APPLICATION DE LA THÉORIE DES BANCS DE FILTRES À L'ANALYSE ET À LA CONCEPTION DE MODULATIONS MULTIPORTEUSES ORTHOGONALES ET BIORTHOGONALES

Cyrille SICLET

18 novembre 2002

Composante universitaire : Université de Rennes I - IRISA — École doctorale : MATISSE

Laboratoire d'accueil : France Télécom R&D DMR/DDH

Introduction

- Intérêts des modulations multiporteuses :
  - ☞ allongement du temps symbole
    $\Rightarrow$ modulations moins sensibles aux canaux dispersifs en temps
  - ☞ répartition sur plusieurs fréquences porteuses
    $\Rightarrow$ possibilité d'isoler les porteuses perturbées par des émetteurs à bande étroite
- Applications actuelles :
  - ☞ radiodiffusion (DAB, DVB-T)
  - ☞ réseaux locaux sans fil (HIPERLAN2)
  - ☞ transmission à haut débit sur ligne bifilaire téléphonique (ADSL)

Introduction (2)

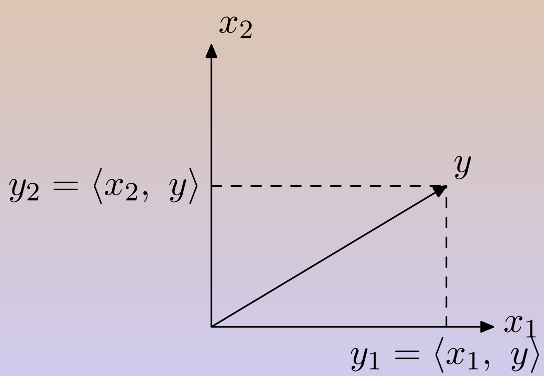
- ✓ Limitations des systèmes OFDM utilisés :
  - ☞ filtres mal localisés en fréquence
    $\Rightarrow$ sensibilité aux canaux dispersifs en fréquence
  - ☞ utilisation d'un intervalle de garde
    $\Rightarrow$ perte d'efficacité spectrale

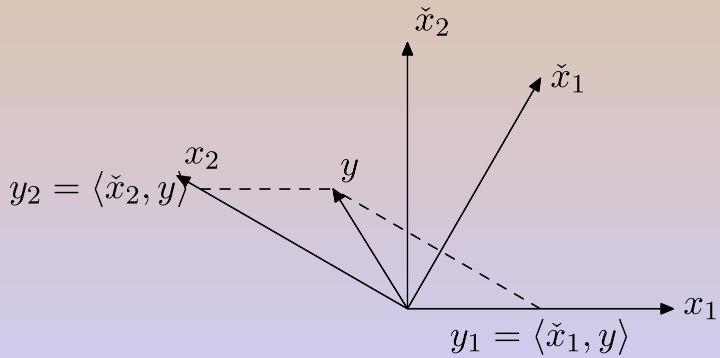
Introduction (2)

- ✓ Limitations des systèmes OFDM utilisés :
  - ☞ filtres mal localisés en fréquence
    $\Rightarrow$ sensibilité aux canaux dispersifs en fréquence
  - ☞ utilisation d'un intervalle de garde
    $\Rightarrow$ perte d'efficacité spectrale
- ✓ Alternatives proposées :
  - ☞ modulations OFDM/QAM suréchantillonnées
  - ☞ modulations OFDM/OQAM
  - ☞ modulations biorthogonales BFDM/QAM et BFDM/OQAM : généralisation de l'OFDM
    $\Rightarrow$ plus de degrés de liberté

Introduction (3) : décomposition d'un signal à l'aide de bases biorthogonales

- ✓ $(x_i)_{i\in\mathbf{I}}$ base de $\mathbf{E}$ muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$
  - ☞ $\forall y \in \mathbf{E}$, il existe une unique famille $(y_i)_{i\in\mathbf{I}}$ telle que $y = \sum_{i\in\mathbf{I}} y_i x_i$
    - ◇ si $(x_i)_{i\in I}$ est orthonormale alors, $\langle x_i, x_j\rangle = \delta_{i,j}$ et $y_i = \langle x_i, y\rangle$
    - ◇ sinon, il existe une autre base $(\check{x}_i)_{i\in\mathbf{I}}$ telle que $\langle x_i, \check{x}_j\rangle = \delta_{i,j}$ et $y_i = \langle \check{x}_i, y\rangle$
  - ☞ $x_i = \check{x}_i$ si x_i est orthonormale





Introduction (4) : plan de l'exposé

- ✓ Modulations BFDM/QAM suréchantillonnées (canal parfait)
- ✓ Modulations BFDM/OQAM (canal parfait)
- ✓ Évaluation des modulations multiporteuses en présence de distorsions
  - ☞ filtres utilisés
  - ☞ résultats
- ✓ Conclusion

Modulations BFDM/QAM suréchantillonnées

Modulations BFDM/QAM suréchantillonnées : temps continu

- ✓ Symboles à transmettre sur M porteuses : $c_{m,n} \in \mathbf{C}$, $0 \leq m \leq M-1$ et $n \in \mathbf{Z}$
- ✓ Signal BFDM/QAM à temps continu en bande de base :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{M-1} c_{m,n} f_{m,n}(t)$$

- ✓ Fonctions de base : famille de Weyl-Heisenberg (ou Gabor)

$$f_{m,n}(t) = f(t - nT_0) e^{j2\pi m F_0 t} e^{j\psi_{m,n}}$$

- ✓ Densité et efficacité spectrale :

$$d = \frac{1}{F_0 T_0} = \frac{M}{N} \leq 1 \text{ et } \eta \approx bd$$

Modulations BFDM/QAM suréchantillonnées : temps discret

- ✓ Échantillonnage à la fréquence de Shannon $F_{\mathrm{e}} = MF_0$, *i.e.* à la période sous-critique $T_{\mathrm{e}} = \frac{1}{F_{\mathrm{e}}} = \frac{T_0}{N} \leq \frac{T_0}{M}$
- ✓ Troncation et translation de $f(t)$ pour obtenir des filtres RIF causaux :
  - ☞ signal BFDM/QAM à temps discret en bande de base :

$$s[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{M-1} c_{m,n} f_{m,n}[k]$$

avec $\qquad f_{m,n}[k] = f[k - nN] e^{j \frac{2\pi}{M} m \left(k - \frac{D}{2}\right)} e^{j\psi_{m,n}}$

- ✓ Exemple : OFDM classique sans IG : $N = M$, f fonction porte

Modulations BFDM/QAM suréchantillonnées : temps discret (2)

- ✓ Démodulation: utilisation d'une base biorthogonale discrète $\check{f}_{m,n}$, avec un produit scalaire complexe :

$$\hat{c}_{m,n} = \langle \check{f}_{m,n}, s \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \check{f}^*_{m,n}[k] s[k]$$

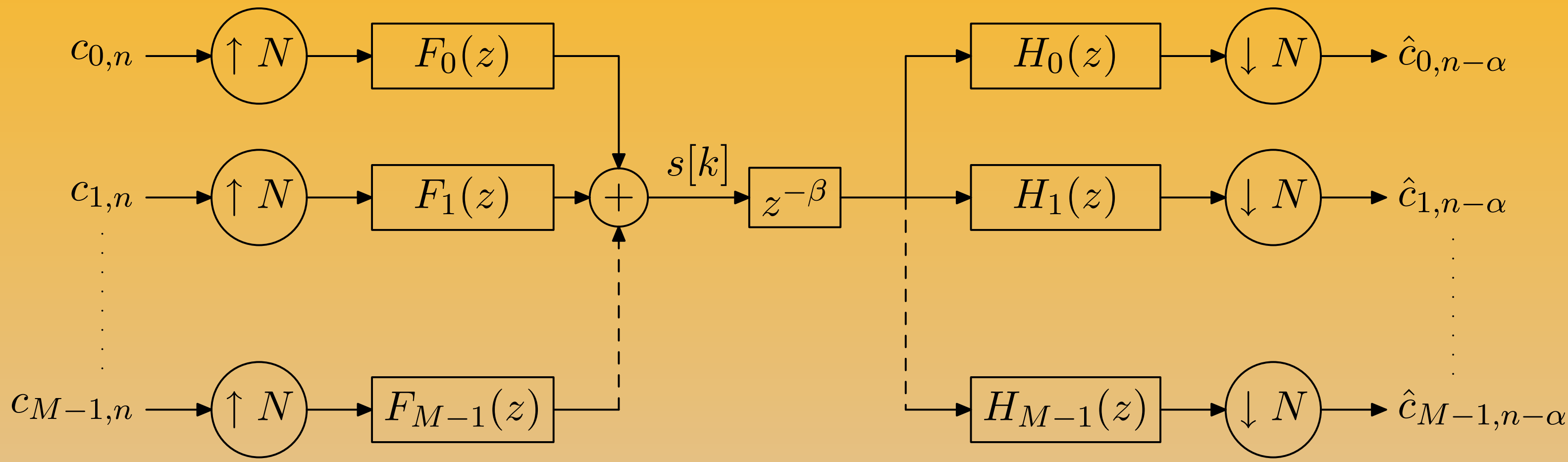
avec $$\check{f}_{m,n}[k] = \check{f}[k - nN] e^{j\frac{2\pi}{M} m\left(k-\frac{D}{2}\right)} e^{j\psi_{m,n}}$$

- ✓ Condition de biorthogonalité : $\hat{c}_{m,n} = c_{m,n}$ avec un canal parfait si

$$\langle \check{f}_{m,n}, f_{m',n'} \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \check{f}^*_{m,n}[k] f_{m',n'}[k] = \delta_{m,m'} \delta_{n,n'}$$

$\Rightarrow$ cas orthogonal : $f[k] = \check{f}[k]$

Modulations BFDM/QAM suréchantillonnées : schéma du transmultiplexeur



- ✓ $D = \alpha N - \beta$ avec $0 \leq \beta \leq N-1$
- ✓ $f_m[k] = f[k]e^{j\frac{2\pi}{M}m(k-\frac{D}{2})}$
- ✓ $h_m[k] = h[k]e^{j\frac{2\pi}{M}m(k-\frac{D}{2})}$ avec $h[k] = \check{f}^*[D-k]$
- ✓ Cas orthogonal : $D = L-1$ et $f[k] = h^*[D-k]$

Modulations BFDM/QAM suréchantillonnées : approche polyphase

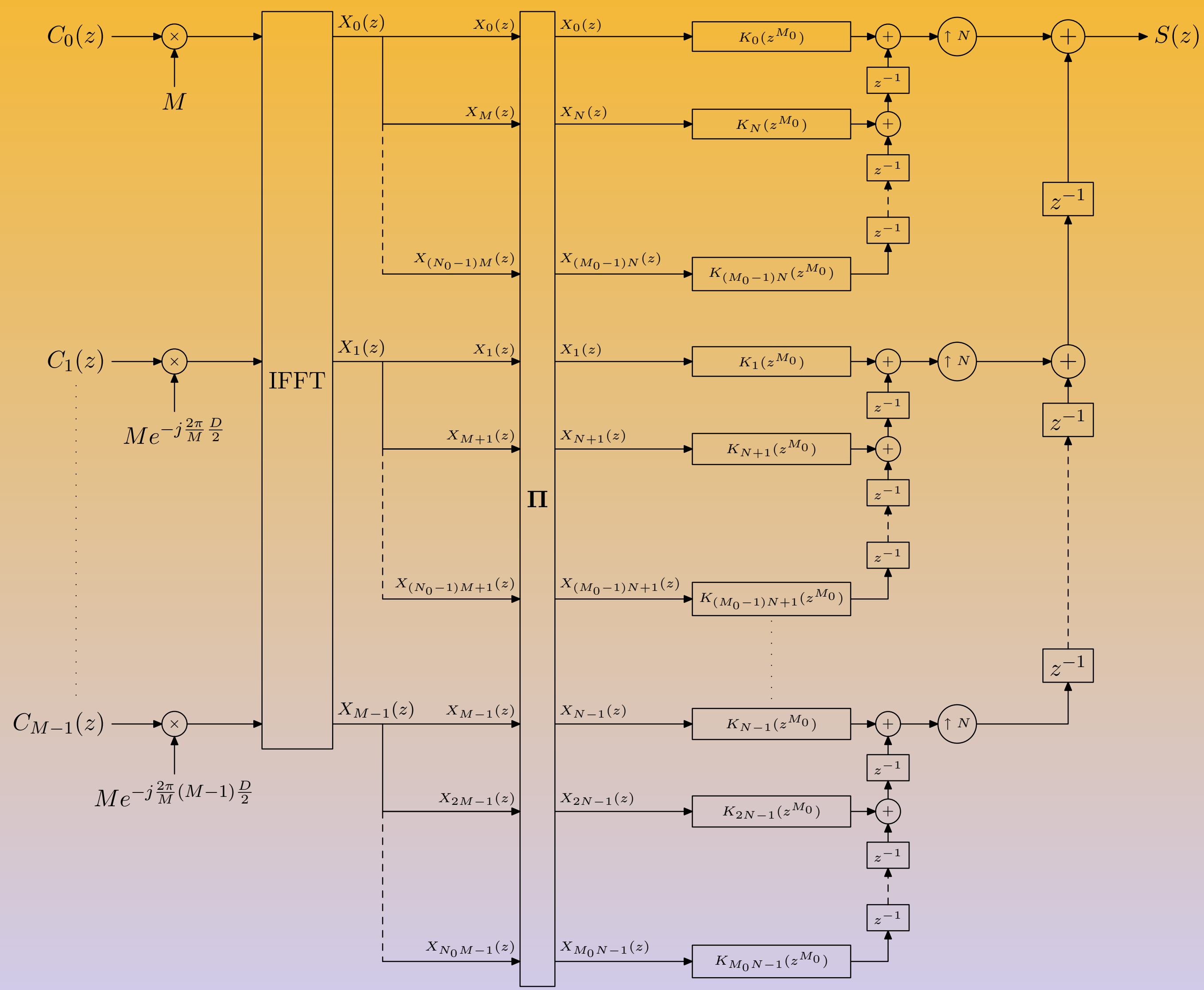
- ✓ Décomposition polyphase de $F(z)$ et $H(z)$ d'ordre $N_0 M$:

$$F(z) = \sum_{l=0}^{N_0 M - 1} z^{-l} K_l(z^{N_0 M}),\; H(z) = \sum_{l=0}^{N_0 M - 1} z^{-l} G_l(z^{N_0 M})$$

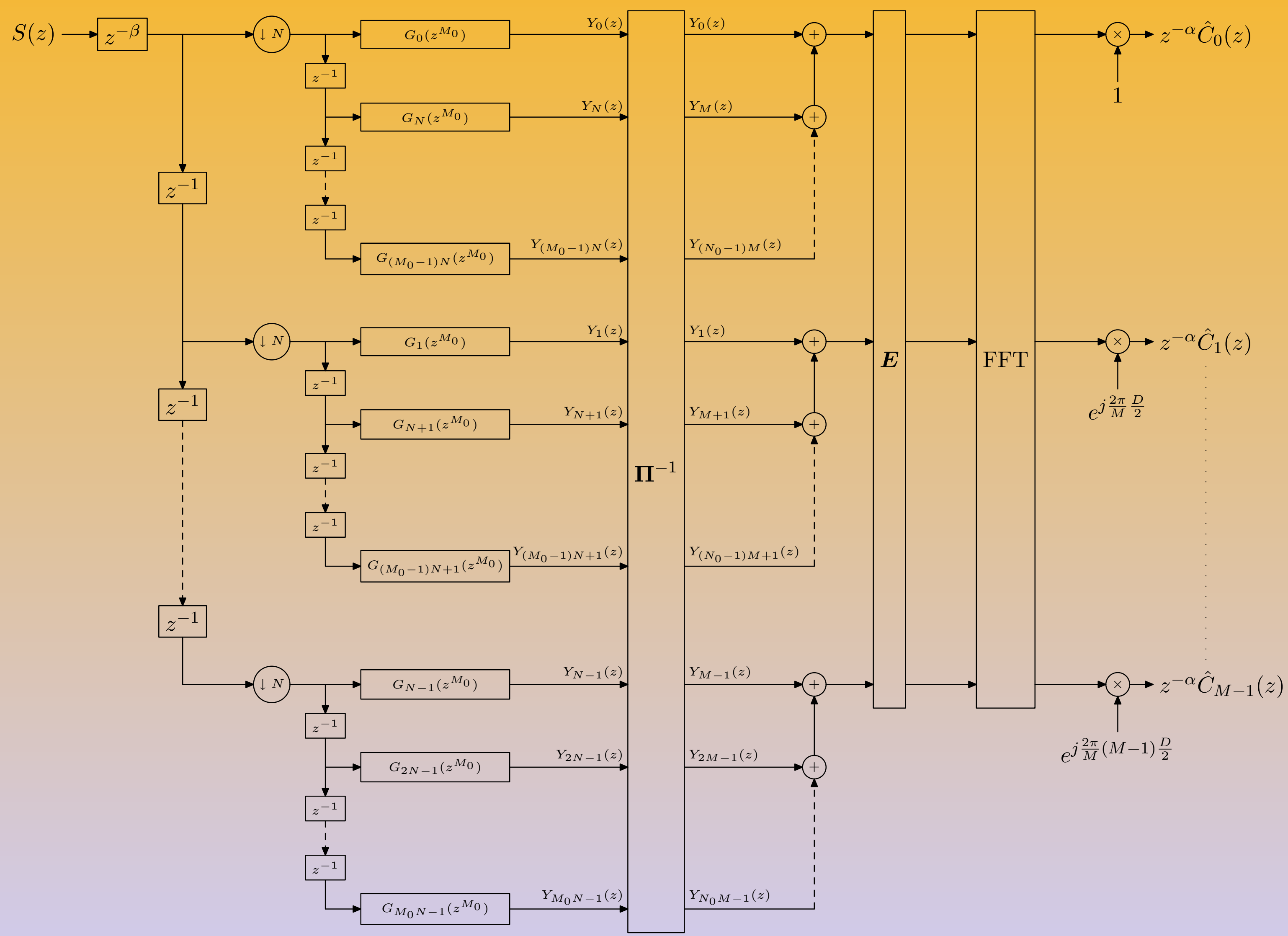
avec $N_0 M = M_0 N = \mathrm{PPCM}(N, M)$

- ☞ après calculs, on retrouve un schéma de réalisation utilisant des transformées de Fourier au modulateur et au démodulateur
- ☞ $M M_0$ conditions de biorthogonalité portant sur ces composantes polyphases

Modulations BFDM/QAM suréchantillonnées : schéma du modulateur



Modulations BFDM/QAM suréchantillonnées : schéma du démodulateur



Modulations BFDM/QAM suréchantillonnées : remarques sur les schémas de réalisation

- $\Rightarrow$ possibilité d'utiliser les mêmes filtres avec d'autres transformées inversibles
- $\Rightarrow$ architecture utilisable pour les codeurs en sous-bandes modulés suréchantillonnés

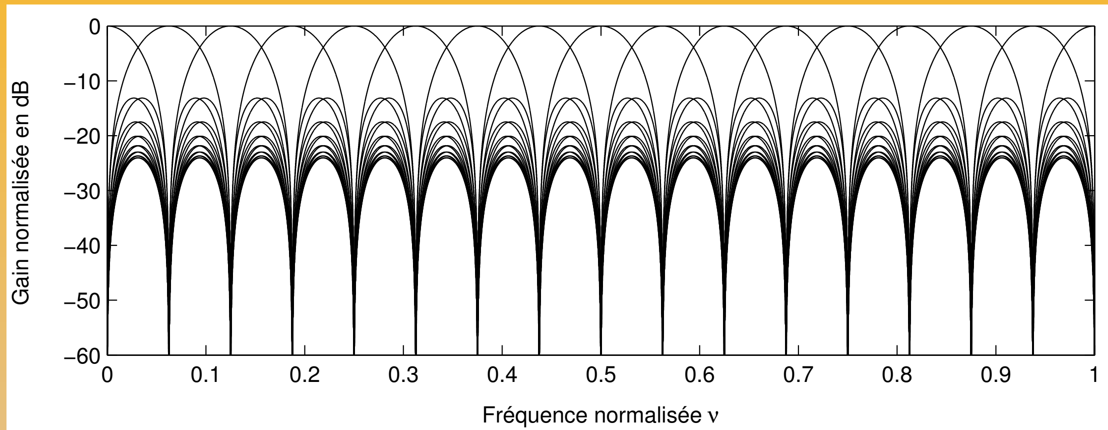
Modulations BFDM/QAM suréchantillonnées : conditions de reconstruction parfaite

$$\sum_{n=0}^{n_{l,\lambda}} G_{nM+l}(z) K_{(\lambda-\lambda_0)N+d_0-(nM+l)}(z) +$$

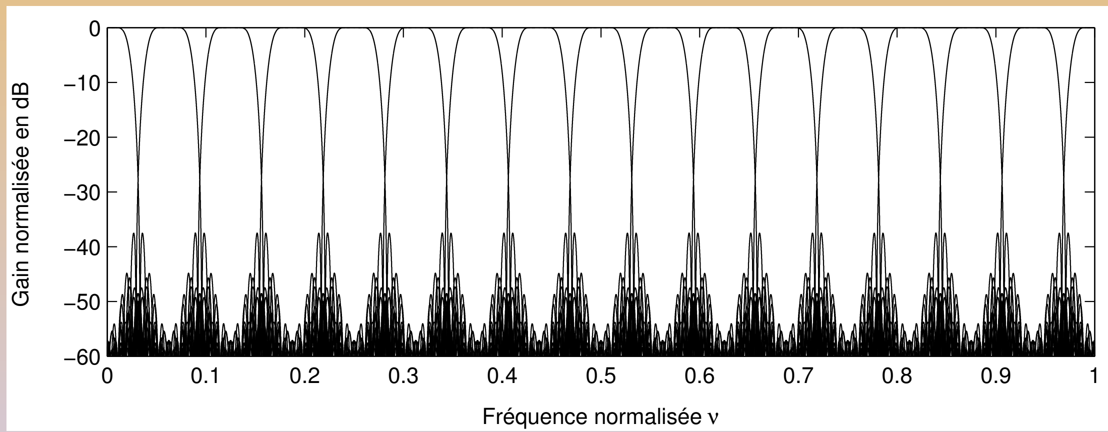
$$z^{-1} \sum_{n=n_{l,\lambda}+1}^{N_0-1} G_{nM+l}(z) K_{N_0M+(\lambda-\lambda_0)N+d_0-(nM+l)}(z) = \frac{z^{-s_0}}{M}\delta_{\lambda,\lambda_0}$$

- ✓ $D = s_0 N_0 M + d_0$ avec $0 \leq d_0 \leq N_0 M - 1$
- ✓ Mise en évidence du délai de reconstruction
- ✓ Écriture unifiée et explicite
- ✓ Conditions utilisables pour les codeurs en sous-bandes par dualité entre familles de Weyl-Heisenberg

Modulations BFDM/QAM suréchantillonnées : influence du suréchantillonnage



OFDM classique (filtre rectangulaire $M = N = L = 16$)



OFDM/QAM suréchantillonné par $\frac{3}{2}$ ($M = 16$, $N = 24$ et $L = 192$, prototype minimisant l'énergie hors-bande)

Modulations BFDM/OQAM

Modulations BFDM/OQAM : principe

- ✓ Parties réelles et imaginaires des symboles alternativement décalées d'un demi-temps symbole (offset) :

	$(2m-1)F_0$	$(2m)F_0$	$(2m+1)F_0$
$nT_0 - T_0/2$	$c^{\mathcal{R}}_{2m-1,n-1}$	$jc^{\mathcal{I}}_{2m,n-1}$	$c^{\mathcal{R}}_{2m+1,n-1}$
nT_0	$jc^{\mathcal{I}}_{2m-1,n}$	$c^{\mathcal{R}}_{2m,n}$	$jc^{\mathcal{I}}_{2m+1,n}$
$nT_0 + T_0/2$	$c^{\mathcal{R}}_{2m-1,n}$	$jc^{\mathcal{I}}_{2m,n}$	$c^{\mathcal{R}}_{2m+1,n}$

- ✓ Symboles transmis sur $M = 2N$ porteuses : $a_{m,n} \in \mathbf{R}$
- ✓ Signal BFDM/OQAM à temps continu en bande de base :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{2N-1} a_{m,n} f_{m,n}(t)$$

$$f_{m,n}(t) = f(t - nT_0/2) e^{j2\pi m F_0 t} e^{j\frac{\pi}{2}(m+n)} \text{ et } F_0 T_0 = 1$$

Modulations BFDM/OQAM : du continu au discret

- ✓ Échantillonnage à la période critique $T_e = \frac{T_0}{M}$
- ✓ Troncation et translation de $f(t)$ pour avoir des filtres FIR causaux
  - ☞ signal BFDM/OQAM à temps discret :

$$s[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{2M-1} a_{m,n} f_{m,n}[k]$$

avec $$f_{m,n}[k] = f[k - nN] e^{j\frac{2\pi}{2N} m\left(k - \frac{D}{2}\right)} e^{j\frac{\pi}{2}(m+n)}$$

Modulations BFDM/OQAM : démodulation à temps discret

- Démodulation: projection sur une base biorthogonale $\check{f}_{m,n}$ avec un produit scalaire réel :

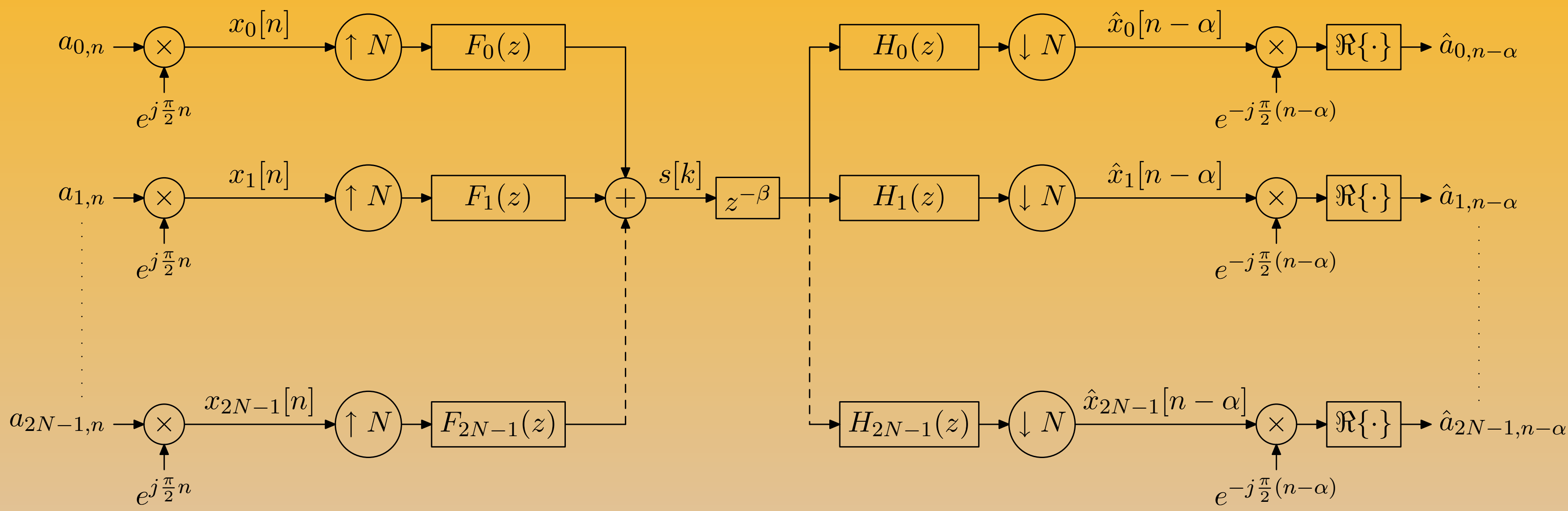
$$\hat{a}_{m,n} = \langle \check{f}_{m,n}, s \rangle_{\mathbf{R}} = \Re \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \check{f}^{*}_{m,n}[k] s[k] \right\}$$

avec $$\check{f}_{m,n}[k] = \check{f}[k - nN] e^{j \frac{2\pi}{2N} m \left(k - \frac{D}{2}\right)} e^{j \frac{\pi}{2}(m+n)}$$

- Condition de biorthogonalité : $\hat{a}_{m,n} = a_{m,n}$ avec un canal parfait si

$$\langle \check{f}_{m,n}, f_{m',n'} \rangle_{\mathbf{R}} = \Re \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \check{f}^{*}_{m,n}[k] f_{m',n'}[k] \right\} = \delta_{m,m'} \delta_{n,n'}$$

Modulations BFDM/OQAM : schéma du transmultiplexeur



- $D = \alpha N - \beta$ avec $0 \leq \beta \leq N - 1$
- $f_m[k] = f[k]e^{j\frac{2\pi}{M}m(k-\frac{D-M}{2})}$
- $h_m[k] = h[k]e^{j\frac{2\pi}{M}m(k-\frac{D+M}{2})}$ avec $h[k] = \check{f}^*[D-k]$

Modulations BFDM/OQAM : approche polyphase

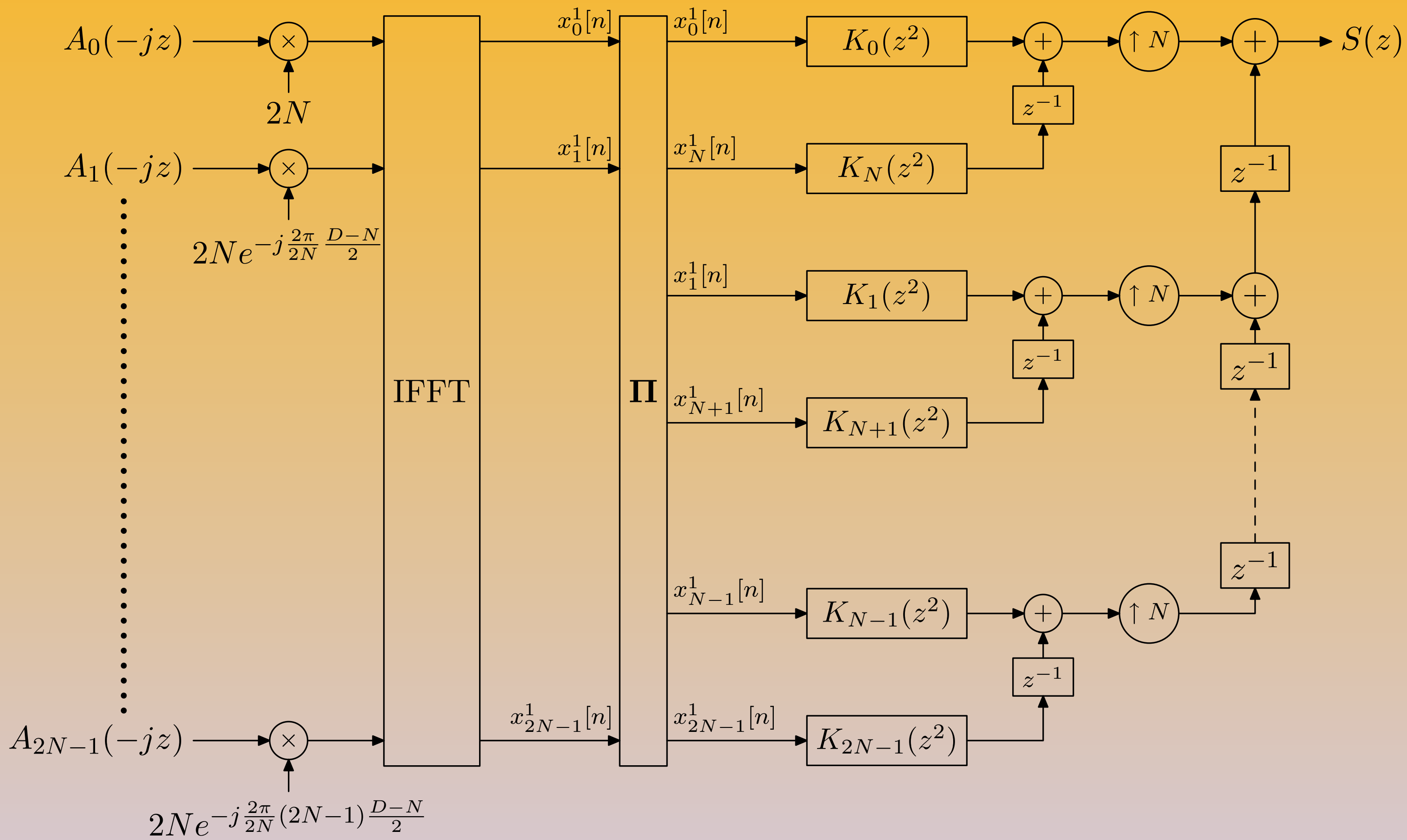
✓ Décomposition polyphase de $F(z)$ et $H(z)$ d'ordre $2N$:

$$F(z) = \sum_{l=0}^{2N-1} z^{-l} K_l(z^{2N}),\ H(z) = \sum_{l=0}^{2N-1} z^{-l} G_l(z^{2N})$$

☞ après calculs, on retrouve un schéma de réalisation utilisant des transformées de Fourier au modulateur et au démodulateur

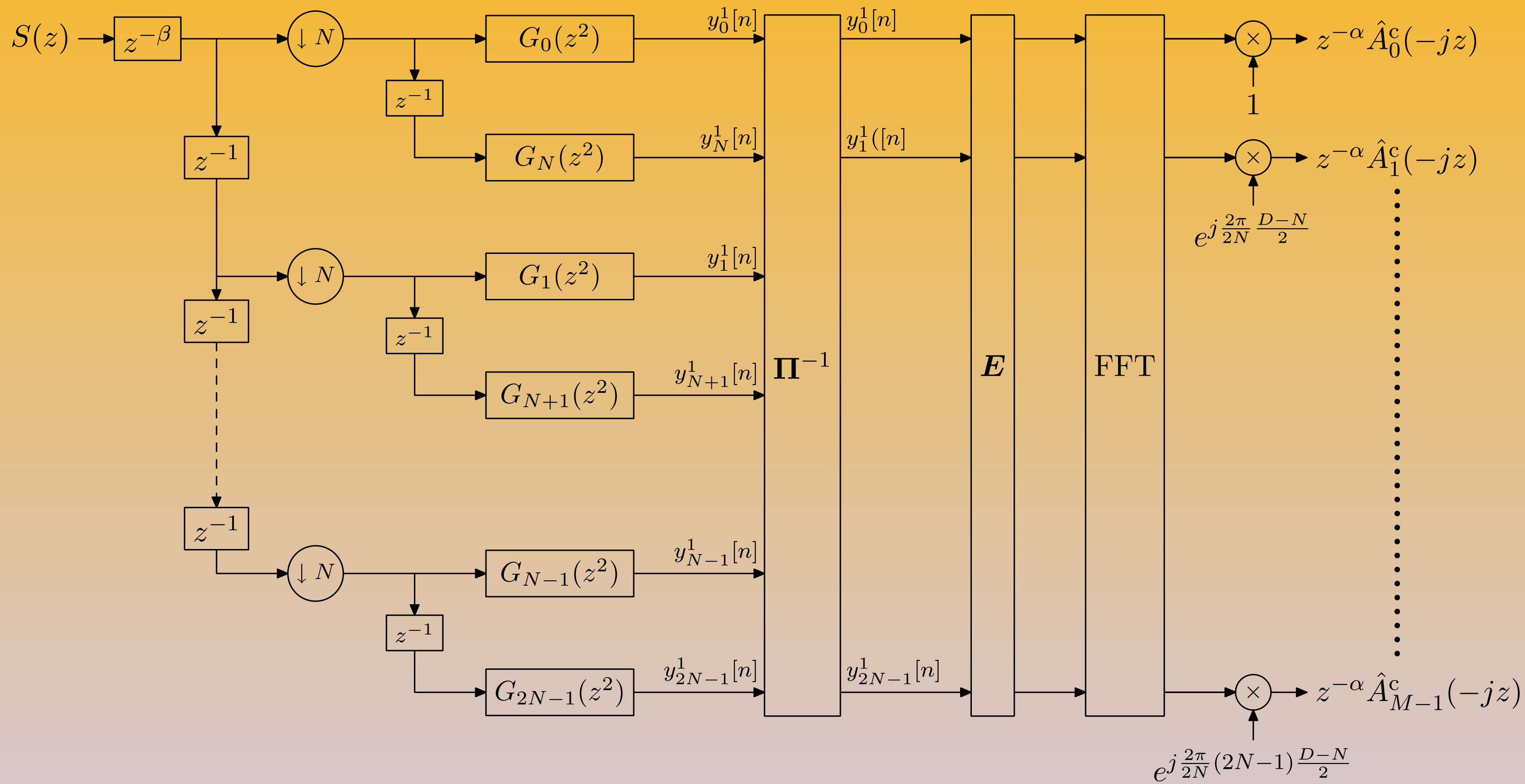
☞ conditions de biorthogonalité portant sur ces composantes polyphases

Modulations BFDM/OQAM : schéma du modulateur



avec $A_m(-jz)$ transformée en z de $a_{m,n}j^n$

Modulations BFDM/OQAM : schéma du démodulateur



avec $\hat{A}_m(z) = \Re\{\hat{A}_m^c(z)\}$

Modulations BFDM/OQAM : conditions de reconstruction parfaite

On pose $D = 2sN + d$ avec $0 \leq d \leq 2N - 1$

- ✓ Pour $0 \leq l \leq N - 1$,

  $K_l^*(z) = c_l z^{-a_l} G_l(z)$ et $K_{N+l}^*(z) = c_l z^{-a_l} G_{N+l}(z)$
- ✓ Si $0 \leq d \leq N - 1$, alors

  $G_l(z)G_{d-l}^*(z) + z^{-1}G_{N+l}(z)G_{N+d-l}^*(z) = \frac{z^{-(s-a_l)}}{Nc_l},\ 0 \leq l \leq d$

  $G_l(z)G_{2N+d-l}^*(z) + G_{N+l}(z)G_{N+d-l}^*(z) = \frac{z^{-(s-1-a_l)}}{Nc_l},\ d+1 \leq l \leq N-1$
- ✓ Si $N \leq d \leq 2N - 1$, alors

  $G_l(z)G_{d-l}^*(z) + G_{N+l}(z)G_{d-N-l}^*(z) = \frac{z^{-(s-a_l)}}{Nc_l},\ 0 \leq l \leq d - N$

  $G_l(z)G_{d-l}^*(z) + z^{-1}G_{N+l}(z)G_{N+d-l}^*(z) = \frac{z^{-(s-a_l)}}{Nc_l},\ d+1-N \leq l \leq N-1$

$\Rightarrow$ mêmes conditions que pour

- ☞ bancs MDFT et bancs modulés en cosinus (DCT)
- ☞ BFDM/QAM $(M' = N,\ N' = M = 2N$ et $F(z) = H^*(z))$

Évaluation des modulations multiporteuses en présence de distorsions

Évaluation des modulations multiporteuses : critères d'optimisation ($F(z) = H(z)$)

- ✓ Minimisation de l'énergie hors-bande

$$J = \frac{E(f_c)}{E(0)} \text{ avec } E(x) = \int_x^{\frac{1}{2}} |F(e^{j2\pi\nu})|^2 d\nu$$

☞ f_c fréquence de coupure et $0 \leq J \leq 1$

Évaluation des modulations multiporteuses : critères d'optimisation ($F(z) = H(z)$)

- ✓ Minimisation de l'énergie hors-bande

$$J = \frac{E(f_c)}{E(0)} \text{ avec } E(x) = \int_x^{\frac{1}{2}} |F(e^{j2\pi\nu})|^2 d\nu$$

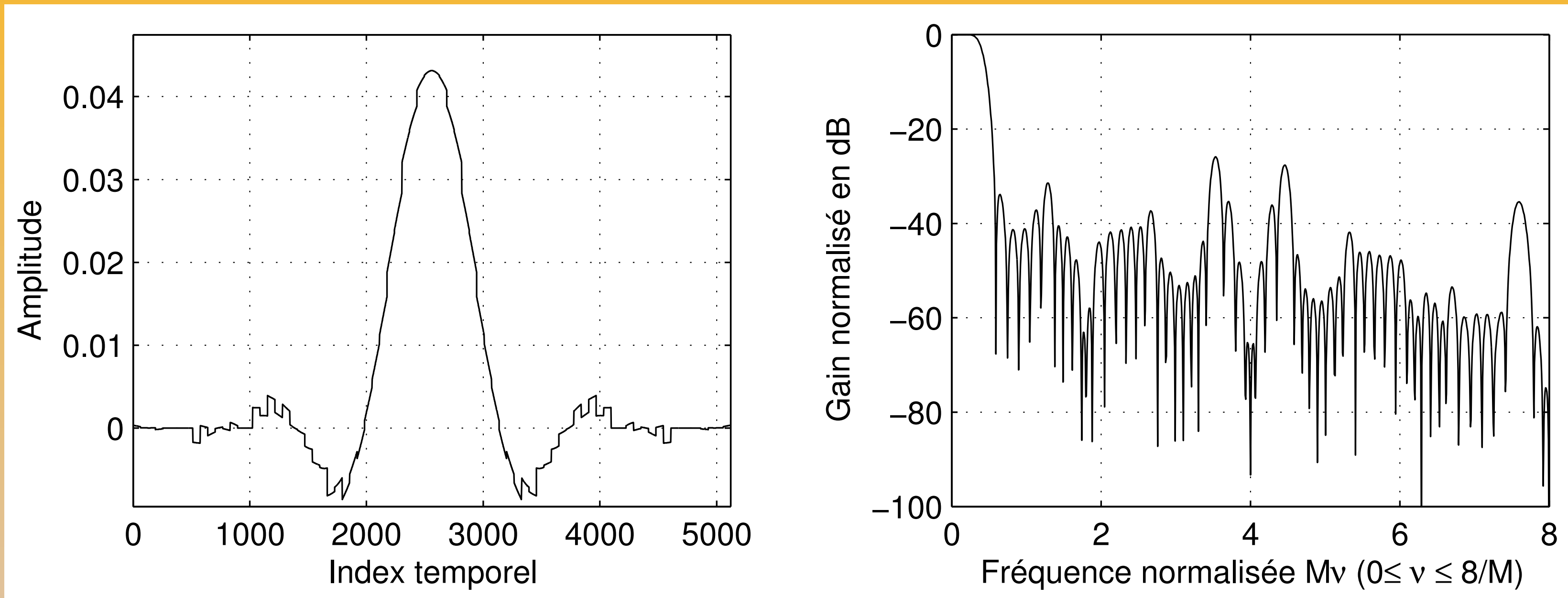
  - ☞ f_c fréquence de coupure et $0 \leq J \leq 1$

- ✓ Maximisation de la localisation temps-fréquence

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{4 m_2 M_2}}$$

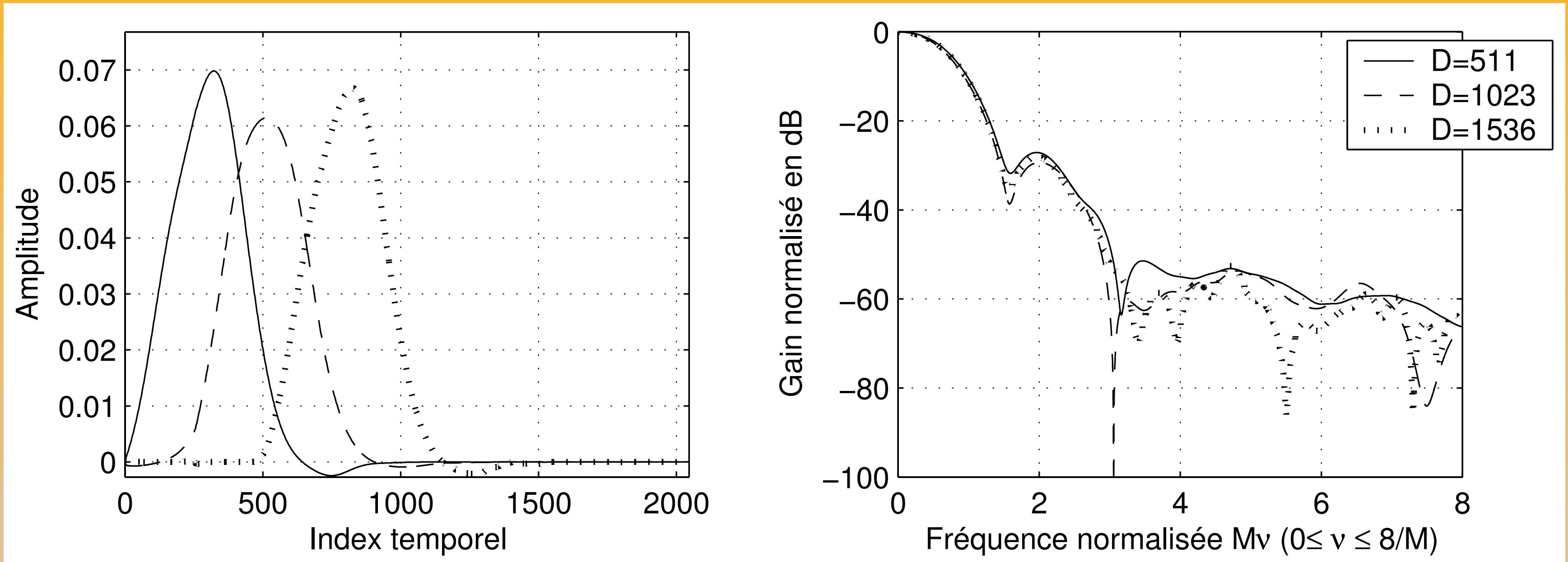
  - ☞ m_2 et M_2 moments d'ordre 2 en temps et en fréquence modifiés (Doroslovački)
  - ☞ $0 \leq \xi \leq 1$, optimum : $\xi = 1$

Évaluation des modulations multiporteuses : filtres utilisés



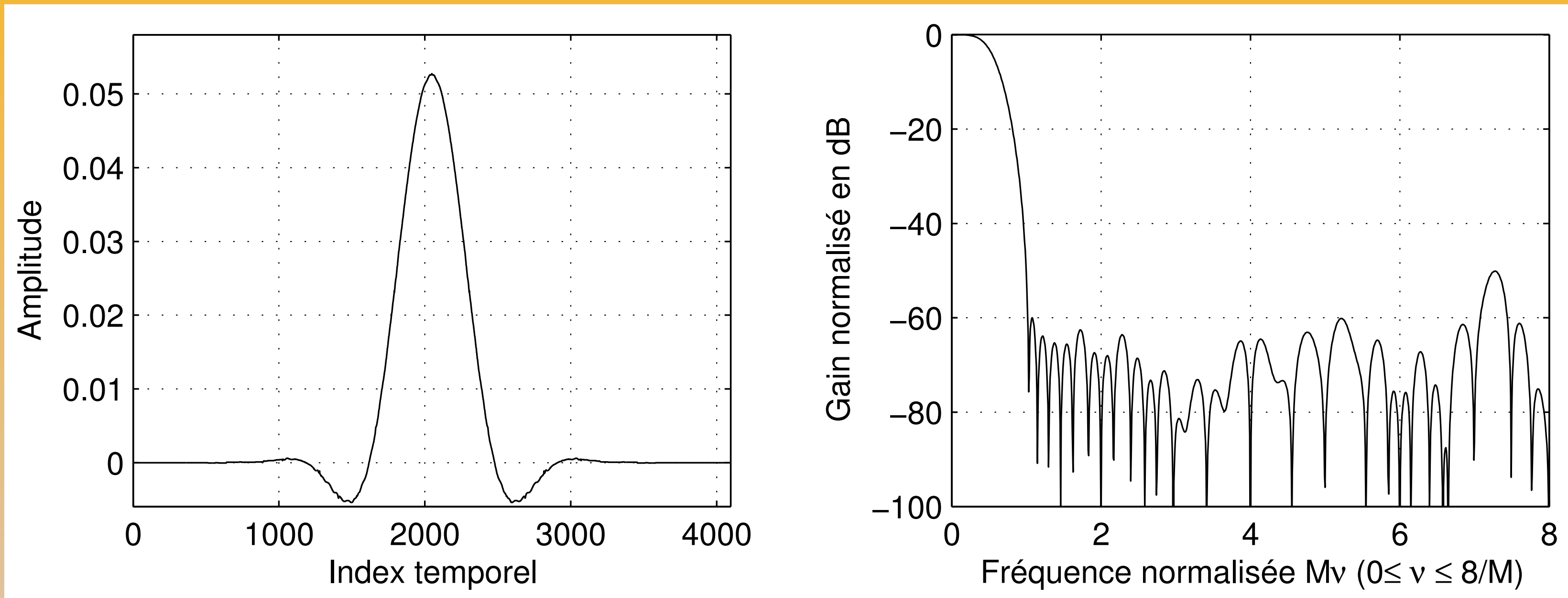
Filtre prototype OFDM/QAM à 5120 échantillons pour 512 porteuses, $d = \frac{4}{5}$, $N = 640$, minimisant l'énergie hors-bande.

Évaluation des modulations multiporteuses : filtres utilisés (2)



Filtres prototypes BFDM/OQAM à 2048 échantillons pour 512 porteuses ($N = 256$), maximisant la localisation temps-fréquence.

Évaluation des modulations multiporteuses : filtres utilisés (3)



Filtre prototype OFDM/OQAM à 4096 échantillons pour 512 porteuses, minimisant l'énergie en dehors de la bande $[\frac{1}{N}, \frac{1}{2}]$.

Évaluation des modulations multiporteuses : performances sur canal gaussien

- À efficacité spectrale identique : modulations orthogonales équivalentes et optimales
- Influence du suréchantillonnage : gain $10 \log \frac{N}{M}$ dB
- Modulations biorthogonales : perte $\Delta = 20 \log(\|f\| \|h\|)$ dB :

L \ D		511	1023	1535
1024	Δ J	$2,03$ $2,92.10^{-3}$	- -	- -
1536	Δ J	$3,14$ $1,45.10^{-3}$	$5,92.10^{-2}$ $1,53.10^{-3}$	- -
2048	Δ J	$3,33$ $1,32.10^{-3}$	$9,70.10^{-1}$ $3,16.10^{-4}$	$1,43$ $4,98.10^{-3}$

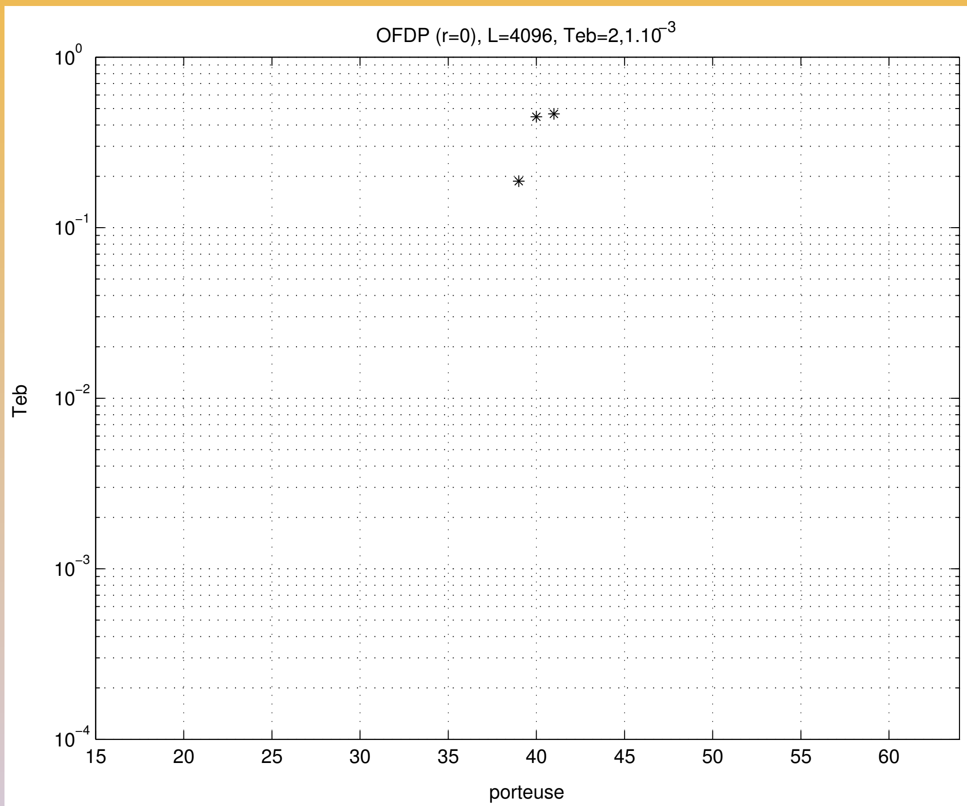
Évaluation des modulations multiporteuses : interférence à bande étroite

- ✓ Perturbation d'amplitude σ autour de la fréquence λF_0
- ✓ Signal reçu : $r[k] = s[k] + \sigma e^{j\frac{2\pi}{M}\lambda\left(k-\frac{D}{2}\right)}$
- ✓ Erreur quadratique moyenne sur la porteuse m :

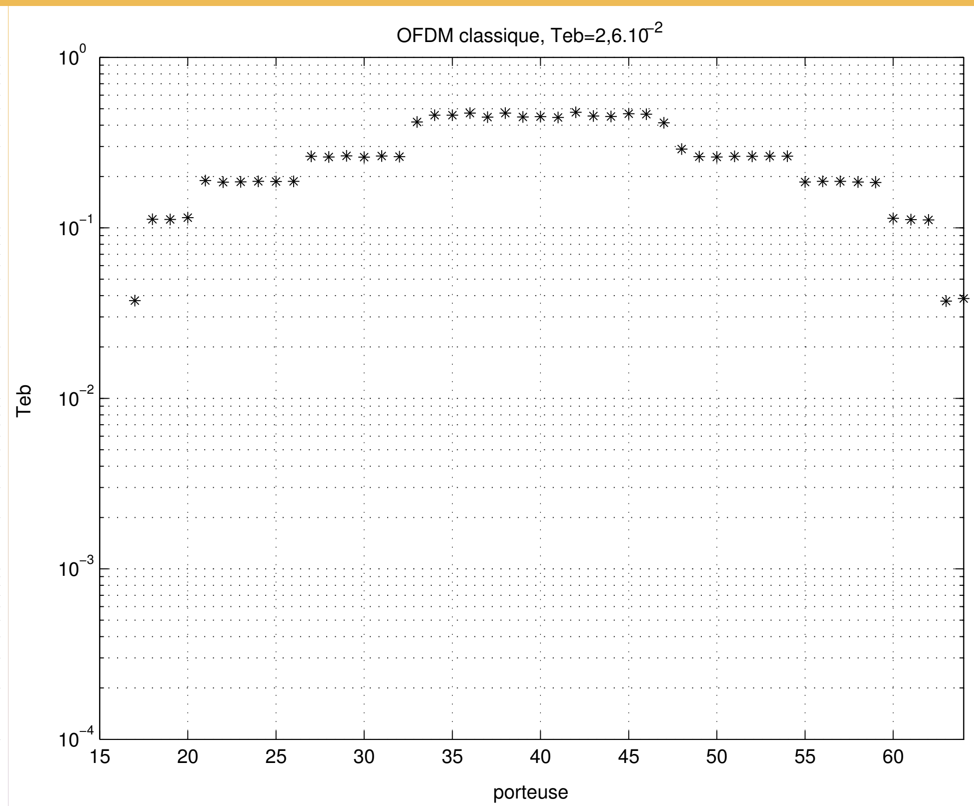
$$\varepsilon_m^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma_s^2}\|f\|^2\left|H\left(\frac{\lambda-m}{M}\right)\right|^2$$

Évaluation des modulations multiporteuses : interférence à bande étroite (2)

- ✓ $\frac{\sigma_s^2}{\sigma^2} = -5$ dB, MAQ-4, $\lambda = 40, 2\ M = 512$

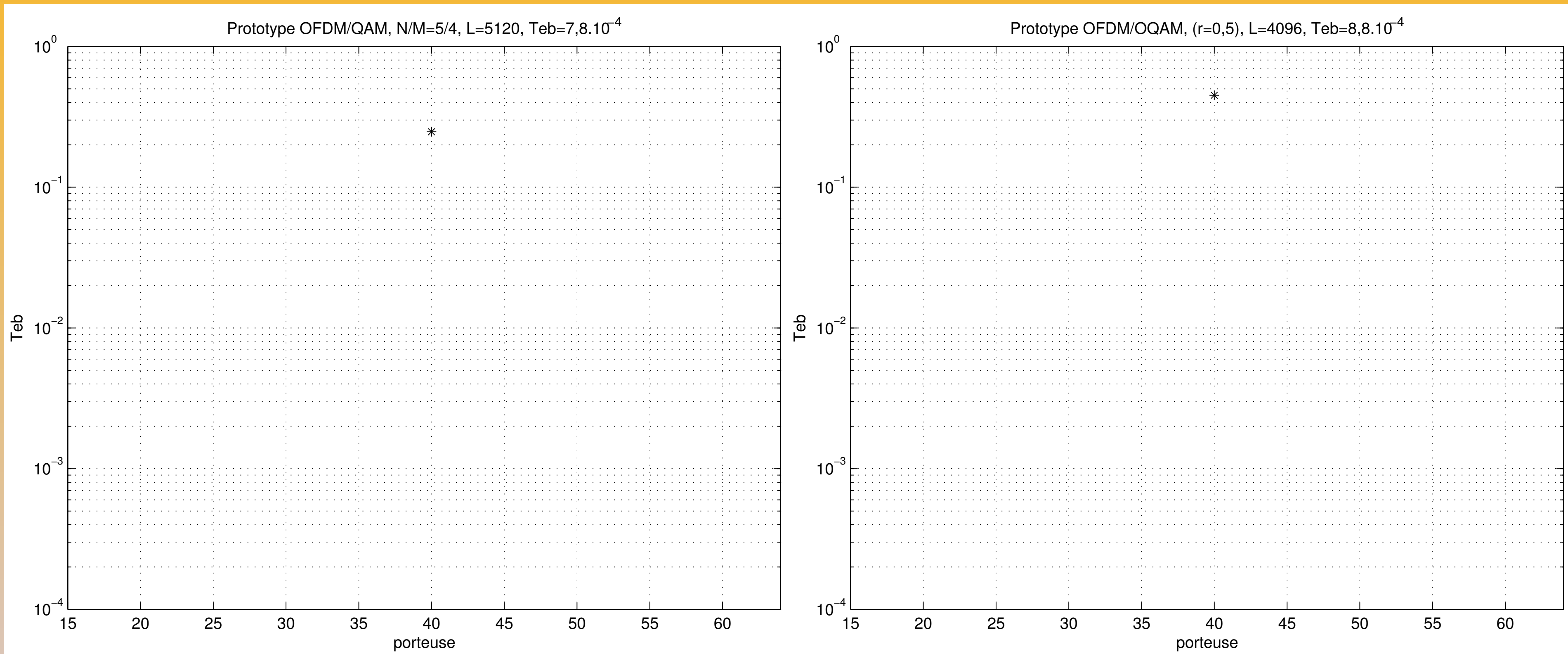


OFDP, $L = 4096$



OFDM classique

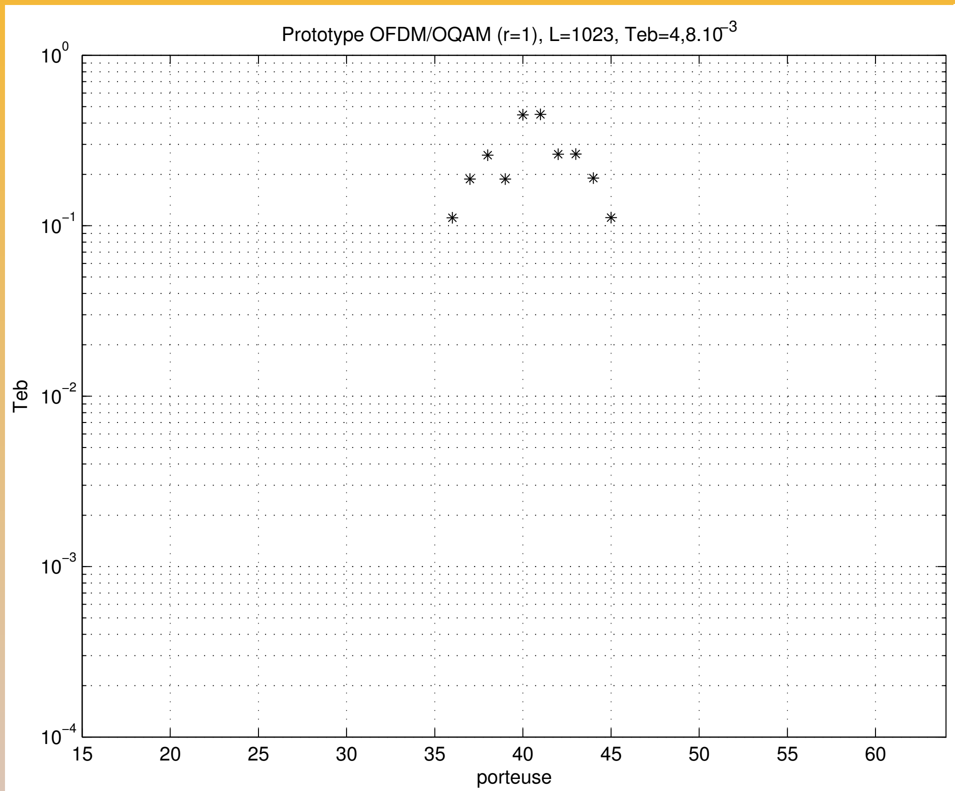
Évaluation des modulations multiporteuses : interférence à bande étroite (3)

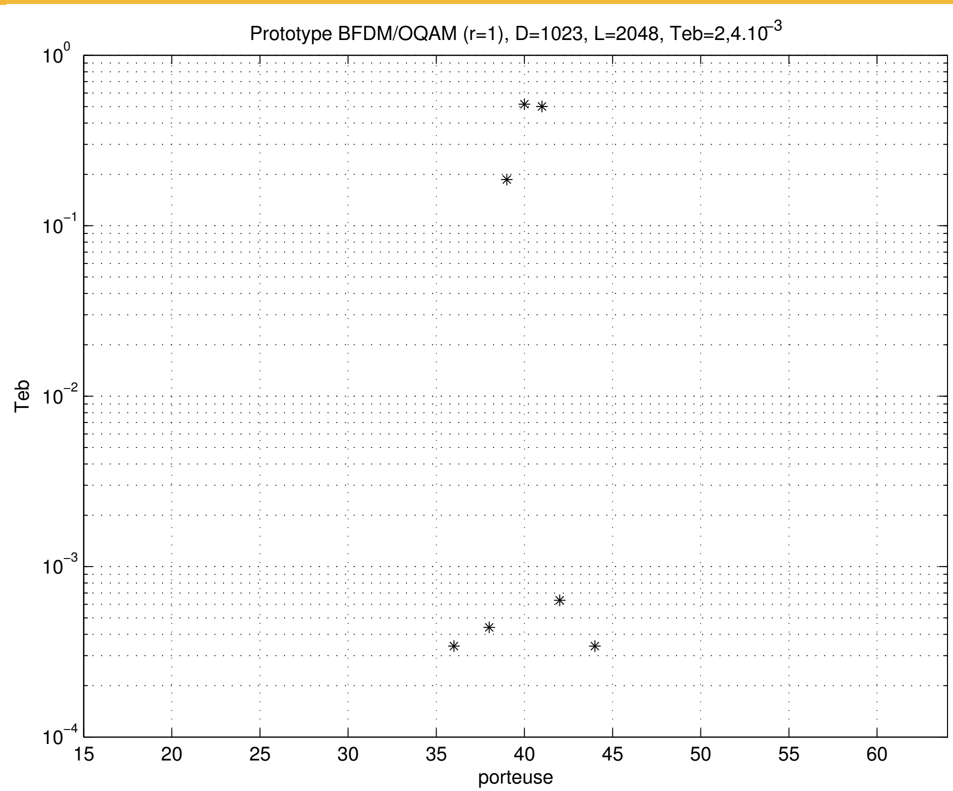


OFDM/QAM, $\frac{N}{M} = \frac{5}{4}$, $L = 5120$

OFDM/OQAM, $L = 4096$

Évaluation des modulations multiporteuses : interférence à bande étroite (4)

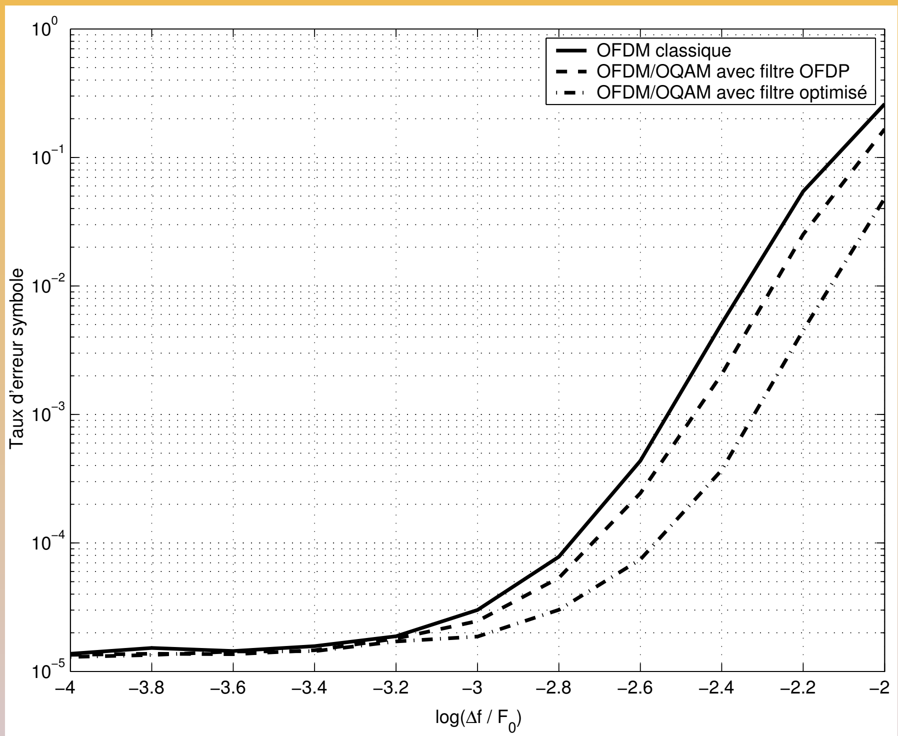




OFDM/OQAM, $L = 1024$, $D = 1023$ BFDM/OQAM, $L = 2048$, $D = 1023$

Évaluation des modulations multiporteuses : décalage fréquentiel en réception

✓ Signal reçu : $r[k] = (s[k] + b[k])e^{j\frac{2\pi}{M}\frac{\Delta f}{F_0}\left(k-\frac{D}{2}\right)}$



MAQ-16, $M = 16$, RSB$= 20$dB

ligne continue : OFDM classique

tirets : OFDM/OQAM
filtre OFDP ($L = 64$)

tirets pointillés : OFDM/OQAM
filtre optimisé ($L = 16$)

$\Rightarrow$ meilleur filtre : orthogonal, maximisation de la localisation temps-fréquence, taille minimale

Conclusion : bilan

- ✓ Conditions de reconstruction parfaite en BFDM/QAM suréchantillonné et BFDM/OQAM
- ✓ Synthèse de filtres orthogonaux et biorthogonaux
- ✓ Filtres courts à reconstruction parfaite possibles
- ✓ Intérêt des filtres biorthogonaux :
  - ☞ meilleures caractéristiques (localisation temps-fréquence ou énergie hors-bande) à délai de reconstruction identique
- ✓ Intérêt du suréchantillonnage :
  - ☞ plus robuste pour une interférence à bande étroite
  - ☞ plus robuste pour un canal gaussien
  - ☞ mais perte d'efficacité spectrale

Conclusion : quelques perspectives

- ✓ Familles de Weyl-Heisenberg : études des séries à coefficients réels
- ✓ BFDM/OQAM : unification des structures treillis et échelles
- ✓ BFDM/QAM suréchantillonnées : recherche de structures à reconstruction parfaite
- ✓ Étude du PAPR
- ✓ Introduction d'autres imperfections dans le modem (erreur sur l'instant d'échantillonnage en réception...)
- ✓ Intégration dans un système complet et étude avec des canaux réalistes