}, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| \in ]0, \ell[$$

La FIG. C.3 donne l'allure des 4 premiers modes propres et les valeurs propres associées pour  $b = -a = 5.0$  et  $\ell = 15.0$ .

**corrélation type bruit blanc tronqué** – Le coefficient de corrélation est donné par :

$$r_X(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\sin \Omega \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}{\Omega \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}, \quad \Omega = \frac{\pi}{\ell}$$

La FIG. C.4 donne l'allure des 4 premiers modes propres et les valeurs propres associées pour  $b = -a = 5.0$  et  $\ell = 2.0$ .

Pour un processus stochastique centré, indexé sur  $\mathcal{O} = ]a, b[ \subset \mathbb{R}$  à valeurs réelles, on donne l'allure des modes de Karhunen-Loeve pour les modèles suivants de coefficient de corrélation :

**corrélation type bruit en  $\frac{1}{f}$**  – Le coefficient de corrélation est donné par :

$$r_X(x, x') = \frac{1}{2\Delta^{2H}} \left( |d + \Delta|^{2H} + |d - \Delta|^{2H} - 2d^{2H} \right)$$

avec  $d = |x - x'|$ . La FIG. C.5 donne l'allure des 4 premiers modes propres et les valeurs propres associées pour  $b = -a = 5.0$ ,  $H = 0.5$  et  $\Delta = 2.0$ .

**corrélation type processus de Wiener** – Le coefficient de corrélation est enfin donné par :

$$r_X(x, x') = \frac{1}{\ell} \min(x, x')$$

La FIG. C.6 donne l'allure des 4 premiers modes propres et les valeurs propres associées pour  $a = 0.0$ ,  $b = 10.0$  et  $\ell = 2.0$ .

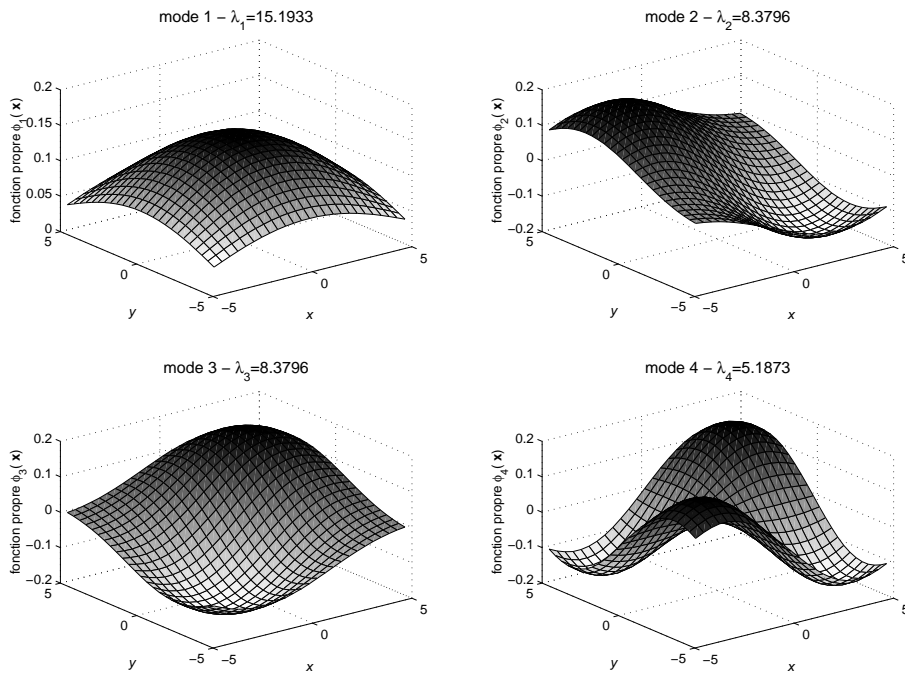


FIG. C.1 – Modes de Karhunen-Loeve pour la fonction de corrélation type exponentielle réelle.

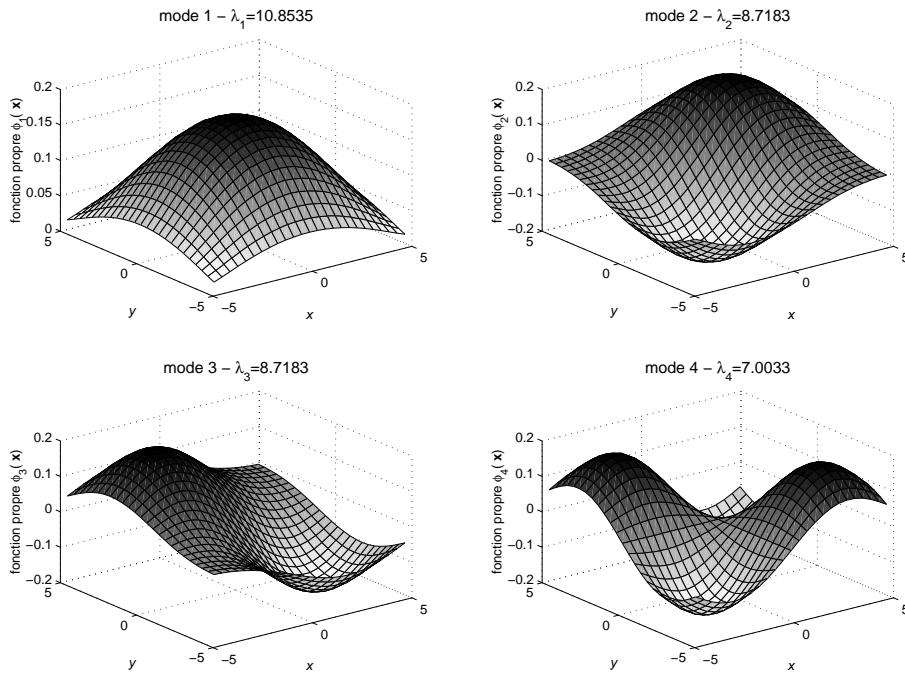


FIG. C.2 – Modes de Karhunen-Loeve pour la fonction de corrélation type gaussienne.



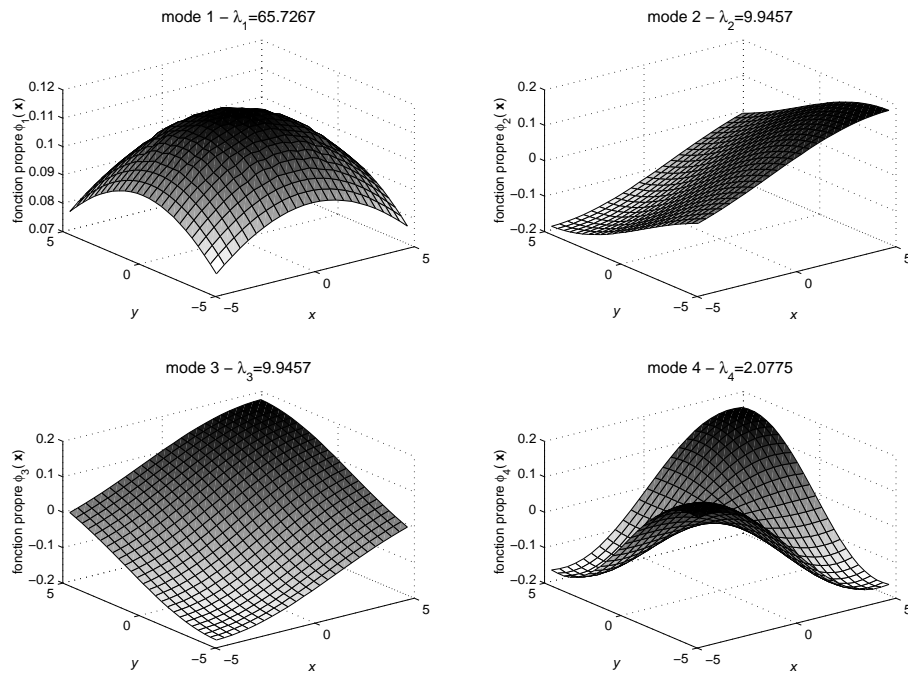


FIG. C.3 – Modes de Karhunen-Loeve pour la fonction de corrélation type triangulaire.

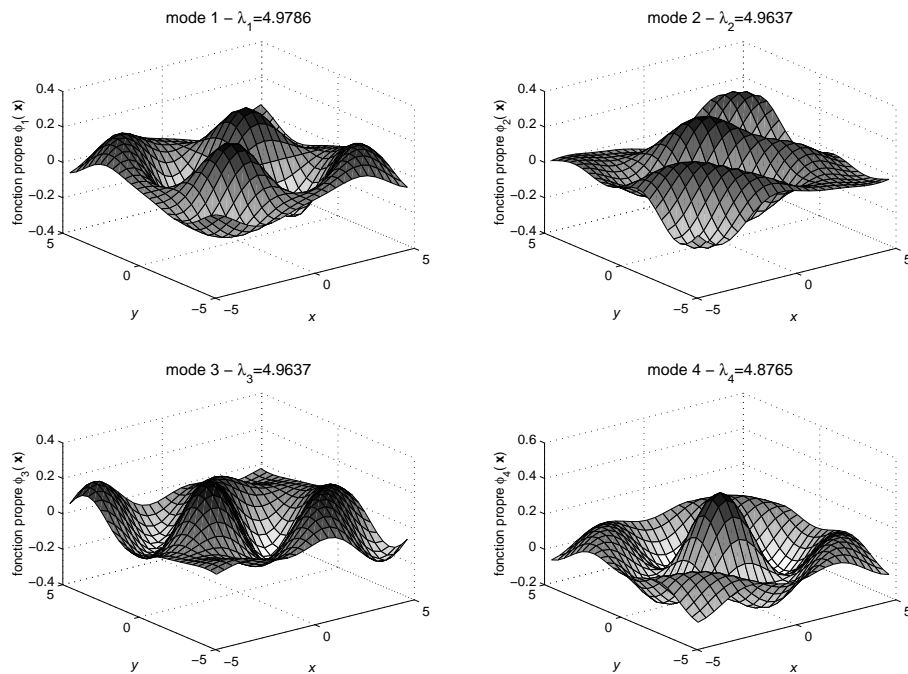


FIG. C.4 – Modes de Karhunen-Loeve pour la fonction de corrélation type bruit blanc tronqué.

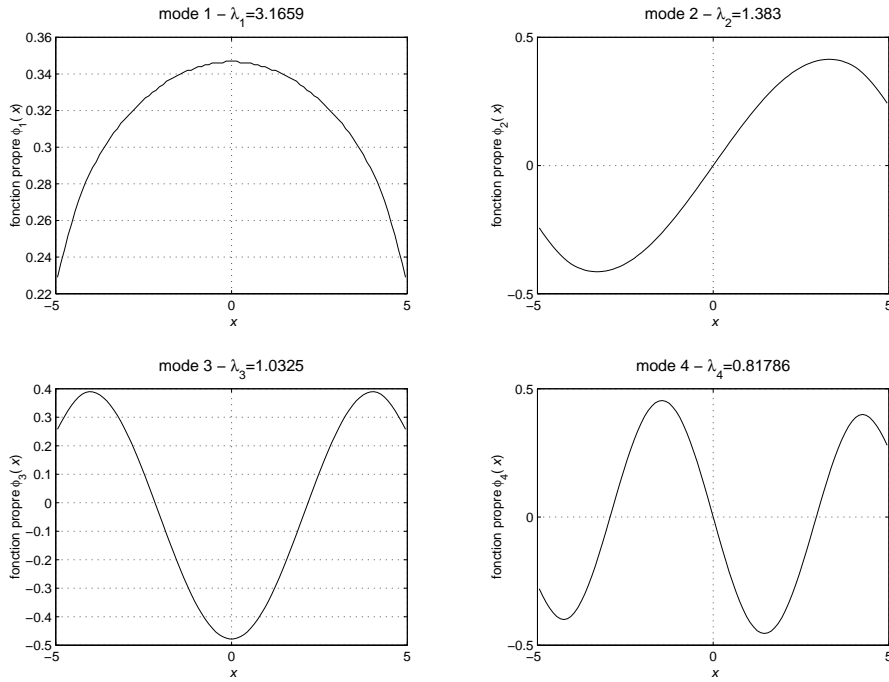


FIG. C.5 – Modes de Karhunen-Loeve pour la fonction de corrélation type bruit en  $\frac{1}{f}$ .

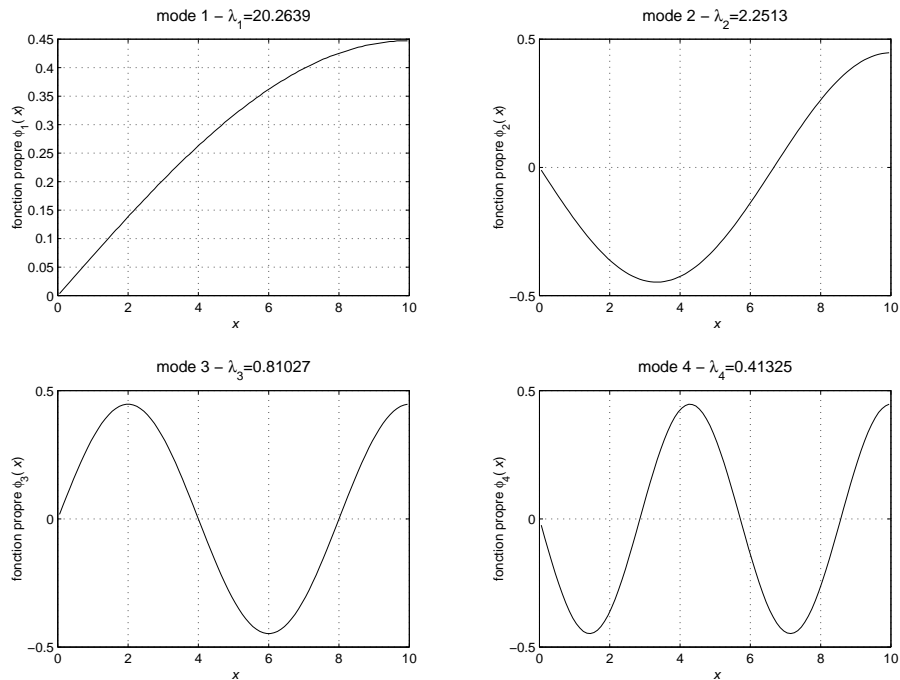


FIG. C.6 – Modes de Karhunen-Loeve pour la fonction de corrélation type processus de Wiener.



## Annexe D

# Compléments sur la méthode de sous-structuration

Dans cette annexe on complète la méthode de sous-structuration présentée à la section §4.1 du chapitre §4 pour le cas où l'amortissement visqueux dans la structure est nul, en faisant référence aux équations correspondantes dans §4.1.

### D.1 Problèmes locaux

On reprend ici les différentes définitions introduites pour la résolution des problèmes dits locaux dans les sous-domaines sol et structure : relèvements élastodynamique (4.6) et élastostatique (4.7), modes propres sur base fixe de la structure (4.8) et champs locaux (4.10). On suppose donc que  $\eta_b = 0$ . On note alors  $V_A(\Omega_b)$  le sous-espace vectoriel de  $V_0(\Omega_b)$  engendré par les modes propres sur base fixe associés à la valeur propre  $\omega_A$ , et  $V_A^\perp(\Omega_b)$  son orthogonal dans  $V_0(\Omega_b)$ . On définit également  $\mathcal{S}_b = \{\omega_A, A \in \mathbb{N}^*\}$  l'ensemble des pulsations propres de la structure. Le théorème (4.9) de la section §4.1 est remplacé par le théorème suivant pour la structure :

**Théorème D.1** *Soit  $\Phi \in V(\Gamma_{sf})$ . Si  $\omega \notin \mathcal{S}_b$ , alors il existe un unique relèvement élastodynamique  $\mathbf{u}^b(\Phi)$  dans  $V(\Omega_b)$ . Si  $\omega = \omega_A$ , alors il existe un unique relèvement élastodynamique  $\mathbf{u}^b(\Phi)$  dans  $V_A^\perp(\Omega_b)$ , et au moins un dans  $V(\Omega_b)$  si et seulement si  $\langle \mathbf{t}_b(\varphi_A^b), \Phi \rangle_{\Gamma_{sf}} = 0$ .*

L'existence et l'unicité d'un relèvement élastodynamique dans le domaine sol non borné sont établies de la même manière par le théorème (4.9). L'existence et l'unicité du champ local pour la structure sont données par le :

**Théorème D.2** *Si  $\omega \notin \mathcal{S}_b$ , alors le problème local ci-dessus est résolu de manière unique dans  $V_0(\Omega_b)$ . Si  $\omega = \omega_A$ , alors le problème local est résolu de manière unique dans  $V_A^\perp(\Omega_b)$ , et à un élément de  $V_A(\Omega_b)$  près dans  $V_0(\Omega_b)$  si et seulement si  $\langle \varphi_A^b, \mathbf{f}_b \rangle_{\Omega_b} = 0$ .*

Pour le sol elles sont toujours données par le théorème (4.9). Les théorèmes (D.1) et (D.2) correspondent à l'alternative de Fredholm.

## D.2 Recomposition sur un domaine

Lorsque la dissipation dans la structure est nulle, le champ des déplacements rayonnés totaux dans  $\Omega_b$  est recomposé suivant :

$$\mathbf{u}_b = \begin{cases} \mathbf{u}_b^f + \mathbf{u}^b(\Phi) & \text{si } \omega \notin \mathcal{S}_b \\ \mathbf{u}_b^f + \mathbf{u}^b(\Phi) - \sum_{l=1}^{n_A} m_b(\varphi_{Al}^b, \bar{\mathbf{u}}^b(\Phi)) \varphi_{Al}^b & \text{si } \omega = \omega_A \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

Pour le sol, l'expression de l'Eq.(4.12) est inchangée.

PREUVE – Lorsque  $\omega \in \mathcal{S}_b$ , par l'alternative de Fredholm on a qu'une solution du problème variationnel associé à la définition (4.6) du relèvement élastodynamique dans  $\Omega_b$  borné est  $\tilde{\mathbf{u}}^b(\Phi) = \mathbf{u}^b(\Phi) + \sum_{l=1}^{n_A} \alpha_{Al} \varphi_{Al}^b$  où  $\mathbf{u}^b(\Phi)$  est le relèvement élastodynamique obtenu dans  $V_A^\perp(\Omega_b)$ . En injectant cette expression dans la définition (4.6) des relèvements élastodynamiques dans la structure, on en déduit avec la définition (4.8) :

$$\alpha_{Al}(\Phi) = -m_b(\varphi_{Al}^b, \bar{\mathbf{u}}^b(\Phi)) - \frac{1}{\omega_A^2 - \omega^2} \langle \mathbf{t}_b(\varphi_{Al}^b), \Phi \rangle_{\Gamma_{sf}}$$

d'où le résultat avec la condition du théorème (D.1).  $\square$

## D.3 Impédances d'interface

On distingue ici les impédances d'interface en l'absence de résonance de la structure, et en présence de ces résonances. Cela revient à isoler la partie des champs d'interface qui vérifie la condition du théorème (D.1) pour laquelle il est possible de construire un relèvement élastodynamique, de celle qui ne la vérifie pas. Pour cela, on note  $V_A(\Gamma_{sf}) = \{\Phi \in V(\Gamma_{sf}); \langle \mathbf{t}_b(\varphi_{Ai}^b), \Phi \rangle_{\Gamma_{sf}} = 0 \text{ si } \omega = \omega_A\}$  et  $V_A^\perp(\Gamma_{sf})$  son orthogonal dans  $V(\Gamma_{sf})$ . Alors [40] :

**Définition D.4** *L'impédance dynamique d'interface du sous-domaine structure vis-à-vis de l'interface  $\Gamma_{sf}$  est  $\forall \omega \in \mathbb{R}$  :*

$$\begin{aligned} \kappa_b(\Phi, \Psi) &= \langle \mathbf{t}_b(\mathbf{u}^b(\Phi)), \Psi \rangle_{\Gamma_{sf}} \\ &+ \sum_{A \geq 1} (\omega_A^2 - \omega^2) \sum_{l=1}^{n_A} m_b(\varphi_{Al}^b, \bar{\mathbf{u}}^b(\Phi_A)) m_b(\varphi_{Al}^b, \bar{\mathbf{u}}^b(\Psi_A)) \end{aligned}$$

où  $\Phi_A$  (respectivement  $\Psi_A$ ) est la projection orthogonale de  $\Phi$  (resp.  $\Psi$ ) sur  $V_A(\Gamma_{sf})$ .

L'impédance dynamique d'interface du sous-domaine sol vis-à-vis de l'interface  $\Gamma_{sf}$  est quant à elle inchangée par rapport à la définition (4.13).

## D.4 Forces induites

Parallèlement aux impédances dynamiques d'interface, on peut définir les forces induites sur l'interface liées aux champs locaux [40], avec les mêmes précautions pour les fréquences de résonance de la structure.

**Définition D.5** La force induite par la structure sur l'interface  $\Gamma_{sf}$  est  $\forall \omega \in \mathbb{R}$  :

$$\phi_b(\Psi) = - \langle \mathbf{t}_b(\mathbf{u}_b^f), \Psi \rangle_{\Gamma_{sf}} - \sum_{A \geq 1} (\omega_A^2 - \omega^2) \sum_{l=1}^{n_A} m_b(\varphi_{Al}^b, \bar{\mathbf{u}}_b^f) m_b(\varphi_{Al}^b, \bar{\mathbf{u}}^b(\Psi_A))$$

où  $\Phi_A$  est la projection orthogonale de  $\Phi$  sur  $V_A(\Gamma_{sf})$ .

La force induite par le sol sur l'interface  $\Gamma_{sf}$  est quant à elle inchangée par rapport à la définition (4.14).



# Bibliographie

- [1] ABRAHAMSON N.A., J.F. SCHNEIDER & J.C. STEPP. Empirical spatial coherency functions for application to soil-structure interaction analyses. *Earthquake Spectra* 7, 1 (1991), 1–27.
- [2] AHMADI G. A note on the Wiener-Hermite representation of the earthquake ground acceleration. *Mech. Res. Comm.* 7, 1 (1980), 7–13.
- [3] ANTES H. & O. VON ERSTORFF. Dynamic response of 2D and 3D block foundations on a halfspace with inclusions. *Soil Dyn. Earthquake Engrg.* 13 (1994), 305–311.
- [4] ARNOLD L. *Stochastic differential equations : theory and applications*. John Wiley & Sons, New York, 1973.
- [5] ASCH M., G. PAPANICOLAOU, M. POSTEL, P. SHENG & B. WHITE. Frequency content of randomly scattered signals I. *Wave Motion* 12 (1990), 429–450.
- [6] ASCH M., W. KOHLER, G. PAPANICOLAOU, M. POSTEL & B. WHITE. Frequency content of randomly scattered signals. *SIAM Rev.* 33, 4 (1991), 519–625.
- [7] ASKAR A. & A.S. ÇAKMAK. Seismic waves in random media. *Prob. Engrg. Mech.* 3, 3 (1988), 124–129.
- [8] AUBRY D. Sur une approche intégrée de l'interaction sismique sol-structure. *Revue Française de Géotechnique* 38 (1986), 5–24.
- [9] AUBRY D. & D. CLOUTEAU. A regularized boundary element method for stratified media. In *Mathematical and numerical aspects of wave propagation phenomena, Proc. 1<sup>st</sup> Int. Conf., 23-26 April 1991, Strasbourg, France* (SIAM, Philadelphia, 1991), G. Cohen, L. Halpern & P. Joly, Ed., pp. 660–668.
- [10] AUBRY D. & D. CLOUTEAU. A subdomain approach to dynamic soil-structure interaction. In *Recent advances in earthquake engineering and structural dynamics* (Ouest Editions, Nantes, 1992), V. Davidovici & R.W. Clough, Ed., pp. 251–272.
- [11] AUBRY D., D. CLOUTEAU & E. SAVIN. Influence of free field and soil variabilities on soil-structure interaction. In *Computer methods and advances in geomechanics, Proc. 9<sup>th</sup> Int. Conf., 2-7 November 1997, Wuhan, PR China* (Balkema, Rotterdam, 1998), J.-X. Yuan, Ed., vol. 4, pp. 2497–2502.
- [12] BABUŠKA I. The finite element method with Lagrange multipliers. *Num. Math.* 20 (1973), 179–192.
- [13] BAILLY F., J.F. CLOUET & J.P. FOUQUE. Parabolic and Gaussian white noise approximation for wave propagation in random media. *SIAM J. Appl. Math.* 56, 5 (1996), 1445–1470.



- [14] BARONI A. *Modélisation du couplage sol-fluide pour la sismique entre puits*. Mémoire de thèse de doctorat, Ecole Centrale de Paris, Châtenay-Malabry, novembre 1996.
- [15] BASU B. & V.K. GUPTA. Non-stationary seismic response of MDOF systems by wavelet transform. *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.* 26 (1997), 1243–1258.
- [16] BEN DHIA H. & B. RASSAA. Approche numérique des jonctions par une méthode de superposition de modèles. In *Actes 4<sup>me</sup> Colloque National en Calcul des Structures, 18-21 Mai 1999, Giens, France* (Teknea, Toulouse, 1999), P. Ladevèze, D. Guedra Degeorges & M. Raous, Ed., vol. 2, pp. 531–536.
- [17] BIELAK J. & R.C. MCCAMY. An exterior interface problem in two-dimensional elastodynamics. *Q. Appl. Math.* 41, 1 (1983), 143–159.
- [18] BONNET M. *Méthodes des équations intégrales régularisées en élastodynamique tridimensionnelle*. Mémoire de thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts & Chaussées, Paris, ?? 1986.
- [19] BONNET M. *Méthode des équations intégrales*. CNRS Editions/Eyrolles, Paris, 1995.
- [20] BONNET M., G. MAIER & C. POLIZZOTTO. On symmetric Galerkin boundary element method. *ASME Appl. Mech. Reviews* 51 (1998), 669–704.
- [21] BORNERT M. *Morphologie microstructurale et comportement mécanique ; caractérisations expérimentales, approches par bornes et estimations autocohérentes généralisées*. Mémoire de thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, novembre 1996.
- [22] BOSE S.K. & A.K. MAL. Longitudinal shear waves in a fiber-reinforced composite. *Int. J. Solids Structures* 9 (1973), 1075–1085.
- [23] BOSE S.K. & A.K. MAL. Elastic waves in a fiber-reinforced composite. *J. Mech. Phys. Solids* 22 (1974), 217–229.
- [24] BREITUNG K., F. CASCIATI & L. FARAVELLI. A random field description for stochastic boundary elements. *Engrg. Analysis with Boundary Elements* 19 (1997), 223–229.
- [25] BREZZI F. Théorèmes d'existence, d'unicité et d'approximation numérique pour les problèmes de point-selle. *C. R. Acad. Sci. Paris t. 278, Série A* (1974), 839–842.
- [26] BREZZI F. & K.-J. BATHE. A discourse on the stability conditions for mixed finite element formulations. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.* 82 (1990), 27–57.
- [27] BREZZI F., C. JOHNSON & J.C. NÉDÉLEC. On the coupling of boundary integral and finite element methods. Tech. Rep. n° 39, Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique, Palaiseau, septembre 1978.
- [28] BUI H.D., B. LORET & M. BONNET. Régularisation des équations intégrales de l'élastostatique et de l'élastodynamique. *C. R. Acad. Sci. Paris t. 300, Série II(14)* (1985), 633–636.
- [29] BURCZYNSKI T. & J. SKRZYPCZYK. Theoretical and computational aspects of the stochastic boundary element method. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.* 168 (1999), 321–344.
- [30] BURRIDGE R., G. PAPANICOLAOU, P. SHENG & B. WHITE. Probing a random medium with a pulse. *SIAM J. Appl. Math.* 49 (1989), 582–607.
- [31] CAMERON R.H. & W.T. MARTIN. The orthogonal development of non-linear functionals in series of Fourier-Hermite functionals. *J. Ann. Math.* 48, 2 (1947), 385–392.

- [32] CHAPEL F. Boundary element method applied to linear soil-structure interaction on a heterogeneous soil. *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.* 15 (1987), 815–829.
- [33] CHAPMAN C.H. & R.T. COATES. Generalized Born scattering in anisotropic media. *Wave Motion* 19 (1994), 309–341.
- [34] CHEN K.K. & T.T. SOONG. Covariance properties of waves propagating in a random medium. *J. Acoust. Soc. Am.* 49, 5 (1971), 1639–1642.
- [35] CHERNOV L.A. *Wave propagation in a random medium*. McGraw-Hill, New York, 1960.
- [36] CHORIN A.J. Hermite expansions in Monte-Carlo computation. *J. Comp. Physics* 8 (1971), 472–482.
- [37] CHU L., A. ASKAR & A.S. CAKMAK. Earthquake waves in a random medium. *Int. J. Num. Methods Geomech.* 5 (1981), 79–96.
- [38] CLOUET J.F., J.P. FOUQUE & M. POSTEL. Spectral analysis of randomly scattered signals using the wavelet transform. *Wave Motion* 22 (1995), 145–170.
- [39] CLOUGH R.W. & J. PENZIEN. *Dynamics of structures*. McGraw-Hill, New York, 1975.
- [40] CLOUTEAU D. *Propagation d'ondes dans des milieux hétérogènes. Application à la tenue d'ouvrages sous séismes*. Mémoire de thèse de doctorat, Ecole Centrale de Paris, Châtenay-Malabry, mai 1990.
- [41] CLOUTEAU D. & A.S. BONNET-BEN DHIA. *Propagation d'ondes dans les solides*. Ecole Centrale de Paris, Châtenay-Malabry, 1996.
- [42] CLOUTEAU D. & D. AUBRY. Site effects on 3D elevated topography. In *Soil dynamics and earthquake engineering vol. VII* (Computational Mechanics Publications, Southampton, 1995), A.S. Cakmak & C.A. Brebbia, Ed., pp. 291–298.
- [43] CLOUTEAU D., D. AUBRY & B. TARDIEU. Influences of site effects and incident fields on the seismic response of an arch dam. In *Earthquake Engineering, Proc. 10<sup>th</sup> European Conf., 28 August – 2 September 1994, Wien, Austria* (Balkema, Rotterdam, 1994), G. Duma, Ed., pp. 1837–1842.
- [44] CLOUTEAU D., D. AUBRY & E. SAVIN. Influence of free field variability on soil-structure interaction. In *Earthquake Engineering, Proc. 11<sup>th</sup> European Conf., 6-11 September 1998, Paris, France* (Balkema, Rotterdam, 1998), P. Bisch, P. Labbé & A. Pecker, Ed.
- [45] CLOUTEAU D., G. DEVESA & G. JACQUART. Couplage FEM-BEM : applications pratiques en génie parasismique. In *Actes 4<sup>me</sup> Colloque National en Calcul des Structures, 18-21 Mai 1999, Giens, France* (Teknea, Toulouse, 1999), P. Ladevèze, D. Guedra Degeorges & M. Raous, Ed., vol. 1, pp. 215–220.
- [46] COLTON D. & R. KRESS. *Integral equation methods in scattering theory*. John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [47] COSTABEL M. Boundary integral operators on Lipschitz domains : elementary results. *SIAM J. Math. Anal.* 19, 3 (1988), 613–626.
- [48] COSTABEL M. & E.P. STEPHAN. A direct boundary integral equation method for transmission problems. *J. Math. Anal. Appl.* 106 (1985), 367–413.

- [49] COSTABEL M. & E.P. STEPHAN. Integral equations for transmission problems in linear elasticity. *J. Integral Eqns. Appl.* 2, 2 (1990), 211–223.
- [50] CRAIG R.R. & M. BAMPON. Coupling of substructures for dynamic analysis. *A.I.A.A. J.* 6, 7 (1968), 1313–1319.
- [51] CROS J.-M. Sous-structuration dynamique et calcul parallèle. *C. R. Acad. Sci. Paris t. 327*, Série IIb (1999), 13–18.
- [52] DAUTRAY R. & J.L. LIONS. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Masson, Paris, 1984-1985.
- [53] DE BARROS F.C.P. & J.E. LUCO. Identification of foundation impedance functions and soil properties from vibration tests of the Hualien containment model. *Soil Dyn. Earthquake Engrg.* 14 (1995), 229–248.
- [54] DEGROOT D.J. & G.B. BAECHEER. Estimating autocovariance of in-situ soil properties. *ASCE J. Geotech. Engrg.* 119, 1 (1993), 147–166.
- [55] DEODATIS G. Non-stationary stochastic vector processes : seismic ground motion applications. *Prob. Engrg. Mech.* 11 (1996), 149–168.
- [56] DER KIUREGHIAN A. A coherency model for spatially varying ground motion. *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.* 25 (1996), 99–111.
- [57] DEVROYE L. *Non-uniform variate generation*. Springer Verlag, New York, 1983.
- [58] DHIA, H. B. Problèmes mécaniques multi-échelles : la méthode Arlequin. 899–904.
- [59] ELISHAKOFF I., Y.J. REN & M. SHINOZUKA. Some exact solutions for the bending of beams with spatially stochastic stiffness. *Int. J. Solids Structures* 32, 16 (1995), 2315–2327.
- [60] ELISHAKOFF I., Y.J. REN & M. SHINOZUKA. Variational principles developed for and applied to analysis of stochastic beams. *ASCE J. Engrg. Mech.* 122, 6 (1996), 559–565.
- [61] FAVRE J.-L. Errors in geotechnics and their impact on safety. *Computers & Structures* 67 (1998), 37–45.
- [62] FENTON G.A. Estimation for stochastic soil models. *ASCE J. Geotech. Geoenvir. Engrg.* 125, 6 (1999), 470–485.
- [63] FENTON G.A. Random field modeling of CPT data. *ASCE J. Geotech. Geoenvir. Engrg.* 125, 6 (1999), 486–498.
- [64] FOLDY L.L. The multiple scattering of waves. *Phys. Rev.* 67, 3-4 (1945).
- [65] FRANÇOIS D., A. PINEAU ET A. ZAOUÏ. *Comportement mécanique des matériaux. Élasticité et plasticité*. Hermès, Paris, 1991.
- [66] FRANKEL A. & R.W. CLAYTON. Finite difference simulations of seismic scattering : implications for the propagation of short period seismic waves in the crust and models of crustal heterogeneity. *J. Geophys. Res.* 91, B6 (1986), 6465–6489.
- [67] FUNG C.P. & S. LOTOTSKY. Nonlinear filtering : separation of parameters and observations using Galerkin approximation and Wiener chaos decomposition. Tech. Rep. preprint series 1458, Institute for Mathematics and its Applications, Minneapolis, MN, 1997.
- [68] GERMAIN P. *Mécanique, tome I et II*. Ecole Polytechnique, Ellipses, Palaiseau, 1986.

- [69] GHANEM R.G. Probabilistic characterization of transport in heterogeneous media. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.* 158 (1998), 199–220.
- [70] GHANEM R.G. Ingredients for a general purpose stochastic finite elements implementation. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.* 168 (1999), 19–34.
- [71] GHANEM R.G. Stochastic finite elements with multiple random non-gaussian properties. *ASCE J. Engrg. Mech.* 125, 1 (1999), 26–40.
- [72] GHANEM R.G. & P.D. SPANOS. *Stochastic finite elements : a spectral approach*. Springer Verlag, New York, 1991.
- [73] GHANEM R.G. & R.M. KRUGER. Numerical solution of spectral stochastic finite element systems. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.* 129 (1996), 289–303.
- [74] GHANEM R.G. & W. BRZAKALA. Stochastic finite-element analysis of soil layers with random interface. *ASCE J. Engrg. Mech.* 122, 4 (1996), 361–369.
- [75] GIROIRE J. Integral equation methods for exterior problems for the Helmholtz equation. Tech. Rep. n° 40, Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique, Palaiseau, septembre 1978.
- [76] GIROIRE J. *Etude de quelques problèmes aux limites extérieurs et résolution par équations intégrales*. Thèse de doctorat d'État, Université P. & M. Curie - Paris VI, Paris, septembre 1987.
- [77] GIROIRE J. & J.C. NÉDÉLEC. Numerical solution of an exterior Neumann problem using a double layer potential. *Math. Comp.* 32, 144 (1978), 973–990.
- [78] GLOWINSKI R., T.W. PAN & J. PERIAUX. A fictitious domain method for Dirichlet problem and applications. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.* 111 (1994), 283–303.
- [79] GRABE J. Spatial variation of soil stiffness : spectral density approach. *Soil Dyn. Earthquake Engrg.* 13 (1994), 25–29.
- [80] GRAD H. Note on  $N$ -dimensional Hermite polynomials. *Communications in Pure and Applied Mathematics* 2 (1949), 325–330.
- [81] GRIGORIU M. Simulation of nonstationary Gaussian processes by random trigonometric polynomials. *ASCE J. Engrg. Mech.* 119, 2 (1993), 328–343.
- [82] GUPTA I.D. & M.D. TRIFUNAC. Order statistics of peaks in earthquake response. *ASCE J. Engrg. Mech.* 114, 10 (1988), 1605–1627.
- [83] GUPTA I.D. & M.D. TRIFUNAC. Defining equivalent stationary PSDF to account for nonstationarity of earthquake ground motion. *Soil Dyn. Earthquake Engrg.* 17 (1998), 89–99.
- [84] HA-DUONG T. On the boundary integral equations for the crack opening displacement of flat cracks. Tech. Rep. n° 194, Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France, mai 1989.
- [85] HAMMOND J.K. & P.R. WHITE. The analysis of non-stationary signals using time-frequency methods. *J. Sound Vib.* 190, 3 (1996), 419–447.
- [86] HAO H. Characteristics of torsional ground motion. *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.* 25 (1996), 599–610.
- [87] HAO H. & S.R. ZHANG. Spatial ground motion effect on relative displacement of adjacent building structures. *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.* 28 (1999), 333–349.

- [88] HARICHANDRAN R.S. Stochastic analysis of rigid foundation filtering. *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.* 15 (1987), 889–899.
- [89] HARICHANDRAN R.S. Estimating the spatial variation of earthquake ground motion from dense array recordings. *Structural Safety* 10 (1991), 219–233.
- [90] HARICHANDRAN R.S. & E.H. VANMARKE. Stochastic variation of earthquake ground motion in space and time. *ASCE J. Engrg. Mech.* 112, 2 (1986), 154–174.
- [91] HASHIN Z. & S. SHTRIKMAN. On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity. *J. Mech. Phys. Solids* 10 (1962), 335–342.
- [92] HASHIN Z. & S. SHTRIKMAN. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids* 10 (1962), 343–352.
- [93] HASKELL N.A. The dispersion of surface waves on multilayered media. *Bull. Seism. Soc. Am.* 43 (1953), 17–34.
- [94] HAZARD C. & M. LENOIR. *Modélisation et résolution des problèmes de diffraction*. ENSTA et DEA de Mécanique Paris VI, Palaiseau, 1998.
- [95] HOSHIYA M. & K. ISHII. Evaluation of kinematic interaction of soil-foundation systems by a stochastic model. *Soil Dyn. Earthquake Engrg.* 2, 3 (1983), 128–134.
- [96] HSIAO G.C. & W.L. WENDLAND. A finite element method for some integral equations of the first kind. *J. Math. Anal. Appl.* 58 (1977), 449–481.
- [97] HUGHES T.J.R. *The finite element method. Linear static and dynamic finite element analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987.
- [98] HUNTINGTON D.E. & C.S. LYRINTZIS. Nonstationary random parametric vibration in light aircraft landing gear. *J. Aircraft* 35, 1 (1998), 145–151.
- [99] JÄGER W. Zur Theorie der Schwingungsgleichung mit variablen Koeffizienten in Außengebieten. *Math. Zeitschr.* 102 (1967), 62–88.
- [100] JAHEDI A. & G. AHMADI. Application of Wiener-Hermite expansion to nonstationary random vibration of a Duffing oscillator. *ASME J. Appl. Mech.* 50 (1983), 436–442.
- [101] JOLY P., E. BÉCACHE & C. TSOGKA. Fictitious domain method applied to the scattering by a crack of transient elastic waves in anisotropic media : a new family of mixed finite elements leading to explicit schemes. In *Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation, Proc. 4<sup>th</sup> Int. Conf., 1-5 June 1998, Golden, Colorado, USA* (SIAM, Philadelphia, 1998), J.A. DeSanto, Ed., pp. 322–326.
- [102] KAHAN M., R.J. GIBERT & P.Y. BARD. Influence of seismic waves spatial variability on bridges : a sensitivity approach. *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.* 25 (1996), 795–814.
- [103] KALJEVIC I. & S. SAIGAL. Stochastic boundary elements for two-dimensional potential flow in non-homogeneous media. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.* 121 (1995), 211–230.
- [104] KALLIANPUR G. *Stochastic filtering theory*. Springer Verlag, Berlin, 1980.
- [105] KANAI K. Semi-empirical formula for the seismic characteristics of the ground motion. *Bull. Earthquake Res. Institute, University of Tokyo* 35 (1957), 309–325.
- [106] KARAL F.C. & J.B. KELLER. Elastic, electromagnetic and other waves in a random medium. *J. Math. Phys.* 5 (1964), 537–547.

- [107] KAUSEL E. & A. PAIS. Stochastic deconvolution of earthquake motions. *ASCE J. Engrg. Mech.* 113, 2 (1987), 266–277.
- [108] KENNETT B.L.N. *Seismic wave propagation in stratified media*. Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
- [109] KHASHMINSKII R.Z. A limit theorem for solutions of differential equations with random right hand side. *Theory Probab. Appl.* 11 (1966), 390–406.
- [110] KLEINMAN R.E. & W.L. WENDLAND. On Neumann’s method for the exterior Neumann problem for the Helmholtz equation. *J. Math. Anal. Appl.* 57 (1977), 170–202.
- [111] KOHLER W., G. PAPANICOLAOU & B. WHITE. Reflection of waves generated by a point source over a randomly layered medium. *Wave Motion* 13 (1991), 53–87.
- [112] KOHLER W., G. PAPANICOLAOU & B. WHITE. Localization and mode conversion for elastic waves in randomly layered media I. *Wave Motion* 23 (1996), 1–22.
- [113] KOHLER W., G. PAPANICOLAOU & B. WHITE. Localization and mode conversion for elastic waves in randomly layered media II. *Wave Motion* 23 (1996), 181–201.
- [114] KOZIN F. Autoregressive moving average models of earthquake records. *Prob. Engrg. Mech.* 3, 2 (1988), 58–63.
- [115] KRÉE P. & C. SOIZE. *Mécanique aléatoire*. Dunod, Paris, 1983.
- [116] KRESS R. & G.F. ROACH. Transmission problems for Helmholtz equation. *J. Math. Phys.* 19, 6 (1978), 1433–1437.
- [117] KRÖNER E. Linear properties of random media. The systematic theory. In *Comportements rhéologiques et structures des matériaux, C.R. 15<sup>me</sup> Coll. G.F.R., Paris* (1980), pp. 15–40.
- [118] KUBO T. & J. PENZIEN. Analysis of three-dimensional strong ground motions along principal axes, San Fernando earthquake. *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.* 7 (1979), 265–278.
- [119] KUBO T. & J. PENZIEN. Simulation of three-dimensional strong ground motions along principal axes, San Fernando earthquake. *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.* 7 (1979), 279–294.
- [120] LABBÉ P. *Ingénierie sismique*. Ecole Centrale de Lyon, Ecully, 1991.
- [121] LABORATOIRE MSSMAT, ECOLE CENTRALE DE PARIS. *MISS2D-3D - Manuel utilisateur, rev. 6.2*. Châtenay-Malabry, 1998.
- [122] LAFE O.E. & A.H.-D. CHENG. A perturbation boundary element code for steady state groundwater flow in heterogeneous aquifers. *Water Resources Res.* 23 (1987), 1079–1084.
- [123] LALLEMAND B., A. CHERKI, T. TISON & P. LEVEL. Fuzzy modal finite element analysis of structures with imprecise material properties. *J. Sound Vib.* 220, 2 (1999), 353–364.
- [124] LANG K. *Etude de l’émission de vibrations dans le sol engendrées par les trains et les métros*. Mémoire de stage de DEA, Ecole Centrale de Paris, Châtenay-Malabry, juillet 1998.
- [125] LANGLEY R.S. Structural response to non-stationary non-white stochastic ground motions. *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.* 14 (1986), 909–924.

- [126] LAOUAMI N. *Variabilité spatiale du mouvement sismique. Approche expérimentale et modèles théoriques*. Mémoire de thèse de doctorat, Université d'Evry-Val-d'Essonne, Evry, décembre 1995.
- [127] LAX M. Multiple scattering of waves. *Phys. Rev.* *23* (1951), 287–310.
- [128] LAX M. Multiple scattering of waves. II. The effective field in dense systems. *Phys. Rev.* *85* (1952), 621–629.
- [129] L'ÉCUYER P. *Random number generation. Handbook on simulation*. Wiley, Jerry Banks, 1997.
- [130] LEWICKI P., R. BURRIDGE & G. PAPANICOLAOU. Pulse stabilisation in a strongly heterogeneous layered medium. *Wave Motion* *20* (1994), 177–195.
- [131] LI Y.L., C.H. LIU & S.J. FRANKE. Three-dimensional Green's function for wave propagation in a linearly inhomogeneous medium – The exact analytical solution. *J. Acoust. Soc. Am.* *87*, 6 (1990), 2285–2291.
- [132] LI Y.S., T. OBATA, H. KOGUCHI & T. YADA. Some improvements of accuracy and efficiency in three dimensional direct boundary element method. *Int. J. Numer. Methods Engrg.* *33* (1992), 1451–1464.
- [133] LIN J., J. LI, W. ZHANG & F.W. WILLIAMS. Random seismic response of multi-support structures in evolutionary inhomogeneous random fields. *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.* *26* (1997), 135–145.
- [134] LIN Y.K. & G.Q. CAI. *Probabilistic structural dynamics. Advanced Theory and applications*. McGraw-Hill, Singapore, 1995.
- [135] LIONS J.L. Parallel stabilization of hyperbolic and Petrowsky systems. In *Computational mechanics. New trends and applications* (Barcelona, 1998), S. Idelsohn, E. Oñate & E. Dvorkin, Ed.
- [136] LIU S.C. Evolutionary power spectral density of strong-motion earthquakes. *Bull. Seism. Soc. Am.* *60*, 3 (1970), 891–900.
- [137] LIU W.K., T. BELYTSCHKO & A. MANI. Random field finite elements. *Int. J. Num. Methods Engrg.* *23* (1986), 1831–1845.
- [138] LOH C.H. & Y.T. YEH. Spatial variation and stochastic modeling of seismic differential ground movement. *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.* *16* (1988), 583–596.
- [139] LOH C.H., J. PENZIEN & Y.B. TSAI. Engineering analysis of SMART-1 array accelerograms. *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.* *10* (1982), 575–591.
- [140] LUCO J.E. & A. MITA. Response of a circular foundation to spatially random ground motion. *ASCE J. Engrg. Mech.* *113*, 1 (1987), 1–15.
- [141] LUCO J.E. & H.L. WONG. Response of structures to non-vertically incident seismic waves. *Bull. Seism. Soc. Am.* *72*, 1 (1982), 275–302.
- [142] LUCO J.E. & H.L. WONG. Response of a rigid foundation to a spatially random ground motion. *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.* *14* (1986), 891–908.
- [143] MAGNAN J.P. Les applications des statistiques et probabilités en géotechnique au LCPC. *Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, 202 (1996), 25–35.
- [144] MALTZ F.H. & D.L. HITZL. Variance reduction in Monte-Carlo computations using multi-dimensional Hermite polynomials. *J. Comp. Physics* *32* (1979), 345–376.

- [145] MANDELBROT B.B. & J.W. NESS. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Rev.* 10, 4 (1968), 422–437.
- [146] MANOLIS G.D. & R.P. SHAW. Green’s function for the vector wave equation in a mildly heterogeneous continuum. *Wave Motion* 24 (1996), 59–83.
- [147] MANOLIS G.D. & R.P. SHAW. Harmonic wave propagation through viscoelastic heterogeneous media exhibiting mild stochasticity – I. Fundamental solutions. *Soil Dyn. Earthquake Engrg.* 15 (1996), 119–127.
- [148] MARCZYK J. Statistical mechanical designs. Uncertainty management in CAE via Monte-Carlo simulation. *NAFEMS Benchmark* (january 1999), 11–15.
- [149] MARCZYK J. & C. ASENJO. Stochastic validation of numerical models using experimental data. In *Computational mechanics. New trends and applications* (Barcelona, 1998), S. Idelsohn, E. Oñate & E. Dvorkin, Ed.
- [150] MARTINEZ E. *Interaction sol-structure entre deux bâtiments soumis à une excitation sismique aléatoire*. Mémoire de stage de DEA, Ecole Centrale de Paris, Châtenay-Malabry, mars 1998.
- [151] MATTHIES H.G. & C. BUCHER. Finite elements for stochastic media problems. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.* 168 (1999), 3–17.
- [152] MCCOY J.J. On the dynamic response of disordered composites. *J. Appl. Mech.* 40 (1973), 511–517.
- [153] MCKAY M.D., R.J. BECKMAN & W.J. CONOVER. A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics* 21, 2 (1979), 239–245.
- [154] MILOTTI E. Le bruit en  $\frac{1}{f}$ . *Pour La Science*, 246 (1998), 88–93.
- [155] MUIJRES G.J.H., G.C. HERMAN & P.G.J. BUSSINK. Acoustic wave propagation in two-dimensional media containing small-scale heterogeneities. *Wave Motion* 27, 2 (1998), 137–154.
- [156] NÉDÉLEC J.C. Approximation des équations intégrales en mécanique et en physique. Tech. Rep. ??, Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1977.
- [157] NÉDÉLEC J.C. & J. PLANCHARD. Une méthode variationnelle d’éléments finis pour la résolution numérique d’un problème extérieur dans  $\mathbb{R}^3$ . *R.A.I.R.O. R3*, 7 (1973), 105–129.
- [158] O’DOHERTY R.F. & N.A. ANSTEY. Reflections on amplitudes. *Geophysical Prospecting* 19 (1971), 430–458.
- [159] OWEN A.B. Latin supercube sampling for very high-dimensional simulations. *ACM Transactions Modeling Comp. Simulation* 8, 1 (1998), 71–102.
- [160] PAICE G.M., D.V. GRIFFITHS & G.A. FENTON. Finite element modeling of settlements on spatially random soil. *ASCE J. Geotech. Engrg.* 122, 9 (1996), 777–779.
- [161] PAÏS A.L. & E. KAUSEL. Stochastic response of rigid foundations. *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.* 19 (1990), 611–622.
- [162] PAPADRAKAKIS M. & A. KOTSOPOULOS. Parallel solution of stochastic finite element methods using Monte-Carlo simulation. In *Computational mechanics. New trends and applications* (Barcelona, 1998), S. Idelsohn, E. Oñate & E. Dvorkin, Ed.



- [163] PAPADRAKAKIS M. & V. PAPADOPOULOS. Robust and efficient methods for stochastic finite element analysis using Monte-Carlo simulation. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.* 134 (1996), 325–340.
- [164] PAPANICOLAOU G., M. POSTEL, P. SHENG & B. WHITE. Frequency content of randomly scattered signals II : Inversion. *Wave Motion* 12 (1990), 527–549.
- [165] PAPANICOLAOU G.C. Mathematical problems in geophysical wave propagation. In *Documenta Mathematica, proc. Int. Congress of Mathematicians, Extra Volume ICM 98* (Berlin, 1998), vol. I, pp. 241–265.
- [166] PARDOUX E. *Processus stochastiques et simulation*. Université de Provence - Aix-Marseille I, Marseille, 1998.
- [167] PECKER A. *Dynamique des sols*. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1984.
- [168] PERKUS J.K. & G.J. YEVICK. Analysis of classical statistical mechanics by means of collective coordinates. *Phys. Rev.* 110 (1958), 1–13.
- [169] PITILAKIS K., D. HATZIDIMITRIOU, P.Y. BARD, G. MANOS & D. JONGMANS. EURO-SEISTEST Volvi-Thessaloniki – A European test site for engineering seismology, earthquake engineering and seismology. In *Earthquake resistant construction and design* (Rotterdam, 1994), Savidis, Ed., Balkema.
- [170] POIRION F. Numerical simulation of homogeneous non-Gaussian random vector fields. *J. Sound Vib.* 160, 1 (1993), 25–42.
- [171] POIRION F. & C. SOIZE. Numerical simulation of homogeneous and inhomogeneous Gaussian stochastic vector fields. *Recherche Aéronautique (English edition)* 1 (1989), 41–61.
- [172] POIRION F. & C. SOIZE. Monte-Carlo construction of Karhunen-Loeve expansion for non-Gaussian random fields. In *ASME Engineering Mechanics Conf., 13-16 June 1999, Baltimore, USA* (Rapport ONERA TP 1999-85, 1999).
- [173] POPESCU R., J.H. PRÉVOST & G. DEODATIS. Effects of spatial variability on soil liquefaction : some design recommendations. *Géotechnique* 47, 5 (1997), 1019–1036.
- [174] PRIESTLEY M.B. *Spectral analysis and time series*. Academic Press, London, 1981.
- [175] REN Y.J., I. ELISHAKOFF & M. SHINOZUKA. Finite element method for stochastic beams based on variational principles. *ASME J. Appl. Mech.* 64 (1997), 664–669.
- [176] RIEPL J. *Effets de site : Evaluation expérimentale et modélisations multidimensionnelles. Application au site test EURO-SEISTEST (Grèce)*. Mémoire de thèse de doctorat, Université Joseph-Fourier – Grenoble I, Grenoble, novembre 1997.
- [177] RUBINSTEIN R.Y. *Simulation and the Monte-Carlo method*. John Wiley & Sons, New York, 1981.
- [178] RYZHIK L., G. PAPANICOLAOU & J.B. KELLER. Transport equations for elastic and other waves in random media. *Wave Motion* 24 (1996), 327–370.
- [179] SANCHEZ-PALENCIA E. *Non-homogeneous media and vibration theory*. Springer Verlag, Berlin, 1980.
- [180] SAPORTA G. *Théorie et méthodes de la statistique*. Editions Technip, Paris, 1978.

- [181] SAVIDIS S.A. & C. VRETTOS. Dynamic soil-structure interaction for foundations on nonhomogeneous soils. In *Earthquake Engineering, Proc. 10<sup>th</sup> European Conf., 28 August – 2 September 1994, Wien, Austria* (Balkema, Rotterdam, 1994), G. Duma, Ed., pp. 599–609.
- [182] SAVIN E. Interaction sismique sol-structure pour des fondations souples de grandes tailles. Influence de la variabilité spatiale du champ incident. Tech. Rep. contract P52L61/1K7097/EPP817, Laboratoire MSSMat, Ecole Centrale de Paris, Châtenay-Malabry, France, 1997.
- [183] SAVIN E., D. CLOUTEAU & D. AUBRY. Modélisation numérique stochastique de l'interaction dynamique sol-structure. In *Actes 4<sup>me</sup> Colloque National en Calcul des Structures, 18-21 Mai 1999, Giens, France* (Teknea, Toulouse, 1999), P. Ladevèze, D. Guedra Degeorges & M. Raous, Ed., vol. 1, pp. 221–226.
- [184] SCHUËLLER G.I. & H.J. PRADLWARTER. Computational stochastic mechanics. Current developments and prospects. In *Computational mechanics. New trends and applications* (Barcelona, 1998), S. Idelsohn, E. Oñate & E. Dvorkin, Ed.
- [185] SEED H.B. & I.M. IDRIS. Soil moduli and damping factors for dynamic response analysis. Tech. Rep. EERC 70-10, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, 1970.
- [186] SHENG P., Z.Q. ZHANG, B. WHITE & G. PAPANICOLAOU. Multiple scattering noise in one dimension : universality through localization-length scaling. *Phys. Rev. Letters* 57 (1986), 1000–1003.
- [187] SHINOZUKA M. Monte-Carlo solution of structural dynamics. *Computers & Structures* 2 (1972), 855–874.
- [188] SHINOZUKA M. & G. DEODATIS. Response variability of stochastic finite element systems. *ASCE J. Engrg. Mech.* 114, 3 (1988), 499–519.
- [189] SHINOZUKA M. & G. DEODATIS. Stochastic process models for earthquake ground motion. *Prob. Engrg. Mech.* 3, 3 (1988), 114–123.
- [190] SOBczyk K. Elastic wave propagation in a discrete random medium. *Acta Mech.* 25 (1976), 13–28.
- [191] SOIZE C. Modélisation probabiliste du flou structural en dynamique linéaire des systèmes mécaniques complexes. I. Eléments théoriques. *La Recherche Aérospatiale (Edition française)* 5 (1986), 337–362.
- [192] SOIZE C. *Processus stochastiques et méthodes de résolution des problèmes aléatoires*. Ecole Centrale de Paris, Châtenay-Malabry, 1986.
- [193] SOIZE C. Méthodes d'études des problèmes classiques de dynamiques stochastiques. *Sciences et Techniques de l'Ingénieur A1*, 11 (1988), 346–1–348–16.
- [194] SOIZE C. *Méthodes mathématiques en analyse du signal*. Masson, Paris, 1993.
- [195] SOIZE C. *Signaux aléatoires*. Ecole Centrale de Paris, Châtenay-Malabry, 1995.
- [196] SOIZE C. A nonparametric model of random uncertainties in linear structural dynamics. In *Progress in stochastic structural dynamics, Proc. Journée Nationale Dynamique Stochastique des Structures, 28 June 1999, Châtillon, France* (Publication du L.M.A n° 152, Marseille, 1999), R. Bouc & C. Soize, Ed., pp. 109–137.

- [197] SOIZE C., J.M. DAVID & A. DESANTI. Une méthode de réduction fonctionnelle des champs stochastiques pour les études de vibrations aléatoires stationnaires. *La Recherche Aéronautique (Edition française) 2* (1986), 113–126.
- [198] SOONG T.T. *Random differential equations in science and engineering*. Academic Press, New York, 1973.
- [199] SORNETTE D. & O. LEGRAND. La localisation des ondes. *La Recherche 22* (1991), 1166–1173.
- [200] SOULIÉ M., P. MONTES & V. SILVESTRI. Modelling spatial variability of soil parameters. *Can. Geotech. J. 27* (1990), 617–630.
- [201] SPANOS P.D., Ed. *Computational stochastic mechanics. Proc. 3<sup>rd</sup> Int. Conf., 14-17 June 1998, Thera-Santorini, Greece*. Balkema, Rotterdam, 1999.
- [202] SPENCER, JR. B.F. & E.A. JOHNSON, Ed. *Stochastic structural dynamics. Proc. 4<sup>th</sup> Int. Conf. SSD'98, 6-8 August 1998, Notre-Dame, Indiana, USA*. Balkema, Rotterdam, 1999.
- [203] SPUDICH P. & E. CRANSWICK. Direct observation of rupture propagation during the 1979 Imperial Valley earthquake using a short baseline accelerometer array. *Bull. Seism. Soc. Am. 74* (1984), 2083–2114.
- [204] STEINBACH O. *Gebietszerlegungsmethoden mit Randintegralgleichungen und effiziente numerische Lösungsverfahren für gemischte Randwertprobleme*. Mémoire de thèse de doctorat, Universität Stuttgart, Stuttgart, juillet 1996.
- [205] SUN T.-C. A finite element method for random differential equations with random coefficients. *SIAM J. Numer. Anal. 16*, 6 (1979), 1019–1035.
- [206] TARMAN I.H. An improved dynamical approximation to Boussinesq equation using Karhunen-Loeve basis. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg. 144* (1997), 153–162.
- [207] THOMSON W.T. Transmission of elastic waves through a stratified soil medium. *J. Appl. Phys. 21* (1950), 89–93.
- [208] TOKSÖZ M.N., A.M. DAINY & E.E. CHARRETTE III. Spatial variation of ground motion due to lateral heterogeneity. *Structural Safety 10* (1991), 53–77.
- [209] TOUBALEM F. *Interaction sol-structure en milieux stochastiques*. Mémoire de thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, Ecully, octobre 1996.
- [210] TOUBALEM F., B. ZELDIN, F. THOUVEREZ & P. LABBÉ. Vertical excitation of stochastic soil-structure interaction systems. *ASCE J. Geotech. Geoenviron. Engrg. 125*, 5 (1999), 349–356.
- [211] TSAKALIDIS C. *Diffraction d'ondes sismiques sur les structures sur pieux et fonctions de Green du sol multicouche*. Mémoire de thèse de doctorat, Ecole Centrale de Paris, Châtenay-Malabry, juillet 1985.
- [212] USCINSKI B.J. *The elements of wave propagation in random media*. McGraw-Hill, New York, 1977.
- [213] VANMARCKE E.H. Probabilistic modeling of soil profiles. *ASCE J. Geotech. Engrg. 103*, GT11 (1977), 1227–1246.
- [214] VARADAN V.K. & V.V. VARADAN. Frequency dependence of elastic (SH) wave velocity and attenuation in anisotropic two-phase media. *Wave Motion 1* (1979), 53–63.

- [215] VARADAN V.K., V.V. VARADAN & Y.H. PAO. Multiple scattering of elastic waves by cylinders of arbitrary cross-section. I. SH waves. *J. Acoust. Soc. Am.* 63 (1978), 1310–1319.
- [216] VARADAN V.K., Y. MA & V.V. VARADAN. A multiple scattering theory for elastic wave propagation in discrete random media. *J. Acoust. Soc. Am.* 77, 2 (1985), 375–385.
- [217] VELETOS A.S. & A.M. PRASAD. Seismic interaction of structures and soils : stochastic approach. *ASCE J. Struct. Engrg.* 115, 4 (1989), 935–956.
- [218] VRETTOS C. Time-harmonic Boussinesq problem for a continuously non-homogeneous soil. *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.* 20 (1991), 961–977.
- [219] WANG F. & F. GANTENBEIN. Calculation of foundation response to spatially varying ground motion by finite element method. *Communication interne, CEA-CEN / Saclay* (1995).
- [220] WHITE B., P. SHENG, Z.Q. ZHANG & G. PAPANICOLAOU. Wave localization characteristics in the time domain. *Phys. Rev. Letters* 59 (1987), 1918–1921.
- [221] WIENER N. The homogeneous chaos. *Am. J. Math.* 60 (1938), 897–936.
- [222] WILLIS J.R. A polarization approach to the scattering of waves. I. Scattering by a single inclusion. *J. Mech. Phys. Solids* 28 (1980), 287–305.
- [223] WILLIS J.R. A polarization approach to the scattering of waves. II. Multiple scattering from inclusions. *J. Mech. Phys. Solids* 28 (1980), 307–327.
- [224] WILLIS J.R. Overall properties of composites. In *Advances in applied mechanics vol. 21* (Academic Press, New York, 1981), C.-S. Yih, Ed., pp. 1–78.
- [225] WOLF J.P. *Dynamic soil-structure interaction*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1985.
- [226] YAMAZAKI F., M. SHINOZUKA & G. DASGUPTA. Neumann expansion for stochastic finite element analysis. *ASCE J. Engrg. Mech.* 114, 8 (1988), 1335–1354.
- [227] YEH C.H. & Y.K. WEN. Modeling of nonstationary earthquake ground motion and biaxial and torsional response of inelastic structures. Tech. Rep. Civil Engineering Studies, Structural Research Series n° 546, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, Illinois, 1989.
- [228] ZENDAGUI D., M.K. BERRAH & E. KAUSEL. Stochastic deamplification of spatially varying seismic motions. *Soil Dyn. Earthquake Engrg.* 18 (1999), 409–421.
- [229] ZERVA A. Spatial variability of seismic ground motions : Stochastic techniques and physical patterns. In *Earthquake Engineering, Proc. 11<sup>th</sup> European Conf., 6-11 September 1998, Paris, France* (Balkema, Rotterdam, 1998), P. Bisch, P. Labbé & A. Pecker, Ed., pp. 199–215.
- [230] ZERVA A. & O. ZHANG. Correlation patterns in characteristics of spatially variable seismic ground motions. *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.* 26 (1997), 19–39.
- [231] ZERVA A. & T. HARADA. Effect of surface layer stochasticity on seismic ground motion coherence and strain estimates. *Soil Dyn. Earthquake Engrg.* 16 (1997), 445–457.