

Renormalisations de type Ma-Dasgupta
pour divers systèmes désordonnés
gouvernés par des points fixes de fort désordre

Cécile MONTHUS

Chargée de recherches au CNRS,
Service de Physique Théorique, CEA Saclay

Habilitation de l'Université Pierre et Marie Curie
1er Juin 2004

Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Principes des approches de type Ma-Dasgupta
- 3 Modèles désordonnés statiques : exemples
- 4 Modèles désordonnés dynamiques : exemples
- 5 Les règles de renormalisation de type Ma-Dasgupta
- 6 Conclusion

Des différentes façons d'aborder les systèmes désordonnés

Des approches qui commencent par moyenner sur le désordre :

Répliques, Supersymétrie, méthode dynamique...

→ systèmes homogènes avec des interactions supplémentaires.

Des approches qui étudient les hétérogénéités spatiales du désordre :

① Des arguments de type probabiliste :

- Arguments de type "événements rares" :
 - l'argument de Lifshitz (1964) pour les densités d'états (bord de spectre).
 - les phases de Griffiths (1969) : influence des régions rares ordonnées.
- Arguments de type "événements typiques" :
 - le critère de Harris (1974) sur la pertinence du désordre (point critique).
 - l'argument de Imry-Ma (1975) pour les systèmes en champs aléatoires.

② Des procédures de renormalisation dans l'espace réel :

- Renormalisations par blocs (décimation, Migdal-Kadanoff,...)
- Renormalisations exactes sur réseaux hiérarchiques
- Renormalisation fonctionnelle (cf les interfaces en milieux aléatoires)
- Renormalisations phénoménologiques (cf les verres de spin) →

Renormalisation de variables aléatoires :

Notion de point fixe pour une variable d'échelle appropriée

Premier cas simple : Somme de variables aléatoires indépendantes !

→ Théorème de la Limite Centrale : exposants, lois stables, bassins d'attraction.

Renormalisation phénoménologique pour les verres de spin :
Théorie d'échelle ('scaling theory') de Bray et Moore (1986)

Flot de la distribution des couplages effectifs J à l'échelle L :

$$P_L(J) \underset{L \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{1}{L^y} \mathcal{P}^* \left(\frac{J}{L^y} \right)$$

Etude numérique :

- $d = 2$: Exposant $y < 0$ → le désordre devient de plus en plus faible
- $d = 3$: **Exposant $y > 0$ → POINT FIXE DE FORT DESORDRE**

Aujourd'hui : Renormalisations de type Ma-Dasgupta

→ **solutions explicites exactes** pour divers systèmes désordonnés
gouvernés par des **points fixes de fort désordre**

Naissance de la méthode : S.K. Ma et C. Dasgupta (1979)

Modèle $\mathcal{H} = \sum_i J_i S_i S_{i+1}$: Chaîne de spins quantiques $S = 1/2$

avec des couplages antiferromagnétiques $\{J_i > 0\}$ aléatoires

Règle de renormalisation : Formation d'un singulet autour de $J_{max} = \Omega$



Propriétés essentielles

- Règle inhomogène dans l'espace, pour mieux s'adapter au désordre : (renormalisation sur l'énergie, et pas sur des cellules de taille fixée)
- Flot de renormalisation fermé pour la distribution de probabilité $P_\Omega(J)$ des couplages J qui restent à l'échelle Ω

$$-\frac{\partial P(J, \Omega)}{\partial \Omega} = P(\Omega, \Omega) \int_0^\Omega dJ_a \int_0^\Omega dJ_b P(J_a, \Omega) P(J_b, \Omega) \delta\left(J - \frac{J_a J_b}{2\Omega}\right)$$

Renaissance de la méthode : Daniel Fisher (1994-1995)

Un statut théorique bien défini : les points fixes de "désordre infini"

La largeur du désordre augmente indéfiniment avec l'échelle de renormalisation

→ méthode exacte dans la limite asymptotique

où on applique la renormalisation un grand nombre de fois

Des possibilités de calculs explicites assez remarquables

Chaîne d'Ising avec couplages et champs transverses aléatoires

(\simeq modèle d'Ising 2D avec désordre 'colonne' de McCoy et Wu 1968)

$$H = - \sum_i J_i S_i^z S_{i+1}^z - \sum_i h_i S_i^x$$

Beaucoup de résultats nouveaux sur la transition de phase quantique à $T = 0$

(Point critique situé en $\overline{\ln J} = \overline{\ln h}$)

- l'exposant critique irrationnel de l'aimantation spontanée $\beta = (3 - \sqrt{5})/2$
- Corrélation typique $C_{typ}(r) \sim e^{-w\sqrt{r}}$ avec w aléatoire d'ordre 1
- Corrélation moyenne $C(r) \sim \frac{1}{r^\beta}$ dominée par des événements rares

→ Méthode très intéressante dans le domaine des spins quantiques, mais aussi pour une classe beaucoup plus large de systèmes désordonnés

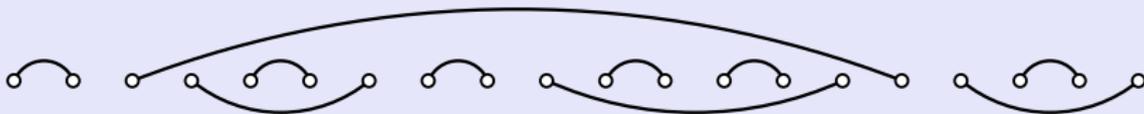
Principes généraux pour les points fixes de désordre infini

Le désordre effectif qui grandit indéfiniment avec l'échelle

- Forte suppression des fluctuations thermiques/quantiques à grande échelle
- **Asymptotiquement, il y a 1 seul état dominant dans chaque échantillon**

Exemple de la chaîne quantique antiferromagnétique $S = 1/2$

- ① **Etat Fondamental de la chaîne pure** : Combinaison linéaire de tous les appariements des spins pour former des singulets.
- ② **Etat Fondamental de la chaîne désordonnée (Ma-Dasgupta 1979)** : un échantillon = une seule façon d'apparier les spins en singulets



- ③ **Chaîne désordonnée à basse température** : on arrête la renormalisation à une échelle $\Omega = T \rightarrow$ **séparation en degrés de liberté 'gelés' et 'libres'** : densité très faible $n \sim 1/(\ln T)^2$ de spins libres, alors que tous les autres sont gelés dans les singulets de l'état fondamental.

Le programme d'une approche de type Ma-Dasgupta

- 1 Construire l'état dominant pour chaque échantillon désordonné
 - en fonction de la température pour les problèmes statiques.
 - en fonction du temps pour les modèles dynamiques

→ Définition d'une règle de renormalisation,
et d'un critère pour arrêter la procédure à une certaine échelle.
- 2 Construire la mesure de probabilité sur les échantillons renormalisés
→ Etude du point fixe pour les distributions de probabilité
- 3 Calculs d'observables variées → description très complète
- 4 Etude des premières corrections sous-dominantes venant des fluctuations thermiques ou quantiques :
→ test interne de validité
→ certaines observables sont nulles à l'ordre dominant :
elles sont donc dominées par ces premières corrections

Chaîne ferromagnétique classique en champs aléatoires

$$\mathcal{H} = -J \sum_i S_i S_{i+1} - \sum_i h_i S_i \quad \text{avec } \overline{h_i} = 0 \text{ et } \overline{h_i^2} = \sigma$$

Argument d'Imry-Ma (1975) \rightarrow Domaines de longueur $L_{IM} \sim \frac{J^2}{\sigma}$ à $T = 0$

- l'énergie $4J$ que coûte une paire de parois
- l'énergie aléatoire typique $\sum_{1 \leq i \leq L} h_i \sim \sqrt{\sigma L}$ gagnée sur un domaine L

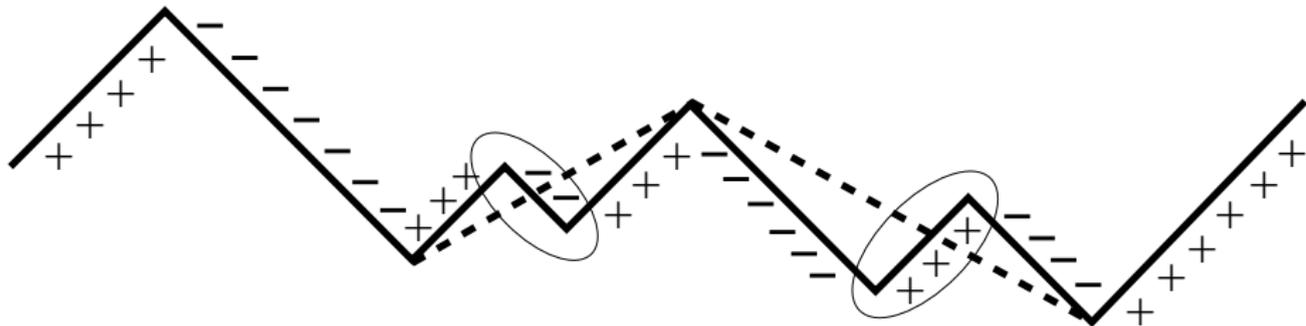
Renormalisation de type Ma-Dasgupta pour $L_{IM} \gg 1$

Réf : D. Fisher, P. Le Doussal and C. Monthus, PRE 64, 66107 (2001)

- Construction des domaines Imry-Ma dans chaque échantillon
- Distribution $P^*(\lambda = \frac{l}{2L_{IM}}) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) (-1)^n e^{-\pi^2 \lambda (n + \frac{1}{2})^2}$
- Corrélation $\overline{\langle S_0 S_x \rangle} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{48 + 4(2n+1)^2 \pi^2 \sigma \frac{|x|}{J^2}}{(2n+1)^4 \pi^4} e^{-(2n+1)^2 \pi^2 \sigma \frac{|x|}{8J^2}}$

Construction des domaines Imry-Ma par renormalisation

- 1) **Etat initial** : une paroi à chaque extremum du potentiel $V(x) = 2 \sum_{i=1}^x h_i$



- 2) On élimine de manière itérative les paires de parois séparées par la différence $\Delta V = \Gamma$ la plus petite : bilan total $\Delta E = -4J + \Gamma < 0$
 → On arrête la renormalisation à l'échelle $\Gamma_f = 4J$: c'est le fondamental

Interprétation dynamique de la renormalisation :
 dynamique de Glauber à partir d'une condition initiale aléatoire

Croissance de domaines, avec l'échelle de renormalisation $\Gamma(t) \sim T \ln t$

→ Autocorrélation d'un spin : $\overline{\langle S_i(t) S_i(t') \rangle} = \frac{4}{3} \left(\frac{\ln t'}{\ln t} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\ln t'}{\ln t} \right)^2$

Chaîne verre de spin en champ magnétique extérieur

Equivalence entre modèles par transformation de jauge sur les spins

Chaîne en champs aléatoires

$$\mathcal{H} = -J \sum_i S_i S_{i+1} - \sum_i h_i S_i$$

avec $h_i = \pm h$

Chaîne verre de spin en champ

$$\mathcal{H} = - \sum_i J_i \sigma_i \sigma_{i+1} - h \sum_i \sigma_i$$

avec $J_i = \pm J$

Interprétation physique : Parois de domaines \rightarrow Liens frustrés

- **Domaines non frustrés** de taille typique $L_{IM} = \frac{4J^2}{h^2}$
séparés par des **liens frustrés** $J_i \sigma_i \sigma_{i+1} < 0$
- **Traduction de l'argument de Imry-Ma** : Compétition entre
 - l'énergie $4J$ que coûte une paire de liens frustrés
 - l'aimantation aléatoire typique $\sqrt{\sigma L}$ d'un domaine non frustré.
- **Renormalisation de type Ma-Dasgupta** :
optimisation du nombre de liens frustrés et de leurs positions.

Remarque : Encore interprétation dynamique de la renormalisation

Polymère aléatoire à une interface entre deux solvants

Modèle et analyse de type Imry-Ma (Garel, Huse, Leibler, Orland (1989))

Interface en $z = 0$ pour un polymère $z(s)$ avec charges aléatoires $q(s)$ gelées :

$$Z_L(\{q(s)\}) = \int \mathcal{D}z(s) \exp \left(-\frac{1}{2D} \int_0^L ds \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 + \beta \int_0^L ds q(s) \operatorname{sgn}(z(s)) \right)$$

- l'énergie typique $\sum_{1 \leq i \leq l} q_i \sim \sqrt{\sigma l}$ d'une boucle de taille l
- la perte d'entropie d'ordre $\frac{3}{2}(\ln l)$ par boucle

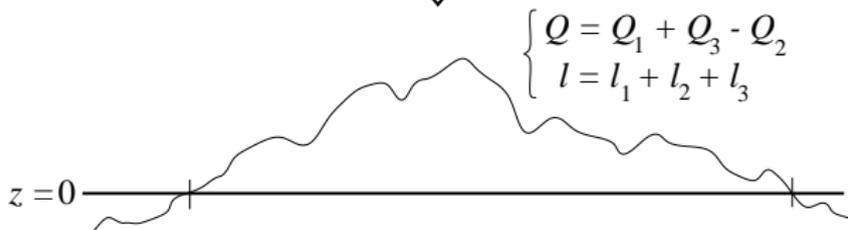
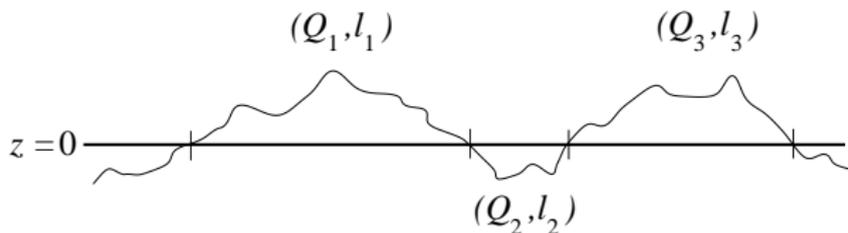
→ Transition de délocalisation dans le cas dissymétrique $\bar{q}_i \neq 0$

Renormalisation de type Ma-Dasgupta (C. Monthus, EPJB 13, 111 (2000))

- Construction des boucles autour de l'interface pour chaque séquence de charges en fonction de la température.
- Propriétés critiques de la transition de délocalisation :
 - singularité essentielle de l'énergie libre en $e^{-C/(T_c - T)}$
 - effets de taille finie : distribution de $T_{deloc}(L)$

Construction de la structure optimale en boucles

- 1) Etat initial : chaque charge dans son solvant préféré
- 2) On retourne de manière itérative la boucle de charge $Q = \Gamma$ la plus petite, et on continue tant que $\Delta F = 2\Gamma - T\Delta S(l_1, l_2, l_3) < 0$



Comportements critiques des longueurs de boucles des deux côtés :

$$\bar{l}_+ \propto e^{\frac{c}{(T_c - T)}} \quad \text{et} \quad \bar{l}_- \propto \frac{1}{(T_c - T)}$$

Marches aléatoires en milieux aléatoires

Deux échelles de longueur

- $x(t)$ = distance parcourue pendant un temps t
- $y(t) = x_1(t) - x_2(t)$ = distance entre deux particules indépendantes qui diffusent dans le même échantillon désordonné

Propriétés de diffusion anormale : échelle typique de $x(t)$

- Marche aléatoire sans désordre $x(t) \sim \sqrt{t} \sim y(t)$
- Exemples avec désordre : $x(t) \sim (\ln t)^2$; $x(t) \sim t^a$

Notion de localisation

(C'est la propriété cruciale pour appliquer une approche de type Ma-Dasgupta)

Localisation si la distance $y(t)$ entre deux particules reste finie avec une probabilité p non-nulle à temps infini.

- Localisation totale si $p = 1$ (\rightarrow point fixe de désordre infini)
- Localisation partielle si $0 < p < 1$ (\rightarrow point fixe de fort désordre)

Diffusion dans un potentiel Brownien $U(x)$

Equation de Langevin : $\frac{dx}{dt} = -U'(x(t)) + \eta(t)$

- Diffusion anormale logarithmique de **Sinai (1982)** : $x(t) \sim (\ln t)^2$
Argument d'échelle : temps associé à la barrière typique $t(x) \sim e^{\beta\sqrt{x}}$
- Théorème de localisation de **Golosov (1984)** : Localisation totale $p = 1$

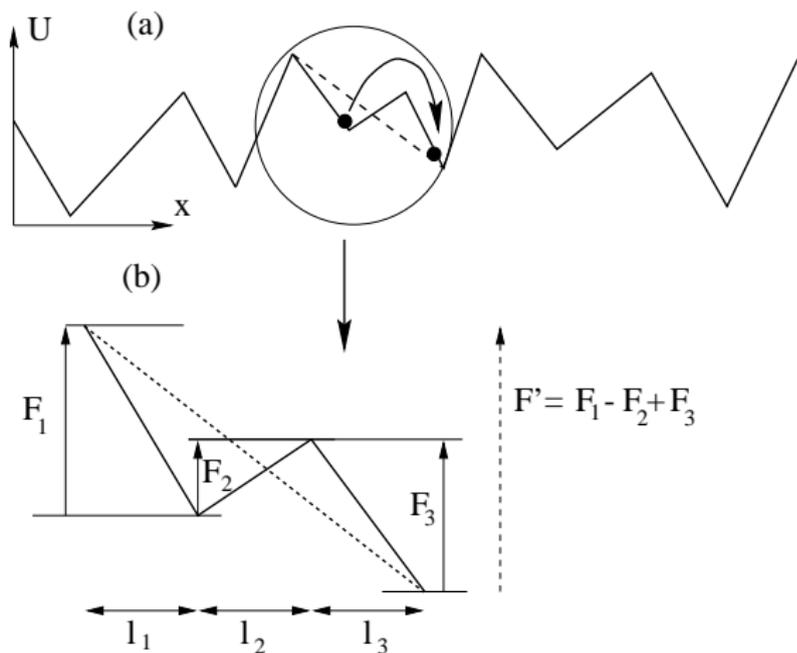
Renormalisation de type Ma-Dasgupta : $x_{\{U,\eta\}}(t) = m_{\{U\}}(t) + y_{\{U,\eta\}}(t)$

- 1 **Propriétés de diffusion anormale et de vieillissement** :
Dynamique effective du centre de localisation $m_{\{U\}}(t) \sim (\ln t)^2$ en fonction du temps : c'est le minimum de la meilleure vallée accessible au temps t .
Réf : D. Fisher, P. Le Doussal, C. Monthus, PRE 59, 4795 (1999)
- 2 **Propriétés de Localisation** : Loi limite de l'écart $y_{\{U,\eta\}}(t)$
→ Equilibre de Boltzmann dans une vallée Brownienne infinie
en particulier $P(y) \sim \frac{1}{y^{3/2}}$ en $y \rightarrow \infty$ (retours en 0 du potentiel)
Réf : C. Monthus et P. Le Doussal, PRE 65, 66129 (2002)
- 3 Largeur therm. $DV \overline{\langle y^2 \rangle} \sim (\ln t)^3$ gouvernée par des **évènements rares** :
Proba. d'ordre $(1/\ln t)$ d'être dans une autre vallée, à distance $y \sim (\ln t)^2$

Construction de la dynamique effective $m_{\{U\}}(t)$

Idée : à l'instant t , seules les barrières $F < T \ln t$ ont eu le temps d'être franchies par activation thermique.

Renormalisation : on élimine de manière itérative la plus petite barrière $F_2 = \Gamma$ et on arrête à l'échelle $\Gamma = T \ln t$.



Dynamique effective $m_{\{U\}}(t)$:

c'est le **minimum**
de la **vallée renormalisée**
à l'échelle $\Gamma = T \ln t$
qui contient
la position initiale $x(t = 0)$.

Propriétés de la dynamique effective $m_{\{U\}}(t)$

Front de diffusion pour la variable d'échelle $X = \frac{x_{\{U,\eta\}}(t)}{(T \ln t)^2}$

- **Front dans un échantillon** : $\delta \left(X - \frac{m_{\{U\}}(t)}{(T \ln t)^2} \right)$ Localisation très forte!

- **Moyenne/échantillons** \rightarrow loi de Kesten $P(X) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} e^{-\frac{\pi^2}{4}(2n+1)|X|}$

Propriétés de vieillissement : Calcul du front de diffusion à deux temps

En particulier : $\text{Prob}[m(t) = m(t_w)] = \frac{1}{3} \left(\frac{\ln t_w}{\ln t} \right)^2 \left(5 - 2e^{1 - \left(\frac{\ln t}{\ln t_w} \right)} \right)$

Statistique des retours à l'origine de $m(t)$: séquence $\Gamma_k = T \ln t_k$

Processus Markovien multiplicatif $\Gamma_{k+1} = \alpha_k \Gamma_k$

Loi des coefficients aléatoires indépendants α_k : $\rho(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{\alpha^{1+\lambda_-}} - \frac{1}{\alpha^{1+\lambda_+}} \right)$

avec les exposants $\lambda_{\pm} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ (λ_- est un exposant de persistance)

Nombre total de Retours $R(t) \sim \frac{1}{3} \ln(T \ln t)$ et de Sauts $S(t) \sim \frac{4}{3} \ln(T \ln t)$

Relation avec la théorie générale des dynamiques lentes

Séparation de la dynamique en degrés de liberté 'rapides' et 'lents'

- ① Convergence rapide vers un quasi-équilibre local = un état métastable
- ② Une dynamique lente hors équilibre : évolution des états métastables

Traduction de la renormalisation de type Ma-Dasgupta dans ce langage

- ① les états métastables = les vallées renormalisées à $\Gamma(t)$
 - Une particule partie à $t = 0$ de cette vallée n'a pas eu le temps d'en sortir à t
 - Dans chaque vallée : Quasi-équilibre de Boltzmann pour l'écart y
- ② Dynamique lente = évolution du paysage renormalisé avec t
Certains états métastables disparaissent et sont absorbés par un voisin.

Calcul d'observables à un temps : moyenne sur les états métastables

- 'Conjecture d'Edwards ' = mesure plate sur les états métastables
- Ici : Mesure $\int dl / P(l)$ pondérée par la longueur l de la vallée car la longueur l = la taille du bassin d'attraction de la vallée

Diffusion dans un potentiel Brownien biaisé

Langevin : $\frac{dx}{dt} = F_0 - U'(x(t)) + \eta(t) \rightarrow$ Paramètre $\mu = F_0 T / \sigma$

Phase de diffusion anormale pour $0 < \mu < 1$: $x(t) \sim t^\mu$ (Kesten *et al.* 1975)
alors que la vitesse est finie pour $\mu > 1$: $x(t) \sim V(\mu)t$

Localisation du MODÈLE DIRIGÉ de pièges (A. Compte et J.P. Bouchaud (1998))

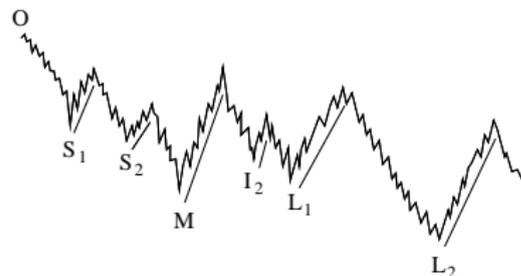
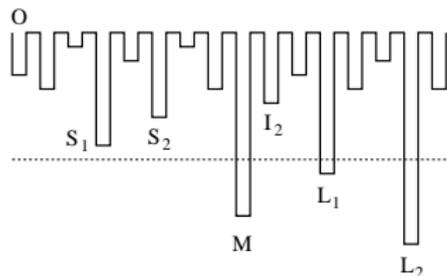
Eq. maîtresse : $\frac{dP_t(n)}{dt} = -\frac{P_t(n)}{\tau_n} + \frac{P_t(n-1)}{\tau_{n-1}}$ avec une loi $p(\tau) \sim 1/\tau^{1+\mu}$

$$Y_2(\mu) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{P^2(n, t)} = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{e^{i\theta\mu} - e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta(\mu+1)}} \rightarrow \begin{cases} Y_2(\mu=0)=1 \\ Y_2(\mu=1)=0 \end{cases}$$

RG de type Ma-Dasgupta (C. Monthus, PRE 67, 46109 (2003))

- ① **Equivalence quantitative** entre les deux modèles renormalisés :
→ Sinai biaisé : **Localisation partielle sur plusieurs vallées**
- ② DV perturbatif exact en μ de toutes les observables :
(Front de diffusion, largeur thermique, paramètres de localisation...):
à l'ordre $\mu^n \rightarrow$ **décomposition du front sur au plus $(n + 1)$ vallées**

DV en μ en tant que DV dans le nombre pièges importants



Pièges importants

Ordre $\mu \rightarrow 0$: Piège principal M = le 1^{er} piège $\tau_i > t$

Ordre μ : S_1 (le + grand entre O et M) et L_1 (le 2^{eme} piège $\tau_i > t$)

Ordre μ^2 : S_2, I_2, L_2

DV à l'ordre μ^2 à partir des poids de ces quelques pièges

Localisation $Y_2(\mu) = 1 - \mu(2 \ln 2) + \mu^2(4 \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}) + O(\mu^3)$

OK avec le calcul de Compte et Bouchaud (1998)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle \Delta n^2(t) \rangle}{t^{2\mu}} = \mu(2 \ln 2) + \mu^2 \left[-\frac{\pi^2}{6} + 2 \ln 2 (\ln 2 - 2 + 2\gamma_E) \right] + O(\mu^3)$$

OK avec le calcul de Aslangul *et al.* (1990)

Modèle de pièges 1D SYMÉTRIQUE $p(\tau) \sim 1/\tau^{1+\mu}$

Equation maîtresse :
$$\frac{dP_t(n)}{dt} = -\frac{P_t(n)}{\tau_n} + \frac{P_t(n-1)}{2\tau_{n-1}} + \frac{P_t(n+1)}{2\tau_{n+1}}$$

Phase de diffusion anormale pour $0 < \mu < 1$: $x(t) \sim t^{\frac{\mu}{1+\mu}}$

- **Vieillessement et sous-vieillessement** : deux échelles de temps
(Bouchaud *et al.*; Fontes, Isopi et Newman 1998; Ben Arous *et al.*)
- **Localisation** : simulations numériques (Bertin et Bouchaud 2003)
→ $Y_k(\mu)$ finis; pas d'équilibre partiel sur la région visitée à l'instant t
En particulier dans la limite $\mu \rightarrow 0$: $Y_2 \rightarrow \frac{2}{3}$ et $Y_3 \rightarrow \frac{1}{2}$ (cf $Y_k^{eq} \rightarrow 1$)

RG de type Ma-Dasgupta (C. Monthus, PRE 68, 036114 (2003))

- 1 Les deux échelles de temps : les pièges métastables à l'instant t ont
→ un **temps de piègeage propre** $\tau \geq t^{\frac{1}{1+\mu}}$ = sortie vers un des deux voisins
→ un **temps d'évasion vers un meilleur piège** $T \geq t$.
- 2 **Front de diffusion dans un échantillon à l'ordre dominant pour $\mu \rightarrow 0$**
 $P_{eff}(x, t) \sim \frac{l_+}{l_+ + l_-} \delta(x + l_-) + \frac{l_-}{l_+ + l_-} \delta(x - l_+)$
Deux pics δ complètement hors équilibre: poids p_{\pm} indép. de $\tau_{\pm} = e^{\beta E_{\pm}}$!
Poids $p_+ = \frac{l_-}{l_+ + l_-}$ = la proba. d'atteindre le point $(+l_+)$ avant $(-l_-)$

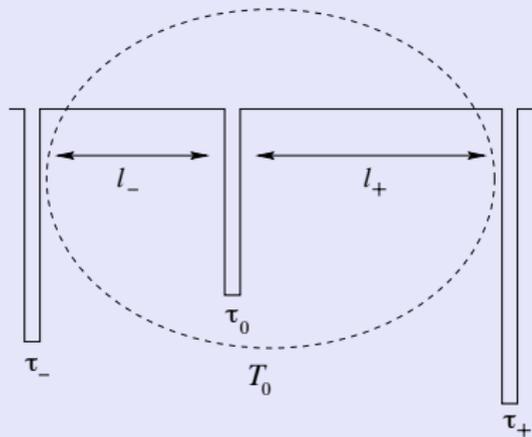
Dynamique effective à l'ordre dominant

Evasion d'un piège $\tau_0 = R$ dans le paysage renormalisé à l'échelle R

- Longueurs $l_{\pm} \sim R^{\mu}$
- A chaque sortie de τ_0 : proba d'ordre $1/l_{\pm}$ de s'évader
- nombre de retours en τ_0 avant évasion : $n \sim l \sim R^{\mu}$

Bilan : temps d'évasion

$$T_0 \sim n\tau_0 \sim R^{1+\mu}$$



Résultats explicites à l'ordre dominant dans la limite $\mu \rightarrow 0$

- Paramètres de localisation $Y_k(\mu) = \frac{2}{(k+1)} + O(\mu)$
- Front de diffusion $\overline{P(X = \frac{x}{\xi(t)})} = e^{-|X|} \int_0^{+\infty} du e^{-u} \frac{u}{|X|+u} + O(\mu)$
- Fonction génératrice des cumulants thermiques :
 $\ln \langle e^{-s \frac{\eta}{\xi(t)}} \rangle = \int_0^{+\infty} d\lambda e^{-\lambda} \lambda \left(\frac{s\lambda}{2} \coth \frac{s\lambda}{2} - 1 \right) + O(\mu)$

Réponses linéaire et non-linéaire à un champ extérieur

RG de type Ma-Dasgupta (C. Monthus, PRE 69, 026103 (2004))

- Calcul de la **réponse à un champ appliqué à partir de $t = 0$** :
Forme d'échelle du front de diffusion dans la limite $\mu \rightarrow 0$
$$P_F(X) = e^{-|X|} [\theta(X) + \theta(-X)e^{-F|X|}] \int_0^{+\infty} d\lambda e^{-\lambda} \frac{1 - e^{-F\lambda}}{1 - e^{-F(|X| + \lambda)}}$$
- Calcul de la **réponse à un champ appliqué à partir de t_w : $\alpha(t, t_w, f)$**
Forme $P_F(Y) = \frac{1}{\alpha} \delta(Y) + [\theta(Y) + \theta(-Y)e^{-F|Y|}] G(|Y|, F, \alpha)$

Remarque : Pas de violation de la Relation de Fluctuation-Dissipation !

- **Notion de violation du théorème de Fluctuation-Dissipation** pour la réponse linéaire de dynamiques hors équilibre (L. Cugliandolo et J. Kurchan 1993)
- **Ici : Pas de violation de la relation d'Einstein même si hors équilibre** à cause d'une symétrie dynamique particulière de l'équation maîtresse
→ **théorème de fluctuation non-linéaire valable en dimension d finie** :
Réf : C. Monthus, J. Phys. A 36, 11605 (2003)

$$\frac{P^{(+f; t_w)}(x, t; x_w, t_w | 0, 0)}{P^{(-f; t_w)}(x, t; x_w, t_w | 0, 0)} = e^{\beta f(x - x_w)}$$

Les règles de renormalisation de type Ma-Dasgupta

Renormalisation dans les systèmes désordonnés :

- **Systèmes purs** : nombre fini de constantes de couplages
- **Systèmes désordonnés** : **distributions de probabilité**,
i.e. fonctions d'un espace de dimension infinie
→ en général : difficile de trouver les points fixes...
- **Ma-Dasgupta** : **Forme très spécifique** → **des solutions exactes**

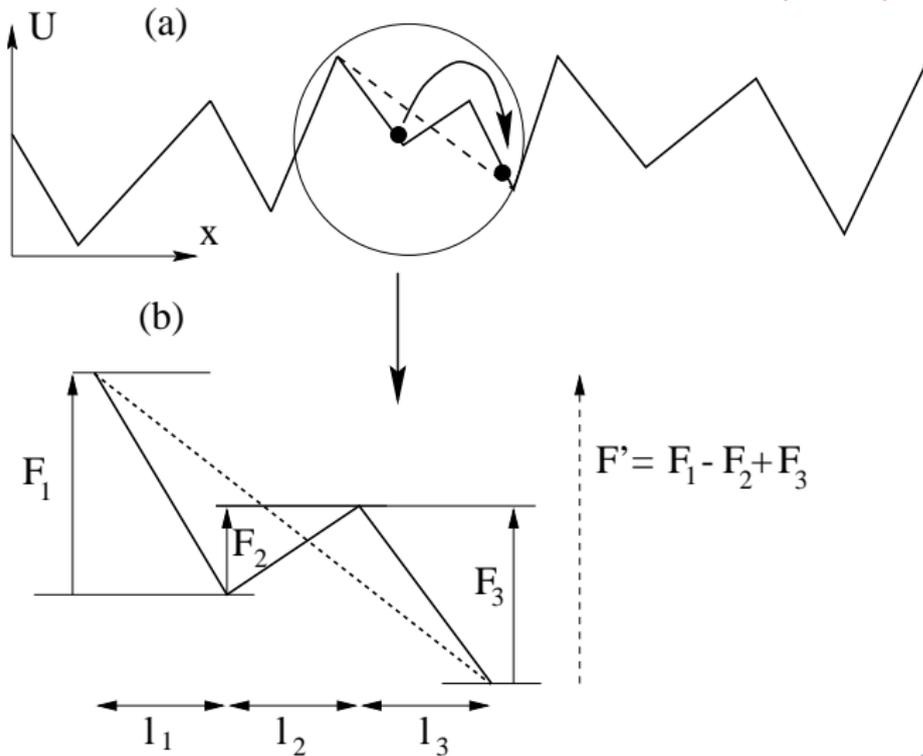
Les deux caractéristiques essentielles des règles de type Ma-Dasgupta

cf l'exemple de la chaîne de spins $S = 1/2$ AF désordonnée

- 1 la règle concerne la **valeur extrême d'une variable aléatoire** :
cette valeur = le **"cut-off"** de la distribution renormalisée
= l'échelle de renormalisation.
- 2 la renormalisation est **locale dans l'espace** :
à chaque étape, la renormalisation ne concerne que
le voisinage physique immédiat de la variable aléatoire extrême.

La classe d'universalité des extrema Browniens

Règle : à chaque étape, on élimine la barrière $F_2 = \Gamma$ la plus petite, ainsi que les deux barrières voisines (F_1, F_3).



Extrema du potentiel Brownien à grande échelle

Variables réduites en fonction de l'échelle Γ de renormalisation :

- pour les barrières : $\eta = \frac{F-\Gamma}{\Gamma} \in [0, +\infty[$
- pour les longueurs : $\lambda = \frac{l}{\Gamma^2}$

Solution de point fixe : loi jointe des barrières et des longueurs

En Laplace : $\int_0^{+\infty} d\lambda e^{-\rho\lambda} \mathcal{P}^*(\eta, \lambda) = \theta(\eta \geq 0) \frac{\sqrt{\rho}}{\sinh \sqrt{\rho}} e^{-\eta \sqrt{\rho} \coth \sqrt{\rho}}$

- Loi pour les barrières seules : $\mathcal{P}^*(\eta) = \theta(\eta \geq 0) e^{-\eta}$
- Loi pour les longueurs seules :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^*(\lambda) &= LT_{\rho \rightarrow \lambda}^{-1} \left(\frac{1}{\cosh \sqrt{\rho}} \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \pi (-1)^n \left(n + \frac{1}{2} \right) e^{-\pi^2 (n + \frac{1}{2})^2 \lambda} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi} \lambda^{3/2}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m \left(m + \frac{1}{2} \right) e^{-(m + \frac{1}{2})^2 \frac{1}{\lambda}} \end{aligned}$$

Variables auxiliaires et exposants critiques

Notion de variable auxiliaire dans la renormalisation

Déf : **Variable qui évolue en parallèle avec la variable principale F**
 (la variable principale F est celle qui détermine la renormalisation)

- **Premier exemple** : la longueur $l = l_1 + l_2 + l_3$
 → scaling Brownien $l \sim \Gamma^2$ du **paysage renormalisé statique**.
 (Remarque : de manière générale, pour toutes les propriétés statiques, calculs directs possibles par des intégrales de chemin avec contraintes :
 Réf : P. Le Doussal and C. Monthus, *Physica A* 317, 140 (2003))
- **Variable plus générale** : $m' = am_1 + bm_2 + cm_3$ avec des ctes (a, b, c)

Exposants critiques $m \sim \Gamma^\phi$: liés à la 'dynamique' du paysage renormalisé

- **Exemple important dans les différents contextes physiques** :
 $m = m_1 + m_3 \rightarrow$ exposant irrationnel $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- Généralisation : $\phi(a + c = 2, b) = \frac{1+\sqrt{5+4b}}{2}$
- Cas général : équation faisant intervenir la fonction hypergéométrique confluente $U(A, B, z)$.

Généralisations

Renormalisation de potentiels aléatoires 1D : Solutions explicites

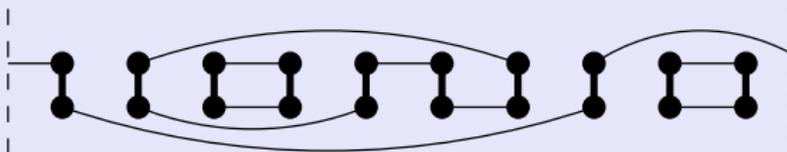
- Potentiel Brownien biaisé $V(x) = B(x) + Fx$ (Fisher 1995)
- Potentiel Brownien avec confinement harmonique $V(x) = B(x) + gx^2$
 Réf : P. Le Doussal and C. Monthus, *Physica A* 317, 140 (2003)
 → Equilibre : rôle des configurations avec deux minima presque dégénérés
 → Dynamique : distribution de la barrière maximale de chaque échantillon

Règles de décimation plus générales → Un exemple Quantique :
 la Chaîne de spins $S = 1$ avec des couplages AF $\{J_i > 0\}$ aléatoires

Réf : C. Monthus, O. Golinelli and Th. Jolicoeur,
Phys. Rev. Lett. 79, 3254 (1997) et *Phys. Rev. B* 58, 805 (1998)

Construction de règles de renormalisation à 4 types de liens et étude numérique
 → transition de phase quantique à $T = 0$ en fonction du désordre :

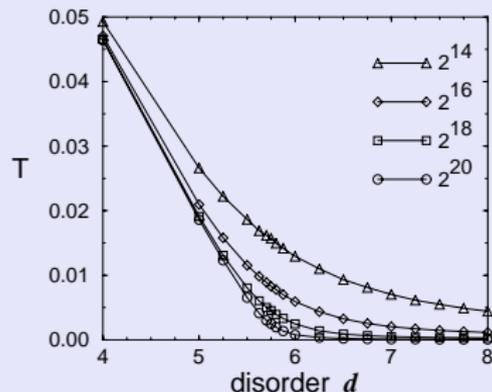
transition de type
PERCOLATION
 pour les amas VBS



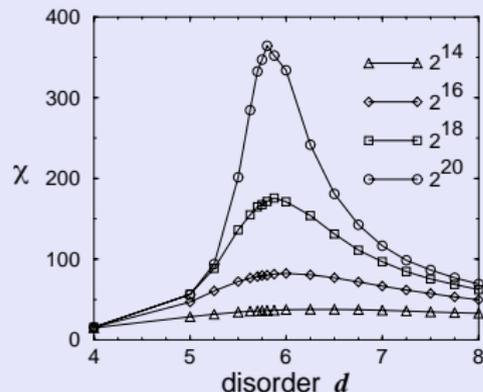
Etude des propriétés critiques de la transition

Simulation numérique des règles à 4 types de liens (taille $N \simeq 10^6$)

Paramètre d'ordre topologique:



Susceptibilité :



Calcul des exposants critiques exacts

grâce à un modèle effectif plus simple dans la même classe d'universalité

$$T \sim (d_c - d)^\beta \text{ avec } \beta = \frac{2(3-\sqrt{5})}{\sqrt{13}-1} \quad \text{et} \quad \chi \sim |d_c - d|^{-\gamma} \text{ avec } \gamma = \frac{2(2\sqrt{5}-3)}{\sqrt{13}-1}$$

Remarque : Renormalisations de type Ma-Dasgupta dans des modèles dynamiques sans désordre gelé !

Introduction indépendante dans le cadre des modèles de croissance

- 1 Divers modèles d'intervalles avec **décimation du plus petit** qui donne sa longueur à un ou deux voisins
(cf B. Derrida, C. Godrèche et I. Yekutieli (1990-1992))
 - 2 La règle $l = l_1 + l_{min} + l_3$ décrit la **dynamique effective à grand temps** d'un champ scalaire unidimensionnel qui évolue selon une équation de **Ginzburg-Landau à température nulle**
 - distribution invariante des longueurs (Rutenberg et Bray (1994))
 - calculs de divers exposants (Bray, Derrida, Godrèche, Majumdar)
- variable auxiliaire pour la persistance : $d' = d_1 + d_3$
 variable auxiliaire pour l'autocorrélation : $q' = q_1 - q_2 + q_3$
Remarque : Ici la longueur l est la variable principale

Introduction indépendante dans le cadre des modèles de réaction-diffusion

cf Hilhorst, Deloubrière, Washenberger et Tauber (2004)

Conclusions sur les approches de type Ma-Dasgupta

Domaine de validité : les phases dans lesquelles 'peu d'états' dominant

- ① Critère : Probabilité FINIE que deux copies indépendantes dans un même échantillon désordonné soient dans le même 'état' \mathcal{E}
 - Equilibre : recouvrement $Y_2^{eq} = \overline{\sum_{\mathcal{E}} P_{eq}^2(\mathcal{E})} > 0$
 - Dynamique : paramètre de localisation $Y_2^{dyn} = \lim_{t \rightarrow \infty} \overline{\sum_{\mathcal{E}} P^2(\mathcal{E}, t)} > 0$
- ② Etats : un état \mathcal{E} est en général une 'configuration renormalisée'
 - Equilibre : exemple du polymère chargé à une interface
un état \mathcal{E} = toutes les configurations qui ont la même structure en boucles
 - Dynamique : exemple du modèle de Sinai
un état \mathcal{E} = une vallée renormalisée (=un état métastable)
- ③ Type des résultats :
 - Points fixes de désordre INFINI : 1 seul état domine $Y_2 = 1$
→ résultats asymptotiques exacts.
 - Points fixes de désordre FORT : quelques états dominant $0 < Y_2 < 1$
→ développements systématiques dans le nombre d'états.

Conclusions sur les approches de type Ma-Dasgupta

Leur sens physique : Espace réel + Arguments physiques simples

- **Modèles quantiques de spins** (Chaînes AF, chaîne en champs transverses)
→ **construction d'amas de spins fortement corrélés**
(singulets, amas VBS, amas ferromagnétiques)
- **Modèles classiques statiques** (Chaînes de spins, polymère chargé)
→ **prolongement direct des arguments de type Imry-Ma**
- **Modèles classiques dynamiques** (modèle de Sinai, modèle de pièges)
→ renormalisation basée sur le **temps nécessaire pour franchir une barrière ou pour s'échapper d'un piège**, qui permet d'identifier les états métastables.

Renormalisation → Identification de lois de points fixes de type 'extrema'

- 1 **Systèmes désordonnés → Statistique des extrêmes**
 - **Equilibre à basse température** → statistique des états de basse énergie.
 - **Dynamique à grand temps** → statistique des grandes barrières.
- 2 **RG de type Ma-Dasgupta → des lois stables explicites**
Cas le plus important : **la classe d'universalité des extrema Browniens**
→ description unifiée de différents modèles désordonnés.