Algèbre de Hecke quasi-ordinaire universelle d'un groupe réductif

David Mauger

THÈSE DE DOCTORAT DE MATHÉMATIQUES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-NORD (PARIS 13)
Institut Galilée ———

Algèbre de Hecke quasi-ordinaire universelle d'un groupe réductif

David MAUGER

Soutenue le 26 septembre 2000 devant le jury composé de

Lawrence BREEN (Université Paris 13)
Henri CARAYOL (Université de Strasbourg 1)
Laurent CLOZEL (Université Paris 11), Président
Michael HARRIS (Université Paris 7)
Jacques TILOUINE (Université Paris 13), Directeur
Éric URBAN (Université Paris 13)

Au vu des rapports de

Henri CARAYOL (Université de Strasbourg 1)
Haruzo HIDA (University of California, Los Angeles)

David MAUGER
LAGA, Institut Galilée
Université Paris-Nord
93430 Villetaneuse
France
mauger@math.univ-paris13.fr

Classification mathématique par sujets. —
11F85(11F80,11G18,11R39)
Mots clefs. — Algèbres de Hecke, familles de Hida, quasi-ordinarité, anneaux de déformation, représentations galoisiennes.
Keywords. — Hecke algebras, Hida's families, near-ordinarity, deformation rings, Galois representations.

Toute ma gratitude s'adresse en premier lieu à Jacques Tilouine, qui a dirigé cette thèse. Toujours disponible, ses encouragements amicaux et ses conseils éclairants furent une aide précieuse.

Je tiens à exprimer mes remerciements à Lawrence Breen, Henri Carayol, Laurent Clozel, Michael Harris et Éric Urban pour avoir participé à mon jury.

Ma reconnaissance va encore à Henri Carayol et Haruzo Hida pour leur lecture détaillée de ce travail.

Je tiens particulièrement à remercier Ariane Mézard, Christophe Cornut et Ivan Marin pour leur soutien et leurs critiques stimulantes.

Table des matières

Présentation

Le point de départ de cette thèse est l'étude d'une conjecture du type $R \simeq \mathbb{T}$ dans le contexte général d'un groupe réductif connexe $\mathbf{G}$, défini sur $\mathbb{Q}$, admettant une variété de Shimura, non nécessairement déployé.

L'hypothèse principale est la quasi-ordinarité des représentations automorphes considérées et son reflet galoisien conjectural : la condition de quasi-ordinarité pour les représentations galoisiennes correspondantes.

Dans cette thèse, on n'obtient, sous certaines hypothèses (et conjectures), que l'égalité des dimensions de Krull d'un anneau de déformation universel d'une représentation galoisienne quasi-ordinaire et d'une algèbre de Hecke quasi-ordinaire localisée.

Plus précisément, dans une première partie, nous calculons conjecturalement la dimension de Krull d'un anneau de déformation universel R^u d'une représentation résiduelle $\overline{\rho}$ à valeurs dans le L-groupe ${}^L\mathbf{G}$ de $\mathbf{G}$ (non nécessairement connexe si $\mathbf{G}$ n'est pas déployé) quasi-ordinaire. Nous munissons R^u d'une structure d'algèbre sur l'algèbre de Hida-Iwasawa Λ associée à $\mathbf{G}$ et au sous-groupe parabolique $\mathbf{P}$ définissant la condition de quasi-ordinarité.

Dans de nombreux cas, on trouve que l'égalité des dimensions de Krull de Λ et de R^u (qui rend plausible la conjecture "R^u finie et sans torsion sur Λ") est satisfaite si $\mathbf{G}$ satisfait la condition de Harish-Chandra

$$\mathrm{rg}\, K = \mathrm{rgss}\, \mathbf{G} \qquad \text{(pour } K \subset \mathbf{G}^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R}) \text{ sous-groupe compact maximal)}$$

ainsi qu'une hypothèse p-adique du type conjecture de Leopoldt.

Dans la suite de la thèse, à défaut d'étudier directement le lien entre R^u et une algèbre de Hecke quasi-ordinaire localisée, on étudie une telle algèbre par l'approche cohomologique déjà mise en oeuvre avec succès par Hida [**24**], [**27**] et Tilouine-Urban [**50**].

Soit $\mathbf{h_P}$ l'algèbre de Hecke p-adique quasi-ordinaire universelle (pour le sous-groupe parabolique fixé $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}$).

On la munit d'une structure d'algèbre sur une algèbre d'Iwasawa associée à $\mathbf{G}$. Par dualité de Langlands pour les tores et par la théorie du corps de classes, cette algèbre est canoniquement isomorphe à Λ.

Un corollaire frappant de notre étude, lorsque la cohomologie de bas degré des variétés de Shimura de $\mathbf{G}$ est sans torsion, est que $\mathbf{h_P}$ est finie et sans torsion sur Λ.

En outre, nous obtenons des théorèmes de contrôle faible et fort très généraux (l'hypothèse de Harish-Chandra n'est probablement pas nécessaire) pour la cohomologie et donc pour $\mathbf{h_P}$.

Sous l'hypothèse de Harish-Chandra, on déduit de ces théorèmes l'existence de familles p-adiques à N variables de systèmes de valeurs propres pour les opérateurs de Hecke, quasi-ordinaires, passant par un tel système Θ_π associé à une représentation automorphe de niveau premier à p, quasi-ordinaire en p et de $(\mathfrak{g}, K)$-cohomologie non nulle

$$\mathrm{H}^{\cdot}(\mathfrak{g}, K, \pi_\infty \otimes V_\lambda) \neq 0$$

avec V_λ la représentation irréductible de $\mathbf{G}$ de plus haut poids λ régulier.

Par exemple, soit $\mathbf{GU}$ le groupe des similitudes unitaires en trois variables associé à une extension CM d'un corps totalement réel F, anisotrope en toute place réelle sauf une et quasi-déployé en p. Pour un tel groupe, on a $N = 1+3.[F:\mathbb{Q}]+\delta_{E,p}$ où $\delta_{E,p}$ est le défaut de la conjecture de Leopoldt pour le corps E en p.

Dans un travail en cours, nous étudions le cas $F = \mathbb{Q}$, $\mathbf{G} = \mathbf{GU}$ et nous montrons l'existence d'un homomorphisme surjectif de Λ-algèbres locales

$$R^u \twoheadrightarrow \mathbb{T}$$

où $\mathbb{T}$ est la localisation de $\mathbf{h_P}$ en un idéal maximal non-Eisenstein, c'est-à-dire tel que la représentation résiduelle soit absolument irréductible (et d'image assez grosse).

Voici un plan détaillé de la thèse.

Un premier chapitre (écrit en anglais) porte sur le problème de déformation d'une représentation galoisienne résiduelle à valeurs dans un L-groupe.

1. On reformule en termes d'espace tangent et d'application d'obstruction le critère de Schlessinger, utilisé pour étudier la représentabilité de ce type de problème.
2. On montre la représentabilité du problème de déformation d'une représentation galoisienne résiduelle $\overline{\rho}: \quad \Gamma_S \longrightarrow \mathbf{G}(k)$ ayant une grosse image pour un schéma en groupe affine lisse de type fini dont le centre est un sous-schéma fermé lisse. En particulier, $\mathbf{G}$ n'est pas supposé à fibres connexes.
3. La troisième section porte sur le problème de déformation $\mathbf{P}$-quasi-ordinaire (*cf.* condition ($\mathbf{P}$-ord)). On y définit les groupes de cohomologie adaptés à ces conditions locales. Sous une condition de régularité (Reg), ce problème est aussi représentable.

   Enfin, on applique ceci au cas où $\mathbf{G}$ est le dual de Langlands d'un groupe réductif. On munit alors l'anneau de déformation $\mathbf{P}$-quasi-ordinaire d'une structure d'algèbre sur l'algèbre de Hida-Iwasawa.

Dans la seconde partie, on s'intéresse à la cohomologie quasi-ordinaire d'un groupe réductif.

4. Après avoir introduit la variété de Shimura Sh_K de niveau K (que nous considérons d'un point de vue topologique seulement) et sa compactification de Borel-Serre, nous comparons la cohomologie de Sh_K et celle du groupe de niveau K.

5. La deuxième section porte sur les anneaux de Hecke paraboliques. Nous déduisons de la théorie de Bruhat-Tits la structure de ces anneaux de Hecke ainsi que certaines propriétés indispensables pour étudier la cohomologie quasi-ordinaire.
6. Ensuite, nous comparons la cohomologie de niveau infini de Sh à une cohomologie des groupes. À l'aide d'une suite spectrale, on montre un théorème de contrôle abstrait.
7. La dernière section est consacrée à l'algèbre de Hecke p-adique universelle associée à une représentation absolument irréductible.

Suivent ensuite deux appendices.

A. Le premier est un rappel sur les espaces $\mathrm{K}(\Gamma, 1)$. On y compare la cohomologie d'un tel espace avec la cohomologie de Γ par les moyens les plus élémentaires, sans recours aux suites spectrales. Il est à noter que les théorèmes de finitude de la cohomologie des groupes arithmétiques Γ viennent de l'existence d'un espace $\mathrm{K}(\Gamma, 1)$ compact.

B. Dans le second appendice, nous avons approfondi le formalisme des opérateurs de Hecke abstraits pour obtenir des résultats généraux sur l'équivariance des morphismes de restriction, de l'isomorphisme de Shapiro et de la suite spectrale de Hochschild-Serre. Pour ce dernier cas, on a introduit la notion de sous-groupe distingué d'une paire de Hecke.

Notations

Les notations suivantes seront utilisées tout au long de ce travail.

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$. L'anneau des entiers relatifs (*resp.* p-adiques, où p est un nombre premier) est noté $\mathbb{Z}$ (*resp.* $\mathbb{Z}_p$). Le corps des nombres rationnels (*resp.* p-adiques, réels, complexes) est noté $\mathbb{Q}$ (*resp.* $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$). L'algèbre des adèles finis d'un corps de nombres F est notée $\mathbb{A}_{F,f}$.

On note $\#E$ le cardinal d'un ensemble E.

Si E/F est une extension de corps, $[E:F]$ est son degré. Si M est un module sur un anneau intègre A, $\operatorname{rk}_A M$ est son rang. Lorsque A est un corps, on note alors $\dim_A M$ la dimension de M.

On note $\mathcal{F}(X,Y)$ l'ensemble des applications d'un ensemble X dans un autre Y. Si X et Y sont des espaces topologiques, $\mathcal{C}(X,Y)$ désigne l'ensemble des fonctions continues de X dans Y.

Si A est un anneau, $A^\times$ désigne le groupe des éléments inversibles de A. On note $A[\Delta]$ l'algèbre d'un monoïde Δ sur A. Lorsque Γ est un groupe profini, on note

$$A[[\Gamma]] := \varprojlim_U A[\Gamma/U]$$

(U parcourant un système fondamental de sous-groupes ouverts distingués de Γ) l'algèbre du groupe Γ complétée sur A.

Si A est un anneau local, $\mathfrak{m}_A$ est son idéal maximal.

Si M est un module sur un anneau intègre, on note M_{tor} son sous-module de torsion.

Si Γ est un groupe profini, $\Gamma^{p-\text{ab}}$ est son pro-p-complété, abélianisé.

Si g est un élément d'un groupe G et X est un autre élément, ou un sous-ensemble de G, on note ${}^gX := g.X.g^{-1}$ et $X^g := g^{-1}.X.g$ les conjugués de X par g et son inverse g^{-1}.

Soit H un sous-groupe d'un groupe G. On note $(G : H)$ son indice.

Si X est un ensemble muni d'une action de H, on note $\mathrm{ind}_H^G X = G \times^H X$ l'ensemble induit de H à G à partir de X. C'est aussi le produit de G par X, contracté par l'action de H.

Si L est un H-module, le module induit $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], L)$ est noté $\mathrm{ind}_H^G L$. On note simplement $\mathrm{ind}^G L$ si $H = \{1\}$.

On note $G^\vee$ le dual de Pontryagin d'un groupe topologique abélien localement compact.

On note les schémas en lettres grasses.

Si A est un anneau commutatif et $\mathbf{X}$ est un schéma sur A, $\mathbf{X}(A)$ désigne l'ensemble des A-points de $\mathbf{X}$.

Si B est une A-algèbre commutative, $\mathbf{X}_B$ est le schéma sur B obtenu par changement de base.

Si de plus B est projective de type fini sur A, on note $\mathrm{R}_A^B\mathbf{Y}$ ou $\mathrm{R}_{B/A}\mathbf{Y}$ le schéma sur A obtenu par restriction à la Weil à partir d'un B-schéma affine $\mathbf{Y}$.

Le schéma en groupes multiplicatif est noté $\mathbf{G_{m,}}$. Le groupe linéaire d'un module projectif de type fini M sur un anneau commutatif est noté $\mathbf{GL}(M)$. En particulier, on note $\mathbf{GL}(n) := \mathbf{GL}(\mathbb{Z}^n)$.

Si $\mathbf{G}$ est un schéma en groupes sur un corps F, on note $\mathrm{X}^*(\mathbf{G})$ (*resp.* $\mathrm{X}_*(\mathbf{G})$) le groupe des caractères (*resp.* cocaractères) et $\mathrm{X}^*_F(\mathbf{G})$ le sous-groupe des caractères F-rationnels de $\mathbf{G}$.

Si $\mathbf{T}$ est un tore défini sur un corps F, on note $\dim \mathbf{T}$ sa dimension et $\mathrm{rk}_F\, \mathbf{T}$ son rang F-déployé.

PART I

DEFORMATIONS OF GALOIS REPRESENTATIONS FOR L-GROUPS

1. Representability criterion

1.1. Schlessinger's criterion. — The object of this section is to restate Schlessinger's criterion [**42**] of representability of deformation functors in terms of tangent space and obstruction map (prop. 1.2).

Two main reasons lead us to this general formulation. The first is that both in the geometric context (deformation of varieties) and in the algebraic context (deformation of representations), one usually defines the tangent space and deformation map to check Schlessinger's hypothesis (H1-4). The second reason is that, at the same time, we also obtain (as in Mazur [**33**] and Tilouine [**49**], but for general deformation problems) a lower bound for the Krull dimension of the corresponding universal ring (prop. 1.3).

1.1.1. The category $\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$. — Let $\mathcal{O}$ be a complete noetherian local ring with finite residue field k of characteristic p. Let $\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$ be the category of complete noetherian local $\mathcal{O}$-algebras above k. Thus any object in $\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$ is endowed with a reduction map $\pi_A : A \twoheadrightarrow k$ and morphisms in $\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$ are homomorphisms of local $\mathcal{O}$-algebras $\varphi : B \longrightarrow A$ such that $\varphi \circ \pi_A = \pi_B$. Directed inverse limits exist in $\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$.

1.1.2. Abelian and infinitesimal extensions. — An *abelian extension* in $\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$ is a surjective map $\varphi : B \twoheadrightarrow A$ with kernel $I := \ker\varphi$ killed by the maximal ideal $\mathfrak{m}_B$ of B. Thus I is isomorphic, as a B-module, to a finite dimensional k-vector space.

A weaker notion is that of *infinitesimal extension*: the condition is $I^2 = 0$. In that case, I is an A-module.

Note that any surjective morphism of artinian algebras in $\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$ is a finite composition of abelian extensions.

Let $k[\epsilon] := k[X]/(X^2)$ be the k-algebra of *dual numbers*.

1.1.3. Continuity and tangent space. — Let $\mathbf{F}$ be a covariant functor from $\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$ to the category of sets.

If $\varphi : B \longrightarrow A$ is a morphism in $\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$, I will always denote the kernel of the map $\varphi : B \longrightarrow A$. Moreover, we often write φ for the map $\mathbf{F}(\varphi)$.

When $\mathbf{F}$ satisfies the hypothesis

(Cont) : $\mathbf{F}(k)$ is a singleton $\{\bar{\xi}\}$ and for any $A \in \mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$, the canonical map $\mathbf{F}(A) \longrightarrow \varprojlim_n \mathbf{F}(A/\mathfrak{m}_A^n)$ is an isomorphism,

its tangent space is defined by $t_{\mathbf{F}} := \mathbf{F}(k[\epsilon])$.

1.1.4. Schlessinger's criterion. — In [**42**, th. 2.11], Schlessinger gave the following criterion for such a functor to be representable or to admit a hull.

For any morphisms $B \longrightarrow A$ and $R \longrightarrow A$ in $\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$, let Π be the canonical map $\Pi : \mathbf{F}(R \times_A B) \longrightarrow \mathbf{F}(R) \times_{\mathbf{F}(A)} \mathbf{F}(B)$.

Theorem 1.1. — *Under the assumption (Cont),* $\mathbf{F}$ *admits a hull if and only if the following conditions are satisfied:*

(H1) : *for any abelian extension* $B \longrightarrow A$, Π *is surjective,*

(H2) : *when* $B \longrightarrow A$ *is the reduction map* $\pi_{k[\epsilon]} : k[\epsilon] \longrightarrow k$, Π *is bijective,*

(H3) : $t_{\mathbf{F}}$ *is a finite dimensional* k*-vector space.*

Assume the additional condition

(H4) : *for any abelian extension* $B \longrightarrow A$, Π *is bijective,*

then $\mathbf{F}$ *is representable.*

1.1.5. Restatement. — This criterion can be stated in terms of obstruction and tangent spaces as follows:

Proposition 1.2. — *Suppose there exist two* k*-vector spaces* $T_{\mathbf{F}}$ *and* $Obs_{\mathbf{F}}$ *and, for any abelian extension* $\varphi : B \twoheadrightarrow A$ *with kernel* I*, an action of* $T_{\mathbf{F}} \otimes_k I$ *on the set* $\mathbf{F}(B)$ *and a map*

$$\mathbf{F}(A) \xrightarrow{\mathbf{Obs_F}(\varphi)} Obs_{\mathbf{F}} \otimes_k I$$

which are functorial with respect to φ *(see below).*

Under the assumptions (Cont) and

- **(Tg1) :** *for any abelian extension* φ*, each non-empty fiber of* $\mathbf{F}(\varphi)$ *is a homogeneous space under* $T_{\mathbf{F}} \otimes_k I$*;*
- **(Tg2) :** $\mathbf{F}(k[\epsilon])$ *is a principal homogeneous space under* $T_{\mathbf{F}} \otimes_k k.\epsilon$*;*
- **(Tg3) :** $T_{\mathbf{F}}$ *is a finite dimensional* k*-vector space;*
- **(Obs) :** *for any abelian extension* φ*, the map* $\mathbf{Obs_F}(\varphi)$ *vanishes exactly on the image of* $\mathbf{F}(\varphi)$

the functor $\mathbf{F}$ *admits a hull and* $t_{\mathbf{F}} \simeq T_{\mathbf{F}}$*.*

In addition to the above conditions, assume that

- **(Tg4) :** *for any abelian extension* φ*, each non-empty fiber of* $\mathbf{F}(\varphi)$ *is a principal homogeneous space under* $T_{\mathbf{F}} \otimes_k I$

then $\mathbf{F}$ *is representable.*

The requested functoriality on the action of $T_{\mathbf{F}}$ and on the obstruction map $\mathbf{Obs_F}$ means that, for any morphism of abelian extensions

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, two heads, "\psi"] \arrow[d] & R \arrow[d] \\ B \arrow[r, two heads, "\varphi"] & A \end{tikzcd}$$

the following natural diagrams, where $I = \ker\varphi$ and $J = \ker\psi$,

$$\begin{tikzcd} (T_{\mathbf{F}} \otimes_k J) \times \mathbf{F}(S) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{F}(S) \arrow[d] \\ (T_{\mathbf{F}} \otimes_k I) \times \mathbf{F}(B) \arrow[r] & \mathbf{F}(B) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{F}(R) \arrow[r, "\mathbf{Obs_F}(\psi)"] \arrow[d] & Obs_{\mathbf{F}} \otimes_k J \arrow[d] \\ \mathbf{F}(A) \arrow[r, "\mathbf{Obs_F}(\varphi)"] & Obs_{\mathbf{F}} \otimes_k I \end{tikzcd}$$

are commutative.

Proof. — For any abelian extension $\varphi : B \twoheadrightarrow A$ and for any $R \xrightarrow{\alpha} A$ in $\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$, the functoriality will be applied to the canonical morphism of abelian extensions

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "b\mapsto(1,b)"'] \arrow[d, equal] & S := R \times_A B \arrow[r, "\psi", "(r,a)\mapsto r"'] \arrow[d, "\beta"] & R \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[r] & B \arrow[r, "\varphi"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(H1) Let $\xi \in \mathbf{F}(B)$ and $\eta \in \mathbf{F}(R)$ such that $\varphi(\xi) = \alpha(\eta)$. According to (Obs) we have $\mathbf{Obs_F}(\varphi)(\varphi(\xi)) = 0$. By functoriality of the obstruction map one has also $\mathbf{Obs_F}(\psi)(\eta) = 0$, so that η lifts into $\theta \in \mathbf{F}(S)$. Due to (Tg1) there exists $D \in T_{\mathbf{F}} \otimes_k I$ such that $\xi = D.\beta(\theta)$. Then $D.\theta$ satisfies $\Pi(D.\theta) = (\eta, D.\beta(\theta)) = (\eta, \xi)$ and (H1) is satisfied.

(H4) Suppose $\Pi(\theta) = \Pi(\theta') = (\eta, \xi)$. By (Tg1) there exists D in $T_{\mathbf{F}} \otimes_k I$ such that $\theta' = D.\theta$. So $\xi = D.\xi$. Under the additional condition (Tg4) we get $D = 0$, so $\theta = \theta'$ and (H4) is satisfied.

(H2) When φ is $\pi_{k[\epsilon]} : k[\epsilon] \longrightarrow k$, exactly the same argument, replacing (Tg4) by (Tg2), shows (H2).

(H3) The natural inclusion map $s : k \hookrightarrow k[\epsilon]$ is a section of the reduction map $\pi_{k[\epsilon]}$. Condition (Tg2) implies

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{F}} &\longrightarrow t_{\mathbf{F}} = \mathbf{F}(k[\epsilon]) \\ D &\longmapsto (D \otimes \epsilon).(\mathbf{F}(s)(\overline{\xi})) \end{aligned}$$

is a bijection. Moreover it is actually an isomorphism of k-vector spaces. So (Tg3) is equivalent to (H3). $\square$

1.1.6. Krull dimension. —

***Proposition 1.3**. — Assume that conditions (Cont), (Tg1), (Tg3), (Tg4) and (Obs) are satisfied then*

$$\dim_{\mathrm{Krull}} \overline{R^u} \geq \dim_k t_{\mathbf{F}} - \dim_k Obs_{\mathbf{F}}$$

where $\overline{R^u} := R^u \otimes_{\mathcal{O}} k$ *and* R^u *is the universal ring of* $\mathbf{F}$*.*

Proof. — Let $d^1 := \dim_k t_{\mathbf{F}}$ and $d^2 := \dim_k Obs_{\mathbf{F}}$.

By proposition 1.2, $\mathbf{F}$ is representable by a couple (R^u, ξ^u). Let

$$R^u \xrightarrow{\psi} \overline{R^u} = R^u \otimes_{\mathcal{O}} k$$

be the natural quotient map and $\overline{\xi^u} = \psi(\xi^u)$. Then the restriction $\overline{\mathbf{F}}$ of the functor $\mathbf{F}$ to the full subcategory $\mathcal{CNL}_k$ of $\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$ is represented by

$(\overline{R^u}, \overline{\xi^u})$ since

$$(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}\text{-alg.}}(R^u, .))_{|\mathcal{CNL}_k} \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{CNL}_k\text{-alg.}}(\overline{R^u}, .)$$

Lifting a k-basis of

$$t_{\mathbf{F}}{}^* = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{CNL}_k\text{-alg.}}(\overline{R^u}, k[\epsilon])^* \simeq \mathfrak{m}_{\overline{R^u}}/\mathfrak{m}^2_{\overline{R^u}} =: t^*_{\overline{R^u}}$$

(where $\cdot^*$ stands for the dual k-vector space) into a family of d^1 elements of $\mathfrak{m}_{\overline{R^u}}$, one constructs a local homomorphism $\psi :\ S \longrightarrow \overline{R^u}$ which is an isomorphism on the tangent spaces, where S is a power series algebra in d^1 variables over k. From [**42**, lem. 1.1], ψ is surjective.

Let $J := \ker\psi$ be the ideal of relations in S of $\overline{R^u}$ and $(\overline{T}_1, \ldots, \overline{T}_s)$ be a minimal set of generators of J. By Nakayama's lemma, one has $s = \dim_k J/\mathfrak{m}_S.J$. And [**11**, VIII, § 3, prop. 2] gives $\dim_{\mathrm{Krull}}\overline{R^u} \geq d^1 - s$. It suffices now to show $s \leq d^2$.

For this purpose, one considers the abelian extension

$$S/\mathfrak{m}_S.J \xrightarrow{\overline{\psi}} \overline{R^u}$$

and defines the k-vector spaces morphism

$$\begin{array}{ccc} (J/\mathfrak{m}_S J)^* & \xrightarrow{\quad\quad\Omega\quad\quad} & Obs_{\mathbf{F}} \\ \lambda & \longmapsto & (\mathrm{Id}_{t_{\mathbf{F}}} \otimes \lambda)(\mathbf{Obs_F}(\overline{\psi})(\overline{\xi^u})) \end{array}$$

By functoriality of the obstruction map, one has in fact

$$\Omega(\lambda) = (\mathrm{Id}_{t_{\mathbf{F}}} \otimes \lambda)(\mathbf{Obs_F}(\overline{\psi})(\overline{\xi^u})) = \mathbf{Obs_F}(\overline{\psi}_\lambda)(\overline{\xi^u})$$

where $\overline{\psi}_\lambda$ is the abelian extension defined by

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & J/\mathfrak{m}_S.J \arrow[r] \arrow[d] & S/\mathfrak{m}_S.J \arrow[r, "\overline{\psi}"] \arrow[d] & \overline{R^u} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & k \simeq (J/\mathfrak{m}_S.J)/\ker\lambda \arrow[r] & (S/\mathfrak{m}_S.J)/\ker\lambda \arrow[r, "\overline{\psi}_\lambda"] & \overline{R^u} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

It is enough to prove that Ω is injective. Suppose $\lambda \in (J/\mathfrak{m}_S.J)^*$ such that $\Omega(\lambda) = 0$. Then $\overline{\xi^u}$ lifts to $(S/\mathfrak{m}_S.J)/\ker\lambda$. By universal property of $\overline{\xi^u}$, it means that $\overline{\psi}_\lambda$ admits a section σ. Since ψ is an isomorphism on tangent spaces, this is also the case of $\overline{\psi}_\lambda$ and of its section σ. This implies, again by [**42**, lem. 1], that σ and $\overline{\psi}_\lambda$ are isomorphisms. Thus $\lambda = 0$ and Ω is injective. $\square$

2. Deformation functor

In this section, we apply our criterion (prop. 1.2) to show, under mild hypothesis, the existence of universal deformation of residual Galois representation with large image (th. 2.6).

In our setting, representations take values in a smooth affine group scheme $\mathbf{G}$ of finite type over $\mathcal{O}$. There is no connectedness assumption. Indeed, in subsection 3.2, we shall deal with Galois representations taking values in the Langlands dual of a reductive group.

To check the assumptions of proposition 1.2, we give, in subsection 2.2, the lifting properties satisfied by some extensions, that we call $\mathbf{G}$-abelian extensions. For instance, abelian extensions are $\mathbf{G}$-abelian.

If $\mathbf{G}$ is the Langlands dual of a torus, any reduction map $A \twoheadrightarrow k$ is $\mathbf{G}$-abelian. So that, in that case, we can compute explicitely the universal deformation ring (prop. 2.8).

2.1. Definitions. —

2.1.1. Topology. — We fix a smooth affine $\mathcal{O}$-group scheme $\mathbf{G}$ of finite type.

For any artinian algebra A in $\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$, we put the discrete topology on $\mathbf{G}(A)$ (which is finite), and for any algebra A in $\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$, the inverse limit topology on $\mathbf{G}(A) = \varprojlim_n \mathbf{G}(A/\mathfrak{m}_A^n)$. Thus $\mathbf{G}$ is a functor from the category $\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$ to the category of profinite groups.

Let $\widehat{\mathbf{G}}$ be the subfunctor of $\mathbf{G}$ defined by

$$\widehat{\mathbf{G}}(A) := \{g \in \mathbf{G}(A) \ / \ \pi_A(g) = 1\}$$

2.1.2. Deformation functor. — We also fix a profinite group Γ. Let $\mathbf{Repr}_{\Gamma,\mathbf{G}}$ be the functor from $\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$ to the category of sets defined by

$$\mathbf{Repr}_{\Gamma,\mathbf{G}}(A) = \underline{\mathrm{Hom}}(\Gamma, \mathbf{G}(A))/\widehat{\mathbf{G}}(A)$$

where $\widehat{\mathbf{G}}(A) \subset \mathbf{G}(A)$ acts on the set of continuous group homomorphisms $\underline{\mathrm{Hom}}(\Gamma, \mathbf{G}(A))$ by inner automorphisms.

If $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathbf{G}(A)$ is a continuous homomorphism, $[\rho]$ denotes its class in $\mathbf{Repr}_{\Gamma,\mathbf{G}}(A)$.

Fix $\overline{\rho} = [\overline{\rho}] \in \mathbf{Repr}_{\Gamma,\mathbf{G}}(k)$. The subfunctor $\mathbf{Def}_{\overline{\rho}} \subset \mathbf{Repr}_{\Gamma,\mathbf{G}}$ defined by

$$\mathbf{Def}_{\overline{\rho}}(A) = \left\{[\rho] \in \mathbf{Repr}_{\Gamma,\mathbf{G}}(A) \ / \ \pi_A([\rho]) = \overline{\rho}\right\}$$

is called the *deformation functor of the residual representation* $\overline{\rho}$. Obviously, $\mathbf{Def}_{\overline{\rho}}(k) = \{\overline{\rho}\}$.

2.1.3. Continuity. — Continuity of $\mathbf{Def}_{\overline{\rho}}$ is necessary to get its representability.

Lemma 2.1. — *For any $A \in \mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$ we have:*

$$\mathbf{Repr}_{\Gamma,\mathbf{G}}(A) = \varprojlim_n \mathbf{Repr}_{\Gamma,\mathbf{G}}(A/\mathfrak{m}_A^n)$$

$$\mathbf{Def}_{\overline{\rho}}(A) = \varprojlim_n \mathbf{Def}_{\overline{\rho}}(A/\mathfrak{m}_A^n)$$

thus $\mathbf{Def}_{\overline{\rho}}$ satisfies (Cont).

Proof. — By definition of inverse limits,

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{Hom}}(\Gamma, \mathbf{G}(A)) &= \underline{\mathrm{Hom}}(\Gamma, \varprojlim_n \mathbf{G}(A/\mathfrak{m}_A^n)) \\ &= \varprojlim_n \underline{\mathrm{Hom}}(\Gamma, \mathbf{G}(A/\mathfrak{m}_A^n)) \end{aligned}$$

Taking strict conjugacy classes, one gets an injective map

$$\mathbf{Repr}_{\Gamma,\mathbf{G}}(A) \hookrightarrow \varprojlim_n \mathbf{Repr}_{\Gamma,\mathbf{G}}(A/\mathfrak{m}_A^n)$$

since the inverse limit functor is left exact. In fact this map is also surjective: any inverse system $([\rho_n])_n$ in the right-hand side is composed, like $(\widehat{\mathbf{G}}(A/\mathfrak{m}_A^n))_n$, of finite non-empty sets, with surjective transition maps, so, by induction, its inverse limit isn't empty.

And the same for $\mathbf{Def}_{\overline{\rho}}$ is obtained by taking only inverse images of $\overline{\rho}$. □

2.1.4. $\mathbf{G}$*-abelian extensions.* — A $\mathbf{G}$-*abelian extension* is a surjective morphism $\varphi : B \twoheadrightarrow A$ in $\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$ which induces a short exact sequence

$$1 \longrightarrow \ker(\mathbf{G}(\varphi)) \longrightarrow \mathbf{G}(B) \xrightarrow{\varphi} \mathbf{G}(A) \longrightarrow 1$$

such that $\ker(\mathbf{G}(\varphi))$ is a discrete subgroup of the center of $\widehat{\mathbf{G}}(B)$. This condition means exactly that the action by inner automorphisms of $\mathbf{G}(B)$ on $\ker(\mathbf{G}(\varphi))$ factorizes through $\pi_B : \mathbf{G}(B) \longrightarrow \mathbf{G}(k)$.

If φ is a $\mathbf{G}$-abelian extension, let $\exp : \mathbf{t}_{\overline{\rho}}(\varphi) := \ker(\mathbf{G}(\varphi)) \longrightarrow \mathbf{G}(B)$ denote the kernel map endowed with the Γ-action induced by $\overline{\rho}$:

$$\exp(\sigma.X) := \mathrm{ad}(\overline{\rho}(\sigma)).\exp(X) \text{ for any } \sigma \in \Gamma,\ X \in \mathbf{t}_{\overline{\rho}}(\varphi) \tag{1}$$

The group law on $\mathbf{t}_{\overline{\rho}}(\varphi)$, will be denoted additively. This explains the notation exp.

2.1.5. Lie algebra of $\mathbf{G}_k$. — Using the module of differentials, we get that any abelian extension is $\mathbf{G}$-abelian.

Proposition 2.2. — *Any abelian extension* $\varphi : B \twoheadrightarrow A$ *in* $\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$ *is* $\mathbf{G}$*-abelian.*

More precisely, if $\mathfrak{G}$ *is the Lie algebra of* $\mathbf{G}_k$*, and* $I := \ker \varphi$*, one has a* $\mathbf{G}(B)$*-equivariant short exact sequence*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{G} \otimes_{\mathcal{O}} I \longrightarrow \mathbf{G}(B) \longrightarrow \mathbf{G}(A) \longrightarrow 0$$

where $\mathbf{G}(B)$ *acts by inner automorphisms on itself and* $\mathbf{G}(A)$*, and via the adjoint representation* Ad *of* $\mathbf{G}(k)$ *on* $\mathfrak{G}$*, whereas the action on* I *is trivial.*

Proof. — Define $\omega_{\mathbf{G}_k}$ as the $\mathcal{O}$-module of the closed immersion (*cf.* [**19**, I, § 3, 1.3]) given by the unit section $\mathbf{Spec}\,\mathcal{O} \hookrightarrow \mathbf{G}$.

Let $\varphi : B \twoheadrightarrow A$ be any infinitesimal extension in $\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$. Since $\mathbf{G}$ is formally smooth and since $\omega_{\mathbf{G}_k} \otimes_{\mathcal{O}} B$ is the B-modules of the closed immersion given by the unit section of $\mathbf{G}_B$ on B, one has the following short exact sequence [**19**, II, § 4, th. 3.5]:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\omega_{\mathbf{G}_k}, I) \longrightarrow \mathbf{G}(B) \longrightarrow \mathbf{G}(A) \longrightarrow 0$$

Suppose now φ is an abelian extension. Then $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\omega_{\mathbf{G}_k}, I) = \mathfrak{G} \otimes_k I$ for $\mathfrak{G}$ is the dual k-vector space of $\omega_{\mathbf{G}_k} \otimes_{\mathcal{O}} k$.

Since $\mathfrak{G}$ and I are finite-dimensional over k, the topology induced on $\ker \mathbf{G}(\varphi)$ is discrete.

The $\mathbf{G}(B)$-equivariance comes from the definition [**19**, II, § 4, 4.1] of the adjoint representation Ad. □

Let $\mathfrak{G}_{\overline{\rho}}$ denote the Lie algebra $\mathfrak{G}$ endowed with the Γ-action induced by $\overline{\rho}$ and the adjoint representation: $\sigma.X := \mathrm{Ad}(\overline{\rho}(\sigma)).X$ for any $\sigma \in \Gamma$, $X \in \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}$. So that the previous proposition simply reads $\mathbf{t}_{\overline{\rho}}(\varphi) = \mathfrak{G}_{\overline{\rho}} \otimes_k I$.

2.2. Lifting properties of G-abelian extensions. — The following examples and lemmas show the interest of the notion of $\mathbf{G}$-abelian extension.

2.2.1. Action of $\mathrm{H}^1(\Gamma, \mathbf{t}_{\overline{\rho}}(\varphi))$ *on deformations.* — Let $\mathcal{C}^{\cdot}(\Gamma, \cdot)$ denote the usual complex of continuous inhomogeneous cocycles of Γ with values in discrete Γ-modules and let $\mathrm{H}^{\cdot}(\Gamma, \cdot)$ be the continuous cohomology of Γ.

Lemma 2.3. — *Let $\varphi : B \twoheadrightarrow A$ be a $\mathbf{G}$-abelian extension in $\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$.*

(i) *Let $D \in \mathcal{C}^1(\Gamma, \mathbf{t}_{\overline{\rho}}(\varphi))$ be any continuous inhomogeneous 1-cocycle and let $\rho \in \underline{\mathrm{Hom}}(\Gamma, \mathbf{G}(B))$ be such that $[\rho] \in \mathbf{Def}_{\overline{\rho}}(B)$.*

One then has, for any $X \in \mathbf{t}_{\overline{\rho}}(\varphi)$ and $g \in \widehat{\mathbf{G}}(B)$:

$$\exp(D - \partial X).(\mathrm{ad}(g) \circ \rho) = \mathrm{ad}(\exp(X).g) \circ (\exp(D).\rho)$$

where ∂X is the coboundary of X.

(ii) $\mathrm{H}^1(\Gamma, \mathbf{t}_{\overline{\rho}}(\varphi))$ *acts on $\mathbf{Def}_{\overline{\rho}}(B)$ and the orbits under this action are the non-empty fibers of $\mathbf{Def}_{\overline{\rho}}(\varphi)$.*

Proof. — (i) Using (1) and the fact that $\mathbf{t}_{\overline{\rho}}(\varphi)$ lies in the center of $\widehat{\mathbf{G}}(B)$, one has, for any $\sigma \in \Gamma$:

$$\begin{aligned}
&(\exp(D - \partial X).(\mathrm{ad}(g) \circ \rho))(\sigma) \\
&\quad = \exp(D(\sigma) - \sigma.X + X).g.\rho(\sigma).g^{-1} \\
&\quad = \exp(X).g.\exp(D(\sigma)).\exp(-\sigma.X).\rho(\sigma).g^{-1} \\
&\quad = \exp(X).g.\exp(D(\sigma)).\rho(\sigma).\exp(-X).g^{-1} \\
&\quad = (\mathrm{ad}(\exp(X).g) \circ (\exp(D).\rho))(\sigma)
\end{aligned}$$

(ii) The previous calculation shows that $(D, \rho) \longmapsto \exp(D).\rho$ induces a group-action of $\mathrm{H}^1(\Gamma, \mathbf{t}_{\overline{\rho}}(\varphi))$ on $\mathbf{Def}_{\overline{\rho}}(B)$.

Since $\varphi \circ \exp(D) = 1$, the fibers of $\mathbf{Def}_{\overline{\rho}}(\varphi)$ are stable under this action.

To show that the fibers are homogeneous under this action, take $h \in \widehat{\mathbf{G}}(A)$ and $[\rho], [\rho'] \in \mathbf{Def}_{\overline{\rho}}(A)$ be such that

$$\varphi(\rho') = \mathrm{ad}(h) \circ \varphi(\rho)$$

By formal smoothness h lifts into $g \in \widehat{\mathbf{G}}(B)$. Define the continuous 1-cochain $D \in \mathcal{C}^1(\Gamma, \mathbf{t}_{\overline{\rho}}(\varphi))$ by $\exp(D).\rho' = \mathrm{ad}(g) \circ \rho$. Multiplicativity of ρ and ρ' implies that D is an inhomogeneous 1-cocycle. Hence $[D] \in \mathrm{H}^1(\Gamma, \mathbf{t}_{\overline{\rho}}(\varphi))$ and $[D].[\rho'] = [\rho]$, so the action is transitive on each non-empty fiber of $\mathbf{Def}_{\overline{\rho}}(\varphi)$.

□

2.2.2. Cases of free action. — The next lemma describes some cases where the action of $\mathrm{H}^1(\Gamma, \mathbf{t}_{\overline{\rho}}(\varphi))$ is free.

Let $\mathbf{Z_G}$ be the center subfunctor of $\mathbf{G}$ and let $\mathfrak{Z}$ be the Lie algebra of $(\mathbf{Z_G})_k$.

Lemma 2.4. — (i) *Suppose* $\mathbf{Z_G}$ *is a smooth closed* $\mathcal{O}$*-group subscheme of* $\mathbf{G}$*.*

The following assumptions are equivalent:

(Centr) : $\mathrm{H}^0(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) = \mathfrak{Z}$,

(Centr') : *for any* A *in* $\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$ *and* $\rho \in \underline{\mathrm{Hom}}(\Gamma, \mathbf{G}(A))$ *such that* $[\rho] \in \mathbf{Def}_{\overline{\rho}}(A)$*, any* $g \in \widehat{\mathbf{G}}(A)$ *which commutes with* ρ *belongs to* $\mathbf{Z_G}(A)$*,*

(ii) *Let* A *in* $\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$ *such that the reduction map* π_A *is a* $\mathbf{G}$*-abelian extension.*

Then $\mathbf{Def}_{\overline{\rho}}(\pi_A)$ *is either empty or a principal homogeneous space under* $\mathrm{H}^1(\Gamma, \mathbf{t}_{\overline{\rho}}(\pi_A))$.

(iii) *Under the assumptions of (i), for any* $\mathbf{G}$*-abelian extension* φ *in* $\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$*, each non-empty fiber of* $\mathbf{Def}_{\overline{\rho}}(\varphi)$ *is a principal homogeneous space under* $\mathrm{H}^1(\Gamma, \mathbf{t}_{\overline{\rho}}(\varphi))$.

Proof. — (i) First suppose (Centr) is satisfied. Since

$$\mathbf{Z_G}(A) = \varprojlim_n \mathbf{Z_G}(A/\mathfrak{m}_A^n)$$

one can suppose A is artinian. We proceed by induction. If $A = k$, the assertion (Centr') is plain. Suppose the assertion (Centr') is true for $A/\mathfrak{m}_A^n$: $g \mod \mathfrak{m}_A^n \in \mathbf{Z_G}(A/\mathfrak{m}_A^n)$. By formal smoothness of $\mathbf{Z_G}$, there exists $h \in \mathbf{Z_G}(A/\mathfrak{m}_A^{n+1})$ and $X \in \mathfrak{G}_{\overline{\rho}} \otimes_k \mathfrak{m}_A^n/\mathfrak{m}_A^{n+1}$ such that $g = \exp(X).h \mod \mathfrak{m}_A^{n+1}$. Necessarily $\exp(X)$ commutes with ρ, so lemma 2.3 implies $\partial X = 0$, that is $X \in \mathrm{H}^0(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}})$. Then (Centr) gives $X \in \mathfrak{Z}$, and we get what we wanted: $g \mod \mathfrak{m}_A^{n+1}$ lies in $\mathbf{Z_G}(A/\mathfrak{m}_A^{n+1})$.

Conversely, take $A = k[\epsilon]$ and $\rho = s(\overline{\rho})$ where s is the canonical section of $\pi_{k[\epsilon]}$. For any $X \in \mathrm{H}^0(\Gamma, \mathfrak{G})$, one has $\partial X = 0$. So, according to lemma 2.3, $\exp(X \otimes \epsilon)$ commutes with ρ. Then (Centr') implies $\exp(X \otimes \epsilon) \in \mathbf{Z_G}(k[\epsilon])$. Thus $X \in \mathfrak{Z}$.

(ii) According to lemma 2.3 (ii), we only have to show the action is free. If $[D].[\rho] = [\rho]$ then there exists

$$\exp(X) \in \exp(\mathbf{t}_{\overline{\rho}}(\pi_A)) = \widehat{\mathbf{G}}(A)$$

such that $\exp(D).\rho = \mathrm{ad}(\exp(X)) \circ \rho$. By lemma 2.3 (i), it gives $\exp(D).\rho = \exp(-\partial X).\rho$. Whence $D = -\partial X$ and $[D] = 0$.

(iii) Again we have to show the action is free. Suppose $[D].[\rho] = [\rho]$. That is, there exists $g \in \widehat{\mathbf{G}}(B)$ such that $\exp(D).\rho = \mathrm{ad}(g) \circ \rho$. Pushing the equality in A, one obtains $\varphi(g)$ commutes with $\varphi(\rho)$ and using (Centr'), $\varphi(g) \in \widehat{\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}}(A)$. By formal smoothness we can find $X \in \mathbf{t}_{\overline{\rho}}(\varphi)$ and $h \in \widehat{\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}}(B)$ with $g = \exp(X).h$. Then again $\mathrm{ad}(g) \circ \rho = \exp(-\partial X).\rho$ and $D = -\partial X$.

□

2.2.3. Obstruction map. — We now describe the obstruction to lift a given deformation class in an abelian extension. More precisely, an extension $\varphi : B \twoheadrightarrow A$ being given, we say $\mathbf{Def}_{\overline{\rho}}(A) \longrightarrow \Omega$ is an *obstruction map* (Ω being a group) when it vanishes exactly on the classes in $\mathbf{Def}_{\overline{\rho}}(A)$ which admit a lifting to B. The basic result is that any quotient map of profinite groups admits a continuous set theoretic splitting [**46**, prop. I.1].

Proposition 2.5. — *For any* $\mathbf{G}$*-abelian extension* $\varphi : B \twoheadrightarrow A$ *in* $\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$*, define the map*

$$\begin{array}{rcl}\mathbf{Def}_{\overline{\rho}}(A) & \xrightarrow{\mathbf{Obs}(\varphi)} & \mathrm{H}^2(\Gamma, \mathbf{t}_{\overline{\rho}}(\varphi)) \\ {[\rho]} & \longmapsto & [C(\alpha)]\end{array}$$

where $\alpha : \Gamma \longrightarrow \mathbf{G}(B)$ *is any continuous map satisfying* $\varphi(\alpha) = \rho$*, and* $[C(\alpha)]$*, defined by*

$$\alpha(\sigma\tau) = \exp(C_{\sigma,\tau}(\alpha)).\alpha(\sigma).\alpha(\tau)$$

doesn't depend on the choice of α*.*

This is an obstruction map, i.e. $\mathbf{Obs}(\varphi)$ *vanishes exactly on the image of* $\mathbf{Def}_{\overline{\rho}}(\varphi)$*.*

Proof. — $\varphi(\alpha) = \rho$ is multiplicative so $C_{\sigma,\tau}(\alpha)$ is actually in $\mathbf{t}_{\overline{\rho}}(\varphi)$ and an easy computation shows it is a 2-cocycle. Let $\alpha' : \Gamma \longrightarrow \mathbf{G}(B)$ be a continuous map and $g \in \widehat{\mathbf{G}}(A)$ satisfying $\varphi(\alpha') = \mathrm{ad}(g) \circ \varphi(\alpha)$. By formal smoothness, g lifts into $h \in \widehat{\mathbf{G}}(B)$ and there exists a 1-cochain $D \in \mathcal{C}^1(\Gamma, \mathbf{t}_{\overline{\rho}}(\varphi))$ such that $\exp(D).\alpha' = \mathrm{ad}(g) \circ \alpha$. A straightforward computation leads to $C(\alpha') = C(\alpha) + \partial D$. So

$$\mathbf{Obs}(\varphi)([\rho]) = [C(\alpha)] \in \mathrm{H}^2(\Gamma, \mathbf{t}_{\overline{\rho}}(\varphi))$$

is well defined and does not depend on the choice of α.

Suppose that $[\rho]$ lifts into $[\rho']$. We have just proved that

$$\mathbf{Obs}(\varphi)([\rho]) = [C(\rho')]$$

But ρ' being a representation, $C(\rho') = 0$ so that $\mathbf{Obs}(\varphi)([\rho]) = 0$.

Assume now $\mathbf{Obs}(\varphi)([\rho]) = 0$. It means that there exists a 1-cochain $D \in \mathcal{C}^1(\Gamma, \mathbf{t}_{\overline{\rho}}(\varphi))$ which satisfies $C(\alpha) = \partial D$. Then ρ lifts into a continuous representation $\rho' = \exp(D).\alpha$. □

2.3. Representability and Krull dimension. —

2.3.1. — From the previous lifting properties of $\mathbf{G}$-abelian extensions and the criterion given in proposition 1.2, we deduce the following representability theorem. This is a generalization of a result of Tilouine [**49**] to the case of smooth affine $\mathcal{O}$-group scheme of finite type.

Theorem 2.6. — *Let* $\mathbf{G}$ *be a smooth affine* $\mathcal{O}$*-group scheme of finite type,* Γ *a profinite group, and* $\overline{\rho} : \Gamma \longrightarrow \mathbf{G}(k)$ *a continuous homomorphism.*

Under the assumption

(Fratt) : *For any open subgroup $U \subset \Gamma$, $\underline{\mathrm{Hom}}(U, \mathbb{F}_p)$ is finite,*

$\mathbf{Def}_{\overline{\rho}}$ *admits a hull and* $t_{\mathbf{Def}_{\overline{\rho}}} \simeq \mathrm{H}^1(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}})$.

Moreover, if the center $\mathbf{Z_G}$ of $\mathbf{G}$ is a smooth closed $\mathcal{O}$-group subscheme and if $\overline{\rho}$ satisfies the equivalent conditions (Centr) or (Centr'), then $\mathbf{Def}_{\overline{\rho}}$ is representable by a ring R^u which is such that

$$\dim_{\mathrm{Krull}} R^u \otimes_{\mathcal{O}} k \geq h^1 - h^2 \quad \textit{where} \quad h^i := \dim_k \mathrm{H}^i(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}})$$

Proof. — We only have to use propositions 1.2 and 1.3 with

$$T_{\mathbf{Def}_{\overline{\rho}}} = \mathrm{H}^1(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) \quad \text{and} \quad Obs_{\mathbf{Def}_{\overline{\rho}}} = \mathrm{H}^2(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}})$$

- (Cont) is satisfied according to lemma 2.1.
- (Tg1) follows from lemma 2.3.
- (Tg2) follows from lemma 2.4, (ii) with $A = k[\epsilon]$.
- Let U be the kernel of $\overline{\rho}$. The inflation-restriction exact sequence for the open subgroup U, which acts trivially on $\mathfrak{G}_{\overline{\rho}}$, is

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(\Gamma/U, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} \mathrm{H}^1(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathrm{H}^1(U, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}})$$

  where the left term is finite since Γ/U and $\mathfrak{G}_{\overline{\rho}}$ are both finite. Moreover the right term is

$$\mathrm{H}^1(U, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) = \underline{\mathrm{Hom}}(U, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) = \underline{\mathrm{Hom}}(U, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}$$

  Thus condition (Fratt) insures the right term is finite, and so is the middle term. Whence (Tg3).
- (Obs) follows from lemma 2.5.
- Under the equivalent conditions (Centr) and (Centr'), (Tg4) follows from lemma 2.4, (iii).

□

2.3.2. Case of a global Galois representation. — Let F be a number field and S a finite set of places in F. If F_S is a maximal unramified outside S extension of F, then the condition (Fratt) is fulfilled by its Galois group $\Gamma = \Gamma_S$ over F.

In fact, let $U \subset \Gamma_S$ be an open subgroup and $(F_S)^U$ be the corresponding fixed number field. Then $\underline{\mathrm{Hom}}(U, \mathbb{F}_p)$ is finite if and only if there is only a finite number of extensions of $(F_S)^U$ of degree p unramidied outside S. As in [**46**, II, lem. 6], this last assertion follows from Hermite's theorem on the finiteness of the number of number fields with bounded discriminant.

Suppose moreover that S contains the set S_∞ of archimedean places of F and also the set S_p of places of F dividing p. Then the global Euler-Poincaré characteristic computed by the Poitou-Tate exact sequence (cf. [**34**, I, th. 5.1]) gives

$$h^1 - h^2 = h^0 + [F:\mathbb{Q}] \dim_k \mathfrak{G}_{\overline{\rho}} - \sum_{v \in S_\infty} h^0(\Gamma_v, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}})$$

where Γ_v is a decomposition subgroup of $\overline{\Gamma}$ at v.

Note that under (Centr), $h^0 = \dim_k \mathfrak{Z}$.

2.4. Deformations for a split torus. — Let W be a finite group viewed as a constant $\mathcal{O}$-group scheme [**19**, II, § 1, 1.5, e)]. Let $\mathbf{T}$ be a $\mathcal{O}$-split torus with left W-action and $\overline{\rho} : \Gamma \longrightarrow \mathbf{T}(k) \rtimes W$ a residual representation into the semi-direct product $\mathbf{T} \rtimes W$.

In this subsection, we compute explicitely the universal deformation ring of such a residual representation. For this purpose, we apply previous results to the $\mathcal{O}$-group scheme $\mathbf{T} \rtimes W$.

Lemma 2.7. — *For any algebra A in $\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$, the reduction map*

$$A \xrightarrow{\pi_A} k$$

is a split $\mathbf{T} \rtimes W$-abelian extension.

Moreover, there is a functorial isomorphism:

$$\mathbf{Def}_{\overline{\rho}}(A) \simeq \mathrm{H}^1(\Gamma, \mathrm{X}_*(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} (1 + \mathfrak{m}_A))$$

Proof. — For any algebra A in $\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$, the Teichmüller lifting [**11**, IX, § 2, prop. 7] splits the reduction map $A^\times \twoheadrightarrow k^\times$, where $A^\times$ is the group of invertible elements in A. This splitting is functorial since it is determined by its image which is the p^∞-divisible part of $A^\times$.

Since $\mathbf{T}$ is a $\mathcal{O}$-split torus, one has $\mathbf{T}(A) \simeq \mathrm{X}_*(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} A^\times$, where $\mathrm{X}_*(\mathbf{T})$ is the cocharacter group of $\mathbf{T}$ on which W naturally acts on the left (whereas the action on $A^\times$ is trivial). So one gets the following splitted short exact sequence

$$1 \longrightarrow \mathrm{X}_*(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} (1 + \mathfrak{m}_A) \longrightarrow \mathbf{T}(A) \rtimes W \longrightarrow \mathbf{T}(k) \rtimes W \longrightarrow 1$$

Thus the reduction map π_A is a $\mathbf{T} \rtimes W$-abelian extension. The functorial splitting gives a canonical base point in each of the sets $\mathbf{Def}_{\overline{\rho}}(A)$. And according to lemma 2.4, (ii) each of them is a principal homogeneous space under $\mathrm{H}^1(\Gamma, \widehat{\mathbf{T}}(A))$. □

Let W_0 be the kernel of the action of W on $\mathbf{T}$, and Γ_0 the inverse image $\overline{\rho}^{-1}(\mathbf{T}(k) \times W_0)$. Denote by $\Gamma_0^{p-\mathrm{ab}}$ the abelianized pro-p-completion of Γ_0.

Proposition 2.8. — *Suppose p is prime to the index $(\Gamma : \Gamma_0)$ and $\underline{\mathrm{Hom}}(\Gamma_0, \mathbb{F}_p)$ is finite, then the deformation functor $\mathbf{Def}_{\overline{\rho}}$ is representable* *and the universal ring is the following completed group algebra:*

$$\mathcal{O}[[\mathrm{X}^*(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma]} \Gamma_0^{p-\mathrm{ab}}]]$$

Proof. — For any $A \in \mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$, by lemma 2.7, one has the functorial isomorphisms:

$$\mathbf{Def}_{\overline{\rho}}(A) \simeq \mathrm{H}^1(\Gamma, \mathrm{X}_*(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} (1 + \mathfrak{m}_A))$$

with Γ (or rather Γ/Γ_0) acting, through $\overline{\rho}$, on $\mathrm{X}_*(\mathbf{T})$.

The group $1 + \mathfrak{m}_A^n$ is an abelian pro-p-group for

$$1 + \mathfrak{m}_A = \varprojlim_{n \geq 1} (1 + \mathfrak{m}_A)/(1 + \mathfrak{m}_A^n) \quad \text{and}$$

$$\forall n \geq 1,\ (1 + \mathfrak{m}_A^n)/(1 + \mathfrak{m}_A^{n+1}) \simeq \mathfrak{m}_A^n/\mathfrak{m}_A^{n+1}$$

And since $(\Gamma : \Gamma_0)$ is prime to p, one has

$$\mathbf{Def}_{\overline{\rho}}(A) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\Gamma}(\Gamma_0^{p-\mathrm{ab}}, \mathrm{X}_*(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} (1 + \mathfrak{m}_A))$$

where Γ acts on the left by conjugation on Γ_0 and $\Gamma_0^{p-\mathrm{ab}}$.

Using the perfect duality between characters and cocharacters of $\mathbf{T}$, one gets

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{X}^*(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma]} \Gamma_0^{p-\mathrm{ab}}, 1 + \mathfrak{m}_A)$$

where Γ naturally acts (through $\overline{\rho}$) on the right on $\mathrm{X}^*(\mathbf{T})$.

Now, by universal property of the completed group algebra

$$\mathcal{O}[[\mathrm{X}^*(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma]} \Gamma_0^{p-\mathrm{ab}}]]$$

we get what we wanted:

$$\mathbf{Def}_{\overline{\rho}}(A) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}\text{-alg.}}(\mathcal{O}[[\mathrm{X}^*(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma]} \Gamma_0^{p-\mathrm{ab}}]], A)$$

$\square$

3. Nearly-ordinary deformations

Now, we are dealing with representations which satisfy some local conditions called near-ordinarity.

We first show a representability theorem for the functor of deformations of such representations. Our method consists in adapting the cohomology groups, tangent space and obstruction maps of the unconditional case to the near-ordinarity assumptions.

Then we work in the context of global Galois representations with values in the Langlands dual of a reductive group $\mathbf{G}$. The near-ordinarity assumptions are associated to a family $\mathbf{P}$ of parabolic subgroups of $\mathbf{G}$. The computation for tori we made in subsection 2.4 enables to endow the universal ring of $\mathbf{P}$-nearly-ordinary defornations with a structure of algebra over an Iwasawa algebra in several variables. This algebra, called the Hida-Iwasawa algebra in [**49**], is explicitely computed via class field theory.

3.1. P-near-ordinarity. —

3.1.1. Local conditions on representations. — We keep the previous notations.

We also fix a family $(\Gamma_v \longrightarrow \Gamma)_{v\in S}$ of continuous homomorphisms of profinite groups indexed by a set S, and a family $(\mathbf{P}_v)_{v\in S}$ of smooth closed $\mathcal{O}$-subgroup schemes of $\mathbf{G}$. For any $v \in S$, let $\widehat{\mathbf{P}}_v := \widehat{\mathbf{G}} \cap \mathbf{P}_v$.

Even if the map $\Gamma_v \longrightarrow \Gamma$ is not injective, for any continuous map $\alpha :\ \Gamma \longrightarrow \mathbf{G}(A)$, $A \in \mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$, $\alpha_{|\Gamma_v}$ denotes the composition of these two maps and $\alpha(\Gamma_v)$ the image of this composition.

We consider the following condition on α:

(P-ord) : for each $v \in S$, there exists $g_v \in \widehat{\mathbf{G}}(A)$ such that

$$(\mathrm{ad}(g_v) \circ \alpha)(\Gamma_v) \subset \mathbf{P}_v(A)$$

From now on, we suppose that the residual representation $\overline{\rho}$ satisfies ($\mathbf{P}$-ord). Let $\mathfrak{P}_{v,\overline{\rho}}$ be the Lie algebra of $(\mathbf{P}_v)_k$ endowed with the Γ_v-action induced by $\overline{\rho}_{|\Gamma_v}$ and the adjoint representation: $\sigma.X := \mathrm{Ad}(\overline{\rho}(\sigma)).X$ for any $\sigma \in \Gamma_v$, $X \in \mathfrak{P}_{v,\overline{\rho}}$.

We denote by $\mathbf{Def}^{\mathbf{P}}_{\overline{\rho}} \subset \mathbf{Def}_{\overline{\rho}}$ the subfunctor defined by

$$\mathbf{Def}^{\mathbf{P}}_{\overline{\rho}}(A) = \{\rho \in \underline{\mathrm{Hom}}(\Gamma, \mathbf{G}(A)) \ / \ (\mathbf{P}\text{-ord}) \text{ and } \pi_A(\rho) = \overline{\rho}\} \ /\widehat{\mathbf{G}}(A)$$

3.1.2. Continuity. —

Lemma 3.1. — *For any algebra A in $\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$, one has:*

$$\mathbf{Def}^{\mathbf{P}}_{\overline{\rho}}(A) = \varprojlim_{n} \mathbf{Def}^{\mathbf{P}}_{\overline{\rho}}(A/\mathfrak{m}_A^n)$$

thus $\mathbf{Def}^{\mathbf{P}}_{\overline{\rho}}$ *satisfies (Cont).*

Proof. — By lemma 2.1, it suffices to show any $\rho \in \underline{\mathrm{Hom}}(\Gamma, \mathbf{G}(A))$ satisfies ($\mathbf{P}$-ord) as long as for all $n \geq 1$, $\rho \mod \mathfrak{m}_A^n$ satisfies ($\mathbf{P}$-ord).

Let $v \in S$. The sets

$$\{g_v \in \widehat{\mathbf{G}}(A/\mathfrak{m}_A^n) \ / \ (ad(g_v) \circ (\rho \mod \mathfrak{m}_A^n))(\Gamma_v) \subset \mathbf{P}_v(A/\mathfrak{m}_A^n)\}$$

form an inverse system of finite non-empty sets, so, according to [**12**, III, § 7, ex. I of th. 1], its inverse limit isn't empty. And any g_v in this inverse limit satisfies ($\mathbf{P}$-ord) for ρ. □

We are going to show under reasonable hypothesis, that the functor $\mathbf{Def}^{\mathbf{P}}_{\overline{\rho}}$ is also representable.

3.1.3. Local conditions on cocycles. — For this purpose, consider the following cohomology groups.

Let $\mathcal{C}^{\cdot}_{\mathbf{P}}(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) \subset \mathcal{C}^{\cdot}(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}})$ be the subcomplex defined by

$$\mathcal{C}^{\cdot}_{\mathbf{P}}(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) := \bigcap_{v \in S} \ker \left(\mathcal{C}^{\cdot}(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) \longrightarrow \tilde{\mathcal{C}}^{\cdot}(\Gamma_v, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}/\mathfrak{P}_{v,\overline{\rho}}) \right)$$

where $\tilde{\mathcal{C}}^{\cdot}(\Gamma_v, \cdot)$ is the following quotient complex of $\mathcal{C}^{\cdot}(\Gamma_v, \cdot)$:

$$\tilde{\mathcal{C}}^i(\Gamma_v, \cdot) = \begin{cases} 0 & \text{if } i \leq 0 \\ \mathcal{C}^1(\Gamma_v, \cdot)/\partial \mathcal{C}^0(\Gamma_v, \cdot) & \text{if } i = 1 \\ \mathcal{C}^i(\Gamma_v, \cdot) & \text{if } i \geq 2 \end{cases}$$

As usually, to this complex are associated cohomology groups

$$\mathrm{H}^{\cdot}_{\mathbf{P}}(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) = H^{\cdot}(\mathcal{C}^{\cdot}_{\mathbf{P}}(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}))$$

As one can easy observe, we have:

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^0_{\mathbf{P}}(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) &= \mathrm{H}^0(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) \\ \mathrm{H}^1_{\mathbf{P}}(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) &= \bigcap_{v \in S} \ker \left(\mathrm{H}^1(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\Gamma_v, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}/\mathfrak{P}_{v,\overline{\rho}}) \right) \end{aligned} \tag{2}$$

3.1.4. Regularity assumption. — We need the following assumption on $\overline{\rho}$ to show the representability of the deformation functor with local conditions:

(Reg) : for any $v \in S$, $\mathrm{H}^0(\Gamma_v, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}/\mathfrak{P}_{v,\overline{\rho}}) = 0$,

From now on, we suppose that assumption (Reg) holds.

Lemma 3.2. — *Let A be an algebra in $\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$ and $\rho \in \underline{\mathrm{Hom}}(\Gamma, \mathbf{G}(A))$ such that $\pi_A(\rho) = \overline{\rho}$.*

(i) *For any* $g \in \widehat{\mathbf{G}}(A)$ *such that*

$$\rho(\Gamma_v) \subset \mathbf{P}_v(A) \text{ and } (\mathrm{ad}(g) \circ \rho)(\Gamma_v) \subset \mathbf{P}_v(A)$$

one has $g \in \widehat{\mathbf{P}}_v(A)$.

(ii) *Let* $\varphi : B \twoheadrightarrow A$ *be any abelian extension with kernel* I *and let also* $\alpha : \Gamma \longrightarrow \mathbf{G}(B)$ *be any continuous map satifiying* $\varphi(\alpha) = \rho$ *and (*$\mathbf{P}$*-ord).*

For any $D \in \mathcal{C}^1(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) \otimes_k I$*, the map* $\exp(D).\alpha$ *satisfies (*$\mathbf{P}$*-ord) if and only if* D *belongs to* $\mathcal{C}^1_{\mathbf{P}}(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) \otimes_k I$.

Proof. — (i) Take A, ρ and g as in (i).

For any $n \geq 0$, let $\mathbf{Q}(A/\mathfrak{m}_A^n) := \widehat{\mathbf{G}}(A/\mathfrak{m}_A^n)/\widehat{\mathbf{P}}_v(A/\mathfrak{m}_A^n)$ endowed with the action of Γ_v induced by ρ:

$$\sigma.(h \mod \widehat{\mathbf{P}}_v) := \mathrm{ad}(\rho(\sigma)).h \mod \widehat{\mathbf{P}}_v$$

for any $\sigma \in \Gamma_v$ and $h \in \widehat{\mathbf{G}}(A/\mathfrak{m}_A^n)$. The assumption on g asserts that

$$(g \mod \widehat{\mathbf{P}}_v(A)) \in \mathrm{H}^0(\Gamma_v, \mathbf{Q}(A)) = \varprojlim \mathrm{H}^0(\Gamma_v, \mathbf{Q}(A/\mathfrak{m}_A^n))$$

Let also $\mathfrak{Q} = \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}/\mathfrak{P}_{v,\overline{\rho}}$ endowed with the action $\mathrm{Ad} \circ \overline{\rho}$ of Γ_v. Then, for all $n \geq 1$:

$$1 \longrightarrow \mathfrak{Q} \otimes_k \mathfrak{m}_A^n/\mathfrak{m}_A^{n+1} \longrightarrow \mathbf{Q}(A/\mathfrak{m}_A^{n+1}) \longrightarrow \mathbf{Q}(A/\mathfrak{m}_A^n) \longrightarrow 1$$

is a Γ_v-equivariant short exact sequence.

According to (Reg), taking Γ_v-invariants gives an injective map

$$\mathrm{H}^0(\Gamma_v, \mathbf{Q}(A/\mathfrak{m}_A^{n+1})) \hookrightarrow \mathrm{H}^0(\Gamma_v, \mathbf{Q}(A/\mathfrak{m}_A^n))$$

But $\mathbf{Q}(k) = \{1\}$, so that by induction on n, $\mathrm{H}^0(\Gamma_v, \mathbf{Q}(A/\mathfrak{m}_A^n)) = 0$. And passing to the inverse limit: $\mathrm{H}^0(\Gamma_v, \mathbf{Q}(A)) = 0$. Thus $g \in \widehat{\mathbf{P}}_v(A)$.

(ii) Take $v \in S$. By ($\mathbf{P}$-ord) for α, there exists $g_v \in \widehat{\mathbf{G}}(B)$ such that

$$(\mathrm{ad}(g_v) \circ \alpha)(\Gamma_v) \subset \mathbf{P}_v(B)$$

Suppose $\exp(D).\alpha$ satisfies ($\mathbf{P}$-ord): there exists g'_v in $\widehat{\mathbf{G}}(B)$ such that

$$(\mathrm{ad}(g'_v) \circ \exp(D).\alpha)(\Gamma_v) \subset \mathbf{P}_v(B)$$

When composing with φ, one obtains

$$(\mathrm{ad}(\varphi(g_v)) \circ \rho)(\Gamma_v) \subset \mathbf{P}_v(A)$$

$$(\mathrm{ad}(\varphi(g'_v.g)) \circ \rho)(\Gamma_v) \subset \mathbf{P}_v(A)$$

Applying (i) to $\mathrm{ad}(\varphi(g'_v)) \circ \rho$, one gets $\varphi(g_v.(g'_v)^{-1}) \in \widehat{\mathbf{P}}_v(A)$.

By formal smoothness of $\mathbf{P}_v$, there exists $p_v \in \widehat{\mathbf{P}}_v(B)$ and X_v in $\mathfrak{G}_{\overline{\rho}} \otimes_k I$ such that $\exp(X_v).g_v.g = p_v.g'_v$. Using this equality and lemma 2.3.(i), we get the following relation:

$$(\mathrm{ad}(g'_v) \circ \exp(D).\alpha) = \mathrm{ad}(p_v^{-1}) \circ (\exp(D - \partial X_v).(\mathrm{ad}(g_v) \circ \alpha))$$

so that $(D - \partial X_v)(\Gamma_v) \subset \mathfrak{P}_{v,\overline{\rho}} \otimes_k I$ and $D \in \mathcal{C}^1_{\mathbf{P}}(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) \otimes_k I$.

Conversely suppose $D \in \mathcal{C}^1_{\mathbf{P}}(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) \otimes_k I$: there exists $X_v \in \mathfrak{G}_{\overline{\rho}} \otimes_k I$ such that $(D - \partial X_v)(\Gamma_v) \subset \mathfrak{P}_{v,\overline{\rho}} \otimes_k I$.

Again lemma 2.3.(i) gives the relation

$$\mathrm{ad}(\exp(X_v).g_v) \circ (\exp(D).\alpha) = \exp(D - \partial X_v).(\mathrm{ad}(g_v) \circ \alpha)$$

Whence the condition ($\mathbf{P}$-ord) for $\exp(D).\alpha$.

□

3.1.5. — After this technical lemma, we establish the same kind of results as in the unconditional case.

Lemma 3.3. — *For any abelian extension* $\varphi : B \twoheadrightarrow A$ *with kernel* I, $\mathrm{H}^1_{\mathbf{P}}(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) \otimes_k I$ *acts on* $\mathbf{Def}^{\mathbf{P}}_{\overline{\rho}}(B)$ *and the orbits under this action are the non-empty fibers of* $\mathbf{Def}^{\mathbf{P}}_{\overline{\rho}}(\varphi)$.

Proof. — To adapt the proof of lemma 2.3 to our situation, two things have to be checked.

The first is that for any continuous 1-cocycle $D \in \mathcal{C}^1_{\mathbf{P}}(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) \otimes_k I$, if a continuous representation $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathbf{G}(B)$ satisfies ($\mathbf{P}$-ord) then $\exp(D).\rho$ satisfies also ($\mathbf{P}$-ord). This is a consequence of lemma 3.2.(ii). Whence the stability of $\mathbf{Def}^{\mathbf{P}}_{\overline{\rho}}(B)$ under $\mathrm{H}^1_{\mathbf{P}}(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) \otimes_k I$.

The homogeneity of the action follows from the fact, established in lemma 3.2.(ii), that if ρ and $\exp(D).\rho$ satisfy ($\mathbf{P}$-ord), where D lies in $\mathcal{C}^1(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) \otimes_k I$, then $D \in \mathcal{C}^1_{\mathbf{P}}(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) \otimes_k I$. □

Lemma 3.4. —
- (i) *for any abelian extension* $\pi_A : A \twoheadrightarrow k$ *of* k *in* $\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$, $\mathbf{Def}^{\mathbf{P}}_{\overline{\rho}}(\pi_A)$ *is either empty or a principal homogeneous space under the group* $\mathrm{H}^1_{\mathbf{P}}(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) \otimes_k \mathfrak{m}_A$,
- (ii) *Suppose that* $\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}$ *is a smooth* $\mathcal{O}$*-group subscheme of* $\mathbf{G}$ *and that the equivalent conditions (Centr) or (Centr') hold.*

  Then for any abelian extension φ *in* $\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$ *with kernel* I, *each non-empty fiber of* $\mathbf{Def}^{\mathbf{P}}_{\overline{\rho}}(\varphi)$ *is a principal homogeneous space under* $\mathrm{H}^1_{\mathbf{P}}(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) \otimes_k I$.

Proof. — According to lemma 3.3, we only have to show the action is free in those two cases. It follows directly from lemma 2.4 since our action here is a subaction of the unconditional case. □

3.1.6. The obstruction map. — In order to define an obstruction map, we need the following lemma (for which we refer to [**49**, p. 52]) which ensures the existence of a continuous set theoretic splitting adapted to the local conditions.

Lemma 3.5. — *For any surjective morphism $\varphi : B \twoheadrightarrow A$ in $\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$, there exists a continuous set theoretic splitting $s : \mathbf{G}(A) \hookrightarrow \mathbf{G}(B)$ of $\mathbf{G}(\varphi)$ such that for any $v \in S$, $s(\mathbf{P}_v(A)) \subset \mathbf{P}_v(B)$.*

Proposition 3.6. — *For any abelian extension $\varphi : B \twoheadrightarrow A$ in $\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$ with kernel I, define the map*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Def}^{\mathbf{P}}_{\overline{\rho}}(A) & \xrightarrow{\mathbf{Obs}_{\mathbf{P}}(\varphi)} & \mathrm{H}^2_{\mathbf{P}}(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) \otimes_k I \\ [\rho] & \longmapsto & [C(\alpha)] \end{array}$$

where $\alpha : \Gamma \longrightarrow \mathbf{G}(B)$ is any continuous map satisfying ($\mathbf{P}$-ord) and lifting ρ ($[C(\alpha)]$ depends only on $[\rho]$).

This is an obstruction map, i.e. *it vanishes exactly on the image of $\mathbf{Def}^{\mathbf{P}}_{\overline{\rho}}(\varphi)$.*

Proof. — To adapt the proof of lemma 2.5 to our situation, we first have to verify $C(\alpha) \in \mathcal{C}^2_{\mathbf{P}}(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) \otimes_k I$. Since α satisfies ($\mathbf{P}$-ord), for any $v \in S$, take $g_v \in \widehat{\mathbf{G}}(B)$ as in ($\mathbf{P}$-ord). Then, by definition of $C(\alpha)$, one has

$$(\mathrm{Ad}(g_v) \circ C(\alpha))(\Gamma_v \times \Gamma_v) \subset \mathfrak{P}_{v,\overline{\rho}} \otimes_k I$$

But $g_v \in \widehat{\mathbf{G}}(B)$ acts trivially on $\mathfrak{G}_{\overline{\rho}}$, so $C(\alpha) \in \mathcal{C}^2_{\mathbf{P}}(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) \otimes_k I$.

We now show $[C(\alpha)]$ depends only on $[\rho]$. Let $\alpha' : \Gamma \longrightarrow \mathbf{G}(B)$ and $g \in \widehat{\mathbf{G}}(A)$ satisfying ($\mathbf{P}$-ord) and $\varphi(\alpha') = \mathrm{ad}(g) \circ \varphi(\alpha)$. By formal smoothness, g lifts into $h \in \widehat{\mathbf{G}}(B)$. So there is $D \in \mathcal{C}^1(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) \otimes_k I$ such that

$\exp(D).\alpha' = \mathrm{ad}(h) \circ \alpha$. By lemma 3.2.(ii) one has $D \in \mathcal{C}^1_{\mathbf{P}}(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) \otimes_k I$. An easy computation leads to $C(\alpha') = C(\alpha) + \partial D$. So the obstruction map $\mathbf{Obs}_{\mathbf{P}}(\varphi)$ is well defined.

Assume now $\mathbf{Obs}_{\mathbf{P}}(\varphi)([\rho]) = 0$. It means there exists a 1-cochain $D \in \mathcal{C}^1_{\mathbf{P}}(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) \otimes_k I$ which satisfies $C(\alpha) = \partial D$. Then ρ lifts into the continuous representation $\rho' := \exp(D).\alpha$. By lemma 3.2.(ii), ρ' satisfies ($\mathbf{P}$-ord).

Conversely, if ρ lifts into a continuous representation ρ' satisfying ($\mathbf{P}$-ord), then by lemma 2.5, the 1-cochain $D \in \mathcal{C}^1(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) \otimes_k I$ defined by $\rho' = \exp(D).\alpha$ is such that $C(\alpha) = \partial D$. Again lemma 3.2.(ii) implies $D \in \mathcal{C}^1(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) \otimes_k I$. So $[C(\alpha)] = 0$ in $\mathrm{H}^2(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) \otimes_k I$. □

Theorem 3.7. — *Let S be a set.*

Let $\mathbf{G}$ be a smooth affine $\mathcal{O}$-group scheme of finite type and $(\mathbf{P}_v)_{v\in S}$ be a family of smooth closed $\mathcal{O}$-subgroup schemes of $\mathbf{G}$.

Let also Γ be a profinite group along with a family $(\Gamma_v)_{v\in S}$ of closed subgroups, and let $\overline{\rho} : \Gamma \longrightarrow \mathbf{G}(k)$ be a continuous homomorphism for which assumptions ($\mathbf{P}$-ord) and (Reg) hold.

If the condition (Fratt) holds for Γ, then $\mathbf{Def}_{\overline{\rho}}$ admits a hull and $t_{\mathbf{Def}^{\mathbf{P}}_{\overline{\rho}}} \simeq \mathrm{H}^1_{\mathbf{P}}(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}})$.

Moreover, if the center $\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}$ of $\mathbf{G}$ is a smooth closed $\mathcal{O}$-group subscheme and if $\overline{\rho}$ satisfies the equivalent conditions (Centr) or (Centr'), then $\mathbf{Def}^{\mathbf{P}}_{\overline{\rho}}$ is representable by a ring $R^u_{\mathbf{P}}$ which is such that

$$\dim_{\mathrm{Krull}} R^u_{\mathbf{P}} \otimes_{\mathcal{O}} k \geq h^1_{\mathbf{P}} - h^2_{\mathbf{P}} \quad \textit{where} \quad h^i_{\mathbf{P}} := \dim_k \mathrm{H}^i_{\mathbf{P}}(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}})$$

Proof. — Similarly to the unconditional case, we just have to use propositions 1.2 and 1.3 with $T_{\mathbf{Def}^{\mathbf{P}}_{\overline{\rho}}} = \mathrm{H}^1_{\mathbf{P}}(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}})$ and $Obs_{\mathbf{Def}^{\mathbf{P}}_{\overline{\rho}}} = \mathrm{H}^2_{\mathbf{P}}(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}})$.

- (Cont) follows from lemma 3.1.
- (Tg1) follows from lemma 3.3.
- (Tg2) follows from lemma 3.4, (i) applied to $A = k[\epsilon]$.
- (Tg3) follows from the same statement in the unconditional case since $\mathrm{H}^1_{\mathbf{P}}(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) \subset \mathrm{H}^1(\Gamma, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}})$.
- (Obs) follows from lemma 3.6.
- Under the equivalent conditions (Centr) and (Centr'), (Tg4) follows from lemma 3.4, (ii).

□

3.2. Nearly-ordinary Galois representations with values in L-groups. —

3.2.1. The Langlands dual. — Let us recall the definition of Langlands dual. References are [**48**], [**5**, I] and [**30**].

Let F be a number field, $\overline{F}$ be an algebraic closure of F and also $\overline{\Gamma} := Gal(\overline{F}/F)$. Let $\mathbf{G}$ be a connected reductive group over F.

Isomorphism classes of F-forms of $\mathbf{G}$ are classified by $\mathrm{H}^1(\overline{\Gamma}, \mathrm{Aut}\,\mathbf{G}_{\overline{F}})$. Explicitly, to any class $[a] \in \mathrm{H}^1(\overline{\Gamma}, \mathrm{Aut}\,\mathbf{G}_{\overline{F}})$, one associates the subgroup of $\overline{\Gamma}$-invariants of ${}_a\mathbf{G}$, the latter being $\mathbf{G}$ with $\overline{\Gamma}$-action twisted by a.

Fix $\mathbf{T}$ a maximal subtorus of $\mathbf{G}_{\overline{F}}$ and $\mathbf{B}$ a Borel subgroup of $\mathbf{G}_{\overline{F}}$ containing $\mathbf{T}$. A based root datum $\Psi_0 = (\mathrm{X}^*(\mathbf{T}), \Delta, \mathrm{X}_*(\mathbf{T}), \Delta^\vee)$ can be attached to such a triple $(\mathbf{G}, \mathbf{B}, \mathbf{T})$.

Being defined over F, $\mathbf{G}(\overline{F})$ is endowed with an action of $\overline{\Gamma}$. Let

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma} &\xrightarrow{\mu_{\mathbf{G}}} \mathrm{Aut}\,\Psi_0 \\ \sigma &\longmapsto \mathrm{ad}(g_\sigma) \circ \sigma_{|\mathbf{T}} \end{aligned}$$

where $g_\sigma \in \mathbf{G}(\overline{F})$ such that $\mathrm{ad}(g_\sigma) \circ \sigma$ preserves $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$.

The choice of a splitting of $\mathbf{G}_{\overline{F}}$ gives a split exact sequence of $\overline{\Gamma}$-groups:

$$1 \longrightarrow \mathbf{G}^{\mathrm{ad}}(\overline{F}) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,\mathbf{G}_{\overline{F}} \underset{s_{\mathbf{G}}}{\overset{\pi_{\mathbf{G}}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Aut}\,\Psi_0 \longrightarrow 1$$

where $s_{\mathbf{G}}$ is a section of $\pi_{\mathbf{G}}$, where $\mathrm{Aut}\,\Psi_0$ is endowed with the trivial action of $\overline{\Gamma}$. This gives a short exact sequence of pointed sets:

$$1 \to \mathrm{H}^1(\overline{\Gamma}, \mathbf{G}^{\mathrm{ad}}(\overline{F})) \to \mathrm{H}^1(\overline{\Gamma}, \mathrm{Aut}\,\mathbf{G}_{\overline{F}}) \overset{\pi_{\mathbf{G}*}}{\to} \underline{\mathrm{Hom}}(\overline{\Gamma}, \mathrm{Aut}\,\Psi_0) \to 1$$

If ${}_a\mathbf{G}$ is the F-form of $\mathbf{G}$ associated to $[a] \in \mathrm{H}^1(\overline{\Gamma}, \mathrm{Aut}\,\mathbf{G}_{\overline{F}})$, one has $\mu_{{}_a\mathbf{G}}(\sigma) = \pi_{\mathbf{G}*}([a])(\sigma) \circ \mu_{\mathbf{G}}(\sigma)$ (a based root datum of ${}_a\mathbf{G}$ being identified with Ψ_0). By definition, ${}_a\mathbf{G}$ is an inner form of $\mathbf{G}$ if and only if $[a]$ lies in $\mathrm{H}^1(\overline{\Gamma}, \mathbf{G}^{\mathrm{ad}}(\overline{F}))$, *i.e.* $\mu_{{}_a\mathbf{G}} = \mu_{\mathbf{G}}$.

In each class of inner forms, there is exactly one quasi-split group. If $\mathbf{G}$ splits over F, quasi-split F-forms of $\mathbf{G}$ correspond to classes $s_{\mathbf{G}*}(\mu)$, where $\mu \in \underline{\mathrm{Hom}}(\overline{\Gamma}, \mathrm{Aut}\,\Psi_0)$, so that quasi-split forms of $\mathbf{G}$ are classified by $\underline{\mathrm{Hom}}(\overline{\Gamma}, \mathrm{Aut}\,\Psi_0)$.

Let us now define in the general case the Langlands dual over $\mathcal{O}$ of $\mathbf{G}$. According to Demazure [**18**, 3.6.4], there exists, up to isomorphism, a unique triple $({}^L\mathbf{G}^\circ, {}^L\mathbf{B}^\circ, {}^L\mathbf{T}^\circ)$ such that

– ${}^L\mathbf{G}^\circ$ is a smooth affine $\mathcal{O}$-group scheme, with connected reductive fibres,
– ${}^L\mathbf{B}^\circ$ is a Borel $\mathcal{O}$-subgroup,
– and ${}^L\mathbf{T}^\circ$ is a $\mathcal{O}$-split maximal subtorus
– with corresponding based root datum $\Psi_0^\vee := (\mathrm{X}_*(\mathbf{T}), \Delta^\vee, \mathrm{X}^*(\mathbf{T}), \Delta)$.

A splitting of ${}^L\mathbf{G}^\circ$ gives a section $s_{{}^L\mathbf{G}^\circ} : \operatorname{Aut}\Psi_0^\vee \hookrightarrow \operatorname{Aut}{}^L\mathbf{G}^\circ$. By definition, $\operatorname{Aut}\Psi_0 \simeq \operatorname{Aut}\Psi_0^\vee$, so we get an action of $\overline{\Gamma}$ on ${}^L\mathbf{G}^\circ$:

$$\overline{\Gamma} \xrightarrow{\mu_{\mathbf{G}}} \operatorname{Aut}\Psi_0 \simeq \operatorname{Aut}\Psi_0^\vee \xhookrightarrow{s_{{}^L\mathbf{G}^\circ}} \operatorname{Aut}{}^L\mathbf{G}^\circ$$

Let E be a finite Galois subextension of $\overline{F}/F$ over which $\mathbf{G}$ splits. Then the action of $\overline{\Gamma}$ on ${}^L\mathbf{G}^\circ$ factorizes through the Galois group W of E/F. Let also $\overline{\Gamma}_0$ be the Galois group of $\overline{F}/E$.

The form of the L-group of $\mathbf{G}$ we use is then the semi-direct product ${}^L\mathbf{G} := {}^L\mathbf{G}^\circ \rtimes W$.

3.2.2. Nearly-ordinary deformations. — Fix a finite set S of places of F containing

- the set S_∞ of archimedean places of F,
- the set S_p of places of F dividing p,
- the places of F that ramifies in E.

Let F_S be the maximal S-ramified extension of F, contained in $\overline{F}$. Let Γ_S (*resp.* $\Gamma_{S,0} := Gal(F_S/E)$) be the Galois group of F_S/F (*resp.* F_S/E).

For each $v \in S_p$, let F_v denote the completion of F at v and choose an F-embedding $\overline{F} \hookrightarrow \overline{F_v}$ of $\overline{F}$ in an algebraic closure $\overline{F_v}$ of F_v. Let $E_v \subset F_{S,v}$ be the v-adic closures of $E \subset F_S$ in $\overline{F_v}$.

Thus we get some decomposition subgroups $\Gamma_v \subset \overline{\Gamma}$ (*resp.* $\Gamma_{v,0} \subset \overline{\Gamma}_0$) of F (*resp.* E) at v. Let $W_v := \Gamma_v/\Gamma_{v,0}$ be the Galois group of E_v/F_v. The image $\Gamma_{S,v}$ of the canonical morphism $\Gamma_v \hookrightarrow \overline{\Gamma} \twoheadrightarrow \Gamma_S$ is isomorphic to the Galois group of $F_{S,v}/F$.

Unfortunately, in general $F_{S,v} \neq \overline{F_v}$, that is the morphism $\Gamma_v \longrightarrow \Gamma_S$ may be not injective. Kuz'min [**32**][(1)] has shown that if F contains the p-th roots of unity, the order of the kernel of the latter morphism is prime to p except for at most one place $v \in S_p$.

For any $v \in S_p$, fix a Levi decomposition $\mathbf{M}_v \ltimes \mathbf{U}_v \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}_v$ of a parabolic F_v-subgroup of $\mathbf{G}$ and $\mathbf{T}_v$ a maximal torus of $\mathbf{M}_v$ defined over F_v (according to [**20**, XIX, th. 1.1] such a torus always exists). Let $\Phi_v \subset \mathrm{X}^*(\mathbf{T}_v)$ be the root system of $\mathbf{M}_v$ with respect to $\mathbf{T}_v$. There exists a unique pair $({}^L\mathbf{P}_v^\circ, {}^L\mathbf{M}_v^\circ)$ where ${}^L\mathbf{P}_v^\circ$ is a parabolic $\mathcal{O}$-subgroup of ${}^L\mathbf{G}^\circ$ with Levi $\mathcal{O}$-subgroup ${}^L\mathbf{M}_v^\circ$ such that ${}^L\mathbf{T}_v^\circ$ is a maximal torus of ${}^L\mathbf{M}_v^\circ$ with respect to which the root system of ${}^L\mathbf{M}_v^\circ$ is the coroot system $\Phi_v^\vee \subset \mathrm{X}_*(\mathbf{T}_v) = \mathrm{X}^*({}^L\mathbf{T}_v^\circ)$ of $\Phi_v \subset \mathrm{X}^*(\mathbf{T}_v)$ (*cf.* [**5**, 3.4]). The subgroup ${}^L\mathbf{P}_v^\circ \subset {}^L\mathbf{G}^\circ$ is W_v-stable since $\mathbf{P}_v$ is a parabolic F_v-subgroup. Then let ${}^L\mathbf{P}_v := {}^L\mathbf{P}_v^\circ \rtimes W_v$.

We now apply the study of deformations with local conditions to this situation. Note that the notations $\mathbf{G}$, Γ, S and $\mathbf{P}_v$ are replaced by ${}^L\mathbf{G}$, Γ_S, S_p, ${}^L\mathbf{P}_v$.

For A in $\mathcal{CNL}_\mathcal{O}$, a map $\alpha : \Gamma_S \longrightarrow {}^L\mathbf{G}(A)$ which satisfies ($\mathbf{P}$-ord) is called $\mathbf{P}$-*nearly-ordinary*.

In this setting, theorem 3.7 reads

Theorem 3.8. — *Let* $\overline{\rho} : \Gamma_S \longrightarrow {}^L\mathbf{G}(k)$ *be a* $\mathbf{P}$-*nearly-ordinary residual representation satisfying (Reg).*

The deformation functor $\mathbf{Def}^{\mathbf{P}}_{\overline{\rho}}$ *admits a hull.*

---

(1) I thank T. Nguyen Quang Do for pointing out to me this reference.

Moreover, if the center of ${}^L\mathbf{G}$ *is smooth over* $\mathcal{O}$ *and equivalent conditions (Centr) or (Centr') hold, then* $\mathbf{Def}^{\mathbf{P}}_{\overline{\rho}}$ *is representable by an algebra* $R^u_{\mathbf{P}}$ *in* $\mathcal{CNL}_{\mathcal{O}}$ *such that*

$$\dim_{\mathrm{Krull}} R^u_{\mathbf{P}} \otimes_{\mathcal{O}} k \geq h^1_{\mathbf{P}} - h^2_{\mathbf{P}} \quad \textit{where} \quad h^i_{\mathbf{P}} = \dim_k \mathrm{H}^i_{\mathbf{P}}(\Gamma_S, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}})$$

Proof. — It suffices to verify the conditions of theorem 3.7 hold. By definition, ${}^L\mathbf{G}$ is a smooth affine $\mathcal{O}$-group scheme of finite type. Like any parabolic subgroup, ${}^L\mathbf{P}^{\circ}_v$ and ${}^L\mathbf{P}_v$ are smooth closed $\mathcal{O}$-subgroups of ${}^L\mathbf{G}$.

In 2.3.2 we already remarked that condition (Fratt) is fulfilled when $\Gamma = \Gamma_S$. □

Note that the center of ${}^L\mathbf{G}$ is always representable. Indeed, according to [**20**, XI, cor. 6.11], the centralizer $\mathbf{Z}_1$ of ${}^L\mathbf{G}^{\circ}$ in ${}^L\mathbf{G}$ is representable by a closed $\mathcal{O}$-subscheme. Moreover, [**19**, II, § 1, th. 3.6] shows the center of ${}^L\mathbf{G}$, which is the W-invariant subfunctor of $\mathbf{Z}_1$, is also representable by a closed $\mathcal{O}$-subscheme.

Remark also that, if p is outside a finite number of prime, the center is smooth over $\mathcal{O}$. In fact, by [**20**, XXII, 4.1.8], the center of ${}^L\mathbf{G}^{\circ}$, that is $\mathbf{Z}_1 \cap {}^L\mathbf{G}^{\circ}$, is the diagonalisable $\mathcal{O}$-group with character group $\mathrm{X}^*({}^L\mathbf{T}^{\circ})/\Delta^{\vee} \simeq \mathrm{X}_*(\mathbf{T})/\Delta^{\vee}$. Thus $\mathbf{Z}^L\mathbf{G} \cap {}^L\mathbf{G}^{\circ}$ is the diagonalisable $\mathcal{O}$-group with character group the coinvariant group $(\mathrm{X}_*(\mathbf{T})/\Delta^{\vee})_W$. So that if the torsion part of the latter is prime to p, $\mathbf{Z}^L\mathbf{G}$ is smooth over $\mathcal{O}$.

3.2.3. Poitou-Tate exact sequence. — Let $\mathbf{RG}$ be the radical of $\mathbf{G}$.

Proposition 3.9. — *Under the hypothesis of theorem 3.8 and*

(Reg') : *for any* $v \in S_p$, $\mathrm{H}^2(\Gamma_v, \mathfrak{P}_{v,\overline{\rho}}) = 0$ *and* $\mathrm{H}^2_{\mathbf{P}}(\Gamma_S, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}})$ *is the kernel of the canonical map* $\mathrm{H}^2(\Gamma_S, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) \longrightarrow \prod_{S_p} \mathrm{H}^2(\Gamma_v, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}})$

one has

$$h^1_{\mathbf{P}} - h^2_{\mathbf{P}} = \mathrm{rk}_F\, \mathbf{RG} + \sum_{v\in S_p} [F_v : \mathbb{Q}_p].\dim_k \mathfrak{P}_{v,\overline{\rho}} - \sum_{v\in S_\infty} h^0(\Gamma_v, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}})$$

where $h^0(\Gamma_v, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) = \dim_k \mathrm{H}^0(\Gamma_v, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}})$.

Proof. — For any Γ_S-module (*resp.* Γ_v-module) M, we put

$$M' := \mathrm{Hom}(M, \mu_p)$$

where μ_p is the subgroup of p-th root of unity in F_S (*resp.* $\overline{F_v}$).

Consider Poitou-Tate exact sequence (*cf.* [**34**, I, th. 4.10]):

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \mathrm{H}^0(\Gamma_S, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) & \xrightarrow{\beta^0} & \prod_S \mathrm{H}^0(\Gamma_v, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) & \xrightarrow{\gamma^0} & \mathrm{H}^2(\Gamma_S, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}')^\vee & \\
 & & & & & \Big\downarrow \delta^1 & \\
 & \mathrm{H}^1(\Gamma_S, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}')^\vee & \xleftarrow{\gamma^1} & \prod_S \mathrm{H}^1(\Gamma_v, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) & \xleftarrow{\beta^1} & \mathrm{H}^1(\Gamma_S, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) & \\
 & \delta_2 \Big\downarrow & & & & & \\
 & \mathrm{H}^2(\Gamma_S, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) & \xrightarrow{\beta^2} & \prod_S \mathrm{H}^2(\Gamma_v, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) & \xrightarrow{\gamma^2} & \mathrm{H}^0(\Gamma_S, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}')^\vee & \longrightarrow 0
\end{array}$$

where, when v is archimedian, $\mathrm{H}^{\cdot}(\Gamma_v, \cdot)$ are the *modified* cohomology groups.

If $v \in S \setminus S_p$, let $\mathfrak{P}_{v,\overline{\rho}} := \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}$.

Now let us show that we have the following exact subsequence for nearly-ordinary cohomology:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \mathrm{H}^0_{\mathbf{P}}(\Gamma_S, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) & \longrightarrow & \prod_S \mathrm{H}^0(\Gamma_v, \mathfrak{P}_{v,\overline{\rho}}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^2(\Gamma_S, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}')^\vee & \\
 & & & & & \downarrow & \\
 & \mathrm{H}^1(\Gamma_S, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}')^\vee & \longleftarrow & \prod_S \mathrm{H}^1(\Gamma_v, \mathfrak{P}_{v,\overline{\rho}}) & \longleftarrow & \mathrm{H}^1_{\mathbf{P}}(\Gamma_S, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) & \\
 & \downarrow & & & & & \\
 & \mathrm{H}^2_{\mathbf{P}}(\Gamma_S, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) & \longrightarrow & \prod_S \mathrm{H}^2(\Gamma_v, \mathfrak{P}_{v,\overline{\rho}}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^0(\Gamma_S, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}')^\vee & \longrightarrow 0
\end{array}$$

In fact, by $\mathrm{H}^0_{\mathbf{P}}(\Gamma_S, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) = \mathrm{H}^0(\Gamma_S, \mathfrak{P}_{v,\overline{\rho}})$ and the regularity assumption (Reg), the first line has not changed.

Formula (2) shows that $\mathrm{H}^1_{\mathbf{P}}(\Gamma_S, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}})$ contains the image of δ^1 and is sent, through β^1, in $\prod_S \mathrm{H}^1(\Gamma_v, \mathfrak{P}_{v,\overline{\rho}})$ (by (Reg), $\mathrm{H}^1(\Gamma_v, \mathfrak{P}_{v,\overline{\rho}}) \subset \mathrm{H}^1(\Gamma_v, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}})$).

Exactness as far as $\mathrm{H}^1(\Gamma_S, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}})$ follows from the exactness of the genuine sequence and exactness at $\prod_S \mathrm{H}^1(\Gamma_v, \mathfrak{P}_{v,\overline{\rho}})$ comes from formula (2) again.

Assumption (Reg') shows that $\mathrm{H}^2_{\mathbf{P}}(\Gamma_S, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}})$ contains the image of δ^2.

According to [**34**, I, cor. 4.16], the map

$$\mathrm{H}^2(\Gamma_S, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) \longrightarrow \prod_{v \in S \setminus S_p} \mathrm{H}^2(\Gamma_v, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}})$$

is surjective, so $\gamma^2(\prod_S \mathrm{H}^2(\Gamma_v, \mathfrak{P}_{v,\overline{\rho}})) = \mathrm{H}^0(\Gamma_S, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}')^\vee$. This finishes the proof of the exactness of our subsequence.

Comparing Euler characteristics of the previous exact sequences, one has

$$\begin{aligned}
\chi(\Gamma_S, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) - \chi_{\mathbf{P}}(\Gamma_S, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) &= \sum_{v \in S_p} (\chi(\Gamma_v, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) - \chi(\Gamma_v, \mathfrak{P}_{v,\overline{\rho}})) \\
&= \chi(\Gamma_v, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}/\mathfrak{P}_{v,\overline{\rho}})
\end{aligned}$$

Using formulae of local and global Euler characteristics ([**34**, I, th. 2.8 and th. 5.1]):

$$\chi(\Gamma_v, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}/\mathfrak{P}_{v,\overline{\rho}}) = -[F_v : \mathbb{Q}_p].\dim_k \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}/\mathfrak{P}_{v,\overline{\rho}}$$

$$\chi(\Gamma_S, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) = -[F : \mathbb{Q}].\dim_k \mathfrak{G}_{\overline{\rho}} + \sum_{v\in S_\infty} h^0(\Gamma_v, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}})$$

and $\mathrm{H}^0_{\mathbf{P}}(\Gamma_S, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) = \mathrm{H}^0(\Gamma_S, \mathfrak{P}_{v,\overline{\rho}}) = \mathfrak{Z}$ (by (Centr)), one gets

$$\begin{aligned} h^1_{\mathbf{P}} - h^2_{\mathbf{P}} &= \dim_k \mathfrak{Z} - \textstyle\sum_{v\in S_p}[F_v : \mathbb{Q}_p].\dim_k \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}/\mathfrak{P}_{v,\overline{\rho}} \\ &\quad +[F : \mathbb{Q}].\dim_k \mathfrak{G}_{\overline{\rho}} - \textstyle\sum_{v\in S_\infty} h^0(\Gamma_v, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) \\ &= \dim_k \mathfrak{Z} + \textstyle\sum_{v\in S_p}[F_v : \mathbb{Q}_p].\dim_k \mathfrak{P}_{v,\overline{\rho}} - \textstyle\sum_{v\in S_\infty} h^0(\Gamma_v, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) \end{aligned}$$

We now prove that $\dim_k \mathfrak{Z} = \mathrm{rk}_F\, \mathbf{RG}$. One has

$$\mathfrak{Z} = k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{H}^0(W, \mathrm{X}_*(\mathbf{R}^L\mathbf{G}^\circ))$$

where $\mathbf{R}^L\mathbf{G}^\circ$ is the radical of ${}^L\mathbf{G}^\circ$. But by duality, the cocharacter group of this radical is the caractère group of $\mathbf{G}$, so that $\mathfrak{Z} = k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{X}^*_F(\mathbf{G})$ and $\dim_k \mathfrak{Z} = \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}\, \mathrm{X}^*_F(\mathbf{G}) = \mathrm{rk}_F\, \mathbf{RG}$. □

3.2.4. Hida-Iwasawa algebra. — *From now on, we assume* $[E : F]$ *is prime to* p.

For any reductive $\mathcal{O}$-group scheme $\mathbf{M}$, one define (*cf.* [**20**, XXII, th. 6.2.1]) the *coradical* $\mathbf{CM}$ of $\mathbf{M}$ as the diagonalisable $\mathcal{O}$-group scheme with character group $\mathrm{X}^*(\mathbf{CM}) = \mathrm{X}^*(\mathbf{M})$. One also define the morphism $\nu_{\mathbf{M}} : \mathbf{M} \twoheadrightarrow \mathbf{CM}$ by $\chi(\nu_{\mathbf{M}}(m)) = \chi(m)$, for any $\mathcal{O}$-algebra A, $m \in \mathbf{M}(A)$ and $\chi \in \mathrm{X}^*(\mathbf{M})$. According to [**20**, XXII, prop. 6.1.8], the coradical of a split reductive group scheme is also the quotient of any maximal torus by the group scheme generated by coroots of $\mathbf{M}$ with respect to this torus.

Thus the character group of the coradical $\mathbf{C}^L\mathbf{G}^\circ$ of ${}^L\mathbf{G}^\circ$ can be identified with the orthogonal $\Phi^\perp \subset \mathrm{X}_*(\mathbf{T})$ of the root system $\Phi \subset \mathrm{X}^*(\mathbf{T})$ of $\mathbf{G}_{\overline{F}}$ with respect to any maximal torus $\mathbf{T}$ defined over F of $\mathbf{G}$. And $\Phi^\perp$ is exactly the cocharacter group $\mathrm{X}_*(\mathbf{RG})$ of the radical $\mathbf{RG}$ of $\mathbf{G}$.

Similarly, for any $v \in S_p$, the character group of the coradical $\mathbf{C}^L\mathbf{P}_v^\circ$ of the quotient of ${}^L\mathbf{P}_v^\circ$ by its unipotent radical can be identified with the orthogonal $\Phi_v^\perp \subset \mathrm{X}_*(\mathbf{T}_v)$ of the root system of $\mathbf{G}_{\overline{F_v}}$ with respect to any maximal torus $\mathbf{T}_v$ of $(\mathbf{P}_v)_{\overline{F_v}}$. And $\Phi_v^\perp$ is the cocharacter group $\mathrm{X}_*(\mathbf{RM}_v)$ of the radical $\mathbf{RM}_v$ of $\mathbf{M}_v$.

Moreover, since $\mathbf{G}$ splits over E, the $\mathcal{O}$-groups $\mathbf{C}^L\mathbf{G}^\circ$ and $\mathbf{C}^L\mathbf{P}_v^\circ$, like Φ and Φ_v, carry naturally an action of W and W_v respectively.

Consider the following commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc} {}^L\mathbf{G}^\circ & \overset{\nu}{\twoheadrightarrow} & \mathbf{C}^L\mathbf{G}^\circ \\ \cup & & \uparrow \mu_v \\ {}^L\mathbf{P}_v^\circ & \overset{\nu_v}{\twoheadrightarrow} & \mathbf{C}^L\mathbf{P}_v^\circ \end{array}$$

Any nearly-ordinary deformation $[\rho] \in \mathbf{Def}_{\overline{\rho}}^{\mathbf{P}}(A)$ of $\overline{\rho}$ gives

- a deformation $[\nu \circ \rho : \Gamma_S \longrightarrow \mathbf{C}^L\mathbf{G}^\circ(A) \rtimes W]$ of $\nu \circ \overline{\rho}$,
- and for any $v \in S_p$ a deformation

$$[\nu_v \circ \mathrm{ad}(g_v) \circ \rho_{|\Gamma_v} : \Gamma_v \longrightarrow \mathbf{C}^L\mathbf{P}_v^\circ(A) \rtimes W_v]$$

  of $\nu_v \circ \overline{\rho}_{|\Gamma_v}$, where $g_v \in \widehat{\mathbf{G}}(A)$ is as in ($\mathbf{P}$-ord). Due to lemma 3.2.(i), the deformation class doesn't depend on the choice of g_v.

One has the compatibility $[\nu \circ \rho_{|\Gamma_v}] = [\mu_v \circ \nu_v \circ \rho_{|\Gamma_v}]$.

Using proposition 2.8, one gets the following commutative diagram of universal deformation algebras:

$$\begin{tikzcd} R^u_{\mathbf{P}} & \mathcal{O}[[\mathrm{X}^*(\mathbf{C}^L\mathbf{G}^\circ)\otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma_S]}\Gamma^{p-\mathrm{ab}}_{S,0}]] \arrow[l] \\ \mathcal{O}[[\mathrm{X}^*(\mathbf{C}^L\mathbf{P}^\circ_v)\otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma_v]}\Gamma^{p-\mathrm{ab}}_{v,0}]] \arrow[u] & \mathcal{O}[[\mathrm{X}^*(\mathbf{C}^L\mathbf{G}^\circ)\otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma_v]}\Gamma^{p-\mathrm{ab}}_{v,0}]] \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

where $\Gamma^{p-\mathrm{ab}}_{S,0}$ is the Galois group of the maximal abelian pro-p subextension of F_S/E and $\Gamma^{p-\mathrm{ab}}_{v,0}$ is the Galois group of the maximal abelian pro-p subextension of $\overline{F_v}/E_v$.

Let $I^{p-\mathrm{ab}}_{v,0}\subset\Gamma^{p-\mathrm{ab}}_{v,0}$ be the inertia subgroup of this extension. This is also the wild inertia subgroup of the maximal abelian subextension of $\overline{F_v}/E_v$. Thus the local norm residue symbol [**37**, III.2] yields an isomorphism $1+\mathfrak{m}_{E,v}\xrightarrow{\sim} I^{p-\mathrm{ab}}_{v,0}$ where $\mathfrak{m}_{E,v}$ is the maximal ideal of the ring of integers of E_v. Indeed, $1+\mathfrak{m}_{E,v}$ is the pro-p-part of the ring of integers.

Let $I^{p-\mathrm{ab}}_{S,0}\subset\Gamma^{p-\mathrm{ab}}_{S,0}$ be the compositum of the inertia subgroups at $v\in S_p$ of the maximal abelian pro-p subextension of F_S/E. Compatibility between local and global norm residue symbol [**37**, IV.6-7] yields an isomorphism $(1+\mathfrak{m}_{E,p})/\overline{\mathcal{O}^\times_{Ep}}\xrightarrow{\sim} I^{p-\mathrm{ab}}_{S,0}$ where $\mathcal{O}_E$ is the ring of integers of E, $\mathfrak{m}_{E,p}$ is the radical of the semi-local completion $\mathcal{O}_E\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p$ and $\overline{\mathcal{O}^\times_{Ep}}$ is the maximal pro-p subgroup of the closure $\overline{\mathcal{O}^\times_E}$ of the image of the group of global units of E in $\mathcal{O}_E\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p$.

The *Hida-Iwasawa algebra* is the completed $\mathcal{O}$-algebra $\mathcal{O}[[H]]$ of the $\mathbb{Z}_p$-module H defined as the following amalgamated sum:

$$H := \left(\oplus_{v\in S_p}\mathrm{X}^*(\mathbf{C}^L\mathbf{P}^\circ_v)\otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma_v]} I^{p-\mathrm{ab}}_{v,0}\right)\bigoplus_{\oplus_{v\in S_p}\mathrm{X}^*(\mathbf{C}^L\mathbf{G}^\circ)\otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma_v]}I^{p-\mathrm{ab}}_{v,0}}\mathrm{X}^*(\mathbf{C}^L\mathbf{G}^\circ)\otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma_S]} I^{p-\mathrm{ab}}_{S,0}$$

The previous commutative diagram shows that $R^u_{\mathbf{P}}$ is an algebra over the Hida-Iwasawa algebra $\mathcal{O}[[H]]$.

3.2.5. Dimension of the Hida-Iwasawa algebra. — We now compute the dimension of this algebra. The (absolute) *parabolic rank* $\operatorname{park}\mathbf{P}$ of a parabolic group $\mathbf{P}$ is the cardinal of the set of maximal proper parabolic subgroup containing it. Let $r_1(F)$ (*resp.* $r_2(F)$) denote the number of real (*resp.* complex) places of F. Let also $I_1(F)$ be the set of real places of F.

Let $\mathbf{RM}_v(\mathcal{O}_{F,v}) \subset \mathbf{RM}_v(F_v)$ be the maximal compact subgroup. Let also $\mathbf{RG}(\mathcal{O}_F) \subset \mathbf{RG}(F)$ be the intersection of $\mathbf{RG}(F)$ and the maximal compact subgroup of $\mathbf{RG}(\mathbb{A}_{F,f})$. The closure of $\mathbf{RG}(\mathcal{O}_F)$ in the semi-local group $\prod_{v\in S_p}\mathbf{RG}(\mathcal{O}_{F,v})$ will be denoted $\overline{\mathbf{RG}(\mathcal{O}_F)}$.

For any profinite abelian group H, H_p denotes the pro-p part of H.

Proposition 3.10. — *One has* $H = \prod_{v\in S_p}\mathbf{RM}(\mathcal{O}_{F,v})_p/\overline{\mathbf{RG}(\mathcal{O}_F)}_p$.

The relative Krull dimension of the Hida-Iwasawa algebra is

$$\begin{aligned}\operatorname{rk}_{\mathbb{Z}_p} H \quad &= \quad \textstyle\sum_{v\in I_1(F)}(\dim\mathbf{RG} - \operatorname{rk}_{\mathbb{R}}\mathbf{RG}_{F_v}) + r_2(F).\dim\mathbf{RG}\\ &\quad\quad +\operatorname{rk}_F\mathbf{RG} + \textstyle\sum_{v\in S_p}[F_v:\mathbb{Q}_p].\operatorname{park}\mathbf{P}_v + \delta_{\mathbf{RG},F,p}\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}\delta_{\mathbf{RG},F,p} \quad &:= \quad \operatorname{rk}_{\mathbb{Z}}\mathbf{RG}(\mathcal{O}_F) - \operatorname{rk}_{\mathbb{Z}_p}\overline{\mathbf{RG}(\mathcal{O}_F)}_p\\ &= \quad \textstyle\sum_{v\in I_1(F)}\operatorname{rk}_{\mathbb{R}}\mathbf{RG}_{F_v} + r_2(F).\dim\mathbf{RG}\\ &\quad\quad -\operatorname{rk}_F\mathbf{RG} - \operatorname{rk}_{\mathbb{Z}_p}\overline{\mathbf{RG}(\mathcal{O}_F)}_p\end{aligned}$$

Note that if $\mathbf{RG}$ is a torus $\mathrm{R}_{E/F}\mathbf{G_m}$, obtained by restriction of scalars then $\delta_{\mathbf{RG},F,p}$ is the defect $\delta_{E,p}$ of the Leopoldt conjecture for the number field E at p. The Leopoldt conjecture was proved by A. Brumer [**14**] for abelian extensions $E/\mathbb{Q}$.

Proof. — Due to the previous isomorphisms, one has:

$$\begin{aligned} \mathrm{X}^*(\mathbf{C}^L\mathbf{P}_v^\circ)\otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma_v]} I_{v,0}^{p-\mathrm{ab}} &= \mathrm{X}_*(\mathbf{RM}_v)\otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma_v]} 1+\mathfrak{m}_{E,v} \\ &= \mathrm{H}^0(\Gamma_v, \mathrm{X}_*(\mathbf{RM}_v)\otimes_{\mathbb{Z}} 1+\mathfrak{m}_{E,v}) \end{aligned}$$

the last equality between Γ_v-invariants and co-invariants comes from the fact that the order of $W_v \subset W$ is prime to p. However the group $\mathrm{H}^0(\Gamma_v, \mathrm{X}_*(\mathbf{RM}_v)\otimes_{\mathbb{Z}} 1+\mathfrak{m}_{E,v})$ is exactly the maximal pro-p compact subgroup $\mathbf{RM}_v(\mathcal{O}_{F,v})_p$ of $\mathrm{H}^0(\Gamma_v, \mathrm{X}_*(\mathbf{RM}_v)\otimes_{\mathbb{Z}} E_v) = \mathbf{RM}_v(F_v)$. So

$$\mathrm{X}^*(\mathbf{C}^L\mathbf{P}_v^\circ)\otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma_v]} I_{v,0}^{p-\mathrm{ab}} = \mathbf{RM}_v(\mathcal{O}_{F,v})_p$$

Similarly, one has $\mathrm{X}^*(\mathbf{C}^L\mathbf{G}^\circ)\otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma_v]} I_{v,0}^{p-\mathrm{ab}} = \mathbf{RG}(\mathcal{O}_{F,v})_p$. And also

$$\begin{aligned} \mathrm{X}^*(\mathbf{C}^L\mathbf{G}^\circ)\otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma_S]} I_{S,0}^{p-\mathrm{ab}} &= \mathrm{H}^0(\Gamma_S, \mathrm{X}_*(\mathbf{RG})\otimes_{\mathbb{Z}} (1+\mathfrak{m}_{E,p})/\overline{\mathcal{O}_{Ep}^\times}) \\ &= \mathrm{H}^0(\Gamma_S, \mathbf{RG}(\mathcal{O}_E\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p)_p/\overline{\mathbf{RG}(\mathcal{O}_E)_p}) \\ &= \textstyle\prod_{v\in S_p}\mathbf{RG}(\mathcal{O}_{F,v})_p/\overline{\mathbf{RG}(\mathcal{O}_F)_p} \end{aligned}$$

All this shows

$$\begin{aligned} H &= \textstyle\prod_{S_p}\mathbf{RM}_v(\mathcal{O}_{F,v})_p \oplus_{\prod_{S_p}\mathbf{RG}(\mathcal{O}_{F,v})_p} \prod_{S_p}\mathbf{RG}(\mathcal{O}_{F,v})_p/\overline{\mathbf{RG}(\mathcal{O}_F)_p} \\ &= \textstyle\prod_{S_p}\mathbf{RM}_v(\mathcal{O}_{F,v})_p/\overline{\mathbf{RG}(\mathcal{O}_F)_p} \end{aligned}$$

The dimension of the torus $\mathbf{RM}_v$, that is the rank of $\mathrm{X}_*(\mathbf{RM}_v) = \Phi_v^\perp$ is the sum of the dimension of the radical $\mathbf{RG}$ of $\mathbf{G}$ and the parabolic rank of $\mathbf{P}_v$. So the $\mathbb{Z}_p$-rank of H is

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}_p} H = [F:\mathbb{Q}].\dim\mathbf{RG} - \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}_p}\overline{\mathbf{RG}(F)_p} + \sum_{v\in S_p}[F_v:\mathbb{Q}_p].\mathrm{park}\,\mathbf{P}_v$$

According to [**38**, cor. 1 du th. 4.14], one has

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}\,\mathbf{RG}(\mathcal{O}_F) = \mathrm{rk}_{\mathbb{R}}\,\mathrm{R}_{F/\mathbb{Q}}\mathbf{RG} - \mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}\,\mathrm{R}_{F/\mathbb{Q}}\mathbf{RG}$$

Since the character group of $\mathrm{R}_{F/\mathbb{Q}}\mathbf{RG}$ is the induced module, from F to $\mathbb{Q}$, of the character group of $\mathbf{RG}$, one gets $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}\,\mathrm{R}_{F/\mathbb{Q}}\mathbf{RG} = \mathrm{rk}_F\,\mathbf{RG}$. One also has $(\mathrm{R}_{F/\mathbb{Q}}\mathbf{RG})_{\mathbb{R}} = \mathrm{R}_{F\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}/\mathbb{R}}(\mathbf{RG}_{F\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}})$. Since $\mathbf{RG}$ splits over $\mathbb{C}$ (for any complex embedding of F), one obtains

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{R}}\,\mathrm{R}_{F/\mathbb{Q}}\mathbf{RG} = \sum_{v\in I_1(F)} \mathrm{rk}_{\mathbb{R}}\,\mathbf{RG}_{F_v} + r_2(F).\dim\mathbf{RG}$$

Now the proposition follows from $[F:\mathbb{Q}] = r_1(F) + 2.r_2(F)$ and the definition of $\delta_{\mathbf{RG},F,p}$. □

3.2.6. Case of a unitary similitude group in three variables. — Suppose now that $p \neq 2$, F is a totally real number field and E is a CM extension of F. Let σ be the non trivial element of $W = \{1,\sigma\}$. We often denote by $\overline{A}$ the conjugate by σ of an element or a matrix A with coefficients in E.

Let $a \in \underline{\mathrm{Hom}}(\overline{\Gamma}, \mathbf{GL}(3)\times\mathbf{G_m},)$ be the morphism which factors through W and sends σ to

$$(A,\mu) \longmapsto (\mu.\phi.{}^{t}A^{-1}.\phi^{-1},\mu) \qquad \text{where} \qquad \phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

The quasi-split unitary similitude group in three variables $\mathbf{G} = \mathbf{GU}$ associated with E/F is the (quasi-split) F-form of $\mathbf{GL}(3)\times\mathbf{G_m}$, coming from the $\overline{\Gamma}$-action twisted by a. Then $\mathbf{GU}(E) \simeq \mathbf{GL}(3,E)\times E^{\times}$ and, via this identification,

$$\mathbf{GU}(F) \simeq \left\{(A,\mu) \in \mathbf{GL}(3,E)\times F^{\times} \;/\; A.\phi.{}^{t}\overline{A} = \mu.\phi\right\}$$

Of course the similitude factor μ is determined by A.

The subgroup of diagonal matrices is (the set of F-points of) a maximal torus $\mathbf{T}$ in $\mathbf{GU}$ which is isomorphic to $(\mathrm{R}_{E/F}\mathbf{G}_{\mathbf{m},})^2$ through the map

$$(a,b) \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & \mu/\overline{a} \end{pmatrix} \qquad \text{where} \qquad \mu = b.\overline{b}$$

The radical of $\mathbf{GU}$ is the diagonal subgoup

$$\mathbf{RG} \simeq \mathrm{R}_{E/F}\mathbf{G}_{\mathbf{m},} \subset (\mathrm{R}_{E/F}\mathbf{G}_{\mathbf{m},})^2$$

This is a torus of dimension $\dim \mathbf{RG} = 2$, F-rank $\mathrm{rk}_F\, \mathbf{RG} = 1$. Since E/F is a CM extension, for any real place $v \in I_1(F)$,

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{R}}\, \mathbf{RG}_{F_v} = \mathrm{rk}_{\mathbb{R}}\, \mathrm{R}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbf{G}_{\mathbf{m},} = 1$$

Moreover the subgroup of upper triangular matrices is a Borel subgroup $\mathbf{B}$ defined over F. Its (absolute) parabolic rank is two, like any Borel subgroup of $\mathbf{GL}(3) \times \mathbf{G}_{\mathbf{m},}$.

Since the tori $\mathbf{T}$ and $\mathbf{RG}$ are respectively of split rank two and one over F, the semi-simple F-rank of $\mathbf{GU}$ is one. So that $\mathbf{B}$ is also a maximal proper F-parapolic subgroup of $\mathbf{GU}$. For any $v \in S_p$, we take $\mathbf{P}_v = \mathbf{B}$.

According to the previous proposition, we have

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}_p} H = 1 + 3.[F:\mathbb{Q}] + \delta_{E,p}$$

Since $\mathbf{GL}(n)$ is its own dual group, one has ${}^L\mathbf{GU}^\circ = \mathbf{GL}(3) \times \mathbf{G}_{\mathbf{m},}$. Moreover the L-group of $\mathbf{GU}$ is ${}^L\mathbf{GU} := (\mathbf{GL}(3) \times \mathbf{G}_{\mathbf{m},}) \rtimes W$ with σ acting on $\mathbf{GL}(3) \times \mathbf{G}_{\mathbf{m},}$ by $a(\sigma)$.

As $\mathbf{B}$, the dual group ${}^L\mathbf{B}^\circ$ has to be a Borel subgroup of $\mathbf{GL}(3) \times \mathbf{G}_{\mathbf{m},}$. So its dimension is seven.

Now we have to compute $h^0(\Gamma_v, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}})$ for any place $v \in I_1(F)$. Suppose that the image $\overline{\rho}(c)$ of the complex conjugation $c \in \Gamma_v$ does not belong to ${}^L\mathbf{GU}^\circ$. Since $\overline{\rho}(c)^2 = 1$, one has $\overline{\rho}(c) = (A, \mu).\sigma$ where

$$A \in \mathbf{GL}(3, k) \quad \text{and} \quad \mu \in \{1, -1\} \subset k^\times \quad \text{satisfy} \quad {}^t(A.\phi) = \mu.A.\phi$$

The action of $\overline{\rho}(c)$ on the Lie algebra $\mathfrak{G}_{\overline{\rho}} = \mathfrak{Gl}(3) \times \mathfrak{Gm}$ of the dual group of $\mathbf{GU}$ is given by

$$(X, \alpha) \longmapsto (\alpha - A.\phi.{}^tX.\phi.A^{-1}, \alpha)$$

Using the previous relation between A and μ, the equation which determines $\mathrm{H}^0(\Gamma_v, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}})$ can de formulated as follows:

$$Y + \mu.{}^tY \quad \text{where} \quad Y = (X - \frac{\alpha}{2}.I_3).A.\phi$$

and $I_3 \in \mathbf{GL}(3, k)$ is the unit matrix. Thus $h^0(\Gamma_v, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) = 7$ if $\mu = -1$ and $h^0(\Gamma_v, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}}) = 4$ if $\mu = 1$.

Finally, under the hypothesis of proposition 3.9, we have

$$h^1_{\mathbf{P}} - h^2_{\mathbf{P}} = 1 + 7.[F : \mathbb{Q}] - \sum_{v \in I_1(F)} \mathrm{H}^0(\Gamma_v, \mathfrak{G}_{\overline{\rho}})$$

So that, if the Leopoldt conjecture, for E at p, holds, there is equality

$$h^1_{\mathbf{P}} - h^2_{\mathbf{P}} = \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}_p} H$$

if and only if for any $v \in I_1(F)$, $\overline{\rho}(c) = (A, 1).\sigma$ with $A \in \mathbf{GL}(3, k)$.

Deuxième PARTIE II

ALGÈBRE DE HECKE QUASI-ORDINAIRE UNIVERSELLE

4. Cohomologie des variétés de Shimura

Dans cette section, nous comparons la cohomologie d'une variété de Shimura Sh d'un groupe réductif connexe $\mathbf{G}$ sur $\mathbb{Q}$, en *niveau fini* K, à la cohomologie du groupe K. Nous parlons de niveau fini pour signifier que K est un sous-groupe *ouvert* compact du groupe des points adéliques finis $\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$. Le résultat de comparaison que nous démontrons (*cf.* prop. 4.5) met en jeu la cohomologie du groupe K muni de la topologie *discrete*.

Dans la suite, l'application principale de ce résultat sera la suite spectrale de changement de niveau du théorème 6.2.

Ce résultat est l'analogue adélique de la comparaison (rappelée dans la proposition A.1 en appendice) de la cohomologie d'un groupe Γ avec celle d'un espace $\mathrm{K}(\Gamma, 1)$.

Nous envisageons ici les variétés de Shimura uniquement d'un point de vue topologique. En fait, la donnée de Shimura ne nous sert pas par la suite et c'est seulement en tant qu'adélisation de l'espace symétrique, que nous avons recours à la variété Sh. Le point de vue adélique permet de définir l'action des opérateurs de Hecke en une place p sans avoir recours au théorème d'approximation forte, comme c'était le cas dans [**25**, 1.10] et [**27**, 4].

Remarquons néanmoins que l'axiome (SV2) entraine qu'un groupe $\mathbf{G}$ possédant une donnée de Shimura satisfait à l'hypothèse de Harish-Chandra rappelée dans l'introduction, ce qui sera crucial au paragraphe 7.3.1 pour appliquer un résultat de Saper.

L'axiome (SV4) nous assure que les fibrés $\mathrm{Sh}_K(L)$ construits au paragraphe 4.3.2 sont localement triviaux. Néanmoins cette condition restrictive peut être levée si Sh_K est construit comme une induction à partir d'une composante connexe comme dans [**26**].

4.1. Variétés de Shimura. — Nous rappelons la notion de variété de Shimura formalisée et développée par Deligne dans [**17**].

4.1.1. Axiomes. — Rappelons les axiomes imposés à une paire $(\mathbf{G}, X)$ pour définir une variété de Shimura : $\mathbf{G}$ est un groupe réductif connexe sur $\mathbb{Q}$, et X est une classe de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$-conjugaison de morphismes de groupes algébriques réels $h : \mathrm{R}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}\mathbf{G_{m}}, \longrightarrow \mathbf{G}_{\mathbb{R}}$ vérifiant :

- **(SV1) :** pour tout $h \in X$, la structure de Hodge définie par h sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ de $\mathbf{G}_{\mathbb{R}}$ est de type $\{(-1,1),(0,0),(1,-1)\}$;
- **(SV2) :** pour tout $h \in X$, l'automorphisme intérieur $\mathrm{ad}(h(i))$ est une involution de Cartan du groupe adjoint $\mathbf{G}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{ad}}$;
- **(SV3) :** le groupe adjoint $\mathbf{G}^{\mathrm{ad}}$ n'a pas de facteur défini sur $\mathbb{Q}$ dont les points réels forment un groupe compact.

À partir du paragraphe 6.2, nous imposerons aussi la condition suivante :

- **(SV4) :** le centre $\mathbf{Z_G} \subset \mathbf{G}$ est tel que $\mathbf{Z_G}(\mathbb{Q}) \subset \mathbf{Z_G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ est discret pour la topologie induite.

4.1.2. Domaine hermitien symétrique. — Nous fixons $X^+ \subset X$ une composante connexe et notons $\mathbf{G}^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})^+$ la composante neutre de $\mathbf{G}^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})$. Selon [**17**, 1.1.12], X^+ est une classe de $\mathbf{G}^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})^+$-conjugaison. Grâce aux axiomes (SV1) et (SV2), l'application qui à $h \in X^+$ associe le centralisateur de $h(i)$ dans $\mathbf{G}^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})$ identifie X^+ à l'espace des sous-groupes compacts maximaux de $\mathbf{G}^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})$ (*cf.* [**17**, prop. 1.2.7]) et X^+ peut être muni d'une structure de domaine hermitien symétrique (*cf.* [**17**, cor. 1.1.17]).

Si H est un sous-groupe de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$, on note H_+ l'image réciproque, dans $\mathbf{G}(\mathbb{R})$, de la composante neutre $\mathbf{G}^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})^+ \subset \mathbf{G}^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})$. Alors on a $X = \mathrm{ind}_{\mathbf{G}(\mathbb{Q})_+}^{\mathbf{G}(\mathbb{Q})} X^+$.

4.1.3. Variété de Shimura de niveau fini. — Si $K \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ est un sous-groupe ouvert compact, la variété de Shimura de $\mathbf{G}$ de niveau K est

$$\mathrm{Sh}_K := \mathbf{G}(\mathbb{Q})\backslash X \times \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})/K = \mathbf{G}(\mathbb{Q})_+\backslash X^+ \times \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})/K$$

où les actions sont définies par $\gamma.(x,g).k = (\gamma.x, \gamma.g.k)$, quels que soient $\gamma \in \mathbf{G}(\mathbb{Q})$, $x \in X$, $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$, $k \in K$.

En vertu de l'axiome (SV3), le revêtement simplement connexe $\tilde{\mathbf{G}}$ du groupe dérivé de $\mathbf{G}$ vérifie le théorème d'approximation forte et, selon [**17**, 2.1.3], l'ensemble des composantes connexes $\mathbf{G}(\mathbb{Q})_+\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})/K$ de Sh_K est un groupe abélien fini.

Plus précisément, si, pour tout sous-groupe $H \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$, nous notons $\Gamma'_H := \mathbf{G}(\mathbb{Q})_+ \cap H$, alors la composante connexe correspondant à la double classe $\mathbf{G}(\mathbb{Q})_+.g.K$, $(g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}))$, s'identifie au quotient $\Gamma'_{{}^gK}\backslash X^+$. L'identification et la compatibilité entre deux éléments de la même double classe sont donnés par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\Gamma'_{gK}\backslash X^+ \arrow[dd, "\alpha_{g,\gamma.g.k}"', "\wr"] \arrow[dr, hook, "i_g"] & \\
& \mathrm{Sh}_K \\
\Gamma'_{\gamma.g.kK}\backslash X^+ \arrow[ur, hook, "i_{\gamma.g.k}"'] &
\end{tikzcd}$$

où pour $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$, $\gamma \in \mathbf{G}(\mathbb{Q})_+$, $k \in K$ et $x \in X^+$, on a

$$i_g(\Gamma'_{gK}.x) = \mathbf{G}(\mathbb{Q})_+.(x,g).K \quad \text{et} \quad \alpha_{g,\gamma.g.k}(\Gamma'_{gK}.x) = \Gamma'_{\gamma.g.kK}.\gamma.x$$

4.2. Compactification de Borel-Serre. — Nous décrivons ici l'élargissement $\overline{X}^+$, du domaine symétrique X^+, défini par Borel et Serre [**7**].

4.2.1. Sous-groupes paraboliques. — Soient $\mathfrak{P}$ l'ensemble des $\mathbb{Q}$-sous-groupes paraboliques de $\mathbf{G}$.

Pour tout $\mathbf{P} \in \mathfrak{P}$, on note $s(\mathbf{P})$ l'ensemble des $\mathbb{Q}$-sous-groupes paraboliques propres maximaux contenant $\mathbf{P}$. On a alors $\mathbf{P} = \cap_{\mathbf{P}' \in s(\mathbf{P})} \mathbf{P}'$. Réciproquement, si S est un ensemble de $\mathbb{Q}$-sous-groupes paraboliques propres maximaux dont l'intersection est un sous-groupe parabolique $\mathbf{P}$ alors $S = s(\mathbf{P})$. Le *($\mathbb{Q}$-) rang parabolique* de $\mathbf{P}$ est le cardinal de $s(\mathbf{P})$. Soit $\mathfrak{P}_i \subset \mathfrak{P}$ le sous-ensemble des $\mathbb{Q}$-sous-groupes paraboliques de *rang parabolique i*.

Le groupe $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$ agit (à gauche pour fixer les idées) par conjugaison sur chacun de ces ensembles.

Lemma 4.1. — *Les classes de conjugaison de $\mathbb{Q}$-sous-groupes paraboliques sous $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$ et sous $\mathbf{G}(\mathbb{Q})_+$ coïncident.*

Démonstration. — Soit $\mathbf{P} \in \mathfrak{P}$. Selon [**8**, th. 14.4], les (points réels des) tores $\mathbb{R}$-déployés maximaux de $\mathbf{G}_{\mathbb{R}}$ rencontrent toutes les composantes connexes de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$. A fortiori, $\mathbf{P}(\mathbb{R})$ rencontre aussi toutes les composantes connexes de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$. D'après le théorème d'approximation réelle, $\mathbf{P}(\mathbb{Q})$ possède encore cette propriété. Or $\mathbf{G}(\mathbb{R})_+$ contient la composante neutre de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$, d'où $\mathbf{G}(\mathbb{R}) = \mathbf{G}(\mathbb{R})_+.\mathbf{P}(\mathbb{Q})$ et $\mathbf{G}(\mathbb{Q}) = \mathbf{G}(\mathbb{Q})_+.\mathbf{P}(\mathbb{Q})$. $\square$

Pour $\mathbf{P} \in \mathfrak{P}$, on note $[\mathbf{P}]$ sa classe de conjugaison sous $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$ et on note aussi $s([\mathbf{P}]) := \{[\mathbf{P}'] \ / \ \mathbf{P}' \in s(\mathbf{P})\}$.

4.2.2. Élargissement du domaine symétrique. — Pour chaque $\mathbf{P} \in \mathfrak{P}$ de radical unipotent $\mathbf{U}$, soient $\mathbf{R}_{\mathbb{Q}}\mathbf{P}$ le radical $\mathbb{Q}$-déployé de $\mathbf{P}/\mathbf{U}$ et $A_{\mathbf{P}}$ la composante neutre du groupe $(\mathbf{R}_{\mathbb{Q}}\mathbf{P}/\mathbf{R}_{\mathbb{Q}}\mathbf{G})(\mathbb{R})$. Si $\mathbf{P}' \in \mathfrak{P}$ contient $\mathbf{P}$ alors l'injection naturelle $\mathbf{R}_{\mathbb{Q}}\mathbf{P}' \hookrightarrow \mathbf{R}_{\mathbb{Q}}\mathbf{P}$ induit une injection $a_{\mathbf{P}',\mathbf{P}}$: $A_{\mathbf{P}'} \hookrightarrow A_{\mathbf{P}}$. Ce qui permet l'identification

$$A_{\mathbf{P}} = \prod_{\mathbf{P}' \in s(\mathbf{P})} A_{\mathbf{P}'}$$

Si $\mathbf{P}' \in \mathfrak{P}_1$ est un $\mathbb{Q}$-sous-groupe parabolique propre maximal, on forme l'union disjointe $\overline{A_{\mathbf{P}'}} := A_{\mathbf{P}'} \coprod \{0\}$, munie de l'action de $A_{\mathbf{P}'}$ qui laisse fixe 0 et prolonge celle sur lui-même par translation. En général, pour un $\mathbb{Q}$-sous-groupe parabolique $\mathbf{P} \in \mathfrak{P}$, on pose $\overline{A_{\mathbf{P}}} := \prod_{\mathbf{P}' \in s(\mathbf{P})} \overline{A_{\mathbf{P}'}}$, muni de l'action diagonale. Alors on a la décomposition

$$\overline{A_{\mathbf{P}}} = \coprod_{\mathbf{P}' \supset \mathbf{P}} \left(\prod_{\mathbf{P}'' \in s(\mathbf{P}) \setminus s(\mathbf{P}')} A_{\mathbf{P}''} \times \prod_{\mathbf{P}'' \in s(\mathbf{P}')} \{0\} \right)$$

Borel et Serre définissent une *action géodésique* [**7**, §3.2], notée ici à droite, de $A_{\mathbf{P}}$ sur X^+. Le *coin* associé à $\mathbf{P}$ est le produit contracté

$X^+(\mathbf{P}) := X^+ \times^{A_\mathbf{P}} \overline{A_\mathbf{P}}$. La variété $\overline{X}^+$ est (topologiquement) la limite inductive $\varinjlim_{\mathbf{P}\in\mathfrak{P}} X^+(\mathbf{P})$ ayant pour applications de transition les immersions ouvertes $id_{X^+} * a_{\mathbf{P}',\mathbf{P}}$ où $\mathbf{P} \subset \mathbf{P}'$. Du point de vue ensembliste, en notant $e(\mathbf{P}) := X^+/A_\mathbf{P}$, la décomposition précédente de $\overline{A_\mathbf{P}}$, donne

$$X^+(\mathbf{P}) = \coprod_{\mathbf{P}'\supset\mathbf{P}} e(\mathbf{P}') \qquad \overline{X}^+ = \coprod_{\mathbf{P}'\in\mathfrak{P}} e(\mathbf{P})$$

et l'adhérence $\overline{e(\mathbf{P})}$ de $e(\mathbf{P})$ dans $\overline{X}^+$ est $\overline{e(\mathbf{P})} = \coprod_{\mathbf{P}'\subset\mathbf{P}} e(\mathbf{P}')$.

Ainsi $X^+ = X^+(\mathbf{G}) = e(\mathbf{G})$ s'identifie à un ouvert dense de $\overline{X}^+$. D'après [**7**, 8.3], les fermés $\overline{e(\mathbf{P})}$ ($\mathbf{P} \in \mathfrak{P}$) sont des variétés à bords contractiles. Le sous-espace $e(\mathbf{P}) \subset \overline{X}^+$ a pour codimension le rang parabolique de $\mathbf{P}$. De plus le recouvrement du bord $\partial\overline{X}^+ := \overline{X}^+ \setminus X^+$ par les fermés $\overline{e(\mathbf{P})}$ ($\mathbf{P} \in \mathfrak{P}_1$) a pour nerf l'immeuble de Tits [**51**, 5.3] de $\mathbf{G}$.

4.2.3. Prolongement de l'action. — Soient $\mathbf{P} \in \mathfrak{P}$ et $\gamma \in \mathbf{G}(\mathbb{Q})$. Puisque $A_\mathbf{P}$ est central dans $\mathbf{P}/\mathbf{U}$, l'isomorphisme de conjugaison $g \longmapsto {}^\gamma g$ induit un isomorphisme $A_\mathbf{P} \xrightarrow{\sim} A_{{}^\gamma\mathbf{P}}$ (encore noté ${}^\gamma\cdot$) qui ne dépend que de $\mathbf{P}$ et ${}^\gamma\mathbf{P}$ (pas de γ). De plus, l'action géodésique est telle que pour tout $x \in X^+$ et $a \in A_\mathbf{P}$, on a $\gamma.(x.a) = (\gamma.x).({}^\gamma a)$.

Par conséquent, l'action de $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$ sur X^+ se prolonge à $\overline{X}^+$ en permutant les coins, ainsi que les bords :

$$\begin{tikzcd}
 & & \overline{X}^+ \arrow[dd, "\wr"] & & \\
X^+ \arrow[r, hook] \arrow[ddd, "\gamma"', "\wr"] & X^+(\mathbf{P}) \arrow[ur, hook] \arrow[ddd, "\gamma_\mathbf{P}"', "\wr"] & & e(\mathbf{P}) \arrow[ll, hook'] \arrow[ddd, "\wr"] & X^+ \arrow[l, two heads] \arrow[ddd, "\gamma"', "\wr"] \\
 & & \overline{X}^+ & & \\
 & & & & \\
X^+ \arrow[r, hook] & X^+({}^\gamma\mathbf{P}) \arrow[uur, hook] & & e({}^\gamma\mathbf{P}) \arrow[ll, hook'] & X^+ \arrow[l, two heads]
\end{tikzcd}$$

avec $\gamma_{\mathbf{P}}(x * t) = (\gamma.x) * ({}^{\gamma}t)$ pour $x \in X^+$, $t \in \overline{A_{\mathbf{P}}}$.

4.2.4. Compactification. — Soit $K \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ un sous-groupe ouvert compact. La variété

$$\overline{\mathrm{Sh}}_K := \mathbf{G}(\mathbb{Q})_+ \backslash \overline{X}^+ \times \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})/K$$

a pour composantes connexes les quotients $\Gamma'_{gK} \backslash \overline{X}^+$ ($g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$), identifiés de la même façon qu'en 4.1.3, en remplaçant X^+ par $\overline{X}^+$.

Borel et Serre ont montré [**7**, th. 9.3] que l'action de Γ'_{gK} sur $\overline{X}^+$ est propre et que le quotient $\Gamma'_{gK} \backslash \overline{X}^+$ est compact. Ainsi, la variété à bord $\overline{\mathrm{Sh}}_K$ est une compactification de Sh_K, dont le bord est

$$\partial \overline{\mathrm{Sh}}_K := \overline{\mathrm{Sh}}_K \setminus \mathrm{Sh}_K = \mathbf{G}(\mathbb{Q})_+ \backslash \partial \overline{X}^+ \times \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})/K$$

4.2.5. Décomposition du bord. — Soit $\mathbf{P} \in \mathfrak{P}$. Puisque deux sous-groupes paraboliques conjugués distincts ne peuvent contenir un même sous-groupe parabolique et $\mathbf{P}$ est son propre normalisateur dans $\mathbf{G}$, on a

$$\bigcup_{\mathbf{P}' \in [\mathbf{P}]} \overline{e(\mathbf{P}')} = \coprod_{\mathbf{P}' \in [\mathbf{P}]} \overline{e(\mathbf{P}')} = \mathrm{ind}_{\mathbf{P}(\mathbb{Q})}^{\mathbf{G}(\mathbb{Q})} \overline{e(\mathbf{P})} = \mathrm{ind}_{\mathbf{P}(\mathbb{Q})_+}^{\mathbf{G}(\mathbb{Q})_+} \overline{e(\mathbf{P})}$$

où la dernière égalité vient du lemme 4.1.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \partial_{[\mathbf{P}]} \overline{\mathrm{Sh}}_K &:= \mathbf{G}(\mathbb{Q})_+ \backslash \left(\textstyle\bigcup_{\mathbf{P}' \in [\mathbf{P}]} \overline{e(\mathbf{P}')} \right) \times \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})/K \\ &= \mathbf{P}(\mathbb{Q})_+ \backslash \overline{e(\mathbf{P})} \times \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})/K \end{aligned}$$

et l'espace des composantes connexes de cette variété est

$$\mathbf{P}(\mathbb{Q})_+ \backslash \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})/K$$

Si, pour tout sous-groupe $H \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$, on note $\Gamma'_H(\mathbf{P}) := \mathbf{P}(\mathbb{Q})_+ \cap H$, alors la composante connexe correspondant à la double classe $\mathbf{P}(\mathbb{Q})_+.g.K$,

$(g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}))$, s'identifie au quotient $\Gamma'_{gK}(\mathbf{P})\backslash\overline{e(\mathbf{P})}$ avec les compatibilités données par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\Gamma'_{gK}(\mathbf{P})\backslash\overline{e(\mathbf{P})} \arrow[dd, "\alpha_{\mathbf{P},g,\gamma.g.k}"', "\wr"] \arrow[dr, hook, "i_{\mathbf{P},g}"] & \\
& \partial_{[\mathbf{P}]}\overline{\mathrm{Sh}}_K \\
\Gamma'_{\gamma.g.kK}(\mathbf{P})\backslash\overline{e(\mathbf{P})} \arrow[ur, hook, "i_{\mathbf{P},\gamma.g.k}"'] &
\end{tikzcd}$$

où pour $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$, $\gamma \in \mathbf{P}(\mathbb{Q})_+$, $k \in K$ et $x \in \overline{e(\mathbf{P})}$, on a

$$i_{\mathbf{P},g}(\Gamma'_{gK}(\mathbf{P}).x) = \mathbf{P}(\mathbb{Q})_+.(x,g).K \quad \text{et}$$
$$\alpha_{\mathbf{P},g,\gamma.g.k}(\Gamma'_{gK}(\mathbf{P}).x) = \Gamma'_{\gamma.g.kK}(\mathbf{P}).\gamma.x$$

Les fermés $\partial_{[\mathbf{P}]}\overline{\mathrm{Sh}}$, $[\mathbf{P}] \in \mathbf{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathfrak{P}_1$ forment un recouvrement localement fini du bord $\partial\overline{\mathrm{Sh}}_K$.

Lemma 4.2. — *Soit $S \subset \mathbf{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathfrak{P}_1$ un ensemble de classes de conjugaison sous $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$ de $\mathbb{Q}$-sous-groupes paraboliques propres maximaux de $\mathbf{G}$.*

On a

$$\bigcap_{[\mathbf{P}]\in S} \partial_{[\mathbf{P}]}\overline{\mathrm{Sh}}_K = \coprod_{[\mathbf{P}]\in s^{-1}(S)} \partial_{[\mathbf{P}]}\overline{\mathrm{Sh}}_K$$

Par définition de s (*cf.* 4.2.1), $s^{-1}(S)$ est l'ensemble des classes de conjugaison de $\mathbb{Q}$-sous-groupes paraboliques $\mathbf{P}$ tels que l'ensemble des $\mathbb{Q}$-sous-groupes paraboliques propres maximaux le contenant forme un système de représentants de S.

Démonstration. — On a

$$\bigcap_{[\mathbf{P}]\in S}\bigcup_{\mathbf{P}'\in[\mathbf{P}]}\overline{e(\mathbf{P}')}=\bigcup_{(\mathbf{P}_{[\mathbf{P}]})_{[\mathbf{P}]\in S}\in\prod_{[\mathbf{P}]\in S}[\mathbf{P}]}\ \bigcap_{[\mathbf{P}]\in S}\overline{e(\mathbf{P}_{[\mathbf{P}]})}$$

Or l'intersection de droite n'est pas vide seulement si $\mathbf{P}'=\cap_{[\mathbf{P}]\in S}\mathbf{P}_{[\mathbf{P}]}$ est un $\mathbb{Q}$-sous-groupe parabolique, auquel cas elle vaut $\overline{e(\mathbf{P}')}$. De plus, un $\mathbb{Q}$-sous groupe parabolique $\mathbf{P}'$ est l'intersection d'une famille

$$(\mathbf{P}_{[\mathbf{P}]})_{[\mathbf{P}]\in S}\in\prod_{[\mathbf{P}]\in S}[\mathbf{P}]$$

si et seulement si $s([\mathbf{P}'])=S$ car un sous-groupe parabolique ne peut être contenu dans deux sous-groupes paraboliques conjugués distincts. Pour cette dernière raison encore, on a finalement l'union disjointe dans la décomposition :

$$\bigcap_{[\mathbf{P}]\in S}\bigcup_{\mathbf{P}'\in[\mathbf{P}]}\overline{e(\mathbf{P}')}=\coprod_{[\mathbf{P}']\in s^{-1}(S)}\ \bigcup_{\mathbf{P}'\in[\mathbf{P}']}\overline{e(\mathbf{P}')}$$

Ce qui, après passage au quotient par $\mathbf{G}(\mathbb{Q})_+$ et K, donne la formule voulue. □

4.3. Cohomologie de niveau fini. —

4.3.1. Sous-groupes assez petit et espaces $\mathrm{K}(\Gamma,1)$. — Nous dirons qu'un sous-groupe H de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ est *assez petit* s'il vérifie la condition

(TF) : $H\cap\mathbf{Z_G}(\mathbb{Q})=1$ et les groupes $(\Gamma'_{gH})_{g\in\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})}$ n'ont pas de torsion.

Nous renvoyons à l'appendice A.2.3 pour la notion d'espace $\mathrm{K}(\Gamma,1)$.

Lemma 4.3. — *Sous l'hypothèse (SV4), l'ensemble $\mathcal{T}$ des sous-groupes ouverts compacts $K \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ assez petits au sens de (TF) forme un système fondamental de voisinages de l'unité dans $\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$.*

Pour un tel sous-groupe K, chaque composante connexe $\Gamma'_{gK}\backslash X^+$ de la variété de Shimura Sh_K de niveau K est un espace $\mathrm{K}(\Gamma'_{gK},1)$.

Démonstration. — Puisque $\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ est un groupe localement profini, ses sous-groupes ouverts compacts forment un système fondamental de voisinage de l'unité (*cf.* [**10**, III, p. 36, cor. 1]). La condition (SV4) équivaut ainsi à l'existence d'un sous-groupe ouvert compact rencontrant $\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}(\mathbb{Q})$ en l'unité seulement.

Donc $\mathcal{T}$ forme bien un système fondamental de voisinages de l'unité.

L'identification de X^+ avec l'espace des sous-groupes compacts maximaux de $\mathbf{G}^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})^+$ montre (*cf.* [**10**, III, p. 30, cor.]) que $\mathbf{G}^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})^+$ agit proprement sur X^+. Soient $K \in \mathcal{T}$ et $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$. Le sous-groupe $\Gamma'_{gK} \subset \mathbf{G}(\mathbb{Q})_+$ s'identifie à son image dans $\mathbf{G}^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})^+$, qui est un sous-groupe arithmétique (*cf.* [**4**, 8.11]), donc, muni de la topologie induite de $\mathbf{G}^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})^+$, il est discret . Étant discret et sans torsion, selon [**10**, III, p. 32, prop. 8], il agit proprement et librement sur X^+. Puisque X^+ est contractile, nous en concluons (*cf.* appendice A.2.3) que $\Gamma'_{gK}\backslash X^+$ est un espace $\mathrm{K}(\Gamma'_{gK},1)$. □

4.3.2. Systèmes locaux. — Soit $K \in \mathcal{T}$. À tout $\mathbb{Z}[K]$-module L, nous associons le fibré

$$\mathrm{Sh}_K(L) := \mathbf{G}(\mathbb{Q})\backslash X \times \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}) \times^K L = \mathbf{G}(\mathbb{Q})_+\backslash X^+ \times \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}) \times^K L$$

sur Sh_K, où les actions sont définies par $\gamma.(x, g*l) = (\gamma.x, (\gamma.g)*l)$, quels que soient $\gamma \in \mathbf{G}(\mathbb{Q})$, $x \in X$, $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ et $l \in L$. Nous munissons L

de la topologie discrète et le fibré $\mathrm{Sh}_K(L)$ de la topologie quotient de la topologie produit.

Si nous faisons agir les groupes $\Gamma'_{{}^gK}$ sur L par $(\gamma, l) \longmapsto \gamma^g.l$, quels que soient $\gamma \in \Gamma'_{{}^gK}$, $l \in L$ et $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$, alors le fibré induit sur la composante connexe $\Gamma'_{{}^gK}\backslash X^+$ est $\Gamma'_{{}^gK}\backslash X^+ \times L$. L'image réciproque de ce dernier sur X^+ est le fibré trivial $X^+ \times L$ car, K étant assez petit au sens de (TF), $\Gamma'_{{}^gK}$ agit librement sur X^+.

Les compatibilités sont données par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma'_{{}^gK}\backslash X^+ \times L \arrow[dr, hook, "i_g"] \arrow[dd, "\alpha_{g,\gamma.g.k}"', "\wr"] & \\
& \mathrm{Sh}_K(L) \\
\Gamma'_{{}^{\gamma.g.k}K}\backslash X^+ \times L \arrow[ur, hook, "i_{\gamma.g.k}"'] &
\end{tikzcd}$$

où pour $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$, $\gamma \in \mathbf{G}(\mathbb{Q})_+$, $k \in K$, $x \in X^+$ et $l \in L$,

$$\begin{aligned}
i_g(\Gamma'_{{}^gK}.(x,l)) &= \mathbf{G}(\mathbb{Q})_+.(x, g * l).K \quad \text{et} \\
\alpha_{g,\gamma.g.k}(\Gamma'_{{}^gK}.(x,l)) &= \Gamma'_{{}^{\gamma.g.k}K}.(\gamma.x, k^{-1}.l)
\end{aligned}$$

Le système local associé au $\mathbb{Z}[K]$-module L est le faisceau (que nous noterons aussi L), sur l'espace topologique Sh_K, des germes de sections continues du fibré $\mathrm{Sh}_K(L)$.

Par comparaison de la cohomologie d'un groupe Γ avec celle d'un espace $\mathrm{K}(\Gamma, 1)$ (prop. A.1), la cohomologie d'un système local sur Sh_K se décompose sous la forme :

$$\mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{Sh}_K, L) = \prod_{\mathbf{G}(\mathbb{Q})_+\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})/K} \mathrm{H}^{\cdot}(\Gamma'_{{}^gK}, L)$$

Proposition 4.4. — *Soit L un faisceau sur $\partial\overline{\mathrm{Sh}}_K$.*

Il existe une suite spectrale

$$E_1^{i,j} = \prod_{[\mathbf{P}]\in\mathbf{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathfrak{P}_{i+1}} \mathrm{H}^j(\partial_{[\mathbf{P}]}\overline{\mathrm{Sh}}_K, L) \Longrightarrow \mathrm{H}^{i+j}(\partial\overline{\mathrm{Sh}}_K, L)$$

Démonstration. — La suite spectrale de Leray [**21**, II, th. 5.2.4] associée au recouvrement fermé fini $(\partial_{[\mathbf{P}]}\overline{\mathrm{Sh}}_K)_{[\mathbf{P}]\in\mathbf{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathfrak{P}_1}$ du bord $\partial\overline{\mathrm{Sh}}_K$ est telle que

$$E_1^{i,j} = \prod_{\substack{S\subset\mathbf{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathfrak{P}_{i+1}\\ \#S=i+1}} \mathrm{H}^j(\cap_{[\mathbf{P}]\in S}\partial_{[\mathbf{P}]}\overline{\mathrm{Sh}}_K, L) \Longrightarrow \mathrm{H}^{i+j}(\partial\overline{\mathrm{Sh}}_K, L)$$

Le lemme 4.2 permet de décomposer

$$\mathrm{H}^j(\cap_{[\mathbf{P}]\in S}\partial_{[\mathbf{P}]}\overline{\mathrm{Sh}}_K, L) = \prod_{[\mathbf{P}]\in s^{-1}(S)} \mathrm{H}^j(\partial_{[\mathbf{P}]}\overline{\mathrm{Sh}}_K, L)$$

D'où

$$E_1^{i,j} = \prod_{[\mathbf{P}]\in\mathbf{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathfrak{P}_{i+1}} \mathrm{H}^j(\partial_{[\mathbf{P}]}\overline{\mathrm{Sh}}_K, L)$$

□

4.3.3. Opérateurs de Hecke. — Nous renvoyons à l'appendice B pour les notations et définition des paires, opérateurs et anneaux de Hecke abstraits. Nous convenons de faire agir les groupes et monoïdes à gauche, et les anneaux de Hecke à droite. Si bien que, dans ce qui suit, partant d'une action (à gauche) de $D^{-1} \supset K$, nous obtenons une action (à droite) de $\mathcal{H}(K, D)$ (sur les K-invariants par exemple).

Soient $K \in \mathcal{T}$ et $D \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ un sous-monoïde contenant K. Si $\xi \in D$, posons ${}_\xi K := K \cap {}^\xi K$ et $K_\xi := K \cap K^\xi$.

Le commensurateur d'un sous-groupe ouvert compact de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ étant égal à $\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$, nous pouvons définir l'anneau de Hecke associé $\mathcal{H}(K, D)$. Il agit naturellement sur la cohomologie de la variété de Shimura Sh_K.

Plus précisément, si L est un $\mathbb{Z}[D^{-1}]$-module, l'opérateur $K.\xi.K$ est défini à partir de la correspondance algébrique

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Sh}_{\xi K}(L) \arrow[rr, "\xi * \xi^{-1}", "\mathbf{G}(\mathbb{Q}).(x,g*l)\mapsto\mathbf{G}(\mathbb{Q}).(x,g.\xi*\xi^{-1}.l)"'] \arrow[dl] \arrow[dd] & & \mathrm{Sh}_{K_\xi}(L) \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
\mathrm{Sh}_K(L) \arrow[dd] & & & & \mathrm{Sh}_K(L) \arrow[dd] \\
& \mathrm{Sh}_{\xi K} \arrow[rr, "\overset{\cdot\xi}{\sim}", "\mathbf{G}(\mathbb{Q}).(x,g)._{\xi}K\mapsto\mathbf{G}(\mathbb{Q}).(x,g.\xi).K_\xi"'] \arrow[dl, "{}_{\xi}p"] & & \mathrm{Sh}_{K_\xi} \arrow[dr, "p_\xi"'] & \\
\mathrm{Sh}_K & & & & \mathrm{Sh}_K
\end{tikzcd}$$

dans laquelle les carrés des deux côtés sont cartésiens. Ainsi le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{Sh}_{\xi K}, L) \arrow[r, "\xi^{-1}"] & \mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{Sh}_{K_\xi}, L) \arrow[dr, "(p_\xi)_*"] & \\
\mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{Sh}_K, L) \arrow[ur, "({}_{\xi}p)^*"] \arrow[rrr, "K\xi K"] & & & \mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{Sh}_K, L)
\end{tikzcd}$$

où $({}_{\xi}p)^*$ et $(p_\xi)_*$ sont respectivement l'image inverse par ${}_{\xi}p$ et la trace de p_ξ, est commutatif.

4.3.4. Comparaison avec la cohomologie des groupes. — Afin de donner l'analogue adélique du résultat de comparaison A.1, nous munissons, pour tout $\mathbb{Z}[D^{-1}]$-module L, le module induit $\mathrm{ind}^{\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})}L$ de deux actions qui commutent (nous identifions ce module induit à l'espace des fonctions sur $\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ à valeurs dans L) :

- l'action de $\mathbf{G}(\mathbb{Q})_+$ obtenue par restriction de l'action canonique de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ sur le module induit : $(\gamma.s)(g) := s(\gamma^{-1}.g)$ quels que soient $\gamma \in \mathbf{G}(\mathbb{Q})_+$, $s \in \mathrm{ind}^{\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})}L$ et $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$;

– et celle de D^{-1} définie par $(\xi^{-1}.s)(g) := \xi^{-1}.s(g.\xi^{-1})$, pour tout $\xi \in D$, $s \in \mathrm{ind}^{\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})} L$ et tout $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$.

En prenant les invariants sous chacune de ces actions nous obtenons :

– d'une part, l'espace

$$\mathcal{F}(L) := \mathcal{F}(\mathbf{G}(\mathbb{Q})_+ \backslash \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}), L) = \mathrm{H}^0(\mathbf{G}(\mathbb{Q})_+, \mathrm{ind}^{\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})} L)$$

des fonctions sur $\mathbf{G}(\mathbb{Q})_+ \backslash \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ à valeurs dans L. C'est un sous-D^{-1}-module de $\mathrm{ind}^{\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})} L$, si bien que les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^{\cdot}(K, \mathcal{F}(L))$ sont des $\mathcal{H}(K, D)$-modules ;

– et de l'autre, le module induit $\mathrm{ind}_K^{\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})} = \mathrm{H}^0(K, \mathrm{ind}^{\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})} L)$. C'est un sous-$\mathbf{G}(\mathbb{Q})_+$-module de $\mathrm{ind}^{\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})} L$, muni naturellement d'une action de l'anneau de Hecke $\mathcal{H}(K, D)$:

$$s | K.\xi.K := \sum_{K_\xi.\alpha \in K_\xi \backslash K} (\xi.\alpha)^{-1}.s$$

pour tout $\xi \in D$ et tout $s \in \mathrm{ind}_K^{\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})} L$. Cette action commute avec celle de $\mathbf{G}(\mathbb{Q})_+$, si bien que les groupes de cohomologie

$$\mathrm{H}^{\cdot}(\mathbf{G}(\mathbb{Q})_+, \mathrm{ind}_K^{\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})} L)$$

sont aussi munis d'une action de $\mathcal{H}(K, D)$.

Proposition 4.5. — *Soient $K \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ un sous-groupe ouvert compact assez petit au sens de (TF), $D \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ un sous-monoïde contenant K et L un $\mathbb{Z}[D^{-1}]$-module (à gauche).*

Nous avons les isomorphismes canoniques de $\mathcal{H}(K, D)$-modules (à droite) suivants :

$$\mathrm{H}^{\cdot}(K, \mathcal{F}(L)) \xleftarrow{\sim} \mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{Sh}_K, L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{\cdot}(\mathbf{G}(\mathbb{Q})_+, \mathrm{ind}_K^{\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})} L)$$

Démonstration. — Tout d'abord, en degré 0, selon les compatibilités détaillées en 4.3.2, le groupe des sections globales du système local associé à L s'identifie au groupe des fonctions $s \in \mathcal{F}(L)$ telles que pour tout $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ et tout $k \in K$,

$$s(\mathbf{G}(\mathbb{Q})_+.g) \in L^{\Gamma'_{gK}} \quad \text{et} \quad s(\mathbf{G}(\mathbb{Q}_+).g.k) = k^{-1}.s(\mathbf{G}(\mathbb{Q})_+.g)$$

Mais la première relation est une conséquence de la seconde car, pour tout $\gamma \in \Gamma'_{gK}$:

$$\gamma^g.s(\mathbf{G}(\mathbb{Q}_+).g) = s(\mathbf{G}(\mathbb{Q})_+.g.(\gamma^{-1})^g) = s(\mathbf{G}(\mathbb{Q})_+.\gamma^{-1}.g) = s(\mathbf{G}(\mathbb{Q})_+.g)$$

Ainsi $\mathrm{H}^0(K, \mathcal{F}(L)) = \mathrm{H}^0(\mathrm{Sh}_K, L) = \mathrm{H}^0(\mathbf{G}(\mathbb{Q})_+, \mathrm{ind}_K^{\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})} L)$.

En degré quelconque, les isomorphismes s'obtiennent par décalage car

- $\mathcal{F}(\cdot)$ est un foncteur exact de la catégorie des D^{-1}-modules dans elle-même et transforme les D^{-1}-modules injectifs en D^{-1}-modules injectifs. L'exactitude est immédiate et la conservation des injectifs vient de

$$\mathrm{Hom}_D(\cdot, \mathcal{F}(L)) = \mathrm{Hom}_D(\cdot \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{(\mathbf{G}(\mathbb{Q})_+ \backslash \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}))}, L)$$

- $\mathrm{ind}_K^{\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})}$ est un foncteur exact de la catégorie des D^{-1}-modules dans celle des $(\mathbf{G}(\mathbb{Q})_+, \mathcal{H}(K, D))$-bimodules, et transforme les D^{-1}-modules injectifs en $\mathbf{G}(\mathbb{Q})_+$-modules injectifs. Pour la conservation des injectifs, on utilise

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}(\mathbb{Q})_+}(\cdot, \mathrm{ind}_K^{\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})} L) = \mathrm{Hom}_K(\cdot \otimes_{\mathbb{Z}[\mathbf{G}(\mathbb{Q})_+]} \mathbb{Z}[\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})], L)$$

et le fait que $\mathbb{Z}[\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})]$ est un $\mathbb{Z}[\mathbf{G}(\mathbb{Q})_+]$-module libre.

□

4.3.5. Changement de niveau. — Nous donnons l'analogue du lemme de Shapiro et de la suite spectrale de Hochschild-Serre :

Corollary 4.6. — *Soient $K \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ un sous-groupe ouvert compact assez petit au sens de (TF), $K' \subset K$ un sous-groupe ouvert et L un $\mathbb{Z}[K']$-module.*

Les morphismes canoniques :

$$\mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{Sh}_K, \mathrm{ind}_{K'}^{K} L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{Sh}_{K'}, L)$$

sont des isomorphismes.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente puisque $\mathrm{ind}_K^{\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})} \mathrm{ind}_{K'}^{K} L = \mathrm{ind}_{K'}^{\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})} L$. □

Corollary 4.7. — *Soient $K \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ un sous-groupe ouvert compact assez petit au sens de (TF), $D \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ un sous-monoïde contenant K et L un $\mathbb{Z}[D^{-1}]$-module (à gauche).*

Pour tout sous-groupe $K' \lhd (K, D)$ distingué, au sens de l'appendice B, dans la paire (K, D), nous avons une suite spectrale :

$$E_2^{i,j} = \mathrm{H}^i(K/K', \mathrm{H}^j(\mathrm{Sh}_{K'}, L)) \Longrightarrow \mathrm{H}^{i+j}(\mathrm{Sh}_K, L)$$

*Hecke-équivariante (*i.e. *$\mathcal{H}(K, D)$-équivariante).*

Démonstration. — Ici encore une conséquence immédiate de la proposition précédente, et de la suite spectrale de Hochschild-Serre Hecke-équivariante de la proposition B.3 en appendice. □

4.3.6. Torsion par un caractère. — Soient $K \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ un sous-groupe ouvert compact, $D \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ un sous-monoïde contenant K et

$$D \xrightarrow{\chi} A^{\times}$$

un morphisme de monoïdes, trivial sur K, à valeurs dans le groupe des éléments inversibles d'un anneau commutatif A.

Pour tout $A[D^{-1}]$-module à gauche M et tout $\mathcal{H}_A(K,D)$-module à droite N, nous notons

- $M(\chi)$ le $A[D^{-1}]$-module à gauche obtenu à partir de M en tordant l'action de D^{-1} : $\xi^{-1}._{\chi}m = \chi(\xi)^{-1}.\xi^{-1}.m$ pour tout $m \in M$ et tout $\xi \in D$;
- $N(\chi)$ le $\mathcal{H}_A(K,D)$-module à droite obtenu à partir de N en tordant l'action de $\mathcal{H}(K,D)$: $n|_{\chi}K.\xi.K := \chi(\xi)^{-1}.n|K.\xi.K$ pour tout $n \in N$ et tout $\xi \in D$;

Lemma 4.8. — *Soient $K \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ un sous-groupe ouvert compact assez petit au sens de (TF), $D \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ un sous-monoïde contenant K, A un anneau commutatif et L un $A[D^{-1}]$-module (à gauche).*

Pour tout morphisme de monoïdes $D \longrightarrow A^{\times}$ trivial sur K, nous avons un isomorphisme canonique de $\mathcal{H}_A(K,D)$-modules (à droite) :

$$\mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{Sh}_K, L(\chi)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{Sh}_K, L)(\chi)$$

Démonstration. — En temps que A-modules, les deux modules à comparer sont égaux puisque χ est trivial sur K. Il reste à montrer que l'action des opérateurs de Hecke est la même sur ces modules. Cela résulte de $\mathcal{F}(L(\chi)) = \mathcal{F}(L)(\chi)$ puis du calcul sur les cochaînes. $\square$

4.3.7. Réseaux. — Le lemme suivant sera par exemple appliqué à la partie quasi-ordinaire $e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{Sh}_K, \cdot)$ de la cohomologie

Lemma 4.9. — *Soient $\mathcal{O}$ un anneau commutatif intègre de corps des fractions $\mathcal{K}$, $K \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ un sous-groupe ouvert compact assez petit au sens de (TF), $D \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ un sous-monoïde contenant K et L un $\mathcal{O}[K]$-module.*

Si $\mathrm{H}^{\cdot}$ est un foncteur cohomologique qui commute aux limites inductives, alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, nous avons la suite exacte courte de $\mathcal{O}$-modules :

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^i(L) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}/\mathcal{O} \longrightarrow \mathrm{H}^i(L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}/\mathcal{O}) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}(L)_{\mathrm{tor}} \longrightarrow 0$$

Si, de plus, $\mathrm{H}^{i+1}(L)$ est de type fini sur $\mathcal{O}$ alors

- $\mathrm{H}^i(\mathrm{Sh}_K, L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}/\mathcal{O})$ *est fini si et seulement si* $\mathrm{H}^i(\mathrm{Sh}_K, L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}) = 0$ *;*
- $\mathrm{H}^i(L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}/\mathcal{O})$ *est divisible sur $\mathcal{O}$ si et seulement si* $\mathrm{H}^{i+1}(L)$ *n'a pas de torsion sur $\mathcal{O}$;*
- $\mathrm{H}^i(L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}/\mathcal{O}) = 0$ *si et seulement si* $\mathrm{H}^i(L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}) = 0$ *et* $\mathrm{H}^{i+1}(L)$ *n'a pas de torsion sur $\mathcal{O}$.*

Démonstration. — La suite exacte courte

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K} \longrightarrow L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}/\mathcal{O} \longrightarrow 0$$

donne les suites exactes courtes ($i \geq 0$) :

$$0 \longrightarrow \operatorname{coker} \alpha_i \longrightarrow \mathrm{H}^i(L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}/\mathcal{O}) \longrightarrow \ker \alpha_{i+1} \longrightarrow 0$$

$$\text{avec} \qquad \mathrm{H}^i(L) \xrightarrow{\alpha_i} \mathrm{H}^i(L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}) = \mathrm{H}^i(L) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}$$

L'égalité dans la ligne précédente vient de l'hypothèse de commutation aux limites inductives. On a ainsi $\operatorname{coker} \alpha_i = \mathrm{H}^i(L) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}/\mathcal{O}$.

Toujours par commutation aux limites inductives, $\mathrm{H}^i(L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}/\mathcal{O})$ est de torsion, tandis que $\mathrm{H}^{i+1}(L) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}$ est sans torsion, si bien que $\ker \alpha_i = \mathrm{H}^i(L)_{\mathrm{tor}}$.

D'où la suite exacte courte voulue. La seconde partie du lemme s'en déduit immédiatement. $\square$

5. Anneaux de Hecke locaux

Cette section porte sur la structure de certaines algébres de Hecke locales. Plus précisément, si $\mathbf{G}$ est un groupe réductif sur un corps complet F_ω pour une valuation discrète à corps résiduel fini, nous utilisons la théorie de Bruhat-Tits pour montrer qu'un certain sous-anneau de l'anneau de Hecke du groupe $\mathbf{G}(F_\omega)$ en niveau fini de type $\Gamma_0(p^n)$ (pour un F_ω-sous-groupe parabolique $\mathbf{P}$) est un anneau de polynômes $\mathbb{Z}[T_1, \cdots, T_r]$. Le nombre de variables r est égal au F_ω-rang parabolique de $\mathbf{P}$. En niveau de type $\Gamma_1(p^n)$, il faut ajouter les opérateurs diamants.

Les opérateurs correspondant aux variables $T_1, \ldots, T_r$ serviront à définir la partie $\mathbf{P}$-quasi-ordinaire de la cohomologie au paragraphe 6.3.2. Tandis que les opérateurs diamants apparaîtront dans la suite spectrale liant la cohomologie de niveau de type Γ_0 à celle de type Γ_1 (*cf.* th. 6.2). Ils permettront aussi de construire l'algèbre de Hida-Iwasawa au paragraphe 7.4.4.

Au dernier paragraphe, nous donnons les relations entre opérateurs de Hecke (*cf.* lemme 5.7) qui montrent que la cohomologie $\mathbf{P}$-quasi-ordinaire de niveau de type $\Gamma_0(p^n)$ est indépendante du niveau n (lemme 6.5).

L'utilisation de ces algèbres de Hecke, dans le cas $\mathbf{G} = \mathbf{GL}(n)$, est due à Hida (voir par exemple [**28**]). Buecker (*cf.* [**15**] et [**16**]) d'une part, et Tilouine et Urban (*cf.* [**50**]) de l'autre, ont traité le cas $\mathbf{G} = \mathbf{GSp}_4$.

5.1. Théorie de Bruhat-Tits. — Dans cette sous-section, nous rappelons brièvement ce dont nous avons besoin de la théorie de Bruhat-Tits développée dans [**13**].

Ici, $\mathbf{G}$ est un groupe réductif connexe sur un corps F_ω complet pour une valuation discrète ω, à corps résiduel fini.

5.1.1. Un appartement. — On fixe $\mathbf{S}$ un tore F_ω-déployé maximal de $\mathbf{G}$ dont on note $\mathbf{Z}$ (*resp.* $\mathbf{N}$) le centralisateur (*resp.* normalisateur) dans $\mathbf{G}$. Soit $\Phi \subset \mathrm{X}^*(\mathbf{S})$ le système de racines (relatives à F_ω) de $\mathbf{G}$ par rapport à $\mathbf{S}$, $W := \mathbf{N}/\mathbf{Z} = \mathbf{N}(F_\omega)/\mathbf{Z}(F_\omega)$ le groupe de Weyl correspondant et $V^* \subset \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{X}^*(\mathbf{S})$ le sous-espace-vectoriel réel engendré par Φ. Soit $\mathbf{R}_{F_\omega}\mathbf{G}$ le radical F_ω-déployé (*i.e.* le plus grand tore F_ω-déployé central) de $\mathbf{G}$. La dualité (de groupes abéliens libres) entre caractères et cocaractères de $\mathbf{S}$ induit une dualité (d'espaces vectoriels réels) entre V^* et

$$V = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathrm{X}_*(\mathbf{S})/\mathrm{X}_*(\mathbf{R}_{F_\omega}\mathbf{G}))$$

Lorsqu'on parlera d'orthogonalité, ce sera pour cette dernière dualité. Ces dualités sont notées $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Pour toute racine $a \in \Phi$, on note $H_a := \ker\langle a, \cdot \rangle \subset V$ l'ensemble des points fixes de la réflexion $s_a \in W$ de V associée à a.

L'*appartement* A associé à $\mathbf{S}$ est un espace affine sous V, muni d'une action de $\mathbf{N}(F_\omega)$ par automorphismes affines :

– le sous-groupe $\mathbf{Z}(F_\omega)$ agit par translation sur A. Plus précisément, l'action de $t \in \mathbf{Z}(F_\omega)$ sur A est la translation par le vecteur image $\nu(t)$ de $-\mathrm{ord}(t)$ dans V où

$$\mathbf{Z}(F_\omega) \xrightarrow{\mathrm{ord}} \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{X}_*(\mathbf{S})$$

est le morphisme de groupes déterminé par

$$\langle a_{|\mathbf{S}}, \mathrm{ord}(t) \rangle = \omega(a(t)) \tag{3}$$

pour tout $t \in \mathbf{Z}(F_\omega)$ et tout $a \in \mathrm{X}^*_{F_\omega}(\mathbf{Z})$.

– L'action de $\mathbf{N}(F_\omega)$ sur A, encore notée ν, est une extension de celle du groupe de Weyl W sur V par celle de $\mathbf{Z}(F_\omega)$ par translation sur A. Autrement dit, on a un morphisme de suites exactes courtes de groupes :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mathbf{Z}(F_\omega) \arrow[r] \arrow[d, "\nu"] & \mathbf{N}(F_\omega) \arrow[r] \arrow[d, "\nu"] & W \arrow[r] \arrow[d, hook] & 1 \\ 1 \arrow[r] & V \arrow[r] & \mathrm{GA}(A) \arrow[r] & \mathrm{GL}(V) \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

dans lequel $\mathrm{GA}(A)$ (*resp.* $\mathrm{GL}(V)$) est le groupe affine (*resp.* linéaire) de A (*resp.* V) et V est identifié au groupe des translations de A.

En fait, l'existence et l'unicité (à translation près) d'une telle représentation affine de $\mathbf{N}(F_\omega)$ sur A sont la conséquence de la nullité des groupes de cohomologie $\mathrm{H}^i(W, V)$, $i = 1, 2$.

Soit $\rho : \tilde{\mathbf{G}} \longrightarrow \mathbf{G}$ le revêtement universel du groupe dérivé de $\mathbf{G}$. Le sous-groupe

$$W_{\mathrm{a}} := \nu(\mathbf{N}(F_\omega) \cap \rho(\tilde{\mathbf{G}}(F_\omega))) \subset \mathrm{GA}(A)$$

est un *groupe de Weyl affine* au sens de Bruhat-Tits [**13**, I.1.3]. En particulier W_{a}, muni de la topologie discrète, opère proprement sur A et est engendré par des réflexions par rapport à des hyperplans affines. Si on munit V d'un produit scalaire invariant par W, ces réflexions sont orthogonales pour la structure euclidienne associée sur A. De plus W_{a} est le produit semi-direct du réseau $\nu(\mathbf{Z}(F_\omega) \cap \rho(\tilde{\mathbf{G}}(F_\omega)))$ de V par W. Par conséquent, d'après [**9**, VI, §1, n°1, rem. 3], les applications linéaires associées aux réflexions de W_{a} sont les réflexions s_a, $a \in \Phi$. Un hyperplan, ensemble des points fixes d'une réflexion de A appartenant à W_{a}, est appelé *mur* de A. Selon ce qui précède, sa direction est l'un des hyperplans $H_a \subset V$, $a \in \Phi$. Une *racine affine* de A est un demi-espace affine fermé limité par un mur. Si un point x de A est donné, les racines affines sont de la forme

$$\alpha_{a,k} := \{x + v \ / \ v \in V, \ \langle a, v \rangle + k \geq 0\} \ \text{ où } a \in \Phi, \ k \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Une telle racine affine $\alpha_{a,k}$ est dite *associée* à a (cette notion ne dépend évidemment pas du point $x \in A$). Une *facette* de A est une classe d'équivalence dans A pour la relation d'appartenance aux mêmes racines affines. Une *alcôve* de A est une composante connexe du complémentaire dans A de la réunion des murs. Son adhérence est un domaine fondamental pour l'action de W_{a} dans A [**9**, V, §3, th. 2]. Un point de A est un *point spécial* si, pour tout mur de A, il existe un translaté, par un élément de $V \cap W_{\mathrm{a}}$, de ce mur contenant ce point.

5.1.2. L'immeuble de Bruhat-Tits. — L'*immeuble* de Bruhat-Tits $\mathcal{I}$ de $\mathbf{G}$ sur F_ω est un quotient du produit contracté $\mathbf{G}(F_\omega) \times^{\mathbf{N}(F_\omega)} A$ par une relation d'équivalence compatible avec l'action de $\mathbf{G}(F_\omega)$ [**13**, I.7.4.2]. De plus, l'application canonique $A \longrightarrow \mathcal{I}$ identifie A à une partie de l'immeuble dont le stabilisateur est $\mathbf{N}(F_\omega)$. Les *appartements* (*resp. murs*, *facettes*, *alcôves*, *points spéciaux*) de $\mathcal{I}$ sont les transformés de A (*resp.* des murs, facettes, alcôves, points spéciaux de A) par un élément de $\mathbf{G}(F_\omega)$. Le choix d'un produit scalaire invariant par W sur V permet [**13**, I.2.5.4] de munir l'immeuble $\mathcal{I}$ d'une distance invariante sous $\mathbf{G}(F_\omega)$ laquelle, restreinte à l'appartement A, est induite par la structure euclidienne provenant de V.

5.1.3. Schémas en groupes sur $\mathcal{O}_\omega$. — Soit $\mathcal{O}_\omega$ l'anneau de la valuation ω de F_ω.

La théorie de Bruhat-Tits associe [**13**, II.5.1.30], à toute partie bornée non vide Ω d'un appartement de l'immeuble $\mathcal{I}$, un schéma en groupes $\mathbf{G}_\Omega$ affine, lisse sur $\mathcal{O}_\omega$, à fibres connexes, de fibre générique $\mathbf{G}$ ($\mathbf{G}_\Omega$ ne dépend pas du choix d'un appartement contenant Ω). Le groupe des points entiers $\mathbf{G}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)$, appelé *fixateur connexe* de Ω, est un sous-groupe ouvert compact de $\mathbf{G}(F_\omega)$ qui fixe Ω. Par définition [**13**, II.5.2.6 et 8], un *F_ω-sous-groupe parahorique* (*resp.* un *F_ω-sous-groupe d'Iwahori*), est le fixateur connexe d'une facette (*resp.* une alcôve) de $\mathcal{I}$.

La construction de $\mathbf{G}_\Omega$ se fait en deux étapes :

- d'abord dans le cas où $\mathbf{G}$ est quasi-déployé sur F_ω (*cf.* [**13**, II.2 à 4]) : $\mathbf{G}_\Omega$ est la composante neutre de l'adhérence schématique de $\mathbf{G}$ dans le groupe linéaire $\mathbf{GL}(M_\Omega)$ d'un réseau M_Ω d'un F_ω-espace vectoriel sur lequel $\mathbf{G}$ agit fidèlement ;
- puis dans le cas général (*cf.* [**13**, II.5]) : d'après un théorème de Steinberg (*cf.* [**46**, III.2]), $\mathbf{G}$ est quasi-déployé sur une extension galoisienne finie et non ramifiée ${F_\omega}'$ de F_ω, de groupe de Galois Γ' ; l'immeuble $\mathcal{I}$ s'identifie à l'ensemble des points fixes de Γ' dans l'immeuble de $\mathbf{G}$ sur ${F_\omega}'$ et $\mathbf{G}_\Omega$ s'obtient à partir de son analogue $(\mathbf{G}_{{F_\omega}'})_\Omega$, par descente étale de ${F_\omega}'$ à F_ω.

5.1.4. Adhérences schématiques. — Nous supposons ici que Ω est une partie bornée non vide de l'appartement A associé au tore F_ω-déployé maximal $\mathbf{S}$.

Selon [**13**, II.1.2.6-7], l'*adhérence schématique* d'un sous-groupe fermé $\mathbf{H}$ de $\mathbf{G}$ dans $\mathbf{G}_\Omega$ est un sous-$\mathcal{O}_\omega$-schéma en groupes fermé de $\mathbf{G}_\Omega$ et c'est l'unique sous-$\mathcal{O}_\omega$-schéma fermé plat de $\mathbf{G}_\Omega$ de fibre générique $\mathbf{H}$.

On note $\mathbf{U}_a$ le *sous-groupe radiciel* de $\mathbf{G}$ associé à la racine $a \in \Phi$: c'est le plus grand sous-groupe fermé connexe de $\mathbf{G}$ normalisé par $\mathbf{S}$ et tel que les racines $a \in \Phi$ intervenant dans la représentation adjointe de $\mathbf{S}$ dans l'algèbre de Lie de $\mathbf{U}_a$ sont des multiples entiers positifs de a.

La théorie de Bruhat-Tits munit, grâce à un épinglage, le sous-groupe $\mathbf{U}_a(F_\omega)$ d'une filtration décroissante et exhaustive $(\mathbf{U}_\alpha)_\alpha$ indexée par l'ensemble des racines affines α associées à a, ordonné par inclusion [**13**, I.6.2.6]. De plus, les sous-groupes $\mathbf{U}_\alpha$ forment un système fondamental de voisinages ouverts compacts de l'unité dans $\mathbf{U}_a(F_\omega)$. Et, selon [**13**, I.6.2.10(iii)], pour toute racine affine α et $n \in \mathbf{N}(F_\omega)$, on a ${}^n(\mathbf{U}_\alpha) = \mathbf{U}_{n.\alpha}$, où $n.\alpha$ est l'image de la racine affine α par n. En particulier, $\mathbf{Z}(F_\omega)$ normalise $\mathbf{U}_a$ et permute l'ensemble (indexé par les racines affines α associées à a) des sous-groupes $\mathbf{U}_\alpha$.

Si Ψ est une partie close de Φ (*i.e.* telle que pour tous $a, b \in \Psi$, si $a + b \in \Phi$ alors $a + b \in \Psi$) contenue dans un demi-espace ouvert de $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{X}^*(\mathbf{S})$, alors (*cf.* [**8**, prop. 3.11]), quel que soit l'ordre mis sur $\Psi^{\text{réd}} := \{a \in \Psi \ / \ a/2 \notin \Psi\}$ l'application schématique produit

$$\prod_{a \in \Psi^{\text{réd}}} \mathbf{U}_a \longrightarrow \mathbf{G} \tag{5}$$

est un isomorphisme de schémas sur le sous-groupe fermé $\mathbf{U}_\Psi$ engendré par les $\mathbf{U}_a$, $a \in \Psi$.

Les faits suivants sont des conséquences de la construction de $\mathbf{G}_\Omega$:

(i) l'adhérence schématique de $\mathbf{S}$ dans $\mathbf{G}_\Omega$ s'identifie au $\mathcal{O}_\omega$-*schéma canonique* $\mathbf{Spec}\,\mathcal{O}_\omega[\mathrm{X}^*(\mathbf{S})]$ *de fibre générique* $\mathbf{S}$ (*cf.* [**13**, II.3.8.3 (S°1) et 4.4.18 (II)] dans le cas F_ω-quasi-déployé, puis [**13**, II.5.1.9] dans le cas général) ;

(ii) pour toute racine $a \in \Phi$, l'adhérence schématique $\mathbf{U}_{\Omega,a}$ de $\mathbf{U}_a$ dans $\mathbf{G}_\Omega$ est l'unique $\mathcal{O}_\omega$-schéma en groupes affine, lisse de fibre générique $\mathbf{U}_a$ tel que $\mathbf{U}_{\Omega,a}(\mathcal{O}_\omega) = \mathbf{U}_\alpha$ où α est la plus petite racine affine associée à a contenant Ω (*cf.* [**13**, II.3.8.3 (S°1)] dans le cas F_ω-quasi-déployé puis [**13**, II.5.2.2] dans le cas général) ;

(iii) l'application schématique produit

$$\prod_{a \in \Psi^{\text{réd}}} \mathbf{U}_{\Omega,a} \longrightarrow \mathbf{G}_\Omega$$

prolonge (5) en un isomorphisme de schémas sur l'adhérence schématique $\mathbf{U}_{\Omega,\Psi}$ de $\mathbf{U}_\Psi$ dans $\mathbf{G}_\Omega$ (*cf.* [**13**, II.3.8.3 (S°2)] dans le cas F_ω-quasi-déployé puis [**13**, II.5.2.3] dans le cas général).

(iv) l'adhérence schématique d'un tore $\mathbf{T}$ de $\mathbf{Z}$ s'identifie, dans la terminologie de [**13**, II.4.4], au *lissifié du* $\mathcal{O}_\omega$-*schéma canonique de fibre générique* $\mathbf{T}$. En particulier, le groupe de ses $\mathcal{O}_\omega$-points est le sous-groupe compact maximal de $\mathbf{T}(F_\omega)$.

5.2. Donnée relative à un sous-groupe parabolique. —

5.2.1. Sous-groupes paraboliques et parties bien placées. — Nous fixons

– $\mathbf{M} \ltimes \mathbf{U} \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}$ une décomposition de Levi d'un F_ω-sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ et

– Ω une partie non vide de l'appartement de $\mathcal{I}$ associé à un tore F_ω-déployé maximal $\mathbf{S}$ contenant le radical F_ω-déployé $\mathbf{S}_{\mathbf{M}}$ de $\mathbf{M}$.

Dans cette situation, nous dirons que Ω est une partie *bien placée* par rapport au couple $(\mathbf{P}, \mathbf{M})$.

Le sous-groupe de Levi $\mathbf{M}$ est alors le centralisateur du tore F_ω-déployé $\mathbf{S_M}$ dans $\mathbf{G}$. On note $\mathbf{M} \ltimes \mathbf{U}^- \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^-$ la décomposition de Levi du sous-groupe parabolique opposé à $\mathbf{P}$ ayant aussi $\mathbf{M}$ pour sous-groupe de Levi. D'un point de vue combinatoire, la condition sur la partie non vide $\Omega \subset \mathcal{I}$ signifie exactement qu'il existe un tore F_ω-déployé maximal $\mathbf{S}$ de $\mathbf{G}$ tel que

- $\mathbf{P}^-$ est le sous-groupe parabolique opposé à $\mathbf{P}$ dans l'appartement de l'immeuble de Tits [**51**, 5.3] de $\mathbf{G}$ associé à $\mathbf{S}$;
- Ω est une partie de l'appartement de $\mathcal{I}$ associé à $\mathbf{S}$.

5.2.2. Immeuble d'un sous-groupe de Levi. — Ayant choisi un tel tore F_ω-déployé $\mathbf{S}$, nous reprenons les notations de 5.1.1. Nous affectons les notations Φ, V, A, ν de l'indice $\mathbf{M}$ pour désigner les mêmes objets relatifs au groupe réductif $\mathbf{M}$, dont $\mathbf{S}$ est encore un tore F_ω-déployé maximal.

Lemma 5.1. — *Soit* $\mathbf{RM}$ *le radical de* $\mathbf{M}$. *Le sous-espace réel* $L_\mathbf{M} := \mathbb{R} \otimes_\mathbb{Z} (\mathrm{X}_*(\mathbf{S_M})/\mathrm{X}_*(\mathbf{R}_{F_\omega}\mathbf{G})) \subset V$ *est l'orthogonal de* $\Phi_\mathbf{M}$ *et on a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{RM}(F_\omega) \arrow[d, "\nu_{|\mathbf{RM}}"'] \arrow[r, phantom, "\subset"] & \mathbf{Z}(F_\omega) \arrow[d, "\nu"'] \arrow[dr, "\nu_\mathbf{M}"] & & \\
0 \arrow[r] & L_\mathbf{M} \arrow[r] & V \arrow[r] & V_\mathbf{M} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dont la ligne inférieure est une suite exacte courte.

Démonstration. — Le tore F_ω-déployé $\mathbf{S_M}$ est la composante neutre du noyau $\bigcap_{a\in\Phi_\mathbf{M}} \ker a$. Ainsi les cocaractères de $\mathbf{S_M}$ sont exactement les cocaractères de $\mathbf{S}$ orthogonaux aux racines $a \in \Phi_\mathbf{M}$, et $L_\mathbf{M}$ s'identifie à l'orthogonal de $\Phi_\mathbf{M}$ dans V.

Par définition, $V_\mathbf{M} := \mathbb{R} \otimes_\mathbb{Z} (\mathrm{X}_*(\mathbf{S})/\mathrm{X}_*(\mathbf{S_M}))$ car $\mathbf{S_M}$ est le radical F_ω-déployé de $\mathbf{M}$, d'où l'exactitude de la ligne inférieure. La commutativité du triangle est évidente puisque les deux morphismes ν et $\nu_\mathbf{M}$ se déduisent de $-\mathrm{ord}$.

Il reste à montrer que pour tout $t \in \mathbf{RM}(F_\omega)$ et tout $a \in \Phi_\mathbf{M}$, $\langle a, \nu(t)\rangle = 0$. On peut se restreindre aux a appartenant à un système de racines simples de $\Phi_\mathbf{M}$.

D'après [**20**, XIV, th. 1.1], le groupe $\mathbf{Z}$ contient un tore maximal $\mathbf{T}$ défini sur F_ω. Nécessairement, il contient $\mathbf{S}$ et c'est aussi un tore maximal de $\mathbf{G}$, contenu dans $\mathbf{M}$. Ainsi $\mathbf{S}$ et $\mathbf{RM}$ sont des sous-tores de $\mathbf{T}$. Selon la proposition [**8**, 6.8], a se prolonge en une racine $\tilde{a}$, relative à $\tilde{F_\omega}$, de $\mathbf{M}$ par rapport à $\mathbf{T}$. La nullité de $\langle a, \nu(t)\rangle = -\langle \tilde{a}, \mathrm{ord}(t)\rangle$ résulte du lemme suivant appliqué à $\tilde{a} \in \mathrm{X}^*(\mathbf{T})$. □

Lemma 5.2. — *Soit $\mathbf{T}$ un tore maximal du groupe $\mathbf{Z}$.*

Pour tout $t \in \mathbf{RM}(F_\omega)$ et tout $a \in \mathrm{X}^*(\mathbf{T})$ on a $\langle a_{|\mathbf{S}}, \mathrm{ord}(t)\rangle = \omega(a(t))$, où l'on note encore ω le prolongement de la valuation de F_ω à une clôture algébrique.

En particulier, si a appartient à l'ensemble $\Phi_\mathbf{M}(\mathbf{T})$ des racines de $\mathbf{M}$ par rapport à $\mathbf{T}$, on a $a(t) = 1$ et $\langle a_{|\mathbf{S}}, \mathrm{ord}(t)\rangle = 0$.

Dans ce lemme, on ne suppose pas que $\mathbf{T}$ est défini sur F_ω.

Démonstration. — Puisque $\mathbf{T}$ est un tore maximal de $\mathbf{Z}$, le morphisme de restriction $X^*(\mathbf{Z}) \longrightarrow X^*(\mathbf{T})$ est injectif à conoyau fini. Il existe donc un multiple $N.a$ ($N \in \mathbb{N}^*$) de a qui s'étend en un caractère a' de $\mathbf{Z}$.

Soit $\tilde{F_\omega}$ une extension galoisienne finie de F_ω sur laquelle a' est défini. On note $\tilde{\Gamma}$ son groupe de Galois et $\tilde{d}$ son degré.

En appliquant la caractérisation 5.1.1(3) du morphisme ord au caractère $\sum_{\sigma\in\tilde{\Gamma}} {}^\sigma a' \in X^*_{F_\omega}(\mathbf{Z})$, on obtient :

$$\langle \left(\sum_{\sigma\in\tilde{\Gamma}} {}^\sigma a'\right)_{|\mathbf{S}}, \mathrm{ord}(t)\rangle = \omega\left(\left(\sum_{\sigma\in\tilde{\Gamma}} {}^\sigma a'\right)(t)\right)$$

Or $\mathbf{S}$ est un tore F_ω-déployé et $a'_{|\mathbf{S}} = N.a_{|\mathbf{S}}$, donc le membre de gauche vaut $\tilde{d}.N.\langle a_{|\mathbf{S}}, \mathrm{ord}(t)\rangle$. Quant à celui de droite, il vaut $\tilde{d}.N.\omega(a(t))$ car $t \in \mathbf{RM}(F_\omega)$ et $a'_{|\mathbf{RM}} = N.a_{\mathbf{RM}}$.

La dernière assertion vient du fait que les racines de $\mathbf{M}$ par rapport à $\mathbf{T}$ sont triviales sur le radical de $\mathbf{M}$. □

La dernière partie de la preuve du lemme 5.1 redémontre le fait que le radical d'un groupe réductif agit trivialement sur son immeuble de Bruhat-Tits.

Selon [**13**, I.7.6.3-4], l'appartement $A_{\mathbf{M}}$ de l'immeuble de $\mathbf{M}$ associé à $\mathbf{S}$ s'identifie à $A/L_{\mathbf{M}}$, muni de l'action quotient de $\mathbf{N}(F_\omega) \cap \mathbf{M}(F_\omega)$. Et d'après [**13**, II.4.2.15], l'immeuble d'un groupe s'identifie à celui de son groupe adjoint, donc aussi à celui de son groupe dérivé.

5.2.3. Décomposition de Levi et grosse cellule. — Supposons de plus maintenant que Ω est une partie bornée de l'immeuble $\mathcal{I}$. Soit $\mathbf{G}_\Omega$ (*resp.* $\mathbf{M}_\Omega$) le schéma affine lisse sur $\mathcal{O}_\omega$, à fibres connexes et de fibre générique $\mathbf{G}$ (*resp.* $\mathbf{M}$) associé (*cf.* 5.1.3) à $\Omega \subset A$ (*resp.* au projeté de Ω sur $A_{\mathbf{M}}$).

On note $\mathbf{P}_\Omega$ (*resp.* $\mathbf{P}_\Omega^-$, $\mathbf{U}_\Omega$, $\mathbf{U}_\Omega^-$) l'adhérence schématique de $\mathbf{P}$ (*resp.* $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}^-$) dans $\mathbf{G}_\Omega$. On note encore $\mathbf{RM}$ l'adhérence schématique de $\mathbf{RM}$ dans $\mathbf{G}_\Omega$. Selon 5.1.4(iv), $\mathbf{RM}(\mathcal{O}_\omega)$ est le sous-groupe compact maximal de $\mathbf{RM}(F_\omega)$.

Proposition 5.3. — *(i) L'immersion fermée* $\mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{G}$ *se prolonge en un isomorphisme de* $\mathcal{O}_\omega$*-schémas en groupes de* $\mathbf{M}_\Omega$ *sur le centralisateur dans* $\mathbf{G}_\Omega$ *du* $\mathcal{O}_\omega$*-schéma canonique de fibre générique* $\mathbf{S}_\mathbf{M}$*.*

Ainsi $\mathbf{M}_\Omega$ *s'identifie à l'adhérence schématique de* $\mathbf{M}$ *dans* $\mathbf{G}_\Omega$*.*

(ii) $\mathbf{M}_\Omega$ *normalise* $\mathbf{U}_\Omega$ *et la décomposition de Levi* $\mathbf{M} \ltimes \mathbf{U} \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}$ *se prolonge en un isomorphisme*

$$\mathbf{M}_\Omega \ltimes \mathbf{U}_\Omega \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}_\Omega$$

(iii) Le morphisme produit

$$\mathbf{U}_\Omega^- \times \mathbf{M}_\Omega \times \mathbf{U}_\Omega \longrightarrow \mathbf{G}_\Omega$$

est un isomorphisme sur un voisinage ouvert de la section unité de $\mathbf{G}_\Omega$*.*

Démonstration. — D'après 5.1.4(i), l'adhérence schématique du tore $\mathbf{S}_\mathbf{M}$ dans $\mathbf{G}_\Omega$ est le tore $\mathcal{O}_\omega$-déployé $\mathbf{Spec}\,\mathcal{O}_\omega[\mathrm{X}^*(\mathbf{S}_\mathbf{M})]$, son centralisateur, dans $\mathbf{G}_\Omega$, est un sous-schéma en groupes fermé, lisse sur $\mathcal{O}_\omega$ et à fibres connexes [**20**, XIX, 2.2]. De plus, sa fibre générique est le centralisateur de $\mathbf{S}_\mathbf{M}$ dans $\mathbf{G}$, c'est-à-dire $\mathbf{M}$. Ces propriétés caractérisent (*cf.* 5.1.4) l'adhérence schématique de $\mathbf{M}$ dans $\mathbf{G}_\Omega$.

L'identification de $\mathbf{M}_\Omega$ avec l'adhérence schématique de $\mathbf{M}$ s'obtient grâce à la caractérisation [**13**, II.3.8.3] de $\mathbf{M}_\Omega$ dans le cas F_ω-quasi-déployé, puis par descente étale dans le cas général. D'où (i).

Les deux assertions (ii) et (iii) sont la conséquence directe du théorème [**13**, II.2.2.3] appliqué au tore F_ω-déployé $\mathbf{S_M}$. □

5.2.4. Facettes vectorielles et propriété de contraction. — Le lemme suivant énonce les propriétés de contraction que nous utiliserons pour décrire la structure des algèbres de Hecke paraboliques.

Les sous-groupes paraboliques $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}^-$, de l'appartement de l'immeuble de Tits de $\mathbf{G}$ associé à $\mathbf{S}$, correspondent respectivement aux *facettes vectorielles* $F_\mathbf{P}$ et $-F_\mathbf{P}$ de V, où

$$F_\mathbf{P} := \{v \in L_M \ / \ \forall a \in \Phi_\mathbf{U},\ \langle a, v\rangle > 0\}$$

et $\Phi_\mathbf{U}$ est l'ensemble des racines $a \in \Phi$ intervenant dans la représentation adjointe de $\mathbf{S}$ dans l'algèbre de Lie de $\mathbf{U}$.

L'image $\Lambda_\mathbf{M} := \nu(\mathbf{RM}(F_\omega))$ est un réseau de $L_\mathbf{M}$. Soit $\Lambda_\mathbf{M}^+$ le monoïde commutatif libre intersection de $\Lambda_\mathbf{M}$ avec l'adhérence de $F_\mathbf{P}$ et $\mathbf{RM}(F_\omega)^+$ son image réciproque par $\nu_{|\mathbf{RM}(F_\omega)}$. On a donc

$$\mathbf{RM}(F_\omega)^+ = \{t \in \mathbf{RM}(F_\omega) \ / \ \forall a \in \Phi_\mathbf{U},\ -\omega(a(t)) = \langle a, \nu(t)\rangle \geq 0\}$$

Selon le lemme 5.2, si $\Phi_\mathbf{U}(\mathbf{T})$ est l'ensemble des racines de $\mathbf{U}$ par rapport à un tore maximal $\mathbf{T}$ (non nécessairement défini sur F_ω) de $\mathbf{Z}$, on a aussi

$$\mathbf{RM}(F_\omega)^+ = \{t \in \mathbf{RM}(F_\omega) \ / \ \forall a \in \Phi_\mathbf{U}(\mathbf{T}),\ \omega(a(t)) \leq 0\} \qquad (6)$$

car selon [**8**, 6.8], toute racine $a \in (\Phi_\mathbf{U})^{\text{réd}}$ se prolonge en une racine $a' \in \Phi_\mathbf{U}(\mathbf{T})$.

Lemma 5.4. — *Pour tout $t \in \mathbf{RM}(F_\omega)^+$, on a les relations*

$$\mathbf{M}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^t = \mathbf{M}_\Omega(\mathcal{O}_\omega) \quad \mathbf{U}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^t \subset \mathbf{U}_\Omega(\mathcal{O}_\omega) \quad \mathbf{U}^-_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^t \supset \mathbf{U}^-_\Omega(\mathcal{O}_\omega)$$
$$\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^t \subset \mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega) \quad \mathbf{P}^-_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^t \supset \mathbf{P}^-_\Omega(\mathcal{O}_\omega) \tag{7}$$

*De plus, les sous-groupes $\mathbf{U}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^t$ (*resp. ${}^t\mathbf{U}^-_\Omega(\mathcal{O}_\omega)$*), $t \in \mathbf{RM}(F_\omega)^+$, forment un système fondamental de voisinages ouverts compacts de l'unité dans $\mathbf{U}(F_\omega)$ (*resp. $\mathbf{U}^-(F_\omega)$*).*

Démonstration. — La relation faisant intervenir $\mathbf{M}$ est immédiate car $\mathbf{RM}$ est la composante neutre du centre de $\mathbf{M}$.

Pour obtenir celle concernant $\mathbf{U}$, il suffit, d'après 5.1.4(ii) et (iii) appliqué à $\Psi = \Phi_\mathbf{U}$, de montrer, pour tout $a \in (\Phi_\mathbf{U})^{\text{réd}}$, l'inclusion $(\mathbf{U}_\alpha)^t \subset \mathbf{U}_\alpha$ où α est la plus petite racine associée à a, contenant Ω. Or, selon 5.1.4, on a $(\mathbf{U}_\alpha)^t = \mathbf{U}_{\alpha-\nu(t)}$, donc il suffit d'avoir $\alpha + \nu(t) \subset \alpha$. Ce qui équivaut, puisque α est de la forme 5.1.1(4), à $\langle a, \nu(t)\rangle \geq 0$.

D'après la décomposition de Levi de la proposition 5.3, ces deux premières relations donnent celle pour $\mathbf{P}$.

En remplaçant $\mathbf{U}$ par $\mathbf{U}^-$, on obtient de même les relations concernant $\mathbf{U}^-$ et $\mathbf{P}^-$.

Et la dernière assertion résulte de l'assertion analogue pour les sous-groupes $\mathbf{U}_\alpha \subset \mathbf{U}_a(F_\omega)$ (*cf.* 5.1.4). □

5.2.5. Sous-groupes bien placés. — Soit K un sous-groupe distingué de $\mathbf{G}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)$. Il est *bien placé* par rapport à $(\mathbf{P}, \mathbf{M})$ s'il se décompose sous la forme

$$K = (K \cap \mathbf{U}^-_\Omega(\mathcal{O}_\omega)).(K \cap \mathbf{M}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)).(K \cap \mathbf{U}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)) \tag{8}$$

et si pour tout $t \in \mathbf{RM}(F_\omega)^+$,

$$(K \cap \mathbf{U}_\Omega^-(\mathcal{O}_\omega))^t \supset K \cap \mathbf{U}_\Omega^-(\mathcal{O}_\omega) \tag{9}$$

Il résulte de [**43**, I.2] que l'ensemble, noté $\mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$, des sous-groupes ouverts, distingués dans $\mathbf{G}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)$ et bien placés par rapport à $(\mathbf{P}, \mathbf{M})$ forment un système fondamental de voisinages ouverts de l'unité dans $\mathbf{G}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)$.

5.3. Anneaux de Hecke paraboliques commutatifs. — *Dans la suite, nous notons souvent* $\mathbf{M}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^*$ *l'un des groupes* $\mathbf{M}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)$ *ou son groupe dérivé* $\mathbf{M}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)'$*, et* $\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^*$ *désigne, selon le cas, le sous-groupe* $\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)$ *ou*

$$\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)' := \mathbf{M}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)' \ltimes \mathbf{U}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)$$

5.3.1. Niveau infini. — Nous fixons une section σ du morphisme

$$\mathbf{RM}(F_\omega) \overset{\nu_{|\mathbf{RM}(F_\omega)}}{\twoheadrightarrow} \Lambda_{\mathbf{M}}$$

Par compacité, $\mathbf{M}_\Omega(\mathcal{O}_\omega) \cap \ker \nu = \{1\}$ et

$$\mathbf{M}_\Omega(\mathcal{O}_\omega) \cap \sigma(\Lambda_{\mathbf{M}}^+)^{-1}.\sigma(\Lambda_{\mathbf{M}}^+) = \{1\} \tag{10}$$

On pose $C := \mathbf{M}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)/\mathbf{M}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)'$.

Proposition 5.5. — *Dans cette situation,*

$$D_{1,\omega} := \sigma(\Lambda_{\mathbf{M}}^+).\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)' \quad \subset \quad D_{0,\omega} := \sigma(\Lambda_{\mathbf{M}}^+).\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)$$

sont des sous-monoïdes de $\mathbf{P}(F_\omega)$.

De plus nous avons les isomorphismes d'anneaux suivants :

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}(\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)', D_{1,\omega}) & \xleftarrow{\sim} & \mathbb{Z}[\Lambda^+_{\mathbf{M}}] \\
\cap & & \\
\mathcal{H}(\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)', D_{0,\omega}) & \xleftarrow{\sim} & \mathbb{Z}[\Lambda^+_{\mathbf{M}}][C] \\
\mathcal{H}(\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega), D_{0,\omega}) & \xleftarrow{\sim} & \mathbb{Z}[\Lambda^+_{\mathbf{M}}]
\end{array}
$$

Enfin, $\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)'$ *est un sous-groupe distingué, au sens de l'appendice B, de la paire* $\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega) \subset D_{0,\omega}$.

Démonstration. — Les relations (7) montrent, d'une part, que

$$D_{1,\omega} \subset D_{0,\omega} \subset \mathbf{P}(F_\omega)$$

sont des sous-monoïdes, et de l'autre, que pour tous $\xi, \eta \in D_{0,\omega}$:

$$
\begin{aligned}
&\#\left(\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^*\backslash\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^*.\xi.\eta.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^*\right)\\
&= \big(\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^* : \mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^* \cap (\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^*)^{\xi.\eta}\big)\\
&= \big(\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^* : (\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^*)^{\xi.\eta}\big)\\
&= (\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^* : (\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^*)^{\eta}) . \big((\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^*)^{\eta} : (\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^*)^{\xi.\eta}\big)\\
&= (\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^* : (\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^*)^{\eta}) . \big(\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^* : (\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^*)^{\xi}\big)
\end{aligned}
$$

De plus, puisque $\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)$ est un sous-groupe ouvert de $\mathbf{P}(F_\omega)$, ces indices $(\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^* : (\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^*)^{\xi})$ $(\xi \in D_{0,\omega})$ sont finis. D'où la multiplicativité nécessaire pour appliquer le corollaire B.6 en appendice : l'anneau de Hecke $\mathcal{H}(\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^*, D_{0,\omega})$ est isomorphe à l'algèbre du monoïde $\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^*\backslash D_{0,\omega}/\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^*$.

En utilisant (7) puis (10), ce dernier est isomorphe à

$$
\begin{aligned}
D_{0,\omega}/\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^* &= \sigma(\Lambda^+_{\mathbf{M}}).\mathbf{M}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)/\mathbf{M}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^*\\
&= \begin{cases} \Lambda^+_{\mathbf{M}} & \text{si } \mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^* = \mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)\\ \Lambda^+_{\mathbf{M}} \times C & \text{si } \mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^* = \mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)' \end{cases}
\end{aligned}
$$

De plus, le sous-anneau $\mathcal{H}(\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)', D_{1,\omega}) \subset \mathcal{H}(\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)', D_{0,\omega})$ s'identifie immédiatement à l'algèbre du monoïde commutatif libre $\Lambda^+_{\mathbf{M}}$.

La dernière assertion signifie que les applications

$$\begin{array}{c} \mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)' \backslash \mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)'.\xi.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)' \\ \big\downarrow \\ \mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega) \backslash \mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega).\xi.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega) \end{array} \tag{11}$$

sont injectives ($\xi \in D_{0,\omega}$), *i.e.*

$$\forall \xi \in D_{0,\omega}, \quad \mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)'.\xi.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)' \cap \mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega).\xi = \mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)'.\xi$$

Ce qui est le cas puisque cette égalité est équivalente à celle projetée dans $\mathbf{M}$ et cette dernière vient du fait que $\sigma(\Lambda^+_{\mathbf{M}}).\mathbf{M}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)$ normalise $\mathbf{M}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)'$. □

5.3.2. Niveau fini. — Nous nous intéressons maintenant au niveau fini, *i.e.* aux sous-groupes de niveau de la forme $U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)$ et $U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)'$. Les premiers sont de type Γ_0 tandis que les seconds sont de type Γ_1.

Le groupe abélien profini C s'identifie à la limite projective, indexée par $\mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$, des groupes finis

$$C_U := \mathbf{M}_\Omega(\mathcal{O}_\omega) / \left((U \cap \mathbf{M}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)).\mathbf{M}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)' \right) \qquad (U \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}})$$

Proposition 5.6. — *Soit $U \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$. Alors $U.D_{1,\omega} \subset U.D_{0,\omega}$ sont des sous-monoïdes de $\mathbf{G}(F_\omega)$.*

De plus, on a les isomorphismes d'anneaux suivants :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)', U.D_{1,\omega}) & \xleftarrow{\sim} & \mathbb{Z}[\Lambda^+_{\mathbf{M}}] \\ \cap & & \\ \mathcal{H}(U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)', U.D_{0,\omega}) & \xleftarrow{\sim} & \mathbb{Z}[\Lambda^+_{\mathbf{M}}][C_U] \\ \mathcal{H}(U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega), U.D_{0,\omega}) & \xleftarrow{\sim} & \mathbb{Z}[\Lambda^+_{\mathbf{M}}] \end{array}$$

De plus, $U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)'$ est un sous-groupe distingué de la paire

$$U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega) \subset U.D_{0,\omega}$$

Démonstration. — Remarquons d'abord que $U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^* \subset \mathbf{G}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)$ est un sous-groupe car $U \lhd \mathbf{G}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)$ est distingué.

Établissons ensuite, pour $\xi \in \sigma(\Lambda^+_{\mathbf{M}})$ et $p \in \mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)$, les égalités :

$$\begin{aligned}
&U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^*.\xi.p.U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^* \\
&\quad = U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^*.\xi.p.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^* \\
&\quad = (U \cap \mathbf{P}^-_\Omega(\mathcal{O}_\omega)).\xi.p.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^* && (12) \\
&\quad = (U \cap \mathbf{U}^-_\Omega(\mathcal{O}_\omega)).\xi.p.(U \cap \mathbf{M}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)).\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^* && (13)
\end{aligned}$$

La première égalité vient de $p.U = U.p$, de la décomposition (8) et de (9). La seconde de la décomposition (8) et de (7). Et la troisième, toujours de la décomposition (8).

L'égalité (12) montre que $U.D_{1,\omega} \subset U.D_{0,\omega}$ sont des sous-monoïdes de $\mathbf{G}(F_\omega)$ et que le morphisme

$$\begin{array}{c}
\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^*\backslash\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^*.\xi.p.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^* \\
\Big\downarrow {\scriptstyle \varphi_{\xi.p}} \\
U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^*\backslash U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^*.\xi.p.U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^*
\end{array} \qquad (14)$$

est surjectif. Il est aussi injectif car

$$\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^*.\xi.p.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^* \cap U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^*.\xi.p = \mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^*.\xi.p$$

En effet, cette égalité est à nouveau équivalente à celle projetée dans $\mathbf{M}$, laquelle résulte du fait que $\sigma(\Lambda^+_{\mathbf{M}}).\mathbf{M}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)$ normalise $\mathbf{M}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^*$.

Comme dans la preuve de la proposition 5.5, nous disposons donc de l'hypothèse de multiplicativité nécessaire à l'application du corollaire B.6 : l'anneau de Hecke $\mathcal{H}(U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^*, U.D_{0,\omega})$ est isomorphe à l'algèbre du monoïde $U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^* \backslash U.D_{0,\omega}/U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^*$.

En utilisant (13) puis (10), ce dernier est isomorphe à

$$\begin{aligned}
&D_{0,\omega}/\left((U \cap \mathbf{M}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)).\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^*\right)\\
&\quad= \sigma(\Lambda_{\mathbf{M}}^+).\mathbf{M}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)/\left((U \cap \mathbf{M}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)).\mathbf{M}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^*\right)\\
&\quad= \begin{cases} \Lambda_{\mathbf{M}}^+ & \text{si } \mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^* = \mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)\\ \Lambda_{\mathbf{M}}^+ \times C_U & \text{si } \mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)^* = \mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)' \end{cases}
\end{aligned}$$

De plus, le sous-anneau

$$\mathcal{H}(U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)', U.D_{1,\omega}) \subset \mathcal{H}(U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)', U.D_{0,\omega})$$

s'identifie immédiatement à l'algèbre du monoïde commutatif libre $\Lambda_{\mathbf{M}}^+$.

La dernière assertion résulte des isomorphismes $\varphi_{\xi.p}$ et des injections (11). □

5.3.3. Conséquence de la propriété de contraction. — La propriété de contraction des éléments $t \in \mathbf{RM}(F_\omega)^+$, décrite au lemme 5.4 se traduit, sur les opérateurs de Hecke, par les relations suivantes :

Lemma 5.7. — *Soient $U, U' \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$ tels que $U' \subset U$.*

Il existe $t \in \mathbf{RM}(F_\omega)^+$ tel que $(U' \cap \mathbf{U}_\Omega^-(\mathcal{O}_\omega))^t \supset U \cap \mathbf{U}_\Omega^-(\mathcal{O}_\omega)$. Pour un tel t, on a les relations :

$$\begin{aligned}
&U'.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega).t.U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega) | U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega).1.U'.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)\\
&\quad= U'.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega).t.U'.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)\\
&U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega).1.U'.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega) | U'.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega).t.U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)\\
&\quad= U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega).t.U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)
\end{aligned}$$

Démonstration. — D'après le lemme 5.4, les sous-groupes ${}^{t}(U \cap \mathbf{U}_{\Omega}^{-}(\mathcal{O}_\omega))$, lorsque t varie dans $\mathbf{RM}(F_\omega)^+$, forment un système fondamental de voisinage de l'unité dans $\mathbf{U}^-(F_\omega)$. D'où la première assertion.

Puisque $U' \subset U$, on a

$$\#\left((U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega))\backslash U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega).1.U'.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega)\right) = 1$$

Ainsi, selon le lemme B.5 en appendice, il suffit, pour établir les deux égalités d'avoir l'égalité et l'isomorphisme suivants :

$$U'.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega).t.U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega) = U'.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega).t.U'.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega) \tag{15}$$

$$\begin{array}{c} (U'.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega))\backslash U'.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega).t.U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega) \\ \Big\downarrow \wr \\ (U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega))\backslash U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega).t.U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega) \end{array} \tag{16}$$

En utilisant la décomposition (8) puis la condition sur t, on a

$$\begin{aligned} U'.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega).t.U.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega) &= U'.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega).t.(U \cap \mathbf{U}_{\Omega}^{-}(\mathcal{O}_\omega)).\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega) \\ &= U'.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega).t.\mathbf{P}_\Omega(\mathcal{O}_\omega) \end{aligned}$$

d'où l'égalité (15).

Les isomorphismes $\varphi_{\xi.p}$ de (14) établissent l'injectivité du morphisme (16). Sa surjectivité est évidente. $\square$

6. Cohomologie quasi-ordinaire

Maintenant, $\mathbf{G}$ est un groupe réductif connexe sur $\mathbb{Q}$. On fixe la donnée X nécessaire pour définir une variété de Shimura pour ce groupe.

On fixe aussi un nombre premier p.

Dans cette section, nous utilisons la proposition 4.5 comparant la cohomologie de la variété Sh_K de niveau K avec la cohomologie de K, ainsi que l'étude des algèbres de Hecke parabolique en p de la section précédente pour contrôler la cohomologie de niveau fini.

Plus précisément, nous commençons par établir une suite spectrale liant, au moyen des opérateurs diamants, la cohomologie de niveau de type $\Gamma_0(p^\infty)$ à celle de type $\Gamma_1(p^\infty)$ (voir th. 6.2). Nous construisons au paragraphe 6.3.2 l'idempotent $\mathbf{P}$-quasi-ordinaire e_{qo} qui découpe la partie de la cohomologie sur laquelle $\Lambda_{\mathbf{M}}^+ \simeq \mathbb{N}.T_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{N}.T_r$ agit par automorphismes. Les relations entre opérateurs de Hecke du lemme 5.7, résultant des propriétés de contraction montrent que la cohomologie $\mathbf{P}$-quasi-ordinaire de niveau de type $\Gamma_0(p^n)$ est indépendante du niveau n (lemme 6.5). Il en résulte une suite spectrale (*cf.* cor. 6.6) liant la cohomologie $\mathbf{P}$-quasi-ordinaire de niveau fini de type $\Gamma_0(p^n)$ à celle de niveau infini de type $\Gamma_1(p^\infty)$.

En application de ce dernier résultat, nous donnons deux théorèmes comparant la cohomologie $\mathbf{P}$-quasi-ordinaire de niveau de type $\Gamma_0(p^n)$ à celle de type $\Gamma_1(p^\infty)$. (th. 6.12 et 6.13). Le premier donne des conditions suffisantes pour avoir un isomorphisme alors que le second, sous des hypothèses plus faibles, donne un morphisme à noyau et conoyau finis.

Dans le cas $\mathbf{G} = \mathbf{GL}(n)$, Hida a montré ces résultats, qu'il appelle théorèmes de contrôle fort et faible, dans [**27**].

Notre méthode diffère de [**27**] par l'utilisation de la suite spectrale du corollaire 6.6. C'est grâce au point de vue adélique que nous avons pu faire apparaître les opérateurs diamants en p dans une telle suite spectrale.

Dans la prochaine section, des théorèmes de contrôle, nous déduirons certaines propriétés de l'algèbre de Hecke $\mathbf{P}$-quasi-ordinaire universelle.

6.1. Sous-groupes de niveau. —

6.1.1. Donnée en p. — Nous reprenons les notations suivantes de la section 5 appliquée au groupe $\mathbf{G}$ sur le corps p-adique $\mathbb{Q}_p$:

– les $\mathbb{Q}_p$-groupes paraboliques opposés $\mathbf{P} \simeq \mathbf{M} \ltimes \mathbf{U}$ et $\mathbf{P}^- \simeq \mathbf{M} \ltimes \mathbf{U}^-$ du paragraphe 5.2.1 ;
– la partie bornée et bien placée Ω de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathbf{G}$ sur $\mathbb{Q}_p$ de 5.2.3 ;
– les $\mathbb{Z}_p$-schémas en groupes $\mathbf{P}_\Omega = \mathbf{M}_\Omega \ltimes \mathbf{U}_\Omega$ et $\mathbf{P}_\Omega^- = \mathbf{M}_\Omega \ltimes \mathbf{U}_\Omega^-$ de 5.2.3 ;
– les sous-monoïdes $\mathbf{RM}(\mathbb{Q}_p)^+ \subset \mathbf{RM}(\mathbb{Q}_p)$, $\Lambda_{\mathbf{M}}^+ \subset \Lambda_{\mathbf{M}}$ de 5.2.4 ;
– l'ensemble $\mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$ de 5.2.5 ;
– les sous-groupes $\mathbf{P}_\Omega(\mathbb{Z}_p)' = \mathbf{M}_\Omega(\mathbb{Z}_p)' \ltimes \mathbf{U}_\Omega(\mathbb{Z}_p)$ de 5.3 ;
– le morphisme $\sigma :\ \mathbf{RM}(\mathbb{Q}_p) \longrightarrow \Lambda_{\mathbf{M}}$ de 5.3.1 ;
– le groupe profini $C := \mathbf{M}_\Omega(\mathbb{Z}_p)/\mathbf{M}_\Omega(\mathbb{Z}_p)' = \varprojlim_{U \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}} C_U$ et les sous-monoïdes $D_{1,p} \subset D_{0,p}$ de 5.3.1.

6.1.2. Donnée auxiliaire. — On note $\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}^{(S)}$ l'algèbre des adèles finis, hors d'un ensemble fini S de nombre premiers, du corps $\mathbb{Q}$. On note simplement $\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}^{(p)} := \mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}^{(\{p\})}$.

Nous fixons aussi

– un sous-groupe ouvert compact $K^{(p)}$ de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}^{(p)})$ tel que le groupe $\mathbf{G}_\Omega(\mathbb{Z}_p).K^{(p)}$ est assez petit au sens de (TF),
– un sous-monoïde $D^{(p)}$ de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}^{(p)})$ tel que l'anneau de Hecke

$$\mathcal{H}^{(p)} := \mathcal{H}(K^{(p)}, D^{(p)})$$

est commutatif.

D'après [**13**, I.4.4.9], ou [**41**], la dernière condition est remplie, par exemple, si la paire de Hecke $K^{(p)} \subset D^{(p)}$ est de la forme

$$K^{(p)} = \tilde{K}.\prod_{l \notin \tilde{S} \cup \{p\}} K_l \quad \subset \quad D^{(p)} = \tilde{K}.\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}^{(\tilde{S}\cup\{p\})})$$

où $\tilde{S}$ est un sous-ensemble fini de nombres premiers distincts de p, l parcours l'ensemble des nombres premiers hors de $\tilde{S} \cup \{p\}$, $\tilde{K}$ est un sous-groupe ouvert compact de $\prod_{l\in\tilde{S}} \mathbf{G}(\mathbb{Q}_l)$ et pour tout $l \notin \tilde{S} \cup \{p\}$, K_l est un *sous-groupe spécial* de $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_l)$, c'est-à-dire le fixateur d'un point spécial de l'immeuble de Bruhat-Tits élargi (*cf.* [**13**, II.5.1.29]) de $\mathbf{G}_{\mathbb{Q}_l}$.

6.1.3. Anneaux de Hecke adéliques. — Considérons les sous-groupes

$$K_1 := K^{(p)}.\mathbf{P}_\Omega(\mathbb{Z}_p)' \quad \subset \quad K_0 := K^{(p)}.\mathbf{P}_\Omega(\mathbb{Z}_p)$$

et les sous-monoïdes

$$D_1 := D^{(p)}.D_{1,p} \quad \subset \quad D_0 := D^{(p)}.D_{0,p}$$

Par la suite, nous noterons souvent $K_* \subset D_*$ l'une des paires de Hecke $K_1 \subset D_1$, $K_1 \subset D_0$ ou $K_0 \subset D_0$.

On identifie un sous-groupe $U \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$ à son image par l'injection canonique $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_p) \hookrightarrow \mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$.

D'après le paragraphe B.2.3 en appendice, les isomorphismes $\varphi_{\xi.p}$ de (14) donnent lieu à

- un système projectif $\mathcal{H}(U.K_*, U.D_*)$, indexé par $U \in \mathcal{T}_{\rm bp}$, d'anneaux de Hecke de niveau fini,
- et un morphisme $\mathcal{H}(K_*, D_*) \longrightarrow (\mathcal{H}(U.K_*, U.D_*))_{U \in \mathcal{T}_{\rm bp}}$ de l'anneau de Hecke de niveau infini dans ce système projectif.

Selon les propositions 5.5 et 5.6, les anneaux de Hecke et les morphismes en jeu sont

- pour la paire (K_1, D_1) : les applications identiques

$$\mathcal{H}^{(p)}[\Lambda^+_{\mathbf{M}}] \longrightarrow (\mathcal{H}^{(p)}[\Lambda^+_{\mathbf{M}}])_{U \in \mathcal{T}_{\rm bp}}$$

- pour la paire (K_1, D_0) : les applications

$$\mathcal{H}^{(p)}[\Lambda^+_{\mathbf{M}}][C] \longrightarrow (\mathcal{H}^{(p)}[\Lambda^+_{\mathbf{M}}][C_U])_{U \in \mathcal{T}_{\rm bp}}$$

  induites par les morphismes quotients $C \twoheadrightarrow C_U$,
- pour la paire (K_0, D_0) : à nouveau les applications identiques

$$\mathcal{H}^{(p)}[\Lambda^+_{\mathbf{M}}] \longrightarrow (\mathcal{H}^{(p)}[\Lambda^+_{\mathbf{M}}])_{U \in \mathcal{T}_{\rm bp}}$$

On munit les anneaux $\mathcal{H}^{(p)}[\Lambda^+_{\mathbf{M}}]$ et $\mathcal{H}^{(p)}[\Lambda^+_{\mathbf{M}}][C_U]$ de la topologie discrète, et l'anneau $\mathcal{H}^{(p)}[\Lambda^+_{\mathbf{M}}][C]$ de la topologie dont un système fondamental de voisinages de zéro est formé des noyaux des morphismes $\mathcal{H}^{(p)}[\Lambda^+_{\mathbf{M}}][C] \twoheadrightarrow \mathcal{H}^{(p)}[\Lambda^+_{\mathbf{M}}][C_U]$.

Ainsi, un module sur $\mathcal{H}^{(p)}[\Lambda_{\mathbf{M}}][C]$ est discret si et seulement si il est discret en tant que module sur le groupe profini C.

6.2. Cohomologie de niveau infini. —

6.2.1. Variété de Shimura de niveau infini. — On notera Sh_{K_*} le système projectif, indexé par $U \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$, formé des variétés de Shimura $\mathrm{Sh}_{U.K_*}$ de niveau $U.K_*$.

Soit $U \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$. L'ensemble des sous-groupes de U appartenant à $\mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$ est un sous-ensemble cofinal de $\mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$.

Si L est un $\mathbb{Z}[U.K_*]$-module, on définit formellement la cohomologie du système projectif Sh_{K_*} à valeurs dans L par

$$\mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{Sh}_{K_*}, L) := \varinjlim_{U' \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}},\, U' \subset U} \mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{Sh}_{U'.K_*}, L)$$

Rappelons que nous notons encore L le système local défini (*cf.* 4.3.2) sur $\mathrm{Sh}_{U'.K_*}$.

Par exactitude du foncteur limite inductive et du fait que tout $U.K_*$-module injectif est aussi un $U'.K_*$-module injectif (pour tout sous-groupe $U' \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$ de U), les $\mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{Sh}_{K_*}, \cdot)$ sont les foncteurs dérivés à droite de $\mathrm{H}^0(\mathrm{Sh}_{K_*}, \cdot)$, de la catégorie des $U.K_*$-modules dans celle des groupes abéliens.

6.2.2. Comparaison avec la cohomologie des groupes. — Nous définissons les groupes de cohomologie

$$\underline{\mathrm{H}}^{\cdot}(K_*, \cdot) := \varinjlim_{U' \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}},\, U' \subset U} \mathrm{H}^{\cdot}(U'.K_*, \cdot)$$

de la catégorie des $U.K_*$-modules dans celle des groupes abéliens.

Par les mêmes arguments qu'au paragraphe précédent, ce sont les foncteurs dérivés à droite de $\underline{\mathrm{H}}^0(K_*, \cdot)$.

Proposition 6.1. — *Soient $U \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$ et L un $\mathbb{Z}[U.K_*]$-module.*

On a un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{Sh}_{K_*}, L) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{H}}^{\cdot}(K_*, \mathcal{F}(L))$$

Démonstration. — C'est l'isomorphisme obtenu par passage à la limite à partir des isomorphismes $\mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{Sh}_{U.K_*}, L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{\cdot}(U.K_*, \mathcal{F}(L))$ de la proposition 4.5. □

6.2.3. Structure de $\mathcal{H}(K_*, D_*)$-module discret. — Soit L un $\mathbb{Z}[(U.D_*)^{-1}]$-module. Les applications $\varphi_{\xi.p}$ de (14) étant bijectives, la proposition B.4 en appendice munit les groupes $\underline{\mathrm{H}}^{\cdot}(K_*, \cdot)$ d'une structure de $\mathcal{H}(K_*, D_*)$-module discret.

Et selon la proposition précédente, il en est de même des groupes $\mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{Sh}_{K_*}, L)$.

Par exemple, si L est un $\mathbb{Z}[(U.D_0)^{-1}]$-module, la remarque de la fin du paragraphe 6.1.3 permet de considérer les groupes $\mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{Sh}_{K_1}, L)$ comme des C-modules discrets et de considérer les groupes de cohomologie continue $\mathrm{H}^{\cdot}(C, \mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{Sh}_{K_1}, L))$.

Les éléments de C sont la généralisation des *opérateurs "diamants"* classiques, ou plutôt de leurs inverses puisque nous les avons traités comme des opérateurs de Hecke, lesquels agissent à droite.

6.2.4. Suite spectrale de changement de niveau. —

Theorem 6.2. — *Soient $U \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$ et L un $\mathbb{Z}[(U.D_0)^{-1}]$-module.*

On a une suite spectrale $\mathcal{H}^{(p)}[\Lambda^+_{\mathbf{M}}]$-équivariante :

$$E_2^{i,j} = \mathrm{H}^i(C, \mathrm{H}^j(\mathrm{Sh}_{K_1}, L)) \Longrightarrow \mathrm{H}^{i+j}(\mathrm{Sh}_{K_0}, L)$$

Démonstration. — D'après la proposition 6.1, il suffit de prouver la suite spectrale correspondante en remplaçant les cohomologies $\mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{Sh}_{K_*}, \cdot)$ par $\underline{\mathrm{H}}^{\cdot}(K_*, \cdot)$.

On se place d'abord en degré zéro.

Selon la proposition 5.6, pour tout sous-groupe $U' \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$ de U, le sous-groupe $U'.\mathbf{P}_{\Omega}(\mathbb{Z}_p)'$ est distingué dans la paire $U'.\mathbf{P}_{\Omega}(\mathbb{Z}_p) \subset U'.D_0$. Comme dans la proposition B.3 en appendice, on en déduit que l'égalité

$$\mathrm{H}^0(C_{U'}, \mathrm{H}^0(U'.K_1, L)) = \mathrm{H}^0(U'.K_0, L)$$

est équivariante sous $\mathcal{H}(U'.K_0, U'.D_0) = \mathcal{H}^{(p)}[\Lambda_{\mathbf{M}}^{+}]$. Par passage à la limite, on obtient l'égalité $\mathcal{H}^{(p)}[\Lambda_{\mathbf{M}}^{+}]$-équivariante

$$\mathrm{H}^0(C, \underline{\mathrm{H}}^0(K_1, L)) = \underline{\mathrm{H}}^0(K_0, L)$$

Pour obtenir la suite spectrale, il suffit maintenant de montrer que le foncteur $\underline{\mathrm{H}}^0(K_1, \cdot)$ transforme un $(U.D_0)^{-1}$-module injectif I en un $\mathcal{H}^{(p)}[C]$-module discret acyclique pour $\mathrm{H}^{\cdot}(C, \cdot)$.

Un tel module I est aussi injectif en tant que $U'.K_0$-module ($U' \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$, $U' \subset U$), donc les isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{C_{U'}}(\cdot, \mathrm{H}^0(U'.K_1, I)) &\simeq \mathrm{Hom}_{C_{U'}}(\cdot, \mathrm{Hom}_{U'.K_0}(\mathbb{Z}[C_{U'}], I)) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{U'.K_0}(\cdot, I) \end{aligned}$$

montrent que $\mathrm{H}^0(U'.K_1, I)$ est un $C_{U'}$-module injectif. D'où

$$\mathrm{H}^{\cdot}(C, \underline{\mathrm{H}}^0(K_1, I)) \simeq \varinjlim_{U' \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}, U' \subset U} \mathrm{H}^{\cdot}(C_{U'}, \mathrm{H}^0(U'.K_1, I)) = 0$$

□

6.3. Quasi-ordinarité. — Dans cette sous-section $\mathcal{O}$ est un anneau local, noethérien et hensélien. On note $\mathcal{H}_{\mathcal{O}}^{(p)} := \mathcal{H}^{(p)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}$.

6.3.1. Construction d'idempotents. — Le lemme d'algèbre commutative suivant permet de construire l'idempotent qui découpe la partie quasi-ordinaire dans la cohomologie de la variété de Shimura.

Lemma 6.3. — *Soient R un anneau local hensélien et* h *une R-algèbre commutative.*

On suppose h *munie d'une topologie linéaire dont un système fondamental de voisinages de* 0 *est formé d'idéaux $I \subset \mathrm{h}$ tels que* h/I *est une algèbre finie sur R.*

Alors l'algèbre séparée complétée $\widehat{\mathrm{h}}$ *de* h *est un produit (éventuellement infini) d'anneaux locaux.*

Remarquons qu'aucune hypothèse n'est faite quant à la compatibilité entre la topologie de h et celle de l'anneau local R.

Démonstration. — Notons $\mathcal{T}$ un système fondamental de voisinages de 0 de h ayant la propriété de l'énoncé et $\mathcal{M}$ l'ensemble des idéaux maximaux de h.

Puisque R est local, toute algèbre finie R' sur R est semi-locale [**11**, V, §2, prop. 1 et prop. 3]. De plus, d'après l'hypothèse hensélienne [**39**, I.1, prop. 3], l'algèbre R' se décompose sous la forme du produit des localisées en ses idéaux maximaux.

Ainsi, pour tout $I \in \mathcal{T}$, l'algèbre h/I se décompose sous la forme $\mathrm{h}/I \xrightarrow{\sim} \prod_{\mathfrak{m}\in\mathcal{M}} \mathrm{h}_{\mathfrak{m}}/I.\mathrm{h}_{\mathfrak{m}}$ où les composantes pour lesquelles $I \not\subset \mathfrak{m}$ sont triviales.

En passant à la limite projective sur $I \in \mathcal{T}$, on obtient

$$\widehat{\mathrm{h}} \xrightarrow{\sim} \prod_{\mathfrak{m}\in\mathcal{M}} \widehat{\mathrm{h}_{\mathfrak{m}}} \qquad \text{avec} \qquad \widehat{\mathrm{h}_{\mathfrak{m}}} := \varprojlim_{I\in\mathcal{T}} \mathrm{h}_{\mathfrak{m}}/I.\mathrm{h}_{\mathfrak{m}} = \varprojlim_{I\in\mathcal{T},\, I\subset\mathfrak{m}} \mathrm{h}_{\mathfrak{m}}/I.\mathrm{h}_{\mathfrak{m}}$$

Si $\mathfrak{m}$ est un idéal ouvert alors l'anneau $\widehat{\mathrm{h}_{\mathfrak{m}}}$ est local car si $x \notin \mathfrak{m}.\widehat{\mathrm{h}_{\mathfrak{m}}}$, son image dans chaque $\mathrm{h}_{\mathfrak{m}}/I.\mathrm{h}_{\mathfrak{m}}$ ($I \subset \mathfrak{m}$) est inversible, donc x est inversible.

Si $\mathfrak{m}$ n'est pas ouvert, alors $\widehat{\mathrm{h}_{\mathfrak{m}}} = 1$. □

Corollary 6.4. — *Sous les mêmes hypothèses que le lemme précédent, à toute partie S de* h *est associé un unique idempotent* $e \in \widehat{\mathrm{h}}$ *tel que, dans la décomposition* $\widehat{\mathrm{h}} = e.\widehat{\mathrm{h}} \oplus (1-e).\widehat{\mathrm{h}}$, *tous les éléments de* $e.S := \{e.s\}_{s \in S}$ *sont inversible dans* $e.\widehat{\mathrm{h}}$ *et il existe au moins un éléments de* $(1-e).S$ *qui est topologiquement nilpotent dans* $(1-e).\widehat{\mathrm{h}}$.

Démonstration. — Grâce au lemme précédent, il suffit de définir e comme étant l'idempotent dont les composantes sont nulles exactement sur les facteurs $\widehat{\mathrm{h}}_{\mathfrak{m}}$ tels que $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de $\widehat{\mathrm{h}}$ rencontrant l'image de S. □

6.3.2. L'idempotent quasi-ordinaire. — On munit la $\mathcal{O}$-algèbre $\mathcal{O}[\Lambda_{\mathbf{M}}^{+}]$ du monoïde $\Lambda_{\mathbf{M}}^{+}$ de la topologie dont un système fondamental de voisinages de 0 est formé de tous les idéaux $I \subset \mathcal{O}[\Lambda_{\mathbf{M}}^{+}]$ tels que $\mathcal{O}[\Lambda_{\mathbf{M}}^{+}]/I$ est une $\mathcal{O}$-algèbre finie. Ce système forme bien une base de filtre car $\mathcal{O}$ est noethérien. Soit $\overline{\mathcal{O}[\Lambda_{\mathbf{M}}^{+}]}$ l'algèbre séparée complétée de $\mathcal{O}[\Lambda_{\mathbf{M}}^{+}]$ pour cette topologie, et $e_{\mathrm{qo}} \in \overline{\mathcal{O}[\Lambda_{\mathbf{M}}^{+}]}$ l'*idempotent quasi-ordinaire* associé, grâce au corollaire 6.4, à la partie $\Lambda_{\mathbf{M}}^{+} \subset \mathcal{O}[\Lambda_{\mathbf{M}}^{+}]$.

La *partie quasi-ordinaire* d'un $\overline{\mathcal{O}[\Lambda_{\mathbf{M}}^{+}]}$-module M est le projeté $e_{\mathrm{qo}}.M$. Selon le corollaire 6.4, M se décompose ainsi en $M = e_{\mathrm{qo}}.M \oplus (1-e_{\mathrm{qo}}).M$ de telle sorte que les éléments de $\Lambda_{\mathbf{M}}^{+}$ agissent par isomorphismes sur $e_{\mathrm{qo}}.M$ alors qu'un élément, au moins, de $\Lambda_{\mathbf{M}}^{+}$ agit par un endomorphisme topologiquement nilpotent sur $(1-e_{\mathrm{qo}}).M$. Si h est un anneau et si M

est muni d'une structure de $(\overline{\mathcal{O}[\Lambda^+_{\mathbf{M}}]}, \mathrm{h})$-bimodule alors la décomposition précédente est une décomposition de h-module.

Puisque $\mathcal{O}$ est noethérien, les $\overline{\mathcal{O}[\Lambda^+_{\mathbf{M}}]}$-modules discrets sont exactement les limites inductives de $\mathcal{O}[\Lambda^+_{\mathbf{M}}]$-modules de type fini sur $\mathcal{O}$.

Par exemple, si $U \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$ et si L est un $\mathcal{O}[(U.D_*)^{-1}]$-module de type fini sur $\mathcal{O}$ alors, selon le corollaire A.3, les groupes de cohomologie

$$\mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{Sh}_{U.K_*}, L) \quad \text{et} \quad \mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{Sh}_{K_*}, L)$$

sont des $\overline{\mathcal{O}[\Lambda^+_{\mathbf{M}}]}$-modules discrets. L'idempotent quasi-ordinaire e_{qo} décompose donc ces $\mathcal{H}(K_*, D_*)$-modules discrets.

6.3.3. Un lemme de Hida. — Nous montrons maintenant le lemme d'indépendance du niveau de la cohomologie **P**-quasi-ordinaire. Il résulte des relations entre opérateurs de Hecke données au lemme 5.7. La méthode est due à Hida dans les cas $\mathbf{G} = \mathbf{GL}(2)$ (*cf.* [**24**, (8.8)]) et $\mathbf{G} = \mathbf{GL}(n)$ (*cf.* [**27**, (4.7b)]).

Lemma 6.5. — *Soit L un $\mathcal{O}[(U.D_0)^{-1}]$-module de type fini sur $\mathcal{O}$.*

Les applications canoniques $\mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{Sh}_{U.K_0}, L) \longrightarrow \mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{Sh}_{K_0}, L)$ induisent, sur les parties quasi-ordinaires, des isomorphismes de $\mathcal{H}^{(p)}_{\mathcal{O}}$-modules.

Démonstration. — D'après la proposition 6.1, il suffit de montrer les isomorphismes $e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^{\cdot}(U.K_0, L) \xrightarrow{\sim} e_{\mathrm{qo}}.\underline{\mathrm{H}}^{\cdot}(K_0, L)$.

Selon le lemme 5.7, pour tout sous-groupe $U' \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$ de U, il existe $\xi \in \sigma(\Lambda_{\mathbf{M}}^{+})$ tel que les triangles du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^{\cdot}(U'.K_0, L) \arrow[r, "U'.K_0.\xi.U'.K_0"] \arrow[dr, "U'.K_0.\xi.U.K_0"] & \mathrm{H}^{\cdot}(U'.K_0, L) \\
\mathrm{H}^{\cdot}(U.K_0, L) \arrow[u, "U.K_0.1.U'.K_0"] \arrow[r, "U.K_0.\xi.U.K_0"'] & \mathrm{H}^{\cdot}(U.K_0, L) \arrow[u, "U.K_0.1.U'.K_0"']
\end{tikzcd}$$

sont commutatifs. Puisque les opérateurs $U.K_0.\xi.U.K_0$ et $U'.K_0.\xi.U'.K_0$ sont des isomorphismes sur les parties quasi-ordinaires, les morphismes de restriction $U.K_0.1.U'.K_0$ induisent, sur les parties quasi-ordinaires, des isomorphismes. On conclut par passage à la limite inductive sur les sous-groupes $U' \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$ de U. □

6.3.4. Suite spectrale quasi-ordinaire. — En corollaire du théorème 6.2 et du lemme précédent, on a la suite spectrale quasi-ordinaire :

Corollary 6.6. — *Soient $U \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$ et L un $\mathcal{O}[(U.D_0)^{-1}]$-module de type fini sur $\mathcal{O}$.*

On a une suite spectrale $\mathcal{H}_{\mathcal{O}}^{(p)}$-équivariante :

$$E_2^{i,j} = \mathrm{H}^i(C, e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^j(\mathrm{Sh}_{K_1}, L)) \Longrightarrow e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^{i+j}(\mathrm{Sh}_{U.K_0}, L)$$

Démonstration. — Puisque la projection quasi-ordinaire est un foncteur exact, il suffit de montrer que la cohomologie du groupe profini C commute à la projection quasi-ordinaire :

$$e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^{\cdot}(C, L) \simeq \mathrm{H}^{\cdot}(C, e_{\mathrm{qo}}.L)$$

pour tout $(\overline{\mathcal{O}[\Lambda_{\mathbf{M}}^{+}]}, C)$-bimodule L (discret pour C). Ce qui est immédiat grâce à la décomposition

$$\mathrm{H}^{\cdot}(C, L) = \mathrm{H}^{\cdot}(C, e_{\mathrm{qo}}.L) \oplus \mathrm{H}^{\cdot}(C, (1 - e_{\mathrm{qo}}).L)$$

puisque, e_{qo} agissant par l'identité sur $e_{\mathrm{qo}}.L$ et par l'application nulle sur $(1 - e_{\mathrm{qo}}).L$, il en est de même sur leurs groupes de cohomologie respectifs. □

6.4. Théorème de contrôle abstrait. — Dans cette sous-section, nous démontrons le théorème de contrôle "abstrait". Pour cela, il faut d'abord établir quelques lemmes.

6.4.1. Version duale du lemme de Nakayama. — Le groupe abélien profini C est produit d'un pro-p-groupe C_p par un groupe fini $C^{(p)}$ d'ordre premier à p.

On note $\mathfrak{p}_C$ l'idéal premier noyau du morphisme d'augmentation

$$\mathbb{Z}_p[[C_p]] \longrightarrow \mathbb{Z}_p$$

et $\mathfrak{m}_C$ l'idéal maximal $\mathfrak{m}_C := \mathfrak{p}_C + p.\mathbb{Z}_p[[C_p]]$.

Lemma 6.7. — *Soient p un nombre premier et Γ un pro-p-groupe commutatif.*

La topologie de $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ coïncide avec la topologie $\mathfrak{m}_C$-adique.

Démonstration. — Par définition,

$$\mathbb{Z}_p[[\Gamma]] = \varprojlim_{n,U} (\mathbb{Z}/p^n.\mathbb{Z})\,[\Gamma/U]$$

où n parcours $\mathbb{N}^*$ et U parcours l'ensemble des sous-groupes ouverts de Γ, il faut montrer que, pour de tels n et U, le noyau de la projection naturelle $(\mathbb{Z}/p^n.\mathbb{Z})\,[\Gamma/U] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p.\mathbb{Z}$ est un idéal nilpotent.

Le noyau du morphisme $(\mathbb{Z}/p^n.\mathbb{Z})\,[\Gamma/U] \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/p.\mathbb{Z})\,[\Gamma/U]$ étant nilpotent, on est ramené au cas $n = 1$.

Et, si p^N est l'ordre du p-groupe Γ/U alors, dans $(\mathbb{Z}/p.\mathbb{Z})[\Gamma/U]$, on a

$$\forall \overline{\gamma} \in \Gamma/U, \quad (\overline{\gamma} - 1)^{p^N} = \overline{\gamma}^{p^N} - 1 = 0$$

Ce qui montre bien que l'idéal d'augmentation de $(\mathbb{Z}/p.\mathbb{Z})[\Gamma/U]$ est nilpotent. □

Lemma 6.8. — *Soient A un anneau commutatif et I un idéal de A.*

Munissant A de la topologie I-adique, si M est un A-module topologique discret et si $M[I] = 0$ alors $M = 0$.

Démonstration. — En appliquant $\mathrm{Hom}_A(\cdot, M)$ à la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow I^n \otimes_A A/I \longrightarrow A/I^{n+1} \longrightarrow A/I^n \longrightarrow 0$$

où $n \in \mathbb{N}$, nous obtenons la suite exacte

$$\mathrm{Hom}_A(I^n, M[I]) \longleftarrow M[I^{n+1}] \longleftarrow M[I^n] \longleftarrow 0$$

Ce qui montre $M[I^{n+1}] = M[I^n]$.

Or selon les hypothèses, $M = \varinjlim_n M[I^n]$ et $M[I] = 0$, donc $M = 0$. □

6.4.2. Cohomologie des C-modules discrets p-primaires. —

Lemma 6.9. — *Soient p un nombre premier et M un C-module discret p-primaire.*

Si $\mathrm{H}^0(C, M) = 0$ alors $\mathrm{H}^0(C^{(p)}, M) = 0$ et $\mathrm{H}^i(C, M) = 0$ pour tout i.

Démonstration. — On pose $N = \mathrm{H}^0(C^{(p)}, M)$.

Si $\mathrm{H}^0(C, M) = 0$ alors, a fortiori, $N[\mathfrak{m}_C] = 0$ et le lemme 6.8 implique $N = 0$.

Puisque M est p-primaire, la suite spectrale de Hochschild-Serre donne immédiatement $\mathrm{H}^{\cdot}(C, M) = \mathrm{H}^{\cdot}(C_p, N) = 0$. □

Lemma 6.10. — *Soient p un nombre premier et M un C_p-module discret p-primaire.*

Si M est de cotype fini sur $\mathbb{Z}_p[[C_p]]$ alors pour tout sous-groupe C' de C_p, les groupes $\mathrm{H}^{\cdot}(C', M)$ sont de cotype fini sur $\mathbb{Z}_p[[C_p/C']]$.

Démonstration. — Puisque $\mathbb{Z}_p[[C_p]]$ est noethérien, les sous-quotients des modules de cotype fini sont aussi de cotype fini. Ainsi, par dévissage du pro-p-groupe C', et grâce à la suite spectrale de Hochschild-Serre, on se ramène aux cas $C' = \mathbb{Z}_p$ ou C' est un p-groupe.

Lorsque C' est fini, le résultat est évident.

Dans le premier cas, C' est de dimension cohomologique 1 et les groupes $\mathrm{H}^0(C', M)$ et $\mathrm{H}^1(C', M)$ sont respectivement (*cf.* [**44**, chap. XIII, §1]) le noyau et le conoyau de l'homothétie de rapport $\gamma - 1$ de M, où γ est un générateur topologique de C'. D'où les finitudes annoncées. □

Lemma 6.11. — *Soient p un nombre premier et M un C-module discret p-primaire.*

Si $\mathrm{H}^0(C, M)$ est fini alors les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^i(C, M)$ sont finis, pour tout i.

Démonstration. — On pose encore $N = \mathrm{H}^0(C^{(p)}, M)$.

Si $\mathrm{H}^0(C, M)$ est fini alors, a fortiori, $N[\mathfrak{m}_C]$ et son dual $N^\vee/(\mathfrak{m}_C.N^\vee)$ sont finis. Le lemme de Nakayama topologique montre que N est un

$\mathbb{Z}_p[[C_p]]$-module de cotype fini. Et selon le lemme 6.10, les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^{\cdot}(C_p, N) = \mathrm{H}^{\cdot}(C, M)$ sont de cotype fini sur $\mathbb{Z}_p$. Pour avoir la finitude de ces groupes de cohomologie, il suffit donc de montrer qu'il sont annulés par une puissance de p.

La finitude de $\mathrm{H}^0(C, M)^\vee = N^\vee/(\mathfrak{p}_C.N^\vee)$ donne aussi

$$\left(N^\vee \otimes_{\mathbb{Z}_p[[C_p]]} \mathbb{Z}_p[[C_p]]_{\mathfrak{p}_C}\right) \otimes_{\mathbb{Z}_p[[C_p]]_{\mathfrak{p}_C}} \mathbb{Q}_p = N^\vee/(\mathfrak{p}_C.N^\vee) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = 0$$

d'où, d'après le lemme de Nakayama, la nullité de $N^\vee \otimes_{\mathbb{Z}_p[[C_p]]} \mathbb{Z}_p[[C_p]]_{\mathfrak{m}_C}$. Ce qui signifie qu'il existe $f \in \mathbb{Z}_p[[C_p]]$ n'appartenant pas à $\mathfrak{p}_C$ qui annule $N^\vee$ (et N). La réduction de f modulo $\mathfrak{p}_C$ annule donc la cohomologie $\mathrm{H}^{\cdot}(C_p, N) = \mathrm{H}^{\cdot}(C, M)$. □

6.4.3. Théorème de contrôle. — Dorénavant, $\mathcal{O}$ est intègre et de caractéristique résiduelle p. Soit $\mathcal{K}$ son corps des fractions.

Si L et M sont deux $\mathcal{O}$-modules, on note parfois $L(M) := L \otimes_{\mathcal{O}} M$.

Theorem 6.12. — *Soient $U \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$ et L un $\mathcal{O}[(U.D_0)^{-1}]$-module, libre de type fini sur $\mathcal{O}$.*

Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall i < q, \quad e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^i(\mathrm{Sh}_{U.K_0}, L(\mathcal{K})) = 0 \quad \textit{et} \quad e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^{i+1}(\mathrm{Sh}_{U.K_0}, L)_{\mathrm{tor}} = 0$$

Alors,

$$\forall i < q, \quad \mathrm{H}^0(C^{(p)}, e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^i(\mathrm{Sh}_{K_1}, L(\mathcal{K}/\mathcal{O}))) = 0$$

$$e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^q(\mathrm{Sh}_{U.K_0}, L(\mathcal{K}/\mathcal{O})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(C, e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^q(\mathrm{Sh}_{K_1}, L(\mathcal{K}/\mathcal{O})))$$

est un isomorphisme de $\mathcal{H}_{\mathcal{O}}^{(p)}$.

Démonstration. — Selon le lemme 4.9, les hypothèses sont équivalentes à la nullité des $e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^i(\mathrm{Sh}_{U.K_0}, L(\mathcal{K}/\mathcal{O}))$, pour $i < q$.

La suite spectrale

$$\mathrm{H}^i(C, e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^j(\mathrm{Sh}_{K_1}, L(\mathcal{K}/\mathcal{O}))) \Longrightarrow e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^{i+j}(\mathrm{Sh}_{U.K_0}, L(\mathcal{K}/\mathcal{O}))$$

du corollaire 6.6 et le lemme 6.9 appliqués à $e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^j(\mathrm{Sh}_{K_1}, L(\mathcal{K}/\mathcal{O}))$ donnent, par récurrence sur $j < q$, les annulations

$$\mathrm{H}^0(C^{(p)}, e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^j(\mathrm{Sh}_{K_1}, L(\mathcal{K}/\mathcal{O}))) = 0$$

$$\mathrm{H}^0(C, e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^j(\mathrm{Sh}_{K_1}, L(\mathcal{K}/\mathcal{O}))) = 0$$

Et la suite spectrale donne finalement l'isomorphisme annoncé. □

Theorem 6.13. — *Soient $U \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$ et L un $\mathcal{O}[(U.D_0)^{-1}]$-module, libre de type fini sur $\mathcal{O}$.*

Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall i < q, \quad e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^i(\mathrm{Sh}_{U.K_0}, L(\mathcal{K})) = 0$$

Alors,

$$\forall i < q, \quad \mathrm{H}^0(C^{(p)}, e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^i(\mathrm{Sh}_{K_1}, L(\mathcal{K}/\mathcal{O}))) \text{ est fini, et}$$

$$e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^q(\mathrm{Sh}_{U.K_0}, L(\mathcal{K}/\mathcal{O})) \longrightarrow \mathrm{H}^0(C, e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^q(\mathrm{Sh}_{K_1}, L(\mathcal{K}/\mathcal{O})))$$

est un morphisme de $\mathcal{H}_{\mathcal{O}}^{(p)}$-modules, à noyau et conoyau finis.

Démonstration. — Selon le lemme 4.9 encore, les hypothèses sont équivalentes à la finitude des $e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^i(\mathrm{Sh}_{U.K_0}, L(\mathcal{K}/\mathcal{O}))$, pour $i < q$.

La suite spectrale du corollaire 6.6 et le lemme 6.11 appliqués à

$$e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^j(\mathrm{Sh}_{K_1}, L(\mathcal{K}/\mathcal{O}))$$

montrent, par récurrence sur $j < q$, la finitude de

$$\mathrm{H}^0(C, e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^j(\mathrm{Sh}_{K_1}, L(\mathcal{K}/\mathcal{O})))$$

La suite spectrale donne donc le morphisme à noyau et conoyau finis annoncé. $\square$

7. Algèbre de Hecke p-adique universelle

Nous supposons pour l'instant que le groupe $\mathbf{G}$ satisfait à l'hypothèse de Harish-Chandra (*cf.* paragraphe 7.3.1).

Cette dernière section est consacrée à l'algèbre de Hecke $\mathbf{P}$-quasi-ordinaire universelle $\mathbf{h}_{\mathrm{qo}}$. Cette algèbre dépend d'une représentation algébrique irréductible du groupe $\mathbf{G}$. C'est l'algèbre engendrée par les opérateurs diamants et les opérateurs de Hecke hors de p agissant sur la cohomologie intérieure $\mathbf{P}$-quasi-ordinaire, de degré médian et de niveau infini de type $\Gamma_1(p^\infty)$, à valeurs dans un module p-adique construit à partir de la représentation fixée.

Un résultat d'annulation de la cohomologie en bas degré dû à Saper [**40**] permet de déduire du théorème 6.13 de contrôle faible la finitude de $\mathbf{h}_{\mathrm{qo}}$ sur l'algèbre de Hida-Iwasawa Λ (prop. 7.8).

Sous une condition d'absence de p-torsion dans la cohomologie, nous déduisons aussi du théorème 6.12 de contrôle fort que la Λ-algèbre $\mathbf{h}_{\mathrm{qo}}$ est sans torsion (cor. 7.11).

Un ingrédient commun à ces deux résultats est l'indépendance du poids (voir le cor. 7.2).

En application, le dernier paragraphe est consacré à la construction de familles de systèmes de valeurs propres $\mathbf{P}$-quasi-ordinaires.

Ces résultats ont été montrés par Hida pour $\mathbf{G} = \mathbf{GL}(n)$ dans [**28**] et par Tilouine et Urban pour $\mathbf{G} = \mathbf{GSp}(4)$ dans [**50**].

Nous reprenons maintenant les notations et hypothèses de la section précédente. Nous fixons aussi l'anneau d'entiers $\mathcal{O}$ d'une sous-extension finie $\mathcal{K}$ d'une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}_p}$ de $\mathbb{Q}_p$

– contenant les racines n-ièmes de l'unité, n étant l'exposant (*i.e.* le plus petit commun multiple des ordres des éléments) de $C^{(p)}$;
– et qui déploie $\mathbf{G}_{\mathbb{Q}_p}$.

La première hypothèse servira pour établir la finitude de l'algèbre de Hecke quasi-ordinaire universelle sur l'algèbre de Hida-Iwasawa.

7.1. Coefficients. —

7.1.1. Induction algébrique. — Nous renvoyons au livre de Jantzen [**29**] pour les résultats concernant les représentations algébriques.

Soit $\rho : \mathbf{M}_\Omega \longrightarrow \mathbf{GL}(V(\mathcal{O}))$ une représentation $\mathcal{O}$-algébrique de $\mathbf{M}_\Omega$ sur un $\mathcal{O}$-module libre de rang fini $V(\mathcal{O})$. On l'identifie à la représentation de $\mathbf{P}_\Omega$, triviale sur $\mathbf{U}_\Omega$, obtenue par composition avec la projection naturelle $\mathbf{P}_\Omega \twoheadrightarrow \mathbf{P}_\Omega/\mathbf{U}_\Omega \simeq \mathbf{M}_\Omega$.

Soit $L(\rho, \mathcal{K}) := \mathrm{ind}_{\mathbf{P}_\mathcal{K}}^{\mathbf{G}_\mathcal{K}} \rho$ le module de la représentation $\mathcal{K}$-algébrique de $\mathbf{G}$ induite [**29**, I.3.3] à partir de ρ. En notant $\mathcal{K}(\mathbf{G})$ la $\mathcal{K}$-algèbre des fonctions $\mathcal{K}$-algébriques sur $\mathbf{G}_\mathcal{K}$, $L(\rho, \mathcal{K})$ est le $\mathcal{K}$-espace vectoriel formé des fonctions $f \in \mathcal{K}(\mathbf{G}) \otimes_\mathcal{O} V(\mathcal{O})$ telles que

$$\forall (g, t, n) \in \mathbf{G}(\mathcal{K}) \times \mathbf{M}(\mathcal{K}) \times \mathbf{U}(\mathcal{K}),\ f(g.t.n) = \rho(t)^{-1}.f(g)$$

muni de l'action algébrique donnée par $(g.f)(h) = f(g^{-1}.h)$ quels que soient $f \in L(\rho, \mathcal{K})$ et $g, h \in \mathbf{G}(\mathcal{K})$.

On suppose que ρ, en tant que représentation $\mathcal{K}$-algébrique de $\mathbf{M}$*, est irréductible et que le module induit $L(\rho, \mathcal{K})$ est non nul.*

D'après [**19**, II.2.3.1], une représentation algébrique irréductible sur un corps est toujours de dimension finie. De plus, les représentations algébriques d'un groupe réductif sur un corps de caractéristique nulle sont semi-simples (*cf.* [**29**, II.5.6]).

Puisque $\mathbf{G}_{\mathcal{K}}$ est déployé, il existe un tore maximal $\mathbf{T}$ de $\mathbf{Z}$ défini et déployé sur $\mathcal{K}$. C'est aussi un tore maximal de $\mathbf{G}$, contenu dans $\mathbf{M}$. On choisit un sous-groupe de Borel $\mathbf{B}^-$ de $\mathbf{G}$ défini sur $\mathcal{K}$, contenu dans $\mathbf{P}^-$ et contenant $\mathbf{T}$.

Selon [**29**, II.2.1-7], la représentation ρ étant irréductible, elle possède un plus grand poids $\chi_\rho \in \mathrm{X}^*(\mathbf{T})$ dominant pour l'ordre défini par le sous-groupe de Borel $\mathbf{B}^- \cap \mathbf{M}$ de $\mathbf{M}$. L'induite $L(\rho, \mathcal{K})$ est non nulle si et seulement si ce caractère est même dominant pour l'ordre défini par $\mathbf{B}^-$. Dans ce cas, $L(\rho, \mathcal{K})$ est aussi irréductible et χ_ρ est aussi son plus grand poids.

7.1.2. Construction d'un réseau. — Soit $U \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$. Nous allons maintenant plonger $L(\rho, \mathcal{K})$ dans un ensemble de fonctions continues sur un espace p-adique Y_U et définir un réseau. Considérons le sous-espace p-adique

$$Y_U := U.\mathbf{M}_\Omega(\mathbb{Z}_p).\mathbf{U}(\mathbb{Q}_p)/\mathbf{U}(\mathbb{Q}_p) \subset \mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)/\mathbf{U}(\mathbb{Q}_p)$$

L'espace U étant un ouvert p-adique de $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)$, il est Zariski-dense dans $\mathbf{G}(\mathcal{K})$. D'où l'injection de la première ligne dans le carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
L(\rho, \mathcal{K}) \arrow[r, hook] & \mathcal{C}(Y_U, V(\mathcal{K})) \\
L_U(\rho, \mathcal{O}) \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & \mathcal{C}(Y_U, V(\mathcal{O})) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

définissant le réseau $L_U(\rho, \mathcal{O}) \subset L(\rho, \mathcal{K})$. Le $\mathcal{O}$-module conoyau de la seconde ligne est sans torsion (donc plat) car il s'injecte dans le $\mathcal{K}$-espace vectoriel conoyau de la première ligne.

Pour tout $\mathcal{O}$-module M, on note $V(M) := V \otimes_{\mathcal{O}} M$ et

$$L_U(\rho, M) := L_U(\rho, \mathcal{O}) \otimes_{\mathcal{O}} M \hookrightarrow \mathcal{C}(Y_U, V(\mathcal{O})) \otimes_{\mathcal{O}} M$$

Ainsi on a

$$L_U(\rho, \mathcal{K}) = L(\rho, \mathcal{K})$$

$$L_U(\rho, \mathcal{K}/\mathcal{O}) = L(\rho, \mathcal{K})/L_U(\rho, \mathcal{O}) = \varinjlim_r L_U(\rho, p^{-r}\mathcal{O}/\mathcal{O})$$

7.1.3. Action par conjugaison. — Pour $U \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$, nous décrivons maintenant une première action de $\mathbf{RM}(\mathbb{Q}_p)^+$ sur Y_U. L'action $(\xi, g) \longmapsto {}^{\xi}g$ de $\mathbf{M}(\mathbb{Q}_p)$ par conjugaison sur $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)$ passe au quotient $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)/\mathbf{U}(\mathbb{Q}_p)$. La décomposition (8) et la propriété (9) montrent que le sous-ensemble

$$Y_U = (U \cap \mathbf{U}_\Omega^-(\mathbb{Z}_p)).\mathbf{M}_\Omega(\mathbb{Z}_p).\mathbf{U}(\mathbb{Q}_p)/\mathbf{U}(\mathbb{Q}_p) \subset \mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)/\mathbf{U}(\mathbb{Q}_p)$$

est stable par le sous-monoïde $\mathbf{RM}(\mathbb{Q}_p)^+$ de $\mathbf{M}(\mathbb{Q}_p)$.

Remarquons que, pour $\xi \in \mathbf{RM}(\mathbb{Q}_p) \cap \mathbf{M}_\Omega(\mathbb{Z}_p)$, l'action ainsi définie ne coïncide pas avec l'action de $U.\mathbf{P}_\Omega(\mathbb{Z}_p)$ par multiplication à gauche sur Y_U. Afin d'étendre l'action de $U.\mathbf{P}_\Omega(\mathbb{Z}_p)$ sur Y_U en une action du monoïde $U.D_{0,p}$ nous devons faire un choix et tordre cette action.

7.1.4. Modification de l'action. — Soit

$$\delta : \quad U.D_{0,p} \twoheadrightarrow U.\mathbf{P}_\Omega(\mathbb{Z}_p)\backslash U.D_{0,p}/U.\mathbf{P}_\Omega(\mathbb{Z}_p) \xleftarrow{\sim} \sigma(\Lambda_{\mathbf{M}}^+)$$

le morphisme de monoïdes défini par $\delta(u.\xi.p) = \sigma(t)$ où $u \in U$, $\xi \in \sigma(\Lambda_{\mathbf{M}}^+)$ et $p \in \mathbf{P}_\Omega(\mathbb{Z}_p)$. C'est une rétraction de l'inclusion $\sigma(\Lambda_{\mathbf{M}}^+) \subset U.D_{0,p}$. On étend l'action par multiplication à gauche de $U.\mathbf{P}_\Omega(\mathbb{Z}_p)$ sur $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)$ en une action, notée $*$, de $U.D_{0,p}$ par $\xi * g := \xi.g.\delta(\xi)^{-1}$. Cette action passe au quotient $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)/\mathbf{U}(\mathbb{Q}_p)$ et, d'après le paragraphe précédent, elle stabilise Y_U.

7.1.5. Action sur les espaces de fonctions. — Ainsi, pour tout $\mathcal{O}$-module M, l'espace de fonctions $\mathcal{C}(Y_U, M)$ est un $\mathbb{Z}[(U.D_{0,p})^{-1}]$-module :

$$(\xi^{-1} * f)(g.\mathbf{U}(\mathbb{Q}_p)) := f(\xi * g.\mathbf{U}(\mathbb{Q}_p)) = f(\xi.g.\delta(\xi)^{-1}.\mathbf{U}(\mathbb{Q}_p)) \qquad (17)$$

quels que soient $f \in \mathcal{C}(Y_U, M)$, $\xi \in U.D_{0,p}$ et $g.\mathbf{U}(\mathbb{Q}_p) \in Y_U$.

De plus $L_U(\rho, M) \subset \mathcal{C}(Y_U, M)$ est un sous-$\mathbb{Z}[(U.D_{0,p})^{-1}]$-module car $\sigma(\Lambda^+_{\mathbf{M}})$ est central dans $\mathbf{M}(\mathbb{Q}_p)$.

On remarque que si $f \in L(\rho, \mathcal{K})$, on a $\xi^{-1} * f = (\omega_\rho \circ \delta)(\xi).(\xi^{-1}.f)$, où $\omega_\rho \in \mathrm{X}^*(\mathbf{RM})$ est le caractère central de ρ.

7.1.6. Décomposition selon l'action de **RM**. — Puisque **G** est déployé sur $\mathcal{K}$, le radical **RM** de **M** est un tore $\mathcal{K}$-déployé, si bien que la représentation algébrique induite $L(\rho, \mathcal{K})$, se décompose, en tant que représentation algébrique de **M**, sous la forme d'une somme directe

$$L(\rho, \mathcal{K}) = \bigoplus_{\chi \in \mathrm{X}^*(\mathbf{RM})} L(\rho, \mathcal{K})[\omega_\rho.\chi]$$

où **RM** agit sur la composante $L(\rho, \mathcal{K})[\omega_\rho.\chi]$ par le caractère $\omega_\rho.\chi$.

Soit $\mathrm{X}^*(\mathbf{RM})^-$ le sous-monoïde des caractères de **RM** qui sont combinaison linéaire des caractères intervenant dans la représentation adjointe de **RM** sur l'algèbre de Lie de $\mathbf{U}^-$.

Puisque le plus grand poids χ_ρ, pour l'ordre défini par $\mathbf{B}^-$, de $L(\rho, \mathcal{K})$ coïncide sur **RM** avec le caractère central ω_ρ de ρ, seules les composantes correspondant aux caractères $\chi \in \mathrm{X}^*(\mathbf{RM})^-$ peuvent être non nulles.

Selon la formule (17), on a $t^{-1} * f = \chi(t)^{-1}.f$ pour tout $t \in \sigma(\Lambda^+_{\mathbf{M}})$ et tout $f \in L(\rho, \mathcal{K})[\omega_\rho.\chi]$. De plus, pour tout caractère $\chi \in \mathrm{X}^*(\mathbf{RM})^-$ non trivial, par définition de $\mathbf{RM}(\mathbb{Q}_p)^+$ (*cf.* l'égalité (6)), on a $\omega(\chi(t)) > 0$, ω étant la valuation de $\mathcal{K}$.

7.2. Indépendance du poids. — *On fait agir les monoïdes $U'.D_0$ ($U' \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$) à travers la projection $U'.D_0 \twoheadrightarrow U'.D_{0,p}$ sur la composante p-adique.*

7.2.1. Caractères $\mathcal{O}$-arithmétiques. — Un *caractère $\mathcal{O}$-arithmétique* de $\mathbf{M}_\Omega$ est un caractère p-adique continu $\mathbf{M}_\Omega(\mathbb{Z}_p) \longrightarrow \mathcal{O}^\times$ qui coïncide, sur un voisinage de l'unité, avec un caractère $\mathcal{O}$-algébrique de $\mathbf{M}_\Omega$. Un tel caractère s'écrit de manière unique comme le produit $\epsilon.\chi$

– d'un caractère $\mathcal{O}$-algébrique χ de $\mathbf{M}_\Omega$

– et d'un caractère fini continu $\epsilon : \mathbf{M}_\Omega(\mathbb{Z}_p) \longrightarrow \mathcal{O}^\times$.

On note $\mathcal{O}(\epsilon.\chi)$ la $\mathcal{O}[[C]]$-algèbre dont la $\mathcal{O}$-algèbre sous-jacente est $\mathcal{O}$, munie du morphisme structural $\mathcal{O}[[C]] \twoheadrightarrow \mathcal{O}$ induit par le caractère $(\epsilon.\chi)^{-1}$. Soit $\mathfrak{p}_{\epsilon.\chi}$ l'idéal premier noyau de ce morphisme.

Pour tout $\mathcal{O}[[C]]$-module (*resp.* toute $\mathcal{O}[[C]]$-algèbre) M, on notera $M(\epsilon.\chi)$ le $\mathcal{O}[[C]]$-module (*resp.* $\mathcal{O}[[C]]$-algèbre) tordu par χ :

$$M(\epsilon.\chi) := M \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(\epsilon.\chi)$$

On notera aussi, pour un $\mathcal{O}[[C]]$-module M :

$$M[\epsilon.\chi] := \mathrm{H}^0(C, M(\epsilon.\chi)) = \{m \in M \ / \ \forall c \in C,\ c.m = (\epsilon.\chi)(c).m\}$$

On dit que le caractère $\epsilon.\chi$ est *dominant par rapport à* ρ si et seulement si le module $L(\rho \otimes \chi, \mathcal{K})$ est non nul, c'est-à-dire si le caractère $\chi.\chi_\rho$ de $\mathbf{T}$ est dominant pour l'ordre défini par $\mathbf{B}^-$.

7.2.2. Torsion des coefficients par un caractère fini. — On note $\mathcal{T}_{\mathrm{bp}}(\epsilon)$ l'ensemble des sous-groupes $U' \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$ tels que le caractère continu fini ϵ se factorise à travers $C_{U'}$, *i.e.* $U' \cap \mathbf{M}_\Omega(\mathbb{Z}_p) \subset \ker \epsilon$.

Pour un tel U', ϵ peut être étendu de manière unique en un caractère (encore noté ϵ) de $U'.D_{0,p}$ par la formule $\epsilon(u.t.m.n) = \epsilon(m)$, quels que soient $u \in U'$, $t \in \sigma(\Lambda^+_{\mathbf{M}})$, $m \in \mathbf{M}_\Omega(\mathbb{Z}_p)$ et $n \in \mathbf{U}_\Omega(\mathbb{Z}_p)$. Ce caractère est trivial sur $U'.D_{1,p}$.

Si $U \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$ contient U', $L_U(\rho \otimes \epsilon.\chi, \cdot)$ désigne le $\mathbb{Z}[(U'.D_{0,p})^{-1}]$-module obtenu à partir de $L_U(\rho \otimes \chi, \cdot)$ en tordant l'action de $(U'.D_{0,p})$ par le caractère ϵ de la manière définie au paragraphe 4.3.6.

7.2.3. Torsion des coefficients par un caractère $\mathcal{O}$-algébrique. — Pour tout $r \geq 0$, soit $\mathcal{T}_{\mathrm{bp}}(r)$ l'ensemble des sous-groupes $U' \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$ tels que $U' \cap \mathbf{M}_\Omega(\mathbb{Z}_p)$ est contenu dans le sous-groupe de congruence principal noyau du morphisme de réduction $\mathbf{M}_\Omega(\mathbb{Z}_p) \twoheadrightarrow \mathbf{M}_\Omega(\mathbb{Z}/p^r.\mathbb{Z})$.

Pour un tel sous-groupe U', toute action de $\mathbf{M}_\Omega(\mathbb{Z}/p^r.\mathbb{Z})$ peut s'étendre en une action du monoïde $(U'.D_{0,p})^{-1}$ au moyen de l'application

$$\begin{aligned} U'.D_{0,p} &\longrightarrow \mathbf{M}_\Omega(\mathbb{Z}/p^r.\mathbb{Z}) \\ u.t.m.n &\longmapsto m \mod p^r \end{aligned}$$

quels que soient $u \in U'$, $t \in \sigma(\Lambda^+_{\mathbf{M}})$, $m \in \mathbf{M}_\Omega(\mathbb{Z}_p)$ et $n \in \mathbf{U}_\Omega(\mathbb{Z}_p)$.

On étend ainsi l'action ρ de $\mathbf{M}_\Omega(\mathbb{Z}/p^r.\mathbb{Z})$ sur $V(p^{-r}.\mathcal{O}/\mathcal{O})$ en une action du monoïde $(U'.D_{0,p})^{-1}$.

De plus, on note $V(p^{-r}.\mathcal{O}/\mathcal{O})(\chi)$ le même module muni de l'action tordue de $(U'.D_{0,p})^{-1}$ définie par $(u.t.m.n)^{-1} \longmapsto (\rho \otimes \chi)(m)^{-1} \mod p^r$.

Proposition 7.1. — *Soit χ un caractère $\mathcal{O}$-algébrique ρ-dominant de $\mathbf{M}_\Omega$.*

Pour tout $U \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$, on a un isomorphisme naturel de $\mathcal{H}^{(p)}[[C]]$-modules

$$e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^{\cdot}_*(\mathrm{Sh}_{K_1}, L_U(\rho \otimes \chi, \mathcal{K}/\mathcal{O})) \simeq \varinjlim_{r,U'} e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^{\cdot}_*(\mathrm{Sh}_{U'.K_1}, V(p^{-r}.\mathcal{O}/\mathcal{O}))(\chi)$$

où la limite inductive porte sur $r \geq 0$ et sur les sous-groupes $U' \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}(r)$ de U et $\mathrm{H}^{\cdot}_{*}$ désigne la cohomologie totale, du bord, à support compact ou bien intérieure de Sh.

Démonstration. — L'application canonique de l'induite

$$L(\rho, \mathcal{K}) \twoheadrightarrow V(\mathcal{K})$$

induit le morphisme d'évaluation au point $1.\mathbf{U}(\mathbb{Q}_p) \in Y_U$:

$$L_U(\rho \otimes \chi, \mathcal{K}/\mathcal{O}) \subset \mathcal{C}(Y_U, V(\mathcal{K}/\mathcal{O})) \longrightarrow V(\mathcal{K}/\mathcal{O})$$

Pour tout sous-groupe $U' \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$ de U, l'action de $U.D_{0,p}$ sur Y_U passe au quotient

$$Y_{U/U'} := U.\mathbf{P}_{\Omega}(\mathbb{Z}_p)/U'.\mathbf{U}_{\Omega}(\mathbb{Z}_p) = U' \backslash U.\mathbf{M}_{\Omega}(\mathbb{Z}_p).\mathbf{U}(\mathbb{Q}_p)/\mathbf{U}(\mathbb{Q}_p)$$

Ainsi le sous-espace des fonctions qui passent au quotient :

$$L_{U/U'}(\rho \otimes \chi, \cdot) := L_U(\rho \otimes \chi, \cdot) \cap \mathcal{C}(Y_{U/U'}, \cdot)$$

est stable sous $(U.D_0)^{-1}$. Puisque

$$U.\mathbf{P}_{\Omega}(\mathbb{Z}_p) = \varprojlim_{U' \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}},\, U' \subset U} U.\mathbf{P}_{\Omega}(\mathbb{Z}_p)/U'$$

est profini et $\mathcal{K}/\mathcal{O}$ est discret, le morphisme d'évaluation précédent est la limite inductive (indexée par $r \geq 0$ et $U' \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}(r)$, $U' \subset U$) des morphismes d'évaluation en $1.U'.\mathbf{U}_{\Omega}(\mathbb{Z}_p) \in Y_{U/U'}$ suivants :

$$L_{U/U'}(\rho \otimes \chi, p^{-r}.\mathcal{O}/\mathcal{O}) \twoheadrightarrow V(p^{-r}.\mathcal{O}/\mathcal{O})(\chi)$$

On remarque que ces morphismes sont $(U'.D_0)^{-1}$-équivariants.

Pour $U' \subset U$ fixés, selon le lemme 5.7, il existe $t \in \sigma(\Lambda^+_{\mathbf{M}})$ tel que $t * Y_{U/U'} = U'.\mathbf{P}_\Omega(\mathbb{Z}_p)/(U'.\mathbf{U}_\Omega(\mathbb{Z}_p))$. Le noyau du morphisme d'évaluation précédent est donc annulé par ce t. D'où l'isomorphisme

$$\begin{aligned} & e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^{\cdot}_*(\mathrm{Sh}_{U'.K_1}, L_{U/U'}(\rho \otimes \chi, p^{-r}.\mathcal{O}/\mathcal{O})) \\ \simeq \quad & e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^{\cdot}_*(\mathrm{Sh}_{U'.K_1}, V(p^{-r}.\mathcal{O}/\mathcal{O})(\chi)) \end{aligned}$$

En passant à la limite inductive, et en utilisant le lemme 4.8, on obtient l'isomorphisme

$$e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^{\cdot}_*(\mathrm{Sh}_{K_1}, L_U(\rho \otimes \chi, \mathcal{K}/\mathcal{O})) \simeq \varinjlim_{r,U'} e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^{\cdot}_*(\mathrm{Sh}_{U'.K_1}, V(p^{-r}.\mathcal{O}/\mathcal{O}))(\chi)$$

où la limite inductive porte sur les $r \geq 0$ et les sous-groupes $U' \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}(r)$ de U. En effet, dans le membre de droite, on a pu intervertir le passage aux parties quasi-ordinaires et la torsion par χ car le caractère de $U'.D_{0,p}$, étendu à partir de χ, par lequel on tord, est trivial sur $\sigma(\Lambda^+_{\mathbf{M}})$. □

On note $\mathrm{h}^{\cdot}_{*,U,\mathrm{qo}}(K_1, \rho \otimes \epsilon.\chi)$ la sous-$\mathcal{O}[[C]]$-algèbre engendrée par l'image de l'anneau de Hecke abstrait $\mathcal{H}^{(p)}$ dans l'algèbre des endomorphismes du $\mathcal{O}[[C]]$-module $e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^{\cdot}_*(\mathrm{Sh}_{K_1}, L_U(\rho \otimes \epsilon.\chi, \mathcal{K}/\mathcal{O}))$.

Corollary 7.2. — *Soit $\epsilon.\chi$ un caractère $\mathcal{O}$-arithmétique ρ-dominant de $\mathbf{M}_\Omega$.*

Pour tout $U \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}(\epsilon)$, on a un isomorphisme de $\mathcal{H}^{(p)}[[C]]$-modules

$$e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^{\cdot}_*(\mathrm{Sh}_{K_1}, L_U(\rho \otimes \epsilon.\chi, \mathcal{K}/\mathcal{O})) \simeq e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^{\cdot}_*(\mathrm{Sh}_{K_1}, L_U(\rho, \mathcal{K}/\mathcal{O}))(\epsilon.\chi)$$

Ce qui induit un isomorphisme de $\mathcal{O}[[C]]$-algèbres :

$$\mathrm{h}^{\cdot}_{*,U,\mathrm{qo}}(K_1, \rho \otimes \epsilon.\chi) \simeq \mathrm{h}^{\cdot}_{*,U,\mathrm{qo}}(K_1, \rho)(\epsilon.\chi)$$

Démonstration. — Par définition du module $L_U(\rho\otimes\epsilon.\chi)$ et d'après le lemme 4.8,on a

$$e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^{\cdot}_{*}(\mathrm{Sh}_{K_1}, L_U(\rho\otimes\epsilon.\chi,\mathcal{K}/\mathcal{O}))\simeq e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^{\cdot}_{*}(\mathrm{Sh}_{K_1}, L_U(\rho\otimes\chi,\mathcal{K}/\mathcal{O}))(\epsilon)$$

Ce corollaire est donc une conséquence immédiate de la proposition précédente. □

7.3. Résultats d'annulation de la cohomologie. — On suppose dorénavant que $\mathcal{K}$ est le complété, en une place au-dessus de p, d'un corps de nombre $\mathcal{K}_0$ qui déploie $\mathbf{G}$.

Nous notons d la dimension (réelle) médiane de la variété de Shimura Sh.

7.3.1. Finitude. — Pour pouvoir appliquer le théorème de contrôle "faible" 6.13, on utilise ici un résultat d'annulation de la cohomologie, dû à L. Saper :

Théorème (Saper** [**40**]**). — *Soit* $\mathbf{G}$ *un groupe réductif connexe défini sur* $\mathbb{Q}$*, satisfaisant à l'hypothèse de Harish-Chandra et* $V_\lambda(\mathbb{C})$ *une représentation complexe irréductible, de dimension finie et de plus haut poids régulier.*

Pour tout sous-groupe ouvert compact $U\subset\mathbf{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$*, on a*

$$\forall i<d,\qquad \mathrm{H}^i(\mathrm{Sh}_U, V_\lambda(\mathbb{C}))=0$$

où d *est la moitié de la dimension (réelle) du domaine symétrique de* $\mathbf{G}$*.*

Rappelons que l'*hypothèse de Harish-Chandra* est que le rang (absolu) du sous-groupe compact maximal de $\mathbf{G}^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})$ coïncide avec le rang semi-simple (absolu) de $\mathbf{G}$.

Cette hypothèse est vérifiée pour les groupes admettant une donnée de Shimura h. En effet, selon (SV2) le centralisateur de $h(i)$ dans $\mathbf{G}^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal et un tore maximal de ce sous-groupe contient nécessairement l'image de h, donc est encore un tore maximal de $\mathbf{G}^{\mathrm{ad}}_{\mathbb{R}}$.

Puisque la différence entre la dimension et le rang (absolu) d'un groupe réductif est toujours paire (cela se voit sur la grosse cellule), l'hypothèse de Harish-Chandra implique que la dimension (réelle) $2.d$ du domaine hermitien symétrique est paire.

Theorem 7.3. — *Soient ρ une représentation $\mathcal{K}$-algébrique irréductible de $\mathbf{M}$ de plus haut poids régulier et $U \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$.*

Pour tout caractère $\mathcal{O}$-arithmétique ρ-dominant $\epsilon.\chi$ de $\mathbf{M}_\Omega$ pour lequel $U \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}(\epsilon)$, le morphisme

$$e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^d(\mathrm{Sh}_{U.K_0}, L_U(\rho \otimes \epsilon.\chi, \mathcal{K}/\mathcal{O})) \longrightarrow e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^d(\mathrm{Sh}_{K_1}, L(\mathcal{K}/\mathcal{O}))[\epsilon.\chi]$$

est à noyau et conoyau finis.

Démonstration. — On fixe un plongement complexe $\mathcal{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$.

Puisque

$$\mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{Sh}_{U.K_0}, L(\rho \otimes \chi, \mathbb{C})) = \mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{Sh}_{U.K_0}, L(\rho \otimes \chi, \mathcal{K})) \otimes_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$$

le théorème précédent montre que

$$\forall i < d, \quad \mathrm{H}^i(\mathrm{Sh}_{U.K_0}, L(\rho \otimes \chi, \mathcal{K})) = 0$$

De plus, d'après le corollaire 4.7 et le lemme 4.8, on a

$$\mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{Sh}_{U.K_0}, L(\rho \otimes \epsilon.\chi, \mathcal{K})) = \mathrm{H}^0(C_U, \mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{Sh}_{U.K_1}, L(\rho \otimes \chi, \mathcal{K}))(\epsilon))$$

Cela donne les annulations nécessaires pour appliquer le théorème 6.13. □

Lorsque $\mathbf{G}$ ne vérifie pas l'hypothèse de Harish-Chandra, Saper [**40**] montre la nullité de la cohomologie, en poids régulier, pour les degrés en dehors d'un intervalle $[d_1, d_2]$. Il est encore possible dans ce cas, d'obtenir le contrôle "faible" pour le degré d_1 correspondant. Cependant, l'hypothèse de Harish-Chandra se révèlera indispensable à partir du paragraphe 7.4.5, où le fait de se trouver en degré médian sera crucial pour utiliser la dualité de Poincaré.

7.3.2. Niveau premier à p. — Soit $L(\rho, \mathcal{O}) := \mathrm{ind}_{\mathbf{P}_\Omega}^{\mathbf{G}_\Omega} \rho$ le module de la représentation $\mathcal{O}$-algébrique de $\mathbf{G}_\Omega$ induite à partir de ρ. En notant $\mathcal{O}(\mathbf{G}_\Omega)$ la $\mathcal{O}$-algèbre des fonctions $\mathcal{O}$-algébriques sur $\mathbf{G}_\Omega$, $L(\rho, \mathcal{O})$ est le $\mathcal{O}$-module formé des fonctions $f \in \mathcal{O}(\mathbf{G}_\Omega) \otimes_{\mathcal{O}} V(\mathcal{O})$ telles que

$$\forall (g, t, n) \in \mathbf{G}_\Omega(\mathcal{O}) \times \mathbf{M}_\Omega(\mathcal{O}) \times \mathbf{U}_\Omega(\mathcal{O}),\ f(g.t.n) = \rho(t)^{-1}.f(g)$$

muni de l'action algébrique donnée par $(g.f)(h) = f(g^{-1}.h)$ quels que soient $f \in L(\rho, \mathcal{O})$ et $g, h \in \mathbf{G}_\Omega(\mathcal{O})$.

Selon la décomposition de Cartan [**13**, I.4.4.3], le sous-ensemble

$$D_p := \mathbf{G}_\Omega(\mathbb{Z}_p).\sigma(\Lambda_{\mathbf{M}}^+).\mathbf{G}_\Omega(\mathbb{Z}_p) \quad \subset \quad \mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)$$

est un sous-monoïde et l'application canonique

$$\sigma(\Lambda_{\mathbf{M}}^+) \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}_\Omega(\mathbb{Z}_p) \backslash D_p / \mathbf{G}_\Omega(\mathbb{Z}_p)$$

est bijective. L'application réciproque, qui prolonge δ, est encore notée δ.

On étend l'action de $\mathbf{G}_\Omega(\mathbb{Z}_p)$ sur le module induit $L(\rho,\mathcal{O})$ pour en faire une action $*$ du sous-monoïde $(D_p)^{-1}$: $\xi^{-1} * f := (\omega_\rho \circ \delta)(\xi).(\xi^{-1}.f)$ pour tout $\xi \in D_p$ et tout $f \in L(\rho,\mathcal{O})$.

Il faut montrer que l'action ainsi définie stabilise le réseau $L(\rho,\mathcal{O})$. Puisque $\mathbf{RM}_\mathcal{O}$ est un tore déployé, la représentation algébrique $L(\rho,\mathcal{O})$ se décompose (*cf.* [**29**, II.2.2.5]) aussi sous la forme

$$L(\rho,\mathcal{O}) = \bigoplus_{\chi \in \mathrm{X}^*(\mathbf{RM})^-} L(\rho,\mathcal{O})[\omega_\rho.\chi]$$

où $\mathbf{RM}(\mathbb{Z}_p)$ agit sur $L(\rho,\mathcal{O})[\omega_\rho.\chi]$ par le caractère, à valeurs dans $\mathcal{O}^\times$ par compacité, induit par $\omega_\rho.\chi$. Si $f \in L(\rho,\mathcal{O}[\omega_\rho.\chi])$, on a donc

$$t^{-1} * f = \chi(t).f \qquad \text{pour tout } t \in \sigma(\Lambda^+_{\mathbf{M}})$$

Et l'inégalité $\omega(\chi(t)) > 0$ montre la stabilité voulue.

On note encore e_{qo} l'idempotent construit à partir des opérateurs de Hecke $K.\xi.K$, $\xi \in \sigma(\Lambda^+_{\mathbf{M}})$.

Pour tout $\mathcal{O}$-module M, on note $L(\rho,M) := L(\rho,\mathcal{O}) \otimes_\mathcal{O} M$.

Pour tout $U \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$, $L(\rho,\mathcal{O})$ est un sous-réseau de $L_U(\rho,\mathcal{O})$. D'après 7.1.5, l'action qui vient d'être définie coïncide, sur $(U.D_{0,p})^{-1}$, avec l'action induite $L_U(\rho,\mathcal{O})$.

On considère le sous-groupe de niveau premier à p suivant :

$$K := K^{(p)}.\mathbf{G}_\Omega(\mathbb{Z}_p)$$

Proposition 7.4. — *Pour tout $U \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$, le morphisme canonique*

$$e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{Sh}_K, L(\rho,\mathcal{K}/\mathcal{O})) \xrightarrow{\sim} e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{Sh}_{U.K_0}, L_U(\rho,\mathcal{K}/\mathcal{O}))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — On reprend la technique de la démonstration de la proposition 7.1 et le morphisme naturel $L(\rho,\mathcal{O}) \twoheadrightarrow V(\mathcal{O})$.

Pour adapter cette démonstration au fait que l'espace $\mathbf{G}_\Omega(\mathbb{Z}_p)$, contrairement à $U.\mathbf{P}_\Omega(\mathbb{Z}_p)$, n'est pas dans la grosse cellule, d'après la décomposition de Bruhat, il suffit de tenir compte des éléments du groupe de Weil. Les arguments de [**27**, lemme 7.2] et [**50**, prop. 3.2] s'appliquent encore. $\square$

7.3.3. Annulation de la cohomologie quasi-ordinaire en degré zéro. —

Lemma 7.5. — *Pour tout $U \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$, $e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^0_*(\mathrm{Sh}_{U.K_0}, L_U(\rho,\mathcal{K}/\mathcal{O})) = 0$.*

Démonstration. — La décomposition

$$L(\rho,\mathcal{O}) = \bigoplus_{\chi\in \mathrm{X}^*(\mathbf{RM})^-} L(\rho,\mathcal{O})[\omega_\rho.\chi]$$

et l'inégalité $\omega(\chi(t)) > 0$ pour $t \in \sigma(\Lambda^+_{\mathbf{M}})$ et $\chi \neq 1$ montre que $t \in \sigma(\Lambda^+_{\mathbf{M}})$ agit par un scalaire qui n'est pas une unité sur les composantes pour lesquelles χ est non trivial.

De plus, sur la composante $L(\rho,\mathcal{O})[\omega_\rho]$, $\sigma(\Lambda^+_{\mathbf{M}})$ agit trivialement, donc l'opérateur de Hecke correspondant à la classe double de $t \in \sigma(\Lambda^+_{\mathbf{M}})$ agit sur les invariants par l'indice $\#(K\backslash K.t.K)$. La propriété de contraction montre que, pour une puissance de t suffisamment grande, cet indice n'est pas une unité p-adique. Ce qui montre la nullité de la partie quasi-ordinaire. $\square$

7.3.4. Problème de congruence et annulation en degré un. — Le *problème de congruence* pour un groupe semi-simple simplement connexe $\tilde{\mathbf{G}}$ sur $\mathbb{Q}$ consiste en la question suivante :

un sous-groupe arithmétique (*i.e.* commensurable à $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbb{Z})$) contient-il nécessairement un sous-groupe de congruence (*i.e.* le noyau d'un morphisme de réduction $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbb{Z}) \longrightarrow \tilde{\mathbf{G}}(\mathbb{Z}/m.\mathbb{Z})$, $m \in \mathbb{N}$) ?

Bien qu'un plongement $\tilde{\mathbf{G}} \subset \mathbf{GL}(n)$ soit nécessaire pour définir $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbb{Z}) := \tilde{\mathbf{G}}(\mathbb{Q}) \cap \mathbf{GL}(n, \mathbb{Z})$, la notion de sous-groupe arithmétique ainsi que le fait de contenir un sous-groupe de congruence ne dépendent pas du choix de ce plongement.

Inversement, il est évident qu'un sous-groupe de congruence est arithmétique.

On note $\widehat{\tilde{\mathbf{G}}(\mathbb{Q})}$ le complété de $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbb{Q})$ pour la topologie dont un système fondamental de voisinages de l'unité est formé des sous-groupes arithmétiques.

La topologie de $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbb{Q})$ dont un système fondamental de voisinages de l'unité est formé des sous-groupes de congruence, est la topologie induite par la topologie du groupe localement profini $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$.

Si $\tilde{\mathbf{G}}$ vérifie le théorème d'approximation forte, le morphisme naturel $\widehat{\tilde{\mathbf{G}}(\mathbb{Q})} \longrightarrow \tilde{\mathbf{G}}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ est donc surjectif. Son noyau $C(\tilde{\mathbf{G}})$, appelé *noyau de congruence*, mesure le défaut du problème de congruence (*cf.* [**3**, IV]). Il n'est pas fini en général, par exemple pour $\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{SL}(2)$, c'est un groupe profini libre de rang dénombrable.

Soit F un corps de nombre, dont on note $I_1(F)$ l'ensemble des places réelles, et $\mathbf{H}$ un groupe simplement connexe, simple défini sur F. Une conjecture de Serre (citée dans [**38**, (9.45)]) est que

– si $\sum_{v \in I_1(F)} \mathrm{rk}_{F_v} \mathbf{H} \geq 2$ alors $C(\mathrm{R}_{F/\mathbb{Q}}\mathbf{H})$ est fini,

– si $\sum_{v \in I_1(F)} \mathrm{rk}_{F_v} \mathbf{H} = 1$ alors $C(\mathrm{R}_{F/\mathbb{Q}}\mathbf{H})$ est infini.

Dans sa thèse, K. Buecker [**16**, § 3] prouve la nullité de la partie quasi-ordinaire $e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^1(\mathrm{Sh}_{U.K_0}, L_U(\rho\otimes\epsilon.\chi))$ de la cohomologie de degré un, dans le cas du groupe symplectique $\mathbf{G} = \mathbf{GSp}(4)$. Sa méthode, qui consiste d'abord à montrer que le noyau d'un cocycle contient un sous-groupe de congruence, et donc se ramener à la cohomologie de groupes finis, se généralise aux groupes dont le noyau de congruence (du revêtement simplement connexe $\tilde{\mathbf{G}}$ du groupe dérivé) est fini d'ordre premier à p.

Platonov et Rapinchuk indiquent de nombreux cas pour lesquels $C(\tilde{\mathbf{G}})$ est fini, en dualité avec le *noyau métaplectique* de $\tilde{\mathbf{G}}$, ce dernier étant plus facilement déterminé (*cf.* [**38**, th. 9.15 et 9.23]).

Comme dans le paragraphe 3.2.6 de la première partie, **GU** désigne le groupe des similitudes unitaires en trois variables d'une extension CM d'un corps totalement réel F. On suppose qu'en toute place réelle sauf une, **GU** est anisotrope et qu'en toute place au-dessus de p, **GU** est quasi-déployé. Nous nous intéressons à la quasi-ordinarité relative à un sous-groupe de Borel en p.

Le domaine symétrique de **GU** est une 2-boule complexe (donc $d = 2$) et les variétés de Shimura de **GU** sont des surface de Picard (*cf.* [**22**]).

Si $F = \mathbb{Q}$ alors **GU** est de rang semi-simple déployé un sur $\mathbb{Q}$ et la compactification de Borel-Serre consiste à élargir X^+ en rajoutant des 2-sphères complexes.

Sinon, $\mathrm{R}_{F/\mathbb{Q}}\mathbf{GU}$ est de rang semi-simple déployé nul sur $\mathbb{Q}$ et les variétés de Shimura de niveau fini Sh_K sont compactes.

Dans tous les cas, la conjecture de Serre implique que le noyau de congruence du groupe spécial unitaire correspondant à **GU** est infini.

Theorem 7.6. — *Soit* $U \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$ *et* $\mathbf{G} = \mathrm{R}_{F/\mathbb{Q}}\mathbf{GU}$.

On suppose que la représentation ρ est de plus haut poids régulier et

(TF$_\rho$) : *p ne divise pas l'ordre de* $e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^2(\mathrm{Sh}_K, L(\rho,\mathcal{O}))_{\mathrm{tor}}$.

Pour tout caractère $\mathcal{O}$-arithmétique ρ-dominant $\epsilon.\chi$ de $\mathbf{M}_\Omega$ pour lequel $U \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}(\epsilon)$, le morphisme

$$e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^2_!(\mathrm{Sh}_{U.K_0}, L_U(\rho\otimes\epsilon.\chi, \mathcal{K}/\mathcal{O})) \xrightarrow{\sim} e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^2_!(\mathrm{Sh}_{K_1}, L(\mathcal{K}/\mathcal{O}))[\epsilon.\chi]$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — L'annulation des groupes de cohomologie quasi-ordinaire (totale) en degré 0 (*cf.* 7.5) et 1 (dû à l'hypothèse (TF$_\rho$) et à la proposition 7.4) permettent d'appliquer le théorème de contrôle "fort" 6.12 :

$$e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^2(\mathrm{Sh}_{U.K_0}, L_U(\rho\otimes\epsilon.\chi, \mathcal{K}/\mathcal{O})) \xrightarrow{\sim} e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^2(\mathrm{Sh}_{K_1}, L(\mathcal{K}/\mathcal{O}))[\epsilon.\chi]$$

Pour un groupe de rang semi-simple 1 sur $\mathbb{Q}$, la suite spectrale de Leray (*cf.* proposition 4.4) du bord devient simplement une décomposition de la cohomologie du bord en une somme directe des cohomologies des composantes du bord. □

7.4. Propriétés de l'algèbre de Hecke quasi-ordinaire universelle. — *À partir de maintenant, ρ est toujours de plus haut poids régulier.*

On appelle *algèbre de Hecke* **P***-quasi-ordinaire universelle* la $\mathcal{O}[[C]]$-algèbre

$$\mathbf{h}_{U,\mathrm{qo}}(\rho) := \mathrm{h}^d_{!,U,\mathrm{qo}}(K_1,\rho)$$

On note $\mathbb{V}_U(\rho)$ le dual de Pontryagin du $\mathcal{O}[[C]]$-module discret

$$e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^d_!(\mathrm{Sh}_{K_1}, L_U(\rho,\mathcal{K}/\mathcal{O}))$$

C'est un $\mathbf{h}_{U,\mathrm{qo}}(\rho)$-module.

7.4.1. Semi-simplicité de l'algèbre d'un groupe fini. — On rappelle le lemme suivant :

Lemma 7.7. — *Soient A un anneau commutatif intègre et G un groupe fini de cardinal N et d'exposant n.*

Si N est inversible dans A et si A contient les n-ièmes de l'unité, alors

$$\begin{array}{rcl} A[G] & \xrightarrow{\sim} & \prod_{\chi \in \mathrm{Hom}(G,A^\times)} A(\chi) \\ g & \longmapsto & (\chi(g))_\chi \end{array}$$

est un isomorphisme de $A[G]$-modules.

Démonstration. — Pour tout caractère $\chi : G \longrightarrow A^\times$,

$$e_\chi := (1/N).\sum_G \chi(g)^{-1}.g$$

est un idempotent de $A[G]$ et le morphisme $A[G] \twoheadrightarrow A(\chi)$ induit par χ s'identifie à la projection naturelle sur $A[G] \twoheadrightarrow e_\chi.A[G]$.

Les hypothèses assurent une bonne dualité entre G et ses caractères à valeurs dans $A^\times$. En particulier, il existe N caractères et ces caractères séparent les éléments de G. Ces deux faits donnent la décomposition en idempotents $1 = \sum_\chi e_\chi$ et les formules d'orthogonalité $e_\chi.e_{\chi'} = 0$ (pour $\chi \neq \chi'$) dans $A[G]$. D'ou l'isomorphisme

$$A[G] \xrightarrow{\sim} \oplus_\chi e_\chi.A[G] \xrightarrow{\sim} \prod_\chi A(\chi)$$

□

7.4.2. Finitude. —

Proposition 7.8. — *Soit $U \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$.*

Le module $\mathbb{V}_U(\rho)$ est de type fini sur $\mathcal{O}[[C]]$.

L'algèbre $\mathbf{h}_{U,\mathrm{qo}}(\rho)$ *est finie sur* $\mathcal{O}[[C]]$.

Démonstration. — Selon le lemme précédent, on a la décomposition suivante :

$$e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^d(\mathrm{Sh}_{K_1}, L_U(\rho, \mathcal{K}/\mathcal{O})) = \bigoplus_{\nu} e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^d(\mathrm{Sh}_{K_1}, L_U(\rho, \mathcal{K}/\mathcal{O}))[\nu] \qquad (18)$$

où ν parcours l'ensemble fini des caractères $\nu :\ C^{(p)} \longrightarrow \mathcal{O}^{\times}$.

Soit ν un tel caractère. On peut construire un caractère fini continu ϵ de $\mathbf{M}_{\Omega}(\mathbb{Z}_p)$ qui, passant au quotient C, prolonge ν.

Le lemme 4.8 donne

$$e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^d(\mathrm{Sh}_{K_1}, L_U(\rho, \mathcal{K}/\mathcal{O}))(\epsilon) = e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^d(\mathrm{Sh}_{K_1}, L_U(\rho, \mathcal{K}/\mathcal{O})(\epsilon))$$

Si on prend les invariants sous C, on obtient :

$$\mathrm{H}^d(\mathrm{Sh}_{K_1}, L_U(\rho, \mathcal{K}/\mathcal{O}))[\epsilon] = \mathrm{H}^0(C, \mathrm{H}^d(\mathrm{Sh}_{K_1}, L_U(\rho, \mathcal{K}/\mathcal{O})(\epsilon)))$$

Selon le théorème 7.3, ce dernier groupe est de cotype fini sur $\mathcal{O}$. D'après le lemme de Nakayama topologique, on en déduit que

$$\mathrm{H}^d(\mathrm{Sh}_{K_1}, L_U(\rho, \mathcal{K}/\mathcal{O}))[\nu] = \mathrm{H}^0(C^{(p)}, \mathrm{H}^d(\mathrm{Sh}_{K_1}, L_U(\rho, \mathcal{K}/\mathcal{O})(\epsilon)))$$

est de cotype fini sur $\mathcal{O}[[C_p]]$. Ce qui, d'après la décomposition (18), démontre la première assertion.

La deuxième assertion est une conséquence de la première puisque $\mathbf{h}_{U,\mathrm{qo}}(\rho)$ agit fidèlement sur $\mathbb{V}_U(\rho)$. □

7.4.3. Spécialisation. — Soient $U \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$, $\epsilon.\chi$ un caractère $\mathcal{O}$-arithmétique ρ-dominant de $\mathbf{M}_{\Omega}$ et $U' \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}(\epsilon)$ un sous-groupe de U.

On note $\mathrm{h}^{\cdot}_{!,U,\mathrm{qo}}(U'.K_0, \rho \otimes \epsilon.\chi)$ la sous-$\mathcal{O}[[C]]$-algèbre engendrée par l'image de l'anneau de Hecke abstrait $\mathcal{H}^{(p)}$ dans l'algèbre des endomorphismes du $\mathcal{O}[[C]]$-module $e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^{\cdot}_!(\mathrm{Sh}_{U'.K_0}, L_U(\rho \otimes \epsilon.\chi, \mathcal{K}/\mathcal{O}))$.

Lemma 7.9. — *Soit $\epsilon.\chi$ un caractère $\mathcal{O}$-arithmétique ρ-dominant de $\mathbf{M}_\Omega$.*

On a un morphisme naturel entre $\mathcal{K}$-algèbres finies

$$\mathrm{h}^d_{U,\mathrm{qo}}(U'.K_0, \rho \otimes \epsilon.\chi) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K} \twoheadleftarrow \mathbf{h}_{U,\mathrm{qo}}(\rho) \otimes_{\mathcal{O}[[C]]} \mathcal{K}(\epsilon.\chi)$$

surjectif, à noyau contenu dans le radical. Dans le cas du contrôle "fort", c'est un isomorphisme.

Démonstration. — En prenant le dual de Pontryagin puis en tensorisant par $\mathcal{K}$, le morphisme du théorème 7.3 devient un isomorphisme :

$$e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^d(\mathrm{Sh}_{U'.K_0}, L_U(\rho \otimes \epsilon.\chi, \mathcal{K}/\mathcal{O}))^\vee \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K} \xleftarrow{\sim} \mathbb{V}_U(\rho) \otimes_{\mathcal{O}[[C]]} \mathcal{K}(\epsilon.\chi)$$

qui induit un morphisme surjectif sur les algèbres de Hecke :

$$\mathrm{h}^d_{U,\mathrm{qo}}(U'.K_0, \rho \otimes \epsilon.\chi) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K} \twoheadleftarrow \mathbf{h}_{U,\mathrm{qo}}(\rho) \otimes_{\mathcal{O}[[C]]} \mathcal{K}(\epsilon.\chi)$$

car, par platitude de $\mathcal{K}$ sur $\mathcal{O}$, la première algèbre agit fidèlement sur le premier module de l'isomorphisme précédent.

Pour montrer que ce morphisme surjectif entre $\mathcal{K}$-algèbres finies est à noyau contenu dans le radical, il suffit de montrer que l'image d'un idempotent $\overline{e}$ non nul est non nul.

D'après le lemme d'Hensel cet idempotent se relève en un idempotent e de l'algèbre $\mathbf{h}_{U,\mathrm{qo}}(\rho) \otimes_{\mathcal{O}[[C]]} \mathcal{O}[[C]]_{\mathfrak{p}_{\epsilon.\chi}}$. Par platitude de $\mathcal{O}[[C]]_{\mathfrak{p}_{\epsilon.\chi}}$ sur $\mathcal{O}$, cette algèbre de Hecke agit fidèlement sur le module $\mathbb{V}_U(\rho)_{\mathfrak{p}_{\epsilon.\chi}}$. Ainsi

e est un projecteur de ce module et vérifie $e(\mathbb{V}_U(\rho)_{\mathfrak{p}_{\epsilon.\chi}}) \subset \mathfrak{p}_{\epsilon.\chi}.\mathbb{V}_U(\rho)_{\mathfrak{p}_{\epsilon.\chi}}$. Ce qui implique $e = 0$. □

7.4.4. Algèbre de Hida-Iwasawa. — Soit C_0 l'adhérence dans $\mathbf{RG}_\Omega(\mathbb{Z}_p)$ du sous-groupe $\mathbf{RG}(\mathbb{Q}) \cap \mathbf{RG}_\Omega(\mathbb{Z}_p) \subset \mathbf{RG}(\mathbb{Q}_p)$.

Les opérateurs de Hecke construits à partir des éléments de l'intersection $\mathbf{RG}(\mathbb{Q}) \cap \mathbf{RG}_\Omega(\mathbb{Z}_p)$ agissent trivialement sur la cohomologie de $L_U(\rho)$, si bien que l'action de C sur $\mathbb{V}_U(\rho)$ se factorise par le groupe C/C_0.

L'algèbre $\Lambda := \mathcal{O}[[H]]$, où $H \subset C/C_0$ est le sous-groupe pro-p maximal, est l'*algèbre de Hida-Iwasawa*.

7.4.5. Liberté. — On note $\chi^\vee$ l'image du caractère χ par l'élément de plus grande longueur w_0 du groupe de Weyl de $\mathbf{G}$ par rapport à $\mathbf{T}$ qui transforme $\mathbf{B}$ en $\mathbf{B}^-$, et on note aussi $\rho^\vee$ la représentation de $\mathbf{M}$ de plus grand poids χ_ρ pour l'ordre défini par $\mathbf{B} \cap \mathbf{M}$.

Proposition 7.10. — *Pour $\mathbf{G} = \mathrm{R}_{F/\mathbb{Q}}\mathbf{GU}$ et p satisfaisant aux conditions (TF$_\rho$) et (TF$_{\rho^\vee}$), le module $\mathbb{V}_U(\rho)$ est libre de type fini sur l'algèbre de Hida-Iwasawa Λ.*

Démonstration. — Le lemme 10.2 de [**24**] montre que l'intersection des $\ker \mathfrak{p}_\chi$, lorsque χ parcours l'ensemble des caractères ρ-dominants est nulle. En utilisant le lemme de Nakayama, il suffit donc (*cf.* [**24**, § 10]) de montrer que $\mathbb{V}_U(\rho \otimes \chi)/\mathfrak{p}_\chi.\mathbb{V}_U(\rho \otimes \chi)$ est libre sur $\mathcal{O}$ pour tout caractère $\mathcal{O}$-algébrique ρ-dominant χ.

D'après l'hypothèse (TF$_{\rho^\vee}$), $e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^2(\mathrm{Sh}_{K_0}, L_U(\rho^\vee \otimes \chi^\vee, \mathcal{O}))$ n'a pas de p-torsion.

Or, 2 étant la dimension médiane de Sh, ce dernier est en dualité (*cf.* [**50**, th. 6.4] ou [**1**]) avec

$$e_{\mathrm{qo}}.\mathrm{H}^2_c(\mathrm{Sh}_{K_0}, L_U(\rho\otimes\chi, \mathcal{K}/\mathcal{O}))$$

qui est donc p-divisible.

Il en est de même de la cohomologie intérieure, qui est image de la cohomologie à support compact. L'isomorphisme du théorème de contrôle 7.6 donne donc

$$e_{\mathrm{qo}}.H^2_!(\mathrm{Sh}_{K_1}, L_U(\rho, \mathcal{K}/\mathcal{O}))[\mathfrak{p}_\chi] \xrightarrow{\sim} e_{\mathrm{qo}}.H^2_!(\mathrm{Sh}_{K_0}, L_U(\rho\otimes\chi, \mathcal{K}/\mathcal{O}))$$

En passant au dual, on obtient bien que $\mathbb{V}_U(\rho\otimes\chi)/\mathfrak{p}_\chi.\mathbb{V}_U(\rho\otimes\chi)$ est libre sur $\mathcal{O}$. □

7.4.6. Dimension. —

Corollary 7.11. — *Dans la même situation que la proposition précédente, l'algèbre de Hecke quasi-ordinaire universelle* $\mathbf{h}_{U,\mathrm{qo}}(\rho)$ *est finie et sans torsion sur l'algèbre de Hida-Iwasawa* Λ*. Elle est de dimension relative*

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}_p} H = 1 + 3.[F:\mathbb{Q}] + \delta_{E,p}$$

sur $\mathcal{O}$*.*

Démonstration. — Ce sont les conséquences de la proposition précédente et du calcul du paragraphe 3.2.6 de la première partie. □

7.4.7. Systèmes de valeurs propres. — Si $\mathbb{I}$ est une Λ-algèbre finie et sans torsion, on dit qu'un idéal premier de $\mathbb{I}$ est *arithmétique* s'il est au-dessus d'un idéal de la forme $\mathfrak{p}_{\epsilon.\chi}$, où $\epsilon.\chi$ est un caractère $\mathcal{O}$-arithmétique de

$\mathbf{M}_\Omega$. Et un caractère $\mathbb{I} \twoheadrightarrow \mathcal{O}$ est *arithmétique* s'il prolonge un caractère arithmétique de Λ.

Une *famille* de systèmes de valeurs propres quasi-ordinaires est un morphisme $\mathbf{h}_{U,\mathrm{qo}}(\rho) \longrightarrow \mathbb{I}$ de Λ-algèbres où $\mathbb{I}$ est une Λ-algèbre finie sans torsion.

Une remarque importante est que, puisque $\mathbb{I}$ est un anneau local, deux caractères arithmétiques sont congrus modulo l'uniformisante de $\mathcal{O}$. Cette propriété et la proposition suivante permettent de "construire" des congruences.

La manière dont nous avons modifié l'action originale de $\mathbf{G}(\mathcal{K})$ sur $L(\rho, \mathcal{K})$ nous amène à donner la définition suivante : un système de valeurs propres Θ intervenant en plus haut poids cohomologique λ (pour l'ordre associé à $\mathbf{B}^-$ comme au paragraphe 7.1.1) est $\mathbf{P}$-quasi-ordinaire si et seulement si $|\Theta(T_p(\xi))|_p = |\lambda(\xi)|_p$ pour tout $\xi \in \sigma(\Lambda_{\mathbf{M}}^+)$, où $T_p(\xi)$ est l'opérateur de Hecke construit à partir de ξ (pour l'action originale).

Proposition 7.12. — *Soit Θ_π un système de valeurs propres pour les opérateurs de Hecke, associé à une représentation automorphe cuspidale de $\mathbf{G} = \mathrm{R}_{F/\mathbb{Q}}\mathbf{GU}$, dont la composante archimédienne est de poids cohomologique régulier.*

Alors pour presque tout p, si Θ_π est quasi-ordinaire, il existe une famille de systèmes de valeurs propres quasi-ordinaires passant par Θ_π.

Démonstration. — En effet, par hypothèse, à π est associée une représentation irréductible V_λ de $\mathbf{G}$ de plus haut poids régulier λ (pour l'ordre défini par $\mathbf{B}^-$). Cette représentation peut être construite sous la forme $L(\rho, \mathbb{C})$ en prenant pour ρ l'induite de λ de $\mathbf{B} \cap \mathbf{M}$ à $\mathbf{M}$.

On peut choisir $\mathcal{K}$ suffisamment gros pour qu'il contienne les valeurs propres et d'après la proposition 7.4, on peut se placer en niveau $U.K_0$ (*i.e.* de type Γ_0) en p, pour Ω une partie bornée et bien placée par rapport à $(\mathbf{P},\mathbf{M})$ et un sous-groupe $U \in \mathcal{T}_{\mathrm{bp}}$.

Puisque le conoyau du morphisme

$$\mathrm{H}^2_!(\mathrm{Sh}_{U.K_0}, L_U(\rho\otimes\epsilon.\chi,\mathcal{K})) \longrightarrow \mathrm{H}^2_!(\mathrm{Sh}_{U.K_0}, L_U(\rho\otimes\epsilon.\chi,\mathcal{K}/\mathcal{O}))$$

est fini, le système de valeurs propres intervient aussi pour les coefficients divisibles $L_U(\rho\otimes\epsilon.\chi,\mathcal{K}/\mathcal{O})$.

Si bien que Θ_π est un morphisme

$$\mathrm{h}^2_{!,U,\mathrm{qo}}(U.K_0,\rho\otimes\epsilon.\chi) \xrightarrow{\Theta_\pi} \mathcal{O}$$

qui, composé avec l'application $\mathbf{h}_{U,\mathrm{qo}}(\rho)\longrightarrow \mathrm{h}^2_{!,U,\mathrm{qo}}(U.K_0,\rho\otimes\epsilon.\chi)$ donne un morphisme dont le noyau $\mathfrak{P}$ est au-dessus de l'idéal arithmétique $\mathfrak{p}_{\epsilon.\chi}$. Le "going-down" [**11**, V, § 2, th. 3] donne un idéal premier $\mathfrak{p}\subset\mathbf{h}_{U,\mathrm{qo}}(\rho)$ contenu dans $\mathfrak{P}$, au-dessus de $\{0\}\subset\Lambda$.

Posons $\mathbb{I} := \mathbf{h}_{U,\mathrm{qo}}(\rho)/\mathfrak{p}$. C'est une Λ-algèbre finie qui se décompose en un produit d'anneaux locaux car Λ est complète. Or $\mathbb{I}$ est intègre par construction, donc $\mathbb{I}$ est un anneau local, sans torsion sur Λ.

Ainsi, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{h}_{U,\mathrm{qo}}(\rho) \arrow[r] \arrow[drr] & \mathrm{h}^2_{!,U,\mathrm{qo}}(U.K_0,\rho\otimes\epsilon.\chi) \arrow[r, "\Theta_\pi"] \arrow[d, dashed] & \mathcal{O} \\
\Lambda \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & \mathbb{I} \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

où le morphisme de $\mathbf{h}_{U,\mathrm{qo}}(\rho)$ se factorise par $\mathrm{h}^d_{!,U,\mathrm{qo}}(U.K_0, \rho \otimes \epsilon.\chi)$ d'après le lemme 7.9 et le morphisme de $\mathbb{I}$ dans $\mathcal{O}$ est obtenu par réduction modulo $\mathfrak{P}/\mathfrak{p}$.

C'est ce morphisme qui indique que la famille construite *passe* par Θ_π. $\square$

Annexe A

Cohomologie des espaces $\mathrm{K}(\Gamma, 1)$

On rappelle ici le dictionnaire entre Γ-modules et systèmes locaux sur $\Gamma\backslash X$. De cette correspondance locale, on déduit un isomorphisme canonique entre la cohomologie des Γ-modules et la cohomologie des faisceaux sur $\Gamma\backslash X$.

En particulier, si $\Gamma\backslash X$ est compacte, on obtient des propriétés de finitude de la cohomologie de Γ.

Cet appendice, constitué uniquement de résultats classiques, est présent pour deux raisons : d'une part, l'absence de référence satisfaisante (sinon dans le cas des coefficients constants), et d'autre part, pour mettre en évidence le fait que certaines propriétés de la cohomologie des groupes arithmétiques (finitude, commutation aux limites inductives) sont dues à l'existence d'un espace $\mathrm{K}(\Gamma, 1)$ compact.

A.1. Dictionnaire local. —

A.1.1. Action propre et libre d'un groupe discret. — Remarquons que si X est un espace topologique muni de l'action continue d'un groupe discret Γ, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

– Γ agit proprement et librement sur X,
– Γ agit librement sur X et la projection $p_\Gamma : X \twoheadrightarrow \Gamma\backslash X$ est un revêtement d'espaces séparés.

Dans un sens, les propriétés de séparations résultent de [**10**, III, p. 29, prop. 3] et l'homéomorphisme local de [**10**, III, p. 32, prop. 8]. Dans l'autre il suffit d'utiliser la caractérisation [**10**, III, p. 31, prop. 7]. Une condition plus forte est :

– Γ n'a pas de torsion et agit proprement sur X

car dans un groupe discret agissant continûment et proprement, les stabilisateurs sont finis [**10**, III, p. 32, prop. 8].

A.1.2. Systèmes locaux. — Dorénavant et jusqu'à la fin de cet appendice, X est un espace topologique muni de l'action continue, propre et libre d'un groupe discret Γ. Soit $\underline{\mathbb{Z}}_\Gamma$ le faisceau d'anneaux constant $\mathbb{Z}$ sur $\Gamma\backslash X$. Nous notons ${}_\Gamma\mathcal{M}od$ et ${}_{\underline{\mathbb{Z}}_\Gamma}\mathcal{M}od$, respectivement, la catégorie abélienne des $\mathbb{Z}[\Gamma]$-modules (à gauche) et celle des faisceaux de groupes abéliens sur l'espace topologique $\Gamma\backslash X$.

À tout $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module L, nous associons le fibré

$$\Gamma\backslash X \times L \xrightarrow{\pi_\Gamma(L)} \Gamma\backslash X$$

où L est muni de la toplogie discète. C'est un fibré localement trivial en groupes abéliens de fibre-type L comme le montre le carré cartésien suivant

$$\begin{tikzcd} X \times L \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \Gamma\backslash X \times L \arrow[d, "\pi_\Gamma(L)"] \\ X \arrow[r, two heads, "p_\Gamma"] & \Gamma\backslash X \end{tikzcd}$$

Le *système local* associé à L est le faisceau $\underline{L}$ des germes de sections continues du fibré $\pi_\Gamma(L)$. Ceci définit un foncteur

$$\begin{aligned} {}_\Gamma\mathcal{M}od &\longrightarrow {}_{\underline{\mathbb{Z}}_\Gamma}\mathcal{M}od \\ L &\longmapsto \underline{L} \end{aligned}$$

additif, fidèle et exacte (car tout se lit sur les fibres). Si $\mathbb{Z}$ est muni de l'action triviale de Γ, on a $\underline{\mathbb{Z}} = \underline{\mathbb{Z}}_\Gamma$.

A.1.3. Fonctorialité. — Supposons, en plus des hypothèses de A.1.2, que X est localement connexe. Ainsi la famille des $p_\Gamma(U)$, lorsque U parcours l'ensemble des ouverts connexes de X sur lesquels p_Γ est un homéomorphisme, forme une base de la topologie de $\Gamma\backslash X$.

Soient Γ' un sous-groupe de Γ et $\varphi : \Gamma'\backslash X \twoheadrightarrow \Gamma\backslash X$ la surjection naturelle. Pour tous $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module L et $\mathbb{Z}[\Gamma']$-module L', les formules

$$\varphi_* \underline{L'} = \underline{\mathrm{ind}_{\Gamma'}^{\Gamma} L'} \tag{19}$$

$$\varphi^* \underline{L} = \underline{\mathrm{res}_{\Gamma'}^{\Gamma} L} \tag{20}$$

résultent de

$$\begin{aligned}
\varphi_* \underline{L'}(p_\Gamma(U)) &= \underline{L'}(\varphi^{-1}(p_\Gamma(U))) \\
&= \underline{L'}(\Gamma'\backslash\Gamma \times U) = \mathrm{ind}_{\Gamma'}^{\Gamma} L' = \underline{\mathrm{ind}_{\Gamma'}^{\Gamma} L'}(p_\Gamma(U)) \\
\varphi^* \underline{L}(p_{\Gamma'}(U)) &= \underline{L}(p_\Gamma(U)) = L = \underline{\mathrm{res}_{\Gamma'}^{\Gamma} L}(p_{\Gamma'}(U))
\end{aligned}$$

quand $U \subset X$ est un ouvert connexe sur lequel p_Γ est un homéomorphisme.

A.2. Dictionnaire global. —

A.2.1. Cohomologie des systèmes locaux. — Reprenons les hypothèses de A.1.2. Si X est connexe, alors $p_\Gamma : X \twoheadrightarrow \Gamma\backslash X$ est un revêtement galoisien de groupe de Galois Γ et le foncteur $L \longmapsto \underline{L}$ est plein, si bien que

$$L^\Gamma = Hom_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(\mathbb{Z}, L) \simeq Hom_{\mathbb{Z}_\Gamma}(\underline{Z}, \underline{L}) = \underline{L}(\Gamma\backslash X) \tag{21}$$

Remarquons de plus que si X est connexe et simplement connexe alors p_Γ est un revêtement universel et $L \longmapsto \underline{L}$ est une équivalence de catégories.

Proposition A.1. — *Soit X un espace topologique localement connexe et contractile sur lequel un groupe discret Γ agit continûment, proprement et librement. Alors les δ-foncteurs $H^{\cdot}(\Gamma,\cdot)$ et $H^{\cdot}(\Gamma\backslash X,\underline{\cdot})$ sont canoniquement isomorphes.*

Démonstration. — En degré 0, c'est l'isomorphisme (21). D'après [**23**, prop. 2.2.1], il suffit de montrer que ces deux δ-foncteurs exacts sont effaçables. Ce qui résulte du fait que tout $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module L se plonge dans l'induit $\mathrm{ind}^{\Gamma} L$, des formules (19) et

$$H^{\cdot}(\Gamma,\mathrm{ind}^{\Gamma} L) = H^{\cdot}(1,M)$$

$$H^{\cdot}(\Gamma\backslash X,(p_{\Gamma})_*\underline{L}) = H^{\cdot}(X,\underline{L})$$

et enfin du fait que X est contractile. □

A.2.2. Fonctorialité. —

Proposition A.2. — *Sous les mêmes conditions que la proposition précédente, si $\Gamma'\subset\Gamma$ est un sous-groupe, L un $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module et L' un $\mathbb{Z}[\Gamma']$-module alors nous avons les diagrammes commutatifs suivants :*

$$\begin{tikzcd} H^{\cdot}(\Gamma',\mathrm{res}^{\Gamma}_{\Gamma'} L) \arrow[r, "\sim"] & H^{\cdot}(\Gamma'\backslash X,\varphi^*\underline{L}) \\ H^{\cdot}(\Gamma,L) \arrow[u, "\mathrm{res}"] \arrow[r, "\sim"] & H^{\cdot}(\Gamma\backslash X,\underline{L}) \arrow[u, "\varphi^*"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} H^{\cdot}(\Gamma',L') \arrow[r, "\sim"] & H^{\cdot}(\Gamma'\backslash X,\underline{L'}) \\ H^{\cdot}(\Gamma,\mathrm{ind}^{\Gamma}_{\Gamma'} L') \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, "\sim"] & H^{\cdot}(\Gamma\backslash X,\varphi_*\underline{L'}) \arrow[u, "\wr"'] \end{tikzcd}$$

où $\Gamma'\backslash X \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} \Gamma\backslash X$ *. De plus, si* Γ' *est d'indice fini dans* Γ*, le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} H^{\cdot}(\Gamma', \mathrm{res}_{\Gamma'}^{\Gamma} L) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{cor}"'] & H^{\cdot}(\Gamma'\backslash X, \varphi^{*}\underline{L}) \arrow[d, "\varphi_{*}"] \\ H^{\cdot}(\Gamma, L) \arrow[r, "\sim"] & H^{\cdot}(\Gamma\backslash X, \underline{L}) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration. — La commutativité du premier diagramme est claire en degré 0 et $H^{\cdot}(\Gamma, \cdot)$ est un δ-foncteur universel d'où la commutativité pour tout degré. La commutativité du deuxième en résulte grâce à la décomposition de l'isomorphisme de Shapiro :

$$\begin{tikzcd} H^{\cdot}(\Gamma, \mathrm{ind}_{\Gamma'}^{\Gamma} L') \arrow[r, "\mathrm{res}"] \arrow[d, "\wr"] & H^{\cdot}(\Gamma', \mathrm{res}_{\Gamma'}^{\Gamma}\mathrm{ind}_{\Gamma'}^{\Gamma} L') \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H^{\cdot}(\Gamma', L') \arrow[d, "\wr"] \\ H^{\cdot}(\Gamma\backslash X, \varphi_{*}\underline{L'}) \arrow[r, "\varphi^{*}"] & H^{\cdot}(\Gamma'\backslash X, \varphi^{*}\varphi_{*}\underline{L'}) \arrow[r] & H^{\cdot}(\Gamma'\backslash X, \underline{L'}) \end{tikzcd}$$

Enfin la commutativité du troisième vient de la décomposition de la corestriction en

$$\begin{tikzcd} H^{\cdot}(\Gamma', \mathrm{res}_{\Gamma'}^{\Gamma} L) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"] & H^{\cdot}(\Gamma, \mathrm{ind}_{\Gamma'}^{\Gamma}\mathrm{res}_{\Gamma'}^{\Gamma} L) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H^{\cdot}(\Gamma, L) \arrow[d, "\wr"] \\ H^{\cdot}(\Gamma'\backslash X, \varphi^{*}\underline{L}) \arrow[r, "\varphi^{*}"] & H^{\cdot}(\Gamma\backslash X, \varphi_{*}\varphi^{*}\underline{L}) \arrow[r] & H^{\cdot}(\Gamma\backslash X, \underline{L}) \end{tikzcd}$$

$\square$

A.2.3. Espaces $\mathrm{K}(\Gamma, 1)$. — Rappelons le fait suivant [**45**, 1.5 et 2.1]. Supposons maintenant que l'espace X est une variété différentielle (éventuellement à bords) contractile sur laquelle Γ agit librement, proprement par difféomorphismes. Alors $\Gamma\backslash X$ hérite d'une structure de variété différentielle et peut donc être triangulée [**36**]. Le CW-complexe correspondant est, au sens de [**45**, 1.5], un *espace* $\mathrm{K}(\Gamma, 1)$. Les groupes $H^{\cdot}(\Gamma, L)$ s'obtiennent comme cohomologie du complexe $Hom_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(C., L)$ où $C. = \mathbb{Z}[\Gamma]^{(\Delta.)}$ est le complexe des chaînes simpliciales de X correspondant au relèvement d'une triangulation $\Delta.$ de $\Gamma\backslash X$. Puisque X est contractile, ce complexe est acyclique et donne une résolution libre du $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module $\mathbb{Z}$ de longueur la dimension de X.

Corollary A.3. — *Soit X une variété différentielle (éventuellement à bords) contractile sur laquelle un groupe discret Γ agit proprement et librement par difféomorphismes.*

Si $\Gamma\backslash X$ est compacte alors le groupe Γ est de type (FL) au sens de [**45**, 1.5] *de dimension cohomologique* $\dim X$. *En particulier, la cohomologie $H^{\cdot}(\Gamma, \cdot) \simeq H^{\cdot}(\Gamma\backslash X, \underline{\cdot})$ permute au limites inductives et conserve les hypothèses noethériennes (*resp. *artiniennes) sur un anneau.*

Démonstration. — Par compacité, les ensembles $\Delta.$ sont finis, d'où la propriété (FL). Et la conservation des hypothèses noethériennes (*resp.* artiniennes) est la conséquence de

$$Hom_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(C., L) = L^{\Delta.}$$

□

Annexe B

Anneaux de Hecke

Cet appendice réunit les définitions et les résultats dont nous avons besoin, concernant les anneaux de Hecke.

Le terme d'*anneau de Hecke* est préféré à celui d'algèbre de Hecke pour insister sur le fait qu'on travaille avec des coefficients entiers. Un anneau de Hecke est associé à toute *paire de Hecke* $K \subset D$, constituée d'un monoïde D et un sous-groupe K.

La première partie est consacrée au rappel des définitions des opérateurs de Hecke abstraits $K.\xi.K$ (*cf.* [**47**, chapitre 3]) et de leur action sur la cohomologie du groupe K (*cf.* [**31**]).

Dans la seconde partie, nous nous intéressons à la fonctorialité par rapport à la paire $K \subset D$. Les deux premiers résultats, sur l'équivariance de l'isomorphisme de Shapiro, sont classiques (voir [**2**, lemme 1.1.4] et [**46**, I.2.5, ex. 1]). Le principal résultat de cet appendice (proposition B.3) affirme que la suite spectrale de Hochschild-Serre relative à un sous-groupe $K' \subset K$ est Hecke équivariante. L'hypothèse requise (définie au début du paragraphe B.2.2) est que K' soit un sous-groupe *distingué* de la paire de Hecke $K \subset D$. Cette proposition est essentielle pour démontrer les théorèmes de contrôle abstraits du paragraphe 6.4.3. Le dernier résultat de cette partie, utilisé aux paragraphes 6.1.3 et 6.2.3, porte sur l'équivariance des applications de restrictions. C'est une légère généralisation du théorème 2.7.6 donné par Miyake [**35**].

Une troisième partie systématise un argument classique (*cf.* Hida [**27**, section 2], par exemple) pour avoir des relations de composition entre opérateurs de Hecke du type $K.\nu.K|K.\xi.K = K.\nu.\xi.K$. Nous utilisons ce critère en 5.3.

B.1. Rappels et notations. — Nous disons que $K \subset D$ est une *paire de Hecke* lorsque K est un sous-groupe d'un monoïde D.

Dans ce qui suit, nous fixons un monoïde D, dont K, K' et K'' désignent des sous-groupes.

Si E est un ensemble, nous notons $\mathbb{Z}^{(E)}$ le groupe abélien libre construit sur cet ensemble. Dans le cas où $E = \Delta$ est un monoïde, c'est le groupe sous-jacent à la $\mathbb{Z}$-algèbre $\mathbb{Z}[\Delta]$ du monoïde Δ.

Sauf précision contraire, les modules dont il est question ici sont des modules à droite. Le groupe abélien $\mathbb{Z}$ est muni de l'action triviale de D.

B.1.1. Cohomologie des groupes. — Pour tout K-module V, le sous-groupe des K-invariants V^K s'identifie à $\mathrm{Hom}_K(\mathbb{Z}, V)$. Si l'action de K sur V s'étend en une action de D alors, par extension des scalaires, nous avons l'isomorphisme :

$$\begin{aligned} V^K &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_D(\mathbb{Z}^{(K\backslash D)}, V) \\ v &\longmapsto (K.\xi \mapsto v.\xi) \end{aligned} \tag{22}$$

car $\mathbb{Z}^{(K\backslash D)} = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[K]} \mathbb{Z}[D]$.

En dérivant ces foncteurs en V, nous obtenons les isomorphismes :

$$\mathrm{H}^{\cdot}(K, V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^{\cdot}_D(\mathbb{Z}^{(K\backslash D)}, V) \tag{23}$$

B.1.2. Opérateurs de Hecke. — D'après (22), le groupe

$$\mathrm{Hom}_D(\mathbb{Z}^{(K'\backslash D)}, \mathbb{Z}^{(K\backslash D)})$$

s'identifie aux K'-invariants $\left(\mathbb{Z}^{(K\backslash D)}\right)^{K'}$, ou encore au groupe abélien libre $\mathcal{H}(K,D,K')$ construit sur les classes doubles $K.\xi.K' \in K\backslash D/K'$ telles que $K\backslash K.\xi.K'$ est fini. Les classes doubles vérifiant cette condition de finitude sont appelées *opérateurs de Hecke (abstraits)*. Nous avons ainsi les isomorphismes :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{H}(K,D,K') & \xrightarrow{\sim} & \left(\mathbb{Z}^{(K\backslash D)}\right)^{K'} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{End}_D(\mathbb{Z}^{(K'\backslash D)}, \mathbb{Z}^{(K\backslash D)}) \\ K.\xi.K' & \longmapsto & \displaystyle\sum_{K.\theta\in K\backslash K.\xi.K'} K.\theta & \longmapsto & \left(K'.\eta \mapsto \displaystyle\sum_{K.\theta\in K\backslash K.\xi.K'} K.\theta.\eta\right) \end{array}$$

B.1.3. Action et composition. — Si V est un D-module, la composition donne, grâce à (23), une loi bilinéaire

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^{\cdot}(K,V)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathcal{H}(K,D,K') &\longrightarrow \mathrm{H}^{\cdot}(K',V) \\ c\otimes K.\xi.K' &\longmapsto c|K.\xi.K' \end{aligned}$$

En degré zéro, cette composition s'écrit $v|K.\xi.K' = \sum_{K.\theta\in K\backslash K.\xi.K'} v.\theta$ pour tous $K.\xi.K' \in \mathcal{H}(K,D,K')$ et $v \in V^K$.

Toujours en degré zéro, et en prenant $V = \mathbb{Z}^{(K''\backslash D)}$, nous obtenons ainsi la loi de composition des opérateurs de Hecke :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(K'',D,K)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathcal{H}(K,D,K') &\longrightarrow \mathcal{H}(K'',D,K') \\ K''.\nu.K\otimes K.\xi.K' &\longmapsto K''.\nu.K|K.\xi.K' \end{aligned}$$

$$\text{où } K''.\nu.K|K.\xi.K' = \sum_{\substack{K''.\eta\in K''\backslash K''.\nu.K \\ K.\theta\in K\backslash K.\xi.K'}} K''.\eta.\theta$$

Elle est associative chaque fois que cela a un sens.

B.1.4. Anneau de Hecke. — En particulier, $\mathcal{H}(K,D) := \mathcal{H}(K,D,K)$ est un anneau, appelé *anneau de Hecke* de la paire de Hecke $K \subset D$. Cet anneau est isomorphe à l'anneau des endomorphismes $\mathrm{End}_D(\mathbb{Z}^{(K\backslash D)})$ et agit sur la K-cohomologie $\mathrm{H}^{\cdot}(K,\cdot) = \mathrm{Ext}^{\cdot}_D(\mathbb{Z}^{(K\backslash D)},\cdot)$ des D-modules.

Si A est un anneau commutatif, nous noterons $\mathcal{H}_A(K,D)$ la A-algèbre de Hecke $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{H}(K,D)$.

B.2. Changement de paire. — Soient $K' \subset D'$ et $K \subset D$ deux paires de Hecke telles que D' est un sous-monoïde de D et $K' \subset K$. Dans une telle situation, nous disons que $K' \subset D'$ est une *sous-paire (de Hecke)* de $K \subset D$. Pour tout $\xi \in D$, nous notons

$$\begin{tikzcd} K'\backslash K'.\xi.K' \arrow[d, "\varphi_\xi"'] \arrow[r, phantom, "\subset"] & K'\backslash D \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\supset"] & K'\backslash D' \arrow[dl, "\varphi"] \\ K\backslash K.\xi.K \arrow[r, phantom, "\subset"] & K\backslash D & \end{tikzcd} \tag{24}$$

les applications induites par les inclusions. Si $K'.\xi.K' \in \mathcal{H}(K',D)$, nous notons $\deg(\varphi_\xi) := \#\, K'\backslash(K'.\xi.K' \cap K.\xi)$ le cardinal (constant et fini) des fibres non vides de φ_ξ.

B.2.1. Hecke-équivariance de l'isomorphisme de Shapiro ; Modules induits. — Les deux lemmes que nous donnons ici sont connus (*cf.* [**2**, lemme 1.1.4] et [**46**, I.2.5, ex. 1]).

À tout D'-module V, nous associons le D-module induit $\mathrm{ind}_{D'}^D V$ constitué par l'ensemble $\mathrm{ind}_{D'}^D V = \mathrm{Hom}_{D'}(\mathbb{Z}[D], V)$, muni de l'action définie par $(f.\xi)(\nu) := f(\nu.\xi)$ pour tous $f \in \mathrm{ind}_{D'}^D V$ et $\xi, \nu \in D$. Le morphisme $\mathrm{ev} : \mathrm{ind}_{D'}^D V \longrightarrow V$ d'évaluation en l'unité de D induit l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_D(W, \mathrm{ind}_{D'}^D V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{D'}(W, V) \tag{25}$$

valable pour tout D-module W. Nous en déduisons que le foncteur $\mathrm{ind}_{D'}^{D}$ transforme injectifs en injectifs.

Il y a équivalence entre

– l'application φ de (24) est bijective ;

– $D = K.D'$ et pour tout $\xi \in D'$, $K.\xi \cap D' = K'.\xi$;

– $D = K.D'$ et $K \cap D'.D'^{-1} = K'$;

– l'ensemble D est en bijection avec le produit contracté $K \times^{K'} D'$ par l'application

$$\begin{aligned} K \times^{K'} D' &\longrightarrow D \\ k * \xi &\longmapsto k.\xi \end{aligned}$$

Sous ces conditions, φ induit un morphisme injectif d'anneaux

$$\mathrm{End}_D(\mathbb{Z}^{(K\backslash D)}) \subset \mathrm{End}_{D'}(\mathbb{Z}^{(K'\backslash D')})$$

En termes d'anneaux de Hecke, il s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(K,D) &\hookrightarrow \mathcal{H}(K',D') \\ K.\xi.K &\longmapsto \sum_{K'.\nu.K' \in K'\backslash(D'\cap K.\xi.K)/K'} K'.\nu.K' = \sum_{K.\theta \in K\backslash K.\xi.K} K.\theta \cap D' \end{aligned} \tag{26}$$

De plus $K \times^{K'} D' \xrightarrow{\sim} D$ donne l'isomorphisme

$$\mathbb{Z}[K] \otimes_{\mathbb{Z}[K']} \mathbb{Z}[D'] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[D]$$

Donc $\mathbb{Z}[D]$ est un $\mathbb{Z}[D']$-module libre et, par extension des scalaires, $\mathrm{ind}_{K'}^{K} V \xrightarrow{\sim} \mathrm{ind}_{D'}^{D} V$.

Lemma B.1. — *Soient $K \subset D$ une paire de Hecke et $K' \subset D'$ une sous-paire telle que l'application φ de (24) est bijective.*

Alors pour tout D'-module à droite V, le morphisme ev *induit des isomorphismes*

$$\mathrm{H}^{\cdot}(K, \mathrm{ind}_{K'}^{K} V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{\cdot}(K', V)$$

Hecke-équivariants, c'est-à-dire compatibles avec le morphisme d'anneaux (26).

Démonstration. — Par construction des morphismes en jeu, l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_D(\mathbb{Z}^{(K\backslash D)}, \mathrm{ind}_{D'}^{D} V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{D'}(\mathbb{Z}^{(K'\backslash D')}, V)$$

obtenu en (25) pour $W = \mathbb{Z}^{(K\backslash D)} = \mathbb{Z}^{(K'\backslash D')}$ est compatible avec le morphisme (26).

Puisque le foncteur $\mathrm{ind}_{D'}^{D}$ est exact (comme signalé plus haut, $\mathbb{Z}[D]$ est un $\mathbb{Z}[D']$-module libre) et transforme injectif en injectif, nous pouvons dériver l'isomorphisme précédent. Nous obtenons ainsi les isomorphismes Hecke-équivariants voulus :

$$\mathrm{Ext}^{\cdot}_D(\mathbb{Z}^{(K\backslash D)}, \mathrm{ind}_{D'}^{D} V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^{\cdot}_{D'}(\mathbb{Z}^{(K'\backslash D')}, V)$$

□

Lorsque V est un K-module (à droite), $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[K], V)$ est muni d'une structure de K-module (à droite) : $(f.k)(l) = f(l.k^{-1}).k$. Le sous-module des K'-invariants est le module induit $\mathrm{ind}_{K'}^{K} V$. Ce dernier est donc muni d'une action de $\mathcal{H}(K', K)$. Elle commute avec l'action de K obtenue par induction, si bien que les groupes de cohomologie $H^{\cdot}(K, \mathrm{ind}_{K'}^{K} V)$ sont aussi des $\mathcal{H}(K', K)$-modules.

Lemma B.2. — *Soient K un groupe et K' un sous-groupe de K.*

Pour tout K-module à droite V, le morphisme ev *induit des isomorphismes*

$$\mathrm{H}^{\cdot}(K, \mathrm{ind}_{K'}^{K} V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{\cdot}(K', V)$$

*Hecke-équivariants (*i.e. *$\mathcal{H}(K', K)$-équivariants).*

Démonstration. — Il suffit de le vérifier en degré zéro. Et dans ce cas, nous voyons immédiatement que l'isomorphisme

$$(\mathrm{Hom}_{K'}(\mathbb{Z}[K], V))^{K} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{K}(\mathbb{Z}^{(K' \backslash K)}, V)$$

est $\mathcal{H}(K', K)$-équivariant. □

B.2.2. Sous-groupes distingués et Hecke-équivariance de la suite spectrale de Hochschild-Serre. — Le seul résultat nouveau de cet appendice, énoncé dans la proposition B.3, montre que la suite spectrale de Hochschild-Serre, pour un sous-groupe *distingué* de la paire $K \subset D$, est équivariante pour l'action des opérateurs de Hecke.

Intéressons-nous d'abord au morphisme de $\mathcal{H}(K', D)$-modules à droite

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(K', D) &\xrightarrow{K.1.K'|\cdot} \mathcal{H}(K, D, K') \\ K'.\xi.K' &\longmapsto \deg(\varphi_\xi).K.\xi.K' \end{aligned} \tag{27}$$

Nous dirons que le sous-groupe K' de K est *distingué dans la paire* $K \subset D$ si

(i) K' est distingué dans K et

(ii) pour chaque $\xi \in D$ tel que $K.\xi.K' \in \mathcal{H}(K, D, K')$, l'application φ_ξ de (24) est injective.

Les conséquences de la condition (i) sont les suivantes : le sous-anneau $\mathcal{H}(K',K) \subset \mathcal{H}(K',D)$ est isomorphe à l'algèbre de groupe $\mathbb{Z}[K/K']$, si bien que par restriction des scalaires, tout $\mathcal{H}(K',D)$-module est un K/K'-module. Plus précisément, pour tous $k,k' \in K$ et $K'.\xi.K' \in \mathcal{H}(K',D)$, $K'.k.K'|K'.\xi.K'|K'.k'.K' = K'.k.\xi.k'.K'$. De plus, le morphisme (27) a pour noyau l'idéal à droite $I_{K/K'} \subset \mathcal{H}(K',D)$ engendré par

$$\{K'.k.K' - K'.1.K'\}_{k\in K}$$

Cela est dû au fait que $\deg(\varphi_{k.\xi})$ est indépendant de $k \in K$.

La condition (ii) équivaut à la surjectivité du morphisme (27).

Supposons que K' est un sous-groupe distingué de la paire $K \subset D$. Alors, pour tout $\mathcal{H}(K',D)$-module V, nous avons l'isomorphisme :

$$\begin{aligned} V^{K/K'} &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(K',D)}(\mathcal{H}(K,D,K'),V) \\ v &\longmapsto (K.\xi.K' \mapsto v|K'.\xi.K') \end{aligned} \tag{28}$$

car $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[K/K']} \mathcal{H}(K',D) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(K',D)/I_{K/K'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(K,D,K')$.

En dérivant ces foncteurs en V, nous obtenons les isomorphismes :

$$\mathrm{H}^{\cdot}(K/K',V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^{\cdot}_{\mathcal{H}(K',D)}(\mathcal{H}(K,D,K'),V) \tag{29}$$

Selon (28), l'anneau $\mathrm{End}_{\mathcal{H}(K',D)}(\mathcal{H}(K,D,K'))$ s'identifie aux K/K'-invariants de $\mathcal{H}(K,D,K') = (\mathbb{Z}^{(K\backslash D)})^{K'}$, c'est-à-dire à $\mathcal{H}(K,D)$. De plus, d'après (29), $\mathcal{H}(K,D)$ agit par composition sur la K/K'-cohomologie des $\mathcal{H}(K',D)$-modules.

Proposition B.3. — *Soient $K \subset D$ une paire de Hecke et $K'' \subset K'$ deux sous-groupes distingués de la paire $K \subset D$.*

Pour tout $\mathcal{H}(K'', D)$-module à droite V, la suite spectrale de Hochschild-Serre

$$E_2^{i,j} = \mathrm{H}^i(K/K', \mathrm{H}^j(K', V)) \Longrightarrow \mathrm{H}^{i+j}(K, V)$$

*est Hecke-équivariante (*i.e. *$\mathcal{H}(K, D)$-équivariante).*

Démonstration. — Les isomorphismes (28) et

$$\begin{array}{c} \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(K',D)}(\mathcal{H}(K, D, K'), \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(K'',D)}(\mathcal{H}(K', D, K''), V)) \\ \big\downarrow \wr \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(K'',D)}(\mathcal{H}(K, D, K') \otimes_{\mathcal{H}(K',D)} \mathcal{H}(K', D, K''), V) \end{array}$$

montrent que le morphisme obtenu par composition des opérateurs de Hecke :

$$\mathcal{H}(K, D, K') \otimes_{\mathcal{H}(K',D)} \mathcal{H}(K', D, K'') \longrightarrow \mathcal{H}(K, D, K'')$$

est un isomorphisme de $(\mathcal{H}(K, D), \mathcal{H}(K'', D))$-bimodules. Par conséquent les structures de $\mathcal{H}(K, D)$-modules sur $\left(L^{K'/K''}\right)^{K/K'}$ et $L^{K/K''}$ coïncident.

De plus, si nous montrons que le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(K'',D)}(\mathcal{H}(K', D, K''), \cdot)$ transforme $\mathcal{H}(K'', D)$-modules injectifs en $\mathcal{H}(K', D)$-modules acycliques pour le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(K',D)}(\mathcal{H}(K, D, K'), \cdot)$, alors nous aurons la suite spectrale de $\mathcal{H}(K, D)$-modules annoncée :

$$\begin{array}{c} \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{H}(K',D)}\Big(\mathcal{H}(K, D, K'), \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{H}(K'',D)}(\mathcal{H}(K', D, K''), V)\Big) \\ \Downarrow \\ \mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathcal{H}(K'',D)}(\mathcal{H}(K, D, K''), V) \end{array}$$

Soit J un $\mathcal{H}(K'', D)$-module injectif. C'est a fortiori un K/K''-module injectif. Les isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{K/K'}(\cdot, J^{K'/K''}) &\simeq \mathrm{Hom}_{K/K'}(\cdot, \mathrm{Hom}_{K/K''}(\mathbb{Z}[K/K'], J)) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{K/K''}(\cdot, J) \end{aligned}$$

montrent donc l'injectivité du K/K'-module $J^{K'/K''}$. Ce qui entraîne, selon (29), la nullité des $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{H}(K',D)}(\mathcal{H}(K, D, K'), J^{K'/K''})$ pour $i \geq 1$. $\square$

B.2.3. Hecke-équivariance de la restriction des scalaires. — On s'intéresse ici à l'équivariance des applications de restriction des scalaires en cohomologie des groupes. On s'assure ainsi que les opérateurs de Hecke agissant sur la cohomologie passent à la limite quand le niveau augmente (*cf.* 6.1.3 et 6.2.3). La proposition B.4 est une légère généralisation du théorème 2.7.6 de Miyake [**35**], qui suppose que les applications φ_ξ sont bijectives.

Considérons le monomorphisme de $\mathcal{H}(K, D)$-module à gauche :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(K, D) & \hookrightarrow & \mathcal{H}(K, D, K') \\ K.\xi.K & \longmapsto & K.\xi.K|K.1.K' = \displaystyle\sum_{K.\nu.K' \in K\backslash K.\xi.K/K'} K.\nu.K' \end{array}$$

Il y a équivalence entre les conditions

- pour tout opérateur $K'.\xi.K' \in \mathcal{H}(K', D')$, l'application φ_ξ est surjective (*i.e.* $K.\xi.K' = K.\xi.K$) ;
- le morphisme (27) restreint à $\mathcal{H}(K', D')$ se factorise par $\mathcal{H}(K, D)$.

Dans ce cas, cette factorisation est le morphisme d'anneaux de Hecke suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(K', D') &\longrightarrow \mathcal{H}(K, D) \\ K'.\xi.K' &\longmapsto \deg(\varphi_\xi).K.\xi.K \end{aligned} \tag{30}$$

Proposition B.4. — *Soient $K \subset D$ une paire de Hecke et $K' \subset D'$ une sous-paire telle que les applications φ_ξ (pour $K'.\xi.K' \in \mathcal{H}(K', D')$) de (24), sont surjectives.*

Alors pour tout D-module à droite V, les morphismes de restriction

$$H^{\cdot}(K, V) \longrightarrow H^{\cdot}(K', V)$$

sont Hecke-équivariants, c'est-à-dire compatibles avec le morphisme d'anneaux (30).

Démonstration. — Par définition, le morphisme (30) est caractérisé par :

$$\forall \xi \in D',\ K.1.K'|K'.\xi.K' = \deg(\varphi_\xi).K.\xi.K|K.1.K'$$

d'où la compatibilitié avec les morphismes

$$\mathrm{Ext}^{\cdot}_D(\mathbb{Z}^{(K\backslash D)}, V) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{\cdot}_D(\mathbb{Z}^{(K'\backslash D)}, V)$$

qui ne sont autres que les morphismes de restriction de la proposition. □

B.3. Anneau de Hecke et algèbre de monoïde. — Nous donnons ici un critère numérique pour qu'un anneau de Hecke soit isomorphe à l'algèbre d'un monoïde.

Ce critère est la formalisation de l'argument utilisé par Hida [**27**, section 2] pour déterminer la structure de certaines algèbres de Hecke locales pour un sous-groupe de type Γ_0 de $\mathbf{G} = \mathbf{SL}_n$. Nous utilisons ce critère en 5.3. pour généraliser le résultat de Hida aux groupes réductifs connexes **G** sur un corps local.

B.3.1. Cas général. —

Lemma B.5. — *Soient K, K' et K'' des sous-groupes d'un monoïde D. Quels que soient les opérateurs*

$$K''.\nu.K \in \mathcal{H}(K'', D, K) \quad \text{et} \quad K.\xi.K' \in \mathcal{H}(K, D, K'),$$

on a l'inégalité $\#(K''\backslash K''.\nu.K).\#(K\backslash K.\xi.K') \leq \#(K''\backslash K''.\nu.\xi.K')$

Et l'égalité est équivalente à

$$K''.\nu.K|K.\xi.K' = K''.\nu.\xi.K' \text{ dans } \mathcal{H}(K'', D, K')$$

Démonstration. — L'inégalité vient de

$$K''.\nu.\xi.K' \subset K''.\nu.K.\xi.K' = \bigcup_{K''.\eta \in K''\backslash K''.\nu.K} \; \bigcup_{K.\theta \in K\backslash K.\xi.K'} K''.\eta.\theta$$

Et l'égalité est équivalente à $K''.\nu.\xi.K' = K''.\nu.K.\xi.K'$ et le fait que la double union précédente est disjointe. Ce qui signifie exactement

$$K''.\nu.K|K.\xi.K' = K''.\nu.\xi.K'$$

d'après la définition de la composition des opérateurs de Hecke. □

B.3.2. Application aux anneaux de Hecke. —

Corollary B.6. — *Soit $K \subset D$ une paire de Hecke et D' un sous-monoïde de D.*

Supposons, d'une part, que pour tout $\xi \in D$, $K\backslash K.\xi.K$ est fini et d'autre part, que la fonction $\xi \longmapsto \#(K\backslash K.\xi.K)$ est multiplicative sur D'.

Alors $K.D'.K$ est un sous-monoïde de D, dont la loi passe au quotient $K\backslash K.D'.K/K$ et on a l'isomorphisme d'anneaux :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[K\backslash K.D'.K/K] &\xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(K, K.D'.K) \\ K.\xi.K &\longmapsto K.\xi.K \end{aligned}$$

Démonstration. — On applique le lemme B.5 avec $K' = K'' = K$. $\square$

Références

[1] A. Ash & G. Stevens – « p-adic deformations of cohomology classes of subgroups of $\mathrm{GL}(n, \mathbf{Z})$ », *Collectanea Math.* **48** (1997), no. 1-2, p. 1–30. 7.4.5

[2] A. Ash & G. Stevens – « Cohomology of arithmetic groups and congruences between systems of Hecke eigenvalues », *J. Reine Angew. Math.* **365** (1986), p. 192–220. B, B.2.1

[3] H. Bass, J. Milnor & J.-P. Serre – « Solution of the congruence subgroup problem for sl_n ($n \geq 3$) and sp_{2n} ($n \geq 2$) », *Publ. Math. I.H.É.S.* **33** (1967), p. 59–137. 7.3.4

[4] A. Borel – *Introduction aux groupes arithmétiques*, Hermann, 1969. 4.3.1

[5] ———, « Automorphic L-functions », in Borel & Casselman [**6**], p. 27–61. 3.2.1, 3.2.2

[6] A. Borel & W. Casselman (eds.) – *Automorphic forms, representations, and L-functions*, Proc. Symp. in Pure Math., vol. 33, 1979. 5, 17, 48

[7] A. Borel & J.-P. Serre – « Corners and arithmetic groups », *Comment. Math. Helv.* **48** (1974), p. 436–491, avec un appendice par A. Douady et L. Hérault : Arrondissement des variétés à coins. 4.2, 4.2.2, 4.2.4

[8] A. Borel & J. Tits – « Groupes réductifs », *Publ. Math. I.H.É.S.* **27** (1965), p. 55–151, avec compléments dans **41** (1972), 253-276. 4.2.1, 5.1.4, 5.2.2, 5.2.4

[9] N. Bourbaki – *Groupes et algèbres de Lie*, Masson, 1971-98. 5.1.1, 5.1.1

[10] ———, *Topologie générale*, Masson, 1974-90. 4.3.1, A.1.1

[11] ———, *Algèbre commutative*, Masson, 1983-98. 1.1.6, 2.4, 6.3.1, 7.4.7

[12] ———, *Théorie des ensembles*, Masson, 1990. 3.1.2

[13] F. Bruhat & J. Tits – « Groupes réductifs sur un corps local I, II et III », *Publ. Math. I.H.É.S.* **41, 60** (1972, 1984), p. 5–252, 5–184, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **34** (1987), 671-698. 5.1, 5.1.1, 5.1.2, 5.1.3, 5.1.4, 5.1.4, 5.2.2, 5.2.3, 6.1.2, 7.3.2

[14] A. Brumer – « On the units of algebraic number fields », *Mathematika* **14** (1967), p. 121–124. 3.2.5

[15] K. Buecker – « Congruences between Siegel modular forms on the level of group cohomology », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **46** (1996), no. 4, p. 877–897. 5

[16] ______, « On the control theorem for the symplectic group », *Compositio Math.* **113** (1998), no. 1, p. 91–115. 5, 7.3.4

[17] P. Deligne – « Variétés de Shimura : Interprétation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques », in Borel & Casselman [**6**], p. 247–289. 4.1, 4.1.2, 4.1.3

[18] M. Demazure – « Schémas en groupes réductifs », *Bull. Soc. math. France* **93** (1965), p. 369–413. 3.2.1

[19] M. Demazure & P. Gabriel – *Groupes Algébriques - Tome I*, Masson et North-Holland, 1970. 2.1.5, 2.4, 3.2.2, 7.1.1

[20] M. Demazure & A. Grothendieck – *Schémas en groupes*, Lecture Notes in Math., vol. 151, 152, 153, Springer-Verlag, 1962-64. 3.2.2, 3.2.2, 3.2.4, 5.2.2, 5.2.3

[21] R. Godement – *Théorie des faisceaux*, Hermann, 1958. 4.3.2

[22] B. Gordon – « Canonical models of Picard modular surfaces », (R. Langlands & D. Ramakrishnan, eds.), Proceedings, vol. 13, Les Publications CRM, 1992, p. 1–29. 7.3.4

[23] A. Grothendieck – « Sur quelques points d'algèbre homologique », *Tôhoku Math. J.* **9** (1957), p. 119–221. A.2.1

[24] H. Hida – « On p-adic Hecke algebras for $GL(2)$ over totally real fields », *Annals of Math.* **128** (1988), p. 295–384. (document), 6.3.3, 7.4.5

[25] ______, « p-ordinary cohomology groups for $SL(2)$ over number fields », *Duke Math. J.* **69** (1993), no. 2, p. 259–313. 4

[26] ______, « p-adic ordinary Hecke algebras for $GL(2)$ », *Ann. Inst. Fourier* **44** (1994), no. 5, p. 1289–1322. 4

[27] ______, « Control theorems of p-nearly ordinary cohomology groups for $SL(n)$ », *Bull. Soc. Math. France* **123** (1995), p. 425–475. (document), 4, 6, 6.3.3, 7.3.2, B, B.3

[28] H. Hida – « Automorphic induction and Leopoldt type conjectures for $\mathrm{gl}(n)$ », *Asian J. Math.* **2** (1998), no. 4, p. 667–710, Mikio Sato : a great Japanese mathematician of the twentieth century. 5, 7

[29] J. C. Jantzen – *Representations of algebraic groups*, Pure and Applied Math., vol. 131, Academic Press, 1987. 7.1.1, 7.3.2

[30] J. Kottwitz – « Stable trace formula : cuspidal tempered terms », *Duke Math. J.* **51** (1984), no. 3, p. 611–650. 3.2.1

[31] M. Kuga, W. Parry & C. H. Sah – « Group cohomology and Hecke operators », Manifolds and Lie groups (Notre Dame, Ind., 1980), Birkhäuser Boston, Mass., 1981, p. 223–266. B

[32] L. V. Kuz'min – « Local extensions associated with l-extensions with given ramification », *Math. USSR Izvestija* **9** (1975), no. 4, p. 693–726. 3.2.2

[33] B. Mazur – « Deforming Galois representations », Galois groups over $\mathbf{Q}$ (Berkeley, CA, 1987), Springer, New York, 1989, p. 385–437. 1.1

[34] J. S. Milne – *Arithmetic duality theorems*, Academic Press, 1986. 2.3.2, 3.2.3

[35] T. Miyake – *Modular forms*, Springer-Verlag, Berlin, 1989, Translated from the Japanese by Yoshitaka Maeda. B, B.2.3

[36] J. R. Munkres – *Elementary differential topology*, Ann. of Math. Studies, vol. 54, Princeton Univ. Press, 1963. A.2.3

[37] J. Neukirch – *Class field theory*, Grundlehren der math. Wissenschaft, vol. 280, Springer-Verlag, 1986. 3.2.4

[38] V. Platonov & A. Rapinchuk – *Algebraic groups and number theory*, Pure and Applied Math., vol. 139, Academic Press, 1994. 3.2.5, 7.3.4

[39] M. Raynaud – *Anneaux locaux henséliens*, Lecture Notes in Math., vol. 169, Springer-Verlag, 1970. 6.3.1

[40] L. Saper – « Rapoport conjecture », exposé au Semestre Formes Automorphe, 2000, Centre Émile Borel, Paris. 7, 7.3.1, 7.3.1

[41] I. Satake – « Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p-adic fields », *Publ. Math. I.H.É.S.* **18** (1963), p. 5–69. 6.1.2

[42] M. Schlessinger – « Functors of Artin rings », *Trans. Amer. Math. Soc.* **130** (1968), no. 2, p. 208–222. 1.1, 1.1.4, 1.1.6

[43] P. Schneider & U. Stuhler – « Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building », *Publ. Math. I.H.É.S.* **85** (1997), p. 97–191. 5.2.5

[44] J.-P. Serre – *Corps locaux*, Publ. Math. de l'Univ. de Nancago, vol. 8, Hermann, 1968. 6.4.2

[45] ______, « Cohomologie des groupes discrets », *Prospects in Mathematics*, Ann. of Math. Studies, vol. 70, Princeton Univ. Press, 1971, p. 77–169. A.2.3, A.3

[46] ______, *Cohomologie galoisienne*, Lecture Notes in Math., vol. 5, Springer-Verlag, 1994. 2.2.3, 2.3.2, 5.1.3, B, B.2.1

[47] G. Shimura – *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Princeton Univ. Press, 1971. B

[48] T. Springer – « Reductive groups », in Borel & Casselman [**6**], p. 3–27. 3.2.1

[49] J. Tilouine – *Deformations of Galois representations and Hecke algebras*, Publ. Mehta Research Institute, Narosa Publishing House, New Dehli, 1996. 1.1, 2.3.1, 3, 3.1.6

[50] J. Tilouine & E. Urban – « Several-variable p-adic families of Siegel-Hilbert cusp eigensystems and their Galois representations », *Ann. Sc. É.N.S* **32** (1999), p. 499–574. (document), 5, 7, 7.3.2, 7.4.5

[51] J. Tits – *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, Lecture Notes in Math., vol. 386, Springer-Verlag, 1974. 4.2.2, 5.2.1

Index

Hypothèses

Terminologie

Résumé. — Le point de départ de cette thèse est l'étude d'une conjecture du type $R \simeq \mathbb{T}$ dans le contexte général d'un groupe réductif connexe $\mathbf{G}$ sur $\mathbb{Q}$, admettant une variété de Shimura et non nécessairement déployé.
L'hypothèse principale est la quasi-ordinarité des représentations automorphes considérées et son reflet galoisien conjectural.
On obtient, sous certaines hypothèses, l'égalité des dimensions de Krull d'un anneau de déformation universelle d'une représentation galoisienne quasi-ordinaire et d'une algèbre de Hecke quasi-ordinaire localisée.
La théorie des immeubles de Bruhat-Tits est utilisée pour obtenir la structure des algèbres de Hecke paraboliques en p. D'un théorème de contrôle général, on déduit dans certains cas que l'algèbre de Hecke quasi-ordinaire universelle est finie et sans torsion sur l'algèbre de Hida-Iwasawa du groupe $\mathbf{G}$.
Ce résultat permet de construire des familles de systèmes de valeurs propres pour les opérateurs de Hecke, quasi-ordinaires, passant par un système donné.

Abstract. — The starting point of this work is the study of a conjecture of type $R \simeq \mathbb{T}$ in the general case of a connected reductive group $\mathbf{G}$, defined over $\mathbb{Q}$, admitting a Shimura variety and not necessarily split.
The main assumption is the near-ordinarity of automorphic representations and its Galois counterpart.
We get, under mild hypotheses, the equality of the Krull dimensions of a universal deformation ring of a nearly-ordinary Galois representation and of a localised nearly-ordinary Hecke algebra.
The theory of Bruhat-Tits building is used to study the structure of parabolic Hecke algebras at p. From a general control theorem, we deduce, in certain cases, that the universal nearly-ordinary Hecke algebra is finite and torsion free over the Hida-Iwasawa algebra of $\mathbf{G}$.
This result allows to construct families of nearly-ordinary Hecke eigensystems passing through a given eigensystem.

Classification mathématique par sujets. — 11F85(11F80,11G18,11R39)
Mots clefs. — Algèbres de Hecke, familles de Hida, quasi-ordinarité, anneaux de déformation, représentations galoisiennes.
Keywords. — Hecke algebras, Hida's families, near-ordinarity, deformation rings, Galois representations.