

Jean-François AUJOL

Laboratoire J. A. Diendoné, Université de Nice Sophia-Antipolis

ARIANA, projet commun I3S/INRIA, Sophia Antipolis

---

Contribution à l'analyse de textures en traitement d'images  
par méthodes variationnelles et équations aux dérivées partielles

---

## I/ Décomposition d'images :

Image initiale ( $f$ )



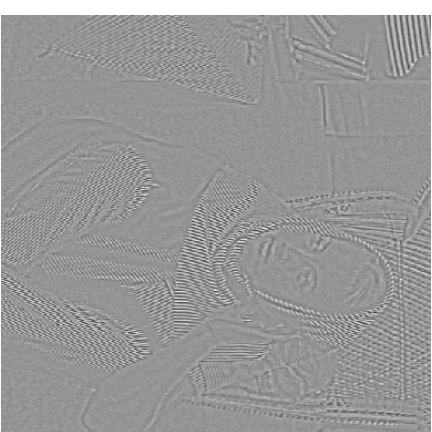
=

Composante  $BV$  ( $u$ )



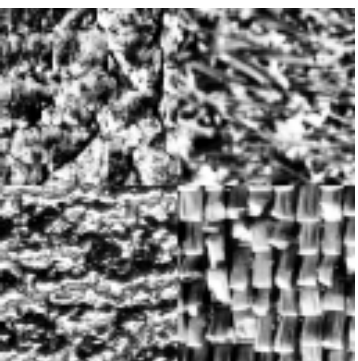
+

Composante oscillante ( $v$ )



## II/ Un modèle de classification supervisée d'images texturées :

Image à classifier



Classification obtenue



# Plan de l'exposé

---

## I/ Décomposition d'images :

- 1) Position du problème
- 2) Modèle proposé
- 3) Etude du modèle discret
- 4) Quelques remarques sur le cas continu
- 5) Extension : modèle  $u + v + w$

## II/ Un modèle de classification supervisée d'images texturées :

- 1) Position du problème
- 2) Etude théorique (cas de 2 phases)
- 3) Modélisation des textures
- 4) Algorithme et résultats numériques

---

## I/ Décomposition d'images :

- 1) Position du problème
- 2) Modèle proposé
- 3) Etude du modèle discret
- 4) Quelques remarques sur le cas continu
- 5) Extension : modèle  $u + v + w$

## II/ Un modèle de classification supervisée d'images texturées :

# Modèle de Rudin-Osher-Fatemi

---

(Physica D. 1992)

Problème de restauration d'image ( $f$  image donnée dégradée,  $u$  image restaurée) :

$$f = Ru + v$$

Une approche pour reconstruire  $u$  :

$$\inf_u \underbrace{\frac{1}{2\lambda} \|f - u\|_2^2}_{\text{attache aux données}} + \underbrace{J(u)}_{\text{régularisation}}$$

Dans le modèle ROF, on prend :

$$J(u) = \int |Du|$$

Le problème s'écrit aussi :

$$\inf_{(u,v) \in BV \times L^2 / f = u + v} \left( J(u) + \frac{1}{2\lambda} \|v\|_2^2 \right)$$

# Modèle de Meyer

---

Y. Meyer (2001) propose le modèle suivant :

$$\inf_{(u,v) \in BV \times G / f = u+v} (J(u) + \alpha \|v\|_G)$$

L'espace de Banach  $G$  contient les signaux à fortes oscillations, et donc en particulier les textures et le bruit.

**Définition :**  $G$  est l'espace de Banach constitué de toutes les fonctions  $v$  que l'on peut écrire

$$v = \partial_1 g_1 + \partial_2 g_2 = \operatorname{div}(g)$$

avec  $g_1$  et  $g_2$  dans  $L^\infty$ .

$$\|v\|_G = \inf \left\{ \|g\|_\infty / v = \operatorname{div}(g), g = (g_1, g_2), g_1 \text{ et } g_2 \in L^\infty, |g(x)| = \sqrt{|g_1|^2 + |g_2|^2}(x) \right\}$$

# Exemple

---

Image texturée

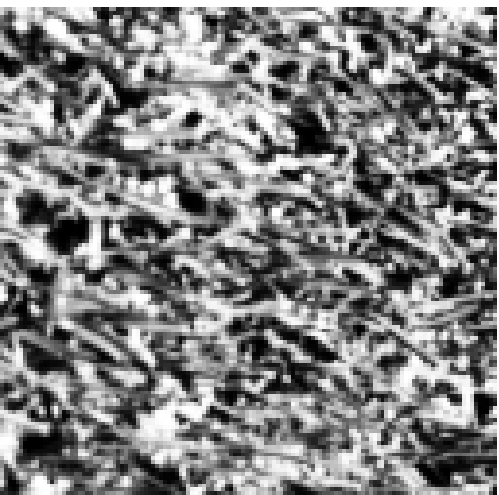
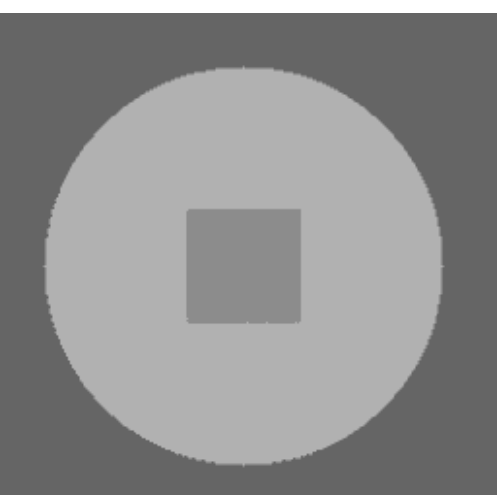


Image géométrique



Images	$TV$	$L^2$	$G$	$TV/G$
Image texturée	1 000 000	9 500	360	86
Image géométrique	64 600	9 500	2 000	1

# Modèle de Vese-Osher

---

L. Vese et S. Osher (MIA 2002, JSC 2003) ont proposé une première approche pour minimiser la fonctionnelle d'Y. Meyer.

$$\inf_{(u,v) \in BV(\Omega) \times G(\Omega)} \left( J(u) + \frac{1}{2\lambda} \|f - u - v\|_2^2 + \mu \|v\|_{G(\Omega)} \right)$$

Pour calculer la solution, le terme  $\|v\|_{G(\Omega)}$  est remplacé par  $\|\sqrt{g_1^2 + g_2^2}\|_p$  (avec  $v = \text{div}(g_1, g_2)$ ), puis on dérive formellement les équations d'Euler-Lagrange associées.

En pratique, pour des raisons numériques, les auteurs utilisent la valeur  $p = 1$ .



---

## I/ Décomposition d'images :

- 1) Position du problème
- 2) **Modèle proposé**
- 3) Etude du modèle discret
- 4) Quelques remarques sur le cas continu
- 5) Extension : modèle  $u + v + w$

## II/ Un modèle de classification supervisée d'images texturées :

# Fonctionnelle

---

Nous cherchons à résoudre le problème :

$$\inf_{(u,v) \in BV \times G_\mu} \left( J(u) + \frac{1}{2\lambda} \|f - u - v\|_2^2 \right)$$

où

$$G_\mu = \{v \in G / \|v\|_G \leq \mu\}$$

Le paramètre  $\lambda$  contrôle la norme  $L^2$  du résidu  $f - u - v$ . Le paramètre  $\mu$  contrôle la norme  $\|\cdot\|_G$  de  $v$ .

# Algorithme de Chambolle

---

A. Chambolle a proposé un algorithme de projection pour minimiser la variation totale (MIA 2002).

$$\inf_{u \in BV} \left( J(u) + \frac{1}{2\lambda} \|f - u\|_2^2 \right)$$

**Proposition :** La solution du problème ci-dessus est donnée par :

$$u = f - P_{G_\lambda}(f)$$

où  $P$  est le projecteur orthogonal sur  $G_\lambda$ .

On rappelle que :

$$G_\lambda = \{v \in G / \|v\|_G \leq \lambda\}$$

# Calcul de la projection

---

Notons  $X = \mathbb{R}^{N \times N}$ . On cherche à résoudre le problème :

$$\min \{ \|\lambda \operatorname{div}(p) - f\|_X^2 \mid p \in X \times X, |p_{i,j}| \leq 1 \forall i, j = 1, \dots, N \}$$

**Algorithme (point fixe) :**

$$p^0 = 0$$

$$p_{i,j}^{n+1} = \frac{p_{i,j}^n + \tau (\nabla (\operatorname{div}(p^n) - f/\lambda))_{i,j}}{1 + \tau |(\nabla (\operatorname{div}(p^n) - f/\lambda))_{i,j}|}$$

**Condition suffisante de convergence :**

**Théorème :** Supposons que le paramètre  $\tau$  vérifie  $\tau \leq 1/8$ . Alors  $\lambda \operatorname{div}(p^n)$  converge vers  $P_{G_\lambda}(f)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

# Principe

---

Nous résolvons les deux problèmes suivants :

- A  $v$  fixé, on résout

$$\inf_{u \in BV} \left( J(u) + \frac{1}{2\lambda} \|f - u - v\|_2^2 \right) \quad (1)$$

- A  $u$  fixé, on résout

$$\inf_{v \in G_\mu} \|f - u - v\|_2^2 \quad (2)$$

La solution de (1) est donnée par :

$$\hat{u} = f - v - P_{G_\lambda}(f - v)$$

où  $P_{G_\lambda}$  est le projecteur orthogonal sur  $G_\lambda$ .

La solution de (2) est donnée par :

$$\hat{v} = P_{G_\mu}(f - u)$$

# Algorithme

---

1) Initialisation :

$$u_0 = v_0 = 0$$

2) Itérations :

$$v_{n+1} = P_{G_\mu}(f - u_n)$$

$$u_{n+1} = f - v_{n+1} - P_{G_\lambda}(f - v_{n+1})$$

3) Test d'arrêt : on arrête lorsque

$$\max(|u_{n+1} - u_n|, |v_{n+1} - v_n|) \leq \epsilon$$

---

## I/ Décomposition d'images : composante à variation bornée et composante oscillante :

- 1) Position du problème
- 2) Modèle proposé
- 3) Etude du modèle discret
- 4) Quelques remarques sur le cas continu
- 5) Extension : modèle  $u + v + w$

## II/ Un modèle de classification supervisée d'images texturées :

# Discrétisation

---

Une image est un vecteur à deux dimensions de taille  $N \times N$ . On note  $X$  l'espace Euclidien  $\mathbb{R}^{N \times N}$ , et  $Y = X \times X$ . On munit l'espace  $X$  du produit scalaire  $(u, v)_X = \sum_{1 \leq i, j \leq N} u_{i,j} v_{i,j}$  et de la norme  $\|u\|_X = \sqrt{(u, u)_X}$ .

Si  $u \in X$ , le gradient  $\nabla u$  est un vecteur de  $Y$  donné par :

$$(\nabla u)_{i,j} = ((\nabla u)_{i,j}^1, (\nabla u)_{i,j}^2) \text{ avec}$$

$$(\nabla u)_{i,j}^1 = \begin{cases} u_{i+1,j} - u_{i,j} & \text{if } i < N \\ 0 & \text{if } i = N \end{cases}$$

et

$$(\nabla u)_{i,j}^2 = \begin{cases} u_{i,j+1} - u_{i,j} & \text{if } j < N \\ 0 & \text{if } j = N \end{cases}$$

La variation totale discrète de  $u$  est alors donnée par :

$$J(u) = \sum_{1 \leq i, j \leq N} |(\nabla u)_{i,j}|$$



# Divergence

---

On introduit également une version discrète de l'opérateur divergence. On le définit par analogie avec le cadre continu en posant :

$$\text{div} = -\nabla^*$$

où  $\nabla^*$  est l'opérateur adjoint de  $\nabla$  : i.e., pour tout  $p \in Y$  et  $u \in X$ ,

$$(-\text{div } p, u)_X = (p, \nabla u)_Y$$

Il est aisé de vérifier que :

$$(\text{div } (p))_{i,j} = \begin{cases} p_{i,j}^1 - p_{i-1,j}^1 & \text{if } 1 < i < N \\ p_{i,j}^1 & \text{if } i=1 \\ -p_{i-1,j}^1 & \text{if } i=N \end{cases} + \begin{cases} p_{i,j}^2 - p_{i,j-1}^2 & \text{if } 1 < j < N \\ p_{i,j}^2 & \text{if } j=1 \\ -p_{i,j-1}^2 & \text{if } j=N \end{cases}$$

# Espace $G$ discret

---

**Définition :**

$$G = \{v \in X / \exists g \in Y \text{ tel que } v = \operatorname{div}(g)\}$$

et si  $v \in G$  :

$$\|v\|_G = \inf \{\|g\|_\infty / v = \operatorname{div}(g),$$

$$g = (g^1, g^2) \in Y, |g_{i,j}| = \sqrt{(g_{i,j}^1)^2 + (g_{i,j}^2)^2}\}$$

où  $\|g\|_\infty = \max_{i,j} |g_{i,j}|$ .

De plus, on note :

$$G_\mu = \{v \in G / \|v\|_G \leq \mu\}$$

# Propriétés

---

**Proposition :**

$$J(u) = \sup_{v \in G_1} (u, v)_X$$

et

$$\|v\|_G = \sup_{J(u) \leq 1} (u, v)_X$$

En particulier, on a  $J^*(v) = \chi_{G_1}(v)$  où  $(J^*(v) = \sup((u, v)_X - J(u)))$

**Lemme :** Soit  $u \in X$  et  $v \in G$ . Alors :

$$(u, v)_X \leq J(u)\|v\|_G$$

**Lemme :**  $u \mapsto \frac{J(u)^2}{2}$  et  $v \mapsto \frac{\|v\|_G^2}{2}$  sont **duales** (au sens de la dualité de Legendre-Fenchel).

# Caractérisation

---

**Proposition :** En discret, l'espace  $G$  s'identifie avec le sous-espace suivant :

$$X_0 = \{v \in X \mid \sum_{i,j} v_{i,j} = 0\}$$

# Le problème discret

---

$$F(u, v) = \frac{1}{2\lambda} \|f - u - v\|_2^2 + J(u) + J^*\left(\frac{v}{\mu}\right)$$

où  $J^*(v) = \sup_{(u, v) \in X} (J(u))$  (et on a vu que  $J^*(v) = \chi_{G_1}(v)$ ).

On veut résoudre :





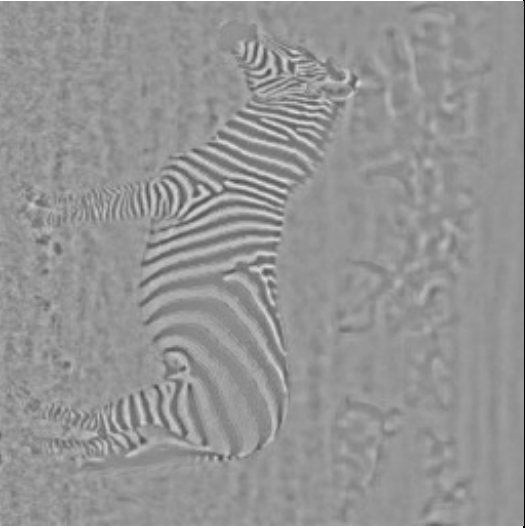
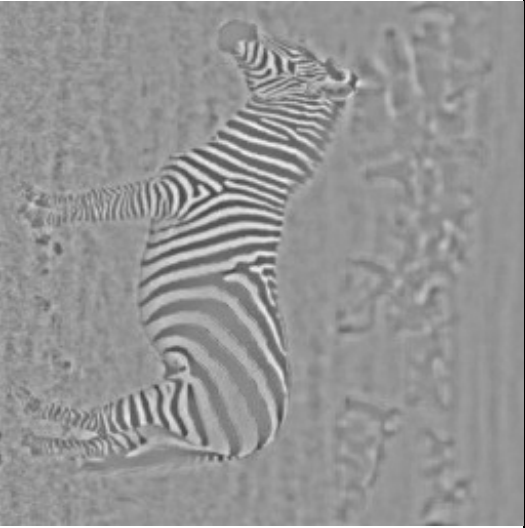
$$\inf_{(u, v) \in X \times X} F(u, v)$$

**Proposition :** Il existe un unique couple  $(\hat{u}, \hat{v}) \in X \times G_\mu$  minimisant  $F$  sur  $X \times X$ .

**Proposition :** La suite  $(u_n, v_n)$  construite précédemment converge vers  $(\hat{u}, \hat{v})$  solution de notre problème.





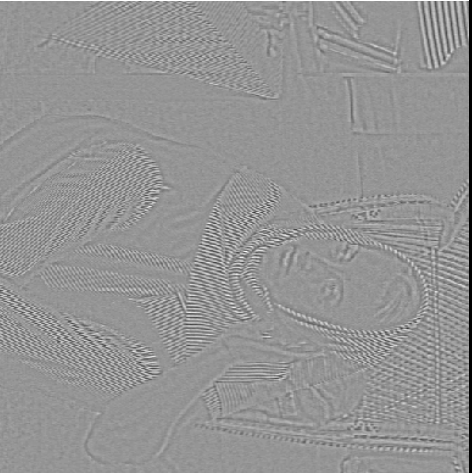

# Exemple de décomposition :

Image d'un zèbre ( $\lambda = 5$  ,  $\mu = 50$  et  $\mu = 100$ )

Image initiale ( $f$ )	Composante $BV(u)$	Composante $BV(u)$
		
Image reconstruite ( $u + v$ )	$v + 150.0$	$v + 150.0$
		





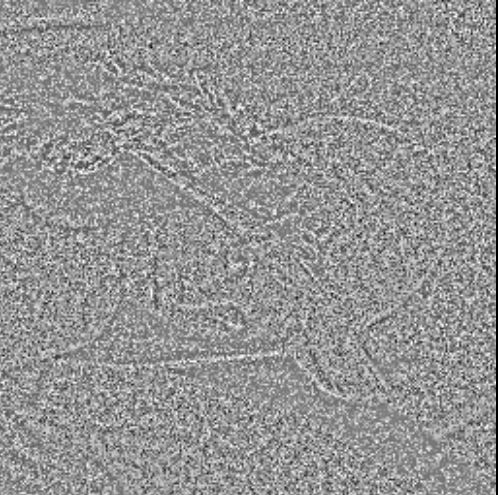

# Comparaison avec le modèle de Rudin-Osher-Fatemi :

Barbara ( $\lambda = 1$  et  $\mu = 50$ )

Image initiale ( $f$ )		$u$		$u$ (modèle ROF)	
Image reconstruite ( $u + v$ )		$(v + 150.0)$		$v + 150.0$ (modèle ROF)	



# Comparaison avec le modèle de Rudin-Osher-Fatemi (suite) :

Lenna		$u$ ( $\lambda = 0.1$ , $\mu = 70$ )		$u$ (ROF) ( $\lambda = 57$ )	
Image bruitée ( $\sigma = 50$ )		$v + 150.0$		$v + 150.0$ (ROF)	

Comparaison pour  $\sigma = 50$ . SNR=7.05



# Problème limite

---

Rappel du problème de Meyer :

$$\inf_{(u,v) \in X \times G / f=u+v} J(u) + \alpha \|v\|_G \quad (1)$$

On rappelle que notre problème s'écrit :

$$\inf_{(u,v) \in X \times X} \frac{1}{2\lambda} \|f - u - v\|_2^2 + J(u) + J^* \left( \frac{v}{\mu} \right) \quad (2)$$

et on considère le problème limite :

$$\inf_{(u,v) \in X \times X / f=u+v} J(u) + J^* \left( \frac{v}{\mu} \right) \quad (3)$$

**Proposition :** On fixe  $\alpha > 0$  dans (1). On suppose que le problème (1) possède une unique solution  $(\hat{u}, \hat{v})$ . On fixe  $\mu = \|\hat{v}\|_G$  dans les problèmes (2) et (3). On note  $(u_\lambda, v_\lambda)$  la solution du problème (2). Alors  $(u_\lambda, v_\lambda)$  converge vers  $(u_0, v_0) \in X \times X$  lorsque  $\lambda$  tend vers 0. De plus,  $(u_0, v_0) = (\hat{u}, \hat{v})$  est la solution du problème (3).

---

# Lien avec le problème de Meyer

---

On rappelle que le problème de Meyer s'écrit :

$$\inf_{(u,v) \in X \times G / f = u+v} J(u) + \alpha \|v\|_G \quad (1)$$

et notre problème limite :

$$\inf_{(u,v) \in X \times X / f = u+v} J(u) + J^* \left( \begin{array}{c} v \\ \mu \end{array} \right) \quad (2)$$

**Proposition :** On fixe  $\alpha > 0$  dans (1). Soit  $(\hat{u}, \hat{v})$  une solution du problème

(1). On fixe  $\mu = \|\hat{v}\|_G$  dans (2). Alors :

- $(\hat{u}, \hat{v})$  est aussi solution du problème (2).
- Réciproquement, toute solution de (2) (avec  $\mu = \|\hat{v}\|_G$ ) est une solution de (1).

**Proposition :** Pour tout  $\mu$  dans  $(0, \|f - \bar{f}\|_G)$ , on peut trouver  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}_+$  tel qu'il existe  $(\hat{u}, \hat{v})$  dans  $X \times G$  avec  $\|\hat{v}\|_G = \mu$  et solution du problème de Meyer (1).

---

## I/ Décomposition d'images :

- 1) Position du problème
- 3) Modèle proposé
- 4) Etude du modèle discret
- 5) Quelques remarques sur le cas continu
- 6) Extension : modèle  $u + v + w$

## II/ Un modèle de classification supervisée d'images texturées :

# Cas continu

---

On note  $\Omega$  un ouvert **borné** lipschitzien et connexe de  $\mathbb{R}^2$ .

**Définition :**  $G(\Omega)$  est le sous-espace de  $W^{-1,\infty}(\Omega)$  défini par :

$$G(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) / v = \operatorname{div} \xi, \xi \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2), \xi \cdot N = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

Sur  $G(\Omega)$ , on définit la norme suivante :

$$\|v\|_{G(\Omega)} = \inf \{ \|\xi\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)} / v = \operatorname{div} \xi, \xi \cdot N = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$$

On a la caractérisation simple suivante de  $G(\Omega)$  :

**Proposition :**

$$G(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) / \int_{\Omega} v = 0 \right\}$$

# Fermeture dans $L^2$

---

**Définition :** Soit  $G_\mu(\Omega)$  la famille de sous-ensembles définies par ( $\mu > 0$ ) :

$$G_\mu(\Omega) = \{v \in G(\Omega) / \|v\|_{G(\Omega)} \leq \mu\}$$

**Proposition :**  $G_\mu(\Omega)$  est **fermé** dans  $L^2(\Omega)$ .

# Principale propriété

---

Le lemme suivant avait été précédemment énoncé par Y. Meyer dans le cas  $\Omega = \mathbb{R}^2$ .

**Lemme :** Soit  $f_n$ ,  $n \geq 1$  une suite de fonctions dans  $L^q(\Omega) \cap G(\Omega)$  avec les deux propriétés suivantes

1. Il existe  $q > 2$  et  $C > 0$  tels que  $\|f_n\|_{L^q(\Omega)} \leq C$ .
2. La suite  $f_n$  converge vers 0 au sens des distributions (i.e. dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ ).

Alors  $\|f_n\|_G$  converge vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

---

## I/ Décomposition d'images :

- 1) Position du problème
- 2) Modèle proposé
- 3) Etude du modèle discret
- 4) Quelques remarques sur le cas continu
- 5) *Extension : modèle  $u + v + w$*

## II/ Un modèle de classification supervisée d'images texturées :

# Espaces de Besov

---

**Définition :**  $\dot{B}_{1,1}^1$  est l'espace de Besov homogène usuel : soit  $\psi_{j,k}$  une base orthonormale composée d'ondelettes régulières à supports compacts.  $\dot{B}_{1,1}^1$  est le sous-espace de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  des fonctions  $f$  telles que :

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |c_{j,k}| 2^{j/2} < +\infty$$

où les  $c_{j,k}$  sont les coefficients en ondelettes de  $f$ .

**Définition :** L'espace dual de  $\dot{B}_{1,1}^1$  est l'espace de Banach  $E = \dot{B}_{-1,\infty}^1$ . Il est caractérisé par le fait que les coefficients en ondelettes d'une fonction généralisée dans  $E = \dot{B}_{-1,\infty}^1$  sont dans  $l^\infty(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^2)$ .

**Remarque :** On a

$$BV \subset G \subset E$$



# Un autre modèle de décomposition

---

$$\inf_{(u,v) \in X^2} \left( J(u) + B^*(v/\delta) + \frac{1}{2\lambda} \|f - u - v\|^2 \right)$$

où

$$B(w) = \|w\|_{B_{1,1}^1}$$

et donc

$$B^*(v/\delta) = \chi_{\{\|v\|_E \leq \delta\}}$$

De plus, on note

$$E_\delta = \{v \mid \|v\|_E \leq \delta\}$$

# Minimisation

---

On considère les deux problèmes suivants :

- $v$  étant fixé, on cherche  $u$  solution de :

$$\inf_{u \in X} \left( J(u) + \frac{1}{2\lambda} \|f - u - v\|_X^2 \right) \quad (1)$$

- $u$  étant fixé, on cherche  $v$  solution de :

$$\inf_{v \in E_\delta} \|f - u - v\|_X^2 \quad (2)$$

La solution de (1) est donnée par :  $\hat{u} = f - v - P_{G_\lambda}(f - v)$ .

Et la solution de (2) est donnée par :  $\hat{v} = P_{E_\delta}(f - u) = f - u - W^{ST}(f - u, \delta)$ , où  $W^{ST}(f - u, \delta)$  correspond au **seuillage en ondelettes doux** de  $f - u$  (de seuil  $\delta$ ).

# Comparaison entre la norme $G$ et la norme $E$

---

Image originale

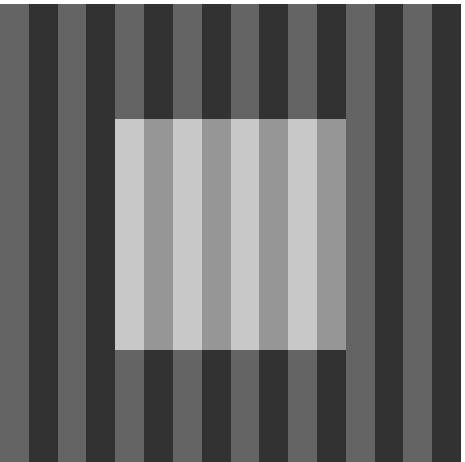


Image restaurée  
(norme  $E$ )

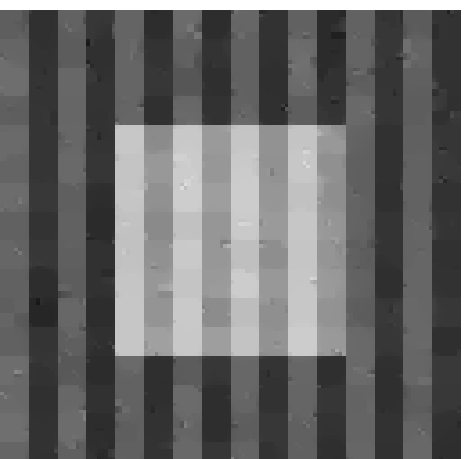


Image restaurée  
(norme  $G$ )

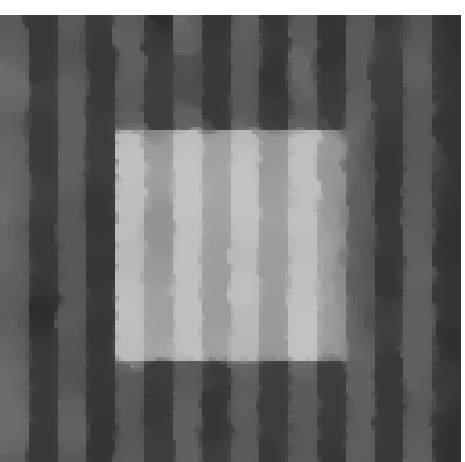
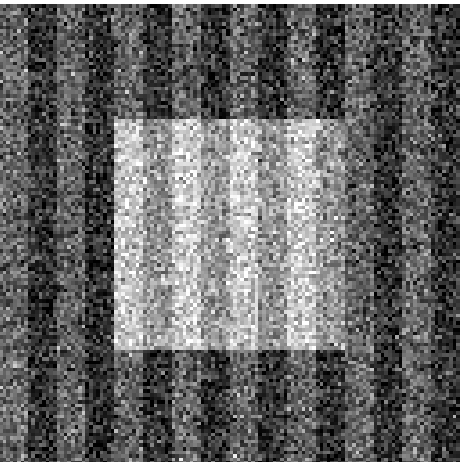
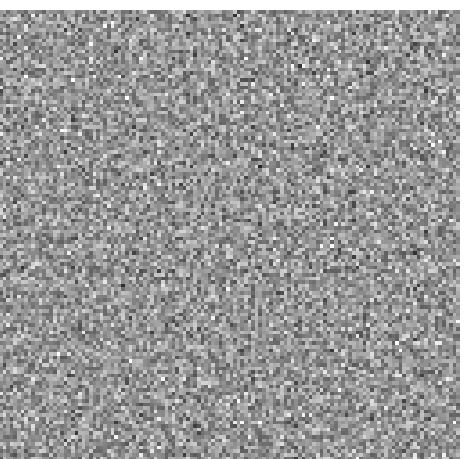


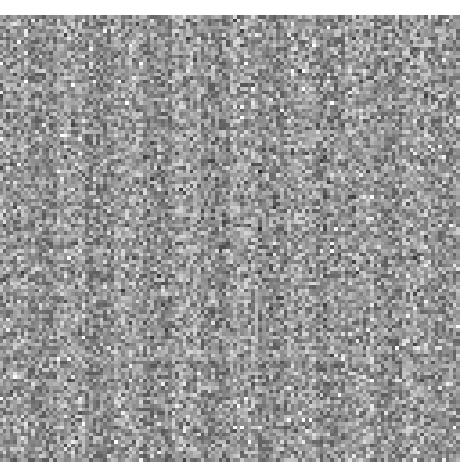
Image bruitée  $f$  ( $\sigma = 35$ )



Bruit



Bruit



# Exemple

---

Image texturée

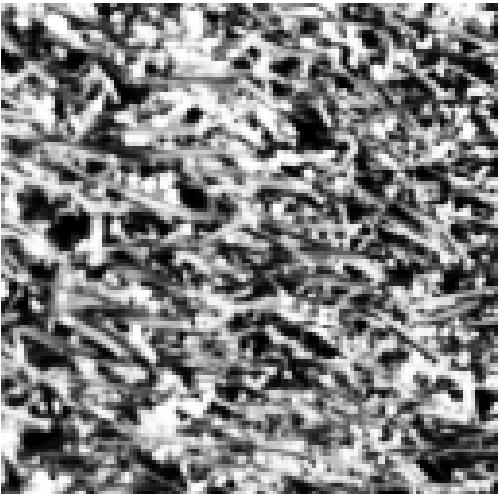
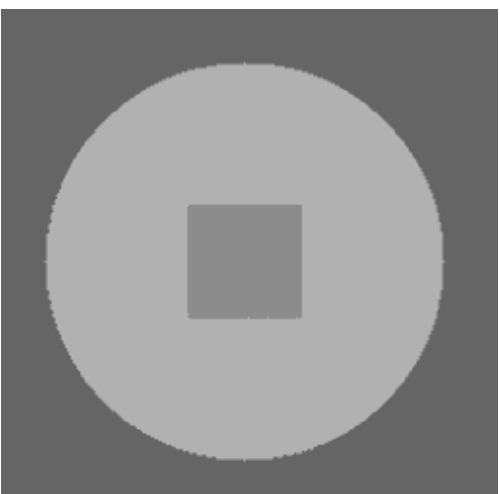
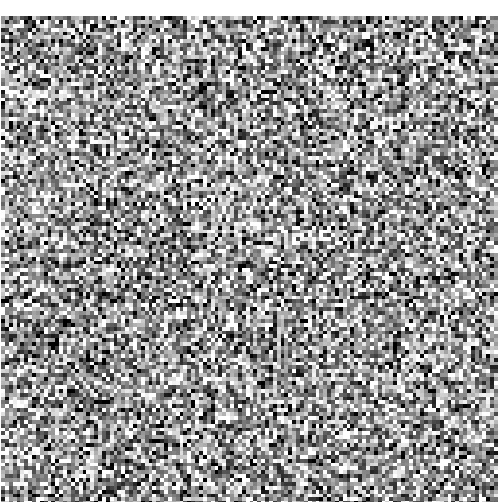


Image géométrique



Bruit gaussien ( $\sigma = 85$ )



Images	$TV$	$L^2$	$G$	$E$
Image texturée	1 000 000	9 500	360	750
Image géométrique	64 600	9 500	2 000	355
Bruit Gaussien	2 100 000	9 500	120	290

# Modèle $u + v + w$

---

On propose de minimiser la fonctionnelle suivante :

$$\inf_{(u,v,w) \in X^3} F(u, v, w)$$

où

$$F(u, v, w) = J(u) + J^* \left( \frac{v}{\mu} \right) + B^* \left( \frac{w}{\delta} \right) + \frac{1}{2\lambda} \|f - u - v - w\|^2$$

# Principe

---

- A  $v$  et  $w$  fixés, on cherche  $u$  solution de :

$$\inf_{u \in X} \left( J(u) + \frac{1}{2\lambda} \|f - u - v - w\|_X^2 \right) \quad (1)$$

- A  $u$  et  $w$  fixé, on cherche  $v$  solution de :

$$\inf_{v \in G_\mu} \|f - u - v - w\|_X^2 \quad (2)$$

- A  $u$  et  $v$  fixé, on cherche  $w$  solution de :

$$\inf_{w \in E_\delta} \|f - u - v - w\|_X^2 \quad (3)$$

La solution de (1) est donnée par :  $\hat{u} = f - v - w - P_{G_\lambda}(f - v - w)$ .

La solution de (2) est donnée par :  $\hat{v} = P_{G_\mu}(f - u - w)$ .

La solution de (3) est donnée par :  $\hat{w} = P_{E_\delta}(f - u - v) = f - u - v - WST(f - u - v, \delta)$ .

# Algorithme

---

1. Initialisation :

$$u_0 = v_0 = w_0 = 0$$

2. Itérations :

$$w_{n+1} = P_{E_\delta}(f - u_n - v_n) = f - u_n - v_n - W^{ST}(f - u_n - v_n, \delta)$$

$$v_{n+1} = P_{G_\mu}(f - u_n - w_{n+1})$$

$$u_{n+1} = f - v_{n+1} - w_{n+1} - P_{G_\lambda}(f - v_{n+1} - w_{n+1})$$

3. Test d'arrêt : on arrête si

$$\max(|u_{n+1} - u_n|, |v_{n+1} - v_n|, |w_{n+1} - w_n|) \leq \epsilon$$

# Résultats

---

Image originale

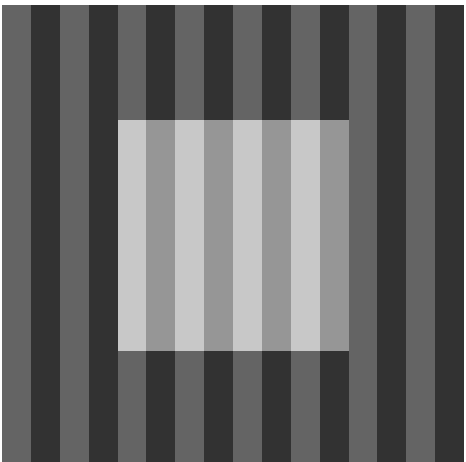
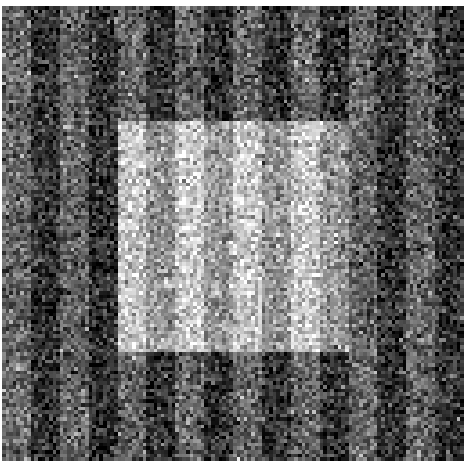
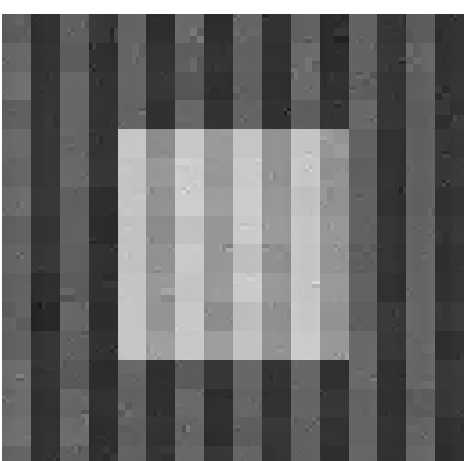


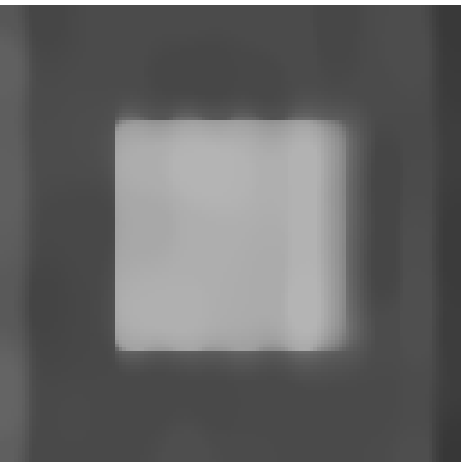
Image bruitée ( $\sigma = 35$ )



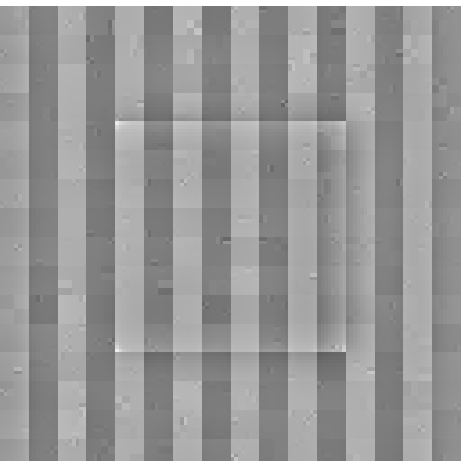
$u + v$



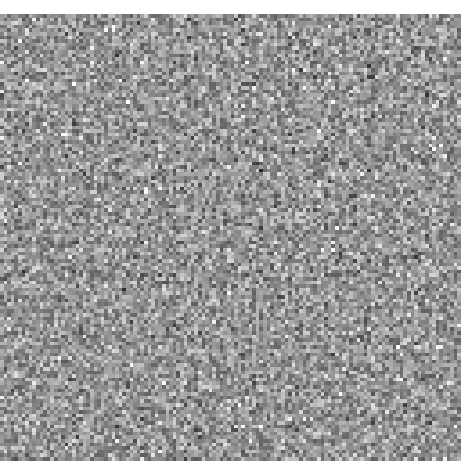
$u$



$v + 150.0$



$w + 150$



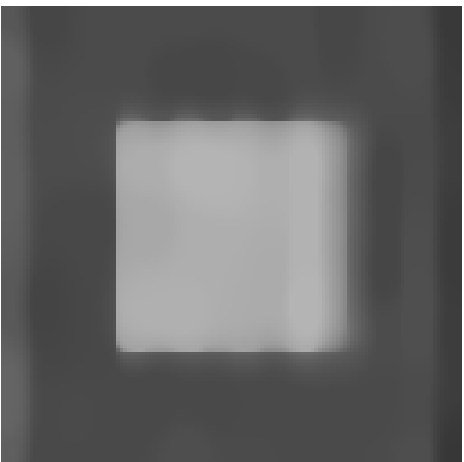
Un cas simple ( $\lambda = 0.5$ ,  $\mu = 120$ ,  $\eta = 1.0$ , Haar)



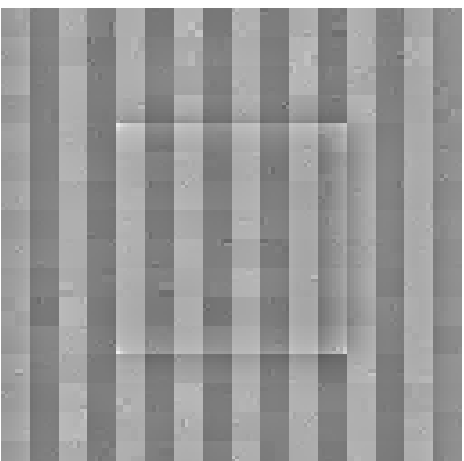
# Comparaison

---

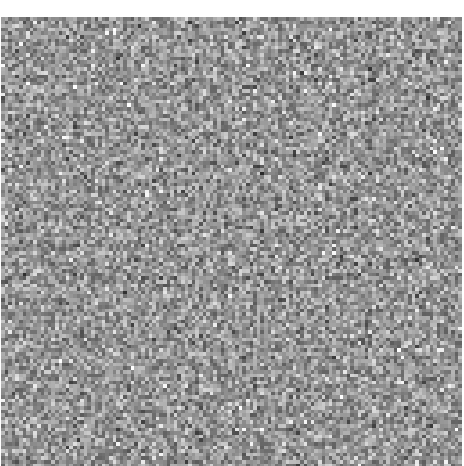
$u$



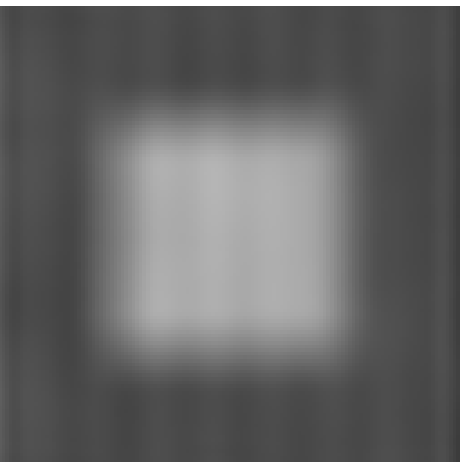
$v + 150.0$



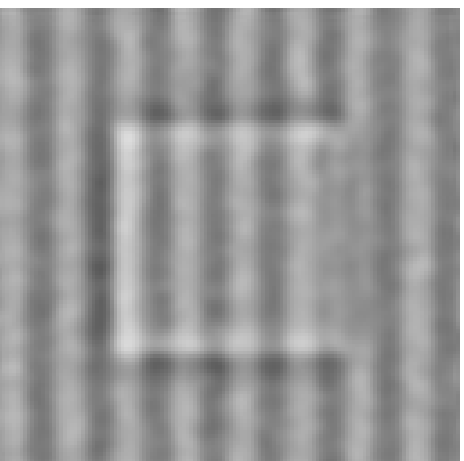
$w + 150$



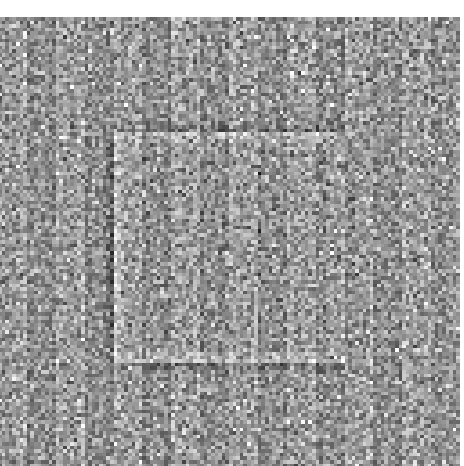
$u$



$v + 150.0$



$w + 150$



Première ligne : algo  $u + v + w$ . Deuxième ligne : filtrage par des Gaussiennes.

# Résultats

---

Image originale



Image bruitée ( $\sigma = 20$ )



Image Barbara I

# Résultats

---

$u$



$u + v$



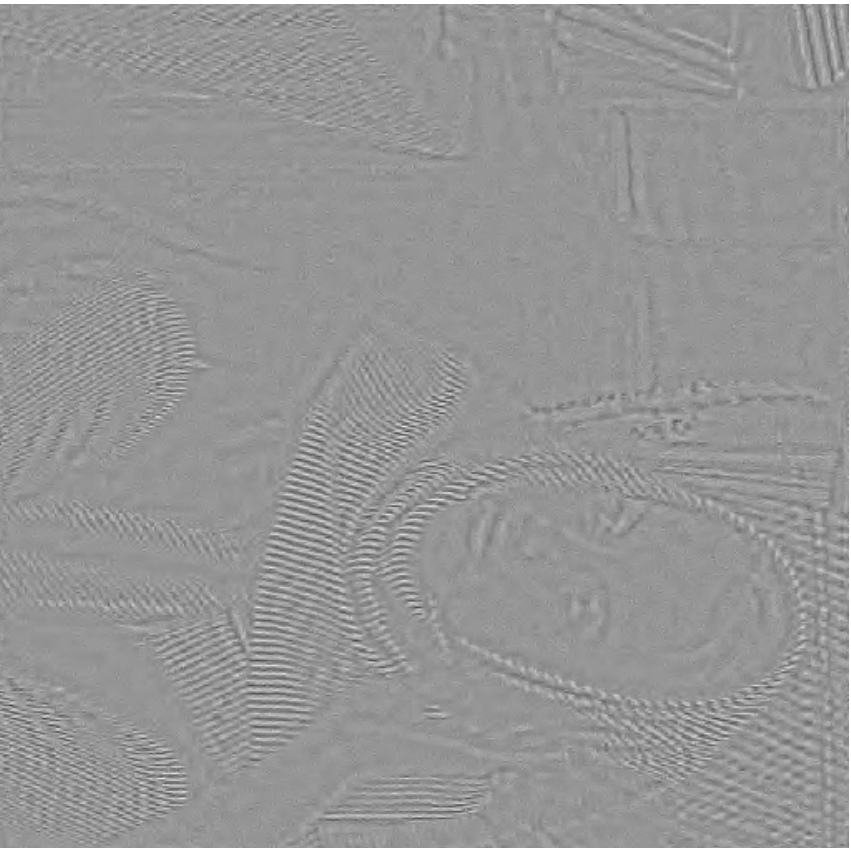
Image Barbara II ( $\lambda = 1.0$ ,  $\mu = 30$ ,  $\eta = 0.6$ , Daub8)



# Résultats

---

$w + 150.0$



$w + 150$

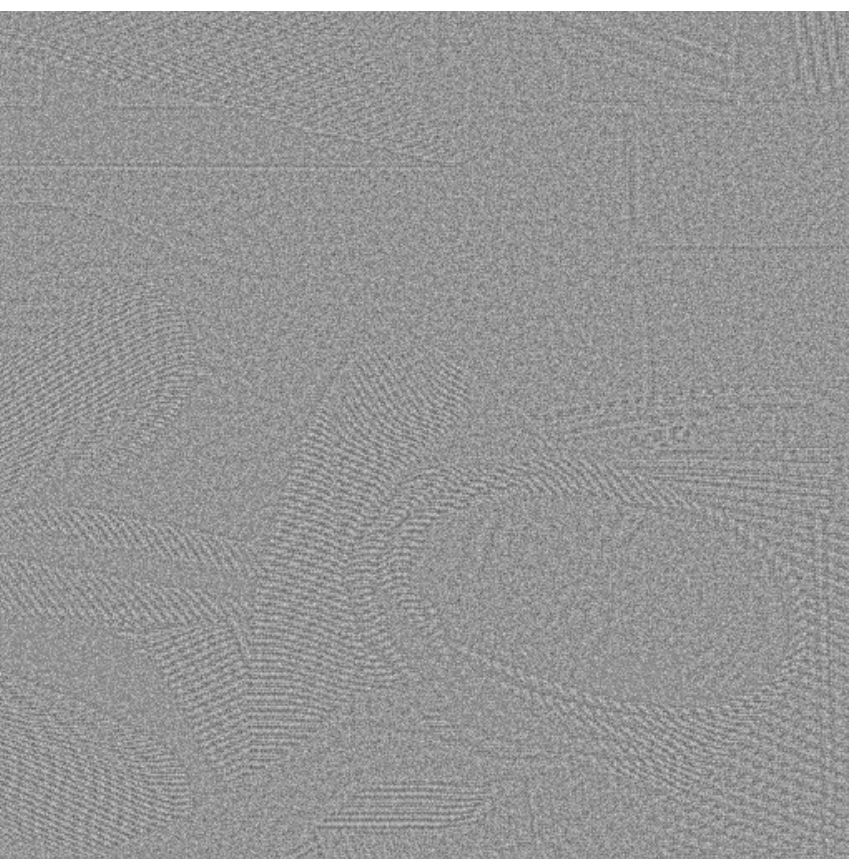


Image Barbara III ( $\lambda = 1.0$ ,  $\mu = 30$ ,  $\eta = 0.6$ , Daub8)

# Plan de l'exposé

---

## **I/ Décomposition d'images :**

- 1) Position du problème
- 2) Modèle proposé
- 3) Etude du modèle discret
- 4) Quelques remarques sur le cas continu
- 5) Extension : modèle  $u + v + w$

## **II/ Un modèle de classification supervisée d'images texturées :**

- 1) Position du problème
- 2) Etude théorique (cas de 2 phases)
- 3) Modélisation des textures
- 4) Algorithme et résultats numériques

---

## I/ Décomposition d'images :

## II/ Un modèle de classification supervisée d'images texturées :

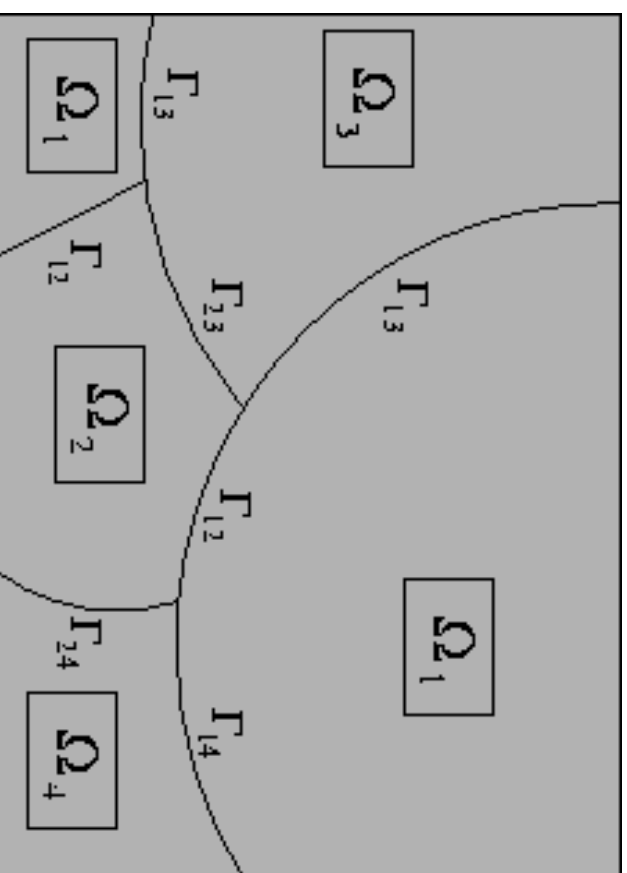
- 1) Position du problème
- 2) Etude théorique (cas de 2 phases)
- 3) Modélisation des textures
- 4) Algorithme et résultats numériques

# Position du problème

---

La **classification** consiste à attribuer une étiquette à chaque pixel d'une image, cette étiquette indiquant à quelle classe appartient le pixel. Elle peut être vue comme un problème de **partition**.

L'image est considérée comme une fonction  $u_0 : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  (où  $\Omega$  ouvert Lipschitz de  $\mathbb{R}^2$ ). On note  $\Omega_i = \{x \in \Omega / x \text{ dans la classe } i\}$



Le but est de trouver une partition régulière et homogène de  $\Omega$ .

# Fonctionnelle

---

$$F(\Omega_1, \dots, \Omega_I) = \left\{ \sum_{i=1}^I |\Gamma_i| + \sum_{i=1}^I \int_{\Omega_i} B_i ; \Omega = \bigcup_{i=1}^I \Omega_i \bigcup \Gamma_i, \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \text{ si } i \neq j \right\}$$

où  $|\Gamma_i|$  désigne la mesure de Hausdorff 1 dimensionnelle, avec  $\Gamma_i = \partial\Omega_i$ , et  $B_i$  un terme d'attache aux données pour chaque classe  $i$ .

**Références :** Zhao et al 1996, Samson et al 2000



# Approche par courbes de niveaux

---

Plutôt que travailler avec des ensembles, on suppose que pour tout  $\Omega_i$  il existe une fonction lipschitzienne  $\phi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi_i(x) > 0 & \text{si } x \in \Omega_i \\ \phi_i(x) = 0 & \text{si } x \in \Gamma_i \\ \phi_i(x) < 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

où  $H$  désigne la fonction de Heaviside.

$$F(\phi_1, \dots, \phi_I) = \left\{ \sum_{i=1}^I \int_{\phi_i=0} ds + \sum_{i=1}^I \int_{\Omega} B_i H(\phi_i) ; \sum_{i=1}^I H(\phi_i) = 1 \right\}$$

# Fonctionnelle à minimiser

---

Dans les applications réelles, on relâche la contrainte de partition

$\sum_{i=1}^I H(\phi_i) = 1$  en considérant plutôt :

$$F(\phi_1, \dots, \phi_I) = \underbrace{\sum_{i=1}^I \int_{\phi_i=0}}_{\text{Régularisation}} ds + \underbrace{\sum_{i=1}^I \int_{\Omega} B_i H(\phi_i)}_{\text{Attache aux données}} + \underbrace{\int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^I H(\phi_i) - 1 \right)^2}_{\text{Partition}}$$

ou encore une version approchée :

$$F_{\alpha}(\phi_1, \dots, \phi_I) = \sum_{i=1}^I \int_{\Omega} \delta_{\alpha}(\phi_i) |\nabla \phi_i| + \sum_{i=1}^I \int_{\Omega} B_i H_{\alpha}(\phi_i) + \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^I H_{\alpha}(\phi_i) - 1 \right)^2$$

où  $\delta_{\alpha}$  et  $H_{\alpha}$  sont respectivement des approximations continues de la distribution de Dirac et de la fonction de Heaviside.

---

## I/ Décomposition d'images :

## II/ Un modèle de classification supervisée d'images texturées :

- 1) Position du problème
- 2) Etude théorique (cas de 2 phases)
- 3) Modélisation des textures
- 4) Algorithme et résultats numériques

# Le problème exact

---

On suppose que  $B \in L^\infty(\Omega)$ . On considère les problèmes :

$$\inf_{\phi \in Lip(\Omega)} \left( \int_{\phi=0} ds + \int_{\Omega} BH(\phi) \right) \quad (1)$$

$$\inf_{\psi \in BV(\Omega), 0 \leq \psi \leq 1} \left( \int_{\Omega} |D\psi| + \int_{\Omega} B\psi \right) \quad (2)$$

ainsi que :

$$\inf_{E \in \mathcal{B}(\Omega)} \left( P(E, \Omega) + \int_E B \right) \quad (3)$$

où  $\mathcal{B}(\Omega)$  désigne l'ensemble des Boréliens de  $\Omega$ ,  $H$  la fonction d'Heaviside, et  $P(E, \Omega) = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div}(\xi(x)) dx / \xi \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^2), \|\xi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \right\}$ .

# Le problème approché

---

On rappelle que le problème que l'on cherche à résoudre numériquement dans le cas de deux phases (i.e. deux textures) est le suivant :

$$\inf_{\phi \in Lip(\Omega)} \left( \int_{\Omega} \delta_{\alpha}(\phi) |\nabla \phi| + \int_{\Omega} BH_{\alpha}(\phi) \right)$$

où  $\delta_{\alpha}$  et  $H_{\alpha}$  sont respectivement des approximations continues de la distribution de Dirac et de la fonction de Heaviside.

# Régularisation

---

On considère un problème régularisé

$$\inf_{\phi \in W^{1,1}(\Omega)} F_{\alpha}(\phi)$$

où :

$$F_{\alpha}(\phi) = \left( \int_{\Omega} g_{\beta}(\alpha) (\delta_{\alpha}(\phi) |\nabla \phi|) + \int_{\Omega} BH_{\alpha}(\phi) + \int_{\Omega} h_{\beta}(\alpha) (H_{\alpha}(\phi)) \right)$$

où  $\beta(\alpha) = \left( \frac{4\alpha^3}{\|B\|_{L^{\infty}(\Omega)}} \right)^{\frac{1}{5}}$  ,  $g_{\beta}(\xi) = \sqrt{|\xi|^2 + \beta^2}$   
et

$$h_{\beta}(x) = \begin{cases} \frac{x^4}{\beta^5} & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{(x-1)^4}{\beta^5} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

# Résultat pour $\phi$

---

On cherche à résoudre le problème, à  $\alpha$  fixé :

$$\inf_{\phi \in W^{1,1}(\Omega)} F_{\alpha}(\phi)$$

avec :

$$F_{\alpha}(\phi) = \left( \int_{\Omega} g_{\beta(\alpha)}(\delta_{\alpha}(\phi)|\nabla\phi|) + \int_{\Omega} BH_{\alpha}(\phi) + \int_{\Omega} h_{\beta(\alpha)}(H_{\alpha}(\phi)) \right)$$

**Théorème** : Le problème ci-dessus admet une solution  $\phi_{\alpha} \in L^{\infty}(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$ . De plus, pour tout ouvert  $V$  relativement compact dans  $\Omega$ , on a :  $\phi_{\alpha} \in Lip(V)$ .

---

## I/ Décomposition d'images :

## II/ Un modèle de classification supervisée d'images texturées :

- 1) Position du problème
- 2) Etude théorique (cas de 2 phases)
- 3) *Modélisation des textures*
- 4) Algorithme et résultats numériques



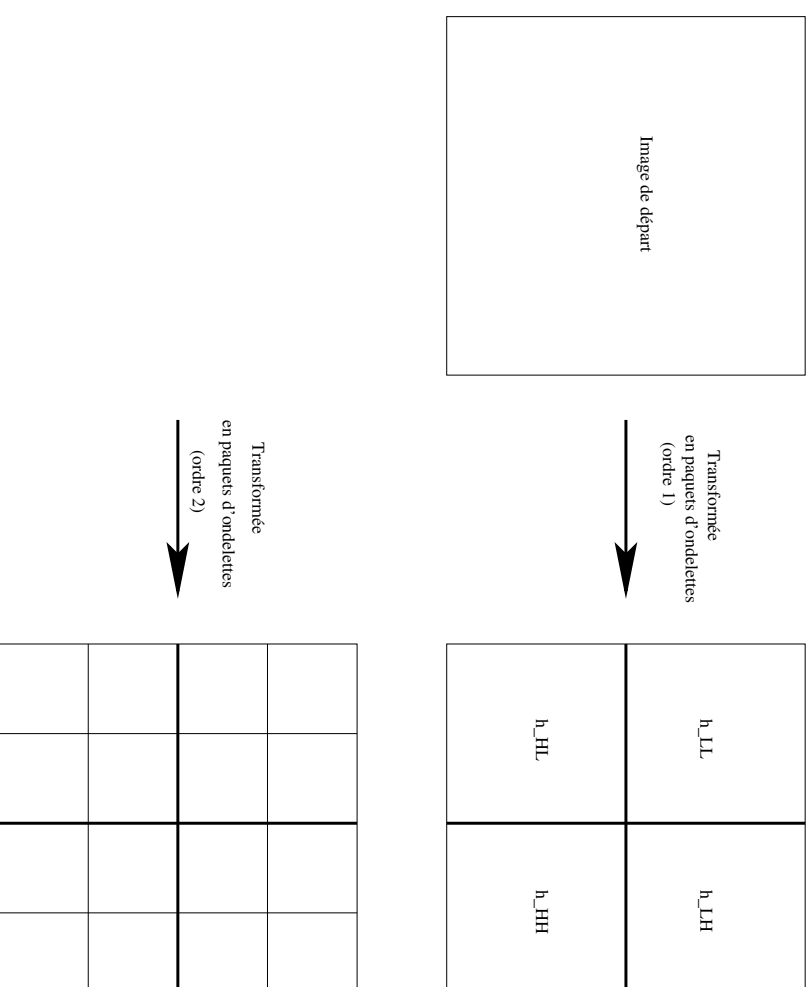
# Fonctionnelle

---

$$\begin{aligned} F(\Phi_1, \dots, \Phi_I) &= \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^I H_{\alpha}(\Phi_i) - 1 \right)^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^I \gamma_i \int_{\Omega} \delta_{\alpha}(\Phi_i) |\nabla \Phi_i| + \sum_{i=1}^I e_i \int_{\Omega} H_{\alpha}(\Phi_i) B_i dx \end{aligned}$$

# Ondelettes

---



On effectue une transformée en paquets d'ondelettes de l'image.

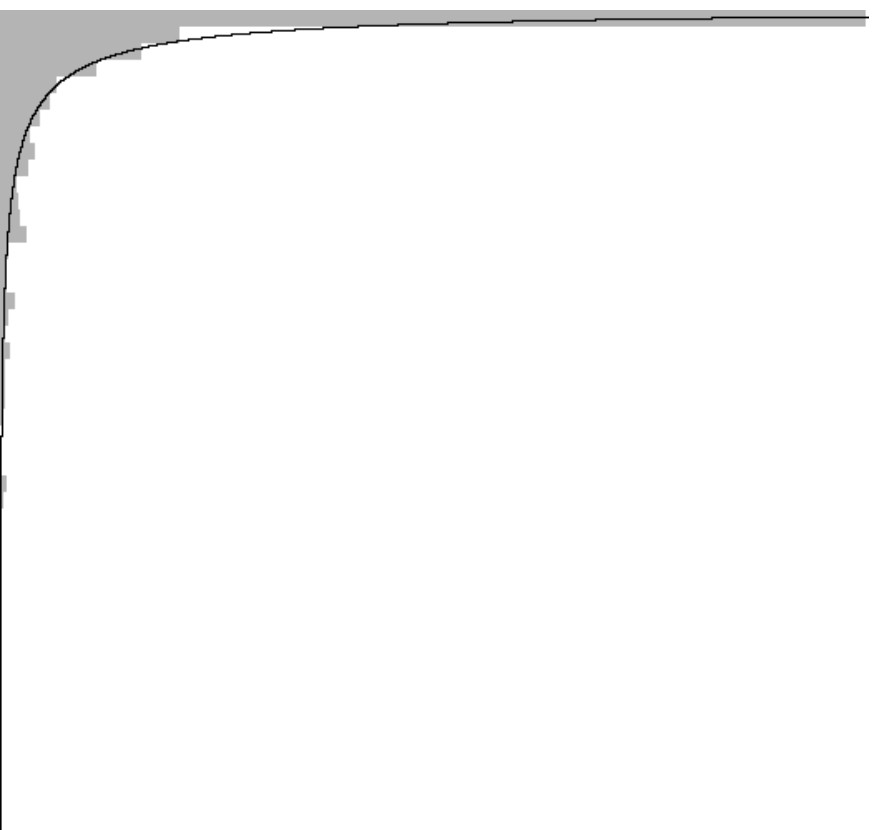
A chaque pixel  $s$ , on peut associer un vecteur  $U(s) = (U_1(s), \dots, U_K(s))$ , où  $U_k(s)$  est le carré du coefficient en ondelettes dans la sous-bande  $k$  au pixel  $s$ .

# Loi de probabilité

---

La distribution de  $U_k$  peut être approchée par :

$$p_{X^2}(y) = \frac{A_k}{2\sqrt{y}} \exp\left(-\left(\frac{\sqrt{y}}{\alpha_k}\right)^{\beta_k}\right) \mathbf{1}_{y \geq 0}$$



# Attache aux données

---

**Hypothèses :**

(H1) Nous supposons que, pour chaque texture  $i = 1 \dots I$ , dans chaque sous-bande  $k = 1 \dots K$ , le carré des coefficients en ondelettes suit une loi du type précédent.

(H2) Nous considérons que les différentes sous-bandes sont indépendantes.

**Terme d'attache aux données :** Nous l'obtenons par la méthode du maximum de vraisemblance : on maximise  $P(U|CI)$ , où  $CI$  est la classe supposée. Cela revient à minimiser  $-\ln(P(U|CI))$ .

$$B_i(x) = \sum_{k=1}^K \left( -\ln A_k^i + \ln 2 + \frac{1}{2} \ln u_k(x) + \left( \frac{\sqrt{u_k(x)}}{\alpha_k^i} \right)^{\beta_k^i} \right)$$

---

## I/ Décomposition d'images :

## II/ Un modèle de classification supervisée d'images texturées :

- 1) Position du problème
- 2) Etude théorique (cas de 2 phases)
- 3) Modélisation des textures
- 4) Algorithme et résultats numériques

# Fonctionnelle

---

$$\begin{aligned} F(\Phi_1, \dots, \Phi_I) &= \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^I H_{\alpha}(\Phi_i) - 1 \right)^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^I \gamma_i \int_{\Omega} \delta_{\alpha}(\Phi_i) |\nabla \Phi_i| + \sum_{i=1}^I \epsilon_i \int_{\Omega} H_{\alpha}(\Phi_i) B_i dx \end{aligned}$$

# Schéma dynamique

---

Les équations d'Euler-Lagrange associées forment un système d'EDP que l'on plonge dans le schéma dynamique suivant ( $i = 1 \dots I$ ) :

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} = -\delta_\alpha(\phi_i) \left[ \lambda \left( \sum_{j=1}^I H_\alpha(\phi_j) - 1 \right) - \gamma_i \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \phi_i}{|\nabla \phi_i|} \right) + e_i B_i \right]$$

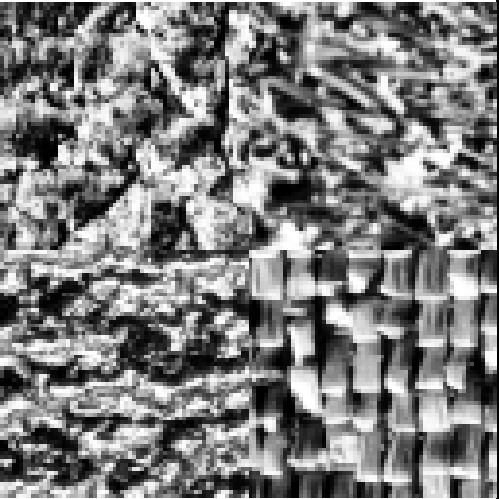
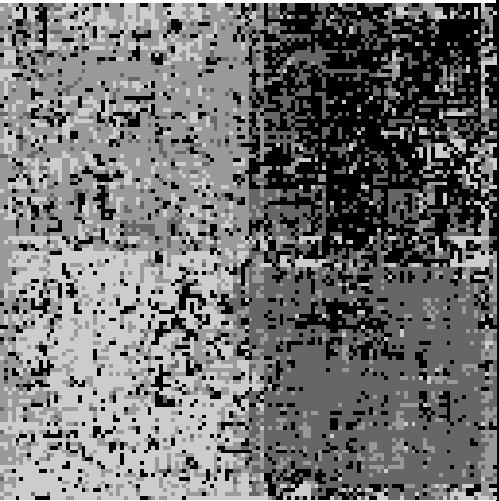
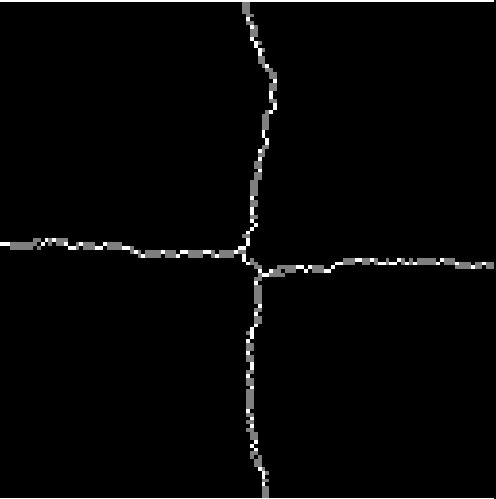

avec pour condition initiale  $\phi_i(0, x)$  fonction distance euclidienne signée à la courbe de niveau zéro de  $\phi_i$ .

## Réinitialisation :

On réinitialise périodiquement les  $\phi_i$  en fonctions distances euclidiennes signées à l'aide de l'EDP :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{signe}(\phi_i)(|\nabla \phi| - 1) = 0$$

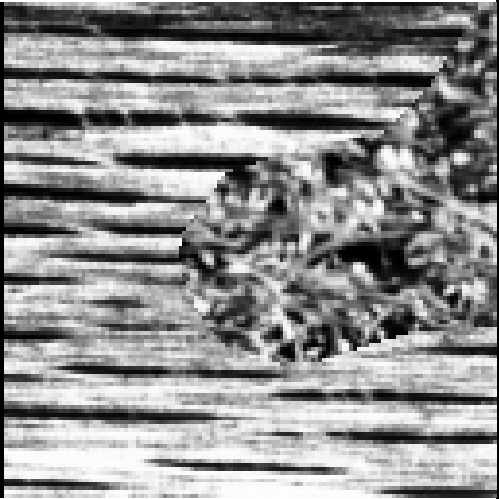
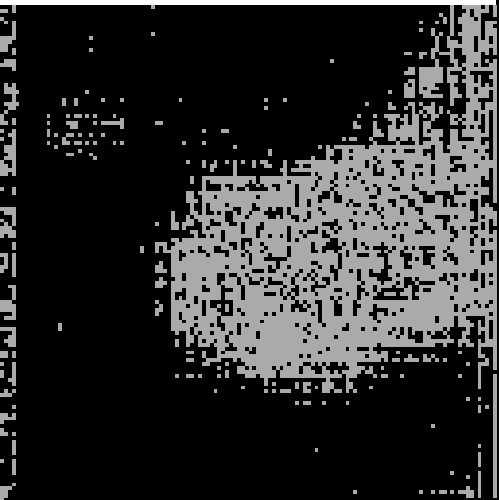


# Exemple

Image à classifier	Terme d'attache aux données
	
Contours (696 itérations)	Classification (696 itérations)
	

Classification d'une image synthétique composée de quatre textures

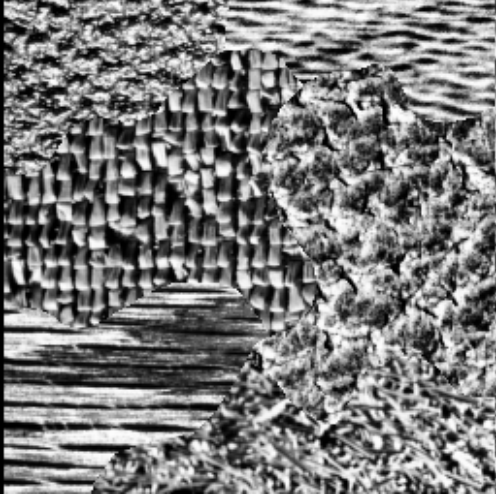

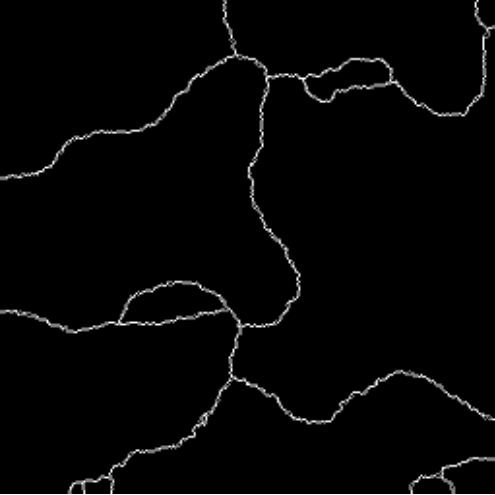



# Exemple

Image à classifier	Terme d'attache aux données
	
Contours (645 itérations)	Classification (645 itérations)
	

Classification d'une image synthétique composée de deux textures

# Exemple

Image à classifier		Terme d'attache aux données	
Contours (674 itérations)		Classification (674 itérations)	

Classification d'une image synthétique avec six textures

# Conclusions et perspectives

---

## Conclusions

- Nous avons développé un algorithme de **décomposition d'images** basé sur l'utilisation de différentes normes. Cet algorithme permet en particulier d'isoler la composante texture d'une image.
- Nous avons développé un algorithme de **classification d'images texturées** basé sur les contours actifs et les ondelettes.
- Nous avons effectué l'**étude mathématique** de tous ces modèles.

## Perspectives

- Réglage des paramètres dans l'algorithme de décomposition.
- Introduction d'autres espaces fonctionnels ?
- Modélisation des textures dans les images couleurs.
- Modification de l'algorithme de classification pour qu'il fonctionne sur des images présentant simultanément des zones texturées et non texturées.