



**HAL**  
open science

# Application des représentations diffusives à temps discret

Gabriel Dauphin

► **To cite this version:**

Gabriel Dauphin. Application des représentations diffusives à temps discret. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Télécom ParisTech, 2001. Français. NNT: . tel-00005780

**HAL Id: tel-00005780**

**<https://pastel.hal.science/tel-00005780>**

Submitted on 5 Apr 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Thèse

présentée pour obtenir le grade de  
docteur de l'École Nationale Supérieure  
des Télécommunications

Spécialité : Signal et Images

## Gabriel Dauphin

### Application des représentations dif- fusives au temps discret

Soutenue le 20 décembre 2001 devant le jury composé de

Bernhard Maschke

Président

Laurent Baratchart  
Pierre Rouchon

Rapporteurs

Olof Staffans  
Jean-Jacques Loiseau  
Catherine Bonnet

Examineurs

Denis Matignon

Directeur de thèse

École Nationale Supérieure des Télécommunications



# Remerciements

J'ai eu la chance d'effectuer ma thèse à l'Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications sous la responsabilité de Denis Matignon. Je tiens à exprimer ici ma sincère reconnaissance pour m'avoir fait partager son savoir faire, sa disponibilité, mais aussi pour avoir su me laisser une certaine liberté.

J'adresse mes remerciements à mes rapporteurs Laurent Baratchart et Pierre Rouchon pour avoir accepté de prendre le temps de lire avec attention mon manuscrit de thèse, à mes examinateurs Bernhard Maschke, Jean-Jacques Loiseau et Catherine Bonnet qui ont aussi contribué à améliorer le manuscrit.

Je suis tout particulièrement redevable à Laurent Baratchart pour avoir proposé de multiples corrections et améliorations, pour m'avoir fait découvrir un domaine particulier et, me semble-t-il méconnu, de l'analyse complexe.

Je suis également très reconnaissant à Olof Staffans, qui en plus de s'être déplacé jusqu'en France, m'a fait découvrir une autre littérature sur les systèmes dissipatifs en dimension infinie.

Je remercie sincèrement Gérard Monstény pour son enthousiasme et aussi pour les fructueuses discussions que nous avons eues.

Je remercie David Héleschewitz pour notre collaboration agréable et riche.

Je remercie Dorothée Normand-Cyrot et Salvatore Monaco pour être venu répondre à mes questions sur le temps discret.

Je remercie Pierre-Alexandre Bliman pour s'être intéressé à mon travail.

Je remercie tous ceux que je suis allé déranger quelques fois avec des questions techniques et qui m'ont consacré amicalement leur temps pour me répondre, et notamment Jamal Najim, Eric Moulines, Gilles Fay, Gérard Blanchet.

Je remercie également tous mes amis(es) qui ont aussi participé d'une manière ou d'une autre à la réalisation de ce travail. Ils sont nombreux(ses), qu'ils trouvent ici l'expression de ma sympathie et de ma profonde reconnaissance.

Je tiens aussi à remercier simplement ma famille et mes parents.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
Guide de lecture . . . . .	12
Notations . . . . .	15
<b>I Propriété générale des filtres diffusifs</b>	<b>21</b>
<b>1 Exemples et définitions des filtres diffusifs</b>	<b>23</b>
1.1 Exemples de filtres diffusifs . . . . .	23
1.2 Définition des filtres diffusifs . . . . .	26
1.2.1 Caractéristique entrée-sortie des filtres diffusifs . . . . .	26
1.2.2 Réalisations diffusives . . . . .	28
1.3 Propriétés des filtres diffusifs . . . . .	30
1.3.1 Conditions suffisantes pour qu'un filtre soit diffusif . . . . .	30
1.3.2 Caractéristique de la fonction de transfert diffusive au voi- sinage de la coupure . . . . .	34
<b>2 Propriétés asymptotiques des filtres diffusifs</b>	<b>39</b>
2.1 Lemme de Watson discret . . . . .	40
2.2 Lemme de correspondance asymptotique . . . . .	42
2.3 Processus aléatoire à mémoire longue généré par des filtres diffusifs	45
<b>3 Positivité et dissipativité des filtres numériques</b>	<b>47</b>
3.1 Positivité des filtres numériques . . . . .	48
3.1.1 Définition de la positivité . . . . .	48
3.1.2 Positivité d'un filtre diffusif . . . . .	50
3.1.3 Positivité d'un filtre rationnel . . . . .	53
3.2 Dissipativité des filtres numériques . . . . .	55
3.2.1 Dissipativité des filtres diffusifs . . . . .	55
3.2.2 Dissipativité des filtres rationnels . . . . .	57
<b>II Stabilités de couplages formés d'un filtre diffusif et</b>	

<b>d'un filtre rationnel</b>	<b>59</b>
<b>4 Présentation des couplages de filtres étudiés</b>	<b>61</b>
<b>5 Stabilité énergétique</b>	<b>69</b>
<b>6 Stabilité EBSB</b>	<b>77</b>
6.1 Stabilité EBSB par un raisonnement algébrique . . . . .	78
6.2 Résultat de décomposition . . . . .	81
6.3 Comportement asymptotique de la réponse impulsionnelle . . . . .	86
<b>7 Stabilité interne asymptotique</b>	<b>93</b>
7.1 Stabilité interne . . . . .	94
7.1.1 Réalisation associée à $\mathcal{H}^S \in \Sigma_2$ . . . . .	94
7.1.2 Fonctionnelle de Lyapunov et stabilité interne . . . . .	96
7.1.3 Principe d'invariance de LaSalle . . . . .	98
7.2 Stabilité interne asymptotique . . . . .	100
7.2.1 Convergence faible de l'état $\varphi_n$ vers zéro et convergence de $X_n$ et $Z_n$ vers zéro. . . . .	100
7.2.2 La convergence forte est une conséquence de la convergence faible . . . . .	101
<b>8 Analyse asymptotique de la convergence</b>	<b>105</b>
8.1 Etude du comportement asymptotique du couplage . . . . .	105
8.1.1 Transformée en $Z$ . . . . .	106
8.1.2 Application du résultat de décomposition . . . . .	108
8.1.3 Comportements asymptotiques aux temps longs . . . . .	110
8.2 Exemple et simulation . . . . .	112
<b>A Intégrales de Cauchy</b>	<b>133</b>
<b>B Espaces de Hardy</b>	<b>137</b>
B.1 Définition de $\mathbb{H}^1(\mathbb{E})$ . . . . .	137
B.2 Propriété de $\mathbb{H}^1(\mathbb{E})$ . . . . .	141
B.3 Définition et propriété d'autres espaces de fonctions analytiques . . . . .	143
<b>C Simulation des filtres diffusifs</b>	<b>147</b>
C.1 Méthodes d'approximation classiques . . . . .	147
C.2 Approximation issue des diffusions . . . . .	150
C.3 Algorithmes utilisés pour faire les simulations . . . . .	156
<b>D Programmes</b>	<b>161</b>

# Introduction

Cette thèse traite de l'étude des filtres causaux *non rationnels* et à *temps discret* : la fonction de transfert de tels filtres n'est pas une fraction rationnelle, et leur réponse impulsionnelle est infinie et n'est pas une combinaison linéaire de suites géométriques. L'outil que nous nous proposons d'utiliser est les *représentations diffusives* et cet outil s'applique à certains filtres, dits diffusifs : ces filtres se mettent sous la forme d'*agrégation continue* de filtres autorégressifs d'ordre 1, leur réponse impulsionnelle est une *somme continue* de suites géométriques.

## Applications des filtres non rationnels à temps discret dans la littérature

Les différences fractionnaires et plus généralement les filtres non rationnels font l'objet d'une étude théorique (cf [SKM87] et [Mat01]). Les applications des filtres non rationnels se regroupent en trois domaines.

Certains filtres non rationnels ont été introduits pour faciliter l'étude et la simulation des *opérateurs d'intégration et de dérivation fractionnaires*. Ainsi les formules de Grünwald-Letnikov ont permis de définir l'intégration fractionnaire comme le rappelle [Pod99, chapitre 2] : pour une fonction  $u(t)$  localement sommable, l'intégration fractionnaire de  $u$  d'ordre  $\alpha \in ]0, 1[$  est la fonction donnée point par point, par :

$$I^\alpha[u](t) = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{E[\frac{t}{T}]} h_k^{FI} T^\alpha u(t - kT) \quad (1)$$

où  $E[\frac{t}{T}]$  est la partie entière de  $\frac{t}{T}$  et  $h_k^{FI}$  est la réponse impulsionnelle des *différences fractionnaires* d'ordre  $-\alpha$ . C'est un filtre causal dont la fonction de transfert est  $(1 - z^{-1})^{-\alpha}$ ,  $|z| > 1$ , ce filtre est noté  $\mathcal{H}^{FI}$  et servira d'illustration tout au long de la thèse (cf : exemple 1 p. 24).

Les méthodes à pas multiples d'ordre fractionnaire, (cf : [Lub86]), approximent l'intégration fractionnaire et aussi des opérateurs pseudo-différentiels en utilisant *d'autres filtres non rationnels* à temps discret (voir [Hel00]). Par exemple les filtres causaux de fonctions de transfert  $[\frac{1}{2}(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})^{-1}]^{-\alpha}$ , ou  $(\frac{25}{12} -$



$4z^{-1} + 4z^{-2} - \frac{4}{3}z^{-3} + \frac{1}{4}z^{-4})^{-\alpha}$ , pour  $|z| > 1$ , sont deux autres approximations de l'intégration fractionnaire mais, qui sont d'ordre plus élevé que  $(1 - z^{-1})^{-\alpha}$ . Le premier filtre est noté  $\mathcal{H}^{BI}$  et servira aussi d'illustration (cf : exemple 2 p. 24).

Dans l'article [Hur51], il est montré que le dimensionnement du barrage sur le Nil en Egypte doit être évalué à partir de données statistiques sur le niveau des crues sur des *milliers* d'années et non sur une centaine d'années. La nécessité de connaître un très grand nombre de données passées traduit le phénomène de *mémoire longue*.

De tels processus aléatoires  $x_n$  peuvent être générés à partir d'un bruit blanc gaussien noté ici  $\varepsilon_n$  passé à travers un filtre à temps discret de réponse impulsionnelle  $h_n$ .

$$x_n = \sum_{k=0}^n h_{n-k} \varepsilon_k \quad (2)$$

Un processus aléatoire est dit à mémoire longue lorsque l'autocorrélation  $E(\sum_{n=0}^{\infty} x_n x_{n+k})$  n'est pas une suite sommable ou lorsque sa densité spectrale (transformée en  $Z$  de cette autocorrélation) est singulière en  $\omega = 0$  (où  $E$  désigne l'espérance mathématique). Simultanément dans [Gra80], [GJ80] et [Hos81], il a été proposé de générer de tels processus avec (2) en prenant pour  $h_n$  la réponse impulsionnelle de  $\mathcal{H}^{FI}$ . Dans [Gra80] il a aussi été montré que si  $h_n = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} n^{\alpha-1}$  alors (2) génère aussi un processus aléatoire à mémoire longue. Nous appelons  $\mathcal{H}^{LN}$  le filtre défini par cette dernière réponse impulsionnelle et il servira aussi d'illustration.  $\mathcal{H}^{LN}$  et  $\mathcal{H}^{FI}$  permettent de générer des processus aléatoires dont le comportement asymptotique de la densité spectrale est proportionnel à  $\omega^{-2\alpha}$  quand  $\omega \rightarrow 0$ .

Dans [WG78], l'apparition des tâches solaires est aussi modélisée par un processus aléatoire à *longue dépendance*. L'autocorrélation de ce processus présente des oscillations dont l'amplitude décroît lentement. La densité spectrale est singulière en une fréquence  $\omega = \omega_0 \neq 0$  et non plus en  $\omega = 0$ . [GZW86] montrent que ces processus peuvent être générés par (2) où  $h_n$  est la réponse impulsionnelle de  $(1 - 2\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2})^{-\alpha}$ . Ces processus sont dits *Gegenbauer*, et ces filtres peuvent aussi avoir une représentation diffusives mais sous une forme généralisée, dite de deuxième espèce, (cf : [DHM00] et [Hel00, §8.2]).

Dans [Lin91], il est proposé de générer des processus aléatoires dont le comportement asymptotique de la densité spectrale s'écrit sous la forme de  $L(\omega)\omega^{-2\alpha}$  où  $L(\omega)$  est une fonction lentement variante (i.e.  $L(\omega) \rightarrow \infty$  et  $\forall k > 0, \frac{L(k\omega)}{L(\omega)} \rightarrow 1$  quand  $\omega \rightarrow 0$ ).

Plus généralement une littérature importante est consacrée à l'étude de tels processus aléatoires. Dans [Vat98, p. 127–134], des algorithmes sont proposés pour générer ces processus aléatoires. L'article [GD96] est une synthèse des modèles

qui existent pour décrire ces longues dépendances.

Si on considère,

$$\begin{cases} x_{k+1} = ax_k + b \sum_{j=1}^n u_k^j + \varepsilon_{k+1} \\ y_k^j = x_k + \eta_k^j \end{cases}$$

où  $\varepsilon_k$  et  $\eta_k^j$  sont des bruits blancs gaussiens indépendants,  $x_k$  est l'état et  $u_k^j$  est le contrôle effectué par l'agent  $j$  connaissant l'information  $y_0^j \dots y_k^j$ . Alors, selon [WR74] le meilleur contrôle linéaire possible effectué par l'ensemble des agents est donné par une fonction de transfert non rationnelle.

## Etat de l'art sur les représentations diffusives

L'idée des représentations diffusives, à savoir chercher à représenter un opérateur non-standard par une agrégation continue de dynamiques d'ordre 1, n'est en fait pas nouvelle. Cette idée a été proposée par [GJ80] pour représenter le processus aléatoires  $X_n$  formé à partir de (2) quand  $h_n$  est la réponse impulsionnelle de  $\mathcal{H}^{FI}$ . Plus précisément, dans cette optique, on considère  $K$  processus aléatoires indépendants générés par (1) où, pour chaque processus aléatoire,  $h_n$  est une réalisation d'un tirage aléatoire suivant une loi Béta. Ces processus sont indépendants et il est montré que la moyenne de ces processus tend vers  $X_n$  lorsque  $K \rightarrow \infty$ . Cette idée a aussi permis à [VDO95] de représenter les processus de Gegenbauer. Cette idée se distingue néanmoins des représentations diffusives en ce que, sur l'exemple développé par [GJ80], la moyenne des  $h_n$  ne coïncide pas avec la réponse impulsionnelle de  $\mathcal{H}^{FI}$ .

Cette idée d'agréger des dynamiques d'ordre 1 est classique en *viscoélasticité*. En effet, le noyau de convolution  $h(t)$  liant la contrainte et la déformation est appelé *la fonction de relaxation* et est exprimé en fonction d'un *spectre de relaxation*  $H(\tau)$  (cf [Chr82, ch. 1]) :

$$h(t) = \int_0^\infty H(\tau) e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau \quad (3)$$

D'ailleurs les opérateurs diffusifs fractionnaires sont utilisés en mécanique des milieux continus et cette représentation a permis de le justifier (cf : [Rou53]).

Ce spectre de relaxation est aussi introduit, par [GM97], sur des exemples d'opérateurs différentiels fractionnaires et, ce spectre est appelé *fonction spectrale*. Les fonctions de transferts de ces opérateurs sont analytiquement prolongées sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  et la transformée inverse de Laplace des fonctions de transfert d'opérateurs différentiels est faite avec un contour d'intégration particulier appelé *Hankel* qui n'entoure que  $\mathbb{R}_-$ .

L'existence de ce spectre est démontrée par le théorème de Bernstein (cf : [Wid46]) sous des hypothèses particulières sur la réponse impulsionnelles ( $h(t)$ )

continue sur  $]0, +\infty[$ ,  $h(t)$   $C^\infty$  sur  $]0, +\infty[$  et  $\forall n \geq 0, (-1)^n h^{(n)}(t) \geq 0$ ;  $h(t)$  est alors dite *complètement monotone*. Ce résultat permet à [BBF74] d'écrire une réalisation en dimension infinie pour ces systèmes, cette réalisation est ce que nous appellerions une réalisation diffuse. Ces idées ont été appliquées à la viscoélasticité dans [DM88] à l'aide des *semi-groupes continus* (voir par exemple [CZ95]) et dans [Sta94] où la *dissipativité* entraîne le caractère *bien posé* du système, (voir par exemple [WST01]).

Mathématiquement, une fonction ainsi définie par une agrégation d'opérateurs autorégressifs d'ordre 1 est une *intégrale de Cauchy*, dont certaines propriétés sont exposées dans [NAC84] et dans [Mus92]. En électrostatique les potentiels double couches s'expriment aussi avec un formalisme semblable (cf [DL84, p. 353], [Mus92, p.23-25]). Un historique sur les intégrales de Cauchy se trouve dans [Gak66, p.75-76].

L'étude des représentations diffuses est l'objet d'une thématique de recherche développée par le groupe de travail<sup>1</sup>. Les opérateurs non-standard visés par les représentations diffuses sont en fait des opérateurs pseudo-différentiels, leur théorie a été élaborée d'abord dans [Mon98] puis dans [Mon00b] (de nombreuses simulations se trouvent par exemple dans [DM00]). Les réalisations diffuses (au sens de la théorie des systèmes) transforment une équation pseudo-différentielle avec des opérateurs héréditaires en une équation différentielle du premier ordre sur un espace de Hilbert de dimension infinie. Cette structure permet une analyse de la stabilité interne et fournit une méthode naturelle pour approximer les solutions (cf [Hel00]). Des extensions aux équations temps-variantes et non-linéaires ont été envisagées (cf : [AMM00a] et par exemple [Sor00] pour les opérateurs à hystérésis).

Les applications sont diverses (cf : [MM98] et [AMM00b]). Elles concernent l'étude théorique des processus aléatoires générés par des opérateurs diffusifs (cf : [CC98]) et des applications sur les capteurs CCD (cf : [SLMF97]) ou sur la simulation des turbulences du vent sur une aile d'avion [IMM00]. Un contrôle diffusif par rétroaction pseudo-différentielle a été proposé (cf : [MAM97],[Bid98]). Un nouveau concept de robustesse est appliqué dans [VAMM00] : la pseudo-invariance sous groupe de transformation. L'identification d'opérateurs diffusifs est aussi un enjeu important (cf : [Bid98] et [GB98]).

## Problèmes examinés dans la thèse

Notre activité de recherche se concentre tout d'abord sur la mise en place des *représentations diffuses à temps discret* : l'analyse asymptotique, l'élaboration d'un critère de *dissipativité*. Ces outils permettent ensuite l'étude du couplage d'un filtre diffusif avec un filtre de rationnel dissipatif : *stabilités* et analyse asymptotique aux temps longs. Ce travail s'est fait essentiellement à temps discret

---

<sup>1</sup>le site internet est <http://www.laas.fr/gt-opd>

(i.e. sur des filtres numériques) et autant avec une approche externe *entrée-sortie* qu'avec une approche interne *système*.

Ces objectifs soulèvent un certain nombre de questions :

- Les filtres qui admettent une représentation diffusive sont dits diffusifs. Parmi les exemples de filtres non rationnels cités ci-dessus, quels sont ceux qui sont diffusifs ? (cf : §1.2).
- La discrétisation d'un opérateur diffusif à temps continu est-elle encore un filtre diffusif à temps discret ? Est-ce que cela dépend du schéma de discrétisation ? (cf : §1.2.1).
- Est-ce que le quotient de deux filtres diffusifs est encore un filtre diffusif ? (cf : §6.2).
- Connaissant le symbole diffusif, peut-on simuler le prolongement analytique d'une fonction de transfert dans le disque unité ? (cf : §C.3).
- Pour un filtre diffusif de fonction de transfert  $\mathcal{H}(z)$  et de réponse impulsionnelle  $h_n$ , à quelles conditions  $\mathcal{H}(z)$  et  $h_n$  ont-ils le même comportement asymptotique que la fonction de transfert et la réponse impulsionnelle des différences fractionnaires ? (cf : §2.1 et §2.2).
- Les différences fractionnaires,  $\mathcal{H}^{FI}$  est un filtre dit à mémoire longue. Existe-t-il un contrôleur qui donne au bouclage une stabilité exponentielle ? (cf : §6.2 pour un point de vue entrée-sortie et §8.1.3 pour une approche système).
- Pour un système couplé formé d'un filtre rationnel et de  $\mathcal{H}^{FI}$ , et en supposant que le système soit asymptotiquement stable, est-ce que la vitesse de convergence vers zéro est affectée par le choix de la condition initiale du filtre diffusif, peut-on accélérer cette convergence en choisissant un filtre rationnel particulier ? (cf : §8.1.3 et §6.3).
- Pour un filtre diffusif positif, existe-t-il une réalisation dissipative ? (cf : §3.2).
- Lorsqu'on rajoute un retard sur un filtre diffusif, le nouveau filtre n'est plus positif ; peut-on encore utiliser la positivité et la dissipativité pour prouver les stabilités entrée-sortie et interne d'un couplage comprenant ce filtre ? (cf : chapitre 4 et §7.1.2).
- Dans quelle mesure un filtre diffusif peut-il être utilisé comme un terme d'amortissement qui stabilise un système instable ? (cf : chapitre 5).

Pour beaucoup de ces questions nous proposerons des conditions suffisantes relativement générales, pour d'autres nous montrons sur des exemples qu'il est possible de répondre favorablement.

## Guide de lecture

### Mise en place des représentations diffusives à temps discret (chapitre 1)

Un filtre numérique diffusif est une *superposition continue* de dynamiques classiques d'ordre 1 (i.e. de filtres d'ordre 1). Le poids de cette superposition est appelé *symbole diffusif* (ou aussi représentation diffusive) noté  $\mu$ . Il s'agit dans beaucoup d'exemples d'une fonction *sommable* à valeurs réelles, définie sur  $[-1, 1]$ , généralement singulière en  $\rho = \pm 1$  et plutôt régulière ailleurs. Cette mise en parallèle de filtres d'ordre 1 constitue un système de dimension *infinie* avec une structure markovienne en temps. L'état du système est constitué de l'ensemble des états de chacun de ces filtres élémentaires. Cette *réalisation diffusive* prend son sens dans un cadre fonctionnel hilbertien approprié.

Les différences fractionnaires (i.e. la discrétisation de l'intégration fractionnaire par la méthode d'Euler rétrograde) sont un exemple de filtre diffusif. Plus généralement il a été montré que certaines méthodes de discrétisations conservent le caractère diffusif.

L'analyse de la fonction de transfert d'un filtre diffusif montre qu'il n'est pas exponentiellement stable en général. Cette analyse conduit à la propriété suivante :

- La fonction de transfert peut toujours être prolongée analytiquement dans le disque unité avec en général une discontinuité le long du segment  $[-1, 1]$ . Et réciproquement, toute fonction de transfert qui peut être prolongée analytiquement à l'intérieur du cercle unité avec une discontinuité le long du segment  $[-1, 1]$  est aussi un filtre diffusif (sous quelques précautions techniques).

### Propriétés asymptotiques des filtres diffusifs (chapitre 2)

La réponse impulsionnelle et la fonction de transfert s'expriment à l'aide de ce symbole diffusif via deux expressions intégrales simples. Ces relations ainsi que les exemples de filtres diffusifs, permettent d'établir une correspondance entre la singularité du symbole diffusif  $\mu$  en  $\rho = \pm 1$  et, d'une part, la singularité de la fonction de transfert  $\mathcal{H}$  au voisinage de  $z = \pm 1$  et, d'autre part, la décroissance lente de la réponse impulsionnelle  $h_n$  caractéristique du phénomène de mémoire longue (cf : [DM99]). Cette dernière correspondance porte le nom de lemme de Watson discret. Elle montre que la caractéristique *mémoire longue* se trouve déterminée par le comportement asymptotique de  $\mu$  en  $\rho = 1$ .

## Dissipativité et positivité des filtres diffusifs (chapitre 3)

Pour les filtres rationnels, un filtre est dit positif si le diagramme de Nyquist (i.e. l'image du cercle unité par sa fonction de transfert) se trouve dans le demi-plan complexe droit ou, de façon équivalente, si la somme des produits entrées-sorties est positive (la condition initiale étant alors supposée nulle). Ces deux propriétés sont appelées *positivité*. Sous certaines précautions techniques, les fonctions de transfert des filtres diffusifs sont dans l'espace de Hardy noté  $\mathbb{H}^1(\mathbb{E})$  pour lequel cette équivalence reste vraie. Elle permet de construire un critère de positivité portant sur le symbole diffusif. Ces notions sont précisées dans [DM01b]. Notons que pour certains schémas de discrétisation, un opérateur diffusif positif à temps continu se transforme en un filtre diffusif à temps discret qui reste positif.

Le *lien direct*, (i.e. le premier terme de la réponse impulsionnelle et aussi le terme  $D$  d'une réalisation d'état  $(A, B, C, D)$ ), joue un rôle particulier à temps discret pour la positivité : un filtre positif a toujours un lien direct strictement positif. Contrairement aux représentations diffusives à temps continu, le lien direct d'un filtre diffusif numérique ne dépend pas du symbole diffusif, et les filtres d'ordre 1 (i.e. ceux utilisés pour définir  $\mathcal{H}$ ) ne sont pas positifs. Aussi le critère de positivité à temps discret  $\mathcal{H}(z = \pm 1) \geq 0$  est différent de celui à temps continu ( $\mu(\rho) \geq 0$ ), il inclut en particulier des filtres où  $\mu(\rho) \leq 0$  (cf : [DM99]).

A l'image de [Mon98], il a aussi été montré que lorsque le critère de positivité est respecté, la réalisation diffuse de ce filtre est *dissipative* : une fonctionnelle de Lyapunov est construite, et son évolution est telle que sa variation le long des trajectoires soit majorée par le produit entrée-sortie. Rappelons que la dissipativité d'une réalisation révèle la positivité du filtre (cf : [Wil72]).

Tous ces outils vont être très utiles pour l'étude des stabilités de systèmes plus complexes.

## Stabilité $\mathbb{H}^\infty$ d'un système couplé, formé d'un filtre rationnel positif et d'un filtre diffusif positif (chapitres 4 et 5)

Les propriétés établies précédemment permettent maintenant d'étudier la stabilité du couplage d'un filtre rationnel stable et positif  $\mathcal{R}$ , couplé avec un filtre diffusif positif  $\mathcal{H}$ . Ces systèmes incluent une discrétisation d'un oscillateur perturbé par un opérateur diffusif, étudié en temps continu dans [Mat98b] et [MAM00] notamment.

Le concept de positivité avait permis de proposer des conjectures et de prouver des résultats de stabilité sur le problème de Lur'e à la fin des années 60 (cf : [ZF68]). Ce concept permet ici de prouver que la fonction de transfert du système bouclé,  $\mathcal{H}^S$  est dans  $\mathbb{H}^\infty$ , et par suite de prouver la stabilité énergétique (i.e. si l'entrée est d'énergie finie alors la sortie est aussi d'énergie finie, cf : [Par97, ch. 1, p. 86]). Le théorème de Nyquist est valable en dimension infinie, parce qu'il

repose sur le calcul d'un résidu logarithmique. Cependant ce théorème suppose en général que les fonctions de transfert sont méromorphes sur un voisinage du cercle unité (cf : [CZ95, p. 569]). Cette hypothèse n'est pas vérifiée pour les filtres diffusifs, mais une analyse plus fine du dénominateur au voisinage de  $z = 1$  permet d'appliquer ce théorème, et ainsi de prouver que la fonction de transfert du système bouclé  $\mathcal{H}^S(z)$  est dans  $\mathbb{H}^\infty(\mathbb{E})$  (i.e.  $\mathcal{H}^S(z)$  est holomorphe et bornée hors du disque unité).

## Stabilité EBSB du système couplé (chapitre 6)

La *stabilité EBSB* (i.e. entrée-bornée, sortie-bornée) de  $\mathcal{H}^S$  s'appuie sur le résultat précédent ( $\mathcal{H}^S \in \mathbb{H}^\infty(\mathbb{E})$ ) et s'obtient en analysant  $\mathcal{H}^S$  dans le disque unité et en particulier les asymptotiques de  $\mathcal{H}^S$  au voisinage des singularités.

$\mathcal{H}^S$  a une singularité le long du segment  $[-1, 1]$ , tout comme un filtre diffusif. Des arguments semblables à ceux utilisés dans [BP00b] montrent que  $\mathcal{H}^S$  n'a qu'un nombre fini de pôles stables et pas de pôles instables. Le système étudié est en fait la *somme* d'un filtre rationnel  $\mathcal{N}$  et d'un autre filtre diffusif. C'est le résultat de *décomposition* proposé par [Mat98b] en temps continu. Les techniques de simulation (cf : annexe C) permettent de visualiser le symbole diffusif  $\mu^S$  de ce nouveau filtre diffusif et de localiser les pôles du nouveau filtre rationnel  $\mathcal{N}$ .

Une correspondance est établie entre la singularité de  $\mu$  (non-couplé) et la lente décroissance de réponse impulsionnelle du système bouclé  $\mathcal{H}^S$  au moyen des résultats établis au chapitre 2. On obtient ainsi différents comportements asymptotiques, suivant que  $\mathcal{R}$  s'annule ou non en  $z = \pm 1$ . Ces asymptotiques prouvent que dans de nombreux cas, le système est stable EBSB. Ceci est exposé dans [DHM00] pour l'exemple de l'oscillateur perturbé par un filtre diffusif.

## Stabilité asymptotique du système couplé (chapitre 7 et 8)

La dissipativité a permis dans [MAM97] de prouver notamment la stabilité interne de systèmes plus complexes au moyen d'une fonction de Lyapunov qui révèle la dissipativité.

Le lemme de Kalman-Popov-Yacubovich (rappelé et démontré dans [Cai88, p. 244-261]) révèle la dissipativité de toute réalisation minimale de  $\mathcal{R}$ . On forme la réalisation du système couplé à partir de la réalisation du filtre diffusif  $\mathcal{H}$  et d'une réalisation minimale de  $\mathcal{R}$ . La dissipativité de chacune des réalisations permet de construire une fonction de Lyapunov globale qui révèle la *stabilité interne* du système (i.e. lorsque le système est soumis à une entrée nulle et avec des conditions initiales non nulles, l'état du système reste contenu dans un ensemble borné de l'espace d'état de Hilbert), ceci est exposé dans le cas d'un oscillateur couplé avec un filtre diffusif dans [DHM00].

La stabilité interne est en fait *asymptotique* (i.e. l'état du système converge fortement vers zéro pour la norme associée à l'espace de Hilbert). En temps continu

[Mon00a] le prouve sur un exemple. Pour le temps discret, nous adaptons certains éléments de cette preuve, et faisons usage du *système adjoint* pour conclure. Cette démonstration est exposée dans [DM01b] pour l'oscillateur perturbé par un filtre diffusif. Elle se fait en trois étapes :

- Une hypothèse de *coercivité* prouve que l'entrée du filtre diffusif tend vers zéro.
- La stabilité interne suffit alors à prouver que l'état du filtre diffusif converge *faiblement* vers zéro.
- L'adjoint (au sens de l'espace de Hilbert) du système bouclé s'interprète aussi comme un couplage entre le filtre diffusif  $\mathcal{H}$  et un autre ARMA. Il s'ensuit que la fonction de Lyapunov, forme quadratique en l'état à l'instant  $n$ , se transforme sous l'action de l'adjoint, en une forme bilinéaire en l'état à l'instant initial et à l'instant  $2n$  : elle peut alors s'interpréter comme une réponse impulsionnelle diffuse ; la convergence faible de l'état implique dans ce cas la convergence forte vers zéro.

Cette interprétation diffusive de la fonction de Lyapunov permet aussi d'évaluer sa vitesse de décroissance en fonction de la singularité du symbole diffusif et de la singularité de la condition initiale de  $\mathcal{H}$  (i.e. c'est une fonction qui peut être singulière en  $\rho = \pm 1$ ). Ces asymptotiques justifient a posteriori le choix de la norme (et donc de l'espace de Hilbert) pour laquelle la convergence forte a été montrée (i.e. il semble que des conditions initiales hors de cet espace de Hilbert puissent ne plus entraîner la stabilité interne).

En résumé, les réalisations diffusives à temps discret ont été mises en place, quelques propriétés ont été étudiées, des outils de simulation ont été développés. Les applications concernent des systèmes couplés associant un filtre rationnel positif et un filtre diffusif. Les résultats obtenus sont : le couplage est énergétiquement stable grâce au théorème de Nyquist ; le couplage est EBSB-stable grâce à un résultat de décomposition du système couplé en un autre filtre rationnel stable et un autre filtre diffusif stable ; le couplage des deux réalisations est stable de manière interne parce que la dissipativité de chacun des éléments permet de construire une fonction de Lyapunov globale ; ce couplage est en fait aussi asymptotiquement stable.

## Notations

### Sigles

- ARMA filtre dont la fonction de transfert se met sous la forme d'une fraction rationnelle.
- EBSB entrée bornée, sortie bornée.
- TFTD transformée en  $Z$  :  $\sum_{n=0}^{\infty} h_n z^{-n}$



## Filtres et Fonctions de transfert

$\mathcal{H}^{FI}, \mathcal{H}^{BI}, \mathcal{H}^{LN}$ et $\mathcal{H}^{UN}$	Filtres diffusifs définis au chapitre 1.
$h_n, h_n^{FI}, h_n^{BI}, h_n^{LN}$ et $h_n^{UN}$	réponses impulsionnelles des filtres diffusifs $\mathcal{H}, \mathcal{H}^{FI}, \mathcal{H}^{BI}, \mathcal{H}^{LN}$ et $\mathcal{H}^{UN}$ , la définition est dans §1.1.
$\mathcal{H}^\mu$	Filtre diffusif de symbole diffusif $\mu$ .
$\mathcal{H}_{\omega_0}$ et $\mathcal{H}_{z_0}$	Exemples de filtres dans $\Sigma_1$ définis dans l'exemple 5 page 63 et dans l'exemple 6 page 65).
$\mathcal{H}^S$	Système bouclé présenté page 61.
$\mathcal{H}(\rho + i0), \mathcal{H}(\rho - i0)$	$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{H}(\rho + i\epsilon)$ et $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{H}(\rho - i\epsilon)$ (voir §1.3.1).
$\hat{\mathcal{H}}$	filtre rationnel approchant $\mathcal{H}$ (page 150).
$\mathcal{H} \geq 0$	$\mathcal{H}$ est un filtre positif au sens défini page 48.
$\mathcal{H}^{-1}$	inverse du filtre $\mathcal{H}$ (voir le lemme 5).
$\mathcal{N}$	filtre rationnel (voir §6.2).
$\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{G}, \mathcal{Q}$	filtres rationnels présentés page 61.

## Réalisation d'un filtres

$\varphi_n, \varphi_0$	état et condition initiale de la réalisation diffusive (p. 28).
$v_n, y_n, x_n, w_n$	entrées-sorties de la réalisation couplées (voir §7.1).
$\mathcal{H}^v, \mathcal{H}^y, \mathcal{H}^x, \mathcal{H}^{\mathbf{X}}, \mathcal{H}^{\varphi_n \varphi_0}$	transformées en $Z$ de $v_n, y_n, x_n, \mathbf{X}_n, \int_{\mathbb{I}} \mu \varphi_n \varphi_0 d\rho$ (voir §8.1.2).
$\mathcal{H}^Z, \mathcal{N}^Z$	Fonction de transfert égale à l'une des transformées en $Z$ et partie entière de $\mathcal{H}^Z$ .
$\mathcal{H}_{\varphi_0}, \mathcal{R}_{\mathbf{X}_0}$	transformées en $Z$ des sorties libres des réalisations de $\mathcal{H}$ et de $\mathcal{R}$ lorsque les conditions initiales sont $\varphi_0$ et $\mathbf{X}_0$ (voir §8.1).
$\mathcal{T}^S, \mathcal{T}$	opérateurs de transition $\Phi_{n+1}^S = \mathcal{T}^S \Phi_n^S$ et opérateur de transition partiel $\Phi_{n+1} = \mathcal{T} \Phi_n$ (voir §7.1.1).
$V(\varphi_n)$	fonctionnelle de Lyapunov associée à une réalisation diffusive (voir §3.2.1).
$\mathbf{E}(\Phi_n^S)$	fonctionnelle de Lyapunov associée à $\mathcal{H}_\Phi^S$ (voir §7.1).

## Symboles diffusifs

$\mu$	symbole diffusif d'un filtre numérique diffusif (voir §1.2).
$\mu^{FI}, \mu^{BI}, \mu^{LN}$ et $\mu^{UN}$	symboles diffusifs de $\mathcal{H}^{FI}, \mathcal{H}^{BI}, \mathcal{H}^{LN}$ et $\mathcal{H}^{UN}$ (voir 1.2.1 et 1.3.1).
$\mu^v, \mu^y, \mu^x, \mu^{\varphi_n \varphi_0}$	symboles diffusifs associés transformés en $Z$ de $v_n, y_n, x_n, \int_{\mathbb{I}} \mu \varphi_n \varphi_0 d\rho$ (voir §8.1).
$\hat{\mu}$	interpolation linéaire de $\mu$ sur un réseau de points uniforme (p. C.3).
$\eta(\xi)$	symbole diffusif d'un opérateur diffusif à temps continu (voir §1.2.1).
$\nu_\alpha$	symbole diffusif de l'intégration fractionnaire pour $\alpha \in ]0, 1[$ (voir §1.2.1).
$\mathcal{V}_\mu$	valeur de continuité d'un filtre diffusif (p. 35).

## Processus aléatoires

$\varepsilon_n$	un bruit blanc de variance égale à 1.
$Y_n$	processus aléatoire à mémoire longue.
$S_{YY}(\omega)$	densité spectrale.
$R_{YY}(n)$	fonction d'autocorrélation.
	voir §2.3.

## Variabes muettes

$n, k$	indices pour le temps.
$\rho, r$	variable d'intégration.
$\varrho, \rho_j$	points réguliers et points singuliers de $\mu$ .
$\theta, \omega$ et $\omega_0$	pulsation réduite.
$r_p$	réseau de points également répartis sur $[-1, 1]$ (voir §C.3).
$\rho_m$	pôles de l'approximation rationnelle (voir §C.2).

## Fonctions et distributions

$C^1$	une fonction est $C^1$ , si elle est dérivable et sa dérivée est continue.
$\sim, o$ et $O$	opérateurs permettant la comparaison des comportements asymptotiques de deux fonctions au voisinage d'un point.
$\Lambda_p(r)$	fonction triangle (voir §C.2).
$P_1, P_2$	polynômes
$\deg(P_1)$	degré d'un polynôme
$f, f_+$ et $f_-$	$f$ est une fonction sommable et $f = f_+ - f_-$ .
$\text{supp } f$	support de la fonction $f$ .
$\mathbf{1}_\chi$	fonction caractéristique associée à l'ensemble $\chi$ .
$k_N(\omega)$	noyau de Féjer (page 142).
$g_N(\theta)$	suite de fonctions (page 142).
$\delta'$	dérivée de la distribution de dirac.
vp et pf	valeur principale et partie finie en tant que distribution causale sur $\mathbb{R}_+$ .
$\mu_\alpha$	notation compacte pour $\rho^\alpha(1 - \rho)^{-\alpha}$ (page 106).

## Vecteurs et matrices

$I$	matrice unité.
$a_{i,j}$	coefficients d'une matrice $A$ .
$\mathcal{O}(C, A)$ et $\mathcal{C}(A, B)$	matrices d'observabilité et de commandabilité du système linéaire défini par $A, B, C, D$ (voir 7.1.1).
$A^R, B^R, C^R, D^R$	éléments définissant la réalisation choisie de $\mathcal{R}$ (voir 7.1.1).
$A^{RQ^{-1}}, B^{RQ^{-1}}, C^{RQ^{-1}}, D^{RQ^{-1}}$	éléments définissant la réalisation choisie de $\mathcal{R}Q^{-1}$ (voir 7.1.1).
$T$	matrice permettant de montrer que $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}^T$ sont semblables (voir 7.2.2).

## Plan Complexe

$\mathbb{N}$	entiers positifs.
$i$	complexe, $i^2 = -1$ .
$\mathbb{R}, \mathbb{C}$	corps des réels et corps des complexes.
$\mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$	réels et complexes non nuls.
$s$	variable de Laplace.
$z$	variable des fonctions de transfert des filtres numériques.
$\zeta$	variable dans une intégrale sur un contour d'intégration.
$\mathcal{R}e(z)$ et $\mathcal{I}m(z)$	partie réelle et partie imaginaire de $z$ .
$\Gamma, \Gamma_\epsilon$	contours d'intégration pour la transformée en $Z$ inverse.
$K$	un pavé de $\mathbb{C}$ .
$\mathbb{D}, \bar{\mathbb{D}}$ et $\partial\mathbb{D}$	intérieur du disque unité, disque unité fermé et cercle unité.
$\mathbb{E}, \bar{\mathbb{E}}$ et $\partial\mathbb{E}$	extérieur du disque unité, extérieur du disque unité fermé et cercle unité.

## Ensembles

$l^p$	ensemble des suites $x_n$ vérifiant $\sum  x_n ^p < \infty$ .
$\mathbb{I}$	support de $\mu$ , $\mathbb{I} \subset [-1, 1]$ (voir §1.2.2).
$\mathbb{S} = \{\rho_j\}$	ensemble fini de points contenus dans $\mathbb{I}$ . où $\mu$ n'est pas suffisamment régulière.
$V, V_j$	voisinage en général et en $\rho_j$ .
$\mathbb{P}$	ensemble d'entiers $\{1 \dots P\}$ ou $\{-P \dots -1 \ 1 \dots P\}$ .
$M$	ensemble utilisé dans le chapitre 7.
$\mathcal{A}(\beta)$	algèbre de convolution (voir §B.3).
$\hat{\mathcal{A}}(\beta) \ \hat{\mathcal{A}}_-(\beta)$	espace de fonctions (voir §B.3).
$W_+$	filtres EBSB stables (voir chapitre 6)
$\mathbb{H}$	espace de Hilbert associé aux réalisations diffusives (voir §1.2.2).
$\mathbb{H}^S$	espace de Hilbert associé à $\mathcal{H}_\Phi^S$ (voir §7.1.2), le $S$ étant mis pour <i>système</i> .
$\mathbb{H}_\Phi$	espace de Hilbert associé aux états $\varphi$ et $\mathbf{X}$ de $\mathcal{H}_\Phi^S$ (voir §7.2.2).
$\langle, \rangle_{\mathbb{H}}, \langle, \rangle_{\mathbb{H}^S}$ et $\langle, \rangle_{\mathbb{H}_\Phi}$	produits scalaires associés aux espaces $\mathbb{H}, \mathbb{H}^S, \mathbb{H}_\Phi$ .
$\mathbb{H}^1, \mathbb{H}^2, \mathbb{H}^\infty$	espaces de Hardy (page 137).
$\  \cdot \ _{\mathbb{H}^1}, \  \cdot \ _{\mathbb{H}^2}, \  \cdot \ _{\mathbb{H}^\infty}$	normes des espaces de Hardy (page 137).
$\  \cdot \ _{\mathbb{R}^N}$ et $\  \cdot \ _{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N}$	normes sur les vecteurs et sur les matrices (voir le lemme 6 p. 96)

## Liste des exemples

Les différents résultats présentés dans ce document sont appliqués à différents systèmes regroupés en sept exemples.

L'exemple 1 concerne le filtre  $\mathcal{H}^{FI}$  et se trouve pages 24, 28, 37, 34, 53.

L'exemple 2 concerne le filtre  $\mathcal{H}^{BI}$  et se trouve pages 24, 37, 33, 41.

L'exemple 3 concerne le filtre  $\mathcal{H}^{LN}$  et se trouve pages 24, 28, 37, 34, 43, 53.

L'exemple 4 concerne le filtre  $\mathcal{H}^{UN}$  et se trouve pages 25, 27, 37, 34, 52.

L'exemple 5 concerne le couplage  $\mathcal{H}_p$  et se trouve pages 63, 74, 78, 81, 86, 99.

L'exemple 6 concerne le couplage  $\mathcal{H}_{z_0}$  et se trouve pages 65, 70, 74.

L'exemple 6 bis concerne le couplage  $[(1 - z_0 z^{-1}) + p(1 - z^{-1})^{\frac{1}{2}}]^{-1}$  et se trouve page 71.

L'exemple 7 bis concerne le système défini par

$\varphi_{n+1}(\rho) = \rho\varphi_n(\rho) - \int_0^1 \mu^{FI}(r)\varphi_n(r) dr$  et se trouve page 112.

## Remarques sur la forme du document

Le document de thèse est organisé en deux parties suivies d'une bibliographie et des annexes, il y a en tout neuf chapitres numérotés indépendamment des parties. A l'intérieur de chaque chapitre se trouvent différentes sections avec une numérotation à l'intérieur du chapitre, ainsi §2.1 signifie la première section du deuxième chapitre. Les définitions, les lemmes, les propositions, les théorèmes et les remarques sont numérotées indépendamment des chapitres et annexes.

Pour alléger le propos, certaines conventions de langages ont été adoptées. Un filtre désigne la relation entrée-sortie d'un système linéaire temps invariant à temps discret. Un opérateur désigne soit une application linéaire soit la relation entrée-sortie d'un système linéaire temps invariant à temps continu. Les filtres et les opérateurs sont a priori supposés causaux. Un filtre et sa fonction de transfert sont notés par le même symbole, par exemple  $\mathcal{H}$ . En revanche la réalisation d'un filtre est notée différemment par exemple  $\mathcal{H}_{\Phi}$ , parce qu'un même filtre possède plusieurs réalisations équivalentes du point de vue entrée-sortie. Enfin le style impersonnel est adopté lorsque ce qui est exposé est une façon classique de procéder. Lorsque nous souhaitons attirer l'attention du lecteur sur une façon originale de procéder avec des choix à discuter, nous emploierons la première personne du pluriel.

## Première partie

# Propriété générale des filtres diffusifs



# Chapitre 1

## Exemples et définitions des filtres diffusifs

L'objet de ce chapitre est de définir et d'étudier les propriétés des filtres numériques *diffusifs* en s'inspirant des représentations diffusives à temps continu.

L'intégration et la dérivation fractionnaires sont des exemples maintenant classiques d'opérateurs diffusifs. A temps discret, les différences fractionnaires  $(1 - z^{-1})^{-\alpha}$  sont aussi un exemple de filtre diffusif. Lors du §1.1 nous présenterons d'autres exemples de filtres non-standard, ils sont obtenus en discrétisant l'intégration fractionnaire. Nous montrerons par la suite que ces filtres sont aussi diffusifs.

Un filtre numérique diffusif est défini comme une *agrégation continue* de dynamiques classiques d'ordre 1 (i.e. de filtres d'ordre 1). Le poids de cette agrégation est noté  $\mu$  et est appelé *symbole diffusif* (ou aussi représentation diffuse, ou encore densité d'une intégrale de Cauchy dans [Mus92]). Cette définition des filtres diffusifs permet, comme en temps continu, de donner une réalisation de dimension infinie appelée *réalisation diffuse*. La réponse impulsionnelle et de la fonction de transfert peuvent aussi s'exprimer au moyen de deux expressions intégrales simples et sont linéaires en  $\mu$ . Ces notions sont exposées dans le §1.2.

Lors du §1.3 nous donnons une condition suffisante pour qu'un filtre soit diffusif, cette condition porte sur le prolongement analytique de la fonction de transfert sur  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ . Puis nous montrons que cette condition est en fait nécessaire sous réserve d'une régularité suffisante du symbole diffusif.

### 1.1 Exemples de filtres diffusifs

L'intégration fractionnaire et la dérivation fractionnaire sont des opérateurs sur les distributions causales, leur définition est énoncée dans [SKM87]. Leur fonction de transfert est  $s^{-\alpha}$  dans  $\mathcal{R}e(s) > 0 : \alpha \in ]0, 1[$  pour l'intégration fractionnaire et  $\alpha \in ]-1, 0[$  pour la dérivation fractionnaire. Leur réponse impulsionnelle est



$\frac{1}{\Gamma(\alpha)t^{1-\alpha}}$  si  $\alpha > 0$  et  $\delta' \star \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)t^{-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \text{Pf} \left[ \frac{1}{t^{1-\alpha}} \right]$  si  $\alpha < 0$ . L'intégration fractionnaire est un filtre analogique passe-bas, tandis que la dérivation fractionnaire est un filtre analogique passe-haut.

Nous avons envisagé trois schémas de discrétisation : Euler rétrograde, la méthode des trapèzes (appelée aussi transformée bilinéaire en traitement du signal) et l'invariance impulsionnelle. Les trois filtres obtenus sont causaux et définis sur  $|z| > 1$ . Ce sont des filtres numériques passe-bas quand  $\alpha > 0$  et des filtres numériques passe-haut quand  $\alpha < 0$ . Ces filtres ne sont pas exponentiellement stables (leur fonction de transfert est singulière en  $z = 1$ ).

**Exemple 1** Le schéma d'Euler rétrograde permet de retrouver le filtre introduit par [Gra80] sous le nom de *Fractional Integrator*.

$$\mathcal{H}^{FI} = (1 - z^{-1})^{-\alpha} \quad (1.1)$$

Cette discrétisation préserve le comportement basse fréquence et donc aussi la lente décroissance de la réponse impulsionnelle. La fonction  $\Gamma$  qui généralise la factorielle permet d'écrire la réponse impulsionnelle sous la forme :  $h_n^{FI} = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+1)}$  (cf : [GJ80, p. 18]). La formule de Stirling (cf : [AS72]) fournit le comportement asymptotique  $h_n^{FI} \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{n^{1-\alpha}}$ .

**Exemple 2** La discrétisation bilinéaire définit  $\mathcal{H}^{BI}$ , elle préserve les comportements basse fréquence de  $s^{-\alpha}$  et amène les comportement haute fréquence de  $s^{-\alpha}$  au voisinage de la demie fréquence d'échantillonnage (i.e. le comportement en haute fréquence se lit en  $z = -1$ ).

$$\mathcal{H}^{BI}(z) = \left( 2 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)^{-\alpha} \quad (1.2)$$

**Exemple 3** La réponse impulsionnelle de l'intégration fractionnaire est singulière en zéro. Pour  $\alpha \in ]0, 1[$ , l'invariant impulsionnel permet de définir un autre filtre :  $\mathcal{H}^{LN}$  dont le comportement à basse fréquence est celui de  $s^{-\alpha}$  tandis que le premier terme de la réponse impulsionnelle  $h_0^{LN}$  est *arbitraire*. En fait  $h_0^{LN}$  a été choisi égale à  $h_1$  de manière à préserver à temps discret la *positivité* de  $s^{-\alpha}$  (voir la proposition 6 p. 52). La dénomination  $\mathcal{H}^{LN}$  provient de ce que le symbole diffusif (i.e. une fonction qui caractérise un filtre diffusif) est un logarithme.

$$h_n^{LN} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{n^{1-\alpha}} \quad \text{et} \quad h_0^{LN} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \quad (1.3)$$

Les réponses impulsionnelles de ces trois filtres sont représentées sur la figure 1.1 pour  $\alpha = 0.4$ . Les trois suites de points décroissent lentement, en  $0.45n^{-0.6}$ , plus lentement qu'un ARMA. Intéressés par ce comportement, [Gra80] et [GJ80]

avaient introduits  $\mathcal{H}^{FI}$  et  $\mathcal{H}^{LN}$  afin de décrire des séries temporelles à *mémoire longue* (i.e. la connaissance d'un grand nombre de données passées d'une série chronologique aide à la prédiction des données futures).

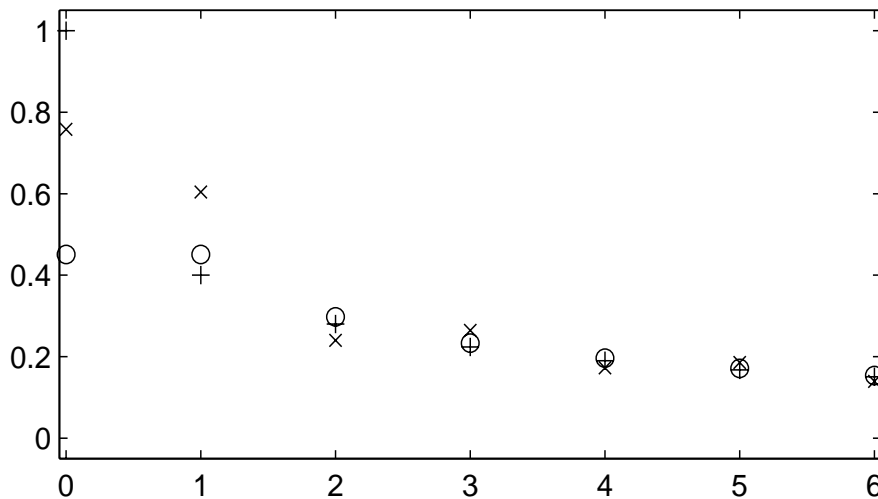


FIG. 1.1 – Réponses impulsionnelles de  $\mathcal{H}^{FI}$  (+),  $\mathcal{H}^{BI}$  (x) et de  $\mathcal{H}^{LN}$  (o) pour  $\alpha = 0.4$ . Leur décroissance lente en  $0.45n^{-0.6}$  est typique de la mémoire longue.

**Exemple 4** Les asymptotiques des trois filtres  $\mathcal{H}^{FI}$ ,  $\mathcal{H}^{BI}$  et de  $\mathcal{H}^{LN}$  sont proportionnelles à  $n^{-(1-\alpha)}$  lorsque  $\alpha \in ]-1, 1[\setminus\{0\}$ . Nous introduisons donc un nouveau filtre :

$$\forall n \geq 1 \quad h_n^{UN} = \frac{1}{n}, \quad h_0^{UN} = 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^{UN}(z) = 1 + \ln(1 - z^{-1}) \quad (1.4)$$

Le développement analytique de  $\ln(1 - z^{-1})$  au voisinage de l'infini prouve que les deux caractérisations de  $\mathcal{H}^{UN}$  sont cohérentes. La dénomination  $\mathcal{H}^{UN}$  rappelle que la décroissance de sa réponse impulsionnelle est en  $\frac{1}{n}$ . Nous montrerons que ce filtre est aussi diffusif et nous l'utiliserons ultérieurement dans ce chapitre.

**Remarque 1** Les fonctions logarithmes (et donc les fonctions puissances,  $e^{\alpha \ln(s)}$ ) utilisées pour définir ces filtres sont multivalentes sur  $\mathbb{C}^*$ . Les fonctions de transfert de filtres causaux sont définies à l'extérieur d'un disque centré en  $z = 0$  (i.e. domaine de convergence de la TZ). Il existe un domaine et une expression monovalente de la fonction logarithme compatible avec ces domaines :  $\{s \mid \operatorname{Re}(s) > 0\}$  et  $\ln(s) = \ln|s| + i \arg(s)$ .

Nous avons donné quatre exemples de filtres non rationnels, les §1.2 et §1.3 sur la définition et les propriétés des filtres diffusifs nous permettront aussi de montrer que les filtres présentés sont diffusifs. Ces filtres serviront d'illustration dans la suite du rapport.

## 1.2 Définition des filtres diffusifs

A temps continu, un opérateur diffusif est une agrégation continue de dynamiques classiques d'ordre 1 (cf : [Mon98]). De même à temps discret un filtre numérique diffusif  $\mathcal{H}$  est aussi une agrégation continue de dynamiques d'ordre 1. Le poids de cette agrégation est appelé *symbole diffusif* (ou aussi représentation diffuse) et est noté  $\mu$ . Nous choisissons que les dynamiques agrégées soient des filtres d'ordre 1 retardés et que le lien direct  $h_0$  d'un filtre diffusif ne dépende pas de  $\mu$ .

Nous montrerons qu'avec ces choix il existe différents schémas de discrétisations qui transforment un opérateur diffusif en un filtre diffusif, en particulier les filtres cités en §1.1 sont diffusifs. Dans ces exemples,  $\mu$  est une fonction sommable à valeurs réelles, définie sur  $[-1, 1]$ , généralement singulière en  $\rho = \pm 1$  et plutôt régulière ailleurs.

Cette notion d'agrégation avec un poids  $\mu$  conduit à une expression de la réponse impulsionnelle et de la fonction de transfert *linéaire* en  $\mu$  (cf : §1.2.1) et à une réalisation en dimension infinie avec une structure diagonale (cf : §1.2.2).

### 1.2.1 Caractéristique entrée-sortie des filtres diffusifs

Pour un opérateur diffusif à temps continu de symbole diffusif  $\eta(\xi)$ , la réponse impulsionnelle s'écrit  $h(t) = \int_0^\infty \eta(\xi)e^{-\xi t}d\xi$  et la fonction de transfert s'écrit  $H(s) = \int_0^\infty \frac{\eta(\xi)}{s+\xi}d\xi$ . Nous proposons alors deux définitions équivalentes des filtres diffusifs. Par la suite nous noterons parfois aussi  $\mathcal{H}^\mu$  le filtre diffusif défini par (1.6).

**Définition 1** *Un filtre  $\mathcal{H}$  causal et à coefficients réels est dit diffusif s'il existe une fonction sommable  $\mu$  à valeurs réelles telle que l'une des deux conditions soit vérifiée.*

$$\forall n \geq 1 \quad h_n = \int_{-1}^1 \mu(\rho)\rho^{n-1}d\rho \text{ et } h_0 \quad (1.5)$$

$$\mathcal{H}(z) = h_0 + z^{-1} \int_{-1}^1 \frac{\mu(\rho)}{1 - \rho z^{-1}} d\rho \quad \text{où } |z| > 1 \quad (1.6)$$

**Preuve** (1.6) est la transformée en  $Z$  de (1.5).

(1.5) $\Rightarrow$ (1.6)  $\sum_{n \geq 0} z^{-n} \int_{-1}^1 \mu(\rho)\rho^{n-1}d\rho$  est une série convergente pour  $|z| > 1$  qui devient

(1.6) après inversion du signe somme et intégrale, ce que permet  $\mu \in L^1(-1, 1)$  et le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

(1.6) $\Rightarrow$ (1.5) On choisit un contour  $\Gamma$  qui encercle le disque unité. Pour  $n \geq 1$

$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \mathcal{H}(z)z^{n-1}dz$  devient (1.5) après inversion des deux intégrales, ce que permet

$\mu \in L^1(-1,1)$  et le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Pour  $n = 0$ , on remarque que  $h_0 = \lim_{z=0} \mathcal{H}(z)$ .  $\square$

**Exemple 4 (suite)**  $\mathcal{H}^{UN}$  est un filtre diffusif de symbole diffusif  $\mu^{UN} = \mathbf{1}_{[0,1]}(\rho)$ , parce que (1.5) est vérifiée pour  $n \geq 1$  :  $\int_0^1 \rho^{n-1} d\rho = \frac{1}{n} = h_n^{UN}$ .

**Remarque 2** La définition 1 pourrait être généralisée au cas où  $\mu$  est une mesure signée non-diffuse (i.e. somme d'une partie discrète et d'une partie continue par rapport à la mesure de Lebesgue).

A partir de ces deux définitions nous pouvons définir des filtres diffusifs en discrétisant (cf [Hel00, annexe D]) par Euler rétrograde ou par invariant impulsionnel les opérateurs diffusifs dont le symbole diffusif vérifie une condition d'intégrabilité, celle-ci exclut par exemple la dérivation fractionnaire. A l'image de l'extension par différentiation des opérateurs diffusifs (cf : [Mon98]), nous montrons aussi que l'opérateur des différences appliqué aux filtres obtenus par Euler rétrograde définis de nouveaux filtres  $(1 - z^{-1})\mathcal{H}(z)$  qui sont aussi des filtres diffusifs.

**Proposition 1** Soit  $\eta$  le symbole diffusif d'un opérateur diffusif à temps continu tel que  $\int_0^\infty \frac{|\eta(\xi)|}{1+\xi} d\xi < +\infty$  (i.e. condition imposée dans [Mon98]), alors

- la discrétisation par Euler rétrograde est un filtre diffusif  $\mathcal{H}^a$  de symbole diffusif  $\mu^a(\rho) = \eta(\frac{1-\rho}{\rho})$  et de lien direct  $h_0 = \int_{\xi \geq 0} \frac{\eta(\xi)}{1+\xi} d\xi$  ;
- l'extension par l'opérateur des différences <sup>1</sup>  $\mathcal{H}^b(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{H}^a(z)$  est un filtre diffusif de symbole diffusif  $\mu^b(\rho) = -\frac{1-\rho}{\rho}\eta(\frac{1-\rho}{\rho})$  et de lien direct  $h_0 = \int_{\xi \geq 0} \frac{\eta(\xi)}{1+\xi} d\xi$
- la discrétisation par invariant impulsionnel est aussi un filtre diffusif avec  $\mu^c(\rho) = \eta\left(\ln\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)$ . Si  $\eta$  est sommable alors le lien direct est  $h_0 = \int_{\xi \geq 0} \eta(\xi) d\xi$ , sinon le lien direct doit être choisi arbitrairement, la proposition 6 du chapitre 3 indique comment  $h_0$  peut être choisi de manière à respecter la positivité du filtre.

**Preuve** Les énoncés *a.* et *b.* s'obtiennent en travaillant sur la fonction de transfert, tandis que *c.* s'obtient avec la réponse impulsionnelle.

*a.* La fonction de transfert d'un opérateur diffusif est :  $\int_0^{+\infty} \frac{\eta(\xi)}{s + \xi} d\xi$ .

Il suffit de remplacer  $s$  par  $1 - z^{-1}$ , de faire le changement de variable  $\rho = \frac{1}{1+\xi}$  et d'utiliser  $\frac{\eta(\xi)}{1+\xi} \in L^1(0, \infty)$ . pour montrer que la définition 1 est vérifiée (i.e.  $\mu^a \in L^1(-\pi, \pi)$ ) et  $H^a(z) = h_0 + z^{-1} \int_{-1}^1 \frac{\mu^a(\rho)}{1-\rho z^{-1}} d\rho$ .

*b.* En remplaçant  $s$  par  $1 - z^{-1}$ ,  $\mathcal{H}^b(z) = \int_0^{+\infty} \frac{(1 - z^{-1})\eta(\xi)}{1 + \xi - z^{-1}} d\xi = \int_0^{+\infty} \frac{\eta(\xi)}{1 + \xi} d\xi -$

---

<sup>1</sup>cette extension est l'analogue à temps discret de l'extension par dérivation proposée dans [Mon98, §5.2].

$\int_0^{+\infty} \frac{\xi \eta(\xi)}{(1+\xi)^2} \frac{z^{-1} d\xi}{1 - \frac{z^{-1}}{1+\xi}}$ . Il suffit de faire le changement de variable  $\rho = \frac{1}{1+\xi}$  et d'utiliser  $\frac{\eta(\xi)}{1+\xi} \in L^1(0, \infty)$  pour trouver  $\mu^b(\rho)$  et de même vérifier la définition 1. Ainsi  $H^b$  est un filtre diffusif.

c. La réponse impulsionnelle d'un opérateur diffusif est :  $h(t) = \int_0^{+\infty} \eta(\xi) e^{-\xi t} d\xi$ .

Il suffit de faire le changement de variable  $\xi = -\ln(\rho)$  et d'observer que  $\frac{\eta(\xi)}{1+\xi} \in L^1(0, \infty) \Rightarrow \eta(\xi) e^{-\xi} \in L^1(0, \infty) \Rightarrow \mu^c \in L^1(0, 1)$ . Pour la détermination de  $h_0$ , on observe que  $\eta \in L^1(0, \infty) \Leftrightarrow [\lim_{t \rightarrow 0} h(t) \text{ existe}]$ . Ainsi la définition 1 est vérifiée :  $\mu^c \in L^1(0, 1)$  et pour  $n \geq 1$ ,  $h_n = \int_0^1 \mu(\rho) \rho^{n-1} d\rho$ ; aussi  $\mathcal{H}^c$  est aussi un filtre diffusif.  $\square$

**Exemples 1 et 3** Le symbole diffusif de l'intégration fractionnaire est  $\nu_\alpha(\xi) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \xi^{-\alpha}$ . L'application de la proposition 1 prouve que  $\mathcal{H}^{FI}$  est un filtre diffusif pour  $\alpha \in ]-1, 1[ \setminus \{0\}$  et que  $\mathcal{H}^{LN}$  est un filtre diffusif pour  $\alpha \in ]0, 1[$ , précisément :

$$\mu^{FI}(\rho) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \rho^\alpha (1-\rho)^{-\alpha} \mathbf{1}_{]0,1[}(\rho) \quad (1.7)$$

$$\mu^{LN}(\rho) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \left[ \ln \left( \frac{1}{\rho} \right) \right]^{-\alpha} \mathbf{1}_{]0,1[}(\rho)$$

(1.8)

**Remarque 3** De nouveaux filtres diffusifs peuvent être construits en changeant  $z$  en  $-z$ , ce qui amène à échanger les comportements haute et basse fréquences : le filtre diffusif associé à  $-\mu(-\rho)$  est  $\mathcal{H}(-z)$  et la réponse impulsionnelle est  $(-1)^n h_n$  pour  $n \geq 1$ . Ces calculs se font à partir des équations (1.5) et (1.6). Ainsi  $\mathcal{H}^{FI}(-z) = (1+z)^{-\alpha}$  est encore un filtre diffusif, et il nous servira ultérieurement en §1.3.2.

## 1.2.2 Réalisations diffusives

La mise en parallèle de filtres d'ordre 1 constitue un système de dimension infinie avec une structure markovienne en temps. L'état du système est constitué de l'ensemble des états de chacun de ces filtres d'ordre 1. Cette *réalisation diffuse* prend son sens dans un cadre fonctionnel hilbertien comme le précise la proposition suivante. La réalisation diffuse ne sont pas héréditaires au sens où les entrées passées peuvent être résumées par un état de dimension infinie.

**Proposition 2** Soit  $\mathcal{H}$  un filtre de lien direct  $h_0$  et de symbole diffusif  $\mu$  de support  $\mathbb{I} \subset [-1, 1]$ .

a.  $\mathbb{H} = \{\varphi \mid \int_{\mathbb{I}} |\mu(\rho)| \varphi^2(\rho) d\rho < +\infty\}$  est un espace de Hilbert.

b. Une réalisation en dimension infinie de  $\mathcal{H}$  est :

$$\begin{cases} \varphi_{n+1}(\rho) &= \rho \varphi_n(\rho) + u_n \quad \text{où } \rho \in \mathbb{I}, \varphi_0 \in \mathbb{H} \text{ et } n \geq 0 \\ y_n &= \int_{\mathbb{I}} \mu(\rho) \varphi_n(\rho) d\rho + h_0 u_n \end{cases} \quad (1.9)$$

$u_n$  et  $y_n$  sont respectivement les entrées et sorties réelles, tandis que  $\varphi_n$  est une fonction, en l'occurrence l'état de dimension infinie, et  $\varphi_n \in \mathbb{H}$ . La condition initiale  $\varphi_0$  doit aussi vérifier :  $\text{supp } \varphi_0 \subset \text{supp } \mu$ .

c. Ce système peut s'écrire sous la forme  $[\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}]$  où  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  sont des opérateurs linéaires continus respectivement de  $\mathbb{H}$  dans  $\mathbb{H}$ , de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{H}$ , de  $\mathbb{H}$  dans  $\mathbb{R}$  et de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

d. Cette réalisation est asymptotiquement stable pour la topologie associée à  $\mathbb{H}$  au sens où l'état  $\varphi_n$  tend vers zéro lorsqu'il évolue librement à partir d'une condition initiale  $\varphi_0 \in \mathbb{H}$  :  $u_n = 0$  et  $\varphi_0 \in \mathbb{H} \Rightarrow \|\varphi_n\|_{\mathbb{H}} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

### Preuve

a.  $\mathbb{H}$  est un espace pondéré parfois aussi noté  $L^2_{|\mu|}(\mathbb{I})$ .

b. (1.9) est une réalisation qui découle de la définition 1. En effet la sortie  $y_n$  du filtre  $\mathcal{H}$  dépend linéairement de l'entrée :  $y_n = \sum_{k=0}^{n-1} h_{n-k} u_k + h_0 u_n$ . L'équation (1.5) fait apparaître dans cette expression une intégrale à droite du signe somme. Après échange, l'expression devient :  $y_n = \int_{\mathbb{I}} \mu(\rho) \sum_{k=0}^{n-1} \rho^{n-k} u_k d\rho + h_0 u_n$ . Il suffit de poser  $\varphi_n(\rho) = \sum_{k=0}^{n-1} \rho^{n-k} u_k$  et  $\varphi_0(\rho) = 0$  pour montrer que (1.9) est une réalisation de  $\mathcal{H}$ .

c. La continuité de  $\mathcal{C}$  provient de l'hypothèse  $\mu \in L^1(-1, 1)$  et de l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz :  $\int |\mu\varphi| = \int \sqrt{|\mu|} \sqrt{|\mu|} |\varphi| \leq \sqrt{\int |\mu|} \sqrt{\int |\mu| \varphi^2}$ .

Dans la réalisation, l'opérateur  $\mathcal{A}$  est continu sur  $\mathbb{H}$  :  $\|\mathcal{A}\varphi\|_{\mathbb{H}} \leq \|\varphi\|_{\mathbb{H}}$ .

Pour les réalisations diffusives à temps continu, il apparaît un opérateur semblable à  $\mathcal{A} : \varphi(\xi) \mapsto -\xi\varphi(\xi)$  qui n'est pas continu pour la topologie hilbertienne choisie. Cette non-continuité oblige à introduire le triplet  $V$ ,  $H$  et  $V'$  (voir par exemple [Mon98] ou [Hel00, p. 55] pour plus de détails), ce qui est inutile à temps discret.

d.  $\|\varphi_n\|^2 = \int_{-1}^1 \mu(\rho) (\rho^{n-1} \varphi_0)^2 d\rho \rightarrow 0$  grâce au théorème de convergence dominée.  $\square$

**Remarque 4** On pourrait définir les filtres diffusifs avec une mesure signée (cf : [Rud75, chapitre 6]) qui se décomposerait en une partie discrète  $\mu^d$  et une partie continue  $\mu^c$  par rapport à la mesure de Lebesgue. La condition  $\mu \in L^1(-1, 1)$  deviendrait la variation totale de  $\mu([-1, 1])$  est bornée. La définition 1 resterait valable et permettrait de considérer les filtres rationnels dont les pôles sont sur  $[-1, 1]$  comme des filtres diffusifs. Les propositions 1 et 2 restent vraies, à ceci près que l'assertion d de la proposition 2 impose de ne pas considérer les filtres ayant un pôle en  $z = \pm 1$  :  $\mu^d(\{-1, 1\}) = 0$ .

**Remarque 5** Quand  $\mathcal{H}$  est étudié du point de vue entrée-sortie, la condition initiale  $\varphi_0$  est supposée nulle. Mais notamment pour l'étude de la stabilité interne il est nécessaire d'autoriser  $\varphi_0 \neq 0$ .

- Si  $\varphi_0$  provient d'une entrée  $u_{-n}$  composée d'un nombre fini de termes, alors  $\varphi_n(\rho)$  est un polynôme en  $\rho$ .
- Une entrée  $u_{-n}$  composée d'un nombre infini de termes peut aussi définir une condition initiale  $\varphi_0$  à condition que la série  $\sum_{n \geq 0} \rho^n u_{-n}$  converge dans  $\mathbb{H}$ . Par exemple  $u_n = \frac{1}{-n} \mathbf{1}_{n < 0}$  génère  $\varphi_0(\rho) = \frac{1}{\rho} \ln\left(\frac{1}{1-\rho}\right) \in \mathbb{H}$ . En effet  $\ln\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = \sum_{n \geq 1} \frac{\rho^n}{n}$  est vrai sur  $\rho \in ]-1, 1[$  comme restriction de  $\ln\left(\frac{1}{1-z}\right)$  pour  $|z| < 1$ .
- Plus généralement,  $\varphi_0 \in \mathbb{H}$  sans être issu d'une suite  $u_{-n}$  peut aussi définir une condition initiale. Lors du chapitre 8 nous étudions sur certains exemples comment un système formé du couplage d'un filtre rationnel et d'un filtre diffusif est affecté par certaines conditions initiales.

Les filtres diffusifs sont définis comme une agrégation continue de dynamiques d'ordre 1 avec un poids  $\mu$ . Il s'ensuit que la réponse impulsionnelle et la fonction de transfert sont des applications linéaires de  $\mu$  et que ces filtres peuvent être réalisés par un système de dimension infinie. Ce travail permet de montrer qu'un filtre est diffusif lorsqu'on connaît déjà le symbole diffusif. Nous allons maintenant proposer un théorème qui montre qu'un filtre est diffusif à partir de la connaissance analytique de sa fonction de transfert.

## 1.3 Propriétés des filtres diffusifs

Nous donnons une *condition suffisante* pour qu'un filtre  $\mathcal{H}$  soit diffusif lors du §1.3.1, cette condition porte sur le prolongement analytique de la fonction de transfert sur  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ . Puis lors du §1.3.2 nous montrons que la fonction de transfert d'un filtre diffusif peut se prolonger analytiquement sur  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  et que ce prolongement vérifie une grande partie de la condition suffisante. Ces conditions sont énoncées sous la forme de deux théorèmes.

### 1.3.1 Conditions suffisantes pour qu'un filtre soit diffusif

Pour montrer qu'un opérateur pseudo-différentiel à temps continu est diffusif, une méthode classique [Mat98b, p. 151-152] consiste à prolonger analytiquement la fonction de transfert à gauche de l'axe imaginaire. Si l'opérateur est diffusif, ce prolongement peut se faire sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  et le symbole diffusif est en général proportionnel à la partie imaginaire de l'éventuelle discontinuité sur  $\mathbb{R}_-$ . Montrons que la même méthode peut s'appliquer à temps discret.

Les fonctions de transfert  $\mathcal{H}^{FI}$ ,  $\mathcal{H}^{UN}$  et  $\mathcal{H}^{BI}$  peuvent être prolongés analytiquement sur  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  ou sur  $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$  parce que la fonction logarithme et donc la fonction puissance sont monovalentes sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ . Les fonctions de transfert étant à coefficients réels, leur partie imaginaire est symétrique par rapport à l'axe réel

(i.e.  $\overline{\mathcal{H}(z)} = \mathcal{H}(\bar{z})$ ). La partie imaginaire de la fonction de transfert  $\mathcal{H}^{FI}$  est représentée sur la figure 1.2.

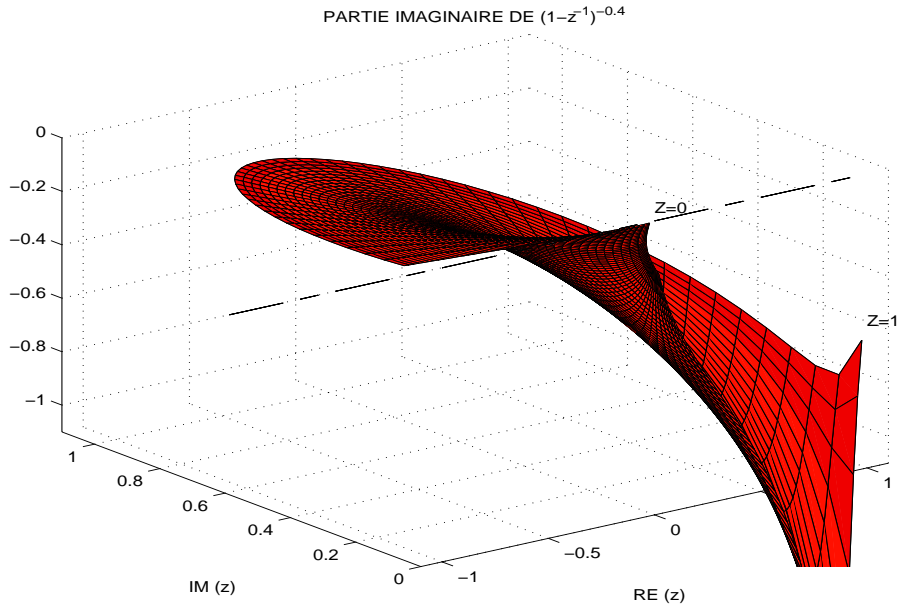


FIG. 1.2 – Représentation de la partie imaginaire de la fonction de transfert  $\mathcal{H}^{FI}$  dans le disque unité (en fait seul le demi-cercle supérieur est représenté). L’axe de symétrie figure en semi-pointillé.

D’une manière générale pour reconnaître qu’un filtre est diffusif, on prolonge analytiquement la fonction de transfert à  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ . Cela permet de choisir pour la TZ inverse un contour qui n’entoure que la discontinuité de  $\mathcal{H}$ . En se plaçant à la limite le contour s’aplatit sur la coupure et la TZ inverse est alors une expression intégrale de la réponse impulsionnelle conforme à la définition 1. Le symbole diffusif  $\mu$  peut ainsi être identifié et il apparaît alors qu’il s’exprime en fonction de la discontinuité de la fonction de transfert. Ce procédé est illustré sur la figure 1.3 et est exposé dans [Mat98b]. Le théorème qui suit généralise ce procédé et donne une condition *suffisante* pour qu’un filtre soit diffusif. Des conditions techniques sont nécessaires pour assurer la convergence de l’intégrale lorsque le contour s’aplatit sur la coupure. Comme dans [Boc97] les limites supérieures et inférieures de  $\mathcal{H}(z)$  sur la coupure sont notées  $\mathcal{H}(\rho \pm i0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{H}(\rho \pm i\epsilon)$ .

**Théorème 1** Soit  $r_g, r_d \in [-1, 1]$  et  $\mathcal{H}$  un filtre dont la fonction de transfert  $\mathcal{H}$  est prolongeable sur  $\mathbb{C} \setminus [r_g, r_d]$  en une fonction holomorphe. Soit  $\mathbb{S}$  un ensemble fini de points contenu dans  $[-1, 1]$  et incluant  $r_g$  et  $r_d$ .

Si

- (H1) : pour tout  $\rho_j \in \mathbb{S}$ ,  $(z - \rho_j)\mathcal{H}(z) \rightarrow 0$  quand  $z \rightarrow \rho_j$  avec  $z \notin [r_g, r_d]$ ;
- (H2) : pour tout  $\varrho \in [r_g, r_d] \setminus \mathbb{S}$ ,  $\mathcal{H}(z)$  converge vers  $\mathcal{H}(\varrho + i0)$  quand  $z \rightarrow \varrho$  avec  $\mathcal{I}m(z) > 0$  et  $\mathcal{H}(z)$  converge vers  $\mathcal{H}(\varrho - i0)$  quand  $z \rightarrow \varrho$  avec  $\mathcal{I}m(z) < 0$ ;



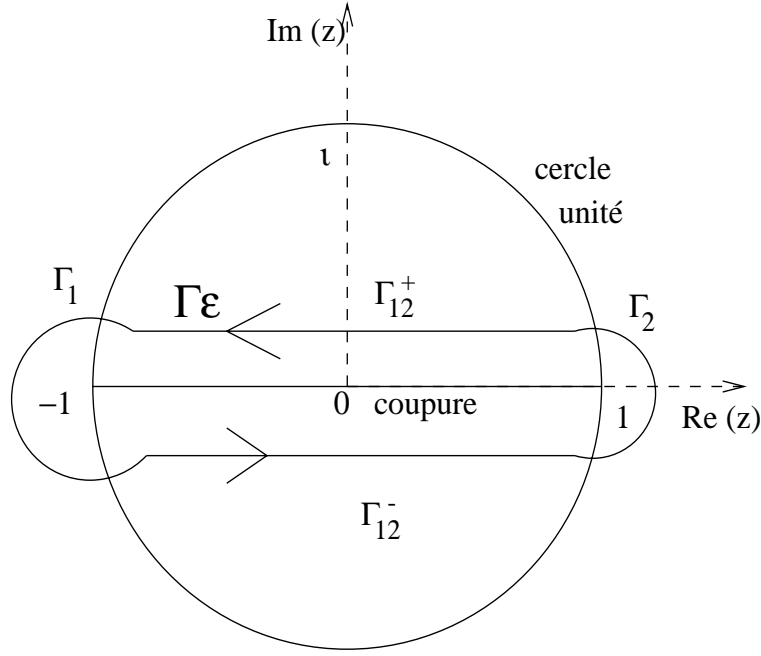


FIG. 1.3 – TZ inverse appliquée au prolongement de  $\mathcal{H}$  à l'intérieur du cercle unité avec un contour d'intégration  $\Gamma_\epsilon$ . La forme du contour a été choisie pour faire la preuve du théorème 1 : ici pour  $\mathbb{S} = \{-1, 1\}$ ,  $\Gamma_\epsilon = \Gamma_2 \cup \Gamma_{12}^+ \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_{12}^-$ .

on définit alors :

$$\mu(\varrho) = \frac{1}{2i\pi} [\mathcal{H}(\varrho - i0) - \mathcal{H}(\varrho + i0)] \quad (1.10)$$

(H3) :  $\mu$  défini par (1.10) est prolongée sur  $[-1, 1]$  et vérifie  $\mu \in L^1(-1, 1)$

alors  $\mathcal{H}$  est un filtre diffusif au sens de la définition 1 dont le symbole diffusif  $\mu$  est donné par (1.10),

**Preuve** La démonstration est faite pour  $r_g = -1$  et  $r_d = 1$ . Les éléments de  $\mathbb{S}$  sont notés  $\{\rho_j\}$  (i.e. ce ne sont pas des pôles). La réponse impulsionnelle  $h_n$  de  $\mathcal{H}$  s'exprime au moyen de la TZ inverse de  $\mathcal{H}$  avec un contour d'intégration particulier  $\Gamma_\epsilon$  représenté sur la figure 1.3 :  $\Gamma_\epsilon$  entoure  $[-1, 1]$ ,  $\Gamma_\epsilon$  est la réunion d'arcs de cercles autour des singularités  $\rho_j$  notés  $\Gamma_j$  et de segments horizontaux joignant ces arcs de cercles notés  $\Gamma_{j,j+1}^+$  et  $\Gamma_{j,j+1}^-$ .

Soit  $\epsilon > 0$ . La démonstration consiste à montrer qu'il existe un contour  $\Gamma_\epsilon$  tel que

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\epsilon} \mathcal{H}(z) z^{n-1} dz - \frac{1}{2i\pi} \int_{-1}^1 [\mathcal{H}(\rho - i0) - \mathcal{H}(\rho + i0)] \rho^{n-1} d\rho \right| < \epsilon \quad (1.11)$$

(1.11) permet de conclure parce qu'alors  $h_n = \int_{-1}^1 \mu(\rho) d\rho$  avec  $\mu$  définie par (1.10), et que donc  $\mathcal{H}$  respecte la définition 1 d'un filtre diffusif.

(1.11) se prouve en décomposant les deux intégrales, chacune en différentes parties. La démonstration se fait en deux temps : (H1) et (H3) permettent de choisir un rayon

maximal  $\delta_\epsilon$  pour les arcs de cercle  $\Gamma_j$ , puis (H2) montre qu'il existe des segments  $\Gamma_{j,j+1}^+$  et  $\Gamma_{j,j+1}^-$ .

1. Un calcul simple prouve que  $\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_j} \mathcal{H}(z) z^{n-1} dz \right| \leq \sup_{z \in \Gamma_j} |\mathcal{H}(z) z^{n-1} (z - \rho_j)|$  et (H1) montre l'existence de  $\delta'_\epsilon$  tel que  $\forall \delta < \delta'_\epsilon, |z - \rho_j| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_j} \mathcal{H}(z) z^{n-1} dz \right| < \frac{\epsilon}{4}$ .  
(H3) prouve l'existence de  $\delta_\epsilon < \delta'_\epsilon$  tel que  $\left| \int_{V_\epsilon} \mu(\rho) \rho^{n-1} d\rho \right| < \frac{\epsilon}{4}$  où  $V_\epsilon = [-1, 1] \cup \{\rho \mid \forall j, |\rho - \rho_j| < \delta_\epsilon\}$ .
2. Soient  $K_{j,j+1}^+$  des pavés dont le bord inférieur  $\partial K_{j,j+1}$  sont sur  $[-1, 1] \setminus \mathbb{S}$ , et qui sont sécants avec les cercles de centre  $\rho_j$  et de rayon  $\delta_\epsilon$  (i.e.  $\forall j V_\epsilon \cap \partial K_{j,j+1} \neq \emptyset$ ). La fonction  $z \mapsto \mathcal{H}(z) z^{n-1}$  se prolonge sur  $K_{j,j+1}^+$  en une fonction continue grâce à (H2) et en fait une fonction uniformément continue parce que  $K_{j,j+1}^+$  est un compact. En particulier la continuité uniforme implique la convergence uniforme de la suite de fonctions  $\mathcal{H}(\rho + ie)(\rho + ie)^{n-1}$  de variables  $\rho \in \partial K_{j,j+1}$  vers  $\mathcal{H}(\rho + i0)\rho^{n-1}$  quand  $e \rightarrow 0^+$ . Ainsi  $\int_{\partial K_{j,j+1}^+} \mathcal{H}(\rho + ie)(\rho + ie)^{n-1} d\rho$  converge vers  $\int_{\partial K_{j,j+1}^+} \mathcal{H}(\rho + i0)\rho^{n-1} d\rho$  quand  $e \rightarrow 0^+$ . Le raisonnement symétrique sur  $K_{j,j+1}^-$  prouve  $\int_{\partial K_{j,j+1}^-} \mathcal{H}(\rho - ie)(\rho - ie)^{n-1} d\rho$  converge vers  $\int_{\partial K_{j,j+1}^-} \mathcal{H}(\rho - i0)\rho^{n-1} d\rho$  quand  $e \rightarrow 0^+$ . Il existe donc des segments  $\Gamma_{j,j+1}^+$  et  $\Gamma_{j,j+1}^-$  tels que  $\left| \int_{\Gamma_{j,j+1}^+ \cup \Gamma_{j,j+1}^-} \mathcal{H}(z) z^{n-1} dz - \int_{\partial K_{j,j+1}} [\mathcal{H}(\rho - i0) - \mathcal{H}(\rho + i0)] \rho^{n-1} d\rho \right| < \frac{\epsilon}{2}$  (il faut aussi tenir compte du sens des contours d'intégrations  $\Gamma_{j,j+1}^+$  et  $\Gamma_{j,j+1}^-$ ). Les segments  $\Gamma_{j,j+1}^+$  et  $\Gamma_{j,j+1}^-$  sont tels qu'ils peuvent être joints par des arcs de cercles de centre  $\rho_j$  et de rayon inférieur à  $\delta_\epsilon$  en respectant (1.11).

Ce problème est abordé dans [Cha85, ex.10, p. 187].  $\square$

**Remarque 6** *Compte tenu de ce que  $\mathcal{H}$  est à coefficients réels, (1.10) peut aussi s'exprimer  $\mu(\rho) = \frac{-1}{\pi} \text{Im} \mathcal{H}(\rho + i0)$ . La figure 1.2 permet alors de lire le symbole diffusif  $\mu$ .*

**Exemple 2 (suite)** Ce théorème permet de prouver que  $\mathcal{H}^{BI}$  est un filtre diffusif. En effet, la fonction puissance utilisée pour définir  $\mathcal{H}^{BI}$  peut être prolongé analytiquement sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ , ce prolongement étend  $\mathcal{H}^{BI}$  sur  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ . Pour tout  $r \in ]-1, 1[$ ,  $\mathcal{H}^{BI}(z)$  converge quand  $z \rightarrow r$  lorsque  $\text{Im}(z) > 0$  et  $\mathcal{H}^{BI}(z); (z \pm 1)\mathcal{H}^{BI}(z) \rightarrow 0$  quand  $z \rightarrow \pm 1$  avec  $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ ; enfin  $\rho \mapsto \frac{1}{2i\pi} [\mathcal{H}^{BI}(\rho - i0) - \mathcal{H}^{BI}(\rho + i0)] \in L^1(-1, 1)$ .

$$\mu^{BI}(\rho) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} (1 - \rho)^{-\alpha} (1 + \rho)^\alpha \mathbf{1}_{]-1, 1[}(\rho) \quad (1.12)$$

Un raisonnement identique permet à [BK00] d'exprimer  $\mathcal{H}(z) = (e^{i\theta} - z^{-1})^{-\alpha} (e^{-i\theta} - z^{-1})^{-\alpha}$  sous la forme de (1.6) pour  $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ .

**Remarque 7** *La fonction de transfert d'un filtre diffusif peut être prolongée sur  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  en la fonction définie par (1.6) :  $\mathcal{H}(z) = h_0 + \int_{-1}^1 \frac{\mu(\rho)}{z - \rho} d\rho$ . En effet le*

théorème de convergence dominée montre que cette expression est dérivable sur  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ .

### 1.3.2 Caractéristique de la fonction de transfert diffusive au voisinage de la coupure

Il est maintenant naturel d'espérer que les filtres diffusifs vérifient des propriétés semblables aux hypothèses du théorème 1. La fonction de transfert  $\mathcal{H}$  d'un filtre diffusif se prolonge sur  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ . Nous allons montrer que la discontinuité de ce prolongement analytique est imaginaire pure et est proportionnelle à  $\mu$ . Cette discontinuité n'est pas symétrique par rapport à l'axe des abscisses et il apparaît une *valeur de continuité* notée  $\mathcal{V}_\mu$ .  $\mathcal{V}_\mu$  est en fait la partie réelle de la fonction de transfert sur  $[-1, 1]$  et dépend linéairement de  $\mu$ .

Cette valeur de continuité est aussi définie à temps continu sur les opérateurs diffusifs. Dans [Mon98], le symbole diffusif associé à la composition de deux opérateurs diffusifs de symboles diffusifs  $\eta_1$  et  $\eta_2$  est défini par  $\eta_1 \# \eta_2 = \eta_1(\text{vp}_{\frac{1}{\xi}} \star \eta_2) + \eta_2(\text{vp}_{\frac{1}{\xi}} \star \eta_1)$ . Pour un opérateur diffusif  $\mathcal{H}c$  de symbole diffusif  $\eta$ ,  $\text{vp}_{\frac{1}{\xi}} \star \eta$  est justement l'équivalent à temps continu de  $\mathcal{V}_\mu$ .

Dans [Hel00, annexe B], cette valeur de continuité est notée  $R(\xi)$ , elle est définie par  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{Re}(\mathcal{H}c(\xi + i\epsilon))$  et par  $\text{vp}_{\frac{1}{\xi}} \star \eta$ , son importance pour le résultat de décomposition est soulignée.

Dans [NAC84]  $\mathcal{V}_\mu(\rho)$  est appelée la valeur principale de Cauchy et est notée  $\oint_{-1}^1 \frac{\mu(r)}{\rho - r} dr$ .

**Remarque 8** En écrivant (1.6) sous la forme de  $\mathcal{H}(z) - h_0 = \int_{-1}^1 \frac{\mu(\rho)}{z - \rho} d\rho$ , on reconnaît une intégrale de Cauchy, et sous des conditions techniques on peut montrer que  $\mathcal{H}$  est une fonction sectionnellement analytique (cf [NAC84] et la définition 4 en annexe p. 4).

Afin d'utiliser les résultats sur les intégrales de Cauchy, la définition des fonctions *hölderiennes* est rappelée (cf [Gak66, P.5-7]).

**Définition 2**  $\mu$  est *hölderienne* sur un fermé  $J$  s'il existe  $\kappa > 0$  et  $\alpha \in ]0, 1]$  tel que  $\forall r, \rho \in J, |\mu(\rho) - \mu(r)| \leq \kappa |\rho - r|^\alpha$ . De plus

$$\mu \in C^1 \text{ sur } J \Rightarrow \mu \text{ hölderienne} \Rightarrow \mu \in C^0 \text{ sur } J$$

En outre  $\mu$  est localement hölderienne sur  $J$  si  $\mu$  est hölderienne sur tout compact sur contenu  $J$ , (dans ce cas  $J$  n'est pas nécessairement un fermé).

**Exemples 1,3,4 (suite)** L'hypothèse Hölder est en fait adaptée aux exemples que nous étudions :

- $\mu^{UN} = \mathbf{1}_{[0,1]}$  est hölderienne sur  $[0, 1]$
- $\mu^{FI}(\rho) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \rho^\alpha (1-\rho)^{-\alpha} \mathbf{1}_{[0,1]}(\rho)$  est localement hölderienne sur  $[0, 1[$  et  $(1-\rho)^\alpha \mu^{FI}(\rho)$  est hölderienne sur  $[0, 1]$ .
- $\mu^{LN}(\rho) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \left[ \ln\left(\frac{1}{\rho}\right) \right]^{-\alpha} \mathbf{1}_{[0,1]}(\rho)$  est localement hölderienne sur  $[0, 1[$  et  $(1-\rho)^\alpha \mu^{LN}(\rho)$  est hölderienne sur  $[0, 1]$ .

**Théorème 2** Soit  $\mu \in L^1(-1, 1)$ . Soit  $\mathbb{S} = \{\rho_j\}$  un ensemble fini contenu dans  $[-1, 1]$  et contenant  $-1$  et  $1$ . Si  $\mu$  est localement hölderienne sur  $[-1, 1] \setminus \mathbb{S}$  et si pour tout  $\rho_j \in \mathbb{S}$ ,  $\exists \alpha_j > 0$ , tel que  $\mu(\rho) |\rho - \rho_j|^{\alpha_j}$  est hölderienne sur un voisinage de  $\rho_j$ ,

alors le filtre diffusif  $\mathcal{H}$  défini par  $h_0$  et  $\mu$  vérifie pour  $\rho \in ]-1, 1[ \setminus \{\rho_j\}$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(z) &\rightarrow -i\pi\mu(\rho) + \mathcal{V}_\mu(\rho) + h_0 \text{ quand } z \rightarrow \rho \text{ et } \mathcal{I}m(z) > 0 \\ \mathcal{H}(z) &\rightarrow i\pi\mu(\rho) + \mathcal{V}_\mu(\rho) + h_0 \text{ quand } z \rightarrow \rho \text{ et } \mathcal{I}m(z) < 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

où la valeur principale de Cauchy  $\mathcal{V}_\mu$  est définie par :

$$\mathcal{V}_\mu(r) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|r-\rho|>\epsilon} \frac{\mu(\rho)}{r-\rho} d\rho \quad (1.14)$$

De plus  $\mathcal{V}_\mu$  est localement hölderienne sur  $[-1, 1] \setminus \mathbb{S}$  et  $\mathcal{V}_\mu(\rho) = o\left(\frac{1}{|\rho_j - \rho|}\right)$  et  $\mathcal{H}(z) = o\left(\frac{1}{|\rho_j - z|}\right)$ .

**Preuve** Le caractère hölderien de  $\mathcal{V}_\mu$  se trouve énoncé et démontré dans [Gar81, chapitre 3] dans un contexte légèrement différent : le segment considéré est un arc de cercle au lieu d'être un intervalle fermé contenu dans  $[-1, 1]$ . Une transformation conforme permet d'utiliser ce résultat pour ce théorème. Les autres résultats sont énoncés et démontrés avec des conclusions plus fortes dans [Mus92, p. 53–55 et p. 83–85] ou plus récemment dans [Gak66, p.53–62].  $\square$

Les hypothèses et les conclusions du théorème 2 ont été choisies de telle sorte que ces conclusions vérifient les hypothèses du théorème 1 qui considère en particulier des limites tangentielles. Cela permet lors du chapitre 6 de coupler les deux théorèmes. Cependant il existe d'autres façon de construire un théorème 1 et 2 qui puissent aussi être couplés et avec des hypothèses plus faibles comme l'explique la remarque 9

**Remarque 9** L'hypothèse Hölder permet de contrôler les oscillations de  $\mu$ . Ce contrôle est nécessaire lorsqu'on considère les limites tangentielles comme le montre cet exemple. Si  $\mu = \sum_{n=2}^{\infty} \mathbf{1}_{[\rho_n^g, \rho_n^d]}$  avec  $\rho_n^g = 1 - \frac{1}{n}$  et  $\rho_n^d = \rho_n^g + \frac{1}{n^2}$  alors par

un calcul utilisant l'exemple  $\mathcal{H}^{UN}$  on montre que  $\mathcal{H}^\mu(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{1 - \rho_n^d z^{-1}}{1 - \rho_n^g z^{-1}}\right)$ .

La discontinuité de  $\mathcal{H}^\mu$  est alors bornée tandis que la valeur de continuité est composée d'une infinité dénombrable de pics en  $z = \rho_n^d$  et  $z = \rho_n^g$ . Ces pics sont dans  $[0, 1]$  et tendent vers  $z = 1$ . En revanche nous aurions pu tolérer de telles oscillations si dans l'énoncé du théorème 1, les limites considérées n'étaient pas tangentielles. En effet la littérature contient de nombreux résultats démontrant la convergence d'intégrales de Cauchy  $\int_L \frac{\mu(s)}{s-z} ds$  sous des hypothèses de régularités beaucoup plus faibles sur  $\mu$  que les conclusions du théorème 2.

- Selon [Gar81, chapitre 3], si le support  $L$  de la discontinuité est une droite et si  $\mu \in L^1$  alors  $\int_L \frac{\mu(s)}{s-z} ds$  converge pour la topologie faible- $*$  et de plus  $\mathcal{V}_\mu$  est  $L^1$ .
- Selon [Hof88, chapitre 6], quand  $L$  est un cercle, si  $t \mapsto \frac{\mu(e^{i(\theta+t)}) - \mu(e^{i(\theta-t)})}{2 \tan(\frac{t}{2})} \in L^1(-\pi, \pi)$  alors  $\int_L \frac{\mu(s)}{s-z} ds$  converge non-tangentiellement en presque tout point de  $L$ .

Le calcul analytique de  $\mathcal{V}_\mu$  à partir de  $\mu$  est rarement explicite. Les exemples de filtres dont nous connaissons la fonction de transfert, permettent de constituer une table de correspondance entre  $\mu$  et  $\mathcal{V}_\mu$  valable pour  $\alpha \in ]-1, 1[ \setminus \{0\}$ .

	$\mu(\rho)$	$\mathcal{V}_\mu(\rho)$
$\mathcal{H}^{FI}(z)$	$\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \rho^\alpha (1-\rho)^{-\alpha} \mathbf{1}_{[0,1]}(\rho)$	$(\cos(\alpha\pi) \rho^\alpha (1-\rho)^{-\alpha} - 1) \mathbf{1}_{[0,1]}(\rho)$
$\mathcal{H}^{FI}(-z)$	$-\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} (-\rho)^\alpha (1+\rho)^{-\alpha} \mathbf{1}_{[-1,0]}(\rho)$	$(\cos(\alpha\pi) \rho^\alpha (1+\rho)^{-\alpha} - 1) \mathbf{1}_{[-1,0]}(\rho)$
$\mathcal{H}^{UN}(z)$	$\mathbf{1}_{[0,1]}(\rho)$	$\ln\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right) \mathbf{1}_{[0,1]}(\rho)$
$\mathcal{H}^{UN}(-z)$	$-\mathbf{1}_{[-1,0]}(\rho)$	$\ln\left(\frac{1+\rho}{\rho}\right) \mathbf{1}_{[-1,0]}(\rho)$

(1.15)

**Remarque 10** La valeur de continuité et le symbole diffusif d'un filtre diffusif  $\mathcal{H}$  s'interprètent comme  $\Re(\mathcal{H}(\rho + i0))$  et  $\frac{-1}{\pi} \Im(\mathcal{H}(\rho + i0))$ , parce que  $\mathcal{H}$  est à coefficients réels. On ne peut pas déterminer  $\mu$  à partir de  $\mathcal{V}_\mu$  alors que  $\mathcal{V}_\mu$  s'exprime en fonction de  $\mu$ . La formule d'inversion de Hilbert (i.e.  $\mathcal{V}_\mu \mapsto \mu$ ) n'est pas valable ici. Dans [NAC84] il est montré que la fonctionnelle  $\mu \mapsto \mathcal{V}_\mu$  n'est pas injective parce que  $\mathcal{H}$  est analytique sur un arc  $[-1, 1]$  qui n'est pas un contour. En l'occurrence les deux premières lignes du tableau (1.15) donnent deux symboles diffusifs distincts associés aux mêmes valeurs de continuité  $\mathcal{V}_{\mu^{FI}(\rho)}(r) = \mathcal{V}_{-\mu^{FI}(-\rho)}(r)$ . Dans [NAC84] il est montré que le noyau de  $\mu \mapsto \mathcal{V}_\mu$  est de dimension 1 et une formule d'inversion adaptée est donnée.

**Remarque 11** La valeur principale de Cauchy  $\mathcal{V}_\mu$  est en fait  $L^p(-1, 1)$  dès lors que  $\mu \in L^p(-1, 1)$  pour  $p > 1$  comme le rappelle [Gak66, §5.3].  $\mathcal{V}_\mu$  est dans  $L^1(-1, 1)$  quand  $\mu \in L^1(-1, 1)$  (cf [Gar81, p. 116] dans un contexte légèrement différent).

Pour simplifier l'étude des filtres diffusifs nous allons souvent nous intéresser à des symboles diffusifs réels et de signe constant. Chacun des exemples de filtres

diffusifs cités ( $\mathcal{H}^{FI}$ ,  $\mathcal{H}^{BI}$ ,  $\mathcal{H}^{LN}$  et  $\mathcal{H}^{UN}$ ) vérifie cette condition mais les combinaisons linéaires de ces filtres ne la vérifient pas a priori. De tels filtres ont une propriété originale : leur fonction de transfert ont au plus un zéro et ce zéro se trouve sur l'axe réel et en dehors de  $\mathbb{I}$ .

**Proposition 3** *Soit  $\mathcal{H}$  un filtre diffusif de symbole diffusif  $\mu$  de signe constant et de support  $\mathbb{I} = [\rho_0, \rho_1]$ , alors  $\mathcal{H}$  a au plus un zéro qui se trouve sur l'axe réel et la fonction  $r \mapsto \mathcal{H}(r)$  est monotone sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{I}$ .*

**Preuve** D'après (1.6) et la remarque 7,  $\mathcal{H}(z) = h_0 + z^{-1} \int_{-1}^1 \frac{\mu(\rho)}{1-\rho z^{-1}} d\rho$  pour  $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  Hors de l'axe réel  $\mathcal{I}m(\mathcal{H}(z))$  est non-nul en tant qu'intégrale d'une fonction strictement positive :  $\mathcal{I}m(\mathcal{H}(z)) = \mathcal{I}m(z) \int_{-1}^1 \frac{\mu(\rho)}{|z-\rho|^2} d\rho \neq 0$

Sur l'axe réel  $r \mapsto \mathcal{H}(r)$  est une fonction monotone parce qu'à  $\rho$  fixé,  $r \mapsto \frac{\mu(\rho)}{|r-\rho|^2}$  est une fonction monotone quand  $\mu$  est de signe constant.  $\square$

**Exemples 1,2,3 et 4** Les zéros de  $\mathcal{H}^{FI}$ ,  $\mathcal{H}^{BI}$  et  $\mathcal{H}^{UN}$  sont connus analytiquement parce que leur fonction de transfert est donnée. La proposition 3 permet d'affirmer que

(C1)  $\mathcal{H}^{LN}$  a un unique zéro qui se trouve sur  $] -1, 0[$  si  $\alpha > 0$

(C2)  $\mathcal{H}^{LN}$  n'a pas de zéro si  $\alpha < 0$ .

**Preuve** Grâce à la proposition 3,

si  $\alpha > 0$ ,  $\mathcal{H}^{LN}(-1) > 0$  et  $\lim_{r \rightarrow 0^-} \mathcal{H}^{LN}(r) = -\infty \Rightarrow$  (C1);

si  $\alpha < 0$ ,  $\lim_{r \rightarrow -\infty} \mathcal{H}^{LN}(r) > 0$ ,  $\lim_{r \rightarrow 0^-} \mathcal{H}^{LN}(r) > 0$ ,  $\mathcal{H}^{LN}(1) > 0$  et

$\lim_{r \rightarrow +\infty} \mathcal{H}^{LN}(r) > 0 \Rightarrow$  (C2).  $\square$

Nous avons montré sous réserve de quelques conditions techniques, que lorsque la fonction de transfert d'un filtre peut être analytiquement prolongé en dehors d'une discontinuité contenue dans  $[-1, 1]$  alors ce filtre est diffusif et son symbole diffusif se lit le long de la discontinuité :  $\mu(\rho) \propto \mathcal{I}m(\mathcal{H}(\rho + i0))$ . Puis nous avons montré que la fonction de transfert d'un filtre diffusif peut aussi se prolonger en dehors d'une discontinuité contenue dans  $[-1, 1]$  et que cette discontinuité est imaginaire pure et est proportionnelle à  $\mu$ . La partie réelle de cette fonction de transfert est continue lorsque  $z$  traverse  $[-1, 1]$ , aussi nous avons appelé *valeur de continuité* et noté  $\mathcal{V}_\mu$  la valeur prise par  $\mathcal{R}e(\mathcal{H}(z))$  lorsque  $z \in [-1, 1]$ ;  $\mathcal{V}_\mu$  s'exprime linéairement en fonction de  $\mu$ .

Le chapitre 6 énonce que la relation entrée sortie d'un couplage formé d'un filtre rationnel et d'un filtre diffusif de symbole diffusif  $\mu$  est en fait la somme d'un filtre rationnel et d'un nouveau filtre diffusif. Le symbole diffusif du nouveau filtre peut s'expliciter en fonction de  $\mu$  et de  $\mathcal{V}_\mu$ . L'étude précise de la fonctionnelle  $\mu \mapsto \mathcal{V}_\mu$  est utile pour établir ce résultat de décomposition et prouver la stabilité EBSB (i.e. entrée bornée sortie bornée) des systèmes étudiés.



# Chapitre 2

## Propriétés asymptotiques des filtres diffusifs

Pour l'analyse des séries temporelles dans un contexte de signaux aléatoires à mémoire longue, l'analyse asymptotique est essentielle, elle porte sur la densité spectrale et sur l'autocorrélation. Elle concerne les modèles dont la réponse fréquentielle est fractionnaire (cf : [Gra80]) ou multipliée par une fonction lentement variante (cf : [GD96]) au sens de [Sen76]. Pour faire un développement asymptotique de type fractionnaire, les méthodes utilisées recourent à des comportements asymptotiques connus (cf : [Hos81]) ou utilisent une formulation intégrale comme dans [Erd56] et [SKM87].

Dans [Mat98b] il est montré que le comportement asymptotique du symbole diffusif d'un opérateur diffusif détermine le comportement asymptotique de la réponse impulsionnelle aux temps longs, le développement asymptotique de cette réponse impulsionnelle porte le nom de lemme de Watson ; cette démarche est appliquée dans [GM97] sur une famille de systèmes. Par ailleurs dans [Mat98a], un résultat de stabilité sur des systèmes fractionnaires à temps continu et à temps discret découle du comportement asymptotique de la réponse impulsionnelle. Nous voulons proposer ici d'adapter et de poursuivre ce travail à temps discret .

L'étude de  $H^{FI}$  a montré une correspondance semblable entre la singularité de  $\mu^{FI}(\rho) \sim \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}(1-\rho)^{-\alpha}$  quand  $\rho \rightarrow 1$  et celle de  $h_n \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{n^{1-\alpha}}$ . De plus  $H^{FI}(z) = (1-z^{-1})^{-\alpha}$  et  $\mathcal{V}_{\mu^{FI}}(\rho) \sim \cos(\alpha\pi)(1-\rho)^{-\alpha} - 1$  prouve qu'il existe aussi une correspondance avec la singularité de la fonction de transfert en  $z \rightarrow 1$  et la valeur de continuité en  $\rho \rightarrow 1$ . Ces observations sont généralisées sous la forme d'un *lemme de Watson discret* qui détermine la singularité de  $h_n$  à partir de la singularité de  $\mu$  (cf : § 2.1 et [DM99]), puis sous la forme d'un *lemme de correspondance asymptotique* qui détermine la singularité de  $H(z)$  et de  $\mathcal{V}_{\mu}$  en fonction de  $\mu$  (cf : § 2.2). On trouvera dans [ANCL94, p. 228] un rappel du théorème des valeurs finales qui affirme  $\lim h_n = \lim_{z \rightarrow 1} H(z)(1-z^{-1})$ . Le lemme



de Watson discret produit un résultat plus fort en faisant des hypothèses plus restrictives (i.e.  $H$  est diffusif et sa discontinuité le long de la coupure possède un comportement asymptotique particulier au voisinage de  $z = 1$ ). Le lemme de correspondance asymptotique affirme que certaines singularités d'un filtre diffusif  $H(z)$  au voisinage de  $z = 1$  ne peuvent exister que lorsque  $\mu(\rho)$  la discontinuité de  $H(z)$  a les mêmes singularités au voisinage du même point  $z = 1$ . Ces deux lemmes permettent ensuite de donner une condition suffisante sur le symbole diffusif pour que le filtre diffusif associé soit à mémoire longue.

## 2.1 Lemme de Watson discret

Les filtres  $H^{UN}$ ,  $\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}H^{LN}$  et un nouveau filtre  $\frac{\partial}{\partial\alpha} \left( \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}H^{LN} \right)$  nous donnent des correspondances exactes entre les singularités de  $\mu$  et de  $h_n$ . La proposition un peu technique à prouver  $\mu^1 = o(\mu^2) \Rightarrow h_n^1 = o(h_n^2)$  permet de donner un comportement asymptotique de la réponse impulsionnelle si le comportement asymptotique du symbole diffusif se trouve proche de l'exemple de référence. Cette manière de procéder ne nous renseigne plus sur la singularité lorsque le comportement asymptotique du symbole diffusif étudié est trop différent de l'exemple de référence.

Le tableau 2.1 indique pour  $\alpha \in ]0, 1[$  des correspondances entre les symboles diffusifs définis sur  $[0; 1]$  et les réponses impulsionnelles. La première ligne est obtenue avec  $H^{UN}$  (p. 27). La deuxième ligne en multipliant (1.8) par  $\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$  et en utilisant la relation :  $\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$  (cf : [AS72]). La troisième ligne s'obtient en dérivant la précédente par rapport à  $\alpha$ . Cette dérivation par rapport à  $\alpha$  permet de définir ce nouveau filtre  $\frac{\partial}{\partial\alpha} \left( \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}H^{LN} \right)$  en utilisant la définition 1 (p. 26).

$\mu$	$h_n$
$\mathbf{1}_{[0,1]}$	$\frac{1}{n}$
$\left[ \ln \left( \frac{1}{\rho} \right) \right]^{-\alpha}$	$\frac{\Gamma(1-\alpha)}{n^{1-\alpha}}$
$-\ln \left[ \ln \left( \frac{1}{\rho} \right) \right] \cdot \left[ \ln \left( \frac{1}{\rho} \right) \right]^{-\alpha}$	$\frac{\ln(n)}{n^{1-\alpha}} \left( \Gamma(1-\alpha) - \frac{\Gamma'(1-\alpha)}{\ln(n)} \right)$

(2.1)

**Remarque 12** La deuxième ligne du tableau est en fait vraie pour  $\alpha < 1$ . En effet à  $n$  fixé,  $\int_0^1 \left[ \ln \left( \frac{1}{\rho} \right) \right]^{-\alpha} d\rho$  et  $\frac{\Gamma(1-\alpha)}{n^{1-\alpha}}$  sont des fonctions holomorphes de variable  $\alpha$  pour  $\text{Re}(\alpha) < 1$ . Ces deux fonctions sont égales pour  $\alpha \in ]0, 1[$ , elles sont donc égales pour  $\alpha \in ]-\infty, 1[$ . Cela nous permet d'établir le lemme de Watson discret pour  $\alpha \in ]-\infty, 1[$ .

**Lemme 1 (Watson discret)** Soit  $\mu$  une fonction définie et sommable sur  $[0, 1]$

- si le comportement asymptotique de  $\mu$  en  $\rho \rightarrow 1$  est de la forme :  $\mu(\rho) \sim \frac{a(1-\rho)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$  (où  $\alpha < 1$ ) alors  $h_n \sim \frac{a}{n^{1-\alpha}}$ .
- Si  $\mu(\rho) \sim \frac{a(1-\rho)^{-\alpha} \ln(\frac{1}{1-\rho})}{\Gamma(1-\alpha)}$  (où  $\alpha \in ]0, 1[$ ) alors  $h_n \sim a \frac{\ln(n)}{n^{1-\alpha}}$ .

Soit  $\mu$  une fonction définie et sommable sur  $[-1, 0]$

- Si le comportement asymptotique de  $\mu$  en  $\rho = -1$  est :  $\mu(\rho) \sim \frac{b(1+\rho)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}$  (où  $\beta < 1$ ) alors  $h_n \sim b \frac{(-1)^{n-1}}{n^{1-\beta}}$ .
- Si  $\mu(\rho) \sim \frac{b(1+\rho)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \ln(\frac{1}{1+\rho})$  (où  $\beta \in ]0, 1[ \setminus \{0\}$ ) alors  $h_n \sim b \frac{(-1)^{n-1} \ln(n)}{n^{1-\beta}}$ .

**Preuve** La deuxième partie de l'énoncé s'obtient à partir de la première partie en utilisant la remarque (p. 28). D'après la proposition 21 en annexe (p. 134), si  $\mu_1, \mu_2 \in L^1(0, 1)$  et si  $\mu_2$  est de signe constant alors  $[\mu_1 = o(\mu_2) \text{ quand } \rho \rightarrow 1] \Rightarrow [h_n^1 = o(h_n^2) \text{ quand } n \rightarrow \infty]$ ; la démonstration de la proposition 21 suppose en fait aussi que si  $e^{-\frac{n}{\ln n}} = o(h_n^2)$ . L'application de cette proposition à  $\mu_1 - \mu_2$  et à  $\mu_2$  prouve sous les mêmes conditions que si  $\mu_1 \sim \mu_2$  alors  $h_n^1 \sim h_n^2$ . Pour pouvoir se servir du tableau 2.1 et démontrer le lemme, il ne reste plus qu'à montrer  $[\ln(\frac{1}{\rho})]^{-\alpha} \sim (1-\rho)^{-\alpha}$  et  $-\ln[\ln(\frac{1}{\rho})] \sim \ln(\frac{1}{1-\rho})$ . La première relation provient de ce que les fonctions puissances conservent les équivalents. Le deuxième provient d'une inégalité des accroissements finis sur le logarithme :  $\forall \rho \in [\frac{1}{2}; 1], 1-\rho \leq \ln(\frac{1}{\rho}) \leq 2(1-\rho)$ .  $\square$

**Remarque 13** On dispose des réponses impulsionnelles associées aux éléments de base  $[\ln(\frac{1}{\rho})]^{-\alpha_k}$ . On peut alors obtenir un développement asymptotique infini de  $h_n$  à partir de celui de  $\mu$  (cf [DM99]). Pour cela il suffit de faire un simple changement de base (triangulaire) avec les éléments  $(1-\rho)^{-\alpha_k}$  qui ne fait appel qu'au développement de Taylor. Les calculs algébriques ne sont pas développés ici car nous n'en aurons pas l'utilité.

**Remarque 14** Les hypothèses de ce lemme supposent que le symbole diffusif est soit défini sur  $[-1, 0]$  soit sur  $[0, 1]$ , pour utiliser ce lemme pour d'autres symboles diffusifs, il suffit d'utiliser la linéarité de la fonctionnelle qui à  $\mu$  associe  $h_n$  et les règles d'addition sur les équivalents.

### Exemple 2 (suite)

Connaissant le symbole diffusif de  $H^{BI}$ ,  $\mu^{BI}(\rho) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}(1-\rho)^{-\alpha}(1+\rho)^\alpha$  (d'après (1.12)), le lemme de Watson discret permet de donner le comportement asymptotique de  $h_n^{BI}$  : si  $\alpha > 0$  alors  $h_n^{BI} \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha)n^{1-\alpha}}$  et si  $\alpha < 0$  alors  $h_n^{BI} \sim \frac{2^{-2\alpha}(-1)^n}{\Gamma(\alpha)n^{1-\alpha}}$ . Cet exemple est représenté sur la figure 2.1, qui montre que même pour des indices peu élevés le comportement asymptotique donne une bonne indication sur la suite étudiée. Cette simulation utilise les programmes `nom2mu.m` et `mus2hn.m` écrits dans l'annexe D et présentés au

§ C.3.  $H^{BI}$  est une discrétisation bilinéaire de  $s^{-\alpha}$  et lorsque  $\alpha > 0$  on reconnaît le comportement basses fréquences de l'intégration fractionnaire. Lorsque  $\alpha < 0$  le comportement hautes fréquences de la dérivation fractionnaire se retrouve dans l'asymptote et masque le comportement basses fréquences de la dérivation fractionnaire.

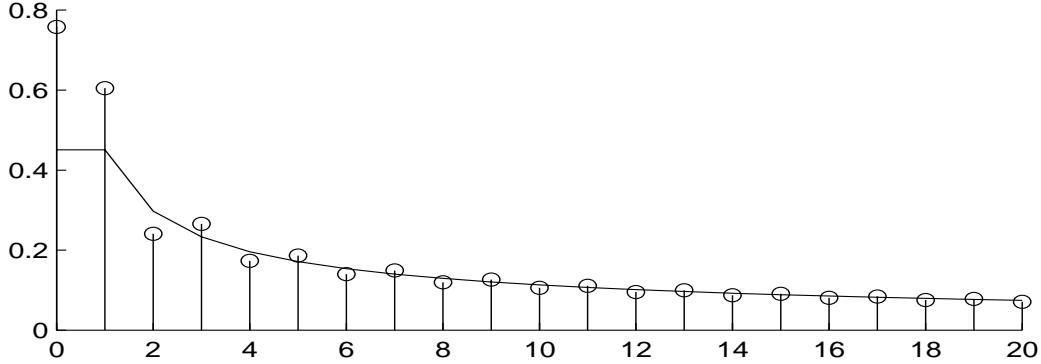


FIG. 2.1 – Réponse impulsionnelle du filtre  $H^{BI}$  (o) et comportement asymptotique prédit par le lemme de Watson discret en trait continu (-) pour  $\alpha = 0.4$ .

**Remarque 15** Si  $\mathcal{H}$  est un filtre diffusif avec un symbole diffusif  $\mu$  qui vérifie la première assertion du lemme 1 avec  $\alpha \in ]0, 1[$  alors  $h_n \notin l^1$  et  $\mathcal{H}$  n'est pas stable EBSB (entrée bornée, sortie bornée). Pour  $p \in \{1 \dots \infty\}$  et  $p < \frac{1}{\alpha}$  alors si l'entrée vérifie  $u_n \in l^p$  alors la sortie est bornée  $y_n \in l^\infty$ . La démonstration se fait en écrivant le produit de convolution et en écrivant l'inégalité de Hölder rappelée dans [DV75, annexe A].

## 2.2 Lemme de correspondance asymptotique

Le filtre  $H^{FI}$  nous donne une correspondance exacte entre les singularités de  $\mu$  et de  $H(z)$  et de  $\mathcal{V}_\mu$ . Une proposition un peu technique en annexe permet d'étendre ces résultats lorsque le comportement asymptotique de  $\mu$  est proche du symbole diffusif de  $\mathcal{H}^{FI}$ . Mais dans cette proposition, le résultat énoncé est plus faible que dans celle associée au lemme de Watson discret. Aussi l'énoncé du lemme de correspondance asymptotique est plus restrictif que le lemme de Watson discret.

**Lemme 2 (correspondance asymptotique)** Soit  $\mathbb{S} = \{\rho_j\}$  un ensemble fini contenu dans  $[-1, 1]$ . Soit  $\mu \in L^1(-1, 1)$  telle que  $\mu$  est localement hölderienne sur  $[-1, 1] \setminus \mathbb{S}$

- Si  $\mu(\rho) \sim a(1-\rho)^{-\alpha}$  quand  $\rho \rightarrow 1$  et si  $\mu(\rho)(1-\rho)^\alpha$  est hölderienne sur un voisinage de  $\rho = 1$ , alors les comportements asymptotiques de  $\mathcal{V}_\mu$  et  $H(z)$

vérifient en fonction de  $\alpha$  et quand  $\rho \rightarrow 1^-$  et quand  $z \rightarrow 1$  ( $z \notin [-1, 1]$ ) :

$\alpha$	$\mathcal{V}_\mu$	$H(z)$
$]0; 1[\setminus\{0.5\}$	$\sim \frac{a\pi}{\tan(\alpha\pi)}(1-\rho)^{-\alpha}$	$\sim \frac{a\pi}{\sin(\alpha\pi)}(1-z^{-1})^{-\alpha}$
0.5	$= o(1-\rho)^{-0.5}$	$\sim a\pi(1-z^{-1})^{-0.5}$
0	$\sim a \ln(1-\rho)$	$\sim a \ln(1-z^{-1})$
$] - 1; 0[$	$= O(1)$	$= O(1)$

(2.2)

- Si  $\mu(\rho) \sim b(1+\rho)^{-\alpha}$  quand  $\rho \rightarrow -1$  et si  $\mu(\rho)(1+\rho)^\alpha$  est hölderienne sur un voisinage de  $\rho = -1$ , alors les comportements asymptotiques de  $\mathcal{V}_\mu$  et  $H(z)$  vérifient en fonction de  $\beta$  et quand  $\rho \rightarrow -1^+$  et quand  $z \rightarrow -1$  ( $z \notin [-1, 1]$ ) :

$\alpha$	$\mathcal{V}_\mu$	$H(z)$
$]0; 1[\setminus\{0.5\}$	$\sim -\frac{b\pi}{\tan(\beta\pi)}(1+\rho)^{-\beta}$	$\sim -\frac{b\pi}{\sin(\beta\pi)}(1+z^{-1})^{-\beta}$
0.5	$= o(1+\rho)^{-0.5}$	$\sim -b\pi(1+z^{-1})^{-0.5}$
0	$\sim -b \ln(1+\rho)$	$\sim -b \ln(1+z^{-1})$
$] - 1; 0[$	$= O(1)$	$= O(1)$

(2.3)

**Commentaire** Le comportement asymptotique de  $\mathcal{V}_\mu(\rho)$  quand  $\rho \rightarrow 1^-$  est donné par le terme  $\mu \sim a(1-\rho)^{-\alpha}$  lorsque  $\alpha \in [0, 1[\setminus\{0.5\}$ . De même le comportement asymptotique de  $\mathcal{H}(z)$  quand  $z \rightarrow 1$  avec  $z \notin [-1, 1]$  est aussi donné par  $\mu \sim a(1-\rho)^{-\alpha}$  lorsque  $\alpha \in [0, 1[$ .

**Preuve** Cette démonstration est faite dans [Mus92, p. 83–85] avec des notations un peu différentes.  $\square$

**Remarque 16** Si le support d'un symbole diffusif  $\mu$  est  $[0; 1]$  (respectivement  $[-1; 0]$ ), et si  $\mu$  peut être approché par des puissances fractionnaires de  $\rho$  en  $0^+$  (respectivement  $-\rho$  en  $0^-$ ) alors on pourrait aussi donner des informations sur le comportement asymptotique de  $H(z)$  et de  $\mathcal{V}_\mu$ . Il suffit pour démontrer cela d'observer que  $H^{-\mu(1-\rho)}(z) = H^{\mu(\rho)}(1-z)$  et que  $\mathcal{V}_{-\mu(1-\rho)}(r) = \mathcal{V}_{\mu(\rho)}(1-r)$  (respectivement  $H^{-\mu(-1-\rho)}(z) = H^{\mu(\rho)}(-1-z)$  et  $\mathcal{V}_{-\mu(-1-\rho)}(r) = \mathcal{V}_{\mu(\rho)}(-1-r)$ ) et d'utiliser le lemme de comportement asymptotique.

**Exemple 3 (suite)**  $H^{LN}$  est un filtre diffusif dont on ne sait pas exprimer simplement la fonction de transfert à l'aide de fonctions usuelles, ainsi ce lemme donne ses comportements asymptotiques au voisinage de  $z = 1$  : si  $\alpha \in ]0, 1[$  alors  $H^{LN}(z) \sim (1-z)^{-1}$  quand  $z \rightarrow 1$  et si  $\alpha \in ]0, 1[\setminus\{0.5\}$  alors  $\mathcal{V}_{\mu^{LN}}(\rho) \sim \cos(\alpha\pi)(1-\rho)^{-\alpha}$  quand  $\rho \rightarrow 1^-$ . Le diagramme de Bode de  $H^{LN}$  de la figure 2.2 et les courbes  $\mathcal{V}_{\mu^{LN}}(\rho)$  de la figure 2.3 illustrent cette analyse asymptotique. Ces courbes témoignent de ce que l'analyse asymptotique est valable très proche de  $z = 1$  et de  $\rho = 1$  mais ne donne aucune information pour  $\rho = 0.9$  et pour  $z = e^{\frac{i}{20}}$  : l'analyse asymptotique néglige des quantités

qui ne sont plus négligeables dès qu'on s'éloigne de  $z = 1$  ou de  $\rho = 1$ . Les deux simulations sont faites en utilisant les programmes `nom2mu.m` et `mushz2h.m` écrits dans l'annexe D et présentés au §C.3. En  $z = 0$ , le lemme ne s'applique pas parce que le comportement asymptotique du symbole diffusif de  $\mathcal{H}^{LN}$  n'est pas une puissance fractionnaire de  $1 - \rho$ .

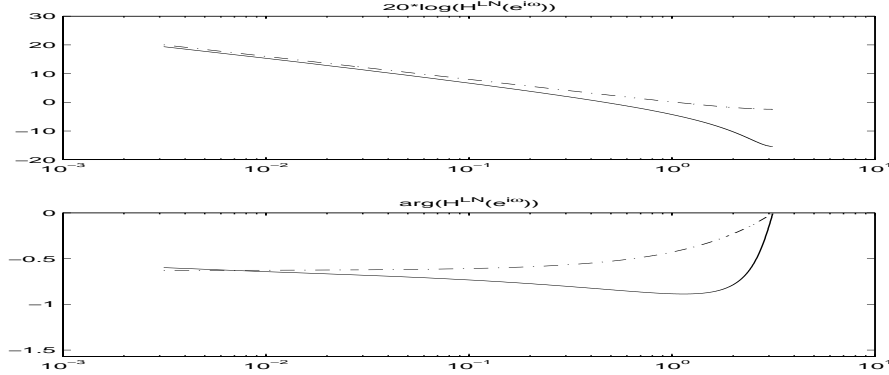


FIG. 2.2 – Diagrammes de Bode du filtre  $H^{LN}$  (—) et du comportement asymptotique prédit par le lemme de correspondance asymptotique en semi-pointillé (.-) pour  $\alpha = 0.4$ .

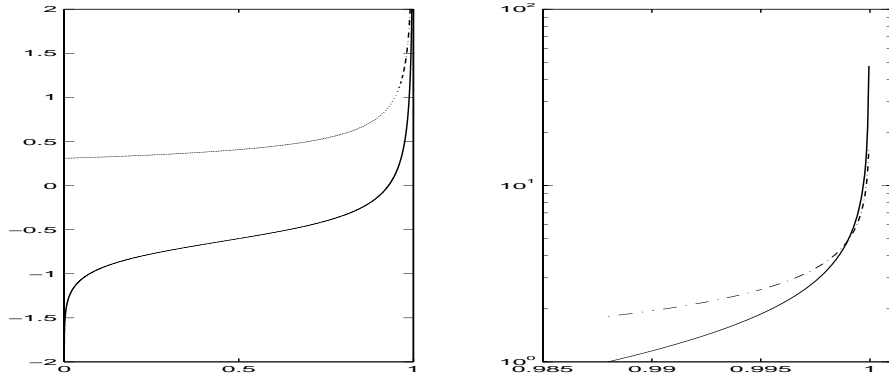


FIG. 2.3 – Valeurs de continuité du filtre  $H^{LN}$  (—) et comportement asymptotique prédit par le lemme de comportement asymptotique en semi-pointillé (.-) pour  $\alpha = 0.4$ . La figure de droite est un zoom.

## 2.3 Processus aléatoire à mémoire longue généré par des filtres diffusifs

Un enjeu en économétrie dans l'étude des séries temporelles à mémoire longue est de construire un estimateur pour identifier cette mémoire longue. Cette étude requiert en préliminaire de trouver le comportement asymptotique de la densité spectrale ou de l'autocorrélation d'un processus aléatoire à mémoire longue.

[Gra80] a étudié le cas d'un processus aléatoire synthétisé par  $\mathcal{H}^{FI}$ . Les lemmes de Watson discret et de comportement asymptotique donnent une classe plus large de filtres qui permettent de générer un processus aléatoire ayant ces mêmes comportements asymptotiques (cf [IMM00]). Les processus aléatoires ainsi synthétisés forment toutefois une famille restreinte des processus à mémoire longue (voir [BMS98]).

**Proposition 4** *Soit  $\mathcal{H}$  un filtre diffusif de lien direct  $h_0$  et de symbole diffusif  $\mu$ . Soit  $\mathbb{S} = \{\rho_j\}$  un ensemble fini contenu dans  $[-1, 1]$ . Soit  $\mu \in L^1(-1, 1)$  telle que  $\mu$  est localement hölderienne sur  $[-1, 1] \setminus \mathbb{S}$*

*Si  $\mu(\rho) \sim a(1 - \rho)^{-\alpha}$  quand  $\rho \rightarrow 1$  et si  $\mu(\rho)(1 - \rho)^\alpha$  est hölderienne sur un voisinage de  $\rho = 1$ , si l'entrée de  $\mathcal{H}$  est  $\varepsilon_n$  un bruit blanc de variance égale à 1, et si la sortie est notée  $Y_n$ ,*

*alors  $Y_n$  est un processus aléatoire stationnaire du second ordre de densité spectrale  $S_{YY}(\omega)$  et d'autocorrélation  $R_{YY}(n)$  données par*

$$S_{YY}(\omega) = \mathcal{H}(e^{i\omega})\mathcal{H}(e^{-i\omega}) \sim \frac{a^2\pi^2}{(\sin(\alpha\pi))^2}\omega^{-2\alpha}$$

$$R_{YY}(n) = \sum_{k \geq 0} h_k h_{k+n} \sim \frac{a^2\pi}{\sin(\alpha\pi)} \frac{\Gamma(1 - 2\alpha)}{n^{1-2\alpha}}$$

**Preuve** Le lemme de Watson discret prouve que la réponse impulsionnelle de  $\mathcal{H}$ ,  $h_n \in l^2$  et donc que  $Y_n$  est un processus aléatoire tel que l'autocorrélation est définie (en effet  $l^2 \stackrel{d}{\star} l^2 \subset l^\infty$ ) et la densité spectrale est sommable.

Le lemme de correspondance asymptotique conduit à :

$\mathcal{H}(e^{i\omega}) \sim \frac{a\pi}{\sin(\alpha\pi)}(1 - e^{-i\omega})^{-\alpha}$ . Il suffit alors de donner un équivalent de  $(1 - e^{-i\omega})^{-\alpha}$  pour obtenir le résultat.

L'autocorrélation s'exprime sous forme d'une intégrale simple adaptée au lemme de Watson discret : d'après (1.5) et en échangeant la somme et les intégrales grâce au théorème de Fubini, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} h_k h_{k+n} &= h_0 h_n + \int_0^1 \int_0^1 \mu(r) \mu(\rho) \rho^n \sum_{k \geq 1} (r\rho)^{k-1} d\rho dr \\ &= h_0 \int_0^1 \mu(\rho) \rho^{n-1} d\rho + \int_0^1 \int_0^1 \frac{\mu(\rho)\mu(r)\rho^n}{1-r\rho} dr d\rho \end{aligned} \quad (2.4)$$

Grâce aux équations (1.5) et (1.6),

$$R_{YY}(n) = \sum_{k \geq 0} h_k h_{k+n} = \int_0^1 \mu(\rho) \mathcal{H}\left(\frac{1}{\rho}\right) \rho^{n-1} d\rho$$

Le lemme de comportement asymptotique prouve que  $\mathcal{H}\left(\frac{1}{\rho}\right) \sim \frac{a\pi}{\sin(\alpha\pi)}(1 - \rho)^{-\alpha}$  Il suffit alors d'utiliser le lemme de Watson discret pour conclure.  $\square$

Cette proposition permet ainsi de prouver que  $\mathcal{H}^{LN}$  peut synthétiser un processus aléatoire à mémoire longue. La figure 2.4 représente l'autocorrélation du

processus aléatoire synthétisé avec  $\mathcal{H}^{LN}$  pour  $\alpha = 0.4$ . La simulation a été réalisée avec les programmes `nom2mu.m`, `mush2hn.m` et `mushz2h.m` écrits dans l'annexe D et présentés au §C.3. Cette simulation montre que l'étude asymptotique donne une approximation de l'autocorrélation y compris lorsque  $\alpha$  est proche de la limite 0.5, pour laquelle l'autocorrélation est infinie.

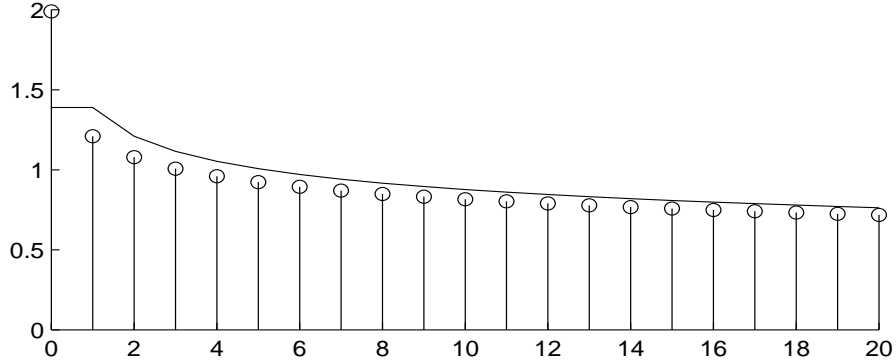


FIG. 2.4 – Autocorrélation de  $Y_n$  synthétisé avec  $\mathcal{H}^{LN}$  pour  $\alpha = 0.4$  (o) et comportement asymptotique (-) prédit par le lemme de comportement asymptotique.

En résumé, nous avons adapté à temps discret le lemme de Watson et ainsi donné le comportement asymptotique de  $h_n$  en fonction de la singularité de  $\mu$  en  $\rho = 1$ .

Nous avons proposé le lemme de comportement asymptotique qui donne des conditions suffisantes sur  $\mu$  pour que la fonction de transfert et la valeur de continuité aient le même comportement asymptotique que  $\mathcal{H}^{FI}$  en  $z = 1$ .

L'autocorrélation d'un processus aléatoire synthétisé par un filtre diffusif est la réponse impulsionnelle d'un autre filtre diffusif de symbole diffusif  $\mu(\rho)\mathcal{H}(\frac{1}{\rho})$ . L'application du lemme de comportement asymptotique a donné des conditions suffisantes sur  $\mu$  pour que cette autocorrélation ait ce comportement asymptotique.

Ces deux lemmes permettront à propos d'un couplage le calcul du comportement asymptotique aux temps longs de la réponse impulsionnelle (cf : chapitre 6) et de la fonction de Lyapunov (cf : chapitre 8).

# Chapitre 3

## Positivité et dissipativité des filtres numériques

[Zam96] explique qu'en 1960 est apparu l'idée qu'une rétroaction non-linéaire peut stabiliser un bouclage lorsque cette rétroaction satisfait une condition sectorielle. Les recherches ont alors conduit à des théorèmes qui prouvent la stabilité entrée-sortie à partir de conditions sur la positivité et la conicité (voir [Zam66] et [WW68] pour une approche plus originale). La théorie des systèmes s'est aussi enrichie : [Kal63] et [Yak66] sont à l'origine du lemme de Kalman-Yacubovich-Popov et [Wil72] a défini la notion de dissipativité et de fonction de stockage. [MAM93] s'est placé dans cette dernière perspective pour montrer la positivité de l'intégration fractionnaire ; [Sta94, §5] privilégie aussi cette dernière approche, mais la première approche est aussi mentionnée (cf [Sta94, p. 550]).

Nous proposons lors du §3.1 d'étendre la définition classique de la positivité aux filtres diffusifs à temps discret et de donner un critère de la positivité portant sur le symbole diffusif. Des idées sont aussi exposées pour construire une variété de filtres rationnels positifs. Le §3.2 montre qu'à temps discret les réalisations diffusives associées sont aussi dissipatives ; le lemme de Kalman-Yacubovich-Popov est aussi rappelé parce qu'il montre la dissipativité de toute réalisation minimale d'un filtre rationnel positif.

**Notations :** dans la littérature mathématique, une fonction de transfert est en général définie par une TZ anticausale (i.e.  $\mathcal{H}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n$ ). Les ensembles du plan complexe sont alors  $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ ,  $\overline{\mathbb{D}} = \{|z| \leq 1\}$  et  $\partial\mathbb{D} = \{|z| = 1\}$ , (cf : par exemple [Par89]). La convention que nous utilisons pour les fonctions de transfert  $H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^{-n}$  est celle souvent utilisée en automatique et en traitement du signal ; elle nous amène à définir de manière analogue :  $\mathbb{E} = \{|z| > 1\}$ ,  $\overline{\mathbb{E}} = \{|z| \geq 1\}$  et  $\partial\mathbb{E} = \{|z| = 1\}$ .



## 3.1 Positivité des filtres numériques

Le §3.1.1 donne une définition de la positivité. Appliquée aux filtres diffusifs lors du §3.1.2, cette définition donne des conditions suffisantes qui portent sur le symbole diffusif pour être positifs. Le §3.1.3 propose quelques idées générales pour construire un filtre rationnel positif.

### 3.1.1 Définition de la positivité

La positivité d'un filtre  $\mathcal{H}$  est généralement définie par un critère qui porte soit sur le comportement temporel du filtre soit sur son comportement fréquentiel  $\operatorname{Re}(\mathcal{H}(e^{i\omega})) \geq 0$  où  $\omega \in [0, \pi[$ , soit sur sa transformée en  $Z$   $\operatorname{Re}(\mathcal{H}(z)) \geq 0$  pour  $z \in \mathbb{E}$  (cf [Cai88]). Le premier critère ne suppose que la causalité et se généralise par exemple au non linéaire (cf : [Zam66]), tandis que le deuxième critère est souvent présenté pour les filtres de dimension finie stables. Le troisième critère permettrait de travailler hors de  $\mathbb{H}^1(\mathbb{E})$  et d'inclure aussi des pôles sur le cercle unité ; il est par exemple exposé dans [Cai88].

Lorsqu'un filtre rationnel comporte un pôle sur le cercle unité, il peut quand même être positif mais sa réponse fréquentielle ne suffit pour l'affirmer. Il est donc en général proposé d'utiliser la positivité de la fonction de transfert sur un contour encerclant les pôles par l'extérieur. Les filtres diffusifs  $\mathcal{H}$  peuvent être singuliers en  $z = \pm 1$  mais nous allons montrer que leur réponse fréquentielle définie à partir de la réponse impulsionnelle coïncide avec le prolongement de la fonction de transfert sur le cercle unité et que la positivité de ce prolongement suffit à prouver la positivité de  $\mathcal{H}$ .

L'espace de Hardy (cf : [Par89])  $\mathbb{H}^1(\mathbb{E})$  sont des filtres causaux qui prolongent analytiquement certaines fonctions dans  $L^1(\partial\mathbb{E})$ , la définition et les propriétés sont rappelées en annexe B.

Les filtres de dimension finie stables sont naturellement dans  $\mathbb{H}^1(\mathbb{E})$  parce que leur fonction de transfert est holomorphe sur un ouvert contenant  $\overline{\mathbb{E}}$ . La proposition 22 (page 140) montre que c'est aussi vrai pour les filtres diffusifs sous réserve d'une condition technique sur le symbole diffusif qui contient notamment :  $\mu(\rho) = O(1 \pm \rho)^{-\alpha}$  quand  $\rho \rightarrow \mp 1$ .

La définition 3 donne les deux caractérisations classiques de la positivité et énonce qu'elles sont équivalentes dans  $\mathbb{H}^1(\mathbb{E})$ .

**Définition 3** *Un filtre numérique causal  $\mathcal{H}$  est dit positif et est noté  $\mathcal{H} \geq 0$  si l'une des deux conditions nécessaires et suffisantes sont vérifiées.*

a. *Pour toute entrée  $u_n$  et quel que soit l'horizon  $N$ , l'inégalité suivante est vérifiée.*

$$\sum_{0 \leq n \leq N} u_n y_n \geq 0 \quad (3.1)$$

*Les sorties  $\{y_0 \dots y_N\}$  dépendent exclusivement des entrées réelles  $\{u_0 \dots u_N\}$ .*

b. La fonction de transfert appartient à  $\mathbb{H}^1(\mathbb{E})$ , s'étend sur le cercle unité et,

$$\operatorname{Re}(\mathcal{H}(e^{i\omega})) \geq 0, \omega \in ]0, \pi[ \text{ (p.p.)} \quad (3.2)$$

De plus si  $\mathcal{H} \in \mathbb{H}^1(\mathbb{E})$  et  $\mathcal{H} \neq 0$  alors  $\operatorname{Re}(\mathcal{H}(z)) > 0$  quand  $z \in \mathbb{E}$ .

Enfin si  $\inf_{\omega \in ]-\pi, \pi[} \operatorname{Re}(\mathcal{H}(e^{i\omega})) > 0$  alors  $\mathcal{H}$  est dit strictement positive et est noté  $\mathcal{H} > 0$ .

La positivité d'un filtre peut être testée numériquement, deux algorithmes sont possibles. (3.1) peut être écrite sous forme d'une expression matricielle dont le programme `ishnpositif.m` teste la positivité. La condition (3.2) signifie dans le plan de Nyquist que la réponse fréquentielle doit se trouver dans le demi plan droit, et (3.2) signifie, sur le diagramme de Bode, que la phase doit être dans  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Ainsi les figures 3.1 (ci-dessous) et 2.2 (p. 44) témoignent de la positivité de  $\mathcal{H}^{LN}$ . Les programmes `muz2h.m` et `mushz2h.m` permettent justement de simuler ces diagrammes.

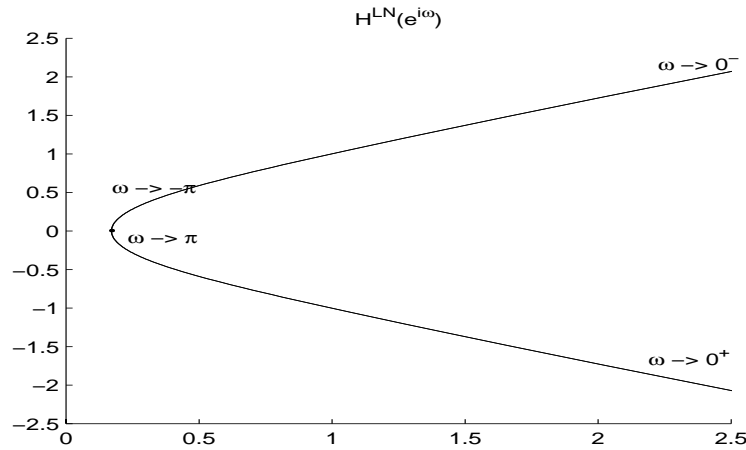


FIG. 3.1 –  $\mathcal{H}^{LN}(e^{i\omega})$  est représentée dans le plan de Nyquist pour  $\alpha = 0.4$ .  $\mathcal{H}^{LN}$  se trouve dans le demi-plan droit. Cela confirme la positivité de  $\mathcal{H}^{LN}$ .

Le lien direct  $h_0$  d'un filtre positif non nul est strictement positif. En effet la somme  $\sum_{0 \leq n \leq N} u_n y_n$  peut s'écrire vis à vis de  $u_n$  comme un polynôme du second degré. Le terme de plus haut degré en  $u_n$  est  $h_0 u_n^2$ . La positivité du polynôme entraîne que  $h_0 > 0$ . A temps continu aussi l'extension par dérivation d'un opérateur différentiel conduit à introduire un lien direct (cf : [Hel00, ch. 3]) Les convertisseurs analogiques numériques réalistes introduisent un retard et transforment un opérateur à temps continu en un filtre à temps discret avec un lien direct nul. Cette définition est un choix, dont découlent des propriétés cohérentes, mais d'autres choix peuvent être faits (par exemple  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n y_{n+1} \geq 0$ ) qui permettraient de conserver la positivité avec ces convertisseurs analogiques numériques

(cf : [MNC97, remarque p. 12]<sup>1</sup>).

La discrétisation bilinéaire de  $s^{-\alpha}$  ( $\alpha \in ]-1, 1[\setminus\{0\}$ ) est  $\mathcal{H}^{BI}(z)$  qui appartient à  $\mathbb{H}^1(\mathbb{E})$ . La réponse fréquentielle de  $\mathcal{H}^{BI}(z)$  s'exprime en fonction de la réponse fréquentielle de  $s^{-\alpha}$ , aussi la positivité de  $s^{-\alpha}$  entraîne celle de  $\mathcal{H}^{BI}(z)$ .

### 3.1.2 Positivité d'un filtre diffusif

[DM88] (et par la suite [Mon98]) montrent qu'à temps continu un opérateur diffusif est positif lorsque son symbole diffusif  $\nu(\xi)$  est positif. Nous proposons ici des conditions suffisantes analogues pour les filtres diffusifs à temps discret dans la proposition 5, mais elles sont plus compliquées. En effet selon (1.6) un filtre diffusif à temps discret est la somme d'un lien direct  $h_0$  et d'une agrégation continue de filtre d'ordre 1 retardés qui ne sont pas positifs. La proposition 6 montre que ces conditions sont toutefois cohérentes avec la condition à temps continu. Selon (1.6),  $\mathcal{H}(e^{i\omega})$  est continue sur  $] -\pi, \pi[\setminus\{0\}$ .

**Proposition 5** *Soit un filtre diffusif  $\mathcal{H} \in \mathbb{H}^1(\mathbb{E})$*

a. *Lorsque  $\mu$  est positive,*

$$\mathcal{H}(-1) = h_0 - \int_{-1}^1 \frac{\mu(\rho)}{1+\rho} d\rho \text{ est finie et positive} \iff \mathcal{H} \text{ est positive,}$$

$$\mathcal{H}(-1) \text{ est finie et strictement positive} \iff \mathcal{H} \text{ est strictement positive,}$$

b. *Lorsque  $\mu$  est négative,*

$$\mathcal{H}(1) = h_0 + \int_{-1}^1 \frac{\mu(\rho)}{1-\rho} d\rho \text{ est finie et positive} \iff \mathcal{H} \text{ est positive,}$$

$$\mathcal{H}(1) \text{ est finie et strictement positive} \iff \mathcal{H} \text{ est strictement positive.}$$

c. *En général, une condition suffisante de positivité est :*

$$\rho \mapsto \frac{|\mu(\rho)| - \rho\mu(\rho)}{1 - \rho^2} \in L^1(-1, 1) \quad \text{et} \quad h_0 \geq \int_{-1}^1 \frac{|\mu(\rho)| - \rho\mu(\rho)}{1 - \rho^2} d\rho \quad (3.3)$$

d. *Si  $\mathcal{H}$  est positif, si  $\mu$  est de signe constant et si  $\mu$  n'est pas la fonction nulle,*

$$\text{alors } \Re e(H(z)) > 0 \text{ pour } z \in \bar{\mathbb{E}} \setminus \{-1, 1\}.$$

**Preuve** On montre d'abord a. et b. pour ensuite en déduire c. On revient sur la démonstration de a. et b. pour montrer d.

<sup>1</sup>“ This pathology suggests the introduction of slightly different concepts of passivity in discrete-time that the ones discussed in the present paper.” En fait la notion de passivité implique de la même façon un choix arbitraire de définition de la positivité.

a. La partie réelle de (1.6) est :

$$\mathcal{R}e(\mathcal{H}(e^{i\omega})) = h_0 + \int_{-1}^1 \mu(\rho) \frac{\cos(\omega) - \rho}{1 - 2 \cos(\omega)\rho + \rho^2} d\rho \quad (3.4)$$

La fraction est, à  $\rho$  fixé, une fonction croissante de  $\omega$  sur  $[-\pi, 0]$  et décroissante sur  $[0, \pi]$ . On suppose  $\mu$  positive. Si  $\mathcal{H}(-1)$  existe, alors  $\inf \mathcal{R}e(\mathcal{H}(e^{i\omega})) = \mathcal{H}(-1)$  et donc selon (3.2),  $\mathcal{H}(-1) \geq 0 \iff \mathcal{H} \geq 0$  et aussi  $\mathcal{H}(-1) > 0 \iff \mathcal{H} > 0$ . On remarque que si l'intégrale qui définit  $\mathcal{H}(-1)$  n'existe pas alors cette intégrale vaut  $-\infty$  et  $\mathcal{H}$  n'est pas positif.

- b. Soit  $\mathcal{H}_1(z) = \mathcal{H}(-z)$ , alors en utilisant la remarque 3 (p 28), l'énoncé de b. appliqué à  $\mathcal{H}_1$  est l'énoncé de a. appliqué à  $\mathcal{H}$ .
- c. L'assertion c. est une condition suffisante plus générale, elle résulte de l'association de a. et b. Supposons que (3.3) est vraie,  $\mu$  peut se décomposer en  $\mu = \mu_+ - \mu_-$  avec  $\mu_+ \geq 0$  et  $\mu_- \geq 0$ , on pose aussi :

$$h_0^+ = \int_{-1}^1 \frac{\mu_+(\rho)}{1 + \rho} d\rho \text{ et } h_0^- = \int_{-1}^1 \frac{\mu_-(\rho)}{1 - \rho} d\rho \quad (3.5)$$

La condition (3.3) prouve la convergence des intégrales dans (3.5). (3.3) dit que  $h_0 \geq h_0^+ + h_0^-$ . La positivité de  $\mu_+$  et de  $\mu_-$  permet de minorer  $\mathcal{R}e(\mathcal{H}(e^{i\omega}))$  par  $h_0^+ + \int_{-1}^1 \mu_+(\rho) \mathcal{R}e\left(\frac{e^{-i\omega}}{1 - e^{-i\omega}\rho}\right) d\rho + h_0^- - \int_{-1}^1 \mu_-(\rho) \mathcal{R}e\left(\frac{e^{-i\omega}}{1 - e^{-i\omega}\rho}\right) d\rho$ . Ensuite a. prouve la positivité de la première partie du minorant et b. prouve la positivité de la deuxième partie du minorant. L'inégalité (3.2) est ainsi vérifiée et entraîne c.

- d. Si  $\mathcal{H}$  est positif et  $\mu$  de signe constant et n'est pas la fonction nulle, alors  $\mu \geq 0$ ,  $\mathcal{H}(-1) \geq 0$ , ou  $\mu \leq 0$ ,  $\mathcal{H}(1) \geq 0$ . Dans les deux cas la fraction utilisée dans (3.4) est, à  $\rho$  fixé, strictement monotone pour  $\omega \in ]-\pi, \pi[ \setminus \{0\}$ . Alors  $\mathcal{R}e(\mathcal{H}(e^{i\omega})) > 0$  pour  $\omega \in ]-\pi, \pi[ \setminus \{0\}$ . La définition 3 dit que  $\forall z \in \mathbb{E}$ ,  $\mathcal{R}e(\mathcal{H}(z)) > 0$ . Cette assertion d. est fausse pour les filtres hors de  $\mathbb{H}^1(\mathbb{E})$  dont la fonction de transfert est positive sur  $\mathbb{E}$ , ainsi

$$\forall z \in \partial\mathbb{E} \setminus \{1\} \quad \mathcal{R}e\left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right) = 0.$$

□

**Remarque 17** Dans la proposition 5, la condition b. correspond au cas où le symbole diffusif  $\mu$  est négatif; cette condition exprimée en temps signifie que  $h_0 - \sum_{n \geq 1} |h_n| \geq 0$  qui, elle, entraîne la positivité. En effet  $\mathcal{R}(\mathcal{H}(e^{i\omega})) = h_0 + \sum_{n \geq 1} h_n \cos(\omega n) \geq h_0 - \sum_{n \geq 1} |h_n| \geq 0$ .

**Remarque 18** La proposition 5 peut être généralisé au cas où  $\mu$  est une mesure signée avec une partie continue par rapport à la mesure de Lebesgue et une partie discrète sur  $] -1, 1[$  (cf : assertion d. qui indique qu'il faudrait exclure les pôles en  $z = \pm 1$  dans  $\mathcal{H}$ ). Cette généralisation donne une condition suffisante de positivité sur les filtres rationnels.

**Exemple 4 (suite)** La proposition 5 prouve que  $\mathcal{H}^{UN}$  est positif parce que  $\mu^{UN} \geq 0$  et que d'après (1.4)  $\mathcal{H}^{UN}(-1) = \ln(2) > 0$ .

La proposition 1 (p. 27) montre que que les discrétisations d'un opérateur diffusif en à temps continu  $\mathcal{H}^{\natural}(s)$  de symbole diffusif  $\eta(\xi)$  par Euler rétrograde  $\mathcal{H}^a$  et par invariance impulsionnelle  $\mathcal{H}^c$  sont des filtres diffusifs.  $\mathcal{H}^b$  est l'extension par l'opérateur des différence de  $\mathcal{H}^a$  (voir la proposition 1 (p. 27)). Lorsque  $\mathcal{H}^{\natural}(s)$  vérifie la condition suffisante classique de positivité  $\eta(\xi) \geq 0$  alors la proposition suivante montre qu'alors  $\mathcal{H}^a$ ,  $\mathcal{H}^b$  et  $\mathcal{H}^c$  sont aussi positifs. Cette proposition et la remarque qui suit argumentent en faveur du choix de la définition de la positivité à temps discret qui était discuté page 50.

**Proposition 6** Soit  $\mathcal{H}^{\natural}(s)$  un opérateur diffusif de symbole diffusif  $\eta(\xi) \geq 0$  tel que  $\frac{\eta(\xi)}{1+\xi} \in L^1(0, \infty)$  (i.e. condition pour les opérateurs diffusifs). Soit  $\mathcal{H}^a(z)$  la discrétisation par Euler rétrograde de  $\mathcal{H}^{\natural}(s)$  et  $\mathcal{H}^c(z)$  la discrétisation par invariant impulsionnel de  $\mathcal{H}^{\natural}(s)$ .

- (i)  $\mathcal{H}^a$  et  $\mathcal{H}^b = (1 - z^{-1})\mathcal{H}^a$  sont positifs.
- (ii) Si  $\eta \in L^1(0, \infty)$ , alors  $\mathcal{H}^c(z)$  est positif.
- (iii) Si  $\eta \notin L^1(0, \infty)$ , le lien direct de  $\mathcal{H}^c$  peut être choisi arbitrairement et  $\mathcal{H}^c$  est positif si et seulement si  $h_0 \geq \int_0^\infty \frac{\eta(\xi)}{1+e^\xi} d\xi$ . De plus si  $h_0 = h_1$  alors  $\mathcal{H}^c$  est positif (i.e.  $h_1$  est déjà déterminé par  $\eta : h_1 = \int_0^\infty \eta(\xi)e^{-\xi} d\xi$ ).

**Preuve** Il suffit d'appliquer la proposition 5 à  $\mathcal{H}^a$  et  $\mathcal{H}^c$ .

- (i) Selon la proposition 1, le symbole diffusif de  $\mathcal{H}^a$  est  $\mu^a(\rho) = \eta(\frac{1-\rho}{\rho}) \geq 0$  et  $\mathcal{H}^a(z = -1) = \mathcal{H}^{\natural}(s = 1 - (-1)) = \mathcal{H}^{\natural}(2) = \int_0^\infty \frac{\eta(\xi)}{\xi+2} d\xi \geq 0$ . Aussi  $\mathcal{H}^a$  est positif. Le symbole diffusif de  $\mathcal{H}^b(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{H}^a(z)$  est  $\mu^b(\rho) = -\frac{1-\rho}{\rho}\eta(\frac{1-\rho}{\rho}) \leq 0$  et  $\mathcal{H}^b(z = 1) = 0 \times \mathcal{H}^a(z = 1) = 0 \geq 0$ . Aussi  $\mathcal{H}^b(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{H}^a(z)$  est positif.
- (ii) Selon la proposition 1, le symbole diffusif de  $\mathcal{H}^c$  est  $\mu^c(\rho) = \eta(-\ln(\rho)) \geq 0$  et le lien direct de  $\mathcal{H}^c$  est  $h_0^c = \int_0^\infty \eta(\xi) d\xi$ . (1.6) et le changement de variable  $\xi = -\ln(\rho)$  permettent d'exprimer  $\mathcal{H}^c(-1)$  en fonction de  $\eta : \mathcal{H}^c(-1) = \int_0^\infty \eta(\xi) d\xi - \int_0^\infty \frac{\eta(\xi)}{1+e^\xi} d\xi \geq 0$ . Ainsi  $\mathcal{H}^c$  est positif.
- (iii) Selon la proposition 1, le symbole diffusif de  $\mathcal{H}^c$  est  $\mu^c(\rho) = \eta(-\ln(\rho)) \geq 0$  mais le lien direct  $h_0$  est arbitraire. (1.6) et le changement de variable  $\xi = -\ln(\rho)$  permettent d'exprimer  $\mathcal{H}^c(-1)$  en fonction de  $\eta$  et de  $h_0 : \mathcal{H}^c(-1) = h_0 - \int_0^\infty \frac{\eta(\xi)}{1+e^\xi} d\xi$ . Aussi  $h_0 \geq \int_0^\infty \frac{\eta(\xi)}{1+e^\xi} d\xi$  est une condition nécessaire et suffisante de positivité de  $\mathcal{H}^c$ . De plus si  $h_0 = h_1 = \int_0^\infty \eta(\xi)e^{-\xi} d\xi$  alors cette condition est satisfaite et  $\mathcal{H}^c$  est positif.

□

**Remarque 19** Soit  $\mathcal{H}c$  un opérateur à temps continu dans  $\mathbb{H}^2(\mathbb{E})$  (cf p. 138),  $\mathcal{H}c(s) \mapsto \mathcal{H}d\left(2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$  est une transformation de Cayley (cf [Sta01b]) qui est une bijection entre les opérateurs à temps continu vérifiant  $\operatorname{Re}(\mathcal{H}c(i\omega)) \geq 0$  ( $\omega \in \mathbb{R}$  ppt) et les filtres à temps discret vérifiant  $\operatorname{Re}(\mathcal{H}d(e^{i\omega})) \geq 0$  ( $\omega \in ]-\pi, \pi[$  ppt).

Cette transformation de Cayley peut aussi s'exprimer en temps par l'intermédiaire des polynômes de Laguerre (cf : [Sta01b, ch. 11]). Ces polynômes  $e_k(t)$  définissent une base de  $L^2(\mathbb{R})$  (cf : [Par97, ch. 1]), leur transformée de Laplace bilatérale est  $\mathcal{E}_k(s) = 2 \frac{(2-s)^k}{(2+s)^{k+1}}$ . La relation entrée-sortie ( $u_n \mapsto y_n$ ) de  $\mathcal{H}d$  s'obtient en exprimant avec la base l'entrée  $u(t) = \sum_{n \geq 0} u_n e_k(t)$  puis en calculant la sortie  $y(t) = \mathcal{H}cu(t)$  et en décomposant avec la base  $y_n = \langle y, e_k \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$  où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$  est le produit scalaire associé à  $L^2(\mathbb{R})$ . Cette approche montre aussi l'équivalence entre la définition de la positivité à temps discret  $\sum u_n y_n \geq 0$  et à temps continu  $\int u(t)y(t) dt$ .

**Exemples 1 et 3 (suite)** L'intégration fractionnaire est un opérateur diffusif positif de symbole diffusif  $\eta(\xi) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \xi^{-\alpha} \geq 0$ . Aussi la proposition 6 montre que  $\mathcal{H}^{FI}$  est un filtre positif, pour  $\alpha \in ]0, 1[$  parce que  $\mathcal{H}^{FI}$  est la discrétisation de l'intégration fractionnaire, et pour  $\alpha \in ]-1, 0[$  parce que  $\mathcal{H}^{FI}$  est l'extension par différenciation de la discrétisation de l'intégration fractionnaire. Ainsi  $\mathcal{H}^{FI}$  est un filtre diffusif positif alors que son symbole diffusif  $\mu^{FI}$  est négatif.

La proposition 6 montre que pour  $\alpha \in ]0, 1[$   $\mathcal{H}^{LN}$  est positif si et seulement si son lien direct vérifie  $h_0 \geq \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi^{-\alpha}}{1+e^\xi} d\xi$ .  $\mathcal{H}^{LN}$  a été choisi avec  $h_0^{LN} = h_1^{LN} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}$  et donc  $\mathcal{H}^{LN}$  est positif.

### 3.1.3 Positivité d'un filtre rationnel

La construction d'un filtre rationnel positif est en fait délicate (par exemple, pour un filtre ayant  $N$  pôles fixés, il est difficile de savoir les contraintes qu'imposent la positivité sur la position des zéros) ; quelques idées simples sont exposées à ce propos. La simulation du critère fréquentiel montre la positivité de certaines familles de filtres.

Les filtres de la forme  $\frac{1-pz^{-1}}{1-qz^{-1}}$  sont positifs lorsque  $p, q \in ]-1, 1[$ . La figure 3.2 indique les lieux des complexes  $z_0$  pour lesquels les filtres  $\frac{1-z^{-1}}{(1-z_0z^{-1})(1-\bar{z}_0z^{-1})}$  et  $\frac{1}{(1-z_0z^{-1})(1-\bar{z}_0z^{-1})}$  sont positifs. Nous définissons l'oscillateur à temps discret  $\mathcal{H}_{\omega_0}(z) = \frac{1-z^{-1}}{(1-z^{-1})^2 + \omega_0^2}$  qui est proportionnel à  $\frac{1-z^{-1}}{(1-z_0z^{-1})(1-\bar{z}_0z^{-1})}$  pour  $z_0 = \frac{1+i\omega_0}{1+\omega_0^2}$ . Nous utilisons  $\mathcal{H}_{\omega_0}$  dans la deuxième partie pour illustrer notre propos sur la stabilité de systèmes couplés,  $\mathcal{H}_{\omega_0}$  se trouve dans le domaine de gauche de la figure 3.2. On appelle un filtre strictement positif un filtre dont la partie réelle de la réponse fréquentielle est strictement positive. La proposition 7 donne aussi quelques propriétés générales.

**Proposition 7** Soient  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  deux filtres rationnels stables.

- Si  $\mathcal{H}_1$  est positif alors  $\mathcal{H}_1$  est à minimum de phase (i.e. les zéros sont dans le disque unité).
- Si  $\mathcal{H}_1$  est positif alors ses éventuels zéros sur le cercle unité sont simples.

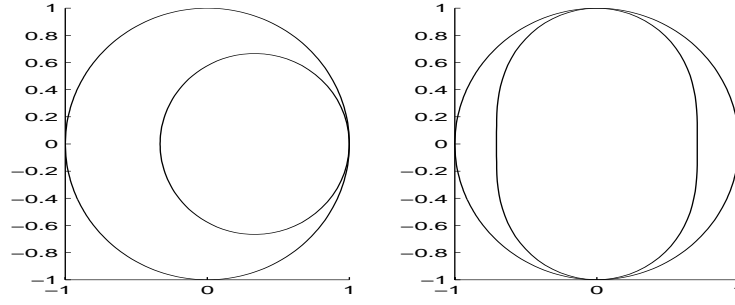


FIG. 3.2 – Lieux convexes des pôles  $z_0$  assurant la positivité de  $\frac{1-z^{-1}}{(1-z_0z^{-1})(1-\bar{z}_0z^{-1})}$  (à gauche) et de  $\frac{1}{(1-z_0z^{-1})(1-\bar{z}_0z^{-1})}$  (à droite).

- c. Si  $\mathcal{H}_1$  est strictement positif (i.e.  $\mathcal{R}e(\mathcal{H}_1) > 0$  sur  $\partial\mathbb{E}$ ) alors l'inverse de  $\mathcal{H}_1$  est un filtre rationnel stable et strictement positif.
- d. Si  $\mathcal{H}_1$  est positif et si  $\mathcal{H}_2$  est strictement positif alors  $\frac{\mathcal{H}_1}{1+\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2}$  est un filtre rationnel stable et positif.

**Preuve** L'assertion a. a déjà été annoncée dans la définition 3 et est prouvée dans l'annexe B. L'assertion b. est justifiée par un développement asymptotique de  $\mathcal{H}_1$  au voisinage d'un éventuel zéro. Pour c. et d., il est d'abord montré que les inverses sont stables en remarquant que les zéros de certaines expressions sont à l'intérieur du disque unité, ensuite (3.1) permet de conclure.

- b. Soient  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{P}$  des filtres RIF (i.e. filtres à réponses impulsionnelles finies) tels que  $\mathcal{H}(z) = \frac{\mathcal{Q}(z)}{\mathcal{P}(z)}$ . Nous rappelons la preuve donnée par [Cai88] : si  $\mathcal{H}_1$  a un zéro en  $z = e^{i\omega_0}$  d'ordre  $m > 1$  alors le développement de Taylor au voisinage de ce zéro montre qu'il existe  $z \in \mathbb{E}$  tel que  $\mathcal{R}e(\mathcal{H}_1(z)) < 0$ , ce qui est contradictoire avec l'assertion énoncée à la fin de la définition 3. Ce résultat pourrait être généralisé à certains filtres non-rationnels dans la mesure où c'est en fait l'analyticité de  $\mathcal{H}$  qui est utilisée.

- $\frac{\mathcal{Q}^{(m)}(e^{i\omega_0})}{m!\mathcal{P}(e^{i\omega_0})} \neq 0$  et  $\mathcal{H}_1(z) = \frac{1}{\mathcal{P}(e^{i\omega_0})}(z - e^{i\omega_0})^m \left[ \frac{\mathcal{Q}^{(m)}(e^{i\omega_0})}{m!} + O(|z - e^{i\omega_0}|) \right]$  quand  $z \rightarrow e^{i\omega_0}$ .

- L'application  $z \mapsto (z - e^{i\omega_0})^m$  transforme le secteur de sommet  $e^{i\omega_0}$  et d'angle  $]-\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{m}[$  en  $\mathbb{C}$ . L'intuition géométrique suggère qu'il est toujours possible de trouver un  $z_\epsilon$  tel que  $|z_\epsilon| > 1$  et  $\mathcal{R}e(\mathcal{H}(z_\epsilon)) < 0$ .

- Si  $-\frac{m!\mathcal{P}(e^{i\omega_0})}{\mathcal{Q}^{(m)}(e^{i\omega_0})}e^{-im\omega_0} \in \mathbb{R}_-$ , on pose par exemple  $z_\epsilon = e^{i\omega_0}(1 + \epsilon e^{\frac{i\pi}{m}})$  et on a  $\mathcal{H}_1(z_\epsilon) = -\epsilon^m \frac{\mathcal{Q}^{(m)}(e^{i\omega_0})}{m!\mathcal{P}(e^{i\omega_0})}e^{im\omega_0} + O(\epsilon^{m+1})$ , ce qui prouve qu'il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $z_\epsilon \in \mathbb{E}$  et  $\mathcal{R}e(\mathcal{H}_1(z_\epsilon)) < 0$ ; ce qui est contradictoire.

- Si  $-\frac{m!\mathcal{P}(e^{i\omega_0})}{\mathcal{Q}^{(m)}(e^{i\omega_0})}e^{-im\omega_0} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ , on pose par exemple

$z_\epsilon = e^{i\omega_0}(1 + \epsilon \left[ -\frac{m!\mathcal{P}(e^{i\omega_0})}{\mathcal{Q}^{(m)}(e^{i\omega_0})}e^{-im\omega_0} \right]^{\frac{1}{m}})$ . L'expression entre crochets est à partie réelle strictement positive aussi pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $z_\epsilon \in \mathbb{E}$ .  $\mathcal{H}_1(z_\epsilon) = -\epsilon^m + O(\epsilon^{m+1})$  alors il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $\mathcal{R}e(\mathcal{H}_1(z_\epsilon)) < 0$ ; ce qui est contradictoire.

- c. •  $\frac{1}{\mathcal{H}_1}$  est un filtre rationnel.

- $\frac{1}{\mathcal{H}_1}$  est stable parce que  $\forall z \in \bar{\mathbb{E}}, \operatorname{Re}(\mathcal{H}_1(z)) > 0$ .
  - $\frac{1}{\mathcal{H}_1}$  est positif parce que (3.1) est symétrique en  $u_n$  et en  $y_n$ .
  - $\frac{1}{\mathcal{H}_1}$  est en fait strictement positif parce que  $\forall z \in \mathbb{E} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\mathcal{H}_1(z)}\right) = \frac{\operatorname{Re}(\mathcal{H}_1(z))}{|\mathcal{H}_1(z)|^2} \neq 0$ .
- d. •  $\frac{\mathcal{H}_1}{1+\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2}$  est un filtre rationnel.
- $\frac{\mathcal{H}_1}{1+\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2}$  est stable parce que si  $1 + \mathcal{H}_1(z)\mathcal{H}_2(z)$  avait un zéro dans  $\bar{\mathbb{E}}$  alors il y aurait une contradiction avec  $\forall z \in \bar{\mathbb{E}}, \operatorname{Re}(\mathcal{H}_1(z)) \geq 0$  ou avec  $\forall z \in \bar{\mathbb{E}}, \operatorname{Re}(\mathcal{H}_2(z)) > 0$ . En effet en prenant la partie imaginaire de  $1 + \mathcal{H}_1(z)\mathcal{H}_2(z) = 0$ , on a  $\operatorname{Im}(\mathcal{H}_1(z))\operatorname{Im}(\mathcal{H}_2(z)) \leq 0$  et en prenant la partie réelle, on a  $1 + \operatorname{Re}(\mathcal{H}_1(z))\operatorname{Re}(\mathcal{H}_2(z)) - \operatorname{Im}(\mathcal{H}_1(z))\operatorname{Im}(\mathcal{H}_2(z)) = 0$ , ce qui est contradictoire.
  - $\frac{\mathcal{H}_1}{1+\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2}$  est un filtre positif. En effet lorsque  $u_n$  et  $w_n$  désignent l'entrée et la sortie de  $\frac{1}{1+\mathcal{H}_2\mathcal{H}_1}$ , on a  $u_n = w_n + \mathcal{H}_2\mathcal{H}_1w_n$ , et  $u_n$  et  $\mathcal{H}_1w_n$  sont l'entrée et la sortie de  $\frac{\mathcal{H}_1}{1+\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2}$ . La positivité de  $\sum u_n(\mathcal{H}_1w_n) = \sum w_n(\mathcal{H}_1w_n) + \sum (\mathcal{H}_2(\mathcal{H}_1w_n))(\mathcal{H}_1w_n) \geq 0$  signifie la positivité de  $\frac{\mathcal{H}_1}{1+\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2}$ . □

**Remarque 20** d. permet de prouver la positivité de  $\mathcal{H}_{\omega_0}$  en utilisant la positivité de  $\mathcal{H}_1 = \frac{1-z^{-1}}{\omega_0^2}$  et de  $\mathcal{H}_2 = 1 - z^{-1}$ .

Une condition suffisante de positivité des filtres diffusifs et le rappel de quelques propriétés générales des filtres positifs rationnels permettent de définir de nombreux exemples de couplages de filtres diffusifs positifs et de filtres rationnels positifs. Les chapitres 5 et 6 utilisent notamment la caractérisation fréquentielle de la positivité pour en déduire les stabilités énergétiques et EBSB de ces couplages. La positivité ne dépend pas de la réalisation aussi la stabilité interne requiert une propriété plus forte que la positivité : la dissipativité.

## 3.2 Dissipativité des filtres numériques

A l'image de [Mon98], [Sta94] et [Mat98b] sur la dissipativité des opérateurs diffusifs, nous montrons en §3.2.1 que les réalisations diffusives de filtres diffusifs positifs sont dissipatives. Le §3.2.2 rappelle que toute réalisation minimale de filtres rationnels positifs est dissipative.

### 3.2.1 Dissipativité des filtres diffusifs

La définition de la dissipativité que nous utilisons pour les filtres diffusifs est une généralisation en dimension infinie de [Cai88], elle cohérente avec [LaS83] et avec [Wil72]. Cette généralisation dépend donc de la topologie pour laquelle on veut prouver la stabilité interne, ici il s'agit de celle induite par l'espace de Hilbert  $\mathbb{H}$ . Le théorème 3 montre la dissipativité des réalisations diffusives lorsque les hypothèses de la proposition 5 sont vérifiées, l'appartenance à  $\mathbb{H}^1(\mathbb{E})$  n'est ici plus nécessaire.



**Théorème 3** Soit  $\mathcal{H}$  un filtre diffusif.

Si  $h_0$  et  $\mu$  vérifient l'une des trois conditions :

$$\mu \geq 0 \text{ et } \mathcal{H}(-1) = h_0 - \int_{\mathbb{I}} \frac{\mu(\rho)}{1+\rho} d\rho \text{ est fini et positif,} \quad (3.6)$$

$$\mu \leq 0 \text{ et } \mathcal{H}(1) = h_0 + \int_{\mathbb{I}} \frac{\mu(\rho)}{1-\rho} d\rho \text{ est fini et positif,} \quad (3.7)$$

$$\mu \text{ quelconque et } h_0 - \int_{\mathbb{I}} \frac{|\mu(\rho)| - \rho\mu(\rho)}{1-\rho^2} d\rho \text{ est fini et positif,} \quad (3.8)$$

alors la réalisation diffusive (1.9) est dissipative au sens où il existe une fonction de Lyapunov qui vérifie :

a.  $V$  est définie positive et coercive :  $V(\varphi) > 0$  quand  $\|\varphi\|_{\mathbb{H}} \neq 0$  et  $V(0) = 0$  et  $V(\varphi) \rightarrow +\infty$  quand  $\|\varphi\|_{\mathbb{H}} \rightarrow +\infty$ .

b.  $V(\varphi_{n+1}) - V(\varphi_n) \leq u_n y_n$

En l'occurrence  $V(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{I}} |\mu(\rho)| \varphi^2(\rho) d\rho = \frac{1}{2} \|\varphi\|_{\mathbb{H}}^2$  où  $\mathbb{I}$  est le support de  $\mu$ .

**Preuve** Un filtre diffusif est défini dans le chapitre 1 comme une agrégation de filtres d'ordre 1 retardés qui ne sont donc *pas* dissipatifs. Mais lorsque les conditions (3.6) ou (3.7) sont vérifiées, (1.6) conduit à  $\mathcal{H}(z) = \mathcal{H}(\mp 1) + \int_{\mathbb{I}} \frac{|\mu(\rho)|}{1 \pm \rho} \frac{1 \pm z^{-1}}{1 - \rho z^{-1}} d\rho$ . Ainsi  $\mathcal{H}$  est aussi une agrégation continue de filtres dissipatifs  $\frac{1 \pm z^{-1}}{1 - \rho z^{-1}}$ . La dissipativité de chacun de ces filtres est assurée par une fonction de Lyapunov élémentaire  $V_\rho(\varphi_n) = \frac{1}{2}(1 \pm \rho) \varphi_n^2(\rho)$ .

Lorsque  $\mu$  vérifie (3.8), alors on peut écrire  $\mu = \mu_+ - \mu_-$ ,  $\mathbb{I} = \mathbb{I}^+ \cup \mathbb{I}^-$  et  $h_0 = h_0^+ + h_0^-$  (cf : (3.5)) de telle sorte que  $\mathbb{I}^+ = \text{supp } \mu_+$  et  $h_0^+$  et  $\mu_+$  satisfont (3.6) et de même que  $\mathbb{I}^- = \text{supp } \mu_-$  et  $h_0^-$  et  $-\mu_-$  satisfont (3.7). La dissipativité associée à  $\mu_+$  et associée à  $\mu_-$  conduisent à la dissipativité de  $V(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{I}} (\mu_+ + \mu_-) \varphi^2(\rho) d\rho = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{I}} |\mu| \varphi^2(\rho) d\rho$ .  $\square$

**Remarque 21** Les deux affirmations a. et b. suffisent à prouver la stabilité interne d'une réalisation dissipative en dimension infinie et la positivité de la relation entrée-sortie.

En effet si l'entrée est nulle à partir d'un certain instant  $N$ , b. prouve que  $V(\varphi_n)$  est alors borné par  $V(\varphi_N)$  et a. permet d'en déduire que  $\|\varphi_n\|_{\mathbb{H}}$  aussi par  $V(\varphi_N)$ , (voir [ANCL94] pour la définition topologique de la stabilité interne). Si la condition initiale  $\varphi_0$  est nulle alors selon a.  $\sum_{n=0}^N u_n y_n \geq V(\varphi_{N+1}) - V(\varphi_0) = V(\varphi_{N+1}) - 0 \geq 0$ .

**Remarque 22** Dans la mesure où les filtres étudiés sont linéaires, les affirmations a. et b. sont parfois remplacées par (cf [Sta01a]) :

$$\text{il existe une norme } \|\cdot\|_{\mathbb{H}} \text{ telle que } \|\varphi_{N+1}\|_{\mathbb{H}}^2 - \|\varphi_0\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \sum_{n=0}^N u_n y_n$$

Cette définition est alors appelée *passivité*. Par ailleurs le filtre  $(1 + \mathcal{H})^{-1}(1 - \mathcal{H})$  est dit *dissipatif* au sens où il existe une norme  $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$  telle que

$$\|\varphi_{N+1}\|_{\mathbb{H}}^2 + \sum_{n=0}^N y_n^2 \leq \|\varphi_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \sum_{n=0}^N u_n^2$$

Nous n'utiliserons pas cette définition.

### 3.2.2 Dissipativité des filtres rationnels

Le lemme de Kalman-Popov-Yacubovich affirme la dissipativité de toute réalisation minimale de tout filtre rationnel positif. Une démonstration peut se trouver à la fois dans [Cai88],[FCG79] et dans [Ran96] parce que ce lemme est important pour l'analyse des séries temporelles et pour l'étude des LMI (i.e. inégalités linéaires matricielles).

**Lemme 3 (Kalman-Popov-Yacubovich)** *Soit un système de dimension finie monodimensionnel (i.e. les entrées et les sorties sont à une dimension, SISO en anglais) stable et positif alors toute réalisation minimale  $G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$  de dimension  $N$  et d'état  $\mathbf{X}$  vérifie l'existence de  $P = P^T$ ,  $L \in \mathbb{R}^N$  et  $J \in \mathbb{R}$  tels que  $(L^T, A)$  soit observable et*

$$\begin{cases} A^T P A - P = -L L^T \\ A^T P B - C^T = -L J \\ J^2 = 2D - B^T P B \end{cases} \quad (3.9)$$

*Si  $G > 0$  alors il existe  $P$ ,  $L$  et  $J$  qui vérifient de surcroît  $J > 0$  et  $A - B J^{-1} L^T$  asymptotiquement stable (i.e. ses valeurs propres sont strictement à l'intérieur du cercle unité). La fonction de Lyapunov qui révèle la stabilité de  $G$  est alors  $\mathbf{E}(\mathbf{X}_n) = \frac{1}{2} \mathbf{X}_n^T P \mathbf{X}_n$  au sens où  $\mathbf{E}(\mathbf{X})$  est une forme quadratique définie positive telle que  $\mathbf{E}(\mathbf{X}_{n+1}) - \mathbf{E}(\mathbf{X}_n) \leq u_n y_n$ .*

En résumé, les conditions suffisantes de positivité portant sur le symbole diffusif d'un filtre diffusif énoncées en §3.1, entraînent en fait aussi la dissipativité de la réalisation diffusive. De même la positivité d'un filtre rationnel stable permet d'en déduire la dissipativité de toute réalisation minimale. Les fonctions de Lyapunov qui révèlent ces dissipativités permettent lors du chapitre 7 de prouver d'une part la stabilité interne et d'autre part la stabilité interne *asymptotique*, de couplages formés de filtres diffusifs positifs et de filtres rationnels positifs.



## Deuxième partie

### Stabilités de couplages formés d'un filtre diffusif et d'un filtre rationnel



# Chapitre 4

## Présentation des couplages de filtres étudiés

La stabilité des équations différentielles fractionnaires a donné lieu à de nombreux articles parmi lesquels [MAM97], [MAM98]; nous nous intéressons au cas où cette équation peut être interprétée comme un *couplage* avec un opérateur fractionnaire et un filtre rationnel. Ainsi les solutions analytiques  $\ddot{x} + \epsilon\dot{x} + \omega_0^2 x + p_1 D^\alpha(\dot{x}) + p_2 I^\beta(\dot{x}) = 0$  et leur comportement asymptotique en l'infini ont été étudiés par [GM97], [Mat98b] et [HM99]. La stabilité interne (au moyen de la dissipativité) d'une réalisation de cette équation et la stabilité EBSB de fractions rationnelles généralisées ( $\frac{\sum_k p_k s^{\alpha_k}}{\sum_l q_l s^{\beta_l}}$ ) est étudiée dans [Mat98b]. La stabilité interne d'une réalisation de  $\ddot{x} + \epsilon\dot{x} + \omega^2 x + Dx = u$  avec  $D$  un opérateur diffusif, et la non présence de pôles instables de la fonction de transfert, sont étudiées dans [DHM00] et dans [Hel00]. Les systèmes linéaires viscoélastiques sont étudiés dans [DM88] qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un bouclage stabilise exponentiellement un système. Dans [Sta94], il est montré qu'un bouclage statique stabilise ces systèmes grâce à la dissipativité.

La discrétisation par Euler-rétrograde (i.e.  $s \mapsto 1 - z^{-1}$ ) de ce filtre est la fonction de transfert  $\mathcal{H}_p = [(1 - z^{-1})^2 + \omega_0^2 + p(1 - z^{-1})\mathcal{H}(z)]^{-1}$  avec  $\mathcal{H}$  un filtre diffusif positif. Les stabilités externes et internes de ce filtre ont été étudiées dans [DHM00], [DM01b], [DM01a]. Ces oscillateurs ont été simulés dans [Hel00] par Euler retrograde et bilinéaire.

Dans cette deuxième partie de la thèse, nous nous proposons d'étudier la stabilité interne, externe énergétique et externe EBSB d'une famille de filtres notée  $\Sigma_1$ . Les outils présentés dans les chapitres précédents sont utilisés seulement sur la famille de filtres  $\Sigma_2$  qui est contenue dans  $\Sigma_1$ . La proposition 9 donne des conditions suffisantes sur un filtre  $\mathcal{H}^S$  de  $\Sigma_1$  pour que  $\mathcal{H}^S$  appartienne à  $\Sigma_2$ . Les exemples montrent aussi que ces conditions suffisantes ne sont pas nécessaires.

$\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont définies en termes de fonctions de transfert en utilisant les triplets  $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}_1)$  et  $(\mathcal{R}, \mathcal{Q}, \mathcal{H}_2)$ . Les décompositions proposées ne sont pas uniques, notre objectif est surtout de donner des conditions suffisantes assurant l'appartenance d'un filtre  $\mathcal{H}^S$  à  $\Sigma_1$  ou à  $\Sigma_2$ .

La première famille de filtres que nous proposons est une généralisation de  $\mathcal{H}_p$  qui sera étudiée plus en détail dans l'exemple 5 après les définitions de  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ .

### Première famille de filtres

$$\mathcal{H}^S = \frac{1}{\mathcal{F} + \mathcal{G}\mathcal{H}_1} \in \Sigma_1 \iff \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F} \text{ et } \mathcal{G} \text{ sont des filtres rationnels causaux} \\ \mathcal{H}_1 \text{ est un filtre diffusif dans } \mathbb{H}^1(\mathbb{E}) \text{ et} \\ \text{positif} \\ \mu \neq 0, \text{ le symbole diffusif de } \mathcal{H}_1 \text{ est de} \\ \text{signe constant } \sigma \\ \exists \alpha \in ]0, 1[ \text{ tel que } \mu(\rho) = O(1 - |\rho|)^{-\alpha} \\ \text{quand } \rho \rightarrow \pm 1 \\ f_0 + g_0 h_0 \neq 0 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où la positivité de  $\mathcal{H}_1$  est définie par la définition 3,  $\mu$  est le symbole diffusif de  $\mathcal{H}_1$ , et  $f_0, g_0$  et  $h_0$  sont les liens directs de  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  et  $\mathcal{H}_1$ .  $[\mathcal{F} + \mathcal{G}\mathcal{H}_1]^{-1}$  est la fonction de transfert causale que l'on peut définir parce que le lien direct  $f_0 + g_0 h_0 \neq 0$  (cf : [DV75, p. 100]). La quatrième hypothèse inclut le cas où les comportements singuliers de  $\mu$  ne seraient pas identiques.

La seconde famille de filtres est un ensemble des filtres qui peuvent s'interpréter comme un couplage de filtres rationnels positifs et de filtres diffusifs positifs.

### Seconde famille de filtres

$$\mathcal{H}^S = \frac{1}{\mathcal{Q} + \mathcal{R}\mathcal{H}_2} \in \Sigma_2 \iff \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R} \text{ est un filtre rationnel causal, positif} \\ \text{et stable} \\ \mathcal{Q} \text{ et } \mathcal{R}\mathcal{Q}^{-1} \text{ sont des filtres rationnels} \\ \text{causaux et stables} \\ \mathcal{H}_2 \text{ est un filtre diffusif dans } \mathbb{H}^1(\mathbb{E}) \text{ et} \\ \text{positif} \\ \mu \neq 0, \text{ le symbole diffusif de } \mathcal{H}_2 \text{ est de} \\ \text{signe constant } \sigma \\ \exists \alpha \in ]0, 1[ \text{ tel que } \mu(\rho) = O(1 - |\rho|)^{-\alpha} \\ \text{quand } \rho \rightarrow \pm 1 \end{array} \right. \quad (4.2)$$

où  $\mathcal{H}_2$  est positif au sens de la définition 3 et  $\mu$  est le symbole diffusif de  $\mathcal{H}_2$ . La quatrième hypothèse inclut le cas où les comportements singuliers de  $\mu$  ne seraient pas identiques.  $\mathcal{H}^S$  est la fonction de transfert causale que l'on peut définir parce que  $\mathcal{R}$  et de  $\mathcal{H}_2$  sont positifs et que par suite le lien direct de  $1 + \mathcal{R}\mathcal{H}_2$  est non-nul.  $\mathcal{H}^S$  s'interprète comme un couplage entre  $\mathcal{R}$

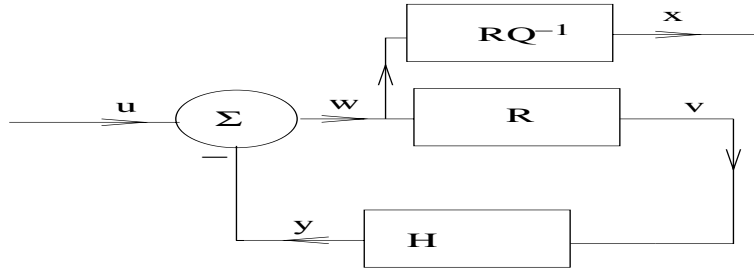


FIG. 4.1 – Schéma fonctionnel de  $\mathcal{H}^S = \frac{1}{Q} \frac{\mathcal{R}}{1 + \mathcal{R}\mathcal{H}} \in \Sigma_2$ ,  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{H}$  sont positifs et  $\mathcal{R}Q^{-1}$  est stable. Dans l'exemple 5,  $\mathcal{R}(z) = \mathcal{H}_{\omega_0}(z)$  et  $Q = 1 - z^{-1}$ .

et  $\mathcal{H}_2$  auquel s'ajoute  $Q^{-1}$  qui n'est pas stable mais qui est tel que  $\mathcal{R}Q^{-1}$  soit stable. Le schéma fonctionnel correspondant est sur la figure 4.1.

$\mathcal{H}_p$  est un oscillateur perturbé par un filtre diffusif, cette perturbation étant paramétrée par  $p > 0$ . Nous allons montrer qu'il s'interprète comme un couplage entre deux filtres et qu'il appartient à  $\Sigma_2$ .

**Exemple 5** Les filtres  $\mathcal{H}_p(z) = [(1 - z^{-1})^2 + \omega_0^2 + p(1 - z^{-1})\mathcal{H}(z)]^{-1}$  avec un paramètre de couplage  $p > 0$  se mettent sous la forme d'un filtre de  $\Sigma_2$  :

$$\mathcal{H}_p(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{\mathcal{H}_{\omega_0}(z)}{1 + \mathcal{H}_{\omega_0}(z)p\mathcal{H}(z)} \quad (4.3)$$

Ainsi  $\mathcal{H}_p = \frac{1}{Q} \frac{\mathcal{R}}{1 + \mathcal{R}(p\mathcal{H})}$  avec  $Q(z) = 1 - z^{-1}$ ,  $\mathcal{R}(z) = \mathcal{H}_{\omega_0}(z) = \frac{1 - z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2 + \omega_0^2}$ , et  $p\mathcal{H}$  est le filtre diffusif positif.  $\mathcal{H}_p$  s'interprète comme un couplage paramétré par  $p > 0$  entre  $\mathcal{H}_{\omega_0}$  et  $\mathcal{H}$  auquel est ajouté un intégrateur  $\frac{1}{1 - z^{-1}}$  qui, associé à  $\mathcal{H}_{\omega_0}$ , forme un filtre stable.

**Preuve** Un calcul simple montre que  $\mathcal{H}_p$  peut s'écrire comme (4.3) avec  $\mathcal{H}_{\omega_0}(z) = \frac{1 - z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2 + \omega_0^2}$ . Selon la remarque 20 (p. 55),  $\mathcal{H}_{\omega_0}$  est un filtre positif et on observe que  $\frac{\mathcal{H}_{\omega_0}}{1 - z^{-1}}$  est un filtre stable. Aussi  $\mathcal{H}_p \in \Sigma_2$ .  $\square$

L'exemple 5 est un exemple particulier de filtres de  $\Sigma_2$  dans la mesure où  $\mathcal{R}$  a un zéro en  $z = 1$ . Les éventuels zéros de  $\mathcal{R}$  et de  $Q$  ont une grande importance dans l'étude de la stabilité EBSB (cf : chapitre 6). Nous montrons que les filtres de  $\Sigma_2$  peuvent être regroupés en neuf catégories deux à deux distinctes.

**Proposition 8** Soit  $\mathcal{H}^S = \frac{1}{Q} \frac{\mathcal{R}}{1 + \mathcal{R}\mathcal{H}} \in \Sigma_2$ .

L'une de ces trois hypothèses est vérifiée

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{R}(1) = 0 \text{ et } Q(1) \neq 0 \text{ et } 1 \text{ est un zéro d'ordre 1 de } \mathcal{R}, \\ \mathcal{R}(1) = Q(1) = 0 \text{ et } 1 \text{ est un zéro d'ordre 1 de } \mathcal{R} \text{ et de } Q, \\ \mathcal{R}(1) \neq 0 \text{ et } Q(1) \neq 0 ; \end{array} \right.$$

et l'une de ces trois hypothèses est aussi vérifiée



$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{R}(-1) = 0 \text{ et } \mathcal{Q}(-1) \neq 0 \text{ et } -1 \text{ est un zéro d'ordre 1 de } \mathcal{R}, \\ \mathcal{R}(-1) = \mathcal{Q}(-1) = 0 \text{ et } -1 \text{ est un zéro d'ordre 1 de } \mathcal{R} \text{ et de } \mathcal{Q}, \\ \mathcal{R}(-1) \neq 0 \text{ et } \mathcal{Q}(-1) \neq 0. \end{array} \right.$$

**Preuve** Soit  $\mathcal{H}^S = \frac{1}{\mathcal{Q}} \frac{\mathcal{R}}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}} \in \Sigma_2$ . Les hypothèses sur  $\Sigma_2$  et la proposition 7 (p. 53) montrent que  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{Q}$  vérifient les propriétés suivantes :

- $\mathcal{Q}$  est stable  $\Rightarrow$  1 et  $-1$  ne sont pas pôles de  $\mathcal{Q}$ .
- $\mathcal{R}$  est stable  $\Rightarrow$  1 et  $-1$  ne sont pas pôles de  $\mathcal{R}$ .
- $\mathcal{R}$  est positif  $\Rightarrow$   $\begin{cases} \mathcal{R}(1) > 0 \text{ ou } 1 \text{ est un zéro d'ordre 1 de } \mathcal{R}. \\ \mathcal{R}(-1) > 0 \text{ ou } -1 \text{ est un zéro d'ordre 1 de } \mathcal{R}. \end{cases}$
- $\mathcal{R}\mathcal{Q}^{-1}$  est stable  $\Rightarrow$   $\begin{cases} \text{si } \mathcal{Q}(1) = 0 \text{ alors } 1 \text{ est un zéro d'ordre 1 de } \mathcal{R}. \\ \text{si } \mathcal{Q}(-1) = 0 \text{ alors } -1 \text{ est un zéro d'ordre 1 de } \mathcal{R}. \end{cases}$   $\square$

$\Sigma_2$  est contenu dans  $\Sigma_1$ . L'enjeu maintenant est d'analyser dans quelle mesure les résultats de stabilités qui seraient obtenus sur  $\Sigma_2$  pourraient être étendus à certains filtres de  $\Sigma_1$ . Nous donnons sous la forme d'une proposition des conditions *suffisantes* pour qu'un filtre dans  $\Sigma_1$  soit contenu dans  $\Sigma_2$ . Sous certaines hypothèses supplémentaires ces conditions sont aussi nécessaires.

**Proposition 9** Soit  $\mathcal{H}^S = \frac{1}{\mathcal{F}+\mathcal{G}\mathcal{H}_1} \in \Sigma_1$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} a. \mathcal{G}\mathcal{F}^{-1} \text{ positif} \\ b. \mathcal{F}^{-1} \text{ stable} \\ c. \mathcal{G} \text{ stable} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}^S = \frac{1}{\mathcal{Q}} \frac{\mathcal{R}}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}_2} \in \Sigma_2 \\ \text{avec } \mathcal{R} = \mathcal{G}\mathcal{F}^{-1}, \mathcal{Q} = \mathcal{G} \\ \text{et } \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 \end{array} \right.$$

**Commentaire** pour la réciproque, l'hypothèse  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$  est cruciale, un autre filtre diffusif  $\mathcal{H}_2 \neq \mathcal{H}_1$  donnerait d'autres filtres rationnels  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  dans la décomposition, ces éléments ne vérifieraient pas nécessairement *a. b. c.*

**Preuve** Nous allons prouver successivement l'implication et la réciproque.

- Soit  $\mathcal{H}^S = \frac{1}{\mathcal{F}+\mathcal{G}\mathcal{H}} \in \Sigma_1$  vérifiant *a, b et c*, alors  $\mathcal{H}^S = \frac{1}{\mathcal{G}} \frac{\mathcal{G}\mathcal{F}^{-1}}{1+\mathcal{G}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{H}} \in \Sigma_2$  avec  $\mathcal{R} = \mathcal{G}\mathcal{F}^{-1}$  positif,  $\mathcal{Q} = \mathcal{G}$  et  $\mathcal{R}\mathcal{Q}^{-1} = \mathcal{G}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{G}^{-1} = \mathcal{F}^{-1}$  stables.
- Soit  $\mathcal{H}^S = \frac{1}{\mathcal{F}+\mathcal{G}\mathcal{H}} = \frac{1}{\mathcal{Q}} \frac{\mathcal{R}}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}} \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ .  
alors, en inversant l'expression, on a  $\mathcal{F} + \mathcal{G}\mathcal{H} = \mathcal{Q}\mathcal{R}^{-1} + \mathcal{Q}\mathcal{H}$ .
  - $\mathcal{G} = \mathcal{Q}$  sinon  $\mathcal{H} = \frac{\mathcal{Q}\mathcal{R}^{-1}-\mathcal{F}}{\mathcal{G}-\mathcal{Q}}$  serait un filtre rationnel, ce qui impliquerait  $\mu$  identiquement nulle.
  - $\mathcal{G}\mathcal{F}^{-1}$  est un filtre positif parce que,  
 $\mathcal{F} - \mathcal{Q}\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{G}\mathcal{H}_1 - \mathcal{Q}\mathcal{H}_1 = 0$  et alors,  
 $\mathcal{G}\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{Q}\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{Q}(\mathcal{Q}\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{Q}\mathcal{R}\mathcal{Q}^{-1} = \mathcal{R}$ , et  $\mathcal{R}$  est un filtre positif.
  - $\mathcal{F}^{-1}$  est un filtre stable, parce que  $\mathcal{F}^{-1} = (\mathcal{Q}\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}\mathcal{Q}^{-1}$  et  $\mathcal{R}\mathcal{Q}^{-1}$  est un filtre stable.
  - $\mathcal{Q}$  est stable parce que  $\mathcal{G}$  est stable.

$\square$

Les filtres diffusifs  $\mathcal{H}$  des couplages  $\mathcal{H}^S = \frac{1}{\mathcal{Q}} \frac{\mathcal{R}}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}} \in \Sigma_2$  ont tous un lien direct  $h_0$  strictement positif (cf : §3.1.1 p. 48). Nous allons montrer que quand  $\mathcal{H}^{S1} = \frac{1}{\mathcal{F}+\mathcal{G}\mathcal{H}} \in \Sigma_1$ , un autre filtre  $\mathcal{H}^{S2} = \frac{1}{\mathcal{F}+\mathcal{G}(\mathcal{H}-h_0)}$ , peut quand même être dans  $\Sigma_2$  mais sous des conditions plus restrictives sur  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  que dans la proposition 9.

Par ailleurs, si on cherche à stabiliser un filtre instable  $\mathcal{F}^{-1}$  au moyen d'un filtre diffusif, on est amené dans ce cadre à trouver  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{H}$  tel que  $\mathcal{H}^S = \frac{1}{\mathcal{F}+\mathcal{G}\mathcal{H}} \in \Sigma_1$  soit dans  $\Sigma_2$ . Justement les conditions suffisantes énoncées dans la proposition 9 supposent que  $\mathcal{F}^{-1}$  soit stable. Nous allons proposer une condition suffisante qui est moins restrictive sur  $\mathcal{F}$  et qui s'appuie sur l'existence de  $\kappa > 0$  tel que  $\mathcal{H} - \kappa$  soit encore positif. En particulier ces nouvelles conditions peuvent admettre que  $\mathcal{F}^{-1}$  ne soit pas stable.

**Proposition 10** Soient  $\mathcal{H}^{S1} = \frac{1}{\mathcal{F}+\mathcal{G}\mathcal{H}} \in \Sigma_1$  et  $\mathcal{H}^{S2} = \frac{1}{\mathcal{F}+\mathcal{G}(\mathcal{H}+\kappa)}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} a. \mathcal{G}(\mathcal{F} + \kappa\mathcal{G})^{-1} \text{ positif} \\ b. (\mathcal{F} + \kappa\mathcal{G})^{-1} \text{ stable} \\ c. \mathcal{G} \text{ stable} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}^{S2} = \frac{1}{\mathcal{Q}} \frac{\mathcal{R}}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}} \in \Sigma_2 \\ \text{avec } \mathcal{R} = \mathcal{G}(\mathcal{F} + \kappa\mathcal{G})^{-1} \text{ et } \mathcal{Q} = \mathcal{G} \end{array} \right.$$

**Preuve** Il suffit d'appliquer la proposition 9 à  $\mathcal{H}^{S2} = \frac{1}{(\mathcal{F}+\kappa\mathcal{G})+\mathcal{G}\mathcal{H}} \in \Sigma_1$ .  $\square$

Le filtre de fonction de transfert  $(1 - z_0 z^{-1})(1 - \bar{z}_0 z^{-1})$  où  $z_0 = r_0 e^{i\omega_0}$  est un oscillateur à temps discret de pulsation réduite  $\omega_0$  qui est stable lorsque  $|r_0| < 1$ . Nous considérons un filtre noté  $\mathcal{H}_{z_0}$  qui est le couplage formé de cet oscillateur et d'un filtre diffusif positif  $\mathcal{H}^{FI}$ .  $\mathcal{H}_{z_0}$  est dans  $\Sigma_1$ , mais l'appartenance de  $\mathcal{H}_{z_0}$  à  $\Sigma_2$  et par suite, la possibilité de prouver ses stabilités, dépend de  $z_0$ .

**Exemple 6**  $\Sigma_1$  contient les filtres définis par

$$\mathcal{H}_{z_0}(z) = \frac{1}{(1 - z_0 z^{-1})(1 - \bar{z}_0 z^{-1}) + p(1 - z^{-1})\mathcal{H}^{FI}(z)} \quad \text{où } \alpha \in ]0, 1[$$

On cherche  $(\mathcal{R}, \mathcal{Q}, \mathcal{H})$  qui décomposent  $\mathcal{H}_{z_0}$  dans  $\Sigma_2$  suivant  $z_0$  en un ou deux choix possibles.

- Lorsque  $z_0$  est tel que  $\mathcal{R}(z) = \frac{1-z^{-1}}{(1-z_0 z^{-1})(1-\bar{z}_0 z^{-1})}$  est positif alors  $\mathcal{H}_{z_0} \in \Sigma_2$  avec  $\mathcal{Q} = \frac{1}{1-z^{-1}}$  et  $\mathcal{H} = p\mathcal{H}^{FI}$ . Le lieu de tels  $z_0$  est tracé sur la gauche de la figure 4.2. Ce lieu correspond aux conditions *a.* et *b.* de la proposition 9.
- Lorsque  $z_0$  est tel que  $\mathcal{R}(z) = \frac{1}{(1-z_0 z^{-1})(1-\bar{z}_0 z^{-1})}$  est positif alors  $\mathcal{H}_{z_0} \in \Sigma_2$  avec  $\mathcal{Q} = 1$  et  $\mathcal{H} = p\mathcal{H}^{FI}(1 - z^{-1})$ . En effet  $\mathcal{H}^{FI}(z)(1 - z^{-1}) = (1 - z^{-1})^{1-\alpha}$  est aussi un filtre diffusif positif pour  $\alpha \in ]0, 1[$ . Le lieu de tels  $z_0$  est tracé sur la droite de la figure 4.2.

On en tire les conclusions suivantes.

- Le deuxième lieu n'est pas contenu dans le premier, aussi cet exemple illustre que les conditions *a.* et *b.* de la proposition 9 ne sont pas nécessaires.

- L'intersection des ces lieux est non-vide, ce qui montre que la décomposition de  $\mathcal{H}^S = \frac{1}{\mathcal{Q}} \frac{\mathcal{R}}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}}$  en  $\mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{H}$  n'est pas unique.
- $\mathcal{H}^{FI}$  est en fait strictement positive :  $\mathcal{R}e(p\mathcal{H}^{FI}) \geq p\mathcal{H}^{FI}(-1) = 2^{-\alpha}$  (cf : proposition 5 p. 50 et  $\mu^{FI} \geq 0$ ). L'application de la proposition 10 devrait permettre d'agrandir vers l'extérieur du disque unité le contour dessiné à gauche de la figure 4.2.

Ainsi  $\frac{1-z^{-1}}{(1-z_0z^{-1})(1-\bar{z}_0z^{-1})}$  est un exemple de système instable qui pourrait être stabilisé avec un amortissement de type diffusif comme  $p\mathcal{H}^{FI}$  pour certaines plages de valeurs de  $\alpha$  et de  $p > 0$ . Cette conjecture sera vérifiée ultérieurement dans un cas particulier  $\alpha = \frac{1}{2}$  et pour une plage de la forme  $p > p^*$  (voir les exemples du chapitre 5 page 70).

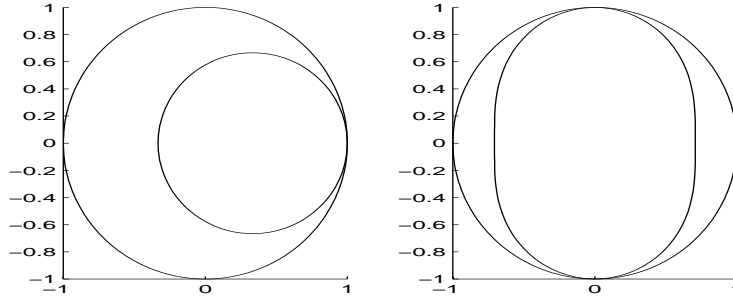


FIG. 4.2 – Lieux convexes des pôles  $z_0$  assurant la positivité  $\mathcal{R}(z) = \frac{1-z^{-1}}{(1-z_0z^{-1})(1-\bar{z}_0z^{-1})}$  à gauche et de  $\mathcal{R}(z) = \frac{1}{(1-z_0z^{-1})(1-\bar{z}_0z^{-1})}$  à droite.

En résumé , nous avons tout d'abord défini une famille de système de  $\Sigma_1$  sous la forme  $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}_1)$  proposée naturellement à partir d'un exemple  $\mathcal{H}_p$  issu d'une discrétisation.

Ensuite nous avons défini une sous-famille  $\Sigma_2$  de structure plus complexe  $(\mathcal{R}, \mathcal{Q}, \mathcal{H}_2)$  suggérée par des propriétés de positivité (étudiées au chapitre 3).

Nous avons cherché des conditions d'appartenance à  $\Sigma_2$  pour un système donné sous la forme  $\Sigma_1$  :

- Lorsque  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ , les conditions simples sont données par la proposition 9.
- Lorsque  $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1 + \kappa$  avec  $\kappa > 0$ , les conditions sont données par la proposition 10. L'intérêt est de permettre d'inclure dans  $\Sigma_2$  des filtres de  $\Sigma_1$  dont le filtre diffusif  $\mathcal{H}_1$  a un lien direct  $h_0^1$  nul, (de tels filtres pourraient être obtenus par exemple par une méthode de discrétisation réaliste).
- Lorsque  $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1 + \kappa$  avec  $\kappa < 0$ , les conditions sont également données par la proposition 10. L'intérêt est d'inclure dans  $\Sigma_2$  des filtres de  $\Sigma_1$  dont le  $\mathcal{F}^{-1}$  est instable.

En particulier cette technique devrait permettre de prouver qu'un filtre instable peut être amorti par un filtre diffusif sous certaines conditons paramétriques.

- Dans l'exemple 6 nous avons montré qu'il existe d'autres façons de prouver l'appartenance d'un filtre de  $\Sigma_1$  à  $\Sigma_2$  avec  $\mathcal{H}_2(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{H}_1(z)$ .

Dans la suite de la thèse, nous étudierons les différentes stabilités de la sous-famille  $\Sigma_2$  : la stabilité externe énergétique au chapitre 5, la stabilité externe EBSB au chapitre 6, la stabilité interne asymptotique d'une réalisation au chapitre 7. Les résultats du chapitre 2 nous permettront dans certains cas d'effectuer une analyse asymptotique soit de la réponse impulsionnelle au chapitre 6 soit de la fonctionnelle de Lyapunov de l'état interne du système au chapitre 8.



# Chapitre 5

## Stabilité énergétique du couplage formé d'un filtre diffusif et d'un filtre rationnel

Un filtre est dit *énergétiquement stable* si, à toute entrée d'énergie finie (i.e.  $\sum_{n \geq 0} u_n^2 < \infty$ ) est associée une sortie d'énergie également finie (i.e.  $\sum_{n \geq 0} y_n^2 < \infty$ ). Pour les filtres causaux et non rationnels, cette stabilité se distingue a priori des autres formes de stabilités entrée-sortie. Les filtres qui sont énergétiquement stables forment un espace de Hardy  $\mathbb{H}^\infty(\mathbb{E})$  rappelé en annexe B (p. 143),  $\mathbb{H}^\infty(\mathbb{E})$  est l'ensemble des fonctions de transfert analytiques et bornées sur  $\mathbb{E}$ . Nous utilisons deux outils permettant chacun de conclure à la stabilité énergétique : le *critère de Nyquist* et *l'absence de pôles hors du disque unité*.

Dans ce chapitre, nous étudions la stabilité des filtres appartenant aux familles  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  définies par (4.1) et par (4.2). Pour étudier leur stabilité énergétique, nous proposons deux conditions suffisantes pour qu'un filtre de  $\Sigma_1$  soit énergétiquement stable. Les filtres de  $\Sigma_2$  s'interprètent comme un *couplage* entre deux filtres positifs. Cela nous permet de démontrer qu'ils sont énergétiquement stables. Enfin un exemple illustre ces théorèmes.

Soit  $\mathcal{H}^S = \frac{1}{\mathcal{F} + \mathcal{G}\mathcal{H}} \in \Sigma_1$ . Nous donnons une condition suffisante sous forme d'une proposition. Nous montrons que le critère de Nyquist peut aussi s'appliquer, pour cela nous utilisons le contour  $\Gamma$  indiqué sur la figure 5.1.

**Proposition 11** *Soit  $\mathcal{H}^S = \frac{1}{\mathcal{F} + \mathcal{G}\mathcal{H}} \in \Sigma_1$  qui vérifie les deux hypothèses suivantes :*

- (H1)  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont des filtres stables,
- (H2) il existe  $V$  un voisinage de  $z = 1$  et de  $z = -1$  tel que  $|\mathcal{F} + \mathcal{G}\mathcal{H}|$  soit borné inférieurement sur  $V \cap \mathbb{E}$ .

*Soit  $\Gamma$  un contour qui entoure le disque unité et qui est contenu dans  $\partial\mathbb{E} \cup (V \cap \mathbb{E})$ .*

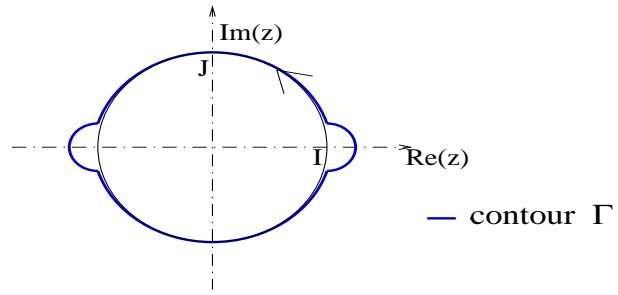


FIG. 5.1 – Représentation du contour utilisé dans la démonstration de la proposition 11 et du théorème 4.

Si  $\mathcal{H}^S$  vérifie l'une des deux hypothèses supplémentaires,

- (H3)  $\forall z \in \mathbb{E} \cup \partial\mathbb{E} \setminus \{-1, 1\}, \mathcal{F}(z) + \mathcal{G}(z)\mathcal{H}(z) \neq 0,$
- (H3bis) lorsque  $\mathcal{F}(z) + \mathcal{G}(z)\mathcal{H}(z)$  parcourt  $\Gamma$ , cette fonction de transfert est non-nulle et n'entoure pas zéro,

alors  $\mathcal{H}^S \in \mathbb{H}^\infty(\mathbb{E})$ .

**Preuve** On prouve d'abord que (H1), (H2) et (H3) entraînent que  $\mathcal{H}^S \in \mathbb{H}^\infty(\mathbb{E})$  au moyen de la continuité de  $H^S$  sur un compact  $K$ . Puis on prouve que (H1), (H2) et (H3bis) entraînent (H3) et par suite, on a que  $\mathcal{H}^S \in \mathbb{H}^\infty(\mathbb{E})$ . Enfin la proposition 22 (p. 140) rappelle qu'alors  $\mathcal{H}^S$  est énergétiquement stable.

1. Soit  $\mathcal{H}^S = \frac{1}{\mathcal{F} + \mathcal{G}\mathcal{H}} \in \Sigma_1$  vérifiant (H1), (H2) et (H3).
  - (H1) indique que la fonction de transfert  $\mathcal{F}(z) + \mathcal{G}(z)\mathcal{H}(z)$  est holomorphe sur  $\overline{\mathbb{E}} \setminus \{-1, 1\}$ .
  - $\mathcal{F}(z) + \mathcal{G}(z)\mathcal{H}(z)$  admet une limite quand  $z \rightarrow \infty$  en tant que fonction de transfert d'un filtre causal, aussi il existe  $V_\infty$  un voisinage de l'infini sur lequel que  $\mathcal{H}^S$  est bornée.
  - $\overline{\mathbb{E}} \setminus V_\infty$  est une couronne dans laquelle on définit un compact  $K$  ne contenant pas 1 et  $-1$  : soit  $K$  un compact tel que  $\overline{\mathbb{E}} \setminus V_\infty \setminus V \subset K \subset \overline{\mathbb{E}} \setminus V_\infty \setminus \{-1, 1\}$ .
  - (H3) entraîne que  $\forall z \in K (\mathcal{H}^S(z))^{-1} \neq 0$  et que  $\mathcal{H}^S$  est continue sur  $K$ , et par suite bornée sur  $K$  (en effet  $K$  est compact).
  - (H2) entraîne que  $\mathcal{H}^S$  est bornée sur  $V \cap \mathbb{E}$ .

Finalement  $\mathcal{H}^S$  est bornée sur  $\mathbb{E}$  et donc  $\mathcal{H}^S \in \mathbb{H}^\infty(\mathbb{E})$ .

2. Soit  $\mathcal{H}^S = \frac{1}{\mathcal{F} + \mathcal{G}\mathcal{H}} \in \Sigma_1$  vérifiant (H1), (H2) et (H3bis).
  - (H1) entraîne que le critère de Nyquist peut s'appliquer à  $\mathcal{F} + \mathcal{G}\mathcal{H}$  parce que d'une part  $\mathcal{F} + \mathcal{G}\mathcal{H}$  est holomorphe sur un ouvert connexe contenant le contour d'intégration  $\Gamma$  et le point à l'infini, et parce que d'autre part  $\mathcal{F} + \mathcal{G}\mathcal{H}$  est la fonction de transfert d'un filtre causal.
  - $\mathcal{F} + \mathcal{G}\mathcal{H}$  n'entoure pas zéro aussi  $\mathcal{F}(z) + \mathcal{G}(z)\mathcal{H}(z)$  est non-nul pour tout  $z$  extérieur à  $\Gamma$  et en particulier pour  $z \in \mathbb{E} \setminus V$ .
  - (H2) dit que  $\mathcal{F}(z) + \mathcal{G}(z)\mathcal{H}(z) \neq 0$  pour  $z \in \mathbb{E} \cap V$ .

Finalement (H1), (H2) et (H3bis) entraînent (H3) et par suite que  $\mathcal{H}^S \in \mathbb{H}^\infty(\mathbb{E})$ .

□

**Remarque 23** Lorsque  $\alpha$  est un rationnel, il est possible de transformer le calcul des pôles de  $\mathcal{H}^S$  en la résolution d'un polynôme à variable complexe (voir [Mat94, annexe B]).

**Exemple 6** La figure 5.2 montre les pôles de

$\mathcal{H}_{z_0}(z) = \left[ (1 - \overline{z_0}z^{-1})(1 - z_0z^{-1}) + p(1 - z^{-1})^{\frac{1}{2}} \right]^{-1}$  pour  $|z_0| = 1.5$ . Lorsque  $p$  augmente ces pôles pénètrent dans le disque unité et convergent vers  $z = 0$ . Ainsi  $\mathcal{H}_{z_0}$  est un couplage entre un filtre instable et un filtre diffusif  $p\mathcal{H}^{FI}$  qui joue un rôle d'amortissement pour  $p$  suffisamment grand.

La remarque 23 a été utilisée pour faire cette simulation : en posant  $1 - z^{-1} = \zeta^2$  avec  $\operatorname{Re}(\zeta) > 0$ , on transforme le dénominateur de  $\mathcal{H}_{z_0}$  en un polynôme de degré 4 et à coefficients réels.

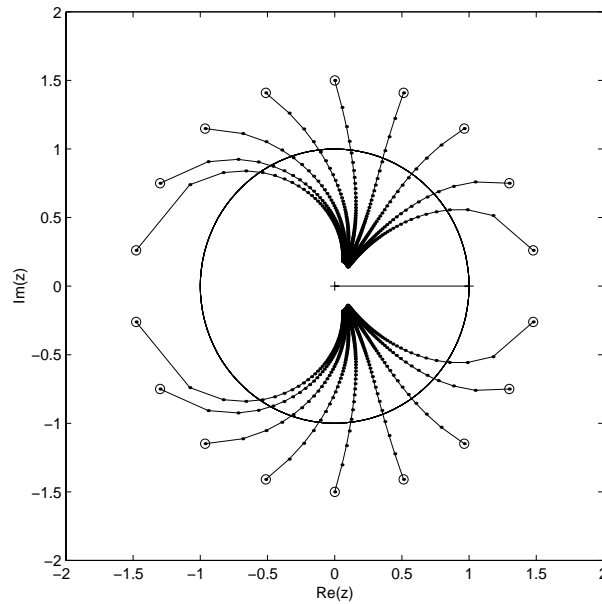


FIG. 5.2 – Pôles de  $\mathcal{H}_{z_0}$  pour  $z_0 = 1.5e^{i\theta}$ . Les pôles correspondant à la même valeur de  $\theta$  sont reliés entre eux. Cette simulation montre que  $\mathcal{H}_{z_0}$  devient stable quand  $p$  est suffisamment élevé.

**Exemple 6 bis** La figure 5.3 donne aussi les pôles de  $[(1 - z_0z^{-1}) + p(1 - z^{-1})^{\frac{1}{2}}]^{-1}$  avec  $|z_0| = 1.5$  en fonction de  $p$  et de  $\theta = \arg(z_0)$ . Les pôles sont indiqués par  $+$  quand  $\theta > 0$  et par  $\bullet$  quand  $\theta < 0$ . Cette figure permet de suivre le déplacement des pôles lorsque  $p$  évolue et montre qu'il existe deux valeurs particulières  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Si  $|\theta| < \theta_1$  alors ces pôles convergent vers  $z = 0$ . Si  $\theta_1 < |\theta| < \theta_2$  alors ces pôles vont jusqu'à la coupure puis ces pôles n'existent plus quand  $p > p_\theta$ , ces différents pôles ne sont pas reliés entre eux. Si  $|\theta| > \theta_2$ , les pôles convergent vers  $z = 0$ . Cette simulation montre qu'un système peut être stable tout en étant formé d'un oscillateur instable, et d'un filtre diffusif.



Cette simulation utilise aussi la remarque 23 et le dénominateur devient un polynôme de degré 2 à coefficients complexe <sup>1</sup>.

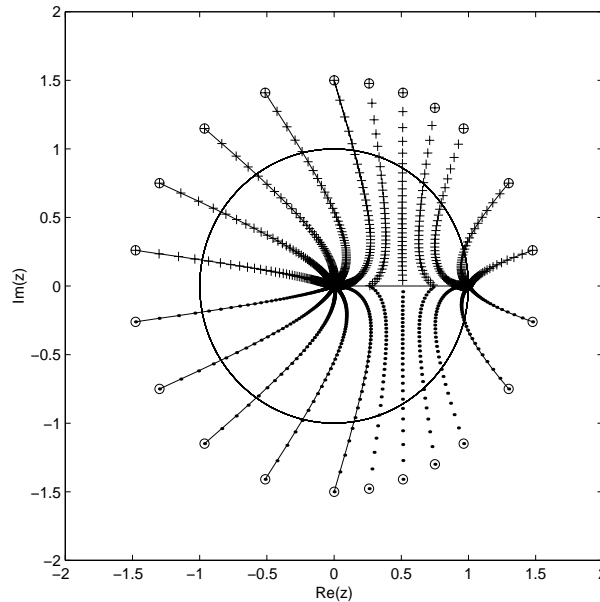


FIG. 5.3 – Pôles de  $[(1 - |z_0|e^{i\theta}z^{-1}) + p(1 - z^{-1})]^{-1}$  avec  $|z_0| = 1.5$ . Les pôles sont indiqués par + si  $\theta > 0$  et par • sinon. Ceux qui correspondent à la même valeur de  $\theta$  sont reliés entre eux par un trait quand les pôles convergent vers  $z = 0$  ou  $z = 1$ . Cette simulation montre que ce filtre devient stable quand  $p$  est suffisamment élevé.

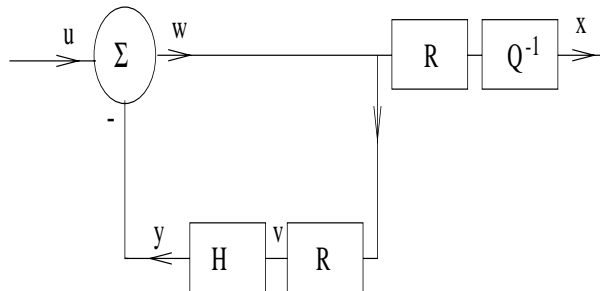


FIG. 5.4 – Schéma fonctionnel de  $\mathcal{H}^S = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{Q}} \frac{1}{1 + \mathcal{R}\mathcal{H}}$ ,  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{H}$  sont positifs et  $\mathcal{R}\mathcal{Q}^{-1}$  est stable.

Nous étudions maintenant la stabilité de  $\mathcal{H}^S = \frac{1}{\mathcal{Q}} \frac{\mathcal{R}}{1 + \mathcal{R}\mathcal{H}} \in \Sigma_2$ . Une première idée serait d'utiliser le théorème de positivité de [Zam66]. Ce théorème prouve la stabilité de  $\frac{\mathcal{R}}{1 + \mathcal{R}\mathcal{H}}$  en utilisant la positivité de  $\mathcal{R}$  et en requérant la stricte positivité de  $\mathcal{H}$ . Malheureusement  $\frac{1}{\mathcal{Q}}$  n'est pas stable a priori et l'hypothèse  $\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{Q}}$  stable n'a pas été utilisée.

<sup>1</sup>Dans ce document nous n'avons utilisé que des filtres à coefficients réels, mais il est en fait possible de définir des filtres à coefficients complexe.

La solution que nous proposons consiste à mettre  $\mathcal{H}^S$  sous la forme  $\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{Q}} \frac{1}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}}$ . La figure 5.4 montre le schéma fonctionnel obtenu, différent de celui de la figure 4.1 (p. 63). Nous proposons d'adapter le critère de Nyquist au cas des filtres diffusifs pour prouver la stabilité de  $\frac{1}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}}$ .  $\mathcal{H}^S = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{Q}} \frac{1}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}}$  sera alors énergétiquement stable parce que  $\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{Q}}$  est stable.

Nous allons utiliser le critère de Nyquist pour montrer que  $\frac{1}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}}$  est bornée sur  $\mathbb{E}$ , en effet la positivité de  $\mathcal{R}$  et de  $\mathcal{H}$  prouve que le diagramme de Nyquist de  $1 + \mathcal{R}\mathcal{H}$  ne traverse pas  $\mathbb{R}_-$  et, par suite, ne contourne pas 0. Le critère de Nyquist s'étend facilement à des filtres non-rationnels (par exemple [Net73, p. 164-167] pourvu que l'on utilise un contour sur lequel  $1 + \mathcal{R}\mathcal{H}$  est holomorphe : en effet la démonstration du critère de Nyquist repose sur un résidu logarithmique (voir [CZ95] ou [Boc96]). [CZ95] propose notamment d'appliquer ce critère sur des opérateurs à temps continu dont la fonction de transfert est holomorphe sur un demi-plan ouvert *contenant l'axe fréquentiel*. Nous proposons d'utiliser le contour représenté sur la figure 5.1. Le critère de Nyquist prouve alors que  $\frac{1}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}}$  est bornée seulement à l'extérieur de ce contour. Une étude du comportement asymptotique de  $1 + \mathcal{R}\mathcal{H}$  au voisinage de  $z = \pm 1$  est nécessaire pour conclure.

**Théorème 4** *Les filtres  $\mathcal{H}^S = \frac{1}{\mathcal{Q}} \frac{\mathcal{R}}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}} \in \Sigma_2$  sont énergétiquement stables.*

**Preuve** Soit  $\mathcal{H}^S = \frac{1}{\mathcal{Q}} \frac{\mathcal{R}}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}} \in \Sigma_2$ . La démonstration consiste à appliquer la proposition 11 pour prouver que  $\frac{1}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}} \in \mathbb{H}^\infty(\mathbb{E})$ . Comme  $\mathcal{R}\mathcal{Q}^{-1} \in \mathbb{H}^\infty(\mathbb{E})$ ,  $\frac{1}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}} \in \mathbb{H}^\infty(\mathbb{E})$  entraîne que  $\mathcal{H}^S \in \mathbb{H}^\infty(\mathbb{E})$ . Nous allons donc montrer que les hypothèses (H1), (H2) et (H3bis) de la proposition 11 sont vérifiées pour  $\frac{1}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}}$ . (H2) repose sur un développement de Taylor de  $1 + \mathcal{R}(z)\mathcal{H}(z)$  sur un voisinage  $V$  de  $z = \pm 1$ . La positivité de  $\mathcal{R}$  et de  $\mathcal{H}$  entraîne, par un raisonnement algébrique, que  $\forall z \in \mathbb{E} \setminus V$ ,  $1 + \mathcal{R}(z)\mathcal{H}(z) \notin \mathbb{R}_-$  et par suite, que sur le contour d'intégration donné  $\Gamma$ ,  $1 + \mathcal{R}\mathcal{H}$  n'entoure pas zéro.

(H1) est vérifiée :

la fonction de transfert constante égale à 1 est stable,

$\mathcal{R}$  est stable parce que  $\mathcal{R}$  est rationnel et positif (cf : proposition 7, p. 53).

(H2) est vérifiée.

En effet, une analyse asymptotique de  $1 + \mathcal{R}(z)\mathcal{H}(z)$  au voisinage de  $z = 1$  montre qu'il existe un voisinage  $V$  de  $z = 1$  et de  $z = -1$  tel que  $\forall z \in V \cap \mathbb{E}$ ,  $\operatorname{Re}[1 + \mathcal{R}(z)\mathcal{H}(z)] \geq \frac{1}{2}$  et donc que  $\forall z \in V \cap \mathbb{E}$ ,  $\frac{1}{|1+\mathcal{R}(z)\mathcal{H}(z)|} \leq 2$ .

- $\mathcal{R}(1) \geq 0$  et  $\mathcal{R}(z) = \mathcal{R}(1) + O(|z - 1|)$  quand  $z \rightarrow 1$ . En effet,  $\mathcal{R}$  est à coefficients réels implique que  $\mathcal{R}(1) \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{R}$  est positif implique  $\operatorname{Re}(\mathcal{R}(1)) \geq 0$ , enfin  $\mathcal{R}(\rho)$  est  $C^1$  au voisinage de  $\rho = 1$ .
- $\forall z \in \mathbb{E}$ ,  $\operatorname{Re}(\mathcal{H}(z)) \geq 0$ .
- $[(z - 1)\mathcal{H}(z) \rightarrow 0]$  grâce à la proposition 22 (p. 140).

Ces trois assertions montrent que :

$$\operatorname{Re}(1 + \mathcal{R}(z)\mathcal{H}(z)) = 1 + \mathcal{R}(1)\operatorname{Re}(\mathcal{H}(z)) + \operatorname{Re}(\mathcal{H}(z))O(|1 - z|)$$

et qu'il existe  $V^1$  un voisinage de  $z = 1$

tel que  $\forall z \in V^1 \cap \mathbb{E}$ ,  $\operatorname{Re}(1 + \mathcal{R}(z)\mathcal{H}(z)) \geq \frac{1}{2}$ .

$\mathcal{R}(-z)$  et  $\mathcal{H}(-z)$  vérifient aussi ces trois assertions, il existe donc

$V = V^1 \cup \{z \mid -z \in V^1\}$  un voisinage de  $z = 1$  et de  $z = -1$   
tel que  $\forall z \in V \cap \mathbb{E}, \operatorname{Re}(1 + \mathcal{R}(z)\mathcal{H}(z)) \geq \frac{1}{2}$ .

(H3bis) est vérifiée.

En effet, soit  $\Gamma$  un contour contenu dans  $\partial\mathbb{E} \cup V$  et entourant le disque unité. Un exemple de contour  $\Gamma$  est dessiné sur la figure 5.1. Le raisonnement algébrique suivant prouve que  $1 + \mathcal{R}(z)\mathcal{H}(z)$  ne traverse pas  $\mathbb{R}_-$  en parcourant  $\Gamma$ .

$\mathcal{R}$  est positif et  $\mathcal{H}$  est un filtre diffusif positif dans  $\mathbb{H}^1(\mathbb{E})$  de symbole diffusif  $\mu$  de *signe constant*, aussi  $\forall z \in \Gamma, \operatorname{Re}(\mathcal{R}(z)) \geq 0$  et  $\operatorname{Re}(\mathcal{H}(z)) > 0$  (voir l'assertion *d* de la proposition 5 p. 50)

S'il existe  $z \in \Gamma$  tel que  $1 + \mathcal{R}(z)\mathcal{H}(z) \in \mathbb{R}_-$  alors, en prenant la partie imaginaire,  $\operatorname{Im}(\mathcal{R}(z))\operatorname{Im}(\mathcal{H}(z)) \leq 0$  et, en prenant la partie réelle,  $1 + \operatorname{Re}(\mathcal{R}(z))\operatorname{Re}(\mathcal{H}(z)) - \operatorname{Im}(\mathcal{R}(z))\operatorname{Im}(\mathcal{H}(z)) = 0$ ; ce qui est contradictoire. Aussi  $1 + \mathcal{R}(z)\mathcal{H}(z)$  ne contourne pas 0 le long du contour  $\Gamma$ . □

**Remarque 24** *La démonstration du théorème 4 n'utilise pas seulement le fait que  $\operatorname{Re}(\mathcal{H}(z)) \geq 0$  pour  $z \in \mathbb{E}$  qui pourrait être une définition plus générale de la positivité (cf : p. 48). Le caractère diffusif de  $\mathcal{H}$  permet de mieux contrôler ce qui se passe notamment sur le cercle unité  $\operatorname{Re}(\mathcal{H}(z)) > 0$  pour  $z \in \bar{\mathbb{E}} \setminus \{-1, 1\}$  (cf : assertion *d* de la proposition 5 page 50).*

**Remarque 25** *Si on élargissait la famille  $\Sigma_2$  de sorte que  $\mathcal{R}$  puisse aussi être un filtre diffusif causal positif et non pas seulement un filtre rationnel causal et positif, alors les filtres de  $\Sigma_2$  ne seraient plus nécessairement stables. Ainsi si  $\mathcal{R} = \mathcal{H}^{FI}$ ,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{FI}$  et  $\mathcal{Q} = 1$  pour  $\alpha \in ]0, 1[$ , alors  $\mathcal{H}^S = \frac{\mathcal{R}\mathcal{Q}^{-1}}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\mathcal{H}^{FI}$  et justement  $\mathcal{H}^{FI}$  n'est pas stable énergétiquement :  $\mathcal{H}^{FI}(z) = (1 - z^{-1})^{-\alpha} \rightarrow +\infty$  quand  $z \rightarrow 1$  avec  $z \in \mathbb{E}$ .*

**Exemple 5 (suite)** Nous avons ainsi prouvé que les filtres de  $\Sigma_2$  sont énergétiquement stables. Par suite  $\mathcal{H}_p(z) = [(1 - z^{-1})^2 + \omega_0^2 + p(1 - z^{-1})\mathcal{H}^{FI}] \in \Sigma_2$  (cf : exemple 5) est aussi énergétiquement stable. Remarquons que pour  $p = 0$ ,  $\mathcal{H}_p$  est un filtre rationnel stable dont les deux pôles conjugués sont  $\frac{1 \pm i\omega_0}{1 + \omega_0^2}$ .

**Exemple 6 (suite)** L'application du théorème 4 à  $\mathcal{H}_{z_0}$  prouve, que quel que soit  $p > 0$ ,  $\mathcal{H}_{z_0}$  est énergétiquement stable lorsque  $z_0$  est dans le lieu de gauche ou de droite de la figure 4.2 (p. 66). Nous avons cherché le lieu des  $z_0$  tels que  $\mathcal{H}_{z_0}$  soit énergétiquement stable quelque soit  $p > 0$ . La simulation du critère de Nyquist montre que ce lieu est  $\{z_0 \mid |z_0| \leq 1, z_0 \neq 1\}$ . Ce lieu est représenté sur la figure 5.5. Ce dernier lieu comprend les lieux 1 et 2 pour lesquels l'appartenance de  $\mathcal{H}_{z_0}$  à  $\Sigma_2$  a déjà été montrée (cf : p. 65); cette simulation confirme donc le théorème 4 :  $\Sigma_2 \subset \mathbb{H}^\infty(\mathbb{E})$ .

En résumé, nous avons donné une condition suffisante sur les filtres dans  $\Sigma_1$  qui permet d'utiliser le critère de Nyquist pour prouver la stabilité d'un filtre. Nous avons établi que les filtres dans  $\Sigma_2$  sont énergétiquement stables. Quelques

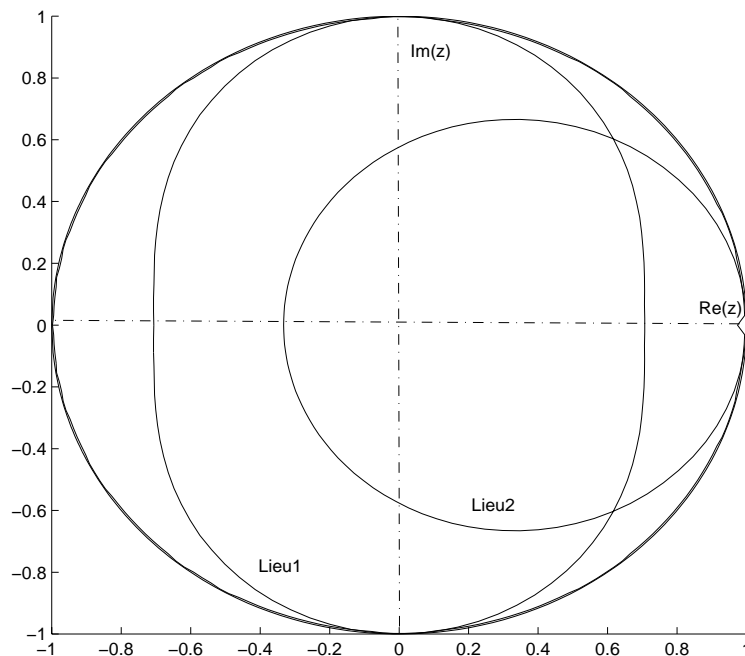


FIG. 5.5 – La courbe extérieure coïncide avec le cercle unité et est l'ensemble des  $z_0$  tels que pour tout  $p > 0$   $\mathcal{H}_{z_0} = [(1 - z_0 z^{-1})(1 - \bar{z}_0 z^{-1}) + p(1 - z^{-1})\mathcal{H}^{FI}]^{-1}$  soit énergétiquement stable, cette courbe ne dépend pas de  $\alpha \in ]0, 1[$ .

La courbe ovale intérieure (Lieu1) est l'ensemble des  $z_0$  tels que  $(1 - z_0 z^{-1})(1 - \bar{z}_0 z^{-1})$  soit positif. La courbe circulaire intérieure (Lieu2) est l'ensemble des  $z_0$  tels que  $\frac{1 - z^{-1}}{(1 - z_0 z^{-1})(1 - \bar{z}_0 z^{-1})}$  soit positif.

L'exemple 6 (p. 65) montre que  $\{z_0 \mid \mathcal{H}_{z_0} \in \Sigma_2\}$  contient la réunion des deux lieux délimités par les deux courbes.

hypothèses techniques supplémentaires vont permettre au cours du chapitre 6 de montrer que ces filtres sont aussi EBSB stables.



# Chapitre 6

## Stabilité EBSB du couplage d'un filtre diffusif avec un filtre rationnel

$\mathcal{A}(\beta)$  désigne l'algèbre de convolution des réponses impulsionnelles des opérateurs non-rationnels à temps continu causaux (voir par exemple [DV75, annexe C]). En annexe B, nous définissons  $l^1(\rho)$  comme la partie discrète de  $\mathcal{A}(\beta)$  puis à partir de  $l^1(\rho)$ , nous définissons une algèbre pour les fonctions de transfert de filtres à temps discret  $\widehat{l}^1(\rho)$ . Ainsi  $\widehat{l}^1(1)$  noté aussi  $W_+$  désigne l'ensemble des filtres EBSB (voir la définition 8 en annexe B p. 144).

La première méthode s'appuie sur un théorème rappelé dans [BP99], qui est l'analogue à temps discret d'un théorème dans [HP57]. Ce théorème affirme notamment que si  $\mathcal{H}^S \in \mathbb{H}^\infty(\mathbb{E})$  et  $(\mathcal{H}^S)^{-1} \in W_+$  alors  $\mathcal{H}^S \in W_+$ . Nous montrerons ainsi que certains filtres de  $\Sigma_2$  sont dans  $W_+$  (cf : §6.1). Cette méthode permet à [BP01] en temps continu de donner des critères de stabilités et de proposer des décompositions en fractions irréductibles.

La deuxième méthode s'inspire en l'étendant d'un résultat de décomposition, proposé à temps continu pour les systèmes différentiels fractionnaires commensurables et incommensurables, comme conjecture dans [Mat98b]; la question ouverte de la finitude du nombre de pôle ayant été démontrée ultérieurement dans [BP00b]; une version plus précise de ce résultat de décomposition ayant été donnée dans [AMM00a]. Par ailleurs ce résultat a été énoncé dans le cadre des filtres diffusifs dans [DHM00] et étudié dans [Hel00] avec notamment le cas des pôles sur la coupure. Sous réserve d'hypothèses techniques, nous montrerons que les filtres de  $\Sigma_2$  sont aussi la somme d'un filtre rationnel, stable et d'un filtre diffusif. L'analyse du comportement asymptotique de ce nouveau filtre diffusif permet de montrer que ces filtres sont dans  $W_+$ . Un exemple permet de comparer les deux méthodes (cf : §6.2).

Grâce au chapitre 2, le comportement asymptotique de la réponse impulsion-

nelle peut être évaluée, ce comportement dépend fortement de la présence d'un zéro pour  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{R}$  en  $z = \pm 1$  (cf : §6.3).

**Exemple 5 (suite)** La figure 6.1 représente la réponse impulsionnelle de  $\mathcal{H}_p(z) = [(1 - z^{-1})^2 + \omega_0^2 + p(1 - z^{-1})\mathcal{H}(z)]^{-1} \in \Sigma_2$  pour deux valeurs de  $p > 0$  lorsque le filtre diffusif  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{FI}$ . La figure 6.2 représente les réponses impulsionnelles de  $\mathcal{H}_p$  intermédiaires entre ces deux valeurs, ces réponses sont représentées sous la forme d'une nappe. Ces systèmes ont été étudiés en détail à temps continu dans [Hel00]. Lorsque  $p = 0$ ,  $\mathcal{H}_p$  est un oscillateur *exponentiellement amorti* (cf : page 74) et l'augmentation de  $p$  atténue les oscillations et fait apparaître un comportement de type *mémoire longue*. Le résultat de décomposition montre que cette courbe est la somme d'une oscillation exponentiellement amortie et de la réponse impulsionnelle d'un filtre diffusif.

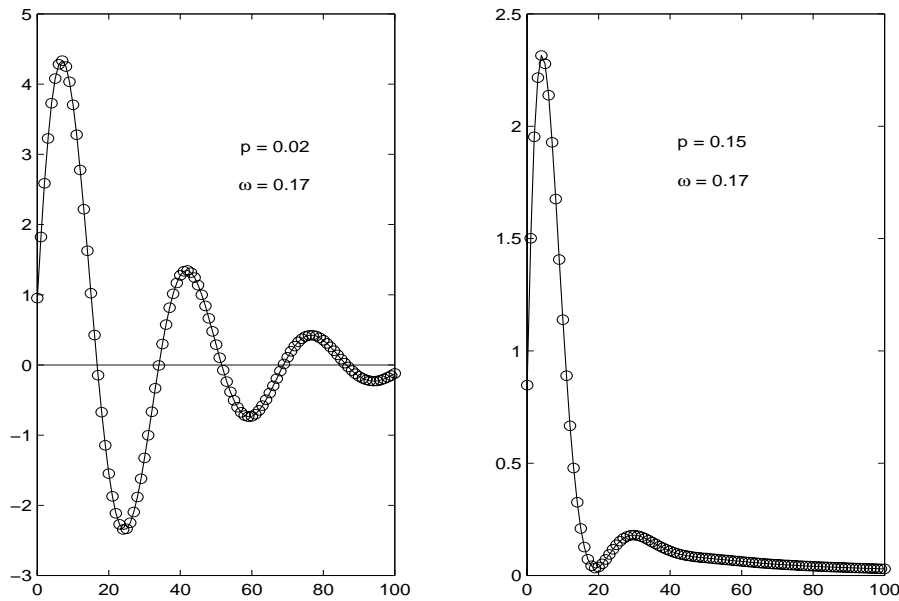


FIG. 6.1 – Réponse impulsionnelle de  $H^S$  pour deux valeurs de  $p$ .

A gauche : ( $p = 0.02$ ), les oscillations sont prédominantes.

A droite : ( $p = 0.15$ ), la décroissance lente est visible.

## 6.1 Stabilité EBSB par un raisonnement algébrique

La première méthode consiste à s'appuyer sur trois propriétés pour donner des conditions suffisantes pour qu'un filtre  $\mathcal{H}^S = \frac{1}{\mathcal{Q}} \frac{\mathcal{R}}{1 + \mathcal{R}\mathcal{H}} \in \Sigma_2$  soit dans  $W_+$ . L'expression intégrale de la réponse impulsionnelle d'un filtre diffusif donne des conditions suffisantes simples sur le symbole diffusif  $\mu$  pour prouver que le filtre

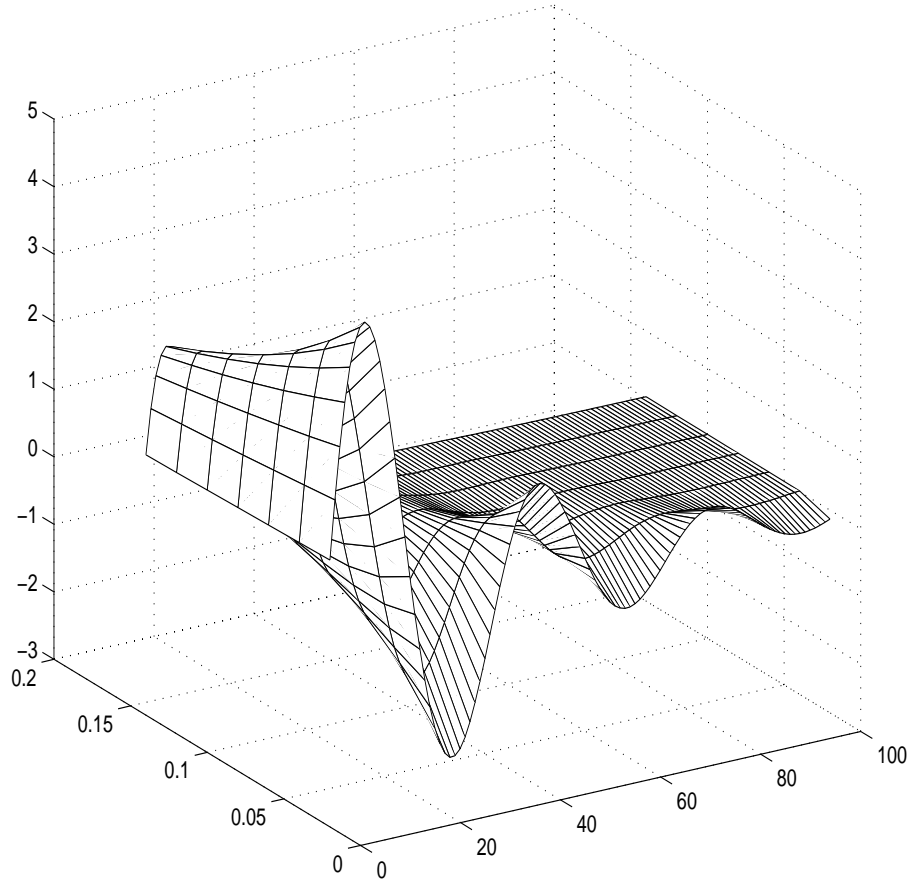


FIG. 6.2 – Nappe de réponses impulsionnelles de  $\mathcal{H}_p$  pour des valeurs croissantes de  $p \in [0.02, 0.15]$  et pour  $\omega = 0.17$ .

diffusif  $\mathcal{H}$  appartient à  $W_+$  et par suite pour que  $1 + \mathcal{R}\mathcal{H} \in W_+$ . Le théorème 9 en annexe B (p. 144) rappelle qu'alors  $\frac{1}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}} \in W_+$ . Enfin  $W_+$  est stable par multiplication avec un filtre rationnel stable aussi  $\mathcal{H}^S = \mathcal{R}\mathcal{Q}^{-1}\frac{1}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}} \in W_+$ . Les conditions suffisantes prouvant que  $\mathcal{H}^S \in W_+$  sont énoncées sous la forme d'une proposition. La preuve de cette proposition utilise des résultats énoncés dans le lemme suivant.

**Lemme 4** *Soit  $\mathcal{H}$  un filtre diffusif de lien direct  $h_0$  et de symbole diffusif  $\mu$ . Soit  $\mathcal{R}$  un filtre rationnel stable. Alors,*

1.  $\mathcal{R} \in W_+$  ;
2.  $\frac{\mu^{\mathbf{1}_{[0,1]}}}{1-\rho} \in L^1(0,1) \Rightarrow \mathcal{H}^{\mu^{\mathbf{1}_{[0,1]}}} \in W_+$  ;
3.  $\frac{\mu^{\mathbf{1}_{[-1,0]}}}{1+\rho} \in L^1(-1,0) \Rightarrow \mathcal{H}^{\mu^{\mathbf{1}_{[-1,0]}}} \in W_+$  ;
4.  $\mathcal{R}(1) = 0 \Rightarrow \mathcal{R}\mathcal{H}^{\mu^{\mathbf{1}_{[0,1]}}} \in W_+$  ;
5.  $\mathcal{R}(-1) = 0 \Rightarrow \mathcal{R}\mathcal{H}^{\mu^{\mathbf{1}_{[-1,0]}}} \in W_+$  ;

où  $\mu$  et  $\mathcal{H}$  peuvent se décomposer en  $\mu = \mu^{\mathbf{1}_{[0,1]}} + \mu^{\mathbf{1}_{[-1,0]}}$  et  $\mathcal{H}(z) = h_0 +$



$$\mathcal{H}^{\mu^1_{[0,1]}}(z) + \mathcal{H}^{\mu^1_{[-1,0]}}(z).$$

### Preuve

1. est énoncée dans la proposition 25 (p. 144).
2. (1.5) montre que pour tout  $N$ ,

$$\sum_{n=1}^N |h_n^{\mu^1_{[0,1]}}| \leq \int_0^1 |\mu(\rho)| \sum_{n=1}^N \rho^{n-1} d\rho \leq \int_0^1 \frac{|\mu(\rho)|}{1-\rho} d\rho < +\infty.$$

Aussi  $h_n^{\mu^1_{[0,1]}} \in l^1$ .

3. La remarque 1 (p. 25) montre que 2.  $\Rightarrow$  3.
4.  $\mathcal{R}(z)\mathcal{H}^{\mu^1_{[0,1]}}(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{H}^{\mu^1_{[0,1]}}(z) \left[ \frac{\mathcal{R}(z)}{1-z^{-1}} \right]$ .

La réponse impulsionnelle de  $(1 - z^{-1})\mathcal{H}^{\mu^1_{[0,1]}}(z)$  est  $h_{n+1}^{\mu^1_{[0,1]}} - h_n^{\mu^1_{[0,1]}}$  avec  $n \geq 0$ .

Grâce à (1.5) et  $\mu \in L^1(-1, 1)$ , on a pour tout  $N \geq 1$

$$\sum_{n=1}^N |h_{n+1}^{\mu^1_{[0,1]}} - h_n^{\mu^1_{[0,1]}}| \leq \int_0^1 |\mu(\rho)| \sum_{n=1}^N |\rho^{n-1}(\rho - 1)| d\rho \leq \int_0^1 |\mu(\rho)| d\rho < +\infty.$$

Donc  $(1 - z^{-1})\mathcal{H}^{\mu^1_{[0,1]}}(z) \in W_+$ .

$\mathcal{R}$  est le quotient de deux polynômes en  $z^{-1}$ , et lorsque  $\mathcal{R}(1) = 0$  le polynôme numérateur est divisible par  $1 - z^{-1}$  aussi  $\frac{\mathcal{R}(z)}{1-z^{-1}}$  est un filtre stable donc  $\frac{\mathcal{R}(z)}{1-z^{-1}} \in W_+$ .

Finalement  $\mathcal{R}\mathcal{H}^{\mu^1_{[0,1]}}(z) \in W_+$ .

5. La remarque 1 (p. 25) montre que 4.  $\Rightarrow$  5.

□

**Proposition 12** Soit un filtre  $\mathcal{H}^S = \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{\mathcal{R}}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}} \in \Sigma_2$  qui vérifie l'une des quatre propriétés suivantes :

$$\left[ \begin{array}{l} (H1) \mathcal{R}(1) = 0 \text{ et } \frac{\mu^1_{[-1,0]}(\rho)}{1+\rho} \in L^1(-1, 0) \\ \text{ou } (H2) \mathcal{R}(-1) = 0 \text{ et } \frac{\mu^1_{[0,1]}(\rho)}{1-\rho} \in L^1(0, 1) \\ \text{ou } (H3) \mathcal{R}(-1) = 0 \text{ et } \mathcal{R}(1) = 0 \\ \text{ou } (H4) \frac{\mu(\rho)}{1-|\rho|} \in L^1(-1, 1) \end{array} \right.$$

Alors  $\mathcal{H}^S \in W_+$ .

**Preuve** Soit  $\mathcal{H}^S = \frac{1}{\mathcal{Q}} \frac{\mathcal{R}}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}} \in \Sigma_2$ . Le théorème 4 (p. 73) en annexe B que  $\frac{1}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}} \in \mathbb{H}^\infty(\mathbb{E})$ . Le théorème 9 en annexe B rappelle qu'alors  $\frac{1}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}} \in W_+$  à condition d'avoir établi que  $(1 + \mathcal{R}\mathcal{H}) \in W_+$ . Justement en utilisant le lemme 4,

$$1 \in W_+,$$

$$[(H1), (H2), (H3) \text{ ou } (H4)] \Rightarrow \mathcal{R}\mathcal{H} \in W_+.$$

Enfin  $\mathcal{R}\mathcal{Q}^{-1} \in W_+$  et  $\frac{1}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}} \in W_+$  prouvent que  $\mathcal{H}^S \in W_+$ . □

Le théorème 9 nous a permis de donner des conditions suffisantes pour que  $\mathcal{H}^S = \frac{1}{\mathcal{Q}} \frac{\mathcal{R}}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}} \in W_+$ . Ces conditions ne font pas intervenir la régularité de  $\mu$ . Nous pensons qu'en établissant la stabilité énergétique de couplages de filtres plus généraux que  $\Sigma_2$ , nous pourrions au moyen de manipulations algébriques élargir les conditions suffisantes de la proposition 12 en utilisant toujours le théorème 9.

**Remarque 26** Si  $\mathcal{H}^S \in W_+$  alors le filtre n'est pas seulement stable EBSB. Ainsi qu'il est rappelé dans [DV75, ch.5 §4], pour tout  $p \in \{1 \dots \infty\}$ , si l'entrée vérifie  $u_n \in l^p$  alors la sortie vérifie  $x_n \in l^p$ . Notons que ces stabilités ne sont pas en général équivalentes.

## 6.2 Résultat de décomposition

La deuxième méthode consiste à chercher une expression de la réponse impulsionnelle de  $\mathcal{H}^S = \frac{1}{\mathcal{Q}} \frac{\mathcal{R}}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}}$  en fonction de  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{H}$ . Cette méthode s'appuie sur un *résultat de décomposition* : sous réserve d'hypothèses techniques, les filtres  $\mathcal{H}^S \in \Sigma_2$  s'écrivent  $\mathcal{H}^S = \mathcal{N} + \mathcal{H}^{\mu^S}$  où  $\mathcal{N}$  est un filtre rationnel, stable et  $\mathcal{H}^{\mu^S}$  est un autre filtre diffusif dont le symbole diffusif est  $\mu^S$ .

Le résultat de décomposition avait à l'origine été étudié à temps continu sur des fractions composées d'opérateurs fractionnaires : [Ous83], [Mat94] dans le cas commensurable et [Mat98b] et [GM97] dans le cas non commensurable. De nombreux systèmes couplés ont ainsi été décomposés et les pôles des parties entières et les symboles diffusifs ont été étudiés et simulés par différentes méthodes y compris dans le cas non-fractionnaire dans [Hel00].

Ce résultat requiert la connaissance du comportement du prolongement analytique d'un filtre diffusif au voisinage de  $[-1, 1]$  (cf : théorème 2 p. 35).  $\mu^S$  s'exprime alors en fonction de  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{Q}$ ,  $\mu$  et de  $\mathcal{V}_\mu$ , la valeur de continuité définie aussi par le théorème 2. Le résultat de décomposition utilise aussi le théorème 1 (p. 31) pour reconnaître que  $\mathcal{H}^S - \mathcal{N}$  est un filtre diffusif.

Dans ce résultat de décomposition, le symbole diffusif  $\mu$  est supposé avoir une certaine régularité. Cette régularité s'observe dans tous les exemples que nous avons traités et elle permet la démonstration de ce résultat avec des relations simples. Mais nous ne pensons pas que cette régularité soit nécessaire pour établir ce résultat, qui devrait pouvoir être étendu.

Le résultat de décomposition est d'abord illustré par l'exemple qui suit. Ce résultat est ensuite énoncé sous forme d'un théorème dont la démonstration utilise un lemme.

**Exemple 5 (suite)** Les filtres  $\mathcal{H}_p(z) = [(1 - z^{-1})^2 + \omega_0^2 + p(1 - z^{-1})\mathcal{H}(z)]^{-1}$  peuvent s'écrire sous la forme d'un filtre rationnel  $\mathcal{N}_p$  d'ordre 2 et d'un filtre diffusif de symbole diffusif  $\mu_p$ .

Les pôles et les zéros de  $\mathcal{N}_p$  sont représentés sur la figure 6.3. Quand  $p = 0$ ,  $\mathcal{H}_p$  est un filtre rationnel stable avec deux pôles à l'intérieur du disque unité. Quand  $p$  augmente, ces pôles se déplacent vers le centre du cercle unité et convergent vers zéro. Les zéros partent de  $z = 0$  lorsque  $p = 0$  et ensuite retournent vers  $z = 0$ . Numériquement les pôles sont obtenus en cherchant le maximum  $z_0$  de  $\mathcal{H}(z)$  et les zéros sont calculés à partir du lien direct de  $\mathcal{H}_p$  ( $\frac{1}{1+p+\omega^2}$ ) et du résidu  $\frac{1}{\mathcal{H}'(z_0)}$  (cf : [Hel00, chapitre 7]). Les simulations montrent que la réponse fréquentielle de  $\mathcal{H}$  et de  $\mathcal{N}_p + \mathcal{H}^{\mu_p}$

coïncident numériquement sur  $\omega \in [\frac{\pi}{30}, \pi]$  avec une précision de  $10^{-5}$  lorsque  $\mathcal{H}^{\mu_p}$  est évalué sur 1000 points avec le programme `mush2hn.m` en annexe D. Des calculs asymptotiques sur  $\mu_p$  indiquent que  $\mu_p(\rho) \sim \frac{p}{\omega_0^2} \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} (1-\rho)^{1-\alpha}$  quand  $\rho \rightarrow 1$ . De tels calculs seront présentés au §6.3. Les symboles diffusifs  $\mu_p$  sont représentés par une surface sur la figure 6.4. On observe que l'un des maximum locaux de  $\mu$  s'accroît et se rapproche de  $\rho = 1$  lorsque  $p$  augmente. A  $p$  fixé, cette simulation confirme que  $\mu_p(\rho) \rightarrow 0$  quand  $\rho \rightarrow 1$ . Le lemme 4 montre qu'alors  $\mathcal{H}_p$  est EBSB-stable.

**Lemme 5** *Soient deux fonctions de transfert  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  prolongeables analytiquement en deux fonctions holomorphes sur  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  telles que  $\mathcal{H} = \frac{\mathcal{H}_1}{\mathcal{H}_2} \in \mathbb{H}^\infty(\mathbb{E})$ . S'il existe un voisinage  $V$  de  $[-1, 1]$  tel que  $\forall z \in V \setminus [-1, 1], |\mathcal{H}_2(z)| \neq 0$ , alors il existe  $\mathcal{N}$  un filtre rationnel stable qui n'a pas de pôles sur  $[-1, 1]$  et qui est tel que  $\frac{\mathcal{H}_1}{\mathcal{H}_2} - \mathcal{N}$  soit prolongeable analytiquement en une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ .*

**Notation** Si  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont deux contours d'intégrations, la réunion de  $\Gamma_1$  et de  $\Gamma_2$  parcouru dans le sens inverse est un contour d'intégration qui sera noté  $\Gamma_1 - \Gamma_2$ .

**Preuve** On se donne un contour,  $\Gamma$  qui encercle le disque unité et qui est orienté dans le sens direct. La formule de Cauchy et la stabilité de  $\mathcal{H}$  (et par suite l'existence d'une limite de  $\mathcal{H}$  en l'infini) montrent que pour  $z$  hors du contour  $\Gamma$ ,  $\mathcal{H}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mathcal{H}(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta$ . On se donne un deuxième contour  $\Gamma_V$  entourant  $[-1, 1]$ , contenu dans  $V$  et orienté dans le sens direct. On définit aussi pour  $z$  hors du contour  $\Gamma$  :  $\mathcal{N}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma - \Gamma_V} \frac{\mathcal{H}(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta$ .

La démonstration consiste à montrer successivement que  $\mathcal{H}_2$  n'a qu'un nombre fini de zéros dans  $\mathbb{D}$ , pour ensuite en déduire que la fonction de transfert  $\mathcal{N}(z)$  correspond à un filtre rationnel stable, et qu'enfin  $\mathcal{H} - \mathcal{N}$  est prolongeable analytiquement en une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ . On remarque que la présence éventuelle de zéros de  $\mathcal{H}_2$  qui se simplifieraient avec  $\mathcal{H}_1$  ne gêne pas le prolongement analytique de  $\mathcal{H}$  sur  $\mathbb{E}$  dans la mesure où on sait déjà que  $\mathcal{H} \in \mathbb{H}^\infty(\mathbb{E})$ .

1.  $\mathcal{H}_2$  n'a qu'un nombre fini de zéros dans  $\mathbb{D} = \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{E}}$  et pas de zéro dans  $\bar{\mathbb{E}}$ .  
En effet il existe un compact  $K$  vérifiant  $\bar{\mathbb{D}} \setminus V \subset K \subset \bar{\mathbb{D}} \setminus [-1, 1]$  et sur lequel  $\mathcal{H}_2$  est holomorphe.  $\mathcal{H}_2$  ne peut avoir qu'un nombre fini de zéro dans  $K$ .  
 $\mathcal{H}_2$  n'a pas de zéro sur  $V$ .  
Une méthode semblable est utilisée dans [BP00b] pour montrer que les fonctions de transfert n'ont qu'un nombre fini de zéros.
2.  $\mathcal{N}$  est un filtre rationnel stable sans pôles sur  $[-1, 1]$ .  
En effet, l'assertion 1 et le calcul des résidus de  $\mathcal{H}$  sur chaque zéro de  $\mathcal{H}_2$ , montre que  $\mathcal{N}(z)$  est une fraction rationnelle avec des pôles uniquement dans  $\mathbb{D} \setminus [-1, 1]$ .
3.  $\mathcal{H} - \mathcal{N}$  peut être prolongé analytiquement en une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ .  
En effet pour tout  $z$  extérieur à  $\Gamma$ ,  $\mathcal{H}(z) - \mathcal{N}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_V} \frac{\mathcal{H}(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta$ . Soit  $z' \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ , il existe un autre contour  $\Gamma_{V'}$  qui entoure  $[-1, 1]$ , qui est à l'intérieur de

$\Gamma$  et qui n'entoure pas  $z'$ . Pour tout  $z$  extérieur à  $\Gamma$ ,  $\mathcal{H}(z) - \mathcal{N}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_{V'}} \frac{\mathcal{H}(\zeta)}{z-\zeta} d\zeta$ . Ainsi  $\mathcal{H}(z) - \mathcal{N}(z)$  est prolongé analytiquement sur un ouvert connexe contenant  $z'$ , ce prolongement est nécessairement unique dans  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ .  $\square$

**Théorème 5** Soit  $\mathcal{H}^S = \frac{1}{\mathcal{Q}} \frac{\mathcal{R}}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}} \in \Sigma_2$ . Soit  $\mu$  le symbole diffusif de  $\mathcal{H}$  et  $\mathbb{I}$  le support de  $\mu$ . Soit  $\mathbb{S} = \{\rho_j\}$  un ensemble fini de points dans  $[-1, 1]$  contenant  $\{-1, 1\}$ .

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(H1)  $\mu$  est localement hölderienne et non nulle sur  $\mathbb{I} \setminus \mathbb{S}$ ;

(H2) pour tout  $\rho_j \in \mathbb{S}$ , il existe  $\alpha_j^+, \alpha_j^- \in [0, 1[$  et  $\epsilon_j > 0$  tels que

$\mu(\rho)(\rho_j - \rho)^{\alpha_j^-}$  soit hölderienne sur  $[\rho_j - \epsilon_j, \rho_j] \cap \mathbb{I}$

et  $\mu(\rho)(\rho - \rho_j)^{\alpha_j^+}$  soit hölderienne sur  $[\rho_j, \rho_j + \epsilon_j] \cap \mathbb{I}$ , de plus une de ces hypothèses doit être vérifiée :

(H2.1)  $\mathcal{R}(\rho_j) = 0$

ou (H2.2)  $\alpha_j^- > \alpha_j^+$  et  $\mu(\rho)(\rho_j - \rho)^{\alpha_j^-}$  admet une limite non-nulle quand  $\rho \rightarrow \rho_j^-$  et  $\mathcal{R}(\rho_j) \neq 0$

ou (H2.3)  $\alpha_j^+ > \alpha_j^-$  et  $\mu(\rho)(\rho - \rho_j)^{\alpha_j^+}$  admet une limite non-nulle quand  $\rho \rightarrow \rho_j^+$  et  $\mathcal{R}(\rho_j) \neq 0$ .

(H3)  $\mathcal{Q}$  n'a ni pôles sur  $[-1, 1]$  ni zéros sur  $]-1, 1[$ ,  $\mathcal{R}$  n'a pas de pôles sur  $]-1, 1[$ ;

alors il existe  $\mathcal{N}$  un filtre rationnel stable tel que  $\mathcal{H} = \mathcal{N} + \mathcal{H}^{\mu^S}$  où  $\mathcal{H}^{\mu^S}$  est le filtre diffusif de lien direct nul et de symbole diffusif

$$\mu^S(\rho) = \frac{-\mu(\rho)\mathcal{R}^2(\rho)}{\mathcal{Q}(\rho)\{[1 + (\mathcal{V}_\mu(\rho) + h_0)\mathcal{R}(\rho)]^2 + \pi^2\mu^2(\rho)\mathcal{R}^2(\rho)\}} \quad \text{si } \rho \in \mathbb{I} \quad (6.1)$$

$$\mu^S(\rho) = 0 \quad \text{si } \rho \in [-1, 1] \setminus \mathbb{I}$$

En outre, si  $\mu$  vérifie les hypothèses supplémentaires suivantes

(H4)  $1 \notin \mathbb{I}$  ou  $\mathcal{R}(1) = 0$  ou  $\frac{1}{\mu(\rho)(1-\rho)} \in L^1(\mathbb{I})$

(H5)  $-1 \notin \mathbb{I}$  ou  $\mathcal{R}(-1) = 0$  ou  $\frac{1}{\mu(\rho)(1+\rho)} \in L^1(\mathbb{I})$

alors  $\mathcal{H}^S \in W_+$ .

**Preuve** Les hypothèses (H2.1), (H2.2), (H2.3) et le lemme 8 en annexe (p. 134) permettent de connaître le comportement de  $\mathcal{H}^S$  au voisinage de  $\rho_j \in \mathbb{S}$ , tandis que le théorème 2 (p. 35) permet de connaître le comportement de  $\mathcal{H}^S$  au voisinage de  $\rho \in \mathbb{I} \setminus \mathbb{S}$  et ainsi de trouver (6.1). Ces informations prouvent que la fonction  $\mu^S$  définie par (6.1)

est sommable. Le lemme 5 définit  $\mathcal{N}$ , aussi appelée *partie entière* de la décomposition. L'application du théorème 1 (p. 31) montre alors que  $\mathcal{H}^S - \mathcal{N}$  est un filtre diffusif de symbole diffusif  $\mu^S$ . Enfin (H4) et (H5) entraînent que  $\frac{\mu^S(\rho)}{1-|\rho|} \in L^1(-1, 1)$  et qu'alors  $\mathcal{H}^S \in W_+$  grâce au lemme 4.

1. Soit  $\rho_j \in \mathbb{S}$ . Il existe  $V_j$  un voisinage de  $\rho_j$  tel que,  $\forall z \in V \setminus \mathbb{I}$ ,  
 $|\mathcal{Q}(z)(1 + \mathcal{R}(z)\mathcal{H}(z))| \neq 0$  et  $(z - \rho_j)\mathcal{H}^S(z) \rightarrow 0$  quand  $z \rightarrow \rho_j$  avec  $z \notin [-1, 1]$ .  
 En effet d'après le lemme 8, (H2.1) ou (H2.2) ou (H2.3) entraînent que  
 $|\mathcal{H}(z)|(z - \rho_j) \rightarrow 0$ , (H2.2) ou (H2.3) entraînent que  $|\mathcal{H}(z)| \rightarrow +\infty$  quand  $z \rightarrow \rho_j$ .  
 (H3) dit que  $\rho_j$  n'est pas un pôle de  $\mathcal{R}$ . Aussi,
  - (H2.1)  $\Rightarrow [|\mathcal{Q}(z)(1 + \mathcal{R}(z)\mathcal{H}(z))| \rightarrow \mathcal{Q}(\rho_j) \neq 0$   
 quand  $z \rightarrow \rho_j$  avec  $z \notin [-1, 1]$ ], parce que (H2.1) dit que  $\mathcal{R}(z) = O(|z - \rho_j|)$ .
  - (H2.2) ou (H2.3)  $\Rightarrow [|\mathcal{Q}(z)(1 + \mathcal{R}(z)\mathcal{H}(z))| \rightarrow \infty$  quand  $z \rightarrow \rho_j$   
 avec  $z \notin [-1, 1]$ ],
2. Soit  $\varrho \in \mathbb{I} \setminus \mathbb{S}$ . (H1) permet d'appliquer le théorème 2 à  $\mathcal{H}$  et ainsi d'affirmer que
  - $\mathcal{H}^S(z)$  admet une limite quand  $z \rightarrow \varrho$  avec  $\mathcal{I}m(z) > 0$  et une autre limite quand  $z \rightarrow \varrho$  avec  $\mathcal{I}m(z) < 0$ . Ces limites sont notées  $\mathcal{H}^S(\rho + i0)$  et  $\mathcal{H}^S(\rho - i0)$  et après calcul  $\frac{1}{2i\pi} [\mathcal{H}^S(\rho - i0) - \mathcal{H}^S(\rho + i0)] = \mu^S(\rho)$  lorsque  $\mu^S$  est définie par (6.1).
  - Soit  $\varrho \in \mathbb{I} \setminus \mathbb{S}$ ,  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{R}$  sont à coefficients réels,  $\mu(\rho) \neq 0$ , (H4) dit que  $\varrho$  n'est pas un zéro ni un pôle de  $\mathcal{R}$  et de  $\mathcal{R}$ . Aussi  $\mathcal{Q}(\varrho)(1 + \mathcal{R}(\varrho)\mathcal{H}(\varrho \pm i0)) = \mathcal{Q}(\varrho)(1 + \mathcal{R}(\varrho)(h_0 + \mathcal{V}_\mu(\varrho) \pm i\pi\mu(\varrho))) \neq 0$ . Il existe un voisinage  $V_\varrho$  tel que  $\forall z \in V_\varrho$ ,  $|\mathcal{Q}(z)(1 + \mathcal{R}(z)\mathcal{H}(z))| \neq 0$ .
3.  $\mu^S$  est une fonction sommable parce que le dénominateur de  $\mu^S$  est non nul sur  $\mathbb{I} \setminus \mathbb{S}$  et parce qu'il existe un voisinage  $V_j$  de chaque point  $\rho_j \in \mathbb{S}$  sur lequel  $\mu^S$  est majorée par une fonction sommable.
  - Soit  $\varrho \in \mathbb{I} \setminus \mathbb{S}$ , (H3) et (H1) prouvent que  $\mathcal{Q}(\varrho)\mu(\varrho) \neq 0$ . Selon (6.1), le dénominateur de  $\mu^S$  ne s'annule pas et, d'après le lemme 8  $\mathcal{V}_\mu$  étant localement hölderienne sur  $\mathbb{I} \setminus \mathbb{S}$  par suite  $\mu^S$  est localement sommable sur  $\mathbb{I} \setminus \mathbb{S}$ .
  - Soit  $\rho_j \in \mathbb{S}$  tel que  $\mathcal{R}(\rho_j) = 0$ . Selon (6.1)  $\mu^S(\rho) \leq \frac{\mathcal{R}(\rho)}{\mathcal{Q}(\rho)} \cdot \frac{\mu(\rho)}{[1 + (\mathcal{V}_\mu(\rho) + h_0)\mathcal{R}(\rho)]^2}$ . La première fraction est bornée parce que  $\mathcal{Q}(\rho_j) \neq 0$ , ou  $\rho_j = \pm 1$  et  $\mathcal{R}\mathcal{Q}^{-1}$  est un filtre stable.  
 (H2.1) et le lemme 8 prouve qu'il existe un voisinage de  $\rho_j$  sur lequel le dénominateur de la deuxième fraction est borné inférieurement.  
 $\mu \in L^1(\mathbb{I})$  permet d'en déduire que  $\mu^S$  est sommable sur ce voisinage.
  - Soit  $\rho_j \in \mathbb{S}$  tel que  $\mathcal{R}(\rho_j) \neq 0$ . (H2.2) ou (H2.3) et le lemme 8 prouvent que le dénominateur de  $\mu^S$  est borné inférieurement sur un voisinage de  $\rho_j$ .  
 $\mu \in L^1(\mathbb{I})$  permet aussi d'en déduire que  $\mu^S$  est sommable sur un voisinage de  $\rho_j$ .
4.  $[-1, 1]$  est un compact, les voisinages  $V_\varrho$  et  $V_j$  permettent de construire  $V$  un voisinage de  $[-1, 1]$  tel que  $\forall z \in V \setminus [-1, 1]$ ,  $|\mathcal{Q}(z)(1 + \mathcal{R}(z)\mathcal{H}(z))| \neq 0$  et ainsi d'appliquer le lemme 5 à  $\mathcal{H}^S \in \mathbb{H}^\infty(\mathbb{E})$  pour construire un filtre rationnel stable  $\mathcal{N}$  tel que  $\mathcal{H}^S - \mathcal{N}$  soit prolongeable analytique sur  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ .
5.  $\mathcal{H}^S - \mathcal{N}$  est un filtre diffusif parce que  $\mathcal{H}^S - \mathcal{N}$  satisfait les hypothèses du théorème 1 :

- Pour tout  $\rho_j \in \mathbb{S}$ ,  $(z - \rho_j)(\mathcal{H}^S(z) - \mathcal{N}(z)) \rightarrow 0$  quand  $z \rightarrow \rho_j$  avec  $z \notin [-1, 1]$ .
  - Pour tout  $\rho \in [-1, 1] \setminus \mathbb{S}$ ,  $\mathcal{H}^S(z) - \mathcal{N}(z)$  admet une limite quand  $z \rightarrow \rho_j$  avec  $\text{Im}(z) > 0$  et  $\mathcal{H}^S(z) - \mathcal{N}(z)$  admet une autre limite quand  $z \rightarrow \rho_j$  avec  $\text{Im}(z) < 0$ .
  - $\frac{1}{2i\pi} [(\mathcal{H}^S(\rho - i0) - \mathcal{N}(\rho - i0)) - (\mathcal{H}^S(\rho + i0) - \mathcal{N}(\rho + i0))] = \mu^S$  parce que  $\mathcal{N}$  n'a pas de pôles sur  $[-1, 1]$ . L'assertion 3. prouve que  $\mu^S \in L^1(-1, 1)$ .
6. (H4) entraîne que  $\frac{\mu^S(\rho)\mathbf{1}_{[0,1]}}{1-\rho} \in L^1(0, 1)$ . En effet, on observe que pour  $\rho \in [0, 1]$
- $$\left| \frac{\mu^S(\rho)}{1-\rho} \right| \leq \left| \frac{\mathcal{R}(\rho)}{\mathcal{Q}(\rho)} \right| \left| \frac{\mathcal{R}(\rho)\mu(\rho)}{1-\rho} \right| \frac{1}{[1 + (h_0 + \mathcal{V}_\mu(\rho))\mathcal{R}(\rho)]^2}$$
- et
- $$\left| \frac{\mu^S(\rho)}{1-\rho} \right| \leq \frac{1}{|\mathcal{Q}(\rho)(1-\rho)\pi^2\mu(\rho)|}$$
- Si  $1 \notin \mathbb{I}$  alors  $\frac{\mu^S(\rho)}{1-\rho} = 0$  sur un voisinage de  $\rho = 1$  et  $\frac{\mu^S(\rho)}{1-\rho}\mathbf{1}_{[0,1]} \in L^1(0, 1)$
  - Si  $\mathcal{R}(1) = 0$  alors (H2.1) et le lemme 8 prouvent que  $\frac{1}{[1 + (h_0 + \mathcal{V}_\mu(\rho))\mathcal{R}(\rho)]^2}$  est borné.  $\mathcal{R}\mathcal{Q}^{-1}$  est stable aussi  $\mathcal{R}(\rho)(\mathcal{Q}(\rho))^{-1}$  est borné au voisinage de  $\rho = 1$ .  $\mathcal{R}$  est un filtre rationnel et  $\mathcal{R}(1) = 0$  donc  $\frac{\mathcal{R}(\rho)}{1-\rho}$  est borné au voisinage de  $\rho = 1$  et  $\mu\mathbf{1}_{[0,1]} \in L(0, 1) \Rightarrow \frac{\mu^S(\rho)\mathbf{1}_{[0,1]}}{1-\rho} \in L^1(0, 1)$ , grâce à la première inégalité.
  - Si  $\mathcal{R}(1) \neq 0$  alors  $\mathcal{Q}(1) \neq 0$  (i.e.  $\mathcal{R}\mathcal{Q}^{-1}$  est stable), et même  $(\mathcal{Q}(\rho))^{-1}$  est borné au voisinage de  $\rho = 1$ . Dans ce cas si  $\frac{1}{\mu(\rho)\mathbf{1}_{[0,1]}(\rho)(1-\rho)} \in L^1(0, 1)$  alors  $\frac{\mu^S(\rho)\mathbf{1}_{[0,1]}}{1-\rho} \in L^1(0, 1)$ , grâce à la deuxième inégalité.
- (H5) entraîne de la même façon que  $\frac{\mu^S(\rho)\mathbf{1}_{[-1,0]}}{1+\rho} \in L^1(-1, 0)$ .
7. En appliquant 6 à  $\mathcal{Q}(-z)$ ,  $\mathcal{R}(-z)$  et à  $\mathcal{H}(-z)$  et en utilisant la remarque 3 (p. 28), on prouve 7.

Enfinement (H4) et (H5) entraînent que  $\frac{\mu^S}{1-|\rho|} \in L^1(-1, 1)$  et que  $\mathcal{H}^S - \mathcal{N} = \mathcal{H}^{\mu^S} \in W_+$  grâce au lemme 4.  $\mathcal{N}$  est stable et appartient donc aussi à  $W_+$ , par conséquent  $\mathcal{H}^S \in W_+$ .  $\square$

**Remarque 27** Lorsque la fonction de transfert  $\mathcal{H}$  est connue analytiquement, la valeur de continuité  $\mathcal{V}_\mu$  peut être calculée. Il est naturel de s'attendre à ce que  $\mathcal{V}_\mu(\rho) + h_0$  admette une limite positive, finie ou infinie quand  $\rho \rightarrow \pm 1$ , parce que  $\forall \rho \in \mathbb{I} \setminus \mathbb{S}$ ,  $\mathcal{V}_\mu(\rho) + h_0 = \text{Re}(\mathcal{H}(\rho + i0))$  et que  $\text{Re}(\mathcal{H}(z)) \geq 0$  pour presque tout  $z \in \partial\mathbb{E}$ .

Si on sait que  $\mathcal{V}_\mu(\rho) + h_0$  converge vers une valeur positive quand  $\rho \rightarrow 1$  (respectivement quand  $\rho \rightarrow -1$ ) alors (H4) (respectivement (H5)) peut être remplacée par  $\frac{\mu(\rho)}{1-\rho} \in L^1(-1, 1)$  (respectivement par  $\frac{\mu(\rho)}{1+\rho} \in L^1(-1, 1)$ ). On retrouve ainsi les conditions suffisantes de la proposition 12.

**Preuve** Soit  $\mathcal{H}^S$  tel que  $\mathcal{V}_\mu(\rho)$  converge vers une valeur positive quand  $\rho \rightarrow 1$ .

- Si  $\mathcal{R}(1) = 0$ , alors  $\mathcal{H} \in W_+$  selon le théorème 5.
- Sinon  $\mathcal{R}(1) \neq 0$  et alors  $\mathcal{Q}(1) \neq 0$  (i.e. stabilité de  $\mathcal{R}\mathcal{Q}^{-1}$ ). L'hypothèse sur  $\mathcal{V}_\mu$  montre qu'alors dans (6.1) le dénominateur de  $\mu^S$  est borné inférieurement et  $\frac{\mu(\rho)}{1-\rho} \in L^1(-1, 1)$  entraîne que  $\frac{\mu^S}{1-\rho} \in L^1(-1, 1)$  et par suite que  $\mathcal{H}^S \in W_+$ .

De même on montre que si  $\mathcal{V}_\mu(\rho)$  converge vers une valeur positive quand  $\rho \rightarrow -1$  alors  $\frac{\mu^S}{1+\rho} \in L^1(-1, 1)$  et par suite  $\mathcal{H}^S \in W_+$ .  $\square$

**Exemple 5 (suite)** Les filtres  $\mathcal{H}_p(z) = [(1 - z^{-1})^2 + \omega_0^2 + p(1 - z^{-1})\mathcal{H}(z)]^{-1}$  sont dans  $\Sigma_2$  avec  $\mathcal{Q}(z) = 1 - z^{-1}$ ,  $\mathcal{R}(z) = \mathcal{H}_{\omega_0}(z)$  et  $p\mathcal{H}$  pour le filtre diffusif positif de symbole diffusif de signe constant. Parmi les différentes catégories dans la proposition 8 (p. 63),  $\mathcal{H}_p$  vérifie  $\mathcal{Q}(1) = \mathcal{R}(1) = 0$  et  $\mathcal{Q}(-1) \neq 0$ .

Les deux méthodes exposées pour prouver la stabilité EBSB sont comparées sur cet exemple. Des exemples de filtres  $\mathcal{H}$  et les valeurs de  $\alpha$  pour lesquels chaque méthode prouve que  $\mathcal{H}_p \in W_+$  sont listés dans un tableau (6.2).

La proposition 12 montre que  $\mathcal{H}_p \in W_+$  si  $\frac{\mu^{\mathbb{1}_{[-1,0]}}}{1+\rho} \in L^1(-1, 0)$ ; les valeurs de  $\alpha$  sont alors indiquées sur la deuxième ligne du tableau (6.2).

Le théorème 5 s'applique à  $\mathcal{H}_p$  en considérant un ensemble fini  $\mathbb{S} \subset \{0, 1\}$ . Sur ces points (H3) est vérifiée :  $\mu$  est localement hölderienne sur  $[0, 1[$  et  $\mu(\rho)(1-\rho)^\alpha$  est hölderienne sur  $[0, 1]$ .  $1 + \mathcal{R}\mathcal{H}$  tend vers une limite non-nulle ou infinie. Les hypothèses (H4) et (H5) sont  $\frac{1}{(1+\rho)\mu(\rho)} \in L^1(\mathbb{I})$ ; les valeurs de  $\alpha$  sont alors indiquées sur la troisième ligne du tableau (6.2).

Les valeurs de continuité des filtres  $\mathcal{H}^{FI}(z)$ ,  $\mathcal{H}^{FI}(-z)$  et  $\mathcal{H}^{UN}(z)$  sont connues et données par (1.15), le calcul exact de  $\mu^S$  montre que pour les filtres cités en exemple sont en fait toujours stable EBSB; les valeurs de  $\alpha$  sont alors indiquées sur la quatrième ligne du tableau (6.2).

$\mathcal{H}$	$\mathcal{H}^{FI}(z)$	$\mathcal{H}^{FI}(-z)$	$\mathcal{H}^{LN}(z)$	$\mathcal{H}^{UN}(z)$
prop. 12	$\alpha \in ]-1, 1[\setminus\{0\}$	$\alpha \in ]-1, 0[$	$\alpha \in ]0, 1[$	oui
th. 5	$\alpha \in ]-1, 1[\setminus\{0\}$	$\alpha \in ]0, 1[$	$\alpha \in ]0, 1[$	oui
calcul	$\alpha \in ]-1, 1[\setminus\{0\}$	$\alpha \in ]-1, 1[\setminus\{0\}$	$\alpha \in ]0, 1[$	oui

(6.2)

L'exemple 5 montre que les conditions suffisantes de la proposition 12 ne sont pas toutes contenues dans le théorème 5.

Ce résultat de décomposition permet une analyse asymptotique de la réponse impulsionnelle de  $\mathcal{H}^S$ , la vitesse de convergence de cette réponse impulsionnelle peut ainsi être évaluée.

### 6.3 Comportement asymptotique de la réponse impulsionnelle

Selon (6.1),  $\mu^S$  s'exprime en fonction de  $\mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{R}$ ,  $\mu$  et  $\mathcal{V}_\mu$  la valeur de continuité associée à  $\mu$ . Dans le chapitre 2, l'analyse asymptotique donne une correspondance entre les singularités de  $\mu(\rho)$  au voisinage de  $\rho = \pm 1$  et la singularité de  $\mathcal{V}_\mu(\rho)$  au voisinage de  $\rho = \pm 1$  lorsque  $\mu(\rho) \rightarrow \infty$  (cf lemme 2 p. 42); le lemme de Watson

discret (lemme 1 p. 40) donne aussi une correspondance entre la singularité de  $\mu^S$  et le comportement asymptotique de  $h_n^S$  la réponse impulsionnelle de  $\mathcal{H}^S$ .

Nous présentons l'application de cette analyse asymptotique pour  $\mu^S$  sous la forme d'une proposition. Les trois premières hypothèses sont les mêmes que celles du théorème 5. Comme lors du lemme 1, pour  $n \geq 1$ ,  $h_n^S$  est décomposée en  $h_n^S = h_n^g + h_n^d$ , avec  $h_n^g$  et  $h_n^d$  comme *gauche* et *droite*.  $h_n^g$  et  $h_n^d$  sont obtenus à partir de  $\mu \mathbf{1}_{[-1,0]}$  et de  $\mu \mathbf{1}_{[0,1]}$  au moyen de (1.5). Les résultats sont exposés séparément pour  $h_n^g$  et pour  $h_n^d$ . Des calculs simples sur les équivalents permettent d'en déduire dans la pratique le comportement asymptotique de  $h_n^S$ .

Cette proposition ne prouve pas la stabilité EBSB d'un plus grand nombre de filtres  $\mathcal{H}^S \in \Sigma_2$  que le théorème 5. Le lemme 2 ne permet pas d'utiliser la remarque 27 qui aurait prouvé la stabilité EBSB sous des conditions plus générales.

**Proposition 13** Soit  $\mathcal{H}^S = \frac{1}{\mathcal{Q}} \frac{\mathcal{R}}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}} \in \Sigma_2$ . Soit  $\mu$  le symbole diffusif de  $\mathcal{H}$  de support  $\mathbb{I}$ . Soit  $\mathbb{S} = \{\rho_j\}$  un ensemble fini de points dans  $[-1, 1]$ .

Si l'ensemble des hypothèses suivantes sont vérifiées :

(H1)  $\mu$  est localement hölderienne et non nulle sur  $\mathbb{I} \setminus \mathbb{S}$ ;

(H2) pour tout  $\rho_j \in \mathbb{S}$ , il existe  $\alpha_j^+, \alpha_j^- \in [0, 1[$  et  $\epsilon_j > 0$  tels que

$\mu(\rho)(\rho_j - \rho)^{\alpha_j^-}$  soit hölderienne sur  $[\rho_j - \epsilon_j, \rho_j]$

et  $\mu(\rho)(\rho - \rho_j)^{\alpha_j^+}$  soit hölderienne sur  $[\rho_j, \rho_j + \epsilon_j]$ , de plus une de ces hypothèses doit être vérifiée :

(H2.1)  $\mathcal{R}(\rho_j) = 0$

ou (H2.2)  $\alpha_j^- > \alpha_j^+$  et  $\mu(\rho)(\rho_j - \rho)^{\alpha_j^-}$  admet une limite non-nulle quand  $\rho \rightarrow \rho_j^-$  et  $\mathcal{R}(\rho_j) \neq 0$

ou (H2.3)  $\alpha_j^+ > \alpha_j^-$  et  $\mu(\rho)(\rho - \rho_j)^{\alpha_j^+}$  admet une limite non-nulle quand  $\rho \rightarrow \rho_j^+$  et  $\mathcal{R}(\rho_j) \neq 0$ .

(H3)  $\mathcal{Q}$  n'a ni pôles sur  $[-1, 1]$  ni zéros sur  $] - 1, 1[$ ,  $\mathcal{R}$  n'a pas de pôles sur  $] - 1, 1[$ ;

(H4) il existe  $\alpha \in ] - 1, 1[$ , telle que  $\mu(\rho)(1 - \rho)^\alpha$  soit une fonction hölderienne sur un voisinage de  $\rho = 1$  et admette un limite non-nulle en  $\rho = 1$ ;

(H5) il existe  $\beta \in ] - 1, 1[$ , telle que  $\mu(\rho)(1 + \rho)^\beta$  soit une fonction hölderienne sur un voisinage de  $\rho = -1$  et admette un limite non-nulle en  $\rho = -1$ ;

alors  $h_n^S$ , la réponse impulsionnelle de  $\mathcal{H}^S$  se décompose pour  $n \geq 1$  en  $h_n^S = h_n^N + h_n^d + h_n^g$ , où  $h_n^N$  est associée à  $\mathcal{N}$  et est stable EBSB,  $h_n^d$  et  $h_n^g$  sont associées à  $\mu^S \mathbf{1}_{[0,1]}$  et à  $\mu^S \mathbf{1}_{[-1,0]}$  au moyen de (1.5). Les comportements asymptotiques de



$h_n^d$  et  $h_n^g$  sont donnés par deux tableaux.

	$\alpha, \beta \in ]0, 1[$	$\alpha = \beta = 0$	$\alpha, \beta \in ]-1, 0[$
$\mathcal{Q}(1) \neq 0$ $\mathcal{R}(1) \neq 0$	$h_n^d \sim \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \frac{1}{\mathcal{Q}(1)a\Gamma(-\alpha)} \frac{1}{n^{1+\alpha}}$	$h_n^d \in l^1$	$h_n^d = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right)$
$\mathcal{Q}(-1) \neq 0$ $\mathcal{R}(-1) \neq 0$	$h_n^g \sim \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \frac{1}{\mathcal{Q}(-1)b\Gamma(-\beta)} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{1+\beta}}$	$h_n^g \in l^1$	$h_n^g = O\left(\frac{1}{n^{1+\beta}}\right)$

(6.3)

$\mathcal{Q}(1) = \mathcal{R}(1) = 0$	$h_n^d \sim a \frac{(\mathcal{R}'(1))^2}{\mathcal{Q}'(1)} \frac{\Gamma(2-\alpha)}{n^{2-\alpha}}$
$\mathcal{Q}(-1) = \mathcal{R}(-1) = 0$	$h_n^g \sim b \frac{(\mathcal{R}'(-1))^2}{\mathcal{Q}'(-1)} \frac{\Gamma(2-\beta)(-1)^n}{n^{2-\beta}}$
$\mathcal{Q}(1) \neq 0$ et $\mathcal{R}(1) = 0$	$h_n^d \sim -a \frac{(\mathcal{R}'(1))^2}{\mathcal{Q}(1)} \frac{\Gamma(3-\alpha)}{n^{3-\alpha}}$
$\mathcal{Q}(-1) \neq 0$ et $\mathcal{R}(-1) = 0$	$h_n^g \sim -b \frac{(\mathcal{R}'(-1))^2}{\mathcal{Q}(-1)} \frac{\Gamma(3-\beta)(-1)^{n-1}}{n^{3-\beta}}$

(6.4)

**Preuve** Les comportements asymptotiques de  $h_n^g$  et de  $h_n^d$  s'obtiennent en cherchant le comportement asymptotique de  $\mu^S$  et en utilisant le lemme de Watson discret (cf : lemme 1 p. 40).  $\mu^S$  dépend de  $\mathcal{V}_\mu$  aussi il faut aussi utiliser le lemme de comportement asymptotique (cf : lemme 2 p. 42).

- La remarque 8 (p. 63) montre que  $\mathcal{R}(\pm 1) = 0 \Rightarrow \mathcal{R}'(\pm 1) \neq 0$  et que  $\mathcal{Q}(\pm 1) = 0 \Rightarrow \mathcal{Q}'(\pm 1) \neq 0$ . Aussi  
 $\mathcal{R}(1) = 0 \Rightarrow \mathcal{R}(\rho) \sim -\mathcal{R}'(1)(1 - \rho)$  quand  $\rho \rightarrow 1$ ,  
 $\mathcal{R}(-1) = 0 \Rightarrow \mathcal{R}(\rho) \sim \mathcal{R}'(-1)(1 + \rho)$  quand  $\rho \rightarrow -1$ ,  
 $\mathcal{Q}(1) = 0 \Rightarrow \mathcal{Q}(\rho) \sim -\mathcal{Q}'(1)(1 - \rho)$  quand  $\rho \rightarrow 1$ ,  
 $\mathcal{Q}(-1) = 0 \Rightarrow \mathcal{Q}(\rho) \sim \mathcal{Q}'(-1)(1 + \rho)$  quand  $\rho \rightarrow -1$ .
- Le lemme 2 (p.42) donne le comportement asymptotique de  $\mathcal{V}_\mu$  lorsque  $\alpha \in [0, 1[ \setminus \{\frac{1}{2}\}$  quand  $\rho \rightarrow 1$ . Lorsque  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\mathcal{V}_\mu = o(\mu)$  quand  $\rho \rightarrow 1$ .  
 Les comportements asymptotiques de  $\mu^S$  sont donnés dans ces tableaux.

	$\alpha, \beta \in ]0, 1[$	$\alpha = \beta = 0$
$\mathcal{Q}(1) \neq 0$ $\mathcal{R}(1) \neq 0$	$\mu^S(\rho) \stackrel{\rho \rightarrow 1}{\sim} -\frac{\sin^2(\alpha\pi)}{\pi^2} \frac{(1-\rho)^\alpha}{a\mathcal{Q}(1)}$	$\mu^S(\rho) \stackrel{\rho \rightarrow 1}{\sim} -\frac{1}{\mathcal{Q}(1)a(\ln(1-\rho))^2}$ et $\frac{\mu^S}{1-\rho} \in L^1(-1, 1)$
$\mathcal{Q}(-1) \neq 0$ $\mathcal{R}(-1) \neq 0$	$\mu^S(\rho) \stackrel{\rho \rightarrow -1}{\sim} -\frac{\sin^2(\beta\pi)}{\pi^2} \frac{(1+\rho)^\beta}{b\mathcal{Q}(-1)}$	$\mu^S(\rho) \stackrel{\rho \rightarrow -1}{\sim} -\frac{1}{\mathcal{Q}(-1)b(\ln(1+\rho))^2}$ et $\frac{\mu^S}{1+\rho} \in L^1(-1, 1)$

	$\alpha, \beta \in ]-1, 0[$
$\mathcal{Q}(1) \neq 0$ $\mathcal{R}(1) \neq 0$	$ \mu^S(\rho)  \leq \frac{ \mu(\rho) }{ \mathcal{Q}(\rho) \mu^2(\rho)\pi^2} \stackrel{\rho \rightarrow 1}{\sim} \frac{(1-\rho)^\alpha}{ \mathcal{Q}(1)a \pi^2}$
$\mathcal{Q}(-1) \neq 0$ $\mathcal{R}(-1) \neq 0$	$ \mu^S(\rho)  \leq \frac{ \mu(\rho) }{ \mathcal{Q}(\rho) \mu^2(\rho)\pi^2} \stackrel{\rho \rightarrow -1}{\sim} \frac{(1+\rho)^\beta}{ \mathcal{Q}(-1)b \pi^2}$

Les autres comportements asymptotiques de  $\mu^S$  s'obtiennent en écrivant (6.1)

sous la forme de  $\mu^S(\rho) = \frac{-\mathcal{R}^2(\rho)\mu(\rho)}{\mathcal{Q}(\rho)\{[1+\mathcal{R}(\rho)(\mathcal{V}_\mu(\rho)+h_0)]^2+\mathcal{R}^2(\rho)\pi^2\mu^2(\rho)\}}$

	$\alpha, \beta \in ]-1, 1[$
$\mathcal{Q}(1) = \mathcal{R}(1) = 0$	$\mu^S(\rho) \stackrel{\rho \rightarrow 1}{\sim} a \frac{(\mathcal{R}'(1))^2}{\mathcal{Q}'(1)} (1-\rho)^{1-\alpha}$
$\mathcal{Q}(-1) = \mathcal{R}(-1) = 0$	$\mu^S(\rho) \stackrel{\rho \rightarrow -1}{\sim} -b \frac{(\mathcal{R}'(-1))^2}{\mathcal{Q}'(-1)} (1+\rho)^{1-\beta}$
$\mathcal{Q}(1) \neq 0$ et $\mathcal{R}(1) = 0$	$\mu^S(\rho) \stackrel{\rho \rightarrow 1}{\sim} -a \frac{(\mathcal{R}'(1))^2}{\mathcal{Q}(1)} (1-\rho)^{2-\alpha}$
$\mathcal{Q}(-1) \neq 0$ et $\mathcal{R}(-1) = 0$	$\mu^S(\rho) \stackrel{\rho \rightarrow -1}{\sim} -b \frac{(\mathcal{R}'(-1))^2}{\mathcal{Q}(-1)} (1+\rho)^{2-\beta}$

3. Le lemme 1 permet alors d'en déduire les comportements asymptotiques de  $h_n^g$  et de  $h_n^d$ .

□

La figure 6.5 résume les résultats de la proposition 13 en indiquant la vitesse de convergence de la réponse impulsionnelle  $h_n^S$  en fonction de  $\alpha$  et de ce que  $\mathcal{R}$  ou  $\mathcal{Q}$  a un zéro en  $z = 1$ .

Lors du chapitre 5, nous avons montré que  $\Sigma_2 \subset \mathbb{H}^\infty(\mathbb{E})$ . Dans ce chapitre,  $\Sigma_2 \subset \mathbb{H}^\infty(\mathbb{E})$  a permis de donner des conditions suffisantes sur  $\mathcal{H} \in \Sigma_2$  pour que  $\mathcal{H} \in W_+$ . Ces deux conditions suffisantes proviennent de raisonnements très différents : un raisonnement algébrique et un résultat de décomposition. Un exemple montre que ces conditions suffisantes ne sont pas équivalentes.

Naturellement parmi les exemples étudiés, aucun n'est dans  $\Sigma_2 \setminus W_+$ . Il est en général difficile de construire un exemple de filtre dans  $\Sigma_2 \setminus W_+$ , aussi nous pouvons conjecturer que  $\Sigma_2 \subset W_+$ .

Le résultat de décomposition a permis aussi d'utiliser l'analyse asymptotique faite lors du chapitre 2 pour donner le comportement asymptotique de  $h_n^S$ . Les résultats de cette analyse montrent l'importance des catégories définies dans la proposition 8 (p. 63) : la vitesse de décroissance dépend fortement de la présence ou non d'un zéro pour  $\mathcal{R}$  ou  $\mathcal{Q}$  en  $z = \pm 1$ .

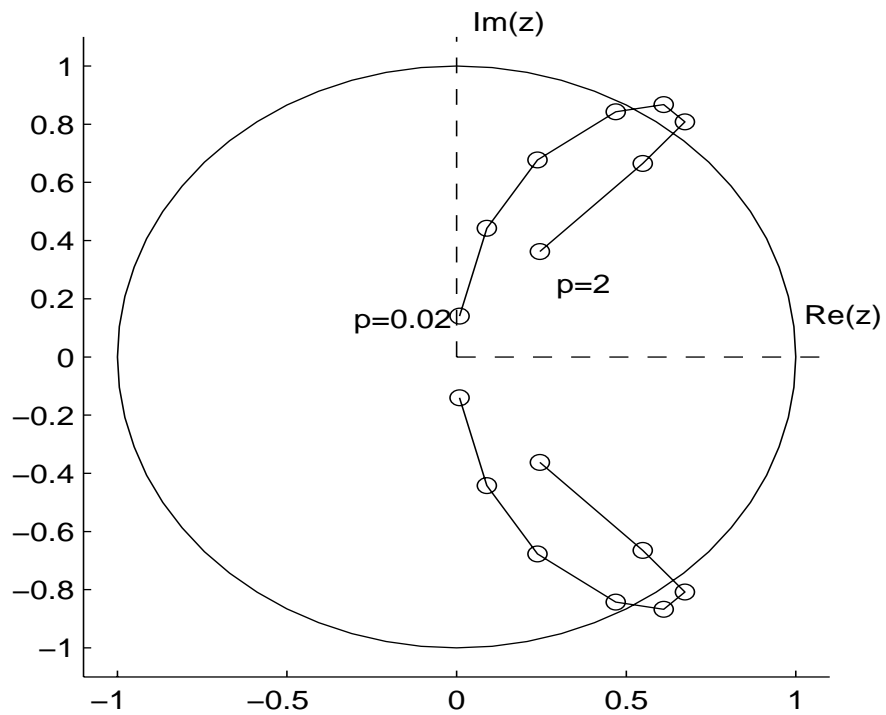
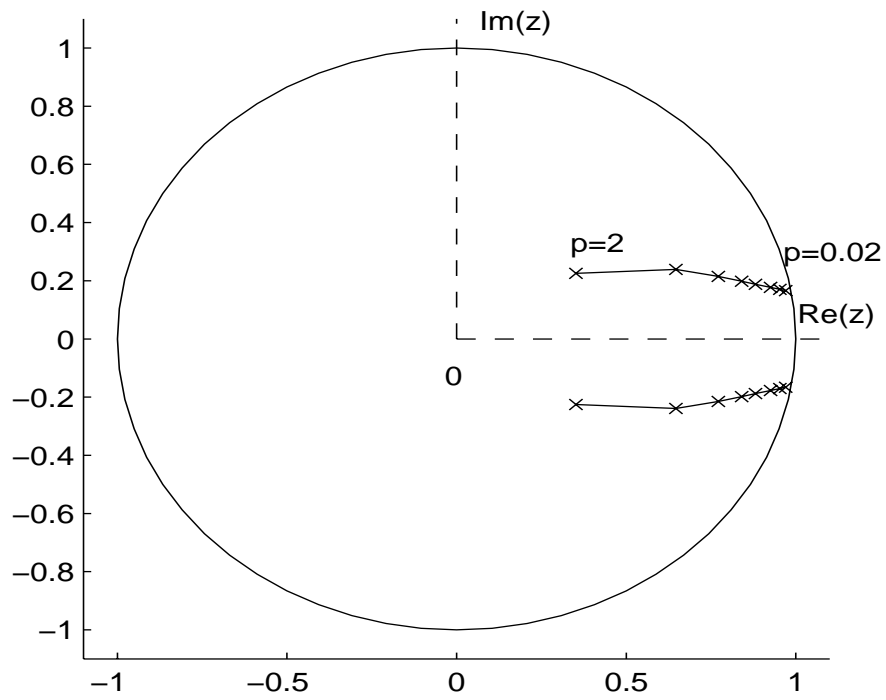


FIG. 6.3 – Description de la partie entière de la décomposition de  $\mathcal{H}_p$  pour des valeurs croissantes de  $p \in [0.02, 2]$  et pour  $\omega = 0.17$ . Les pôles(+) sont représentés en haut et les zéros en bas(o).

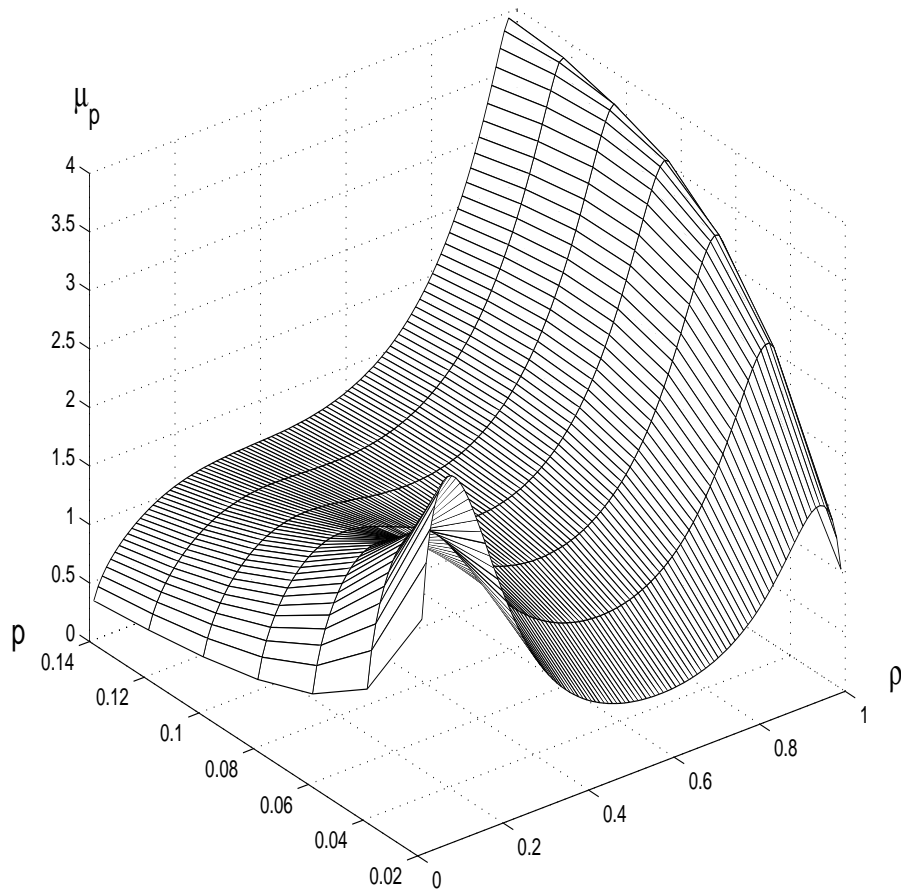


FIG. 6.4 – Surface représentant les symboles diffusifs pour des valeurs croissantes de  $p \in [0.02, 0.15]$  et pour  $\omega = 0.17$ .  $\rho$  est sur l'axe  $x$ ,  $p$  est sur l'axe  $y$ ,  $\mu_p$  est sur l'axe vertical.

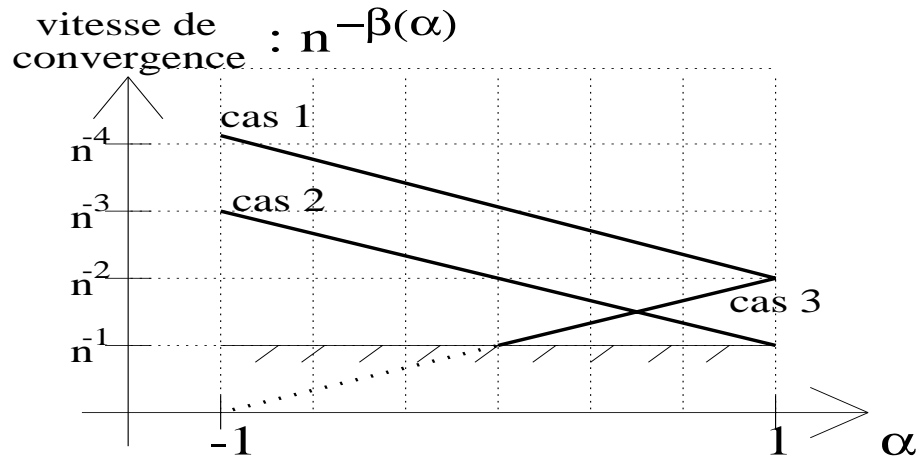


FIG. 6.5 – Représentation graphique des vitesses de convergence de la réponse impulsionnelle  $h_n^S \sim n^{-\beta(\alpha)}$  en fonction de  $\alpha$  et de ce que  $\mathcal{R}$  ou  $\mathcal{Q}$  a un zéro en  $z = 1$ .  $\mathbb{I}$  est supposé contenu dans  $[0, 1]$  et le cas 1 correspond à  $\mathcal{R}(1) = 0, \mathcal{Q}(1) \neq 0$ ; le cas 2 correspond à  $\mathcal{R}(1) = \mathcal{Q}(1) = 0$ ; le cas 3 correspond à  $\mathcal{R}(1) \neq 0, \mathcal{Q}(1) \neq 0$ . La zone correspondant à la stabilité EBSB est au dessus du trait hachuré.

# Chapitre 7

## Stabilité interne asymptotique du couplage d'un filtre diffusif avec un filtre rationnel

A temps continu, la stabilité de nombreux systèmes (par exemple dans [Sta94] et [MM99]) a été prouvée grâce à la dissipativité de l'intégration fractionnaire et d'autres opérateurs pseudo-différentiels positifs : [Sta94] rappelle qu'un système en viscoélasticité avec un noyau complètement monotone (cf : p. 10) peut être réalisé par ce que nous appellerions une réalisation diffusive dissipative, et montre que ce système reste stable avec un retour d'état statique.

Nous adaptons ces idées à temps discret et généralisons l'étude menée dans [DHM00] aux *filtres*  $\mathcal{H}^S \in \Sigma_2$ . Ces filtres  $\mathcal{H}^S = \frac{1}{Q} \frac{\mathcal{R}}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}} \in \Sigma_2$  sont réalisés par des *systèmes* de dimension infinie notés  $\mathcal{H}_\Phi^S$ , dont l'état est noté  $\Phi_n^S$ .  $\Phi^S = 0$  est une position d'équilibre de  $\mathcal{H}_\Phi^S$ . La *stabilité interne* autour de  $\Phi^S = 0$  signifie que pour une entrée nulle à partir de  $n \geq n_0$ , l'état  $\Phi_n^S$  restera toujours proche de cet équilibre  $\Phi^S = 0$  à condition que  $\Phi_{n_0}^S$  soit suffisamment proche de cet équilibre. (cf : [ANCL94]). Une fonctionnelle de Lyapunov  $\mathbf{E}(\Phi_n^S)$  est construite grâce à la *dissipativité* des réalisations choisies ;  $\mathbf{E}$  révèle la stabilité interne de  $\mathcal{H}_\Phi^S$  (cf : §7.1).

La *stabilité interne asymptotique* est un cas particulier de stabilité interne ; elle signifie qu'à partir de toute condition initiale, l'état  $\Phi_n^S$  converge vers zéro. Inspirés par [Mon00a], nous proposons ensuite une démonstration originale de la stabilité interne asymptotique de  $\mathcal{H}_\Phi^S : \mathbf{E}(\Phi_n^S) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Pour ce faire, une propriété originale des filtres diffusifs est utilisée : la forme quadratique  $V(\varphi_n)$  s'exprime en fonction d'une forme linéaire en l'état  $\int_{\mathbb{I}} \varphi_{2n} \varphi_0 d\rho$  (cf : §7.2). Cette démonstration est exposée sur un exemple dans [DM01b].

$\mathcal{H}_\Phi^S$  est un système de dimension infinie, aussi la stabilité interne et la stabilité interne asymptotique dépendent de la topologie. Nous choisissons la topologie associée à  $\mathbb{H}$ . Pour simplifier les notations nous allons supposer que l'entrée  $u_n$  est nulle pour  $n \geq 0$  et qu'il y a une condition initiale non-nulle en  $n = 0$  :  $\Phi_0^S$ .

## 7.1 Stabilité interne

Soit un filtre  $\mathcal{H}^S = \frac{1}{\mathcal{Q}} \frac{\mathcal{R}}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}} \in \Sigma_2$ .  $\mathcal{Q}^{-1}$  n'est pas un filtre stable ; aussi, quelle que soit la réalisation choisie pour  $\mathcal{Q}^{-1}$ , il existe toujours une condition initiale pour laquelle  $\mathcal{H}_\Phi^S$  n'est pas stable. Nous proposons de réaliser  $\mathcal{R}\mathcal{Q}^{-1}$  qui est lui un filtre stable.  $\mathcal{H}_\Phi^S$  est une réalisation de  $\mathcal{H}^S$  qui forme un *couplage* entre une réalisation minimale de  $\mathcal{R}$  et la réalisation diffusive de  $\mathcal{H}$  (définie en §7.1.1).  $\mathbf{E}$  est construite en ajoutant les fonctions de Lyapunov qui révèlent les dissipativités des réalisations de  $\mathcal{H}$  et de  $\mathcal{R}$  ;  $\mathbf{E}$  permet d'en déduire la stabilité interne (cf : §7.1.2). Avec une hypothèse technique adéquate, nous pensons que le principe d'invariance de LaSalle permet de prouver la stabilité interne asymptotique de  $\mathcal{H}_\Phi^S$  (cf : §7.1.3).

### 7.1.1 Réalisation associéé à $\mathcal{H}^S \in \Sigma_2$

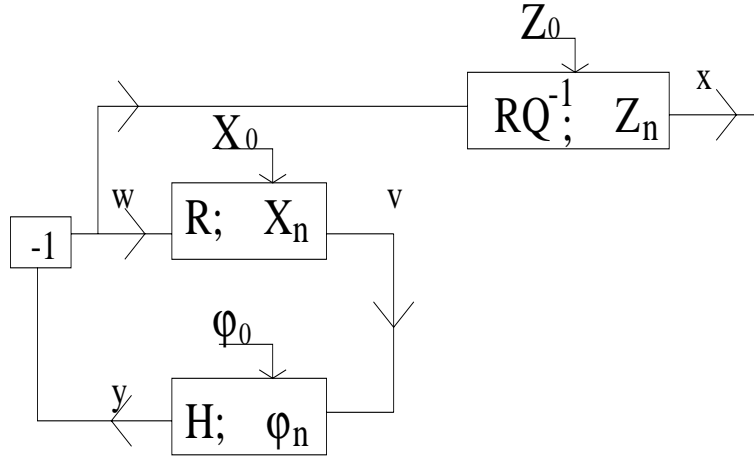


FIG. 7.1 – Schéma fonctionnel de la réalisation  $\mathcal{H}_\Phi^S$  de  $\mathcal{H}^S \in \Sigma_2$ . L'état de cette réalisation est  $\Phi^S = (\varphi, \mathbf{X}, \mathbf{Z})$ .

Les filtres  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}\mathcal{Q}^{-1}$  sont stables. Soient  $A^R, B^R, C^R$  et  $D^R$  une réalisation minimale de  $\mathcal{R}$  d'état  $\mathbf{X}_n$ . Soient  $A^{RQ^{-1}}, B^{RQ^{-1}}, C^{RQ^{-1}}$  et  $D^{RQ^{-1}}$  une réalisation minimale de  $\mathcal{R}\mathcal{Q}^{-1}$  d'état  $\mathbf{Z}_n$ . (1.9) est une réalisation diffusive de  $\mathcal{H}$ . Ces réalisations forment un système  $\mathcal{H}_\Phi^S$ , dont l'état est  $\Phi_n^S = (\varphi_n, \mathbf{X}_n, \mathbf{Z}_n)$ , et dont les équations sont :

$$\begin{cases}
 (1) \varphi_{n+1}(\rho) = \rho \varphi_n(\rho) + v_n & \text{(réalisation de } \mathcal{H}) \\
 (2) y_n = \int_{\mathbb{T}} \mu(\rho) \varphi_n(\rho) d\rho + h_0 v_n & \\
 (3) \mathbf{X}_{n+1} = A^R \mathbf{X}_n + B^R w_n & \text{(réalisation de } \mathcal{R}) \\
 (4) v_n = C^R \mathbf{X}_n + D^R w_n & \\
 (5) \mathbf{Z}_{n+1} = A^{RQ^{-1}} \mathbf{Z}_n + B^{RQ^{-1}} w_n & \text{(réalisation de } \mathcal{R}\mathcal{Q}^{-1}) \\
 (6) x_n = C^{RQ^{-1}} \mathbf{Z}_n + D^{RQ^{-1}} w_n & \\
 (7) w_n + y_n = 0 & \text{(équation de couplage)}
 \end{cases} \quad (7.1)$$

avec  $\rho \in \mathbb{I}$ ,  $\varphi_0 \in \mathbb{H}$  et  $n \geq 0$ , comme dans (1.9).

La figure 7.1 représente le schéma fonctionnel associé à  $\mathcal{H}_\Phi^S$ .

Les équations (7.1) sont en réalité implicites :  $y_n$  dépend de  $v_n$ , lequel dépend de  $w_n$ , qui à son tour dépend de  $y_n$ . Les conditions imposées sur  $\Sigma_2$  (i.e. positivité de  $\mathcal{R}$  et de  $\mathcal{H}$ ) entraînent que (7.1) peut se mettre sous forme explicite. Cette forme explicite montre que les dynamiques de  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{H}$  sont couplées et qu'elles entraînent, au sens propre, la dynamique de  $\mathcal{R}Q^{-1}$ . On note  $\mathcal{T}^S$  l'opérateur de *transition* qui transforme  $\Phi_n^S$  en  $\Phi_{n+1}^S$  et  $\mathcal{T}$  l'opérateur de transition partiel qui transforme  $\Phi_n = (\varphi_n, \mathbf{X}_n)$  en  $\Phi_{n+1} = (\varphi_{n+1}, \mathbf{X}_{n+1})$ . Dans [Sta01b, ch. 11], cet opérateur  $\mathcal{T}$  génère un *semigroupe à temps discret* noté  $\mathbb{A}$ . Les équations de  $\mathcal{H}_\Phi^S$  se mettent alors sous la forme suivante :

$$\Phi_{n+1} = \mathcal{T}\Phi_n = \begin{bmatrix} \varphi_{n+1}(\rho) \\ \mathbf{X}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho\varphi_n(\rho) + D^S \int_{\mathbb{I}} \mu \varphi_n dr & + C^S \mathbf{X}_n \\ B^S \int_{\mathbb{I}} \mu \varphi_n dr & + A^S \mathbf{X}_n \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} (a) \quad \mathbf{Z}_{n+1} &= A^{RQ^{-1}} \mathbf{Z}_n - \tilde{h}_0 B^{RQ^{-1}} \int_{\mathbb{I}} \mu \varphi_n dr - h_0 B^{RQ^{-1}} C^S \mathbf{X}_n \\ (b) \quad y_n &= -w_n = 0 & + \tilde{h}_0 \int_{\mathbb{I}} \mu \varphi_n dr & + h_0 C^S \mathbf{X}_n \\ (c) \quad v_n &= 0 & + D^S \int_{\mathbb{I}} \mu \varphi_n dr & + C^S \mathbf{X}_n \\ (d) \quad x_n &= C^{RQ^{-1}} \mathbf{Z}_n - \tilde{h}_0 D^{RQ^{-1}} \int_{\mathbb{I}} \mu \varphi_n dr - h_0 D^{RQ^{-1}} C^S \mathbf{X}_n \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad A^S &= A^R - \tilde{h}_0 h_0 B^R C^R \\ B^S &= -\tilde{h}_0 B^R \\ C^S &= \tilde{h}_0 C^R \\ D^S &= -\tilde{h}_0 D^R \\ \tilde{h}_0 &= \frac{1}{1+h_0 D^R} \end{aligned}$$

En effet, (7.1) se met sous la forme de (7.2) grâce à ces substitutions :

- (b) s'obtient avec (7) puis (2) puis (4),
- (a) s'obtient avec (5) puis (b),
- (d) s'obtient avec (6) puis (b),
- (c) s'obtient avec (4) puis (7) puis (2),
- $\mathcal{T}$  s'obtient avec (1) et (3) puis (b) et (c). □

**Proposition 14** *Les éléments  $A^S, B^S, C^S, D^S$  définissent un nouveau système qui est commandable et observable.*

**Preuve** Le système  $[A^S, B^S, C^S, D^S]$  s'obtient avec le système rationnel  $[A^R, B^R, C^R, D^R]$  qui est commandable et observable, et un bouclage statique  $w_n = -\tilde{y}_n - h_0 v_n$  où  $w_n$  et  $v_n$  sont l'entrée et la sortie de la réalisation de  $\mathcal{R}$ , tandis que  $\tilde{y}_n$  est la nouvelle entrée de  $A^S, B^S, C^S, D^S$ . Cette interprétation de  $A^S, B^S, C^S, D^S$  en terme de bouclage statique s'obtient en posant  $\tilde{y}_n = \int_{\mathbb{I}} \mu \varphi_n d\rho$ .

Ce bouclage statique a un sens et définit un nouveau système parce que  $1+h_0 D \neq 0$ .

Selon [ANCL94, ch. 5], la commandabilité signifie qu'il existe une entrée et un temps permettant de d'ammener l'état d'une certaine position à une autre. Il suffit



donc d'exprimer la *nouvelle* entrée en fonction de l'*ancienne* entrée :  $\tilde{y}_n = -w_n - h_0 v_n$  pour montrer que la commandabilité de  $A^R, B^R, C^R, D^R$  entraîne la commandabilité de  $A^S, B^S, C^S, D^S$ .

Selon [ANCL94, ch. 5], l'observabilité signifie qu'il existe un temps et une commande telle que la connaissance de la sortie permette de déterminer l'état initial. La sortie est la même pour les deux systèmes, il suffit donc d'exprimer la nouvelle entrée en fonction de l'ancienne pour montrer que l'observabilité de  $A^R, B^R, C^R, D^R$  entraîne l'observabilité de  $A^S, B^S, C^S, D^S$ .  $\square$

Un système de dimension finie a certaines propriétés concernant la stabilité que nous énonçons sous la forme d'un lemme et que nous utiliserons en §7.1.2 et en §7.2.1.

**Lemme 6** *Soit  $[A, B, C, D]$  un système stable de dimension finie, d'entrée  $u_n$  et d'état  $X_n$ . Ce système vérifie :*

$$\exists \kappa_1, \kappa_2 \text{ tel que } X_n^T X_n \leq \kappa_1 \sup_{k \leq n} u_n^2 + \kappa_2 X_0^T X_0 \quad (7.4)$$

$$u_n \rightarrow 0 \Rightarrow X_n \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty \quad (7.5)$$

**Preuve** Les définitions de normes classiques sont rappelées, elles permettent de démontrer successivement les deux résultats.

- Soit  $N$  la dimension de l'état du système. L'application  $X \mapsto \sqrt{X^T X}$  définit une norme sur les *vecteurs* notée  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^N}$ . Elle induit une norme sur les *matrices*  $\sup_{X \neq 0} \frac{\|AX\|_{\mathbb{R}^N}}{\|X\|_{\mathbb{R}^N}}$  notée  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N}$  qui est égale à la racine carré de la plus grande valeur singulière de  $A$ .

- Le choix de la norme permet d'écrire que

$$\|X_{n+1}\|_{\mathbb{R}^N} \leq \|A\|_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \|X_n\|_{\mathbb{R}^N} + \|B\|_{\mathbb{R}^N} |u_n|$$

En sommant ces inégalités, il apparaît un produit de convolution à temps discret :

$$\|X_n\|_{\mathbb{R}^N} \leq \left( \|A\|_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N}^k \star (\|B\|_{\mathbb{R}^N} |u_k|) \right) + \|A\|_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N}^n \|X_0\|_{\mathbb{R}^N}.$$

$[A, B, C, D]$  forme un système stable aussi  $\|A\|_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} < 1$  et la suite  $n \mapsto$

$$\|A\|_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N}^n \text{ est sommable et bornée. } \|X_n\|_{\mathbb{R}^N} \leq \frac{\|B\|_{\mathbb{R}^N}}{1 - \|A\|_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N}} \sup_{k \leq n} |u_k| + \|X_0\|_{\mathbb{R}^N};$$

cela démontre (7.4). La suite  $n \mapsto \|A\|_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N}^n$  tend vers zéro et permet de démontrer (7.5).  $\square$

## 7.1.2 Fonctionnelle de Lyapunov et stabilité interne

Nous utilisons maintenant l'hypothèse que  $\mathcal{H}$  est positif et que  $\mu$  le symbole diffusif de  $\mathcal{H}$  est de signe constant noté  $\sigma = \text{signe}(\mu) \in \{-1, 1\}$  pour déduire la dissipativité de la réalisation diffusive associée à  $\mathcal{H}$ .

La dissipativité des réalisations de  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{R}$  permet de construire une fonctionnelle de Lyapunov  $\mathbf{E}$  qui permet de contrôler  $\varphi$  et  $\mathbf{X}$ . La stabilité de  $\mathcal{R}Q^{-1}$  et le lemme 6 permet d'en déduire la stabilité interne de  $\mathcal{H}_\Phi^S$ . La topologie utilisée est celle associée à l'espace de Hilbert  $\mathbb{H}^S$  défini par la norme  $\|\Phi^S\|_{\mathbb{H}^S}^2 = \int_{\mathbb{I}} |\mu(\rho)| \varphi^2(\rho) d\rho + \mathbf{X}^T \mathbf{X}$ .

**Proposition 15** *Soit  $\mathcal{H}_\Phi^S$  la réalisation de  $\mathcal{H}^S$  définie par (7.1) telle que  $\mu$  soit de signe constant noté  $\sigma \in \{-1, 1\}$ .*

1. *Il existe  $P$ , une matrice symétrique définie positive telle que  $\mathbf{E}$  soit une fonctionnelle de Lyapunov pour  $\varphi$  et  $\mathbf{X}$  au sens du théorème 3 (p. 56),*

$$\mathbf{E}(\Phi) = V(\varphi_n) + \frac{1}{2} \mathbf{X}_n^T P \mathbf{X}_n$$

avec  $V(\varphi_n) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{I}} |\mu(\rho)| \varphi_n^2(\rho) d\rho$ .

2. *Le système  $\mathcal{H}_\Phi^S$  est stable au sens où*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \gamma, \text{ tel que } \|\Phi_0^S\|_{\mathbb{H}^S} \leq \gamma \Rightarrow \forall n \geq 0, \|\Phi_n^S\|_{\mathbb{H}^S} \leq \epsilon$$

**Preuve de 1.** On utilise la dissipativité des réalisations de  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{R}$ .

- $\mu$  est de signe constant et  $\mathcal{H}$  est positif, aussi la réalisation diffusive est-elle dissipative. En effet la proposition 5 (p. 50) montre que  $[\mathcal{H} \geq 0 \text{ et } \mu \geq 0] \Rightarrow \mathcal{H}(-1) \geq 0$ ,  $[\mathcal{H} \geq 0 \text{ et } \mu \leq 0] \Rightarrow \mathcal{H}(1) \geq 0$ . Le théorème 3 (p. 56) montre que  $[\mathcal{H}(-1) \geq 0, \mu \geq 0]$  ou  $[\mathcal{H}(1) \geq 0, \mu \leq 0]$  impliquent que  $V(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{I}} |\mu(\rho)| \varphi_n^2 d\rho$  est une fonctionnelle de Lyapunov et que  $V$  révèle la dissipativité de  $\mathcal{H} : V(\varphi_{n+1}) - V(\varphi_n) \leq v_n y_n$ .
- Le lemme de Kalman-Yacubovich-Popov énoncé dans le chapitre 3 montre qu'il existe une matrice  $P$  définie positive telle que  $\frac{1}{2} \mathbf{X}_{n+1}^T P \mathbf{X}_{n+1} - \frac{1}{2} \mathbf{X}_n^T P \mathbf{X}_n \leq v_n w_n$ . On définit un nouvel espace de Hilbert noté  $\mathbb{H}_\Phi$  dont la norme vaut  $\|\Phi\|_{\mathbb{H}_\Phi}^2 = 2V(\varphi_n) + \mathbf{X}_n^T \mathbf{X}_n$ . En sommant ces inégalités, et parce que  $P$  est définie positive, on prouve que  $\mathbf{E}(\Phi) = V(\varphi_n) + \frac{1}{2} \mathbf{X}_n^T P \mathbf{X}_n$  est bien une fonctionnelle de Lyapunov pour  $\varphi$  et  $\mathbf{X}$  au sens où  $\mathbf{E}(\Phi) > 0$  quand  $\|\Phi\|_{\mathbb{H}_\Phi} \neq 0$  et  $\mathbf{E}(0) = 0$  et  $\mathbf{E}(\Phi) \rightarrow +\infty$  quand  $\|\Phi\|_{\mathbb{H}_\Phi} \rightarrow +\infty$  et  $\mathbf{E}(\Phi_{n+1}) - \mathbf{E}(\Phi_n) \leq 0$ .  $\square$

**Preuve de 2.** Pour prouver la stabilité interne de  $\mathcal{H}_\Phi^S$ , on utilise la stabilité du système  $(\varphi_n, \mathbf{X}_n)$  puis la continuité de la relation  $(\varphi_n, \mathbf{X}_n) \mapsto w_n$  et enfin la stabilité de  $\mathcal{R}Q^{-1}$ .

- $P$  est une matrice définie positive, aussi il existe  $\kappa_3$  et  $\kappa_4$  tels que  $\kappa_3 \mathbf{X}^T \mathbf{X} \leq \mathbf{X}^T P \mathbf{X} \leq \kappa_4 \mathbf{X}^T \mathbf{X}$ . La décroissance de la fonctionnelle de Lyapunov  $E$  entraîne qu'il existe aussi  $\kappa_5$  tel que

$$\mathbf{X}_n^T \mathbf{X}_n + 2V(\varphi_n) \leq \kappa_5 \mathbf{X}_0^T \mathbf{X}_0 + 2V(\varphi_0) \quad (7.6)$$

- Selon (7.2),  $w_n = -\tilde{h}_0 \int \mu \varphi_n d\rho - h_0 C^S \mathbf{X}_n$  et l'application  $\varphi \mapsto \int \mu \varphi d\rho$  est continue par rapport à la norme  $\|\varphi\| \leq 2V(\varphi)$  et  $\mathbf{X}$  est dans un espace de dimension finie. Aussi il existe  $\kappa_6$  tel que  $w_n^2 \leq \kappa_6 (\mathbf{X}_n^T \mathbf{X}_n + 2V(\varphi_n))$  et par suite avec (7.6)

$$w_n^2 \leq \kappa_6 \kappa_5 (\mathbf{X}_0^T \mathbf{X}_0 + 2V(\varphi_0)) \quad (7.7)$$

- L'application du lemme 6 à la réalisation de  $\mathcal{R}\mathcal{Q}^{-1}$  montre qu'il existe  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  tel que  $\mathbf{Z}_n^T \mathbf{Z}_n \leq \kappa_1 \mathbf{Z}_0^T \mathbf{Z}_0 + \kappa_2 \sup_{k \leq n} w_n^2$ . D'où avec (7.7)  $\mathbf{Z}_n^T \mathbf{Z}_n \leq \kappa_1 \mathbf{Z}_0^T \mathbf{Z}_0 + \kappa_2 \kappa_6 \kappa_5 (\mathbf{X}_0^T \mathbf{X}_0 + 2V(\varphi_0))$ . Finalement il existe  $\kappa$  indépendant de  $n$  tel que  $\|\Phi_n^S\|_{\mathbb{H}^S} \leq \kappa \|\Phi_0^S\|_{\mathbb{H}^S}$ .

□

### 7.1.3 Principe d'invariance de LaSalle

Nous supposons maintenant que  $\mathcal{H}$  est *strictement positif* :  $\exists \kappa_7 > 0$  tel que  $\mathcal{R}e(\mathcal{H}(e^{i\omega})) \geq \kappa_7$ .

Pour démontrer le caractère asymptotique de la stabilité interne, la simple décroissance de  $\mathbf{E}(\Phi_n)$  ne nous suffit pas. Par ailleurs  $\mathcal{H}_\Phi^S$  n'est pas exponentiellement stable, aussi ne peut-on pas espérer qu'il existe  $\kappa_8 > 0$  tel que  $\mathbf{E}(\Phi_{n+1}) - \mathbf{E}(\Phi_n) \leq -\kappa_8 \|\Phi_n\|_{\mathbb{H}_\Phi}$ . Nous proposons une autre majoration de la variation de  $\mathbf{E}$  le long d'une trajectoire. Nous commençons par vérifier sur le bouclage des réalisations de  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{R}$  les hypothèses du principe d'invariance de LaSalle avec les hypothèses données en dimension *finie* par [LaS83]. Nous montrons aussi que si la stabilité asymptotique du bouclage des réalisations de  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{H}$  entraîne la stabilité asymptotique de  $\mathcal{H}_\Phi^S$ .

**Proposition 16** *Soit  $M$  le plus grand sous-ensemble contenu dans  $\{\Phi \mid \mathbf{E}(\mathcal{T}\Phi) - \mathbf{E}(\Phi) = 0\}$  et invariant par  $\mathcal{T}$ .*

Alors  $M = \{0\}$ .

De plus si  $\mathbf{E}(\Phi_n) \rightarrow 0$  alors  $\|\Phi_n^S\|_{\mathbb{H}^S} \rightarrow 0$ .

**Preuve** La démonstration consiste à écrire cette autre majoration de la variation de  $\mathbf{E}$  le long d'une trajectoire (calcul de la variation de  $V$ ). Il est ensuite simple de vérifier que  $M = \{0\}$ . La dernière assertion de la proposition est une conséquence du lemme 6.

- A partir de la définition de  $V$  (rappelée dans la proposition 15) et de 1. dans (7.1),
 
$$V(\varphi_{n+1}) - V(\varphi_n) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{I}} |\mu(\rho)| [(\rho\varphi_n(\rho) + v_n)^2 - \varphi_n^2] d\rho$$

$$= \int_{\mathbb{I}} |\mu(\rho)| \left[ \frac{1}{2}(\rho^2 - 1)\varphi_n^2 + \rho\varphi_n v_n + \frac{1}{2}v_n^2 \right] d\rho$$
 On cherche à faire apparaître  $y_n v_n$  (où  $y_n = \int_{\mathbb{I}} \mu(\rho)\varphi_n(\rho)d\rho + h_0 v_n$ ) :
 
$$\int_{\mathbb{I}} |\mu(\rho)| \sigma \varphi_n(\rho) v_n d\rho = y_n v_n - h_0 v_n^2.$$

$$V(\varphi_{n+1}) - V(\varphi_n) = \int_{\mathbb{I}} |\mu(\rho)| \left[ \frac{1}{2}(\rho^2 - 1)\varphi_n^2 + (\rho - \sigma)\varphi_n v_n + \frac{1}{2}v_n^2 \right] d\rho + y_n v_n - h_0 v_n^2$$
 On reconnaît un carré parfait :
 
$$V(\varphi_{n+1}) - V(\varphi_n) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{I}} |\mu(\rho)| \frac{\rho - \sigma}{\rho + \sigma} [(\rho + \sigma)\varphi_n + v_n]^2 d\rho + y_n v_n - \mathcal{H}(-\sigma)v_n^2, \text{ car}$$

$$\mathcal{H}(-\sigma) = h_0 + \int_{\mathbb{I}} \frac{\mu(\rho)d\rho}{\sigma - \rho}.$$

En sommant l'inégalité  $\mathbf{X}_{n+1}^T P \mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n^T P \mathbf{X}_n \leq v_n w_n$  obtenue lors de la preuve de la proposition 15 avec la dernière égalité, et en remplaçant  $v_n$  par son expression définie dans  $c.$  de (7.2), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\Phi_{n+1}) - \mathbf{E}(\Phi_n) &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{I}} |\mu(\rho)| \frac{\rho + \sigma}{\rho - \sigma} [(\rho - \sigma) \varphi_n + D^S \int_{\mathbb{I}} \mu \varphi_n dr + C^S \mathbf{X}_n]^2 d\rho \\ &\quad - \mathcal{H}(-\sigma) (D^S \int_{\mathbb{I}} \mu \varphi_n dr + C^S \mathbf{X}_n)^2 \end{aligned} \quad (7.8)$$

- La proposition 5 (p. 50) montre que la stricte positivité de  $\mathcal{H}$  signifie  $\mathcal{H}(-\sigma) > 0$ . Soit  $\Phi = (\varphi, \mathbf{X}) \in M$ . Alors  $\mathbf{E}(\mathcal{T}\Phi) - \mathbf{E}(\Phi) = 0$  entraîne que  $D^S \int_{\mathbb{I}} \mu \varphi_n dr + C^S \mathbf{X}_n = 0$  et  $\int_{\mathbb{I}} |\mu(\rho)| (\rho - \sigma) \varphi_n^2(\rho) d\rho = 0$ ; par suite  $\varphi = 0$  et  $C^S \mathbf{X} = 0$ .  $M$  est stable par  $\mathcal{T}$  aussi  $\forall k \geq 0, C^S A^{S^k} \mathbf{X} = 0$ . La proposition 14 montre que  $(A^S, C^S)$  est observable et donc, que  $\mathbf{X} = 0$ .

Selon (7.2)  $w_n = -\tilde{h}_0 \int \mu \varphi_n d\rho - h_0 C^S \mathbf{X}_n$ , cette application  $(\varphi, \mathbf{X}) \mapsto w$  est continue par rapport à la norme  $\|\Phi\|_{\mathbb{H}_\Phi}$  qui est équivalente à la norme  $\mathbf{E}(\Phi)$  aussi quand  $\mathbf{E}(\Phi_n) \rightarrow 0$ , on a aussi  $w_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Le lemme 6 permet d'en conclure que  $\mathbf{Z}_n \rightarrow 0$  et par suite que  $\|Phs_n\|_{\mathbb{H}^S} \rightarrow 0$ .  $\square$

**Remarque 28** *A l'image de la proposition 10 (p. 65), si  $\mathcal{H}^S = \frac{1}{\mathcal{Q}} \frac{\mathcal{R}}{1 + \mathcal{R}\mathcal{H}} \in \Sigma_2$  avec  $\mathcal{R}$  strictement positif alors il existe  $\kappa > 0$  et un filtre rationnel positif  $\mathcal{R}_\kappa$  tel que  $\mathcal{H}^S = \frac{1}{\mathcal{Q}} \frac{\mathcal{R}_\kappa}{1 + \mathcal{R}_\kappa(\mathcal{H} + \kappa)} \in \Sigma_2$ .  $\mathcal{H} + \kappa$  est un filtre diffusif strictement positif. Il existe alors une autre réalisation de  $\mathcal{H}^S$  conforme à (7.1), qui vérifie les hypothèses de la proposition 16.*

**Preuve** La proposition 9 (p. 64) permet d'écrire  $\mathcal{H}^S = \frac{1}{\mathcal{Q}\mathcal{R}^{-1} + \mathcal{Q}\mathcal{H}} \in \Sigma_1$ . Soit  $\kappa > 0$ ,  $\mathcal{H}^S = \frac{1}{\mathcal{Q}(\mathcal{R}^{-1} - \kappa) + \mathcal{Q}(\mathcal{H} + \kappa)}$ . Selon la proposition 7 (p. 53),  $\mathcal{R}^{-1}$  est positif, il est en fait même strictement positif parce que  $\mathcal{R}$  n'a pas de pôle sur le cercle unité. Il existe  $\kappa > 0$  tel que  $\mathcal{R}^{-1} - \kappa$  soit strictement positif. Alors on peut proposer  $\mathcal{R}_\kappa = (\mathcal{R}^{-1} - \kappa)^{-1} = \frac{\mathcal{R}}{1 - \kappa\mathcal{R}}$  qui est positif (cf : proposition 7). Finalement la proposition 9 permet de retrouver  $\mathcal{H}^S = \frac{1}{\mathcal{Q}} \frac{\frac{\mathcal{R}}{1 - \kappa\mathcal{R}}}{1 + \frac{\mathcal{R}}{1 - \kappa\mathcal{R}}(\mathcal{H} + \kappa)} \in \Sigma_2$ .  $\square$

**Exemple 5 (suite)** Une réalisation de  $\mathcal{H}_\Phi^S$ , conforme à (7.1), est proposée dans [DM01b]. La stabilité interne asymptotique de  $\mathcal{H}_\Phi^S$  est prouvée sans supposer le caractère strict de la positivité de  $\mathcal{H}$  comme dans la proposition 16. Dans cet exemple  $\mathcal{H}_{\omega_0}$  n'est pas non plus strictement positif.

Pour chaque filtre  $\mathcal{H}^S \in \Sigma_2$ , une réalisation a été proposée :  $\mathcal{H}_\Phi^S$ . Les hypothèses sur  $\mathcal{H}^S$  ont permis de construire une fonctionnelle de Lyapunov  $\mathbf{E}$  et de déduire la stabilité interne de  $\mathcal{H}_\Phi^S$ . Lorsque de plus  $\mathcal{H}$  est *strictement* positive et, sous réserve de montrer la précompacité des trajectoires (voir [Har90]), le principe d'invariance de LaSalle montre que  $\mathcal{H}_\Phi^S$  est asymptotiquement stable. Nous proposons maintenant une autre démonstration de cette stabilité interne asymptotique.

## 7.2 Démonstration originale de la stabilité interne asymptotique

Sous les hypothèses de la proposition 16, nous allons démontrer la stabilité interne asymptotique de  $\mathcal{H}_\Phi^S$  par d'autres méthodes.

**Théorème 6** *Soit  $\mathcal{H}_\Phi^S$  la réalisation de  $\mathcal{H}^S$  définie par (7.1) telle que  $\mathcal{H}$  soit strictement positif.*

*Alors  $\mathcal{H}_\Phi^S$  est asymptotiquement stable au sens où, lorsque  $u_n = 0$  pour  $n \geq 0$  et  $\Phi_0^S \in \mathbb{H}^S$ ,  $\|\Phi_n^S\|_{\mathbb{H}^S} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .*

La démonstration que nous proposons s'organise en deux étapes :

- la fonctionnelle (7.8) montre que l'entrée  $v_n$  de  $\mathcal{H}$  tend vers zéro ; ceci et la stabilité interne entraînent la convergence *faible* de  $\varphi_n$  vers zéro pour la topologie de  $\mathbb{H}$  (cf : §7.2.1).
- $\mathcal{T}$  et son *adjoint* vérifient une propriété remarquable, (ils sont semblables), qui permet de prouver la convergence *forte* de  $\varphi_n$  à partir de la convergence faible de  $\varphi_n$  (cf : §7.2.2).

### 7.2.1 Convergence faible de l'état $\varphi_n$ vers zéro et convergence de $X_n$ et $Z_n$ vers zéro.

Soit  $\mathcal{H}^S \in \Sigma_2$  tel que  $\mathcal{H}$  soit strictement positif. Soit  $\mathcal{H}_\Phi^S$  la réalisation de  $\mathcal{H}^S$  définie par (7.1)

Grâce à (7.8),  $\mathbf{E}$  n'est pas seulement une fonctionnelle de Lyapunov révélant la stabilité interne,  $\mathbf{E}$  prouve aussi la convergence vers zéro de  $v_n = D^S \int_{\mathbb{I}} \mu \varphi_n dr + C^S \mathbf{X}_n$  (cf : (7.2)). En effet la majoration qui suit montre que  $v_n \in l^2$  et donc que  $v_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$  :

$$\forall N \geq 0, \quad \mathcal{H}(-\sigma) \sum_{n=0}^N v_n^2 \leq -\mathbf{E}(\Phi_n) + \mathbf{E}(\Phi_0) \leq \mathbf{E}(\Phi_0)$$

$v_n \rightarrow 0$  et la stabilité interne de  $\mathcal{H}_\Phi^S$  (qui entraîne que  $\|\varphi_n\|_{\mathbb{H}}$  est bornée) prouve que  $\varphi_n$  converge faiblement pour le produit scalaire associé à  $\mathbb{H}$  et noté  $\langle, \rangle_{\mathbb{H}}$  comme le montre la proposition suivante.

**Proposition 17** *Soit  $\mathcal{H}_\varphi$  la réalisation diffusible d'un filtre diffusif  $\mathcal{H}$  définie par (1.9).  $\mathcal{H}_\varphi$  est défini avec un espace d'état  $\mathbb{H}$ . Soit  $v_n$  une entrée qui vérifie :*

(H1)  $v_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ ,

(H2)  $\|\varphi_n\|_{\mathbb{H}}$  est bornée.

*Alors  $\varphi_n$  converge faiblement vers zéro, au sens où*

$$\forall \psi \in \mathbb{H}, \quad \langle \psi, \varphi_n \rangle_{\mathbb{H}} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

*En outre, la sortie  $y_n = \int_{\mathbb{I}} \mu(\rho) \varphi_n(\rho) d\rho$  converge vers zéro quand  $n \rightarrow \infty$ .*

**Preuve** La démonstration consiste à montrer la convergence uniforme de  $\varphi_n$  sur  $[-\varrho, \varrho] \cap \mathbb{I}$  avec (H1) quel que soit  $0 < \varrho < 1$ , puis à montrer que  $\mu\psi \in L^1(\mathbb{I})$ , et enfin à séparer le comportement de  $\varphi_n\mu$  au voisinage de  $\rho = \pm 1$  et hors de ce voisinage, (H2) permet alors de conclure.

• (H1) et le lemme 11 (p. 145) montre que pour tout  $\varrho \in ]-1, 1[$ ,  $\varphi_n$  converge uniformément sur  $[-\varrho, \varrho] \cap \mathbb{I}$  quand  $n \rightarrow \infty$ . En effet selon 1. de (7.1),

$$|\varphi_n(\rho)| = |\rho^{n-1} \star v_n| \leq \varrho^{n-1} \star |v_n| \text{ et } \varrho^{n-1} \in l^1.$$

•  $\mu \in L^1(\mathbb{I})$  et  $\psi \in \mathbb{H}$  aussi  $\mu\psi \in L^1(\mathbb{I})$ . En effet,  $\int_{\mathbb{I}} |\mu||\psi| d\rho \leq \sqrt{\int_{\mathbb{I}} |\mu|^2 d\rho} \sqrt{\int_{\mathbb{I}} |\psi|^2 d\rho}$ .

• L'inégalité de la moyenne utilisée sur  $[-\varrho, \varrho] \cap \mathbb{I}$  et l'inégalité de Cauchy-Schwartz utilisée sur  $\mathbb{I} \setminus [-\varrho, \varrho]$  montrent que

$$|\langle \psi, \varphi_n \rangle_{\mathbb{H}}| = \left| \int_{\mathbb{I}} |\mu| \psi \varphi_n d\rho \right| \leq \sup_{[-\varrho, \varrho] \cap \mathbb{I}} |\varphi_n| \int_{\mathbb{I}} |\mu| \psi d\rho + \|\varphi_n\|_{\mathbb{H}}^2 \int_{\mathbb{I} \setminus [-\varrho, \varrho]} |\mu|^2 d\rho \quad (7.9)$$

Soit  $\epsilon > 0$ , il existe  $\varrho$  tel que  $\|\varphi_n\|_{\mathbb{H}}^2 \int_{\mathbb{I} \setminus [-\varrho, \varrho]} |\mu|^2(\rho) d\rho \leq \epsilon$ . La convergence uniforme de  $\varphi_n$  montre qu'il existe  $N$ , tel que  $n \geq N \Rightarrow \int_{\mathbb{I}} |\mu| \psi d\rho \cdot \left( \sup_{[-\varrho, \varrho] \cap \mathbb{I}} |\varphi_n| \right) \leq \epsilon$ . Finalement  $\langle \psi, \varphi_n \rangle_{\mathbb{H}} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

La dernière assertion se prouve en appliquant ce résultat à  $\psi = \sigma \in \mathbb{H}$  :  
 $y_n = \langle \sigma, \varphi_n \rangle_{\mathbb{H}}$ . Ceci est possible parce que  $\mu \in L^1(\mathbb{I})$ . □

$\mathcal{H}_{\Phi}^S$  est construite avec une réalisation minimale de  $\mathcal{R}$  et de  $\mathcal{R}Q^{-1}$ , l'entrée de ces réalisations est  $w_n = -y_n = -\mathcal{H}v_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Le lemme 6 montre qu'alors les états  $\mathbf{X}_n$  et  $\mathbf{Z}_n$  de ces deux réalisations convergent vers zéro quand  $n \rightarrow \infty$ . La sortie  $x_n$  de  $\mathcal{R}Q^{-1}$  tend aussi vers zéro quand  $n \rightarrow \infty$ .

**Remarque 29** L'assertion (7.5) ne s'étend pas à tous les filtres diffusifs.

Pour  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\mathcal{H}^{FI}$  est un exemple de filtre diffusif pour lequel quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $u_n \rightarrow 0 \not\Rightarrow \mathcal{H}^{FI}u_n \rightarrow 0$ . En effet si cette implication était vraie et si  $u_n = \{10\dots 0\dots\}$ , alors quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $\mathcal{H}^{FI}u_n \rightarrow 0$  et  $\mathcal{H}^{FI}\mathcal{H}^{FI}u_n \rightarrow 0$ ; ceci est absurde :  $\mathcal{H}^{FI}\mathcal{H}^{FI}(z) = (1 - z^{-1})^{-1}$  et  $\mathcal{H}^{FI}\mathcal{H}^{FI}u_n$  est la suite constante égale à 1.

## 7.2.2 La convergence forte est une conséquence de la convergence faible

Nous étudions ici les propriétés de  $\mathcal{T}$  défini par (7.2). Soit  $\mathbb{H}_{\Phi}$  l'espace de Hilbert associé au produit scalaire  $\langle \begin{bmatrix} \varphi \\ \mathbf{X} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \psi \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} \rangle_{\mathbb{H}_{\Phi}} = \int_{\mathbb{I}} |\mu| \varphi \psi d\rho + \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$ . La norme est notée  $\|\cdot\|_{\mathbb{H}_{\Phi}}$ . Les propriétés sont énoncées dans une proposition qui utilise le lemme suivant.

**Lemme 7** Soit  $A, B, C, D$  les éléments définissant une réalisation minimale d'un filtre rationnel.

La dimension du système est notée  $n$ .

La matrice d'observabilité est notée  $\mathcal{O}(A, C) = [C^T A^T C^T \dots (A^T)^{n-1} C^T]^T$ .

La matrice de commandabilité est notée  $\mathcal{C}(A, B) = [B AB \dots A^{n-1} B]$ .

Soit  $T = \mathcal{O}(A, C)^T \mathcal{C}(A, B)^{-1}$ .

$T$  vérifie les propriétés suivantes :

1.  $T$  est symétrique,
2.  $TA = A^T T$ ,
3.  $C^T = TB$  et  $B^T = CT^{-1}$ .

**Preuve** La réalisation est minimale aussi  $\mathcal{O}(A, C)$  et  $\mathcal{C}(A, B)$  sont inversibles. Les trois assertions sont montrées successivement.

1.  $\mathcal{O}(A, C)\mathcal{C}(A, B)$  est symétrique :  $\mathcal{O}(C, A)\mathcal{C}(A, B) = [CA^{i+j-2}B]_{ij}$ .  
Aussi  $\mathcal{O}(A, C)\mathcal{C}(A, B) = \mathcal{C}(A, B)^T \mathcal{O}(A, C)^T$   
et alors  $T^T = (\mathcal{C}(A, B)^T)^{-1} \mathcal{O}(A, C) = \mathcal{O}(A, C)^T \mathcal{C}(A, B)^{-1} = T$ .
2.  $\mathcal{O}(A, C)AC(A, B)$  est symétrique :  $\mathcal{O}(A, C)AC(A, B) = [CA^{i+j-1}B]_{ij}$ .  
Aussi  $\mathcal{O}(A, C)AC(A, B) = \mathcal{C}(A, B)^T A^T \mathcal{O}(A, C)^T$   
et alors  $T^T A = (\mathcal{C}(A, B)^T)^{-1} \mathcal{O}(A, C)A = A^T \mathcal{O}(A, C)^T \mathcal{C}(A, B)^{-1} = A^T T$ .
3.  $T [B AB \dots A^{n-1} B] = \mathcal{O}(A, C)^T \mathcal{C}(A, B)^{-1} \mathcal{C}(A, B)$   
 $= \mathcal{O}(A, C)^T = [C^T A^T C^T \dots (A^T)^{n-1} C^T]$ , d'où  $TB = C^T$ .  
 $T$  étant symétrique, on a aussi  $B^T = CT^{-1}$ .

□

**Proposition 18** Soit  $\mathcal{T}$  l'application linéaire définie par (7.2).

1.  $\mathcal{T}$  est continue de  $\mathbb{H}_\Phi$  dans  $\mathbb{H}_\Phi$ .
2.  $\mathcal{T}^T$ , l'adjoint de  $\mathcal{T}$  pour le produit scalaire  $\langle, \rangle_{\mathbb{H}_\Phi}$  est défini sur  $\mathbb{H}_\Phi$  et vaut :

$$\mathcal{T}^T \begin{bmatrix} \psi \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho\psi + D^S \int_{\mathbb{I}} \mu\psi dr & + \sigma B^{S^T} \mathbf{Y} \\ \sigma C^{S^T} \int_{\mathbb{I}} \mu\psi dr & + A^{S^T} \mathbf{Y} \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

3. Il existe une matrice  $T$  telle que

$$\mathcal{T}^T \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{\mathbb{H}} & 0 \\ 0 & \sigma T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{\mathbb{H}} & 0 \\ 0 & \sigma T \end{bmatrix} \mathcal{T} \quad (7.11)$$

où  $\sigma$  est le signe de  $\mu$ .

**Preuve** La démonstration consiste d'abord à montrer la continuité de  $\mathcal{T}$  parce que cette continuité entraîne que  $\mathcal{T}^T$  est défini sur  $\mathbb{H}_\Phi$ . Ensuite  $\mathcal{T}^T$  est calculé.

1. On cherche à montrer qu'il existe  $\kappa > 0$  tel que  $\|\mathcal{T}\Phi\|_{\mathbb{H}_\Phi} \leq \kappa \|\Phi\|_{\mathbb{H}_\Phi}$ .

$$\|\mathcal{T}\Phi\|_{\mathbb{H}_\Phi}^2 = \int_{\mathbb{I}} |\mu| \left[ \rho\varphi + D^S \int_{\mathbb{I}} \mu\varphi dr + C^S \mathbf{X} \right]^2 d\rho.$$

Sachant que pour tous réels  $x, y, z$ , on a  $(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$ , on en déduit que  $\|\mathcal{T}\Phi\|_{\mathbb{H}_\Phi}^2 \leq 3 \int_{\mathbb{I}} |\mu| \left[ \rho^2 \varphi^2 + D^{S^2} \left( \int_{\mathbb{I}} \mu \varphi dr \right)^2 + (C^S \mathbf{X})^2 \right] d\rho$ .

L'inégalité de Cauchy-Schwartz montre que  $\left( \int_{\mathbb{I}} \mu \varphi d\rho \right)^2 \leq \int_{\mathbb{I}} |\mu| d\rho \int_{\mathbb{I}} |\mu| \varphi^2 d\rho$  et que  $(C^S \mathbf{X})^2 \leq C^{S^T} C^S \mathbf{X}^T \mathbf{X}$ .

Finalement après calcul, on peut choisir

$$\kappa = 3 \max \left( 1 + D^{S^2} \left( \int_{\mathbb{I}} |\mu| d\rho \right)^2, C^{S^T} C^S \int_{\mathbb{I}} |\mu| d\rho \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2.  $\mathcal{T}^T$  s'obtient par identification avec  $\langle \mathcal{T}\Phi, \Psi \rangle_{\mathbb{H}_\Phi} = \langle \Phi, \mathcal{T}^T \Psi \rangle_{\mathbb{H}_\Phi}$  où  $\Psi = [\psi \ \mathbf{Y}^T]^T$ .

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{T}\Phi, \Psi \rangle_{\mathbb{H}_\Phi} &= \int_{\mathbb{I}} |\mu| \rho \varphi \psi d\rho + D^S \int_{\mathbb{I}} |\mu| \psi d\rho \int_{\mathbb{I}} \mu \varphi dr + C^S \mathbf{X} \int_{\mathbb{I}} |\mu| \psi d\rho \\ &\quad + B^{S^T} \mathbf{Y} \int_{\mathbb{I}} \mu \varphi dr + \mathbf{X}^T A^{S^T} \mathbf{Y} \\ &= \int_{\mathbb{I}} |\mu| \varphi \left[ \rho \psi + D^S \int_{\mathbb{I}} \mu \psi dr + \sigma B^{S^T} \mathbf{Y} \right] d\rho \\ &\quad + \mathbf{X}^T \left[ \sigma C^{S^T} \int_{\mathbb{I}} \mu \psi dr + A^{S^T} \mathbf{Y} \right] \end{aligned}$$

3. Selon la proposition 14, le système  $[A^S, B^S, C^S, D^S]$  est commandable et observable, le lemme 7 montre qu'alors il existe une matrice symétrique  $T$  telle que  $TA^S = A^{S^T}T$ ,  $C^{S^T} = TB^S$  et  $B^{S^T} = C^S T^{-1}$ . Ces trois relations prouvent (7.11) :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^T \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{\mathbb{H}} & 0 \\ 0 & \sigma T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \mathbf{X} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \rho \varphi + D^S \int_{\mathbb{I}} \mu \varphi dr + B^{S^T} T \mathbf{X} \\ \sigma C^{S^T} \int_{\mathbb{I}} \mu \varphi dr + A^{S^T} T \mathbf{X} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \rho \varphi + D^S \int_{\mathbb{I}} \mu \varphi dr + C^S \mathbf{X} \\ \sigma T B^S \int_{\mathbb{I}} \mu \varphi dr + T A^S \mathbf{X} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{\mathbb{H}} & 0 \\ 0 & \sigma T \end{bmatrix} \mathcal{T} \begin{bmatrix} \varphi \\ \mathbf{X} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

### Conséquences sur la stabilité asymptotique

Cette analyse sur les opérateurs adjoints permet de déduire la convergence forte  $V(\varphi_n) \rightarrow 0$  à partir de la seule convergence faible, car elle permet de transformer une forme bilinéaire  $\left( \int_{\mathbb{I}} \mu \varphi_{2n} \varphi_0 d\rho \right)$  en une forme quadratique  $\left( \int_{\mathbb{I}} \mu \varphi_n^2 d\rho \right)$ .

$$\begin{aligned} 2V(\varphi_n) + \sigma \mathbf{X}_n^T T \mathbf{X}_n &= \left\langle \begin{bmatrix} \varphi_n \\ \mathbf{X}_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{\mathbb{H}} & 0 \\ 0 & \sigma T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_n \\ \mathbf{X}_n \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{H}_\Phi} \\ &= \left\langle \mathcal{T}^n \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \mathbf{X}_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{\mathbb{H}} & 0 \\ 0 & \sigma T \end{bmatrix} \mathcal{T}^n \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \mathbf{X}_0 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{H}_\Phi} \quad (\text{cf : (7.2)}) \\ &= \left\langle \mathcal{T}^n \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \mathbf{X}_0 \end{bmatrix}, \mathcal{T}^{Tn} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{\mathbb{H}} & 0 \\ 0 & \sigma T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \mathbf{X}_0 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{H}_\Phi} \quad (\text{cf : (7.11)}) \\ &= \left\langle \mathcal{T}^{2n} \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \mathbf{X}_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{\mathbb{H}} & 0 \\ 0 & \sigma T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \mathbf{X}_0 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{H}_\Phi} \end{aligned}$$



Finalement

$$2V(\varphi_n) + \sigma \mathbf{X}_n^T T \mathbf{X}_n = \int_{\mathbb{I}} |\mu| \varphi_{2n} \varphi_0 d\rho + \sigma \mathbf{X}_{2n}^T T \mathbf{X}_0 \quad (7.12)$$

Le §7.2.1 montre que, quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $\mathbf{X}_n \rightarrow 0$  et par suite  $\mathbf{X}_{2n}^T T \mathbf{X}_0 \rightarrow 0$  et  $\mathbf{X}_n^T T \mathbf{X}_n \rightarrow 0$ . L'application de la proposition 17 prouve que, quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $\int_{\mathbb{I}} |\mu| \varphi_{2n} \varphi_0 d\rho \rightarrow 0$ . Aussi  $V(\varphi_n) \rightarrow 0$  et  $\mathbf{E}(\Phi_n^S) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

**Remarque 30** Lors de ce §7.2, nous avons montré que si  $u_n = 0$  pour  $n \geq 0$  alors  $\|\Phi_n^S\|_{\mathbb{H}^S} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Par ailleurs le filtre  $\mathcal{H}^S$  associé à  $\mathcal{H}_\Phi^S$  vérifie les hypothèses du théorème 5 (p. 83) et donc  $\mathcal{H}^S$  est EBSB-stable. Le lemme 11 (p. 145) permet d'en déduire que si  $u_n \rightarrow 0$  et  $\Phi_0^S = 0$  alors  $x_n \rightarrow 0$  et par suite  $y_n \rightarrow 0$ ,  $v_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Le principe de superposition des solutions montre que si  $u_n \rightarrow 0$  et  $\Phi_0^S \in \mathbb{H}^S$  alors on a aussi  $x_n \rightarrow 0$ ,  $y_n \rightarrow 0$  et  $v_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

En résumé,  $\mathcal{H}_\Phi^S$  est une réalisation de  $\mathcal{H}^S \in \Sigma_2$  qui vérifie la stabilité interne. Une démonstration originale du caractère asymptotique de la stabilité interne est proposée. La stricte positivité de  $\mathcal{H}_\Phi^S$  entraîne que l'entrée du filtre diffusif  $v_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Cette convergence et la stabilité interne prouvent que  $\varphi_n$  converge faiblement vers  $\varphi_\infty = 0$ . La stabilité des réalisations de  $\mathcal{R}$  et de  $\mathcal{R}Q^{-1}$  entraînent que  $\mathbf{X}_n \rightarrow 0$  et  $\mathbf{Z}_n \rightarrow 0$ , et que la sortie  $x_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Le couplage est décrit par un opérateur de transition  $\mathcal{T}$  qui vérifie une propriété particulière : son adjoint  $\mathcal{T}^T$  est semblable à  $\mathcal{T}$ . Cela permet de prouver la convergence forte à partir de la convergence faible. Nous prouvons ainsi le caractère asymptotique de la stabilité interne.

Ce lien entre  $V(\varphi_n)$  et une forme bilinéaire  $\int_{\mathbb{I}} |\mu| \varphi_{2n} \varphi_0 d\rho$  permettra de faire une analyse asymptotique de  $V(\varphi_n)$  en fonction notamment de la singularité de  $\varphi_0$  en  $\rho = \pm 1$ , ce qui est l'objet du chapitre 8.

# Chapitre 8

## Comportement asymptotique du couplage d'un filtre diffusif avec un filtre rationnel

Dans [FL01], un pendule inversé est stabilisé grâce à un contrôleur utilisant la dissipativité et nécessitant peu d'énergie mais avec une vitesse de convergence très *lente*.

La dissipativité a permis de montrer la stabilité asymptotique interne d'une réalisation  $\mathcal{H}_{\Phi}^S$  des filtres  $\mathcal{H}^S = \frac{1}{\mathcal{Q}} \frac{\mathcal{R}}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}} \in \Sigma_2$  : si l'entrée de cette réalisation est nulle à partir d'un certain instant, alors l'état  $\Phi_n^S$  converge vers zéro quand  $n \rightarrow \infty$ . Nous souhaitons maintenant examiner la *vitesse de cette convergence* vers zéro, plus précisément la vitesse de convergence des différentes sorties  $v_n, y_n, x_n$  et de la fonctionnelle de Lyapunov  $V(\varphi_n)$ .

Le présent chapitre s'organise en deux parties, le §8.1 donne ces comportements asymptotiques sous la forme du théorème 7. Un exemple simple dans le §8.2 illustre ce théorème 7.

Le théorème 7 suppose que, dans la réalisation  $\mathcal{H}_{\Phi}^S$  définie par (7.2) la condition initiale  $\mathbf{Z}_0$  est nulle, et que  $\mathcal{H}$  est le filtre  $\mathcal{H}^{FI}$ . Nous pensons que ce théorème pourrait être généralisé à l'image de la proposition 13 (p. 87).

### 8.1 Etude du comportement asymptotique du couplage

Pour l'étude qualitative de la stabilité interne, l'entrée de  $\mathcal{H}_{\Phi}^S$  est supposée nulle. Les sorties  $v_n, y_n, x_n$  et aussi  $\int_{\mathbb{I}} \mu^{FI} \varphi_n \varphi_0 d\rho$  s'expriment linéairement en fonction des conditions initiales  $\varphi_0$  et  $\mathbf{X}_0$ . Lors du §8.1.1, nous donnons la transformée en  $Z$  de ces expressions :  $\mathcal{H}^v, \mathcal{H}^y, \mathcal{H}^x, \mathcal{H}^{\varphi_n \varphi_0}$ . A l'image du chapitre 6, le résultat de décomposition est appliqué à  $\mathcal{H}^v, \mathcal{H}^y, \mathcal{H}^x, \mathcal{H}^{\varphi_n \varphi_0}$  lors du §8.1.2. L'analyse du comportement asymptotique des symboles diffusifs  $\mu_v, \mu_y, \mu_x, \mu^{\varphi_n \varphi_0}$  lors de

§8.1.3 donne les comportements asymptotiques aux temps longs de  $v_n, y_n, x_n, V(\varphi_n)$  en fonction notamment de la singularité de  $\varphi_0$  en  $\rho = 1$  (i.e. suivant la remarque 5 (p. 29),  $\varphi_0$  n'est pas nécessairement un polynôme).

### Hypothèses supplémentaires sur $\mathcal{H}_\Phi^S$

- (H1) La condition initiale  $\mathbf{Z}_0$  de la réalisation de  $\mathcal{R}\mathcal{Q}^{-1}$  est nulle.
- (H2)  $\mathcal{H}$  est le filtre noté  $\mathcal{H}^{FI}$  pour  $\alpha \in ]0, 1[$  et défini par (1.1).
- (H3)  $\varphi_0 \in \mathbb{H}$  est une fonction de support contenu dans  $[0, 1]$  et localement hölderienne sur  $]0, 1[$ .
- (H4)  $\mathcal{Q}$  n'a pas de pôles sur  $[-1, 1]$  ni zéros sur  $] - 1, 1[$ .
- (H5)  $\mathcal{R}$  n'a pas de pôles sur  $] - 1, 1[$ .
- (H6) Il existe  $\gamma \in ] - 1, \frac{1+\alpha}{2}[$ , tel que  $\varphi_0\rho^\gamma$  est hölderienne sur un voisinage de  $\rho = 0$ .
- (H7) Il existe  $\beta \in ] - 1, \frac{1-\alpha}{2}[$  et tel que  $\varphi_0(\rho)(1 - \rho)^\beta$  est hölderienne sur un voisinage de  $\rho = 1$  et tel que  $\varphi_0(\rho) \sim b(1 - \rho)^{-\beta}$ .
- (H8)  $\beta \geq 0$  et  $(\alpha, \beta) \neq (\frac{1}{2}, 0)$ .

### Notations

- $\mathcal{H}^v, \mathcal{H}^y, \mathcal{H}^x, \mathcal{H}^{\varphi_n\varphi_0}$  sont les transformées en  $Z$  de  $v_n, y_n, x_n$  et aussi  $\int_{\mathbb{I}} \mu \varphi_n \varphi_0 d\rho$ .
- $\mathcal{H}^Z$  est l'une de ces fonctions de transfert.
- $\mathcal{N}^Z$  désigne l'une des parties entières associées à  $\mathcal{H}^Z$  dans la décomposition.
- $\mathcal{R}_{\mathbf{X}_0}$  et  $\mathcal{H}_{\varphi_0}$  sont les transformées en  $Z$  des sorties des réalisations choisies pour  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{H}$ , lorsque les entrées  $w_n$  et  $v_n$  sont nulles et lorsque les conditions initiales sont  $\mathbf{X}_0$  et  $\varphi_0$ .
- $\mathcal{R}^{\mathbf{X}}$  est la fonction de transfert associée à la relation  $v_n \mapsto \mathbf{X}_n$ .
- $\mu^v, \mu^y, \mu^x, \mu^{\mathbf{X}}, \mu^{\varphi_n\varphi_0}$  sont les symboles diffusifs des parties diffusives de  $\mathcal{H}^v, \mathcal{H}^y, \mathcal{H}^x, \mathcal{H}^{\mathbf{X}}, \mathcal{H}^{\varphi_n\varphi_0}$ .
- $\mu_\alpha(\rho) = \rho^\alpha(1 - \rho)^{-\alpha}$  quand  $\rho \in [0, 1[$  et  $\mu_\alpha(\rho) = 0$  quand  $\rho \in [-1, 0]$ . Cela permet d'écrire de façon plus compacte  $\mu^{FI}(\rho) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \mu_\alpha(\rho)$  et  $\mathcal{V}_{\mu^{FI}}(\rho) = \cos(\alpha\pi)\mu_\alpha(\rho) - 1$  (cf : (1.15)).

## 8.1.1 Transformée en $Z$ des sorties $v_n, y_n, x_n$ et de $\int_{\mathbb{I}} \mu^{FI} \varphi_0 \varphi_n d\rho, \mathbf{X}_n$

Nous cherchons à déterminer  $v_n, y_n, x_n$  et de  $\int_{\mathbb{I}} \mu^{FI} \varphi_0 \varphi_n d\rho, \mathbf{X}_n$  en fonction de  $\varphi_0$  et  $\mathbf{X}_0$ . L'idée consiste à en calculer les transformées en  $Z$  de manière à remplacer les produits de convolution par des multiplications de fonctions complexes. On remarque aussi que l'état et la sortie d'une réalisation d'un filtre  $\mathcal{R}$  ou  $\mathcal{H}$  sont la somme d'une composante *forcée* (dépendant de l'entrée) et d'une composante *libre* (dépendant de la condition initiale et par suite de la réalisation). Ce principe de superposition permet à la figure 8.1 de représenter comment  $v_n, y_n, w_n$  et  $x_n$  dépendent de  $\mathcal{H}, \mathcal{H}_{\varphi_0}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_{\mathbf{X}_0}$  et  $\mathcal{Q}$ . Cela constitue un schéma fonctionnel de  $\mathcal{H}_\Phi^S$ .

L'hypothèse (H1) (i.e.  $\mathbf{Z}_0 = 0$ ) supprime la composante libre de  $\mathcal{R}\mathcal{Q}^{-1}$ . La composante forcée de  $\mathcal{R}\mathcal{Q}^{-1}$  s'exprime en fonction de la composante forcée de  $\mathcal{R}$ . Notons que la stabilité de  $\mathcal{R}\mathcal{Q}^{-1}$  n'implique pas la stabilité de  $\mathcal{R}_{\mathbf{X}_0}\mathcal{Q}^{-1}$ , parce que l'association d'une réalisation minimale de  $\mathcal{R}$  et du filtre  $\mathcal{Q}^{-1}$  ne forme pas nécessairement un système stable de façon interne même quand  $\mathcal{R}\mathcal{Q}^{-1}$  est un filtre stable.

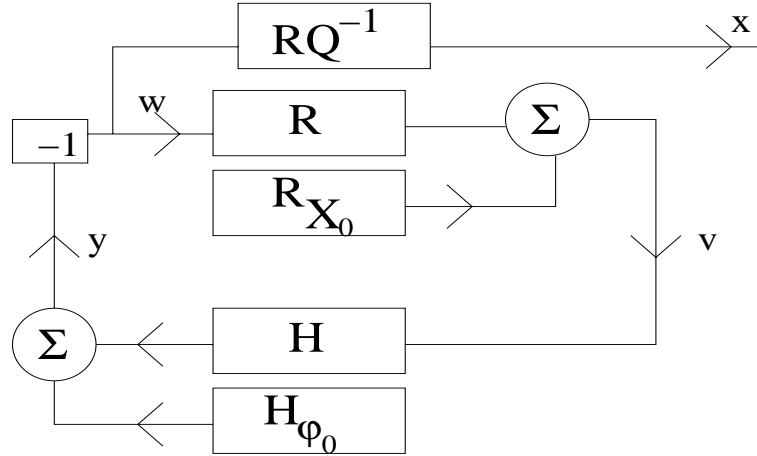


FIG. 8.1 – Schéma fonctionnel de la réalisation  $\mathcal{H}_{\Phi}^S$  de  $\mathcal{H}^S \in \Sigma_2$ .

L'état de cette réalisation est  $\Phi = (\varphi, \mathbf{X})$ .  $\mathcal{R}_{\mathbf{X}_0}$  et  $\mathcal{H}_{\varphi_0}$  sont respectivement les transformées en  $Z$  des réponses libres de  $\mathcal{R}$  et de  $\mathcal{H}$  lorsque les conditions initiales sont  $\mathbf{X}_0$  et  $\varphi_0$ .

**Proposition 19** Soit  $\mathcal{H}$  un filtre diffusif et  $\mathcal{H}_{\Phi}^S$  sa réalisation définie par (7.1). Si,

(H1) La condition initiale  $\mathbf{Z}_0$  de la réalisation de  $\mathcal{R}\mathcal{Q}^{-1}$  est nulle.

(H2)  $\mathcal{H}$  est le filtre noté  $\mathcal{H}^{FI}$  pour  $\alpha \in ]0, 1[$  et défini par (1.1),

(H3)  $\varphi_0 \in \mathbb{H}$  est une fonction de support contenu dans  $[0, 1]$  et localement hölderienne sur  $]0, 1[$ ,

alors les transformées en  $Z$  de  $v_n, y_n, x_n$  et  $\mathbf{X}_n$ ,  $\int_{\mathbb{I}} \mu^{FI} \varphi_0 d\rho$  sont données par :

$$\mathcal{H}^v = \frac{\mathcal{R}_{\mathbf{X}_0} - z\mathcal{R}\mathcal{H}^{\mu\varphi_0}}{1 + \mathcal{R}\mathcal{H}^{FI}}$$

$$\mathcal{H}^y = \frac{\mathcal{H}^{FI}\mathcal{R}_{\mathbf{X}_0} + z\mathcal{H}^{\mu\varphi_0}}{1 + \mathcal{R}\mathcal{H}^{FI}}$$

$$\mathcal{H}^x = -\mathcal{R}\mathcal{Q}^{-1} \frac{\mathcal{H}^{FI}\mathcal{R}_{\mathbf{X}_0} + z\mathcal{H}^{\mu\varphi_0}}{1 + \mathcal{R}\mathcal{H}^{FI}}$$

$$\mathcal{H}^{\mathbf{X}} = -\mathcal{R}^{\mathbf{X}} \frac{\mathcal{H}^{FI}\mathcal{R}_{\mathbf{X}_0} + z\mathcal{H}^{\mu\varphi_0}}{1 + \mathcal{R}\mathcal{H}^{FI}} + z(zI - A^R)^{-1}\mathbf{X}_0$$

$$\mathcal{H}^{\varphi_n\varphi_0} = \frac{\mathcal{H}^{\mu\varphi_0}\mathcal{R}_{\mathbf{X}_0} - z\mathcal{R}(\mathcal{H}^{\mu\varphi_0})^2}{1 + \mathcal{R}\mathcal{H}^{FI}} + z\mathcal{H}^{\mu\varphi_0^2}$$

où  $\mathcal{R}_{\mathbf{X}_0}(z) = zC^R(zI - A^R)^{-1}\mathbf{X}_0$  et  $\mathcal{R}(z) = C^R(zI - A^R)B^R + D^R$  et  $\mathcal{R}^{\mathbf{X}} = (zI - A^R)^{-1}B^R$  et où  $\mathcal{H}^{\mu\varphi_0}$  et  $\mathcal{H}^{\mu\varphi_0^2}$  sont les filtres diffusifs de lien direct nul et de symboles diffusifs  $\mu^{FI}(\rho)\varphi_0(\rho)$  et  $\mu^{FI}(\rho)(\varphi_0(\rho))^2$ .

**Preuve** La démonstration consiste d'abord à calculer les transformées en  $Z$  des réponses libres de  $\mathcal{H}^{FI}$ ,  $\mathcal{R}$  et la fonction de transfert  $\mathcal{R}$ , puis à déterminer les expressions recherchées en suivant le schéma fonctionnel de  $\mathcal{H}_{\mathbb{F}}^S$  représenté sur la figure 8.1.

- $\mathcal{H}_{\varphi_0}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{I}} \mu^{FI}(\rho) \rho^n \varphi_0(\rho) d\rho z^{-n} = \int_{\mathbb{I}} \frac{\mu^{FI}\varphi_0}{1-\rho z^{-1}} d\rho = z\mathcal{H}^{\mu\varphi_0}(z)$   
 $\mathcal{R}_{\mathbf{X}_0}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C^R(A^R)^n \mathbf{X}_0 z^{-n} = zC^R(zI - A^R)^{-1}\mathbf{X}_0$   
 $\mathcal{R}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C^R(A^R)^{n-1} B^R z^{-n} + D^R = C(zI - A^R)^{-1} B^R + D^R$
- $\mathcal{H}^v = \mathcal{R}_{\mathbf{X}_0} - \mathcal{R}(\mathcal{H}^{FI}\mathcal{H}^v + \mathcal{H}_{\varphi_0})$   
 $\mathcal{H}^y = \mathcal{H}_{\varphi_0} - \mathcal{H}^{FI}\mathcal{R}\mathcal{H}^y + \mathcal{H}^{FI}\mathcal{R}_{\mathbf{X}_0}$   
 $\mathcal{H}^x = \mathcal{R}\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{H}^y$   
 $\mathbf{X}_n = \sum_{k=0}^{n-1} (A^R)^{n-1-k} B^R w_k + (A^R)^n$  □

$X_0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \mathcal{H}^X = -\mathcal{R}_{\mathbf{X}_0}\mathcal{H}^y + z(zI - A^R)^{-1}\mathbf{X}_0 \\ &\int_{\mathbb{I}} \mu^{FI}\varphi_0\varphi_n d\rho = \int_{\mathbb{I}} \mu^{FI}\varphi_0 \left(\sum_{k=0}^n \rho^{n-k} v_k\right) d\rho + \int_{\mathbb{I}} \mu^{FI}\varphi_0^2 \rho^n d\rho \\ &\Rightarrow \mathcal{H}^{\varphi_n\varphi_0} = \mathcal{H}^{\mu\varphi_0}\mathcal{H}^v + z\mathcal{H}^{\mu\varphi_0^2} \end{aligned}$$

Le principe de la superposition de la solution forcée à la solution libre nous a permis de calculer les transformées en  $Z$  de  $v_n, y_n, x_n$  et aussi de  $\int_{\mathbb{I}} \mu^{FI}\varphi_n\varphi_0 d\rho$

### 8.1.2 Application du résultat de décomposition à $\mathcal{H}^v, \mathcal{H}^y, \mathcal{H}^x, \mathcal{H}^{\varphi_n\varphi_0}$

Nous appliquons le résultat de décomposition aux fonctions de  $z$  :  $\mathcal{H}^v, \mathcal{H}^y, \mathcal{H}^x$  et  $\mathcal{H}^{\mathbf{X}}, \mathcal{H}^{\varphi_n\varphi_0}$ .

**Proposition 20** Soit  $\mathcal{H}$  un filtre diffusif et  $\mathcal{H}_{\mathbb{F}}^S$  sa réalisation définie par (7.1). Si  $\mathcal{H}_{\mathbb{F}}^S$  vérifient (H1), (H2) et (H3) ainsi que les hypothèses suivantes :

- (H4)  $\mathcal{Q}$  n'a pas de pôles sur  $[-1, 1$  ni zéros sur  $] -1, 1[$ .
- (H5)  $\mathcal{R}$  n'a pas de pôles sur  $] -1, 1[$ .
- (H6) Il existe  $\gamma \in ] -1, \frac{1+\alpha}{2}[$ , tel que  $\varphi_0\rho^\gamma$  soit hölderienne sur un voisinage de  $\rho = 0$ .
- (H7) Il existe  $\beta \in ] -1, \frac{1-\alpha}{2}[$  et tel que  $\varphi_0(\rho)(1-\rho)^\beta$  est hölderienne sur un voisinage de  $\rho = 1$  et tel que  $\varphi_0(\rho) \sim b(1-\rho)^{-\beta}$ . alors  $\mathcal{H}^v, \mathcal{H}^y, \mathcal{H}^x$  et  $\mathcal{H}^{\mathbf{X}}, \mathcal{H}^{\varphi_n\varphi_0}$  sont chacun la somme d'un filtre rationnel stable et d'un filtre diffusif. Les symboles diffusifs des différents filtres sont donnés par :

$$\mu^y(\rho) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \mu_\alpha(\rho) \frac{\mathcal{R}_{\mathbf{X}_0}(\rho) + \rho\varphi_0(\rho)(1 + \cos(\alpha\pi)\mu_\alpha(\rho)\mathcal{R}(\rho)) - \rho\mathcal{R}(\rho)\mathcal{V}_{\mu^{FI}\varphi_0}(\rho)}{1 + 2\cos(\alpha\pi)\mu_\alpha\mathcal{R} + \mu_\alpha^2\mathcal{R}^2}$$

$$\mu^v = -\mu^y\mathcal{R}, \quad \mu^x = -\mu^y\mathcal{R}\mathcal{Q}^{-1}, \quad \mu^{\mathbf{X}}(\rho) = -\rho\mu^y(\rho)\mathcal{R}^{\mathbf{X}}(\rho) \quad (8.1)$$

$$\mu^{\varphi_n \varphi_0}(\rho) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \mu_\alpha(\rho) \frac{\mu_1 \varphi_0 + \mu_2 \varphi_0^2 + \mu_3 \mathcal{V}_{\mu^{FI} \varphi_0} + \mu_4 \varphi_0 \mathcal{V}_{\mu^{FI} \varphi_0} + \mu^5 (\mathcal{V}_{\mu^{FI} \varphi_0})^2}{1 + 2 \cos(\alpha\pi) \mu_\alpha \mathcal{R} + \mu_\alpha^2 \mathcal{R}^2}$$

$$\text{avec } \mu_1(\rho) = \mathcal{R}_{\mathbf{X}_0}(1 + \cos(\alpha\pi) \mu_\alpha(\rho) \mathcal{R}(\rho))$$

$$\mu_2(\rho) = \rho(1 + \cos(\alpha\pi) \mu_\alpha(\rho) \mathcal{R}(\rho))^2$$

$$\mu_3(\rho) = -\mathcal{R}(\rho) \mathcal{R}_{\mathbf{X}_0}(\rho)$$

$$\mu_4(\rho) = -2\rho \mathcal{R}(\rho)(1 + \cos(\alpha\pi) \mu_\alpha(\rho) \mathcal{R}(\rho))$$

$$\mu_5(\rho) = \rho(\mathcal{R}(\rho))^2$$

**Commentaire** Les hypothèses (H6) et (H7) servent à prouver que  $z\mathcal{H}^{\mu\varphi_0}$ ,  $z\mathcal{H}^{\mu\varphi_0^2}$  et  $(1-z)\mathcal{H}^{\mu\varphi_0}$ ,  $(1-z)\mathcal{H}^{\mu\varphi_0^2}$  convergent vers zéro quand  $z \rightarrow 0$  et quand  $z \rightarrow 1$  avec  $z \notin [-1, 1]$ ; ceci permet d'appliquer le résultat de décomposition à  $\mathcal{H}^{\mathcal{Z}}$ .

**Preuve** (H1), (H2), (H3) entraînent la proposition 19. On note  $\mathcal{H}^{\mathcal{Z}}$  l'une des transformées en  $Z$  suivante :  $\mathcal{H}^v, \mathcal{H}^y, \mathcal{H}^x, \mathcal{H}^{\varphi_n \varphi_0}$ . (H2), (H4) et (H5) donnent le comportement asymptotique du dénominateur de  $\mathcal{H}^{\mathcal{Z}}$  au voisinage de  $[0, 1]$ . On applique le lemme 5 (p. 82), ce qui permet décomposer  $\mathcal{H}^{\mathcal{Z}}$  en une partie entière notée  $\mathcal{N}^{\mathcal{Z}}$  et en  $\mathcal{H}^{\mathcal{Z}} - \mathcal{N}^{\mathcal{Z}}$  qui peut se prolonger analytiquement sur  $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ . (H3) dit que  $\mathbb{S} = \{0, 1\}$  et donne le comportement asymptotique de  $\mathcal{H}^{\mathcal{Z}}$  en  $\varrho \in ]0, 1[$ . (H7) et (H8) donnent le comportement de  $\mathcal{H}^{\mathcal{Z}}$  au voisinage de  $z = 0$  et  $z = 1$ . L'application du théorème 1 (p. 31) montre que  $\mathcal{H}^{\mathcal{Z}} - \mathcal{N}^{\mathcal{Z}}$  est un filtre diffusif.

1. (H2), (H4) et (H5) impliquent que  $\frac{1}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}^{FI}}$  et  $\frac{1}{\mathcal{Q}} \frac{1}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}^{FI}}$  sont bornés sur un voisinage de  $[0, 1]$ .

En effet  $1 + \mathcal{R}(z)\mathcal{H}^{FI}(z) \rightarrow 1$  quand  $z \rightarrow 0$  et quand  $z \rightarrow 1$  avec  $z \notin [0, 1]$  parce que  $\mathcal{H}^{FI}(z) \rightarrow 0$  quand  $z \rightarrow 1$  et quand  $z \rightarrow 0$ . Si  $\varrho \in ]0, 1[$  est un zéro de  $\mathcal{R}$  alors  $1 + \mathcal{R}(z)\mathcal{H}^{FI}(z) \rightarrow 1$  quand  $z \rightarrow \varrho$ . Si  $\varrho \in ]0, 1[$  n'est pas un zéro de  $\mathcal{R}$  alors  $|\mathcal{I}m(1 + \mathcal{R}(z)\mathcal{H}^{FI}(z))| \rightarrow -\frac{1}{\pi} \mathcal{R}(\varrho) \mu^{FI}(\varrho) \neq 0$ .

2. L'assertion 1, permet en utilisant le lemme 5, de montrer qu'il existe un filtre rationnel stable, noté  $\mathcal{N}^{\mathcal{Z}}$ , tel que  $\mathcal{H}^{\mathcal{Z}} - \mathcal{N}^{\mathcal{Z}}$  soit prolongeable sur  $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ .
3. Pour tout  $\varrho \in ]0, 1[$ , (H3) implique que  $\mathcal{H}^{\mathcal{Z}}(z)$  admet des limites quand  $z \rightarrow \varrho$  avec  $\mathcal{I}m(z) > 0$  et aussi avec  $\mathcal{I}m(z) < 0$ .

En effet les fonctions de transfert rationnelles n'ont pas de pôles sur  $[0, 1]$  et admettent donc une limite quand  $z \rightarrow \varrho$ . Le dénominateur de  $\mathcal{H}^{\mathcal{Z}}$  est borné inférieurement sur un voisinage de  $[0, 1]$  (cf 1).  $\mathcal{H}^{FI}(z)$  admet des limites quand  $z \rightarrow \varrho$  avec  $\mathcal{I}m(z) > 0$  et aussi avec  $\mathcal{I}m(z) < 0$ . Enfin le théorème 2 (p. 35) montre que  $\mathcal{H}^{\mu\varphi_0}(z)$  et  $\mathcal{H}^{\mu\varphi_0^2}$  admettent une limite quand  $z \rightarrow \varrho$  avec  $\mathcal{I}m(z) > 0$  et aussi avec  $\mathcal{I}m(z) < 0$ .

4. Les limites calculées par l'assertion 3 montrent que les fonctions, données par les cinq équations (8.1), valent  $\frac{1}{2\pi} [\mathcal{H}^{\mathcal{Z}}(\rho - i0) - \mathcal{H}^{\mathcal{Z}}(\rho + i0)]$  et sont sommables.

5. (H6) et (H7) impliquent que  $z\mathcal{H}^{\mathcal{Z}}(z) \rightarrow 0$  quand  $z \rightarrow 0$  et  $(1-z)\mathcal{H}^{\mathcal{Z}}(z)$  quand  $z \rightarrow 1$  avec  $z \notin [-1, 1]$ .

En effet la convergence de  $(1-z)\mathcal{H}^{\mu\varphi_0}(z)$  et  $(1-z)\mathcal{H}^{\mu\varphi_0^2}(z)$  est une application du lemme 2 dit de correspondance asymptotique, elle entraîne la convergence de  $(1-z)\mathcal{H}^{\mathcal{Z}}(z)$ .

Suivant la remarque 16 (p. 43),  $\mathcal{H}^{\mu\varphi_0}(1-z) = \mathcal{H}^{\mu(1-\rho)\varphi_0(1-\rho)}(z)$  et de même  $\mathcal{H}^{\mu\varphi_0^2}(1-z) = \mathcal{H}^{-\mu^{FI}(1-\rho)(\varphi_0(1-\rho))^2}(z)$ . De plus  $\mathcal{H}^{FI}(1-z) = (1-z^{-1})^\alpha$ . Dès lors, le lemme 2 montre que (H6) implique que  $z\mathcal{H}^Z(z) \rightarrow 0$  quand  $z \rightarrow 0$  avec  $z \notin [-1, 1]$ .

6. Le théorème 1 montre que les assertions 4 et 5 impliquent que  $\mathcal{H}^Z - \mathcal{N}^Z$  est un filtre diffusif de symbole diffusif donné par (8.1).

□

Nous avons montré que les transformées en  $Z$  de  $v_n, y_n, x_n \mathbf{X}_n$  et  $\int_0^1 \mu^{FI} \varphi_n \varphi_0 d\rho$  sont chacune la somme d'un filtre rationnel et d'un filtre diffusif. Les symboles diffusifs s'expriment en fonction  $\mu^{FI}$ ,  $\varphi_0$  et  $\mathcal{V}_{\mu^{FI}}$ ,  $\mathcal{V}_{\mu^{FI}\varphi_0}$  et  $\mathcal{V}_{\mu^{FI}\varphi_0^2}$ . Ces expressions soulignent l'importance de l'étude des propriétés de la *valeur de continuité*  $\mathcal{V}_\mu$  faite en §1.3.2.

### 8.1.3 Comportements asymptotiques aux temps longs des sorties $v_n, y_n, x_n$ et de la fonctionnelle de Lyapunov $V(\varphi_n)$

Les hypothèses (H7) et (H8) donnent au voisinage de  $\rho = 1$  le comportement asymptotique des symboles diffusifs donnés par (8.1) grâce au lemme 2 dit de comportement asymptotique. Le lemme 1, dit de Watson-discret, en déduit le comportement asymptotique de  $v_n, y_n, x_n \mathbf{X}_n$  et  $\int_0^1 \mu^{FI} \varphi_n \varphi_0 d\rho$ . La propriété originale de l'opérateur de transition  $\mathcal{T}$  associé à  $\mathcal{H}_\Phi^S$  ( $\mathcal{T}$  est semblable à son auto-adjoint cf : §7.2) permet d'en déduire le comportement asymptotique de la fonctionnelle de Lyapunov  $V(\varphi_n)$ . Ces comportements asymptotiques sont énoncés sous la forme du théorème suivant :

**Théorème 7** *Soit  $\mathcal{H}$  un filtre diffusif et  $\mathcal{H}_\Phi^S$  sa réalisation définie par (7.1). Si  $\mathcal{H}_\Phi^S$  vérifie (H1)–(H6) et aussi :*

(H7) *Il existe  $\beta \in ]-1, \frac{1-\alpha}{2}[$  et tel que  $\varphi_0(\rho)(1-\rho)^\beta$  est hölderienne sur un voisinage de  $\rho = 1$  et tel que  $\varphi_0(\rho) \sim b(1-\rho)^{-\beta}$ .*

(H8)  $\beta \geq 0$  et  $(\alpha, \beta) \neq (\frac{1}{2}, 0)$ .

alors quand  $n \rightarrow \infty$

- Si  $\beta = 0$  (alors  $\varphi_0(1) = b \neq 0$ ) et  $\mathcal{R}(1) \neq 0$ ,  
 $v_n = o(\frac{1}{n})$ ,  $x_n = o(\frac{1}{n})$ ,  $\mathbf{X}_n = o(\frac{1}{n})$ ,  $y_n = o(\frac{1}{n})$ , et  $V(\varphi_n) = o(\frac{1}{n^{1-\alpha}})$
- Si  $\beta = 0$  (alors  $\varphi_0(1) = b \neq 0$ ) et  $\mathcal{R}(1) = 0$ ,  
 $v_n \sim \mathcal{R}'(1) \frac{\mathcal{R}_{\mathbf{x}_0(1)+\varphi_0(1)}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1-\alpha}{n^{2-\alpha}}$   
 $y_n \sim \frac{\mathcal{R}_{\mathbf{x}_0(1)+\varphi_0(1)}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{n^{1-\alpha}}$   
 $x_n \sim -\frac{v_n}{\mathcal{Q}(1)}$  quand  $\mathcal{Q}(1) \neq 0$  et  $x_n \sim \frac{\mathcal{R}'(1)}{\mathcal{Q}'(1)} y_n$  quand  $\mathcal{Q}(1) = 0$   
 $\mathbf{X}_n = O(\frac{1}{n^{1-\alpha}})$   
 $\int_{\mathbb{I}} \mu^{FI} \varphi_0 \varphi_n d\rho \sim \frac{\varphi_0(1)[\mathcal{R}_{\mathbf{x}_0(1)+\varphi_0(1)}]}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{n^{1-\alpha}}$  et  $V(\varphi_n) = O(\frac{1}{n^{1-\alpha}})$

- Si  $\beta > 0$  et  $\mathcal{R}(1) \neq 0$ ,

$$v_n \sim -b \frac{\sin^2(\alpha\pi)}{\pi} \left[ \frac{1}{\tan(\alpha\pi)} - \frac{1}{\tan((\alpha + \beta)\pi)} \right] \frac{\Gamma(1 - \beta)}{n^{1-\beta}}$$

$$y_n \sim \frac{-v_n}{\mathcal{R}(1)}, \quad x_n \sim -\frac{v_n}{\mathcal{Q}(1)} \quad \text{et} \quad \mathbf{X}_n = O\left(\frac{1}{n^{1-\beta}}\right)$$

$$V(\varphi_n) \sim \frac{b^2 \sin^3(\alpha\pi)}{2 \pi} \left[ \frac{1}{\tan(\alpha\pi)} - \frac{1}{\tan((\alpha + \beta)\pi)} \right]^2 \frac{\Gamma(1 - \alpha - 2\beta)}{2^{1-\alpha-2\beta}} \frac{1}{n^{1-\alpha-2\beta}}$$

- Si  $\beta > 0$  et  $\mathcal{R}(1) = 0$ ,

$$y_n \sim b \frac{\sin(\alpha\pi) \Gamma(1 - \alpha - \beta)}{\pi n^{1-\alpha-\beta}}$$

$$v_n \sim b \mathcal{R}'(1) \frac{\sin(\alpha\pi) \Gamma(2 - \alpha - \beta)}{\pi n^{2-\alpha-\beta}}$$

$$x_n \sim -\frac{v_n}{\mathcal{Q}(1)} \quad \text{quand} \quad \mathcal{Q}(1) \neq 0 \quad \text{et} \quad x_n \sim \frac{\mathcal{R}'(1)}{\mathcal{Q}'(1)} y_n \quad \text{quand} \quad \mathcal{Q}(1) = 0$$

$$V(\varphi_n) \sim \frac{b^2 \sin(\alpha\pi) \Gamma(1 - \alpha - 2\beta)}{2 \pi} \frac{1}{n^{1-\alpha-2\beta}}$$

**Commentaire** Le théorème reprend les mêmes idées que la proposition 13 (p. 87). L'hypothèse (H8) restreint les cas envisagés par le théorème. Lorsque  $\beta < 0$ , les valeurs prises par  $\varphi_0$  sur  $]0, 1[$  ont plus d'importance sur les comportements asymptotiques étudiés que le comportement asymptotique de  $\varphi_0$  en  $\rho = 1$ .

Le comportement asymptotique de  $\mathbf{X}_n$  n'est pas forcément identique pour chaque composante, cela dépend de ce que  $\mathcal{R}^{\mathbf{X}}(1) = (I - A^R)^{-1} B^R$  est un vecteur où chaque composante est non-nulle. Il est quand même nécessaire de connaître un ordre de grandeur de ce comportement asymptotique pour pouvoir déduire le comportement asymptotique de  $V(\varphi_n)$  à partir de  $\int_0^1 \mu \varphi_n \varphi_0 d\rho$ .

Lors du §7.2.2, il est montré que la forme quadratique  $V(\varphi_n)$  s'exprime en fonction de  $\mathbf{X}_n T \mathbf{X}_n$ ,  $\mathbf{X}_{2n} T \mathbf{X}_0$  et de  $\int_{\mathbb{I}} \mu \varphi_{2n} \varphi_0 d\rho$ . Une étude succincte du comportement asymptotique de  $\mathbf{X}_n$  montre que si  $\beta > 0$ , alors le comportement asymptotique de  $V(\varphi_n)$  est le même que celui de  $\frac{1}{2} \int_{\mathbb{I}} \varphi_{2n} \varphi_0 d\rho$ .

**Preuve** La démonstration consiste à calculer les comportements asymptotiques des symboles diffusifs donnés par (8.1) puis à en déduire les comportements asymptotiques de  $v_n$ ,  $y_n$ ,  $x_n$ ,  $\mathbf{X}_n$  et  $\int_0^1 \mu^{FI} \varphi_n \varphi_0 d\rho$ .

Le lemme 2, dit de correspondance asymptotique, montre que (H7) permet de donner les comportements asymptotiques de  $\mathcal{V}_{\mu^{FI} \varphi_0}$  quand  $\rho \rightarrow 1$  :

$$\text{si } \alpha + \beta \neq \frac{1}{2}, \quad \mathcal{V}_{\mu^{FI} \varphi_0}(\rho) \sim \frac{\sin(\alpha\pi)}{\tan((\alpha + \beta)\pi)} (1 - \rho)^{-\alpha-\beta}$$

$$\text{et sinon } \mathcal{V}_{\mu^{FI} \varphi_0}(\rho) = o(1 - \rho)^{-\alpha-\beta}.$$

On rappelle que :

$$\text{si } \alpha \neq \frac{1}{2}, \quad \mathcal{V}_{\mu^{FI}}(\rho) \sim \cos(\alpha\pi) (1 - \rho)^{-\alpha} = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\tan(\alpha\pi)} (1 - \rho)^{-\alpha}$$

$$\text{et sinon } \mathcal{V}_{\mu^{FI}}(\rho) = o(1 - \rho)^{-\alpha}.$$

Des calculs simples sur les symboles diffusifs permettent d'en déduire les comportements asymptotiques de  $\mu^v$ ,  $\mu^y$ ,  $\mu^x$ ,  $\mu^{\mathbf{X}}$ ,  $\mu^{\varphi_n \varphi_0}$  au voisinage de  $\rho = 1$ .

- Quand  $\beta = 0$  (alors  $\varphi_0(1) = b \neq 0$ ) et  $\mathcal{R}(1) \neq 0$ ,  
 $\mu^y(\rho) = o(1)$  et  $\mu^{\varphi_n \varphi_0}(\rho) = o[(1 - \rho)^{-\alpha}]$ .



- Quand  $\beta = 0$  et  $\mathcal{R}(1) = 0$ ,  
 $\mu^y(\rho) \sim [\mathcal{R}_{\mathbf{X}_0}(1) + \varphi_0(1)] \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} (1-\rho)^{-\alpha}$   
 et  $\mu^{\varphi_n \varphi_0}(\rho) \sim \varphi_0(1) [\mathcal{R}_{\mathbf{X}_0}(1) + \varphi_0(1)] \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} (1-\rho)^{-\alpha}$
- Quand  $\beta > 0$  et  $\mathcal{R}(1) \neq 0$ ,  
 $\mu^y(\rho) \sim \frac{b}{\mathcal{R}(1)} \frac{\sin^2(\alpha\pi)}{\pi} \left[ \frac{1}{\tan(\alpha\pi)} - \frac{1}{\tan((\alpha+\beta)\pi)} \right] (1-\rho)^{-\beta}$   
 $\mu^{\varphi_n \varphi_0}(\rho) \sim b^2 \frac{\sin^3(\alpha\pi)}{\pi} \left[ \frac{1}{\tan(\alpha\pi)} - \frac{1}{\tan((\alpha+\beta)\pi)} \right]^2 (1-\rho)^{-\alpha-2\beta}$ ,  
 avec la convention  $\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2})} = 0$ .
- Quand  $\beta > 0$  et  $\mathcal{R}(1) = 0$ ,  
 $\mu^y(\rho) \sim b \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} (1-\rho)^{-\alpha-\beta}$  et  $\mu^{\varphi_n \varphi_0}(\rho) \sim b^2 \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} (1-\rho)^{-\alpha-2\beta}$ .
- Dans tous les cas, la remarque 8 (p. 63) montre que :  
 si  $\mathcal{R}(1) = 0$  alors  $\mu^v(\rho) \sim \mathcal{R}'(1)(1-\rho)\mu^y(\rho)$  ;  
 si  $\mathcal{R}(1) \neq 0$  alors  $\mu^v(\rho) \sim -\mathcal{R}(1)\mu^y(\rho)$  ;  
 si  $\mathcal{R}(1) = 0$  et  $\mathcal{Q}(1) = 0$  alors  $\mu^x(\rho) \sim \frac{\mathcal{R}'(1)}{\mathcal{Q}'(1)}\mu^y(\rho)$  ;  
 si  $\mathcal{R}(1) = 0$  et  $\mathcal{Q}(1) \neq 0$  alors  $\mu^x(\rho) \sim -\frac{\mathcal{R}'(1)}{\mathcal{Q}(1)}(1-\rho)\mu^y(\rho) \sim -\frac{\mu^v(\rho)}{\mathcal{Q}(1)}$ .  
 Enfin  $\mu^X(\rho) = O(\mu^y(\rho))$ .

Le lemme 1, dit de Watson-discret, permet alors d'en déduire les comportements asymptotiques de  $v_n, y_n, x_n, \mathbf{X}_n$  et  $\int_0^1 \mu^{FI} \varphi_n \varphi_0 d\rho$ .

La formule (7.12) (p. 104) permet d'en déduire le comportement asymptotique de  $V(\varphi_n)$ . Quand  $\beta > 0$ ,  $\mathbf{X}_n^T T \mathbf{X}_n$  et  $\mathbf{X}_{2n}^T T \mathbf{X}_0$  décroissent asymptotiquement plus rapidement que  $\int_0^1 \mu^{FI} \varphi_n \varphi_0 d\rho$ , aussi le comportement asymptotique de  $V(\varphi_n)$  est égal à celui de  $\frac{1}{2} \int_0^1 \mu^{FI} \varphi_{2n} \varphi_0 d\rho$ .  $\square$

Nous avons donné les comportements asymptotiques de  $v_n, y_n, x_n, \mathbf{X}_n$  et de  $\int_0^1 \mu^{FI} \varphi_n \varphi_0 d\rho$  quand la condition initiale  $\varphi_0(\rho)$  converge vers une limite non-nulle, éventuellement infinie. Les résultats trouvés nous ont amené à distinguer le cas où  $\varphi_0(\rho)$  admet en  $\rho \rightarrow 1^-$  une limite finie, infinie et à distinguer suivant que  $\mathcal{R}(1)$  est nulle ou non-nulle (comme pour la proposition 13 p. 87).

## 8.2 Exemple et simulation

Nous donnons un exemple de suite de fonctions dont nous allons montrer qu'elle converge vers zéro pour la norme associée à  $\mathbb{H}$ , cette suite ne converge pas de façon exponentielle.

**Exemple 7** Soit  $\varphi_n$  une suite de fonctions définies par

$$\varphi_{n+1}(\rho) = \rho \varphi_n(\rho) - \int_0^1 \mu^{FI}(r) \varphi_n(r) dr; \quad \varphi_0 \in \mathbb{H} \quad (8.2)$$

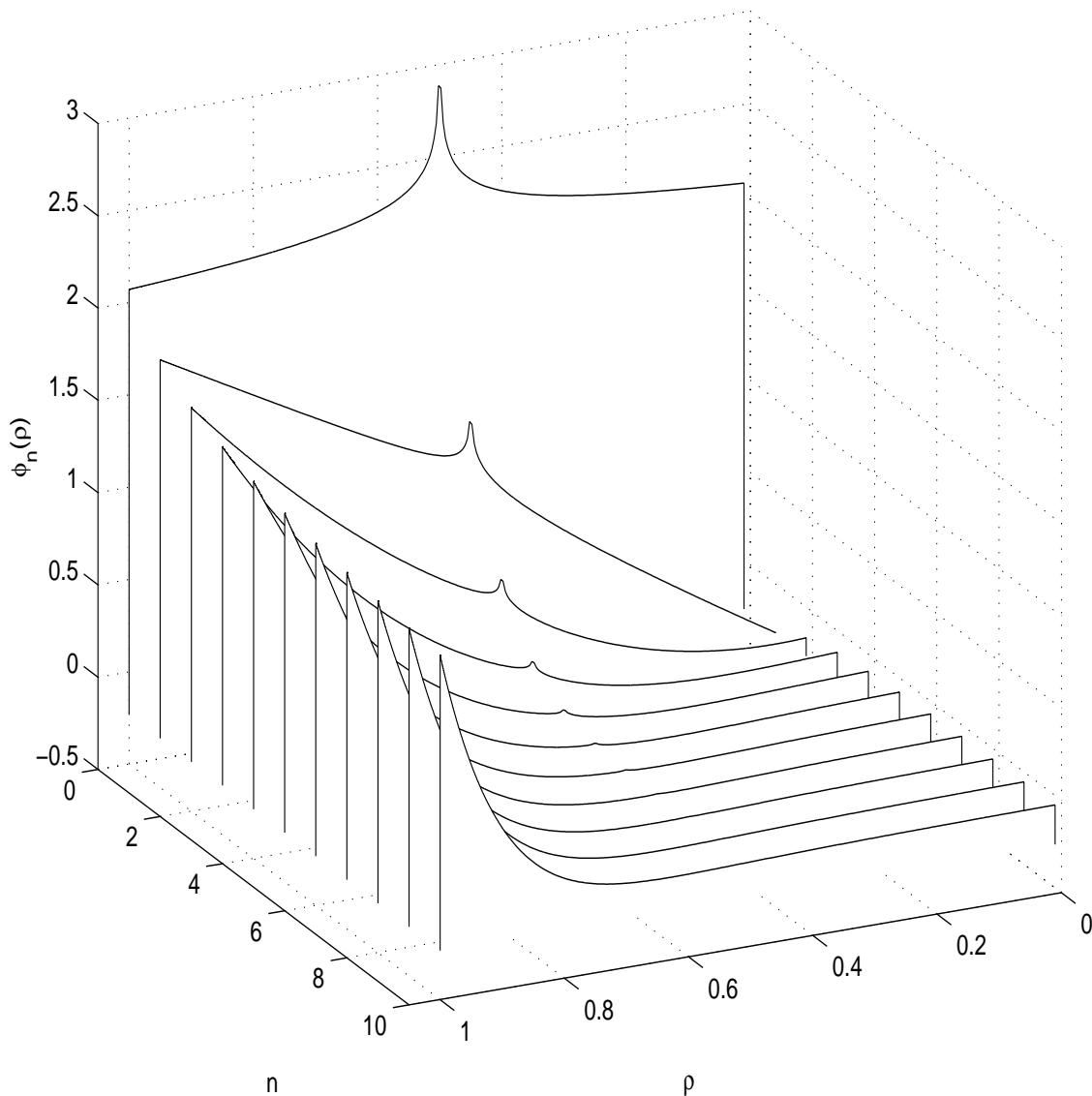


FIG. 8.2 – Simulation numérique de  $\varphi_{n+1} = \rho\varphi_n - \int_0^1 \mu^{FI} \varphi_n d\rho$  pour  $\alpha = 0.4$  et  $\varphi_0(\rho) = 1 + |\rho - 0.5|^{-0.1}$ . La suite de fonctions  $\varphi_n(\rho)$  est représentée sur l'axe vertical avec  $n$  sur l'axe à gauche et  $\rho$  sur l'axe à droite.

avec  $\mu^{FI}$  le symbole diffusif de  $\mathcal{H}^{FI}$  et  $\mathbb{H}$  l'espace de Hilbert défini pour les réalisations diffusives au §1.2.2.

L'état de (8.2) est une suite de fonctions  $\varphi_n(\rho)$  représentée sur la figure 8.2. Sur cette figure la condition initiale  $\varphi_0(\rho) = 1 + |\rho - 0.5|^{-0.1}$  est représentée en arrière plan. On observe que  $\varphi_n(\rho)$  décroît rapidement quand  $\rho$  n'est pas trop près de  $\rho = 1$ .  $\varphi_n(1)$  décroît lentement. L'opérateur  $\varphi_n \mapsto \rho\varphi_n$  est diagonal aussi la singularité de  $\varphi_0$  reste en  $\rho = 0.5$  pour tout  $n \geq 0$ .

Nous allons montrer que ce filtre est stable parce que  $\mathcal{H}^{FI}(-1) = 2^{-\alpha} < 1$ .

Ce filtre est en fait un couplage entre un filtre diffusif strictement positif de fonction de transfert  $\mathcal{H}(z) = \mathcal{H}^{FI}(z) - 1 + h_0$  avec  $h_0 \in ]\mathcal{H}^{FI}(-1), 1[$  et un filtre rationnel constant  $\mathcal{R} = \frac{1}{1-h_0}$  positif avec  $\mathcal{R}(1) \neq 0$ . Les équations correspondantes à (7.1) sont

$$\begin{cases} \varphi_{n+1} = \rho\varphi_n + v_n \\ y_n = \int_0^1 \mu^{FI}(\rho)\varphi_n(\rho) d\rho + h_0 v_n \\ v_n = -\frac{y_n}{1-h_0} \end{cases}$$

Le théorème 6 (p. 100) montre le caractère asymptotique de la stabilité interne. L'application  $\mathcal{T}$  utilisée par ce théorème est ici  $\mathcal{T}(\varphi) = \rho\varphi - \int_0^1 \mu^{FI}(r)\varphi(r) dr$  et  $\mathcal{T}$  est auto-adjointe.

Nous supposons maintenant que  $\varphi_0$  vérifie les hypothèses (H3), (H6), (H7) et (H8). La proposition 19 permet de calculer  $\mathcal{H}^{\varphi_n}$  et  $\mathcal{H}^{\varphi_n\varphi_0}$ , les transformées en  $Z$  de  $\int_0^1 \mu^{FI}\varphi_n d\rho = -v_n$  et de  $\int_0^1 \mu^{FI}\varphi_n\varphi_0 d\rho$ . En remarquant que  $\frac{\mathcal{R}}{1+\mathcal{R}\mathcal{H}} = \frac{1}{\mathcal{H}^{FI}}$ , ces transformées en  $Z$  s'écrivent ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{\varphi_n}(z) &= \frac{z\mathcal{H}^{\mu\varphi_0}(z)}{\mathcal{H}^{FI}(z)} \\ \mathcal{H}^{\varphi_n\varphi_0}(z) &= z\mathcal{H}^{\mu\varphi_0^2} - \frac{z(\mathcal{H}^{\mu\varphi_0}(z))^2}{\mathcal{H}^{FI}(z)} \end{aligned}$$

La proposition 20 montre que  $\mathcal{H}^{\varphi_n}$  et  $\mathcal{H}^{\varphi_n\varphi_0}$  sont chacun la somme d'un filtre rationnel stable et d'un filtre diffusif. Le théorème 7 donne alors les comportements asymptotiques de  $\int_0^1 \mu^{FI}(\rho)\varphi_n(\rho) d\rho$  et de  $V(\varphi_n)$  :

$$\int_0^1 \mu^{FI}(\rho)\varphi_n(\rho) d\rho \sim b\frac{\gamma_1}{n^{1-\beta}} \text{ et } V(\varphi_n) = \frac{1}{2}\int_0^1 \mu^{FI}(\rho)\varphi_n^2 d\rho \sim b^2\frac{\gamma_2}{n^{1-\alpha-2\beta}}$$

avec  $\gamma_1, \gamma_2$  des constantes ne dépendant que de  $\alpha$  et  $\beta$ .

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\sin^2(\alpha\pi)}{\pi} \left[ \frac{1}{\tan(\alpha\pi)} - \frac{1}{\tan((\alpha+\beta)\pi)} \right] \Gamma(1-\beta) \\ \gamma_2 &= \frac{\sin^3(\alpha\pi)}{2\pi} \left[ \frac{1}{\tan(\alpha\pi)} - \frac{1}{\tan((\alpha+\beta)\pi)} \right]^2 \frac{\Gamma(1-\alpha-2\beta)}{2^{1-\alpha-2\beta}} \end{aligned}$$

$\int_0^1 \mu^{FI}\varphi_n d\rho$  et  $V(\varphi_n)$  sont représentés sur la figure 8.3, (des fonctionnelles de Lyapunov ont aussi été simulées dans [Hel00, chapitre 7]). Les comportements asymptotiques prédits sont donnés en pointillé. Cette simulation a été difficile à réaliser : ce système est approché par un système de dimension finie avec 300 pôles répartis comme en §C.2 Le dernier pôle est placé à  $1 - 10^{-14}$  Le nombre élevé de pôles fait que `cm`, l'ensemble des résidus associés à chaque pôle ne peut plus être évalué par le programme `approximation2.m`, une formule approchée a été utilisée : `cm=mu.*(rp-rm)/2`, ce qui est fait dans le programme `approximation2.m` (p. 165).

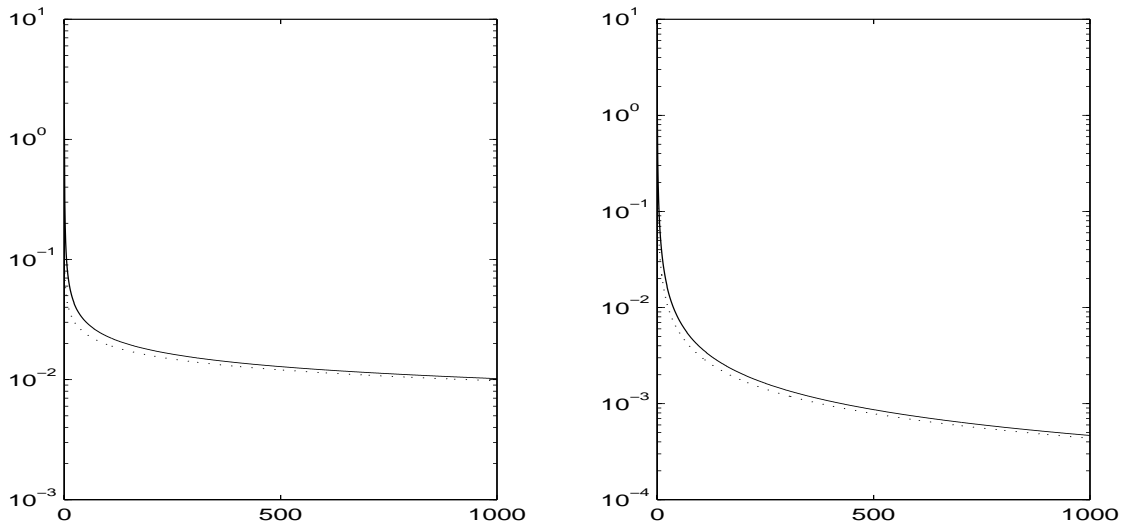


FIG. 8.3 – Simulation numérique de  $\varphi_{n+1} = \rho\varphi_n - \int_0^1 \mu^{FI} \varphi_n d\rho$  pour  $\alpha = 0.4$  et  $\varphi_0(\rho) = (1 - \rho)^{-0.15} + |\rho - 0.5|^{-0.1}$ .  $\int_0^1 \mu^{FI} \varphi_n d\rho$  est représenté sur le graphique de droite et  $V(\varphi_n) = \frac{1}{2} \int_0^1 \mu^{FI} \varphi_n^2 d\rho$  est représentée sur le graphique de gauche. Les comportements asymptotiques prédits sont donnés en pointillé sur chaque courbe.

**Remarque 31** *L'hypothèse  $\varphi_0 \in \mathbb{H}$  n'est pas nécessaire pour faire l'analyse asymptotique de  $v_n, y_n, x_n$ , il suffit que  $\varphi_0 \mu \in L^1$  qui entraîne que  $\forall n \geq 0, \varphi_n \mu \in L^1$ . Sous réserve de vérifier les hypothèses (H1)–(H8) avec (H7) modifié pour inclure le cas où  $\beta < 1 - \alpha$ , le théorème 7 montre que  $v_n, y_n, x_n$  convergent quand même vers zéro. En revanche  $V(\varphi_n)$  n'est plus nécessairement défini.*

En résumé, le système étudié est un couplage entre  $\mathcal{H}^{FI}$  et un filtre rationnel  $\mathcal{R}$ . Le chapitre 7 avait donné une réalisation de ce couplage et avait démontré sa stabilité asymptotique.

Tous calculs faits, il apparaît que les sorties de chaque filtres  $v_n, y_n, x_n$ , l'état  $\mathbf{X}_n$  et aussi  $\int_0^1 \mu^{FI} \varphi_n \varphi_0 d\rho$  sont la somme d'une composante entraînée par  $\mathbf{X}_0$  et d'une composante entraînée par  $\varphi_0$ , parce que les réalisations de  $\mathcal{R}$  et de  $\mathcal{H}$  sont couplées. Ainsi la condition initiale  $\mathbf{X}_0$  a une influence sur  $v_n$  la sortie de  $\mathcal{R}$  mais aussi sur  $y_n$  la sortie de  $\mathcal{H}$  parce que  $v_n$  est l'entrée de  $\mathcal{H}$ .

Les transformées en  $Z$  de  $v_n, y_n, x_n$ , l'état  $\mathbf{X}_n$  et aussi  $\int_0^1 \mu^{FI} \varphi_n \varphi_0 d\rho$  s'expriment aussi en fonction de  $\mathbf{X}_0$  et  $\varphi_0$ . Le résultat de décomposition exposé au §6.2 montre que ces transformées en  $Z$  sont la somme d'un filtre rationnel stable et d'un filtre diffusif.

Les lemmes de correspondance asymptotiques et de Watson-discret présentés au §2.1 et au §2.2 permettent d'en déduire les comportements asymptotiques de  $v_n, y_n, x_n, \mathbf{X}_n, \int_0^1 \mu^{FI} \varphi_n \varphi_0 d\rho$ . Nous avons ainsi montré que la convergence de l'état  $\Phi_n^S$  est lente et que la vitesse de convergence dépend de ce que  $\mathcal{R}$  a un zéro en  $z = 1$ .



# Conclusion

Pour conclure, nous rappelons les résultats établis dans ce document. Nous examinons ensuite la définition des filtres diffusifs à temps discret et le rôle des hypothèses faites sur le symbole diffusif. Une première piste de recherche consiste à étendre le cadre mathématique de façon à lever ces hypothèses. Enfin nous soulèverons quelques questions ouvertes.

L'ensemble de ces résultats sera résumé dans l'article [DM02].

## Résultats établis

Les filtres diffusifs sont définis comme une agrégation continue de dynamiques d'ordre 1 avec un poids appelé symbole diffusif.

- La connaissance numérisée de ce symbole diffusif  $\mu$  suffit pour simuler la fonction de transfert, son prolongement analytique, la réponse impulsionnelle et pour donner une approximation rationnelle du filtre diffusif associé à  $\mu$ .
- Le comportement asymptotique de  $\mu$  en  $\rho = 1$  et en  $\rho = -1$  détermine le comportement aux temps longs de la réponse impulsionnelle et aussi le comportement asymptotique du prolongement analytique de la fonction de transfert au voisinage de  $z = 1$  et de  $z = -1$ . En fait le caractère mémoire longue dépend de ce comportement asymptotique.
- Des conditions suffisantes sont données pour qu'un filtre soit positif (i.e. le diagramme de Nyquist est dans le demi plan complexe de droite). Les mêmes conditions assurent que la réalisation diffusible proposée est dissipative (i.e. il existe une fonction de Lyapunov dont l'évolution le long des trajectoires est majorée par le produit entrée-sortie).

Ces outils sont appliqués à l'étude des stabilités d'un couplage formé, d'un filtre rationnel positif et d'un filtre diffusif positif.

- L'absence de pôle à l'extérieur du disque unité et le critère de Nyquist permettent ici de prouver la stabilité énergétique de ces couplages.
- Chacun de ces couplages se décompose en un filtre rationnel stable et un autre filtre diffusif de symbole diffusif  $\mu^S$ . Le comportement asymptotique de  $\mu^S$  prouve que cet autre filtre diffusif est EBSB stable et par suite le couplage est EBSB stable.

- Une réalisation du couplage est proposée en couplant une réalisation minimale du filtre rationnel positif et une réalisation diffusive du filtre diffusif. La dissipativité de chacune des ces deux réalisations permet de construire une fonction de Lyapunov qui révèle la stabilité interne du couplage. Deux démonstrations du caractère asymptotique de la stabilité asymptotique sont proposées. La première suppose la précompacité des trajectoires et utilise le principe d'invariance de LaSalle. La deuxième utilise une propriété originale des filtres diffusifs : l'opérateur de transition est semblable à son adjoint.
- Cette propriété originale des filtres diffusifs permet d'exprimer la fonction de Lyapunov comme une réponse impulsionnelle diffusive. Les lemmes de Watson discret et les lemmes de comportement asymptotiques donnent le comportement asymptotique de cette fonctionnelle de Lyapunov

## Hypothèses sur les filtres diffusifs

Nous avons choisi de définir un filtre diffusif  $\mathcal{H}$  par ces deux hypothèses :

$$(H1) \quad \mathcal{H}(z) = h_0 + z^{-1} \int_{-1}^1 \frac{\mu(\rho)}{1 - \rho z^{-1}} d\rho \quad \text{où } z \notin [-1, 1]$$

$$\text{et } \forall n \geq 1 \quad h_n = \int_{-1}^1 \mu(\rho) \rho^{n-1} d\rho \text{ et } h_0$$

$$(H2) \quad \mu \text{ est une fonction sommable,}$$

Nous faisons en plus et pour chaque utilisation, des hypothèses sur  $\mu$  qui sont indépendantes :

$$(H3) \quad \text{Il existe } \alpha \in [0, 1[ \text{ tel que } \mu(\rho)(1 - \rho)^\alpha \text{ soit hölderienne sur } \mathbb{I}$$

$$(H4) \quad \int_0^1 |\mu(\rho)| \ln\left(\frac{1}{1-|\rho|}\right) d\rho < +\infty$$

$$(H5) \quad \mu \text{ est de signe constant sur le support de } \mu \text{ et } \mu \text{ vérifie (H4).}$$

$$(H6) \quad \mathcal{H}(-\sigma) > 0 \text{ et } \mu \text{ vérifie (H5).}$$

$$(H7) \quad \mu \text{ est localement hölderienne sur } [-1, 1]$$

Le choix des hypothèses que nous avons fait repose sur un compromis entre la difficulté d'une démonstration et le fait que ces hypothèses soient satisfaites par les exemples étudiés. En l'occurrence  $\mathcal{H}^{FI}$ ,  $\mathcal{H}^{BI}$ ,  $\mathcal{H}^{UN}$ ,  $\mathcal{H}^{LN}$  vérifient ces hypothèses. Rappelons le rôle de chacune de ces hypothèses dans ce document.

(H1) Les filtres diffusifs sont définis comme une agrégation continue de filtres élémentaires avec un lien direct  $h_0$  qui ne dépend pas du symbole diffusif. Cette relation entre  $h_0$  et  $\mu$  existe naturellement lorsqu'on discrétise un opérateur diffusif à temps continu, mais cette relation dépend du schéma de discrétisation (voir §1.2.1).

(H2) Tout au long de ce document, le poids  $\mu$  de cette agrégation conti-

nue est supposé sommable. Cette hypothèse entraîne la continuité de l'opérateur d'observation des réalisations diffusives (i.e.  $\varphi \mapsto \int_{\mathbb{I}} \mu \varphi(\rho) d\rho$  voir §1.2.2), et la continuité de l'opérateur de transition (i.e.  $\Phi \mapsto \mathcal{T}(\Phi)$  voir §7.1.1). (H2) permet aussi de déduire la convergence de la sortie d'un filtre diffusif vers zéro à partir de la convergence faible de l'état (cf : §7.2.1).

(H2) simplifie aussi la majoration des inégalités dans le lemme de Watson discret (cf §2.1).

(H3) Dans le chapitre 2, cette hypothèse permet d'en déduire le comportement asymptotique de la fonction de transfert  $\mathcal{H}(z)$  au voisinage de  $z = 1$  et de la valeur principale de Cauchy  $\mathcal{V}_\mu$  au voisinage de  $\rho = 1$  grâce au lemme 2 (p. 42) dit de correspondance asymptotique. Cette hypothèse permet aussi d'en déduire le comportement aux temps long de la réponse impulsionnelle grâce au lemme 1 (p. 40) dit de Watson-discret.

Ces résultats sont utilisés dans le chapitre 6 pour donner le comportement asymptotique de la réponse impulsionnelle d'un système couplé. Ils sont aussi utilisés dans le chapitre 8 pour donner sur un exemple le comportement asymptotique de  $V(\varphi_n)$  et de la sortie du filtre diffusif  $y_n$ .

(H4) A partir du chapitre 3,  $\mu$  vérifie  $\int_0^1 |\mu(\rho)| \ln(\frac{1}{1-|\rho|}) d\rho < +\infty$ . En pratique si  $\exists \alpha < 1$ ,  $\mu(\rho) = O(1 - |\rho|)^{-\alpha}$  quand  $\rho \rightarrow \pm 1$  alors  $\mu$  vérifie (H4). (H4) suffit pour montrer que  $\mathcal{H} \in \mathbb{H}^1(\mathbb{E})$ . La positivité peut alors être définie par  $\text{Re}(\mathcal{H}(e^{i\omega}) \geq 0$  et entraîner que  $\forall z \in \mathbb{E} \text{Re}(\mathcal{H}(z)) > 0$  (voir §3.1.1). Cette inégalité stricte est utilisée pour prouver la stabilité énergétique des filtres appartenant à  $\Sigma_2$  (voir le chapitre 5).

(H5)  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont définis avec des filtres diffusifs  $\mathcal{H}$  dont les symboles diffusifs sont de signe constant  $\sigma$  et vérifient  $\mu = O(1 - |\rho|)^{-\alpha}$  quand  $\rho \rightarrow \pm 1$ . La positivité de  $\mathcal{H}$  est équivalente à la positivité de  $\mathcal{H}(-\sigma)$  qui à son tour entraîne la dissipativité de la réalisation diffusives (1.9), (voir §3.1.2 et §3.2.1).

(H6) Dans les chapitres 7 et 8  $\mathcal{H}$  est supposé strictement positif. Cette hypothèse plus forte que la dissipativité permet de construire une fonction de Lyapunov  $\mathbf{E}$  qui montre la stabilité asymptotique de  $\mathcal{H}_\Phi^S$  (voir §7.1.3 et §7.2).

(H7) Dans le chapitre 6,  $\mu$  est localement hölderienne sur  $[-1, 1]$ . En pratique si  $\mu$  est  $C^1$  sauf en un nombre fini de points notés  $\mathbb{S}$  alors  $\mu$  vérifie (H7). Le support de  $\mu$  est noté  $\mathbb{I}$ . Cette hypothèse est utilisé pour démontrer le résultat de décomposition du §6.2 sur  $\mathcal{H}^S = \frac{1}{\mathcal{Q}} \frac{\mathcal{R}}{1 + \mathcal{R}\mathcal{H}} \in \Sigma_2$ . Pour  $\varrho \in \mathbb{I} \setminus \mathbb{S}$ , la fonction de transfert du filtre diffusif associé à  $\mu$  admet une limite quand  $z \rightarrow \varrho$  avec  $\text{Im}(z) > 0$  et aussi une limite quand  $z \rightarrow \varrho$  avec  $\text{Im}(z) < 0$  (voir chaitre 1). Des hypothèses supplémentaires sur  $\mu$ ,  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{Q}$  montrent que  $\mathcal{Q}(1 + \mathcal{R}\mathcal{H})$  ne s'annule sur un voisinage de  $[-1, 1]$  ni sur  $\mathbb{E}$ . Cela permet de décomposer  $\mathcal{H}^S$  en une fonction de transfert



rationnelle  $\mathcal{N}$  et une fonction de transfert qui peut être prolongée sur  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1] : \mathcal{H} - \mathcal{N}$ .  $\mathcal{H}^S$  admet aussi des limites quand  $z \rightarrow \varrho$ , ces limites se calculent à partir de celles de  $\mathcal{H}$ . Quelques hypothèses supplémentaires sur  $\mu$  et sur les filtres rationnels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{Q}$  montrent que  $\mathcal{H} - \mathcal{N}$  est un filtre diffusif.

## Extension du cadre mathématique

Le théorème 5 (p. 83) a été montré sous des hypothèses qui requièrent une absence d'oscillations pour  $\mu$  au voisinage de ses éventuelles singularités. Ces hypothèses permettent d'utiliser les convergences tangentielles utilisées par le théorème 1 (p. 31). Il est possible d'affaiblir les hypothèses requises sur  $\mu$  en modifiant le théorème 1 avec des convergences non-tangentielles (cf : remarque 9 p. 35).

Une première généralisation est de supposer que  $\mu$  n'est plus une fonction sommable, mais une mesure signée non diffuse :  $\mathcal{H}(z) = h_0 + z^{-1} \int \frac{\mu(d\rho)}{1 - \rho z^{-1}}$ .

Cette mesure se décompose en une partie absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et une partie discrète. Cette extension<sup>1</sup> devrait permettre d'inclure des filtres avec une infinité dénombrable de pôles sur  $[-1, 1]$  approchant  $z = 1$  ou  $z = -1$ .

Il est possible de définir à temps discret un produit  $\# : \mathcal{H}^{\mu_1} \mathcal{H}^{\mu_2} = \mathcal{H}^{\mu_1 \# \mu_2}$  où  $\mathcal{H}^{\mu_1}$ ,  $\mathcal{H}^{\mu_2}$  et  $\mathcal{H}^{\mu_1 \# \mu_2}$  sont les fonctions de transfert associées à  $\mu_1$ ,  $\mu_2$   $\mu_1 \# \mu_2$  et de liens directs nuls. Si  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont suffisamment réguliers l'application du théorème 2 et du théorème 1 conduit à  $\mu_1 \# \mu_2 = \mathcal{V}_{\mu_1} \mu_2 + \mu_1 \mathcal{V}_{\mu_2}$ . A l'image des travaux faits à temps continu (cf : [Mon98]), nous pensons que ce produit  $\#$  pourrait être le produit interne d'une algèbre qui contienne les mesures mais aussi la dérivée d'un Dirac et les valeurs principales. Ainsi  $(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^{-2}(1 - z^{-1})^{-\alpha}$  aurait comme symbole diffusif :  $-\delta'(\rho - \frac{1}{2}) \# \left( \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \rho^\alpha (1 - \rho)^{-\alpha} \right)$ .

Une autre piste de recherche est de considérer les représentations diffusives de deuxième espèce (cf : [DM00], [Mon00b] et [MA01]). Pour cela on introduit une courbe fermée  $\Gamma$  contenue dans le disque unité  $\mathbb{D} \cup \{-1, 1\}$ . On paramètre cette courbe par  $\gamma(\rho)$  sur  $[-1, 1]$ . Les relations (1.10) et (1.6) devraient pouvoir s'écrire  $\mu(\rho) = \frac{\gamma'(\rho)}{2i\pi}(\rho) \lim_{z \rightarrow \gamma(\rho)} \mathcal{H}(z)$  et  $\mathcal{H}(z) = h_0 + z^{-1} \int_{-1}^1 \frac{\mu(\rho)}{1 - \gamma(\rho)z^{-1}} d\rho$  (la limite étant prise pour  $z$  hors de  $\Gamma$  et pour chaque valeur de  $\rho$ ). Lorsque la courbe  $\Gamma$  s'aplatit sur  $[-1, 1]$ , on retrouve les représentations diffusives de première espèce. Sinon  $\mathcal{H}$  est une agrégation continue de filtres du second ordre. Nous pensons que pour certaines courbes

<sup>1</sup>Dans [Sta94], une généralisation semblable à temps continu avec une mesure positive a déjà été proposée

$\Gamma$ , le travail sur le comportement asymptotique et sur la positivité pourrait être préservé. On peut espérer qu'un choix particulier de courbe  $\Gamma$  soit tel que  $\mu$  est  $C^\infty$  sur  $] - 1, 1[$ . Dans cette perspective, les hypothèses (H1)... (H7) seraient moins une restriction.

## Questions ouvertes

Nous proposons quelques questions ouvertes.

- Lorsqu'un opérateur diffusif à temps continu  $\mathcal{H}^\sharp$  est discrétisé en  $\mathcal{H}$ , quels liens peut-il y avoir entre l'état  $\varphi(\xi, t)$  d'une réalisation diffusive de  $\mathcal{H}^\sharp$  et l'état  $\varphi_n(\rho)$  d'une réalisation diffusive de  $\mathcal{H}$  lorsque la période d'échantillonnage  $T$  vérifie  $t = Tn$ ? Est-ce que la fonctionnelle de Lyapunov appliqué à  $\varphi_n$  révélant la dissipativité de  $\mathcal{H}$  converge vers la fonctionnelle de Lyapunov semblable et qui révèle la dissipativité de  $\mathcal{H}^\sharp$ ?
- Les résultats obtenus sont valables pour des filtres à temps discret. Dans le cas où ces filtres sont des discrétisations d'opérateurs à temps continu, Est-ce que les résultats de stabilité sont encore vrais lorsque la période d'échantillonnage tend vers zéro?
- La convergence de l'algorithme qui propose une approximation rationnelle  $\hat{\mathcal{H}}$  à un filtre diffusif  $\mathcal{H}$  a été démontrée en boucle ouverte. Est-ce que le couplage formé de  $\hat{\mathcal{H}}$  et d'un autre filtre rationnel  $\mathcal{R}$  converge vers le couplage formé de  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{R}$ ?
- Nous avons montré que l'hypothèse (H5) implique que  $(1 - z^{-1})\mathcal{H}(z) \rightarrow 0$  quand  $z \rightarrow 1$  avec  $z \notin \mathbb{E}$ . Les exemples de filtres diffusifs étudiés dans la thèse vérifient  $(1 - z^{-1})\mathcal{H}(z) \rightarrow 0$  quand  $z \rightarrow 1$  avec  $z \notin [-1, 1]$  Cette connaissance est nécessaire pour appliquer le théorème 1 (p. 31) et ainsi reconnaître qu'un filtre est diffusif (voir §6.3 et §8.1.2). Quelles sont les conditions suffisantes sur le symbole diffusif  $\mu$  d'un filtre diffusif  $\mathcal{H}$  qui entraînent que  $(1 - z^{-1})\mathcal{H}(z) \rightarrow 0$  quand  $z \rightarrow 1$  avec  $z \notin [-1, 1]$ ? La remarque 9 (p. 35) montre que ces conditions sur  $\mu$  ne peuvent inclure l'ensemble des fonctions bornées sur un voisinage de  $\rho = 1$ .
- Inspiré par [Mat98b], les réalisations diffusives sont étendues dans [DHM00] à des fonctions de transfert ayant un point de branchement  $e^{i\omega_0}$  et  $e^{-i\omega_0}$  sur le cercle unité. Ces fonctions de transfert peuvent alors se mettre sous la forme  $\frac{1}{2}[\mathcal{H}(e^{i\omega_0}z) + \mathcal{H}(e^{-i\omega_0}z)]$  et la réponse impulsionnelle est oscillante et l'amplitude de son oscillation est lentement décroissante.. Ces filtres sont une agrégation continue de filtres d'ordre 2. Existe-t-il pour un filtre rationnel  $\mathcal{R}$  des conditions suffisantes analogues à la positivité, telles que le couplage formé de  $\mathcal{R}$  et  $\frac{1}{2}[\mathcal{H}(e^{i\omega_0}z) + \mathcal{H}(e^{-i\omega_0}z)]$  soit stable?
- Nous avons montré qu'il est possible d'utiliser un filtre diffusif pour stabiliser un filtre rationnel instable. Peut-on généraliser l'étude au couplage de deux filtres diffusifs? Les remarques 25 (p. 74) et 29 (p. 101) suggèrent

qu'il y a quelques points délicats, cependant l'article [WST01] invite à répondre favorablement.

- Quelles sont les propriétés, par exemple, en terme de robustesse, qui feraient qu'il soit préférable d'utiliser un filtre diffusif plutôt qu'un filtre rationnel pour stabiliser un filtre rationnel instable ?
- Il est possible d'utiliser la positivité d'un filtre diffusif  $\mathcal{H}$  pour montrer la stabilité d'un bouclage avec une *non-linéarité* vérifiant une condition sectorielle, à l'image de ce qu'a fait [ZF68]. Une tentative a été faite dans [DM01b]. Peut-on écrire  $\mathcal{H}$  comme une agrégation de filtres  $\mathcal{H}_\rho$  tels que les couplages formés d'une non-linéarité donnée et de  $\mathcal{H}_\rho$  soient stables ? Peut-on alors en déduire la stabilité du couplage formé de cette non-linéarité et de  $\mathcal{H}$  ? Est-ce que le couplage formé d'une approximation rationnelle  $\hat{\mathcal{H}}$  de  $\mathcal{H}$  avec cette non-linéarité forme encore un système stable, est-ce que ce couplage converge le premier couplage lorsque  $\hat{\mathcal{H}}$  s'approche de  $\mathcal{H}$  ?
- $V$  est une fonctionnelle de Lyapunov qui a permis de montrer la stabilité interne asymptotique du couplage d'une réalisation minimale d'un filtre rationnel positif et d'un filtre diffusif positif. Lors du chapitre 8 nous avons montré sous des conditions techniques et quand  $n \rightarrow \infty$ , que  $V(\varphi_n) \sim \frac{K}{n^\gamma}$ , où  $K$  et  $\gamma$  dépendent du comportement asymptotique de la condition initiale  $\varphi_0$  et du symbole diffusif  $\mu$  associé à  $\mathcal{H}$ . A temps continu, une autre fonctionnelle de Lyapunov  $E$  a aussi permis de montrer la stabilité interne asymptotique de nombreux couplages comportant un opérateur diffusif de symbole diffusif  $\nu$ . Est-ce qu'avec des conditions idoines sur  $\nu$  (peut-être trop restrictives), on peut montrer que  $E(\varphi(t)) \sim \frac{K}{t^\gamma}$  où  $K$  et  $\gamma$  ne dépendraient pas de  $t$ .

# Bibliographie

- [AMM00a] J. Audounet, D. Matignon, and G. Montseny. Diffusive representations of fractional and pseudo-differential operators. In *Research Trends in Science and Technology*, pages 171–180, Beirut, Lebanon, March 2000.
- [AMM00b] J. Audounet, D. Matignon, and G. Montseny. Semi-linear diffusive representations for non-linear fractional differential systems. In A. Isidori, F. Lamnabhi-Lagarrigue, and W. Respondek, editors, *Nonlinear Control in the Year 2000*, volume 1, pages 73–82. CNRS, NCN, Springer Verlag, 2000.
- [And94] J.E. Andersson. Best rational approximation to markov functions. *Journal of Approximation Theory*, 76 :219–232, 1994.
- [ANCL94] B. d’Andréa-Novel and M. Cohen de Lara. *Commande Linéaire des Systèmes Dynamiques*. Coll. MASC. Masson, 1994.
- [AS72] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions*. Dover, 10th edition, 1972.
- [BBF74] J. S. Baras, R. W. Brockett, and P. A. Fuhrmann. State-space models for infinite-dimensional systems. *IEEE Transactions on automatic control*, AC-19(6) :693–700, December 1974.
- [BCL97] B. Beckermann, S. Cabay, and G. Labahn. Fraction-free Computation of Matrix Padé Systems. In *ISSAC*, pages 125–132, Maui, 1997. ACM Press.
- [BD86] P. Brockwell and R. Davis. *Time Series Theory and Methods*, pages 114–122. Springer Series in Statistics, 1986.
- [Bid98] P. Bidan. Commande diffusive d’une machine électrique : une introduction. *ESAIM : Proceedings*, 5 :55–68, décembre 1998. URL : <http://www.emath.fr/Maths/Proc/Vol.5/>.
- [BJ76] G.E.P. Box and G.M. Jenkins. *Time Series Analysis : Forecasting and Control*. Holden-Day Series, San Francisco, 1976.
- [BK00] L. Baratchart and R. Küstner. Pole behaviour in identification. In *Conference on Decision and Control*, pages 2001–2004, Sydney, Australia, December 2000. IEEE.

- [BMS98] J.-M. Bardet, E. Moulines, and P. Soulier. Recent advances on the semi-parametric estimation of the long-range dependence coefficient. *ESAIM : Proceedings*, 5 :29–41, December 1998. URL : <http://www.emath.fr/Maths/Proc/Vol.5/>.
- [Boc96] N. Boccarda. *Fonctions Analytiques*. Ellipses, 1996.
- [Boc97] N. Boccarda. *Distributions*. Ellipses, 1997.
- [Bon92] C. Bonnet. Réduction de systèmes linéaires discrets de dimension infinie : étude de filtres fractionnaires. *RAIRO Automat. Prod. Inform. Ind. (Théorie des systèmes et théorie de la commande)*, 26(5-6) :322–422, 1992.
- [Bon93a] C. Bonnet. Approximation of infinite dimensional discrete time linear systems via balanced realizations and an application to fractional filters. In *Lectures Notes in Control and Information Sciences*, volume 185, pages 574–584. 10th International Conference on Analysis and Optimization of Systems, 1993.
- [Bon93b] C. Bonnet. Convergence and rate of convergence of the balanced realization truncations for infinite-dimensional discrete-time systems. *Systems and Control Letters*, 20 :353–359, 1993.
- [BP99] C. Bonnet and J. Partington. Bézout factors and  $L^1$ -optimal controllers for delay systems using a two-parameter compensator scheme. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(8) :1512–1521, August 1999.
- [BP00a] C. Bonnet and J. R. Partington. Coprime factorizations and stability of fractional differential systems. *Systems & Control Letters*, 41 :167–174, May 2000.
- [BP00b] C. Bonnet and J. R. Partington. Stabilization and nuclearity of fractional differential systems. In *Mathematical Theory of Networks and Systems symposium*, 5 pages, Perpignan, France, June 2000. MTNS.
- [BP01] C. Bonnet and J. R. Partington. Analysis of fractional delay systems of retarded and neutral type. *Automatica*, 10 pages, 2001. submitted for publication.
- [Bra86] D. Braess. *Nonlinear approximation Theory*. Number 7 in Computational Math. Springer Series, Berlin, New York, 1986.
- [Cai88] P. Caines. *Linear Stochastic Systems*. Montreal and the Canadian Institute for Advance Research, 1988.
- [CC98] P. Carmona and L. Coutin. Simultaneous approximation of a family of (stochastic) differential equations. *ESAIM : Proceedings*, 5 :69–74, December 1998. URL : <http://www.emath.fr/Maths/Proc/Vol.5/>.

- [Cha85] B. Chabat. *Introduction à l'analyse complexe*, volume 1. Mir, 1985. (translated from Russian, 1990).
- [Chr82] R.M. Christensen. *Theory of Viscoelasticity. An introduction*. Academic Press, 2nd edition, 1982.
- [CZ95] R. F. Curtain and H. J. Zwart. *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*, volume 21 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer Verlag, 1995.
- [DHM00] G. Dauphin, D. Heleschewitz, and D. Matignon. Extended diffusive representations and application to non-standard oscillators. In *Mathematical Theory of Networks and Systems symposium*, 10 pages, Perpignan, France, June 2000. MTNS.
- [DL84] R. Dautray et J.L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, tome 1. Masson, Paris, 1984.
- [DM88] W. Desch and R. K Miller. Exponential stabilization of volterra integral equations with singular kernels. *Journal of Integral Equations and Applications*, 1 :397–433, 1988.
- [DM99] G. Dauphin et D. Matignon. Premiers résultats sur les représentations diffusives à temps discret et application aux filtres ARFIMA. In *Journées Doctorales d'Automatique*, pages 45–48, Nancy, France, septembre 1999. GDR AUTOMATIQUE.
- [DM00] M. Dunau et G. Montseny. Représentation diffusive de seconde espèce : introduction et expérimentation. Rapport de stage de DEA, Ecole doctorale systèmes DEA Systèmes Automatiques, Toulouse, 2000.
- [DM01a] G. Dauphin et D. Matignon. Application of diffusive representations to discretized fractional systems : stability, positivity and simulation issues. In *European Control Conference*, pages 1490–1495, Porto, Portugal, September 2001. ECC.
- [DM01b] G. Dauphin et D. Matignon. Stabilité interne d'un système couplé à temps discret, formé d'un oscillateur et d'un filtre diffusif dissipatif. In *Journées Doctorales d'Automatique*, pages 189–194, Toulouse, France, septembre 2001. GDR AUTOMATIQUE.
- [DM02] G. Dauphin et D. Matignon. Study of coupling of diffusive filters and rational filters : external stability, decomposition result, coprime factorization, and asymptotic analysis. In G. Montseny, J. Audounet, P. Bidan, et D. Matignon, éditeurs, *Opérateurs pseudo-différentiels et représentation diffusive en modélisation, contrôle et signal*, 2002. En préparation.

- [Dur70] P. Duren. *Theory of  $\mathbb{H}_p$  spaces*, volume 38. Pure and Applied Maths, Academic Press, 1970.
- [DV75] C. A. Desoer and M. Vidyasagar. *Feedback Systems : Input-Output Properties*. Electrical Science. Academic Press, New York, 1975.
- [Erd56] A. Erdélyi. *Asymptotic Expansions*. Dover, 1956.
- [FCG79] P. Faure, M. Clerget, et F. Germain. *Opérateurs rationnels positifs*. Méthodes mathématiques de l'informatique (Dunod), 1979.
- [FL01] I. Fantoni and R. Lozano. Control of nonlinear mechanical systems. *European Journal of Control*, 7 :328–348, September 2001.
- [Gak66] F.D. Gakhov. *Boundary value problems*. Pergamon Press, 1966. translated by I.N. Sneddon.
- [Gar81] J. Garnett. *Bounded analytic functions*. Academic Press, 1981.
- [GB98] G. Garcia and J. Bernussou. Identification of the dynamics of a lead acid battery by a diffusive model. *ESAIM : Proceedings*, 5 :87–98, December 1998. URL : <http://www.emath.fr/Maths/Proc/Vol.5/>.
- [GD96] C. Granger and Z. Ding. Varieties of long memory models. *Journal of Econometrics*, 73 :61–77, 1996.
- [GJ80] C.W.J. Granger and R. Joyeux. An introduction to long-memory time series models and fractional differencing. *Journal of Time Series Analysis*, 1(1) :15–29, 1980.
- [GM97] R. Gorenflo and F. Mainardi. Fractional calculus : Integral and differential equations of fractional order. In A. Carpinteri and F. Mainardi, editors, *Fractals and fractional calculus in continuum mechanics*, pages 223–276. Springer Verlag, 1997.
- [Gra80] C.W.J. Granger. Long memory relationships and the aggregation of dynamic models. *Journal of Econometrics*, 14 :227–238, 1980.
- [GZW86] H.L. Gray, N.-F. Zhang, and W.A. Woodward. On generalized fractional processes. *Journal of Time Series Analysis*, 10(3) :233–257, 1986.
- [Har90] A. Haraux. *Systèmes dynamiques dissipatifs*, volume 17 of *Recherche en mathématiques appliquées*. Paris, 1990.
- [Hel00] D. Heleschewitz. *Analyse et simulation de systèmes différentiels fractionnaires et pseudo-différentiels linéaires sous*

- représentation diffusive*. Thèse de Doctorat, ENST Paris, décembre 2000.
- [HM98] D. Heleschewitz and D. Matignon. Diffusive realisations of fractional integrodifferential operators : structural analysis under approximation. In *Conference IFAC System, Structure and Control*, volume 2, pages 243–248, Nantes, France, July 1998.
- [HM99] D. Heleschewitz et D. Matignon. Réalisations et approximations diffusives d’oscillateurs avec amortissements viscoélastiques. In *Journées Doctorales d’Automatique*, pages 49–52, Nancy, France, septembre 1999. GDR AUTOMATIQUE.
- [Hof88] K. Hoffmann. *Banach spaces of analytic functions*. Dover, New York, 1988.
- [Hos81] J.R.M. Hosking. Fractional differencing. *Biometrika*, 68(1) :165–176, 1981.
- [HP57] E. Hille and R.S. Phillips. *Functional Analysis and Semigroups*, volume 31. American Mathematical Society Collection, Providence, 1957.
- [Hur51] H.E. Hurst. Long term storage capacity reservoirs. *Trans. Amer. Soc. Civil Engineers*, 116 :770–799, 1951.
- [IMM00] N. Imbert, Ph. Mouyon, et G. Montseny. Représentation spectrale diffusive du vent turbulent 2D. Rapport interne 00203, LAAS/CNRS, mai 2000.
- [Kal63] R.E. Kalman. Lyapunov functions for the problem of Lur’e in Automatic control. *Proc. Natl. Acad. Sci*, 42(2) :201–205, 1963.
- [Kat68] Y. Katznelson. *Harmonic Analysis*. Dover Publications, New York, 1968.
- [KN77] M. G. Krein and A. A. Nudel’man. *THE Markov Moment Problem and Extremal Problems*, volume 50. Translations of Mathematical Monographs, Providence, 1977.
- [LaS83] J. P. LaSalle. *The Stability and Control of Discrete Processes*, volume 62. Springer-Verlag in Applied Mathematical Sciences, 1983.
- [Lin91] Jin-Lung Lin. Generalized integrated process and the aggregation of dynamic time series. *Academia Economic Papers*, 19(2) :341–360, September 1991.
- [Lub86] Ch. Lubich. Discretized fractional calculus. *SIAM J. Math. Anal.*, 17(3) :704–719, 1986.



- [MA01] G. Montseny et J. Audounet. Représentation diffusive : une introduction. In *Journées Doctorales d'Automatique*, pages 313–318, Toulouse, France, septembre 2001. GDR AUTOMATIQUE.
- [MAM93] G. Montseny, J. Audounet, and B. Mbodje. Optimal models of fractional integrators and application to systems with fading memory. In *Conference IEEE Systems, Man and Cybernetics*, volume 5, pages 65–70, Le Touquet, France, October 1993. IEEE-SMC.
- [MAM97] G. Montseny, J. Audounet, and D. Matignon. Fractional integrodifferential boundary control of the Euler–Bernoulli beam. In *Conference on Decision and Control*, pages 4973–4978, San Diego, California, December 1997. IEEE-CSS, SIAM.
- [MAM98] D. Matignon, J. Audounet, and G. Montseny. Energy decay for wave equations with damping of fractional order. In *Fourth international conference on mathematical and numerical aspects of wave propagation phenomena*, pages 638–640, Golden, Colorado, juin 1998. INRIA, SIAM.
- [MAM00] G. Montseny, J. Audounet, and D. Matignon. Diffusive representation for pseudo-differentially damped non-linear systems. In A. Isidori, F. Lamnabhi-Lagarrigue, and W. Respondek, editors, *Nonlinear Control in the Year 2000*, volume 2, pages 163–182. Springer Verlag, 2000.
- [MAN97] D. Matignon and B. d'Andréa-Novel. Observer-based controllers for fractional differential systems. In *Conference on Decision and Control*, pages 4967–4972, San Diego, California, December 1997. IEEE-CSS, SIAM.
- [Mat94] D. Matignon. *Représentations en variables d'état de modèles de guides d'ondes avec dérivation fractionnaire*. Thèse de Doctorat, Univ. Paris XI, Novembre 1994.
- [Mat98a] D. Matignon. Generalized fractional differential and difference equations : stability properties and modelling issues. In *Mathematical Theory of Networks and Systems symposium*, pages 503–506, Padova, Italy, July 1998. MTNS.
- [Mat98b] D. Matignon. Stability properties for generalized fractional differential systems. *ESAIM : Proceedings*, 5 :145–158, Décembre 1998. URL : <http://www.emath.fr/Maths/Proc/Vol.5/>.
- [Mat01] D. Matignon. Introduction au calcul fractionnaire. In P. Abry, P. Gonçalves, et J. Lévy-Véhel, éditeurs, *Fractals et Lois d'Échelle, Traité "Information - Commande - Communication"*, 50 pages. Hermès, 2001.

- [MBAM00] G. Montseny, P. Bidan, J. Audounet, et D. Matignon. Représentations diffusives d'opérateurs pseudo-différentiels. Applications en électromagnétisme. In *3èmes Journées d'électromagnétisme et micro-ondes*, 4 pages, Toulouse, France, janvier 2000. ENSEEIHT.
- [MM98] D. Matignon and G. Montseny, editors. *Fractional Differential Systems : models, methods and applications*, volume 5 of *ESAIM : Proceedings*, URL : <http://www.emath.fr/Maths/Proc/Vol.5/>, December 1998. SMAI.
- [MM99] D. Matignon and G. Montseny. Analysis and numerical simulation of long-memory viscoelastic systems by means of diffusive representations. In *International Conference on Scientific Computations*, pages 421–430, Beirut, Lebanon, March 1999.
- [MNC97] S. Monaco and D. Normand-Cyrot. On the conditions of passivity and losslessness in discrete time. In *European Control Conference*, 13 pages, Brussels, September 1997. ECC.
- [Mon98] G. Montseny. Diffusive representation of pseudo-differential time-operators. *ESAIM : Proceedings*, 5 :159–175, décembre 1998. URL : <http://www.emath.fr/Maths/Proc/Vol.5/>.
- [Mon00a] G. Montseny. Précompacité des trajectoires. Technical report, LAAS/CNRS, 2000. URL : <http://www.laas.fr/laasvf/index.htm>.
- [Mon00b] G. Montseny. Représentation diffusive : éléments et extensions. Technical Report 00312, LAAS/CNRS, juillet 2000.
- [Mus92] N.I. Muskhelishvili. *Singular Integral Equations : Boundary properties of function theory and their application to mathematical physics*. Dover, New York, 1992. First edition : Moscow, 1946.
- [MS94] A. Monin and G. Salut. Exact ARMA lattice predictors from autocorrelation functions. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(4) :877–885, April 1994.
- [NAC84] J.C. Nédélec, M. Artola, et M. Cessenat. Méthodes de résolution utilisant les fonctions analytiques et les fonctions sectionnellement analytiques. In R. Dautray et J.L. Lions, éditeurs, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, tome 2, pages 561–634, Paris, 1984. Masson.
- [Net73] A. Netushil. *Theory of Automatic Control*. Mir, 1973.

- [Ous83] A. Oustaloup. *Systèmes asservis linéaires d'ordre fractionnaire*. Série Automatique. Masson, 1983.
- [Ous95] A. Oustaloup. *La dérivation non entière : théorie, synthèse, applications*. série Automatique. Éditions Hermès, 1995.
- [Par89] J. Partington. *An Introduction to Hankel Operators*, volume 31. Cambridge University Press, 1989.
- [Par97] J. Partington. *Interpolation Identification and Sampling*. Oxford Science Publications, London Mathematical Society Monographs edition, 1997.
- [Pod99] I. Podlubny. *Fractional differential equations*, volume 198 of *Mathematics in science and engineering*. Academic Press, 1999.
- [Ran96] A. Rantzer. On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma. *Systems & Control Letters*, 28 :7–10, November 1996.
- [Rou53] P.E. Rouse. A theory of the linear viscoelastic properties of the dilute solutions of coiling polymers. *Chemical Physics*, 21(7), July 1953.
- [Rud75] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Masson, Paris, 1975.
- [Sas01] A. J. Sasane. Hankel norm approximation for non-exponentially stable infinite-dimensional systems. *Integral Equations and Operator Theory*, 2001. submitted for publication.
- [Sen76] E. Seneta. *Regularly Varying Functions*. Number 508 in Springer-Verlag. Lecture Notes in Mathematics, New York, 1976.
- [SKM87] S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev. *Fractional integrals and derivatives : theory and applications*. Gordon & Breach, 1987. (translated from Russian, 1993).
- [SLMF97] J. Solhusvik, F. Lavernhe, G. Montseny, and J. Farré. A new low-noise CCD signal acquisition method based on a commutable band-pass filter. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II*, 44(3) :164–173, March 1997.
- [Sor00] M. Sorine. On a class of pseudo-differential hysteresis operators : Systems theory viewpoint. In *Compte-rendu du Séminaire Représentation diffusive & Applications*, pages 73–78, Toulouse, France, November 2000. LAAS/CNRS.
- [Sta94] O. Staffans. Well-posedness and stabilizability of a viscoelastic equation in energy space. *Transactions of the American Mathematical Society*, 345(2) :527–575, October 1994.

- [Sta01a] O. J. Staffans. Passive and lossless infinite-dimensional systems. page 46, 2001. Submitted for publication.
- [Sta01b] O. J. Staffans. Well-posed linear systems : Part I. Book manuscript, Abo Akademi University, 2001. available at <http://www.abo.fi/~staffans/>.
- [VAMM00] F.-A. Devy Vareta, J. Audounet, D. Matignon, and G. Montseny. Pseudo-invariance by matched scaling : application to diffusive control of a flexible beam. In *Second European Conference on Structural Control*, 17 pages, Marne-La-Vallée, France, July 2000. ENPC.
- [Vat98] S. Vaton. *Modélisation statistique de trafic sur réseau local : application au contrôle dynamique de bande passante*. Thèse de Doctorat, ENST, décembre 1998.
- [VDO95] M. Viano, C. Deniau, and G. Oppenheim. Long-range dependence and mixing for discrete time fractional processes. *Journal of Time Series Analysis*, 16(3) :323–338, 1995.
- [WST01] G. Weiss, O. J. Staffans, and M. Tucnak. Well-posed linear systems – a survey with emphasis on conservative systems. *Appl. Math. Comp. Sci.*, 11 :7–34, 2001.
- [WG78] W.A. Woodward and H.L. Gray. ARMA models for wolfer’s sunspot data. *Commun. Statistics*, B7 :97–115, 1978.
- [Wid46] D.V. Widder. *The Laplace Transform*. Princeton University Press, 1946.
- [Wil72] J. C. Willems. Dissipative dynamical systems. part I : general theory. *Archive for Rational Mechanics*, 45(5) :321–351, 1972.
- [WR74] P. Whittle and J. Rudge. The optimal linear solution of a symmetric team control problem. *Journal of Applied Probability*, 11 :377–381, 1974.
- [WW68] J. C. Willems and R. W. Brockett. Some new rearrangement inequalities having application in stability analysis. *IEEE Transactions Automatic Control*, 13(5) :539–549, 1968.
- [Yak66] V. Yakubovich. The solution of certain matrix inequalities in automatic control theory. *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 143 :1304–1307, 1966.
- [You88] N. Young. *An introduction to Hilbert space*. Cambridge University Press, 1988.
- [Zam66] G. Zames. On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems Part I : Conditions derived using

- concepts of loop gain, conicity, and positivity. *IEEE Trans. Automatic Control*, 11(2) :228–238, 1966.
- [Zam96] G. Zames. Input-output feedback stability and robustness, 1959-85. *IEEE Control Systems*, 16(3) :61–66, 1996.
- [ZF68] G. Zames and P.L. Falb. Stability conditions for systems with monotone and slope-restricted nonlinearities. *SIAM J. Control*, 6(1) :89–108, 1968.

### Sites internet

- [http ://www.emath.fr/Maths/Proc/Vol.5/index.htm](http://www.emath.fr/Maths/Proc/Vol.5/index.htm)
- [http ://www.laas.fr/gt-opd/](http://www.laas.fr/gt-opd/)
- [http ://www.fracalmo.org/](http://www.fracalmo.org/)

# Annexe A

## Intégrales de Cauchy

On appelle une intégrale de Cauchy la fonction complexe de variable  $z$  définie par  $\mathcal{H}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{1}{z - \rho} d\mu(\rho)$ . Ici, on ne considèrera pas le coefficient  $\frac{1}{2\pi}$ ;  $L$  est en général un arc, par exemple un cercle. Nous allons considérer uniquement le cas où  $L$  est contenu dans  $[-1, 1]$ .  $\mathcal{H}(z)$  est holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus L$  et la question est d'étudier le comportement de  $\mathcal{H}(z)$  au voisinage de  $L$  ou d'étudier le développement infini de  $\mathcal{H}(z)$  au voisinage d'un point, par exemple l'infini.

L'étude des intégrales de Cauchy d'une fonction densité arbitraire remonte au moins jusqu'à Sokhotski en 1883 et Harnack en 1885. Nous résumons ici les principales propriétés que nous utiliserons.

Les fonctions hœlderiennes sont présentées dans la définition 2 (p. 34).

Nous reproduisons la définition d'une fonction sectionnellement analytique dans [Mus92] dans le cas où la discontinuité est contenu dans  $[-1, 1]$ .

**Définition 4**  $\mathcal{H}$  une fonction sectionnellement analytique avec la ligne de discontinuité  $L \in [-1, 1]$  si et seulement si

(H1)  $\mathcal{H}$  est analytique sur  $\mathbb{C} \setminus L$ .

(H2) Il existe  $\mathbb{S} = \{\rho_j\}$  un ensemble fini de points, tel que la restriction de  $\mathcal{H}$  à  $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$  est prolongeable par continuité sur  $L \setminus \mathbb{S}$ , et la restriction de  $\mathcal{H}$  à  $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) < 0\}$  est aussi prolongeable par continuité sur  $L \setminus \mathbb{S}$ .

(H3) Pour chaque  $\rho_j \in \mathbb{S}$ , il existe  $\kappa_j$  et  $\alpha_j < 1$  tels que pour  $z$  dans un voisinage de  $\rho_j$ ,  $|\mathcal{H}(z)| \leq \frac{\kappa_j}{|z - \rho_j|^{\alpha_j}}$ .

Quand  $\mathcal{H}(z)$  est définie par une fonction de transfert, le théorème 2 (p. 35) donne le comportement de  $\mathcal{H}(z)$  au voisinage de  $L$  lorsque  $\mu$  est suffisamment régulière en l'occurrence hœlderienne. Ce théorème montre que  $\mathcal{H}(z)$  est en fait une fonction sectionnellement analytique.

Le lemme 2 (p. 42) donne le comportement asymptotique de  $\mathcal{H}(z)$  au voisinage de  $z = 1$  et de  $z = -1$ . Ces points correspondent aux extrémités de  $\text{supp } \mu$ .

Les résultats sont qualitativement différents lorsque le comportement asymptotique recherché est autour d'une singularité  $c$  qui n'est pas une extrémité de  $\text{supp } \mu$ . Dans ce cas, la singularité de  $\mu$  à gauche de  $c$  et la singularité de  $\mu$  à droite de  $c$  s'ajoutent. Voici l'énoncé qui se trouve dans [Mus92, p.84–p.85]. Cet énoncé est utilisé par le théorème 5 (p. 83) pour justifier le résultat de décomposition sous des conditions suffisantes sur  $\mu$ .

**Lemme 8** Soit  $L = [r_g, r_d]$  et  $\mathcal{H}(z) = \int_L \frac{\mu(\rho)}{z - \rho} d\rho$ . Soit  $c \in ]r_g, r_d[$ . Si  $\mu$  vérifie les hypothèses suivantes :

(H1)  $\mu$  est localement hölderienne sur  $[r_g, r_d] \setminus \{c\}$ ,

(H2)  $\mu(\rho)(c - \rho)^\alpha$  est hölderienne sur  $[r_g, c]$  et admet une limite  $a_-$ ,

(H3)  $\mu(\rho)(\rho - c)^\alpha$  est hölderienne sur  $[c, r_d]$  et admet une limite  $a_+$ ,

alors il existe  $\mathcal{H}_0(z)$  et  $\mu_0(\rho)$  telles que

- si  $\alpha = 0$   $\mathcal{H}(z) = (a_+ - a_-) \ln \left( \frac{1}{z - c} \right) + \mathcal{H}_0(z)$  pour  $z \notin ] - \infty, c]$

et  $\mathcal{H}_0(z)$  est une fonction bornée qui admet des limites en  $z = r_g$  et en  $z = r_d$ ,

$$\mathcal{V}_\mu(\rho) = (a_+ - a_-) \ln \left( \frac{1}{|\rho - c|} \right) + \mu_0(\rho)$$

et  $\mu_0$  est hölderienne sur  $[r_g, c]$  et sur  $[c, r_d]$ ,

- si  $\alpha \in ]0, 1[$   $\mathcal{H}(z) = (e^{i\alpha\pi} a_+ - a_-) \frac{1}{(z - c)^\alpha} + \mathcal{H}_0(z)$  pour  $z \notin ] - \infty, c]$

et il existe  $\alpha_0 < \alpha$  tel que  $\mathcal{H}_0(z) = O \left( \frac{1}{|z - c|^{\alpha_0}} \right)$ ,

$$\mathcal{V}_\mu(\rho) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \frac{a_+ - a_- \cos(\alpha\pi)}{(\rho - c)^\alpha} + \frac{\mu_0(\rho)}{(\rho - c)^{\alpha_0}} \quad (\text{quand } \rho < c),$$

$$\mathcal{V}_\mu(\rho) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \frac{a_+ \cos(\alpha\pi) - a_-}{(c - \rho)^\alpha} + \frac{\mu_0(\rho)}{(c - \rho)^{\alpha_0}} \quad (\text{quand } \rho > c),$$

$\mu_0$  est hölderienne sur  $[r_g, c]$  et aussi sur  $[c, r_d]$ .

La proposition suivante est une démonstration du lemme de Watson-discret utilisé et énoncé dans le chapitre 2. Du point de vue des intégrales de Cauchy, ce lemme donne le comportement asymptotique des coefficients du développement infini d'une intégrale Cauchy en  $z = \infty$  en fonction du comportement asymptotique de  $\mu$  aux points les plus proches de l'infini (en l'occurrence  $z = 1$  et  $z = -1$ ).

**Proposition 21** Soit  $\mu_1, \mu_2 \in L^1(0, 1)$ , si  $e^{-\frac{n}{\ln n}} = o(h_n^2)$  et si  $\mu_2$  est de signe constant

alors  $\mu_1 = o(\mu_2) \Rightarrow h_n^1 = o(h_n^2)$ .

**Commentaire** L'hypothèse  $e^{-\frac{n}{\ln n}} = o(h_n^2)$  est utilisée dans la démonstration, elle provient de la manière de découper l'expression intégrale de  $h_n$ . En fait nous pensons qu'une hypothèse de cette forme-là est nécessaire : une hypothèse qui rappelle que les valeurs prises par  $\mu_1$  hors d'un voisinage de  $\rho = 1^-$  agissent aussi sur  $h_n^1$ . Ces comportements sont négligés quand  $h_n^2$  a une décroissance plus lente qu'une suite géométrique de raison  $r < 1$ .

**Preuve** La propriété se démontre en décomposant l'intervalle  $[0, 1]$  en  $V_{\ln} = [0, 1 - \frac{1}{\ln(n)}]$  et  $[1 - \frac{1}{\ln(n)}, 1]$ . On note  $\varepsilon(\rho)$  la fonction telle que  $\mu_1(\rho) = \mu_2(\rho)\varepsilon(\rho)$  avec  $\varepsilon(\rho) \rightarrow 0$  quand  $\rho \rightarrow 1$ .

$$\begin{aligned} h_n^1 &= \int_{1-\frac{1}{\ln(n)}}^1 \mu_1(\rho)\rho^{n-1}d\rho + \int_{V_{\ln}} \mu_2(\rho)\varepsilon(\rho)\rho^{n-1}d\rho \\ |h_n^1| &\leq \left(1 - \frac{1}{\ln(n)}\right)^{n-1} \int_0^1 |\mu_1(\rho)|d\rho + \sup_{V_{\ln}} |\varepsilon(\rho)| \left| \int_0^1 \mu_2(\rho)\rho^{n-1}d\rho \right| \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Le premier terme de la majoration de  $h_n^1$  est un  $O\left(e^{-\frac{n}{\ln(n)}}\right)$  :

$$\left(1 - \frac{1}{\ln(n)}\right)^{n-1} = e^{(n-1)\ln\left(1 - \frac{1}{\ln(n)}\right)} \leq e^{-\frac{n-1}{\ln(n)}}.$$

Le deuxième terme de la majoration de  $h_n^1$  est un  $o(h_n^2)$  parce que  $\int_0^1 \mu_2(\rho)\rho^{n-1}d\rho = h_n^2$  (quand  $n \geq 1$ ) et que la suite  $\sup_{\rho \in V_{\ln}} |\varepsilon(\rho)|$  tend vers zéro quand  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$





# Annexe B

## Espaces de Hardy

Les espaces de Hardy nous sont utiles parce que ces espaces vectoriels contiennent à la fois les filtres rationnels stables et les filtres diffusifs sous réserve d'une condition technique. Le §B.1 donne une définition de  $\mathbb{H}^1(\mathbb{E})$  (où  $\mathbb{E}$  désigne l'extérieur du disque unité) et montre que les filtres diffusifs sont dans cet espace. Le §B.2 montre que dans  $\mathbb{H}^1(\mathbb{E})$  la condition entrée-sortie ( $\sum u_n y_n \geq 0$ ) et la condition fréquentielle ( $\mathcal{R}e(\mathcal{H}(e^{i\omega})) \geq 0$ ) sont équivalentes. Elles justifient ainsi la définition de la positivité du chapitre 3. Le §B.3 rappelle la définition de  $\mathbb{H}^\infty(\mathbb{E})$  et rappelle que cet espace est l'ensemble des filtres énergétiquement stables.  $\mathbb{H}^\infty(\mathbb{E})$  est utilisé pour prouver la stabilité énergétique de couplages. Le §B.3 donne aussi la définition de  $W_+$ .

### B.1 Définition de $\mathbb{H}^1(\mathbb{E})$

La positivité peut être définie par une condition entrée-sortie ( $\sum u_n y_n \geq 0$ ) ou par une condition fréquentielle ( $\mathcal{R}e(\mathcal{H}(e^{i\omega})) \geq 0$ ). L'équivalence entre ces deux conditions est un résultat classique (voir par exemple [BD86]), il est en général présenté en vue de l'utiliser pour des fonctions de transfert rationnelles. Nous allons reprendre en partie ces idées mais en les appliquant aux filtres diffusifs. Pour cela nous utilisons un espace de Hardy noté  $\mathbb{H}^1(\mathbb{E})$  défini dans [You88], ( $\mathbb{E}$  désigne l'extérieur du disque unité). Pour la présentation de cet espace, nous avons choisi de suivre [Par89] et [Par97], cependant il y a une autre approche avec [Hof88].

La définition et les propriétés de  $\mathbb{H}^1(\mathbb{E})$  sont rappelées dans la définition 5. La proposition 22 donne une condition technique simple pour que les filtres diffusifs soient dans  $\mathbb{H}^1(\mathbb{E})$ . La proposition 23 et le lemme 10 sont des outils permettant de prouver le théorème 8 qui établit l'équivalence entre les deux définitions de la positivité du chapitre 3.

Lorsque la fonction de transfert est connue et est prolongeable sur le cercle

unité  $\partial\mathbb{E}$ , il est tentant d'utiliser ce prolongement comme réponse fréquentielle du filtre. La difficulté théorique est de savoir si les propriétés de cette réponse fréquentielle (par exemple le signe de la partie réelle) sont celles du filtre; ceci est vrai dans  $\mathbb{H}^1(\mathbb{E})$ .

**Définition 5**  $\mathbb{H}^1(\mathbb{E})$  est l'ensemble des fonctions de transfert holomorphes sur  $\mathbb{E}$  qui vérifient

$$\sup_{r>1} \int_{-\pi}^{\pi} |\mathcal{H}(re^{i\omega})| d\omega < \infty \quad (\text{B.1})$$

Si  $\mathcal{H} \in \mathbb{H}^1(\mathbb{E})$  alors

- pour presque tout  $\omega \in [-\pi, \pi]$ , la suite de fonctions  $\omega \mapsto \mathcal{H}(re^{i\omega})$  converge vers  $\mathcal{H}(e^{i\omega})$  quand  $r \rightarrow 1$  pour la norme  $L^1(-\pi, \pi)$ ;
- les coefficients  $c_n$  de la série de Fourier de  $\mathcal{H}(e^{i\omega})$  sont nuls si  $n < 0$  et sont égaux à  $h_n$  la réponse impulsionnelle de  $\mathcal{H}$  si  $n > 0$ ;
- la fonction de transfert peut s'exprimer à partir de sa réponse fréquentielle pour  $|z| > 1$  au moyen de la représentation de Herglotz :

$$\mathcal{H}(z) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Re}(\mathcal{H}(e^{i\omega})) \frac{1 + z^{-1}e^{i\omega}}{1 - z^{-1}e^{i\omega}} d\omega \quad (\text{B.2})$$

**Idées principales de la preuve** L'espace de Hardy  $\mathbb{H}^2(\mathbb{E})$  est contenu dans  $\mathbb{H}^1(\mathbb{E})$  et est défini par  $\int_{-\pi}^{\pi} \sup_{r>1} |\mathcal{H}(re^{i\omega})|^2 d\omega < +\infty$ , sa norme est notée  $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^2(\mathbb{E})}$ . Les propriétés *a.* et *b.* sont simples à démontrer pour  $\mathcal{H} \in \mathbb{H}^2(\mathbb{E})$  parce qu'alors  $h_n \in l^2$ . [Par89] utilise le produit de Blaschke pour montrer que si  $\mathcal{H} \in \mathbb{H}^1(\mathbb{E})$  alors il existe  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in \mathbb{H}^2(\mathbb{E})$  tel que  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1\mathcal{H}_2$ , c'est le théorème de Riesz et cela permet d'étendre certaines propriétés de  $\mathbb{H}^2(\mathbb{E})$  vers  $\mathbb{H}^1(\mathbb{E})$ . Nous en déduisons *a.* puis *b.* La représentation de Herglotz est énoncé dans [KN77, annexe A] sous la forme d'un théorème de Riesz et Herglotz. Elle utilise notamment la causalité de  $\mathcal{H}$ . Avec les mêmes idées nous montrerons cette assertion *c.* La formule ainsi obtenue pourrait s'interpréter comme une *réalisation harmonique* définie dans [Mon00b].

- Soit  $\mathcal{H} \in \mathbb{H}^1(\mathbb{E})$  et  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in \mathbb{H}^2(\mathbb{E})$  tel que  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1\mathcal{H}_2$ ,  $h_n^1$  et  $h_n^2$  sont les réponses impulsionnelles de  $\mathcal{H}_1$  et de  $\mathcal{H}_2$ .
  - $h_n^1 \in l^2$ . En effet, la TZ inverse appliquée à un contour fermé contenu dans  $\mathbb{E}$  montre que la réponse impulsionnelle de  $\mathcal{H}_1$  est :  
 $h_n^1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{H}_1(re^{i\omega}) r^n e^{i\omega n} d\omega$  La formule de Parseval appliquée à  $r^{-n}h_n^1$  conduit à ce que pour tout  $r > 1$ ,  $\sum_{n \geq 0} r^{-2n} (h_n^1)^2 \leq \|\mathcal{H}_1\|_{\mathbb{H}^2(\mathbb{E})}^2$ . En passant à la limite  $r \rightarrow 1$ , on a  $h_n^1 \in l^2$ . De même on a aussi  $h_n^2 \in l^2$ .
  - $\mathcal{H}_1(e^{i\omega})$  est défini comme la somme de la série  $\sum_{n \geq 0} h_n^1 e^{-i\omega n}$  parce que  $h_n^1 \in l^2$ .
  - $\mathcal{H}_1(re^{i\omega}) \rightarrow \mathcal{H}_1(e^{i\omega})$  quand  $r \rightarrow 1^+$  pour la norme  $L^2(-\pi, \pi)$  parce que  $\mathcal{H}(e^{i\omega}) - \mathcal{H}(re^{i\omega}) = \sum_{n \geq 0} h_n^1 (1 - r^{-n}) e^{-i\omega n}$  et que  $h_n^1 \in l^2$ . De même on a aussi  $\mathcal{H}_2(re^{i\omega}) \rightarrow \mathcal{H}_2(e^{i\omega})$  quand  $r \rightarrow 1^+$  pour la norme  $L^2(-\pi, \pi)$ .
  - $\mathcal{H}(re^{i\omega}) \rightarrow \mathcal{H}(e^{i\omega})$  quand  $r \rightarrow 1^+$  pour la norme  $L^1(-\pi, \pi)$ . Cette assertion *a.* est obtenue en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz sur cette expression :

$$\mathcal{H}(re^{i\omega}) - \mathcal{H}(e^{i\omega}) = \frac{1}{2}(\mathcal{H}_1(re^{i\omega}) - \mathcal{H}_1(e^{i\omega}))(\mathcal{H}_2(re^{i\omega}) + \mathcal{H}_2(e^{i\omega})) + \frac{1}{2}(\mathcal{H}_1(re^{i\omega}) + \mathcal{H}_1(e^{i\omega}))(\mathcal{H}_2(re^{i\omega}) - \mathcal{H}_2(e^{i\omega})).$$

b. Les coefficients de la série de Fourier de  $\mathcal{H}(e^{i\omega})$  sont

$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{H}(e^{i\omega}) e^{i\omega n} d\omega$ .  $\mathcal{H}$  est un filtre causal et, quand  $\mathcal{H}$  est intégrée sur un contour contenu dans  $\mathbb{E}$ ,

$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{H}(re^{i\omega}) r^n e^{i\omega n} d\omega = h_n \mathbf{1}_{\{n \geq 0\}}$ . L'assertion *a.* permet le passage à la limite  $r \rightarrow 1^+$  et ainsi de prouver  $c_n = h_n^1 \mathbf{1}_{\{n \geq 0\}}$ .

c.  $\mathcal{H}$  est causal et à coefficients réels, aussi  $h_n$  et  $\mathcal{H}(z)$  peuvent s'exprimer en fonction de  $\mathcal{R}e(\mathcal{H}(e^{i\omega}))$ .

• L'assertion *b.* prouve  $h_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{R}e(\mathcal{H}(e^{i\omega})) d\omega$  et pour  $n > 0$  que  $h_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{R}e(\mathcal{H}(e^{i\omega})) e^{i\omega n} d\omega$ .

• En prenant la transformée en  $Z$   $\mathcal{H}(z) = \sum_{n \geq 0} h_n z^{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{R}e(\mathcal{H}(e^{i\omega})) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\omega n} z^{-n} \right] d\omega$ . Le terme entre crochet vaut justement  $\frac{1}{2} \frac{1+e^{i\omega} z^{-1}}{1-e^{i\omega} z^{-1}}$ .

□

Nous donnons des conditions suffisantes pour qu'un filtre diffusif soit dans  $\mathbb{H}^1(\mathbb{E})$ . L'appartenance à  $\mathbb{H}^1(\mathbb{E})$  entraîne aussi un comportement pas trop singulier au voisinage de  $z = 1$  et de  $z = -1$ . Ces résultats sont démontrés grâce à un lemme et grâce à une proposition.

**Lemme 9** Soit  $r \geq 1$  et  $|\rho| \leq 1$ , il existe  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  tels que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{|re^{i\theta} - \rho|} \leq \kappa_1 \ln \left( \frac{1}{1 - |\rho|} \right) + \kappa_2 \quad (\text{B.3})$$

**Commentaire** Ce lemme donne des conditions suffisantes sur  $\mu$  pour que  $\mathcal{H}$  soit dans  $\mathbb{H}^1(\mathbb{E})$  dans la proposition 22.

**Preuve** La démonstration est 4 parties. La première est un préliminaire. La seconde et la troisième démontrent (B.3) pour des valeurs particulières de  $r, \theta, \rho$ . La quatrième partie déduit (B.3) pour les autres valeurs de  $r, \theta, \rho$ .

1. La fonction  $x \mapsto \text{sh}(x)$  est impaire et bijective de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

L'inverse est  $\text{arcsh}(y) = \frac{1}{2} \int_{-y}^y \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$ .

Quand  $y > 0$ ,  $\text{arcsh}(y) \leq \ln(2y + 1)$ .

2. Au voisinage de  $\theta = 0$ ,  $\rho \in [\frac{1}{2}, 1]$  et pour  $r = 1$ , on montre que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{d\theta}{|e^{i\theta} - \rho|} \leq \frac{1}{2\pi\kappa} \ln \left( \frac{2\kappa\delta}{1 - \rho} + 1 \right) \quad (\text{B.4})$$

En effet le développement de Taylor de  $1 - \cos(\theta)$  au voisinage de  $\theta = 0$  montre qu'il existe  $\delta > 0$  et  $\kappa > 0$  tel que  $|\theta| < \delta \Rightarrow 1 - \cos(\theta) \geq \kappa\theta^2$

Aussi  $|\theta| < \delta \Rightarrow |e^{i\theta} - \rho| \geq \sqrt{(1 - \rho)^2 + \kappa\theta^2}$

Il suffit alors d'utiliser les propriétés de  $\text{sh}$  énoncées en 1. pour trouver (B.4).

3. Hors d'un voisinage de  $\theta = 0$ , avec  $r = 1$  et  $\rho \in [\frac{1}{2}, 1]$ .

En remarquant que pour  $\delta > 0$  quelconque  $|\theta| > \delta \Rightarrow |e^{i\theta} - \rho| \geq \sin(\delta)$  on en

déduit que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]} \frac{d\theta}{|e^{i\theta} - \rho|} \leq \frac{1}{\sin(\delta)} \quad (\text{B.5})$$

4. Les équations (B.4) et (B.5) suffisent à démontrer (B.3).

En effet on obtient (B.3) pour  $r = 1$  et  $\rho \in [\frac{1}{2}, 1]$  en ajoutant (B.4) et (B.5).

La fonction  $(\theta, \rho) \mapsto \frac{1}{|e^{i\theta} - \rho|}$  est bornée uniformément sur  $[-\pi, \pi] \times [0, \frac{1}{2}]$  et donc on démontre (B.3) pour  $\rho \in [0, \frac{1}{2}]$  avec  $r = 1$ .

Les deux parties de l'inégalité (B.3) sont des fonctions paires de  $\rho$  aussi on démontre (B.3) pour  $|\rho| \leq 1$  avec  $r = 1$ .

Pour  $r \geq 1$ , une manipulation algébrique permet de majorer l'expression intégrale :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{|re^{i\theta} - \rho|} \leq \kappa \ln \left( \frac{1}{1 - \frac{|\rho|}{r}} \right) + \kappa_2$$

Ce majorant est une fonction décroissante de  $r$ , ce qui permet de prouver (B.3) pour  $r \geq 1$ .

□

**Proposition 22** *Si le symbole diffusif  $\mu \in L^1(-1, 1)$  d'un filtre diffusif  $\mathcal{H}$  vérifie  $\mu(\rho) \ln \left( \frac{1}{1-|\rho|} \right)$  est sommable alors  $\mathcal{H} \in \mathbb{H}^1(\mathbb{E})$  et  $(z-1)\mathcal{H}(z) \rightarrow 0$  quand  $z \rightarrow 1$  et  $(z+1)\mathcal{H}(z) \rightarrow 0$  quand  $z \rightarrow -1$  avec  $z \in \mathbb{E}$ .*

**Commentaire** Le résultat de convergence en  $z = \pm 1$  est utilisé dans le théorème 4 (p 73).

**Preuve** La démonstration consiste à appliquer le théorème de Fubini sur (1.6) pour montrer que  $\mathcal{H} \in \mathbb{H}^1(\mathbb{E})$  au moyen du lemme 9. Ce résultat,  $\mathcal{H} \in \mathbb{H}^1(\mathbb{E})$  permet d'en déduire que  $(z-1)\mathcal{H}(z) \rightarrow 0$  quand  $z \rightarrow 1$  et  $(z+1)\mathcal{H}(z) \rightarrow 0$  quand  $z \rightarrow -1$  avec  $z \in \mathbb{E}$ .

1. Selon (1.6),

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \mathcal{H}(re^{i\theta}) \right| d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left| h_0 + \int_{-1}^1 \frac{\mu(\rho)}{re^{i\theta} - \rho} d\rho \right| d\theta$$

Le lemme 9 montre que quand  $\mu(\rho) \ln \left( \frac{1}{1-|\rho|} \right)$  est sommable le théorème de Fubini s'applique et que (B.6) est bornée indépendamment de  $r$ .

Aussi  $\mathcal{H} \in \mathbb{H}^1(\mathbb{E})$ .

2. Le théorème 5.9 dit de Hardy-Littlewood dans [Dur70, chapitre 5] montre que quand  $\mathcal{H} \in \mathbb{H}^1(\mathbb{E})$  alors  $(z-1)\mathcal{H}(z) \rightarrow 0$  quand  $z \rightarrow 1$  et  $(z+1)\mathcal{H}(z) \rightarrow 0$  quand  $z \rightarrow -1$  avec  $z \in \mathbb{E}$ .

□

## B.2 Propriété de $\mathbb{H}^1(\mathbb{E})$

$\sum_{n=0}^N u_n y_n$  peut s'exprimer en fonction de la réponse fréquentielle d'un filtre, c'est une étape dans la démonstration de l'équivalence des deux caractérisations de la positivité.

**Proposition 23** Soient  $u_n$  et  $y_n$  les entrées et sorties complexes du filtre à coefficients réels  $\mathcal{H}$ . Alors,

$$\sum_{n=0}^N \bar{u}_n y_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{H}(e^{i\omega}) \left| \sum_{n=0}^N u_n e^{-i\omega n} \right|^2 d\omega \quad (\text{B.6})$$

**Preuve** Si  $\mathcal{H}(e^{i\omega}) \in L^2(-\pi, \pi)$  (par exemple si  $\mathcal{H} \in \mathbb{H}^2(\mathbb{E})$ ) alors (B.6) s'interpréterait comme une application des séries de Fourier en tant qu'isomorphisme de  $l^2$  dans  $L^2(-\pi, \pi)$  à  $y_n = h_n \star (u_n \mathbf{1}_{\{0 \dots N\}})$  et à  $u_n \mathbf{1}_{\{0 \dots N\}}$ . On aurait alors

$$\sum y_n (\bar{u}_n \mathbf{1}_{\{0 \dots N\}}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{H}(e^{i\omega}) \sum_{n=0}^N u_n e^{-i\omega n} \sum_{n=0}^N \overline{u_n e^{-i\omega n}}. \text{ En réalité on sait seule-}$$

ment que  $\mathcal{H}(e^{i\omega}) \in L^1(-\pi, \pi)$  aussi la preuve proposée est plus longue.

Cette se déroule en trois étapes.

- $\mathcal{H} \in \mathbb{H}^1(\mathbb{E})$  aussi  $h_n$  s'exprime en fonction de  $\mathcal{H}(e^{i\omega})$  et comme  $y_n = h_n \star u_n$ ,

$$\sum_{n=0}^N \bar{u}_n y_n = \sum_{n=0}^N \bar{u}_n \sum_{k=0}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{H}(e^{i\omega}) e^{i\omega(n-k)} d\omega u_k$$

- En échangeant l'intégrale et les sommes (en effet  $\mathcal{H}(e^{i\omega}) \in L^1(-\pi, \pi)$ ) et en réorganisant les deux sommes, on obtient :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{H}(e^{i\omega}) \sum_{0 \leq k \leq n \leq N} u_k e^{-i\omega k} \overline{u_n e^{-i\omega n}} d\omega$$

- Pour obtenir (B.6), il manque les termes de la somme dont les indices vérifient  $k > n$  avec  $k \in \{0 \dots N\}$ . Ces termes peuvent être complétés parce que  $\mathcal{H}$  est causal (i.e.  $0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{H}(e^{i\omega}) e^{-i\omega(k-n)} d\omega$  d'après la définition 5).

□

La définition et les propriétés d'un noyau de sommabilité sont énoncées dans [Kat68], nous les utilisons pour établir un lemme.

**Lemme 10** Soit  $k_N(\omega)$  un noyau de sommabilité positif sur  $[-\pi, \pi]$  qui vérifie donc

$$(H1) \quad k_N(\omega) \geq 0$$

$$(H2) \quad \forall \delta > 0 \quad \sup_{|\omega| > \delta} k_N(\omega) \rightarrow 0 \text{ quand } N \rightarrow \infty$$

$$(H3) \quad \int_{-\pi}^{\pi} k_N(\omega) d\omega = 1$$

Soit  $f \in L^1(-\pi, \pi)$ .

$$\text{Si } \forall \theta \in [-\pi, \pi] \text{ et } \forall N, g_N(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) k_N(\theta - \omega) d\omega \geq 0,$$

alors  $f(\omega) \geq 0$  (p.p.).

**Preuve**  $f \in L^1(-\pi, \pi)$  aussi  $f$  se décompose en  $f = f_+ - f_-$  avec  $f_+ \geq 0$  et  $f_- \geq 0$  et  $\text{supp } f_+ \cap \text{supp } f_-$  est de mesure nulle. Supposons que  $\text{supp } f_-$  soit

de mesure non nulle. L'idée de la démonstration consiste à intégrer  $g_N(\theta)$  sur un intervalle contenu dans  $\text{supp } f_-$  et à choisir  $N$  pour que  $k_N(\theta - \omega)$  soit petit quand  $\omega \in \text{supp } f_+$  et grand quand  $\omega \in \text{supp } f_-$ . Plus précisément, la preuve utilise successivement les hypothèses du noyau de sommabilité.

Il existe alors  $\omega_0 \in [-\pi, \pi]$  et  $\delta > 0$  tel que  $[\omega_0 - 3\delta, \omega_0 + 3\delta] \in \text{supp } f_-$ . On intègre  $g_N(\theta)$  sur  $[\omega_0 - 2\delta, \omega_0 + 2\delta]$  :

$$\begin{aligned} (H1) \Rightarrow 0 &\leq \int_{\omega_0 - 2\delta}^{\omega_0 + 2\delta} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) k_N(\theta - \omega) d\omega d\theta \\ &\leq \int_{\omega_0 - 2\delta}^{\omega_0 + 2\delta} \int_{|\omega - \omega_0| > 3\delta} f_+(\omega) k_N(\theta - \omega) d\omega d\theta \\ &\quad - \int_{\omega_0 - \delta}^{\omega_0 + \delta} f_-(\omega) \int_{\omega_0 - 2\delta}^{\omega_0 + 2\delta} k_N(\theta - \omega) d\theta d\omega \end{aligned} \quad (B.7)$$

(H3) et (H2)  $\Rightarrow \exists N_1$ , tel que  $\forall N \geq N_1 \int_{\omega_0 - 2\delta}^{\omega_0 + 2\delta} k_N(\theta - \omega) d\theta \geq \frac{1}{2}$ . En effet cette intégrale est minorée par  $\int_{-\delta}^{\delta} k_N(\theta) d\theta = 1 - \int_{|\theta| > \delta} k_N(\delta) d\delta \geq 1 - \sup_{|\theta| > \delta} k_N(\theta)$ . Finalement (B.7) donne pour  $N \geq N_1$

$$0 \leq \sup_{|\theta - \omega_0| > \delta} k_N(\theta - \omega) \int_{-\pi}^{\pi} f_+(\omega) d\omega - \frac{1}{2} \int_{\omega_0 - \delta}^{\omega_0 + \delta} f_-(\omega) d\omega.$$

Aussi quand  $N \rightarrow \infty$ ,  $\int_{\omega_0 - \delta}^{\omega_0 + \delta} f_-(\omega) d\omega = 0$ , ce qui est contradictoire avec l'hypothèse  $\text{supp } f_-(\omega)$  n'est pas de mesure nulle.  $\square$

Les outils créés permettent maintenant de démontrer l'équivalence des deux caractérisations de la positivité.

La proposition 23 montre que la caractérisation fréquentielle de la positivité implique la caractérisation temporelle de la positivité.

**Théorème 8** Soit  $\mathcal{H} \in \mathbb{H}^1(\mathbb{E})$ , alors

$$\forall N, \forall u_0 \dots u_N \quad \sum_{n=0}^N u_n y_n \geq 0 \Leftrightarrow \mathcal{R}e(\mathcal{H}(e^{i\omega})) \geq 0 \quad (B.8)$$

Dans ce cas, si  $\mathcal{H} \neq 0$ ,  $\mathcal{R}e(\mathcal{H}(z)) > 0$  quand  $z \in \mathbb{E}$ .

**Preuve** La proposition 23 prouve l'implication.

Pour la réciproque l'idée de la démonstration classique (cf : [BD86]) est d'exciter  $\mathcal{H}$  à la fréquence  $\theta$  avec  $u_n = \frac{1}{\sqrt{1+N}} e^{i\theta n} \mathbf{1}_{\{0 \dots N\}}$ , et de montrer qu'alors  $\sum_{n=0}^N u_n y_n$  converge vers  $\mathcal{H}(e^{i\omega})$  grâce au noyau de Fejér  $k_N(\omega)$  qui converge vers un Dirac quand  $N \rightarrow \infty$ .

Les fonctions de transfert  $\mathbb{H}^1(\mathbb{E})$  ne sont pas nécessairement continues, mais le lemme 10 permet de conclure. Nous reproduisons ici la première partie de la preuve classique :  $\sum_{n=0}^N u_n y_n$  est une fonction positive de variable  $\theta$  notée  $g_N(\theta)$

et est aussi le produit de convolution entre  $\mathcal{H}(e^{i\omega})$  et le noyau de Fejér noté  $k_N(\omega)$ , cela se fait en trois étapes :

- La proposition 23 montre que

$$g_N(\theta) = \sum_{n=0}^N u_n y_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{H}(e^{i\omega}) \frac{1}{1+N} \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^N e^{-i(\theta-\omega)(n-k)} d\omega.$$

- Grâce à un changement d'indice et grâce à la causalité de  $\mathcal{H}$ ,

$$\begin{aligned} g_N(\theta) &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{H}(e^{i\omega}) k_N(\theta - \omega) d\omega \text{ où } k_N(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n e^{-ik\omega} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{N+1} \frac{\sin^2((N+1)\omega/2)}{\sin^2(\omega/2)} \end{aligned}$$

est le noyau de Fejér qui est un noyau de sommabilité au sens défini dans le lemme 10 (cf : [Par97]).

- Les fonctions  $k_N(\omega)$  et  $\mathcal{H}(e^{i\omega})$  sont  $2\pi$ -périodique aussi

$$g_N(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{H}(e^{i(\theta-\omega)}) k_N(\omega) d\omega.$$

Le lemme 10 permet alors de prouver la positivité de  $\mathcal{H}(e^{i\omega})$ .

Pour prouver *la dernière assertion*, on observe que d'après (B.2)

$$\operatorname{Re}(\mathcal{H}(z)) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re}(\mathcal{H}(e^{i\omega})) \operatorname{Re} \left( \frac{1+z^{-1}e^{i\omega}}{1-z^{-1}e^{i\omega}} \right) d\omega \quad (\text{B.9})$$

- Pour  $z \in \mathbb{E}$ ,  $\operatorname{Re}(\mathcal{H}(z)) \geq 0$ . En effet l'inverse de la transformée bilinéaire  $s \mapsto \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$  transforme  $\mathbb{E}$  en le demi plan droit du plan complexe aussi un changement de variable simple  $z \mapsto ze^{-i\omega}$  permet d'en déduire que  $\operatorname{Re}(\frac{1+z^{-1}e^{i\omega}}{1-z^{-1}e^{i\omega}}) > 0$ . La positivité de  $\mathcal{H}$  signifie que  $\operatorname{Re}(\mathcal{H}(e^{i\omega})) \geq 0$  et (B.9) entraîne que  $\forall z \in \mathbb{E}$ ,  $\operatorname{Re}(\mathcal{H}(z)) > 0$ .

- Lorsque  $\mathcal{H} \neq 0$ , pour  $z \in \mathbb{E}$ ,  $\operatorname{Re}(\mathcal{H}(z)) > 0$ . En effet la causalité de  $\mathcal{H}$  permet d'exprimer  $h_n$ , la réponse impulsionnelle de  $\mathcal{H}$  en fonction de  $\operatorname{Re}(\mathcal{H}(e^{i\omega}))$  aussi  $\operatorname{Re}(\mathcal{H}(e^{i\omega}))$  ne peut pas être presque partout nulle. Ainsi l'application de (B.9) prouve que pour tout  $z \in \mathbb{E}$ ,  $\operatorname{Re}(\mathcal{H}(z)) \neq 0$ .  $\square$

## B.3 Définition et propriété d'autres espaces de fonctions analytiques

**Définition 6**  $\mathbb{H}^\infty(\mathbb{E})$  est l'ensemble des fonctions de transfert holomorphes et bornées sur  $\mathbb{E}$ .

$\mathbb{H}^\infty(\mathbb{E})$  est un sous-espace de  $\mathbb{H}^1(\mathbb{E})$  et satisfait donc aussi aux propriétés *a.*, *b.* et *c.* de la définition 5, le produit de deux fonctions de transfert est une opération interne pour  $\mathbb{H}^\infty(\mathbb{E})$ .  $\mathbb{H}^\infty(\mathbb{E})$  est l'ensemble des systèmes stables énergétiquement, la démonstration se trouve rappelée dans [Par89].

**Proposition 24** Soit un filtre  $\mathcal{H}$ , il est énergétiquement stable si et seulement si  $\mathcal{H} \in \mathbb{H}^\infty(\mathbb{E})$ , et dans ce cas pour tout  $N$ ,

$$\sum_{n=0}^N y_n^2 \leq \sup_{\omega} |\mathcal{H}(e^{i\omega})|^2 \sum_{n=0}^N u_n^2$$



La définition générale de l'algèbre de convolution  $\mathcal{A}(\beta)$ , son image par la transformée de Laplace  $\hat{\mathcal{A}}(\beta)$  et d'une sous-algèbre  $\hat{\mathcal{A}}_-(\beta)$  sont rappelées dans la définition 7.  $\mathcal{A}(\beta)$  contient en particulier l'algèbre de convolution à temps discret noté  $l^1(\rho)$  avec laquelle nous définissons une autre algèbre : l'image de  $l^1(\rho)$  par la transformée en  $Z$ ,  $\hat{l}^1(\rho)$ . Nous utiliserons la notation  $W_+$  au lieu de  $\hat{l}^1(1)$  comme dans [Par97, chapitre 1]. La notation  $l^1(\rho)$  est utilisée dans [DV75, annexe C].

**Définition 7** *La fonction de transfert du filtre causal  $\mathcal{H}^\natural$  appartient à  $\hat{\mathcal{A}}(\beta)$  et sa réponse impulsionnelle  $h(t)$  appartient à  $\mathcal{A}(\beta)$  si  $h(t)$  se met sous la forme :*

$$h(t) = \begin{cases} h_a(t) + \sum_{n=1}^{\infty} h_n^\natural \delta(t - t_n) \\ 0 \end{cases}$$

où  $e^{-\beta t} h_a(t) \in L^1(0, +\infty)$ ,  $h_n^\natural \in \mathbb{C}$ ,  $t_n \in \mathbb{R}$ ,  $\delta(t - t_n)$  est la distribution centrée en  $t_n$ , et  $\sum_{n=1}^{\infty} |h_n^\natural| e^{-\beta t_n} < \infty$ .

**Définition 8** *Soit  $\mathcal{H}$  un filtre de réponse impulsionnelle  $h_n$ .*

$$\begin{aligned} h_n \in l^1(\rho) &\Leftrightarrow h_n \rho^{-n} \in l^1 \\ \mathcal{H} \in \hat{l}^1(\rho) &\Leftrightarrow h_n \in l^1(\rho) \end{aligned}$$

**Proposition 25** *Soit  $\mathcal{G}$  un filtre rationnel et  $\mathcal{H}$  un filtre diffusif de symbole diffusif  $\mu$ .*

1. *Si  $\mathcal{G}$  est stable alors  $\mathcal{G} \in W_+$ .*
2. *Si  $\text{supp } \mu \subset ]-1, 1[$  alors  $\mathcal{H} \in W_+$ .*

**Preuve**

1. Il suffit de choisir  $\varrho \in ]\max|z_G|, 1[$  où  $z_G$  sont les pôles de module strictement inférieur à 1 :  $\mathcal{G} \in \hat{l}^1(\varrho) \subset W_+$ .
2. (1.5) montre que  $\varrho \in ]\max \text{supp } \mu, 1[$  convient :  $\mathcal{G} \in \hat{l}^1(\varrho) \subset W_+$ .

□

Les différents espaces mentionnés dans cette annexe peuvent être comparés.

**Proposition 26**

$$\begin{aligned} W_+ &\subset \mathbb{H}^\infty(\mathbb{E}) \subset \mathbb{H}^2(\mathbb{E}) \subset \mathbb{H}^1(\mathbb{E}) \\ \text{Si } \mathcal{H} \in W_+ &\text{ alors } \|\mathcal{H}\|_{\mathbb{H}^\infty(\mathbb{E})} \leq \|h_n\|_{l^1} \end{aligned}$$

Nous rappelons un théorème dans [HP57] avec une formulation adaptée aux filtres à temps discret (énoncée dans [DV75, p. 251].

**Théorème 9 (Wiener)** *Soit  $\mathcal{H}$  un filtre causal et EBSB-stable tel que  $\inf_{z \in \mathbb{E}} |\mathcal{H}(z)| > 0$  alors  $\mathcal{H}^{-1}$  est aussi EBSB-stable*

Le lemme suivant donne une propriété particulière des filtres stables EBSB.

**Lemme 11** Soient deux suites  $h_n \in l^1$  et  $u_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ , alors  $h_n \star u_n \xrightarrow{d} 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

**Preuve** On observe d'abord que  $u_n$  est une suite bornée.

On note  $y_n = h_n \star u_n$ . Soit  $\epsilon > 0$ . Le produit de convolution est découpé en deux sommes :

$$|y_n| = \left| \sum_{k=0}^n h_k u_{n-k} \right| \leq \left| \sum_{k=0}^N h_k u_{n-k} \right| + \left( \sum_{k \geq N} |h_k| \right) \sup_k |u_k|$$

$\sum_{k \geq N} |h_k| \rightarrow 0$  quand  $N \rightarrow \infty$  aussi il existe  $N$  tel que  $\sum_{k \geq N} |h_k| \sup_k |u_k| \leq \epsilon$ .

Avec  $N$  fixe,  $\sum_{k=0}^N h_k u_{n-k} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$  aussi il existe  $n_N$  tel que  $n \geq n_N \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^N h_k u_{n-k} \right| \leq \epsilon$ . □



# Annexe C

## Simulation des filtres diffusifs

L'étude des séries aléatoires à mémoire longue requiert la simulation de l'autocorrélation (voir [GJ80]) ou de quantités diverses introduites par [BJ76] et appliquées à  $\mathcal{H}^{FI}$  dans [Hos81]. L'approximation entrée-sortie de l'intégration fractionnaire peut être faite par une discrétisation en un filtre non rationnel qui doit alors être simulé (voir [Lub86]). Lorsqu'un système est stabilisé par un filtre non-rationnel, il est parfois nécessaire pour mettre en place ce contrôleur d'approcher ce filtre non-rationnel par un filtre rationnel en conservant les propriétés stabilisatrices et de robustesse du filtre non rationnel à approximer. Ces trois exemples d'utilisation de l'approximation sont différents et nous pensons qu'ils requièrent des algorithmes adaptés. Les filtres à approximer ne sont pas nécessairement stables, c'est le cas par exemple de  $\mathcal{H}^{FI}$ ,  $\mathcal{H}^{BI}$ ,  $\mathcal{H}^{LN}$ ,  $\mathcal{H}^{UN}$  pour  $\alpha > 0$ . L'approximation recherchée est a priori stable, on ne pourra donc pas espérer pouvoir toujours majorer l'erreur en norme  $L^2$  sur l'ensemble du cercle unité ou l'erreur  $l^1$  sur l'ensemble de la réponse impulsionnelle. A défaut nous montrerons la convergence sur un horizon borné. En fait ces filtres sont dans  $\mathbb{H}^1(\mathbb{E})$  et même dans  $\mathbb{H}^2(\mathbb{E})$  pour  $\alpha < \frac{1}{2}$ ; ces espaces nous sembleraient un bon cadre pour analyser la qualité des algorithmes de simulation (cf : [BK00]). Dans le §C.1, trois algorithmes classiques sont présentés (MA, AR, Padé). Dans le §C.2, un algorithme issu des réalisations diffusives est exposé. Enfin dans le §C.3, nous précisons les algorithmes qui ont été utilisés pour faire les simulations de la thèse.

### C.1 Méthodes d'approximation classiques

Un exposé de diverses techniques d'approximation à temps continu se trouve dans [Hel00].

### Approximation par un filtre MA :

Cette approximation consiste à ne considérer que les  $N$  premiers termes de la réponse impulsionnelle  $h_n$  d'un filtre  $\mathcal{H}$  pour obtenir un filtre MA (i.e. filtre dont la réponse impulsionnelle est finie, MA pour "moving average"). Cet algorithme vérifie les propriétés suivantes :

**Proposition 27** *Soit  $\hat{\mathcal{H}}$  une suite de filtres définis par les  $N$  premiers termes de la réponse impulsionnelle de  $\mathcal{H}$ .*

- Si  $\mathcal{H}$  est un filtre diffusif,  $\hat{\mathcal{H}}(e^{i\omega})$  converge vers  $\mathcal{H}(e^{i\omega})$  ponctuellement quand  $\omega \in ]-\pi, \pi[ \setminus \{0\}$ .*
- Si  $\mathcal{H}$  est un filtre EBSB stable, alors pour une entrée donnée, la sortie approchée converge vers la sortie exacte en norme  $l^\infty(\mathbb{N})$ .*
- $\hat{\mathcal{H}}$  est un filtre stable.*
- Si  $\mathcal{H}$  est positif alors  $\hat{\mathcal{H}}$  est aussi positif.*

**Preuve** On démontre successivement les différentes assertions.

- $\mathcal{H}$  est prolongeable en une fonction analytique en  $z = e^{i\omega}$

$$(1.5) \Rightarrow \sum_{n=0}^N h_n e^{-i\omega n} = h_0 + e^{i\omega} \int_{-1}^1 \frac{\mu(\rho) \rho^N e^{-i\omega N}}{1 - \rho e^{-i\omega}} d\rho \rightarrow \mathcal{H}(e^{i\omega})$$

parce que quand  $\omega \neq 0$ , on peut utiliser le théorème de convergence dominée. Ceci n'est en général pas vrai si  $\mathcal{H} \in \mathbb{H}^1(\mathbb{E})$  (cf : [Par89]).

$$b. \left| \sum_{k=0}^{\min(N,n)} h_k u_{n-k} - \sum_{k=0}^n h_k u_{n-k} \right| \leq \|u_l\|_\infty \quad \square$$

$$\sum_{k=N}^{\infty} |h_k| \rightarrow 0 \text{ quand } N \rightarrow \infty.$$

- Si  $\mathcal{H}$  est positif alors le filtre MA associé est aussi positif. En effet la condition de positivité (3.1) peut s'énoncer comme la positivité d'un ensemble de matrices (cf : p. 167). Cet ensemble de matrices comprend notamment les matrices associées au filtre MA approchant  $\mathcal{H}$ . Par conséquent ce filtre MA est aussi positif.

Appliquée à  $\mathcal{H}^{FI}$ , l'approximation est à minimum de phase et ses zéros sont régulièrement répartis, proches du cercle unité (comme le montre la figure C.3. Cette méthode est simple à mettre en œuvre lorsque la réponse impulsionnelle est disponible, son principal handicap est la lenteur de la convergence comme le montrent les figures C.6 et C.7.

### Approximation par un filtre AR

Cette approximation s'applique à des filtres dont l'inverse est connu, elle consiste à tronquer l'inverse du filtre à approximer, puis à inverser encore ce filtre tronqué. Le filtre obtenu est un AR noté  $\hat{\mathcal{H}}$  (i.e. un filtre dont l'inverse a une réponse impulsionnelle finie, AR pour autorégressif).

$\mathcal{H}^{FI}(z) = (1 - z^{-1})^{-\alpha}$  est un exemple de filtre où la méthode s'applique facilement. La proposition suivante donne une manière de s'assurer la stabilité de  $\hat{\mathcal{H}}$ .

**Proposition 28** Si  $\mathcal{H}(z) \in \mathbb{H}^\infty(\mathbb{E})$  et si  $\mathcal{H}$  strictement positif alors son approximation par un filtre AR  $\hat{\mathcal{H}}$  est stable et strictement positive.

**Preuve**  $\mathcal{H}^{-1}$  est stable :  $|\frac{1}{\mathcal{H}}| \leq \frac{1}{\Re(\mathcal{H}(z))} < +\infty$  pour  $|z| > 1$ .  $\mathcal{H}^{-1}$  est strictement positif :  $\Re(\frac{1}{\mathcal{H}(z)}) = \frac{\Re(\mathcal{H}(z))}{|\mathcal{H}(z)|^2}$  est borné inférieurement. Il existe donc  $\kappa > 0$  tel que  $\mathcal{H}^{-1}(z) - \kappa$  soit un filtre positif. Comme précédemment la positivité de  $\mathcal{H}^{-1}(z) - \kappa$  entraîne la positivité de la réponse impulsionnelle tronquée de  $\mathcal{H}^{-1} - \kappa$  et par suite la stricte positivité du dénominateur du filtre  $\hat{\mathcal{H}}$ . Selon la proposition 7 (p. 53),  $\hat{\mathcal{H}}$  est alors un filtre stable et strictement positif.  $\square$

La figure C.3 montre que pour  $\mathcal{H}(z) = (1 - z^{-1})^{-0.4}$ , les pôles de  $\hat{\mathcal{H}}$  sont régulièrement répartis proches du cercle unité et à l'intérieur. Les figures C.1 et C.2 montrent que cet algorithme est légèrement meilleur que le précédent pour approximer  $(1 - z^{-1})^{-\alpha}$  lorsque  $\alpha \in ]0, 0.5[$ .

### Approximants de Padé

Cette approximation est exposée par exemple dans [Bra86, chapitre 5] et dans [BCL97]. Elle consiste en général à chercher la fonction transfert rationnelle  $\hat{\mathcal{H}} = \frac{\mathcal{H}_1}{\mathcal{H}_2}$  de degré  $N_1 \times N_2$  (i.e.  $N_1, N_2$  étant respectivement les degrés de  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  en tant que polynôme de variable  $z^{-1}$ ) telle que  $\mathcal{H}(z) - \hat{\mathcal{H}}(z) = o(z^{-N_1 - N_2})$  quand  $z \rightarrow \infty$ . De cette façon, les  $N_1 + N_2 + 1$  premiers termes de la réponse impulsionnelle de  $\hat{\mathcal{H}}$  coïncident avec  $h_n$ , la réponse impulsionnelle de  $\mathcal{H}$ . Ces équations peuvent s'écrire sous la forme d'un système linéaire en écrivant plutôt que  $\mathcal{H}_1(z) - \hat{\mathcal{H}}(z)\mathcal{H}_2(z) = o(z^{-N_1 - N_2})$ .

Cette méthode a fait l'objet de nombreuses études théoriques avec un calcul précis de l'erreur (cf : [Bra86, chapitre 5]).

Les figures C.6 et C.7 montrent que l'approximation de la réponse impulsionnelle et de la réponse fréquentielle de  $(1 - z^{-1})^{-\alpha}$  est de qualité sur une large bande de fréquences. La figure C.3 montre qu'une partie des pôles et zéros se trouvent sur  $[0, 1]$  (comme l'approximation issue des représentations diffusives) et qu'une autre partie des pôles et zéros se rapprochent du cercle unité. Lorsqu'on augmente  $M$ , des pôles sortent du disque unité et l'approximation devient instable. Par ailleurs la matrice à inverser devient mal conditionnée. Il semble donc que cette méthode doit être améliorée pour être utilisée pour de plus grandes valeurs de  $M$ .

### Autres méthodes

Dans [Bon92], [Bon93a] et [Bon93b], il est proposé un algorithme calculant une approximation de la décomposition en valeurs singulières de l'opérateur de Hankel associé à  $\mathcal{H} = (1 - z^{-1})^{-\alpha}$  lorsque  $\alpha < -1$ . Cette décomposition spectrale donne une approximation. Cette technique est aussi étudiée par [Sas01].

Par ailleurs [MS94] propose un algorithme héréditaire utilisant une structure treillis qui permet entre autres de donner l'approximation du filtre  $\mathcal{H}^{FI}$ , cette méthode dans son principe optimise l'erreur  $L^2$  sur la réponse fréquentielle.

Dans [And94] il est montré que lorsqu'on veut approcher optimalement au sens de  $L^p(\partial\mathbb{E})$  un filtre diffusif de symbole diffusif  $\mu \geq 0$  par un filtre rationnel, alors il faut que les pôles soient sur  $[-1, 1]$ . En revanche si on veut approcher optimalement au sens de  $L^p(\partial\mathbb{E})$  un filtre dont la fonction de transfert a trois points de branchement  $z = 0$ ,  $z = e^{i\omega_0}$  et  $z = e^{-i\omega_0}$ , il ne semble pas judicieux d'aligner les pôles sur les segments  $[0, e^{i\omega_0}]$  et sur  $[0, e^{-i\omega_0}]$ . Ainsi dans [BK00], il est montré sur un exemple que ces pôles doivent être sur deux géodésiques (i.e. pour une métrique hyperbolique) reliant ces points de branchement.

Les méthodes utilisées sont généralement groupées en deux catégories en fonction de la manière avec laquelle la complexité numérique est liée avec le nombre de pas à simuler. Les premières méthodes sont dites *héréditaires*, on peut citer la troncature de la réponse impulsionnelle infinie (voir [Lub86]), la troncature de la réponse impulsionnelle du filtre inverse ([GJ80]) et la transformée de Fourier inverse de la réponse fréquentielle (voir [VDO95]). Dans toutes ces méthodes, le fait de ne pas négliger les entrées passées au-delà d'un certain horizon augmente la complexité numérique de façon rapide. Parmi les méthodes non-héréditaires, il y a les approximants de Padé, l'algorithme exposé par [MS94]. Les réalisations diffusives donnent lieu aussi à une méthode non-héréditaire. Ces méthodes résument le passé soit sous la forme d'une combinaison linéaire de sorties et d'entrées (approche entrée-sortie), soit sous la forme d'un état (approche système). Dans les deux cas, ces quantités sont capables de résumer correctement le passé. Lorsque l'horizon sur lequel on ne néglige pas les entrées est augmenté, la complexité numérique de ces approximations croît normalement moins vite que les méthodes héréditaires, parce qu'il s'agit seulement de résumer plus précisément le passé.

## C.2 Approximation issue des diffusions

Nous montrons que les réalisations diffusives permettent aussi de fournir une approximation des filtres diffusifs à temps discret en nous inspirant fidèlement du travail à temps continu de [HM98], [Hel00] et de [Mon98] et aussi du travail à temps discret de [Hel00].

L'approximation consiste à approcher l'état  $\varphi_n$  de la réalisation diffuse (1.9) par une fonction affine par morceaux  $\hat{\varphi}_n$  qui coïncide avec  $\varphi_n$  sur un réseau de  $M$  points  $\{\rho_1 \dots \rho_M\}$  contenu dans  $\mathbb{I}$ . La construction de cette

approximation se fait au moyen de fonctions triangles notées  $\Lambda_m$  :  
L'approximation est définie par :

$$\begin{cases} \underline{\varphi}_{n+1} &= \mathbf{A} \underline{\varphi}_n + \mathbf{B} u_n \quad \text{où } \underline{\varphi}_0 \in \mathbb{R}^M \\ \hat{y}_n &= \mathbf{C} \underline{\varphi}_n + \mathbf{D} u_n \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \rho_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \rho_M \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \left[ \int_0^1 \mu \Lambda_1 d\rho \dots \int_0^1 \mu \Lambda_M d\rho \right] \quad \mathbf{D} = h_0$$

Les composantes de  $\mathbf{C}$  sont notées  $[c_1 \dots c_M]$ . La fonction de transfert de l'approximation est :  $\hat{\mathcal{H}}(z) = \sum_{m=1}^M \frac{c_m z^{-1}}{1 - \rho_m z^{-1}}$ . Les pôles de  $\hat{\mathcal{H}}(z)$  sont  $\{\rho_1 \dots \rho_M\} \subset [-1, 1]$ .

Le choix du réseau de points est important pour les performances de l'algorithme et dépend du support de  $\mu$  noté  $\mathbb{I}$ . Le réseau de points  $\{\rho_1 \dots \rho_M\}$  choisi est adapté à  $\mathbb{I} = [0, 1]$  et est tel que  $\ln \frac{1}{\rho_m}$  soient géométriquement répartis sur  $[0, +\infty[$ . C'est un choix heuristique conforme à ce qui se fait à temps continu dans [HM98]. En effet, les pôles  $\{\xi_1 \dots \xi_M\}$  géométriquement répartis de l'approximation des réalisations diffusives à temps continu se transforment par invariant impulsionnelle en  $\{e^{-\xi_1} \dots e^{-\xi_M}\}$ .

L'algorithme déterminant  $\hat{\mathcal{H}}$  consiste d'abord à choisir le premier pôle  $\rho_1$  et le dernier pôle  $\rho_M$ . La manière de choisir a été étudiée en détails dans [Hel00]. Le reste du réseau de points est calculé par

$$\ln(\rho_m) = \ln(\rho_1) \left( \frac{\ln(\rho_M)}{\ln(\rho_1)} \right)^{\frac{m-1}{M-1}}. \quad \text{L'évaluation numérique des composantes}$$

de  $\mathbf{C}$  se fait soit en approximant  $c_m = \int_0^1 \mu(\rho) \Lambda_m(\rho) d\rho$  par  $c_m = \mu(\rho_m)(\rho_{m+1} - \rho_{m-1})$ , soit d'une manière plus précise et selon un procédé analogue au §C.3.

La première approximation est réalisée avec le programme `approximation1.m` (p. 166) tandis que la seconde est réalisée avec le programme `approximation2.m`.

Lorsque  $c_m$  est calculé exactement, la proposition suivante démontre la convergence de cet algorithme mais en un sens plus faible :  $\rho_1$  et  $\rho_M$  sont supposés être choisis avant que le nombre de pôles soit déterminé.

**Proposition 29** *Soit  $\mathcal{H}$  un filtre diffusif de symbole diffusif  $\mu$  de support égal à  $[0, 1]$  et  $\mathcal{H}_\varphi$  sa réalisation définie par (1.9),  $\mathbb{H}$  son espace d'état et  $\varphi_0$  une condition initiale,  $\varphi_0 \in \mathbb{H}$ . Soit  $\{0 \dots N\}$  un horizon :  $n \leq N$ . Soit  $\rho_1 \dots \rho_M$  un ensemble de  $M$  points de  $[0, 1]$ . Soient  $\hat{\varphi}_n$  les fonctions affines par morceaux qui coïncident avec  $\varphi_n$  sur ces  $M$  points. Soit  $\hat{y}_n = \int_0^1 \mu \hat{\varphi}_n d\rho$ .*



Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(H1)  $\varphi_0$  continue sur  $]0, 1[$

(H2)  $\rho\mu(\rho)\varphi_0^2(\rho) \rightarrow 0$  quand  $\rho \rightarrow 0^+$

(H3)  $(1 - \rho)\mu(\rho)\varphi_0^2(\rho) \rightarrow 0$  quand  $\rho \rightarrow 1^-$

alors pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\rho_g, \rho_d$  et  $\gamma$  tels que  $\rho_1 = \rho_g, \rho_M = \rho_d$  et pour tout  $m$ ,  $|\rho_{m+1} - \rho_m| \leq \gamma$  implique que  $\forall n \in \{0 \dots N\}$ ,  $\|\varphi_n - \hat{\varphi}_n\|_{\mathbb{H}} \leq \epsilon$  et  $|y_n - \hat{y}_n| \leq \epsilon$ .

**Commentaire** Cette preuve reprend les idées exposées dans [Hel00, chapitre 6]. Remarquons que cette preuve n'est plus valable lorsque le filtre diffusif est inséré dans un bouclage. En effet dans ce cas  $\hat{\varphi}_n(\rho_m) \neq \varphi_n(\rho_m)$  parce que l'entrée  $u_n$  dépend aussi de  $\varphi \neq \hat{\varphi}$ .

**Preuve** On montre d'abord la convergence de l'état

$\|\varphi_n - \hat{\varphi}_n\|_{\mathbb{H}}^2 = \int_0^1 |\mu|(\varphi_n - \hat{\varphi}_n)^2 d\rho \rightarrow 0$  en découpant l'intégrale en trois parties  $[0, 1] = [0, \rho_1] \cup [\rho_1, \rho_M] \cup [\rho_M, 1]$ .

D'après la proposition 2 sur les réalisations diffusives (p. 28),  $\varphi_n \in \mathbb{H}$ . Les hypothèses sur  $\varphi_0$  et la relation de convolution  $\varphi_n = \rho^{n-1} \star u_n + \rho^{n-1} \varphi_0$  prouvent que  $\rho\mu(\rho)\varphi_n(\rho)^2 \rightarrow 0$  quand  $\rho \rightarrow 0^+$  et  $(1 - \rho)\mu(\rho)\varphi_n^2(\rho) \rightarrow 0$  quand  $\rho \rightarrow 1^-$  et que  $\varphi_n$  est continu sur  $]0, 1[$ .

$\rho_g = \rho_1$  désigne le premier pôle. Sur  $[0, \rho_g]$ ,  $\hat{\varphi}_n(\rho) = \frac{\rho}{\rho_g} \varphi_n(\rho_g)$  aussi

$$\int_0^{\rho_g} |\mu|(\varphi_n - \hat{\varphi}_n)^2 d\rho = \int_0^{\rho_g} |\mu(\rho)|\varphi_n^2 d\rho - 2 \frac{\varphi_n(\rho_g)}{\rho_g} \int_0^{\rho_g} |\mu|\rho\varphi_n d\rho + \frac{\varphi_n^2(\rho_g)}{\rho_g^2} \int_0^{\rho_g} |\mu(\rho)|\rho^2 d\rho$$

Le théorème de la valeur moyenne prouve que ces expressions tendent vers zéro quand  $\rho_g \rightarrow 0$ .

$\rho_d$  désigne le dernier pôle  $\rho_M$ . De même  $\int_{\rho_d}^1 |\mu|(\varphi_n - \hat{\varphi}_n)^2 d\rho \rightarrow 0$  quand  $\rho_d \rightarrow 1$ .

On fixe maintenant le premier et le dernier pôle  $\rho_g$  et  $\rho_d$  et on fait varier  $M$  et  $\rho_2 \dots \rho_{M-1}$  de telle sorte que  $\sup_m (\rho_{m+1} - \rho_m)$  tende vers zéro.  $\hat{\varphi}_n$  converge vers  $\varphi_n$  en norme infinie parce que  $\varphi_n$  est uniformément continue sur  $[\rho_g, \rho_d]$ . La linéarité et la continuité de l'opérateur d'observation de la réalisation diffuseuse  $\varphi \mapsto \int_0^1 \mu\varphi d\rho$  permettent maintenant d'en déduire pour  $n \leq N$  que

$$|y_n - \hat{y}_n| \leq \int_0^1 |\mu(\rho)| |\varphi_n - \hat{\varphi}_n| d\rho \rightarrow 0.$$

Ce résultat de convergence s'étend en fait au cas où les coefficients  $c_m$  sont approchés par un algorithme convergent, les nouveaux coefficients étant notés  $\tilde{c}_m$ . En effet  $\hat{\varphi}_n$  n'est pas modifié, seul l'opérateur d'observation est modifié. Si on note  $\tilde{y}_n$  la sortie modifiée, on montre à  $n$  fixé que

$$|\hat{y}_n - \tilde{y}_n| \leq \max_m |\varphi_n(\rho_m)| \sum_{m=1}^M |c_m - \tilde{c}_m| \quad \square$$

Lorsque  $\mathcal{H}$  est positif, cet algorithme ne conserve pas nécessairement la po-

sitivité. Nous donnons les propriétés entrée-sortie de cet algorithme lorsque les  $c_m$  sont calculés exactement.

**Proposition 30** *Soit  $\mathcal{H}$  un filtre diffusif et  $\hat{\mathcal{H}}$  le filtre obtenu par l'algorithme issu des représentations diffusives, dans lequel les coefficients  $c_m$  sont calculés exactement.*

- a.  $\hat{\mathcal{H}}$  est un filtre rationnel stable.
- b. Si  $\mu$  est de signe constant, les pôles et les zéros sont alternés.
- c. A  $n$  fixé et lorsque  $M \rightarrow \infty$ , la réponse impulsionnelle de  $\hat{\mathcal{H}}$  vérifie  $\hat{h}_n \rightarrow h_n$ .
- d. A  $\omega \in ]-\pi, \pi[ \setminus \{0\}$  fixé,  $\hat{\mathcal{H}}(e^{i\omega}) \rightarrow \mathcal{H}(e^{i\omega})$ .

**Preuve**

- b. Le numérateur de  $\hat{\mathcal{H}}(z)$  est un polynôme de degré  $M$  qui change  $M$  fois de signe entre les points  $z \rightarrow -\infty, \rho_1 \dots \rho_M$  et  $z \rightarrow +\infty$ .
- c. Il suffit d'appliquer la proposition 29 à  $u_n = \{1 \dots 0 \dots\}$ .
- d. En reprenant la démonstration du théorème 8 (p. 142). On choisit  $u_n = \frac{1}{\sqrt{1+N}} e^{i\theta n} \mathbf{1}_{\{0 \dots N\}}$ , et de montrer qu'alors  $\sum_{n=0}^N u_n y_n$  converge vers  $\mathcal{H}(e^{i\omega})$  grâce au noyau de Féjer  $k_N(\omega)$  qui converge vers un Dirac quand  $N \rightarrow \infty$ . De même  $\sum_{n=0}^N u_n \hat{y}_n$  converge vers  $\hat{\mathcal{H}}(e^{i\omega})$ . Soit  $\epsilon > 0$ , il existe  $N$  tel que  $|\sum_{n=0}^N u_n y_n - \mathcal{H}(e^{i\omega})| < \epsilon$ . Selon la proposition 29, il existe des pôles  $\rho_1 \dots \rho_M$  tels que pour tout  $n \leq N$ ,  $|y_n - \hat{y}_n| < \epsilon$ . L'entrée choisie étant bornée, on a donc prouvé la convergence de  $\mathcal{H}(e^{i\omega})$  vers  $\hat{\mathcal{H}}(e^{i\omega})$ .

□

Les algorithmes d'approximation *MA*, *AR* et celui issu des réalisations diffusives et notés *DIFF* sont testés sur  $\mathcal{H}^{FI}$ . La première expérience consiste à faire passer une suite qui prend aléatoirement ses valeurs parmi  $\{-1, 1\}$  à travers  $\mathcal{H}^{FI}$  et son approximation (cette suite est parfois appelée *bpsk*). La différence des deux sorties peut alors être considérée comme un bruit, ce qui nous permet de mesurer le rapport signal sur bruit. La figure C.1 retrace le résultat des simulations pour les trois algorithmes ( $\rho_1$  et  $\rho_M$  sont choisis par optimisation d'un critère (i.e.  $\sum_{n=0}^N (h_n - \hat{h}_n)^2$ ) et par suite dépendant aussi de  $\alpha$ ). Le rapport signal sur bruit de l'algorithme issu des représentations diffusives est entre 25 et 50 dB pour 5 pôles. Un tel rapport signifie que l'algorithme est correct pour une utilisation standard : les erreurs sont statistiquement peu fréquentes. Cet algorithme est aussi plus robuste vis à vis de  $\alpha$ .

La deuxième expérience concerne la norme  $\|h_n - \hat{h}_n\|_{l^1(N)} = \sum_{n=0}^N |h_n - \hat{h}_n|$ . Cette norme garantit une certaine précision de la sortie :

$$\forall n \leq N \quad |y_n - \hat{y}_n| \leq \|h_n - \hat{h}_n\|_{l^1(N)} \max_{n \leq N} |u_n| \quad (\text{C.2})$$

Lorsque  $\alpha > 0$  ( $\mathcal{H}^{FI}$  est alors instable), cette norme dépend fortement de  $N$  :  $\|h_n - \hat{h}_n\|_{l^1(N)}$  diverge quand  $N \rightarrow +\infty$ . En effet  $\hat{\mathcal{H}}$  est stable et

donc  $\hat{h}_n = O(\frac{1}{n})$ . D'après (1.1)  $h_n^{FI} \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha) n^{1-\alpha}}$ . D'où à une constante de proportionnalité près  $\|h_n - \hat{h}_n\|_{l^1(N)} \sim N^\alpha$ . La figure C.2 indique l'horizon  $N$  pour lequel cette norme vaut 0.1 en faisant varier  $\alpha$  et  $M$  ( $\rho_1$  et  $\rho_M$  sont choisis par optimisation d'un critère (i.e.  $\sum_{n=0}^N (h_n - \hat{h}_n)^2$ )).

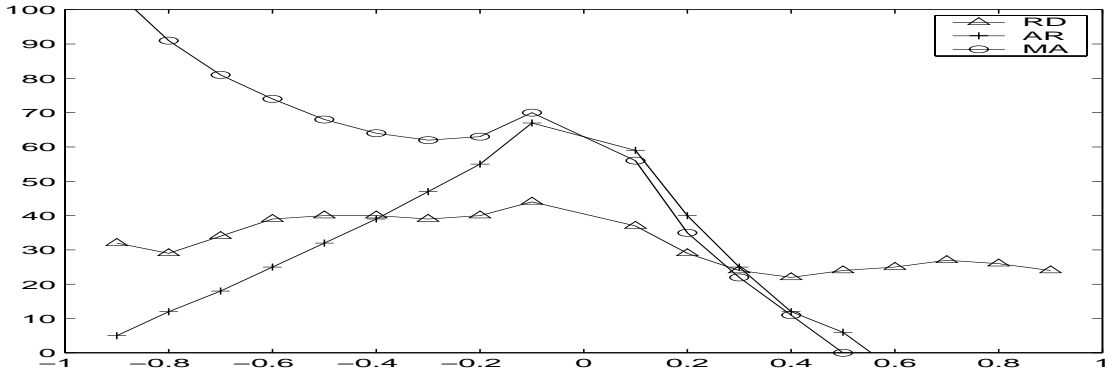


FIG. C.1 – Les algorithmes d'approximation sont testés sur  $\mathcal{H}^{FI}$  en faisant varier  $\alpha$  sur l'axe des abscisses.  $RD(\Delta)$  désigne l'approximation issue des représentations diffusives,  $MA(+)$  la réponse impulsionnelle tronquée et  $AR(o)$  le filtre inversé tronqué et encore inversé. En ordonnée est indiqué le rapport signal sur bruit en dB. Le bruit est l'erreur quadratique moyenne entre la sortie exacte et la sortie approximée lorsque l'entrée est une succession aléatoire de +1 et de -1.

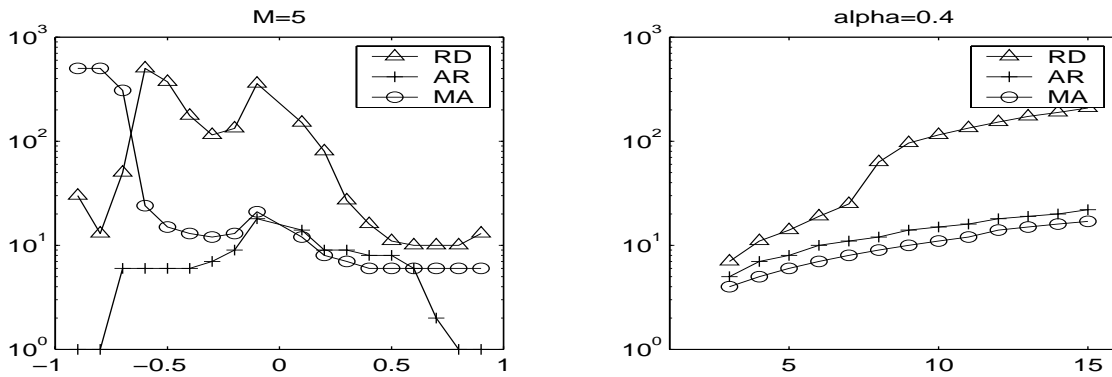


FIG. C.2 – Les algorithmes d'approximation sont testés sur  $\mathcal{H}^{FI}$  en faisant varier  $\alpha$  et le nombre de pôles  $M$ .  $RD(\Delta)$  désigne l'approximation issue des représentations diffusives,  $MA(+)$  la réponse impulsionnelle tronquée et  $AR(o)$  le filtre inversé tronqué et encore inversé. En ordonnée,  $N$  est la longueur de l'entrée pour laquelle l'algorithme d'approximation garantit que  $\forall n \leq N \ |y_n - \hat{y}_n| \leq 0.1 * \max_{n \leq N} |u_n|$ .

A gauche,  $M = 5$  et  $\alpha$  est sur l'axe des abscisses. A droite,  $\alpha = 0.4$  et  $M$  est sur l'axe des abscisses.

La figure C.6 et C.7 montrent qu'en se limitant à 10 pôles, l'approximation issue des réalisations diffusives est plus précise pour les temps longs

que les approximants de Padé avec 10 pôles. Sur la figure C.6, la réponse impulsionnelle est plus précise pour  $n > 150$ , et sur la figure C.7 la réponse fréquentielle est plus précise pour  $\omega < 10^{-2}$ . La figure C.3 rappelle que quand on approxime  $(1 - z^{-1})^{-0.4}$ , les pôles et les zéros sont alternés sur  $[0, 1]$ .

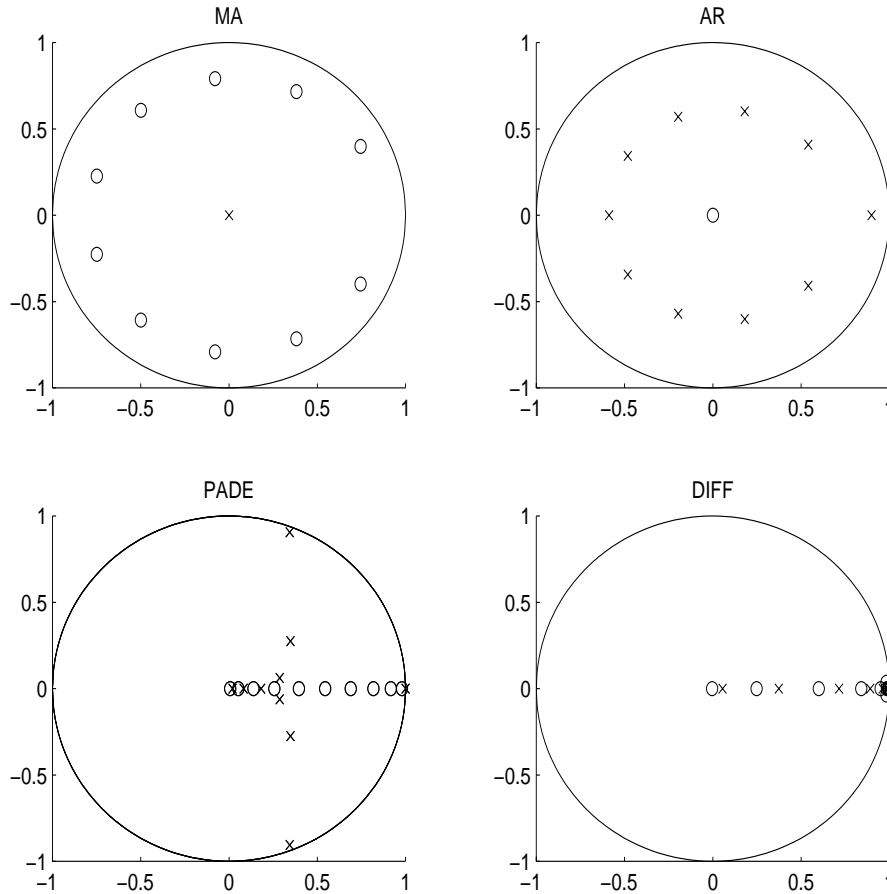


FIG. C.3 – Emplacement des pôles et des zéros des différents filtres rationnels *MA*, *AR*, *PADE*, *DIFF* approchant  $(1 - z^{-1})^{-0.4}$  (10 pôles et 10 zéros).

Lorsqu'on cherche une approximation plus précise, on a des problèmes comme pour les approximants de Padé. Le dernier pôle devrait être choisi très proche de  $\rho = 1$  pour avoir plus de précisions aux temps longs, mais dans ce cas il est difficile de calculer précisément  $c_M$ . La simulation 8.3 (p. 115) nécessite l'approximation de  $\varphi_n(\rho)$ , nous avons donc utilisé le programme `approximation1.m` avec 300 pôles et les coefficients  $c_m$  sont approchés par  $\mu(\rho_m)(\rho_{m+1} - \rho_{m-1})$ .

Pour les autres simulations qui ne requièrent pas de simuler  $\varphi_n(\rho)$ , nous avons d'autres algorithmes qui sont des interpolations linéaires et qui fonctionnent précisément avec un nombre très élevé de points d'interpolation.

### C.3 Algorithmes utilisés pour faire les simulations

Nous supposons ici le symbole diffusif connu analytiquement ou connu précisément. Trois algorithmes fondés sur le même principe sont exposés, ils utilisent la linéarité par rapport à  $\mu$  des relations donnant  $h_n$ ,  $\mathcal{H}(z)$  et  $\mathcal{V}_\mu$ . Nous désignerons ces algorithmes par le terme *interpolation*. La convergence des deux premiers algorithmes est démontrée. Ces algorithmes fonctionnent bien en fait seulement pour  $\alpha \leq 0.5$ . Une nouvelle version est proposée pour  $\alpha > 0.5$ .

Les formules (1.5), (1.6) et (1.14) sont transposées numériquement sous la forme des programmes `mu2hn.m` (p. 162) `muz2h` (p. 163) et `mu2vm` (p. 165). Ces trois formules sont des intégrales à poids : ( $\rho^{n-1}$  pour (1.5),  $\frac{1}{z-\rho}$  pour (1.6) et  $\frac{1}{r-\rho}$  pour (1.14)). L'idée consiste à approcher  $\mu$  par une fonction affine par morceau  $\hat{\mu}$  coïncidant avec  $\mu$  sur un réseau de points *uniformément répartis* sur  $[-1, 1]$  ou sur  $[0, 1]$ . Les deux premiers programmes se réduisent à un produit matriciel avec des matrices calculées préalablement, tandis que le troisième est un produit de convolution avec une réponse impulsionnelle calculée préalablement.

Les trois approximations constituent en fait un même nouveau filtre qui est encore de dimension infinie. Si ce filtre avait été de dimension finie, sa fonction de transfert aurait comporté des pôles à l'intérieur du cercle unité et aurait été donc une mauvaise simulation du véritable prolongement de la fonction de transfert.

La proposition 31 en annexe (p. 156) prouve que lorsque  $\mu$  est  $C^0$  et décroissante sur un voisinage de  $\rho = -1$  et croissante sur un voisinage de  $\rho = 1$  alors les deux premiers algorithmes d'approximation convergent lorsque le nombre de points du réseau tend vers l'infini,  $n$  et  $z$  étant fixés. ( La proposition s'applique aux deux algorithmes avec  $f(\rho) = \rho^{n-1}$  puis avec  $f(\rho) = \frac{1}{z-\rho}$ ). Comme l'illustrent les filtres étudiés ( $\mathcal{H}^{FI}$ ,  $\mathcal{H}^{BI}$ ,  $\mathcal{H}^{LN}$  et  $\mathcal{H}^{UN}$ ) l'hypothèse sur  $\mu$  est en général vérifiée.

**Proposition 31** Soient  $f$  une fonction bornée,  $\mu$  une fonction  $L^1(-1, 1)$  et  $[r_g, r_d]$  un intervalle contenu dans  $[-1, 1]$ . Soit  $\hat{\mu}$  la fonction affine par morceaux qui coïncide avec  $\mu$  sur un réseau de points régulièrement espacés dans  $[r_g, r_d]$  noté  $\{\rho_1 \dots \rho_P\}$ .

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(H1)  $\mu$  est continue sur  $]r_g, r_d[$ ,

(H2)  $(\rho - r_g)\mu(\rho) \rightarrow 0$  quand  $\rho \rightarrow r_g^+$  et  $(r_d - \rho)\mu(\rho) \rightarrow 0$  quand  $\rho \rightarrow r_d^-$ ,

$$\text{alors } \lim_{P \rightarrow +\infty} \int_{r_g}^{r_d} |f| |\mu - \hat{\mu}| d\rho = 0.$$

**Commentaire** La démonstration est un peu délicate parce que  $\mu \in L^1(-1, 1)$  n'implique pas que son approximation  $\hat{\mu}$  sur un réseau de points soit majorée par une fonction dans  $L^1$  indépendamment de ce réseau. Il a fallu donner des conditions supplémentaires sur  $\mu$  pour s'assurer que sa somme de Riemann converge.

**Preuve** Classiquement  $\mu$  est supposé  $C^1$  ou  $C^2$  sur  $[r_g, r_d]$  et une inégalité des accroissements finis conduit à une majoration de l'erreur. L'idée de la démonstration consiste ici à contrôler le comportement de  $\hat{\mu}$  au voisinage de  $r_g$  et de  $r_d$  puis d'utiliser la continuité uniforme de  $\mu$  hors de ces voisinages. La démonstration est ici faite pour  $r_0 = -1$  et  $r_1 = 1$ , une transformation affine permet de retrouver le cas général.

L'intervalle  $[-1, 1]$  est découpé en trois parties dépendantes de  $\varrho > 0$  :  $[-1, 1] = [-1, -\varrho] \cup [-\varrho, \varrho] \cup [\varrho, 1]$ . La définition de  $\hat{\mu}$  et la formule des trapèzes prouvent que  $\int_{-1}^1 |\hat{\mu}| d\rho = \frac{2}{P+1} \sum_p |\mu(\rho_p)|$ . On obtient alors l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |f| |\mu - \hat{\mu}| d\rho \leq \sup_{[-1,1]} |f| & \left[ \int_{-1}^{\varrho} |\mu| d\rho + \frac{2}{P+1} \sum_{\rho_p \leq -\varrho} |\mu(\rho_p)| \right. \\ & \left. + \int_{-\varrho}^{\varrho} |\mu - \hat{\mu}| d\rho + \int_{-\varrho}^1 |\mu| d\rho + \frac{2}{P+1} \sum_{\rho_p \geq \varrho} |\mu(\rho_p)| \right] \end{aligned}$$

Soit  $\epsilon > 0$

- $\frac{2}{P+1} \sum_{\rho_p \leq -\varrho} |\mu(\rho_p)| \leq \sup_{\rho \leq -\varrho} |(\rho+1)\mu(\rho)|.$
- $\frac{2}{P+1} \sum_{\rho_p \geq \varrho} |\mu(\rho_p)| \leq \sup_{\rho \geq \varrho} |(1-\rho)\mu(\rho)|.$

Ces deux expressions tendent vers zéro quand  $\varrho \rightarrow 1$  indépendamment de  $P$ . De même  $\int_{-1}^{\varrho} |\mu| d\rho$  et  $\int_{-\varrho}^1 |\mu| d\rho$  convergent aussi vers zéro quand  $\varrho \rightarrow 1$ . Il existe donc  $\varrho$  tel que ces quatre expressions soient majorées par  $\epsilon$ , et ce indépendamment de  $P$ .

- $\mu$  est en fait uniformément continue sur  $[-\varrho, \varrho]$ , il existe donc  $P_\epsilon$  tel que pour  $P > P_\epsilon$ ,  $\int_{-\varrho}^{\varrho} |\mu - \hat{\mu}| d\rho$  soit majorée par  $\epsilon$ .

□

Au voisinage de  $\rho = \pm 1$ , le comportement asymptotique de  $\mu$  vérifie en général l'existence de  $\alpha < 1$  tel que  $\mu(\rho) = O(|\rho \mp 1|^{-\alpha})$ . Les programmes `mu2hn.m` (p. 162) et `muz2h.m` (p. 163) sont en pratique utilisables jusqu'à  $|\alpha| \leq 0.5$  et ne peuvent donc pas s'appliquer à  $\mathcal{H}^{FI}$ ,  $\mathcal{H}^{BI}$  et  $\mathcal{H}^{LN}$  lorsque  $|\alpha| > 0.5$ . En fait dans ces cas-là,  $\mu$  et  $\hat{\mu}$  sont des symboles diffusifs de filtres très différents.

Pour remédier à ce problème, la solution en analyse numérique consiste à

ôter de  $\mu$  son asymptote en  $\rho = \rho_s$ . L'autre solution utilisée par [Hel00] consiste à raffiner le réseau de points autour de la singularité de  $\rho_s$ . L'information contenue dans  $h_1 = \int_{-1}^1 \mu(\rho) d\rho$  suffit en général à rajouter l'information qui manquait à  $\hat{\mu}$ . (1.5) et (1.6) s'écrivent différemment, en remplaçant les intégrales de poids  $\mu$  par des intégrales de poids  $\mu(\rho)(\rho - \rho_0)$ .

**Proposition 32** *Soit  $\mathcal{H}$  un filtre diffusif et  $\rho_0 \in [-1, 1]$   $\mathcal{H}$  se met sous la forme :*

$$\mathcal{H}(z) = h_0 + \frac{h_1 z^{-1}}{1 - \rho_0 z^{-1}} + \frac{z^{-1}}{1 - \rho_0 z^{-1}} \int_{-1}^1 \frac{\mu(\rho)(\rho - \rho_0)}{z - \rho} d\rho \quad (\text{C.3})$$

La réponse impulsionnelle s'écrit en fonction de  $\tilde{h}_n = \int_{-1}^1 \mu(\rho)(\rho - \rho_0)\rho^{n-1} d\rho$

$$\begin{aligned} h_1 &= \int_{-1}^1 \mu(\rho) d\rho \\ \forall n \geq 2 \quad h_n &= h_1 \rho_0^{n-1} + \rho_0^{n-1} \overset{d}{\star} \tilde{h}_n \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

où  $\overset{d}{\star}$  est le produit de convolution à temps discret.

**Preuve** Selon (1.6)

$$\mathcal{H}(z) - h_0 = \int_{-1}^1 \frac{\mu(\rho)d\rho}{z - \rho} = \frac{1}{z - \rho_0} \int_{-1}^1 \frac{\mu(\rho)d\rho}{z - \rho} [(z - \rho) + (\rho - \rho_0)].$$

Il suffit de scinder l'expression entre crochets et de remplacer  $\int_{-1}^1 \mu(\rho)d\rho$  par  $h_1$  pour obtenir (C.3).

(C.4) s'obtient à partir de (C.3) en remplaçant les produits entre fonctions par des produits de convolution entre suites.  $\square$

Cette proposition permet aux programmes `mush2hn.m` (p. 163) et `mushz2h.m` (p. 164) de simuler numériquement les réponses impulsionnelles et les fonctions de transfert des filtres dont le symbole diffusif a une singularité importante. La convergence de ces algorithmes est aussi prouvée grâce à la proposition 31.

D'une manière générale ces programmes sont plus coûteux en temps de calcul que les méthodes classiques d'intégration. La figure C.4 montre que la réponse impulsionnelle peut être évaluée de façon précise à condition d'utiliser le programme `mush2hn.m` (p. 163) en choisissant  $\rho_0$  en fonction du lieu de la singularité de  $\mu$  (i.e.  $\rho_0 = 1$  si  $\alpha > 0$  et  $\rho_0 = 0$  si  $\alpha < 0$ ). La figure C.5 représente l'erreur commise par le programme `mu2vm.m` (p. 165) pour prédire la valeur de continuité  $\mathcal{V}_{\mu^{FI}}$  de  $\mathcal{H}^{FI}$  pour  $\alpha = 0.5$  avec 10000 points : l'erreur est essentiellement localisée proche de la singularité, néanmoins le graphique 2.3 (p. 44) montre que ce programme peut quand même être utilisé pour évaluer le comportement asymptotique.

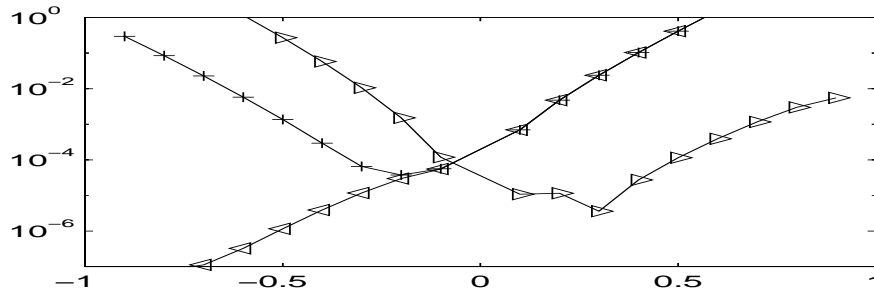


FIG. C.4 – Erreur en norme  $l^1$  de l'évaluation de la réponse impulsionnelle à partir du symbole diffusif de  $\mathcal{H}^{FI}$  en fonction de  $\alpha \in ]-1, 1[\setminus\{0\}$ . La courbe (+) est obtenue avec le programme `mu2hn.m`. Les courbes ( $\triangleright$ ) et ( $\triangleleft$ ) ont été obtenues avec le programme `mush2hn.m` avec les singularités respectivement en  $\rho_0 = 1$  et en  $\rho_0 = 0$ . Le symbole diffusif  $\mu$  est décrit par 5000 points et l'évaluation se fait sur 200 pas.

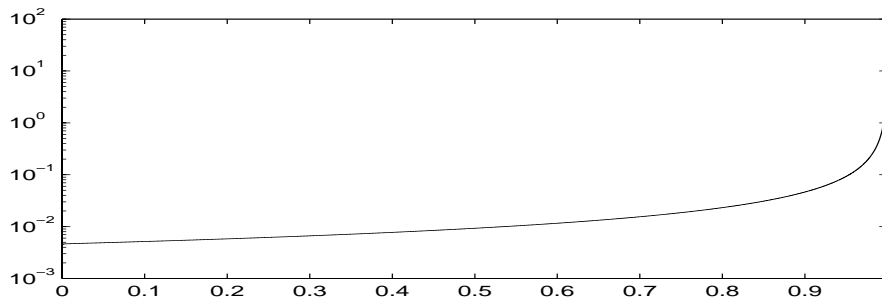


FIG. C.5 – Différence entre la vraie valeur de continuité  $\mathcal{V}_{\mu^{FI}}(\rho)$  et la valeur de continuité simulée par le programme `mu2vm.m` pour  $\alpha = 0.5$  et  $\rho \in [0, 1[$ .

Les figures C.6 et C.7 montrent qu'avec une complexité beaucoup plus grande, les algorithmes de type interpolations que nous avons présentés dans ce paragraphe sont plus précis que les approximants de Padé et que les algorithmes issus des réalisations diffusives, présentés dans les paragraphes précédents.



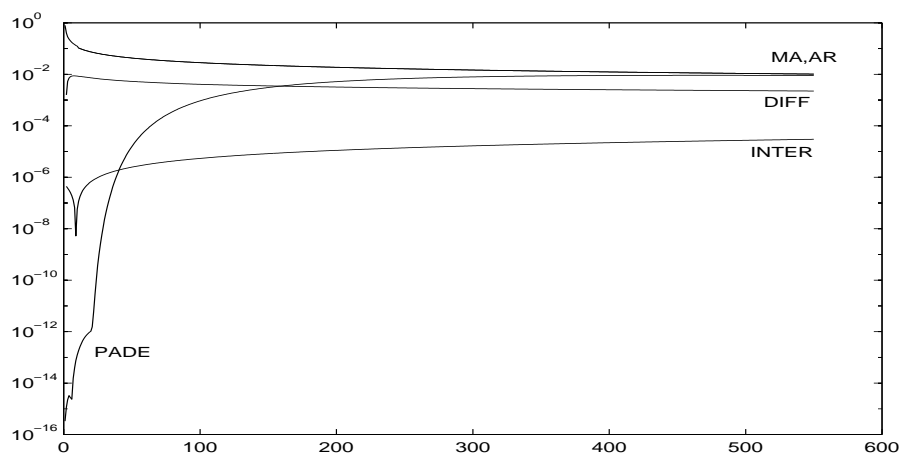


FIG. C.6 – Erreur sur chaque terme de la réponse impulsionnelle de  $(1 - z^{-1})^{-0.4}$  par les différentes approximations rationnelles *MA*, *AR*, *PADE*, *DIFF* avec 10 pôles et 10 zéros.

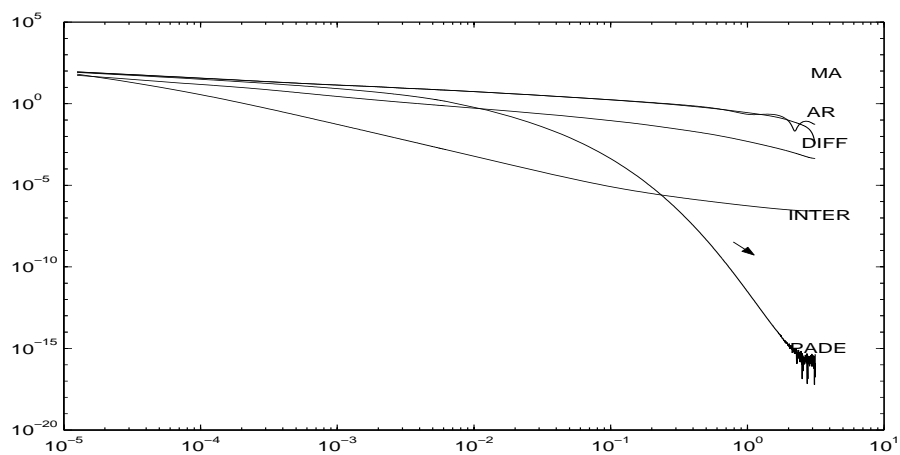


FIG. C.7 – Module de l'erreur sur la réponse fréquentielle de  $(1 - z^{-1})^{-0.4}$  par les différentes approximations rationnelles *MA*, *AR*, *PADE*, *DIFF* avec 10 pôles et 10 zéros.

# Annexe D

## Programmes

Les simulations présentées sont obtenues avec *Matlab*. Elles utilisent les programmes qui suivent. Le programme `nom2mu.m` donne le symbole diffusif  $\mu$  de chacun des filtres  $\mathcal{H}^{FI}$ ,  $\mathcal{H}^{LN}$ ,  $\mathcal{H}^{BI}$ ,  $\mathcal{H}^{UN}$  cités en chapitre 1. Les programmes `mu2hn.m`, `muz2h.m` et `mu2vm.m` évaluent  $h_n$ ,  $H(z)$  et  $\mathcal{V}_\mu$  à partir de  $\mu$  (cf : chapitre C). Les programmes `mush2hn.m` et `mushz2h.m` évaluent  $h_n$ ,  $H(z)$  à partir de  $\mu$  lorsque  $\mu$  est singulier en  $r = r_s$  (cf : chapitre C), ces programmes font respectivement appel aux programmes `mu2hn.m` et `muz2h.m`. Le programme `approximation.m` calcule une approximation en dimension finie  $\hat{H}$  d'un filtre diffusif à partir de  $\mu$  (cf : chapitre C). Le programme `ishnpositif.m` détermine si un filtre de réponse impulsionnelle  $hn$  est positif (cf : chapitre 3).

### Notations

Le symbole diffusif  $\mu$  est donné sous la forme d'un vecteur ligne `mu`. La réponse impulsionnelle `hn` est donnée sous la forme d'un vecteur ligne dont le premier terme est  $h_0$  et le dernier terme est indexé par `HORIZON+1`. Le vecteur `r` est le réseau de points couvrant l'intervalle  $[-1, 1]$  ou  $[0, 1]$ . Notons ce réseau  $r_p$  avec  $p \in \{-P \dots -1 \ 1 \dots P\}$  (respectivement  $p \in \{1 \dots P\}$ ), cet ensemble est noté  $\mathbb{P}$ . Appelons  $\Lambda_p$  les fonctions triangles de support  $[r_{p-1}, r_{p+1}]$  et de sommet  $\Lambda_p(r_p) = 1$ .  $\mu$  est approchée par la fonction affine par morceau  $\hat{\mu}(r) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \mu(r_p) \Lambda_p(r)$ .

---

### Programme 1 `nom2mu.m`

Le programme `nom2mu.m` donne le symbole diffusif des filtres cités en chapitre 1. Ces symboles diffusifs sont ici notés `mu` et sont données sous la forme d'un vecteur correspondant aux valeurs prises en `P` points régulièrement répartis sur  $[-1, 1]$ . Les formules utilisées sont issus de (p. 27), (1.8), (1.7) et (1.12).

*Variables en entrée :*

`nom` est une chaîne de caractère indiquant le nom du filtre.

$\alpha$  est un réel dans  $] - 1, 1[ \setminus \{0\}$  correspondant à  $\alpha$ .

$P$  est un entier.

*Variables en sortie :*

$\mu$  est un vecteur ligne de taille  $2P + 1$ , ce sont les  $2P + 1$  valeurs prises par  $\mu$  sur un réseau de points régulièrement espacé dans  $[-1, 1]$ .

$\rho$  est un vecteur ligne de même taille, c'est le réseau de points.

*Exemple :*

l'instruction `plot(nom2mu('FI',0.4,300))` ; trace le symbole diffusif de  $\mathcal{H}^{FI}$ .

```

function [mu,rho]=nom2mu(nom,alpha,P)
rho=[-fliplr(1:P) (1:P)]./(P+1); rhop=rho(rho>0);
if strcmp(nom,'UN') mu=rho>0; mu=[zeros(1,P) mu];
elseif strcmp(nom,'LN')
    mu=sin(alpha*pi)/pi*(log(1./rhop)).^(-alpha);
    mu=[zeros(1,P) mu];
elseif strcmp(nom,'FI')
    mu=rhop.^alpha.*(1-rhop).^(-alpha).*sin(alpha*pi)/pi;
mu=[zeros(1,P) mu];
elseif strcmp(nom,'BI')
    mu=2.^(-alpha).*(1+rho).^alpha;
    mu=mu.*(1-rho).^(-alpha).*sin(alpha*pi)/pi;
else display('erreur dans le programme nom2mu.m'); mu=NaN;
end;

```

### Programme 2 mu2hn.m

Le programme `mu2hn.m` évalue la réponse impulsionnelle par

$$h_n = \int_{-1}^1 \mu(r)r^{n-1}dr = \sum_{p \in \mathbb{P}} \mu(r_p) \int_{-1}^1 \Lambda_p(r)r^{n-1}dr \quad \text{où } n \geq 1 \text{ grâce à (1.5).}$$

L'expression intégrale est calculée préalablement :

$\frac{1+P}{n(n+1)} (\mu(r_{p+1})r_{p+1}^{n+1} - 2\mu(r_p)r_p^{n+1} + \mu(r_{p-1})r_{p-1}^{n+1})$ . Le programme évalue

numériquement cette expression. Cela ne peut pas être fait complètement vectoriellement faute de place mémoire. Ce programme fonctionne bien si les éventuelles singularités de  $\mu$  ne sont pas trop fortes, sinon il faut utiliser le programme `mush2hn.m`.

*Variables en entrée :*

$h_0$  est un réel.

$\mu$  est un vecteur ligne correspondant au symbole diffusif  $\mu$ .

HORIZON est un entier, c'est le nombre de points sur lesquels doit être calculé  $h_n$ .

*Variables en sortie :*

$hn$  est un vecteur ligne correspondant à la réponse impulsionnelle du filtre diffusif de symbole diffusif  $\mu$ . Le premier terme est  $h_0$ .

*Exemple :*

l'instruction `stem(mu2hn(1,nom2mu('FI',0.4,1000),20))` ; trace la réponse impulsionnelle de  $\mathcal{H}^{FI}$ .

```

function hn=mu2hn(h0,mu,HORIZON)
P=length(mu)/2;
r=(1:P)/(P+1); r=[-fliplr(r) r];
rp=[r(2:end) 1]; rm=[-1 r(1:(end-1))];
hp=mu.*rp; hm=mu.*rm; h=mu.*r; hn=[];
for n=1:HORIZON
    hp=hp.*rp; h=h.*r; hm=hm.*rm;
    hn=[hn sum(hp-h+hm-h)];
end;
hn=(1+P)/(1:HORIZON)/(2:(HORIZON+1)).*hn;
hn=[h0 hn];

```

### Programme 3 mush2hn.m

Le programme `mush2hn.m` requière la connaissance aussi de  $h_1$  et utilise la relation  $h_1 = \int_{-1}^1 \mu(r)dr$  pour évaluer la réponse impulsionnelle d'un filtre dont le symbole diffusif  $\mu$  est singulier en  $r = rs$  grâce à (C.4). Ce programme fait appel au programme `mu2hn.m`.

*Variables en entrée :*

`h0`, `h1` sont des réels.

`mu` est un vecteur ligne.

`HORIZON` est un entier, c'est le nombre de points sur lesquels doit être calculé  $h_n$ .

`rs` est un réel dans  $[-1, 1]$ .

*Variables en sortie :*

`hn` est un vecteur ligne correspondant à la réponse impulsionnelle du filtre diffusif de symbole diffusif  $\mu$ . Le premier terme est  $h_0$ .

*Exemple :*

l'instruction `stem(mush2hn(1,0.4,nom2mu('FI',0.4,1000),20,1))` ; trace la réponse impulsionnelle de  $\mathcal{H}^{FI}$ .

```

function hn=mush2hn(h0,h1,mu,HORIZON,rs)
hP=length(mu)/2; r=(1:hP)/(hP+1); r=[-fliplr(r) r];
mu=mu.*(r-rs);
hn1=mu2hn(0,mu,HORIZON);
rsn=[0 rs.^(0:(HORIZON-1))];
hn=filter(rsn,1,hn1)+rsn*h1; hn(1)=h0;

```

### Programme 4 muz2h.m

Le programme `muz2h.m` évalue  $H(z)$  d'après (1.6) par

$$\hat{\mathcal{H}}(z) = \int_{-1}^1 \frac{\hat{\mu}(\rho)}{z - \rho} d\rho = \sum_{p \in \mathbb{P}} \mu(\rho_p) \int_{-1}^1 \frac{\Lambda_p(\rho)}{z - \rho} d\rho \text{ avec } z \notin [-1, 1] \text{ (}\mu \text{ est sup-}$$

posée connue sur  $[-1, 1]$ ). L'expression intégrale est calculée préalablement :  $\Upsilon(z(P+1) - p)$  où  $\Upsilon(z) = -z \ln\left(\frac{z^2}{z^2-1}\right) + \ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$  est une fonction holomorphe sur  $|z| > 1$ . Le programme évalue numériquement ces deux expressions. Cela ne peut pas être fait complètement vectoriellement faute de place mémoire. Ce programme fonctionne bien si les éventuelles singularités de  $\mu$  ne sont pas trop fortes, sinon il faut utiliser le programme `mushz2h.m`.

*Variables en entrée :*

`mu` est un vecteur ligne.

`z` est un vecteur ligne composé de complexe.

*Variables en sortie :*

`H` est un vecteur ligne de même taille que `z`, c'est l'approximation de la fonction de transfert  $\mathcal{H}$  aux points de `z`.

*Exemple :*

l'instruction `plot(-pi+0.01 :0.01 :pi-0.01, ...`  
`angle(1+muz2h(nom2mu('FI',0.4,1000), ...`  
`exp(sqrt(-1)*(-pi+0.01 :0.01 :pi-0.01))))` ; trace le diagramme de phase de  $\mathcal{H}$ .

```
function H=muz2h(mu,z)
```

```
P=length(mu)/2;
```

```
z=z(:).'; mu=mu(:).'; H=[],
```

```
for j=1:length(z)
```

```
    zp=[(P+1)*(z(j)+1)-(1:P) (P+1)*(z(j)+1)-(P+2):(2*P+1)];
```

```
    Ups=-zp.*log((zp.^2)./(zp.^2-1))+log((zp+1)./(zp-1));
```

```
    H(j)=sum(mu.*Ups);
```

```
end;
```

### Programme 5 `mushz2h.m`

Le programme `mushz2h.m` requière la connaissance de  $h_1$  et utilise la relation  $h_1 = \int_{-1}^1 \mu(r)dr$  pour évaluer la prolongement analytique de la fonction de transfert d'un filtre dont le symbole diffusif  $\mu$  est singulier en  $r = rs$  grâce à (C.3).

`mu` est un vecteur ligne.

`z` est un vecteur ligne composé de complexe.

`h0`, `h1` sont des réels.

`rs` est un réel dans  $[-1, 1]$ .

*Variables en sortie :*

`H` est un vecteur ligne de même taille que `z`, c'est l'approximation de la fonction de transfert  $\mathcal{H}$  aux points de `z`.

*Exemple :*

l'instruction `plot(-pi+0.01 :0.01 :pi-0.01, ...`

`angle(muz2h(nom2mu('FI',0.4,1000), ...`

`exp(sqrt(-1)*(-pi+0.01 :0.01 :pi-0.01)),1,0.4,1)))` ; trace le diagramme de phase de  $\mathcal{H}$ .

```

function H=mushz2h(mu,z,h0,h1,rs)
hP=length(mu)/2; r=(1:hP)./(hP+1); r=[-fliplr(r) r];
mu=mu.*(r-rs);
H=h0+h1./(z-rs)+muz2h(mu,z)./(z-rs);

```

---

### Programme 6 mu2vm.m

Le programme mu2vm.m évalue  $\mathcal{V}_\mu$  par  $\mathcal{V}_\mu(r) = \sum_{\mathbb{P}} \mu(\rho_p) \mathcal{V}_{\Lambda_p}(r)$  ( $\mu$  est donnée sur  $[0, 1]$ ). L'expression est calculée préalablement et vaut

$\Upsilon(r(P+1) - p)$  avec  $\Upsilon(r) = -r \ln\left(\frac{r^2}{r^2-1}\right) + \ln\left(\frac{r+1}{r-1}\right)$ .  $\Upsilon$  est la restriction à  $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$  de la fonction  $\Upsilon$  du programme muz2h.m. Ici  $\mathcal{V}_\mu$  est évalué seulement sur  $[0, 1]$  et non sur  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ . Aussi il est possible d'évaluer vectoriellement tous les  $\Upsilon(r(P+1) - p)$  qui seront utilisées, ce qui forme une suite notée Vmu\_imp. Le résultat est en quelque sorte le produit de convolution de Vmu\_imp avec mu. Ce procédé permet d'augmenter la résolution de  $\mu$ .

*Variables en entrée :*

mu est un vecteur ligne correspondant à  $\mu$ .

*Variables en sortie :*

vmu est un vecteur ligne correspondant à  $\mathcal{V}_\mu$ .

*Exemple :*

l'instruction plot(1+mu2vm(nom2mu('FI',0.4,1000))) ; trace le graphe de la partie réelle de  $\mathcal{H}^{FI}$  le long de sa coupure.

```

function vmu=mu2vm(mu)
NB_POINTS=length(mu);
rhop=(1:NB_POINTS)./(NB_POINTS+1);
mu_b=[mu zeros(1,NB_POINTS-1)];
d=2:(NB_POINTS-1);
Ups=log((d+1)./(d-1))-d.*log(d^2./(d^2-1));
Vmu_imp=[2*log(2) Ups];
Vmu_imp_b=[-fliplr(Vmu_imp) 0 Vmu_imp];
vmu=conv(Vmu_imp_b,mu_b);
vmu=vmu((NB_POINTS):(2*NB_POINTS-1));

```

---

### Programme 7 approximation1.m

Le programme approximation2.m calcule une approximation en dimension finie  $\hat{H}$  d'un filtre diffusif de symbole diffusif  $\mu$ . Le programme suppose que  $\mu$  est à support contenu dans  $[0, 1]$ . r0 et rM sont le plus petit pôle et le plus grand pôle qui doivent choisis par l'utilisateur ou par une fonction d'optimisation. M est le nombre de pôles de l'approximation. Le programme calcule rho (l. 1-2) qui est l'ensemble des pôles et aussi les éléments diagonaux de **A** dans (C.1). Les coefficients  $c_m$  sont approchés par  $\text{cm} = \mu(\rho_m)(\rho_{m+1} - \rho_{m-1})$ . Ce programme est adapté pour permettre l'utilisation de  $M$  grand, par

exemple  $M = 300$ . *Variables en entrée :*

$r_0$ ,  $r_M$  sont deux réels contenus dans  $[0, 1]$  et doivent être donnés dans un ordre croissant.

$M$  est un entier, c'est la dimension de l'approximation.

$\mu$  est une chaîne de caractère qui permet à la fonction matlab `eval` de calculer  $\mu$  en n'importe quels points.

*Variables en sortie :*

$\mathbf{rho}$  est un vecteur ligne, ce sont les pôles de l'approximation.

$\mathbf{cm}$  est un vecteur ligne, ce sont les résidus associés à chaque pôle.

*Exemple :*

```
mu='rho.^0.4.*(1-rho).^(-0.4)*sin(0.4*pi)/pi';
[rho,cm]=approximation(0.01,0.9999,20,mu);
Ces instructions calculent l'approximation de  $\mathcal{H}^{FI}$ .
function [rho,cm]=approximation1(r0,rM,M,mu)
    ex=(log(rM)/log(r0))^(1/(M-1));
    rho=[r0 r0.^(ex.^(1:(M-1)))];
    mu_val=eval(mu);
    rhoe=[0 rho 1]; rp=rhoe(3:end); rm=rhoe(1:end-2);
    cm=mu_val.*(rp-rm)/2;
```

### Programme 8 approximation2.m

Le programme `approximation2.m` calcule une approximation en dimension finie  $\hat{H}$  d'un filtre diffusif de symbole diffusif  $\mu$ . Le programme suppose que  $\mu$  est à support contenu dans  $[0, 1]$ .  $r_0$  et  $r_M$  sont le plus petit pôle et le plus grand pôle qui doivent choisis par l'utilisateur ou par une fonction d'optimisation.  $M$  est le nombre de pôles de l'approximation. Le programme calcule  $\mathbf{rho}$  (l. 1-2) qui est l'ensemble des pôles et aussi les éléments diagonaux de  $\mathbf{A}$  dans (C.1) et  $\mathbf{cm}$  le vecteur d'observation  $\mathbf{C}$  (l. 12). La matrice  $\mathbf{MU2CM} = \left[ \int \Lambda_p \Lambda_m d\rho \right]_{p,m}$  sert d'intermédiaire de calcul. Si  $\mu$  est singulière en  $\rho = 1$  ou en  $\rho = 0$  les conséquences sur le calcul de  $\mathbf{cm}$  ne sont pas gênantes. Le programme n'est pas prévu pour le cas où  $\mu$  est singulière ailleurs. Dans ce cas la connaissance de  $h_1$  permettrait seulement d'améliorer la moitié du calcul d'une composante de  $\mathbf{C}$ .

*Variables en entrée :*

$r_0$ ,  $r_M$  sont deux réels contenus dans  $[0, 1]$  et doivent être donnés dans un ordre croissant.

$M$  est un entier, c'est la dimension de l'approximation.

$\mu$  est un vecteur ligne correspondant à  $\mu$ .

*Variables en sortie :*

$\mathbf{rho}$  est un vecteur ligne, ce sont les pôles de l'approximation.

$\mathbf{cm}$  est un vecteur ligne, ce sont les résidus associés à chaque pôle.

*Exemple :*

```
[rho,cm]=approximation(0.01,0.99,10,nom2mu('FI',0.4,1000));
sys=ss(diag(rho),ones(10,1),cm,1);
ltiview('pzmap',sys);
Ces instructions trace les pôles et zéros de l'approximation.
function [rho,cm]=approximation(r0,rM,M,mu)
    ex=(log(rM)/log(r0))^(1/(M-1));
    rho=[r0 r0.(ex.(1:(M-1)))];
    rhoe=[0 rho 1];
    mu=mu(:)'; P=length(mu); p=(1:P);
    MU2CM=zeros(M,P);
    for m=1:M
        rm=rhoe(m); r=rhoe(m+1); rp=rhoe(m+2);
        p1=p((p/(1+P)-rm).*(p/(1+P)-r)<0);
        if ~isempty(p1)
            MU2CM(m,p1)=(p1/(1+P)-rm)/(r-rm); end;
        p2=p((p/(1+P)-r).*(p/(1+P)-rp)<0);
        if ~isempty(p2) MU2CM(m,p2)=MU2CM(m,p2)+(rp-p2/(1+P))/(rp-r); end;
    end;
    cm=(MU2CM*mu')'/(P+1);
```

---

### Programme 9 ishnpositif.m

Le programme `ishnpositif.m` consiste à déterminer si la réponse impulsionnelle `hn` correspond à un filtre positif ou non. L'algorithme consiste à transformer la relation entrée-sortie en un produit matriciel avec `H_T` et regarder si la plus petite valeur propre est positive.

*Variables en entrée :*

`hn` est un vecteur ligne dont le premier terme est  $h_0$

*Variables en sortie :*

`test` est un entier valant 1 si le filtre de réponse impulsionnelle `hn` est positif et 0 sinon.

*Exemple :*

```
hn=mu2hn(1,nom2mu('FI',0.4,1000),20);
if ishnpositif(hn) sprintf('H_FI est positif'), end; Ces instructions
testent la positivité de  $\mathcal{H}$ .
function test=ishnpositif(hn)
hn=hn(:)';
hn=hn.*[1 0.5*ones(1,length(hn)-1)];
H_T=toeplitz(hn);
test=min(eig(H_T))>0;
```