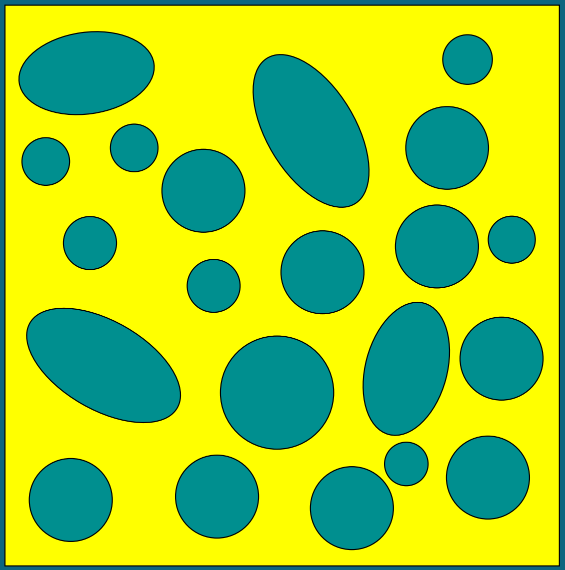
Méthode de la frontière élargie (F.B.M.) pour la résolution de problèmes elliptiques dans des domaines perforés. Application aux écoulements fluides tridimensionnels.

Mourad Ismail

Thèse en cotutelle

Laboratoire Jacques-Louis Lions	Laboratoire d'Ingénierie Mathématique
Université Pierre et Marie Curie	École Polytechnique de Tunisie
C. Bernardi & B. Maury	T. Hadhri

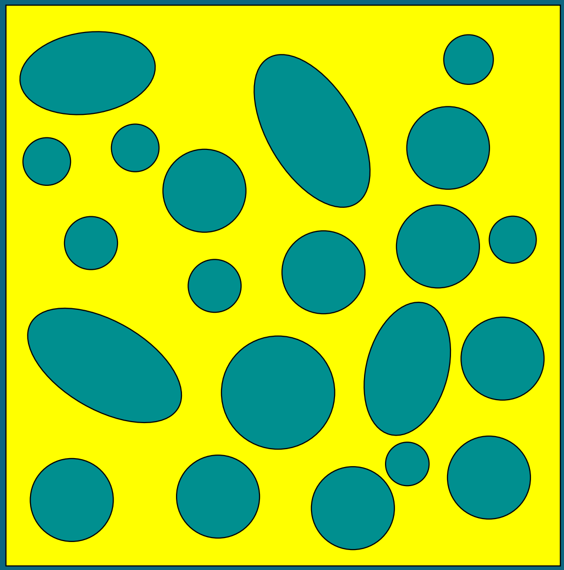
Motivation : simulations (3D) d'écoulements fluides dans des géometries complexes



Difficultés :

- équations de Navier-Stokes dans un domaine tridimensionnel perforé
- les "trous" bougent quand les particules sont transportées par le fluide

<u>Motivation</u> : simulations (3D) d'écoulements fluides dans des géometries complexes



Difficultés :

- équations de Navier-Stokes dans un domaine tridimensionnel perforé
- les "trous" bougent quand les particules sont transportées par le fluide

Objectifs

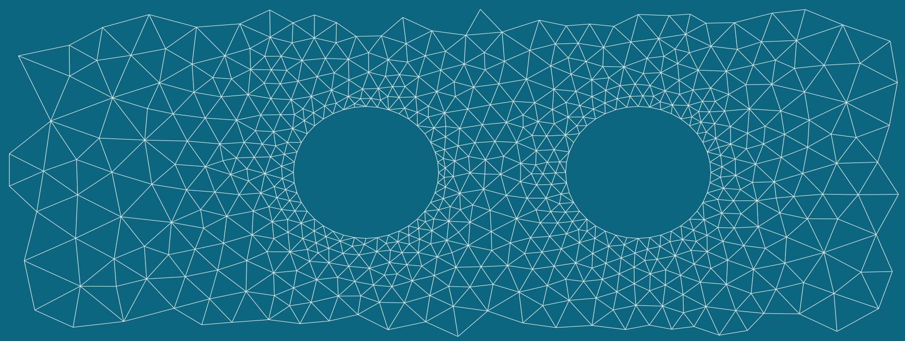
- Utilisation de solveurs rapides
- Garder la possibilité de calculer avec précision dans un voisinage des "trous"

Plan

1. Problèmes elliptiques dans des domaines perforés
   - Méthodes existantes
   - `F.B.M.` Analyse mathématique et tests numériques
2. Algorithme de prise en compte des conditions de Neumann
   - Convergence et validation numérique
3. Application aux écoulements fluides tridimensionnels
   - Simulation de la convection-diffusion de la chaleur
   - Discrétisation des équations de Navier-Stokes
   - Simulations numériques
4. Conclusion et perspectives

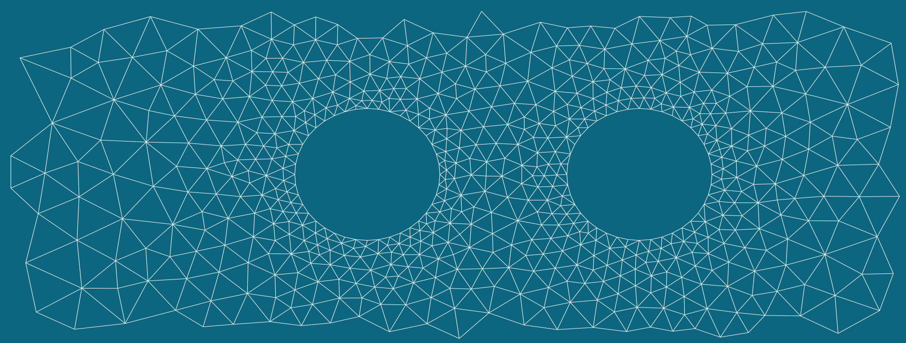
Méthodes existantes

I. Maillages non structurés



Méthodes existantes

I. Maillages non structurés

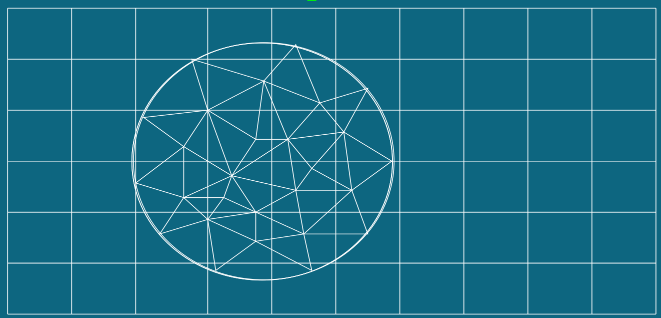


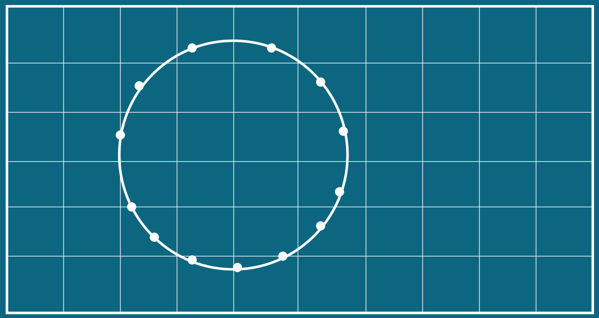
✔ Avantage : possibilité de calculer avec précision dans un voisinage des “trous”.

✘ Inconvénient : perte de la structure cartésienne

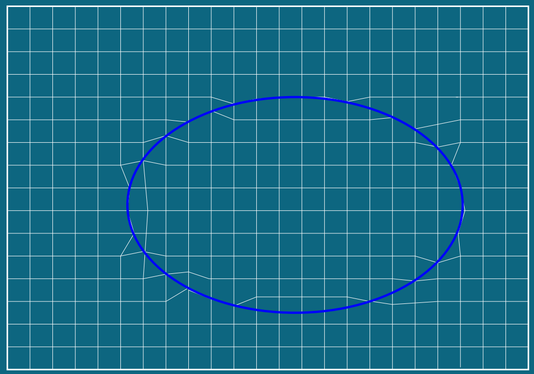
II. Maillages cartésiens

- Frontière immergée [Peskin]
- Domaines fictifs avec multiplicateurs de Lagrange [Girault, Glowinski et al.]



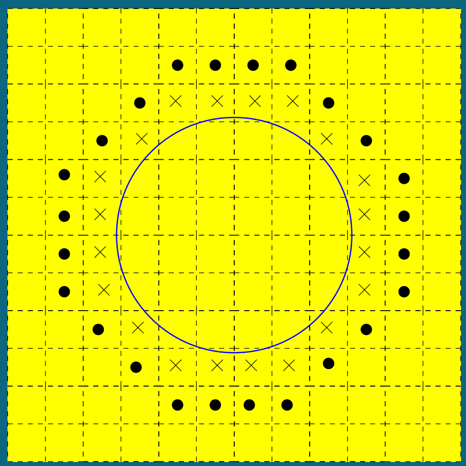


- Domaines fictifs avec pénalisation [*Freefem 3D:* Del Pino, Pironneau]
- Maillage localement adapté [Saul'ev]



“ *Physalis* ” [Prosperetti *et al.*]

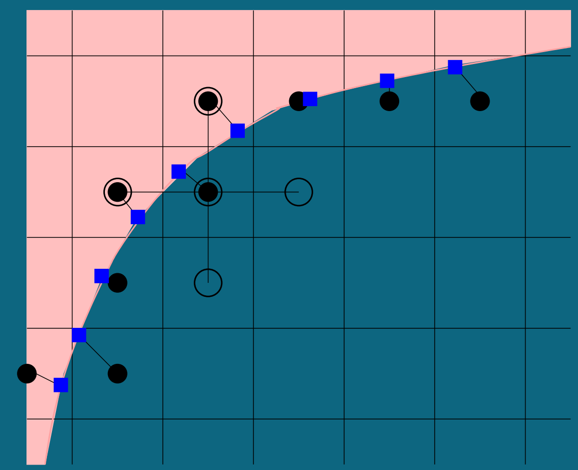
2001-2003



M.I.I. [LeVeque et Li]

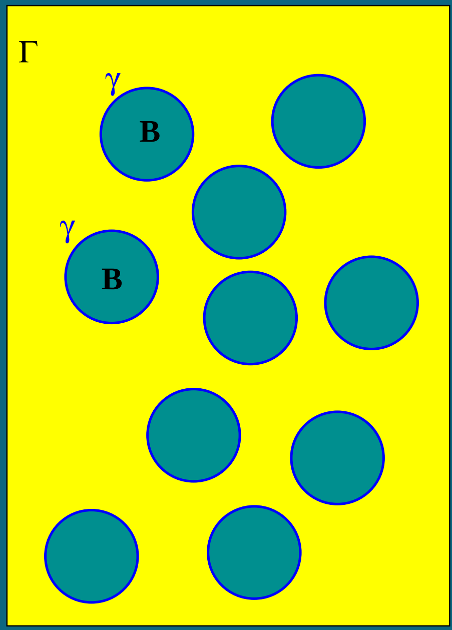
Schéma aux différences finies corrigé

[Calhoun], 2002



- Couplage FEM-BEM [Celorrio *et al.*], 2002
- Couplage DF-BEM [Russel *et al.*], 2003

Problème modèle



- $\Omega = \square \subset \mathbb{R}^n$
- B : une collection de sous-domaines réguliers
- $\square \setminus \overline{B}$: le domaine perforé

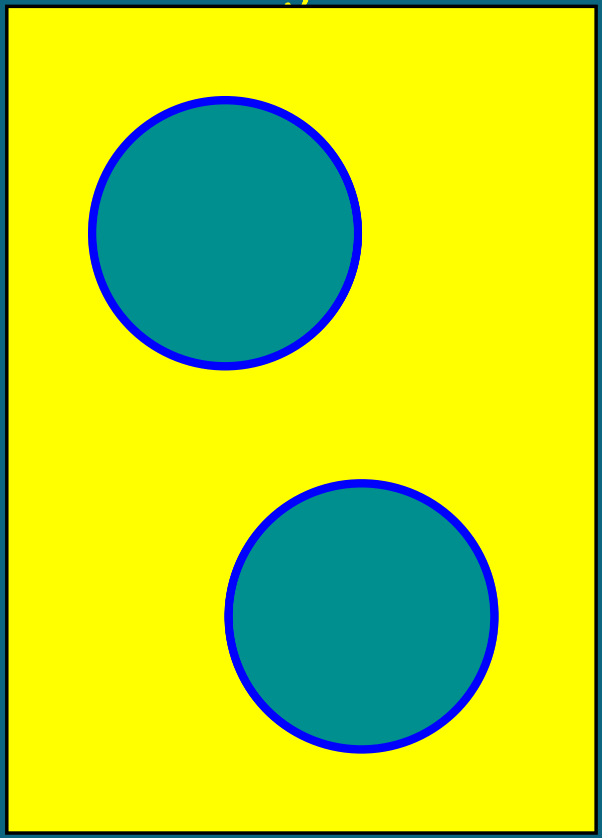
Soit $f \in L^2(\square \setminus \overline{B})$. Trouver $u \in H^1(\square \setminus \overline{B})$, telle que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\triangle u & = & f \quad \text{dans } \square \setminus \overline{B} \\ u & = & 0 \quad \text{sur } \gamma \cup \Gamma \end{array} \right.$$

Principe de la F.B.M. : "*The Fat Boundary Method*"

Pb. initial (dans $\square \setminus \overline{B}$ de frontière $\mathbf{\Gamma} \cup \gamma$)

➠ deux nouveaux Pbs. : global et local.



Lien entre résolutions globale et locale :

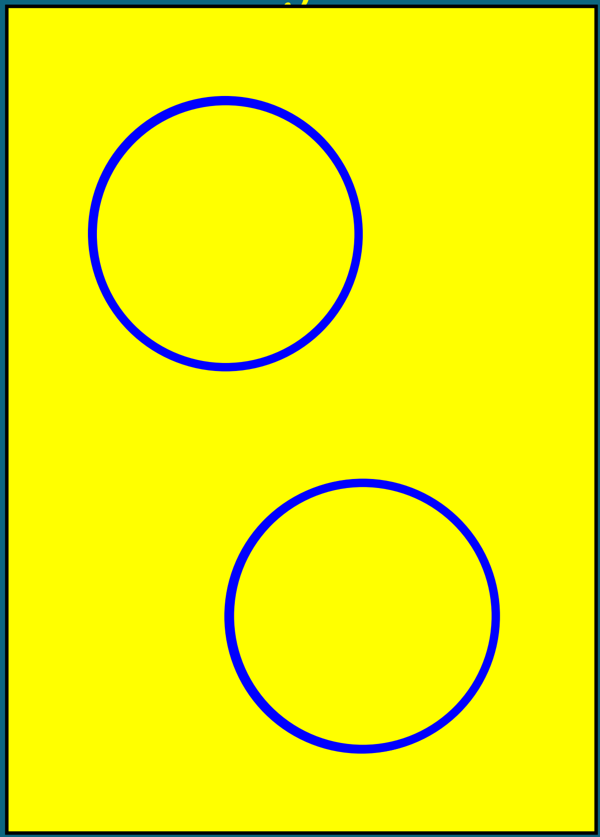
- interpolation d'un champ global sur γ'
- saut de la dérivée normale à travers γ

Principe de la F.B.M. : “*The Fat Boundary Method*”

Pb. initial (dans $\square \setminus \overline{B}$ de frontière $\mathbf{\Gamma} \cup \gamma$)

➠ deux nouveaux Pbs. : global et local.

- extension : $f \longrightarrow \overline{f} \in L^2(\square)$



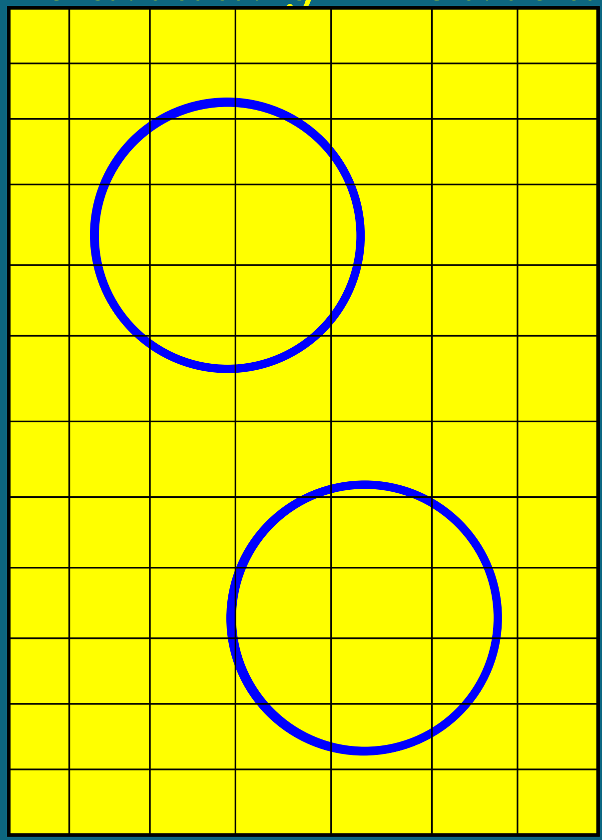
Lien entre résolutions globale et locale :

- interpolation d'un champ global sur γ'
- saut de la dérivée normale à travers γ

Principe de la F.B.M. : "*The Fat Boundary Method*"

Pb. initial (dans $\square \backslash \overline{B}$ de frontière $\mathbf{\Gamma} \cup \gamma$)

➠ deux nouveaux Pbs. : global et local.



- extension : $f \longrightarrow \overline{f} \in L^2(\square)$

$$\boxed{-\Delta \widehat{\boldsymbol{u}} = \bar{f} + \partial_n \boldsymbol{v} \delta_\gamma}$$

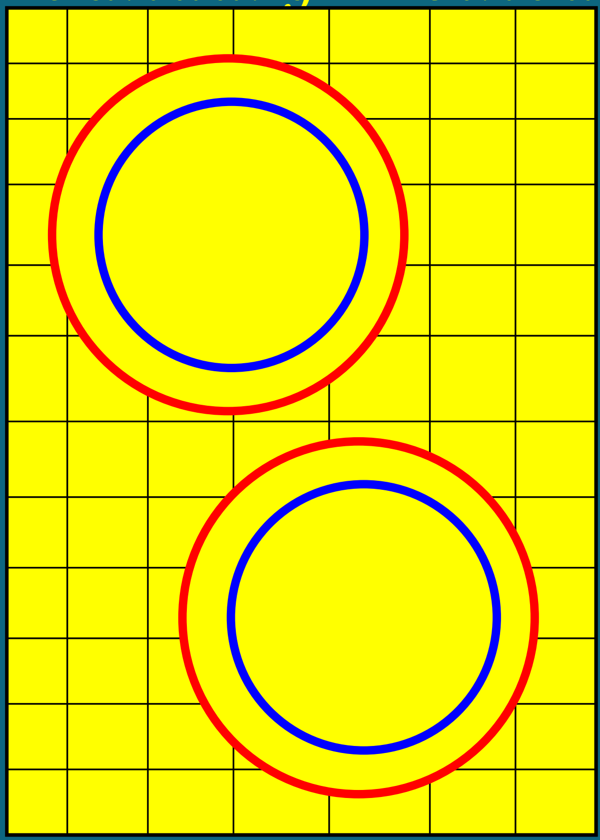
Lien entre résolutions globale et locale :

- interpolation d'un champ global sur γ'
- saut de la dérivée normale à travers γ

Principe de la F.B.M. : "*The Fat Boundary Method*"

Pb. initial (dans $\square \setminus \overline{B}$ de frontière $\boldsymbol{\Gamma} \cup \boldsymbol{\gamma}$)

➠ deux nouveaux Pbs. : global et local.



- extension : $f \longrightarrow \overline{f} \in L^2(\square)$

$$\boxed{-\Delta \widehat{\boldsymbol{u}} = \bar{f} + \partial_n \boldsymbol{v} \delta_{\gamma}}$$

- $\gamma' \subset\subset \square$;

Principe de la F.B.M. : "*The Fat Boundary Method*"

Pb. initial (dans $\square \setminus \overline{B}$ de frontière $\mathbf{\Gamma} \cup \gamma$)

➠ deux nouveaux Pbs. : global et local.

- extension : $f \longrightarrow \overline{f} \in L^2(\square)$

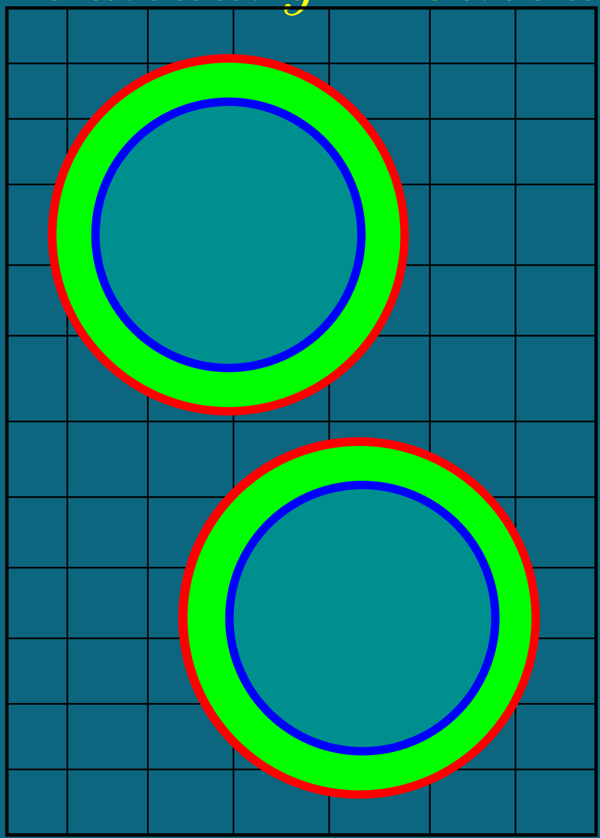
$$\boxed{-\Delta \widehat{u} = \bar{f} + \partial_n v \delta_\gamma}$$

- $\gamma' \subset\subset \square$; $\omega \subset \square \setminus \overline{B}$, $\partial\omega = \gamma \cup \gamma'$

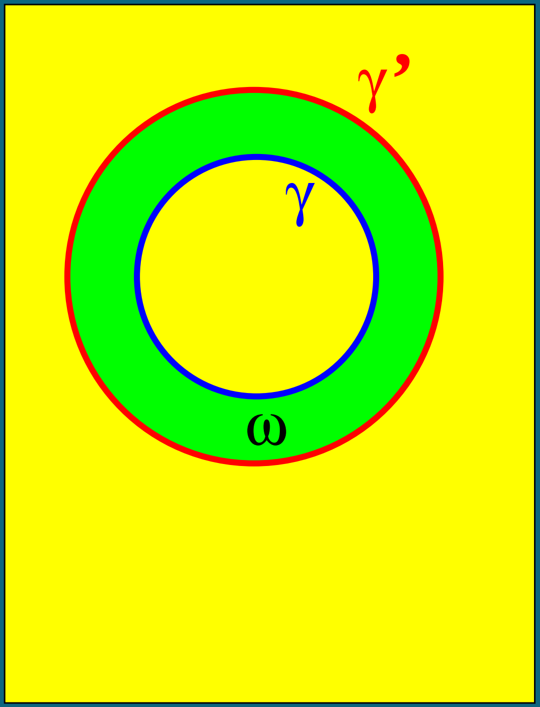
$$\boxed{-\Delta v = f \qquad v|_{\gamma'} = \widehat{u}|_{\gamma'}}$$

$$\downarrow$$

Informations sur $\partial_n v$



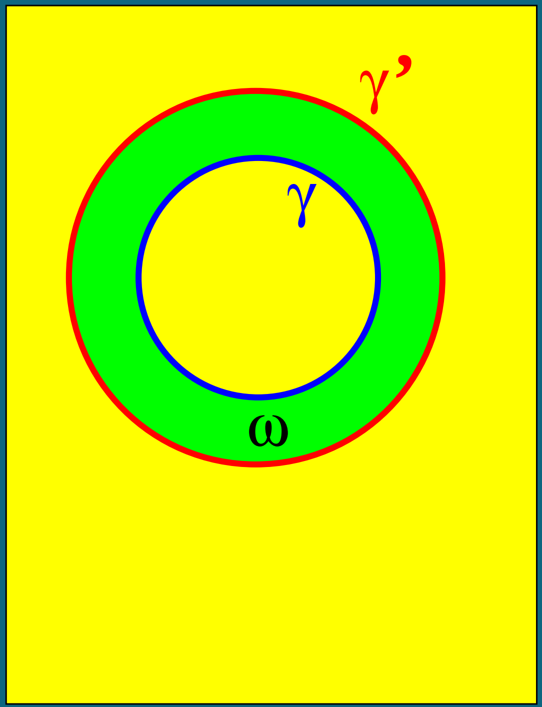
Formulation de point fixe. Itération de type Schwartz



Formulation de point fixe. Itération de type Schwartz

- $\widehat{u}^k \longmapsto v^k$ solution dans ω de

$$-\Delta v^k = f \qquad v^k|_{\gamma'} = \widehat{u}^k|_{\gamma'}$$



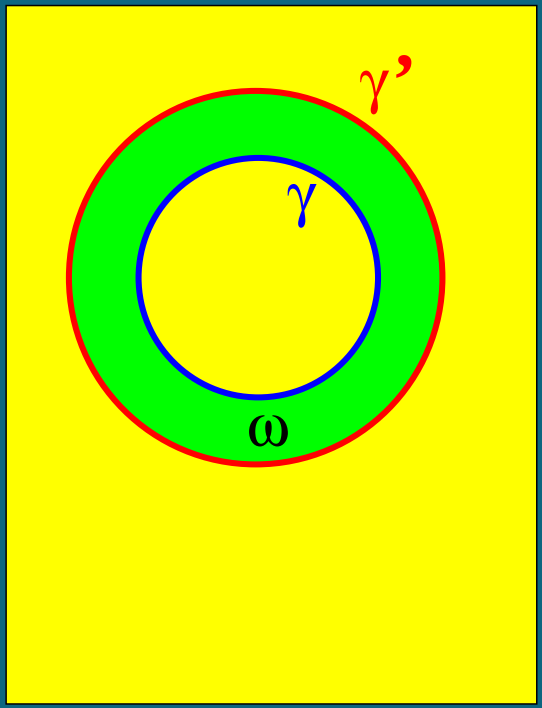
Formulation de point fixe. Itération de type Schwartz

- $\widehat{u}^k \longmapsto v^k$ solution dans ω de

$$-\Delta v^k = f \qquad v^k|_{\gamma'} = \widehat{u}^k|_{\gamma'}$$

- $v^k \longmapsto \widehat{U}^k$ solution dans $\square$ de

$$-\Delta \widehat{U}^k = \bar{f} + \partial_n v^k \delta_\gamma$$



Formulation de point fixe. Itération de type Schwartz

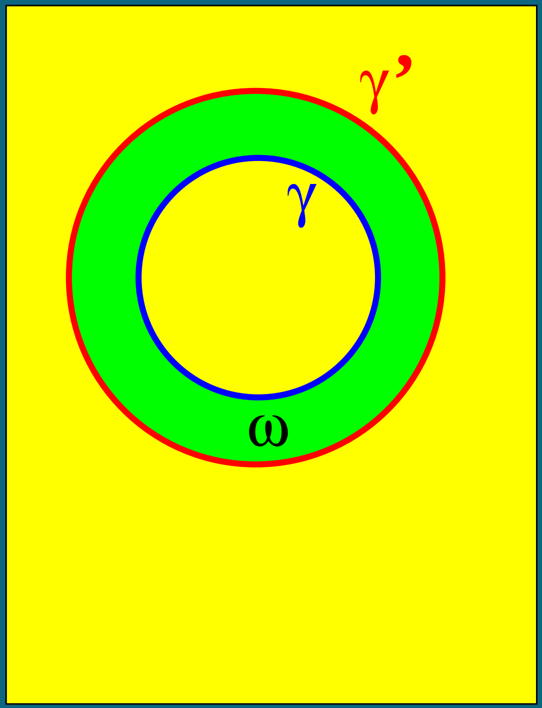
- $\widehat{u}^k \longmapsto v^k$ solution dans ω de

$$-\Delta v^k = f \qquad v^k|_{\gamma'} = \widehat{u}^k|_{\gamma'}$$

- $v^k \longmapsto \widehat{U}^k$ solution dans $\Box$ de

$$-\Delta \widehat{U}^k = \bar{f} + \partial_n v^k \delta_\gamma$$

- relaxation : $\widehat{u}^{k+1} = \theta \widehat{u}^k + (1-\theta)\widehat{U}^k$



F.B.M. Le schéma continu

$(\overline{f}=0)$, une itération de l'algorithme de point fixe :

$$T : \widehat{\boldsymbol{u}}^k \xrightarrow{D[\boldsymbol{\gamma}']} \boldsymbol{v}^k \xrightarrow{N[\boldsymbol{\gamma}]} \widehat{\boldsymbol{U}}^k$$

➤ Étape 1.

$$\boxed{< \widehat{\boldsymbol{U}}, \widehat{\boldsymbol{u}} >} \leq 0 \quad ?$$

$$= \int_{\square} \nabla\widehat{\boldsymbol{U}} \cdot \nabla\widehat{\boldsymbol{u}} \quad = -\int_{\boldsymbol{\gamma}'} \boldsymbol{v}\partial_n\boldsymbol{v} + \int_{\boldsymbol{\gamma}'} \widehat{\boldsymbol{u}}\partial_n\widehat{\boldsymbol{u}}$$

$$= -|\boldsymbol{v}|^2_{1,\boldsymbol{\omega}} - |\widehat{\boldsymbol{u}}|^2_{1,\square\setminus(\boldsymbol{B}\cup\overline{\boldsymbol{\omega}})}$$

En effet,

$\boxed{-\Delta\widehat{\boldsymbol{U}} = 0 \quad \text{dans} \quad \square \setminus \boldsymbol{\gamma}}$ et $\boxed{-\Delta\boldsymbol{v} = 0 \quad \text{dans} \quad \boldsymbol{\omega}}$

Le schéma relaxé est contractant

- Étape 2. Continuité de $T \Longrightarrow |T\widehat{\boldsymbol{u}}|_{1,\square} \leq C_T|\widehat{\boldsymbol{u}}|_{1,\square}$

$$
\begin{aligned}
|\theta\widehat{\boldsymbol{u}} + (1-\theta)\widehat{\boldsymbol{U}}|^2_{1,\square} &= (1-2(1-\theta))|\widehat{\boldsymbol{u}}|_{1,\square} \\
&+ (1-\theta)^2|\widehat{\boldsymbol{U}} - \widehat{\boldsymbol{u}}|_{1,\square} \\
&+ 2(1-\theta)\boxed{< \widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{\boldsymbol{U}} >_{1,\square}} \\
&\leq (1-2(1-\theta) + (1-\theta)^2 C_T)|\widehat{\boldsymbol{u}}|^2_{1,\square}
\end{aligned}
$$

➠ Convergence de l'algorithme de point fixe

Discrétisation

$\mathbb{U}_h \subset H^1_0(\square)$: espace d'approximation par éléments finis (Q^1)

- $\widehat{\boldsymbol{u}}^k \in \mathbb{U}_h \longmapsto \boldsymbol{v}^k \in H^1_\gamma(\omega)$ solution de

$$\boxed{-\Delta \boldsymbol{v}^k = f, \qquad \boldsymbol{v}^k|_{\gamma'} = \widehat{\boldsymbol{u}}^k_h|_{\gamma'}}$$

- $\boldsymbol{v}^k \longmapsto \widehat{\boldsymbol{U}}^k \in \mathbb{U}_h$ telle que $\forall w_h \in \mathbb{U}_h$,

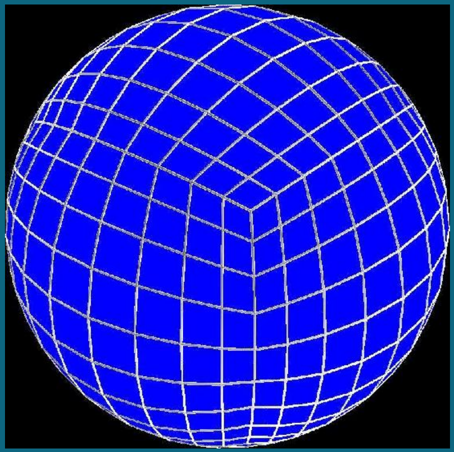
$$\int_\square \nabla \widehat{\boldsymbol{U}}^k_h \cdot \nabla w_h = \int_\square \overline{f} w_h + \int_\gamma w_h \partial_n \boldsymbol{v}^k$$

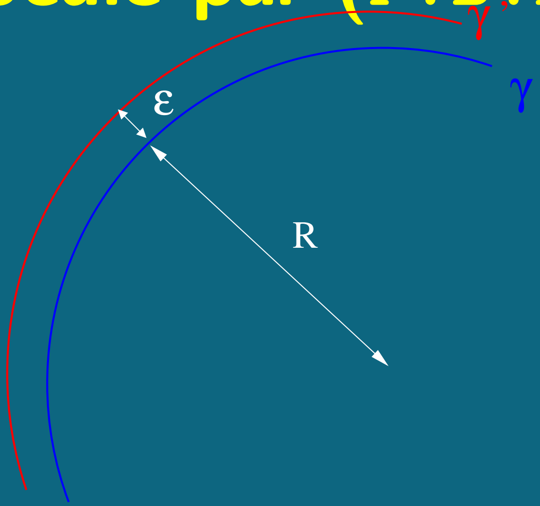
- $\widehat{\boldsymbol{u}}^{k+1}_h = \theta \widehat{\boldsymbol{u}}^k_h + (1-\theta)\widehat{\boldsymbol{U}}^k_h$

Résolution locale

- Discrétisation par éléments finis et l'utilisation de méthodes directes (LU, Cholesky)
- Séries de Fourier et FFT [Shen, Lai *et al.*]
- Harmoniques sphériques et FFT [Mohlenkamp]

Mise en oeuvre. Résolution locale par (F.B.M$-\varepsilon$)





$$\partial_n \boldsymbol{v}|_{\gamma} = - \quad (1+\frac{\varepsilon}{R})\frac{\widehat{\boldsymbol{u}}_h|_{\gamma'}}{\varepsilon}$$

$$+ \quad \frac{1}{\varepsilon}\left[(1+\frac{\varepsilon}{R})\int_R^{R+\varepsilon} tf(t)dt - \frac{1}{R}\int_R^{R+\varepsilon} t^2 f(t)dt\right]$$

Mise en oeuvre. Résolution globale par PSCR

Techniques de résolution partielle et séparation de variables [Abakumov, Kuznetsov, Vassilevski] : $\mathcal{A}U = \mathcal{F}$

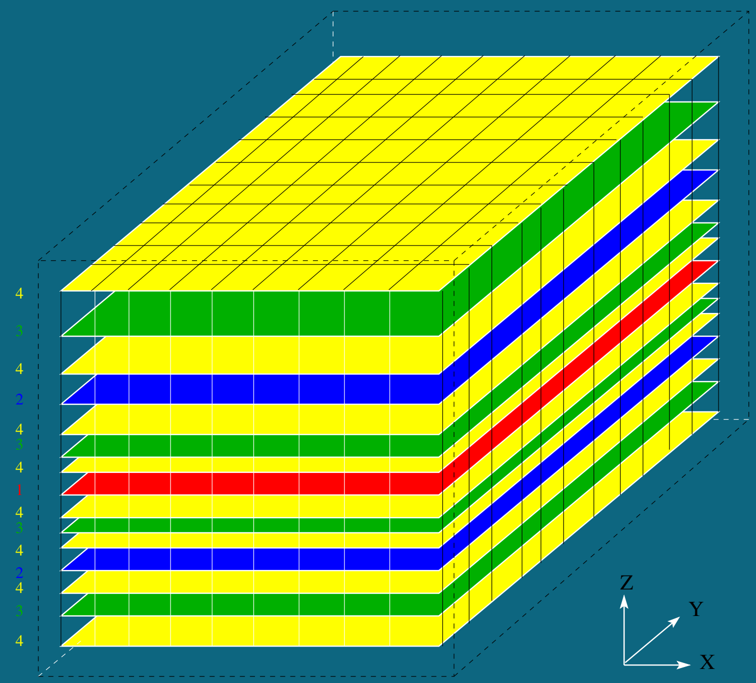
$$\mathcal{A} = A_1 \otimes M_2 \otimes M_3 + M_1 \otimes A_2 \otimes M_3 + M_1 \otimes M_2 \otimes A_3$$

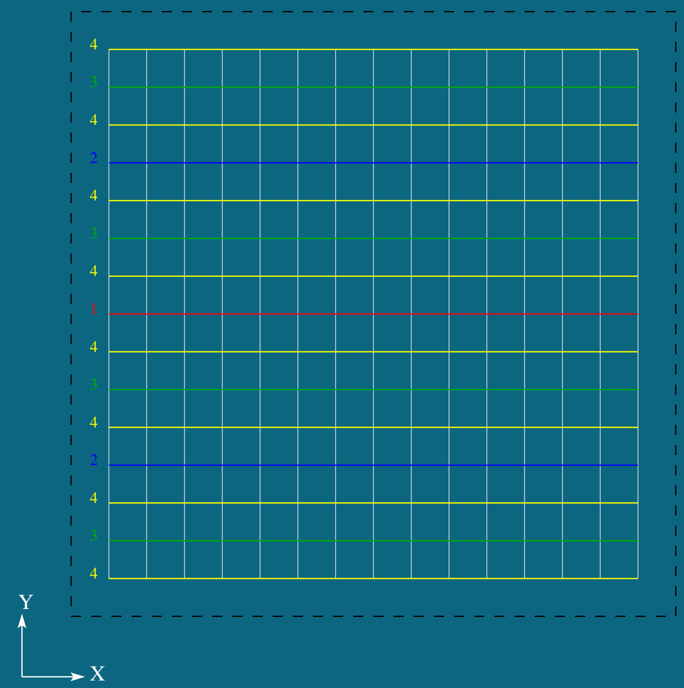
$$A_i = \text{tridiag}\{-\frac{1}{h_i}, \frac{2}{h_i}, -\frac{1}{h_i}\} \quad , \quad M_i = \text{tridiag}\{\frac{h_i}{6}, \frac{2h_i}{3}, \frac{h_i}{6}\}$$

$$\begin{pmatrix} D_1 & C_2 & . & . & . & . \\ C_2 & D_2 & C_3 & . & . & . \\ . & \ddots & \ddots & \ddots & . & . \\ . & . & C_i & D_i & C_{i+1} & . \\ . & . & . & \ddots & \ddots & C_{n_z} \\ . & . & . & . & C_{n_z} & D_{n_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_{n_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{F}_i \\ \vdots \\ \mathcal{F}_{n_z} \end{pmatrix}$$

Décomposition par blocs

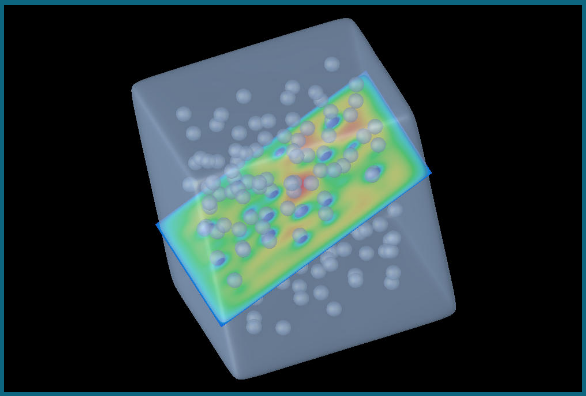
[Rossi et Toivanen]

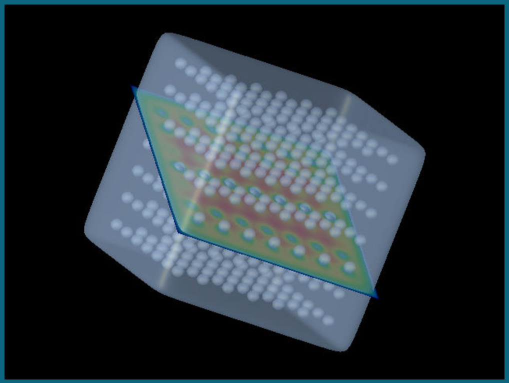


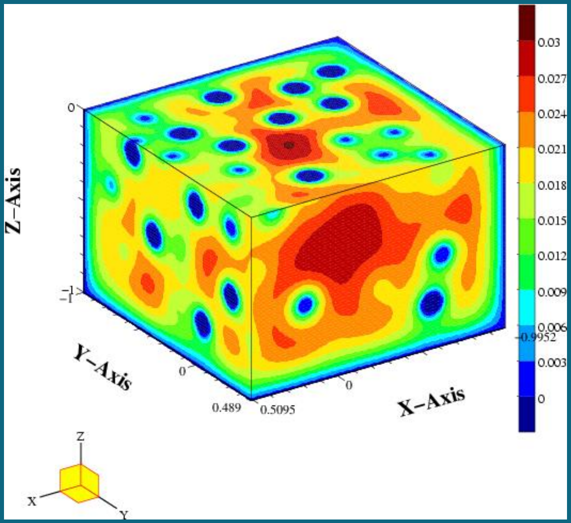


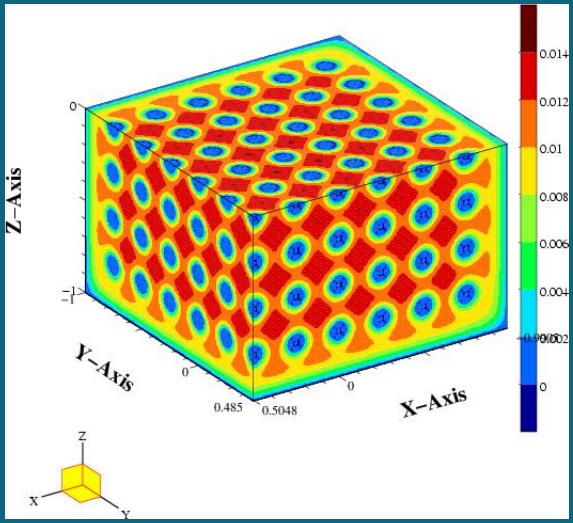
➠ Temps de calcul sur *Hydre* : 15.66 secondes CPU pour 2 millions d.d.l.

Test numérique : Laplacien dans un domaine perforé









Estimation d'erreur

Théorème de Nitsche et Schatz

Si $\Omega_0 \subset\subset \Omega_1 \subset\subset (\square \setminus \gamma)$, $u \in H^\ell(\Omega_1)$ $(\ell \geq 1)$ et $u_h \in \mathbb{U}_h$, telles que, pour tout $w_h \in \mathbb{U}_h \cap H^1_0(\Omega_1)$,

$$\int_{\Omega_1} \nabla(u - u_h) \cdot \nabla w_h = 0$$

$$\boxed{\|u - u_h\|_{1,\Omega_0} \lesssim h^{\ell-1}\|u\|_{\ell,\Omega_1} + \|u - u_h\|_{0,\square}}$$

Schéma semi-discret [en collaboration avec S. Bertoluzza]

$$
\begin{tikzcd}
H^1_0(\Omega) \arrow[r, "\mathbf{D}"] \arrow[rr, bend left, "\mathbf{T}"] & H^1_\gamma(\omega) \arrow[r, "\mathbf{N}"] & H^1_0(\Omega)
\end{tikzcd}
$$

➤ Étape 1.

$$
\begin{aligned}
\boxed{< T^*\widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{\boldsymbol{u}} >} \;&\leq\; C^* h^2 |\widehat{\boldsymbol{u}}|^2_{1,\square} \quad ? \\
&=\; \int_\square \nabla \widehat{\boldsymbol{U}} \cdot \nabla \widehat{\boldsymbol{u}} = -\int_{\gamma'} \widehat{\boldsymbol{u}} \partial_n \boldsymbol{V} + \int_{\gamma'} \boldsymbol{V} \partial_n \widehat{\boldsymbol{u}} \\
&=\; -|\boldsymbol{V}|^2_{1,\boldsymbol{\omega}} - |\widehat{\boldsymbol{u}}|^2_{1,\square\setminus(\boldsymbol{B}\cup\overline{\boldsymbol{\omega}})} - \int_{\gamma'} (\widehat{\boldsymbol{u}} - \pi_h \widehat{\boldsymbol{u}}) \partial_n \boldsymbol{V} \\
&\qquad + \int_{\gamma'} (\pi_h \widehat{\boldsymbol{u}} - \widehat{\boldsymbol{u}}) \partial_n \widehat{\boldsymbol{u}}
\end{aligned}
$$

Schéma semi-discret [en collaboration avec S. Bertoluzza]

$$\begin{tikzcd}
H_0^1(\Omega) \arrow[r, "\pi_h"] \arrow[rrr, bend right, "T^*"'] & U_h \subset H_0^1(\Omega) \arrow[r, "D"] \arrow[rr, bend left, "T"] \arrow[rrr, bend right, "T_h"'] & H_\gamma^1(\omega) \arrow[r, "N"] & H_0^1(\Omega) \arrow[r, "\pi_h"] & U_h
\end{tikzcd}$$

➤ Étape 1.

$$\begin{aligned}
\boxed{< T^*\widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{\boldsymbol{u}} >} &\leq C^* h^2 |\widehat{\boldsymbol{u}}|^2_{1,\square} \quad ? \\
&= \int_\square \nabla \widehat{\boldsymbol{U}} \cdot \nabla \widehat{\boldsymbol{u}} = -\int_{\gamma'} \widehat{\boldsymbol{u}} \partial_n \boldsymbol{V} + \int_{\gamma'} \boldsymbol{V} \partial_n \widehat{\boldsymbol{u}} \\
&= -|\boldsymbol{V}|^2_{1,\boldsymbol{\omega}} - |\widehat{\boldsymbol{u}}|^2_{1,\square \setminus (\boldsymbol{B} \cup \overline{\boldsymbol{\omega}})} - \int_{\gamma'} (\widehat{\boldsymbol{u}} - \pi_h \widehat{\boldsymbol{u}}) \partial_n \boldsymbol{V} \\
&\qquad + \int_{\gamma'} (\pi_h \widehat{\boldsymbol{u}} - \widehat{\boldsymbol{u}}) \partial_n \widehat{\boldsymbol{u}}
\end{aligned}$$

Le schéma semi-discret est contractant

- Étape 2. $\boxed{< \widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{\boldsymbol{U}} > \leq C^* h^2 |\widehat{\boldsymbol{u}}|^2_{1,\Box}}$

$$|\theta\widehat{\boldsymbol{u}} + (1-\theta)\widehat{\boldsymbol{U}}|^2_{1,\Box} \leq (1 - 2(1-\theta)(1 - \boxed{C^* h^2}) + (1-\theta)^2 C_{T^*})|\widehat{\boldsymbol{u}}|^2_{1,\Box}$$

⇒ Convergence de l'algorithme de point fixe.

Estimation d'erreur

$\Omega^* = \square \setminus (B \cup \overline{\omega})$

Théorème

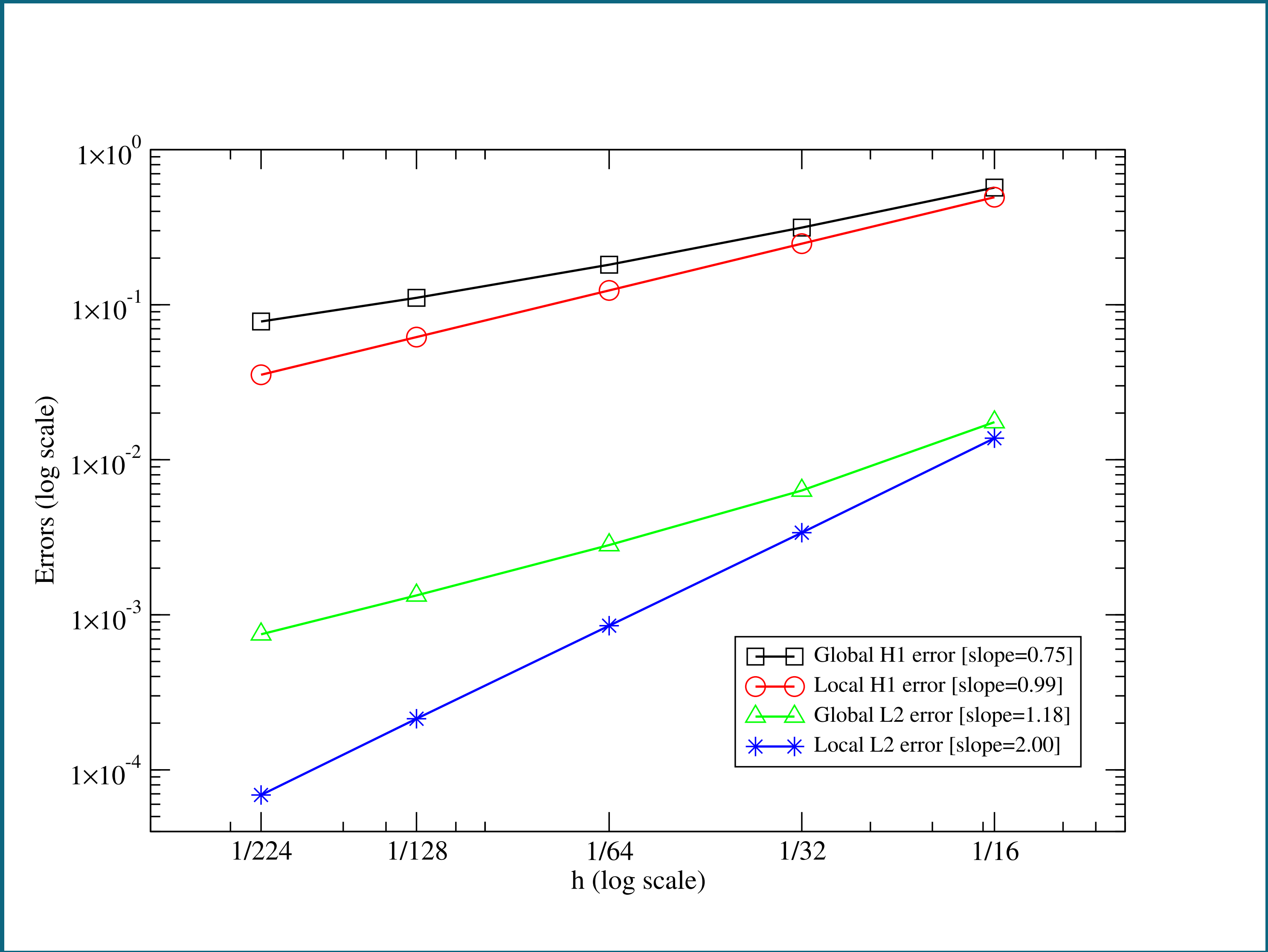
Si $f \in L^2(\square \setminus \overline{B})$ alors

$$\boxed{|\widehat{\boldsymbol{u}} - \widehat{\boldsymbol{u}}_h|_{1,\Omega^*} \lesssim h|f|_{0,\square\setminus\overline{B}}}$$

Preuve

- Intercaler u^*
- Nitsche et Schatz avec $\Omega_0 = \Omega^*$ et $\Omega_1 = \square \setminus \overline{B}$
- $|\xi|_{2,\Omega_0} \lesssim \|\xi\|_{1,\Omega_1}$ pour ξ harmonique sur Ω_1 et $\Omega_0 \subset\subset \Omega_1$

Validation numérique. Dérivée normale “exacte”



$$\widehat{u} = \sin(2\pi(r^2 - R^2)), \qquad \partial_n v|_\gamma = -4\pi R$$

Avantages de la F.B.M.

Résolution globale

- ✔ Maillage cartésien dans □
- ✔ Possibilité d'utiliser des solveurs rapides (méthode PSCR [Kuznetsov, Rossi, Toivanen,. . .])

Résolution locale

- ✔ Possibilité de résolution en parallèle
- ✔ Particules identiques. Un seul maillage, une seule matrice de rigidité
- ✔ Pas de "remaillage" quand il s'agit de particules mobiles.

Plan

1. Problèmes elliptiques dans des domaines perforés
   - Méthodes existantes
   - `F.B.M.` Analyse mathématique et tests numériques
2. Algorithme de prise en compte des conditions de Neumann
   - Convergence et validation numérique
3. Application aux écoulements fluides tridimensionnels
   - Simulation de la convection-diffusion de la chaleur
   - Discrétisation des équations de Navier-Stokes
   - Simulations numériques
4. Conclusion et perspectives

Un algorithme pour la prise en compte des conditions de Neumann

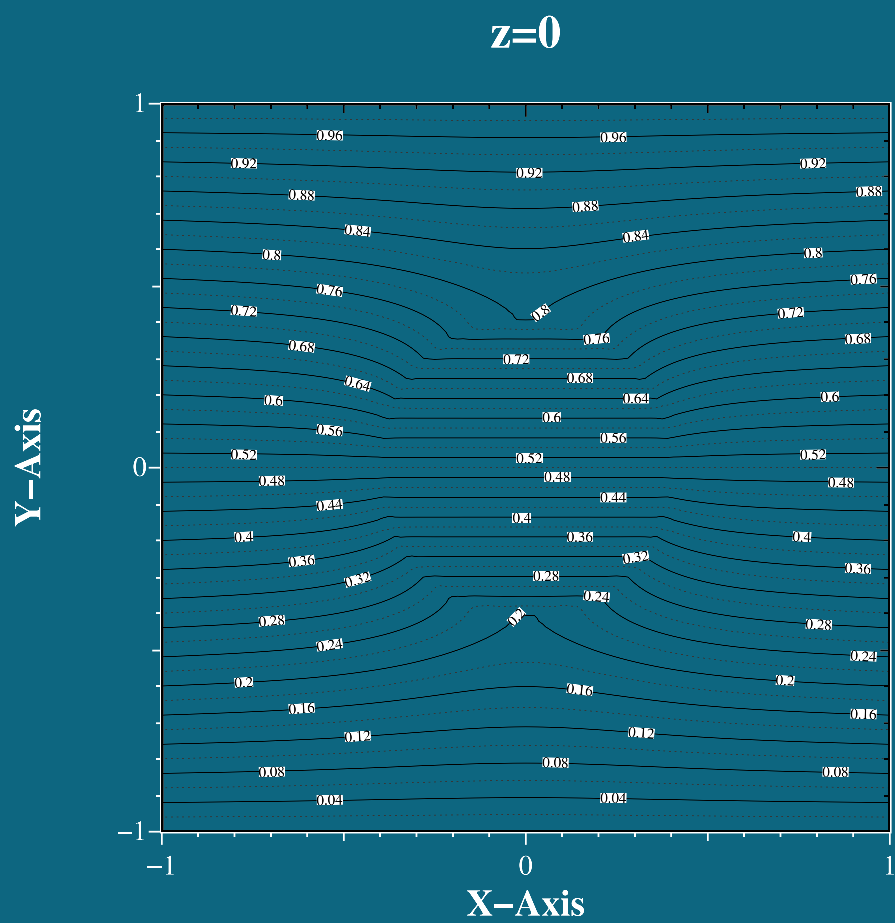
- $f \in L^2(\square \setminus \overline{B})$. Trouver $u \in H^1_\Gamma(\square \setminus \overline{B})$, telle que

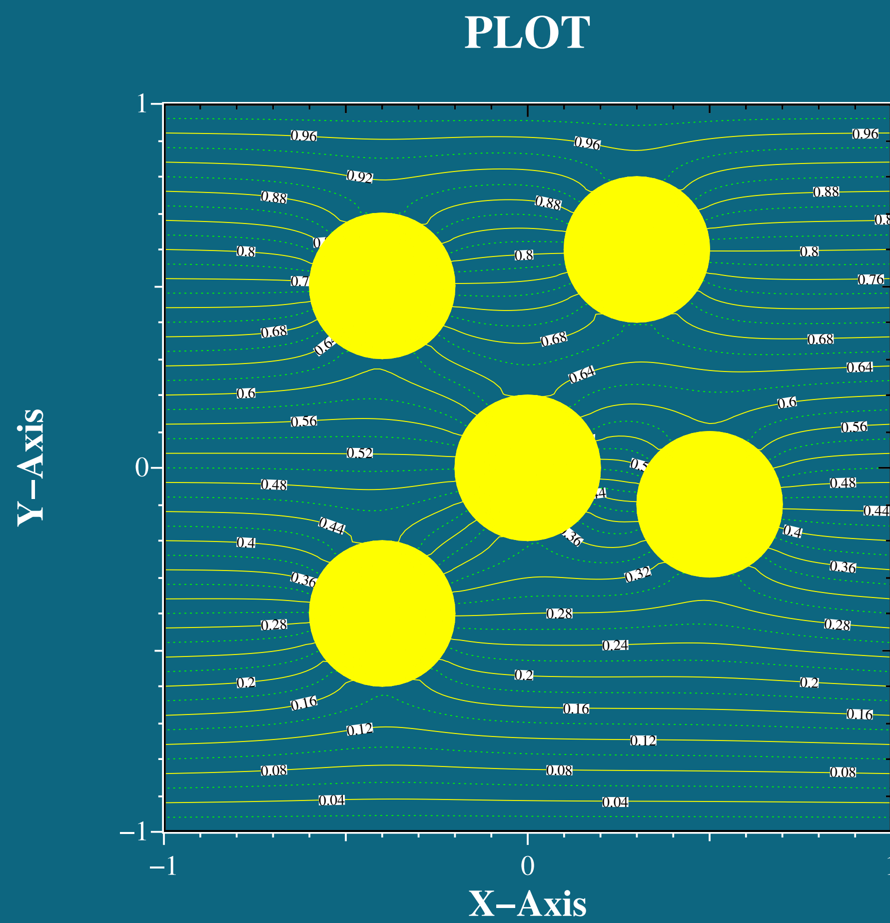
$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{dans} \quad \square \setminus \overline{B} \\ \partial_n u &= 0 \quad \text{sur} \quad \gamma \end{cases}$$

- $u^n \in H^1_0(\square)$ donné, trouver $u^{n+1} \in H^1_0(\square)$, telle que

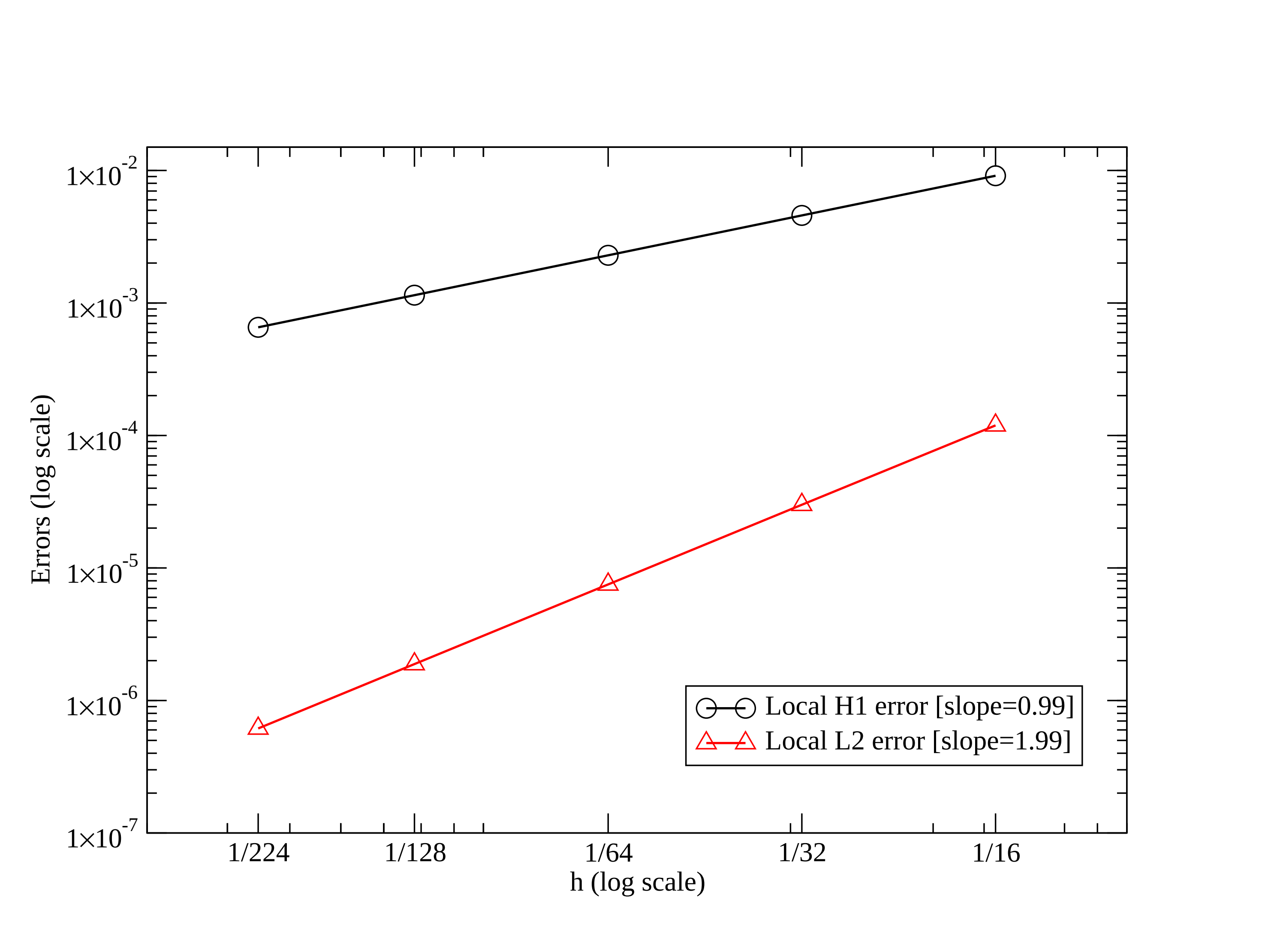
$$\int_\square \nabla u^{n+1} \cdot \nabla w = \int_B \nabla u^n \cdot \nabla w + \int_\square \bar{f} w \,, \quad \forall w \in H^1_0(\square).$$

$\Rightarrow$ $\boxed{(u^n|_{\square \setminus \overline{B}}) \text{ converge vers } u \text{ dans } H^1_\Gamma(\square \setminus \overline{B}).}$





Tests numériques



$$u(r, \psi, \varphi) = \frac{1}{4}(r^2 - 2R^2)\sin^2\psi\cos 2\varphi$$

Plan

1. Problèmes elliptiques dans des domaines perforés
   - Méthodes existantes
   - `F.B.M.` Analyse mathématique et tests numériques
2. Algorithme de prise en compte des conditions de Neumann
   - Convergence et validation numérique
3. Application aux écoulements fluides tridimensionnels
   - Simulation de la convection-diffusion de la chaleur
   - Discrétisation des équations de Navier-Stokes
   - Simulations numériques
4. Conclusion et perspectives

Simulation numérique : convection-diffusion autour de 2 boules en mouvement

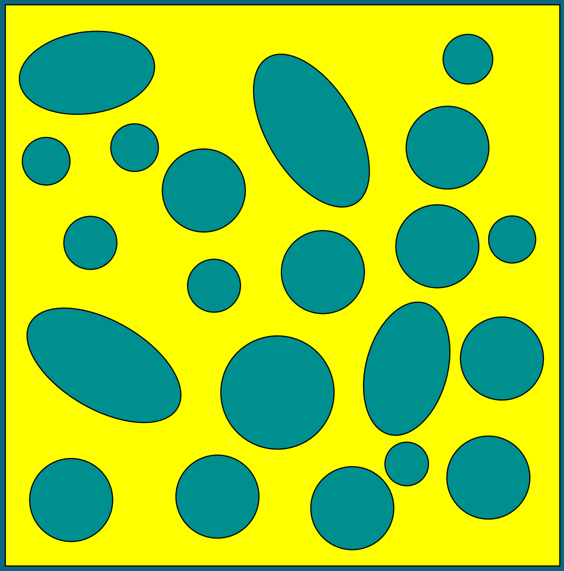
$$\begin{cases} x_1(t) = x_0 + 2\cos(t) \\ y_1(t) = y_0 + 2\sin(t) \\ z_1(t) = z_0 + \frac{9}{2}\sin(\frac{t}{10}) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2(t) = x_0 + \frac{1}{2}\sin(t) \\ y_2(t) = y_0 + \frac{1}{2}\cos(t) \\ z_2(t) = z_0 - \frac{9}{2}\sin(\frac{3t}{10}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta\phi = 0 & \text{dans } \Omega \setminus B \\ \partial_n\phi = 0 & \text{sur } \gamma \\ \partial_n\phi = 0 & \text{sur } \Gamma \setminus (z_{min}, z_{max}) \\ \phi = 1 & \text{sur } (z_{min}, z_{max}) \end{cases} \qquad \begin{cases} \partial_t T - \nu\Delta T + \nabla\phi\cdot\nabla T = 0 & \text{dans } \Omega \setminus B \\ T = 0 & \text{sur } \gamma \\ T = 1 & \text{sur } \Gamma \setminus (z_{min}) \\ \partial_n T = 0 & \text{sur } (z_{min}) \end{cases}$$

Écoulements fluides tridimensionnels et domaines perforés

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= f \\
\nabla\cdot\mathbf{u} &= 0 \\
\mathbf{u}(t=0) &= \mathbf{u}_0
\end{aligned}
$$

$+$ Conditions aux limites adéquates



Stratégie

Équations de Navier-Stokes

$\downarrow$

Méthode des caractéristiques $+$ Schéma de projection

$\Downarrow$

Problèmes elliptiques dans des domaines perforés

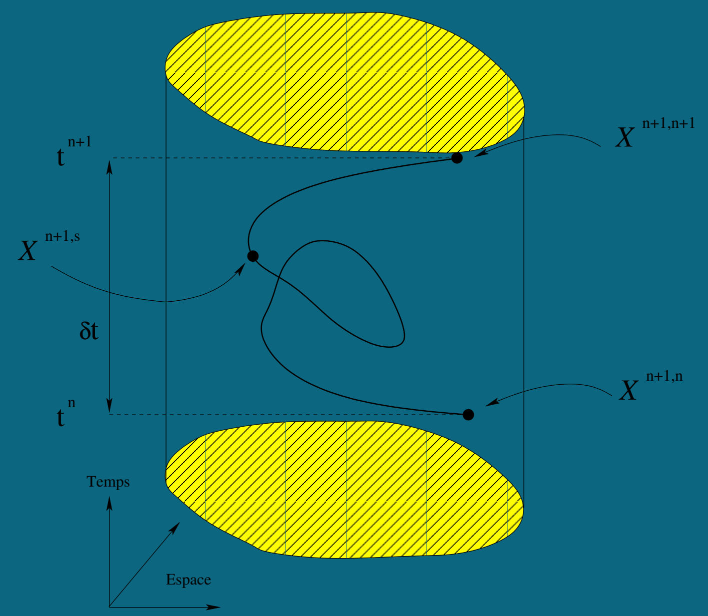
$$\begin{cases} \alpha u - \Delta u = & f_1 \quad \text{dans} \quad \Omega_f \\ u = & g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_f \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta p = & f_2 \quad \text{dans} \quad \Omega_f \\ \frac{\partial p}{\partial n} = & 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_f \end{cases}$$

Méthode des caractéristiques

$$\boxed{\frac{D\mathbf{u}}{Dt} := \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u},}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{\chi}(t,s;\mathbf{x})}{dt} = \mathbf{u}(t,\boldsymbol{\chi}(t,s;\mathbf{x})), \quad t \in [0,s], \\ \boldsymbol{\chi}(s,s;\mathbf{x}) = \mathbf{x}. \end{cases}$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} \simeq \frac{\mathbf{u}(t^{n+1},\mathbf{x}) - \mathbf{u}(t^{n},\boldsymbol{\chi}^{n+1,n}(\mathbf{x}))}{\delta t}$$



Méthodes de projection

➤ Schéma Lagrange/Galerkin [Achdou-Guermond]

Prédiction

$$\left[\begin{array}{lcl} \left(\dfrac{\widetilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \widetilde{\mathbf{u}}_h^{n} \circ \chi_h^{n+1,n}}{\delta t}, \mathbf{v}_h\right) & + & \nu(\nabla \widetilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_h) + \\ (\mathcal{B}_h^T(2p_h^n - p_h^{n-1}), \mathbf{v}_h) & = & (f^{n+1}, \mathbf{v}_h), \ \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h. \end{array}\right.$$

Projection

$$\left[\begin{array}{lcl} \left(\nabla(p_h^{n+1} - p_h^n), \nabla q_h\right) & = & \dfrac{(\nabla \cdot \widetilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, q_h)}{\delta t}, \quad \forall q_h \in \mathbf{M}_h, \\ \mathbf{u}^{n+1} & = & \widetilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \delta t \nabla(p_h^{n+1} - p_h^n), \end{array}\right.$$

➤ Schéma de *splitting* [Guermond]

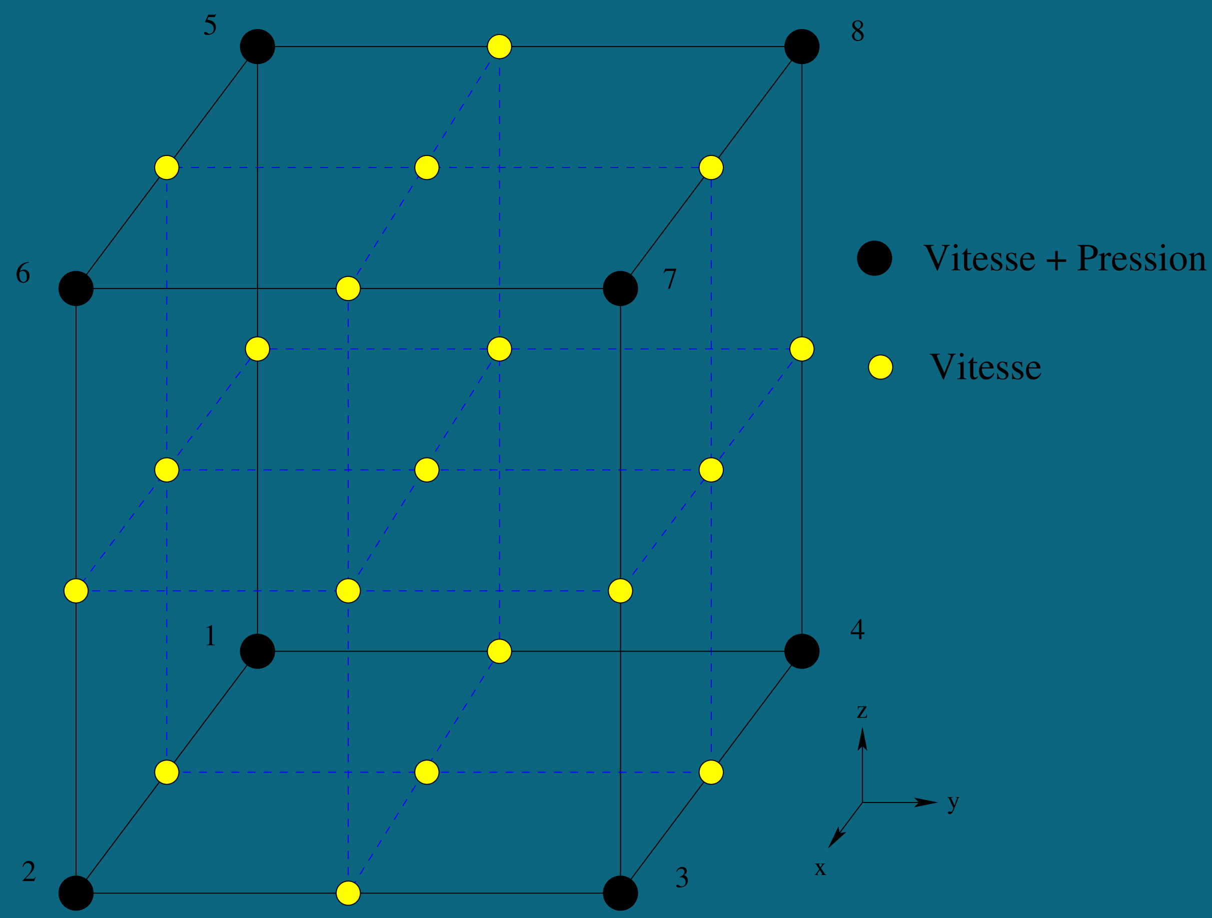
$$\frac{\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u}^n}{\delta t} - \nu\Delta\mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^n = g^{n+1}, \quad \mathbf{u}^{n+1}_{|\partial\Omega_f} = 0,$$
$$(\nabla\psi^{n+1}, \nabla q) = (\frac{\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u}^n}{\delta t}, \nabla q), \quad \forall q \in \mathbf{H}^1(\Omega_f),$$
$$p^{n+1} = \psi^{n+1} + p^n - \nu\nabla\cdot\mathbf{u}^{n+1}.$$

➠ Lagrange/Galerkin ou Splitting $\Longrightarrow$ problèmes elliptiques dans des domaines perforés.

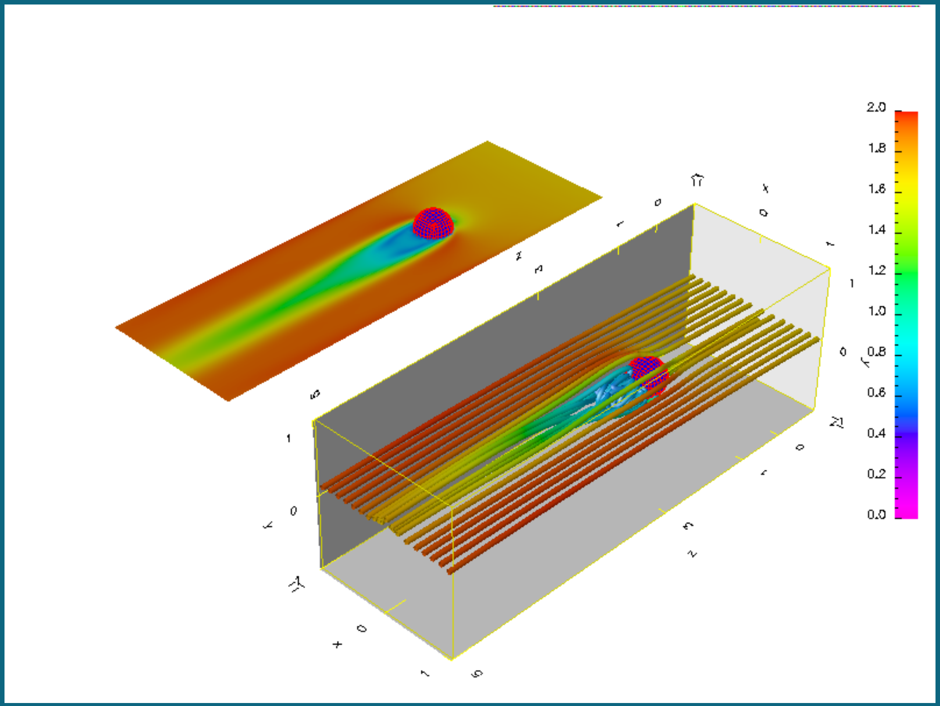
$\downarrow$

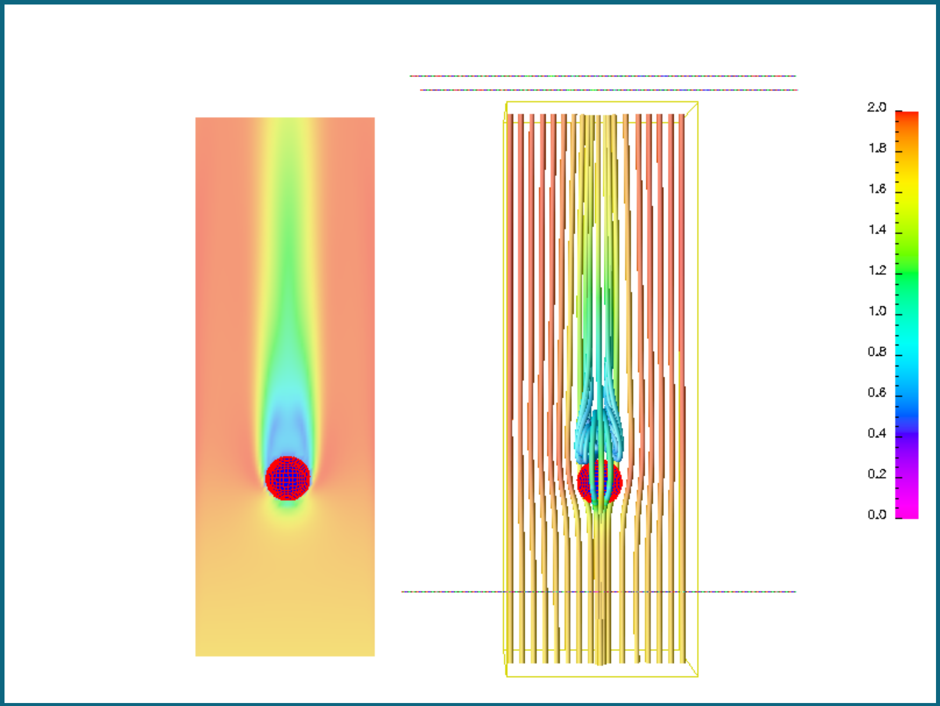
F.B.M.

L'élément $(8Q^1/Q^1)$

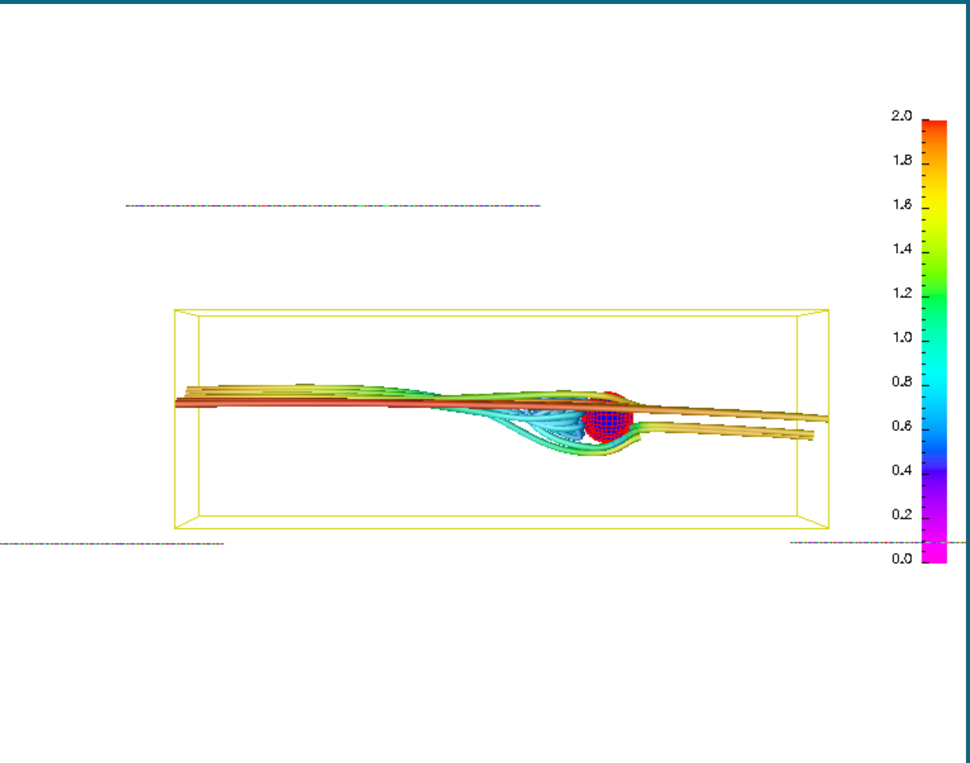


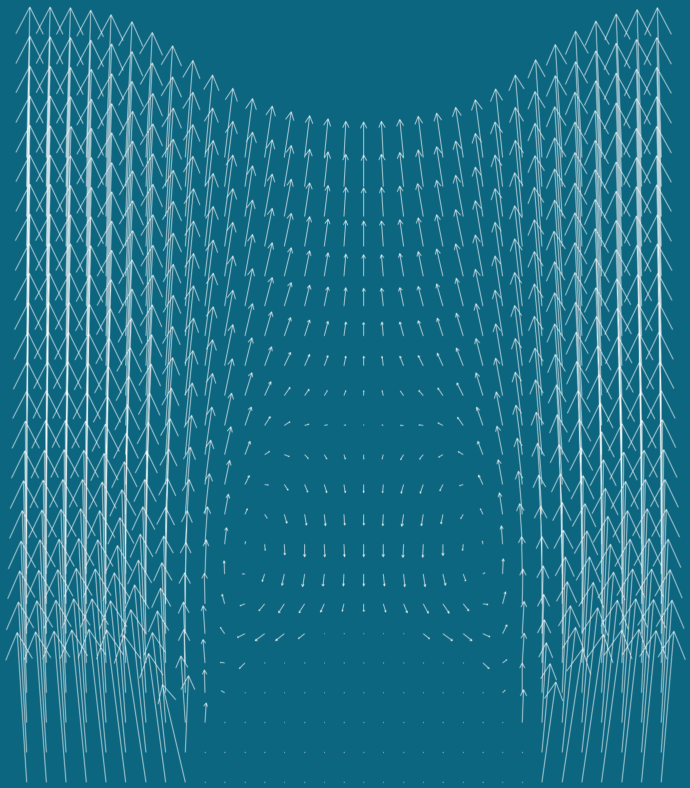
Simulation numérique: écoulement autour d'une sphère



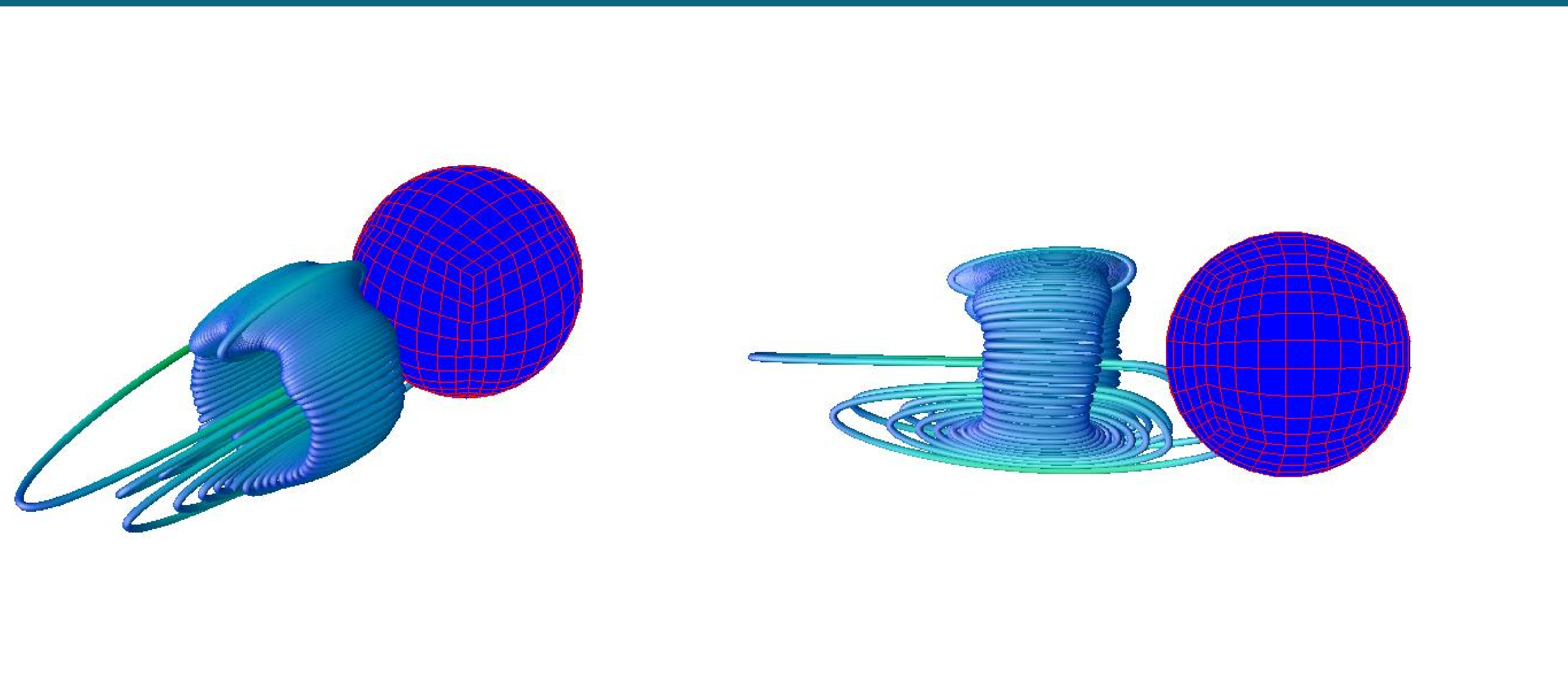


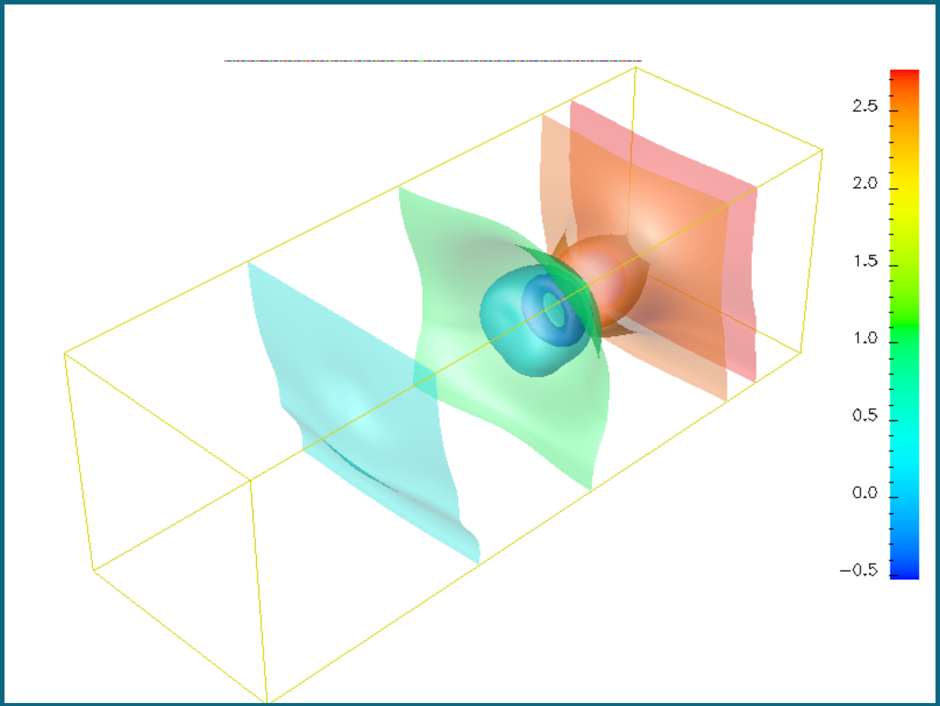
Champ de vitesse constant en entrée. $Re \simeq 250$.

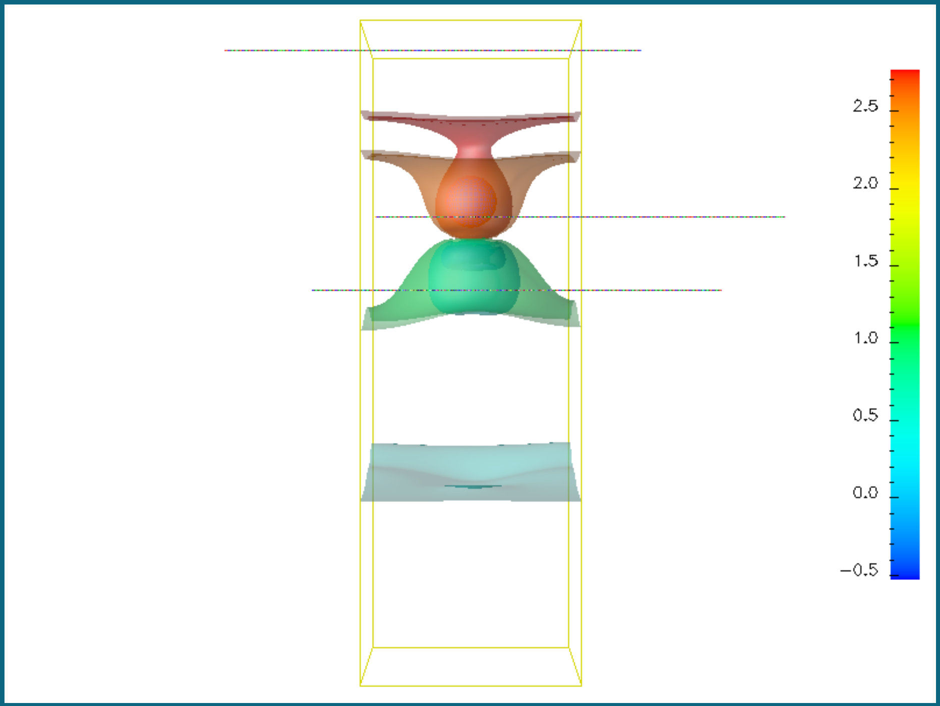

2.0
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0

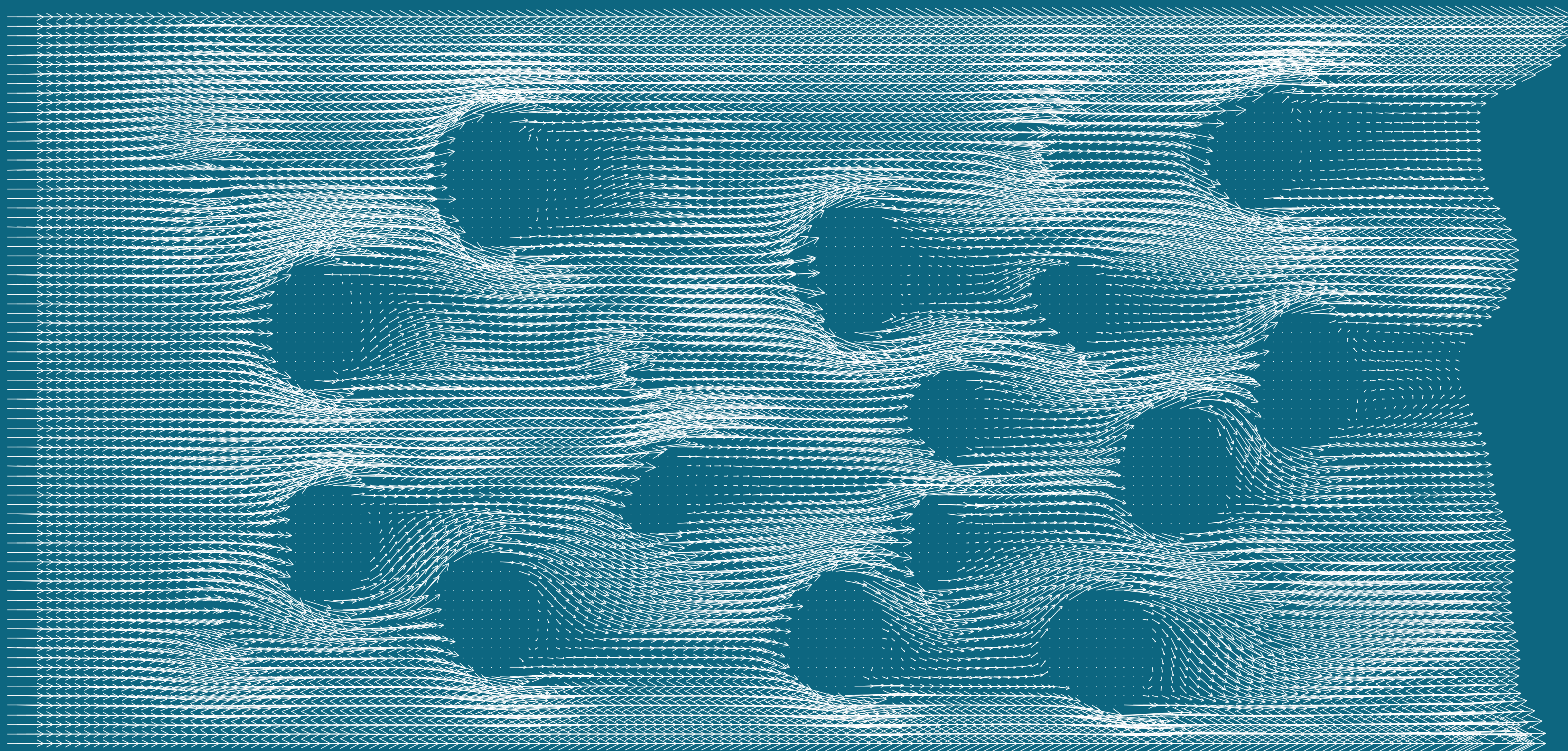


Zone de recirculation

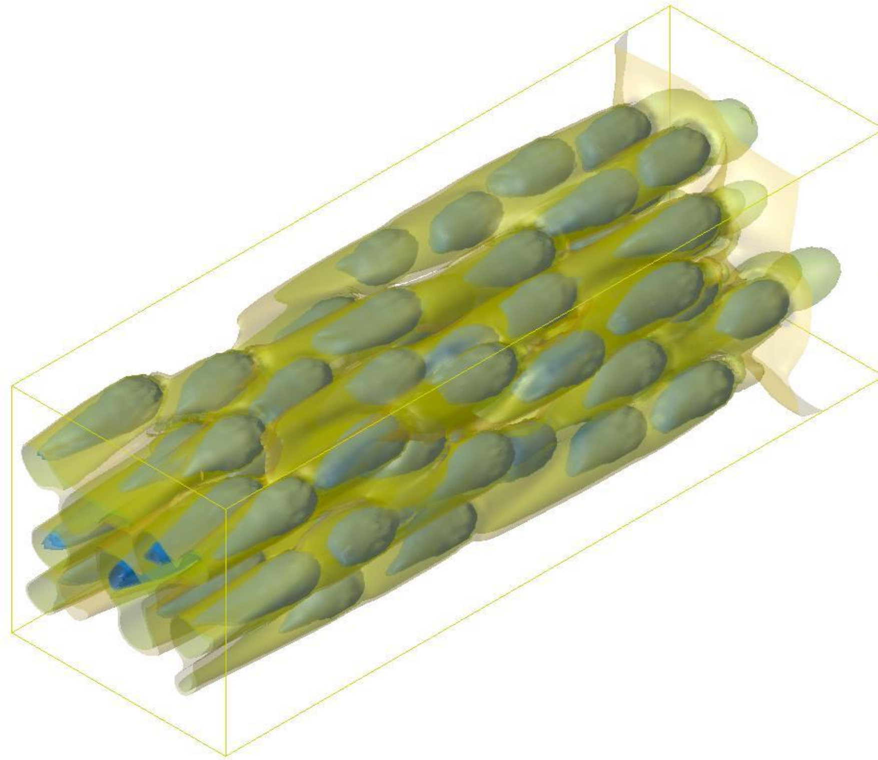



2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5


2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5



Nbr	CPU
1	$2.48\,mn$
10	$2.85\,mn$
40	$3.49\,mn$
70	$3.52\,mn$



Conclusion

- ✔ Résolution de problèmes elliptiques dans des domaines perforés en utilisant des solveurs rapides
- ✔ Algorithme pour la prise en compte des conditions de Neumann
- ✔ Estimation d'erreur optimale
- ✔ Adaptation aux écoulements fluides tridimensionnels dans des géometries complexes

Travaux en cours et perspectives

- `F.B.M.` dans FreeFEM3D
  (avec S. Del Pino)

- Écoulements fluide-particules

- Gestion des contacts entre particules
  (avec B. Maury)

- Estimation d'erreur pour le schéma discret
  (avec S. Bertoluzza & B. Maury)

Table des matières