



**HAL**  
open science

# Analyse d'acquisitions multiples anisotropes en Angiographie par Résonance Magnétique 3D : modélisation et reconstruction régularisée pour l'amélioration de la résolution spatiale

Elodie Roullot

► **To cite this version:**

Elodie Roullot. Analyse d'acquisitions multiples anisotropes en Angiographie par Résonance Magnétique 3D : modélisation et reconstruction régularisée pour l'amélioration de la résolution spatiale. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Télécom ParisTech, 2001. Français. NNT: . tel-00005773

**HAL Id: tel-00005773**

**<https://pastel.hal.science/tel-00005773>**

Submitted on 5 Apr 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Analyse d'acquisitions multiples  
anisotropes en Angiographie par  
Résonance Magnétique 3D :  
modélisation et reconstruction  
régularisée pour l'amélioration  
de la résolution spatiale**

**Elodie ROULLOT née BLONDEAU**

Thèse soutenue le 20 décembre 2001 devant le jury composé de :

Annick MONTANVERT	Président
Laure BLANC-FERAUD	Rapporteurs
Françoise PEYRIN	
Philippe DOUEK	Examineurs
Henri MAITRE	
Elie MOUSSEAUX	
Isabelle BLOCH	Directeurs de thèse
Alain HERMENT	

---

---

# Résumé

En raison de ses nombreux avantages par rapport à l'angiographie conventionnelle par rayons X (ARX), l'angiographie par résonance magnétique (ARM) est appelée à devenir à court terme la modalité de référence pour l'imagerie des vaisseaux sanguins. Cependant, l'ARM est limitée par sa faible résolution spatiale par rapport à celle de l'ARX : en effet, cette modalité est caractérisée par un compromis intrinsèque entre le temps d'acquisition et la résolution spatiale. Or, les temps d'acquisition sont soumis à des contraintes importantes (par exemple la durée d'une apnée du patient ou la durée de l'injection du produit de contraste), et ce, aux dépens de la résolution spatiale.

Pour contourner ce compromis, nous proposons une méthode de reconstruction d'images de résonance magnétique 3D à partir de plusieurs (deux ou trois) images 3D de résolutions complémentaires, permettant à temps égal d'améliorer la résolution spatiale et le rapport signal sur bruit.

La première étape de ce travail concerne la modélisation mathématique du problème direct, qui intègre les résultats de l'étude détaillée des sous-échantillonnages mis en œuvre dans le processus d'acquisition.

Dans une deuxième étape, nous nous sommes intéressés à la résolution du problème inverse, à savoir la reconstruction à partir des acquisitions sous-échantillonnées d'un volume unique de haute résolution. La méthode proposée se place dans le contexte de la restauration d'images avec préservation des discontinuités, et consiste à minimiser une fonction d'énergie adéquatement choisie, laquelle intègre le modèle développé précédemment. Deux méthodes de minimisation du même critère sont proposées : la première utilise l'algorithme du gradient conjugué pour minimiser directement la fonction d'énergie. La seconde, quant à elle, s'appuie sur la théorie de la régularisation semi-quadratique ; nous montrons comment l'exploitation conjointe des propriétés du modèle dans le domaine spectral et de celles des algorithmes de régularisation semi-quadratique permet le développement d'un algorithme de reconstruction élégant et plus performant, performance corroborée par une évaluation comparative détaillée.

La méthode a été évaluée sur des images synthétiques, puis appliquée à des images

---

réelles d'aortes et de carotides, fournissant des résultats prometteurs. L'application à des images d'artères rénales a permis de mettre en évidence des limites à la méthode, qui sont abordées dans un dernier chapitre, parmi d'autres perspectives cliniques.

---

# Abstract

Due to its numerous advantages over conventional X-rays angiography (X.R.A.), magnetic resonance angiography (M.R.A.) may become in the near future the reference modality for imaging the blood vessels. Nevertheless, M.R.A. is limited by its low spatial resolution when compared to that of X.R.A.: indeed, this modality is characterized by an intrinsic trade-off between acquisition time and spatial resolution. Acquisition times are submitted to strong constraints (such as the duration of a patient's breath-holding, or the duration of the injection of a contrast agent), thus also constraining the spatial resolution.

In order to overcome this trade-off, a method is proposed to reconstruct 3D magnetic resonance images from several (two or three) 3D images with complementary resolutions, allowing for an unchanged acquisition time to improve the spatial resolution and the signal-to-noise ratio.

The first step of this work deals with the mathematical modeling of the direct problem, taking into account the results of the study of the undersampling processes implemented in the acquisition strategy.

In the second step, we address the resolution of the inverse problem, i.e. the reconstruction of a unique high-resolution volume from the undersampled acquisitions. The method is developed within the framework of edge-preserving image restoration; it consists in minimizing a suited energy functional, integrating the previously developed model. Two minimization methods for the functional are proposed: the first one uses the conjugate gradient algorithm in order to directly minimize the functional. The second one is based on the theory of half-quadratic regularization; we show how to take advantage of both the properties of the model in the spectral domain, and those of half-quadratic regularization algorithms, leading to the development of a simple and efficient reconstruction algorithm. Its efficiency was confirmed by a comparative evaluation.

The method was evaluated on synthetic images, and then applied to real images of aortas and carotid arteries, giving promising results. Its application to renal arteries

---

images allowed to show some limitations of the method, which are addressed in the last chapter among other clinical perspectives.

---

# Remerciements

En premier lieu, je voudrais remercier mes deux directeurs de thèse, Alain Herment et Isabelle Bloch : vous avez été tous les deux des directeurs de thèse très présents et très impliqués et je vous en suis très reconnaissante. Isabelle, merci aussi pour ta disponibilité de chaque instant et tes conseils précieux tout au long de ces trois années ; Alain, merci aussi pour les discussions animées, toujours fructueuses, qui ont jalonné ces trois années de travail en commun.

Je remercie également Elie Mousseaux, qui a participé à l'élaboration du sujet de thèse, pour son intérêt constant pour mon travail, pour toutes les réponses qu'il a pu m'apporter sur ses aspects cliniques, et pour le temps qu'il y a consacré, du début jusqu'à la soutenance.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers les membres du jury : Annick Montanvert qui a accepté de le présider, Françoise Peyrin et Laure Blanc-Féraud qui ont accepté la lourde tâche de rapporteurs, Philippe Douek, et Henri Maître. Je voudrais exprimer ma reconnaissance à Laure Blanc-Féraud, qui a accepté d'assister à ma pré-soutenance et a procédé à cette occasion à une lecture attentive et critique du rapport, pour les pistes intéressantes qu'elle m'a suggérées, et que j'ai suivies avec beaucoup de plaisir et d'intérêt.

Je remercie aussi les membres du département TSI de l'ENST d'une part, et ceux de l'unité INSERM 494 d'autre part, pour tous les échanges scientifiques fructueux ; merci en particulier à Mila Nikolova et Alain de Césaire pour leur participation active à mes travaux, ainsi qu'à Henri Maître pour les multiples discussions en « coup de vent » mais très enrichissantes.

Merci également à tous les thésards et permanents du département TSI qui ont contribué à y faire régner une bonne ambiance. Merci en particulier à Florence qui a été beaucoup plus qu'une simple compagne de bureau pendant trois ans...

Enfin, merci à Stéphan, dont les encouragements et la grande présence auprès de nos enfants ont permis à cette thèse de voir le jour.





---

*A Stéphan, Pénélope et Virgile*

---

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>Contexte médical</b>	<b>19</b>
2.1	Anatomie et pathologie du système artériel . . . . .	19
2.1.1	Notions d'anatomie vasculaire . . . . .	19
2.1.2	Les pathologies vasculaires . . . . .	20
2.2	L'Imagerie par Résonance Magnétique . . . . .	24
2.2.1	Historique . . . . .	24
2.2.2	Principe de l'I.R.M. . . . .	24
2.2.2.1	Fondements physiques . . . . .	24
2.2.2.2	Détection du signal de R.M.N. . . . .	26
2.2.2.3	Localisation du signal . . . . .	26
2.2.3	Séquences d'acquisition . . . . .	29
2.2.4	Caractéristiques des images I.R.M. . . . .	34
2.2.4.1	Le contraste . . . . .	34
2.2.4.2	La résolution et le temps d'acquisition . . . . .	34
2.2.4.3	Le bruit . . . . .	34
2.2.4.4	Conséquence: le compromis . . . . .	35
2.2.5	Les séquences rapides . . . . .	36
2.3	L'Angiographie par Résonance Magnétique . . . . .	38
2.3.1	L'angiographie Temps de Vol . . . . .	38
2.3.2	L'angiographie par Contraste de Phase . . . . .	38
2.3.3	L'angiographie avec Agent de Contraste . . . . .	38
2.4	L'exploitation des images A.R.M. . . . .	39
2.4.1	Les objectifs de l'imagerie vasculaire . . . . .	39
2.4.2	Les problèmes de la quantification des pathologies vasculaires . . . . .	40
2.4.3	Résolution et temps d'acquisition: position du problème . . . . .	42
2.4.4	Les solutions existantes . . . . .	42

## TABLE DES MATIÈRES

---

<b>3</b>	<b>Stratégie d'acquisition</b>	<b>45</b>
3.1	Protocole d'acquisition . . . . .	45
3.2	Conséquences de la stratégie d'acquisition . . . . .	48
3.2.1	Influence sur le temps d'acquisition . . . . .	48
3.2.2	Influence sur la couverture spectrale . . . . .	50
3.2.3	Influence sur le bruit . . . . .	56
3.3	Intérêt clinique . . . . .	57
3.4	Caractéristiques des acquisitions . . . . .	58
3.4.1	Enchaînement des séquences . . . . .	58
3.4.2	Filtrage . . . . .	58
3.4.3	Format des données . . . . .	59
3.4.4	Orientation du volume . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Modélisation des données</b>	<b>61</b>
4.1	Interpolation des images sous-résolues . . . . .	62
4.1.1	Approche classique du <i>zero-padding</i> . . . . .	63
4.1.2	Approche de <i>zero-padding</i> pour une image réelle . . . . .	65
4.1.3	Conséquences de l'interpolation . . . . .	67
4.2	Modélisation . . . . .	73
4.2.1	Rappels sur les opérateurs sur les images . . . . .	73
4.2.2	Modélisation de la dégradation . . . . .	74
4.2.3	Extension au cas général . . . . .	77
4.2.4	Cas particulier de deux acquisitions . . . . .	78
<b>5</b>	<b>Reconstruction d'un unique volume de haute résolution</b>	<b>81</b>
5.1	Restauration d'images avec préservation des discontinuités . . . . .	82
5.1.1	Définitions . . . . .	82
5.1.2	Caractéristiques des problèmes inverses . . . . .	83
5.1.3	Méthodes de résolution des problèmes inverses . . . . .	84
5.1.3.1	Approches linéaires . . . . .	84
5.1.3.2	Approches itératives . . . . .	85
5.1.4	Préservation des discontinuités . . . . .	86
5.2	Choix de la méthode . . . . .	90
5.3	La fonction d'énergie . . . . .	90
5.3.1	Terme de fidélité aux données . . . . .	91
5.3.2	Terme de régularisation . . . . .	91
5.3.3	Etude de la convexité . . . . .	94

5.3.4	Cas particulier de deux acquisitions . . . . .	98
5.4	Méthode d'optimisation . . . . .	98
5.4.1	Choix de la méthode . . . . .	98
5.4.2	L'algorithme du gradient conjugué . . . . .	99
5.5	Expression du gradient de l'énergie . . . . .	101
5.5.1	Gradient du terme de fidélité aux données . . . . .	101
5.5.2	Gradient du terme de régularisation . . . . .	102
5.5.3	Cas particulier de deux acquisitions . . . . .	102
5.6	Schéma de principe de la méthode . . . . .	103
5.7	Caractérisation des solutions . . . . .	103
5.7.1	Caractérisation de la solution non régularisée . . . . .	103
5.7.2	Caractérisation des solutions régularisées . . . . .	107
5.7.2.1	Régularisation quadratique . . . . .	107
5.7.2.2	Autres solutions . . . . .	111
<b>6</b>	<b>Résolution dans le domaine de la T.F.D. par développements semi-</b>	
	<b>quadratiques</b>	<b>113</b>
6.1	La régularisation semi-quadratique . . . . .	113
6.2	Expression du problème avec ARTUR et LEGEND . . . . .	115
6.2.1	Cas de l'algorithme ARTUR . . . . .	115
6.2.2	Cas de l'algorithme LEGEND . . . . .	116
6.2.3	Comparaison des deux approches . . . . .	118
6.3	Expression de LEGEND dans le domaine spectral . . . . .	119
<b>7</b>	<b>Evaluation et validation de la reconstruction</b>	<b>123</b>
7.1	Comparaison des deux algorithmes de reconstruction . . . . .	123
7.2	Evaluation de la reconstruction . . . . .	131
7.2.1	Reconstruction non régularisée . . . . .	131
7.2.2	Reconstruction avec régularisation quadratique . . . . .	132
7.2.3	Reconstruction régularisée : étude des hyperparamètres . . . . .	133
7.3	Résultats cliniques . . . . .	143
7.3.1	Exemple sur une aorte . . . . .	143
7.3.2	Exemple sur des carotides . . . . .	150
<b>8</b>	<b>Perspectives cliniques</b>	<b>161</b>
8.1	Le problème du mouvement . . . . .	161
8.1.1	Les mouvements rigides : recalage automatique . . . . .	162
8.1.2	Mise en évidence des mouvements élastiques . . . . .	163

## TABLE DES MATIÈRES

---

8.1.3	Solutions cliniques . . . . .	164
8.2	Application au suivi temporel . . . . .	165
8.3	Application à d'autres types de données . . . . .	166
8.3.1	Validité du modèle de sous-échantillonnage . . . . .	166
8.3.2	Validité des <i>a priori</i> de régularisation . . . . .	167
<b>9</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>169</b>
	<b>Annexes</b>	<b>173</b>
<b>A</b>	<b>Images synthétiques pour l'évaluation</b>	<b>173</b>
A.1	Modèle d'image constante par morceaux . . . . .	173
A.2	Modèle d'image de segment vasculaire . . . . .	176
A.2.1	Modèle de surface pour la paroi du vaisseau . . . . .	176
A.2.2	Modèle d'intensité . . . . .	176
A.2.3	Modèle de bruit . . . . .	177
<b>B</b>	<b>Algèbre linéaire sur des volumes tridimensionnels</b>	<b>183</b>
B.1	Définitions . . . . .	183
B.2	Propriétés . . . . .	186

---

# CHAPITRE 1

## Introduction

Les maladies cardiovasculaires constituent l'une des premières causes de mortalité en France. Or, moyennant une détection précoce, ces maladies peuvent souvent être traitées ; le diagnostic repose en particulier sur l'imagerie des artères. Les images de ces artères et de leurs lésions sont encore très souvent obtenues par opacification du vaisseau au cours d'un examen d'artériographie par rayons X (A.R.X.). Cet examen n'est pas dénué de risque, car il impose la réalisation d'un cathétérisme artériel, des injections d'un produit de contraste iodé qui provoque des réactions allergiques assez fréquentes, et l'exposition à des radiations ionisantes. De plus, le coût de ce type d'examen n'est pas négligeable car il impose l'hospitalisation du patient, à des fins de surveillance imposée par l'utilisation de l'iode.

Une technique d'imagerie récente alternative à l'A.R.X. est l'angiographie par résonance magnétique (A.R.M.), pour laquelle des études menées dans les dernières années font état d'avancées importantes dans les explorations artérielles, laissant entrevoir un avenir prometteur à l'A.R.M. dans les années à venir [BOXT-98, ABRA-98]. Cependant, à ce jour, l'A.R.M. est limitée par sa faible résolution spatiale comparativement à celle de l'A.R.X. : si en A.R.X. on peut descendre en-dessous du millimètre sans problème, en A.R.M. atteindre le millimètre dans toutes les directions est souvent trop coûteux. Cette faible résolution rend difficile une approche quantitative fiable des lésions sténosantes des artères périphériques et empêche une visualisation correcte des artères de petites dimensions. En revanche, l'A.R.M. est plus informative que l'A.R.X. dans la mesure où elle peut fournir des données tridimensionnelles, alors que l'A.R.X. ne fournit que des images bidimensionnelles (de transmission), bien qu'il soit possible de reconstruire des données 3D à partir de plusieurs acquisitions 2D [PELL-91, PAYO-96a]. De plus l'A.R.M. est moins invasive que l'A.R.X., dans la mesure où elle n'implique pas de cathétérisme artériel, et où les produits de contraste



utilisés sont moins allergisants que l'iode.

Les objectifs généraux de la recherche en A.R.M. sont d'améliorer le diagnostic des maladies vasculaires ; or, ce dernier passe par une quantification précise des dimensions des vaisseaux. Les images utilisées pour établir le diagnostic doivent donc avoir une résolution spatiale suffisante pour discerner les petits vaisseaux d'intérêt, et pour en localiser précisément et fidèlement les contours.

L'objectif de cette thèse est de contribuer à l'amélioration des images servant à établir le diagnostic, en particulier en termes de résolution spatiale. Nous nous sommes intéressés plus particulièrement à la reconstruction d'images tridimensionnelles de haute résolution à partir de plusieurs volumes de résolutions complémentaires selon les trois directions de l'espace. Pour cela nous avons développé une technique de reconstruction intégrant une régularisation adaptée aux images médicales angiographiques, s'appuyant sur les spécificités des données A.R.M. de résolutions différentes.

Dans le chapitre 2, nous présentons le contexte médical dans lequel s'inscrivent nos travaux : après avoir rappelé quelques notions sur les maladies vasculaires que nous souhaitons aider à diagnostiquer, nous présentons les fondements de l'I.R.M. et plus particulièrement le compromis intrinsèque à l'I.R.M. entre la durée d'une acquisition et sa résolution spatiale, que nous tentons de contourner dans la suite du travail. Nous recensons également les nombreux travaux menés depuis plusieurs années dans ce sens, et qui ne sont guère satisfaisants, soit parce qu'ils dégradent la qualité des images de façon inacceptable, soit parce que leur mise en œuvre impose des adaptations matérielles ou logicielles trop spécifiques, soit parce que les solutions proposées ne s'appliquent pas aux données tridimensionnelles.

Le chapitre 3 présente les données sur lesquelles s'appuie notre travail. Contrairement à la plupart des solutions proposées dans la littérature, celle présentée ici doit fournir des images de bonne qualité, doit être simple de mise en œuvre, et adaptée à des données tridimensionnelles. Dans cette optique, nous proposons dans ce chapitre une étude théorique *a priori* de l'apport de cette stratégie d'acquisition par rapport à une acquisition classique, et de ses limites.

Le chapitre 4 développe la formalisation mathématique du processus d'acquisition présenté au chapitre 3, qui exploite le fait que les données acquises en I.R.M. sont en fait la transformée de Fourier de l'image proprement dite, et traduit la relation entre la bande passante d'un signal et sa résolution spatiale.

Nous utilisons ensuite cette modélisation pour définir, au chapitre 5, une méthode de reconstruction d'un unique volume de haute résolution à partir du jeu de données initial de résolutions complémentaires. Cette reconstruction est effectuée par un algorithme itératif de minimisation d'une fonction de coût composée d'un terme d'attache

---

aux données utilisant la modélisation du chapitre 4, et d'un terme de régularisation avec préservation des discontinuités, permettant de satisfaire aux exigences de qualité des contours en vue d'une quantification des dimensions des vaisseaux sanguins. Nous proposons également la caractérisation théorique de solutions particulières de la reconstruction, ainsi que leur interprétation intuitive.

L'objet du chapitre 6 est d'améliorer la méthode du chapitre 5 du point de vue algorithmique, en exploitant d'une part la théorie de la régularisation semi-quadratique et les algorithmes qui en découlent, d'autre part la spécificité des données obtenues par résonance magnétique, pour en déduire un algorithme élégant et efficace travaillant alternativement dans le domaine de l'image et dans le domaine spectral.

Les performances relatives des deux algorithmes sont évaluées expérimentalement dans le chapitre 7. Nous y proposons ensuite une évaluation de la méthode développée, sur des images synthétiques et sur des images A.R.M. *in vivo*. Nous vérifions également expérimentalement les résultats théoriques développés au chapitre 5 pour des solutions particulières du problème de reconstruction.

Le chapitre 8 discute quelques problèmes rencontrés lors de l'évaluation, et propose à titre de perspectives des pistes pour la généralisation de ce travail à d'autres données médicales que celles fournies par l'A.R.M. 3D.



---

## CHAPITRE 2

# Contexte médical

## Introduction

*Dans cette partie, nous présentons de façon générale le contexte médical dans lequel s'inscrit ce travail. Nous donnons tout d'abord quelques notions d'anatomie et de physiologie du système vasculaire, puis nous présentons les fondements de l'Imagerie par Résonance Magnétique, avec un accent plus particulier sur l'Angiographie (imagerie du système vasculaire). Ces développements nous amènent ensuite à énoncer un des problèmes majeurs de ce type d'imagerie, auquel nous nous efforcerons dans la suite du travail d'apporter des réponses.*

## 2.1 Anatomie et pathologie du système artériel

Les informations médicales de cette partie sont extraites principalement de l'ouvrage [SEAR-78] ainsi que du polycopié d'anatomie et de cytologie pathologiques de l'université Lyon 1<sup>1</sup>.

### 2.1.1 Notions d'anatomie vasculaire

Les artères sont les vaisseaux qui véhiculent le sang du cœur vers les tissus. Ce sont des tuyaux à parois épaisses comportant trois couches, externe, moyenne et interne. La couche externe (*adventice*) est composée de tissus fibreux et confère au vaisseau

---

1. <http://cri-cirs-wnts.univ-lyon1.fr/Polycopies>

protection et solidité. Elle assure entre autres fonctions l'interface avec les tissus voisins.

La couche moyenne (*média*) est constituée par des fibres musculaires lisses (non striées) et quelques fibres élastiques jaunes. Les fibres musculaires sont disposées de façon circulaire et peuvent, par leur contraction ou leur relâchement, modifier le calibre du vaisseau.

La couche interne (*intima*) possède deux parties : le revêtement intérieur de l'artère fait de cellules endothéliales aplaties et une couche de fibres élastiques séparant ce revêtement de la couche musculaire moyenne.

L'*aorte* part du ventricule gauche du cœur et traverse le thorax (où elle s'appelle *aorte thoracique*) et l'abdomen (on parle alors de l'*aorte abdominale*). L'artère thoracique est composée de l'*aorte ascendante*, immédiatement après le départ du cœur, la *crosse aortique*, et l'*aorte descendante*, représentées sur la figure 2.1. Le diamètre de l'aorte thoracique est de l'ordre de 2 cm et s'approche de 1 cm au niveau de l'aorte abdominale.

L'aorte ascendante donne naissance aux *artères coronaires*, qui irriguent le muscle cardiaque (le *myocarde*). Leur diamètre est de l'ordre de 2 à 3 mm.

De la crosse aortique partent, du côté droit, le *tronc artériel brachio-céphalique*, qui se divise en *artère carotide primitive droite* et *artère sous-clavière droite*. Du côté gauche, l'*artère carotide primitive gauche* et l'*artère sous-clavière gauche* partent directement de la crosse aortique. Les artères sous-clavières irriguent les membres supérieurs ; les artères carotides se séparent en *carotide interne* et *carotide externe*, qui irriguent le cerveau et l'oeil pour la première, le reste de la tête pour la seconde (figure 2.3). Les carotides ont un diamètre de l'ordre de 6 à 8 mm.

L'aorte abdominale donne naissance à plusieurs artères irriguant les organes de l'abdomen : estomac, foie, rate, reins, intestin, colon etc. (cf. figure 2.4) ; nous nous intéresserons surtout aux *artères rénales* dont les diamètres sont de l'ordre de 3 à 4 mm.

Nous avons décrit ici les principaux vaisseaux auxquels nous nous intéressons dans la suite de ce travail ; ci-dessous, nous exposons brièvement les principales pathologies qui peuvent les atteindre.

### 2.1.2 Les pathologies vasculaires

Nous nous intéresserons principalement à deux maladies des vaisseaux :

**L'anévrisme :** Cette dilatation du vaisseau résulte d'un affaiblissement de la paroi qui bombe vers l'extérieur. L'amincissement de la paroi qui en résulte peut entraîner

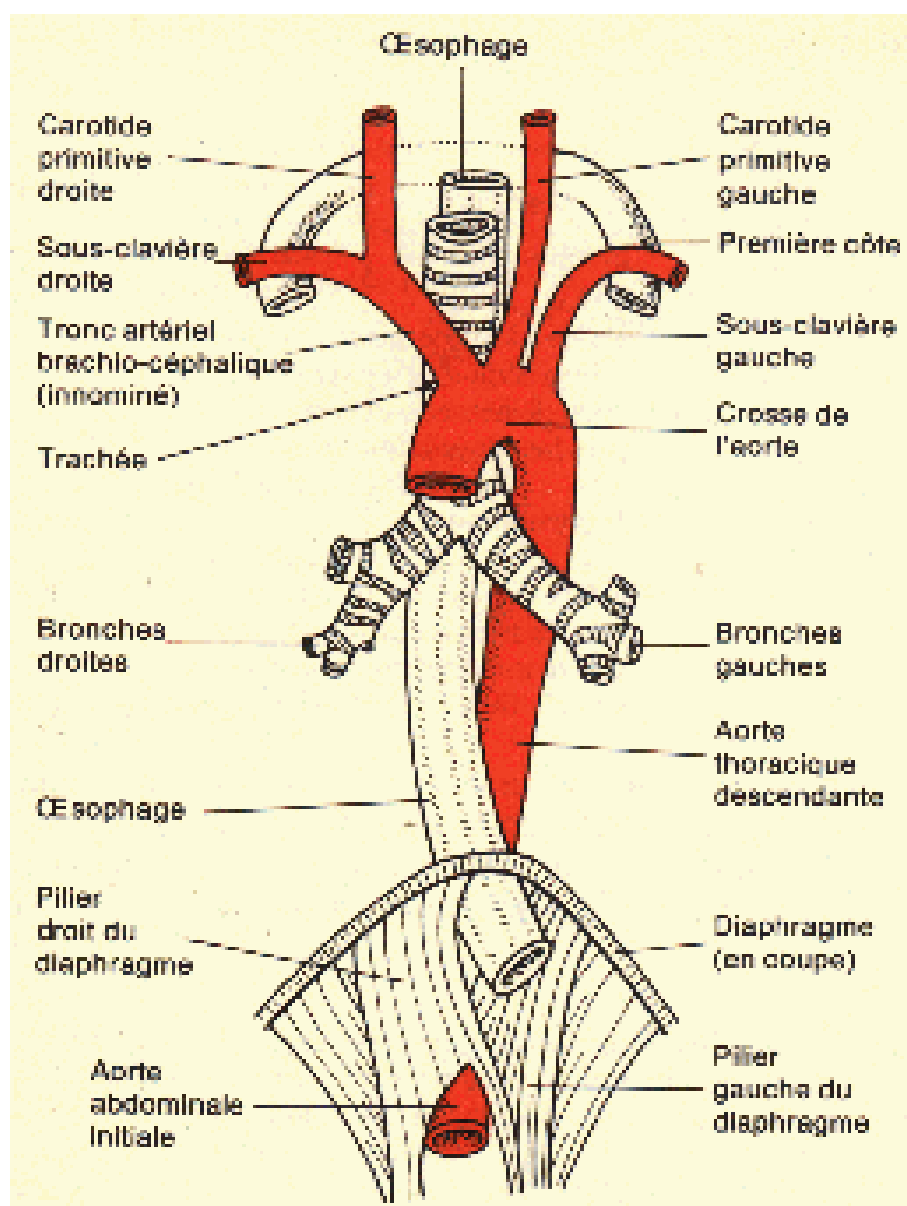


FIG. 2.1 – Schéma de l'aorte thoracique (d'après [SEAR-78]).

une rupture et une hémorragie mortelle (*rupture d'anévrisme*). La dégradation de la paroi est souvent associée à l'existence d'un chenal de recirculation dans la paroi même.

**La sténose athéromateuse :** L'*athérosclérose* est une affection caractérisée par un épaissement et une perte d'élasticité des artères causés par l'accumulation de lipides dans la paroi artérielle et la formation de plaques athéromateuses.

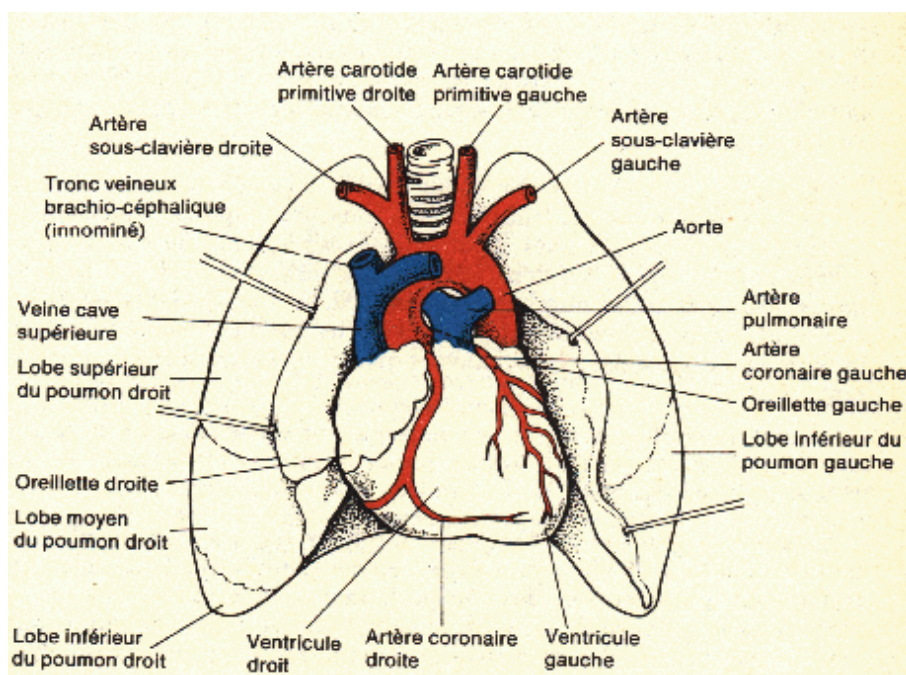


FIG. 2.2 – Schéma des artères coronaires (d'après [SEAR-78]).

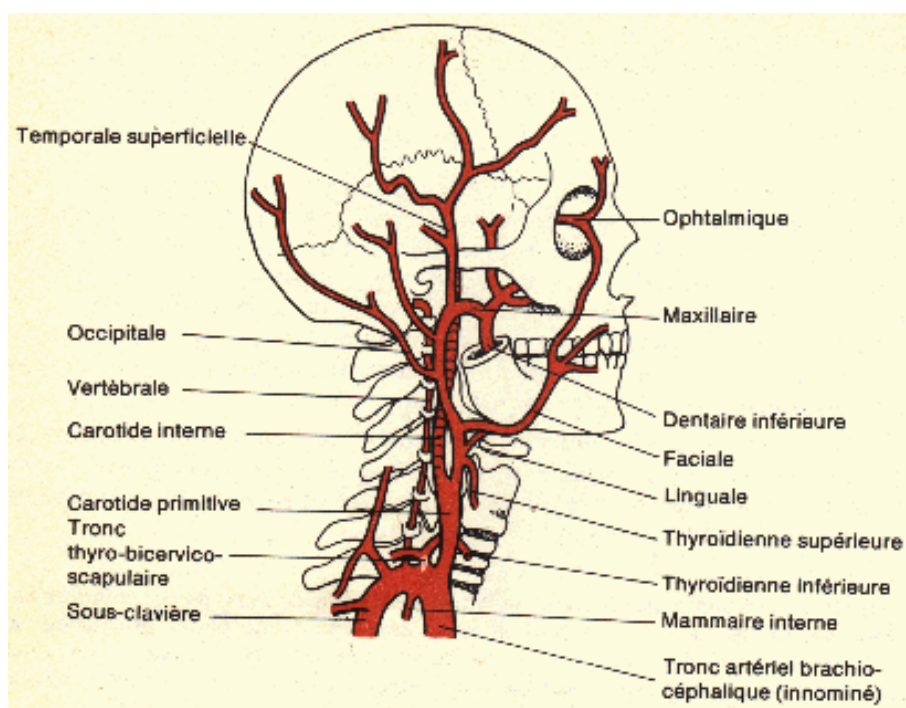


FIG. 2.3 – Schéma des artères de la tête (d'après [SEAR-78]).

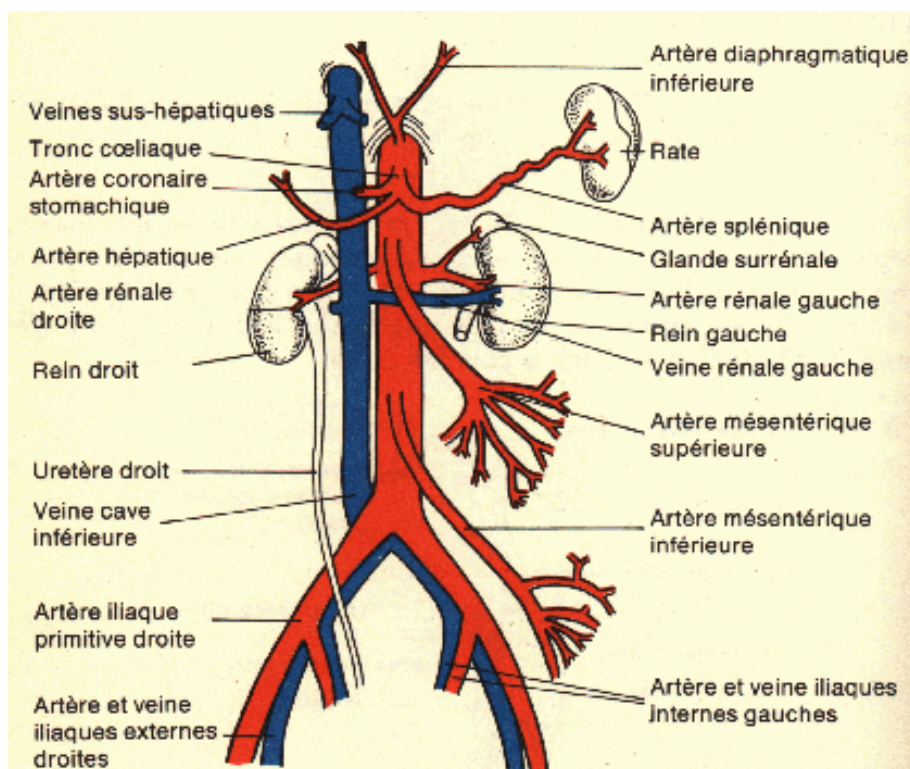


FIG. 2.4 – Schéma de l'aorte abdominale (d'après [SEAR-78]).

La *plaque athéromateuse* est un dépôt de cholestérol, d'autres lipides et de débris tissulaires sur l'intérieur d'un vaisseau sanguin. La plaque athéromateuse diminue l'ouverture de l'artère (on appelle *sténose* ce rétrécissement du diamètre vasculaire), et est à l'origine d'accidents graves : le flot sanguin étant perturbé dans les zones d'athérosclérose, les facteurs de coagulation sont activés et favorisent la *thrombose* ou l'*embolie*.

La *thrombose* est la formation d'un *thrombus*, produit de la coagulation du sang survenue dans une cavité vasculaire ou dans le cœur. L'une des causes possibles de formation d'un thrombus peut être la présence d'une plaque athéromateuse. Lorsque le thrombus se loge dans une artère coronaire (artère du cœur), il provoque d'abord une *ischémie* qui peut mener rapidement à un *infarctus du myocarde*.

Un *embol* est un corps étranger non dissout qui circule dans le courant sanguin et s'arrête dans un vaisseau dont le calibre est plus petit que lui : on parle alors d'*embolie*. Dans 95 % des cas, l'embolie est due à un thrombus qui s'est mis en mouvement. L'*embolie pulmonaire*, par exemple, est due à l'obstruction de l'artère pulmonaire par un embol provenant dans 70 % des cas d'un thrombus d'une veine des membres inférieurs. Si un embol va boucher les artères irriguant le cerveau, on parle d'*embolie*



*cérébrale.*

L'*ischémie* désigne la diminution ou l'arrêt de l'apport sanguin artériel dans un territoire donné de l'organisme, entraînant un manque d'oxygène, d'où des conséquences parfois irréversibles en fonction de la durée et de l'intensité de l'ischémie.

L'*infarctus* désigne un foyer de nécrose ischémique en rapport avec l'interruption complète et brutale de la circulation artérielle.

## 2.2 L'Imagerie par Résonance Magnétique

### 2.2.1 Historique

La Résonance Magnétique Nucléaire (R.M.N.) a été découverte en 1946 par Bloch et Purcell. En 1972, Damadian l'utilise à des fins médicales, à savoir la différenciation des tissus sains et des tumeurs par mesure des paramètres de relaxation. En 1973, Lauterbur réalise la première image I.R.M. : celle d'un doigt. Ce n'est qu'au cours des années 80 qu'on assistera à la commercialisation et l'utilisation en routine clinique de l'I.R.M.

### 2.2.2 Principe de l'I.R.M.

#### 2.2.2.1 Fondements physiques

Nous ne prétendons pas ici proposer un exposé complet sur l'I.R.M. ; le lecteur intéressé pourra se reporter pour cela à [BITT-98, WRIG-97, ALAU-94] ou à <http://www.cis.rit.edu/htbooks/mri> par exemple. Cependant les brefs rappels qui suivent nous semblent nécessaires à la compréhension ultérieure des modélisations découlant directement du principe physique de l'I.R.M.

Le principe de l'I.R.M. repose sur la capacité d'aimantation des protons de l'atome d'hydrogène, composants principaux des tissus du corps humain. Nous ne distinguons pas ici le moment magnétique du moment cinétique, et utilisons le terme de *spin* pour ce moment d'aimantation.

En l'absence d'aimantation, les spins sont orientés de façon aléatoire. Soumis à un champ magnétique intense  $B_0$ , les spins s'alignent quasiment dans le sens du champ magnétique, c'est-à-dire qu'ils « tournent » autour de cette direction avec une vitesse angulaire proportionnelle à l'amplitude du champ  $B_0$  (cette rotation est appelée *mouvement de précession*).

La relation reliant cette fréquence de rotation dite «fréquence de Larmor» et l'intensité du champ magnétique est la suivante :

$$f_0 = \frac{\gamma}{2\pi} \cdot B_0 \quad (2.1)$$

où  $\gamma$ , le moment gyromagnétique, est une constante.

Si l'on excite ces protons par une onde électromagnétique de fréquence  $f_0$ , il se produit un phénomène de résonance : les spins s'écartent de leur position d'équilibre (quasi-alignement avec  $B_0$ ) d'un angle proportionnel à la durée d'application et à l'amplitude de cette onde électromagnétique. On désigne cette onde par impulsion RF (radio-fréquence) à  $90^\circ$ , à  $180^\circ$ , etc.

Lorsque l'on supprime cette onde (toujours sous le champ  $B_0$ ), le retour à l'équilibre se décompose en deux mouvements :

- le *mouvement de relaxation* (retour du moment magnétique  $M$  à sa position d'équilibre, quasi-parallèle à  $B_0$ ),
- le *mouvement de précession*, à la fréquence de Larmor.

Le moment magnétique  $M$  peut se décomposer en deux composantes :

- la composante longitudinale  $M_z$ , projection de  $M$  sur la direction de  $B_0$ , qui tend vers  $M_0$  de façon exponentielle :

$$M_z = M_0 \cdot (1 - e^{-t/T_1}) \quad (2.2)$$

où  $T_1$  est appelé «temps de relaxation spin-réseau»,

- la composante transverse  $M_{xy}$ , projection de  $M$  sur le plan orthogonal à  $B_0$ , qui tend vers 0 de façon exponentielle également :

$$M_{xy} = M_0 \cdot e^{-t/T_2} \quad (2.3)$$

où  $T_2$  est appelé «temps de relaxation spin-spin».

Les tissus sont caractérisés par le moment magnétique à l'équilibre  $M_0$  d'une part, qui est proportionnel à la densité de protons locale, et les constantes de temps  $T_1$  et  $T_2$  d'autre part. Il est à noter que  $T_1$  est toujours inférieur à  $T_2$  pour un tissu donné ; les ordres de grandeur varient de la centaine de millisecondes à la dizaine de secondes. C'est la variation de ces paramètres d'un tissu à l'autre ou d'une zone saine à une zone pathologique du même tissu, qui crée le contraste dans l'image.

### 2.2.2.2 Détection du signal de R.M.N.

On place le corps dont on cherche à obtenir l'image dans une bobine de détection. En général, la bobine est orientée orthogonalement à  $B_0$ . Le mouvement de précession induit un courant dans cette bobine, appelé en anglais *Free Induction Decay* ou *FID*, de fréquence égale à la fréquence de Larmor, d'intensité proportionnelle à  $B_0$ , et dont les paramètres temporels de décroissance sont proportionnels à la constante de temps  $T_2$  du mouvement de  $M_{xy}$ . Il est également possible d'obtenir un signal dépendant de  $T_1$ ; pour cela, on applique une impulsion RF supplémentaire à  $90^\circ$ , afin de faire basculer la composante  $M_z$  dans le plan  $xy$ .

### 2.2.2.3 Localisation du signal

Le principal problème de l'I.R.M. réside dans la localisation du signal, c'est-à-dire dans la distinction des contributions au signal des volumes élémentaires composant le volume dont on cherche à obtenir une représentation.

On distingue deux types de codage permettant de localiser l'origine des contributions : le *codage par la fréquence* et le *codage par la phase*. Dans le cas de l'imagerie 2D, la sélection de la coupe d'intérêt est effectuée par un principe dérivé de celui du codage par la fréquence, et on utilise pour les deux directions du plan un codage par la fréquence et un codage par la phase. Dans le cas tridimensionnel, on utilise deux codages par la phase et un codage par la fréquence.

Nous expliquons brièvement ci-dessous le principe du codage par la fréquence (en une dimension par souci didactique), puis celui du codage par la phase (voir aussi [WEHR-88]).

– **Codage par la fréquence :**

Supposons que l'on place l'objet (unidimensionnel) dans un gradient de champ magnétique, c'est-à-dire un champ  $B(x)$  variant linéairement avec la position spatiale  $x$ ,  $x \in [x_1 \dots x_2]$ , et que l'on excite cet objet avec un signal dont le spectre est une fonction porte de fréquences extrêmes  $f(x_1) = \frac{\gamma}{2\pi} \cdot B(x_1)$  et  $f(x_2) = \frac{\gamma}{2\pi} \cdot B(x_2)$ . L'élément de l'objet situé à la position  $x$  émet donc par l'intermédiaire de la bobine réceptrice un signal de fréquence  $f(x)$ . Or, comme  $B(x)$  varie linéairement avec  $x$ , alors  $f(x)$  aussi d'après la relation de Larmor (équation 2.1) : il existe une relation de proportionnalité entre la position spatiale et la fréquence temporelle du signal acquis par la bobine de détection. Un FID est donc composé de la somme des signaux émis par les spins de tous les voxels sélectionnés.

En négligeant la décroissance du signal, on peut écrire que l'élément de l'objet situé à la position  $x$  émet un signal harmonique de pulsation  $\gamma G_x x$  et d'intensité  $I(x)$ ; en sommant sur toutes les positions  $x$ , on obtient l'expression du FID :

$$\text{fid}(t) = \sum_{x=0}^{N_x-1} I(x) e^{j\gamma G_x x t} \quad (2.4)$$

La transformée de Fourier effectuée selon la variable  $t$  s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \text{tffid}(f_t) &= \sum_{x=0}^{N_x-1} I(x) \delta\left(f_t - \frac{\gamma G_x x}{2\pi}\right) \\ &= \sum_{x=0}^{N_x-1} I(x) \delta\left(x - \frac{2\pi f_t}{\gamma G_x}\right) \\ &= I\left(\frac{2\pi f_t}{\gamma G_x}\right) \text{III}(x) \end{aligned} \quad (2.5)$$

où  $\delta(t)$  représente l'impulsion de Dirac et  $\text{III}(t)$  le «peigne de Dirac» (fonction de transfert de l'échantillonneur idéal). Cette expression fait bien apparaître la relation de proportionnalité existant entre la position spatiale  $x$  et la fréquence temporelle du FID  $f_t$ .

Ainsi, il suffit d'effectuer la transformée de Fourier discrète du signal reçu pour accéder à l'intensité (complexe) en fonction de la position spatiale. Le module du signal ainsi obtenu est proportionnel à la densité locale de protons.

#### – Codage par la phase :

Le principe du codage par la phase est analogue à celui du codage par la fréquence ; nous l'expliquons brièvement ci-dessous.

Si l'on applique dans la direction du codage par la phase (par exemple  $y$ ) un gradient de champ magnétique  $G_y$  pendant une durée  $\tau$ , juste avant l'application du gradient de codage par la fréquence dans la direction  $x$ , cela provoque un déphasage  $\varphi = \int_0^\tau 2\pi f(t) dt$  soit, d'après la relation de Larmor (équation 2.1),  $\varphi = \frac{\gamma}{2\pi} y G_y \tau$ . De même que le codage par la fréquence induit une relation de proportionnalité entre la position spatiale  $x$  et la fréquence du signal provenant de la position  $x$ , le codage par la phase induit une relation de proportionnalité entre la position spatiale  $y$  et la phase à l'origine du signal provenant de la position  $y$ . Afin de pouvoir décoder les FID qui contiennent les informations correspondant à toutes les positions  $y$ , on répète le processus décrit ci-dessus (codage par la phase suivi de codage par la fréquence) pour plusieurs valeurs du

gradient  $G_y$  (ou de façon équivalente, de la durée d'application  $\tau$ ). Reprenons le calcul effectué ci-dessus, en deux dimensions cette fois : compte-tenu du principe du codage par la phase évoqué précédemment, un élément situé à la position  $(x, y)$  émet un signal harmonique de pulsation  $\gamma G_x x$  et déphasé de  $\frac{\gamma}{2\pi} y G_y \tau$ , qui s'écrit donc  $I(x, y) e^{j\gamma G_x x t - j\gamma G_y \frac{\tau}{2\pi} y}$ . L'expression du FID est obtenue en sommant sur toutes les positions  $(x, y)$  :

$$\text{fid}(t, \tau) = \sum_{x=0}^{N_x-1} \sum_{y=0}^{N_y-1} I(x, y) e^{j\gamma G_x x t - j\gamma G_y \frac{\tau}{2\pi} y} \quad (2.6)$$

On calcule maintenant la transformée de Fourier bidimensionnelle, selon les variables  $t$  et  $\tau$ , et on obtient :

$$\begin{aligned} \text{tfid}(f_t, f_\tau) &= \sum_{x=0}^{N_x-1} \sum_{y=0}^{N_y-1} I(x, y) \delta\left(f_t - \frac{\gamma G_x x}{2\pi}\right) \delta\left(f_\tau - \frac{\gamma G_y y}{4\pi^2}\right) \\ &= I\left(x - \frac{2\pi f_t}{\gamma G_x}, y - \frac{4\pi^2 f_\tau}{\gamma G_y}\right) \text{III}(x, y) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ainsi, l'ensemble de points ainsi obtenus constitue la transformée de Fourier inverse du signal spatial recherché.

Il convient de noter que les expressions données ci-dessus pour expliquer le principe du codage par la fréquence et par la phase sont quelque peu simplistes, dans la mesure où, d'une part, elles ne prennent pas en compte la décroissance du signal, et d'autre part, nous avons considéré des transformées de Fourier continues, alors que pour le codage par la fréquence, il intervient une discrétisation que nous n'avons pas abordée, et pour le codage par la phase, la variable  $\tau$  est discrète.

Nous avons vu que le codage par la fréquence utilise la variable temporelle, alors que le codage par la phase utilise une variable artificielle  $\tau$ . S'il est impossible d'utiliser plusieurs fois la variable temporelle pour effectuer le codage dans différentes directions, il est en revanche tout à fait possible d'introduire autant de variables supplémentaires du type  $\tau$  pour coder dans les autres directions. C'est ce que se passe en pratique dans le cas d'images tridimensionnelles : on utilise le codage par la fréquence dans la direction  $x$  et le codage par la phase dans les directions  $y$  et  $z$ .

De même que l'espace dual du temps est l'espace des fréquences temporelles, l'espace dual de celui des positions spatiales est appelé «*k-space*» et on note  $k_x$  et  $k_y$ , et éventuellement  $k_z$  les fréquences spatiales discrètes correspondantes.

Finalement, le plan ou le volume acquis est l'espace dual par transformation de Fourier bi- ou tridimensionnelle du plan ou du volume recherché.

### 2.2.3 Séquences d'acquisition

Le terme de «*séquence d'acquisition*» désigne une combinaison d'impulsions RF et de gradient de champ, dont on choisit les caractéristiques (l'ordre, la durée, l'amplitude, l'angle, etc.) de façon à produire l'image souhaitée.

Nous présentons ici brièvement la séquence de base, en deux dimensions par souci didactique, ainsi que ses trois variantes (séquences «écho de spin», «inversion-récupération», «écho de gradient»), puis un exemple de séquence volumique utilisée très couramment (écho de gradient), à partir de laquelle on peut facilement déduire les autres séquences volumiques.

#### Séquence de base

Cette séquence, aussi appelée «séquence 90-FID» (figure 2.5), consiste en l'application simultanée d'une impulsion RF à  $90^\circ$  et d'un gradient de sélection de coupe  $G_\phi$ , qui permet de faire entrer en résonance uniquement les spins pour lesquels le champ magnétique et la fréquence de l'impulsion RF sont reliés par la relation 2.1. Soit  $z$  la direction de la variation du champ provoquée par  $G_\phi$  : la coupe ainsi sélectionnée est une coupe  $xy$ . L'impulsion à  $90^\circ$  permet de basculer le moment magnétique des spins dans le plan  $xy$ .

Puis un gradient de codage par la phase  $G_\phi$  est appliqué, dont l'amplitude est fonction de la position spatiale selon la direction  $y$  du plan. Les spins relaxent (tendent à retrouver leur position d'équilibre parallèle à l'axe  $z$ ), et précessent à une fréquence proportionnelle à leur position selon  $y$ .

Enfin un gradient de codage par la fréquence  $G_f$  est appliqué, pendant lequel s'effectue la lecture du signal (FID). A l'arrêt du gradient  $G_\phi$ , les spins ont une phase qui est fonction de leur position selon  $y$ . A l'application de  $G_f$ , ils continuent à précesser à une fréquence proportionnelle cette fois à leur direction selon  $x$ , tout en conservant l'information de phase à l'origine qui les discrimine selon  $y$ .

Ce motif est répété pour chacune des  $N_\phi$  valeurs du gradient  $G_\phi$  permettant de coder la position dans la direction  $y$ . La période séparant deux motifs successifs est appelée «temps de répétition»  $T_R$ .

On peut montrer que cette séquence n'introduit qu'une dépendance en  $T_1$ .

#### Séquence «Echo de spin»

La séquence écho de spin (figure 2.6) consiste à appliquer, après l'impulsion RF à  $90^\circ$ , une seconde impulsion RF à  $180^\circ$ , suivie de la lecture du signal. Après la première

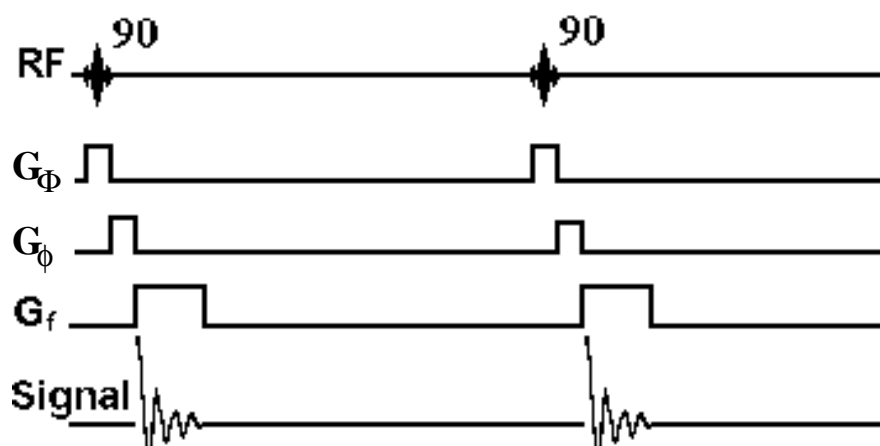


FIG. 2.5 – Diagramme temporel de la séquence de base.  
(D'après <http://www.cis.rit.edu/htbooks/mri>.)

impulsion, les spins précessent dans le plan  $xy$  orthogonal à  $B_0$ , et la seconde impulsion provoque une rotation autour de l'axe  $x$  donc une inversion de la phase. En précessant les spins se rephasent partiellement, provoquant un maximum dans le signal lorsqu'ils sont en phase : ce signal est alors appelé écho. La durée  $T_E$  séparant l'impulsion RF et le milieu du signal acquis est appelé «temps d'écho».

Par rapport à la séquence du 90-FID, cette séquence possède l'avantage d'introduire une dépendance en  $T_2$  dans le signal, ce qui peut être intéressant pour discriminer des tissus dont les  $T_1$  sont proches.

### Séquence «Inversion-Récupération»

La magnétisation des spins est d'abord inversée par une impulsion à  $180^\circ$ , puis revient dans le plan  $xy$  grâce à une seconde impulsion à  $90^\circ$  (figure 2.7). Le principal avantage de cette séquence réside dans le fait qu'elle permet l'annulation du signal correspondant au tissu dont le  $T_1$  vérifie  $TI = T_1 \ln 2$  où  $TI$ , le temps d'inversion, est une constante de temps caractérisant la séquence (voir [HORN-96]).

### Séquence «Echo de gradient»

Le principe est le même que pour l'écho de spin, mais ici le déphasage donnant lieu à l'écho lors du rephasage partiel est provoqué non par une impulsion à  $180^\circ$ , mais par un gradient de codage par la fréquence de signe opposé à celui du gradient de lecture (figure 2.8).

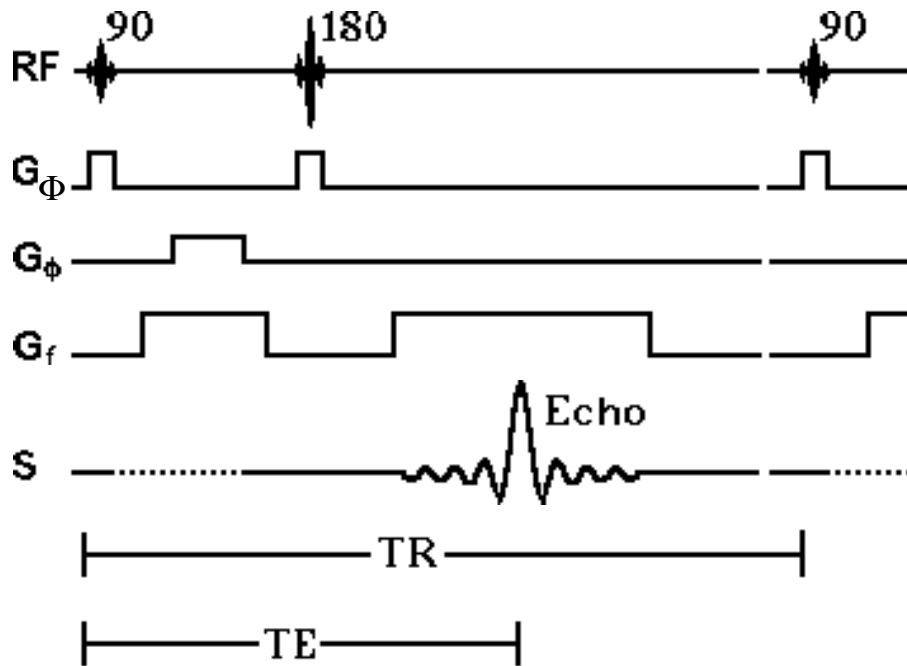


FIG. 2.6 – Diagramme temporel de la séquence « Echo de spin ».  
(D'après <http://www.cis.rit.edu/htbooks/mri>.)

L'avantage de l'écho de gradient par rapport à toutes les séquences précédentes est qu'il ne nécessite pas d'attendre le retour à l'équilibre de la composante transversale pour répéter la séquence, ce qui permet de réduire le  $T_R$  et par conséquent la durée d'acquisition (voir § 2.2.4.4).

### Séquence volumique d'écho de gradient

Nous présentons figure 2.9 une séquence d'I.R.M. volumique couramment utilisée : l'écho de gradient (d'après [HORN-96]). Tout d'abord, une impulsion RF est appliquée (1), simultanément avec un gradient de sélection du volume (2), afin d'exciter le volume d'intérêt (une « tranche » épaisse de l'espace). Puis deux gradients de codage par la phase sont appliqués simultanément (3 et 4) dans les deux directions de codage par la phase, dont les amplitudes caractérisent la position selon les deux directions concernées,  $y$  et  $z$ . Pendant cette même période, un gradient de codage par la fréquence négatif est appliqué (5) afin que les spins soient en phase au milieu de la période d'acquisition (voir ci-dessus la séquence d'écho de gradient). La période suivante est celle de l'application du gradient de codage par la fréquence (6), simultanément avec



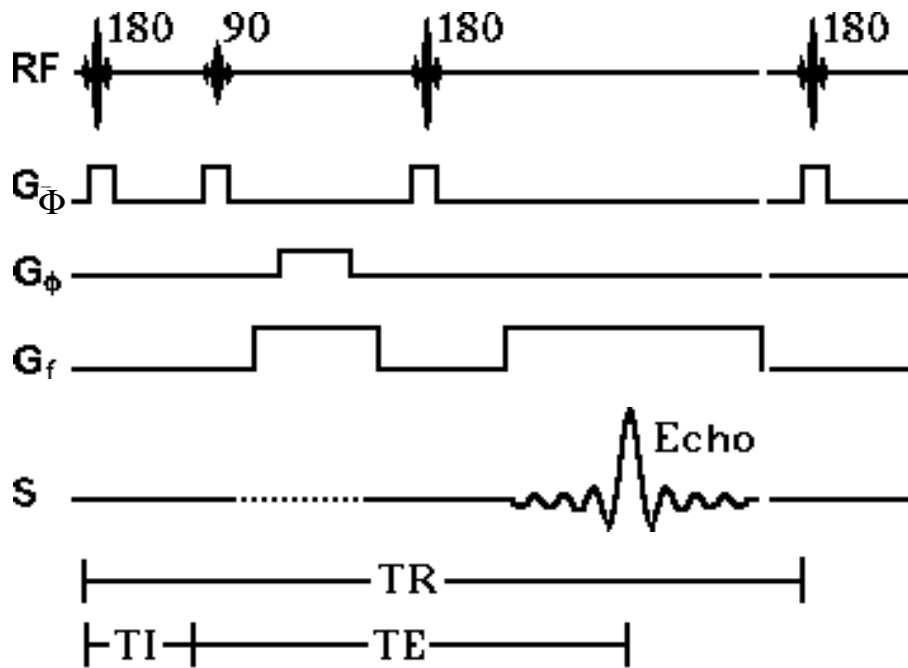


FIG. 2.7 – Diagramme temporel de la séquence «Inversion-Récupération». (D'après <http://www.cis.rit.edu/htbooks/mri>.)

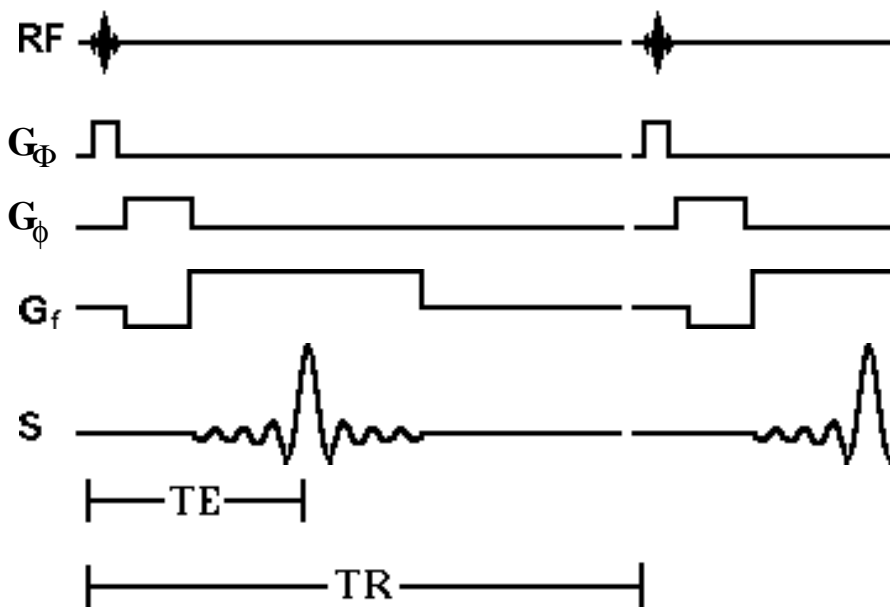


FIG. 2.8 – Diagramme temporel de la séquence «Echo de gradient». (D'après <http://www.cis.rit.edu/htbooks/mri>.)

la lecture du signal (7).

Ce cycle, de durée égale à  $T_R$  est répété  $N_\Phi \times N_\phi$  fois, c'est-à-dire pour toutes les combinaisons possibles des  $N_\Phi$  gradients  $G_\Phi$  et des  $N_\phi$  gradients  $G_\phi$ .

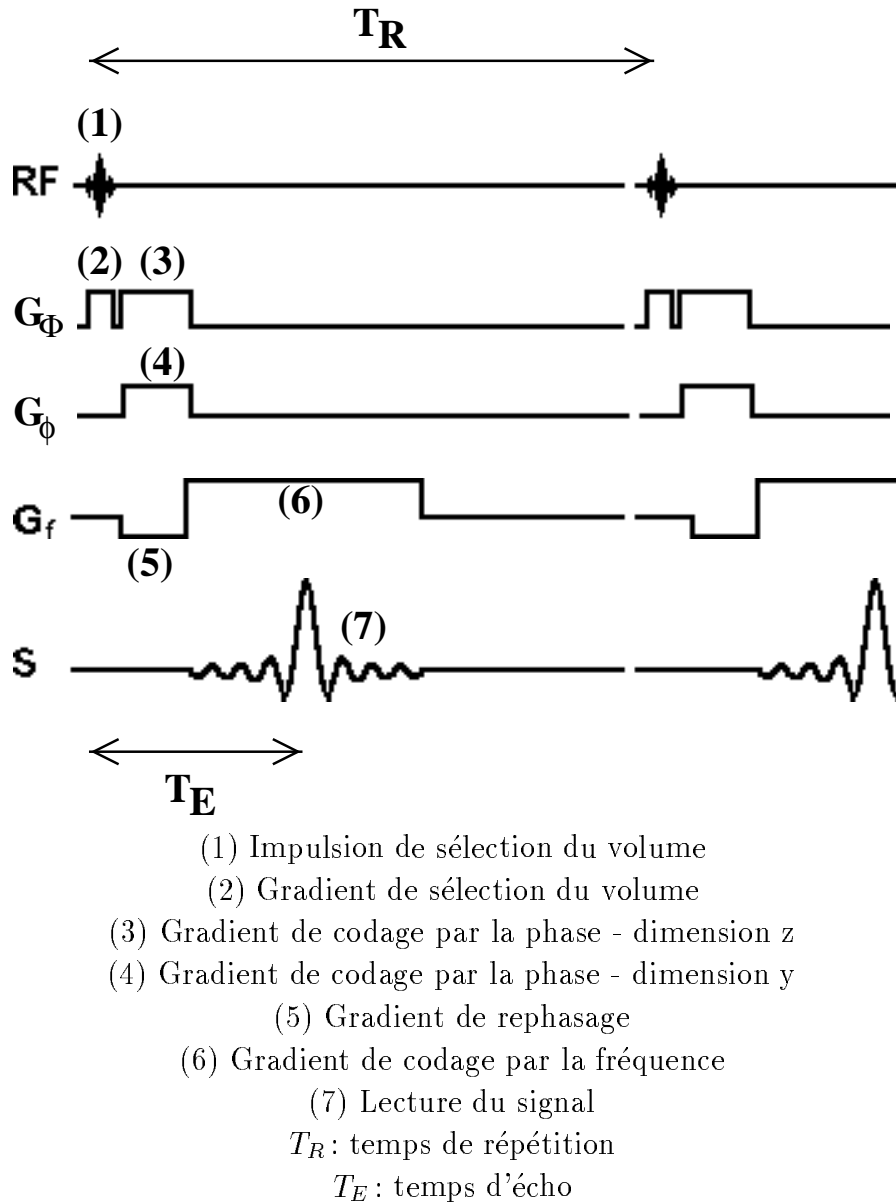


FIG. 2.9 – Diagramme temporel de la séquence volumique d'«écho de gradient». (D'après <http://www.cis.rit.edu/htbooks/mri/>)

## 2.2.4 Caractéristiques des images I.R.M.

### 2.2.4.1 Le contraste

Le choix de  $T_R$  et de  $T_E$  permet d'obtenir diverses images différant par le contraste. En effet, nous avons vu dans la partie 2.2.2.1 que les tissus étaient caractérisés en particulier par deux constantes de temps  $T_1$  et  $T_2$ , ainsi que par la densité locale de protons ; les images obtenues diffèrent selon que le contraste est dû de façon prédominante à la différence des  $T_1$ , à la différence des  $T_2$ , ou à la différence des densités de protons. Globalement, on retiendra que  $T_R$  est relié à  $T_1$  et  $T_E$  à  $T_2$ , de la façon suivante : une image en  $T_1$  sera obtenue pour  $T_R \simeq T_1$  et  $T_E \ll T_2$ , alors qu'une image en  $T_2$  sera obtenue pour  $T_R \gg T_1$  et  $T_E \simeq T_2$ . Le choix de  $T_R \gg T_1$  et  $T_E \ll T_2$  permet d'obtenir une image pondérée par la densité de protons.

### 2.2.4.2 La résolution et le temps d'acquisition

La figure 2.9 représente schématiquement le déroulement d'une séquence d'acquisition. Il en découle que le temps d'acquisition d'un volume de dimensions  $N_\Phi \times N_\phi \times N_f$  vaut :

$$T_{acq} = T_R \cdot N_\Phi \cdot N_\phi$$

où  $T_R$  est le *temps de répétition* conformément à la figure 2.5.

Nous retiendrons que :

$$T_{acq} \sim N_\Phi N_\phi \tag{2.8}$$

c'est-à-dire qu'une résolution spatiale fine dans les directions du codage par la phase se paye en durée d'acquisition. Au contraire, dans la direction de codage par la fréquence, une résolution fine ne coûte rien en termes de durée d'acquisition (mais nous verrons qu'elle a une influence en termes de bruit).

### 2.2.4.3 Le bruit

Le bruit en I.R.M. est intrinsèquement lié aux caractéristiques matérielles du système d'acquisition (bobine de détection, etc.) ainsi qu'aux grandeurs physiques utilisées (champ magnétique, fréquences, etc.) [WEHR-88, KOWA-00] ; nous ne rentrons pas dans le détail de ces aspects car ils dépassent largement le cadre de notre étude, et nous nous contentons de donner les résultats des diverses études de caractérisation statistique du bruit dans les images I.R.M. [SIJB-96, SIJB-98a, SIJB-98b, WANG-94].

Les données (complexes) acquises sur une grille cartésienne (le *k-space*) sont entachées d'un bruit blanc centré dont la distribution de probabilité est gaussienne. Les

données dans le domaine spatial, obtenues par T.F.D. inverse, sont également entachées d'un bruit gaussien centré du fait de l'orthogonalité de la transformation de Fourier [SIJB-98b].

Cela n'est valable que sur les images complexes ; on montre que, sur les images de module, la distribution n'est plus gaussienne mais ricienne [HENK-85, GUDB-95]. Cette distribution est plus complexe que la distribution gaussienne, en particulier elle comporte de nombreux paramètres qu'il est plus difficile à estimer, que ce soit théoriquement ou expérimentalement [SIJB-98a, SIJB-98b]. C'est pourquoi bien souvent on fait l'approximation que le bruit est gaussien sur les images de module.

Dans la littérature, le bruit est caractérisé par le rapport signal-sur-bruit (R.S.B.), défini par le rapport de la moyenne du signal sur son écart-type dans une zone idéalement homogène [BITT-87]. D'après [CROO-81, CROO-84], en imagerie 2D mono- ou multi-coupes, le R.S.B. est proportionnel à la puissance du signal, au volume du voxel, et à la racine carrée du nombre de lignes formant le *k-space* (nous ne considérons pas la dépendance du R.S.B. par rapport aux autres paramètres d'acquisition, auxquels nous n'avons pas accès). En étendant ce résultat à l'I.R.M. tridimensionnelle, on peut écrire, à champ de vue constant :

$$\frac{S}{B} = \frac{S}{\sigma} \sim \frac{S}{N_f \sqrt{N_\phi N_\Phi}} \quad (2.9)$$

A cette écriture faisant intervenir le signal, nous préférons l'écriture suivante permettant de caractériser le bruit indépendamment du signal, par son écart-type :

$$\sigma \sim N_f \sqrt{N_\phi N_\Phi} \quad (2.10)$$

Ainsi, dans certains cas, l'amélioration de la résolution spatiale en augmentant le nombre de voxels (à champ de vue constant) n'est pas forcément synonyme d'une amélioration de la qualité de l'image, puisque le bruit est d'autant plus important que la résolution est fine.

#### 2.2.4.4 Conséquence : le compromis

Les relations 2.8 et 2.10 font clairement apparaître un compromis intrinsèque à l'I.R.M. entre résolution, temps d'acquisition et bruit, qui constitue d'ailleurs l'un des inconvénients majeurs de cette modalité.

Nous avons vu que les séquences d'écho de gradient permettaient de réduire le  $T_R$  et donc la durée d'acquisition. Par ailleurs, d'autres méthodes d'imagerie rapide («*Fast MRI*») ont été développées, dont nous dressons un bref état de l'art dans la partie suivante.

## 2.2.5 Les séquences rapides

Les différents moyens permettant de réduire le temps d'acquisition, tout en se limitant à un remplissage cartésien du  $k$ -space, sont en général regroupés de la façon suivante [CLAR-97, JAKO-98, MOON-01] :

- réduction du  $T_R$ ,
- optimisation du remplissage du  $k$ -space,
- codage par la phase multiple,
- codage par les bobines de détection.

Nous avons vu (§2.2.3) que l'écho de gradient permettait de réduire le  $T_R$  ; il existe d'autres méthodes encore plus efficaces pour cela, parmi lesquelles nous citerons la méthode FLASH (Fast Low Angle Shot Imaging) [HAAS-86]. Le principe en est d'appliquer une impulsion n'écartant les spins que de quelques degrés (de l'ordre de 5 à 30) par rapport à leur position d'équilibre. Ainsi le retour à l'équilibre est très rapide, et donc le  $T_R$  peut être réduit au maximum. L'inconvénient de cette méthode réside dans la faible intensité du signal, et donc dans le faible rapport signal sur bruit.

Les méthodes d'optimisation du  $k$ -space les plus couramment citées dans la littérature sont les suivantes :

- l'optimisation de la taille de l'image (la «matrice» dans le vocabulaire des radiologues), qui consiste à choisir soigneusement une résolution spatiale qui soit suffisante pour les besoins du diagnostic mais pas excessive, afin de réduire au maximum le temps d'acquisition.
- le champ de vue rectangulaire, qui consiste à n'acquérir que les signaux correspondant à la zone d'intérêt, mais pose en particulier des problèmes de repliement («aliasing») qui affectent sérieusement la qualité des images sur les bords.
- la méthode du demi plan de Fourier [FEIN-86, MARG-86, HAAC-90, CAO-97, DEGE-01] («half  $k$ -space» ou «half-Fourier»), qui utilise les propriétés de symétrie hermitienne du plan de Fourier et permet donc de n'acquérir que la moitié du plan de Fourier et d'en déduire l'autre moitié (en pratique, un peu plus de la moitié du plan de Fourier est acquise afin de conserver la redondance pour les basses fréquences). Cette méthode possède l'inconvénient de réduire le rapport signal sur bruit.

Enfin, les techniques de codage multiple se déclinent en deux versions :

- la séquence d'échos de spin multiples, appelée aussi «Fast Spin Echo» ou «RARE» (Rapid Acquisition with Relaxation Enhancement) [HENN-86], consiste à acquérir plusieurs échos de spin successifs après une seule impulsion RF, voire tous les échos correspondant à un plan de Fourier complet. Cette séquence fournit des images en  $T_2$ .
- la séquence d'échos de gradient multiples, appelée «Echo Planar Imaging» (EPI) et proposée par Mansfield [MANS-77], consiste, de façon analogue au «Fast Spin Echo», à acquérir plusieurs échos de gradient successifs ou même tous les échos correspondant à un plan de Fourier complet, après une seule impulsion RF. Cette méthode requiert l'adjonction à la machine I.R.M. classique de matériel dédié, car elle nécessite des gradients de forte puissance et des fréquences de commutation de gradient très élevées. Mansfield et al. ont également proposé d'acquérir tout un volume 3D à la fois, grâce à la technique de l'EVI («Echo Volumar Imaging»), dont les limites sont les mêmes que pour l'EPI, à savoir, la difficulté pratique à commuter les gradients en une durée suffisamment courte devant la constante de temps de décroissance du signal. Ces commutations très rapides des gradients induisent des artefacts qui dégradent l'image; d'autre part, ces méthodes impliquent une répartition hétérogène de l'énergie dans le  $k$ -space. Notons également l'existence de la technique PRESTO («Principle of Echo Shifting with a Train of Observations») [MOON-01] qui allie les caractéristiques de la séquence Echo-Planar avec la technique «echo-shifting» (qui implique des temps d'écho supérieurs au temps de répétition). Les limites de cette méthode sont les mêmes que pour l'EPI, et elle n'est donc utilisée qu'en imagerie fonctionnelle.

Enfin, il existe deux méthodes de codage par les bobines de détection [MOON-01] : SMASH (Simultaneous Acquisition of Spatial Harmonics) développée par Sodickson et al. [SODI-97, SODI-99, SODI-00], et SENSE (Sensitivity Encoding) développée par Pruessmann et al. [PRUE-99, WEIG-01]. Ces méthodes exploitent l'information spatiale contenue dans les bobines des antennes de surface (ou antennes locales : il s'agit de bobines de détection plates placées à proximité immédiate de la région d'intérêt), afin de remplacer partiellement les codages classiques (par la fréquence et par la phase). La différence entre SMASH et SENSE réside dans le fait que le codage est effectué dans le  $k$ -space pour SMASH et dans le domaine de l'objet pour SENSE. Ces méthodes possèdent l'avantage d'améliorer le compromis entre durée d'acquisition, résolution spatiale et rapport signal sur bruit, mais nécessitent des développements matériels

spécifiques ; de plus cette technique n'a été utilisée qu'avec des antennes locales, ce qui réduit son champ d'application (bien que des expériences concluantes aient été rapportées dans [SODI-00] pour l'aorte abdominale et les artères rénales).

## 2.3 L'Angiographie par Résonance Magnétique

On appelle *Angiographie par Résonance Magnétique* ou *A.R.M.* l'I.R.M. appliquée à l'imagerie du sang et du flux sanguin.

On distingue trois types d'acquisitions en A.R.M. : l'angiographie *temps de vol* (*Time-Of-Flight Angiography*), l'angiographie par *contraste de phase* (*Phase-Contrast Angiography*), et l'angiographie avec agent de contraste (*Contrast-Enhanced Angiography*). Les deux premiers types s'appuient sur le mouvement du sang, alors que le dernier est principalement statique.

### 2.3.1 L'angiographie Temps de Vol

L'angiographie temps de vol utilise une séquence d'écho de spin, avec une impulsion à  $90^\circ$  suivie d'une impulsion à  $180^\circ$ . L'impulsion à  $90^\circ$  excite les spins dans une coupe donnée, et celle à  $180^\circ$  dans une autre coupe. Le sang en mouvement qui se trouve dans la première coupe lors de l'impulsion à  $90^\circ$  puis dans la seconde lors de l'impulsion à  $180^\circ$  produit alors un signal permettant l'obtention d'une image du flux sanguin.

### 2.3.2 L'angiographie par Contraste de Phase

L'angiographie par contraste de phase utilise successivement deux gradients bipolaires opposés, et les signaux recueillis après application de chacun de ces gradients sont soustraits. Les signaux des spins immobiles s'annulent alors, tandis que ceux des spins en mouvement s'ajoutent, et la valeur ainsi obtenue est d'autant plus grande que la vitesse du flux est grande. Ainsi, l'introduction d'un gradient supplémentaire permet de coder la vitesse, et l'image correspondante est obtenue par élimination différentielle de la dérive de phase.

### 2.3.3 L'angiographie avec Agent de Contraste

L'angiographie avec agent de contraste repose sur la différence des temps de relaxation  $T_1$  du sang et des autres tissus, lorsque l'on a injecté dans le sang un produit de

contraste possédant un  $T_1$  très court. Ainsi, si l'on choisit un  $T_R$  suffisamment court, les signaux provenant des autres tissus seront très faibles puisque le  $T_1$  correspondant est beaucoup plus long que le  $T_R$ , et les vaisseaux sanguins apparaissent en hyper-signal. Le produit de contraste utilisé est en général une solution à base de *Gadolinium* ; il se déplace dans le système artériel et veineux avec le sang (on appelle *bolus* la masse de produit de contraste en mouvement dans le vaisseau) ; il convient de choisir la plage temporelle de l'acquisition de façon à ce que l'image soit acquise au moment du passage du bolus dans l'artère, afin d'obtenir la meilleure image possible.

## 2.4 L'exploitation des images A.R.M.

### 2.4.1 Les objectifs de l'imagerie vasculaire

L'objectif général de l'imagerie vasculaire est d'obtenir des informations sur le vaisseau d'intérêt, qui permettent :

- d'une part, le diagnostic des pathologies vasculaires évoquées au § 2.1.2 : ce diagnostic consiste à identifier ou confirmer l'existence d'une pathologie, de déterminer sa nature, de la localiser et d'évaluer sa gravité (et donc le traitement à prescrire : chirurgie, simple surveillance, etc.),
- d'autre part, le suivi de l'évolution d'une pathologie existante, en particulier le suivi post-opératoire, par exemple après traitement par *angioplastie* (dilatation d'une artère chargée d'athérome, au moyen d'une sonde à ballonnet, pour rétablir une irrigation suffisante).

Ces informations sont principalement de deux types :

- des informations géométriques sur la forme du vaisseau, qui permettent principalement de détecter une modification anormale du diamètre, indicatrice de la présence d'une sténose ou d'un anévrisme,
- des informations fonctionnelles sur la circulation du sang dans le vaisseau, qui permettent de détecter une diminution du débit sanguin ou des turbulences dans le flux, qui peuvent indiquer la présence d'une sténose athéromateuse.

Dans cette étude, nous nous intéressons principalement au premier type d'informations : nous cherchons à apporter une aide au diagnostic des anomalies géométriques



des vaisseaux. Pour cette raison, nous travaillons sur des images acquises en angiographie avec produit de contraste (§ 2.3.3).

L'information principale que nous souhaitons extraire des images angiographiques est donc la quantification des dimensions du vaisseau. La précision de ces mesures est capitale pour le diagnostic : de la variation de diamètre estimée d'une sténose dépend la décision du geste chirurgical. Il est bien sûr extrêmement important à la fois de détecter la nécessité d'une intervention dans les cas avancés, et d'éviter une geste chirurgical, non dénué de risque, s'il est superflu. Ainsi, la qualité des images, et en particulier leur résolution, est primordiale.

La quantification des dimensions du vaisseau peut être faite de plusieurs manières :

- manuellement : le médecin expert examine les images, et évalue le diamètre dans la sténose d'une part, et en amont de la sténose dans une zone saine d'autre part, en général en délimitant le contour visuellement.
- automatiquement : un système expert réalise une segmentation du vaisseau, à partir de laquelle sont extraites les mesures de diamètre.

### 2.4.2 Les problèmes de la quantification des pathologies vasculaires

En routine clinique, dans la plupart des cas la quantification des dimensions des vaisseaux est effectuée manuellement, ou alors elle requiert une intervention manuelle capitale de l'opérateur.

Nous recensons ici les principaux problèmes rencontrés actuellement dans l'évaluation des dimensions des diamètres vasculaires.

1. En routine clinique, les diagnostics sont effectués sur des images de projection MIP (*Maximum Intensity Projection*: voir la figure 2.10). Le principal inconvénient de ces images réside dans la distorsion des dimensions des vaisseaux : en effet les projections maximales ont tendance à diminuer les diamètres d'une part, et peuvent d'autre part occulter des rétrécissements localisés.
2. Le type d'acquisition a également une influence non négligeable sur l'évaluation des diamètres : par exemple, une acquisition angiographique en Contraste de Phase et une acquisition en Temps de Vol, effectuées avec des réglages comparables, fournissent des résultats discordants quant à la dimension des vaisseaux [HOOG-98].

3. Les artefacts de flux sont réputés biaiser également l'estimation des diamètres : artefacts de déplacement, dispersion de phase intra-voxel due au flux complexe, etc.
4. Hoogeveen *et al.* [HOOG-98] évoquent aussi les limites de la précision des mesures de diamètres dues au processus de l'I.R.M. même.
5. Enfin, en routine clinique l'évaluation des diamètres est effectuée manuellement (typiquement l'opérateur désigne à la souris les extrémités de la lumière du vaisseau), et l'expérience a prouvé qu'il existe une assez grande variabilité inter- et intra-opérateurs.

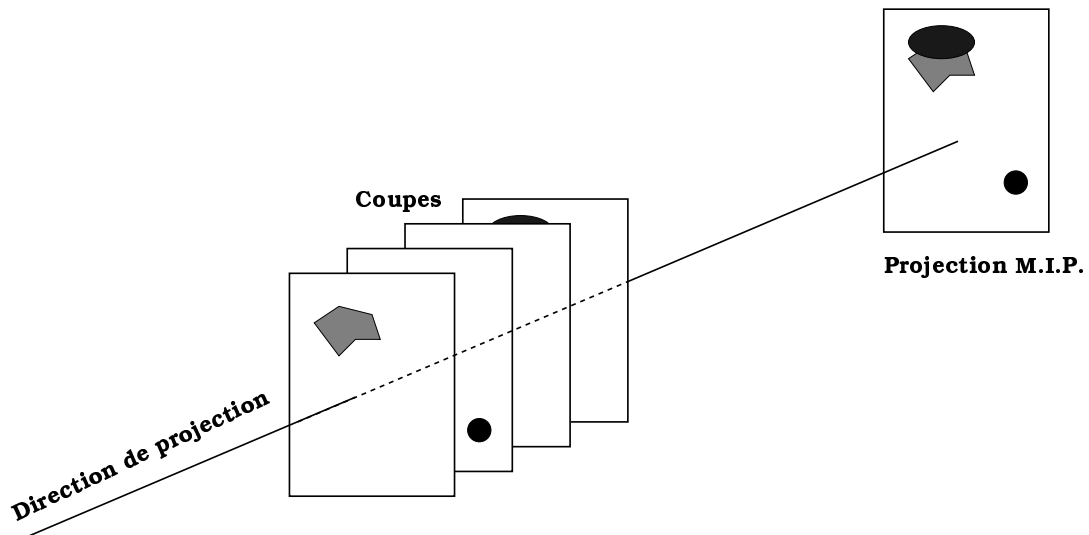


FIG. 2.10 – Le principe des projections MIP (*Maximum Intensity Projection*). A chaque pixel de l'image de projection est affectée l'intensité maximale de l'ensemble des voxels rencontrés par la direction de projection. Ici, la direction de projection est perpendiculaire aux coupes, mais ce n'est pas forcément le cas : en général on utilise plusieurs projections dont les directions sont également réparties dans un plan donné.

Dans cette étude, nous nous intéressons principalement au point 4 de la liste ci-dessus. Plus précisément, nous cherchons à apporter une solution au problème de la résolution spatiale, que nous détaillons dans la partie suivante (2.4.3).

### 2.4.3 Résolution et temps d'acquisition : position du problème

Un des problèmes les plus délicats en A.R.M. réside dans le choix des dimensions du voxel. En effet, pour l'imagerie des petits vaisseaux on souhaite réaliser une acquisition avec la meilleure résolution possible, alors qu'une bonne résolution implique un rapport signal sur bruit dégradé et une durée d'acquisition importante. Par ailleurs, pour les vaisseaux situés à proximité du cœur, la durée d'acquisition est un facteur de première importance : en effet, cette durée est limitée par :

- le temps de recirculation du bolus (le bolus peut effectuer plusieurs «tours de boucle» dans le système artériel et veineux avant sa dispersion et son élimination),
- la capacité du patient à tenir une apnée (une acquisition réalisée en apnée permettant de réduire considérablement les artefacts de mouvement),

Toutes ces contraintes sur la durée d'acquisition font qu'il est difficile de trouver un bon compromis entre un temps d'acquisition convenable et une résolution adaptée à la dimension des vaisseaux.

De plus, les séquences rapides telles que FLASH, Fast Spin Echo, EPI, évoquées au §2.2.5 ne sont pas adaptées à l'A.R.M., du fait des distorsions et des dégradations du rapport signal sur bruit qu'elles impliquent : ces séquences ont été développées plus particulièrement pour l'imagerie fonctionnelle du cerveau, ou pour le suivi temporel en imagerie cardiaque par exemple. Les méthodes d'optimisation du *k-space* sont indiquées, mais ne permettent qu'un faible gain de temps.

### 2.4.4 Les solutions existantes : état de l'art

Pour l'A.R.M., il est donc nécessaire de trouver des techniques permettant de réduire la durée des acquisitions, tout en conservant les propriétés de contraste ( $T_1$  pour faire apparaître le Gadolinium en hypersignal), de rapport signal sur bruit, et sans introduire de distorsions. Cet enjeu occupe de nombreuses équipes de recherche en physique et en imagerie médicale. Dans cette partie, nous recensons les méthodes qui, dans le même objectif que celles présentées au § 2.2.5, combinent un processus d'acquisition spécifique et un traitement des données brutes qui en sont issues, nécessitant ainsi à la fois des compétences en I.R.M. et en traitement du signal et des images.

Une première famille de solutions consiste à remplir le domaine de Fourier (ou *k-space*) selon une grille non cartésienne, par exemple selon une trajectoire circulaire [ZHOU-98, AZHA-96], en spirale [DILL-93], en rosette [NOLL-97] ou radiale [NIEL-97]. Ces solutions impliquent en général un rééchantillonnage afin d'obtenir une grille cartésienne pour l'image finale. Ce rééchantillonnage peut être effectué par interpolation [PARK-83] ou par les méthodes dites de «*gridding*» [SCHO-95].

Une alternative aux solutions précédentes consiste à acquérir un «*k-space*» incomplet, mais cette fois sur une grille cartésienne. Compte-tenu du principe d'une acquisition classique, le plus simple est d'omettre un certain nombre de «lignes» du «*k-space*». Nous avons déjà cité au § 2.2.5 les techniques de demi-Fourier («*half k-space*»), qui consistent à n'acquérir que la moitié du domaine de Fourier et à extrapoler la partie manquante en utilisant les propriétés hermitiennes du domaine de Fourier. Il est à noter qu'en général, la partie centrale du «*k-space*» est acquise intégralement, et que l'omission de «lignes» ne concerne que les hautes fréquences. Les lignes manquantes peuvent aussi ne pas être adjacentes: Cao et al. ainsi que Plevritis et al. utilisent ainsi des connaissances anatomiques *a priori* pour choisir de façon optimale les échantillons non acquis [CAO-97, PLEV-95]. Là encore, les échantillons manquants peuvent être estimés par interpolation ou par extrapolation, mais aussi par des techniques plus subtiles; Dologlou et al., par exemple, proposent une estimation fondée sur une décomposition en valeurs singulières [DOLO-96].

D'autres équipes s'intéressent également à des remplissages incomplets quelconques du *k-space*, et proposent des méthodes générales de reconstruction; par exemple, Boubertakh et al. proposent une méthode utilisant la transformée de Fourier discrète et une régularisation [BOUB-00].

Enfin, en imagerie dynamique, des méthodes telles que le «*Keyhole*» ont été développées [VAAL-93], qui consistent à acquérir avec une bonne résolution temporelle les éléments centraux du *k-space*, et à compléter les éléments de hautes fréquences spatiales avec ceux d'une image de référence acquise au début de la séquence. Les méthodes dites «*BRISK*» (Block Regional Interpolation Scheme for K-space) fonctionnent sur un principe similaire, mais la définition de la fréquence temporelle d'acquisition des différentes zones du *k-space* est fondée sur une étude spectrale selon la direction temporelle [DOYL-95a]: la fréquence d'acquisition d'une zone est fonction de la fréquence temporelle maximale couramment présente dans cette zone sur une séquence. Shea et al. proposent d'acquérir un *k-space* complet sur plusieurs apnées, et d'intégrer une technique de correction des différences de position du patient entre les différentes étapes de l'acquisition [SHEA-01].

## Conclusion

*Nous avons présenté dans ce chapitre les pathologies vasculaires auxquelles nous nous intéressons, à savoir principalement les déformations anatomiques associées aux sténoses et anévrismes, dont le diagnostic nécessite des images de qualité, en particulier en ce qui concerne la résolution spatiale. L'Angiographie par Résonance Magnétique est pressentie comme l'imagerie de référence pour ces pathologies dans les années à venir par de nombreux spécialistes. Cependant sa principale limite réside dans le compromis entre temps d'acquisition et résolution spatiale. Nous avons également présenté un rapide état de l'art des méthodes visant à contourner ce compromis. Il s'avère que les résultats obtenus sont souvent insatisfaisants, du fait des distorsions introduites par le processus d'acquisition, ou difficiles à mettre en œuvre du fait de la spécificité du processus d'acquisition; de plus bien souvent ces méthodes s'appliquent à l'imagerie bidimensionnelle uniquement, or en angiographie ce sont les volumes tridimensionnels qui posent des problèmes de durée d'acquisition. Dans le chapitre suivant (chapitre 3), nous présentons une méthode d'acquisition alternative, dont l'intérêt réside dans sa simplicité de mise en œuvre même en trois dimensions, et qui permettra par un traitement simple de fournir une image de haute qualité.*

---

## CHAPITRE 3

# Stratégie d'acquisition

## Introduction

*Après avoir étudié les problèmes de l'A.R.M. et les solutions existantes permettant de contourner le compromis entre le temps d'acquisition et la résolution spatiale, nous proposons une méthode alternative d'acquisition des données, fruit d'une étroite collaboration avec Alain Herment et Elie Mousseaux (Unité INSERM U494, C.H.U. Pitié-Salpêtrière).*

*Nous proposons une méthode d'obtention d'images de résonance magnétique de haute résolution par combinaison d'acquisitions incomplètes, qui se distingue des méthodes présentées au § 2.4.4 par le fait qu'elle permet de prendre en compte les spécificités des images de vaisseaux ainsi que les exigences de qualité d'image spécifiques à l'imagerie des sténoses.*

*Nous présentons ici l'aspect acquisitions de la méthode ; l'aspect combinaison (c'est-à-dire l'obtention d'un unique volume de résolution convenable) sera abordé plus loin (chapitre 5).*

## 3.1 Protocole d'acquisition

Nous avons vu que le temps d'acquisition était proportionnel aux dimensions de l'image dans les deux directions du codage par la phase (§ 2.2.4.4) ; si l'on raisonne à champ de vue constant (c'est-à-dire à produit *dimension du voxel × nombre de voxels* constant) dans chaque direction de l'espace, il en résulte qu'un gain de temps peut être obtenu en réduisant le nombre de voxels dans les deux directions du codage par la phase.

Nous proposons donc d'acquérir trois volumes de résolutions dégradées dans les deux directions du codage par la phase, en permutant entre les volumes la direction du codage par la fréquence de telle sorte que dans chaque direction, au moins un volume présente une «bonne» résolution (figure 3.1-b).

Sur la figure 3.1 est également représenté ce qu'on appellera dans la suite le volume de référence (figure 3.1-a), à savoir, le volume qui serait acquis dans le cadre d'une acquisition classique avec dans chaque direction la meilleure des résolutions de l'ensemble des trois volumes dans la direction considérée.

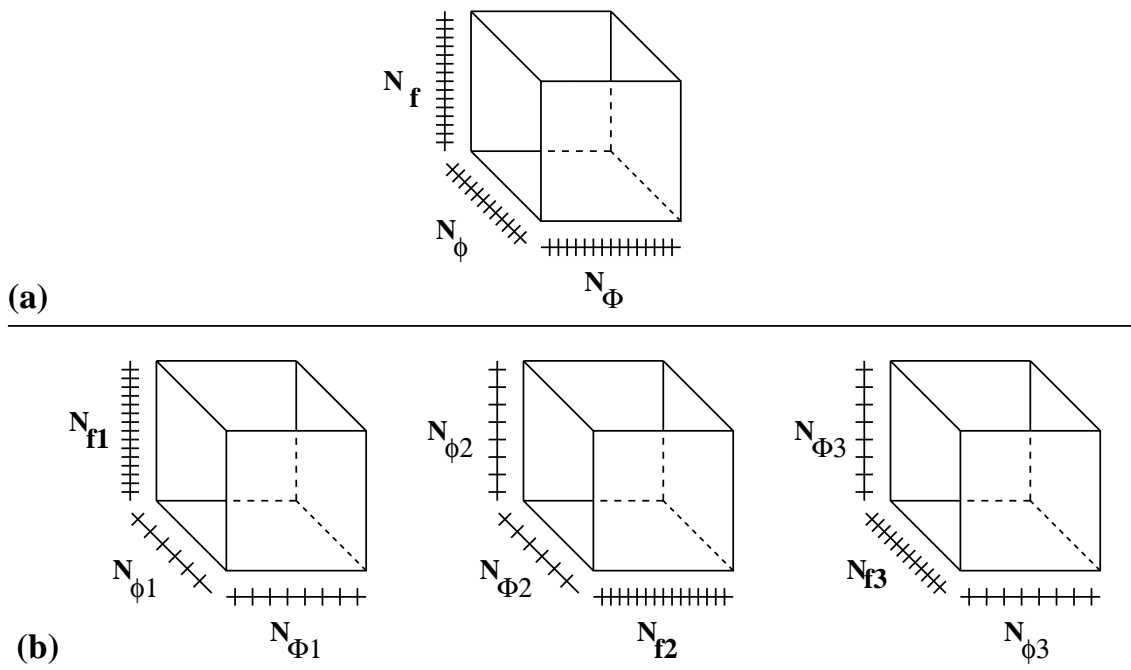


FIG. 3.1 – (a) Le volume de référence obtenu avec une acquisition classique. (b) La stratégie d'acquisition dans le cas général, qui consiste à dégrader la résolution dans les deux directions du codage par la phase pour chaque acquisition et à permuter les directions de codage entre les acquisitions.

On peut également considérer deux cas particuliers :

- on peut ne dégrader la résolution que dans une direction dans chaque volume, comme présenté sur la figure 3.2-a.
- on peut n'acquérir que deux volumes complémentaires au lieu de trois ; dans ce cas, on a une résolution constante dans une des directions (figure 3.2-b).

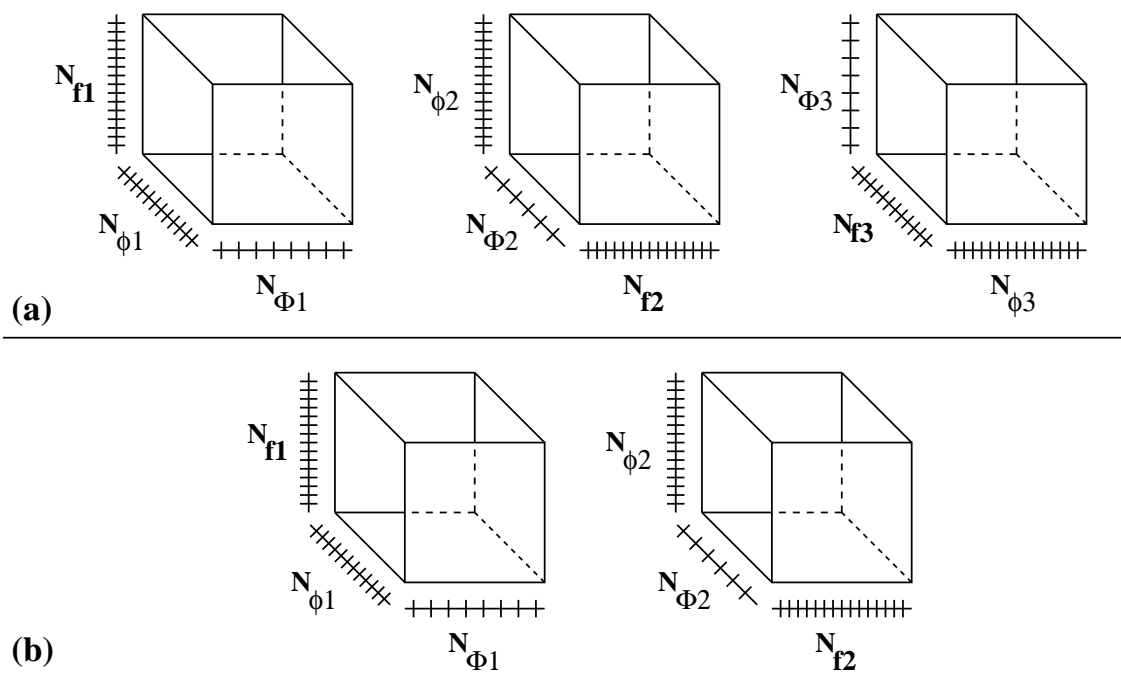


FIG. 3.2 – (a) Les volumes acquis dans le cas particulier où la résolution n'est dégradée que dans une direction pour chaque acquisition. (b) Les volumes acquis dans le cas particulier où deux volumes complémentaires seulement sont acquis.

Chacun de ces volumes peut être acquis en utilisant les séquences classiques (acquisition linéaire du  $k$ -space) : en effet, acquérir un volume avec une résolution moindre dans une direction revient à réduire l'acquisition aux plans centraux du domaine de Fourier.

Les figures 3.3 et 3.4 présentent de façon qualitative la localisation des données acquises dans l'espace de Fourier pour chacune des acquisitions (volumes grisés), par rapport à l'ensemble de la zone d'intérêt (volumes transparents), respectivement pour le cas général (figure 3.1-b) et pour le cas particulier de la figure 3.2-a.

La figure 3.5 montre la superposition des supports des trois acquisitions dans le cas général et dans le cas particulier de la figure 3.2-a.

Dans le cas particulier de deux acquisitions (figure 3.2-b), le support fréquentiel de l'ensemble des deux acquisitions se présente comme indiqué sur la figure 3.6.

Le paragraphe suivant expose de façon formelle les conséquences de cette stratégie sur le temps d'acquisition, la couverture spectrale, et l'écart-type du bruit.



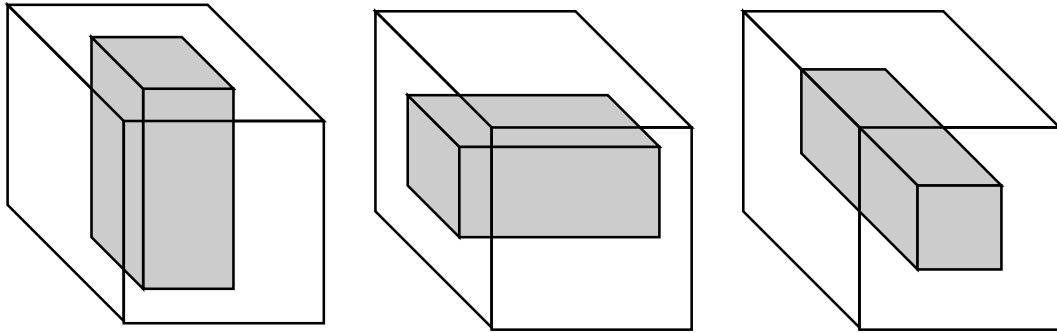


FIG. 3.3 – Occupations spectrales relatives des volumes acquis dans le cas général (figure 3.1-b).

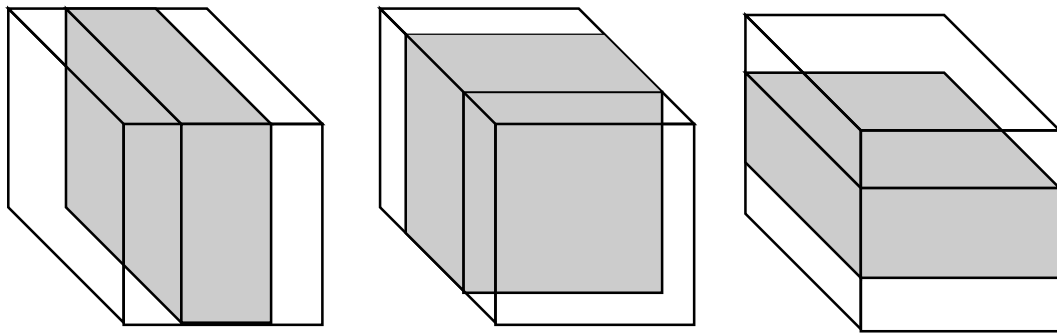


FIG. 3.4 – Occupations spectrales relatives des volumes acquis dans le cas particulier de la figure 3.2-a.

## 3.2 Conséquences de la stratégie d'acquisition

### 3.2.1 Influence sur le temps d'acquisition

Soient, conformément à la figure 3.1,  $N_{f_1}$ ,  $N_{f_2}$  et  $N_{f_3}$  les nombres de voxels dans les directions du codage en fréquence dans chacun des volumes,  $N_{\phi_1}$  et  $N_{\Phi_1}$  les nombres de voxels dans les deux directions du codage en phase de la première acquisition,  $N_{\phi_2}$  et  $N_{\Phi_2}$  les nombres de voxels dans les directions du codage en phase de la seconde acquisition,  $N_{\phi_3}$  et  $N_{\Phi_3}$  les nombres de voxels dans les directions du codage en phase de la troisième acquisition. On suppose que le temps de répétition  $T_R$  est le même pour toutes les acquisitions. On pourrait également supposer un nombre de voxels variable dans la direction du codage par la fréquence, mais nous avons vu que dans

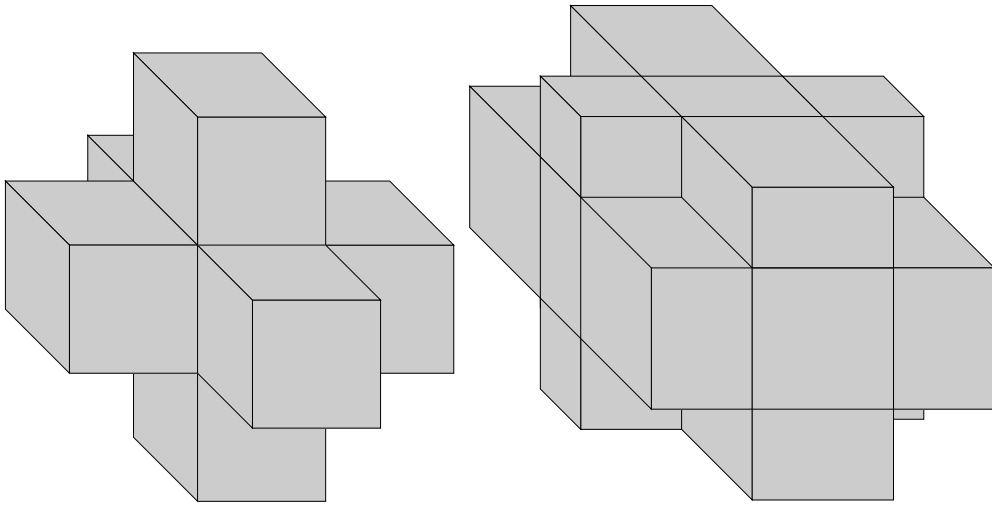


FIG. 3.5 – *A gauche : Occupation spectrale couverte par l'ensemble des volumes acquis dans le cas général. Pour faciliter la compréhension visuelle, nous supposons cependant ici que les résolutions dégradées sont les mêmes dans les trois directions (c'est-à-dire, dans le cas d'un champ de vue identique dans les trois directions, que les dimensions de l'image dans les directions de résolution dégradée sont identiques). Sans cette hypothèse, le schéma deviendrait beaucoup plus complexe et par conséquent difficilement interprétable visuellement). A droite : Occupation spectrale couverte par l'ensemble des volumes acquis dans le cas particulier de la figure 3.2-a.*

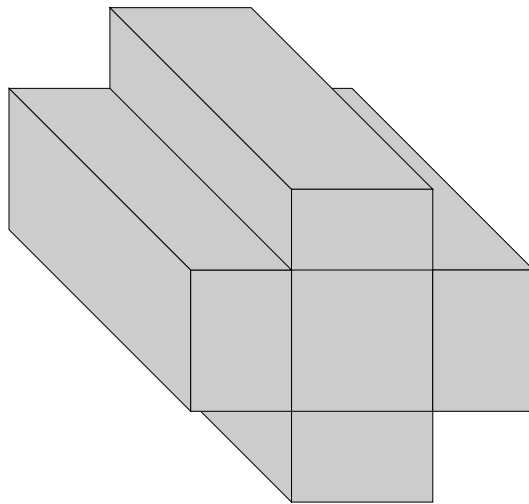


FIG. 3.6 – *Occupation spectrale couverte par l'ensemble des volumes acquis dans le cas particulier de la figure 3.2-b.*

cette direction un nombre de voxels important n'impose aucun «coût» supplémentaire en termes de durée d'acquisition.

Conformément au § 2.2.4.4, le temps nécessaire pour acquérir le premier volume  $V_1$  est donc :

$$T_1 = T_R \cdot N_{\phi_1} \cdot N_{\Phi_1} \quad (3.1)$$

et pour le second volume  $V_2$  :

$$T_2 = T_R \cdot N_{\phi_2} \cdot N_{\Phi_2} \quad (3.2)$$

et enfin pour le troisième  $V_3$  :

$$T_3 = T_R \cdot N_{\phi_3} \cdot N_{\Phi_3} \quad (3.3)$$

soit un temps total de :

$$T_{1+2+3} = T_R \cdot (N_{\phi_1} \cdot N_{\Phi_1} + N_{\phi_2} \cdot N_{\Phi_2} + N_{\phi_3} \cdot N_{\Phi_3}) \quad (3.4)$$

alors que l'acquisition d'un unique volume  $V$  de dimensions  $N_\phi \cdot N_\Phi \cdot N_f$  serait :

$$T_0 = T_R \cdot N_\phi \cdot N_\Phi \quad (3.5)$$

On peut définir le gain de temps comme étant le rapport :

$$\begin{aligned} G_T &= \frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_0} \\ &= \frac{(N_{\phi_1} \cdot N_{\Phi_1} + N_{\phi_2} \cdot N_{\Phi_2} + N_{\phi_3} \cdot N_{\Phi_3})}{N_\phi \cdot N_\Phi} \end{aligned} \quad (3.6)$$

D'après cette définition, le gain de temps doit être inférieur ou égal à 1, sinon il y a perte de temps.

### 3.2.2 Influence sur la couverture spectrale

Il apparaît immédiatement que la stratégie d'acquisition va induire, d'une part, la perte d'informations dans les «coins» du  $k$ -space, et d'autre part, la redondance d'informations au «centre» du  $k$ -space.

Nous considérons, à des fins de comparaison, deux configurations qui aboutissent au même gain de temps :

- pour la première, la résolution est dégradée dans les deux directions du codage par la phase, d'un facteur  $k$ , et on choisit pour simplifier la comparaison  $N_{f1} = N_{f2} = N_{f3} = N_f$ ,  $N_{\phi_1} = N_{\phi_2} = N_{\phi_3} = N_\phi/k$ , et  $N_{\Phi_1} = N_{\Phi_2} = N_{\Phi_3} = N_\Phi/k$ . Dans ces conditions le gain de temps est de  $3/k^2$ .

- pour la seconde, la résolution n'est dégradée que dans une direction. Si l'on choisit également  $N_{f1} = N_{f2} = N_{f3} = N_f$ ,  $N_{\phi1} = N_{\phi2} = N_{\phi3} = N_\phi$ , et  $N_{\Phi1} = N_{\Phi2} = N_{\Phi3}$ , un gain de temps identique au précédent sera obtenu en choisissant  $N_{\Phi1} = N_{\Phi2} = N_{\Phi3} = N_\Phi/k^2$ .

Pour avoir un gain de temps inférieur à 1, il faut s'intéresser uniquement aux valeurs de  $k$  telles que  $k > \sqrt{3}$ . Dans ces conditions, pour tout  $k$  on a  $k^2 > k$ , et donc l'isotropie est meilleure dans le premier cas puisque le facteur de dégradation est de  $1/k$  au lieu de  $1/k^2$  dans le second.

Intéressons-nous maintenant à la couverture relative du  $k$ -space pour chacune de ces configurations, c'est-à-dire au rapport du volume du support fréquentiel couvert par les acquisitions complémentaires de la configuration considérée, au volume du support fréquentiel couvert par l'acquisition de référence. Dans le premier cas, on obtient :

$$\frac{V_{couvert}^{(1)}}{V_{total}} = \frac{3}{k^2} - \frac{2}{k^3} \quad (3.7)$$

et dans le second :

$$\frac{V_{couvert}^{(2)}}{V_{total}} = \frac{3}{k^2} - \frac{3}{k^4} + \frac{1}{k^6} \quad (3.8)$$

Ces fonctions sont tracées sur la figure 3.7.

L'étude de ces fonctions montre que le volume couvert relatif est toujours légèrement plus important dans le second cas que dans le premier, mais que cette différence relative est très peu significative et vaut moins de 15 %.

Les ordres de grandeur raisonnables pour le facteur  $k$  se situent aux environs de  $k \simeq 2$  à  $2,5$ , ce qui correspond à une dégradation d'un facteur  $k^2 \simeq 4$  à  $6$  pour la seconde configuration. La diminution relative du temps d'acquisition vaut alors 30 à 50 % environ, et l'occupation spectrale relative se situe aux environs de 40 à 50 %.

L'étude précédente ne tient pas compte du contenu spectral des images : *a priori*, il se peut que toute l'information soit concentrée dans une zone du  $k$ -space qui n'est couverte par aucune des acquisitions, ce qui aurait des conséquences dramatiques, ou au contraire que les zones non contenues dans la réunion des supports des  $k$ -space ne contiennent aucune information, auquel cas la stratégie d'acquisition n'induit aucune perte. Nous proposons ici d'étudier la répartition de l'énergie de la T.F.D. dans le cas particulier d'images vasculaires. Cette étude est réalisée sur des images vasculaires simulées, dont le modèle est exposé dans l'annexe A. Nous avons simulé un vaisseau sain et un vaisseau sténosé (sténose à 80 %), orientés selon différentes directions de l'espace, et comparé le pourcentage d'énergie de la T.F.D. conservé dans chacune des acquisitions simulées (facteur de sous-échantillonnage de 0,24 c'est-à-dire  $k \simeq 4,2$ ).

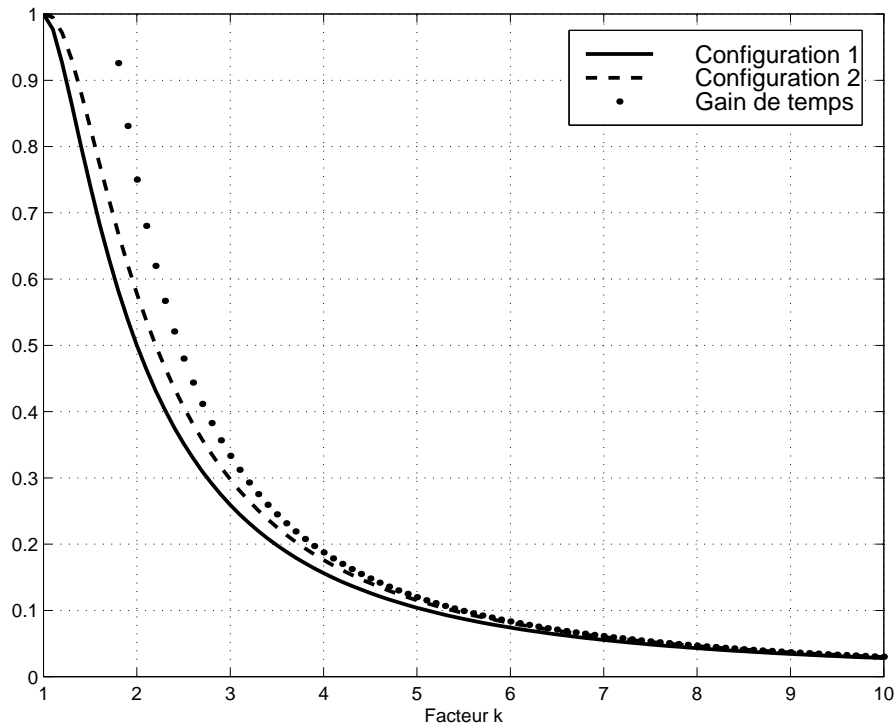


FIG. 3.7 – Proportion de volume spectral couvert par la réunion des trois acquisitions dans les deux configurations étudiées au § 3.2.2. Le gain de temps en fonction du facteur  $k$  est également tracé.

Nous présentons à titre d'exemple la visualisation d'un vaisseau sténosé et de sa T.F.D. après seuillage, sur la figure 3.8. Le seuillage sur la T.F.D. permet de ne conserver que les composantes fréquentielles les plus énergétiques. Dans le cas d'un vaisseau sain (modélisé par un cylindre parfait), la T.F.D. se présente sous forme d'un disque situé dans le plan orthogonal à l'axe du vaisseau; dans le cas d'un vaisseau sténosé, l'existence de contours dans la direction de l'axe du vaisseau modifie ce «disque» qui s'épaissit alors dans la direction de son axe de révolution, d'autant plus que la sténose est «courte». Cependant, l'«étalement» de l'énergie vers les hautes fréquences reste toujours beaucoup plus faible dans la direction de l'axe que dans le plan de l'axe, même dans le cas d'un vaisseau avec variation rapide de diamètre. C'est pourquoi les conclusions de cette étude sont valables à la fois pour des vaisseaux sains et pour des vaisseaux pathologiques.

Pour des raisons de lisibilité, nous présentons les résultats de cette étude en deux dimensions, sans perte de généralité puisque le modèle utilisé comporte un axe de ré-

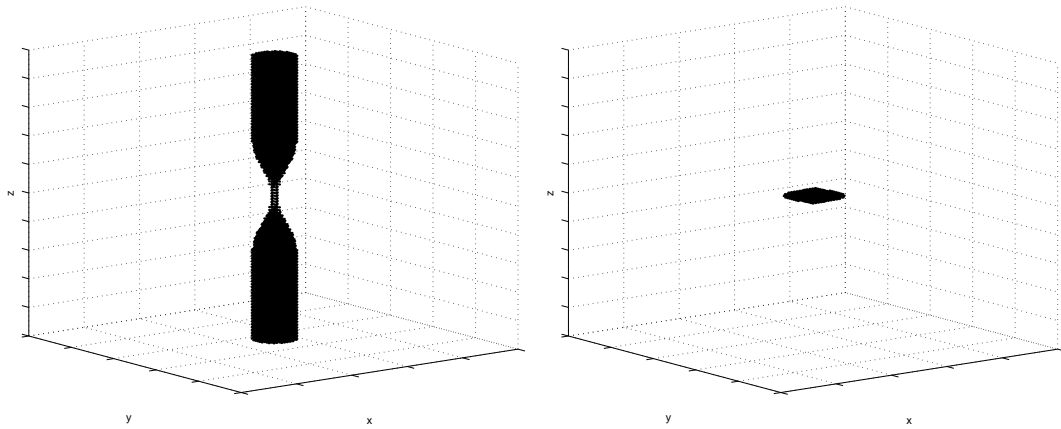


FIG. 3.8 – *A gauche : exemple de paroi de vaisseau sténosé à 80 % (visualisation par seuillage de l'image simulée). A droite : sa T.F.D. après seuillage.*

volution. La figure 3.9 montre l'image du vaisseau sain et de sa T.F.D. pour différentes orientations de l'axe du vaisseau, tandis que le cas sténosé est présenté sur la figure 3.10.

La conclusion de cette étude est représentée schématiquement sur la figure 3.11.

Si la direction de l'axe du vaisseau coïncide approximativement avec la direction de l'un des trois axes du «cube» formé par la zone choisie pour l'acquisition, alors, les données fréquentielles les plus denses sont situées autour de l'origine pour l'information d'homogénéité et le long des axes principaux du cube pour les variations rapides d'intensité dans les zones de contour. Ainsi, les données denses sont incluses dans le support fréquentiel de l'une ou l'autre des deux acquisitions et donc la majeure partie de l'énergie de l'image de haute résolution souhaitée est contenue dans les acquisitions.

Si la direction de l'axe du vaisseau est «oblique» par rapport aux directions principales du cube, alors les données denses sont encore situées autour de l'origine pour les zones homogènes, mais les informations de contour correspondent cette fois à des fréquences élevées selon des directions résultant de la combinaison de plusieurs axes principaux. A partir d'une certaine fréquence, cette information ne se retrouve dans aucune des acquisitions et une part non négligeable de l'information est perdue.

Nous verrons plus tard que cela a des conséquences sur le choix des paramètres des acquisitions.

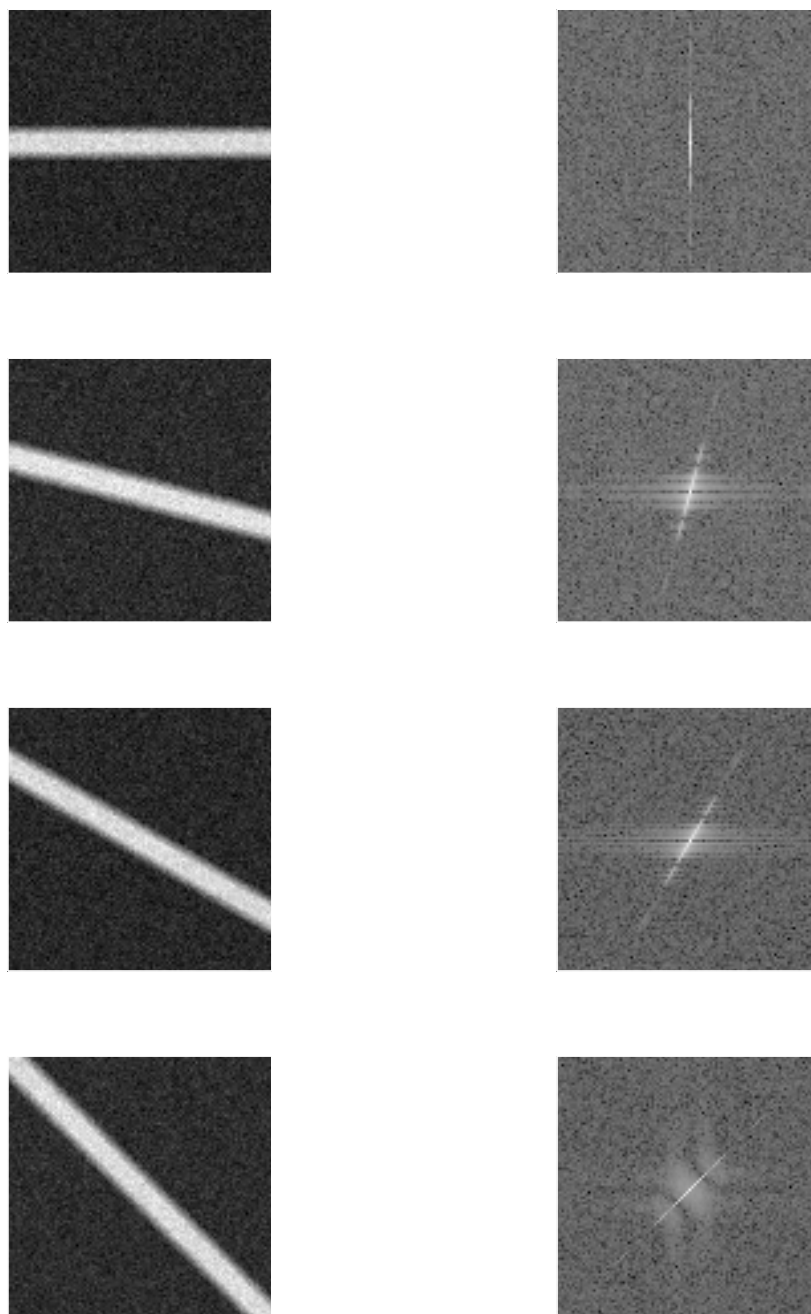


FIG. 3.9 – A gauche : l'image du vaisseau sain pour différentes orientations de son axe. A droite : les T.F.D. correspondantes.

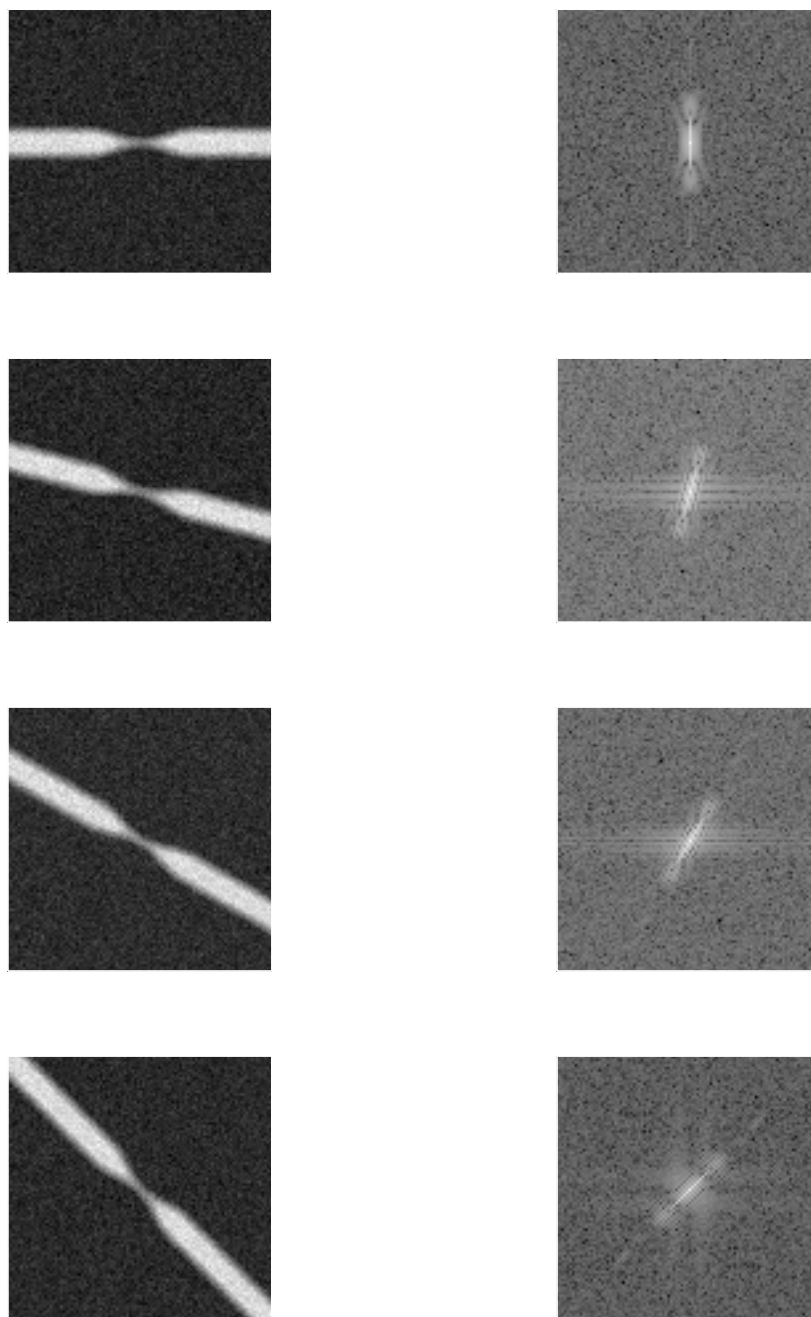


FIG. 3.10 – *A gauche : l'image du vaisseau sténosé pour différentes orientations de son axe. A droite : les T.F.D. correspondantes.*



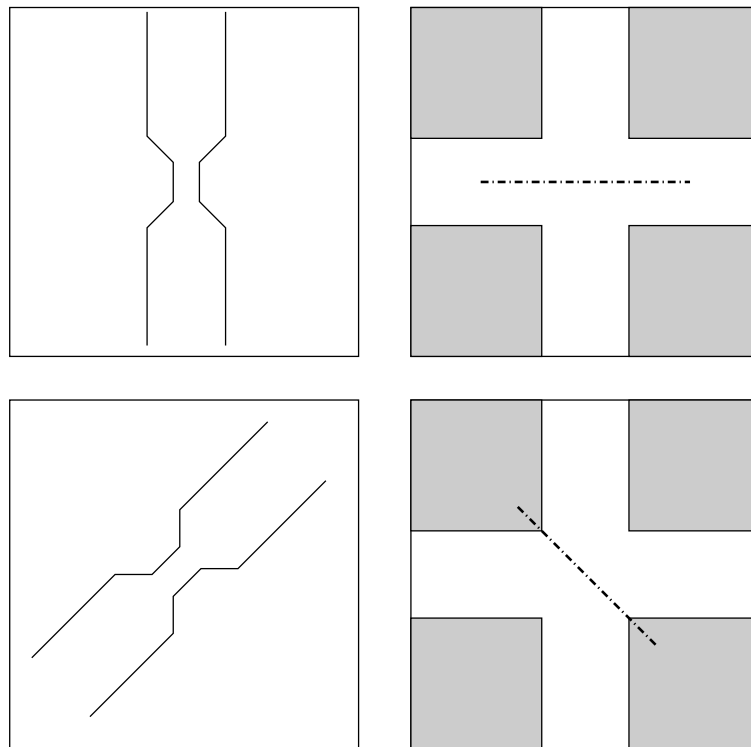


FIG. 3.11 – Représentation schématique de l'influence de l'orientation du vaisseau sur la perte d'énergie due à la stratégie d'acquisition. Les traits en pointillés représentent la localisation des coefficients les plus énergétiques de la T.F.D.; les zones grisées représentent les données non acquises.

### 3.2.3 Influence sur le bruit

De la même façon, il peut être intéressant de comparer le rapport signal sur bruit obtenu avec cette stratégie d'acquisition par rapport au rapport signal sur bruit d'une acquisition «classique». Cependant cela exige, d'une part, des hypothèses fortes sur le signal, et d'autre part, la connaissance de la méthode de combinaison des volumes; c'est pourquoi nous nous contentons ici de comparer l'écart-type théorique du bruit dans le volume de référence et dans chacun des volumes sous-résolus.

Nous utilisons les mêmes notations qu'au § 3.2.1, et notons  $\sigma_0$  l'écart-type du bruit dans le volume de référence; en supposant de plus que  $N_{fi} = N_f$  pour  $i = 1$  à 3, nous définissons le gain de variance pour une acquisition  $i$  comme étant le rapport :

$$G_\sigma(i) = \frac{\sigma_i}{\sigma_0}$$

$$= \sqrt{\frac{N_{\phi_i} N_{\Phi_i}}{N_{\phi} N_{\Phi}}} \quad (3.9)$$

On voit immédiatement que si l'on dégrade la résolution dans au moins une des directions de codage par la phase ( $N_{\phi_i} N_{\Phi_i} < N_{\phi} N_{\Phi}$ ), le gain  $G_{\sigma}(i)$  est inférieur à 1, ce qui signifie une diminution du bruit.

### 3.3 Intérêt clinique

Les avantages de cette stratégie d'acquisition, évoqués au § 3.2.1, peuvent conduire à plusieurs utilisations cliniques :

- Lorsque la résolution spatiale est suffisante, cette technique peut être utilisée pour améliorer la qualité de l'image, d'une part parce que la technique est supposée fournir des images moins bruitées, d'autre part parce que plus l'acquisition est longue, plus l'image est susceptible d'être entachée par des artefacts dus aux mouvements des structures, même lorsque le patient est en apnée (en particulier à proximité du cœur, à cause du cycle cardiaque).
- Lorsqu'on est limité en résolution par la durée de l'apnée, la technique d'acquisition permet, à durée d'acquisition constante, d'améliorer la résolution spatiale, sans dégrader pourtant le rapport signal sur bruit.
- Toujours lorsque l'on est limité en résolution par la durée de l'apnée, et si l'on souhaite améliorer considérablement la résolution, on peut acquérir chacun des deux ou trois volumes en une apnée distincte. Cela permet de multiplier par deux ou trois la durée totale de l'acquisition, sans pour autant avoir de mouvements de respiration pendant l'acquisition d'un volume. Cette technique permet un grand gain en résolution spatiale, mais impose d'effectuer un recalage entre les images acquises pendant les différentes apnées, car il est illusoire de penser que le patient se repositionne exactement de la même façon après avoir respiré. Nous verrons (chapitre 8) que cette technique peut cependant échouer dans certains cas.

## 3.4 Caractéristiques des acquisitions

### 3.4.1 Enchaînement des séquences

Nous avons évoqué plus haut (2.4.3) le problème des artefacts de mouvement induits par la respiration du patient pendant l'acquisition. Qu'en est-il dans le cas de ces deux ou trois séquences complémentaires ?

En l'état actuel du développement de la méthode, il est clair que nous utilisons les séquences déjà disponibles sur les machines I.R.M. utilisées en routine : aussi, chaque séquence est acquise pendant une apnée du patient, mais en raison des réglages manuels nécessaires entre les acquisitions, il n'est techniquement pas encore possible d'acquérir tous les volumes en une seule apnée du patient.

A plus longue échéance, il est nécessaire d'envisager le développement de séquences d'acquisitions spécifiques, permettant d'enchaîner les deux acquisitions sans redéfinir la zone à imager et sans réglage intermédiaire.

En raison de cette absence de séquences dédiées pendant la période de développement, d'évaluation et de validation, il est donc indispensable de procéder à un recalage des volumes. Ce recalage est effectué manuellement, avec une précision de 1 pixel, avec évaluation visuelle. Il s'agit d'un recalage rigide effectué sur l'ensemble du volume tridimensionnel.

### 3.4.2 Filtrage

Les imageurs I.R.M. du commerce introduisent souvent automatiquement des filtres permettant d'améliorer l'image en diminuant les effets oscillatoires (connus sous le nom d'effets de Gibbs) dus à la troncature brutale dans le domaine de Fourier (par exemple, filtres fréquentiels de Hanning). Or, les volumes ayant des grilles d'échantillonnage différentes, leurs supports fréquentiels sont également différents (voir les figures 3.3 et 3.4), donc les filtres appliqués ne sont pas superposables dans l'espace de Fourier. En conséquence, il n'est pas rigoureux de faire abstraction de ces filtres lors de la combinaison, et il convient, soit de supprimer ces filtres lors des acquisitions, soit d'appliquer les filtres inverses correspondants avant la reconstruction, ce qui revient également à introduire ces filtres dans le modèle du problème direct.

Est-il judicieux de réintroduire de tels filtres après l'étape de combinaison ? Puisque l'objectif de ces filtres est de corriger l'effet de troncature brutale des données dans l'espace de Fourier dû à l'échantillonnage, la réponse devrait être affirmative, puisque nous souhaitons fournir, en fin de la chaîne de traitement, un volume conforme à celui

qui aurait pu être fourni par l'imageur ; cependant, comme nous le verrons dans le chapitre 5, la combinaison des volumes acquis introduit des *a priori* de régularisation qui, entre autres effets, permettent de corriger également les effets de troncature dans l'espace de Fourier. C'est pourquoi il ne semble pas nécessaire de réintroduire ces filtres en fin de traitement.

### 3.4.3 Format des données

Nous avons indiqué précédemment (§ 2.2.2.3) que les données acquises en I.R.M. l'étaient dans le domaine de Fourier (*k-space*) ; cependant, les données réellement accessibles sont l'image I.R.M. 3D complexe ou même parfois son module uniquement. Ainsi, malgré la dualité de l'espace de l'image I.R.M. et du *k-space*, il est plus aisé en pratique d'effectuer la combinaison des deux acquisitions dans le domaine de l'image I.R.M. que dans le *k-space*.

### 3.4.4 Orientation du volume

A la suite de l'étude réalisée au § 3.2.2, nous savons que l'orientation relative du «cube» représentant le volume de données acquises, et de l'axe du vaisseau (dans le cas d'un vaisseau à l'axe à peu près longiligne), n'est pas sans effet sur la proportion d'information conservée par la stratégie d'acquisition.

Or, s'il n'est pas possible de modifier l'orientation du vaisseau dans le corps du patient, il est en revanche possible de choisir l'orientation du «cube» à acquérir sur toute machine I.R.M. utilisée en routine clinique.

Un choix judicieux de l'orientation du volume consistant en un alignement grossier du vaisseau avec l'un des axes du cube apparaît donc comme élément déterminant de la qualité de notre méthode.

## Conclusion

*Nous avons présenté dans ce chapitre le processus d'acquisition original développé en collaboration étroite avec Elie Mousseaux et Alain Herment. Le principal avantage de cette stratégie d'acquisition est son implantabilité à court terme. En effet, les acquisitions sont des acquisitions «standard» sur une grille cartésienne régulière, et sont donc réalisables sur tout type de machine I.R.M.*

*Dans le chapitre suivant nous proposons une modélisation mathématique précise du processus d'acquisition ; dans le chapitre 5, nous présentons la méthode développée pour fournir aux experts médicaux des données exploitables directement pour le diagnostic, de la meilleure qualité possible.*

---

## CHAPITRE 4

# Modélisation des données

## Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons une étude mathématique détaillée du processus d'acquisition présenté au chapitre précédent. Pour des raisons didactiques, dans un premier temps nous nous plaçons dans le cas particulier où la résolution n'est dégradée que dans une direction pour chaque acquisition (figure 3.2 (1)); puis nous montrons comment les résultats peuvent être facilement étendus au cas général.

Soit  $I_{HR}$  l'image I.R.M. de haute résolution idéale recherchée; soient  $I_x$ ,  $I_y$  et  $I_z$  les acquisitions anisotropes sous-résolues selon les directions  $x$ ,  $y$ , et  $z$  respectivement, telles que définies dans le chapitre 3. L'objectif est donc d'exprimer les fonctions  $D_x$ ,  $D_y$ , et  $D_z$  permettant de modéliser la sous-résolution par rapport à l'image idéale  $I_{HR}$ , telles que :

$$\begin{aligned} I_x &= D_x(I_{HR}) \\ I_y &= D_y(I_{HR}) \\ I_z &= D_z(I_{HR}) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Or, de par le principe de l'imagerie par résonance magnétique, ces images sont les transformées de Fourier discrètes de  $k$ -spaces de supports différents, conformément à la figure 3.4 (§ 3.1). Il apparaît donc commode d'étendre les supports de ces  $k$ -spaces à un support qui leur serait commun, et qui devrait donc englober le support représenté à la figure 3.5 (§ 3.1). Pour faciliter l'exploitation ultérieure des données, il apparaît judicieux de choisir comme support la plus petite des grilles cartésiennes complètes (c'est-à-dire, un parallépipède rectangle) englobant le support précédemment évoqué.

L'extension du support est faite par zero-padding (extension par des zéros), qui est équivalent à une interpolation dans l'espace de l'image. En effet, les dimensions d'une

image et de sa T.F.D. sont les mêmes, donc augmenter la taille de la T.F.D. revient à augmenter celle de l'image, en réduisant l'espacement spatial entre deux échantillons successifs.

Nous proposons dans la partie 4.1 une étude de cette interpolation.

Puis, dans la partie 4.2, nous proposons une modélisation mathématique du processus d'acquisition, indispensable à la combinaison ultérieure des différentes acquisitions en un volume unique de haute résolution. Notons que cette modélisation suppose l'absence de filtres tels que ceux évoqués au paragraphe 3.4.2; dans le cas contraire, il convient donc d'adapter le modèle en prenant en compte les filtres.

## 4.1 Interpolation des images sous-résolues

Il est bien connu que la T.F.D. d'une image bi- ou tri-dimensionnelle est séparable selon chacune des directions de l'image. Or, comme nous supposons que chaque image est sous-résolue dans une seule des trois directions de l'espace, l'interpolation par *zero-padding* ne concerne qu'une direction par image. Par conséquent, nous traitons ici le problème de l'interpolation en une dimension, c'est-à-dire sur une «ligne» de données dans la direction considérée.

Nous présentons dans la partie 4.1.1 l'approche classique utilisée pour l'interpolation par *zero-padding*.

### Remarque préliminaire :

Dans la suite, nous adopterons la convention préconisant les formules suivantes pour la TFD  $X(n)$  d'un signal discret  $x(n)$  sur  $N$  points :

– si  $N$  est pair :

$$\text{pour } n = -\frac{N}{2} \dots \frac{N}{2} - 1, \quad X(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} x(k) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$$

– si  $N$  est impair :

$$\text{pour } n = -\frac{N-1}{2} \dots \frac{N-1}{2}, \quad X(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} x(k) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$$

L'indice  $n$  représente la fréquence  $n/(N \cdot \Delta x)$ , où  $\Delta x$  est le pas d'échantillonnage spatial;  $X(n)$  est périodique de période  $1/\Delta x$ .

### 4.1.1 Approche classique du zero-padding

Cette approche a été introduite en 1973 par Schafer et Rabiner [SCHA-73]. Depuis, elle a été utilisée très souvent, en particulier dans le cas bidimensionnel par Sathyanarayana et al [SATH-90] ou partiellement par D. Calle [CALL-99]. Cependant, il convient de noter que les auteurs se placent habituellement dans un cas particulier, où la dimension du signal après interpolation est un multiple de celle du signal avant interpolation ; nous nous plaçons au contraire dans le cas très général d'un facteur quelconque entre ces dimensions. Autrement dit, les échantillons du signal de départ ne coïncident pas forcément avec ceux du signal interpolé.

Soit  $x^{N'}$  l'image de résolution dégradée selon  $x$ , de dimension  $N'$  selon  $x$  ; soit  $x^N$  l'image interpolée correspondante, de dimension  $N > N'$  selon  $x$ . Nous notons  $X^{N'}$  la TFD sur les lignes uniquement de  $x^{N'}$ , donc sur  $N'$  points dans la direction  $x$ , et  $X_0^N$  la TFD sur les lignes également de  $x^N$ , donc sur  $N$  points dans la direction  $x$ . Nous souhaitons exprimer  $x^N$  en fonction de  $x^{N'}$ . Nous séparons ici les cas où  $N'$  est pair et  $N'$  est impair.

#### Cas où $N'$ est pair :

Compte-tenu de la convention adoptée, l'expression de  $x^N(n)$  en fonction de  $X_0^N(k)$  s'obtient par transformation de Fourier inverse, soit si  $N$  est pair :

$$x^N(n) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} X_0^N(k) e^{j2\pi \frac{nk}{N}} \quad (4.2)$$

et si  $N$  est impair :

$$x^N(n) = \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} X_0^N(k) e^{j2\pi \frac{nk}{N}} \quad (4.3)$$

L'interpolation par *zero-padding* classique consiste à intercaler des échantillons fréquentiels nuls entre les motifs de  $X^{N'}(k)$  de manière à augmenter la période fréquentielle entre les motifs de  $X_0^N(k)$ .  $X_0^N(k)$  s'exprime en fonction de  $X^{N'}(k)$  de la façon suivante, si  $N$  est pair :

$$X_0^N(k) = \begin{cases} X^{N'}(k) & \text{pour } k = -\frac{N'}{2} \dots \frac{N'}{2}-1 \\ 0 & \text{pour } k = -\frac{N}{2} \dots -\frac{N'}{2}-1 \text{ et } k = \frac{N'}{2} \dots \frac{N}{2}-1 \end{cases} \quad (4.4)$$

et si  $N$  est impair :

$$X_0^N(k) = \begin{cases} X^{N'}(k) & \text{pour } k = -\frac{N'}{2} \dots \frac{N'}{2}-1 \\ 0 & \text{pour } k = -\frac{N-1}{2} \dots -\frac{N'}{2}-1 \text{ et } k = \frac{N'}{2} \dots \frac{N-1}{2} \end{cases} \quad (4.5)$$



soit :

$$x^N(n) = \sum_{k=-\frac{N'}{2}}^{\frac{N'}{2}-1} X^{N'}(k) e^{j2\pi \frac{nk}{N}} \quad (4.6)$$

Or :

$$X^{N'}(k) = \frac{1}{N'} \sum_{l=-\frac{N'}{2}}^{\frac{N'}{2}-1} x^{N'}(l) e^{-j2\pi \frac{kl}{N'}} \quad (4.7)$$

En remplaçant  $X^{N'}(k)$  par son expression dans l'équation 4.6, on obtient donc :

$$x^N(n) = \frac{1}{N'} \sum_{l=-\frac{N'}{2}}^{\frac{N'}{2}-1} x^{N'}(l) \sum_{k=-\frac{N'}{2}}^{\frac{N'}{2}-1} e^{-j2\pi \frac{kl}{N'}} e^{j2\pi \frac{nk}{N}} \quad (4.8)$$

En introduisant  $h_0(m)$  tel que :

$$x^N(n) = \sum_{l=-\frac{N'}{2}}^{\frac{N'}{2}-1} x^{N'}(l) h_0\left(n \frac{N'}{N} - l\right) \quad (4.9)$$

on obtient, après quelques calculs trigonométriques simples :

$$h_0(m) = \frac{1}{N'} e^{-j\pi \frac{m}{N'}} \frac{\sin(\pi m)}{\sin\left(\frac{\pi m}{N'}\right)} \quad (4.10)$$

### Cas où $N'$ est impair :

Dans ce cas, les calculs sont similaires, mais  $X^{N'}(k)$  est défini pour  $k$  variant de  $-(N' - 1)/2$  à  $(N' - 1)/2$ . On obtient finalement :

$$x^N(n) = \sum_{l=-\frac{N'-1}{2}}^{\frac{N'-1}{2}} x^{N'}(l) h_0\left(n \frac{N'}{N} - l\right) \quad (4.11)$$

avec :

$$h_0(m) = \frac{1}{N'} \frac{\sin(\pi m)}{\sin\left(\frac{\pi m}{N'}\right)} \quad (4.12)$$

Nous remarquons que, dans le cas où  $N'$  est pair (qui est fréquent en analyse d'images, où les dimensions de images sont souvent de la forme  $2^k$ ),  $h_0(m)$  est complexe : cette méthode d'interpolation rend complexe une image réelle à l'origine, ce qui n'est pas souhaitable.

C'est pourquoi nous proposons dans la partie 4.1.2 une autre méthode, qui conserve à une image réelle cette propriété.

## 4.1.2 Approche de zero-padding avec conservation de la propriété d'une image à valeurs réelles

Compte-tenu des résultats du § 4.1.1, cette approche ne concerne que les cas où  $N'$  est pair.

Une image réelle est caractérisée dans le domaine spectral par la symétrie hermitienne de sa T.F.D.

Si  $x^N(n)$  est réelle, alors sa TFD  $X^N(k)$  vérifie :

- $\mathcal{R}e(X^N(k)) = \mathcal{R}e(X^N(-k))$
- $\mathcal{I}m(X^N(k)) = -\mathcal{I}m(X^N(-k))$

Or, dans l'approche classique présentée dans la partie 4.1.1,  $X_0^N(-\frac{N'}{2}) = X^{N'}(-\frac{N'}{2})$  et  $X_0^N(\frac{N'}{2}) = 0$  donc il est évident que, dans le cas général ( $X^{N'}(-\frac{N'}{2}) \neq 0$ ), l'image interpolée n'est pas réelle.

Nous proposons donc une approche de *zero-padding* semblable à l'approche classique, mais où nous imposons que l'image interpolée soit réelle si l'image de départ l'est.

Pour ce faire, nous proposons de calculer  $X^N(k)$  comme minimiseur de l'erreur quadratique par rapport à l'interpolation exacte  $X_0^N$ , sous la contrainte que sa T.F.D. inverse soit réelle (c'est-à-dire sous la contrainte de symétrie hermitienne de  $X^N$ ). On cherche donc :

$$\operatorname{argmin} \left[ \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \|X^N(k) - X_0^N(k)\|^2 \right] \quad (4.13)$$

sous la contrainte :

$$X^N(n) = [X^N(-n)]^* \quad (4.14)$$

où  $x^*$  désigne le conjugué  $x$ .

On peut ramener ce problème avec contrainte à un problème sans contrainte en exprimant  $X^N(n)$  en fonction de  $X^N(-n)$  pour  $n < 0$ ; cela revient alors à minimiser :

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \|X^N(-\frac{N}{2}) - X_0^N(-\frac{N}{2})\|^2 + \|X^N(0) - X_0^N(0)\|^2 + \\ & \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} (\|X^N(k) - X_0^N(k)\|^2 + \|X^N(k)^* - X_0^N(-k)\|^2) \end{aligned} \quad (4.15)$$

ce qui s'écrit aussi, en séparant chaque complexe en parties réelle et imaginaire :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= [\mathcal{R}e(X^N(-\frac{N}{2})) - \mathcal{R}e(X_0^N(-\frac{N}{2}))]^2 + [\mathcal{I}m(X^N(-\frac{N}{2})) - \mathcal{I}m(X_0^N(-\frac{N}{2}))]^2 \\
 &+ [\mathcal{R}e(X^N(0)) - \mathcal{R}e(X_0^N(0))]^2 + [\mathcal{I}m(X^N(0)) - \mathcal{I}m(X_0^N(0))]^2 \\
 &+ \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} ([\mathcal{R}e(X^N(k)) - \mathcal{R}e(X_0^N(k))]^2 + [\mathcal{I}m(X^N(k)) - \mathcal{I}m(X_0^N(k))]^2) \\
 &+ [\mathcal{R}e(X^N(k)) - \mathcal{R}e(X_0^N(-k))]^2 + [-\mathcal{I}m(X^N(k)) - \mathcal{I}m(X_0^N(-k))]^2
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

S'il existe, le minimum est obtenu en annulant les dérivées partielles de  $\varepsilon$  par rapport à chacune des variables.

Pour  $n = 0$  on obtient :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathcal{R}e(X^N(0))} = 0 \Rightarrow \mathcal{R}e(X^N(0)) = \mathcal{R}e(X_0^N(0)) \tag{4.17}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathcal{I}m(X^N(0))} = 0 \Rightarrow \mathcal{I}m(X^N(0)) = \mathcal{I}m(X_0^N(0)) \tag{4.18}$$

Pour  $n = -\frac{N}{2}$  on obtient :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathcal{R}e(X^N(-\frac{N}{2}))} = 0 \Rightarrow \mathcal{R}e(X^N(-\frac{N}{2})) = \mathcal{R}e(X_0^N(-\frac{N}{2})) \tag{4.19}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathcal{I}m(X^N(-\frac{N}{2}))} = 0 \Rightarrow \mathcal{I}m(X^N(-\frac{N}{2})) = \mathcal{I}m(X_0^N(-\frac{N}{2})) \tag{4.20}$$

Pour  $n = 1 \dots \frac{N}{2} - 1$  :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathcal{R}e(X^N(n))} = 0 \Rightarrow \mathcal{R}e(X^N(n)) = \frac{1}{2}[\mathcal{R}e(X_0^N(n)) + \mathcal{R}e(X_0^N(-n))] \tag{4.21}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathcal{I}m(X^N(n))} = 0 \Rightarrow \mathcal{I}m(X^N(n)) = \frac{1}{2}[\mathcal{I}m(X_0^N(n)) - \mathcal{I}m(X_0^N(-n))] \tag{4.22}$$

Les échantillons de  $X^N(n)$  sont identiques à ceux de  $X_0^N(n)$  en tous points sauf en  $n = -\frac{N'}{2}$  et en  $n = \frac{N'}{2}$ , pour lesquels on obtient :

$$X^N(-\frac{N'}{2}) = \frac{1}{2}X_0^N(-\frac{N'}{2}) \quad (4.23)$$

$$X^N(\frac{N'}{2}) = \frac{1}{2}X_0^{N*}(-\frac{N'}{2}) \quad (4.24)$$

$$(4.25)$$

Nous obtenons finalement le même résultat que D. Fraser dans [FRAS-89], qui affirme que cette solution mène à des erreurs environ deux fois plus faibles que la solution classique (sur des signaux de test sinusoïdaux). Effectivement, notre approche permet de montrer que cette solution est la meilleure au sens de l'erreur quadratique par rapport à la méthode théorique, pour l'ensemble restreint des solutions correspondant à des signaux ou images réels.

Nous pouvons, de la même manière que précédemment, calculer l'image interpolée selon la direction  $x$ ,  $x^N(n)$ , en fonction de  $x^{N'}(n)$ , puis exprimer cette relation sous la forme :

$$x^N(n) = \sum_{l=-\frac{N'}{2}}^{\frac{N'}{2}-1} x^{N'}(l)h(n\frac{N'}{N} - l) \quad (4.26)$$

On obtient alors l'expression suivante pour  $h(m)$  :

$$h(m) = \frac{1}{N'} \cos(\pi \frac{m}{N'}) \frac{\sin(\pi m)}{\sin(\pi \frac{m}{N'})} \quad (4.27)$$

Il apparaît alors, en comparant les expressions de  $h_0(m)$  (équation 4.10) et de  $h(m)$  (équation 4.27), que la fonction obtenue avec l'approche sous contrainte n'est autre que la partie réelle de celle obtenue avec la première approche. Autrement dit, pour obtenir la meilleure interpolation réelle d'une image réelle (au sens de la préservation fréquentielle), il suffit de réaliser une interpolation classique et de négliger la partie imaginaire de l'image complexe obtenue.

Le même résultat est obtenu par Schanze [SCHA-95] en utilisant la formule d'interpolation de Shannon et en tronquant les bornes (infinies) de sommation. Dooley et al [DOOL-00] montrent l'équivalence entre  $h(m)$  et le noyau de Dirichlet «fenêtré» par la fonction  $\cos(\pi \frac{m}{N'})$ .

### 4.1.3 Conséquences de l'interpolation

Nous proposons dans un premier temps une brève étude expérimentale de l'effet de l'interpolation sur le signal. Nous avons appliqué l'interpolation discrète décrite au

§ 4.1.2 à deux signaux de test : un signal sinusoïdal, et un signal carré. Les signaux discrets avant et après interpolation sont présentés sur les figures 4.1 et 4.2.

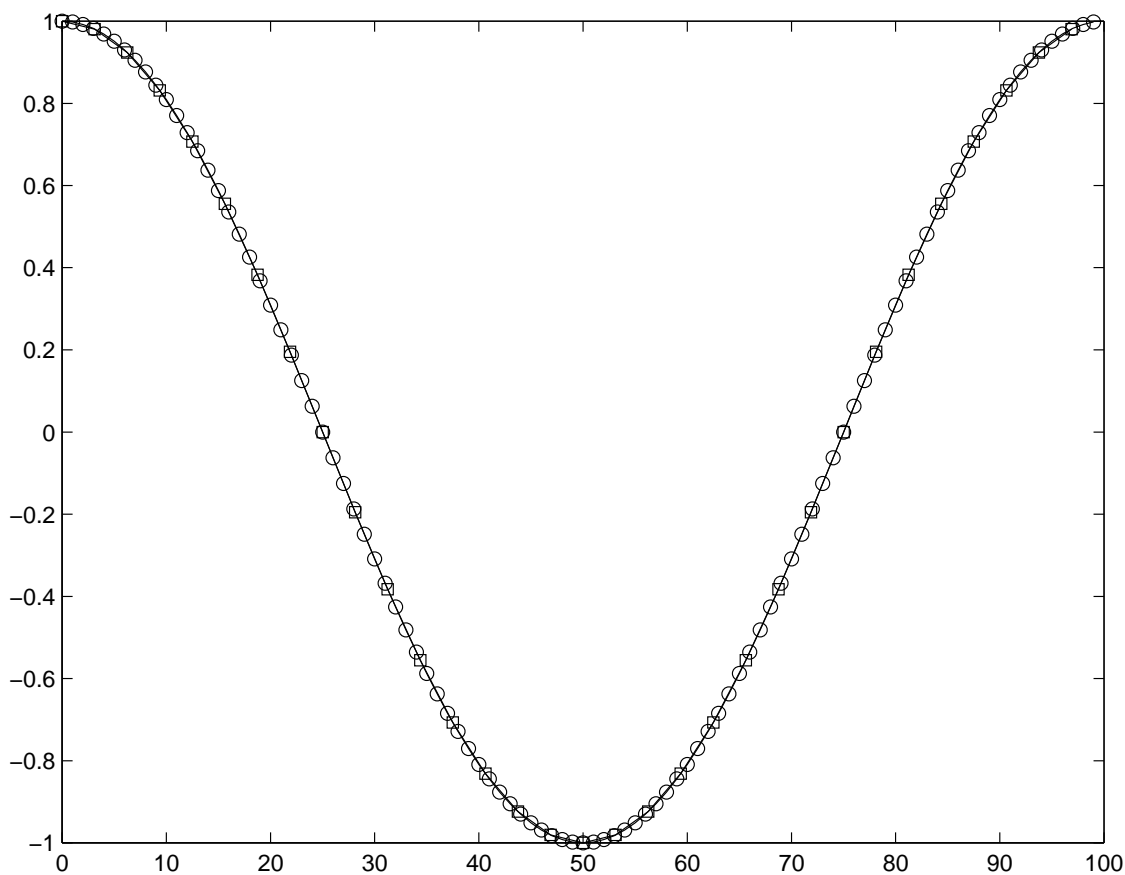


FIG. 4.1 – *Les signaux discrets avant et après interpolation (Les échantillons du signal d'origine sur 32 points sont représentés par des carrés, ceux du signal interpolé sur 100 points sont représentés par des cercles.)*

On constate que pour des signaux à variations lentes tels que sur la figure 4.1, l'interpolation est visuellement de bonne qualité. En revanche, pour des signaux à variations rapides, tels que sur la figure 4.2, l'interpolation induit des oscillations au voisinage des sauts du signal, analogues à l'effet de Gibbs. Cela s'explique facilement sur la T.F.D. : pour les signaux «bien échantillonnés», c'est-à-dire dont les coefficients des fréquences proches de la demi-fréquence d'échantillonnage sont nuls, le *zero-padding* n'aura visuellement pas d'effet néfaste. En revanche, pour les signaux «mal échantillonnés», c'est-à-dire dont les coefficients proches de la demi-fréquence d'échantillonnage ne sont pas nuls, le *zero-padding* va introduire une rupture dans la T.F.D., qui se

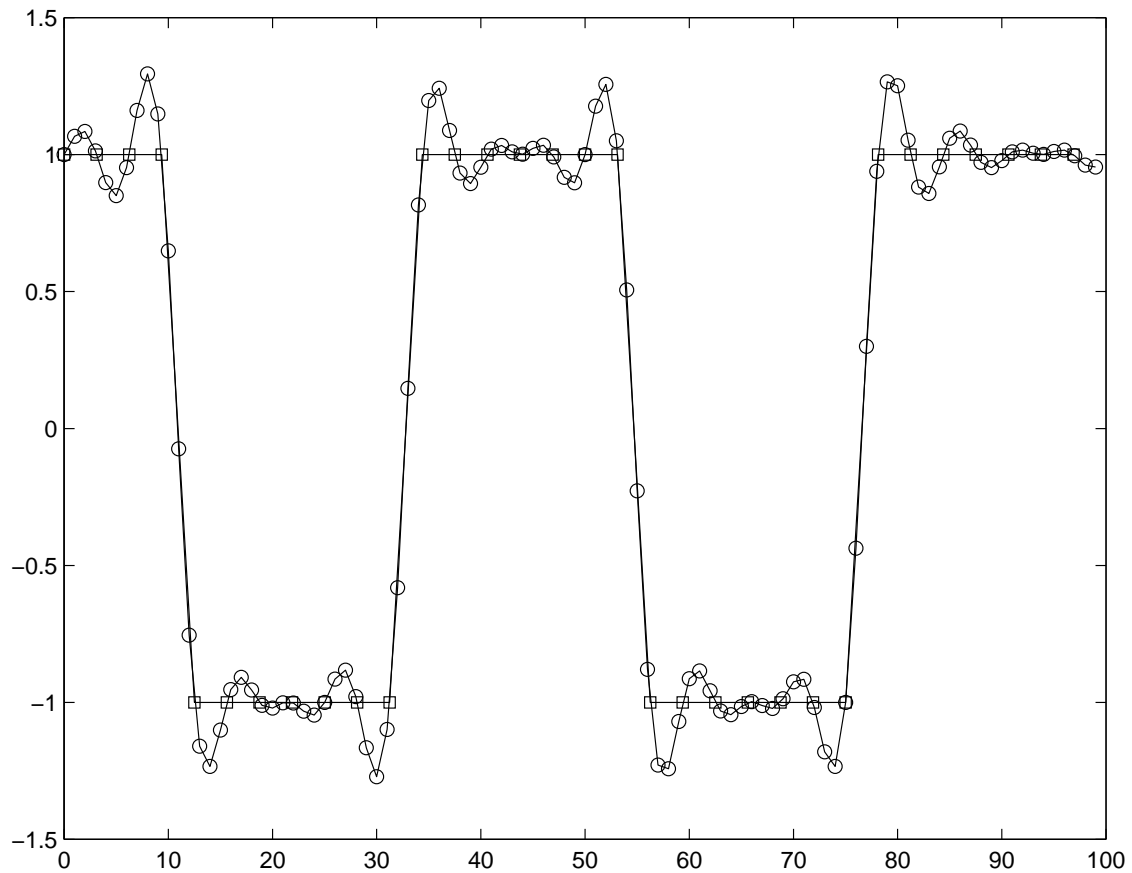


FIG. 4.2 – *Les signaux discrets avant et après interpolation (Les échantillons du signal d'origine sur 32 points sont représentés par des carrés, ceux du signal interpolé sur 100 points sont représentés par des cercles.)*

traduit par des oscillations dans le domaine spatial : on est donc bien en présence de l'effet de Gibbs.

En ce qui concerne les données I.R.M., il est évident que les images ne sont pas à bande limitée, et donc qu'elles entrent dans la seconde classe évoquée ci-dessus, celle des signaux «mal échantillonnés». En conséquence, les images interpolées vont donner naissance à des oscillations au voisinage des zones de transition, et en particulier au voisinage des frontières des vaisseaux d'intérêt.

Nous nous proposons maintenant d'étudier les conséquences de l'interpolation sur les caractéristiques du bruit. Nous avons vu que le bruit sur les images I.R.M. était un bruit blanc centré (§ 2.2.4.3) : sa fonction d'autocorrélation s'écrit donc :

$$C_{bb}(m) = C_0 \delta(m) \quad (4.28)$$

Après interpolation, la fonction d'autocorrélation devient (voir par exemple [CHAR-96]) :

$$\begin{aligned} C_{b_i b_i}(m) &= h(-m)^* \star h(m) \star C_0 \delta(m) \\ &= C_0 h(-m)^* \star h(m) \end{aligned} \tag{4.29}$$

Cette expression montre qu'après interpolation, on n'est plus en présence d'un bruit blanc.

Nous avons vu que la fonction  $h(m)$  était peu différente de la fonction «sinus cardinal» échantillonnée, avec un lobe très étroit, c'est-à-dire qu'elle s'approche de l'impulsion unité : en pratique,  $C_{b_i b_i}(m)$  est proche d'une impulsion unité et donc le bruit est très peu corrélé.

Nous proposons de vérifier cette affirmation quelque peu intuitive grâce à l'expérience suivante : nous avons généré un bruit blanc (de distribution gaussienne par exemple), que nous avons interpolé avec le filtre  $h(m)$  développé au paragraphe précédent, et avons ensuite comparé les fonctions d'autocorrélation avant et après interpolation. La figure 4.3 présente quelques échantillons du signal aléatoire avant et après interpolation (respectivement sur 320 et 1000 points), et la figure 4.4 les autocorrélations associées.

La corrélation du bruit d'origine correspond bien à celle d'un bruit blanc (l'erreur étant due uniquement au nombre de points non infini), et on peut constater que celle du bruit après interpolation a une allure similaire (proche de l'impulsion unité), on peut donc considérer que les échantillons du signal obtenu par interpolation à partir d'un bruit blanc ne sont pas corrélés.

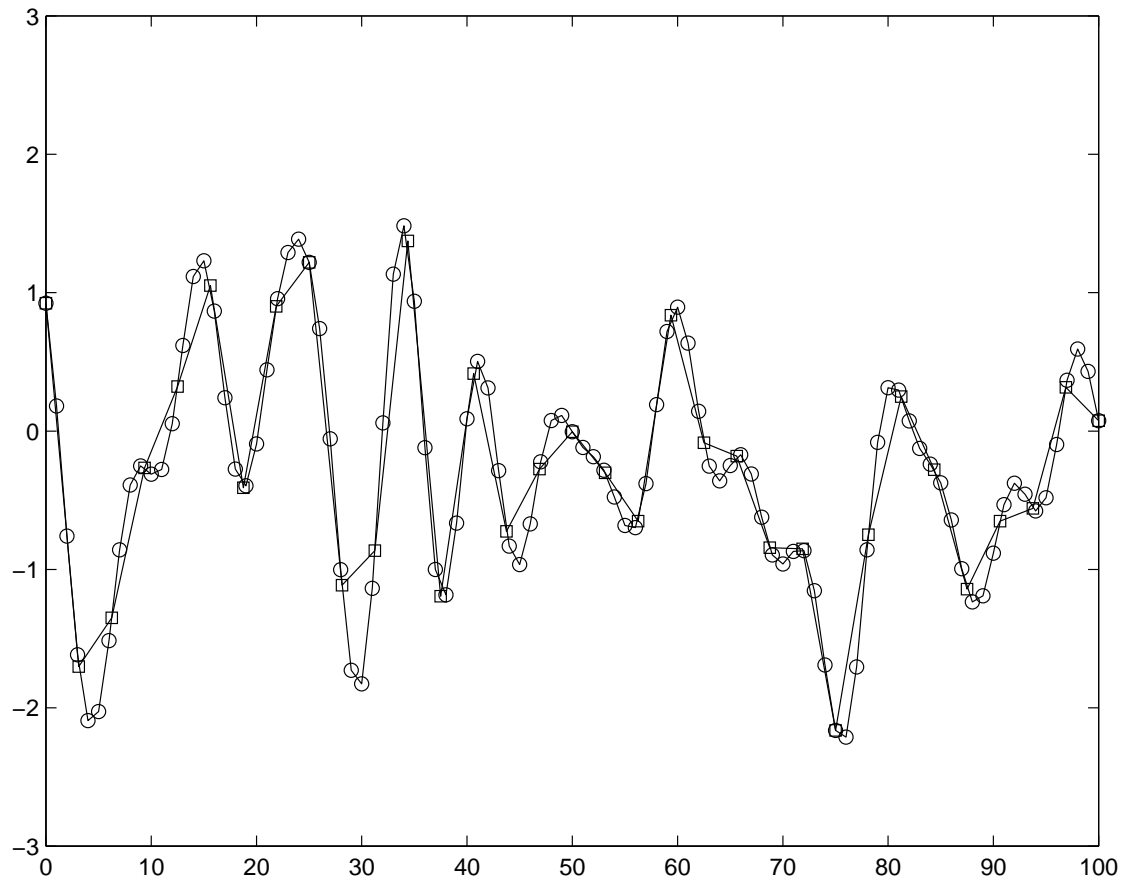


FIG. 4.3 – Les signaux de bruit discrets avant et après interpolation (Les échantillons du signal d'origine sur 320 points sont représentés par des carrés, ceux du signal interpolé sur 1000 points sont représentés par des cercles.)



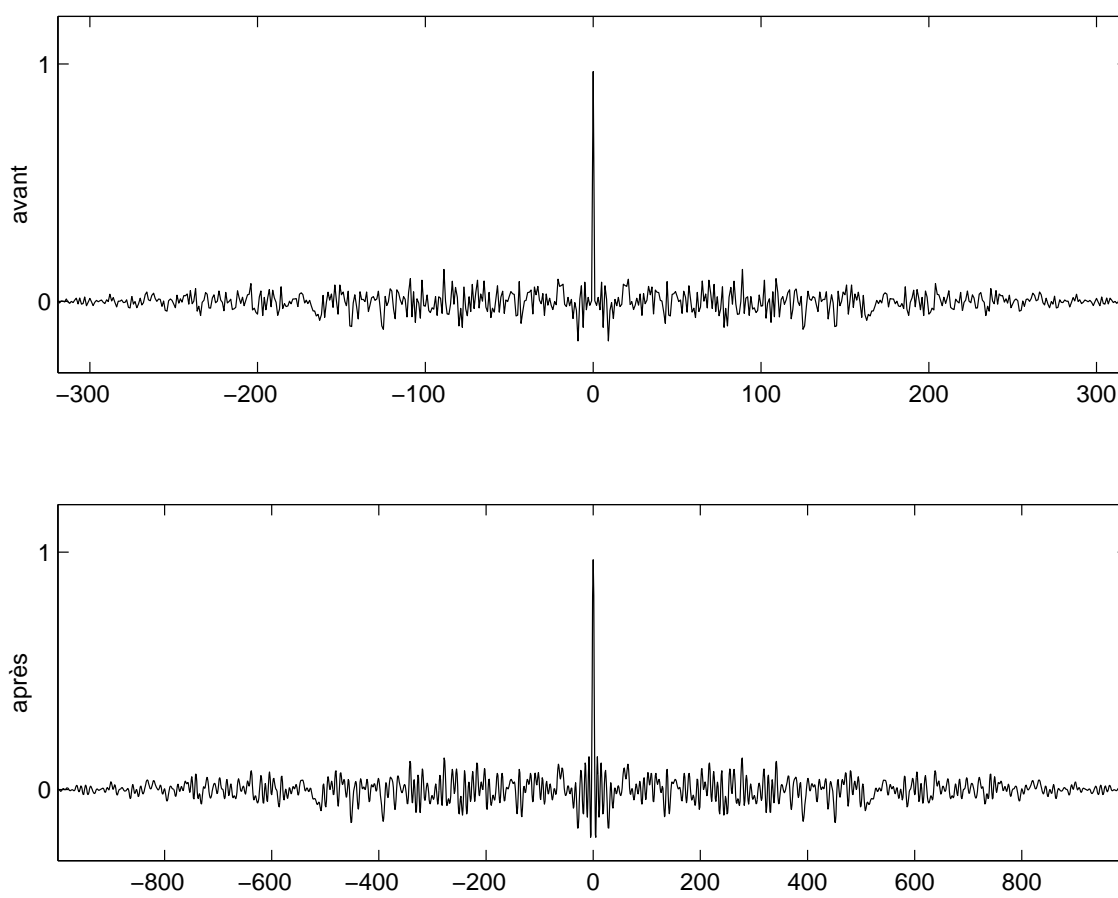


FIG. 4.4 – *Les autocorrélations du bruit avant et après interpolation.*

## 4.2 Modélisation

Dans cette partie, nous exprimons les opérateurs  $D_x$ ,  $D_y$  et  $D_z$  correspondant au sous-échantillonnage dans une direction de l'espace (introduits dans l'équation 4.1), en utilisant autant que faire se peut les opérations matricielles. Puis nous déduisons le modèle dans le cas général, à savoir lorsque les acquisitions sont sous-résolues dans les deux directions du codage par la phase.

Nous ne traitons ici que le cas où les dimensions des volumes sont paires, ce qui est le plus souvent le cas en traitement d'images où les dimensions sont souvent des puissances de 2.

### 4.2.1 Rappels sur les opérateurs sur les images

Un opérateur  $O$  opérant sur une image tridimensionnelle  $X$  est dit linéaire si la relation 4.30 entre l'entrée  $X$  et la sortie  $Y$  est satisfaite :

$$Y(x, y, z) = \sum_i \sum_j \sum_k X(i, j, k) O(i, j, k; x, y, z) \quad (4.30)$$

où  $x, y, z$  et  $i, j, k$  représentent les indices de l'image.

Un opérateur linéaire  $O$  est dit séparable, s'il vérifie l'égalité 4.31, c'est-à-dire s'il peut être appliqué séparément sur chaque dimension de l'image  $X$ .

$$O(i, j, k; x, y, z) = O_x(i; x) O_y(j; y) O_z(k; z) \quad (4.31)$$

Lorsque l'opérateur  $O$  est linéaire, il est possible d'exprimer la relation entre l'entrée  $X$  et la sortie  $Y$  sous la forme d'un produit matriciel  $\mathcal{Y} = \mathcal{O} \cdot \mathcal{X}$ , où  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  sont des vecteurs de longueur  $N_x N_y N_z$  correspondant à la mise en colonne respectivement de  $X$  et  $Y$ , conformément à l'annexe B.  $\mathcal{O}$  est donc une matrice carrée de dimension  $N_x N_y N_z \times N_x N_y N_z$ .

Lorsque l'opérateur est séparable, on peut exprimer la relation entre l'entrée  $X$  et la sortie  $Y$  sous forme matricielle en considérant chaque direction séparément. Dans le cas particulier d'une image en deux dimensions de taille  $N_y \times N_x$ , on peut aussi exprimer cette relation en séparant l'opérateur  $O$  en un opérateur sur les lignes  $\mathcal{O}_l$  et un opérateur sur les colonnes  $\mathcal{O}_c$ . La relation entre l'entrée et la sortie devient alors :

$$Y = \mathcal{O}_c \cdot X \cdot \mathcal{O}_l^T \quad (4.32)$$

où  $\mathcal{O}_c$  et  $\mathcal{O}_l$  sont des matrices carrées de dimensions respectives  $N_y \times N_y$  et  $N_x \times N_x$ .

## 4.2.2 Modélisation de la dégradation

Soit  $I_{HR}$  l'image de haute résolution recherchée, de taille  $N_x \times N_y \times N_z$ . Soient  $I_x$ ,  $I_y$  et  $I_z$  les images obtenues par sous-échantillonnage de  $I_{HR}$  selon les directions respectives  $x$ ,  $y$ , et  $z$ , de dimensions respectives  $N'_x \times N_y \times N_z$ ,  $N_x \times N'_y \times N_z$ , et  $N_x \times N_y \times N'_z$ .

Soit  $F_N$  l'opérateur matriciel de transformation de Fourier discrète sur  $N$  points ( $N$  pair); rappelons que ses éléments s'expriment :

$$F_N(n, k) = \frac{1}{N} e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \text{ avec } n, k = -\frac{N}{2} \dots \frac{N}{2} - 1 \quad (4.33)$$

De même, l'opérateur matriciel de transformation de Fourier discrète inverse  $F_N^{-1}$  s'écrit :

$$F_N^{-1}(n, k) = e^{j2\pi \frac{nk}{N}} \text{ avec } n, k = -\frac{N}{2} \dots \frac{N}{2} - 1 \quad (4.34)$$

On remarquera que :

$$F_N^{-1} = N F_N^H \quad (4.35)$$

où  $F_N^H$  désigne la transposée conjuguée (hermitienne) de  $F_N$ .

La T.F.D. tridimensionnelle  $J$  de  $I_{HR}$  s'écrit :

$$J(f_x, f_y, f_z) = \sum_{x'=-\frac{N_x}{2}}^{\frac{N_x}{2}-1} \sum_{y'=-\frac{N_y}{2}}^{\frac{N_y}{2}-1} \sum_{z'=-\frac{N_z}{2}}^{\frac{N_z}{2}-1} F_{N_x}(f_x, x') F_{N_y}(f_y, y') F_{N_z}(f_z, z') I_{HR}(x', y', z') \quad (4.36)$$

Or, rappelons que la T.F.D.  $J_x$  de  $I_x$  n'est autre que le  $k$ -space acquis sur  $N'_x \times N_y \times N_z$  points; conformément à la partie 4.1, afin de donner un support commun à toutes les T.F.D., nous considérons  $J_x$  sur  $N_x \times N_y \times N_z$  et forçons les échantillons fréquentiels non définis à zéro. Le même principe est appliqué à chacune des images  $I_x$ ,  $I_y$  et  $I_z$ .

A partir de là, le principe de notre modélisation est très simple: il s'agit de modéliser les échantillons fréquentiels définis (c'est-à-dire appartenant au support de l'acquisition) des T.F.D. de chaque image comme étant égaux aux échantillons fréquentiels correspondants de l'image idéale  $I_{HR}$ .

$I_x$  s'exprime donc en fonction de  $J$  de la façon suivante :

$$I_x(x, y, z) =$$

$$\sum_{f_x=-\frac{N'_x}{2}}^{\frac{N'_x}{2}-1} \sum_{f_y=-\frac{N_y}{2}}^{\frac{N_y}{2}-1} \sum_{f_z=-\frac{N_z}{2}}^{\frac{N_z}{2}-1} F_{N_x}^{-1}(x, f_x) F_{N_y}^{-1}(y, f_y) F_{N_z}^{-1}(z, f_z) J(f_x, f_y, f_z) \quad (4.37)$$

(Les bornes tronquées de la somme sur  $f_x$  correspondent au support fréquentiel de l'acquisition  $I_x$ .)

Les équations 4.36 et 4.37 donnent :

$$\begin{aligned} I_x(x, y, z) = & \sum_{f_x=-\frac{N'_x}{2}}^{\frac{N'_x}{2}-1} \sum_{f_y=-\frac{N_y}{2}}^{\frac{N_y}{2}-1} \sum_{f_z=-\frac{N_z}{2}}^{\frac{N_z}{2}-1} [F_{N_x}^{-1}(x, f_x) F_{N_y}^{-1}(y, f_y) F_{N_z}^{-1}(z, f_z) \\ & \sum_{x'=-\frac{N_x}{2}}^{\frac{N_x}{2}-1} \sum_{y'=-\frac{N_y}{2}}^{\frac{N_y}{2}-1} \sum_{z'=-\frac{N_z}{2}}^{\frac{N_z}{2}-1} F_{N_x}(f_x, x') F_{N_y}(f_y, y') F_{N_z}(f_z, z') I(x', y', z')] \end{aligned} \quad (4.38)$$

Un regroupement de termes approprié permet de montrer facilement que l'opérateur considéré est linéaire.

Or, d'après les propriétés des opérateurs de transformation de Fourier discrète directe et inverse, on a :

$$\sum_{f_y=-\frac{N_y}{2}}^{\frac{N_y}{2}-1} \sum_{y'=-\frac{N_y}{2}}^{\frac{N_y}{2}-1} F_{N_y}^{-1}(y, f_y) F_{N_y}(f_y, y') = 1 \quad (4.39)$$

et de même dans la direction  $z$ .

Donc, par regroupement approprié des termes de l'équation 4.38, on obtient :

$$I_x(x, y, z) = \sum_{f_x=-\frac{N'_x}{2}}^{\frac{N'_x}{2}-1} F_{N_x}^{-1}(x, f_x) \sum_{x=-\frac{N_x}{2}}^{\frac{N_x}{2}-1} F_{N_x}(f_x, x) I(x, y, z) \quad (4.40)$$

On constate que la relation liant  $I_x$  à  $I$  peut s'exprimer à  $y$  et  $z$  constants (et il en est bien sûr de même pour les autres directions) : on est donc en présence d'un opérateur séparable qui, de plus, n'opère que selon une direction (c'est-à-dire que les opérateurs selon les directions  $y$  et  $z$  sont des opérateurs identité).

Par conséquent, nous pouvons nous placer dans le cadre de l'algèbre linéaire et considérer une seule direction de l'image, par exemple la direction  $x$ . Nous recherchons donc l'opérateur matriciel  $D_x$  tel que :

$$I_x(\bullet, y_0, z_0) = D_x I_{HR}(\bullet, y_0, z_0) \quad (4.41)$$

où  $I_{HR}(\bullet, y_0, z_0)$  et  $I_x(\bullet, y_0, z_0)$  représentent la «colonne» selon la direction  $x$  extraite respectivement des images  $I_{HR}$  et  $I_x$  en faisant  $y = y_0$  et  $z = z_0$ .

Afin de simplifier les notations, nous utiliserons les notations suivantes :

$$I_{HR}(\bullet, y_0, z_0) = V_{HR} \quad (4.42)$$

$$I_x(\bullet, y_0, z_0) = V_x \quad (4.43)$$

La T.F.D. de  $V_{HR}$  s'exprime alors par :

$$TFD(V_{HR}) = F_{N_x} \cdot V_{HR} \quad (4.44)$$

Exprimons maintenant le vecteur  $V_x$  en fonction de  $V_{HR}$  :

$$TFD(V_x) = \frac{1}{N_x} M_x \cdot F_{N_x} \cdot V_{HR} \quad (4.45)$$

où  $M_x$  est une matrice diagonale de dimensions  $N_x \times N_x$ , qui réalise la troncature de la T.F.D. en cohérence avec la partie 4.1 (c'est-à-dire la "meilleure" troncature sous la contrainte que le vecteur obtenu par cet opérateur appliqué à un vecteur à valeurs réelles, reste réel) :

$$\begin{cases} (M_x)_{ii} = 1 & \text{si } -\frac{N'_x}{2} + 1 \leq i \leq \frac{N'_x}{2} - 1 \\ (M_x)_{ii} = 1/2 & \text{si } i = -\frac{N'_x}{2} \text{ ou } i = \frac{N'_x}{2} \\ (M_x)_{ii} = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.46)$$

avec  $i$  variant de  $-\frac{N_x}{2}$  à  $\frac{N_x}{2} - 1$ .  $V_x$  se déduit de l'équation précédente en utilisant l'opérateur de T.F.D. inverse :

$$V_x = F_{N_x}^{-1} \cdot M_x \cdot F_{N_x} \cdot V_{HR} \quad (4.47)$$

Ainsi l'opérateur de sous-échantillonnage s'exprime par :

$$D_x = F_{N_x}^{-1} \cdot M_x \cdot F_{N_x} \quad (4.48)$$

Détaillons maintenant l'expression de l'élément courant de la matrice  $D_x$  :

$$\begin{aligned} (M_x F_{N_x})_{m,n} &= \sum_{k=-\frac{N_x}{2}}^{\frac{N_x}{2}-1} (M_x)_{m,k} (F_{N_x})_{k,n} \\ &= \begin{cases} e^{-j2\pi \frac{mn}{N_x}} & \text{si } -\frac{N'_x}{2} + 1 \leq m \leq \frac{N'_x}{2} - 1 \\ \frac{1}{2} e^{-j2\pi \frac{mn}{N_x}} & \text{si } m = -\frac{N'_x}{2} \text{ ou } m = \frac{N'_x}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.49)$$

avec  $m, n$  variant de  $-\frac{N_x}{2}$  à  $\frac{N_x}{2} - 1$  ; d'où :

$$\begin{aligned}
(D_x)_{m,n} &= (F_{N_x}^{-1} M_x F_{N_x})_{m,n} \\
&= \sum_{k=-\frac{N_x}{2}}^{\frac{N_x}{2}-1} (F_{N_x}^{-1})_{m,k} (M_x F_{N_x})_{k,n} \\
&= \sum_{k=-\frac{N'_x}{2}+1}^{\frac{N'_x}{2}-1} e^{j2\pi \frac{k(m-n)}{N_x}} + \frac{1}{2} (e^{j2\pi \frac{(m-n)}{N_x} \frac{-N'_x}{2}} + e^{j2\pi \frac{(m-n)}{N_x} \frac{N'_x}{2}}) \\
&= \frac{\sin(\pi \frac{(m-n)N'_x}{N_x}) \cos(\pi \frac{m-n}{N_x})}{\sin(\pi \frac{m-n}{N_x})} \tag{4.50}
\end{aligned}$$

Cette expression permet de constater que la matrice  $D_x$  est une matrice circulante symétrique. Les opérateurs matriciels  $D_y$  et  $D_z$  peuvent être obtenus de manière similaire (seuls les nombres de points diffèrent).

### 4.2.3 Extension au cas général

On considère maintenant que les acquisitions sont sous-résolues selon deux directions, correspondant aux directions de codage par la phase. Notons  $I_{xy}$ ,  $I_{xz}$ , et  $I_{yz}$  ces images sous-résolues. On cherche donc à exprimer les opérateurs  $D_{xy}$ ,  $D_{xz}$ , et  $D_{yz}$  tels que :

$$\begin{aligned}
I_{xy} &= D_{xy}(I_{HR}) \\
I_{yz} &= D_{yz}(I_{HR}) \\
I_{xz} &= D_{xz}(I_{HR})
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Il vient immédiatement que l'on peut exprimer les opérateurs  $D_{xy}$ ,  $D_{xz}$  et  $D_{yz}$  sous forme de mise en série respectivement des opérateurs  $D_x$  et  $D_y$ ,  $D_x$  et  $D_z$ ,  $D_y$  et  $D_z$ , et ce dans le même formalisme d'algèbre linéaire que précédemment.

Cependant, il n'est plus possible de ne considérer qu'une «colonne» de l'image dans la direction d'intérêt, puisque les opérateurs s'appliquent maintenant dans deux directions. Il convient donc de travailler avec l'image entière, mise en vecteur conformément à l'annexe B, et avec les opérateurs  $\mathbf{D}_x$ ,  $\mathbf{D}_y$  et  $\mathbf{D}_z$  obtenus à partir de  $D_x$ ,  $D_y$ , et  $D_z$  conformément à l'annexe B également.

Dans ces conditions on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{xy} &= \mathbf{D}_x \mathbf{D}_y \mathbf{I}_{HR} \\ \mathbf{I}_{xz} &= \mathbf{D}_x \mathbf{D}_z \mathbf{I}_{HR} \\ \mathbf{I}_{yz} &= \mathbf{D}_y \mathbf{D}_z \mathbf{I}_{HR} \end{aligned} \tag{4.52}$$

où l'on peut intervertir les opérateurs en cascade, puisqu'ils opèrent selon des directions distinctes (propriété 7 de l'annexe B).

#### 4.2.4 Cas particulier de deux acquisitions

Dans le cas particulier de deux acquisitions, l'une des directions possède une résolution identique dans les deux volumes. Soit  $z$  cette direction. L'opérateur  $D_z$  est alors l'opérateur identité, et l'on peut alors considérer le problème en deux dimensions coupe par coupe. Notons  $I_{HR}(y, x)$  une coupe à  $z$  fixé du volume  $I_{HR}(x, y, z)$  ( $y$  et  $x$  représentent respectivement les indices de colonne et de ligne). Dans ces conditions, on peut généraliser la modélisation précédente (partie 4.2.2), qui considérait les dimensions de l'image séparément, à deux dimensions.

Les images sous-résolues  $I_x(y, x)$  et  $I_y(y, x)$  s'expriment alors en fonction de  $I_{HR}(y, x)$  de la façon suivante :

$$I_x(y, x) = I_{HR}(y, x) \cdot D_x^T \tag{4.53}$$

$$I_y(y, x) = D_y \cdot I_{HR}(y, x) \tag{4.54}$$

Ce cas particulier peut évidemment être traité comme le cas général, avec chaque coupe mise en vecteur ; l'expression proposée dans ce paragraphe permet cependant d'une part de travailler sur l'image sous forme de matrice, et d'autre part de travailler sur des opérateurs matriciels de dimensions plus faibles.

## Conclusion

*Dans ce chapitre, nous avons proposé une modélisation mathématique de la relation liant des volumes I.R.M. correspondant au même champ de vue, mais dont les résolutions spatiales diffèrent. Cette modélisation s'appuie de façon rigoureuse sur le principe physique de l'I.R.M. exposé au chapitre 2, à savoir que les données acquises en I.R.M. sont en fait la T.F.D. de l'image.*

*Cette modélisation va permettre d'intégrer efficacement la spécificité des données dans la combinaison des volumes anisotropes complémentaires présentés au chapitre 3; c'est l'objet du chapitre 5.*





---

## CHAPITRE 5

# Reconstruction d'un unique volume de haute résolution

### Introduction

*L'objectif du traitement est de fournir des données directement exploitables pour le diagnostic des pathologies vasculaires. A partir des deux ou trois acquisitions anisotropes constituant le jeu de données initial, nous souhaitons donc reconstruire un unique volume de «meilleure résolution possible». En effet, la qualité du diagnostic dépend fortement de la précision et de la fiabilité de la quantification des dimensions du vaisseau, qui elle-même dépend fortement de la résolution spatiale de l'image et de la qualité des contours de l'image. Par «meilleure résolution possible», nous entendons que la résolution finale dans chaque direction doit correspondre à la meilleure des résolutions dans cette direction sur l'ensemble des volumes constituant le jeu de données initial. Cela revient à dire, de façon duale, que le support du k-space du volume final doit correspondre au plus petit cube englobant la réunion des supports des k-space de chacun des volumes du jeu de données initial.*

*D'autre part, fixer la résolution finale revient à fixer les dimensions de l'image recherchée. Pour des raisons pratiques, comme nous l'avons fait au chapitre précédent pour la modélisation, nous devons travailler sur des données comparables : les volumes acquis sont donc interpolés afin d'avoir tous la même dimension que le volume recherché. Or, nous avons montré (§ 4.1.3) que l'interpolation par zero-padding, bien qu'elle ne modifie en rien le contenu fréquentiel des données, induisait des oscillations au voisinage des variations rapides de niveau de gris.*

*Enfin, comme exposé précédemment (§ 3.2.1), s'il y a gain de temps, alors le nombre de données disponibles est strictement inférieur au nombre de données à re-*

*construire : le problème est donc mal posé.*

*C'est pour ces trois raisons que nous nous intéressons plus particulièrement aux techniques de reconstruction régularisées, et permettant de préserver les contours de l'image. Nous dressons tout d'abord un état de l'art de la restauration d'images avec préservation des discontinuités (§ 5.1), puis nous détaillons le critère choisi pour notre application (§ 5.3) ainsi que la méthode permettant de l'optimiser (§ 5.4), qui nécessite également le calcul du gradient du critère (§ 5.5). Ces travaux ont fait l'objet des communications [ROUL-00a, ROUL-00b, ROUL-00c]. Enfin, nous tentons de caractériser théoriquement certaines solutions particulières obtenues par cette méthode (§ 5.7).*

## 5.1 Restauration d'images avec préservation des discontinuités : état de l'art

### 5.1.1 Restauration et reconstruction d'images : définitions

Le problème de reconstruction ou de restauration d'images consiste à estimer une image  $x$  à partir d'un ensemble d'observations dégradées et bruitées  $y$  [DEMO-89], le processus de dégradation  $\mathcal{D}$  étant connu (on note  $b$  le bruit, et l'opérateur  $\bullet$  représente une action locale) :

$$y = \mathcal{D}\{x\} \bullet b \quad (5.1)$$

Il fait partie de la famille dite des «problèmes inverses».

L'image  $y$  constitue ce qu'on appelle les «observations» ou les «données», c'est-à-dire l'information disponible. Lorsque cette observation est de même géométrie que l'image recherchée  $x$ , on parle de «restauration»; si l'on dispose d'observations de géométries différentes, on parle alors de «reconstruction».

Par exemple, en restauration on a souvent affaire à des systèmes d'imagerie qui induisent un filtrage passe-bas par convolution de l'image avec un noyau stationnaire d'une part, et un bruit additif d'autre part. Dans ces conditions on peut exprimer le problème discret matriciellement de la façon suivante :

$$y = \mathcal{D}x + b \quad (5.2)$$

Un exemple typique de reconstruction est celui où l'observation est constituée d'un ensemble de projections de l'image selon  $n$  directions réparties dans le plan de l'image.

C'est le cas de la reconstruction tomographique en imagerie médicale, ou de la reconstruction 3D à partir de vues 2D.

On parle de «*restauration d'images multi-canaux*» lorsque l'observation est constituée d'un ensemble de  $n$  images de même géométrie que celle de l'image cherchée, c'est-à-dire de  $n$  mesures de la même scène [GALA-89].

Ces  $n$  images peuvent être soit une séquence temporelle d'images, soit des images provenant de plusieurs capteurs, ou de plusieurs bandes de fréquence, soit des images en couleurs (on a alors trois canaux correspondant au rouge, au vert, et au bleu), etc. Dans ces cas, l'objectif est de restaurer les images correspondant à chacun des canaux, en tenant compte des interactions entre les différents canaux.

On peut aussi disposer de plusieurs images floues [HARI-97, GIAN-96] et/ou sous-résolues [ELAD-97, WIRA-99] de la même scène, l'objectif étant alors de trouver une seule image nette et/ou de haute résolution.

Remarque: dans certains cas, le défaut  $\mathcal{D}$  n'est pas connu, et on cherche alors à estimer à la fois l'image  $x$  et le défaut  $\mathcal{D}$ : on parle alors de restauration «aveugle» ou «autodidacte». Nous nous limiterons à l'étude des cas où le processus de dégradation est connu.

### 5.1.2 Caractéristiques des problèmes inverses

[ANDR-77, DEMO-89, LAGE-90, LAGE-91, BERT-98]

Un problème inverse est dit «*mal posé*» au sens de Hadamard [HADA-02] dès que l'une des trois conditions ci-dessous n'est pas satisfaite :

- La solution du problème est unique.
- La solution existe pour toute donnée.
- La solution dépend continûment des données.

Dans le cas discret, que l'on peut exprimer avec une écriture matricielle, on s'intéresse à la «*singularité*» et au «*conditionnement*» du problème :

- un problème est dit *singulier* s'il n'y a pas existence et unicité de la solution,
- un problème est dit *mal conditionné* si sa solution exacte est physiquement inacceptable, c'est-à-dire qu'un faible bruit sur les données est propagé et amplifié sur la solution. Un problème peut d'ailleurs être régulier tout en étant mal conditionné.

En pratique, quasiment tous les problèmes inverses discrets sont dans le meilleur des cas, mal conditionnés, dans le pire des cas, singuliers.

## 5.1.3 Méthodes de résolution des problèmes inverses

### 5.1.3.1 Approches linéaires

Nous considérons ici le problème non bruité dans son écriture matricielle :

$$y = \mathcal{D}x \quad (5.3)$$

Dans le cas où la solution est unique, alors la solution exacte est :

$$\hat{x} = \mathcal{D}^{-1}y \quad (5.4)$$

Si la solution n'est pas unique, on introduit la notion de solution généralisée : c'est la solution de norme minimale parmi l'ensemble des solutions des moindres carrés :

$$\hat{x} = \operatorname{argmin}[\|\mathcal{D}x - y\|^2] \quad (5.5)$$

Le filtre inverse résultant est appelé *inverse généralisé* : il n'est plus  $\mathcal{D}^{-1}$  mais devient :

$$\hat{x} = (\mathcal{D}^T \mathcal{D})^{-1} \mathcal{D}^T y \quad (5.6)$$

Si le problème est mal conditionné, les solutions 5.4 et 5.6 sont généralement inacceptables. Pour pallier le mauvais conditionnement des problèmes inverses discrets, on introduit la notion de solution approchée et l'utilisation d'information *a priori* : on définit un ensemble de solutions acceptables, telles que :

$$\|\mathcal{D}x - y\|^2 < \epsilon^2 \quad (5.7)$$

et on choisit parmi cet ensemble la solution satisfaisant une contrainte ou minimisant un critère, défini grâce à des *a priori* sur l'image cherchée.

On parle alors de «*régularisation*».

On distingue deux types d'approches, qui mènent à des solutions similaires :

- **Les approches stochastiques** se fondent sur un modèle de l'image et plus précisément du bruit. L'approche bayésienne du MAP consiste à maximiser la densité de probabilité *a posteriori* ; sous l'hypothèse que le bruit et l'image sont gaussiens centrés, la solution s'écrit alors :

$$x = [\mathcal{D}^T \mathcal{D} + R_{ww} R_{ff}^{-1}]^{-1} \mathcal{D}^T y \quad (5.8)$$

où  $R_{ww}$  et  $R_{ff}$  sont les matrices de corrélation respectivement du bruit et de l'image. L'approche bayésienne du maximum de vraisemblance (ML) consiste à maximiser la vraisemblance ; la solution n'est alors autre que le filtre inverse de l'équation 5.6. Le filtre de Wiener consiste à minimiser la variance de l'erreur entre l'image originale et l'image solution, la solution est identique à celle du MAP (équation 5.8).

- **Les approches déterministes**, regroupées sous le nom de régularisation de Tikhonov-Miller par Lagendijk par exemple [LAGE-91], consistent à introduire une fonction stabilisante ou fonction de régularisation  $\Omega(x)$  du type :

$$\Omega(x) = \|Cx\| \quad (5.9)$$

et à minimiser 5.9 sous la contrainte 5.7, ce qui se ramène, en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, à minimiser la fonction :

$$J(x) = \|\mathcal{D}x - y\|^2 + \lambda \|Cx\|^2 \quad (5.10)$$

La solution s'écrit alors :

$$x = [\mathcal{D}^T \mathcal{D} + \lambda C^T C]^{-1} \mathcal{D}^T y \quad (5.11)$$

qui a finalement la même forme que l'estimateur du MAP ou le filtre de Wiener. Dans le cas particulier où  $C = Id$ , cette solution revient à «charger la diagonale» de la matrice de filtrage inverse par  $\lambda$ , et donc à atténuer l'effet d'amplification du bruit, puisqu'on supprime ainsi les petites valeurs propres, responsables du mauvais conditionnement du système.

### 5.1.3.2 Approches itératives

Les approches itératives permettent d'une part d'éviter l'inversion de grosses matrices, et d'autre part d'introduire d'autres contraintes ou d'autres fonctions stabilisantes qui ne soient pas linéaires [LAGE-91]. Comme précédemment, pour pallier le caractère mal-posé du problème de restauration, on cherche un ensemble de solutions «satisfaisant presque» le problème direct  $y = \mathcal{D}x$  (par exemple, telles que  $\|y - \mathcal{D}x\|^2 \leq \epsilon^2$ ,  $\epsilon$  petit), et on choisit parmi cet ensemble de solutions celle qui minimise un certain critère dit «de régularité» [DEMO-89].

En pratique, cela revient :

- soit à minimiser un critère de la forme  $J = J_d + J_r$  où  $J_d$  est un terme de fidélité aux données (par exemple  $J_d = \|y - \mathcal{D}x\|^2$ ) et  $J_r$  est un terme de régularisation,

- soit à minimiser un critère  $J_r$  semblable au précédent sous la contrainte  $\|y - \mathcal{D}x\|^2 \leq \epsilon^2$ ,  $\epsilon$  petit.

L'optimisation sous contrainte est plus performante dans la mesure où elle permet un meilleur contrôle de l'écart aux données ; en contrepartie, elle implique en général l'utilisation de techniques plus lourdes à la fois du point de vue algorithmique et du point de vue du temps de calcul.

Dans le paragraphe suivant, nous nous intéressons aux critères de régularisation permettant d'assurer la préservation des discontinuités.

### 5.1.4 Préservation des discontinuités

Nous avons vu dans la partie 5.1.3 que la résolution correcte des problèmes de restauration passe par une régularisation. Il convient de choisir le critère de régularisation en fonction de l'utilisation ultérieure des images restaurées ; dans notre cas, il importe que les contours de l'image soient préservés dans un souci ultérieur de segmentation.

Dans cette partie nous dressons un état de l'art des différentes fonctions utilisées pour le terme  $J_r$  introduit dans la partie 5.1.3, dans le cadre particulier de la restauration avec prise en compte des discontinuités. Il s'agit d'appliquer un lissage à l'image tout en préservant des contours francs.

Le terme  $J_r$  s'exprime de façon générale sous la forme :

$$J_r = \sum_{pixels} \psi(\Delta_i\{x\}) + \psi(\Delta_j\{x\}) \quad (5.12)$$

où  $\Delta_i$  et  $\Delta_j$  représentent des opérateurs de différence entre voisins selon chacune des directions de l'image  $x$  (dans le cas 3D on a un troisième terme similaire), et  $\psi$  est une fonction de potentiel encore appelée  $\varphi$ -fonction.

Le choix de la fonction de potentiel  $\psi$  est un problème délicat, qui a déjà été abordé par de nombreux auteurs [BLAK-87, GEMA-92, GEMA-95, BOUM-93, CHAR-94a, CHAR-97, KUNS-94, NIKO-99, TEBO-98, TEBO-99].

Tikhonov [TIKH-63] avait introduit une fonction de régularisation quadratique de la forme :

$$\psi(x) = \|\Delta x\|^2 \quad (5.13)$$

où  $\Delta$  est un opérateur de différences entre voisins. Cette fonction permet de lisser le bruit présent dans l'observation, cependant elle lisse indifféremment les zones homogènes et les zones de contour.

Afin d'interrompre le filtrage passe-bas localement aux emplacements des discontinuités, Geman et Geman [GEMA-84] proposent d'introduire une variable appelée

«*processus de ligne*» qui est nulle aux discontinuités et unitaire dans les zones homogènes [GEMA-84, BLAK-87, CHAR-94a].

Blake et Zisserman [BLAK-87] introduisent le processus de ligne de façon implicite dans la fonction  $\psi$ , et montrent que cela revient finalement à conserver la fonction de Tikhonov au voisinage de l'origine, et à la tronquer pour de grandes valeurs des différences entre voisins (zones de contours). Geman et McClure [GEMA-87] d'une part, Hebert et Leahy [HEBE-89] d'autre part, proposent des fonctions de comportement analogue avec des propriétés plus régulières néanmoins. Ces fonctions possèdent l'inconvénient de n'être pas convexes, ce qui complique la recherche de l'optimum. Cette constatation a poussé plusieurs auteurs à s'intéresser à d'autres types de fonctions [LANG-90, KUNS-94, CHAR-94a].

Künsch [KUNS-94] distingue trois classes de fonctions (toutes étant paires, à valeurs positives, et croissantes sur  $[0, +\infty]$ ) :

- les fonctions convexes, non bornées, à dérivées non bornées (comme la fonction quadratique [TIKH-63]),
- les fonctions non convexes, bornées (comme la fonction quadratique tronquée [BLAK-87]),
- les fonctions convexes, non bornées, à dérivées bornées,

et montre que cette dernière classe de fonctions est bien adaptée à la préservation des discontinuités (bien que leur comportement non plat à l'infini ne leur permette pas de rivaliser avec les fonctions de la deuxième classe). Les fonctions de Huber [HUBE-81], de Green [GREE-90], ou des «surfaces minimales» [CHAR-94a] par exemple appartiennent à cette dernière classe et ont été utilisées comme fonction de régularisation.

Lange [LANG-90] propose d'autres conditions un peu plus strictes que les suscitées, que l'on trouvera commentées dans [CHAR-94a].

Charbonnier [CHAR-94a] propose, quant à lui, des conditions déduites de l'étude des équations normales (c'est-à-dire assurant la nullité des dérivées partielles du critère par rapport à l'image) associées au critère du MAP.

Ces conditions sur la fonction  $\psi$  permettant d'assurer la préservation des discontinuités sont différentes puisque motivées par des applications différentes : l'étude de Künsch est plutôt heuristique, alors que les conditions de Lange visent à assurer la convergence d'un algorithme précis, et que les conditions de Charbonnier s'appliquent plus particulièrement à la régularisation semi-quadratique.

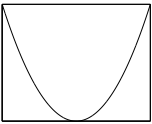
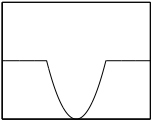
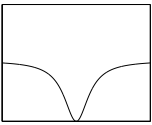
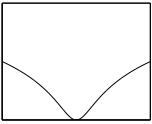
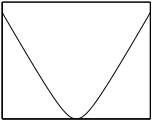
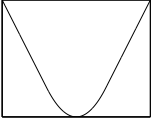
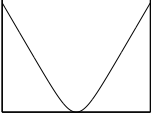
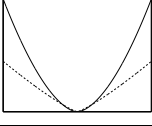
Enfin, Nikolova [NIKO-99] établit une corrélation entre l'image reconstruite et le comportement à l'origine de la fonction de régularisation : une fonction de régularisa-



tion non dérivable en zéro (par exemple la fonction  $\phi(x) = |x|$ ) permet de reconstruire une image constante par morceaux, alors qu'une fonction de régularisation dérivable en zéro fournit une image ne contenant pas de zones strictement homogènes.

Nous regroupons dans le tableau 5.1.4 les principales fonctions évoquées précédemment et leurs caractéristiques principales.

5.1 Restauration d'images avec préservation des discontinuités

Fonction	Allure	Convexité	Préservation des discontinuités
Tikhonov $\phi(x) = x^2$		oui	-
Blake & Zisserman $\phi(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si }  x  \leq \alpha \\ \alpha^2 & \text{sinon} \end{cases}$		non	+
Geman & McClure $\phi(x) = \frac{t^2}{1+t^2}$		non	+
Hebert & Leahy $\phi(x) = \log(1 + t^2)$		non	+
«Surfaces minimales» $\phi(x) = \sqrt{1 + x^2} - 1$		oui	~
Huber $\phi(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si }  x  \leq \alpha \\  2\alpha x  - \alpha^2 & \text{sinon} \end{cases}$		oui	~
Green $\phi(x) = \log(\cosh(t))$		oui	~
Bouman & Sauer $\phi(x) = t^\alpha, 1 < \alpha < 2$		oui	~

## 5.2 Choix de la méthode

Après un exposé assez général sur les caractéristiques des problèmes inverses en restauration et reconstruction d'image, et les différentes méthodes de résolution, en accordant une place particulière aux méthodes permettant la préservation des discontinuités, nous rassemblons dans ce paragraphe les diverses contraintes auxquelles est soumis le choix d'une méthode de reconstruction dans notre problème particulier.

Nous avons évoqué plus haut le fait que le nombre de données disponibles est inférieur au nombre de données à reconstruire, ce qui fait de ce problème inverse un problème mal posé.

Nous avons également abordé le problème des oscillations induites par l'interpolation par *zero-padding*, et la nécessité qui en découle de régulariser la solution.

Par ailleurs, la reconstruction vise à l'amélioration de la résolution spatiale, et doit permettre aux experts médicaux d'améliorer leur diagnostic. Or celui-ci est d'autant meilleur que les contours des vaisseaux sont francs et précis, c'est pourquoi il semble nécessaire que la régularisation permettent la préservation des contours de l'image. L'approche courante de régularisation avec préservation des discontinuités consiste à chercher le minimum d'une fonction d'énergie dont les caractéristiques ont été développées au paragraphe 5.1.4. Les fonctions de régularisation qui interviennent dans la fonction d'énergie et permettent de préserver les discontinuités, tout en assurant la convexité de la fonction d'énergie, sont non-linéaires et imposent donc l'utilisation de méthodes itératives pour la minimisation de la fonction d'énergie. Nous exposons au paragraphe 5.4 les raisons qui nous ont poussés à adopter l'algorithme itératif de minimisation du gradient conjugué.

## 5.3 La fonction d'énergie

Afin de pouvoir utiliser des fonctions de régularisation non linéaires, nous adoptons une approche itérative telle que présentée au § 5.1.3, à savoir la minimisation sans contrainte d'une fonction d'énergie de la forme :

$$E = Q + \lambda \Psi \tag{5.14}$$

où  $\lambda$  est un paramètre permettant de doser l'importance du terme de régularisation  $\Psi$  par rapport au terme de fidélité aux données  $Q$ . En effet, le paramètre  $\lambda$  est supposé permettre un contrôle suffisant de l'attache aux données, et l'approche de minimisation sans contrainte possède l'avantage de permettre l'utilisation d'algorithmes simples de mise en œuvre pour l'optimisation. Chacun de ces deux termes est détaillé ci-dessous.

### 5.3.1 Terme de fidélité aux données

Il s'agit de minimiser l'écart, exprimé ici comme l'erreur quadratique, entre l'image reconstruite et les données ; le terme de fidélité aux données est constitué de la somme des erreurs quadratiques de l'image reconstruite par rapport à chacune des acquisitions originales, avec la même pondération :

$$\begin{aligned}
Q &= \sum_j \sum_k \| D_y I_{rec}(\bullet, j, k) - I_y(\bullet, j, k) \|^2 \\
&+ \sum_i \sum_k \| D_x I_{rec}(i, \bullet, k) - I_x(i, \bullet, k) \|^2 \\
&+ \sum_i \sum_j \| D_z I_{rec}(i, j, \bullet) - I_z(i, j, \bullet) \|^2
\end{aligned} \tag{5.15}$$

où  $D_x$ ,  $D_y$  et  $D_z$  sont les opérateurs de perte de résolution dans le plan de Fourier présentés en 4.2, opérant sur une «colonne» du volume 3D dans la direction considérée (par exemple,  $I_x(\bullet, j, k)$  représente la «colonne» obtenue en faisant  $x = j$  et  $z = k$ ),  $\| \cdot \|$  représente la norme  $\mathcal{L}2$  (et donc  $\| \cdot \|^2$ , le carré de la norme  $\mathcal{L}2$ ),  $I_{rec}$  est le volume à reconstruire et  $I_x$ ,  $I_y$  et  $I_z$  sont les volumes acquis à basse résolution. L'ordre  $y, x, z$  des directions pour les opérateurs matriciels est choisi conformément aux conventions de l'annexe B.

En exprimant les opérateurs  $\mathbf{D}_x$ ,  $\mathbf{D}_y$  et  $\mathbf{D}_z$  opérant sur le volume complet transformé en vecteur colonne  $\mathbf{I}_{rec}$ , conformément à l'annexe B, on peut réécrire  $Q$  de la façon suivante :

$$Q = \| \mathbf{D}_y \mathbf{I}_{rec} - \mathbf{I}_y \|^2 + \| \mathbf{D}_x \mathbf{I}_{rec} - \mathbf{I}_x \|^2 + \| \mathbf{D}_z \mathbf{I}_{rec} - \mathbf{I}_z \|^2 \tag{5.16}$$

### 5.3.2 Terme de régularisation

Conformément à la partie 5.1.4, le terme de régularisation  $\Psi$  est défini par l'application d'une  $\varphi$ -fonction  $\psi$  (à valeurs positives, et détaillée plus loin) aux différences entre voisins, choisies ici à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}
\Psi &= \sum_i \sum_j \sum_k \psi(I_{rec}(i, j, k) - I_{rec}(i - 1, j, k)) \\
&+ \sum_i \sum_j \sum_k \psi(I_{rec}(i, j, k) - I_{rec}(i, j - 1, k)) \\
&+ \sum_i \sum_j \sum_k \psi(I_{rec}(i, j, k) - I_{rec}(i, j, k - 1))
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Soit  $\Delta_N$  l'opérateur matriciel de dimension  $N \times N$  de différences entre voisins d'ordre 1 opérant sur une «colonne» de taille  $N$  de la matrice  $I_{rec}$  dans la direction considérée :

$$\Delta_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 1 & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

Cet opérateur implique des conditions aux bords périodiques, c'est-à-dire que l'on suppose que le signal est périodique et que l'on travaille sur une période de ce signal. Ce choix trouve sa justification dans le fait que les données disponibles dans le domaine spatial sont obtenues par T.F.D. à partir du domaine spectral (le  $k$ -space), et que la T.F.D. réalise l'hypothèse implicite de périodicité à la fois du signal et de sa T.F.D. Comme, en général, les bords des images contiennent uniquement du bruit de fond, cette hypothèse de périodicité aux bords paraît acceptable d'un point de vue pratique.

En prenant la convention que  $\psi(X)$  (où  $X$  est une matrice) agit point à point sur  $X$ , on peut réécrire  $\Psi$  ainsi :

$$\begin{aligned} \Psi &= \sum_j \sum_k \|\psi(\Delta_{N_y} I_{rec}(\bullet, j, k))\|_1 \\ &+ \sum_i \sum_k \|\psi(\Delta_{N_x} I_{rec}(i, \bullet, k))\|_1 \\ &+ \sum_j \sum_k \|\psi(\Delta_{N_z} I_{rec}(i, j, \bullet))\|_1 \end{aligned} \quad (5.19)$$

où  $\|\cdot\|_1$  représente la norme  $\mathcal{L}1$ . En exprimant les opérateurs  $\Delta_x$ ,  $\Delta_y$  et  $\Delta_z$  opérant sur le volume complet transformé en vecteur colonne  $\mathbf{I}_{rec}$ , conformément à l'annexe B, à partir des opérateurs  $\Delta_{N_x}$ ,  $\Delta_{N_y}$  et  $\Delta_{N_z}$ , on peut réécrire  $Q$  de la façon suivante :

$$\Psi = \|\psi(\Delta_y \mathbf{I}_{rec})\|_1 + \|\psi(\Delta_x \mathbf{I}_{rec})\|_1 + \|\psi(\Delta_z \mathbf{I}_{rec})\|_1 \quad (5.20)$$

Nous avons vu au § 5.1.4 comment choisir une fonction de potentiel assurant la préservation des discontinuités. Nous proposons dans un premier temps la fonction de Huber [BLAC-96], qui permet d'assurer la convexité du critère (voir partie 5.3.3) tout en préservant de façon correcte les discontinuités grâce à un comportement asymptotiquement linéaire à l'infini. Appliquée aux différences entre voisins d'ordre 1, elle permet d'homogénéiser les zones où les différences locales sont faibles, tout en préservant les discontinuités représentées par de fortes différences entre pixels voisins.

La fonction de Huber (figure 5.1) s'exprime de la façon suivante [BLAC-96] :

$$\begin{cases} \psi(x) = x^2 & \text{si } |x| \leq \alpha \\ \psi(x) = 2 \cdot \alpha \cdot |x| - \alpha^2 & \text{si } |x| > \alpha \end{cases} \quad (5.21)$$

et sa dérivée :

$$\begin{cases} \psi'(x) = 2 \cdot x & \text{si } |x| \leq \alpha \\ \psi'(x) = 2 \cdot \alpha \cdot \text{sign}(x) & \text{si } |x| > \alpha \end{cases} \quad (5.22)$$

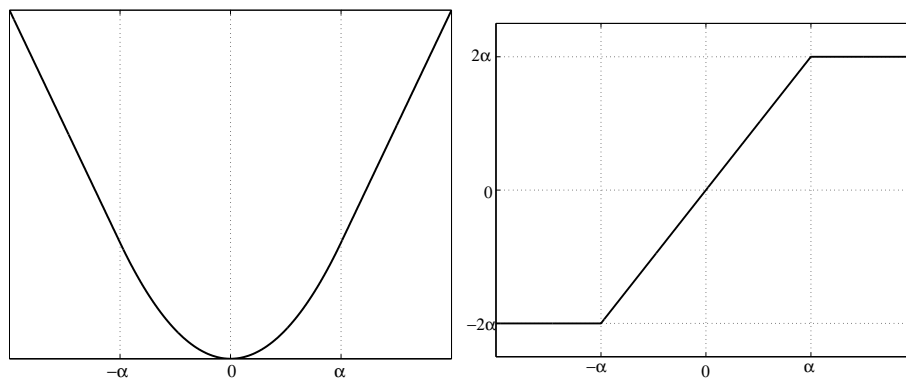


FIG. 5.1 – La fonction de potentiel de Huber (à gauche) et sa dérivée (à droite).

Le paramètre  $\alpha$  est un paramètre de réglage de la fonction : plus  $\alpha$  est faible, plus on se rapproche de la fonction en forme de «V» et donc plus les fronts de l'image sont respectés ; inversement, plus  $\alpha$  est grand, plus on se rapproche de la fonction quadratique pure, caractérisée par des fronts beaucoup plus doux [NIKO-99].

Cependant cette fonction ne satisfait pas les conditions de Charbonnier (§ 5.1.4), et nous serons amenés à utiliser (en particulier au chapitre 6) une fonction de comportement similaire, mais plus régulière en particulier autour de  $\alpha$  : la fonction des surfaces minimales (figure 5.2), qui possède de plus l'avantage d'être strictement convexe. Celle-ci s'exprime de la façon suivante :

$$\psi(x) = 2 \alpha \left( \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2} - 1 \right) \quad (5.23)$$

et sa dérivée :

$$\psi'(x) = \frac{2 x}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}} \quad (5.24)$$

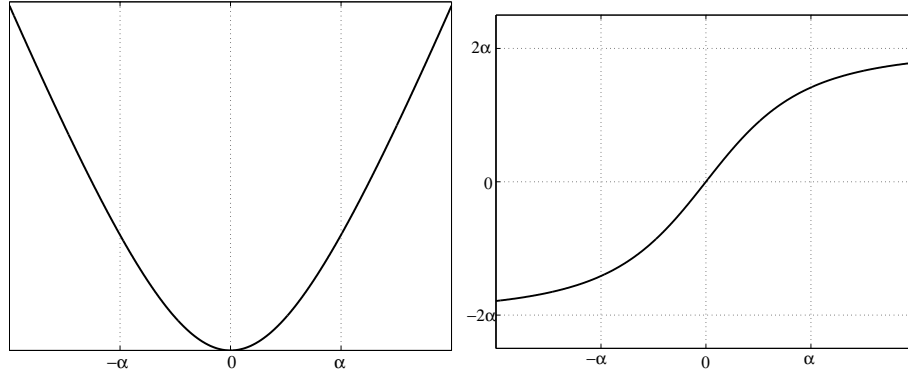


FIG. 5.2 – La fonction de potentiel des surfaces minimales (à gauche) et sa dérivée (à droite).

### 5.3.3 Etude de la convexité

Le problème de convergence se pose dès lors que la fonction d'énergie n'est pas strictement convexe. En effet, dans le cas où la fonction d'énergie n'est pas convexe, alors l'algorithme peut fournir une solution qui ne minimise la fonction d'énergie que localement. C'est pourquoi l'étude de la convexité de la fonction de potentiel est capitale.

Soient :

$$\begin{aligned}
 Q_x &= \| \mathbf{D}_x \mathbf{I}_{rec} - \mathbf{I}_x \|^2 \\
 Q_y &= \| \mathbf{D}_y \mathbf{I}_{rec} - \mathbf{I}_y \|^2 \\
 Q_z &= \| \mathbf{D}_z \mathbf{I}_{rec} - \mathbf{I}_z \|^2
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

L'élément courant  $i$  du vecteur  $\mathbf{D}_x \mathbf{I}_{rec} - \mathbf{I}_x$  peut s'écrire sous la forme affine :

$$a_i(\mathbf{I}_{rec}) = \sum_{k=1}^{N_x N_y N_z} \mathbf{D}_x(i, k) \mathbf{I}_{rec}(k) - \mathbf{I}_x(i) \tag{5.26}$$

et donc (de par la définition de la norme  $\mathcal{L}2$ ) :

$$Q_x = \sum_{i=1}^{N_x N_y N_z} (a_i(\mathbf{I}_{rec}))^2 \tag{5.27}$$

soit, en posant  $u_i(x) = x^2$  :

$$Q_x = \sum_{i=1}^{N_x N_y N_z} u_i \circ a_i(\mathbf{I}_{rec}) \tag{5.28}$$

où les  $u_i$  sont des fonctions convexes et les  $a_i$  des fonctions affines.

Le même raisonnement conduit à une expression similaire pour  $Q_y$  et  $Q_z$ .

Soient maintenant :

$$\begin{aligned}\Psi_x &= \sum_{i=1}^{N_x N_y N_z} \psi((\Delta_x \mathbf{I}_{rec})_i) \\ \Psi_y &= \sum_{i=1}^{N_x N_y N_z} \psi((\Delta_y \mathbf{I}_{rec})_i) \\ \Psi_z &= \sum_{i=1}^{N_x N_y N_z} \psi((\Delta_z \mathbf{I}_{rec})_i)\end{aligned}\quad (5.29)$$

De la même façon que ci-dessus, l'élément courant  $i$  de  $\Delta_x \mathbf{I}_{rec}$  peut s'écrire sous la forme linéaire :

$$b_i(\mathbf{I}_{rec}) = \sum_{k=1}^{N_x N_y N_z} \Delta_x(i, k) \mathbf{I}_{rec}(k) \quad (5.30)$$

donc :

$$\Psi_x = \sum_{i=1}^{N_x N_y N_z} \psi(b_i(\mathbf{I}_{rec})) \quad (5.31)$$

d'où :

$$\Psi_x = \sum_{i=1}^{N_x N_y N_z} \psi \circ b_i(\mathbf{I}_{rec}) \quad (5.32)$$

où  $\psi$  est une fonction convexe puisque sa dérivée est croissante et les  $b_i$  sont des fonctions linéaires (donc affines).

$\Psi_y$  et  $\Psi_z$  peuvent également s'exprimer de façon similaire.

Finalement  $E$  peut s'écrire sous la forme d'une somme de compositions de fonctions convexes  $v_k$  par des fonctions affines  $f_k$  :

$$E = \sum_k v_k \circ f_k(\mathbf{I}_{rec}) \quad (5.33)$$

Démontrons que la composée d'une fonction convexe  $v_k$  par une fonction affine  $f_k$  est forcément convexe.

Soient  $X, Y$  deux variables, et  $\beta \in [0, 1]$ .

Comme  $f_k$  est affine, on a :

$$f_k(\beta X + (1 - \beta)Y) = \beta f_k(X) + (1 - \beta)f_k(Y) \quad (5.34)$$

donc :

$$(v_k \circ f_k)(\beta X + (1 - \beta)Y) = v_k(\beta f_k(X) + (1 - \beta)f_k(Y)) \quad (5.35)$$



Comme  $v_k$  est convexe on a :

$$(v_k \circ f_k)(\beta X + (1 - \beta)Y) \leq \beta(v_k \circ f_k)(X) + (1 - \beta)(v_k \circ f_k)(Y) \quad (5.36)$$

■

Une somme de fonctions convexes étant également convexe, la fonction d'énergie  $J$  est convexe.

Cependant cette étude ne nous permet pas de statuer sur la stricte convexité de la fonction d'énergie, et ce, même si la fonction de régularisation est strictement convexe.

Nous proposons donc d'étudier la matrice hessienne de la fonction d'énergie, qui contient les dérivées secondes partielles par rapport aux intensités de tous les voxels de l'image à reconstruire. Si cette matrice est définie positive, alors la fonction d'énergie est strictement convexe, et réciproquement.

Nous étudions tout d'abord la matrice hessienne du terme  $\mathbf{Q}_x$ . Après une première dérivation on obtient :

$$\nabla \mathbf{Q}_x = 2 \mathbf{D}_x^T (\mathbf{D}_x \mathbf{I}_{rec} - \mathbf{I}_x) \quad (5.37)$$

et après une seconde dérivation :

$$\nabla^2 \mathbf{Q}_x = 2 \mathbf{D}_x^T \mathbf{D}_x \quad (5.38)$$

soit pour le terme d'attache aux données :

$$\nabla^2 \mathbf{Q} = 2 (\mathbf{D}_x^T \mathbf{D}_x + \mathbf{D}_y^T \mathbf{D}_y + \mathbf{D}_z^T \mathbf{D}_z) \quad (5.39)$$

Il découle immédiatement de l'expression de  $\mathbf{D}_x$ ,  $\mathbf{D}_y$  et  $\mathbf{D}_z$  que cette matrice est diagonalisable par passage dans le domaine de Fourier, et que la matrice diagonale correspondante est  $2 (\mathbf{M}_x^T \mathbf{M}_x + \mathbf{M}_y^T \mathbf{M}_y + \mathbf{M}_z^T \mathbf{M}_z)$ . Les valeurs propres de celle-ci sont toutes non négatives, donc la matrice hessienne du terme d'attache aux données est définie non négative.

Pour le terme  $\Psi_x$ , une première dérivation donne :

$$\frac{\partial \Psi_x}{\partial I_{rec}(m, n, p)} = \psi'(I_{rec}(m, n, p) - I_{rec}(m, n - 1, p)) - \psi'(I_{rec}(m, n + 1, p) - I_{rec}(m, n, p)) \quad (5.40)$$

et une seconde :

$$\frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial I_{rec}(m,n,p) \partial I_{rec}(m,n',p)} = \begin{cases} \psi''(I_{rec}(m,n,p) - I_{rec}(m,n-1,p)) + \\ + \psi''(I_{rec}(m,n+1,p) - I_{rec}(m,n,p)) & \text{si } n = n' \\ -\psi''(I_{rec}(m,n,p) - I_{rec}(m,n-1,p)) & \text{si } n = n' + 1 \\ -\psi''(I_{rec}(m,n+1,p) - I_{rec}(m,n,p)) & \text{si } n = n' - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.41)$$

Matriciellement, cette expression s'écrit :

$$\nabla^2 \Psi_x = \Delta_x^T \text{diag}[\Psi''(\Delta_x \mathbf{I}_{rec})] \Delta_x \quad (5.42)$$

Il s'agit d'une matrice réelle, symétrique, définie non négative. On obtient pour les termes  $\nabla^2 \Psi_y$  et  $\nabla^2 \Psi_z$  des expressions et des conclusions similaires. Une étude des matrices de cette forme montre rapidement que celles-ci sont dégénérées, et possèdent donc des valeurs propres nulles, et ce indifféremment pour des fonctions de régularisation convexes au sens large ou au sens strict.

Finalement, chacune des deux matrices  $\nabla^2 \mathbf{Q}$  et  $\nabla^2 \Psi$  est définie non négative, ce qui permet de conclure sur la convexité mais pas sur la stricte convexité. Dans le cas particulier où  $\lambda = 0$  (absence de régularisation), seul le terme  $\nabla^2 \mathbf{Q}$  intervient, donc  $\nabla^2 \mathbf{E}$  possède de façon certaine des valeurs propres nulles : dans ce cas la fonction d'énergie n'est pas strictement convexe. Dans le cas particulier où  $\text{diag}[\Psi''(\Delta_x \mathbf{I}_{rec})]$  est égale à la matrice identité (régularisation quadratique de Tikhonov), on peut montrer que la position des valeurs propres du terme  $\nabla^2 \mathbf{Q}$  ne coïncide jamais avec celle des valeurs propres de  $\nabla^2 \Psi$ , et donc que la fonction d'énergie est strictement convexe (cf. § 5.7.2.1). Dans le cas général, les valeurs prises par  $\Psi''(\Delta_x \mathbf{I}_{rec})$  dépendent de la solution courante, il n'est donc pas possible de connaître la position des valeurs propres nulles de  $\nabla^2 \Psi$ , ni donc de statuer sur la stricte convexité.

Autrement dit, même des fonctions de régularisation strictement convexes peuvent donner lieu à des fonctions d'énergie non strictement convexes. Notons que c'est la non-linéarité de ces fonctions de régularisation qui ne permet pas de tirer des conclusions sur la stricte convexité.

### 5.3.4 Cas particulier de deux acquisitions

Dans le cas particulier où l'on n'acquiert que deux volumes complémentaires, et où on ne souhaite pas prendre en compte la direction de résolution constante dans la régularisation, alors les expressions ci-dessus se simplifient : on peut, comme dans la partie 4.2.4, considérer le problème en deux dimensions coupe par coupe, et conserver aux coupes le format matriciel sans passer à la notation vectorielle. Nous notons  $I_{rec}$ ,  $I_x$  et  $I_y$  les coupes sous forme matricielle de dimension  $N_y \times N_x$ .

La fonction d'énergie peut alors s'écrire  $J = Q + \lambda\Psi$  avec :

$$Q = \| D_y I_{rec} - I_y \|^2 + \| I_{rec} D_x^T - I_x \|^2 \quad (5.43)$$

et :

$$\Psi = \| \psi(\Delta_{N_y} I_{rec}) \|_1 + \| \psi(I_{rec} \Delta_{N_x}^T) \|_1 \quad (5.44)$$

L'avantage de cette écriture réside dans la taille des opérateurs :  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $\Delta_x$ ,  $\Delta_y$  sont de dimensions  $N_x \times N_x$  ou  $N_y \times N_y$ , alors que  $\mathbf{D}_x$ ,  $\mathbf{D}_y$ ,  $\mathbf{\Delta}_x$ ,  $\mathbf{\Delta}_y$  sont de dimensions  $N_x N_y N_z \times N_x N_y N_z$ , c'est-à-dire, comme dans ce cas  $N_z = 1$ ,  $N_x N_y \times N_x N_y$ .

## 5.4 Méthode d'optimisation

### 5.4.1 Choix de la méthode

Les deux grandes familles de méthodes permettant de minimiser une fonction d'énergie sont les méthodes stochastiques d'une part, les méthodes déterministes d'autre part. Par souci de simplicité et de rapidité, et grâce à la convexité, nous choisissons une méthode déterministe rapide : le gradient conjugué. En particulier, si la fonction d'énergie s'exprime sous une forme quadratique, l'algorithme du gradient conjugué a de bonnes propriétés de convergence [PRES-92] ; la fonction d'énergie définie ci-dessus n'est pas strictement quadratique mais se compose de plusieurs termes quadratiques ou quasi-quadratiques, ce qui laisse à penser que le comportement de l'algorithme devrait être assez efficace.

Il est à noter que la fonction d'énergie à minimiser n'est pas strictement convexe ; il convient donc de ne pas initialiser l'algorithme de façon quelconque : on choisira par exemple la moyenne des deux acquisitions.

L'algorithme du gradient conjugué requiert l'évaluation à chaque itération non seulement de l'énergie  $E(I_{rec})$  en fonction de l'image courante  $I_{rec}$ , mais aussi de ses dérivées partielles  $\nabla E(I_{rec})_{i,j,k}$  par rapport à l'intensité  $I_{rec}(i, j, k)$  en chaque voxel. L'expression de  $\nabla E(I_{rec})_{i,j,k}$  est détaillée dans la partie 5.5.

## 5.4.2 L'algorithme du gradient conjugué

La méthode du gradient conjugué pour la résolution de systèmes linéaires est due à Hestenes et Stiefel [HEST-52]. Elle permet de minimiser une fonctionnelle quadratique elliptique, de la forme [CIAR-98, MAIT-82] :

$$E(x) = x^T Ax - 2bx \quad (5.45)$$

Pour de telles fonctionnelles, l'algorithme converge en un nombre fini d'itérations vers [MAIT-82] :

- la solution exacte si le système est carré inversible (de rang complet),
- la solution de norme minimale dans le cas de solutions multiples,
- la meilleure solution au sens de l'écart quadratique moyen lorsqu'il n'existe pas de solution exacte.

Fletcher et Reeves [FLET-64] l'ont adaptée directement à la minimisation de fonctionnelles quelconques, et Polak et Ribière [POLA-69] en ont proposé une variante pour le cas de fonctionnelles quelconques, qui coïncide avec la version de Fletcher et Reeves dans le cas particulier de fonctionnelles quadratiques elliptiques mais s'avère plus efficace dans le cas de fonctionnelles quelconques. Ayant à minimiser des fonctions généralement non quadratiques, nous utilisons la variante de Polak et Ribière, dont nous donnons l'algorithme général ci-dessous. Pour plus de détails on se référera à [PRES-92].

On note :  $\mathcal{E}$  la fonction de calcul de l'énergie,  
 $d\mathcal{E}$  la fonction de calcul du gradient de l'énergie.

*Etape 0 : Initialisation (on note  $X_0$  la solution initiale)*

$$E_k = \mathcal{E}(X_0); \quad E_{k-1} = \infty; \quad dE_{k-1} = 1; \quad D_{k-1} = 0$$

Tant que  $E_{k-1} - E_k > \text{seuil}$  et  $k < k_{max}$  :

*Etape 1 : Recherche de la direction de descente  $D_k$*

\* Calcul du gradient de la fonction d'énergie :

$$dE_k = d\mathcal{E}(X_k)$$

\* Calcul de la direction de descente de Polak et Ribière :

$$dD_k = \frac{\langle dE_k, (dE_k - dE_{k-1}) \rangle}{\langle dE_{k-1}, dE_{k-1} \rangle}; \quad D_k = -dE_k + D_{k-1} \cdot dD_k$$

Si  $\langle dE_k, dD_k \rangle > 0$  (la direction  $D_k$  ne descend pas) :

\* Calcul de la direction de plus grande descente :

$$D_k = -dE_k$$

fin Si

*Etape 2 : Minimisation unidirectionnelle dans la direction de descente*

\* Encadrement itératif du minimum :

Recherche de 3 points  $a < b < c$  t.q.  $\mathcal{E}(b) < \mathcal{E}(a)$  et  $\mathcal{E}(b) < \mathcal{E}(c)$ .

\* Convergence vers le minimum (méthode de Brent) :

calcul des caractéristiques de la parabole passant par  $a, b, c$

calcul du minimum  $X_{k+1}$  de la parabole

Si résultat de la méthode de Brent inacceptable

\* Convergence vers le minimum (méthode du nombre d'or) :

recherche dichotomique du minimum  $X_{k+1}$

fin Si

$$k = k + 1; \quad E_k = \mathcal{E}(X_k)$$

fin Tant que

## 5.5 Expression du gradient de l'énergie

Conformément aux conventions adoptées dans l'annexe B, nous notons  $\nabla E$  la matrice 3D des dérivées partielles de  $E$  par rapport aux voxels dans les trois directions, et  $\nabla \mathbf{E}$  le vecteur correspondant à la mise en colonne de  $\nabla E$ , et de même pour  $Q$  et  $\Psi$ .

Le gradient de la fonction d'énergie s'exprime par :

$$\nabla E(i, j, k) = \nabla Q(i, j, k) + \lambda \nabla \Psi(i, j, k) \quad (5.46)$$

ou encore :

$$\nabla \mathbf{E} = \nabla \mathbf{Q} + \lambda \nabla \Psi \quad (5.47)$$

### 5.5.1 Gradient du terme de fidélité aux données

Comme au § 5.3.3, nous décomposons le terme d'attache aux données  $Q$  introduit au § 5.3.1 en trois termes semblables  $Q_x$ ,  $Q_y$  et  $Q_z$ ; nous ne détaillons le calcul du gradient que pour le terme  $\mathbf{Q}_x$  (par exemple).

$$\mathbf{Q}_x = \| \mathbf{D}_x \mathbf{I}_{rec} - \mathbf{I}_x \|^2 \quad (5.48)$$

d'où l'expression de  $\nabla \mathbf{Q}_x$  :

$$\nabla \mathbf{Q}_x = 2 \mathbf{D}_x^T (\mathbf{D}_x \mathbf{I}_{rec} - \mathbf{I}_x) \quad (5.49)$$

On peut noter que, d'une part, comme l'opérateur  $\mathbf{D}_x$  (équation 4.50) est symétrique (cf. § 4.2.2), alors :

$$D_x^T = D_x \quad (5.50)$$

et, d'autre part, que :

$$D_x^T D_x = F_{N_x}^{-1} M_x^T M_x F_{N_x} \quad (5.51)$$

Finalement, en appliquant le même raisonnement aux deux termes restants de  $Q$ , on obtient :

$$\nabla \mathbf{Q} = 2 (\mathbf{D}_x^T \mathbf{D}_x \mathbf{I}_{rec} - \mathbf{D}_x^T \mathbf{I}_x + \mathbf{D}_y^T \mathbf{D}_y \mathbf{I}_{rec} - \mathbf{D}_y^T \mathbf{I}_y + \mathbf{D}_z^T \mathbf{D}_z \mathbf{I}_{rec} - \mathbf{D}_z^T \mathbf{I}_z) \quad (5.52)$$

Nous proposons maintenant d'interpréter ce résultat en faisant une petite approximation. En effet, on peut constater que  $M_x^T M_x$  est identique à  $M_x$  sauf pour les quelques coefficients de  $M_x$  valant  $1/2$ , et où ceux de  $M_x^T M_x$  valent alors  $1/4$ . Si l'on

fait l'approximation que  $M_x \simeq M_x^T M_x$ , alors  $D_x^T D_x \simeq D_x$ . De plus, de par la définition de  $D_x$ , il est évident que l'opérateur  $D_x$  appliqué à  $I_x$  ne modifie pas  $I_x$  sauf en quelques points où la valeur de  $I_x$  est pondérée par 1/2. Si nous négligeons là aussi cet effet, nous pouvons dire que  $D_x I_x \simeq I_x$ , d'où finalement :

$$\nabla \mathbf{Q} \simeq 2 (\mathbf{D}_x \mathbf{I}_{rec} - \mathbf{I}_x + \mathbf{D}_y \mathbf{I}_{rec} - \mathbf{I}_y + \mathbf{D}_z \mathbf{I}_{rec} - \mathbf{I}_z) \quad (5.53)$$

Cette expression très simple du gradient de  $\mathbf{Q}$  devient exacte dans le cas où l'on n'impose pas que les images soient à valeurs réelles; en effet, dans ces conditions il n'est pas nécessaire de respecter la symétrie hermitienne des T.F.D. et donc les approximations  $M_x \simeq M_x^T M_x$  et  $D_x I_x \simeq I_x$  deviennent exactes.

## 5.5.2 Gradient du terme de régularisation

Le terme de régularisation  $\Psi$  introduit au § 5.3.2 peut être séparé en trois termes, comme au § 5.3.3; là encore nous ne détaillons le calcul du gradient que pour  $\Psi_x$  :

$$\Psi_x = \| \psi(\Delta_x \mathbf{I}_{rec}) \|_1 \quad (5.54)$$

La dérivée de  $\Psi_x$  par rapport à l'élément courant  $I_{rec}(m, n, p)$  de la variable  $I_{rec}$  est donc :

$$\frac{\partial \Psi_x}{\partial I_{rec}(m, n, p)} = \psi'(I_{rec}(m, n, p) - I_{rec}(m, n - 1, p)) - \psi'(I_{rec}(m, n + 1, p) - I_{rec}(m, n, p)) \quad (5.55)$$

ce qui donne, pour  $\nabla \Psi_x$  :

$$\nabla \Psi_x = \Delta_x^T \psi'(\Delta_x \mathbf{I}_{rec}) \quad (5.56)$$

En appliquant le même raisonnement à chacun des trois termes de  $\Psi$ , on obtient :

$$\nabla \Psi = \Delta_x^T \psi'(\Delta_x \mathbf{I}_{rec}) + \Delta_y^T \psi'(\Delta_y \mathbf{I}_{rec}) + \Delta_z^T \psi'(\Delta_z \mathbf{I}_{rec}) \quad (5.57)$$

## 5.5.3 Cas particulier de deux acquisitions

Dans le cas de deux acquisitions traité au § 5.3.4, le gradient peut également s'exprimer dans le même formalisme, permettant de réduire la dimension des opérateurs :

$$\nabla Q = 2 (I_{rec} D_x D_x^T - I_x D_x + D_y D_y^T I_{rec} - D_y^T I_y) \quad (5.58)$$

et :

$$\nabla \Psi = \psi'(I_{rec} \Delta_{N_x}^T) \Delta_{N_x}^T + \Delta_{N_y} \psi'(\Delta_{N_y} I_{rec}) \quad (5.59)$$

## 5.6 Schéma de principe de la méthode

Le schéma de la figure 5.3 permet de récapituler de manière visuelle le principe de la méthode, tout en situant les diverses étapes présentées jusqu'ici : la modélisation développée au chapitre 4 intervient à l'étape «simulation des données - problème direct», nécessaire aux calculs de l'énergie présentée au paragraphe 5.3 et de son gradient (§ 5.5). Ces deux valeurs permettent de calculer la direction de descente, première étape d'une itération de l'algorithme du gradient conjugué (§ 5.4). Il est à noter que la seconde étape requiert le calcul de l'énergie pour plusieurs images, que ce soit pour l'encadrement du minimum ou pour la recherche dichotomique du minimum, ce qui n'est pas représenté sur le schéma pour des raisons de lisibilité.

## 5.7 Caractérisation des solutions

### 5.7.1 Caractérisation de la solution non régularisée

Dans cette partie, nous nous attachons à caractériser la solution minimisant la fonction d'énergie dans le cas particulier où  $\lambda = 0$ , c'est-à-dire la solution non régularisée.

Le critère à minimiser ici est le terme d'attache aux données  $Q$  calculé dans la partie 5.3.1. La solution minimisant la fonction d'énergie  $Q$ , si elle existe, est la solution de l'équation :

$$\nabla Q = 0 \quad (5.60)$$

Or,  $\nabla Q$  a été calculé au § 5.5.1 (equation 5.52), comme étant :

$$\nabla Q = 2 (\mathbf{D}_x^T \mathbf{D}_x \mathbf{I}_{rec} - \mathbf{D}_x^T \mathbf{I}_x + \mathbf{D}_y^T \mathbf{D}_y \mathbf{I}_{rec} - \mathbf{D}_y^T \mathbf{I}_y + \mathbf{D}_z^T \mathbf{D}_z \mathbf{I}_{rec} - \mathbf{D}_z^T \mathbf{I}_z) \quad (5.61)$$

d'où l'on tire aisément :

$$\nabla Q = 0 \iff (\mathbf{D}_x^T \mathbf{D}_x + \mathbf{D}_y^T \mathbf{D}_y + \mathbf{D}_z^T \mathbf{D}_z) \mathbf{I}_{rec} = (\mathbf{D}_x^T \mathbf{I}_x + \mathbf{D}_y^T \mathbf{I}_y + \mathbf{D}_z^T \mathbf{I}_z) \quad (5.62)$$

L'existence de la solution dépend donc de l'inversibilité de la matrice  $\mathbf{D}_x^T \mathbf{D}_x + \mathbf{D}_y^T \mathbf{D}_y + \mathbf{D}_z^T \mathbf{D}_z$ . Or l'étude de l'inversibilité de cette matrice n'est pas évidente au premier abord.

Nous proposons de caractériser la T.F.D. de la solution recherchée. Comme les opérateurs de T.F.D. sont bijectifs, alors les solutions de l'équation 5.60 sont également solution de :

$$\mathbf{F}_x \mathbf{F}_y \mathbf{F}_z (\mathbf{D}_x^T \mathbf{D}_x + \mathbf{D}_y^T \mathbf{D}_y + \mathbf{D}_z^T \mathbf{D}_z) \mathbf{I}_{rec} = \mathbf{F}_x \mathbf{F}_y \mathbf{F}_z (\mathbf{D}_x^T \mathbf{I}_x + \mathbf{D}_y^T \mathbf{I}_y + \mathbf{D}_z^T \mathbf{I}_z) \quad (5.63)$$



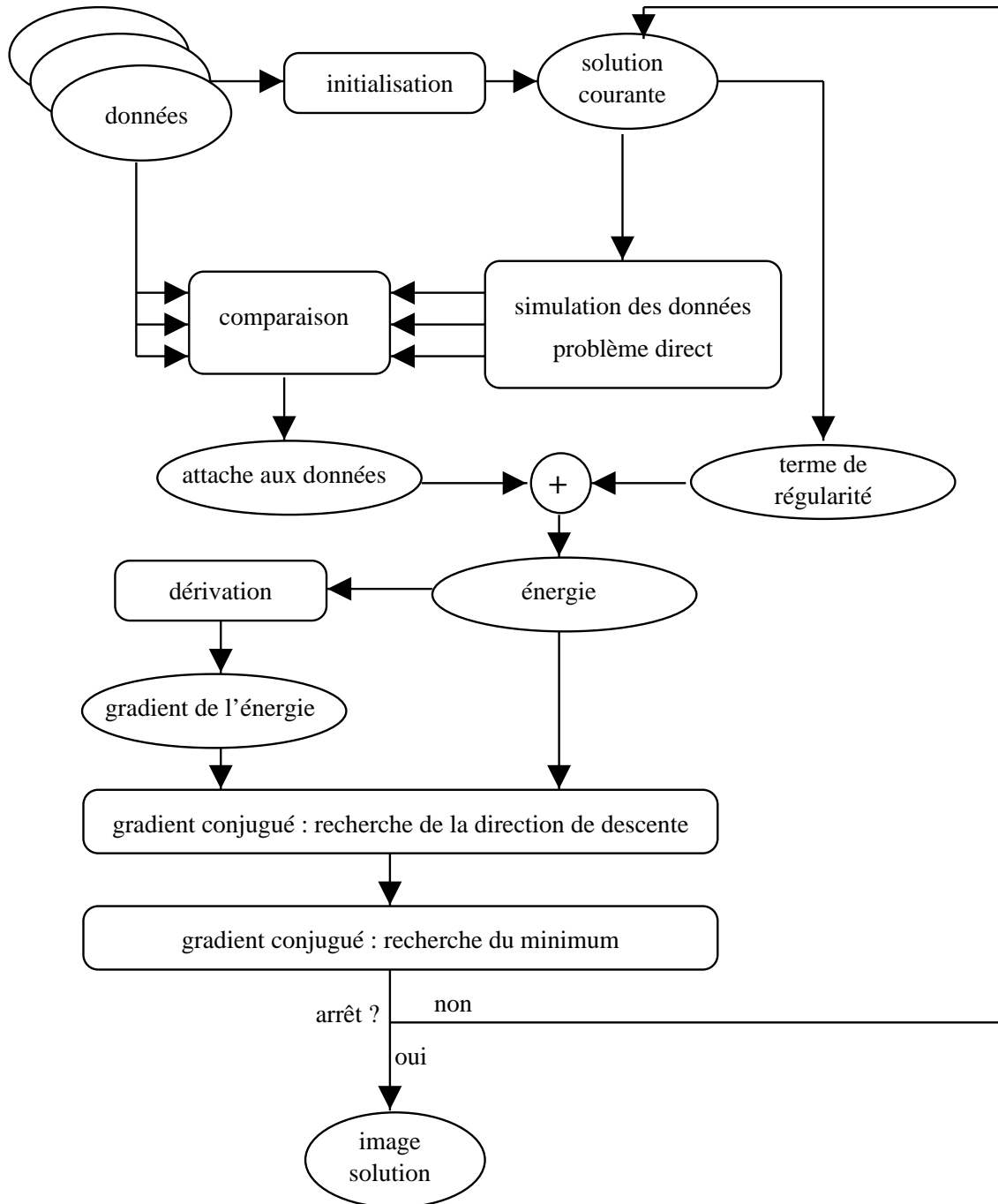


FIG. 5.3 – Schéma de principe de la méthode

D'après la propriété 7 de l'annexe B, on peut réarranger l'ordre des opérateurs de telle sorte que, par exemple :

$$\mathbf{F}_x \mathbf{F}_y \mathbf{F}_z \mathbf{D}_x^T \mathbf{D}_x \mathbf{I}_{rec} = \mathbf{F}_x \mathbf{D}_x^T \mathbf{D}_x \mathbf{F}_y \mathbf{F}_z \mathbf{I}_{rec} \quad (5.64)$$

Soient  $\mathbf{J}_{rec}$  la T.F.D. de  $\mathbf{I}_{rec}$ , et  $\mathbf{J}_x, \mathbf{J}_y, \mathbf{J}_z$ , les T.F.D. respectives de  $\mathbf{I}_x, \mathbf{I}_y, \mathbf{I}_z$ . On peut donc écrire que :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_x \mathbf{D}_x^T \mathbf{D}_x \mathbf{F}_y \mathbf{F}_z \mathbf{I}_{rec} &= \mathbf{F}_x \mathbf{D}_x^T \mathbf{D}_x \mathbf{F}_x^{-1} \mathbf{F}_x \mathbf{F}_y \mathbf{F}_z \mathbf{I}_{rec} \\ &= \mathbf{F}_x \mathbf{D}_x^T \mathbf{D}_x \mathbf{F}_x^{-1} \mathbf{J}_{rec} \\ &= \mathbf{M}_x^T \mathbf{M}_x \mathbf{J}_{rec} \end{aligned} \quad (5.65)$$

En appliquant le même type de calculs aux autres termes de l'équation 5.63, celle-ci devient :

$$(\mathbf{M}_x^T \mathbf{M}_x + \mathbf{M}_y^T \mathbf{M}_y + \mathbf{M}_z^T \mathbf{M}_z) \mathbf{J}_{rec} = \mathbf{M}_x^T \mathbf{J}_x + \mathbf{M}_y^T \mathbf{J}_y + \mathbf{M}_z^T \mathbf{J}_z \quad (5.66)$$

Là encore, l'existence de la solution dépend de l'inversibilité de la matrice  $\mathbf{M}_{xyz} = \mathbf{M}_x^T \mathbf{M}_x + \mathbf{M}_y^T \mathbf{M}_y + \mathbf{M}_z^T \mathbf{M}_z$ . Mais cette fois, celle-ci est plus facile à étudier. En effet,  $\mathbf{M}_x, \mathbf{M}_y$ , et  $\mathbf{M}_z$  sont des matrices diagonales, dont les éléments diagonaux ne prennent que les valeurs 0, 1 ou 0,5 (cf. § 4.2.2, équation 4.46). La matrice  $\mathbf{M}_{xyz}$  est donc également une matrice diagonale, dont les éléments diagonaux peuvent prendre les valeurs de l'ensemble  $\{0; 0,25; 0,5; 0,75; 1; 1,25; 1,5; 2; 2,25; 3\}$ . Par exemple, une valeur de 3 correspond à un voxel situé au centre du volume de Fourier, qui est donc contenu dans le support des trois acquisitions ; de même, une valeur de 0 correspond à un voxel qui n'est contenu dans aucun des supports des trois acquisitions, etc. D'après la figure 3.5 (§ 3.1), il est évident qu'il existe un nombre non nul de voxels non contenus dans la réunion des supports des trois acquisitions, et donc qu'il existe un nombre non nul d'éléments diagonaux nuls dans  $\mathbf{M}_{xyz}$ . Par conséquent, cette matrice est singulière : son inverse n'est pas définie, en revanche elle possède une infinité d'inverses généralisées  $\mathbf{M}_{xyz}^+$  telles que :

$$\mathbf{M}_{xyz} \mathbf{M}_{xyz}^+ \mathbf{M}_{xyz} = \mathbf{M}_{xyz} \quad (5.67)$$

On pose :

$$\mathbf{J}_{xyz} = \mathbf{M}_x^T \mathbf{J}_x + \mathbf{M}_y^T \mathbf{J}_y + \mathbf{M}_z^T \mathbf{J}_z \quad (5.68)$$

L'équation 5.66 peut s'écrire comme un système linéaire simple tel que :

$$(\mathbf{M}_{xyz})_{i,i} (\mathbf{J}_{rec})_i = (\mathbf{J}_{xyz})_i \quad (5.69)$$

soit, comme l'ensemble des  $i$  tels que  $(\mathbf{M}_{xyz})_{i,i}$  est nul coïncide avec l'ensemble des  $j$  tels que  $(\mathbf{J}_{xyz})_j$  est nul également :

$$(\mathbf{J}_{rec})_i = \begin{cases} \frac{1}{(\mathbf{M}_{xyz})_{i,i}} (\mathbf{J}_{xyz})_i & \text{si } (\mathbf{M}_{xyz})_{i,i} \neq 0 \\ \text{quelconque} & \text{si } (\mathbf{M}_{xyz})_{i,i} = 0 \end{cases} \quad (5.70)$$

Ainsi, il n'y a pas unicité de la solution non régularisée, mais l'écriture proposée dans ce paragraphe permet de voir qu'il y a unicité de chaque coefficient de  $J_{rec}$  appartenant à la réunion des supports des T.F.D. des acquisitions. Les coefficients indéterminés sont ceux n'appartenant au support d'aucune des acquisitions.

Cependant, la fonction d'attache aux données  $Q$  peut s'exprimer sous une forme quadratique elliptique, en effet :

$$Q = \mathbf{I}_{rec}^T (\mathbf{D}_x^T \mathbf{D}_x + \mathbf{D}_y^T \mathbf{D}_y + \mathbf{D}_z^T \mathbf{D}_z) \mathbf{I}_{rec} - 2 \mathbf{I}_{rec}^T (\mathbf{D}_x^T \mathbf{I}_x + \mathbf{D}_y^T \mathbf{I}_y + \mathbf{D}_z^T \mathbf{I}_z) + (\mathbf{I}_x^T \mathbf{I}_x + \mathbf{I}_y^T \mathbf{I}_y + \mathbf{I}_z^T \mathbf{I}_z) \quad (5.71)$$

est, à un terme constant près, conforme à l'équation 5.45. Par conséquent, l'algorithme du gradient conjugué converge vers la solution de norme minimale (cf. § 5.4.2). Intéressons-nous donc plus particulièrement à la solution de norme minimale parmi l'ensemble des solutions. Grâce à la relation de Parseval pour la T.F.D., qui relie l'énergie du signal  $x$  à celle de sa T.F.D.  $X$  [DELM-91] :

$$\sum_{i=-\frac{N_x}{2}}^{\frac{N_x}{2}-1} \sum_{j=-\frac{N_y}{2}}^{\frac{N_y}{2}-1} \sum_{k=-\frac{N_z}{2}}^{\frac{N_z}{2}-1} \|X(i, j, k)\|^2 = \frac{1}{N_x N_y N_z} \sum_{m=-\frac{N_x}{2}}^{\frac{N_x}{2}-1} \sum_{n=-\frac{N_y}{2}}^{\frac{N_y}{2}-1} \sum_{p=-\frac{N_z}{2}}^{\frac{N_z}{2}-1} \|x(m, n, p)\|^2 \quad (5.72)$$

il est évident que la T.F.D. de la solution de norme minimale est elle-même de norme minimale. Il s'agit donc de la solution pour laquelle tous les coefficients indéterminés sont affectés de la valeur nulle.

Dans la suite, nous noterons  $I_{\lambda=0}$  la solution décrite précédemment et  $J_{\lambda=0}$  sa T.F.D.

Si l'on fait la même approximation que celle proposée au § 5.5.1 (équation 5.53), à savoir que l'on néglige les effets induits par la contrainte de symétrie hermitienne des T.F.D., on obtient une expression plus simple pour l'équation 5.66 :

$$(\mathbf{M}_x + \mathbf{M}_y + \mathbf{M}_z) \mathbf{J}_{rec} = (\mathbf{J}_x + \mathbf{J}_y + \mathbf{J}_z) \quad (5.73)$$

où  $\mathbf{M}_x$ ,  $\mathbf{M}_y$ , et  $\mathbf{M}_z$  ne contiennent que des valeurs nulles ou unitaires. Chaque coefficient de la solution est donc égal à la somme des coefficients de  $\mathbf{J}_x$ ,  $\mathbf{J}_y$ ,  $\mathbf{J}_z$ , pondérée par le coefficient 1 si le coefficient a réellement été acquis dans une des acquisitions, par le coefficient 1/2 si le coefficient a réellement été acquis dans deux acquisitions,

et par  $1/3$  si le coefficient a réellement été acquis dans toutes les acquisitions (basses fréquences du «k-space»). Autrement dit, il s'agit de la réunion des «k-spaces», avec moyennage dans les zones où plusieurs «k-spaces» s'intersectent et où l'information est donc redondante. Cette solution coïncide avec la solution non approchée sauf aux frontières des supports des T.F.D. des acquisitions ; la solution approchée est donc très proche de la solution exacte et permet d'en donner une bonne idée intuitive.

Le fait de connaître de façon explicite la solution qui minimise le terme d'attache aux données de la fonction d'énergie  $E$  permet une réécriture du terme d'attache aux données  $Q$  sous la forme :

$$Q' = \|\mathbf{I}_{rec} - \mathbf{I}_{\lambda=0}\|^2 \quad (5.74)$$

Cette écriture permet de simplifier considérablement l'algorithme puisqu'il n'est plus nécessaire de passer dans le domaine spectral à chaque itération pour calculer la fonction d'énergie ou son gradient. Cependant, il faut noter que si  $Q$  et  $Q'$  ont le même minimum, elles n'ont pas la même valeur d'énergie en ce minimum, ni le même comportement en général. La réécriture proposée ci-dessus nécessite donc des «aménagements» que nous n'avons pas abordés.

## 5.7.2 Caractérisation des solutions régularisées

### 5.7.2.1 Régularisation quadratique

Dans cette partie, nous nous intéressons à la caractérisation, dans le domaine spectral comme précédemment, de la solution correspondant au cas où  $\alpha \rightarrow \infty$ , c'est-à-dire avec la fonction de régularisation de Tikhonov.

L'énergie s'exprime conformément à l'équation 5.14, où  $\Psi$  peut s'exprimer sous la forme quadratique :

$$\Psi = \|\Delta_y \mathbf{I}_{rec}\|^2 + \|\Delta_x \mathbf{I}_{rec}\|^2 + \|\Delta_z \mathbf{I}_{rec}\|^2 \quad (5.75)$$

Le gradient de  $\Psi$  s'écrit donc :

$$\nabla \Psi = 2(\Delta_y^T \Delta_y + \Delta_x^T \Delta_x + \Delta_z^T \Delta_z) \mathbf{I}_{rec} \quad (5.76)$$

Finalement, le gradient de l'énergie s'écrit :

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{E} &= 2(\mathbf{D}_y^T \mathbf{D}_y + \mathbf{D}_x^T \mathbf{D}_x + \mathbf{D}_z^T \mathbf{D}_z) \mathbf{I}_{rec} - 2(\mathbf{D}_y^T \mathbf{I}_y + \mathbf{D}_x^T \mathbf{I}_x + \mathbf{D}_z^T \mathbf{I}_z) + \\ &+ 2\lambda (\Delta_y^T \Delta_y + \Delta_x^T \Delta_x + \Delta_z^T \Delta_z) \mathbf{I}_{rec} \end{aligned} \quad (5.77)$$

La (les) solution(s) qui minimise(ent)  $\mathbf{E}$  vérifie(ent)  $\nabla \mathbf{E} = 0$ . Comme au paragraphe 5.7.1, comme les opérateurs de T.F.D. sont bijectifs, la (les) solution(s) vérifie(ent) de

façon équivalente  $\mathbf{F}_y \mathbf{F}_x \mathbf{F}_z (\nabla \mathbf{E}) = 0$ , ce qui s'écrit, grâce aux mêmes simplifications qu'au paragraphe 5.7.1 :

$$\begin{aligned} & (\mathbf{M}_y^T \mathbf{M}_y + \mathbf{M}_x^T \mathbf{M}_x + \mathbf{M}_z^T \mathbf{M}_z + \lambda (\mathbf{F}_y \Delta_y^T \Delta_y \mathbf{F}_y^{-1} + \mathbf{F}_x \Delta_x^T \Delta_x \mathbf{F}_x^{-1} + \mathbf{F}_z \Delta_z^T \Delta_z \mathbf{F}_z^{-1})) \mathbf{J}_{rec} \\ & = \\ & \mathbf{M}_y^T \mathbf{J}_y + \mathbf{M}_x^T \mathbf{J}_x + \mathbf{M}_z^T \mathbf{J}_z \end{aligned} \quad (5.78)$$

Or  $\Delta_N^T \Delta_N$  s'exprime :

$$\Delta_N^T \Delta_N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (5.79)$$

d'où l'on tire, en notant  $G_x = F_x \Delta_{N_x}^T \Delta_{N_x} F_x^{-1}$  :

$$\begin{aligned} G_x(m, n) &= \frac{1}{N_x} \sum_{k=-\frac{N_x}{2}}^{\frac{N_x}{2}-1} \sum_{l=-\frac{N_x}{2}}^{\frac{N_x}{2}-1} e^{-j2\pi \frac{mk}{N_x}} e^{j2\pi \frac{nl}{N_x}} (\Delta_{N_x}^T \Delta_{N_x})(k, l) \\ &= \frac{1}{N_x} \sum_{k=-\frac{N_x}{2}}^{\frac{N_x}{2}-1} (2e^{-j2\pi k \frac{m-n}{N_x}} - e^{-j2\pi k \frac{m-n}{N_x}} e^{j2\pi \frac{n}{N_x}} - e^{-j2\pi k \frac{m-n}{N_x}} e^{-j2\pi \frac{n}{N_x}}) \\ &= \frac{1}{N_x} \sum_{k=-\frac{N_x}{2}}^{\frac{N_x}{2}-1} e^{-j2\pi k \frac{m-n}{N_x}} (2 - 2 \cos(2\pi \frac{n}{N_x})) \end{aligned} \quad (5.80)$$

Or, en notant  $\delta(k)$  l'impulsion unité :

$$\frac{1}{N_x} \sum_{k=-\frac{N_x}{2}}^{\frac{N_x}{2}-1} e^{-j2\pi k \frac{m-n}{N_x}} = \delta(m - n) \quad (5.81)$$

donc  $G_x$  est une matrice diagonale telle que :

$$\begin{cases} G_x(m, n) = 2 [1 - \cos(2\pi \frac{n}{N_x})] & \text{si } m = n \\ G_x(m, n) = 0 & \text{si } m \neq n \end{cases} \quad (5.82)$$

Ce résultat peut également être déduit directement des propriétés des matrices circulantes : si  $A$  est circulante, alors  $FAF^{-1}$  est diagonale et la suite de ses valeurs propres

est égale à la T.F.D. d'une ligne de  $A$  (à un facteur  $N$  près, selon les conventions utilisées pour la T.F.D.).

L'existence de la solution dépend de l'inversibilité de  $\mathbf{H}_{xyz} = \mathbf{M}_{xyz} + \lambda \mathbf{G}_{xyz}$ , avec  $\mathbf{G}_{xyz} = \mathbf{G}_x + \mathbf{G}_y + \mathbf{G}_z$ .

Nous proposons d'étudier l'expression des matrices  $H_x$ ,  $H_y$  et  $H_z$ , avec  $H_x = M_x^T M_x + \lambda G_x$  (et des expressions similaires pour  $H_y$  et  $H_z$ ).  $H_x$  est diagonale et son élément courant s'écrit :

$$\begin{cases} (H_x)_{ii} = 1 + 2\lambda (1 - \cos(2\pi \frac{i}{N_x})) & \text{si } -\frac{N'_x}{2} + 1 \leq i \leq \frac{N'_x}{2} - 1 \\ (H_x)_{ii} = 1/4 + 2\lambda (1 - \cos(2\pi \frac{i}{N_x})) & \text{si } i = -\frac{N'_x}{2} \text{ ou } i = \frac{N'_x}{2} \\ (H_x)_{ii} = 2\lambda (1 - \cos(2\pi \frac{i}{N_x})) & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.83)$$

Pour  $\lambda > 0$  (c'est-à-dire en excluant le cas non régularisé, déjà traité au paragraphe 5.7.1), un élément de cette matrice ne peut être nul que si les deux conditions :

$$i > N'_x/2 \text{ ou } i < -N'_x/2 \quad (5.84)$$

$$\cos(2\pi \frac{i}{N_x}) = 1 \quad (5.85)$$

sont réunies simultanément. Or la deuxième condition n'est vérifiée que pour  $i = 0$ , et comme nous supposons que  $N'_x > 0$  (c'est-à-dire qu'on acquiert au moins une ligne du  $k$ -space), alors les éléments de  $H_x$  ne sont jamais nuls.

Le même raisonnement peut être mené pour les matrices  $H_y = M_y^2 + \lambda G_y$  et  $H_z = M_z^2 + \lambda G_z$ , et peut être étendu aux matrices  $\mathbf{H}_x$ ,  $\mathbf{H}_y$ , et  $\mathbf{H}_z$ , obtenues par les transformations définies dans l'annexe B. Finalement, la matrice  $\mathbf{H}_{xyz}$  est diagonale et ne possède que des éléments non nuls, elle est donc inversible. On peut donc écrire :

$$\mathbf{J}_{rec}(k) = \frac{1}{\mathbf{H}_{xyz}(k)} \mathbf{J}_{xyz}(k) \quad (5.86)$$

Pour des raisons de lisibilité, nous abandonnons temporairement les notations matricielles et repassons à une formulation analytique à trois indices  $k_x$ ,  $k_y$  et  $k_z$ . Nous notons  $\mathcal{H}(k_x, k_y, k_z) = \mathbf{H}_{xyz}(k_y + N_x(k_x - 1) + N_y N_x(k_z - 1), k_y + N_x(k_x - 1) + N_y N_x(k_z - 1))$ , toujours en conformité avec les conventions de l'annexe B, ce qui permet d'exprimer le filtrage très simplement de la façon suivante :

$$J_{rec}(k_x, k_y, k_z) = \frac{1}{H_x(k_x, k_x) + H_y(k_y, k_y) + H_z(k_z, k_z)} J_{xyz}(k_x, k_y, k_z) \quad (5.87)$$

La figure 5.4 montre l'allure du filtrage réalisé par la régularisation quadratique, dans le cas monodimensionnel, sans prise en compte de la modélisation du processus de dégradation, c'est-à-dire pour une fonction d'énergie de la forme :

$$E = \|x - y\|^2 + \lambda \|\Delta x\|^2 \quad (5.88)$$

où  $x$  est la solution recherchée et  $y$  le signal observé. Dans ce cas, la T.F.D.  $X$  de la solution filtrée s'exprime en fonction de la T.F.D.  $Y$  du signal observé par :

$$X(n) = \frac{1}{1 + 2\lambda(1 - \cos(2\pi \frac{n}{N}))} Y(n) \quad (5.89)$$

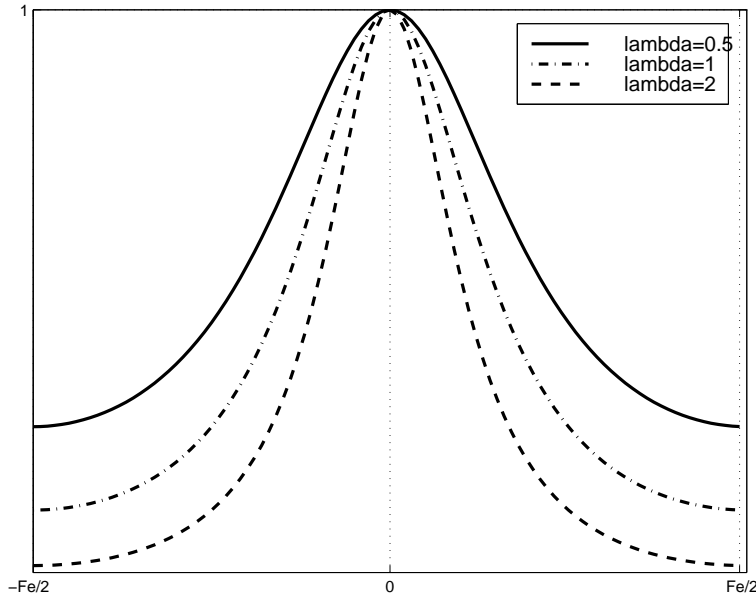


FIG. 5.4 – Allure de la fonction de transfert réalisée par la régularisation quadratique.

Il s'agit, comme on pouvait s'y attendre, d'un filtrage passe-bas de bande passante d'autant plus étroite que  $\lambda$  est grand.

La figure 5.5 présente l'allure de ce filtre dans le cas bidimensionnel, avec prise en compte de la dégradation dans chacune des deux acquisitions :

$$J_{rec}(k_x, k_y) = \frac{1}{H_x(k_x, k_x) + H_y(k_y, k_y)} J_{xy}(k_x, k_y) \quad (5.90)$$

Pour chaque pixel, l'amplitude du filtre est normalisée par  $M_x(k_x, k_x) + M_y(k_y, k_y)$ , la somme des coefficients de pondération intervenant dans le calcul de  $J_{xy}$ . Ainsi, le

filtre normalisé de cette manière (que nous notons  $\mathcal{H}_{\mathcal{N}}$ ) n'est autre que la fonction de transfert reliant la solution régularisée à la solution non régularisée de norme minimale  $J_{\lambda=0}$  calculée au paragraphe 5.7.1 :

$$J_{rec}(k_x, k_y) = \mathcal{H}_{\mathcal{N}}(k_x, k_y) J_{\lambda=0}(k_x, k_y) \quad (5.91)$$

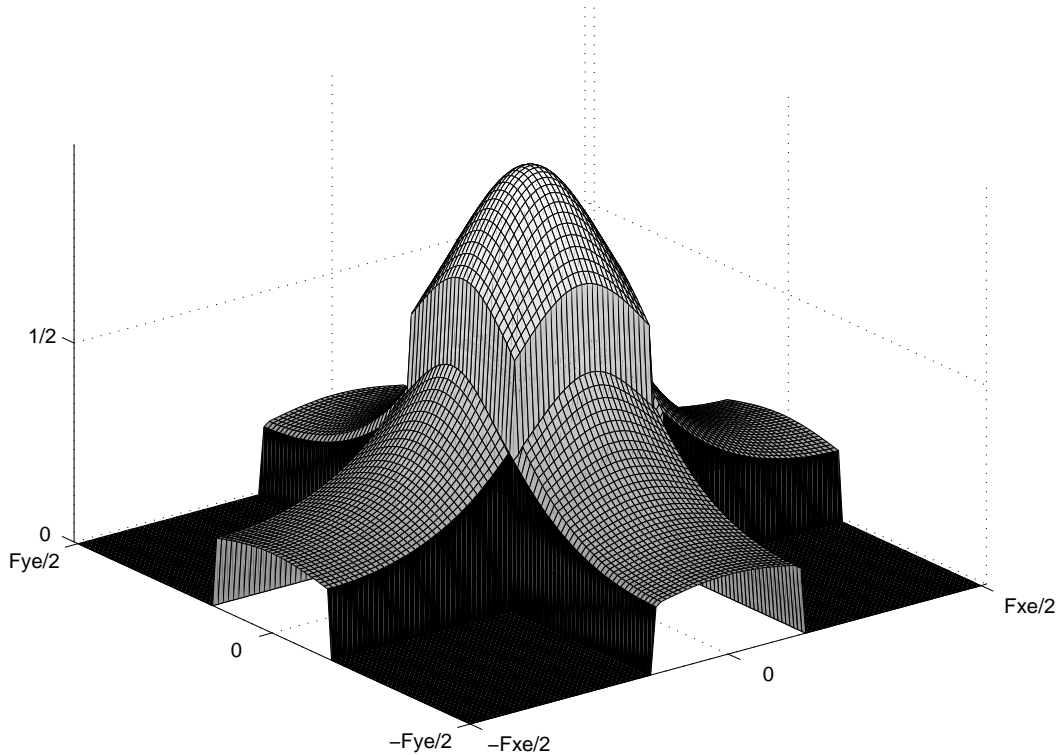


FIG. 5.5 – Allure de la fonction de transfert réalisée par la régularisation quadratique dans le cas bidimensionnel, pour  $\lambda = 1$  et un facteur de perte de résolution égal à  $0,28$ .

Les calculs et simulations ci-dessus nous permettent de confirmer que la fonction de régularisation de Tikhonov n'est pas adaptée à notre problème : si, d'un côté, elle permet d'obtenir l'unicité de la solution, elle possède l'inconvénient majeur d'introduire un filtrage passe-bas sévère sur les données, ce qui est tout à fait contradictoire avec l'objectif de préservation des discontinuités (qui se situent en hautes fréquences).

### 5.7.2.2 Autres solutions

Les solutions faisant intervenir une fonction de régularisation non quadratique (telle que les fonctions de Huber ou des surfaces minimales) ne sont pas évidentes à caractériser.



tériser théoriquement. Cependant, nous verrons au chapitre 6 que l'on peut les rendre «semi-quadratiques» moyennant certaines hypothèses, ce qui conduit à la définition de nouveaux algorithmes, toujours itératifs, mais plus simples, pour atteindre le minimum de la fonction d'énergie.

## Conclusion

*Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthode de reconstruction d'un unique volume de haute résolution à partir de plusieurs acquisitions anisotropes de résolutions complémentaires (cf. chapitre 3).*

*L'intégration de la modélisation de l'anisotropie des données (cf. chapitre 4) dans la fonction d'attache aux données permet de garantir, en présence de cette seule fonction d'attache aux données, la convergence vers la «meilleure» solution intuitive sans introduction d'a priori. Afin d'améliorer le résultat, est ajoutée à cette fonction une fonction de régularisation garantissant la préservation des discontinuités.*

*La fonction d'énergie est minimisée à l'aide d'un algorithme déterministe itératif, le gradient conjugué. Nous avons caractérisé de façon analytique les solutions obtenues dans les cas particuliers sans régularisation et avec régularisation quadratique, mais il n'est pas possible de caractériser la solution dans le cas général, du fait de la non-linéarité de la fonction d'énergie. Dans le chapitre suivant, nous proposons l'utilisation d'un autre algorithme plus efficace, qui d'une part permet de contourner ce problème de non-linéarité, et d'autre part exploite les propriétés du modèle dans le domaine spectral.*

---

## CHAPITRE 6

# Résolution dans le domaine de la T.F.D. par développements semi-quadratiques

## Introduction

*Dans ce chapitre, nous proposons d'étudier l'intérêt des algorithmes ARTUR et LEGEND proposés par Charbonnier et al. [CHAR-94a, CHAR-94b] pour notre problème de reconstruction. Dans un premier temps (§ 6.1), nous rappelons brièvement le principe de la régularisation semi-quadratique, dont découlent les algorithmes ARTUR et LEGEND. Puis nous nous intéressons à l'expression de notre problème dans le cadre de ces algorithmes, dans le domaine spatial (§ 6.2) puis dans le domaine spectral (§ 6.3).*

## 6.1 La régularisation semi-quadratique

La régularisation semi-quadratique [GEMA-95, CHAR-94a, CHAR-94b] consiste à introduire une variable auxiliaire  $b$  et à transformer le critère non quadratique  $E$  en un critère dit «semi-quadratique»  $E^*$  tel que :

$$E(I_{rec}) = \min_b E^*(I_{rec}, b) \quad (6.1)$$

où  $b$  représente les discontinuités («processus de ligne»). Sans perte de généralité, on suppose dans ce qui suit que  $J$  est de la forme :

$$E(I_{rec}) = \|DI_{rec} - I_{data}\|^2 + \lambda \sum_k \psi((\Delta_x I_{rec})_k) + \lambda \sum_k \psi((\Delta_y I_{rec})_k) \quad (6.2)$$

où  $\psi$  est la fonction de régularisation considérée,  $\Delta_x I_{rec}$  et  $\Delta_y I_{rec}$  sont les différences entre voisins selon les deux directions,  $I_{data}$  est l'image observée, et  $D$  est l'opérateur représentant le modèle de dégradation de l'image.

La variable auxiliaire  $b$  peut être définie selon deux approches :

- L'approche du «théorème de Geman et Reynolds étendu» [CHAR-94a, CHAR-94b] suppose la stricte concavité de  $\psi(\sqrt{u})$ , et définit  $b$  de telle façon que  $\psi$  s'écrit alors :

$$\psi(u) = \inf_b bu^2 + \xi(b) \quad (6.3)$$

avec  $b \in [0, 1]$ . Cette approche permet de définir l'algorithme ARTUR.

- L'approche des paires de Legendre [AUBE-94] suppose la stricte convexité de  $u^2 - \psi(u)$  et définit la variable auxiliaire  $b$  de telle sorte que :

$$\psi(u) = \inf_b (b - u)^2 + \xi(b) \quad (6.4)$$

avec  $b \in [0, +\infty]$ . Cette approche permet de définir l'algorithme LEGEND.

Charbonnier montre que les hypothèses sur la fonction  $\psi$  sont vérifiées en particulier par les fonctions satisfaisant les conditions de Charbonnier énoncées au § 5.1.4.

Le critère semi-quadratique vérifie alors les propriétés suivantes [CHAR-94a] :

- $E^*(I_{rec}, b)$  est quadratique (donc convexe) en  $I_{rec}$  à  $b$  fixé (et peut donc être manipulé au moyen de l'algèbre linéaire).
- $E^*(I_{rec}, b)$  est convexe en  $b$  à  $I_{rec}$  fixé et on connaît l'expression littérale de  $b$  réalisant le minimum.

Les algorithmes ARTUR et LEGEND exploitent ces propriétés de la régularisation semi-quadratique. La stratégie de minimisation consiste en une minimisation alternée de  $E^*$  en  $b$  à  $I_{rec}$  fixé, et en  $I_{rec}$  à  $b$  fixé :

- La minimisation en  $b$  à  $I_{rec}$  fixé est triviale puisqu'on connaît l'expression littérale de  $b$  à  $I_{rec}$  fixé.
- La minimisation en  $I_{rec}$  à  $b$  fixé est simplifiée puisque le critère est quadratique à  $b$  fixé. L'équation à résoudre est celle obtenue en annulant la dérivée du critère par rapport à  $I_{rec}$ .

## 6.2 Expression du problème dans le cadre des algorithmes ARTUR et LEGEND

Après avoir brièvement rappelé le principe de la régularisation semi-quadratique dans le paragraphe 6.1, nous proposons de réécrire la fonction d'énergie définie au § 5.3 sous une forme semi-quadratique.

### 6.2.1 Cas de l'algorithme ARTUR

Compte-tenu de l'expression semi-quadratique de  $\psi$  (équation 6.3), le terme de régularisation  $\Psi$  défini au § 5.3.2 s'écrit :

$$\Psi(I_{rec}) = \inf_{b_x, b_y, b_z} [\Psi^*(I_{rec}, b_x, b_y, b_z)] \quad (6.5)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Psi^* &= \sum_i \sum_j \sum_k b_y(i, j, k) \cdot (I_{rec}(i, j, k) - I_{rec}(i - 1, j, k))^2 + \xi(b_y(i, j, k)) \\ &+ \sum_i \sum_j \sum_k b_x(i, j, k) \cdot (I_{rec}(i, j, k) - I_{rec}(i, j - 1, k))^2 + \xi(b_x(i, j, k)) \\ &+ \sum_i \sum_j \sum_k b_z(i, j, k) \cdot (I_{rec}(i, j, k) - I_{rec}(i, j, k - 1))^2 + \xi(b_z(i, j, k)) \end{aligned} \quad (6.6)$$

où  $b_x$ ,  $b_y$  et  $b_z$  sont les variables auxiliaires. Nous introduisons  $\mathbf{b}_x$ ,  $\mathbf{b}_y$  et  $\mathbf{b}_z$ , les vecteurs obtenus par mise en colonne des variables auxiliaires, conformément à l'annexe B, et  $\mathbf{B}_x$ ,  $\mathbf{B}_y$  et  $\mathbf{B}_z$ , les matrices diagonales dont les diagonales sont formées des éléments de  $\mathbf{b}_x$ ,  $\mathbf{b}_y$  et  $\mathbf{b}_z$  respectivement.

En remarquant que si  $x$  est un vecteur et  $B$  une matrice diagonale on a :

$$\sum_k B(k, k)x(k)^2 = x^T B x \quad (6.7)$$

alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} \Psi^* &= \mathbf{I}_{rec}^T \Delta_x^T \mathbf{B}_x \Delta_x \mathbf{I}_{rec} + \mathbf{I}_{rec}^T \Delta_y^T \mathbf{B}_y \Delta_y \mathbf{I}_{rec} + \mathbf{I}_{rec}^T \Delta_z^T \mathbf{B}_z \Delta_z \mathbf{I}_{rec} \\ &+ \sum_k [\xi(\mathbf{b}_x(k)) + \xi(\mathbf{b}_y(k)) + \xi(\mathbf{b}_z(k))] \end{aligned} \quad (6.8)$$

La mise en œuvre de l'algorithme ARTUR nécessite :

- le calcul de  $\mathbf{I}_{rec}^n$  par la résolution de l'équation  $\nabla E = 0$  avec  $\mathbf{b}_x^n$ ,  $\mathbf{b}_y^n$  et  $\mathbf{b}_z^n$  fixés,

– le calcul de  $\mathbf{b}_x^{n+1}$ ,  $\mathbf{b}_y^{n+1}$  et  $\mathbf{b}_z^{n+1}$  en fonction de  $\mathbf{I}_{rec}^n$ .

Les expressions de  $\mathbf{b}_x^{n+1}$ ,  $\mathbf{b}_y^{n+1}$  et  $\mathbf{b}_z^{n+1}$  en fonction de  $\mathbf{I}_{rec}^n$  sont données par Charbonnier, et s'écrivent, pour  $\mathbf{b}_x^{n+1}$  par exemple :

$$(\mathbf{b}_x^{n+1})_k = \frac{\psi'[(\Delta_x \mathbf{I}_{rec}^n)_k]}{2 (\Delta_x \mathbf{I}_{rec}^n)_k} \quad (6.9)$$

et de même en  $y$  et en  $z$ .

Exprimons maintenant l'équation  $\nabla E^* = 0$ .

Le vecteur de dérivées partielles de  $\Psi^*$  par rapport aux éléments de  $\mathbf{I}_{rec}$  s'écrit alors :

$$\nabla \Psi^* = 2 [\Delta_x^T \mathbf{B}_x \Delta_x + \Delta_y^T \mathbf{B}_y \Delta_y + \Delta_z^T \mathbf{B}_z \Delta_z] \mathbf{I}_{rec} \quad (6.10)$$

Quant au vecteur de dérivées partielles du terme d'attache aux données, il demeure le même qu'à l'équation 5.52. Finalement, on peut exprimer le vecteur  $\nabla \mathbf{E}^*$  des dérivées partielles de  $E^*$  par rapport aux éléments de  $\mathbf{I}_{rec}$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{E}^* &= 2 [\mathbf{D}_x^T \mathbf{D}_x + \mathbf{D}_y^T \mathbf{D}_y + \mathbf{D}_z^T \mathbf{D}_z + \lambda (\Delta_x^T \mathbf{B}_x \Delta_x + \Delta_y^T \mathbf{B}_y \Delta_y + \Delta_z^T \mathbf{B}_z \Delta_z)] \mathbf{I}_{rec} \\ &\quad - 2 [\mathbf{D}_x^T \mathbf{I}_x + \mathbf{D}_y^T \mathbf{I}_y + \mathbf{D}_z^T \mathbf{I}_z] \end{aligned} \quad (6.11)$$

L'équation en  $\mathbf{I}_{rec}$  à résoudre est donc :

$$\begin{aligned} &[\mathbf{D}_x^T \mathbf{D}_x + \mathbf{D}_y^T \mathbf{D}_y + \mathbf{D}_z^T \mathbf{D}_z + \lambda (\Delta_x^T \mathbf{B}_x \Delta_x + \Delta_y^T \mathbf{B}_y \Delta_y + \Delta_z^T \mathbf{B}_z \Delta_z)] \mathbf{I}_{rec} \\ &= \\ &[\mathbf{D}_x^T \mathbf{I}_x + \mathbf{D}_y^T \mathbf{I}_y + \mathbf{D}_z^T \mathbf{I}_z] \end{aligned} \quad (6.12)$$

On a donc une expression linéaire de la forme  $\mathbf{A} \mathbf{I}_{rec}^{n+1} = \mathbf{c}$  où  $\mathbf{c}$  ne dépend que des données donc est constante, et où  $\mathbf{A}$  dépend de  $\mathbf{I}_{rec}^n$  et change donc à chaque itération.

L'intérêt de cette écriture dépend en partie de l'inversibilité de la matrice  $\mathbf{A}$ . Nous remettons cette étude à plus tard et proposons dans le paragraphe suivant de suivre la même démarche que celle adoptée dans ce paragraphe, cette fois dans le cadre de l'algorithme LEGEND.

## 6.2.2 Cas de l'algorithme LEGEND

Le principe est le même que pour ARTUR, mais avec des expressions légèrement différentes.

$\mathbf{b}_x^{n+1}$  s'exprime cette fois [CHAR-94a] :

$$(\mathbf{b}_x^{n+1})_k = [1 - \frac{\psi'[(\Delta_x \mathbf{I}_{rec}^n)_k]}{2 (\Delta_x \mathbf{I}_{rec}^n)_k}] (\Delta_x \mathbf{I}_{rec}^n)_k \quad (6.13)$$

Le terme de régularisation  $\Psi^*$  s'écrit dans ce cas :

$$\begin{aligned}
 \Psi^* &= \sum_i \sum_j \sum_k (b_y(i, j, k) - (I_{rec}(i, j, k) - I_{rec}(i - 1, j, k)))^2 + \xi(b_y(i, j, k)) \\
 &+ \sum_i \sum_j \sum_k (b_x(i, j, k) - (I_{rec}(i, j, k) - I_{rec}(i, j - 1, k)))^2 + \xi(b_x(i, j, k)) \\
 &+ \sum_i \sum_j \sum_k (b_z(i, j, k) - (I_{rec}(i, j, k) - I_{rec}(i, j, k - 1)))^2 + \xi(b_z(i, j, k))
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

soit, avec les notations matricielles :

$$\begin{aligned}
 \Psi^* &= (\mathbf{b}_x - \Delta_x \mathbf{I}_{rec})^T (\mathbf{b}_x - \Delta_x \mathbf{I}_{rec}) + (\mathbf{b}_y - \Delta_y \mathbf{I}_{rec})^T (\mathbf{b}_y - \Delta_y \mathbf{I}_{rec}) \\
 &+ (\mathbf{b}_z - \Delta_z \mathbf{I}_{rec})^T (\mathbf{b}_z - \Delta_z \mathbf{I}_{rec}) + \sum_k [\xi(\mathbf{b}_x(k)) + \xi(\mathbf{b}_y(k)) + \xi(\mathbf{b}_z(k))]
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

Le vecteur de dérivées partielles de  $\Psi^*$  par rapport à  $\mathbf{I}_{rec}$  est donc :

$$\nabla \Psi^* = 2 [\Delta_x^T \Delta_x \mathbf{I}_{rec} - \Delta_x^T \mathbf{b}_x + \Delta_y^T \Delta_y \mathbf{I}_{rec} - \Delta_y^T \mathbf{b}_y + \Delta_z^T \Delta_z \mathbf{I}_{rec} - \Delta_z^T \mathbf{b}_z] \tag{6.16}$$

d'où l'expression de  $\nabla \mathbf{E}^*$  :

$$\begin{aligned}
 \nabla \mathbf{E}^* &= 2 [\mathbf{D}_x^T \mathbf{D}_x + \mathbf{D}_y^T \mathbf{D}_y + \mathbf{D}_z^T \mathbf{D}_z + \lambda (\Delta_x^T \Delta_x + \Delta_y^T \Delta_y + \Delta_z^T \Delta_z)] \mathbf{I}_{rec} \\
 &- 2 [\mathbf{D}_x^T \mathbf{I}_x + \mathbf{D}_y^T \mathbf{I}_y + \mathbf{D}_z^T \mathbf{I}_z + \lambda (\Delta_x^T \mathbf{b}_x + \Delta_y^T \mathbf{b}_y + \Delta_z^T \mathbf{b}_z)]
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

Finalement l'équation  $\nabla \mathbf{E}^* = 0$  s'exprime :

$$\begin{aligned}
 &[\mathbf{D}_x^T \mathbf{D}_x + \mathbf{D}_y^T \mathbf{D}_y + \mathbf{D}_z^T \mathbf{D}_z + \lambda (\Delta_x^T \Delta_x + \Delta_y^T \Delta_y + \Delta_z^T \Delta_z)] \mathbf{I}_{rec} \\
 &= \\
 &[\mathbf{D}_x^T \mathbf{I}_x + \mathbf{D}_y^T \mathbf{I}_y + \mathbf{D}_z^T \mathbf{I}_z + \lambda (\Delta_x^T \mathbf{b}_x + \Delta_y^T \mathbf{b}_y + \Delta_z^T \mathbf{b}_z)]
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

Là encore, on a donc une expression linéaire de la forme :

$$\mathbf{A} \mathbf{I}_{rec}^{n+1} = \mathbf{c} \tag{6.19}$$

où cette fois  $\mathbf{A}$  est constant pour toutes les itérations, et  $\mathbf{c}$  dépend de  $\mathbf{I}_{rec}^n$  et change donc à chaque itération.

Si la matrice  $\mathbf{A}$  est inversible, alors  $\mathbf{A}^{-1}$  pourra être calculée une fois pour toutes au début de l'algorithme et on n'aura plus qu'à calculer  $\mathbf{I}_{rec}^{n+1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{c}$ .

### 6.2.3 Comparaison des deux approches

Dans les deux cas, la résolution de l'équation  $\nabla \mathbf{E} = 0$ , les variables auxiliaires étant fixées, se ramène à la résolution d'un système linéaire de la forme  $\mathbf{A} \mathbf{I}_{rec} = \mathbf{c}$ . On peut d'ores et déjà voir que la forme de l'algorithme LEGEND est plus favorable, puisque dans ce cas la matrice  $A$ , si elle est régulière, pourra être calculée et inversée une fois pour toutes les itérations, alors que dans le cas de l'algorithme ARTUR, il faudra calculer et inverser la matrice à chaque itération. Or l'inversion d'une matrice est une opération problématique, en particulier dans le cas de matrices de grandes dimensions, ce qui est le cas en traitement d'images bidimensionnelles et *a fortiori* tridimensionnelles. Le problème d'inversion est cependant facilité dans certains cas si la matrice est creuse ou si elle peut être mise sous une forme favorable (voir par exemple [BLAN-94, NG-00]).

D'autre part, il convient donc de se poser la question, dans chacun des cas, de la régularité de la matrice  $A$ . Dans le cas d'ARTUR, le fait que la matrice  $A$  change à chaque itération comporte un autre inconvénient : l'étude de son inversibilité est moins évidente. Dans notre cas, nous avons vu (§ 5.7.1) que la matrice  $\mathbf{D}_x^T \mathbf{D}_x + \mathbf{D}_y^T \mathbf{D}_y + \mathbf{D}_z^T \mathbf{D}_z$  avait des valeurs propres nulles ; l'inversibilité de  $A$  dépend donc de la position des valeurs propres de  $\Delta_x^T \mathbf{B}_x \Delta_x + \Delta_y^T \mathbf{B}_y \Delta_y + \Delta_z^T \mathbf{B}_z \Delta_z$ , or celle-ci dépend directement des variables auxiliaires, donc il n'est pas possible de conclure.

Dans le cas de LEGEND, la matrice  $A$  a pour valeurs propres les éléments de la matrice diagonale  $\mathbf{H}_{xyz}$  (§ 5.7.2.1), dont nous avons montré qu'ils n'étaient jamais nuls.  $A$  est donc inversible, et peut être inversée une fois pour toutes. Ces considérations nous poussent donc à nous intéresser de plus près à l'algorithme LEGEND.

De plus, on sait d'une part que  $D_x$  et  $\Delta_x$  sont circulantes, et d'autre part, que si  $C$  est une matrice circulante, alors  $C^T C$  est également circulante. La somme de matrices circulantes étant également circulante, alors  $A_x = D_x^T D_x + \lambda \Delta_x^T \Delta_x$  est circulante ; le même raisonnement peut être appliqué à  $A_y$  et  $A_z$  définies de façon similaire. On sait que les matrices circulantes ont des propriétés intéressantes dans le domaine de Fourier, c'est pourquoi nous proposons de poursuivre cette étude dans le domaine spectral dans le paragraphe 6.3.

## 6.3 Expression de LEGEND dans le domaine spectral

L'équation 6.19 peut s'écrire de façon équivalente :

$$\mathbf{F}_x \mathbf{F}_y \mathbf{F}_z \mathbf{A} \mathbf{F}_x^{-1} \mathbf{F}_y^{-1} \mathbf{F}_z^{-1} \mathbf{J}_{rec}^{n+1} = \mathbf{F}_x \mathbf{F}_y \mathbf{F}_z \mathbf{c} \quad (6.20)$$

où  $\mathbf{J}_{rec}^{n+1}$  est la T.F.D. de  $\mathbf{I}_{rec}^{n+1}$ .

Or, compte-tenu de la commutativité des opérateurs (propriété 7 de l'annexe B), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_x \mathbf{F}_y \mathbf{F}_z \mathbf{A} \mathbf{F}_x^{-1} \mathbf{F}_y^{-1} \mathbf{F}_z^{-1} &= \mathbf{F}_x \mathbf{A} \mathbf{F}_x^{-1} + \mathbf{F}_y \mathbf{A} \mathbf{F}_y^{-1} + \mathbf{F}_z \mathbf{A} \mathbf{F}_z^{-1} \\ &= \mathbf{H}_{xyz} \end{aligned} \quad (6.21)$$

où  $\mathbf{H}_{xyz}$  est telle que définie au § 5.7.2.1. Or, nous avons montré (§ 5.7.2.1) que  $\mathbf{H}_{xyz}$  était diagonale et inversible.

L'équation 6.20 peut donc être résolue par des divisions scalaires dans le domaine de Fourier :

$$\mathbf{J}_{rec}^{n+1}(k) = \frac{(\mathbf{F}_x \mathbf{F}_y \mathbf{F}_z \mathbf{c})(k)}{\mathbf{H}_{xyz}(k, k)} \quad (6.22)$$

Remarque : dans le cas de l'algorithme ARTUR, on peut également exprimer l'équation  $\mathbf{A} \mathbf{I}_{rec}^{n+1} = \mathbf{c}$  dans le domaine de Fourier, mais on peut facilement montrer que les matrices de la forme  $\Delta_x^T B_x \Delta_x$  ne sont pas circulantes (à moins d'avoir  $B_x = B \cdot Id$  avec  $B$  une constante, ce qui n'est pas le cas dans le cas général) et donc il n'existe pas d'expression diagonale pour  $\mathbf{A}$  dans le domaine de Fourier. C'est pourquoi l'algorithme LEGEND est beaucoup mieux adapté à la résolution de notre problème dans le domaine de la T.F.D. Charbonnier aboutit d'ailleurs à la même conclusion lors de la résolution dans le domaine de la Transformée en Ondelettes (T.O.), bien que pour des raisons différentes : il réalise un seuillage sur les valeurs de la matrice  $\mathbf{A}$  dans le domaine de la T.O., et dans le cas d'ARTUR, comme la matrice change à chaque itération, il est nécessaire d'ajuster le seuil à chaque fois, alors que dans le cas de LEGEND cette matrice est précalculée donc le problème du choix du seuil ne se pose qu'une fois pour toutes.

Il reste à étudier le terme  $\mathbf{F}_x \mathbf{F}_y \mathbf{F}_z \mathbf{c}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_x \mathbf{F}_y \mathbf{F}_z \mathbf{c} &= \mathbf{F}_x \mathbf{D}_x^T \mathbf{F}_x^{-1} \mathbf{J}_x + \mathbf{F}_y \mathbf{D}_y^T \mathbf{F}_y^{-1} \mathbf{J}_y + \mathbf{F}_z \mathbf{D}_z^T \mathbf{F}_z^{-1} \mathbf{J}_z \\ &+ \lambda [\mathbf{F}_x \Delta_x^T \mathbf{F}_x^{-1} \beta_x + \mathbf{F}_y \Delta_y^T \mathbf{F}_y^{-1} \beta_y + \mathbf{F}_z \Delta_z^T \mathbf{F}_z^{-1} \beta_z] \end{aligned} \quad (6.23)$$



où  $\beta_x, \beta_y$  et  $\beta_z$  sont les T.F.D. respectives de  $\mathbf{b}_x, \mathbf{b}_y$  et  $\mathbf{b}_z$ . Or, comme  $\Delta_x$  est circulante, alors  $F_x \Delta_x^T F_x^{-1}$  est diagonale et son élément courant s'exprime comme la T.F.D. de la suite  $\Delta_x(m-n)$  pour  $m-n$  variant de  $-\frac{N_x}{2}$  à  $\frac{N_x}{2}-1$  (à un facteur  $N_x$  près), ce qui donne :

$$(F_x \Delta_x^T F_x^{-1})(m, m) = 1 - e^{j2\pi \frac{m}{N_x}} \quad (6.24)$$

On note  $P_x$  cette matrice, dont on déduit également les matrices  $P_y, P_z, \mathbf{P}_x, \mathbf{P}_y$  et  $\mathbf{P}_z$  conformément aux notations habituelles. En introduisant également  $\mathbf{J}_{xyz}$  dans l'équation 6.23, on obtient finalement l'expression suivante pour  $\mathbf{J}_{rec}^{n+1}$  :

$$\mathbf{J}_{rec}^{n+1}(k) = \frac{\mathbf{J}_{xyz}(k) + \lambda [\mathbf{P}_x(k, k)\beta_x^{n+1}(k) + \mathbf{P}_y(k, k)\beta_y^{n+1}(k) + \mathbf{P}_z(k, k)\beta_z^{n+1}(k)]}{\mathbf{H}_{xyz}(k, k)} \quad (6.25)$$

Finalement, l'algorithme LEGEND appliqué à notre problème consiste à itérer les étapes suivantes :

- Calculer  $\mathbf{b}_x^{n+1}, \mathbf{b}_y^{n+1}, \mathbf{b}_z^{n+1}$  selon l'expression 6.13.
- Calculer les T.F.D.  $\beta_x^{n+1}, \beta_y^{n+1}, \beta_z^{n+1}$  de  $\mathbf{b}_x^{n+1}, \mathbf{b}_y^{n+1}, \mathbf{b}_z^{n+1}$ .
- Calculer  $\mathbf{J}_{rec}^{n+1}$  selon l'expression :

$$(\mathbf{J}_{rec}^{n+1})_k = (K_1)_k + (K_2)_k(\beta_x^{n+1})_k + (K_3)_k(\beta_y^{n+1})_k + (K_4)_k(\beta_z^{n+1})_k \quad (6.26)$$

avec :

$$\begin{aligned} (K_1)_k &= \frac{(\mathbf{J}_{xyz})_k}{(\mathbf{H}_{xyz})_{k,k}} \\ (K_2)_k &= \lambda \frac{(\mathbf{P}_x)_{k,k}}{(\mathbf{H}_{xyz})_{k,k}} \\ (K_3)_k &= \lambda \frac{(\mathbf{P}_y)_{k,k}}{(\mathbf{H}_{xyz})_{k,k}} \\ (K_4)_k &= \lambda \frac{(\mathbf{P}_z)_{k,k}}{(\mathbf{H}_{xyz})_{k,k}} \end{aligned} \quad (6.27)$$

- Calculer la T.F.D. inverse  $\mathbf{I}_{rec}^{n+1}$  de  $\mathbf{J}_{rec}^{n+1}$ .

Cet algorithme est représenté sous forme schématique sur la figure 6.1, pour comparaison avec le schéma de la figure 5.3.

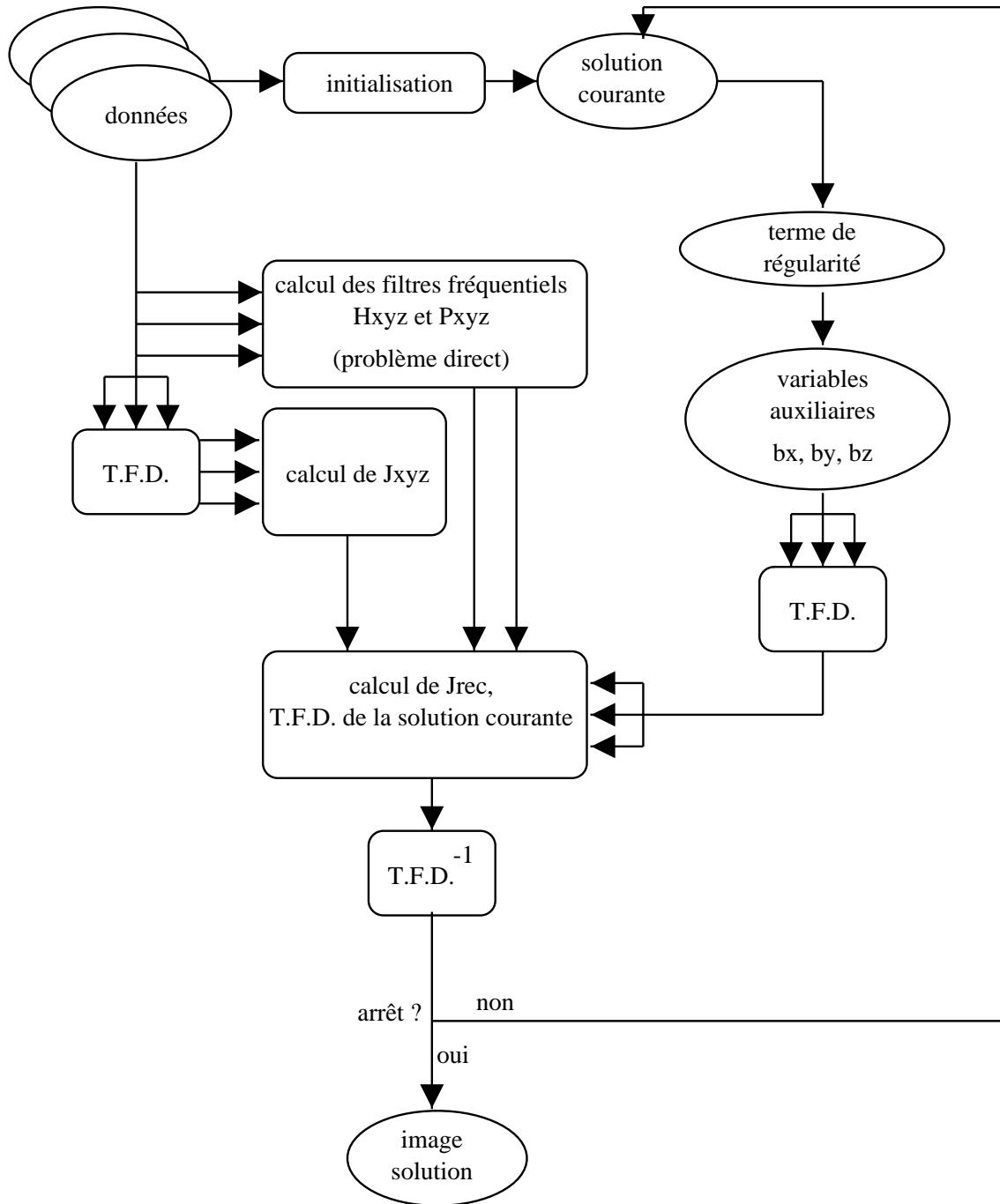


FIG. 6.1 – Schéma de principe de l'algorithme

## Conclusion

*Dans ce chapitre, nous avons proposé une variante pour la minimisation de la fonction d'énergie proposée au chapitre 5, qui s'appuie sur la théorie de la régularisation semi-quadratique. Nous avons en particulier étudié l'adaptation des algorithmes AR-TUR et LEGEND ([CHAR-94b]) au problème qui nous intéresse ici, et il s'est avéré que l'algorithme LEGEND permettait une écriture élégante et une mise en œuvre efficace de la résolution du problème, grâce à l'exploitation des propriétés de notre problème dans le domaine de la T.F.D. Dans le chapitre suivant, nous proposons une évaluation comparative des deux méthodes, avant d'évaluer les résultats tant sur des images synthétiques que sur des données réelles.*

---

## CHAPITRE 7

# Evaluation et validation de la reconstruction

## Introduction

*Ce chapitre se compose de trois parties principales : dans la première, nous proposons une comparaison des deux algorithmes détaillés dans les chapitres 5 et 6. La seconde partie consiste en une évaluation détaillée de la reconstruction sur des acquisitions anisotropes simulées à partir d'une image synthétique. Enfin, la troisième concerne la validation de la méthode sur des volumes réels, pour lesquels nous disposons pour l'instant de deux acquisitions complémentaires.*

## 7.1 Comparaison des deux algorithmes de reconstruction

Nous avons étudié dans les chapitres 5 et 6 deux algorithmes permettant de trouver le minimum de la fonction d'énergie présentée au chapitre 5, minimum qui représente la solution du problème de reconstruction à partir de plusieurs volumes complémentaires. Nous proposons ici de comparer ces algorithmes en termes de temps de calcul, de rapidité de convergence, de comportement au fil des itérations, et de sensibilité à l'initialisation.

La figure 7.1 montre l'évolution de la solution en fonction du nombre d'itérations, pour l'image *Rectangles* (cf. annexe A). La figure 7.2 montre l'évolution de l'énergie et de chacun de ses termes (fidélité aux données et régularisation) au fur et à mesure des itérations. Ces résultats ont été obtenus pour une initialisation nulle (image uniforme

de niveau de gris à valeur nulle), avec les paramètres  $\lambda = 10$  et  $\alpha = 2$ .

Dans le cas du gradient conjugué, on sait que la solution à l'issue de la première itération, dans le cas d'une initialisation nulle, correspond à la solution non régularisée, ce qu'on peut vérifier aisément visuellement sur la figure 7.1. A l'issue de cette première itération, le terme d'attache aux données est donc minimal et le terme de régularisation est «quelconque»; au fur et à mesure des itérations, le terme de régularisation influe plus sur la solution, donc on tend vers une solution plus «lisse». Cette évolution est confirmée par l'examen des termes d'énergie sur la figure 7.2: le terme d'attache aux données est minimal à la première itération et augmente ensuite, lorsque le terme de régularisation diminue pour assurer la convergence du terme d'énergie globale.

Pour ce qui est de LEGEND, on sait qu'il s'agit d'un algorithme à introduction progressive des discontinuités [CHAR-94b]. Avec une initialisation nulle, la solution à l'issue de la première itération correspond à la solution avec régularisation quadratique, généralement assez éloignée des données (d'où une valeur importante de l'énergie de régularisation, figure 7.2). Ensuite, lors de l'introduction des discontinuités on constate que l'énergie d'attache aux données diminue alors que l'énergie de régularisation augmente pour permettre la convergence de l'algorithme vers le minimum de l'énergie globale.

Sur cet exemple, on constate que le gradient conjugué converge plus «rapidement» - du moins en termes de nombre d'itérations - que LEGEND. Cependant, cela dépend des données et des paramètres: il arrive également que LEGEND converge plus rapidement que le gradient conjugué. A titre d'exemple, nous montrons sur la figure 7.3 les résultats des première et dernière itérations des deux algorithmes, pour  $\lambda = 10$  et  $\alpha = 2$  et une initialisation nulle également, sur une coupe d'un volume d'A.R.M. 3D de l'aorte. L'évolution de l'énergie est représentée sur la figure 7.4: on peut vérifier que dans ce cas, l'algorithme LEGEND converge plus rapidement que le gradient conjugué.

La rapidité de convergence fait intervenir non seulement le nombre d'itérations, mais également le temps de calcul nécessaire pour accomplir ces itérations. Nous avons donc comparé les temps de calcul des deux algorithmes. Il convient de noter que les conclusions que nous en tirerons sont à prendre en relatif et non dans l'absolu: en effet, les algorithmes ont été implantés sous *Matlab*, qui est un langage non compilé et ne peut donc prétendre à rivaliser avec une implantation compilée et optimisée. La figure 7.5 montre le temps de calcul en fonction du nombre d'itérations dans le premier cas présenté dans ce paragraphe. La figure 7.6 montre l'énergie en fonction du temps de calcul, dans le même cas que précédemment.

On constate que le temps de calcul du gradient conjugué augmente de façon linéaire tant que l'énergie diminue, et qu'une fois que le minimum est atteint, le temps de calcul

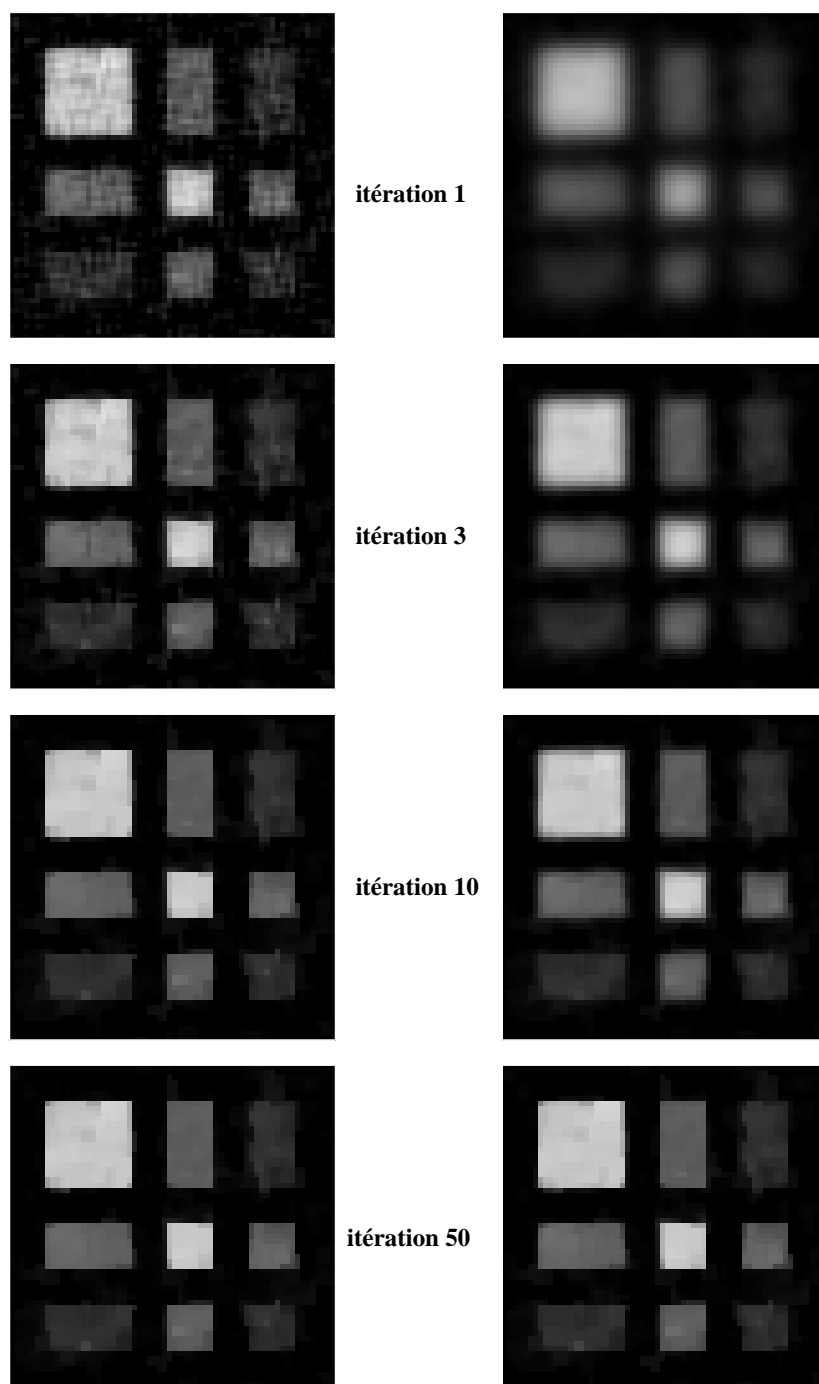


FIG. 7.1 – Evolution de la solution avec le gradient conjugué (à gauche) et avec LEGEND (à droite); en haut, à l'issue de la première itération, en bas, à convergence.

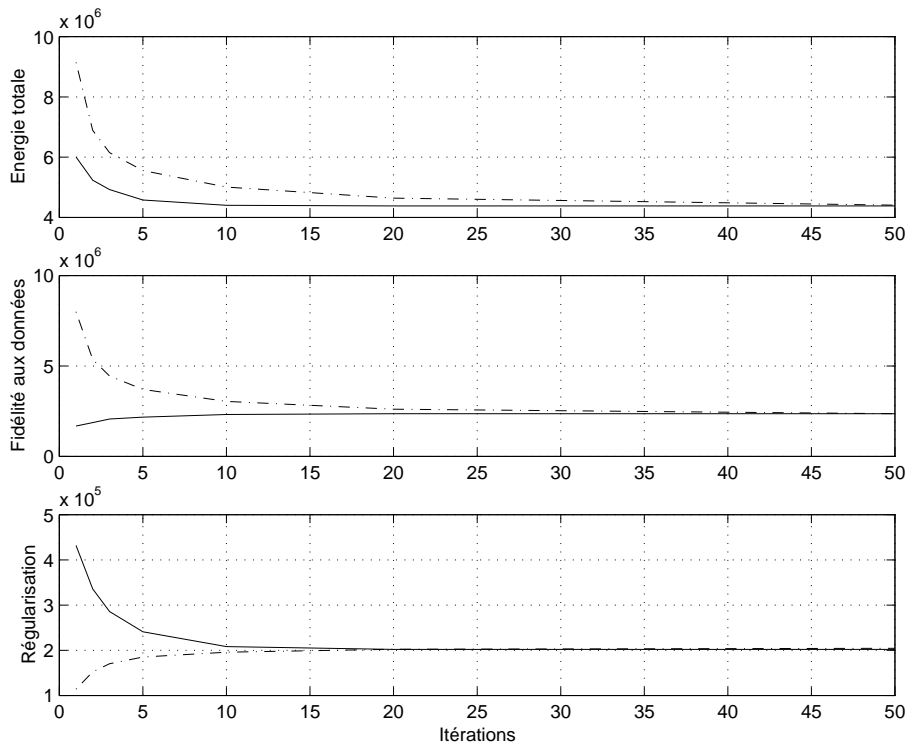


FIG. 7.2 – Evolution de l'énergie totale et de ses termes de fidélité aux données et de régularisation, avec le gradient conjugué (en trait plein) et avec LEGEND (en pointillés), au fil des itérations.

n'évolue plus. Pour LEGEND, le temps de calcul est linéaire également, mais cette fois indépendamment de l'évolution de l'énergie. Si l'on compare les temps de calcul dans la zone linéaire, c'est-à-dire avant atteinte du minimum par le gradient conjugué, on constate que LEGEND est plus rapide, d'un facteur supérieur à 6.

La courbe traçant l'énergie en fonction du temps de calcul montre que, même si dans ce cas LEGEND a besoin de plus d'itérations pour atteindre le minimum, la rapidité relative de ces itérations par rapport à celles du gradient conjugué fait que LEGEND est finalement plus efficace que le gradient conjugué. Ces résultats sont évidemment confirmés dans les cas «favorables» à LEGEND (par exemple dans le cas de la coupe de l'aorte).

Enfin, bien qu'une initialisation nulle convienne dans tous les cas puisqu'elle ne nécessite aucune connaissance *a priori* sur la solution, on peut se pencher sur l'influence de l'initialisation sur la convergence. On peut vérifier que si l'on initialise avec la solution non régularisée (que l'on peut calculer en fonction des données), le gradient

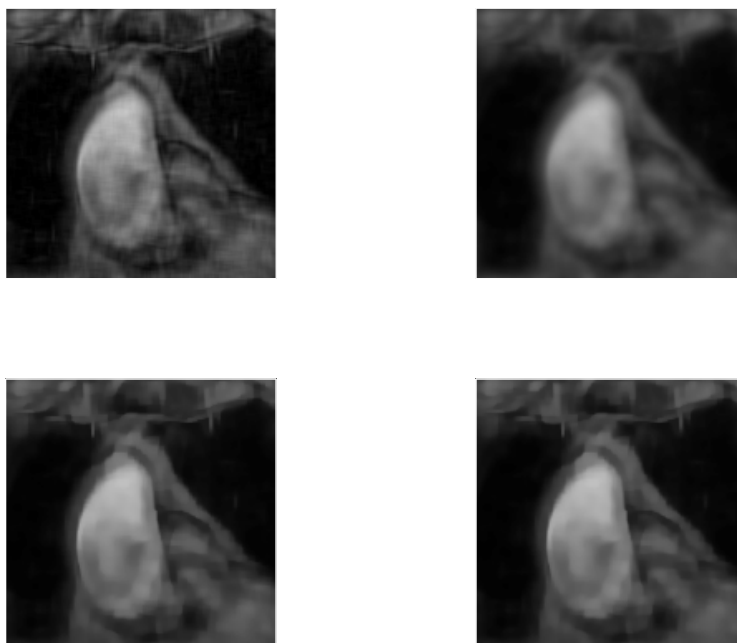


FIG. 7.3 – *Evolution de la solution avec le gradient conjugué (à gauche) et avec LEGEND (à droite), au fil des itérations : en haut, à l'issue de la première itération ; en bas, à convergence. (Coupe d'une image de l'aorte)*

conjugué «gagne» une itération ; en revanche LEGEND converge plus difficilement que dans le cas d'une initialisation nulle. Si au contraire on initialise avec la solution régularisée de Tikhonov (que l'on peut également calculer à partir des données), LEGEND démarre avec une énergie plus faible qu'avec initialisation nulle, et le gradient conjugué converge aussi bien que dans les autres cas. Si l'on initialise avec la moyenne des deux acquisitions, les deux algorithmes se comportent de façon satisfaisante : l'énergie est plus faible à la première itération, puis la convergence est semblable au cas de l'initialisation nulle. Enfin, nous avons également testé les algorithmes avec une initialisation aléatoire (distribution gaussienne des niveaux de gris) : les deux algorithmes convergent vers le minimum global, mais LEGEND beaucoup plus lentement cette fois.

D'après tous ces tests, le gradient conjugué semble légèrement moins sensible à l'initialisation que LEGEND, en revanche en termes de temps de calcul LEGEND s'avère presque toujours plus rapide à atteindre la solution stable (exception faite de l'initialisation aléatoire). En conclusion, il apparaît raisonnable de toujours initialiser les algorithmes soit avec une image uniformément nulle, soit avec la moyenne des acquisitions.



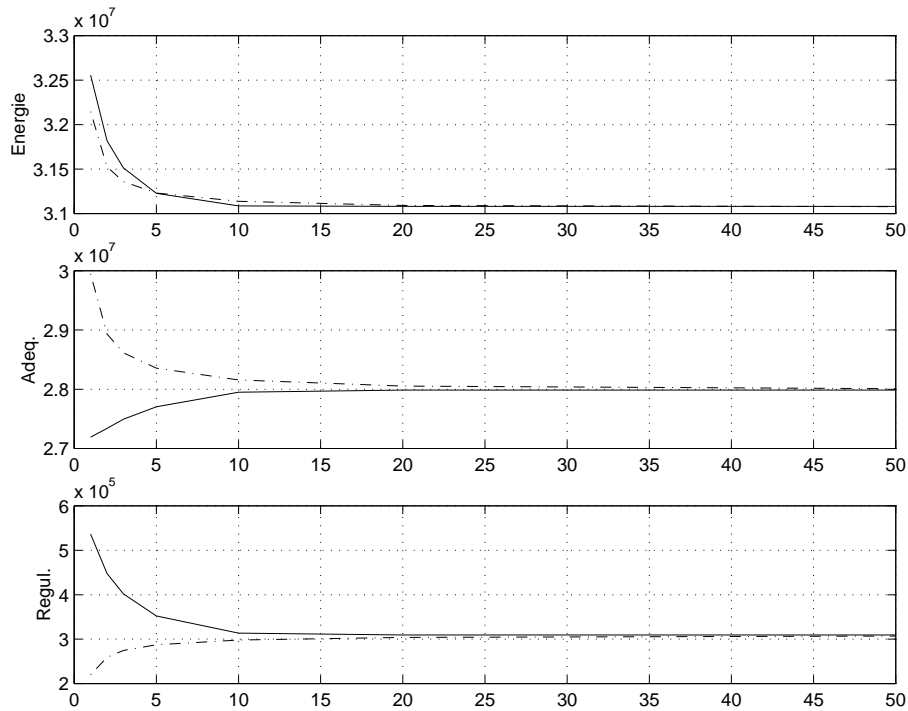


FIG. 7.4 – Evolution de l'énergie totale et de ses termes de fidélité aux données et de régularisation, avec le gradient conjugué (en trait plein) et avec LEGEND (en pointillés), au fil des itérations. (Coupe d'une image de l'aorte)

Finalement, si l'on fait exception des quelques cas marginaux entrevus précédemment, l'algorithme LEGEND apporte plusieurs améliorations à l'algorithme du gradient conjugué :

- du point de vue informatique, sa mise en œuvre est beaucoup plus simple que celle du gradient conjugué, grâce aux simplifications rendues possibles par le passage dans le domaine spectral ;
- sa convergence est meilleure que celle du gradient conjugué, si l'on tient compte des temps de calcul et non des nombres d'itérations ;
- de plus, son comportement à introduction progressive des discontinuités n'est pas dénué d'intérêt.

On peut émettre une réserve cependant, outre celle concernant la sensibilité à l'initialisation : les algorithmes à régularisation semi-quadratique ne peuvent théoriquement s'appliquer qu'à une certaine classe de fonctions de régularisation. Cependant,

## 7.1 Comparaison des deux algorithmes de reconstruction

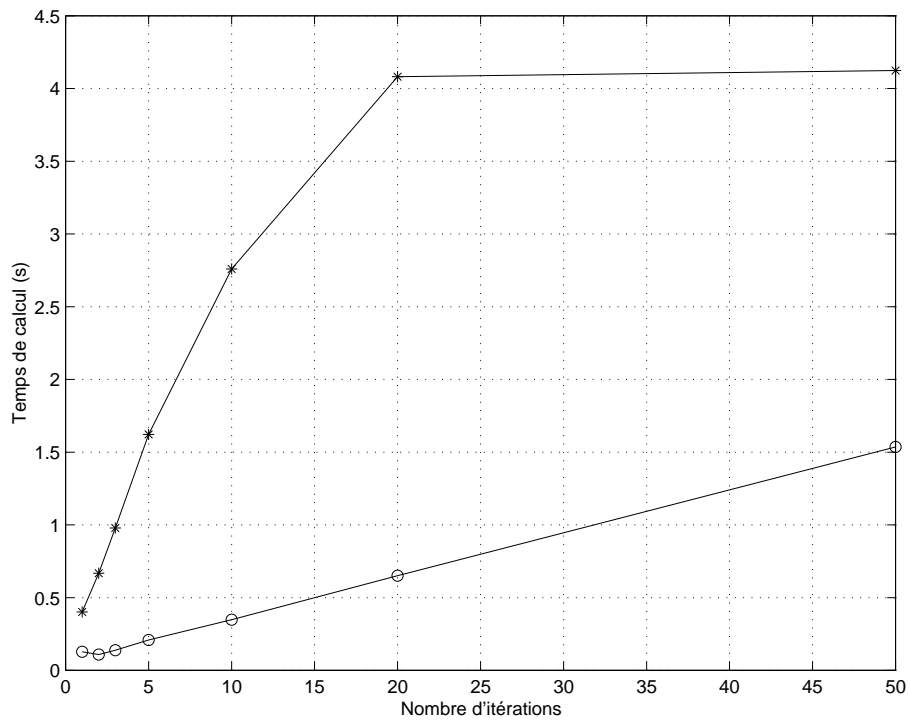


FIG. 7.5 – Evolution du temps de calcul en fonction du nombre d'itérations, avec le gradient conjugué (\*) et avec LEGEND (o).

certain auteurs se penchent sur une généralisation de ces algorithmes à d'autres classes de fonctions (voir par exemple [NIKO-01]).

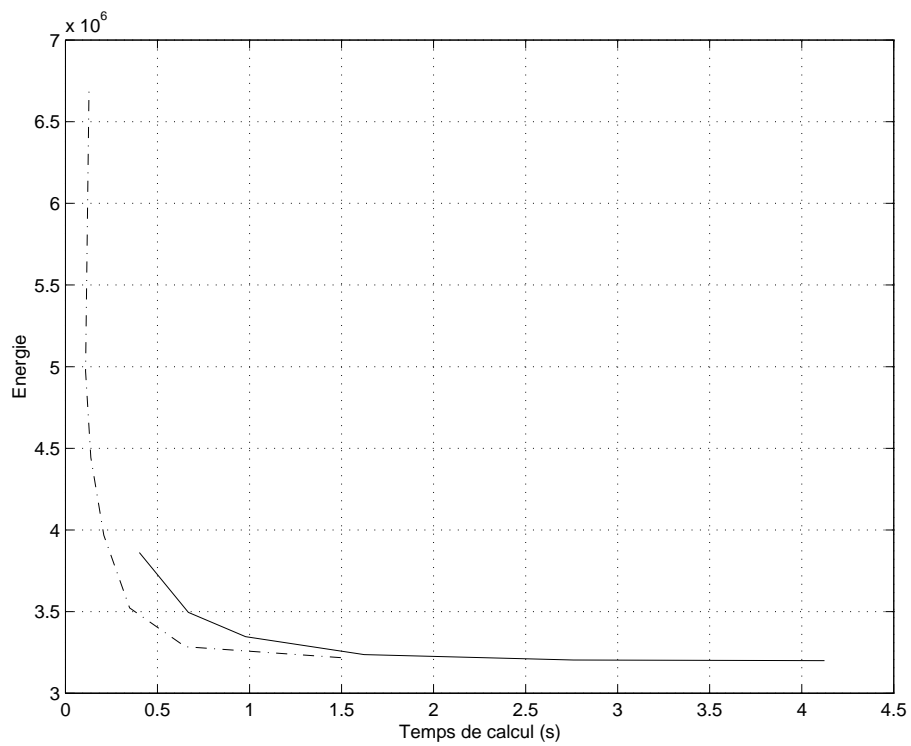


FIG. 7.6 – Evolution de l'énergie totale, avec le gradient conjugué (en traits pleins) et avec LEGEND (en pointillés), en fonction du temps de calcul.

## 7.2 Evaluation de la reconstruction

Dans cette partie, nous nous proposons d'évaluer la reconstruction sur une image synthétique bidimensionnelle. Pour cela, nous nous intéressons à la fois à l'image et à sa T.F.D. (toutes les T.F.D. présentées dans cette partie sont représentées en module et en échelle logarithmique, avec la même dynamique d'affichage afin de faciliter la comparaison visuelle).

Nous travaillons ici sur les images *Rectangles* telles que définies dans l'annexe A.

### 7.2.1 Reconstruction non régularisée

Nous nous proposons de vérifier ici le résultat établi au § 5.7.1, qui caractérisait la solution non régularisée, et de le commenter au vu des images.

La figure 7.7 présente le résultat de la reconstruction non régularisée.

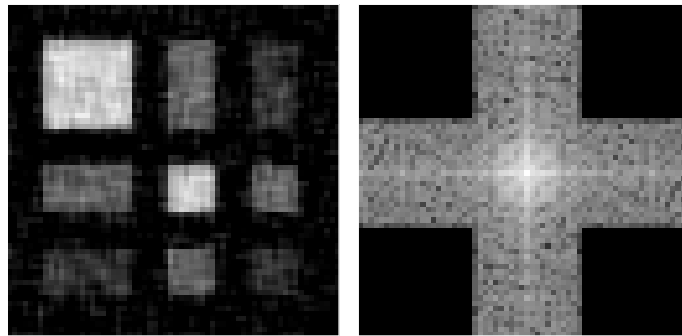


FIG. 7.7 – *A gauche, le résultat de la reconstruction non régularisée. A droite, sa T.F.D.*

La comparaison de l'image de la T.F.D. avec les T.F.D. des images sous-résolues (figures A.4 et A.5) est tout à fait conforme au résultat théorique évoqué précédemment, à savoir que la T.F.D. de l'image reconstruite sans régularisation est formée :

- des coefficients de la T.F.D. de l'image sous-résolue selon  $x$ , si ceux-ci sont à l'extérieur du support de la T.F.D. de l'image sous-résolue selon  $y$  ;
- des coefficients de la T.F.D. de l'image sous-résolue selon  $y$ , si ceux-ci sont à l'extérieur du support de la T.F.D. de l'image sous-résolue selon  $x$  ;
- de la moyenne des deux coefficients, au centre du plan de Fourier où les supports se superposent ;

- de coefficients nuls ailleurs.

Ainsi, aucune information de haute fréquence perdue dans le processus de sous-échantillonnage n'est retrouvée ou estimée, et le bruit est conservé : cela montre bien la nécessité d'une régularisation.

## 7.2.2 Reconstruction avec régularisation quadratique

Nous proposons maintenant d'évaluer le résultat de la régularisation quadratique (ou de Tikhonov), dont la caractéristique est de lisser l'image, mais sans en préserver les discontinuités.

Le résultat est présenté sur la figure 7.8.

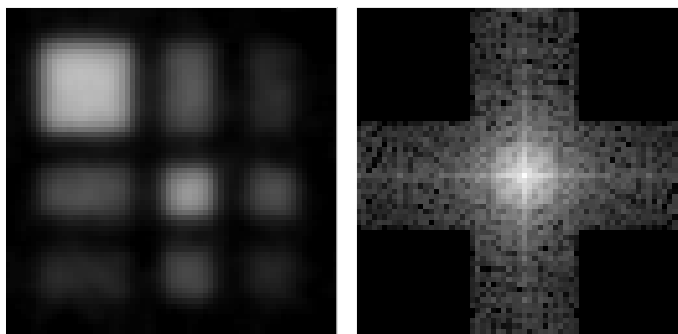


FIG. 7.8 – *A gauche, le résultat de la reconstruction avec régularisation quadratique. A droite, sa T.F.D.*

On voit aisément sur l'image que si le bruit a bien été supprimé, les contours ont également été fortement lissés, ce qui montre la nécessité d'une régularisation préservant les discontinuités. La T.F.D. confirme ces affirmations : en effet, aucune information de haute fréquence n'a été introduite, et au contraire il apparaît que les coefficients pour lesquelles on dispose d'informations dans l'une ou l'autre des acquisitions (ou les deux), ont subi un filtrage passe-bas.

### 7.2.3 Reconstruction régularisée : étude des hyperparamètres

Dans un premier temps, nous proposons une évaluation visuelle des résultats obtenus en fonction des valeurs des paramètres, en séparant l'influence de  $\lambda$  et celle de  $\alpha$ .

Le paramètre  $\lambda$  permet de doser l'influence de la régularisation par rapport au critère d'attache aux données. La figure 7.9 présente trois images obtenues par reconstruction à  $\alpha$  constant et avec des valeurs différentes de  $\lambda$ . On peut vérifier que les contours sont correctement préservés quel que soit  $\lambda$  et que plus  $\lambda$  est grand, plus le bruit est lissé.

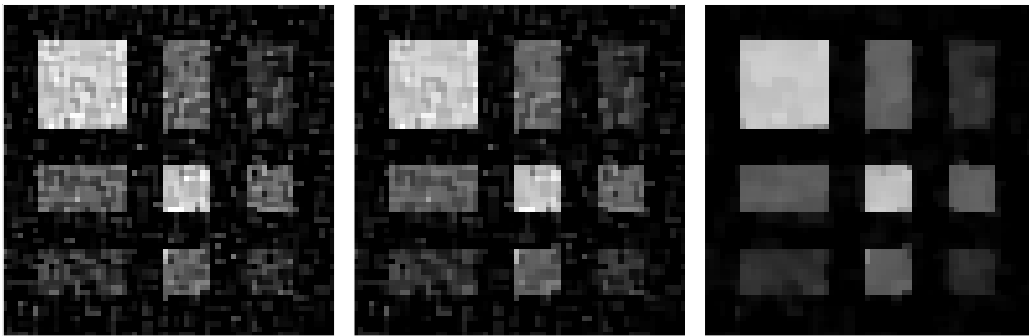


FIG. 7.9 – Influence du paramètre  $\lambda$  : trois images obtenues par reconstruction à  $\alpha$  constant ( $\alpha = 2$ ) et avec à gauche  $\lambda = 0,5$ , au centre  $\lambda = 2$ , à droite  $\lambda = 10$ .

Quant au paramètre  $\alpha$  il constitue en quelque sorte un seuil au-dessous duquel les différences entre voisins sont considérées comme du bruit et donc lissées, et au-dessus duquel elles sont considérées comme information de contour et donc moins pénalisées. Pour étudier l'influence du paramètre  $\alpha$ , il est intéressant de comparer des résultats obtenus à produit  $\alpha \cdot \lambda$  constant ; en effet, pour la fonction de Huber par exemple (cf. § 5.3.2), la pente de la zone linéaire de la fonction de régularisation  $\psi(x)$  vaut  $2\alpha$  et varie donc avec  $\alpha$ , alors que la pente de la zone linéaire dans  $\lambda\psi(x)$  vaut  $2\lambda\alpha$ . Cela est illustré sur la figure 7.10, dans le cas de la fonction des surfaces minimales (les courbes obtenues avec la fonction de Huber sont similaires) : lorsque le produit  $\alpha \cdot \lambda$  n'est pas constant, l'étude de l'influence de  $\alpha$  est perturbée par la variation de la pondération de l'attache aux données par rapport à la régularisation. Cela est tout à fait empirique et est à moduler : en effet, pour deux valeurs très différentes de  $\alpha$ , la pente  $2\lambda\alpha$  reste la même mais la différence des ordonnées à l'origine est très grande et cette loi empirique n'est plus valable.

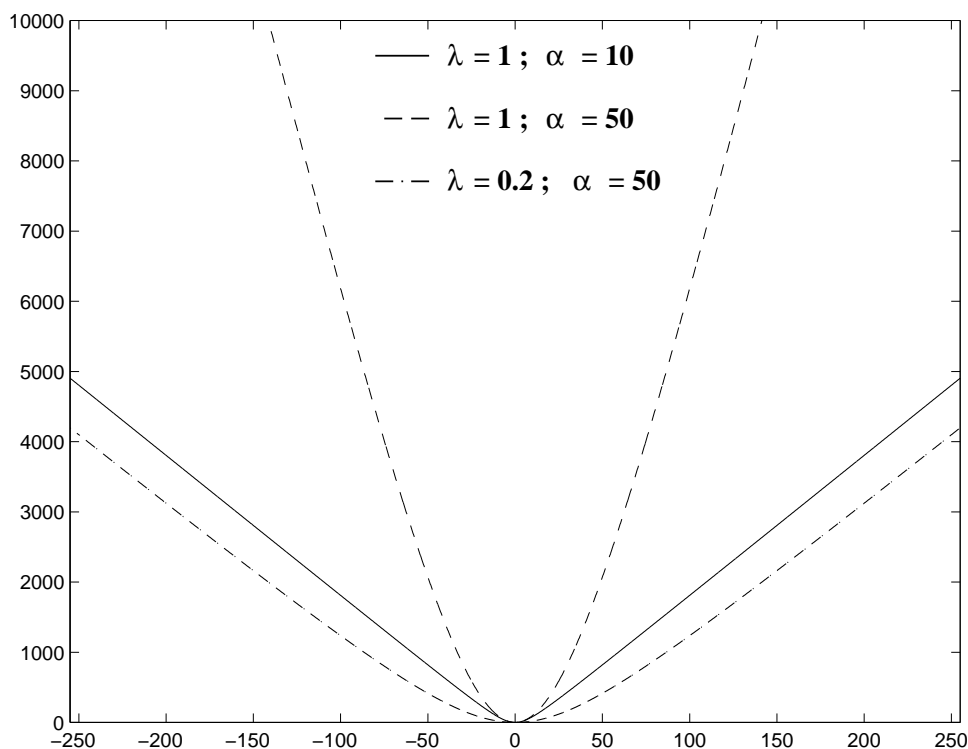


FIG. 7.10 – Illustration de la contrainte  $\alpha \cdot \lambda = \text{constante}$  pour l'étude de l'influence de  $\alpha$  : tracé de  $\lambda \psi_{HS}(x, \alpha)$  pour différents couples de valeurs de  $(\alpha, \lambda)$ .

Compte-tenu de cette remarque, nous présentons dans la figure 7.11 les résultats obtenus pour diverses valeurs de  $\alpha$ , en maintenant  $\alpha \cdot \lambda$  constant.

Alors que les contours des zones constantes les plus intenses, correspondant à des écarts entre voisins importants, sont bien préservés dans tous les cas, dans le cas des contours des zones les moins intenses on peut constater l'apparition d'un lissage pour les cas où  $\alpha$  est plus grand.

Nous proposons maintenant une étude plus complète de l'influence des hyperparamètres, en étudiant non seulement visuellement les images obtenues, mais aussi plus objectivement grâce à l'examen de leurs T.F.D. et au calcul de mesures permettant d'évaluer objectivement les résultats en termes de fidélité aux données et de préservation des contours.

La figure 7.12 présente les images obtenues en fonction des différents jeux de valeurs testés pour les paramètres (les niveaux de gris sont sur  $[0;255]$ ); les T.F.D. correspondantes sont présentées sur la figure 7.13.

On retrouve dans ces tableaux les caractéristiques évoquées aux § 7.2.1 et 7.2.2

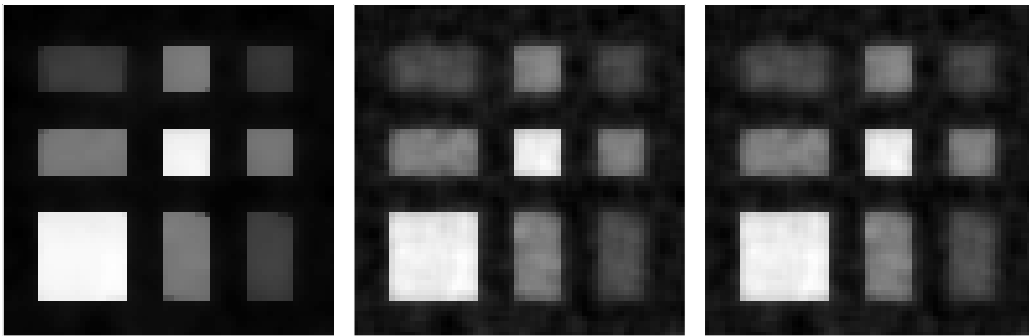


FIG. 7.11 – Influence du paramètre  $\alpha$  : trois images obtenues par reconstruction avec  $\alpha \cdot \lambda \simeq 50$  et à gauche  $\alpha = 2$ , au centre  $\alpha = 10$ , à droite  $\alpha = 20$ .

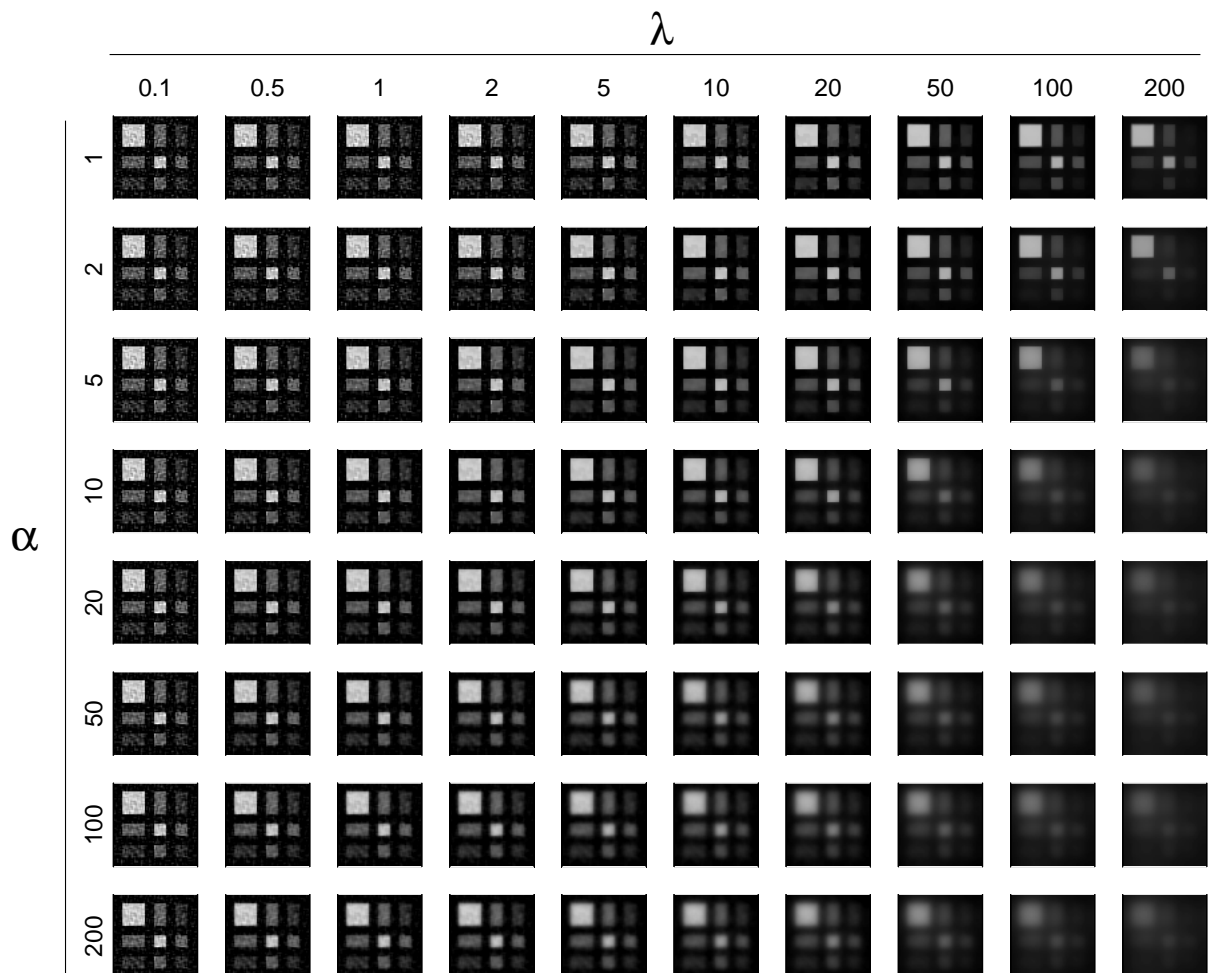


FIG. 7.12 – Les images obtenues pour les différents jeux de paramètres  $(\alpha, \lambda)$  testés.



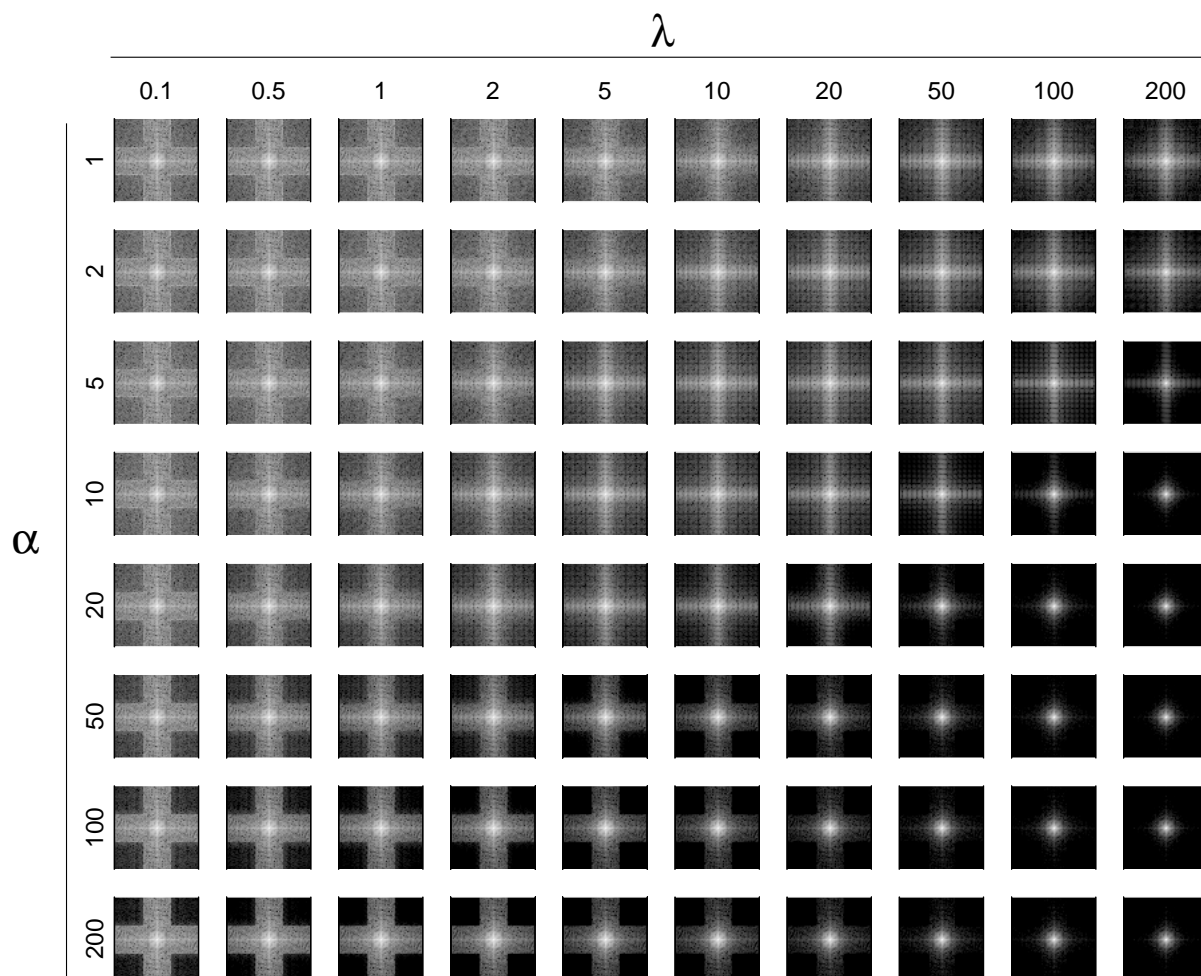


FIG. 7.13 – Les T.F.D. des images de la figure 7.12, obtenues pour les différents jeux de paramètres  $(\alpha, \lambda)$  testés.

pour les valeurs extrêmes des paramètres : pour de très faibles valeurs du paramètre  $\lambda$ , on tend vers une solution non régularisée, et donc vers une moyenne pondérée dans le plan de Fourier des deux acquisitions anisotropes originales. Pour des valeurs non négligeables de  $\lambda$ , et de fortes valeurs de  $\alpha$  (de l'ordre de grandeur de la dynamique de l'image, à savoir au maximum 255), la fonction  $\psi(x)$  se comporte comme la fonction quadratique pure, et donc les discontinuités sont lissées. Dans le cas extrême, la reconstruction tend vers une image uniforme.

Les effets des valeurs des hyperparamètres évoqués ci-dessus sont également confirmés par l'examen visuel des images : à  $\alpha$  constant, quand  $\lambda$  augmente, on constate que les images reconstruites sont de moins en moins fidèles aux données d'origine.

Cette introduction d'*a priori* se traduit sur les T.F.D. en particulier par l'introduction de coefficients non nuls dans les «coins» (c'est-à-dire les zones non couvertes par les acquisitions d'origine).

A  $\lambda \cdot \alpha$  a peu près constant (sauf pour les grandes valeurs de  $\alpha$ ), quand  $\alpha$  augmente on constate que le lissage affecte des variations de plus en plus importantes : quand  $\alpha$  est faible, seules les petites variations correspondant au bruit sont lissées, quand  $\alpha$  augmente, les transitions entre le fond et les objets les moins intenses sont également lissées, et quand  $\alpha$  est très grand (de l'ordre de la dynamique de l'image), toutes les transitions sont lissées et les contours deviennent visuellement «flous». Sur les T.F.D., on peut constater que quand  $\alpha$  augmente, la T.F.D. est filtrée par un filtre passe-bas de plus en plus étroit.

Visuellement, à l'appui à la fois des images de la figure 7.12 et de leurs T.F.D. de la figure 7.13, nous pouvons donc définir une zone optimale pour les hyperparamètres. Cette zone est obtenue pour des valeurs faibles de  $\alpha$ , et des valeurs intermédiaires de  $\lambda$ .

Nous proposons maintenant d'évaluer de façon plus objective les différentes reconstructions en fonction des paramètres, en termes de préservation des contours et de lissage du bruit.

Pour ce faire, plusieurs mesures ont été définies :

- la puissance des contours est définie comme la puissance du gradient de la zone de l'image telle que le gradient correspondant dans l'image de référence (non bruitée) est non nul. Si les contours sont moins nets que sur l'image de référence, le gradient correspondant «s'étale» et donc son amplitude sur la zone définie ci-dessus s'affaiblit. Cette mesure devrait donc être un indicateur objectif de la netteté des contours.
- la variance du bruit sur des zones homogènes est calculée sur différentes zones correspondant à des zones constantes dans l'image de référence. Elle permet d'évaluer le bruit proprement dit indépendamment de l'étalement des contours. Elle est calculée typiquement sur le carré d'intensité maximale, sur une des zones plus petites d'intensité intermédiaire, et sur une zone du fond.
- la puissance de l'image de différence, enfin, est une mesure plus globale, puisqu'elle mesure à la fois l'étalement des contours au voisinage des zones de transition, et le bruit sur les zones homogènes. Cependant, cette mesure, qui n'est autre que l'erreur quadratique, est incontournable car utilisée de façon quasi-universelle.

D'après ces définitions, on voit qu'à une «bonne» image doivent correspondre un maximum pour la puissance des contours et des minima pour les autres mesures. Pour des raisons d'homogénéité, nous considérerons dans la suite l'inverse de la puissance des contours, afin qu'à une bonne image correspondent toujours des minima des mesures considérées.

Sur la figure 7.14 sont présentés les résultats des mesures définies ci-dessus pour l'ensemble des images reconstruites de la figure 7.12.

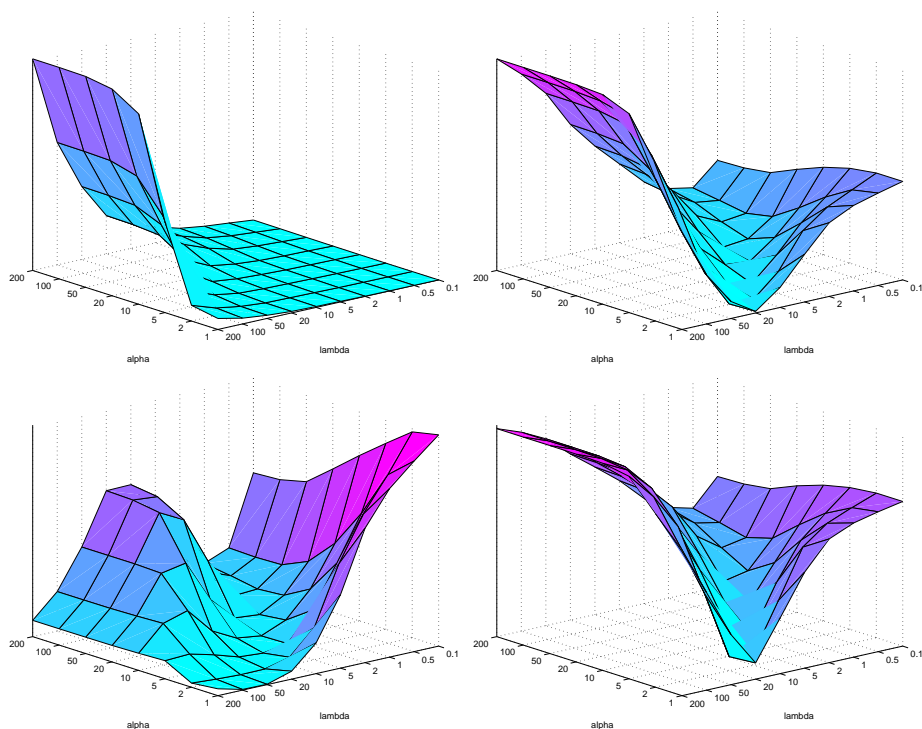


FIG. 7.14 – En haut à gauche, l'inverse de la puissance des contours (en affichage logarithmique). En haut à droite, la puissance de l'image de différence. En bas à gauche, la variance du bruit sur une zone de l'objet le plus intense. En bas à droite, la variance du bruit sur une zone du fond.

Sur chacune de ces courbes, les «meilleurs» jeux de paramètres sont ceux correspondant aux «vallées». Or, l'examen visuel de ces courbes confirme l'existence d'une zone de minima commune à toutes les mesures. Cette zone est tracée approximativement sur la figure 7.15.

La superposition de la zone «optimale» avec le tableau d'images et leurs T.F.D. des figures 7.12 et 7.13 permet de vérifier que les «meilleurs» jeux de paramètres fournis par les mesures définies plus haut correspondent bien aux «meilleures» reconstructions

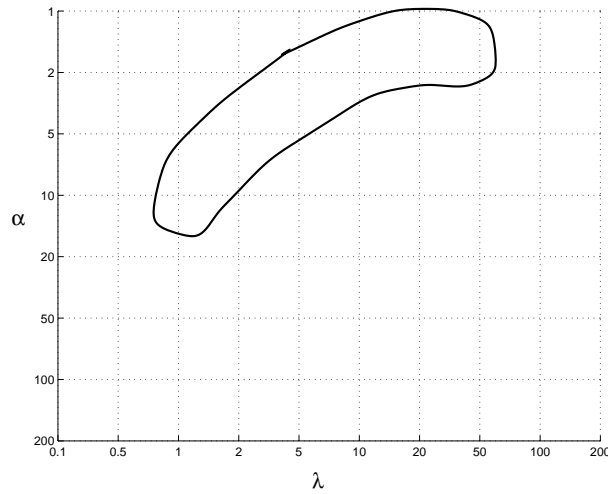


FIG. 7.15 – La zone optimale pour le jeu de paramètres  $(\alpha, \lambda)$  d’après les mesures de la figure 7.14.

visuelles. D’autre part, les reconstructions apparaissent assez robustes à des variations raisonnables des paramètres dans et autour de la zone «optimale». Empiriquement, on peut dire qu’on peut multiplier ou diviser  $\alpha$  ou  $\lambda$  par un facteur 2 ou 3 sans changer fondamentalement les caractéristiques et la qualité de la reconstruction, à condition de ne pas s’éloigner trop de la zone optimale définie précédemment.

Finalement, nous avons pu montrer qu’il existe un ensemble de jeux de paramètres  $(\alpha, \lambda)$  permettant de reconstruire des images avec un bon rapport signal sur bruit et de préserver les discontinuités correspondant aux frontières entre les différentes structures.

Nous proposons de vérifier ces résultats sur des images synthétiques de vaisseaux sténosés ; pour cela, nous utilisons le modèle présenté dans l’annexe A, en deux dimensions. Nous utilisons dans la suite deux images de référence, obtenues pour deux orientations différentes du vaisseau, avec un rayon de 8 pixels, et une sténose à 70 %. Chacune de ces images a été dégradée conformément à la modélisation du chapitre 4, avec un rapport de résolutions de 3,2, puis bruitée avec un bruit gaussien d’écart-type égal à 5 % de la dynamique de l’image.

Nous avons adopté la même démarche d’évaluation que pour l’image *Rectangles* : la solution a été calculée pour différentes valeurs du couple  $(\lambda, \alpha)$ . L’image n’étant cependant pas rigoureusement constante par morceaux, il est plus délicat d’évaluer indépendamment la qualité des contours et l’élimination du bruit, comme nous avons pu le faire pour l’images *Rectangles* ; nous utilisons donc pour l’évaluation quantitative une mesure unique et globale, qui est la puissance de l’image de différence entre la

référence non bruitée et la solution. Les images obtenues sont présentées sur la figure 7.16 pour la première orientation du vaisseau (vaisseau «droit») et sur la figure 7.17 pour la seconde (vaisseau «oblique»). La puissance de l'erreur est représentée sur la figure 7.18. Il convient de noter que la puissance est relative: l'objet ici n'est pas de comparer la puissance de l'erreur pour les deux vaisseaux pour un jeu de paramètres donné, mais de montrer que les jeux de paramètres permettant de minimiser cette erreur sont confondus.

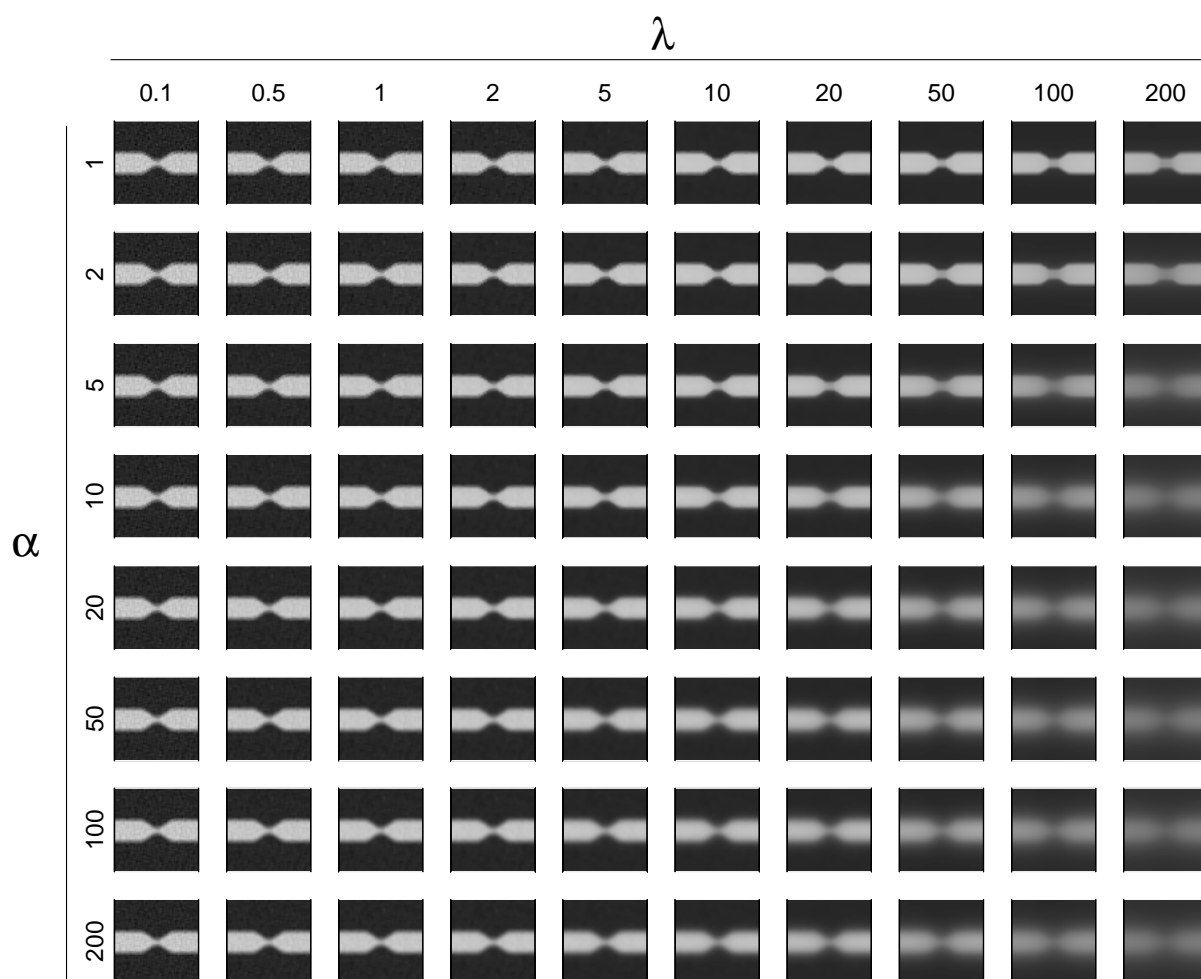


FIG. 7.16 – Les images obtenues pour les différents jeux de paramètres  $(\alpha, \lambda)$  testés sur le vaisseau «droit».

Il s'avère que la zone correspondant à une puissance de l'erreur minimale est tout à fait conforme avec celle obtenue lors de l'évaluation sur l'image *Rectangle* (cf. figure 7.15): les jeux de paramètres optimaux pour l'image constante par morceaux sont donc

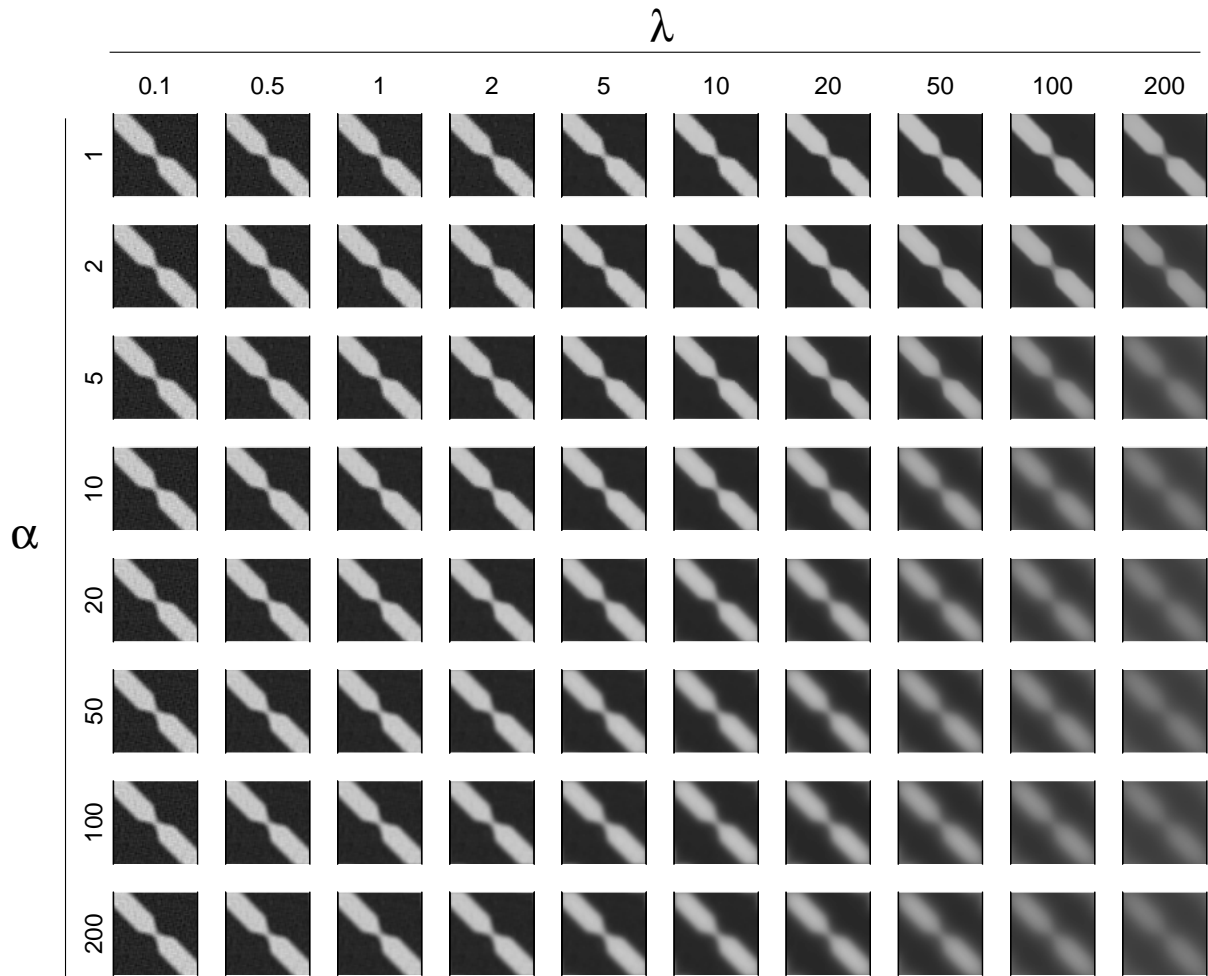


FIG. 7.17 – Les images obtenues pour les différents jeux de paramètres  $(\alpha, \lambda)$  testés sur le vaisseau «oblique».

également optimaux, au sens de l'erreur globale, pour une image de vaisseau sténosé. Visuellement, on peut vérifier que les images obtenues dans cette zone de valeurs de  $(\lambda, \alpha)$  sont satisfaisantes, tant en termes de préservation des contours, y compris au niveau de la sténose, qu'en termes de filtrage du bruit. Nous jugeons donc raisonnable d'adopter ces paramètres pour les images d'A.R.M. sur lesquelles nous proposons de valider la méthode au paragraphe suivant.

L'étude précédente ayant prouvé la robustesse des résultats vis-à-vis des paramètres, et l'existence de valeurs de paramètres satisfaisantes pour les différents types d'images traités, nous n'avons pas jugé nécessaire d'envisager une estimation automatique des paramètres comme le font de nombreux auteurs [JALO-99, NIKO-95].

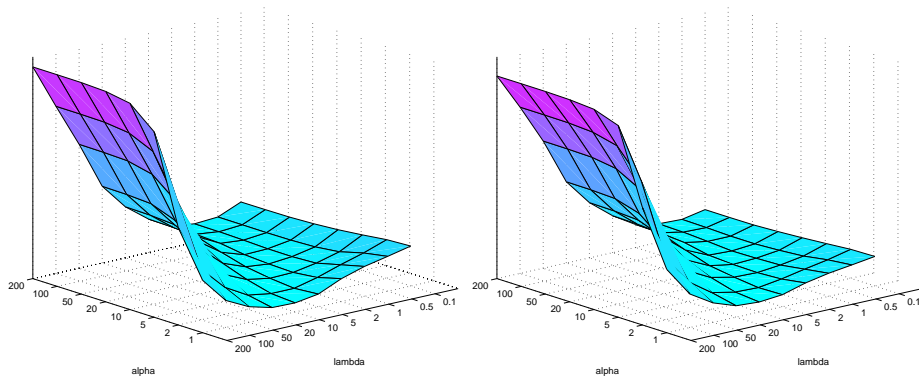


FIG. 7.18 – La puissance de l'erreur en fonction de  $\lambda$  et  $\alpha$ . A gauche, pour le vaisseau «droit», à droite, pour le vaisseau «oblique».

Cependant, nous pensons qu'une telle approche serait intéressante à envisager à titre de perspective.

## 7.3 Résultats cliniques

Pour l'application clinique, nous disposons de quelques jeux de données tridimensionnelles sur des artères aortes, sur des artères carotides, et sur des artères rénales. Chaque jeu de données est constitué de deux volumes anisotropes, chacun étant acquis après l'injection de gadolinium et durant une apnée du patient. Nous présentons ici les résultats obtenus pour l'un des jeux de données sur l'aorte, puis sur l'un des jeux de données sur la carotide; les résultats obtenus sur les autres jeux de données des mêmes artères sont similaires. En ce qui concerne les artères rénales, nous nous sommes heurtés à un problème sur lequel nous reviendrons dans le chapitre suivant; c'est pourquoi nous ne montrons pas les résultats obtenus sur les artères rénales dans cette partie.

### 7.3.1 Exemple sur une aorte

Les séquences utilisées sont des séquences 3D d'écho de gradient, avec  $T_R = 4,7ms$  et  $T_E = 1ms$  et une amplitude de champ de 1,5 Tesla. Soient, conformément aux notations utilisées dans le milieu de l'imagerie médicale :

- $x$  la direction supéro-inférieure,
- $y$  la direction antéro-postérieure,
- $z$  la direction droite-gauche.

Le champ de vue du premier volume est de  $500 \times 312 \times 160 \text{ mm}^3$  respectivement en  $x, y, z$ , la direction  $x$  étant celle du codage par la fréquence. Les dimensions de la matrice sont de  $512 \times 140 \times 40$ . Les dimensions des voxels sont donc, en  $x, y, z$  respectivement, de  $0,98 \times 2,23 \times 4 \text{ mm}^3$ .

Le champ de vue du second volume est de  $160 \times 312 \times 500 \text{ mm}^3$  respectivement en  $x, y, z$ , la direction  $z$  étant celle du codage par la fréquence. Les dimensions de la matrice sont de  $40 \times 140 \times 512$ . Les dimensions des voxels sont donc, en  $x, y, z$  respectivement, de  $4 \times 2,23 \times 0,98 \text{ mm}^3$ .

Le champ de vue de l'intersection de ces deux volumes est donc de  $160 \times 312 \times 160 \text{ mm}^3$ . Les régions d'intérêt des deux acquisitions correspondant à l'intersection sont donc de dimensions  $164 \times 140 \times 40$  pour le premier volume, et  $40 \times 140 \times 164$  pour le second.



Afin de bien mettre en évidence la complémentarité des résolutions, nous présentons les résultats sous forme de séries de coupes extraites orthogonalement à la direction de résolution constante (ici  $y$ ).

Les figures 7.19 et 7.20 montrent les deux volumes sous-résolus (après sélection d'une «coupe» sur deux dans une région d'intérêt). La figure 7.21 présente le résultat obtenu avec  $\lambda = 5$  et  $\alpha = 2$ . Ce résultat a été évalué de façon subjective par un angiologue spécialiste de l'angiographie par résonance magnétique, qui a confirmé que les images offraient une grande qualité de visualisation de l'aorte ascendante et des vaisseaux supra-aortiques, permettant ainsi d'améliorer le diagnostic d'éventuelles pathologies. De plus la précision des frontières a été jugée excellente, et devrait donc permettre une segmentation robuste des vaisseaux et par conséquent une quantification précise des dimensions des vaisseaux.

Nous présentons sur une coupe d'intérêt le résultat obtenu avec les mêmes paramètres que ci-dessus, ainsi que le résultat avec  $\lambda = 0$ , ainsi que leurs T.F.D. respectives (figure 7.22). On constate que l'image non régularisée est entachée d'un bruit assez peu «naturel» (effet de «quadrillage» dû à l'interpolation dans les deux directions principales du plan considéré), alors que l'image régularisée est plus lisse, avec cependant des discontinuités franches aux frontières du vaisseau. On peut également constater sur les T.F.D. que celle de la coupe avec régularisation est plus «naturelle» que celle de la coupe sans régularisation qui comporte des troncatures brutales.

Enfin, puisque l'outil de diagnostic de référence des angiologues est, à l'heure actuelle, le MIP (cf. § 2.4.2), nous présentons sur la figure 7.23 des MIP calculés à partir des deux volumes sous-résolus et de la reconstruction.

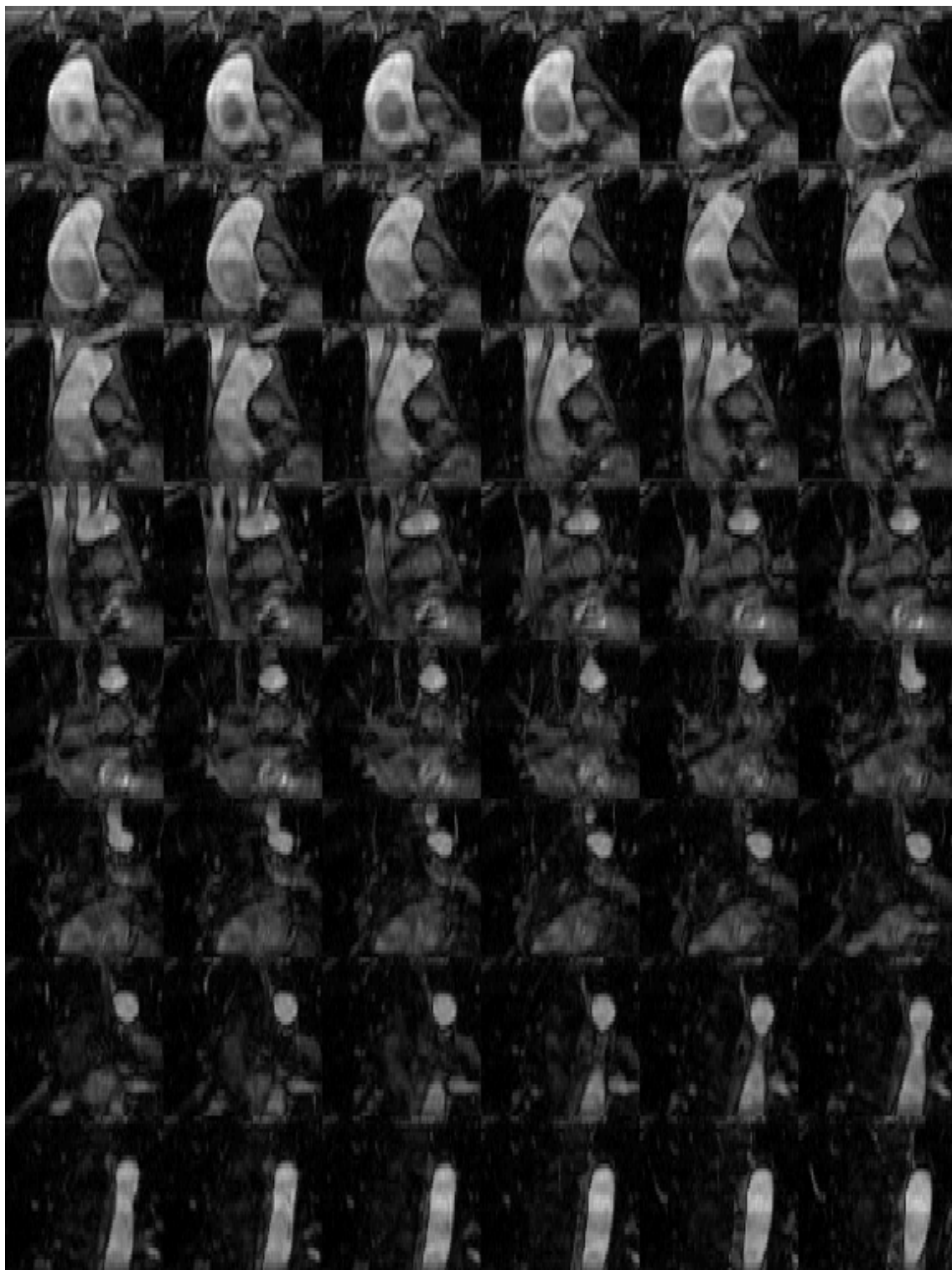


FIG. 7.19 – *Le volume de données sous-résolues selon la direction «verticale».*



FIG. 7.20 – *Le volume de données sous-résolues selon la direction «horizontale».*

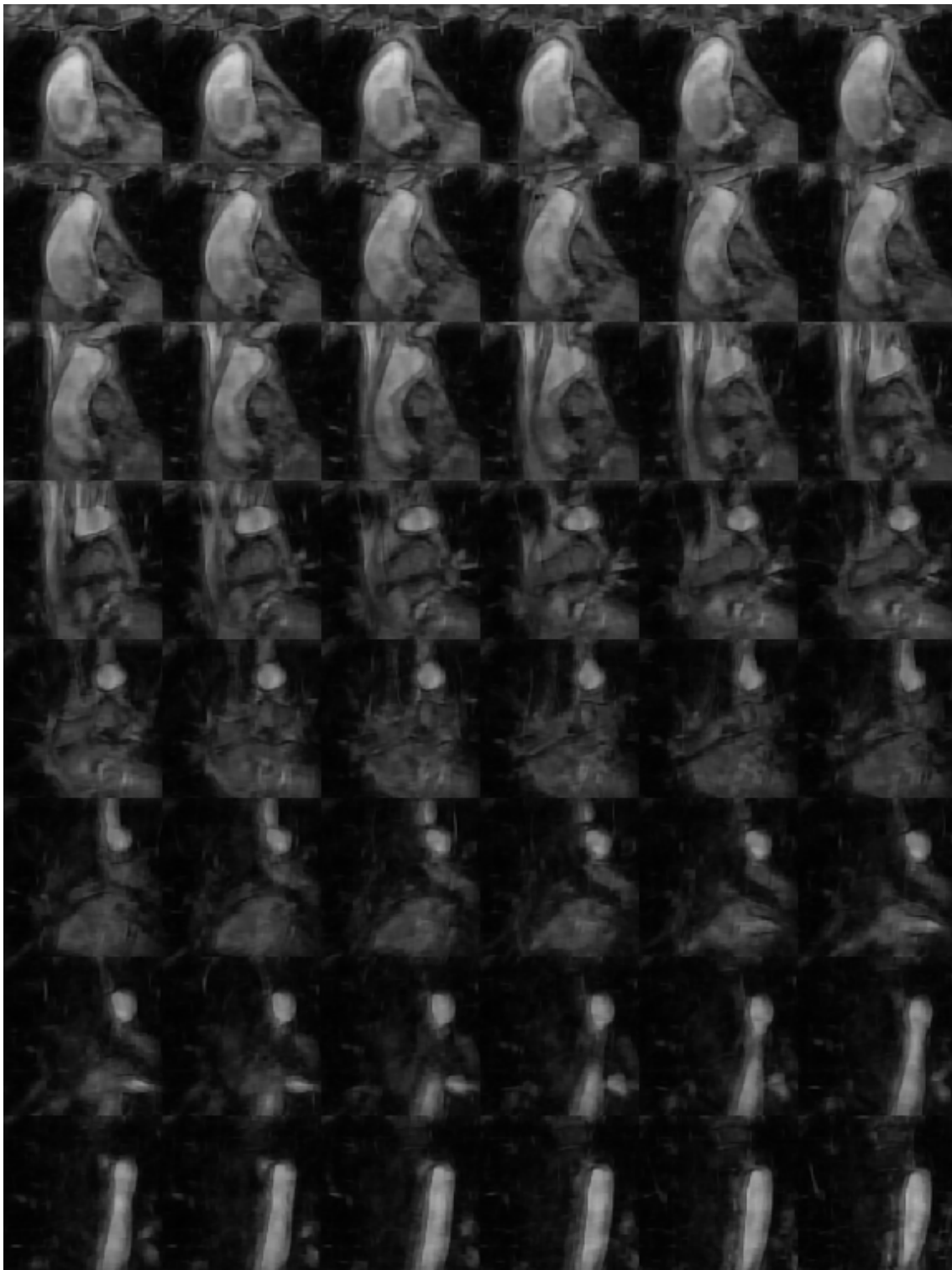


FIG. 7.21 – *Le volume reconstruit avec  $\lambda = 5$  et  $\alpha = 2$ .*

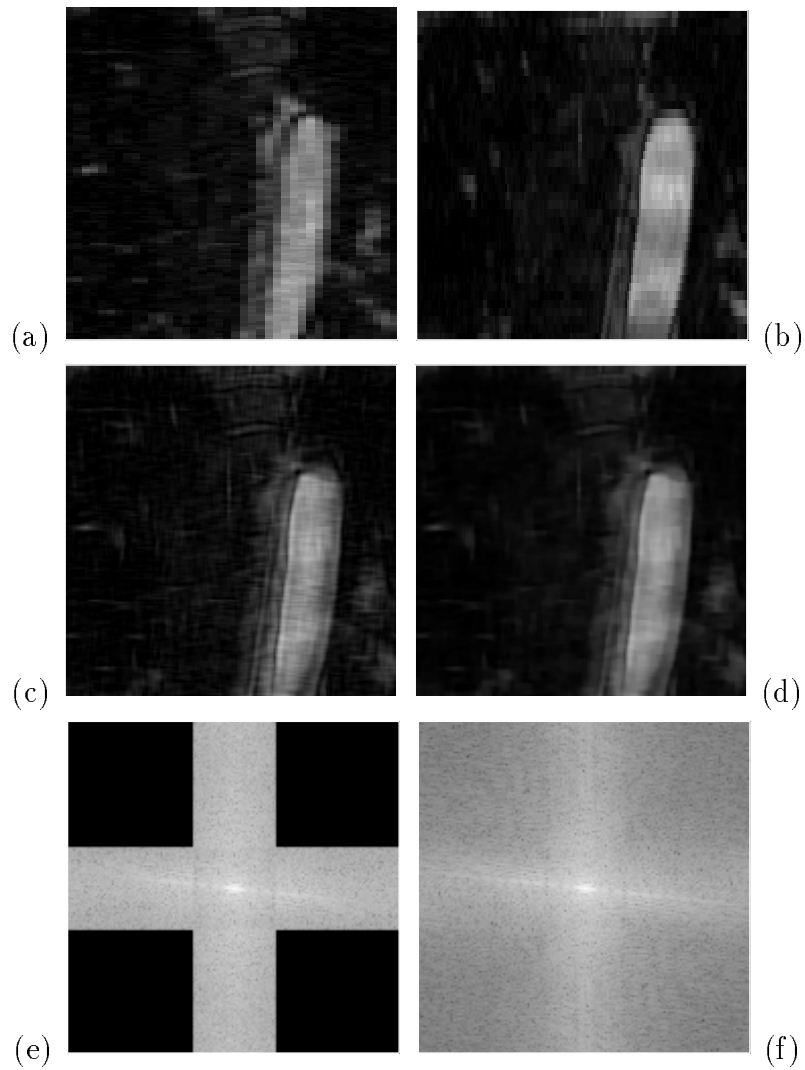


FIG. 7.22 – *Résultat sur une coupe d'intérêt. (a) et (b) : images sous-résolues. (c) : résultat sans régularisation. (d) : résultat avec  $\lambda = 5$  et  $\alpha = 2$ . (e) : T.F.D. de (c). (f) : T.F.D. de (d).*



FIG. 7.23 – MIP calculés à partir des volumes 3D. A gauche : volume sous-résolu selon la direction «verticale». Au milieu : volume sous-résolu selon la direction «horizontale». A droite : volume reconstruit.

## 7.3.2 Exemple sur des carotides

Les séquences utilisées sont également des séquences 3D d'écho de gradient, avec  $T_R = 6ms$  et  $T_E = 2.2ms$  et une amplitude de champ de 1,5 Tesla.

Le champ de vue du premier volume est de  $536 \times 160 \times 320 mm^3$  respectivement en  $x, y, z$ , la direction  $z$  étant celle du codage par la fréquence. Les dimensions de la matrice sont de  $40 \times 256 \times 512$ . Les dimensions des voxels sont donc, en  $x, y, z$  respectivement, de  $1,375 \times 0,625 \times 0,625 mm^3$ .

Le champ de vue du second volume est de  $320 \times 488 \times 160 mm^3$  respectivement en  $x, y, z$ , la direction  $x$  étant celle du codage par la fréquence. Les dimensions de la matrice sont de  $512 \times 40 \times 256$ . Les dimensions des voxels sont donc, en  $x, y, z$  respectivement, de  $0,625 \times 1,25 \times 0,625 mm^3$ .

De l'intersection de ces volumes, nous avons extrait deux régions d'intérêt correspondant aux carotides gauche et droite. Afin de bien mettre en évidence la complémentarité des résolutions, nous présentons les résultats sous forme de séries de coupes extraites orthogonalement à la direction de résolution constante, ici  $z$ , donc des coupes sagittales. Les champs de vue des deux régions d'intérêt sont d'environ  $53 \times 47 \times 13 mm^3$  pour la carotide droite et  $53 \times 47 \times 19 mm^3$  pour la carotide gauche.

Les figures 7.24 et 7.25 présentent la carotide droite, dans chacun des volumes sous-résolus ; le résultat obtenu avec  $\lambda = 5$  et  $\alpha = 2$  est présenté sur la figure 7.26.

De même, les figures 7.27, 7.28, et 7.29 montrent les volumes sous-résolus et la reconstruction obtenue sur la carotide gauche.

De la même façon que pour les aortes, nous proposons sur les figures 7.30 et 7.31 de comparer sur les MIPs les volumes originaux et la reconstruction.

Ces résultats ont également été évalués par un spécialiste, qui les a jugés tout à fait satisfaisants, que ce soit en termes de contraste et de qualité d'image, ou en termes de précision et netteté des bords des vaisseaux.

Une sténose a été détectée sur la carotide droite de ce patient, juste après la bifurcation de la carotide interne, comme indiqué par la flèche sur la figure 7.32. Celle-ci est située dans une portion de vaisseau dont l'axe est presque aligné avec la direction antéro-postérieure, et n'est par conséquent pas bien visualisé sur le MIP correspondant au volume sous-résolu orthogonalement à cette direction (figure 7.31, au milieu) ; dans l'autre volume (figure 7.31, à gauche), la sténose est visible, mais étant très courte elle est difficilement quantifiable même dans ce volume. C'est pourquoi la reconstruction a été jugée nettement meilleure que chacune des acquisitions sous-échantillonnées.

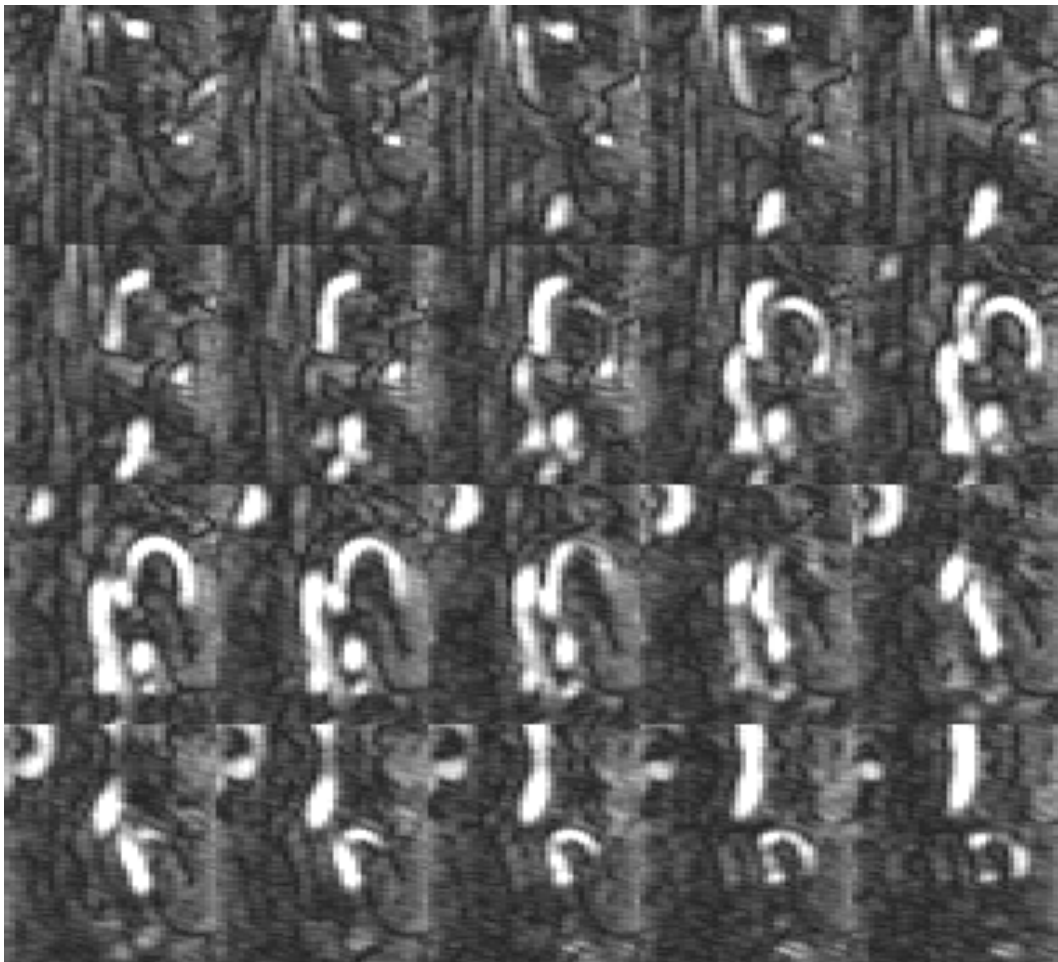


FIG. 7.24 – Carotide droite: le volume de données sous-résolues selon la direction «horizontale» (antéro-postérieure).



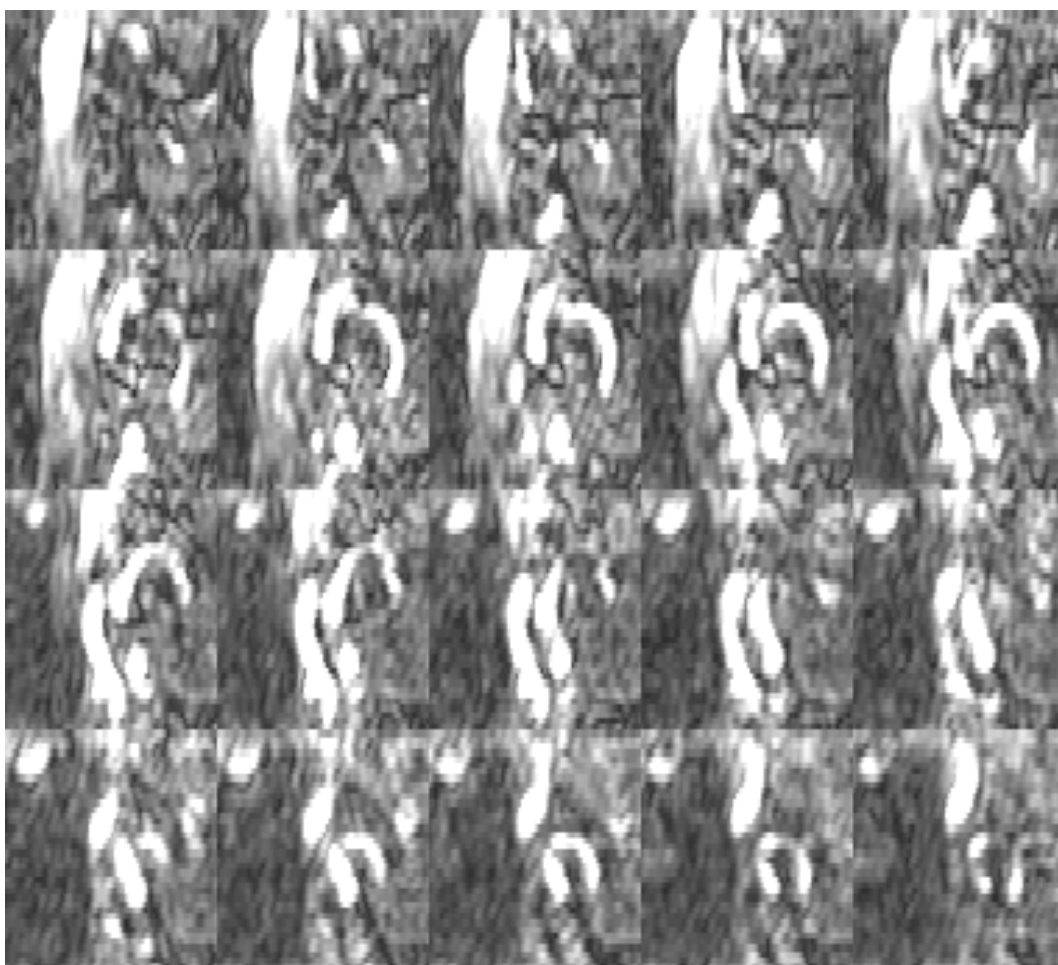


FIG. 7.25 – *Carotide droite: le volume de données sous-résolues selon la direction «verticale» (supéro-inférieure).*

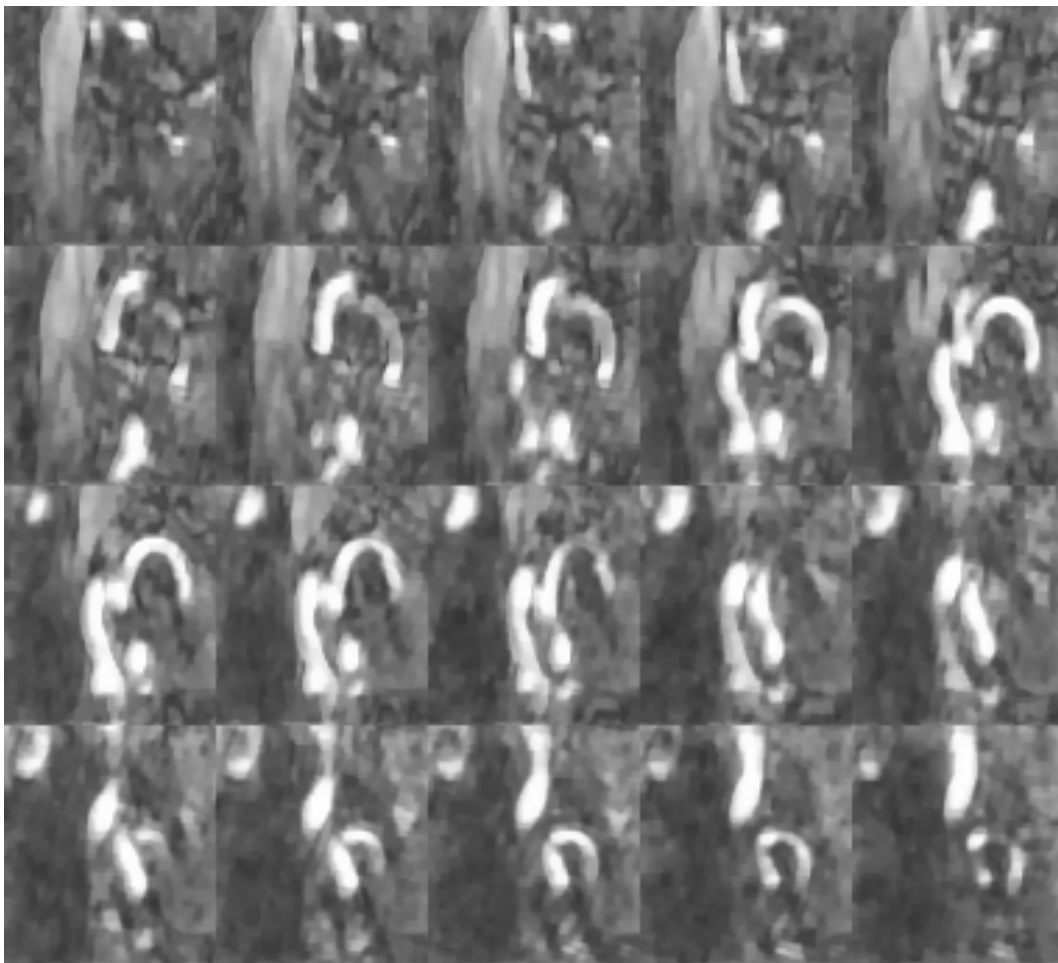


FIG. 7.26 – *Carotide droite : le volume reconstruit avec  $\lambda = 5$  et  $\alpha = 2$ .*

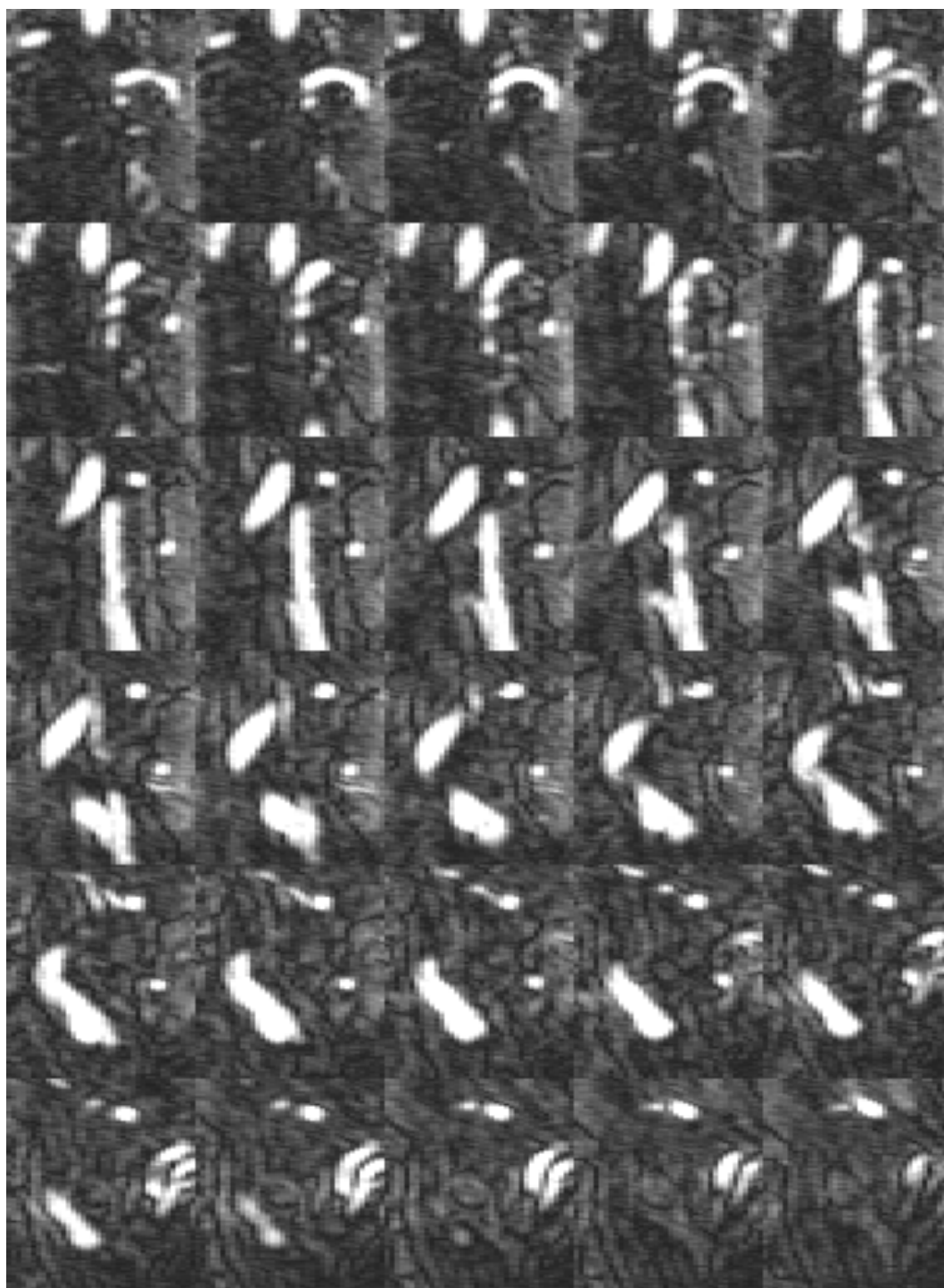


FIG. 7.27 – Carotide gauche : le volume de données sous-résolues selon la direction «horizontale» (antéro-postérieure).

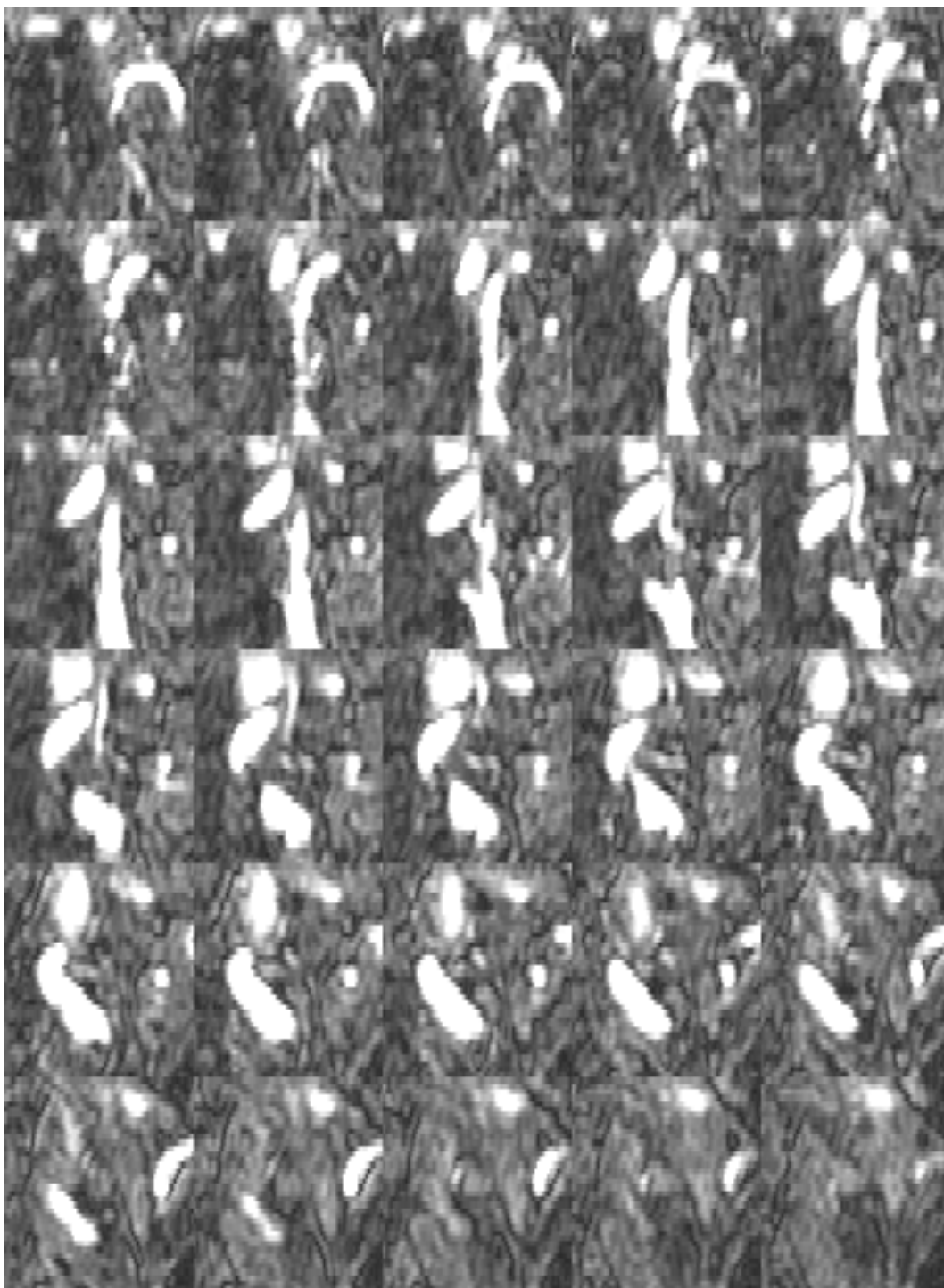


FIG. 7.28 – Carotide gauche : le volume de données sous-résolues selon la direction «verticale» (supéro-inférieure).

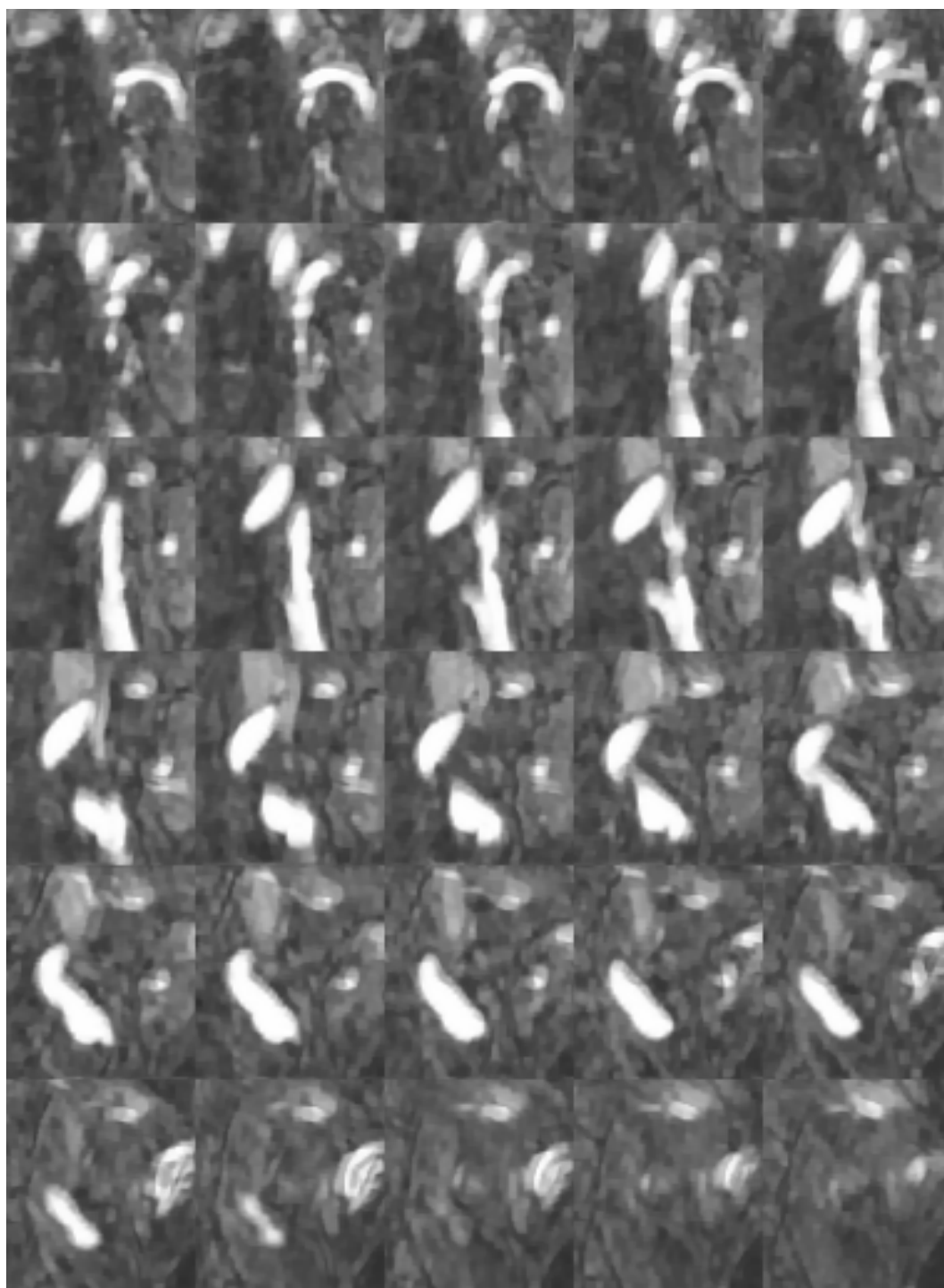


FIG. 7.29 – Carotide gauche : le volume reconstruit avec  $\lambda = 5$  et  $\alpha = 2$ .



FIG. 7.30 – MIP calculés à partir des volumes 3D de la carotide gauche. A gauche : volume sous-résolu selon la direction «horizontale». Au milieu : volume sous-résolu selon la direction «verticale». A droite : volume reconstruit.



FIG. 7.31 – MIP calculés à partir des volumes 3D de la carotide droite. A gauche : volume sous-résolu selon la direction «horizontale». Au milieu : volume sous-résolu selon la direction «verticale». A droite : volume reconstruit.

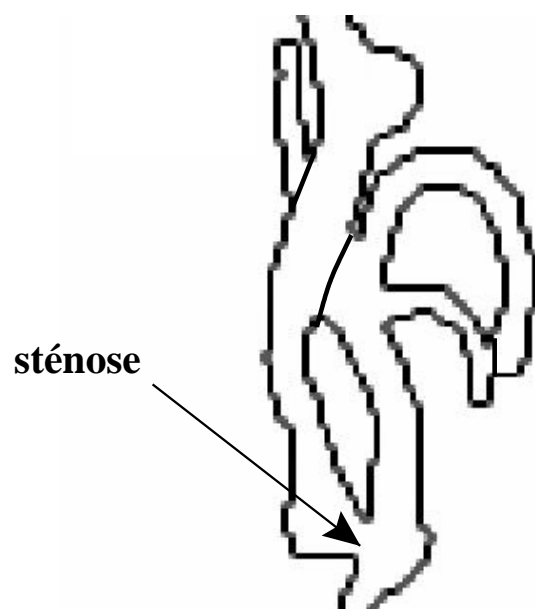


FIG. 7.32 – Schéma de l'artère carotide droite. La flèche indique la position de la sténose.

## Conclusion

*La comparaison des deux algorithmes a permis de montrer les avantages formels et algorithmiques de l'utilisation conjointe des développements semi-quadratiques et du domaine fréquentiel pour la minimisation de la fonction d'énergie.*

*La méthode a ensuite été évaluée de façon qualitative et quantitative, par comparaison des images reconstruites avec une image de référence, à partir de laquelle ont été simulées des acquisitions sous-résolues. Cela a permis de montrer les apports de la méthode en termes de préservation des contours et d'amélioration du rapport signal sur bruit. D'autre part, la méthode s'est avérée robuste vis-à-vis des deux paramètres de régularisation.*

*Dans un dernier temps, nous avons appliqué la méthode sur des données réelles, à savoir, des jeux de données tridimensionnelles composés de deux volumes complémentaires, sur l'aorte et sur les carotides. La qualité des résultats a été confirmée par le cardiologue-radiologue ayant effectué les acquisitions d'origine, que ce soit en termes de rapport signal sur bruit ou en termes de préservation des contours.*





---

## CHAPITRE 8

# Perspectives cliniques

## Introduction

*Comme annoncé au chapitre précédent, si la méthode a pu être appliquée avec succès sur les données réelles des aortes et des carotides, il subsiste quelques problèmes qui ont été évoqués mais méritent qu'on leur accorde plus d'attention. C'est le cas en particulier du problème des mouvements entre les acquisitions, que nous exposons dans la première partie de ce chapitre.*

*Dans la seconde, nous abordons la possibilité de l'application au suivi temporel et suggérons des pistes pour adapter la méthode actuelle à cette application.*

*Dans la dernière, nous donnons quelques éléments de réflexion pour l'adaptabilité de la méthode, dédiée aux acquisitions 3D d'A.R.M., à d'autres types de données médicales.*

## 8.1 Le problème du mouvement

Dans cette partie, nous souhaitons mettre en évidence et discuter un problème auquel nous nous sommes heurtés lors de l'application de la méthode sur les données réelles : le problème des mouvements du patient entre les deux ou trois acquisitions. En effet, les acquisitions sont effectuées de manière séquentielle, avec le plus souvent une ou plusieurs respirations entre les acquisitions, donc il est inévitable que le patient change même légèrement de position. On peut distinguer deux sortes de mouvements :

- les mouvements rigides, c'est-à-dire quand toutes les structures anatomiques de la région d'intérêt sont soumises au même déplacement par rapport au « référentiel » formé par la table d'acquisition,

- les mouvements élastiques, c'est-à-dire quand il y a également déplacement relatif entre les structures.

### 8.1.1 Les mouvements rigides : recalage automatique

Des mouvements rigides de translation sont présents sur tous les jeux de données que nous avons été amenés à traiter pour valider nos travaux. Dans ce cadre, les recalages ont été effectués manuellement, avec évaluation visuelle, par mise en correspondance de structures d'intérêt bien contrastées, délimitées manuellement.

Nous proposons, à titre de perspective, d'automatiser ce recalage, en l'intégrant dans la reconstruction. Nous présentons ci-dessous une solution formelle à ce problème.

Nous supposons que les volumes de données  $I_y$  et  $I_z$  peuvent avoir subi une translation de quelques voxels selon chacune des trois directions de l'espace, par rapport au volume  $I_x$  que l'on prend donc comme référence. On peut donc modifier le terme d'attache aux données  $Q_y$  de la façon suivante :

$$Q_y = \| \mathbf{D}_y \mathbf{I}_{rec} - \mathbf{T}_x \mathbf{T}_y \mathbf{T}_z \mathbf{I}_y \|^2 \quad (8.1)$$

où  $\mathbf{T}_x$  est obtenu à partir de  $T_x$  par la transformation définie dans l'annexe B selon  $x$ , et de même pour  $\mathbf{T}_y$  et  $\mathbf{T}_z$ , avec  $T_x$  une matrice s'appliquant à une «colonne» de données selon  $x$ , obtenue par permutation circulaire d'ordre  $k_x^y$  à partir de la matrice Identité.  $T_x$  est donc de la forme (ici avec  $k_x^y = 1$ ) :

$$T_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

Le problème consiste donc à trouver le minimum de la fonction d'énergie modifiée, par rapport aux éléments de  $I_{rec}$  d'une part et d'autre part par rapport à  $k_x^y$ ,  $k_y^y$ ,  $k_z^y$ ,  $k_x^z$ ,  $k_y^z$ , et  $k_z^z$ .

Nous n'entrons pas plus dans le détail de cette méthode, que nous proposons ici uniquement à titre de perspective. Cependant, cette approche nous semble plus judicieuse que celle consistant à recalcr entre eux les volumes interpolés, puisque la «meilleure» translation est «meilleure» au sens de la «meilleure» reconstruction. Signalons également qu'il pourrait être judicieux d'introduire un terme d'énergie supplémentaire (ce qui a pour effet désagréable d'introduire un paramètre de pondération supplémentaire...) qui pénaliserait les déplacements de grande amplitude, par exemple de façon quadratique en  $k$ .

## 8.1.2 Mise en évidence des mouvements élastiques

Si un recalage rigide par translation s'est avéré satisfaisant sur les images des aortes et des carotides, sur les images des artères rénales les mouvements élastiques des vaisseaux ont empêché de valider la méthode de reconstruction. Ce phénomène est illustré sur la figure 8.1, qui présente les deux volumes sous-résolus et le volume reconstruit sous forme de MIPs frontaux.

Sur ces projections on peut distinguer :

- l'aorte abdominale (le vaisseau de plus grand diamètre orienté verticalement et situé au centre de la région d'intérêt),
- les artères rénales, qui partent de part et d'autre de l'aorte vers le bas puis «remontent» avant de se diviser en plusieurs vaisseaux,
- les reins (grosses structures de forme ovale situées aux extrémités gauche et droite de l'image), irrigués par les vaisseaux provenant des artères rénales.

Le recalage rigide a ici été effectué sur l'aorte abdominale et le départ des artères rénales ; or, on peut voir sur la reconstruction que si l'aorte et le départ des rénales sont bien reconstruits, en revanche on constate un dédoublement des vaisseaux irriguant les reins. Ainsi, le recalage rigide n'est pas valable pour toute l'image, et il n'est pas possible d'obtenir une reconstruction de haute résolution satisfaisante. Cela s'explique par le fait que l'aorte abdominale est reliée au rachis par des structures fibreuses, et que lors de la respiration les reins bougent par rapport au rachis : par conséquent les vaisseaux sont amenés à se déformer.

Introduire la possibilité d'un mouvement non rigide dans la reconstruction, comme nous l'avons proposé dans le cas rigide (§ 8.1.1), multiplie par quatre le nombre de données à optimiser (pour chaque voxel, l'intensité et trois paramètres de translation), ce qui ne semble pas raisonnable ; de plus, on peut montrer aisément qu'il n'est pas possible d'intégrer un recalage élastique avec le formalisme matriciel que nous avons utilisé tout au long de ce travail.

Enfin, du point de vue médical, on peut discuter de la légitimité d'un recalage élastique : recalcr plusieurs volumes par mise en correspondance avec un volume implique qu'une importance plus grande est accordée au volume de référence, et peut occulter des déformations dont la détection pourrait pourtant être utile au diagnostic.

Pour ces diverses raisons, nous préconisons donc de se limiter à un recalage rigide global, et de trouver d'autres solutions qu'un recalage élastique au problème des petites déformations des vaisseaux. Nous discutons ces solutions au paragraphe suivant.

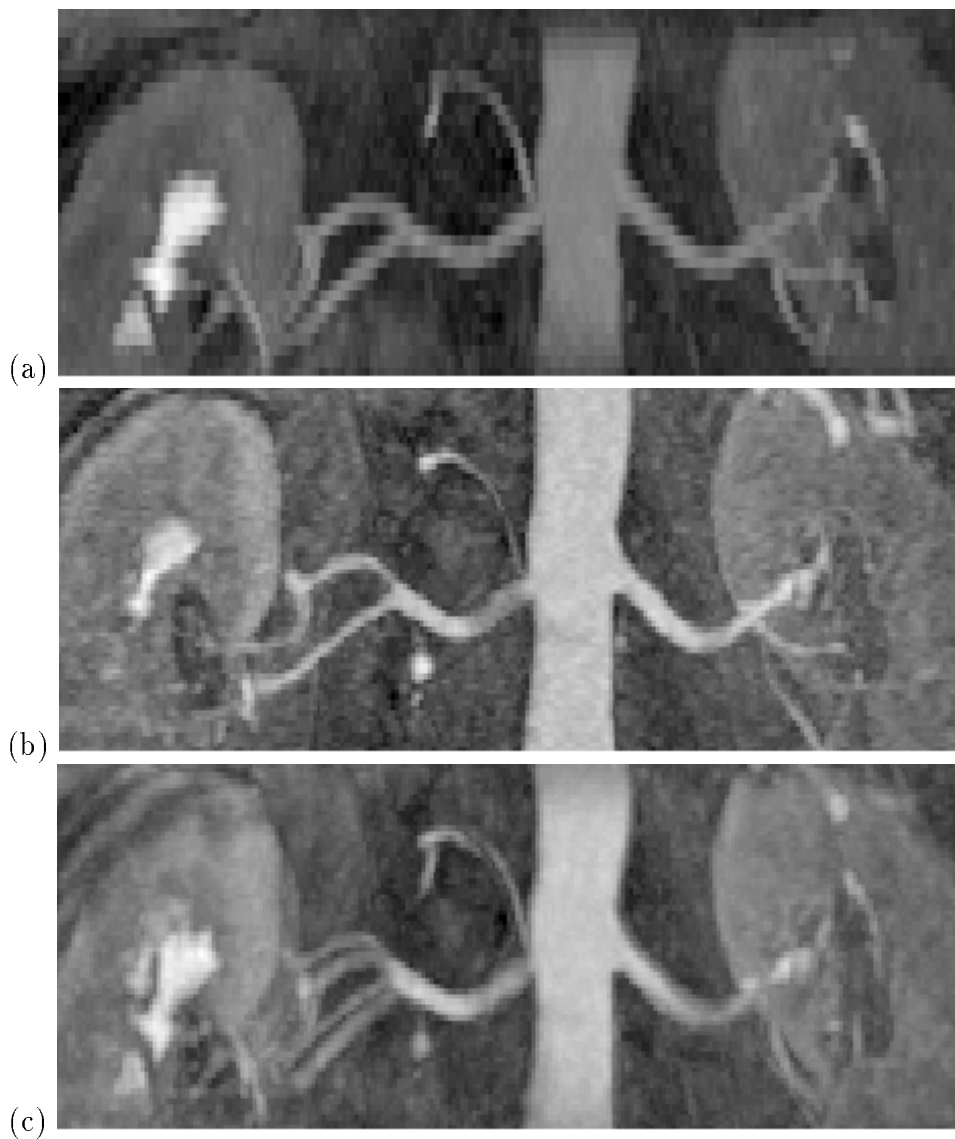


FIG. 8.1 – MIPs frontaux calculés à partir des volumes 3D des artères rénales. (a) volume sous-résolu selon la direction «verticale» (supéro-inférieure). (b) volume sous-résolu selon la direction orthogonale au plan de la projection (antéro-postérieure). (c) volume reconstruit.

### 8.1.3 Solutions cliniques

Au vu des résultats obtenus au chapitre 7 et au paragraphe 8.1.2, il apparaît que le choix d'une utilisation clinique parmi celles présentées au paragraphe 3.3 est étroitement lié à l'application clinique considérée.

En effet, nous avons vu que dans certains cas (l'aorte, la carotide), la technique «multi-apnées» est valable, et peut donc permettre une amélioration significative de la résolution. En revanche, dans d'autres cas (l'artère rénale), les petits mouvements peuvent être redhibitoires lors de l'utilisation de la technique «multi-apnées», et donc seule la solution «mono-apnée» peut être utilisée, car elle seule permet de s'affranchir des problèmes de mouvements élastiques des vaisseaux entre les diverses apnées ; celle-ci nécessite le développement de séquences d'acquisition spécifiques permettant d'enchaîner les acquisitions.

## 8.2 Application au suivi temporel

Nous avons, tout au long de ce document, exclusivement considéré l'application de la méthode à des données statiques. L'objet de cette partie est d'aborder la possibilité d'appliquer la méthode à des séquences d'images, l'application clinique principale en A.R.M. étant l'amélioration de la résolution temporelle dans le suivi de bolus (cf. § 2.3.3). C'est cette idée également qui est utilisée dans la méthode «*TRISK*» [KORO-96].

Une première approche consiste à utiliser la méthode pour diminuer le temps d'acquisition d'un volume de résolution donnée, permettant ainsi d'acquérir deux volumes consécutifs avec une fréquence plus élevée. Le principe en est représenté sur la figure 8.2.

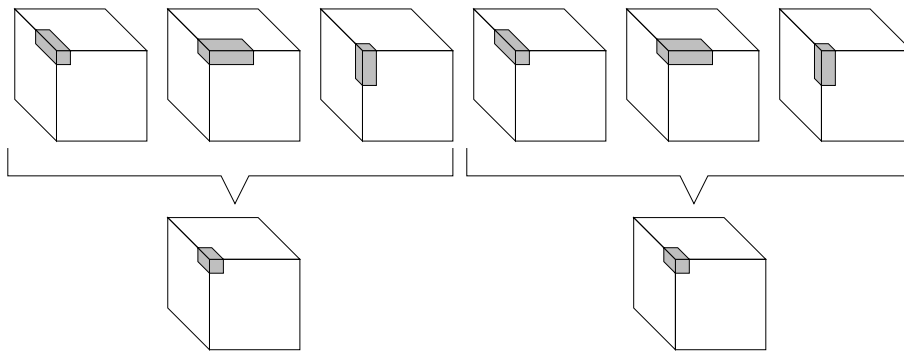


FIG. 8.2 – Principe de l'utilisation de la méthode pour l'amélioration de la résolution temporelle d'une séquence d'images pour le suivi de bolus : première approche.

Une seconde approche, proposée dans [HERM-01], consiste à effectuer la reconstruction de manière «glissante», ce qui permet d'augmenter d'un facteur 2 ou 3 la fréquence temporelle d'acquisition, comme le montre le schéma de la figure 8.3.

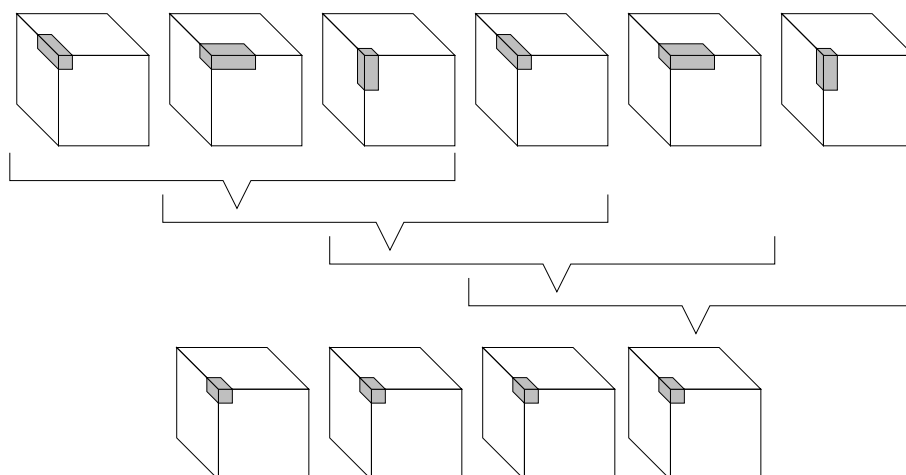


FIG. 8.3 – Principe de l'utilisation de la méthode pour l'amélioration de la résolution temporelle d'une séquence d'images pour le suivi de bolus : seconde approche.

Il convient de noter que dans la deuxième approche, chaque acquisition sous-résolue est utilisée deux ou trois fois du fait de la reconstruction glissante, et que celle-ci implique donc un moyennage temporel. On pourrait envisager, de la même façon que dans le domaine spatial, d'introduire des *a priori* dérivés de l'étude du passage d'un bolus dans l'image, afin de préserver dans la séquence les hautes fréquences temporelles correspondant au déplacement du bolus dans le vaisseau. Cette idée a déjà été utilisée pour l'imagerie sans contraste du cœur par exemple [DOYL-95b].

De premiers résultats de reconstruction à partir d'une séquence temporelle, simulée à partir de données réelles statiques, sont présentés dans [HERM-01].

## 8.3 Application à d'autres types de données

### 8.3.1 Validité du modèle de sous-échantillonnage

La méthode proposée ici est applicable dans son intégralité à n'importe quel jeu d'images I.R.M. 3D, si les «parallélépipèdes» représentant la zone à imager possèdent la même orientation, c'est-à-dire si chaque direction de codage de chaque volume coïncide avec une des directions de codage des autres volumes.

Elle s'applique également à un couple d'images I.R.M. 2D représentant le même plan, sous les mêmes conditions, à savoir que la direction de codage par la fréquence d'une image correspond à la direction de codage par la phase de l'autre, et inversement.

Il peut être également intéressant d'appliquer le principe à des volumes tridimensionnels d'I.R.M., mais acquis en «multi-coupes», c'est-à-dire en fait un ensemble d'images I.R.M. 2D. Ce type d'acquisitions est encore beaucoup utilisé en I.R.M. cérébrale par exemple ([AURD-97]), où l'on acquiert souvent un ensemble de coupes frontales et un ensemble de coupes axiales (par exemple), avec une forte anisotropie dans la direction orthogonale aux coupes.

Or, la modélisation que nous avons introduite au chapitre 4 ne s'applique pas directement à ce type d'images, puisqu'il n'y a pas de codage fréquentiel (fréquence ou phase) dans la direction orthogonale aux coupes.

Il convient alors de distinguer deux types d'acquisitions :

- si les coupes sont jointives, c'est-à-dire que chaque plan du corps du patient est pris en compte dans une coupe et une seule (autrement dit, l'épaisseur de coupe est égale à la distance inter-coupes), la modélisation du chapitre 4 devra être remplacée par le modèle de l'échantillonneur moyenneur.
- si les coupes sont non-jointives, c'est-à-dire que certaines «tranches» du patient ne sont prises en compte dans aucune des coupes (autrement dit, l'épaisseur de coupe est inférieure à la distance inter-coupes), alors la modélisation précédente ne sera pas valable non plus. Dans ce cas, si l'épaisseur de coupe est très petite devant la distance inter-coupes, on pourra approcher le modèle par celui de l'échantillonneur «idéal» (multiplication par un «peigne de Dirac»).

### 8.3.2 Validité des *a priori* de régularisation

Les outils de régularisation introduits au chapitre 5 ont été choisis pour une application bien ciblée : celle de l'angiographie par résonance magnétique avec injection de Gadolinium, où les structures d'intérêt sont des vaisseaux intenses sur fond sombre, et dont on cherche à délimiter le plus précisément possible les frontières, afin de quantifier les variations de diamètres permettant de mesurer la sévérité d'une pathologie.

Nous avons indiqué au paragraphe précédent (8.3.2) que moyennant une redéfinition du modèle, le principe général de la méthode pouvait être adapté à d'autres types d'images, par exemple les images anatomiques cérébrales. L'idée peut également être utilisée, si la forme des données s'y prête, à des images fonctionnelles du cerveau par exemple, ou à des images anatomiques ou fonctionnelles du cœur, etc.

Il convient alors, dans chaque cas, de se poser les questions suivantes :

- quelles connaissances a-t-on sur l'image, et quels *a priori* peut-on en tirer qui permettent de guider la reconstruction ?



- quelles informations utiles au diagnostic cherche-t-on à récupérer en fin de chaîne de traitement, et quelles contraintes cela implique-t-il pour la méthode?

Ces questions sont certes très générales, mais elles sont fondamentales et il est certain que pour les diverses applications évoquées ci-dessus, les réponses seront différentes et donc la méthode nécessitera une adaptation soignée.

## Conclusion

*Dans ce chapitre, nous avons souhaité aborder deux questions qui se posent assez naturellement après l'exposé de nos travaux. La première est directement liée à ces travaux, et doit être toujours présente à l'esprit des utilisateurs potentiels du principe d'acquisition exposé dans ce rapport. En effet, selon la zone anatomique à imager et les paramètres d'acquisition choisis, les gains de la méthode proposée peuvent être annihilés par les artefacts de mouvement qu'elle induit.*

*On peut également mentionner un problème connexe, qui concerne la prise en compte des différences de contraste entre les acquisitions, dues à des variations d'opacification. On peut envisager une solution similaire à celle proposée pour le problème des mouvements, qui consisterait donc à ajouter dans la fonction d'énergie des paramètres à optimiser conjointement avec les niveaux de gris, et qui pondéreraient les termes d'attache aux données.*

*Le deuxième point se devait d'être abordé à titre d'ouverture, afin de discuter de la généralité et de la «généralisabilité» de la méthode, développée à l'origine pour une application donnée. En nous cantonnant aux applications en I.R.M., nous donnons quelques pistes permettant d'adapter notre méthode à des données autres que celles de l'A.R.M. 3D.*

---

## CHAPITRE 9

# Conclusion et perspectives

L'objectif général de cette thèse était de contribuer à l'amélioration de la résolution spatiale en Angiographie par Résonance Magnétique tridimensionnelle, en combinant plusieurs acquisitions de différentes résolutions.

Une étude des fondements physiques de l'I.R.M., et en particulier du compromis entre la durée des acquisitions et la résolution spatiale des images résultantes, qui constitue une limite majeure à la substitution de l'A.R.X. par l'A.R.M. (chapitre 2), a permis le développement d'une stratégie d'acquisition originale permettant de contourner ledit compromis. Cette stratégie est fondée sur l'acquisition de plusieurs volumes de la même zone anatomique d'intérêt, avec des résolutions spatiales différentes mais complémentaires (chapitre 3). Nous avons également pu montrer *a priori*, de façons qualitative et quantitative, les apports de cette stratégie d'acquisition par rapport aux acquisitions classiques.

La contribution apportée par le chapitre 4 est la formalisation du processus d'acquisition évoqué précédemment, qui aboutit à un modèle mathématique général de ce principe d'acquisition. Cette modélisation, qui s'appuie sur le fait qu'une image de résolution dégradée correspond en fait à l'acquisition d'un nombre d'échantillons réduit dans le domaine de Fourier, est susceptible d'être intégrée avantageusement dans divers types de traitements nécessitant la connaissance du processus d'acquisition des images et des relations les liant les unes aux autres.

Dans le chapitre 5, nous nous sommes intéressés à la résolution du problème inverse, à savoir la reconstruction à partir des acquisitions sous-échantillonnées d'un volume unique de haute résolution. Nous avons pu tirer profit des résultats du chapitre 4, puisque le modèle que nous y avons développé a permis la connaissance exacte et l'expression formelle du problème direct. Les différentes contraintes pesant sur le problème nous ont amenés à nous placer dans le contexte de la régularisation avec préservation

des discontinuités afin de résoudre le problème inverse de reconstruction. Nous avons développé une méthode consistant à minimiser une fonction d'énergie adéquatement choisie, qui intègre à la fois le modèle de données et les contraintes de préservation des discontinuités ; nous avons proposé l'utilisation de l'algorithme du gradient conjugué pour la minimisation. Nous avons ensuite mené une étude approfondie sur les solutions du problème, en particulier l'étude de la convexité et l'expression en termes de filtrage des solutions particulières le permettant.

Devant les difficultés rencontrées pour mener à terme l'étude des solutions dans le cas général, la non-linéarité des fonctions de régularisation utilisées ne permettant pas une expression linéaire ou quadratique de la fonction d'énergie dans le cas général, nous nous sommes placés dans le cadre théorique de la régularisation semi-quadratique (chapitre 6). Notre contribution à ce niveau concerne l'exploitation conjointe des propriétés du modèle dans le domaine spectral, et de celles des algorithmes de régularisation semi-quadratique, qui a permis le développement d'un algorithme de reconstruction aussi élégant au niveau formel que performant en termes de temps de calcul, ainsi que le montrent les évaluations quantitatives menées au chapitre 7.

La méthode a été évaluée qualitativement et quantitativement sur des données synthétiques, et s'est avérée robuste à tous points de vue (chapitre 7). Son application sur des données réelles (chapitre 7) a montré l'intérêt et la faisabilité de la méthode, en particulier sur les artères aortes et carotides, mais également ses limites sur les artères rénales par exemple. Ces limitations sont discutées parmi d'autres questions cliniques au chapitre 8, où nous proposons des pistes pour les contourner et pour permettre l'utilisation clinique de la méthode pour la plus grande variété de vaisseaux possible.

Plusieurs perspectives se dégagent de ces travaux et résultats. Le premier aspect concerne la mise en œuvre clinique de la méthode développée. Bien que la priorité n'ait pas été donnée à l'optimisation des programmes dans le cadre de cette thèse (les programmes ont d'ailleurs été écrits sous Matlab, un langage non compilé), on peut présager de temps de calcul tout à fait compatibles avec une disponibilité quasi-immédiate du volume reconstruit à la fin de l'examen. Notons que la mise en œuvre clinique devra inclure une étape de pré-traitement des données, afin de déterminer automatiquement, d'après les coordonnées et les résolutions de chaque volume, la région commune à traiter ; ou, si le médecin souhaite se focaliser sur une région d'intérêt plus restreinte, cette étape devra extraire de chacun des volumes acquis les données correspondant à cette zone. D'autre part, le souhait des experts médicaux que nous avons consultés est de disposer après traitement d'un volume final comportant toutes les données, acquises et reconstruites, avec par conséquent une résolution variable selon les zones de ce volume :

---

une haute résolution dans les zones d'intersection de plusieurs volumes, obtenue grâce à la reconstruction, et une résolution médiocre ailleurs, mais qui permet cependant de replacer la zone d'intérêt dans son environnement anatomique. Notons cependant que cette idée pourra se heurter à des problèmes de compatibilité avec les formats standard de stockage et d'échange des dossiers médicaux (le format DICOM, en particulier). Ces étapes de pré-traitement et de post-traitement sont, à notre avis, indissociables du développement des consoles d'acquisition par les constructeurs. L'utilisation de nos résultats en routine clinique est donc subordonnée à l'implantation de nos algorithmes sur les consoles d'acquisition, et au développement des indispensables outils d'interface entre les acquisitions «brutes» et les données en entrée de l'algorithme d'une part, et d'autre part, entre les données en sortie de l'algorithme et les outils de visualisation et de quantification.

Sur le plan théorique, nous souhaiterions proposer une piste pour l'amélioration de la méthode de reconstruction. Nous avons utilisé dans notre méthode la régularisation avec préservation des discontinuités, découlant du principe du «processus de ligne» (cf. § 5.1.4), dont l'idée est d'interrompre localement le filtrage passe-bas aux emplacements des discontinuités. Il s'agit, intuitivement, d'une sélection de la zone d'action des *a priori* de régularisation, dans le domaine spatial. De façon duale, nous proposons d'introduire une sélection de la zone d'action des *a priori* de régularisation cette fois dans le domaine spectral : en effet, il peut être intéressant d'introduire une régularisation spécifique dans les zones non couvertes par les acquisitions (c'est-à-dire dans les «coins» du *k-space*).

Cette idée a été exploitée dans divers travaux et pour diverses applications, parmi lesquelles nous en retiendrons une : la reconstruction tomographique [PEYR-96]. En effet, grâce au théorème «coupe-projection» qui relie la transformée de Fourier et la transformée de Radon (celle-ci exprimant le problème direct de tomographie), les deux problèmes comportent une forte similitude. Bien qu'en reconstruction tomographique, ce ne soient pas des «cubes» qui manquent dans l'espace de Fourier, mais des secteurs angulaires, certaines méthodes de reconstruction tomographique pourraient être adaptées à notre problème (notons que de nombreuses méthodes de reconstruction tomographique entrent dans le cadre des méthodes de résolution des problèmes inverses étudiées au paragraphe 5.1 ; nous ne nous y attarderons pas).

Maréchal, par exemple, aborde le problème d'une manière semblable à la nôtre, en proposant la minimisation d'une fonction d'énergie, dans laquelle le terme d'attache aux données s'applique à la zone couverte par les acquisitions, et le terme de régularisation, au complémentaire de cette zone par rapport à un support spectral limité par

exemple par l'enveloppe convexe du support des données acquises [MARE-98].

Payot, pour sa part, se place dans le cadre de la minimisation sous contrainte d'une fonction d'énergie, qu'il propose d'effectuer avec l'algorithme de Bregman [PAYO-96b]. Il utilise une minimisation semi-quadratique, mais, alors que dans notre méthode la variable auxiliaire représente les discontinuités, dans la sienne celle-ci «agit comme un indicateur de l'extérieur de l'objet». Fiani et al. proposent une extension de cette méthode pour des critères plus généraux [FIAN-01].

On ne saurait conclure sur cette piste sans citer le célèbre algorithme de Gerchberg et Papoulis [GERC-74, PAPO-75], qui pourrait servir de point de départ au développement de cette piste. Cet algorithme itératif fonctionne alternativement dans le domaine spatial et dans le domaine spectral, et permet d'introduire des contraintes de support dans chacun de ces deux domaines. Cet algorithme pourrait être combiné avec les approches proposées par Maréchal et Payot par exemple, afin de pouvoir introduire une régularisation sélective à la fois dans le domaine spatial et dans le domaine spectral.

Enfin, comme nous l'avons déjà mentionné dans ce document, les travaux visant à l'amélioration de la résolution spatiale s'inscrivent dans un objectif plus large, à savoir l'amélioration du diagnostic de la gravité d'une pathologie telle qu'une sténose. Or ce diagnostic passe par une segmentation même partielle du vaisseau. Ainsi les images fournies par notre méthode sont amenées à être segmentées, soit de manière manuelle comme cela se fait couramment en routine clinique, soit de manière automatique, cette dernière option occupant de nombreuses équipes de recherche en imagerie médicale. Nous pensons qu'il pourrait être intéressant de comparer les résultats obtenus par segmentation à partir des images de haute résolution obtenues par reconstruction, avec ceux obtenus par segmentation à partir de l'ensemble des données sous-résolues. Cette dernière solution implique le développement d'une méthode de segmentation originale, incluant la fusion des acquisitions multiples ; cette méthode pourrait en particulier judicieusement inclure le modèle d'acquisition général présenté au chapitre 4. C'est dans cette optique qu'ont été abordés les travaux d'un stage que nous avons encadré, consistant à développer une méthode de segmentation d'images vasculaires tridimensionnelles fondée sur des modèles déformables [SAKK-01]. Cette méthode se veut modulaire afin de pouvoir prendre en compte, à terme, les acquisitions multiples ainsi que leur modèle de formation.

---

## ANNEXE A

# Images synthétiques pour l'évaluation

Nous détaillons ici les modèles d'images utilisées pour les simulations et pour l'évaluation tout au long de ce document. La première partie présente l'image synthétique *Rectangles* utilisée principalement pour l'étude quantitative des hyperparamètres. Dans la seconde partie, nous exposons le modèle choisi pour l'image d'un segment vasculaire.

## A.1 Modèle d'image constante par morceaux

Pour l'évaluation de la reconstruction en termes de préservation des contours et de suppression du bruit, nous avons jugé utile de définir des critères «objectifs» (cf. § 7.2), qui s'appuient sur un modèle simple de l'image «idéale»; en l'occurrence, nous avons choisi un modèle d'image constante par morceaux, dont les zones sont de forme rectangulaire, de diverses dimensions, et diversement contrastées par rapport au fond. Ainsi, les zones de contours sont définies par l'ensemble des pixels pour lesquels la norme du gradient est non nulle, et on peut aisément distinguer les zones de contour théoriques des zones homogènes théoriques. Nous nous sommes limités à une image bidimensionnelle, pour la simplicité de l'affichage, mais ce sans perte de généralité. Cette image synthétique de référence, de taille  $64 \times 64$ , est présentée sur la figure A.1.

A partir de cette image de référence ont été simulées des acquisitions sous-échantillonnées, conformément à la modélisation de la dégradation présentée au chapitre 4, § 4.2. Pour l'évaluation nous avons choisi 20 pixels dans la direction de résolution dégradée, ce qui correspond à un rapport de 3,2 entre les haute et basse résolutions. Les acquisitions sous-résolues simulées sont présentées sur les figures A.2 et A.3, avant et après interpolation conformément au § 4.1. On peut d'ailleurs remarquer les oscillations induites par ce type d'interpolation.

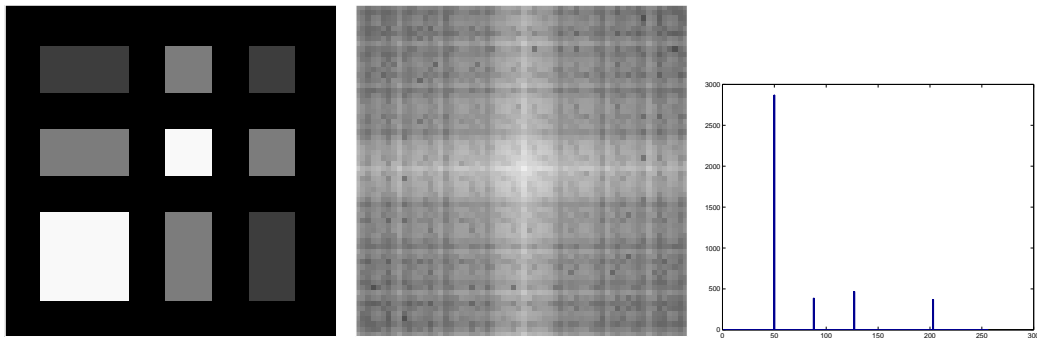


FIG. A.1 – *A gauche, l'image synthétique Rectangles. Au centre, sa T.F.D. A droite, son histogramme.*

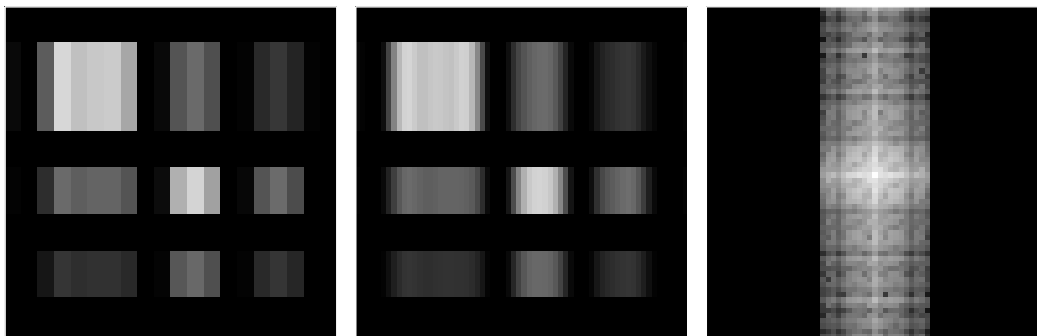


FIG. A.2 – *A gauche, l'image synthétique Rectangles sous-résolue selon la direction horizontale. Au centre, l'image synthétique sous-résolue selon  $x$ , après interpolation. A droite, la T.F.D. de l'image interpolée (la T.F.D. de l'image avant interpolation peut s'en déduire en ne gardant que la bande centrale d'intensité non nulle).*

Ces images sous-résolues ont ensuite été bruitées par deux réalisations distinctes d'un bruit gaussien additif centré d'écart-type 10% de la dynamique de l'image de référence (figures A.4 et A.5). On peut noter que les images ont été bruitées avant interpolation, afin d'éviter tout effet secondaire de corrélation du bruit lors de l'interpolation. Cependant, des simulations ont permis de vérifier que l'interpolation conservait le caractère décorréolé du bruit.

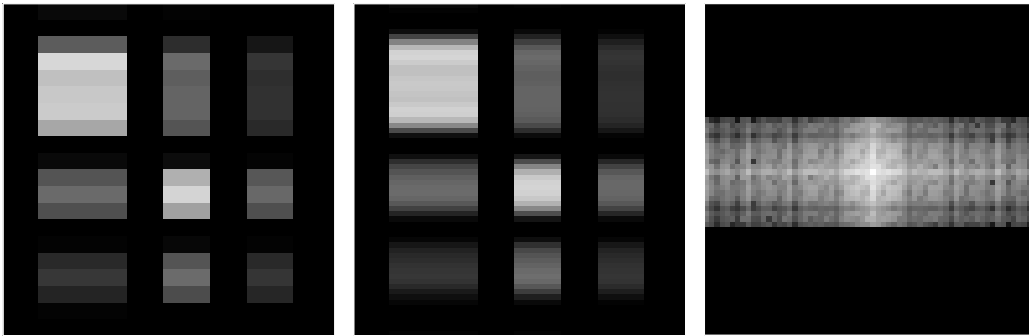


FIG. A.3 – A gauche, l'image synthétique Rectangles sous-résolue selon la direction verticale. Au centre, l'image synthétique sous-résolue selon  $y$ , après interpolation. A droite, la T.F.D. de l'image interpolée (la T.F.D. de l'image avant interpolation peut de déduire de celle-là en ne gardant que la bande centrale d'intensité non nulle).

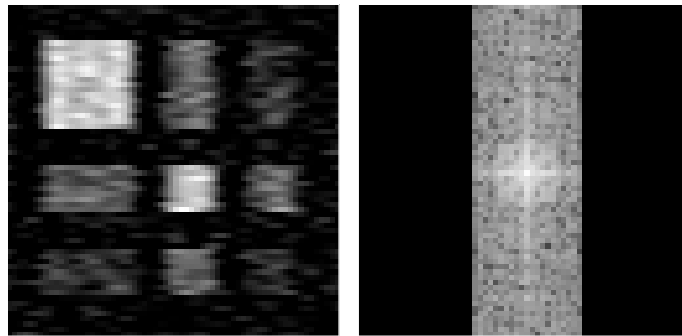


FIG. A.4 – A gauche, l'image dégradée selon  $x$  bruitée puis interpolée. A droite, sa T.F.D.

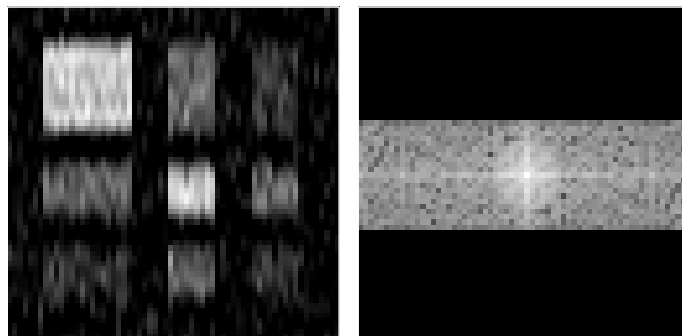


FIG. A.5 – A gauche, l'image dégradée selon  $y$  bruitée puis interpolée. A droite, sa T.F.D.



## A.2 Modèle d'image de segment vasculaire

Nous détaillons dans cette partie nos choix pour la création des images synthétiques tridimensionnelles de vaisseaux. Dans un premier temps, nous exposons le modèle choisi pour la paroi du vaisseau, et dans un second temps, le modèle choisi pour l'intensité de l'image à l'intérieur et à l'extérieur du vaisseau.

### A.2.1 Modèle de surface pour la paroi du vaisseau

Le modèle de surface choisi est extrêmement simple : il s'agit d'un cylindre généralisé dont l'axe est une droite, dont les sections sont circulaires, et dont le rayon est constant sauf dans la zone centrale où l'on peut introduire une sténose. Les paramètres concernant la sténose sont au nombre de deux :

- la longueur  $L$ , définie par la longueur en pixels sur l'axe de la portion où le rayon de la section est inférieur au rayon de référence,
- le pourcentage de sténose  $\rho$ , défini comme le rapport :

$$\rho = \frac{R_{max} - R_{min}}{R_{max}} \quad (\text{A.1})$$

Compte-tenu de ces définitions, le rayon  $r$  en fonction de l'abscisse  $s$  le long de l'axe, en prenant le milieu de la sténose comme origine, est défini de manière empirique par :

$$r(s) = R_{max} \left[ (1 - \rho) + \rho \left( \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi s}{L}\right)}{2} \right) \right] \quad (\text{A.2})$$

La figure A.6 montre l'évolution du rayon le long de l'axe.

Finalement, la surface de la paroi du vaisseau n'est autre que la surface engendrée par la révolution du profil de la figure A.6 autour de l'axe.

La figure A.7 montre quelques exemples de vaisseaux obtenus par ce modèle.

### A.2.2 Modèle d'intensité

Le modèle choisi consiste à associer à chaque voxel une intensité ne dépendant que de la distance du voxel à l'axe du modèle de vaisseau, et bien sûr du rayon de la section concernée. Pour établir un profil réaliste d'intensité, nous avons mené une étude qualitative sur un ensemble varié d'images de vaisseaux ; en particulier nous nous sommes attachés à étudier des vaisseaux de divers rayons, afin d'en déduire un

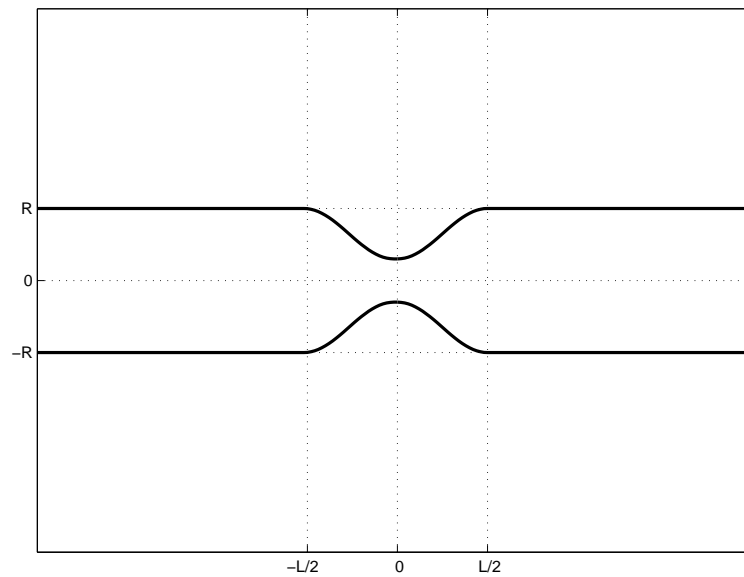


FIG. A.6 – Evolution du rayon le long de l'axe, ici avec  $\rho = 70 \%$ .

modèle qui convienne aussi bien aux artères aortes, qu'aux carotides ou aux rénales par exemple.

Les caractéristiques suivantes se dégagent de cette étude :

- l'intensité du fond vaut environ 20 % de l'intensité maximale dans le vaisseau,
- l'intensité dans le vaisseau peut être approchée par une valeur constante,
- la décroissance de l'intensité maximale à l'intensité du fond se fait de manière approximativement linéaire, sur 4 pixels en moyenne, indépendamment de la dimension du vaisseau. Nous avons choisi arbitrairement de situer la paroi du vaisseau au milieu de la zone de décroissance.

La figure A.8 montre l'application de ce modèle à quelques vaisseaux de dimensions variables, en une dimension, sur des diamètres (orthogonalement à l'axe).

### A.2.3 Modèle de bruit

Nous savons (cf. § 2.2.4.3) que le bruit sur les images I.R.M. de module est ricien ; nous optons cependant pour la solution classique qui consiste à adopter un modèle de bruit gaussien, celui-là étant mieux connu et plus simple d'utilisation.

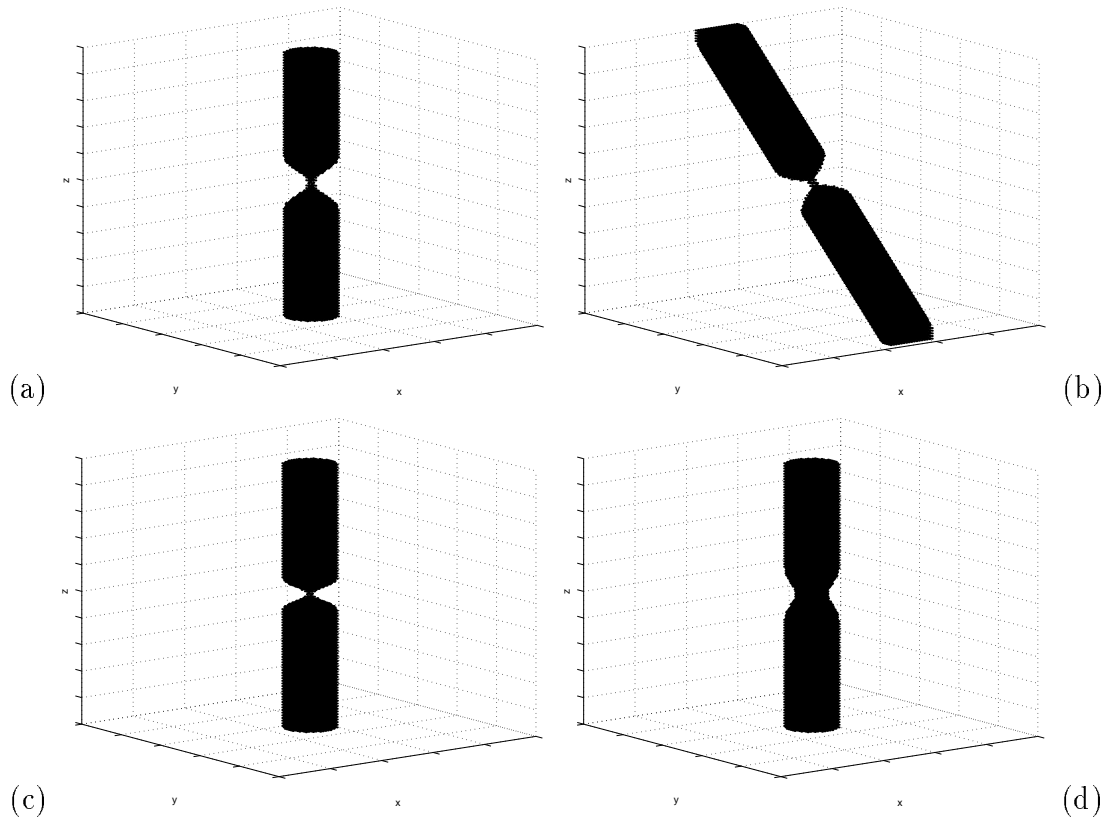


FIG. A.7 – Quelques exemples de vaisseaux obtenus par le modèle proposé, avec une grille de taille  $100 \times 100 \times 100$  et un rayon de 8. (a) sténose à 90 % de longueur 20. (b) mêmes paramètres que (a), avec une orientation différente. (c) sténose à 90 % de longueur 12. (d) sténose à 40 % de longueur 20.

Expérimentalement, il semble qu'un bruit gaussien d'écart-type environ 5 % de la dynamique de l'image soit relativement proche du bruit constaté sur les images réelles. C'est pourquoi nous optons souvent pour cette valeur d'écart-type dans les simulations, sans la justifier davantage.

La figure A.10 présente un exemple de section d'un vaisseau réel, ainsi qu'une section simulée à l'aide du modèle présenté ci-dessus, non bruitée et bruitée avec un bruit gaussien d'écart-type 5 % de la dynamique de l'image : visuellement, le modèle paraît assez fidèle aux images d'A.R.M., par conséquent nous jugeons raisonnable de nous appuyer pour les diverses évaluations sur ce modèle.

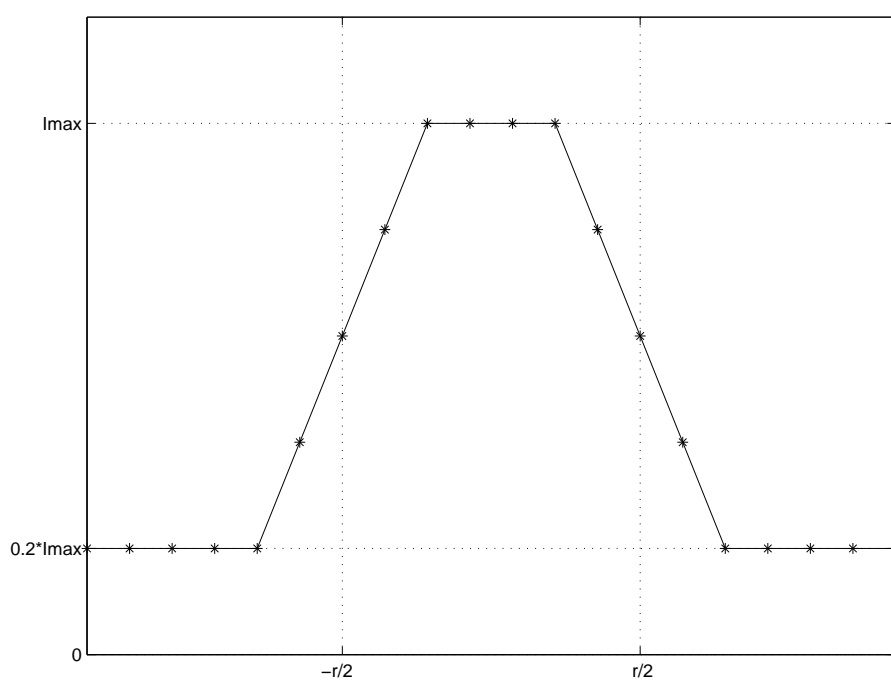


FIG. A.8 – Le modèle de profil d'intensité résultant de l'étude de profils de vaisseaux sur des A.R.M.

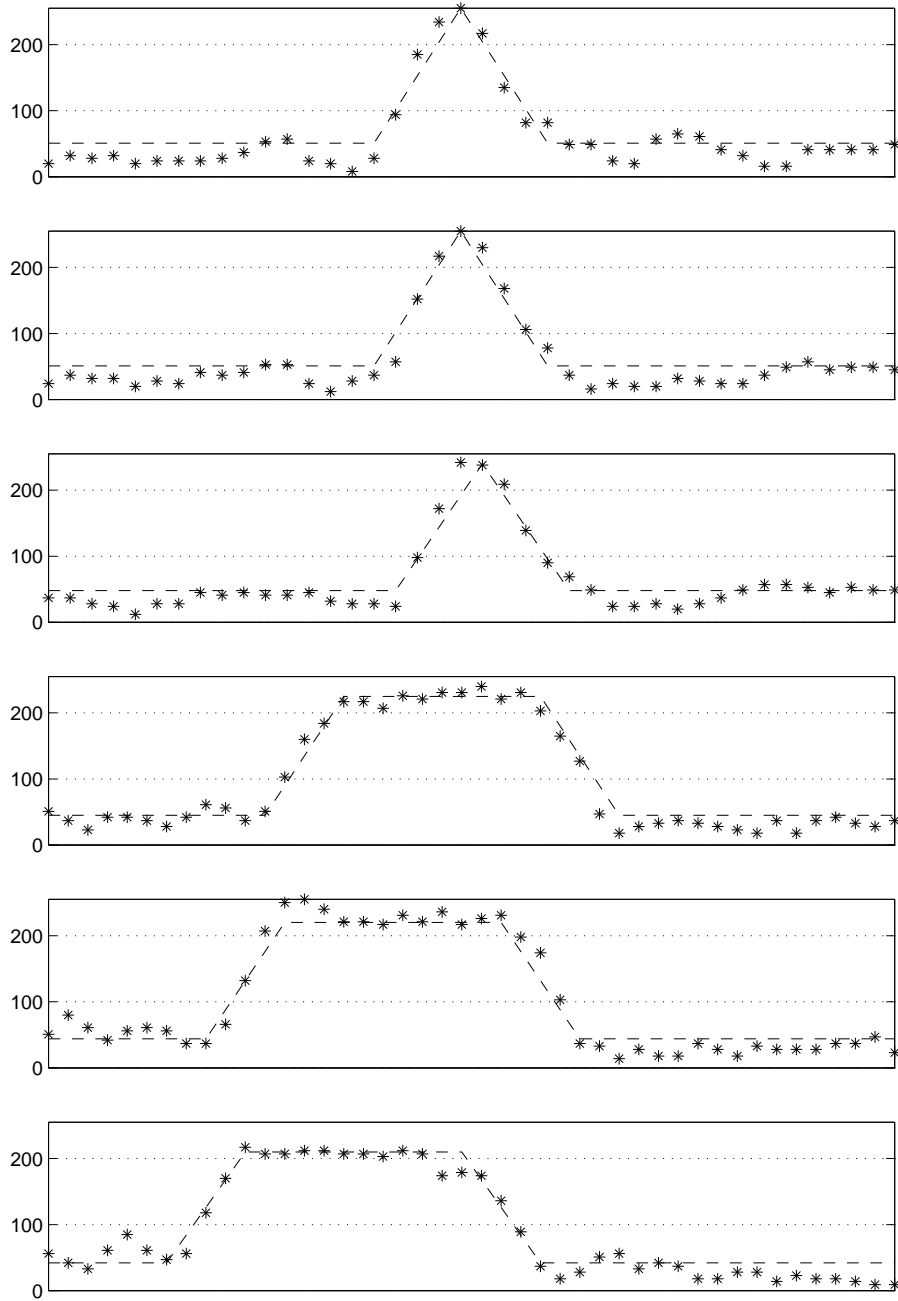


FIG. A.9 – *Superposition de quelques profils réels (\*) avec le modèle (en pointillés).*

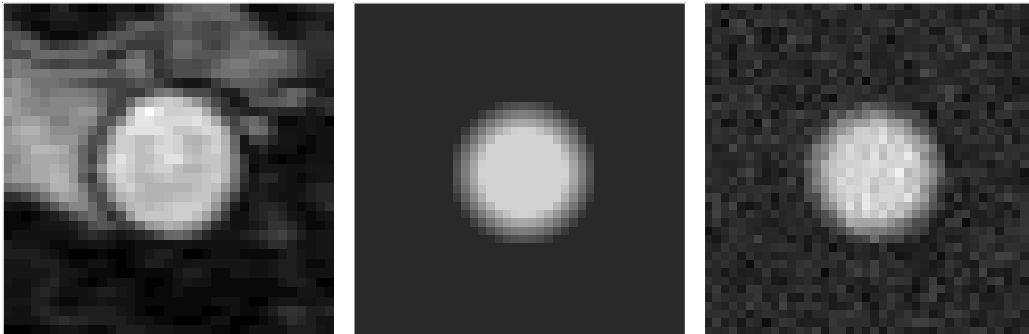


FIG. A.10 – *Evaluation a posteriori du modèle d'intensité et de bruit. A gauche : une section de vaisseau issue d'une image A.R.M. Au milieu : une section de vaisseau simulé avec le modèle. A droite : cette même section bruitée par un bruit gaussien d'écart-type 5 %.*



---

## ANNEXE B

# Expression des opérateurs linéaires et séparables sur des volumes 3D dans le cadre de l’algèbre linéaire

## B.1 Définitions

Il s’agit ici d’exprimer, à partir des opérateurs matriciels  $A_x, A_y, A_z$  opérant sur une seule colonne respectivement dans les directions  $x, y$  et  $z$  d’une matrice de données tridimensionnelle  $\mathcal{V}$ , les opérateurs matriciels  $\mathbf{A}_x, \mathbf{A}_y, \mathbf{A}_z$  opérant sur la représentation vectorielle  $\mathbf{V}$  des données (voir aussi [PRAT-91] par exemple), c’est-à-dire tels que :

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_x &= \mathbf{A}_x \cdot \mathbf{V} \\ \mathbf{V}_y &= \mathbf{A}_y \cdot \mathbf{V} \\ \mathbf{V}_z &= \mathbf{A}_z \cdot \mathbf{V}\end{aligned}\tag{B.1}$$

$\mathbf{V}$  s’obtient à partir de la matrice 3D de données en concaténant toutes les valeurs de la matrice en respectant l’ordre  $y, x, z$  lors du parcours de la matrice (voir illustration sur la figure B.1);  $\mathbf{V}$  est donc de dimension  $N_y N_x N_z \times 1$ ; la relation entre les indices de  $\mathbf{V}$  et ceux de  $\mathcal{V}$  est la suivante :

$$\mathbf{V}((k-1)N_x N_y + (j-1)N_x + i) = \mathcal{V}(i, j, k)\tag{B.2}$$

Dans ces conditions, un opérateur  $M_y$  opérant sur la première dimension ( $y$ ) de  $\mathcal{V}$



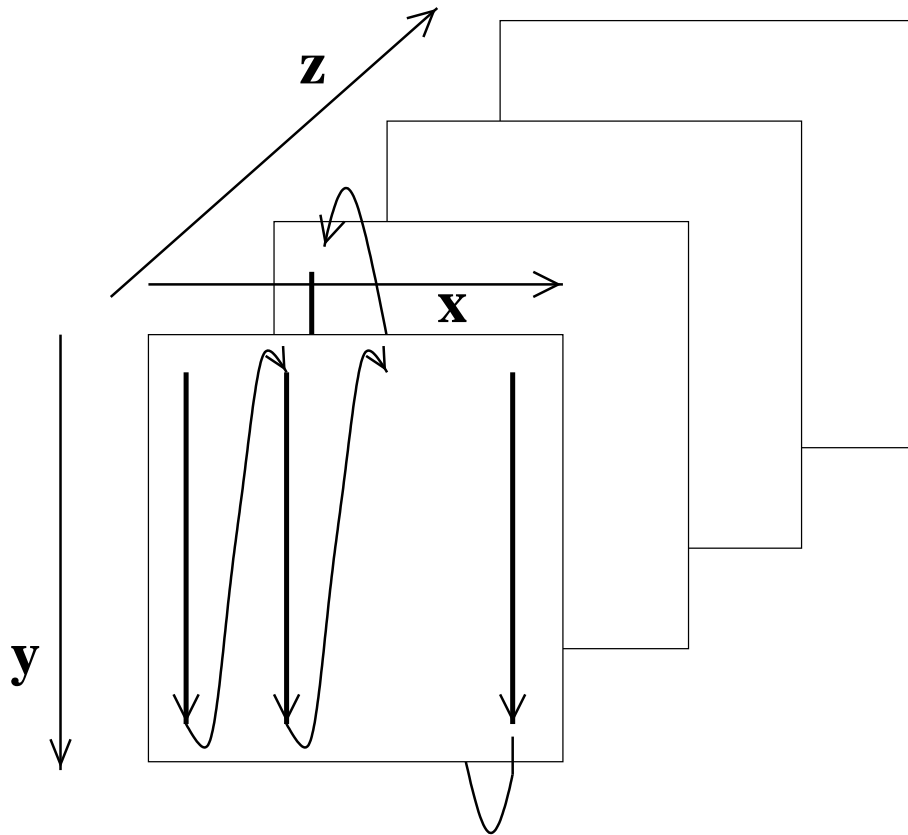


FIG. B.1 – *Ordre de parcours de la matrice 3D pour sa transformation en vecteur colonne.*

se traduit par l'opérateur  $\mathbf{M}_y$  appliqué à  $\mathbf{V}$  :

$$\mathbf{M}_y = \begin{bmatrix} [M_y] & 0 & \dots\dots & 0 \\ 0 & [M_y] & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots\dots\dots & 0 & [M_y] \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

$\mathbf{M}_y$  est une matrice bloc-diagonale de dimension  $N_y N_x N_z \times N_y N_x N_z$  formée par la matrice  $M_y$  de taille  $N_y \times N_y$  répétée  $N_x N_z$  fois sur la diagonale de  $\mathbf{M}_y$ .

De même, si l'opérateur  $M_x$  opérant sur la seconde dimension ( $x$ ) de  $\mathcal{V}$  s'écrit :

$$M_x = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & & m_{1N_x} \\ m_{21} & m_{22} & & m_{2N_x} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ m_{N_x 1} & & & m_{N_x N_x} \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

alors l'opérateur correspondant  $\mathbf{M}_x$  appliqué à  $\mathbf{V}$  est une matrice bloc-diagonale composée de  $N_z$  fois le bloc  $M'_x$  :

$$\mathbf{M}_x = \begin{bmatrix} [M'_x] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [M'_x] & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & [M'_x] \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

et où  $M'_x$  est une matrice composée de  $N_x \times N_x$  blocs identité de taille  $N_y \times N_y$  pondérés par les coefficients de  $M_x$ , soit :

$$M'_x = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & m_{12} & 0 & 0 & \cdots & m_{1N_x} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & m_{11} & 0 & 0 & m_{12} & \cdots & 0 & 0 & m_{1N_x} \\ m_{21} & 0 & 0 & m_{22} & 0 & 0 & \cdots & m_{2N_x} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & m_{21} & 0 & 0 & m_{22} & \cdots & 0 & 0 & m_{2N_x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{N_x 1} & 0 & 0 & m_{N_x 2} & 0 & 0 & \cdots & m_{N_x N_x} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & m_{N_x 1} & 0 & 0 & m_{N_x 2} & \cdots & 0 & 0 & m_{N_x N_x} \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

Enfin, en prenant pour  $M_z$  les mêmes notations  $m_{ij}$  que pour  $M_x$ , la matrice  $\mathbf{M}_z$  est composée de  $N_z \times N_z$  blocs identité de taille  $N_y N_x \times N_y N_x$  pondérés par les coefficients

de  $M_z$ , soit :

$$\mathbf{M}_z = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & m_{12} & 0 & 0 & \cdots & m_{1N_z} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & m_{11} & 0 & 0 & m_{12} & \cdots & 0 & 0 & m_{1N_z} \\ m_{21} & 0 & 0 & m_{22} & 0 & 0 & \cdots & m_{2N_z} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & m_{21} & 0 & 0 & m_{22} & \cdots & 0 & 0 & m_{2N_z} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{N_z 1} & 0 & 0 & m_{N_z 2} & 0 & 0 & \cdots & m_{N_z N_z} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & m_{N_z 1} & 0 & 0 & m_{N_z 2} & \cdots & 0 & 0 & m_{N_z N_z} \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

## B.2 Propriétés

Ces trois transformations  $M_y \rightarrow \mathbf{M}_y$ ,  $M_x \rightarrow \mathbf{M}_x$ , et  $M_z \rightarrow \mathbf{M}_z$ , possèdent quelques propriétés évidentes mais bien utiles :

**Propriété 1** Les matrices  $\mathbf{C}_x = \mathbf{A}_x + \mathbf{B}_x$ ,  $\mathbf{C}_y = \mathbf{A}_y + \mathbf{B}_y$  et  $\mathbf{C}_z = \mathbf{A}_z + \mathbf{B}_z$  peuvent être obtenues par les transformations  $M_y \rightarrow \mathbf{M}_y$ ,  $M_x \rightarrow \mathbf{M}_x$ , et  $M_z \rightarrow \mathbf{M}_z$  respectivement à partir des matrices  $C_x = A_x + B_x$ ,  $C_y = A_y + B_y$  et  $C_z = A_z + B_z$ .

**Propriété 2** Les matrices  $\mathbf{C}_x = \mathbf{A}_x \cdot \mathbf{B}_x$ ,  $\mathbf{C}_y = \mathbf{A}_y \cdot \mathbf{B}_y$  et  $\mathbf{C}_z = \mathbf{A}_z \cdot \mathbf{B}_z$  peuvent être obtenues par les transformations  $M_y \rightarrow \mathbf{M}_y$ ,  $M_x \rightarrow \mathbf{M}_x$ , et  $M_z \rightarrow \mathbf{M}_z$  respectivement à partir des matrices  $C_x = A_x \cdot B_x$ ,  $C_y = A_y \cdot B_y$  et  $C_z = A_z \cdot B_z$ .

**Propriété 3** Les matrices obtenues par les transformations  $M_y \rightarrow \mathbf{M}_y$ ,  $M_x \rightarrow \mathbf{M}_x$ , et  $M_z \rightarrow \mathbf{M}_z$  à partir de la matrice identité sont également des matrices identité.

**Propriété 4** Les transformations  $M_y \rightarrow \mathbf{M}_y$ ,  $M_x \rightarrow \mathbf{M}_x$ , et  $M_z \rightarrow \mathbf{M}_z$  conservent la symétrie :

- si  $A_x = A_x^T$  alors  $\mathbf{A}_x = \mathbf{A}_x^T$
- si  $A_y = A_y^T$  alors  $\mathbf{A}_y = \mathbf{A}_y^T$
- si  $M_z = A_z^T$  alors  $\mathbf{A}_z = \mathbf{A}_z^T$

---

**Propriété 5** *Les transformations  $M_y \rightarrow \mathbf{M}_y$ ,  $M_x \rightarrow \mathbf{M}_x$ , et  $M_z \rightarrow \mathbf{M}_z$  conservent la diagonalité :*

- si  $A_x$  est diagonale alors  $\mathbf{A}_x$  l'est aussi.
- si  $A_y$  est diagonale alors  $\mathbf{A}_y$  l'est aussi.
- si  $A_z$  est diagonale alors  $\mathbf{A}_z$  l'est aussi.

**Propriété 6** *Les matrices  $\mathbf{A}_x^{-1}$ ,  $\mathbf{A}_y^{-1}$ , et  $\mathbf{A}_z^{-1}$ , inverses respectivement de  $\mathbf{A}_x$ ,  $\mathbf{A}_y$  et  $\mathbf{A}_z$ , peuvent être obtenues également par les transformations  $M_y \rightarrow \mathbf{M}_y$ ,  $M_x \rightarrow \mathbf{M}_x$ , et  $M_z \rightarrow \mathbf{M}_z$  à partir des matrices  $A_x^{-1}$ ,  $A_y^{-1}$  et  $A_z^{-1}$ .*

**Propriété 7** *Les opérateurs matriciels opérant selon des directions distinctes sont commutatifs : si  $\mathbf{A}_x$  et  $\mathbf{B}_y$  sont des matrices obtenues respectivement par transformations  $M_x \rightarrow \mathbf{M}_x$  et  $M_y \rightarrow \mathbf{M}_y$  à partir de deux matrices quelconques  $A_x$  et  $B_y$ , alors  $\mathbf{A}_x \cdot \mathbf{B}_y = \mathbf{B}_y \cdot \mathbf{A}_x$ .*

*Cette propriété est également généralisable avec trois opérateurs opérant selon trois directions distinctes.*



## Bibliographie

- [ABRA-98] H.L. Abrams. Cardiac Imaging Research in the Next Century: A Commentary. *Radiology*, 208(2):285–287, August 1998.
- [ALAU-94] A. Alaux. *L'Image par Résonance Magnétique*. Sauramps Medical, 1994.
- [ANDR-77] H. C. Andrews and B. R. Hunt. *Digital Image Restoration*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1977.
- [AUBE-94] G. Aubert, M. Barlaud, L. Blanc-Feraud, and P. Charbonnier. A Deterministic Algorithm for Edge-Preserving Computed Imaging using Legendre Transform. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Pattern Recognition (ICPR)*, volume 3, pages 188–191, 1994.
- [AURD-97] L. Aurdal. *Analyse d'images IRM 3D multi-échocs pour la détection et la quantification de pathologies cérébrales*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, 1997.
- [AZHA-96] H. Azhari, O. E. Denisova, A. Montag, and E. P. Shapiro. Circular Sampling: Perspective of a Time-Saving Scanning Procedure. *Magnetic Resonance Imaging*, 14(6):625–631, 1996.
- [BERT-98] M. Bertero and P. Boccacci. *Introduction to Inverse Problems in Imaging*. Institute of Physics Publishing, 1998.
- [BITT-87] J. Bittoun, A. Leroy-Willig, I. Idy, H. Saint-James, P. halimi, A. Syrota, and A. Desgrez. Relation entre Rapport Signal-sur-Bruit et paramètres d'acquisition en IRM pour un contraste donné. *Annales de Radiologie*, 30(1):5–13, 1987.
- [BITT-98] J. Bittoun. Basic Principles of Magnetic Resonance Imaging. In S. Cerdan, A. Haase, and F. Terrier, editors, *SYLLABUS - Methodology, Spec-*

## BIBLIOGRAPHIE

---

- troscopy and Clinical MRI*, pages 45–52. ESMRMB, Springer-Verlag, September 1998.
- [BLAC-96] M. J. Black and A. Rangarajan. On the Unification of Line Process, Outlier Rejection, and Robust Statistics with Applications in Early Vision. *International Journal of Computer Vision*, 19(1):57–91, 1996.
- [BLAK-87] A. Blake and A. Zisserman. *Visual Reconstruction*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1987.
- [BLAN-94] L. Blanc-Feraud, P. Charbonnier, P. Lobel, and M. Barlaud. A Fast Tomographic Reconstruction Algorithm in the 2D Wavelet Transform Domain. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, volume V, pages 305–308, 1994.
- [BOUB-00] R. Boubertakh, A. Herment, J.-F. Giovannelli, A. de Cesare, O. Jolivet, and J. Bittoun. MR Image Reconstruction from Sparse Data and Spiral Trajectories. In *17th Annual Meeting of the European Society for Magnetic Resonance in Medicine and Biology*, page 85. ESMRMB, Elsevier, September 2000.
- [BOUM-93] C. Bouman and K. Sauer. A Generalized Gaussian Image Model for Edge-Preserving MAP Estimation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2(3):296, July 1993.
- [BOXT-98] L. M. Boxt and M. J. Lipton. Future Direction of Cardiovascular Research. *Radiology*, 208(2):283–284, August 1998.
- [CALL-99] D. Calle. *Agrandissement d'images par synthèse de similarités et par induction sur un ensemble*. PhD thesis, Laboratoire TIMC, Institut IMAG, 1999.
- [CAO-97] Y. Cao and D. N. Levin. Using Prior Knowledge of Human Anatomy to Constrain MR Image Acquisition and Reconstruction: Half K-Space and Full K-Space Techniques. *Magnetic Resonance Imaging*, 15(6):669–677, 1997.
- [CHAR-94a] P. Charbonnier. *Reconstruction d'images : régularisation avec prise en compte des discontinuités*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1994.

- 
- [CHAR-94b] P. Charbonnier, L. Blanc-Feraud, G. Aubert, and M. Barlaud. Two Deterministic Half-Quadratic Regularization Algorithms for Computed Imaging. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, volume 2, pages 168–172, 1994.
- [CHAR-96] M. Charbit. *Elements de théorie du signal: aspects aléatoires*. Ellipses, collection pédagogique de télécommunication, 1996.
- [CHAR-97] P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, and M. Barlaud. Deterministic Edge-Preserving Regularization in Computer Imaging. *IEEE Transactions on Image Processing*, 6(2):298–311, February 1997.
- [CIAR-98] P. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Dunod, 1998.
- [CLAR-97] S. Clare. *Functional MRI: Methods and Applications*. PhD thesis, University of Nottingham, 1997. <http://www.fmri.ox.ac.uk/stuart/thesis>.
- [CROO-81] L. E. Crooks. In Vivo Comparison of Line Scan and 2DFT Imaging. In *22nd Annual Experimental NMR Spectroscopy Conference*, April 1981.
- [CROO-84] L. E. Crooks, L. Kaufman, J. Hoenninger III, M. Arakawa, J. Watts, and C. R. Cannon. Spatial Resolution in NMR Imaging. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 3(2):51–53, June 1984.
- [DEGE-01] A. Degenhard, C. Tanner, C. Hayes, D. J. Hawkes, and M. O. Leach. Differential benign and malignant breast lesions using half Fourier MR image acquisition techniques. In *Proceedings of the conference on Medical Image Understanding and Analysis*, 2001.
- [DELM-91] J.-P. Delmas. *Elements de théorie du signal: les signaux déterministes*, chapter V, page 244. Collection Pédagogique de Télécommunication, 1991.
- [DEMO-89] G. Demoment. Image Reconstruction and Restoration: Overview of Common Estimation Structures and Problems. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 37(12):2024–2036, December 1989.
- [DILL-93] E. H. Dillon, M. S. Van Leeuwen, M. A. Fernandez, and W. P. Mali. Spiral CT Angiography. *AJR American Journal of Roentgenology*, 160(6):1273–1278, 1993.



## BIBLIOGRAPHIE

---

- [DOLO-96] I. Dologlou, D. van Ormondt, and G. Carayannis. MRI Scan Time Reduction through Non-Uniform Sampling and SVD-based Estimation. *Signal Processing*, 55:207–219, 1996.
- [DOOL-00] S. R. Dooley and A. K. Nandi. Notes in the Interpolation of Discrete Periodic Signals Using Sinc Function Related Approaches. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 48(4):1201–1203, April 2000.
- [DOYL-95a] M. Doyle, E. G. Walsh, G. G. Blackwell, and G. M. Pohost. Block Regional Interpolation Scheme for K-Space (BRISK): A Rapid Cardiac Imaging Technique. *Magnetic Resonance in Medicine*, 33:163–170, 1995.
- [DOYL-95b] M. Doyle, E. G. Walsh, G. G. Blackwell, and G. M. Pohost. Rapid Cardiac Imaging with Turbo BRISK. *Magnetic Resonance in Medicine*, 37:410–417, 1995.
- [ELAD-97] M. Elad and A. Feuer. Restoration of a Single Superresolution Image from Several Blurred, Noisy and Undersampled Measured Images. *IEEE Transactions on Image Processing*, 6(12):1646–1657, December 1997.
- [FEIN-86] D. A. Feinberg, J. D. Hale, J. C. Watts, L. Kaufman, and A. Mark. Halving MR imaging time by conjugation: Demonstration at 3.5 KG. *Radiology*, 161:527–531, 1986.
- [FIAN-01] M. Fiani, J. Idier, and S. Gautier. Algorithmes ART semi-quadratiques pour la reconstruction à partir de radiographies. In *Proceedings of the GRETSI*, 2001.
- [FLET-64] R. Fletcher and C. M. Reeves. Function Minimization by Conjugate Gradients. *Computer Journal*, 7:149–154, 1964.
- [FRAS-89] D. Fraser. Interpolation by the FFT Revisited - An Experimental Investigation. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 37(5):665–675, May 1989.
- [GALA-89] N. P. Galatsanos and R. T. Chin. Digital Restoration of Multichannel Images. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 37(3):415–421, March 1989.
- [GEMA-84] S. Geman and D. Geman. Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian Restoration of Images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6:721–741, November 1984.

- 
- [GEMA-87] S. Geman and D. McClure. Statistical Methods for Tomographic Image Reconstruction. *Bull. Int. Stat. Inst.*, LII-4:5–21, 1987.
- [GEMA-92] D. Geman and G. Reynolds. Constrained Restoration and the Recovery of Discontinuities. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(3):367–383, March 1992.
- [GEMA-95] D. Geman and C. Reynolds. Non Linear Image Recovery with Half-Quadratic Regularization. *IEEE Transactions on Image Processing*, 4(7):932–946, July 1995.
- [GERC-74] R. W. Gerchberg. Super-resolution through error energy reduction. *Optica Acta*, 21(9):709–720, 1974.
- [GIAN-96] G. B. Giannakis and R. W. Heath Jr. Blind Identification of Multichannel FIR Blurs and Perfect Image Restoration. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, volume 3, pages 717–720, September 1996.
- [GREE-90] P. J. Green. Bayesian Reconstructions from Emission Tomography Data using a modified EM Algorithm. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 9:84–93, March 1990.
- [GUDB-95] H. Gudbjartsson and S. Patz. The Rician Distribution of Noisy MRI Data. *Magnetic Resonance in Medicine*, 34:910–914, 1995.
- [HAAC-90] E. M. Haacke, J. Michell, and D. Lee. Improved contrast at 1.5 Tesla using half Fourier imaging: Application to spin-echo and angiographic imaging. *Magnetic Resonance Imaging*, 8:79–90, 1990.
- [HAAS-86] A. Haase, J. Frahm, D. Matthaei, W. Haenicke, and K.D. Merboldt. FLASH Imaging. Rapid NMR Imaging Using Low Flip-Angle Pulses. *Journal of Magnetic Resonance*, 67:258–266, 1986.
- [HADA-02] J. Hadamard. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Bul. Univ. Princeton*, 13(49), 1902.
- [HARI-97] G. Harikumar and Y. Bresler. Exact Image Deconvolution from Multiple FIR Blurs. *IEEE Transactions on Image Processing*, 8(6):846, June 1999.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [HEBE-89] T. Hebert and R. Leahy. A Generalized EM Algorithm for 3-D Bayesian Reconstruction from Poisson Data Using Gibbs Priors. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 8(2):194–202, June 1989.
- [HENK-85] R. M. Henkelman. Measurement of Signal Intensities in the Presence of Noise in MR Images. *Medical Physics*, 12(2):232–233, 1985.
- [HENN-86] J. Hennig, J. A. Nauerth, and H. Friedburg. RARE Imaging: A Fast Method for Clinical MR. *Magnetic Resonance in Medicine*, 3:823–833, 1986.
- [HERM-01] A. Herment, E. Mousseaux, E. Roullot, I. Bloch, O. Jolivet, and J. Bitoun. Time Resolved MRA with Continuous Acquisition of the K-Space Center (abstract). In *ISMRM-ESMRMB Joint Annual Meeting, Glasgow, UK*, 2001.
- [HEST-52] M.R. Hestenes and E. Stiefel. Methods of Conjugate Gradient for Solving Linear Systems. *National Bureau of Standards Journal of Research*, 49:409–436, 1952.
- [HOOG-98] R. M. Hoogeveen, C. J. G. Bakker, and M. A. Viergever. Limits to the Accuracy of Vessel Diameter Measurement in MR Angiography. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 8:1228–1235, 1998.
- [HORN-96] J. P. Hornak. The Basics of MRI. <http://www.cis.rit.edu/htbooks/mri>, 1996-2000.
- [HUBE-81] P. Huber. *Robust Statistics*. John Wiley and Sons, New-York, 1981.
- [JAKO-98] P. M. Jakob. Fast MRI: Basic Concepts. In S. Cerdan, A. Haase, and F. Terrier, editors, *SYLLABUS - Methodology, Spectroscopy and Clinical MRI*, pages 53–58. ESMRMB, Springer-Verlag, September 1998.
- [JALO-99] A. Jalobeanu, L. Blanc-Feraud, and J. Zerubia. Hyperparameter Estimation for Satellite Image Restoration by a MCMCML Method. In *Proceedings of EMMCVPR*, 1999.
- [KORO-96] F.R. Korosec, R. Frayne, T.M. Grist, and C.A. Mistretta. Time-resolved contrast-enhanced 3D MR Angiography. *Magnetic Resonance Med*, 36(3):345–351, September 1996.

- 
- [KOWA-00] M. E. Kowalski, J.-M. Jin, and J. Chen. Computation of the Signal-to-Noise Ratio of High-Frequency Magnetic Resonance Imagers. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 47(11):1525–1533, November 2000.
- [KUNS-94] H. R. Künsch. Robust Priors for Smoothing and Image Restoration. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 46(1):1–19, 1994.
- [LAGE-90] R. L. Lagendijk. *Iterative Identification and Restoration of Images*. PhD thesis, Technische Universiteit Delft, The Netherlands, 1990.
- [LAGE-91] R. Lagendijk and J. Biemond. *Iterative Identification and Restoration of Images*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1991.
- [LANG-90] K. Lange. Convergence of EM Image Reconstruction Algorithms with Gibbs Smoothing. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 9(4), December 1990.
- [MAIT-82] H. Maître. *Les méthodes itératives en traitement du signal*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1982.
- [MANS-77] P. Mansfield. Multi-Planar Image Formation Using NMR Spin Echoes. *J. Phys. C. Solid State*, 10:L55–L58, 1977.
- [MARE-98] P. Marechal, D. Togane, and A. Celler. A New Reconstruction Methodology for Computerized Tomography: FRECT (Fourier Regularized Computed Tomography). In *Nuclear Science Symposium*, volume 2, pages 1353–1357, 1998.
- [MARG-86] P. Margosian, F. Schmitt, and D. E. Purdy. Faster MR imaging: Imaging with half the data. *Healthcare Intr.*, 1:195–197, 1986.
- [MOON-01] C. Moonen. PRESTO, SENSE and SMASH for faster imaging. In *ISMRM - ESMRMB Joint Annual Meeting, Glasgow, UK*, 2001.
- [NG-00] M. K. Ng, R. H. Chan, T. F. Chan, and A. M. Yip. Cosine Transform Preconditioners for High-Resolution Image Reconstruction. *Linear Algebra Applications*, 316:89–104, 2000.
- [NIEL-97] H. T. C. Nielsen, E. W. Olcott, and D. G. Nishimura. Improved 2D Time-of-Flight Angiography Using a Radial-Line k-Space Acquisition. *Magnetic Resonance in Medicine*, 37:285–291, 1997.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [NIKO-01] M. Nikolova and M. Ng. Fast Image Reconstruction Algorithms Combining Half-Quadratic Regularization and Preconditioning. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, 2001.
- [NIKO-95] M. Nikolova. Parameter Selection for a Markovian Signal Reconstruction with Edge Detection. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, April 1995.
- [NIKO-99] M. Nikolova. Local Strong Homogeneity of a Regularized Estimator. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 61(2):633–658, 1999.
- [NOLL-97] D. C. Noll. Multishot Rosette Trajectories for Spectrally Selective MR Imaging. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 16(4):372, August 1997.
- [PAPO-75] A. Papoulis. A new algorithm in Spectral Analysis and Band-Limited Extrapolation. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 22(9):735–742, 1975.
- [PARK-83] J. A. Parker, R. V. Kenyon, and D. E. Troxel. Comparison of Interpolating Methods for Image Resampling. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2(1):31–39, March 1983.
- [PAYO-96a] E. Payot. *Reconstruction vasculaire tridimensionnelle en imagerie par rayons X*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, 1996.
- [PAYO-96b] E. Payot, F. Preteux, Y. Troussel, and R. Guillemaud. 3D Reconstruction from Incomplete Fourier Spectra: An Extrapolation Approach. In *SPIE Conference on Statistical and Stochastic Methods for Image Processing*, volume 2823, 1996.
- [PELL-91] C. Pellot. *Reconstruction tridimensionnelle des bifurcations vasculaires à partir de deux projection en angiographie numérisée*. PhD thesis, Université Paris XI, 1991.
- [PEYR-96] F. Peyrin, L. Garnero, and I. Magnin. Introduction à l'imagerie tomographique 2D et 3D reposant sur la propagation en ligne droite. Cas de la tomographie par rayon X, par émission et par ultrasons. *Traitement du signal (supplément)*, 13(4):381–440, 1996.

- 
- [PLEV-95] S. K. Plevritis and A. Macovski. MRS Imaging Using Anatomically K-Space Sampling and Extrapolation. *Magnetic Resonance in Medicine*, 34:686–693, 1995.
- [POLA-69] E. Polak and G. Ribière. Sur la convergence de la méthode des gradients conjugués. *Revue Française d’Informatique et de Recherche Opérationnelle*, 16-R1, 1969.
- [PRAT-91] W. K. Pratt. *Digital Image Processing*. Wiley-Interscience, 1991.
- [PRES-92] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, 1992.
- [PRUE-99] K. P. Pruessmann, M. Weiger, and P. Boesiger. SENSE: Sensitivity Encoding for Fast MRI. *Magnetic Resonance in Medicine*, 42(5):952, 1999.
- [ROUL-00a] E. Roullot, A. Herment, I. Bloch, M. Nikolova, and E. Mousseaux. Reconstruction régularisée d’images de résonance magnétique 3D de haute résolution à partir d’acquisitions de résolutions anisotropes. In *Actes du 12ème congrès AFCET-AFIA Reconnaissance de Formes et Intelligence Artificielle (RFIA’2000)*, volume 2, pages 59–68, Paris, France, February 2000. ENST.
- [ROUL-00b] E. Roullot, A. Herment, I. Bloch, M. Nikolova, and E. Mousseaux. Regularized Reconstruction of 3D High-Resolution Magnetic Resonance Images from Acquisitions of Anisotropically Degraded Resolutions. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Pattern Recognition (ICPR)*, volume 3, pages 350–353, Barcelona, Spain, 2000.
- [ROUL-00c] E. Roullot, A. Herment, I. Bloch, and E. Mousseaux. Regularized Reconstruction of 3D High-Resolution MR Angiographic Images from Acquisitions of Anisotropically Degraded Resolutions. In *ESMRMB’2000*, Paris, France, 2000.
- [SAKK-01] A. Sakka. Segmentation d’images 3D par modèles déformables. Rapport de stage d’option scientifique de l’école polytechnique, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, 2001.
- [SATH-90] P. Sathyanarayana, P. S. Reddy, and M.N.S. Swamy. Interpolation of 2-D Signals. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 37(5):623–625, May 1990.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [SCHA-73] R. W. Schafer and B. Gold. A Digital Signal Processing Approach to Interpolation. *Proceedings of the IEEE*, 61:692–702, 1973.
- [SCHA-95] T. Schanze. Sinc Interpolation of Discrete Periodic Signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43(6):1502–1503, June 1995.
- [SCHO-95] H. Schomberg and J. Timmer. The Gridding Method for Image Reconstruction by Fourier Transformation. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 14(3):596–607, September 1995.
- [SEAR-78] W. G. Sears and R. S. Winwood. *Manuel d’anatomie et de physiologie à l’usage des professions paramédicales*. Masson, 1978.
- [SHEA-01] S. M. Shea, R. M. Kroeker, V. Deshpande, G. Laub, J. Zheng, J. P. Finn, and D. Li. Coronary Artery Imaging: 3D Segmented K-Space Data Acquisition with Multiple Breath-Holds and Real-Time Slab Following. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 13:301–307, 2001.
- [SIJB-96] J. Sijbers, P. Scheunders, N. Bonnet, D. Van Dyck, and E. Raman. Quantification and Improvement of the Signal-to-Noise Ratio in a Magnetic Resonance Image Acquisition Procedure. *Magnetic Resonance Imaging*, 14(10):1157–1163, 1996.
- [SIJB-98a] J. Sijbers, A. J. den Dekker, J. Van Audekerke, and M. Verhoye and D. Van Dyck. Estimation of the Noise in Magnitude MR Images. *Magnetic Resonance Imaging*, 16(1):87–90, 1998.
- [SIJB-98b] J. Sijbers, A. J. den Dekker, P. Scheunders, and D. Van Dyck. Maximum-Likelihood Estimation of Rician Distribution Parameters. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 17(3):357–361, June 1998.
- [SODI-00] D. K. Sodickson, C. A. McKenzie, L. Wei, S. Wolff, W. J. Manning, and R. R. Edelman. Contrast-enhanced 3D MR Angiography with Simultaneous Acquisition of Spatial Harmonics: A Pilot Study. *Radiology*, 217(1):284–289, October 2000.
- [SODI-97] D. K. Sodickson and W. J. Manning. Simultaneous Acquisition of Spatial Harmonics (SMASH): Fast Imaging with Radiofrequency Coil Arrays. *Magnetic Resonance in Medicine*, 38(4):591–603, 1997.

- 
- [SODI-99] D. K. Sodickson and M. A. Griswold and P. M. Jakob. SMASH Imaging. *Magn Reson Imaging Clin N Am*, 7(2):237–254, May 1999.
- [TEBO-98] S. Teboul, L. Blanc-Feraud, G. Aubert, and M. Barlaud. Variational Approach for Edge-Preserving Regularization Using Coupled PDE's. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(3):387–397, March 1998.
- [TEBO-99] S. Teboul. *Reconstruction et segmentation d'images : approche variationnelle et EDP couplées*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1999.
- [TIKH-63] A. N. Tikhonov. Regularization of Incorrectly Posed Problems. *Sov. Math. Dokl.*, 4:1624–1627, 1963.
- [VAAL-93] J. J. van Vaals, M. E. Brummer, T. Dixon, H. H. Tuithof, H. Engels, R. Nelson, B. M. Gerety, J. L. Chezmar, and J. A. den Boer. "Keyhole" Method for Accelerating Imaging of Contrast Agent Uptake. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 3:671–675, 1993.
- [WANG-94] Y. Wang and T. Lei. Statistical Analysis of MR Imaging and its Applications in Image Modeling. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, volume 1, pages 866–870, 1994.
- [WEHR-88] F. W. Wehrli, D. Shaw, and J. B. Kneeland. *Biomedical Magnetic Resonance Imaging*. VCH Publishers, Inc., 1988.
- [WEIG-01] M. Weiger, K. P. Pruessmann, C. Leussler, P. Roschmann, and P. Boesiger. Specific coil design for SENSE: a six-element cardiac array. *Magnetic Resonance in Medicine*, 45(3):495–504, 2001.
- [WIRA-99] Wirawan, P. Duhamel, and H. Maître. Multi-Channel High-Resolution Blind Image Restoration. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, Phoenix, Arizona, 1999.
- [WRIG-97] G.A. Wright. Magnetic Resonance Imaging. *IEEE Signal Processing Magazine*, pages 56–66, January 1997.
- [ZHOU-98] X. Zhou, Z.P. Liang, S. L. Gewalt, G. P. Cofer, and P. C. Lauterbur. A Fast Echo Technique with Circular Sampling. *Magnetic Resonance in Medicine*, 39:23–27, 1998.