



**HAL**  
open science

# Ondes internes de gravité en fluide stratifié: instabilités, turbulence et vorticité potentielle

Christophe Koudella

► **To cite this version:**

Christophe Koudella. Ondes internes de gravité en fluide stratifié: instabilités, turbulence et vorticité potentielle. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 1999. Français. NNT: . tel-00005960

**HAL Id: tel-00005960**

**<https://theses.hal.science/tel-00005960>**

Submitted on 24 Apr 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 118

N° attribué par la bibliothèque : 99ENSL0118

**ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON**  
**Laboratoire de Physique**

**THÈSE**

pour obtenir le grade de  
**Docteur de l'École Normale Supérieure de Lyon**  
**spécialité : Physique**

au titre de la formation doctorale de :  
**ÉCOLE DOCTORALE DE PHYSIQUE**

présentée et soutenue publiquement le 08/04/99

par Monsieur Christophe KOUDELLA

---

Titre :

**Ondes internes de gravité en fluide stratifié :  
instabilités, turbulence et vorticité potentielle**

---

Directrice de thèse : Chantal STAQUET

Devant la commission d'examen formée de :

Monsieur Christophe BAUDET, Membre  
Monsieur Francis DALAUDIER, Membre  
Monsieur Maurice MENEGUZZI, Membre  
Monsieur Julian SCOTT, Membre  
Madame Chantal STAQUET, Membre  
Monsieur Vladimir TSEITLINE, Membre/Rapporteur



à Emmanuelle et à ma famille



# Remerciements

Le travail de thèse présenté dans ce manuscrit a été rendu possible grâce à l'aide de nombreuses personnes m'ayant soutenu tout au long de mes années passées dans le laboratoire de physique de l'Ecole Normale de Lyon.

Je tiens tout d'abord à remercier Jean-Pierre Hansen et Patrick Oswald de m'avoir accueilli au sein du laboratoire de physique de l'ENS Lyon.

Je remercie la DRET d'avoir financé entièrement ce travail de thèse par un Contrat Jeune Chercheur DRET, suivi d'une bourse de thèse DRET/CNRS.

Je remercie Chantal Staquet d'avoir encadré cette thèse effectuée au sein de l'équipe de mécanique des fluides du laboratoire dirigée par Joël Sommeria.

Tous mes remerciements s'adressent aussi à mes deux rapporteurs Vladimir Tseitline et Jim Riley pour le temps et les efforts passés à la lecture du manuscrit. Les autres membres du jury, Christophe Baudet, Francis Dalaudier, Maurice Meneguzzi et Julian Scott m'ont fait l'honneur d'être présent lors de ma soutenance et ils ont animé la discussion. Je les en remercie chaleureusement. J'adresse encore un merci à Maurice Meneguzzi pour avoir présidé le jury de thèse.

Une grande partie de la deuxième année de ma thèse a été dédiée au développement d'un code de résolution numérique parallèle. Ce travail est le fruit d'une collaboration avec l'assistance aux utilisateurs de l'IDRIS. Les membres du service, notamment Etienne Gondet, Gilles Grasseau et Jean-Philippe Proux m'ont formé de A-Z et étaient toujours là pour m'aider à développer des stratégies et pour m'aider à les déboguer et débrouiller par la suite.

Je remercie Joël Sommeria, Thierry Biben, Jean-François Pinton, Stéphane Fauve, Christophe Coste, Michel Peyrard, Olivier Michel du labo, ainsi que les personnes extérieures Bernard Legras, Roger Grimshaw, Michael McIntyre, Paul Linden pour les discussions, commentaires et suggestions quant aux ondes internes déferlantes et autres phénomènes discutés.

Je remercie Michel Mareschal et Rodrigo Soto pour le soutien qu'ils m'ont fourni pendant quelques uns des derniers mois de ma thèse. Cela a été l'occasion d'engager une première collaboration sur un sujet différent pour moi. Merci!

Je remercie le centre de calcul IDRIS (CNRS) d'avoir soutenu le projet sur les ondes internes déferlantes et d'avoir fourni les heures de calcul nécessaires pour mener à bien cette étude.

C'est un nombre potentiellement infini de remerciements qu'il me faut adresser à Evgeny N. Snezhkin, avec qui j'ai passé un nombre d'heures infini tout simplement à discuter pendant les six derniers mois de ma thèse et qui a été un véritable soutien

moral pendant cette période difficile. Son humour, sa vivacité et sa curiosité d'esprit sont sans doute insurpassés. Merci mon ami Zhenja!

Merci aux secrétaires, du laboratoire et d'ailleurs, pour leur efficacité et leur bonne humeur. Je remercie aussi tous les membres du laboratoire, sans qui la maison ne serait pas aussi chaude et accueillante.

Merci également à tous ceux qui ont du me supporter au quotidien durant ces années: P, M, Ror, RX, Jeffrey C., Aze, Raul (I like clubbing...), Cyrille de C., Vincent A.. Ca n'a pas toujours été facile pour eux...

Merci finalement à Emmanuelle qui m'a supportée pendant cette thèse, sans qui cette thèse n'aurait pas été possible et grâce à qui je suis ce que je suis au moment où je rédige ces lignes. Merci à ma mère, mon père, ma sœur, mon beauf, mes neveux Etienne et Johan et ma grand-mère.

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>10</b>
<b>1 Quelques aspects fondamentaux des fluides stratifiés</b>	<b>14</b>
1.1 Introduction	14
1.2 Des équations du fluide compressible aux équations de Navier-Stokes dans l'approximation de Boussinesq	15
1.2.1 Description d'un fluide parfait compressible	15
1.2.2 Description d'un fluide dissipatif et conducteur thermique	16
1.2.3 Les équations de Navier-Stokes dans l'approximation de Boussinesq	17
1.3 La conservation de l'énergie	18
1.3.1 Équation pour l'énergie d'un fluide compressible	18
1.3.2 Énergie mécanique du fluide parfait de Boussinesq	19
1.3.3 Énergie du fluide dissipatif et conducteur de Boussinesq	21
1.4 Vorticité et vorticité potentielle	22
1.4.1 L'équation pour la vorticité	22
1.4.2 Considération matérielle de la vorticité et vorticité potentielle	23
1.4.3 Vorticité potentielle en fluide stratifié	28
1.4.4 Conservation globale de la vorticité potentielle	29
1.5 Décomposition des champs d'un écoulement stratifié	32
1.5.1 Adimensionnement isotrope	33
1.5.2 Adimensionnement anisotrope	34
1.5.3 Décomposition linéaire de Craya-Herring du champ de vitesse	37
1.5.4 Remarques sur le problème de décomposition	38
1.5.5 Remarques	39
1.6 Les solutions linéaires des équations	39
1.7 Conclusion	40
<b>2 Éléments de bibliographie</b>	<b>41</b>
2.1 Introduction	41
2.2 Articles de revue sur les ondes internes de gravité	41
2.3 Expériences en laboratoire	42



2.4	Instabilité linéaire d'une onde interne . . . . .	43
2.5	Interactions résonantes entre ondes faiblement non-linéaires . . . . .	44
2.6	Études statistiques . . . . .	45
2.7	Les simulations numériques . . . . .	46
2.8	Ondes nonlinéaires dispersives . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Programmation d'une méthode de résolution pseudo-spectrale pour un environnement parallèle à mémoire distribuée</b>	<b>49</b>
3.1	Introduction . . . . .	49
3.2	L'algorithme pseudo-spectral de résolution des équations de Navier-Stokes . . . . .	50
3.2.1	Position du problème . . . . .	50
3.2.2	Discrétisation . . . . .	53
3.3	Notions sur les architectures parallèles à mémoire distribuée et leur programmation .	56
3.3.1	Généralités . . . . .	56
3.3.2	Architectures parallèles à mémoire distribuée . . . . .	57
3.3.3	Programmation parallèle explicite utilisant des bibliothèques d'échanges de messages	59
3.4	Implémentation parallèle de l'algorithme pseudo-spectral utilisant la bibliothèque MPI	61
3.4.1	Généralités concernant MPI . . . . .	61
3.4.2	Décomposition du domaine global et création d'une topologie cartésienne de processus . . . . .	62
3.4.3	Programmation . . . . .	66
3.5	La transformée de Fourier rapide . . . . .	67
3.5.1	Généralités . . . . .	67
3.5.2	La méthode de distribution . . . . .	68
3.5.3	La méthode de transposition . . . . .	72
3.6	Remarques sur le cas avec conditions aux limites de type symétrie . . . . .	81
3.7	Conclusion . . . . .	82
<b>4</b>	<b>Two-dimensional breaking internal gravity waves: from instabilities to turbulence</b>	<b>83</b>
4.1	Introduction . . . . .	83
4.2	Equations of motion and numerical model . . . . .	85
4.3	From instability to breaking . . . . .	87
4.3.1	Resonant Interaction Theory . . . . .	87
4.3.2	The structure of the instability in physical space . . . . .	93
4.3.3	Final breakdown of the wave field . . . . .	100
4.4	Conclusion . . . . .	102

<b>5</b>	<b>Instabilité, déferlement et production de vorticité potentielle d'un champ d'ondes internes tridimensionnel</b>	<b>116</b>
5.1	Introduction . . . . .	116
5.2	Présentation des simulations numériques . . . . .	118
5.3	Déstabilisation de l'onde primaire . . . . .	122
5.3.1	Énergie mécanique instable . . . . .	122
5.3.2	Vorticité verticale et vorticité potentielle . . . . .	126
5.4	Déferlement du champ d'onde . . . . .	129
5.4.1	Évolution de l'énergie totale et temps de déferlement . . . . .	129
5.4.2	Tridimensionalisation de l'écoulement . . . . .	131
5.4.3	Visualisation du champ de densité . . . . .	134
5.4.4	Considérations préliminaires . . . . .	134
5.4.5	Onde de petite amplitude . . . . .	136
5.4.6	Onde de grande amplitude statiquement stable . . . . .	138
5.4.7	Nombre de Richardson . . . . .	145
5.4.8	Onde de grande amplitude statiquement instable . . . . .	146
5.5	Vorticité de l'écoulement . . . . .	146
5.5.1	Composante $\xi_y$ . . . . .	147
5.5.2	Composante $\xi_x$ . . . . .	149
5.6	Implications du déferlement . . . . .	152
5.6.1	Généralités . . . . .	152
5.6.2	Les spectres d'énergie cinétique et potentielle . . . . .	152
5.6.3	Spectres du flux de flottabilité . . . . .	158
5.7	Production de vorticité potentielle et écoulement moyen . . . . .	160
5.7.1	Valeurs efficaces des composantes de la vorticité . . . . .	160
5.7.2	Vorticité potentielle . . . . .	162
5.7.3	Diagnostic linéaire des composantes du mouvement . . . . .	163
5.8	Conclusion . . . . .	166
<b>6</b>	<b>Dynamique modifiée d'un fluide stablement stratifié</b>	<b>168</b>
6.1	Introduction . . . . .	168
6.2	États d'équilibre, pseudo-énergie, équations diagnostiques . . . . .	170
6.2.1	États stationnaires d'un système Hamiltonien . . . . .	171
6.2.2	Application au fluide stratifié . . . . .	172
6.2.3	Lien avec l'énergie potentielle disponible . . . . .	173
6.2.4	Lien avec les états stationnaires des équations du mouvement . . . . .	174
6.2.5	Lien avec les équations diagnostiques des tourbillons potentiels . . . . .	175
6.2.6	Forme alternative des équations pour les tourbillons potentiels . . . . .	177
6.3	Dynamique modifiée du fluide stratifié . . . . .	178
6.3.1	Présentation de la méthode générale . . . . .	178

6.3.2	Équations dynamiques modifiées du fluide stratifié . . . . .	179
6.3.3	Conservation des Casimirs par la dynamique modifiée . . . . .	181
6.3.4	Evolution du Hamiltonien . . . . .	182
6.4	Conclusion . . . . .	183
<b>Conclusion et perspectives</b>		<b>184</b>
<b>A Introduction au formalisme Hamiltonien d'un fluide parfait</b>		<b>188</b>
A.1	Introduction . . . . .	188
A.2	L'approche variationnelle . . . . .	188
A.3	Dynamique Hamiltonienne généralisée . . . . .	190
A.3.1	Systèmes discrets . . . . .	190
A.3.2	Systèmes continus . . . . .	194
A.4	Applications en mécanique des fluides . . . . .	196
A.4.1	Application au fluide parfait compressible . . . . .	196
A.4.2	Application au fluide parfait incompressible . . . . .	198
A.4.3	Application au fluide parfait stratifié dans l'approximation de Boussinesq . .	200
A.4.4	Remarques . . . . .	202
<b>Bibliographie</b>		<b>203</b>

# Introduction générale

Les ondes internes de gravité constituent une composante de mouvement quasiment universelle dans les écoulements des fluides stablement stratifiés. Sur terre, les échelles spatiales mises en jeu dans ces phénomènes ondulatoires varient de quelques dizaines de centimètres à l'échelle du laboratoire jusqu'à plusieurs dizaines de kilomètres dans l'atmosphère ou dans l'océan et les échelles temporelles varient de quelques secondes à quelques heures. A ce jour, l'existence des ondes internes de gravité est une notion fondamentale de mécanique des fluides. Leur découverte est ancienne et l'on recense un grand nombre d'études à leur sujet. Leurs mises en évidence dans la nature sont variées et reposent généralement sur des mesures in situ. L'observation directe des ondes internes est par contre plus difficile. Elle est en fait presque impossible dans l'océan et possible uniquement par déduction dans l'atmosphère. Ainsi, on peut dire que les ondes internes et leur dynamique forment une notion plus obscure que les ondes hydrodynamiques de surface, tant au niveau de leur existence qu'au niveau de la connaissance de leur dynamique. Les expériences de laboratoire associées aux ondes internes ont en partie permis de compenser ce manque et d'élucider certains processus dynamiques. La réponse à la question de l'impact des ondes internes sur les propriétés générales des écoulements, notamment ceux considérés en dynamique des fluides géophysiques requiert, entre autres, des études détaillées de ces processus. Parmi les nombreux problèmes ouverts mettant en jeu les ondes internes, citons leur dynamique non-linéaire pouvant mener à leur déferlement, leurs propriétés de transport déterministes impliquant le transport de quantité de mouvement et d'énergie et les propriétés de transport turbulentes produisant des changements irréversibles dans le fluide en le mélangeant.

A un niveau linéaire ou faiblement non-linéaire, pour lequel le concept d'onde est défini sans ambiguïté, il faut remarquer l'existence de composantes du mouvement non ondulatoires. En effet, l'inhomogénéité de la direction verticale d'un fluide stratifié permet d'expliquer l'existence de mouvements évoluant sur une échelle verticale réduite et sur une échelle de temps beaucoup plus lente que les ondes. Ainsi, les ondes peuvent elles coexister avec d'une part un écoulement moyen quasi-horizontale lentement variable et d'autre part un mouvement situé sur les surfaces de densité constante. Cette dernière composante est reflétée par une propriété fondamentale du fluide, sa vorticité potentielle. La vorticité potentielle est conservée dans un écoulement d'un fluide parfait et même en fluide dissipatif et conducteur sa dynamique est fortement contrainte. La composante du mouvement associée à cette quantité est appelée mode de vorticité potentielle ou tourbillon potentiel. Comme la vorticité potentielle d'un système d'ondes est nulle, on est en mesure de se demander

quelle est la correspondance entre la vorticité potentielle et un tourbillon potentiel. La connaissance de cette correspondance est appelée le problème d'inversion de vorticité potentielle. Ce problème est important en m t eorologie et en océanographie, où il est relié directement à la prévision temporelle des écoulements de grandes échelles spatiales. Pour un fluide réellement tridimensionnel le problème de l'inversion diagnostique et consistant à obtenir les champs de l'écoulement à partir de la connaissance de la vorticité potentielle est un problème difficile. Le problème n'est pas posé à priori, puisque la connaissance seule de la vorticité potentielle n'est pas suffisante pour la détermination des champs, ni même pour la définition d'un hypothétique mode de vorticité potentielle. A un niveau fortement non-linéaire la décomposition des champs de l'écoulement perd son sens, car on ne sait plus comment définir les composantes de l'écoulement. On remarque alors que les ondes internes et en particulier leur déferlement sont intimement liés à la production de vorticité potentielle. En effet, la variation au cours du temps de cette dernière est la seule conséquence des effets moléculaires. Comme les propriétés de transport d'un fluide sont radicalement augmentées pour un écoulement turbulent, le déferlement d'un champ d'ondes s'accompagne d'une production de vorticité potentielle. Par ailleurs les déferlements d'ondes sont supposés être une source majeure de turbulence géophysique et constituent donc un problème important en soi.

Le travail effectué au cours de cette thèse cherche à contribuer à la compréhension de la dynamique d'ondes internes de gravité, de leurs instabilités et des propriétés induites par la production de vorticité potentielle. Notre travail s'articule autour de trois thèmes. Premièrement, nous avons étudié le déferlement d'une onde interne de gravité propagative en deux et trois dimensions d'espace par simulation numérique directe. Nous avons considéré les cas bi-, et tridimensionnels séparément. Les simulations permettent de suivre l'évolution d'une onde pendant toute sa durée de vie et nous caractérisons son instabilité, son déferlement et quelques propriétés de la turbulence engendrée par le déferlement. Nous proposons également des visualisations tridimensionnelles des champs d'écoulement pour illustrer la déstabilisation de l'onde et son déferlement. Dans le cas bidimensionnel, on considère notamment quelques aspects faiblement non-linéaires de l'évolution d'une onde de faible amplitude. Cependant, en trois dimensions d'espace la situation devient rapidement inextricable et nous adoptons une position expérimentale. Une question importante concerne la différence entre les cas bi-, et tridimensionnels. Les simulations directes tridimensionnelles ont été effectuées avec un code de résolution pseudo-spectral des équations de Navier-Stokes dans l'approximation de Boussinesq. Ce travail de développement constitue le deuxième thème de la thèse et nous décrivons l'algorithme parallèle mis au point. L'implémentation de l'algorithme a produit un code portable suffisamment général pour étudier les écoulements turbulents à haute résolution spatiale. Enfin, le troisième thème découle du premier, puisqu'il propose la dérivation d'une méthode de dynamique modifiée permettant de relaxer un écoulement d'un fluide parfait stratifié vers un état d'équilibre dynamique en conservant la vorticité potentielle et la densité du fluide. La dérivation suit une méthode générale proposée par T.G. Shepherd 1990 pour un système Hamiltonien général. Au cours de la présentation de ce dernier thème, nous abordons également le problème d'inversion diagnostique de vorticité potentielle.

Le plan du manuscrit est le suivant. Le premier chapitre présente quelques notions fondamentales de la dynamique d'un fluide stratifié en insistant sur les propriétés de la vorticité potentielle et sur les composantes du mouvement pouvant exister au sein d'un fluide stratifié. Le chapitre suivant propose une brève présentation de la littérature existante importante pour notre étude. Le troisième chapitre propose une description détaillée de l'algorithme de solution parallèle à la base de nos résultats numériques. Le quatrième chapitre décrit les résultats des simulations numériques directes bidimensionnelles de déferlement d'onde. L'étude des ondes en trois dimensions d'espace est présentée au chapitre cinq. Les aspects relatifs au mode vorticité potentielle et à la dynamique modifiée sont exposés au chapitre six.

# Chapitre 1

## Quelques aspects fondamentaux des fluides stratifiés

### 1.1 Introduction

Les simulations numériques d'ondes internes de gravité en deux dimensions chapitre 4 et trois dimensions d'espace chapitre 5, ainsi que le travail présenté au chapitre 6, reposent entièrement sur le modèle de la dynamique d'un fluide stratifié dans l'approximation de Boussinesq.

Ce chapitre présente quelques aspects fondamentaux des fluides stratifiés importants pour notre étude. La plupart des notions de mécanique des fluides utilisées dans la suite de ce manuscrit y sont présentées. Ce chapitre ne contient pas uniquement des notions classiques, mais nous introduisons également quelques résultats plus récents. Toutefois, les développements théoriques résultant de notre étude ne sont développés qu'au chapitre 6, afin de maintenir le caractère introductif et général de ce chapitre.

Nous décrivons d'abord le modèle de fluide parfait compressible, puis le modèle de fluide de Navier-Stokes dans l'approximation de Boussinesq. A ce stade nous introduisons quelques quantités physiques importantes, ainsi que leur équations d'évolution. Nous considérons la vortacité d'un point de vue matériel et nous dérivons le théorème de Ertel. Nous considérons également la conservation globale de la vortacité potentielle. La section suivante présente l'adimensionnement des équations de Navier-Stokes dans l'approximation de Boussinesq de Riley et al 1981 [113] et met en évidence les composantes du mouvement présentes dans un écoulement stratifié de petit nombre de Froude. Enfin nous présentons quelques propriétés des ondes internes de gravité linéaires propagatrices, solutions des équations de Navier-Stokes linéarisées.

## 1.2 Des équations du fluide compressible aux équations de Navier-Stokes dans l'approximation de Boussinesq

La notion de modèle en mécanique des fluides est intuitive. Un modèle de fluide est un ensemble d'équations qui décrivent la dynamique et la thermodynamique d'un fluide obéissant à certaines lois physiques. Plus les ingrédients physiques sont nombreux, plus le modèle de fluide considéré est complexe et se rapproche d'un fluide réel. Un modèle peut, à priori, être dérivé à partir de la considération de la physique d'un écoulement d'un fluide. Cependant, un modèle de fluide complexe peut servir de point de départ pour la dérivation d'un modèle de fluide plus simple. Dans ce cas, le modèle de départ est le modèle parent, auquel on impose des contraintes pour parvenir au modèle simplifié. On met ainsi en évidence une hiérarchie entre modèles. A partir du modèle de fluide parfait compressible, on peut dériver par exemple le modèle hydrostatique (correspondant aux équations primitives météorologiques), puis le modèle d'un fluide en eau peu profonde et enfin le modèle quasi-géostrophique.

### 1.2.1 Description d'un fluide parfait compressible

Notre point d'entrée est la dynamique d'un fluide compressible, que nous supposons parfait (fluide isentrope). Ultérieurement, nous ajoutons, respectivement, des effets moléculaires, les diffusions de quantité de mouvement et de chaleur.

Ce modèle est très général et sert de "modèle parent" à la dérivation de la plupart des modèles simplifiés, généralement considérés en dynamique des fluides mono-phasiques à une espèce chimique, ainsi qu'en dynamique des fluides géophysiques. On considère un référentiel inertiel muni d'un système de coordonnées cartésiennes  $\mathbf{x} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ , où  $z$  est la coordonnée verticale. Le fluide est décrit par cinq variables, le champ vectoriel de vitesse  $\mathbf{u} = (u, v, w) = (u_1, u_2, u_3)$ , la densité de masse  $\rho$  et l'entropie spécifique  $\eta$ . Ces variables sont régies par les équations suivantes [7], [40], [117]

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -v_s \nabla p - \nabla \phi \quad (1.1)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{D\eta}{Dt} = 0. \quad (1.3)$$

La dérivée matérielle  $D/Dt$  est définie comme

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \quad (1.4)$$

où  $\nabla$  est l'opérateur gradient. Par ailleurs,  $v_s = \rho^{-1}$  est le volume spécifique,  $p$  est la pression et  $\phi$  est un potentiel représentant le champ des forces conservatives extérieures, auquel le fluide est soumis. Comme nous considérons un fluide dans un champ de gravité vertical constant, nous avons

$$\phi = gz \quad (1.5)$$



où  $g$  est la constante gravitationnelle. On ferme le système d'équations (1.1-1.3) en y ajoutant une équation d'état thermodynamique pour le fluide

$$p = -\frac{\partial e(v_s, \eta)}{\partial v_s} \quad (1.6)$$

où  $e$  est l'énergie interne spécifique.

L'écriture du précédent système dans un référentiel tournant nécessite l'inclusion de l'accélération de Coriolis  $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$ , où  $\boldsymbol{\Omega}$  est le vecteur de rotation angulaire du référentiel tournant. Par ailleurs, il faut généralement tenir compte de la rotation dans la définition du potentiel  $\phi$  [59].

### 1.2.2 Description d'un fluide dissipatif et conducteur thermique

La présence de frottement dans un fluide dissipatif donne lieu à des contraintes anisotropes dans un fluide en mouvement. Dans le cadre d'un fluide newtonien, le tenseur des contraintes est relié linéairement au gradient du champ de vitesse par

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu \left( e_{ij} - \frac{1}{3}\Delta\delta_{ij} \right) \quad (1.7)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker,  $\mu$  est le coefficient de viscosité dynamique et  $e_{ij}$  est le tenseur de déformation du champ de vitesse

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{et} \quad \Delta = e_{ii}. \quad (1.8)$$

La pression  $p$  est définie par la moyenne isotrope du tenseur des contraintes<sup>1</sup>

$$p = \frac{1}{3}\sigma_{ii} \quad (1.9)$$

La divergence du tenseur  $\sigma_{ij}$  représente la force interne au fluide par unité de volume. Les équations de Navier-Stokes pour un fluide compressible s'écrivent alors pour la vitesse  $u_i$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -v_s\nabla p - \nabla\phi + \nu \left[ \nabla^2\mathbf{u} + \frac{1}{3}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] \quad (1.10)$$

où  $\nu = \mu/\rho$  est la viscosité cinématique.

L'équation (1.3) pour l'entropie spécifique  $\eta$  peut être réécrite en fonction de la température  $T$  et de la pression  $p$ , puisqu'on a  $\eta = \eta(T, p)$ . En utilisant les relations  $\partial\eta/\partial T = C_p/T$  et  $\partial\eta/\partial p = \partial v_s/\partial T = -v_s\beta$ , l'équation prend la forme suivante

$$C_p \frac{DT}{Dt} = v_s\beta T \frac{Dp}{Dt} \quad (1.11)$$

---

1. Nous négligeons entièrement les considérations reliant la pression  $p$  définie en (1.9) et la pression thermodynamique [7].

où  $\beta = v_s^{-1} \partial v_s / \partial T$  est le coefficient de dilatation thermique et  $C_p = \partial \eta / \partial T$  est la capacité calorifique mesurée à pression constante. On relaxe la condition d'isentropie en admettant que le fluide conduit la chaleur. Dans ce cas, on a en l'absence de sources de chaleur

$$C_p \frac{DT}{Dt} = v_s \beta T \frac{Dp}{Dt} + v_s k \nabla^2 T + \Phi \quad (1.12)$$

où  $k$  est la conductivité thermique du fluide et  $\Phi$  représente le taux de dissipation d'énergie cinétique

$$\Phi = 2\nu(e_{ij}e_{ij} - \frac{1}{3}\Delta^2). \quad (1.13)$$

En général on néglige  $\Phi$  et on a

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{v_s \beta T}{C_p} \frac{Dp}{Dt} + \kappa \nabla^2 T \quad (1.14)$$

où  $\kappa = v_s k / C_p$  est la diffusivité thermique.

### 1.2.3 Les équations de Navier-Stokes dans l'approximation de Boussinesq

L'approximation de Boussinesq est décrite en détail en [70], [134]. Comme cette approximation est classique, nous n'indiquons ici que les étapes de la dérivation des équations. Dans l'approximation de Boussinesq, on néglige les variations de la densité du fluide dues à un changement du champ de pression. Par ailleurs, la densité est remplacée partout par sa valeur moyenne constante, sauf dans le terme de flottabilité. On décompose la densité du fluide

$$\rho = \rho_0 + \bar{\rho}(z) + \tilde{\rho}(x, y, z, t) \quad (1.15)$$

où  $\rho_0$  est constante et  $|\tilde{\rho}| \ll |\bar{\rho}| \ll \rho_0$ . Dans la suite nous supposons que la stratification ambiante est linéaire, c'est-à-dire que  $\bar{\rho}(z)$  est une fonction linéaire de  $z$ . De même, la pression est écrite

$$p = \bar{p}(z) + \tilde{p}(x, y, z, t) \quad (1.16)$$

avec  $|\tilde{p}| \ll |\bar{p}|$ . On impose l'équation hydrostatique aux parties moyennes de  $\rho$  et de  $p$

$$\frac{d\bar{p}}{dz} = (\rho_0 + \bar{\rho}) g. \quad (1.17)$$

L'équation de continuité (1.2) se simplifie pour exprimer que le champ de vitesse est à divergence nulle

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.18)$$

Avec ces approximations l'équation de Navier-Stokes dans l'approximation de Boussinesq s'écrit

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{\tilde{p}}{\rho_0} - \frac{\tilde{\rho}g}{\rho_0} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (1.19)$$

L'application de la décomposition à l'équation thermodynamique (1.14), en utilisant  $T = T_0 + \bar{T} + \tilde{T}$  et en négligeant le terme en  $Dp/Dt$ , parce que l'on néglige les effets de compressibilité du fluide, fournit

$$\frac{D\tilde{T}}{Dt} = -w \frac{T_0}{g} N^2 + \kappa \nabla^2 \tilde{T} \quad (1.20)$$

où on a défini la fréquence de Brunt-Väisälä

$$N^2 = \frac{g}{T_0} \frac{d\bar{T}}{dz}. \quad (1.21)$$

Comme nous avons supposé la stratification ambiante linéaire, la fréquence  $N$  est constante. Cette équation est valable pour un liquide. On peut encore écrire l'équation (1.20) entièrement en termes de la densité. En effet, on a  $\rho = \rho(T)$  uniquement. Soit

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial T} \frac{DT}{Dt}. \quad (1.22)$$

On retient donc les équations suivantes de Navier-Stokes dans l'approximation de Boussinesq

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p' - \rho' \mathbf{e}_3 + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.23)$$

$$\frac{D\rho'}{Dt} = N^2 w + \kappa \nabla^2 \rho' \quad (1.24)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.25)$$

où  $\rho' = \bar{\rho}g/\rho_0$  représente les fluctuations de densité réduites, et  $p' = \bar{p}/\rho_0$ . La quantité  $\rho'$  est égale à l'opposé de l'accélération de flottabilité. Nous avons supposé que la stratification moyenne, par rapport à laquelle on opère l'approximation de Boussinesq est linéaire et nous redéfinissons la fréquence de Brunt-Väisälä en termes de  $\rho$  par

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\bar{\rho}}{dz}. \quad (1.26)$$

## 1.3 La conservation de l'énergie

### 1.3.1 Équation pour l'énergie d'un fluide compressible

Nous considérons d'abord l'énergie mécanique d'un fluide compressible, dissipatif et conducteur thermique. L'équation d'évolution pour l'énergie totale résulte du premier principe de la thermodynamique. On écrit le bilan pour une particule fluide

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + e \right) = -\nabla \cdot \mathbf{F} + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}). \quad (1.27)$$

La variation de l'énergie totale de la particule s'accompagne d'un flux de chaleur diffusif échauffant ou refroidissant la particule, le travail de la force gravitationnelle et le travail fourni par l'ensemble des contraintes agissant sur la particule fluide. On a supposé qu'il n'y a pas de sources de chaleur

dans le fluide. Le flux de chaleur diffusif est  $F = -\kappa \nabla \rho$ , tandis qu'une composante du tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  est donnée par (1.7). Le travail effectué par la force gravitationnelle est aussi appelé le flux de chaleur. Il peut s'écrire

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} &= -\rho g w \\ &= -\rho \mathbf{u} \cdot \nabla(gz) \\ &= -\rho \frac{D}{Dt}(gz) \end{aligned} \quad (1.28)$$

En utilisant cette relation pour le flux de chaleur, on obtient la forme du premier principe, avec potentiel gravitationnel

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + e + gz \right) = -\nabla \cdot F + \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \quad (1.29)$$

Les deux formes du premier principe de la thermodynamique que nous avons données, sont des équations particulières, parce que la densité n'est pas dérivée dans le membre de gauche. Il est souhaitable d'obtenir l'équation pour un volume élémentaire fixé dans l'espace. La procédure standard pour achever ceci en mécanique des fluides consiste à utiliser la relation vérifiée par la dérivée matérielle d'une quantité scalaire  $\theta$  par unité de volume

$$\rho \frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial \rho \theta}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \theta \mathbf{u}). \quad (1.30)$$

Cette identité est immédiate en utilisant l'équation de continuité. Nous allons appliquer cette procédure au fluide de Boussinesq parfait.

### 1.3.2 Énergie mécanique du fluide parfait de Boussinesq

A partir de maintenant, nous reconsidérons le fluide stratifié dans l'approximation de Boussinesq, mais en un premier temps nous le supposons parfait. Dans l'approximation de Boussinesq, l'énergie cinétique et potentielle par unité de volume s'écrivent, respectivement

$$E_k = \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{u}^2 \quad \text{et} \quad P_e = \rho g z \quad (1.31)$$

L'équation (1.30) permet d'écrire le premier principe sous forme de l'équation de conservation suivante

$$\frac{\partial}{\partial t} (E_k + P_e) = \nabla \cdot (E_k + P_e + p) \mathbf{u}. \quad (1.32)$$

Remarquons que le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  est isotrope. Le champ de vitesse étant non divergent, l'énergie interne est découplée de l'énergie mécanique.

Afin de rendre compte de l'état dynamique du fluide, il est utile de disposer d'une expression de l'énergie mécanique associée uniquement au mouvement du fluide par rapport à son état de repos. L'énergie cinétique vérifie cette propriété, mais l'énergie potentielle que nous avons écrite jusqu'ici contient une partie associée à la stratification de base du fluide : l'énergie potentielle de base. La

décomposition de  $\rho$  selon  $\rho = \rho_0 + \bar{\rho} + \tilde{\rho}$  utilisée dans l'approximation de Boussinesq permet d'écrire après soustraction de l'équation hydrostatique

$$\frac{D}{Dt} (E_k + \tilde{P}_e) = -\nabla(\tilde{p}\mathbf{u}) \quad (1.33)$$

où on a utilisé la non divergence du champ de vitesse et  $\tilde{p}$  représente les fluctuations de pression. On note

$$\tilde{P}_e = \tilde{\rho}gz \quad (1.34)$$

l'énergie potentielle par unité de volume des fluctuations de densité,  $\tilde{\rho}$  et  $\tilde{p}$  est la fluctuation de pression. Cette équation est exacte, mais n'est pas utilisable en pratique, parce que  $\tilde{P}_e$  n'a pas de signe bien défini et ne caractérise donc pas l'énergie potentielle du mouvement. On peut cependant écrire une expression de  $\tilde{P}_e$  sous forme d'une série entière, soit en fonction du déplacement d'une particule par rapport à sa position d'équilibre, soit en fonction des fluctuations de densité [52]. Toutefois la dérivation de cette forme fait appel explicitement à la conservation particulaire de la masse, ce qui est correct, mais n'est pas bien justifié physiquement. On note  $E_{EPD}$  la forme de l'énergie potentielle en fonction des fluctuations de densité. Alors l'énergie mécanique vérifie l'équation

$$\frac{D}{Dt} (E_k + E_{EPD}) = -\nabla(\tilde{p}\mathbf{u}) \quad (1.35)$$

En première approximation, l'expression de  $E_{EPD}$  donne l'expression pour l'énergie potentielle associée aux fluctuations de densité couramment utilisée dans les simulations numériques

$$E_p \approx -\frac{1}{2} \frac{g}{\rho_0 + \bar{\rho}(z)} \tilde{\rho}^2 \quad (1.36)$$

qui a l'avantage d'être une quantité quadratique et qui caractérise donc bien l'état du fluide par rapport à son état au repos.

L'énergie potentielle  $E_{EPD}$  est reliée au concept d'énergie potentielle disponible, car elle vérifie l'égalité suivante

$$EPD = \int_D d^3\mathbf{x} E_p \quad (1.37)$$

EPD signifie énergie potentielle disponible, c'est à dire l'énergie potentielle disponible dynamiquement, n'étant pas associée à la stratification statique du fluide. A partir de l'énergie potentielle totale  $P_e$  par unité de volume, définie plus haut, on définit l'énergie potentielle totale du fluide

$$P_{tot} = \int \rho g z d\tau \quad (1.38)$$

L'EPD est la différence entre  $P_{tot}$  et l'énergie potentielle minimale  $P_{tot}^0$ , obtenue par un réarrangement adiabatique des particules fluides. L'adjectif adiabatique est redondant, puisque nous considérons un fluide parfait, mais cette définition de l'EPD est encore vraie pour un fluide dissipatif et

conducteur. L'énergie potentielle associée à l'état minimal est appelée énergie potentielle de base. L'énergie potentielle disponible est une quantité intégrale, tandis que la quantité  $E_{EPD}$  est une quantité différentielle.

Remarque: Au chapitre 6, nous allons voir que l'EPD a une définition très naturelle dans le cadre d'une formulation Hamiltonienne des équations du fluide parfait. Dans ce cas, l'EPD est la partie non cinétique d'une quantité, appelée pseudo-énergie.

### 1.3.3 Energie du fluide dissipatif et conducteur de Boussinesq

La situation est plus complexe dans le cas du fluide dissipatif et conducteur, parce que la présence de conduction thermique, modifie l'énergie potentielle du fluide. Il n'est donc pas possible d'écrire une forme fermée pour l'énergie mécanique. La conduction thermique prend son importance dans la diffusion turbulente de température dans le fluide entraînant son mélange. L'existence de ce mélange implique que l'EPD soit couplée à l'énergie potentielle de base. On ne peut donc pas non plus écrire d'équation fermée pour l'énergie mécanique disponible, comme c'était le cas pour le fluide parfait. Par contre, on peut à nouveau chercher à transformer l'équation pour l'énergie potentielle totale particulière en une équation pour un volume élémentaire fixé dans l'espace. Ici, on ne peut pas appliquer la procédure (1.30), parce que la densité vérifie l'équation de la chaleur. Le flux d'énergie potentielle contient une partie diffusive, associée à la conduction thermique. Ajoutons la relation

$$gz \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho - \kappa \nabla^2 \rho \right) = 0 \quad (1.39)$$

à l'équation (1.28), il vient alors

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho gz) + \nabla \cdot (\rho g z \mathbf{u}) = \rho g w + \kappa g z \nabla^2 \rho. \quad (1.40)$$

Cette équation qui est celle de l'énergie potentielle d'un fluide de Boussinesq, constitue le point de départ (sous forme différentielle) de l'analyse récente de Winters et al [144] sur le mélange produit en fluide stratifié. Ce travail a permis de dériver une équation d'évolution pour l'énergie potentielle d'arrière plan, par l'intermédiaire d'une méthode de tri des particules fluides, permettant d'atteindre un état d'énergie potentielle minimale. L'équation d'évolution pour l'EPD est alors obtenue en retranchant l'équation pour l'énergie potentielle de base de l'équation (1.40). Le chapitre 6 présente l'EPD dans un cadre Hamiltonien non canonique et propose la dérivation d'une méthode de dynamique modifiée permettant de relaxer l'écoulement d'un fluide stratifié vers son état d'équilibre. Cet état correspond à un état d'EPD minimale.

## 1.4 Vorticité et vorticité potentielle

### 1.4.1 L'équation pour la vorticité

On définit la vorticité d'un écoulement par le rotationnel du champ de vitesse

$$\boldsymbol{\xi} = \nabla \times \mathbf{u}. \quad (1.41)$$

En utilisant l'identité

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{u} + \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{u}|^2 \quad (1.42)$$

l'équation pour la quantité de mouvement s'écrit

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{u} = -\nabla \left( p' + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) - \rho' \mathbf{e}_3 + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (1.43)$$

L'équation pour la vorticité est obtenue en calculant le rotationnel de (1.43).

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{u}) = -\nabla \times \rho' \mathbf{e}_3 + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\xi} \quad (1.44)$$

En appliquant l'identité suivante

$$\nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{u}) = \boldsymbol{\xi} (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi} - (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (1.45)$$

à l'équation obtenue pour la vorticité et en tenant compte de l'incompressibilité du champ de vitesse, ainsi que du caractère solénoïdal du champ de vorticité, on obtient l'équation pour la vorticité dans l'approximation de Boussinesq sous sa forme usuelle

$$\frac{D\boldsymbol{\xi}}{Dt} = \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla \times \rho' \mathbf{e}_3 + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\xi}. \quad (1.46)$$

Les termes du second membre représentent, respectivement, l'étirement-bascullement de vorticité par l'écoulement, le moment barocline et la diffusion moléculaire de vorticité par dissipation visqueuse [7].

On peut dériver une équation plus générale pour la vorticité à partir des équations du fluide compressible visqueux. Les effets de compressibilité du fluide sont masqués en normalisant la vorticité par la densité,  $\boldsymbol{\xi}/\rho$ . L'équation d'évolution pour  $\boldsymbol{\xi}/\rho$  est alors de la forme de l'équation (1.46), à l'exception du moment barocline, dont la forme est plus générale

$$\frac{1}{\rho^3} \nabla \rho \times \nabla p. \quad (1.47)$$

Le passage à l'approximation de Boussinesq [67],[98] restitue le moment barocline de Boussinesq  $\nabla \times \rho' \mathbf{e}_3$ , par l'intermédiaire de l'équation hydrostatique (1.17).

### 1.4.2 Considération matérielle de la vorticité et vorticité potentielle

Les résultats de la section précédente indiquent que la vorticité n'est pas une quantité conservée par une particule fluide (invariant lagrangien). Une considération mati rielle de la vorticité permet tout de même de dériver un invariant lagrangien impliquant la vorticité de l'écoulement. Une telle approche permet ensuite naturellement d'introduire la vorticité potentielle et de démontrer le théorème de Ertel à partir d'un point de vue mati riel, du moins autant que l'autorise le point de vue eulérien de la mécanique des fluides. On exprime la variation de n'importe quelle champ scalaire  $\theta$  par

$$\delta\theta = (\delta\mathbf{x} \cdot \nabla) \theta. \quad (1.48)$$

En particulier, la variation du champ de vitesse,  $\delta\mathbf{u}$ , est

$$\delta\mathbf{u} = (\delta\mathbf{x} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (1.49)$$

Soit  $\mathbf{X}_i(t)$  la position lagrangienne d'une particule fluide indexée par  $i$ . L'équation du mouvement du vecteur  $\delta\mathbf{x} = \mathbf{X}_2(t) - \mathbf{X}_1(t)$ , représentant le déplacement entre deux particules fluides au cours du temps, est obtenu en prenant la dérivée mati rielle

$$\frac{D}{Dt} \delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{u} = (\delta\mathbf{x} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (1.50)$$

où on a utilisé l'expression pour  $\delta\mathbf{u}$ . On peut encore écrire

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{x} &= |\delta\mathbf{x}| \mathbf{n} \\ &= \delta x \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (1.51)$$

En divisant (1.50) par le module  $\delta x$ , on a

$$\frac{1}{\delta x} \frac{D}{Dt} \delta\mathbf{x} = (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (1.52)$$

L'équation (1.50) a la même forme que l'équation pour la vorticité d'un fluide parfait incompressible, obtenue par annulation du moment barocline et du terme de dissipation visqueuse dans (1.46)

$$\frac{D}{Dt} \boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (1.53)$$

On appelle filament un élément mati riel de fluide en chaque point duquel le vecteur vorticité est porté par la tangente au filament. On peut alors introduire une quantité  $\chi$  qui varie le long d'un filament de telle façon que le déplacement entre deux points du filament  $\delta\mathbf{x}$  est proportionnel à la vorticité locale

$$\delta\mathbf{x} = \delta\chi \boldsymbol{\xi}. \quad (1.54)$$

Par substitution de cette égalité dans (1.50) il vient

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (\boldsymbol{\xi} \delta\chi) &= \delta\chi (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{u} \\ &= \delta\chi \frac{D}{Dt} \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi} \frac{D}{Dt} \chi \end{aligned} \quad (1.55)$$



où on utilise l'équation pour la vorticité et d'où l'on déduit

$$\frac{D}{Dt}\chi = 0. \quad (1.56)$$

En fonction des modules de l'élément matériel et de la vorticité, définis par  $\delta\mathbf{x} = \delta x \mathbf{n}_\xi$  et  $\boldsymbol{\xi} = \xi \mathbf{n}_\xi$ , où le vecteur unitaire  $\mathbf{n}_\xi$  définit la direction de la vorticité et de l'élément matériel, la fonction de proportionnalité  $\delta\chi$  s'écrit

$$\delta\chi = \frac{\delta x}{\xi} \quad (1.57)$$

ce qui permet de conclure que l'élément matériel reste aligné avec le vecteur vorticité au cours du temps. De plus, le rapport des modules de  $\boldsymbol{\xi}$  et de  $\delta\mathbf{x}$  est conservé au cours du temps. On dit que la vorticité est gelée dans le fluide.

On peut se demander si une composante seulement de la vorticité vérifie une propriété de conservation similaire au module de la vorticité. Cette extension du résultat précédent n'est immédiate que pour le fluide parfait incompressible. Pour le fluide stratifié, cela est néanmoins possible et la quantité conservée est la vorticité potentielle. Dans ce qui suit, nous dérivons la vorticité potentielle d'un point de vue matériel. On considère alors seulement une composante de la vorticité et on dérive un résultat similaire au résultat du paragraphe précédent. L'invariant lagrangien que l'on peut dériver à partir de cette considération est en fait une vorticité potentielle. La vorticité potentielle est usuellement présentée dans le contexte d'un fluide isentrope, mais rien ne nous empêche de la considérer d'abord pour un fluide parfait incompressible. Une revue récente sur la vorticité potentielle dans un contexte océanographique propose une approche similaire à celle offerte ici (Müller 1995 [98]). Une particule fluide possède la vorticité

$$\boldsymbol{\xi} = \xi \mathbf{n}_\xi. \quad (1.58)$$

Dorénavant, on indexe les quantités relatives à un élément matériel,  $\delta\mathbf{x}_n$  par  $n$ , pour signaler le fait que  $\delta\mathbf{x}_n$  et  $\boldsymbol{\xi}$  ne sont pas forcément alignés. On choisit donc au hasard un élément matériel  $\delta\mathbf{x}_n$  défini à partir d'un point du fluide. L'élément matériel,  $\delta\mathbf{x}_n$ , attaché à la particule fluide, de longueur  $\delta x_n$  et orienté selon la direction  $\mathbf{n}$ , génère un plan avec  $\boldsymbol{\xi}$ . Le vecteur perpendiculaire à  $\mathbf{n}$  dans ce plan est noté  $\mathbf{n}_-$ . Les vecteurs  $\mathbf{n}_\xi$ ,  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{n}_-$  sont unitaires. L'élément matériel  $\delta\mathbf{x}_n$  subit les déformations induites par le mouvement de fluide au cours du temps et nous nous intéressons à la dynamique de la composante de vorticité selon cette direction. Nous supposons que l'élément matériel reste approximativement droit à tout instant et nous considérons le vecteur  $\mathbf{n}_-$  perpendiculaire à tout moment à  $\mathbf{n}$ . Écrivons la vorticité en décomposition dans le plan

$$\boldsymbol{\xi} = \xi_n \mathbf{n} + \xi_- \mathbf{n}_- \quad (1.59)$$

On a également  $\xi_n = \xi \cos \alpha$  et  $\xi_- = \xi \sin \alpha$ , ainsi que

$$\mathbf{n}_\xi = \cos \alpha \mathbf{n} + \sin \alpha \mathbf{n}_- \quad (1.60)$$

où  $\alpha$  est l'angle entre les vecteurs  $\mathbf{n}$  et  $\boldsymbol{\xi}$ . Dans la représentation (1.59) de  $\boldsymbol{\xi}$ , les composantes, ainsi que les vecteurs de base sont des quantités attachées à la particule fluide et sont donc des fonctions de l'espace et du temps.

L'équation du mouvement pour la composante de  $\boldsymbol{\xi}_n$  selon la direction  $\mathbf{n}$  est obtenue par projection de l'équation de la vorticité (1.46) sur  $\mathbf{n}$

$$\mathbf{n} \cdot \frac{D}{Dt} \boldsymbol{\xi} = \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (1.61)$$

Par définition de la composante  $\xi_n = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n}$  on a donc

$$\frac{D}{Dt} \xi_n = \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{D}{Dt} \mathbf{n}. \quad (1.62)$$

En séparant le premier terme du membre de gauche de l'équation en un terme d'étirement/compression de vorticité et un terme de basculement de vorticité on a

$$\frac{D}{Dt} \xi_n = \xi_n \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \xi_- \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n}_- \cdot \nabla) \mathbf{u} + \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{D}{Dt} \mathbf{n}. \quad (1.63)$$

On voit ainsi que la composante  $\xi_n$  de la vorticité selon le vecteur mobile  $\mathbf{n}$  change par trois effets distincts. Le premier terme représente la projection sur  $\mathbf{n}$ , des effets d'étirement ou de compression de la vorticité en direction de  $\mathbf{n}$ . Ce terme est naturellement proportionnel à  $\xi_n$ . Le deuxième terme représente la projection sur  $\mathbf{n}$  des effets du basculement de la partie de la vorticité orientée selon  $\mathbf{n}_-$ . Ce terme est naturellement proportionnel à la composante de vorticité transverse à  $\mathbf{n}$ ,  $\xi_-$ . Finalement, le dernier terme représente le changement de  $\xi_n$ , causé par le mouvement du vecteur  $\mathbf{n}$ , induit par le champ de vitesse, par rapport au vecteur vorticité. Ce terme s'écrit donc comme la projection de la vorticité sur le taux de changement par unité de temps du vecteur  $\mathbf{n}$ .

Nous allons montrer, dans ce qui suit, que les effets des deuxième et troisième termes se compensent exactement. L'étude matérielle de la vorticité de la dernière sous-section, où on a vu que le rapport entre le module de la vorticité et le module d'un élément matériel était conservé, motive l'introduction du vecteur porté par  $\mathbf{n}$  et de module égale à l'inverse de  $\delta x_n = |\delta \mathbf{x}_n|$ . Nous notons ce vecteur par le symbole particulier

$$\frac{1}{\delta \mathbf{x}_n} = \frac{1}{\delta x_n} \mathbf{n}. \quad (1.64)$$

Alternativement, on peut définir ce vecteur en exigeant que son produit scalaire avec  $\delta \mathbf{x}_n$  soit constant et égal à 1. Sachant que le vecteur  $\frac{1}{\delta \mathbf{x}_n}$  a les mêmes propriétés directionnelles que  $\delta \mathbf{x}_n$ , mais qu'il doit compenser la variation de  $\delta \mathbf{x}_n$ , afin de conserver le produit scalaire, on déduit l'équation du mouvement

$$\frac{D}{Dt} \frac{1}{\delta \mathbf{x}_n} = - \left( \frac{1}{\delta \mathbf{x}_n} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} \quad (1.65)$$

  partir de (1.50).

Multiplions alors l'équation (1.62) pour  $\xi_n$  par  $1/\delta x_n$  et transformons le second terme du membre de droite

$$\begin{aligned}\frac{1}{\delta x_n} \frac{D}{Dt} \xi_n &= \frac{1}{\delta \mathbf{x}_n} \cdot (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\delta x_n} \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{D}{Dt} \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{\delta \mathbf{x}_n} \cdot (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \boldsymbol{\xi} \cdot \left[ \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\delta \mathbf{x}_n} \right) - \mathbf{n} \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\delta x_n} \right) \right]\end{aligned}\quad (1.66)$$

L'insertion de la relation (1.65) dans l'équation précédente permet d'écrire

$$\frac{1}{\delta x_n} \frac{D}{Dt} \xi_n = \frac{1}{\delta \mathbf{x}_n} \cdot (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \boldsymbol{\xi} \cdot \left( \frac{1}{\delta \mathbf{x}_n} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} - \xi_n \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\delta x_n} \right) \quad (1.67)$$

La prochaine étape consiste à développer les opérateurs

$$\begin{aligned}\frac{1}{\delta x_n} \frac{D}{Dt} \xi_n &= \frac{1}{\delta \mathbf{x}_n} \cdot (\xi_n \mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\delta \mathbf{x}_n} \cdot (\xi_- \mathbf{n}_\perp \cdot \nabla) \mathbf{u} \\ &\quad - \xi_n \mathbf{n} \cdot \left( \frac{1}{\delta \mathbf{x}_n} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} - \xi_- \mathbf{n}_\perp \cdot \left( \frac{1}{\delta \mathbf{x}_n} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} - \xi_n \frac{D}{Dt} \frac{1}{\delta x_n}\end{aligned}\quad (1.68)$$

Pour trois vecteurs  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  on a la relation suivante

$$\mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{C})] = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{C} - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{C} \quad (1.69)$$

Appliqué au second terme du membre de droite de (1.68), cela donne

$$\frac{1}{\delta \mathbf{x}_n} \cdot (\xi_- \mathbf{n}_\perp \times \boldsymbol{\xi}) = \xi_- \mathbf{n}_\perp \cdot \left( \frac{1}{\delta \mathbf{x}_n} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} - \frac{1}{\delta \mathbf{x}_n} \cdot (\xi_- \mathbf{n}_\perp \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (1.70)$$

Le membre de gauche de cette relation est nul, parce que les trois vecteurs sont dans le même plan. Par conséquent, les deuxième et quatrième termes de l'équation (1.68) s'annulent. Mais les troisième et quatrième termes s'annulent également dans (1.68), parce que l'inverse du module  $1/\delta x_n$  vérifie

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\delta x_n} \right) &= -\frac{1}{\delta x_n^2} \frac{D}{Dt} \delta x_n \\ &= -\frac{1}{\delta x_n} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u}.\end{aligned}\quad (1.71)$$

En multipliant par  $\delta x_n$ , on a aussi

$$\delta x_n \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\delta x_n} \right) = -\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (1.72)$$

Finalement, il reste de (1.68), après multiplication par  $\delta x_n$

$$\frac{D}{Dt} \xi_n = \xi_n \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (1.73)$$

et on voit que ne subsistent que les effets d'étirement/compression de vorticité dans la composante  $\xi_n$ . En divisant (1.73) par  $\xi_n$  et en multipliant (1.71) par  $\delta x$  et en formant leur somme, on conclut que l'on a

$$\frac{1}{\xi_n} \frac{D}{Dt} \xi_n + \delta x_n \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\delta x_n} \right) = 0 \quad (1.74)$$

En fait, on pouvait déjà conclure (1.74) au stade de (1.67), où on aurait pu appliquer la relation (1.69) au premier terme du membre de droite de (1.68), mais nous avons mené la transformation jusqu'au bout pour isoler la composante  $\xi_n$  et comprendre son évolution temporelle. Ce résultat, très important s'écrit encore

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\xi_n}{\delta x_n} \right) = 0. \quad (1.75)$$

L'égalité précédente est équivalente au théorème de Ertel et possède donc l'interprétation matérielle, que le changement au cours du temps d'une composante de la vortacité, dans une direction définie par un élément matériel, entraîne le changement de la longueur de l'élément matériel au cours du temps. La quantité  $\xi_n/\delta x_n$  peut être interprétée comme une vortacité potentielle, dans la mesure où l'étirement ou la compression de l'élément matériel, par unité de temps, produit une augmentation ("libération") ou diminution ("capture") de vortacité.

Jusqu'à présent nous avons implicitement confiné le raisonnement à une particule fluide et en considérant le vecteur déplacement matériel, nous nous sommes placés aussi près que possible d'un morceau de fluide. Ce point de vue a permis de démontrer une propriété très générale. Il va de soi que le champ de déplacement  $\delta \mathbf{x}$  ou son inverse ne sont pas utiles en pratique, parce que difficile à définir. Aussi, remplace-t-on le champ défini par l'inverse du déplacement matériel, par le gradient d'un champ scalaire  $\theta$ . En effet, on peut écrire que

$$\delta \theta = \delta \mathbf{x} \cdot \nabla \theta. \quad (1.76)$$

où on a supprimé l'index  $n$ , l'ambiguïté sur la direction de  $\frac{1}{\delta x_n}$  étant levée par la définition de  $\nabla \theta$ . En effet, l'élément matériel est aligné avec  $\nabla \theta$ . On a donc encore

$$\frac{\delta \theta}{\delta x} = |\nabla \theta|. \quad (1.77)$$

Lorsque le scalaire constitue, de plus, un invariant lagrangien

$$\frac{D\theta}{Dt} = 0 \quad (1.78)$$

on a aussi la conservation de la variation du scalaire  $\delta \theta$

$$\frac{D\delta \theta}{Dt} = 0 \quad (1.79)$$

et le résultat précédent s'écrit alors

$$\frac{D}{Dt} \left( \xi_\theta \frac{\delta \theta}{\delta x} \right) = 0. \quad (1.80)$$

On a indexé la composante de la vortacité en direction de  $\nabla \theta$  par  $\theta$ . Ce résultat est le théorème de Ertel pour un fluide parfait incompressible et s'écrit en général sous la forme

$$\frac{D}{Dt} (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \theta) = 0. \quad (1.81)$$

A ce stade, nous pouvons observer que la prise en compte matérielle de la vorticité et en particulier d'une partie de celle-ci, n'est pas immédiate en coordonnées eulériennes. Aussi, avons nous montré que les effets du basculement de vorticité apparaissent comme un artéfact du point de vue eulérien. Par contre, la considération matérielle d'une quantité physique en coordonnées eulériennes, constitue en quelque sorte un point de vue hybride lagrangien-eulérien [112]. Une autre approche [118], consiste à se placer plus directement en coordonnées lagrangiennes curvilignes, sans référence aux coordonnées eulériennes  $(x, y, z)$ . Cependant, l'écriture des équations du mouvement sous forme tensorielle est plus compliquée. Trois champs scalaires différents peuvent par exemple être utilisés comme coordonnées lagrangiennes pour marquer une particule fluide. Les vecteurs de base sont donnés par les gradients de trois champs scalaires. On peut alors montrer que la vorticité potentielle en une direction  $\nabla\theta$ , est la composante de la vorticité selon cette direction. Autrement dit, le vecteur vorticité, obtenu par la considération de l'ensemble des trois vorticités potentielles, est défini par le rotationnel du champ de vitesse exprimé dans la base lagrangienne d'une particule fluide [117].

### 1.4.3 Vorticité potentielle en fluide stratifié

Lorsque le fluide est stratifié, mais isentrope, l'équation pour la vorticité contient aussi le vecteur barocline. Ce terme apparaît comme un terme supplémentaire de création de vorticité qui tend à modifier la composante de la vorticité lui étant colinéaire.

Le théorème de Ertel reste valable, mais seulement pour une direction qui est à tout moment perpendiculaire au moment barocline. Nous avons mis en évidence que l'équation pour une composante  $\xi_n$  est indépendante de la vorticité dans la direction perpendiculaire. Cette propriété n'est pas immédiatement apparente en coordonnées eulériennes, comme le prouve le calcul de la dernière sous-section.

Dans le cas du fluide parfait stratifié, la seule façon de définir une direction partout perpendiculaire au moment barocline,  $\nabla \times \rho \mathbf{e}_3$  (r ecrit ici en termes de la densité totale), est de choisir  $\theta = \rho$ . On définit alors la vorticité potentielle dans l'approximation de Boussinesq par l'intermédiaire d'un produit scalaire

$$\Pi = \frac{\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \rho}{\rho_0} \quad (1.82)$$

où  $\rho_0$ , la densité moyenne, est un facteur de normalisation. Le théorème de Ertel s'écrit avec cette notation

$$\frac{D}{Dt} \Pi = 0. \quad (1.83)$$

Finalement nous ajoutons les effets de dissipation visqueuse et de conduction thermique. Cela nous permet aussi d'illustrer la dérivation du théorème de Ertel usuelle, à partir des équations de Navier-Stokes [104]. Il suffit de noter que le produit scalaire de la vorticité avec l'équation pour  $\nabla\rho$ , écrite en termes de la densité totale (et non pas de la densité réduite), vérifie

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \frac{D}{Dt} \nabla \rho = -\nabla \rho (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \frac{D}{Dt} \rho \quad (1.84)$$

en conséquence directe de l'équation (1.65) ( $\nabla\theta$  vérifie la même équation) et de l'égalité vectorielle (1.69). Par ailleurs, le produit scalaire de l'équation pour la vorticité (1.46) avec  $\nabla\rho$  est

$$\nabla\rho \cdot \frac{D}{Dt}\boldsymbol{\xi} = \nabla\rho \cdot (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nu\nabla\rho \cdot \nabla^2\boldsymbol{\xi}. \quad (1.85)$$

La somme des deux dernières relations donne, compte tenu de (1.24), l'équation d'évolution de la vorticité potentielle dans l'approximation de Boussinesq

$$\frac{D}{Dt}\Pi = \frac{\nu}{\rho_0}\nabla\rho \cdot \nabla^2\boldsymbol{\xi} + \frac{\kappa}{\rho_0}\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla\nabla^2\rho \quad (1.86)$$

où nous avons normalisé par  $\rho_0$ . On conclue que seuls les effets moléculaires sont capable de créer spontanément de la vorticité potentielle.

#### 1.4.4 Conservation globale de la vorticité potentielle

On peut écrire le théorème de Ertel sous forme conservative, à l'instar du bilan d'une quantité physique transportée par le fluide [48]. Cette propriété est, au niveau technique, une conséquence du fait que la divergence d'un rotationnel est nulle. En effet, la vorticité potentielle par unité de volume vérifie d'abord la relation

$$\begin{aligned} \rho_0\Pi &= (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \nabla\rho \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \nabla\rho) + \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \nabla\rho) \end{aligned} \quad (1.87)$$

dont le second terme du membre de droite est nul. Puis on a la relation

$$\begin{aligned} \rho_0\Pi &= \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla\rho \\ &= \nabla \cdot (\rho\boldsymbol{\xi}). \end{aligned} \quad (1.88)$$

Les deux relations constituent des expressions différentes de la vorticité potentielle sous forme de la divergence d'un champ de vecteur.

On peut alors écrire pour la dérivée partielle par rapport au temps de la vorticité potentielle par unité de volume sous la forme (1.88)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0\Pi) = \nabla \cdot \left[ \rho\nabla \times \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\xi} \frac{\partial\rho}{\partial t} \right]. \quad (1.89)$$

Le premier terme de la divergence se transforme selon

$$\nabla \cdot \left[ \rho\nabla \times \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} \right] = \nabla \cdot \left[ \nabla \times \left( \rho \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} \right) - \nabla\rho \times \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} \right] \quad (1.90)$$

où le premier terme est la divergence d'un rotationnel, qui est nulle. Donc nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0\Pi) = \nabla \cdot \left[ \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} \times \nabla\rho + \boldsymbol{\xi} \frac{\partial\rho}{\partial t} \right]. \quad (1.91)$$

L'équation de Navier-Stokes (1.23) peut être mise sous la forme

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{u} - \nabla \left( \frac{p}{\rho_0} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) + \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (1.92)$$

où on a utilisé l'équation hydrostatique,  $\nabla p_0 = (\rho_0 + \bar{\rho}) \mathbf{g}$ . La pression et la densité figurant dans l'équation sont donc les quantités totales. Il vient alors pour le membre de droite de (1.91)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[ \boldsymbol{\xi} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \nabla \rho \right] &= \nabla \cdot \left\{ -\boldsymbol{\xi} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho + \boldsymbol{\xi} \frac{D\rho}{Dt} \right. \\ &\quad \left. - \left[ \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{u} - \nabla \left( \frac{p}{\rho_0} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) + \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \right] \times \nabla \rho \right\} \end{aligned} \quad (1.93)$$

où on a aussi utilisé la définition de la dérivée matérielle de  $\rho$ . La divergence du produit de deux vecteurs,  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  vérifie

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (1.94)$$

Appliquée au quatrième terme du membre de droite, on trouve que la divergence d'un produit de deux gradients est nulle. Appliquée au cinquième terme, impliquant l'accélération de flottabilité, on trouve

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left( \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{g} \times \nabla \rho \right) &= \nabla \rho \cdot \left( \nabla \times \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{g} \right) - \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{g} \cdot (\nabla \times \nabla \rho) \\ &= \nabla \rho \cdot \left( \frac{\nabla \rho}{\rho_0} \times \mathbf{g} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.95)$$

On transforme aussi le double produit vectoriel, présent dans l'expression de la divergence

$$-(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{u}) \times \nabla \rho = (\nabla \rho \cdot \mathbf{u}) \boldsymbol{\xi} - (\nabla \rho \cdot \boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}. \quad (1.96)$$

La substitution de cette dernière égalité donne finalement

$$\nabla \cdot \left[ \boldsymbol{\xi} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \nabla \rho \right] = \nabla \cdot \left[ -\rho_0 \Pi \mathbf{u} + \boldsymbol{\xi} \frac{D\rho}{Dt} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \times \nabla \rho \right] \quad (1.97)$$

On écrit encore cette dernière relation sous la forme plus directe d'une équation de conservation, équation donnée par Obukhov [101]

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 \Pi) + \nabla \cdot \mathbf{F}_\Pi = 0 \quad (1.98)$$

Le vecteur de flux de vorticité potentielle,  $\mathbf{F}_\Pi$ , est donné par

$$\mathbf{F}_\Pi = \rho_0 \Pi \mathbf{u} - \boldsymbol{\xi} \frac{D\rho}{Dt} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} \times \nabla \rho. \quad (1.99)$$

En utilisant la propriété de non divergence du champ de vitesse on a encore

$$\frac{D}{Dt} (\rho_0 \Pi) = -\nabla \cdot \mathbf{F}_\Pi \quad (1.100)$$

où

$$N_{\Pi} = -\boldsymbol{\xi} \frac{D\rho}{Dt} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} \times \nabla \rho. \quad (1.101)$$

L'équation (1.100) montre que l'équation de la vorticité potentielle d'un fluide de Boussinesq dissipatif et conducteur thermique est régie par la divergence d'un champ de vecteurs. La vorticité potentielle n'est pas conservée matériellement, en accord avec l'extension du théorème de Ertel à un fluide dissipatif et conducteur, présentée plus haut. La vorticité potentielle contenue à l'intérieur d'un volume ne peut varier au cours du temps, qu'en conséquence d'un flux de vorticité potentielle au travers de la surface entourant le volume. On parle de conservation globale de vorticité potentielle. Par analogie avec le bilan pour une quantité physique volumique transportée par le fluide, on introduit la notion de substance de vorticité potentielle  $Q$ , dont  $\rho_0 \Pi$  est la quantité par unité de volume [48]<sup>2</sup>. Cette substance est transportée à la vitesse  $\mathbf{F}_{\Pi}/\rho_0 \Pi$ . L'intégrale sur un volume  $D$  se déplaçant à la vitesse  $\mathbf{F}_{\Pi}/\rho_0 \Pi$  est alors conservée au cours du temps, parce que ce volume compense exactement le flux de vorticité potentielle au travers des parois

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho_0 \Pi d^3x = 0. \quad (1.102)$$

De plus, la composante normale à une surface isopycnale de la vitesse de la substance est identique à la vitesse normale de la surface. Le produit scalaire de  $\mathbf{F}_{\Pi}$  sous la forme (1.99) avec le gradient de densité, qui est relié au vecteur normal à une surface isopycnale par

$$\mathbf{n} = \nabla \rho / |\nabla \rho| \quad (1.103)$$

s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\Pi} \cdot \nabla \rho &= \rho_0 \Pi \mathbf{u} \cdot \nabla \rho - \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \rho \frac{\partial \rho}{\partial t} - (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \rho) \mathbf{u} \cdot \nabla \rho \\ &= -\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \rho \frac{\partial \rho}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.104)$$

On a finalement par définition du vecteur normal à la surface isopycnale

$$\frac{\mathbf{F}_{\Pi} \cdot \mathbf{n}}{\rho_0 \Pi} = -\frac{1}{|\nabla \rho|} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.105)$$

dont le membre de droite est justement la vitesse normale de la surface. On conclut que la substance ne peut pas traverser une surface isopycnale. Ce résultat constitue le théorème d'imperméabilité de la vorticité potentielle [48]. Physiquement, on explique ce résultat par le fait que le flux advectif de vorticité potentielle au travers d'une surface isopycnale est exactement compensé par la composante normale à une surface isopycnale d'un flux dont la divergence représente le transport diabatique de vorticité potentielle.

---

2. La relation entre une quantité physique volumique et la substance de vorticité potentielle n'est qu'une analogie. Par exemple, la vorticité potentielle a des propriétés différentes de la masse d'une espèce chimique par unité de volume de fluide [49].



Pour le moment nous quittons les aspects concernant la vorticité potentielle. Mais nous reviendrons de façon détaillée sur cette quantité dans le cadre des ondes internes déferlantes produisant de la vorticité potentielle (chapitre 5) et dans le cadre de l'analyse de l'évolution du mouvement associé au mode de vorticité potentielle (chapitre 6).

## 1.5 Décomposition des champs d'un écoulement stratifié

Nous avons dérivé les équations de Navier-Stokes dans l'approximation de Boussinesq (1.23-1.25) suite à une série d'approximations, en partant du fluide parfait compressible. Il en résulte que ces équations constituent un système avantageux pour l'intégration numérique d'un écoulement de fluide. Cependant le modèle de fluide décrit par ce système reste très complexe. D'un point de vue linéaire et selon les conditions aux limites envisagées, le modèle admet un grand nombre de phénomènes physiques différents, tels que les ondes internes, les ondes interfaciales, les vortex, pour ne citer que les phénomènes génériques. L'ouvrage de Turner [135] traite l'ensemble des phénomènes de petites échelles spatio-temporelles observés dans les fluides stratifiés. Lorsque ces échelles augmentent, on tient compte, en général, de la rotation du fluide, parce que la plupart des grandes masses de fluide stratifié présentes dans la nature, évoluent dans un milieu en rotation. D'autre part et d'un point de vue non-linéaire, un fluide stratifié est soumis à toutes sortes de perturbations et par conséquent un écoulement peut être instable. Un écoulement stratifié, initialement laminaire, peut transiter vers un écoulement d'une structure spatio-temporelle très complexe, par l'intermédiaire d'une suite d'instabilités. En général, on qualifie cet état de turbulent. Mais il est important de noter que les caractéristiques d'un tel écoulement ne sont pas déterminées a priori et sont différentes des caractéristiques d'une turbulence homogène et isotrope.

L'application d'arguments dimensionnels aux équations (1.23-1.25) permet de dégager quelques propriétés génériques des écoulements stratifiés. Les idées suivantes sont basées essentiellement sur les travaux de Riley et al 1981 [113] et de Lilly 1983 [78]. Nous allons adimensionner les équations de départ de trois façons différentes, afin de mettre en évidence trois régimes d'écoulement idéalisés. Un écoulement physique complexe possède alors un mélange des caractéristiques de ces trois écoulements. Remarquons aussi que le problème de décomposition d'un écoulement est d'une grande importance et qu'il est considérablement plus avancé dans un contexte météorologique et océanographique où l'on considère soit les équations primitives (équations pour le champ de vitesse horizontal d'une mince couche de fluide), soit des modèles encore plus simples. Rappelons ici à nouveau les équations du fluide stratifié dans l'approximation de Boussinesq en négligeant les effets moléculaires et en séparant le mouvement horizontal,  $\mathbf{u}_h = (u, v)$ , du mouvement vertical,  $w$ .

L'opérateur gradient horizontal est indexé par  $h$ .

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \nabla_h p' = 0 \quad (1.106)$$

$$\frac{Dw}{Dt} + \frac{\partial p'}{\partial z} + \rho' = 0 \quad (1.107)$$

$$\frac{D\rho'}{Dt} - N^2 w = 0 \quad (1.108)$$

$$\nabla_h \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.109)$$

En présence de stratification, on peut s'intéresser à différents régimes d'écoulement dont les caractéristiques dépendent du comportement de l'échelle de pression dans l'équation (1.107). Si  $P'$  est l'échelle sur laquelle varie la pression associée à une certaine échelle de longueur présente dans l'écoulement (que nous prenons le soin de ne pas définir pour le moment, afin de garder un maximum de généralité), on a l'une des deux possibilités suivantes

$$P' \sim \frac{HW}{T} \quad \text{si} \quad \frac{\partial p'}{\partial z} \quad \text{est de l'ordre de l'accélération verticale}$$

$$P' \sim H \varrho' \quad \text{si} \quad \frac{\partial p'}{\partial z} \quad \text{est de l'ordre de l'accélération de flottabilité}$$

Les symboles  $H$ ,  $T$ ,  $W$  et  $\varrho'$ , sont l'échelle de longueur verticale, de temps, de vitesse verticale et de flottabilité, respectivement. Afin d'obtenir des équations adimensionnelles, il est nécessaire de faire des hypothèses supplémentaires.

### 1.5.1 Adimensionnement isotrope

En un premier temps, on suppose le champ de vitesse et les échelles de longueur isotropes et on se place dans le cas où la pression est échelonnée par l'accélération verticale (ce qui est la supposition correspondant généralement aux écoulement en mécanique des fluides incompressibles. De plus, on ne fait pas de restriction particulière sur l'échelle de temps, ce qui revient à dire que  $T$  est échelonnée par les termes inertiels dans l'équation de Navier-Stokes. En résumé, on a

$$V \sim W$$

$$L \sim H$$

$$T \sim \frac{H}{W}$$

où  $L$  et  $V$  sont les échelles horizontales correspondantes. Dans cette approximation les équations du mouvement horizontale et verticale sont complètement équivalentes et on a, par conséquent simplement

$$P' \sim W^2.$$

L'équation thermodynamique apparaît comme une équation de consistance et on a pour l'échelle des fluctuations de flottabilité  $\vartheta'$

$$\vartheta' \sim N^2 L \quad \text{par l'équation (1.108)}$$

Les échelles satisfont trivialement l'équation de continuité, ce qui est naturel, en vue de l'hypothèse sur laquelle repose l'échelle de pression. En introduisant le nombre de Froude, un nombre adimensionnel comparant la fréquence de Brunt-Väisälä  $N$  avec la fréquence caractéristique des mouvements inertiels  $T = W/H$  par

$$Fr = \frac{W}{NH} \quad (1.110)$$

les équations du mouvement s'écrivent sous leur forme adimensionnelle en conservant les mêmes symboles que pour les équations dimensionnelles et en restituant le champ de vitesse tridimensionnel

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \nabla p' = -Fr^{-2} \rho' \quad (1.111)$$

$$\frac{D\rho'}{Dt} - w = 0 \quad (1.112)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.113)$$

On observe que lorsque  $Fr$  est grand (stratification faible), le terme de flottabilité dans (1.111) peut être négligé en première approximation et les équations obtenues sont les équations de Navier-Stokes incompressibles en plus d'une équation pour le scalaire passif,  $\rho'$ .

### 1.5.2 Adimensionnement anisotrope

A présent on se place dans le cas où la pression est échelonnée par la flottabilité. On relaxe également la contrainte d'isotropie sur le champ de vitesse et on perd de fait la notion d'isotropisation par le champ de pression, évoquée lors de l'adimensionnement isotrope. Le couplage entre mouvement horizontal et vertical est moins immédiat. Il est encore effectué par la pression, mais on peut dire que cela se fait par l'intermédiaire de la flottabilité. En effet, l'équation thermodynamique produit

$$\rho' \sim N^2 W T.$$

Soit, en utilisant la loi d'échelle de la pression

$$P' \sim N^2 W T H.$$

De même l'équation du mouvement horizontal donne une seconde expression pour l'échelle de pression

$$P' \sim \frac{LV}{T}.$$

En égalant les deux expressions pour l'échelle de pression, on a

$$L \sim N^2 T^2 H \frac{W}{V}.$$

On élimine le rapport des échelles de vitesse en utilisant l'équation de continuité

$$\frac{W}{V} \sim \frac{H}{L} \quad (1.114)$$

et on a finalement

$$L \sim NTH.$$

Afin de conclure sur la nature de ce mouvement, il faut encore faire une hypothèse additionnelle sur l'échelle de temps.

### Échelle de temps non contrainte

On suppose encore que  $T \sim H/W$  et on a alors

$$L \sim Fr^{-1}H \quad (1.115)$$

A la limite de  $Fr$  tendant vers 0, on constate que le mouvement vertical est nul. Les équations du mouvement adimensionnées s'écrivent alors

$$\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} + \mathbf{u}_h \cdot \nabla_h \mathbf{u}_h + \nabla_h p' = -Fr^2 w \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial z} \quad (1.116)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial z} + \rho' = -Fr^2 \left[ \frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{u}_h \cdot \nabla_h w + Fr^2 w \frac{\partial w}{\partial z} \right] \quad (1.117)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathbf{u}_h \cdot \nabla_h \rho' - w = -Fr^2 w \frac{\partial \rho'}{\partial z} \quad (1.118)$$

$$\nabla_h \mathbf{u}_h = -Fr^2 \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (1.119)$$

Un mouvement de fluide satisfaisant à ces équations est usuellement appelé turbulence stratifiée, bien qu'il soit clair par ailleurs, que ces équations admettent aussi des solutions correspondant à des écoulements laminaires. Une autre terminologie, visant à identifier les structures d'un écoulement satisfaisant à (1.116-1.119), nomme ce type de mouvement le mode vortex ou le mode vortical. En première approximation, les équations d'évolution pour ce type de mouvement sont les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles dans un plan horizontal dépendant de la coordonnée verticale. L'équation du mouvement vertical est remplacée par une équation hydrostatique portant sur les fluctuations de flottabilité. On remarque cependant que, même à l'ordre le plus bas, le mouvement peut ne pas être purement bidimensionnel. En effet, on peut voir que le gradient de pression produit des fluctuations de l'accélération de flottabilité dans l'équation hydrostatique (1.117), qui à son tour produit un mouvement vertical du fluide par l'intermédiaire de (1.118). Cette propriété de la turbulence stratifiée pourrait avoir pour conséquence de produire un couplage ( $Fr \neq 0$ ) avec l'autre type de mouvement, variant sur une échelle de temps rapide, que nous considérons au prochain paragraphe.

## Échelle de temps rapidement variable

On se place toujours dans le cas où la pression est dominée par la stratification, mais en nous intéressant aux mouvements ayant lieu sur une échelle de temps rapidement variable

$$T \sim \frac{1}{N} \quad (1.120)$$

et on suppose aussi que

$$L \sim H. \quad (1.121)$$

On ne considère donc que les mouvements sur une échelle de temps suffisamment rapide, pour que l'échelle verticale s'adapte instantanément à l'échelle de mouvement horizontale. Les équations du mouvement adimensionnées sont

$$\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} + \nabla_h p' = -Fr \left( \mathbf{u}_h \cdot \nabla_h \mathbf{u}_h + w \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial z} \right) \quad (1.122)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial z} + \rho' = -Fr \left( \mathbf{u}_h \cdot \nabla_h w + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (1.123)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} - w = -Fr \left( \mathbf{u}_h \cdot \nabla_h \rho' + w \frac{\partial \rho'}{\partial z} \right) \quad (1.124)$$

$$\nabla_h \cdot \mathbf{u}_h + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (1.125)$$

En première approximation, ce système d'équations admet pour solutions les ondes internes de gravité linéaires. Une considération des équations dans un régime de  $Fr$ , petit, mais fini, montre l'existence d'ondes internes non-linéaires comme solutions des équations, avec la possibilité d'interactions spatio-temporelles, non-linéaires entre ondes [106], [107]. En pratique, la plupart de ces interactions non-linéaires sont sélectives et correspondent à des interactions résonantes entre ondes. Dans le cadre de notre étude bidimensionnelle d'ondes internes, chapitre 4, nous nous sommes intéressés aux interactions résonantes entre ondes internes [108],[129] dans l'approximation la plus simple, qui consiste à ne considérer les interactions entre ondes que par triades. Signalons aussi, que lorsque  $Fr$  devient grand, la définition d'une onde même devient ambiguë. C'est à ce point que se dessine la frontière entre un régime d'ondes et un régime turbulent. Si on peut faire une analyse de Fourier des champs de l'écoulement, on peut tenter de caractériser les ondes comme des fonctions dont les coefficients de Fourier suivent une relation de dispersion bien définie [94]. Le travail de Lelong et Riley 1991 a étendu la validité des interactions résonantes en incluant le mode vortex, correspondant dans la limite linéaire au mode de turbulence stratifié. Ainsi, il existe des interactions triadiques entre un mode de turbulence stratifié et deux ondes internes où le mode de turbulence stratifié agit comme le catalyseur de l'interaction [75]. La nature générale des interactions entre ondes et vorticité, ainsi qu'un écoulement moyen (que nous  definissons ultérieurement) est cependant mal connue. Au chapitre 5 nous présentons quelques résultats numériques concernant l'évolution des différentes composantes présentes dans une turbulence stratifiée résultant du déferlement d'ondes internes.

Nous montrons au prochain paragraphe comment obtenir les deux types de mouvement lorsque  $Fr = 0$ , à partir d'une décomposition algébrique du champ de vitesse.

### 1.5.3 Décomposition linéaire de Craya-Herring du champ de vitesse

Cette décomposition est une opération mathématique rigoureuse sur le champ de vitesse, où plus généralement sur tout champ de vecteur, qui prend une signification physique pour un fluide stratifié dans la limite où  $Fr = 0$ . En principe on peut l'aborder, soit par l'espace de Fourier soit par l'espace physique. Nous l'énonçons à partir de l'espace de Fourier. L'espace de Fourier (chapitre 3) est muni d'un repère cartésien de vecteurs de base  $\mathbf{e}_{k_1}$ ,  $\mathbf{e}_{k_2}$  et  $\mathbf{e}_{k_3}$ , où  $\mathbf{e}_{k_3}$  est aligné avec la direction verticale. La condition de non divergence du champ de vitesse s'écrit dans l'espace de Fourier [76]

$$\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} = 0 \quad (1.126)$$

On considère le repère local suivant

$$\mathbf{i}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{k_3}}{|\mathbf{k}|}, \quad \mathbf{j}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{i}(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|}, \quad \mathbf{l}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \quad (1.127)$$

Ce repère n'est pas défini pour les modes de Fourier de vecteur d'onde  $\mathbf{k} = (0, 0, k_z)$ . Le champ de vitesse associé à ces modes verticaux représente un écoulement horizontal, non divergent, qui varie seulement avec la coordonnée verticale. On montre que ce mouvement doit être considéré séparément des modes vortex et onde. Son équation du mouvement dans l'espace physique pour ces modes est obtenue en moyennant spatialement l'équation du mouvement horizontale sur les directions horizontales du domaine de calcul [132]. On décompose le champ de vitesse de la façon suivante

$$\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} = \begin{cases} \hat{u}_{\mathbf{k}}^v(t)\mathbf{i} + \hat{u}_{\mathbf{k}}^o(t)\mathbf{j} & \forall k_z \text{ et pour } k_x \text{ et } k_y \text{ non tous nul} \\ \hat{u}_{\mathbf{k}}(t)\mathbf{e}_{k_1} + \hat{v}_{\mathbf{k}}(t)\mathbf{e}_{k_2} & \forall k_z \text{ et pour } k_x = k_y = 0 \end{cases} \quad (1.128)$$

où  $\hat{u}_{\mathbf{k}}^v(t)$  et  $\hat{u}_{\mathbf{k}}^o(t)$  sont les composantes du mode de vecteur  $\mathbf{k}$ , selon  $\mathbf{i}(\mathbf{k})$  et  $\mathbf{j}(\mathbf{k})$ , tandis que  $\hat{u}_{\mathbf{k}}(t)$  et  $\hat{v}_{\mathbf{k}}(t)$  sont les composantes cartésiennes horizontales (selon  $\mathbf{e}_{k_1}$  et  $\mathbf{e}_{k_2}$ ) du mode (vertical) de vecteur  $\mathbf{k}$ . Remarquons que les composantes  $\hat{u}_{\mathbf{k}}^v(t)$  et  $\hat{u}_{\mathbf{k}}^o(t)$  sont chacune non divergente (parce que perpendiculaires à  $\mathbf{k}$ ) et que l'écoulement moyen est non divergent horizontalement. On constate également que la composante  $\hat{u}_{\mathbf{k}}^v(t)$  représente un mouvement horizontal, parce qu'elle est perpendiculaire à  $\mathbf{e}_{k_3}$ ; cette composante est donc également non divergente horizontalement.

Dans l'espace physique, on écrit la décomposition, après transformée de Fourier inverse

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^v(t) + \mathbf{u}^o(t) + \bar{\mathbf{U}}_h(z) \quad (1.129)$$

où  $\bar{\mathbf{U}}_h(z)$  représente l'écoulement moyen horizontal. La composante  $\mathbf{u}^v(t)$  s'écrit aussi

$$\mathbf{u}^v(t) = \nabla \times \psi \mathbf{e}_3 \quad (1.130)$$

où  $\psi(\mathbf{x}, t)$  est un champ scalaire, parce qu'elle est non divergente et horizontale.

La composante  $\mathbf{u}^o(t)$  est caractérisée par le fait que sa composante horizontale est irrotationnelle. En effet, dans l'espace de Fourier chaque mode de cette composante est orienté selon la direction  $\mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{i}$ . Le rotationnel de chaque mode est orienté selon  $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i}$ , qui est un vecteur horizontal.

La relation  $\mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{i}$  permet aussi de dire que la composante  $\mathbf{u}^o(t)$  est le rotationnel d'un vecteur dont la transformée de Fourier est orientée selon  $\mathbf{i}$ , soit

$$\mathbf{u}^o(t) = \nabla \times (\nabla \times \phi \mathbf{e}_3) \quad (1.131)$$

En définitive, on retient la décomposition de Craya-Herring dans l'espace physique

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \nabla \times \psi \mathbf{e}_3 + \nabla \times (\nabla \times \phi \mathbf{e}_3) + \bar{\mathbf{U}}_h(z) \\ \mathbf{u}^v(t) & \qquad \qquad \mathbf{u}^o(t) \end{aligned} \quad (1.132)$$

où on a indiqué les composantes sous les termes de la décomposition.

Riley et al [113] ont montré que les équations du mouvement dans l'espace de Fourier auxquelles obéissent les composantes  $\mathbf{u}_k^v(t)$  et  $\mathbf{u}_k^o(t)$  sont justement les transformées de Fourier des équations (1.116-1.119), pour la turbulence stratifiée et des équations (1.122-1.125), pour les ondes internes de gravité linéaires, dans la limite où  $Fr = 0$ . Alternativement, on peut reformuler les équations de Navier-Stokes dans l'espace physique en terme des variables  $\xi_z = \nabla_h^2 \psi$  (vorticité verticale),  $w = -\nabla_h^2 \phi$  (vitesse verticale) et  $\bar{\mathbf{U}}_h(z)$  [132] et conclure sur la nature des mouvements pour  $Fr$  infinitésimal.

#### 1.5.4 Remarques sur le problème de décomposition

Nous avons mis en évidence l'existence de composantes du mouvement ayant des propriétés différentes. La décomposition est diagnostique et son importance peut être comprise grâce au nouvel ordre qu'elle établit entre les composantes du mouvement. De plus, on sait que les écoulements stratifiés turbulents, initialement forcés de façon tridimensionnelle, subissent un changement de régime radical (au bout d'un temps de l'ordre de la fréquence de Brunt-Väisälä), suite à l'effondrement vertical de l'écoulement. Le régime suivant est caractérisé par une petite valeur du nombre de Froude et possède une structure quasi-horizontale compatible avec les équations pour la turbulence stratifiée (1.116-1.119). Nous avons également vu que la décomposition de Craya-Herring n'a de sens physique que pour  $Fr = 0$ . Des efforts visant à généraliser la décomposition à des nombres de  $Fr$  finis ont été faits [126], [98], mais nous ne traitons la question qu'au chapitre 6.

L'étude des interactions entre différentes composantes de l'écoulement pose le problème de la décomposition pronostique. Il s'agit de la décomposition qui saurait prévoir l'évolution d'une composante isolée du mouvement. Ce problème est d'une importance considérable et son traitement est bien plus avancé dans un contexte météorologique [90], [91] et océanographique [98], où l'on considère les équations primitives (équations pour le champ de vitesse horizontal d'une mince couche de fluide), ou bien des modèles plus simples, en présence de rotation rapide. Le modèle pronostique le plus simple et le plus connu est le modèle de prédiction quasi-géostrophique. En principe, toutes les approches analytiques envisagées s'appliquent à des cas où la non-linéarité est faible [90].

Dans ce contexte, le cas des équations de Navier-Stokes dans l'approximation de Boussinesq, modèle complexe tridimensionnel avec stratification continue, apparaît comme marginal. Nous n'aborderons pas le problème de la décomposition pronostique, dont l'utilité pour la configuration étudiée n'est pas certaine. A notre connaissance, les seuls travaux abordant le problème pronostique pour les équations primitives (approchant les équations de Navier-Stokes en complexité) sont les travaux de [137] et [138]. Les auteurs abordent le problème pronostique par le développement de schémas asymptotiques d'inversion de vorticité potentielle, là aussi pour des régimes faiblement non-linéaires, autrement dit, fortement stratifiés et en rotation rapide.

### 1.5.5 Remarques

Pour conclure cette section, nous constatons que dans un régime où  $Fr$  tend vers zéro, la partie onde d'un écoulement,  $(\mathbf{u}^o(t))$  est caractérisée par un vecteur vorticité horizontal, tandis que la partie vorticale (turbulence stratifiée) est caractérisée par la non divergence horizontale du champ de vitesse  $\mathbf{u}^v(t)$ . Enfin, l'écoulement moyen, qui est souvent oublié dans l'application de la décomposition de Craya-Herring, satisfait à deux propriétés : sa vorticité est verticale et il est non divergent horizontalement. C'est la raison pour laquelle l'écoulement moyen n'est pas obtenu naturellement comme composante du mouvement suite à l'analyse dimensionnelle effectuée sur les équations de Navier-Stokes. Enfin rappelons que les différents types de mouvements sont couplés, notamment pour des nombres de Froude non nuls. En plus des interactions résonantes entre ondes et mode vortex, on pense notamment que le mouvement associé à la turbulence stratifiée peut rayonner des ondes internes.

## 1.6 Les solutions linéaires des équations

La version linéarisée des équations (1.23-1.23) admet des solutions élémentaires en ondes monochromatiques, planes dans un milieu illimité spatialement. La relation de dispersion admet aussi comme racine la pulsation  $\omega = 0$  et les modes de mouvements correspondants constituent le mode vortex linéaire. Le mode vortex ainsi obtenu est horizontal et à divergence nulle avec une dépendance en  $z$ , la direction verticale, en accord avec les conclusions de la décomposition de Craya-Herring. Selon les travaux de Lombard et Riley 1996 [80], on exprime ces solutions en fonction d'un paramètre d'amplitude  $a$ , contrairement à l'expression traditionnelle en fonction de l'amplitude verticale du champ vitesse [40]

$$u = -\frac{a\omega k_x}{k_x^2 + k_y^2} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} \quad (1.133)$$

$$v = -\frac{a\omega k_y}{k_x^2 + k_y^2} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} \quad (1.134)$$

$$w = \frac{a\omega}{k_z} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} \quad (1.135)$$

$$\rho' = \frac{N^2 a}{k_z} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t + \pi/2)}. \quad (1.136)$$



L'amplitude de la vitesse verticale d'une onde,  $w_0$  est reliée à l'amplitude par

$$w_0 = \frac{\omega}{k_z} a. \quad (1.137)$$

La relation de dispersion linéaire des ondes internes est anisotrope. Pour le cas de la stratification linéaire et dans l'approximation de Boussinesq elle s'écrit

$$\begin{aligned} \omega^2(\mathbf{k}) &= N^2 \frac{k_x^2 + k_y^2}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \\ &= N^2 \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (1.138)$$

où  $\theta$  est l'angle que fait le vecteur d'onde avec l'horizontale. On voit que la fréquence ne dépend que de l'angle d'inclinaison du vecteur d'onde et pas de la longueur d'onde.

La vitesse de groupe  $\mathbf{c}_g$  possède une forme concise en coordonnées cylindriques et est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_g &= \nabla_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}) \\ &= N \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{e}_r \times \mathbf{k})}{k^3} \end{aligned} \quad (1.139)$$

où  $\mathbf{e}_r$  est le vecteur unitaire radial et  $k$  le module du vecteur d'onde. Par conséquent, on a  $\mathbf{c}_g \cdot \mathbf{k} = 0$  qui met encore en évidence le caractère anisotrope des ondes internes.

Enfin, la relation de non divergence du champ de vitesse permet de conclure que les ondes internes sont transversales

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.140)$$

## 1.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons introduit le modèle de fluide stratifié dans l'approximation de Boussinesq. Nous avons rappelé comment se situe ce modèle par rapport au modèle de fluide parfait compressible et nous avons exposé les lois de conservation du fluide stratifié. Une considération matérielle de la vorticité nous a permis d'introduire la vorticité potentielle. La vorticité potentielle possède des propriétés de conservation mati rielle et globale. La conservation globale de vorticité potentielle est encore valable pour un fluide conducteur thermique et visqueux. Ensuite nous avons considéré différents adimensionnements pour les équations du fluide stratifié. On met ainsi en évidence l'existence de deux composantes d'un écoulement stratifié, la partie onde et la partie turbulence stratifiée. La décomposition de Craya-Herring, physiquement significative pour un nombre de Froude nul, permet de décomposer le mouvement en ondes linéaires et mode vortex linéaire, mais motive aussi l'introduction d'une troisième composante, l'écoulement moyen. Finalement nous avons rappelé quelques propriétés des solutions des équations de Navier-Stokes dans l'approximation de Boussinesq linéarisées.

## Chapitre 2

# Eléments de bibliographie

### 2.1 Introduction

Dans ce court chapitre, nous passons en revue la littérature dont nous avons connaissance et dont l'existence est pertinente dans le cadre de l'étude présentée dans ce manuscrit. Au cours de nos études numériques, nous avons abordé différents aspects des écoulements stratifiés, que l'on peut tenter de classer par différents thèmes dans la littérature. En premier lieu nous distinguons les aspects mécaniques et les aspects statistiques des ondes internes de gravité. Par aspects mécaniques, nous entendons l'approche déterministe permettant d'étudier les processus physiques variés impliqués dans la dynamique des ondes, tels que les interactions ondes-ondes, ondes-vortex ou ondes-écoulement moyen. Toutefois, les aspects statistiques concernent plutôt les propriétés statistiques d'écoulements stratifiés complexes, contenant des ensembles d'ondes internes, mais aussi des régimes d'écoulements non ondulatoires turbulents, comme nous l'avons vu précédemment.

Remarquons que la méthode de dynamique modifiée décrite au chapitre 6, est basée sur une approche Hamiltonienne des équations du mouvement d'un fluide parfait stratifié. La dynamique Hamiltonienne des fluides a connu un nouvel essor depuis les années 80, après la popularisation d'une approche Hamiltonienne (mécanique de Poisson) plus générale que l'approche originale, basée sur le principe de la moindre action. Aujourd'hui, cette approche est bien ancrée en dynamique des fluides géophysiques théorique. Nous présentons ce sujet au chapitre 6.

### 2.2 Articles de revue sur les ondes internes de gravité

Les ondes internes de gravité apparaissent d'une part comme un problème de mécanique des fluides fondamentale et d'autre part comme des objets ayant une importance quasiment universelle dans les écoulements géophysiques stratifiés. Une revue ancienne portant sur les aspects fondamentaux est celle de Tolstoy 1963 [133]. Les ondes internes océaniques sont décrites dans les revues de Garrett et Munk 1979 [39] ou de Munk 1981 [100] pour les aspects linéaires, de Müller et al 1986 [99] pour les aspects faiblement non-linéaires et aussi en partie dans Müller 1995 [98] pour des travaux plus récents. Des revues plus anciennes et plus spécifiques sont indiquées dans l'article de

Müller 1986. L'atmosphère en tant que milieu stratifié admet également des ondes internes, appelées généralement dans ce contexte, des ondes de gravité. Deux revues par Fritts [34], [35] décrivent l'état de l'art atteint dans les années 80. Une revue plus récente est celle de Wurtele 1996 [146] qui se concentre plus particulièrement sur les ondes atmosphériques topographiques.

## 2.3 Expériences en laboratoire

Les ondes internes de gravité ont été étudiées en laboratoires dans plusieurs configurations. Une des premières observations du caractère anisotrope des ondes internes est l'étude de Mowbray et Rarity [97]. Ces expériences ont montré un bon accord avec la théorie linéaire des ondes internes. Les études de la dynamique propre d'une onde interne (approche déterministe) sont effectuées sur une plus grande échelle spatiale que dans l'expérience de Mowbray et Rarity. En laboratoire, on peut produire des ondes stationnaires dans des cuves fermées par diverses sources d'excitation. Une série d'expériences menées au début des années soixante dix, ont montré l'instabilité d'ondes internes dans différentes configuration stationnaires, ondes internes interfaciales [24], ondes stationnaires excitées par un batteur [86],[87], ondes stationnaires excitées par instabilité paramétrique [89], ondes stationnaires dans la direction verticale [84]. Ainsi, un champ d'ondes internes est, en général, instable et peut dans certaines conditions transiter vers un état de perte de cohérence spatio-temporelle, que l'on qualifie communément de déferlement du champ d'onde. Ce type de déferlement est à distinguer du déferlement associé à une onde hydrodynamique de surface, où le réel déferlement est associé à une croissance de l'amplitude de l'onde au cours du temps. De plus, dans le cas des ondes surfaciques, l'accélération des particules de fluide est de l'ordre de la constante gravitationnelle. Ceci n'est pas valable pour les ondes internes et on ne peut donc pas en général faire d'analogies entre ondes internes et ondes surfaciques. Les études sur des ondes internes de faible amplitude ont permis de développer et de valider une théorie faiblement non-linéaire dont l'objet est de décrire les interactions entre ondes internes. Dans un régime faiblement non-linéaire, équivalent à un petit nombre de Froude,  $Fr$ , les interactions entre ondes sont essentiellement résonantes. Dans ce cas, les paramètres des ondes en interaction, leurs fréquence et vecteur d'onde ( $\omega(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ ), sont reliés par des conditions de résonance. Ainsi, la somme des vecteurs d'ondes et la somme des fréquences, respectivement, des ondes en interaction sont nulles. On imagine donc les interactions entre ondes comme le forçage d'une onde par toutes les autres. Au premier ordre en  $Fr$ , les termes quadratiques dans les équations du mouvement couplent les ondes internes par triades. De plus les triades sont dépendantes les unes des autres, parce qu'une onde peut être associée à plusieurs triades. Toutes les études de laboratoire mentionnées ont pu valider la théorie des interactions résonantes. En particulier, une configuration dans laquelle une onde de faible amplitude possède initialement l'essentiel de l'énergie, est instable et peut déferler dans le sens expliqué plus haut. Le travail théorique de Hasselmann [47] a montré qu'une onde interne est instable vis à vis d'ondes internes secondaires de fréquence plus basse. L'expérience de McEwan et Robinson 1975 [89] a montré le caractère paramétrique de l'instabilité d'une onde interne stationnaire. Cette

instabilité est souvent appelée instabilité paramétrique sous-harmonique pour les ondes internes. Elle représente une classe importante d'interactions résonantes entre ondes internes. L'instabilité paramétrique est réalisée lorsque la fréquence des modes instables d'une triade est égale à la moitié de la fréquence de l'onde primaire. Ce type d'instabilité est fondamental pour l'étude numérique de Bouruet-Aubertot et al 1995 [12] et pour l'expérience de Bénielli et Sommeria 1996 [9]. Ces travaux portent uniquement sur des ondes stationnaires, mais l'instabilité paramétrique est aussi d'une importance capitale pour nos études numériques bi-, et tridimensionnelles (chapitres 4 et 5). Il faut noter que la dynamique d'ondes internes stationnaires considérées en laboratoire, dont les longueurs d'onde sont de l'ordre du dispositif d'étude, est sévèrement contrainte par la géométrie du dispositif. Les échelles auxquelles se font effectivement les interactions résonantes lors de l'instabilité de l'onde sont de taille intermédiaire (pour cause de la viscosité, qui agit plus fortement sur les petites échelles) et sont affectées par la contrainte géométrique. Il n'en est pas de même pour les ondes propagatrices dans un milieu illimité, mais qui sont difficiles à produire en laboratoire. Les ondes propagatrices peuvent par contre être testées numériquement jusque dans le domaine fortement non-linéaire.

Dans les expériences de McEwan [86], certaines configurations d'ondes produisent ce que nous avons appelé le déferlement, tandis que d'autres semblent être régies par des régimes dynamiques périodiques en accord avec les solutions périodiques des équations vérifiées par les ondes résonantes [23]. Le déferlement est observé pour des ondes de plus forte amplitude, où la théorie faiblement non-linéaire n'est plus valable. Le déferlement d'un champ d'onde et le régime d'écoulement résultant, produisent des changements irréversibles dans le fluide par l'intermédiaire de processus de petites échelles. Le régime qui suit le déferlement possède une grande complexité spatio-temporelle de sorte qu'il peut être qualifié de turbulent. Ce type de turbulence possède toutefois des propriétés très marquées par la stratification. Ces écoulements, qu'ils soient produits par déferlement d'ondes ou par d'autres mécanismes sont en général abordés par des outils statistiques et nous parlons des travaux antérieurs les concernant plus tard.

## 2.4 Instabilité linéaire d'une onde interne

Une onde interne linéaire, plane et monochromatique est une solution exacte des équations de Navier-Stokes dans l'approximation de Boussinesq, mais elle est instable à de petites perturbations [93]. Le problème de stabilité linéaire est un problème complexe et a été étudié en plusieurs étapes. Les deux premiers travaux de Mied 1976 [93] et Drazin 1977 [25] concernent la stabilité linéaire d'une onde bidimensionnelle. Mied utilise un système de coordonnées en translation à la vitesse de phase de l'onde interne (primaire) où l'axe  $z$  est aligné avec le vecteur d'onde de l'onde primaire et montre en utilisant la théorie de Floquet, qu'une onde d'amplitude finie est instable à de petites perturbations. De plus, pour une onde d'amplitude infinitésimale, on peut établir l'équivalence entre les modes instables et la théorie des interactions résonantes. Les conclusions de Drazin sont similaires, mais il utilise un formalisme différent qui n'a pas été poursuivi. Klostermeyer améliore la

méthode de Mied [61], introduit la viscosité dans le problème [62] et traite également le problème tridimensionnel [63]. Premièrement, Klostermeyer conclut que l'influence du nombre de Reynolds est importante pour les modes les plus instables. En effet, l'onde est instable à des perturbations d'échelle arbitrairement petite pour un nombre de Reynolds grand. Il n'en est pas de même pour un écoulement à petit nombre de Reynolds, comme une simulation numérique directe, par exemple, où l'instabilité a lieu sur une échelle spatiale comparable à l'échelle de l'onde primaire. Deuxièmement, il conclut que lorsque l'onde primaire est statiquement instable ( $a > 1$  dans (1.137), les modes d'instabilité les plus amplifiés sont tridimensionnels.

Récemment, Lombard et Riley 1996 [80] ont résolu le problème plus systématiquement. En plus des modes instables, ils examinent également l'énergétique du problème pour des amplitudes et des angles de l'onde primaire variables en général pour  $Re = 10^6$ , mais aussi pour des nombres de Reynolds plus faibles. Cela permet de tester les résultats avec des simulations numériques, directes dont les nombres de Reynolds sont relativement petits. Bien que n'échantillonnant qu'une petite partie de l'espace des paramètres du problème ( $a, \theta, Pr, Re$ ), ce travail met en évidence la complexité de la dynamique d'une simple onde interne monochromatique. L'algorithme de solution de Lombard et Riley suppose que la périodicité des modes instables en direction de propagation de l'onde primaire est identique à la périodicité de l'onde primaire. Les résultats sont donnés en fonction des nombres d'onde  $\alpha$  et  $\beta$  des modes instables dans le système proposé par Mied. Le plan généré par  $\alpha$  et  $\beta$  est le plan perpendiculaire au vecteur d'onde primaire. En particulier, le plan  $\beta = 0$  définit le plan vertical bidimensionnel de l'onde primaire. L'instabilité se situe dans trois régions du plan généré par  $\alpha$  et  $\beta$ . Dans chacune des régions, les modes sont régis par une dynamique propre. L'instabilité est gouvernée par plusieurs types de transferts, la production d'énergie cinétique fluctuante par le cisaillement de l'onde primaire, la production d'énergie potentielle fluctuante par le gradient de densité dû à l'onde primaire et le flux de chaleur marquant l'échange entre énergie cinétique fluctuante et énergie potentielle fluctuante. Chacun des termes énumérés est à priori de signe quelconque. L'étude de Lombard et Riley mène à la conclusion qu'aucune transition marquée de la structure de l'instabilité n'a lieu lorsqu'on franchit l'amplitude critique  $a = 1$ . Par conséquent l'instabilité n'est pas caractérisée par la nature de la stabilité statique de l'onde primaire. On classe alors la nature de l'instabilité plutôt selon son forçage, par les mécanismes de forçage que nous avons illustrés un peu plus haut. En effet, il semble que l'instabilité ait tendance à être gouvernée plutôt par la production d'énergie potentielle fluctuante pour des amplitudes grandes de l'onde primaire.

## 2.5 Interactions résonantes entre ondes faiblement non-linéaires

Lorsque nous avons présenté les études menées en laboratoire sur les ondes internes, nous avons décrit l'essence de la théorie des interactions résonantes. Il s'agit d'une théorie faiblement non-linéaire [10], [15], [23], qui a reçu de solides confirmations expérimentales, non seulement pour les ondes internes, mais pour les ondes hydrodynamiques en général, ainsi que dans d'autres domaines de la physique, comme par exemple l'optique non-linéaire [142]. Les interactions résonantes sont en-

core beaucoup étudiées expérimentalement et théoriquement. Ainsi, on s'intéresse aux interactions du premier ordre entre différentes triades ou bien aux interactions d'ordre plus élevé. En principe la dynamique de l'enveloppe d'un paquet d'ondes ayant un spectre de Fourier étroit, dont les composantes interagissent non-linéairement, est peut être modélisée à l'aide d'une équation d'amplitude non-linéaire. Phillips 1981 [107] montre, par exemple, que les interactions résonantes d'un paquet d'ondes hydrodynamiques de surface faiblement non-linéaires sont équivalentes à la considération d'une équation de Schrödinger non-linéaire.

Cependant, lorsque les ondes mises en jeu dans les interactions non-linéaires ont des amplitudes, fréquences et vecteurs d'ondes très différents, l'approximation de faible non-linéarité n'est plus vérifiée. Dans le cas étudié ici, on s'intéresse à la déstabilisation d'une onde interne de grande échelle par des transferts d'énergies vers des ondes de petite échelle. Les vitesses de phase et de groupe des ondes de petite échelle peuvent alors être de l'ordre de la vitesse d'une particule fluide associée aux ondes de grande échelle [107]. Retenons que le rapport entre la vitesse de groupe des petites ondes sur la vitesse maximale d'une particule fluide définit le paramètre de non-linéarité du système d'ondes [71]. Lorsque celui-ci est grand, la limite de validité de la théorie des interactions résonantes est atteinte.

## 2.6 Études statistiques

La dynamique d'un ensemble d'ondes internes est d'un grand intérêt en dynamique des fluides géophysiques. D'un point de vue des processus dynamiques, la situation devient rapidement inextricable, lorsqu'on s'intéresse à un grand nombre d'ondes. L'approche déterministe exposée jusqu'ici doit alors être abandonnée en faveur d'une approche statistique.

En océanographie, le modèle de Garrett et Munk 1979 [39] modélise remarquablement les résultats des spectres d'énergie d'ondes internes mesurés in situ, loin des sources et des puits d'ondes internes. Le spectre de Garrett et Munk donne de bons résultats, bien qu'il s'agisse d'un modèle linéaire. Toutefois, ce modèle ne tient pas compte des autres composantes pouvant exister dans un écoulement stratifié: le mode vortex et l'écoulement moyen. De plus il ne modélise pas les interactions non-linéaires entre les ondes, mais aussi entre les ondes et le mode vortex ou l'écoulement moyen (Müller et al 1986 [99]). La considération d'effets non-linéaires dans le spectre d'énergie d'un ensemble d'ondes internes est possible grâce à la théorie des interactions résonantes. Hasselmann a développé une théorie de la turbulence faible [44], [45], pour des ondes hydrodynamiques de surface. Cette théorie a été généralisée à d'autres systèmes d'ondes [46], [47]. Pour les ondes internes une équation d'évolution pour le spectre de d'énergie d'un système d'ondes a été dérivée et intégrée dans des conditions variées dans les travaux [102], [85] et [109].

Lorsque l'on considère des ondes de grande amplitude, la limite de forte non-linéarité est atteinte. Dans ce cas la modélisation théorique des spectres d'énergie devient impossible. La relevance des théories spectrales basées sur l'approche de la théorie des interactions résonantes à la modélisation des ondes internes océaniques a reçu de vives critiques de la part de Holloway 1980, 1982 [53],

[54]. Holloway montre en effet que l'essentiel des ondes internes océaniques ont des amplitudes trop importantes, de quelques ordres de grandeurs, pour constituer des ondes faiblement non-linéaires. Le travail de Holloway [55], [56], [57] a aussi montré que le spectre de Garrett et Munk ne rend pas compte de la porte des ondes internes et qu'il doit exister un régime dynamique, d'une part différent d'un régime ondulatoire linéaire ou quasi-linéaire et d'autre part différent d'un régime proche de celui de la turbulence homogène isotrope, non affectée par la stratification du problème. Ce régime s'appelle turbulence d'ondes et la stratification y est à priori importante. Toutefois, remarquons que l'appellation turbulence d'onde ne définit pas exactement le type d'écoulement considéré. En effet, on ne sait pas modéliser les écoulements pour lesquels les effets non-linéaires inertiels sont de la même importance que les effets dus à la stratification. En général, une turbulence d'ondes internes est caractérisé par une zone intertielle appelée la "buoyancy subrange", dont le spectre vertical d'énergie cinétique (potentielle) varie selon une loi de puissance  $N^2 k^{-3_z}$ , où  $N$  est la fréquence de Brunt-Väisälä et  $k_z$  le nombre d'onde vertical. De tels spectres ont été observés dans la nature, mais aussi dans des expériences numériques. Plusieurs théories basées sur des arguments dimensionnels ont été proposées pour rendre compte de ces caractéristiques [81], [105], [141], [56]. Ces théories diffèrent notamment par l'aspect fondamental de l'importance dynamique accordée au flux de chaleur dans la zone intertielle. Le théorie de Lumley 1964 [81] repose sur une évolution à la Kolmogorov, mais tient compte des possibles fuites d'énergie cinétique par conversion en énergie potentielle grâce au flux de chaleur. En conséquence l'énergie, potentielle devrait être très importante à petite échelle et conduire à un taux de dissipation très grand, ce qui n'est pas vrai. Weinstock [141] a supposé qu'un flux inverse d'énergie potentielle se produirait, des petites vers les grandes échelles. Cette conjecture a été testée par Sidi et Dalaudier 1989 [125], mais les résultats en faveur de la théorie de Weinstock sont peu convaincants. Une autre approche, proposée par Holloway [56], suppose que le flux de chaleur joue un rôle insignifiant le long de la zone intertielle et cette conjecture a été confirmée par les expériences numériques bidimensionnelles d'ondes internes stationnaires déferlantes de Bouruet-Aubretot et al 1996 [13].

## 2.7 Les simulations numériques

Le travail récent de Lombard et Riley [80] sur le problème de stabilité linéaire d'une onde interne, ainsi que celui de ses prédécesseurs et la synthèse générale faite par Phillips 1981 [107] sur la dynamique faiblement non-linéaire d'ondes et les interactions résonantes entre ondes montrent que l'instabilité et le déferlement d'une onde interne sont des phénomènes complexes, dont la compréhension demande encore beaucoup d'études. Les expériences de laboratoire menées sur le sujet, n'ont pas permis d'explicitier les processus physiques mis en jeu dans l'instabilité d'un champ d'ondes. En effet, ces expériences ne permettent pas de mesurer des quantités physiques de façon suffisamment détaillée. Les études numériques récentes ou en cours, pourraient donner une nouvelle impulsion à l'étude théorique des processus non-linéaires d'instabilité, car elles permettent de connaître des quantités physiques auxquelles on n'a pas ou difficilement accès expérimentalement.

En particulier il est aujourd'hui possible d'effectuer des études numériques portant sur des processus de mécanique des fluides ayant lieu sur des échelles spatio-temporelles trop petites pour être observés expérimentalement.

La plupart des études numériques existantes en milieu stratifié portent exclusivement d'écoulements complexes et sont destinées à tester des propriétés statistiques des écoulements. Holloway a considéré à plusieurs reprises [120], [111], soit des ensembles d'ondes internes forcées statistiquement aux grandes échelles spatiales d'une configuration donnée, soit des écoulements turbulents stratifiés plus vigoureux. Il s'est intéressé à la transition et à la limite entre une turbulence d'ondes et une turbulence stratifiée. Nous avons déjà exposé l'adimensionnement des équations du mouvement proposé par Riley et al 1981 [113] et la décomposition associée au champ de vitesse. Les deux études de Herring et Métais 1989 [92], [51] font appel à cette décomposition pour analyser les résultats de simulations numériques d'écoulements stratifiés. On peut noter cependant que ces deux travaux utilisent une forme simplifiée de la décomposition de Craya-Herring, puisqu'aucun diagnostic de l'écoulement moyen n'est effectué.

Par rapport à ces travaux, les études numériques ayant des conditions initiales "déterministes" plus simples, comme par exemple une onde simple que nous considérons dans ce manuscrit, sont plus récentes, parce que les ressources de calcul mises en jeu dans ces simulations sont plus importantes.. En deux dimensions d'espace, Bouruet-Aubertot et al [12] ont pu étudier le déferlement d'une onde interne stationnaire. Les études numériques d'ondes en trois dimensions d'espace sont encore plus récentes. Andreassen et al 1994 [4], [38], [60] ont étudié la dynamique d'une onde de gravité dans une atmosphère compressible stratifiée en présence d'un cisaillement vertical en deux et trois dimensions d'espace. Ils mettent en évidence une transition nette de l'instabilité d'un régime bidimensionnel vers un régime tridimensionnel dans la direction transverse de l'onde, initialement bidimensionnelle (dans un plan vertical). Une telle transition a été observée également par Caulfield et Peltier 1994 [21] dans la tridimensionalisation d'une couche de mélange et par Afanasyev et Peltier 1998 [2] dans une expérience numérique similaire à celle de Andreassen. Dans une seconde série d'articles Andreassen et al 1998 [3], [36], ont exploré la dynamique de la vorticité créée par le déferlement de l'onde. Le mécanisme d'instabilité contient des analogies avec le déferlement d'une onde interne de gravité considéré au chapitre 5. Mais la présence de l'écoulement cisailé de base modifie néanmoins profondément la dynamique du déferlement, par rapport à notre cas d'une onde interne se propageant dans un milieu au repos. De plus, le cisaillement a aussi le rôle pratique dans ces simulations. Le code de résolution n'étant pas périodique dans la direction verticale, le cisaillement assure ainsi que le déferlement de l'onde ait lieu dans le domaine de calcul. En effet, l'onde déferle alors proche de son niveau critique. Le déferlement d'une onde interne approchant un niveau critique a également été étudié par Winters et Riley 1992 [145] et Winters et D'Asaro 1994 [143]. Enfin, notons une étude récente de Lelong et Dunkerton [73], [74], qui concerne l'instabilité et le déferlement d'une onde interne d'inertio-gravité dans la limite de petites et grandes amplitudes. Il faut remarquer que la présence de rotation modifie la dynamique du déferlement considérablement. Ainsi, la force de Coriolis produit un cisaillement supplémentaire au sein de l'onde. La dynamique



de l'écoulement est alors réellement tridimensionnelle, même au stade de de l'instabilité linéaire de l'onde primaire.

## 2.8 Ondes nonlinéaires dispersives

D'un point de vue uniquement déterministe, il est important de mentionner les travaux effectués sur les ondes non-linéaires dispersives en général. Cette approche consiste à étendre et à formaliser le concept d'onde linéaire rencontré partout en physique. La plupart des aspects concernant les ondes dispersives non-linéaires en hydrodynamique sont décrits dans les monographies [142], [71], [77], [23]. Historiquement, une partie des techniques analytiques ont d'abord été développées pour les ondes hydrodynamiques de surface, puis elles ont été appliquées au cas des ondes internes de gravité.

Lorsque la phase des ondes varie beaucoup plus rapidement que les inhomogénéités du milieu, on peut appliquer une théorie WKB, et décrire la dynamique d'un train d'onde par une relation de dispersion et une équation dynamique pour l'énergie de l'onde. La théorie des ondes linéaires ou non-linéaires [142] dispersives généralise ces notions et montre que la quantité dynamique à considérer est l'action du train d'ondes, plutôt que l'énergie. De façon générale, l'équation dynamique pour l'action est l'équation d'Euler-Lagrange dérivant du Lagrangien pour le champ d'onde par l'application d'un principe variationnel moyenné sur la phase de l'onde. L'équation pour l'action couple le champ d'onde à l'écoulement moyen. La séparation des échelles de temps de la phase et de l'action, permet d'interpréter l'action de l'onde comme un invariant adiabatique, notion familière de mécanique analytique [69]. On montre notamment qu'un champ d'onde exerce une pression de radiation (qui est égale à une contrainte) sur l'écoulement moyen [16], ce qui peut produire des variations dans l'écoulement moyen. Les interactions entre ondes et écoulement moyen sont un domaine très vaste, comme en témoigne la monographie de Craik [23]. Une revue illustrant les interactions entre ondes et écoulement moyen d'un fluide stratifié est celle de Grimshaw 1984 [43].

## Chapitre 3

# Programmation d'une méthode de résolution pseudo-spectrale pour un environnement parallèle à mémoire distribuée

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode numérique pseudo-spectrale utilisée pour intégrer les équations de Navier-Stokes dans l'approximation de Boussinesq, ainsi que son implémentation sur une machine parallèle à mémoire distribuée.

Les méthodes de résolution spectrales sont aujourd'hui classiques et nous ne les présenterons que brièvement. Elles sont utilisées abondamment pour la simulation numérique directe<sup>1</sup> (SND) d'écoulements turbulents mettant en jeu des géométries simples avec des conditions aux limites appropriées, en général également simples. La pratique des méthodes spectrales en mécanique des fluides est décrite dans l'ouvrage de Canuto et al [18]. Les méthodes spectrales n'offrent pas la seule approche possible à la SND d'écoulements hydrodynamiques. Lorsqu'il est nécessaire de traiter des conditions aux limites plus complexes, on a recours à d'autres méthodes numériques. On voit ainsi l'apparition, depuis quelques années, de travaux portant sur la SND d'écoulements turbulents à l'aide de méthodes de volumes finis [29] ou de différences finies [114] et différences finies compactes [72].

La raison d'être des méthodes pseudo-spectrales en hydrodynamique turbulente est liée au fait que les solutions approchées générées par ces méthodes possèdent de bonnes propriétés de convergence et ce d'autant plus que les solutions exactes du système d'équations à résoudre sont régulières. De plus, ces méthodes permettent de calculer exactement la phase d'une onde, ce que ne

---

1. Une simulation numérique est dite directe lorsque toutes les échelles de l'écoulement considérées sont résolues dans la simulation.

permettent pas d'autres méthodes numériques. Cette propriété est intéressante dans le cas présent, puisque nous nous intéressons à l'étude de phénomènes ondulatoires.

Nous avons implémenté la méthode numérique avec deux types de conditions aux limites. L'utilisation de conditions aux limites périodiques dans les trois directions d'espace permet de traiter des ondes propagatrices dans une boîte périodique [18]. La deuxième configuration met en jeu des conditions aux limites symétriques et permet de simuler des ondes stationnaires dans une boîte imperméable.

Les programmes que nous avons développés sont destinés à une machine parallèle à mémoire distribuée. Au sein d'un tel environnement, les calculs sont faits sur un ensemble de nœuds, composés d'un processeur ayant chacun une mémoire individuelle. Le domaine de calcul, sur lequel on souhaite résoudre le problème physique, est décomposé et distribué sur les nœuds de la machine. La connaissance de données non locales à un nœud est possible, mais au prix d'échanges de messages avec des nœuds distants. Lorsque ces échanges sont à la charge du programmeur, la programmation d'un environnement parallèle est plus complexe que la programmation d'une machine mono-processeur. Aux difficultés algorithmiques vient s'ajouter la gestion explicite des communications entre nœuds de la machine.

Après une brève présentation de la méthode pseudo-spectrale utilisée, nous introduirons quelques notions portant sur la programmation en environnement parallèle d'une architecture à mémoire distribuée. Nous décrirons ensuite la mise en œuvre de la méthode, par une technique de programmation qui gère explicitement le parallélisme, en utilisant la bibliothèque d'échanges de messages, MPI. Cette mise en œuvre repose en partie sur le développement d'un sous-programme parallèle et efficace de calcul de transformée de Fourier rapide en trois dimensions. Il existe deux approches possibles au calcul d'une transformée de Fourier rapide d'un champ distribué. Nous avons choisi l'approche par transposition, dont nous décrirons l'algorithme programmé en détail. L'autre approche, la méthode de distribution est également décrite brièvement. Enfin, nous comparerons les volumes de données échangés par les deux méthodes.

## **3.2 L'algorithme pseudo-spectral de résolution des équations de Navier-Stokes**

### **3.2.1 Position du problème**

Le principe de la résolution numérique d'un système d'équations aux dérivées partielles (edp) par une méthode spectrale, est basé sur la recherche d'une solution approchée du problème, écrite en projection sur une base de fonctions. On transforme ainsi le problème de départ en un système plus facilement intégrable, numériquement. Les méthodes spectrales peuvent être développées rigoureusement à partir d'une formulation variationnelle des edps à résoudre et de l'application de la méthode des résidus pondérés. On cherche à minimiser le résidu obtenu par substitution d'une solution approchée dans les équations du problème. De ce point de vue, les méthodes spectrales apparaissent comme une variante de la méthode de Galerkin. Ces développements sont exposés par

exemple dans les ouvrages de Canuto et al [18] et de Fletcher [30]. Nous nous contentons de donner ici une approche plus directe, court-circuitant certains développements mathématiques. Notre point d'entrée se situe directement au niveau du résultat de la minimisation du résidu obtenu par la recherche d'une solution approchée écrite en projection sur une base de Fourier. Ce point d'entrée correspond au système d'équations de Navier-Stokes écrites dans l'espace de Fourier. Cela permet surtout de voir quelles sont les équations à résoudre numériquement.

Nous disposons d'un référentiel inertiel muni d'un système de coordonnées cartésiennes  $\mathbf{x} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ . L'espace de Fourier associé est représenté par le vecteur d'onde  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) = (k_1, k_2, k_3)$ . Rappelons les équations de Navier-Stokes dans l'approximation de Boussinesq [76]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{u} = -\nabla \left( p + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) - \rho \mathbf{e}_3 + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = N^2 w + \kappa \nabla^2 \rho \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.3)$$

où,  $\rho = \rho' g / \rho_0$  représente le champ de fluctuations de densité et  $p = p' / \rho_0$  le champ de fluctuations de pression normalisé par  $\rho_0$ . Le champ de vecteur de vitesse est défini comme  $\mathbf{u} = (u, v, w) = (u_1, u_2, u_3)$  et  $\boldsymbol{\xi} = \nabla \times \mathbf{u}$  est le vecteur vorticité. On se donne en plus des conditions initiales sur  $\mathbf{u}$  et  $\rho$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad (3.4)$$

$$\rho(\mathbf{x}, t = 0) = \rho_0(\mathbf{x}). \quad (3.5)$$

Le problème est bien posé une fois que nous avons défini les conditions aux limites. Nous nous intéressons à deux configurations. Les ondes internes de gravité propagatrices sont étudiées dans une boîte cubique de longueur de côté  $2\pi$  où l'on suppose tous les champs périodiques dans les trois directions d'espace

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + 2\pi \mathbf{e}_j, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad \text{pour } j = 1, 2, 3 \quad (3.6)$$

$$\rho(\mathbf{x} + 2\pi \mathbf{e}_j) = \rho(\mathbf{x}) \quad \text{pour } j = 1, 2, 3. \quad (3.7)$$

Cette configuration est sans doute la plus simple et la plus répandue pour la SND d'écoulements turbulents et nous pouvons utiliser le programme résultant pour étudier un grand nombre de problèmes.

Pour l'étude des ondes internes stationnaires, on utilise une boîte imperméable de longueur de côté  $\pi$ . On applique des conditions aux limites de type glissement sans frottement aux parois du domaine. Ces conditions aux limites sont directement satisfaites lorsque les champs  $\mathbf{u}$  et  $\rho$  ont des propriétés de symétrie bien définies. La vitesse normale en un point d'une paroi s'annule si la vitesse normale est impaire de part et d'autre de la paroi. Pour la boîte cubique on a par exemple pour

$u_1(x_1, x_2, x_3)$

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = -u_1(-x_1, x_2, x_3) \quad (3.8)$$

$$u_1(x_1 - \pi, x_2, x_3) = -u_1(\pi - x_1, x_2, x_3) \quad (3.9)$$

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = u_1(x_1, -x_2, x_3) \quad (3.10)$$

$$u_1(x_1, x_2 - \pi, x_3) = u_1(x_1, \pi - x_2, x_3) \quad (3.11)$$

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = u_1(x_1, x_2, -x_3) \quad (3.12)$$

$$u_1(x_1, x_2, x_3 - \pi) = u_1(x_1, x_2, \pi - x_3) \quad (3.13)$$

Les conditions aux limites pour  $u_2$  et  $u_3$  ont des expressions similaires et  $\rho$  possède les mêmes propriétés de symétrie que  $u_3$ . Cette technique a été proposée par Orszag [103] et utilisée pour la simulation directe d'un vortex de Taylor-Green par Brachet et al [14]. Notons que cette description du problème des ondes stationnaires fait abstraction des phénomènes d'interaction entre écoulement et parois (conditions aux limites de type glissements sans frottements) tels qu'ils peuvent survenir dans une expérience de laboratoire. L'étude numérique bi-dimensionnelle d'ondes internes stationnaires [12] a toutefois validé la méthode avec conditions aux limites symétriques en produisant des résultats en excellent accord avec des résultats expérimentaux [9]. Les effets de couche limite sont d'une importance négligeable pour la dynamique des ondes internes, contrôlée essentiellement par effets inertiels. Les résultats numériques bi-dimensionnels sont très proches des résultats expérimentaux, tant que la dynamique du champ d'onde est bi-dimensionnelle.

Dans les deux cas de figure on peut représenter les champs par des développements de Fourier et calculer les coefficients de ces développements soit par des transformées de Fourier (cas périodique) soit par des transformées en sinus (champ impair en une variable) et cosinus (champ pair en une variable) mixtes (cas symétrique). Dans le cas symétrique les développements correspondent en fait à des champs périodisés dans les trois directions d'espace [110]. Grâce à ces développements on peut mettre en œuvre une méthode pseudo-spectrale. Dans ce qui suit, nous exposons certains détails techniques uniquement pour le cas périodique. Nous ferons quelques remarques concernant le cas symétrique en fin de chapitre.

On définit les développements de Fourier des champs

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \quad (3.14)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{p}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \quad (3.15)$$

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\rho}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \quad (3.16)$$

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\boldsymbol{\xi}}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \quad (3.17)$$

Par conséquent, le système d'équations (3.1-3.3) s'écrit dans l'espace de Fourier

$$\left(\frac{d}{dt} + \nu |\mathbf{k}|^2\right) \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} = \left(I - \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2}\right) \left[\widehat{(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\xi})}_{\mathbf{k}} - \hat{\rho}_{\mathbf{k}} \mathbf{e}_3\right] \quad (3.18)$$

$$\left(\frac{d}{dt} + \kappa |\mathbf{k}|^2\right) \hat{\rho}_{\mathbf{k}} = -\widehat{(\mathbf{u} \cdot \nabla \rho)}_{\mathbf{k}} + N^2 \hat{w}_{\mathbf{k}} \quad (3.19)$$

$$i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} = 0 \quad (3.20)$$

On tient compte de la condition d'incompressibilité (3.20) dans l'équation (3.18), par l'opérateur

$$I - \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2}, \quad (3.21)$$

où  $I$  est la matrice identité. L'opérateur résulte de l'élimination du champ de pression modifiée,  $p + \mathbf{u}^2/2$ . Cet opérateur projette un quelconque champ de vecteurs sur le plan perpendiculaire à  $\mathbf{k}$ . Les termes quadratiques  $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\xi}$  et  $\mathbf{u} \cdot \nabla \rho$  donnent lieu à des produits de convolution dans l'espace de Fourier.

Tel qu'il est écrit, le système d'équations (3.18- 3.19) représente un système infini d'équations intégrées-différentielles du premier ordre en temps. Ce système est notre point de départ pour la discrétisation du problème.

### 3.2.2 Discrétisation

Le domaine de calcul est un cube de volume  $V = (2\pi)^3$ , pourvu d'un maillage régulier, composé de  $N$  (à ne pas confondre avec la pulsation de Brunt-Väisälä) points dans chaque direction d'espace, i.e.  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$ . Nous supposons  $N_1 = N_2 = N_3 = N$  pour alléger les notations, mais nous continuons d'utiliser  $N_1, N_2, N_3$  lorsqu'il est nécessaire de distinguer les directions d'espace dans une expression. Nous supposons  $N$  pair. De plus, dans les simulations on choisit  $N = 2^n$ , où  $n$  est entier, pour des raisons de performance. Les pas d'espace de ce maillage sont constants dans chaque direction et donnés par  $\Delta x_1 = 2\pi/N_1$ ,  $\Delta x_2 = 2\pi/N_2$  et  $\Delta x_3 = 2\pi/N_3$ . Par conséquent, un point de grille indexé par le triplet d'entiers  $(j_1, j_2, j_3)$  possède les coordonnées  $x_1 = j_1 \cdot \Delta x_1$ ,  $x_2 = j_2 \cdot \Delta x_2$  et  $x_3 = j_3 \cdot \Delta x_3$ ; les indices varient selon  $0 \leq j_1 \leq N - 1$ ,  $0 \leq j_2 \leq N - 1$  et  $0 \leq j_3 \leq N - 1$  sur le maillage. La connaissance des indices  $j_1$ ,  $j_2$  et  $j_3$  est équivalente à la connaissance des coordonnées d'espace  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ . La longueur du domaine de  $2\pi$ , fait que le vecteur d'onde  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$  épouse des valeurs discrètes, dans l'espace de Fourier, telles que  $-N/2 + 1 \leq k_1 \leq N/2$ ,  $-N/2 + 1 \leq k_2 \leq N/2$  et  $-N/2 + 1 \leq k_3 \leq N/2$ .

Soit  $f(j_1, j_2, j_3, t)$  un champ scalaire représentant une composante du champ de vitesse ou de densité sur le domaine de calcul. Afin de symétriser au maximum les expressions d'un champ dans l'espace physique et de sa transformée dans l'espace de Fourier, on note le coefficient de Fourier  $\hat{f}_{\mathbf{k}}(t) = \hat{f}(\mathbf{k}, t) = \hat{f}(k_1, k_2, k_3, t)$ . Les développements de Fourier des champs sont tronqués au delà

d'un nombre d'onde maximal dans chaque direction. On a donc pour le développement tronqué<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} f(j_1, j_2, j_3) &= \sum_{k_1=-N/2+1}^{N/2} \sum_{k_2=-N/2+1}^{N/2} \sum_{k_3=-N/2+1}^{N/2} \hat{f}(k_1, k_2, k_3) e^{i\frac{2\pi}{N}(k_1 j_1 + k_2 j_2 + k_3 j_3)} \\ &= \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} \sum_{k_3=0}^{N-1} \hat{f}(k_1, k_2, k_3) e^{i\frac{2\pi}{N}(k_1 j_1 + k_2 j_2 + k_3 j_3)}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

La deuxième égalité découle de la périodicité du spectre de Fourier

$$\hat{f}(k_1, k_2, k_3) = \hat{f}(k_1 + N_1, k_2, k_3) \quad (3.23)$$

$$\hat{f}(k_1, -k_2, k_3) = \hat{f}(k_1, k_2 + N_2, k_3) \quad (3.24)$$

$$\hat{f}(k_1, k_2, -k_3) = \hat{f}(k_1, k_2, k_3 + N_3). \quad (3.25)$$

Une première approximation numérique intervient alors dans le calcul des coefficients de Fourier  $\hat{f}(\mathbf{k})$ . Ces derniers sont évalués par le calcul de transformées de Fourier discrètes (TFD) en trois dimensions. Définissons d'abord la TFD directe (à une dimension) d'une séquence  $g(j)$ ,  $0 \leq j \leq N-1$  par

$$\hat{g}(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} g(j) e^{-i\frac{2\pi}{N}kj}. \quad (3.26)$$

La TFD inverse est donnée par

$$g(j) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{g}(k) e^{i\frac{2\pi}{N}kj}, \quad (3.27)$$

et est égale au développement de Fourier de la séquence.

Pour un champ scalaire ou une composante d'un champ de vecteurs  $f(\mathbf{x})$ , on définit la TFD à trois dimensions (TFD3D) directe

$$\hat{f}(k_1, k_2, k_3) = \frac{1}{N^3} \sum_{j_1=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{N-1} \sum_{j_3=0}^{N-1} f(j_1, j_2, j_3) e^{-i\frac{2\pi}{N}(k_1 j_1 + k_2 j_2 + k_3 j_3)}. \quad (3.28)$$

Étant donné que nous considérons uniquement des champs à valeurs réelles dans l'espace physique, le spectre de Fourier vérifie aussi

$$\hat{f}(-k_1, -k_2, -k_3) = \hat{f}^*(k_1, k_2, k_3), \quad (3.29)$$

où  $\hat{f}^*$  désigne le complexe conjugué de  $\hat{f}$ . Selon cette dernière relation la formule (3.28) contient de l'information redondante. Il suffit de définir la TFD3D réelle à complexe sur une moitié de spectre par

$$\hat{f}(k_1, k_2, k_3) = \frac{1}{N^3} \sum_{j_1=0}^{N/2} \sum_{j_2=0}^{N-1} \sum_{j_3=0}^{N-1} f(j_1, j_2, j_3) e^{-i\frac{2\pi}{N}(k_1 j_1 + k_2 j_2 + k_3 j_3)}. \quad (3.30)$$

---

2. La dépendance temporelle est sous-entendue.

On met ainsi en évidence la bijection entre espace physique et espace de Fourier. La connaissance de  $f$  en  $N^3$  points dans l'espace physique est équivalente à la connaissance des  $(N/2 - 1) \cdot N \cdot N$  coefficients de Fourier complexes et des  $2 \cdot N \cdot N$  coefficients de Fourier réels  $\hat{f}(0, k_2, k_3)$  et  $\hat{f}(N_1/2, k_2, k_3)$ , qui sont réels pour  $k_2$  et  $k_3$  quelconques.

On appelle le calcul du développement de Fourier de  $f$  à partir de (3.22) TFD3D inverse, tandis que le calcul de  $\hat{f}$  par (3.30) est dit TFD3D directe. Remarquons également que les formules de TFD3D directe (3.30) et TFD3D inverse (3.22) ne se distinguent que par le facteur de normalisation et par le signe dans l'exponentielle.

Le calcul d'une TFD3D directe ou inverse s'effectue en calculant successivement trois séries de TFD's directes mono-dimensionnelles. Pour une TFD3D directe, on évalue la formule (3.30) comme suit

$$\hat{f}(k_1, k_2, k_3) = \frac{1}{N^3} \sum_{j_2=0}^{N-1} \left[ \sum_{j_3=0}^{N-1} \left( \sum_{j_1=0}^{N/2} f(j_1, j_2, j_3) e^{-i \frac{2\pi}{N} k_1 j_1} \right) e^{-i \frac{2\pi}{N} k_3 j_3} \right] e^{-i \frac{2\pi}{N} k_2 j_2}. \quad (3.31)$$

On commence donc par calculer  $N_1 \cdot N_2$  TFD's réelle à complexe dans la direction  $j_1$ , puis  $(N_1/2 + 1) \cdot N_2$  TFD's complexe à complexe dans la direction  $j_3$  et finalement  $(N_1/2 + 1) \cdot N_3$  TFD's complexe à complexe dans la direction  $j_2$ . La TFD3D inverse est obtenue en inversant l'ordre de calcul des TFDs mono-dimensionnelles utilisées à l'aller et en prenant soin d'utiliser des TFD's mono-dimensionnelles inverses. C'est aussi de cette façon que l'on procède pour le calcul explicite d'une TFD sur une machine mono-processeur. En pratique une TFD est calculée par un algorithme de transformée de Fourier rapide (TFR). De même, le calcul d'une TFD3D est effectué par le calcul d'une TFR3D.

Le calcul d'une TFD dans une direction met en jeu l'ensemble des points de cette direction. Ceci a des conséquences importantes pour le calcul d'une TFD3D sur une architecture parallèle à mémoire distribuée, lorsque les données dans une direction sont distribuées sur différents nœuds de la machine. On ne peut pas alors effectuer le calcul de la TFD directement, mais il faut avoir recours à des échanges de messages entre nœuds distants.

Du fait de la troncature, le système d'équations est fini. Les termes quadratiques  $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\xi}$  et  $\mathbf{u} \cdot \nabla \rho$  ne sont pas calculés directement dans l'espace de Fourier, parce que le calcul direct des produits de convolution est trop coûteux. Ces termes sont calculés sous forme de simples produits dans l'espace physique (d'où le préfixe "pseudo" de la méthode pseudo-spectrale), puis transformés dans l'espace de Fourier. Un tel calcul sans précautions est dit pseudo-convolution. On introduit des erreurs de repliement spectral dans le résultat du produit. On peut s'affranchir de ces erreurs de différentes façons plus ou moins complexes [18]. Celle que nous avons utilisée, la plus simple, consiste en la troncature de tous les modes de Fourier supérieurs à  $2/3\bar{K}$ . Cette méthode est coûteuse, mais corrige entièrement les erreurs de repliement.

La dissipation visqueuse du fluide est supposée de type Newtonienne ou hypervisqueuse. Les termes de dissipation peuvent être calculés explicitement ou implicitement par l'intermédiaire d'une transformation utilisant le terme visqueux comme facteur intégrant.



Suite aux étapes de discrétisation on doit résoudre quatre équations du type

$$\frac{d\hat{f}(\mathbf{k}, t)}{dt} = \widehat{SM}(\mathbf{k}, t), \quad (3.32)$$

où  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$  varient selon  $0 \leq k_1 \leq N_1 - 1$ ,  $0 \leq k_2 \leq N_2 - 1$ ,  $0 \leq k_3 \leq N_3 - 1$ , pour  $(u_1, u_2, u_3)$  et  $\rho$ .  $\widehat{SM}$  représente le second membre. La deuxième approximation intervient au niveau de la discrétisation de la dérivée temporelle dans (3.32). L'avancement temporel est calculé par un schéma aux différences finies explicite d'Adams-Bashforth d'ordre 3, s'écrivant pour le champ scalaire  $\hat{f}^{n+1}(\mathbf{k}) = \hat{f}(\mathbf{k}, t = (n + 1)\Delta t)$ , où  $\Delta t$  est le pas de temps

$$\hat{f}^{n+1}(\mathbf{k}) = \hat{f}^n(\mathbf{k}) + \Delta t \left( \frac{23}{12} SM^n(\mathbf{k}) - \frac{16}{12} SM^{n-1}(\mathbf{k}) + \frac{5}{12} SM^{n-2}(\mathbf{k}) \right). \quad (3.33)$$

On peut remarquer que l'emploi d'un schéma aux différences finies explicite d'ordre  $p$  permet de calculer la valeur d'un mode à l'instant  $(n + 1)\Delta t$  à l'aide des seules valeurs de ce même mode aux instants  $n\Delta t$ ,  $(n - 1)\Delta t$ , ...,  $(n - p + 1)\Delta t$ . Il s'ensuit que, en dehors des opérations purement algébriques destinées à la mise à jour des champs  $\mathbf{u}$  et  $\rho$  par avancement temporel selon (3.33), il faut, à chaque itération, évaluer les termes quadratiques dans (3.18) et (3.19) en calculant

- i)  $\boldsymbol{\xi}$  et  $\nabla\rho$  dans l'espace de Fourier.
- ii) les TFR3D's inverses de  $\boldsymbol{\xi}$ , de copies de  $\mathbf{u}$  et de  $\nabla\rho$ .
- iii) les produits  $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\xi}$  et  $\mathbf{u} \cdot \nabla\rho$ .
- iv) les TFR3D's des produits dernièrement calculés.

Concluons que les seules étapes de l'algorithme nécessitant la connaissance de l'ensemble des valeurs d'un champ dans une direction, sont celles où sont calculées les TFD3Ds, soit directe soit inverse, intervenant dans le calcul de pseudo-convolution des termes quadratiques.

Dans la suite de ce chapitre, nous considérons les aspects de programmation de l'algorithme que nous venons d'exposer.

### 3.3 Notions sur les architectures parallèles à mémoire distribuée et leur programmation

#### 3.3.1 Généralités

La décision de débiter une étude tridimensionnelle de la dynamique d'ondes internes en fluide stablement stratifié, a été accompagnée par l'idée de porter la méthode de résolution numérique vers une machine parallèle à mémoire distribuée, telle que la T3E du constructeur SGI/Cray, machine pour laquelle nous disposons d'heures de calcul. En effet, une SND hydrodynamique de haute résolution spatiale, met en jeu l'utilisation de grandes quantités de mémoire. De surcroît, les temps de calcul sont très longs par rapport à la mémoire mise en jeu. Seule une architecture parallèle nous permet d'atteindre les résolutions nécessaires pour mener à bien notre étude tridimensionnelle, avec un temps de restitution acceptable pour un calcul complet donné.

Nous avons donc d'emblée dédié notre code à une machine parallèle à mémoire distribuée. Celle-ci est constituée de plusieurs unités, appelées nœuds et d'un réseau d'interconnexion de ces nœuds. Chaque nœud est composé d'un microprocesseur, d'une mémoire locale et d'une interface réseau. En général, un programme est exécuté par un sous-ensemble de nœuds de la machine. Dans le cadre du programme on parle d'un processus à la place d'un nœud.

Considérons un premier exemple. Soit à résoudre une edp, sur un domaine de calcul, le domaine global. Un modèle de programmation possible consiste à décomposer le domaine de calcul global en sous-domaines et à associer à chaque sous-domaine un processus. L'application résultant de ce procédé permet de distribuer les données physiques du problème global sur les processus. Un processus contient donc en mémoire les données associées à une fraction du domaine global. Chaque processus du sous-ensemble exécute une instance du programme. Les données sont traitées localement autant que possible, mais le réseau d'interconnexion permet l'interaction entre données appartenant à des processus différents. Les interactions entre processus distants sont effectuées par des communications et peuvent correspondre, par exemple, à des envois et à des réceptions de messages. La gestion des communications entre processus, ainsi que leur synchronisation, sont à la charge du programmeur et cette tâche peut être délicate à mettre en oeuvre. On parle d'un modèle de parallélisation explicite par échanges de messages. Avant de décrire la mise en oeuvre de l'algorithme pseudo-spectral, nous introduisons certaines notions portant sur les architectures parallèles, utiles pour la suite.

### 3.3.2 Architectures parallèles à mémoire distribuée

Les architectures parallèles modernes, tel que le T3E de SGI/CRAY s'appuient sur l'activité coopérative d'un grand nombre de processeurs travaillant sur le même problème. Ces machines sont basées sur des processeurs RISC (Reduced Instruction Set Computer) et des mémoires DRAM (Dynamic Random Acces memory), c'est à dire sur des technologies de masse, peu coûteuses. Actuellement les machines dites "massivement" parallèles impliquent entre 32 et 2000 processeurs. Elles seront les seules capables d'atteindre, à terme, le téraflops<sup>3</sup> en performance et le téraoctet en capacité mémoire. Par rapport aux architectures traditionnelles, du type mono-processeur, la caractéristique du réseau d'interconnexion entre processeurs devient un aspect crucial. Ce dernier doit être très performant, afin de minimiser la baisse de performances due aux communications entre processeurs, qui est inévitable dans l'exécution d'une application sur une machine parallèle, mais qui n'existe pas pour une architecture du type mono-processeur.

---

3. L'abréviation FLOPS veut dire 'Floating point Operations Per Second', ce qui se traduit par 'nombre d'opérations impliquant des nombres flottants (des nombres réels) par seconde. Il s'agit d'une mesure possible des performances d'un ordinateur utilisé en calcul scientifique, puisqu'on y opère généralement sur des nombres réels.

## Les modèles d'exécution

Il s'agit de la façon dont une architecture parallèle organise le traitement des données. On distingue trois modèles :

1. SIMD (Single Instruction Multiple Data): tous les processus exécutent simultanément la même instruction mais traitent des données différentes; la synchronisation est faite au niveau de chaque instruction élémentaire.
2. MIMD (Multiple Instruction Multiple Data): synchronisation au niveau des tâches; les processus sont totalement autonomes. Ce modèle d'exécution est difficile à programmer lorsqu'on doit traiter un grand nombre de processus.
3. SPMD (Single Program Multiple Data): cas particulier du modèle MIMD où tous les processus exécutent le même programme. Par branchements conditionnels, on arrive à faire varier les tâches effectuées par différents processus. C'est le modèle d'exécution qui nous intéresse (T3E).

## Les réseaux d'interconnexion

Il s'agit de topologies de processus construites à partir de maillages 2D et 3D, de tores 2D et 3D, d'anneaux, d'hypercubes, etc. Les performances d'un tel réseau peuvent être caractérisées par deux critères, le temps de latence,  $L$ , qui est le temps de préparation nécessaire à un échange de message et la bande passante,  $B$ . Pour une bande passante  $B$  et un temps de latence  $L$  donnés, le temps  $T(N)$  mis en jeu pour transmettre un message (en unités de bande passante) entre deux processus est :  $T(N) = L + N/B$ , où  $N$  est la taille du message en  $Mo$ . Pour la T3E, on a par exemple  $L = 1\mu s$  et  $B = 300Mo/s$ .

## Les processeurs RISC

Les processeurs RISC (Reduced Instruction Set Computer) tirent leur puissance d'un haut degré de parallélisme interne. Ce dernier se manifeste par l'exécution de plusieurs instructions élémentaires simultanées sur de multiples unités fonctionnelles et par la réduction du nombre de cycles nécessaires pour exécuter une instruction, en déclenchant une instruction avant que la précédente ne soit terminée (*pipelining*).

## Le système de mémoire hiérarchique

Les performances des machines modernes sont dictées par les temps d'accès mémoire. En effet, depuis quelques années, l'augmentation des performances des microprocesseurs est plus rapide que celle des puces mémoires. Pour pallier à ce décalage, il existe plusieurs alternatives, mais notons ici seulement la possibilité de diviser la mémoire en une partie lente et une partie rapide. De meilleures bandes passantes sont alors obtenues à condition que l'on puisse accéder plus fréquemment à la partie rapide qu'à la partie lente de la mémoire. En pratique, on intercale entre processeur et

mémoire (lente) un système de mémoire cache composé de plusieurs étages, permettant plusieurs niveaux d'accès. Le compilateur qui intervient au niveau de la programmation, c'est-à-dire à un niveau visible par le programmeur, doit faire en sorte que la localité des données résidant dans le cache soit exploitée dans l'exécution du code. Cette localité est de deux niveaux : un niveau temporel, assuré en gardant dans les zones de cache les références récentes et un niveau spatial, en gardant dans les zones de cache les références mémoire consécutives. A l'heure actuelle, cette optimisation n'est pas assurée seulement par le compilateur. Aussi, le programmeur doit-il s'assurer que l'écriture du code ne correspond pas à des instructions fondamentalement incompatibles avec l'efficacité du système de mémoire à cache. Au contraire, il faut s'astreindre à utiliser au maximum la proximité des données rangées dans le système de cache en minimisant les références à des données rangées dans la mémoire lente. On voit ainsi que la complexité de la programmation sur une architecture parallèle à processeurs scalaires est encore augmentée par rapport à la programmation d'une machine à processeur de type vectoriel<sup>4</sup>.

## Modèles de programmation

Il s'agit des modalités de programmation qui donnent au programmeur une vue simplifiée et transparente de la structure matérielle et logicielle de la machine à programmer. On peut distinguer les modèles explicites et implicites. Nous avons déjà esquissé le principe de fonctionnement d'un modèle explicite dans la section (3.3.1). Les communications sont alors à la charge du programmeur. En pratique ce modèle de programmation met en jeu un programme écrit dans un langage informatique standard, de haut niveau, tel que le C ou le Fortran 90, accompagné d'appels à une bibliothèque d'échanges de messages.

Dans le cadre d'un modèle implicite, la cohérence est en principe gérée par un compilateur (par exemple HPF ou HyperC). L'avantage de ce modèle est que la structure matérielle de la machine est réellement transparente. Cependant, les compilateurs actuellement disponibles pour la mise en œuvre d'un modèle implicite n'ont pas atteint des performances satisfaisantes pour l'application la plus générale. En outre, un modèle explicite fournit en général un code plus portable. C'est pourquoi nous pouvons espérer aboutir à de meilleures performances dans le cadre d'un modèle de parallélisation explicite, car celui dispose en effet d'un meilleur contrôle du parallélisme.

### 3.3.3 Programmation parallèle explicite utilisant des bibliothèques d'échanges de messages

Le modèle d'exécution SPMD est en vigueur sur le T3E. Les implications pour le modèle de programmation explicite sont les suivantes.

Il faut écrire un programme unique exécuté par chaque processus en utilisant par exemple un langage comme le C ou le Fortran 90. De plus, il faut gérer la cohérence de l'ensemble des processus

---

4. Pour une machine vectorielle un autre type d'optimisation, lié au pipelining, est prédominant et sa mise en œuvre peut être également à la charge du programmeur.

en assurant les communications et synchronisations nécessaires. Le programme est éventuellement pourvu de branchements conditionnels permettant de varier les tâches des processus. Toutefois, sous peine d'aboutir à un code trop complexe et mal équilibré, on a intérêt à limiter ces branchements conditionnels et à symétriser au maximum les tâches des processus. On désire donc optimiser l'équilibrage de charge, aussi bien au niveau de l'occupation de la mémoire de chaque processus, qu'au niveau du nombre d'instructions exécutées par processus. La cohérence de l'ensemble est assurée par des appels à une bibliothèque d'échanges de messages, telle que MPI (Message Passing Interface) ou PVM (Parallel Virtual Machine). Ces bibliothèques proposent des fonctions de communications variées. C'est encore l'utilisation de branchements conditionnels qui permet de restreindre l'action d'une fonction de communication à un processus particulier ou un sous-ensemble de processus dans le programme.

Chaque processus est identifié par un rang au sein de l'ensemble des processus participant à l'application. Les variables sont locales ; les mêmes variables sont définies sur tous les processus exécutant le programme. Insistons sur le fait que les processus exécutent les mêmes algorithmes. Le point important est que les valeurs des variables sont différentes de processus en processus. Cela peut se traduire, comme dans notre cas de la résolution des équations de Navier-Stokes, par le traitement de sous-domaines identiques, mais représentant des zones du domaine de calcul physique différentes (technique de décomposition de domaine). Les calculs faits sur les variables locales impliquent en général des échanges d'informations entre processus. Ces échanges sont effectués soit par des protocoles de communication, soit par des copies directes de mémoire locale à mémoire distante ou réciproquement. Plus le problème peut être traité localement, plus les performances de l'application sont bonnes. Ceci correspond à la situation où les différents processus calculent réellement en parallèle.

Signalons finalement que l'on cherche, en calcul parallèle, à chevaucher les communications (envois de données interprocesseurs) coûteuses en temps avec des calculs ne portant pas sur les données envoyées. En effet, par rapport au même programme exécuté sur une machine mono-processeur où les envois de messages sont inexistantes, les communications représentent une charge de travail additionnelle, dont il est souhaitable de s'affranchir autant que possible. Cette technique est possible grâce à des appels à des communications dites asynchrones. Un tel appel revient "immédiatement" au programme appelant, avant que le réseau, responsable du transfert des messages ait eu le temps d'achever la communication. La difficulté ici est de bien synchroniser les travaux effectués par différents processus. En l'absence de tels processeurs de communication, l'envoi de données revient à la charge des nœuds de la machine participant à une application. Nous reviendrons sur les communications asynchrones à la prochaine section, dans le cadre de la bibliothèque d'échanges de messages MPI.

Dans la suite, nous exposons l'approche choisie pour résoudre les équations de Navier-Stokes dans l'approximation de Boussinesq. Notons que, bien que dédiés à la T3E de SGI/CRAY (notamment en ce qui concerne leur optimisation monoprocesseur), nos codes sont portables vers d'autres architectures, grâce à l'emploi du langage de programmation Fortran 90 utilisé conjointement avec

la bibliothèque d'échanges de messages MPI.

## 3.4 Implémentation parallèle de l'algorithme pseudo-spectral utilisant la bibliothèque MPI

### 3.4.1 Généralités concernant MPI

La bibliothèque d'échanges de messages MPI est décrite dans le document officiel "The Message Passing Interface (MPI) standard", disponible dans le domaine public [31]. Un exemple d'application concret et détaillé de la technique de décomposition de domaine, faisant appel à la bibliothèque MPI, est donné par Dupays [28].

MPI est composée d'un ensemble de fonctions. Ces fonctions peuvent être appelées par un programme souhaitant effectuer des communications entre processus. Soit  $npt$  le nombre total de processus demandé au moment de la soumission du programme. MPI doit être initialisée en début de programme. Un contexte de communication est alors créé par défaut, ainsi que le communicateur `MPI_COMM_WORLD`. Celui-ci définit l'ensemble des  $npt$  processus participant à l'application, ainsi que la portée de leur communication. Chaque processus exécutant une instance du programme se voit attribuer un rang, sous forme d'un entier,  $p$ ,  $0 \leq p \leq npt - 1$ . Le rang identifie le processus au sein du communicateur `MPI_COMM_WORLD`. L'appel d'une fonction de MPI fait toujours intervenir le communicateur `MPI_COMM_WORLD`, définissant la portée de la fonction (aux  $npt$  processus).

Tous les processus appartenant à `MPI_COMM_WORLD` peuvent communiquer entre eux. Ils peuvent par exemple échanger des messages par envoi et réception. L'envoi d'un message est fait par un processus émetteur et la réception de ce message est faite par un récepteur. L'appel à une fonction d'envoi ou de réception génère une requête. MPI propose deux familles de requêtes, distinguées par leur effet bloquant ou non bloquant (asynchrone), sur les instructions du programme. Une requête non bloquante retourne au programme appelant avant que l'action requise ait eu le temps d'être accomplie. En principe, l'exécution du programme appelant peut alors reprendre immédiatement.

L'utilisation de communications asynchrones nécessite la synchronisation des processus. En effet, les temps de communications sont essentiellement liés à la taille des messages échangés et à la charge du réseau d'interconnexion. L'utilisation de la fonction `MPI_WAIT` permet de mettre un processus en attente jusqu'à l'achèvement d'une requête d'envoi ou de réception asynchrone. De cette façon un processus peut être synchronisé par rapport aux autres processus. Plus généralement, il est possible de synchroniser l'ensemble des processus appartenant au communicateur par une barrière de synchronisation `MPI_BARRIER`. Une barrière n'est franchie que lorsque tous les processus du communicateur l'ont appelée.

Par ailleurs, une requête peut être effectuée de différentes façons. Un envoi bloquant peut, par exemple, avoir lieu par l'intermédiaire d'une copie du message à envoyer dans une zone tampon de la mémoire. Il est important de noter à ce stade que MPI est un standard et ne fait que proposer un certain nombre de fonctions. Le fonctionnement réel de ces fonctions peut dépendre de

l'implémentation même de MPI dans un environnement parallèle donné. Par exemple, la gestion des communications asynchrones dépend du fonctionnement du réseau d'interconnexion de la machine.

Les données que l'on souhaite échanger doivent être typées. MPI propose un certain nombre de types simples, comme par exemple celui d'un réel, défini par `MPI_REAL`. On peut également construire des types dérivés plus complexes, à partir de types simples. Un type dérivé permet de définir des structures de données complexes. On peut par exemple définir des structures de réels non contigus en mémoire, ce qui est le cas de l'envoi de la ligne d'une matrice (rangée en mémoire selon l'ordre d'un tableau fortran à deux dimensions).

MPI permet également des opérations de communication plus complexes telles que des envois collectifs ou des opérations de réduction, qui représentent des échanges de données couplés à des opérations arithmétiques simples effectuées sur les données échangées.

La construction d'un communicateur (dérivé) permet de regrouper un sous-ensemble de processus et de créer un nouveau contexte de communication à partir d'une partie arbitraire des processus faisant partie de `MPI_COMM_WORLD`. Il est en particulier possible de créer un communicateur qui dispose les processus suivant une topologie régulière. Un tel communicateur s'appelle une topologie virtuelle de processus. Elle permet de rendre compte au niveau des processus de la décomposition du domaine global de données. La topologie cartésienne est la plus simple. Elle associe un réseau régulier aux processus d'un communicateur. Chaque processus  $p$  est muni d'un ensemble de coordonnées le situant dans le réseau. Certaines opérations telles que les échanges avec processus voisins dans la topologie sont ainsi plus simples à gérer.

### 3.4.2 Décomposition du domaine global et création d'une topologie cartésienne de processus

Nous décrivons ici la façon dont on construit une application entre un nombre  $npt$  de processus et les sous-domaines représentant le domaine global décomposé.

Construisons alors le découpage régulier du domaine global le plus général. Rappelons que le domaine global est un cube pourvu d'un maillage cartésien régulier composé de  $N_1 = N_2 = N_3 = N$  points dans les directions  $j_1, j_2$  et  $j_3$ . Nous allons décomposer le domaine global en plusieurs sous-domaines identiques, ayant chacun le même nombre de points de grille  $nn_1, nn_2$  et  $nn_3$ , dans chaque direction. On a  $nn_1 = nn_2 = nn_3$  lorsqu'il s'agit de sous-domaines cubiques. La manière la plus générale de choisir les sous-domaines est donc sous forme parallélépipédique, de façon à ce que l'on ait  $np_1 = N_1/nn_1, np_2 = N_2/nn_2$  et  $np_3 = N_3/nn_3$  sous-domaines dans chaque direction. Il s'agit de faire correspondre à chaque sous-domaine un processus, il faut donc avoir au total  $npt = np_1 \cdot np_2 \cdot np_3$  processus. Supposons que l'on ait créé une topologie virtuelle cartésienne à partir du communicateur `MPI_COMM_WORLD`. Chaque processus de rang  $p$  possède alors un triplet de coordonnées  $(c_1^p, c_2^p, c_3^p)$ , où  $0 \leq c_1^p \leq np_1 - 1, 0 \leq c_2^p \leq np_2 - 1$  et  $0 \leq c_3^p \leq np_3 - 1$ . Les coordonnées  $(c_1^p, c_2^p, c_3^p)$  sont associées au processus de rang  $p$  en comptant  $c_3^p$  le plus rapidement, puis  $c_2^p$  et finalement  $c_1^p$ .

La figure (3.1) montre un exemple d'une décomposition de domaine d'un domaine global de

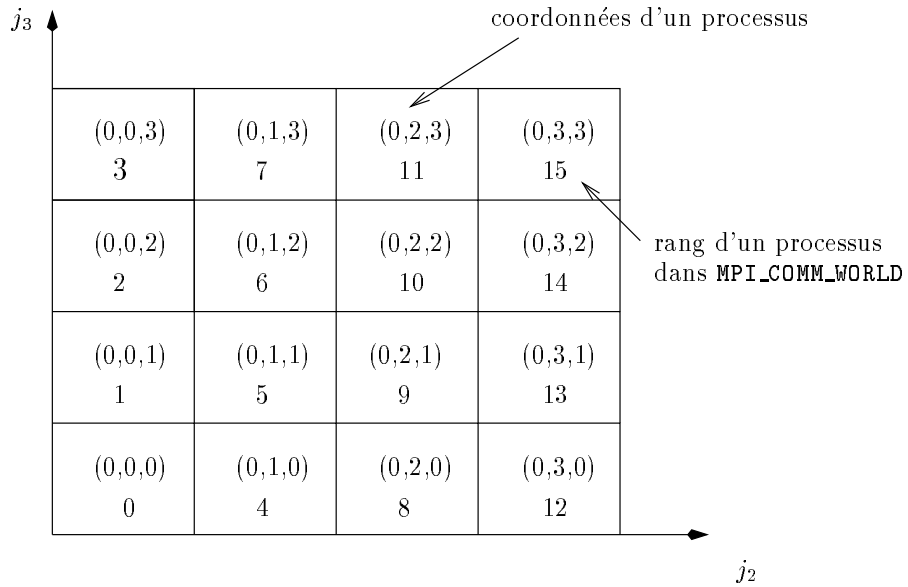


FIG. 3.1 – Exemple d'une décomposition de domaine. Disposant de 16 processus, on décompose le domaine global sur quatre sous-domaines dans les deux directions  $j_2$  et  $j_3$ . La topologie cartésienne fait correspondre à chaque processus  $p$  un triplet de coordonnées  $(c_1^p, c_2^p, c_3^p)$ , de telle façon que la dernière dimension  $c_3^p$  soit incrémentée le plus rapidement. Dans l'exemple présenté ici, la direction  $j_1$  est dégénérée; les points du maillage ne sont pas distribués selon cette direction ( $c_1^p = 0$ ). Les sous-domaines correspondent à des faisceaux de données perçant le plan de la figure.



calcul en sous-domaines. Lorsque le domaine global n'est pas distribué selon la première direction  $j_1$ , la décomposition est bi-dimensionnelle, comme sur la figure. Il s'agit d'une application décomposée sur 16 sous-domaines dans les directions  $j_2$  et  $j_3$ . On a noté le rang et les coordonnées de chaque processeur auquel appartient un sous-domaine. Le domaine global est décomposé en faisceaux dont la section est représentée dans la figure.

On obtient la correspondance entre indices locaux à un sous-domaine  $j_1^{(p)}$ ,  $j_2^{(p)}$  et  $j_3^{(p)}$  d'un sous-domaine de coordonnées  $c_1^p$ ,  $c_2^p$  et  $c_3^p$  dans la topologie cartésienne et les indices du domaine global,  $j_1$ ,  $j_2$  et  $j_3$  par les relations

$$j_1 = c_1^p \cdot nn_1 + j_1^p \quad \text{pour} \quad 0 \leq j_1^p \leq nn_1 - 1 \quad (3.34)$$

$$j_2 = c_2^p \cdot nn_2 + j_2^p \quad \text{pour} \quad 0 \leq j_2^p \leq nn_2 - 1 \quad (3.35)$$

$$j_3 = c_3^p \cdot nn_3 + j_3^p \quad \text{pour} \quad 0 \leq j_3^p \leq nn_3 - 1 \quad (3.36)$$

Grâce à ces relations simples, nous pouvons directement distribuer une fonction indexée globalement sur la topologie de processus<sup>5</sup>.

Nous avons fait l'expérience avec différents découpages, mais la version définitive des programmes s'appuie sur le découpage simple suivant, qui sera supposé dans la suite. Seule la seconde direction de coordonnées  $j_2$  est distribuée ( $np_1 = 1, np_2 = 1, np_3 = npt$ ), tandis que les directions  $j_1$  et  $j_3$  sont dégénérées sur les processus,  $nn_1 = N_1$  et  $nn_3 = N_3$ . Nous continuons cependant à utiliser les symboles  $nn_1$  et  $nn_2$  pour faire référence à un domaine local. Nous avons donc les transformations d'indices simplifiées suivantes

$$j_1 = j_1^p \quad \text{pour} \quad 0 \leq j_1^p \leq nn_1 - 1 \quad (3.37)$$

$$j_2 = j_2^p + p \cdot nn_2 \quad \text{pour} \quad 0 \leq j_2^p \leq nn_2 - 1 \quad (3.38)$$

$$j_3 = j_3^p \quad \text{pour} \quad 0 \leq j_3^p \leq nn_3 - 1, \quad (3.39)$$

car ( $c_1^p = 0, c_2^p = p, c_3^p = 0$ ), pour  $0 \leq p \leq npt - 1$ . Nous faisons ce choix par souci d'efficacité. Les résolutions spatiales que nous désirons atteindre (au plus  $384^3$  ou  $512^3$ ) nous permettent de travailler avec la totalité des points de maillage dans deux directions sur chaque processus<sup>6</sup>.

En principe il n'est pas nécessaire d'introduire une topologie cartésienne de processus pour cette décomposition (selon la direction  $j_2$  seulement). En effet les rangs  $p$  affectés aux processus par `MPI_COMM_WORLD` suffisent à ordonner les processus selon la direction  $j_2$ . Le fait que le découpage soit effectué selon la deuxième direction d'espace est d'une importance capitale pour les performances du code. En effet, une version antérieure du code faisant appel à un découpage selon

---

5. Le standard MPI 2.0, non disponible sur T3E actuellement, contient des fonctionnalités permettant de distribuer des données globales sur les nœuds d'une machine, sans avoir à gérer les transformations de coordonnées du type (3.34-3.36). Les entrées/sorties sur fichiers pourront également être traitées de façon simplifiée avec le futur standard.

6. De telles résolutions spatiales avec distribution des données en une seule direction sont possibles sur le T3E de SGI/CRAY grâce aux 14 Mmot (1 mot permet de coder un réel, 1 Mmot =  $10^6$  mots) disponible sur chaque mémoire locale. Toutefois, une machine à mémoire locale plus faible limiterait la résolution à une valeur plus faible ou nous obligerait à distribuer les données selon deux directions d'espace.

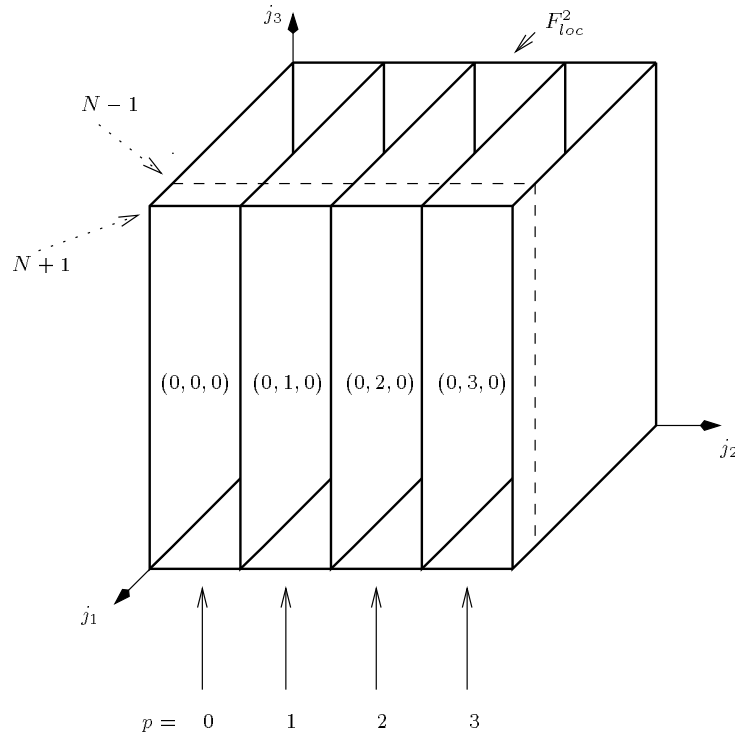


FIG. 3.2 – Schéma d’une décomposition de domaine selon la direction  $j_2$  pour une application utilisant 4 processus. Le domaine global représente par exemple le champ scalaire  $f$  ainsi que sa TFR3D  $\hat{f}$ . La distribution est dégénérée selon les directions  $j_1$  et  $j_2$ . Chacune des quatre tranches de données est associée à un processus  $p$ . On a pour les coordonnées du domaine  $p$ ,  $(c_1^p, c_2^p, c_3^p) = (0, p, 0)$ . La ligne en tirets démarque la fin du cube. Cependant le domaine de calcul est augmenté de deux plans de données,  $j_1 = N$  et  $j_1 = N+1$ , afin de stocker les coefficients complexes correspondant à  $k_1 = N/2$ .

la troisième direction, a dû être abandonnée pour son inefficacité. On reviendra sur ce point lorsque l’on explicitera l’algorithme de calcul de TFR3D parallèle.

Dans un programme séquentiel s’exécutant sur une architecture mono-processeur, un champ  $f$  réel ou sa transformée  $\hat{f}$  définis sur le cube de calcul sont représentés par le tableau  $F(0 : N_1 + 1, 0 : N_2 - 1, 0 : N_3 - 1)$ , d’élément  $F(j_1, j_2, j_3)$ , car en vertu de (3.30) on ne stocke que  $N/2 + 1$  coefficients complexes  $\hat{f}(k_1, k_2, k_3)$  dans la direction  $j_1$ , soit au total  $N_1 + 2$  valeurs réelles dans cette direction. La structure du tableau en mémoire est reflétée par les dimensions du tableau, indexées respectivement, par  $j_1, j_2$  et  $j_3$ . On fait naturellement correspondre les directions d’espace  $x_1, x_2$  et  $x_3$  (indexés également par  $j_1, j_2$  et  $j_3$ ) aux directions de ”rangement” du tableau en mémoire selon  $j_1, j_2$  et  $j_3$ .

Un sous-domaine  $p$  représente  $f(j_1, j_2, j_3)$  par le tableau  $F_{loc}^p(0 : nn_1 + 1, 0 : nn_2 - 1, 0 : nn_3 - 1)$ , d’élément  $F_{loc}^p(j_1^p, j_2^p, j_3^p)$ , selon les transformations de coordonnées (3.37-3.38). La figure (3.2) montre la décomposition domaine dans la direction  $j_2$  de façon schématique. Un sous-domaine

contient une tranche de données de  $f$  dans  $F_{loc}^p$ . Signalons que notre code est suffisamment général pour accommoder le découpage le plus général du domaine global (exposé plus haut), excepté pour les sous-programmes de TFR3D. En effet, dans la conception des TFR3D<sup>7</sup>, nous faisons appel au fait que seule une direction d'espace est distribuée. Les sous-programmes de TFR3D sont cependant facilement adaptables à la situation la plus générale. Par contre, si l'on souhaite distribuer la direction  $j_1$  il est souhaitable que le nombre de processus  $npt$  divise  $N_1 + 2$ .

### 3.4.3 Programmation

Ayant défini l'algorithme de résolution des équations (3.18-3.19), ainsi que le découpage du domaine, faisons ici quelques remarques générales sur le programme écrit en Fortran 90. Nous avons déjà indiqué que l'algorithme calculant l'avancement temporel d'un mode de Fourier ne fait intervenir que ce même mode à des instants antérieurs. Cette observation ainsi que la structure des tableaux locaux permettent de conclure que la structure du code est semblable à celle d'un code destiné à une machine séquentielle mono-processeur. Les dimensions figurant dans ce code sont les dimensions locales faisant référence au domaine local. Ainsi, une boucle de calcul du code porte sur les entiers  $nn_1 + 2$ ,  $nn_2$  et  $nn_3$  introduits plus haut et chaque processus exécute à priori cette même boucle. Les calculs portent bien entendu sur les données locales, mais en dehors de cette localité du traitement, l'arithmétique des boucles est essentiellement reproduite sur chaque processus et cette arithmétique est analogue à l'arithmétique correspondant au programme dédié à une machine mono-processeur.

Le code se distingue d'un code classique par les communications. Elles interviennent à deux niveaux. Pour le calcul de certaines propriétés moyennées, il est nécessaire de connaître les résultats partiels de tous les processeurs. En général on s'arrange pour récupérer les résultats partiels sur un seul processeur qui communique, après calcul, le résultat final à l'utilisateur. De la même façon il peut être nécessaire de faire connaître la valeur d'un résultat nouvellement calculé sur un processeur à tous les autres. Ce type de communication ne pose pas de problème majeur, puisqu'il s'agit en général de petits messages et qu'il suffit de synchroniser tous les processeurs (par une barrière de synchronisation) avant l'envoi des messages. Le deuxième type de communication intervient au niveau des routines de transformée de Fourier rapide. Ce dernier est beaucoup plus subtil à gérer, en particulier lorsque les performances du programme résultant sont primordiales. Or, tel est notre cas, puisqu'en pratique, le programme passe 70% de son temps à calculer des TFR3D directes et inverses et que nous voulons atteindre de hautes résolutions spatiales très gourmandes en temps de calcul. Les messages mis en jeu dans ce type de communication, sont plus gros et, étant donnée leur fréquence d'appel, les temps de communication sont aussi plus longs.

---

7. L'idée nous a été suggérée par M. Meneguzzi.

## 3.5 La transformée de Fourier rapide

### 3.5.1 Généralités

Nous avons remarqué que le calcul de la TFD d'une séquence met en jeu tous les points de cette séquence. Cette propriété de non-localité fait de la TFD une application qui n'est pas, à priori, adaptée à une implémentation dans une architecture à mémoire distribuée, puisqu'elle met en jeu des échanges de messages inter-processus impliquant un grand nombre de données.

Un sous-programme de TFR3D permettant de traiter des champs distribués à valeurs réelles est fourni par le constructeur de la T3E<sup>8</sup>, mais nous avons constaté de mauvaises performances dans l'exploitation d'une première version du code de résolution en y faisant appel. De plus, le programme n'est pas portable vers une architecture ne disposant pas de ce sous-programme. Partant de cette constatation, nous avons décidé d'écrire notre propre sous-programme de TFR3D. Lorsque l'une au moins des trois directions du champ tri-dimensionnel est distribuée, le calcul des sommes (3.30) et (3.22) ne peut pas être effectué directement. Deux approches au problème se distinguent alors dans la littérature, la méthode de transposition et la méthode de distribution. Cette dernière est aussi connue sous le nom de "binary exchange method".

La première approche, la méthode de transposition, est basée uniquement sur le calcul de TFRs locales aux nœuds de la machine (calcul de TFR's en série). Cette méthode fait obligatoirement intervenir des transpositions du "tableau global"<sup>9</sup>. Localement, une transposition globale d'un tableau se traduit nécessairement par la distribution des données dégénérées selon une direction, en échange de la collecte des données distribuées selon une autre direction, de façon à garder les charges des processus constantes. L'existence de nombreux sous-programmes de calcul de TFR's en série optimisés explique que la complexité de cette approche se situe uniquement au niveau de la mise au point d'un algorithme de transposition performant. Néanmoins, selon la solution envisagée ce problème peut être complexe. D'une part on peut chercher à chevaucher les étapes nécessaires à la transposition du tableau avec les étapes nécessaires au calcul de la TFR3D. D'autre part une transposition "en place", c'est à dire une transposition d'un tableau dans lui-même, tout en utilisant aussi peu d'espace de stockage temporaire (mémoire) que possible, nécessite des transpositions locales de données compliquées suivies d'échanges interprocesseurs. Une implémentation pratique et performante d'une telle transposition "en place" d'un tableau tri-dimensionnel a été mise en œuvre par Frigo et al [33] selon un algorithme suggéré par Cate [20].

La deuxième approche aborde le problème du calcul de TFR's distribuées, c'est-à-dire de TFRs dont les données ne sont jamais collectées localement sur un nœud avant d'être transformées. On peut concevoir cette approche assez facilement à partir d'un algorithme de TFR, comme par exemple l'algorithme de Cooley-Tukey [110]. Les échanges de messages portent alors sur des résultats d'étapes intermédiaires de l'algorithme de calcul. Néanmoins, cette approche est plus complexe

---

8. Il s'agit du sous-programme PSCFFT3D faisant partie de la librairie de sous-programmes de calcul scientifique SCILIB développée par CRAY.

9. Rappelons que le tableau global n'est jamais explicitement défini dans un programme sur une architecture parallèle, mais cette notion permet de raisonner sur le domaine global.

que la méthode de transposition pour deux raisons. Tout d’abord, l’algorithme de TFR est entremêlé d’échanges de messages. Il est donc souhaitable de recouvrir autant que possible calculs et communications par des appels asynchrones. L’autre difficulté réside dans le fait qu’il est impossible d’écrire un programme hautement optimisé sans tenir compte de la structure matérielle de la machine cible. En effet, on a déjà mentionné que les architectures modernes requièrent des optimisations spécifiques [33] qui doivent notamment tenir compte de la mémoire de la machine ciblée. Ces questions d’optimisation relativisent donc la véritable portabilité d’un sous-programme de TFR distribuée.

On note actuellement l’apparition progressive de divers sous-programmes (dans le domaine public) de calcul de TFR en deux et trois dimensions, dédiés à des architecture parallèles. La plupart du temps, il s’agit d’implémentations de la méthode de transposition. La bibliothèque de sous-programmes de calcul de TFR’s, `fftw` [32], par exemple, est très performante et propose une TFR3D par la méthode de transposition. La transposition est ”en place” et la transformée peut être récupérée avec ses dimensions d’espace transposées, en option. Il existe également des exemples de méthodes de distribution [26], [140].

Nous avons choisi la méthode de transposition pour la conception de nos codes. Avant de la décrire en détail, nous résumons et fixons quelques idées générales portant sur la méthode de distribution. Par la même occasion, nous donnerons les raisons de notre choix en faveur de la méthode de transposition.

### 3.5.2 La méthode de distribution

Pendant la phase de conception de nos programmes, nous avons eu l’occasion d’étudier la TFR par la méthode de distribution. Nous en décrivons ici certaines propriétés, sans prétendre donner l’approche la plus générale. Quelques algorithmes de TFR’s distribuées sont donnés dans [127]. Les travaux [140], [26], [119] constituent des implémentations pratiques d’algorithmes de TFR distribuée, dont les programmes sont disponibles dans le domaine public.

Nous illustrons dans ce qui suit un schéma pouvant servir comme point d’entrée à la construction d’un sous-programme de TFR distribuée, basé sur les algorithmes classiques de Sande-Tukey et Cooley-Tukey [110]. Soit la séquence  $g_j$ ,  $0 \leq j \leq N - 1$ . On suppose que  $N = 2^n$  où  $n$  est un entier positif ou nul. On définit  $w_N^{jk}$  par

$$w_N^{jk} = e^{-i\frac{2\pi}{N}jk} \quad (3.40)$$

L’algorithme de TFR, dit à décimation en fréquence (DEF)<sup>10</sup>, peut être dérivé à partir de la

---

<sup>10</sup>. Cet algorithme de TFR est connu aussi sous le nom d’algorithme de Sande-Tukey.

décomposition de la séquence  $g_j$  en deux parties égales

$$\hat{g}_k = \sum_{j=0}^{N-1} g_j w_N^{jk} \quad (3.41)$$

$$= \sum_{j=0}^{N/2-1} g_j w_N^{jk} + \sum_{j=N/2}^{N-1} g_j w_N^{jk}, \quad (3.42)$$

pour  $0 \leq k \leq N-1$ . En distinguant les nombres d'ondes pairs et impairs, on peut encore écrire la TFD comme

$$\hat{g}_{2k} = \sum_{j=0}^{N/2-1} (g_j + g_{j+N/2}) w_{N/2}^{jk} \quad \text{pour } 0 \leq k \leq N/2-1 \quad (3.43)$$

$$\hat{g}_{2k+1} = w_N^k \sum_{j=0}^{N/2-1} (g_j - g_{j+N/2}) w_{N/2}^{jk} \quad \text{pour } 0 \leq k \leq N/2-1, \quad (3.44)$$

pour  $0 \leq k \leq N/2-1$ . La TFD sur  $N$  points se calcule donc par deux TFD's de  $N/2$  points de la somme et de la différence des deux demi séquences. Comme nous avons  $N = 2^n$ , nous pouvons réitérer cette procédure  $\log_2 N$  fois et aboutir à une expression constituée de TFD's à un point. En pratique, les  $\log_2 N$  étapes sont calculées par des additions et multiplications de nombres réels ou complexes, selon un réseau de recombinaison, que nous illustrons en figure (3.3) pour le calcul d'une TFR à DEF de huit points. L'algorithme est composé de  $\log_2 8 = 3$  étapes. A l'issue des calculs, les coefficients de Fourier ne sont pas dans un ordre correspondant à l'ordre naturel d'une TFD. On obtient l'ordre correct en écrivant l'ordre de rangement récupéré sous forme binaire et en inversant chaque bit de l'expression. Comme chaque étape de recombinaison demande de l'ordre de  $N$  opérations, le coût total pour une TFR est de l'ordre de  $N \log_2 N$ .

On peut également construire un second algorithme, dit à décimation en temps (DET)<sup>11</sup>. Cet algorithme repose sur le lemme de Danielson-Lanczos qui met en évidence qu'une TFR d'un vecteur de  $N$  points peut s'écrire comme la somme de deux TFR's de  $N/2$  points portant respectivement sur les points pairs et impairs du vecteur

$$\hat{g}_k = \sum_{j=0}^{N-1} g_j w_N^{jk} \quad (3.45)$$

$$= \sum_{j=0}^{N/2-1} g_{2j} w_{N/2}^{jk} + w_N^k \sum_{j=0}^{N/2-1} g_{2j+1} w_{N/2}^{jk}. \quad (3.46)$$

---

11. Cet algorithme est l'algorithme de Cooley-Tukey.

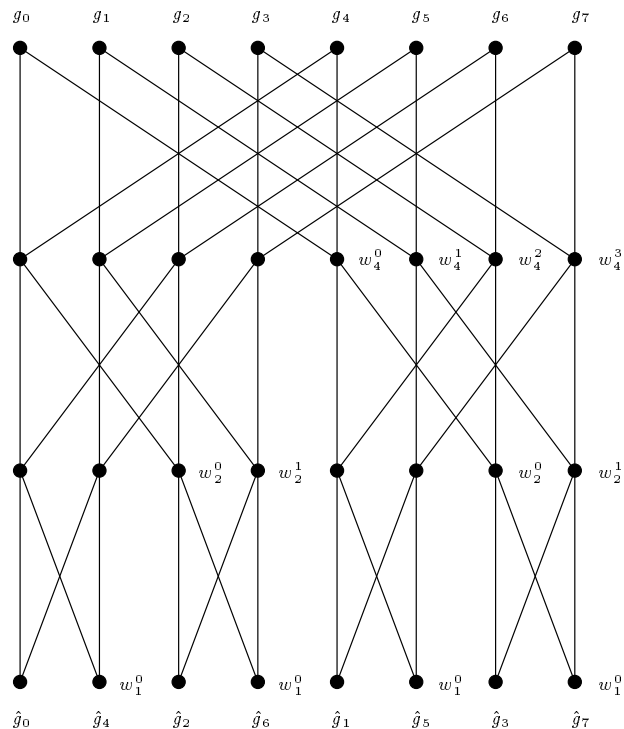


FIG. 3.3 – Le réseau de recombinaison pour l’algorithme de calcul d’une TFR à décimation en fréquence (DEF) pour une séquence de huit points. Partant des huit valeurs de la séquence  $g_j$ , on aboutit après  $\log_2 8 = 3$  étapes aux coefficients de Fourier. Les coefficients ne sont pas rangés comme dans la définition de la TFR directe de la séquence (3.26). Leur ordre correspond à l’ordre obtenu en écrivant l’adresse d’un élément en représentation binaire et en inversant chaque bit.

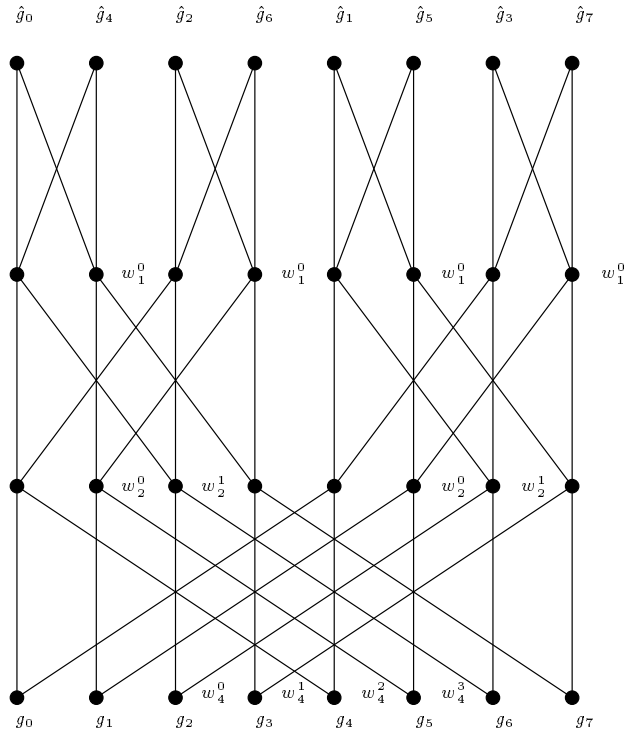


FIG. 3.4 – Le réseau de recombinaison pour l’algorithme de calcul d’une TFR à décimation en temps (DET) pour une séquence de huit points.

En séparant les nombres d’ondes en deux moitiés on peut encore écrire la TFD comme

$$\hat{g}_k = \sum_{j=0}^{N/2-1} \left( g_{2j} + w_N^k g_{2j+1} \right) w_{N/2}^{jk} \quad \text{pour } 0 \leq k \leq N/2 - 1 \quad (3.47)$$

$$\hat{g}_{k+N/2} = \sum_{j=0}^{N/2-1} \left( g_{2j} - w_N^k g_{2j+1} \right) w_{N/2}^{jk} \quad \text{pour } 0 \leq k \leq N/2 - 1 \quad (3.48)$$

Si on applique le lemme  $\log_2 N$  fois, on aboutit à une série de TFD’s à un point. L’algèbre de recombinaison est illustrée pour une séquence de huit points en figure (3.4). On calcule d’abord les  $N/2$  TFD’s à partir des valeurs de  $g_j$  rangées dans le même ordre que celui obtenu à l’issue d’une TFR à DEF, puis les  $N/4$  TFD’s à quatre points et ainsi de suite. Cet algorithme nécessite également  $N \log_2 N$  opérations. A l’issue du calcul, on obtient les coefficients de Fourier rangés dans leur ordre naturel.

En général, on souhaite connaître les éléments d’une séquence rangés dans un ordre naturel. Dans ce cas, les deux algorithmes comportent une phase de rangement. Cette phase a lieu avant (après) l’algèbre de recombinaison dans le cas de l’algorithme à DET (DEF).

Toutefois, dans le cadre d’un solveur pseudo-spectral où une seule direction est distribuée, on peut se passer de l’ordre naturel de rangement de la TFR3D d’un tableau. Pour cela il suffit de connaître l’ordre des coefficients de Fourier en écriture de bits inversés, selon la direction distribuée,



une fois pour toutes.

Supposons, de plus, que la séquence  $g_j$  soit distribuée sur  $npt$  processus. Chaque processus contient donc  $nn = N/npt$  valeurs de la séquence. On montre que le nombre de cycles de communication requis pour le calcul d'une TFR à DEF ou DIT est

$$\log_2 N - \log_2 nn = \log_2 npt, \quad (3.49)$$

la différence entre le nombre total d'étapes de réduction et le nombre nécessaire pour réduire un bout de séquence sur un processus. En effet, un processus est autonome pendant les  $\log_2 nn$  dernières (premières) étapes d'une TFR à DEF (DET), ce qui est apparent dans les figures (3.3) et (3.4). Le volume total de données émis par chaque processus au cours du calcul d'une TFR directe ou inverse est alors donné par

$$V_{\text{TFR dist}} = \frac{N}{npt} \log_2 npt. \quad (3.50)$$

Ce volume est obtenu en gérant les échanges de données comme cela est suggéré naturellement par les réseaux de recombinaison des figures (3.3) et (3.4). Pour s'en convaincre, on imagine que le réseau de recombinaison est distribué sur les processus. En pratique, on peut optimiser les algorithmes en procédant à un réarrangement supplémentaire des éléments de la séquence. Le réarrangement des éléments représente un surcoût négligeable, étant donné que l'on abaisse ainsi de moitié le volume de données envoyées [27], de telle façon que le volume précédent s'écrit

$$V_{\text{TFR dist}} = \frac{N}{2npt} \log_2 npt. \quad (3.51)$$

L'algorithme suivant est alors applicable au calcul d'une TFR3D d'un tableau tridimensionnel réel, distribué selon la direction  $j_2$ . On peut calculer la TFR3D directe avec une routine de TFR en série selon les directions dégénérées,  $j_1$  et  $j_3$  et une routine basée sur l'algorithme à DEF distribué selon la direction  $j_2$ . Pour la TFR inverse, on peut alors utiliser une routine basée sur un algorithme à DIT.

Le volume de données émis par processus au cours d'un calcul de TFR3D directe ou inverse est

$$V_{\text{TFR3D dist}} = \frac{(N+2)N^2}{2npt} \log_2 npt, \quad (3.52)$$

où le facteur  $N+2$  tient compte du fait que la TFR3D est réelle à complexe dans la direction  $j_1$ .

### 3.5.3 La méthode de transposition

#### Généralités et principe de fonctionnement

Les sous-programmes que nous avons développés ne sont pas "en place", mais nécessitent la définition d'une zone de mémoire temporaire de la taille du tableau à transformer. Nous avons trouvé que le T3E disposait de suffisamment de mémoire par nœud pour avoir recours à une zone de mémoire additionnelle. Les simplifications mises en jeu dans la programmation sont considérables.

Les performances sont sans doute meilleures que dans le cas d'une TFR "en place", parce que la transposition est plus simple. Nous avons développé un premier sous-programme de calcul de TFR, que nous avons intégré à une deuxième version du code de résolution des équations de Navier-Stokes, dont les performances n'atteignaient pas celles du sous-programme mis à disposition par le constructeur du T3E (première version du code). Grâce aux indications que nous a fourni M. Meneguzzi, ainsi qu'aux travaux [32], [17] sur des implémentations concrètes de TFR3Ds parallèles, nous avons pu corriger les principaux défauts de notre première tentative. Cela a donné lieu à un deuxième sous-programme de TFR3D et à une troisième et définitive version du code de résolution des équations de Navier-Stokes. Cette dernière version est celle qui a été étendue au cas avec conditions aux limites de type symétrie.

Considérons le principe de fonctionnement de l'algorithme de TFR3D que nous avons implémenté. L'idée est de transformer les directions non distribuées par des sous-programmes de TFR's en série, de transposer le tableau et d'achever la TFR par la transformée de la direction collectée. Jusqu'ici nous avons tacitement supposé l'équivalence entre les directions d'espace de  $f$  et les directions de "rangement"  $j_1, j_2$  et  $j_3$  du tableau  $F_{loc}^p$ . Il est toutefois possible de ranger les directions d'espace du champ différemment. La figure (3.5) illustre la transposition d'un tableau distribué selon  $j_2$ . On transpose les directions  $j_2$  et  $j_3$  de ce tableau. Il faut bien distinguer les directions d'espaces  $x_1, x_2$  et  $x_3$  (ou de l'espace de Fourier  $k_1, k_2$  et  $k_3$ ) et les directions de rangement d'un tableau,  $j_1, j_2$  et  $j_3$ . En a) les directions d'espace  $x_1, x_2$  et  $x_3$  du tableau coïncident avec les directions du tableau  $j_1, j_2$  et  $j_3$ . En b) les directions de l'espace de Fourier  $k_2$  et  $k_3$  ont été permutées par la transposition de  $j_2$  et  $j_3$ . La décomposition du domaine global est indiquée par les lignes en pointillés. Autrement dit, le tableau transposé de la figure b) est physiquement distribué selon la direction  $k_3$ . La TFR3D peut donc simplement être calculée par une série de TFR réelles à complexes en direction  $j_1$ , suivies de TFR's complexes selon  $j_3$ . Le tableau est ensuite transposé. Il reste à calculer la série de TFR's correspondant à la direction d'espace  $x_2$ . Comme le tableau est transposé, cette dernière série doit être calculée par des TFR's complexes selon  $j_3$ .

On peut finalement retransposer le tableau afin d'obtenir la TFR3D distribuée selon la direction  $k_2$ . Alternativement on peut garder la TFR3D sous sa forme transposée, figure (3.5 b), et faire tous les raisonnements dans l'espace de Fourier sur un champ distribué physiquement selon la direction  $k_3$ . On économise ainsi un cycle de communication par TFR3D, ce qui abaisse le temps de communication de 50%.

### Transposition de $F_{loc}^p$ dans les directions $j_2$ et $j_3$

Dans la sous-section précédente, nous avons évoqué la différence entre la structure de rangement d'un tableau en mémoire et la structure spatiale du champ que ce tableau représente. Afin d'expliquer l'algorithme de communication, il est nécessaire de considérer le rangement d'un tableau encore plus en détail. Dans le cadre d'un programme écrit en Fortran 90 les éléments d'un tableau  $F_{loc}^p(j_1^p, j_2^p, j_3^p)$  sont rangés en mémoire de telle façon que  $j_1^p$  défile le plus rapidement, suivi de  $j_2^p$ ,

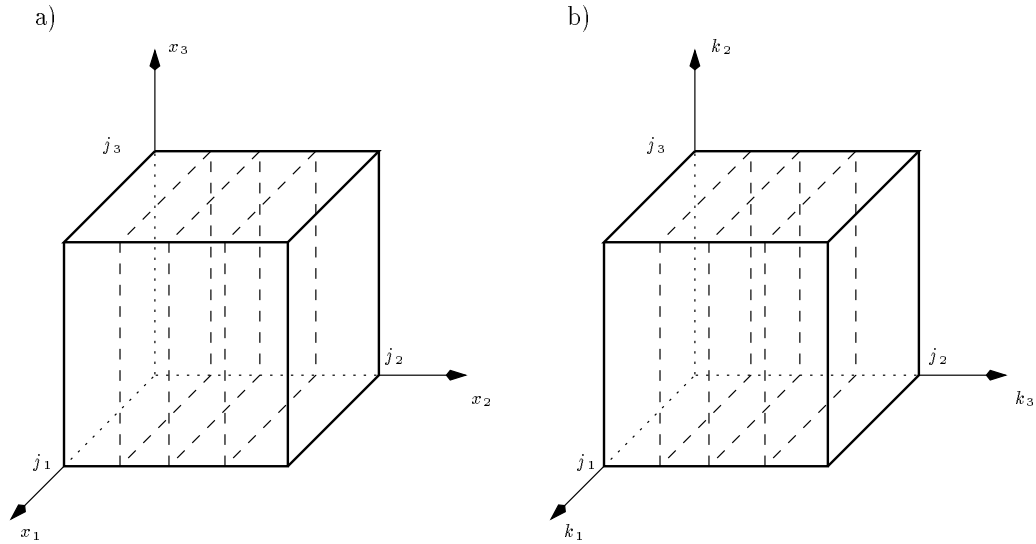


FIG. 3.5 – La représentation spatiale d'un champ sur un domaine global (tableau) indexé par  $j_1$ ,  $j_2$  et  $j_3$ . Les lignes en pointillés indiquent la décomposition du domaine global en quatre sous-domaines contenant chacun une partie du champ. Les directions d'espace du champ coïncident avec les directions de rangement en a). En b) on considère l'espace de Fourier pour illustrer la transposition des directions  $j_2$  et  $j_3$  du tableau. Dans ce cas la direction d'espace  $k_3$  du champ est rangée selon la direction  $j_2$  du tableau. Le champ transposé est par conséquent distribué spatialement selon  $k_3$ .

suivi de  $j_3^p$

$$\begin{aligned} F_{loc}^p(0, 0, 0), F_{loc}^p(1, 0, 0), F_{loc}^p(2, 0, 0), \dots, F_{loc}^p(N_1 + 1, 0, 0), \\ F_{loc}^p(0, 1, 0), F_{loc}^p(1, 1, 0), F_{loc}^p(2, 1, 0), \dots, \\ F_{loc}^p(nn_1, nn_2, nn_3), F_{loc}^p(nn_1 + 1, nn_2, nn_3). \end{aligned} \quad (3.53)$$

On dit aussi que le tableau est rangé par colonnes en exploitant l'analogie avec la numération des indices d'une matrice. A l'opposé, dans le langage C, un tableau est rangé par lignes.

Supposons que le champ  $f$  soit représenté par  $F_{loc}^p$ . Si les directions spatiales coïncident avec les directions de rangement, on affecte à  $F_{loc}^p$  les valeurs du champ  $f$  de la façon suivante

$$F_{loc}^p(j_1^p, j_2^p, j_3^p) := f[j_1(j_1^p), j_2(j_2^p), j_3(j_3^p)], \quad (3.54)$$

où les indices  $j_1$ ,  $j_2$  et  $j_3$  sont donnés par les formules de transformation (3.37-3.39).

On définit le tableau résultant de la transposition de  $F_{loc}^p$  en lui-même par l'affectation

$$F_{loc}^p(j_1^p, j_2^p, j_3^p) := f[j_1'(j_1^p), j_3'(j_2^p), j_2'(j_3^p)], \quad (3.55)$$

où l'on a introduit les nouvelles transformations

$$j_1' = j_1^p \quad \text{pour} \quad 0 \leq j_1^p \leq nn_1 - 1 \quad (3.56)$$

$$j_2' = j_3^p \quad \text{pour} \quad 0 \leq j_3^p \leq nn_3 - 1 \quad (3.57)$$

$$j_3' = j_2^p + p \cdot nn_2 \quad \text{pour} \quad 0 \leq j_2^p \leq nn_2 - 1. \quad (3.58)$$

Les dimensions d'espace  $x_2$  et  $x_3$  sont permutées. La direction d'espace  $x_2$  rangée selon la direction  $j_3$  est dégénérée, tandis que  $x_3$  est distribuée selon (3.58). La suite (3.53) contient donc les éléments de  $f$  rangés comme

$$\begin{aligned} f(0, 0, 0), f(1, 0, 0), f(2, 0, 0), \dots, f(nn_1 + 1, 0, 0), f(0, 0, 1), f(1, 0, 1), f(2, 0, 1), \dots, \\ f(nn_1 + 1, 0, 1), \dots, f(nn_1 + 1, nn_2, p \cdot nn_3/npt), f(nn_1 + 1, nn_2, p \cdot nn_3/npt) \end{aligned} \quad (3.59)$$

La transposition de  $F_{loc}^p$  est effectuée à l'aide d'un tableau  $F_{tmp}^p$  de même structure et de même taille que le tableau à transposer et comporte deux étapes. En un premier temps, on redistribue les données sur les  $npt$  processus. Il s'agit de décomposer  $F_{loc}^p$  selon la direction  $j_3$  et de collecter les données selon la direction  $j_2$ .

Cette étape est illustrée par les figures (3.6 a) et b)). On y a représenté la coupe dans un plan  $j_1 = \text{constant}$  de a)  $F_{loc}^p$  avant transposition, de b)  $F_{tmp}^p$ . On montre ce qui se passe pour une fraction de quatre sous-domaines. Le tableau  $F_{loc}^p$  est scindé en quatre blocs (carrés hachurés) représentant en fait des faisceaux de données. On fait appel au rangement contigu en mémoire des éléments du tableau local  $F_{loc}^p$  pour le scinder en  $npt$  blocs, de données contiguës, indexés par  $p'$

$$F_{loc}^p(0 : nn_1 + 1, 0 : nn_2 - 1, p' \cdot nn_3/npt : (p' + 1) \cdot nn_3/npt - 1) \quad \text{pour} \quad 0 \leq p' \leq npt - 1. \quad (3.60)$$

Chaque bloc est identifié sans ambiguïté par son premier élément  $F_{loc}^{p'}(0, 0, p' \cdot nn_3/npt)$  et son nombre total d'éléments  $nbl = (nn_1 + 2 \cdot nn_2 \cdot (nn_3/npt))$ .

Chaque processus  $p$  envoie les blocs  $F_{loc}^p(0, 0, p' \cdot nn_3/npt)$  aux processus  $p'$ . Chacun des blocs est envoyé à un processus distant. Inversement, suite à l'envoi des blocs, le processus  $p$  contient tous les blocs  $F_{loc}^{p'}(0, 0, p' \cdot nn_3/npt)$ , c'est à dire tous les blocs commençant à la cote  $j_3 = p' \cdot nn_3/npt$ , dans  $F_{tmp}^p$ . Ces blocs sont indiqués par des lignes en zig-zag dans les figures. En b),  $F_{tmp}^p$  est composé de blocs de données contiguës dont les directions d'espace  $x_2$  et  $x_3$  coïncident avec  $j_2$  et  $j_3$ . Ceci est illustré par la direction des lignes hachurées dans les figures. La direction d'une ligne coïncide avec la direction spatiale  $x_2$ . On a pour  $F_{tmp}^p$

$$F_{tmp}^p(0, 0, p' \cdot nn_3/npt) = F_{loc}^{p'}(0, 0, p' \cdot nn_3/npt) \quad \text{pour } 0 \leq p' \leq npt - 1. \quad (3.61)$$

La deuxième étape consiste à faire une transposition locale des directions  $j_2$  et  $j_3$ , bloc par bloc, de  $F_{tmp}^p$  et à stocker les blocs transposés à la place des blocs de  $F_{loc}^p$  (figure c)). Un schéma de communication où chaque processus envoie à tous les processus, y compris à lui même, est un schéma "tous à tous" (all to all). Le schéma est aussi appelé échange croisé. Soit  $\mathbf{send}(p', G(j_1, j_2, j_3), nbl)$  ( $\mathbf{recv}(p', G(j_1, j_2, j_3), nbl)$ ) la fonction qui permet d'envoyer (de recevoir) une suite de  $nbl$  données contiguës d'un tableau commençant par l'élément  $G(j_1, j_2, j_3)$  à un (d'un) processus  $p'$ . La figure (3.7) illustre le pseudo-code pour la transposition des directions  $j_2$  et  $j_3$  d'un tableau  $F_{loc}^p$ . Dans l'algorithme, la fonction  $\mathbf{wait}(p')$  est une barrière, qui n'est franchie que lorsque la requête de réception du bloc de  $p'$  est réellement terminée. La transposition locale sur le bloc  $p'$  peut démarrer une fois que le processus a libéré la fonction  $\mathbf{wait}(p')$ . On note finalement que transposer le tableau transposé redonne le tableau initial.

## L'algorithme de TFR3D réelle à complexe

Nous pouvons à présent énoncer l'algorithme complet de calcul de TFR3D directe. Soit  $\mathbf{rfftj\_1}(isign, N_1, F_{loc}^p)$ , la TFR réelle à complexe ( $isign = -1$ ) ou complexe à réelle ( $isign = 1$ ) en direction  $j_1$  de  $F_{loc}^p$  et  $\mathbf{cfftj\_3}(isign, N_3, F_{loc}^p)$ , la TFR complexe à complexe directe ( $isign = -1$ ) ou inverse ( $isign = 1$ ) en direction  $j_3$  de  $F_{loc}^p$ . L'algorithme est donné en figure (3.8).

La TFR inverse est effectué en inversant l'ordre des étapes de la TFR directe en prenant soin d'utiliser des transformées inverses selon les trois directions. On transforme donc selon  $j_3$ , on transpose, on retransforme selon  $j_3$ , puis selon  $j_1$  (complexe à réelle).

On remarque que la TFR en direction  $j_1$  opère sur des éléments contigus en mémoire, tandis que la TFR selon  $j_3$  oblige à faire des sauts en mémoire de  $(nn_1 + 2) \cdot nn_2$  éléments séparant deux éléments consécutif du tableau  $F_{loc}^p$  selon cette direction. En pratique, on copie les éléments à transformer dans le tableau temporaire  $F_{tmp}^p$ , que l'on transforme, puis on recopie les éléments dans  $F_{loc}^p$ . Rappelons que si on le souhaite, on peut retransposer le tableau final et obtenir la transformée dans l'ordre non-transposé.

Cet algorithme de TFR3D met en jeu un volume total de données échangées de

$$V_{\text{TFR3D trans}} = \frac{npt - 1}{npt} \frac{(N + 2)N^2}{npt}. \quad (3.62)$$

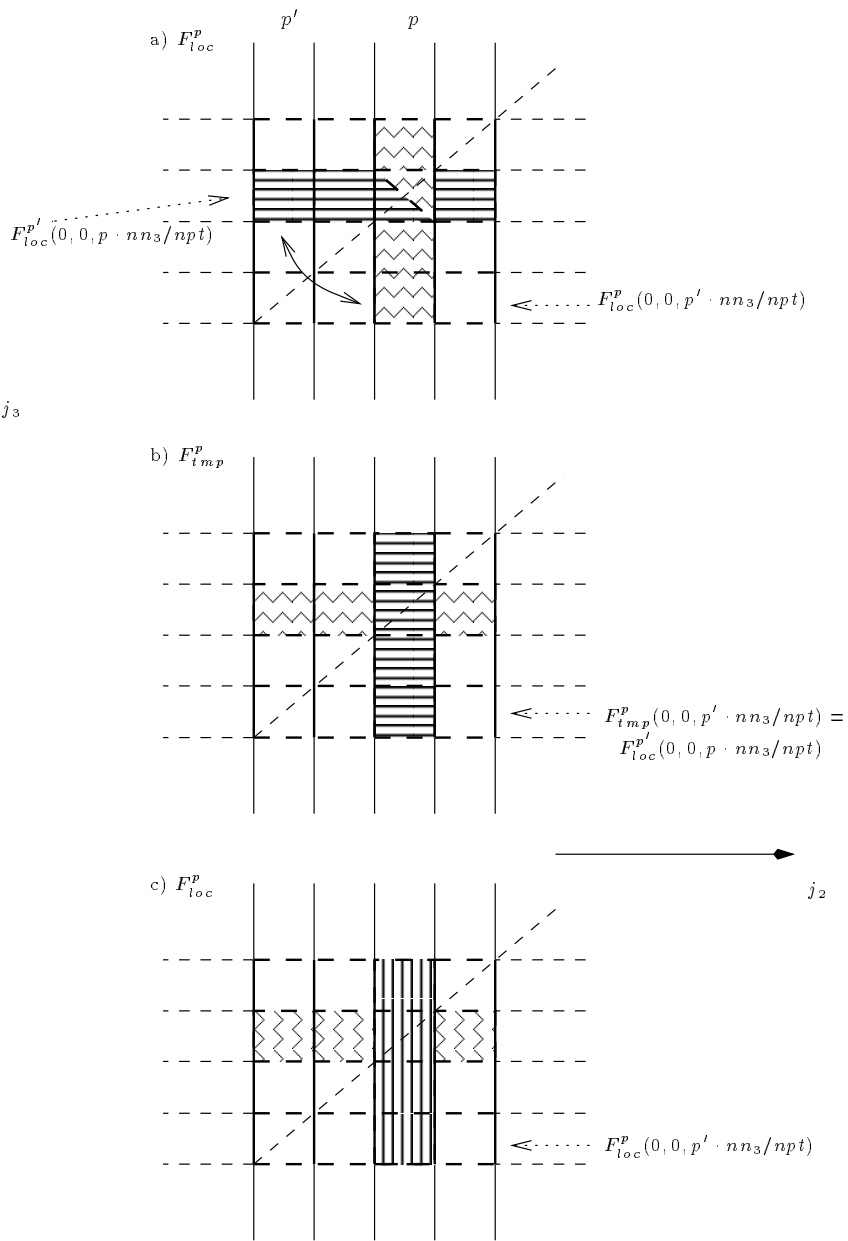


FIG. 3.6 – Schéma de la transposition des directions  $j_2$  et  $j_3$  d'un tableau  $F_{loc}^p$ . En a) les données sont distribuées selon  $j_2$  et les directions d'espace coïncident avec les directions du tableau. La direction des lignes ou du zig-zag dans le remplissage symbolise le rangement des données selon la direction d'espace  $x_2$ . Chaque tableau  $F_{loc}^p$  est scindé en blocs (indiqués par des lignes en pointillés). En b) on a redistribué le contenu de  $F_{loc}^p$  par un schéma de communication "tous à tous" (échange croisé) bloc par bloc dans  $F_{tm_p}^p$ . Un processus  $p$  envoie le bloc  $F_{loc}^p(0, 0, p' \cdot nn_2/npt)$  au processus  $p'$ .  $F_{tm_p}^p$  contient bien tous les blocs correspondant à la même cote  $j_3$ , mais il reste à faire une transposition locale de  $j_2$  et  $j_3$  permutant les directions d'espace  $x_2$  et  $x_3$ . Le résultat est stocké dans le tableau de départ  $F_{loc}^p$ . Finalement les données en direction  $x_2$  sont stockées selon la direction  $j_3$  du tableau  $F_{loc}^p$ , comme l'indique la direction des lignes et zig-zags.

```

transposej2j3( $F_{loc}^p$ )
begin
  for  $p' = 0$  to  $npt - 1$  do
    send( $p', F_{loc}^p(0, 0, p' \cdot nn_3/npt), nbl$ )
    recv( $p', F_{tmp}^p(0, 0, p' \cdot nn_3/npt), nbl$ )
  endfor
  for  $p' = 0$  to  $npt - 1$  do
    wait( $p'$ )
    for  $j_3^p = p' \cdot nn_3/npt$  to  $(p' + 1) \cdot nn_3/npt - 1$  do
      for  $j_2^p = 0$  to  $nn_2 - 1$  do
        for  $j_1^p = 0$  to  $nn_1 + 1$  do
           $F_{loc}^p(j_1^p, j_2^p, j_3^p) = F_{tmp}^p(j_1^p, j_3^p, j_2^p)$ 
        endfor
      endfor
    endfor
  endfor
endfor
end

```

FIG. 3.7 – L’algorithme de transposition consiste en un cycle de communication d’échange croisé, suivi d’une transposition locale des données reçues. Notons que l’envoi d’un bloc destiné au processeur émetteur est superflu, mais symétrise l’algorithme. Il suffit de copier ce bloc dans  $F_{tmp}^p$ , puis de procéder à sa transposition locale.

```

rcfft3d(isign, Flocp) begin
  for j3p = 0 to nn3 - 1 do
    for j2p = 0 to nn2 - 1 do
      rfftx(-1, N1, Flocp(0, j2p, j3p))
    endfor
  endfor
  for j2p = 0 to nn2 - 1 do
    for j1p = 0 to nn1/2 do
      for j3p = 0 to nn3 - 1 step 2 do
        ttmp(2 · j3p) = Flocp(2 · j1p, j2p, j3p)
        ttmp(2 · j3p + 1) = Flocp(2 · j1p + 1, j2p, j3p)
      endfor
      cfftz(-1, N3, ttmp(0))
      for j3p = 0 to nn3 - 1 step 2 do
        Flocp(2 · j1p, j2p, j3p) = ttmp(2 · j3p)
        Flocp(2 · j1p + 1, j2p, j3p) = ttmp(2 · j3p + 1)
      endfor
    endfor
  endfor
  transposej2j3(Flocp)
  for j2p = 0 to nn2 - 1 do
    for j1p = 0 to nn1/2 do
      for j3p = 0 to nn3 - 1 step 2 do
        ttmp(2 · j3p) = Flocp(2 · j1p, j2p, j3p)
        ttmp(2 · j3p + 1) = Flocp(2 · j1p + 1, j2p, j3p)
      endfor
      cfftz(-1, N3, ttmp(0))
      for j3p = 0 to nn3 - 1 step 2 do
        Flocp(2 · j1p, j2p, j3p) = ttmp(2 · j3p)
        Flocp(2 · j1p + 1, j2p, j3p) = ttmp(2 · j3p + 1)
      endfor
    endfor
  endfor
end

```

FIG. 3.8 – L’algorithme de TFR réelle à complexe et complexe à réelle en trois dimensions d’espace transformant un champ  $F_{loc}$ . Après transformation des directions  $j_1$  réelle à complexe et  $j_3$  complexe à complexe, le tableau est transposé, puis l’on retransforme la direction  $j_3$  complexe à complexe.



Le facteur  $npt - 1$  tient compte du fait que le bloc  $F_{loc}^p(0, 0, pnn_3/npt)$  n'est pas échangé, mais seulement copié localement dans  $F_{tmp}^p$ , puis transposé localement. On a donc

$$V_{\text{TFR3D trans}} < V_{\text{TFR3D dist}} \quad \text{pour } npt > 2. \quad (3.63)$$

Le volume de données émis par processeur est donc moins important dans le cas de la méthode de transposition.

L'algorithme de TFR3D inverse n'est pas explicité en détail. La TFR3D inverse est calculée en inversant l'ordre des étapes de la TFR directe, tout en prenant soin d'utiliser des transformées inverses selon les trois directions. On transforme donc selon  $j_3$ , on transpose, on retransforme selon  $j_3$ , puis selon  $j_1$  (complexe à réelle).

## Commentaires

L'algorithme que nous avons décrit à la section précédente nous a été suggéré par M. Meneguzzi. Nous avons également écrit une autre version de la routine de TFR en trois dimensions, antérieure à cette version. La routine antérieure transformait un champ décomposé selon la direction  $j_3$  et avait deux défauts majeurs par rapport à la routine décrite ici. Premièrement, comme déjà remarqué, le fait de conserver la transformée dans un ordre transposé économise un cycle de communication par TFR directe ou inverse [32]. Deuxièmement, le fait que les données soient distribuées selon  $j_2$ , présente un avantage important : les structures de données envoyées sont constituées uniquement de données contiguës en mémoire. Avec la notion de type dérivés de structures de données, MPI permet de créer des structures de données non contiguës en mémoire. Ainsi un processus source peut envoyer un type dérivé à un processus cible. Le processus cible peut à son tour recevoir les données sous la forme d'un autre, quelconque, type dérivé. Dans la version antérieure de la routine nous faisons appel à ce type de construction, rendant ainsi inutile les transpositions locales effectuées sur des blocs de données. Or, nous avons découvert que les performances du programme étaient mauvaises. Nous en avons tiré la conclusion qu'il vaut mieux faire des envois de structures de données contiguës en mémoire, accompagnés de transpositions locales des données à échanger ou échangées, plutôt que de reléguer ces tâches à la bibliothèque MPI, en utilisant les fonctionnalités plus sophistiquées qu'elle propose.

Un autre point important concerne le type de communication employé. L'algorithme de transposition effectue l'envoi des messages en bouclant sur le nombre de processus,  $npt$ , utilisés dans l'application. Lorsque les appels `send` ou `recv` sont non-bloquants, il est possible d'effectuer d'autres opérations sur un processus ne portant pas sur les données à envoyer ou recevoir, pendant que les envois et réceptions ont lieu. On parle de recouvrement entre calculs et communications.

Tel qu'il a été présenté, l'algorithme de transposition peut directement être implémenté avec des appels à des communications asynchrones, mais cela n'apporte rien. Par contre, il est possible de calculer des TFR3D's sur deux ou trois champs en même temps. L'utilisation de cette approche dans l'algorithme pseudo-spectral est très satisfaisante, car il est de toute façon nécessaire de calculer des TFR3D's sur plusieurs champs à chaque itération. Au niveau de l'algorithme de transposition (3.7),

il est possible de faire des calculs suite aux requêtes d’envois et de réceptions de messages, tant que le processus est en attente de terminaison de la requête de réception. Ces calculs peuvent correspondre aux calculs de TFR’s en séries des directions dégénérées d’un autre tableau à transformer. Nous avons développé un sous-programme qui calcule les TFR3D directes ou inverses de trois tableaux simultanément, en utilisant un seul tableau de stockage temporaire  $F_{imp}^p$  et qui tente autant que possible de recouvrir calculs et envois de messages. L’idée nous a, à nouveau, été suggérée par M. Meneguzzi.

Nous avons fait l’expérience avec les différentes fonctions de communications disponibles sur le T3E sur le sous-programme de TFR3D d’un champ et le sous-programme de TFR3D asynchrone de trois champs. Le standard MPI comporte grossièrement deux types de communication, les communication bloquantes (par exemple la fonction `MPI_SEND`) ou les communications asynchrones (non bloquantes), dont un exemple est `MPI_ISEND`. Par ailleurs MPI fournit directement le schéma de communication échange croisé (`MPI_ALLTOALL`) décrit en figure (3.7). Le T3E propose également une librairie de communication propriétaire, SHMEM<sup>12</sup>. La routine de TFR a été programmée en utilisant, dans la transposition du tableau, tous les types de communication évoqués. Les meilleures performances sont atteintes par la librairie propriétaire SHMEM. L’appel à `MPI_ALLTOALL` démontre également d’excellentes performances. On l’explique par le fait que la fonction `MPI_ALLTOALL` optimisée possède un temps de latence<sup>13</sup> inférieur à la boucle d’envois explicites exécutée par exemple avec un appel à `MPI_ISEND` (envoi asynchrone). Un schéma de communications asynchrones est plus performant qu’un schéma bloquant. Mais nous avons constaté que la différence entre communications synchrones et asynchrones de MPI sur la T3E n’est pas très grande. Tous les schémas de communications testés ont des performances sensiblement identiques. Nous n’avons pas effectué de test quantitatif systématique, mais une version de la routine avec appel à SHMEM a été optimisée par E. Gondet (IDRIS, CNRS). Les performances enregistrées étaient de l’ordre de 50Mflops par processus, bien meilleures que les performances de la routine propriétaire `PSCFFT3D` de SGI/Cray.

Finalement, remarquons que l’approche par le calcul de TFR3Ds groupées sur deux ou trois champs, qui permet de chevaucher calculs et communications, est une alternative très attractive pour une machine qui implémente réellement les communications asynchrones. Elle permet notamment de transformer un champ de vecteur, tel que le champ de vitesse d’un écoulement.

### 3.6 Remarques sur le cas avec conditions aux limites de type symétrie

Nous avons déjà indiqué que la considération de conditions aux limites de type symétrie nécessite l’écriture d’un programme indépendant du programme traitant les conditions aux limites périodiques. La configuration optimale pour le cas symétrique est une boîte ayant un nombre impair

---

12. L’implémentation de MPI sur le T3E est en fait basée directement sur des appels de fonctions de SHMEM.

13. Le temps de latence est le temps passé à la préparation de l’envoi, comme par exemple la copie d’un tableau dans une zone tampon.

de points dans chaque direction d'espace. Cela permet de calculer des TFR's en série d'un nombre de points  $N$ , tel que  $N = 2^n$ , où  $n$  est entier. Afin de conserver la même technique de décomposition de domaine, on définit dans ce cas les tableaux avec quelques éléments de plus dans la direction distribuée, afin que le domaine global soit décomposable sur le nombre de processus choisi. L'algorithme de calcul des transformées en cosinus et sinus mixtes, en trois dimensions, découle alors facilement de l'algorithme de TFR3D par transposition présenté.

### 3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit des notions sur les architectures parallèles à mémoire distribuée, ainsi que sur leur programmation. Nous avons décrit la technique de programmation de décomposition de domaine et nous l'avons appliquée à un algorithme pseudo-spectral de solution des équations de Navier-Stokes avec deux types de conditions aux limites (périodiques et de type symétrie), nécessitant l'écriture de deux programmes différents.

L'implémentation pratique de l'algorithme a été présentée dans l'esprit d'un programme utilisant la bibliothèque d'échanges de messages MPI. Le développement d'un programme portable a nécessité l'écriture d'une routine de calcul de transformée de Fourier rapide à trois dimensions. Cette routine a été développée avec l'aide M. Meneguzzi selon une méthode de transposition. La transposition est effectuée par un schéma de communication de type "échange croisé". Le sous-programme de TFR résultant est très performant et ce pour deux raisons. Premièrement, les directions de l'espace de Fourier  $k_y$  et  $k_z$  sont transposées dans le tableau contenant un champ et sa TFR3D. Deuxièmement les échanges de données ne portent que sur des blocs de données contiguës en mémoire.

Nous avons testé plusieurs fonctions d'échanges de messages (synchrones et asynchrones) et nous avons trouvé des performances sensiblement constantes.

Finalement, nous avons décrit rapidement une approche possible au calcul de TFR par une méthode de distribution. Cette méthode met en jeu autant de cycles de communication qu'il y a de processus,  $npt$ , exécutant le programme. Le volume de données envoyées dans le calcul d'une TFR3D, dont l'une des directions est calculée par la méthode distribution est de  $V_{\text{TFR3D dist}} = \frac{(N+2)N^2}{2npt} \log npt$ . Ce volume est supérieur au volume échangé pour le calcul d'une TFR3D à transposition  $V_{\text{TFR3D tran}} = \frac{(N+2)N^2}{npt}(npt - 1)/npt$ .

## Chapitre 4

# Two-dimensional breaking internal gravity waves: from instabilities to turbulence

### Remarque

Ce chapitre constitue une publication et sera soumis à *Physics of fluids*

### 4.1 Introduction

We present results obtained from high resolution direct numerical simulations of progressive internal gravity waves in a vertical plane. It has been known for a long time (Phillips 1966 [108]) that stably stratified flows involving internal gravity waves are unstable to external perturbations and that the resulting dynamics are commonly non-linear. The instability of simplified wave systems, usually linear monochromatic waves occurring in simplified fluid models like the Boussinesq approximation, has been confirmed by nonlinear resonant interaction theory for weak amplitude waves (Thorpe 1966 [129], Phillips 1966 [108]) on one hand, and by the linear stability analysis for arbitrary amplitude waves (Mied 1976 [93], Drazin 1977 [25], Klostermeyer 1982 [61] and 1991 [63] and Lombard and Riley 1996 [80]) on the other hand. The main conclusion of the linear stability analysis begun by Mied is that in two dimensions an internal wave is unstable with respect to parametric instability, however large the Richardson number of the flow may be.

The intuitively difficult modeling of nonlinear dynamical processes in stably stratified flows relies traditionally on small scale laboratory experiments, on numerical simulations and to a lesser extent on field observations. At the present time, a large part of our knowledge of the nonlinear dynamics of large scale internal waves stems from small scale laboratory experiments. These consider however mostly standing waves starting with McEwan et al 1971 [86], 1972 [87], 1975 [89] or partially standing waves (guided waves) (Wunsch et al 1972 [84]), which are easier to generate in laboratory

installations. The understanding gained from these experiments and other studies is considerable. The modal structure of the dispersion relation imposed by the experimental setup has turned out to be an efficient way of reducing the amount of potentially unstable wave modes. Standing waves have therefore led to tractable studies of internal wave instability processes via resonant interaction theory. On the other hand, the same confinement effects tend to constrain the dynamics of the wave field in a way not necessarily in agreement with real progressive small scale geophysical internal waves, where such constraints may be absent or may have a negligible effect. Moreover, a standing internal wave results from the superposition of counter-propagating progressive waves, rendering the resulting flow field more complex. Despite this complexity, the flow of a standing wave is more symmetric than the flow due to a single progressive wave. The recent numerical study on two-dimensional standing waves by Bouruet-Aubertot et al 1995 [12] provides evidence for this and we believe that the spatio-temporal inhomogeneity and anisotropy associated with a single progressive wave should be taken into account when studying the instability process. These differences with standing waves make progressive waves an interesting object of study.

The laboratory experiments on standing waves cited above also address in more detail the local instability mechanisms leading to wave breakdown. However, the experimental techniques used in these studies do not allow access to the detailed flow fields important for modeling the processes. Nevertheless, the study of McEwan and Robinson 1975 has established the importance of a kind of parametric instability for the dynamics of stratified flows. Parametric instability as implied by a subset of solutions to the resonant interaction equations of a single triad of internal waves is commonly referred to as parametric sub-harmonic instability (PSI). It is worth noting that although weakly non-linear progressive internal wave theory, most notably resonant interaction theory, has given rise to a large number of theoretical studies (Müller 1986 [99]), its application has often focused on the statistical properties of flows. In this respect resonant interaction theory is a mere kinematic ingredient allowing for weakly nonlinear interactions to occur between otherwise purely linear waves. We therefore state the need for an investigation into the detailed spatio-temporal development of the instability of a large scale internal gravity wave. While we do not attempt to enrich the PSI resonant interaction theory formally with more physical hypotheses, we identify the generic mechanism allowing the extraction of both forms of kinetic and potential energy from the primary wave to the instability structure. The extraction mechanisms of primary wave kinetic and potential energies were first identified by Lombard and Riley [80]. In our study we consider the flow energetics not on the whole computational domain, but separately on regions of space defined by the primary wave properties, which are translating through space at the phase speed of the primary wave. Our study thus allows us to give a physical interpretation of the PSI mechanism. We also find that this mechanism extends beyond the premises of resonant interaction theory and we hope that our results may give new impulse to the consideration of nonlinear amplitude equations associated with progressive internal wave instability.

A last point of major importance concerns the relevance of our two-dimensional direct numerical simulations to current research on stratified flows. The results to be presented show the existence of

three different flow regimes. The relevance of the simulations to the study of the initial destabilization process is established with the result from three-dimensional linear stability theory, that small amplitude internal wave instability is an essentially two-dimensional process (Klostermeyer 1991). On the other hand the type of flow regime reached by the breaking wave field at the end of our simulations is amenable to a statistical treatment. Such approaches are common in the study of stratified turbulence, where different, random forcing of the flow is usually employed, than the transient forcing by a large scale wave considered here. Our results relative to the post-breaking turbulent will be presented elsewhere. Finally, the relevance of two-dimensional wave breakdown to the understanding of realistic three-dimensional processes is open to criticism. While the breaking events themselves may indeed incorporate two-dimensional fluid dynamics artifacts, there is no doubt that these simulations permit the assessment of breakdown occurrence and initiation. Two-dimensional simulations may give indications as to how future three-dimensional studies may be approached and further work in this direction is currently being undertaken (Koudella 1999 [65], Koudella and Staquet 1999 [66]). A validation of the arguments presented in favor of two-dimensional simulations is given by Bouruet et al 1995, who obtained results in remarkable agreement with the laboratory experiments performed in parallel by Benielli and Sommeria [9].

The plan of the article is as follows. After a first part on the physical background and the numerical model used in our investigation, we expose the instability process of an internal wave. We first consider the dynamics from a kinematic point of view in Fourier space by using resonant interaction theory and time-frequency signal analysis. Then we turn to physical space where we study the energetics of the instability process. Finally we consider the initial stage of the formation of statically unstable layers by considering the vertical density gradient shortly before the wave breakdown event and we also examine the local gradient Richardson number over the computational domain. We also visualize some features of the breaking wave field that are relevant to the assessment of three-dimensional breaking waves.

## 4.2 Equations of motion and numerical model

We consider the dynamics of a Newtonian fluid in a Cartesian coordinate frame  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ , subject to a constant gravitational field  $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ . The fluid is linearly stratified and its dynamics is governed by the Navier-Stokes equations in the Boussinesq approximation [40]. The velocity field  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  is assumed to be incompressible,  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  and the pressure and density fields are split into hydrostatic and fluctuating parts such that  $p = p_0(z) + \tilde{p}(x, y, z, t)$  and  $\rho = \rho_0 + \bar{\rho}(z) + \tilde{\rho}(x, y, z, t)$ , respectively. The hydrostatic parts satisfy the hydrostatic equation  $\nabla p_0 = (\rho_0 + \bar{\rho})\mathbf{g}$ . The equation of motion for the vorticity  $\boldsymbol{\xi}$  reads

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla \times \frac{g}{\rho_0} \tilde{\rho} \mathbf{e}_z + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\xi} \quad (4.1)$$

where  $\nu$  is the kinematic, constant viscosity of the fluid. Equation (4.1) is presented in its three-dimensional form, incorporating the intrinsically three-dimensional feature of vortex stretching and

tilting  $\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{u}$ . The following simple scale argument sets a limit on the validity of a two-dimensional model description. We let  $L$  represent a length scale of the order of the wave length. The amplitude of the particle oscillations associated with the wave provides a velocity scale  $U$ . Further, the density field  $g\tilde{\rho}/\rho_0$  is scaled by  $LN^2$ , where  $N$  is the Brunt-Väisälä frequency based on the linear background stratification whose square is defined as

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\bar{\rho}}{dz}. \quad (4.2)$$

An order of magnitude comparison of the vortex tilting/stretching term to the baroclinic vector  $\nabla \times \frac{g}{\rho_0} \tilde{\rho} \mathbf{e}_z$  yields a ratio equal to the square of the Froude number  $Fr^2 = \frac{U^2}{N^2 L^2}$ . For given  $N$  and wave length of the order  $L$  the Froude number is controlled by the wave amplitude. We thus conclude that strongly stratified flows defined by small and to some extent by moderate amplitude waves (small  $Fr$ ) may be modeled by two-dimensional numerical simulations.

Henceforth we assume two-dimensional dynamics in the vertical plane  $xz$  and we introduce the stream function  $\psi(x, z, t)$  of the flow which is connected to the velocity field components  $u$  and  $w$  and to the scalar two-dimensional vorticity  $\xi$  by the relations

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{and} \quad \xi = -\nabla^2 \psi. \quad (4.3)$$

The Navier-Stokes equations in the Boussinesq approximation in terms of the stream-function-density variable formulation then read

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + J(\nabla^2 \psi, \psi) = \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \nu \nabla^4 \psi \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + J(\rho', \psi) = -N^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\nu}{Pr} \nabla^2 \rho' \quad (4.5)$$

where  $\nu$  is the kinematic viscosity,  $Pr = \nu/\kappa$  is the Prandtl number whose value is chosen to be 0.72 in our numerical simulations and  $N = 1$ . The expression  $J(A, B) = \partial_x A \partial_z B - \partial_z A \partial_x B$  defines the Jacobian operator. Equation (4.4) is in fact the two-dimensional evolution equation for the vorticity  $\xi$ . For convenience we have also introduced the reduced density fluctuations  $\rho' = \frac{g}{\rho_0} \tilde{\rho}$ . The use of  $2\pi$  periodic boundary conditions permits the consideration of progressive wave dynamics in a discrete Fourier space and equations (4.4-4.5) may be integrated forward in time using a standard pseudo-spectral method (Canuto et al 1988 [18]). The computation of convolution sums is performed in physical space instead of Fourier space, at the price of generating aliasing errors. These are eliminated with the help of a standard truncation method of the Fourier coefficients. The dissipation is modeled by a Laplacian and the set of equations is integrated in time using an Adams-Bashforth scheme of third order. The kinematic viscosity and thermal diffusivity are adjusted using the balances of energy. A numerical simulation is validated when this balance is satisfied within at least 1%.

Building on previous work on internal waves, our numerical simulations use a single, linear, plane, monochromatic, large scale internal gravity wave, termed the primary wave. The linear

polarization relations for such waves are given by

$$\psi(x, z, t) = A e^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega(\mathbf{k})t]} + cc, \quad \rho'(x, z, t) = A \frac{k N^2}{\omega} e^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega(\mathbf{k})t]} + cc. \quad (4.6)$$

Here,  $A$  is the complex amplitude of the wave and  $cc$  denotes the complex conjugate expression. The angular frequency  $\omega$  of the wave is connected with the wave vector  $\mathbf{k} = (k, m)$  by the well known linear dispersion relation  $\omega(\mathbf{k}) = \pm N \cos|\theta| = \pm N k/\kappa$  where  $\theta$  is the angle between the wave vector and the horizontal and the  $\kappa = \sqrt{k^2 + m^2}$  is the wave vector modulus. In what follows quantities indexed by 0, such as  $\mathbf{k}_0 = (k_0, m_0)$ , denote primary wave attributes. It is a well known fact that a single linear wave solution (4.6) is also a solution of the fully non-linear equations of motion (4.4-4.5). In order to trigger instability and non-linear dynamics, we have therefore perturbed the initial plane wave by a random noise whose spectrum has been normalized such that the energy be several orders of magnitude smaller than the primary wave energy. Choosing a large scale internal gravity wave as initial condition allows a precise physical space study of the flow, but has the drawback that the simulation does not allow for energy transfers toward waves of larger scales, since such waves cannot be resolved by the computational domain being used. Table 4.1 recapitulates the numerical parameters used in our numerical simulations. Most of our results are presented in time in units of the Brunt-Väisälä period, which we abbreviate by *BVP*.

### 4.3 From instability to breaking

In this section we describe the results obtained from the numerical simulations. We show that the primary waves simulated are always unstable to smaller scale modes and that the resulting wave field loses its coherence after a sufficient time. This loss of coherence is commonly referred to as wave breaking. As cited in the introduction, a possible route of investigation of the instability mechanism is the theory of resonant wave interactions. This theory may be applied to the case of single energetic wave resonantly unstable to low amplitude modes [47]. The application of the simple monochromatic wave theory to our results shows limitations however, which are justified by visualizations of the flow fields, whose consideration suggests the study of the instability in physical space. We first turn to the study of the instability in Fourier space.

#### 4.3.1 Resonant Interaction Theory

In the initial stage of the numerical experiments the total energy contained in the flow field is essentially confined to the primary wave, except for a small fraction of the energy contained in the low level white noise. Also, for small amplitude primary waves the dynamics of the flow field are expected to be weakly non-linear. Using a perturbation theory it is possible to derive simple amplitude equations for weakly nonlinear monochromatic waves. These provide us with theoretical predictions for the growth rates of unstable modes. First order resonant interaction theory is based on two time scales, a fast time scale  $t_1 = 1/N$  characterizing the buoyancy oscillations of the primary wave and a slow scale  $t_2 = L/U$  associated with fluid inertia. In a weakly non-linear regime it is



expected that variations of wave amplitudes can be assessed on the slow time scale  $t_2$  during a limited lapse of time. A non-dimensionalisation of the equations of motion (4.4-4.5) making use of  $t_1$  and  $t_2$  leads to equations of motion where the Jacobian terms are scaled by the Froude number  $Fr = \kappa_0^2 A/N$ , defined using the primary wave vector modulus and the maximum particle speed  $\kappa_0 A$ , as deduced from the polarization relations (4.6). A weakly nonlinear evolution is thus expected to be obtained when  $Fr$  is small or equivalently, when the primary wave vorticity  $\xi$  scaling as  $\kappa_0^2 A$  is small compared to the Brunt-Väisälä frequency  $N$ . The laboratory experiments of McEwan and al consider such small Froude number regimes. They show in a way most appropriate to our study how the Froude number may be used as a small parameter with respect to which perturbative solutions of the stream-function and density may be sought. The main result is that wave-wave interactions are essentially governed by selective resonance conditions. These interactions are called resonant. Here we only recall a few results important for the understanding of our study, further details are provided by Craik 1985 [23]. First order resonant interactions among internal gravity waves due to quadratic Jacobian terms in the equations of motion occur in triplets, called triads, where triad members meet the resonance conditions

$$\sum_{i=1}^3 \mathbf{k}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^3 \omega_i = 0. \quad (4.7)$$

In principle, triads are coupled with each other, since any member of a triad may also be involved in other triads. Actually, we consider only one class of triads, those involving the primary wave  $(\mathbf{k}_0, \omega_0)$  [47]. Further we consider all triads to be isolated from each other and we neglect off-resonantly amplified modes. A two-time scale perturbation calculation (for example McEwan and Plumb 1977 [88]) yields the amplitude equations coupling triad members in a nonlinear fashion  $dA_i/dt = S_i A_j A_k$  with  $i, j, k = 0, 1$  or  $2$ . Since the triad includes the primary mode  $(\mathbf{k}_0, \omega_0)$  containing almost all the energy, a linearization about the state  $A_0 = cst$  and  $A_1 = A_2 = 0$ , shows that the modes  $(\mathbf{k}_1, \omega_1)$  and  $(\mathbf{k}_2, \omega_2)$  may be linearly unstable and grow exponentially in time feeding on the energy of the primary wave mode  $(\mathbf{k}_0, \omega_0)$ . According to Hasselmann's criterion [47] instability occurs only if the frequencies of both secondary waves are smaller than the primary wave frequency. As shall be seen below, instabilities of this kind are of the PSI type in the limit of infinite secondary wave vector moduli.

### Resonant traces and unstable modes

Following Phillips [108], simple geometrical considerations of the resonance conditions allow the graphical representation of all possible resonant triads comprising the primary wave  $(\mathbf{k}_0, \omega_0)$ . The resonance conditions (4.7) may be solved and the curve traced out by the tip of wave vector  $\mathbf{k}_1$  gives rise to the resonant traces, reproduced in figure (4.1 a). The third member of a triad  $\mathbf{k}_2$  is determined by the spatial resonance condition of equations (4.7) as indicated in the figure. Branches may be classified according to the absolute values of the unstable wave angular frequencies  $\omega_1$  and  $\omega_2$  with respect to the primary wave frequency  $\omega_0$ . As already pointed out, only wave modes with

frequencies smaller than the primary wave frequencies are unstable. Potentially unstable triads therefore lie along the four branches labeled by A, B, D and E. It is to be noted that the arcs joining branch A and B, D and E, are supposed to be part of branch A and D, respectively. Such triads result from the solution of the spatial resonance condition together with the *sum* resonance condition  $|\omega_1| + |\omega_2| = |\omega_0|$ . On the other hand, the triads defined by the closed loops labeled C and F contain high frequency secondary waves and are stable. In the limit of large wave vector moduli these branches (and consequently the wave vectors lying along them) have as asymptotes the straight lines whose angle with the horizontal verifies  $\cos\theta = \pm\frac{1}{2}\cos\theta_0$ . The corresponding frequencies verify approximately  $\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2}\omega_0$  and the branches are called parametric sub-harmonic instability (PSI) branches. The traces may be used to identify some of the most unstable modes excited by the primary wave. Graphs b) and c) of figure (4.1) show excited instability modes according to an arbitrarily fixed threshold. The search algorithm keeps modes as soon as the ratio formed by their energy and the instantaneous primary wave energy exceeds  $10^{-4}$  and it is being run as long as the Froude number based on the rms enstrophy and the Brunt-Väisälä frequency is less than one. This ensures that resonant interaction theory is assessed well before wave breakdown. Real valued flow fields in two dimensions give rise to a Fourier space symmetric through the origin. The resonant traces of the left half of Fourier space are therefore folded into the right half through the origin. Within this representation a resonant triad may be identified whenever two modes lie on or close to resonant branches and if the distances separating them is given by the primary wave vector  $\mathbf{k}_0$ . It appears that the dynamics of the instability is controlled by a few triads as well as by other off-resonant modes not associated with any triads in an obvious way. In both cases presented on graphs b) and c) we may identify the triads  $[\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2] = [(2, 4), (-1, -3)], [(3, 7), (-2, -6)], [(4, 10), (-3, -9)], [(5, 12), (-4, -11)]$ . Because of the discrete nature of the numerical simulations, none of these triads meets exactly the resonance conditions (4.7). However strict temporal resonance is not required for the existence of resonant triads as shown by McEwan and Plumb [88], but instead it need only be satisfied within a precision of the order of the Froude number. Similar results were obtained by Bouruet-Aubertot et al 1995 [12], who studied the standing wave analog of the  $\mathbf{k}_0 = (1, 1)$  primary wave considered here. They observed that the instability is governed by a few triads and also observed the existence of more off-resonant triads and isolated secondary wave modes. The growth of these modes may be interpreted as being entrained by the growth of resonant triads. This simple analysis proves that the primary wave excites smaller scale waves, which grow in time feeding on the energy of the primary wave. This fact has implications for the structure of the instability in physical space, presented in the next section, because provided there exists a stable phase relationship between unstable Fourier modes, a finite bandwidth in Fourier space implies a finite bandwidth in physical space. In this sense we shall use the term wave packet to designate the spatio-temporal structure of the instability. The most important conclusion to be drawn from the present paragraph is that the instability mechanism is essentially locally parametric (PSI) and this finding is coherent for all unstable modes observed.

In the discussion so far we have disregarded effects of viscosity. These are however inherently

present in a real fluid and also in a numerical simulation. As found in the linear stability analysis of an inviscid internal gravity wave [61], [93], the largest instability growth rates are predicted for modes of vanishingly small wavelengths. Later calculations [63], [80] including dissipation have however shown that a primary effect of viscosity is to impose a lower bound on the scales involved in the destabilization process of the primary wave. A test series of simulations performed with high Reynolds numbers corresponding to a viscosity of  $\nu = 10^{-6}$  allowed us to assess qualitatively the importance of dissipation. The simulations were interrupted before wave breaking occurred, because the high Reynolds numbers would cause the simulations to break down. Such simulations revealed the interesting fact that the horizontal scale of the instability does not seem to differ much from the horizontal scale of the smaller Reynolds number simulations corresponding to the  $\nu = 10^{-4}$  we are presenting. However the vertical scale of the instability is sensitive to the Reynolds number. This behavior, illustrated in the last image of figure 4.7 (to be commented on later, when we discuss the structure of the instability in physical space), whose features are to be contrasted with the previous images. Further, we have found that a numerical simulation of a small amplitude wave using a zero or vanishingly small viscosity produces an instability where there is no preferred length scale selection. We therefore expect the initial instability of the fluid to be predictable by resonant interaction theory, where the spatial scales involved in the instability process are of intermediate scales and result from a competition between non-linear effects and viscous dissipation as suggested by Bouruet-Aubertot et al 1995.

### Growth rates

We have computed theoretical growth rates for resonant triads and have compared them with growth rates obtained numerically. Following the end of the discussion of the last paragraph, we should take into account viscous effects however. The series of experiments by McEwan et al referred to in the introduction did take into account molecular effects in the analysis of results, however the dissipation function used was specific to the experimental setup and no systematic study of these effects were made. The inclusion of viscous effects into resonant interaction theory is not immediate, because it relies on specific assumptions. We shall follow the ideas laid down in the study of interfacial internal waves by Davis and Acrivos 1967 [24], apply a treatment analogous to theirs in what follows. They suppose that the nonlinear interactions taking place between waves are to a first approximation independent of fluid viscosity and thermal diffusivity. We thus consider the triplet of amplitude equations  $dA_i/dt = s_i A_j A_k - T_i A_i$ , for  $i, j, k = 0, 1$  or  $2$  and  $i \neq j \neq k$ , where  $T_i$  is the total dissipation function to be determined subsequently. The linearization of this system around the basic state  $A_0 = cst, A_1 = A_2 = 0$  admits solutions displaying an exponential time variation with the following growth rate

$$s = -\frac{1}{2}(T_1 + T_2) + \left[ \frac{1}{4}(T_1 - T_2)^2 + S_1 S_2 A_0^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.8)$$

where the interaction coefficients  $S_1$  and  $S_2$  are calculated in a most succinct way by McEwan & Plumb [88] and are given by

$$S_i = \frac{1}{2\omega_i\kappa_i^2} (k_p m_q - k_q m_p) \left[ \omega_i (\kappa_p^2 - \kappa_q^2) + k_i \left( \frac{k_p}{\omega_p} - \frac{k_q}{\omega_q} \right) \right], \quad (4.9)$$

where  $i, p, q = 0, 1$  or  $2$  (no sum over  $p$  and  $q$ ). Equation (4.8) shows that exponentially growing (unstable) solutions are possible provided that i)  $S_1 S_2 > 0$  and ii) the constant amplitude of the primary mode exceeds the threshold value given by:  $A_{th} = \sqrt{T_1 T_2 / S_1 S_2}$ . The first condition may be shown to be equivalent to the Hasselmann criterion [47] discussed before, while the second one ensures for a given amplitude that growth due to nonlinear triad interaction is larger than decay due to viscous effects. Up to here our treatment parallels Davis and Acrivos approach. It remains to be shown what dissipation function we should use. Considering linear waves in an unbounded fluid the functions  $T_i$  should be a function of the viscous dissipation and the thermal conduction. It can be easily shown from linear theory that the balance satisfied by the total energy  $E_i^{tot}$ , the sum of kinetic and potential energy, of a single wave averaged over a wave period is given by

$$\frac{d}{dt} E_i^{tot} = -(\nu + \kappa) \kappa_i^2 E_i^{tot}. \quad (4.10)$$

We extrapolate this result and use  $T_i = (\nu + \kappa) \kappa_i^2$  as dissipation function. Interested in the occurrence of PSI, we consider the inviscid and dissipative growth rates for the viscosity and conductivity used in computations 10, 9 and 14 in table 4.1. These correspond to the four PSI branches labeled A, B, D and E in figure (4.1 a). We have also represented the growth rates for the inviscid curves on the same figures. There are two important points to note here. First of all the influence of viscosity is strong for the Newtonian dissipation used in our simulations. This is in contrast to Bouruet-Aubertot et al's stationary wave investigation, where they use essentially biharmonic dissipation, reducing the influence of the hyper-viscosity to the smallest scales of motion. Secondly, it is apparent that triads lying along branches B and E, have smaller growth rates than triads lying along branches A and D. Actually, our threshold analysis has not revealed any excitation of modes lying along branches B and E and we shall show that it is indeed the triads lying along branches A and D which govern the instability process of the waves. We shall also provide some physical arguments of why this should be so.

Figure 4.2 shows the numerically computed energy histories for the  $\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1 = (3, 7), \mathbf{k}_2 = (-2, -6)$  triad for two different initial amplitudes of the primary wave. The ordinate is plotted with a log scale. The growth of the secondary modes is clearly seen to be exponential and curiously saturates shortly before breaking only. The exponential growth foreseen essentially for the beginning period of the simulation thus persists well beyond the small Froude number regime. This type of behavior was similarly observed in the standing wave case [12]. The theoretically computed growth rates are also represented on the figures in dashed lines. It is seen that the numerical growth rates are somewhat smaller than the theoretically predicted, on the average by 10–20%. Finally we want to mention, that the energy histories of the more off-resonantly growing modes have been found to be hardly affected by their off-resonance. In this sense the instability grows at a uniform rate and

seems to be driven by the most resonant triad. We shall see in the following section that this last point is essentially confirmed by a time-frequency analysis, which opens the way to a study of the instability in physical space.

### A time frequency analysis of the vorticity in a point

The threshold test exposed in section for small Froude numbers has demonstrated, that the primary instability is dominated by resonant interactions. However, it only shows which secondary modes participate in the instability, but it does not display the time dependence of secondary modes. We have pointed out that the dynamics in the early stages of the evolution is driven by a small amount of localized resonant and slightly off-resonant triads. In physical space the instability appears as a spatially modulated wave or wave packet and global insight is gained from the study of the wave packet's frequency content. This allows for testing the idea that the instability modes are entrained by a dominant triad and in what respect we are dealing with PSI. We have performed a time frequency analysis of the vorticity in the center of the computational domain for a simulation with initial wave amplitude  $A = 0.256$  (run 9). The dominating primary wave contribution to this time series has been filtered out in Fourier space (left of figure (4.4)). This filtering procedure is necessary for the energy contained in secondary modes to be resolved by the processing technique. However, the computation of a short time Fourier transform of the integral signal (right of figure 4.4) shows that even then no perceptible signal is obtained prior to 30 *BVP*. Incidentally, this figure shows clearly what occurs in the time-frequency plane when the wave field breaks. Breaking at around 38 *BVP* is distinguished by the appearance of energy at much higher frequencies, not associated with internal gravity waves. Most high frequency modes are energized only during about 5 *BVP*, period during which most of the energy is dissipated by a freely decaying stratified turbulent regime. Let us return to the flow field before breaking. In the first stage of the wave evolution (prior to break-down) it may be observed that the perturbation energy is contained in a thin angular frequency band of an average angular frequency equal to one half the primary wave angular frequency, which indicates that the perturbation is PSI-like in frequency space as expected from resonant interaction theory. This is observable on the spectrogram only between 31 and 33 *BVP*. Prior to this period the instability is not resolved. In the units used, the primary angular frequency has a value of  $1/\sqrt{2}$ , while the observed angular frequencies (including those frequencies associated with the almost resonant  $\mathbf{k}_1 = (3, 7)$  and  $\mathbf{k}_2 = (-2, -6)$  waves) lie between 0.3 and 0.4. During this period the only frequencies excited are frequencies bounded by the Brunt-Väisälä frequency, the cut-off frequency. Actually, during this period, the excited frequencies seem to be bounded by the primary wave angular frequency itself, a finding in agreement with the Hasselmann 1967 criterion mentioned in section (4.3.1). Despite the fact that the primary wave contribution to the signal has been filtered, the triad frequencies cannot be properly resolved on the spectrogram. We have therefore preprocessed the part of the signal enclosed between vertical dashed lines on the left of figure 4.4 by submitting it to automatic gain control. This amounts to normalizing the time series envelope. In this way we could get rid of the non stationarity due to the envelope growth. We

have computed a short time Fourier transform using phase reassignment [6] of the resulting time series. The spectrogram obtained is shown in fig. 4.5. It is seen that the spectrogram resolves the instability from about 25 BV periods onwards. It appears rather clearly, that the instability, found to be composed of a band of spatial Fourier modes, is driven in the beginning by two frequencies only, the frequencies corresponding to the principal triad frequencies. Later parts of the signal are not interpreted and the figure (4.5), because the method of analysis sought precisely to obtain the triad frequencies in order to observe the frequency splitting. The principle feature of this last analysis is thus that we are able to observe the splitting of the frequencies associated with the principal resonant triads.

### 4.3.2 The structure of the instability in physical space

Our considerations of the instability features in Fourier space showed its finite bandwidth. Such a finite bandwidth usually amounts to a spatially modulated instability wave packet in physical space, provided the phases of the partaking modes are well behaved with respect to each other, which must occur if energy is to be extracted from the primary wave. While there is a strict equivalence between the finite bandwidth Fourier space point of view and the modulated wave packet physical space point of view in the linear or weakly non-linear regime, a consideration of the latter is rewarding [107]. Any perturbation evolves in a non homogeneous and non stationary background flow and stratification and is subject to the advection by the primary wave induced velocity field, the primary wave shear and the primary wave density gradient (in addition to the linear density profile). In this and subsequent paragraphs we present the destabilization process from a phenomenological view point with help of visualizations.

#### The spatial structure of a linear internal gravity wave

The left of figure (4.6) shows the detailed structure of a linear, monochromatic, plane, progressive internal gravity wave  $\mathbf{k}_0 = (1, 1)$  in a  $2\pi$  periodic geometry. The wave propagates toward the upper right corner and the propagation direction of such a wave is determined by the phase relationship between the velocity and density fields. These are always in quadrature. For the propagation direction considered the density lags the velocity by  $\pi/2$ . The two-dimensional space may be subdivided into areas defined by the internal wave properties. On one hand, we distinguish zones of space instantaneously defined by the sign of the primary wave vorticity  $\xi_p$ . The vorticity corresponds to the gradient of the velocity field along the direction defined by the wave vector  $\mathbf{k}_0$ , as will be shown later by rewriting the equations of motion in the reference frame of the primary wave. Shaded areas on the figure have  $\xi_p > 0$ , while light areas have  $\xi_p < 0$ . On the other hand, we may distinguish zones according to the sign of the vertical density gradient. With respect to the linear background stratification, a linear internal wave thus induces areas of reduced and increased static stability, labeled by RSS and ISS, respectively. Zones defined by the sign of the vorticity  $\xi_p$  overlap evenly with zones defined by the vertical density gradient, because of the quadrature relationship between these two fields. All zones considered move in time at the phase speed of the

internal wave and only in the frame of reference tied to a wave phase line, do these regions become Eulerian. The consideration of the detailed structure is helpful, when considering the instability and breaking processes of the wave field. Similar considerations were made by Thorpe 1989 [130] and 1994 [131]. Such an analysis brings out the spatio-temporal inhomogeneity involved in an internal wave. We shall see that  $\xi_p$  areas are important for the destabilization of the wave, while RSS areas are important for the breaking of the wave. Finally, on the right of figure (4.6) we represent the initial total density field of the simulation run9, which we shall consider more closely in this study.

### Destabilization and emergence of a secondary wave packet

Here we look at the vorticity of the flow defined by the second of equations (4.3), as this quantity is a convenient way of representing a two-dimensional flow field. In order to observe the features of the destabilization process from the very beginning of the simulation we have filtered out the primary wave  $\mathbf{k}_0$  contribution to the vorticity in Fourier space. In physical space we are then left with vorticity relevant to the emerging instability only. However, in order to follow the phase relationship between instability and primary wave in time, we also keep the primary wave's vorticity. Both contributions are superimposed, the instability being visualized using a full colormap (grey shades in the figures), while the primary wave is visualized using light and dark shading according to the sign of the primary wave's vorticity. Positive primary wave vorticity ( $\xi_p > 0$ ) corresponds to veiled areas. Figure (4.7) shows the development of the instability wave packet over approximately one primary wave period ( $PWP$ ) about  $6 PWP$  after the initiation of the simulation. The images are spaced by approximately  $1/4 PWP$  as confirmed by the position of primary wave phase lines delimiting differently signed  $\xi_p$  areas.

The dynamics of the whole flow field, that is the propagation of the primary wave at its phase velocity and the propagation of the wave packet composed of the excited Fourier modes is a complex phenomenon due to the anisotropic dispersion properties of internal waves and as time elapses due to the interaction between these components. A quantitative study of this dynamical behavior can actually be conducted by considering the propagation properties of linear internal waves forming the instability wave packet. However, such an approach is not considered here. The purpose of the series of images on figure (4.7) is to show the existence of a modulation in space and time. There is an apparent periodicity between the first ( $6.055 PWP$ ) and the last image ( $7.045 PWP$ ), despite the complex relative wave packet dynamics. The effect of the primary shear on the wave packet is readily observed. Thus,  $\xi_p > 0$  areas produce a clockwise rotation on wave packet crests and troughs, while  $\xi_p < 0$  areas (veiled) produce an anti-clockwise rotation. These rotation effects are indeed finite amplitude effects and are absent only for primary waves of vanishingly small amplitudes. It is seen from the figures that the primary wave propagates on top of the wave packet. The wave packet dynamics is not strictly stationary, although in the series of images in figure (4.7) we may suppose it to be so and this will be confirmed when we consider the energy budgets of the instability. Crests and troughs emerging from a  $\xi_p > 0$  zone into a  $\xi_p < 0$  zone are inclined with respect to the horizontal and are well focused (image  $6.797 PWP$ ). On the other hand, crests and troughs

emerging from a  $\xi_p < 0$  into a  $\xi_p > 0$  zone are more nearly horizontal and their vertical scale over which the vorticity varies appears to be larger (image 6.302 *PWP*). While the directional change may be attributed to primary wave rotation effects associated with the primary wave vorticity  $\xi_p$ , the scale change results from the fact that crests and troughs are either located in areas of reduced or increased static stability. We note that the wave packet never cancels completely in any region of space, but the existence of a modulation indicates that the energy associated with the instability is *not* instantaneously equipartitioned in space. In overall, the images indicate a strong connection between the primary wave's shear velocity field and the development of the instability. Let us also note that there exists a weak interference patterns  $\xi_p > 0$  zones. This cannot be due to the wave packet alone. These interferences may correspond to a superposition of the modes lying on branches B and E and of modes making up the wave packet. This second wave packet has a smaller growth rate than the one we essentially observe in these figures, as is predicted by resonant interaction theory (figure 4.2 b) and our simple threshold test did not even identify these modes. They will not be considered anymore in what follows, for we have consistently observed that they tend to die out, the instability being controlled by the wave packet we have described. Animations also show the manifestation of the local PSI. A crest associated with the wave packet, moves by one average secondary wavelength after the passage of two primary wave lengths on top of it. Although we consider only one single wave period in the present paragraph, we will see shortly that the mechanism is essentially repeated each primary wave period and that it thus constitutes the only mechanism leading to the redistribution of energy in Fourier space and the subsequent breaking of the resulting wave field. We can conclude that the images of figure (4.7) show that the inhomogeneity induced by the primary wave is of central importance and we next take this into account for the study of the energetics of the destabilization process.

### **Linearized kinetic and potential energy equations**

The linear stability analysis of an internal wave in an analogous configuration to the one considered presently has been studied by several workers and has been completed recently by Lombard and Riley 1996 (LR96) [80], who also give an overview of past work on the subject. LR96 and Lombard 1994 (L94) [79] have clearly shown that two different energy extraction mechanisms are active during the destabilization process. Thus, unstable wave modes may extract kinetic energy as well as potential energy from the primary wave. LR96 refer to the kinetic energy extraction mechanism as shear production or Reynolds stress production, because of the similarity with the kinetic energy coupling terms obtained in the energy equations of homogeneous turbulence in the framework of the Reynolds decomposition [128]. The potential energy extraction, specific to stratified flow, is called the gradient production, because it is dependent on the existence of the primary wave density gradient. Our objective is to derive a linearized evolution equation for the wave packet kinetic and potential energies. The results are simplest if we consider a two-dimensional primitive variable formulation in the coordinate system introduced by Mied 1976. The laboratory coordinate system denoted by  $(x, y, z)$  is subjected to a rotation about the  $y$ -axis, such that the resulting  $z_r$ -axis of



the rotated system  $(x_r, y_r, z_r)$  is aligned with the wave vector of the primary wave  $\mathbf{k}_0$ . In a second step, the Galilean transformation  $X = x_r, Y = y_r, \Phi = z_r - c_0 t$  is applied to the rotated system, where  $c_0 = \omega_0/\kappa_0$  is the constant primary wave phase speed. These steps are illustrated in figure (4.8). The new coordinate system  $(X, Y, \Phi)$  is associated with an inertial reference frame. The Euler equations in the Boussinesq approximation in the new frame thus write (LR96)

$$\frac{\partial U}{\partial T} + U \frac{\partial U}{\partial X} + W \frac{\partial U}{\partial \Phi} = -\frac{\partial p}{\partial X} + \frac{k_0}{\kappa_0} \rho' \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial W}{\partial T} + U \frac{\partial W}{\partial X} + W \frac{\partial W}{\partial \Phi} = -\frac{\partial p}{\partial \Phi} - \frac{m_0}{\kappa_0} \rho' \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial T} + U \frac{\partial \rho'}{\partial X} + W \frac{\partial \rho'}{\partial \Phi} = N^2 \left( \frac{m_0}{\kappa_0} W - \frac{k_0}{\kappa_0} U \right) \quad (4.13)$$

where  $\mathbf{U} = (U, W)$  are the velocity components in the new frame and the pressure is normalized by the mean density  $\rho_0$ . Scalar fields are not affected by the coordinate transformation and are therefore not relabeled. In this frame of reference the primary wave is stationary and reads

$$U_0 = A_0 m_0 e^{i\kappa_0 \Phi} \quad (4.14)$$

$$W_0 = -\frac{\omega_0}{\kappa_0} \quad (4.15)$$

$$R_0 = A_0 N^2 \frac{k_0}{\omega_0} e^{i(\kappa_0 \Phi + \pi/2)}. \quad (4.16)$$

The next step consists in making the following decomposition of the flow variables

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{u}' \quad (4.17)$$

$$\rho' = R_0 + \sigma' \quad (4.18)$$

$$p = P_0 + p' \quad (4.19)$$

where primed quantities correspond to small perturbations. Substitution of this decomposition into the evolution equations (4.11- 4.13), linearization and subtraction of the equations of motion for the primary wave leads to equations of motion for the perturbation variables. We thus can derive the linearized perturbation kinetic and potential energy equations

$$\left( \frac{D}{Dt} \right)_0 \frac{1}{2} (u'^2 + w'^2) = -u' \frac{\partial p'}{\partial X} - w' \frac{\partial p'}{\partial \Phi} + \frac{k_0}{\kappa_0} \sigma' u' - \frac{m_0}{\kappa_0} \sigma' w' - u' w' \frac{dU_0}{d\Phi} \quad (4.20)$$

$$\left( \frac{D}{Dt} \right)_0 \frac{1}{2} \frac{\sigma'^2}{N^2} = -\frac{k_0}{\kappa_0} \sigma' u' + \frac{m_0}{\kappa_0} \sigma' w' - N^{-2} \sigma' w' \frac{dR_0}{d\Phi} \quad (4.21)$$

where we have defined the material derivative following the primary wave by

$$\left( \frac{D}{Dt} \right)_0 = \frac{\partial}{\partial T} + U_0 \frac{\partial}{\partial X} + W_0 \frac{\partial}{\partial \Phi}. \quad (4.22)$$

In these equations all terms characteristic of the evolution of the mechanical energy are recognized [40]. These are the advection terms by the primary wave of kinetic and potential energy, the

redistribution of kinetic energy due to pressure inhomogeneities and the heat flux appearing in both equations with different signs. In addition each equation contains also a single term coupling the fluctuating fields to the primary wave quantities. In the kinetic energy balance we have the term  $-u'w'dU_0/d\Phi$ , while in the potential energy balance we have  $-N^{-2}\sigma'w'dR_0/d\Phi$ . These two terms are precisely the shear production term and the gradient production term referred to at the beginning of the paragraph. In particular, the quantity  $dU_0/d\Phi$  is the primary wave vorticity labeled by  $\xi_p$  in the laboratory frame. Now we focus on the kinetic energy balance, equation (4.20). We expect the instantaneous velocity field correlations of the internal wave packet to of a fixed sign for all space and all times, because such a packet has a well defined propagation direction. Thus, if there is to be a net extraction of kinetic energy, from the primary wave energy reservoir, then the correlations appearing in the term  $-u'w'dU_0/d\Phi$  must have variable properties according to the sign of the primary wave vorticity  $dU_0/d\Phi$ . The existence of a non zero buoyancy flux makes an adjustment of the velocity fluctuations possible by allowing the reversible interchange between kinetic and potential energy. For a single internal wave, it is impossible to adjust the velocity fluctuations, because there is instantaneous equipartition of kinetic and potential energy when this is averaged over one wavelength. However, we know that the instability pattern is a polychromatic wave packet and this equipartition need not be the case then. If there exists an instantaneous *non-zero* buoyancy flux, then there will not be equipartition between energies and the fluctuations can adjust and finally produce a net kinetic energy extraction from the primary wave provided the phase of the wave packet is adjusted with the primary wave vorticity. This reasoning is not immediate for the gradient production term in the potential energy balance, because the correlations between fluctuating vertical velocity and fluctuating density are less obvious and in the absence of this reasoning, it is obvious that the instability process is not governed by potential energy extraction alone, as was shown by LR96. Therefore, the discussion presented suggests a possible physical mechanism for internal wave instability involving the buoyancy flux of the wave packet and it suggests that we examine the energetics of the destabilization process with respect to primary wave vorticity zones.

### **A local study of the instability energetics**

In this paragraph we present the results relative to the kinetic and potential energy balances given by equations (4.20) and (4.21), respectively, for two numerical simulations. The first series of graphs concerns the small amplitude simulation run9 which we have visualized and commented in detail in this study, while the second concerns a large amplitude wave (run11), for which the premises of the weakly non-linear interaction theory are violated. Results of run9 are presented in figures (4.9) and (4.10), while results for run11 are presented in figures (4.11) and (4.12). Panel a) shows the total kinetic and potential energy histories of the simulation. Wave breaking may be defined as the instant of maximal decrease of the energies and is seen to occur shortly before 40 *BVP* on figure (4.9 a). We have also represented the viscous dissipation and heat conduction of the primary wave as predicted by linear theory using a dashed line. The very good agreement with

our numerical simulation validates our numerical code in the linear regime and shows that viscous dissipation and heat conduction are governed by the primary wave only during the destabilization phase. Another feature of internal wave breaking is that the kinetic energy is always more important than the potential energy at the end of our simulations. Indeed, the conversion of potential energy into kinetic energy during breaking produces an acceleration of the horizontal mean flow. This is a result also found in three-dimensional numerical simulations (Koudella 1999a [65]). Panel b) shows the time evolution of the total instability kinetic and potential energies represented with a logarithmic scale. The instability energies associated with the wave packet grow exponentially in time as known from the weakly nonlinear approach presented before.

Panel a) of figure (4.10) illustrates the total energy production terms KEP for the kinetic energy and PEP for the potential energy. The gradient production is always positive in both cases, but the kinetic energy production becomes periodically negative in the beginning stages of the wave destabilization. However both simulations reach a stage where the extraction of both forms of energy is always positive. Panel b) shows the values of kinetic energy production (KEP) ( $-u'w'dU_0/d\Phi$ ) and of potential energy production (PEP) ( $-N^{-2}\rho'w'dR_0/d\Phi$ ). A quantity is prefixed by P and N if it results from a sum over areas in which  $\xi_p > 0$  and  $\xi_p < 0$ , respectively. All quantities are normalized by the instantaneous total disturbance energy, that is the energy contained in all wave modes except the primary mode, represented on figures (4.9) and (4.9) a). Panel b) thus shows, that kinetic energy is extracted only in  $\xi_p < 0$  areas (NKEP). In  $\xi_p > 0$  areas it is actually seen that the wave packet transfers weakly energy toward the primary wave (curve PKEP). This contrast is far less marked for the potential energy extraction, which is slightly dominated by the production in  $\xi_p > 0$  areas (PPEP), but which is not negative in areas of opposite sign (NPEP). On panel c) we show the normalized disturbance energies summed over  $\xi_p$  zones. There is a definite correlation between the production terms in panel b) and the energies. It may for instance be seen that the kinetic energy production is maximized in  $\xi_p < 0$  zones, when the kinetic energy in these zones is also maximal (NKE), for then the velocity correlations appearing in the production term  $-u'w'dU_0/d\Phi$  are also maximal. On the other hand the wave packet energy in  $\xi_p > 0$  zones (PKE) is small so as to minimize the loss of kinetic energy to the primary wave. This last point relies on the fact that the velocity correlations in the well defined wave packet we have observed do not change their sign, such that in  $\xi_p > 0$  zones there is necessarily a loss of disturbance energy to the primary wave. The potential energy extraction is always positive, which means that the vertical velocity-density correlations in the wave packet, appearing in the term  $-N^{-2}\sigma'w'dR_0/d\Phi$ , must change their sign as a function of their location in a  $\xi_p$  zone. Panel c) representing the energies clearly shows the spatial modulation of the wave packet. Kinetic energy maxima located in  $\xi_p < 0$  zones are out of phase with potential energy maxima located in  $\xi_p > 0$  zones. Further, the periodicity of the oscillations is very closely equal to the primary wave period. In units of  $BV$  periods the primary wave period is  $\sqrt{2}$ . Panel c) shows that during  $5BV$  the energies undergo a little less than 3.5 periods of oscillation, which amounts to a period of the order of the primary wave period. There exists thus a non-zero instantaneous buoyancy flux in the wave packet which adjusts the

wave packet's kinetic energy to a maximum in  $\xi_p < 0$  zones for maximal kinetic energy extraction and to a minimum in  $\xi_p > 0$  zones for minimal kinetic energy loss. A similar statement applies to the potential energy dynamics. The buoyancy flux associated with the packet is represented on panel d). The total wave packet buoyancy flux, defined as the spatial average of

$$-\frac{k_0}{\kappa_0}\sigma'u' + \frac{m_0}{\kappa_0}\sigma'w' \quad (4.23)$$

is negative, because the potential energy extraction mechanism is more efficient than the kinetic extraction mechanism. If the energies associated with the wave packet are to be equipartitioned when averaged over space and time, then there must exist the net negative buoyancy flux observed. However, the oscillations in the buoyancy flux explain the periodic transfer of kinetic and potential energies observed in panel c). Incidentally, we believe that this analysis also restores a more physical interpretation of the PSI mechanism discussed before. Indeed, an excitation of two secondary waves at half the primary wave's frequency provides a buoyancy flux oscillating at the primary wave frequency as may be verified from first linear principles. From the present point of view, PSI then appears as a process tending to optimize both energy extraction mechanisms, but where the kinetic energy extraction mechanism operates in favor of wave packet growth in  $\xi_p < 0$  areas only, while the potential energy extraction mechanism operates almost equally in both types of spatial zones. It is the existence of this buoyancy flux together with the phase adjustment of the wave packet with respect to the primary wave which makes the process feasible.

Finally, we note that the whole process described in this paragraph is encoded in weakly non-linear resonant interaction theory, although as we have pointed out in the introduction, that we are not aware of an existing physical interpretation of the PSI mechanism in terms of energy budgets as given here. This is what we referred to in the introduction as the kinematic application of resonant interaction theory in the literature. Furthermore the results are well conserved for large amplitude waves as shown in figures (4.11) (4.12), we show the same results for an internal gravity wave of larger amplitude, a case for which resonant interaction theory is supposed to be violated. The results obtained are however perfectly consistent with the results we have just presented for the small amplitude case. In fact the discrepancy between the two mechanisms tends to increase in favor of the potential energy extraction mechanism, which is clearly reflected in the more negative tendency of the buoyancy flux. This conclusion is also in agreement with the study of LR96, who found an increased potential energy production as a function of the primary wave amplitude. We have found the mechanism to be robust even in three-dimensional simulations for statically stable waves of very large amplitudes (Koudella 1999a). Our results thus indicate how a mechanism prescribed by a weakly non-linear theory carries over to situations for which the premises of such a theory are violated. This important point justifies among other existing studies, that weakly non-linear theoretical studies are a good tool for the investigation of general wave processes in stratified fluids.

### 4.3.3 Final breakdown of the wave field

The polychromatic wave field induced by the instability process which we have studied in detail becomes itself unstable. While we have not identified any saturation mechanism limiting the growth of the modes making up the wave packet, we can infer from simple geometric considerations that the total wave field is bound to become locally statically unstable. Before proceeding, we stress the point made in the introduction, that the investigation of wave breaking in our two-dimensional simulations is not meant to be a realistic process study, but rather it aims at discriminating in favor or against the occurrence of such a breaking process in a three-dimensional fluid. We shall see that our results allow us to assess the likelihood of the occurrence of breaking internal waves by static or dynamical instability, the two routes to loss of coherence already inferred from linear saturation theory [35].

#### Maps of the total vertical density gradient and density field

When we discussed the detailed structure of the large scale primary internal wave under consideration, we took care to distinguish not only  $\xi_p$  areas, but also the regions which we called areas of reduced and increased static stability, called RSS and ISS, respectively (see left of figure (4.6)). A linear view point considers the crests and troughs inside the wave packet as fluid particle oscillations superimposed on the primary wave's velocity field and, of greater importance for wave breaking, on its density field. An increase of local potential energy may be expected to lead to locally unstable stratification and may trigger static instabilities. On the other hand, an increase of kinetic energy per unit scale, also implies an increase of the shear, which may give rise to dynamical instabilities. A criterion for this latter mechanism will be given in the next paragraph. From geometrical considerations of the structure of the primary wave (left of figure (4.6)) and the directional properties of the wave packet, we expect overturning to be produced in areas of RSS. Indeed, we have seen that the particle oscillations in the wave packet are quasi-horizontal when emanating from a  $\xi_p < 0$  zone into a  $\xi_p > 0$  zone, while isopycnal lines make the sharpest angle to the horizontal in areas of RSS, which overlap the transition region evenly. One may consider the extreme case of a large amplitude primary wave having almost vertical isopycnal lines in order to identify the stability inversion mechanism. In RSS areas the direction of particle motion then tends to be quasi orthogonal to the isopycnals. Depending on the amplitude of particle motions as well as on the stratification due to the primary wave and the background density profile, this may lead to the formation of statically unstable layers by penetration of light fluid under dense fluid. This process is best illustrated by the computation of vertical density gradient maps. Figure (4.13 left) shows the formation of statically unstable layers in RSS areas. The right image shows that these layers continue to form and that  $2 BVP$  later, these layers extend horizontally over the whole computational domain. In this way, a partially unstable density profile composed of a series of unstable layers, interspersed by statically stable layers forms. Up to this point, our simulations are fully relevant to the three-dimensional real stratified fluid. However, the analysis of the subsequent dynamical evolution cannot be stu-

died realistically by two-dimensional simulations. The linear stability analysis of flow configurations composed of complex, partially unstable density profiles in the presence of sheared velocity fields is still in its infancy, but its importance has been clearly realized. In fact, such configurations are essentially similar to a single internal wave, but are much more complex. The study of Batchelor and Nitsche 1991 [8] of a sinusoidal density profile and its extension by Thorpe 1994 [131] to the more complex case of such a profile in the presence of a linear background stratification and a horizontal vertically sheared velocity profile constitute first approaches to the problem envisaged here. One conclusion of Thorpe 1994 [131] is that a linear background stratification and vertical shear tend to stabilize unstable layers. In a real three-dimensional situation no shear exists in the transverse direction and we thus expect a static instability to develop preferentially along this direction. In the next paragraph we examine the possibility for dynamical instabilities to occur in the computational domain according to the well known Richardson number criterion.

### Gradient Richardson number maps

The internal wave break-down event is initiated by the set of statically unstable layers as shown in the preceding paragraph. We have already indicated that the wave field evolution simulated up to this point is relevant to real three-dimensional waves, but that later development is governed by three-dimensional fluid mechanics, where the third spanwise direction comes into play. However, the subsequent development of wave break-down in our two-dimensional simulations is governed by the occurrence of a series of dynamical instabilities of Kelvin-Helmholtz type, to be visualized in the present paragraph. Of prime importance is the question of whether the observed dynamical instabilities are nevertheless relevant to three-dimensional wave-breaking. This question is not superfluous to the discussion of the preceding paragraph. As a matter of fact, there still exists the possibility for dynamical instabilities to occur in the statically stable parts of the density profile obtained from the destabilization process after the formation of statically unstable layers. One way to assess the relevance of dynamical instabilities is to compute gradient Richardson number maps, where the Richardson number is defined as

$$Ri(x, z, t) = \frac{N^2(x, z, t)}{u_z^2(x, z, t)} \quad (4.24)$$

where  $u_z$  is the total local vertically sheared horizontal particle velocity. The local Brunt-Väisälä frequency is calculated from the total reduced density field as follows

$$N^2(x, z, t) = N_{lin}^2 - \frac{d\rho'}{dz} \quad (4.25)$$

where  $N_{lin}^2$  is the buoyancy frequency defined by the linear background density profile and  $\rho'$  is correctly normalized in order to define the corrected local frequency. The classical Miles-Howard criterion for instability is when  $Ri < 0.25$ , but this applies rigorously only to an idealized stratified horizontal shear layer. A certain robustness is usually attributed to this criterion however (Turner 1979 [135]). The validity of its application to the present study relies in part on the fact that the

shear layers are only weakly inclined with respect to the horizontal. It should also be kept in mind that the actual shear flow considered is oscillating in time and in space. We show two maps of the gradient Richardson numbers in figure (4.14) in the left column. The upper image shows the Richardson number at an instant at which the formation of the dynamical instabilities is initiated. It is seen that regions where the Richardson number is less than 0.25 are small and generally close to regions where the Richardson is zero or less, corresponding to static instability. This conclusion is in agreement with the result found by Fritts and Rastogi 1985 [37], who deduced from linear internal wave theory that the stability limits of static and dynamical instabilities are arbitrarily close to each other for high frequency internal waves. The right image of instant 35.501 *BVP* shows the vorticity associated with the instability structure and the formation of dynamical instabilities is initiated. These instabilities are seen to occur systematically at frontiers between stable and unstable layers, but they never form in areas where the fluid is statically stable. The two lower images at instant 36.574 *BVP* corroborate this conclusion. At this time the shear layers are well developed, always at the interface between two regions of differing stability. We thus conclude that the dynamical instabilities observed are not expected to occur in a three-dimensional fluid. Animations of the density field show that the development of the shear instabilities result not only from the strong shear in the layers, but also clearly imply the action of the developing static instability of the unstable layers. Thus it appears that the gravitational collapse of the statically unstable layers produces an additional horizontal acceleration which amplifies the shear in the layers and which finally leads to the formation of the dynamical instabilities observed on the right image. Such behavior must be interpreted as a two-dimensional fluid artifact, since in three dimensions one would expect the formation of a static instability in the transverse direction within such an unstable layer. The three-dimensional study that we are currently conducting confirms these conclusions [65], [66].

## 4.4 Conclusion

In this study we have reported results from two-dimensional direct numerical simulations of breaking internal waves. We have considered the dynamical evolution of a single monochromatic plane internal wave train, the primary wave. The wave is unstable for all amplitudes considered, provided the growth rate of the perturbation is larger than the inverse of the viscous time associated with the perturbation (a criterion satisfied in our simulations). The initial destabilization process can be studied using the weakly nonlinear theory of resonant interactions for small amplitude waves. A simplified application of the theory in the single triad approximation taking into account molecular effects predicts the structure of the instability and also the growth rates observed. The instability is of parametric subharmonic type (PSI), which means that the excited secondary waves have approximately half the frequency of the primary wave. In physical space, the superposition of the unstable modes form a spatio-temporal structure which we have classified as being a wave packet. The exact dynamics of the latter is a complex phenomenon due to the complex structure of

the wave packet and its interaction with the primary wave, but insight into this dynamics can be gained when a slow amplitude primary wave is considered; the perturbation growth is then mainly governed by a linear mechanism. Visualizations show that the dynamical behavior of the wave packet relative to the primary wave displays a periodic behavior varying on a time scale of the order of the Brunt-Väisälä period. This feature motivates an energy budget study of the destabilization process following previous work, in particular by LR96 who have identified the existence of two energy extraction mechanisms. The important difference with respect to previous studies of this type is that our study takes into account the inhomogeneous spatio-temporal nature introduced by the primary wave in that the energetics are computed on spatially translating zones defined according to the sign of the primary wave's vorticity  $\xi_p$ . We thus find, that the wave packet possesses a non-zero instantaneous buoyancy flux displaying the same periodicity as the primary wave period. This allows the periodic exchange between wave packet potential and kinetic energy. The existence of a well defined phase relationship between the wave packet and the primary wave allows the wave packet to maximize and minimize its kinetic energy in zones associated with  $\xi_p < 0$  and  $\xi_p > 0$ , respectively. It is thus found that kinetic energy is extracted in  $\xi_p < 0$  zones only, while there is a weak transfer of kinetic energy from the wave packet back to the primary wave in  $\xi_p > 0$  zones. Potential energy extraction is positive in both types of zones, albeit slightly more efficient in  $\xi_p > 0$  zones. Our study provides a physical interpretation of the PSI mechanism, because the unstable small scale parametric wave modes varying on a approximately half the primary wave frequency as far as their amplitudes are concerned, produce destabilization energetics dominated by a time variation having twice this frequency (i.e the frequency of the primary wave itself). Finally we have seen that the growing wave packet produces a density profile composed of statically unstable quasi-horizontal layers interspersed by statically stable layers. The vertical scale determining the structure of this profile is close to the average wave length of the wave packet, but further study is needed to relate the two scales quantitatively. The wave field evolution following the formation of statically unstable layers requires the consideration of a fully three-dimensional model [65], [66]. In our two-dimensional simulations we observe that the wave field breaks down via a set of unstable shear layers. However, an analysis of the gradient Richardson number over the computational domain suggests that the observed dynamical instabilities are not relevant to three-dimensional wave breaking. This type of instability occurs only at the interface of stable and unstable layers (being forced jointly by shear and static instability), but never in statically stable regions of the density field, as is usual for the development of Kelvin-Helmholtz instabilities.

#### *Acknowledgments*

We thank Eric Chassande-Mottin for providing guidance in performing the time-frequency analysis reported in this study and also R. Grimshaw, S. Fauve J. Sommeria, V. Tseitline and B. Legras for helpful discussions and comments. The simulations were performed on the SGI/CRAY C90 of IDRIS (CNRS HPC center) under contracts 97086 and 98086.



run	mode	amplitude	$\Delta t$	$\nu$	resolution
10	(1,1)	0.128	0.008	$1.5 \times 10^{-4}$	$512^2$
9	(1,1)	0.256	0.004	$1.5 \times 10^{-4}$	$512^2$
14	(1,1)	0.382	0.002	$1.5 \times 10^{-4}$	$512^2$
11	(1,1)	0.5	0.002	$3.0 \times 10^{-4}$	$512^2$
12	(1,1)	0.75	0.002	$3.0 \times 10^{-4}$	$512^2$

TAB. 4.1 – *Recapitulation of numerical parameters used in the numerical simulations. The value for the Brunt-Väisälä is 1 and the Prandtl number is 0.72.*

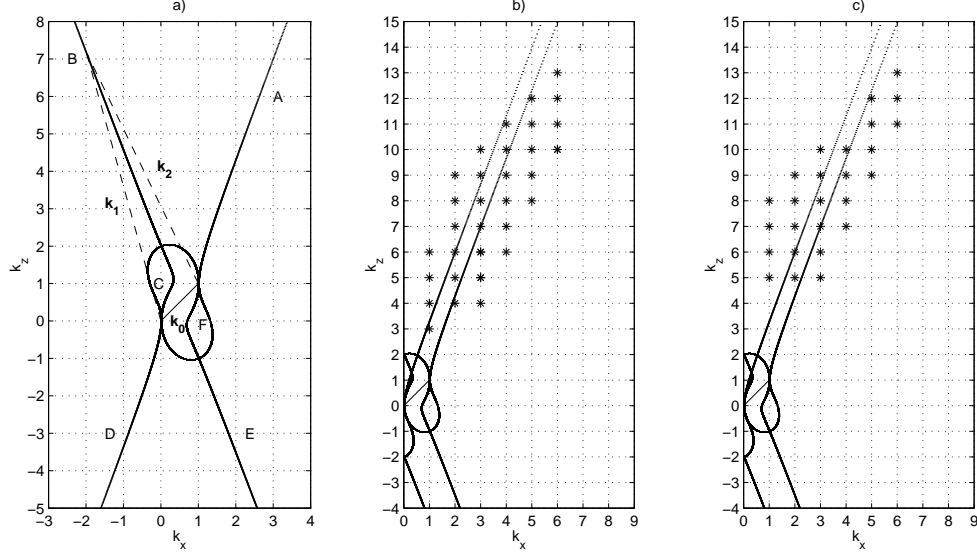


FIG. 4.1 – The resonant traces for the primary wave  $\mathbf{k}_0 = (1, 1)$  on figure a). The traces result from a representation of the tip of wave vector  $\mathbf{k}_1$ , given a wave vector  $\mathbf{k}_2$ . All wave triads satisfy the resonance conditions (4.7). The resonant traces associated with the complex conjugate exponential of the primary wave may be deduced by reflecting resonant traces through the origin. Because of their redundant character they are not shown. We have distinguished traces resulting from sum resonant interactions  $|\omega_0| = |\omega_1| + |\omega_2|$  (branches labeled A, B, D, and E and the arcs connecting A and B, D and E, respectively) and difference resonant interactions  $|\omega_0| = |\omega_1| - |\omega_2|$  or  $|\omega_0| = |\omega_2| - |\omega_1|$  (closed loops labeled by C and F respectively). The latter are neutrally stable and will not be considered in the following. On figure b) run9 and c) run14, we show the modes that satisfy a threshold criterion. Secondary unstable modes are kept when the ratio of their energy with respect to the instantaneous primary wave energy exceeds  $10^{-4}$  at some instant of the simulation.

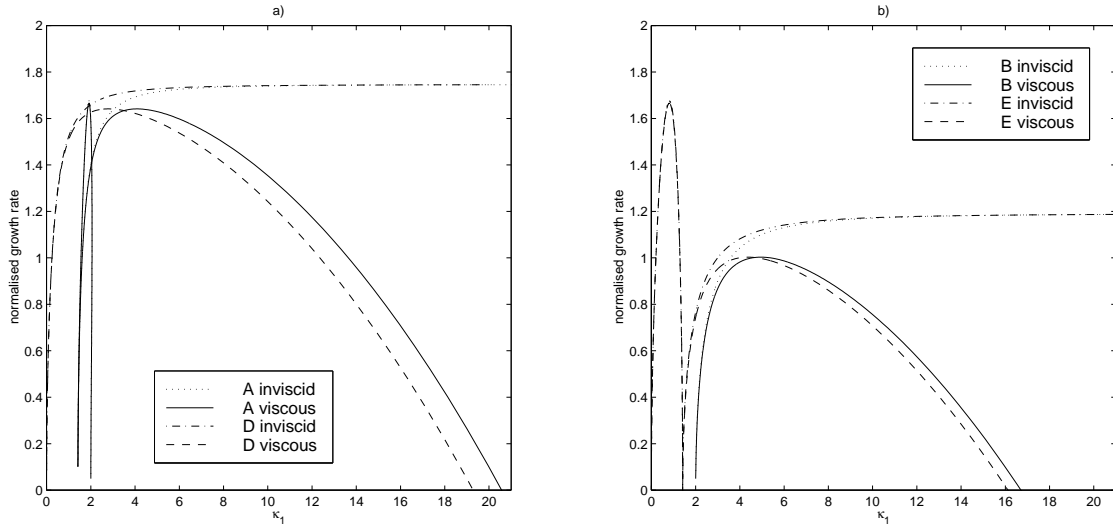


FIG. 4.2 – Inviscid and viscous growth rates as defined by equation (4.8) along the sum resonant interaction branches A, B, D and E of figure (4.1 a).

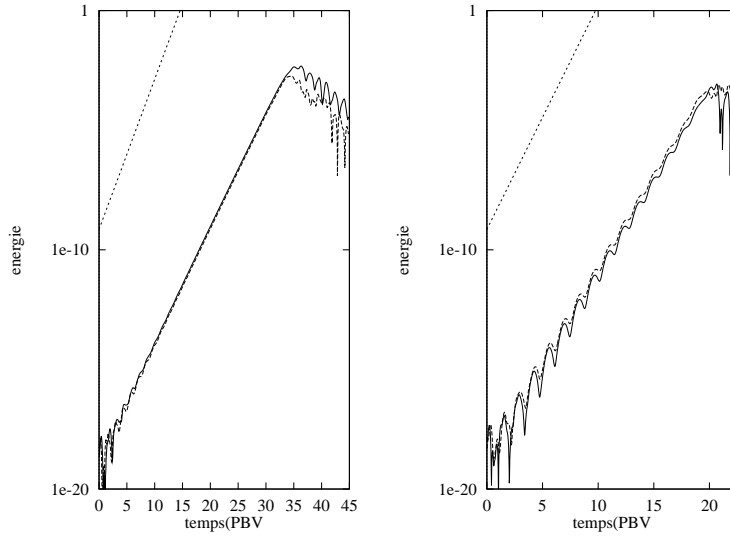


FIG. 4.3 – Energy histories for the  $\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1 = (3, 7)$  and  $\mathbf{k}_2 = (-2, -6)$  triad for an initial amplitudes  $A = 0.256$  (left, run9) and  $A = 0.382$  (right, run14).

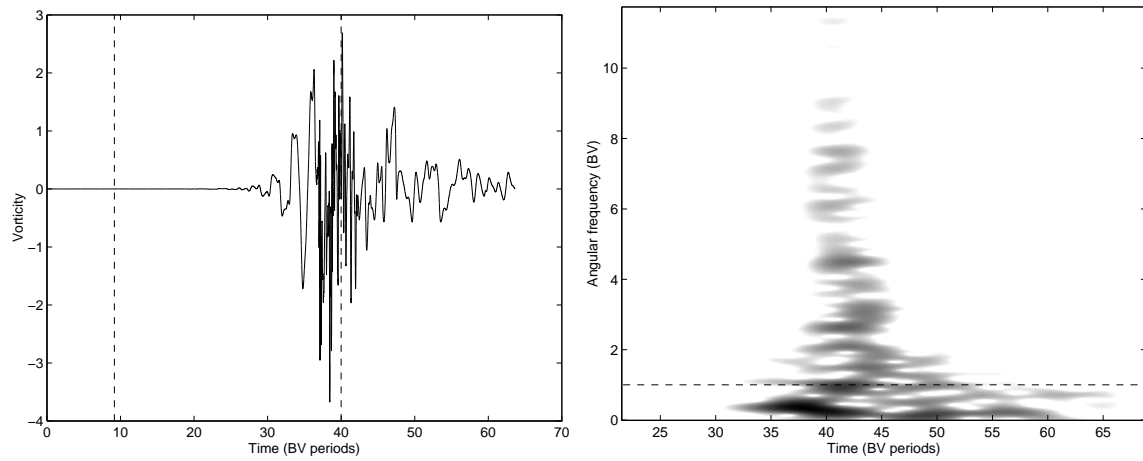


FIG. 4.4 – The results of a time frequency analysis of the vorticity sampled in the center of the computational domain during a simulation with an initial primary wave amplitude of  $A = 0.256$  (run9). The left image shows the extracted signal as a function of time. The primary wave contribution has been filtered out. The right image shows the spectrogram of a short time Fourier transform of the total signal. The Brunt-Väisälä frequency, equivalent to the internal wave cut-off frequency, is represented by a horizontal dashed line. The spectrogram represents time as abscissa and frequency as ordinate.

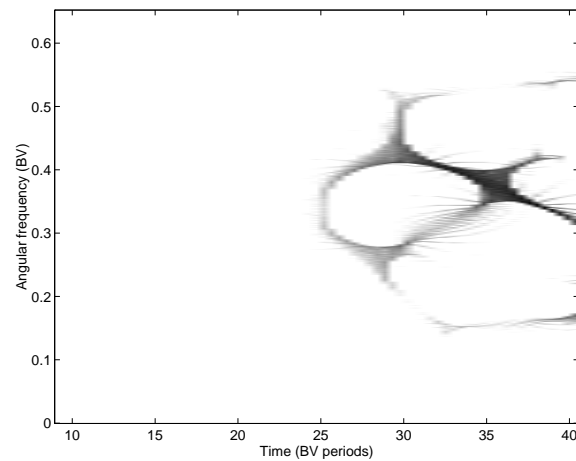


FIG. 4.5 – The spectrogram resulting from a short time Fourier transform using phase reassignment of the zoomed signal. The signal is located between the vertical dashed lines indicated on the left figure 4.4.

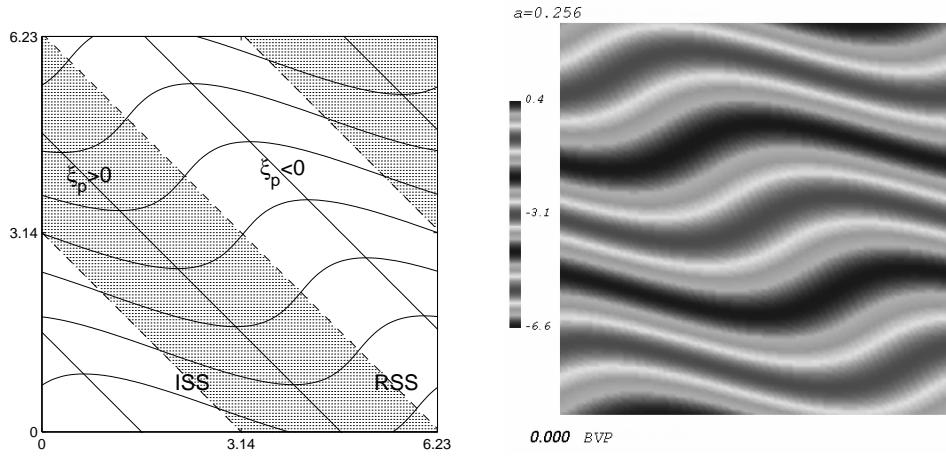


FIG. 4.6 – The left image shows the detailed structure of a monochromatic plane internal gravity wave  $\mathbf{k}_0 = (1, 1)$  propagating toward the upper right corner of the domain and having an amplitude  $A = 0.256$ . We distinguish shaded areas associated with positive primary wave vorticity  $\xi_p > 0$  from light areas with negative  $\xi_p < 0$ . We can also subdivide space into areas with increased static stability (ISS) or reduced static stability (RSS). Velocity field and density field are in quadrature for a linear internal gravity wave and so are vorticity and vertical density gradient. ISS and RSS areas delimited by continuous lines therefore overlap with areas defined by  $\xi_p$ . The right figure shows an initial condition of the total density field for the simulation run9 with  $A = 0.256$ .

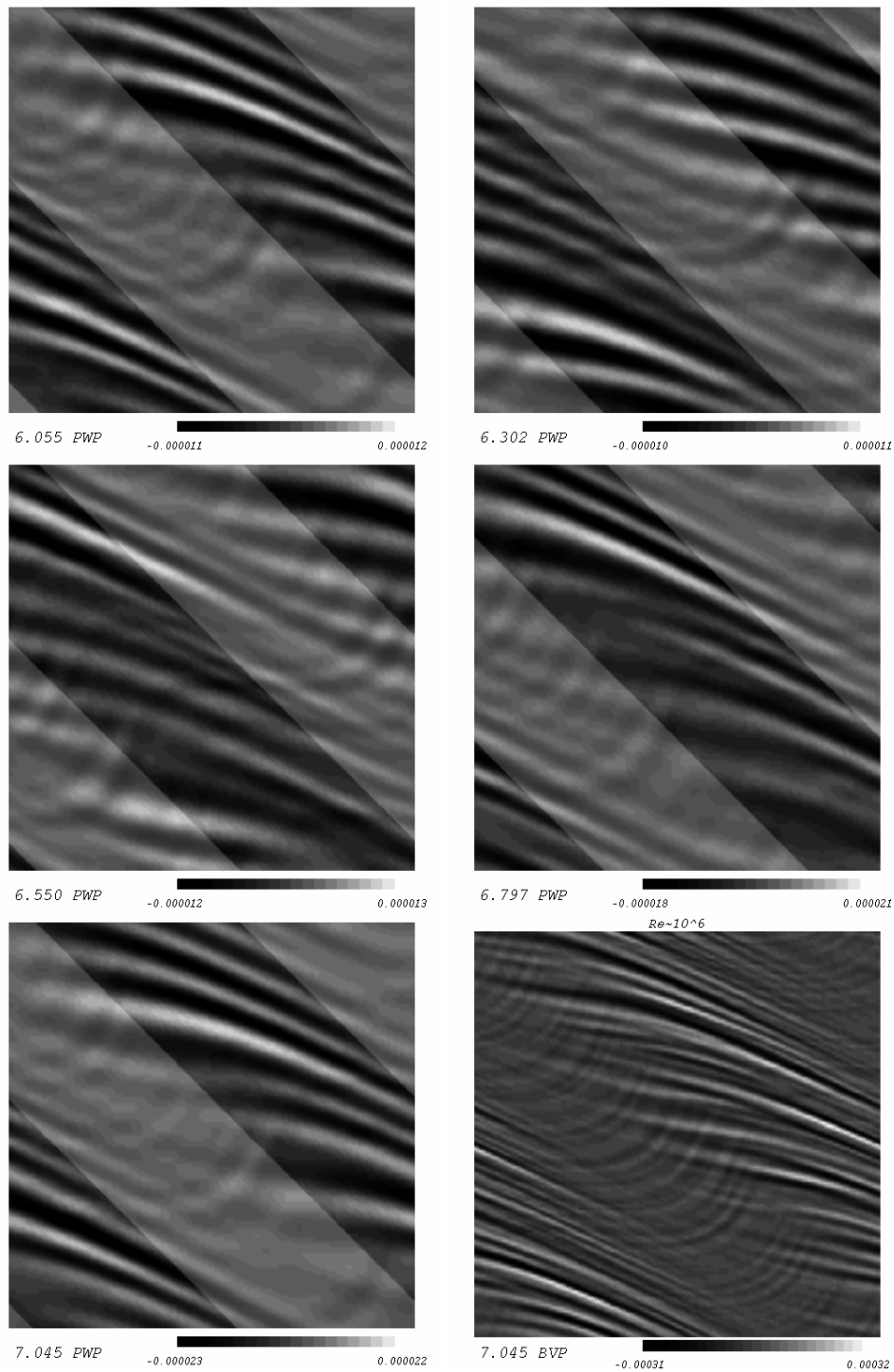


FIG. 4.7 – The spatial development of the secondary instability wave packet vorticity over approximately one primary wave period (PWP). The primary wave vorticity has been superposed using a neutral color-map in order to display the phase relationship relative to the wave packet. Veiled regions correspond to negative primary wave vorticity  $\xi_p > 0$ . Despite the dynamical complexity of the instability, a periodic behavior is apparent. The last image in the bottom right corner of the figure is an image taken from a high Reynolds number simulation  $Re \sim 10^6$  and shows that the vertical scale of the wave packet is sensitive to the Reynolds number of the flow.

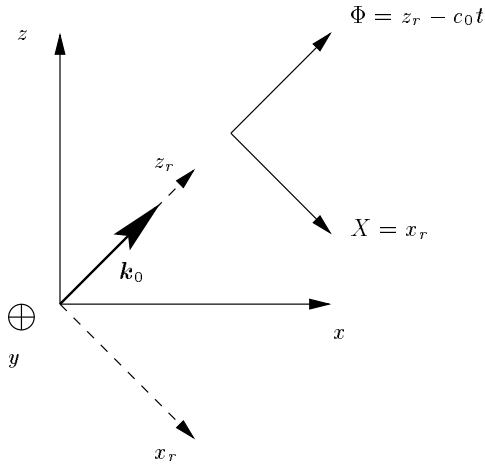


FIG. 4.8 – Mied's coordinate transformation from the laboratory frame  $(x, y, z)$ , via the rotated frame  $(x_r, y, z_r)$  into the frame  $(X, y, \Phi)$  aligned with the primary wave vector  $\mathbf{k}_0$  and translating steadily at the primary wave phase speed  $c_0 = \omega_0/\kappa_0$ . Here  $\omega_0$  is the primary wave angular frequency and  $\kappa_0 = \sqrt{k_0^2 + m_0^2}$  is the primary wave vector modulus.

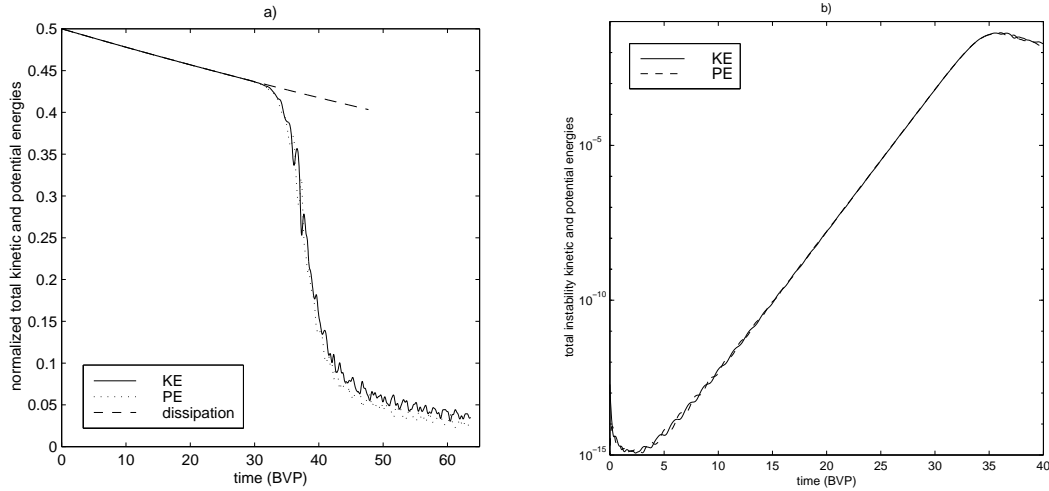


FIG. 4.9 – Energy histories for run9 ( $A = 0.256$ ) of a) the normalized total kinetic and potential energies and b) the instability kinetic and potential energies. Graph a) also displays the evolution of the primary wave energy subject to viscous dissipation and heat conduction. The energy on graph b) is represented in a logarithmic scale.

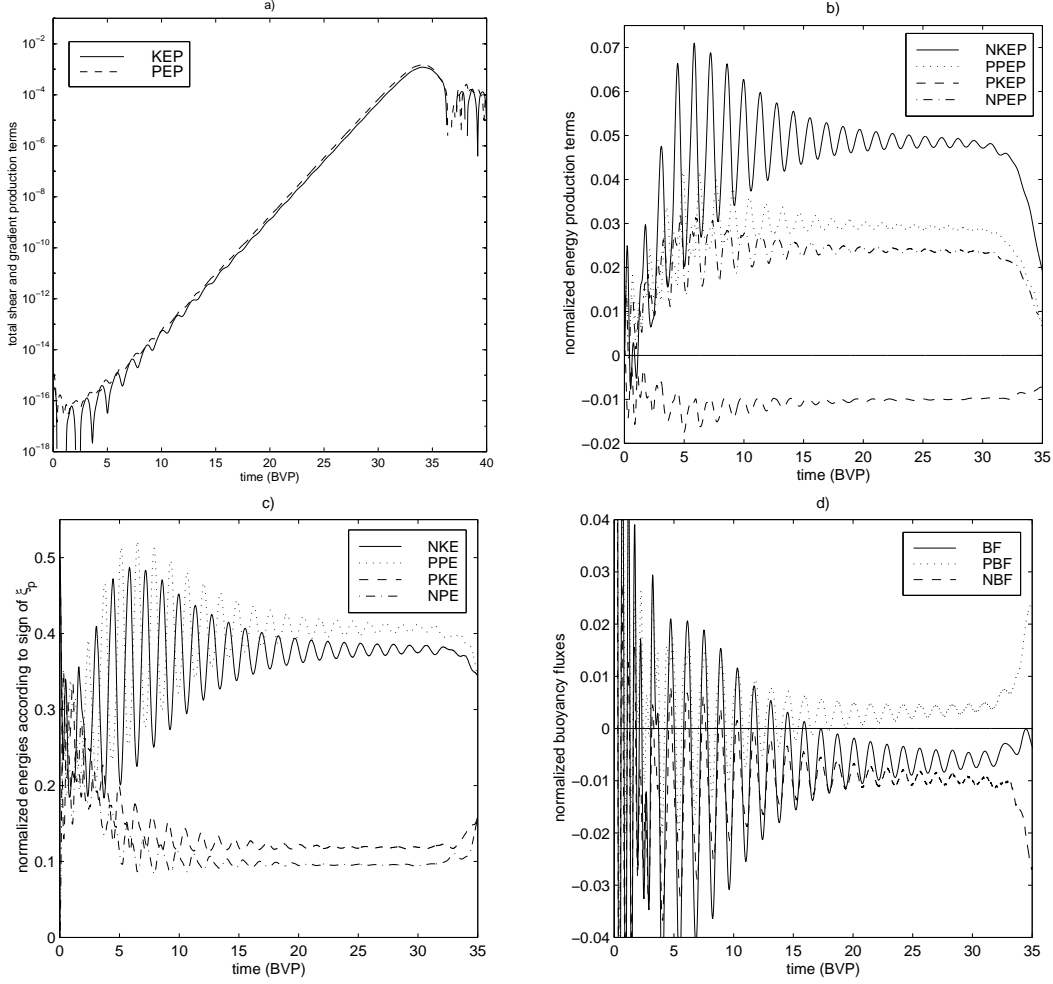


FIG. 4.10 – Energetics of destabilization for run9. Panel a) shows the total shear ( $KEP$ ) and total gradient ( $PEP$ ) production terms in linear-logarithmic scaling. Negative data points are ignored on this graph. The quantities represented on panels b), c) and d) have been summed separately on spatial areas defined by the sign of the primary wave vorticity  $\xi_p$  and are normalized by the total instantaneous disturbance energies. Quantities corresponding to  $\xi_p < 0$  and  $\xi_p > 0$  are prefixed by  $N$  and  $P$ , respectively. Panel b) shows the production terms of kinetic energy ( $NKEP$  and  $PKEP$ ) and potential energy ( $NPEP$  and  $PPEP$ ). Panel c) shows the distribution of normalized kinetic and potential energy in  $\xi_p < 0$  zones ( $NKE$  and  $NPE$ ) and in  $\xi_p > 0$  zones ( $PKE$  and  $PPE$ ). Panel d) shows the normalized buoyancy fluxes on the domain ( $BF$ ) and on zones of differing sign ( $NBF$  and  $PBF$ ).



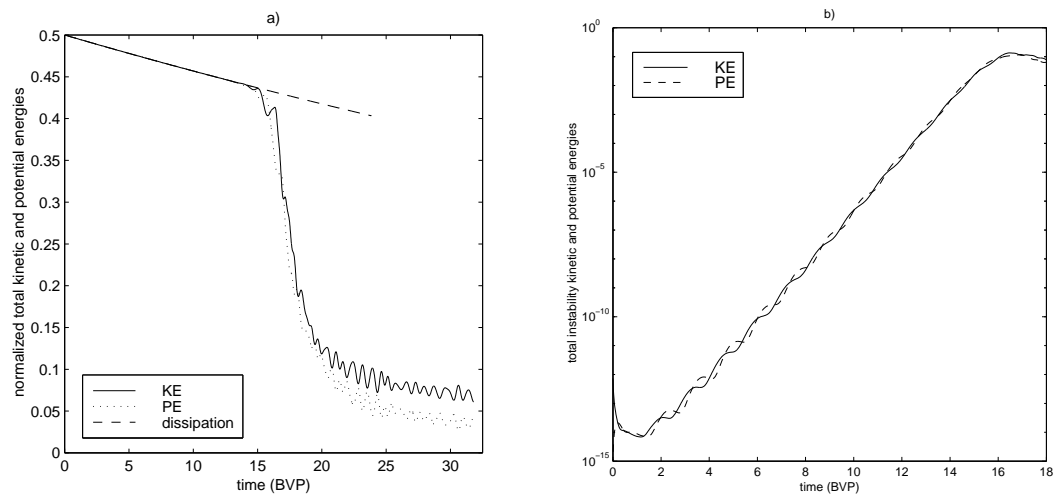


FIG. 4.11 – Energy histories for run11 of a) the normalized total kinetic and potential energies and b) the instability kinetic and potential energies.

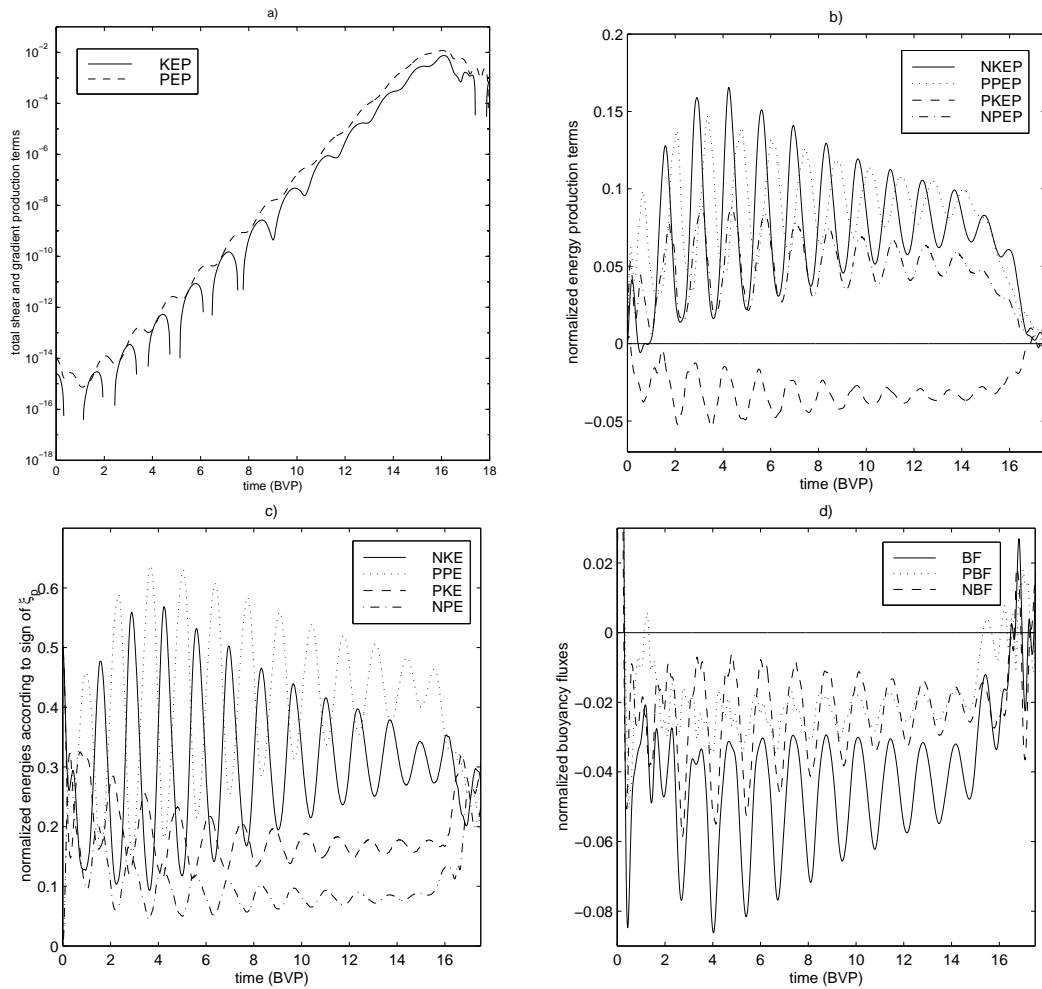


FIG. 4.12 – *Energetics of destabilization for run11. The graphs shown are the same as those shown in figure (4.10) and the caption to that figure explains the shown quantities. The present figure relates to a larger amplitude simulation ( $A = 0.5$ ) and illustrates the robustness of the destabilization process well beyond the usual conditions in which weakly nonlinear theory is applied.*

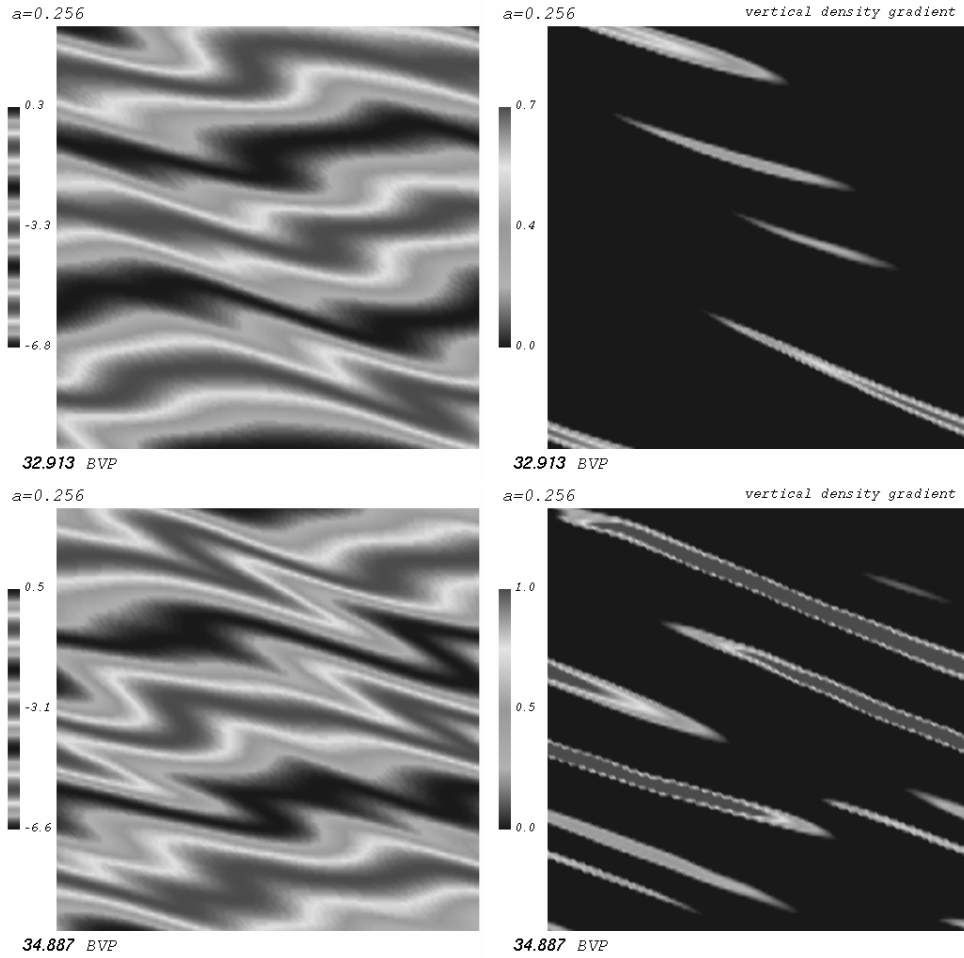


FIG. 4.13 – Images of the overturning density field (left) and the total vertical density gradient (right). The upper left image shows that the layers are formed in areas of reduced static stability (RSS in the left of figure (4.6)) and that this occurs as a consequence of the inclination of isopycnals with respect to the quasi-horizontal particle motion associated with the wave packet. A series of statically unstable layers forms whose horizontal extent soon occupies the whole computational domain, as can be observed on the lower right image.

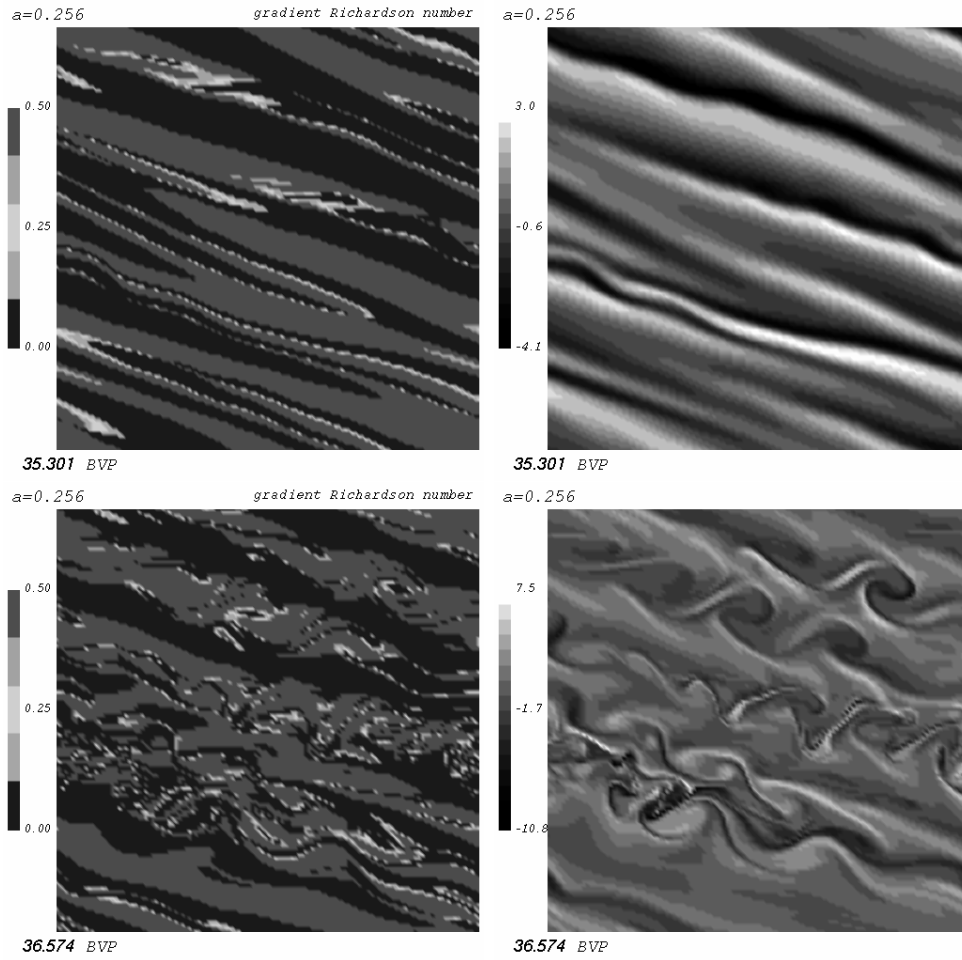


FIG. 4.14 – *Gradient Richardson number maps (left) and formation of a parallel set of unstable shear layers (right). The right images represent the vorticity of the flow.*

## Chapitre 5

# Instabilité, déferlement et production de vorticité potentielle d'un champ d'ondes internes tridimensionnel

### 5.1 Introduction

Ce chapitre présente les résultats issus des simulations numériques directes que nous avons effectuées avec le code de résolution des équations de Navier-Stokes, présenté au chapitre 3.

Nous avons limité le cadre de notre étude au déferlement d'une onde monochromatique plane propagative de grande échelle spatiale, appelée onde primaire. Les études antérieures sur le problème de stabilité linéaire et la richesse du comportement d'un tel champ d'onde, justifient cette restriction, comme nous allons le voir tout au long de ce chapitre. Bien que l'on utilise une onde monochromatique plane en condition initiale, la notion de champ d'onde est plus appropriée lorsque l'on parle de déferlement ou lorsque l'on fait référence aux champs spécifiant l'écoulement pendant la phase de déstabilisation. En effet, on a vu au chapitre 4 que l'instabilité d'une onde interne correspond à la perte de cohérence progressive d'un champ d'onde, c'est à dire à la redistribution d'énergie dans l'espace de Fourier. La démarche ayant conduit nos simulations est expérimentale et nous présentons l'évolution complète de l'écoulement, depuis la phase initiale de déstabilisation du champ d'onde jusqu'à son déferlement et la dissipation presque complète de l'énergie initialement injectée par l'onde primaire.

Par rapport au cas purement bidimensionnel exposé au chapitre 4, nous nous intéressons ici plus particulièrement à la transition vers un régime d'écoulement tridimensionnel. Si l'onde est de faible amplitude, l'analyse de stabilité linéaire montre que les modes les plus amplifiés sont bidimensionnels, mais la dynamique d'une onde de grande amplitude et le déferlement en général peuvent subir des modifications importantes en trois dimensions d'espace. Notre étude bidimensionnelle a révélé que le déferlement d'un champ d'ondes internes est associé à des retournement locaux des surfaces isopycnales créant des régions statiquement instables. Tandis qu'en deux dimensions le déferlement

est dominé par des instabilités de cisaillement, on attend un comportement différent dans le cas tridimensionnel. Le réservoir d'énergie potentielle associé aux retournements peut engendrer une instabilité statique selon la direction transverse  $y$ , perpendiculaire par rapport au plan de propagation de l'onde primaire (plan  $xz$  défini par le vecteur d'onde primaire  $\mathbf{k}_0$  et l'accélération de gravité  $\mathbf{g}$ ). Il est naturel d'envisager le développement de ce type d'instabilité, si les retournements sont invariants selon  $y$ . Le cisaillement du champ de vitesse bidimensionnel ne peut jamais être négligé dans la considération d'une quelconque instabilité, parce qu'il ajuste continûment le profil de densité. Par contre l'observation, que l'échange de deux particules selon l'axe  $x$  et  $y$ , respectivement, ne sont pas équivalentes d'un point de vue énergétique, permet de justifier l'intuition. En effet, le développement d'une instabilité statique est nécessairement accompagnée d'un mouvement horizontal de fluide, permettant de séparer fluide lourd et léger dans différentes régions de l'espace, avant de procéder à l'échange vertical permettant la restratification de la couche instable. Or, un échange entre deux particules selon l'axe  $x$  revient à échanger des particules ayant des énergies cinétiques différentes, tandis que cet échange est parfaitement neutre selon l'axe transverse  $y$ . Ainsi, le développement de l'instabilité donne naissance à des structures d'écoulement vertical analogues aux rouleaux obtenus dans les expériences de convection libre. Il ne s'agit que d'une analogie, car les propriétés des profils statiquement instables en présence de cisaillement sont mal connues. Remarquons que les structures impliquées dans le déferlement d'ondes internes sont alimentées seulement tant que le profil vertical de densité est instable et dans ce sens la situation diffère des situations forcées rencontrées en convection thermique. Nous parlerons donc aussi d'effondrement gravitationnel à la place d'instabilité statique ou convective.

Un autre problème important concerne la vortacité potentielle. La vortacité potentielle est une quantité tridimensionnelle, comme vu au chapitre 1. Rappelons qu'elle ne constitue pas un invariant lagrangien de l'écoulement (du fait des processus dissipatifs), mais nous avons montré que l'on peut écrire une équation de conservation en présence d'effets moléculaires. Il en résulte que le déferlement de l'onde va engendrer une redistribution de la vortacité potentielle initiale, sous forme d'anomalies de vortacité potentielle, pour reprendre la terminologie proposée par McIntyre et Norton 1990 [90]. Ces mouvements correspondent à la turbulence stratifiée introduite au chapitre 1. Rappelons aussi que dans la limite linéaire, la turbulence stratifiée correspond au mode vortex de la décomposition de Craya-Herring. Une étude approfondie de la production de vortacité potentielle sort du cadre de cette thèse, puisque sa production est étroitement liée aux effets moléculaires importants pendant le déferlement. L'analyse de la production même entre donc plutôt dans le cadre d'une étude sur le mélange produit par le déferlement. Ne considérant alors uniquement les aspects mécaniques associées à la vortacité potentielle, plusieurs questions se posent néanmoins à son sujet dans le cadre de notre étude. Une question primordiale est simplement de faire le diagnostic des tourbillons potentiels produit par le déferlement en fonction des paramètres numériques de l'étude. On connaît mal la génération de vortacité potentielle par un écoulement turbulent. Cela est dû à l'effet complexe des effets moléculaires et des effets non-linéaires, présents simultanément. Le fait que le nombre de Froude d'un écoulement en décroissance libre finisse toujours par être petit, nous permet de mettre

en œuvre la décomposition de Craya-Herring. Celle-ci permet de faire un diagnostic précis à la fin d'une simulation.

Lombard 1994 [79], auquel nous nous référons par L94 dans ce qui suit, a fait quelques simulations tridimensionnelles préliminaires d'ondes internes de gravité dans une configuration similaire à celle que nous considérons ici. Ces calculs avaient pour but de tester les solutions du problème de stabilité linéaire, pour des nombres Reynolds accessibles à une simulation numérique directe. A l'aide de conditions initiales bien choisies L94 a pu vérifier la théorie de stabilité linéaire d'une part et étudier le comportement énergétique du processus d'instabilité d'autre part. Cependant, tous les calculs, à l'exception d'un seul, utilisent des nombres de Reynolds trop importants pour être poursuivis au delà du déferlement. L94 ne considère ni le régime de déferlement, ni le régime turbulent. La mise en œuvre de résolutions spatiales plus importantes nous permet de produire des simulations novatrices. Nous pouvons en effet suivre l'évolution complète de l'onde, de son instabilité, en passant par le déferlement et en allant jusqu'au régime de turbulence en décroissance libre final. Nous considérons en particulier l'évolution des champs de l'écoulement dans l'espace physique à l'aide de visualisations tridimensionnelles.

Le plan de ce chapitre est le suivant. En un premier temps, on résume les caractéristiques des calculs effectués, ainsi que les conditions initiales utilisées. L'étude des ondes internes déferlantes débute par l'étude de la dimensionalité de l'instabilité. Ensuite, nous présentons l'évolution globale du champ d'ondes et nous mettons en évidence le déferlement de l'onde, à l'aide de quantités moyennées sur le domaine de calcul, mais aussi à l'aide des vues bi- et tridimensionnelles du champ total de densité au cours du temps. Une étude plus détaillée cherchant à caractériser le déferlement impliquant l'effondrement gravitationnel du champ d'ondes est menée à la prochaine section. On y considère aussi le développement de l'instabilité statique transverse dans l'espace de Fourier. Enfin, nous considérons quelques propriétés statistiques du régime turbulent en décroissance libre final. Nous nous intéressons en particulier aux spectres d'énergies cinétique et potentielle, ainsi qu'aux spectres de flux de flottabilité. L'existence de différentes des différentes composantes du mouvement est diagnostiquée en fin de chapitre.

## 5.2 Présentation des simulations numériques

Comme au chapitre 4 nous avons étudié le cas d'une onde monochromatique plane. Par rapport à de nombreuses études numériques antérieures en milieu stratifié utilisant un forçage artificiel aux grandes échelles du mouvement [120],[111], la considération d'une unique onde permet d'observer la transition vers un régime turbulent tridimensionnel en détail. Remarquons que le déferlement associé aux ondes internes est supposé être une source importante de turbulence stratifiée et de mélange dans les écoulements géophysiques. On peut définir une onde *plane* monochromatique dans le plan  $(x, z)$ , où  $z$  est la direction verticale, sans perte de généralité. Nous considérons exclusivement le mode  $\mathbf{k}_0 = (1, 0, 1)$  de fréquence intermédiaire, faisant un angle  $\theta_0 = 45^\circ$  avec le plan horizontal, pour des amplitudes initiales variables. Le travail de Lombard et Riley [80] sur le problème

de stabilité linéaire, que nous appelons désormais LR96, et les études antérieures ont montré la complexité de l'ensemble des solutions de ce problème (voir chapitre 2). LR96 ont en particulier étudié le cas  $\theta_0 = 45^\circ$ . Il faut noter que la dynamique d'une onde inclinée différemment possède à priori une structure de l'instabilité différente de celle de l'onde primaire que nous avons étudiée. Par conséquent son déferlement peut également avoir des propriétés différentes. LR96 ont considéré aussi la stabilité linéaire d'ondes peu inclinées et d'ondes très inclinées par rapport à l'horizontale. Le cas des ondes très inclinées, se propageant quasiment à la verticale semble être différent des autres, car le mouvement associé à ces ondes est quasi-horizontale et tend vers le mouvement du mode vortex. Ce cas doit être étudié séparément. Pour les ondes dont l'angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale est intermédiaire ou peu important (ondes quasi-horizontales), on sait (LR96) que la dynamique est gouvernée par deux processus d'échange d'énergie entre l'onde primaire et l'instabilité : l'extraction d'énergie cinétique due au cisaillement de l'onde primaire et l'extraction d'énergie potentielle due au gradient de densité modifié par l'onde primaire. LR96 ont représenté leur résultats dans le plan des nombres d'ondes instables, perpendiculaire à l'onde primaire. Ils identifient trois régions différentes correspondant aux modes instables de l'onde dans ce plan. Il semble que l'on puisse conclure de ce travail que la contribution à l'énergie instable due à l'extraction d'énergie potentielle augmente par rapport à l'extraction d'énergie cinétique au fur et à mesure que l'on diminue l'angle de propagation par rapport à l'horizontale. De ce point de vue, le cas  $\theta = 45^\circ$  que nous considérons semble être le cas approprié pour tester l'instabilité d'une onde par des simulations numériques de haute résolution spatiale. En effet, pour cet angle intermédiaire on s'attend à ce que les deux mécanismes d'instabilité soient prépondérants et nous pouvons en faire une étude en fonction de l'amplitude de l'onde primaire.

La condition initiale est perturbée par un bruit que nous avons produit à l'aide d'un générateur de nombres aléatoires. Comme nous désirons faire un diagnostic des composantes ondes, mode vortex et écoulement moyen de l'écoulement stratifié, nous avons filtré la partie du bruit aléatoire représentant le mode vortex linéaire, défini par décomposition de Craya-Herring (1.132), ainsi que l'écoulement moyen. Le bruit perturbateur est un bruit en ondes, dont les champs  $\mathbf{u}$  et  $\rho$  vérifient les relations de polarisation des ondes internes linéaires (1.133). On tire au hasard l'amplitude et la phase pour chaque mode d'onde interne admissible sur le domaine de calcul considéré. Le générateur de nombres aléatoires utilisé tient compte du fait que le code est exécuté sur une architecture parallèle et fait les sauts nécessaires dans les séquences de nombres aléatoires entre processus de la machine. Nous avons trouvé que les résultats des simulations ne sont pas très sensibles à la forme précise du bruit utilisé pour perturber la condition initiale, pourvu que celui-ci couvre tout l'espace de Fourier accessible. Cela est dû au comportement très sélectif de l'instabilité qui fait croître seulement un nombre réduit de modes de taille intermédiaire. Le spectre d'énergie associé au bruit a été normalisé de façon à ce que l'énergie totale du bruit soit inférieure de 10 ordres de grandeurs à l'énergie de l'onde primaire.

La fréquence de Brunt-Väisälä est fixée à la valeur  $N = 1$  dans nos calculs. On définit le nombre de Froude  $Fr = U/(NL)$  associé à l'onde primaire en utilisant la vitesse particulière primaire



maximale  $U = a\omega k_0 / (k_{x0}k_{z0})$  et l'échelle définie par le nombre d'onde primaire  $k_0 = |\mathbf{k}_0|$ , par

$$Fr = \frac{ak_0}{k_{z0}}. \quad (5.1)$$

Le nombre de Prandtl,  $Pr = \nu/\kappa$  est choisi égal à 1. La viscosité du fluide est ajustée empiriquement sur des résolutions faibles. On vérifie explicitement que le bilan d'énergie est conservé à une précision d'environ 1%. L'ajustement d'un calcul est délicat, car la dynamique du champ d'onde ne devient réellement dissipative que lorsque l'écoulement est turbulent, c'est-à-dire suite au déferlement du champ d'ondes. Cela nécessite des temps de calculs assez longs, pour seulement ajuster la viscosité.

La plupart de nos calculs modélisent une dissipation visqueuse newtonienne, mais nous avons aussi fait quelques simulations avec dissipation hyper-visqueuse et dissipation Newtonienne variable. Sauf mention contraire, nous considérons presque essentiellement les calculs avec dissipation Newtonienne. Selon LR96 on peut définir deux nombres de Reynolds caractérisant l'onde primaire dans une simulation numérique. Premièrement, on définit le nombre de Reynolds basé sur la longueur d'onde primaire et la fréquence de Brunt-Väisälä

$$Re = \frac{N}{k_0^2 \nu} \quad (5.2)$$

où  $k_0$  est le module du vecteur d'onde primaire. Un deuxième nombre de Reynolds, plus utile pour la classification des simulations numériques, résulte de la prise en compte de l'amplitude de l'onde primaire  $a$  par l'intermédiaire de la vitesse primaire particulière maximale et s'écrit

$$Re_{op} = \frac{aN}{k_0 k_{z0} \nu} = Re Fr. \quad (5.3)$$

Pour récapituler, retenons que le problème du déferlement d'une onde monochromatique plane dans la configuration considérée (i.e de longueur d'onde donnée) dépend de quatre paramètres : l'amplitude de l'onde, son angle d'inclinaison, le nombre de Prandtl et la viscosité ou de façon équivalente le nombre de Reynolds,  $Re$ . Nous considérons la partie de l'espace des paramètres ayant l'angle  $\theta_0 = 45^\circ$  fixé et le nombre de Prandtl  $Pr = 1$ . Remarquons que l'interdépendance de la fréquence de Brunt-Väisälä et de l'amplitude de l'onde par le nombre de Froude, permet de réinterpréter un changement d'amplitude comme un changement de stratification de base en gardant le nombre de Froude et le vecteur d'onde primaire  $\mathbf{k}_0$  constant.

La table (5.1) récapitule les paramètres numériques des simulations que nous avons effectuées.

Les calculs indexés par 4, 9, 11, 12, 14, 15, 16 et 17 sont des calculs utilisant une dissipation newtonienne, tandis les calculs 18, 19 et 20 (série II) utilisent une viscosité variable en temps. Cette viscosité est définie dynamiquement par l'intermédiaire de l'échelle de Kolmogorov. Cette dernière est définie, à une constante de proportionnalité  $\alpha$ , près par le pas constant du maillage  $ds$  et par le taux de dissipation d'énergie cinétique [64]. La viscosité est donnée par

$$\nu(t) = (\alpha ds)^2 [Z(t)]^{1/2} \quad (5.4)$$

où  $Z$  est l'ensrophie moyennée sur tout le domaine de calcul. Enfin, le calcul 6 utilise une dissipation biharmonique.

run	$\mathbf{k}_0$	$a'$	$a = \frac{k_z}{\omega} a'$	$\Delta t$	$\nu$	$Re_{op}$	res
4	(1, 0, 1)	0.256	0.362	0.024	$\nu = 7 \times 10^{-4}$	368	$128^3$
6	(1, 0, 1)	0.256	0.362	0.024	$\nu^2 = 1 \times 10^{-6}$	—	$128^3$
9	(1, 0, 1)	0.384	0.543	0.024	$\nu = 8 \times 10^{-4}$	460	$128^3$
11	(1, 0, 1)	0.256	0.362	0.024	$\nu = 5.5 \times 10^{-4}$	460	$128^3$
12	(1, 0, 1)	0.256	0.362	0.012	$\nu = 4 \times 10^{-4}$	614	$256^3$
14	(1, 0, 1)	0.512	0.724	0.006	$\nu = 8 \times 10^{-4}$	614	$256^3$
15	(1, 0, 1)	0.384	0.543	0.009	$\nu = 7 \times 10^{-4}$	552	$256^3$
16	(1, 0, 1)	1.024	1.448	0.003	$\nu = 1.6 \times 10^{-3}$	614	$256^3$
17	(1, 0, 1)	0.768	1.086	0.0045	$\nu = 1.2 \times 10^{-3}$	614	$256^3$
18	(1, 0, 1)	0.128	0.181	0.048	$\nu = \nu(t)$	—	$128^3$
19	(1, 0, 1)	0.256	0.362	0.024	$\nu = \nu(t)$	—	$128^3$
20	(1, 0, 1)	0.512	0.724	0.012	$\nu = \nu(t)$	—	$128^3$

TAB. 5.1 – Tableau récapitulatif des paramètres utilisés dans les simulations directes. On rappelle que  $N = 1$  et  $Pr = 1$ . Un calcul, indiqué par son numéro de run, est défini par l’onde interne primaire  $\mathbf{k}_0$  (la pulsation étant fixée par la relation de dispersion linéaire), l’amplitude  $a'$  que nous avons utilisée, l’amplitude normalisée  $a$ , utilisée par LR96 indiquant s’il y a retournement local des isopycnes ( $a > 1$ ), le pas de temps  $\Delta t$ , la viscosité  $\nu$ , le nombre de Reynolds  $Re_{op}$ , calculé avec les paramètres de l’onde primaire et finalement la résolution spatiale. L’utilisation d’une dissipation basée sur une hyperviscosité dans un calcul est indiquée par le symbole  $\nu^2$ , tandis qu’une dissipation dépendante du temps est indiquée par  $\nu(t)$ .

En général, nous avons trouvé qu'une résolution de  $256^3$  était satisfaisante, tant au niveau des résultats obtenus, qu'au niveau de la réalisation technique du calcul (calcul exécuté sur 32 processeurs). Par ailleurs, le régime final est très sensible au nombre de Reynolds. Ainsi, la simulation d'ondes de petite amplitude avec une résolution spatiale de  $128^3$  points de grille est insuffisante. L'augmentation de résolution au delà de  $256^3$  est possible, mais devient difficile à gérer en pratique. En effet, le temps de restitution d'un calcul devient alors prohibitif et le volume de données produites difficile à gérer. Par contre, la taille intermédiaire de l'instabilité initiale des ondes primaires statiquement stables (étudiées au chapitre 4), permet de justifier une augmentation de résolution au cours d'une simulation, quelques périodes de Brunt-Väisälä avant le déferlement. Un tel procédé permet de simuler le déferlement d'un champ d'ondes à haute résolution spatiale à moindres frais. Ce manuscrit ne contient pas de calculs augmentant la résolution au cours d'une simulation numérique. Par contre, nous avons été conduit à faire des calculs avec viscosité variable pour cette même raison. Cette viscosité est sensiblement constante pendant le processus de déstabilisation, mais elle est plus petite d'un facteur quatre ou cinq que la viscosité constante équivalente.

La série de calculs 12, 14, 15, 16 et 17 est une série de cinq calculs (série I) d'une résolution de  $256^3$  ayant chacun une amplitude différente. La plupart des résultats exposés ici, ainsi que leur comparaisons reposent sur cette série. Mais nous explicitons aussi des résultats relatifs aux autres simulations numériques.

Remarquons finalement que le temps de restitution d'un calcul en résolution de  $256^3$  est en moyenne de 60 à 80 heures. Le volume de données produit varie selon l'échantillonnage des champs. Un échantillonnage suffisant pour faire un travail de visualisation précis, ainsi que l'étude du mélange produit par le déferlement du champ d'onde est équivalent à un volume de stockage de  $60\text{ Go}$  environ.

## 5.3 Déstabilisation de l'onde primaire

En un premier temps, nous présentons l'évolution du champ d'ondes en début de simulation. Par rapport au cas bidimensionnel du chapitre 4, il est intéressant d'étudier la différence existant avec les simulations tridimensionnelles. Nous présentons dans cette section l'évolution de quantités moyennées en fonction du temps. Ces quantités ont été séparées en une partie bidimensionnelle, correspondant aux modes de Fourier  $k_y = 0$  situés dans le plan de propagation de l'onde primaire, une partie tridimensionnelle  $k_y \neq 0$  contenant les autres modes et une partie contenant seulement l'énergie de l'onde primaire  $\mathbf{k}_0 = (1, 0, 1)$ . Cette dernière partie n'est pas représentée dans cette section, car on peut la supposer constante pendant l'évolution initiale.

### 5.3.1 Énergie mécanique instable

La figure (5.1) montre les contributions bidimensionnelle (partie 2D) et tridimensionnelle (partie 3D), respectivement, aux énergies cinétique et potentielle de l'instabilité. Ces énergies sont définies

comme suit

$$E_{\mathcal{C}2D} = \sum_{\substack{k_x, k_z, k_y=0 \\ k_x \neq 1, k_z \neq 1}} \frac{1}{2} \hat{u}_{\mathbf{k}}^2 \quad \text{et} \quad E_{\mathcal{P}2D} = \sum_{\substack{k_x, k_z, k_y=0 \\ k_x \neq 1, k_z \neq 1}} \frac{1}{2} \hat{\rho}_{\mathbf{k}}^2 \quad (5.5)$$

$$E_{\mathcal{C}3D} = \sum_{\substack{k_x, k_z, k_y \neq 0 \\ k_x \neq 1, k_z \neq 1}} \frac{1}{2} \hat{u}_{\mathbf{k}}^2 \quad \text{et} \quad E_{\mathcal{P}3D} = \sum_{\substack{k_x, k_z, k_y \neq 0 \\ k_x \neq 1, k_z \neq 1}} \frac{1}{2} \hat{\rho}_{\mathbf{k}}^2. \quad (5.6)$$

Les cinq premiers graphes représentent l'énergie en échelle logarithmique. Il apparaît dans toutes les figures que les modes de structure transverse au plan vertical de propagation de l'onde primaire (3D) ont une contribution non nulle à la croissance de l'instabilité. Les modes 2D et 3D croissent exponentiellement au cours du temps après une période d'ajustement variant de une à trois périodes de Brunt-Väisälä. La courte durée de cette période d'ajustement dans le cas tridimensionnel provient du fait que nous avons imposé un bruit vérifiant les relations de polarisation linéaires des ondes internes. Ce comportement contraste avec les résultats des simulations bidimensionnelles d'ondes stationnaires de Bouruet-Aubertot et al 1995 [12], où on observe des périodes d'ajustement considérablement plus longues. En effet, dans ces simulations on n'impose pas de bruit blanc, parce que la condition initiale (un champ d'ondes monochromatiques stationnaire) n'est pas une solution exacte des équations du mouvement et se déstabilise d'elle même.

Cependant, dans les cas correspondants à une amplitude initiale de l'onde statiquement stable (cas a, b et c), la part 3D est moins importante que la part 2D, de un à trois ordres de grandeurs. Ceci est une conséquence du taux de croissance inférieur des modes 3D par rapport à celui des modes 2D. Plus l'amplitude de l'onde primaire est grande, plus le taux de croissance des modes 3D devient important par rapport au taux de croissance des modes 2D, ce que confirment les résultats de l'étude de stabilité linéaire. Pour les cas d) et e) correspondant à des ondes primaires statiquement instables, la croissance des modes 3D est supérieure à la croissance des modes 2D. On peut donc déjà conclure à ce stade que la dynamique des modes 3D suit un régime différent selon la stabilité ou l'instabilité statique initiale de l'onde primaire.

Remarquons que les courbes d'énergies potentielle et cinétique des modes 2D présentent de faibles battements, dont la cause est la structure spatiale de l'instabilité dans le plan vertical mise en évidence au chapitre 4 pour le cas des petites amplitudes. Sur les courbes a) et b), ces battements ont tendance à disparaître au cours de l'évolution du processus de déstabilisation, tandis qu'ils persistent pour les ondes de grande amplitude c) et d). Rappelons que le mécanisme de sélection spatiale mis en évidence sur le cas bidimensionnel est remarquablement stable et sort largement du cadre de la théorie faiblement non-linéaire des interactions résonantes, puisque ce dernier est encore valable pour les ondes de grande amplitude. Il est intéressant de constater cependant, que l'approche faiblement non-linéaire contient les ingrédients essentiels pour modéliser la déstabilisation. Une autre observation concerne les modes 3D. Pour les cas b), c) et d), la contribution due à l'énergie cinétique est légèrement plus importante que celle due à l'énergie potentielle. Il pourrait s'agir en partie de tourbillons potentiels créés par les effets moléculaires. Cependant la caractérisation est difficile, car on ne dispose pas d'une décomposition adéquate pour étudier ce régime. D'un point

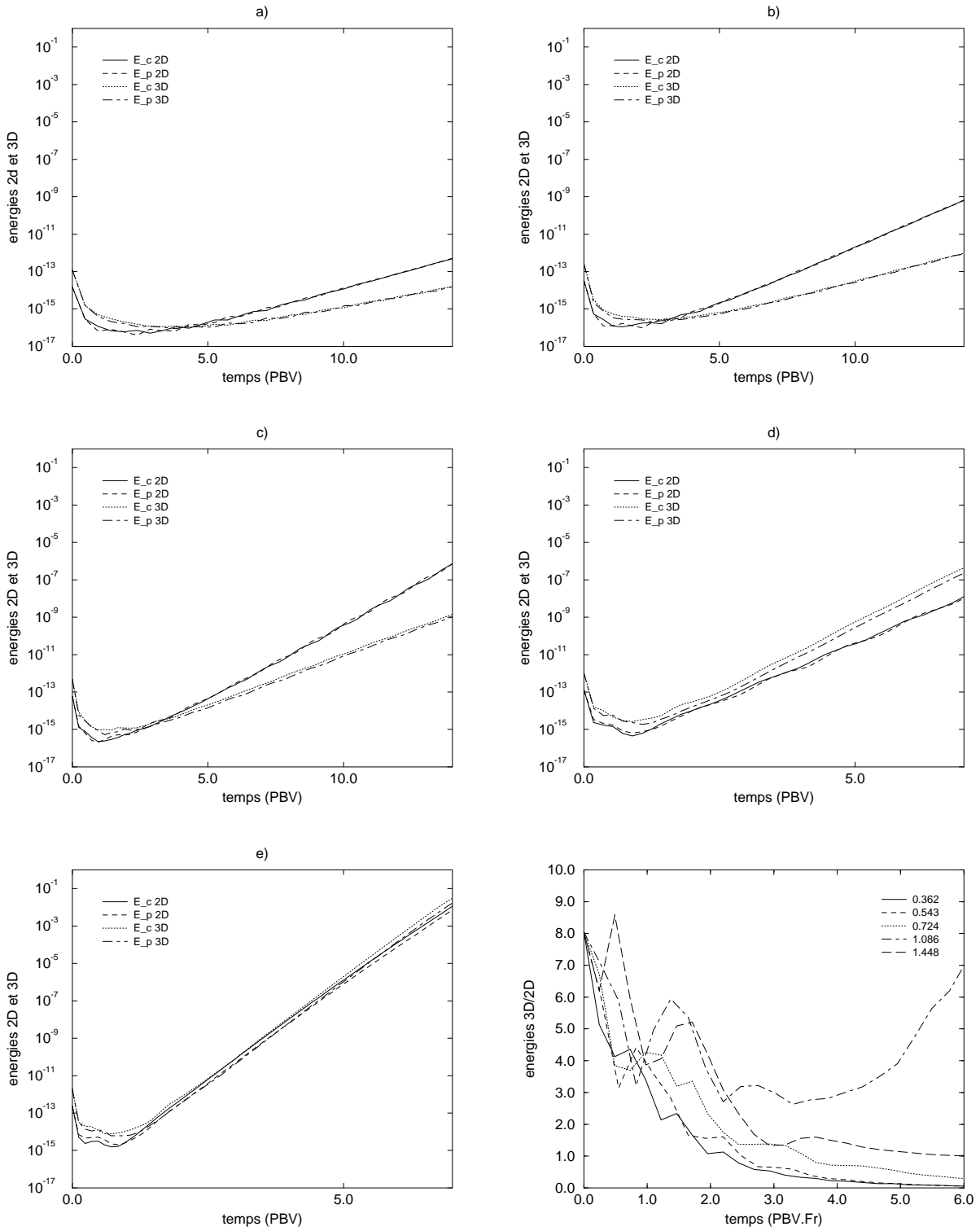


FIG. 5.1 – Contributions bidimensionnelle  $k_y = 0$  (partie 2D) et tridimensionnelle  $k_y \neq 0$  (partie 3D) aux énergies cinétique et potentielle moyennées sur le domaine de calcul pour les calculs de la série I d'amplitude initiale a) 0.362, b) 0.543, c) 0.724, d) 1.086, e) 1.448, représentées en échelle logarithmique. L'énergie du mode primaire n'est pas représentée. Le graphe f) montre le rapport entre les parties 3D et 2D de l'énergie cinétique pour chaque simulation. L'axe temporel de ce graphe est multiplié par le nombre de Froude (5.1).

de vue phénoménologique on peut néanmoins conclure que ce déséquilibre des énergies indique que l'instabilité tridimensionnelle d'une onde interne de gravité n'est pas un simple paquet d'ondes internes de gravité, auquel cas les énergies seraient équiparties en moyenne.

La figure f) montre le rapport entre les énergies cinétiques 3D et 2D. Pour les ondes primaires statiquement stables ce rapport diminue au cours du temps, car le taux de croissance des modes 3D est inférieur à celui des modes 2D, comme nous l'avons vu. Seul pour le cas  $a = 1.086$ , la contribution 3D est nettement supérieure à la contribution 2D. Le cas  $a = 1.448$  est très particulier, parce que cette onde génère une région spatiale significative où la stratification est statiquement instable. Nous ne pouvons pas expliquer l'équipartition des énergies 2D et 3D dans ce cas, mais la présence d'un profil de densité mettant en jeu des gradients verticaux positifs de densité favorise à première vue le développement de modes d'instabilité statique bidimensionnel dans le plan  $xz$ .

Le graphe f) démontre que la dynamique du champ d'onde initialement monochromatique et statiquement stable est gouverné par une dynamique bidimensionnelle dans le plan de l'onde primaire. En effet, le rapport des modes 3D et 2D tendant vers zéro, le champ d'onde deviendra localement statiquement instable de la même façon que le champ purement bidimensionnel, mais ces retournements se font en présence de modulations plus ou moins importantes selon la direction transverse, dues aux modes 3D intrinsèquement présents dans le processus d'instabilité. L'étude du cas bidimensionnel a montré que la théorie des interactions résonantes pouvait servir de guide pour étudier l'instabilité. La mise en oeuvre de celle-ci permet de prédire un taux de croissance et la composition modale de la structure instable. Pour le cas 3D nous n'avons pas tenté de faire une analyse de nos résultats en les confrontant aux prévisions théoriques de la théorie des interactions résonantes ou de l'analyse de stabilité linéaire, parce que la situation devient rapidement inextricable. Surtout, cette prédiction ne peut être obtenue que par résolution numérique du problème de stabilité linéaire, pour les paramètres physiques de nos calculs. La théorie des interactions résonantes prévoit que le taux de croissance de l'amplitude d'un mode instable varie proportionnellement à l'amplitude de l'onde primaire. Pour les ondes primaires de faible amplitude, l'énergie que nous associons à l'instabilité est la somme des énergies des modes instables. Par conséquent, cette dépendance de l'amplitude de l'onde primaire devrait être entièrement reflétée dans l'évolution de l'énergie instable. Cette dépendance est illustrée en figure (5.2). Nous avons représenté la partie 2D et 3D de l'énergie cinétique, respectivement, pour les calculs de la série I sur un graphe, mais nous avons multiplié l'axe temporel par le nombre de Froude associé à l'onde primaire  $Fr = ak_0/N$ .

Sur le graphe de gauche on note que les courbes d'énergie cinétique 2D des ondes primaires statiquement stables ne dépendent que très faiblement de l'amplitude, puisqu'elles se superposent quasiment. Les taux de croissance, ainsi que les niveaux des courbes sont très proches les uns des autres pour l'adimensionnement considéré. L'instabilité bidimensionnelle d'une onde statiquement stable semble donc être régie entièrement par son amplitude initiale, comme le prédisent les interactions résonantes pour des ondes de faible amplitude. Nos résultats montrent que ce constat reste vrai pour des ondes statiquement stables de grande amplitude.

Le graphe de droite montre que la proportionnalité de la dynamique n'est pas atteinte pour la

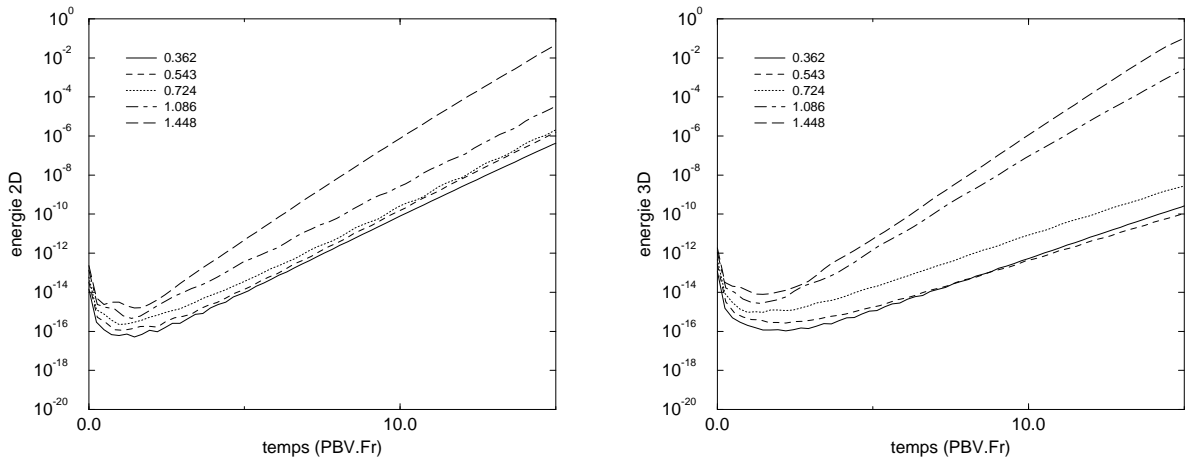


FIG. 5.2 – Les énergies cinétiques 2D (gauche) et 3D (droite) pour les calculs de la série I. Le temps est multiplié par le nombre de Froude associé à l’onde primaire,  $Fr = ak_0/Nk_{z0}$ .

partie 3D de l’instabilité, comme le montre la courbe pour  $a = 0.724$ . En effet les modes 3D sont plus sensibles à l’amplitude de l’onde primaire. Par contre, les taux de croissance des instabilités 3D sont à nouveau similaires pour l’adimensionnement considéré. Nous concluons cette sous-section en résumant que les courbes montrent que la dynamique des modes 3D possède une dynamique étant une fonction de l’amplitude plus complexe que la dynamique des modes 2D, dont le taux de croissance et le niveau moyen varient sensiblement linéairement avec l’amplitude de l’onde primaire.

### 5.3.2 Vorticité verticale et vorticité potentielle

La décomposition linéaire de Craya-Herring caractérise le mode vortex, correspondant au tourbillon potentiel linéaire, par la vorticité verticale de l’écoulement. L’interprétation physique n’est cependant valable que pour un nombre de Froude strictement nul. Par ailleurs, la vorticité totale d’un ensemble d’ondes linéaires est exactement horizontale dans cette limite et on peut dire que les ondes conservent la vorticité verticale, cette dernière restant nulle au cours du temps. Or, le nombre de Froude d’un écoulement stratifié n’est pas strictement nul, dès lors qu’il y a élévation des surfaces isopycnales et la décomposition de Craya-Herring constitue donc une idéalisation. Le caractère fini de l’amplitude de l’onde va donner naissance à des interactions non-linéaires entre ondes et selon un argument avancé par Staquet et Riley 1989 [126], on peut comprendre que ces interactions produisent de la vorticité verticale. En effet, l’interaction de deux ondes crée de la vorticité verticale, parce qu’une onde peut basculer la vorticité horizontale de l’autre onde selon la direction verticale et vice versa. On ne doit pas pour autant en déduire la présence de mode vortex (c’est à dire de mouvements ne se propageant pas) dans l’écoulement. La création de mode vortex

ne peut résulter que d'effets moléculaires. L'étude de la vorticité potentielle

$$\Pi = \frac{\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \rho}{\rho_0} \quad (5.7)$$

permet de lever ce paradoxe impliqué par la dynamique non-linéaire des ondes. En effet, pour un fluide parfait, la vorticité potentielle est un invariant lagrangien, c'est-à-dire une propriété conservée d'une particule. Il s'ensuit que les mouvements associés à la vorticité potentielle ne peuvent pas être de nature ondulatoire. Par ailleurs, dans l'approximation linéaire la vorticité potentielle est proportionnelle à la vorticité verticale de l'écoulement. Une conjecture est alors de caractériser les ondes non-linéaires par le fait qu'elles ne contribuent pas à la vorticité potentielle de l'écoulement. Or, d'un point de vue géométrique la vorticité potentielle est proportionnelle à la composante de la vorticité projetée sur le gradient de densité. Par conséquent la vorticité des ondes doit être située sur les surfaces isopycnales. On peut alors réinterpréter le mécanisme de création de vorticité verticale par interactions non-linéaires entre ondes décrit ci-dessus : la vorticité d'une onde subit un léger basculement en direction verticale, mais elle reste située dans un plan tangent aux surfaces isopycnales et ne contribue donc pas à la vorticité potentielle. Une direction importante est donc donné par la direction du gradient isopycnal local et cette direction est parfois appelée la direction verticale thermodynamique [94]. Ainsi, la vorticité potentielle des ondes internes faiblement non-linéaires doit être nulle et conservée au cours du temps. La composante du mouvement associée à la vorticité potentielle de l'écoulement constitue les tourbillons potentiels, extension au cas non-linéaire du mode vortex (voir chapitre1).

Les conditions initiales de nos simulations numériques sont uniquement de nature ondulatoire et doivent donc permettre de déceler la différence entre vorticité verticale et vorticité potentielle pendant la phase de déstabilisation. La vorticité potentielle doit être nulle initialement et elle doit le rester, excepté pour une faible création de tourbillons potentiels par la dissipation et conduction, respectivement, associée à l'onde primaire et à l'instabilité. La figure (5.3) montre les valeurs efficaces (valeurs rms) de la vorticité verticale, appelée  $\xi_{-z}$  et de la composante de la vorticité notée  $\xi_{-vp}$  et définie par

$$\xi_{-vp} = \frac{\nabla \rho}{|\nabla \rho|} \cdot \boldsymbol{\xi} = \frac{\rho_0 \Pi}{|\nabla \rho|}. \quad (5.8)$$

Il s'agit de la composante de la vorticité obtenue par projection sur le gradient de densité. Le graphe a) représente la simulation pour  $a=0.543$ , la figure b) pour  $a=0.724$ . Remarquons d'abord le niveau faible de toutes les quantités. Les quantités évoluent toutes au travers d'une phase d'évolution initiale passant par un minimum. Il s'agit d'une phase d'ajustement. La vorticité verticale est nulle initialement comme le montrent les courbes des graphes a) et b), mais les ondes produisent très rapidement de la vorticité verticale par interactions non-linéaires. On peut remarquer que la vorticité verticale créée initialement est supérieure pour la simulation de faible amplitude (graphe a). Ceci peut être due à la plus faible viscosité utilisée pour cette simulation. Le fait que cette vorticité initialement produite décroisse pendant la phase d'ajustement, semble en effet indiquer que la vorticité est associée aux petites échelles, moins dissipées dans le cas a). On remarque que



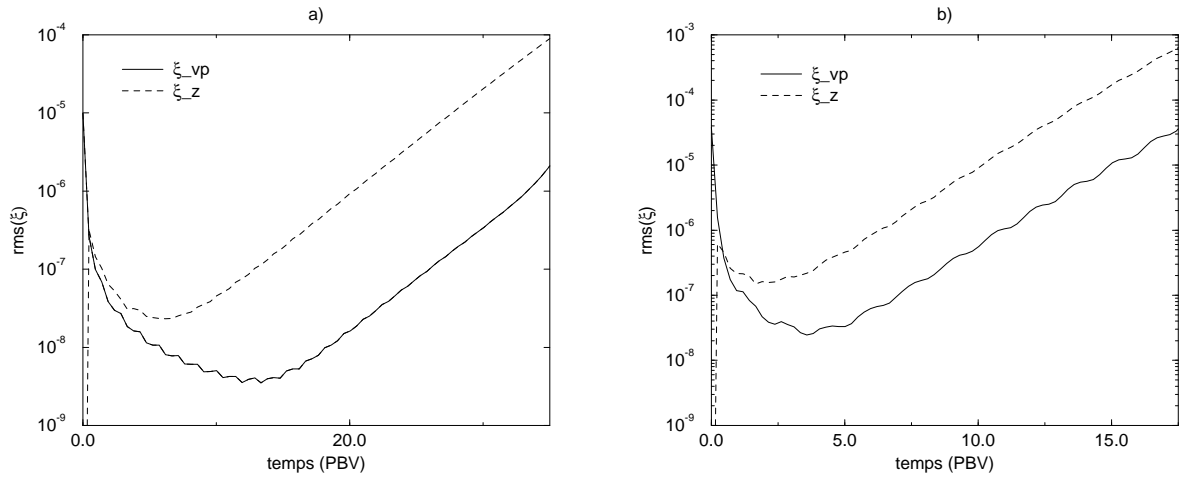


FIG. 5.3 – Les valeurs efficaces de la vorticité verticale  $\xi_{-z}$  et de la vorticité en direction du gradient de densité  $\xi_{-vp}$  pendant la phase de déstabilisation de l'onde primaire d'amplitude a)  $a = 0.362$  et b)  $a = 0.724$ .

la quantité  $\xi_{-vp}$  n'est pas nul initialement. La condition initiale est composée d'ondes linéaires de vorticité verticale nulle. La vorticité des ondes à  $t = 0$  étant horizontale alors que les isopycnes ne le sont pas, cette vorticité a une composante non nulle suivant  $\nabla\rho$ . La quantité  $\xi_{-vp}$  s'ajuste plus lentement que la vorticité verticale. Le fait que la quantité  $\xi_{-vp}$  décroisse corrobore l'idée que les ondes internes ont une vorticité potentielle nulle. La phase d'ajustement est suivie de la croissance des deux quantités. Pendant la durée considérée, la vorticité verticale est supérieure à la vorticité potentielle de un à deux ordres de grandeurs. On conclut en effet que la plupart de cette vorticité verticale doit être attribuée aux interactions non-linéaires entre ondes. Une conséquence de ceci est que la décomposition de Craya-Herring ne produit pas de résultats fiables pendant la phase de déstabilisation de l'onde primaire. On note que la vorticité perpendiculaire aux isopycnes  $\xi_{-vp}$  croît néanmoins pendant la phase de déstabilisation à peu près au même taux que la vorticité verticale. Selon le travail de Lelong et Riley 1991 [75], l'inclusion du mode vortex linéaire dans la théorie des interactions résonantes montre qu'il n'existe pas d'excitation de mode vortex par des ondes internes. Une telle excitation pourrait cependant se produire à un ordre plus élevé que le premier ordre considéré. Si l'on suppose en échange qu'il y a création de mode vortex par les effets moléculaires, on peut tenter d'expliquer la quasi-identité des taux de croissance de  $\xi_{-z}$  et  $\xi_{-vp}$  en supposant que tout comme l'instabilité, la dissipation visqueuse et la conduction de chaleur sont gouvernées par la croissance de l'instabilité pendant la phase initiale. De ce point de vue, la croissance de  $\xi_{-vp}$  et donc de tourbillons potentiels serait la conséquence de la dissipation d'énergie par tous les modes instables, nourris eux mêmes par l'onde primaire.

## 5.4 Déferlement du champ d'onde

Nous explorons ici les conséquences de la déstabilisation de l'onde primaire. Le champ d'ondes qui se forme au cours la déstabilisation ne constitue pas un écoulement stable indéfiniment comme nous l'avons montré au chapitre 4. En effet, nous avons mis en évidence un changement de régime que nous avons qualifié de déferlement du champ d'ondes. Nous illustrons ce régime à l'aide des énergies cinétiques et potentielles 2D et 3D moyennées spatialement et nous présentons des visualisations tridimensionnelles du champ de densité total pour différentes amplitudes de l'onde primaire.

### 5.4.1 Évolution de l'énergie totale et temps de déferlement

La figure (5.4 a) présente l'énergie totale moyennée sur tout le volume de calcul pour la série I. En accord avec les simulations bidimensionnelles du chapitre 4, on observe que l'évolution du champ d'ondes est constituée de trois phases quelle que soit l'amplitude. La première phase correspond à la phase de déstabilisation de l'onde primaire. Nous venons de présenter les résultats relatifs à la dimensionalité spatiale de l'instabilité de ce régime. Pendant cette phase ont lieu les interactions non-linéaires lentes qui redistribuent l'énergie de l'onde primaire dans l'espace de Fourier, créant ainsi le champ d'ondes polychromatique.

Le graphe b) montre que le déferlement des calculs de la série I a lieu lorsque le champ d'ondes a perdu de 25% à 35% de l'énergie totale initialement présente. La série II correspondant à une dissipation newtonienne, mais dépendante du temps, montre que le déferlement a lieu après une perte de 20% de l'énergie totale (graphe d). Ces calculs ont une viscosité constante pendant toute la phase précédant le déferlement, plus petite, mais du même ordre de grandeur que les viscosités constantes généralement imposées. L'axe temporel des graphes b) et d) a été multiplié par le nombre de Froude. Les différences des temps de déferlement des simulations ( $a = 0.362, 0.543, 0.724$ ) des séries I et II de ces graphes permettent de conclure que le processus de déstabilisation dépend beaucoup du nombre de Reynolds utilisé dans une simulation. Nos simulations ne permettent pas de quantifier cette dépendance. Remarquons que le calcul  $a = 0.543$  possède un nombre de Reynolds  $Re_{op} = 4820$  inférieur de 10% au nombre de Reynolds des autres calculs de cette série. La courbe pour ce calcul sur le graphe b) montre effectivement une décroissance plus forte de l'énergie en accord avec un plus petit nombre de Reynolds, soit une dissipation plus importante. Nous avons également représenté l'évolution de l'énergie totale prévue par la théorie linéaire sur le graphe b). Cette courbe permet de conclure que la dissipation est dominée par l'onde primaire pendant la phase de déstabilisation. De plus, l'excellent accord entre la théorie et les simulations numériques valident notre code de résolution des équations de Navier-Stokes pendant cette phase.

Les graphes b) et d) montrent que pour tous les calculs dont l'onde primaire est statiquement stable, le changement de régime semble avoir lieu au même instant normalisé par multiplication par  $Fr$ . Cette observation motive la définition du temps de déferlement du champ d'ondes par l'instant où le taux de décroissance de l'énergie totale est maximal. Ce temps de déferlement a été représenté

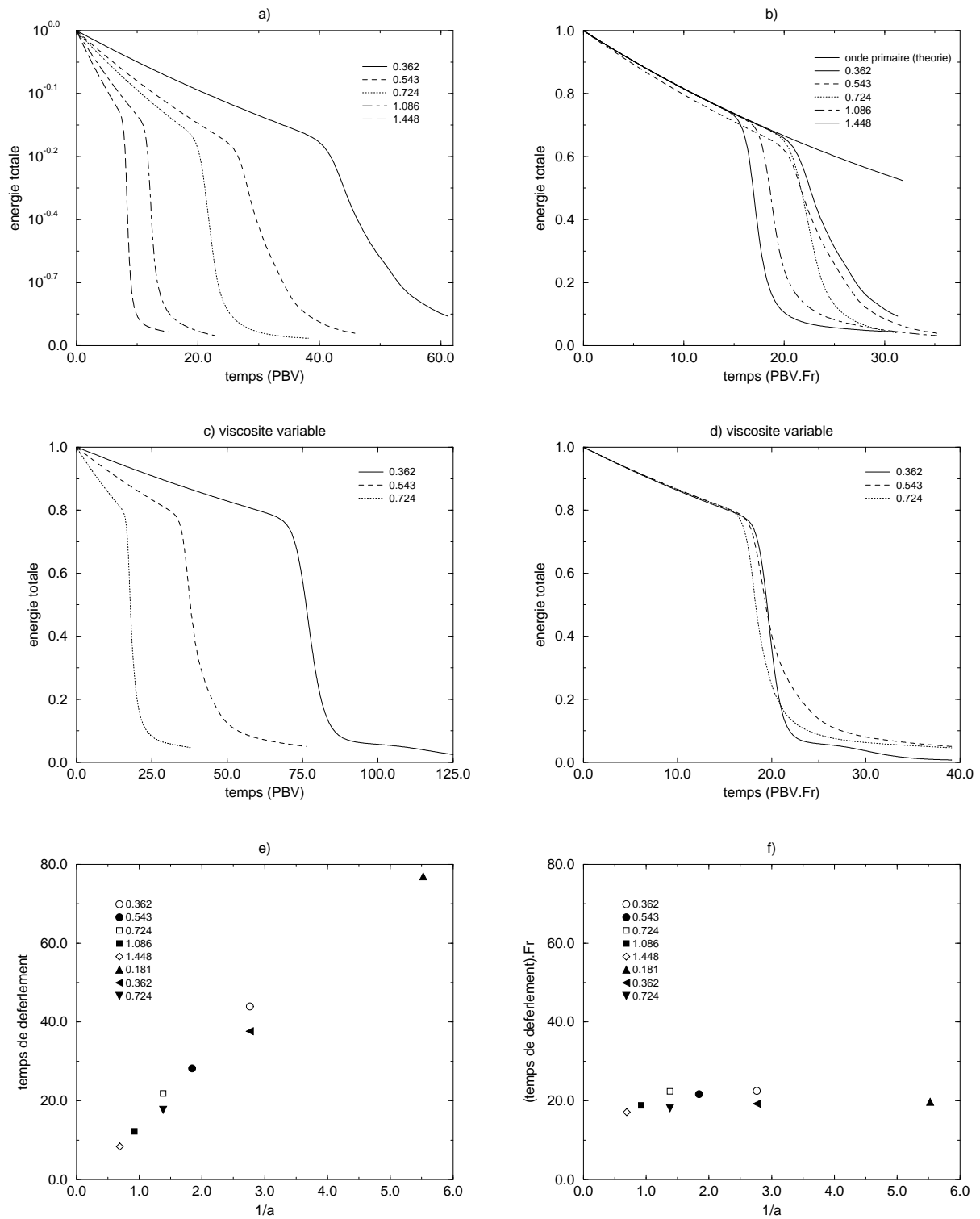


FIG. 5.4 – Energies totales moyennées au cours du temps pour les séries I a) et b) et II c) et d). Les graphes e) et f) montrent les temps de déferlement pour I et II. Noter que le temps, exprimé en période de Brunt-Väisälä (PBV) a), c) et e), est exprimé en unité de  $Fr.PBV$  dans les graphes b), d) et f).

en fonction de l'inverse de l'amplitude initiale de l'onde primaire sur le graphe e) pour les séries I et II. Pour les amplitudes statiquement stables, on trouve que le temps de déferlement est à peu près inversement proportionnel à l'amplitude. Ceci est aussi montré clairement par le graphe f), où le temps de déferlement a été multiplié par le nombre de Froude. Les temps de déferlements se situent alors à peu près sur une droite horizontale. Les calculs de la série I ayant des amplitudes statiquement instables dévient de l'horizontale, l'onde primaire étant déstabilisée plus rapidement.

La deuxième phase constitue le déferlement du champ d'onde. Le déferlement est une manifestation de la modification que subissent les propriétés de transport d'un fluide (dissipation visqueuse et conduction thermique), lorsque celui-ci transite d'un écoulement laminaire vers un écoulement turbulent. Comme en deux dimensions d'espace, la majeure partie de l'énergie est dissipée brusquement pendant cette phase. Le graphe b) ainsi que le graphe c) montrent que l'échelle de temps mise en jeu dans le déferlement est très brève, de l'ordre d'un petit multiple de la période de Brunt-Väisälä. La pente de décroissance de l'énergie est d'autant plus raide que l'amplitude de l'onde primaire est grande.

Le déferlement est suivi d'une troisième phase, correspondant à une lente relaxation de l'écoulement. Les figures normalisées b) et d) montrent qu'un état quasi-stationnaire est atteint pour les deux séries I et II (excepté pour le cas de petite amplitude  $a = 0.362$  de la série II). L'écoulement final contient environ 5% de l'énergie totale initiale de l'onde primaire. Il faut remarquer que la distinction entre la deuxième et troisième phase peut paraître artificielle. Mais pour notre étude il s'agit de distinguer entre le développement d'une nouvelle instabilité au moment du déferlement (instabilité statique ou dynamique) et le régime vers lequel l'écoulement turbulent en décroissance libre résultant transite finalement.

### 5.4.2 Tridimensionalisation de l'écoulement

Les graphes de la figure (5.5) montrent les contributions aux énergies cinétique et potentielle des modes 2D, des modes 3D et de l'onde primaire au cours du temps. Ces graphes complètent la figure (5.1) explorant le régime de déstabilisation commenté auparavant. Les énergies sont représentées en échelle logarithmique. Pour les calculs dont l'onde primaire est statiquement stable, les modes 3D subissent un changement de dynamique au moment du déferlement. Les courbes pour l'énergie cinétique et l'énergie potentielle des modes 3D dans les graphes a), b) et c) ont un changement de pente à cet instant. La croissance des modes 3D est grande pendant le déferlement et on peut la qualifier d'explosive par rapport à leur croissance avant le déferlement. On constate donc que l'écoulement du champ d'ondes initialement statiquement stable devient tridimensionnel au moment du déferlement, même pour le cas de faible amplitude  $a = 0.362$ . La régularité du comportement obtenu indique une certaine universalité associée au déferlement d'un champ d'ondes internes. En effet, un processus de saturation s'opère sur les modes 2D au cours du temps. Le graphe d) montre que pour l'onde statiquement instable ( $a = 1.086$ ), le taux de croissance des modes 3D est supérieur à celui des modes 2D. Néanmoins, le champ d'onde possède un temps de déferlement non nul. On remarque sur les graphes a) et b) que l'énergie des modes 3D est toujours inférieure

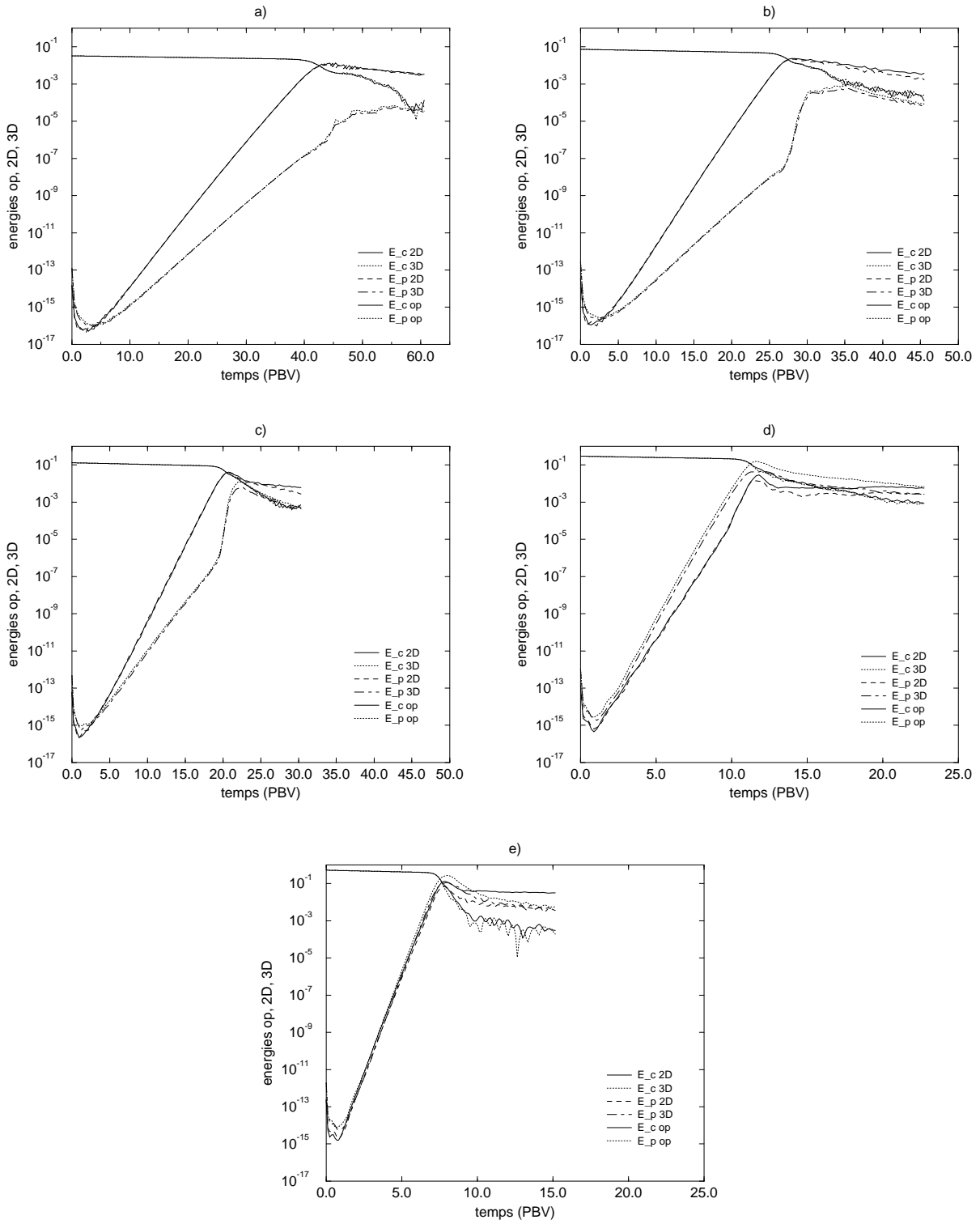


FIG. 5.5 – Énergies cinétique ( $E_c$ ) et potentielle ( $E_p$ ) pour la série I. Chaque énergie a été décomposée en une partie 2D ( $k_y = 0$ ), une partie 3D ( $k_y \neq 0$ ) et la contribution de l'onde primaire. Les énergies sont représentées en échelle logarithmique. Les graphes correspondent à l'amplitude de l'onde primaire a) 0.362, b) 0.543, c) 0.724, d) 1.086 et e) 1.448.

de plus de deux ordres de grandeur à l'énergie des modes 2D. On peut donc dire que le degré de tridimensionalisation est dépendant de l'amplitude de l'onde primaire. Le point important ici est que la croissance explosive des modes 3D est observée au moment du déferlement pour toutes les amplitudes et qu'elle définit ainsi la saturation des modes 2D.

Ces observations suggèrent le scénario de déferlement suivant. Si l'onde primaire est statiquement stable, la croissance des modes 2D est prépondérante : La déstabilisation de l'onde primaire par les interactions non-linéaires entre modes redistribue l'énergie dans l'espace de Fourier et engendre un champ d'ondes principalement bidimensionnel. Dans toutes nos simulations, ce champ d'ondes devient statiquement instable au bout d'un certain temps et on observe son déferlement. Ce déferlement est accompagné d'une croissance brutale des modes 3D. Cependant, le déferlement d'une onde primaire initialement statiquement instable n'est pas immédiat. Une telle onde développe également une instabilité présentant une phase de croissance initiale. Cette instabilité, bien que tridimensionnelle, possède un taux de croissance similaire à celui d'une onde primaire statiquement stable, mais différent du taux observé pour la croissance explosive des modes 3D d'une onde initialement stable au moment du déferlement. Ce résultat est en accord avec LR96, qui soulignent que la forme de l'instabilité linéaire ne subit pas de transition abrupte lorsqu'on passe d'une onde primaire statiquement stable à une onde statiquement instable.

Le graphe e) pour l'onde de très grande amplitude  $a = 1.448$  montre que le taux de croissance des modes 2D et 3D est identique. Mais pour le calcul  $a = 1.086$ , correspondant à une onde primaire ayant juste dépassé la limite de stabilité statique, et en accord avec les résultats de LR96, on trouve que les modes 3D croissent à un rythme plus important (graphe d) que les modes 2D. Une explication possible de ce comportement réside dans le fait que l'onde d'amplitude 1.448 induit des zones d'instabilité statique significatives dans le domaine de calcul (voir la figure (5.6 d)), ce qui pourrait à nouveau favoriser la croissance de modes 2D. On peut imaginer que l'inertie des zones de retournement couplées au cisaillement favorise la croissance de modes 2D. La croissance des modes 2D semble être gouvernée par un mécanisme différent dans le cas d'une onde de très grande amplitude. Ceci est d'ailleurs déjà apparent sur la figure (5.2 b) où les modes 2D ont tous sensiblement le même taux de croissance, sauf pour les amplitudes  $a = 1.086$  et  $a = 1.448$ .

Remarquons finalement les tendances des énergies en fin de simulation, lorsque l'état quasi-stationnaire est atteint. Pour les cas d'une onde statiquement stable a), b) et c), la tridimensionalisation de l'écoulement est incomplète, puisque l'énergie des modes 3D n'excède jamais celle des modes 2D. Par contre dans les cas de grande amplitude d) et e) le régime final de l'écoulement est complètement tridimensionnel. Nous ferons l'inventaire détaillé des composantes du mouvement en fin de chapitre.

Les résultats de cette étude montrent que le caractère tridimensionnel de l'écoulement après le déferlement est dépendant de l'amplitude initiale de l'onde primaire. Ceci est apparent sur les graphes de la figure (5.5). Au moment du déferlement, les modes 2D du champ d'ondes saturent et l'onde primaire constitue le réservoir d'énergie disponible à l'alimentation des modes 3D. La tridimensionalisation de l'écoulement dépend cependant aussi du nombre de Reynolds. Premièrement,

l'onde primaire elle-même est affectée de façon significative par la dissipation sur l'échelle de temps précédant le déferlement. Deuxièmement, la théorie de stabilité linéaire montre que les instabilités peuvent se développer sur des échelles plus petites pour des nombres de Reynolds plus grands que ceux accessibles aux simulations numériques directes. Cette propriété est suggérée par nos simulations numériques et l'analyse du chapitre 4, mais les conséquences ne sont pas quantifiables dans le cadre de cette étude. Comme l'échelle verticale du paquet d'ondes instables conditionne le profil vertical de densité au moment du déferlement, la dépendance du nombre de Reynolds du déferlement mérite d'être explorée plus en détail. Ainsi, une simulation hypothétique pour l'onde  $a = 0.724$  ayant un grand nombre de Reynolds  $Re_{op}$  serait susceptible de fournir un régime vigoureusement tridimensionnel après le déferlement.

### 5.4.3 Visualisation du champ de densité

#### Conditions initiales

La figure (5.6) montre trois surfaces isopycnales et le champ de vitesse associé à l'onde primaire dans le plan  $xz$  du fond de la boîte périodique pour quatre calculs de la série I. L'onde primaire ne possède pas de structure dans la direction spatiale transverse  $y$  et elle se propage à  $45^\circ$  de l'horizontale en direction nord-est selon la bissectrice dans le plan de la feuille. Le mouvement oscillatoire des particules fluides est selon la direction perpendiculaire à la bissectrice et est de variation sinusoïdale en espace et en temps. La présence de la stratification linéaire ambiante rend la structure spatiale des isopycnes complexe. La dynamique des ondes internes est complexe parce que les anomalies de stratification produites par le champ de vitesse donnent lieu à une répartition inhomogène de la fréquence de Brunt-Väisälä. Cela met en jeu deux mécanismes physiques distincts d'extraction d'énergie, l'un associé au cisaillement et l'autre associé à l'inhomogénéité de la stratification pour l'énergie cinétique et potentielle, respectivement.

### 5.4.4 Considérations préliminaires

Avant de présenter les visualisations, nous rappelons rapidement quelques résultats des simulations bidimensionnelles et fixons quelques idées utiles. Le travail du chapitre 4 a mis en évidence que le déferlement bidimensionnel est un processus complexe. L'énergie accumulée dans le paquet d'ondes instable plus incliné par rapport à l'horizontale que l'onde primaire (de fréquence plus basse que l'onde primaire), produit des zones statiquement instables, d'abord dans les régions où le gradient de densité vertical possède une stabilité statique réduite. On peut dire que ces retournements sont gouvernés par le cisaillement, puisqu'il sont formés par intrusion de fluide léger sous du fluide lourd. Ces couches instables donnent lieu à des instabilités statiques dans les couches instables, mais leur développement est lent, inhibé par le fort cisaillement associé à ces couches. Finalement, une série d'instabilités dynamiques vigoureuses provoque la transition vers la turbulence de l'écoulement. Ainsi, le déferlement bidimensionnel ne semble être possible que lorsque le champ d'onde a localement perdu sa stabilité statique et cette perte est une conséquence de l'accumulation et de

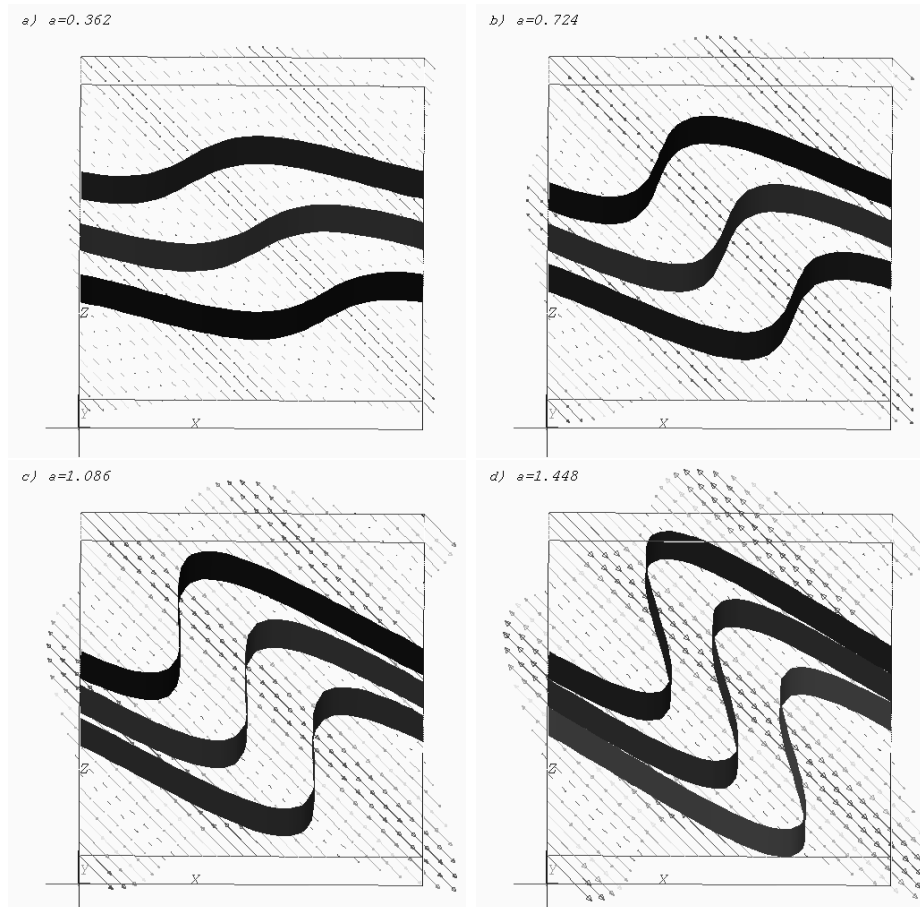


FIG. 5.6 – Trois surfaces isopycnales et le champ de vitesse pour l'onde primaire a)  $a=0.362$ , b)  $a=0.724$ , c)  $a=1.086$ , d)  $a=1.448$ . Le champ de vitesse est représenté dans le plan  $xz$  au fond du cube. L'onde se propage en direction nord-est à sa vitesse de phase constante.



concentration d'énergie à des échelles de taille intermédiaire. Cependant, le déferlement est surtout caractérisé par l'existence d'une instabilité dynamique se développant sur tout le domaine. Nos résultats bidimensionnels montrent ainsi que les deux mécanismes sont en compétition pendant le déferlement. Cela est en accord avec les résultats développés dans l'étude des ondes internes atmosphériques [34]. La particularité des ondes atmosphériques réside dans la croissance de leur amplitude pendant leur propagation verticale<sup>1</sup>. Cette croissance conduit à une instabilité convective, associée à une perte de stabilité statique locale par laquelle une onde atmosphérique déferle [145], [38].

En fait, l'application d'arguments linéaires à une onde d'amplitude constante permet de montrer [37] que le déferlement d'une onde peut se produire soit par instabilité de Kelvin-Helmholtz (instabilité dynamique), soit par instabilité convective (instabilité statique). Dans la limite des ondes de haute fréquence, on prévoit que les limites de stabilité respectives pour les deux mécanismes sont très proches. Les mécanismes d'instabilité statique et dynamique sont alors en compétition. Il faut remarquer que l'approche linéaire laisse ouvertes de nombreuses questions. Par exemple, on suppose généralement valable le critère de Miles et Howard sur le nombre de Richardson  $Ri = N^2/u_z^2 < 1/4$ . Or, ce critère nécessaire, mais non suffisant, s'applique en principe uniquement à un écoulement stratifié cisailé horizontal. La structure du cisaillement oscillant impliqué dans l'instabilité d'un champ d'ondes internes est plus complexe que la simple couche de cisaillement et rien ne garantit la validité de ce critère. Enfin, le rôle joué par les non-linéarités est mal connu. Bien que l'étude des ondes internes dans l'approximation de Boussinesq ne modélise pas les effets de croissance d'amplitude de l'onde interne par propagation verticale, nous pensons qu'il est désirable de confronter nos résultats aux prévisions qualitatives de la théorie linéaire. La possibilité de transferts non-linéaires d'énergie dans l'approximation de Boussinesq produit en moyenne un raidissement des surfaces isopycnales, ce qui rend le mécanisme d'instabilité statique important pour ce modèle. Ainsi, l'initiation de retournements locaux des isopycnes est une conséquence de l'accumulation de cisaillement dans les échelles de taille intermédiaire nourries par l'instabilité de l'onde primaire. A partir du moment où le fluide est statiquement instable, le mécanisme convectif entre en compétition avec son instigateur. Cette comparaison n'est que qualitative, car la production de couches instables est entièrement non-linéaire, tandis que le raidissement des surfaces isopycnales dans le modèle à amplitude variable est une conséquence de la conservation de l'énergie. Ainsi, nos simulations permettent de déceler quel type d'instabilité tend à se développer dans une onde interne gouvernée par les non-linéarités. Nous examinons à présent le déferlement du champ d'ondes à l'aide de visualisations tridimensionnelles.

#### 5.4.5 Onde de petite amplitude

La figure (5.6 a) montre l'onde primaire initiale utilisée pour la simulation de petite amplitude  $a = 0.362$  de la série I. La figure (5.7) montre le champ de densité total pour deux instants différents

---

1. Afin de tenir compte de l'inhomogénéité de la stratification ambiante, il est nécessaire de considérer les équations du mouvement d'un fluide dans l'approximation compressible ou dans l'approximation anélastique.

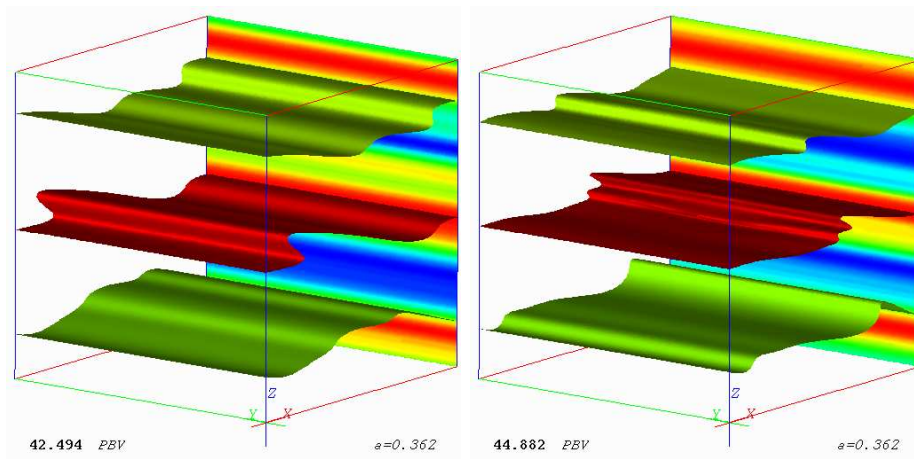


FIG. 5.7 – Le champ de densité totale pour deux instants pendant le déferlement du champ d’onde d’amplitude initiale  $a = 0.362$ . On montre trois surfaces isopycnales et un plan de coupe  $yz$  dans la fond droit de la boîte. L’onde se propage à  $45^\circ$  de l’horizontale en direction des  $x$  et  $z$  positifs.

pendant le déferlement du champ d’ondes. Le processus de déstabilisation provoque la formation de couches instables. Ces zones de retournements sont toujours observées dans les endroits où l’onde primaire génère un profil de densité ayant une stabilité statique réduite (voir figure 5.6). On remarque en effet sur l’image de gauche de (5.7) que le déferlement est initié essentiellement dans ces régions. Nous verrons que cet effet est moins prononcé pour les ondes de plus grande amplitude. En trois dimensions d’espace, la perte de stabilité statique du champ d’ondes internes met en avant le mécanisme d’instabilité statique associé. Cela est démontré par nos résultats sur la tridimensionalisation, mais aussi par les simulations bidimensionnelles. En deux dimensions la formation de couches statiquement instables précède le développement de l’instabilité dynamique et l’effondrement des couches est initié, mais ne se développe que très lentement, parce que contrainte à se développer dans le plan bidimensionnel. Cette observation suggère en effet la formation d’instabilités statiques de structure transverse dans le cas tridimensionnel. La compétition entre les deux mécanismes demeure, mais il existe maintenant la possibilité pour l’instabilité gravitationnelle de s’organiser dans la direction transverse (correspondant aux modes 3D). C’est la tridimensionalisation de l’écoulement. Sur l’image de droite de la figure (5.7), la tridimensionalisation existe comme nous l’avons montré, mais elle n’est pas perceptible à l’œil et l’écoulement est quasi-bidimensionnel suite au déferlement. Ceci est le cas, en raison du faible budget d’énergie restant à la disposition de la tridimensionalisation de l’écoulement au moment du déferlement. Ce budget dépend de l’histoire de déstabilisation de l’onde, qui est une fonction de l’amplitude, mais aussi des propriétés moléculaires du fluide. Il semble que la dépendance de l’amplitude soit directement reflétée dans la stratification des couches instables. Ainsi, une onde de grande amplitude engendre des couches instables plus instables que celles générées par une onde de petite amplitude. La phénoménologie de l’effondrement transverse sera explorée à la prochaine section. Pour le moment, les résultats permettent de conclure d’une part que l’instabilité et le déferlement d’une onde sont fortement

dépendants des paramètres numériques utilisés. D'autre part, il est clair à ce stade, que l'instabilité dynamique ne se développe pas comme dans le cas bidimensionnel. Dans le cas tridimensionnel, le déferlement initié par la croissance des modes 2D du champ d'ondes produit une perte de stabilité statique locale par retournement des isopycnes. Le cisaillement associé à la structure instable est encore antagoniste à la déstabilisation du champ d'onde par retournement, mais seulement dans le plan de propagation de l'onde. Nos résultats numériques indiquent alors que l'écoulement s'effondre invariablement par une instabilité gravitationnelle transverse. La saturation des modes 2D réduit la formation de tourbillons de Kelvin-Helmholtz. En fait, il se pourrait que la tridimensionalisation de l'écoulement empêche complètement le développement de l'instabilité dynamique au delà du début du déferlement. Ce point est abordé dans le cadre de l'étude d'une onde de grande amplitude.

#### 5.4.6 Onde de grande amplitude statiquement stable

Nous considérons ici les résultats du déferlement d'une onde de grande amplitude statiquement stable ( $a = 0.724$ , calcul 14). Rappelons que cette onde primaire est statiquement stable. L'exposé des résultats pour ce calcul va nous permettre de confirmer les résultats du cas de faible amplitude.

#### Champ de densité tridimensionnel

La figure (5.8) montre le processus de déferlement pour cette simulation. La déstabilisation de l'onde primaire est encore gouvernée par les modes 2D avant le déferlement, mais la contribution des modes 3D est plus significative pour les ondes primaires de grande amplitude. Néanmoins, l'existence d'un changement brusque de régime des modes 3D au moment du déferlement permet de dire que les modes 2D sont dynamiquement plus significatifs avant le déferlement, les retournements se produisant dans le plan de propagation de l'onde primaire. En effet, les images correspondant aux instants  $18.860 PBV$  et  $20.054 PBV$  montrent que la structure des surfaces isopycnales est quasiment bidimensionnelle. La deuxième image montre que les surfaces isopycnales sont localement retournées, engendrant ainsi des régions d'instabilité statique. Dans ces régions, du fluide léger se trouve sous du fluide lourd. On constate à nouveau que la disposition spatiale des premières couches instables porte la signature de la structure spatiale de l'onde interne. Les couches instables se forment d'abord dans les zones du profil de densité primaire ayant une stabilité statique réduite. L'image représentant l'instant  $21.247 PBV$  illustre bien la position des zones de déferlement dans l'espace. Les retournements sont accompagnés par une déformation de la surface isopycnale dans la direction transverse au plan de l'onde primaire. On voit nettement qu'elle correspond au mode transverse  $k_y = 3$ , puisque le domaine de calcul admet exactement trois longueurs d'ondes. L'écoulement n'a pas encore entièrement perdu son caractère bidimensionnel à ce stade, notamment dans les zones statiquement stables. Le temps de déferlement défini par l'instant de décroissance maximale de l'énergie totale se situe entre les images  $21.725 PBV$  et  $22.441 PBV$  vers  $22 PBV$  environ. Le déferlement a lieu sur une période de temps très brève, de l'ordre de deux périodes de Brunt-Väisälä. Les trois dernières images de la figure montrent que le déferlement conduit à la perte de cohérence rapide du champ d'ondes. La dernière image montre notamment que l'on ne peut

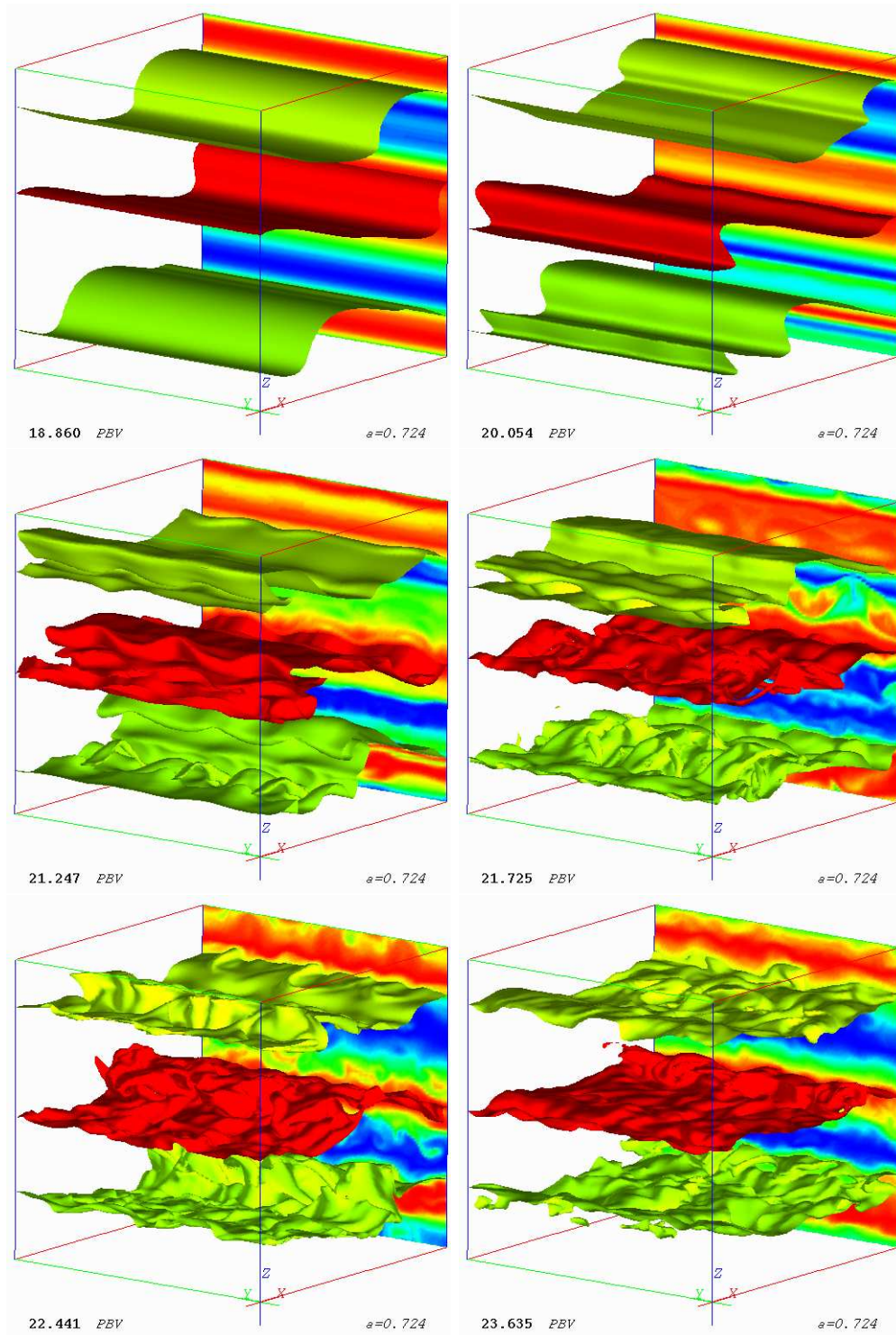


FIG. 5.8 – Visualisations du champ de densité pour le champ d'onde ayant pour amplitude de l'onde primaire  $a = 0.724$  (calcul 14). On montre trois surfaces isopycnales et une coupe dans le plan  $yz$  perpendiculaire au plan de propagation de l'onde. L'onde primaire se propage à  $45^\circ$  de l'horizontale vers le plan de coupe visulaisé de la boîte.

plus distinguer l'onde primaire des autres composantes du mouvement. Cet instant correspond à peu près au maximum de dissipation de l'énergie cinétique de la simulation numérique. Nous avons trouvé en effet que le maximum de dissipation de l'énergie cinétique a lieu environ une période de Brunt-Väisälä plus tard que le maximum de diffusion de l'énergie potentielle. Le calcul considéré ici ( $a=0.724$ ) possède une phase de déstabilisation gouvernée essentiellement par les modes 2D, mais le déferlement est vigoureusement tridimensionnel. Pour ces raisons, ce calcul parmi les calculs de la série I représente le mieux le déferlement d'une onde primaire initialement statiquement stable et nous l'exploitons donc plus en détail que nos autres simulations. Nous présentons à présent des plans de coupe de cette simulation.

### Coupes verticales dans un plan $xz$

Nous présentons le déferlement vu dans deux plans de coupe du champ de densité, le plan  $xz$  (plan des simulations bidimensionnelles) et le plan  $yz$  comprenant la direction transverse, respectivement. Nous considérons d'abord le plan de l'onde primaire  $xz$  et nous proposons une comparaison qualitative avec une simulation numérique bidimensionnelle (SND2D). La colonne de gauche de la figure (5.9) montre le déferlement d'une SND2D dont l'amplitude de l'onde primaire est égale celle de la simulation analysée ici. La colonne de droite montre une coupe dans le plan  $xz$  au fond de la boîte de calcul. Malgré le fait que le déferlement est tridimensionnel, on comprend qu'un plan  $xz$  choisi au hasard est représentatif du déferlement pour la géométrie périodique considérée. Cette comparaison est qualitative uniquement. Les SND2D et SND3D ont la même amplitude primaire  $a = 0.724$ . Cependant, la SND2D possède une résolution de  $512^2$  et utilise par conséquent un nombre de Reynolds plus grand. Les temps de déferlement sont différents de sorte que des événements semblables se produisent à des instants différents. En conséquence, les images 2D et 3D ne sont pas synchrones.

Les images de la première ligne représentent des instants avant le déferlement où l'instabilité est déjà fortement développée. Ces images se ressemblent. En effet, la déstabilisation, ainsi que la formation de couches instables sont dominées par des effets bidimensionnels. La SND2D (image de gauche) possède des zones de retournement d'une structure verticale plus fine que la SND3D en raison du nombre de Reynolds plus élevé de cette dernière (chapitre 4). Ces zones sont centrées sur la diagonale passant par le côté nord-ouest du domaine de calcul dans le cas SND2D. Dans la SND3D la bande définissant les zones est un peu décalée vers l'amont de l'onde primaire, de sorte qu'elle réapparaît dans la partie nord-est du domaine. Il est important de noter que les retournements observés suite à la déstabilisation (première ligne de la figure) correspondent toujours à un enroulement dans un sens trigonométrique, comme le montrent les images de la première ligne. Autrement dit le fluide léger est capturé par une couche de fluide plus lourd et cette capture est faite par intrusion du fluide léger d'ouest en est dans le plan  $xz$ . Les deuxième et troisième lignes montrent le plan peu de temps avant et juste après le déferlement (défini par la décroissance maximale de l'énergie), respectivement. Dans le cas de la SND2D (gauche), il se produit une série d'instabilités de Kelvin-Helmholtz. Ces instabilités s'opèrent par séries, parce que le paquet d'ondes a donné

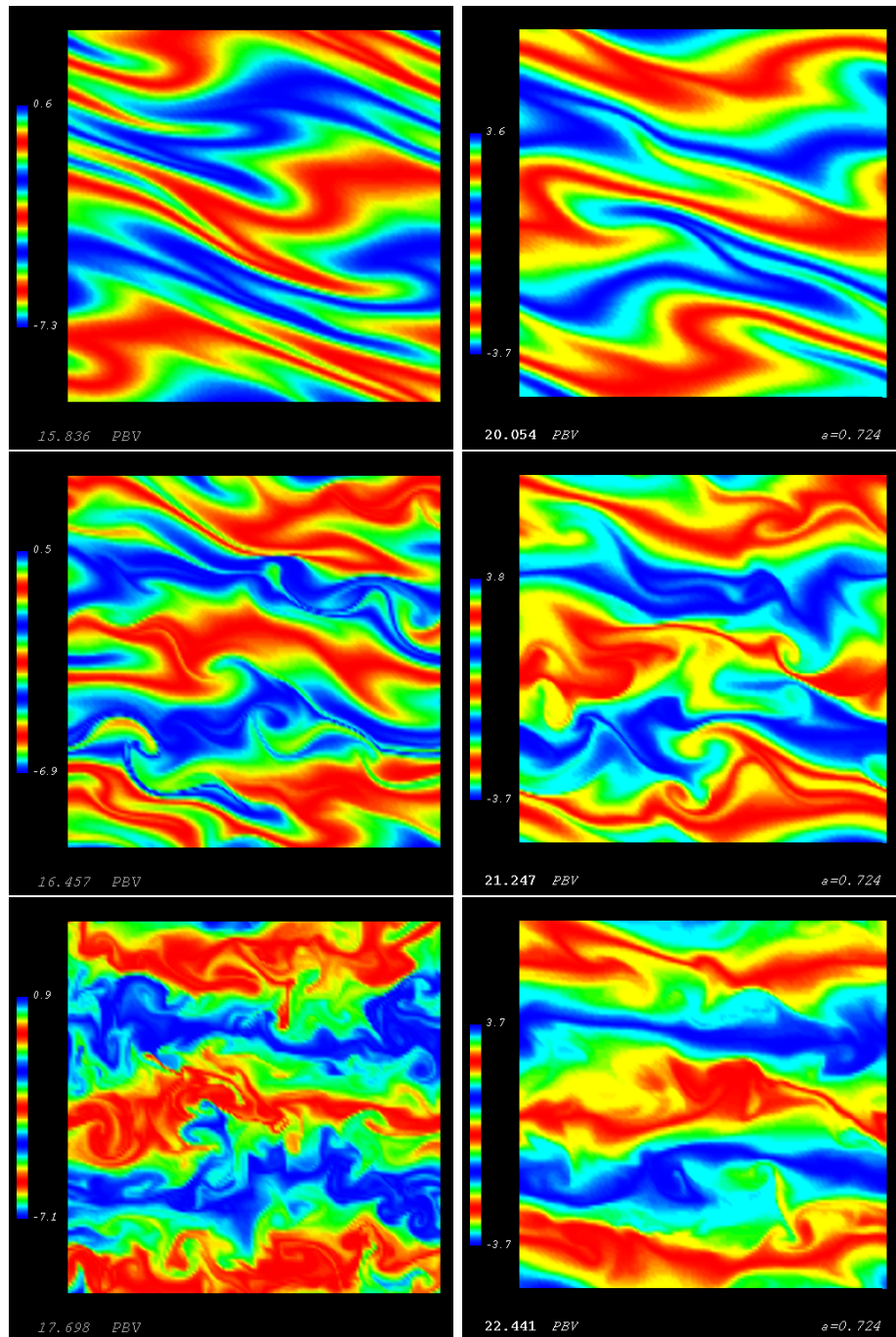


FIG. 5.9 – Comparaison d’une SND2D avec une SND3D. La colonne de gauche représente la SND2D, tandis que la colonne de droite montre une coupe dans le plan  $xz$  au fond de la boîte périodique. La comparaison de ces simulations est qualitative et sert à illustrer les différences génériques entre les cas bidimensionnel et tridimensionnel.

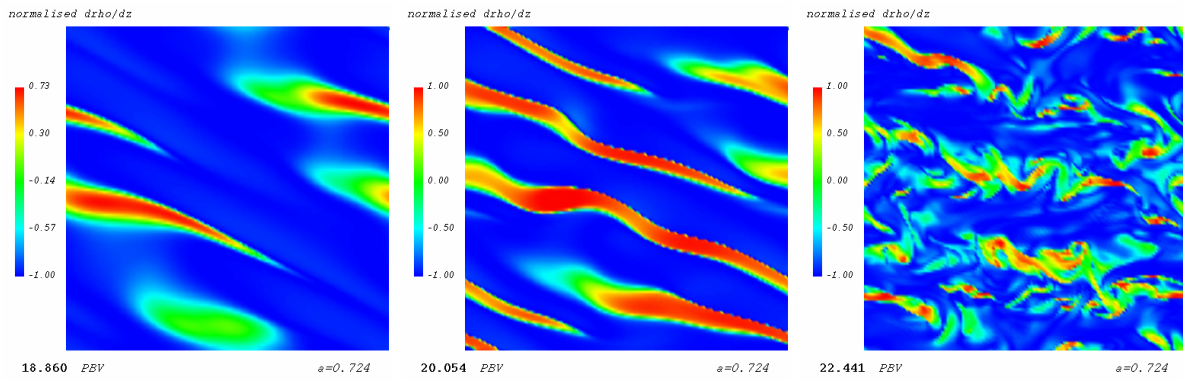


FIG. 5.10 – Cartes du gradient de densité vertical normalisé pour le calcul 14,  $a = 0.724$ . Les régions ayant un gradient positif sont statiquement instables.

lieu à une série quasi-parallèle de couches de cisaillement. Les tourbillons de Kelvin-Helmholtz apparaissent clairement sur les visualisations de la vorticité montrées au chapitre 4 et plus tard dans le présent chapitre en figure (5.14). On note que l'instabilité de cisaillement a tendance à faire rebasculer l'orientation globale des structures instables. L'image du bas montre cette inclinaison et aussi la présence de tourbillons vigoureux. La SND3D (droite) déferle différemment, puisque le développement de l'instabilité gravitationnelle dans la direction transverse empêche la formation de rouleaux de Kelvin-Helmholtz. Par conséquent, l'effondrement mène les structures d'instabilité rapidement vers l'horizontale.

### Gradient vertical de densité dans le plan $xz$

La considération du gradient vertical de densité montre le développement des régions statiquement instables. Les images de la figure (5.10) montrent le gradient de densité vertical total normalisé. L'image de gauche correspond à la première image des visualisations du déferlement visualisé en figure (5.8). Les régions de gradient de densité vertical positif apparaissent en effet d'abord dans les régions de stabilité statique réduite. Les couches instables sont épaisses à ce stade. Mais ces couches s'étendent au cours du temps et deviennent plus fines au fur et à mesure que le fluide léger pénètre les régions de stabilité statique augmentée. Le profil de densité peu de temps avant le déferlement, au moment où la tridimensionalisation devient apparente, est constitué de fluide globalement stable traversé par des couches statiquement instables (image 20.054 *PBV*). Enfin le déferlement du champ d'ondes provoque l'éclatement des couches.

### Coupes verticales dans un plan $xy$

Pour clore les considérations sur le champ de densité, nous montrons une séquence temporelle d'une coupe dans le plan  $yz$  nous permettant d'illustrer l'effondrement des couches de fluide statiquement instables sur la figure (5.11). Le plan de coupe a été choisi arbitrairement et correspond à une cote de  $x = \pi/6$ . A cette cote le plan coupe une région statiquement instable comme on peut le

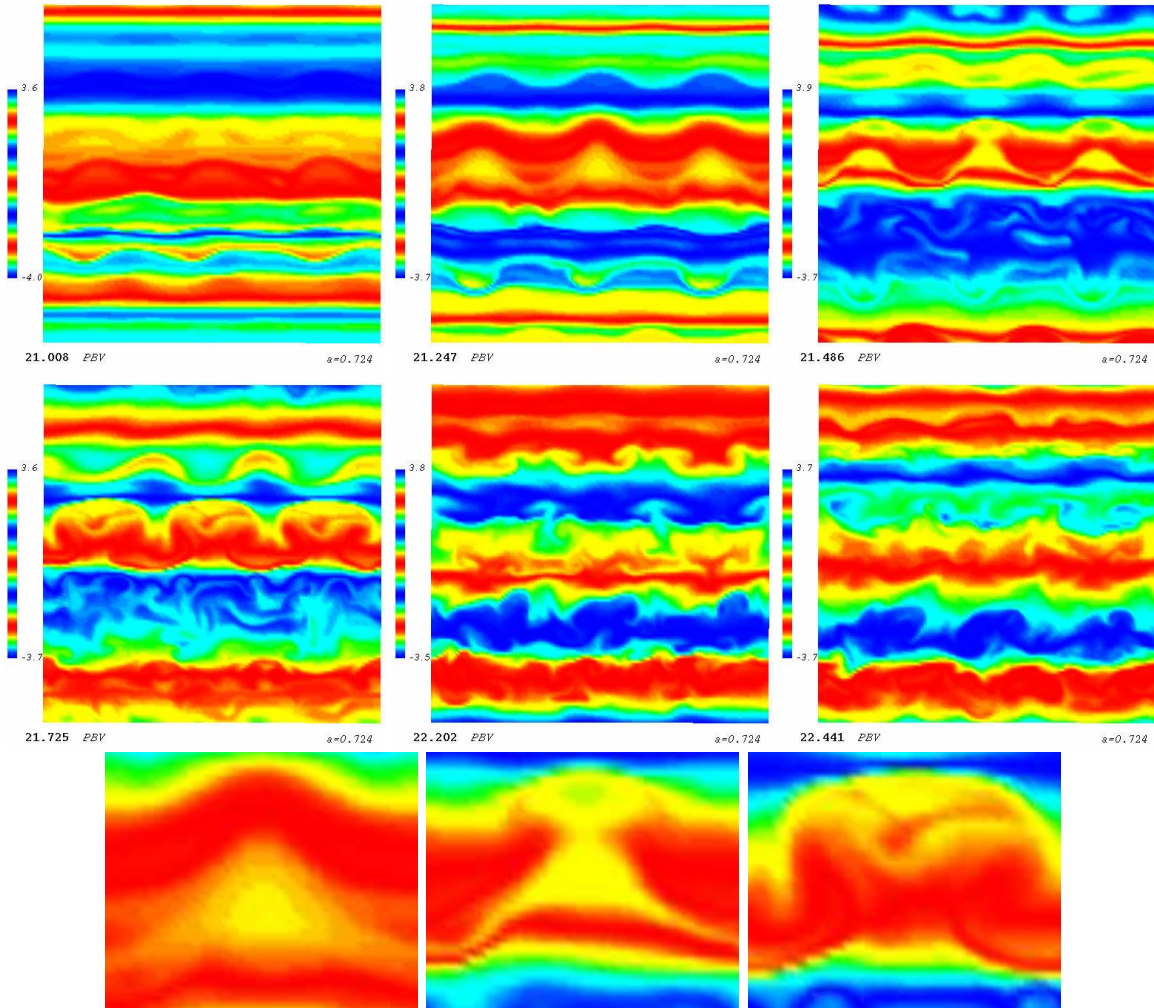


FIG. 5.11 – Coupe dans le plan  $yz$  du domaine de calcul d'une cote de  $x = 3\pi/2$ . On montre le développement spatial et temporel de l'instabilité gravitationnelle.



voir a mi-hauteur des deux premières images à  $21.008 PBV$  et  $21.247 PBV$ , respectivement. Comme les surfaces isopycnales sont entraînées par le mouvement de fluide associé au champ d'ondes, les particules fluides ont une composante du mouvement perpendiculaire au plan de coupe non nulle. La perte rapide d'énergie de l'onde primaire, ainsi que l'extension spatiale finie des couches instables dans le plan  $xz$  permettent cependant de suivre certains événements de convection dans un plan de position fixée. Nous avons remarqué que la tridimensionalisation du champ d'ondes initialement statiquement stable est un événement brusque quasiment discontinu. Plus précisément, cela illustre que le déferlement évolue sur une échelle de temps plus petite que l'échelle de temps du processus de déstabilisation initial. Ainsi, on peut considérer la phase initiale de la tridimensionalisation comme le développement d'une instabilité linéaire par rapport à l'écoulement stratifié formé par le champ d'onde. Ce point de vue est une extension naturelle du problème de stabilité linéaire d'une seule onde (LR96), mais le champ d'ondes est maintenant polychromatique et l'écoulement de base est intrinsèquement non-linéaire, cisailé et stratifié. Les études théoriques ayant étudié des situations similaires à celle produite localement par l'instabilité du champ d'ondes sont relativement récentes. Ces études s'intéressent à des configurations présentant intrinsèquement des gradients de densité instables, mais n'impliquant pas de parois horizontales ou verticales maintenant le gradient de densité hors équilibre, comme c'est le cas dans certaines cellules expérimentales de convection thermique. Les premières études de profils de densité statiquement instables ont été étudiées en convection pénétrative. Des références sur le sujet sont données dans l'article de Batchelor et Nitsche 1991 (BN91) [8], ainsi que Thorpe 1994 [131]. Ces travaux considèrent des profils de densité instables n'étant pas des solutions exactes des équations de l'hydrostatique, mais supposent qu'une analyse linéaire peut néanmoins être appliquée. Bien que n'étant pas directement applicable à notre cas, ces études ont permis de dégager quelques propriétés physiques du mécanisme d'effondrement. L'image de gauche de la première ligne montre la formation d'une couche instable à mi-hauteur de l'image. La deuxième image montre la déformation sinusoïdale de cette couche. Le mécanisme de formation de l'instabilité est intuitif et est expliqué dans Batchelor et Nitsche. Si l'on admet que le fluide peut glisser horizontalement le long des isopycnes on comprend que le fluide lourd vient s'engouffrer dans les creux de la déformation, tandis que le fluide léger sous-jacent se concentre dans les crêtes. L'échange de fluide lourd et léger et la libération d'énergie potentielle disponible sont ainsi amorcés. De plus, la concentration de fluide lourd (léger) dans les ventres (crêtes) a tendance à intensifier ce mécanisme. Le fluide lourd est ainsi précipité vers le bas, tandis que le fluide léger remonte vers le haut. Ce mouvement vertical est effectué dans des canaux ayant des sens de circulation alternés. Les images illustrent l'échange de fluide menant à la restratification du fluide. En bas de figure on montre un agrandissement d'un événement convectif. La concentration de fluide léger dans un endroit mène à l'ouverture de la surface isopycnale lourde le surplombant. L'échange de fluide est ainsi possible.

Les causes déterminant la taille de l'instabilité transverse peuvent être multiples. D'une part, il y a la structure spatiale du profil de densité associée à l'onde primaire et superposée à la stratification linéaire de base. Une région inclinée de stabilité statique réduite est limitée de part et d'autre par

une région de stabilité statique augmentée. Cet effet de confinement peut limiter la taille transverse de l'instabilité aux valeurs finies observées. Ceci constitue un résultat de Thorpe 1994, qui montre que la présence d'une stratification linéaire stabilise un profil de densité purement *sinusoïdal* selon la coordonnée verticale  $z$  et réduit la taille horizontale de l'instabilité statique. D'autre part, les plans de coupe  $xz$  (plan de l'onde primaire) montrent que les zones statiquement instables ont une extension verticale reliée à l'échelle verticale du paquet d'ondes. Par échelle verticale nous entendons la longueur caractéristique sur laquelle varie la vorticité du paquet d'ondes. La dépendance de la taille transverse de l'instabilité, de la taille verticale d'une région de stabilité statique réduite, de la taille verticale du paquet d'onde et de l'amplitude de l'onde primaire semble être complexe. Ainsi, nous avons trouvé que la taille verticale du paquet d'ondes instable dépend du nombre de Reynolds, mais est sensiblement constante pour les différentes amplitudes de l'onde primaire. L'échelle verticale mise en jeu dans les retournements successifs dans les régions de stabilité statique réduite ne peut pas conditionner la taille transverse de l'instabilité convective à elle seule. Il semble que l'amplitude de l'onde primaire joue un rôle prépondérant. Le gradient de densité vertical des couches instables dépend en effet du profil de densité crée par l'onde primaire qui est fonction de l'amplitude. Une présentation des propriétés de l'instabilité statique pour les autres calculs sera faite ultérieurement.

#### 5.4.7 Nombre de Richardson

Nous terminons cette section en montrant deux cartes du nombre de Richardson de gradient dans un plan  $xz$  arbitrairement choisi juste avant le déferlement. Il s'agit du calcul 14 d'amplitude  $a = 0.724$ . Le nombre de Richardson est défini par

$$Ri = \frac{N^2(x, y, z)}{u_z^2 + v_z^2} \quad (5.9)$$

où intervient le cisaillement vertical du champ de vitesse horizontal dans le dénominateur. La fréquence de Brunt-Väisälä au numérateur est la fréquence locale basée sur le champ de densité total. Les cartes sont représentées en figure (5.12). La première carte correspond à l'instant  $20.054 PBV$ , dont le champ de densité est représenté sur les figures (5.8) et (5.9). Nous avons tronqué le nombre de Richardson au delà de 0.5 et de 0. Le critère d'instabilité classique de Miles et Howard correspond à  $Ri < 0.25$  (Turner 1979 [135]). Rappelons que ce critère est une condition nécessaire, mais non suffisante de stabilité et que son application à notre configuration complexe constitue une extrapolation de la couche cisailée simple pour laquelle il est rigoureusement valable. Inversement un nombre de Richardson négatif correspond à un profil de densité statiquement instable. La carte montre que les régions potentiellement dynamiquement instables selon le critère sont très localisées, généralement en bordure de régions statiquement instables. La théorie linéaire de saturation dont nous avons parlé auparavant prévoit en effet que les limites de stabilité pour les mécanismes statique et dynamique sont très proches l'une de l'autre. Cette conclusion semble être conservée dans le cas du champ d'ondes déferlant non-linéaire considéré ici. Nous pouvons dire que la déstabilisation du champ d'ondes n'est pas capable de produire des régions significatives où la stratification est stable et où le nombre de Richardson est inférieur à 0.25. Par contre, il ne faut pas nécessairement conclure

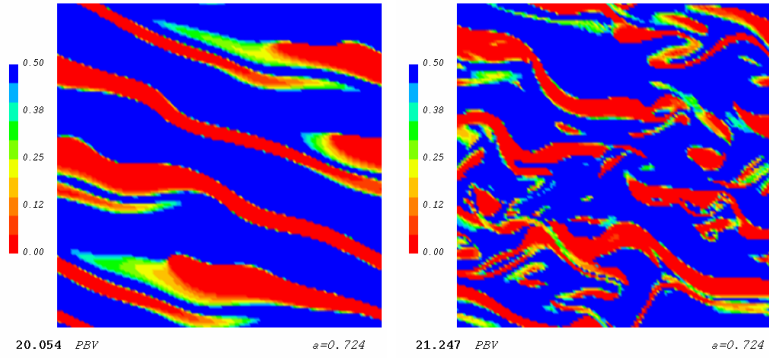


FIG. 5.12 – Cartes du nombre de Richardson de gradient dans un plan  $xz$  arbitraire du domaine de calcul. Le nombre de Richardson a été tronqué au delà de 0.5 signifiant la stabilité du fluide et au delà de 0 signifiant que le fluide est statiquement instable ( $Ri < 0$ ).

qu'un nombre de Richardson négatif implique le développement d'une instabilité statique. En effet, cette configuration est statiquement instable, mais une étude plus précise devrait tenir compte du cisaillement qui peut avoir un effet inhibant sur le développement de l'instabilité statique tout en alimentant une instabilité dynamique. Ainsi en deux dimensions nous avons montré l'existence d'instabilités dynamiques vigoureuses dans les couches statiquement instables.

#### 5.4.8 Onde de grande amplitude statiquement instable

Avant de clore la présentation du déferlement par le champ de densité, nous montrons quelques images du déferlement du champ d'ondes initialement statiquement instable. Plus l'amplitude de l'onde primaire est grande, plus le régime de saturation est atteint rapidement. Les zones d'instabilité statique ont une extension verticale plus grande ce qui engendre une modulation spatiale de l'instabilité gravitationnelle plus grande. Les images du déferlement sont données en figure (5.13). Nous avons trouvé que la déstabilisation de cette onde est réellement tridimensionnelle, mais que le déferlement n'a lieu qu'au bout de quelques périodes de Brunt-Väisälä. L'instabilité transverse amorçant l'effondrement du champ d'ondes apparaît sur l'image de droite de la première ligne (11.459 *PBV*). Son extension spatiale est  $k_y = 1$ , ce qui correspond au plus grand mode admissible dans l'espace de Fourier discret de nos simulations. L'image suivante montre aussi le développement du mode  $k_y = 2$ . L'excitation rapide de modes transverses de petite échelle spatiale rend la situation rapidement inextricable. L'écoulement peut alors être qualifié de turbulent. Nous en étudions quelques propriétés statistiques dans la dernière section de ce chapitre.

### 5.5 Vorticité de l'écoulement

La considération des composantes de la vorticité et de l'enstrophie associées à l'instabilité permet une étude locale plus précise des processus mis en jeu durant le déferlement. Ainsi, nous avons déjà

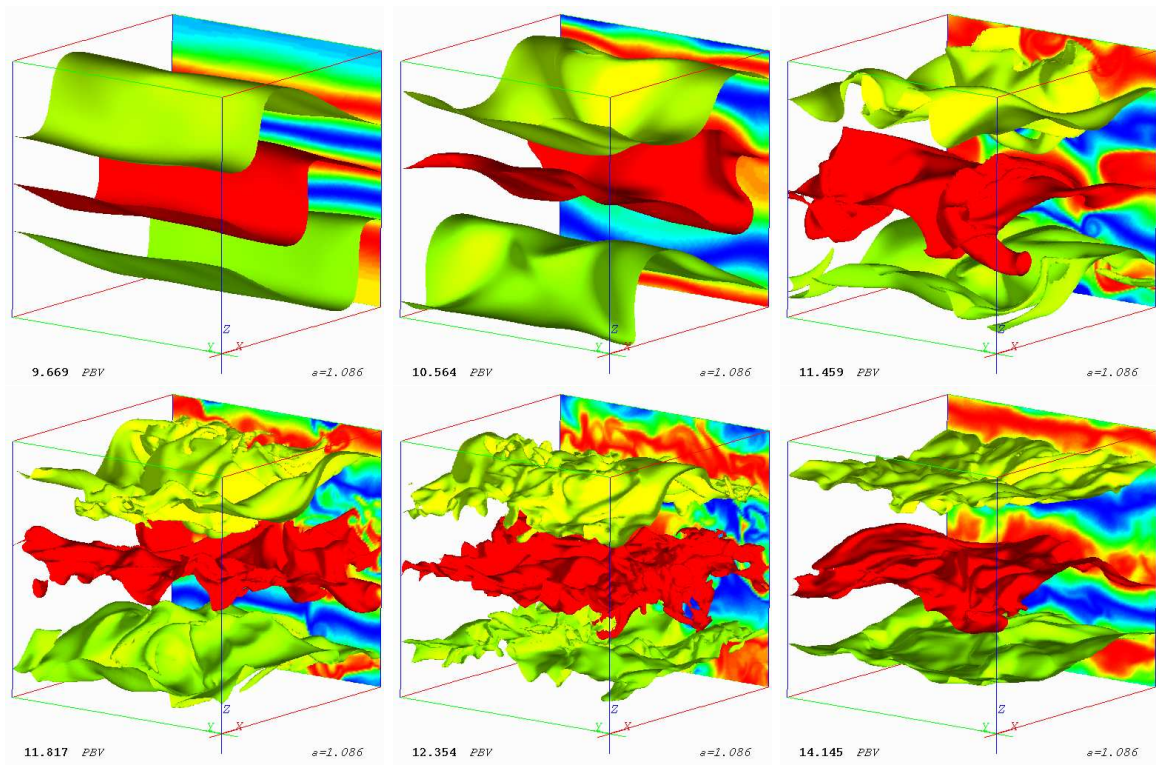


FIG. 5.13 – Déferlement de l'onde primaire statiquement instable  $a = 1.086$  (calcul 17).

utilisé la vorticité dans le cas bidimensionnel pour mettre en évidence la modulation spatiale du paquet d'ondes instables évoluant dans le milieu inhomogène créé par l'onde primaire. Dans cette section nous considérons les composantes horizontale transverse  $\xi_y$  et horizontale (dans la plan de propagation de l'onde primaire)  $\xi_x$  de la vorticité. La composante  $\xi_y$  est l'analogue de la vorticité du cas bidimensionnel.

### 5.5.1 Composante $\xi_y$

Nous considérons d'abord brièvement la vorticité  $\xi_y$  et nous la comparons à la vorticité bidimensionnelle. La figure (5.14) montre les résultats des SND2D et SND3D dans la colonne de gauche et de droite, respectivement. La comparaison que nous proposons est uniquement qualitative et sert à illustrer les différences génériques du déferlement bi- et tridimensionnel. Les amplitudes de l'onde primaire sont différentes, mais la structure du paquet d'onde est similaire sur les images du haut. La déformation du paquet d'ondes est différentes dans les deux images, car aux instants considérés le paquet d'ondes possède une position différente par rapport à la l'onde primaire. La modulation de la structure associée à la vorticité du paquet d'ondes est bien préservée dans la SND3D. Cependant, la croissance de modes 3D est reflétée dans la SND3D, car le paquet d'ondes possède aussi une très faible modulation dans la direction transverse. L'image de gauche de la ligne du bas de la figure montre le développement d'une série d'instabilités de Kelvin-Helmholtz pour la SND2D. Par

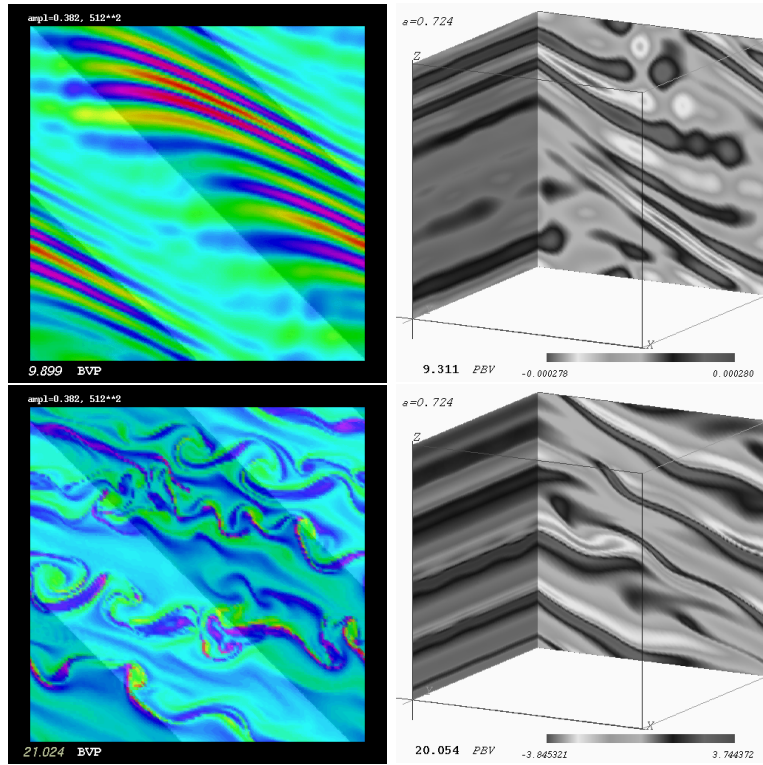


FIG. 5.14 – Images de la vorticité filtrée de la contribution de l'onde primaire pour une  $SVD2D$  (colonne de gauche) et une  $SVD3D$  (colonne de droite). Les images de la  $SVD2D$  contiennent également les zones de vorticité primaire positive (bandes sombres) et négative. L'amplitude de l'onde primaire pour la  $SVD3D$  est le double de l'amplitude pour la  $SVD2D$ . La comparaison est qualitative et sert à illustrer les similitudes et différences des  $SVD2D$  et  $SVD3D$ .

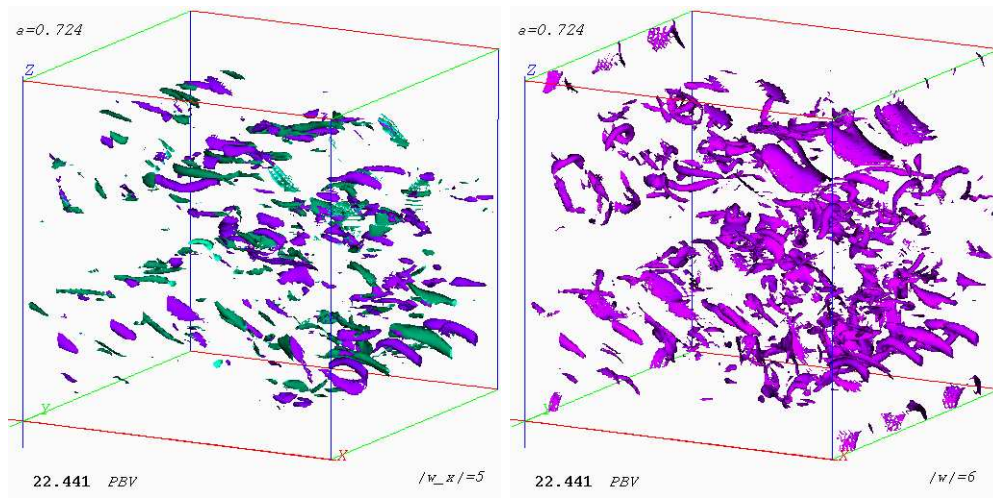


FIG. 5.15 – Isosurfaces pour la composante streamwise de la vorticité  $\xi_x$  (gauche) et pour la racine carrée de l'enstrophie  $z = \xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2$ .

contre les modes 2D de la SND3D saturent et la suite de la dynamique nécessite la considération de la vorticité  $\xi_x$ . On remarque cependant que la déformation sinusoïdale des feuilles de vorticité est réminiscente de la phase initiale de l'instabilité dynamique d'une couche de cisaillement.

### 5.5.2 Composante $\xi_x$

#### Visualisations

La considération du champ de densité a montré le développement tridimensionnel de l'instabilité. La figure (5.15) montre la composante  $\xi_x$  de la vorticité (image de gauche) et l'enstrophie (image de droite) au même instant lorsque l'instabilité statique transverse est développée. Les valeurs des isosurfaces ont été choisies arbitrairement pour illustrer le caractère horizontal du champ de vorticité pendant le déferlement. La composante  $\xi_x$  de la vorticité est distribuée selon la direction transverse et on observe que les tubes de vorticité changent de signe de tube en tube. L'extension finie des tubes, ainsi que leur disposition spatiale suggère que le développement de l'instabilité statique est le plus intense dans la partie épaisse des couches instables situées dans les zones de stabilité statique réduite due à l'onde primaire. L'image de droite montre l'enstrophie au même instant. On aperçoit les restes des feuilles de vorticité associées aux paquet d'ondes.

#### Spectres de $\xi_x$

La figure (5.16) montre les spectres de la contribution  $\xi_x^2$  à l'enstrophie totale en fonction du nombre d'onde transverse  $k_y$ . Seuls les premiers modes ont été représentés. On lit directement à partir de ces graphes la structure modale de la structure convective visualisée auparavant à l'aide des champs de densité et de vorticité. Nous avons choisi de représenter la structure pour trois calculs de la série I, deux calculs de la série II et un calcul utilisant une dissipation biharmonique

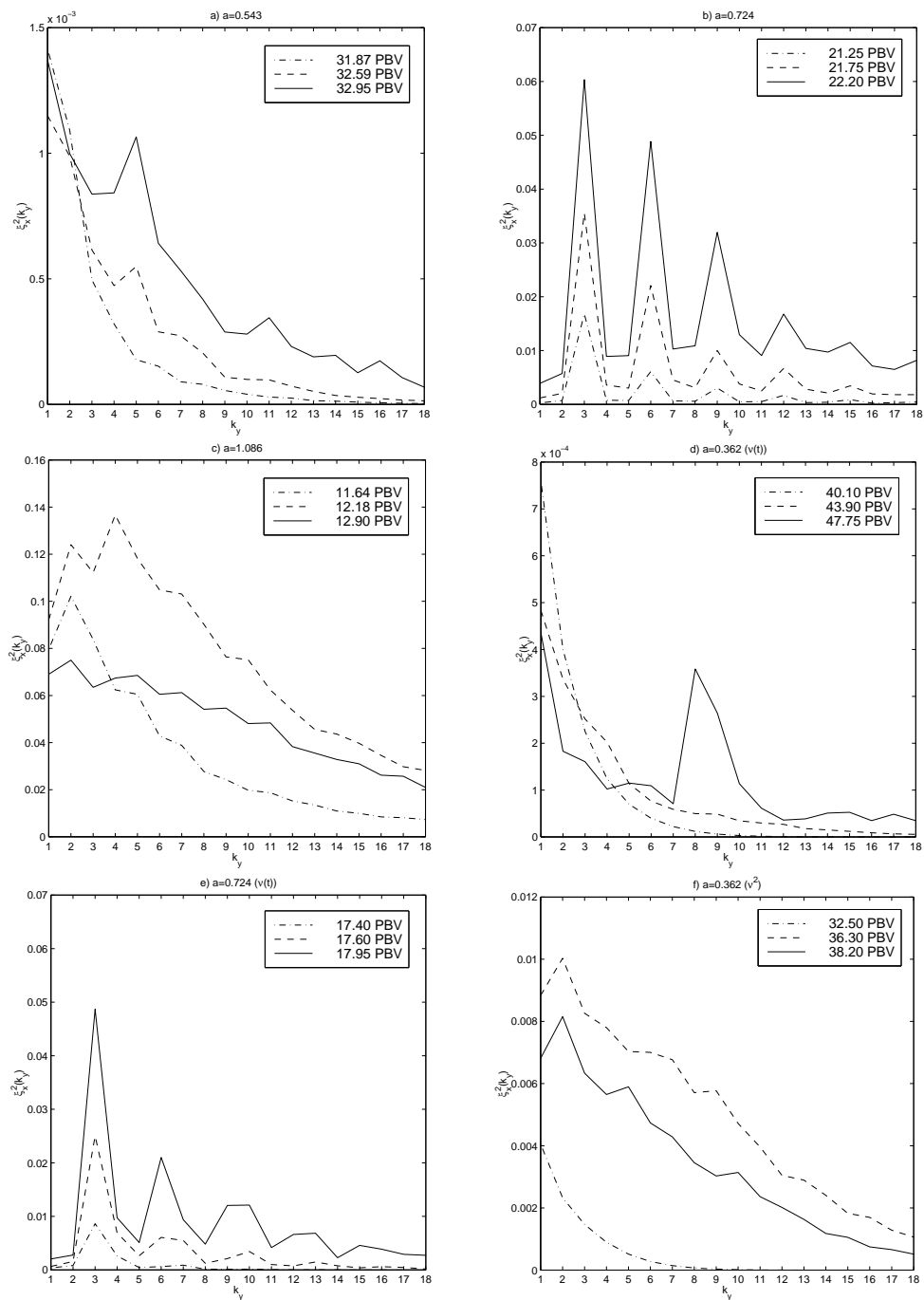


FIG. 5.16 – Spectres du module de la composante streamwise  $\xi_x$  de la vorticité pour trois calculs de la série I correspondant aux amplitudes a) 0.543, b) 0.724 et c) 1.086, les deux calculs avec viscosité variable d) 0.362 (run 19) et e) 0.724 (run 20) et le calcul avec dissipation biharmonique f) 0.362 (run 6).

(run 6). Les graphes a)  $a=0.543$ , b)  $a=0.724$  et c)  $1.086$  correspondent aux calculs de la série I. On remarque sur le graphe a) que le mode le plus instable est le mode  $k_y = 1$ . Rappelons que cette simulation possède une viscosité légèrement plus grande que les autres calculs de la série I. La structure modale est la plus nette sur le graphe b) pour le calcul visualisé en détail dans ce chapitre. Le spectre possède une régularité remarquable, car seul le mode  $k_y = 3$  et ses harmoniques sont excités de façon significative lorsque l'instabilité statique se développe. Enfin, pour l'onde primaire de grande amplitude statiquement instable sur le graphe c), il apparaît une structure de plus grande échelle, mais elle est moins nette, car les modes de plus petite échelle sont entraînés rapidement, le déferlement étant plus énergétique dans ce cas. On peut néanmoins distinguer l'importance des modes  $k_y = 1, 2, 4$ .

Le fait que le mode  $k_y = 1$  croît dans le cas de petite amplitude est surprenant. Nous ne pouvons pas expliquer ce phénomène, mais nous avons vérifié qu'il était bien reproduit dans d'autres calculs. Ainsi les graphes d) et f) montrent les spectres pour deux simulations de l'onde primaire de petite amplitude  $a=0.362$ . Graphe d) provient d'une simulation avec viscosité variable d'une résolution spatiale de  $128^3$ . Notons que la viscosité calculée par l'équation (5.4) est en moyenne  $\nu(t) = 1 \times 10^{-4}$ , soit quatre à cinq fois plus petite que la viscosité newtonienne constante des simulations 4 et 11. Le déferlement est encore caractérisé par l'apparition du mode  $k_y = 1$ . Il en est de même pour le calcul avec hyperviscosité où le déferlement est engagé après une perte d'énergie primaire bien plus petite que pour les simulations utilisant la dissipation newtonienne. La tridimensionalisation des ondes de faible amplitude débute donc par la croissance du mode de plus grande échelle transverse. Le graphe e) montre le spectre pour l'onde primaire ( $a=0.724$ ). A la différence du graphe b) (même amplitude), la simulation est ici d'une résolution de  $128^3$  et utilise une viscosité variable. Cette viscosité diffère d'un facteur quatre de la viscosité newtonienne d'un calcul d'une résolution de  $128^3$  utilisant une dissipation constante et elle est sensiblement constante pendant la phase de destabilisation. Les énergies totales restantes diffèrent de 10% au moment du déferlement en faveur de la simulation avec viscosité variable. Les structures modales sont remarquablement proches, comme le montrent les graphes b) et e). Toutefois, la création rapide de vorticités pendant le déferlement, fait croître la viscosité rapidement et la croissance de l'instabilité est alors moins vigoureuse dans le cas de plus petite résolution spatiale.

Concluons cette section par l'observation que la caractérisation quantitative de la structure modale de l'instabilité statique transverse en fonction de l'amplitude de l'onde primaire est impossible à partir des séries de calculs présentées. Les résultats obtenus par le calcul  $a=0.724$  présenté en détail pourraient faire l'objet d'une étude plus poussée. Il faudrait alors tenir compte de la complexité du champ d'ondes au moment du déferlement. Les travaux, déjà cités dans ce chapitre, de Batchelor et Nitsche 1991 et Thorpe 1994 considèrent le problème d'un profil de densité statiquement instable. A partir du problème de Batchelor et Nitsche 1991, Thorpe 1994 considère le problème complexe d'un profil de densité composé d'une variation sinusoïdale verticale superposée à un profil de densité linéaire et inclut un écoulement horizontal cisailé verticalement. La complexité du profil de densité associé au déferlement d'un champ d'ondes internes, l'écoulement cisailé et



la tridimensionalité du problème rendent cependant l'approche analytique difficile, comme le font remarquer les auteurs. Soulignons que la simulation d'ondes internes de petite amplitude en trois dimensions d'espace est délicate aux nombres de Reynolds considérés. Il est difficile de savoir dans quelle mesure le déferlement est dominé par la dissipation, ce qui rend délicat l'appréciation des mécanismes d'instabilité et de déferlement simulés. Une approche possible consiste à augmenter la résolution en cours de calcul ou peu de temps avant le déferlement, tout en utilisant un nombre de Reynolds grand pendant la phase de déstabilisation. Une autre approche choisie par L94 afin d'être dans la limite de validité de l'analyse de stabilité linéaire, consiste à maintenir l'amplitude primaire à son niveau initial artificiellement.

## 5.6 Implications du déferlement

### 5.6.1 Généralités

Dans cette section, on étudie le régime turbulent établi vers la fin du déferlement. Nous avons indiqué au chapitre 2 que les écoulements stratifiés complexes, tel que celui résultant d'un déferlement d'ondes, sont généralement abordés par des outils statistiques. Ces écoulements ont donné lieu à un grand nombre de travaux théoriques, expérimentaux et numériques. La considération des spectres d'énergies cinétique et potentielle d'un écoulement stratifié complexe est importante, car elle peut permettre de rendre compte des mécanismes physiques à l'origine des observations faites dans les écoulements géophysiques. Cela permet de tester dans quelle mesure les processus engendrant l'écoulement turbulent d'une expérience de petite échelle peuvent être attendus dans des situations géophysiques réelles. La fin de cette section est consacrée à l'étude des composantes du mouvement produites par le déferlement. Étant donné la faible énergie comprise dans l'écoulement relaxant vers l'équilibre après le déferlement, nous pouvons appliquer la décomposition de Craya-Herring.

### 5.6.2 Les spectres d'énergie cinétique et potentielle

Nous étudions ici le régime de turbulence non forcée induit par le déferlement du champ d'ondes. Principalement deux approches sont pertinentes pour nos simulations. D'une part, Bouruet-Aubertot et al 1996 (BA96) [13] ont effectué des simulations numériques bidimensionnelles d'ondes internes stationnaires dans la configuration d'une boîte imperméable (chapitre 3). Le déferlement obtenu est alors plus localisé que le déferlement d'ondes internes propagatrices et ce déferlement est alimenté continuellement par le mouvement d'arrière plan dû à l'onde primaire stationnaire. Les ondes stationnaires induisent alors un régime turbulent décroissant plus lentement. Cela a permis à BA96 d'observer un comportement quasi-stationnaire des spectres d'énergie. En adoptant un point de vue de la turbulence développée en présence d'effets de stratification, les pentes et niveaux des spectres d'énergie cinétique et potentielle en fonction du nombre d'onde vertical, obtenus par une moyenne temporelle sur plusieurs périodes coïncident remarquablement avec les résultats de mesures in situ.

Les spectres obtenues par BA96 permettent de distinguer une zone d'inertio-flottabilité dans laquelle les énergies cinétiques et potentielles varient selon la loi  $N^2 k_z^{-3}$ . Ces spectres ont été prédits par diverses théories reposant sur des hypothèses contradictoires (cf. la revue dans l'article de Sidi et Dalaudier [125]), mais prédisant les mêmes résultats concernant les spectres d'énergie. Un problème concerne en effet le flux de flottabilité, dont on ne connaît pas l'importance pour la dynamique d'une turbulence stratifiée. D'autre part, on peut encore adopter le point de vue des ondes linéaires. Dewan et Good 1986 [82] ont appliqué les arguments de saturation linéaire d'une seule onde interne (Fritts 1989 [35]) à un ensemble d'ondes internes. La loi de variation des spectres est évaluée par des arguments simples pour des ondes saturant séparément par instabilité dynamique et statique, respectivement. Dewan et Good concluent que la saturation par instabilité statique est la plus probable et leur spectre d'énergie cinétique en fonction du nombre d'onde vertical est de la même forme ( $N^2 k_z^{-3}$ ) que le spectre prévu par les théories de turbulence évoquées plus haut. Remarquons que le spectre saturant par instabilité dynamique possède également une variation en  $N^2 k_z^{-3}$ .

Comme pour les ondes internes propagatives bidimensionnelles, nous avons remarqué que le déferlement et la dissipation d'énergie des ondes propagatives en trois dimensions s'opèrent plus rapidement que dans le cas stationnaire. Nous n'avons pas obtenu de régime quasi-stationnaire similaire à celui de BA96. En trois dimensions d'espace la durée de vie du champ d'ondes propagatives est réduite, parce que lorsque le déferlement est engagé, l'onde primaire cède rapidement l'intégralité de son énergie aux autres modes. Ceci est une conséquence de la différence intrinsèque existant entre l'évolution d'un champ d'ondes stationnaires et celle d'un champ d'ondes propagatives. Par conséquent, on ne peut pas moyenniser les spectres en temps et nous ne considérons que des spectres instantanés. Cela rend délicat le choix des intervalles de temps pendant lesquels on souhaite visualiser et comparer les spectres issus de différentes simulations. Nous avons vu dans le cas bi- et tridimensionnel que l'onde est déstabilisée par un paquet d'onde possédant une structure de taille verticale intermédiaire. Le nombre d'onde vertical est en général de l'ordre de quelques multiples du nombre d'onde primaire. De même, l'effondrement gravitationnel est initié dans les couches statiquement instables, résultant elle mêmes du paquet d'ondes, dont l'échelle transverse est également de taille intermédiaire. A ce stade de l'évolution, le spectre d'énergie est donc relativement étroit par rapport à un spectre de turbulence développée. Une étude spectrale quantitative de l'initiation du déferlement ne constitue pas l'objet de cette thèse. On peut noter cependant que de telles études ont été menées pour des ondes hydrodynamiques de surface [108], [71]. L'étude récente de Uittenbogaard 1994 [136] étend ces concepts au cas des ondes internes et confronte les résultats avec des mesures in situ. Une confrontation de cette approche avec des résultats numériques constitue une ouverture intéressante pour l'exploitation de nos simulations.

En échange nous nous intéressons ici aux spectres d'énergies lorsque le déferlement du champ d'ondes est développé. Nous avons choisi de représenter les spectres uniquement à partir du moment où a lieu le maximum de dissipation d'énergie cinétique. A partir de ce moment là, nous pouvons supposer que l'énergie a cascadié au travers de toutes les échelles et que les spectres sont établis.

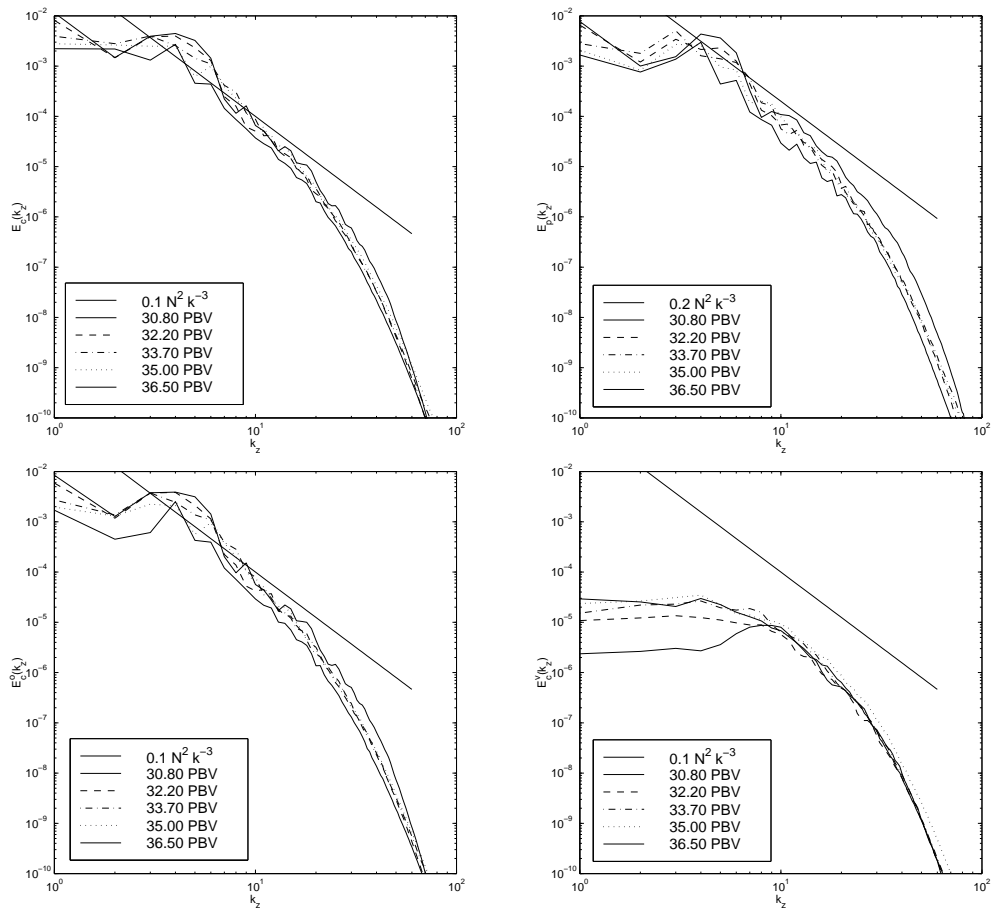


FIG. 5.17 – Spectres d'énergie cinétique  $E_c(k_z)$ , d'énergie potentielle  $E_p(k_z)$ , d'énergie cinétique cinétique pour le mode onde et d'énergie cinétique pour le mode vortex en fonction du nombre d'onde vertical  $k_z$  pour le calcul 15 de la série I ( $a=0.543$ ). Les spectres du mode onde  $E_c^o(k_z)$  et vortex  $E_c^v(k_z)$  (graphes du bas de la figure), respectivement, ont été obtenus par application de la décomposition de Craya-Herring. On représente les spectres à partir de l'instant où est atteint le maximum de dissipation de l'énergie totale.

Nous représentons les spectres pour trois calculs de la série I sur les figures (5.17), (5.18) et (5.19) correspondant aux amplitudes 0.543, 0.724 et 1.086, respectivement. Toutes les figures contiennent les spectres d'énergie cinétique  $E_c(k_z)$  (en haut à gauche) et potentielle  $E_p(k_z)$  (en haut à droite) en fonction du nombre d'onde vertical  $k_z$ . Les deux figures du bas représentent les spectres issus de la décomposition de Craya-Herring, pour la partie ondes  $E_c^o(k_z)$  à gauche et pour la partie mode vortex  $E_c^v(k_z)$  à droite. L'écoulement moyen sera présenté dans le cadre de l'étude diagnostique de l'écoulement en fin de chapitre. Le spectre pour le mode vortex a été représenté en fonction du nombre d'onde vertical par consistance avec les autres graphes. Les spectres d'énergie cinétique et potentielle montrent également la droite définissant la loi  $0.1N^2k_z^{-3}$  et  $0.2N^2k_z^{-3}$ , respectivement.

La première observation à tirer de ces graphes est le faible niveau d'énergie potentielle par rapport à celui prévu par les théories de turbulence. Ce résultat n'est pas surprenant en vue de la création de différentes composantes du mouvement par le processus de déferlement que nous avons décrit au cours de ce chapitre. D'une part, les théories évoquées ne tiennent pas compte du mode vortex ou de l'écoulement moyen. D'autre part, l'étude du déferlement tridimensionnel a montré que le développement de l'instabilité statique transverse permet une conversion rapide d'énergie potentielle en énergie cinétique verticale. Au cours de la restratification une partie de cette énergie est convertie en énergie cinétique horizontale, tandis qu'une autre partie donne lieu à la production d'ondes internes par effet d'entraînement des particules fluides remontant ou redescendant à leurs niveaux de stratification stable. Les visualisations de l'instabilité statique ont montré que la restratification peut engendrer des mouvements horizontaux importants. La séparation de fluide flottant et de fluide lourd dans des canaux verticaux le long de la direction transverse  $y$  engendre un gradient de pression horizontal. Le mouvement résultant achevant la restratification du fluide n'est pas un mouvement de type ondulatoire, mais plutôt de type mode vortex. Ce mouvement résulte de la conversion d'énergie potentielle en énergie cinétique. Un tel scénario peut donc justifier un transfert net d'énergie potentielle vers énergie cinétique pendant le déferlement. Les spectres du mode vortex  $E_c^v(k_z)$  des simulations d'ondes statiquement stables des figures (5.17) et (5.18) montrent que le niveau d'énergie des grandes échelles possède une dynamique uniforme pour les premiers modes verticaux pendant les périodes considérées. La situation est différente dans le cas de l'onde primaire statiquement instable. Nous savons que le déferlement est plus vigoureux dans ce cas. La décomposition de Craya-Herring ne sera pas interprétée pour ce cas.

La figure (5.17) pour la simulation  $a = 0.543$  ne possède pas de spectres saturés aux petites échelles. Dans cette simulation l'onde primaire a cédé une trop grande partie de son énergie pour provoquer une turbulence pleinement développée. Il en est différemment pour l'onde primaire de grande amplitude  $a = 0.724$ , où on remarque le développement d'une zone des spectres suivant une loi variant en  $k_z^{-3}$ , notamment pour l'énergie cinétique à  $25.30 PBV$ . Le déferlement de la simulation  $a = 1.086$  visualisée en figure (5.19) montre des spectres beaucoup plus développés encore, indiquant que certaines échelles du mouvement pendant le déferlement sont très énergétiques, peut être même en dehors des effets de la stratification pendant une partie du déferlement. On remarque que les spectres d'énergie cinétique ondulatoire et potentielle possèdent sensiblement le même niveau.

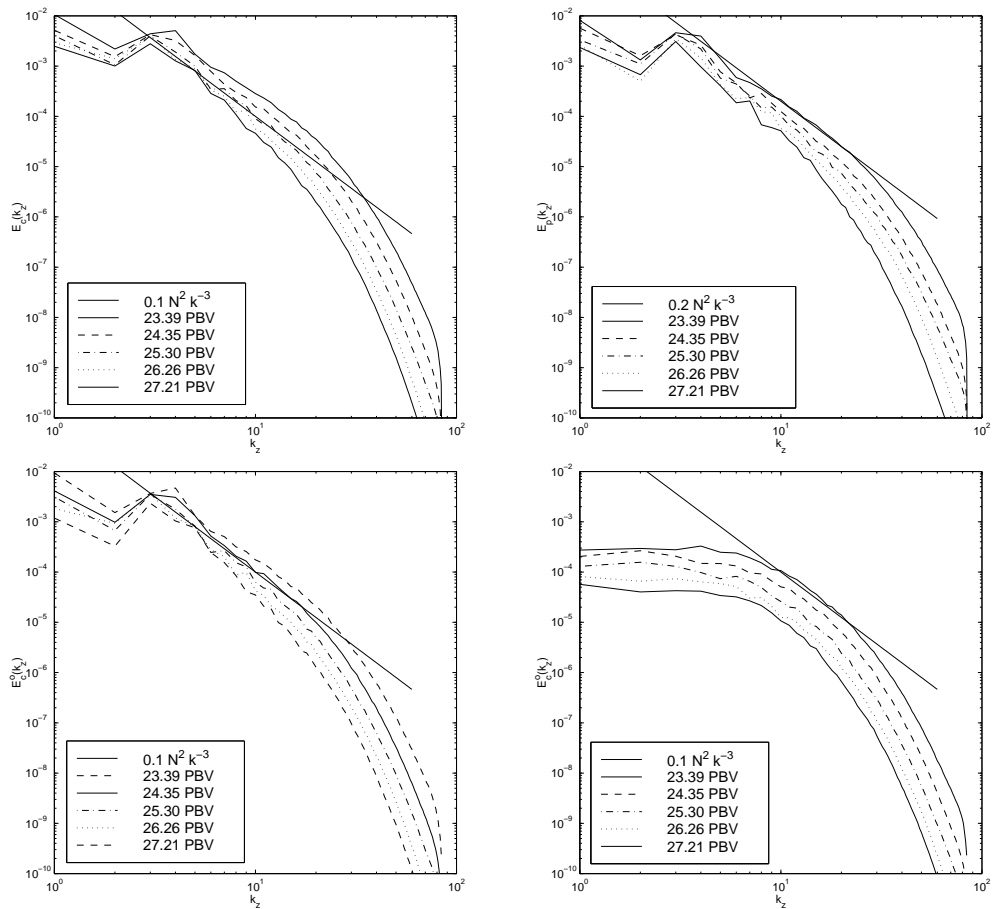


FIG. 5.18 – Spectres d'énergie cinétique  $E_c(k_z)$ , d'énergie potentielle  $E_p(k_z)$ , d'énergie cinétique pour le mode onde et d'énergie cinétique pour le mode vortex en fonction du nombre d'onde vertical  $k_z$  pour le calcul 14 de la série I ( $a=0.724$ ). Les spectres du mode d'onde et vortex (graphes du bas de la figure), respectivement, ont été obtenus par application de la décomposition de Craya-Herring. On représente les spectres à partir de l'instant où est atteint le maximum de dissipation de l'énergie totale.

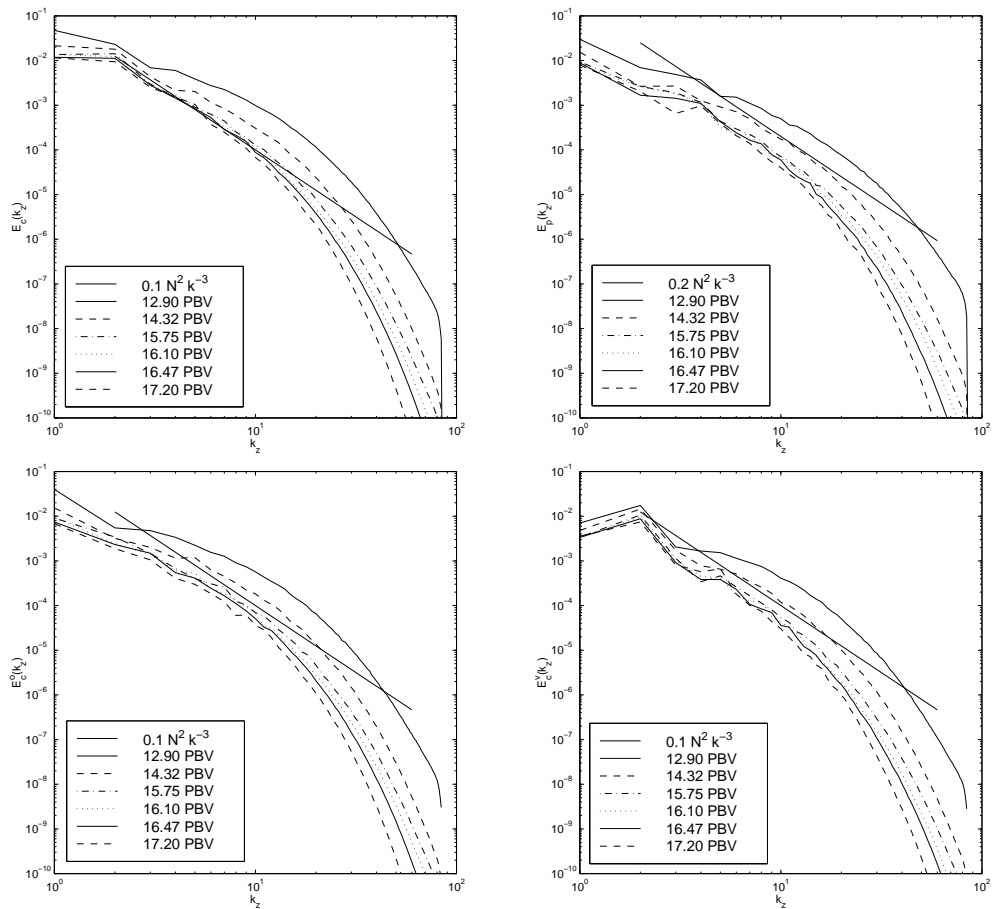


FIG. 5.19 – Spectres d'énergie cinétique  $E_c(k_z)$ , d'énergie potentielle  $E_p(k_z)$ , d'énergie cinétique pour le mode onde et d'énergie cinétique pour le mode vortex en fonction du nombre d'onde vertical  $k_z$  pour le calcul 17 de la série I ( $a=1.086$ ). Les spectres du mode d'onde et vortex (graphes du bas de la figure), respectivement, ont été obtenus par application de la décomposition de Craya-Herring. On représente les spectres à partir de l'instant où est atteint le maximum de dissipation de l'énergie totale.

Compatible avec le scénario de déferlement observé, cette équipartition suggère la présence d’ondes linéaires (ondes non saturées) dont l’énergie est répartie selon les spectres observées. Il faut rappeler que la théorie de saturation linéaire prévoit des spectres d’énergie horizontale variant en  $k_z^{-3}$ . Nous allons montrer à la prochaine section que l’énergie cinétique de nos écoulements est dominée par la partie horizontale après le déferlement, de sorte que l’on peut confronter nos spectres d’énergie cinétique à cette théorie. Le niveau des spectres est le facteur déclenchant la saturation des ondes linéaires. De ce point de vue, le fait de trouver des spectres d’énergie cinétique et potentielle équipartis ayant une pente en  $k_z^{-3}$ , mais ayant des niveau plus faibles que ceux proposés par les diverses théories, forme un résultat cohérent.

### 5.6.3 Spectres du flux de flottabilité

Nous montrons finalement les spectres de flux de flottabilité pour deux calculs de la série I. Ils sont représentés en figure (5.20). Notre analyse suit celle du travail de BA96. Le spectre du flux de flottabilité en fonction du nombre d’onde vertical est défini par  $-\hat{\rho}\hat{w}^*(k_z)$ , où  $*$  dénote le complexe conjugué d’une quantité et  $w$  est la vitesse verticale. Un flux de flottabilité positif correspond à une restratification du fluide, soit à une conversion d’énergie potentielle en énergie cinétique. Un flux négatif en échange revient à déstabiliser le fluide stratifié. Les spectres que nous montrons commencent aux instants du maximum de dissipation des deux simulations, mais ils ont été moyennés sur une période de temps comprenant le déferlement et le régime turbulent final, afin d’obtenir un flux de chaleur net sur les grandes échelles du mouvement. Les spectres a), c) et b), d) ont été moyennés sur 11.45 *PBV* et 7.64 *PBV* respectivement. Ne disposant pas de critère objectif pour estimer un intervalle de moyenne, nous avons choisi les intervalles dans le même rapport que les amplitudes initiales des ondes primaires. Les graphes a) et c) de la figure (5.20) montrent le flux de chaleur multiplié par le nombre d’onde vertical  $k_z$ . L’intégrale du flux de flottabilité pour une abscisse logarithmique est alors égale au flux de flottabilité net. Ces spectres sont similaires aux spectres de BA96. En effet, on obtient un flux de flottabilité négatif correspondant aux nombres d’ondes verticaux inférieur ou égal à  $k_z = 5$  et  $k_z = 4$ , avec un minimum distingué et identique aux deux graphes à  $k_z = 3$ . Le flux de flottabilité au delà de  $k_z = 5$  et  $k_z = 4$  est positif et possède un maximum à ce nombre d’onde pour les cas b) et d), respectivement. Ce nombre correspond à l’injection maximale d’énergie par l’instabilité statique transverse visualisée auparavant. Les graphes c) et d) montrent les spectres de flux de flottabilité normalisés par la racine carrée du produit des spectres d’énergie cinétique et potentielle. Le spectre résultant permet l’évaluation de l’importance du flux de flottabilité pour une échelle donnée dans les transferts entre énergie cinétique et potentielle lorsque se produisent des processus de cascade de ces deux énergies vers les petites échelles. Cette représentation spectrale a été suggérée par Holloway 1988 [57] en tant que critère possible pour déterminer l’importance dynamique du flux de flottabilité pour une échelle donnée Nos résultats sont analogues à ceux de BA96 obtenues pour une onde bidimensionnelle stationnaire. Ainsi, l’importance du flux de flottabilité augmente avec le nombre d’onde, car les transferts d’énergie potentielle sont plus importants que ceux d’énergie cinétique en turbulence tridimensionnelle (stra-

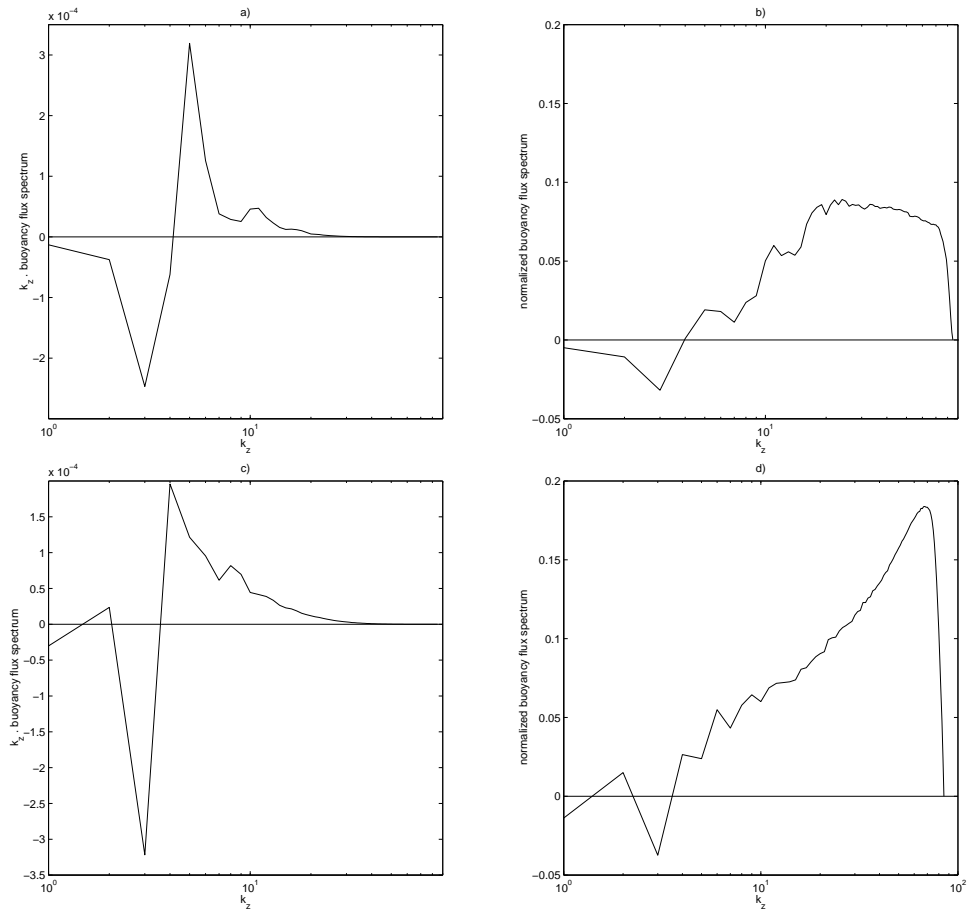


FIG. 5.20 – Les spectres du flux de flottabilité pour les simulations  $a = 0.543$  en figure a) et b) et  $a = 0.724$  en figure c) et d). L'abscisse des spectres est représentée en échelle logarithmique. Les graphes a) et c) montrent les spectres multipliés par le nombre d'onde vertical  $k_z$ . Les graphes b) et d) montrent ces mêmes spectres normalisés par la racine carré du produit de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.



tifiée ou non). Ce flux reste néanmoins faible par rapport à l'unité. Ce résultat conforte la théorie d'Holloway et s'oppose en cela à celle de Lumley attribuant une grande importance au flux de flottabilité.

## 5.7 Production de vorticité potentielle et écoulement moyen

### 5.7.1 Valeurs efficaces des composantes de la vorticité

Le diagnostic des valeurs efficaces des composantes de la vorticité prises séparément permet de constater par quelle composante de la vorticité l'écoulement est dominé au cours de la simulation et notamment dans son stade final. A cet effet nous avons représenté les trois composantes de la vorticité ainsi que la composante de la vorticité perpendiculaire aux surfaces isopycnales en tout point du fluide sur la figure (5.21). Cette dernière composante a déjà été définie par l'équation (5.8) et a été représentée et comparée à la vorticité verticale  $\xi_z$  en début de simulation (figure (5.3)). Les graphes a), b), c) et d) correspondent à quatre calculs de la série I. On note que la dynamique de toutes les ondes est dominée par la vorticité transverse  $\xi_y$ , notamment en début et fin de simulation. Seul le calcul  $a = 1.086$  pour l'onde primaire statiquement instable possède une vorticité dominée par la composante  $\xi_x$  au moment du déferlement. Cependant, une fois la restratification du fluide atteinte, la composante  $\xi_x$  décroît rapidement et l'écoulement est à nouveau dominé par  $\xi_y$ . L'étude du processus d'instabilité a montré deux mécanismes de production de vorticité. D'une part la déstabilisation de l'onde primaire produit un transfert d'énergie vers le paquet d'ondes instables. Toutes les courbes de la figure (5.21) montrent cependant que la création significative de vorticité  $\xi_y$  par ce mécanisme n'est possible que peu de temps avant le déferlement. D'autre part, l'instabilité statique transverse est un mécanisme efficace pour la production de vorticité  $\xi_x$ .

Par contre, il ne semble pas exister de mécanisme aussi efficace de création de vorticité verticale  $\xi_z$  ou de vorticité perpendiculaire aux isopycnes  $\xi_{\perp p}$  pendant le déferlement du champ d'ondes. La production de ces quantités, directement reliées aux modes vortex et son extension non-linéaire, le tourbillon potentiel, respectivement, est une conséquence de l'effondrement gravitationnel et de la dissipation des ondes. La vorticité potentielle fait intervenir la vorticité verticale  $\xi_z = \partial_x v - \partial_y u$ . Or, l'existence de vorticité verticale nécessite la présence de gradients horizontaux de vitesse horizontale. Pour cette raison la production de vorticité verticale est une conséquence du développement de l'effondrement, car celui-ci engendre des gradients pression horizontaux, ainsi qu'une redistribution horizontale de fluide restratifié. La faible proportion des quantités  $\xi_z$  et  $\xi_{\perp p}$  créées au cours des calculs de petite amplitude de l'onde primaire, représentés par les graphes a) et b), corroborent cette hypothèse.

Les graphes c) et d) montrent une production de  $\xi_z$  et de  $\xi_{\perp p}$  non négligeable. Dans les deux cas, les courbes tendent vers une limite commune. Ceci illustre la décroissance du nombre de Froude associé à l'écoulement au cours du temps. En effet, lorsque le gradient de densité coïncide avec la direction verticale  $z$ , ces quantités deviennent identiques. Nous avons déjà expliqué que l'excès de vorticité verticale doit être attribuée aux ondes en début de simulation. En fin de simulation cela est

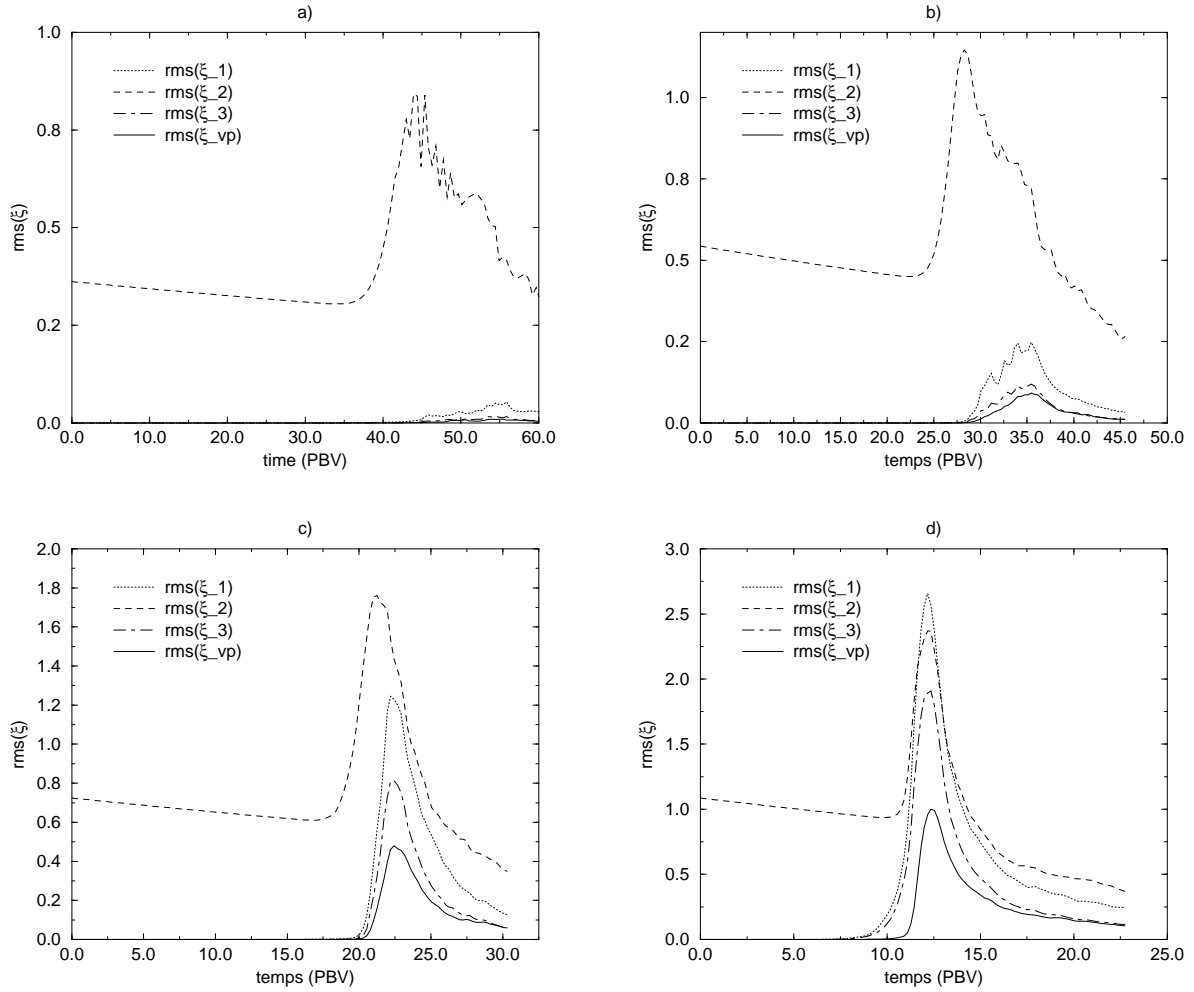


FIG. 5.21 – Les valeurs efficaces (*rms*) des composantes  $\xi_x$ ,  $\xi_y$  et  $\xi_z$  de la vorticité totale  $\xi$  sur le domaine de calcul en fonction du temps. On a également représenté la vorticité perpendiculaire aux surfaces isopycnales  $\xi_{vp}$ . On présente les résultats pour quatre calculs de la série I a) 0.362, b) 0.543, c) 0.724 et d) 1.086.

encore vrai, car l'écoulement moyen horizontal dans la décomposition de Craya-Herring ne dépend que de la coordonnée verticale et ne peut pas engendrer de vorticité verticale. Ainsi, nous concluons que les déferlements d'ondes que nous avons simulés ne produisent que peu de vorticité  $\xi_{vp}$  et  $\xi_z$ , les quantités associées aux tourbillons potentiels. La vorticité finale est dominée par la composante de vorticité  $\xi_y$ . Enfin, l'interprétation de la décomposition de Craya-Herring, déjà appliquée pour les spectres d'énergie, est justifiée pour nos simulations, car pour les périodes considérées la convergence de  $\xi_{vp}$  vers la vorticité verticale est apparente. Remarquons que pour bénéficier de spectres obtenus à partir d'un critère commun à toutes les simulations (le temps de déferlement), nous avons fait un compromis sur la précision de la décomposition de Craya-Herring.

### 5.7.2 Vorticité potentielle

Nous considérons ici la vorticité potentielle moyenne produite par le déferlement d'un champ d'ondes. Notons que nous ne considérons pas explicitement les termes de production de vorticité potentielle dans ce manuscrit. Cela nécessite une étude plus approfondie des effets moléculaires, traduits par la dissipation d'énergie cinétique et d'énergie potentielle. L'étude de sa production sera abordée dans le cadre d'une étude sur le mélange induit par le déferlement d'un champ d'ondes. La vorticité potentielle est différente de la composante de la vorticité perpendiculaire aux surfaces isopycnales considérée auparavant. La vorticité potentielle

$$\Pi = \frac{\nabla \rho \cdot \xi}{\rho_0} \quad (5.10)$$

correspond à la vorticité perpendiculaire aux surfaces isopycnales multipliée par la valeur du gradient de densité local. La valeur efficace de la vorticité potentielle pour tous les calculs de la série I est représentée sur la figure (5.22). On observe une production significative de vorticité potentielle uniquement lorsque l'écoulement développe une instabilité statique vigoureuse. Ainsi, le maximum de vorticité potentielle est d'autant plus grand que l'amplitude de l'onde primaire est grande, ou que, pour une amplitude donnée, le nombre de Reynolds de l'onde est grand. La première propriété est illustrée par le graphe a). La seconde résulte de la comparaison des courbes pour les ondes primaires  $a = 0.362$  et  $a = 0.543$  des graphes a) et b). Les courbes du graphe b) sont issues des simulations 9 et 11 de la table (5.1) ayant une plus petite résolution spatiale et par conséquent un plus petit nombre de Reynolds  $Re_{op}$ . La production de vorticité potentielle est contrôlée par les effets non-linéaires mais résulte des seuls effets moléculaires. Cette situation est similaire à celle rencontrée en turbulence homogène isotrope où la dissipation d'énergie cinétique (conséquence de la viscosité moléculaire du fluide) dépend de l'apport d'énergie cinétique à petite échelle, qui est contrôlée par les effets non-linéaires. Contrairement à la phase précédant le déferlement, la séquence des  v nements menant à la création explosive de vorticité potentielle pendant le déferlement échappe à l'ordre que nous avons imposé lors du choix de nos paramètres numériques. Ainsi, l'amplitude de l'onde et le nombre de Reynolds  $Re_{op}$  associé ne sont plus des paramètres significatifs permettant la classification de la production de vorticité potentielle.

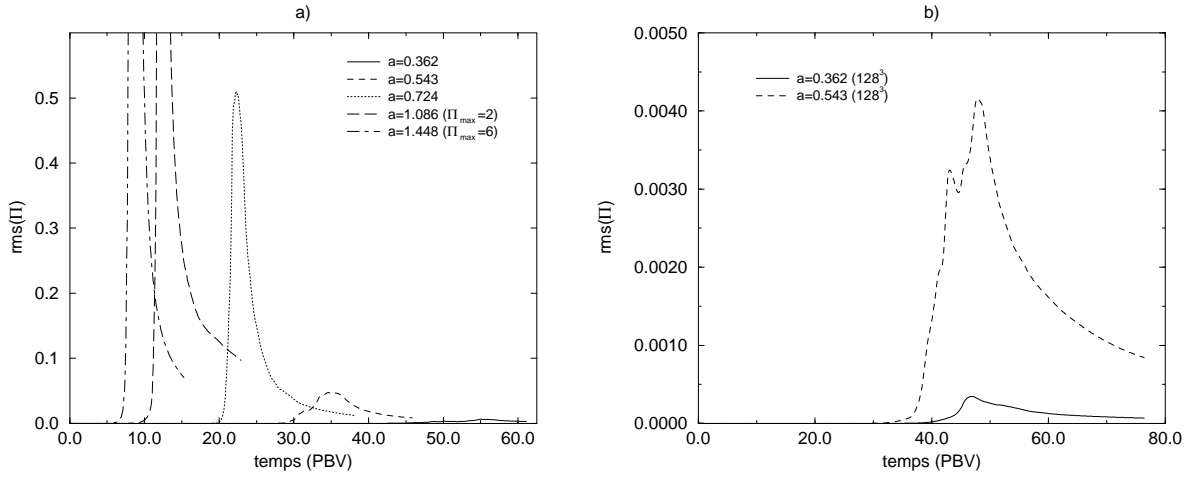


FIG. 5.22 – La valeur efficace de la vorticité potentielle au cours du temps pour a) tous les calculs de la série I et b) deux calculs d’une résolution de  $128^3$ .

Nous concluons cette sous-section en avançant une interprétation physique de l’évolution de la vorticité potentielle. Des mouvements de petite échelle sont produits lors du déferlement du champ d’ondes, aux lieux de déferlement. La vorticité potentielle étant le produit de gradients de vitesse par les gradients de densité, des valeurs extrêmement élevées de vorticité potentielle sont produites lors du déferlement. Les deux gradients sont ensuite lissés par diffusion et la vorticité potentielle décroît. De plus, les tourbillons potentiels associés à la vorticité potentielle évoluent vers des mouvements qui se localisent aux lieux où le moment barocline est nul, c’est-à-dire sur les surfaces d’iso-densité. Nos simulations ne permettent pas d’observer une éventuelle réorganisation des mouvements de petite échelle spatiale en mouvement de grande échelle spatiale.

### 5.7.3 Diagnostic linéaire des composantes du mouvement

Finalement, nous présentons les résultats de l’application de la décomposition de Craya-Herring à trois simulations de la série I. Les courbes pour les calculs 0.543, 0.724 et 1.086 sont représentés en figure (5.23). On montre également un bilan détaillé de l’énergie cinétique moyennée. Les instants de déferlement pour ces simulations ont été explicités en figure (5.4 e). Les courbes a), c) et d) montrent un bilan détaillé de l’énergie cinétique. Les simulations sont toujours dominées par la composante horizontale (dans le plan de propagation de l’onde primaire) de l’énergie cinétique  $E_{cu}$ . Les graphes montrent que la formation des couches instables mène à un déséquilibre des énergies cinétique horizontale  $E_{cu}$  et verticale  $E_{cw}$ . Au moment du déferlement les échanges deviennent complexes par l’action simultanée du flux de chaleur, des effets moléculaires et de la grande gamme d’échelles spatio-temporelles excitées pendant cette période. L’existence d’un pallier (changement de pente) dans l’énergie cinétique verticale montre l’effet de l’instabilité statique sur la vitesse verticale. La production de fluctuations de vitesse verticales par le déferlement à partir d’énergie potentielle

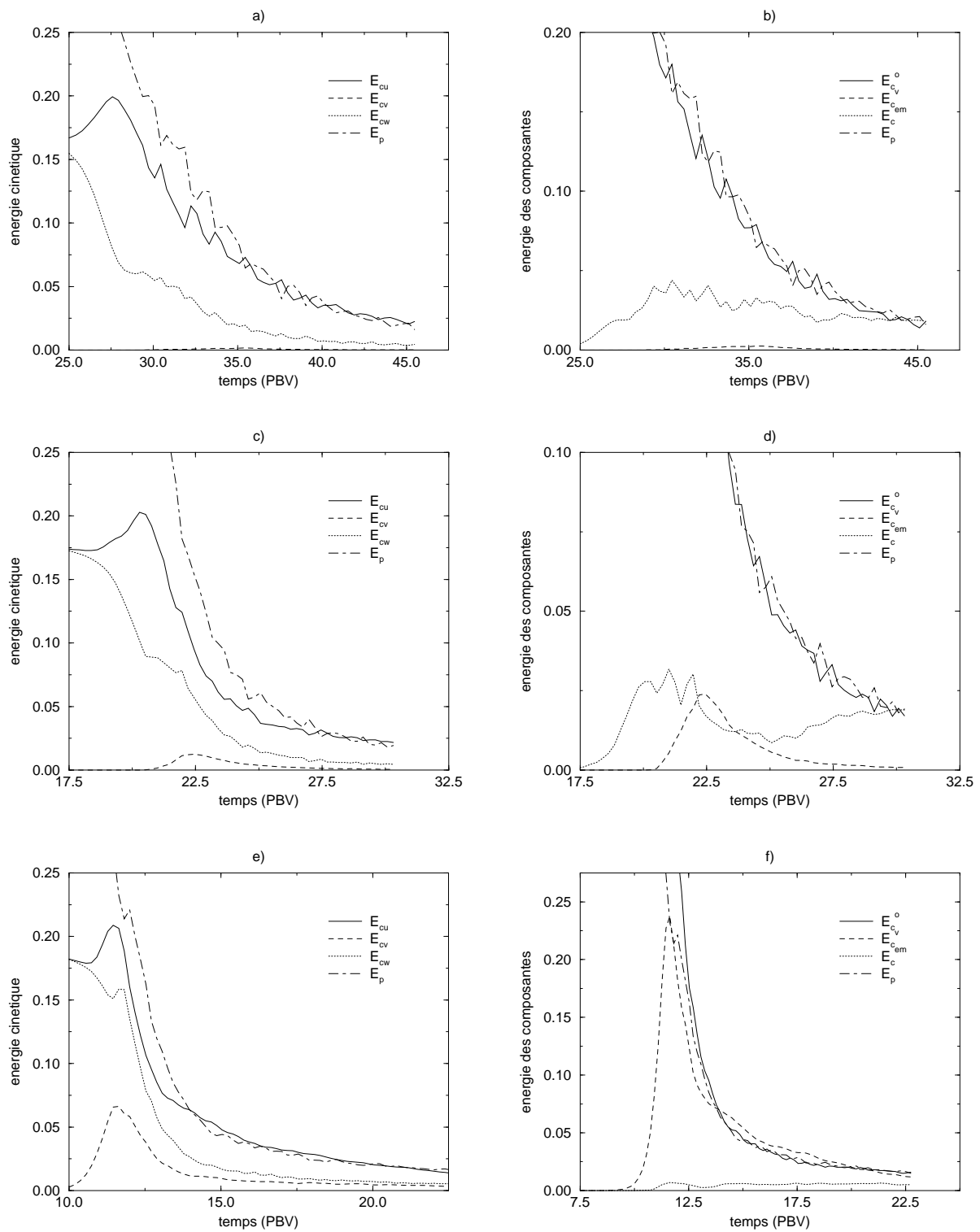


FIG. 5.23 – Diagnostic des composantes de l'énergie cinétique  $E_{cu}$ ,  $E_{cv}$  et  $E_{cw}$  pour les composantes de vitesse  $u$ ,  $v$  et  $w$  sur les graphes a) c) et d). Les graphes b), d) et f) montrent les composantes de l'écoulement obtenues par application de la décomposition de Craya-Herring. On distingue la partie ondes  $E_c^o$ , la partie vortex  $E_c^v$  et l'écoulement moyen moyen horizontal  $E_c^{em}$ . L'énergie potentielle  $E_p$  est également représentée sur tous les graphes. Les graphes a) et b), c) et d), e) et f) correspondent aux ondes 0.543, 0.724 et 1.086.

explique ce changement de pente. Le déferlement produit une faible croissance de l'énergie cinétique transverse  $E_{cv}$  dans les cas a) et c) et une croissance plus forte de cette quantité dans le cas e). La vitesse transverse est associée à la séparation horizontale de fluide lourd et léger avant la restratification d'une part et à la recirculation horizontale après cet évènement d'autre part.

L'écoulement dans le cas e) est réellement tridimensionnel, bien qu'anisotrope dans le plan horizontal. On peut noter le degré d'oscillation variable des courbes d'énergie cinétique  $E_{cu}$  et d'énergie potentielle  $E_p$  après le déferlement. Cela montre que le déferlement d'une onde interne de petite amplitude n'est pas réellement tridimensionnel et se fait par perte la perte de cohérence du champ d'ondes. En effet, les oscillations des énergies cinétique ondulatoire et potentielle en opposition de phase des graphes b) et d) révèlent la localisation spatiale des ondes internes pendant le déferlement. Ces oscillations sont atténuées au cours du temps. Dans le cas de l'onde primaire statiquement instable f), ces oscillations sont quasiment supprimées pendant le déferlement. Cela s'explique par le fait que le déferlement est moins sensible à la stratification. Dans ce cas, la convergence de l'énergie  $E_{cu}$  et  $E_p$  s'opère rapidement après le déferlement. Par ailleurs les graphes a) et c) montrent que les ondes internes produites par le déferlement se propagent quasiment à la verticale (mouvements de particules quasi-horizontaux), car le niveau d'énergie cinétique verticale est plus faible que le niveau horizontal.

L'application de la décomposition de Craya-Herring montre qu'il est important de distinguer entre le mode vortex d'énergie  $E_c^v$  et l'écoulement moyen situé dans le plan horizontal  $xy$ , d'énergie  $E_c^{em}$ . Cette séparation a souvent été omise dans des travaux antérieurs (cf la discussion dans Thual 1992 [132]). Dans le cas d'une onde primaire statiquement stable, b) et d), l'écoulement moyen est aussi important que la partie onde en fin de simulation. Remarquons que cet écoulement est associé uniquement à la composante  $\bar{U}(z)$  de la vitesse. La composante transverse de l'écoulement moyen  $\bar{V}(z)$  est négligeable dans tous les cas de figure. Dans le cas statiquement stable le mode vortex n'est pas significatif. On comprend ainsi que la vorticité finale de l'écoulement soit dominée par  $\xi_y$ , car celui-ci est composé d'ondes quasi-linéaires et d'un écoulement moyen. Il n'en est pas de même pour l'onde statiquement instable, graphe f). La production d'écoulement moyen est ici négligeable, alors que l'on tend vers une équipartition de l'énergie entre les parties ondes et vortex, respectivement. Une explication plausible à ce changement de comportement est que la déstabilisation de cette onde est plus rapide. Nous avons vérifié que le mécanisme de déstabilisation mettant en jeu le paquet d'ondes modulé existe aussi dans ce cas. Cependant, il semble que le processus de déstabilisation ne dispose pas d'assez de temps pour accumuler un cisaillement significatif dans les couches instables. Or, l'écoulement moyen pourrait résulter de ce cisaillement, à la différence du mode vortex qui est un mouvement associé à des gradients horizontaux de vitesse dans le plan horizontal. Par ailleurs la forme même des couches instables est sujet à des changements pour une onde statiquement instable, un aspect que nous n'avons pas étudié. Le résultat principal de cette sous-section est que nos simulations évoluent vers des états où les énergies sont primordialement associées aux ondes et à un écoulement moyen (respectivement mode vortex) pour le cas d'une onde primaire statiquement stable (respectivement instable).

## 5.8 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons considéré la dynamique d'une onde interne de gravité monochromatique plane dans l'approximation de Boussinesq. Nous avons approché le problème par la voie numérique. Dans le souci de faire une étude numérique détaillée de l'instabilité et du déferlement d'une onde plane monochromatique, nous avons limité notre étude à une onde interne primaire de grande échelle spatiale inclinée à  $45^\circ$  de l'horizontale. L'étude a été menée en faisant varier l'amplitude de l'onde primaire et la plupart des simulations directes exploitées ont une résolution spatiale de  $256^3$ . En accord avec la théorie de stabilité linéaire l'onde interne est instable. Son évolution est dominée par trois étapes.

La première est la déstabilisation créant un champ d'ondes polychromatique et menant ce dernier à son déferlement (deuxième phase). La déstabilisation de l'onde est un processus intrinsèquement tridimensionnel, mais une onde primaire statiquement stable est en fait dominée par la croissance des modes bidimensionnels. Le principe de la déstabilisation est basé sur le transfert d'énergie cinétique et potentielle vers un paquet d'ondes de taille intermédiaire, de vecteur d'onde moyen égal à un petit multiple du vecteur d'onde primaire. Nous n'avons pas présenté d'étude spatiale quantitative directe de ce paquet d'ondes en trois dimensions d'espace, mais nous avons vérifié que les conclusions de l'étude bidimensionnelle étaient préservées. Ainsi, nous avons pu mettre en évidence une extraction nette positive d'énergie cinétique et potentielle primaire par le paquet d'ondes. Plus précisément, l'extraction d'énergie cinétique est positive dans les régions de vortacité négative ( $\xi_p < 0$ ) de l'onde primaire, mais négative dans les régions où  $\xi_p > 0$ . L'énergie potentielle est extraite dans les deux régions, mais davantage dans les régions où  $\xi_p > 0$ . Ce mécanisme efficace d'extraction d'énergie est rendu possible grâce à la modulation du paquet d'ondes localisant l'énergie potentielle favorablement dans les zones  $\xi_p > 0$  et l'énergie cinétique dans les zones  $\xi_p < 0$ . En principe, ce mécanisme peut mener le champ d'ondes résultant vers deux routes de déferlement, soit par instabilité dynamique (instabilité de cisaillement), soit par instabilité statique (instabilité convective).

Le déferlement est toujours tridimensionnel quelle que soit l'amplitude de l'onde primaire et la dynamique du fluide se comporte alors différemment du cas bidimensionnel. L'étude du temps de déferlement à partir de nos simulations a montré que l'instant de décroissance maximale de l'énergie totale est sensiblement proportionnel à l'inverse de l'amplitude de l'onde primaire. Le cisaillement associé au paquet d'ondes produit une série de retournements, d'abord dans les zones où la stabilité statique du fluide est réduite par l'onde primaire. Il en résulte la formation d'une série de couches de fluide statiquement instables. On observe alors le développement d'une instabilité statique transverse dans le plan perpendiculaire au plan de propagation de l'onde primaire au sein des couches instables. L'effondrement gravitationnel des couches inhibe fortement la formation des instabilités dynamiques observées en deux dimensions d'espace. La considération de cartes du nombre de Richardson dans le plan de l'onde primaire, confirme que la déstabilisation produit peu de régions où la condition nécessaire d'instabilité dynamique  $Ri < 0.25$  est satisfaite.

Nous avons exploré les champs de densité et de vortacité d'une simulation associée à une onde

de grande amplitude statiquement stable. Les visualisations du déferlement dans le plan transverse illustrent le mécanisme d'effondrement menant à la restratification du fluide. L'échange de fluide est effectué par concentration de fluide lourd et léger dans des régions disposées selon la direction transverse, suivi d'une ouverture des isopycnes laissant passer le fluide verticalement.

L'étude spectrale de l'écoulement suivant le déferlement montre que les spectres d'énergie potentielle en fonction du nombre vertical  $k_z$  possèdent un niveau plus faible que des spectres analogues bidimensionnels. Ceci est une conséquence de la production de composantes non ondulatoires de l'écoulement. Les spectres instantanés des énergies cinétique ondulatoire et potentielle présentent des courtes périodes pendant lesquelles on peut distinguer une pente des spectres variant en  $k_z^{-3}$ , mais le niveau attendu n'est pas atteint et le contenu énergétique des spectres est quasiment équiparti. Les spectres de flux de chaleur ont des propriétés similaires aux spectres issus d'une étude antérieure sur la turbulence stratifiée produites par des ondes internes bidimensionnelles. Ils indiquent une faible importance du flux de chaleur dans la zone variant en  $k_z^{-3}$ .

L'écoulement final est dominé dans tous les cas de figure par la composante transverse de la vortacité  $\xi_y$ . Lorsque le déferlement est vigoureux, l'instabilité statique produit intensément de la vortacité  $\xi_x$ . Cependant, cette dernière n'existe que de façon transitoire, car son mécanisme de production n'est pas entretenu au delà de l'effondrement gravitationnel. La production de vortacité verticale, ainsi que de vortacité potentielle est la moins importante dans toutes nos simulations. Par ailleurs la production de vortacité potentielle n'est pas reliée de façon simple à nos paramètres numériques. Bien qu'une étude plus poussée de la production moléculaire de vortacité potentielle nécessite une étude du mélange induit par le déferlement, il apparaît une grande sensibilité de cette production aux paramètres numériques. Ainsi, nos simulations ne sont pas conçues pour suivre la dynamique des tourbillons potentiels, leur niveau énergétique étant trop faible. Le diagnostic final des composantes du mouvement obtenu par application de la décomposition de Craya-Herring illustre le régime suivant le déferlement par l'évolution des composantes de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. L'écoulement est dominé par la vitesse horizontale en fin de simulation, dont le cisaillement engendre la principale vortacité  $\xi_y$ . L'énergie cinétique horizontale correspondante est associée en partie à des ondes internes linéaires quasi-verticales et à un écoulement moyen (respectivement mode vortex) pour une onde primaire initiale stable (respectivement instable).



## Chapitre 6

# Dynamique modifiée d'un fluide stablement stratifié

### 6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous revenons sur le problème de la décomposition du champ de vitesse, et plus généralement sur celui de la décomposition des champs physiques spécifiant l'écoulement d'un fluide stablement stratifié. Au chapitre 1, nous avons décrit les différentes composantes du mouvement associées à un écoulement stratifié. Rappelons en particulier que dans la limite des nombres de Froude  $Fr$  infiniment petits, la décomposition du champ de vitesse est constituée d'un mode vortex, d'ondes internes et d'un écoulement moyen. Le mode vortex contient toute la vorticité verticale de l'écoulement et le mouvement est purement horizontal et non divergent. La composante du champ de vitesse associée aux ondes est, quant à elle, de vorticité uniquement horizontale. La troisième composante, constituée par l'écoulement moyen horizontal, est en quelque sorte dégénérée, dans la mesure où elle ne contient ni vitesse verticale, ni vorticité verticale. Le travail de Staquet et Riley 1989 [126], [98] aboutit à une généralisation de la décomposition linéaire de Craya-Herring en postulant que, pour  $Fr$  fini, mais en pratique petit, la composante du mouvement contenant toute la vorticité potentielle généralise le mode vortex linéaire. On parle alors du mode de vorticité potentielle ou bien du tourbillon potentiel. Celui-ci est défini de façon diagnostique par trois équations aux dérivées partielles obtenues par des arguments physiques. De même, Staquet et Riley 1989 proposent deux jeux d'équations pour les composantes onde et écoulement moyen, respectivement. Dans ce qui suit, nous appelons cette décomposition généralisée la décomposition ondes-tourbillon potentiel-écoulement moyen, OTPEM. Remarquons que l'appellation tourbillon est plus appropriée que mode, parce que le terme mode contient une connotation linéaire. Or, le tourbillon potentiel est par définition une extension non-linéaire du mode vortex.

Nous considérons ici les aspects relatifs à la décomposition de champs de l'écoulement d'un point de vue de la dynamique Hamiltonienne généralisée. Une introduction à la formulation Hamiltonienne généralisée du fluide parfait est donnée en annexe A de ce manuscrit. Cette approche

plus générale que la dynamique Hamiltonienne canonique classique [41], permet de réinterpréter les invariants du système considéré. En effet, les systèmes non-canoniques possèdent souvent une classe d'invariants supplémentaires, les Casimirs, en plus des intégrales du mouvement classiques telle qu'une énergie ou une quantité de mouvement. Dans le cadre du fluide stratifié, la vorticité potentielle, ainsi que la densité sont des Casimirs. La formulation Hamiltonienne des équations du fluide parfait stratifié possède un certain nombre d'avantages détaillés dans l'annexe A. Nous utilisons les résultats du formalisme pour considérer les états stationnaires du fluide.

On s'intéresse aux tourbillons potentiels. Un exemple de production de ceux-ci a été présenté au dernier chapitre. Les tourbillons potentiels sont produits par le déferlement du champ d'ondes et leur production dépend fortement du nombre de Froude associé à l'onde primaire et des propriétés de transport moléculaire existant au sein du fluide. L'étude du régime final du champ d'ondes a montré que ces composantes du mouvement coexistent après le déferlement et que leur évolution à ce stade est encore gouvernée par les effets moléculaires, mais l'évolution est lente. Les tourbillons potentiels semblent tendre vers un état stationnaire (à l'exception d'une lente dissipation par les effets moléculaires). Ces observations justifient, du moins a priori, que l'on considère les propriétés du fluide parfait stratifié dans le présent chapitre.

Il a été suggéré (Heney 1991 [50]) que le jeu d'équations définissant les tourbillons potentiels dans le cadre de la décomposition OTPM est exactement équivalent à l'état stationnaire du fluide obtenu par la minimisation de l'énergie totale de l'écoulement pour les fonctions de Casimirs données. La démonstration de cette assertion n'a cependant pas été effectuée. En un premier temps, nous allons montrer que les équations de Staquet et Riley sont reliées à l'état d'énergie cinétique minimale (et non pas d'énergie totale minimale) pour une distribution de vorticité potentielle donnée et pour le champ de densité instantané de l'écoulement. Le champ de vitesse associé au mode de vorticité potentielle dans cette décomposition est situé entièrement dans les surface isopycnales. Le formalisme Hamiltonien est bien adapté pour démontrer cette propriété, car les états stationnaires sont naturellement reliés à la vorticité potentielle et au champ de densité. De plus, il suggère une extension de la caractérisation des tourbillons potentiels, en associant un champ de densité à leur champ de vitesse. Il convient en effet de minimiser également l'énergie potentielle, de telle façon que le tourbillon potentiel résulte d'une minimisation de l'énergie totale de l'écoulement pour des champs de vorticité potentielle et de densité donnés. Le tourbillon potentiel ainsi défini est un état stationnaire dynamique du fluide stratifié.

Le problème de la connaissance des tourbillons potentiels revient alors à minimiser l'énergie totale pour les Casimir donnés. Au sein de l'espace des phases, les états du fluide correspondant à la donnée des Casimirs, ont en général une énergie *non* minimale. Cette constatation est à la base d'une méthode développée par Vallis et al 1989 à partir d'arguments ad hoc et ayant pour but la recherche des états d'énergie totale minimale. L'idée est d'explorer l'hypersurface de l'espace des phases définie par la constance des Casimirs. Cette exploration se fait par un système dynamique modifié conservant les Casimirs du système original, mais permettant de relaxer le système en "dissipant" l'énergie artificiellement. Pour un fluide de Boussinesq, par exemple, l'énergie

dissipée doit alors être essentiellement celle associée aux ondes. En effet, un tel fluide conserve la vorticité potentielle et la densité d'une configuration d'écoulement donnée. La dynamique du système ainsi modifié est simplement appelée dynamique modifiée. Le but est de réussir à converger vers un état d'énergie minimale. L'obtention de cet état est conditionnée par son existence et sa stabilité. Dans un cas simple, par exemple celui du fluide barotrope bidimensionnel, la dynamique modifiée consiste alors en une pseudo-advection au sens d'un réarrangement de particules fluides. Des simulations bidimensionnelles ont été réalisées par Carnevale et Vallis 1990 [19]. Nous allons voir que la dynamique modifiée est plus complexe, dans le cas du fluide stratifié, qu'une simple pseudo-advection.

Shepherd 1990b [121] a donné un cadre Hamiltonien général de la méthode de dynamique modifiée. Des systèmes d'équations de dynamique modifiée y sont présentés pour quelques modèles de fluide. A notre connaissance le cas du modèle de fluide stratifié de Boussinesq en trois dimensions d'espace n'a pas été traité. En un deuxième temps nous allons donc appliquer la méthode générale de dynamique modifiée au cas du fluide de Boussinesq en trois dimensions. Notre objectif est de résoudre ces équations avec un code similaire à celui présenté au chapitre 3, de façon à obtenir un état d'énergie totale minimale caractérisant l'état stable et stationnaire des tourbillons potentiels obtenus dans nos simulations. Notons qu'il ne semble pas exister, à ce jour, de simulation numérique tridimensionnelle de la dynamique modifiée d'un fluide, quel qu'il soit.

La première section de ce chapitre concerne les états stationnaires du fluide stratifié dans un cadre Hamiltonien et établit le lien avec la partie tourbillon potentiel de la décomposition OTPEM. Nous proposons également la dérivation d'une unique équation équivalente aux équations diagnostiques proposées par Staquet et Riley. Dans la deuxième section, nous dérivons les équations de la dynamique modifiée permettant d'atteindre un état stationnaire d'énergie minimale. L'implémentation numérique est actuellement en cours. Rappelons que l'introduction non-formelle au formalisme Hamiltonien d'un fluide parfait est présentée à l'annexe A.

## 6.2 États d'équilibre, pseudo-énergie, équations diagnostiques

Les relations exposées dans cette section sont issues de la méthode d'énergie-Casimir convexité [1]. Cette méthode est utilisée pour étudier les états stationnaires dynamiques<sup>1</sup> ou statiques et leur stabilité linéaire et non linéaire. Les considérations de stabilité se situent en dehors du cadre de notre travail. Shepherd 1993 a utilisé la notion de pseudo-énergie issue de la méthode d'énergie-Casimir pour réinterpréter et unifier le concept d'énergie potentielle disponible. Nous considérons dans ce qui suit les états stationnaires d'un système Hamiltonien non canonique, la construction de la pseudo-énergie et enfin, le lien que nous pouvons établir entre les relations définissant un état stationnaire et les équations pour les tourbillons potentiels de la décomposition OTPEM.

---

1. Pour un fluide on parle d'état stationnaire dynamique, lorsque la vitesse du fluide ne s'annule pas, mais est indépendante du temps.

### 6.2.1 États stationnaires d'un système Hamiltonien

On considère un système Hamiltonien généralisé

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = J \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}}. \quad (6.1)$$

On suppose en particulier que  $\mathbf{v} = \mathbf{V}$  est une solution stationnaire de (6.1)

$$J \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} \Big|_{\mathbf{V}} = 0. \quad (6.2)$$

Si le système est canonique, on peut inverser la forme cosymplectique  $J$  pour conclure que la solution stationnaire  $\mathbf{V}$  correspond à un extremum conditionnel du Hamiltonien sur l'espace des phases. On peut alors conclure que le Hamiltonien au voisinage de l'état stationnaire  $\mathbf{V}$ , est proportionnel au carré de l'amplitude de perturbation. Ce comportement est par exemple celui d'une particule se trouvant dans un puit de potentiel et effectuant des oscillations harmoniques autour de son état d'équilibre. Cet Hamiltonien caractérise alors de façon appropriée les écarts de l'état stationnaire. Par contre, dans le cas d'un système Hamiltonien non canonique, on ne peut pas en général inverser la forme cosymplectique  $J$  pour conclure que l'état  $\mathbf{V}$  est un extremum conditionnel de l'Hamiltonien sur l'espace des phases, car  $J$  peut être singulière. De plus, le Hamiltonien associé varie en général linéairement avec l'amplitude de perturbation autour de l'état  $\mathbf{V}$ . En effet, la variation première de l'Hamiltonien ne s'annule pas autour de l'état  $\mathbf{V}$ .

Le fluide parfait stratifié de Boussinesq rentre exactement dans ce cas de figure. Il s'agit bien d'un système Hamiltonien non canonique dont l'énergie potentielle associée aux fluctuations de densité est à priori linéaire en ces fluctuations. Cette énergie ne caractérise pas de façon globale les écarts des particules fluides par rapport à leur positions d'équilibre, car cette énergie ne possède pas de signe bien défini. D'un point de vue pratique, cette caractérisation est pourtant importante comme vu au chapitre 1, parce que l'on désire couramment connaître l'énergie potentielle associée aux fluctuations de densité. Nous avons donné une expression approchée de cette quantité que nous avons appelé l'énergie potentielle et nous l'avons utilisée aux chapitres présentant nos résultats numériques.

La méthode d'énergie-Casimir est basée sur l'observation suivante. L'existence d'une base du noyau de  $J$  formée par le gradient des Casimirs  $\mathcal{C}$  dans l'espace des phases du système permet d'écrire [124]

$$J \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} \Big|_{\mathbf{V}} = - J \frac{\delta \mathcal{C}}{\delta \mathbf{v}} \Big|_{\mathbf{V}}. \quad (6.3)$$

On a aussi

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} \Big|_{\mathbf{V}} = - \frac{\delta \mathcal{C}}{\delta \mathbf{v}} \Big|_{\mathbf{V}}. \quad (6.4)$$

Quelque soit  $\mathcal{C}$  il est donc toujours possible de rendre le gradient de  $\mathcal{H}$  parallèle au gradient du Casimir pour l'état considéré. Cette observation motive la construction d'une quantité appelée la

pseudo-énergie définie par

$$\mathcal{A}[\mathbf{V}, \delta \mathbf{v}] = \mathcal{H}[\mathbf{V} + \delta \mathbf{v}] - \mathcal{H}[\mathbf{V}] + \mathcal{C}[\mathbf{V} + \delta \mathbf{v}] - \mathcal{C}[\mathbf{V}]. \quad (6.5)$$

Par construction cette quantité satisfait

$$\left. \frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \mathbf{v}} \right|_{\mathbf{V}} = 0 \quad (6.6)$$

pour l'état stationnaire  $\mathbf{V}$ . On voit donc que la pseudo-énergie  $\mathcal{A}$  est un extrémum conditionnel du système pour l'état d'équilibre  $\mathbf{V}$  et que pour une petite perturbation par rapport à cet état, elle est quadratique en l'amplitude de la perturbation. Nous illustrons l'utilité de ce formalisme pour le cas du fluide stratifié de Boussinesq.

### 6.2.2 Application au fluide stratifié

L'application au cas du fluide stratifié a été exposée par Shepherd 1994 [123] dans des notes non publiées afin d'explorer la définition de la pseudo-énergie. La dérivation est indispensable pour établir le lien avec les tourbillons potentiels associés à la décomposition OTPM. Nous nous intéressons donc ici à la construction d'un état stationnaire des équations de Boussinesq.

On considère le fluide stratifié dans les variables  $\mathbf{v} = (\mathbf{u}, \rho^*)$  dont le Hamiltonien est

$$\mathcal{H} = \int_D d^3 \mathbf{x} \left( \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \rho^* z \right). \quad (6.7)$$

Le fluide de Boussinesq possède deux invariants matériels, la densité et la vorticité potentielle

$$\frac{D\rho^*}{Dt} = 0, \quad \frac{Dq}{Dt} = 0 \quad (6.8)$$

où  $q = \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \rho^*$ . On peut montrer [11] que les Casimirs du fluide stratifié de Boussinesq sont des fonctionnelles arbitraires des invariants

$$\mathcal{C}[\mathbf{u}, \rho^*] = \int_D d^3 \mathbf{x} C(q, \rho^*). \quad (6.9)$$

Calculons les dérivées fonctionnelles des Casimirs, nécessaires à la définition de l'état stationnaire défini par (6.6). La variation première des Casimirs s'écrit

$$\delta \mathcal{C} = \int_D d^3 \mathbf{x} \left( \frac{\partial C}{\partial \rho^*} \delta \rho + \frac{\partial C}{\partial q} \delta q \right). \quad (6.10)$$

On note les dérivées partielles  $C_q = \partial C / \partial q$  et  $C_{\rho^*} = \partial C / \partial \rho^*$ . Le second terme apparaissant dans l'intégrand se transforme selon

$$\begin{aligned} C_q \delta q &= C_q \delta (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \rho^*) \\ &= C_q \delta \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \rho^* + C_q \boldsymbol{\xi} \cdot \delta \nabla \rho^* \\ &= (\nabla \times \delta \mathbf{u}) \cdot C_q \nabla \rho^* + C_q \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \delta \rho^* \\ &= \nabla \cdot (\delta \mathbf{u} \times C_q \nabla \rho^*) + \delta \mathbf{u} \cdot (\nabla \times C_q \nabla \rho^*) + \nabla \cdot (C_q \delta \rho^* \boldsymbol{\xi}) + \delta \rho^* \nabla \cdot C_q \boldsymbol{\xi}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Il vient alors pour la variation

$$\delta\mathcal{C} = \int_D d^3\mathbf{x} [\delta\mathbf{u} \cdot (\nabla \times C_q \nabla \rho^*) - \delta\rho^* \nabla \cdot C_q \boldsymbol{\xi} + \delta\rho^* C_{\rho^*}] \quad (6.12)$$

où on a supposé que les variations des champs sont nulles sur la frontière du domaine considéré. Ainsi, les deux intégrales de surface provenant des divergences dans (6.11) ne contribuent pas à la variation. On en déduit les dérivées fonctionnelles

$$\frac{\delta\mathcal{C}}{\delta\mathbf{u}} = \nabla \times C_q \nabla \rho^* \quad (6.13)$$

$$\frac{\delta\mathcal{C}}{\delta\rho^*} = C_{\rho^*} - \nabla \cdot C_q \boldsymbol{\xi}. \quad (6.14)$$

Appliquons la relation (6.6) à l'état stationnaire  $\mathbf{V} = \mathbf{v}_e = (\mathbf{u}_e, \rho_e^*)$

$$\left. \frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\mathbf{v}} \right|_{\mathbf{v}_e} = \left. \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{v}} \right|_{\mathbf{v}_e} + \left. \frac{\delta\mathcal{C}}{\delta\mathbf{v}} \right|_{\mathbf{v}_e} = 0. \quad (6.15)$$

Compte tenu de ce que les dérivées fonctionnelles du Hamiltonien sont

$$\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{u}} = \mathbf{u}, \quad \text{et} \quad \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\rho^*} = z \quad (6.16)$$

on obtient deux relations reliant les variables d'équilibre du fluide

$$\mathbf{u}_e = -\nabla \times C_q (\mathbf{u}_e, \rho_e^*) \nabla \rho_e, \quad (6.17)$$

$$z = -C_{\rho^*} (\mathbf{u}_e, \rho_e^*) + \nabla \cdot C_q (\mathbf{u}_e, \rho_e^*) \boldsymbol{\xi}_e. \quad (6.18)$$

On remarque que l'état stationnaire du fluide est défini entièrement par les dérivées partielles des Casimirs associés à cet état. Le problème d'inversion pour un état d'équilibre est donc bien posé.

### 6.2.3 Lien avec l'énergie potentielle disponible

La signification physique des états stationnaires du fluide et l'utilité de la pseudo-énergie apparaissent dans le contexte de la construction de l'énergie potentielle disponible. Pour un état stationnaire correspondant à un état stationnaire statique du fluide stratifié  $\mathbf{u}_e = 0$  et donc la vorticité potentielle d'équilibre  $q_e = 0$ , on a

$$z = -C_{\rho^*} (\mathbf{u}_e, \rho_e^*). \quad (6.19)$$

L'intégration de cette relation permet d'écrire une pseudo-énergie  $\mathcal{A}$  selon (6.5) pour le fluide stratifié par rapport à l'état de stratification de base  $\rho_e^*$  considéré. Cette quantité est l'énergie potentielle disponible [124], dont la forme est identique au résultat antérieur donné par Holliday et McIntyre 1981 [52] et dont l'approximation au premier ordre est l'approximation couramment utilisée en turbulence stratifiée pour exprimer l'énergie potentielle des fluctuations de densité.

Shepherd 1993 suggère également la généralisation du concept de pseudo-énergie pour des états stationnaires dynamiques ( $\mathbf{u}_e \neq 0$  et  $q_e \neq 0$ ). Un exemple de construction d'une pseudo-énergie

autour d'un état stationnaire dynamique pour les équations de Boussinesq sur le plan f est donné par Cho et al 1993 [22]. Dans ce cas plus général, l'énergie potentielle disponible correspond à la partie non cinétique de la pseudo-énergie. On dispose ainsi d'une méthode systématique pour construire une pseudo-énergie caractérisant un état stationnaire conditionnel du fluide.

#### 6.2.4 Lien avec les états stationnaires des équations du mouvement

L'état d'équilibre défini par les relations (6.17) et (6.18) peut être obtenu à partir des équations de Boussinesq par la prescription de la vorticité potentielle  $q_e = \boldsymbol{\xi}_e \cdot \nabla \rho_e^*$  et du champ de densité  $\rho_e^*$ . Nous considérons ici le lien existant entre l'approche par la méthode d'énergie-Casimir et l'approche directe selon Abarbanel et al 1986 [1]. Considérons en effet un état stationnaire dynamique  $\mathbf{v}_e = (\mathbf{u}_e, \rho_e^*)$ . Cet état est caractérisé par les trois relations

$$\mathbf{u}_e \cdot \nabla \rho_e^* = 0 \quad (6.20)$$

$$\mathbf{u}_e \cdot \nabla q_e = 0 \quad (6.21)$$

$$\mathbf{u}_e \cdot \nabla K(\rho_e^*, q_e) = 0 \quad (6.22)$$

où la fonction

$$K(\rho_e^*, q_e) = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^2 + p_e^* + \rho_e^* z \quad (6.23)$$

est la fonction de Bernoulli. La première égalité représente la conservation de la densité, tandis que la deuxième représente la conservation de la vorticité potentielle. La troisième est simplement le produit scalaire de l'équation du mouvement avec le champ de vitesse  $\mathbf{u}_e$ . L'équation du mouvement s'écrit en effet

$$\boldsymbol{\xi}_e \times \mathbf{u}_e = -\nabla K(\rho_e^*, q_e) + z \nabla \rho_e^*. \quad (6.24)$$

Le produit vectoriel de (6.24) avec  $\nabla \rho_e^*$  fournit

$$\mathbf{u}_e (\boldsymbol{\xi}_e \cdot \nabla \rho_e^*) - \boldsymbol{\xi}_e (\mathbf{u}_e \cdot \nabla \rho_e^*) = K_q(\rho_e^*, q_e) \nabla \rho_e^* \times \nabla q_e \quad (6.25)$$

où on utilise la relation suivante

$$\nabla K = K_q \nabla q_e. \quad (6.26)$$

Le champ de vitesse d'équilibre découle alors immédiatement de (6.25) en utilisant la définition de la vorticité potentielle et (6.20).

$$\mathbf{u}_e = \frac{K_q(\rho_e^*, q_e)}{q_e} \nabla q_e \times \nabla \rho_e^*. \quad (6.27)$$

C'est l'expression du champ de vitesse d'équilibre donnée par Abarbanel et al 1986. Cette expression est équivalente à l'expression (6.17), que nous avons trouvée pour le champ de vitesse d'équilibre si l'on pose que

$$K(\rho_e^*, q_e) = q C_q(\rho_e^*, q_e) - C(\rho_e^*, q_e). \quad (6.28)$$

En effet, on a alors, en supprimant les arguments pour alléger l'écriture

$$\begin{aligned}\nabla K &= K_q \nabla q = \nabla (q C_q) - \nabla C \\ &= q \nabla C_q\end{aligned}\tag{6.29}$$

où on utilise deux fois l'égalité (6.26). L'équivalence entre (6.17) et (6.27) est ainsi explicitement démontrée, puisque l'égalité (6.17) s'écrit aussi

$$\mathbf{u}_e = \nabla \rho_e^* \times \nabla C_{q_e}.\tag{6.30}$$

A ce stade, nous avons achevé de caractériser les états stationnaires du fluide de Boussinesq. Nous avons présenté les états d'équilibre à partir de la méthode d'énergie-Casimir (Shepherd 1993) et à partir d'une considération directe des équations de Boussinesq (Abarbanel et al 1986) et nous avons donné la relation entre les deux approches. A la prochaine sous-section nous rappelons les équations de la décomposition OTPEM et nous essayons de mettre en relation la partie des équations concernant les tourbillons potentiels avec les états d'équilibre du fluide, ce qui constitue une contribution personnelle.

### 6.2.5 Lien avec les équations diagnostiques des tourbillons potentiels

Les trois équations diagnostiques définissant les tourbillons potentiels dans la décomposition OTPEM s'écrivent

$$q = \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \rho^*, \quad \mathbf{u}_q \cdot \nabla \rho^* = 0 \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_q = 0\tag{6.31}$$

où  $\mathbf{u}_q$  est le champ de vitesse associé aux tourbillons potentiels et contient toute la vorticité potentielle et l'indice  $q$  ne désigne pas de dérivée partielle ici. On dispose également d'un jeu d'équations pour la composante onde et un autre pour la composante écoulement moyen. Nous ne considérons pas ces composantes dans le cadre de la décomposition OTPEM et nous supposons dans la suite que l'écoulement moyen est nul. Cette supposition est réaliste dans le cas d'un domaine fermé où l'on applique des conditions aux de type glissement sans frottement aux parois du domaine.

Les équations (6.31) peuvent être r ecrites en exprimant l'orthogonalité du champ de vitesse des tourbillons potentiels  $\mathbf{u}_q$  par rapport au gradient de densité

$$\mathbf{u}_q = \mathbf{A} \times \nabla \rho^*\tag{6.32}$$

pour un champ de vecteurs  $\mathbf{A}$  quelconque. La condition de non divergence de  $\mathbf{u}_q$  implique alors

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \nabla \rho^*) = \nabla \rho^* \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \nabla \rho^*) = 0\tag{6.33}$$

soit, puisque  $\nabla \rho^*$  est non nul

$$\mathbf{A} = \nabla \lambda\tag{6.34}$$



ou  $\lambda$  est une fonction scalaire de l'espace et du temps. Les équations diagnostiques s'écrivent par conséquent

$$\mathbf{u}_q = \nabla \lambda \times \nabla \rho^* \quad (6.35)$$

$$q = \boldsymbol{\xi}_q \cdot \nabla \rho \quad (6.36)$$

où  $\boldsymbol{\xi}_q = \nabla \times \mathbf{u}_q$ , puisque  $\mathbf{u}_q$  par hypothèse contribue à toute la vorticité potentielle.

On peut montrer que l'expression du champ de vitesse (6.35) est équivalent à rendre stationnaire l'énergie cinétique pour le champ de vorticité potentielle  $q$  donné. En effet, la variation première de la partie cinétique du Hamiltonien  $\mathcal{H}'$  en y incorporant la contrainte sur la vorticité potentielle à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange  $\lambda$

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{H}' &= \delta \int_D d^3 \mathbf{x} \left[ \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 - \lambda (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \rho^* - q) \right] \\ &= \int_D d^3 \mathbf{x} [\mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} - \lambda \nabla \rho^* \cdot (\nabla \times \delta \mathbf{u})]. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Le second terme dans l'intégrand s'écrit encore

$$\lambda \nabla \rho^* \cdot (\nabla \times \delta \mathbf{u}) = \nabla \cdot (\delta \mathbf{u} \times \lambda \nabla \rho^*) + \delta \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \lambda \nabla \rho^*). \quad (6.38)$$

En supposant la variation  $\delta \mathbf{u}$  nulle sur les frontières du domaine, la divergence engendrant un terme de surface dans la variation de  $\mathcal{H}'$  ne contribue pas. La variation de  $\mathcal{H}'$  s'exprime finalement

$$\delta \mathcal{H}' = \delta \int_D d^3 \mathbf{x} [\mathbf{u} - \nabla \times \lambda \nabla \rho^*] \cdot \delta \mathbf{u} \quad (6.39)$$

d'où l'on déduit pour une variation arbitraire  $\delta \mathbf{u}$  la relation

$$\mathbf{u} = \nabla \times \lambda \nabla \rho^* = \nabla \lambda \times \nabla \rho^*. \quad (6.40)$$

On recouvre ainsi l'expression du champ de vitesse vortical (6.35) de la décomposition OPTEM.

L'équation (6.35) est de forme analogue à l'équation définissant le champ de vitesse de la solution d'équilibre des équations de Boussinesq (6.30) rappelée ici

$$\mathbf{u}_e = \nabla \rho_e^* \times \nabla C_{q_e}. \quad (6.41)$$

Cependant, les variables qu'elles font intervenir sont différentes. Dans le cas de la solution d'équilibre, ce sont les champs de vorticité potentielle et de densité d'équilibre qui interviennent. Par contre, l'équation pour les tourbillons potentiels de la décomposition OTPEM fait intervenir les champs de densité et de vorticité potentielle instantanés associés à une certaine configuration de l'écoulement. Par rapport à ce que nous avons exposé sur les  tats d'équilibre du fluide, le tourbillon potentiel de la décomposition OTPEM apparaît comme une construction incomplète d'un état stationnaire d'un fluide de Boussinesq, au sens où sa définition n'assure que le caractère extr mal de son énergie cinétique.

Les relations heuristiques qui caractérisent les tourbillons potentiels dans la décomposition OTPEM sont une extension des propriétés vérifiées exactement dans le régime linéaire. L'idée fondamentale est que le tourbillon potentiel caractérise la partie non propagative des mouvement du fluide, complémentaire du champ d'ondes. Or plusieurs auteurs ont suggéré qu'à ce champ d'ondes pouvait être associé un champ de fluctuations de densité, dont l'énergie est l'énergie potentielle disponible [52],[124]. Les fluctuations de densité sont mesurées par rapport au profil de densité associé à l'énergie potentielle minimale du fluide. Il s'ensuit que cette décomposition du champ de densité peut être utilisée pour compléter la décomposition cinématique en tourbillons potentiels et ondes: au tourbillons potentiel doit être associé la profil de densité de base, tandis que les ondes possèdent l'énergie potentielle disponible. En d'autres termes, le tourbillon potentiel serait caractérisé par une énergie totale minimale, les Casimirs étant donnés.

On peut chercher à construire l'état stationnaire d'énergie totale minimale pour une distribution de vorticité potentielle et de densité, respectivement, données. On note que la vorticité potentielle et la densité sont des invariants Lagrangiens, mais que leur distributions spatiales peuvent changer. Ceci est en particulier vrai pour le champ de densité déformé instantanément par le mouvement dû aux ondes internes. Les tourbillons potentiels sont alors associés aux champs d'équilibre  $\mathbf{u}_e$  et  $\rho_e^*$ . Ces tourbillons sont gouvernés par les équations du mouvement stationnaires. Dans ce sens ils constituent un mouvement balancé. L'application de la décomposition OTPEM revient à diagnostiquer les tourbillons potentiels à chaque instant par la partie non-divergente du champ de vitesse sur les isopycnes. En échange, la décomposition minimisant l'énergie totale revient à étudier les tourbillons par une suite d'états d'équilibre associés au champs de vorticité potentielle et de densité d'équilibre, ces champs étant obtenus par la propriété d'invariance Lagrangienne des ces quantités. Le problème est cependant plus complexe, car on ne connaît pas les distributions spatiales de vorticité potentielle et de densité correspondant à l'état stationnaire. On ne peut donc pas calculer le champ de vitesse d'équilibre. Le champ de densité instantané fluctue et forme l'énergie potentielle disponible que l'on associe aux ondes internes.

Une possibilité de parvenir à un état stationnaire est offert par la dynamique modifiée, que nous développons à la prochaine section de ce chapitre. Cette méthode permet de relaxer un système Hamiltonien vers un état d'équilibre en conservant ses Casimirs. L'énergie d'un tel système modifié décroît au cours du temps jusqu'à ce qu'un état stationnaire est atteint. Nous appliquons cette méthode au cas des équations du fluide stratifié. Nous terminons cette section en indiquant une écriture condensée des équations diagnostiques des tourbillons potentiels dans la décomposition OTPEM.

### 6.2.6 Forme alternative des équations pour les tourbillons potentiels

On peut noter que le système d'équations caractérisant les tourbillons potentiels peut être écrit sous la forme compacte d'une seule équation aux dérivées partielles. En effet, la vorticité potentielle

$q$  du fluide s'écrit

$$\begin{aligned} q &= \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \rho^* \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \nabla \rho^*). \end{aligned} \quad (6.42)$$

La substitution du champ de vitesse sous la forme impliquant le gradient de densité permet d'écrire

$$q = \nabla \cdot [\nabla \rho^* \times (\nabla \rho^* \times \nabla \lambda)]. \quad (6.43)$$

Le triple produit vectoriel se calcule comme suit

$$\begin{aligned} [\nabla \rho^* \times (\nabla \rho^* \times \nabla \lambda)]_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j \rho^* (\nabla \rho^* \times \nabla \lambda)_k \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \partial_j \rho^* \partial_l \rho^* \partial_m \lambda \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \rho^* \partial_l \rho^* \partial_m \lambda \\ &= \partial_i \rho^* \partial_j \rho^* \partial_j \lambda - \partial_j \rho^* \partial_j \rho^* \partial_i \lambda. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Nous pouvons donc définir la matrice  $M$ , d'éléments

$$M_{ij} = \partial_i \rho^* \partial_j \rho^* - (\partial_k \rho^*)^2 \delta_{ij} \quad (6.45)$$

et écrire l'équation vérifiée par la fonction scalaire  $\lambda$ , dont la connaissance permet de déduire le champ de vitesse

$$\nabla \cdot [(M \cdot \nabla) \lambda] = q. \quad (6.46)$$

Cette équation est très concise et ressemble à une équation de Poisson généralisée, parce que le produit des gradients de densité rend l'opérateur anisotrope. Dans la limite linéaire correspondant à la décomposition de Craya-Herring l'équation se simplifie et devient une équation de Poisson connectant la fonction de courant, associée au champ de vitesse horizontal dépendant de  $z$ , à la vorticité verticale de l'écoulement. Cette équation constitue un point de départ alternatif pour la résolution numérique diagnostique du champ de vitesse des tourbillons potentiels à celui basé sur un développement asymptotique des champs de l'écoulement proposé par Staquet et Riley 1989.

## 6.3 Dynamique modifiée du fluide stratifié

### 6.3.1 Présentation de la méthode générale

Le travail de Vallis et al [139] est à l'origine de l'idée de dynamique modifiée d'un fluide parfait. Les équations modifiées obtenues pour quelques descriptions de fluides différentes y sont simplement énoncées, mais ne reposent sur aucun argument rigoureux. Bien entendu ces équations vérifient les propriétés requises. Le travail de Shepherd 1990b [121] propose une formulation Hamiltonienne de la dynamique modifiée, ce qui constitue une approche rigoureuse au problème. De plus, cette méthode est fort simple dans son principe, sans être toutefois une approche très physique. On désire déduire

d'un système Hamiltonien un système modifié ne conservant pas l'énergie totale du système, mais conservant tous ses Casimirs. Soit le système Hamiltonien

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = J \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}}. \quad (6.47)$$

Le système suivant est également Hamiltonien (la forme cosymplectique satisfait la propriété d'antisymétrie et l'identité de Jacobi) et satisfait toutes les propriétés requises

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = J \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} + J \alpha J \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} \quad (6.48)$$

où  $\alpha$  est une transformation linéaire quelconque agissant sur  $J$ . Par souci de simplicité cette matrice sera choisie diagonale d'éléments constants pour les systèmes fluides qui nous intéressent.

Les Casimirs du système modifié sont aussi les Casimirs du système original. En effet, on a

$$\frac{d\mathcal{C}}{dt} = \left\langle \frac{\delta \mathcal{C}}{\delta \mathbf{v}}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\delta \mathcal{C}}{\delta \mathbf{v}}, J \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} + J \alpha J \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} \right\rangle = - \left\langle J \frac{\delta \mathcal{C}}{\delta \mathbf{v}}, \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} + \alpha J \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} \right\rangle = 0. \quad (6.49)$$

Quant au Hamiltonien, sa dynamique obéit à

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \left\langle \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}}, J \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} + J \alpha J \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} \right\rangle = - \left\langle J \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}}, \alpha J \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} \right\rangle. \quad (6.50)$$

On note que le second membre possède un signe bien défini, donné par les signes des coefficients de la matrice  $\alpha$ . De plus, la dernière expression ne s'annule qu'à condition d'avoir

$$J \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} = 0. \quad (6.51)$$

Le système modifié possède donc les mêmes solutions stationnaires que le système original. Le choix du signe des coefficients de la matrice  $\alpha$  permet donc de garantir une décroissance de l'énergie totale du fluide. Shepherd 1990b donne quelques exemples de systèmes modifiés pour différents fluide, dont le fluide parfait compressible. Par contre, le cas de l'approximation de Boussinesq n'a, à notre connaissance, pas encore été traité. Comme remarqué précédemment, la condition de non divergence du champ de vitesse doit être imposée comme contrainte si l'on souhaite utiliser les variables primitives, ce qui rend le calcul de la partie modifiante  $J \alpha J$  plus délicat. Par contre, l'utilisation des variables  $(\Psi, \rho^*)$  permet d'obtenir plus facilement les équations modifiées.

Remarquons finalement que la méthode générale permet l'inclusion d'un écoulement moyen dans les équations de la dynamique modifiée. Les applications numériques que nous envisageons n'admettent pas d'écoulement moyen, ce qui nous permet de le négliger dans ce qui suit.

### 6.3.2 Équations dynamiques modifiées du fluide stratifié

A l'aide de la méthode générale donnée à la sous-section précédente, nous avons dérivé le système modifié comme suit. Désormais nous avons supprimé, chaque fois que cela était possible, les parenthèses délimitant les applications successives de l'opérateur rotationnel et des produits vectoriels. Les produits vectoriels sont simplement évalués de la droite vers la gauche dans une

expression. La forme cosymplectique associée au crochet de Poisson fluide stratifié (A.68) dans les variables  $\mathbf{v} = (\boldsymbol{\xi}, \rho^*)$  s'écrit simplement

$$J = - \begin{bmatrix} \nabla \times \boldsymbol{\xi} \times \nabla \times \cdot & \nabla \times \rho^* \nabla \cdot \\ \nabla \rho^* \cdot \nabla \times \cdot & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} J_{3 \times 3} & J_{3 \times 1} \\ J_{1 \times 3} & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.52)$$

L'opérateur  $J$  est une matrice  $4 \times 4$  et la dernière égalité associe à chaque opérateur un symbole indiquant les dimensions de la sous-matrice qu'il représente. Nous avons vérifié le calcul suivant composante par composante, mais il est plus concis de le présenter ici en utilisant les sous-matrices de  $J$ . La matrice  $\alpha$  est diagonale d'éléments  $\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1$  et  $\alpha_2$ . Rappelons également que le crochet de Poisson (A.68), qui nous a permis de définir  $J$ , est obtenu à partir du crochet initial (A.64) en supposant la nullité de certains termes contribuant des intégrales de surfaces au crochet. Pour dériver les équations modifiées, nous faisons à nouveau implicitement cette supposition. La partie modifiante du système est obtenu par la multiplication matricielle

$$J\alpha J = \begin{bmatrix} \alpha_1 J_{3 \times 3} J_{3 \times 3} + \alpha_2 J_{3 \times 1} J_{1 \times 3} & \alpha_1 J_{3 \times 3} J_{3 \times 1} \\ \alpha_1 J_{1 \times 3} J_{3 \times 3} & \alpha_1 J_{1 \times 3} J_{3 \times 1} \end{bmatrix}. \quad (6.53)$$

Les sous matrices se calculent immédiatement par

$$\begin{aligned} J_{3 \times 3} J_{3 \times 3} &= \nabla \times \boldsymbol{\xi} \times \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\xi} \times \nabla \times \cdot \\ &= \nabla \times [\nabla \times \nabla \times (\nabla \times \cdot) \times \boldsymbol{\xi}] \times \boldsymbol{\xi} \end{aligned} \quad (6.54)$$

$$\begin{aligned} J_{3 \times 1} J_{1 \times 3} &= \nabla \times \rho^* \nabla (\nabla \rho^* \cdot \nabla \times \cdot) \\ &= \nabla \rho^* \times \nabla (\nabla \rho^* \cdot \nabla \times \cdot) \\ &= -\nabla \times [(\nabla \times \cdot) \cdot \nabla \rho^* \nabla \rho^*] \end{aligned} \quad (6.55)$$

$$\begin{aligned} J_{3 \times 3} J_{3 \times 1} &= \nabla \times \boldsymbol{\xi} \times \nabla \times \nabla \times \rho^* \nabla \cdot \\ &= -\nabla \times (\nabla \times \nabla \times \rho^* \nabla \cdot) \times \boldsymbol{\xi} \end{aligned} \quad (6.56)$$

$$J_{1 \times 3} J_{3 \times 3} = -\nabla \rho^* \cdot [\nabla \times \nabla \times (\nabla \times \cdot) \times \boldsymbol{\xi}] \quad (6.57)$$

$$J_{1 \times 3} J_{3 \times 1} = \nabla \rho^* \cdot (\nabla \times \nabla \times \rho^* \nabla \cdot). \quad (6.58)$$

Compte tenu de la forme des équations du système original, on a donc les équations de la dynamique modifiée stratifiée en termes des variables  $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}, \rho^*)$ , correspondant au système défini par (6.48)

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} = \nabla \times \{[\mathbf{u} + \alpha_1 \nabla \times \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\xi} - \rho^* \nabla z)] \times \boldsymbol{\xi}\} - \alpha_2 \nabla \times (\mathbf{u} \cdot \nabla \rho^*) \nabla \rho^* - \nabla \times \rho^* \mathbf{e}_3 \quad (6.59)$$

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} = -\{\mathbf{u} + \alpha_1 \nabla \times \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\xi} - \rho^* \nabla z)\} \cdot \nabla \rho^*. \quad (6.60)$$

Définissons le champ de vitesse modifié  $\tilde{\mathbf{u}}$  par

$$\tilde{\mathbf{u}}(\alpha_1) = \mathbf{u} + \alpha_1 \nabla \times \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\xi} - \rho^* \nabla z). \quad (6.61)$$

L'action de ce champ sur les variables de l'écoulement représente la pseudo-advection. Cependant, la présence du terme en  $\alpha_2$  montre que la dynamique modifiée n'est pas une simple pseudo-advection.

Le fait que le second membre de l'équation pour la vorticit e soit le rotationnel d'un vecteur, nous permet de repasser aux variables primitives  $\mathbf{v} = (\mathbf{u}, \rho^*)$ . On obtient l' equation de la dynamique modifi ee pour la vitesse  $\mathbf{u}$  en supprimant le rotationnel ext erieur de tous les termes. Puis on ajoute au second membre de l' equation ainsi obtenue, le gradient d'une fonction scalaire, la pression modifi ee,  $\tilde{p}$ . L'effet du champ de pression modifiée est d'assurer la non divergence du champ de vitesse induit par la dynamique modifi ee. Le syst eme dynamique modifiée en variables primitives est alors

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \tilde{\mathbf{u}}(\alpha_1) \times \boldsymbol{\xi} - \alpha_2 (\mathbf{u} \cdot \nabla \rho^*) \nabla \rho^* - \nabla \tilde{p} - \rho^* \mathbf{e}_3 \quad (6.62)$$

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} = -\tilde{\mathbf{u}}(\alpha_1) \cdot \nabla \rho^* \quad (6.63)$$

o u le champ de vitesse modifiée  $\tilde{\mathbf{u}}$  est donnée par (6.61).

### 6.3.3 Conservation des Casimirs par la dynamique modifi ee

En g en eral, la v erification directe de l' equation du mouvement des Casimirs pour le syst eme modifiée est laborieuse. Pour le fluide stratifiée la situation est plus simple. Puisque les Casimirs du fluide de Boussinesq ne sont fonctions que de la densit e et de la vorticit e potentielle, il suffit de montrer que la dynamique modifi ee conserve ses deux champs scalaires pour garantir la conservation des Casimirs.

Dans le cas du fluide Boussinesq, on d efinit la d eriv ee mati erelle modifi ee par

$$\frac{\tilde{D}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla. \quad (6.64)$$

L' equation (6.62) traduit alors la conservation du champ de densit e par la dynamique modifi ee

$$\frac{\tilde{D}\rho^*}{Dt} = 0. \quad (6.65)$$

D'autre part l' equation pour la vorticit e (6.59) peut s' ecrire

$$\frac{\tilde{D}\boldsymbol{\xi}}{Dt} = (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} - \alpha_2 \nabla \times (\mathbf{u} \cdot \nabla \rho^*) \nabla \rho^* - \nabla \times \rho^* \mathbf{e}_3. \quad (6.66)$$

Le produit scalaire de cette  equation avec  $\nabla \rho^*$  donne

$$\nabla \rho^* \cdot \frac{\tilde{D}\boldsymbol{\xi}}{Dt} = \nabla \rho^* \cdot (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}. \quad (6.67)$$

Par ailleurs, comme indiquée au chapitre 1, on dispose de l' egalit e suivante pour le gradient de densit e

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\tilde{D}\nabla \rho^*}{Dt} = -\nabla \rho^* \cdot (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}. \quad (6.68)$$

On d eduit de la somme de ces deux  equations que la vorticit e potentielle  $q = \nabla \rho^* \cdot \boldsymbol{\xi}$  est conserv ee par le champ de vitesse modifiée

$$\frac{\tilde{D}q}{Dt} = 0. \quad (6.69)$$

### 6.3.4 Evolution du Hamiltonien

Nous calculons ici explicitement l'équation d'évolution modifiée du Hamiltonien. Rappelons sa forme

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \left\langle J \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{v}}, \alpha J \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{v}} \right\rangle. \quad (6.70)$$

Avec la même convention de décomposition de la matrice  $J$ , on a d'abord

$$J \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{v}} = [\nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\xi}) - \nabla\rho^* \times \nabla z, -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\rho^*]^T \quad (6.71)$$

et

$$\alpha J \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{v}} = [\alpha_1 \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\xi}) - \alpha_1 \nabla\rho^* \times \nabla z, -\alpha_2 (\mathbf{u} \cdot \nabla)\rho^*]. \quad (6.72)$$

Finalement, le second membre pour l'équation du Hamiltonien s'écrit

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = - \int_D d^3\mathbf{x} \left\{ \alpha_1 [\nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\xi} - \rho^* \nabla z)]^2 + \alpha_2 [\mathbf{u} \cdot \nabla\rho^*]^2 \right\}. \quad (6.73)$$

On remarque que le signe de cette expression est bien défini. En accord avec la prédiction du système général, l'énergie totale est une fonction du temps de variation monotone. Le choix de coefficients positifs dans la matrice  $\alpha$ , permet donc de faire décroître l'énergie totale du système.

On note

$$\mathbf{Y} = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\xi} - \rho^* \nabla z \quad (6.74)$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{u} \cdot \nabla\rho^*. \quad (6.75)$$

La dynamique modifiée va faire décroître le Hamiltonien jusqu'à ce qu'un état stationnaire soit atteint. Si son énergie totale est un minimum absolu, son état sera stable. Cet état stationnaire est caractérisé par

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0 \quad (6.76)$$

soit

$$\nabla \times \mathbf{Y} = 0 \quad (6.77)$$

$$\mathbf{Z} = 0. \quad (6.78)$$

L'équation (6.77) entraîne que  $\mathbf{Y}$  dérive d'un gradient. Ceci traduit qu'un équilibre cyclostrophique est atteint

$$\mathbf{u}_e \times \boldsymbol{\xi}_e - \rho^* \nabla z = \nabla p_e. \quad (6.79)$$

L'équation (6.78) s'écrit

$$\mathbf{u}_e \cdot \nabla\rho_e^* = 0 \quad (6.80)$$

c'est à dire que le champ de vitesse de l'état stationnaire est situé sur les isopycnes. Enfin, la vorticité potentielle étant conservé par la dynamique modifiée, on a également

$$\mathbf{u}_e \cdot \nabla q_e = 0. \quad (6.81)$$

L'état atteint par la dynamique modifiée est donc défini par (6.27), comme attendu.

## 6.4 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons considéré le fluide parfait stratifié d'un point de vue Hamiltonien généralisé. A l'aide du formalisme exposé à l'annexe A, nous avons d'abord considéré les états stationnaires du fluide stratifié. La définition de ces états repose sur les invariants Lagrangiens de l'écoulement, c'est-à-dire la vorticité potentielle et la densité. Un état d'équilibre du fluide stratifié est défini par un extrémum de l'énergie totale (cinétique plus potentielle).

Les équations diagnostiques définissant les tourbillons potentiels dans la décomposition OTPEM sont semblables aux équations définissant le champ de vitesse des états d'équilibre du fluide. Les champs utilisés sont cependant différents, car les tourbillons potentiels de la décomposition OTPEM sont définis à partir de la vorticité potentielle et du champ de densité instantanés. Nous avons montré que les tourbillons ainsi définis résultent de la minimisation de l'énergie cinétique sur les surfaces isopycnales. La décomposition OTPEM ne porte que sur le champ de vitesse et nous nous sommes intéressés à lui associer une décomposition du champ de densité. Il apparaît alors que c'est le champ de densité du fluide à l'équilibre, d'énergie potentielle minimale, qu'il faut associer au champ de vitesse du tourbillon potentiel. Ainsi, les tourbillons potentiels, maintenant complètement caractérisés par un champ de vitesse et un champ de densité, coïncident avec les états stationnaires du fluide stratifié à vorticité potentielle et densité conservée matériellement.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous avons appliqué une méthode de dynamique modifiée générale au cas du fluide stratifié dans l'approximation de Boussinesq. Cette méthode nous a permis de dériver un système Hamiltonien modifié possédant les mêmes états stationnaires que le système original. De plus, le Hamiltonien du système modifié décroît de façon monotone de sorte que le système ainsi modifié relaxe vers un état stationnaire, à partir d'un champ donné quelconque de densité et de vorticité potentielle. On dispose ainsi d'une méthode permettant d'obtenir une caractérisation complète des tourbillons potentiels (définis comme les états stationnaires du fluide pour une certaine configuration des Casimirs donnée). L'extension de la méthode au cas d'un écoulement d'un fluide visqueux peu dissipatif permet la simulation numérique de la dynamique modifiée et ce point important constitue l'une des perspectives de notre travail.



# Conclusions et Perspectives

## Conclusions :

Le travail présenté dans ce manuscrit concerne la dynamique non-linéaire des écoulements des fluides stratifiés sans rotation. Nous avons étudié en particulier l'écoulement généré par un champ d'ondes internes de gravité primaire, initialement monochromatique et plan se propageant dans un plan vertical. Cet écoulement instable ne possède pas de structure dans la direction transversale au plan de propagation. Ceci nous a permis de traiter son évolution par des simulations numériques directes en deux, puis en trois dimensions d'espace.

L'étude du cas bidimensionnel a été menée principalement sur des ondes de petite amplitude et les résultats présentés dans cette thèse concernent uniquement la dynamique du champ d'ondes jusqu'au déferlement. Nous avons appliqué la théorie des interactions résonantes en tenant compte de la dissipation d'énergie dans le fluide. La déstabilisation de l'onde primaire s'opère par instabilité paramétrique sous-harmonique locale en accord avec les résultats de la théorie des interactions résonantes. La fréquence des ondes secondaires excitées est de l'ordre de la moitié de la fréquence de l'onde primaire. Dans l'espace physique, on observe un paquet d'ondes instable dont les modulations spatiales motivent une étude locale du comportement énergétique du processus de déstabilisation. On considère le problème dans un référentiel lié à l'onde primaire, de façon à s'affranchir du caractère spatio-temporel de l'écoulement associé à l'onde primaire. Le résultat principal de cette étude est que le paquet d'ondes extrait l'énergie cinétique seulement dans les régions de l'espace définies par un signe négatif de la vorticité de l'onde primaire  $\xi_p$ , l'extraction étant négative dans les zone  $\xi_p > 0$ . L'énergie potentielle est quant à elle extraite dans les deux régions de l'espace, définies par  $\xi_p < 0$  et  $\xi_p > 0$ . Ce mécanisme d'extraction est rendu possible par l'existence d'une relation de phase bien définie entre l'enveloppe du paquet d'ondes et l'onde primaire et l'existence d'un flux de chaleur instantané *non* nul qui permet la conversion périodique des deux formes d'énergie cinétique et potentielle. Ainsi, le paquet d'ondes possède une énergie cinétique maximale dans les régions  $\xi_p < 0$ , optimisant ainsi l'extraction d'énergie cinétique primaire, tandis qu'il possède une énergie cinétique minimale dans les zones  $\xi_p > 0$  minimisant ainsi les pertes d'énergie cinétique vers l'onde primaire. Des considérations similaires s'appliquent pour l'énergie potentielle. Enfin, la condition cinématique sur l'instabilité paramétrique sous-harmonique prend une signification dynamique, car le flux de chaleur, les énergies cinétique et potentielle du paquet d'ondes et les termes d'extraction d'énergie possèdent alors à peu près la p riodicite  de l'onde primaire.

Le cas tridimensionnel plus réaliste a été étudié en détail sur toute la longueur de nos simula-

tions. Les simulations tridimensionnelles ont montré que la déstabilisation de l'onde est un processus intrinsèquement tridimensionnel. Cependant, pour une onde primaire initialement statiquement stable la croissance des modes bidimensionnels constitue la partie dynamiquement significative jusqu'à la formation des couches statiquement instables déclenchant le déferlement tridimensionnel du champ d'ondes. Pour une onde primaire statiquement instable les modes les plus instables sont tridimensionnels. Cependant, le déferlement n'est pas immédiat dans ce cas, ce qui indique que le processus de déstabilisation initial mis en évidence sur le cas bidimensionnel s'applique encore et est de fait un processus robuste. Dans le cas statiquement instable la déstabilisation est par contre aussi accompagnée de modes excités par l'instabilité statique de l'onde primaire. Le déferlement est un processus intrinsèquement tridimensionnel, puisqu'il s'agit d'un effondrement gravitationnel des surfaces isopycnales retournées et que cet effondrement a lieu dans la direction transverse au plan de propagation de l'onde. La structure spatiale verticale des couches statiquement instables générées par les retournements des surfaces isopycnales est reliée à la structure du paquet d'ondes initial. Cette structure possède des propriétés constantes pour une onde primaire d'inclinaison donnée. Cependant, nous n'avons pas pu interpréter simplement la structure transverse de l'instabilité gravitationnelle en fonction des paramètres numériques des simulations. Cela est dû au degré variable de l'instabilité statique des couches instables, relié à l'amplitude de l'onde primaire. En deux dimensions d'espace, le déferlement présente des caractéristiques différentes, puisque le champ d'ondes déferle par une série d'instabilités de Kelvin-Helmholtz des couches de cisaillement. Cependant, ces instabilités dynamiques s'opèrent dans les couches instables. Il est donc clair que la formation des tourbillons de Kelvin-Helmholtz résulte d'une combinaison du mécanisme associé au cisaillement du champ de vitesse et du mécanisme d'effondrement des couches instables. En aucun cas des simulations tridimensionnelles avons nous observé des enroulements de type Kelvin-Helmholtz aussi vigoureux qu'en deux dimensions. On est donc conduit à proposer que l'instabilité d'une onde interne statiquement stable est gouvernée par une croissance des modes bidimensionnels menant au raidissement et au retournement des isopycnes. A ce stade ces modes saturent et dans le cas bidimensionnel on obtient l'enroulement de Kelvin-Helmholtz, tandis qu'à trois dimensions l'instabilité se tridimensionalise rapidement selon la direction transverse, ce que nous observons sous la forme d'un effondrement gravitationnel des couches de fluide statiquement instables. Le déferlement du champ d'ondes mène vers sa perte de cohérence complète et dissipe rapidement la majeure partie de l'énergie.

Les faibles nombres de Froude mis en jeu suivant la restratification du fluide permettent d'appliquer la décomposition linéaire de Craya-Herring à l'écoulement résiduel, afin d'établir le diagnostic des composantes de mouvement. Une étude du comportement énergétique dans l'espace de Fourier révèle que les spectres d'énergie cinétique et potentielle ont un niveau globalement plus bas que le niveau attendu par les diverses théories de turbulence stratifiée. Les spectres d'énergie cinétique ondulatoire et potentielle en fonction du nombre d'onde vertical suivent une loi en  $k_z^{-3}$  pendant une courte période, mais les niveaux des spectres sont quasiment identiques. Cela indique l'équipartition de l'énergie cinétique et potentielle à toutes les échelles et une dynamique quasi-linéaire des ondes,

dépourvue de retournements contrairement à ce qui est attendu par les théories de turbulence. La production de mode vortex, composante du mouvement intrinsèquement tridimensionnelle, est à l'origine de cette divergence par rapport aux modèles théoriques. Il semble en effet que l'énergie potentielle convertie en énergie cinétique pendant le déferlement engendre en partie les tourbillons potentiels et l'écoulement moyen, de telle sorte qu'il y ait un transfert net d'énergie potentielle vers énergie cinétique. La production de ce dernier n'est pas très importante pour les ondes statiquement stables, mais nous avons observé que le mode vortex et les ondes dominent le régime final pour une onde primaire statiquement instable. Il faut remarquer que le caractère discret et fini des simulations numériques influe beaucoup sur la production de mode vortex, parce que la dissipation et la conduction d'énergie dominent le régime de déferlement et l'écoulement turbulent en décroissance libre suivant. Nous avons également pu constater que le déferlement du champ d'ondes produit invariablement un écoulement moyen selon la direction horizontale dans le plan de propagation de l'onde primaire et que cet écoulement, en plus des ondes internes, domine la dynamique finale des simulations d'ondes statiquement stables.

Un deuxième thème de notre travail a concerné la dynamique modifiée d'un fluide stablement stratifié. L'approche Hamiltonienne généralisée aux fluides parfait nous a permis d'interpréter la décomposition diagnostique ondes-tourbillons potentiels-écoulement moyen (OTPEM) proposée par Staquet et Riley 1989. La considération des équations diagnostiques pour les tourbillons potentiels nous a permis de reformuler le problème d'inversion sous la forme d'une unique équation aux dérivées partielles ressemblant à une équation de Poisson généralisée. Le problème d'inversion de vorticité potentielle dans le cadre de la décomposition OTPEM est ainsi simplifié. La décomposition OTPEM revient minimiser l'énergie cinétique de l'écoulement sur les surfaces isopycnales instantanées (  énergie potentielle constante) et constitue de ce fait une méthode de relaxation incomplète. L'application d'une méthode, développée pour les systèmes Hamiltoniens non canoniques généraux, au cas des fluides stratifiés parfaits nous a permis de dériver un jeu d'équations modifiées permettant de relaxer un fluide vers un état stationnaire dynamique correspondant à un minimum d'énergie totale en conservant la densité et la vorticité potentielle attachées aux particules fluides. Nous avons directement vérifié la conservation de ces quantités, ainsi que la décroissance de l'énergie totale. L'écoulement résultant est interprété comme une extension naturelle des tourbillons potentiels issus de la décomposition OTPEM, étant donné que ce dernier minimise l'énergie totale de l'écoulement pour des champs de vorticité potentielle et de densité donnés.

Enfin, nous avons décrit la mise en œuvre numérique d'une méthode de résolution pseudo-spectrale des équations de Navier-Stokes pour un environnement parallèle à mémoire distribuée. Nous avons implémenté l'algorithme de solution pour des conditions aux limites périodiques et de type symétrie (boîte imperméable). Le problème de mise en œuvre d'un algorithme efficace repose essentiellement sur le développement d'un sous-programme de transformée de Fourier rapide parallèle performant. Les codes produits sont performants et de plus ils sont portables vers un environnement parallèle général implémentant la bibliothèque d'échanges de message MPI. Enfin remarquons que le code utilisant des conditions aux limites symétriques est destiné à la program-

mation de la dynamique modifiée.

**Perspectives :**

-Le premier objectif consiste en la mise en œuvre pratique d'une simulation directe des équations de la dynamique modifiée avec le code de résolution parallèle dans la configuration géométrique de la boîte imperméable. Cette configuration a l'avantage de ne pas présenter d'écoulement moyen. Le code de résolution a été adapté aux équations de la dynamique modifiée, mais la mise en œuvre numérique n'est pas immédiate. On ne sait pas comment le modèle développé pour le fluide parfait s'adapte au cas du fluide dissipatif et conducteur. Si la résolution directe des équations modifiées par un algorithme explicite s'avère difficile, voir impossible, une solution pourrait consister à utiliser un schéma numérique plus complexe, tel que les schémas couramment utilisés en mécanique des fluides numérique (CFD). Enfin, on pourrait inclure la rotation en se plaçant sur le plan f. La prise en compte de la rotation est intéressante tant au niveau de la physique, qu'au niveau de sa possible simplification de l'intégration des équations de dynamique modifiée. En effet, les états d'équilibre peuvent résulter d'un équilibre géostrophique dans ce cas.

-L'étude du mélange induit par le déferlement d'un champ d'onde constitue notre second objectif. Une telle étude a déjà été réalisée en deux dimensions d'espace pour des ondes propagatrices et stationnaires. Le cas tridimensionnel devra être comparé aux résultats bidimensionnels et devrait également permettre de tirer des conclusions plus fines sur l'état final de l'écoulement, notamment sur la production de vorticité potentielle par les effets moléculaires.

-Deux autres points concernent une étude plus approfondie de l'instabilité, ainsi que du déferlement. Nous avons montré que la structure spatiale de l'instabilité est bien définie sur une gamme assez large d'amplitudes de l'onde primaire. Le paquet d'ondes pourrait être reconsidéré par une théorie faiblement non-linéaire prenant en compte la structure spatiale. Ceci pourrait éventuellement mener vers une équation d'amplitude plus réaliste que les équations différentielles ordinaires résultant de la théorie des interactions résonantes.

-En ce qui concerne le déferlement de l'onde, des expériences numériques ciblées visant à déstabiliser directement un champ d'ondes proche du retournement, mais pas nécessairement monochromatique, permettrait de mieux comprendre le processus de saturation des modes bidimensionnels. Ces expériences devraient utiliser une boîte de dimension transversale suffisamment grande pour que le nombre d'onde correspondant au double de la hauteur moyenne d'une couche instable soit représenté par l'espace de Fourier discret. Le problème de saturation des modes bidimensionnels pourrait être abordé par une approche statistique. Pour les ondes de surface, des approches théoriques visant à caractériser l'initiation du déferlement d'un champ d'onde par la densité de probabilité de ses composantes monochromatiques ont été développées et pourraient être étendues au cas des ondes internes de gravité.

# Annexe A

## Introduction au formalisme Hamiltonien d'un fluide parfait

### A.1 Introduction

Cet annexe a pour but de donner une introduction non formelle à quelques éléments de la théorie des systèmes Hamiltoniens généralisés applicable au fluide parfait. Après un courte revue de l'application de principes variationnels en mécanique des fluides, on propose une introduction à la dynamique des systèmes Hamiltoniens non-canoniques. On rappelle d'abord la dynamique canonique d'un ensemble de  $N$  particules, puis on donne la formulation symplectique. La formulation symplectique est en suite utilisée comme base servant à définir une classe de systèmes Hamiltoniens plus généraux. Le passage vers les systèmes continus est explicité et l'on applique le formalisme au cas des fluides. On considère en particulier le fluide stratifié dans l'approximation de Boussinesq, dont l'expression du crochet de Poisson est indispensable à la dérivation des équations de la dynamique modifiée exposée au chapitre 6.

### A.2 L'approche variationnelle

Les équations du mouvement d'un fluide parfait peuvent être dérivées par des approches variationnelles ou Hamiltoniennes. Dans cette section nous souhaitons donner une introduction à cette thématique, ce qui nous permettra d'introduire la description Hamiltonienne généralisée, puis de dériver les équations de la dynamique modifiée. L'approche choisie n'est pas rigoureuse et la partie récente des méthodes Hamiltoniennes en mécanique des fluides est plutôt issue des mathématiques que de la physique. En ce sens notre présentation est celle du physicien et il faut souligner que cette approche moins formelle est relativement récente, du moins en mécanique des fluides [122], [116], [117], [11], [147], [42]. On distingue traditionnellement les descriptions eulérienne et lagrangienne en mécanique des fluides. La description eulérienne est largement plus utilisée, parce qu'elle est plus économique que la description lagrangienne, mais aussi parce qu'elle est plus facile à formuler

pour de nombreux modèles de fluides. Les deux descriptions sont équivalentes mais la description lagrangienne permet de connaître l'information maximale du mouvement d'un fluide, puisqu'elle décrit les trajectoires de toutes les particules fluides. Par ailleurs, l'approche lagrangienne est la description d'un système continu analogue à la description d'un système discret de  $N$  particules en mécanique analytique classique. Les coordonnées des particules fluides sont des étiquettes et correspondent aux indices identifiant les particules du système discret.

On montre facilement l'existence d'un principe de Hamilton pour un fluide parfait isentropique dans la description lagrangienne. Le Lagrangien<sup>1</sup> correspondant est simplement la différence entre l'énergie cinétique et la somme de l'énergie interne et de l'énergie potentielle du fluide. La dynamique et la thermodynamique du fluide découlent naturellement du principe de Hamilton. Dans ce cas, on peut aussi obtenir le principe de la moindre action (par une transformation de Legendre) et montrer ainsi que le système Hamiltonien du fluide parfait en coordonnées lagrangiennes est canonique.

L'approche variationnelle en coordonnées eulériennes est plus subtile. Le principe de Hamilton en coordonnées eulériennes peut être déduit du principe correspondant en coordonnées lagrangiennes, en transformant les coordonnées du fluide dans le principe variationnel. Mais, l'obtention d'un principe écrit entièrement en coordonnées eulériennes nécessite l'introduction des contraintes de Lin. Ces contraintes imposent la conservation des étiquettes lagrangiennes des particules fluides et leur introduction est peu intuitive, partant du principe de Hamilton en coordonnées lagrangiennes. Le principe variationnel et certaines de ses variantes en coordonnées eulériennes pour un fluide compressible sont décrites dans la revue de Salmon 1988 [116]. Le travail plus récent de Holm 1996 [58] décrit le principe de Hamilton pour un fluide stratifié dans l'approximation de Boussinesq. La particularité du fluide incompressible est que la contrainte d'incompressibilité doit être incluse directement dans le principe de Hamilton à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange dont la signification physique est la pression dynamique du fluide.

Il existe également un principe de la moindre action pour le fluide isentrope. Le système est alors canonique. Il faut noter que les équations d'Euler-Lagrange résultant du principe de Hamilton, ainsi que les équations de Hamilton canoniques issues du principe de la moindre action, font intervenir des variables de Clebsch, différentes des cinq champs du fluide parfait isentrope : le champ de vitesse, la densité et l'entropie. Ces variables proviennent des contraintes de Lin et des multiplicateurs de Lagrange mis en jeu dans les principes variationnels en coordonnées eulériennes. L'approche variationnelle est l'approche la plus ancienne des systèmes Hamiltoniens.

Nous ne considérons pas les principes variationnels dans notre exposé de la dynamique Hamiltonienne généralisée. Il existe en effet une autre approche, plus abstraite, des systèmes Hamiltoniens. Le formalisme émergeant de cette approche est plus simple d'utilisation et constitue le seul nécessaire pour l'étude proposée au chapitre 6. On sait que les équations canoniques d'un système Hamiltonien vérifient certaines propriétés géométriques dans l'espace des phases. Un point de vue plus géométrique des systèmes Hamiltoniens consiste alors à extraire ces propriétés et à les poser

---

1. Nous distinguons la notion de description lagrangienne de la notion de Lagrangien dans le principe de Hamilton, par des initiales minuscules ou capitales.

comme axiomes de définition d'un système Hamiltonien généralisé. Ainsi, une formulation Hamiltonienne plus moderne d'un fluide parfait en coordonnées eulériennes est basée uniquement sur la définition d'un crochet de Poisson qui remplit certaines propriétés sans référence à un principe variationnel quelconque. D'un point de vue important pour notre travail, cette approche a permis, notamment, de clarifier la définition de l'énergie potentielle disponible [124] d'un fluide parfait stratifié. D'autres propriétés des fluides géophysiques dans leur formulation Hamiltonienne sont abordées par la revue de Shepherd 1993 [124]. Dans la prochaine section, nous introduisons la description Hamiltonienne généralisée du fluide parfait.

### A.3 Dynamique Hamiltonienne généralisée

Un développement rigoureux de cette théorie fait appel à la géométrie différentielle et à la théorie des groupes de Lie. Une introduction moderne au sujet est donnée dans le livre de Marsden et Ratiu [83]. Cette approche a aussi connu une popularisation en dynamique des fluides géophysiques au début des années 90 et plusieurs travaux [124], [122], [117] exposent cette approche dans un langage aussi proche que possible de celui du physicien. La revue de Morrison 1998 [95] décrit plus particulièrement le fluide parfait Hamiltonien et établit le lien avec l'approche plus abstraite des groupes continus. Nous avons basé cette introduction sur ces travaux.

#### A.3.1 Systèmes discrets

On considère un système discret à  $N$  degrés de liberté, de coordonnées généralisées  $\{q^i(t)\}_{i=1,\dots,N}$  dans l'espace des configurations. Les degrés de libertés peuvent par exemple correspondre aux différentes coordonnées d'un système de points matériels. La dérivée temporelle des coordonnées donne les vitesses généralisées  $\{\dot{q}^i(t)\}_{i=1,\dots,N}$ . On définit le Lagrangien  $L(q^i, \dot{q}^i, t)$  par la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système. Les équations du mouvement d'Euler-Lagrange sont alors obtenues par le principe de Hamilton

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^i, \dot{q}^i, t) = 0 \quad (\text{A.1})$$

où  $t_1$  et  $t_2$  définissent l'intervalle de temps au cours duquel le principe est appliqué. On peut aussi considérer la dynamique dans l'espace des phases défini par les  $2N$  coordonnées fonctions du temps  $\{q^i(t), p_i(t)\}$ , où  $p_i = \partial L / \partial \dot{q}^i$ . Si la transformation des coordonnées  $\{q^i(t), \dot{q}^i(t)\}$  vers les coordonnées de l'espace des phases n'est pas singulière, la transformation de Legendre, permettant la construction du Hamiltonien  $H$ , est bien définie

$$H(q^i, p_i) = p_i \dot{q}^i - L(q^i, \dot{q}^i). \quad (\text{A.2})$$

Les équations de Hamilton se déduisent alors du principe de la moindre action

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}^i - H) dt = 0 \quad (\text{A.3})$$

et s'écrivent

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \quad (\text{A.4})$$

Ces équations sont les équations canoniques Hamiltoniennes et représentent la forme la plus simple des équations dynamiques d'un système Hamiltonien. La plupart des systèmes Hamiltoniens, dans un sens qu'il nous reste à définir, ne possèdent pas de forme canonique.

On montre que pour un système Hamiltonien, chaque propriété de symétrie du Hamiltonien correspond à une intégrale du mouvement du système [41]. Ceci est un corollaire du théorème de Nöther. Ainsi, une invariance temporelle du Hamiltonien correspond à la conservation de l'énergie totale du système, tandis que l'invariance d'une coordonnée  $q_i$  correspond à la conservation du moment conjugué  $p_i$ .

On définit le crochet de Poisson pour deux fonctions  $F(q, p)$  et  $G(q, p)$ , où  $(q, p)$  désigne les coordonnées de l'espace des phases, par

$$\{F, G\}_c = \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q^i}. \quad (\text{A.5})$$

Les équations canoniques (A.4) peuvent alors être mises sous la forme

$$\frac{dq^i}{dt} = \{p_i, H\}_c, \quad \frac{dp_i}{dt} = \{q^i, H\}_c \quad (\text{A.6})$$

et l'équation générale du mouvement pour une fonction  $F(q, p, t)$  est donnée par

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\}_c. \quad (\text{A.7})$$

On obtient une forme particulièrement importante des équations du mouvement en définissant les coordonnées

$$z = (z^1, z^2, \dots, z^{2N}) = (q^1, q^2, \dots, q^N, p_1, p_2, \dots, p_N). \quad (\text{A.8})$$

Dans ces coordonnées les équations canoniques ont la forme suivante

$$\frac{dz^i}{dt} = \{z^i, H\}_c \quad (\text{A.9})$$

$$= J_c^{ij} \frac{\partial H}{\partial z^j}. \quad (\text{A.10})$$

Nous avons introduit le tenseur cosymplectique d'ordre deux contravariant,  $J_c^{ij}$  qui prend la forme simple

$$J_c = \begin{bmatrix} 0 & I_N \\ -I_N & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

La formulation faisant intervenir le tenseur cosymplectique est la formulation symplectique. A l'aide du tenseur  $J_c^{ij}$  le crochet de Poisson général (A.5) s'écrit aussi

$$\{F, G\}_c = \frac{\partial F}{\partial z^i} J_c^{ij} \frac{\partial G}{\partial z^j} \quad (\text{A.12})$$



A ce stade, nous pouvons introduire le point de vue plus général des systèmes Hamiltoniens. On considère toujours la dynamique d'un ensemble de  $2N$  coordonnées dans un espace des phases muni d'un tenseur cosymplectique ou de façon équivalente d'un crochet de Poisson.

$$\frac{dz^i}{dt} = J^{ij} \frac{\partial H}{\partial z^j} \quad (\text{A.13})$$

Le système est Hamiltonien si le tenseur cosymplectique est non singulier, anti-symétrique et s'il vérifie l'identité de Jacobi

$$\det(J^{ij}) \neq 0 \quad (\text{A.14})$$

$$J^{ij} = -J^{ji} \quad (\text{A.15})$$

$$J^{im} \frac{\partial J^{jk}}{\partial z^m} + J^{km} \frac{\partial J^{ij}}{\partial z^m} + J^{jm} \frac{\partial J^{ki}}{\partial z^m} = 0. \quad (\text{A.16})$$

De façon équivalente, le crochet de Poisson doit vérifier

$$\{F, G\} \neq 0 \quad (\text{A.17})$$

$$\{F, G\} = -\{G, F\} \quad (\text{A.18})$$

$$\{F, \{G, K\}\} + \{G, \{K, F\}\} + \{K, \{F, G\}\} = 0. \quad (\text{A.19})$$

pour trois fonctions  $F, G, K$  de l'espace des phases dans l'ensemble des nombres réels. On se donne de plus une fonction particulière, le Hamiltonien  $H(z^i, t)$ . La dynamique d'une fonction quelconque est alors donnée par

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\}. \quad (\text{A.20})$$

La dynamique du système est donnée, comme pour le cas du système canonique par

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} = \frac{\partial F}{\partial z^i} J^{ij} \frac{\partial G}{\partial z^j}. \quad (\text{A.21})$$

Les équations canoniques écrites dans leur forme symplectique (A.9) vérifient ces trois propriétés et dans ce cas la forme du tenseur  $J$  est la forme la plus simple et la plus symétrique. Néanmoins, on peut aussi utiliser des coordonnées différentes, ce qui peut avoir l'avantage de produire une forme plus simple du Hamiltonien. En général, le crochet de Poisson et le tenseur cosymplectique sont alors des fonctions des coordonnées de l'espace de phases. On montre que la transformation de coordonnées  $\bar{z}^i = \bar{z}^i(z)$  conserve les propriétés (A.15) et (A.16), mais ne conserve la propriété (A.14), qu'à condition que la transformation de coordonnées elle-même ne soit pas singulière; le Jacobien de la transformation ne doit pas s'annuler

$$\det \left( \frac{\partial \bar{z}^i}{\partial z^j} \right) \neq 0. \quad (\text{A.22})$$

Pour le moment, nous considérons seulement des transformations non-singulières. Pour ce type de système, vérifiant (A.15-A.16), le théorème de Darboux montre qu'il est toujours possible d'effectuer (au moins localement) une transformation de coordonnées, dont les équations du mouvement

résultantes ont la forme canonique (A.13) et où le tenseur cosymplectique est donné par l'expression (A.11). Remarquons que la forme canonique du tenseur cosymplectique,  $J^{ij}$ , est analogue à la forme que prend le tenseur métrique,  $g_{ij}$ , dans un espace Euclidien. Lorsque ce tenseur est non singulier, symétrique et implique une courbure de l'espace nulle, on peut introduire des coordonnées cartésiennes dans l'espace. Dans un tel espace, toutes les coordonnées cartésiennes sont reliées entre elles par des transformations orthogonales. Ainsi les transformations canoniques dans un espace des phases muni d'un tenseur cosymplectique sont analogues aux rotations rigides dans un espace Euclidien.

A présent, nous considérons des transformées de coordonnées singulières et plus généralement des systèmes ayant un tenseur cosymplectique singulier,  $\det(J^{ij}) \neq 0$ . Une transformation de coordonnées est singulière lorsqu'elle transforme un ensemble de coordonnées en un sous-ensemble de ces coordonnées ou vers un plus petit ensemble de coordonnées. Ce type d'opération s'appelle opération de réduction. Un système décrit par un tenseur cosymplectique singulier, mais vérifiant néanmoins les propriétés (A.15) et (A.16) est dit système Hamiltonien non-canonique ou système de Poisson [83]. On ne peut donc plus appliquer le théorème de Darboux, ni trouver de base canonique pour le système. Par contre, un théorème dû à Lie établit que le tenseur cosymplectique d'un système non-canonique dans un espace des phases à  $2N$  dimensions, peut être mis, du moins localement, sous la forme

$$J_c = \begin{bmatrix} 0_N & I_N & 0 \\ -I_N & 0_N & 0 \\ 0 & 0 & 0_{M-2N} \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

où  $M > 2N$ . Ainsi, chaque point de l'espace des phases de dimension  $M$  est aussi dans un espace des phases Hamiltonien régulier de dimension  $2N < M$ . Ces hypersurfaces sont appelées feuilles symplectiques. Une conséquence fondamentale de la singularité du tenseur cosymplectique est qu'une classe d'invariants supplémentaire est impliquée dans l'espace des phases. En effet, supposons que le corang du tenseur  $J^{ij}$  soit  $K$ , où  $K \leq M - 2N$ . On peut alors montrer qu'il existe  $K$  vecteurs propres générant le noyau du tenseur cosymplectique. De plus, on montre qu'une base du noyau est donnée par les gradients dans l'espace des phases, de  $K$  fonctions scalaires,  $C^\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, K$ , les Casimirs, de telle façon que l'on ait

$$J^{ij} \frac{\partial C^\alpha}{\partial z^j} = 0. \quad (\text{A.24})$$

Par définition de l'équation du mouvement d'une fonction des coordonnées de l'espace des phases, on a

$$\begin{aligned} \frac{dC^\alpha}{dt} &= \frac{\partial C^\alpha}{\partial z^i} \frac{dz^i}{dt} \\ &= \frac{\partial C^\alpha}{\partial z^i} J^{ij} \frac{\partial H}{\partial z^j} \\ &= \frac{\partial H}{\partial z^i} J^{ij} \frac{\partial C^\alpha}{\partial z^j} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

où on utilise la propriété d'anti-symétrie de  $J^{ij}$ . Ce résultat est équivalent à

$$\{C^\alpha, H\} = 0. \quad (\text{A.26})$$

Un Casimir annule donc le crochet de Poisson avec le Hamiltonien  $H$ . Plus généralement, on a encore

$$\{C^\alpha, F\} = 0 \quad (\text{A.27})$$

pour toute fonction  $F$ .

D'un point de vue géométrique, le système évolue donc dans un espace des phases Hamiltonien régulier de dimension  $2N$ , mais possède aussi  $M - 2N$  coordonnées extérieures. Cet espace des phases est une hypersurface de l'espace des phases complet et s'appelle feuille symplectique. Une feuille symplectique de dimension  $2N$  est donc l'intersection des surfaces de dimension  $M - 2N$  correspondant à  $C^\alpha = \text{constant}$ ,  $\alpha = 1, \dots, M - 2N$  dans l'espace des phases. La dynamique générée par le Hamiltonien d'un système initialement sur une feuille ayant  $C^\alpha = \text{constant}$  reste confinée à cette feuille.

Remarquons qu'un système canonique ne possède pas de Casimirs non triviaux, puisque la condition (A.24) implique que  $\partial C / \partial z^i = 0$ , pour tout  $i = 1, \dots, 2N$ . Les Casimirs sont donc des constantes dans l'espace des phases. La description Hamiltonienne non-canonique est généralement impliquée dans une transformation de coordonnées canoniques vers un ensemble de coordonnées réduit. On peut alors montrer que les Casimirs sont les quantités conservées associées aux symétries permettant la réduction des coordonnées canoniques vers les coordonnées non canoniques.

Avant d'étudier le cas des systèmes continus, nous résumons les propriétés d'un système Hamiltonien. Celui-ci est constitué d'un espace des phases muni d'un opérateur bilinéaire, le crochet de Poisson (ou d'un tenseur cosymplectique d'ordre deux) et d'une fonction scalaire, le Hamiltonien  $H$ . Le crochet de Poisson satisfait toujours aux propriétés (A.18) et (A.19). Lorsque le crochet de Poisson est singulier, il existe un ensemble de fonctions de Casimir  $C$  qui annulent le crochet de Poisson  $\{C, F\} = 0$  pour toute fonction  $F$  et en particulier pour le Hamiltonien  $H$ ,  $\{C, H\} = 0$ . Les Casimirs sont donc des invariants du système.

### A.3.2 Systèmes continus

Considérons à présent les systèmes continus. Les variables définissant l'espace des phases d'un système discret deviennent alors des champs,  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ , fonctions de l'espace et du temps. Le symbole  $\mathbf{v}$  représente un vecteur de champs scalaires, comme par exemple les composantes du champ de vitesse et la densité d'un fluide. Les fonctions d'état de l'espace des phases discret,  $F, G, \dots$  deviennent des fonctionnelles d'état  $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \dots$  dépendant des champs, c'est-à-dire des applications de l'espace des fonctions  $\{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\}$  dans l'ensemble des nombres réels. La dérivation doit être remplacée par la dérivée fonctionnelle, que l'on définit par l'intermédiaire de la première variation de la fonctionnelle

$\mathcal{F}$

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{F}[\mathbf{v}, \delta\mathbf{v}] &\equiv \mathcal{F}[\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}] - \mathcal{F}[\mathbf{v}] \\ &= \left\langle \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\mathbf{v}}, \delta\mathbf{v} \right\rangle + O(\delta\mathbf{v}^2).\end{aligned}\tag{A.28}$$

La quantité  $\delta\mathcal{F}/\delta\mathbf{v}$  est la dérivée fonctionnelle et son calcul nécessite l'évaluation de l'expression entre crochets  $\langle, \rangle$ . Ce crochet correspond à un produit interne approprié défini sur l'espace des fonctions  $\{\mathbf{v}\}$  considéré. Dans le cas d'un fluide parfait décrit en coordonnées eulériennes, le produit interne correspondant est l'intégrale sur le volume du fluide ( $\mathbf{x}$  est le vecteur position d'une particule fluide) du produit scalaire de deux vecteurs. Soit donnée la fonctionnelle suivante

$$\mathcal{F}[\mathbf{v}] = \int_D d^3\mathbf{x} F(\mathbf{v}).\tag{A.29}$$

La variation première s'écrit

$$\delta\mathcal{F}[\mathbf{v}, \delta\mathbf{v}] = \int_D d^3\mathbf{x} \delta\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} F\tag{A.30}$$

et on a donc pour la dérivée fonctionnelle

$$\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\mathbf{v}} = \nabla_{\mathbf{v}} F.\tag{A.31}$$

Ce résultat se généralise facilement au cas d'une fonctionnelle dépendant de  $\mathbf{v}$  et de ses dérivées admissibles. On considère alors le système Hamiltonien généralisé suivant

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = J \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{v}}\tag{A.32}$$

où  $J$  est un opérateur anti-symétrique, appelé forme cosymplectique, qui satisfait l'identité de Jacobi généralisée au cas des systèmes continus. A nouveau, la dynamique d'une fonctionnelle  $\mathcal{F}$  est donnée par le crochet de Poisson avec le Hamiltonien  $\mathcal{H}$

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \{\mathcal{F}, \mathcal{H}\}.\tag{A.33}$$

Il est défini par

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} = \left\langle \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\mathbf{v}}, J \frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\mathbf{v}} \right\rangle.\tag{A.34}$$

Dans le cadre du fluide parfait, le produit interne de deux fonctionnelles,  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  se calcule comme suit

$$\left\langle \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\mathbf{v}}, J \frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\mathbf{v}} \right\rangle = \int_D d^3\mathbf{x} \sum_{i,j} \left( \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta v^i} J^{ij} \frac{\delta\mathcal{G}}{\delta v^j} \right)\tag{A.35}$$

et les  $J^{ij}$  représentent les éléments d'une matrice. Démontrons l'équivalence entre (A.33) et (A.32). On suppose que (A.32) tienne. Alors

$$\begin{aligned}\{\mathcal{F}, \mathcal{H}\} &= \left\langle \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mathbf{v}}, J \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mathbf{v}}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right\rangle \\ &= \frac{d\mathcal{F}}{dt}\end{aligned}\tag{A.36}$$

où la dernière égalité résulte de l'application de la règle de composition de la dérivation fonctionnelle. Inversement supposons que (A.33) soit vérifiée et prenons pour  $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F}[\mathbf{v}] = v^i(\mathbf{x}_0) = \int_D d^3\mathbf{x} \delta_{\mathbf{x}_0} v^i(\mathbf{x})\tag{A.37}$$

pour un quelconque  $\mathbf{x}_0$  dans  $D$  et où  $\delta_{\mathbf{x}_0}$  est la distribution de Dirac décalée en  $\mathbf{x}_0$ . La variation première de  $\mathcal{F}$  et la dérivée fonctionnelle s'écrivent alors

$$\delta \mathcal{F} = \int_D d^3\mathbf{x} \delta_{\mathbf{x}_0} \delta v^i(\mathbf{x}), \quad \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta v^j} = \delta_{\mathbf{x}_0} \delta_{ij}\tag{A.38}$$

et où  $\delta_{ij}$  est le delta de Kronecker. A partir de (A.33) on a alors

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{\partial v^i}{\partial t}(\mathbf{x}_0) = \left\langle \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mathbf{v}}, J \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} \right\rangle \langle \delta_{\mathbf{x}_0} \delta_{ij}, \left( J \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} \right)^j \rangle = J^{ij} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta v^j}(\mathbf{x}_0)\tag{A.39}$$

ce qui prouve que (A.32) est vérifiée pour chaque composante du vecteur des champs définissant l'espace des phases individuellement.

Enfin remarquons que les Casimirs du système sont des fonctionnelles et sont obtenus par la considération de leur relation de définition

$$J \frac{\delta \mathcal{C}}{\delta \mathbf{v}} = 0.\tag{A.40}$$

L'ensemble des vecteurs  $\delta \mathcal{C} / \delta \mathbf{v}$  est une base du noyau de l'opérateur  $J$ .

## A.4 Applications en mécanique des fluides

### A.4.1 Application au fluide parfait compressible

On peut procéder de différentes façons pour obtenir le crochet de Poisson non canonique du fluide parfait compressible. Une approche consiste à utiliser la description Hamiltonienne canonique en coordonnées eulériennes. Dans cette description le champ de vitesse est composé de quatre termes impliquant des fonctions scalaires et leur gradients. Ces variables constituent les variables de Clebsch généralisées. Comme le système est canonique, le crochet de Poisson correspondant est l'extension au cas continu de la forme (A.5) du crochet d'un système discret canonique. La substitution des variables usuelles du fluide parfait  $\mathbf{v} = (\mathbf{u}, \rho, \eta)$  dans le crochet de Poisson canonique, produit un

crochet de Poisson fermé, ne faisant intervenir que les cinq variables citées, Zakharov 1997 [147]. La substitution produit donc une réduction de l'espace des phases. Comme le fluide parfait général en coordonnées eulériennes est décrit par cinq champs, un nombre impair, sa description Hamiltonienne est forcément non canonique. Dans une deuxième approche, on peut préférer dériver le crochet de Poisson directement à partir du crochet du système Hamiltonien canonique en coordonnées lagrangiennes. Ceci est possible en principe, mais très laborieux [122], [117].

Nous avons dit plus haut que les Casimirs sont associés aux symétries du système permettant la transformation et la réduction d'un ensemble de coordonnées vers un autre ensemble. Vu sous cet angle, la transformation du système du fluide parfait des coordonnées lagrangiennes vers les coordonnées eulériennes est possible, parce que la description lagrangienne est invariante par l'opération qui consiste à échanger les étiquettes des particules fluides. Cette propriété de symétrie est appelée la propriété de symétrie d'échange des étiquettes des particules fluides. Il semble que son importance ait été comprise pour la première fois entièrement par Salmon 1982 [115], mais des travaux plus anciens y font également allusion. Les Casimirs associés à cette propriété de symétrie correspondent à la vorticité et plus généralement à la vorticité potentielle conservée par un fluide d'une certaine spécificité thermodynamique. La revue de Müller 1995 [98] explicite ces quantités vorticales conservées en fonction du nombre de variables thermodynamiques requises pour décrire un fluide complexe. Enfin, nous avons connaissance d'une troisième approche pour obtenir le crochet de Poisson: Goncharov et Pavlov 1997 [42] montrent que l'on peut construire les crochets de Poisson élémentaires, définissant ainsi la forme cosymplectique  $J$ , par des arguments de symétrie simple. Cette méthode constitue une façon déductive de parvenir à l'expression du crochet de Poisson. Elle est moins laborieuse que la méthode consistant à opérer la réduction sur le crochet de Poisson canonique en coordonnées lagrangiennes. Pour les fluides considérés, nous nous contentons de poser les formules en indiquant leur provenance. Ainsi, la forme du crochet de Poisson non canonique pour le fluide parfait compressible est donné par Morrison et Greene 1982 [96]

$$\begin{aligned} \{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} = \int_D d^3\mathbf{x} & \left[ \frac{\nabla \times \mathbf{u}}{\rho} \cdot \left( \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mathbf{u}} \times \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \mathbf{u}} \right) - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \rho} \nabla \cdot \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \mathbf{u}} + \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \rho} \nabla \cdot \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mathbf{u}} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\rho} \nabla \eta \cdot \left( \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mathbf{u}} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \eta} - \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \mathbf{u}} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \eta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

On voit que le crochet est beaucoup plus compliqué que le crochet d'un système canonique. Par contre, le Hamiltonien est très simple et correspond à l'énergie totale par unité de volume

$$\mathcal{H} = \int_D d^3\mathbf{x} \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 + \rho e(\rho, \eta) + \rho g z \right). \quad (\text{A.42})$$

Les dérivées fonctionnelles du Hamiltonien sont quant à elles données par les expressions

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{u}} = \rho \mathbf{u} \quad (\text{A.43})$$

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \eta} = \rho \frac{\partial e}{\partial \eta} \quad (\text{A.44})$$

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \rho} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + g z + \frac{\partial \rho e}{\partial \rho}. \quad (\text{A.45})$$

On vérifie ainsi facilement que le crochet de Poisson reproduit correctement les équations du fluide parfait compressible exposées au chapitre 1.

#### A.4.2 Application au fluide parfait incompressible

Nous avons vu au chapitre 1 que l'approximation de Boussinesq, ainsi que le modèle de fluide parfait incompressible, occupent une place particulière dans la hiérarchie des modèles de fluide. Cela tient au fait que la pression du fluide de ces deux modèles n'est pas la pression thermodynamique. En effet, ces modèles ne possèdent pas d'équation spécifique déterminant la pression. La seule quantité importante est le gradient de pression, qui assure simplement la non divergence du champ des vitesses. Au niveau de la formulation Hamiltonienne, cette propriété des écoulements non divergents connaît d'importantes répercussions. Elle apparaît comme une contrainte extérieure qu'il faut imposer explicitement au formalisme à partir duquel on désire dériver les équations du mouvement. Dans le cas d'une formulation variationnelle, la pression est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de conservation de la masse volumique d'une particule fluide [68].

Dans l'espace de Fourier, l'élimination de la pression des équations de Navier-Stokes montre que l'opérateur quadratique résultant est la partie perpendiculaire à un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  de l'opérateur quadratique des équations de Navier-Stokes  $(\widehat{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}})_{\mathbf{k}}$ . Le gradient de pression soustrait la partie divergente de l'opérateur quadratique au bilan de la quantité de mouvement. La formulation Hamiltonienne non-canonique du fluide parfait incompressible a été donnée par Arnol'd 1966 [5] d'un point de vue des groupes de Lie. Le Hamiltonien du fluide ( $\rho = 1$ ) et sa dérivée fonctionnelle selon le champ de vitesse sont donnés par

$$\mathcal{H} = \int_D d^3\mathbf{x} \frac{1}{2} \mathbf{u}^2, \quad \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{u}} = \mathbf{u}. \quad (\text{A.46})$$

Le crochet de Poisson possède un certain nombre de formes équivalentes

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} = \int_D d^3\mathbf{x} \mathbf{u} \cdot \left[ \left( \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \mathbf{u}} \cdot \nabla \right) \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mathbf{u}} - \left( \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mathbf{u}} \cdot \nabla \right) \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \mathbf{u}} \right] \quad (\text{A.47})$$

$$= \int_D d^3\mathbf{x} \left[ (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \left( \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mathbf{u}} \times \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \mathbf{u}} \right) \right]. \quad (\text{A.48})$$

La contrainte d'incompressibilité est imposée au crochet en redéfinissant la dérivation fonctionnelle non divergente  $\delta \mathcal{F} / \delta \mathbf{u}$  par

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F} &= \left\langle \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mathbf{u}}, \delta \mathbf{u} \right\rangle \\ &= \int_D d^3\mathbf{x} \left( \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

définie pour tout champ de vecteur  $\delta \mathbf{u}$  non divergent. On obtient les équations du mouvement du fluide incompressible en utilisant le théorème de Helmholtz [1]. Selon ce dernier, on peut décomposer de façon unique tout champ de vecteurs  $\mathbf{A}$  sous la forme d'un champ de vecteurs non divergent et tangent aux frontières entourant le fluide et le gradient d'une fonction scalaire. Soit  $\mathbf{P}[\mathbf{A}]$  le

projecteur d'un champ de vecteurs  $\mathbf{A}$  sur sa partie non divergente parallèle aux parois entourant le domaine, alors on a pour l'opérateur quadratique dans les équations de Navier-Stokes

$$\mathbf{P}[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p \quad (\text{A.50})$$

où  $p$  est la pression du fluide. En tenant compte de cette relation dans le calcul du crochet de Poisson, on dérive immédiatement les équations de Navier-Stokes incompressibles.

Une autre approche consiste à partir du crochet de Poisson du fluide parfait compressible et à appliquer une méthode des systèmes Hamiltoniens contraints. Cette approche utilise un principe d'esclavage des variables rapides par les variables lentes du problème et une méthode de perturbation en fonction du (petit) nombre de Mach,  $Ma$ , des écoulements considérés (voir Bokhove 1998 [11]). Au premier ordre dans le schéma de perturbation, les variables lentes sont données par la vortacité  $\boldsymbol{\xi}$ , tandis que les variables rapides sont données par la densité  $\rho$  et la divergence  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  du champ des vitesses.

Quelque soit la formulation utilisée, la règle de composition de la dérivation fonctionnelle permet d'écrire le crochet de Poisson entièrement en termes de la vortacité du fluide. Pour  $\boldsymbol{\xi} = \nabla \times \mathbf{u}$  on considère une fonctionnelle  $\bar{\mathcal{F}}[\boldsymbol{\xi}]$  de la variable  $\boldsymbol{\xi}$ , puis la même fonctionnelle, notée  $\mathcal{F}[\mathbf{u}]$ , de la variable définie par le rotationnel de  $\mathbf{u}$

$$\begin{aligned} \delta \bar{\mathcal{F}}[\boldsymbol{\xi}] &= \int_D d^3 \mathbf{x} \frac{\delta \bar{\mathcal{F}}}{\delta \boldsymbol{\xi}} \cdot \delta \boldsymbol{\xi} = \int_D d^3 \mathbf{x} \frac{\delta \bar{\mathcal{F}}}{\delta \boldsymbol{\xi}} \cdot (\nabla \times \delta \mathbf{u}) \\ &= \int_D d^3 \mathbf{x} \nabla \cdot \left( \delta \mathbf{u} \times \frac{\delta \bar{\mathcal{F}}}{\delta \boldsymbol{\xi}} \right) + \int_D d^3 \mathbf{x} \left( \nabla \times \frac{\delta \bar{\mathcal{F}}}{\delta \boldsymbol{\xi}} \right) \cdot \delta \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

où la contribution de l'intégrale de surface est nulle, parce que les deux champs de vecteurs sont tangents aux frontières et que par conséquent leur produit vectoriel est nul. Par ailleurs, on a

$$\delta \mathcal{F}[\mathbf{u}] = \int_D d^3 \mathbf{x} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u}. \quad (\text{A.52})$$

Le lemme de Dubois-Raymond permet alors d'identifier les dérivées fonctionnelles de ces expressions à condition que  $\delta \mathbf{u}$  soit arbitraire. On a donc

$$\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mathbf{u}} = \nabla \times \frac{\delta \bar{\mathcal{F}}}{\delta \boldsymbol{\xi}}. \quad (\text{A.53})$$

et le crochet de Poisson possède aussi la forme alternative

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} = \int_D d^3 \mathbf{x} \boldsymbol{\xi} \cdot \left[ \left( \nabla \times \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \boldsymbol{\xi}} \right) \times \left( \nabla \times \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \boldsymbol{\xi}} \right) \right], \quad (\text{A.54})$$

où le champ de vecteur  $\boldsymbol{\xi} = \nabla \times \mathbf{u}$  est la vortacité du fluide. On conclut de cette dernière expression du crochet de Poisson que la vortacité du fluide suit l'équation du mouvement

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} = \{\boldsymbol{\xi}, \mathcal{H}\} \quad (\text{A.55})$$



et que ce système est Hamiltonien. On gagne à utiliser la vorticité comme variable de l'écoulement. En effet, la relation bijective connectant le champ de vorticité et le champ de vitesse du fluide assure automatiquement que le champ de vitesse obtenu pour une distribution de vorticité donnée avec des conditions aux limites appropriées (voir Batchelor 1967 [7]) est non divergent. Dans ce qui suit, nous généralisons la description Hamiltonienne généralisée au cas de l'approximation de Boussinesq en utilisant la vorticité et la densité comme variables dépendantes.

### A.4.3 Application au fluide parfait stratifié dans l'approximation de Boussinesq

A présent nous donnons la formulation Hamiltonienne du fluide parfait de Boussinesq. Ce problème a été traité en utilisant les variables primitives de l'approximation de Boussinesq par Abarbanel et al 1986 [1]. Nous donnons ici un traitement différent en nous inspirant du travail de Benjamin 1984 pour un fluide incompressible. Nous étendons les résultats de Benjamin au cas avec stratification.

#### Formulation Hamiltonienne

Rappelons brièvement les variables eulériennes utilisées dans l'approximation de Boussinesq. Au niveau thermodynamique la compressibilité adiabatique mise en jeu dans un écoulement incompressible est nulle et l'énergie interne est découplée de l'énergie mécanique. L'équation de continuité se simplifie en  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  et la conservation matérielle de l'entropie est remplacée par la conservation matérielle de la densité. Les champs eulériens du fluide sont donc  $\mathbf{v} = (\mathbf{u}, \rho)$ . D'après ce que nous avons dit à la sous-section précédente pour les écoulements non divergents, la donnée du champ de vorticité est équivalente à la donnée du champ de vitesse au gradient d'une fonction scalaire près, dont le rotationnel est toujours nul. Nous utilisons donc les variables dépendantes

$$\mathbf{v} = (\boldsymbol{\xi}, \rho^*)^T = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \rho^*)^T \quad (\text{A.56})$$

où on a défini la densité réduite totale par analogie avec les fluctuations de densité réduite utilisées dans les simulations numériques par

$$\rho^* = \frac{g}{\rho_0} \rho. \quad (\text{A.57})$$

Introduisons le potentiel vecteur auxiliaire  $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}, t)$  dont on dérive le champ de vitesse  $\mathbf{u}$  par application de l'opérateur rotationnel

$$\mathbf{u} = -\nabla \times \boldsymbol{\Psi}. \quad (\text{A.58})$$

Cette fonctionnelle vectorielle est choisie à divergence nulle,  $\nabla \cdot \boldsymbol{\Psi} = 0$  et est aussi reliée à la vorticité par

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi} &= -\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\Psi} \\ &= \nabla^2 \boldsymbol{\Psi} - \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\Psi}) = \nabla^2 \boldsymbol{\Psi}. \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

On a l'égalité suivante

$$\frac{1}{2}\mathbf{u}^2 = \frac{1}{2}\nabla \cdot (\Psi \times \mathbf{u}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi} \cdot \Psi \quad (\text{A.60})$$

pour l'énergie cinétique spécifique. On peut donc considérer le Hamiltonien suivant

$$\mathcal{H} = \int_D d^3\mathbf{x} \left( -\frac{1}{2}\Psi \cdot \boldsymbol{\xi} + \rho^* z \right) \quad (\text{A.61})$$

parce que le terme faisant intervenir la divergence ne contribue pas à l'intégrale de volume définissant le Hamiltonien. Les dérivées fonctionnelles du Hamiltonien sont simplement données par

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} = \left( \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \boldsymbol{\xi}}, \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \rho^*} \right)^T = (-\Psi, z)^T. \quad (\text{A.62})$$

Posons le crochet de Poisson non canonique pour le système de Boussinesq en fonction des nouvelles variables

$$\begin{aligned} \{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} &= \int_D d^3\mathbf{x} \boldsymbol{\xi} \cdot \left[ \left( \nabla \times \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \boldsymbol{\xi}} \right) \times \left( \nabla \times \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \boldsymbol{\xi}} \right) \right] \\ &+ \int_D d^3\mathbf{x} \rho^* \left[ \left( \nabla \times \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \boldsymbol{\xi}} \right) \cdot \nabla \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \rho^*} - \left( \nabla \times \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \boldsymbol{\xi}} \right) \cdot \nabla \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \rho^*} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

Abarbanel et al 1986 [1] posent l'expression de ce crochet de Poisson pour le système de Boussinesq en fonction des variables  $\mathbf{v} = (\mathbf{u}, \rho)$ . Ce crochet est correct, mais il a porté à confusion dans la littérature [122]. En effet, les termes impliquant la densité sont différents dans le crochet de Poisson du système de Boussinesq et dans le crochet du fluide compressible. Ceci est à nouveau une particularité de l'approximation de Boussinesq, car en réalité les termes impliquant la densité dans le crochet de Poisson de Boussinesq résultent des termes impliquant l'entropie dans le crochet du fluide compressible. En effet, on sait que dans l'approximation de Boussinesq la densité est un invariant matériel de l'écoulement et qu'elle est proportionnelle à l'entropie du fluide. L'équation du mouvement pour une fonctionnelle sur l'espace des phases est donnée par le crochet de Poisson

$$\begin{aligned} \{\mathcal{F}, \mathcal{H}\} &= \int_D d^3\mathbf{x} \boldsymbol{\xi} \cdot \left[ \left( \nabla \times \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \boldsymbol{\xi}} \right) \times (\nabla \times \Psi) \right] \\ &+ \int_D d^3\mathbf{x} \rho^* \left[ (\nabla \times \Psi) \cdot \nabla \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \rho^*} - \left( \nabla \times \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \boldsymbol{\xi}} \right) \cdot \nabla z \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

Les équations d'Euler dans l'approximation Boussinesq se déduisent comme suit. On transforme les trois intégrants figurant dans le crochet de Poisson.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi} \cdot \left[ \left( \nabla \times \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \boldsymbol{\xi}} \right) \times (\nabla \times \Psi) \right] &= \left( \nabla \times \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \boldsymbol{\xi}} \right) \cdot [(\nabla \times \Psi) \times \boldsymbol{\xi}] \\ &= \nabla \cdot \left\{ \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \boldsymbol{\xi}} \times [(\nabla \times \Psi) \times \boldsymbol{\xi}] \right\} + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \boldsymbol{\xi}} \cdot \nabla \times [(\nabla \times \Psi) \times \boldsymbol{\xi}] \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

$$\rho^* (\nabla \times \Psi) \cdot \nabla \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \rho^*} = \nabla \cdot \left[ \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \rho^*} \rho (\nabla \times \Psi) \right] - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \rho^*} \nabla \cdot (\rho^* \nabla \times \Psi) \quad (\text{A.66})$$

et

$$-\rho^* \nabla z \cdot \left( \nabla \times \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \boldsymbol{\xi}} \right) = -\nabla \cdot \left( \rho^* \nabla z \times \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \boldsymbol{\xi}} \right) - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \boldsymbol{\xi}} \cdot \nabla \times \rho^* \nabla z. \quad (\text{A.67})$$

A ce stade, il faut noter que dans les travaux théoriques on s'affranchit la plupart du temps des intégrales de surface déterminées par les termes en divergence de ces trois intégrants, en supposant que les flux aux parois s'annulent. Nous en faisons de même ici. Remarquons cependant que la nullité de ces flux dépend des conditions aux limites du problème particulier considéré. Dans une application numérique où les conditions aux limites sont périodiques par exemple, ces flux peuvent ne pas être nul. Compte tenu de ce que les premiers termes des membres de droite de ces trois relations ont une contribution nulle lorsqu'on intègre sur le domaine du fluide, on a donc

$$\begin{aligned} \{\mathcal{F}, \mathcal{H}\} = & - \int_D d^3 \mathbf{x} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \boldsymbol{\xi}} \cdot \nabla \times [\boldsymbol{\xi} \times (\nabla \times \boldsymbol{\Psi})] \\ & + \int_D d^3 \mathbf{x} \left[ \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \rho^*} \nabla \cdot (\rho^* \nabla \times \boldsymbol{\Psi}) - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \boldsymbol{\xi}} \cdot \nabla \times \rho^* \nabla z \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

En substituant pour  $\mathcal{F}$  successivement les variables  $\xi^i(\mathbf{x}_0)$  et  $\rho^*(\mathbf{x}_0)$  on trouve immédiatement les équations du mouvement

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} = -\nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{u}) - \nabla \times \rho^* \mathbf{e}_3 \quad (\text{A.69})$$

et

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \rho^*. \quad (\text{A.70})$$

Notre dérivation est formellement équivalente à la dérivation utilisant directement comme variables  $\mathbf{v} = (\mathbf{u}, \rho^*)$ , d'Abarbanel et al 1986. La forme de l'équation pour la vorticité permet de repasser directement aux équations écrites avec les variables primitives en notant que l'équation pour  $\mathbf{u}$  est définie par l'équation de la vorticité au gradient d'une fonction scalaire  $P^*$ , la pression modifiée. En utilisant l'opérateur de projection  $\mathbf{P}$  on peut écrire

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\mathbf{P} [\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{u} + \rho^* \mathbf{e}_3] \quad (\text{A.71})$$

ou avec la pression modifiée  $P^* = p^* + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{u} - \nabla \left( p^* + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) - \rho^* \mathbf{e}_3 \quad (\text{A.72})$$

où  $p^* = p/\rho_0$ .

#### A.4.4 Remarques

Nous avons introduit trois crochets de Poisson au cours de cette section et nous avons affirmé qu'il définissent des systèmes Hamiltoniens généralisés. En principe il faut alors vérifier qu'ils vérifient la propriété d'antisymétrie et l'identité de Jacobi. Cela est bien le cas des crochets pour les fluides compressible et incompressible, comme démontré dans la littérature. Ajoutons finalement que la démonstration de la propriété d'antisymétrie est en général facile, tandis que la vérification de l'identité de Jacobi implique des calculs plus fastidieux.

# Bibliographie

- [1] H. D. I. Abarbanel, D. D. Holm, J. E. Marsden, and T. S. Ratiu. Nonlinear stability analysis of stratified fluid equilibria. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 318:349–409, 1986.
- [2] Ya. D. Afansyev and W. R. Peltier. The three-dimensionalization of stratified flow over two-dimensional topography. *J. Atmos. Sci.*, 55:19–39, 1998.
- [3] O. Andreassen, P. O. Hvidsten, D. C. Fritts, and S. Arendt. Vorticity dynamics in a breaking internal gravity wave. Part 1. Initial instability evolution. *J. Fluid Mech.*, 367:27–46, 1998.
- [4] O. Andreassen, C. E. Wasberg, D. C. Fritts, and J. R. Isler. Gravity wave breaking in two and three dimensions 1. Model description and comparison of two-dimensional evolution. *J. Geophys. Res.*, 99:8095–8108, 1994.
- [5] V. I. Arnold. Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension finie et ses applications à l’hydrodynamique des fluides parfaits. *Annl. Inst. Fourier Grenoble*, 16:319–361, 1966.
- [6] F. AUGER and P. FLANDRIN. Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by reassignment method. *IEEE Trans. on Acoust., Speech and Signal Proc.*, 43(5):1068–1089, May 1995.
- [7] G. K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- [8] G. K. Batchelor and J. M. Nitsche. Instability of stationary unbounded stratified fluid. *J. Fluid. Mech*, 227:357–391, 1991.
- [9] D. Benielli and J. Sommeria. Excitation of internal waves and stratified turbulence by parametric instability. *Dyn. Atmos. Oceans*, 23:335, 1996.
- [10] D. J. Benney. Non-linear gravity wave interactions. *J. Fluid Mech.*, 14:577–584, 1962.
- [11] O. Bokhove. Balanced models in geophysical fluid dynamics: Hamiltonian formulation, constraints and formal stability. In J. Norbury and I. Roulstone, editors, *The Mathematics of Atmosphere and Ocean Dynamics*, Isaac Newton Institute of Mathematical Sciences Volume. Cambridge University Press, submitted.

- [12] P. Bouruet-Aubertot, J. Sommeria, and C. Staquet. Breaking of standing internal gravity waves through two-dimensional instabilities. *J. Fluid Mech.*, 285:265, 1995.
- [13] P. Bouruet-Aubertot, J. Sommeria, and C. Staquet. Stratified turbulence produced by internal wave breaking: two-dimensional numerical experiments. *Dyn. Atmos. Oceans*, 23:357, 1996.
- [14] M.E. Brachet, D.I. Meiron, S.A. Orszag, B.G. Nickel, Morf R.H., and U. Frisch. Small-scale structure of the Taylor-Green vortex. *J. Fluid Mech.*, 130:411, 1983.
- [15] F. P. Bretherton. Resonant interactions between waves. The case of discrete oscillations. *J. Fluid Mech.*, 20:457–479, 1964.
- [16] F. P. Bretherton and C. J. R. Garrett. Wavetrains in inhomogeneous moving media. *Proc. Roy. Soc. A*, 302:529–554, 1968.
- [17] C. Calvin and F. Desprez. Minimizing communication overhead using pipelining for multi-dimensional FFT on distributed memory machines. In *Parallel Computing'93*. Elsevier Science Publisher, 1993.
- [18] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quateroni, and T.A. Zang. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer Verlag, Heidelberg, 1988.
- [19] G.F. Carnevale and G.K. Vallis. Pseudo-advective relaxation to stable states of inviscid two-dimensional fluids. *J. Fluid Mech.*, 213:549–571, 1990.
- [20] E.G. Cate and D.W. Twigg. ACM. *Transactions on Mathematical Software*, 3(1):104, 1977.
- [21] C. P. Caulfield and W. R. Peltier. Three dimensionalization of the stratified mixing layer. *Phys. Fluids*, 6:3803–3805, 1994.
- [22] H. R. Cho, T. G. Shepherd, and V. A. Vladimirov. Application of the direct Liapunov method to the problem of symmetric stability in the atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, 50:822–836, 1993.
- [23] A.D.D. Craik. *Wave Interactions and Fluid Flow*. Cambridge University Press, 1985.
- [24] R. E. Davis and A. Acrivos. The stability of oscillatory internal waves. *J. Fluid Mech.*, 30(4):723–736, 1967.
- [25] P.G. Drazin. On the parametric instability of an internal gravity wave. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 356:411, 1977.
- [26] A. Dubey, A. Malagoli, and F. Cattaneo. Parallel multidimensional FFT. [http://astro.uchicago.edu/Computing/On\\_Line/fft/fft.html](http://astro.uchicago.edu/Computing/On_Line/fft/fft.html).
- [27] A. Dubey, M. Zubair, and C. E. Grosch. A general purpose subroutine for fast Fourier transform on a distributed memory parallel machine. *Parallel Computing*, 20:1697–1710, 1994.

- [28] I. Dupays. Utilisation de MPI en décomposition de domaine. IDRIS/CNRS, [http://www.idris.fr/doc/docu/publication/Page\\_generale.html](http://www.idris.fr/doc/docu/publication/Page_generale.html), 1996.
- [29] J.H. Ferziger and M. Perić. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1995.
- [30] C.A.J. Fletcher. *Computational Techniques for Fluid Dynamics, 2 volumes*. Springer-Verlag, Heidelberg, 2 edition, 1991.
- [31] The MPI Forum. *The Message Passing Interface (MPI) standard 1.1 (2.0)*. <http://www.mcs.anl.gov/mpi/index.html>, 1994.
- [32] M. Frigo and S.G. Johnson. The fastest Fourier transform in the west. Technical Report LCS-TR-728, MIT, 1997. <http://www.theory.lcs.mit.edu/fftw>.
- [33] M. Frigo and S.G. Johnson. FFTW: An adaptative software architecture for the FFT. In *ICASSP*, 1998.
- [34] D. C. Fritts. Gravity wave saturation in the middle atmosphere: A review of theory and observations. *Rev. Geophys. and Space Phys.*, 22(3):275–308, 1984.
- [35] D. C. Fritts. A review of gravity wave saturation processes, effects and variability in the middle atmosphere. *Pure and Appl. Geophys.*, 130, 1989.
- [36] D. C. Fritts, S. Arendt, and O. Andreassen. Vorticity dynamics in a breaking internal gravity wave. Part 2. Vortex interactions and transition to turbulence. *J. Fluid Mech.*, 367:47–65, 1998.
- [37] D. C. Fritts and P. K. Rastogi. Convective and dynamical instabilities due to gravity wave motions in the lower and middle atmosphere: Theory and observations. *Radio Science*, 20(6):1247–1277, 1985.
- [38] D.C. Fritts, J.R. Isler, and O. Andreassen. Gravity wave breaking in two and three dimensions. 2. Three-dimensional evolution and instability structure. *J. Geophys. Res.*, 99(D4):8109–8123, 1994.
- [39] C. Garrett and W. Munk. Internal waves in the ocean. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 11:339–369, 1979.
- [40] A.E. Gill. *Atmosphere-Ocean Dynamics*. Academic Press, Orlando, 1982.
- [41] H. Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 2 edition, 1980.
- [42] V. P. Goncharov and V. I. Pavlov. Some remarks on the physical foundation of the Hamiltonian description of fluid motions. *Euro. J. Mech. B Fluids*, 16(4):509–555, 1997.

- [43] R. Grimshaw. Wave action and wave-mean flow interaction, with application to stratified shear flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, pages 11–44, 1984.
- [44] K. Hasselmann. On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 1: General theory. *J. Fluid Mech.*, 12:481–500, 1962.
- [45] K. Hasselmann. On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 2: Conservation theorems; wave-particle analogy; irreversibility. *J. Fluid Mech.*, 15:273–281, 1963.
- [46] K. Hasselmann. Feynman diagrams and interaction rules of wave-wave scattering processes. *Rev. Geophys.*, 4:1, 1966.
- [47] K. Hasselmann. A criterion for nonlinear wave stability. *J. Fluid Mech.*, 30:737, 1967.
- [48] P. H. Haynes and M. E. McIntyre. On the evolution of vorticity and potential vorticity in the presence of diabatic heating and frictional or other forces. *J. Atmos. Sci.*, 44(5):828–841, 1987.
- [49] P. H. Haynes and M. E. McIntyre. On the conservation and impermeability theorems for potential vorticity. *J. Atmos. Sci.*, 47:2021–2031, 1990.
- [50] F. S. Henyey. Choosing variables for internal wave dynamics. In P. Müller and D. Henderson, editors, *Dynamics of Oceanic Internal Gravity Waves*, Hawaiian Winter Workshop, pages 227–237. University of Hawaii at Manoa, 1991.
- [51] J. R. Herring and O. Métais. Numerical experiments in forced stably stratified turbulence. *J. Fluid Mech.*, 202:97–115, 1989.
- [52] D. Holliday and M. E. McIntyre. On potential energy density in an incompressible stratified fluid. *J. Fluid Mech.*, 107:221–225, 1981.
- [53] G. Holloway. Oceanic internal waves are not weak waves. *J. Phys. Oceanogr.*, 10:906–914, 1980.
- [54] G. Holloway. On interaction time scales of oceanic internal waves. *J. Phys. Oceanogr.*, 12:293–296, 1982.
- [55] G. Holloway. A conjecture relating oceanic internal waves and small-scale processes. *Atmosphere-Ocean*, 21(1):107–122, 1986.
- [56] G. Holloway. Considerations on the theory of temperature spectra in stably stratified turbulence. *J. Phys. Oceanogr.*, 16:2179, 1986.
- [57] G. Holloway. The buoyancy flux from internal gravity wave breaking. *Dyn. Atmos. Oceans*, 12:107, 1988.
- [58] D. D. Holm. Hamiltonian balance equations. *Physica D*, 98:379–414, 1996.

- [59] J. Holton. *An Introduction to Dynamic Meteorology*. Academic Press, New York, 3 edition, 1992.
- [60] J. R. Isler, D. C. Fritts, O. Andreassen, and C. E. Wasberg. Gravity wave breaking in two and three dimensions 3. Vortex breakdown and transition to isotropy. *J. Geophys. Res.*, 99:8125–8137, 1994.
- [61] J. Klostermeyer. On parametric instabilities of finite-amplitude internal gravity waves. *J. Fluid Mech.*, 119:367–377, 1982.
- [62] J. Klostermeyer. Parametric instabilities of internal gravity waves in boussinesq fluids with large reynolds numbers. *Geophys. Astrophys. Fluid. Dyn.*, 26:85, 1983.
- [63] J. Klostermeyer. Two and three-dimensional parametric instabilities in finite amplitude internal gravity waves. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 61:1, 1991.
- [64] C. Koudella and C. Staquet. Breaking progressive internal gravity waves: two-dimensional and preliminary three-dimensional numerical experiments. In P. A. Davies, editor, *Proceedings of the IMA conference on "Mixing and dispersion in stably-stratified flows"*, volume 68, pages 105–122. Oxford University Press, 1999.
- [65] C. R. Koudella. *Ondes internes de gravité: instabilités, déferlement et vorticit e potentielle*. PhD thesis,  cole Normale Sup erieure de Lyon, France, 1999.
- [66] C. R. Koudella and C. Staquet. Three-dimensional breaking progressive internal gravity waves. *in preparation*, 1999.
- [67] P. K. Kundu. *Fluid Mechanics*. Academic Press, New York, 1990.
- [68] C. Lanczos. *The Variational Principles of Mechanics*. Dover, New York, 1986.
- [69] L. D. Landau and E. M. Lifschitz. *Mechanics*, volume 1 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon Press, Oxford, 1976.
- [70] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*, volume 6 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon Press, Oxford, 1989.
- [71] P. H. Leblond and L. A. Mysak. *Waves in the Ocean*. Number 20 in Elsevier Oceanography Series. Elsevier Scientific Publishing Company, 1978.
- [72] S.K. Lele. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *J. Comp. Phys.*, 103:16, 1999.
- [73] M. P. Lelong and T. J. Dunkerton. Inertia-gravity wavesbreaking in three dimensions: 1. Convectively stable waves. *submitted to the Journal of Atmospheric Sciences*, 1997.



- [74] M. P. Lelong and T. J. Dunkerton. Inertia-gravity wavesbreaking in three dimensions: 2. convectively unstable waves. *submitted to the Journal of Atmospheric Sciences*, 1997.
- [75] M.-P. Lelong and J.J. Riley. Internal wave/vortical mode interactions in a stably stratified flow. *J. Fluid Mech.*, 232:1, 1991.
- [76] M. Lesieur. *Turbulence in Fluids*. Kluwer Academic Publishers, 3 edition, 1997.
- [77] M.J. Lighthill. *Waves in Fluids*. Cambridge University Press, 1978.
- [78] D.K. Lilly. Stratified turbulence and the mesoscale variability of the atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, 40:749–761, 1983.
- [79] P. N. Lombard. *The stability of finite amplitude internal gravity waves*. PhD thesis, University of Washington, 1994.
- [80] P.N. Lombard and J.J. Riley. Instability and breakdown of internal gravity waves. I. linear stability analysis. *Phys. Fluids*, 8(12):3271, 1996.
- [81] J. L. Lumley. The spectrum of nearly inertial turbulence in a stably stratified turbulence. *J. Atmos. Sci.*, 21:99–102, 1964.
- [82] Dewan. E. M. and R. E. Good. Saturation and the "universal" spectrum for vertical profiles of horizontal scalar winds in the atmosphere. *J. Geophys. Res.*, 91:2742–2748, 1986.
- [83] J. E. Marsden and T. Ratiu. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Springer Verlag, New York, 1995.
- [84] S. Martin, W. Simmons, and C. Wunsch. The excitation of resonant triads by single internal waves. *J. Fluid Mech.*, 53(1):17–44, 1972.
- [85] C. H. McComas. Non-linear interactions of internal gravity waves. *J. Geophys. Res.*, 82:1397–1412, 1977.
- [86] A.D. McEwan. Degeneration of resonantly-excited standing internal gravity waves. *J. Fluid Mech.*, 50:431, 1971.
- [87] A.D. McEwan, D.W. Mander, and R.K. Smith. Forced resonant second-order interaction between damped internal waves. *J. Fluid Mech.*, 55:589, 1972.
- [88] A.D. McEwan and R.A. Plumb. Off-resonant amplification of finite internal wave packets. *Dyn. Atmos. Ocean*, 2:83–105, 1977.
- [89] A.D. McEwan and R. M. Robinson. Parametric instability of internal gravity waves. *J. Fluid Mech.*, 67(4):667–687, 1975.

- [90] M. E. McIntyre and W. A. Norton. Dissipative wave-mean interactions and the transport of vorticity or potential vorticity. *J. Fluid Mech.*, 212:403–435, 1990.
- [91] M. E. McIntyre and W. A. Norton. Potential vorticity inversion on a hemisphere. *J. Atmos. Sci.*, submitted.
- [92] O. Métais and J. R. Herring. Numerical simulations of freely evolving turbulence in stably stratified fluids. *J. Fluid Mech.*, 202:117–148, 1989.
- [93] R.P. Mied. The occurrence of parametric instabilities in finite-amplitude internal gravity waves. *J. Fluid Mech.*, 78:763–784, 1976.
- [94] A. S. Monin. *Theoretical Geophysical Fluid Mechanics*. Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [95] P. J. Morrison. Hamiltonian description of the ideal fluid. *Rev. Mod. Phys.*, 70(2):467–521, april 1998.
- [96] P. J. Morrison and J. M. Greene. Noncanonical hamiltonian density formulation of hydrodynamics and ideal magnetohydrodynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 45:790–794, 1982.
- [97] D. E. Mowbray and S. H. Rarity. A theoretical and experimental investigation of the phase configuration of internal waves of small amplitude in a density stratified liquid. *J. Fluid Mech.*, 28(1):1–16, 1967.
- [98] P. Müller. Ertel’s potential vorticity theorem in physical oceanography. *Rev. Geophys.*, 33(1):67–97, 1995.
- [99] P. Müller, G. Holloway, F. Henyey, and N. Pomphrey. Nonlinear interactions among internal gravity waves. *Rev. Geophys.*, 24(3):493–536, 1986.
- [100] W. H. Munk. A survey of internal waves and small scale processes. In B. A. Warren and C. Wunsch, editors, *Evolution of Physical Oceanography*, pages 264–291. MIT Press, Cambridge, Mass., 1981.
- [101] A. M. Obukhov. On the dynamics of a stratified fluid. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 145(6):1239–1242, 1962. English transl. in *Soviet Physics Dokl.*, 7, 682–684.
- [102] D.J. Olbers. Nonlinear energy transfer and the energy balance of the internal wave field in the deep ocean. *J. Fluid Mech.*, 74:375, 1976.
- [103] S.A. Orszag. Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries. I. Galerkin (spectral) representations. *Stud. Appl. Maths.*, 50:293, 1971.
- [104] J. Pedlosky. *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer Verlag, New York, 1987.

- [105] O. M. Phillips. On the Bolgiano and Lumley-Schur theories of the buoyancy subrange. In A. M. Yaglom and V. I. Tatarski, editors, *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation*. Nauka, Moscow, 1965.
- [106] O. M. Phillips. Nonlinear dispersive waves. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, pages 93–110, 1974.
- [107] O. M. Phillips. Wave interactions - the evolution of an idea. *J. Fluid Mech.*, 106:215–227, 1981.
- [108] O.M. Phillips. *The dynamics of the upper ocean*. Cambridge University Press, 1966.
- [109] N. Pomphrey, J. D. Meiss, and K. M. Watson. Description of nonlinear internal gravity waves using Langevin methods. *J. Geophys. Res.*, 85:1085–1094, 1980.
- [110] W.H. Press, S.A. Teukolsky, and W.T. Vetterling. *Numerical Recipes in Fortran, The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, New York, 2 edition, 1992.
- [111] D. Ramsden and G. Holloway. Energy transfers across an internal wave-vortical mode spectrum. *J. Geophys. Res.*, 97:3659–3668, 1992.
- [112] M. Rieutord. *Une Introduction à la Mécanique des Fluides*. Masson, Paris, 1997.
- [113] J. J. Riley, R. W. Metcalfe, and M. A. Weissmann. Direct numerical simulations of homogeneous turbulence in density-stratified fluids. In B. J. West, editor, *Nonlinear Properties of Internal Waves*, number 76 in AIP Conference Proceedings. American Institute of Physics, New York, 1981.
- [114] R.S. Rogallo and Moin P. Numerical simulation of turbulent flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, page 99, 1984.
- [115] R. Salmon. Hamilton’s principle and Ertel’s theorem. In *AIP Conf. Proc.*, volume 88, pages 127–135, 1982.
- [116] R. Salmon. Hamiltonian fluid mechanics. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 20:225–256, 1988.
- [117] R. Salmon. *Lectures on Geophysical Fluid Dynamics*. Oxford University Press, New York, 1998.
- [118] B. F. Schutz. *Geometrical Methods of Mathematical Physics*. Cambridge University Press, 1980.
- [119] B.D. Semeraro. Parallel fast Fourier transforms for non power of two data. Unpublished.
- [120] C. Y. Shen and G. Holloway. A numerical study of the frequency and the energetics of nonlinear internal gravity waves. *J. Geophys. Res.*, 91:953–973, 1986.

- [121] T. G. Shepherd. A general method for finding extremal states of Hamiltonian dynamical systems, with applications to perfect fluids. *J. Fluid Mech.*, 213:573–587, 1990.
- [122] T. G. Shepherd. Symmetries, conservation laws, and Hamiltonian structure in geophysical fluid dynamics. *Adv. Geophys.*, 32:287–338, 1990.
- [123] T. G. Shepherd. Application of Hamiltonian theory to geophysical fluid dynamics. Technical Report WHOI-94-12, Woods Hole Oceanographic Institution, 1994. in Geometrical Methods in Fluid Dynamics, Proceedings of the 1993 GFD program at Woods Hole.
- [124] T. G. Shepherd. A unified theory of available potential energy. *Atmosphere Ocean*, pages 1–26, 31.
- [125] C. Sidi and F. Dalaudier. Temperature and heat flux spectra in the turbulent buoyancy subrange. *Pure Appl. Geophys.*, 130:547–569, 1989.
- [126] C. Staquet and J.J. Riley. On the velocity field associated with potential vorticity. *Dyn. Atmos. Oceans*, 14:93–123, 1989.
- [127] P.N Swarztrauber. Multiprocessor FFTs. *Parallel Computing*, 5:197, 1987.
- [128] L. Tennekes and J. Lumley. *A First Course in Turbulence*. MIT Press, 1972.
- [129] S. A. Thorpe. On wave interactions in stratified fluid. *J. Fluid Mech.*, 24:737–751, 1966.
- [130] S. A. Thorpe. The distortion of short internal waves produced by a long wave, with application to ocean boundary mixing. *J. Fluid Mech.*, 208:395–415, 1989.
- [131] S. A. Thorpe. The stability of statically unstable layers. *J. Fluid Mech.*, 260:315–331, 1994.
- [132] O. Thual. Zero-Prandtl-number convection. *J. Fluid Mech.*, 240:229 – 258, 1992.
- [133] I. Tolstoy. The theory of waves in stratified fluids including the effects of gravity and rotation. *Rev. Mod. Phys.*, 35(1):207–230, 1963.
- [134] D.J. Tritton. *Physical Fluid Dynamics*. Oxford University Press, Oxford, 2 edition, 1988.
- [135] J.S. Turner. *Buoyancy Effects in Fluids*. Cambridge University Press, 1979.
- [136] R. E. Uittenbogaard. *Observation and analysis of Random internal waves and the state of turbulence*. PhD thesis, Delft Hydraulics, 1994.
- [137] G. K. Vallis. Potential vorticity inversion and balanced equations for rotating and stratified flows. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 122:291–322, 1996.
- [138] G. K. Vallis, G. J. Shutts, and M. E. B. Gray. Balanced mesoscale motion and stratified turbulence forced by convection. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 123:1621–1652, 1997.

- [139] G.K. Vallis, G.F. Carnevale, and W.R. Young. Extremal energy properties and construction of stable solutions of the Euler equations. *J. Fluid Mech.*, 207:133–152, 1989.
- [140] D.W. Walker, P.H. Worley, and J.B. Drake. Parallelizing the spectral transform method, part ii. *Concurrency: Practice and Experience*, 4(7):509, 1992. <http://www.epm.ornl.gov/champp/pstswm>.
- [141] J. Weinstock. On the theory of temperature spectra in a stably stratified fluid. *J. Phys. Oceanogr.*, 15:475, 1985.
- [142] G. B. Whitham. *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley Interscience, 1974.
- [143] K. B. Winters and E. A. D’Asaro. Three-dimensional wave breaking near a critical level. *J. Fluid Mech.*, 272:255–284, 1994.
- [144] K. B. Winters, P. N. Lombard, J. J. Riley, and E. A. D’Asaro. Available potential energy and mixing in density-stratified fluids. *J. Fluid Mech.*, 289:115–128, 1995.
- [145] K. B. Winters and J. J. Riley. Instability of internal waves near a critical level. *Dyn. Atmos. Oceans*, 16:249–278, 1992.
- [146] M. D. Wurtele, R. D. Sharman, and A. Datta. Atmospheric lee waves. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, pages 429–476, 1996.
- [147] V. E. Zakharov and E. A. Kuznetsov. Hamiltonian formalism for nonlinear waves. *Physics-Usppekhi*, 40(11):1087–1116, 1997.



**Résumé :** Une étude numérique de la dynamique d'ondes internes de gravité en fluide stablement stratifié est menée. On décrit un algorithme pseudo-spectral parallèle permettant d'intégrer les équations de Navier-Stokes sur une machine parallèle. En deux dimensions d'espace, on analyse la dynamique d'un champ d'ondes internes propagatives, d'amplitude modérée et initialement plan et monochromatique. Le champ d'ondes est instable et déferle. Le déferlement produit une turbulence de petites échelles spatiales influencées par la stratification. L'étude est étendue au cas tridimensionnel, plus réaliste. En trois dimensions, on étudie le même champ d'ondes internes, que l'on perturbe par un bruit infinitésimal ondulatoire tridimensionnel, mais on considère des ondes statiquement stables et instables (grandes amplitudes). On montre que le déferlement d'une onde interne est un processus intrinsèquement tridimensionnel, y compris pour les ondes de faible amplitude. La tridimensionalisation du champ d'ondes s'opère dans les zones de l'espace où le champ de densité devient statiquement instable. L'effondrement gravitationnel d'une zone est de structure transverse au plan de propagation de l'onde. Les effets de la turbulence des petites échelles sur la production de la composante non propagatrice de l'écoulement, le mode de vortacité potentielle et la production d'un écoulement moyen, permet de conclure que seule une petite proportion de l'énergie mécanique initiale est convertie sous ses deux formes, la majeure partie étant dissipée par la dissipation visqueuse et conduction thermique. On reconsidère le mode de vortacité potentielle par une approche Hamiltonienne non-canonique du fluide parfait stratifié. La dérivation d'un système de dynamique modifiée permet d'étudier la relaxation d'un écoulement stratifié, conservant sa vortacité potentielle et sa densité, vers un état stationnaire d'énergie minimale, correspondant au mode de vortacité potentielle.

**Mots-clés :** fluide stratifié ; ondes internes de gravité ; instabilité hydrodynamique ; déferlement d'onde ; turbulence stratifiée ; vortacité potentielle ; dynamique Hamiltonienne non-canonique ; dynamique modifiée ; algorithme pseudo-spectral ; transformée de Fourier rapide parallèle.





**Abstract:** A numerical study of the dynamics of internal gravity waves in a stratified fluid is carried out. We describe a parallel pseudo-spectral algorithm allowing the integration of the Navier-Stokes equations on a parallel computer. In two spatial dimensions, we analyze the dynamics of an initially plane, monochromatic wave field of moderate amplitude. The wave field is unstable and breaks down, producing small scale turbulence influenced by stratification. The study is extended to the more realistic case of three spatial dimensions. In three dimensions, we study the same wave field, perturbed with wave-like three-dimensional random noise, but we investigate statically stable, as well as unstable waves (large amplitudes). It is shown that the internal wave breaking is an intrinsically three-dimensional process, even for small amplitude waves. Three-dimensionalisation of the wave field occurs in zones where the density field is statically unstable. The gravitational collapse of a zone has a transverse structure in the plane perpendicular to the initial wave plane. The effect of small scale turbulence on the production of the non propagating part of flow, the potential vorticity mode, and on the production of a mean flow, allows us to conclude, that solely a small fraction of the initial total energy is converted into these two forms, the main part of the energy being dissipated by viscous dissipation as well as by heat conduction. We reconsider the potential vorticity mode in the light of non-canonical Hamiltonian dynamics of a stratified fluid. The derivation of a system of modified dynamics allows the investigation of the relaxation of a stratified flow, conserving its potential vorticity and its density, toward a stationary state of minimal total energy, corresponding to the potential vorticity mode.

**Keywords:** stratified fluid ; internal gravity waves ; hydrodynamic instability ; wave breaking ; stratified turbulence ; potential vorticity ; non-canonical Hamiltonian dynamics ; modified dynamics ; pseudo-spectral algorithm ; parallel fast Fourier transform.