



HAL
open science

Modélisation géométrique et mécanique tridimensionnelle du rachis thoracique et lombaire en configuration de choc automobile

Frédéric Delerba

► **To cite this version:**

Frédéric Delerba. Modélisation géométrique et mécanique tridimensionnelle du rachis thoracique et lombaire en configuration de choc automobile. Sciences du Vivant [q-bio]. Arts et Métiers ParisTech, 2001. Français. NNT: . tel-00005772

HAL Id: tel-00005772

<https://pastel.hal.science/tel-00005772>

Submitted on 5 Apr 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers
Centre de Paris

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR

DE

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
D'ARTS ET MÉTIERS

SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE

Par

Frédéric DELERBA

MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE ET MÉCANIQUE
TRIDIMENSIONNELLE DU RACHIS THORACIQUE ET LOMBAIRE
EN CONFIGURATION DE CHOC AUTOMOBILE

Soutenue le 22 novembre 2001, devant le jury d'examen :

M.	M. FAYET	Professeur, INSA, Lyon :	président, rapporteur
M.	J.-P. VERRIEST,	Directeur de recherche, LBMC INRETS, Bron :	rapporteur
M.	F. LAVASTE,	Professeur des universités, LBM ENSAM, Paris	
M.	S. ROBIN,	Docteur en mécanique, PSA Peugeot Citroën	
M.	J.-Y. LE COZ,	Docteur en médecine, directeur du LAB – PSA Peugeot Citroën / RENAULT, Nanterre	
Mme	W. SKALLI,	Professeur des universités, LBM ENSAM Paris.	

Remerciements

A mes directeurs de thèse, le professeur François Lavaste et Monsieur Stéphane Robin pour leurs conseils et leur soutien tout au long de ces trois années, qu'ils soient ici chaleureusement remerciés.

A Madame Skalli et Messieurs Verriest, Fayet et Le Coz qui ont accepté d'être membres du jury de cette thèse.

Je remercie particulièrement Philippe Petit pour sa contribution essentielle lors de la mise au point des dispositifs de mesures et ses innombrables idées ingénieuses.

Au Dr Philippe Soubrane, chirurgien à l'hôpital Saint-Antoine à Paris pour sa participation ô combien précieuse lors des expérimentations. Pour les bons moments passés et à venir.

A Berthold Kramer pour sa présence toujours agréable et pour la pertinence de ses interventions.

A Fabrice Leray ainsi que l'ensemble de bureau d'étude de Renault pour le zèle et le sérieux dont ils ont fait preuve dans la réalisation d'un des bancs d'essais.

A Joachim Magnier et Raphael Dupuis, pour l'aide toujours efficace qu'ils m'ont apportée.

A Samuel Bertrand et Mercedes Irujo pour leur participation à ce projet.

A Claude Verliac ainsi que Robert Touzet pour leur aide et leurs conseils durant les phases d'usinage.

Aux docteur Polard, docteur Banga et docteur Delepine pour les prélèvements qu'ils ont effectués.

A Sylvie Plumet, pour son dynamisme et son expérience dans le domaine de la biomécanique.

Aux élèves ingénieurs, Gavin Mc Leod, Céline Guinouard, Nicolas Bassompierre et Boris Voisard pour leur participation à ce projet.

A Vanessa Valminos et Christophe Canu, qui m'ont assisté dans toutes les parties administratives de cette étude.

A la société SITMA pour ses conseils lors de la conception d'un des bancs d'essais.

Aux services des dons du corps de la faculté des St Père à Paris, de la faculté de médecine de Rouen et du centre hospitalier universitaire de Rennes.

J'exprime ma reconnaissance à toutes les personnes qui ont fait don de leur corps à la science, sans qui nous n'aurions pu acquérir de telles connaissances.

A Sébastien Laporte pour ses précieux conseils en mécanique.

A Virginie Lafage pour sa disponibilité et son aide dans la résolution de problèmes informatiques.

A Najah Ayadi pour le travail réalisé durant notre projet de fin d'étude.

A tous les membres du LBM qui m'ont aidé de près ou de loin dans ce projet.

Aux membres du CEESAR et du LAB, Gilles Corbin, Frédéric Loiseleux, Pascal Potier, Emmanuelle Lepage, Pascal Baudrit, Marc Ingargiola, Christophe Jacob, Xavier Trosseille, Jérôme Uriot et Eric Song avec lesquels j'ai eu un grand plaisir à travailler.

A Benoît Besnault, mon responsable de projet de fin d'étude qui, à travers sa gentillesse et sa disponibilité, m'a communiqué sa passion pour la biomécanique. Qu'il soit ici remercié.

A mes Parents et les autres membres de ma famille pour leur soutien et leurs encouragements.

A mon frère qui m'a ouvert les yeux sur certains aspects de la vie et pour tous les endroits magnifiques qu'il m'a fait découvrir.

Enfin, j'adresse un immense merci à mon épouse Ouiza pour son soutien, ses conseils et son affection.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

CHAPITRE 1 : POSITION DU PROBLEME

I- Description anatomique du rachis lombaire et thoracique	5
1- LES PLANS DE RÉFÉRENCE.....	5
2- LE RACHIS DANS SON ENSEMBLE.....	5
3- LES STRUCTURES OSSEUSES	7
A. <i>Description anatomique d'une vertèbre type</i>	7
B. <i>Surfaces articulaires</i>	7
C. <i>Le disque intervertébral</i>	8
D. <i>Les ligaments</i>	8
4- CARACTÉRISATION MÉCANIQUE DES ÉLÉMENTS OSSEUX	9
A. <i>Etude descriptive du matériel osseux</i>	9
B. <i>L'os cortical</i>	10
C. <i>L'os spongieux</i>	10
5- LES MOBILITÉS DU RACHIS	10
A. <i>Définitions</i>	10
B. <i>Rôle des articulations inter-apophysaires</i>	11
C. <i>Amplitudes des mouvements</i>	12
D. <i>Couplages segmentaires</i>	14
6- LES COURBURES DE LA COLONNE VERTÉBRALE.....	16
A. <i>La position assise</i>	16
B. <i>La position debout</i>	17
II- Les centres instantanés de rotation (CIR)	18
1- FLEXION –EXTENSION	18
A. <i>Travaux de Panjabi et coll. (thoraciques)</i>	18
B. <i>Travaux de Pearcy et coll. (lombaires)</i>	20
2- TORSION : TRAVAUX DE HAHER ET COLL.	21
3- INFLEXION : TRAVAUX DE DIMNET ET COLL.	22
III- Comportement dynamique du rachis : moyens d'essais	23
1- INTRODUCTION	23
2- DÉTAILS DES ARTICLES	24
A. <i>HAKIM & al. (1976) : étude dynamique et statique des charges supportées par les facettes articulaires</i>	24
B. <i>NIGHTINGALE & al. (1991) : influence des conditions aux limites sur le rachis cervical</i>	25
C. <i>OSVALDER & al. (1993) : méthode étudiant la réponse biomécanique d'un segment lombaire soumis à une flexion dynamique avec cisaillement</i>	27
D. <i>NEUMANN & al. (1993) : méthode étudiant la réponse biomécanique d'un segment lombaire soumis à une flexion dynamique avec cisaillement</i>	29
E. <i>OGON & al. (1997) : approche dynamique des instabilités du rachis</i>	31
F. <i>ROSTEDT & al. (1998) : rigidité axiale d'un segment lombaire lors du mouvement</i>	33
G. <i>DEMETROPOULOS & al. (1998) : propriétés mécaniques de la colonne du mannequin Hybrid III et de colonnes lombaires humaines</i>	34
H. <i>Base de données de validation du thorax du modèle « être humain »</i>	36

IV- Modélisations éléments finis du rachis	40
1- INTRODUCTION	40
2- DÉTAILS DES ARTICLES	40
A. TADANO & al. (1997) : modèle du disque intervertébral lombaire pour une simulation de flexion, torsion et compression.....	40
B. NATALI & al. (1990) : analyse non linéaire du disque intervertébral sous charge dynamique	41
C. GOEL & al. (1994) : étude « éléments finis » vibratoire du complexe ligamentaire L4-S1.....	42
D. PLANK & al. (1991) : modèle « éléments finis » amélioré du thorax humain.....	43
E. HAKIM & al. (1979) : réponse dynamique d'un modèle de vertèbre avec comparaisons expérimentales	45
F. MODELE ETRE HUMAIN.....	46
V- Conclusions sur l'étude bibliographique	50
1- COMPORTEMENT DE LA COLONNE VERTÉBRALE	50
2- MODÉLISATION DE LA COLONNE VERTÉBRALE	51

<p>CHAPITRE 2 : CARACTERISATION EXPERIMENTALE DE LA REPONSE STATIQUE ET DYNAMIQUE DE SEGMENTS VERTEBRAUX</p>

I- Objectifs et résumé	53
II- Matériel et méthode	54
1- EXPLOITATION DU MODÈLE ÊTRE HUMAIN EN VUE DU DIMENSIONNEMENT	54
A. Choc frontal : efforts et moments	54
B. Choc frontal : déplacements, vitesses et accélérations	56
C. Choc latéral : efforts et moments	58
D. Choc latéral : déplacements, vitesses et accélérations.....	59
E. Comparaison avec l'étude d'Osvalder	60
2- CAHIER DES CHARGES DU BANC D'ESSAIS À RÉALISER.....	61
A. Aspect préliminaire	61
B. Schéma cinématique du montage	63
III- Banc d'essais dynamique	64
1- MONTAGE CHOISI.....	64
2- DESCRIPTION GLOBALE DU BANC D'ESSAIS	66
3- CONCEPTION DES DIFFÉRENTS MODULES DU BANC	69
4- ANALYSE ÉNERGÉTIQUE	70
A. Evaluation de l'inertie du système	70
B. Bilan énergétique du système	70
5- VÉRIFICATION DE LA STRUCTURE	72
A. Vérification statique	72
B. Vérification dynamique	75
6- RÉGLAGES	77
7- PHOTOS DU MONTAGE.....	78
IV- Systèmes de mesures envisagés	80
1- MESURE DES EFFORTS ET DES MOMENTS.....	80
2- MESURE DES DÉPLACEMENTS	80
A. Différentes possibilités	80
B. Système choisi.....	82
3- MESURES LIÉES AU BANC.....	88
V- Mesure des axes instantanés de rotation (A.I.R)	89
1- SCHÉMA CINÉMATIQUE DU BANC D'ESSAIS « STATIQUE ».....	89
A. Schéma cinématique en configuration de flexion ou inflexion	89
B. Schéma cinématique en configuration de torsion.....	90
2- THÉORIE LIÉE À CE BANC D'ESSAIS	91
A. Explications graphiques.....	91
B. Explications analytiques.....	93

3-	LES TROIS MODES DE SOLLICITATION.....	95
A.	<i>L'inflexion latérale.....</i>	95
B.	<i>La flexion et l'extension.....</i>	96
C.	<i>La torsion.....</i>	97
4-	UN POINT COMMUN : AXE DE SOLLICITATION ET DEGRÉS DE LIBERTÉ.....	98
5-	FONCTIONNEMENT DU BANC DE TEST.....	101
6-	CAPTEUR DE COUPLE.....	103
7-	PHOTOS FINALES DU BANC.....	103
VI-	Essais.....	106
1-	NATURE ET OBJECTIF DES ESSAIS.....	106
A.	<i>Spécimens utilisés.....</i>	108
B.	<i>Conditions aux limites.....</i>	109
C.	<i>Caractéristiques techniques des moyens de mesure.....</i>	111
2-	PLAN D'EXPÉRIMENTATION :.....	111
3-	REPÈRES D'INTERPRÉTATIONS DES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX.....	116
A.	<i>Efforts et moments.....</i>	116
B.	<i>Rotations et déplacements.....</i>	117
VII-	Résultats du mode de flexion.....	119
1-	STATIQUE.....	119
A.	<i>Lieu des centres instantanés de rotation de la vertèbre supérieure par rapport à la vertèbre inférieure : courbes types.....</i>	120
B.	<i>Efforts, moments et déplacement : résultat type.....</i>	121
C.	<i>Analyse.....</i>	122
2-	DYNAMIQUE.....	123
A.	<i>Efforts, moments et déplacement : courbes types.....</i>	126
B.	<i>Efforts, moments et déplacement : résumé des résultats.....</i>	130
C.	<i>Analyse.....</i>	133
VIII-	Résultats du mode d'inflexion.....	135
1-	STATIQUE.....	135
A.	<i>Lieu des centres instantanés de rotation de la vertèbre supérieure par rapport à la vertèbre inférieure : courbes types.....</i>	135
B.	<i>Efforts, moments et déplacement : résultat type.....</i>	136
C.	<i>Analyse.....</i>	137
2-	DYNAMIQUE.....	138
A.	<i>Efforts, moments et déplacement : courbes types.....</i>	138
B.	<i>Efforts, moments et déplacement : résumé des résultats.....</i>	142
C.	<i>Analyse.....</i>	145
IX-	Résultats du mode de torsion.....	147
1-	STATIQUE.....	147
A.	<i>Lieu des centres instantanés de rotation de la vertèbre supérieure par rapport à la vertèbre inférieure : courbes types.....</i>	147
B.	<i>Efforts, moments et déplacement : courbes types.....</i>	148
C.	<i>Analyse.....</i>	149
2-	DYNAMIQUE.....	150
A.	<i>Efforts, moments et déplacement : résultat type.....</i>	150
B.	<i>efforts, moments et déplacement : résumé des résultats.....</i>	154
C.	<i>Analyse.....</i>	157
X-	Conclusions sur les expérimentations.....	159

CHAPITRE 3 : MODELISATION DU COMPORTEMENT DU RACHIS THORACIQUE ET LOMBAIRE

I- Résumé et objectifs	165
II- Méthode d'obtention de la géométrie brute	167
1- GÉOMÉTRIE TYPE DES VERTÈBRES	167
2- ASSEMBLAGE DES VERTÈBRES ET COURBURE DU RACHIS.....	168
A. <i>Géométrie des disques intervertébraux</i>	168
B. <i>Position assise de l'occupant moyen d'un véhicule</i>	168
C. <i>Géométrie finale du modèle</i>	169
III- Simplification géométrique du modèle éléments finis	170
1- LE CORPS VERTÉBRAL	170
2- LES PÉDICULES.....	171
3- LES SURFACES ARTICULAIRES	171
4- L'APOPHYSE ÉPINEUSE ET L'ARC POSTÉRIEUR	171
5- LES APOPHYSES TRANSVERSES	171
IV- Etude morphométrique du modèle géométrique	173
1- ETUDE MORPHOMÉTRIQUE	173
2- VERTÈBRES THORACIQUES.....	175
3- VERTÈBRES LOMBAIRES.....	176
4- RÉSULTATS	177
V- Construction du modèle mécanique	178
1- VERTÈBRES THORACIQUES ET LOMBAIRES	178
2- DISQUE INTERVERTÉBRAL.....	179
3- SYSTÈME LIGAMENTAIRE	179
A. <i>Géométrie</i>	179
B. <i>Caractéristiques mécaniques</i>	180
VI- Aperçu du modèle « éléments finis » du rachis thoracique et lombaire.....	183
VII- Première validation en statique	187
1- PASSAGE EN POSITION DEBOUT	187
2- VALIDATION DU MODÈLE PAR COMPARAISONS EXPÉRIMENTALES	189
A. <i>Etudes expérimentales utilisées</i>	190
B. <i>Conditions aux limites en déplacement</i>	191
C. <i>Conditions aux limites en effort</i>	191
D. <i>Critère de validation</i>	191
3- PLAN D'EXPÉRIENCE	193
A. <i>Réalisation du plan</i>	193
B. <i>Pré étude statique</i>	198
C. <i>Identification des paramètres statiques</i>	198
D. <i>Analyse</i>	203
4- SIMULATION AVEC 2 COUCHES D'ÉLÉMENTS DANS LE DISQUE	206
5- RÉSULTATS PAR SOLlicitATIONS SOUS UN COUPLE DE 5 N.M.....	207
6- VALIDATION QUALITATIVE GLOBALE STATIQUE	209
A. <i>Flexion</i>	209
B. <i>Inflexion</i>	210
C. <i>Torsion</i>	210
7- CONCLUSIONS SUR LA VALIDATION STATIQUE	211
VIII- Première validation dynamique	212
IX- Etude sur les axes instantanés de rotation du modèle	215
1- OBJECTIFS	215
2- RÉSULTATS DU MODÈLE « ÉLÉMENTS FINIS ».....	215
A. <i>Théorie : coordonnées du CIR</i>	216
B. <i>Axes de rotation du modèle du modèle</i>	217
3- CONCLUSIONS SUR LES AXES DE ROTATION	221

X- Validation du modèle par les essais dynamiques	222
1- OBJECTIFS.....	222
2- MODÉLISATION DES ESSAIS.....	222
A. Conditions aux limites: déplacement.....	222
B. Conditions aux limites : effort	223
C. Critère de validation	223
D. Organisation des résultats.....	223
3- RÉSULTATS EN CONFIGURATION SAINES.....	224
A. T7-T9 : flexion.....	224
B. T7-T9 : inflexion.....	226
C. T7-T9 : torsion	228
D. T11-L1 : flexion.....	230
E. T11-L1 : inflexion.....	232
F. T11-L1 : torsion	234
G. L2-L4 : flexion.....	236
H. L2-L4 : inflexion.....	238
I. L2-L4 : torsion	240
4- VALIDATION QUALITATIVE GLOBALE DYNAMIQUE	242
5- CONCLUSIONS SUR LA VALIDATION DYNAMIQUE	244

CONCLUSION GENERALE

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

INTRODUCTION

Lorsque l'automobile est devenue un moyen de transport à la portée du grand public, la question de la sécurité des occupants a commencé à s'imposer aux constructeurs automobiles. La sécurité de l'occupant dans l'habitacle se projette en trois pôles principaux.

La sécurité primaire ou active concerne tout ce qui, dans le véhicule et autour du véhicule, est pensé pour éviter l'accident, comme les instruments électroniques intégrés (ABS, ESP, Antipatinage).

La sécurité secondaire ou passive concerne tout ce qui, dans le véhicule, est pensé pour éviter des blessures graves aux conducteurs et passagers au cours d'un accident (airbags, prétensionneurs de ceinture, limiteurs d'efforts).

La sécurité tertiaire ou de secours concerne les interventions post-accident. Cette sécurité porte sur l'ensemble des moyens mis en œuvre qui facilitent l'intervention des secours.

C'est dans le cadre de la sécurité secondaire portant sur la sécurité de l'occupant que se situe cette thèse. Ce projet s'inscrit dans le cadre d'un P.R.E.D.I.T. (Programme national de recherche et d'innovation dans les transports terrestres) intitulé « Compatibilité Biomécanique ».

Afin de connaître et de comprendre le comportement de l'occupant au cours d'un choc automobile, plusieurs outils sont à notre disposition :

Tout d'abord, les mannequins de choc sont parmi les moyens les plus courants pour évaluer la réponse biomécanique d'un individu lors d'un accident frontal ou latéral (figure 1). Leur principal inconvénient provient de leur comportement qui reste peu biofidèle.



Figure 1 : peugeot 206 en choc frontal avec mannequins (source : EURO NCAP)

Le second outil est représenté par le groupe de mannequins numériques. Ces « modèles numériques » sont développés sur des logiciels « éléments finis » permettant de réaliser un maillage de la géométrie à étudier puis d'effectuer une simulation reproduisant les conditions réelles. Radioss ou Ansys sont parmi les plus représentés. Un des modèles les plus aboutis a été réalisé conjointement par le LAB (laboratoire d'accidentologie, de biomécanique et d'étude des comportements humains), le LBM (laboratoire de biomécanique), le CEESAR (centre européen d'études de sécurité et d'analyse des risques) et l'INRETS (institut national de recherche sur les transports et leur sécurité). Ce modèle, créé dans une position assise de conduite, représente un être humain accompagné de toutes ses structures musculaires, osseuses et viscérales (figure 2). Le code de calcul utilisé est RADIOSS.

Nota : de plus amples informations sur ce modèle sont disponibles dans la partie bibliographie.

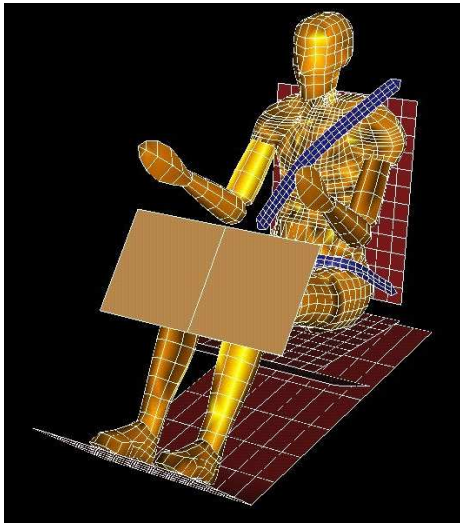


Figure 2 : Modèle « être humain » en simulation de choc frontal



Figure 3 : Colonne vertébrale du modèle être humain (rachis thoracique et lombaire)

Il permet de prévoir des trajectoires, des vitesses ou encore des accélérations. On peut aussi l'utiliser dans un domaine lésionnel à l'aide de critères biomécaniques qui sont représentés par des seuils.

Ainsi, lors d'une simulation de choc frontal, un certain nombre de mesures sont enregistrées en différents points de contrôle comme, par exemple, des déflexions thoraciques. A l'aide de ces mesures, il est possible de faire des prévisions lésionnelles nous informant sur un nombre de côtes cassées ou la probabilité d'avoir un pneumothorax. Cependant, nous ne retirons aucune information sur les traumatismes possibles de la colonne vertébrale étant donné que la modélisation de cette dernière est sommaire (figure 3). En effet, les vertèbres sont représentées par des cubes et la structure ligamentaire n'est pas représentée.

Si on veut aller plus loin dans cette analyse lésionnelle, il faut, dans un premier temps, arriver à quantifier expérimentalement l'influence de ses composants et notamment des ligaments, puis, se servir de ces données pour améliorer ce modèle.

C'est dans ce cadre que s'inscrit le projet de thèse « **Modélisation mécanique et géométrique tridimensionnelle du rachis thoracique et lombaire en configuration de choc automobile** ». Cette coopération entre le Laboratoire d'Accidentologie et Biomécanique (LAB) créée par les constructeurs PSA - Peugeot Citroën - et Renault ainsi que le Laboratoire de Biomécanique de l'ENSAM de Paris (LBM) porte sur la réalisation d'un modèle numérique du rachis thoracique et lombaire. Ce modèle, représenté en position assise, doit être validé dans le domaine statique et surtout dynamique. Il a pour vocation d'être intégré au sein du modèle « être humain » ce qui permettra d'améliorer la réponse lésionnelle de ce dernier lors d'une simulation de choc.

Globalement, le sujet se divise en trois parties :

- **Une recherche bibliographique** dans laquelle nous avons recensé plusieurs types d'articles. Tout d'abord, les auteurs qui ont travaillé sur les changements de courbure rachidienne lors du passage de la position assise à la position debout. Ceci nous servira lors de la création du modèle de colonne thoracique et lombaire. Puis, nous nous sommes penchés sur les articles portant sur les axes instantanés de rotation de segments rachidiens afin de définir précisément la nature des sollicitations que nous utiliserons au cours de la campagne d'essai. Nous avons ensuite recherché des auteurs qui ont étudié le comportement expérimental du rachis en dynamique. Enfin, nous avons recensé les articles portant sur la modélisation de la colonne vertébrale et sur la validation de ces modèles.
- **Une partie expérimentale** dans laquelle nous avons étudié le comportement dynamique de segments rachidiens thoraciques, thoraco-lombaires et lombaires. Les sollicitations dynamiques, imposées sous forme d'impacts, reproduisent des mouvements purs de flexion, torsion et inflexion. Les influences ligamentaires ont été quantifiées en faisant plusieurs tests successifs sur chaque spécimen et entre chaque test, un ligament était sectionné. La volonté d'imposer des couples les plus purs possibles a nécessité la réalisation d'un banc d'essais complémentaire qui nous a permis de connaître les positions des axes instantanés de rotation des spécimens testés. A l'issue de cette partie, nous serons en mesure de définir la réponse mécanique du complexe articulaire, de ses amplitudes de mouvement, de sa cinématique et de ses seuils lésionnels.
- **Une partie modélisation** qui consiste à réaliser un modèle « éléments finis » du rachis lombaire et thoracique validé en statique par les données de la littérature et en dynamique par les expérimentations décrites précédemment. Des améliorations notables ont été apportées à la représentation de la colonne vertébrale du modèle « être humain » grâce à la prise en compte de la géométrie réelle des vertèbres ainsi que d'un certain nombre de ligaments inter-vertébraux.

*« Tout est dit, tout reste à faire »
Shakespeare*

CHAPITRE I POSITION DU PROBLEME

I- DESCRIPTION ANATOMIQUE DU RACHIS LOMBAIRE ET THORACIQUE

Afin d'aborder l'étude du comportement mécanique du rachis thoracique et lombaire, nous allons tout d'abord, de façon succincte, décrire l'anatomie du rachis en faisant référence aux fonctions biomécaniques des différents composants.

1- Les plans de référence

L'anatomie va se décrire à partir d'un repère spatial direct. Considérons le corps humain debout, bras le long du corps, paumes tournées vers l'avant. L'anatomie peut être décrite suivant trois plans de référence (figure 4) :

- Le plan vertical de symétrie approximative du corps humain : plan sagittal (S).
- Le plan vertical perpendiculaire au plan sagittal: plan frontal (F).
- Le plan perpendiculaire aux deux plans précédents : plan horizontal (H).

Ces trois plans sont utilisés comme plans de référence pour l'étude des mouvements de la colonne. Les intersections de ces trois plans définissent un repère orthogonal OXYZ.

-Axe OX : intersection des plans sagittal et transverse, direction postéro-antérieure.

- Axe OY : intersection des plans frontal et transverse, direction médio-latérale gauche.

- Axe OZ : intersection des plans frontal et sagittal, direction caudo-craniale.

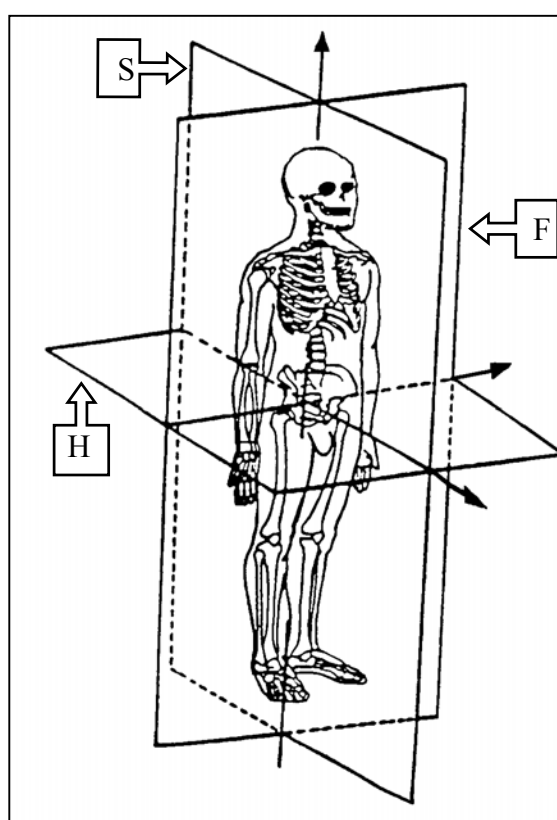


Figure 4 : plans de références d'après Kapandji [KAP-21]

2- Le rachis dans son ensemble

La colonne vertébrale est le pilier du corps humain. Implantée sur le bassin, elle soutient les éléments supérieurs du squelette (tête, membres supérieurs, cage thoracique) permettant leurs mobilités et assure la transmission des charges imposées aux membres supérieurs quelles que soient leurs positions par rapport au squelette. C'est une structure polyarticulée, à la fois mobile et résistante.

La colonne vertébrale se compose de 34 vertèbres : 24 vertèbres mobiles, 5 sacrées et 5 vertèbres coccygiennes soudées.

La grande flexibilité de la colonne est obtenue grâce à sa construction polyarticulée constituée par un empilage de vertèbres formant cinq parties (figure 5) :

- le rachis cervical constitué de 7 vertèbres cervicales (de C1 à C7).
- le rachis dorsal ou thoracique comprenant 12 vertèbres dorsales (de D1 à D12 ou T1 à T12).
- le rachis lombaire formé de 5 vertèbres lombaires (de L1 à L5).
- le sacrum comprenant 5 vertèbres sacrées soudées.
- le coccyx constitué de 4 à 5 vertèbres coccygiennes soudées.

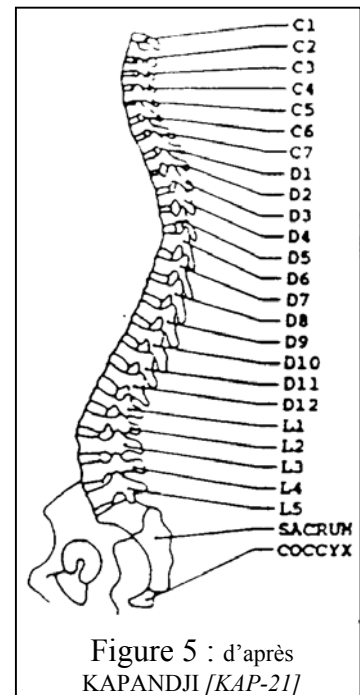
Les vertèbres sont reliées entre elles par de nombreuses structures fibreuses et sont le siège d'insertions musculaires qui font de la colonne un véritable axe haubané : les ligaments et les muscles sont indispensables à la stabilité et au maintien de l'équilibre en position debout.

Sur le plan cinématique, deux vertèbres adjacentes sont liées entre elles par l'intermédiaire du disque intervertébral et des articulations inter-apophysaires. Ces articulations jouent un rôle dans les mouvements du rachis en servant de guides : leur orientation détermine en partie les mobilités prépondérantes entre deux vertèbres. Ce sont des diarthroses, ou articulations vraies, qui se composent de surfaces articulaires cartilagineuses, d'une capsule articulaire, de ligaments de renfort et d'une bourse synoviale.

On utilise couramment le terme d'unité fonctionnelle vertébrale pour désigner un ensemble constitué de deux vertèbres adjacentes peu déformables et de tissus de liaison (disque et ligaments) beaucoup plus déformables autorisant ainsi des mobilités entre ces deux vertèbres .

On distingue trois types de mouvements primaires au niveau de l'unité fonctionnelle :

- les mouvements plans dans le plan sagittal (rotation par rapport à Y et translation suivant X et Z) appelés mouvements d'inclinaison sagittale, ou encore de flexion lorsque le déplacement de la vertèbre sus-jacente a lieu vers l'avant et d'extension dans le cas contraire. Ils sont la conséquence d'un couple de flexion ou d'extension sagittale.
- les mouvements dus à un couple d'inflexion frontale. Ce sont des mouvements dans le plan frontal (rotation par rapport à X et translation suivant Y et Z) appelés mouvements d'inclinaison latérale ou inflexion latérale droite ou gauche selon le sens du déplacement. Ils sont accompagnés de mouvements secondaires appelés mouvements de couplage.
- les mouvements dus à un couple de torsion. Ce sont des mouvements de rotation autour de l'axe rachidien (Z) appelés mouvements de rotation axiale droite ou gauche selon le sens du déplacement. Ils sont accompagnés de mouvements secondaires appelés mouvements de couplage.



3- Les structures osseuses

A. Description anatomique d'une vertèbre type

Les vertèbres lombaires, thoraciques ou cervicales inférieures sont composées des même parties. Cependant il existe d'importantes différences d'ordre morphologique.

Une vertèbre type comprend deux parties principales : le corps vertébral (1) et l'arc postérieur (2) reliés par les pédicules (3) qui sont constitués d'os cortical dense et résistant.

Sur l'arc postérieur s'attachent les apophyses transverses (4), l'apophyse épineuse (5) et les apophyses articulaires (6). Ces dernières participent à la liaison intervertébrale. Enfin, l'espace délimité par l'arc postérieur et le corps vertébral constitue le canal médullaire dans lequel passe la moelle épinière.

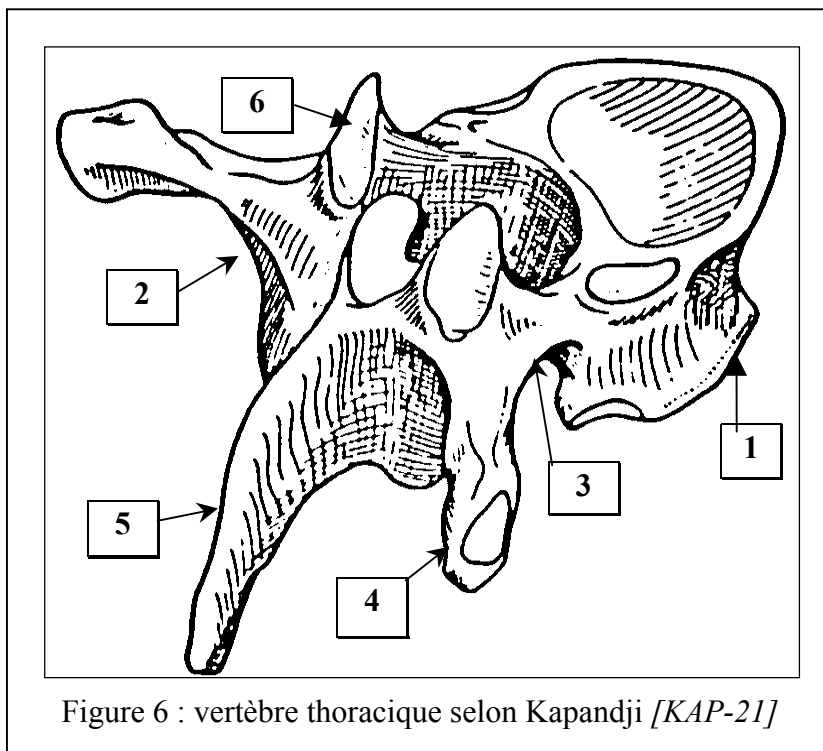


Figure 6 : vertèbre thoracique selon Kapandji [KAP-21]

B. Surfaces articulaires

Il existe deux types de surfaces articulaires :

- Les plateaux vertébraux recouverts de cartilage qui accueillent l'articulation discale.
- Les surfaces articulaires, situées sur les apophyses articulaires.

Pour les apophyses articulaires supérieures, les surfaces articulaires forment une gouttière verticale dont la concavité est dirigée vers le plan sagittal et légèrement postérieurement.

Pour les apophyses articulaires inférieures, les surfaces articulaires sont convexes en forme de segment de cylindre. Elles regardent latéralement et légèrement antérieurement.

Les orientations de ces surfaces articulaires sont dans un plan frontal pour les vertèbres dorsales, alors qu'elles sont plutôt dans un plan sagittal pour les vertèbres lombaires.

C. Le disque intervertébral

Le disque intervertébral (figure 7) est composé d'une partie périphérique rigide appelée anneau et d'une partie centrale gélatineuse, le noyau. Il joue un rôle important dans la mécanique du rachis tant dans les mouvements statiques que dynamiques.

Le noyau

Le noyau est constitué d'une substance gélatineuse hydrophile, constituée de fibrilles de collagènes. Il contient près de 85% d'eau. Sa position dans le disque n'est pas centrale mais plutôt postérieure.

Il n'existe pas de limite nette entre le noyau et l'anneau discal mais une zone de transition.

Le noyau possède une pression intérieure de 0.15 à 1 MPa.

L'anneau

L'anneau est composé de fibres collagènes incluses dans du fibrocartilage. Il peut être considéré comme un composite multicouche. Dans chaque couche, les fibres de collagène sont orientées dans le même sens mais cette orientation change d'une couche à l'autre.

L'angle que forment les fibres avec l'horizontale varie de + 20 à + 45 degrés (d'après Marchand [MAR-29]). Sous une traction de 500 N la contrainte discale s'annule (d'après Louis [LOU-28]).

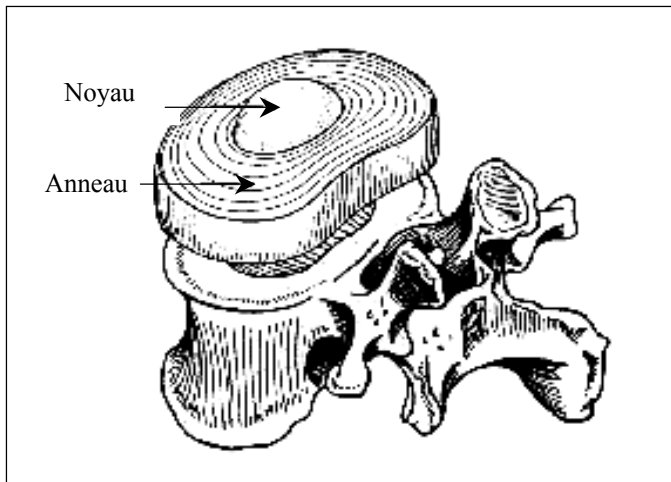
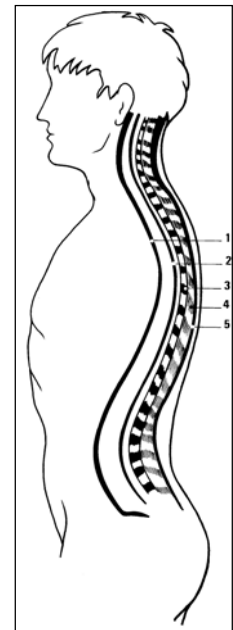


Figure 7 : Composants du disque intervertébral d'après KAPANDJI [KAP-21]

Figure 8 : ligaments du rachis d'après Kapandji [KAP-21]

D. Les ligaments

- Ligament vertébral commun antérieur (1) : il va de l'occiput et du tubercule antérieur de l'atlas jusqu'au sacrum. Il s'élargit graduellement de haut en bas en adhérant fortement aux corps vertébraux. Il est à noter que suivant les auteurs, il adhère (ROUVIERE [ROU-53]) ou non (CABROL [CAB-3]) aux disques.
- Ligament vertébral commun postérieur (2) : il part du corps de l'axis en prolongement du ligament occipito-axoïdien (membrana tectoria) et finit sur le coccyx. Il adhère fortement aux corps vertébraux sur leurs bords inférieurs et supérieurs ainsi qu'aux disques sur lesquels il forme des plaques en forme de losange.
- Ligaments jaunes (3) : ils relient les arcs postérieurs entre eux et délimitent les trous de conjugaison. Ils sont sous tension même au repos et sont fortement étirés lors de la flexion.
- Ligaments inter-épineux (4) : ils sont tendus entre les apophyses épineuses.



- Ligament sur-épineux (5) : c'est une longue et fine bande conjonctive partant de C7 jusqu'au sacrum. Il établit une liaison continue entre les vertèbres et le sacrum en passant sur toutes les épineuses.
- Ligaments inter-transversaires : ce sont des ligaments courts qui relient les apophyses transverses entre elles.
- Ligaments courts : ils relient les disques intervertébraux voisins et sont tendus parallèlement au ligament vertébral commun antérieur.

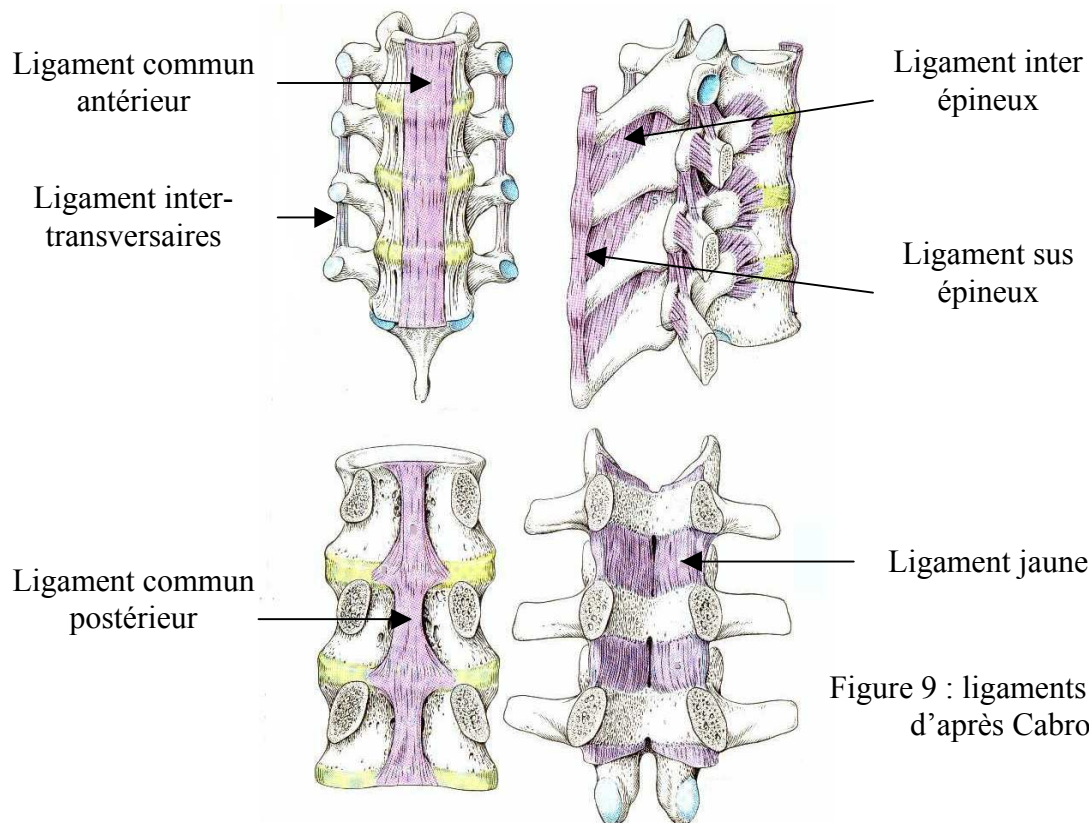


Figure 9 : ligaments inter-vertébraux d'après Cabrol [CAB-3]

4- Caractérisation mécanique des éléments osseux

Le comportement mécanique de l'os a fait l'objet de nombreuses publications.

Certaines données sont parfois manquantes, comme la durée ou le mode de conservation, et les dispersions interindividuelles sont souvent importantes. L'étude de la littérature fournit des ordres de grandeur.

A. Etude descriptive du matériel osseux

L'os vertébral apparaît extérieurement comme un matériau uniforme, néanmoins percé de quelques orifices. En réalité, chaque vertèbre est une véritable construction architecturale utilisant le même matériau de base, c'est-à-dire une trame protéique calcifiée, mais sous plusieurs formes selon la partie de la vertèbre considérée. Le corps vertébral, les massifs articulaires et l'arc postérieur d'une même vertèbre ont une architecture qui leur est propre et une répartition os spongieux – os cortical différente d'un élément à l'autre.

In vivo, outre les travées osseuses, la vertèbre contient un liquide constitué de sang et de moelle, qui lui confère des propriétés mécaniques différentes de celles de l'os sec. Hansson [HAN-18] trouve qu'une baisse de 25% de ce liquide engendre une chute de rigidité osseuse de l'ordre de 50% (propriété de viscoélasticité).

En outre, il observe une diminution linéaire du contenu minéral osseux en fonction de l'âge et ce, quel que soit le sexe du sujet.

B. L'os cortical

Couramment appelé os compact, il forme une couche mince de 0.5 à 2 mm en moyenne, couvrant la totalité de la vertèbre sauf les plateaux supérieur et inférieur du corps vertébral.

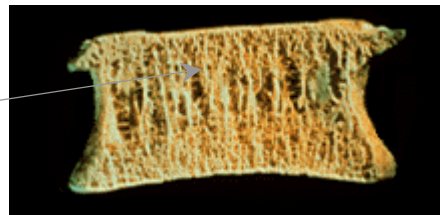
Rockoff [ROC-50] estime que l'os cortical participe à raison de 25 à 55% à la rigidité pour un effort en compression sur des corps vertébraux au niveau lombaire.

C. L'os spongieux

Beaucoup moins résistant que l'os cortical, il existe essentiellement au niveau du corps vertébral à hauteur de 80% en moyenne.

Par une étude menée sur des radiographies de coupes de 3 vertèbres (C5, T8, L3), prélevées moins de 24 heures après le décès d'un sujet de 28 ans, Escande [ESC-11] a étudié l'architecture de l'os spongieux. Il constate une prépondérance des trabéculations verticales (figure 10) et une densification de l'os spongieux au voisinage des plateaux. En outre, il remarque une forte prépondérance de l'os cortical sur l'os spongieux dans l'arc vertébral. Inversement au niveau des processus articulaires, l'os spongieux prédomine et possède un riche système de soutien lui conférant une structure proche de celle du corps. Dans le corps vertébral comme dans les processus articulaires, les travées sont orientées pour la majorité perpendiculairement aux plateaux qui supportent logiquement des forces de même direction que les travées osseuses dominantes.

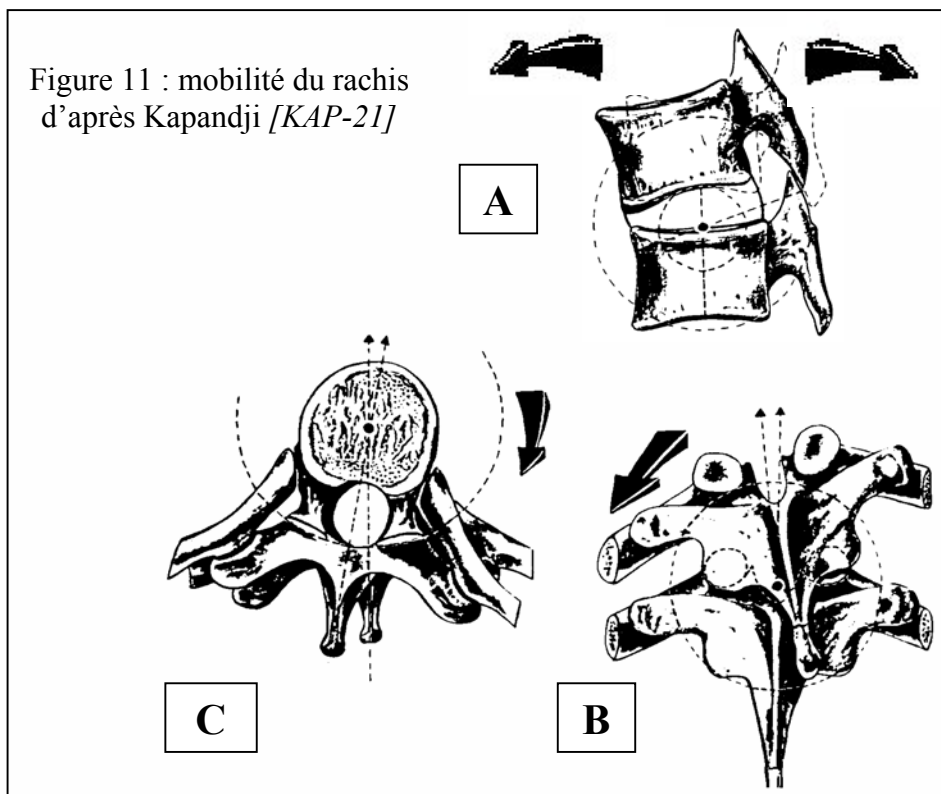
Figure 10 : trabéculations verticales d'un corps vertébral en coupe frontale



5- Les mobilités du rachis

A. Définitions

- Le mouvement de flexion est un mouvement plan de la colonne vertébrale. Dans le plan sagittal, entraînant des mouvements de rotation d'axe perpendiculaire au plan sagittal et de translation pour chacune des vertèbres, c'est un mouvement d'ensemble postéro-antérieur (figure 11, cas A).
- Le mouvement d'extension est un mouvement analogue au mouvement précédent, mais correspondant à un mouvement d'ensemble antéro-postérieur (figure 11, cas A).
- Le mouvement d'inclinaison (ou d'inflexion) latérale droite ou gauche de la colonne est principalement un mouvement plan parallèle au plan frontal entraînant donc des mouvements de rotation autour d'axes perpendiculaires au plan frontal et des mouvements de translation parallèles au plan frontal, pour les différentes vertèbres (figure 11, cas B).
- Le mouvement de rotation axiale droite ou gauche est principalement un mouvement de rotation autour de l'axe vertébral. Ce mouvement est induit au niveau de la colonne par une sollicitation en torsion (figure 11, cas C).



B. Rôle des articulations inter-apophysaires

L'amplitude de ces mouvements dépend de plusieurs paramètres - tels que la position de référence utilisée pour la mesure des amplitudes de déplacements, l'âge du sujet, le sexe, l'entraînement, le milieu de vie (urbain ou rural)... L'amplitude des mouvements dépend d'une part de la géométrie des pièces osseuses (en particulier des facettes articulaires), et d'autre part des tissus mous (disque intervertébral et ligaments).

Flexion – extension

Le mouvement intervertébral de flexion–extension est un mouvement de rotation autour d'un axe transversal. Il est la somme de mouvements unitaires entre deux vertèbres adjacentes. Ces mouvements intervertébraux sont obtenus par glissement symétrique au contact des deux surfaces articulaires. La présentation la plus communément répandue est d'assimiler la flexion-extension à une succession de mouvements dans le plan sagittal. A tout instant, le mouvement est une rotation autour d'un axe transversal passant par un point appelé centre instantané de rotation (C.I.R.). La position de ce centre varie donc lors du mouvement.

Inclinaison latérale – rotation axiale :

Les mouvements d'inclinaison latérale sont obtenus par glissements antisymétriques au contact des deux surfaces articulaires associés à un écrasement latéral du disque intervertébral. La sagittalisation des surfaces articulaires, comme au niveau des vertèbres lombaires, n'autorise pas de mouvements d'inclinaisons aussi importants qu'au niveau de la colonne cervicale. En effet, la mobilité globale en inflexion latérale au niveau du rachis cervical est de 67° en moyenne alors qu'elle ne dépasse pas 40° pour le rachis lombaire.

Au niveau thoracique, l'inclinaison des vertèbres s'accompagne de rotation axiale et vice versa. Deux mécanismes se combinent pour créer cette synergie dynamique appelée aussi couplage. L'inclinaison des facettes articulaires (75° à 85° par rapport au plan horizontal), comme pour le rachis cervical, engendre une rotation au cours d'inclinaisons latérales parce que la facette articulaire qui s'élève devient plus antérieure et celle qui s'abaisse plus postérieure.

Lors d'un mouvement d'inflexion latérale, il existe au niveau des segments thoraciques un axe de rotation dont la position évolue en fonction de l'amplitude du mouvement.

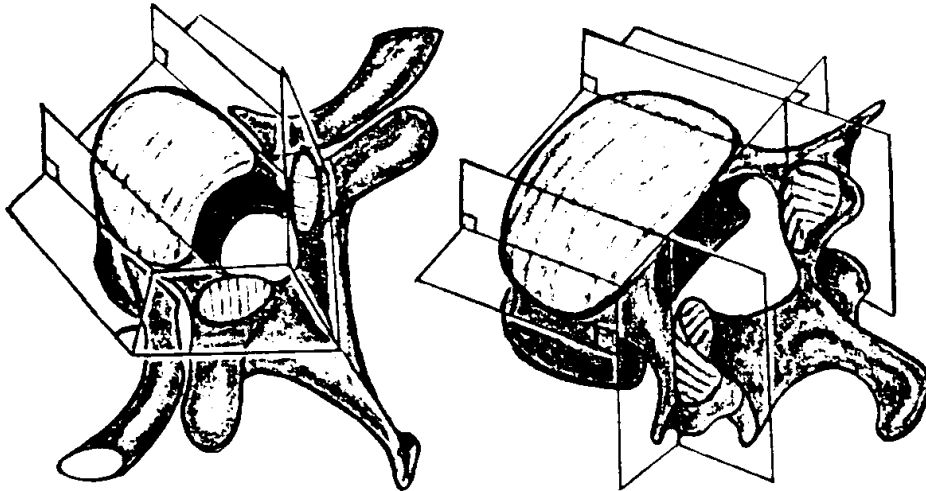


Figure 12 : orientation des facettes thoraciques et lombaires d'après Louis [LOU-28]

C. Amplitudes des mouvements

Chaque segment mobile vertébral n'est capable que de mouvements d'amplitude réduite dont la somme constitue les amplitudes des trois secteurs cervicaux, thoracique et lombaire. La résultante des amplitudes des 3 secteurs vertébraux représente l'amplitude globale du rachis pour chacun des 3 types de mouvements : flexion–extension, rotation axiale et inclinaison latérale.

Dans son ouvrage « Physiologie articulaire », Kapandji [KAP-21] détermine les amplitudes extrêmes de flexion–extension de l'ensemble du rachis en faisant des mesures d'angles entre les diverses positions d'un plan qu'il choisit comme plan de référence : le plan masticateur schématisé par une feuille de carton serrée entre les mâchoires des cadavres auxquels il imposa des mouvements. Il trouve pour un sujet particulièrement souple, un angle $At=110^\circ$ (40° en flexion et 70° en extension) pour les positions extrêmes. Cependant, ces mesures n'ont permis qu'une évaluation approximative des amplitudes segmentaires.

L'amplitude globale d'inflexion latérale du rachis en projection dans un plan frontal a aussi été étudiée par Kapandji (1-KAP) à l'aide de radiographies de face. Il utilise comme référence l'axe des vertèbres ou la direction du plateau supérieur de la vertèbre considérée, et au niveau du crâne, la ligne bimastoïdienne passant par la pointe des deux mastoïdes. Il estime à 40° l'amplitude totale en inclinaison latérale.

En conclusion, les amplitudes de mobilité varient selon la région rachidienne et selon la nature du mouvement. Par ailleurs, pour les différentes régions rachidiennes, la mobilité varie d'un étage à l'autre. Pour donner un ordre de grandeur des différentes mobilités, nous pouvons faire référence à l'ouvrage de Louis [LOU-28] qui apporte des valeurs moyennes de mobilité globale pour des mouvements passifs. Ces mobilités sont fournies par les différents auteurs cités précédemment pour chaque région rachidienne.

Tableau 1 :
valeurs moyennes des mobilités segmentaires en degrés

	flexion	extension	inflexion	torsion		flexion	extension	inflexion	torsion
T1-T2	4		5	9	T9-T10	7		6	4
T2-T3	4		6	8	T10-T11	9		7	2
T3-T4	2.9	3.1	4.7	6	T11-T12	6	4.2	4.5	1.7
T4-T5	4		6	8	T12-L1	5	4.5	7	1.4
T5-T6	4		6	8	L1-L2	6	5	6	2
T6-T7	5		6	7	L2-L3	7	6.5	7	2
T7-T8	3.8	3.3	4.5	6	L3-L4	5.6	4.8	5.5	1.9
T8-T9	7		6	6	L4-L5	5.3	4.6	4.4	2.2

ATTENTION : ces valeurs sont physiologiques, c'est à dire que ce sont les valeurs maximales atteintes par un sujet au cours d'un déplacement volontaire.

Ces valeurs sont issues des études de Wilke [WIL-62], Legaye [LEG-24] et de données internes du LBM. Ce sont des valeurs moyennes. En outre l'écart type (non donné) est faible.

Les valeurs suivantes sont celles issues de l'ouvrage de Kapandji « physiologie articulaire » [KAP-21].

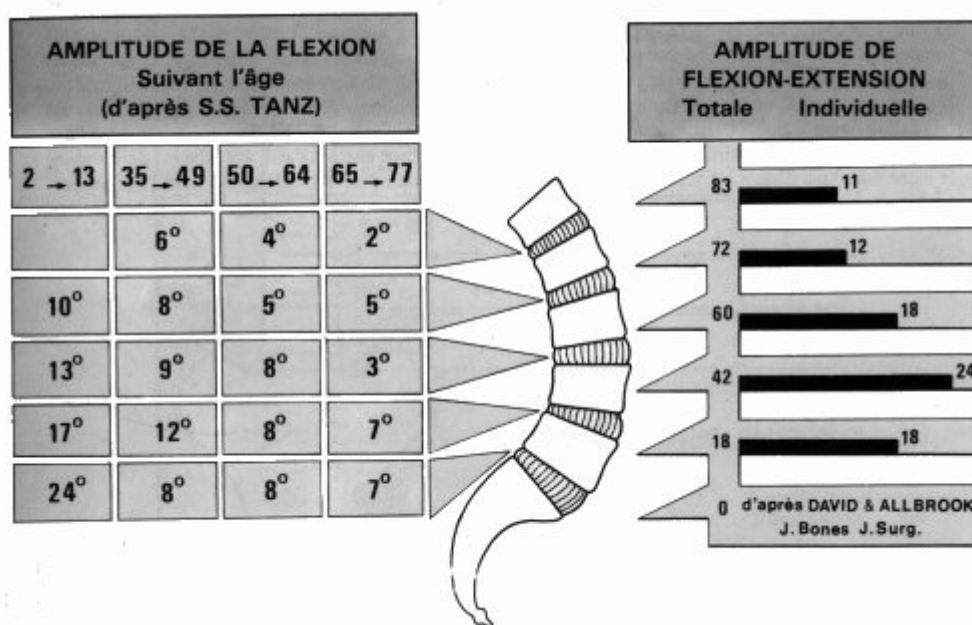


Figure 13 : amplitude de mobilité lombaire
d'après Kapandji [KAP-21]

D. Couplages segmentaires

Chaque mouvement primaire (flexion, inflexion torsion) est accompagné de mouvements secondaires qui sont dus aux couplages induits par les facettes articulaires et par le jeu de tensions asymétriques des puissants ligaments costotransversaires et intertransversaires verticaux et obliques.

Les résultats suivants sont synthétisés dans le tableau 2. Chacun des auteurs utilise un segment de deux vertèbres. La vertèbre inférieure est fixée et la vertèbre supérieure est sollicitée.

- ✓ Etage lombaire : travaux de Pearcy [PEA-44] et Panjabi [PAN-41]

Flexion : les couplages sont négligeables.

Inflexion : la composante de torsion secondaire est soit dans le même sens que la sollicitation principale d'inflexion soit dans le sens contraire. La valeur de la composante induite peut aller jusqu'à 30 % de celle de l'inflexion.

Torsion : la composante d'inflexion induite est soit dans le même sens que la sollicitation principale de torsion soit dans le sens contraire. La valeur de la composante induite peut aller jusqu'à 300 % de celle de la torsion ce qui est très important.

- ✓ Etage thoraco-lombaire : travaux de Oxland et coll. [OXL-39]

Flexion : les couplages sont négligeables.

Inflexion : la composante de torsion secondaire est soit dans le même sens que la sollicitation principale d'inflexion soit dans le sens contraire. La valeur de la composante induite peut aller jusqu'à 10 % de celle de l'inflexion

Torsion : la composante d'inflexion induite est dans le sens opposé à la sollicitation principale de torsion. La valeur de la composante induite peut aller jusqu'à 50 % de celle de la torsion.

- ✓ Etage thoracique :travaux de Willems [WIL-63] et Panjabi [PAN-42]

Flexion : les couplages sont négligeables.

Inflexion : la composante de torsion secondaire est soit dans le même sens que la sollicitation principale d'inflexion soit dans le sens contraire. La valeur de la composante induite peut aller jusqu'à 60 % de celle de l'inflexion

Torsion : la composante d'inflexion induite est soit dans le même sens que la sollicitation principale de torsion soit dans le sens contraire. La valeur de la composante induite peut aller jusqu'à 50 % de celle de la torsion.

COUPLAGES	Niveaux thoraciques		Niveaux lombaires	
	Mouvement principal	Mouvement couplé	Mouvement principal	Mouvement couplé
Flexion	Rotation de la vertèbre supérieure autour de y+ et translation suivant x+	/	Rotation de la vertèbre supérieure autour de y+ et translation suivant x+	/
Extension	Rotation de la vertèbre supérieure autour de y- et translation suivant x-	/	Rotation de la vertèbre supérieure autour de y- et translation suivant x-	/
Torsion gauche	Rotation de la vertèbre supérieure autour de z+ et translation suivant y+	rotation autour de x- ou de x+	Rotation de la vertèbre supérieure autour de z+ et translation suivant y+	rotation autour de x- ou de x+
Inflexion latérale gauche	Rotation de la vertèbre supérieure autour de x- et translation suivant y+	rotation autour de z+ ou de z-	Rotation de la vertèbre supérieure autour de x- et translation suivant y+	rotation autour de z+ ou de z-

Tableau 2: couplages vertébraux

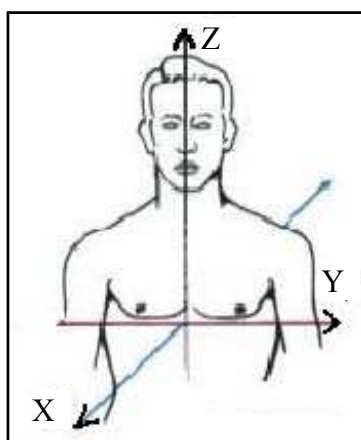


Figure 14 : axes anatomiques utilisés dans le tableau 2

6- Les Courbures de la colonne vertébrale

Ce projet portant sur la caractérisation dynamique du rachis en position assise, il est nécessaire de porter notre attention sur les différences de courbure vertébrale entre la position debout et la position assise. Cette connaissance des courbures rachidiennes nous est indispensable en vue de la modélisation du rachis thoracique et lombaire d'un sujet assis dans un siège automobile.

Les données présentées ici correspondent aux lordoses ou cyphoses segmentaires. Les angles sont mesurés dans un plan sagittal entre les plateaux supérieurs de deux vertèbres adjacentes. Notre étude ne s'intéressera qu'aux courbures dans le plan sagittal et pour la colonne thoracolumbaire uniquement.

A. La position assise

Il existe différentes positions assises : assis redressé, assis relâché et assis dans un siège. Il n'existe que peu de données accessibles concernant les courbures rachidiennes des occupants de véhicule automobile (excepté les études de Robbins [ROB-49]). En outre ces études ne s'intéressent le plus souvent qu'à la colonne lombaire seule ou bien aux mouvements relatifs des vertèbres lors des changements de postures.

Globalement, dans le passage de la position debout à la position assise, c'est dans la partie lombaire du rachis que nous trouvons les plus importantes modifications. La lordose lombaire tend à diminuer, passant en moyenne de 47° pour la position debout à 33° pour la position assise selon Lord [LOR-27], et des rotations relatives de l'ordre des 10 degrés sont observées selon Roy [ROY-54]. Les écarts types ne sont pas disponibles dans ces articles.

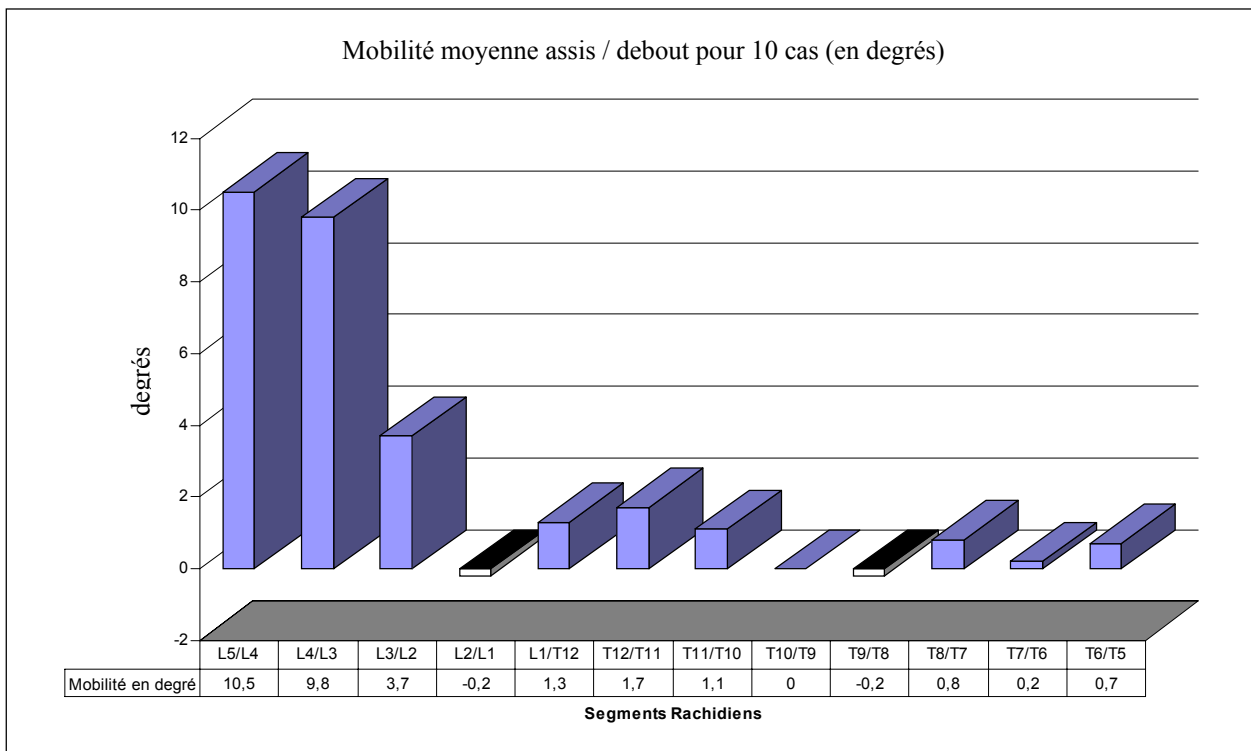


Figure 15 : rotations relatives des vertèbres pour le passage debout / assis [ROY-54]

Devant le manque de données relatives, d'une part sur la colonne thoracique, et d'autre part, sur la posture assise en général, nous avons dû nous intéresser aux courbures rachidiennes pour la position debout érigée.

B. La position debout

La littérature est plus fournie lorsque l'on s'intéresse à cette posture. Malgré le fait que beaucoup d'auteurs s'y soient intéressés, les travaux sont plus principalement focalisés sur la colonne lombaire et les lordoses segmentaires. Peu de travaux concernent la colonne thoracique.

De plus, les définitions relatives à ces lordoses segmentaires varient d'un auteur à un autre. Nous ne présenterons ici que les résultats de la recherche bibliographique sur la posture debout érigée. Bernhardt [BER-1] donne une description complète de la colonne thoraco-lombaire du point de vue des angles segmentaires. Cette étude a été réalisée sur 102 volontaires sains. Les écarts-types des mesures ne sont pas disponibles.

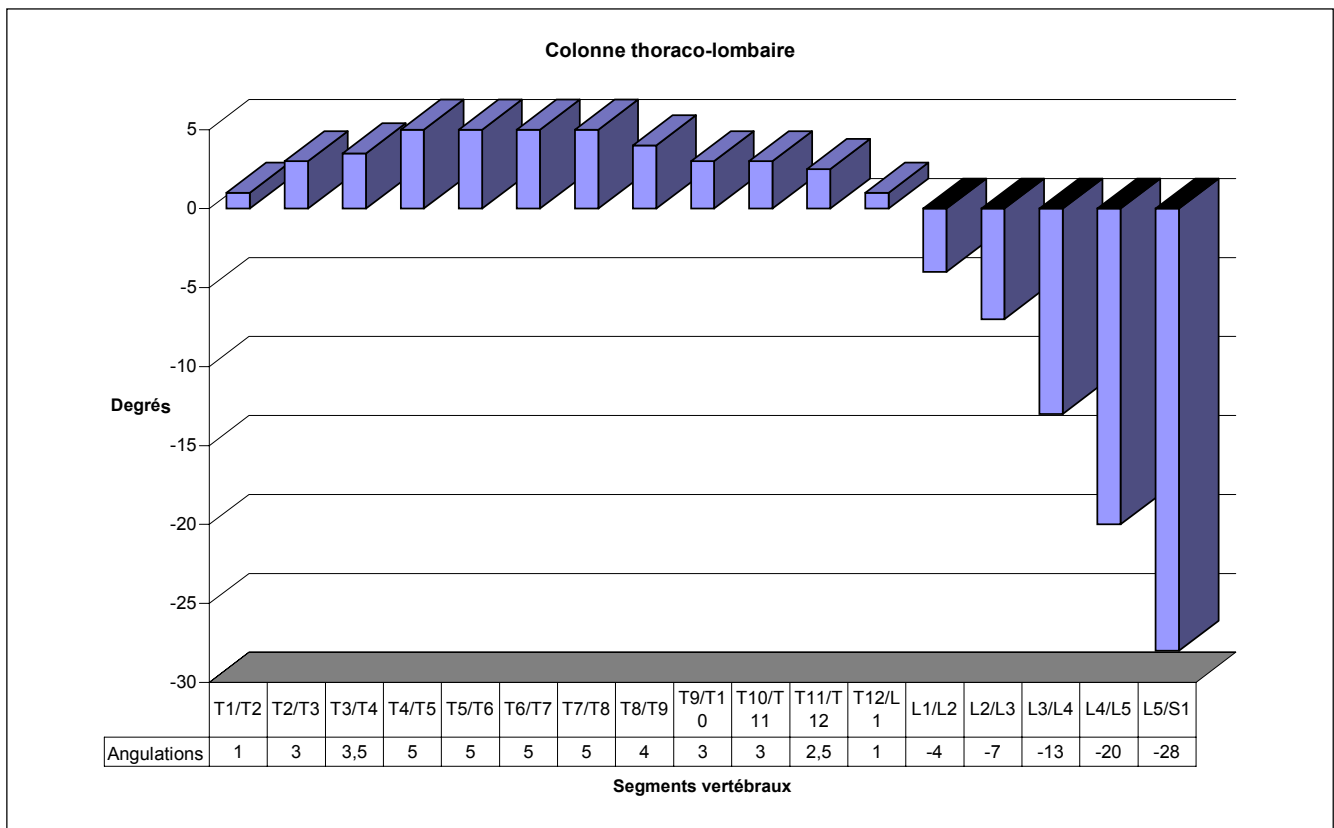


Figure 16 : angles inter-vertébraux de la colonne thoraco-lombaire [BER-1]

En 1986, Poony [POO-47] a comparé les hauteurs antérieures et postérieures, la superficie et la forme en section transversale des disques intervertébraux cervicaux, thoraciques et lombaires. L'étude a porté sur 4 colonnes vertébrales en position naturelle. Les mesures ont été réalisées à l'aide d'un fil fixé au plus proche de la colonne de façon à ne pas modifier les courbures rachidiennes. La superficie en section transversale augmentait de l'extrémité crâniale jusqu'à l'extrémité caudale. Les disques cervicaux avaient tendance à posséder une forme elliptique en section transversale, les disques thoraciques étaient plus circulaires et les disques lombaires avaient tendance à posséder une section transversale elliptique qui était plane ou concave en arrière. Les résultats sont exprimés comme pourcentage de la longueur totale de la colonne vertébrale et sont accompagnés d'un écart type.

II- LES CENTRES INSTANTANES DE ROTATION (CIR)

L'étude de ces centres instantanés de rotation est essentielle pour la suite de notre projet. En effet, la connaissance précise de leurs positions permettra de définir la nature de la sollicitation que nous appliquerons aux spécimens que nous serons amenés à tester. Par exemple, nous pourrions savoir si le segment vertébral a été sollicité en flexion pure ou en flexion compression et dans quelles proportions.

La position de ces centres instantanés dépend de nombreux éléments structurels du rachis (facettes articulaires, disque intervertébral et ligaments).

Note : Nous parlerons soit de centres instantanés de rotation, soit de traces des axes instantanés de rotation dans un plan.

Nous présenterons trois travaux pour les 3 modes de sollicitations :

- Flexion – extension
- Inflexion latérale
- Torsion

1- Flexion –Extension

A. Travaux de Panjabi et coll. (thoraciques)

Ces travaux portent sur la connaissance des CIRs entre deux vertèbres thoraciques adjacentes. Panjabi [PAN-40] a utilisé 11 unités fonctionnelles allant de T1 à T12. Ces segments thoraciques proviennent de 5 cadavres frais dont l'âge varie entre 19 et 59 ans. Pour ces essais, les disques ainsi que les tissus ligamentaires et les capsules des facettes articulaires ont été conservés. La vertèbre supérieure a été percée dans le plan frontal et le plan transverse afin de pouvoir placer deux tiges permettant d'exercer des efforts. La mesure des CIRs s'effectue par un système à comparateur permettant de mesurer les déplacements de la vertèbre supérieure, la vertèbre inférieure étant fixée sur la table d'essais.

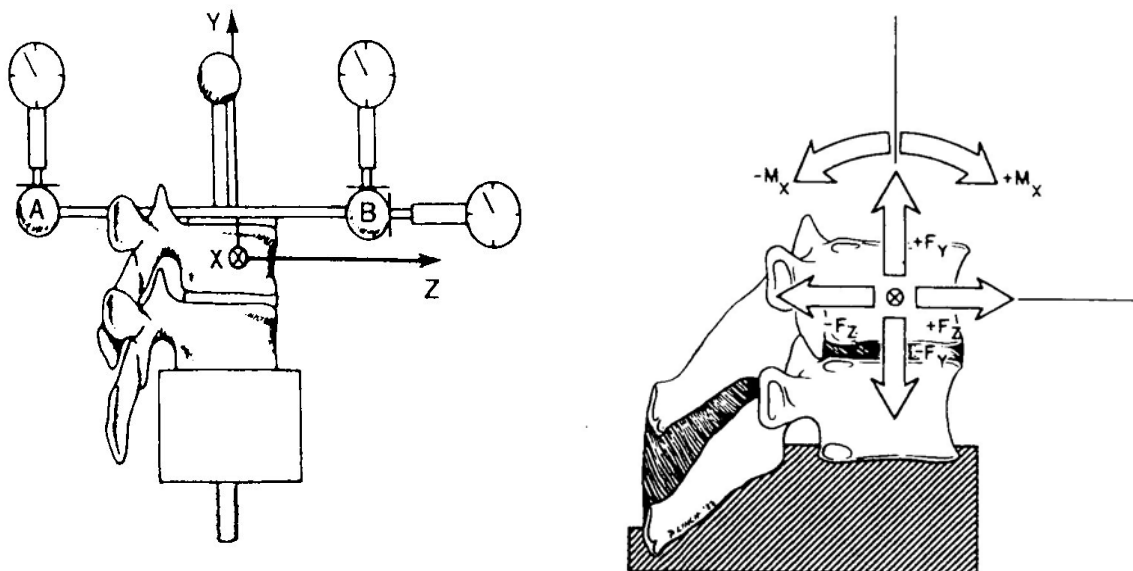


Figure 17 : montage de flexion d'après Panjabi [PAN-40]

Sur le schéma de droite (figure 17), on définit les 6 types de sollicitation utilisés par Panjabi ainsi que le repère Oxyz utilisé pour définir le CIR. Il est à noter que ses coordonnées sont données dans le repère lié à la vertèbre supérieure.

Sur le schéma de gauche, on montre le système de mesure utilisant un ensemble de sphères et de comparateurs à plateaux.

Afin d'effectuer une analyse statistique, une cinquantaine de mesures a été effectuée pour chaque chargement.

Les schémas suivants (figure 18) donnent la position des CIRs pour les sollicitations en + et - Fz et + et - Mx. Les ellipses représentent les intervalles de confiance à 95 %.

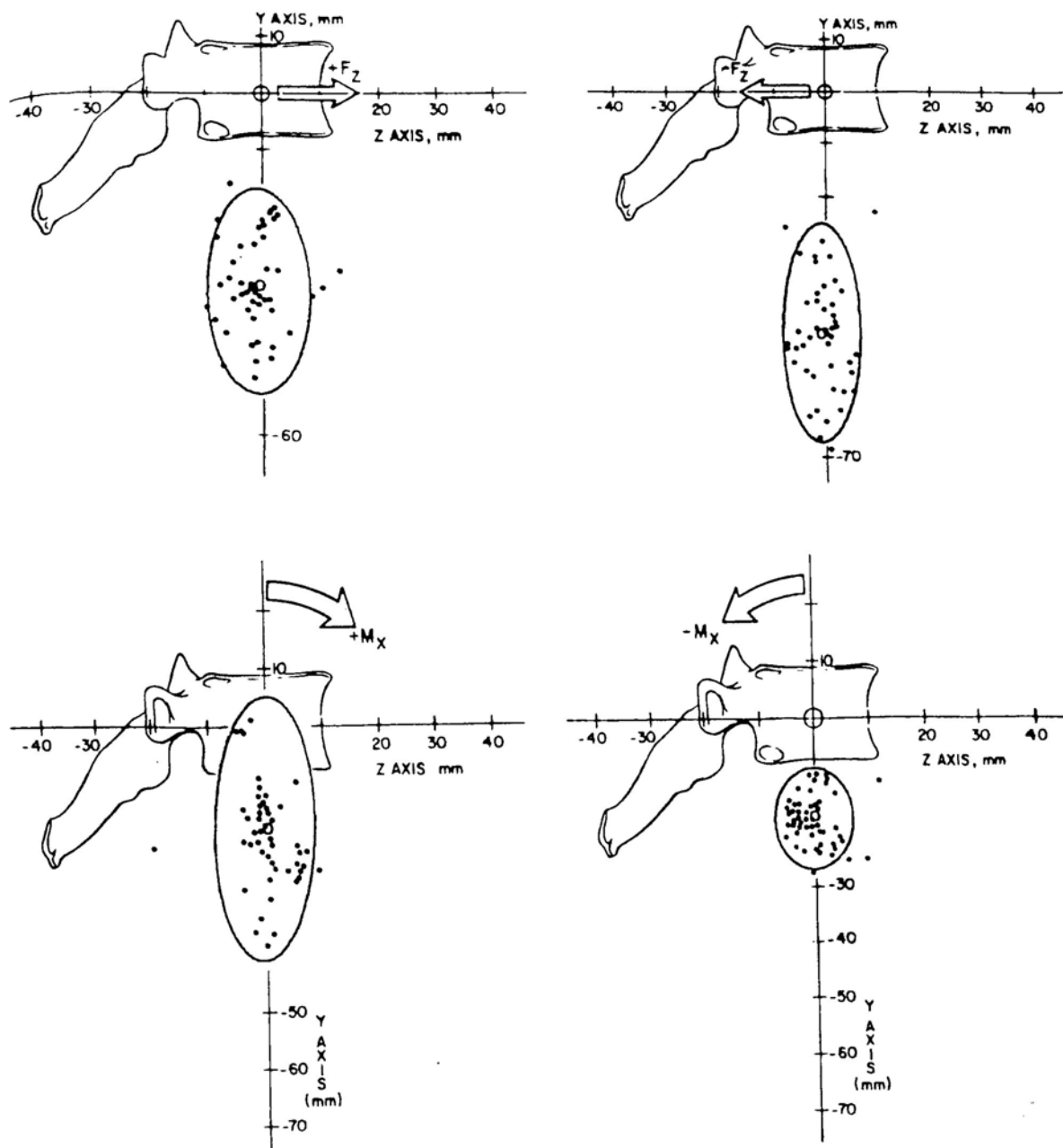
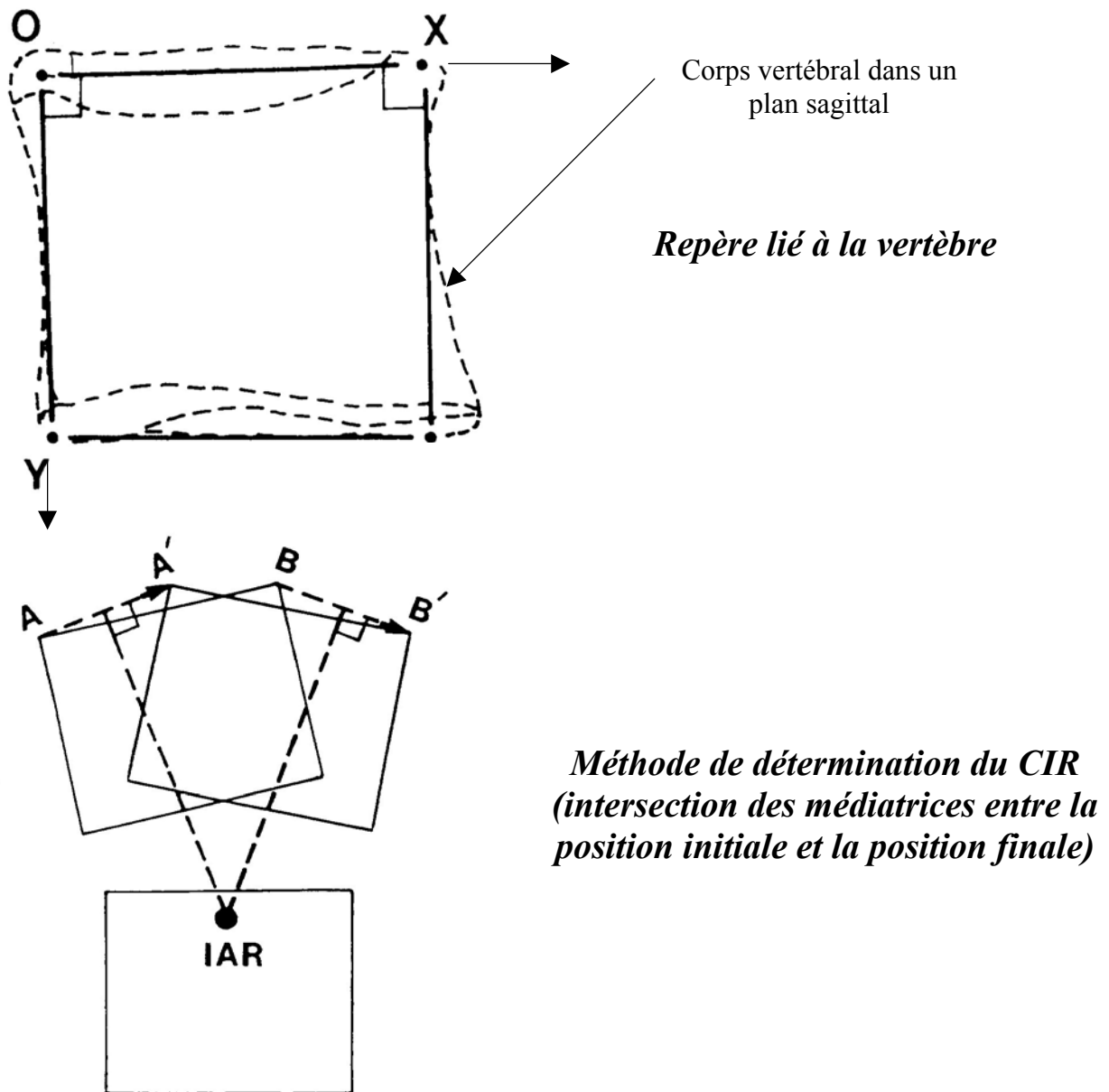


Figure 18 : lieu des CIRs d'après Panjabi [PAN-40]

B. Travaux de Pearcy et coll. (lombaires)

Dix volontaires, (entre 25 et 36 ans), ont été radiographiés en position debout, en extension complète et en flexion complète. Par recouvrements radiographiques, Pearcy [PEA-45] a pu calculer les centres de rotation des vertèbres lombaires pour les passages de la position debout à la flexion, de la position debout à l'extension et de la flexion à l'extension. Afin de tenir compte des différences morphologiques des vertèbres entre les différents volontaires, les coordonnées des CIR ont été divisées par la hauteur moyenne de la vertèbre pour les ordonnées et par la dimension antéro-postérieure pour les abscisses. Le repère de référence est défini ci dessous et les coordonnées du CIR sont données dans le repère fixe (celui de la vertèbre inférieure).

Figure 19 : détermination des CIRs d'après Pearcy [PEA-45]



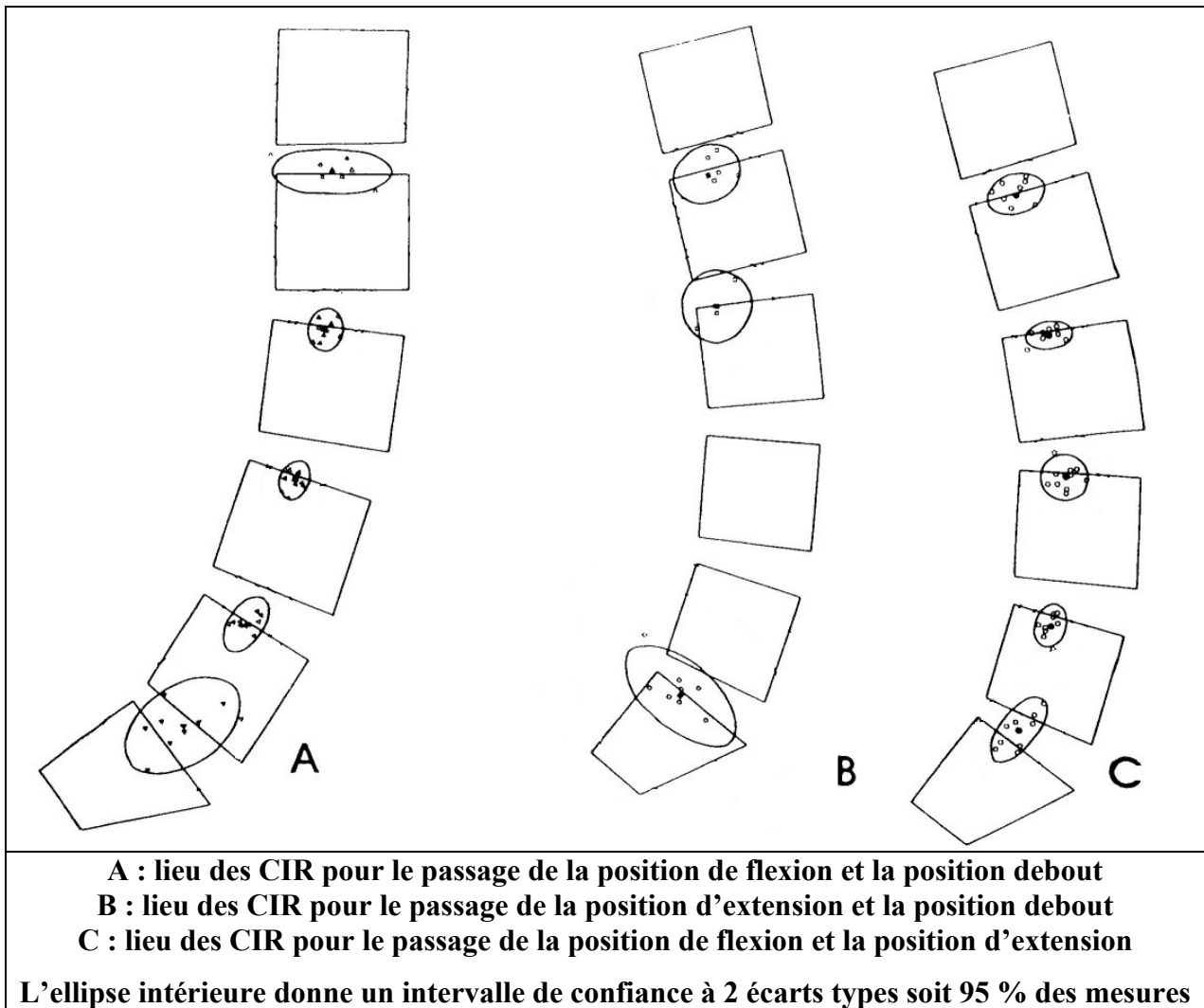


Figure 20 : lieu des CIRs d'après Percy [PEA-45]

2- Torsion : travaux de Haher et coll.

Haher [HAH-15] a réalisé ces essais sur des segments T11-S1. Au nombre de 10, ils ont été congelés avant essais et maintenus dans une atmosphère humide. Le schéma de la figure 21 décrit le montage expérimental :

Le segment lombaire est placé verticalement et bloqué à ses extrémités. Des tiges sont fixées sur les vertèbres et possèdent à leur extrémité des marqueurs de différentes couleurs. Une caméra, placée en haut du montage, vient filmer le mouvement de rotation du rachis. Les positions des axes de rotation sont déterminées à l'aide de la méthode des médiatrices (figure 19).

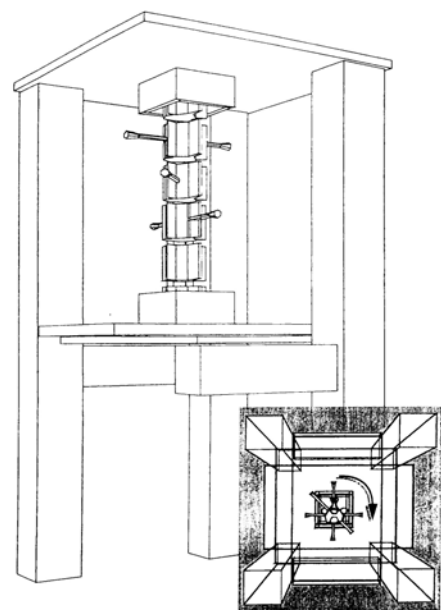


Figure 21 : montage de torsion d'après Haher [HAH-15]

Un couple imposant une rotation entre 5° et 10° est appliqué à la partie proximale. Chaque essai est répété 4 fois.

Plusieurs configurations ont été testées. L'auteur a commencé l'essai avec un segment non lésé, les facettes articulaires ont été sectionnées puis le disque intervertébral a été à son tour lésé. Les résultats sont présentés dans le schéma suivant :

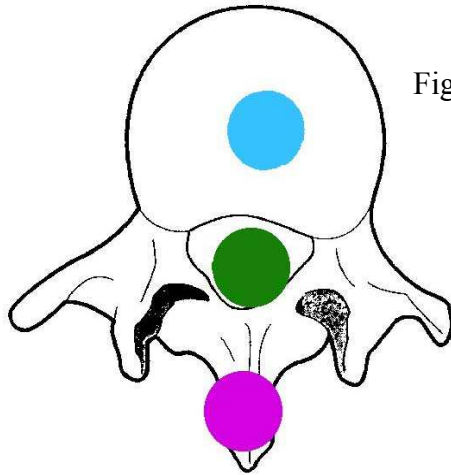


Figure 22 : lieu des axes de rotations de la vertèbre T11 par rapport à S1 d'après Haher [HAH-15]

- Colonne intacte
- Facettes détruites
- Disque détruit

3- Inflexion : travaux de Dimnet et coll.

Dimnet [DIM-10] a effectué son étude sur une vingtaine de sujets vivants (entre 20 et 40 ans) à l'aide de procédés radiographiques. Chaque sujet a été radiographié 7 fois en passant de la position debout à la position d'inflexion latérale propre à chaque sujet. Ce nombre de clichés a été choisi de façon à améliorer la précision des mesures prises à partir de ces radiographies tout en minimisant l'exposition des sujets aux radiations.

Les résultats présentés donnent des informations sur la localisation du CIR entre chacune des vertèbres lombaires par rapport au sacrum.

Les cercles sont au nombre de 6.
De haut en bas, ils donnent le lieu des CIR de T11/sacrum, T12/sacrum, L1/sacrum, L2/sacrum, L3/sacrum, L4/sacrum, L5/sacrum.
Tous les cirs sont dans les cercles

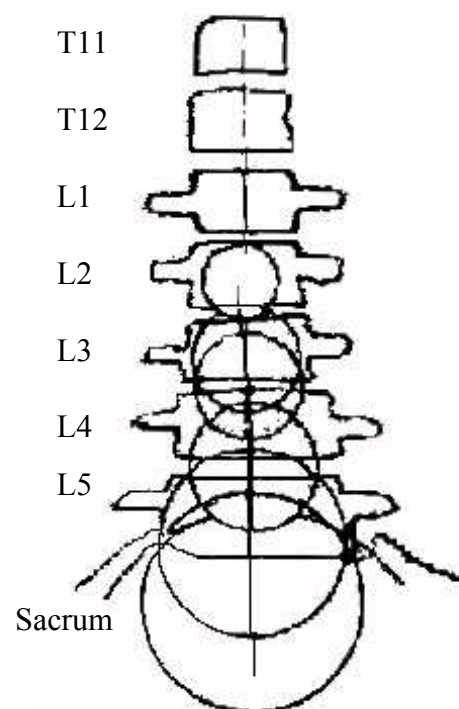


Figure 23 : lieu des CIRs pour un sujet d'après Dimnet [DIM-10]

III- COMPORTEMENT DYNAMIQUE DU RACHIS : MOYENS D'ESSAIS

1- Introduction

De façon à préparer la phase expérimentale du projet, nous avons mené l'étude bibliographique suivant deux axes. Le premier porte sur des protocoles expérimentaux concernant des unités vertébrales utilisables en dynamique. Le second porte sur les propriétés dynamiques des composants du segment rachidien (ligaments et disque).

Si le premier axe de recherche a permis de retenir plusieurs articles, la recherche des propriétés mécaniques des ligaments en dynamique n'a permis de retenir aucun article pertinent.

Sept articles ont été choisis pour leur représentativité concernant les expérimentations dynamiques au niveau thoracique et lombaire. Le choix de l'article de Nightingale, portant sur le rachis cervical, a été motivé par les caractéristiques de son montage expérimental et par la facilité d'adaptation de ce dernier pour les étages thoraco-lombaire.

A ces sept sources bibliographiques se rajoutent un ensemble d'articles ayant permis la validation du thorax (colonne vertébrale et cage thoracique) du modèle « être humain ». Nous présentons 5 articles issus de cette base de données.

Ces tirs sont principalement des essais sur cadavres entiers effectués à l'aide d'un impacteur que l'on projette sur la cage thoracique du sujet.

Ces tirs ont été effectués suivant plusieurs directions selon l'auteur :

- Impact frontal
- Impact latéral
- Impact oblique

Ces articles sont intéressants car ils présentent les informations nécessaires à la modélisation du protocole d'essai. Ainsi, les comparaisons entre l'expérimentation et les réponses numériques du modèle « être humain » sont fondées.

Selon les auteurs, le choc se transmet au travers d'un impacteur directement au niveau du thorax ou bien par l'intermédiaire d'une ceinture de retenue identique à ce que l'on trouve dans les véhicules. Ceci permet de mieux s'approcher du comportement de la cage thoracique durant un choc.

Enfin, ces tests permettent d'effectuer des comparaisons entre le comportement de la cage thoracique humaine et celui du thorax d'un mannequin de type Hybrid III.

2- Détails des articles

A. HAKIM & al. (1976) : étude dynamique et statique des charges supportées par les facettes articulaires [HAK-16]

✓ Matériel et méthodes

L'auteur a utilisé 6 segments lombaires. L'âge des sujets allant de 37 à 57 ans. L'effort est appliqué verticalement à l'aide d'un système hydraulique asservi. Un capteur de force, spécialement réalisé pour ces expérimentations, est placé dans la partie inférieure du corps vertébral supérieur, accolé au disque. A l'aide de ce système, il est possible de déterminer les efforts passant par les facettes articulaires lors de sollicitations verticales :

$$F_{\text{facette}} = F_{\text{appliquée}} - F_{\text{capteur}}$$

Une première expérience a été faite sur cadavre entier, instrumenté avec le capteur de pression, de façon à avoir connaissance des efforts verticaux pouvant être encaissés par la colonne lors de sollicitations dynamiques.

La deuxième partie a été réalisée à partir des segments lombaires provenant de ces cadavres et testés dans des conditions identiques (position du segment par rapport à la charge) aux tests sur cadavres entiers. Ces segments ont eu à subir deux types de tests, statiques (compression d'une centaine de newtons) et dynamiques à l'aide d'un système asservi hydrauliquement (montée en effort de 8 N en 20 ms).

✓ Résultats (dynamique)

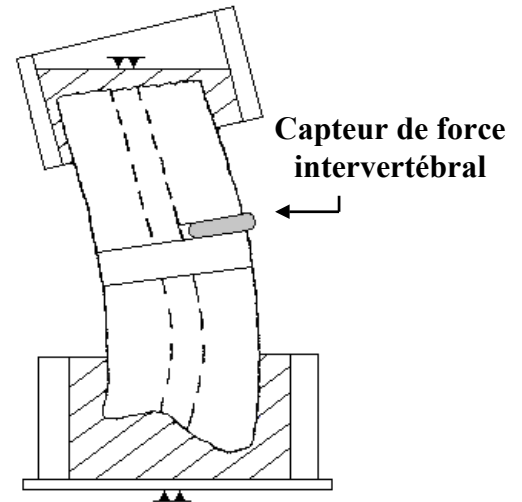
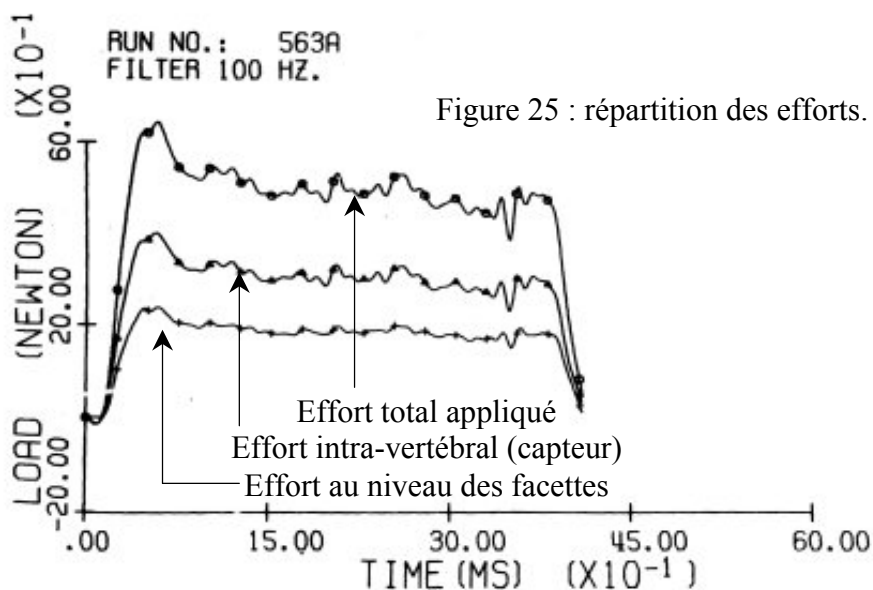


Figure 24 : montage d'après Hakim [HAK-16]

B. NIGHTINGALE & al. (1991) : influence des conditions aux limites sur le rachis cervical [NIG-35]

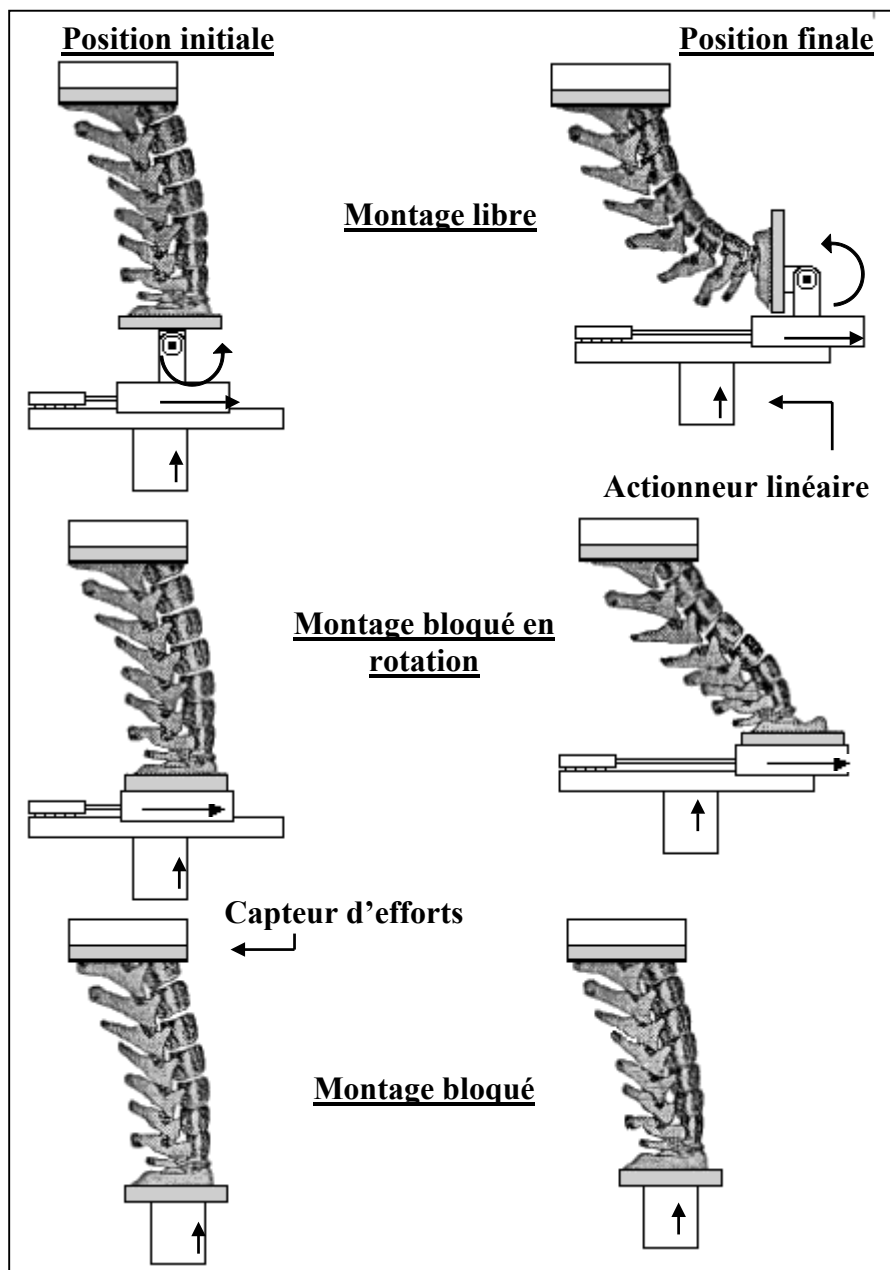


Figure 26 : Dispositif de mise en charge en compression de la colonne cervicale isolée d'après Nightingale [NIG-35]

✓ Matériel et méthodes

L'auteur a utilisé 18 rachis cervicaux allant de la base du crâne à T1. Toutes les structures ligamentaires sont intactes. L'âge des sujets va de 40 à 75 ans. Les spécimens sont encastrés dans des bacs d'aluminium avec ajout de résine de façon à ce que les supports de ces bacs soient parallèles. Le mouvement est imposé par un servomoteur hydraulique et les efforts sont mesurés à l'aide d'un capteur 6 axes implanté sur T1. L'asservissement impose une sollicitation de compression suivant l'axe vertical et différentes combinaisons de degrés de libertés peuvent être

réalisées à l'aide d'un système de glissière et pivot placé sur l'occiput (spécimen libre, contraint en rotation et totalement contraint). Afin de tester les spécimens, un déplacement de 9 cm en 2 secondes est appliqué en position « non contrainte », ce déplacement chute à 4 cm en 2 secondes pour la configuration « contrainte en rotation » pour tomber à 2 cm en 2 secondes pour la position « contrainte ». Des pré-tests ont été effectués sur 5 spécimens en plus des 18 utilisés afin de connaître l'influence des conditions aux limites sur la rigidité. La sollicitation est de 200 N pendant 2 secondes. Ces pré-tests ont aussi été réalisés sur un cou d'Hybrid III.

✓ Résultats

Spécimen	libre	Contraint en rotation	Totalement contraint
1	4.46	54.6	95.5
2	3.93	22.4	24.3
3	2.21	27.2	26.1
4	4.21	25.6	41.0
5	1.97	12.2	18.2
Moyenne	3.36 ± 1.17	28.4 ± 15.8	41.0 ± 31.9
Hybrid III	169.2	336.4	416.5
Rapport entre spécimen et mannequin	50.3	11.8	10.2

Spécimen	Conditions aux limites	Effort axial maximum (N)	Déflexion verticale (cm)	lésion
1	Libre	365	5.8	Aucune
2	Libre	367	10.2	Aucune
3	Libre	240	10.8	Aucune
4	Libre	343	8.2	Aucune
5	Libre	169	8.6	Aucune
6	Libre	250	8.2	Aucune
moyenne	Libre	289 ± 81.4	8.6 ± 1.8	
7	Bloqué en rotation	3590	3.6	Dislocation des facettes
8	Bloqué en rotation	2950	3.3	Dislocation des facettes
9	Bloqué en rotation	1130	2.9	Dislocation des facettes
10	Bloqué en rotation	1110	2.3	Dislocation des facettes
11	Bloqué en rotation	600	1.5	Dislocation des facettes
12	Bloqué en rotation	930	3.9	Dislocation des facettes
Moyenne	Bloqué en rotation	1720 ± 1234	2.9 ± 0.9	
13	Totalement contraint	5340	2.5	Fracture en compression
14	Totalement contraint	4060	1.2	Fracture en compression
15	Totalement contraint	6840	1.2	Fracture en compression
16	Totalement contraint	4700	1.2	Fracture en compression
17	Totalement contraint	3000	1.7	Fracture en compression
18	Totalement contraint	4940	1.1	Fracture en compression
moyenne	Totalement contraint	4810 ± 1286	1.4 ± 0.4	

C. OSVALDER & al. (1993) : méthode étudiant la réponse biomécanique d'un segment lombaire soumis à une flexion dynamique avec cisaillement [OSV-38]

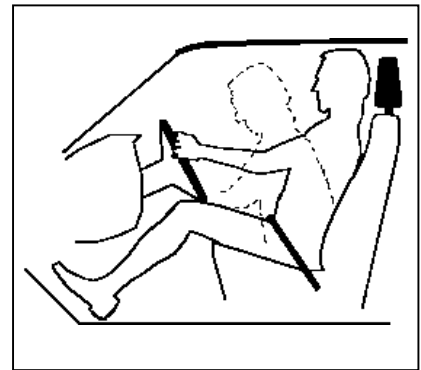
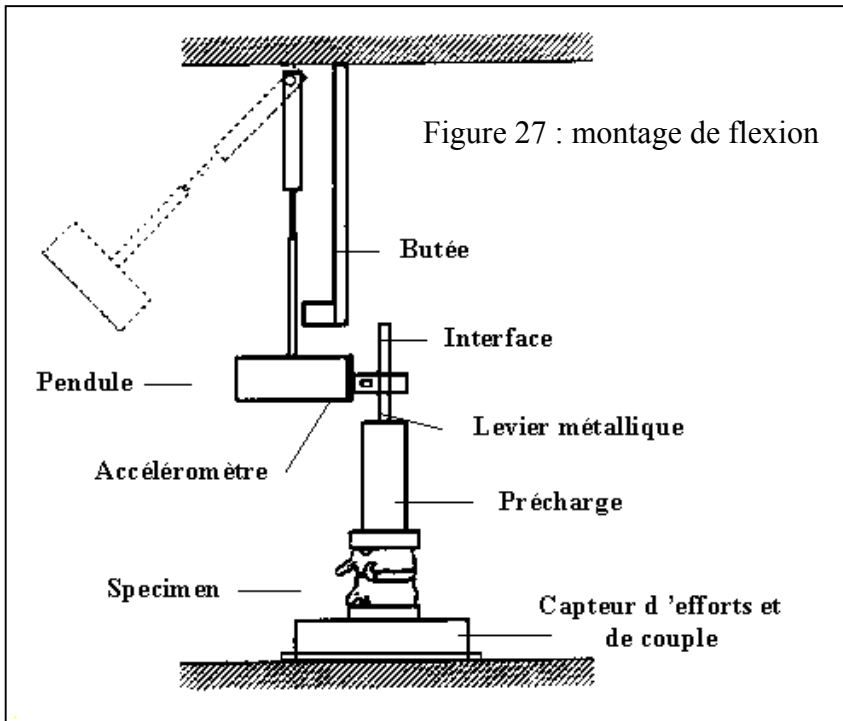


Figure 28 : choc frontal avec une ceinture 2 points

✓ Matériel et méthodes

Le but de ce travail est de déterminer une méthode in-vitro d'application dynamique d'une charge à un segment lombaire et de déterminer la réponse en efforts, déplacements et rotation de façon à mieux appréhender les effets d'un choc frontal avec ceinture deux points. (figure 28)

L'auteur a utilisé 20 spécimens (L1-L2 et L3-L4) divisés en deux séries de 10 se différenciant par l'amplitude de l'impulsion dynamique. La procédure expérimentale est la suivante : une précharge physiologique est appliquée sur le spécimen pour pré-conditionner les ligaments (100N en compression et 25 N.m en couple de flexion) et pour déterminer un premier angle de flexion. Le spécimen est ensuite sollicité avec un impact (deuxième angle de flexion) et re-testé en statique pour avoir un troisième angle de flexion.

Suite à ces essais, une analyse lésionnelle de ces segments a été réalisée. Si aucun des segments n'a été détruit pendant les essais il apparaît des signes de lésion au niveau des spécimens.

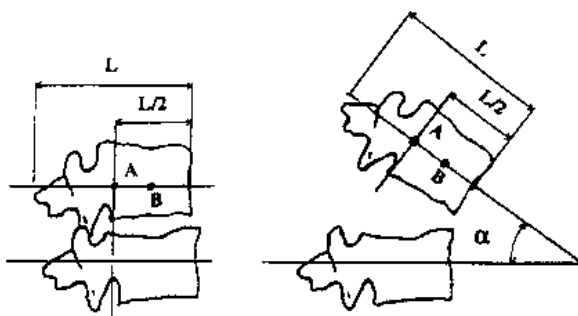


Figure 29 : mesure des déplacements et de l'angle de flexion.

Le déplacement vertical est mesuré au point A et le déplacement horizontal au point B

✓ Résultats (dynamique)

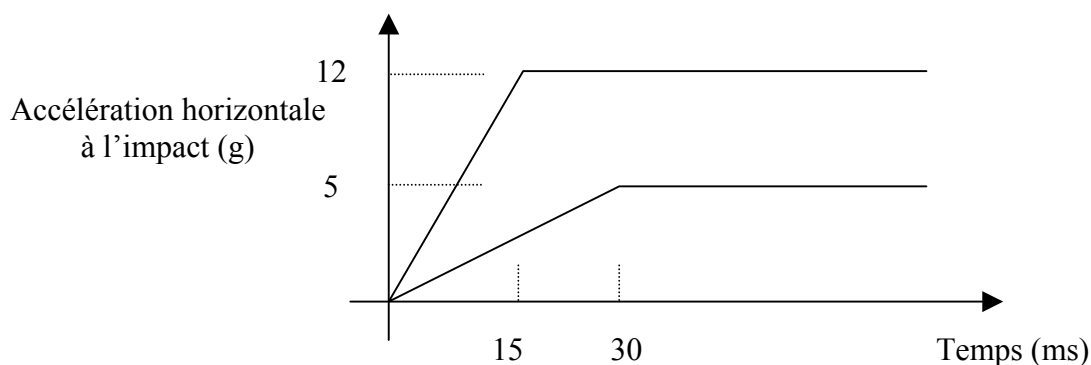


Figure 30 : détail des impulsions dynamiques

Tableau 5			
<i>Résultats du chargement dynamique</i>			
<i>Série</i>	<i>Paramètre</i>	<i>Moyenne (écart type)</i>	<i>Etendue</i>
Série 1 (10 spécimens) Impulsion modérée	Moment de flexion (N.m)	140(11)	120-160
	Effort tranchant (N)	430(36)	385-530
	Angle de flexion (°)	14.1(1.6)	11.3-16.1
	Déplacement horizontal (mm)	6.1(1.0)	4.9-8.3
	Déplacement vertical (mm)	14.1(1.2)	12.7-15.4
Série 2 (10 spécimens) Impulsion sévère	Moment de flexion (N.m)	185(15)	150-215
	Effort tranchant (N)	600(45)	525-715
	Angle de flexion (°)	19.1(1.3)	16.3-21.2
	Déplacement horizontal (mm)	8.1(1.1)	6.9-10.1
	Déplacement vertical (mm)	17.5(1.5)	15.8-20.6

Tableau 6			
<i>Variation de l'angle de flexion en test statique avant et après les impulsions</i>			
<i>Impulsion</i>	<i>Angle de flexion : avant</i>	<i>Angle de flexion : après</i>	<i>Différence</i>
Impulsion modérée	6(1)	14(2)	8(2)
Impulsion sévère	7(1)	19(1)	12(2)

D. NEUMANN & al. (1993) : méthode étudiant la réponse biomécanique d'un segment lombaire soumis à une flexion dynamique avec cisaillement [NEU-34]

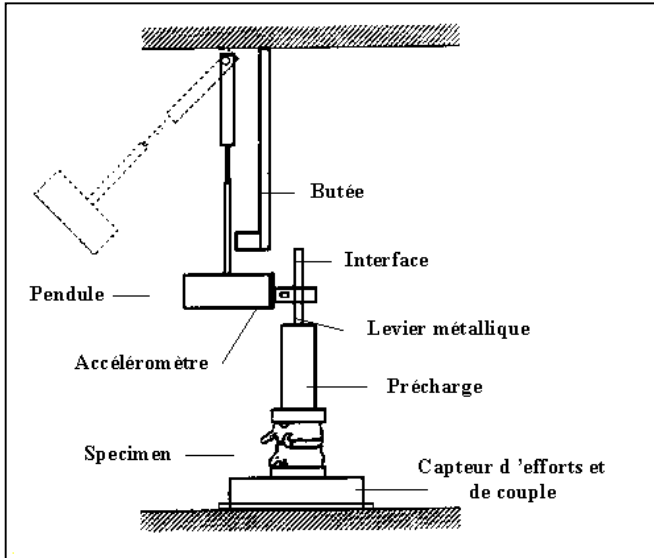


Figure 32 : montage de flexion

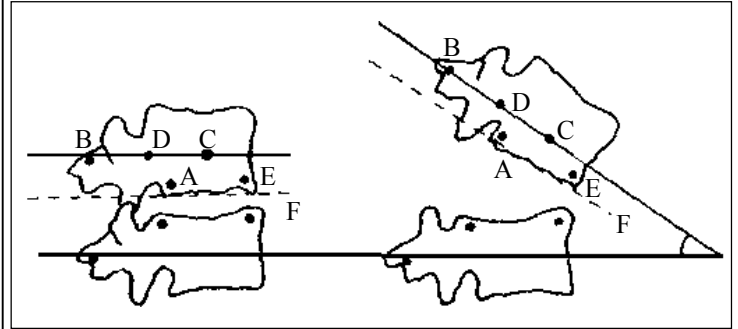


Figure 31 : mesure des déplacements et de l'angle de flexion.

- Pt A : déplacement vertical postérieur
- Pt B : déplacement vertical entre épineuses
- Pt C : déplacement horizontal de la vertèbre
- Pt D : déplacement vertical de la vertèbre
- Pt E et ligne F : déplacement horizontal au niveau du disque intervertébral

✓ Matériel et méthodes

L'expérience est similaire à ce qu'a fait Osvalder [OSV-38] en 1993 (même équipe de recherche). Néanmoins plus de résultats sont disponibles sur cette étude.

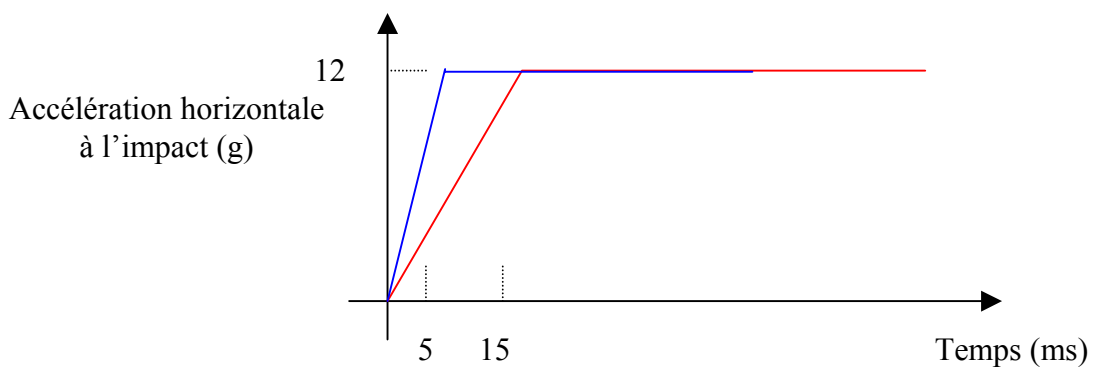


Figure 33 : détail des impulsions dynamiques

✓ Résultats (dynamique)

Tableau 7			
<i>Résultats du chargement dynamique (efforts et moments)</i>			
<i>Série</i>	<i>Paramètre</i>	<i>Moyenne (écart type)</i>	<i>Etendue</i>
Série 1 (10 spécimens) Impulsion modérée	Moment de flexion (N.m)	185(15)	150-215
	Effort tranchant (N)	600(45)	525-715
	Effort de compression (N)	4400(300)	4000-4900
Série 2 (10 spécimens) Impulsion sévère	Moment de flexion (N.m)	207(13)	175-225
	Effort tranchant (N)	660(29)	605-720
	Effort de compression (N)	5200(300)	4800-5600

Tableau 8			
<i>Résultats du chargement dynamique (déplacements)</i>			
<i>Impulsion</i>	<i>Paramètre</i>	<i>Moyenne (écart type)</i>	<i>Etendue</i>
Impulsion modérée	Angle de flexion (°)	19.1(1.3)	16.3-21.2
	Déplacement vertical (point D) (mm)	17.5(1.5)	15.8-20.6
	Déplacement vertical (point A)	7.2(1.1)	5.0-9.5
	Déplacement vertical (point B)	35(4)	26-40
	Déplacement horizontal (point C)	8.1(1.1)	6.9-10.1
	Déplacement horizontal (Point E)	3.8(1.0)	1.4-5.0
	Impulsion sévère	Angle de flexion (°)	18.0(1.2)
Déplacement vertical (point D) (mm)		17.0(1.2)	15.1-20.1
Déplacement vertical (point A)		6.1(1.0)	4.8-8.0
Déplacement vertical (point B)		31(3)	25-36
Déplacement horizontal (point C)		7.4(1.0)	6.2-9.6
Déplacement horizontal (Point E)		3.4(1.0)	1.5-4.9

E. OGOON & al. (1997) : approche dynamique des instabilités du rachis [OGO-37]

L'expérimentation se fait en deux étapes :

- Ajout de masse aux points A et observation de l'angle de flexion.
- Blocage du mécanisme.
- Enlèvement des masses en A pour les mettre aux points B et libération du mécanisme pour avoir le mouvement d'extension.

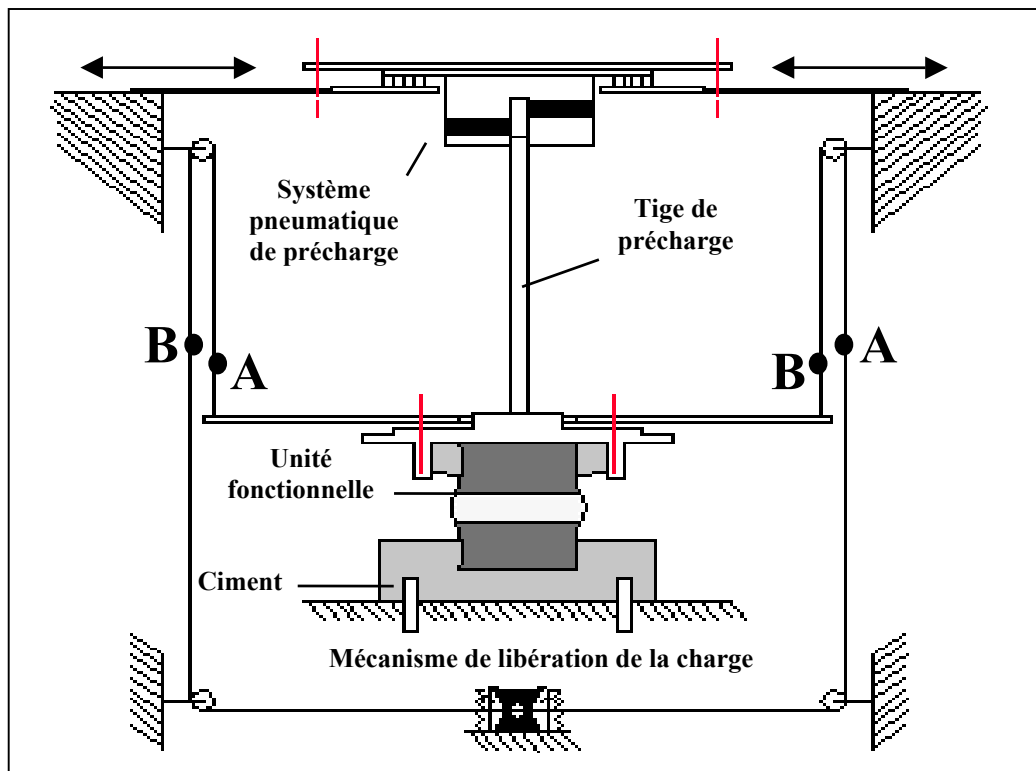


Figure 34 : montage expérimental d'après Ogon [OGO-37]

✓ Matériel et méthodes

Le but de l'étude est d'évaluer les vitesses et accélérations d'un segment vertébral lombaire soumis à un couple. L'auteur a utilisé 8 spécimens (6 L4-L5, 1 L2-L3 et 1 L5-S1). Les tissus mous ont été enlevés exceptés les ligaments et les capsules des facettes articulaires. L'unité fonctionnelle a été scellée dans des blocs sur lesquels sont fixées des diodes lumineuses permettant de mesurer le mouvement du spécimen à l'aide de deux caméras mesurant les mouvements dans deux plans perpendiculaires. La précharge de 400 N est appliquée par l'intermédiaire d'une tige qui permet de minimiser les moments induits. Le spécimen est sollicité en flexion-extension et inflexion latérale sous un couple instantané de 3 N.m. Cette étude est très exhaustive au niveau de l'étude du mouvement segmentaire. En effet, non seulement le mouvement primaire est explicité mais aussi les mouvements induits par couplage. Par exemple, lors de la flexion, le mouvement primaire est dans le plan sagittal et les mouvements secondaires et tertiaires dans les plans horizontaux et frontaux.

✓ Résultats (dynamique)

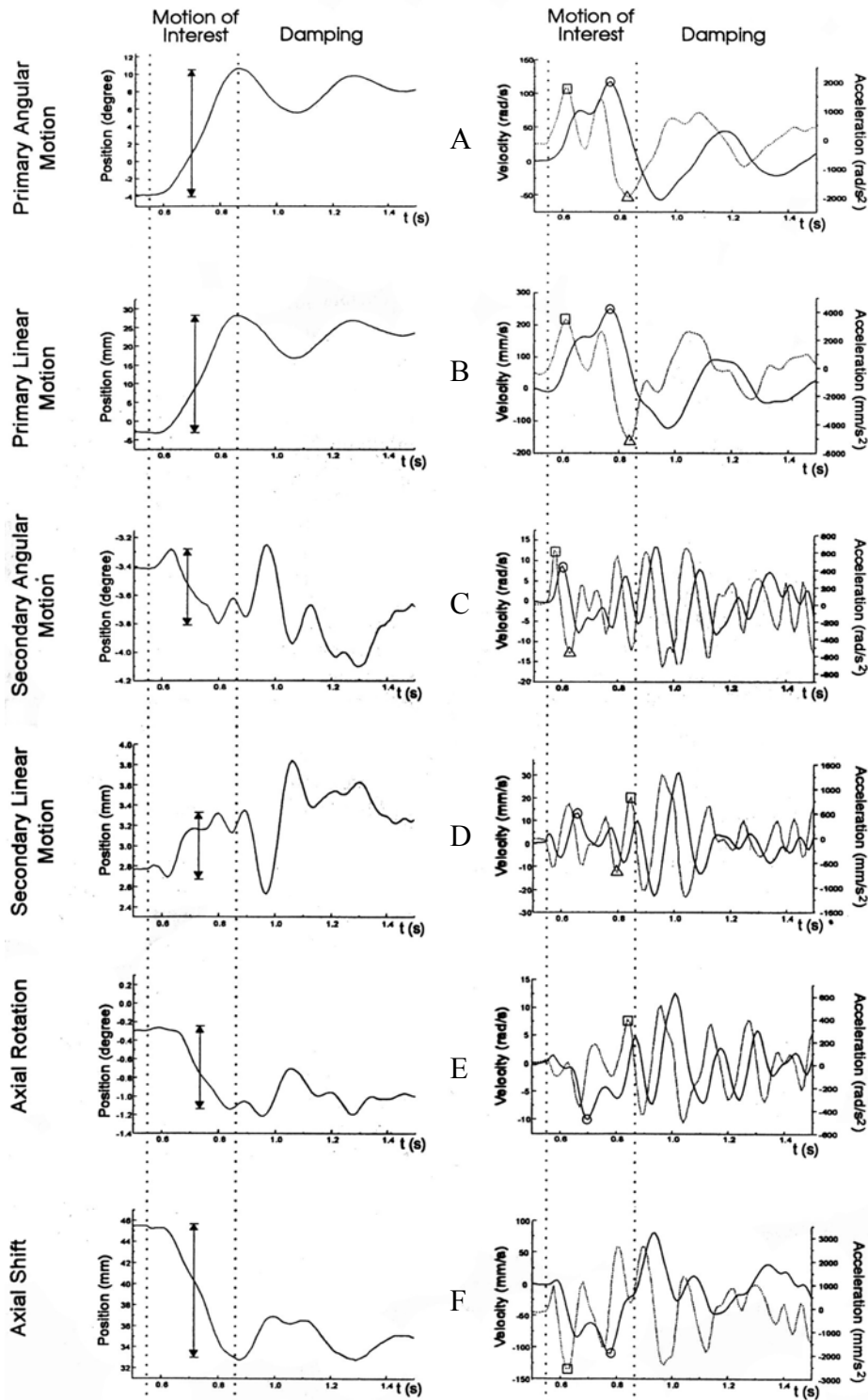


Figure 35 : résultats en L4 pour une sollicitation de flexion-extension pour une unité L4-L5
 graphes A : rotation principale (flexion), vitesse (o) et accélération (□) angulaire
 graphes B : translation principale (antéro-postérieure), vitesse et accélération linéaire
 graphes C : rotation secondaire (inflexion), vitesse et accélération angulaire
 graphes D : translation secondaire (latérale), vitesse et accélération linéaire
 graphes E : rotation tertiaire (rotation axiale), vitesse et accélération angulaire
 graphes F : translation tertiaire (verticale), vitesse et accélération linéaire

F. ROSTEDT & al. (1998) : rigidité axiale d'un segment lombaire lors du mouvement [28-ROS]

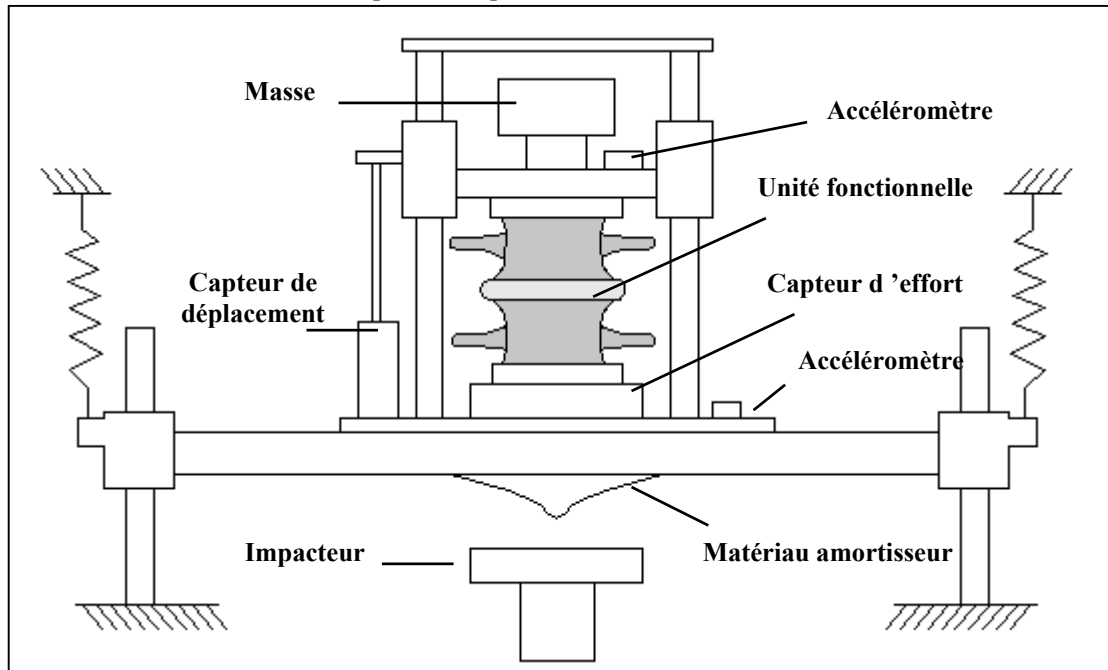


Figure 36 : montage de compression d'après Rostedt [ROS-52]

✓ Matériel et méthodes

L'auteur a utilisé 6 segments lombaires, 4 unités L1-L2 et 2 unités L3-L4. L'âge des sujets allant de 45 à 85 ans. Il a cherché à modéliser par des courbes de relaxation le comportement dynamique de l'unité fonctionnelle lombaire soumise à des impulsions verticales. L'identification des paramètres de ces modèles se fait grâce aux expérimentations. Le caractère non linéaire du comportement du segment rachidien est mis en évidence dans cette étude ce qui a été aussi montré par d'autres auteurs auparavant. Dans notre cas, l'intérêt de cette étude provient de l'originalité du montage expérimental qui permet d'appliquer une sollicitation de compression contrôlée à un spécimen.

✓ Résultats

L'auteur a approximé le comportement de chaque unité fonctionnelle durant la phase de relaxation après impact. Il a utilisé un modèle de Burger fluide dont la formulation générale est :

$$y = A + B.(1 - e^{-t/T}) + C.t$$

Tableau 9
Constantes du modèle de Burger pour chaque spécimen donné avec un écart-type

Spécimen	A (µm/N)	B (µm/N)	C (µm/(N.min))	T (s)
1	1.46(0.31)	0.100(0.027)	0.031(0.010)	31 (4)
2	-	0.095(0.036)	0.023 (0.003)	35 (3)
3	1.15(0.23)	0.105(0.042)	0.028(0.007)	33 (5)
4	-	-	-	-
5	1.46(0.23)	0.075(0.015)	0.026 (0.001)	30 (7)
6	0.98(0.07)	0.070(0.008)	0.018 (0.001)	29 (4)

G. DEMETROPOULOS & al. (1998) : propriétés mécaniques de la colonne du mannequin Hybrid III et de colonnes lombaires humaines [DEM-8]

✓ Matériel et méthodes

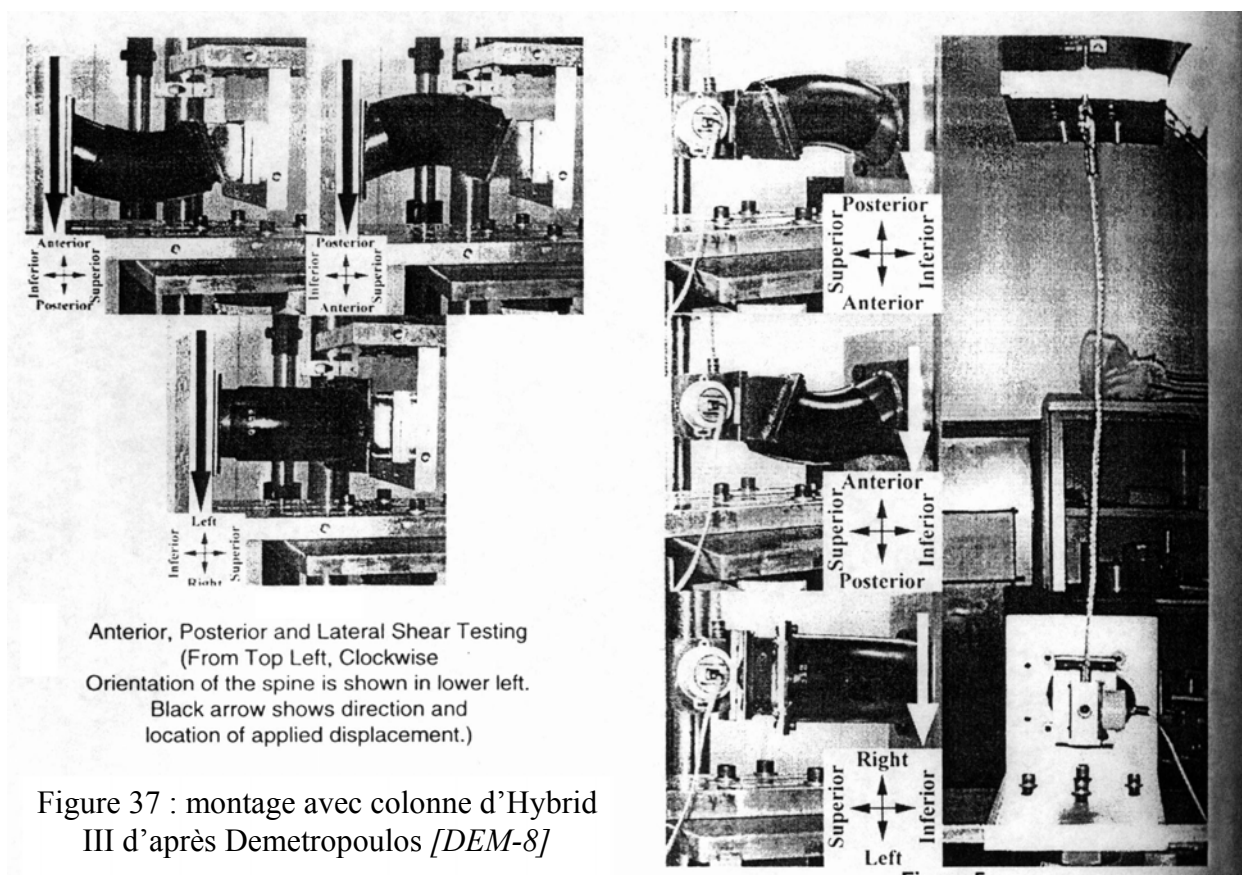


Figure 37 : montage avec colonne d'Hybrid III d'après Demetropoulos [DEM-8]

Cette étude identifie les propriétés mécaniques de 10 segments lombaires (T12-L5) et de deux colonnes lombaires d'Hybrid III. Il y a deux différences fondamentales entre une colonne lombaire humaine et celle d'un mannequin Hybrid. Tout d'abord, la courbure rachidienne est lordosée pour l'homme alors qu'elle est cyphosée pour le mannequin. Ensuite, le système ligamentaire est remplacé par deux câbles en acier placés latéralement.

Huit tests sont réalisés sur chaque spécimen : traction, compression, cisaillement antérieur, cisaillement postérieur, cisaillement latéral gauche, flexion, extension et inflexion latérale gauche. Chaque test est réalisé à une vitesse de déplacement constante de 100 mm/sec qui est censée être non destructive. Les déplacements maximums sont choisis pour approximer le chargement d'une colonne d'Hybrid III dans un essai chariot à 50 km/h. La sollicitation est appliquée à l'aide d'un câble monté sur une presse imposant un déplacement uniaxial et les efforts sont enregistrés à l'aide de capteurs d'efforts monoaxes. Les données recueillies portent sur les déplacements linéaires et angulaires ainsi que les chargements. Le moment fléchissant est calculé à partir des données fournies par les capteurs et de la longueur du bras de levier (câble).

Une tendance générale peut être remarquée à l'issue des essais. Les courbes efforts-déplacements de l'Hybrid III montrent une région initiale de grande rigidité suivie par une zone de rigidité constante. Il existe une exception pour les tests en traction où les câbles en acier de la colonne imposent le comportement de l'Hybrid III. Les courbes de chargement des pièces anatomiques

montrent une région initiale de faible rigidité suivie par une zone de rigidité croissante, ceci étant le comportement typique des tissus mous.

✓ Résultats (dynamique)

Tableau 10 Déplacement maximum pour chaque test				
	Compression (mm)	Traction (mm)	Flexion (°)	Extension(°)
Cadavre	6.6	2.7	17	16
Hybrid III	6.5	1.2	19	17
	Inflexion (°)	Cisaillement latéral (mm)	Cisaillement antérieur (mm)	Cisaillement postérieur (mm)
Cadavre	16	13	38	38
Hybrid III	17	12.5	38	38

Tableau 11 Rigidité pour chaque test avec écart type				
	Compression (kN/m)	Traction (kN/m)	Flexion (N.m/°)	Extension(N.m/°)
Cadavre	520 (284)	79 (23)	0.56 (0.33)	16.4 (7.1)
Hybrid III	641 (9.3)	5805 (363)	10.4 (0.4)	8.4 (0.1)
	Inflexion (N.m/°)	Cisaillement latéral (kN/m)	Cisaillement antérieur (kN/m)	Cisaillement postérieur (kN/m)
Cadavre	10.7 (4)	15.6 (5.1)	38 (10.3)	69.6 (22.2)
Hybrid III	13 (0.4)	44.2 (2.1)	206.7 (13.1)	164.3 (1.5)

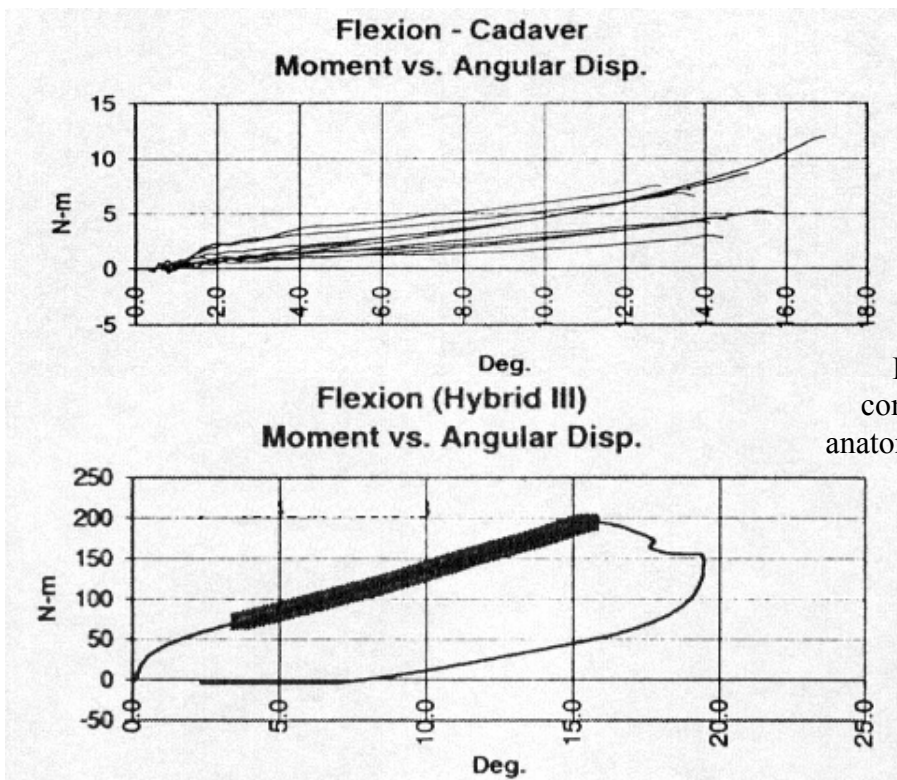


Figure 38 : comparaison entre le comportement en flexion d'une pièce anatomique et de la colonne du mannequin

H. Base de données de validation du thorax du modèle « être humain » [LIZ-26]

Les articles suivants constituent la majeure partie de la base de données de validation du thorax du modèle « être humain ».

- KROELL & al. (1971) : réponse et tolérance à l'impact du thorax humain [KRO-23].
- STALNAKER & al. (1973) : réponse de thorax humain sous charge [STA-56].
- NAHUM & al. (1975) : réponse d'un cadavre à un impact thoracique [NAH-32].
- VIANO & al. (1989) : réponse biomécanique et lésions lors d'un impact thoracique latéral [VIA-60].
- CESARI & AL. (1990) : Comportement de thorax humain sous charge (utilisation d'une ceinture) [CES-4].

✓ Matériel et méthodes

Le modèle « être humain » a été validé à l'aide de plusieurs ensembles d'articles du même auteur ou d'auteurs différents. La synthèse qui suit regroupe les protocoles par auteur et type d'essais.

Tableau 12 Thorax impacteur frontal INRETS	
Nombre de sujet	3 en basse vitesse et 3 en haute vitesse.
Position des sujets	Assis, jambes à l'horizontale sur plaques en Téflon.
Position du dos	Dos droit avec lombaires inclinées.
Position tête et bras	Bras le long du corps, tête maintenue.
Maintien du corps	Tête accrochée à un câble relâché quelques ms avant l'impact.
Position de l'impacteur	Axe horizontal, centré sur le sternum.
Impacteur	Impacteur linéaire. Disque plan de diamètre 150 mm, rigide.
Mesure de la déflexion	Mesure par analyse film, 1000 images/sec.
Mires	Mires en T1 et T12 + mire fictive mieux positionnées et mire impacteur.
Configuration de chargement	M = 23.4 Kg et V = 3.4 m/s ; M = 23.4 Kg et V = 5.85 m/s
Corridor présenté	Pour chacune des vitesses, corridor effort / déflexion, corridor effort / temps, corridor déflexion / temps, corridor déplacement / temps T12, T1 et impacteur.

Tableau 13 Thorax impacteur frontal Nahum	
Nombre de sujet	3 en basse vitesse, 3 en haute vitesse et 3 en très haute vitesse.
Position des sujets	Assis sur une table horizontale.
Position du dos	Dos vertical.
Position tête et bras	Bras et tête à l'horizontale en avant sur un support.
Maintien du corps	Maintien par les bras et la tête.
Position de l'impacteur	Axe horizontal, centré sur le sternum, 4 ^{ème} espace intercostal.
Impacteur	Impacteur linéaire. Disque plan de diamètre 150 mm, rigide.
Mesure de la déflexion	Mesure par analyse film, 1000 à 2000 images/sec.
Mires	Mires dorsale sur l'axe de l'impacteur et mire impacteur.
Configuration de chargement	M = 23 Kg et V = 4.9 m/s ; M = 23.4 Kg et V = 6.9 m/s ; M = 23.4 Kg et V = 9.8 m/s.
Corridor présenté	Pour chacune des vitesses, corridor effort / déflexion, corridor effort / temps, corridor déflexion / temps.

Tableau 14 Thorax impacteur frontal Nahum avec dossier	
Nombre de sujet	6 sujets
Position des sujets	Assis sur une plaque.
Position du dos	Dos vertical collé au dossier rigide.
Position tête et bras	Bras le long du corps.
Maintien du corps	Appui sur le dossier.
Position de l'impacteur	Axe horizontal, centré sur le sternum, 4 ^{ème} espace intercostal.
Impacteur	Impacteur linéaire. Disque plan de diamètre 150 mm, rigide.
Mesure de la déflexion	Mesure par analyse film, 1000 à 2000 images/sec.
Mires	Mires sur dossier et mire impacteur.
Configuration de chargement	M = 10.4 Kg et V = 7 m/s
Corridor présenté	Corridor effort / déflexion.

Tableau 15 Thorax impacteur frontal Stalnaker	
Nombre de sujet	9 sujets
Position des sujets	Assis sur une plaque, mouvements laissés libres.
Position du dos	Dos vertical.
Position tête et bras	Bras à l'horizontal, tête maintenue.
Maintien du corps	Maintien par la tête.
Position de l'impacteur	Axe horizontal, centré sur le sternum, 4 ^{ème} espace intercostal.
Impacteur	Impacteur linéaire. Disque plan de diamètre 150 mm, rigide.
Mesure de la déflexion	Mesure par analyse film, 3000 images/sec.
Mires	Mires dorsale sur l'axe de l'impacteur et mire impacteur.
Configuration de chargement	M = 10 Kg et V = 6 m/s
Corridor présenté	Corridor effort / déflexion.

Tableau 16 Thorax impacteur latéral INRETS	
Nombre de sujet	3 en basse vitesse et 3 en haute vitesse.
Position des sujets	Assis sur plaques en Téflon.
Position du dos	Position intermédiaire entre conducteur et dos droit.
Position tête et bras	Bras replié et maintenus en avant au-dessus de la tête, tête maintenue.
Maintien du corps	Tête accrochée à un câble relâché quelques ms avant l'impact.
Position de l'impacteur	Axe horizontal, centré sur le thorax en latéral pur 0°, au niveau de T8-T9 sous l'aisselle.
Impacteur	Impacteur linéaire. Disque plan de diamètre 150 mm, rigide.
Mesure de la déflexion	Mesure par analyse film, 1000 images/sec.
Mires	Mires en T1 et T12 + mire fictive mieux positionnées et mire impacteur.
Configuration de chargement	M = 23.4 Kg et V = 3.3 m/s ; M = 23.4 Kg et V = 5.9 m/s
Corridor présenté	Pour chacune des vitesses, corridor effort / déflexion, corridor effort / temps, corridor déflexion / temps, corridor déplacement / temps T12, T1 et impacteur.

Tableau 17 Thorax impacteur oblique Viano	
Nombre de sujet	5 en basse vitesse, 5 en haute vitesse et 5 en très haute vitesse.
Position des sujets	Sujets debouts suspendus par la tête
Position du dos	Dos vertical.
Position tête et bras	Bras repliés et placés sur la tête, le tout maintenu par un câble.
Maintien du corps	Corps suspendus par un câble, fixation tête et bras, relâchés quelques ms avant l'impact
Position de l'impacteur	Axe horizontal, centré sur le thorax en oblique 30 °, au niveau de la xiphœide (7.5 cm sous le centre de sternum).
Impacteur	Impacteur pendulaire. Disque plan de diamètre 150 mm, rigide.
Mesure de la déflexion	Mesure par analyse film, 2000 images/sec. Marquage du zéro choc directement sur le film.
Mires	Mire fixée sur une côte sur l'axe de l'impacteur, côté opposé au choc et mire impacteur.
Configuration de chargement	M = 23.4 Kg et V = 4.4 m/s ; M = 23.4 Kg et V = 6.5 m/s ; M = 23.4 Kg et V = 9.3 m/s.
Corridor présenté	Pour chacune des vitesses, corridor effort / déflexion, corridor effort / temps, corridor déflexion / temps.

Tableau 18 Thorax ceinture INRETS	
Nombre de sujet	6 en basse vitesse et faible masse, 6 en haute vitesse et faible masse, 6 en basse vitesse et forte masse.
Position des sujets	Allongé sur le dos, les cuisses verticales et les jambes horizontales.
Position du dos	Dos droit, horizontal.
Position tête et bras	Bras le long du corps, tête reposée sur le plan d'appui.
Maintien du corps	/
Position de l'impacteur	Ceinture thoracique passant sur le thorax en diagonal.
Impacteur	L'impacteur vient percuter un dispositif transmettant l'effort aux deux extrémités de la ceinture par l'intermédiaire de triangle.
Mesure de la déflexion	Mesure par des capteurs en 11 points du thorax, chests bands.
Mires	Points de mesures sternum, clavicules, 5èmes et 8èmes côtes.
Configuration de chargement	M = 22.4 Kg et V = 2.9 m/s ; M = 22.4 Kg et V = 7.8 m/s ; M = 76.1 Kg et V = 2.9 m/s.
Corridor présenté	Pour chacune des violences, corridor effort / temps ceinture moyen, corridor déflexion / temps aux points 1,2,3,4,5,6,7,8 et 10.

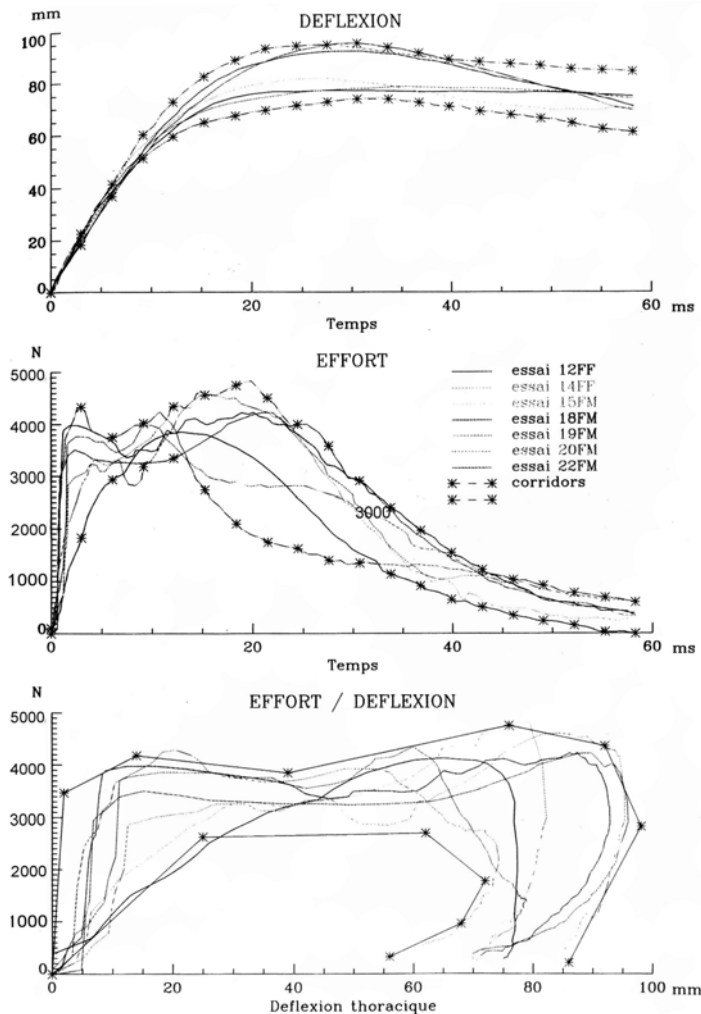


Figure 39 : exemples de résultats et de corridors expérimentaux

1- Introduction

Cette recherche bibliographique a été faite dans le but de répertorier les modèles existants de la colonne vertébrale, afin de s'en inspirer pour créer un modèle de rachis thoracique et lombaire amélioré. Six articles, parus entre 1970 et 1998, ont été choisis pour leur représentativité concernant les modélisations du thorax, de la colonne vertébrale ou du disque intervertébral, validées en dynamique.

2- Détails des articles

A. TADANO & al. (1997) : modèle du disque intervertébral lombaire pour une simulation de flexion, torsion et compression [TAD-57]

L'auteur a réalisé un modèle mathématique du disque intervertébral lombaire décrit avec la théorie des éléments finis. Le comportement mécanique de spécimens de disques lombaires obtenu par des tests cycliques continus en flexion – extension, torsion et compression – traction est formulé par des équations relatives à un modèle de demi-disque. Ces équations ont été formulées avec ou sans prise en compte du noyau discal et portent sur les contraintes et les moments supportés par le disque.

Figure 40 : comparaisons entre les expérimentations et les résultats fournis par le modèle

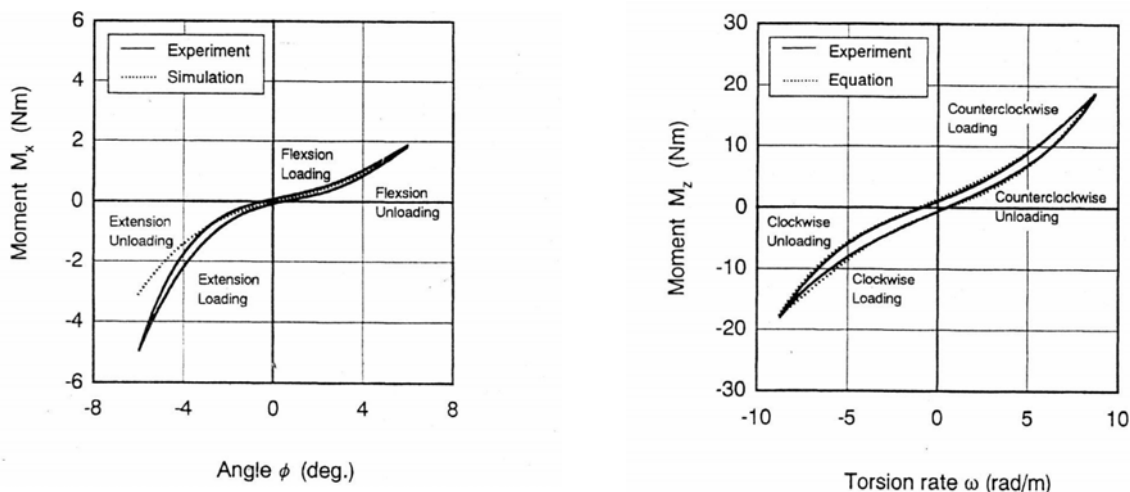


Figure 41 : système de coordonnées du modèle de disque

B. NATALI & al. (1990) : analyse non linéaire du disque intervertébral sous charge dynamique [NAT-33]

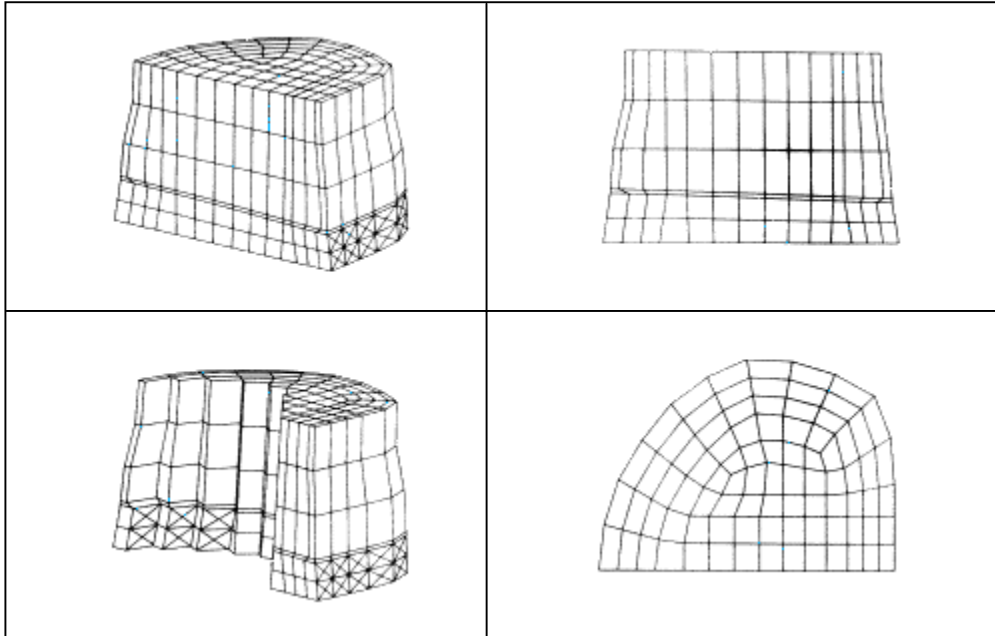


Figure 42 : modèle du disque d'après Natali [NAT-33]

Cette étude permet d'observer la réponse du disque intervertébral sous chargement dynamique. Le modèle numérique représente deux corps vertébraux séparés par le disque et utilise des éléments volumiques. Une loi isotrope transverse est adoptée pour l'os cortical et une loi isotrope pour l'os spongieux. Les fibres de collagène de l'annulus sont modélisées par 4 couches d'éléments « câble » qui ne possèdent aucune résistance à la compression. Les facettes articulaires ne sont pas modélisées et les sollicitations imposées au modèle sont axiales. Le disque est considéré comme hyperélastique, utilisant une approche « éléments finis » mixte, autorisant une représentation permettant d'inclure des lois d'incompressibilité du matériau. Cette analyse étudie les déplacements et les champs de contraintes sous chargement dynamique. L'intensité, la direction et la répartition des charges sur le corps vertébral sont données par la littérature. Le problème est abordé en tirant parti de différents niveaux de compressibilité du disque intervertébral lorsque celui-ci est à divers stades dégénératifs. A noter que l'auteur ne fait pas de comparaison expérimentale.

C. GOEL & al. (1994) : étude « éléments finis » vibratoire du complexe ligamentaire L4-S1 [GOE-13]

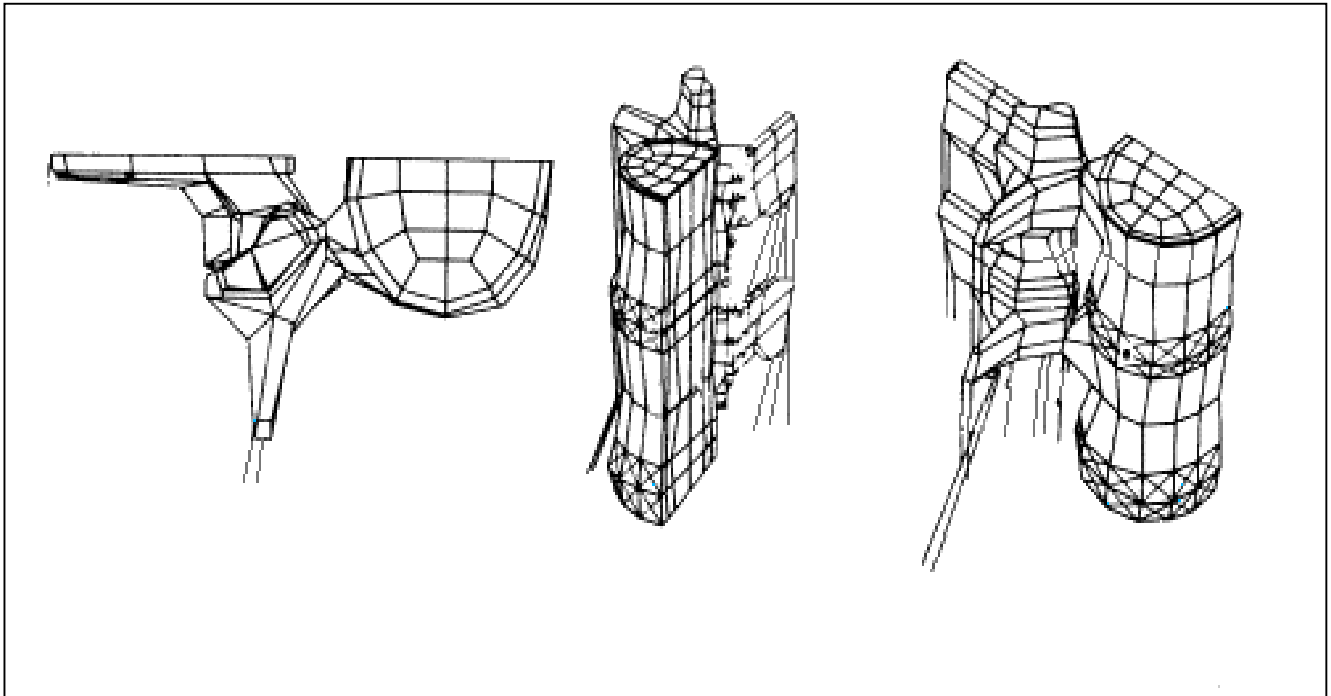


Figure 43 : modèle de L4-S1 d'après Goel [GOE-13]

Un modèle « éléments finis » volumique, non-linéaire, du complexe L4-S1 a été développé pour analyser la réponse dynamique du rachis sous sollicitations cycliques axiales et en l'absence d'amortissement. Le sacrum (S1) est représenté sous forme de conditions aux limites sur le disque et les ligaments de L5-S1. Les effets massiques du poids du corps sont pris en compte par l'ajout d'une masse de 4 kg sur le corps vertébral de L4. Une analyse modale du modèle indique une fréquence de résonance de 17.5Hz en mode axial et 3.8 Hz en sollicitation de flexion – extension. Les résultats fournis par une étude cyclique ($-400 \text{ N} \pm 40 \text{ N}$) pour quatre fréquences différentes (5 Hz, 11 Hz, 16.5 Hz et 25 Hz) ont été comparés à ceux fournis par une étude statique à deux chargements (-360 N et -440 N). Les résultats entre les deux types de chargements sont significatifs (jusqu'à 19 % de différence) que ce soit pour les contraintes discales, la pression intra discale, les efforts facettaires ou l'écrasement du disque.

Dans ce modèle, tous les ligaments sont modélisés (ligament commun antérieur, commun postérieur, jaune, transverse, capsulaires, épineux, susépineux et ilioluminaire). Le nombre d'éléments est de 487 divisés entre les briques 8 nœuds pour les vertèbres, les câbles 3D pour les fibres de collagène et les ligaments, les éléments fluides 3D pour le nucleus.

D. PLANK & al. (1991) : modèle « éléments finis » amélioré du thorax humain [PLA-46]

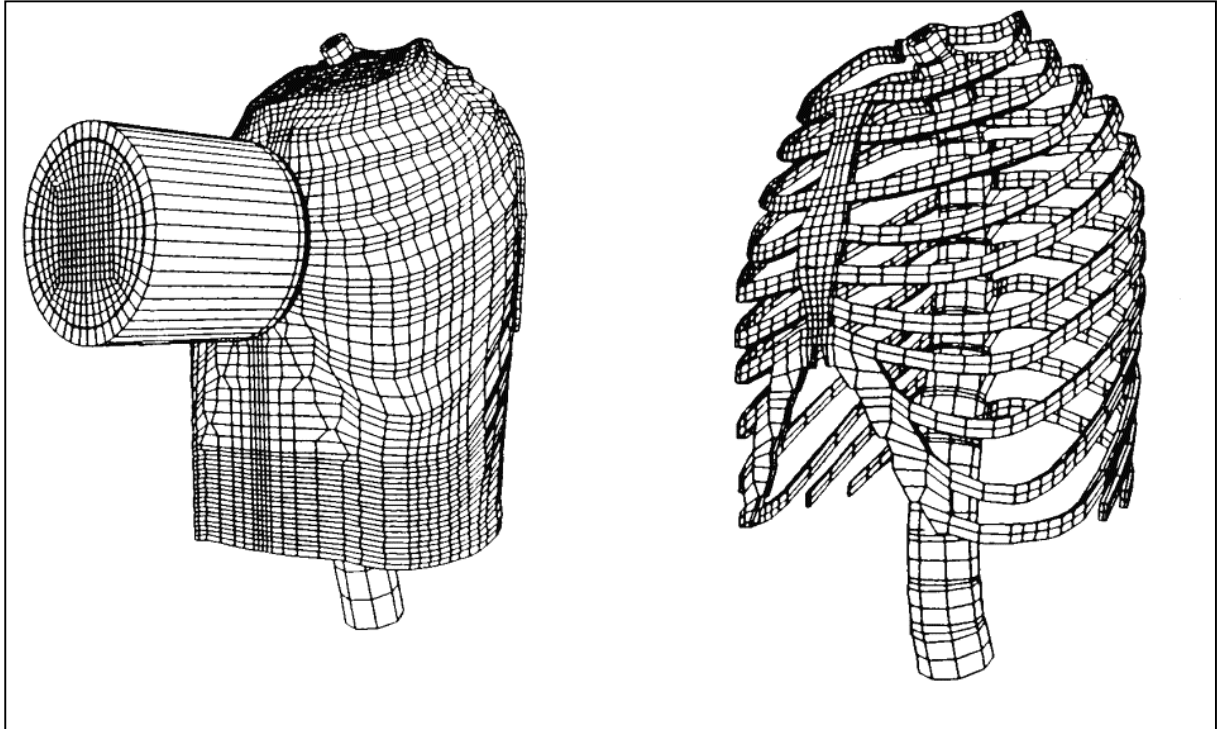


Figure 44 : modèle de la cage thoracique d'après Plank [PLA-46]

Le modèle est une représentation précise d'un homme 50^{ème} centile pour ce qui est de la structure anatomique osseuse, des masses et des dimensions. La réponse dynamique de ce modèle sous un impact frontal sur le thorax est comparée aux corridors expérimentaux disponibles et les contraintes à l'intérieur du thorax sont examinées sous ces conditions.

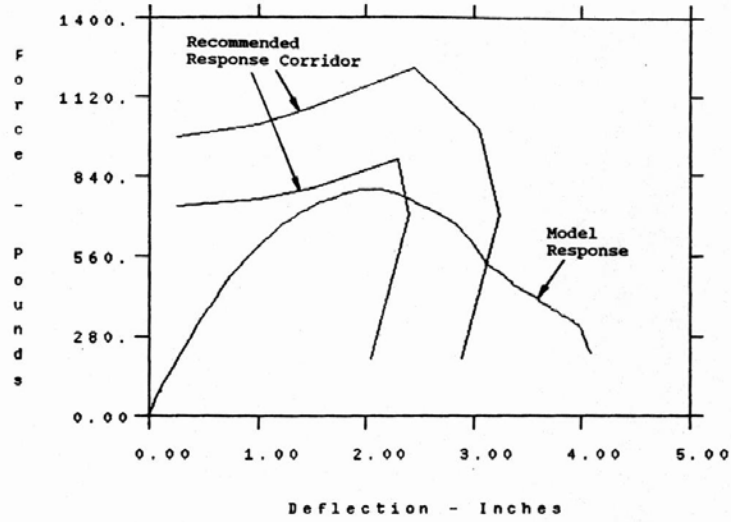
Dans cette étude, Les vertèbres, les disques, les ligaments et les cartilages sont définis par des lois élastiques tandis que les muscles et les viscères sont représentés par une loi visco-élastique.

Le modèle comporte 23148 nœuds et 20758 éléments.

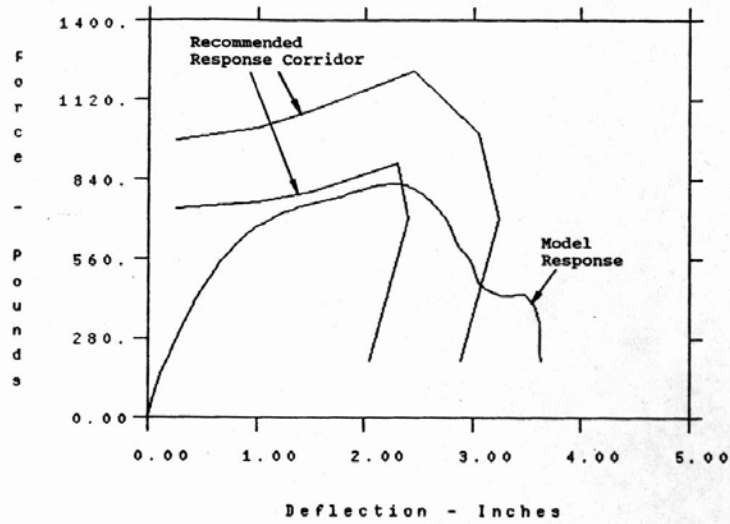
L'impacteur, modélisé, fait intervenir une masse variant entre 5kg et 23.4kg et une vitesse de translation allant de 4.2m/s à 6.6m/s.

L'auteur étudie la déflexion du thorax sous charge en faisant varier le module d'Young et le coefficient de poisson de l'os et du cartilage. La variation de la contrainte en fonction du temps est donnée pour 3 éléments.

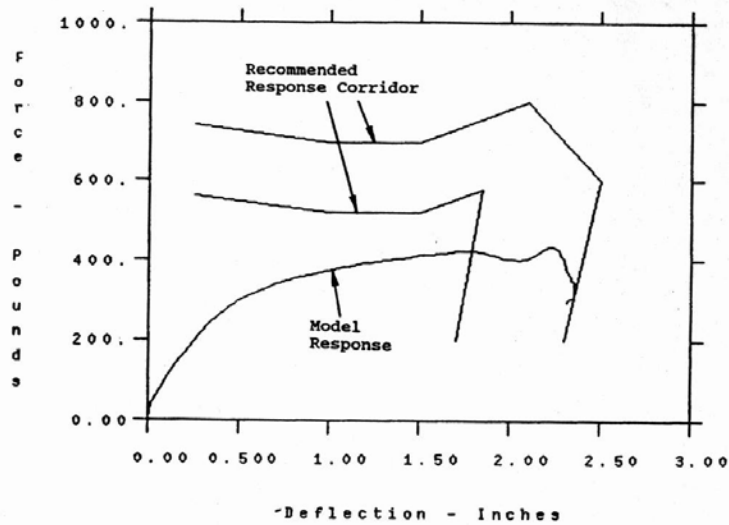
Figure 45 : exemples de résultats



Courbes efforts-déplacements du modèle à 10 côtes (vitesse de l'impacteur : 6.7 m/sec)



Courbes efforts-déplacements du modèle à 12 côtes (vitesse de l'impacteur : 6.7 m/sec)



Courbes efforts-déplacements du modèle à 10 côtes (vitesse de l'impacteur : 4.3 m/sec).

E. HAKIM & al. (1979) : réponse dynamique d'un modèle de vertèbre avec comparaisons expérimentales [HAK-17]

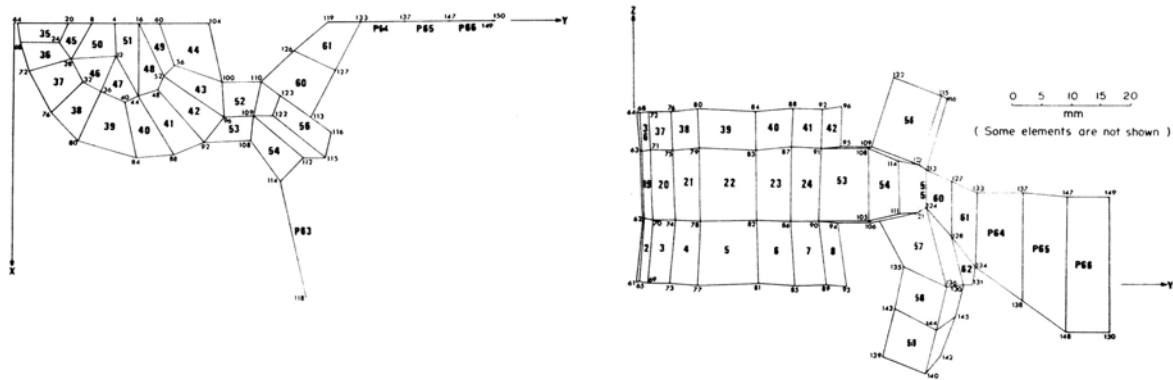


Figure 46 : modèle vertébral d'après Hakim [HAK-17]

L'étude présente un modèle « éléments finis » volumique détaillé (60 éléments) d'une vertèbre lombaire afin de mieux comprendre les mécanismes du comportement de la colonne vertébrale. Il permet de prendre en compte de nombreux détails anatomiques osseux et de minimiser les simplifications géométriques. Deux types d'éléments ont été utilisés, des éléments « volumique » et des éléments « plaque ». Le disque intervertébral et les facettes articulaires sont représentés par des éléments prenant en compte le cisaillement, la torsion et des charges axiales. Afin de valider ce modèle des expériences in vitro en statique et en dynamique ont été réalisées sur 3 vertèbres lombaires (L1, L2, L3). Les charges appliquées correspondent approximativement au poids du corps au-dessus des vertèbres choisies et les déformations ont été enregistrées en différents points sur l'os cortical.

Les résultats sont données sous forme de courbes qui donnent l'évolution des contraintes et des déformations en fonction du temps en différents points de la vertèbre.

A noter que l'auteur utilise les expérimentations qu'il a menées en 1976 fournissant ainsi des comparaisons supplémentaires.

F. MODELE ETRE HUMAIN [LIZ-26]

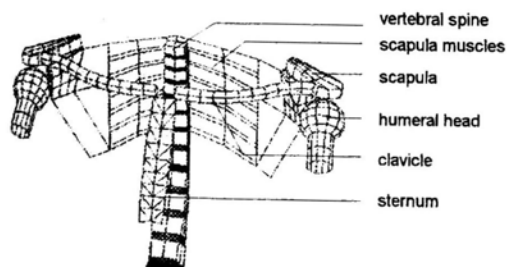
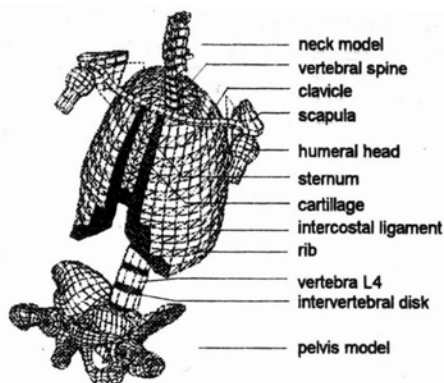


Figure 48 : structure osseuse du modèle « être humain » Figure 47 : modèle de la ceinture scapulaire

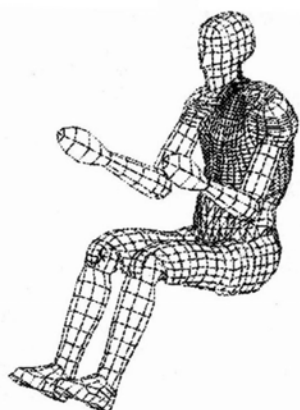


Figure 50 : vue globale du modèle « être humain »

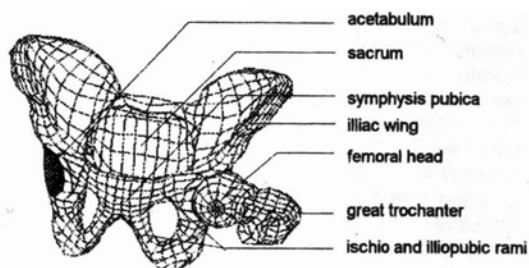


Figure 49 : modèle de bassin

L'utilisation d'outils mathématiques dans la conception automobile s'est considérablement développée durant ces dix dernières années et la modélisation y occupe une place essentielle. Ceci est particulièrement vrai dans le domaine de la sécurité où de nombreux paramètres doivent être pris en compte simultanément. Afin de satisfaire ces exigences, des mannequins de choc ont été développés mais ils restent peu biofidèles et ils sont spécifiques à un choc donné (frontal ou latéral). Pour cette raison, des modèles numériques de l'être humain ont été développés par de nombreux laboratoires. C'est dans ce contexte que le LAB, en collaboration avec le LBM, le CEESAR et l'INRETS a travaillé à la réalisation de modèles du cou, du bassin et du thorax qui ont été ensuite regroupés afin de posséder un modèle 50^{ème} centile adulte mâle en position de conduite. Cette première génération de modèle permet de prédire les trajectoires du cou, des épaules, du thorax, de l'abdomen et du bassin dans une direction quelconque d'impact. Par contre, il n'a pas été demandé une validation lésionnelle complète du modèle, notamment pour la tête et les membres supérieurs et inférieurs.

Ce modèle global est constitué de plusieurs modèles qui ont tous été validés de façon isolée. Si nous prenons comme exemple le thorax (figure 51), ce dernier a été confronté à une large base de données expérimentales qui est détaillée dans la partie bibliographique portant sur le comportement expérimental du rachis. Les critères de validation ont porté principalement sur des valeurs de déflexions et d'efforts au niveau de la cage thoracique (sternum).

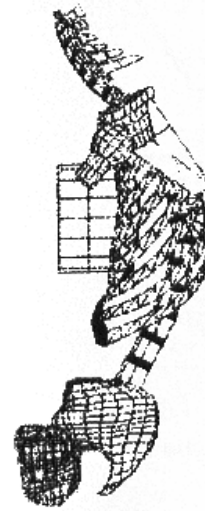
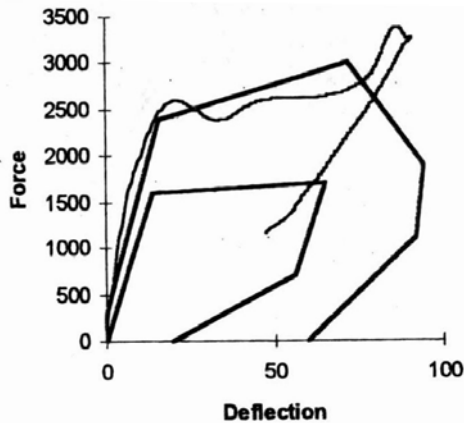


Figure 51 : A gauche, exemple de corridor expérimental en choc frontal avec réponse du modèle et à droite, modèle du thorax en choc frontal

Caractéristiques générales du modèle total :

Le nombre de nœuds est de 8490 et les nombres d'éléments sont les suivants : 225 ressorts, 1308 éléments plaques triangulaires ou membranes, 5000 éléments plaques quadrangulaires ou membranes et 3638 briques.

Courbure de la colonne vertébrale du modèle:

La courbure du rachis en position assise du modèle « être humain » est issue des travaux de Robbins [ROB-49] dans lesquels une étude importante a été menée pour définir la position assise moyenne de l'individu 50^e centile (individu moyen) américain. Pour cela, un siège a été construit en analysant les positions de 8 sujets sur 4 sièges américains classiques. A partir de ce siège, des mesures anthropométriques ont été effectuées sur des individus à l'aide de marqueurs réfléchissants afin de connaître la position dans l'espace d'un grand nombre de points caractéristiques du corps humain.

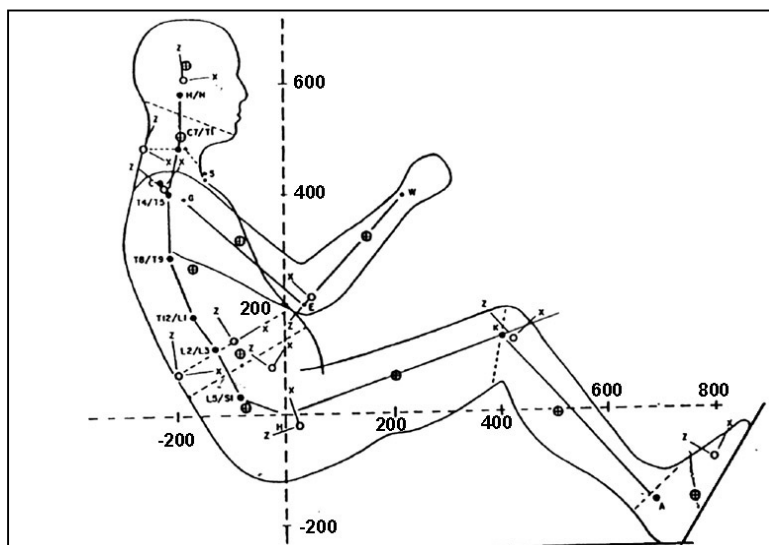


Figure 52 : posture de Robbins

D'autre part, une synthèse bibliographique a été faite concernant les masses, la position des centres de gravité et les inerties des différents segments humains. A partir de cette synthèse, les auteurs en ont déduit les valeurs de masse, d'inertie et d'autres paramètres anthropomorphiques pour l'individu 50^e centile assis en position de conduite. Ces travaux pratiquement uniques dans

ce domaine sont d'une très grande utilité bien qu'il faille tenir compte des imprécisions dues, entre autres, aux mesures externes.

De cette étude, le « Transport Research Institute » (Université du Michigan) a construit des plans à l'échelle 1 du 50^e centile en position assise montrant les positions relatives des vertèbres pour un individu en position assise. Ces plans ne sont que des "vues d'artistes", seuls les points extérieurs réels palpés par Robbins doivent être pris en compte.

La question est de savoir si la posture du modèle tirée de ces vues d'artistes est correcte...

Cette réponse est obtenue grâce aux informations fournies par le projet « HUMOS » dans lequel le LAB est partenaire. Ce projet a pour but de réaliser un modèle global d'« être humain » en position assise de conduite qui vise à améliorer dans son intégralité le modèle être humain existant. La géométrie qui a été utilisée (figure 53) est basée sur des coupes anatomiques issues d'un cadavre qui a été congelé et découpé suivant des coupes horizontales distantes de quelques millimètres. Ainsi nous avons pu comparer la géométrie de la posture de Robbins avec celle d'un véritable individu. Il en ressort de faibles variations entre les deux postures qui valident l'étude de Robbins. Pour des raisons de confidentialité, il n'est pas possible de donner plus d'informations.



Figure 53 : posture d'humos

En plus des validations locales des sous parties, le modèle « être humain » a été évalué dans un environnement de type véhicule. Cette validation, principalement qualitative, a permis de vérifier la stabilité numérique du modèle global en environnement automobile. Trois types de tests ont été effectués : Un choc frontal, un choc latéral contre une portière et un choc arrière.

Enfin, une comparaison directe a été faite entre le modèle total et des mannequins de choc frontal de type Hybrid III et latéral de type Eurosid 1. Les graphes de la figure 54 confirment la meilleure biofidélité du modèle « être humain » par rapport aux mannequins de choc.

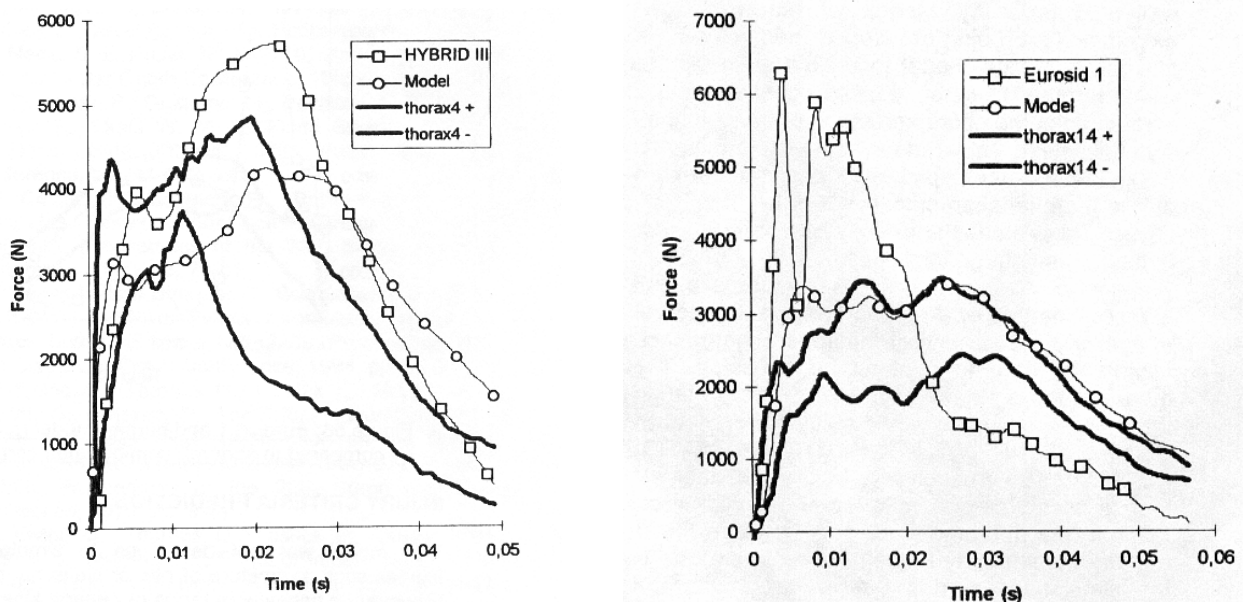


Figure 54

A gauche : comparaison entre la réponse du modèle « être humain » et la réponse d'un mannequin Hybrid III en choc frontal

A droite : comparaison entre la réponse du modèle « être humain » et la réponse d'un mannequin Eurosid 1 en choc latéral

Les traits en gras définissent les corridors expérimentaux

La prochaine génération de modèle demandera un travail important car nous en attendons une prédiction lésionnelle directe globale mais aussi locale. Pour réaliser cela, le modèle doit être amélioré. Par exemple, si la modélisation des côtes permet une bonne reproduction des déplacements observés lors de tests sur cadavres, les éléments plaques ne sont pas adaptés à une prédiction réaliste des contraintes et des déformations de la structure osseuse de la cage thoracique.

Comme décrit durant l'introduction, le modèle de rachis thoracique et lombaire qui doit être créé durant cette thèse a pour vocation d'être intégré au sein du modèle être humain. Or, des travaux précédents menés par Dauvilliers [DAU-7] et Bertholon [BERT-2], ont visé à améliorer le rachis cervical du modèle « être humain ». Avant ces travaux les vertèbres cervicales étaient modélisées par des cubes et le complexe ligamentaire n'était pas représenté. Ce modèle de cou avait la même allure que le modèle de la colonne thoracique et lombaire du modèle « être humain » (figure 55).

Le nouveau modèle de rachis cervical est montré sur la figure 56.

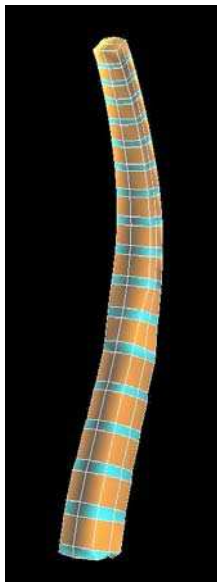


Figure 55 : colonne thoracique et lombaire du modèle « être humain »

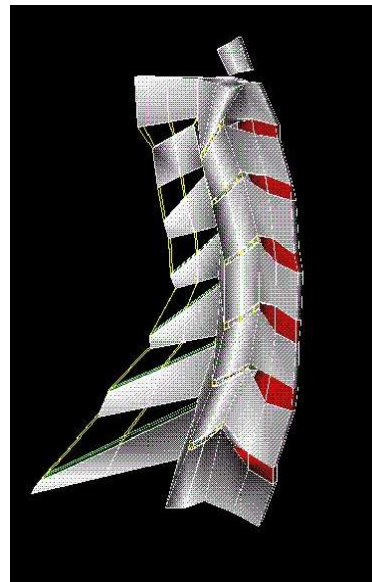


Figure 56 : rachis cervical amélioré

Nous avons choisi de nous en inspirer de façon à ce que le modèle qui doit être réalisé au cours de cette thèse soit homogène avec l'existant et puisse être intégré sans contrainte dans le modèle global.

Les caractéristiques du modèle cervical sont les suivantes :

	Vertèbres	Disque inter-vertébral	Ligaments	Facettes articulaires
Modélisation	Corps rigides	4 éléments brique à loi viscoélastique	Modélisation des ligaments capsulaires, jaune et épineux	Eléments contacts
			Eléments ressorts à comportement viscoélastiques non linéaires	

Ce modèle cervical a été validé en statique suivant des sollicitations de flexion, d'inflexion et de torsion ainsi qu'en choc arrière et latéral.

1- Comportement de la colonne vertébrale

Cette recherche bibliographique nous a apporté des informations importantes pour la suite du projet. Tout d'abord, la connaissance des variations géométriques des disques intervertébraux et des inclinaisons vertébrales nous sera utile pour le modèle du rachis thoracique et lombaire. En effet, afin d'être cohérent avec des études expérimentales utilisées lors de la validation de ce modèle, nous avons modifié les courbures du rachis initialement en position assise pour l'amener en position debout. (cf. première validation statique)

Ensuite, les études sur les axes instantanés de segments rachidiens fournissent une référence que nous utiliserons lors des travaux expérimentaux. En effet, nous avons été amenés à mesurer, lors des essais, les axes de rotation de chacun des spécimens utilisés (cf. cahier des charges du banc d'essais).

Enfin, la recherche de moyens d'essais en dynamique nous a permis de connaître un certain nombre de systèmes utilisés pour solliciter un segment en dynamique. A l'issue de cette étude nous nous sommes aperçus que peu d'auteurs atteignaient les niveaux de vitesses que nous rencontrons en crash. Ces vitesses sont de l'ordre de 1000 degrés/seconde pour un mouvement de rotation entre deux vertèbres adjacentes et 1 mètre/seconde pour un mouvement de translation. Quelques auteurs présentaient néanmoins des systèmes expérimentaux originaux mais difficilement modélisables.

Hakim, en 1976, a étudié les efforts supportés par les facettes articulaires lors de charges axiales. Il a développé pour cela un capteur d'effort placé au niveau du corps vertébral. Ce montage n'est pas adapté à nos besoins pour deux raisons principales. Tout d'abord, le système d'application des charges est de type hydraulique asservi ce qui nécessite un budget important, ensuite, nous souhaitons mesurer les efforts et les moments dans les 3 directions de l'espace ce qui amène à redimensionner ce capteur monoaxe, le rendant trop encombrant.

Nightingale, en 1991, a testé l'influence des conditions aux limites sur des rachis cervicaux soumis à des vitesses de déplacements verticales de plusieurs cm/sec. Ce montage est intéressant car il permet de tester des spécimens dans plusieurs configurations. De plus, ce montage est adaptable à des niveaux thoraciques ou lombaires mais les vitesses de sollicitations restent trop faibles.

Osvelder et Neumann, en 1993, ont étudié la réponse dynamique de segments lombaires soumis à des rotations de flexion. Les valeurs d'efforts et de moments fournis par cette étude nous serviront par la suite dans le dimensionnement du banc d'essais et des systèmes de mesures. Ces auteurs utilisent des vitesses de sollicitations proche de celles trouvées pour des crash. Cependant, le protocole expérimental est lésionnel et on ne peut donc pas tester un spécimen plusieurs fois d'affilée pour quantifier les influences ligamentaires. De plus, la modélisation de ce type d'essai est délicate pour deux raisons. Tout d'abord, le mouvement de la vertèbre supérieure n'est pas imposé et ensuite un padding est utilisé entre le pendule et le spécimen ce qui rajoute des inconnues (le comportement de ce type de matériau amortissant est rarement connu avec précision).

Ogon, en 1997, a étudié les instabilités du rachis à l'aide d'un système de câble et de poulie. Ce type de montage pose cependant des problèmes vibratoires lors de la mise en charge des câbles. Un doute subsiste sur les résultats fournis par cet auteur au niveau des vitesses de rotation. En effet, si l'on regarde le graphe A de la figure 35, le segment effectue une rotation de 14 degrés en 0.25 secondes environs, ce qui donne une vitesse de rotation moyenne de 60 degrés/seconde. Or si l'on regarde la courbe donnant directement la vitesse angulaire, l'auteur donne un maximum

de 120 rad/sec soit environ 7000 degrés/seconde. Cette vitesse étant peu réaliste avec ce type de montage, nous considérons que la vitesse atteinte est de l'ordre de 60 degrés /seconde.

Rostedt, en 1998, a étudié la rigidité axiale de segments lombaires soumis à des efforts impulsionsnels imposés dans l'axe vertical du segment. Ce protocole est difficilement adaptable à des mouvements de rotations (flexion, inflexion, torsion) et la modélisation des essais est délicate pour les raisons décrites au niveau des études d'Osvolder et Neumann.

Demetropoulos, en 1998, a comparé les propriétés mécaniques de colonne lombaires de mannequins et de colonne lombaire humaine à des vitesses de 0.1 m/sec. Ce protocole est intéressant car il permet de tester un rachis dans différentes configurations mais les sollicitations appliquées sont combinées (flexion + compression par exemple), or nous souhaitons tester des segments de façon pure afin de faciliter l'interprétation des résultats. De plus, ces sollicitations sont appliquées par l'intermédiaire d'un système hydraulique asservi qui est coûteux.

Enfin, les essais qui ont servi à valider le thorax du modèle « être humain » atteignent des niveaux de sollicitations rencontrés en choc automobile. Ces essais ont consisté à impacter la cage thoracique de cadavres entiers à l'aide d'une masse de façon frontale, oblique et latérale. Ces protocoles ne sont pas adaptables à nos essais car nous cherchons à faire des tests sur des segments vertébraux isolés.

L'apport de la bibliographie est donc considérable mais ne répond pas à nos besoins.

2- Modélisation de la colonne vertébrale

Cet axe de recherche basé sur les modèles de rachis validés en dynamique nous a permis de retenir un certain nombre d'articles dont ceux de *Hakim* et *Natali* qui ont réalisé des modèles détaillés de vertèbres lombaires et de disques intervertébraux. Cependant une modélisation aussi fine de ces éléments n'est pas adaptée à un modèle complet de colonne vertébrale pour des raisons de nombre total d'éléments et donc de temps de simulation trop important. Nous pouvons faire la même remarque au sujet du modèle développé par *Goel* définissant un segment L4-S1 accompagné de tous ses ligaments vertébraux.

A la différence de ces auteurs, *Tadano* a publié en 1997 un modèle théorique du disque intervertébral. L'intérêt de ce travail vient des lois de comportement spécialement définies dans cette étude et qui permettent de reproduire fidèlement le comportement expérimental du disque intervertébral en flexion, extension, torsion et compression. Malheureusement, nous ne pouvons pas intégrer directement ces lois de comportement au sein du logiciel de simulation que nous utiliserons (Radioss) étant donné que nous devons choisir des lois présentes au sein d'une bibliothèque du code de calcul.

Contrairement à ces auteurs qui ont travaillé sur des éléments du rachis, *Plank* a développé en 1991 un modèle complet de cage thoracique et de colonne thoracique et lombaire intégrant les tissus mous associés. Cette étude est une des seules réalisées dans l'optique d'une validation en crash. Cependant le niveau de définition de la colonne vertébrale est trop faible pour pouvoir s'en inspirer. En effet, les vertèbres sont modélisées par des cubes et les ligaments n'apparaissent pas dans ce modèle.

Enfin, le travail le plus abouti est certainement la modélisation de l'être humain réalisée par le LAB, le LBM, le CEESAR et l'INRETS. Ce modèle représente un être humain entier qui comporte tous les éléments anatomiques d'un individu, comme la structure osseuse, musculaire et viscérale. Le rachis cervical de ce modèle a été amélioré au cours de travaux précédents et la géométrie des vertèbres a été retravaillée ainsi que le complexe ligamentaire. Etant donné que le modèle de colonne thoracique et lombaire réalisé au cours de cette thèse a pour vocation d'être intégré dans le modèle entier d'être humain, nous nous sommes inspirés de ce modèle de rachis cervical afin d'assurer la compatibilité du modèle à venir avec l'existant.

CHAPITRE II
CARACTERISATION
EXPERIMENTALE DE LA
REPONSE STATIQUE ET
DYNAMIQUE DE SEGMENTS
VERTEBRAUX

I- OBJECTIFS ET RESUME

Comme annoncé dans l'introduction générale, le but de ce projet est de réaliser un modèle de rachis thoracique et lombaire utilisable dans des conditions de crash. Il faut donc, d'une part, créer ce modèle et d'autre part, disposer d'une base de données expérimentales dynamiques afin de valider ce modèle. Cette partie porte sur les expérimentations nécessaires à la validation.

Si la littérature nous fournit une quantité importante de résultats statiques, il n'en est pas de même pour ce qui concerne le domaine dynamique, constatation faite lors de l'étude bibliographique. Nous avons donc été amenés à réaliser nos propres expérimentations.

Tout d'abord, il faut avoir une idée des mouvements entre les vertèbres de la colonne vertébrale lors d'un choc automobile. Ceci a fait l'objet de la partie « exploitation du modèle être humain en vue du dimensionnement ». Ce modèle numérique complet d'être humain a été utilisé lors de simulations de chocs automobiles frontaux et latéraux, d'où nous avons retiré des valeurs de déplacements relatifs entre vertèbres ce qui nous a servi à dimensionner le futur banc d'essais. Une comparaison succincte a été faite avec l'étude d'Osvolder [OSV-38] mentionnée dans la bibliographie. Enfin, nous avons utilisé les valeurs d'efforts et de moments disponibles dans la littérature, notamment l'étude d'Osvolder et Neumann, pour le dimensionnement du montage et des moyens de mesure.

A l'aide de ces données, nous avons pu réaliser le banc d'essais dynamique servant à tester des segments rachidiens (banc n°1). Les pièces sont expérimentées en flexion, inflexion et torsion. La réalisation de ce montage est détaillée dans la partie « banc d'essai dynamique ».

Lors des tests dynamiques, nous avons aussi cherché à connaître l'influence des ligaments dans le mouvement du rachis et nous avons effectué plusieurs essais à la suite en sectionnant successivement ces ligaments. Les détails sont données dans la partie « essais ».

Etant donné que le cahier des charges impose des essais mettant en œuvre des sollicitations aussi pures que possible, nous avons fait un second banc d'essais (banc n°2) pour déterminer les lieux des axes de rotation (vertèbre supérieure par rapport à vertèbre inférieure) d'un segment vertébral en flexion, inflexion et torsion. Ceci a fait l'objet de la partie intitulée « mesure des axes instantanés de rotations ». Ainsi, en alignant l'axe moteur du montage dynamique avec l'axe propre de rotation d'un spécimen donné, la sollicitation appliquée au spécimen sera pure.

A noter que le montage permettant de connaître les axes de rotations sollicite la pièce à faibles vitesses. Ces sollicitations sont appliquées par un opérateur à l'aide d'une poignée.

Le déroulement de l'essai est le suivant :

1. Choix de l'essai (segment lombaire, thoracique ou thoraco-lombaire en flexion, inflexion ou torsion).
2. Détermination de l'axe de rotation propre du spécimen en essai statique (banc n°2).
3. Alignement de l'axe de rotation moyen du segment avec l'axe moteur du banc n°1.
4. Limitation de l'amplitude de test pour ne pas léser involontairement le spécimen.
5. Application du choc.
6. Analyse lésionnelle du segment.
7. Section d'un ligament.
8. Retour à l'étape 5.

Enfin, les résultats sont donnés pour chaque sollicitation (flexion, inflexion et torsion) dans les parties intitulées « résultats du mode de ... ». Chacune de ces parties est divisée en deux. Un premier paragraphe donne les résultats des essais avec le banc d'essai statique (banc n°2), le second paragraphe porte sur les résultats obtenus avec le banc d'essai dynamique (banc n°1).

1- Exploitation du modèle être humain en vue du dimensionnement

Vu la nécessité de connaître les ordres de grandeurs des mouvements relatifs entre deux vertèbres adjacentes, deux simulations ont été réalisées avec le modèle être humain [LIZ-26]. La première représente un choc frontal en place avant avec ceinture trois points et prétensionneur (vitesse d'impact de 50 km/h) et la seconde un choc latéral sans ceinture trois points mais avec un airbag latéral. Nous avons aussi retiré des valeurs d'efforts et de moments transitant par les vertèbres, ces valeurs sont données à titre indicatif et n'ont pas été utilisées lors du dimensionnement à la charge (efforts et moments) des moyens d'essais. Nous avons utilisé pour cela des valeurs issues de la littérature.

Nous pouvons nous poser la question suivante : Est-ce que les résultats fournis par le modèle « être humain » sont fiables ?

A priori, cela n'est pas le cas pour les efforts et des moments locaux. En effet, si le torseur mécanique d'une section du tronc du modèle être humain [LIZ-26] est réaliste vis à vis des expérimentations, il n'en est pas de même des torseurs des sous-ensembles constituant cette section. En effet, la répartition des efforts encaissés par chacun des « organes » du modèle n'a pas été validée.

Pour ce qui est des trajectoires, le modèle a été validé de façon globale et locale (abdomen, thorax, ceinture scapulaire...). Il semble donc légitime d'utiliser ce modèle pour en retirer ce type de données. Par ailleurs, ce genre d'information n'étant pas disponible dans la littérature, ce modèle était le seul moyen d'avoir ces informations.

Les graphiques suivants concernent l'unité T7-T8.

A. Choc frontal : efforts et moments

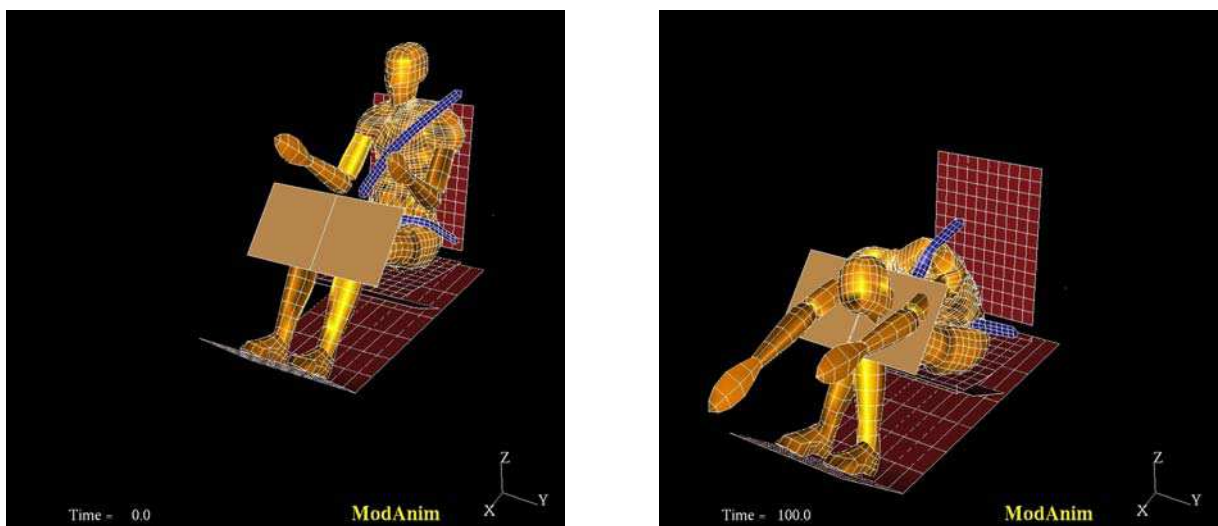


Figure 57 : simulation du modèle « être humain » en choc frontal

Pour connaître les valeurs des efforts au centre de chaque vertèbre, nous avons coupé chaque vertèbre et placé un ressort généralisé de raideur importante joignant les deux parties. Ce sont les efforts et les moments fournis par ce ressort qui sont donnés. Ces valeurs sont données dans le repère local associé à chaque vertèbre.

Le tableau suivant donne les efforts et moments relatifs maximaux (en valeur absolue) obtenus à partir de la simulation du modèle être humain pour le choc frontal. Les efforts sont en N et les moments sont en N.m. L'indice (t) signifie traction, l'indice (c) signifie compression, l'indice (inf d) signifie inflexion droite, l'indice (fle) signifie flexion, l'indice (ext) signifie extension et l'indice (tor g) signifie torsion gauche.

Tableau 19

Etage	Efforts dans la vertèbre (repère local face supérieure)			Moments dans la vertèbre (repère local face supérieure)		
	F _x	F _y	F _z	θ_x	θ_y	θ_z
T3	400 (t)	190 (c)	1000 (t)	2 (inf d)	10 (fle)	18 (tor g)
T5	150 (t)	100 (t)	800 (c)	0.9 (inf d)	3 (fle)	15 (tor g)
T7	490(t)	200 (t)	1200 (c)	1 (inf d)	3 (ext)	8 (tor g)
T9	250(t)	200 (c)	1200 (c)	0.5 (inf d)	7.5 (ext)	6.5 (tor g)
T11	400(c)	250 (t)	1600 (c)	14 (inf g)	20 (ext)	2 (tor g)
L1	500(c)	210 (t)	1700 (c)	3 (inf d)	13 (fle)	2 (tor g)
L3	400(c)	50 (t)	2000 (c)	5 (inf d)	36 (fle)	2.5 (tor g)
L5	500(c)	200 (c)	2000 (t)	5 (inf d)	47 (fle)	2.3 (tor g)

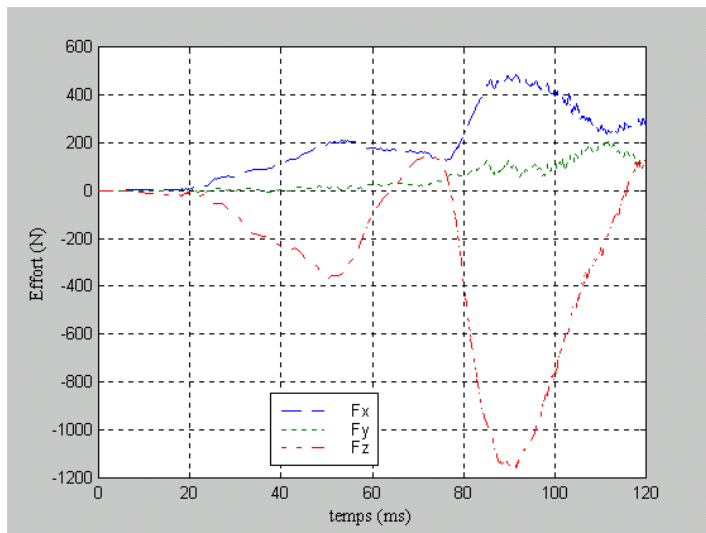


Figure 58 : efforts dans T7

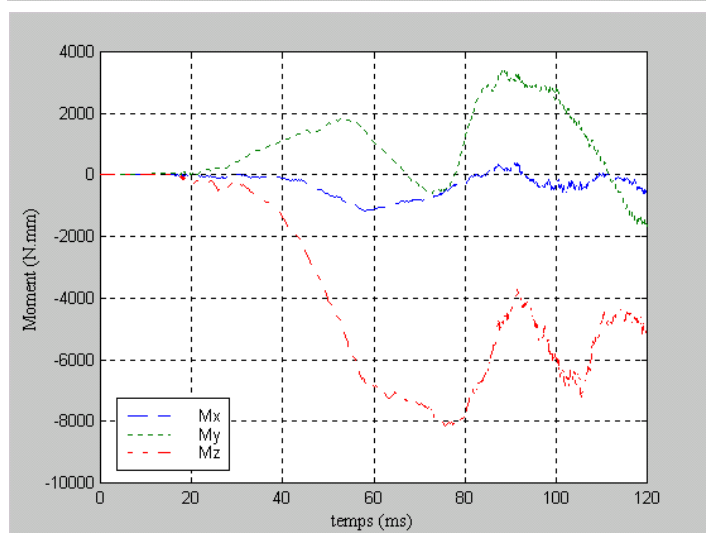


Figure 59 : moments dans T7

B. Choc frontal : déplacements, vitesses et accélérations

Ce tableau résume les déplacements relatifs **maximaux** en valeur absolue obtenus à partir de la simulation du modèle être humain [LIZ-26]. Le repère d'interprétation est le suivant :

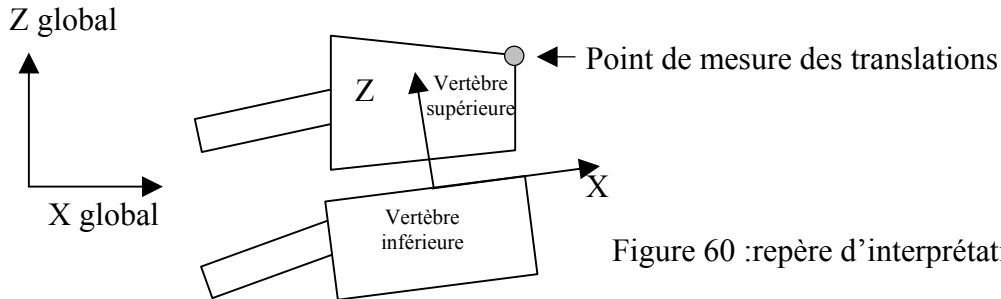


Figure 60 :repère d'interprétation

Tableau 20

	Rotation autour de X	Rotation autour de Y	Rotation autour de Z	Translation suivant X	Translation suivant Y	Translation suivant Z
T1-T2	2°	11°	5°	0.5mm	0.5mm	3mm
T2-T3	1°	5°	4°	1.1mm	0.5mm	1.5mm
T3-T4	0.5°	2°	5°	0.7mm	0.7mm	1.1mm
T4-T5	0.2°	1.5°	3°	0.7mm	0.5mm	0.7mm
T5-T6	0.1°	1.5°	3°	0.7mm	0.5mm	1mm
T6-T7	0.1°	1°	2°	1mm	0.4mm	0.8mm
T7-T8	0.2°	2°	2.5°	1mm	0.5mm	1.5mm
T8-T9	0.1°	2.5°	1.5°	1mm	0.4mm	1.5mm
T9-T10	0.3°	2.5°	1.5°	0.7mm	0.6mm	1.6mm
T10-T11	5°	15°	5°	6.1mm	2mm	3.5mm
T11-T12	4°	11°	4°	4mm	1.5mm	2.5mm
T12-L1	1°	4.5°	2°	3.5mm	0.5mm	1.5mm
L1-L2	0.5°	7°	0.8°	5mm	0.2mm	2mm
L2-L3	1°	11.5°	2°	7mm	0.5mm	4mm
L3-L4	1°	16°	2.5°	8mm	1mm	5.5mm
L4-L5	1°	16°	2°	8mm	1mm	5mm

Concernant les vitesses :

La vitesse angulaire ne dépasse pas 1 °/ms

La vitesse linéaire ne dépasse pas 0.6 mm/ms = 0.6m/s

Concernant les accélérations :

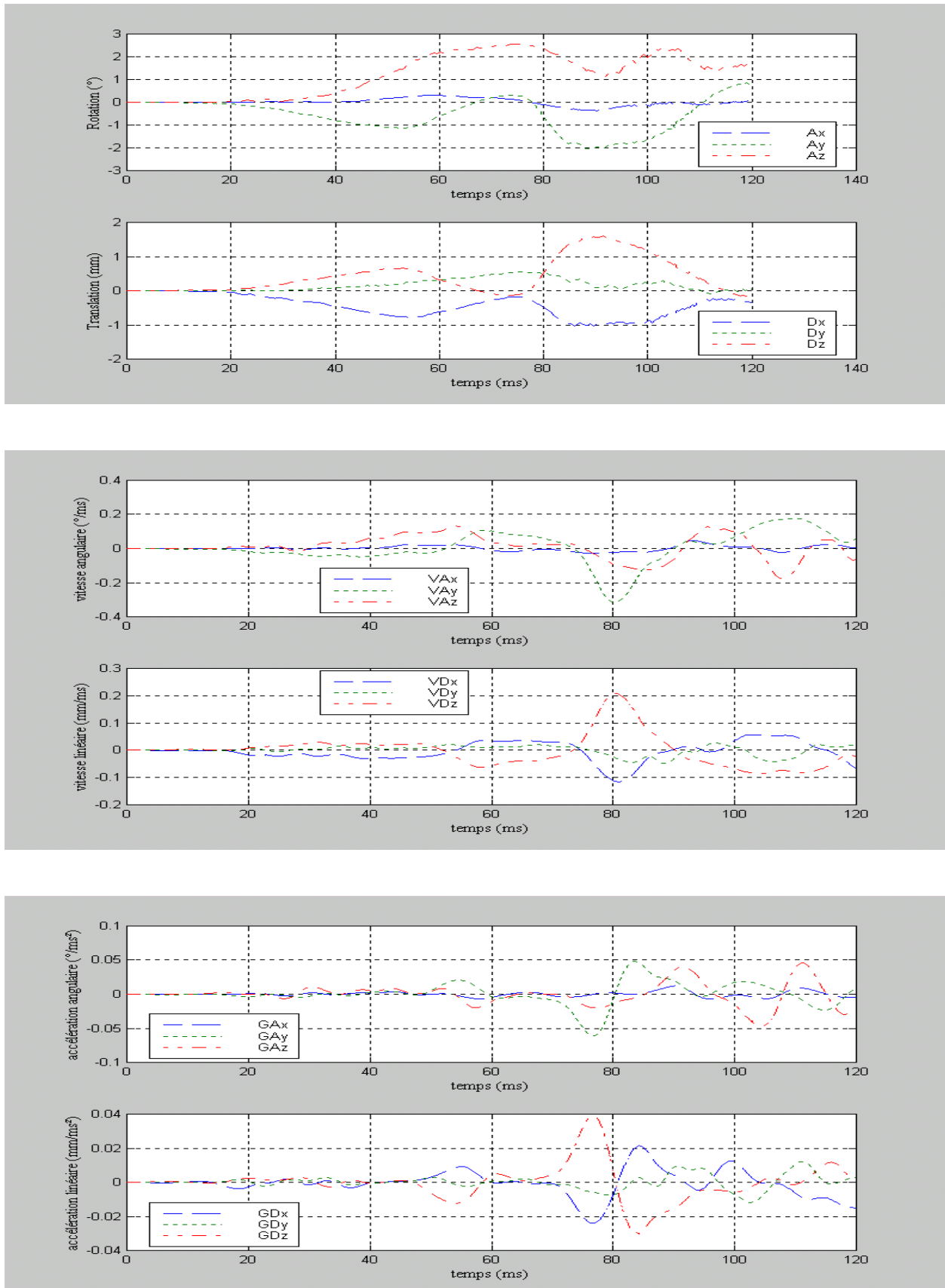
L'accélération angulaire ne dépasse pas 0.1 °/ms²

L'accélération linéaire ne dépasse pas 0.1 mm/ms² = 10 g

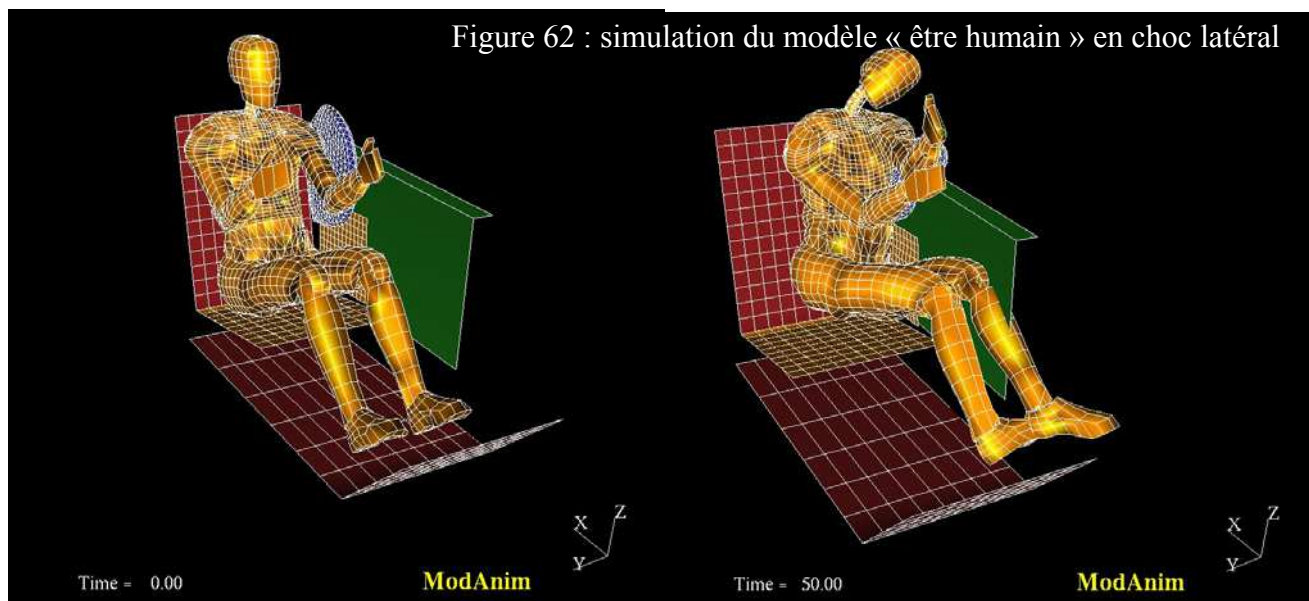
Nous constatons une importante amplitude des mouvements de T10-T11 et T11-T12 et ce pour deux raisons: la première porte sur l'absence d'insertions musculaires à ce niveau. En effet, la région thoracique est rigidifiée par les côtes et la région lombaire est rigidifiée, entre autres, par les muscles psoas et carré des lombes (ici leur modélisation). La deuxième raison porte sur le mode de retenue du modèle (ceinture 3 points) qui plaque les épaules et le bassin au siège, ce qui laisse la zone de T10 à T12 relativement libre.

Les graphiques de la figure 61 donnent les déplacements (indice D), les vitesses (indice V) et les accélérations (indice G) angulaires et linéaires de T7 par rapport à T8 dans le repère local de T8.

Figure 61 : cinématique de la vertèbre T7 en choc frontal



C. Choc latéral : efforts et moments



Le tableau 21 donne les efforts et moments relatifs maximums (en valeur absolue) obtenus à partir de la simulation du modèle être humain [LIZ-26] pour le choc latéral. Les efforts sont en N et les moments sont en N.m.

Tableau 21

Etage	Efforts dans la vertèbre (repère local face supérieure)			Moments dans la vertèbre (repère local face supérieure)		
	F _x	F _y	F _z	θ_x	θ_y	θ_z
T3	150 (t)	350 (t)	110 (c)	1.8 (inf g)	1.2 (fle)	2.5 (tor g)
T5	150 (t)	150 (t)	340 (c)	0.5 (inf g)	1.5 (ext)	3.5 (tor g)
T7	100(t)	140 (c)	600 (c)	0.8 (inf g)	2.5 (ext)	6.5 (tor d)
T9	110(c)	210 (c)	850 (c)	0.1 (inf g)	5 (ext)	8 (tor d)
T11	100(c)	190 (t)	1400 (c)	16 (inf d)	2 (fle)	1.8 (tor g)
L1	100 (t)	100 (c)	1300 (c)	12 (inf d)	4 (fle)	2 (tor d)
L3	100(t)	300 (c)	1300 (c)	9 (inf d)	11 (fle)	2 (tor d)
L5	350(t)	800 (c)	1200 (c)	30 (inf g)	10 (ext)	3 (tor d)

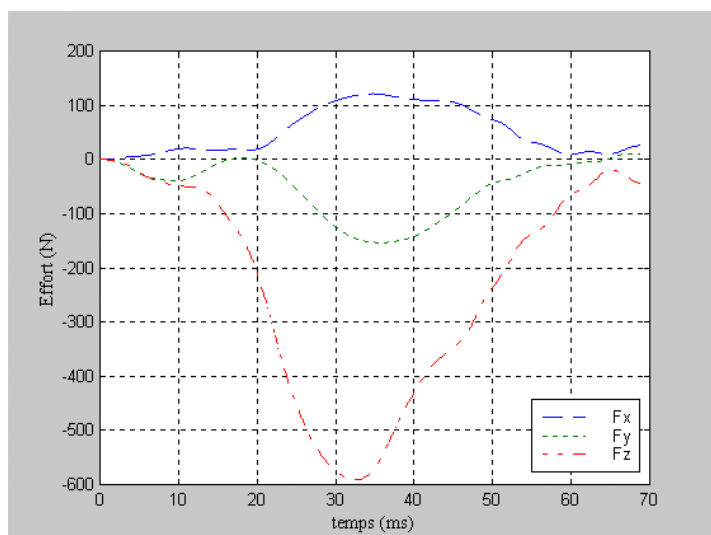


Figure 63: efforts dans T7

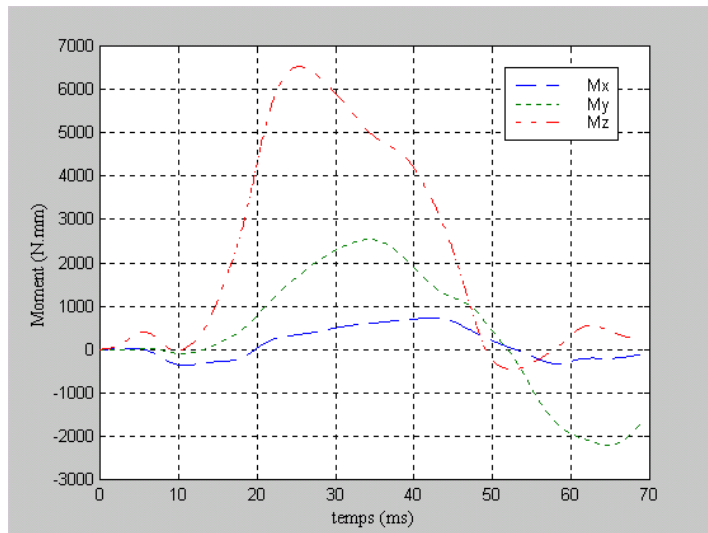


Figure 64: moments dans T7

D. Choc latéral : déplacements, vitesses et accélérations

Ce tableau (tableau 22) résume les déplacements relatifs **maximaux** en valeur absolue obtenus à partir de la simulation du modèle être humain. Le repère d'interprétation est le même que pour le choc frontal.

Tableau 22

	Rotation autour de X	Rotation autour de Y	Rotation autour de Z	Translation suivant X	Translation suivant Y	Translation suivant Z
T1-T2	2°	1°	2°	0.4mm	0.8mm	0.3mm
T2-T3	0.4°	0.5°	1.1°	0.3mm	0.4mm	0.2mm
T3-T4	0.4°	0.8°	0.5°	0.4mm	0.3mm	0.3mm
T4-T5	0.2°	1°	0.5°	0.4mm	0.2mm	0.4mm
T5-T6	0.2°	1.1°	0.8°	0.5mm	0.2mm	0.5mm
T6-T7	0.2°	1°	1°	0.5mm	0.3mm	0.5mm
T7-T8	0.4°	2°	2°	1mm	0.4mm	1mm
T8-T9	0.2°	2.5°	1.1°	1mm	0.3mm	1.2mm
T9-T10	0.1°	2.8°	1°	1mm	0.3mm	1.5mm
T10-T11	4.5°	2°	3°	0.9mm	1mm	0.5mm
T11-T12	5°	2°	2°	1mm	1.5mm	1mm
T12-L1	3°	2°	2°	1mm	2mm	1mm
L1-L2	3°	2°	2.2°	1.5mm	1.8mm	0.5mm
L2-L3	2°	3°	2°	2mm	1.5mm	0.5mm
L3-L4	1.8°	4°	2°	1.5mm	1.8mm	0.5mm
L4-L5	3°	1°	1.2°	2mm	3.5mm	0.5mm

Concernant les vitesses :

La vitesse angulaire ne dépasse pas 0.4 °/ms

La vitesse linéaire ne dépasse pas 0.4 mm/ms = 0.4m/s

Concernant les accélérations :

L'accélération angulaire ne dépasse pas 0.1 °/ms²

L'accélération linéaire ne dépasse pas 0.1 mm/ms² = 10 g

E. Comparaison avec l'étude d'Osvolder

Rappel de l'étude : essai en flexion d'une unité fonctionnelle lombaire en dynamique afin de simuler le comportement de la colonne lombaire en choc automobile. Le conducteur est retenu au siège par une ceinture ventrale 2 points.

Cette étude est la seule qui fournit des résultats expérimentaux proches de ce que l'on trouve lors d'accidents de la route. Les conditions aux limites étant très différentes, nous ne pouvons les comparer de façon stricte. Ces différences s'expriment au niveau de l'amplitude de la sollicitation (entre 5 et 12 g pour Osvolder [OSV-38] et environ 5 g pour le modèle être humain [LIZ-26]), du mode de sollicitation (flexion - cisaillement pour Osvolder [OSV-38] et sollicitation combinée pour le modèle être humain [LIZ-26]), des conditions en déplacements (vertèbre inférieure fixée pour Osvolder [OSV-38] et libre sur le modèle être humain [LIZ-26]) et de la sévérité de la sollicitation (lésions observées sur les spécimens d'Osvolder [OSV-38] et aspect lésionnel inconnu pour le modèle être humain [LIZ-26]).

Osvolder ayant mêlé les résultats de L1-L2 et L3-L4, les résultats du modèle être humain sont encadrés par des valeurs englobant ces deux unités.

Tableau 23 : comparaison qualitative entre l'étude d'Osvolder et le modèle « être humain »		
	OSVALDER	MODELE ETRE HUMAIN
Angle de flexion	11°-21°	8°-15°
Déplacement horizontal (cisaillement)	5mm-10mm (centre de la vertèbre)	4mm-8mm (point B, figure 29)
Moment de flexion	120N.m-215N.m	15N.m-40N.m
Vitesse relative entre deux vertèbres (translation antéro postérieure)	~1.6m/s	~0.6m/s
Effort de cisaillement	385N-715N	400N-500N

On remarque expérimentalement que les caractéristiques viscoélastiques du disque permettent d'atteindre des valeurs de moment de plus de 200 N.m. Ces valeurs sont très supérieures à ce que l'on peut atteindre en sollicitation statique où des lésions sont observées à partir de 30 N.m environ pour un couple et de 3000 N pour un effort.

A priori, les vitesses utilisées par Osvolder [OSV-38] sont trop importantes. Cependant, une ceinture deux points laissant une amplitude de mobilité de la colonne lombaire plus importante qu'une ceinture trois points, ces choix de valeurs de vitesses se justifient.

Les efforts et les moments indiqués par le modèle sous estime un peu la réalité, de même pour les mouvements de la vertèbre supérieure. Cette imprécision s'explique par la modélisation de la colonne vertébrale de l'être humain qui ne reflète pas la réalité.

2- Cahier des charges du banc d'essais à réaliser

A. Aspect préliminaire

A partir des résultats obtenus par le modèle « être humain » [LIZ-26], nous sommes en mesure de définir des seuils de vitesses, d'accélération et de déplacements d'un segment vertébral lors d'un choc automobile et donc de formuler un besoin.

Le cahier des charges qui suit revêt un aspect théorique qui représente l'expression globale de notre besoin.

✓ Vitesses de rotation à atteindre

Les simulations sur le modèle « être humain » nous donne le résultat suivant :

Vitesse entre deux vertèbres adjacentes = $1^\circ/\text{ms} = 1000^\circ/\text{sec} = 17.5 \text{ rad/sec}$

Nous ne pouvons pas étudier de façon approfondie la cinétique d'une portion de rachis car la liaison cinématique entre deux vertèbres n'est pas définie. En effet, ce n'est ni une liaison pivot, ni une liaison rotule...elle s'apparente à une liaison libre avec du frottement. Nous supposons que la vitesse entre la vertèbre supérieure et la vertèbre inférieure dans un segment de trois vertèbres est égale à $2^\circ/\text{ms}$ ($= 2000^\circ/\text{sec} = 34.9 \text{ rad/sec}$).

Cette vitesse de rotation doit être atteinte en quelques millisecondes.

Enfin, pour pouvoir modéliser les essais, les conditions aux limites doivent être maîtrisées. Le mouvement de la vertèbre supérieure devra donc être imposé.

✓ Modes de sollicitation

En vue du développement du dispositif expérimental, nous pouvons nous interroger (en observant les courbes de déplacements de la figure 61) sur la nature des sollicitations (pures ou combinées) à appliquer aux spécimens.

A priori, des sollicitations combinées correspondraient à un mode de sollicitation plus approprié si l'on veut se rapprocher des configurations de choc automobile. Cependant, notre étude sur le comportement dynamique des unités fonctionnelles porte sur un domaine très peu connu où les résultats expérimentaux sont peu nombreux. Il semblerait donc plus judicieux d'appliquer des sollicitations pures aux spécimens afin de connaître la réponse de la structure sous des chargements simples. En outre, ces expérimentations vont aussi servir à déterminer l'influence de chacun des composants de l'unité fonctionnelle. L'interprétation de ces résultats sera moins délicate si nous sollicitons le spécimen de façon pure tout en ayant des informations sur le rôle des tissus mous.

Par ailleurs, la modélisation de ces expérimentations est nécessaire pour valider le modèle « élément finis ». En effet, la reproduction de sollicitations combinées s'avère toujours plus délicate qu'une modélisation de sollicitations pures. Enfin, un projet (PREDIT « OSIRIS »), s'est déroulé en même temps que cette thèse et a étudié le comportement dynamique de pièces lombaires soumises à des sollicitations combinées. De façon à ne pas faire double emploi avec ce projet, nous n'avons pas utilisé de sollicitations combinées.

Dans un souci de simplicité et d'exhaustivité, nous avons choisi de solliciter le spécimen suivant trois modes principaux :

- ✓ Flexion pure
- ✓ Torsion pure
- ✓ Inflexion latérale pure

Par le terme « pure », nous entendons supprimer les effets d'efforts parasites comme la compression et le cisaillement.

- ✓ Type de segment à étudier.

Les segments testés seront issus de la région thoracique et de la région lombaire de la colonne vertébrale. Le choix s'est porté sur un ensemble de trois vertèbres et deux disques. Choisir un segment de deux vertèbres n'offrirait aucun résultat intéressant puisqu'une des deux vertèbres sera immobilisée et l'autre sera sollicitée par un mouvement imposé. Les résultats obtenus ne seront alors que le reflet de ce que nous avons appliqué.

Si nous choisissons des segments plus longs, des problèmes de stabilité dans le maintien du segment se posent. Ainsi, l'utilisation d'un segment de trois vertèbres nous permet d'avoir des mouvements physiologiques pour la vertèbre centrale tout en ayant un faible encombrement du spécimen. Cela nous permet donc de retirer des informations au niveau de la cinématique de la vertèbre centrale et des charges supportées par les segments au niveau de la vertèbre supérieure et inférieure.

- ✓ Divers

- De façon à pouvoir étudier la contribution des ligaments lors d'un mouvement de torsion, d'inflexion et de flexion, il faudra avoir accès facilement au spécimen pour pouvoir faire les sections ligamentaires appropriées.
- Les conditions aux limites doivent être maîtrisées afin d'assurer la modélisation ultérieure des essais.
- Le montage devra permettre un passage rapide entre les modes de sollicitation de flexion, d'inflexion et de torsion.

B. Schéma cinématique du montage

Figure 65 : configuration de flexion et d'inflexion

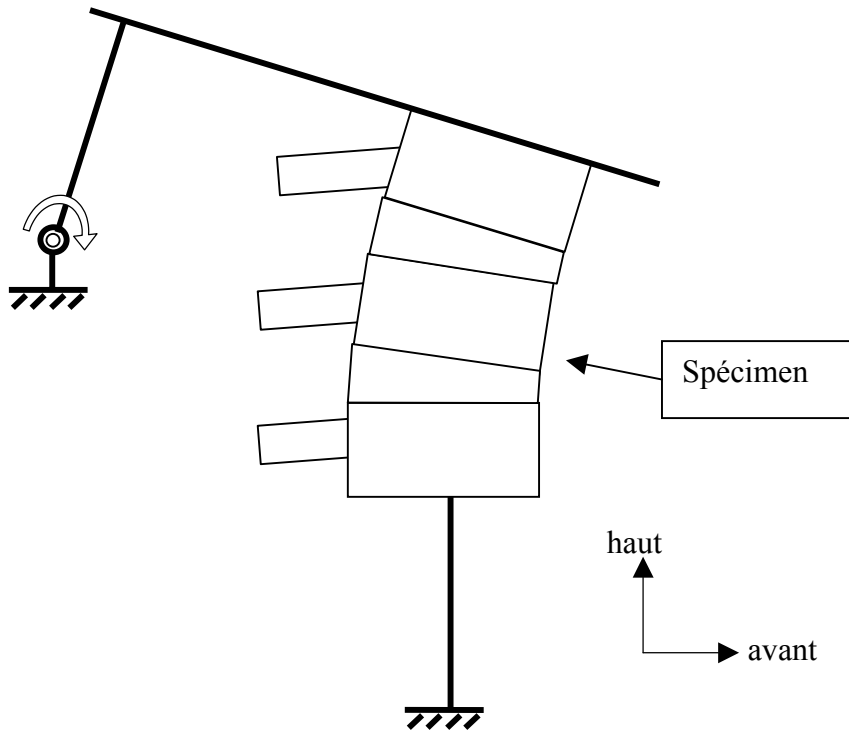
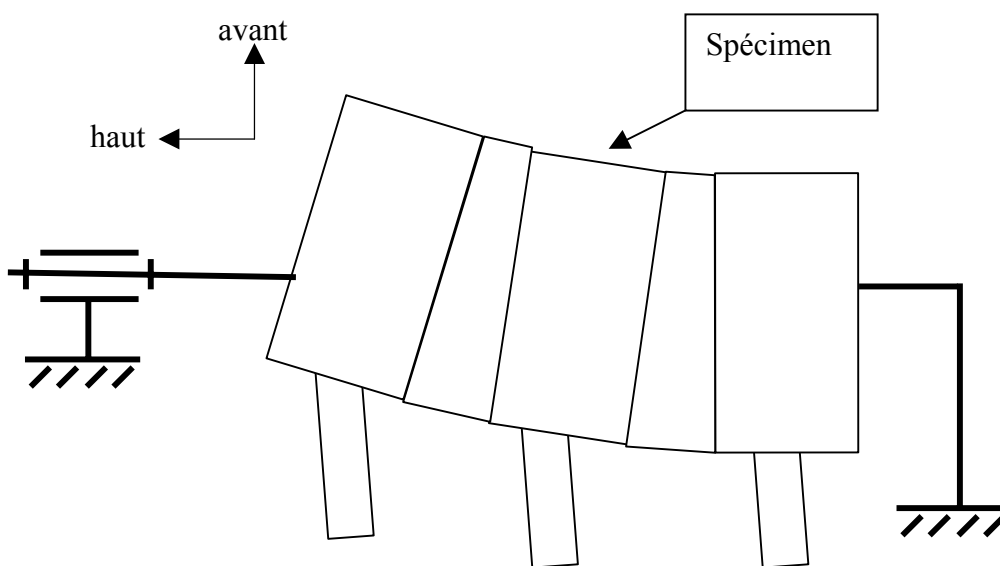


Figure 66 : configuration de torsion



1- Montage choisi

Vu le coût de mise en œuvre d'un système à efforts imposés ainsi que les difficultés techniques liées à l'asservissement, nous n'envisagerons que des montages à énergie imposée, à déplacements imposés ou à vitesses imposées.

Les critères permettant d'évaluer les montages seront les suivants :

- Quel types de sollicitations peuvent être appliquées ?
- Ces sollicitations peuvent-elles être pures ?
- Le montage a-t-il déjà été utilisé au LAB ou au LBM et est-il encore disponible ?
- Le montage permet-il une bonne gestion du système de mesure des déplacements ?
- Le montage permet-il une bonne gestion du système de mesure des efforts ?
- Est-ce que le montage pose des problèmes de précharge liés à la position du spécimen ?

De nombreux types de montages ont été proposés comme des montages avec chariot, avec impacteur ou encore avec puits de chute. Le cahier des charges exhaustif de ce banc d'essai ainsi que l'ensemble des propositions se trouvent en annexe.

Le montage qui a été retenu est le suivant :

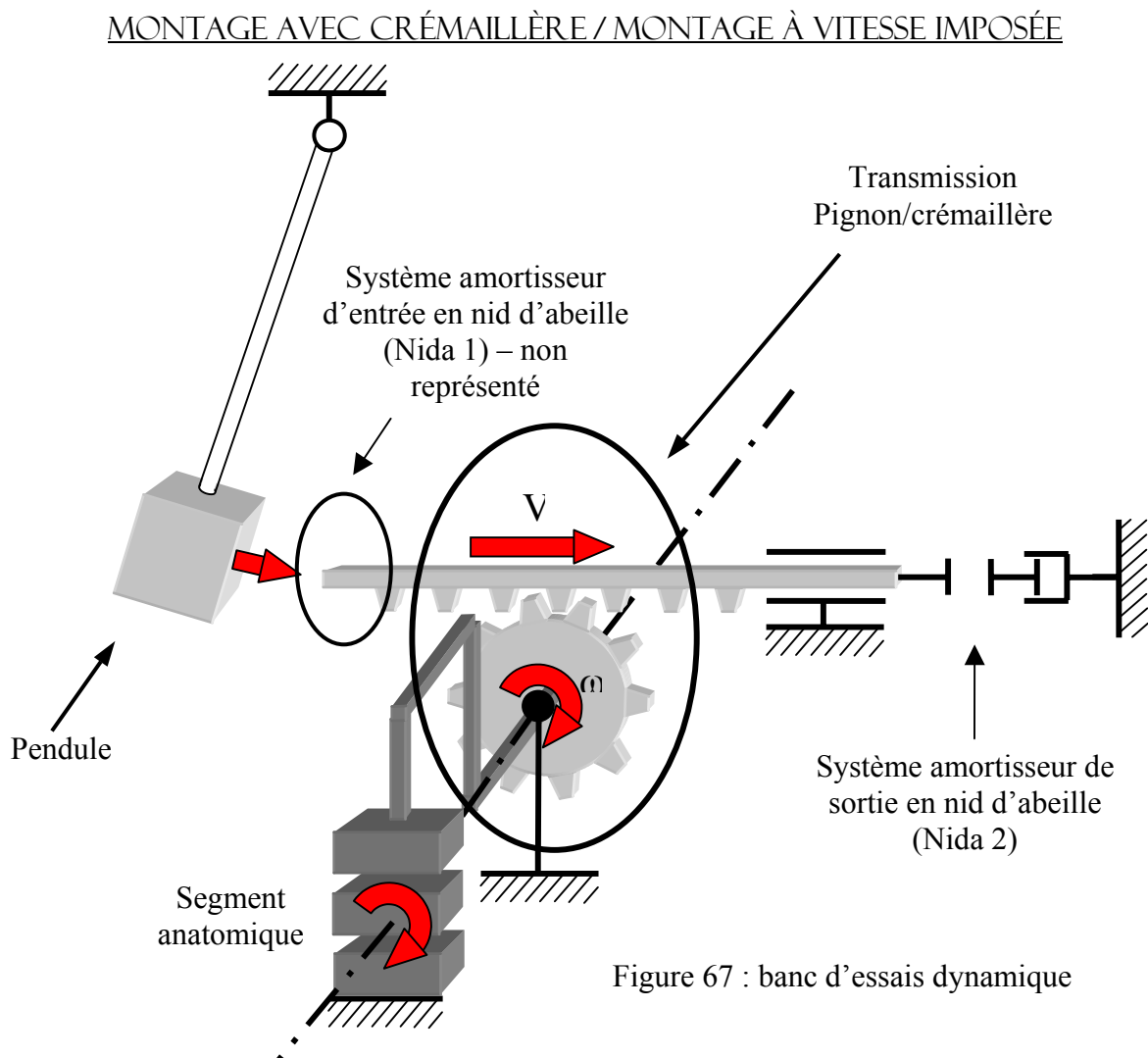
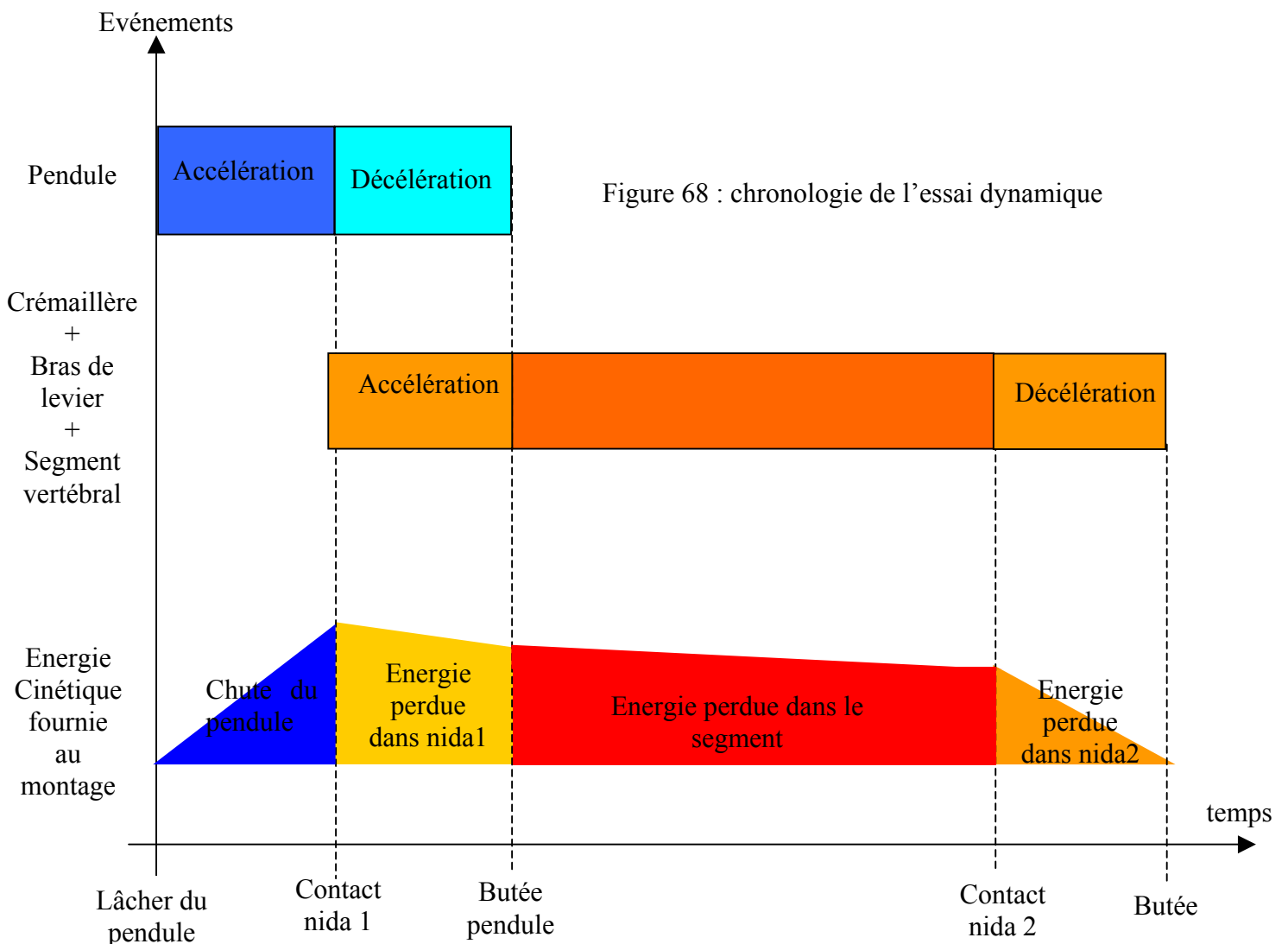


Tableau 24 : critères d'évaluations du montage

Types de sollicitations applicables	Flexion – Extension – Inflexion – Torsion
Sollicitations pures ?	Oui
Si l'on désire des sollicitations combinées, peut-on les gérer facilement ?	Oui
Montage disponible ?	Non
Gestion de la mesure des déplacements ?	Pas de problème particulier quel que soit le système (accélérométrique, mécanique ou optique)
Gestion de la mesure des efforts ?	Pas de problèmes particuliers
Problèmes liés à la précharge ?	Pas de problèmes particuliers
Vitesse limite	~ 4 m/s

Chronologie de l'essai :



D'autres raisons que celles énoncées plus haut ont motivé notre choix pour le montage à vitesse imposée.

- Avoir une vitesse maîtrisée permet de faciliter et de fiabiliser la modélisation ultérieure de ces essais.
- Avoir une vitesse connue et identique entre deux essais permet de faciliter l'interprétation et la comparaison des résultats. En effet, prenons un spécimen et faisons deux tests avec les mêmes conditions aux limites. Le premier se fait avec le spécimen sain et le second se fait après lésion d'un ligament. L'influence de ce ligament sera plus facilement évaluée si la sollicitation est la même en terme d'angle et de vitesse de rotation entre les deux essais.

2- Description globale du banc d'essais

Ce montage a été réalisé conjointement avec les membres d'un autre projet mené au LBM, qui porte sur les expérimentations dynamiques du rachis (Sylvie Plumet, Samuel Bertrand et Mercedes Irujo).

Pour étudier les différents modes de sollicitations, nous avons choisi d'imposer une vitesse à la vertèbre supérieure et de fixer la vertèbre inférieure au bâti. Ainsi, la vertèbre centrale est libre de suivre un mouvement physiologique.

La source d'énergie du système est donnée par la chute d'un pendule dont les caractéristiques sont sa longueur L , sa masse M et son angle initial α .

La transformation de mouvement de translation en rotation sera assurée par un système **pignon-crémaillère**. Le but de ce système est d'obtenir une vitesse de rotation angulaire qui soit maîtrisable.

A la sortie du pignon, nous fixerons un bras de levier qui appliquera une sollicitation en flexion, en extension, en inflexion ou en torsion, suivant son orientation et sa position par rapport au segment.

Nous avons défini la géométrie du banc d'essais sous le logiciel SolidWorks afin de visualiser l'encombrement de chaque module et de dessiner les plans de chaque pièce pour leur fabrication.

Configuration flexion :

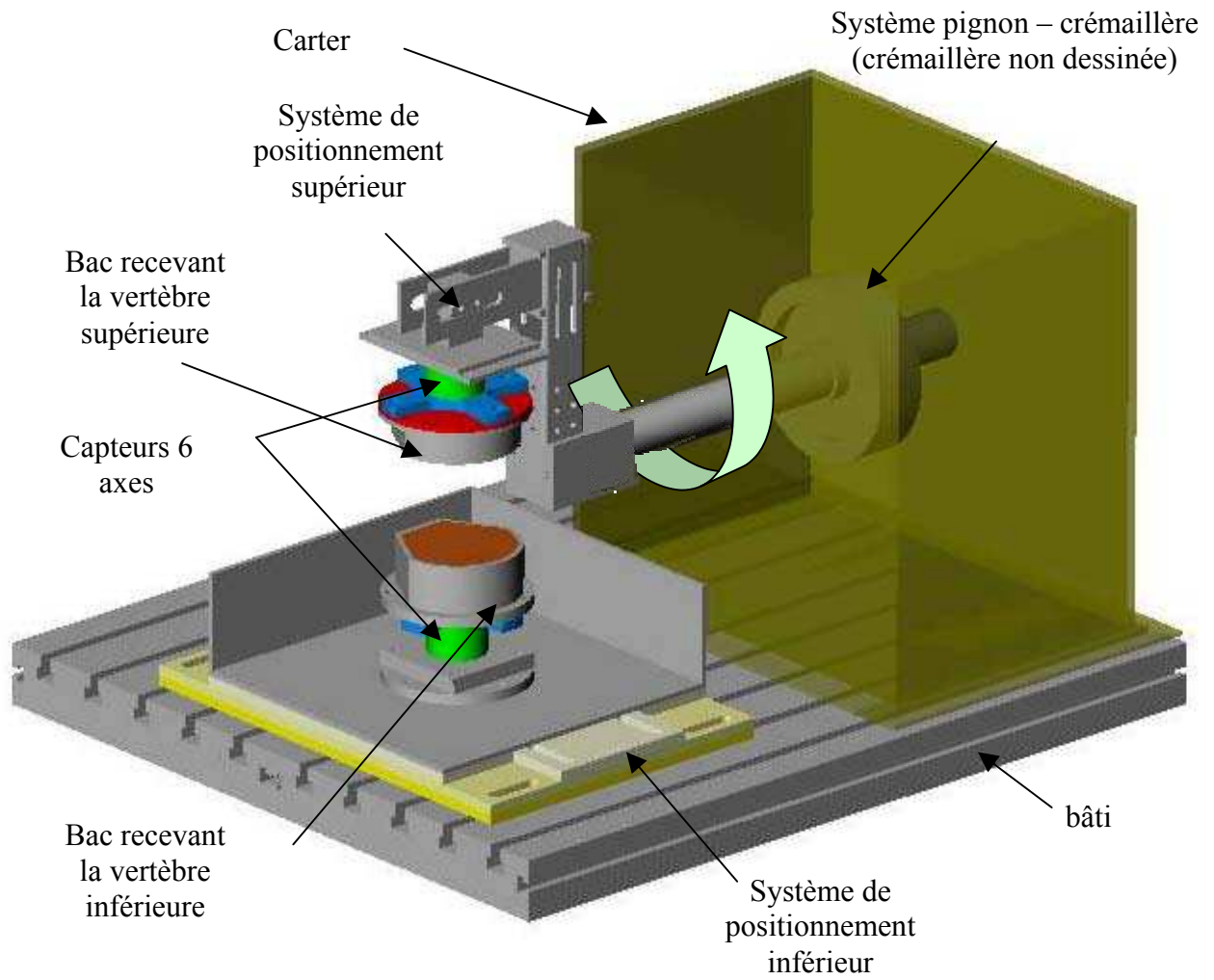


Figure 69 : banc d'essais dynamique en configuration de flexion

Figure 70 : zoom

Vue agrandie de la configuration de flexion

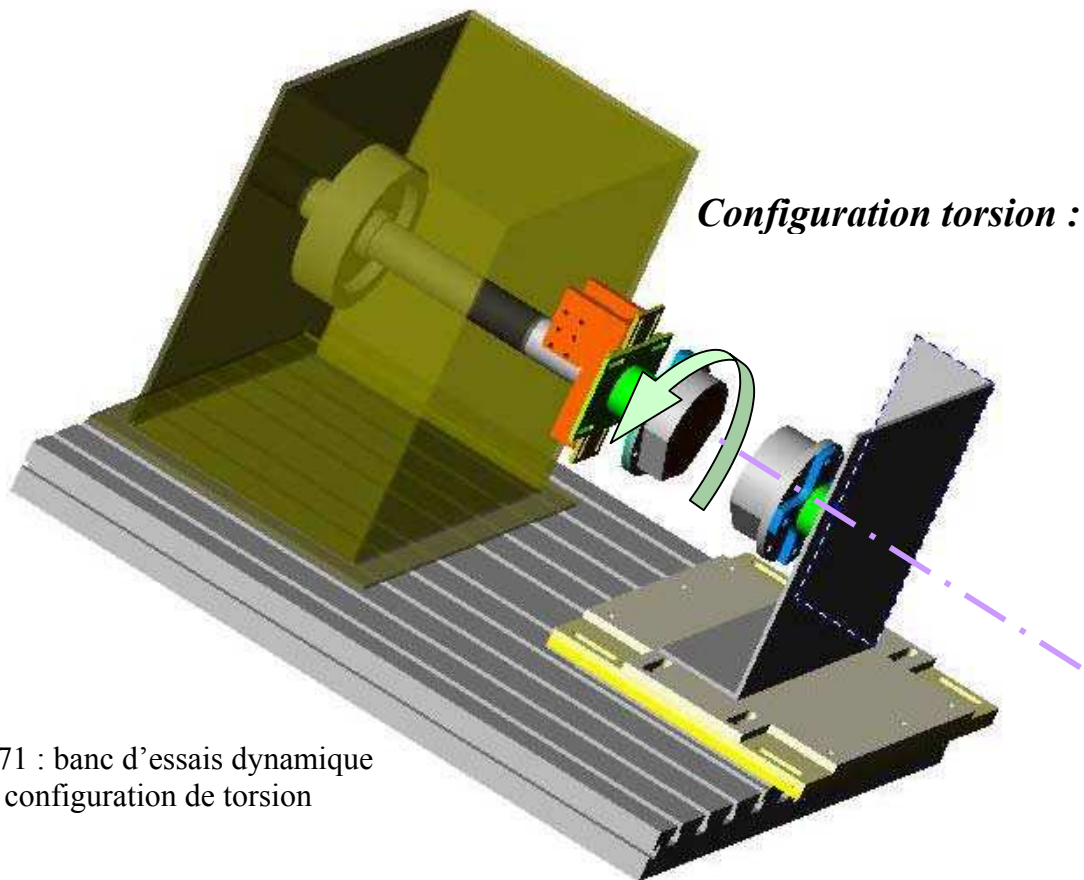
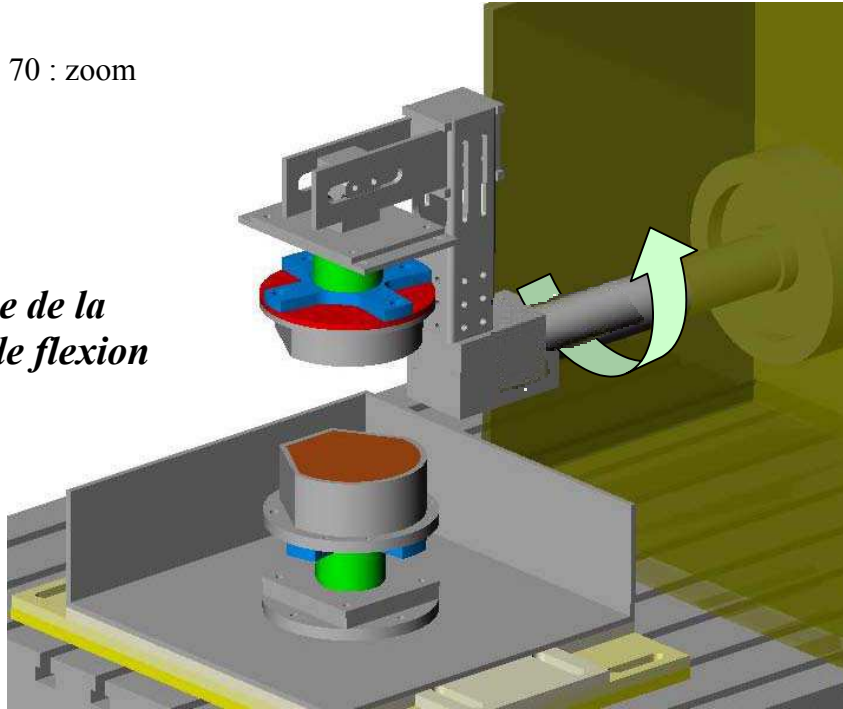


Figure 71 : banc d'essais dynamique en configuration de torsion

3- Conception des différents modules du banc

Système d'excitation :

L'énergie fournie par le pendule vaut :

$$E_{pendule} = M.g.h$$

$$\text{Où } h = L.(1 \pm \cos(\alpha)) \text{ avec } \alpha = \text{angle initial } (70^\circ)$$

M : masse variable du pendule

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

Cette énergie est conditionnée par la valeur de la vitesse à donner au pignon et par l'énergie à fournir aux vertèbres pour voir apparaître le seuil lésionnel.

Ensuite, suivant le rayon du pignon, la vitesse de la tige de la crémaillère est donnée par :

$$V = R.\omega$$

$$\text{Avec } \omega = 2000^\circ/\text{s} \text{ soit } 34.9 \text{ rad/s}$$

On peut considérer que cette vitesse correspond à celle du pendule à la frappe :

$$V_{pendule} = \sqrt{2.g.h}$$

La masse du pendule a été fixé à 50 kg, le bras de levier à 70 cm et l'angle initial à 70° de façon à rester dans des conditions normales d'utilisation.

Nous obtenons ainsi :

- Une énergie du pendule de $E = M.g.h = 350 \text{ J}$
- Une vitesse du pendule de 3.7m/s
- Une vitesse angulaire du pignon de 42.3 rad/sec (nous pourrions atteindre la vitesse de 34.9 rad/sec en diminuant la hauteur de lâcher)

Système pignon-crémaillère :

Afin de réduire les délais de conception, notre choix s'est porté sur l'utilisation de mécanismes simples et déjà connus qui nous permettraient d'obtenir des mouvements de rotation et de translation, tout en ayant un bon comportement au choc. Le principe de la crémaillère a été choisi pour sa simplicité de fonctionnement, sa robustesse et sa capacité à reproduire fidèlement un mouvement.

Après concertation avec le sous traitant, nous avons opté pour une crémaillère de diamètre 40 mm, un pignon de diamètre primitif de 175 mm, un arbre de pignon de diamètre 50 mm et un module de denture de 7. Pour résister aux efforts de liaison et au fonctionnement en choc, les liaisons pivots seront assurées par des paliers lisses de grandes dimensions.

Système d'amortissement :

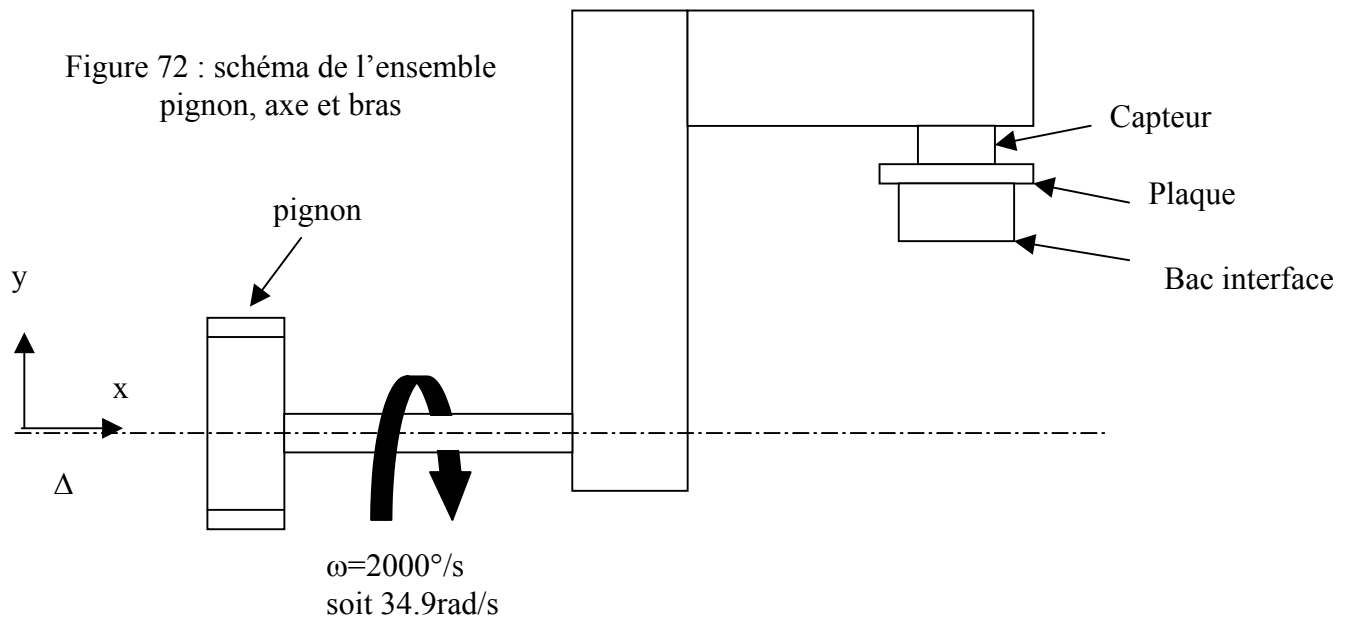
Nous utilisons des nids d'abeille qui ont la capacité de maintenir un effort constant lors de leur écrasement. Nous en placerons entre le pendule et la crémaillère (Nida 1) et à la sortie de la crémaillère pour arrêter le système en rotation et éviter le rebond (Nida 2).

4- Analyse énergétique

Les déplacements ainsi que les déports des éléments du bras de levier par rapport à l'axe de rotation sont les plus importants en flexion. C'est donc cette configuration qui sera prise en compte dans les analyses qui suivent.

A. Evaluation de l'inertie du système

Nous devons minimiser cette inertie, source d'instabilité et de contraintes dans le système, tout en assurant une rigidité suffisante au système afin qu'il puisse encaisser le choc et transmettre l'énergie.



Nous prenons comme masses volumiques :

$$\rho_{\text{acier}} = 7\,800 \text{ kg/m}^3 \text{ et } \rho_{\text{résine}} = 2\,000 \text{ kg/m}^3.$$

On néglige l'inertie due aux vis.

La résine est coulée dans les bacs interfaces pour fixer le spécimen.

Le logiciel « Solidworks » nous permet d'obtenir l'inertie des pièces en mouvement selon l'axe x :

$$I_{xx} = 0.170 \text{ kg.m}^2$$

B. Bilan énergétique du système

A partir des résultats expérimentaux, nous évaluerons l'énergie absorbée par le segment lombaire en soustrayant de l'énergie fournie par le pendule, l'énergie absorbée par les nids d'abeille (principe de conservation de l'énergie).

On néglige les frottements et l'énergie de déformation du système.

Tout d'abord, il faut estimer la valeur de l'énergie à donner au pendule pour qu'il mette en mouvement le système.

La crémaillère consomme une énergie cinétique de :

Masse de la crémaillère = 6 kg

Vitesse du pendule = 3.7 m/sec

En raison du nid d'abeille disposé entre le pendule et la crémaillère, la vitesse de cette dernière sera inférieure à cette valeur. Prenons $V = 3$ m/sec

$$E = 0.5 \times m \times V^2 = 0.5 \times 6 \times 3^2 = 28J$$

Le pignon consomme une énergie cinétique de :

Inertie du pignon (obtenu sur Solidworks) = 0.035 kg.m²

$$E = 0.5 \times I_{xx} \times \omega^2 = 0.5 \times 0.035 \times 34.9^2 = 21J$$

Le bras de levier dans une position défavorable consomme une énergie cinétique de :

Configuration flexion pure :

$$E = 0.5 \times I_{xx} \times \omega^2 = 0.5 \times 0.17 \times 34.9^2 = 104J$$

Le segment anatomique consomme une énergie variable suivant la configuration :

$$E_{totale} = F_{compression} \times \text{écrasement} + M_{flexion} \times \text{angle}_{\text{écrasement}}$$

$F_{compression} = 5000$ N (cf article Neumann)

Ecrasement = 2 cm

$M_{flexion} = 200$ N.m

Angle = 30 °

$$E_{totale} = 5000 \times 0.02 + 200 \times 30 \times \frac{\pi}{180} = 200J$$

Les nids d'abeille

Une des propriétés du nid d'abeille est d'obtenir un effort constant lors de son écrasement.

Le premier nid d'abeille sert à absorber les vibrations du choc et à maintenir le contact du pendule sur la crémaillère jusqu'à la fin du choc. Un fabricant de nids d'abeille nous a fourni la longueur idéale pour ceci. Nous estimons l'énergie à absorber à 20 J.

Le deuxième nid d'abeille, en bout de crémaillère, sert à la fois d'amortisseur de vibrations et de système d'arrêt du montage. Toute l'énergie cinétique doit être absorbée par ce nid d'abeille, c'est-à-dire : $E_{crémaillère} + E_{pignon} + E_{bras\ de\ levier} = 21+28+104 = 153$ J

Une longueur minimale sera définie lors des premiers essais et nous augmenterons sa longueur, pour être sûr que la crémaillère ne vienne pas en contact du support. Le support de ce système sera fixé au sol pour éliminer les vibrations résiduelles.

Donc, par conservation de l'énergie mécanique, le pendule doit fournir une certaine énergie potentielle :

Configuration flexion pure :

$$E = E_{segment} + E_{nid1} + E_{cinétique\ montage} = 200 + 20 + (21+28+104)$$

$$E = 373\ \text{joules}$$

Nous restons dans l'ordre de grandeur de l'énergie pouvant être fournie par le pendule qui est de 350 joules.

5- Vérification de la structure

Au vu de l'inertie et de l'accélération donnée au système, nous devons vérifier la bonne tenue de la structure.

A. Vérification statique

✓ Torsion de l'arbre du pignon

Caractéristiques du système en mouvement :

$$M = 7.369 \text{ kg}$$

$$I_{xx} = 0.170 \text{ kg.m}^2$$

$$\omega = 34.9 \text{ rad/s}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = 11633.33 \text{ rad/s}^2 \text{ (}\omega \text{ atteint en 3 ms)}$$

Distance du centre de gravité G du bras de levier par rapport à l'axe de rotation = $d = 162.3 \text{ mm}$
Energie cinétique du bras de levier et de l'axe moteur.

$$Ec1 = \frac{m.V^2}{2} + \frac{J.\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}{2}$$

$$Ec1 = \frac{m.\left(d \times \frac{d\theta}{dt}\right)^2}{2} + \frac{J.\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}{2} = 0.5 \times \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \times (m.d^2 + J)$$

Cette énergie est égale au travail fourni par le couple de démarrage du bras de levier et de l'axe moteur.

$$Ec2 = C \times \theta$$

En terme de puissance nous avons :

$$\frac{dEc1}{dt} = \left(\frac{d\theta}{dt}\right) \times \left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) \times (m.d^2 + J)$$

$$\frac{dEc2}{dt} = C \times \left(\frac{d\theta}{dt}\right)$$

d'où le couple de démarrage :

$$C_d = \left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) \times (m.d^2 + J)$$

Couple de démarrage = $C_d = 4235 \text{ N.m}$

Caractéristiques de l'arbre du pignon :

$$D = 50 \text{ mm}$$

$$L \text{ (pignon} \Rightarrow \text{extrémité de l'arbre)} = 350 \text{ mm}$$

Déformation de torsion :

$$D = 0.05 \text{ m}$$

$$I^{\circ} = \frac{\pi \times D^4}{32} = 6.14e-07 \text{ m}^4$$

$$C = 4235 \text{ N.m}$$

$$\tau = \frac{C \cdot D}{2I_0} = \frac{2117 \cdot 25}{613.592} = 86 \text{ MPa}$$

Avec un coefficient de sécurité de 1.5, nous avons une contrainte de cisaillement de : 130 MPa

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$E = 210000 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

$$G = 80769 \text{ MPa}$$

$$\tau = \frac{G \times \rho \times \alpha}{l}$$

D'où $\alpha = 0.044 \text{ rad} \sim 1^\circ$

Cette valeur, un peu élevée compte tenu des angles que nous voulons mesurer, correspond au cas le plus défavorable notamment au niveau de la valeur du couple. Les expérimentations ont montré que nous étions bien en dessous de la valeur 4235 N.m.

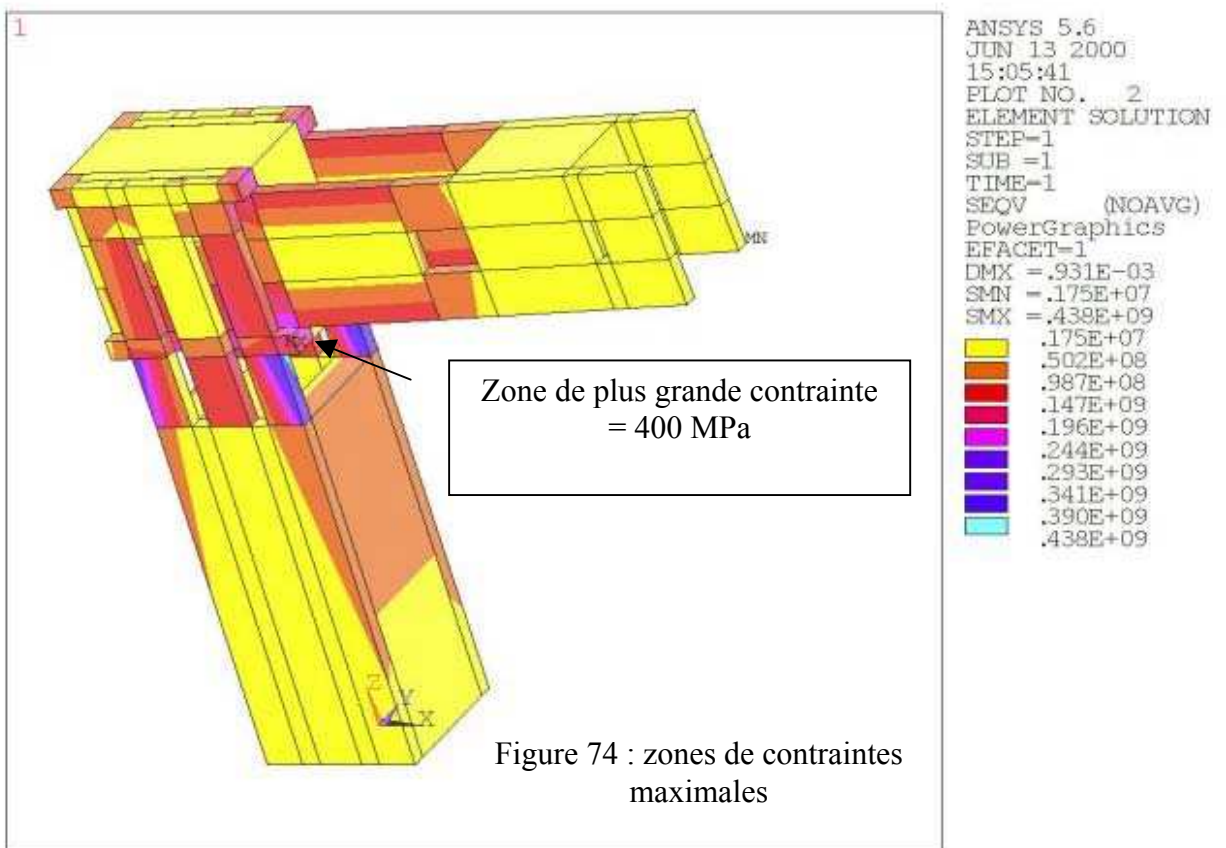
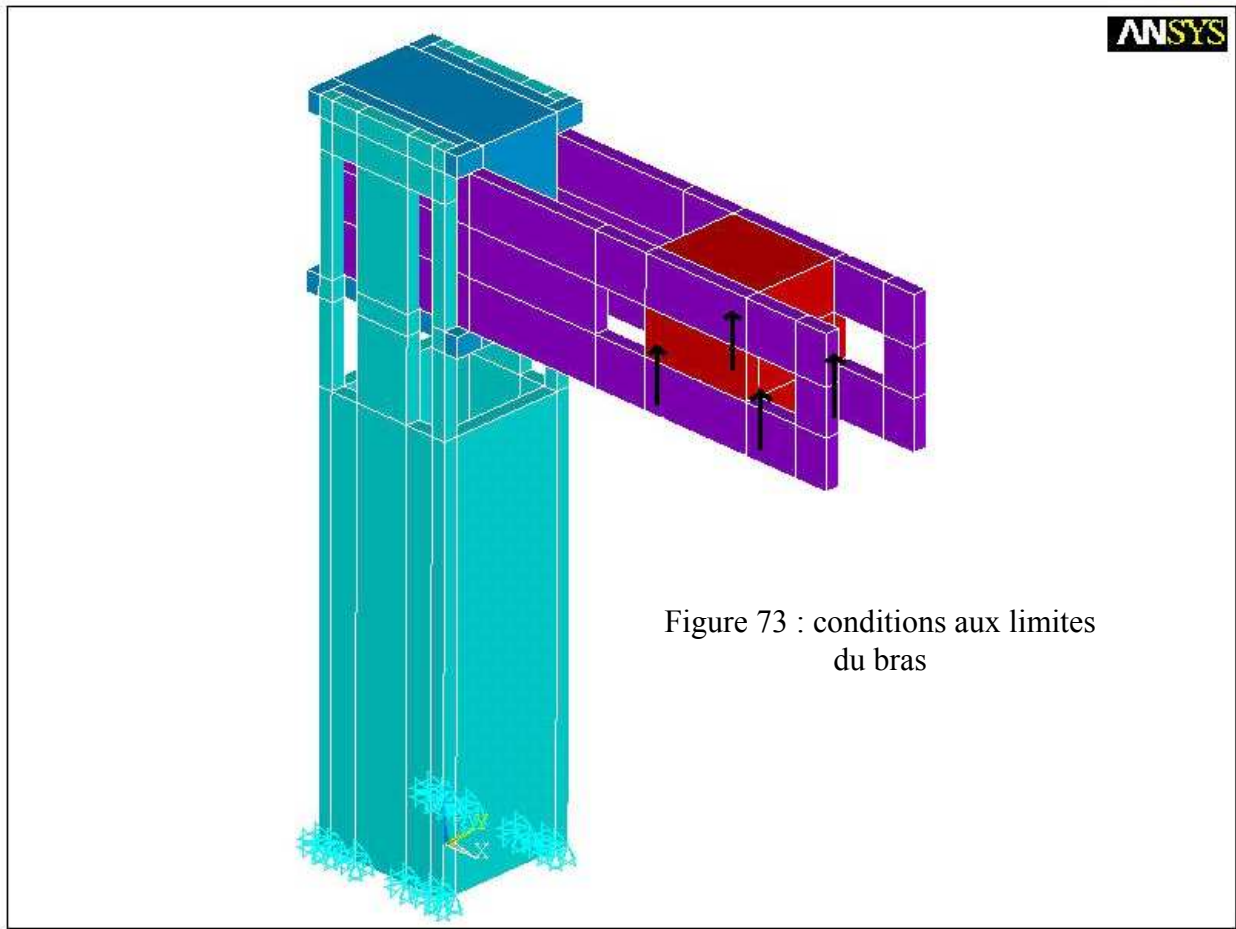
✓ Modélisation de la structure du bras de levier sous ANSYS :

Hypothèses :

- ◆ Travail en statique
- ◆ Vis négligées

Seul le bras de levier a été modélisé (éléments brique 8 nœuds). Les efforts imposés sont ceux qui correspondent à la résistance maximale du segment vertébral en compression pure, soit un effort de 8000 N. Les efforts sont placés à l'extrémité du bras de façon à le solliciter de bas en haut.

On considère que le bloc fixé sur l'arbre du pignon est fixe.



B. Vérification dynamique

Le logiciel SolidDynamics (SDS version 5) permet de visualiser la cinématique des pièces et les efforts des différentes liaisons. Nous construisons le modèle géométrique en respectant les masses, les liaisons et les contacts. Les disques intervertébraux sont modélisés par quatre ressorts de raideur 10 000 N/m et les nids d'abeille par des amortisseurs d'amortissement 500 et 1000 N/(m/s). Les résultats disponibles sont, les valeurs des inerties, les déplacements, les vitesses, les accélérations ainsi que les forces et moments dans chaque module.

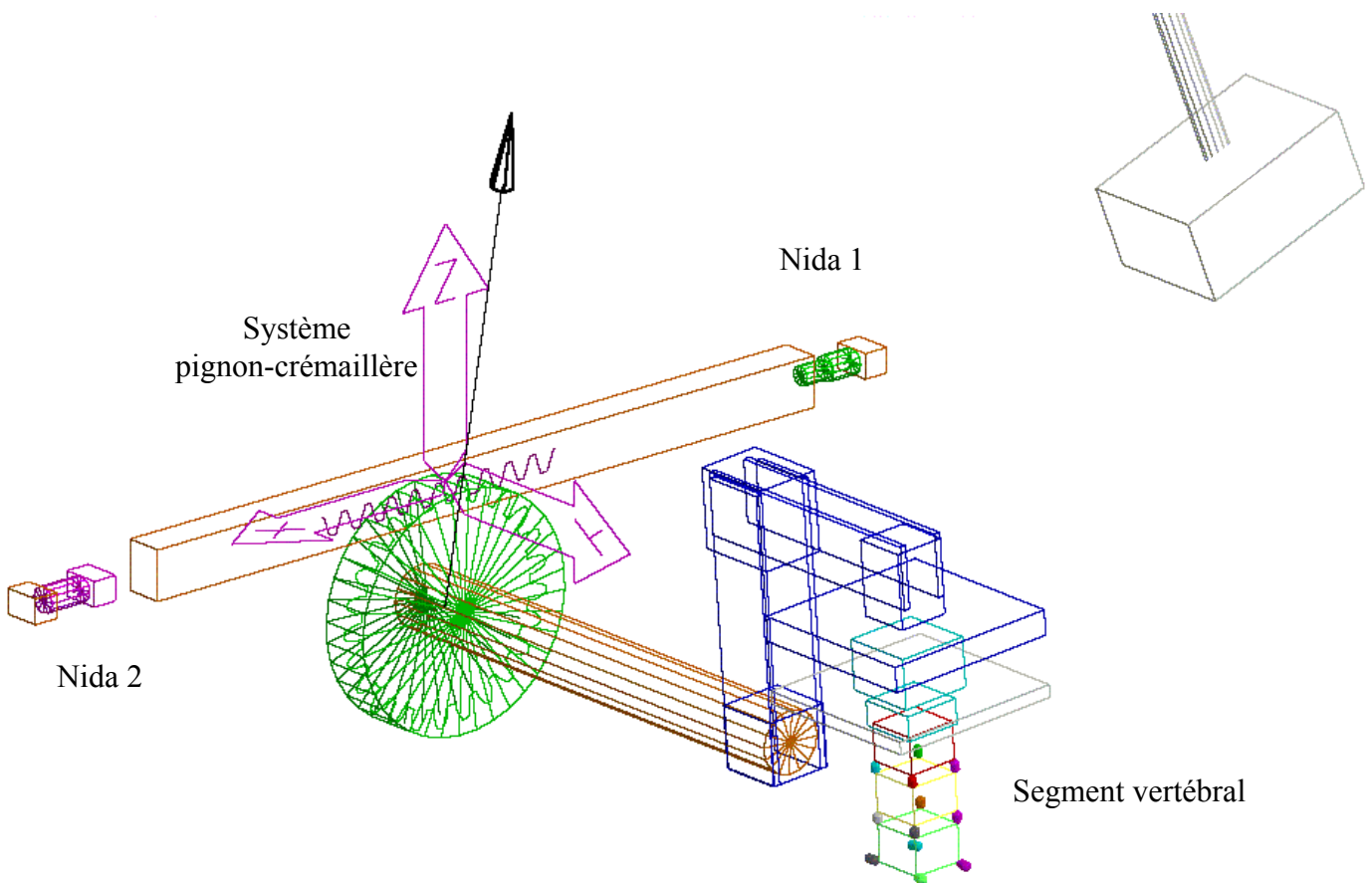


Figure 76 : modélisation cinématique du banc d'essais dynamique

Cinématique :

Nous évaluons la vitesse de rotation du pignon à 2 800°/s environ, entre t = 366 ms et t = 372 ms.

Le mouvement du système pignon-crémaillère est validée et les efforts de liaison nous ont permis de dimensionner les guidages.

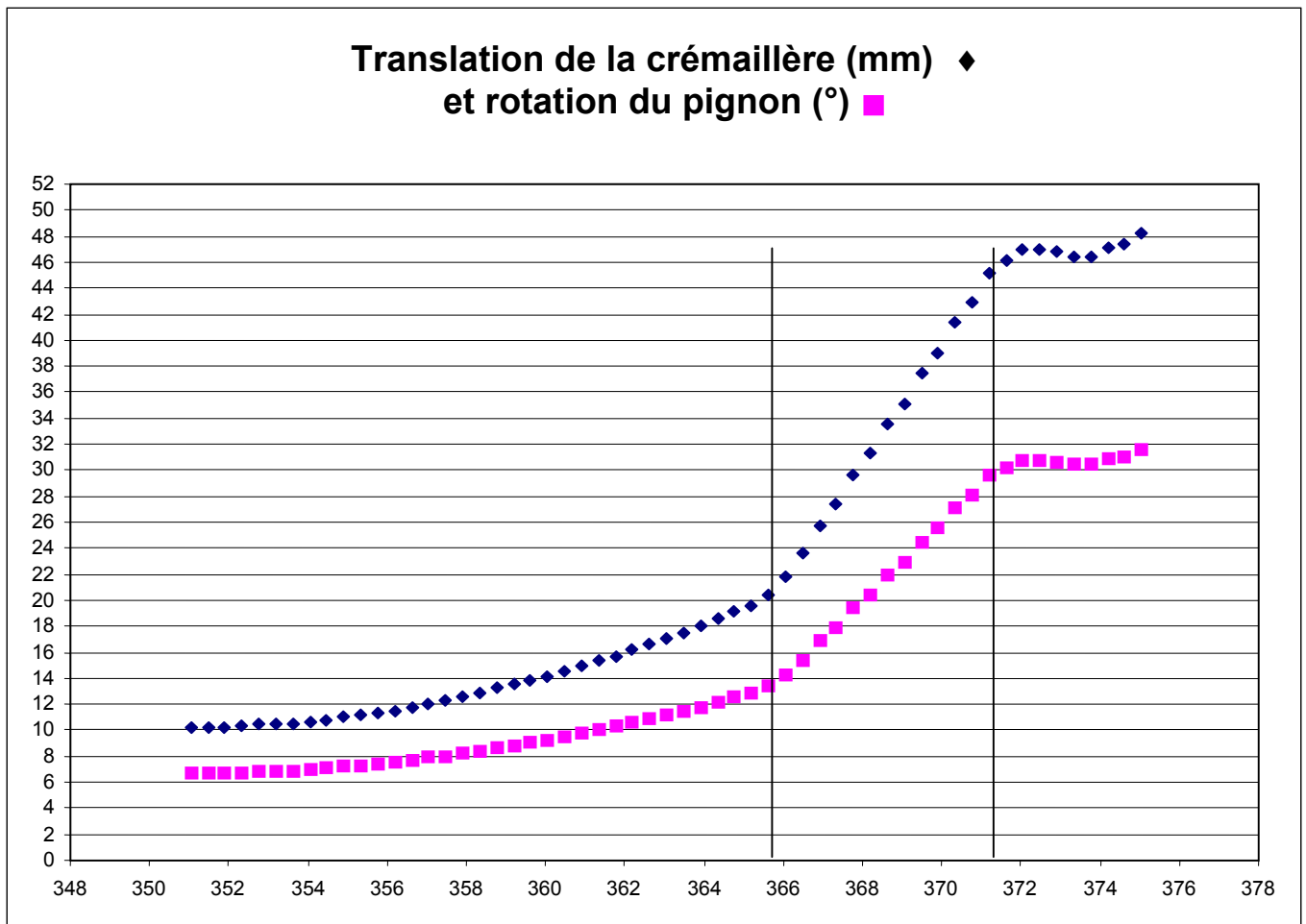


Figure 77 : rotation du pignon et translation de la crémaillère en fonction du temps

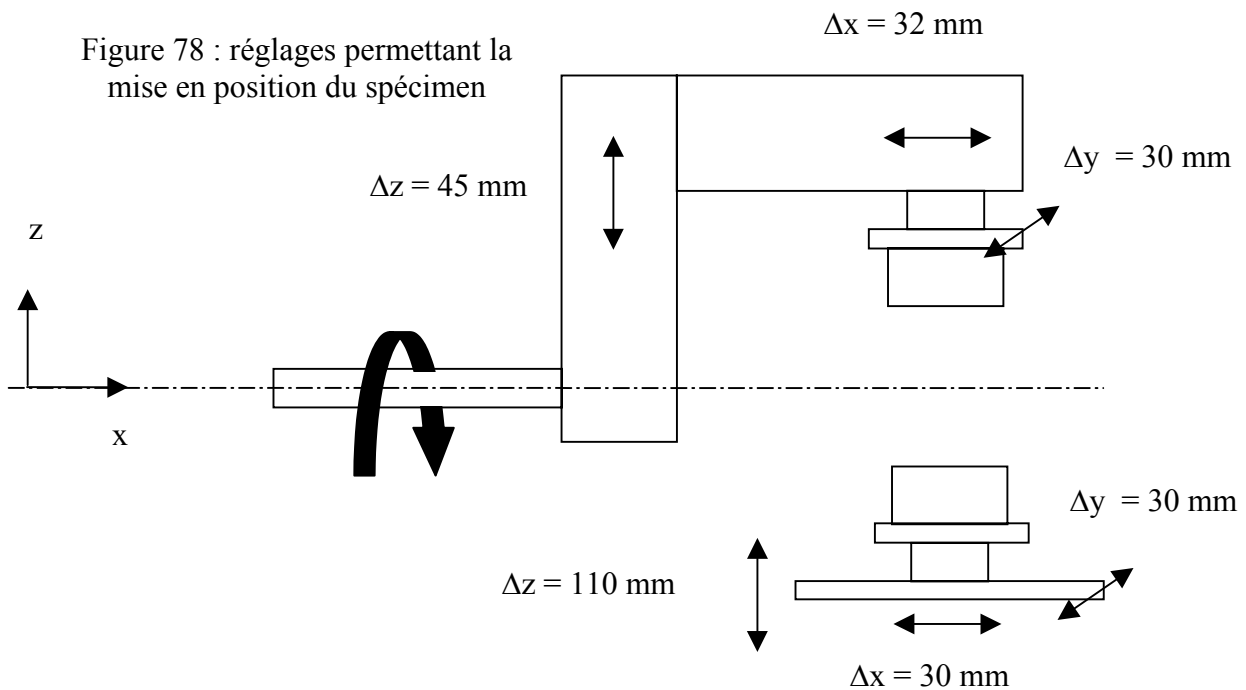
6- Réglages

Nous avons conçu un système modulable pour s'adapter au maximum aux éventuelles disparités de positionnement et de géométrie.

Nous devons d'abord nous adapter aux différentes morphologies des vertèbres. Pour cela, les deux plateaux supports des vertèbres sont réglables en hauteur afin de maintenir l'axe de rotation propre au spécimen au niveau de l'axe de rotation du pignon. Les segments anatomiques peuvent ne pas être positionnés systématiquement de la même façon dans le socle. C'est pourquoi, il faut prévoir une possibilité de correction de positionnement, dans le plan horizontal, de l'ensemble « socle-segment » par rapport au bâti et aux bras.

Nous aurons finalement 6 réglages possibles, 3 pour le plateau supérieur et 3 pour le plateau inférieur, ce qui permettra de rectifier les éventuelles erreurs de mise en position. Pour le réglage en hauteur du plateau inférieur, nous aurons des cales de hauteurs différentes permettant un réglage millimétrique.

Le schéma suivant indique les différents degrés de liberté qui peuvent être réglés ainsi que l'amplitude totale du réglage.



7- Photos du montage



Figure 79 : photo du banc dynamique sans la masse du pendule

Systeme pignon-crémaillère

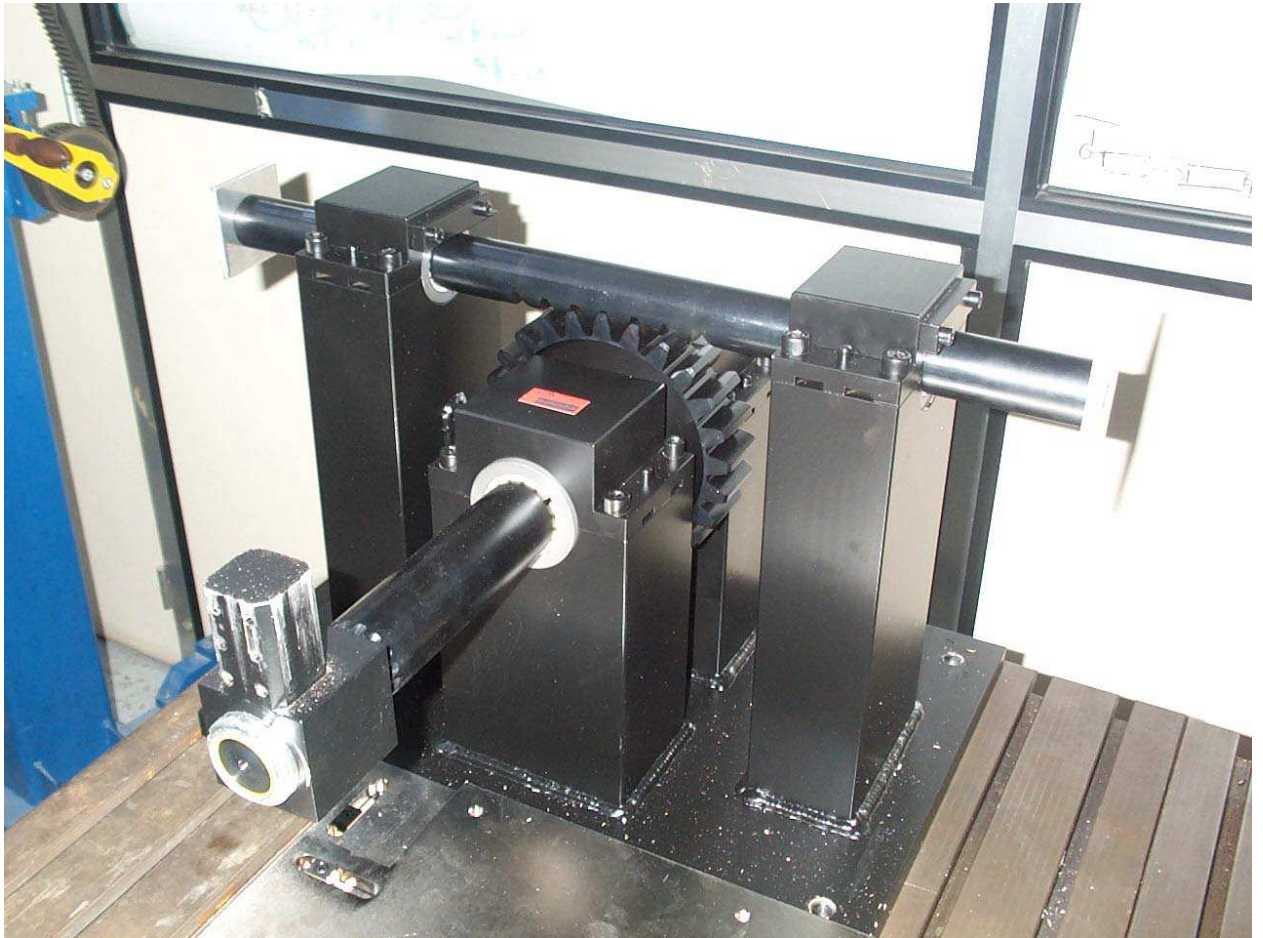


Figure 80 : photo du bloc pignon crémaillère

1- Mesure des efforts et des moments

La mesure des efforts et des moments se fera à l'aide d'une plate-forme 6 axes solidaire de la vertèbre inférieure fixée au marbre et d'une autre fixée au niveau de la vertèbre supérieure. Nous aurons ainsi accès aux efforts et aux moments transitant par les vertèbres inférieure et supérieure.

Remarque : en disposant le second capteur 6 axes sur la vertèbre supérieure, nous aurons ainsi accès aux efforts et aux moments de la vertèbre supérieure sur la vertèbre inférieure. Il sera ainsi possible de connaître l'énergie perdue par viscoélasticité dans le disque lors d'une sollicitation dynamique. Par ailleurs, ce système redondant permet de pallier un problème d'acquisition d'une des voies de mesure au cours d'un essai.



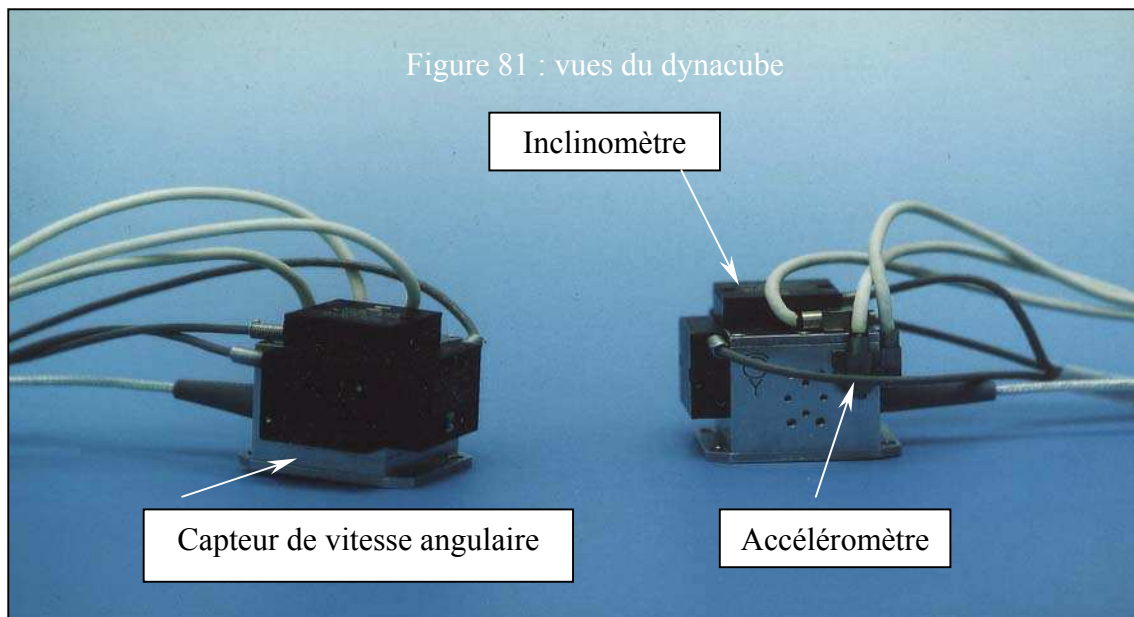
Capteur 6 axes

2- Mesure des déplacements

A. Différentes possibilités

Un dispositif appelé dynacube (figure 81) intègre trois inclinomètres, trois accéléromètres linéaires et trois capteurs de vitesse angulaire. Ce système est de dimension modeste (30mm*30mm*30mm).

Le problème vient de la double intégration qui s'avère peu précise pour de grandes accélérations (de l'ordre de 100 g) et pour des signaux de longues durées (quelques dixièmes de secondes).



Des systèmes mécaniques utilisés sur des mannequins pourraient être exploités sur le montage expérimental à réaliser. Ces systèmes sont vissables à une extrémité sur un corps vertébral ce qui évite toute perte de contact.

En voici un exemple : **DGSP (double gimbaled string potentiometer) (figure 82)**

Il possède 2 rotations et une translation \Rightarrow tous les points de l'espace ne sont pas accessibles.

Il n'est pas étanche (liquide anatomique).

Il est encombrant.

Il y a un ressort de rappel dans la fourche télescopique

Il y a du frottement dans les cylindres de la fourche (joint).

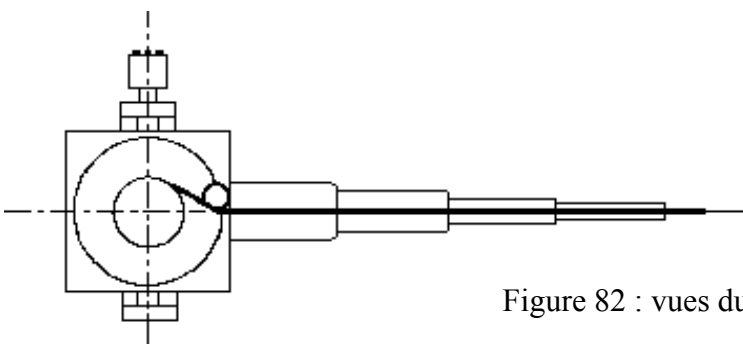
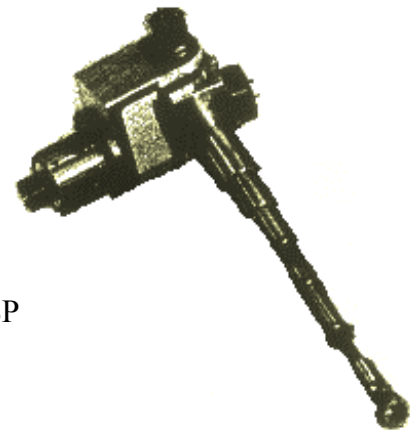


Figure 82 : vues du DGSP



En plus de ces systèmes mécaniques, viennent s'ajouter des systèmes de reconnaissance optique (figure 83), utilisant des marqueurs actifs (diodes) ou passifs (billes réfléchissantes). L'utilisation de ce procédé en dynamique impose un appareillage capable d'atteindre des fréquences supérieures au kilo-hertz afin de disposer d'un nombre d'images conséquent. Or, ces derniers étant très coûteux à l'achat, seule la location aurait permis d'utiliser des caméras rapides au cours du projet ce qui entraîne des problèmes de flexibilité d'utilisation.



Figure 83 : photo d'un ensemble d'acquisition vidéo numérique

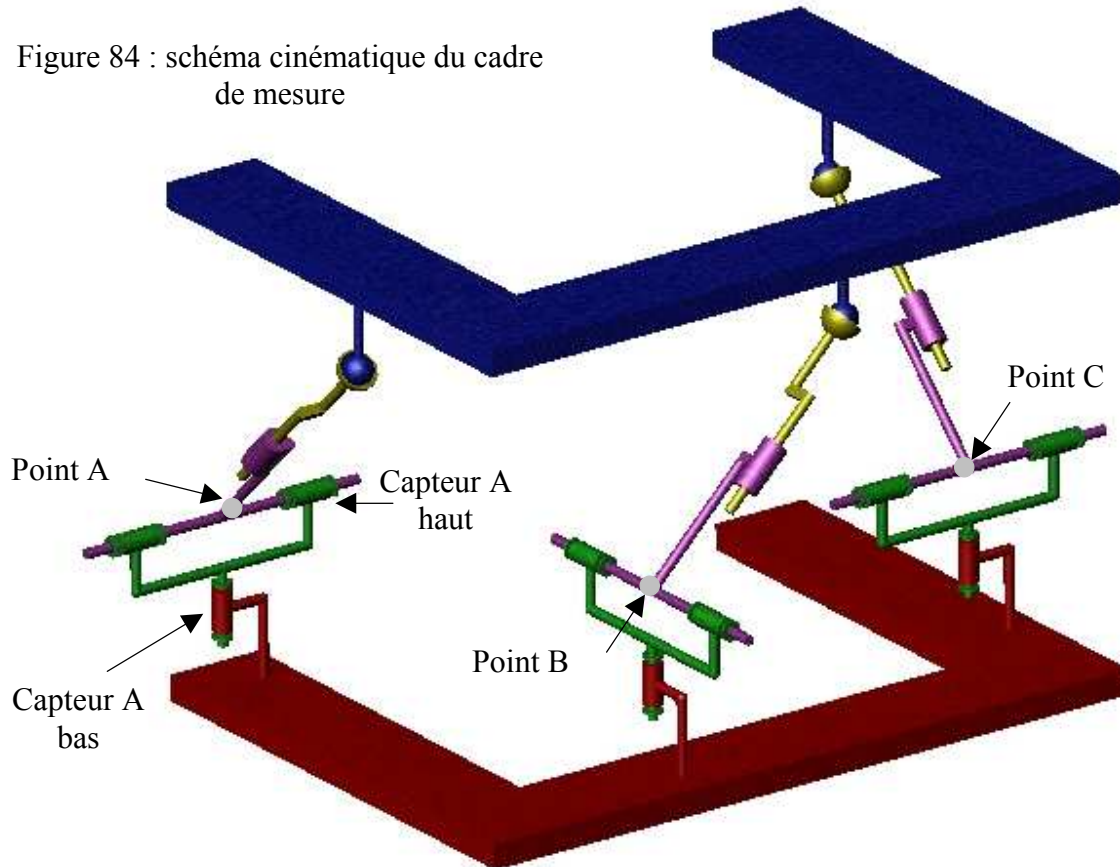
B. Système choisi

Après analyse de l'existant, nous avons finalement opté, pour un système de type mécanique. Ce système, original et inédit, va nous permettre de mesurer les déplacements de la vertèbre centrale au cours du temps à l'aide de plusieurs potentiomètres.

Le schéma cinématique de ce « cadre de mesure » est le suivant :

✓ Cadre de mesure

Figure 84 : schéma cinématique du cadre de mesure

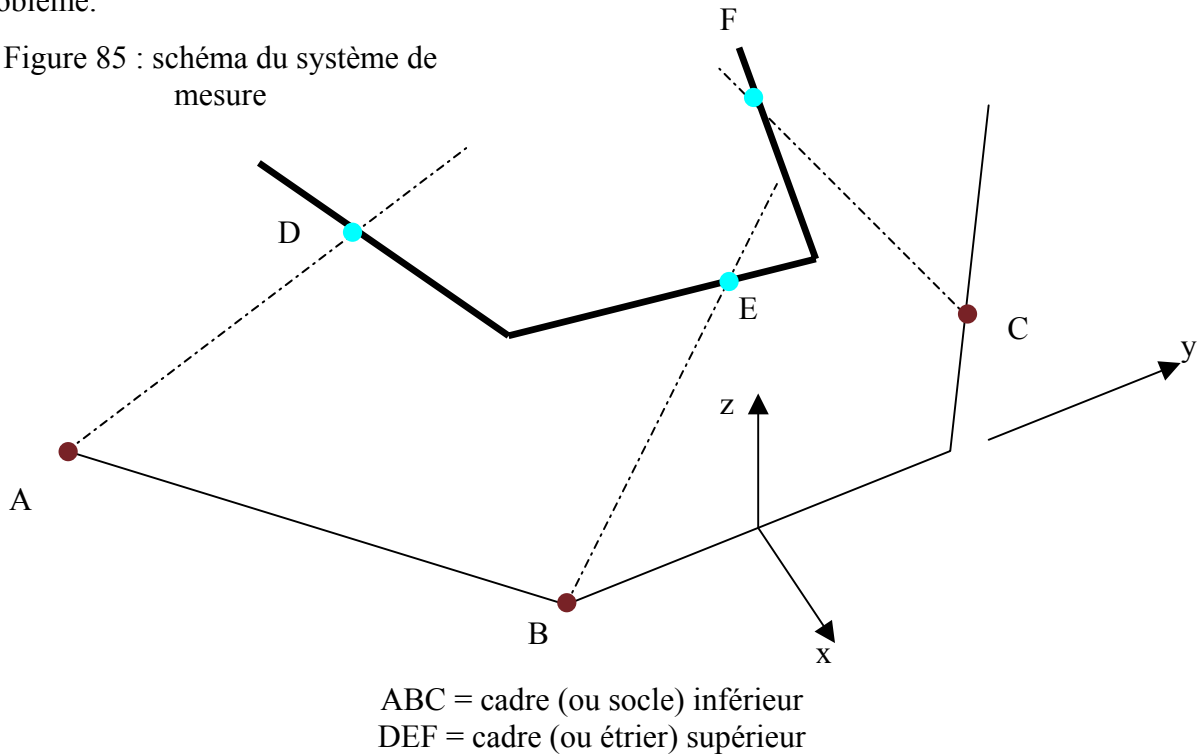


- La partie inférieure du cadre est fixée au bâti et solidaire de la vertèbre inférieure.
- La partie supérieure du cadre est fixée à la vertèbre centrale par des vis et suivra son mouvement.
- La position de la vertèbre centrale sera reconstruite à l'aide de données fournies par des capteurs de rotation.
- Ces capteurs potentiométriques mesureront les rotations entre les pièces vertes et les pièces rouges (bâti) et les rotations entre les pièces vertes et les pièces violettes.
- Les liaisons représentées par des glissières pourront être des pivots glissants.
- Sur ce schéma sont représentés trois ensembles de tiges. Il a été prévu, lors de la conception, un emplacement pour placer un quatrième ensemble dans le but d'améliorer la précision des mesures.

✓ Grands principes

Au début de notre recherche, nous avons postulé que trois tiges suffisaient à résoudre ce problème.

Figure 85 : schéma du système de mesure



Hypothèse :

On connaît à $t=0$, les positions des points D, E, F et donc les distances entre les points D et E, D et F, et E et F.

On connaît à n'importe quel instant les positions des points A, B et C qui sont fixes.

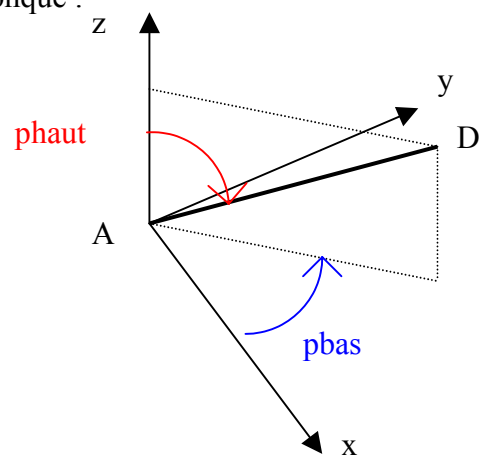
Les potentiomètres se situent aux points A, B et C. Ces points sont placés au niveau des liaisons rotules équivalentes formées par les capteurs deux à deux.

Description des angles des capteurs pour un point D quelconque :

Pbas = angle mesuré par le potentiomètre du bas

Phaut = angle mesuré par le potentiomètre du haut

Figure 86 : repère des capteurs



Le but de ce système est d'arriver à déterminer les coordonnées des points D, E et F au cours de l'essai ce qui nous permettra de déterminer les mouvements de la vertèbre centrale puisque cette dernière est solidaire de la partie supérieure du cadre de mesure (étrier).

Informations sur la droite AD :

A un instant donné nous connaissons l'équation de la droite AD puisque nous savons qu'elle passe par le point fixe A et que son orientation est fournie par les données des deux capteurs de rotation placés en A.

Données connues : coordonnées du point A(xa, ya, za) qui est fixe.

Pot_ah = Valeur de l'angle du potentiomètre placé en A en partie haute

Pot_ab = Valeur de l'angle du potentiomètre placé en A en partie basse

L'équation paramétrique de la droite AD est donc :

$$\begin{cases} xd = xa + k1.a1 \\ yd = ya + k1.b1 \\ zd = za + k1.c1 \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} a1 = \sin(\text{pot_ah}) \times \cos(\text{pot_ab}) \\ b1 = \sin(\text{pot_ah}) \times \sin(\text{pot_ab}) \\ c1 = \cos(\text{pot_ah}) \end{cases}$$

Avec k1, le paramètre de la droite et (a1, b1, c1) le vecteur directeur suivant les directions (x, y, z). Par combinaison linéaire des lignes nous éliminons k1 et aboutissons à :

$$xd \times \cos(\text{pot_ah}) - (zd - za) \times \sin(\text{pot_ah}) \times \cos(\text{pot_ab}) = xa \times \cos(\text{pot_ah})$$

$$yd \times \cos(\text{pot_ah}) - (zd - za) \times \sin(\text{pot_ah}) \times \sin(\text{pot_ab}) = ya \times \cos(\text{pot_ah})$$

Procédons de la même façon pour les droites BE et CF :

Droite BE :

$$xe \times \cos(\text{pot_bh}) - (ze - zb) \times \sin(\text{pot_bh}) \times \cos(\text{pot_bb}) = xb \times \cos(\text{pot_bh})$$

$$ye \times \cos(\text{pot_bh}) - (ze - zb) \times \sin(\text{pot_bh}) \times \sin(\text{pot_bb}) = yb \times \cos(\text{pot_bh})$$

Droite CF :

$$xf \times \cos(\text{pot_ch}) - (zf - zc) \times \sin(\text{pot_ch}) \times \cos(\text{pot_cb}) = xc \times \cos(\text{pot_ch})$$

$$yf \times \cos(\text{pot_ch}) - (zf - zc) \times \sin(\text{pot_ch}) \times \sin(\text{pot_cb}) = yc \times \cos(\text{pot_ch})$$

De plus la distance entre les points D et E, les points E et F et les points D et F est constante :

$$(xe - xd)^2 + (ye - yd)^2 + (ze - zd)^2 = Led^2$$

$$(xe - xf)^2 + (ye - yf)^2 + (ze - zf)^2 = Lef^2$$

$$(xd - xf)^2 + (yd - yf)^2 + (zd - zf)^2 = Ldf^2$$

Nous avons donc 9 équations pour 9 inconnues (coordonnées des points D, E et F).

Nous pouvons donc déterminer la position de la vertèbre centrale au cours du temps.

Au fur et à mesure de la mise au point du système, nous avons été confrontés à de nombreux problèmes liés à des positions particulières de l'étrier et ceci ajouté aux incertitudes de mesure nous avons dû rajouter une quatrième tige afin de lever certaines indéterminations.

Nota : la théorie complète de ce système est en annexe

Figure 87 : photo du cadre de mesure

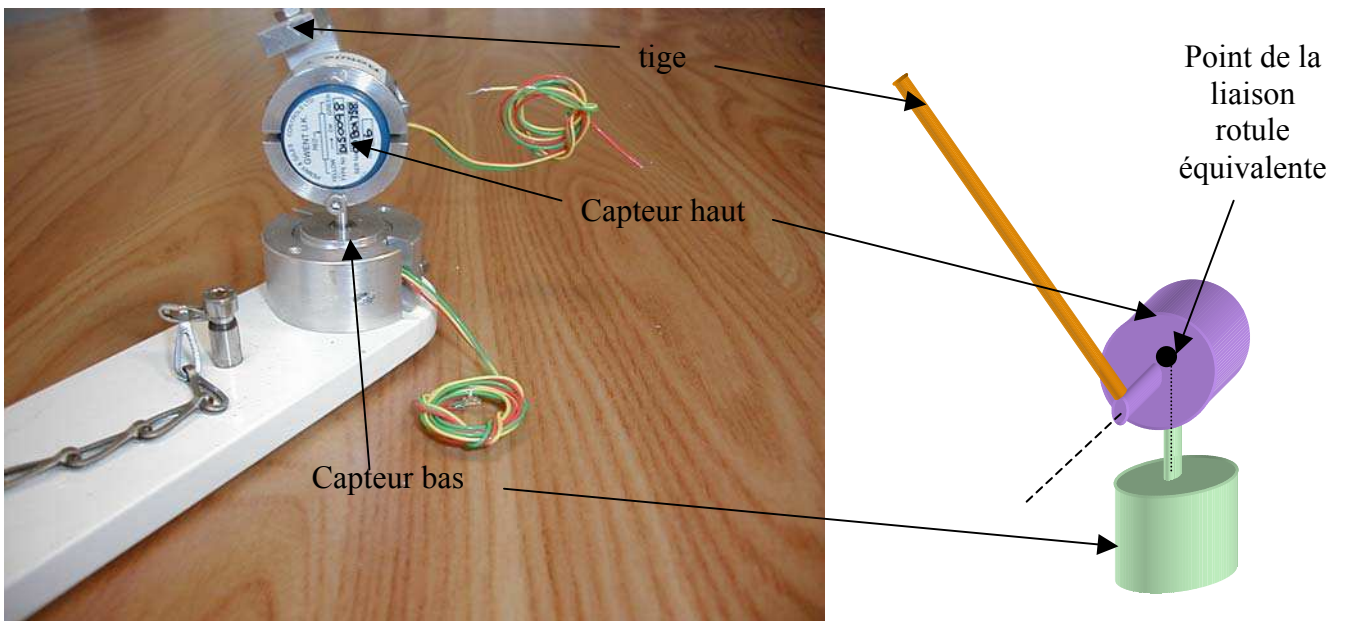
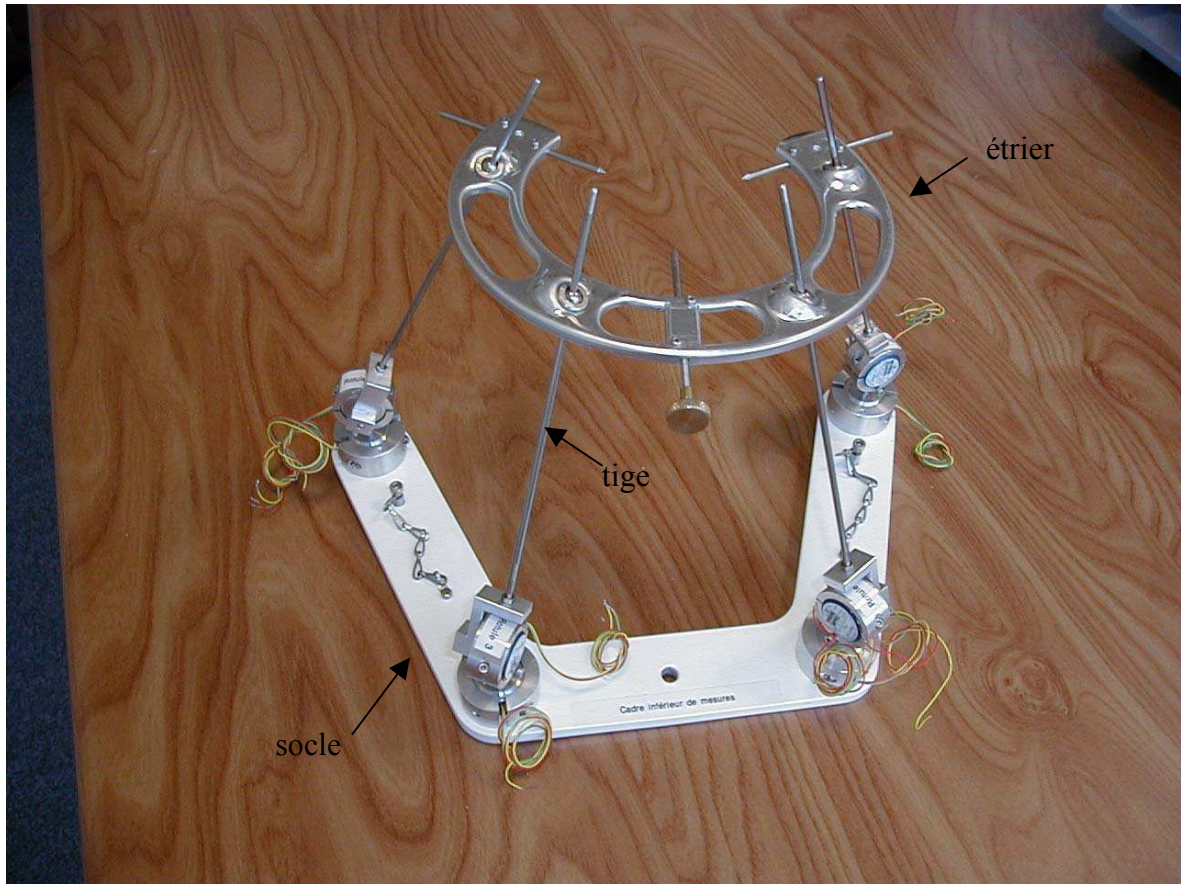


Figure 88 : détail des potentiomètres

La position des capteurs et des tiges n'a pas été choisie arbitrairement mais de façon à respecter plusieurs critères fonctionnels.

- Respecter des amplitudes de plus ou moins 20° en flexion/extension, torsion et inflexion latérale. Le repère choisi pour ces rotations étant fixé au centre de l'étrier supérieur.

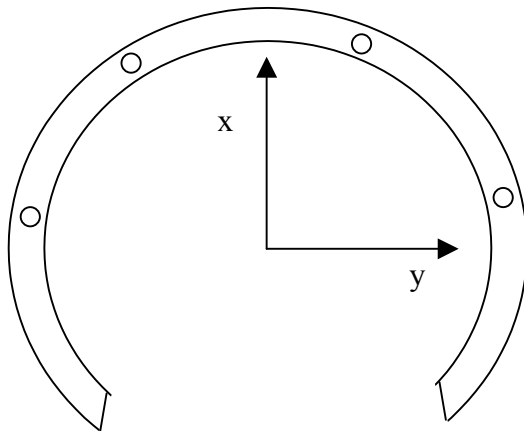


Figure 89 : schéma de l'étrier supérieur

- Encombrement minimum du système
- Eviter les collisions entre les tiges et le spécimen
- Eviter les collisions entre les tiges elles-mêmes.
- Eviter les collisions entre les tiges et les bacs interfaces recevant le spécimen (d'où la forme de ces derniers).
- Eviter les blocages mécaniques du système (arc-boutement).
- Eviter que les directions des tiges soient identiques au cours d'un mouvement quelconque. Ces positions amenant une indétermination de la position de l'étrier.
- Eviter que les configurations des tiges pendant un essai ne provoquent une grande imprécision de mesure. En effet, l'imprécision sur la sensibilité des capteurs engendrerait une erreur importante au niveau des potentiomètres pour des configurations nécessitant une grande amplitude angulaire des tiges.

Typiquement on trouve une sensibilité moyenne pour les potentiomètres angulaires de 0.003 volt / ° / volt d'alimentation. Le gain est de 8 et la tension d'alimentation de 2.5 volts
 Valeur en degrés = valeur en volt / (sensibilité * gain * tension d'alimentation)

Sensibilité = 0.003 volt / ° / volt d'alimentation

Tableau 25

	Valeur en degrés
valeur en volt = 0.2 volts	3.3°
valeur en volt = 2 volts	33.3°

Sensibilité = 0.0032 volt / ° / volt d'alimentation

Tableau 26

	Valeur en degrés
valeur en volt = 0.2 volts	3.12°
valeur en volt = 2 volts	31.2°

Une attention particulière a été portée pour éviter des voltages importants au niveau des capteurs pendant les essais. Cela a été possible pour deux raisons. La première est que les

débattements angulaires des spécimens restent faibles. La seconde est que le cadre permet de réaliser de grandes rotations ($\pm 30^\circ$) autour de n'importe quel axe, ainsi nous pouvons nous placer, dans cet intervalle, de façon à réduire les amplitudes des tiges tout en conservant des rotations acceptables en essai.

✓ Sources d'incertitudes du système de mesure des déplacements

- ❑ Sensibilité des potentiomètres
- ❑ Bruit électrique
- ❑ Réglage du gain
- ❑ Tension d'alimentation des capteurs
- ❑ Coordonnées initiales des points du cadre

L'erreur globale sur la mesure est évaluée à quelques dixièmes de degrés pour les rotations et quelques dixièmes de millimètres pour les déplacements.

Cette incertitude a été évaluée à l'aide d'un gabarit indexé (figure 90) permettant de simuler des combinaisons de torsions et de translations verticales.

Un inclinomètre a été utilisé pour évaluer la réponse du système en inflexion et en flexion.

Gabarit indexé :

Ecart vertical en z : 30 mm

Ecart angulaire en z : 55°

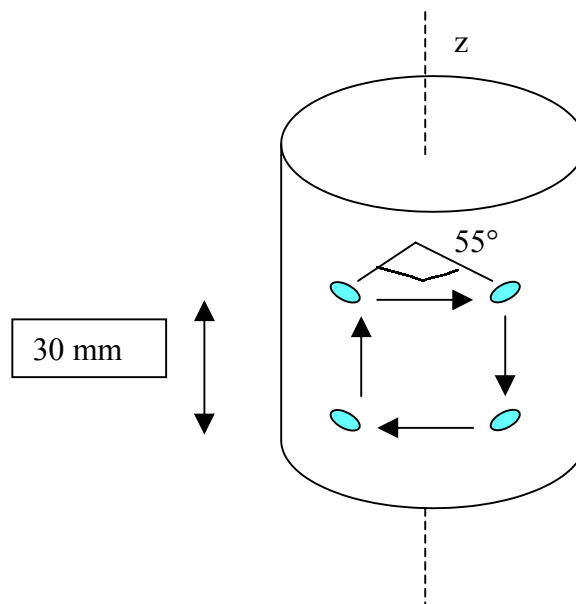


Figure 90 : schéma du gabarit

3- Mesures liées au banc

Capteur potentiométrique :

Situé sur l'arbre du pignon, il permet de déterminer la variation angulaire de l'axe moteur au cours de l'essai.

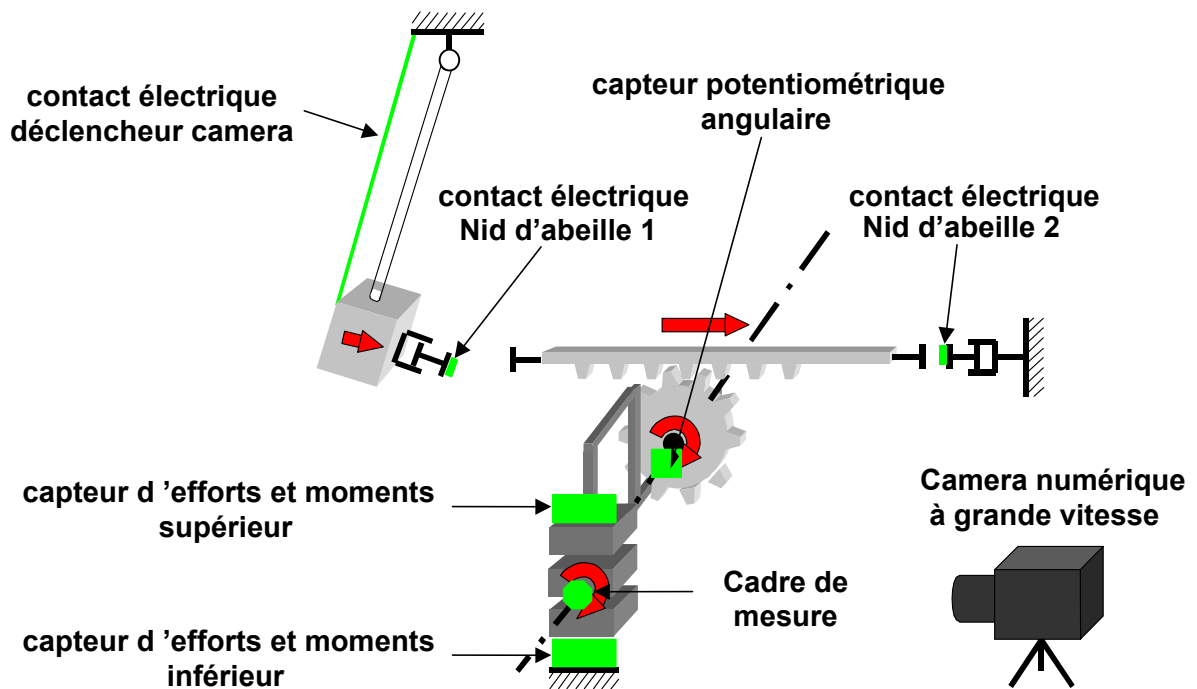


Figure 91 : schéma global du banc d'essai dynamique

La caméra numérique, non prévue initialement, a pu être ajoutée grâce à un prêt de matériel auprès du LAB. Ainsi, nous avons pu avoir un contrôle visuel de l'expérimentation et de la tenue du cadre de mesure.

Capteur 6 axes : capteurs permettant la mesure des trois efforts et des trois moments.

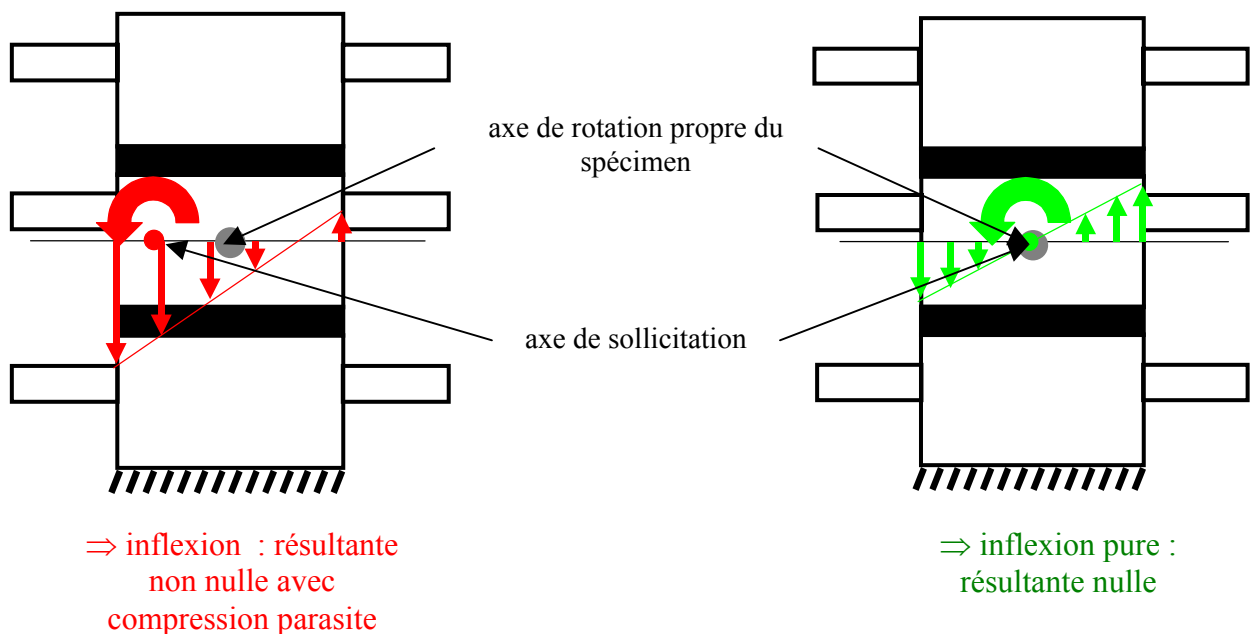
- ✓ 1 capteur situé en dessous de la vertèbre inférieure.
- ✓ 1 capteur situé au-dessus de la vertèbre supérieure.

V- MESURE DES AXES INSTANTANES DE ROTATION (A.I.R.)

Nous avons précisé dans le cahier des charges que nous solliciterons le segment vertébral testé de façon pure.

On entend par le terme « pure » le fait de réduire les efforts parasites comme la compression ou le cisaillement ce qui permet d'avoir une résultante nulle lors de la distribution des contraintes. On obtient une telle sollicitation en alignant à chaque instant l'axe de sollicitation du banc dynamique avec l'axe instantané de rotation du segment à tester. Dans notre cas, l'axe instantané de rotation est l'axe de rotation de la **vertèbre supérieure par rapport à la vertèbre inférieure** à un instant donné au cours du mouvement. Comme cet axe n'est pas constant au cours du temps, on détermine un axe de rotation moyen pour une sollicitation imposée.

Figure 92 : illustration en inflexion latérale des sollicitations parasites



Les données bibliographiques étant trop imprécises, il a fallu réaliser un second banc d'essai adapté à notre besoin.

A l'aide de ce montage, nous pourrions connaître le lieu des AIRs d'un segment dans un repère local. Le spécimen testé sera ensuite placé sur le banc d'essai dynamique de façon à faire coïncider son axe de rotation propre avec l'axe moteur (pignon-crémaillère).

1- Schéma cinématique du banc d'essais « statique »

A. Schéma cinématique en configuration de flexion ou inflexion

On fait l'hypothèse que l'axe de rotation de la vertèbre supérieure par rapport à la vertèbre inférieure est perpendiculaire aux deux glissières (figures 93 et 94). Le mouvement n'est donc pas totalement physiologique. Mais vu que le banc d'essais dynamiques impose aussi ces contraintes il n'est pas nécessaire de poursuivre plus loin l'investigation du centre de rotation. Ce banc d'essais sollicitera le segment à faibles vitesses et la sollicitation sera appliquée par un opérateur.

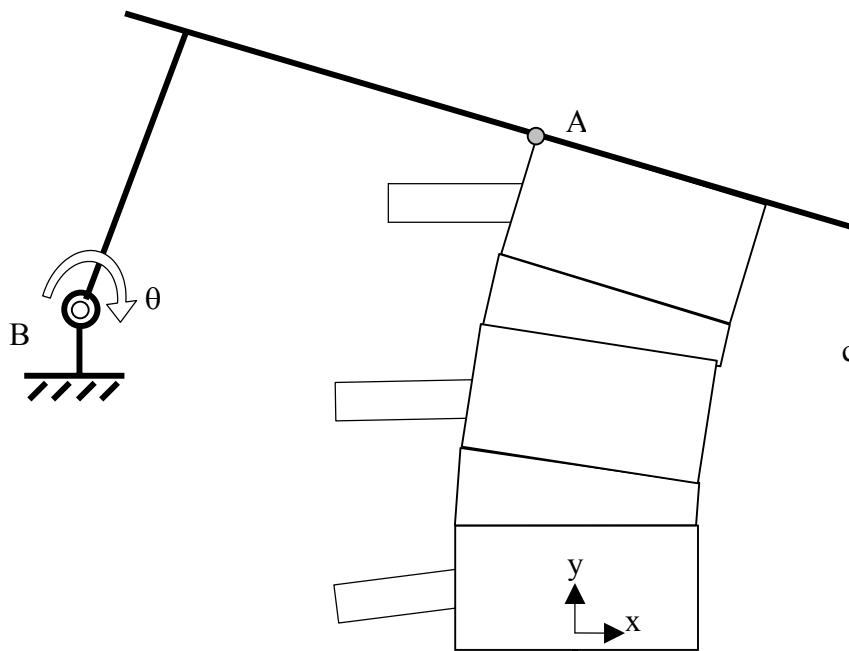
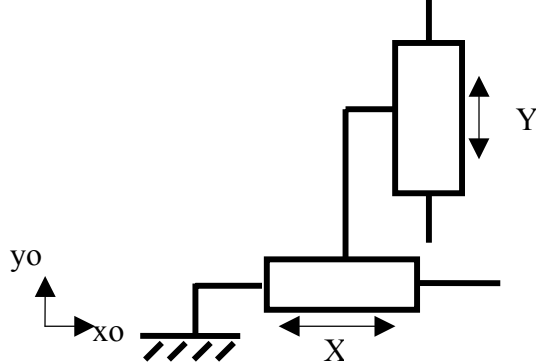


Figure 93 : schéma cinématique en flexion



- ❑ Le repère (x_0, y_0) est fixe.
- ❑ Le repère (x, y) est lié à la vertèbre inférieure.
- ❑ Le mouvement se déroule dans le plan (x_0, y_0) .
- ❑ Les points A et B appartiennent à la vertèbre supérieure.
- ❑ Nous voulons connaître le lieu des AIRs de la **vertèbre supérieure par rapport à la vertèbre inférieure** dans le repère (x, y) .

B. Schéma cinématique en configuration de torsion

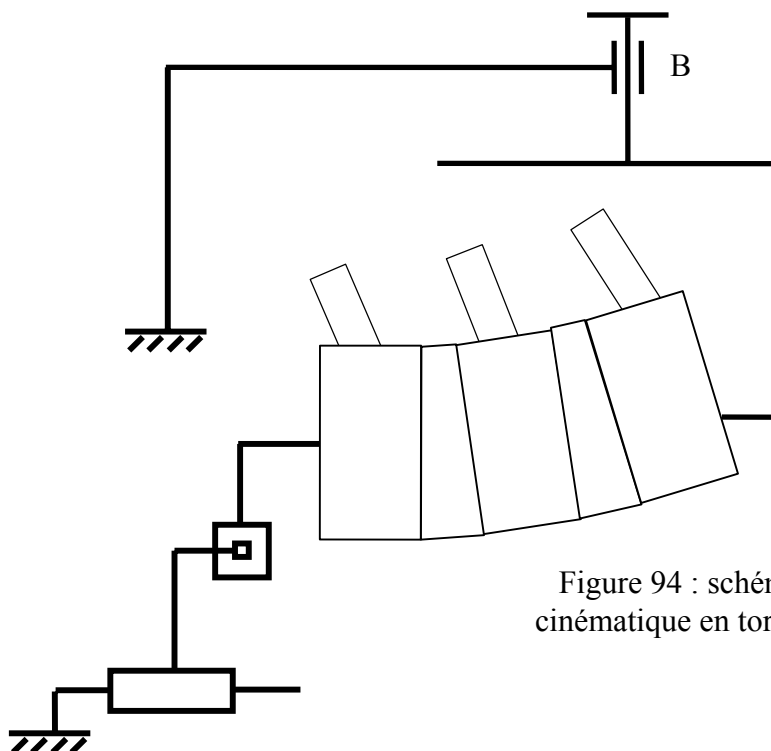


Figure 94 : schéma cinématique en torsion

2- Théorie liée à ce banc d'essais

A. Explications graphiques

Les données qui doivent être connues au cours du temps sont l'angle θ et les déplacements X et Y .

Cela est possible par l'intégration d'un capteur de rotation et de deux capteurs potentiométriques linéaires.

De plus, il faut connaître à l'instant initial, la position des points A et B dans le repère (x, y) .

Connaissant la position de B à t_0 , on peut tracer le schéma suivant en utilisant les informations des capteurs linéaires (données X et Y) :

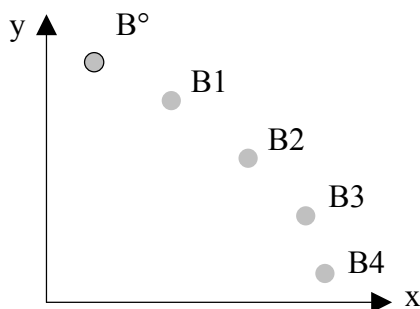


Figure 95 : trace des points B au cours du temps

Connaissant la variation de l'angle θ au cours du temps on a :

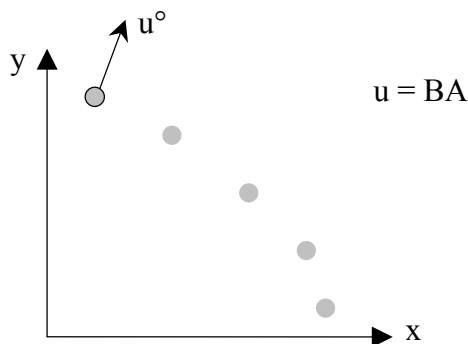


Figure 96 : construction du vecteur BA initial

On passe de la position U_i à U_{i+1} par une rotation de centre B_i et d'angle $\theta_{i+1} - \theta_i$.

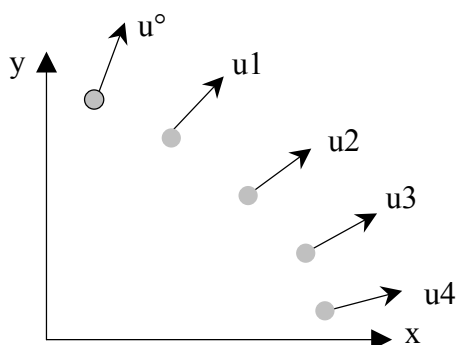


Figure 97 : évolution du vecteur BA au cours du temps

Nous pouvons maintenant connaître le lieu des centres instantanés de rotation de la vertèbre supérieure par rapport à la vertèbre inférieure dans le repère(x, y).

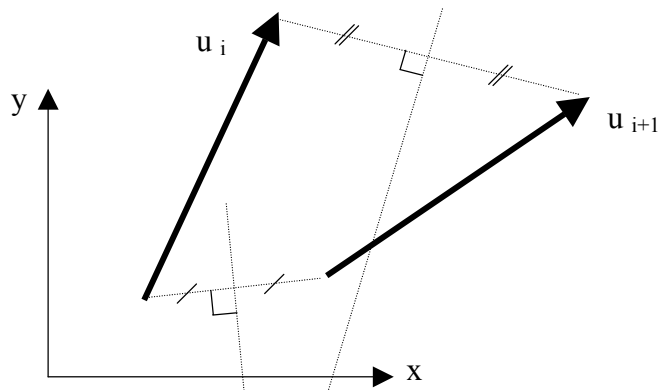


Figure 98 : construction du CIR pour un instant donné

● Tracé du CIR entre t_i et t_{i+1}

Le CIR moyen (ou, ici, la trace de l'axe de rotation moyen dans le plan sagittal) sera utilisé pour positionner le segment sur le banc dynamique. Il correspond au barycentre de tous points acquis.

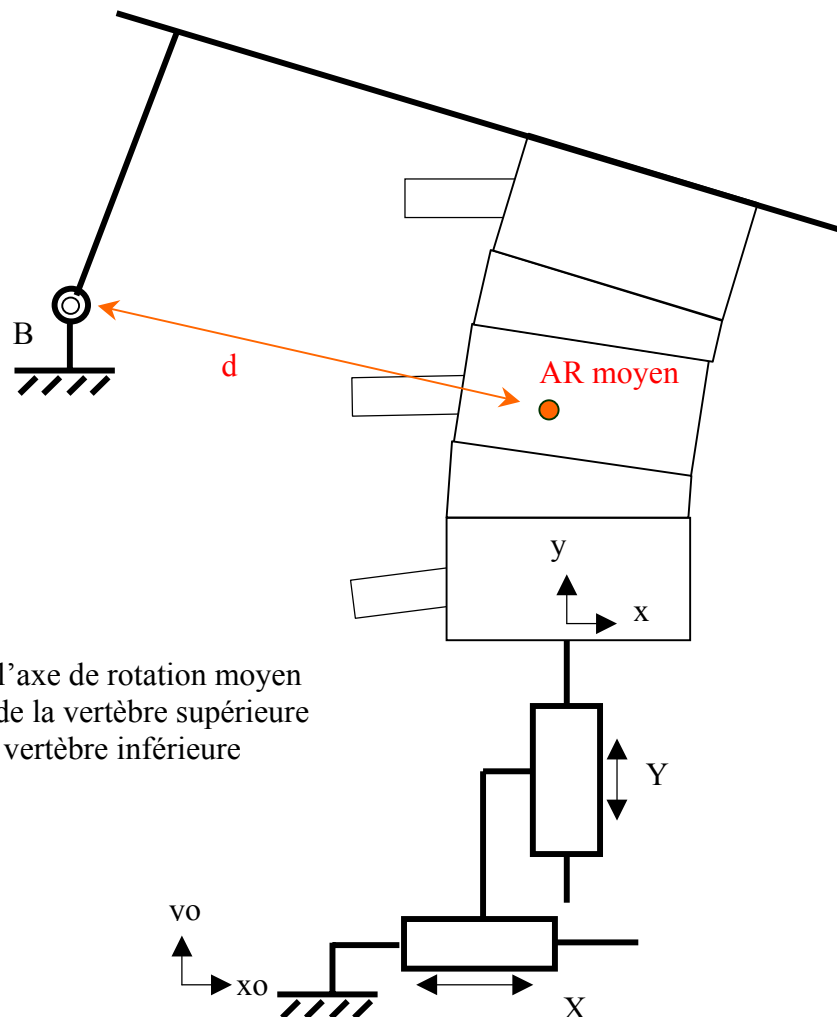


Figure 99 : trace de l'axe de rotation moyen dans le plan sagittal de la vertèbre supérieure par rapport à la vertèbre inférieure

B. Explications analytiques

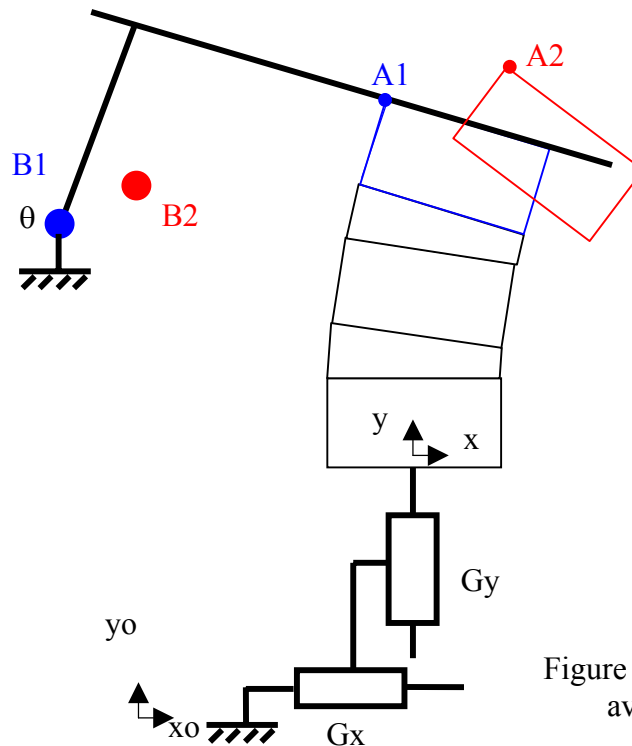


Figure 100 : vertèbre supérieure avant et après rotation

Recherchons les coordonnées de I, centre instantané de rotation (CIR) du mouvement de la vertèbre supérieure par rapport à la vertèbre inférieure **dans le repère lié à la vertèbre inférieure (x,y)**.

La position initiale de la vertèbre supérieure est à gauche et sa position finale à droite.

Coordonnées de B2:

$$X_{b2} = X_{b1} + G_x$$

$$Y_{b2} = Y_{b1} + G_y$$

Coordonnées de A2:

$$X_{a2} = X_{b2} + (B1A1) * \sin(\theta)$$

$$Y_{a2} = Y_{b2} + (B1A1) * \cos(\theta)$$

Equation de la médiatrice de [A1A2]:

Un vecteur directeur \vec{u} de cette médiatrice peut s'écrire : (1 , a).

✓ $A1A2$ est perpendiculaire à \vec{u} . Donc $A1A2 \cdot \vec{u} = 0$

$$x_{a2} - x_{a1} + a(y_{a2} - y_{a1}) = 0$$

✓ La médiatrice passe par le milieu du segment [A1,A2]

$$\frac{y_{a2} + y_{a1}}{2} = a \times \frac{x_{a2} + x_{a1}}{2} + b$$

Nous avons donc les cas suivants:

- Si $ya_2 - ya_1 \neq 0$

$$a = \frac{xa_1 - xa_2}{ya_1 - ya_2}$$

$$b = \frac{ya_2 + ya_1}{2} + \frac{xa_2^2 - xa_1^2}{2(ya_2 - ya_1)}$$

- Si $ya_1 = ya_2$ et $xa_2 \neq xa_1$
 $a = \infty$ et on a une droite verticale $y = \frac{xa_1 + xa_2}{2}$

- Si $ya_1 = ya_2$ et $xa_2 = xa_1$
Les points sont confondus \Rightarrow changer de coordonnées

Coordonnées de I

Equation de la médiatrice de A₁A₂ : $y = a_a \times x + b_a$

Equation de la médiatrice de A₁A₂ : $y = a_b \times x + b_b$

Le CIR est à l'intersection de ces deux médiatrices soit : $a_a \times x + b_a = a_b \times x + b_b$

D'où :

- Si $a_a \neq a_b$

$x_i = \frac{b_b - b_a}{a_a - a_b} \quad \text{et} \quad y_i = a_a \times x_i + b_a$
--

- Si $a_a = a_b$ et $b_a \neq b_b$
Il n'y a pas de centre de rotation

- Si $a_a = a_b$ et $b_a = b_b$
Les droites sont confondues, il faut changer de point.

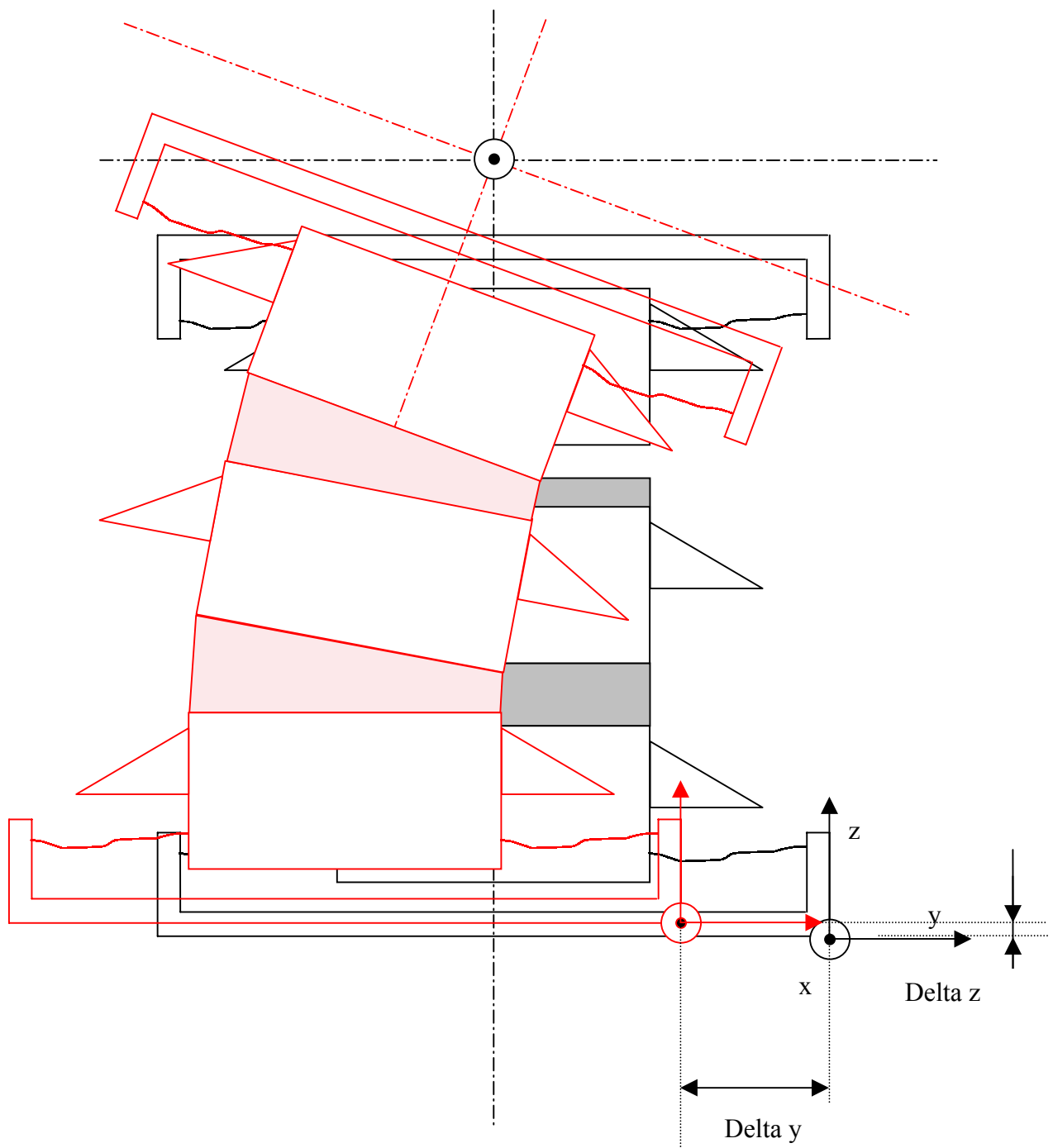
3- Les trois modes de sollicitation

A. L'inflexion latérale

Inflexion pure : rotation d'axe x (cisaillement d'axe x négligeable)

⇒ élimination de la compression d'axe z et du cisaillement d'axe y

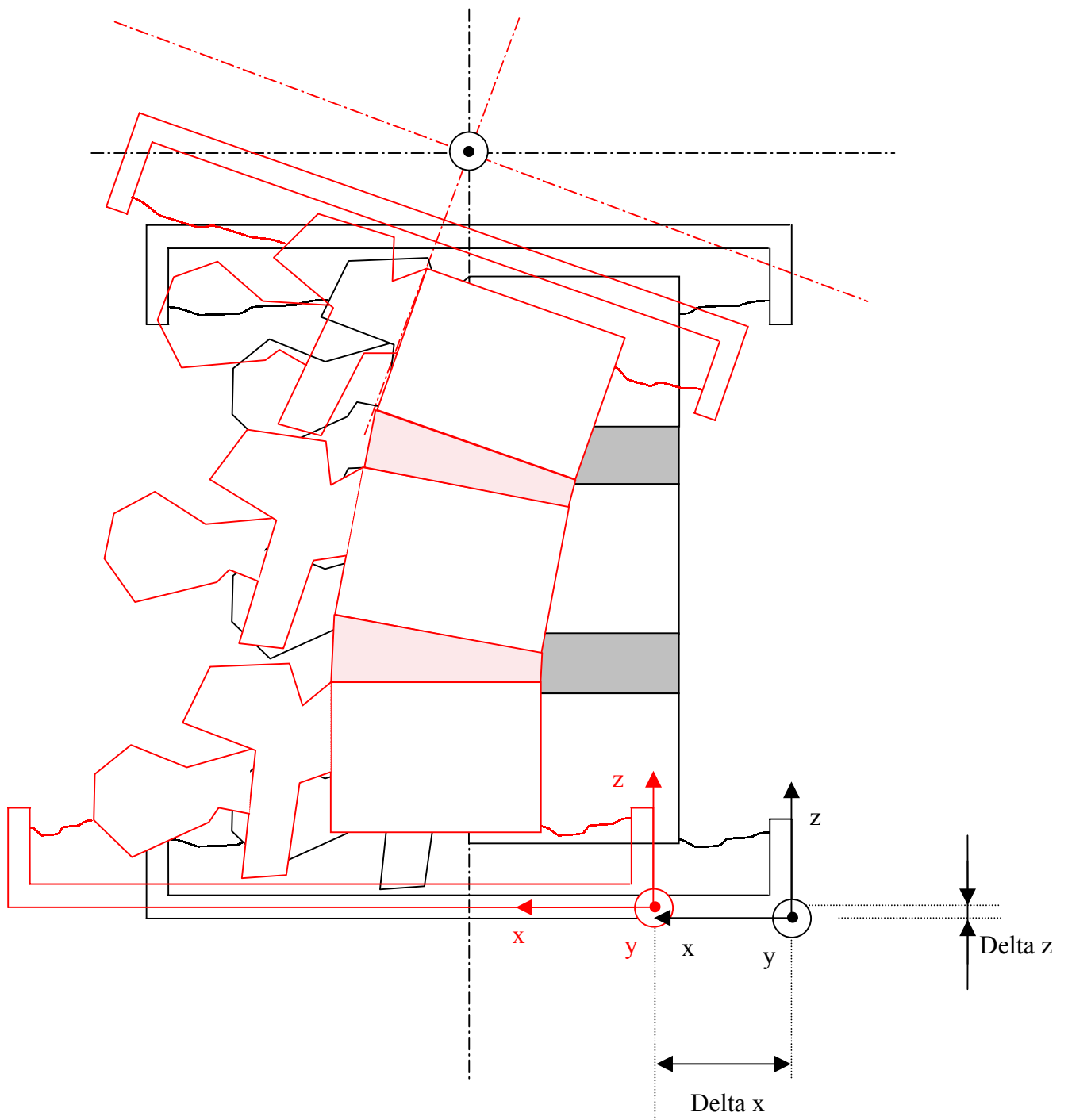
Figure 101 : position initiale et après inflexion



B. La flexion et l'extension

Flexion pure : rotation d'axe y (cisaillement d'axe y négligeable)
⇒ élimination de la compression d'axe z et du cisaillement d'axe x

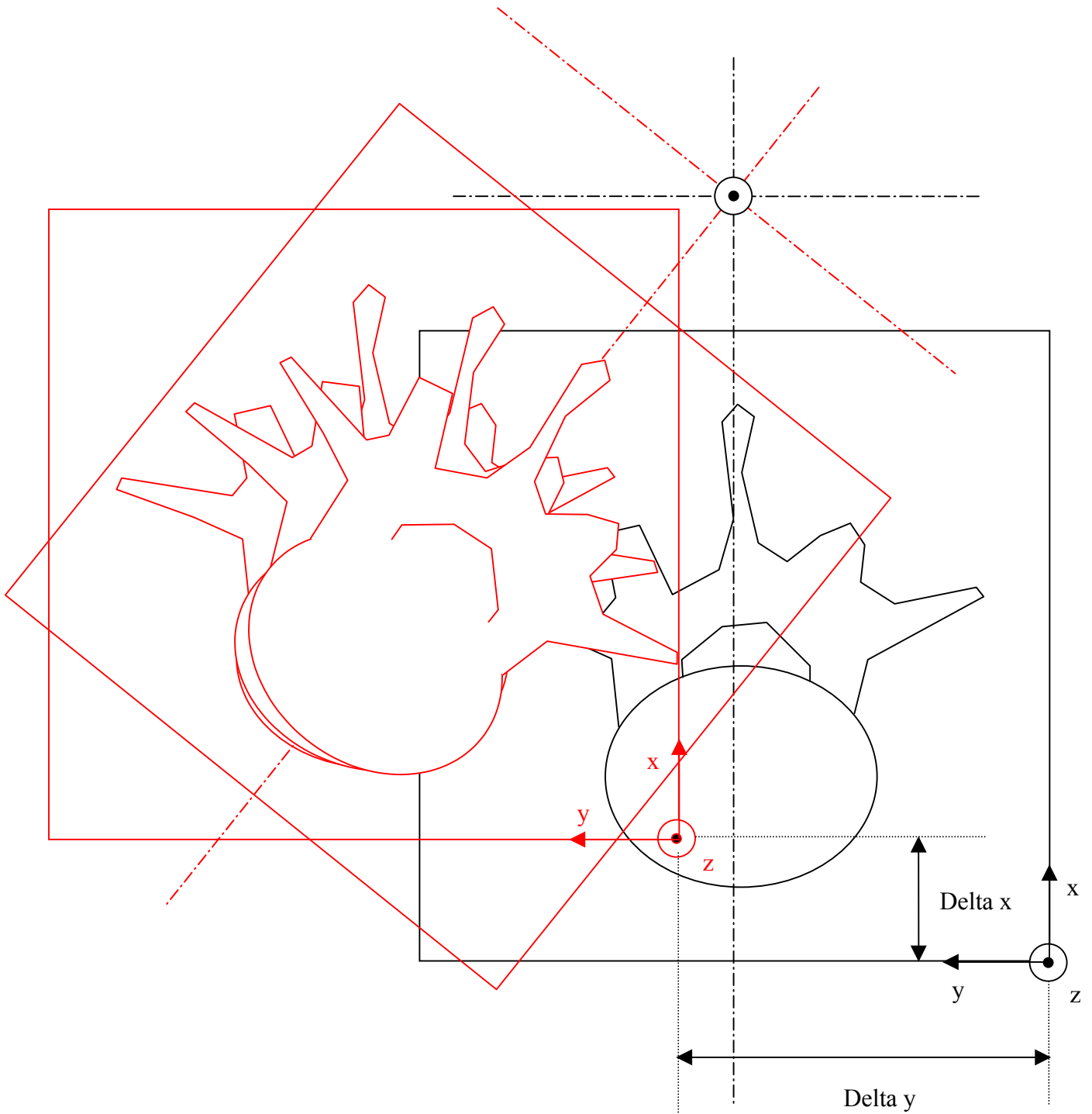
Figure 102 : position initiale et après flexion



C. La torsion

Torsion pure: rotation d'axe z (compression d'axe z négligeable)
⇒ élimination du cisaillement d'axe x et du cisaillement d'axe y

Figure 103 : position initiale et après torsion



4- Un point commun : axe de sollicitation et degrés de liberté

Il est à remarquer que, pour les 3 modes de sollicitation, l'axe de sollicitation est orthogonal au plan formé par les 2 degrés de liberté que l'on veut donner à l'échantillon vertébral.

Aussi, il est plus simple de prévoir un unique système comprenant un axe de sollicitation (dit axe moteur) et un ensemble de glissières croisées (table XY).

C'est donc l'échantillon qui doit pouvoir se positionner pour permettre au système de le solliciter selon les 3 modes, tout en conservant le même axe moteur et la même table XY.

C'est l'idée du « cube » que l'on positionne sur 3 faces :

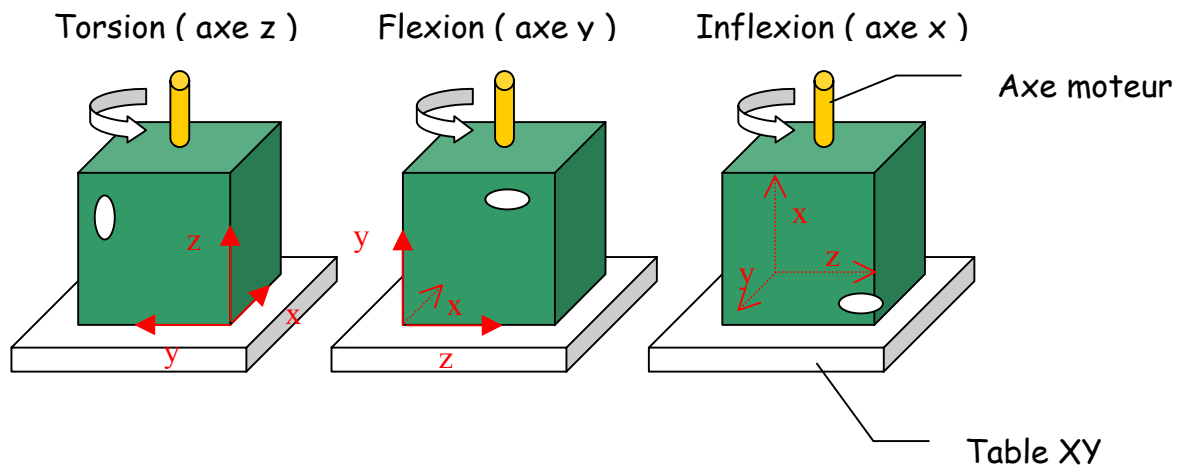
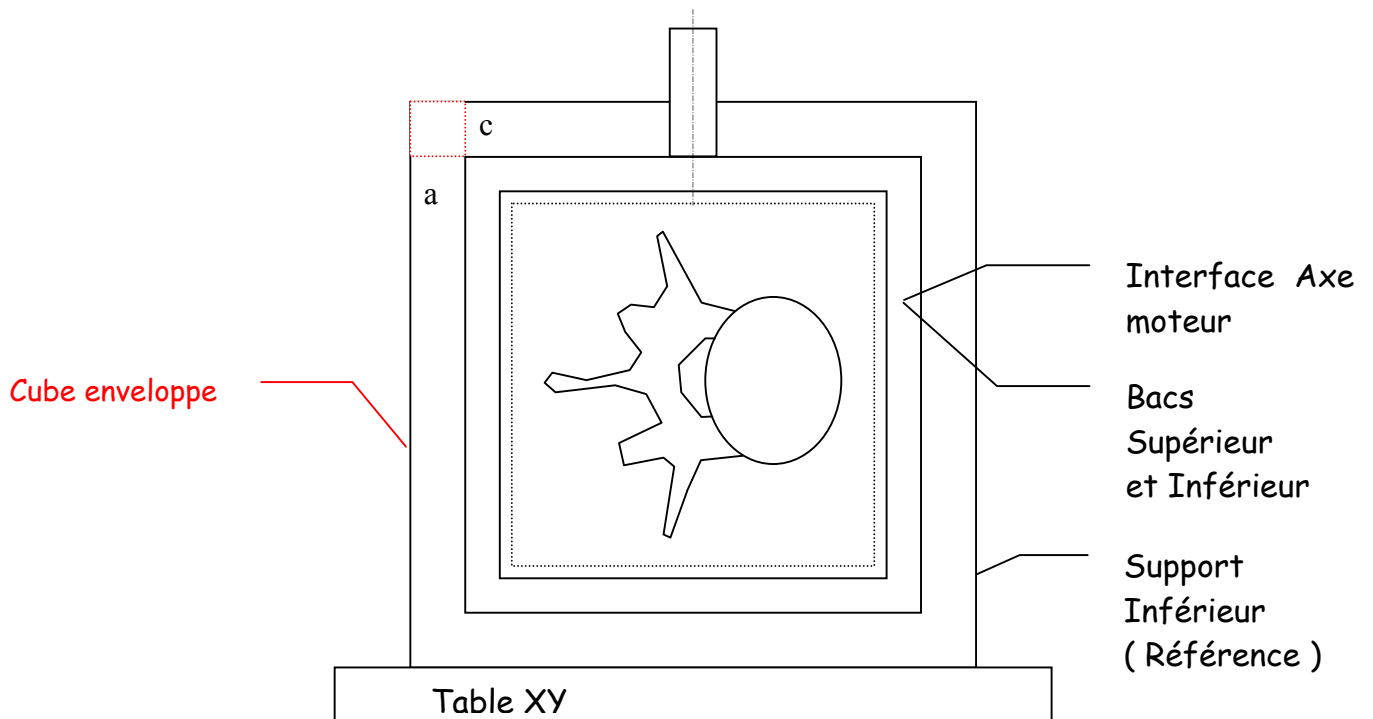
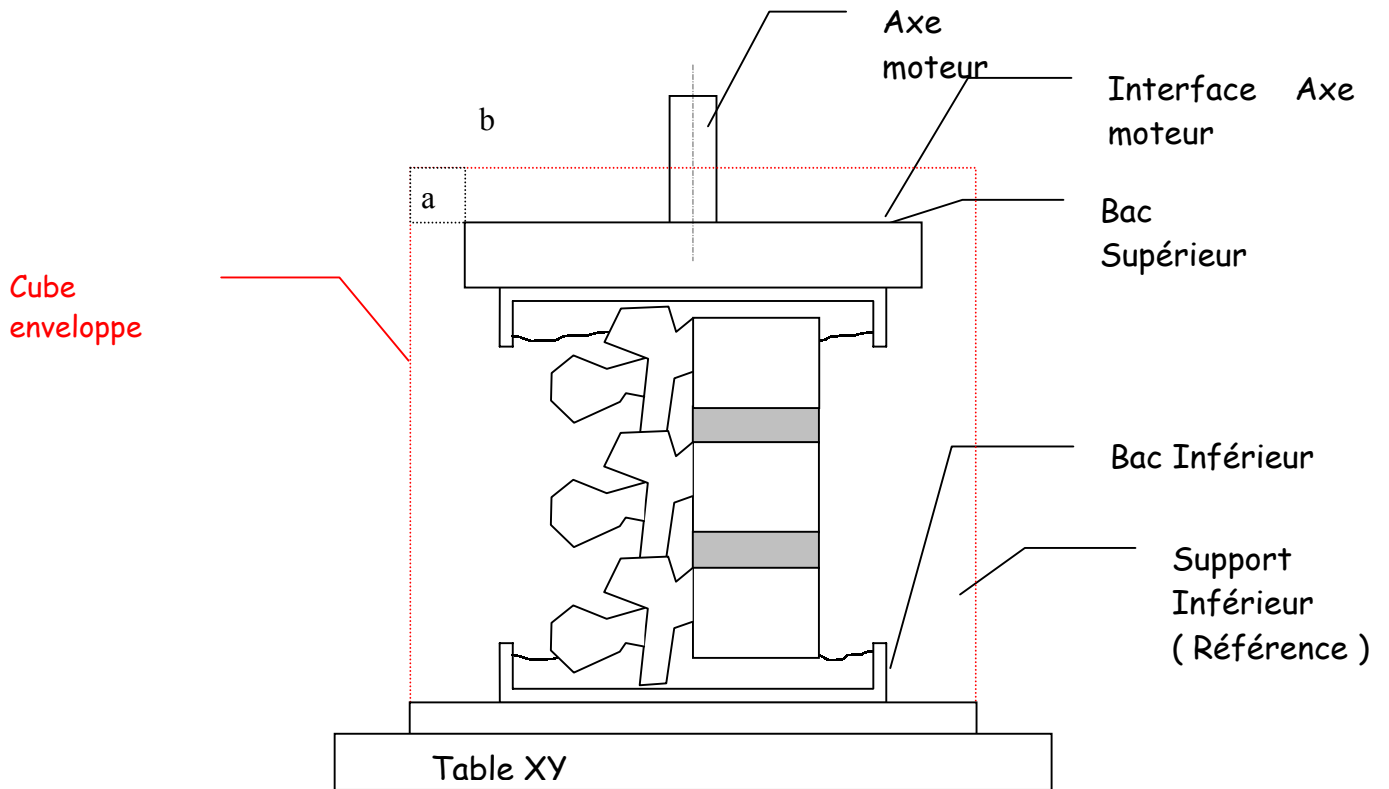
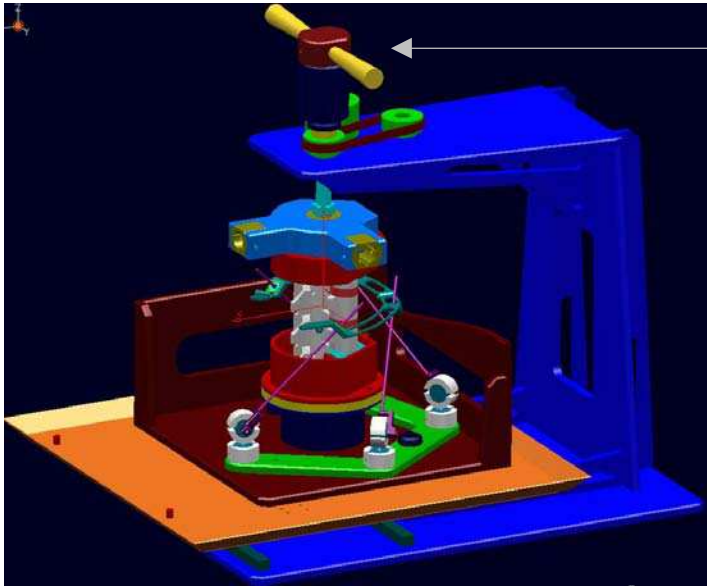


Figure 104 : représentation du cube enveloppe

Dans le cas présent, il s'agit d'un cube virtuel car la face sollicitée ne peut pas être de même dimension que la face de référence : on parle de cube enveloppe (trois faces d'appuis, trois faces motrices opposées : voir page suivante).



Les 3 configurations qui en résultent :



L'opérateur sollicite le spécimen par l'intermédiaire de cette poignée

Figure 107 : **Torsion**

La sollicitation est une rotation d'axe z.
Le bâti de l'ensemble de mesure repose sur sa face opposée.

Figure 108 : **Inflexion latérale**

La sollicitation est une rotation d'axe x.
Le bâti de l'ensemble de mesure repose sur sa face opposée.

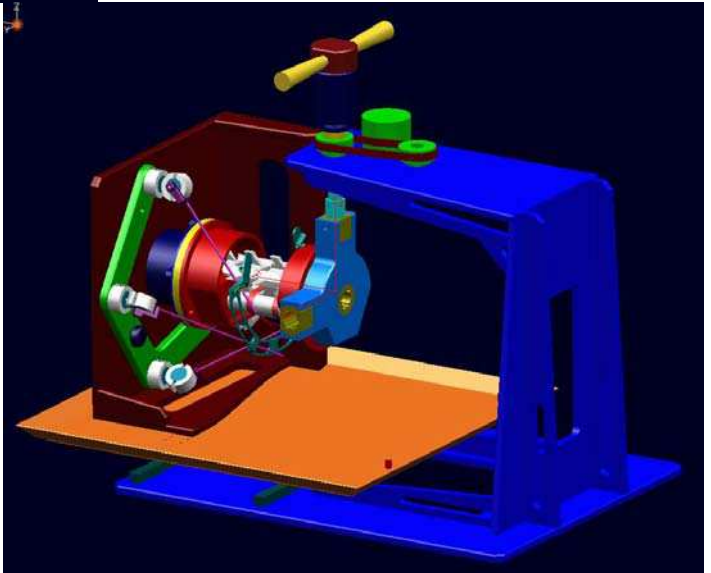
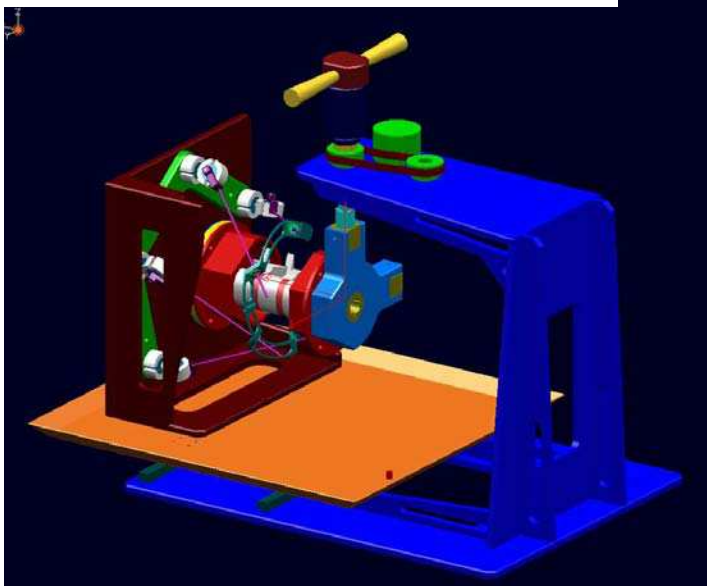
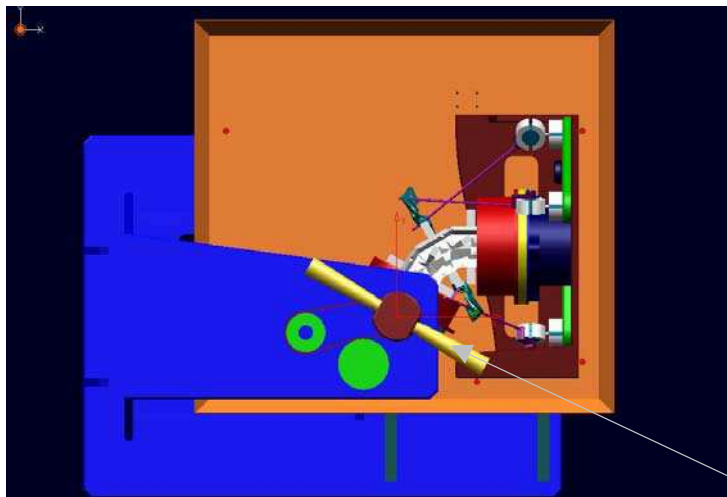


Figure 109 : **Flexion**

La sollicitation est une rotation d'axe y.
Le bâti de l'ensemble de mesure repose sur sa face opposée.



5- Fonctionnement du banc de test



Inflexion latérale

Figure 110

Angle de commande : $+ 60^\circ$
Angle du cadre de mesure : $+ 30^\circ$

L'opérateur sollicite le spécimen par l'intermédiaire de cette poignée

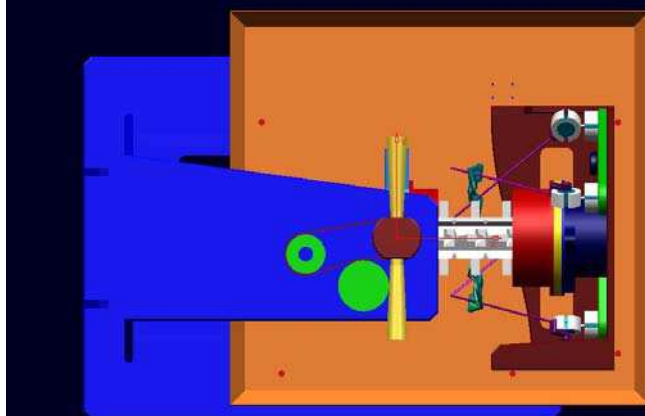


Figure 111

Angle de commande : 0°
Angle du cadre de mesure : 0°

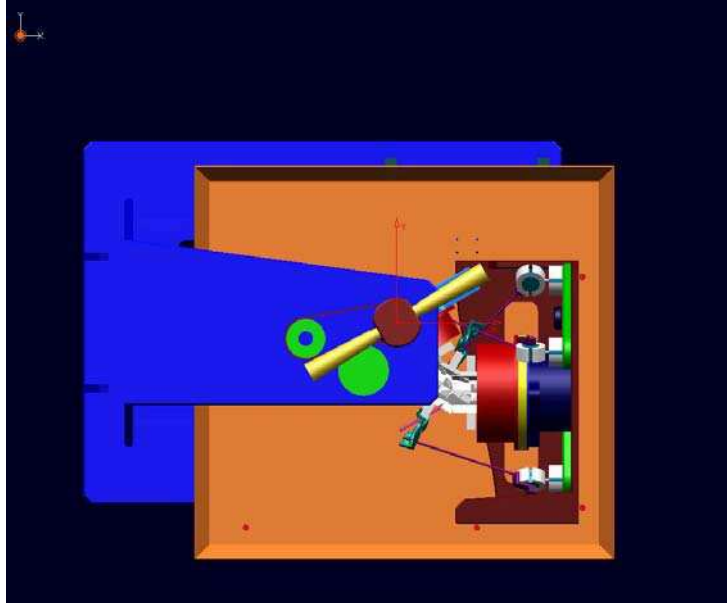


Figure 112

Angle de commande : $- 60^\circ$
Angle du cadre de mesure : $- 30^\circ$

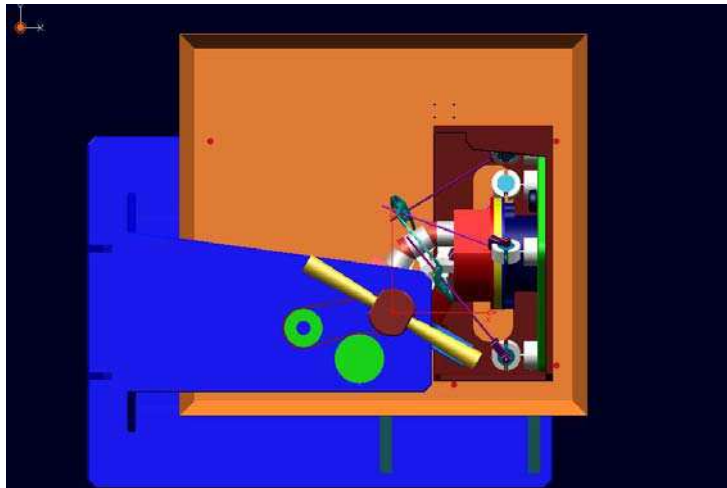


Figure 113

Angle de commande : + 60°
Angle du cadre de mesure : + 30°

Flexion avant / arrière

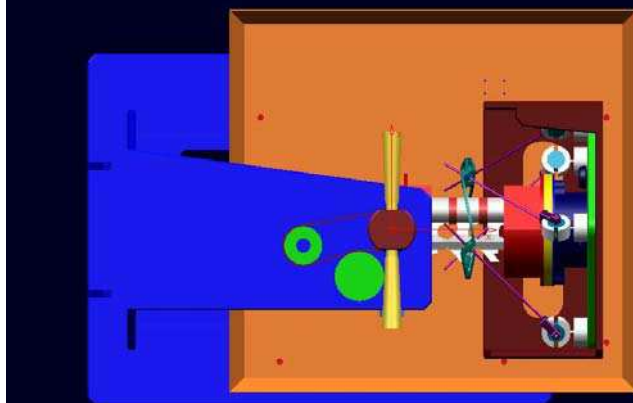


Figure 114

Angle de commande : 0°
Angle du cadre de mesure : 0°

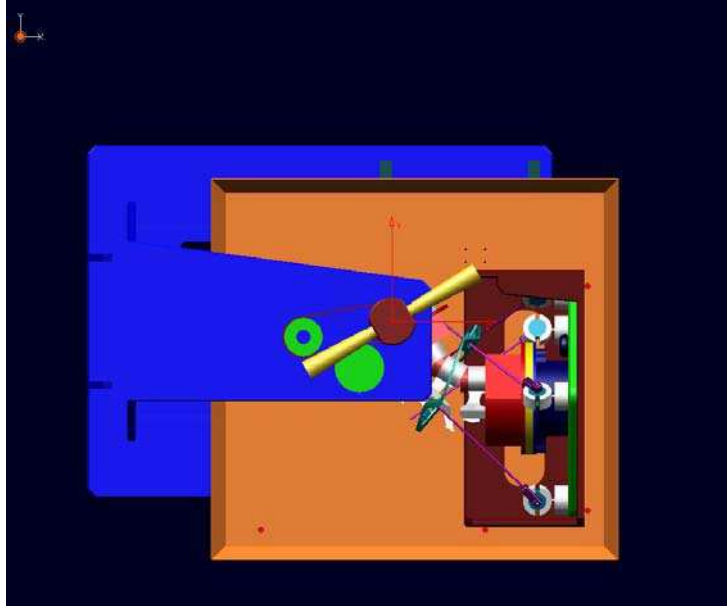


Figure 115

Angle de commande : - 60°
Angle du cadre de mesure : - 30°

6- Capteur de couple

Un capteur de couple a été incorporé à la poignée motrice.

Ainsi, nous pouvons avoir une information supplémentaire sur le comportement en statique du segment vertébral ainsi que les amplitudes maximales dans chaque mode.

Nous pourrions en extraire des courbes donnant l'amplitude de rotation du segment en fonction du couple exercé par l'opérateur. A noter que l'opérateur était toujours le même et qu'il n'avait pas reçu de consigne sur la façon d'appliquer ce couple excepté le fait de ne pas léser le spécimen.

7- Photos finales du banc



Figure 116

Banc d'essai sans spécimen

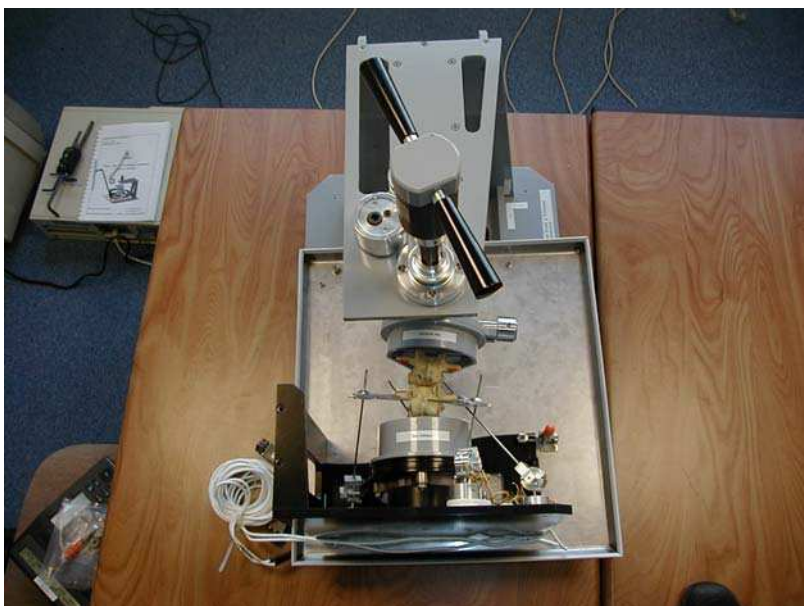


Figure 117

Mode d'inflexion latérale



Figure 118
Mode de flexion - extension

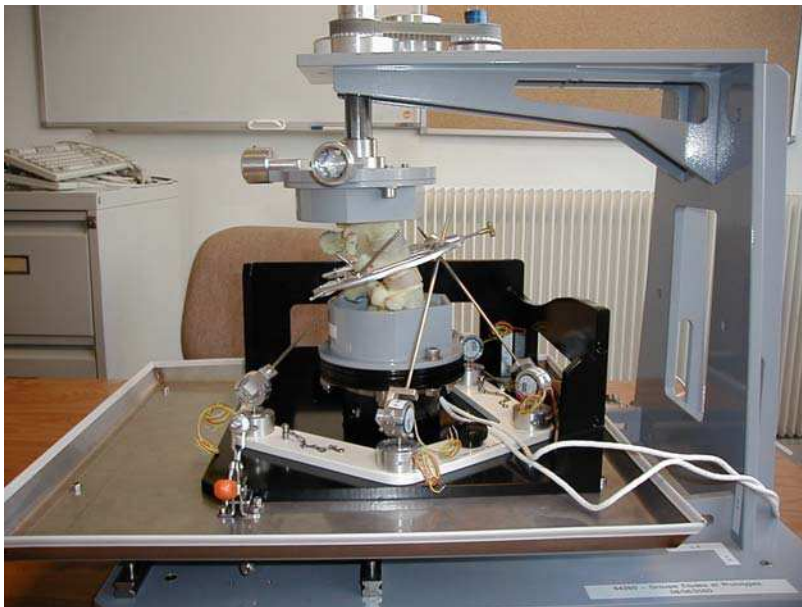


Figure 119
Mode de torsion



Figure 120
Bac recevant le spécimen



Figure 121
Support « cube enveloppe »



Figure 122
Poignée motrice avec capteur de couple.
capteur de couple
capteur de rotation

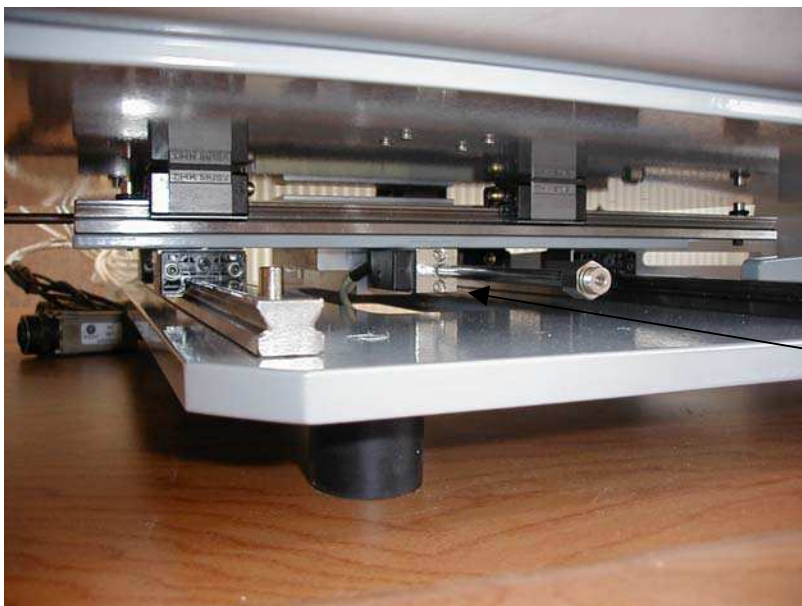


Figure 123
Glissières de la table croisée
Capteur linéaire

1- Nature et objectif des essais

Afin de valider le modèle de rachis thoracique et lombaire à venir, il faut arriver à quantifier un certain nombre de caractéristiques de la colonne vertébrale. Pour valider le modèle d'un point de vue cinématique, il faut connaître le mouvement de cette colonne pour des sollicitations proches de celles rencontrées lors d'un choc automobile. Comme énoncé dans le cahier des charges, nous avons choisi de tester des segments de trois vertèbres afin de retirer des informations sur le mouvement de la vertèbre centrale à l'aide du cadre de mesure. Pour une validation sur le plan lésionnel, nous disposons de deux capteurs 6 axes (figure 91), fixés sur les vertèbres supérieure et inférieure, qui nous permettent de connaître les charges supportées par les vertèbres.

En plus de cela, les tests seront faits par sections ligamentaires successives. Ainsi nous serons capables, d'une part, de quantifier l'influence cinématique des ligaments que nous aurons sectionnés par observation des trajectoires de la vertèbre centrale et, d'autre part, de quantifier leur influence sur un plan lésionnel en observant les différences d'efforts et de moments enregistrées par les capteurs 6 axes.

Grâce à ces résultats, nous aurons les données expérimentales nécessaires pour valider le modèle thoracique et lombaire sur le plan cinématique et lésionnel.

Au cours de cette campagne, deux types d'essais seront réalisés :

- Tout d'abord, des essais en statique pour déterminer le lieu des axes instantanés de rotation du segment vertébral ainsi que ses amplitudes maximales de rotation suivant les modes de flexion / extension, inflexion et torsion. Les résultats sont immédiatement exploités lors de l'essai dynamique. La sollicitation est appliquée par un opérateur par l'intermédiaire d'une poignée. L'opérateur était toujours le même et il n'avait pas reçu de consigne sur la façon d'appliquer ce couple excepté le fait de ne pas léser le spécimen tout en atteignant les amplitudes maximales de rotation. En plus des axes de rotation et des amplitudes, nous mesurons d'autres informations complémentaires qui sont, le couple exercé par l'opérateur au niveau de la vertèbre supérieure, les efforts et les moments supportés par la vertèbre inférieure ainsi que le déplacement de la vertèbre centrale. Ces données complémentaires ne sont pas directement exploitées pour l'essai dynamique. La fréquence d'acquisition est de 10 Hz.
- Ces essais seront suivis d'essais dynamiques qui serviront à caractériser le comportement d'un segment vertébral dans des conditions de crash automobile. Le spécimen sera testé dans une configuration saine puis, il subira des sections ligamentaires successives :
 - ◆ Section du ligament épineux
 - ◆ Section des ligaments transverses
 - ◆ Section du ligament jaune
 - ◆ Section des ligaments capsulaires.

La fréquence d'acquisition est de 10000 Hz.

Le choix des sections n'est pas prédéfini et cela dépend de la sollicitation (par exemple, en flexion, le ligament épineux était sectionné en premier), et de l'état du spécimen. La section est totale pour les deux étages vertébraux.

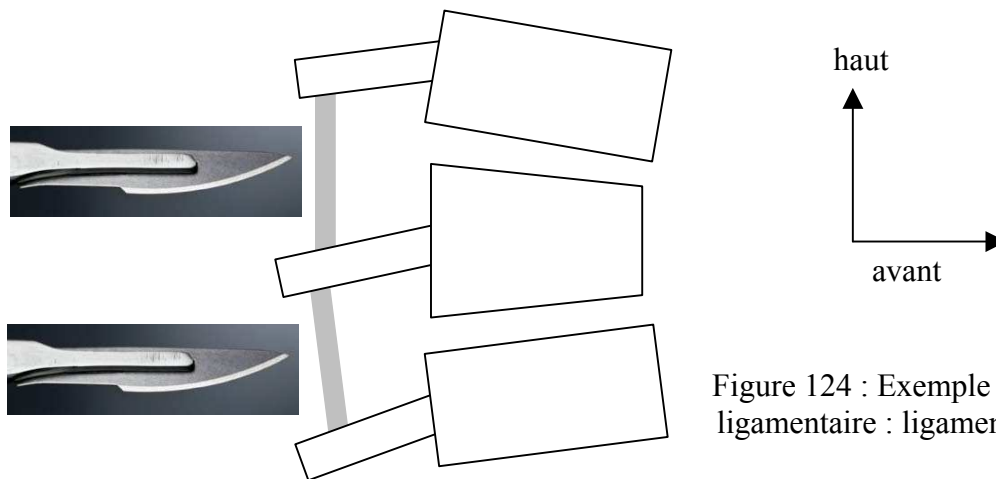


Figure 124 : Exemple de section ligamentaire : ligament épineux

Les modes de sollicitations dynamiques sont de trois types : flexion, inflexion latérale et torsion.

Entre les essais sur un même spécimen, l'angle dynamique imposé est identique et les ligaments ne doivent pas être lésés involontairement au cours de l'essai. Après chaque section volontaire, un nouvel essai identique à celui de la configuration saine sera effectué. Chaque spécimen passera sur le banc dynamique immédiatement après les tests sur le banc statique.

La tentation serait d'aller plus loin en configuration lésée afin d'obtenir une réponse en effort plus significative, mais le fait de changer l'amplitude du mouvement ferait travailler d'autres fibres ligamentaires ce qui invalidera les comparaisons.

Bien que les axes de rotations propres du segment varient entre les différentes configurations (saine et lésées) en raison de la destruction de composants structuraux, nous avons fait le choix de ne pas repositionner le spécimen par rapport à l'axe moteur de rotation du banc d'essais pour des raisons de complexité et de durée des expérimentations.

Afin de se rapprocher des conditions automobiles, nous avons souhaité tester les spécimens suivant une courbure assise. Nous avons pour cela utilisés la courbure du modèle être humain qui est représenté en position assise.

Enfin, aucune précharge ne sera appliquée sur le spécimen en raison de la difficulté de réalisation, de l'aggravation lésionnelle potentielle qu'elle entraîne au cours de l'essai et enfin du manque de réalisme par rapport aux situations réelles (figure 125).

Ce manque de réalisme est lié à la direction de la précharge.

Lorsque l'on est assis dans un siège, la précharge (poids du corps) est toujours verticale, même au cours d'un mouvement. Or le montage induirait une précharge dont la direction varierait au cours du mouvement

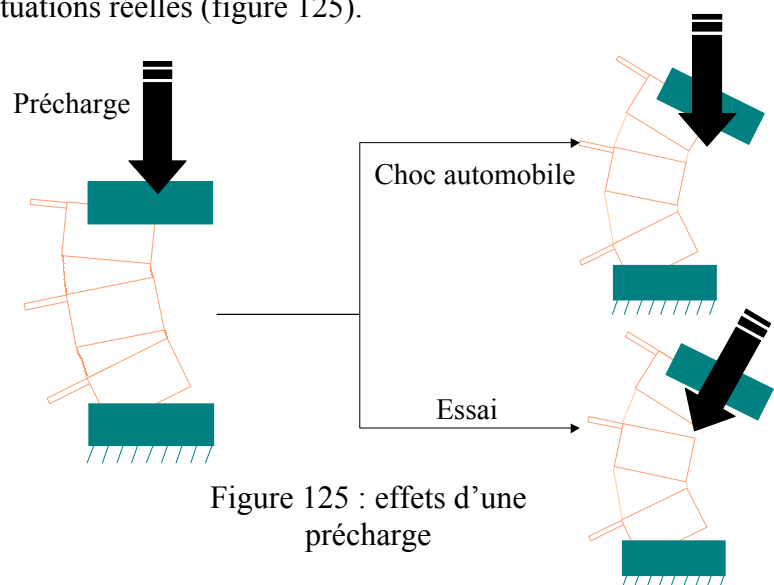


Figure 125 : effets d'une précharge

A. Spécimens utilisés

Tableau 27 : segments thoraciques							
type	sollicitation	Numéro d'essai	radiographie	âge	sexe	Date décès	Date prélèvement
T3-T5	Flexion	2	Non	/	/	/	/
T3-T5	Inflexion	10	Non	/	/	/	/
T7-T9	Inflexion	12	Oui	58	H	9/6/00	23/6/00
T7-T9	Inflexion	17	Oui	89	F	9/6/00	26/6/00
T7-T9	Flexion	13	Oui	68	H	16/6/00	30/6/00
T7-T9	Flexion	15	Oui	98	F	16/5/00	30/5/00
T7-T9	Torsion	22	Oui	83	H	29/12/00	5/1/01
T10-T12	Torsion	23	Oui	66	F	30/1/01	5/1/01

Tableau 28 : segments thoraco-lombaires							
type	sollicitation	Numéro d'essai	radiographie	âge	sexe	Date décès	Date prélèvement
T11-L1	Inflexion	11	Oui	58	H	9/6/00	23/6/00
T11-L1	Inflexion	18	Oui	83	H	29/12/00	5/1/01
T11-L1	Inflexion	9	Non	/	/	/	/
T11-L1	Flexion	14	Oui	68	H	16/6/00	30/6/00
T11-L1	Flexion	16	Oui	88	F	4/3/01	6/3/01
T11-L1	Flexion	3	Non	/	/	/	/
T11-L1	Torsion	24	Oui	79	F	21/2/01	23/2/01
T11-L1	Torsion	21	Non	/	/	/	/

Tableau 29 : segments thoraciques							
Type	sollicitation	Numéro d'essai	Radiographie	âge	sexe	Date décès	Date prélèvement
L2-L4	Inflexion	5	Oui	68	H	16/6/00	23/6/00
L2-L4	Inflexion	8	Oui	89	F	9/6/00	30/6/00
L2-L4	Inflexion	7	Non	/	/	/	/
L2-L4	Flexion	4	Oui	98	F	16/5/00	30/5/00
L2-L4	Flexion	6	Oui	66	F	14/8/00	24/8/00
L2-L4	Flexion	1	Non	/	/	/	/
L2-L4	Torsion	20	Oui	66	H	5/1/01	10/1/01
L2-L4	Torsion	19	Non	/	/	/	/

Note : les pièces sans informations sont formolées. La quasi-totalité des pièces n'avait aucune structure inter-transversaire en raison de la difficulté de préservation de cette zone lors du prélèvement. **Nous n'avons donc pas pu tester les influences des ligaments transverses lors des essais (excepté pour un spécimen).**

B. Conditions aux limites

✓ déplacements

Cette étude sur le comportement du rachis **en position assise** impose de choisir un positionnement particulier des segments dans leurs bacs. L'observation des angles intervertébraux du modèle « être humain » [LIZ-26] représentatif d'un être humain **en position assise** a permis d'obtenir les inclinaisons relatives des segments T7-T9, T11-L1 et L2-L4.

Figure 126 : angles relatifs de T7-T9

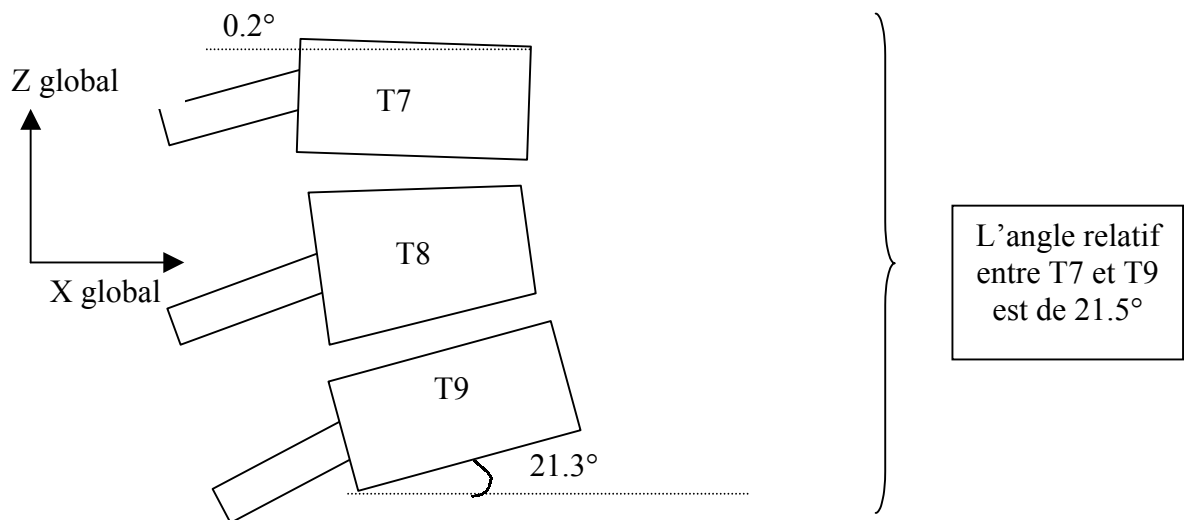


Figure 127 : angles relatifs de T11-L1

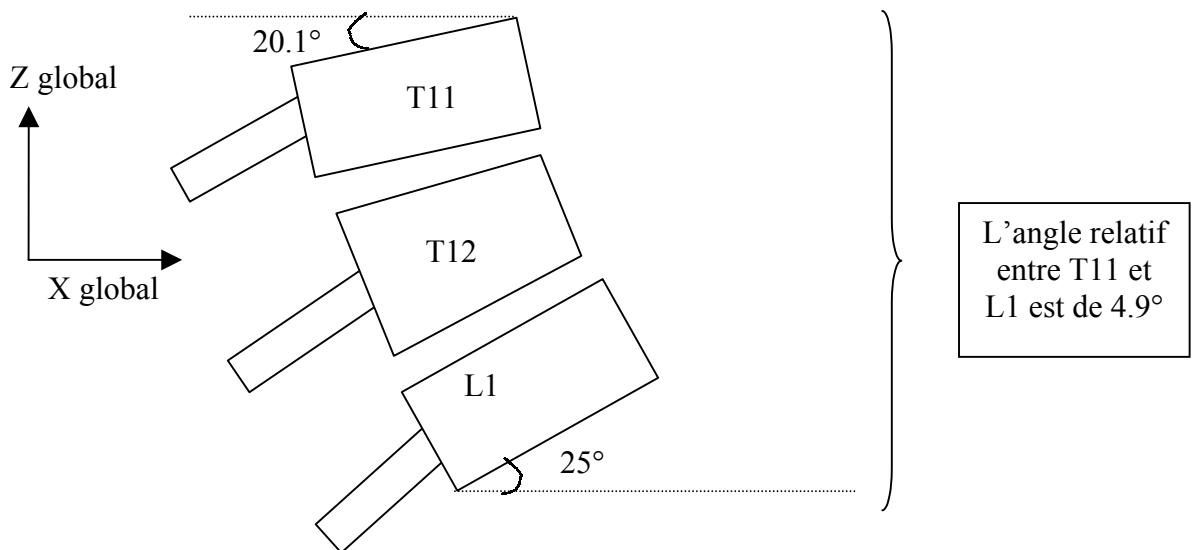
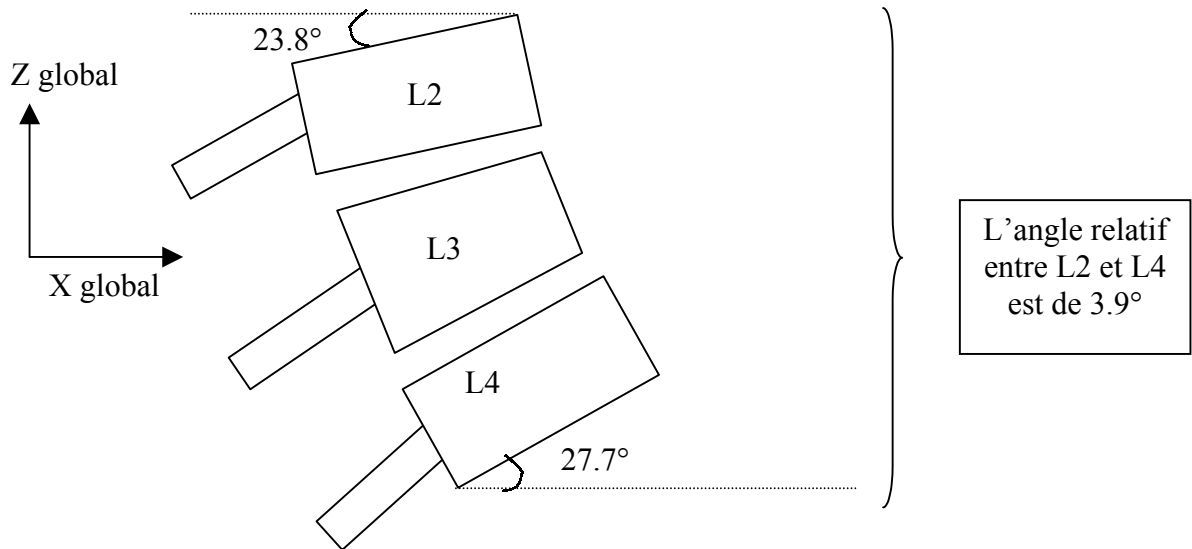


Figure 128 : angles relatifs de L2-L4



Ces inclinaisons sont celles d'un individu assis dans un siège.

Il n'a pas été possible de faire intervenir lors des essais ces valeurs angulaires pour plusieurs raisons :

- Au niveau du protocole expérimental, rajouter du temps pour régler un spécimen aurait rallongé une campagne d'essais déjà importante.
- En raison du nombre de contraintes rencontrées lors de la phase de conception, il n'a pas été possible d'avoir un réglage fin de l'inclinaison des vertèbres dans les bacs. En effet, un spécimen trop incliné aurait empêché la bonne fixation de l'étrier supérieur sur la vertèbre centrale (ce dernier devant être horizontal et dans une certaine position qui a été précisément déterminée afin d'avoir un état initial connu)
- Enfin, en position assise, les inclinaisons relatives varient entre individus, d'une part, et pour un même individu suivant la posture qu'il a adoptée, d'autre part. Il serait donc inutile de vouloir prendre les inclinaisons données par le modèle comme référence.

La configuration définitive qui a été retenue est identique pour tous les spécimens :

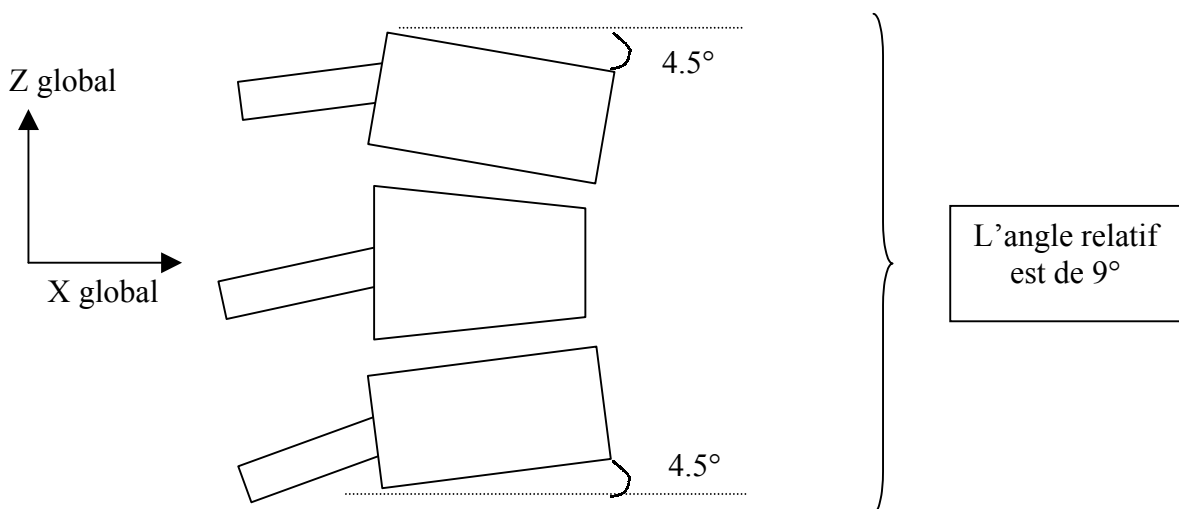


Figure 129 : angles relatifs choisis

✓ sollicitations

- La vertèbre inférieure est immobilisée. Les spécimens sont fixés dans les bancs par des vis et une résine.
- La vertèbre supérieure est sollicitée par un couple. L'axe de ce couple coïncide avec l'axe de rotation propre moyen de la vertèbre supérieure par rapport à la vertèbre inférieure suivant le mode étudié (flexion, inflexion, torsion).

C. Caractéristiques techniques des moyens de mesure

Tous les capteurs potentiométriques ont été étalonnés individuellement.

Capteur d'efforts et moments 6 axes :

- Marque : société 6 axes / modèle spécialement réalisé
- Etendue de mesure en $F_x = F_y = F_z = 10\,000\text{ N}$
- Etendue de mesure en $M_x = M_y = M_z = 400\text{ N.m}$
- Classe de précision (écart de linéarité, erreur d'hystérésis) $< 1\%$ par étendue de mesure voie par voie.
- Alimentation recommandée : 4 à 10 volts, courant continu.

Capteur de couple de la poignée du montage statique

- Marque : société RS technologies / model #071075-00301 / serial number : 3129
- Etendue de mesure : 400 N.m
- Ce capteur n'était pas spécialement acheté pour cette étude ce qui explique son surdimensionnement

Potentiomètres du cadre de mesure :

- Marque : société IC mesures / modèle RCP09
- Etendue de mesure : $\sim 330^\circ$
- Résistance : $\sim 5000\text{ ohms}$
- Vitesse angulaire maximum : 800 rad/sec
- Erreur de linéarité : $\pm 0.5\%$

Capteurs potentiométriques linéaires de la table croisée du montage statique :

- Marque : non disponible
- Etendue de mesure : 150 mm

Capteur potentiométrique angulaire du banc statique :

- Marque : non disponible
- Etendue de mesure : 330°

Capteur filaire du banc dynamique (mesure de la rotation de l'axe moteur) :

- Marque : société IC mesures / modèle PT1A / référence 10
- Etendue de mesure : 200mm soit 230° sur un diamètre 50mm (axe moteur).

2- Plan d'expérimentation

Nombre de sollicitations : 3 (Flexion, inflexion gauche et torsion gauche).

Nombre de configurations prévues : 5 (saine, lésion ligament épineux, lésion ligament transverse, lésion ligament jaune, lésion ligaments capsulaires).

Réalisation d'un essai type pour un spécimen :

Les spécimens sont conservés à -22 degrés et ils ont été régulièrement humidifiés durant les essais de façon à conserver leurs propriétés mécaniques (étude de Hirsch [HIR-19] et Tkaczuk [TKA-59]).

- Décongélation du spécimen choisi (segment de trois vertèbres) à l'air libre durant la nuit
- Préparation du spécimen
 - Dissection des parties molles (restes musculaires, graisses) de façon à nettoyer les zones ligamentaires (figure 130 et 131)
 - Prise de mesures (masse, caractéristiques géométriques)
 - Scellement du spécimen dans les bacs interfaces (figure 132)
 - Mise en place de l'étrier sur la vertèbre centrale. Lors d'essais préliminaires, des chambres de mobilités se sont formées au niveau des insertions des ancrages (figure 133). Afin d'améliorer cette tenue, nous avons utilisé un ciment de scellement prothétique (figure 134 et 135). Ce ciment n'atteignait pas le disque intervertébral.



Figure 131 : pièce T11-L1 nettoyée, vue frontale

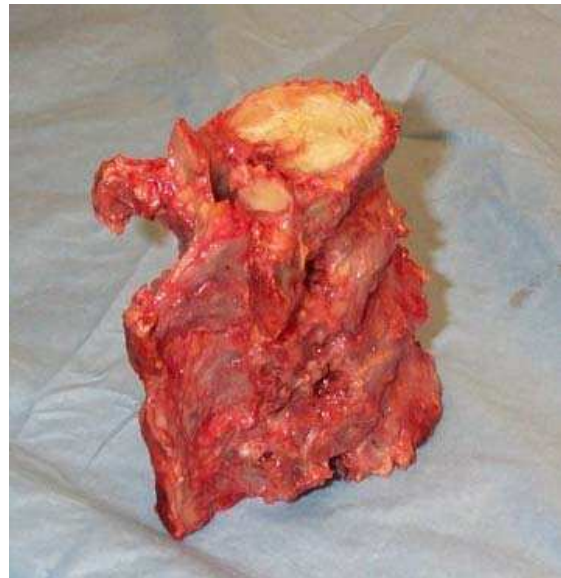
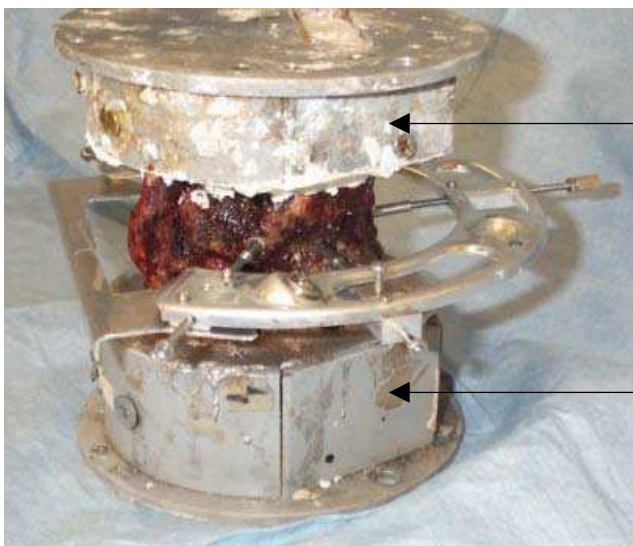


Figure 130 : pièce T11-L1 nettoyée, vue latérale



Bac interface supérieur avec scellement en sintofer de façon à diminuer la masse en mouvement

Bac interface inférieur avec scellement en métal (alliage à bas point de fusion type MCP 70)

Figure 132 : pièce préparée, avec les bacs interfaces et le cadre de mesure



Figure 133
A gauche, ancrage court et ancrage long utilisé
suivant les tailles des vertèbres
En haut, ensemble ancrage + manchon + tige

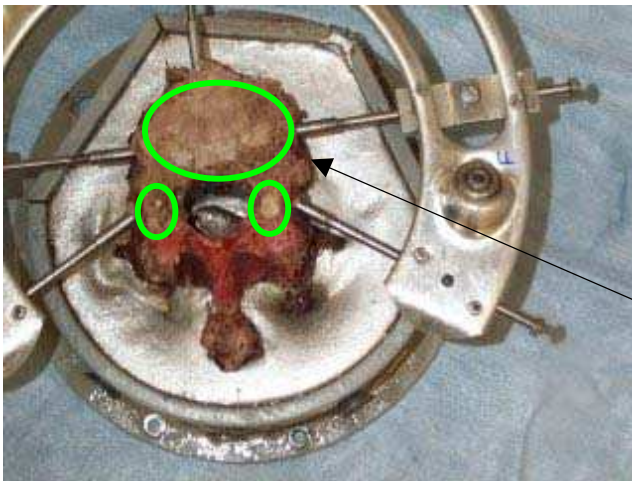


Figure 134 : coupe de la vertèbre centrale
avec ciment de fixation du cadre

ciment

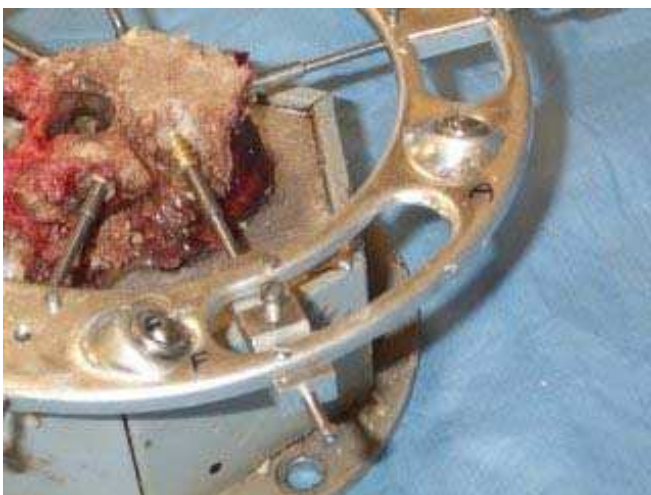


Figure 135 : coupe de la vertèbre centrale
avec ciment de fixation du cadre

- Fin de la préparation du spécimen
- Choix de la sollicitation (flexion, inflexion ou torsion)
- Essais statiques pour la sollicitation choisie
 - Réalisation d'une mesure de référence à l'aide d'un gabarit (figure 136)
 - Mesure des axes instantanés de rotation de la vertèbre supérieure par rapport à la vertèbre inférieure (figure 137 ou 138)
 - Calcul de l'axe de rotation moyen de la vertèbre supérieure par rapport à la vertèbre inférieure
 - Mesure de l'amplitude statique maximale du spécimen



Figure 136 : Essai statique (mesure de référence) en inflexion

Figure 137 : Essai statique en inflexion



Figure 138 : Essai statique en torsion

- Essais dynamiques pour la sollicitation choisie
 - réglage de la butée pour ne pas dépasser les limites physiologiques du spécimen (figure 139)
 - Test en configuration saine (figure 140, 141 ou 142)
 - Analyse lésionnelle
 - Section complète d'un ligament pour les deux étages vertébraux
 - Changement des nids d'abeilles

 - Test 1 en configuration lésée
 - Analyse lésionnelle
 - Section complète d'un ligament pour les deux étages vertébraux
 - Changement des nids d'abeilles

 - Etc...



Figure 140 : réglage de la butée



Figure 139 : Essai dynamique en torsion



Figure 141 : Essai dynamique en inflexion



Figure 142 : Essai dynamique en inflexion (zoom)

- Démontage et nettoyage

3- Repères d'interprétations des résultats expérimentaux

A. Efforts et moments

Les résultats issus du capteur supérieur sont donnés au centre de la vertèbre supérieure et les résultats issus du capteur inférieur sont donnés au centre de la vertèbre inférieure. Les efforts et les moments sont ceux des capteurs sur la pièce anatomique. L'orientation des repères est suivant le repère labo.

Ces conventions sont valables pour les essais statiques et dynamiques.

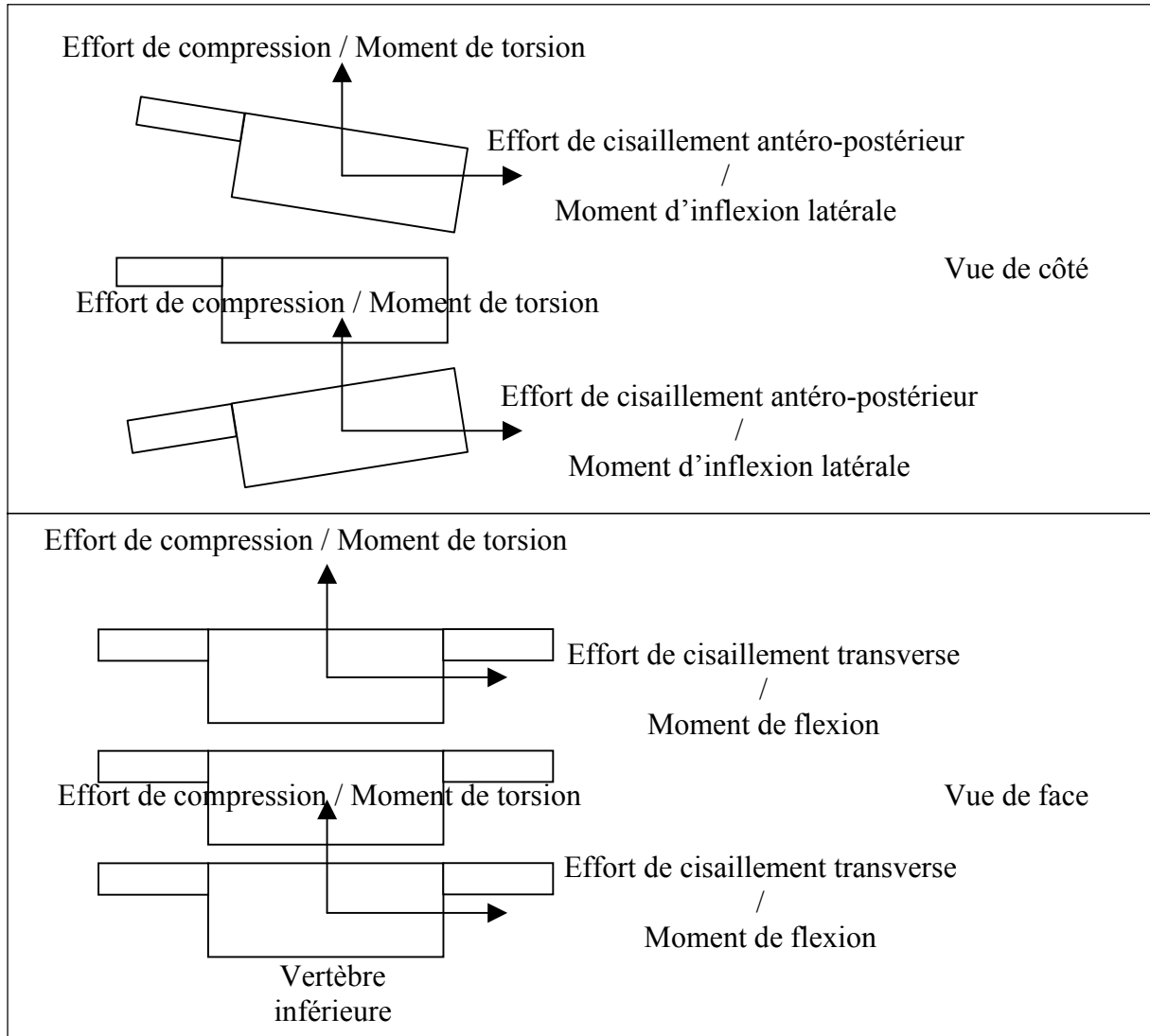


Figure 143 : conventions d'interprétations en flexion, inflexion et torsion

Pour ce qui est du capteur de couple utilisé lors des essais statiques, son orientation permet de mesurer les sollicitations dans l'axe vertical du spécimen.

B. Rotations et déplacements

Mesures relatives à la vertèbre centrale

Ces conventions sont valables pour les essais statiques et dynamiques.

Le repère d'interprétation est situé sur la vertèbre centrale. Les déplacements sont ceux du point gris (bord antérieur du plateau supérieur de la vertèbre centrale).

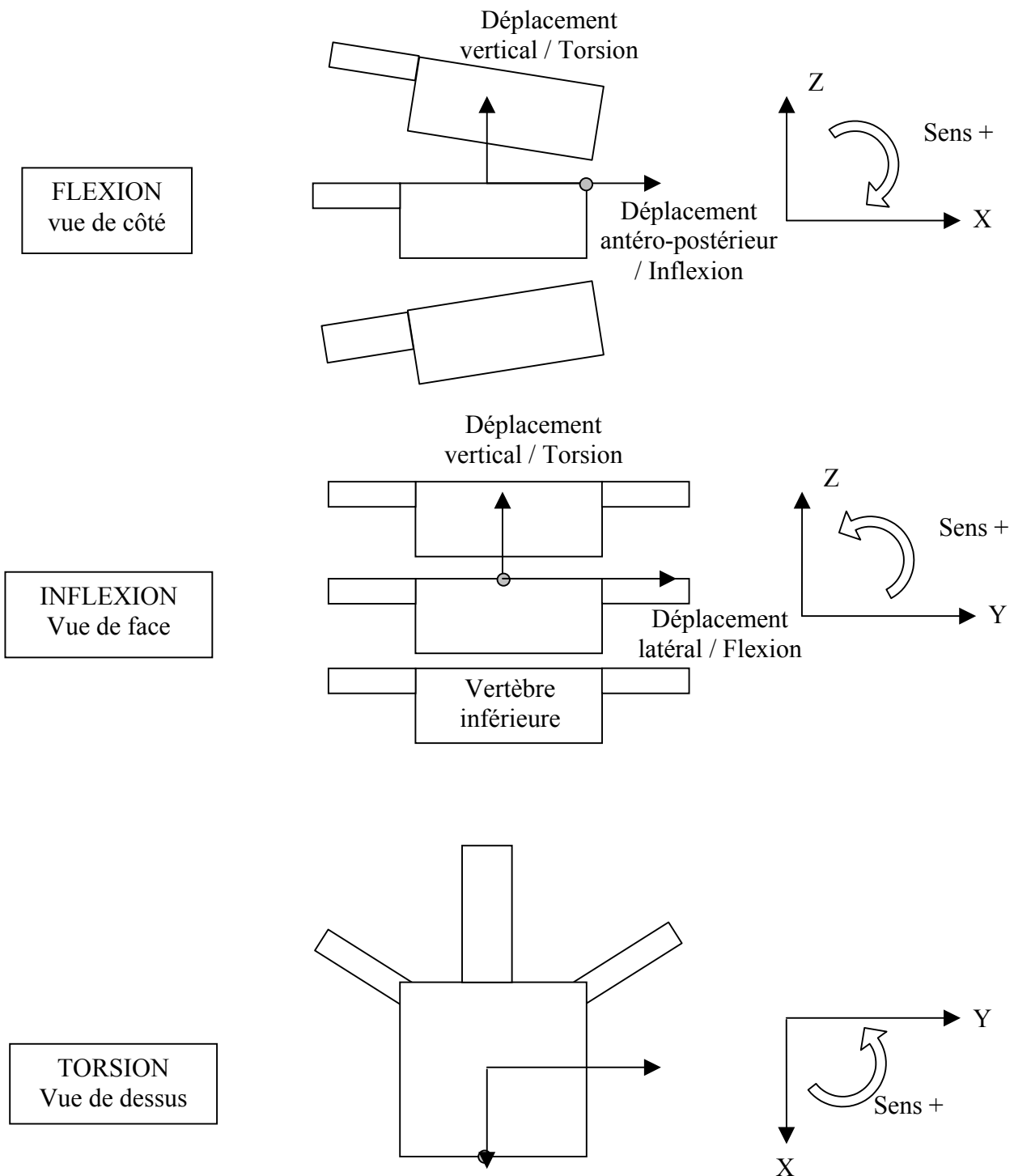


Figure 144 : conventions d'interprétations en flexion, inflexion et torsion

Les capteurs de positions angulaires situés sur le banc statique (figure 145) et le banc dynamique (figure 146) sont orientés suivant le repère laboratoire. Ainsi, il existe une légère différence entre le repère de ces capteurs et celui de la vertèbre centrale qui est due à l'orientation du spécimen par rapport au montage. Cette différence est négligeable car nous nous sommes attachés, lors de la préparation de la pièce, à la positionner en adéquation avec le repère labo.

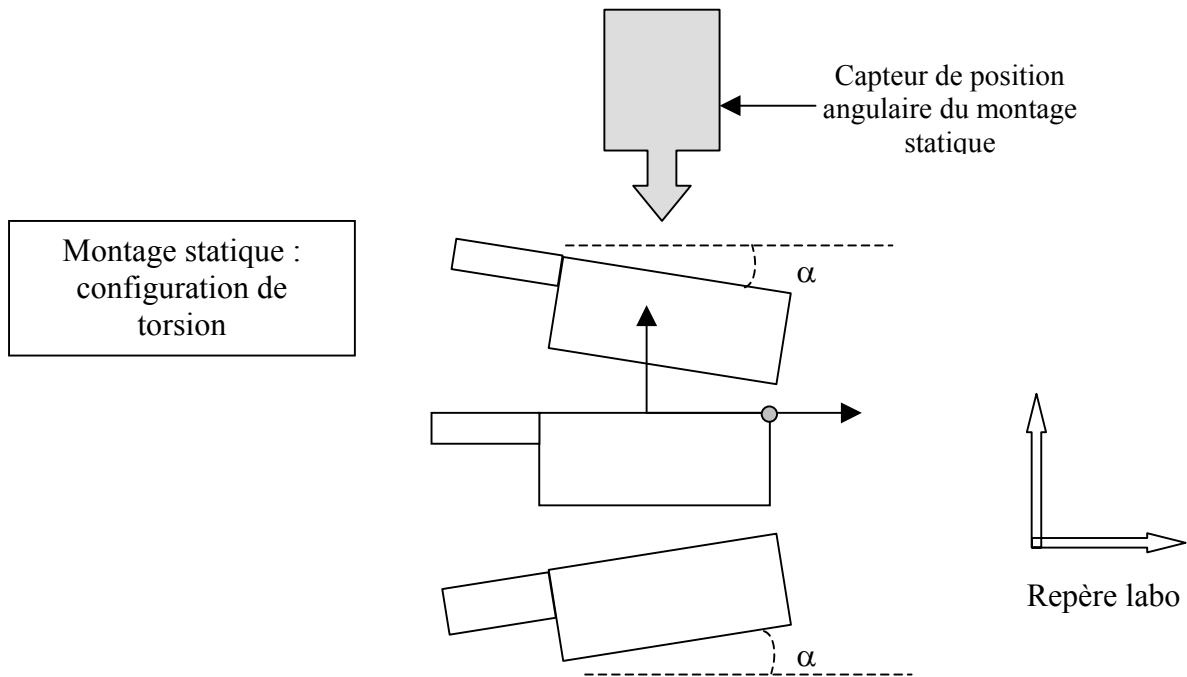


Figure 145 : position du capteur angulaire en statique

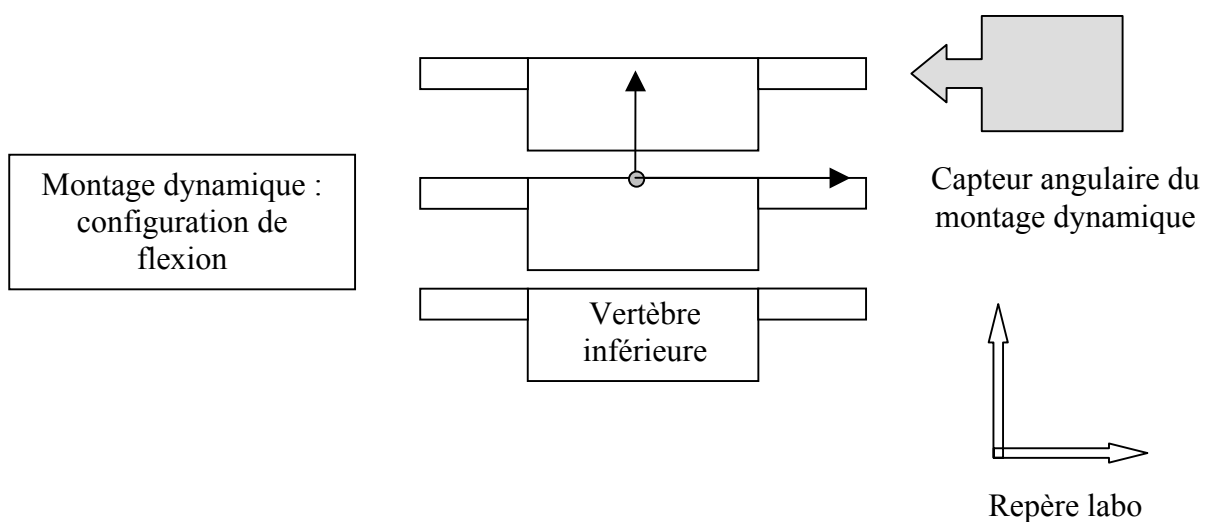


Figure 146 : position du capteur angulaire en dynamique

1- Statique

Chacune des pièces a été testée une seule fois. L'essai a été effectué en statique et en configuration saine (aucun ligament n'a été sectionné). Les résultats sont regroupés en trois figures par pièce anatomique :

- ✓ La première figure (figure 147) représente trois vertèbres schématisées sur laquelle s'affiche le tracé des axes instantanés de la vertèbre supérieure par rapport à la vertèbre centrale ainsi que l'axe moyen. L'axe moyen est calculé en prenant le barycentre de tous les points acquis durant l'essai.
- ✓ La deuxième figure (figure 148) est constituée de trois graphes :
 - 1- Le premier graphe représente la rotation de la vertèbre supérieure ainsi que le couple de flexion appliqué à cette dernière.
 - 2- Le second graphe représente l'évolution des rotations de la vertèbre centrale au cours du temps (inflexion, flexion et torsion).
 - 3- Le troisième graphe représente l'évolution des translations de l'extrémité antérieure du plateau supérieure de la vertèbre centrale au cours du temps (déplacement antéro-postérieur, latéral et vertical).
- ✓ La troisième figure (figure 149) est aussi constituée de trois graphes.
 - 4- Le premier graphe représente la rotation de la vertèbre supérieure ainsi que le couple de flexion appliqué à cette dernière.
 - 5- Le second graphe représente l'évolution des efforts transitant par la vertèbre inférieure au cours du temps (cisaillement antéro-postérieur, cisaillement transverse et compression).
 - 6- Le troisième graphe représente l'évolution des moments transitant par la vertèbre inférieure au cours du temps (flexion, inflexion et torsion).

Les graphes 1 et 4, qui indiquent la sollicitation appliquée à la vertèbre supérieure, sont identiques. Nous avons choisi de répéter ce graphe de façon à pouvoir considérer chaque figure indépendamment.

La sollicitation est appliquée par un opérateur ce qui explique les allures variées des courbes de l'angle imposé à la vertèbre supérieure (graphe 1 et 4).

A. Lieu des centres instantanés de rotation de la vertèbre supérieure par rapport à la vertèbre inférieure : courbes types

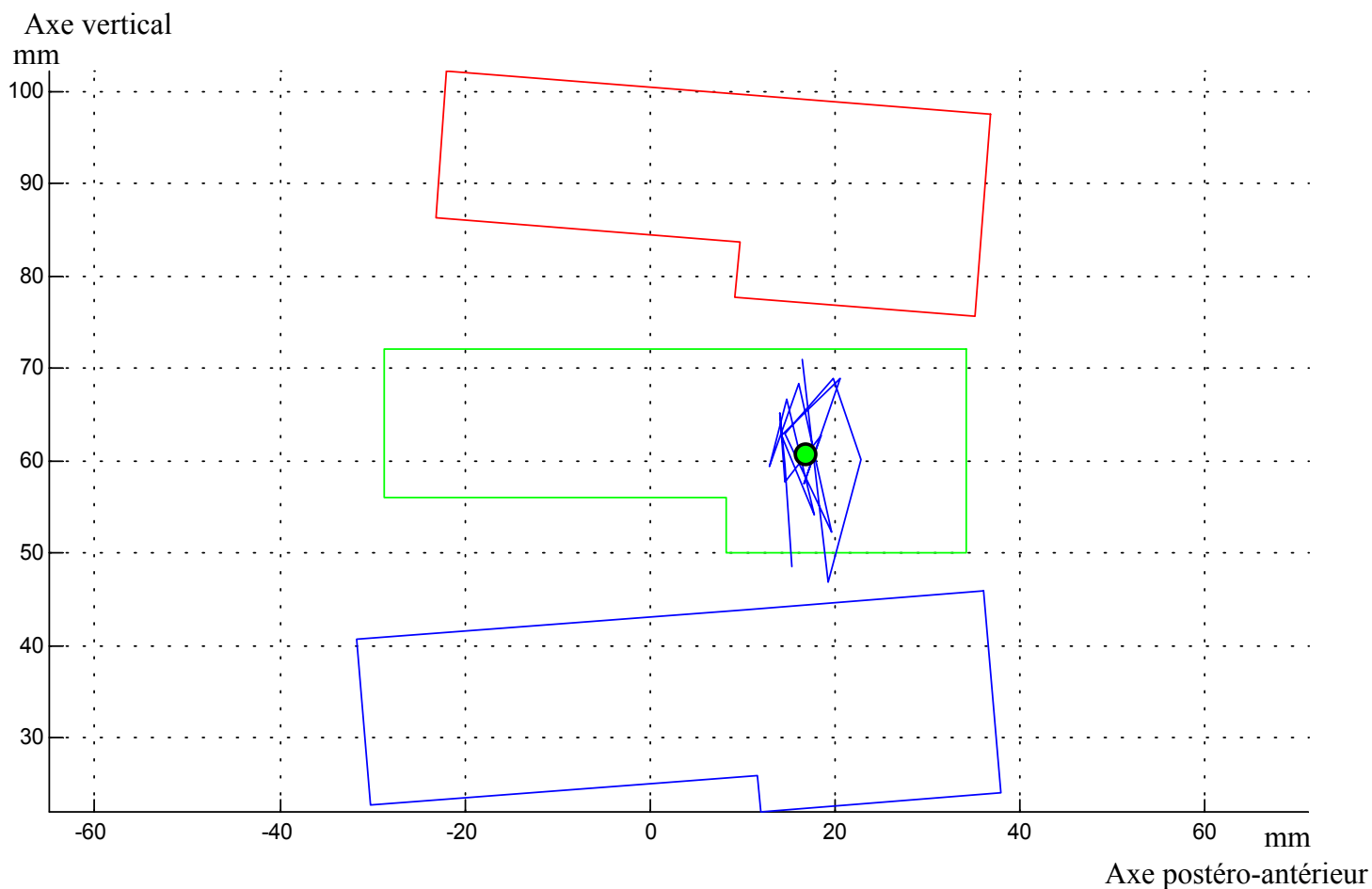


Figure 147 : lieu des axes instantanés de rotation (T7-T9)

Le tracé représente les positions de l'axe instantané de rotation au cours du temps et le point, la position moyenne de cet axe.

Bien que la bibliographie ne fasse pas état de centre de rotation pour un segment de trois vertèbres, il est néanmoins possible de corrélérer ce résultat avec la littérature et de constater qu'il est en accord avec cette dernière. Il est à noter que l'ensemble des essais statiques fait état de ce résultat.

B. Efforts, moments et déplacement : résultat type

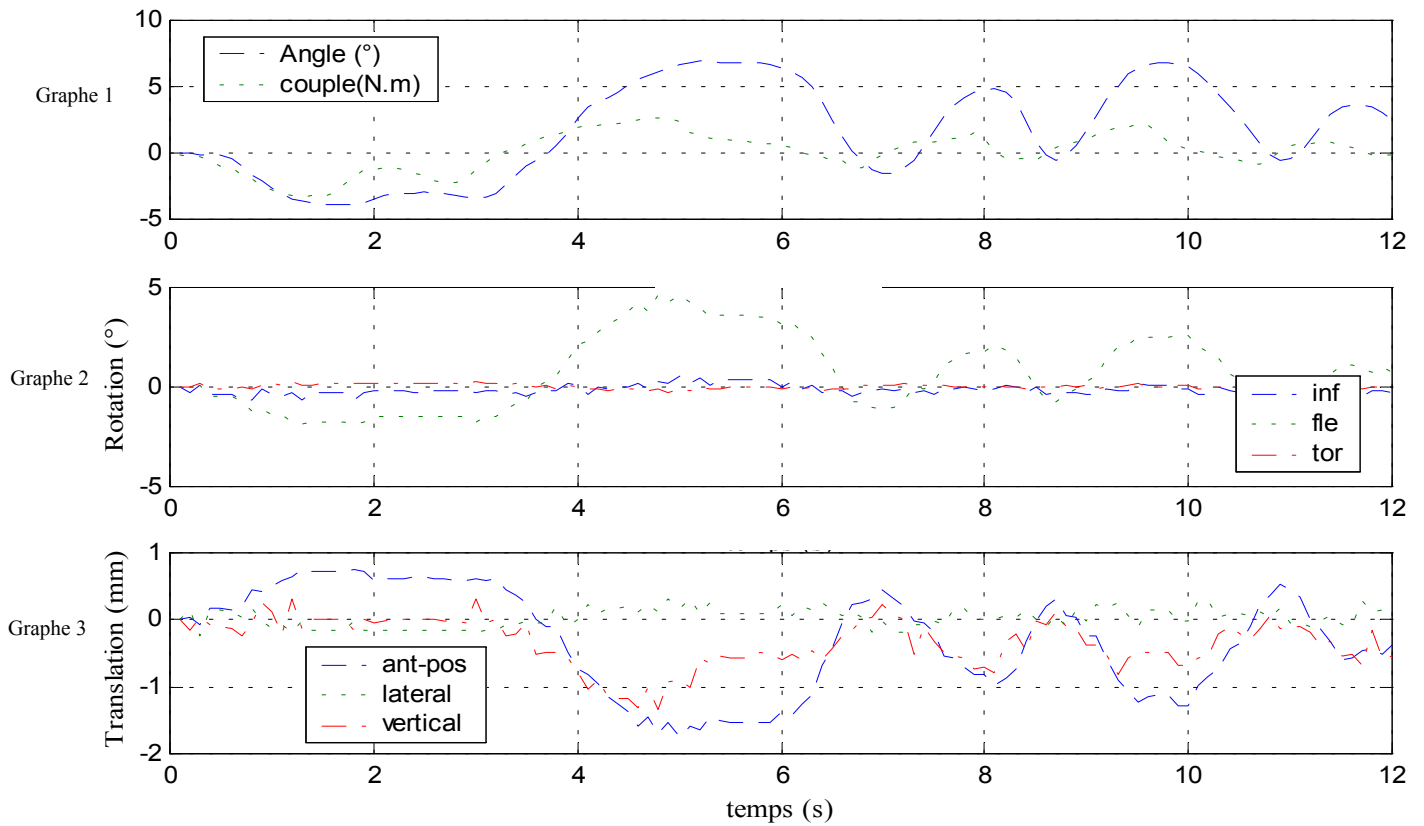


Figure 148 : rotation et translation de la vertèbre centrale (pièce L2-L4)

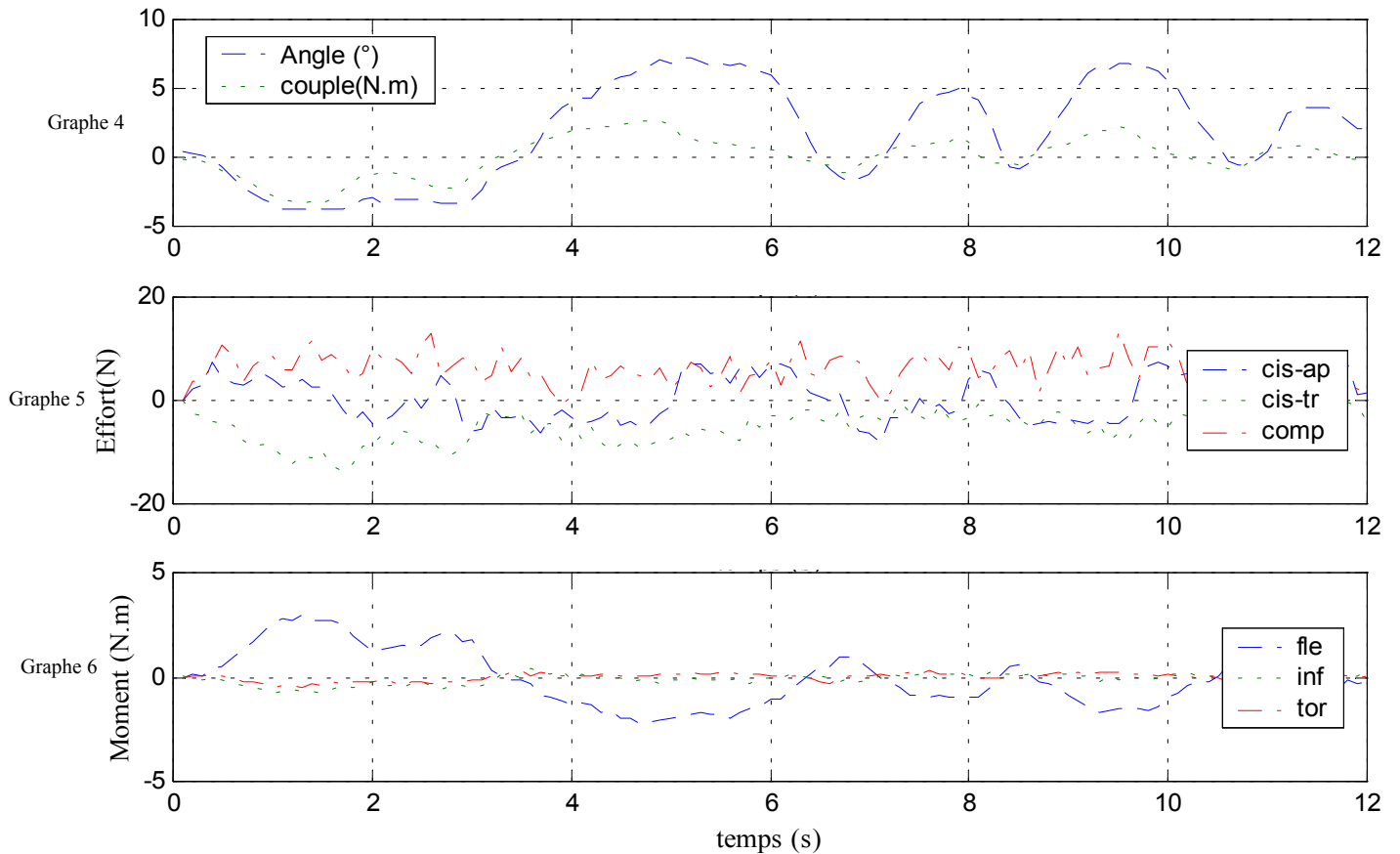


Figure 149 : efforts et moments au niveau des vertèbres inférieure et supérieure (L2-L4)

C. Analyse

Nous remarquons que l'amplitude du moment de flexion dans cet essai est assez faible (environ 3 N.m), la borne supérieure étant un peu moins de 10 N.m pour certains essais. En outre, nous retrouvons bien les mêmes valeurs de couple pour le capteur situé sur la vertèbre supérieure (courbe « couple » du premier graphe de la figure 149) et celui situé sous la vertèbre inférieure (courbe « fle » du troisième graphe de la figure 149) (en valeur absolue).

Concernant les rotations de la vertèbre centrale, nous trouvons un ratio d'environ 2 entre la rotation principale de la vertèbre supérieure et celle de la vertèbre inférieure. Le couplage n'est pas décelable dans cet essai puisque nous nous plaçons en flexion.

Pour résumer l'ensemble des essais statiques en flexion, nous constatons que les phénomènes de couplage n'apparaissent pas ou peu, que les valeurs de couple sont inférieures à 10 N.m, que les valeurs d'efforts sont de l'ordre de quelques dizaines de Newtons et que la rotation principale de la vertèbre centrale est environ deux fois plus petite que celle de la vertèbre supérieure.

Les résultats sont aussi présentés d'une façon plus classique sous la forme de courbes en hystérésis caractéristiques du comportement viscoélastique du rachis (figure 150).

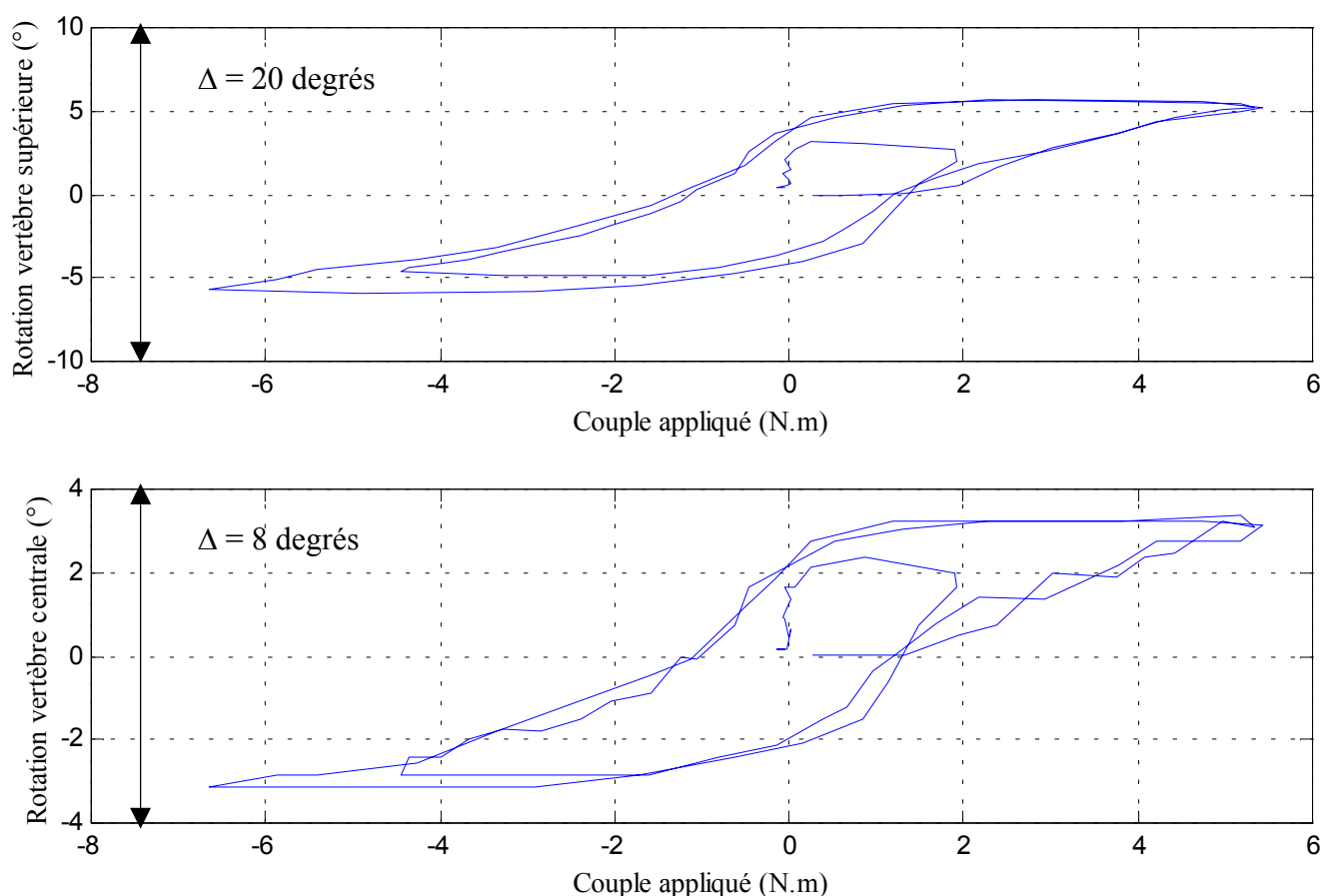


Figure 150 : rotation (flexion) en fonction du couple (T11-L1)

2- Dynamique

Certains essais n'ont pas pu être achevés (lésion d'au moins trois ligaments successivement) en raison de la rupture partielle ou totale des structures ligamentaires lors des essais précédant ces lésions.

Les résultats sont donnés par ordre chronologique des lésions effectuées (section des ligaments). Les résultats de chaque configuration (saine, lésion du ligament x, lésion du ligament y etc...) sont donnés sous la forme de trois figures constituées chacune de trois graphes :

- ✓ La première figure (figure 154) est constituée de trois graphes :
 - 1- Le premier graphe représente la rotation de la vertèbre supérieure ainsi que la vitesse angulaire (en degrés par centième de seconde pour des raisons d'échelle graphique) de cette dernière.
 - 2- Le second graphe représente l'évolution des rotations de la vertèbre centrale au cours du temps (inflexion, flexion et torsion).
 - 3- Le troisième graphe représente l'évolution des translations de l'extrémité antérieure du plateau supérieure de la vertèbre centrale au cours du temps (déplacement antéro-postérieur, latéral et vertical).
- ✓ La deuxième figure (figure 155) est constituée de trois graphes :
 - 4- Le premier graphe représente la rotation de la vertèbre supérieure ainsi que la vitesse angulaire (en degrés par centième de seconde) de cette dernière.
 - 5- Le second graphe représente l'évolution des efforts transitant par la vertèbre supérieure au cours du temps (cisaillement antéro-postérieur, cisaillement transverse et compression).
 - 6- Le troisième graphe représente l'évolution des moments transitant par la vertèbre supérieure au cours du temps (flexion, inflexion et torsion).
- ✓ La troisième figure (figure 156) est constituée de trois graphes :
 - 7- Le premier graphe représente la rotation de la vertèbre supérieure ainsi que la vitesse angulaire (en degrés par centième de seconde) de cette dernière.
 - 8- Le second graphe représente l'évolution des efforts transitant par la vertèbre inférieure au cours du temps (cisaillement antéro-postérieur, cisaillement transverse et compression).
 - 9- Le troisième graphe représente l'évolution des moments transitant par la vertèbre inférieure au cours du temps (flexion, inflexion et torsion).

Les graphes 1, 4 et 7 sont identiques. La même structure est respectée quelle que soit la configuration.

Ne pouvant donner toutes les courbes dans le mémoire, nous avons choisi de donner des résultats « types » pour chaque mode de sollicitation (flexion, inflexion et torsion) et de fournir des tableaux résumant chacun des essais.

Caractéristiques des courbes présentées :

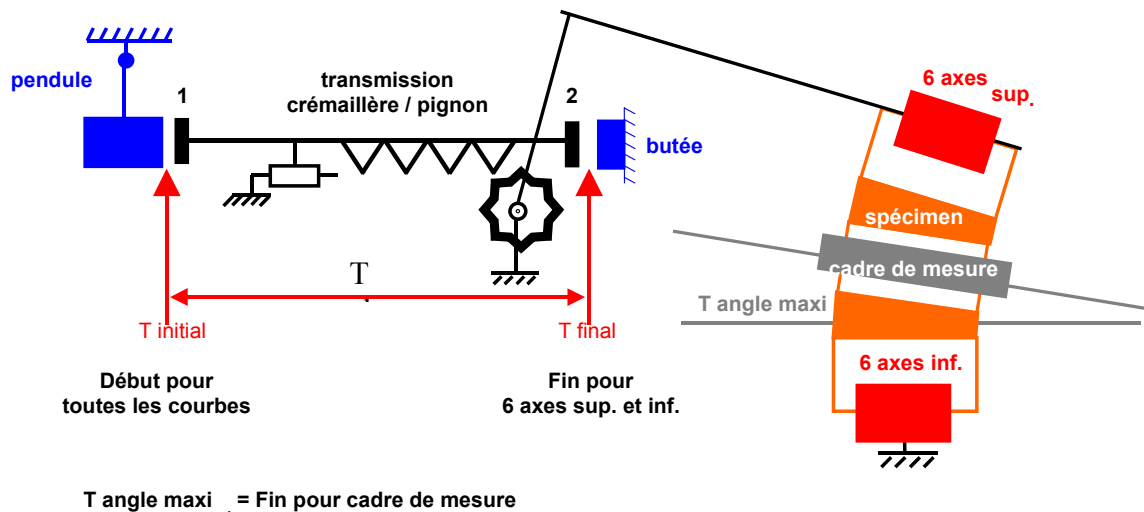
Le schéma suivant décrit les instants choisis pour le début et la fin des courbes présentées :

L'instant initial correspond au contact entre le pendule et la crémaillère.

L'instant final choisi pour les capteurs d'efforts et moments correspond au choc entre la crémaillère et la butée d'arrêt.

L'instant final du mouvement de la vertèbre centrale, correspond au moment où l'angulation de cette dernière est maximale. En raison du rôle amortissant des tissus mous (disque intervertébral), il existe un décalage entre la fin du mouvement de la vertèbre supérieure (donc de l'arbre moteur) et la fin du mouvement de la vertèbre centrale.

Figure 151 : instants de début et de fin des courbes données



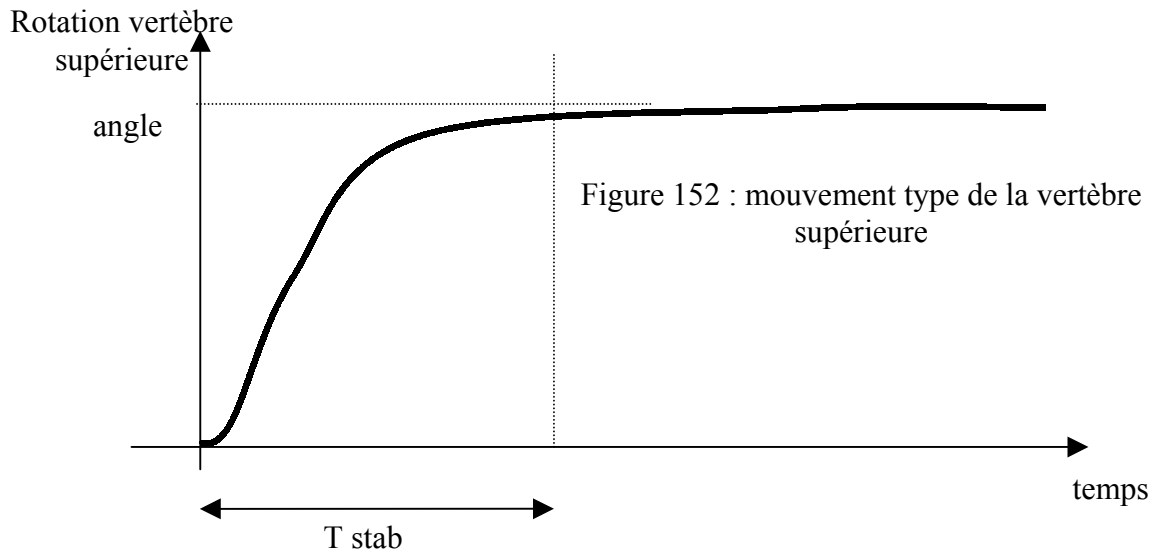
Caractéristiques des tableaux présentés :

Ils sont au nombre de trois pour chaque configuration :

Le premier tableau récapitule les résultats relatifs au mouvement de la vertèbre supérieure et de la vertèbre centrale. Les résultats sont divisés en trois parties suivant l'étage vertébral testé. Chacune des parties est divisée suivant les configurations (sain, épineux = ligament épineux coupé, etc...). Le numéro commençant l'intitulé correspond à un numéro d'essai (exemple : 1-L2L4-sain).

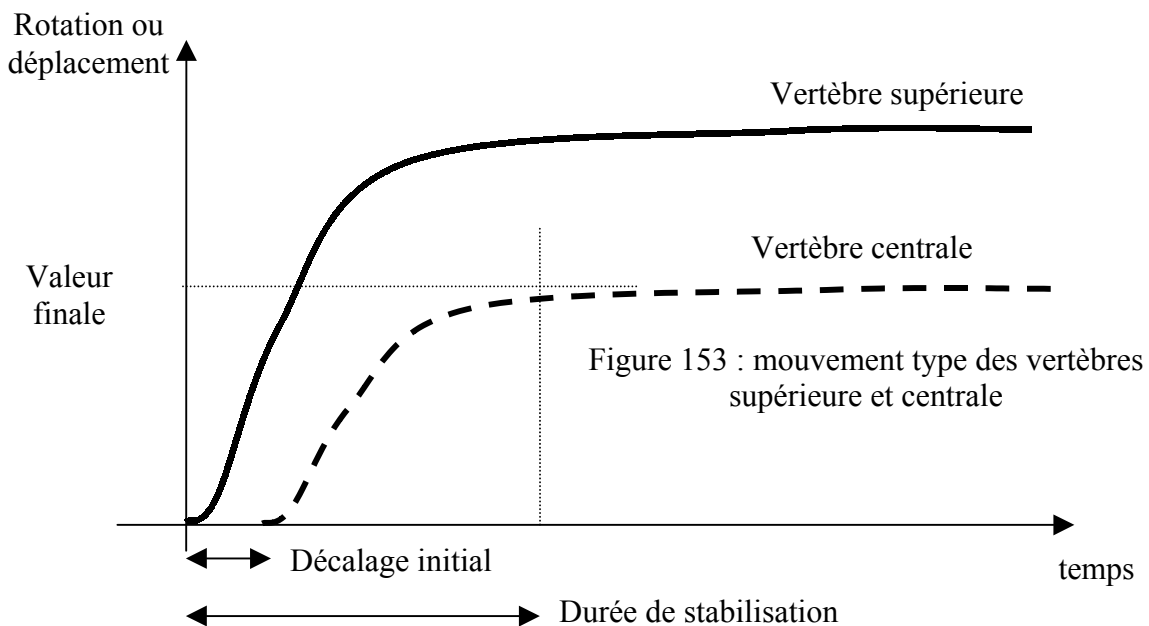
Pour la vertèbre supérieure, les paramètres sont :

- ✓ T stab = temps que met cette vertèbre pour atteindre son maximum.
- ✓ Angle = valeur maximale de l'angle de la vertèbre supérieure.



Pour la vertèbre centrale, les paramètres sont :

- ✓ Décalage initial = intervalle de temps entre le début du mouvement de la vertèbre supérieure et le début du mouvement de la vertèbre centrale
- ✓ Durée de stabilisation = temps que met la vertèbre centrale pour atteindre son maximum
- ✓ Valeur finale = valeur des angles et des déplacements maximaux de la vertèbre centrale (inflexion, flexion, inflexion, déplacement antéro-postérieur, latéral et vertical)



Le deuxième et le troisième tableau présentent les résultats relatifs aux efforts et aux moments transitant par la vertèbre supérieure (deuxième tableau) et inférieure (troisième tableau).

Ils correspondent au cisaillement antéro-postérieur, transverse, à la compression, au moment de flexion, d'inflexion et de torsion.

Etant donné qu'il existe un décalage temporel entre les phénomènes supérieurs et inférieurs (temps de transit des efforts entre la vertèbre supérieure et inférieure), les valeurs indiquées sont les maximums des courbes dans la zone de début de mouvement pour le capteur supérieur et la zone de milieu / fin de mouvement pour le capteur inférieur.

A. Efforts, moments et déplacement : courbes types

Deux configurations ont été choisies pour leur représentativité. Il s'agit de la configuration saine et de la configuration avec les ligaments inter-épineux et sus-épineux sectionnés. Les courbes présentées sont issues d'essais sur pièce lombaire (L2-L4).

Configuration saine (aucune lésion ligamentaire)

✓ Déplacements

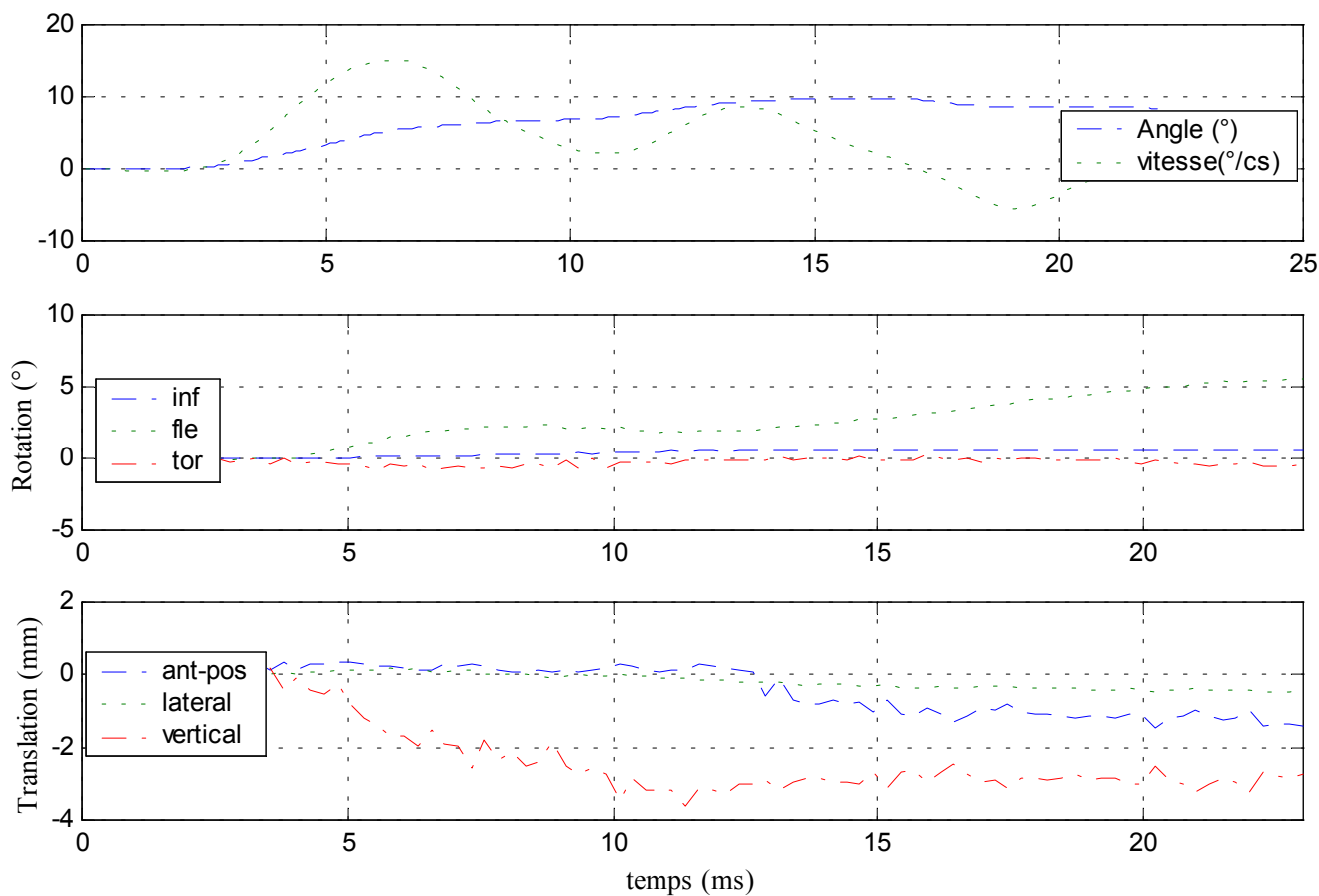


Figure 154 : déplacements de la vertèbre centrale

Efforts et moments supérieurs

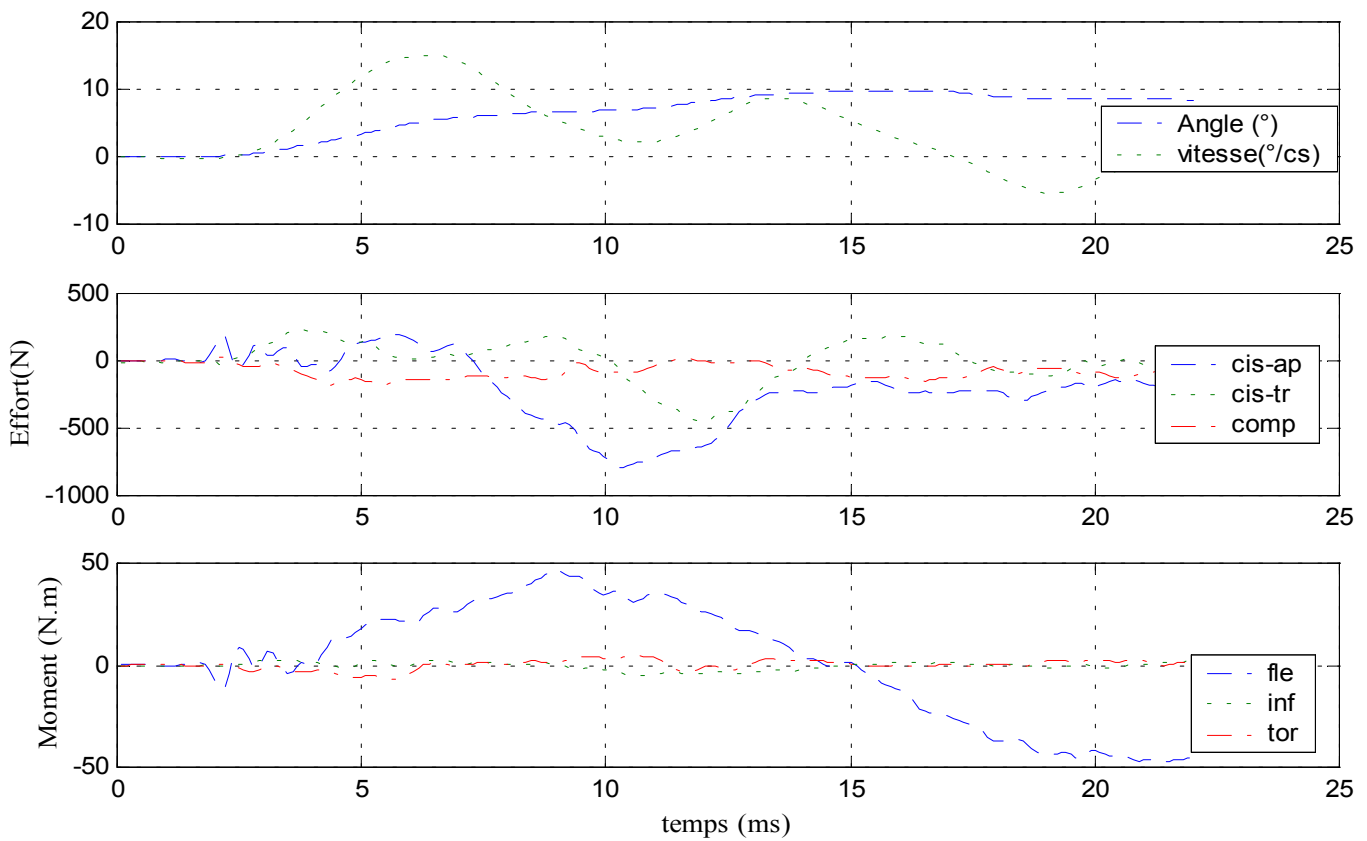


Figure 155 : efforts et moments au niveau de la vertèbre supérieure

✓ Efforts et moments inférieurs

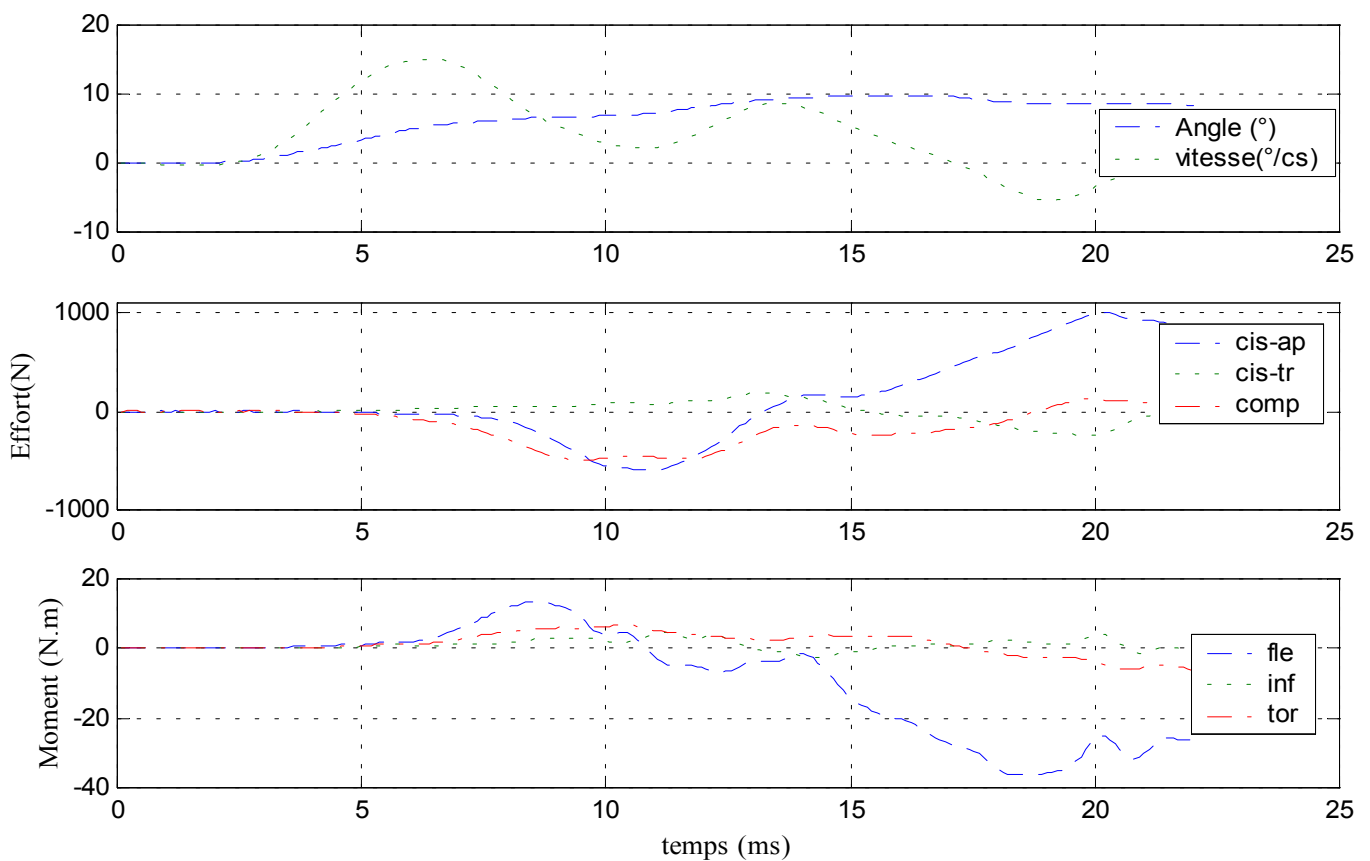


Figure 156 : efforts et moments au niveau de la vertèbre inférieure supérieure

✓ Déplacements

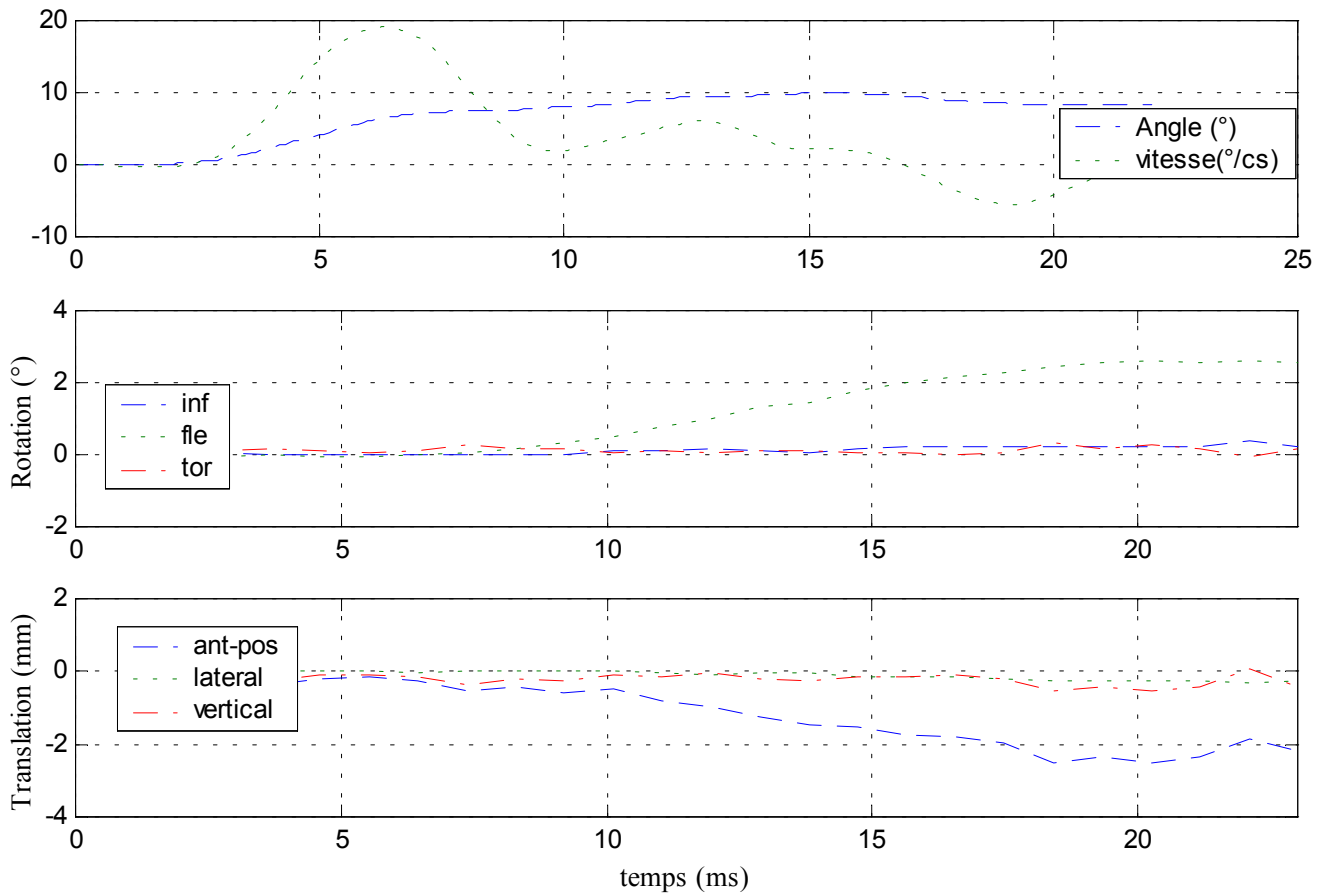


Figure 157 : déplacements de la vertèbre centrale

✓ Efforts et moments supérieurs

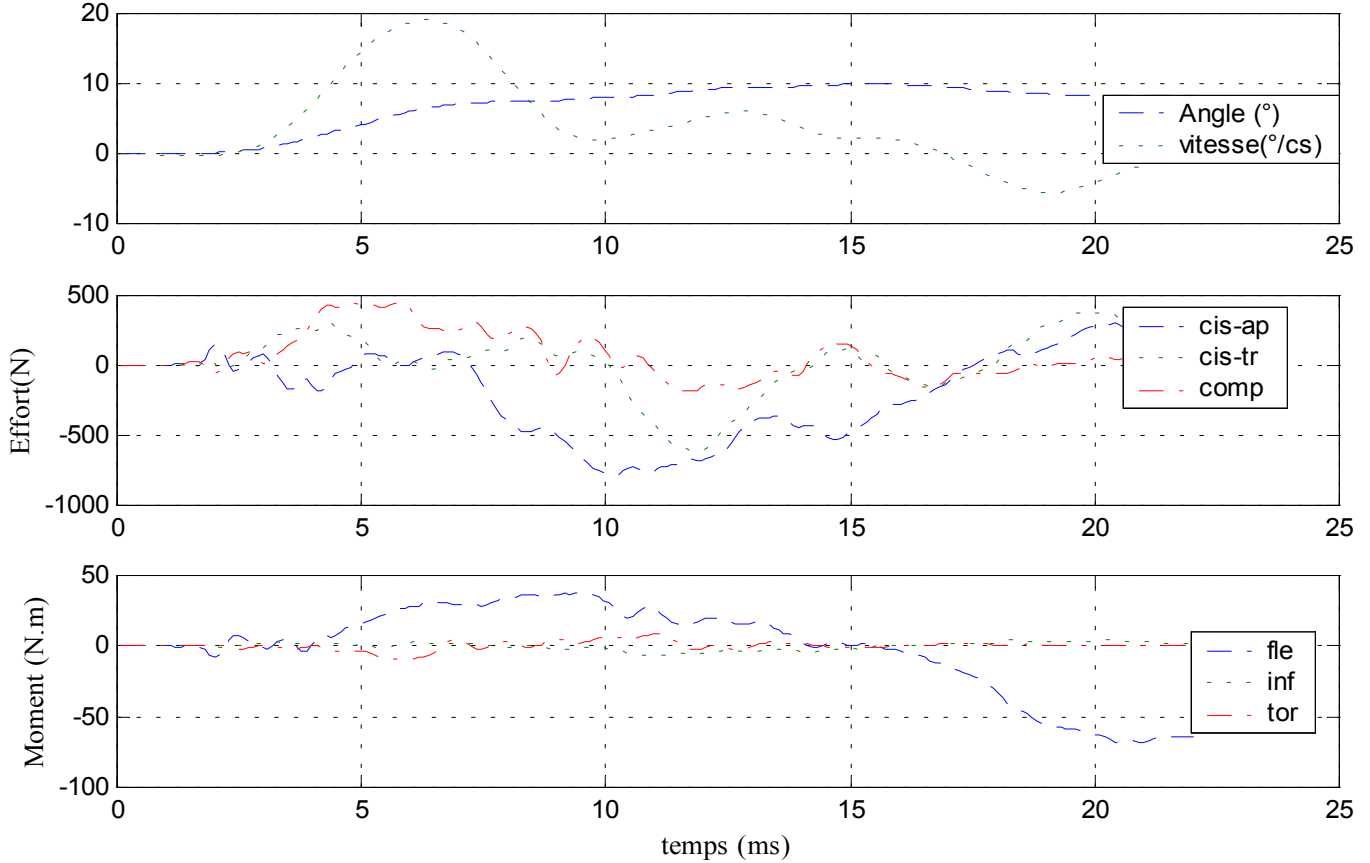


Figure 158 : efforts et moments au niveau de la vertèbre supérieure

✓ Efforts et moments inférieurs

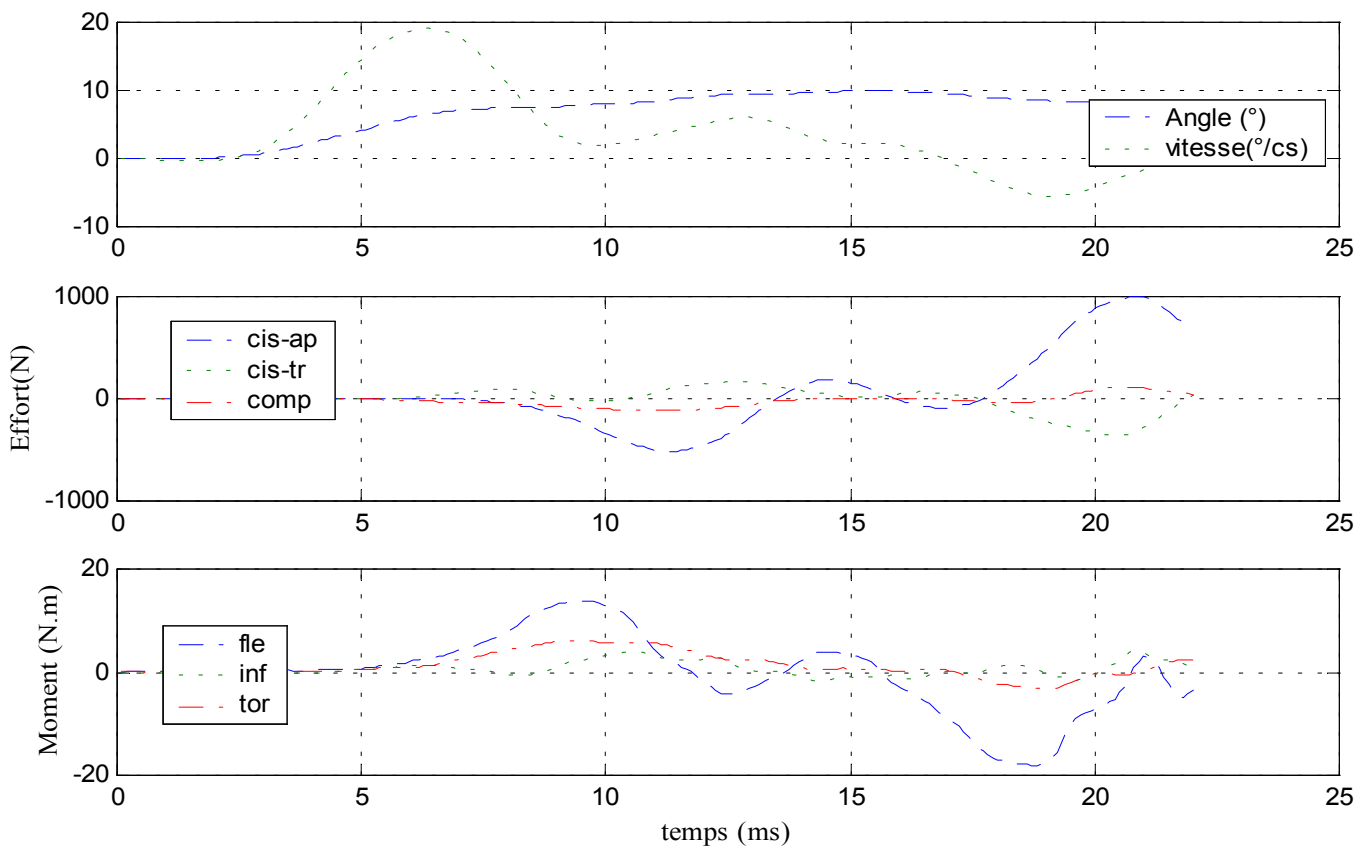


Figure 159 : efforts et moments au niveau de la vertèbre inférieure

B. Efforts, moments et déplacement : résumé des résultats

	Vertèbre supérieure		Vertèbre centrale							
	T stab (ms)	Angle (degrés)	Décalage Initial (ms)	Durée de Stabilisation (ms)	Valeur finale (degrés),(mm)					
					inf	fle	tor	a-p	lat	ver
1-L2L4-sain	12	13	1	12	0.5	6	-0.5	-1	0	-2
4-L2L4-sain	13	10	2	15	0.5	5.5	-0.5	-1	-0.5	-3
5-L2L4-sain	15	10	3	15	0	4.5	-0.5	-1	0	-1
1-L2L4-epineux	10	14	4	12	0	5	-1	-1	0.3	-1
4-L2L4-epineux	12	10	5	12	0.3	2.5	0.3	-2	-0.2	-0.5
5-L2L4-epineux	14	11	5	13	0	5.5	0	-1.5	-0.2	-0.6
5-L2L4-jaune	12	10	6	12	0	3.9	0	-1.5	-0.2	-0.2
3-T11L1-sain	10	8.5	2	13	0.5	5	0	-2.5	-0.5	-1
14-T11L1-sain	15	12.5	3	15	0.3	5.5	0.3	-1.5	-0.2	-0.5
16-T11L1-sain	12	6.5	1	16	-0.3	4	-0.3	-1.5	0	-0.8
3-T11L1-epineux	15	11	5	15	-0.3	5	-0.3	-2	0	-1
14-T11L1-epineux	15	11	3	13	-0.2	4	-0.2	-1.5	0	-1.3
16-T11L1-epineux	12	7.2	4	15	-0.2	3	-0.2	-1	0	-0.8
14-T11L1-capsule	17	15	3	13	0	6.2	0	-1.5	-0.1	-0.5
16-T11L1-capsule	12	9.8	3	12	-0.1	2	-0.1	-0.5	0.1	-0.4
2-T3T5-sain	16	12	3	15	0	5.6	-0.7	-3	0	1
13-T7T9-sain	14	10	1	14	0.7	5	0.7	-3	-0.3	-1
15-T7T9-sain	13	9.8	1	16	0.2	5	0.1	-2	-0.2	-0.2
2-T3T5-jaune	18	14	10	15	0.5	3.5	-1	-1.5	0	-2
13-T7T9-epineux	13	10.3	6	15	0.2	2.5	0	-1	0.3	-0.4
15-T7T9-epineux	15	10	3	15	0.2	5	0.2	-3	0	-0.7
13-T7T9-capsule	14	10.4	6	15	0	5.5	0	-1.5	-0.1	-0.3
15-T7T9-jaune	11	11	1	15	0.1	4.7	0.3	-3.7	-0.4	-0.7

Tableau 30 : résultats cinématiques de la vertèbre supérieure et de la vertèbre centrale

	Capteur supérieur: unités (N) et (N.m)					
	cis-ap	cis-tr	comp	fle	inf	tor
1-L2L4-sain	-710	-200	-800	67	-10	-10
4-L2L4-sain	-800	-450	-200	47	-5	5
5-L2L4-sain	-700	-170	-340	60	4	-7
1-L2L4-epineux	-320	-220	-740	66	-11	-8
4-L2L4-epineux	-800	-600	-200	38	7	-7
5-L2L4-epineux	-800	-420	-380	62	-8	1
5-L2L4-jaune	-800	-530	-490	55	-10	2
3-T11L1-sain	-600	-200	-750	70	-5	2
14-T11L1-sain	-600	-340	-1080	85	10	5
16-T11L1-sain	-350	-230	-610	74	-7	2
3-T11L1-epineux	-850	-400	-700	64	-5	1
14-T11L1-epineux	-650	-350	-920	84	-10	4
16-T11L1-epineux	-470	-150	-650	70	-3	3
14-T11L1-capsule	-560	-550	-600	83	8	5
16-T11L1-capsule	-490	-200	-520	88	-8	5
2-T3T5-sain	-400	-100	-400	53	-3	7
13-T7T9-sain	-600	-100	-300	80	5	5
15-T7T9-sain	-700	-250	-520	58	-5	5
2-T3T5-jaune	-600	-400	-500	42	5	12
13-T3T5-epineux	-610	-150	-260	53	-5	4
15-T3T5-epineux	-780	-270	-260	36	-8	8
13-T3T5-capsule	-650	-140	-250	49	-2	3
15-T3T5-jaune	-900	-400	-540	52	10	10

Tableau 31 : efforts et moments au niveau de la vertèbre supérieure

	Capteur inférieur : unités (N) et (N.m)					
	cis-ap	cis-tr	comp	fle	inf	tor
1-L2L4-sain	1100	280	660	-52	3	8
4-L2L4-sain	1000	-220	150	-36	4	-6
5-L2L4-sain	1500	300	350	-43	-4	7
1-L2L4-epineux	980	200	600	-43	2	8
4-L2L4-epineux	1000	-350	120	-18	-2	2
5-L2L4-epineux	1470	300	170	-36	6	-6
5-L2L4-jaune	1550	250	200	-37	5	-6
3-T11L1-sain	1560	-130	550	-69	2	-1
14-T11L1-sain	1800	-100	950	-80	-5	-8
16-T11L1-sain	1250	150	400	-74	-3	5
3-T11L1-epineux	1600	50	550	-60	1	-1
14-T11L1-epineux	2000	250	1250	-76	5	-8
16-T11L1-epineux	1200	120	400	-62	2	-10
14-T11L1-capsule	2100	80	700	-80	-8	-12
16-T11L1-capsule	1400	100	500	-85	5	-10
2-T3T5-sain	820	40	400	-25	-3	1
13-T7T9-sain	1300	-200	280	-75	5	-11
15-T7T9-sain	1500	300	480	-46	6	-4
2-T3T5-jaune	1070	50	320	-25	-1	-10
13-T3T5-epineux	1050	-100	200	-45	8	-5
15-T3T5-epineux	1300	50	300	-20	1	-5
13-T3T5-capsule	1150	-200	320	-35	6	-4
15-T3T5-jaune	1560	175	620	-31	-2	-6

Tableau 32 : efforts et moments au niveau de la vertèbre inférieure

Nota : l'ensemble des courbes relatives aux essais dynamiques se trouve en annexe

C. Analyse

De façon globale, les rotations imposées à la vertèbre supérieure pour les essais dynamiques sont supérieures aux rotations imposées durant les essais statiques sans pour autant entraîner automatiquement une lésion du spécimen. Il n'y a pas ou peu de couplage pour cette sollicitation (flexion sagittale) car les valeurs angulaires de torsion et d'inflexion latérale sont bien plus faibles que celle de la flexion. Il en va de même pour les valeurs des moments de torsion et d'inflexion par rapport au moment de flexion.

La rotation principale de la vertèbre centrale est environ deux fois plus faible que celle de la vertèbre supérieure en configuration non lésée. Le moment de flexion atteint des valeurs de 80 N.m, l'effort de compression de 1000 N et l'effort de cisaillement antéro-postérieur de 2000 N tous essais confondus.

Les commentaires suivants sont axés sur le moment de flexion, le cisaillement antéro-postérieur et la compression. Les autres composantes sont considérées comme parasites dans le mouvement de flexion.

Niveau lombaire : L2-L4

La section du ligament épineux entraîne un décalage (+100 %) entre le début du mouvement de la vertèbre centrale (figure 160) et le début du mouvement de la vertèbre supérieure ainsi qu'une diminution d'environ 20 % de l'angle de flexion (figure 161). Une diminution du moment de flexion d'environ 20 % (figure 162) est également notée.

La section du ligament jaune entraîne une diminution de l'angle de flexion mais nous avons réalisé cet essai que sur un seul spécimen.

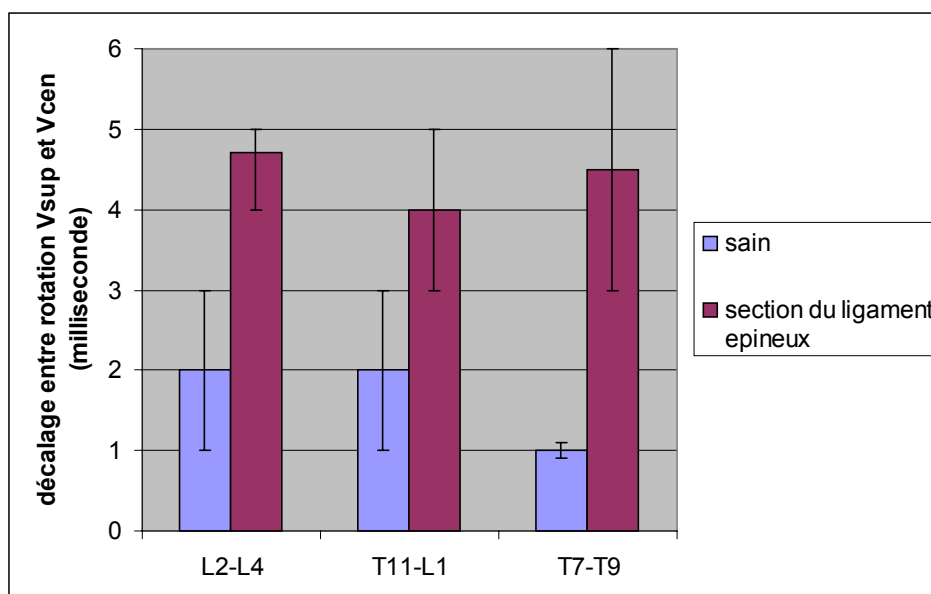


Figure 160 : décalage entre le début du mouvement de la vertèbre supérieure et le début du mouvement de la vertèbre centrale (moyenne + étendue de mesure)

Niveau thoraco-lombaire : T11-L1

La section du ligament épineux entraîne un décalage (100 %) entre le début du mouvement de la vertèbre centrale (figure 160) et le début du mouvement de la vertèbre supérieure ainsi qu'une diminution d'environ 20% de l'angle de flexion (figure 161). Une diminution (10%) du moment de flexion est également notée (figure 162).

La section des ligaments des capsules articulaires ne dégage pas de tendance particulière. Les moments et les efforts augmentent dans ce cas précis car l'angle appliqué à la vertèbre supérieure, pour la configuration avec les capsules lésées, est plus important que l'angle appliqué lors de la configuration saine (différence d'angle due à une imprécision dans le réglage de la butée).

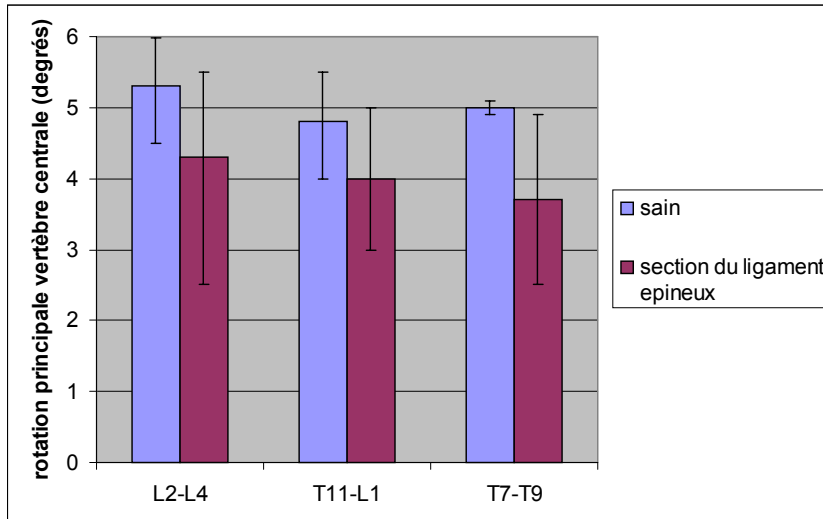


Figure 161 : rotation de flexion de la vertèbre centrale (moyenne + étendue de mesure)

Niveau thoracique : T3-T5 et T7-T9

La section du ligament épineux entraîne un décalage (400 %) entre le début du mouvement de la vertèbre centrale (figure 160) et le début du mouvement de la vertèbre supérieure ainsi qu'une diminution d'environ 25 % de l'angle de flexion (figure 161). Une diminution de 50 % du moment de flexion est également notée (figure 162).

La section des ligaments des capsules articulaires entraîne une augmentation de l'angle de flexion mais nous n'avons qu'un seul spécimen sur lequel cet essai a été réalisé.

La section du ligament jaune entraîne une diminution de l'angle de flexion. Aucune tendance n'est décelable pour ce qui est des efforts et des moments.

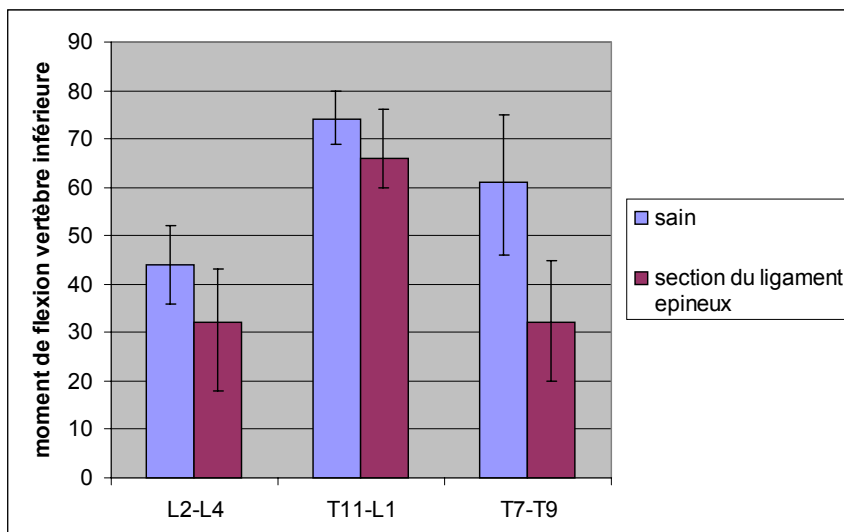


Figure 162 : moment de flexion au niveau de la vertèbre inférieure (moyenne + étendue de mesure)

1- Statique

A. Lieu des centres instantanés de rotation de la vertèbre supérieure par rapport à la vertèbre inférieure : courbes types

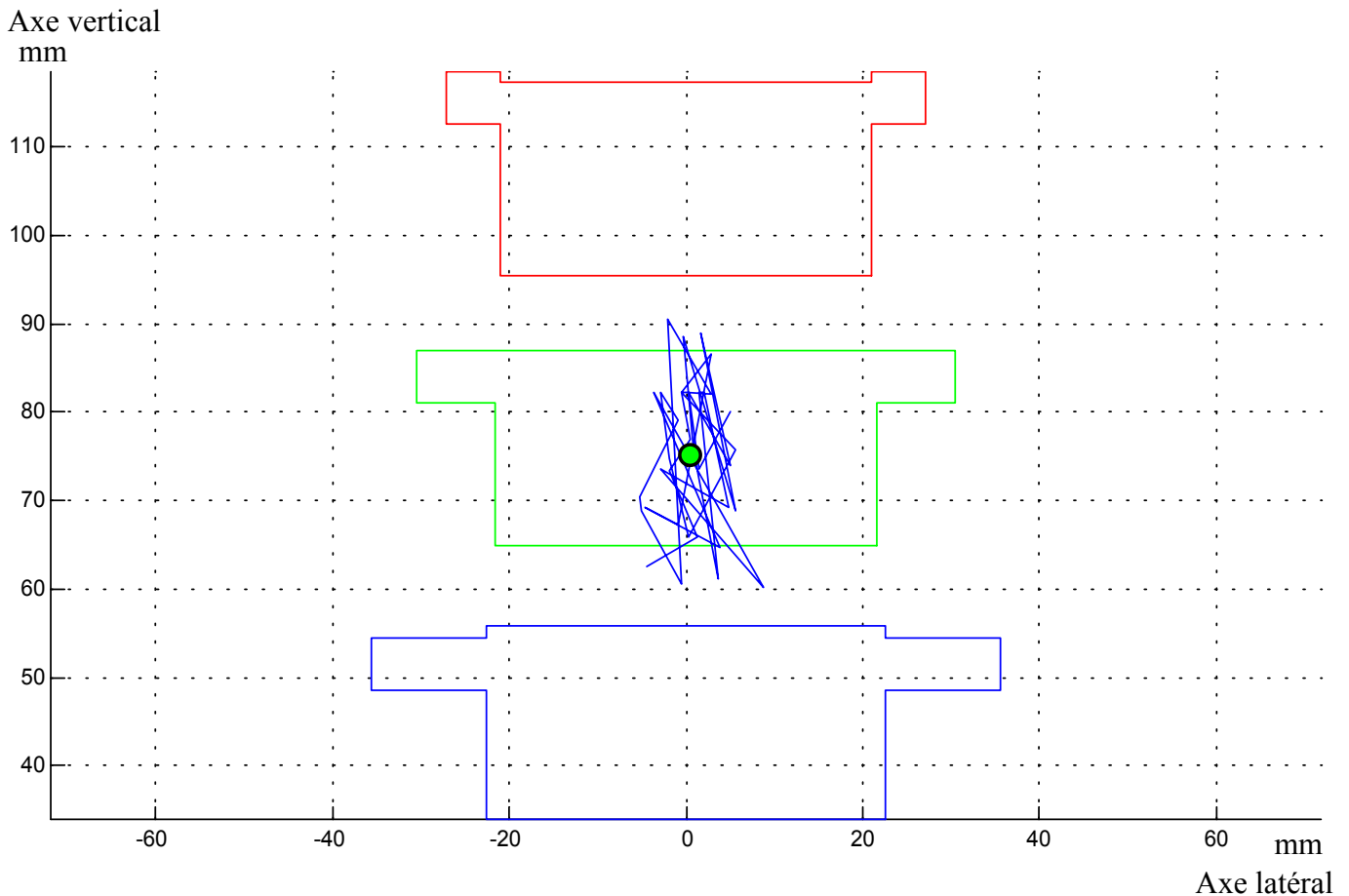


Figure 163 : lieu des axes instantanés de rotation (T11-L1)

Le tracé représente les positions de l'axe instantané de rotation au cours du temps et le point, la position moyenne de cet axe.

Bien que la bibliographie ne fasse pas état de centre de rotation pour un segment de trois vertèbres, il est néanmoins possible de corrélérer ce résultat avec la littérature et de constater qu'il est en accord avec cette dernière. Il est à noter que la majorité des essais statiques fait état de ce résultat, les exceptions proviennent des pièces arthrosiques qui ont un axe de rotation moyen décalé.

B. Efforts, moments et déplacement : résultat type

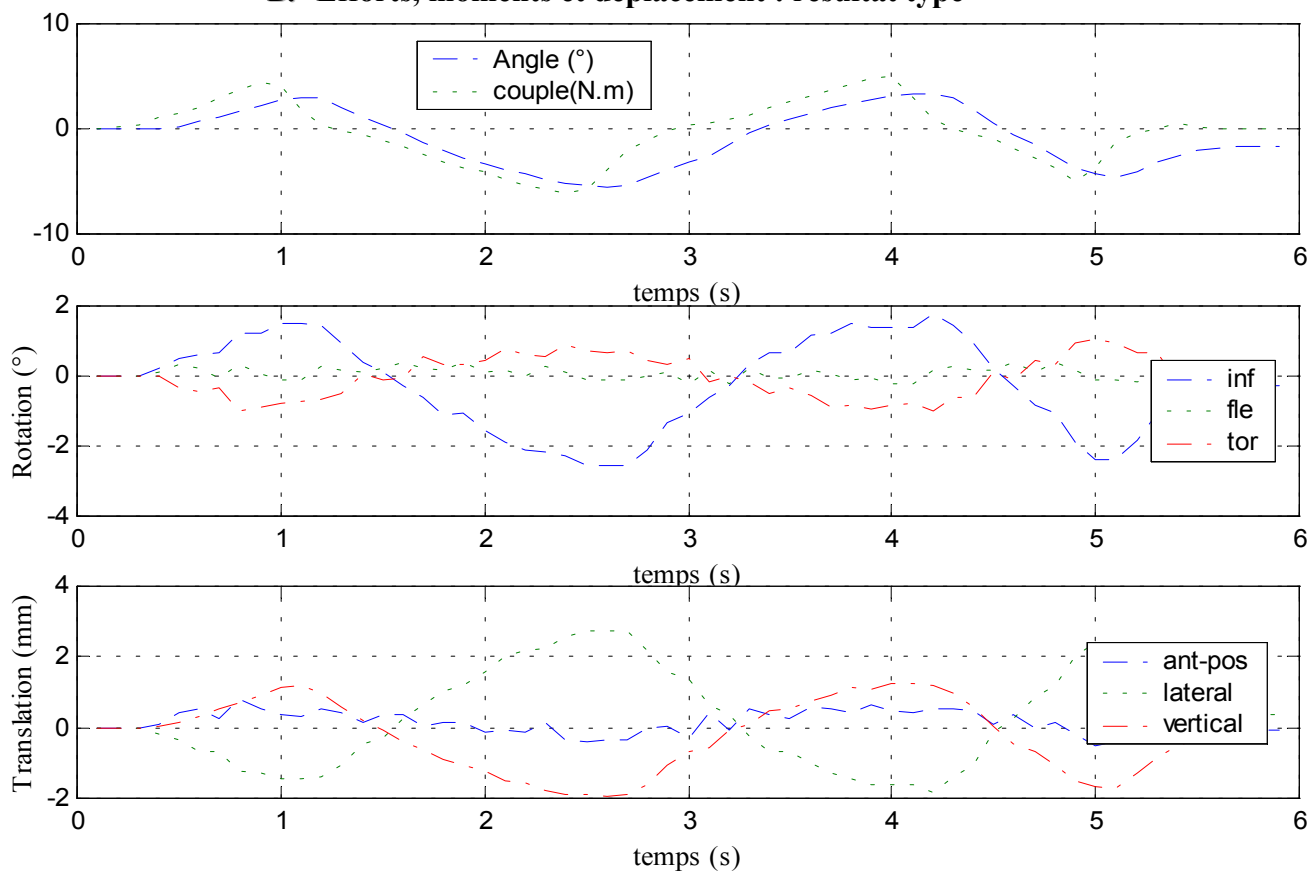


Figure 164 : rotation et translation de la vertèbre centrale (pièce T7-T9)

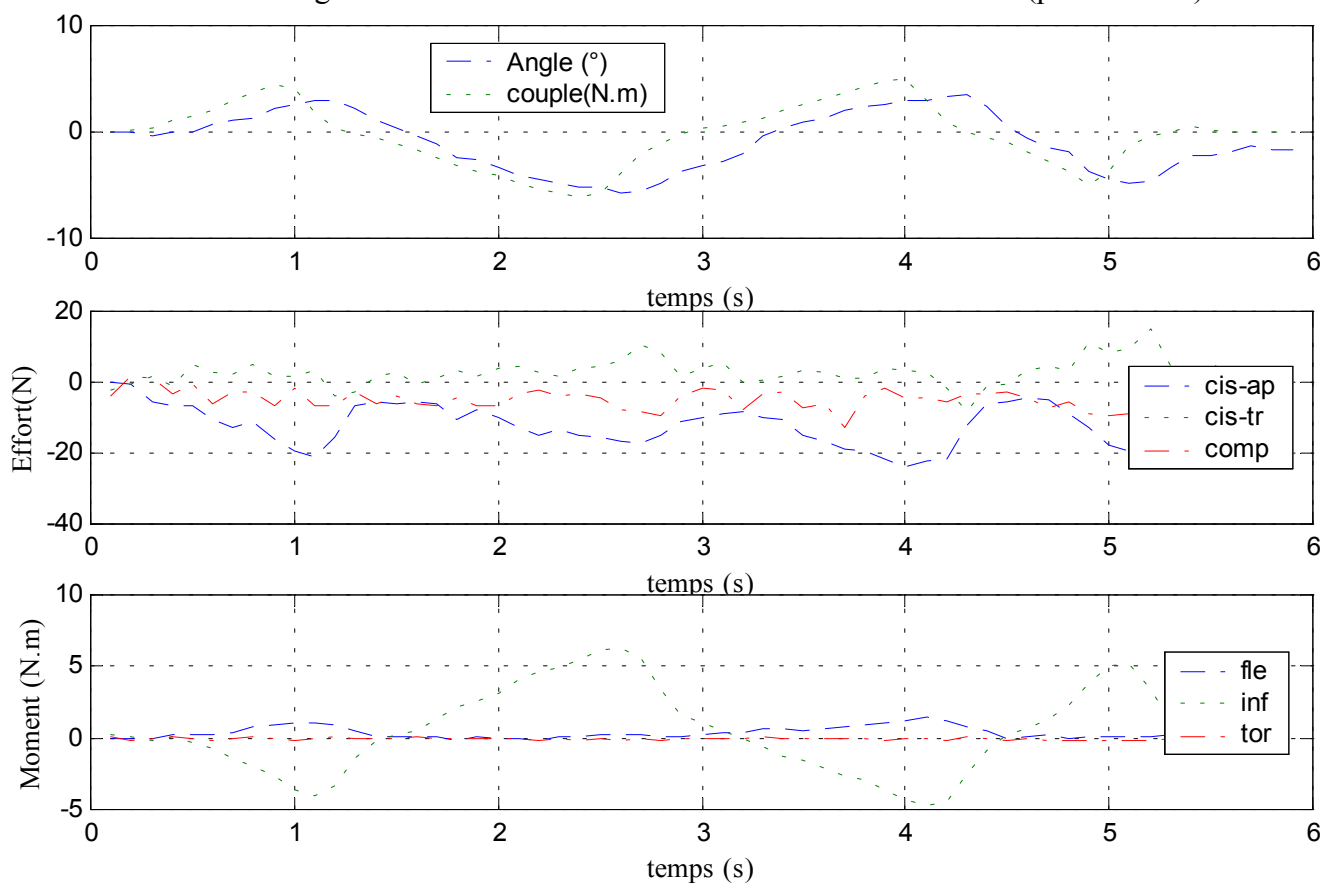


Figure 165 : efforts et moments au niveau des vertèbres inférieure et supérieure (T7-T9)

C. Analyse

Le moment d'inflexion varie suivant les essais entre 3 N.m et 7 N.m, valeurs que nous retrouvons à la fois au niveau du capteur supérieur (courbe « couple » du premier graphe de la figure 165) et inférieur (courbe « inf » du troisième graphe de la figure 165) en valeur absolue. Les efforts sont au maximum de 30 N et le cisaillement antéro-postérieur est l'effort dominant dans la plupart des cas. On observe également un phénomène de couplage avec apparition d'une composante de torsion dans les moments et dans les rotations de la vertèbre centrale. Ce phénomène est moins prononcé pour les spécimens thoraco-lombaires. Le sens de la composante secondaire (torsion) est le plus souvent dans le même sens que la composante principale d'inflexion. C'est à dire qu'une torsion gauche accompagne une inflexion gauche. Nous remarquons aussi une faible composante de flexion pour certains spécimens testés.

Concernant les rotations de la vertèbre centrale, nous trouvons un ratio compris entre 1 et 2, suivant les spécimens entre la rotation principale de la vertèbre supérieure et celle de la vertèbre centrale. Pour les pièces ayant une faible mobilité (quelques degrés), la vertèbre centrale tourne quasiment de la même valeur que la vertèbre supérieure. Pour les pièces plus mobiles, la rotation de la vertèbre centrale est environ deux fois plus faible que celle de la vertèbre supérieure. Les translations du point choisi pour la vertèbre centrale sont de l'ordre du millimètre.

Les résultats sont aussi présentés d'une façon plus classique sous la forme de courbes en hystérésis caractéristiques du comportement viscoélastique du rachis (figure 166).

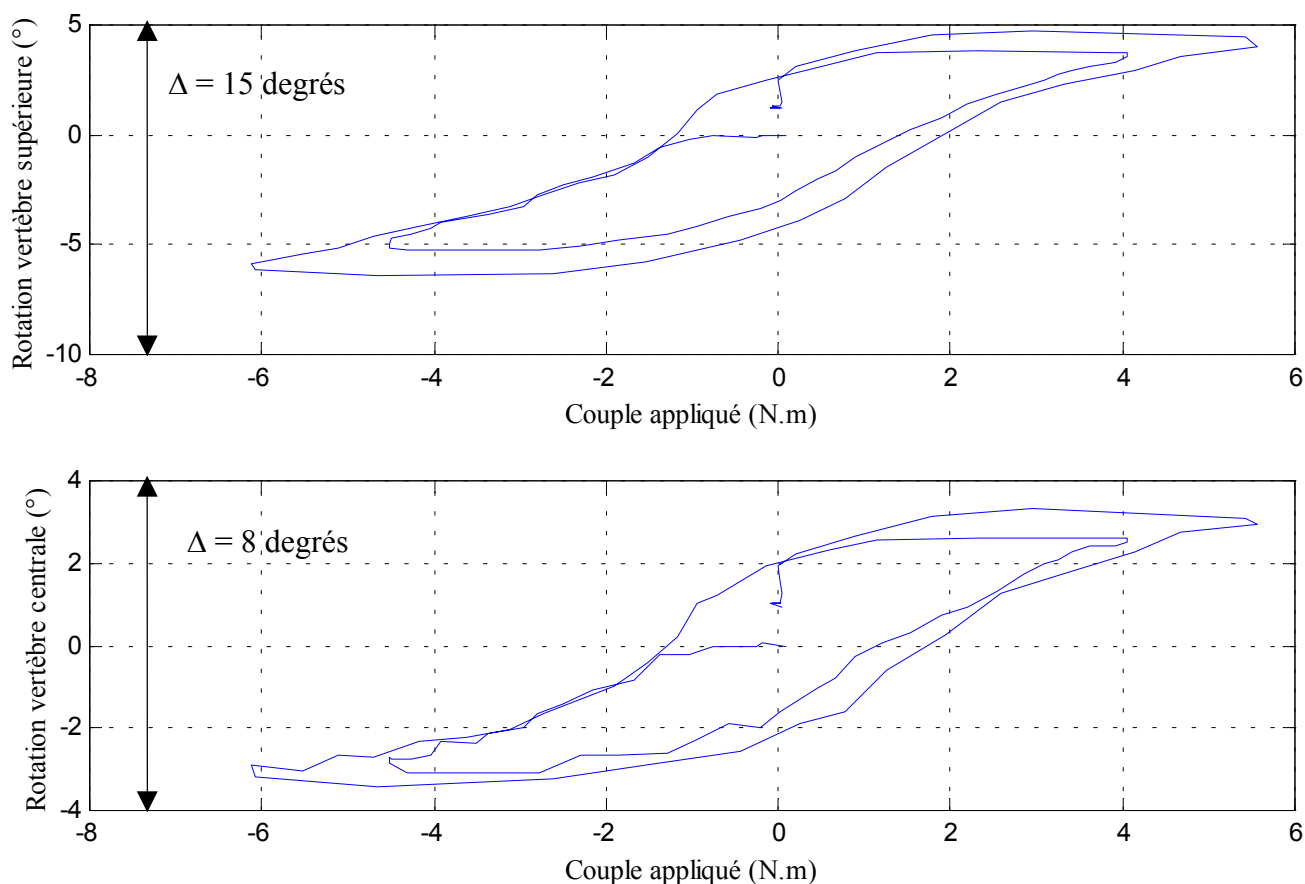


Figure 166 : rotation principale (inflexion) en fonction du couple (T11-L1)

2- Dynamique

A. Efforts, moments et déplacement : courbes types

Deux configurations ont été choisies. Il s'agit de la configuration saine et de la configuration avec le ligament jaune sectionné. Les courbes présentées sont issues d'essais sur pièce T11-L1.

Configuration saine (aucune lésion ligamentaire)

✓ Déplacements

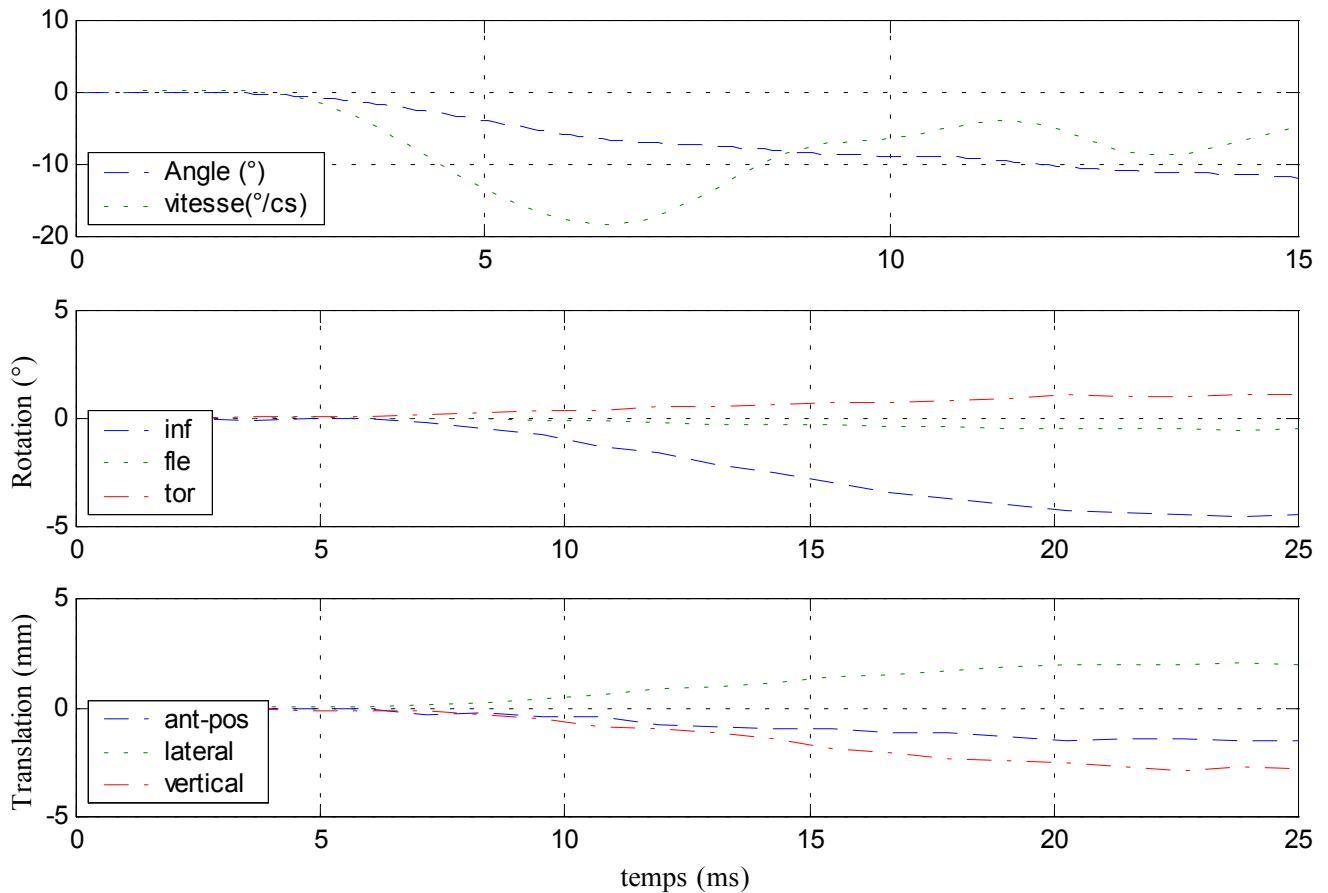


Figure 167 : déplacements de la vertèbre centrale

✓ Efforts et moments supérieurs

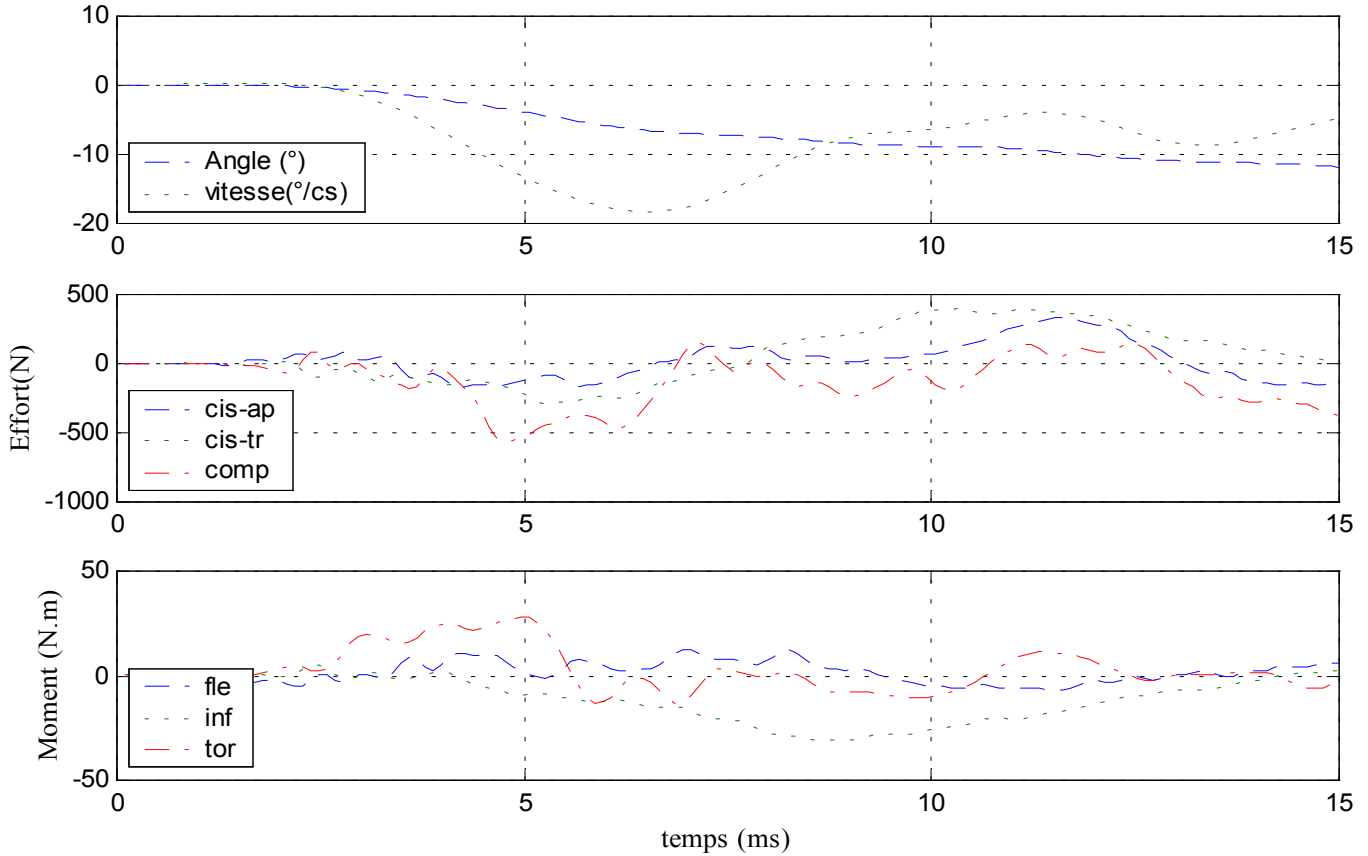


Figure 168 : efforts et moments au niveau de la vertèbre supérieure

✓ Efforts et moments inférieurs

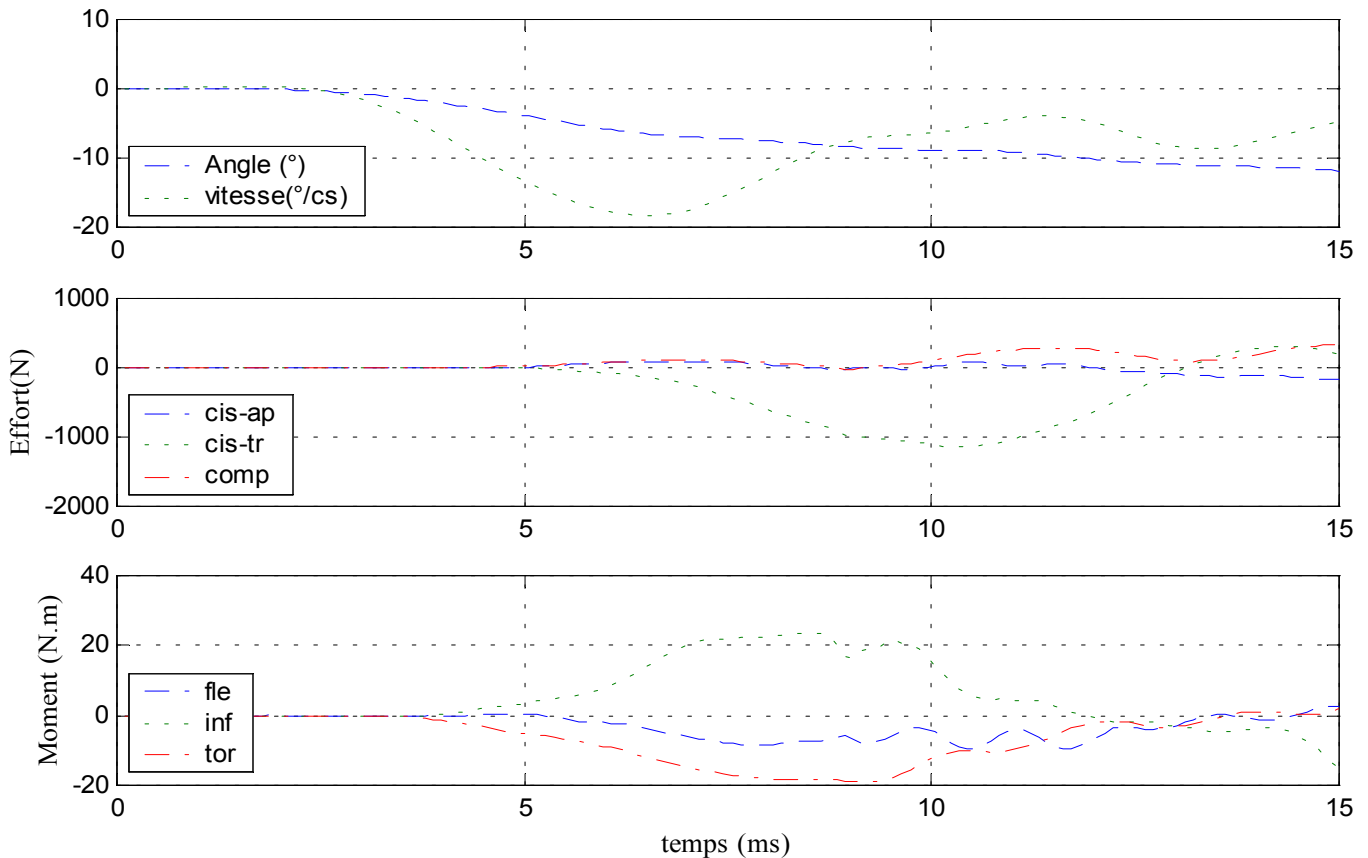


Figure 169 : efforts et moments au niveau de la vertèbre inférieure

Configuration avec ligament jaune sectionné

✓ Déplacements

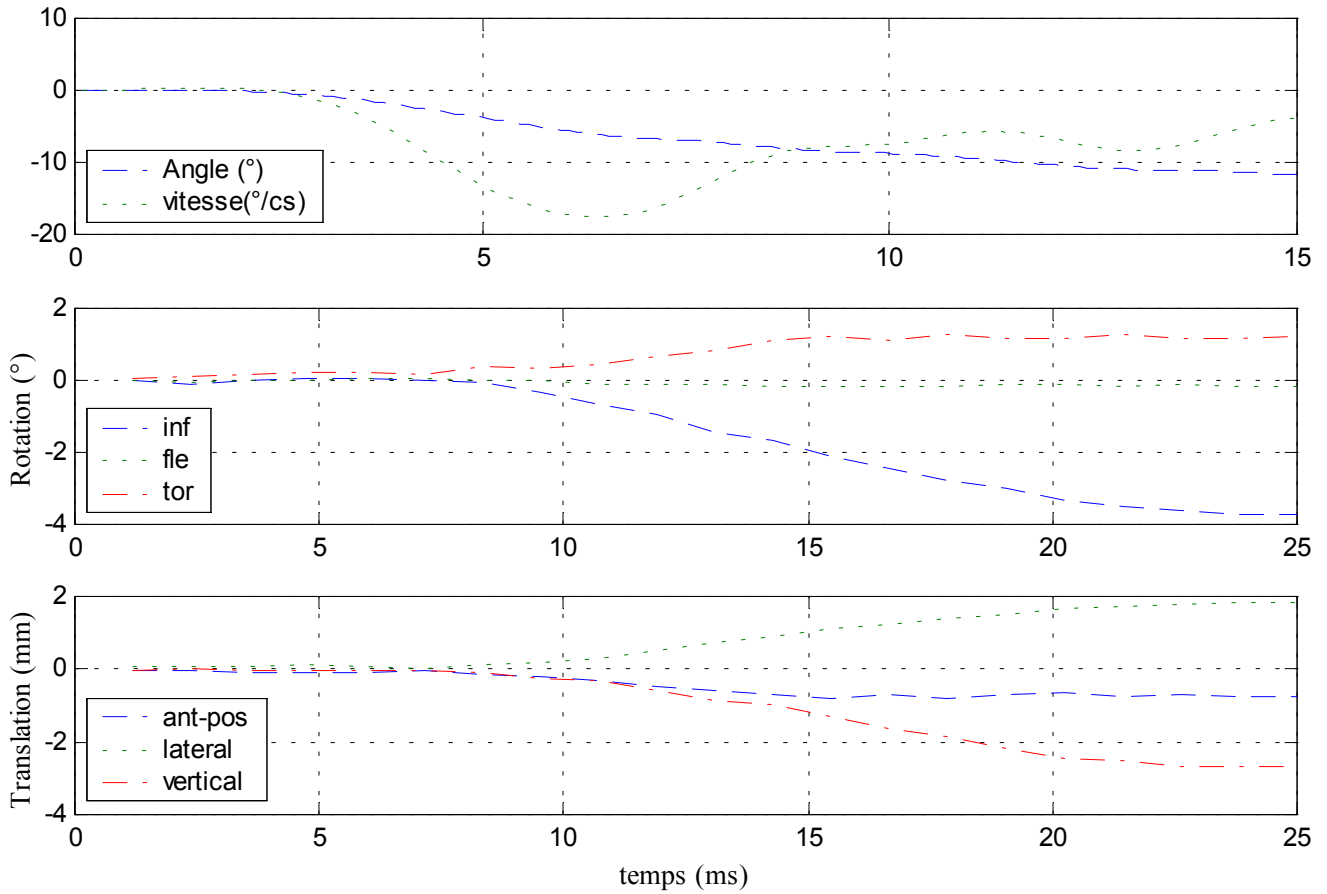


Figure 170 : déplacements de la vertèbre centrale

✓ Efforts et moments supérieurs

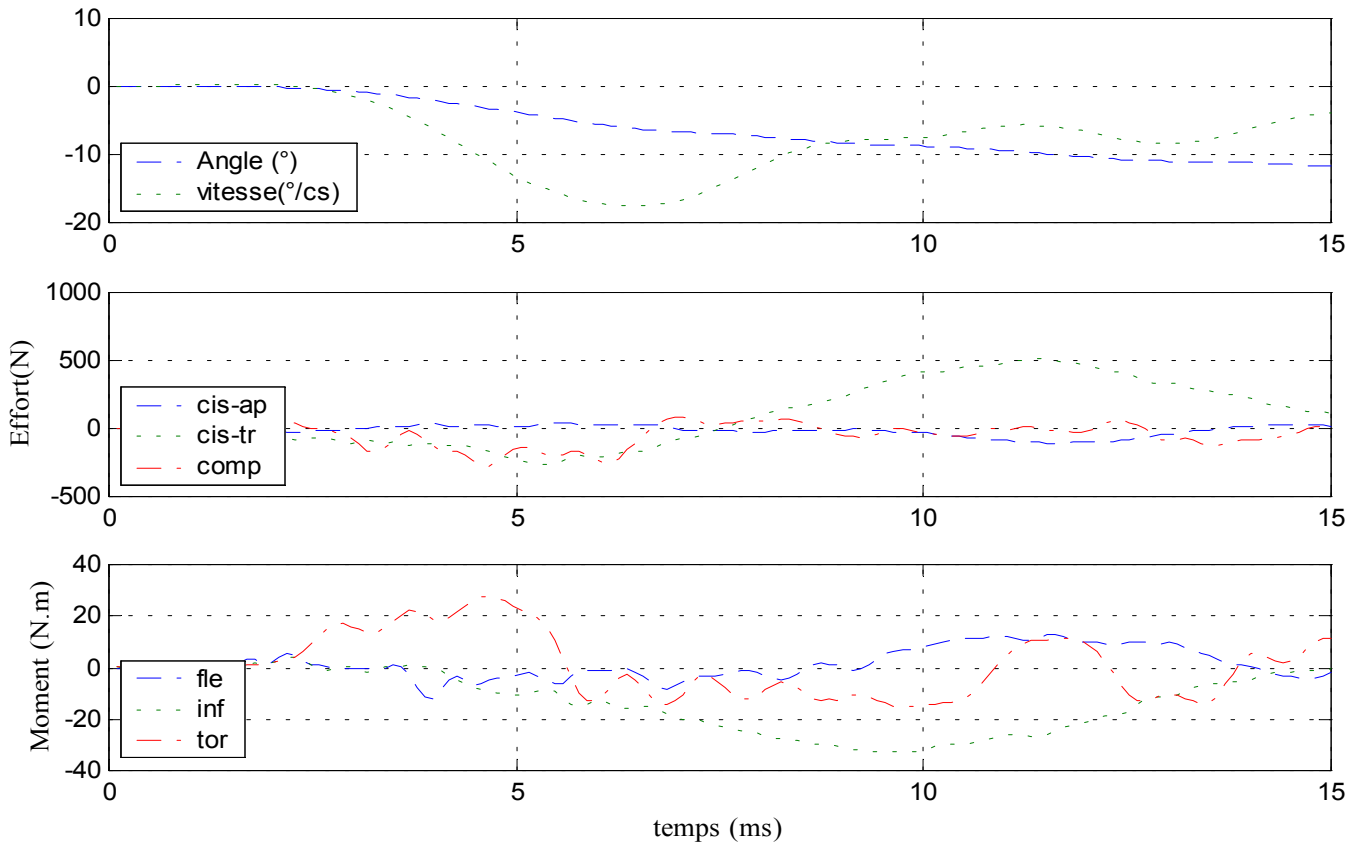


Figure 171 : efforts et moments au niveau de la vertèbre supérieure

✓ Efforts et moments inférieurs

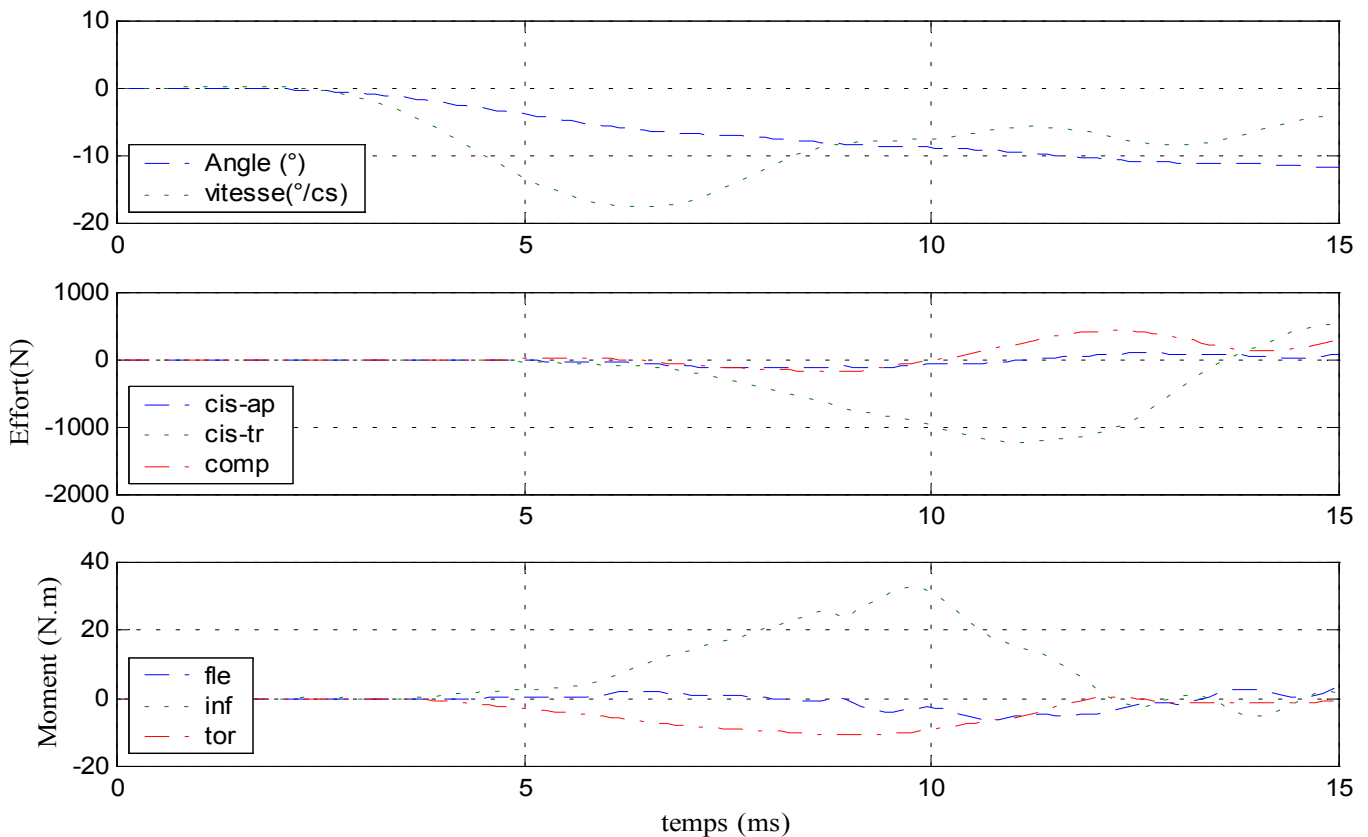


Figure 172 : efforts et moments au niveau de la vertèbre inférieure

B. Efforts, moments et déplacement : résumé des résultats

	Vertèbre supérieure		Vertèbre centrale							
	T stab (ms)	Angle (degrés)	Décalage Initial (ms)	Durée de Stabilisation (ms)	Valeur finale (degrés),(mm)					
					inf	fle	tor	a-p	lat	ver
6-L2L4-sain	14	12	2	15	-6.5	0.3	1.2	1	2.5	-1.3
7-L2L4-sain	11	10	3	15	-4.3	0.4	0.8	1	2.5	-3.5
8-L2L4-sain	12	10	3	18	-3.9	-0.5	0.8	-0.1	-0.5	-2.5
6-L2L4-capsule	12	12	4	15	-5	-0.2	0.9	3.5	1.2	-3
8-L2L4-jaune	10	10.2	1	15	-3.2	0.8	0.8	-0.6	2.5	0.8
9-T11L1-sain	14	12	5	15	-5.8	0.5	-1.2	1.5	2.2	-4
11-T11L1-sain	12	12	4	15	-4.5	-0.5	1	-1.5	2	-2.7
18-T11L1-sain	10	8	5	14	-3	0.1	0.6	0.5	2	-2.8
9-T11L1-epineux	12	12	3	15	-5	0.1	-0.8	1	3	-4.9
11-T11L1-caspule	12	11	5	15	-4.5	-0.3	1	-1	2	-3
18-T11L1-capsule	12	8.8	1	16	-4.3	0	0.4	0.8	3	-4.9
11-T11L1-jaune	12	11	4	15	-3.7	0.1	1.2	-0.8	1.8	-2.7
18-T11L1-jaune	12	10	1	13	-4.6	0.4	1.1	-1	2	-5
11-T11L1-epineux	12	11.5	4	16	-4.1	0.2	1.2	-1	2	-2.8
18-T11L1-epineux	12	10	1	15	-4.4	1.2	1.7	-1.4	3	-4
10-T3T5-sain	15	11.6	2	13	-5.3	0.3	1.3	0.4	2.5	-3.3
12-T7T9-sain	12	10.4	1	15	-6	0.3	-1.8	1.1	1.5	-2.1
17-T7T9-sain	10	7	4	13	-3.6	0.4	1	1.3	1.7	-2.7
12-T7T9-transverse	14	11.7	5	17	-5.8	0.1	-1.5	2	3.5	-1.5

Tableau 33 : résultats cinématiques de la vertèbre supérieure et de la vertèbre centrale

	Capteur supérieur: unités (N) et (N.m)					
	cis-ap	cis-tr	comp	Fle	Inf	tor
6-L2L4-sain	420	800	-380	-5	-84	14
7-L2L4-sain	420	270	-910	-2	-73	5
8-L2L4-sain	400	850	-320	10	-51	10
6-L2L4-capsule	380	890	-350	-10	-87	15
8-L2L4-jaune	-400	800	-450	-10	-37	14
9-T11L1-sain	50	600	-440	6	-67	-21
11-T11L1-sain	-100	400	-570	7	-32	28
18-T11L1-sain	-200	640	-270	8	-54	20
9-T11L1-epineux	200	750	-600	5	-70	-27
11-T11L1-capsule	-60	500	-300	12	-35	17
18-T11L1-capsule	-200	740	-180	5	-43	12
11-T11L1-jaune	-100	550	-250	12	-35	15
18-T11L1-jaune	-180	720	-160	5	-46	13
11-T11L1-epineux	-160	500	-270	10	-30	11
18-T11L1-epineux	-150	740	-260	5	-45	10
10-T3T5-sain	70	620	-430	-6	-51	16
12-T7T9-sain	-300	650	-220	8	-48	-30
17-T7T9-sain	200	500	-320	-5	-45	31
12-T7T9-transverse	250	600	-280	6	-50	-25

Tableau 34 : efforts et moments au niveau de la vertèbre supérieure

	Capteur inférieur: unités (N) et (N.m)					
	cis-ap	cis-tr	comp	Fle	Inf	tor
6-L2L4-sain	200	-920	310	7	77	-7
7-L2L4-sain	-240	-560	440	1	63	-6
8-L2L4-sain	-240	-1340	460	-8	43	-13
6-L2L4-capsule	150	-890	150	8	76	-12
8-L2L4-jaune	-290	-1200	450	6	36	-15
9-T11L1-sain	-60	-970	760	-7	52	16
11-T11L1-sain	50	-1100	280	-9	24	-19
18-T11L1-sain	210	-820	400	-5	51	-20
9-T11L1-epineux	-210	-1220	810	-4	55	20
11-T11L1-capsule	70	-1250	340	-4	29	-13
18-T11L1-capsule	280	-820	510	-12	30	-14
11-T11L1-jaune	100	-1200	440	-4	33	-11
18-T11L1-jaune	200	-850	1000	-12	35	-17
11-T11L1-epineux	100	-1000	370	-3	31	-10
18-T11L1-epineux	210	-610	750	-10	37	-12
10-T3T5-sain	100	-760	580	-3	47	-10
12-T7T9-sain	340	-800	200	-10	43	24
17-T7T9-sain	200	-450	380	-4	42	-26
12-T7T9-transverse	-200	-720	880	-10	45	22

Tableau 35 : efforts et moments au niveau de la vertèbre inférieure

Nota : l'ensemble des courbes relatives aux essais dynamiques se trouve en annexe

C. Analyse

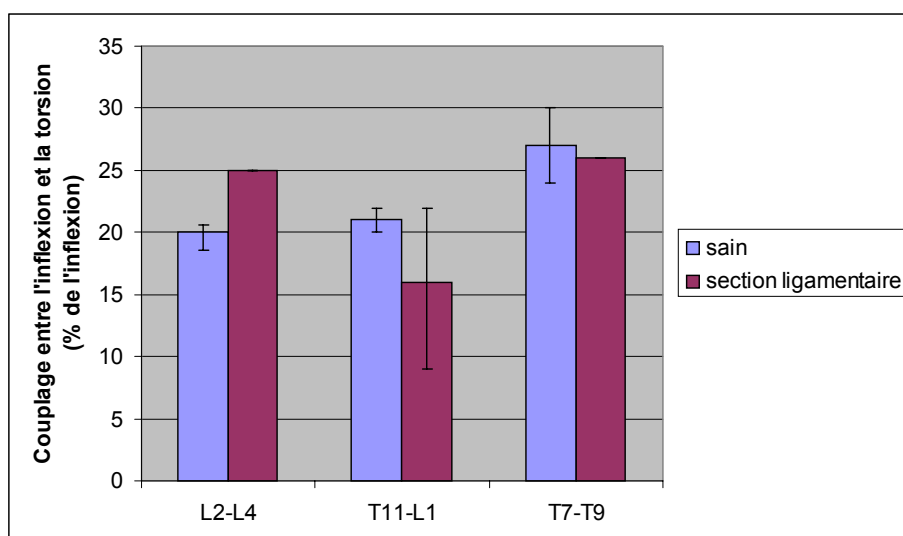
En prenant l'ensemble des essais en inflexion, nous constatons que les rotations imposées à la vertèbre supérieure pour les essais dynamiques sont bien supérieures aux rotations imposées durant les essais statiques sans pour autant entraîner automatiquement une lésion du spécimen (figure 174).

Nous observons un phénomène de couplage cinématique, notamment pour les étages lombaires et thoraciques avec apparition d'une composante de torsion parallèlement à la sollicitation principale d'inflexion latérale. La composante secondaire est le plus souvent dans le même sens que la composante principale, c'est à dire qu'une inflexion gauche est accompagnée d'une torsion gauche. Les mêmes phénomènes sont observés pour les efforts et les moments.

La rotation principale de la vertèbre centrale est environ deux fois plus faible que celle de la vertèbre supérieure en configuration saine. Le moment d'inflexion atteint des valeurs de 80 N.m, l'effort de compression de 1000 N et l'effort de cisaillement transverse de 1300 N tous essais confondus. Les commentaires suivants sont axés sur le moment d'inflexion, le moment de torsion, le cisaillement transverse et la compression. Les autres composantes sont considérées comme parasites dans le mouvement d'inflexion.

Niveau lombaire : L2-L4

Les tests en configuration saine font apparaître une valeur de couplage allant jusqu'à 20 % de la sollicitation principale (figure 173). La section des ligaments capsulaires et celle du ligament jaune entraîne une diminution (20 %) de la rotation principale d'inflexion associée à une diminution (plus faible) de l'angle de torsion secondaire (10 %). Les déplacements de la vertèbre centrale sont de quelques millimètres. En outre, les sections pratiquées provoquent une légère baisse des efforts et des moments (40%) pour la configuration avec le ligament jaune sectionné (figure 175). Nous n'observons pas de tendance nette concernant le décalage entre le début du mouvement de la vertèbre centrale et le début du mouvement de la vertèbre supérieure après lésion.



Section :
L2-L4 : Lig. jaune
T11-L1 : Lig. capsulaire
T7-T9 : Lig. transverse

Figure 173 : couplage entre l'inflexion et la torsion avant et après section ligamentaire

Niveau thoraco-lombaire : T11-L1

Les tests en configuration saine font apparaître un couplage (figure 173) entre l'inflexion et la torsion qui a tendance à chuter après la section des ligaments capsulaires. Ce faible niveau est probablement dû à l'orientation particulière des facettes de T12. La section du ligament épineux aurait tendance à diminuer l'amplitude du mouvement tout en maintenant des niveaux d'efforts et de moments constants ou en légère baisse.

La section des capsules articulaires entraîne une augmentation de la mobilité pour un spécimen et un niveau constant pour l'autre. Les efforts sont en augmentation et les moments en diminution de 25% (figure 175).

Concernant le ligament jaune, sa section entraîne une variation dans les amplitudes de mobilité sans définir de tendance. Les efforts et les moments sont en légère augmentation. Le ligament pourrait avoir un rôle de stabilisation de l'articulation inter-vertébrale.

En observant les courbes des moments, nous remarquons que le moment de torsion apparaît quelques millisecondes avant le moment d'inflexion.

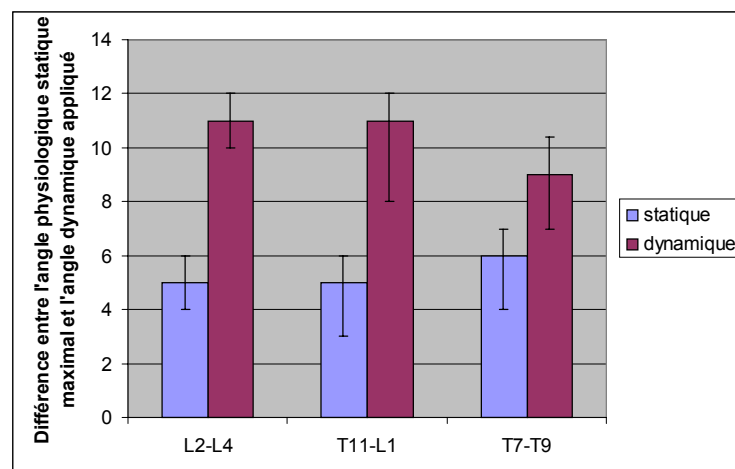
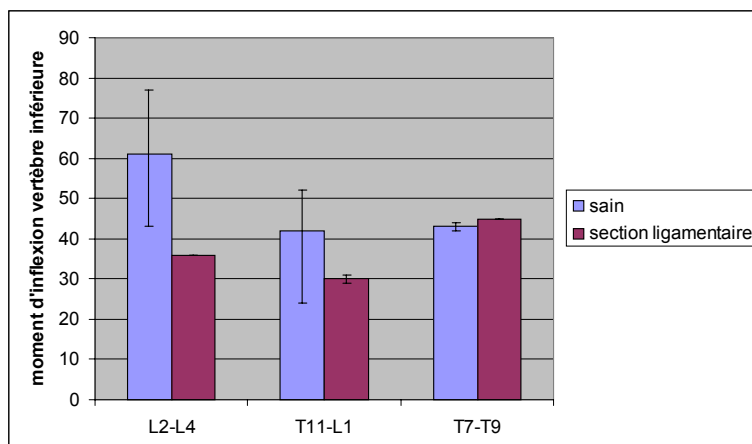


Figure 174 : différence entre l'angle physiologique statique maximal et l'angle dynamique

Niveau thoracique : T3-T5 et T7-T9

Ce niveau n'a pu être testé de façon exhaustive en raison de rupture des structures ligamentaires qui s'explique par la relative fragilité de ces petites pièces. Nous pouvons néanmoins observer un phénomène de couplage avec apparition d'une composante de torsion (figure 173). Concernant la section de la structure inter-transversaire, elle ne modifie que faiblement la cinématique mais elle entraîne une augmentation des efforts et, plus faiblement, des moments (figure 175). De même que pour T11-L1, nous remarquons que le moment de torsion apparaît quelques millisecondes avant le moment d'inflexion.



Section :
L2-L4 : Lig. jaune
T11-L1 : Lig. capsulaire
T7-T9 : Lig. transverse

Figure 175 : moment d'inflexion de la vertèbre inférieure

1- Statique

A. Lieu des centres instantanés de rotation de la vertèbre supérieure par rapport à la vertèbre inférieure : courbes types

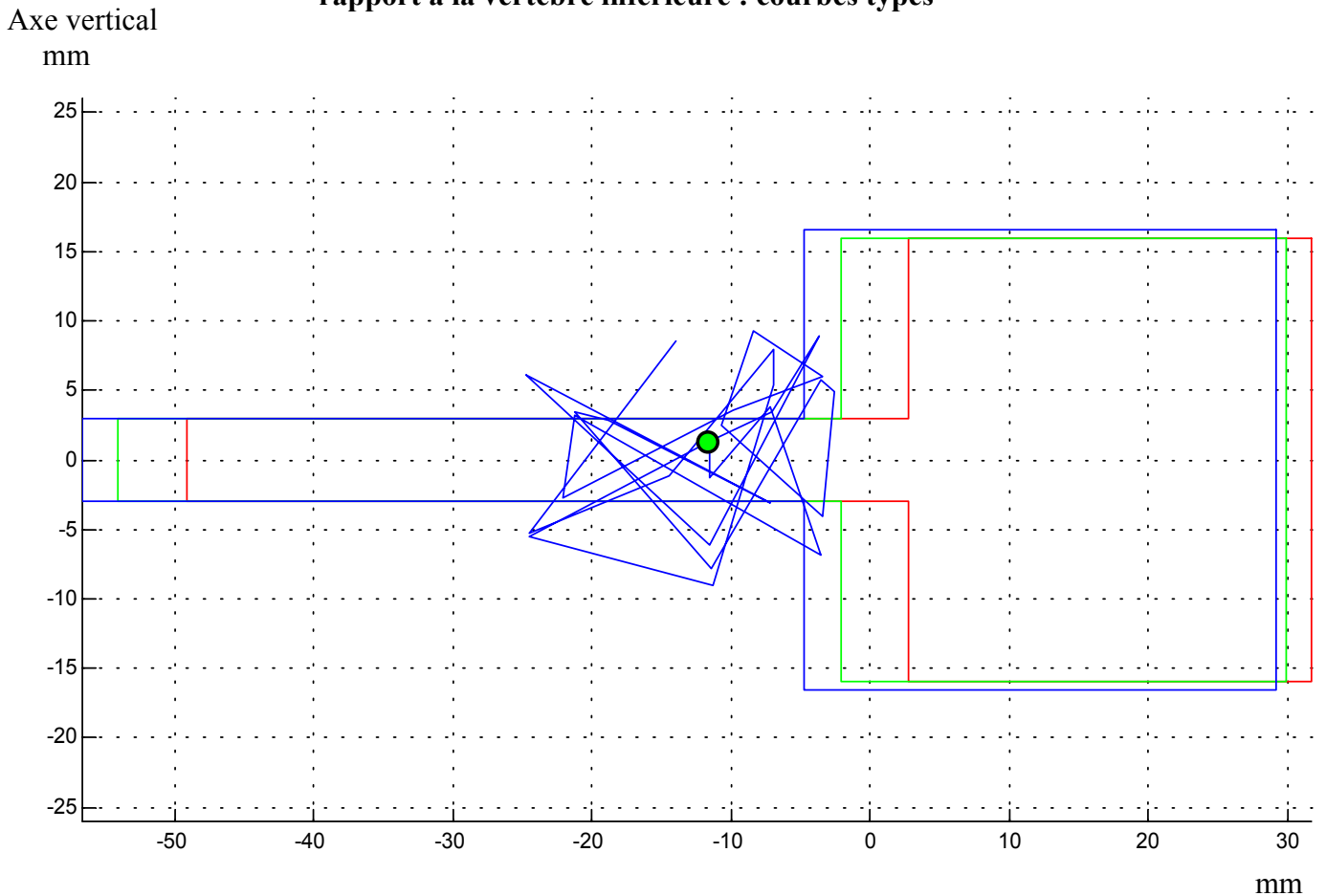


Figure 176 : lieu des axes instantanés de rotation (T7-T9)

mm

Cette figure (figure 176) représente les traces des axes instantanés de rotation au cours du temps dans le plan horizontal médian de la vertèbre centrale ainsi que la position moyenne de ces axes (point vert).

Bien que la bibliographie ne fasse pas état de centre de rotation pour un segment de trois vertèbres, il est néanmoins possible de corréler ce résultat avec la littérature et de constater qu'il est en accord avec cette dernière. Il est à noter que l'ensemble des essais statiques fait état de ce résultat.

B. Efforts, moments et déplacement : courbes types

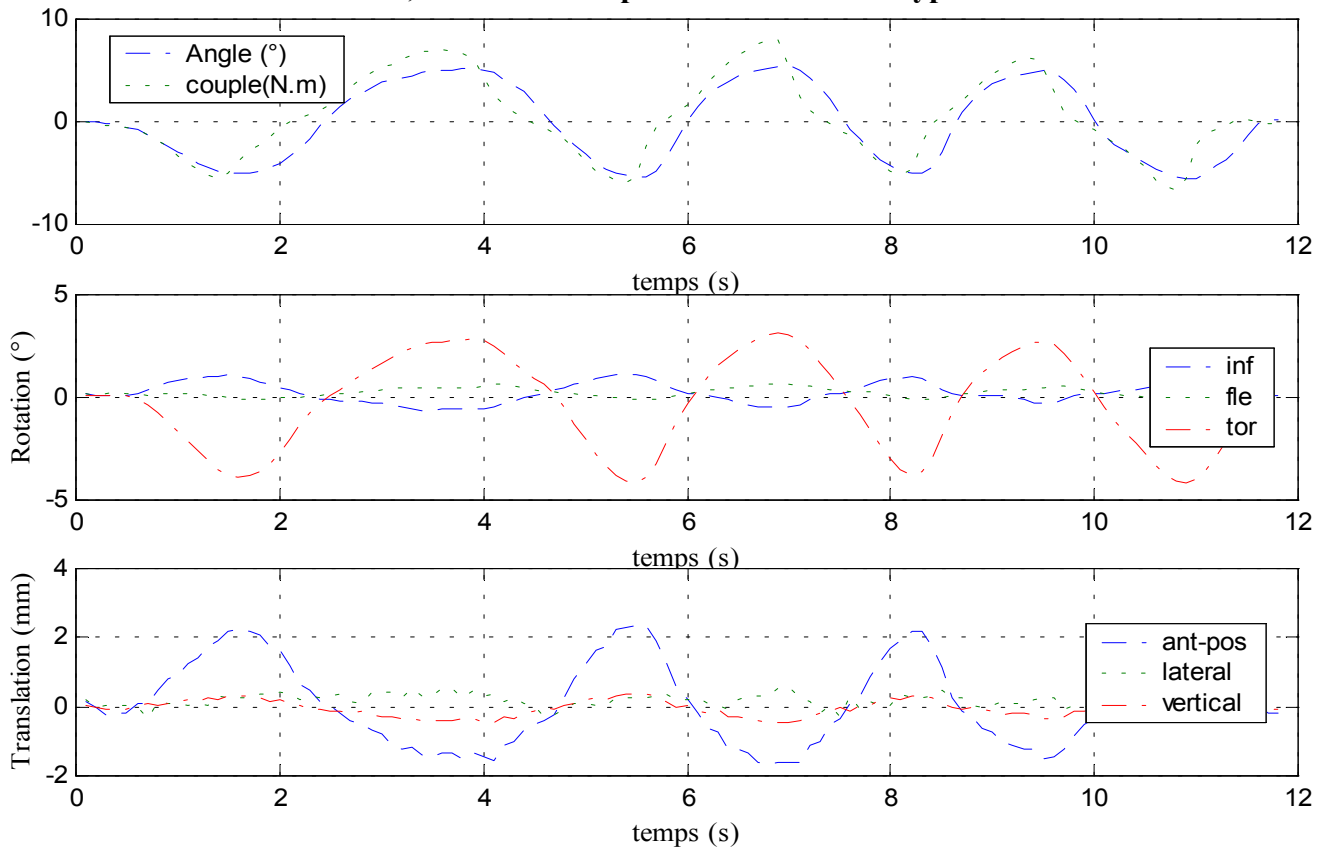


Figure 177 : rotation et translation de la vertèbre centrale (pièce T10-T12)

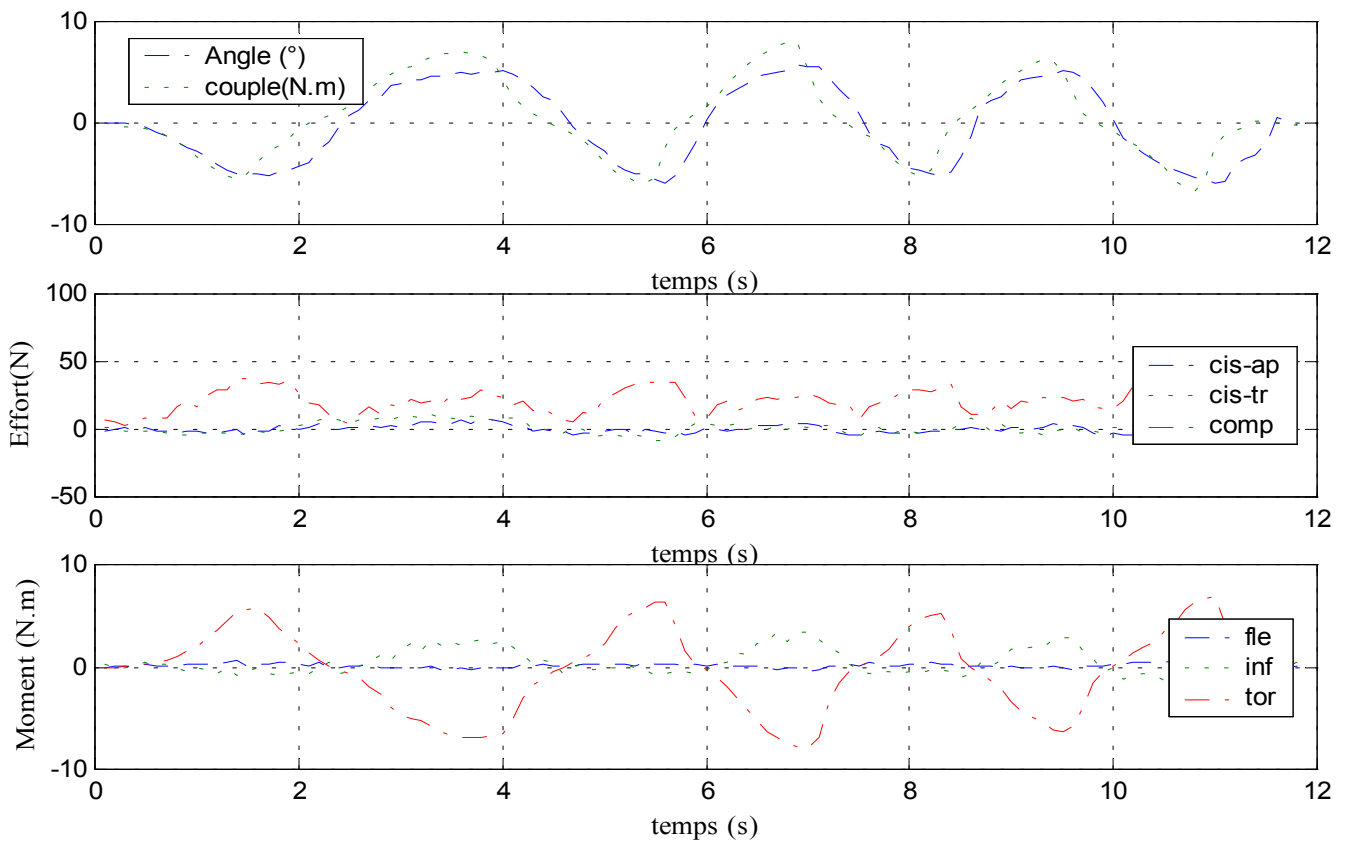


Figure 178 : efforts et moments au niveau des vertèbres inférieure et supérieure (T10-T12)

C. Analyse

Les commentaires faits sur le mode de torsion sont pratiquement les mêmes que pour l'inflexion. Le moment de torsion varie suivant les essais entre 3 N.m et 6 N.m, valeurs que nous retrouvons à la fois au niveau du capteur supérieur (courbe « couple » du premier graphe de la figure 178) et inférieur (courbe « tor » du troisième graphe de la figure 178) en valeur absolue. Les efforts sont au maximum de 40 N et la compression est l'effort dominant dans la plupart des cas. Nous observons également un phénomène de couplage avec apparition d'une composante d'inflexion dans les moments et dans les rotations de la vertèbre centrale. Ce phénomène est assez important pour les spécimens lombaires. Le sens de la composante secondaire (inflexion) est le plus souvent dans le même sens que la composante principale de torsion. C'est à dire qu'une inflexion gauche accompagne une torsion gauche. Nous remarquons aussi une faible composante de flexion pour certains spécimens testés.

Concernant les rotations de la vertèbre centrale, nous trouvons un ratio compris entre 1 et 2, suivant les spécimens, entre la rotation principale de la vertèbre supérieure et celle de la vertèbre inférieure. Pour les pièces ayant une faible mobilité (quelques degrés), la vertèbre centrale tourne quasiment de la même valeur que la vertèbre supérieure. Pour les pièces plus mobiles, la rotation de la vertèbre centrale est environ deux fois plus faible que celle de la vertèbre supérieure. Les translations du point choisi pour la vertèbre centrale sont de l'ordre du millimètre.

Les résultats sont aussi présentés d'une façon plus classique sous la forme de courbes en hystérésis caractéristiques du comportement viscoélastique du rachis (figure 179).

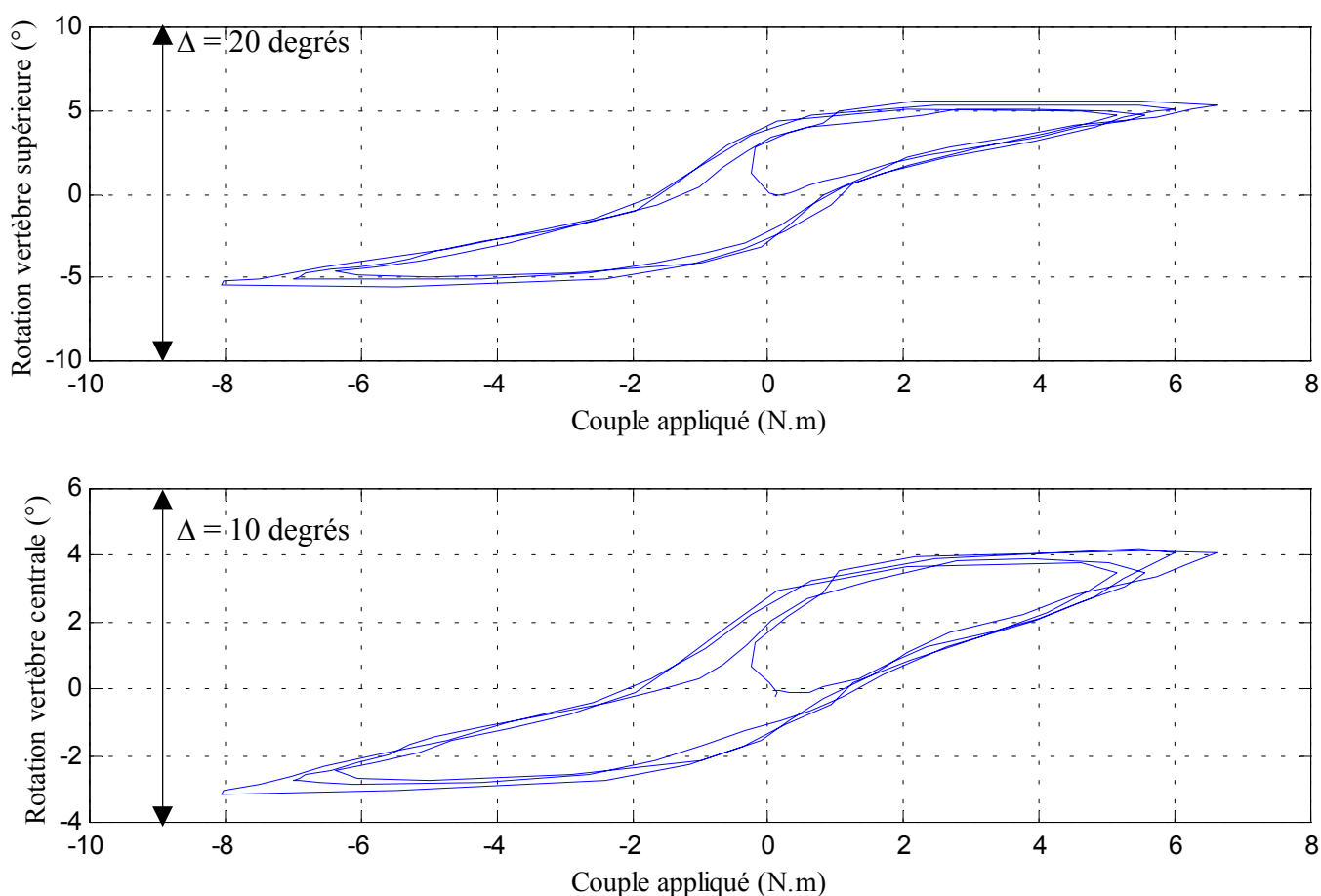


Figure 179 : rotation principale (torsion) en fonction du couple (T10-T12)

2- Dynamique

A. Efforts, moments et déplacement :résultat type

Deux configurations ont été choisies pour leur représentativité. Il s'agit de la configuration saine et de la configuration avec les ligaments inter-épineux et sus-épineux sectionnés. Les courbes présentées sont issues d'essais sur pièce thoraciques (T10-T12).

Configuration saine (aucune lésion ligamentaire)

✓ Déplacements

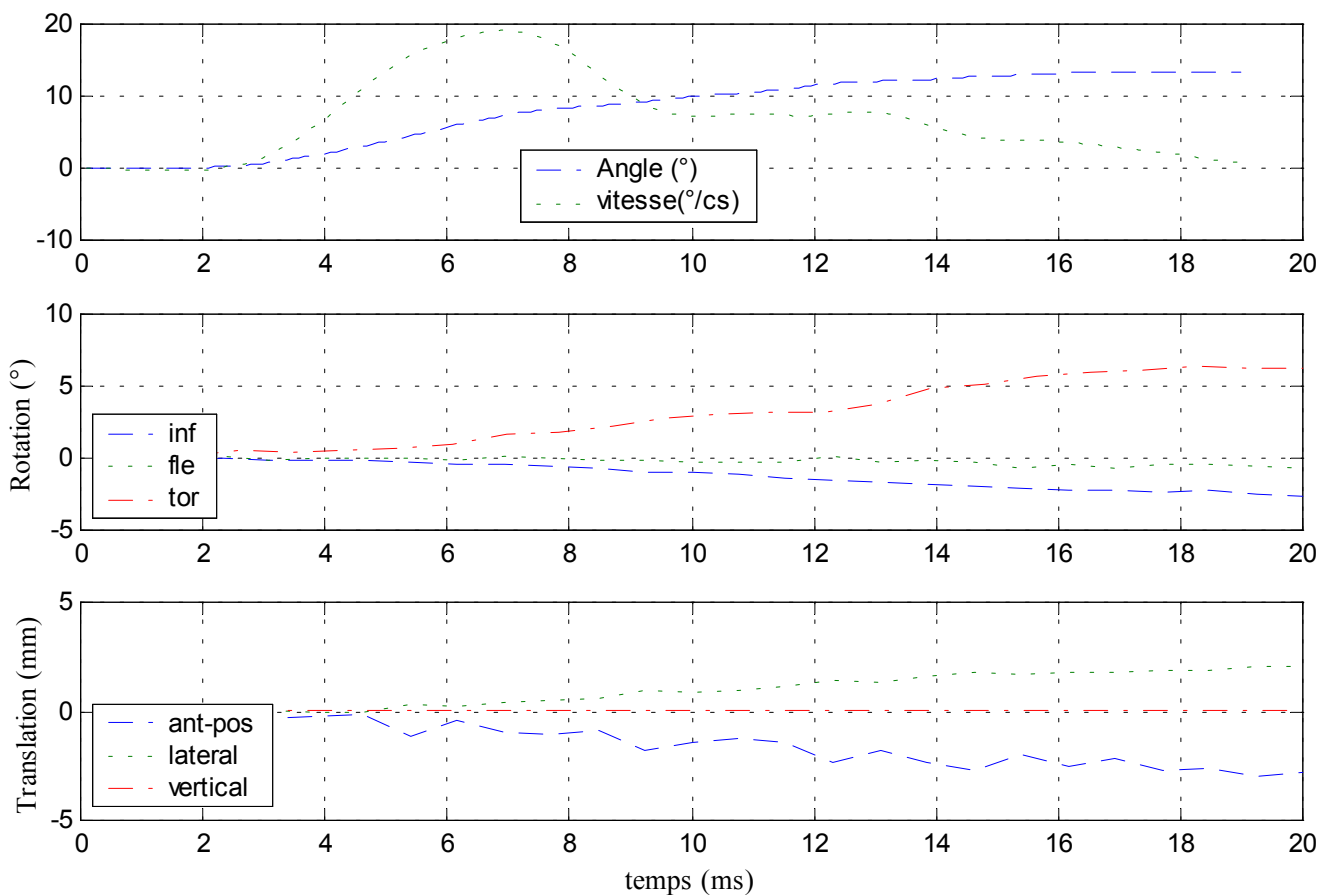


Figure 180 : déplacements de la vertèbre centrale

✓ Efforts et moments supérieurs

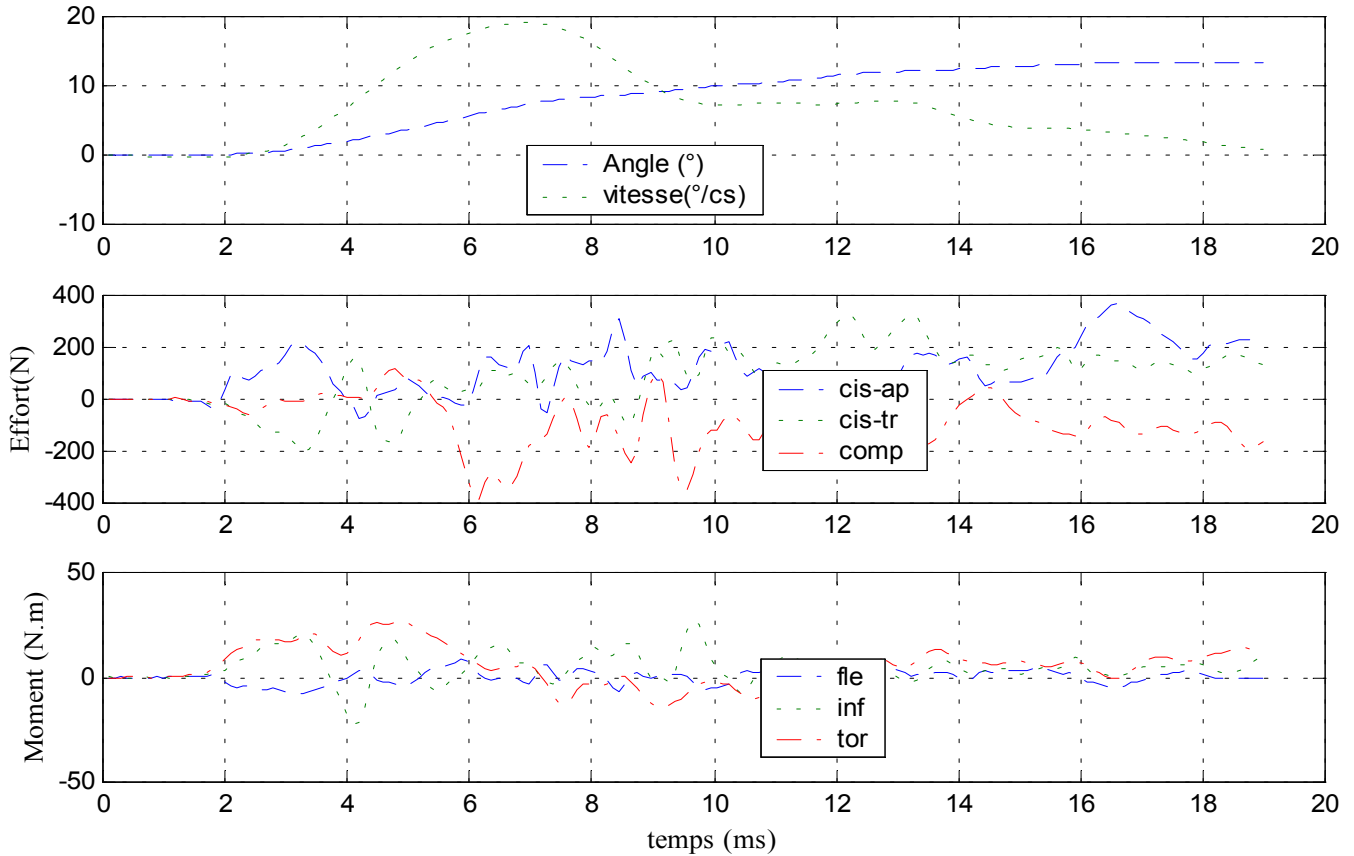


Figure 181 : efforts et moments au niveau de la vertèbre supérieure

✓ Efforts et moments inférieurs

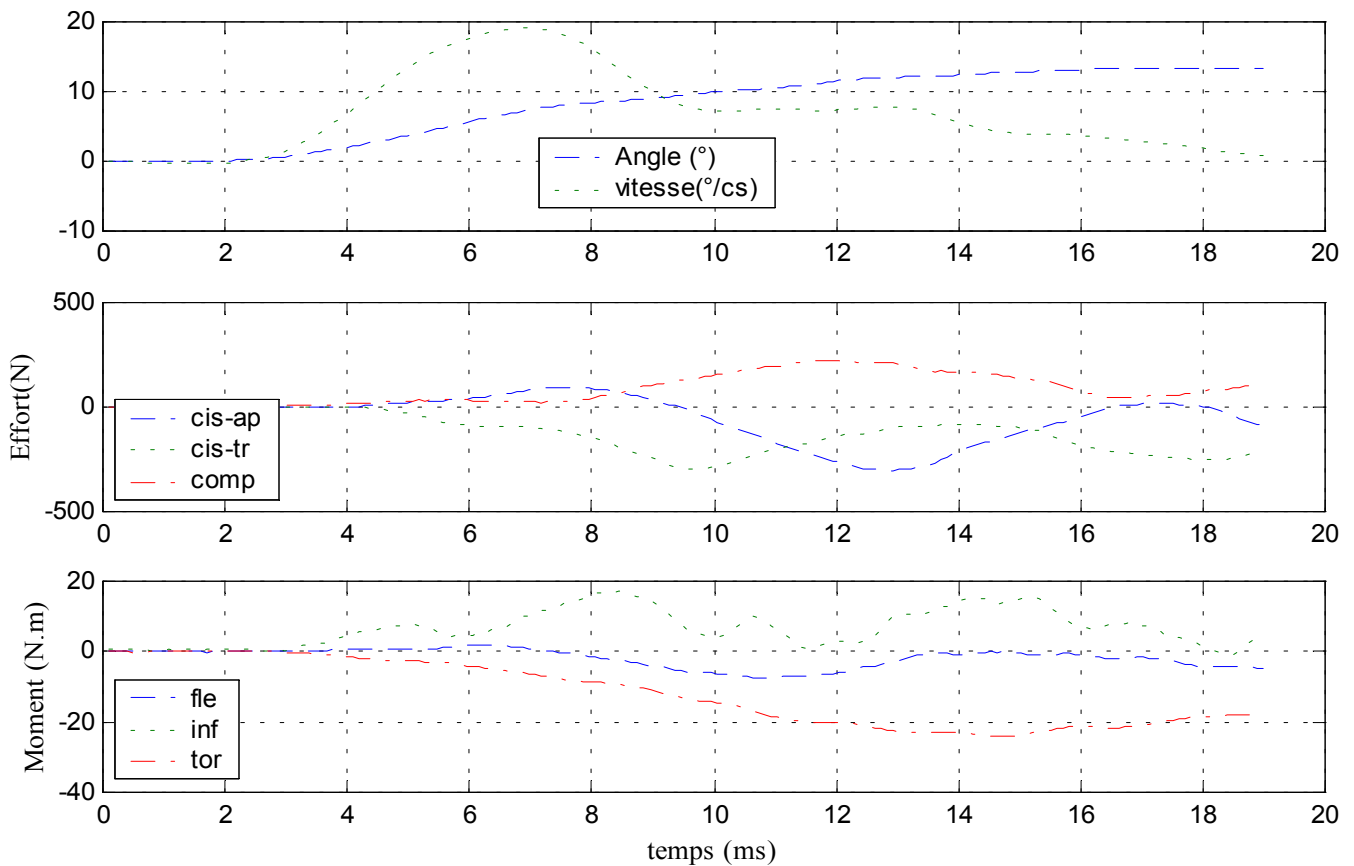


Figure 182 : efforts et moments au niveau de la vertèbre inférieure

✓ Déplacements

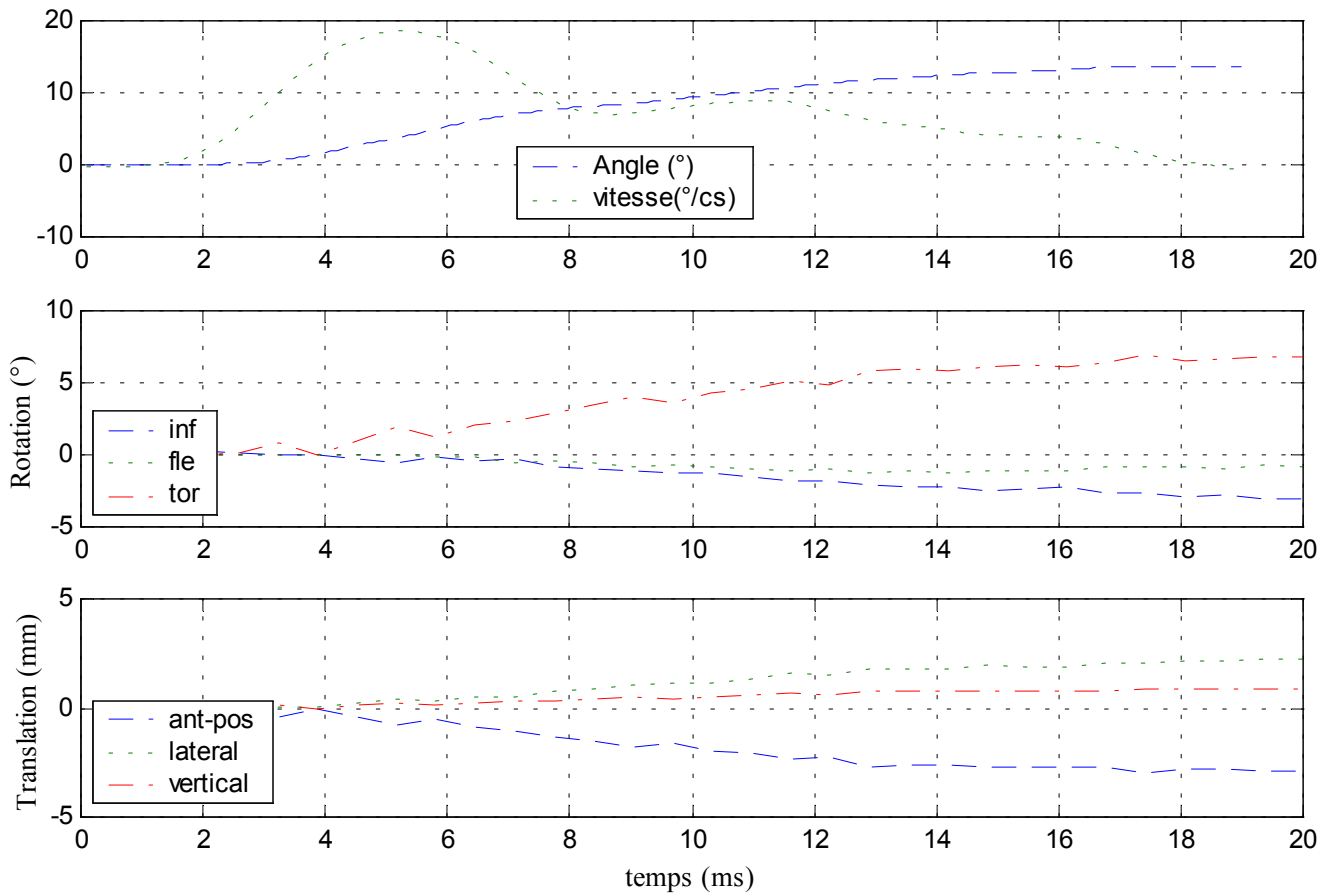


Figure 183 : déplacements de la vertèbre centrale

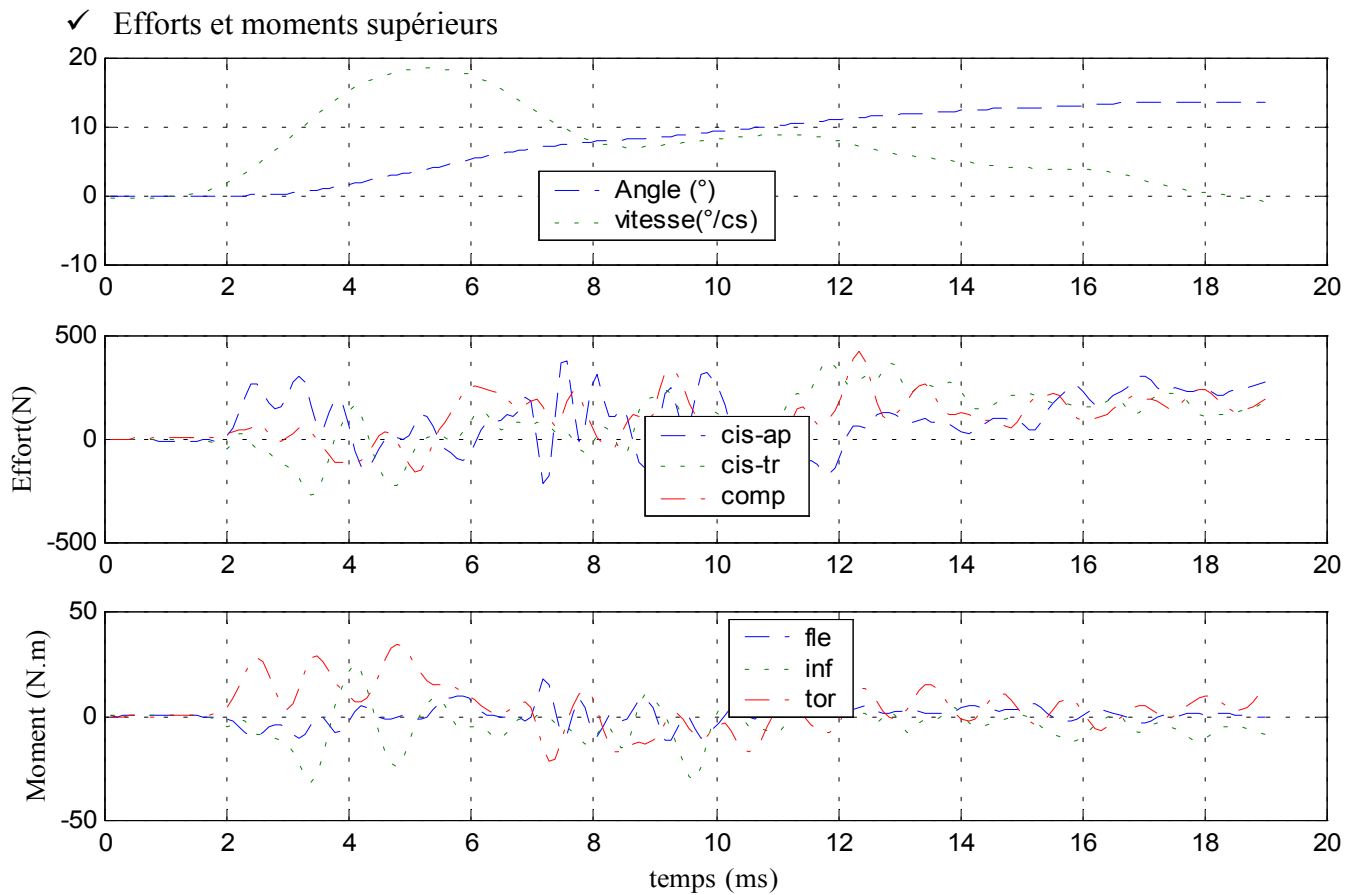


Figure 184 : efforts et moments au niveau de la vertèbre supérieure

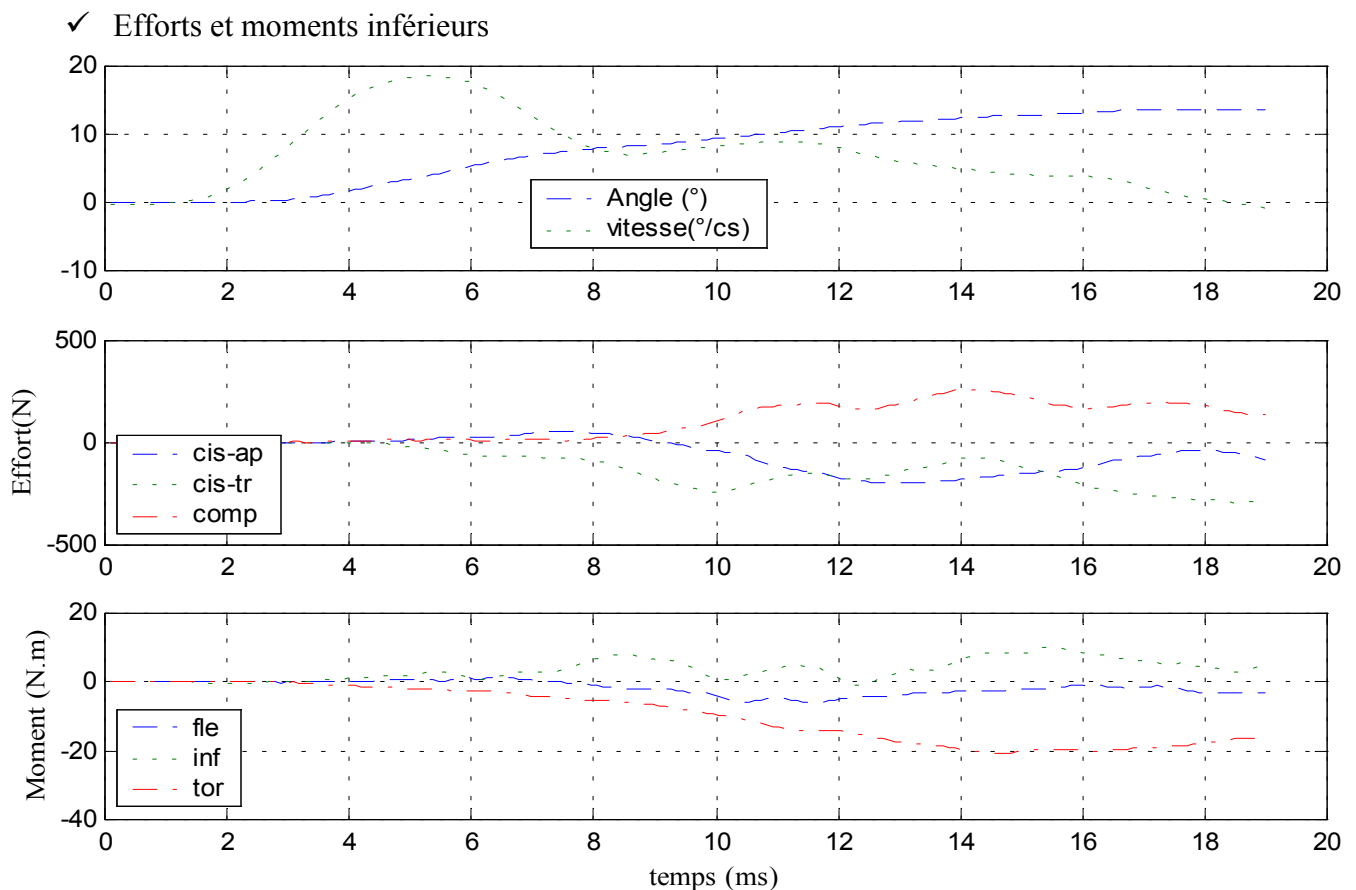


Figure 185 : efforts et moments au niveau de la vertèbre inférieure

B. Efforts, moments et déplacement : résumé des résultats

	Vertèbre supérieure		Vertèbre centrale							
	T stab (ms)	Angle (degrés)	Décalage Initial (ms)	Durée de Stabilisation (ms)	Valeur finale (degrés),(mm)					
					inf	fle	tor	a-p	lat	ver
19-L2L4-sain	13	10	0	14	2	-0.5	3.8	-3.8	1.6	0
20-L2L4-sain	12	11	0	16	-4	0.7	5	-2.3	0.9	0.7
19-L2L4-epineux	12	10.6	0	12	1	-0.6	4.1	-2.2	1	-0.1
20-L2L4-capsule	12	12.3	0	16	-2.1	-0.7	4	-2.8	0.8	1.4
20-L2L4-jaune	14	13.6	0	14	-2	-0.6	4.5	-3.6	1.5	1.2
20-L2L4-epineux	14	11	0	16	-1.4	-0.7	4	-2.2	0.8	1.5
21-T11L1-sain	10	9.5	1	12	-1.4	0.3	3.8	-3	1.2	1
24-T11L1-sain	10	12.2	0	14	2	-1	5	-3.5	4	1
21-T11L1-jaune	14	11.9	0	12	-1.1	-1	4	-2.6	1.4	1.5
24-T11L1-epineux	14	12.5	0	14	1.5	-0.1	4.7	-2	3	0.4
21-T11L1-epineux	16	12.2	0	12	-1.3	-0.5	4	-2	1.4	-0.1
24-T11L1-capsule	14	14.3	0	14	-2.3	-0.7	5.4	-2.2	1.5	0.3
24-T11L1-jaune	15	14.5	0	16	-4	-2	7	-2	3	1.7
22-T7T9-sain	14	12	0	14	-2.1	-0.1	5.1	-3.1	1.2	0.5
23-T10T12-sain	16	13.4	1	16	-2.5	-1.1	6.2	-2.9	2	0.1
22-T7T9-epineux	14	12	2	13	-2.1	-0.2	5.2	-2.4	1	0.6
23-T10T12-epineux	16	13.8	1	15	-2.6	-1	6.4	-2.7	1.5	0.7
22-T7T9-capsule	15	12.3	0	14	-2.4	-0.3	5.5	-3.1	2.1	0.9
23-T10T12-capsule	14	13.7	0	16	-3	-0.8	6.8	-2.9	2	0.9
23-T10T12-jaune	14	13.6	0	16	-3.5	-0.8	7.1	-3	3.1	1

Tableau 36 : résultats cinématiques de la vertèbre supérieure et de la vertèbre centrale

	Capteur supérieur: unités (N) et (N.m)					
	cis-ap	cis-tr	comp	Fle	Inf	tor
19-L2L4-sain	560	-400	-120	-6	10	57
20-L2L4-sain	100	-450	-300	-5	-10	35
19-L2L4-epineux	510	-460	-200	-5	12	60
20-L2L4-capsule	110	-500	-310	5	-11	37
20-L2L4-jaune	210	-550	-340	-10	-12	34
20-L2L4-epineux	100	-500	-270	-7	-10	31
21-T11L1-sain	120	-360	-140	-3	-12	50
24-T11L1-sain	180	-250	-120	5	28	45
21-T11L1-jaune	120	-390	-210	-7	-11	50
24-T11L1-epineux	250	-160	-160	-7	12	45
21-T11L1-epineux	140	-350	-120	10	-10	55
24-T11L1-capsule	200	-150	-170	7	-15	48
24-T11L1-jaune	240	-240	-300	-10	-16	45
22-T7T9-sain	150	-300	-70	-4	-19	36
23-T10T12-sain	220	-200	-30	-8	-21	25
22-T7T9-epineux	150	-340	-70	-5	-22	25
23-T10T12-epineux	310	-250	-100	-10	-27	32
22-T7T9-capsule	130	-290	-100	-2	-20	32
23-T10T12-capsule	310	-270	-120	-10	-30	32
23-T10T12-jaune	280	-250	-125	-5	-30	33

Tableau 37 : efforts et moments au niveau de la vertèbre supérieure

	Capteur inférieur: unités (N) et (N.m)					
	cis-ap	cis-tr	comp	Fle	Inf	tor
19-L2L4-sain	280	-200	180	1	-10	-57
20-L2L4-sain	100	-350	110	2	9	-35
19-L2L4-epineux	440	-320	240	7	-10	-54
20-L2L4-capsule	150	-380	180	4	11	-35
20-L2L4-jaune	190	-400	160	3	12	-34
20-L2L4-epineux	120	-325	170	2	9	-29
21-T11L1-sain	-100	-310	200	6	10	-39
24-T11L1-sain	-390	-280	320	-3	-14	-38
21-T11L1-jaune	120	-340	340	7	11	-46
24-T11L1-epineux	-250	-150	270	-2	-12	-39
21-T11L1-epineux	100	-290	360	7	8	-42
24-T11L1-capsule	-290	-300	250	-2	12	-30
24-T11L1-jaune	-200	-330	250	-2	13	-26
22-T7T9-sain	260	-110	240	5	26	-36
23-T10T12-sain	-300	-300	210	-7	17	-24
22-T7T9-epineux	300	-200	300	5	21	-35
23-T10T12-epineux	-250	-270	250	-6	22	-32
22-T7T9-capsule	260	-170	290	4	20	-32
23-T10T12-capsule	-200	-240	260	-5	10	-22
23-T10T12-jaune	-220	-300	230	-6	12	-20

Tableau 38 : efforts et moments au niveau de la vertèbre inférieure

Nota : l'ensemble des courbes relatives aux essais dynamiques se trouve en annexe

C. Analyse

Si nous considérons la totalité des essais en torsion, nous remarquons que les rotations imposées à la vertèbre supérieure pour les essais dynamiques sont bien supérieures aux rotations imposées durant les essais statiques sans pour autant entraîner automatiquement une lésion du spécimen (figure 187).

Nous observons un phénomène de couplage pour les trois types de segments rachidiens testés avec apparition d'une composante d'inflexion parallèlement à la sollicitation principale de torsion. La composante secondaire est le plus souvent dans le même sens que la composante principale. Les mêmes phénomènes sont observés au niveau des efforts et des moments.

La rotation principale de la vertèbre centrale est entre deux et trois fois plus faible que celle de la vertèbre supérieure en configuration saine. Le moment de torsion atteint des valeurs de 60 N.m, l'effort de cisaillement antéro-postérieur de 450 N et l'effort de cisaillement transverse de 400 N tous essais confondus. Les commentaires suivants sont axés sur le moment de torsion et d'inflexion, le cisaillement antéro-postérieur et le cisaillement transverse. Les autres composantes sont considérées comme parasites dans le mouvement de torsion. Cette sollicitation ne fait pas vraiment ressortir de tendance. Nous pouvons l'expliquer par l'importance des facettes articulaires dont le rôle de butée osseuse domine par rapport aux limitations mise en jeu par les structures molles (disque et ligament)

Niveau lombaire : L2-L4

Le couplage apparaît nettement (60 %) sur les pièces testées en configuration saine (figure 186). Les lésions effectuées sur les spécimens lombaires ne font pas apparaître de tendance au niveau des efforts ou du mouvement. Nous pouvons cependant remarquer que le couplage en inflexion a tendance à chuter lorsque les spécimens ont subi plusieurs lésions successives (figure 186). Cela peut s'expliquer par une moins bonne congruence au niveau des facettes qui libère ainsi le mouvement. Les déplacements de la vertèbre centrale sont de quelques millimètres. En outre, il n'y a quasiment pas (1 à 2 ms) de décalage entre le début du mouvement de la vertèbre centrale et le début du mouvement de la vertèbre supérieure. Enfin, la lésion des ligaments capsulaires entraîne une diminution (15%) du moment de torsion (figure 188).

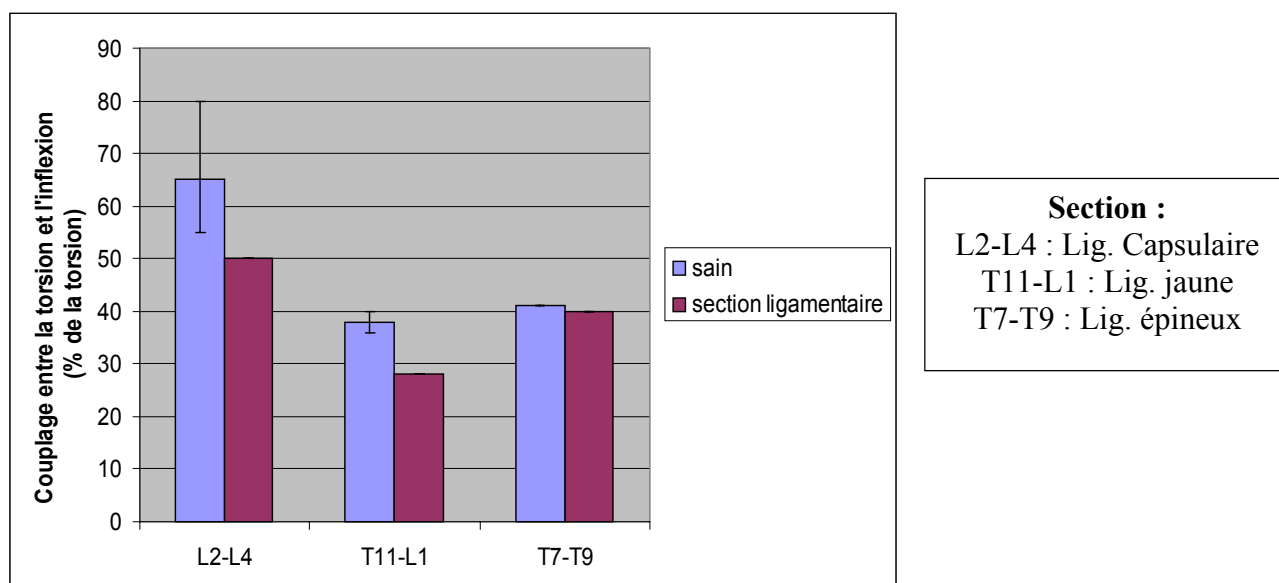


Figure 186 : couplage entre l'inflexion et la torsion avant et après section ligamentaire

Niveau thoraco-lombaire : T11-L1

Les tests en configuration saine font apparaître un couplage plus important que pour une sollicitation de torsion (figure 186). Tout comme les spécimens lombaires, il est difficile de dégager une tendance. Au fur et à mesure des lésions, le mouvement gagne en amplitude car il est moins contraint par les structures ligamentaires. La valeur du moment de torsion a tendance à chuter avec les lésions pour atteindre 26 N.m (tous ligaments sectionnés) alors que le moment d'inflexion induit reste plutôt constant (une dizaine de N.m). Il n'y a pas de décalage entre le début du mouvement de la vertèbre centrale et le début du mouvement de la vertèbre supérieure. Le sens de la composante secondaire a été inversé pour un spécimen après section des ligaments capsulaires, c'est à dire qu'une torsion gauche est accompagnée d'une inflexion droite.

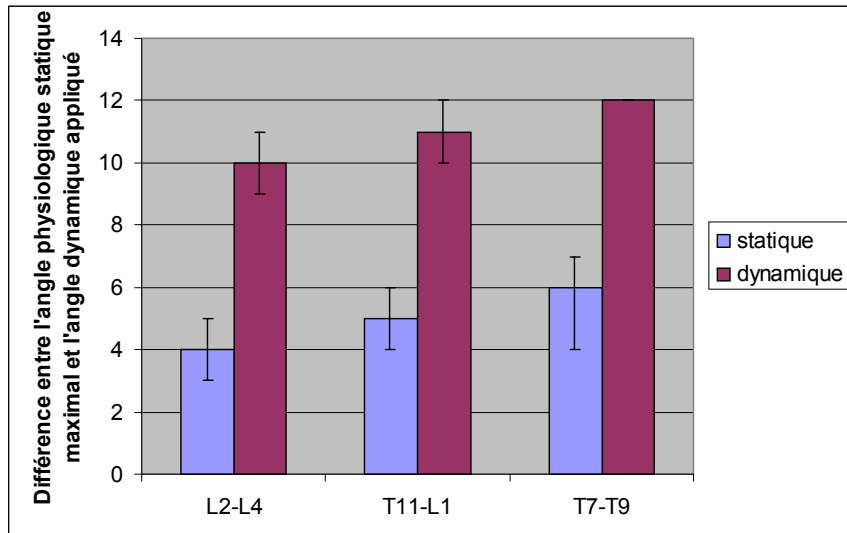
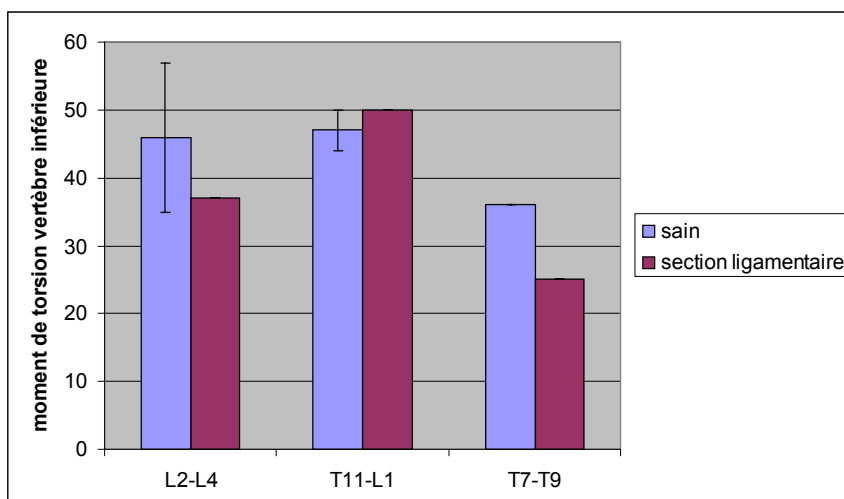


Figure 187 : différence entre l'angle physiologique statique maximal et l'angle dynamique

Niveau thoracique : T3-T5 et T7-T9

Nous pouvons observer un phénomène de couplage avec apparition d'une composante de torsion (figure 186). La valeur des amplitudes est globalement plus importante (25 % en moyenne) que pour les niveaux lombaires et thoraco-lombaires. La section du ligament épineux ne change presque rien à la cinématique de la pièce. Par contre, les sections des ligaments capsulaires et jaunes entraînent une augmentation des rotations du spécimen. Les moments de torsion et d'inflexion diminuent de pair avec les lésions (figure 188) contrairement aux efforts qui restent stables.

Il n'y a pas de décalage entre le début du mouvement de la vertèbre centrale et le début du mouvement de la vertèbre supérieure.



Section :
L2-L4 : Lig. Capsulaire
T11-L1 : Lig. jaune
T7-T9 : Lig. épineux

Figure 188 : moment de torsion de la vertèbre inférieure

X- CONCLUSIONS SUR LES EXPERIMENTATIONS

Afin de pouvoir valider le modèle de rachis thoracique et lombaire à venir, nous nous devons de réaliser une base de données expérimentales adéquates. Cet objectif a été rempli lors de cette phase expérimentale au cours de laquelle nous avons réalisé deux bancs d'essais et un système de mesure inédit. Nous appellerons ces deux bancs de la manière suivante, banc d'essais « statique » où la vitesse de sollicitation est lente et banc d'essais « dynamique » où la vitesse de sollicitation est conforme à ce que nous trouvons en crash automobile.

Le banc d'essais « statique » a été réalisé pour deux raisons, tout d'abord, définir un axe de rotation moyen entre la vertèbre supérieure et inférieure des spécimens de trois vertèbres. Ensuite, il a permis de connaître, pour chaque segment testé, l'amplitude de rotation physiologique maximale pour chacune des sollicitations suivantes : flexion, inflexion latérale et torsion axiale. En parallèle à ces deux objectifs, nous avons mesuré le déplacement de la vertèbre centrale dans les trois directions de l'espace ainsi que le couple exercé par l'opérateur sur la vertèbre supérieure et les efforts et les moments transitant par la vertèbre inférieure. Ces données supplémentaires nous permettent d'augmenter les possibilités de validation du modèle thoracique et lombaire à venir. Cette validation se situe dans un domaine quasi-statique à faible vitesse de sollicitation.

Le banc d'essais « dynamique » a permis de réaliser des essais sur des spécimens de trois vertèbres en flexion, inflexion et torsion axiale. Les segments ont été testés sous des sollicitations les plus pures possibles grâce aux données fournies par le banc d'essais « statiques ». Les essais nous ont confirmé la légitimité de ces essais statiques préliminaires. En effet, si nous examinons les travaux d'Oswalder et de Neumann, aucune étude sur les axes de rotation propre n'a été faite. Ainsi, leurs spécimens ont été testés en sollicitation combinée. Si nous comparons les efforts « parasites » comme la compression, nous avons réussi, à l'aide de cette étude sur les axes de rotation propres, à diminuer d'un facteur 5 cette composante (nous passons d'une valeur de 5000 N pour Neumann à environ 1000 N pour notre étude). Les essais dynamiques ont été faits à des vitesses de l'ordre de 1000 degrés / seconde (vitesse de rotation entre deux vertèbres adjacentes) tout en contrôlant l'amplitude du mouvement afin de ne pas léser accidentellement le spécimen testé. Les conditions aux limites sont connues précisément de façon à pouvoir modéliser ultérieurement ces essais en vue d'une validation du modèle thoracique et lombaire à venir. En plus de ces essais suivant plusieurs configurations (flexion, inflexion et torsion), nous avons effectué une étude sur les influences des ligaments du rachis en dynamique. Pour cela nous avons fait plusieurs tests successifs sur une pièce dans une configuration donnée au cours desquels nous avons sectionné successivement des ligaments au niveau des deux étages vertébraux. Le choix des sections n'était pas prédéfini et cela dépendait de la sollicitation (par exemple, en flexion, le ligament épineux était sectionné en premier), et de l'état du spécimen. La section est totale pour les deux étages vertébraux. Enfin, un capteur d'efforts et moments était placé au niveau de la vertèbre supérieure et un au niveau de la vertèbre inférieure.

Enfin, le système de mesure du mouvement de la vertèbre centrale est inédit. Il permet de mesurer en continu les trois rotations et les trois translations de cette vertèbre au cours du temps et ainsi d'accéder aux couplages cinématiques entre deux vertèbres. Ce système a l'avantage de pouvoir être adapté pour d'autres applications où il est nécessaire de connaître le mouvement d'un solide dans l'espace. De plus, mis à part l'étrier supérieur qui est une pièce spécialement réalisée, les autres composants sont standards et peu coûteux. Le seul inconvénient de ce système réside dans son inertie. En effet, si sa masse est égale à celle d'une vertèbre lombaire, ses dimensions l'handicapent lors de son utilisation en dynamique. Cependant, des simulations sur

RADIOSS nous ont permis de connaître l'influence de cette inertie. D'un côté, des simulations ont été faites avec une inertie de la vertèbre centrale conforme à la réalité et d'un autre côté, des simulations avec une inertie de la vertèbre centrale multipliée par 4 de façon à prendre en compte l'inertie du cadre. Il n'en résulte aucune modification des rotations principales en flexion, inflexion et torsion et une augmentation de moins de 10 % des rotations secondaires induites par couplage. Les erreurs induites par ce cadre sont donc acceptables. Au début du projet, nous souhaitions utiliser des systèmes de mesure sans contact comme la vidéo rapide mais cela s'est avéré trop coûteux et nous avons dû abandonner cette solution.

Ces expérimentations ont été effectuées sur 24 spécimens ce qui représente environ une centaine d'essais. Cette campagne est une des plus importantes en terme de nombre d'essais et de spécimens si l'on se place par rapport aux auteurs de la bibliographie qui vont de 6 unités testées pour Hakim [HAK-16], Ogon [OGO-37] et Rostedt [ROS-52] à 23 pour Nightingale [NIG-35]. Cette campagne d'essais nous a permis de retirer deux types de résultats qui nous serviront pour la validation du modèle de colonne.

D'une part, des données sur le mouvement de la vertèbre centrale en configuration saine et lésée (section ligamentaire) dans les trois directions de l'espace pour chacune des configurations de flexion, d'inflexion et de torsion. Ces trajectoires vont nous permettre de valider le modèle d'un point de vue cinématique. Ce sera d'ailleurs le premier axe du travail de validation.

Viennent ensuite les données sur les charges supportées par les vertèbres. Elles sont issues des efforts et des moments enregistrés au niveau des vertèbres supérieures et inférieures en configuration saine et lésée (section ligamentaire). Après que le modèle ait été validé d'un point de vue cinématique, ces données vont nous permettre une validation au niveau lésionnel qui nous permettra de prévoir des lésions ligamentaires en observant les charges transitant par ces derniers lors d'une simulation de choc automobile. Ce second axe de validation n'a pu être réalisé au cours de cette thèse par manque de temps.

La méthode, consistant à sectionner successivement des ligaments afin de connaître leur influence, a déjà été utilisée par quelques auteurs pour des sollicitations statiques. Etant donné que la nature des sollicitations ainsi que l'ordre dans lequel ont été faites les sections diffèrent, il est difficile d'effectuer des comparaisons entre les essais de cette thèse et la littérature. Ces auteurs n'ont pas été mentionnés lors de l'analyse bibliographique car leurs études ont été faites en statique. Essayons cependant de dégager des tendances.

Tout d'abord, Panjabi [PAN-43], a étudié en 1975 les mécanismes intervenant dans la stabilité du rachis cervical en flexion – extension. L'auteur entend par le terme « stabilité », la faculté à limiter les mouvements qui irriteraient ou endommageraient la moelle épinière. Les essais ont été faits sur 17 unités fonctionnelles cervicales (C2-C3, C4-C5 et C6-C7). La charge est égale à 25 % du poids du corps du sujet et la sollicitation est de types flexion – extension. Le montage est décrit en figure 189.

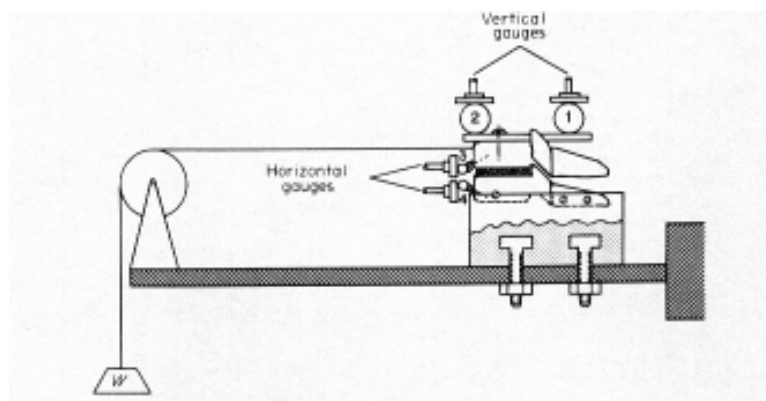
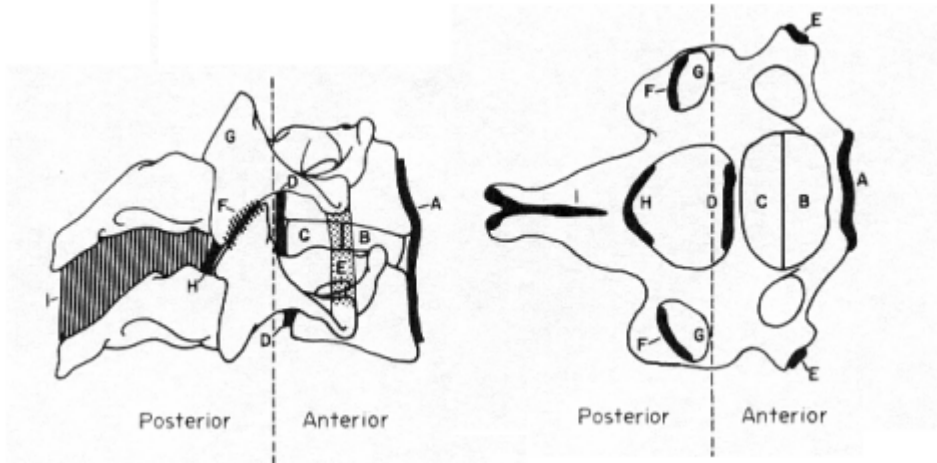


Figure 189 : système de mise en charge en flexion

Les essais ont été de quatre types et les détails de lésions sont donnés à la figure 190 :

- 1-Chargement en flexion avec section des structures postérieures vers les structures antérieures
- 2-Chargement en flexion avec section des structures antérieures vers les structures postérieures
- 3-Chargement en extension avec section des structures postérieures vers les structures antérieures
- 4-Chargement en extension avec section des structures antérieures vers les structures postérieures



De l'antérieur vers le postérieur :

- A = section du ligament commun antérieur
- B = section de la moitié antérieure de l'anneau discal
- C = section de la moitié postérieure de l'anneau discal
- D = section du ligament commun postérieur
- E = section des ligaments transverses
- F = section des ligaments capsulaires
- G = section des facettes articulaires
- H = section du ligament jaune
- I = section des ligaments inter-épineux et sur-épineux

De l'antérieur vers le postérieur :

- I = section des ligaments inter-épineux et sur-épineux
- H = section du ligament jaune
- G = section des ligaments capsulaires
- F = section des facettes articulaires
- E = section des ligaments transverses
- D = section du ligament commun postérieur
- C = section de la moitié postérieure de l'anneau discal
- B = section de la moitié antérieure de l'anneau discal
- A = section du ligament commun antérieur

Figure 190 : ordre des sections ligamentaires

Les résultats le cas de charge en flexion avec sections du côté postérieur vers le côté antérieur est détaillé en figure 191. Nous remarquons que l'amplitude de rotation augmente au fur et à mesure des lésions ce qui est cohérent avec ce que nous trouvons lors des essais en dynamique. De plus la section des facettes articulaires modifie profondément la cinématique de l'unité fonctionnelle.

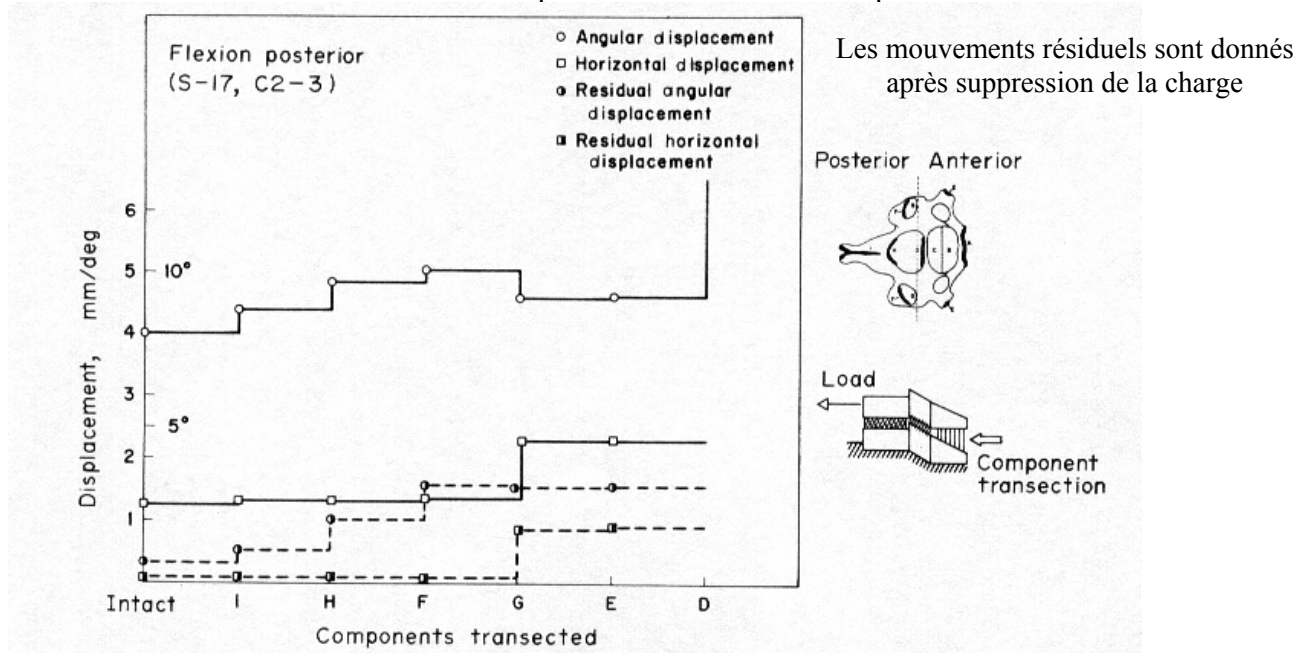


Figure 191 : évolution du mouvement suivant les sections

Le second auteur est White [WHI-61] qui a étudié en 1971 l'influence des structures vertébrales (figure 192) postérieures dans la cinématique du rachis thoracique.

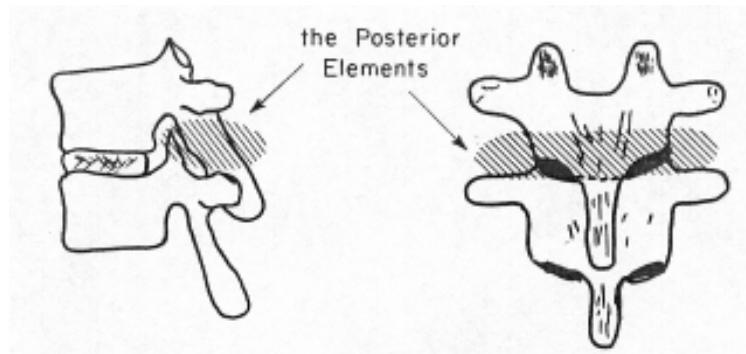


Figure 192 : structures postérieures (ligament jaune, ligaments transverses, ligament épineux et sur-épineux et facettes articulaires en totalité)

L'auteur a testé 10 unités fonctionnelles pour chaque niveau (T1-T2, T3-T4...T11-T12). Une presse à air comprimé fournissant un effort vertical a été utilisée. L'auteur a simulé des sollicitations de flexion, inflexion et torsion, en excentrant le point d'application de cet effort vertical. Les déplacements sont mesurés à l'aide de capteurs de déplacement linéaires potentiométriques et de jauges extensométriques. Pour chacun des spécimens, un premier test est effectué en configuration saine. A la suite de ce test, les structures postérieures sont enlevées avec des outils chirurgicaux ordinaires sans modifier la position du spécimen dans le banc d'essais. Ensuite un test identique à la configuration non lésé est effectué afin de connaître l'influence des structures postérieures. La même charge, en terme d'intensité et de point d'application de l'effort, est appliquée au spécimen thoracique avant lésion et après sections postérieures.

Après analyse de ces essais, l'auteur remarque l'influence importante des structures postérieures dans la cinématique des unités fonctionnelles thoraciques. En effet, l'amplitude des rotations en flexion-extension, en inflexion latérale et en torsion axiale est toujours plus importante lorsque les structures postérieures ont été enlevées (figure 193).

De même que pour l'étude de Panjabi [PAN-43], il est difficile d'établir des comparaisons entre les essais réalisés au cours de ce projet et ceux de White [WHI-61]. Tout d'abord, les essais sont faits en statique alors que nous sollicitons les spécimens à des vitesses très élevées. Ensuite, le mouvement de la vertèbre supérieure n'est pas imposé comme pour notre cas. En effet, c'est un effort qui est imposé à la vertèbre supérieure et non pas une rotation. Par ailleurs, White a lésé les spécimens de telle sorte que toute les liaisons inter-vertébrales postérieures soient supprimées, contrairement à ce qui a été fait dans cette thèse où les structures ligamentaires étaient supprimées une par une de façon successive. Enfin nous n'avons jamais supprimé les facettes articulaires dans leur intégralité ce qui a conservé une grande partie de la tenue cinématique entre les vertèbres du spécimen.

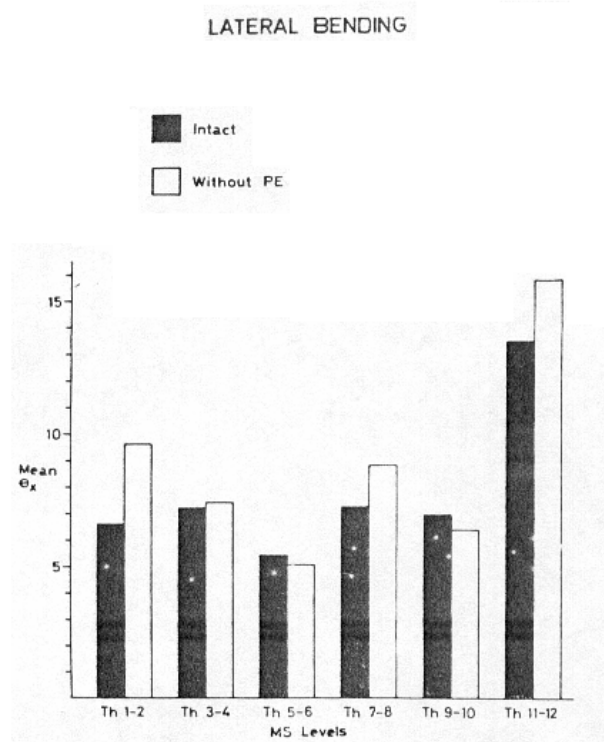
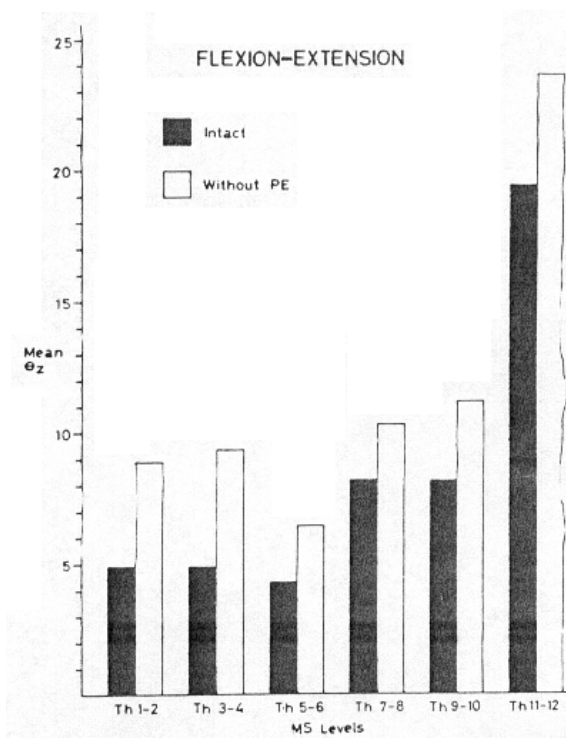
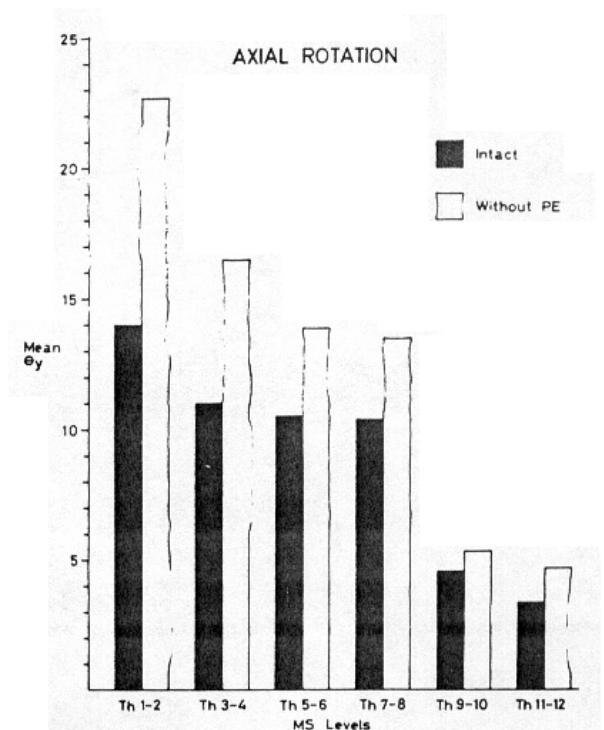


Figure 193 : influence des structures postérieures dans des mouvements de flexion-extension, d'inflexion et de torsion.

Les valeurs correspondent à une amplitude totale de flexion / extension, inflexion droite / gauche et torsion droite / gauche

En abscisse se trouve la rotation de la vertèbre supérieure et en ordonnée l'étage vertébral testé



CHAPITRE III
MODELISATION DU
COMPORTEMENT DU RACHIS
THORACIQUE ET LOMBAIRE

I- RESUME ET OBJECTIFS

Le modèle de rachis réalisé au cours de cette thèse a pour vocation d'être intégré dans le modèle global d'être humain déjà existant. En effet, la colonne vertébrale de ce modèle n'est constituée que de cubes et a besoin d'être améliorée afin de pouvoir effectuer des prédictions lésionnelles à un niveau local.

Cette amélioration passe par une meilleure représentation géométrique et mécanique. C'est pourquoi nous avons choisi de modéliser la vertèbre avec l'ensemble de ses composantes (apophyses épineuses, transverses etc...) ainsi que son système de maintien ligamentaire. Ceci est l'objet des parties « méthode d'obtention de la géométrie brute », « simplification géométrique du modèle éléments finis » et « étude morphométrique du modèle éléments finis ». Pour cela, nous nous sommes inspirés des travaux de Dauvilliers [DAU-7] et Bertholon [BERT-2], au cours desquels, l'ancien rachis cervical du modèle « être humain » a été remplacé et amélioré. L'ancien modèle était constitué de cubes empilés les uns sur les autres de la même façon que le modèle thoracique et lombaire actuel (figure 194) et a été remplacé par le modèle détaillé en figure 195. Nous nous sommes inspirés de ce modèle de façon à assurer la compatibilité du modèle à venir avec l'existant pour faciliter son intégration au sein du modèle « être humain ».

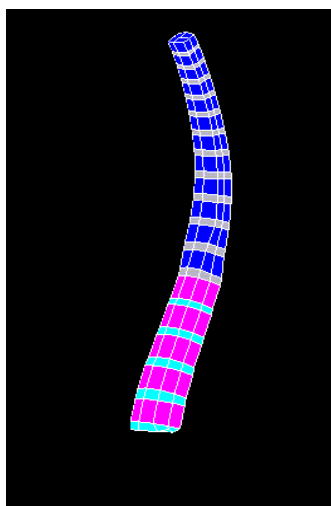


Figure 194 (gauche) : Modèle du rachis thoracique et lombaire du modèle être

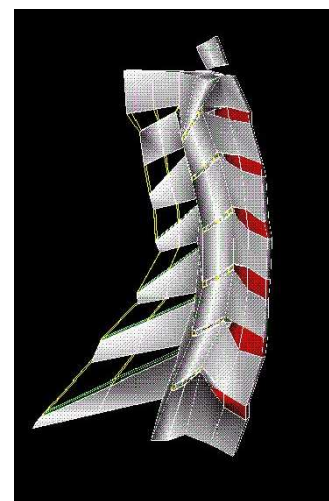


Figure 195 (droite) : Modèle du rachis cervical amélioré

L'incorporation des lois de comportements des tissus mous (ligaments et disques) est décrite dans la partie « construction du modèle mécanique ».

Afin d'améliorer la phase de validation, une étude sur la position des axes de rotation du modèle a été réalisée. Elle fait l'objet de la partie « étude sur les axes instantanés du modèle ».

A terme, le modèle doit être validé de deux façons. Tout d'abord, une première validation doit permettre de prévoir les trajectoires d'une ou de plusieurs vertèbres lors de chocs frontaux, latéraux ou d'une combinaison de ces derniers. Il va donc falloir identifier les paramètres des lois de comportement que nous injectons dans ce modèle en utilisant pour cela les données cinématiques que nous avons obtenues lors des essais. Il était prévu, au début du projet, de faire une validation uniquement dynamique. Cependant, la durée de réalisation des bancs d'essais et les laps de temps libre en découlant nous ont amené à étendre cette validation au domaine statique en utilisant des données de la littérature étant donné que les essais n'étaient pas encore réalisés. La validation cinématique de ce modèle a donc suivi plusieurs directions qui sont résumées dans le diagramme de la figure 196.

La validation locale statique par les essais de la littérature est détaillée dans la partie « première validation statique ». Elle impose une modification de la courbure du modèle car les essais de la bibliographie utilisent des spécimens en position neutre (position debout).

La validation locale dynamique par l'essai de la littérature est détaillée dans la partie « première validation dynamique ».

La validation locale dynamique par les essais réalisés est détaillée dans la partie « validation du modèle par les essais dynamiques ».

En plus de ces validations locales en statique et en dynamique, nous avons réalisé des simulations en utilisant le modèle dans son intégralité de façon à s'assurer de la stabilité numérique de ce dernier. Cette validation est qualitative et n'a pas été comparée avec des essais expérimentaux. Elle est détaillée dans les parties « validation qualitative globale statique » et « validation qualitative globale dynamique ».

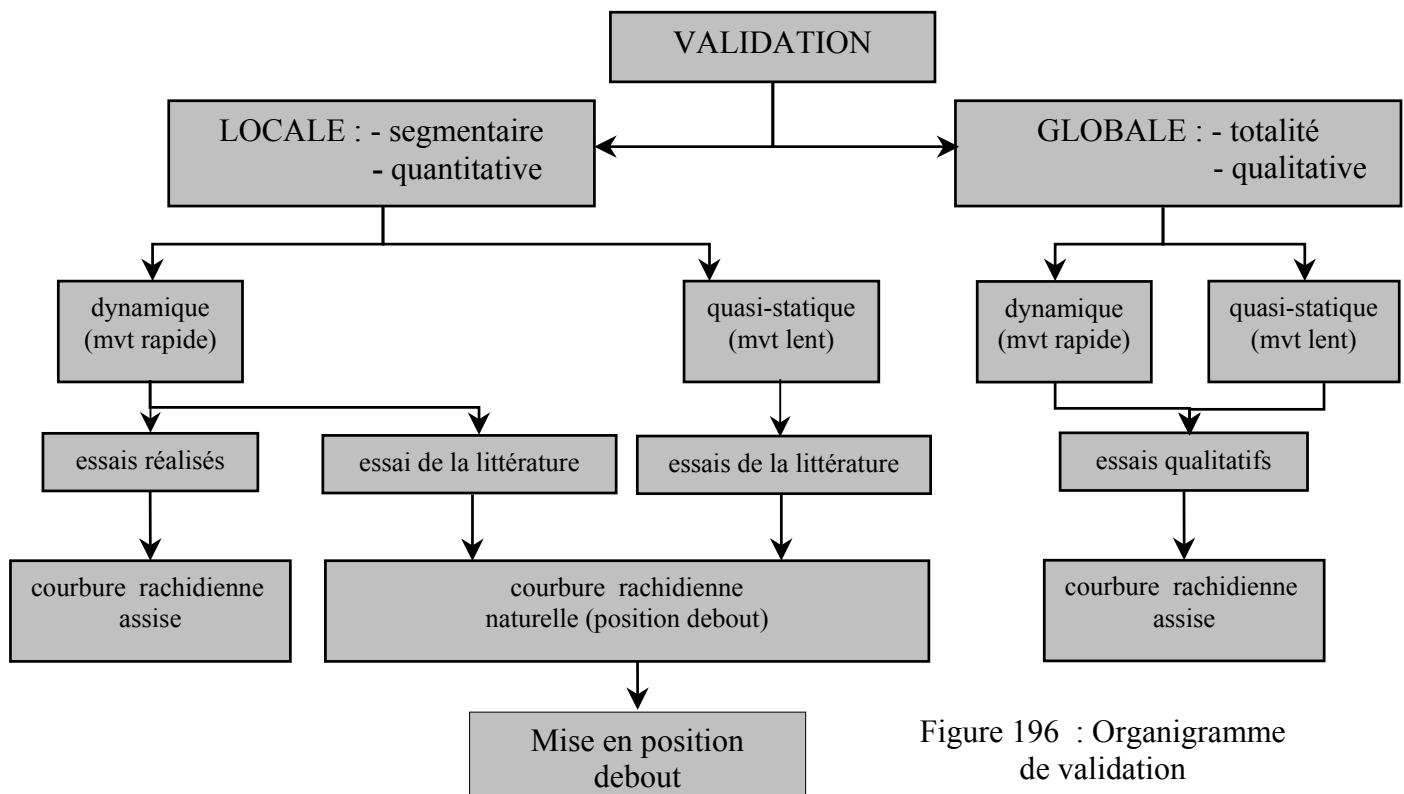


Figure 196 : Organigramme de validation

Le second axe important de validation doit se faire sur un plan lésionnel de façon à atteindre l'objectif final qui est de découvrir des lésions en observant les charges transitant par les ligaments, les vertèbres ou les disques lors d'une simulation de choc automobile.

Cette validation n'a pas été faite au cours de la thèse par manque de temps. Il faut pour cela utiliser les essais réalisés en prenant les informations relatives aux charges supportées par les vertèbres en configuration saine et lésée (section ligamentaire). Cette exploitation des données des capteurs 6 axes nous amènera peut-être à modifier les paramètres des lois de comportements du modèle voir à changer de lois de comportements. Ce travail numérique est conséquent et il nécessitera certainement plusieurs mois de travail.

Au terme de ces validations cinématiques et lésionnelles, le modèle de colonne thoracique et lombaire sera prêt à être intégrer au sein du modèle « être humain ».

1- Géométrie type des vertèbres

La réalisation d'un modèle mécanique par éléments finis nécessite au préalable la connaissance fine de la géométrie de la structure étudiée. Les méthodes souvent utilisées dans ce cadre sont la radiographie, les coupes scanner et le palpéage magnétique. Ces études ont permis de mettre en évidence les disparités morphologiques importantes d'un individu à l'autre et d'un niveau vertébral à l'autre.

Le Laboratoire de Biomécanique a réalisé en interne une base de données sur la morphologie des vertèbres sèches des niveaux thoraciques et lombaires. Une trentaine de vertèbres sèches par niveau de T1 à L5 ont été utilisées et les résultats ont été mis en forme par Stéphane Véron.

Les résultats des différentes mesures ont été analysés statistiquement afin de calculer la moyenne et l'écart-type de chacun des paramètres des vertèbres, puis saisis dans la base de données du laboratoire. Les paramètres géométriques correspondent à des diamètres de plateaux vertébraux, à des longueurs d'apophyses transverses, à des géométries de facettes articulaires etc...

Cette base de données comporte ainsi les coordonnées d'un nuage de points retenus pour la définition de chaque vertèbre, qui sont exprimées dans un repère local commun de façon à pouvoir prendre la moyenne des mesures effectuées.

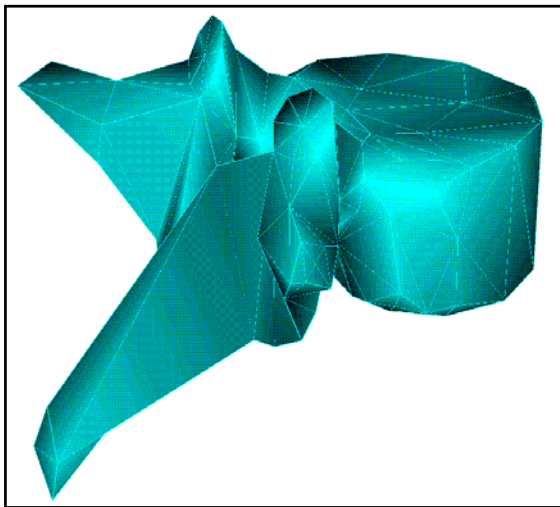


Figure 197 : visualisation brute de la vertèbre T₈

A partir de ce nuage de point, il a fallu visualiser chaque vertèbre afin de pouvoir travailler dessus plus aisément. Chacune d'entre elles a été recouverte d'une « peau » constituée d'éléments à quatre nœuds et d'éléments à trois nœuds suivant les zones géométriques. Ce « maillage » s'attache sur les nœuds définissant la géométrie de la vertèbre et fait apparaître des vertèbres facettisées.

Le tableau suivant regroupe le nombre de points (nœuds) utilisés pour chaque vertèbre ainsi que le nombre d'éléments à trois et quatre nœuds qui ont été nécessaires pour visualiser la géométrie brute de chacune des vertèbres.

Vertèbre	Nb. de nœuds	Nb. d'éléments
L ₁ à L ₅	178	372
T ₁ à T ₉	140	280
T ₁₀	130	260
T ₁₁ et T ₁₂	120	240

Tableau 39

2- Assemblage des vertèbres et courbure du rachis

Nous avons réglé les hauteurs des disques intervertébraux et l'inclinaison des vertèbres en respectant la position d'un sujet assis dans un siège automobile. Pour ce faire, nous nous sommes basés sur les données bibliographiques disponibles.

A. Géométrie des disques intervertébraux

Travaux de POONI [POO-47]

Très peu de travaux ont été menés sur la morphologie des disques intervertébraux. Cette étude nous a apporté des données sur la structure des disques intervertébraux dans les régions cervicale, thoracique et lombaire du rachis. En effet, les hauteurs postérieures et antérieures, la superficie et la forme en section transversale ont été mesurées pour tous les disques intervertébraux de quatre colonnes vertébrales prélevées chez des sujets âgés. Ces travaux nous serviront lors du changement de courbure du modèle (passage de la position assise à la position debout) qui est détaillé dans la partie « première validation en statique ».

Travaux de GILAD et coll. [GIL-12]

Les auteurs ont procédé à la mesure de 9 paramètres de vertèbres et disques intervertébraux de 157 individus normaux âgés de 20 à 38 ans. Ces mesures ont été faites dans le plan sagittal sur des radiographies aux rayons X. Ces travaux ont complété ceux de Pooni lors du changement de courbure du modèle (passage de la position assise à la position debout).

B. Position assise de l'occupant moyen d'un véhicule

Travaux de NYQUIST [NYQ-36]

Il existe très peu de données concernant l'orientation du bassin et la courbure lombaire d'un individu en position assise. Pour l'étudier, les auteurs ont radiographié deux volontaires assis sur un siège automobile (Oldsmobile delta bench) et mesuré les diverses orientations des vertèbres et du bassin. On peut remarquer que la lordose lombaire tend à s'affaiblir fortement voire à s'annuler lorsque l'on passe de la position debout à la position assise.

Travaux de ROBBINS et SCHNEIDER [ROB-49]

Les auteurs ont mené une étude importante pour définir la position assise moyenne de l'individu 50^e centile (individu moyen) américain. Pour cela, un siège a été construit en analysant les positions de 8 sujets sur 4 sièges américains classiques. A partir de ce siège, des mesures anthropométriques ont été effectuées sur des individus à l'aide de marqueurs réfléchissants afin de connaître la position dans l'espace d'un grand nombre de points caractéristiques du corps humain.

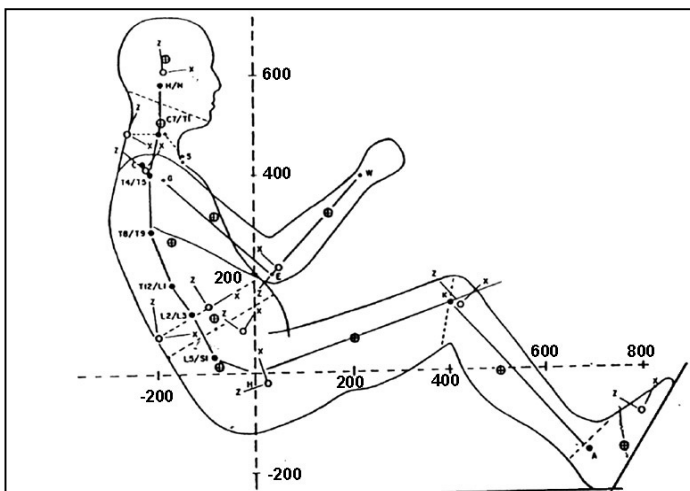


Figure 198 : posture de Robbins

D'autre part, une synthèse bibliographique a été faite concernant les masses, la position des centres de gravité et les inerties des différents segments humains. A partir de cette synthèse, les auteurs en ont déduit les valeurs de masse, d'inertie et d'autres paramètres anthropomorphiques pour l'individu 50^e centile assis en position de conduite. Ces travaux pratiquement uniques dans ce domaine sont d'une très grande utilité bien qu'il faille tenir compte des imprécisions dues, entre autres, aux mesures externes. La validation de cette posture a été discutée et approuvée lors de l'analyse bibliographique du modèle « être humain ».

Travaux de LEPOUTRE [LEP-25]

L'auteur a procédé à la mesure des courbures du dos dans le plan sagittal à l'aide d'une plaque en fibre de verre équipée de jauges de déformation. Des mesures ont été faites en T₅, T₆, T₁₀ et L₃, pour 32 sujets sur 6 sièges différents. L'auteur note au niveau lombaire des lordoses très faibles voire des légères cyphoses. Ces contours externes sont difficilement exploitables pour réaliser un modèle de rachis qui n'inclus ni la peau ni les muscles du dos.

C. Géométrie finale du modèle

Les disques sont construits par plans successifs sans tenir compte, dans un premier temps, de la lordose mais plutôt d'un jeu articulaire moyen entre les facettes articulaires de l'ordre du millimètre. Connaissant les hauteurs antérieures et postérieures du disque ainsi que l'inclinaison sagittale du plateau vertébral de la vertèbre sous-jacente (à partir des éléments bibliographiques, et en particulier, de la posture de Robbins/[ROB-49]), une transformation géométrique permet d'assurer la correspondance entre les plateaux vertébraux.

En outre, le LAB (Laboratoire d'Accidentologie et de Biomécanique de PSA Peugeot-Citroën Renault) nous a communiqué les données portant sur la géométrie du modèle de la colonne vertébrale du modèle « être humain » [LIZ-26]. Ce modèle est représentatif d'un individu mâle 50^{ème} centile en position assise dans un siège automobile. Ainsi, l'assemblage des vertèbres obtenu a été légèrement modifié afin de respecter une hauteur totale de 426 mm, une inclinaison du plateau inférieur de L₅ de -23,4° et une inclinaison du plateau supérieur de T₁ de 20° de façon à permettre l'intégration du modèle de rachis à venir au sein du modèle global de l'être humain. Finalement, les hauteurs discales et les inclinaisons vertébrales sont données dans le tableau 40.

Tableau 40

Niveau vertébral	Hauteur du disque antérieur (mm)	Hauteur du disque postérieur (mm)	Angle sagittal relatif (°)
T ₁ /T ₂	4.8	3.7	4.0
T ₂ /T ₃	3.8	4.2	-1.3
T ₃ /T ₄	4.1	4.4	-0.8
T ₄ /T ₅	3.6	4.1	-1.3
T ₅ /T ₆	3.4	3.9	-1.2
T ₆ /T ₇	3.7	4.6	-2.0
T ₇ /T ₈	3.8	4.2	-0.9
T ₈ /T ₉	4.0	4.6	-1.2
T ₉ /T ₁₀	3.6	4.7	-2.2
T ₁₀ /T ₁₁	5.5	5.1	0.8
T ₁₁ /T ₁₂	6.3	4.8	2.9
T ₁₂ /L ₁	6.8	5.6	2.4
L ₁ /L ₂	7.3	6.3	1.9
L ₂ /L ₃	6.9	6.0	1.7
L ₃ /L ₄	8.7	7.9	1.5
L ₄ /L ₅	8.9	7.7	2.2

III- SIMPLIFICATION GEOMETRIQUE DU MODELE ELEMENTS FINIS

De façon à ne pas être tributaire d'un temps de simulation trop important, nous nous devons de simplifier le modèle géométrique brut, tout en gardant les aspects fonctionnels de la géométrie initiale. Par souci de simplification, nous avons choisi un nombre de nœuds constant quel que soit le niveau vertébral ainsi qu'une symétrie sagittale pour le modèle.

Nous avons distingué pour chaque vertèbre 5 zones anatomiques différentes :

- 1- le corps vertébral.
- 2- les pédicules.
- 3- les facettes articulaires supérieures et inférieures.
- 4- les apophyses transverses.
- 5- l'arc postérieur et l'apophyse épineuse.

Nous avons choisi de nous inspirer du modèle de rachis cervical développé par Dauvilliers [DAU-7] et Bertholon [BERT-2] de façon à ce que le modèle qui doit être réalisé au cours de cette thèse soit homogène avec l'existant et puisse être intégré sans contrainte dans le modèle « d'être humain ».

Les caractéristiques du modèle cervical sont les suivantes :

	Vertèbres	Disque inter-vertébrale	Ligaments	Facettes articulaires
Modélisation	Corps rigides	4 éléments brique à loi viscoélastique	Modélisation des ligaments capsulaires, jaune et épineux	Eléments contacts
			Eléments ressorts à comportement viscoélastiques non linéaires	

1- Le corps vertébral

La géométrie du corps vertébral découle de celle du modèle brut. Le nombre de nœuds par plateau vertébral est de 9, ce qui permet de respecter la forme globale d'une vertèbre thoracique ou lombaire tout en gardant un maillage simple.

Chaque corps vertébral sera donc constitué de 18 nœuds.

Nous avons supposé une symétrie sagittale au niveau de la morphologie du corps vertébral.

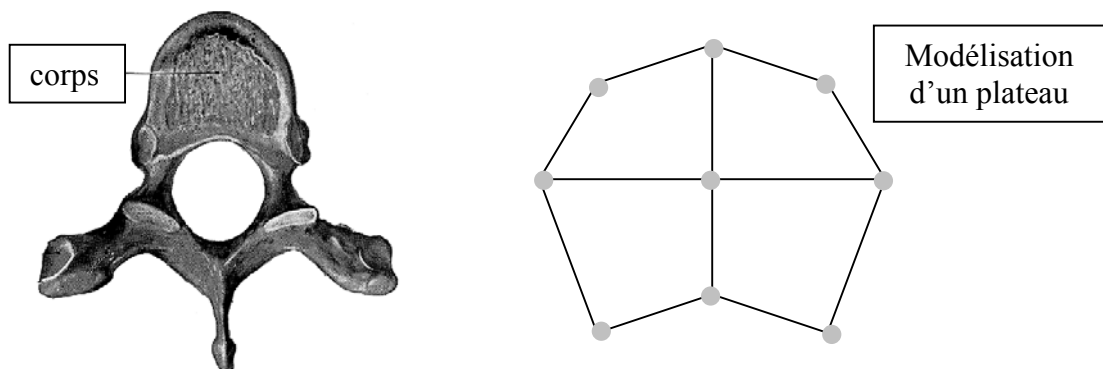


Figure 199 : modélisation du corps vertébral

2- Les pédicules

Bien que les pédicules aient peu d'influence sur les mouvements du rachis, ils restent tout de même très importants sur le plan mécanique. En effet, les pédicules sont des éléments de transition entre le corps vertébral et les surfaces articulaires qui permettent la transmission des efforts entre différentes zones vertébrales. Au niveau du maillage, les pédicules doivent assurer la jonction entre le corps vertébral et les massifs des articulaires et permettre aussi une bonne définition du canal rachidien. Chaque pédicule est décrit par 8 nœuds.

3- Les surfaces articulaires

Les études morphométriques montrent que les facettes articulaires du rachis thoracique sont quasiment planes et situées dans un plan frontal et que celles du rachis lombaire sont cylindriques et plutôt sagittales (sauf les articulaires inférieures de T₁₂ qui restent du type lombaire). Ces facettes articulaires jouant un rôle essentiel dans la cinématique vertébrale, nous avons choisi de mailler chaque surface par l'intermédiaire de 9 nœuds (8 nœuds périphériques et 1 nœud central). Les articulaires inférieures sont maillées de la même manière que les articulaires supérieures.

4- L'apophyse épineuse et l'arc postérieur

L'apophyse épineuse joue un double rôle au niveau mécanique : non seulement elle présente les points d'insertions des ligaments inter et sur-épineux mais elle sert également de butée lors du mouvement d'extension. Le maillage de cette zone anatomique est défini par 4 nœuds.

Pour ce qui est de l'arc postérieur, il permet la jonction entre l'apophyse épineuse et les apophyses articulaires. En outre, il donne, avec les pédicules, la morphologie du canal rachidien. Les lames sont discrétisées en 6 nœuds.

5- Les apophyses transverses

L'apophyse transverse est décrite très schématiquement. Seule son extrémité possède un rôle mécanique au vu de son rôle dans l'insertion des ligaments transverses. Chaque apophyse transverse est maillée par 8 nœuds.

La modélisation des facettes costales n'est pas prise en compte dans le modèle, vu la simplicité relative de notre modèle. Cependant, elles seront nécessaires pour une modélisation de la cage thoracique et de la liaison costo-vertébrale.

Tableau récapitulatif pour une vertèbre quelconque :

Un nœud peut servir pour diverses zones fonctionnelles (corps vertébral et pédicule par exemple)

corps vertébral	9 nœuds
pédicules	2 x 8 nœuds
facettes articulaires supérieures et inférieures	4 x 9 nœuds
Apophyses transverses	2 x 8 nœuds
arc postérieur et apophyse épineuse	10 nœuds
Nombre total de nœuds distincts	68 nœuds

Tableau 41 : maillage des zones vertébrales

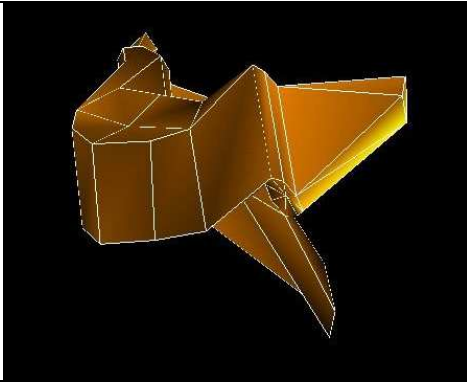


Figure 200 : vertèbre T7 (vue iso)

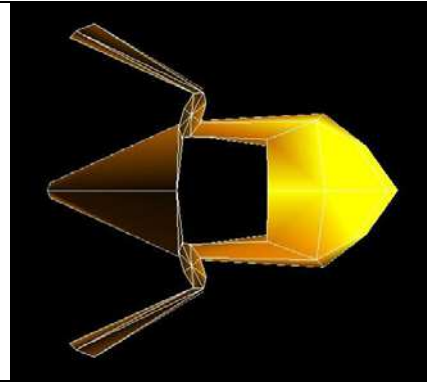


Figure 201 : vertèbre T7 (vue de dessus)

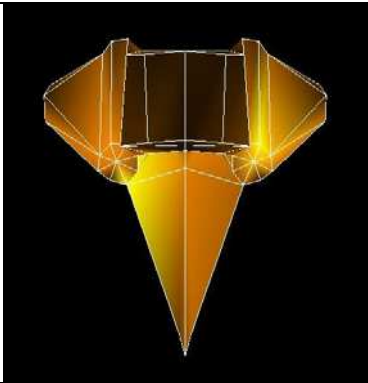


Figure 203 : vertèbre T7 (vue frontale)

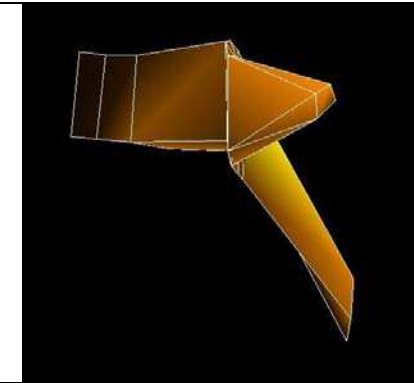


Figure 202 : vertèbre T7 (vue latérale)

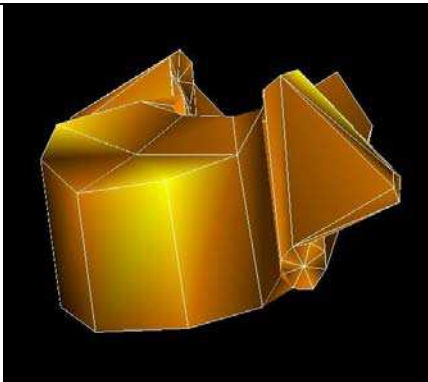


Figure 204 : vertèbre L3 (vue iso)

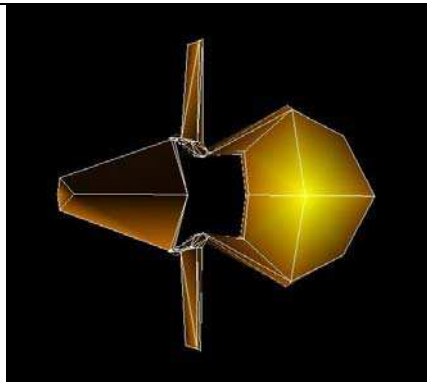


Figure 205 : vertèbre L3 (vue de dessus)

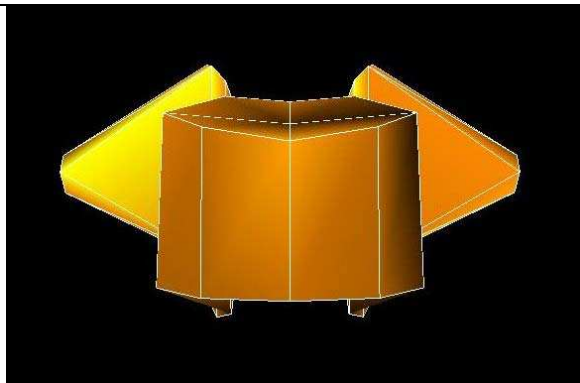


Figure 206 : vertèbre L3 (vue frontale)

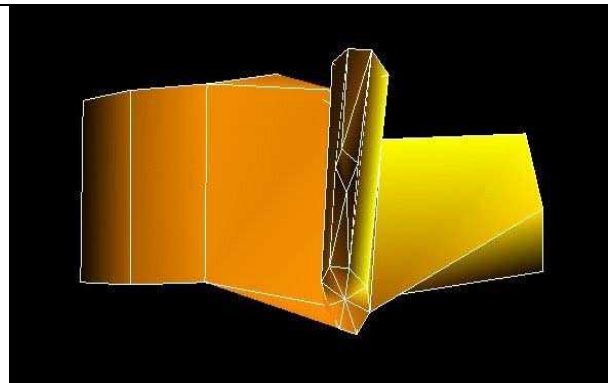


Figure 207 : vertèbre L3 (vue latérale)

Cette étude supplémentaire a pour but de vérifier que le modèle simplifié est géométriquement cohérent. Nous utilisons pour cela des études morphométriques indisponibles lors de la première ébauche du modèle. Nous nous assurons ainsi que la géométrie de notre modèle final est bien intégrée au sein de corridors expérimentaux supplémentaires.

1- Etude morphométrique

Les études de référence vont être celles de Wajdi Koubaa [KOU-22] pour le thoracique et celle de Semaan Isam [SEM-55] pour le lombaire. D'un point de vue statistique, Semaan a utilisé 32 vertèbres par niveau lombaire (de L1 à L5) et Koubaa a utilisé en moyenne 50 vertèbres par niveau thoracique (de T1 à T12). Une centaine de points ont été répartis sur la surface de chaque vertèbre. Ces points permettent d'identifier soit une surface soit un contour. La densité des points a été choisie en fonction de l'étendue et de l'importance sur le plan cinématique et mécanique de la partie anatomique mais aussi en fonction du type de surface ou de courbe mathématique. Les trois coordonnées spatiales de chaque point ont été mesurées à l'aide d'un système de mesure électromagnétique appelé « fastrak ». Il s'agit d'un système qui est constitué d'un cube émetteur de champ magnétique et d'un stylo récepteur, les coordonnées de la pointe du stylo étant déterminées par rapport au cube par mesure de la variation du champ électromagnétique. La précision de mesure est estimée à ± 0.2 mm. La vertèbre à mesurer est positionnée dans un montage constitué de barres fixées sur un plateau. La vertèbre est rigidement maintenue dans l'anneau par quatre vis pour éviter tout mouvement lors de la prise de mesure. Le cube émetteur est fixé sur le plateau du montage. Les éléments du montage sont en P.V.C. afin de ne pas perturber le champ magnétique émis.

Une vingtaine de paramètres géométriques a été retenue sur chacune des vertèbres comme, par exemple, les longueurs des corps vertébraux, et des différentes apophyses.

Les paramètres vertébraux sont donnés dans un repère propre qui est défini dans chacune des études.

Pour pouvoir modifier la géométrie des vertèbres du modèle, il faut donc isoler chacune d'entre elles et les placer dans le repère local défini dans l'étude concernée. Cette étape se fait à l'aide d'une transformation géométrique composée d'une translation et d'une rotation.

A partir de là, nous pouvons modifier la géométrie des vertèbres du modèle et utiliser les valeurs fournies par Semaan et Koubaa. Suite à ces modifications, nous recalculons la position du repère local étant donné qu'il s'appuie sur des points géométriques vertébraux.

Nous refaisons une comparaison entre le modèle et la littérature afin de s'assurer que la modification du repère local n'a pas invalidé la nouvelle géométrie de la vertèbre.

Ceci étant fait, la vertèbre est re-orientée suivant la courbure d'un sujet humain en position assise. Cette re-orientation se fait à l'aide d'une transformation géométrique composé d'une rotation et d'une translation.

Plusieurs itérations ont été nécessaires pour mener à bien cette identification du modèle avec la littérature.

Le schéma logique choisi au cours de l'étude est détaillé en figure 208.

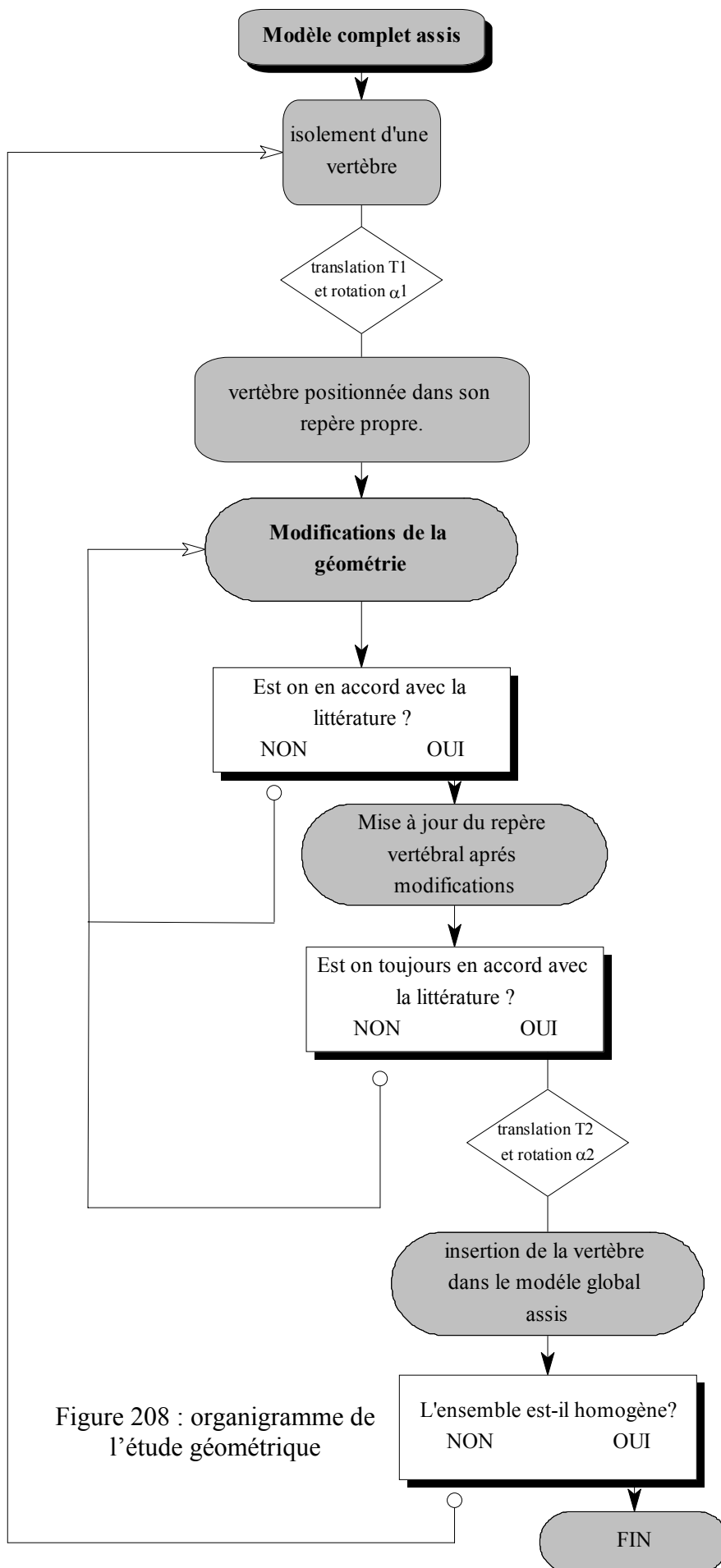


Figure 208 : organigramme de l'étude géométrique

2- Vertèbres thoraciques

Le centre du repère (figure 209) est le milieu du segment formé par les centroïdes des plateaux vertébraux.

L'axe Z passe par les centroïdes des deux plateaux vertébraux.

L'axe X est antéro-postérieur.

L'axe Y complète le repère direct.

Le passage de la position assise à la position dans le repère local d'étude dans l'ordre suivant :

- Isoler chacune des vertèbres.
- La translater d'une valeur égale aux coordonnées du centre de la vertèbre (le centroïde d'un plateau est trouvé à l'aide d'un algorithme donnant le barycentre des 8 points périphériques du plateau).
- La faire tourner autour de l'axe Y dans le plan sagittal.

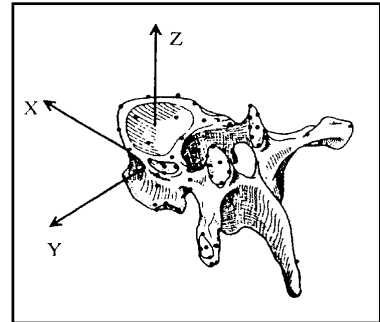


Figure 209 : repère d'étude

Général
SPL : longueur de la vertèbre
TPY : demi-largeur de la vertèbre (coté droit)
Corps vertébral
EPD sup maxi : diamètre antéro-postérieur supérieur maxi
EPD inf maxi : diamètre antéro-postérieur inférieur maxi
EPW sup : diamètre latéral supérieur
EPW inf : diamètre latéral inférieur
VBH a : hauteur du corps vertébral antérieur
VBH p : hauteur du corps vertébral postérieur
Facettes (coté droit)
GDSA sup : grand diamètre de la facette sup
GDSA inf : grand diamètre de la facette inf
PDSA sup : petit diamètre de la facette sup
PDSA inf : petit diamètre de la facette inf
CA sup : centre de la facette sup : X
CA sup : centre de la facette sup : Y
CA sup : centre de la facette sup : Z
CA inf : centre de la facette inf : X
CA inf : centre de la facette inf : Y
CA inf : centre de la facette inf : Z
SA sup : angle entre la normale au plan de la facette sup et le plan sagittal
TA sup : angle entre la normale au plan de la facette sup et le plan horizontal
SA inf : angle entre la normale au plan de la facette inf et le plan sagittal
TA inf : angle entre la normale au plan de la facette inf et le plan horizontal
Apophyses transverses (coté droit)
TPX : longueur entre le centre du corps et l'extrémité de la facette dans un plan horizontal
Apophyse épineuse
SPH : hauteur de l'extrémité
SPW : largeur de l'extrémité

Tableau 42 : paramètres géométriques vertébraux

3- Vertèbres lombaires

Le centre du repère (figure 210) est le milieu du segment formé par les centroïdes des plateaux vertébraux. Les centroïdes sont aux 2/3 de la profondeur minimum du plateau vertébral à partir du bord antérieur.

L'axe Z est défini par la bissectrice des normales aux deux plateaux vertébraux.

L'axe X est antéro-postérieur.

L'axe Y complète le repère direct.

Le passage de la position assise à la position dans le repère local d'étude dans l'ordre suivant :

- ❑ Isoler chacune des vertèbres.
- ❑ La translater d'une valeur égale aux coordonnées du centre de la vertèbre.
- ❑ La faire tourner autour de l'axe Y dans le plan sagittal.

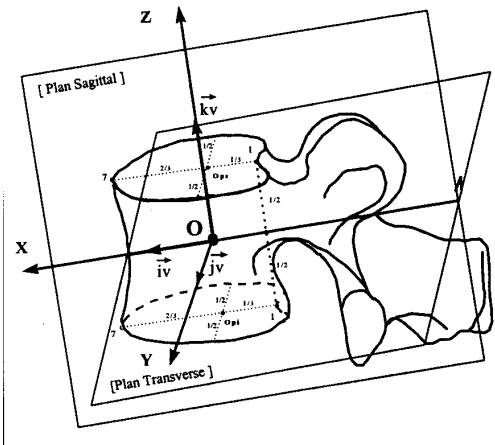


Figure 210 : repère d'étude

Général
VE_prof : longueur de la vertèbre
VE_larg : demi-largeur de la vertèbre
Corps vertébral
PS_prof_max : diamètre antéro-postérieur supérieur maxi
PI_prof_max : diamètre antéro-postérieur inférieur maxi
PS_larg : diamètre latéral supérieur
PI_larg : diamètre latéral inférieur
CV_haut_ant : hauteur du corps vertébral antérieur
CV_haut_post : hauteur du corps vertébral postérieur
Facettes (coté droit)
FS_haut_sup : grand diamètre de la facette sup
FI_haut_inf : grand diamètre de la facette inf
FS_larg_sup : petit diamètre de la facette sup
FI_larg_inf : petit diamètre de la facette inf
FS_ASt : inclinaison sup par rapport au plan sagittal
FI_ASt : inclinaison inf par rapport au plan sagittal
FS_X, Y, Z : centre de la facette sup : X
FS_X, Y, Z : centre de la facette sup : Y
FS_X, Y, Z : centre de la facette sup : Z
FI_X, Y, Z : centre de la facette inf : X
FI_X, Y, Z : centre de la facette inf : Y
FI_X, Y, Z : centre de la facette inf : Z
Apophyses transverses (coté droit)
TR_long : longueur de l'apophyse transverse
Apophyse épineuse
EP_haut : hauteur de l'extrémité
EP_épai_post : largeur de l'extrémité

Tableau 43 : paramètres géométriques vertébraux

4- Résultats

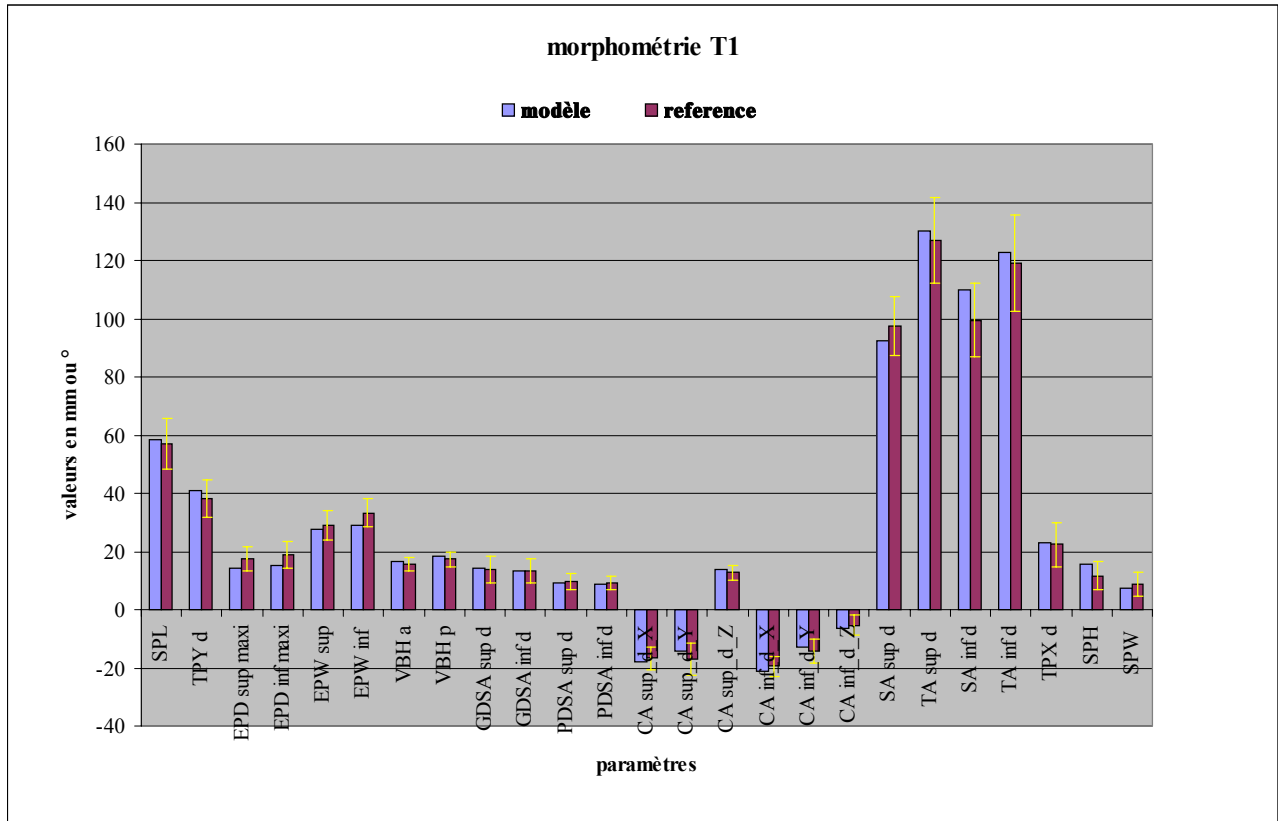


Figure 211 : graphe comparatif pour la vertèbre T1
(les données de la littérature sont données avec plus ou moins un écart type)

Les graphiques des vertèbres T2 à L5 se trouvent en annexe.

A l'aide de cette étude morphométrique nous avons pu améliorer sensiblement la géométrie de certaines vertèbres en modifiant quelques paramètres géométriques. Cependant, cette situation ne s'est pas présentée souvent ce qui confirme la qualité des données géométriques initiales fournies par la base de données issue du LBM. Les quelques données que nous avons été amenés à modifier portaient le plus souvent sur les facettes articulaires et notamment sur leurs orientations angulaires par rapport aux plans de référence (médio-sagittal et frontal) ainsi que sur les positions des centres de ces facettes.

1- Vertèbres thoraciques et lombaires

Elles sont modélisées sous la forme de corps rigides (masse 60 grammes). Les déformations de ces dernières lors du mouvement sont négligeables par rapport aux disques et aux ligaments. Pour ce qui est des inerties :

$$\begin{aligned} I_{xx} &= 30000 \text{ g.mm}^2 \\ I_{yy} &= 50000 \text{ g.mm}^2 \\ I_{zz} &= 50000 \text{ g.mm}^2 \\ I_{xy} &= I_{xz} = I_{yz} = 0 \text{ g.mm}^2 \end{aligned}$$

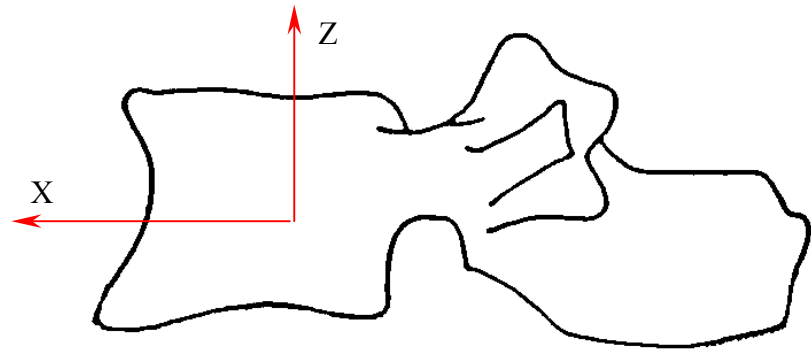


Figure 212 : repère d'inertie

Ces valeurs ont été obtenues avec le logiciel RADIOSS dans le repère propre de la vertèbre à partir du modèle de la vertèbre T12. Nous avons donné la même valeur inertielle à toutes les vertèbres et nous avons choisi T12 comme référence car elle possède une géométrie moyenne entre les vertèbres thoraciques et les lombaires.

La modélisation des contacts entre les facettes articulaires est réalisée par l'intermédiaire d'interfaces sous RADIOSS (type 7).

Ainsi 32 interfaces sont utilisées pour modéliser tous les contacts entre les apophyses articulaires. Ce sont les nœuds de la surface articulaire supérieure de la vertèbre sous-jacente qui sont susceptibles de venir au contact de la surface cible qui correspond à la facette articulaire inférieure de la vertèbre sus-jacente.

La gestion de l'interpénétration, lors de la fermeture du contact, est réglée par le jeu capsulaire (gap). Pour ce faire, nous avons défini le gap pour chaque paire de facettes en fonction du jeu capsulaire géométrique. Ce jeu est de l'ordre du millimètre pour chacun des étages vertébraux ce qui correspond à l'épaisseur de la couche cartilagineuse de l'articulation facettaire.

Bien que les vertèbres soient modélisées comme des corps rigides, le logiciel de simulation (Radioss), impose de déclarer les propriétés mécaniques de cette dernière, donc de l'os la constituant. Cela permet de calculer les efforts et les moments qui transitent par ce corps rigide. Nous avons considéré cette vertèbre comme étant formé d'os cortical (tableau 44).

Nature de l'élément modélisé	Module de Young (N/mm ²)	Coefficient de Poisson
Os cortical	12000	0.3
Os spongieux	Non modélisé	

Tableau 44 : propriétés mécaniques osseuses utilisées pour le modèle

2- Disque intervertébral

Le disque intervertébral est construit de manière à joindre les plateaux vertébraux de deux vertèbres adjacentes. Il est maillé en une seule couche comportant 18 nœuds et 4 éléments cubiques à **comportement visco-élastique**. Il n'y a qu'une seule couche d'éléments dans l'épaisseur. La densité du disque est de 0.0011 g/mm^3 .

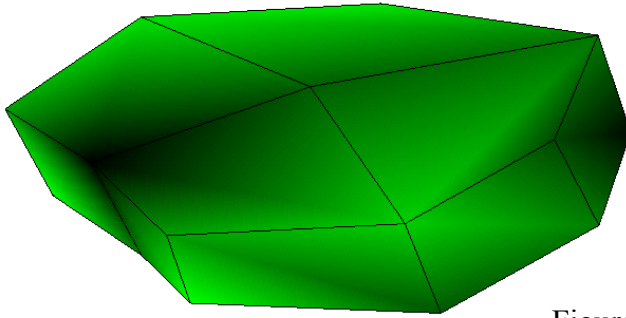


Figure 213 : discrétisation du disque T₈ – T₉

La loi donnant la variation du module de cisaillement (G) en fonction du temps est la suivante :

$$G = G_i + (G^\circ - G_i).e^{-\beta.t}$$

Avec G° = Module de cisaillement du disque au temps infini

G_i = Module de cisaillement du disque au temps initial

β = Inverse du temps de relaxation

t = Durée de la simulation

Le module de compression hydrostatique est défini par la lettre K

Ces données seront utilisées lors de la validation du modèle de rachis

3- Système ligamentaire

A. Géométrie

Les points d'insertions ligamentaires ont été fixés à des points du maillage. Chaque ligament est modélisé par des éléments ressorts à comportement non linéaire, avec des caractéristiques différentes suivant le type de ligament.

La longueur de chaque ligament est déterminée directement par la position des points d'insertion. Nous avons pris en compte les ligaments jaunes, transverses, épineux (globalisation du sus-épineux et de l'inter-épineux) et capsulaires.

- Les ligaments transverses sont modélisés par 2 éléments ressorts de chaque côté et sont insérés sur les apophyses transverses de la vertèbre adjacente.
- Les ligaments jaunes sont reproduits par l'intermédiaire de 3 éléments ressorts tendus entre les lames des deux vertèbres adjacentes.
- Les ligaments inter-épineux et sus-épineux sont modélisés par 2 éléments entre les apophyses épineuses.
- Les capsules articulaires sont reproduites par l'intermédiaire de 8 éléments ressorts de chaque côté. Un élément permet de joindre 2 nœuds placés en vis-à-vis et appartenant chacun à la surface articulaire respectivement supérieure de la vertèbre sous-jacente et inférieure de la vertèbre sus-jacente.

Les ligaments communs antérieurs et communs postérieurs ne sont pas modélisés. Leurs effets seront globalisés au niveau du disque intervertébral.

B. Caractéristiques mécaniques

Les ligaments, comme le disque intervertébral, constituent des éléments de liaison entre deux vertèbres adjacentes.

Ils possèdent des propriétés mécaniques non-linéaires et viscoélastiques marquées. La courbe type (figure 214) effort - déformation d'un ligament comprend trois zones : une zone linéaire à faible rigidité suivie d'une zone linéaire à rigidité constante qui se termine par une zone non linéaire avant rupture.

Pour les mouvements physiologiques, les ligaments travaillent dans la première zone à faible rigidité et dans le début de la deuxième zone. La sollicitation des différents ligaments dépend du geste effectué. Il est cependant difficile d'assigner un ligament à un mouvement unique. En effet, chaque type de ligament intervient de façon plus ou moins importante dans un mouvement donné. On essaiera donc de donner, dans le cadre des simulations, les types de ligament les plus influents pour un mouvement précis.

Les caractéristiques d'un même ligament varient en fonction de plusieurs paramètres :

✓ **L'étage vertébral.**

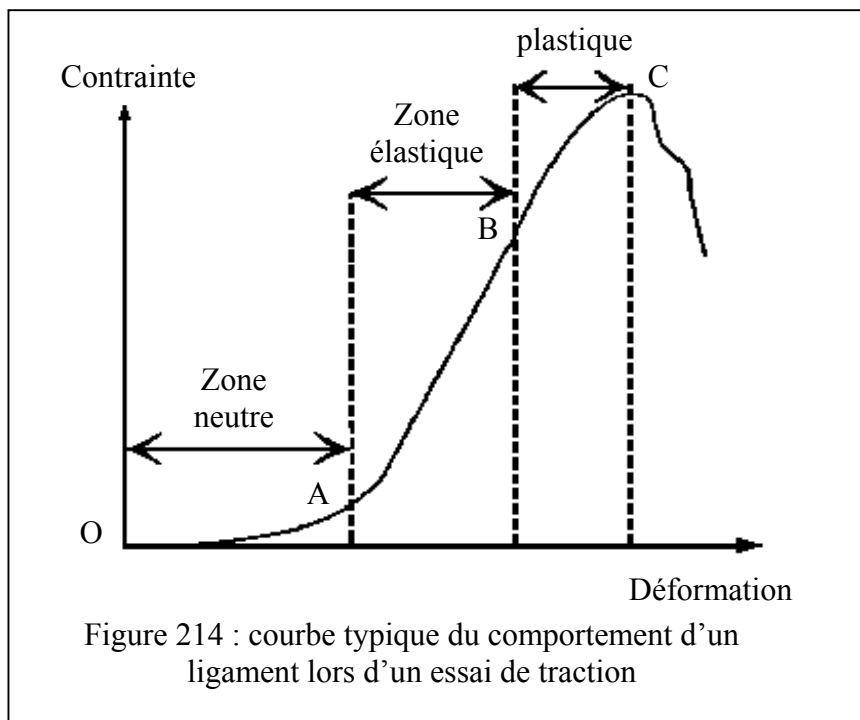
A titre d'exemple, le ligament commun vertébral est plus résistant dans les régions lombaires et cervicales. Le ligament commun vertébral postérieur est plus résistant au niveau lombaire. Le ligament jaune est plus résistant au niveau dorsal. Les capsules articulaires et les ligaments inter-apophysaires sont particulièrement épais dans les zones de transition cervico-dorsale et dorso-lombaire.

✓ **L'angle d'insertion du ligament sur l'os (Momersteeg [MOM-30])**

✓ **L'âge du sujet**

✓ **La morphométrie (poids et dimensions) du sujet**

Nous avons négligé les trois derniers paramètres (angle d'insertion, âge et morphométrie) lors de la modélisation. En effet, le modèle de colonne est représentatif d'un individu 50^{ème} centile et la précision de la modélisation ne peut pas faire intervenir les angles d'insertions ligamentaires



Les caractéristiques mécaniques proviennent de la littérature. Par ailleurs, nous avons observé de grandes dispersions entre les résultats publiés par les différents auteurs. Il serait, à ce titre, souhaitable de réaliser davantage d'essais expérimentaux locaux (sur les ligaments, le disque intervertébral...) pour mieux évaluer leurs caractéristiques mécaniques avant de les introduire dans le modèle.

Les valeurs numériques des caractéristiques mécaniques ligamentaires introduites sont inspirées essentiellement de l'étude réalisée par Chazal [CHA-5]. Cette étude concerne les ligaments intertransversaires, les ligaments jaunes et les ligaments épineux. Afin de tenir compte des propriétés non linéaires de ces ligaments, nous les avons modélisés par des éléments ressorts généralisés. A partir des coordonnées des points :

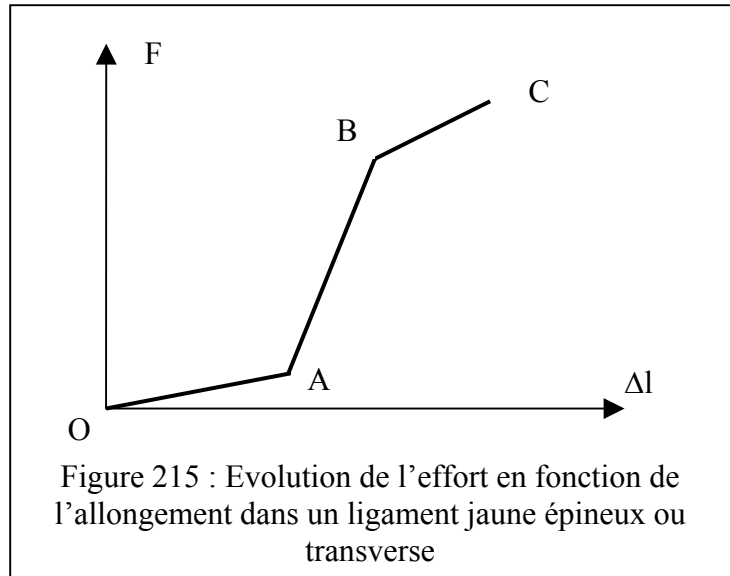
$$\Rightarrow A (F_1, \Delta l_1)$$

$$\Rightarrow B (F_2, \Delta l_2)$$

$$\Rightarrow C (F_3, \Delta l_3)$$

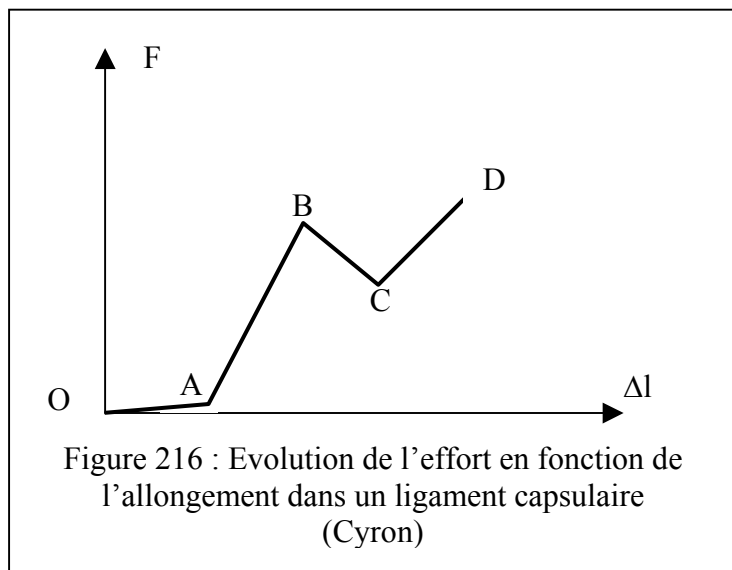
Nous avons calculé la raideur de chaque élément simulant le comportement global du ligament dans les zones OA, AB et BC.

Tous les ligaments modélisés sont concernés par cette étude. Nous avons supposé identique tous les ligaments du même type, ce sont donc les moyennes de toutes les valeurs fournies par ligament qui ont été utilisées (tableau 45).



En ce qui concerne les ligaments capsulaires, nous avons utilisé l'étude menée sur des segments lombaires par Cyron [CYR-6].

La première unité testée étant T7-T8, nous avons cherché à utiliser les données d'un segment lombaire se rapprochant le plus de cette unité. Cette information a été trouvée dans une étude de Myklebust [MYK-31], dans laquelle il fournit un diagramme récapitulatif des efforts à la rupture des ligaments vertébraux. Ainsi, ce sont les valeurs concernant L1-L2 qui ont été retenues. Notre seul critère de choix a été la valeur à la rupture des ligaments capsulaires car Myklebust ne fournit pas l'ensemble de la courbe de comportement.



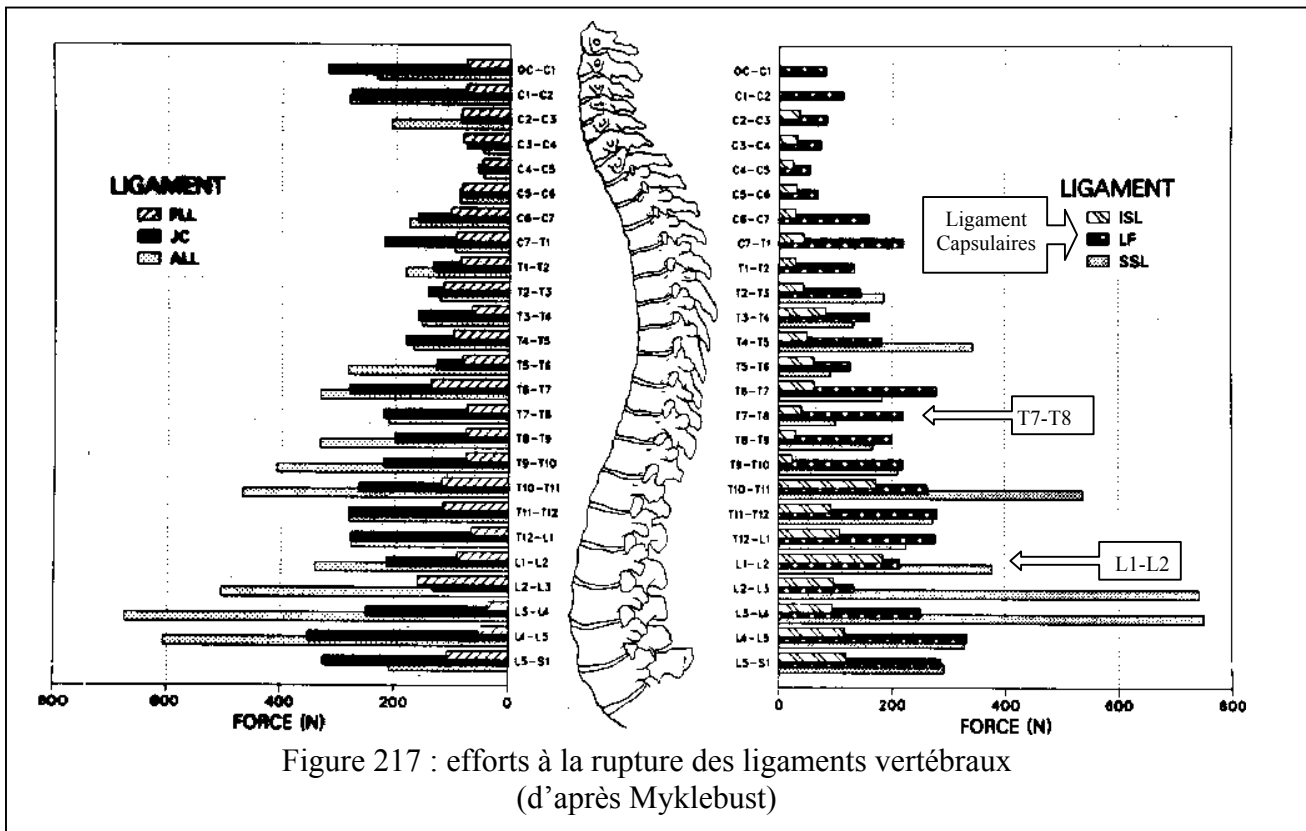
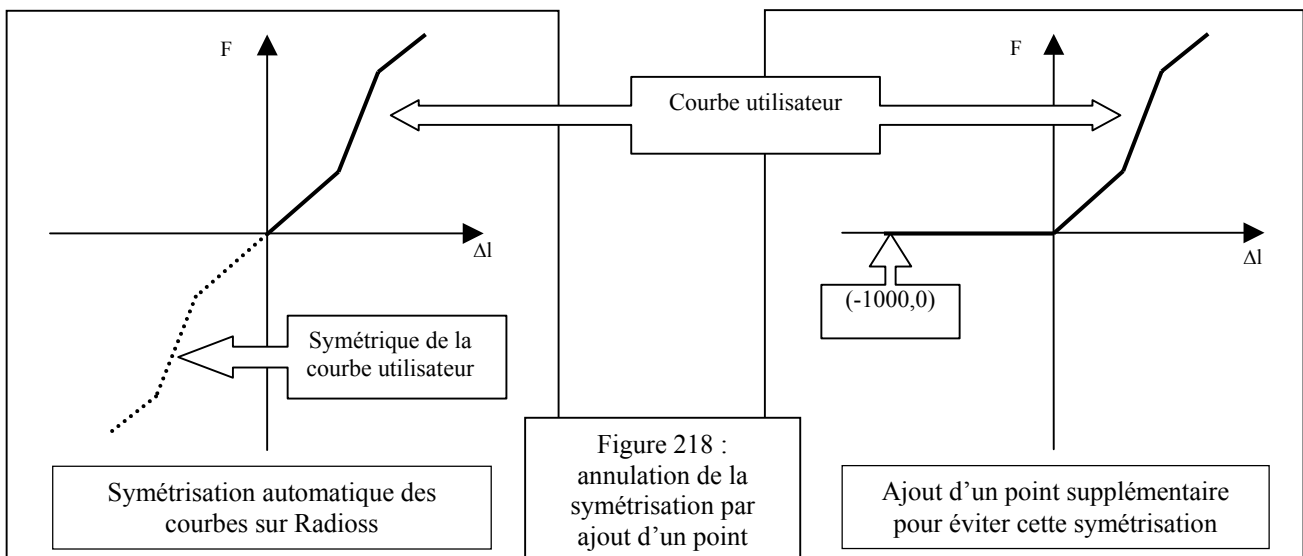


Figure 217 : efforts à la rupture des ligaments vertébraux (d'après Myklebust)

	Ligaments jaunes	Ligaments interépineux	Ligaments intertransversaires	Ligaments capsulaires
Point A (mm ; N)	(0.87 ; 87)	(1.36 ; 36.5)	(0.8 ; 22.5)	(0.4 ; 0)
Point B (mm ; N)	(2.2 ; 368)	(3.175 ; 169)	(1.35 ; 87.5)	(6.9 ; 892)
Point C (mm ; N)	(2.87 ; 414)	(4.16 ; 183)	(1.5 ; 95)	(7.9 ; 700)
Point D (mm ; N)	-	-	-	(8.9 ; 1055)

Tableau 45 : propriétés mécaniques des ligaments modélisés

Ces données sont des valeurs moyennes qui subiront des variations suivant l'étage vertébral considéré. Radioss introduisant une courbe de chargement symétrique de la courbe utilisateur, nous avons introduit un cinquième point de coordonnées (-1000 ; 0) de façon à avoir un comportement en compression conforme à la réalité (figure 218). Une exception toutefois, nous avons donné au ligament épineux du modèle une rigidité non nulle en compression pour compenser l'absence du ligament commun antérieur qui rigidifie le mouvement d'extension.



VI- APERÇU DU MODELE « ELEMENTS FINIS » DU RACHIS THORACIQUE ET LOMBAIRE

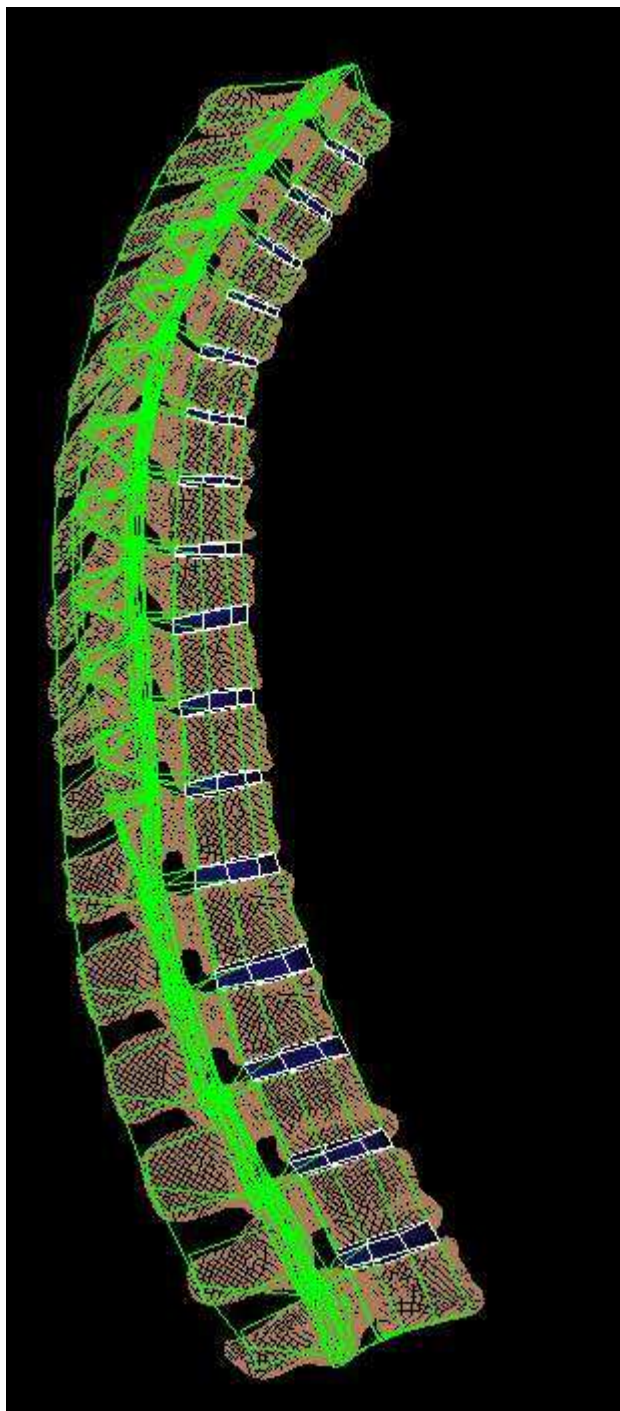


Figure 219 : superposition de la géométrie brute en beige et du modèle « éléments finis » en représentation filaire verte (vue sagittale)

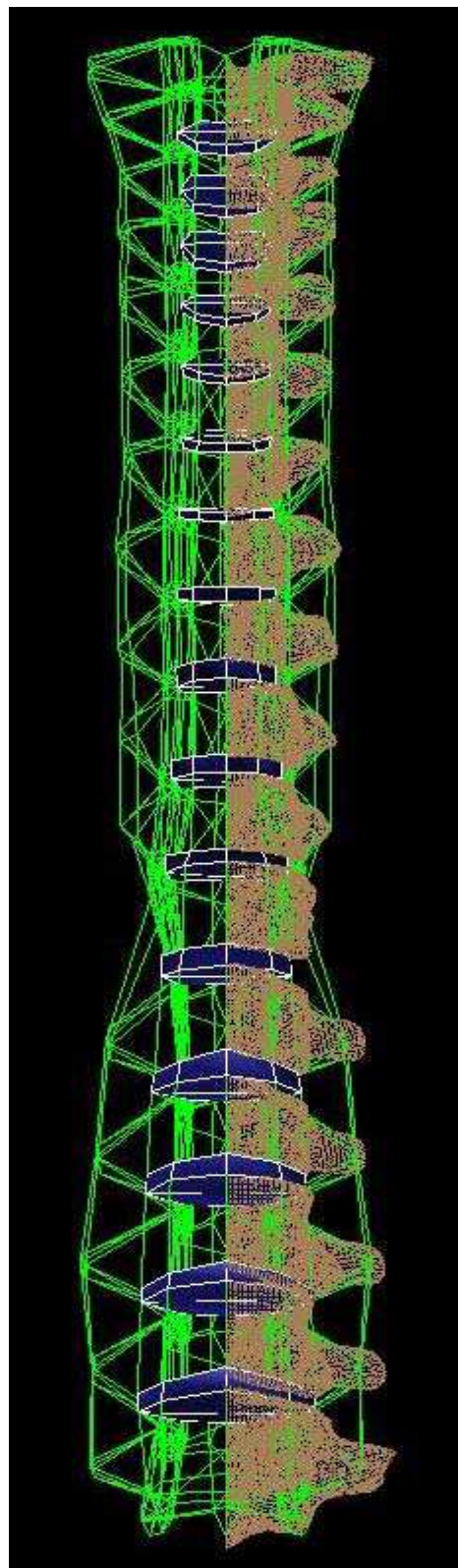


Figure 220 : vue frontale

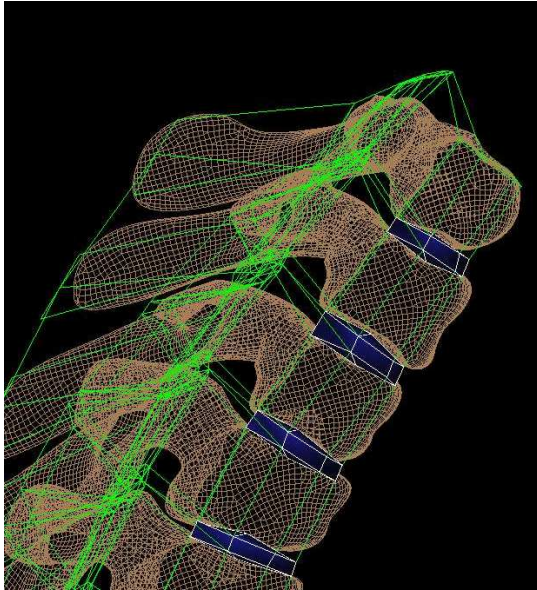


Figure 221 : superposition de la géométrie brute et du modèle (partie thoracique haute)

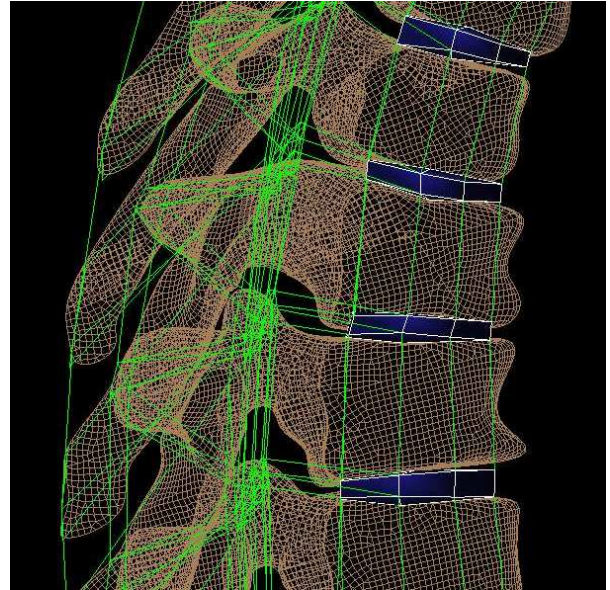


Figure 222 : superposition de la géométrie brute et du modèle (partie thoracique médiane)

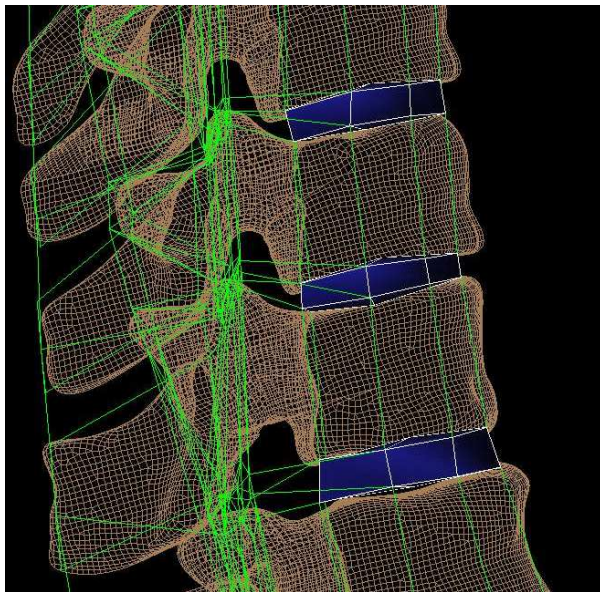


Figure 223 : superposition de la géométrie brute et du modèle (partie thoracique basse)

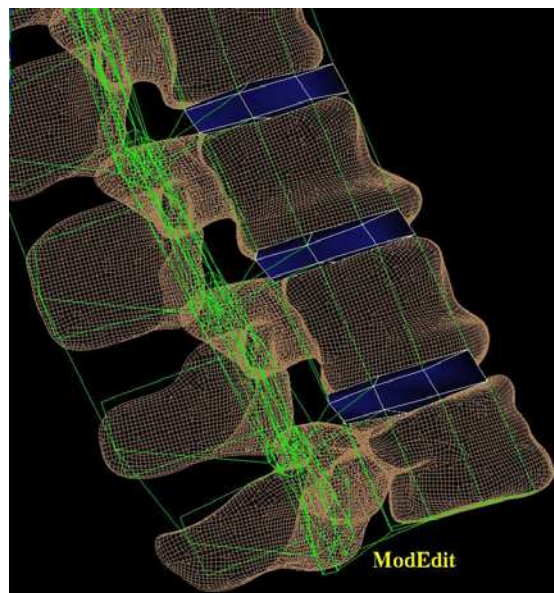


Figure 224 : superposition de la géométrie brute et du modèle (partie lombaire basse)

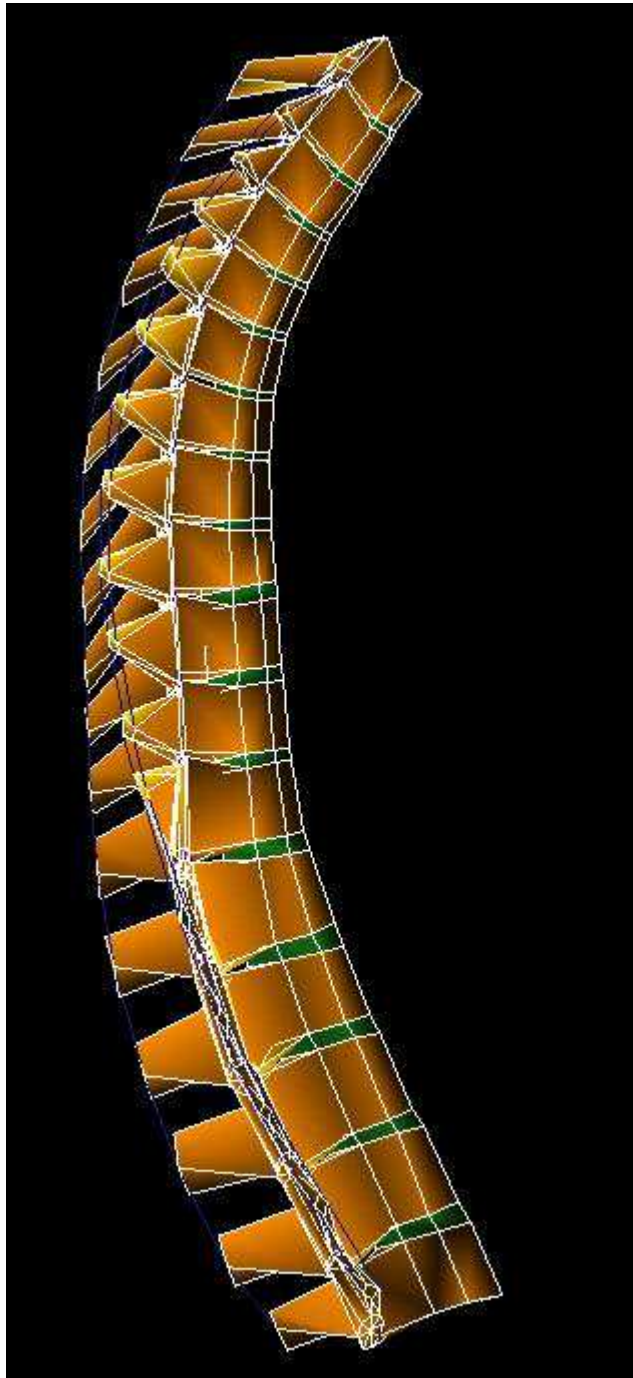


Figure 225 : modèle du rachis thoracique et lombaire (vue sagittale)

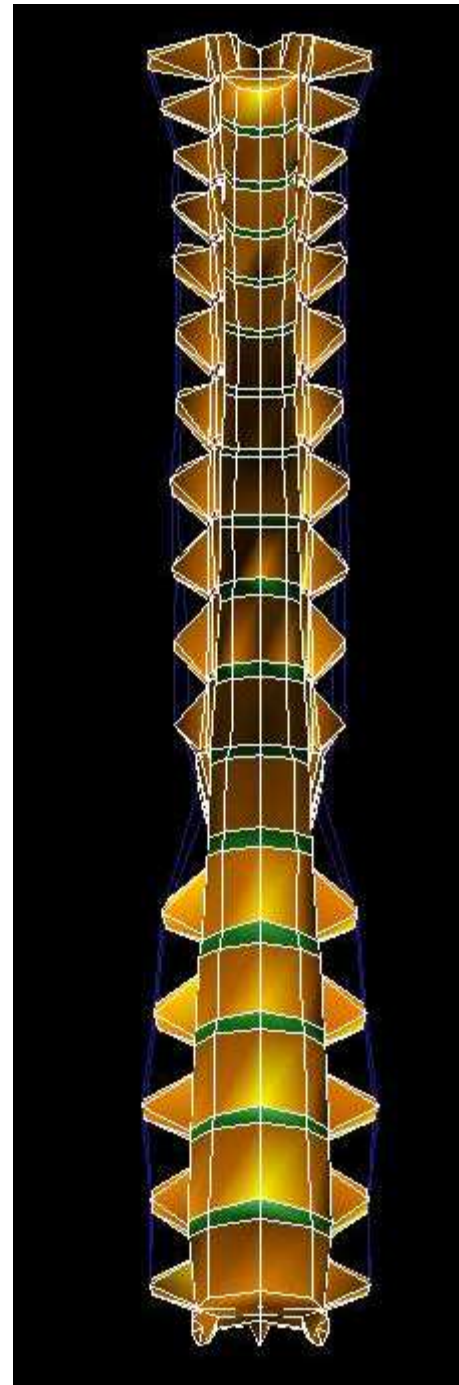


Figure 226 : modèle du rachis thoracique et lombaire (vue frontale)

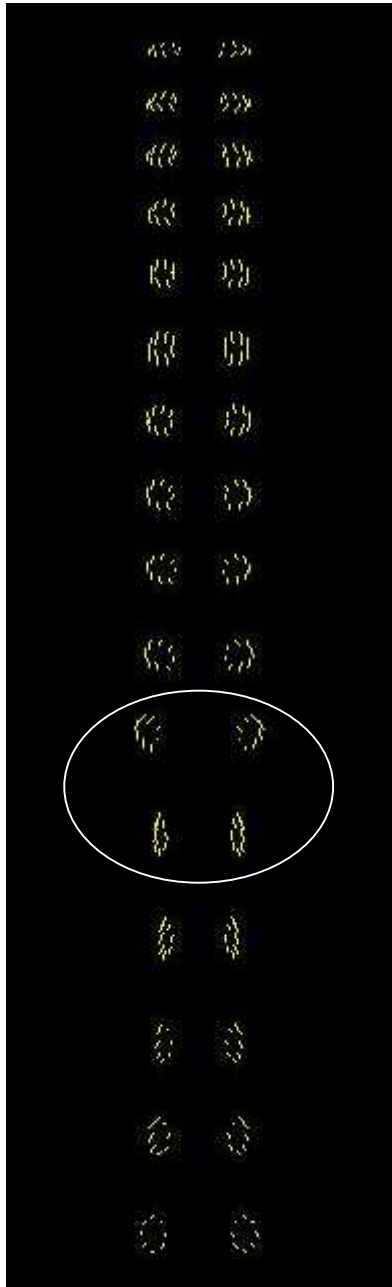


Figure 228 : Trace des ligaments capsulaires (vue frontale) / orientation des facettes

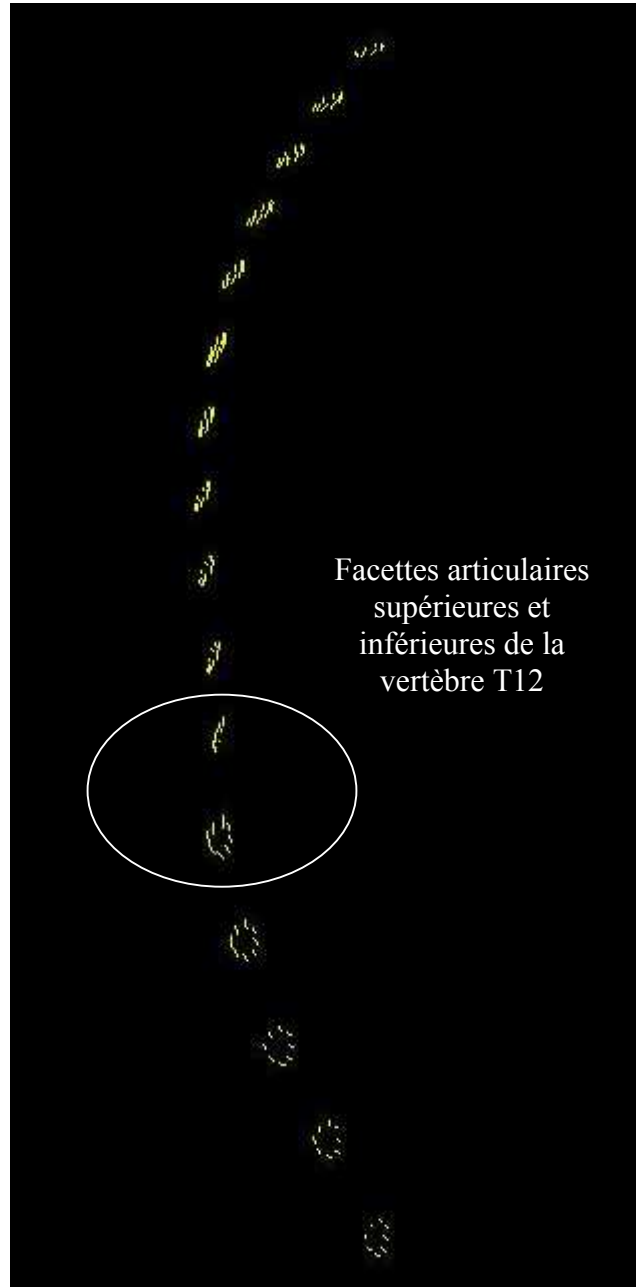


Figure 227 : Trace des ligaments capsulaires (vue sagittale) / orientation des facettes

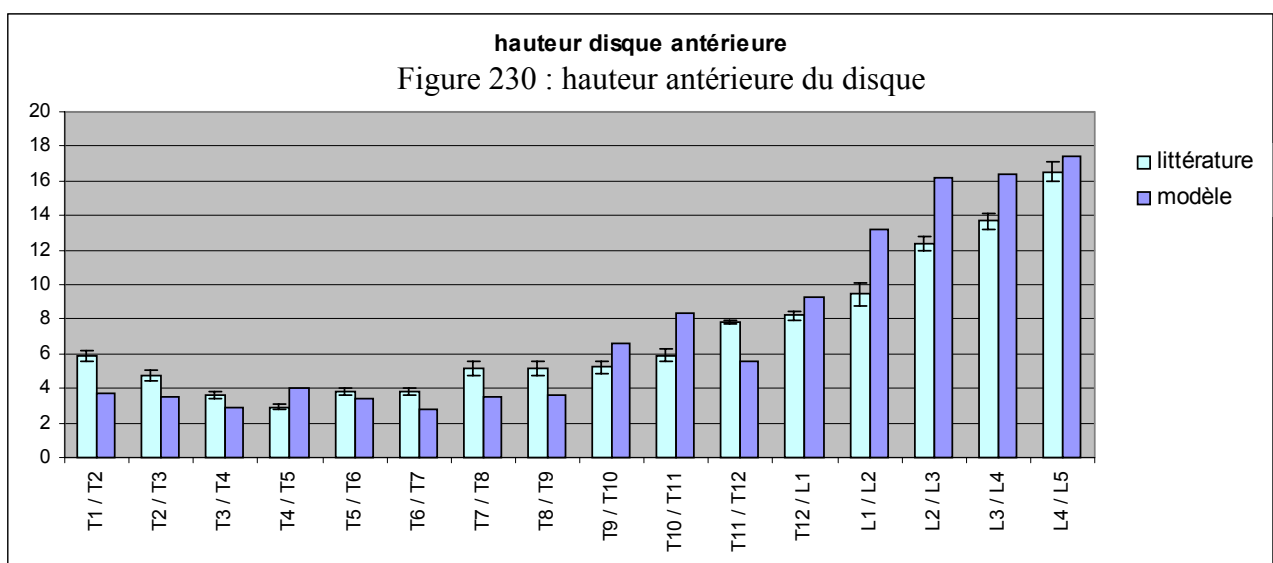
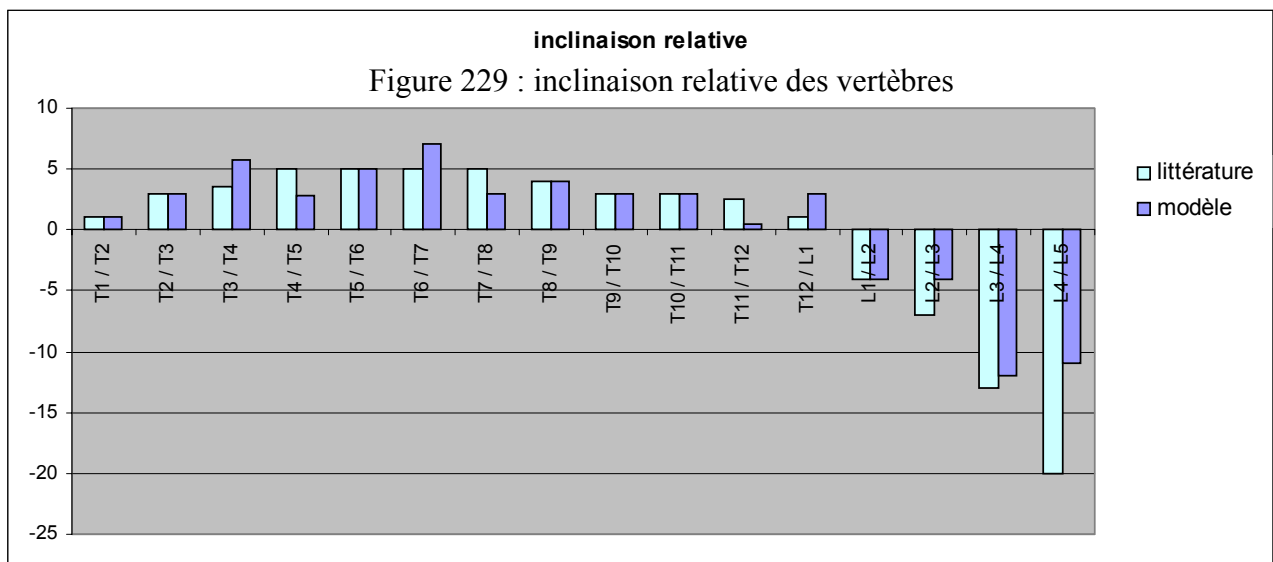
On peut noter les différences d'orientations des facettes supérieures et inférieures de la vertèbre T12 qui représente une transition géométrique réelle entre le rachis thoracique et lombaire.

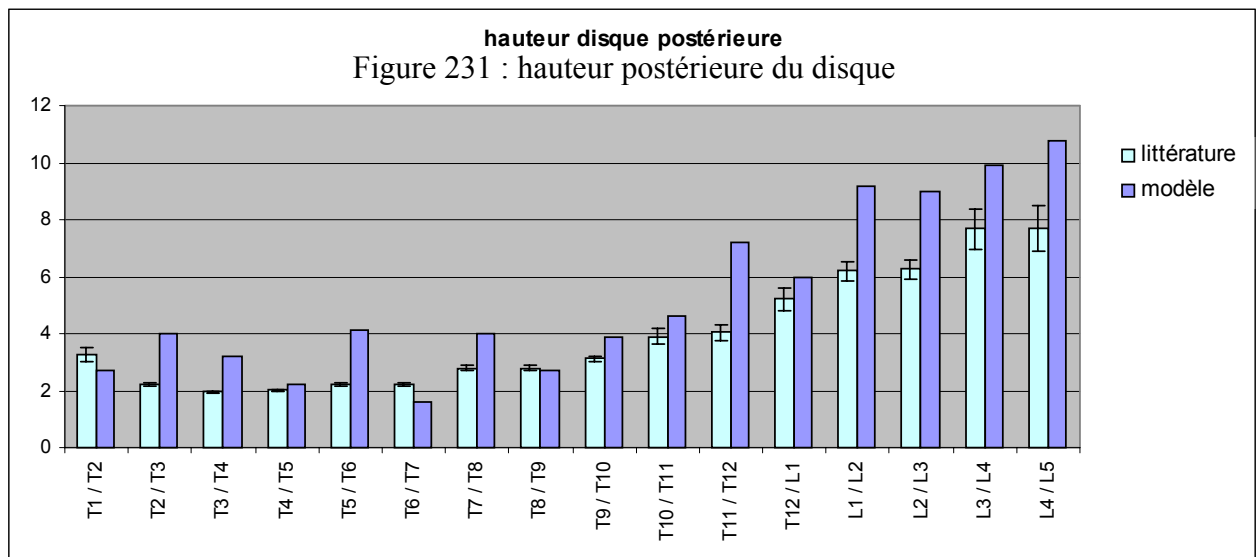
1- Passage en position debout

Lors de l'étude bibliographique, nous nous sommes aperçus qu'il n'y avait pas de données expérimentales qui permettraient de valider un modèle de rachis en position assise et en dynamique. Les essais prévus dans ce projet n'étaient, à ce stade, pas encore réalisés, et il nous a semblé intéressant d'utiliser des essais existant, en statique, et réalisés sur des spécimens en position debout. Cela permet de valider le modèle « éléments finis » pour des sollicitations quasi-statiques à l'aide de comparaisons expérimentales. Lorsque la validation en dynamique sera effectuée, nous disposerons d'un modèle validé à la fois en statique et en dynamique permettant d'envisager de multiples cas d'utilisations.

Afin que la géométrie du modèle soit cohérente avec les essais (les segments étaient testés en position debout), il a fallu modifier la courbure du modèle pour l'identifier à celle d'une position debout.

La littérature fournit des données sur les angles relatifs entre vertèbres adjacentes (Bernhardt [BER-1]) et les épaisseurs antérieures et postérieures du disque intervertébral (Pooni [POO-47]). Voici les graphes comparant les données bibliographiques et celles du modèle en position debout :





La mise en position debout du modèle s'est faite manuellement en utilisant les données bibliographiques citées précédemment et en comparant qualitativement les courbures obtenues avec celles de rachis radiographiés en position debout.

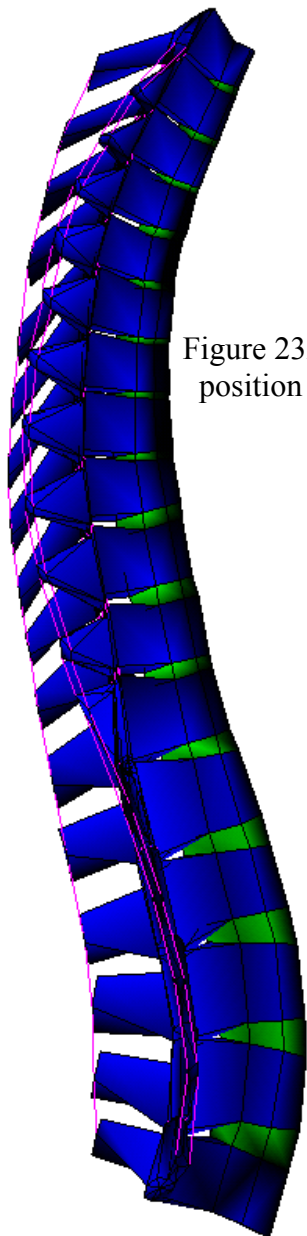


Figure 232 : modèle du rachis en position debout (vue sagittale)

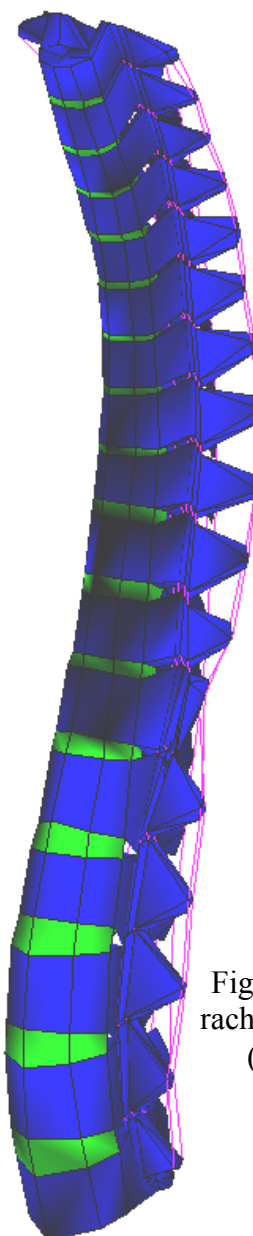


Figure 233 : modèle du rachis en position debout (vue isométrique)

2- Validation du modèle par comparaisons expérimentales

Cette phase de validation a pour but d'identifier les paramètres des lois de comportement des disques et des ligaments du modèle de rachis thoracique et lombaire. A l'issue de cette phase, le modèle sera en mesure de prédire les trajectoires vertébrales pour des sollicitations de flexion, d'inflexion et de torsion. A priori, la réponse du modèle lors de sollicitations composées sera correcte. Nous n'avons cependant pas d'essais expérimentaux pour le prouver.

La validation statique du modèle va se faire à l'aide d'un plan d'expérience.

Le but de ce plan est de faire un nombre réduit de simulations tout en définissant les paramètres qui influencent le plus le comportement cinématique du modèle au cours d'une sollicitation donnée. Ces paramètres concernent les modules d'élasticité du disque en cisaillement et en compression ainsi que les facteurs de rigidité des différents ligaments.

Les influences de chacun des paramètres étant connues, il suffira de trouver le compromis optimum permettant d'obtenir des résultats les plus proches possibles des données expérimentales. Lorsque le protocole expérimental et la structure étudiée sont parfaitement connus, que ce soit au niveau de la géométrie de la structure, des caractéristiques mécaniques des matériaux (matériaux métalliques) ou des conditions aux limites, la comparaison des simulations et des expérimentations ne pose aucun problème.

Par contre, lorsqu'il s'agit de faire une telle comparaison en biomécanique, des paramètres demeurent inconnus au niveau des caractéristiques mécaniques des matériaux (qualité des pièces testées et dispersions inter-individuelles), de la géométrie des pièces anatomiques étudiées (paramètres géométriques non fournis ou non mesurables) et des conditions aux limites introduites (protocoles expérimentaux souvent imprécis).

Pour l'évaluation du comportement mécanique du modèle éléments finis du rachis nous avons validé 4 unités vertébrales du modèle qui sont **L3-L4**, **T12-L1**, **T7-T8** et **T3-T4**. Cette limitation provient essentiellement de l'absence d'expérimentations ayant un protocole assez détaillé pour être exploitable.

Pour les simulations, le chargement est quasi-statique, en imposant un couple 5 N.m, sur le plateau supérieur de la vertèbre sus-jacente, à l'aide d'une fonction du type :

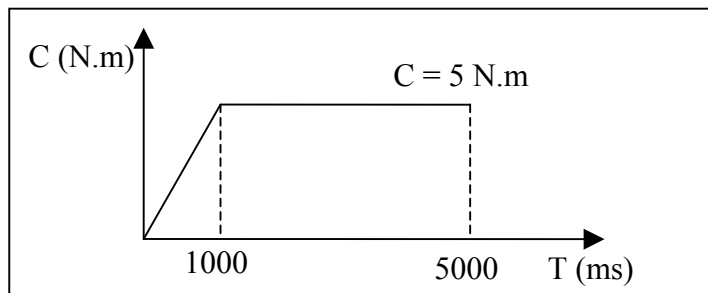


Figure 234 : sollicitation appliquée au modèle

Avec une fonction de ce type, les durées des simulations sont trop importantes (50 mn par simulation sur une station Silicon graphics R4400). Aussi, nous avons imposé la loi suivante et vérifié que les résultats étaient similaires malgré la durée très courte de simulation (5 mn).

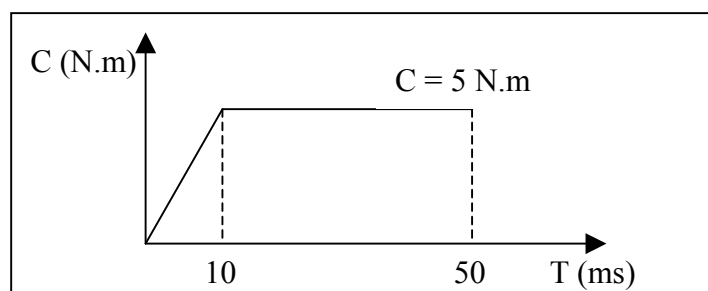


Figure 235 : sollicitation appliquée au modèle

Le choix des durées d'applications des forces s'est donc fait de façon à avoir un temps de calcul minimum tout en atteignant une stabilisation dans les déplacements à la fin de la simulation. Nous avons réalisé des simulations numériques pour les quatre types de sollicitations : **flexion, extension, inflexion latérale et torsion**.

A. Etudes expérimentales utilisées

↪ Pour la partie thoracique et thoraco-lombaire :

Deux études se sont dégagées des recherches bibliographiques.

Tout d'abord, celle de F. Boudreault dont les travaux ont été repris par J.L. Describes [DES-9] durant sa thèse.

Les expérimentations portent sur 6 unités T12-L1, 5 unités T7-T8 et 6 unités T3-T4 qui ont été testés en flexion, extension, inflexion latérale et torsion axiale. L'écart type n'a pas été donné dans ses travaux.

La seconde étude est celle de W. Koubaa [KOU-22] qui complète celle de F. Boudreault. Les expérimentations portent sur 18 unités T12-L1, 9 unités T7-T8 et 10 unités T3-T4 parmi lesquelles figurent les unités testées par Boudreault. Les spécimens ont été testés en flexion, extension, inflexion latérale et torsion axiale. Sur les diagrammes sont portés des intervalles de confiance à $\pm \sigma / 2$ ce qui signifie que 40 % des mesures sont dans cet intervalle. L'analyse statistique de son étude porte sur ses propres travaux et sur ceux de Boudreault de façon indifférenciée.

↪ Pour la partie lombaire :

Les deux premières études portent sur les travaux de E. ROLLAND [ROL-51].

Nous avons utilisé uniquement les résultats expérimentaux du segment L3-L4 qui est celui que nous avons choisi de valider lors de nos simulations. Les spécimens ont été testés en flexion, extension, inflexion latérale et torsion axiale. Les résultats de la première étude sont issus d'un rachis sain possédant un disque épais et les résultats de la deuxième étude sont issus d'un rachis de petite taille possédant une qualité osseuse moyenne (les critères concernant la qualité osseuse sont indiqués dans son mémoire). Ces caractéristiques morphométriques n'ont pas été prises en compte lors de la simulation car la géométrie du modèle de rachis thoracique et lombaire correspond à celle d'un individu moyen en terme de dimensions et de masses et il n'est pas adaptable à d'autres géométries.

Les autres études sont des résultats issus de la base de données du L.B.M [POU-48].

Cette base, mise en forme par I. Poujol et A. Château [POU-48], regroupe un certain nombre d'essais effectués en interne au sein du LBM. De la même façon que les études précédentes, les spécimens ont été testés en flexion, extension, inflexion latérale et torsion axiale. Nous n'avons considéré que les essais effectués sur des segments L3-L4.

Les résultats sont issus d'un seul rachis à chaque fois d'où l'absence d'écarts-types.

Les essais menés en thoracique et lombaires ont été effectués en suivant le même protocole expérimental. Ce protocole, appelé « Procédure d'essai d'un implant rachidien » [IMP-20], a été défini au sein du LBM et défini les directions et les amplitudes de chargement, ainsi que les conditions aux limites en déplacement (vertèbre immobilisée).

B. Conditions aux limites en déplacement

⇒ *Expérimental* (résumé de la « Procédure d'essai d'un implant rachidien » [IMP-20]) :

La base du segment rachidien de deux vertèbres est immobilisée dans un bac à l'aide d'un alliage à bas point de fusion de type MCP70. Pour améliorer la liaison, des vis à bois sont fixées dans la partie inférieure du corps vertébral avant de couler l'alliage. Le bac est fixé sur le bâti du dispositif d'essais pour que le plan médian du disque intervertébral soit horizontal lorsqu'il s'agit de segments lombaires purs, dorso-lombaires ou dorsaux purs.

⇒ *Modélisation* :

Tous les nœuds de la base inférieure de la vertèbre inférieure ont été bloqués de façon à se rapprocher de l'encastrement réel. Ce blocage porte sur les six degrés de liberté de la vertèbre (3 translations et trois rotations).

C. Conditions aux limites en effort

⇒ *Expérimental* (résumé de la « Procédure d'essai d'un implant rachidien » [IMP-20]) :

Pour les segments thoraciques ou lombaires, il s'agit d'un croisillon fixé sur la vertèbre par l'intermédiaire d'un système prenant appui sur les pédicules. Ce croisillon permet de placer des barres de chargement, soit dans le plan sagittal, soit dans le plan frontal. Des masses marquées, placées aux extrémités de ces barres, permettront par la suite de mettre en charge le segment et d'appliquer le couple désiré en flexion, extension, inflexion latérale ou torsion axiale.

⇒ *Modélisation* :

Le couple a été modélisé par deux forces placées sur les bords de la vertèbre. Grâce à la création d'un repère nodal local correspondant au plan médian du disque, les efforts ont pu être orientés perpendiculairement à ce plan.

D. Critère de validation

Le critère de validation choisi est l'angle de rotation principal de la vertèbre supérieure. Nous définissons l'« angle de rotation principal » comme celui étant directement influencé par la sollicitation. Nous ne nous intéressons pas aux rotations secondaires induites par couplage.

Cet angle sera appelé « alpha » ou « α ».

Les segments du modèle qui ont été validés sont représentés dans les figures 236 à 239. Les conditions de chargement de la vertèbre supérieure ainsi que l'encastrement de la vertèbre inférieure ne sont pas représentés.

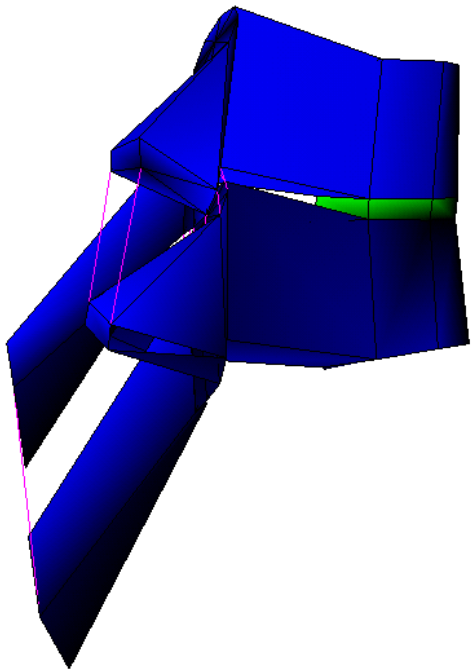


Figure 237 : segment T₃-T₄ (vue sagittale)

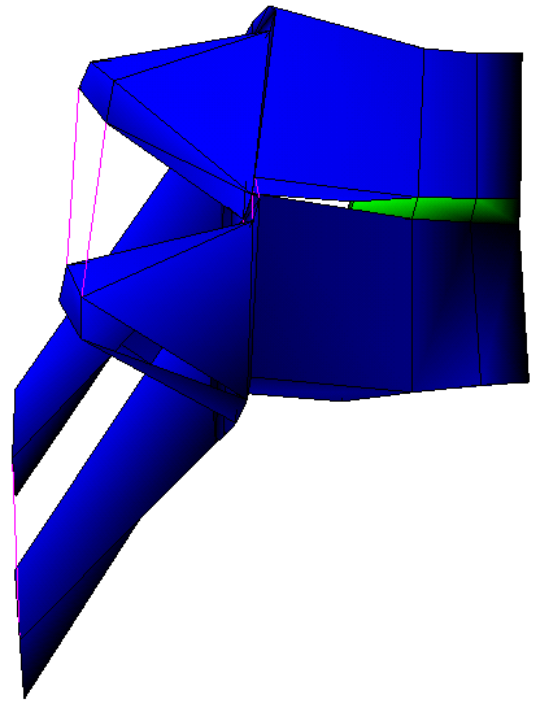


Figure 236 : segment T₇-T₈ (vue sagittale)

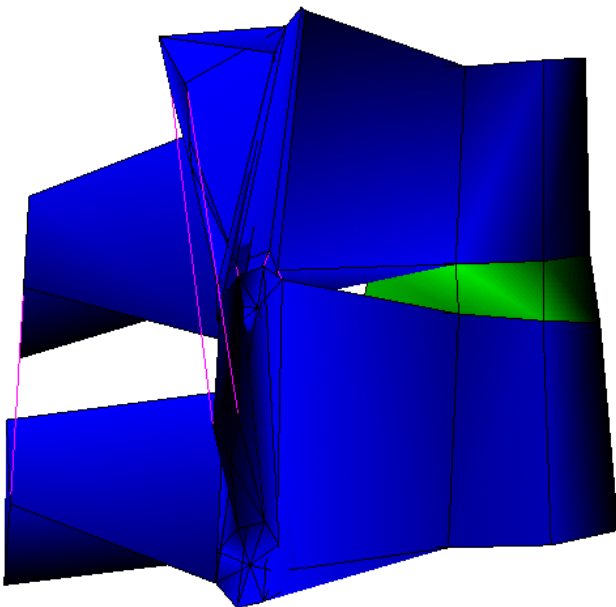


Figure 239 : segment T₁₂-L₁ (vue sagittale)

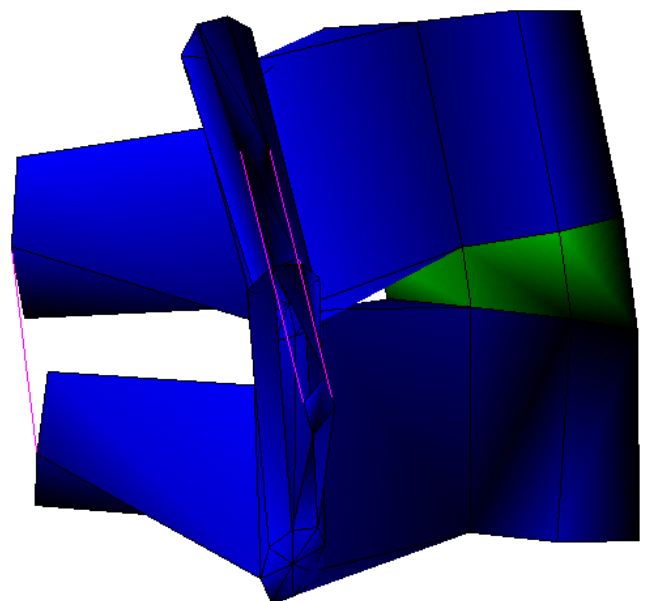


Figure 238 : segment L₃-L₄ (vue sagittale)

3- Plan d'expérience

A. Réalisation du plan

L'identification des paramètres influents du modèle fait appel à un nombre important de facteurs. L'utilisation d'un plan d'expérience s'est donc avérée nécessaire. Ce plan a pour objectif d'identifier les paramètres des lois de comportement des disques et des ligaments du modèle qui influencent le plus son comportement cinématique au cours d'une sollicitation donnée (flexion, extension, inflexion ou torsion). L'avantage de cette méthode est qu'elle nécessite un nombre limité de simulations.

Dans cette partie, nous décrirons le travail effectué sur l'unité fonctionnelle T7-T8 sous un couple de 5000 N.mm. Nous ferons un plan d'expérience par type de sollicitation (flexion, extension, inflexion latérale et torsion) d'où nous en déduirons les valeurs optimales de chacun des paramètres. *A l'issue de cette identification, nous disposerons d'une valeur pour chacun des paramètres choisis et pour un segment vertébral donné, qui validera le modèle quel que soit le mode de sollicitations (flexion, extension, inflexion ou torsion).*

L'identification des paramètres a été faite de façon manuelle. Des méthodes de régression multilinéaire, plus complexes, auraient permis d'améliorer encore ce calage, notamment avec la transformation du modèle matriciel utilisé en un modèle polynomial.

✓ Choix des paramètres et du plan :

Le choix s'est porté sur 6 paramètres qui sont :

G_i = Module de cisaillement du disque intervertébral au temps infini.

K = Module de compression hydrostatique du disque intervertébral.

A_e = Coefficient multiplicateur de rigidité pour les ligaments épineux.

A_t = Coefficient multiplicateur de rigidité pour les ligaments transverses.

A_j = Coefficient multiplicateur de rigidité pour les ligaments jaunes.

A_f = Coefficient multiplicateur de rigidité pour les ligaments des capsules articulaires.

Tous ces facteurs possèdent chacun 3 niveaux notés 1, 2 et 3.

Tableau 46 : niveaux des facteurs

	G_i			A_j			A_e		
Niveau	1	2	3	1	2	3	1	2	3
valeur	0.1	0.6	3.5	0.1	1	10	0.1	1	10
	A_t			A_f			K		
Niveau	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Valeur	0.1	1	10	0.1	1	10	1	15	30

Le plan complet nécessite avec 6 facteurs à 3 niveaux : $3^6 = 729$ essais, et ceci pour chaque type de sollicitation. D'où la nécessité d'utiliser un plan fractionnaire.

✓ Vérification du régime statique :

La durée de la simulation est de 50 ms.

Dans le manuel d'utilisation de Radioss se trouve la loi donnant la variation du module de cisaillement (G) en fonction du temps.

$$G = G_i + (G^\circ - G_i).e^{-\beta.t}$$

Avec G° = Module de cisaillement du disque au temps infini = 3.5714 MPa

β = Inverse du temps de relaxation = 1 (ms)⁻¹

t = Durée de la simulation = 50 ms

Les valeurs de G° et β sont celles issues du modèle initial de l'être humain [LIZ-26] dont nous avons repris la loi de comportement du disque inter-vertébral. Ces données intervenant seulement dans un régime de sollicitation dynamique, nous avons décidé de les reprendre dans le cas de sollicitations statiques.

$G_i = 0.1 \Rightarrow G = 0.1 \text{ MPa}$

$G_i = 0.6 \Rightarrow G = 0.6 \text{ MPa}$

$G_i = 3.5 \Rightarrow G = 3.5 \text{ MPa}$

La valeur obtenue au bout de 50 ms est égale à G_i . Nous sommes donc bien dans le domaine statique à la fin de la simulation quel que soit le niveau du facteur G_i .

✓ Calcul du module d'Young du disque :

$$E = \frac{9GK}{3K + G}$$

La valeur de E la plus faible correspond à $G=G_i = 0.1$ et $K=1 \Rightarrow E = 0.3 \text{ MPa}$

La valeur de E la plus forte correspond à $G=G_i = 3.5$ et $K=30 \Rightarrow E = 10 \text{ MPa}$

✓ Paramètre de sortie :

La variable dépendante prise en compte est l'angle de rotation (noté α) de la vertèbre supérieure

✓ Modèle et nombre d'essais effectués :

Afin de ne pas avoir un nombre d'essais trop important à réaliser, nous n'avons étudié que 3 interactions parmi les 10 possibles.

Les interactions étudiées sont celles existant entre le disque et le ligament épineux, entre le disque et les ligaments des capsules articulaires, et entre les ligaments épineux et les ligaments des capsules articulaires. Nous avons choisi d'étudier plus particulièrement ces interactions pour voir les influences mutuelles qui peuvent exister lors d'une sollicitation en flexion ou en torsion. En effet, le disque, le ligament épineux et les ligaments des capsules articulaires sont susceptibles d'intervenir ensemble lors de la rotation de la vertèbre.

D'où la forme de l'équation régissant le modèle :

$$\alpha = \mathbf{M} + \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \mathbf{Gi} + \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \mathbf{Aj} + \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \mathbf{Ae} + \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \mathbf{At} + \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \mathbf{Af} + \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \mathbf{K} + \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \mathbf{Gi.Ae} + \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \mathbf{Gi.Af} + \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \mathbf{Ae.Af}$$

α est un scalaire malgré l'écriture de cette équation. L'explication est la suivante, suivant les niveaux (1, 2 ou 3) que peuvent avoir les facteurs (Gi, Aj, Ae...), nous ne considérons qu'une seule case d'un vecteur ou d'une matrice pour calculer la valeur de α . Par exemple, si tous les facteurs sont au niveau 1, [i j k]. Gi est remplacé par i et l'interaction entre Gi et Ae est calculée en prenant le coefficient en ligne 1, colonne 1 de la matrice.

Le calcul des coefficients matriciels et vectoriels n'est pas détaillé.

Le nombre de degrés de liberté (d.d.l.) est de $1+2+2+2+2+2+2+4+4+4 = 25$.

Vérifions maintenant l'orthogonalité du plan à l'aide du tableau suivant :

Gi	3									
Aj	3	9								
Ae	3	9	9							
At	3	9	9	9						
Af	3	9	9	9	9					
K	3	9	9	9	9	9				
Gi.Ae	9		27		27	27	27			
Gi.Af	9		27	27	27		27			
Ae.Af	9	27	27		27		27			
	d.d.l.	3	3	3	3	3	3	9	9	9
		Gi	Aj	Ae	At	Af	K	Gi.Ae	Gi.Af	Ae.Af

Tableau 47 : table d'orthogonalité

Le Plus Petit Commun Multiple étant égal à 27, le nombre d'essais devra être un multiple de 27 et doit être supérieur au nombre de degrés de liberté, c'est à dire, 25.

Le nombre d'essais devra donc être de 27, 54 ou 81.

Une table d'essai satisfaisante est la L27 qui implique donc un plan en 27 essais.

✓ Graphe de TAGUCHI [TAG-58] choisi et sa table d'essais :

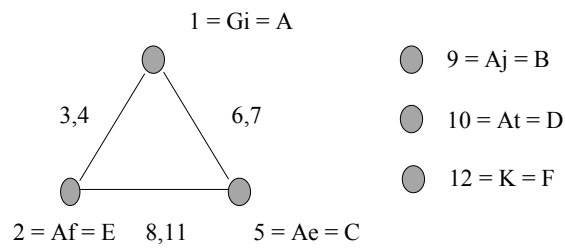


Figure 240 : graphe de Taguchi

Table d'essai :

Tableau 48 : table d'essai

	Table des modalités (niveaux)						Table des valeurs					
	Gi	Aj	Ae	At	Af	K	Gi	Aj	Ae	At	Af	K
1	1	1	1	1	1	1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	1
2	1	2	2	2	1	2	0.1	1	1	1	0.1	15
3	1	3	3	3	1	3	0.1	10	10	10	0.1	30
4	1	2	1	2	2	3	0.1	1	0.1	1	1	30
5	1	3	2	3	2	1	0.1	10	1	10	1	1
6	1	1	3	1	2	2	0.1	0.1	10	0.1	1	15
7	1	3	1	3	3	2	0.1	10	0.1	10	10	15
8	1	1	2	1	3	3	0.1	0.1	1	0.1	10	30
9	1	2	3	2	3	1	0.1	1	10	1	10	1
10	2	2	1	3	1	2	0.6	1	0.1	10	0.1	15
11	2	3	2	1	1	3	0.6	10	1	0.1	0.1	30
12	2	1	3	2	1	1	0.6	0.1	10	1	0.1	1
13	2	3	1	1	2	1	0.6	10	0.1	0.1	1	1
14	2	1	2	2	2	2	0.6	0.1	1	1	1	15
15	2	2	3	3	2	3	0.6	1	10	10	1	30
16	2	1	1	2	3	3	0.6	0.1	0.1	1	10	30
17	2	2	2	3	3	1	0.6	1	1	10	10	1
18	2	3	3	1	3	2	0.6	10	10	0.1	10	15
19	3	3	1	2	1	3	3.5	10	0.1	1	0.1	30
20	3	1	2	3	1	1	3.5	0.1	1	10	0.1	1
21	3	2	3	1	1	2	3.5	1	10	0.1	0.1	15
22	3	1	1	3	2	2	3.5	0.1	0.1	10	1	15
23	3	2	2	1	2	3	3.5	1	1	0.1	1	30
24	3	3	3	2	2	1	3.5	10	10	1	1	1
25	3	2	1	1	3	1	3.5	1	0.1	0.1	10	1
26	3	3	2	2	3	2	3.5	10	1	1	10	15
27	3	1	3	3	3	3	3.5	0.1	10	10	10	30

✓ Recherche des interactions et des alias :

- Interactions

Interaction	Colonne
Gi.Aj	8/10
Gi.Ae	6/7
Gi.At	8/9
Gi.Af	3/4
Aj.Ae	3/13
Aj.At	1/8
Aj.Af	6/12
Ae.At	4/12
Ae.Af	8/11
At.Af	7/13

Tableau 49 : table des interactions

- Alias

Action	Colonne	Alias
A	1	\
B	9	\
C	5	\
D	10	\
E	2	\
F	12	\
Gi.Ae	6/7	\
Gi.Af	3/4	\
Ae.Af	8/11	\

Tableau 50 : table des alias

Il n'y a donc pas d'alias dans ce plan d'expérience.

Le plan d'expérience décrit ci-dessus n'a été réalisé que pour T7-T8. Nous nous sommes contentés de partir des résultats obtenus avec cette unité pour identifier les paramètres des autres segments en faisant les ajustements nécessaires.

B. Pré étude statique

Une pré-étude a été réalisée à partir du modèle de la colonne vertébrale du modèle « être humain » [LIZ-26]. Nous voulions savoir s'il était légitime d'utiliser RADIOSS, qui est un code explicite, en quasi-statique. Nous avons donc pris un segment T7-T8 que nous avons sollicité de la même façon sous ANSYS (code implicite) et sous RADIOSS. Il en ressort de faibles différences ce qui permet l'utilisation de RADIOSS en quasi-statique.

Tableau 51 : comparaison entre Ansys et Radioss

T7 - T8	Couple = 6N.m	Extension	Flexion	Inflexion	Torsion
α RADIOSS modèle LAB (degrés)		5	5	2.5	8.3
α ANSYS modèle LAB (degrés)		4.7	4.6	2.3	8.1
Ecart (%)		6 %	8 %	8 %	3 %

C. Identification des paramètres statiques

Rappel : Les données expérimentales concernent les travaux de Koubaa [KOU-22] et Describes [DES-9] pour le thoracique. Les travaux lombaires utilisent une base de données interne au LBM (Poujol et château [POU-48]) ainsi que les travaux de Roland [ROL-51].

Ces travaux ont permis d'identifier les paramètres comportementaux du modèle.

Note : Les valeurs de « α expérimental » sont données sous la forme d'un corridor expérimental (valeur minimum et maximum).

✓ Segment vertébral T7-T8

T7 - T8	Couple = 5N.m	Extension		Flexion		Inflexion		Torsion	
α expérimental (degrés)		2.3	2.7	2.2	3.7	2.7	3.7	3.6	4.9
α modèle (degrés)		2.5		2.4		4.1		4.3	

Tableau 52 : angle de la vertèbre T7

Les valeurs des paramètres sont les suivantes :

G_i = Module de cisaillement du disque intervertébral au temps infini = 5.0

K = Module de compression hydrostatique du disque intervertébral = 4.5

A_e = Coefficient multiplicateur de rigidité pour les ligaments épineux = 0.1

A_t = Coefficient multiplicateur de rigidité pour les ligaments transverses = 0.7

A_j = Coefficient multiplicateur de rigidité pour les ligaments jaunes = 0.1

A_f = Coefficient multiplicateur de rigidité pour les ligaments des capsules articulaires = 0.1

D'où un module d'Young de 11 MPa pour le matériau du disque intervertébral.

Pour chaque type de ligaments de chacun des étages du modèle, nous sommes partis des courbes de comportement de la littérature et nous les avons modifiées de façon à valider les modèles de segments vertébraux. L'allure générale de ces courbes est donnée à la figure 241. Par ailleurs, des courbes précises, fournissant des valeurs, sont données pour chaque étage.

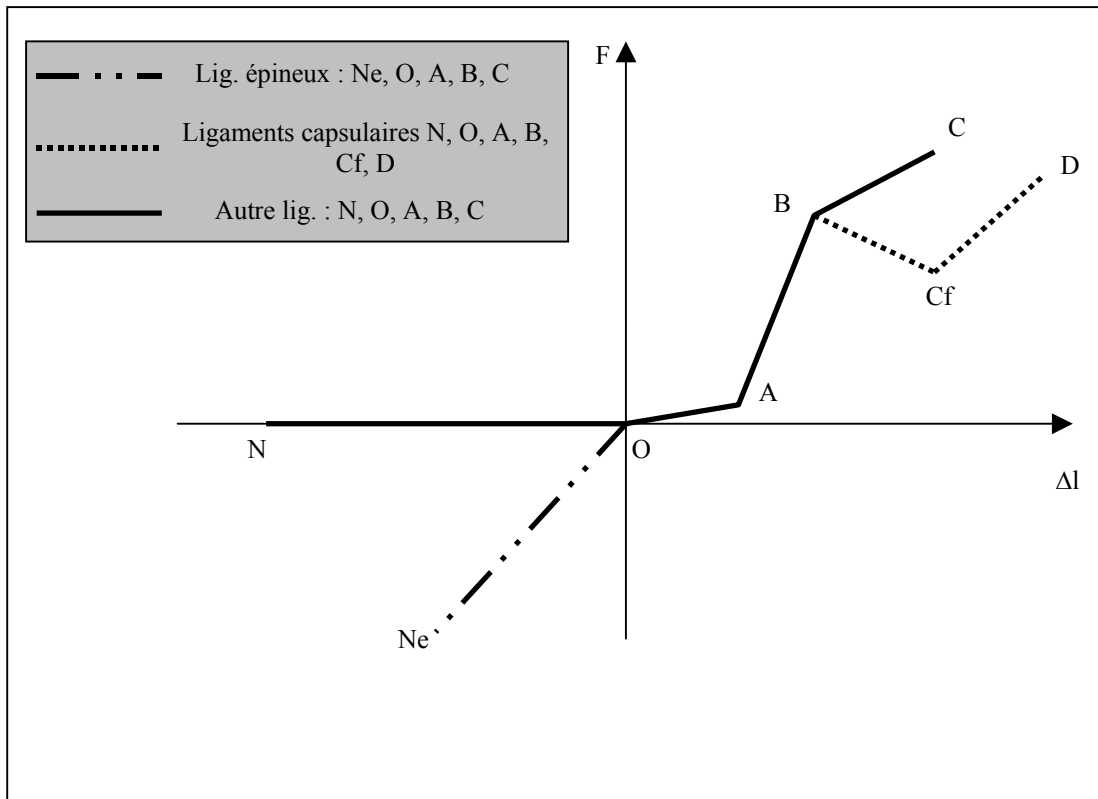


Figure 241 : allure générale des courbes de comportement modélisées

Pour T7-T8, les nouvelles coordonnées des points des courbes de comportement ligamentaire sont données dans le tableau suivant :

T7-T8	Ligaments jaunes	Ligaments inter-épineux	Ligaments inter-transversaires	Ligaments capsulaires
Point N (mm ; N)	(-1000 ; 0)	(-20 ; -3200)	(-1000 ; 0)	(-1000 ; 0)
Point O (mm ; N)	(0 ; 0)	(0 ; 0)	(0 ; 0)	(0 ; 0)
Point A (mm ; N)	(1.3 ; 87)	(2 ; 36.5)	(2.1 ; 22.5)	(1.0 ; 0)
Point B (mm ; N)	(2.2 ; 368)	(3.175 ; 169)	(2.35 ; 87.5)	(6.9 ; 892)
Point C (mm ; N)	(2.87 ; 414)	(4.16 ; 183)	(2.5 ; 95)	(7.9 ; 700)
Point D (mm ; N)	-	-	-	(8.9 ; 1055)

Tableau 53 : courbe de comportement des ligaments de T7-T8

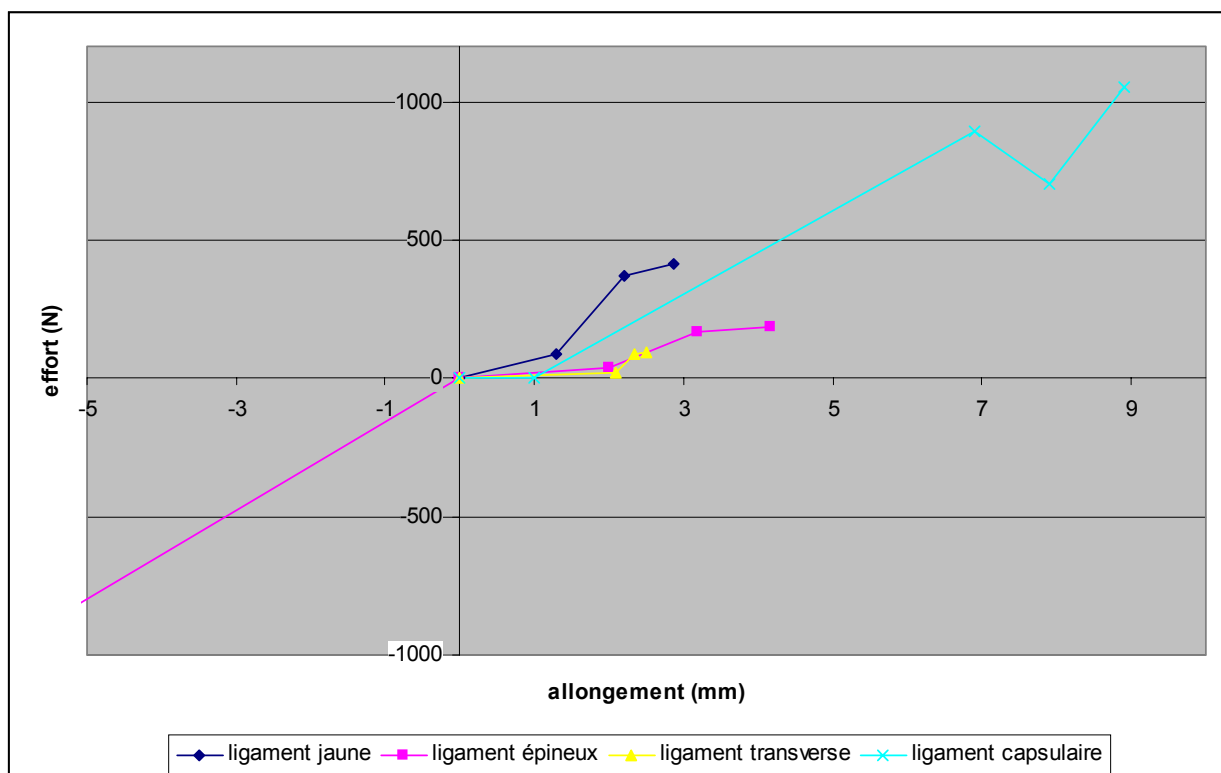


Figure 242 : comportement ligamentaire de T7-T8

✓ Segment vertébral T3-T4

T3 – T4	Couple = 5N.m	Extension		Flexion		Inflexion		Torsion	
α expérimental (degrés)		2.6	4.2	2.1	3.6	3.5	4.9	3.2	4.4
α modèle (degrés)		3.9		2.5		4.1		3.9	

Tableau 54 : angle de la vertèbre T3

Les valeurs des paramètres sont les suivantes :

$$A_j = 0.1 \quad A_e = 0.1 \quad A_t = 0.8 \quad A_f = 3$$

$$G_i = 7 \quad K = 5$$

D'où un module d'Young de 14.3 MPa pour le matériau du disque intervertébral.

Les nouvelles coordonnées des points des courbes de comportement des ligaments sont :

T3-T4	Ligaments jaunes	Ligaments inter-épineux	Ligaments inter-transversaires	Ligaments capsulaires
Point N (mm ; N)	(-1000 ; 0)	(-20 ; -2000)	(-1000 ; 0)	(-1000 ; 0)
Point O (mm ; N)	(0 ; 0)	(0 ; 0)	(0 ; 0)	(0 ; 0)
Point A (mm ; N)	(1.3 ; 87)	(2 ; 36.5)	(2.1 ; 22.5)	(1.0 ; 0)
Point B (mm ; N)	(2.2 ; 368)	(3.175 ; 169)	(2.35 ; 87.5)	(6.9 ; 892)
Point C (mm ; N)	(2.87 ; 414)	(4.16 ; 183)	(2.5 ; 95)	(7.9 ; 700)
Point D (mm ; N)	-	-	-	(8.9 ; 1055)

Tableau 55 : courbe de comportement des ligaments de T3-T4

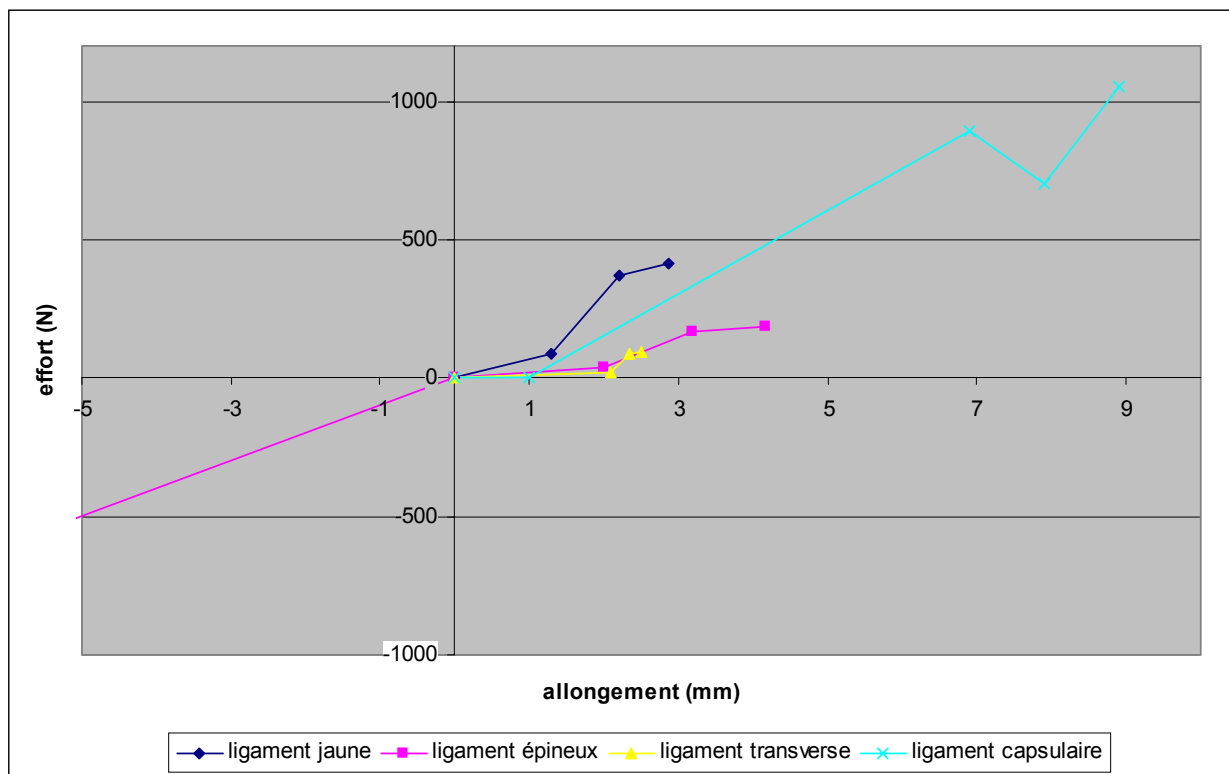


Figure 243 : comportement ligamentaire de T3-T4

✓ Segment vertébral T12-L1

T12 – L1	Couple = 5N.m		Extension		Flexion		Inflexion		Torsion	
α expérimental (degrés)	1.5	3.1	1.3	2.9	1.9	3.5	0.7	2.0		
α modèle (degrés)	2.2		2.2		3.3		1.3			

Tableau 56 : angle de la vertèbre T12

Les valeurs des paramètres sont les suivantes :

$$A_j = 0.1 \quad A_e = 0.1 \quad A_t = 1.2 \quad A_f = 0.1$$

$$G_i = 2 \quad K = 6.0$$

D'où un module d'Young de 5.4 MPa pour le matériau du disque intervertébral.

Les nouvelles coordonnées des points des courbes de comportement des ligaments sont :

T12-L1	Ligaments jaunes	Ligaments inter-épineux	Ligaments inter-transversaires	Ligaments capsulaires
Point N (mm ; N)	(-1000 ; 0)	(-20 ; -3000)	(-1000 ; 0)	(-1000 ; 0)
Point O (mm ; N)	(0 ; 0)	(0 ; 0)	(0 ; 0)	(0 ; 0)
Point A (mm ; N)	(1.3 ; 87)	(2 ; 36.5)	(2.1 ; 22.5)	(1.0 ; 0)
Point B (mm ; N)	(2.2 ; 368)	(3.175 ; 169)	(2.35 ; 87.5)	(6.9 ; 892)
Point C (mm ; N)	(2.87 ; 414)	(4.16 ; 183)	(2.5 ; 95)	(7.9 ; 700)
Point D (mm ; N)	-	-	-	(8.9 ; 1055)

Tableau 57 : courbe de comportement des ligaments de T12-L1

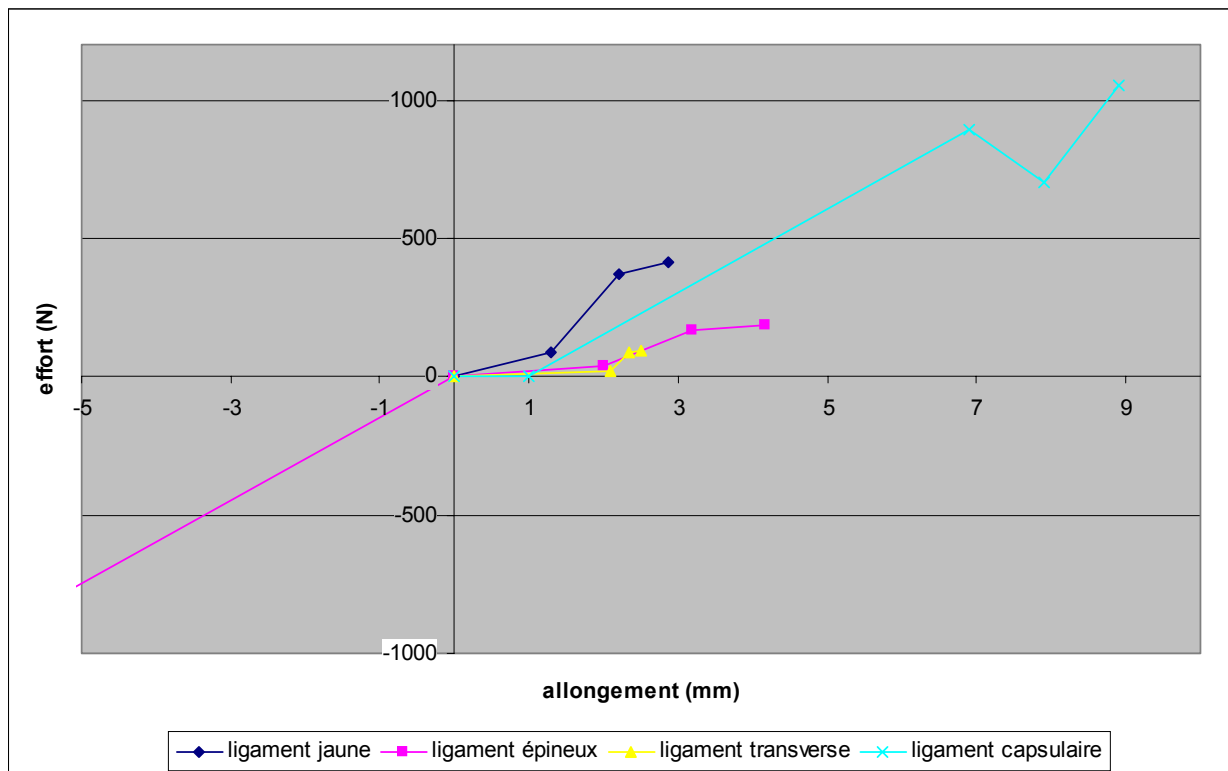


Figure 244 : comportement ligamentaire de T12-L1

✓ Segment vertébral L3-L4

L3 – L4	Couple = 5N.m	Extension		Flexion		Inflexion		Torsion	
α expérimental (degrés)		2.3	4.9	2.6	6.0	2.6	5.7	0.8	1.6
α modèle (degrés)		3.7		4.3		3.5		1.2	

Tableau 58 : angle de la vertèbre L3

Les valeurs des paramètres sont les suivantes :

$$A_j = 0.1 \quad A_e = 0.05 \quad A_t = 0.1 \quad A_f = 0.1$$

$$G_i = 4 \quad K = 1$$

D'où un module d'Young de 5 MPa pour le matériau du disque intervertébral.

Les nouvelles coordonnées des points des courbes de comportement des ligaments sont :

L3-L4	Ligaments jaunes	Ligaments inter-épineux	Ligaments inter-transversaires	Ligaments capsulaires
Point N (mm ; N)	(-1000 ; 0)	(-20 ; -1)	(-1000 ; 0)	(-1000 ; 0)
Point O (mm ; N)	(0 ; 0)	(0 ; 0)	(0 ; 0)	(0 ; 0)
Point A (mm ; N)	(2.3 ; 87)	(3 ; 36.5)	(2.1 ; 22.5)	(2.0 ; 0)
Point B (mm ; N)	(3.2 ; 368)	(4.175 ; 169)	(2.35 ; 87.5)	(7.9 ; 892)
Point C (mm ; N)	(3.87 ; 414)	(5.16 ; 183)	(2.5 ; 95)	(8.9 ; 700)
Point D (mm ; N)	-	-	-	(9.9 ; 1055)

Tableau 59 : courbe de comportement des ligaments de L3-L4

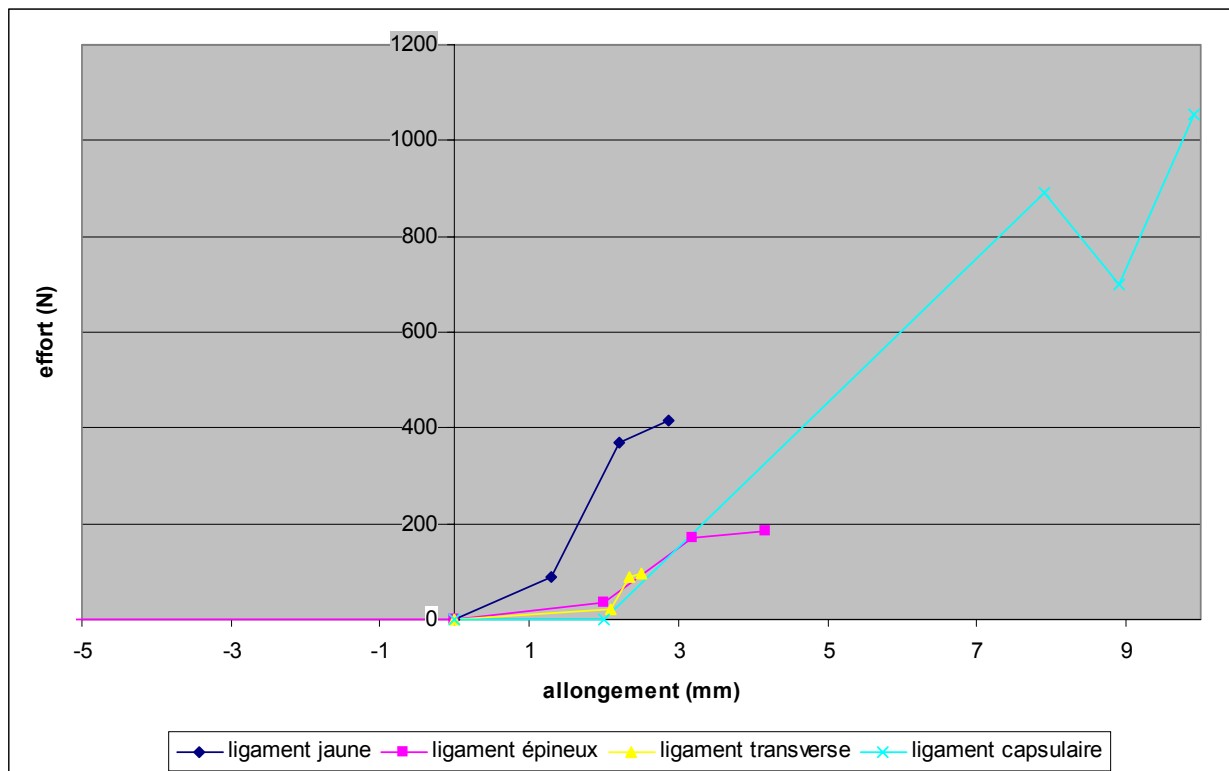


Figure 245 : comportement ligamentaire de L3-L4

D. Analyse

Le ligament épineux travaille en compression pour rigidifier le mouvement. Ceci en raison de l'absence de modélisation du ligament commun antérieur qui rigidifie le mouvement d'extension, le ligament épineux joue donc un double rôle.

Les points des courbes de comportement ont été décalés vers la droite par rapport aux données de la littérature ce qui correspond à une diminution de la rigidité. Cela se justifie par l'allure de la courbe réelle qui a été approximée par trois droites seulement ce qui introduit une imprécision pour les points où la pente change (point A et B de la figure 246). Pour cette raison et de par l'incertitude de position des points fournis par Chazal [CHA-5] et Cyron [CYR-6], il est donc possible de modifier de façon raisonnable ces coordonnées. Enfin, il ne faut pas oublier que les valeurs fournies par la bibliographie ne sont que des moyennes et reflètent assez peu la disparité au sein de chaque étage vertébrale.

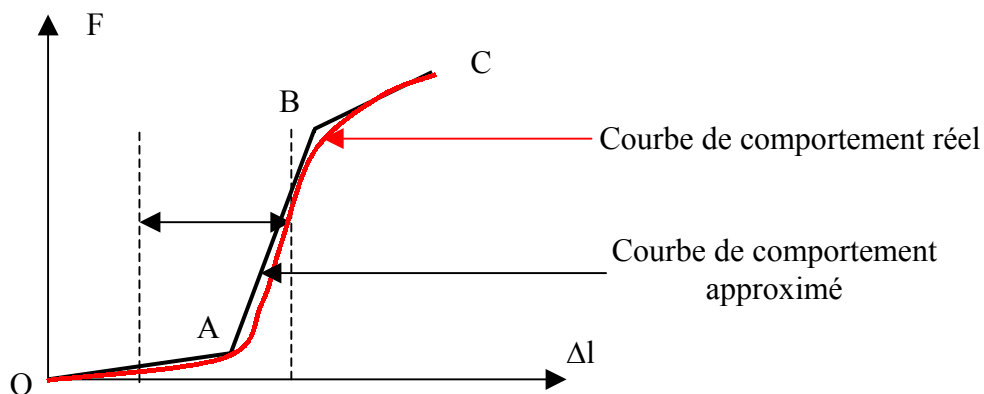


Figure 246 : allure de l'intervalle d'allongement des différents ligaments sous un couple de 5 N.m.

Les simulations réalisées pour un couple de 5 N.m ont montré que les différents types de ligaments s’allongent d’une valeur qui reste bien inférieure à la valeur d’allongement du point B (figure 246). Nous restons donc dans une zone non lésionnelle.

Enfin, les coefficients A_i de rigidité des ligaments ont généralement été pris égaux à 0.1, ce qui donne une rigidité ligamentaire très faible par rapport à la réalité.

Cependant, elles se justifient par les écarts-types importants donnés dans l’étude de Myklebust [MYK-31] sur les valeurs à la rupture des ligaments vertébraux (tableau 60).

Niveau	Lig.commun antérieur		Lig.commun postérieur		Ligament jaune		Ligament capsulaires		Ligament inter-épineux		Ligament sur-épineux	
	F(N)	Δl (mm)	F(N)	Δl (mm)	F(N)	Δl (mm)	F(N)	Δl (mm)	F(N)	Δl (mm)	F(N)	Δl (mm)
T3-T4	154 (43)	7.5 (4.8)	67 (20)	3.9 (1.2)	161 (67)	6.3 (3.1)	180 (73)	8.3 (3.8)	84 (36)	5.8 (4.0)	133 /	19.3 /
T7-T8	213 (58)	17.7 (6.8)	74 (59)	3.6 (2.0)	221 (79)	10.4 (5.1)	237 (103)	6.2 (4.4)	41 (29)	3.8 (0.9)	101 (17)	8.4 (3.6)
T12-L1	276 (81)	12.7 (9.1)	66 (32)	4.8 (4.0)	278 (134)	9.2 (1.8)	252 (22)	10.2 (2.6)	108 (24)	7.6 (4.0)	226 /	21.1 /
L3-L4	676 (359)	20.4 (3.5)	38 (15)	7.0 (3.2)	251 (176)	12.2 (3.6)	290 (101)	9.8 (1.6)	95 (22)	14.8 (4.7)	750 (159)	22.5 (5.9)

Tableau 60 : Valeur et écart type de l’effort et de l’allongement des ligaments vertébraux.
D’après Myklebust

Récapitulatif des valeurs des modules d’Young des disques intervertébraux

Segment vertébral	Module d’Young $\Rightarrow E = \frac{9GK}{3K + G}$
T3-T4	14.3 MPa
T7-T8	11.0 MPa
T12-L1	5.4 MPa
L3-L4	5.1 MPa

Tableau 61 : module d’Young des disques intervertébraux

Concernant l’étude complémentaire faite sur T7-T8

Nous pouvons remarquer que des petites différences existent entre les valeurs données par ANSYS en statique et celles données par RADIOSS en quasi-statique. La raison principale provient des méthodes de calculs utilisées par les deux logiciels. En effet, Ansys est un code implicite, c’est à dire que l’évolution du modèle se fait à partir d’incrémentes de chargement tandis que RADIOSS est un code explicite où le modèle évolue à partir d’incrémentes de temps.

Paramètres prépondérants pour l’unité T7-T8

Sollicitation	Paramètres prépondérants
Flexion	Ligament épineux et disque intervertébral
Extension	Disque intervertébral
Inflexion	Ligament transverse et disque intervertébral
Torsion	Disque et capsules articulaires (butée osseuse)

Tableau 62 : paramètres prépondérants dans la cinématique du modèle

Les résultats sont conformes à ce que l’on peut trouver dans la bibliographie.

La prépondérance d'un paramètre par rapport à un autre a été évaluée à l'aide du plan d'expérience fait sur l'unité T7-T8.

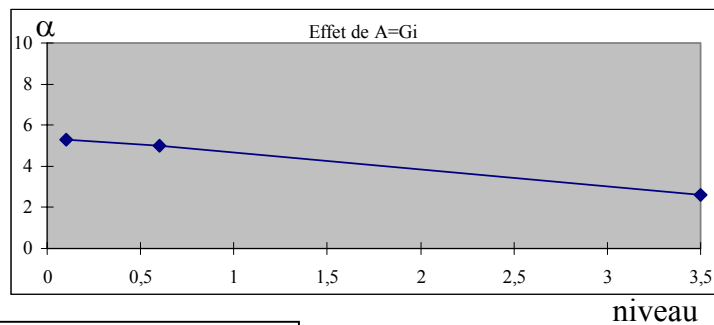
La méthode permettant de connaître les paramètres prépondérants est la suivante : à partir des graphes des effets, nous avons calculé l'écart maximum existant entre les valeurs des angles α pour une sollicitation donnée et cela pour chacun des 6 paramètres.

Effet de A=Gi

Niveau de Gi		Alpha
1	0,1	5,31
2	0,6	5,02
3	3,5	2,60

Ecart	2,71
-------	------

Figure 247 : graphe des effets



Effet de A=Gi en extension

Ce graphe nous donne un écart de 2.71°. Cette valeur sera à comparer aux autres écarts des autres paramètres et nous en déduirons les 2 facteurs les plus influents.

Explication des interactions

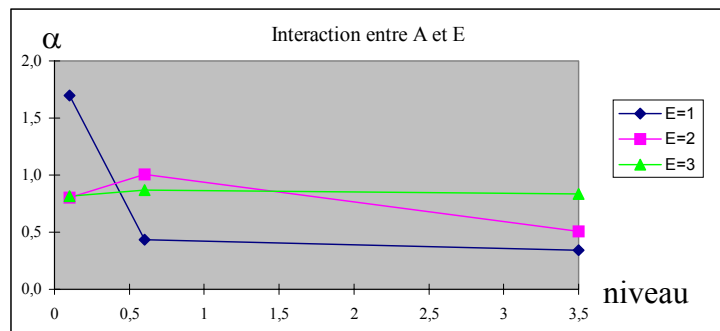
Exemple en flexion (T7-T8) d'interactions entre le disque et les ligaments capsulaires.

Graphe des interactions

Interaction entre A et E

Niveau de A=Gi		E=1	E=2	E=3
A=1	0,1	1,70	0,80	0,82
A=2	0,6	0,44	1,00	0,87
A=3	3,5	0,34	0,51	0,84

Figure 248 : graphe des interactions



Nous constatons qu'il y a interaction entre le disque et les ligaments capsulaires car les segments ne sont pas parallèles. Cela signifie que l'effet de Gi (module de cisaillement du disque intervertébral au temps infini) sur l'angle de rotation du segment dépend de la valeur de Ae (coefficient multiplicateur de rigidité pour les ligaments épineux).

L'existence de ces interactions vérifie nos hypothèses et montre donc que les effets du disque, des ligaments des facettes articulaires et du ligament épineux sont couplés pour des niveaux de très faible rigidité en flexion et en torsion. Ceci peut s'expliquer par le fait que les valeurs d'allongement des ligaments se trouvent souvent dans une zone située avant le point A (cf. modèle de Chazal [CHA-5]) qui correspond à une zone de faible rigidité, qui est d'autant plus accentuée que les coefficients multiplicateurs de rigidité sont faibles. Ainsi, nous nous situons dans une zone où une petite variation des efforts entraîne une grande variation d'allongement et donc de l'angle α .

4- Simulation avec 2 couches d'éléments dans le disque

Une simulation a été faite avec un modèle amélioré de l'unité fonctionnelle T7-T8. Une deuxième couche d'élément volumique a été rajoutée dans l'épaisseur.

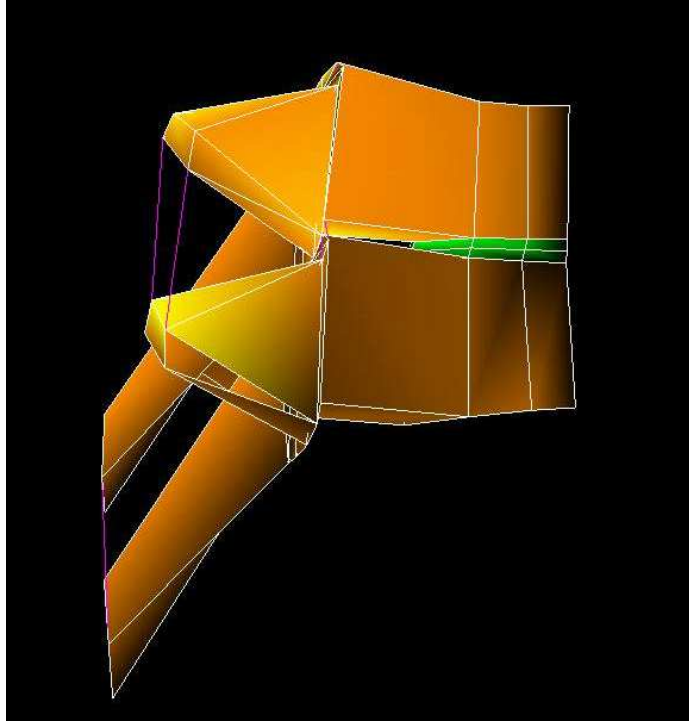


Figure 249 : segment T₇-T₈ (vue sagittale)

T7 - T8	Couple = 5N.m	Extension		Flexion		Inflexion		Torsion	
α expérimental (degrés)		2.3	2.7	2.2	3.7	2.7	3.7	3.6	4.9
α modèle 1 couche (degrés)		2.5		2.4		4.1		4.3	
α modèle 2 couches (degrés)		2.6		2.4		3.9		4.4	

Tableau 63 : Résultats comparatifs entre le modèle de T7-T8 avec 1 couche d'éléments et 2 couches d'éléments par disque

Les résultats diffèrent de moins de 5%.

Le modèle global ne sera pas modifié et nous conserverons 1 couche d'élément par disque.

5- Résultats par sollicitations sous un couple de 5 N.m.

Les 4 figures suivantes comparent la réponse fournie par chacun des segments du modèle que l'on a souhaité valider avec les essais de la littérature (travaux de Koubaa [KOU-22] et Descrimes [DES-9] pour le thoracique et travaux de Roland [ROL-51] et du LBM [POU-48] pour la partie lombaire). Cette comparaison se fait pour 4 sollicitations : flexion, extension, inflexion et torsion. Les résultats de la simulation sont intitulés : simulation Radioss. Les autres valeurs sont issues de la littérature.

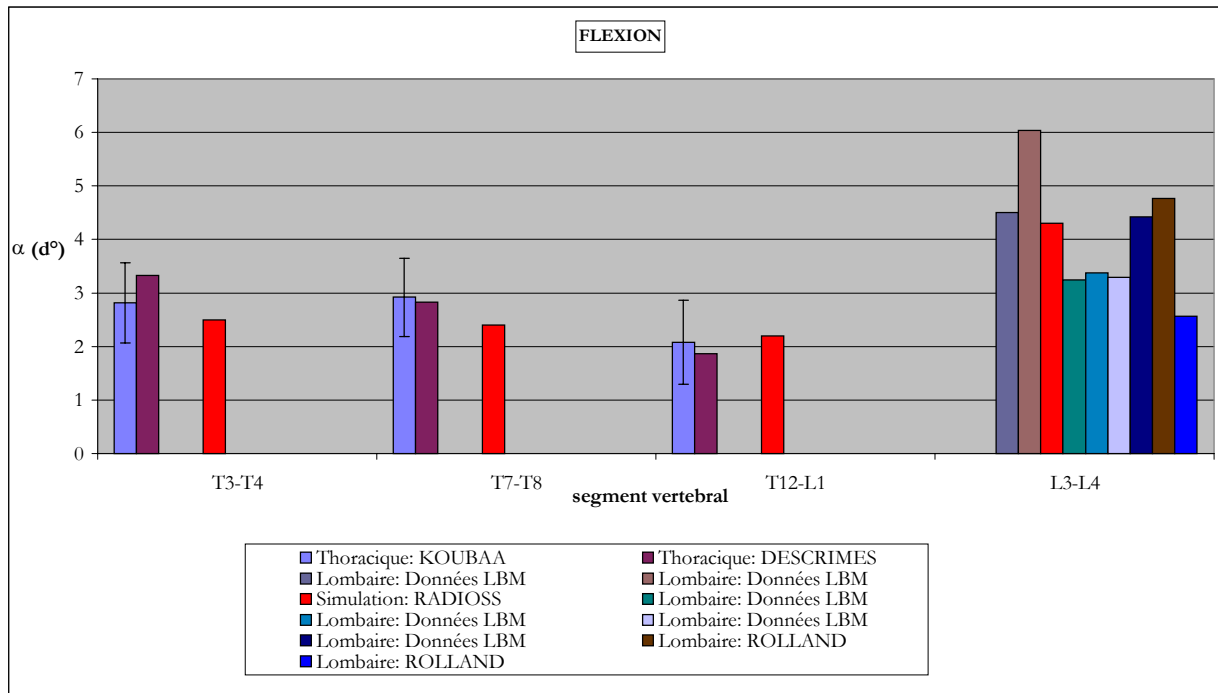


Figure 250 : comparaisons expérimentales de la réponse du modèle en flexion

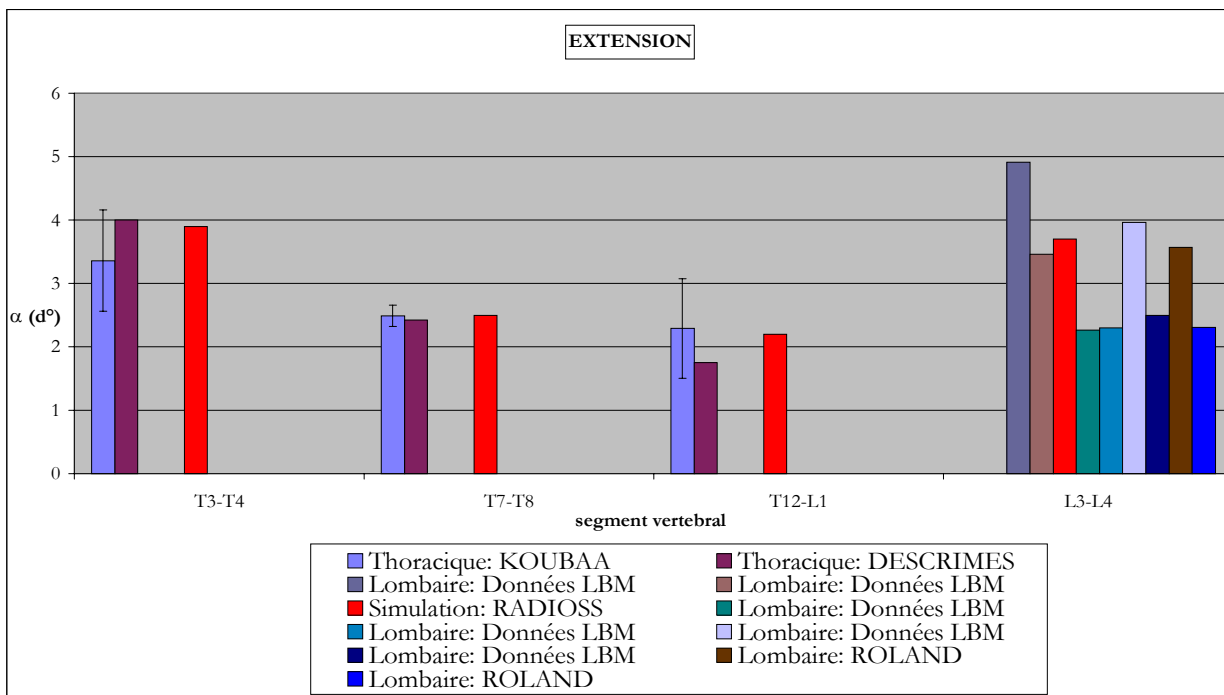


Figure 251 : comparaisons expérimentales de la réponse du modèle en extension

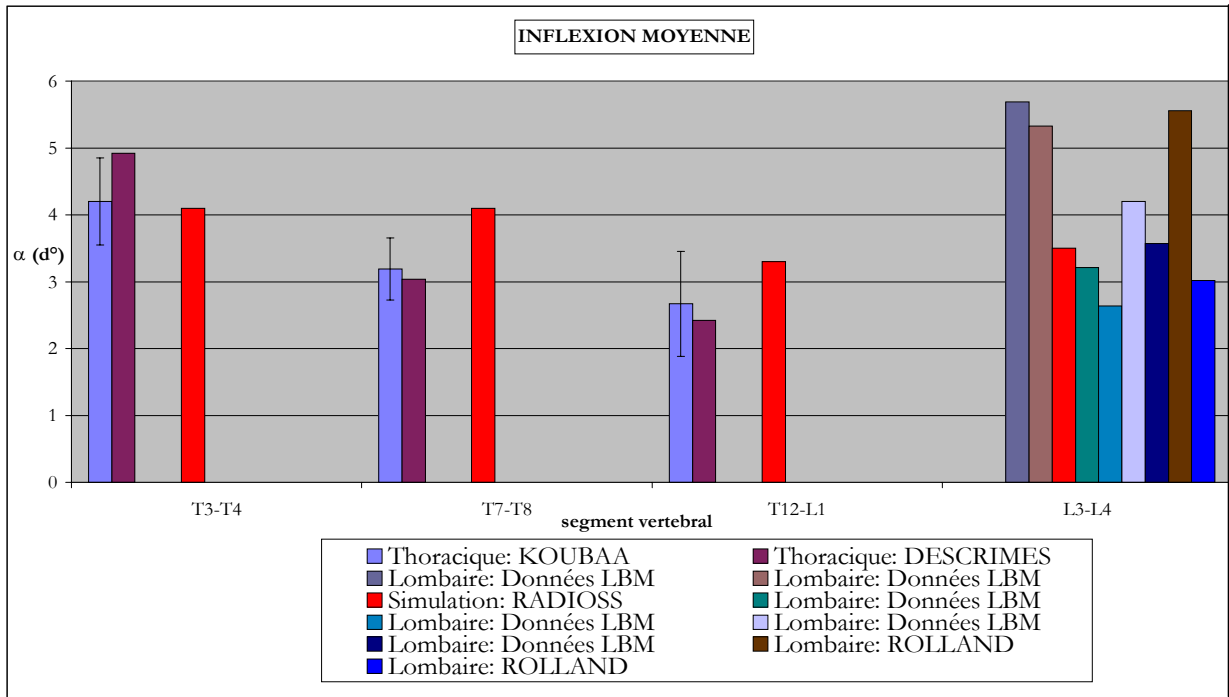


Figure 252 : comparaisons expérimentales de la réponse du modèle en inflexion

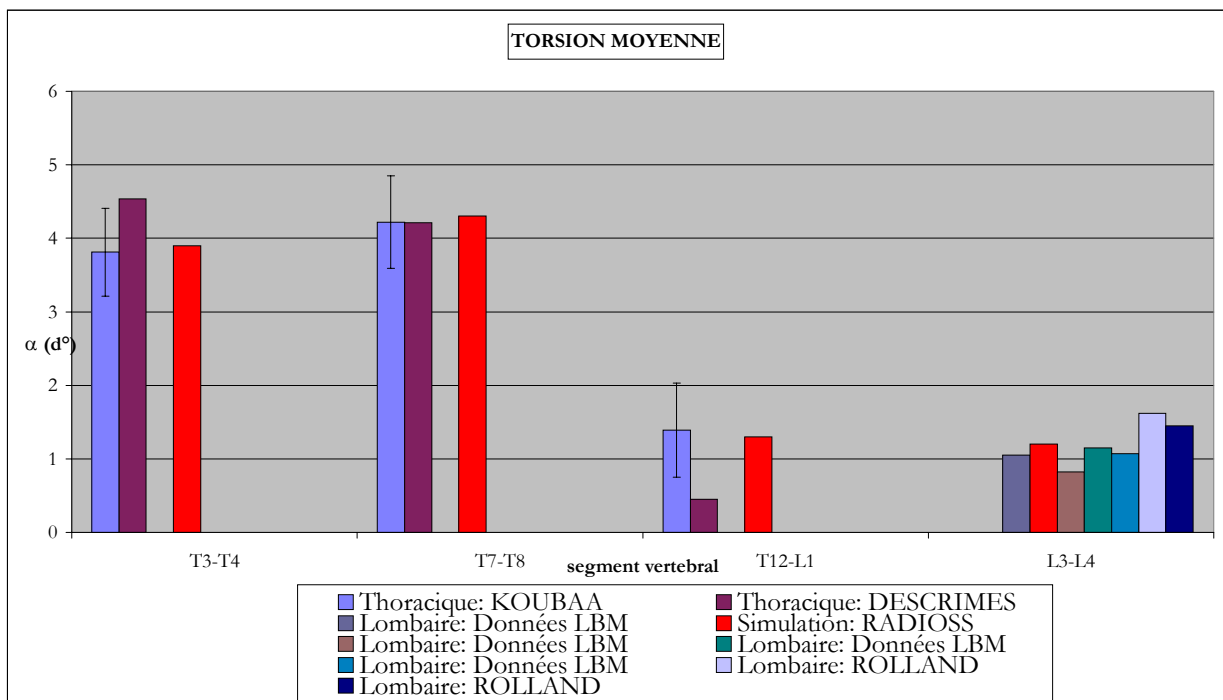


Figure 253 : comparaisons expérimentales de la réponse du modèle en torsion

6- Validation qualitative globale statique

L'objectif de cette étude est de vérifier la stabilité du modèle dans sa globalité (rachis thoracique et lombaire) pour des sollicitations statiques. Les animations fournies par le logiciel de calcul RADIOSS servent comme preuve de cette stabilité numérique.

La vertèbre L5 est encastree et la vertèbre T1 est sollicitée par l'intermédiaire d'une manivelle. Les paramètres des lois de comportements des unités thoraciques sont ceux de T7-T8 et les unités lombaires utilisent les paramètres de L3-L4.

Note : Le modèle a été testé en position de posture assise.

A. Flexion

L'axe de rotation est au niveau de T11 et on impose une rotation de 50° en 1 seconde.

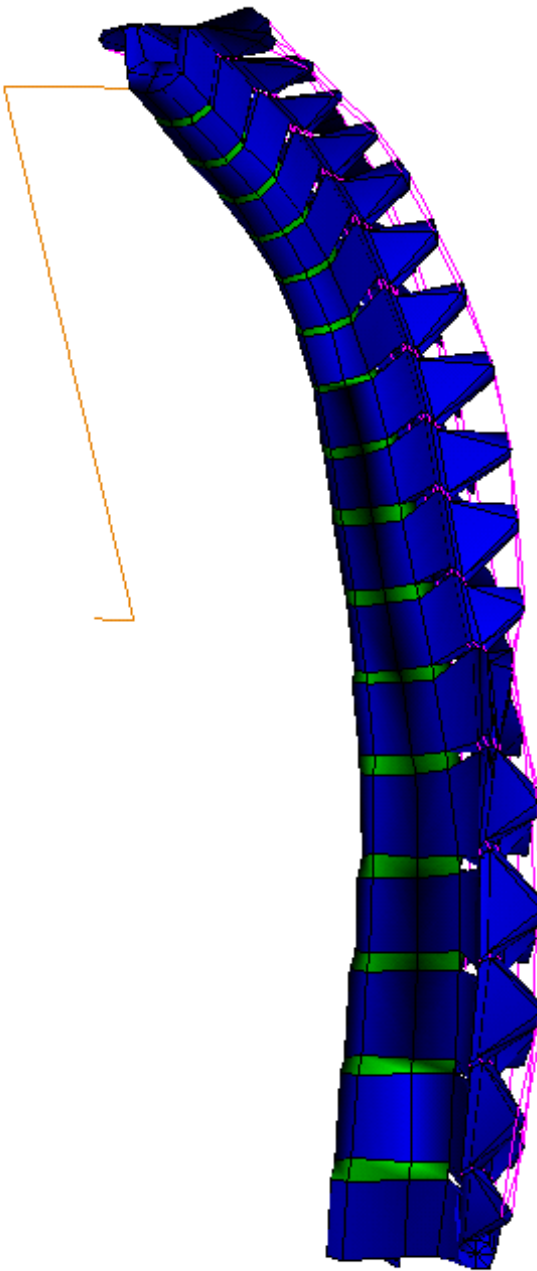


Figure 254 : modèle entier avant la flexion

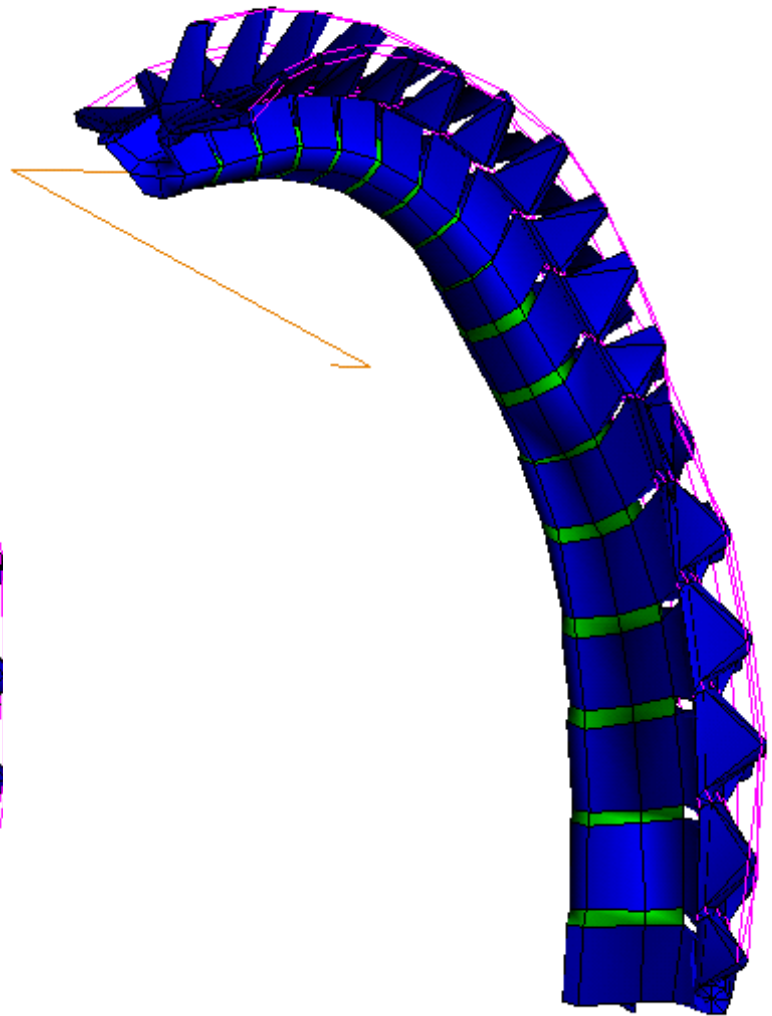


Figure 255 : modèle entier après la flexion

B. Inflexion

L'axe de rotation est au niveau de L3 et on impose une rotation de 40° en 1 seconde.

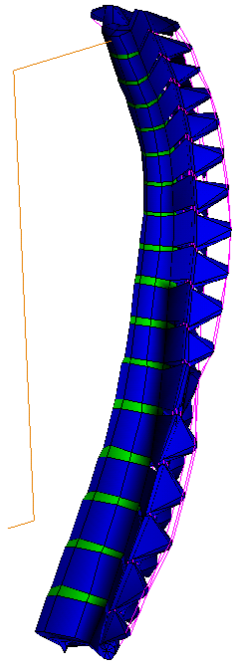


Figure 256 : modèle entier avant l'inflexion

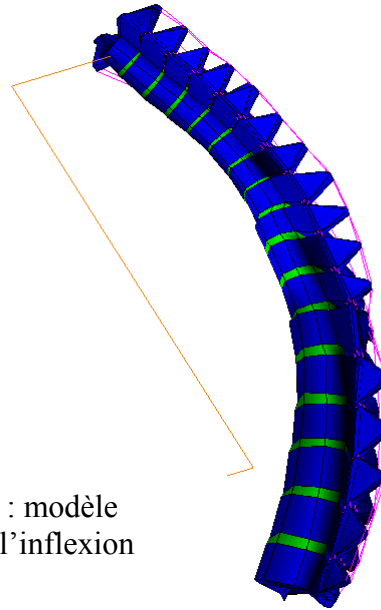


Figure 257 : modèle entier après l'inflexion

C. Torsion

L'axe de rotation est au niveau de T1 et on impose une rotation de 20° en 1 seconde.

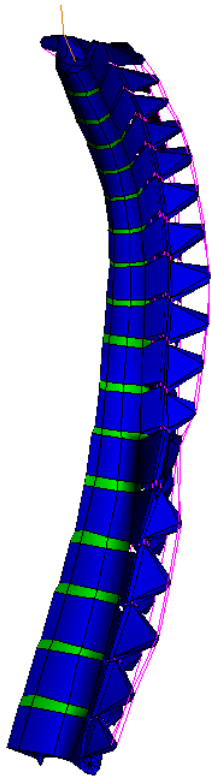


Figure 258 : modèle entier avant la torsion

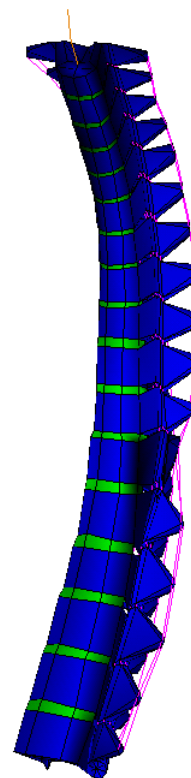


Figure 259 : modèle entier après la torsion

7- Conclusions de la validation statique

Lors de cette étude numérique statique, nous avons effectué une validation qualitative de quatre segments du modèle de rachis thoracique et lombaire. Ces segments sont les suivants : T3-T4, T7-T8, T12-L1 et L3-L4. Les comparaisons expérimentales se sont faites sous un couple de 5 N.m en flexion, extension, inflexion latérale et torsion axiale.

A l'aide d'un plan d'expérience, nous avons réussi à définir un groupe de valeurs de paramètres comportementaux propre à chaque niveau testé. Ces paramètres sont les reflets de coefficients de raideur ligamentaire et de modules d'élasticités du disque intervertébral.

Cette étude s'est révélée fructueuse car la réponse de chaque unité du modèle, pour chaque sollicitation, est encadrée par des données expérimentales. Ce modèle est donc considéré comme validé pour des sollicitations statiques.

Un des intérêts de ce modèle est qu'il ne fait pas appel à plusieurs jeux de paramètres comportementaux suivant la sollicitation appliquée. Au travers de la littérature, nous trouvons le plus souvent des modèles validés pour une sollicitation ou une direction d'effort ou alors des modèles validés pour plusieurs sollicitations mais avec un groupe de paramètres pour chacune.

Si la géométrie osseuse du modèle de rachis est définie de façon précise, avec la présence des toutes les zones fonctionnelles au niveau des vertèbres, la modélisation des éléments de liaisons intervertébraux comme les disques et les ligaments peut être améliorée. Par exemple, un ligament épineux est en réalité une bande fibreuse reliant, sur toute leur longueur, les apophyses épineuses des vertèbres sus-jacente et sous-jacente. Or, la représentation numérique d'un tel ligament est faite à l'aide de deux ressorts reliant les extrémités des épineuses. Par ailleurs, l'aspect composite du disque n'a pas été pris en compte et son comportement mécanique est régi par une loi visco-élastique. Malgré cela, les résultats fournis par le modèle au niveau des quatre unités testées sont déjà satisfaisants.

L'effort à réaliser est surtout d'ordre expérimental. En effet, il n'existe pratiquement pas d'études portant sur le système ligamentaire des parties thoraciques et lombaires du rachis humain. Quelques articles sont disponibles sur le disque intervertébral, pour les mêmes niveaux vertébraux, au travers d'études sur le comportement discal sous chargement axial (plus rarement pour d'autres sollicitations), ou encore sur le comportement de l'anneau isolé... Cependant, nous n'avons pas trouvé de travaux visant à définir une loi de comportement précise du disque qui fonctionnerait pour plusieurs cas de charges. Il est peut être impossible de définir une telle loi, néanmoins, nous n'avons pas trouvé d'auteurs s'intéressant de façon directe à ce problème.

C'est ce genre d'informations qui sont nécessaires pour la validation d'un modèle afin qu'il soit utilisable dans des cas de sollicitations quelconques.

Une étude secondaire a été effectuée afin de vérifier la stabilité numérique du modèle lorsque nous l'utilisons dans sa globalité. Les vitesses choisis (quelques dizaine de degrés par seconde) correspondent à des mouvements quotidiens lorsque l'on doit se pencher ou se retourner. Ces vitesses sont très inférieures à ce que l'on trouve en crash et c'est pour cela que nous qualifions cette étude de « statique ». Les animations issues de Radioss démontrent la stabilité numérique de ce modèle pour ce type de configuration.

VIII- PREMIERE VALIDATION DYNAMIQUE

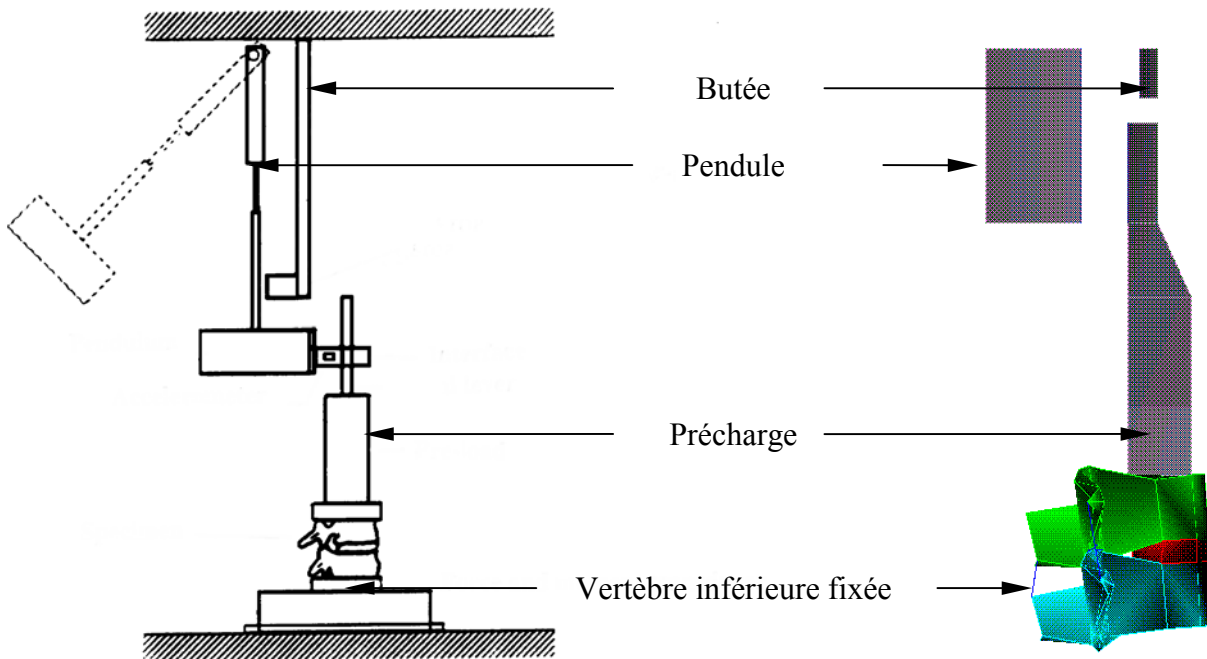


Figure 260 : montage expérimental d'Osvolder et modélisation de l'essai

Les essais n'étant pas encore réalisés à ce stade du projet, nous avons choisi d'utiliser l'étude d'Osvolder pour effectuer une première étude dynamique et d'avoir une idée sur le comportement du modèle sous sollicitation rapide.

Plusieurs tests ont été effectués par Osvolder [25-OSV] afin de caractériser dynamiquement un segment vertébral en flexion. Tous les tests ont été effectués sur des segments L1-L2 et L3-L4, cependant l'auteur les a testés de manière indifférente et les résultats des deux types d'unités ne sont pas séparés. Nous avons choisi d'utiliser le segment L3-L4 du modèle (figure 260).

La précharge permet de mettre en tension les ligaments afin d'obtenir un comportement proche de ce que l'on trouve en milieu in-vivo où le poids du rachis situé au-dessus de L3-L4 et l'action des muscles environnants induisent une précharge naturelle (cf. GOEL [GOE-14]).

Par contre, peu d'études statiques utilisent une précharge. Tout d'abord, cette charge est très difficile à installer si l'on veut effectivement conserver les 6 degrés de liberté de l'unité fonctionnelle, ensuite les résultats diffèrent assez peu d'un chargement sans précharge (de l'ordre de 5 à 10 %) et souvent les instabilités provoquées par cette précharge induisent des erreurs trop importantes.

La forme de l'onde d'accélération transmise au segment vertébral (amplitude, temps de montée et durée) est déterminée par la loi de comportement du matériau collé sur la face d'impact du pendule (d'une aire de 40*60mm²) mais aussi par la vitesse d'impact du pendule.

En faisant varier ces deux paramètres, l'auteur a utilisé deux ondes différentes : une impulsion modérée et une impulsion sévère.

Impact	Modéré	Sévère
Interface rapportée	Polyuréthane	Termolon (polyéthylène)
Vitesse d'impaction du pendule (m/s)	1.6	2.1
Nombre de spécimens	10 (5 L1-L2 et 5 L3-L4)	10 (6 L1-L2 et 4 L3-L4)
Pic d'accélération (g)	5	12
Temps de montée (ms)	30	15
Durée (ms)	150	250

Tableau 64 : impulsions utilisées par Osvalder

L'auteur a, entre autre, observé l'angle maximum de déflexion de la vertèbre (noté α) lors du chargement en flexion et c'est sur cet angle que nous avons basé notre validation. Pour cela, deux paramètres du disque intervertébral sont modifiables :

Go : Module de cisaillement du disque au temps zéro.

β : Inverse du temps de relaxation.

Il est à noter que les paramètres comportementaux du disque et des ligaments intervenant en statique : K, Gi, Aj, Ae, At et Af n'ont pas été modifiés pour l'identification des paramètres du modèle en dynamique.

En outre, nous avons procédé à des essais de façon à s'assurer que les variations des paramètres Go et β n'ont qu'une influence négligeable sur les résultats en sollicitation statique. Avec ces nouvelles valeurs de paramètres, il faut seulement augmenter la durée de la simulation statique car l'état d'équilibre ne s'établit qu'au bout d'un temps plus important.

Les influences des deux paramètres sont les suivantes :

Avec β constant, plus Go est grand, plus la courbe oscille autour d'une valeur d'équilibre non nulle et plus l'angle de déflexion maximum est faible.

Avec Go constant, plus β est faible, plus le tracé de la courbe devient sinueux et plus l'angle de déflexion maximum est faible.

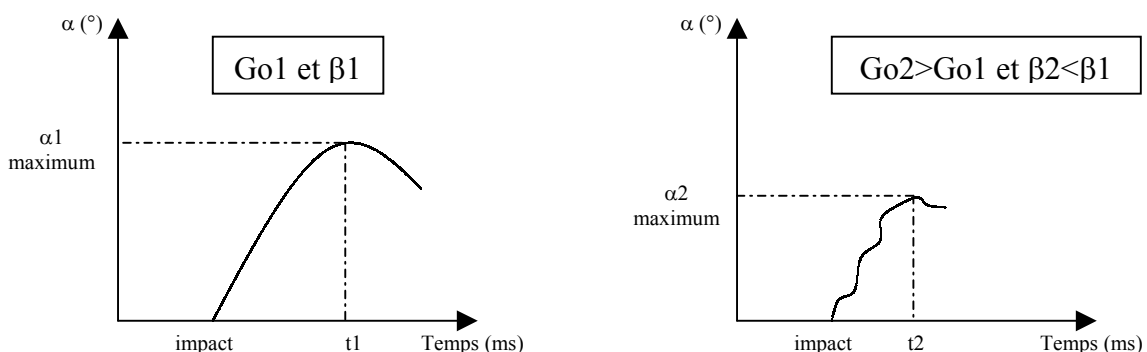


Figure 261 : Résultats possibles sous une même sollicitation suivant les valeurs de Go et β

Les hypothèses de calcul sont les suivantes :

- ✓ Les différents polymères (polyuréthane et termolon) n'ont pas été modélisés de façon géométrique.
- ✓ Le comportement du polymère a été pris en compte par l'intermédiaire du coefficient de rigidité de l'interface que l'on a pris égal à 0.005 ce qui correspond à un module d'Young de l'interface égal à 210000 (module d'Young du pendule) x 0.005 ~ 1000Mpa ce qui correspond à peu près au module d'Young du polymère que l'on trouve dans la littérature. Cette valeur correspond à la valeur de rigidité au début de l'interpénétration, par la suite la fonction qui régit le contact est non linéaire.
- ✓ L'interface utilisée sous RADIOSS est de type 7.

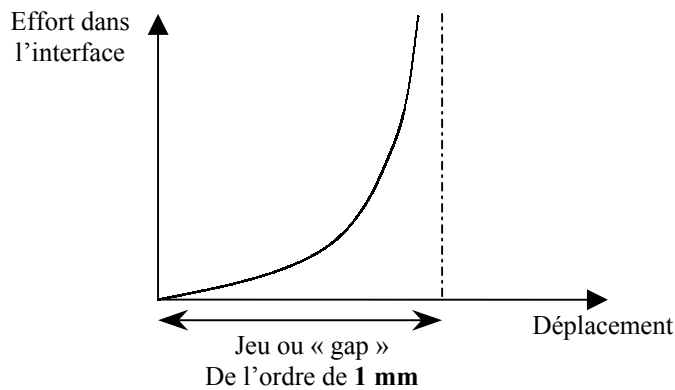


Figure 262 : loi de comportement de l'interface de type 7

L'identification des paramètres a été faite avec $G_0 = 4.5$ et $\beta = 1$

Impact	Modéré			Sévère		
	Moyenne	Ecart type	étendue	Moyenne	Ecart type	étendue
α expérimental (°)	14.1	1.6	11.3-16.1	19.1	1.3	16.3-21.2
α modèle (°)	13.3	/	/	16.4	/	/

Tableau 65 : comparaisons expérimentales

Nous observons que la réponse du modèle est bonne pour la sollicitation modérée mais qu'elle s'avère un peu faible (en limite inférieure du corridor expérimental) pour le choc sévère. Ce raidissement du comportement à haute vitesse est caractéristique du phénomène de viscoélasticité du disque intervertébral qui explique la diminution de l'angle α lorsque la vitesse d'impact augmente. La réponse du modèle est néanmoins satisfaisante car elle se situe à l'intérieur des corridors expérimentaux.

1- objectifs

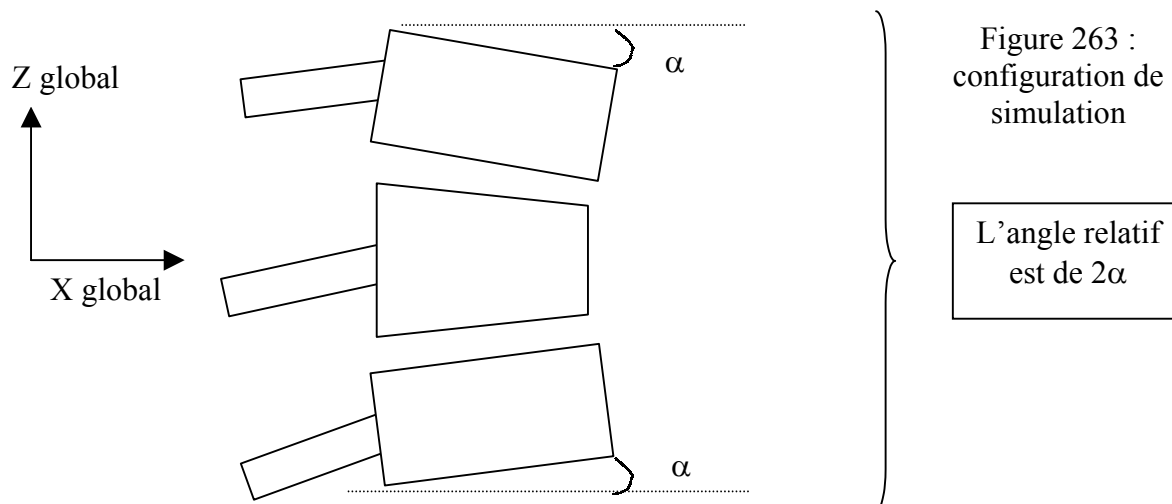
Lorsque nous avons défini le protocole d'essais en dynamique de segments rachidiens, nous avons souhaité tester les spécimens de façon pure. Les raisons ont été détaillées lors du descriptif du cahier des charges. Pour cela, il nous a donc fallu connaître les positions des axes moyens de rotation de chaque spécimen. Etant donné que le modèle de colonne sera validé en dynamique à partir de ces essais, il faut donc assurer la modélisation ultérieure de ces tests. De façon à être cohérent avec les expérimentations, il faut reproduire des sollicitations pures au niveau des simulations, ce qui nous impose de connaître les axes de rotation instantanés puis moyens de chaque segments que nous choisirons de valider.

Les études de Panjabi [PAN-40], de Haer [HAH-15], et de Dimnet [DIM-10], ont été retenus pour comparer les positions des axes de rotations des segments du modèle avec des essais réels.

2- Résultats du modèle « éléments finis »

Cette étude a porté sur les segments T3-T5, T11-L1 et L2-L4, segments qui seront testés lors des essais dynamiques. Les modèles « éléments finis » des segments ont été placés dans des positions similaires à ce que l'on trouve en essais, à savoir un angle entre le plateau supérieur et l'horizontale égal à l'angle entre le plateau inférieur et l'horizontale.

La sollicitation imposée est un couple pur appliqué sur la vertèbre supérieure de direction différente suivant la sollicitation.



Nous n'avons pas pris $\alpha = 4.5^\circ$ comme pour les expérimentations car cela aurait amené à déformer le modèle de façon trop importante. Nous avons préféré garder les angles du modèle tel qu'il a été construit en position assise, à savoir :

	T7-T9	T11-L1	L2-L4
Angle relatif (2α)	21.5°	3.9°	4.9°

A. Théorie : coordonnées du CIR

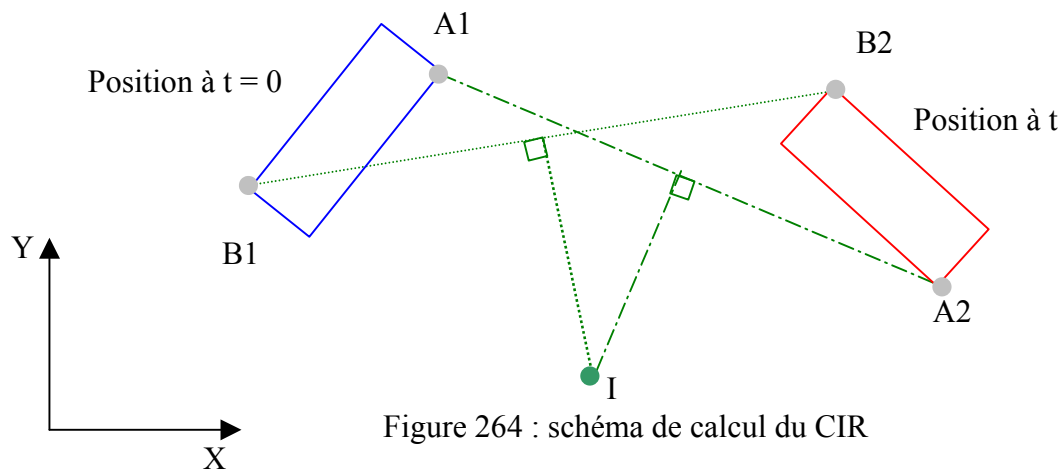


Figure 264 : schéma de calcul du CIR

Recherchons les coordonnées de I, centre instantané de rotation (CIR) du mouvement

Equation de la médiatrice de [A1A2]:

Un vecteur directeur \vec{u} de cette médiatrice peut s'écrire : $(1, a)$.

✓ $A1A2$ est perpendiculaire à \vec{u} . Donc $A1A2 \cdot \vec{u} = 0$

$$xa2 - xa1 + a(ya2 - ya1) = 0$$

✓ La médiatrice passe par le milieu du segment $[A1, A2]$

$$\frac{ya2 + ya1}{2} = a \times \frac{xa2 + xa1}{2} + b$$

Nous avons donc les cas suivants:

□ Si $ya2 - ya1 \neq 0$

$$a = \frac{xa1 - xa2}{ya1 - ya2}$$

$$b = \frac{ya2 + ya1}{2} + \frac{xa2^2 - xa1^2}{2(ya2 - ya1)}$$

□ Si $ya1 = ya2$ et $xa2 \neq xa1$
 $a = \infty$ et on a une droite verticale $y = \frac{xa1 + xa2}{2}$

□ Si $ya1 = ya2$ et $xa2 = xa1$
 Les points sont confondus \Rightarrow changer de coordonnées

Coordonnées de I

Equation de la médiatrice de A1A2 : $y = a_a \times x + b_a$

Equation de la médiatrice de A1A2 : $y = a_b \times x + b_b$

Le CIR est à l'intersection de ces deux médiatrices soit : $a_a \times x + b_a = a_b \times x + b_b$

D'où :

- Si $a_a \neq a_b$

$$x_i = \frac{b_b - b_a}{a_a - a_b} \quad \text{et} \quad y_i = a_a \times x_i + b_a$$

- Si $a_a = a_b$ et $b_a \neq b_b$

Il n'y a pas de centre de rotation

- Si $a_a = a_b$ et $b_a = b_b$

Les droites sont confondues, il faut changer de points.

B. Axes de rotation du modèle du modèle

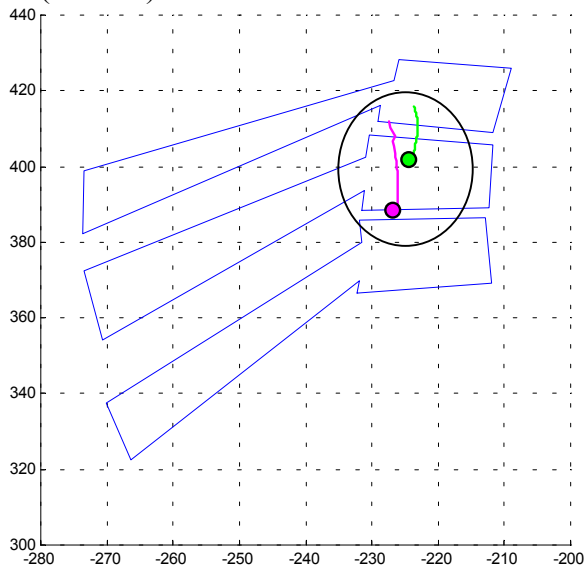
Le tracé clair représente les traces des axes instantanés de rotation dans le plan sagittal, frontal ou horizontal (plan médian de la vertèbre centrale) de la vertèbre supérieure par rapport à la vertèbre inférieure au cours du mouvement. Le point clair représente la trace de l'axe de rotation moyen.

Le tracé foncé représente les traces des axes instantanés de rotation dans le plan sagittal, frontal ou horizontal (plan médian de la vertèbre centrale) de la vertèbre centrale par rapport à la vertèbre inférieure au cours du mouvement. Le point foncé représente la trace de l'axe de rotation moyen.

Les coordonnées des centres de rotations sont exprimées dans un repère global dont l'origine se situe en dessous de la vertèbre L5.

✓ T3-T5 : flexion (plan Z, X)

Z (vertical)



X (antéro-postérieur)

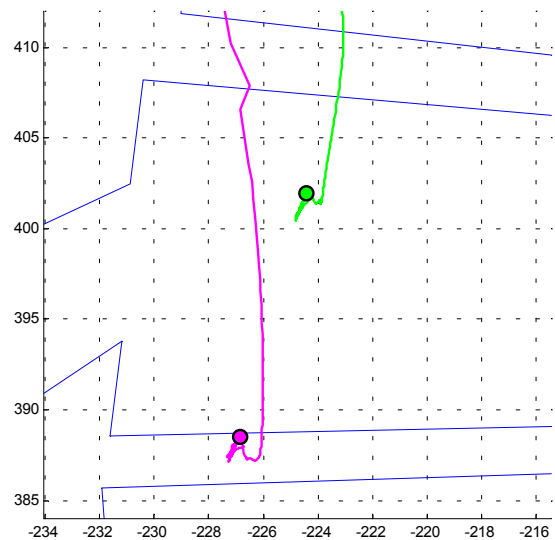


Figure 265 : lieu des CIRS de T3 par rapport à T5 en flexion

✓ T3-T5 : inflexion gauche (plan Y, Z)

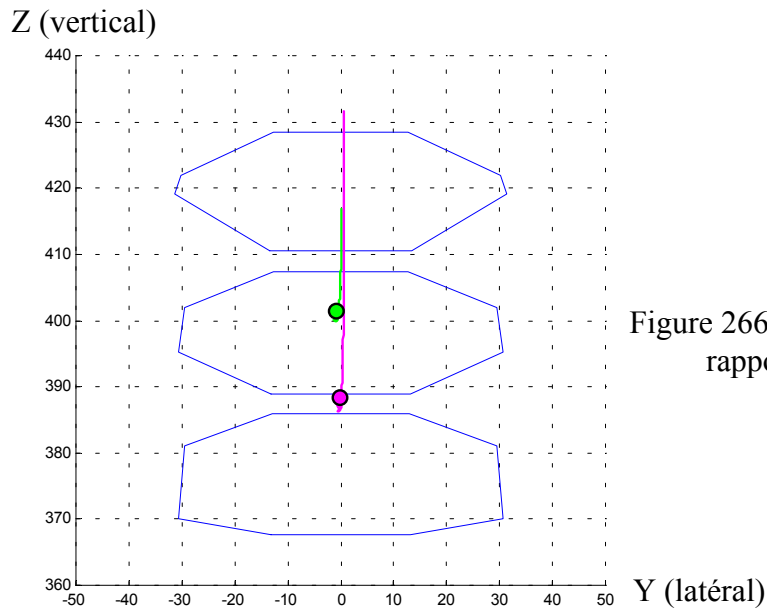


Figure 266 : lieu des CIRS de T3 par rapport à T5 en inflexion

✓ T3-T5 : torsion gauche (plan X, Y)

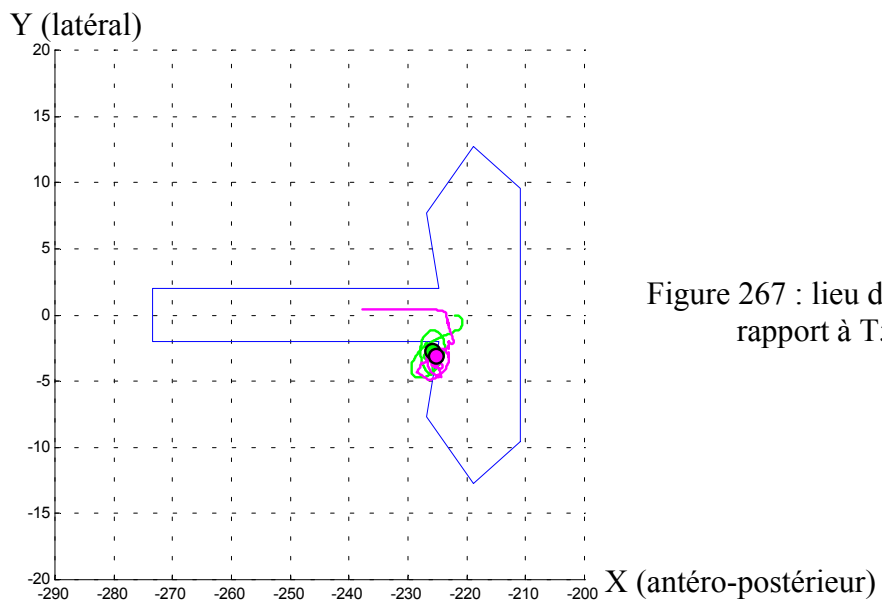
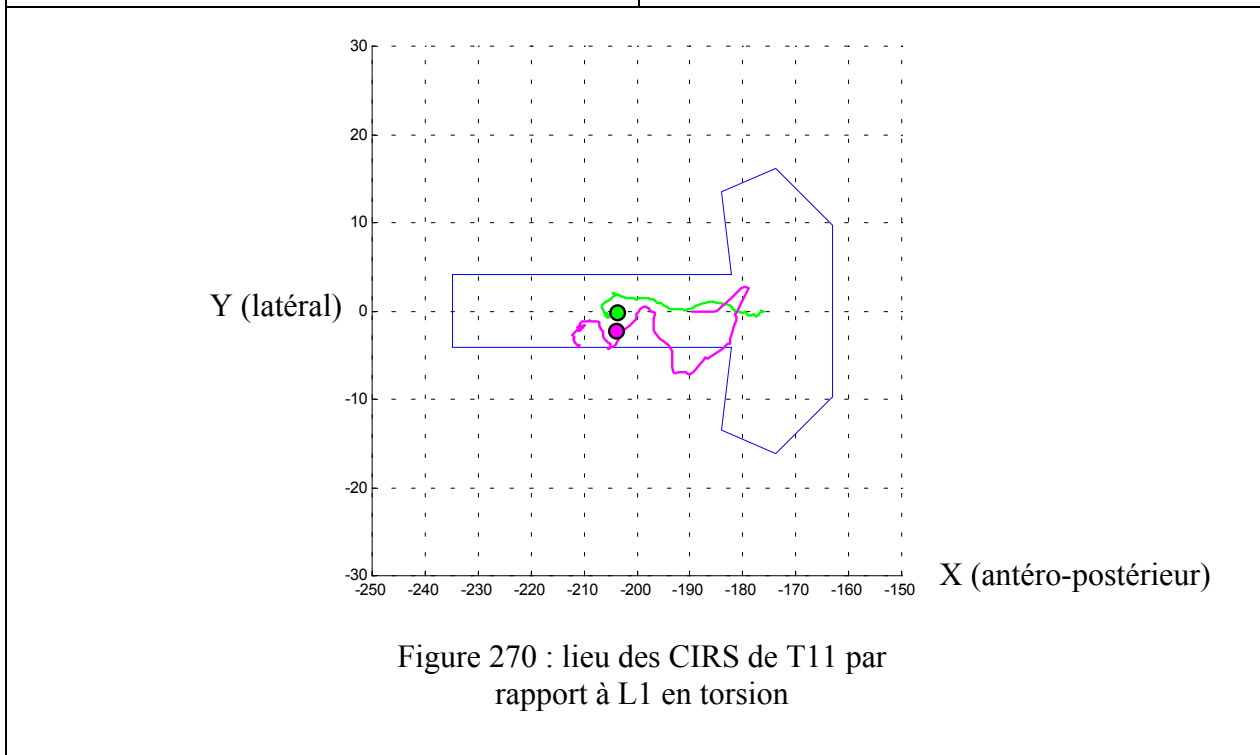
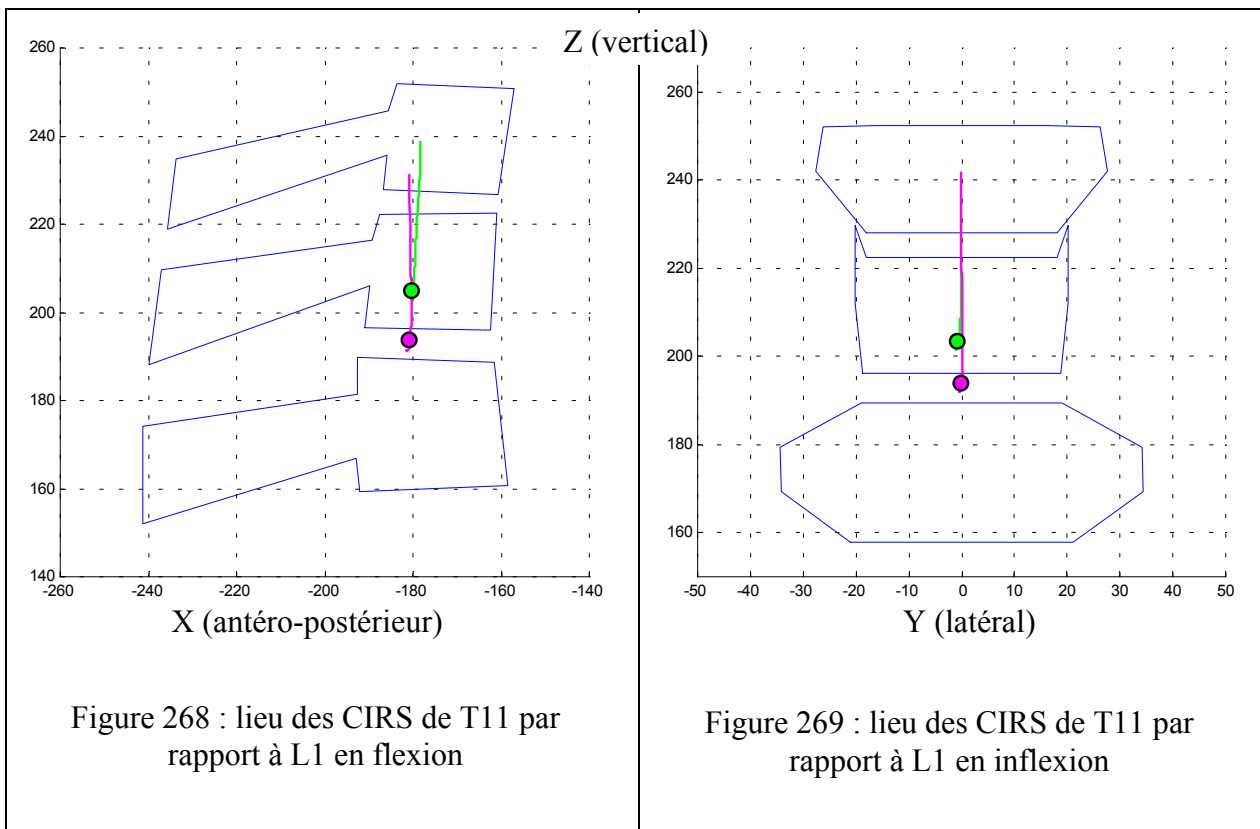
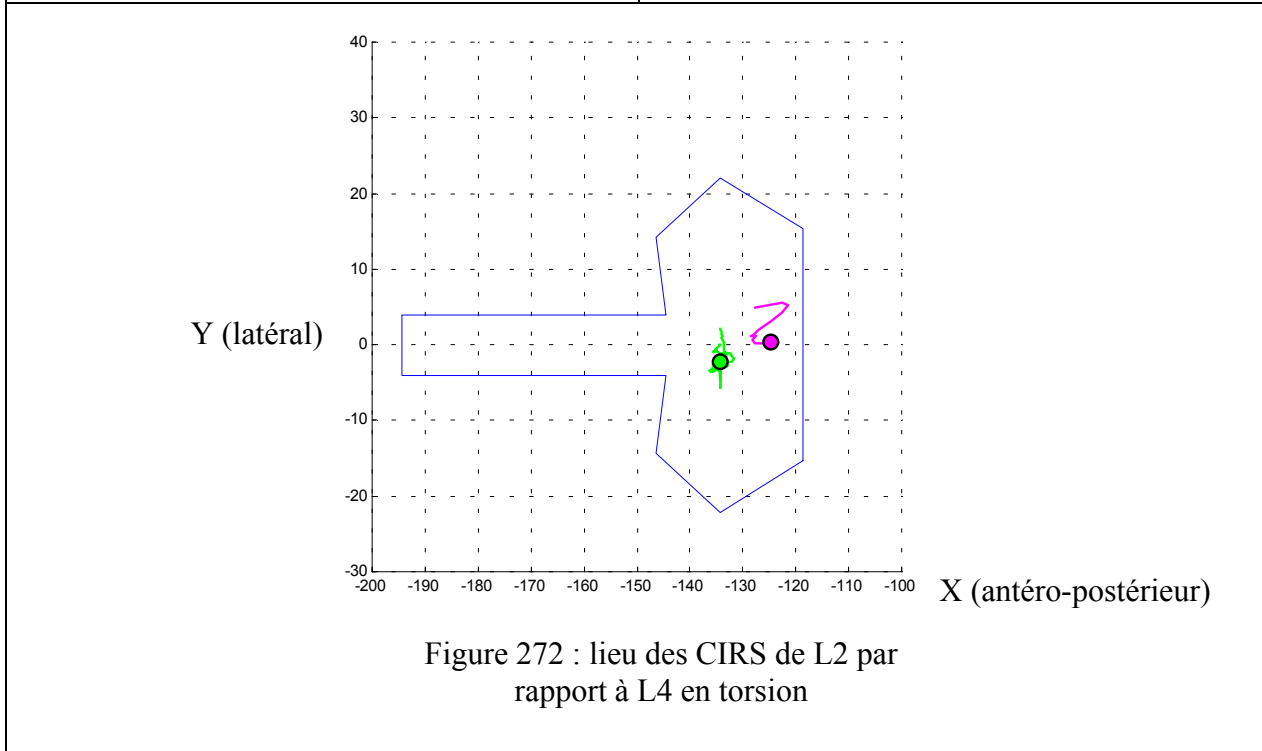
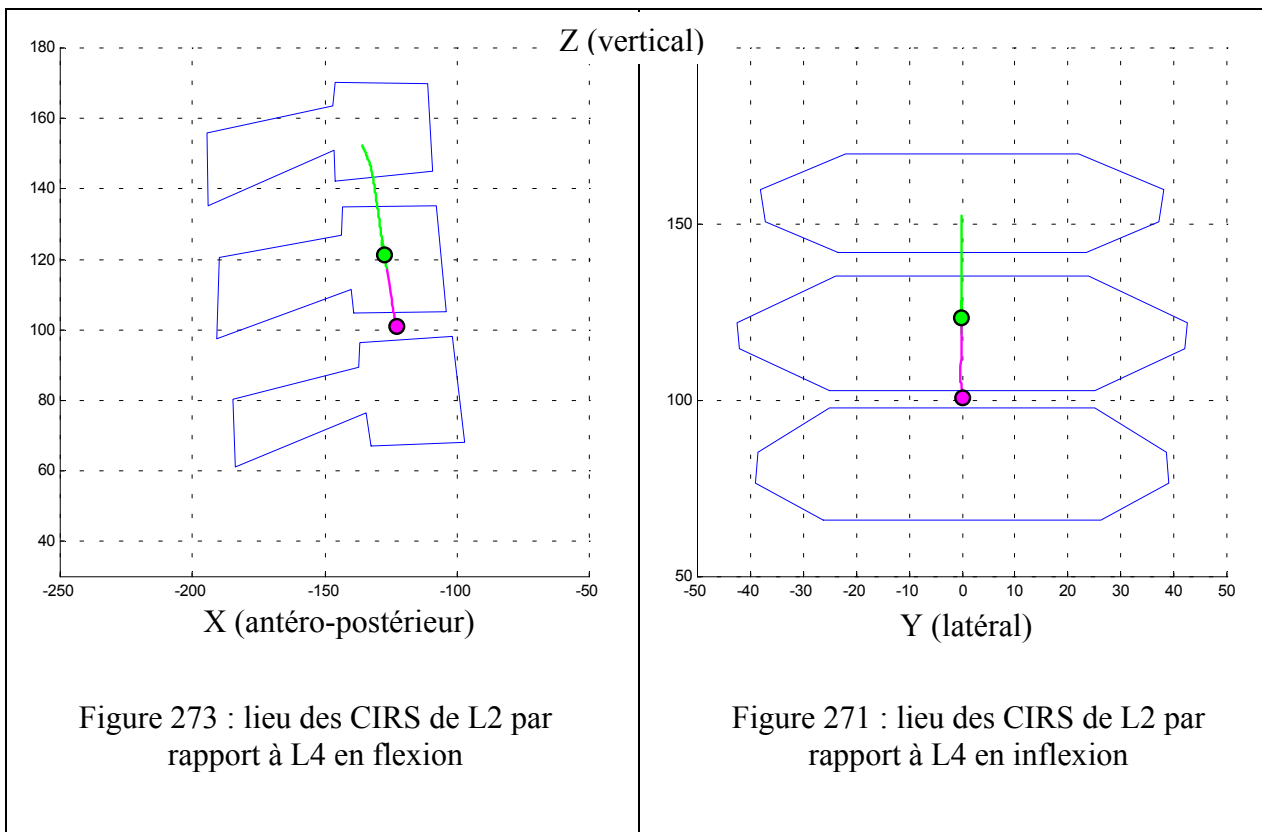


Figure 267 : lieu des CIRS de T3 par rapport à T5 en torsion

✓ T11-L1



✓ L2-L4



3- Conclusions sur les axes de rotation

Cette étude a été réalisée de façon à ce que la modélisation des essais dynamiques soient la plus précise possible. En effet, lors de la campagne d'essais, les spécimens ont été testés de façon pure et cela grâce à la connaissance des positions des axes moyens de rotation de chaque segment. Il fallait donc faire de même pour le modèle numérique.

Les études de Panjabi [PAN-40] en flexion, de Dimnet [DIM-10] en inflexion et de Haher [HAH-15] en torsion permettent de valider les résultats fournis par chacun des segments du modèle même si ces auteurs n'utilisent pas des segments de trois vertèbres.

En flexion et pour des segments de deux vertèbres, Panjabi définit une zone située au niveau des disques intervertébraux comme lieu des CIRS. Ce disque est situé à mi-chemin entre la vertèbre supérieure et la vertèbre inférieure. Or, les deux CIRS moyens donnés par les modèles se trouvent aussi à mi-chemin entre la vertèbre supérieure et inférieure d'une part et à mi-chemin entre la vertèbre supérieure et centrale d'autre part.

Les mêmes remarques sont valables pour l'inflexion latérale et l'étude de Dimnet.

Enfin, Haher définit une zone de CIRS au niveau du canal médulaire. Cette zone est respectée pour les segments numériques T3-T5 et T11-L1 mais les résultats donnés par le modèle pour L2-L4 définissent une zone située au niveau des corps vertébraux, c'est à dire dans une partie plus antérieure.

Numériquement, le trajet du CIR de la vertèbre supérieure par rapport à la vertèbre inférieure commence toujours au niveau du corps vertébral de la vertèbre supérieure. Cela s'explique par le couple pur appliqué à cette dernière et à l'absence de contact avec les facettes articulaires au tout début du mouvement. La vertèbre est donc libre de tourner sur elle-même. De même pour le trajet de l'autre CIR (absence de contact avec les facettes articulaires au début du mouvement).

On peut remarquer la position plus en arrière du CIR de T11/L1 en torsion. Cela s'explique par la géométrie particulière de la charnière thoraco-lombaire pour laquelle les articulaires inférieures de T12 sont en arrière par rapport aux supérieures.

Ces résultats vont servir à positionner l'axe de sollicitation numérique (que nous modéliserons par une manivelle) par rapport au modèle de segment que nous choisirons de valider de façon à le solliciter de façon la plus pure possible (figure 274)

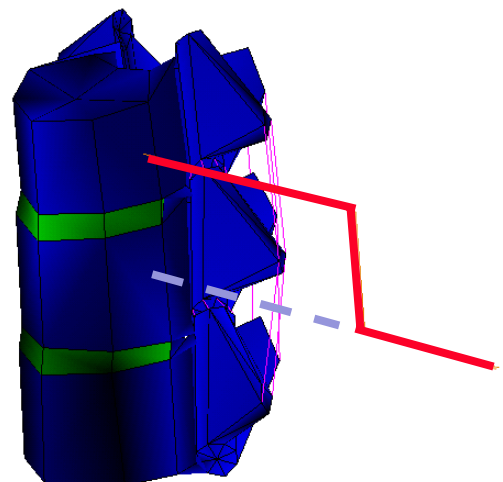
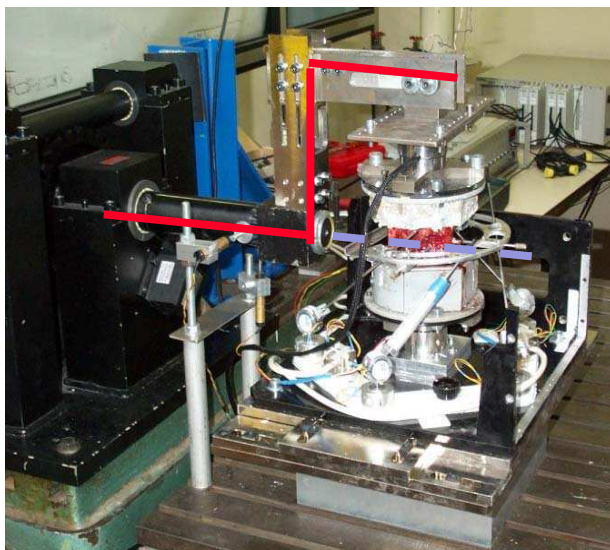


Figure 274 : modélisation de l'axe de sollicitation et position relative de celui ci par rapport au spécimen en

1- Objectifs

Le but de cette partie est de valider, à l'aide des essais dynamiques réalisés au cours du projet, des segments de trois vertèbres du modèle de rachis thoracique et lombaire. Au cours des essais, nous avons utilisé des segments L2-L4 pour la partie lombaire, T11-L1 pour la partie thoracolumbaire et des segments T3-T5, T7-T9 et T10-T12 pour tester la partie thoracique. Les résultats issus de ces trois unités thoraciques ont été utilisés pour valider l'unité T7-T9 du modèle. La validation dynamique s'est faite uniquement à un niveau cinématique où nous avons cherché à reproduire le mouvement de la vertèbre centrale des spécimens testés. Nous n'avons pas pu exploiter les données des capteurs 6 axes ainsi que les informations issues des sections ligamentaires. Les simulations se font donc en configuration saine. Les efforts et les moments maximums transitant par la vertèbre inférieure sont fournis à titre indicatif.

Le repère des efforts et moments est le suivant :

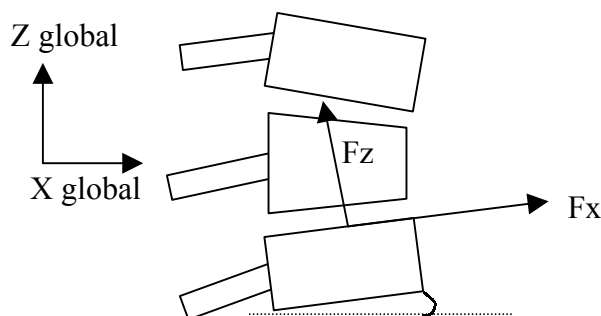


Figure 275 : repère des efforts et des moments de la vertèbre inférieure

Le but de cette phase de validation est d'utiliser un seul jeu de paramètres par unité fonctionnelle, quel que soit le type de sollicitation. Nous avons seulement modifié les paramètres dynamiques (G_0 : module de cisaillement au temps zéro et β : inverse du temps de relaxation) du disque pour caler les modèles segmentaires. Les paramètres statiques (K , G_i , A_j , A_e , A_t et A_f) utilisés lors de la phase de validation statique n'ont pas été changés.

2- Modélisation des essais

A. Conditions aux limites: déplacement

Les modèles « éléments finis » des segments ont été placés dans des positions similaires à ce que l'on trouve en essais. A savoir, un angle entre le plateau supérieur et l'horizontale égal à l'angle entre le plateau inférieur et l'horizontale.

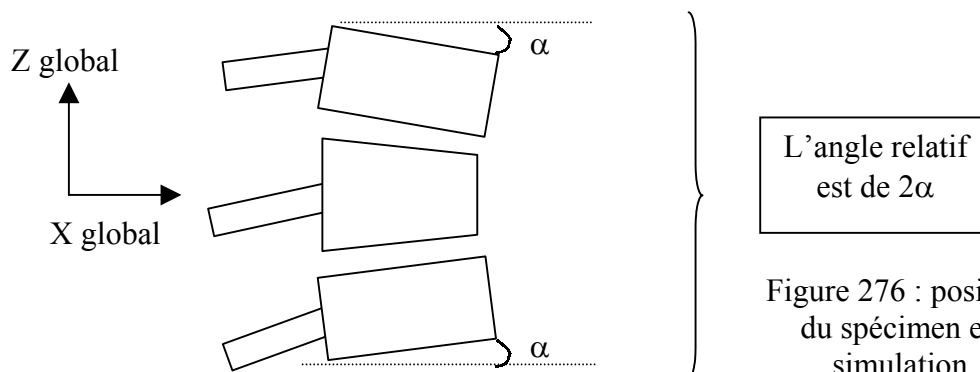


Figure 276 : position du spécimen en simulation

Nous n'avons pas pris $\alpha = 4.5^\circ$ comme pour les expérimentations car cela aurait amené à déformer le modèle de façon trop importante. Nous avons préféré garder les angles du modèle tel qu'il a été construit en position assise à savoir :

	T7-T9	T11-L1	L2-L4
Angle relatif (2α)	21.5°	3.9°	4.9°

La vertèbre inférieure est encastrée.

B. Conditions aux limites : effort

La sollicitation imposée est une **loi de vitesse angulaire** sur la vertèbre supérieure appliquée perpendiculairement au plan du mouvement principal (exemple : en inflexion, l'axe de sollicitation est suivant X global). La loi injectée dans le modèle est la moyenne des vitesses recueillies pendant les essais.

En essai, l'axe de rotation (axe moteur) a été placé de façon à coïncider avec l'axe de rotation propre de la pièce anatomique pour une sollicitation donnée. Nous nous sommes donc servis de notre étude sur les CIRs du modèle pour positionner notre axe de rotation « numérique » en coïncidence avec l'axe de rotation propre du modèle « éléments finis » suivant la sollicitation donnée (flexion, inflexion ou torsion). Cela nous permet de simuler des sollicitations qui soient les plus pures possibles.

C. Critère de validation

Les critères de validation portent sur les **rotations principales** de la vertèbre centrale au cours du temps pour des sollicitations de flexion, d'inflexion latérale et de torsion et les **rotations secondaires** induites par couplage pour des sollicitations d'inflexion latérale et de torsion.

Nous avons exprimé les rotations de la vertèbre centrale du modèle dans le même repère que celui des spécimens d'essais.

D. Organisation des résultats

Chaque cas est présenté de la façon suivante :

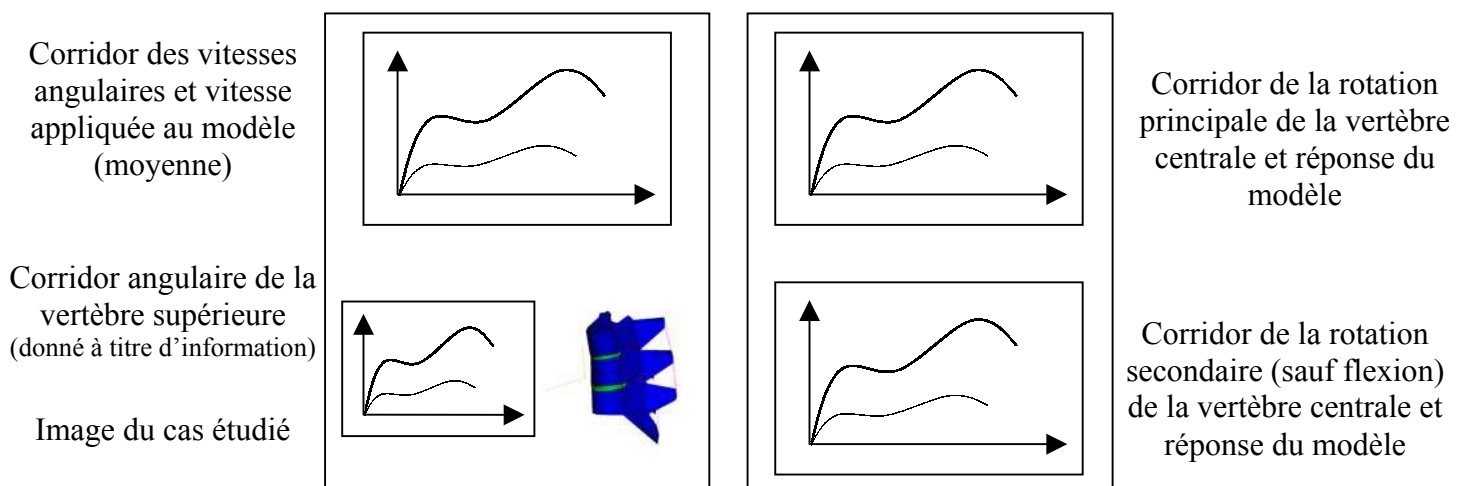


Figure 277 : présentation des comparaisons entre les essais et les simulations

3- Résultats en configuration saine

A. T7-T9 : flexion

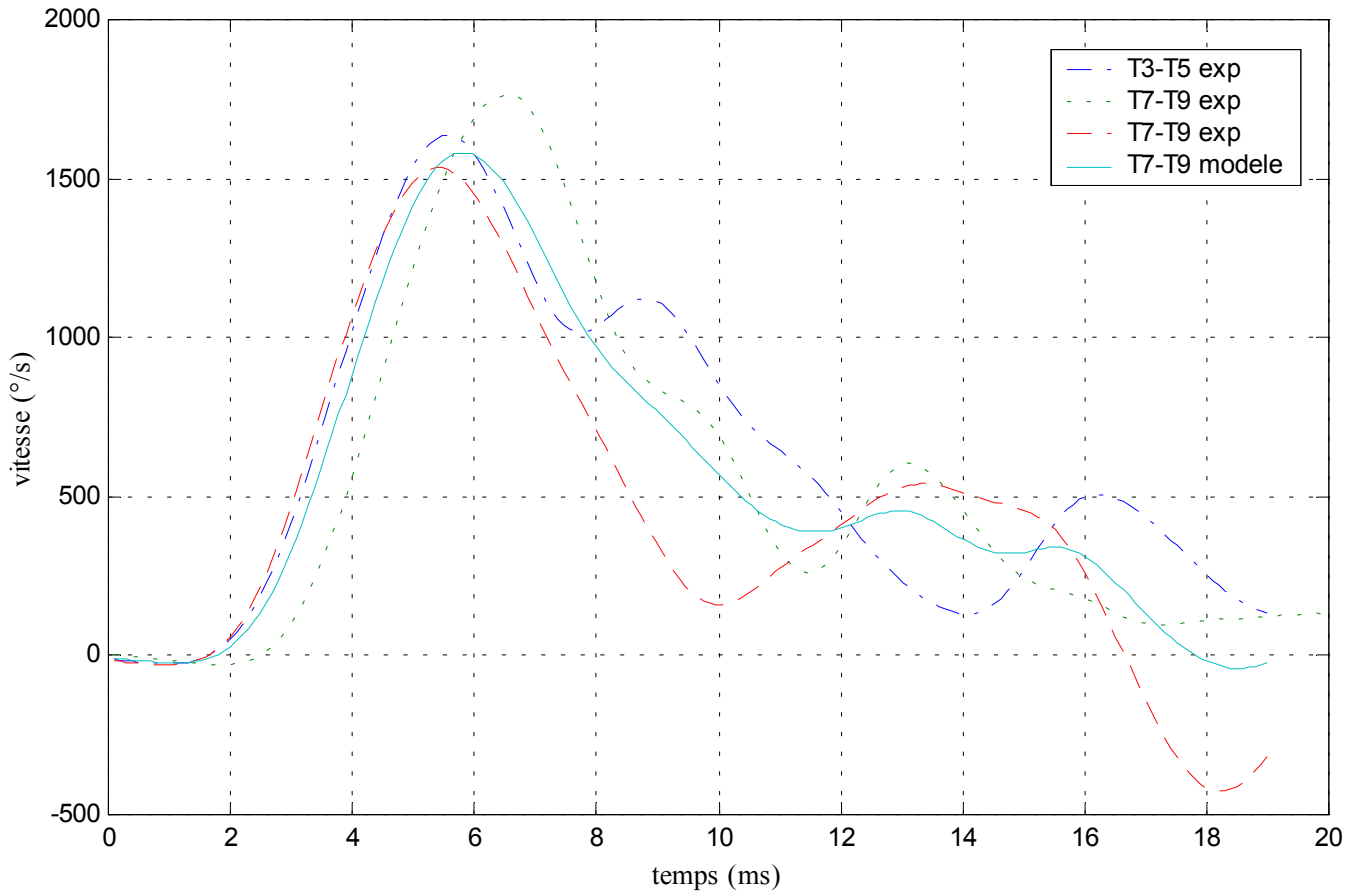


Figure 278 : corridor des vitesses angulaires de la vertèbre supérieure et vitesse angulaire appliquée au

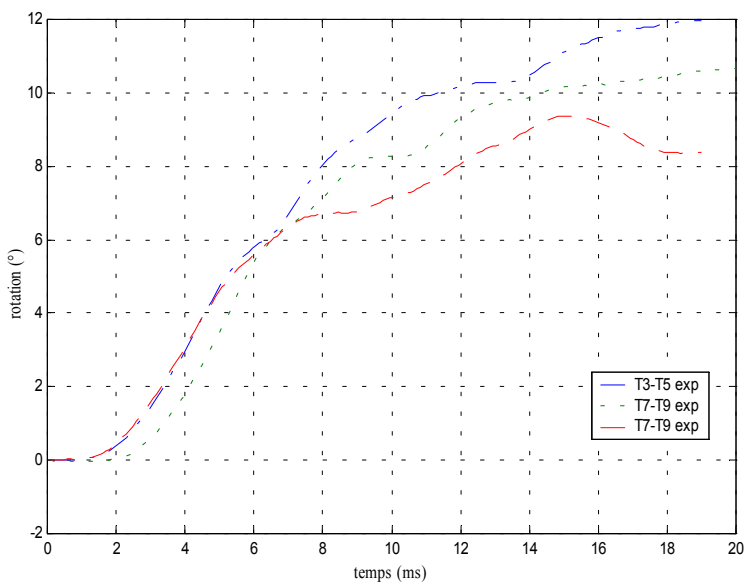


Figure 280: corridor des angles de rotation de la vertèbre supérieure

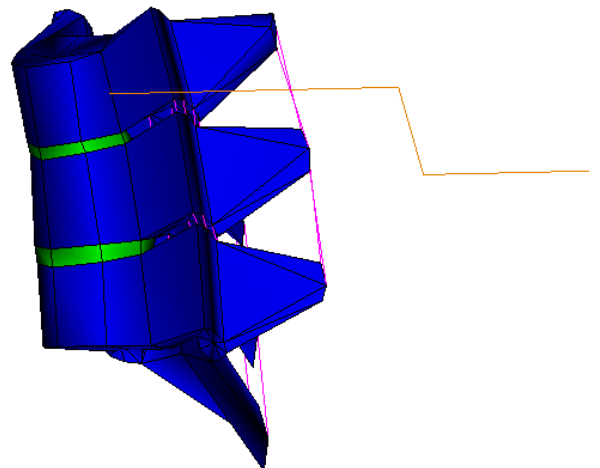


Figure 279 : modèle de T7-T9 en flexion

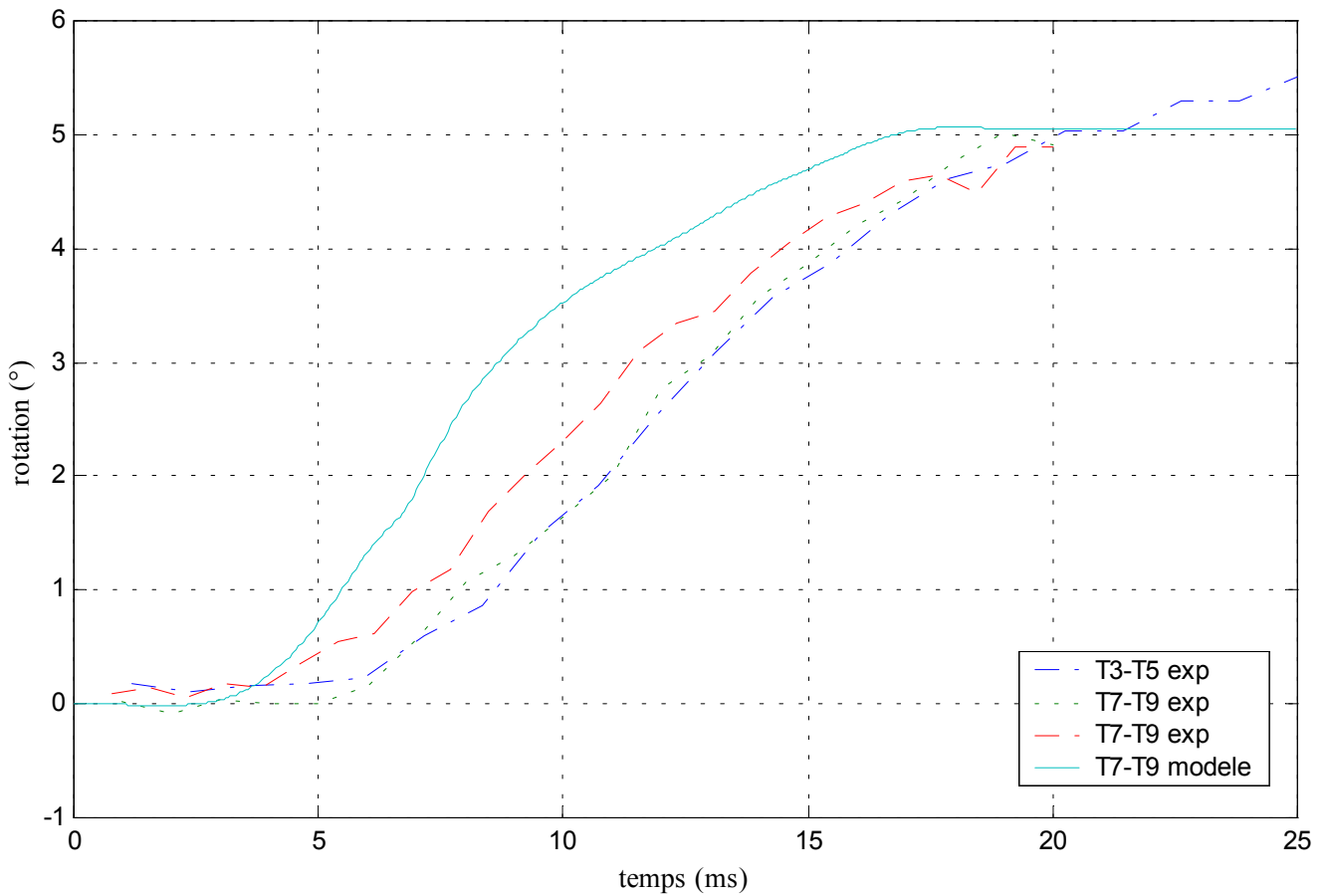


Figure 281: corridor expérimental des angles principaux de rotation de la vertèbre centrale et réponse du modèle

Tableau 66 : efforts et moments maximaux au centre du corps vertébral de la vertèbre inférieure

F_x (N)	F_y (N)	F_z (N)	M_x (N.m)	M_y (N.m)	M_z (N.m)
-80	0	-700	0	-38	0

B. T7-T9 : inflexion

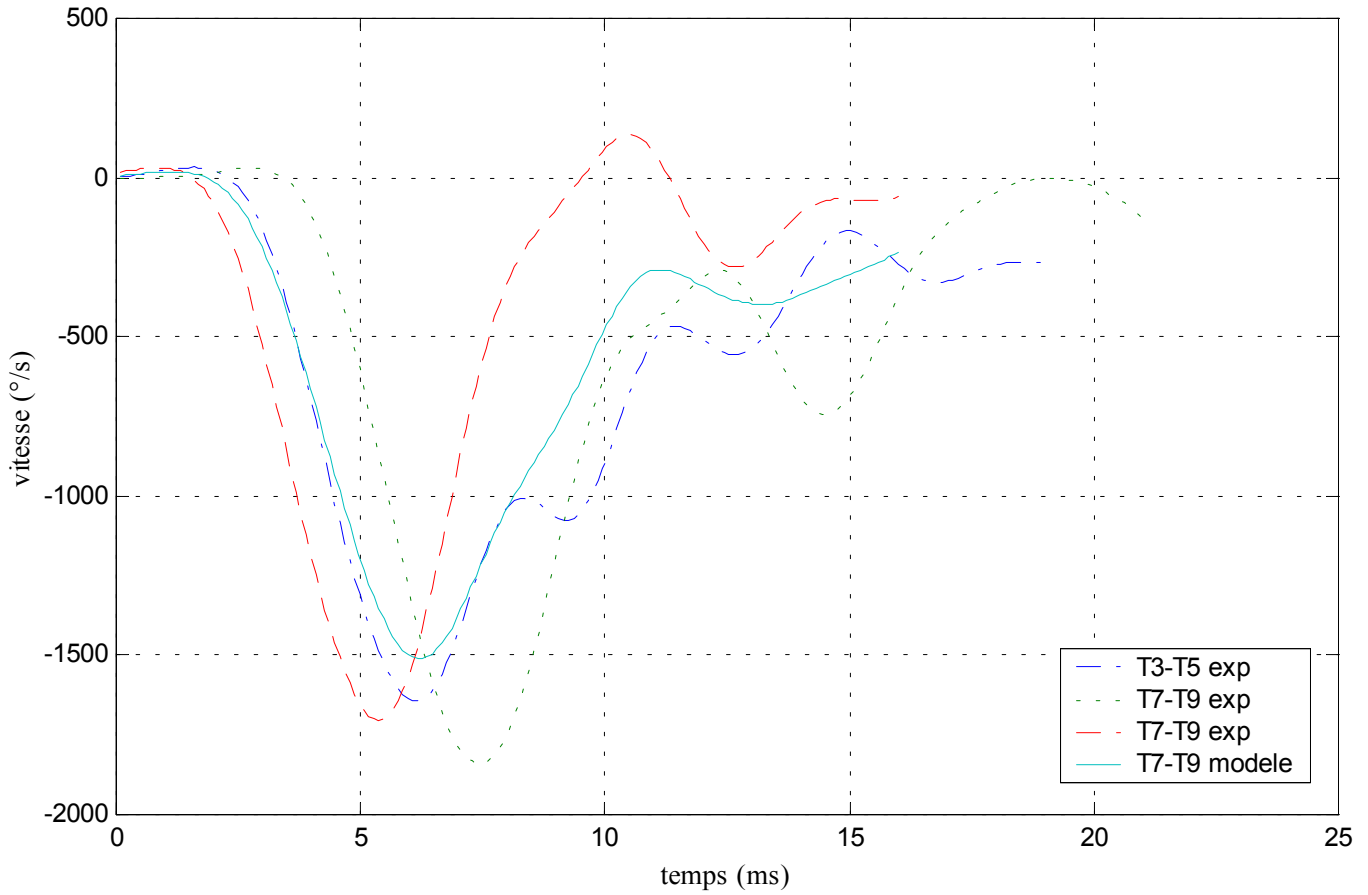


Figure 282: corridor des vitesses angulaires de la vertèbre supérieure et vitesse angulaire appliquée au modèle

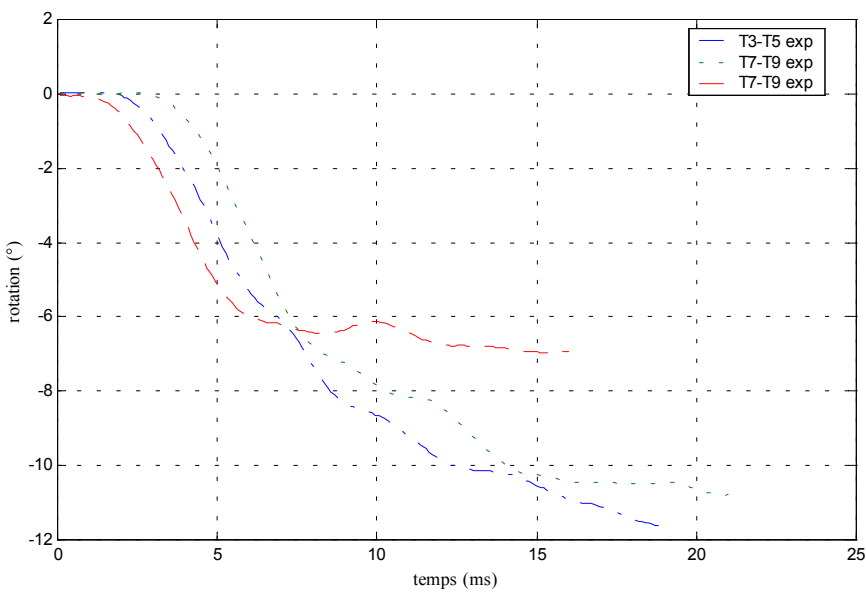


Figure 284: corridor des angles de rotation de la vertèbre supérieure

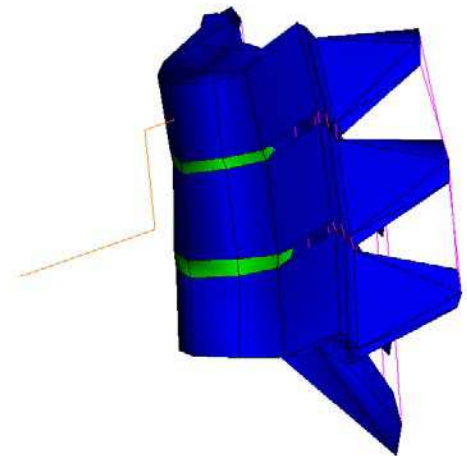


Figure 283 : modèle de T7-T9 en inflexion

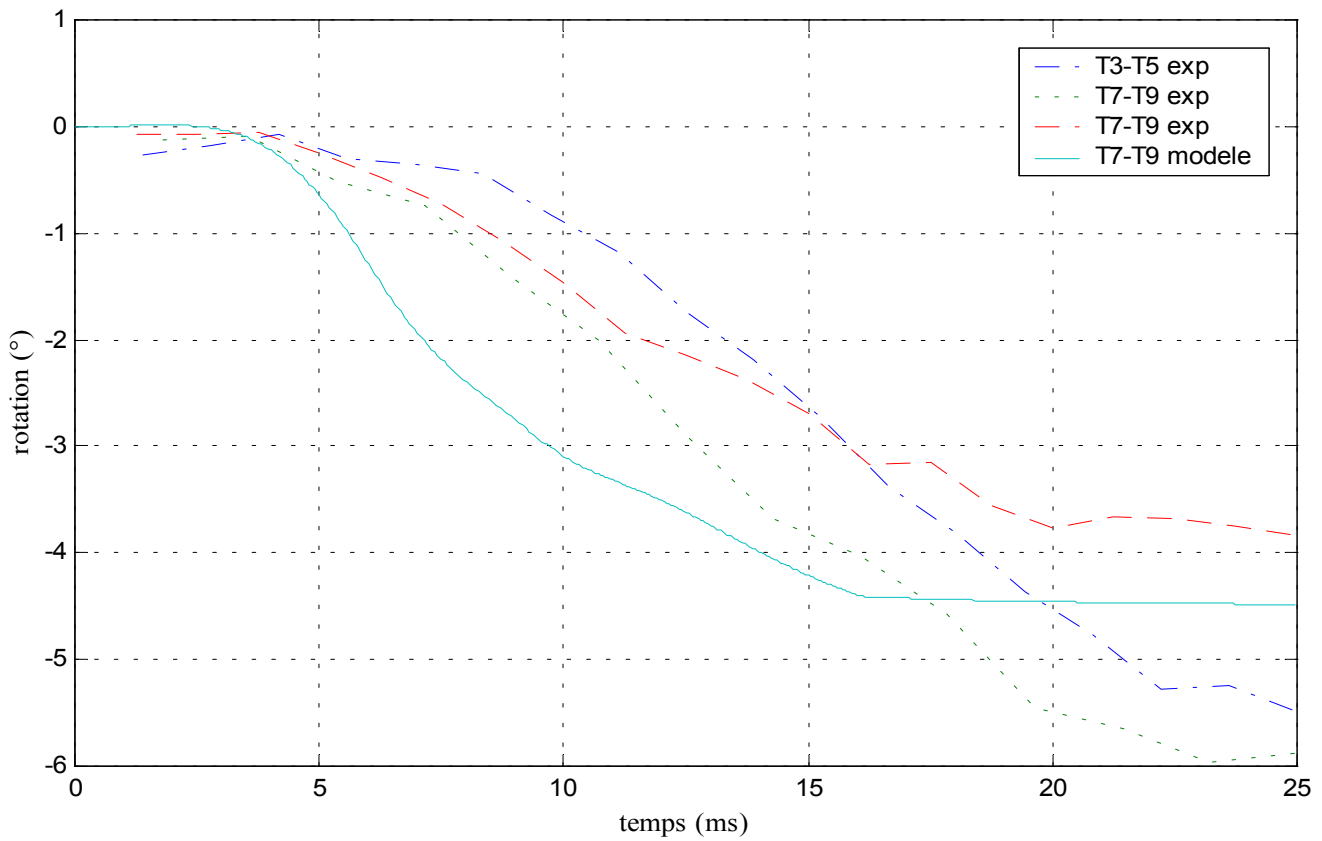


Figure 285: corridor expérimental des angles principaux de rotation de la vertèbre centrale et réponse du modèle

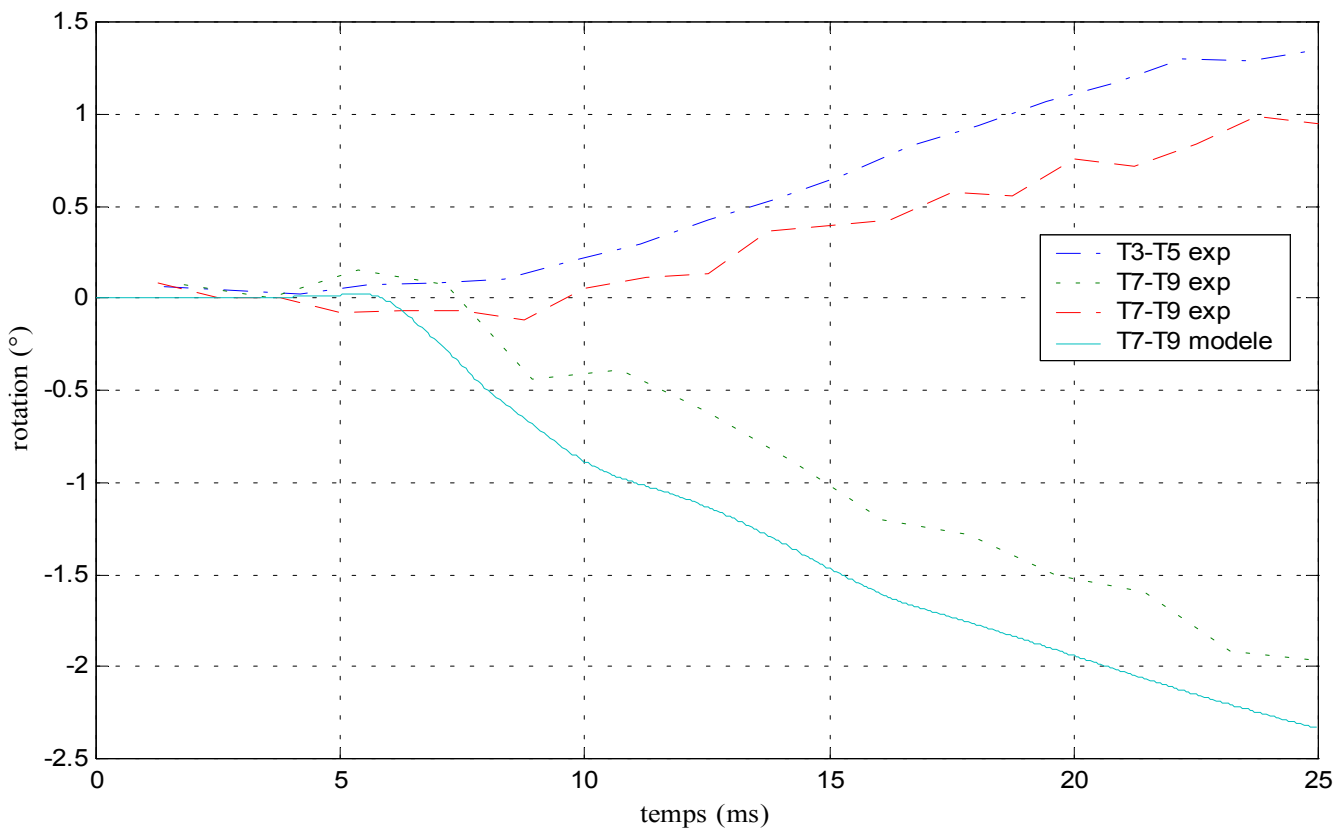


Figure 286: corridor expérimental des angles secondaires de rotation de la vertèbre centrale et réponse du modèle

Tableau 67 : efforts et moments maximaux au centre du corps vertébral de la vertèbre inférieure					
F_x (N)	F_y (N)	F_z (N)	M_x (N.m)	M_y (N.m)	M_z (N.m)
-250	20	-370	12	-10	0.5

C. T7-T9 : torsion

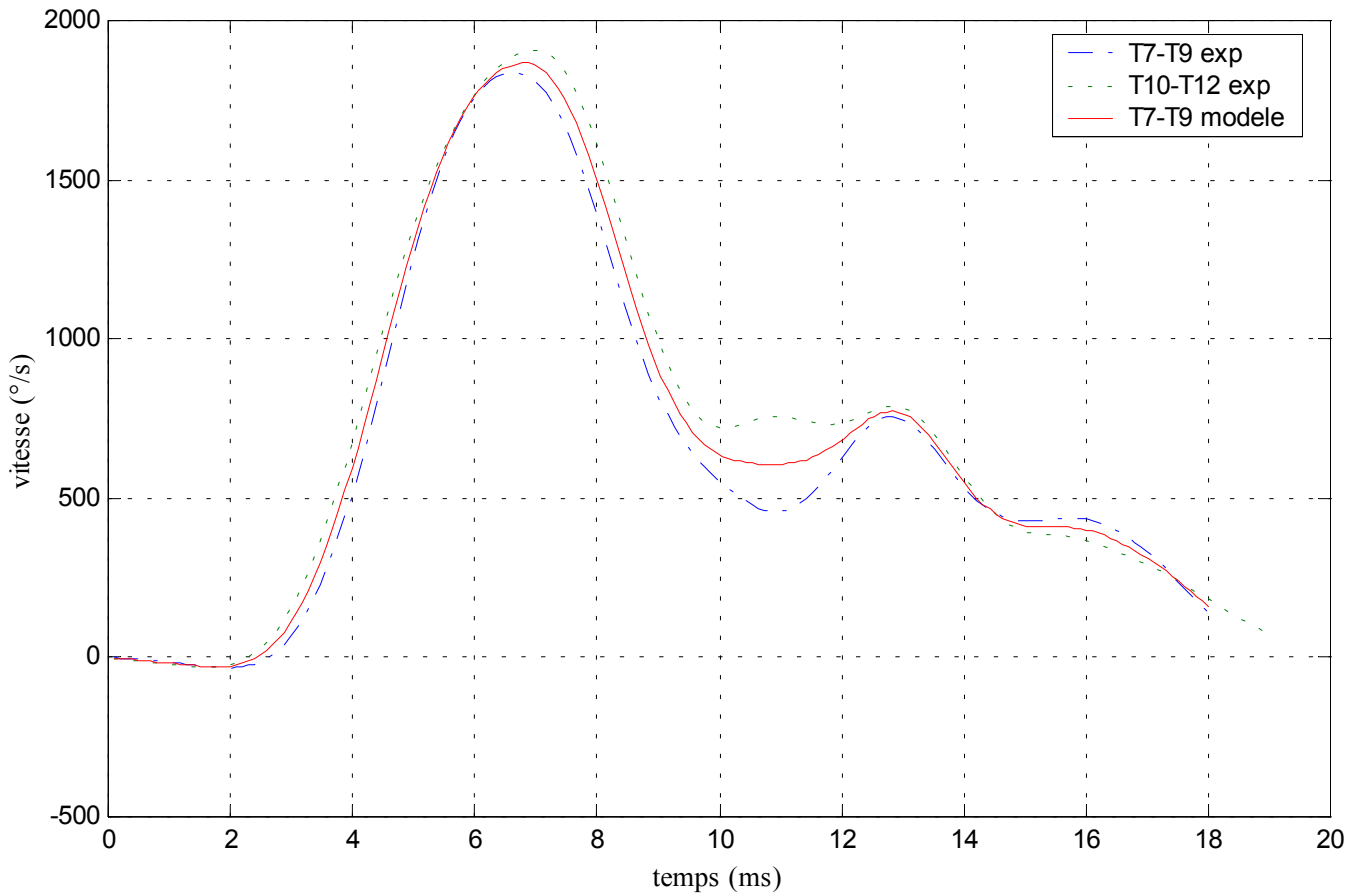


Figure 287: corridor des vitesses angulaires de la vertèbre supérieure et vitesse angulaire appliquée au modèle

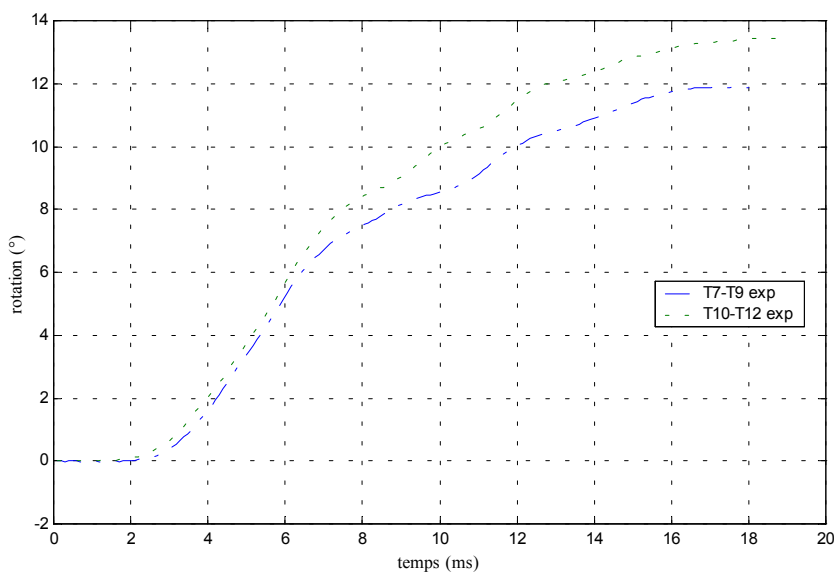


Figure 288: corridor des angles de rotation de la vertèbre supérieure

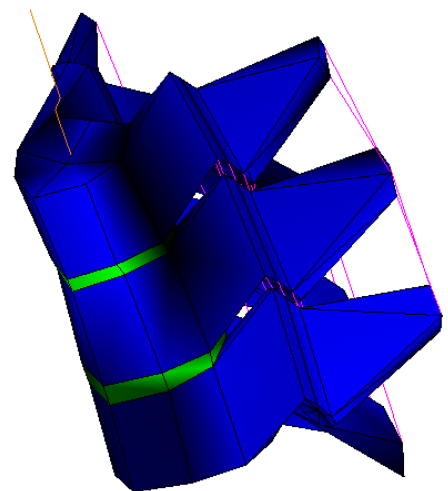


Figure 289 : modèle de T7-T9 en torsion

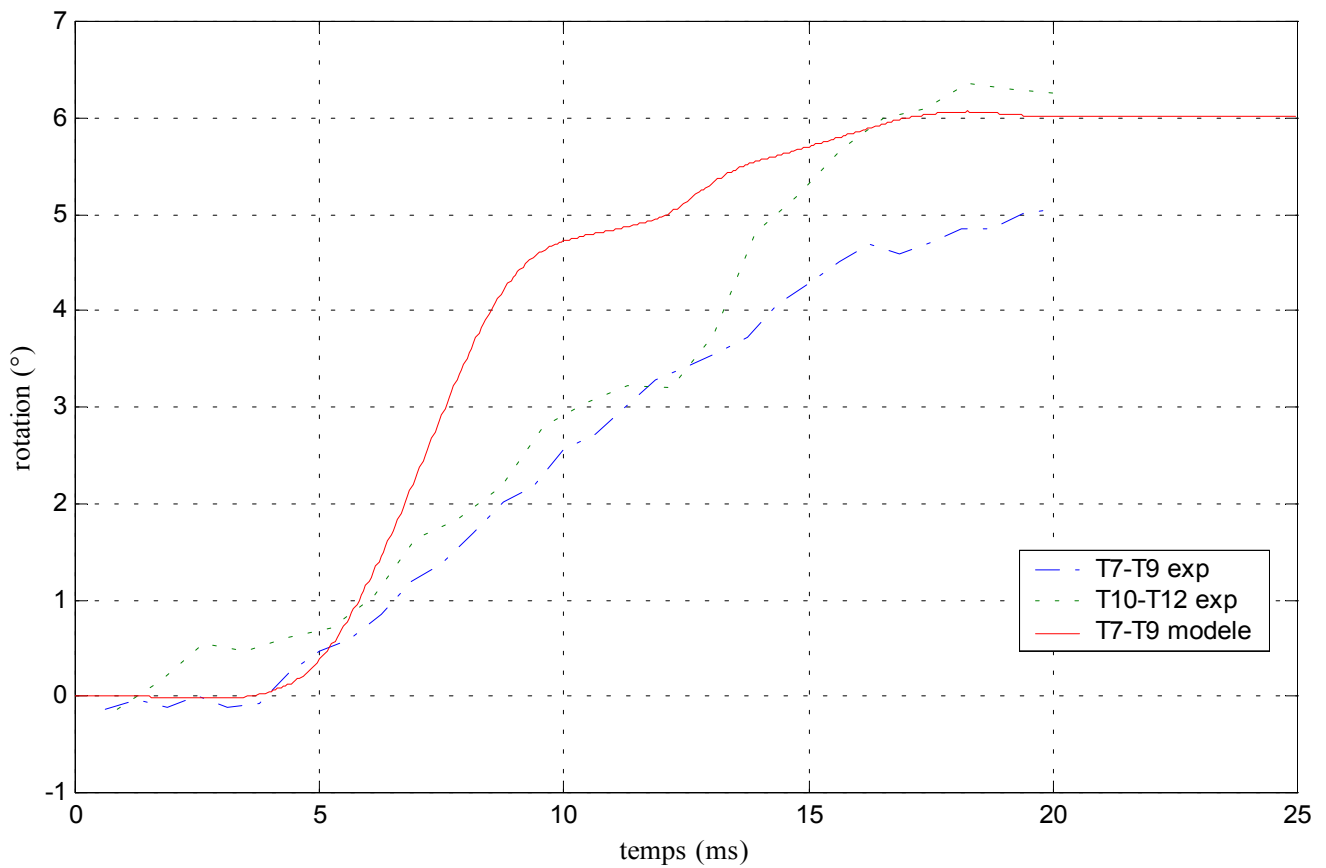


Figure 290: corridor expérimental des angles principaux de rotation de la vertèbre centrale et réponse du modèle

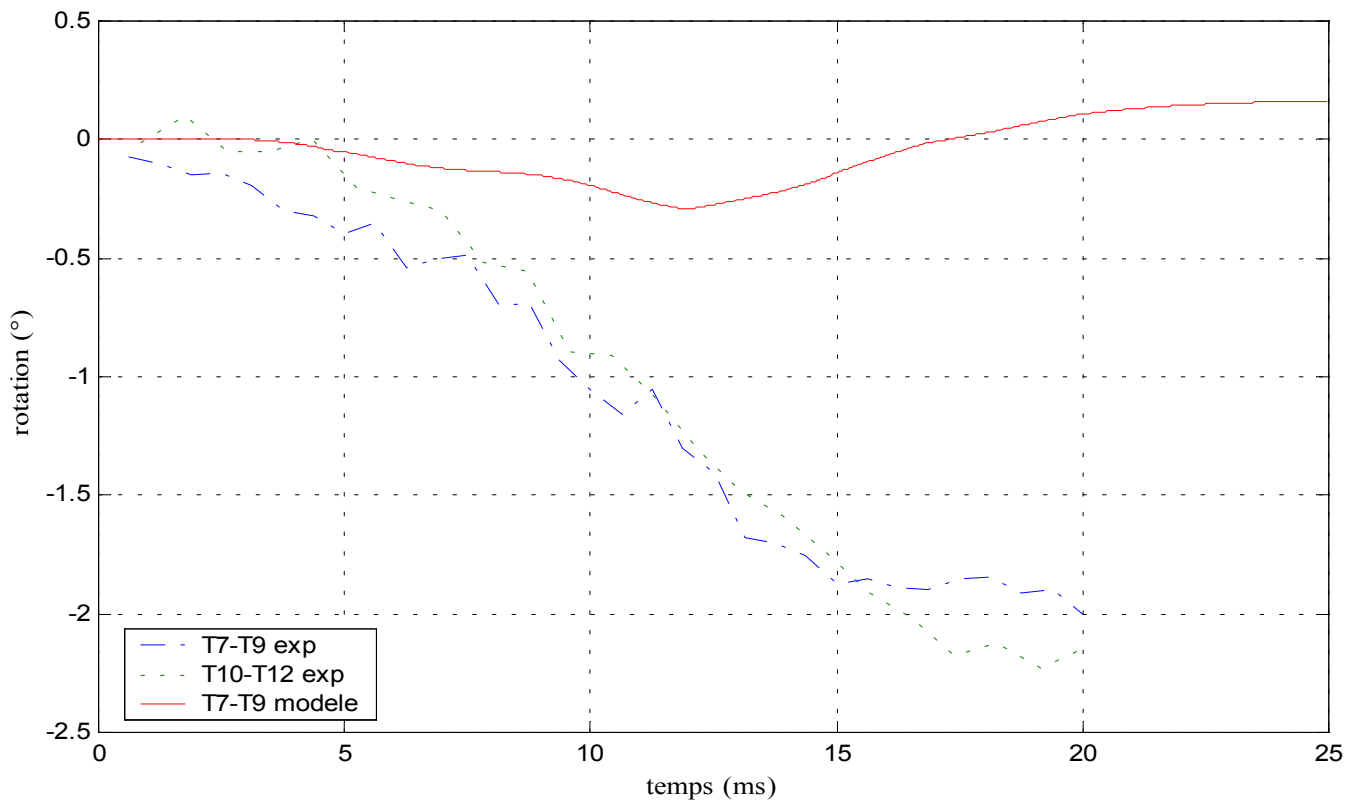


Figure 291: corridor expérimental des angles secondaires de rotation de la vertèbre centrale et réponse du modèle

Tableau 68 : efforts et moments maximaux au centre du corps vertébral de la vertèbre inférieure					
F_x (N)	F_y (N)	F_z (N)	M_x (N.m)	M_y (N.m)	M_z (N.m)
-170	-220	-1450	2	-5	-7

D. T11-L1 : flexion

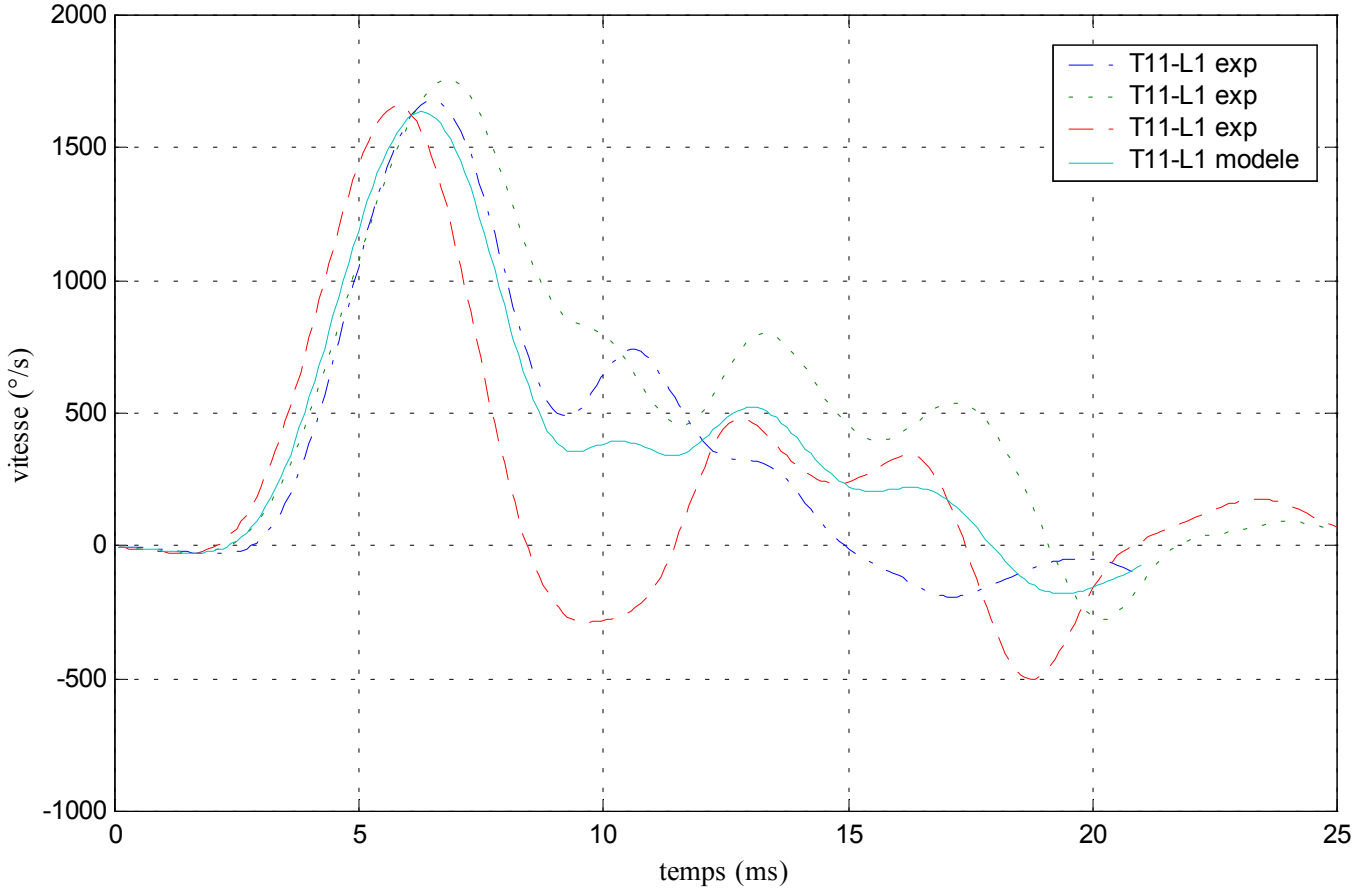


Figure 292: corridor des vitesses angulaires de la vertèbre supérieure et vitesse angulaire appliquée au modèle

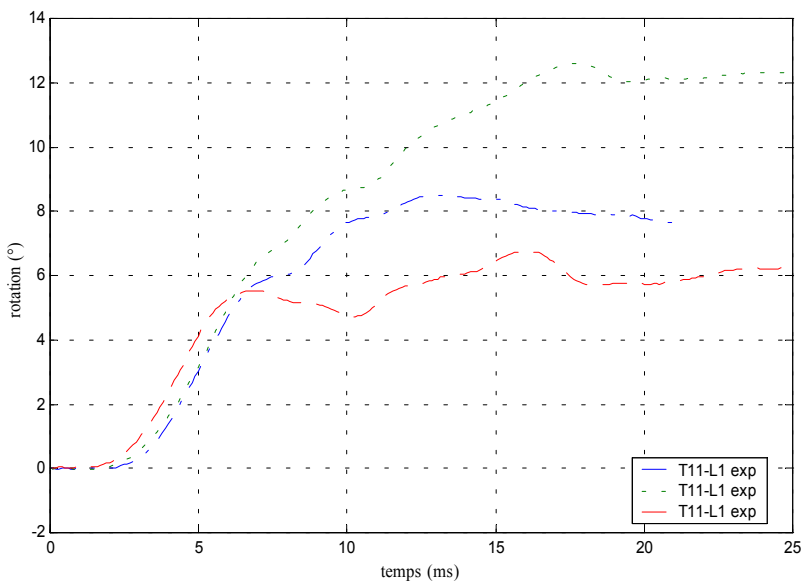


Figure 294: corridor des angles de rotation de la vertèbre supérieure

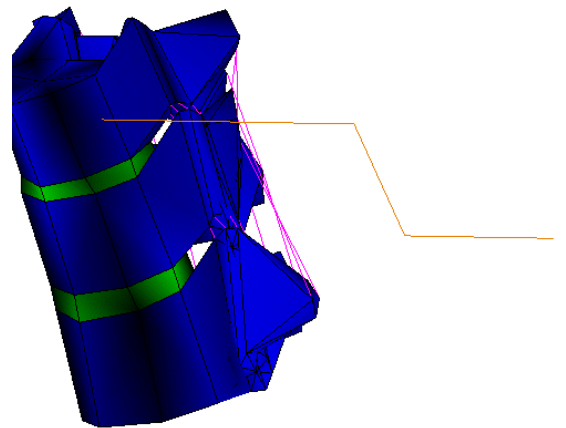


Figure 293 : modèle de T11-L1 en flexion

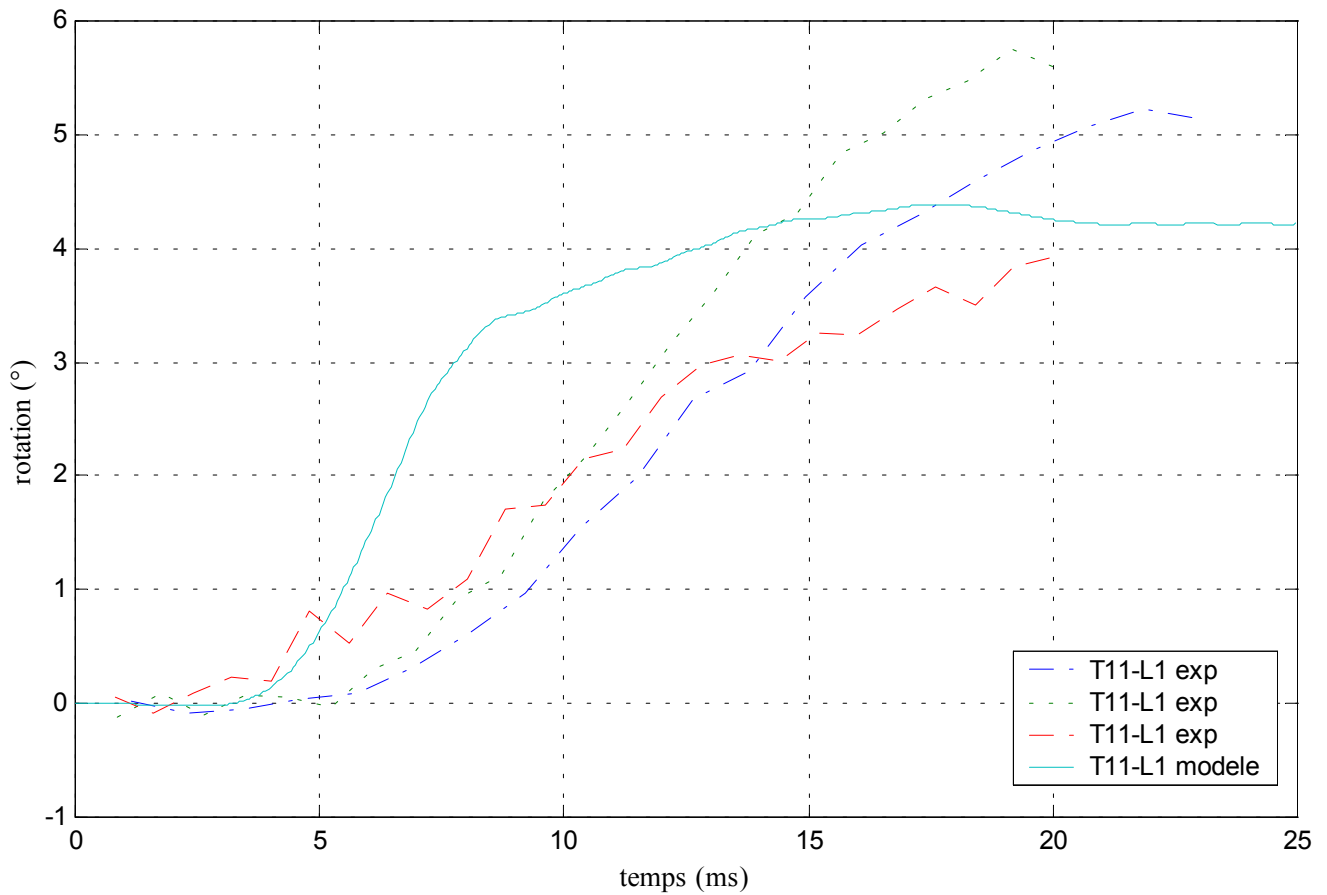


Figure 295: corridor expérimental des angles principaux de rotation de la vertèbre centrale et réponse du modèle

Tableau 69 : efforts et moments maximaux au centre du corps vertébral de la vertèbre inférieure					
F_x (N)	F_y (N)	F_z (N)	M_x (N.m)	M_y (N.m)	M_z (N.m)
-100	0	-600	0	-30	0

E. T11-L1 : inflexion

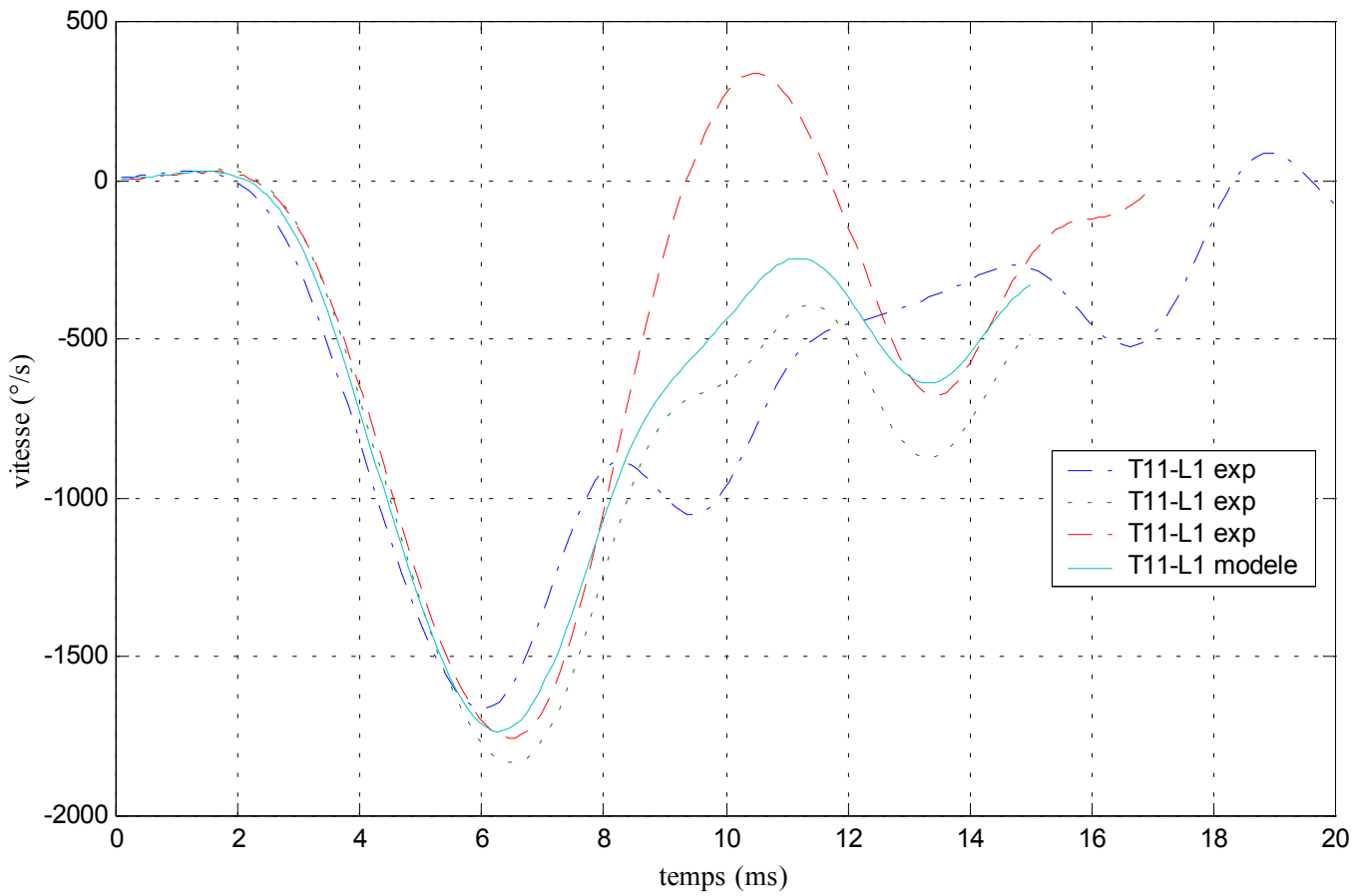


Figure 296: corridor des vitesses angulaires de la vertèbre supérieure et vitesse angulaire appliquée au modèle

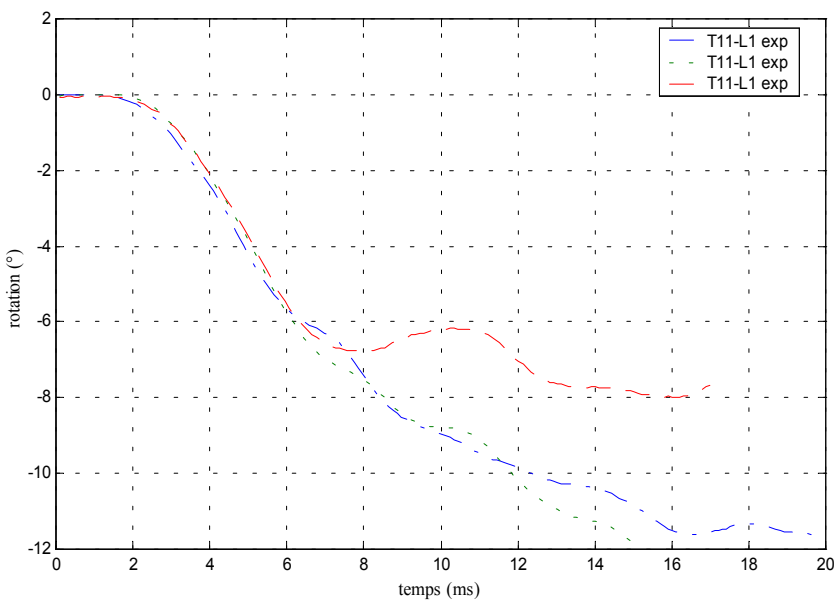


Figure 298: corridor des angles de rotation de la vertèbre supérieure

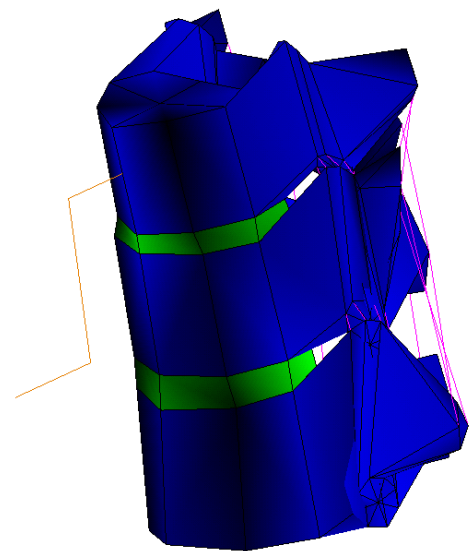


Figure 297 : modèle de T11-L1 en inflexion

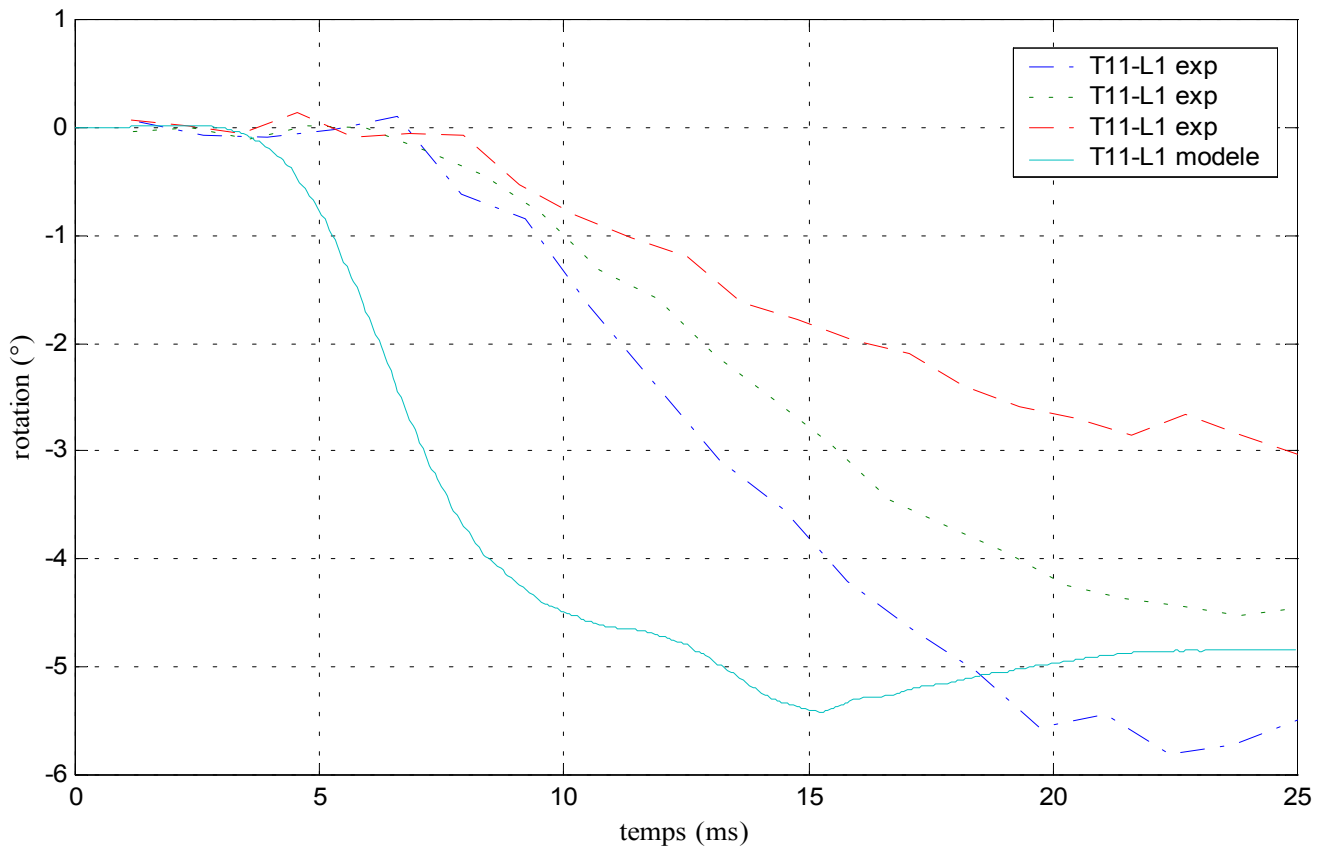


Figure 299: corridor expérimental des angles principaux de rotation de la vertèbre centrale et réponse du modèle

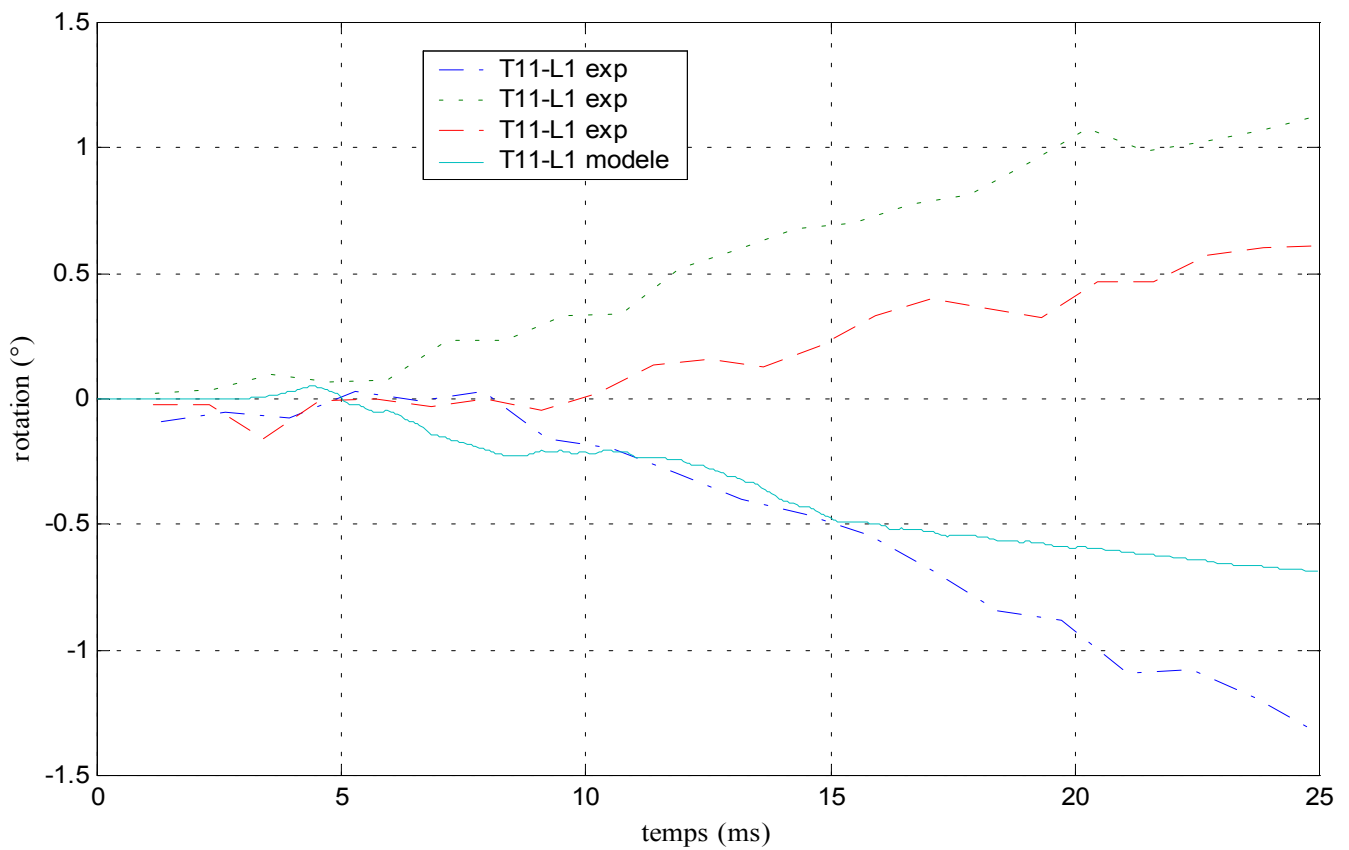


Figure 300: corridor expérimental des angles secondaires de rotation de la vertèbre centrale et réponse du modèle

Tableau 70 : efforts et moments maximaux au centre du corps vertébral de la vertèbre inférieure					
F_x (N)	F_y (N)	F_z (N)	M_x (N.m)	M_y (N.m)	M_z (N.m)
-260	40	90	17	-11	7

F. T11-L1 : torsion

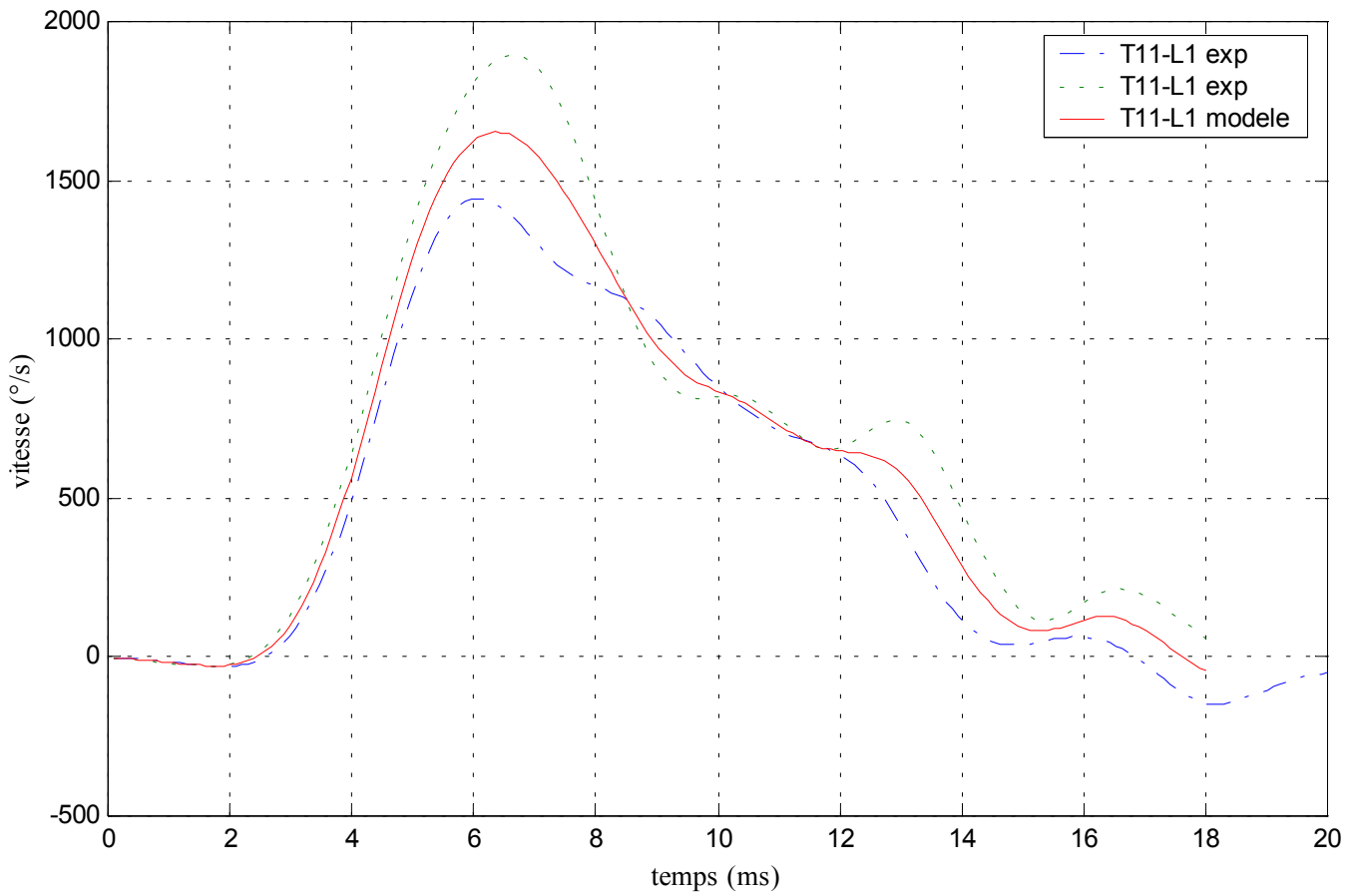


Figure 301: corridor des vitesses angulaires de la vertèbre supérieure et vitesse angulaire appliquée au modèle

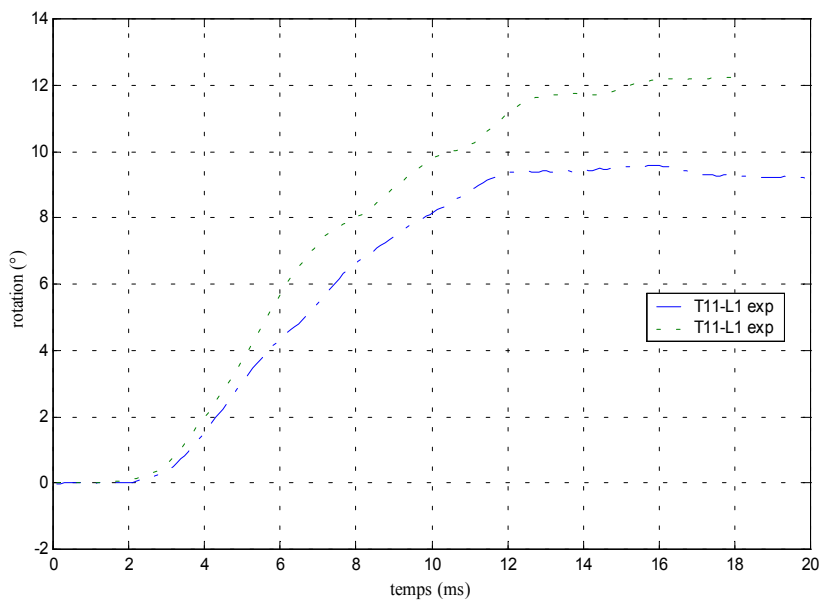


Figure 302: corridor des angles de rotation de la vertèbre supérieure

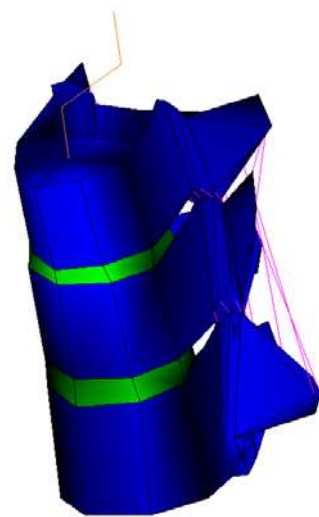


Figure 303 : modèle de T11-L1 en torsion

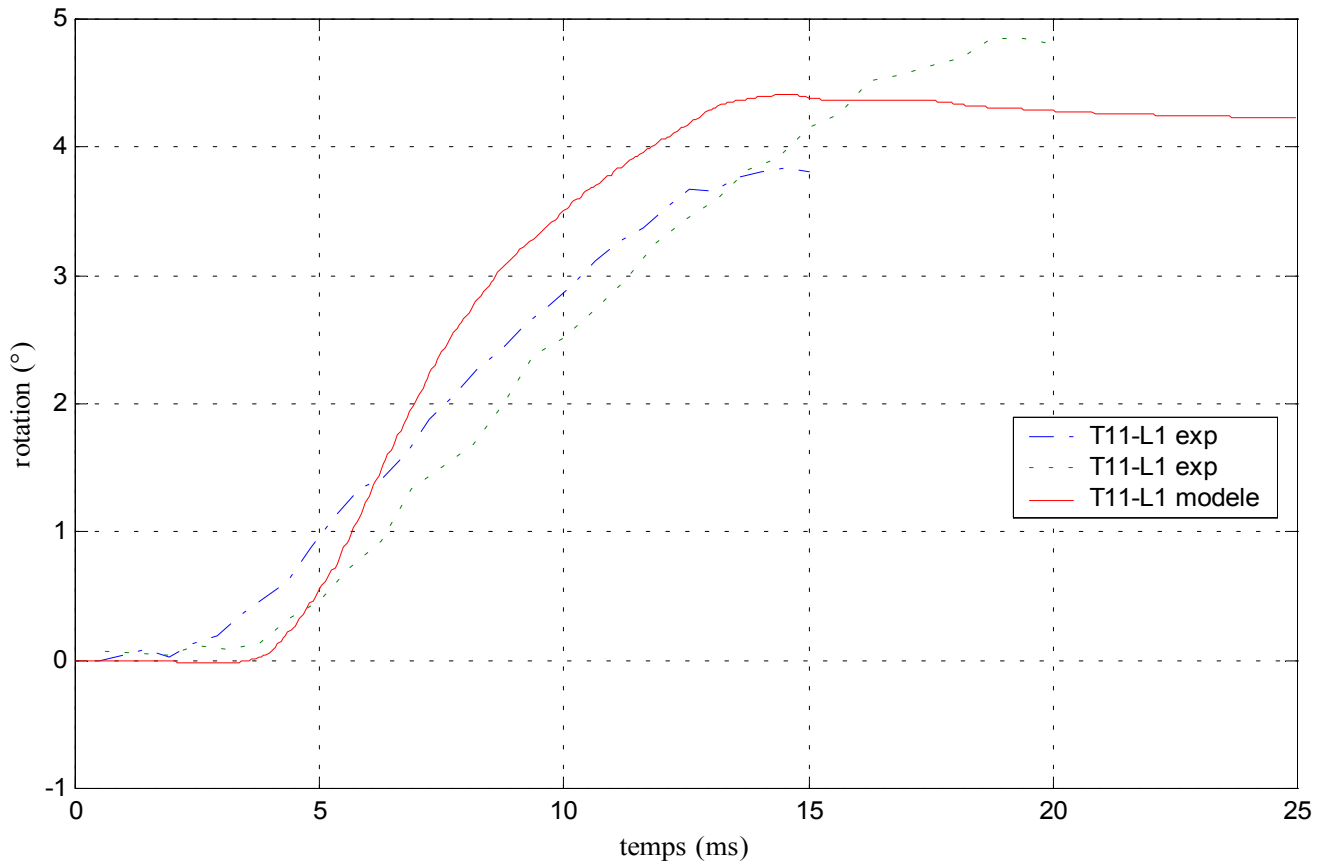


Figure 304: corridor expérimental des angles principaux de rotation de la vertèbre centrale et réponse du modèle

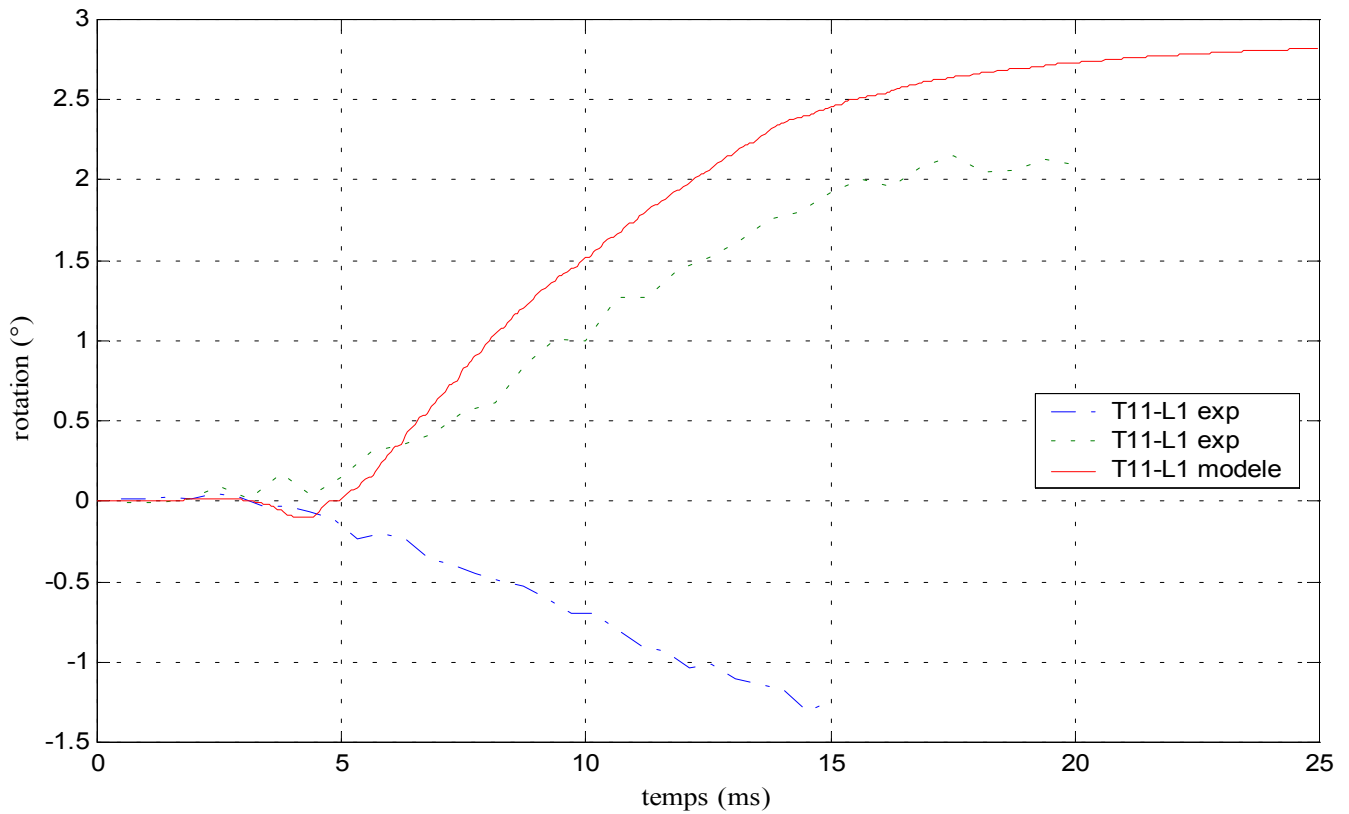


Figure 305: corridor expérimental des angles secondaires de rotation de la vertèbre centrale et réponse du modèle

Tableau 71 : efforts et moments maximaux au centre du corps vertébral de la vertèbre inférieure					
F_x (N)	F_y (N)	F_z (N)	M_x (N.m)	M_y (N.m)	M_z (N.m)
-650	-200	300	-8	-18	-29

G. L2-L4 : flexion

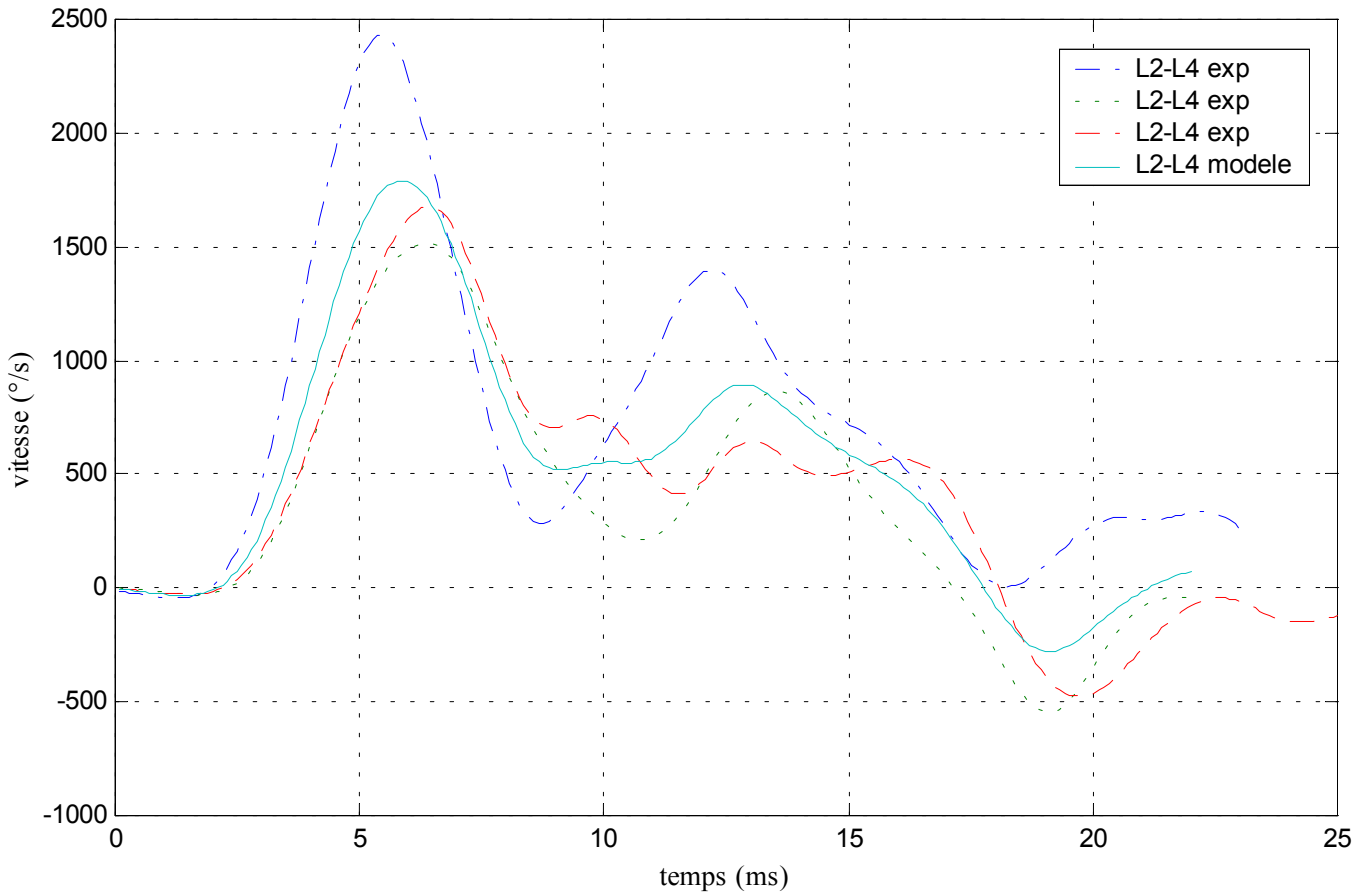


Figure 306: corridor des vitesses angulaires de la vertèbre supérieure et vitesse angulaire appliquée au modèle

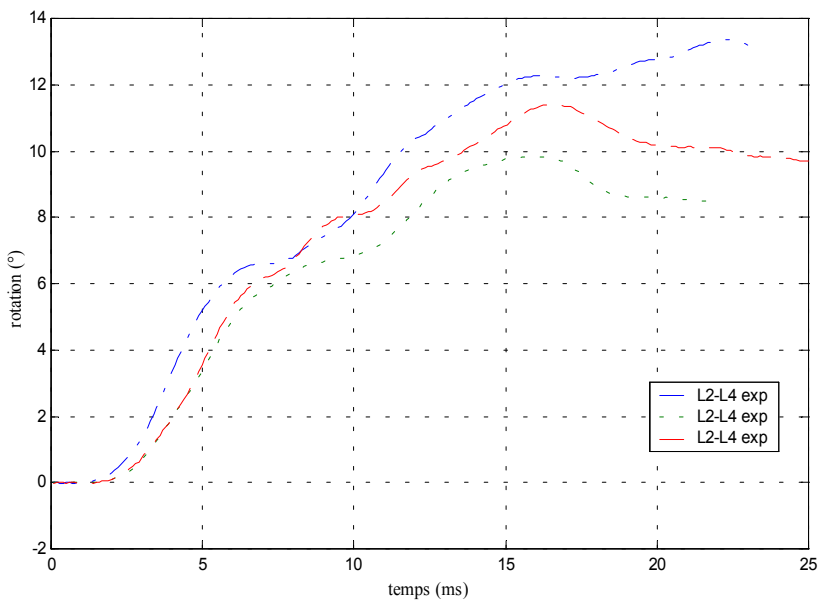


Figure 308: corridor des angles de rotation de la vertèbre supérieure

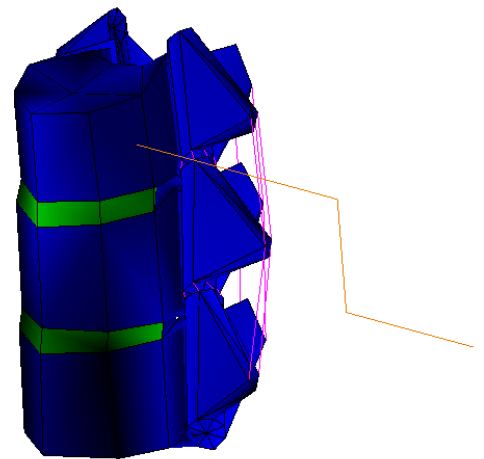


Figure 307 : modèle de L2-L4 en flexion

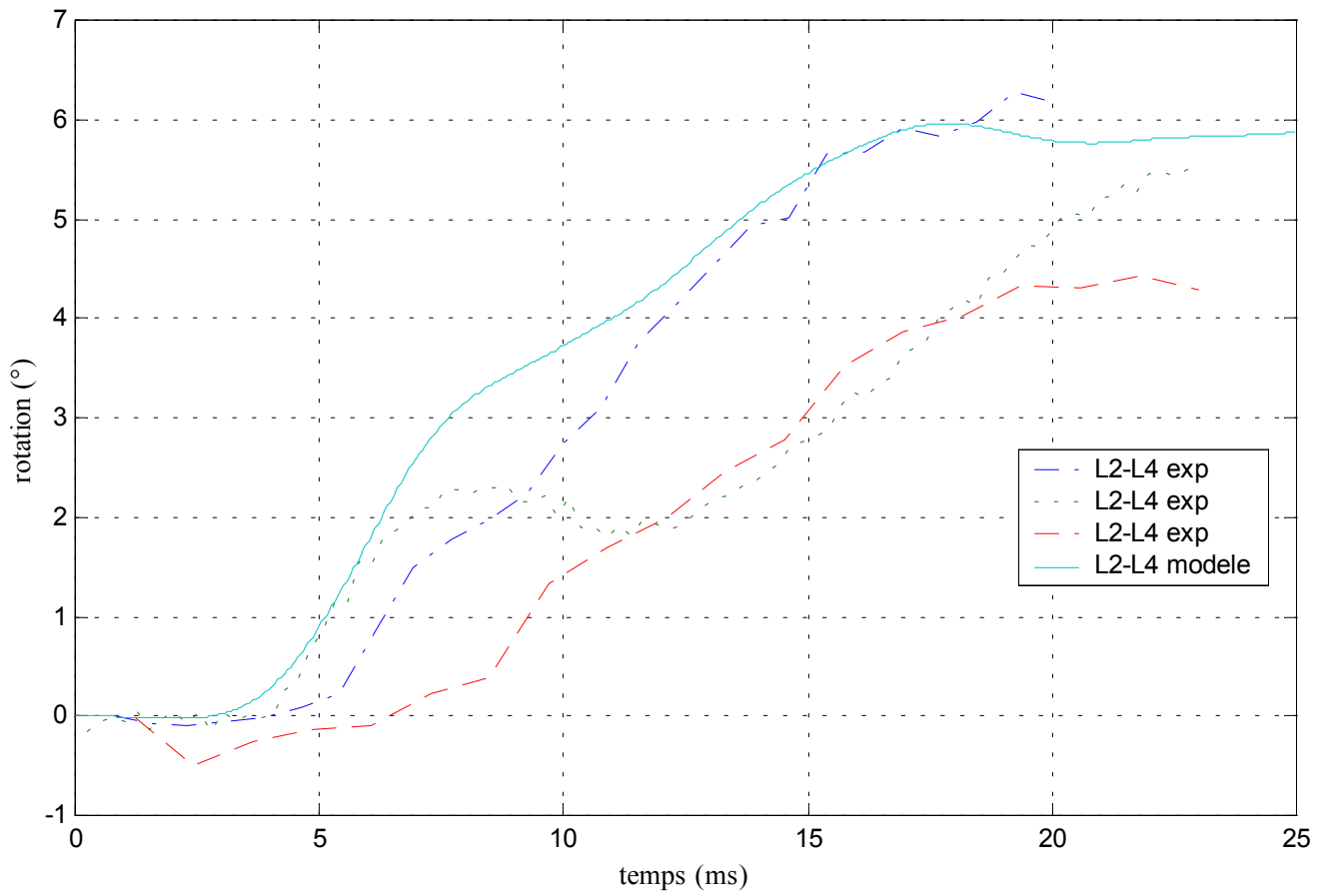


Figure 309: corridor expérimental des angles principaux de rotation de la vertèbre centrale et réponse du modèle

Tableau 72 : efforts et moments maximaux au centre du corps vertébral de la vertèbre inférieure

F_x (N)	F_y (N)	F_z (N)	M_x (N.m)	M_y (N.m)	M_z (N.m)
1070	0	2115	0	-16	0

H. L2-L4 : inflexion

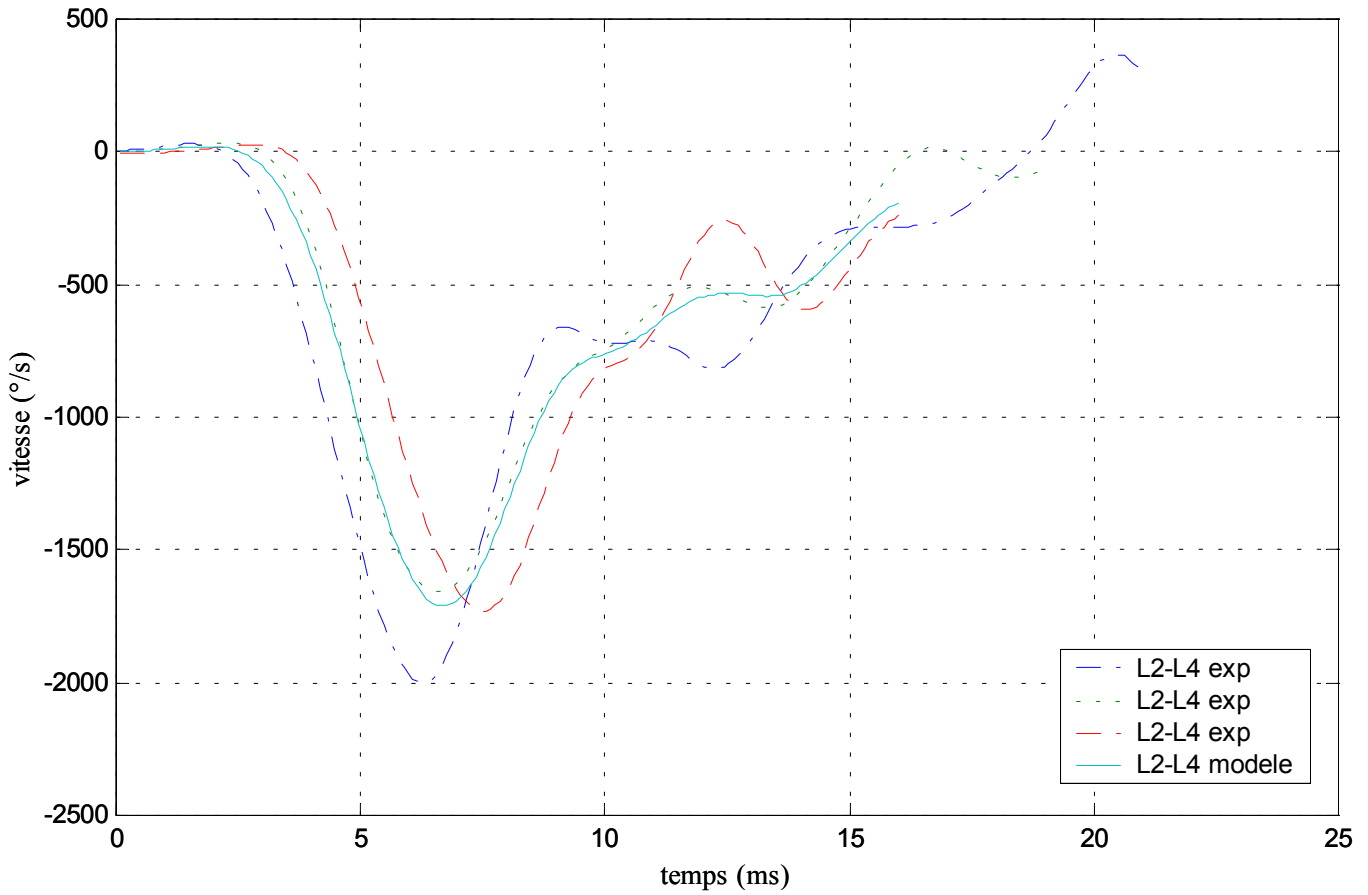


Figure 310: corridor des vitesses angulaires de la vertèbre supérieure et vitesse angulaire appliquée au modèle

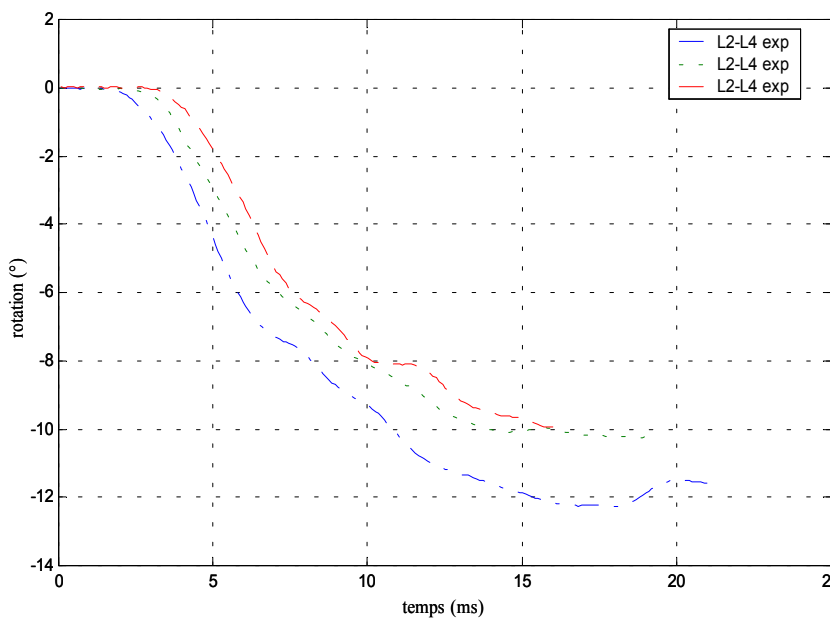


Figure 311: corridor des angles de rotation de la vertèbre supérieure

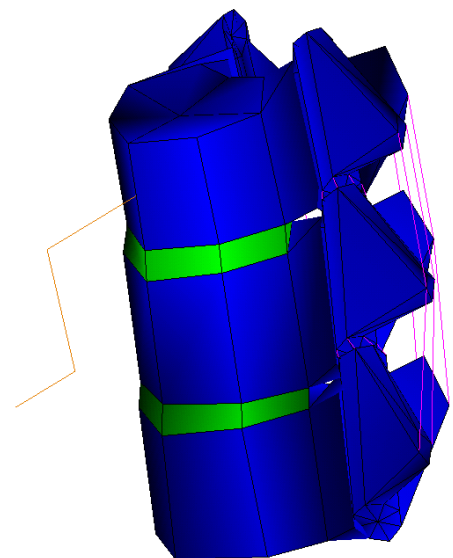


Figure 312 : modèle de L2-L4 en inflexion

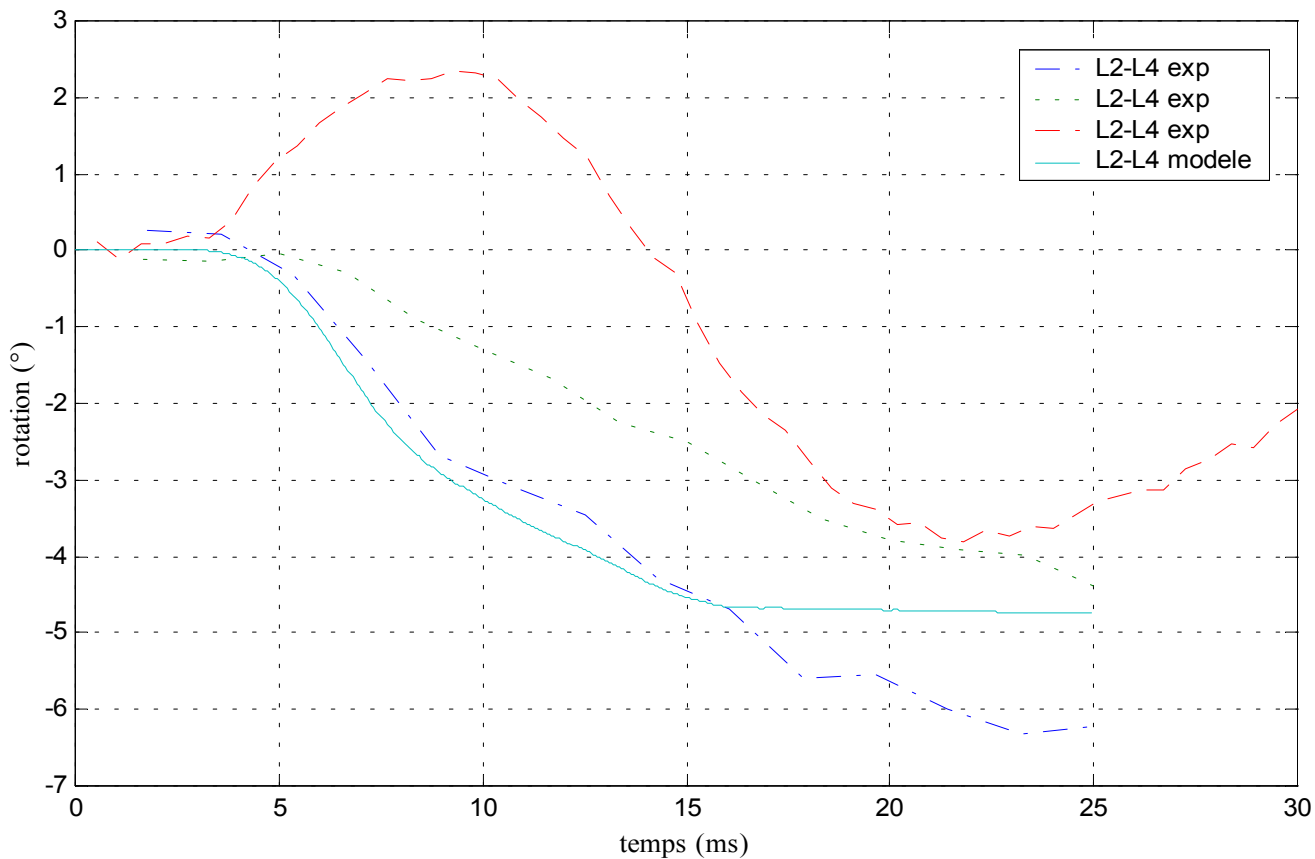


Figure 313: corridor expérimental des angles principaux de rotation de la vertèbre centrale et réponse du modèle

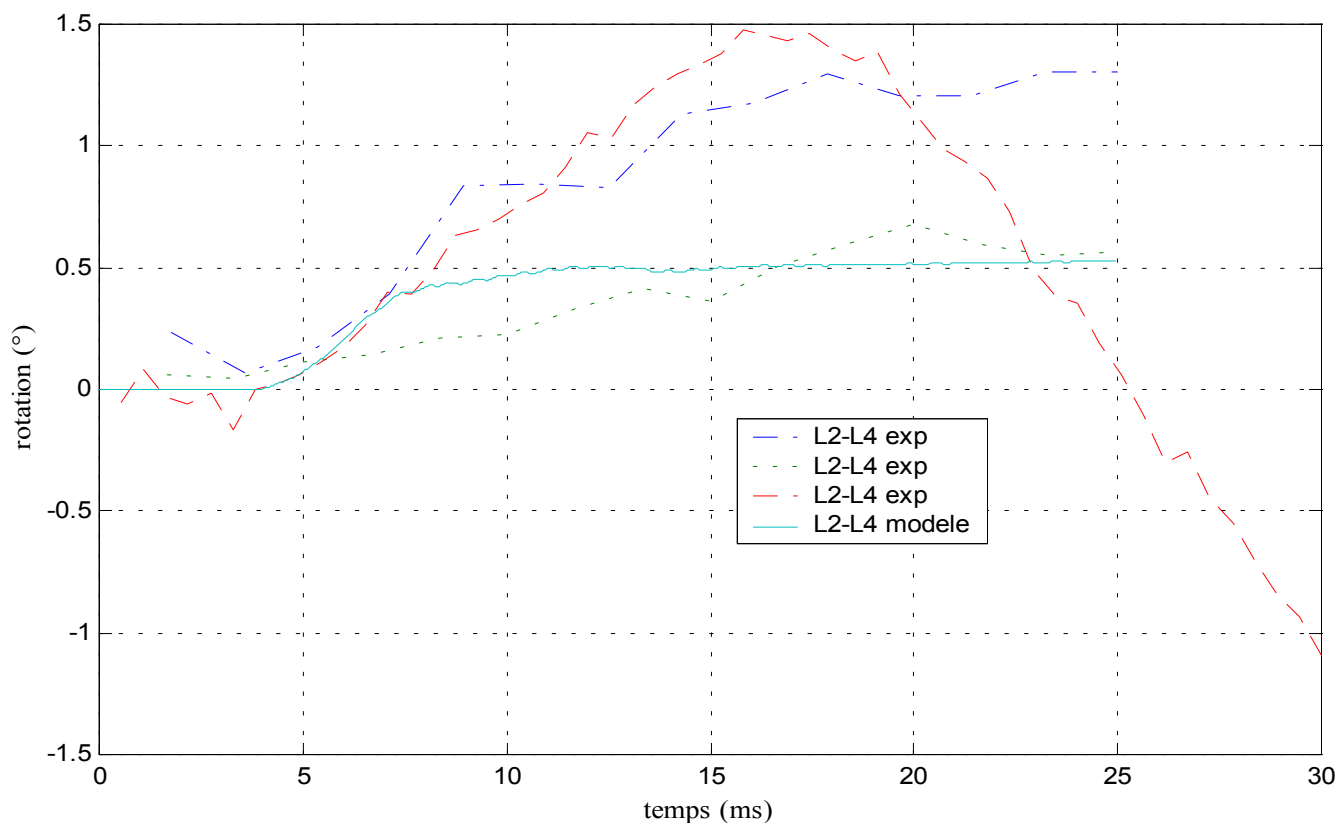


Figure 314: corridor expérimental des angles secondaires de rotation de la vertèbre centrale et réponse du modèle

Tableau 73 : efforts et moments maximaux au centre du corps vertébral de la vertèbre inférieure					
F_x (N)	F_y (N)	F_z (N)	M_x (N.m)	M_y (N.m)	M_z (N.m)
-600	2500	2000	23	13	-100

I. L2-L4 : torsion

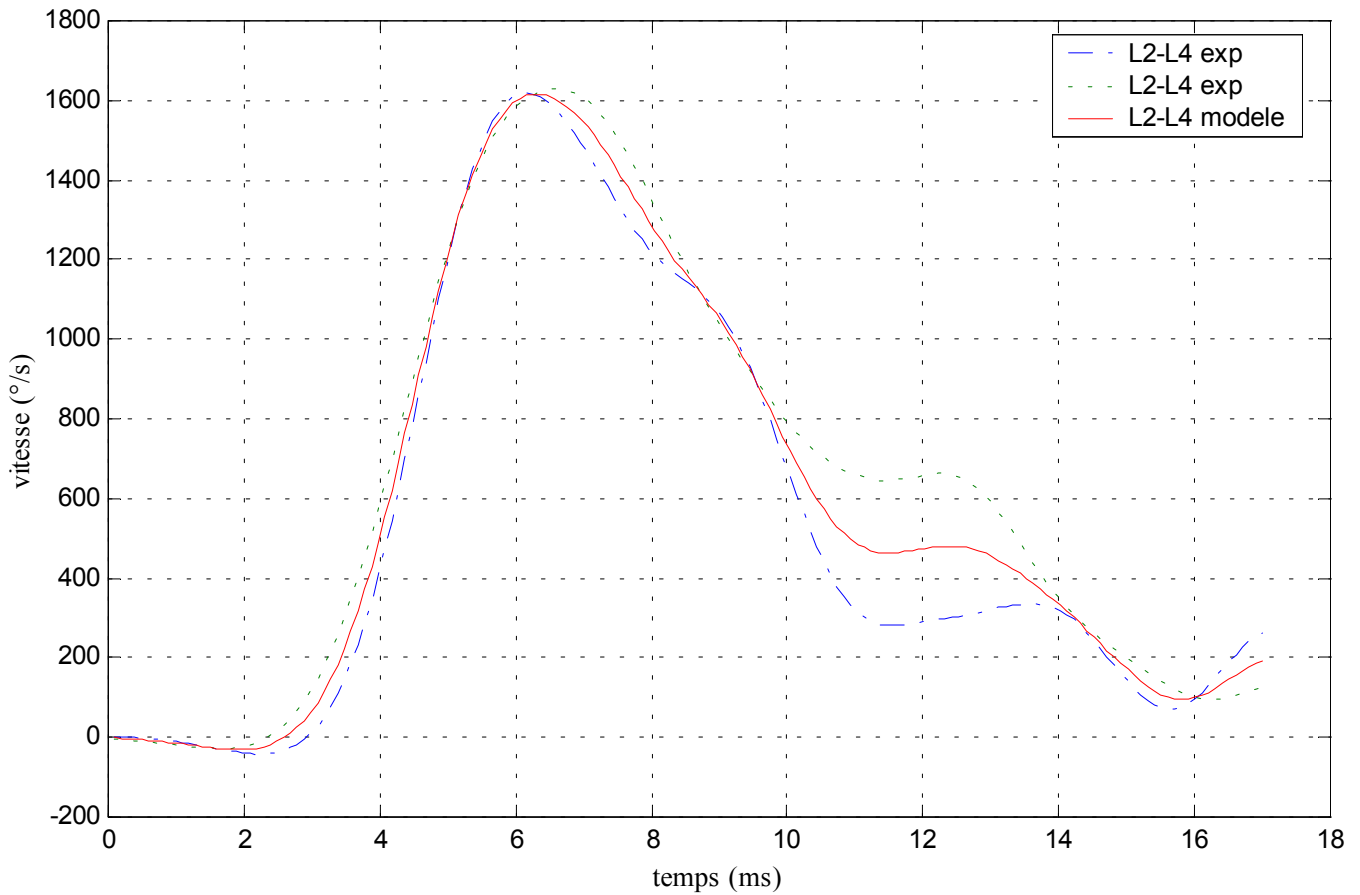


Figure 315: corridor des vitesses angulaires de la vertèbre supérieure et vitesse angulaire appliquée au modèle

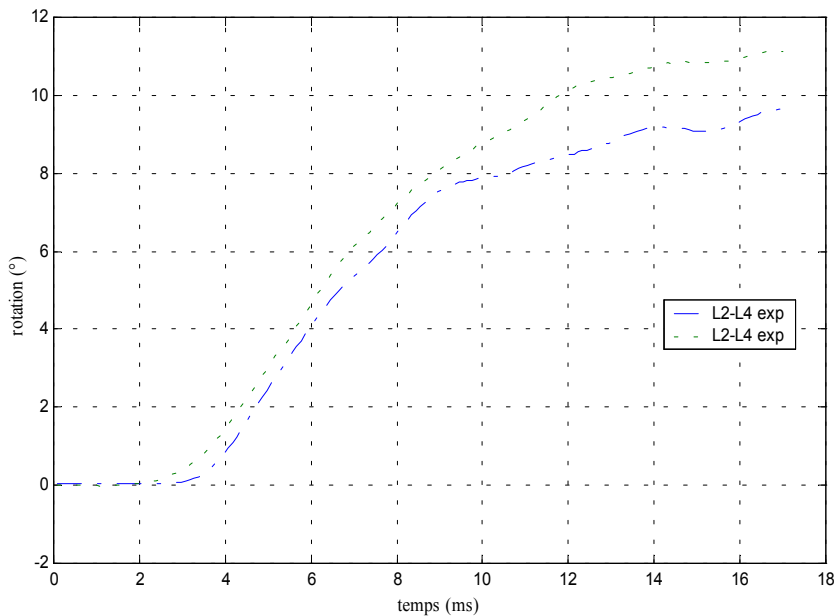


Figure 317: corridor des angles de rotation de la vertèbre supérieure

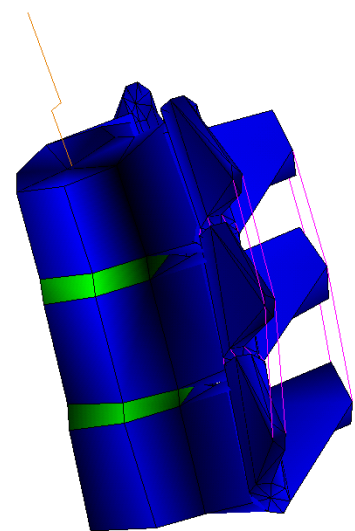


Figure 316 : modèle de L2-L4 en torsion

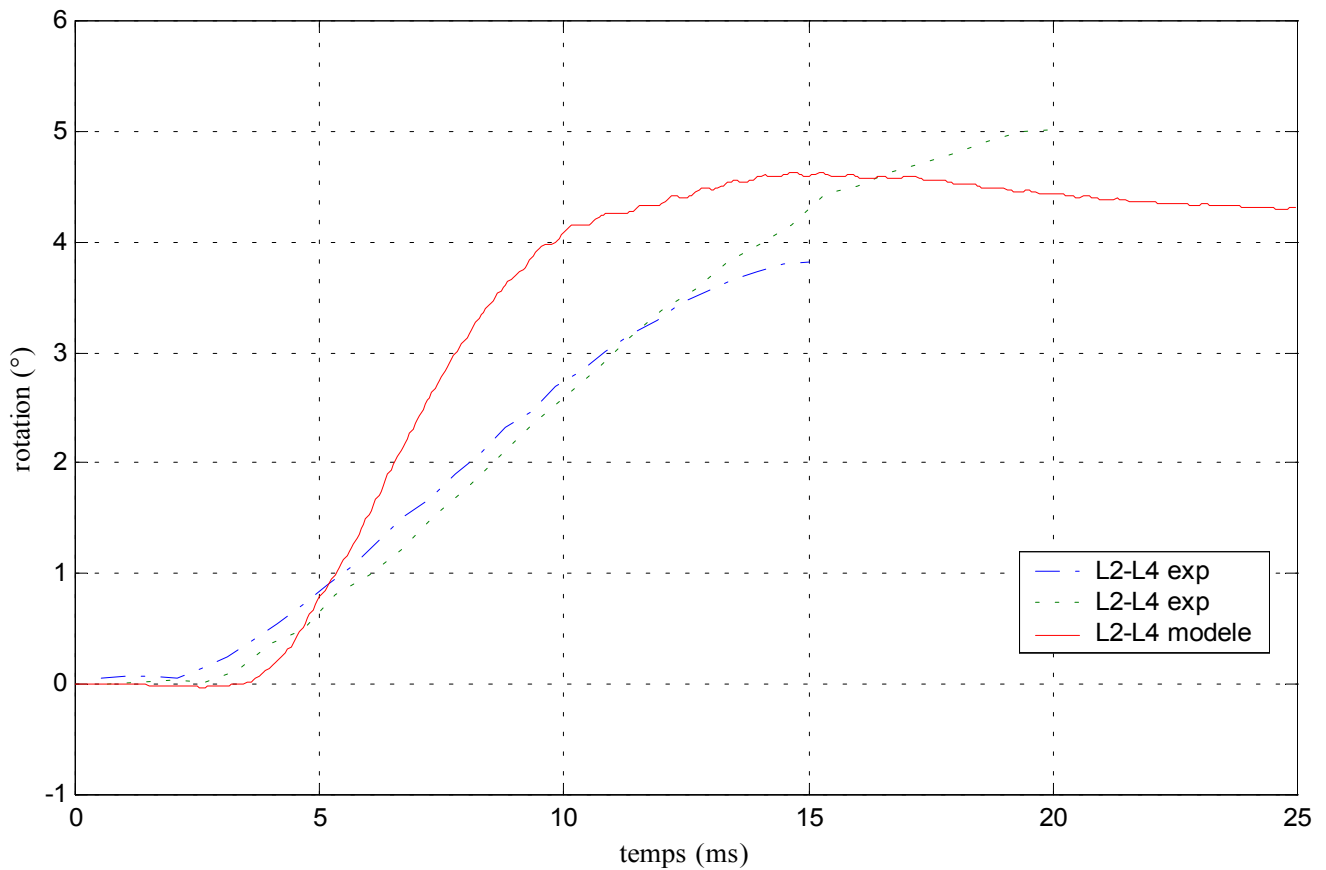


Figure 318: corridor expérimental des angles principaux de rotation de la vertèbre centrale et réponse du modèle

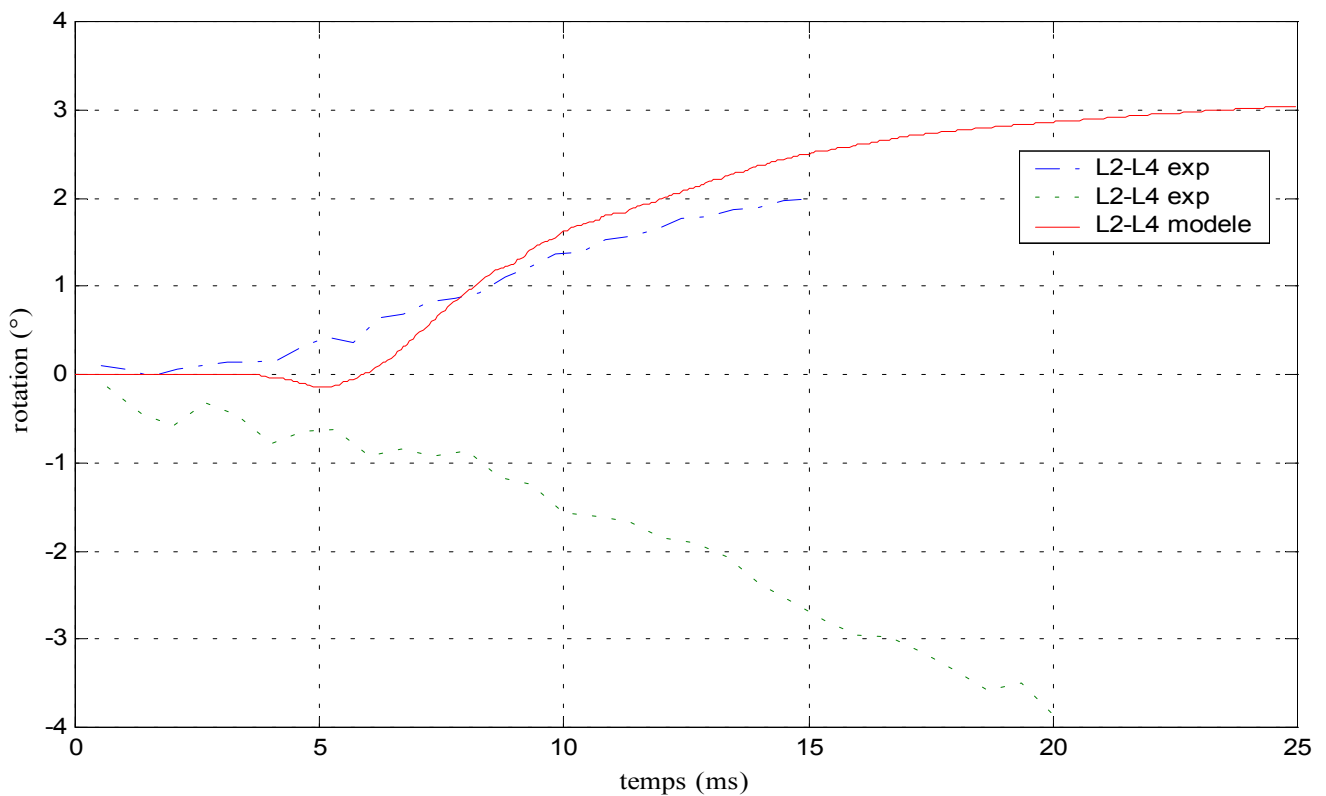


Figure 319: corridor expérimental des angles secondaires de rotation de la vertèbre centrale et réponse du modèle

Tableau 74 : efforts et moments maximaux au centre du corps vertébral de la vertèbre inférieure					
F_x (N)	F_y (N)	F_z (N)	M_x (N.m)	M_y (N.m)	M_z (N.m)
-3000	2400	4200	-100	50	-500

4- Validation qualitative globale dynamique

L'objectif de cette étude est de vérifier la stabilité du modèle dans sa globalité (rachis thoracique et lombaire) pour des sollicitations dynamiques. Les animations fournies par le logiciel de calcul RADIOSS servent comme preuve de cette stabilité numérique.

La vertèbre L5 est encastrée et la vertèbre T1 est sollicitée par une vitesse initiale. Nous avons cherché à modéliser un choc automobile frontal, latéral au niveau du passager et un choc latéral sur l'avant d'une voiture qui induit une rotation de la voiture autour d'elle-même. Le choc frontal génère la flexion, le choc latéral, l'inflexion latérale et le choc latéral avant, la torsion.

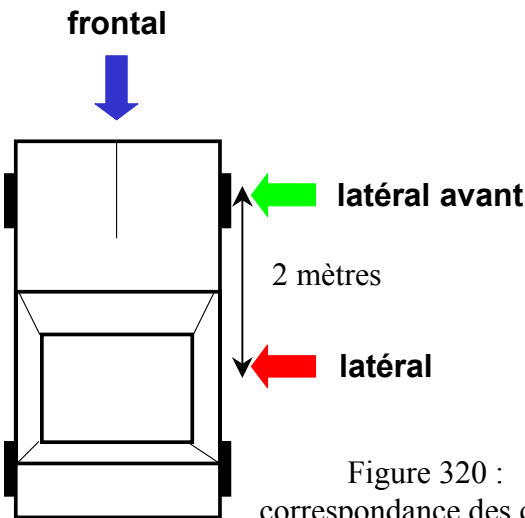
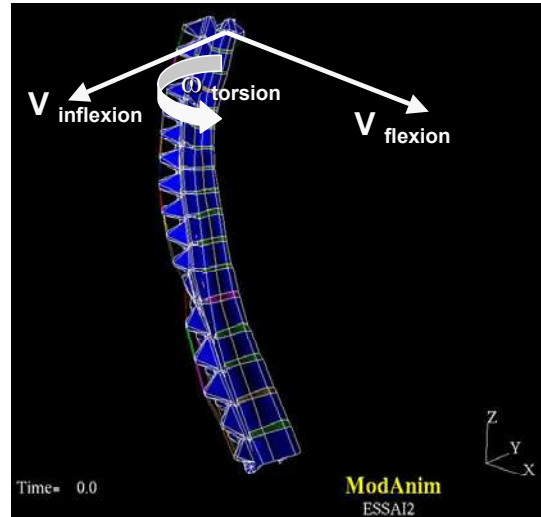


Figure 320 :
correspondance des chocs



Lors d'un crash-test, les vitesses d'homologation sont de l'ordre de 50 km/h. Etant donné que nous n'avons pas modélisé les tissus mous amortissant (muscles, viscères), nous avons choisi une valeur de 36 km/h (10 m/sec) pour le choc frontal et les chocs latéraux.

L'image de gauche donne la position avant le choc et l'image de droite la position après le choc.

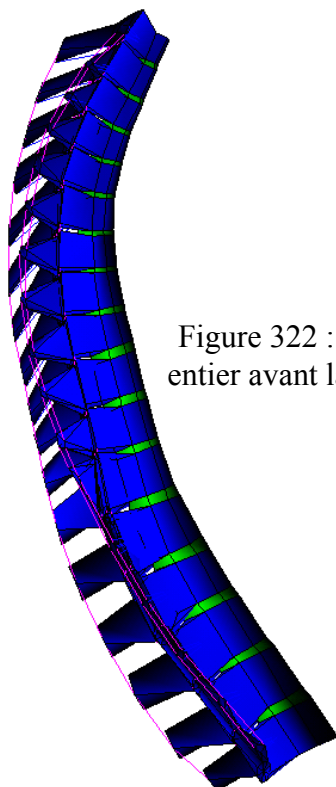


Figure 322 : modèle
entier avant la flexion

Flexion :
Choc frontal

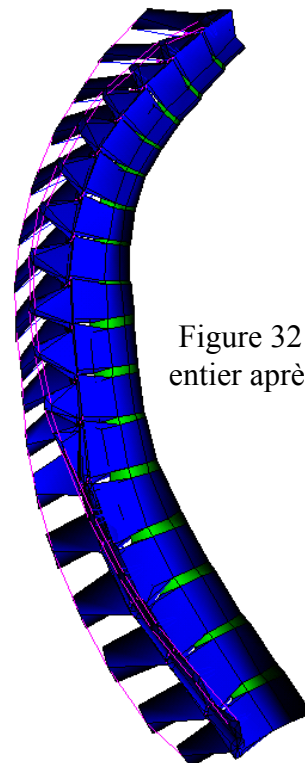


Figure 321 : modèle
entier après la flexion

Inflexion :
Choc latéral

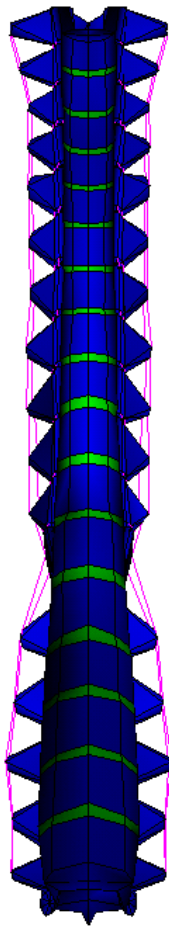


Figure 324 : modèle entier avant l'inflexion

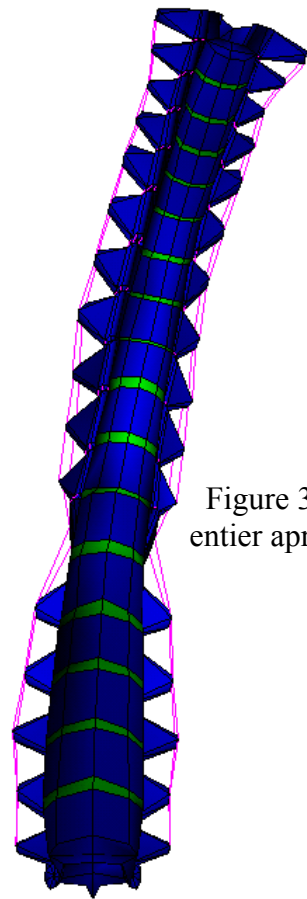


Figure 323 : modèle entier après l'inflexion

Torsion :
Choc latéral avant

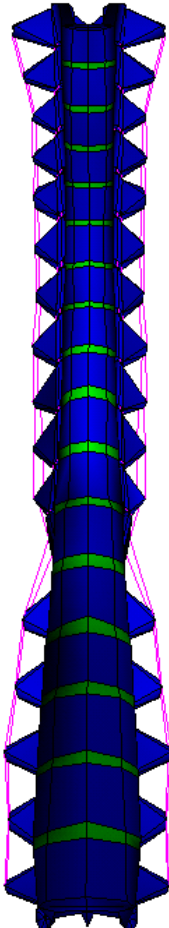


Figure 325 : modèle entier avant la torsion

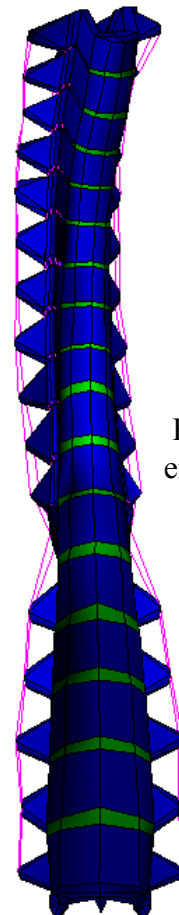


Figure 326 : modèle entier après la torsion

5- Conclusions sur la validation dynamique

La validation **statique**, qui a été abordé au cours d'un chapitre précédent, a porté sur les éléments suivants :

- Segments T3-T4 en position debout : Flexion, extension, inflexion latérale et torsion.
- Segments T7-T8 en position debout : Flexion, extension, inflexion latérale et torsion.
- Segments T12-L1 en position debout : Flexion, extension, inflexion latérale et torsion.
- Segments L3-L4 en position debout : Flexion, extension, inflexion latérale et torsion.
- Modèle total en position assise : Flexion, inflexion latérale et torsion

La validation **dynamique** en position assise qui vient d'être détaillée a porté sur les éléments suivants :

- Segments T7-T9 : Flexion, inflexion latérale et torsion.
- Segments T11-L1 : Flexion, inflexion latérale et torsion.
- Segments L2-L4 : Flexion, inflexion latérale et torsion.
- Modèle total : Flexion, inflexion latérale et torsion

Lors de cette phase dynamique, nous avons utilisé une partie des données recueillies lors de la campagne d'essais. Cette validation s'est faite uniquement sur un plan cinématique et non pas lésionnelle. Nous avons utilisé pour cela les données relatives à la vertèbre centrale. La validation lésionnelle, qui doit faire appel aux informations des capteurs 6 axes et à celles liées aux sections ligamentaires, reste à faire.

Nous avons utilisé un seul jeu de paramètres par unité fonctionnelle quel que soit le type de sollicitation et nous avons seulement modifié les paramètres dynamiques (G_0 et β) du disque pour caler les modèles. Les paramètres statiques (K , G_i , A_j , A_e , A_t et A_f) n'ont plus été touchés. Par exemple, l'unité L3-L4 donne des résultats cohérents par rapport aux expérimentations que ce soit en statique ou en dynamique et quelle que soit la sollicitation sans que l'utilisateur n'ait à modifier les lois de comportement.

Les résultats fournis par les modèles de segments vertébraux sont déjà satisfaisants. En effet, en fin de simulation, les courbes se situent pratiquement toutes dans les corridors expérimentaux. Les moins bons résultats sont relatifs à la rotation secondaire de la vertèbre T8 en torsion où la simulation est en dehors de tout corridor. Néanmoins, la rotation principale de cette dernière fournit de bons résultats.

La difficulté majeure que nous avons rencontrée pendant cette étude porte sur l'absence de décalage temporel entre le début du mouvement de la vertèbre supérieure et le début du mouvement de la vertèbre centrale. Ce dernier, observé expérimentalement, n'apparaît pas systématiquement au niveau des réponses du modèle. En résolvant ce problème, nous pourrions biofidéliser davantage le comportement de ce modèle en faisant correspondre les réponses numériques avec les corridors expérimentaux tout au long des simulations.

CONCLUSION GENERALE

La démarche que nous avons adoptée au cours de ces trois années a permis d'élaborer un modèle tridimensionnel de rachis thoracique et lombaire qui soit utilisable sous sollicitations statiques et dynamiques dans le domaine de validation. La caractéristique de ce modèle est de faire apparaître les structures ligamentaires principales (ligaments épineux, transverses, jaunes et capsulaires) ainsi que les facettes articulaires qui permettent d'accéder aux phénomènes de couplages intervertébraux en flexion, extension, inflexion et torsion. Cette partie a nécessité un important travail de modélisation géométrique.

Après étude de la littérature, nous avons conclu que l'apport de la bibliographie était considérable mais inadapté à nos besoins. Nous ne pouvions donc pas nous appuyer sur cette dernière pour valider en dynamique le modèle de colonne vertébrale. Cette validation dynamique a été rendue possible grâce à une base de données expérimentales établie au cours du projet. Ces essais ont été faits sur une vingtaine de segments rachidiens de trois vertèbres ce qui correspond à une centaine de tests statiques et dynamiques confondus. Nous avons pour cela réalisé deux bancs d'essais : le premier permettant de prendre connaissance des axes instantanés de rotation d'un spécimen quelconque et le second d'appliquer des sollicitations dynamiques (flexion, inflexion ou torsion) sous formes de vitesses angulaires imposées en configuration quasi pure. Ces montages originaux sont accompagnés d'un système de mesure inédit qui, à l'aide d'un étrier fixé sur la vertèbre centrale laissée libre, permet de connaître les trois rotations et les trois translations de cette vertèbre dans l'espace et, ainsi, d'avoir connaissance des couplages vertébraux. Les résultats de ces expérimentations sont présentés, pour chaque spécimen, sous forme de courbes et de tableaux reprenant les valeurs maximales de ces graphes.

Cette campagne expérimentale a été suivie d'une phase de validation du modèle de rachis thoracique et lombaire réalisé au cours de la thèse.

Cette phase s'est déroulée suivant deux axes : le premier a consisté à valider en statique des segments de deux vertèbres issus du modèle suivant les 4 modes principaux de sollicitation (flexion, extension, inflexion et torsion) à l'aide de données issues de la littérature. Cette validation, d'ordre cinématique, permet d'identifier par rapport aux expérimentations l'angle de rotation principal de la vertèbre supérieure. Le second axe est centré sur la réponse dynamique de segments de trois vertèbres du modèle, en flexion, inflexion et torsion et nous avons exploité les résultats des essais effectués durant la thèse. Cette validation est aussi d'ordre cinématique et elle permet d'identifier les angles principaux et secondaires de rotation de la vertèbre centrale par rapport aux expérimentations.

La particularité de ce modèle est d'être utilisable sous des sollicitations statiques et dynamiques sans pour autant changer les paramètres des lois de comportement. Par ailleurs, la validation de ce modèle pour les trois sollicitations principales permet d'envisager une utilisation de ce dernier en sollicitations composées que l'on rencontre lors de chocs automobiles.

Enfin, une étude complémentaire a été réalisée sur le modèle de colonne dans sa totalité afin de vérifier sa stabilité numérique. Nous l'avons sollicité en flexion, inflexion et torsion à deux niveaux de vitesses : un premier niveau (de l'ordre de quelques dizaines de degrés par seconde) est qualifié de quasi statique et un second niveau qui correspond à des vitesses de crash automobile.

L'identification des paramètres du modèle pour les autres unités vertébrales passe obligatoirement par de nouveaux tests en statique et en dynamique suivant un protocole précis et détaillé. En effet, peu de données bibliographiques ont fourni des résultats expérimentaux exploitables et accompagnés d'un protocole précis qui auraient pu permettre leur utilisation en modélisation. Il existe pour cela plusieurs alternatives : La première serait de poursuivre l'exploitation du protocole actuel, précis et éprouvé, et de son système de mesure qui a l'avantage de suivre un objet dans les trois directions de l'espace et donc de fournir les couplages vertébraux. Une autre possibilité consisterait à faire usage d'une caméra rapide qui, actuellement, permet d'obtenir des images numériques de très bonnes qualités et directement exploitables. L'inconvénient majeur réside dans le fait qu'elle ne fournit des résultats que dans un plan. L'accès à la troisième dimension nécessite d'utiliser deux caméras ce qui demande un budget conséquent.

Concernant le modèle, il faut à présent effectuer sa validation lésionnelle en exploitant les données expérimentales des capteurs 6 axes ainsi que les informations apportées par les sections ligamentaires en terme de charges au niveau de la vertèbre supérieure et inférieure et de trajectoire de la vertèbre centrale. Ce travail nous amènera peut-être à modifier les paramètres des lois de comportements du modèle voir à changer de lois de comportements. Il nécessitera éventuellement, d'améliorer la modélisation des vertèbres en ne les considérant plus comme corps rigides mais comme solides déformables où seront représentées les parties spongieuses et corticales. Lorsque la validation lésionnelle sera effectuée, il restera à intégrer le modèle de colonne thoracique et lombaire au sein du modèle « être humain » de façon à avoir des informations lésionnelles précises de la colonne vertébrale lors d'une simulation de crash.

Le traitement de la problématique principale de cette étude par étapes successives, dont les hypothèses simplificatrices sont clairement identifiées, a donc apporté une quantité importante de résultats intermédiaires directement exploitables par les constructeurs automobiles, les concepteurs de mannequins, les législateurs ou les développeurs de codes de calculs dédiés à l'étude de la sécurité automobile.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

[BER-1] : M. Bernhardt et coll

Segmental analysis of the sagittal plane alignment of the normal thoracic and lumbar spines and thoracolumbar junction
Spine 1989 ; 14 (7) ; pp 717-721

[BERT-2] : N. Bertholon.

Modélisation 3D du cou humain en situation de chocs omnidirectionnels. Analyse cinématique et aspects lésionnels
Thèse 1999 (230 p.) ; LAB (PSA-RENAULT, Nanterre) – LBM (ENSAM Paris)

[CAB-3] : C. Cabrol

Anatomie (tome1)
Edition flammarion Medecine – sciences

[CES-4] : Cesari et coll.(inrets)

Behaviour of human surrogates thorax under belt loading.
34^{ème} Stapp 1990 ; SAE paper 902310

[CHA-5] : Chazal et coll.

Biomechanical properties of spine ligaments
J. biomech. 1985 ; 18 (3) ; pp 167-176

[CYR-6] : Cyron et coll.

The tensile strenght of the capsular ligaments
J. anat. 1981 ; 132(1) ; pp 145-150

[DAU-7] : Dauvilliers et coll.

Development of a finite element model of the neck
38^{ème} Stapp 1994 ; SAE paper 942210

[DEM-8] : Demetropoulos et coll.

Mechanical properties of the cadaveric and hybrid III lumbar spines.
42^{ème} Stapp 1998 ; SAE paper 983160

[DES-9] : J. L. Descrimes

Modélisation par éléments finis du rachis et de la cage thoracique pour l'étude des déformations scoliotiques
Thèse 1995 (165 p.) ; Laboratoire de biomécanique (LBM, ENSAM Paris)

[DIM-10] : Dimnet et coll.

Radiographic studies of lateral flexion in the lumbar spine
J. biomech. 1978 ;11 (3) ; 959-969

[ESC-11] : Escande et coll.

Elements de biomécanique vertébrale
63^{ème} congrès de l'association des anatomistes, 1980 ; pp 82-111

[GIL-12] : Gilad et coll.

A study of vertebra and disc geometric relations of the human cervical and lumbar spine
Spine 1986 ; 11(2) ; pp 154-157

[GOE-13] : Goel et coll.

Investigation of vibration characteristics of the ligamentous lumbar spine using the finite element approach.
J Biomech Eng. 1994 ; 116(4) ; pp 377-383

[GOE-14] : Goel et coll.

Load sharing among spinal elements of a motion segment in extension and lateral bending
J. biomed. Engng ; 10 ; pp 291-297

[HAH-15] : R. Hafer et coll.

Instantaneous axis of rotation as a fonction of the three columns of the spine
Spine 1992 ; 17 (6S) ; pp 149-154

[HAK-16] : Hakim et coll.

Static and dynamic articular facet loads.
20^{ème} Stapp 1976 ; SAE paper 760819

[HAK-17] : Hakim et coll.

A three dimensional finite element dynamic response analysis of a vertebra with experimental verification.
J Biomech. 1979 ; 12 ; pp 277-292.

[HAN-18] : Hansson et coll.

Mechanical behavior of the human lumbar spine. II. Fatigue strength during dynamic compressive loading.
J Orthop Res. 1987 ; 5(4) ; pp 479-487

[HIR-19] : Hirsch et coll.

Laboratory conditions for tensile tests in annulus fibrosus from human intervertebral discs
Acta orthop scand 1967 ; 38 (2) ; pp 148-162

[IMP-20]

Procédure d'essai d'un implant rachidien
Laboratoire de biomécanique 1997 (LBM, ENSAM Paris)

[KAP-21] : Kapandji

Physiologie articulaire (tome 3)
Edition Maloine

[KOU-22] : W. Koubaa

Modélisation géométrique et mécanique par éléments finis du rachis thoracique
Thèse 1995 (252 p.) ; LAB (PSA-RENAULT, Nanterre) – LBM (ENSAM Paris)

[KRO-23] : Kroell et coll.

Impact tolerance and response of the human thorax II.
18^{ème} Stapp 1974 ; SAE paper 741187

[LEG-24] : Legaye et coll.

La mobilité sagittale du rachis lombaire, « étude radio-clinique des axes de mouvement intervertébraux »
Rachis 1996 ; 8 (3) ; pp 121-128

[LEP-25] : Lepoutre et coll.

Human posture modelisation as a problem of inverse kinematic of redundant robots
Robotica 1993 ; volume 11 ; pp.339-343

[LIZ-26] : Lizée et coll.

Development of a 3D finite element of the human body
42^{ème} Stapp 1998 ; SAE paper 983152

[LOR-27] : Lord et coll.

Effects of sitting and standing
Spine 1997 ; 22 (21) ; pp 2571-2574

[LOU-28] : Louis et coll.

Chirurgie du rachis : anatomie chirurgicale et voies d'abord
Deuxième édition revue et augmentée. Springer-Verlag

[MAR-29] : Marchand et coll.

Investigation of the laminate structure of lumbar disc anulus fibrosus.
Spine 1990 ; 15(5) ; pp 402-410

[MOM-30] : Momersteeg et coll.

The effect of variable relative insertion orientation of human knee bone-ligament-bone complexes on the tensile stiffness.
J. biomech. 1995 ; 28 (6) ; pp 745-752.

[MYK-31] : Myklebust et coll.

Tensile strength of spinal ligaments
Spine 1988 ; 13 (5) ; pp 526-531

[NAH-32] : Nahum et coll.

Deflection of the human thorax under sternal impact
International automobile safety conference: P-30 ; SAE paper 700400

[NAT-33] : Natali et coll.

Nonlinear analysis of intervertebral disk under dynamic load.
J Biomech Eng. 1990 ; 112(3) ; pp 358-363

[NEU-34] : Neumann et coll.

A dynamic in vitro study of flexion-distraction injury
Spine 1995 ; 20(10) ; pp 1111-1121

[NIG-35] : *Nightingale et coll.*

The influence of end conditions on human cervical spine injury
35^{ème} Stapp 1991 ; SAE paper 912915

[NYQ-36] : *Nyquist et coll.*

Lumbar and pelvic orientations of the vehicle seated volunteer
20^{ème} Stapp 1976 ; SAE paper 760821

[OGO-37] : *Ogon et coll.*

A dynamic approach to spinal instability. Part I: Sensitization of intersegmental motion profiles to motion direction and load condition by instability.
Spine 1997 ; 22(24) ; pp 2841-58.

[OSV-38] : *Osvalder et coll.*

A method for studying the biomechanical load response of the (in vitro) lumbar spine under dynamic flexion-shear loads
J Biomech. 1993 ; 26 ; pp 1227-1236.

[OXL-39] : *Oxland et coll.*

Three-dimensional mechanical properties of the thoracolumbar junction
J. orthop. Res. 1992 ; 10 (4) ; pp 573-580

[PAN-40] : *Panjabi et coll.*

Thoracic spine centers of rotation in the sagittal plane
J. orthop. Res. 1984 ; 1(4) ; pp 387-394

[PAN-41] : *Panjabi et coll.*

Mechanical behavior of the human lumbar and lumbosacral spine as shown by three dimensional load displacement curves
J. of bone and joint surgery 1994 ; 76A(3) ; pp 413-424

[PAN-42] : *Panjabi et coll.*

Mechanical properties of the human thoracic spine
J. of bone and joint surgery 1976 ; 58A(5) ; pp 642-652

[PAN-43] : *Panjabi et coll.*

Cervical spine mechanics as a function of transection of components
J. biomech. 1975 ; 8 ; pp 327-336.

[PEA-44] : *Pearcy et coll.*

Axial rotation and lateral bending in the normal lumbar spine measured by 3d radiography.
Spine 1984 ; 9(6) ; pp 582-587

[PEA-45] : *Pearcy et coll.*

Instantaneous axes of rotation of the lumbar intervertebral joints
Spine 1988 ; 13(9) ; pp 1033-1041

[PLA-46] : Plank et coll.

An improved finite element model of the human thorax.
13^{ème} ESV 1991 ; SAE paper 916117

[POO-47] : Pooni & coll.

Comparison of the structure of human intervertebral discs in the cervical, thoracic and lumbar regions of the spine
*Surgical radiologic anatomy.*1986 ; 8 ; pp 175-182

[POU-48] : Poujol et château

Analyse d'implant rachidien
Projet de fin d'étude 1997-98 ; Laboratoire de biomécanique (LBM, ENSAM Paris)

[ROB-49] : Robbins et coll.

Seated posture of vehicle occupants
27^{ème} Stapp 1983 ; SAE paper 831617

[ROC-50] : Rockoff et coll.

The relative contribution of trabecular and cortical bone to the strength of human lumbar vertebrae
Calcil. Tissue Res. 1969 ; 3(1) ; pp 17-29

[ROL-51] : Rolland

Etude du rachis lombaire
DEA 1996 (103 p.) ; Laboratoire de biomécanique (LBM, ENSAM Paris)

[ROS-52] : Rostedt et coll.

Axial stiffness of human lumbar motion segments, force dependence.
J Biomech. 1998 ; 31(6) ; pp 503-9.

[ROU-53] : Rouviere et coll.

Anatomie humaine (descriptive, topographique et fonctionnelle) tome 2
13^{ème} édition Masson

[ROY-54] : Roy et coll.

Aspect cinématiques et dynamiques du comportement du rachis
Rachis 1995 ; 7(3) ; pp 129-134

[SEM-55] : Semaan et coll.

Anatomie quantitative tridimensionnelle du rachis lombaire
Revue de chirurgie orthopédique ; vol. 87 ; pp 340-353

[STA-56] : Stalnaker et coll.

Human torso response to blunt trauma
Symposium « human impact response measurement and simulation » 1973

[TAD-57] : Tadano et coll.

A constitutive modeling of the human lumbar intervertebral disc and forward-backward bending simulation.

Biomed Mater Eng. 1997 ; 7(3) ; pp 179-91.

[TAG-58] : Pillet

Les plans d'expériences par la méthode Taguchi

Les éditions d'organisations

[TKA-59] : Tkaczuk et coll.

Tensile properties of human lumbar longitudinal ligaments

Thèse 1968 ; Acta orthop scand suppl ; No 115

[VIA-60] : Viano et coll.

Biomechanics of the human chest, abdomen and pelvis in lateral impact

12^{ème} ESV 1989 ; pp 943

[WHI-61] : White et coll.

Significance of the vertebral posterior elements

Clin orthop 1971 ; 81 ; pp 2-14

[WIL-62] : Wilke et coll.

Are sheep spines a valid biomechanical model for human spines

Spine 1997 ; 22(20) ; pp 2365-2374

[WIL-63] : Willems et coll.

An in vivo study of the primary and coupled rotations of the thoracic spine

Clin. Biomech. 1996 ; 11 (6) ; pp 311-316.

Adresses internet :

Laboratoire de biomécanique : <http://bio-web.paris.ensam.fr/>

Medline : <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/PubMed/>

Stapp : <http://www.stapp.org/>

Ircobi : <http://www.ircobi.org/>

Esv : <http://www.esv2001.com/>

Aaam : <http://www.carcrash.org/>

Spine : <http://www.spinejournal.com/>

Journal of biomechanics : <http://www.jbiomech.com/>

Journal of biomechanical engineering : <http://www.asme.org/pubs/bioeng/bioeng.htm>

The visible human : <http://www.npac.syr.edu/projects/vishuman/VisibleHuman.html>

Logiciels utilisés :

Radioss : <http://www.radioss.com/>

Ansys : <http://www.ansys.com/>

Solid dynamics (SDS) : <http://www.solid-dynamics.fr/france/index.html>

École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers
Centre de Paris

THÈSE

Présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR

DE

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
D'ARTS ET MÉTIERS

SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE

Par

Frédéric DELERBA

MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE ET MÉCANIQUE
TRIDIMENSIONNELLE DU RACHIS THORACIQUE ET LOMBAIRE
EN CONFIGURATION DE CHOC AUTOMOBILE

ANNEXES

TABLE DES MATIERES

I- BIBLIOGRAPHIE : TABLEAUX COMPARATIFS	1
1- EXPÉRIMENTATIONS	1
2- MODÉLISATION.....	5
II- VERIFICATION DU MODELE GEOMETRIQUE	6
III- CAHIER DES CHARGES ET PROPOSITIONS DE MONTAGE	15
1- CAHIER DES CHARGES DU BANC DYNAMIQUE	15
A. <i>Aspect préliminaire</i>	15
B. <i>Sollicitation en déplacement</i>	16
C. <i>Mesures</i>	16
D. <i>Surveillance de l'essai</i>	17
E. <i>Réglage du moyen d'essai et mise en position du spécimen</i>	17
F. <i>Mode opératoire</i>	17
G. <i>Contraintes</i>	18
H. <i>Schéma cinématique du montage</i>	19
2- LES TYPES DE MONTAGES PROPOSÉS	20
A. <i>Montages à énergie imposée</i>	20
B. <i>Montages à déplacements imposés</i>	27
IV- ASPECTS THEORIQUES	29
1- THÉORIE LIÉE AUX DÉPLACEMENTS D'UN SOLIDE DANS L'ESPACE	29
2- THÉORIE DU CADRE DE MESURE 8 CAPTEURS	31
A. <i>Présentation</i>	31
B. <i>Utilisation de trois tiges des quatre tiges</i>	31
C. <i>Utilisation des quatre tiges</i>	34
3- THÉORIE DU CADRE DE MESURE 9 CAPTEURS	41
A. <i>Présentation</i>	41
B. <i>Utilisation des quatre tiges</i>	42
V- CODE DES ALGORITHMES	46
1- ALGORITHME DE DÉPLACEMENT DANS L'ESPACE.....	46
A. <i>Organigramme</i>	46
B. <i>Résumé</i>	47
C. <i>Code</i>	48
2- ALGORITHME LIÉ AU CADRE DE MESURE À 8 CAPTEURS.....	59
A. <i>Organigramme</i>	59
B. <i>Résumé</i>	60
C. <i>Code</i>	61
3- ALGORITHME LIÉ AU CADRE DE MESURE À 9 CAPTEURS.....	109
A. <i>Organigramme</i>	109
B. <i>Résumé</i>	110
C. <i>Code</i>	111
4- SCRIPT DE VERIFICATION DE L'ALGORITHME À 8 OU 9 CAPTEURS	120
VI- CAMPAGNE D'ESSAIS DYNAMIQUES : CONVENTIONS	126
1- REPÈRES D'INTERPRÉTATIONS	126
A. <i>Efforts et moments</i>	126
B. <i>Rotations et déplacements</i>	127
2- ESSAIS STATIQUES	129
3- ESSAIS DYNAMIQUES	129
VII- CAMPAGNE D'ESSAIS DYNAMIQUES : RESULTATS	132
1- ESSAI 01 – L2L4 – FLEXION	132
A. <i>Statique</i>	132
B. <i>Dynamique</i>	134
2- ESSAI 02 – T3T5 – FLEXION	138
A. <i>Statique</i>	138

<i>B. Dynamique</i>	140
3- ESSAI 03 – T11L1 – FLEXION	144
<i>A. Statique</i>	144
<i>B. Dynamique</i>	146
4- ESSAI 04 – L2L4 – FLEXION	150
<i>A. Statique</i>	150
<i>B. Dynamique</i>	152
5- ESSAI 05 – L2L4 – FLEXION	156
<i>A. Statique</i>	156
<i>B. Dynamique</i>	158
6- ESSAI 06 – L2L4 – INFLEXION.....	164
<i>A. Statique</i>	164
<i>B. Dynamique</i>	166
7- ESSAI 07 – L2L4 – INFLEXION.....	170
<i>A. Statique</i>	170
<i>B. Dynamique</i>	172
8- ESSAI 08 – L2L4 – INFLEXION.....	174
<i>A. Statique</i>	174
<i>B. Dynamique</i>	176
9- ESSAI 09 – T11L1 – INFLEXION.....	180
<i>A. Statique</i>	180
<i>B. Dynamique</i>	182
10- ESSAI 10 – T3T5 – INFLEXION.....	186
<i>A. Statique</i>	186
<i>B. Dynamique</i>	188
11- ESSAI 11 – T11L1 – INFLEXION.....	190
<i>A. Statique</i>	190
<i>B. Dynamique</i>	192
12- ESSAI 12 – T7T9 – INFLEXION.....	200
<i>A. Statique</i>	200
<i>B. Dynamique</i>	202
13- ESSAI 13 – T7T9 – FLEXION	206
<i>A. Statique</i>	206
<i>B. Dynamique</i>	208
14- ESSAI 14 – T11L1 – FLEXION	214
<i>A. Statique</i>	214
<i>B. Dynamique</i>	216
15- ESSAI 15 – T7T9 – FLEXION	222
<i>A. Statique</i>	222
<i>B. Dynamique</i>	224
16- ESSAI 16 – T11L1 – FLEXION	230
<i>A. Statique</i>	230
<i>B. Dynamique</i>	232
17- ESSAI 17 – T7T9 – INFLEXION.....	238
<i>A. Statique</i>	238
<i>B. Dynamique</i>	240
18- ESSAI 18 – T11L1 – INFLEXION.....	242
<i>A. Statique</i>	242
<i>B. Dynamique</i>	244
19- ESSAI 19 – L2L4 – TORSION	252
<i>A. Statique</i>	252
<i>B. Dynamique</i>	254
20- ESSAI 20 – L2L4 – TORSION	258
<i>A. Statique</i>	258
<i>B. Dynamique</i>	260
21- ESSAI 21 – T11L1 – TORSION	268
<i>A. Statique</i>	268
<i>B. Dynamique</i>	270
22- ESSAI 22 – T7T9 – TORSION	276
<i>A. Statique</i>	276
<i>B. Dynamique</i>	278
23- ESSAI 23 – T10T12 – TORSION	284
<i>A. Statique</i>	284
<i>B. Dynamique</i>	286
24- ESSAI 24 – T11L1 – TORSION	294
<i>A. Statique</i>	294
<i>B. Dynamique</i>	296

I- BIBLIOGRAPHIE : TABLEAUX COMPARATIFS

1- Expérimentations

Tableau 1

AUTEUR	SPECIMENS
HAKIM	6 segments lombaires différents (~L1-L5) avec le capteur en L2 ou L3. Précharge
NIGHTINGALE	23 rachis cervicaux (C0 à T1) congelés
OSVALDER	20 unités L1-l2 ou L3-L4 congelées. Précharge
NEUMANN	20 unités L1-l2 ou L3-L4 congelées. Précharge
OGON	6 unités L4-L5, 1 L2-L3 et 1 L5-S1 congelées. Test avec et sans précharge.
ROSTEDT	4 unités L1-L2 et 2 L3-L4 en solution saline. Précharge
DEMETROPOULOS	10 unités T12-L5 congelées et deux colonnes Hybrid III
MODELE ETRE HUMAIN	71 cadavres sur l'ensemble des articles servant à valider le modèle du thorax

Tableau 2

AUTEUR	MOYENNE	SOLLICITATION
HAKIM	Non / incomplet	Force axiale impulsionnelle en fonction du temps
NIGHTINGALE	Oui / complet	Déplacement axial avec une vitesse allant de 1 cm/sec à 4.5 cm/sec.
OSVALDER	Oui	2 accélérations suivant x (5g et 12g)
NEUMANN	Oui	2 accélérations suivant x à 12 g avec 2 temps de montée
OGON	Oui pour les « range of motion ». Non pour les courbes / incomplet	Couple impulsionnel de 3 N.m
ROSTEDT	Non / complet	Force axiale impulsionnelle entre 30 et 100 N en fonction de la précharge
DEMETROPOULOS	Oui / complet	Vitesse linéaire imposée de 100 mm/sec.

MODELE ETRE HUMAIN	Non / complet	Impact horizontal centré sur le sternum, oblique ou latéral. $M_{\text{impacteur}}$ entre 10 kg et 23.4 kg et $V_{\text{impacteur}}$ entre 2.9 m/sec et 9.8 m/sec
--------------------	---------------	--

Le **Non / incomplet** de la 2^{ème} colonne du tableau signifie que l'auteur n'a pas fait la moyenne des résultats. En outre, tous les résultats ne figurent pas dans son article au vu du grand nombre de spécimens étudiés.

Tableau 3

AUTEUR	TRACTION / COMPRESSION	FLEXION / EXTENSION	INFLEXION LATÉRALE
HAKIM			
NIGHTINGALE	En compression : F_{rupture} , $\Delta l_{\text{rupture}}$ et énergie $_{\text{rupture}}$		
OSVALDER		$\Delta\theta$ maxi, Δl maxi, Mfle (t) et $F_{\text{cisaillement}}$ maxi du disque.	
NEUMANN		$\Delta\theta$ maxi, Δl maxi, Mfle (t) et $F_{\text{cisaillement}}$ maxi du disque.	
OGON	Mouvements tertiaires	Courbe $\theta = f(t)$, $\ \Delta l\ = f(t)$ pour L4 / L5. Etendue du mouvement et mouvements secondaires	Etendue du mouvement et mouvements secondaires
ROSTEDT	Modèle de courbes de relaxations d'un modèle identifié par rapport aux expérimentations		
DEMETROPOULOS	Courbe $\theta = f(t)$, $\ \Delta l\ = f(t)$. Etude sur cisaillement.	Courbe $\theta = f(t)$, $\ \Delta l\ = f(t)$	Courbe $\theta = f(t)$, $\ \Delta l\ = f(t)$
MODELE ETRE HUMAIN	/	/	/

En ce qui concerne l'étude de OGON, les tests sont effectués en flexion / extension et inflexion latérale. L'étendue du mouvement correspond aux mouvements principaux, les mouvements secondaires correspondent aux mouvements latéraux induits par un mouvement de flexion ou d'extension ou bien aux mouvements antéro-postérieurs induits par un mouvement d'inflexion latérale. Les mouvements tertiaires correspondent aux mouvements autour de l'axe vertical induits par des mouvements d'inflexion latérale ou de flexion / extension.

Tableau 4

AUTEUR	F _{DISQUE}	M _{DISQUE}	F _{FACETTES}	BASSIN	d ² x/dt ²	dθ ² /dt ²	dθ/dt
HAKIM	Fz(t). 62 essais	Mfle(t). 62 essais	Fz(t). 62 essais				
NIGHTINGALE							
OSVALDER		Mfle (t)			L1(t) ou L3(t)		
NEUMANN		Mfle (t)			L1(t) ou L3(t)		
OGON						Centre de L4 (t)	Centre de L4 (t)
ROSTEDT							
DEMETROPOULOS							
MODELE ETRE HUMAIN							

Tableau 5

AUTEUR	MOYENNE	SOLLICITATION
HAKIM		IVLC délicat à poser. Positionnement de l'unité non défini ⇒ modélisation délicate. Le point d'application de la charge est variable pour avoir un moment de flexion biofidèle en compression
NIGHTINGALE		Protocole modélisable. Pas de courbes données.
OSVALDER		Protocole simple à modéliser. Maintient de la vertèbre supérieure approximatif. Quelques données manquantes (padding)
NEUMANN		Protocole simple à modéliser. Maintient de la vertèbre supérieure approximatif. Quelques données manquantes (pad)
OGON		Protocole modélisable. Aucun moment n'est induit par la précharge
ROSTEDT		Non modélisable en raison d'un manque de précision des conditions initiales. Montage intéressant

DEMETROPOULOS		Les sollicitations en cisaillement sont modélisables mais pas celle en rotation.
MODELE ETRE HUMAIN	$F=f(\Delta l)$, $F=f(t)$, $\Delta l = f(t)$ pour T12, T1 et le thorax	Protocole modélisable. Résultats complets

Tableau 6

AUTEUR	CAPTEUR DE DEPLACEMENT	CAPTEUR DE FORCE	CAPTEUR DE MOMENT	CAPTEUR D'ACCELERATION	FILM	CAPTEUR DE VITESSE
HAKIM		Oui	Oui			
NIGHTINGALE	Oui (ΔL)	Oui	Oui			
OSVALDER		Oui		Oui		Oui
NEUMANN		Oui		Oui		Oui
OGON						Oui
ROSTEDT					Oui	
DEMETROPOULOS	Oui (ΔL et $\Delta \theta$)	Oui				
MODELE ETRE HUMAIN		Oui			Oui	

2- Modélisation

AUTEUR	CAGE THORACIQUE	DISQUE ET SEGMENT	L4-S1	SOLLICITATIONS IMPOSEES
HAKIM		60 éléments briques par vertèbre. Eléments intégrant cisaillement, compression et torsion pour le disque. Gap de 1.3mm		Loi $F_{axial}=f(t)$ sur le plateau supérieur de la vertèbre supérieure et sur les facettes articulaires
NATALI		800 éléments briques et 200 éléments câbles		Loi $F_{axial}=f(t)$
PLANK	7213 nœuds et 6032 éléments briques. La colonne, les viscères et les muscles sont modélisés			Impact frontal. $M_{impacteur}$ [5 ; 23 kg] et $V_{impacteur}$ [4.2 ; 6.6 m/sec]
GOEL			487 éléments Modélisation de tous les ligaments	Précharge + effort sinusoïdal variant entre [-360N et - 440N]
TADANO		Demi disque sans noyau		Flexion, extension, compression, tension et torsion
Modèle « être humain »	10000 éléments pour tout le modèle être humain			Choc frontal, latéral et oblique
AUTEUR	RESULTATS SIMULATIONS		COMPARAISON EXPERIMENTALE	
HAKIM	σ du plateau supérieur de la vertèbre inférieure (t) et ε du plateau supérieur de la vertèbre inférieure (t)		3 unités fonctionnelles. Le modèle simule soit L1, soit L2, soit L3	
NATALI	Pression intradiscale (t), effet tonneau (t) et σ axial annulus (t)			
PLANK	Courbe $\sigma = f(t)$ pour des éléments du modèle et $F = f(\Delta l)$ en faisant varier E_{os} , ν_{os} , $E_{cartilage}$ et $\nu_{cartilage}$		Etude sur cadavres (article ayant servis à valider le modèle être humain)	
GOEL	Pression intradiscale (t), effet tonneau (t), σ axial annulus (t) et fréquence de résonance en mode axial		Fréquence de résonance à partir de travaux antérieurs.	
TADANO	$\sigma_z = f(\varepsilon)$ en compression et en tension, $M_z = f(d\theta/dt)$ en torsion et $M_x = f(\theta)$ en flexion et en extension		3 unités L4 / L5	
Modèle « être humain »	Courbe effort en fonction de la déflexion de divers points du thorax		Etudes sur cadavres	

Tableau 7 et Tableau 8

II- VERIFICATION DU MODELE GEOMETRIQUE

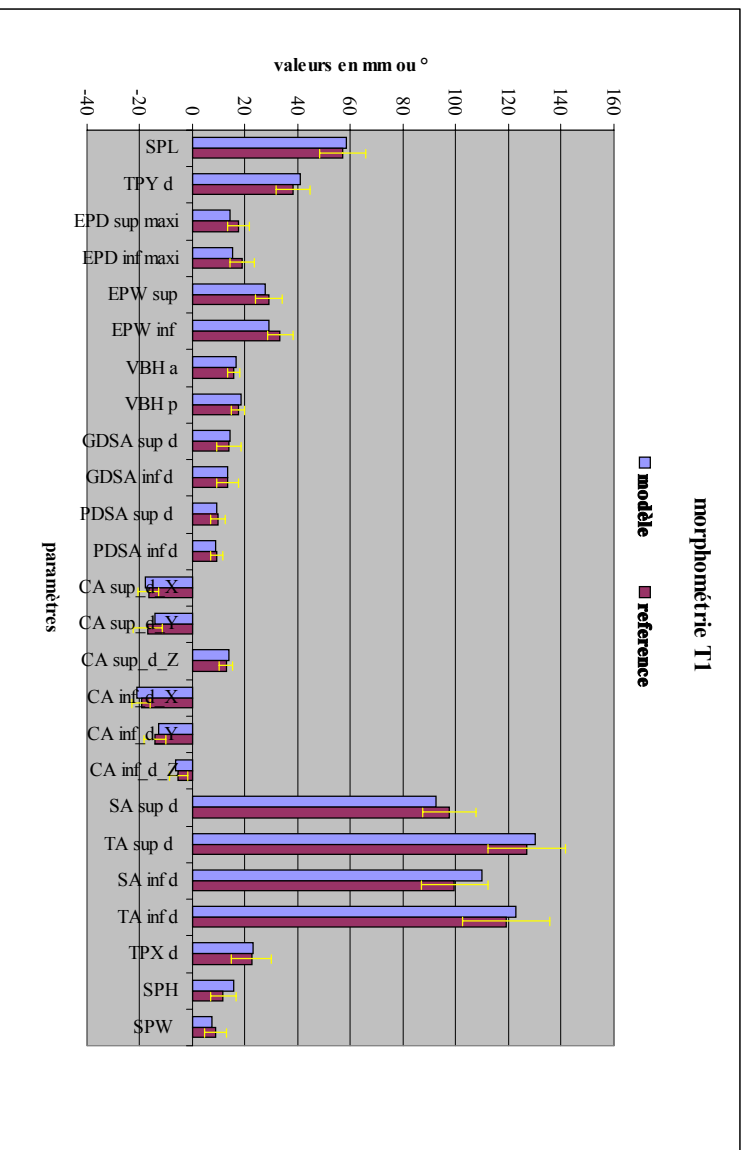


figure 1

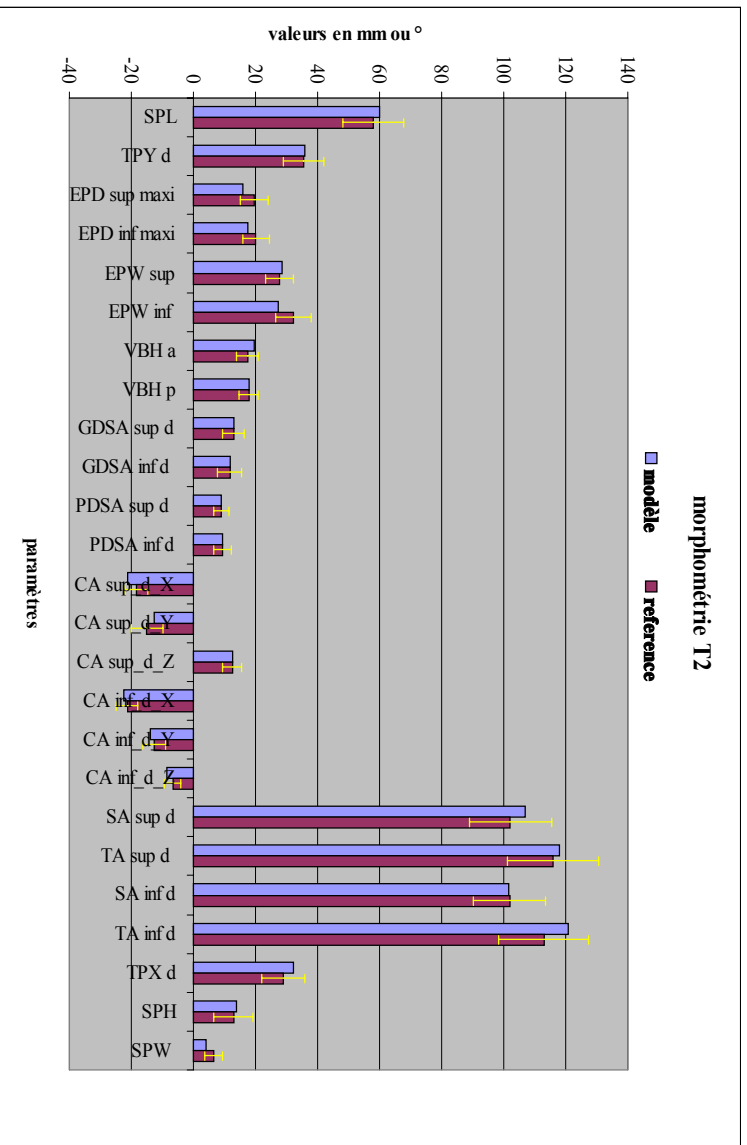


figure 2

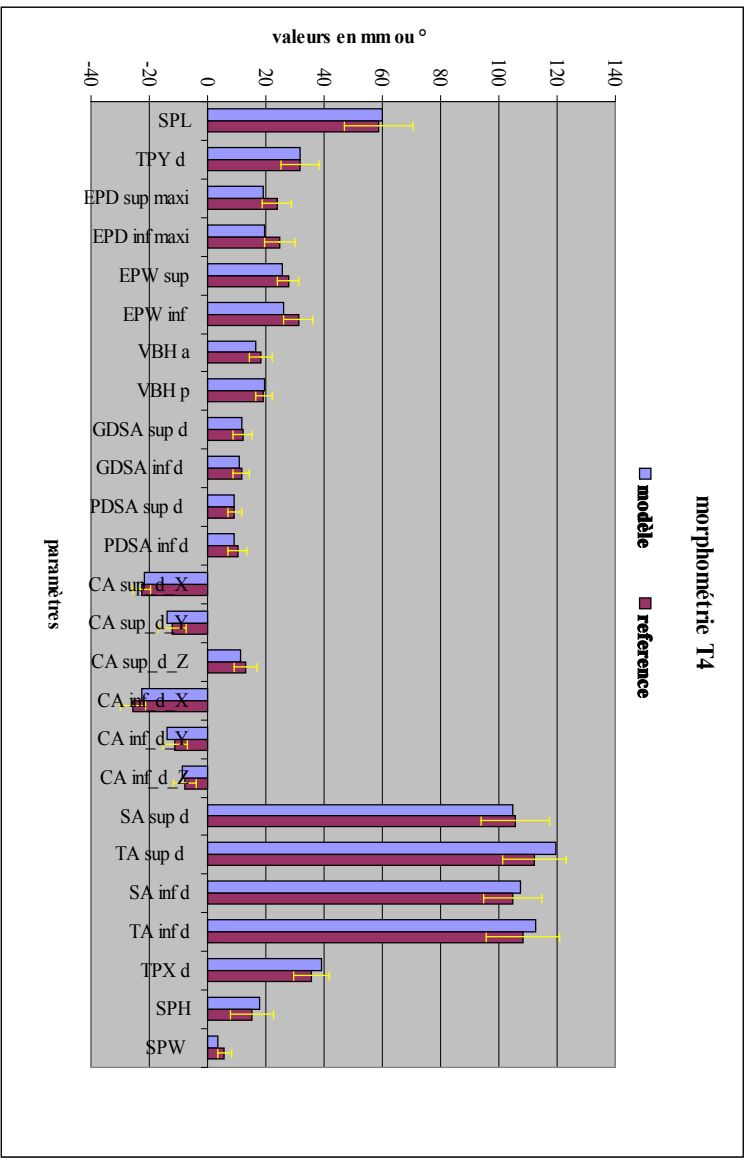


figure 4

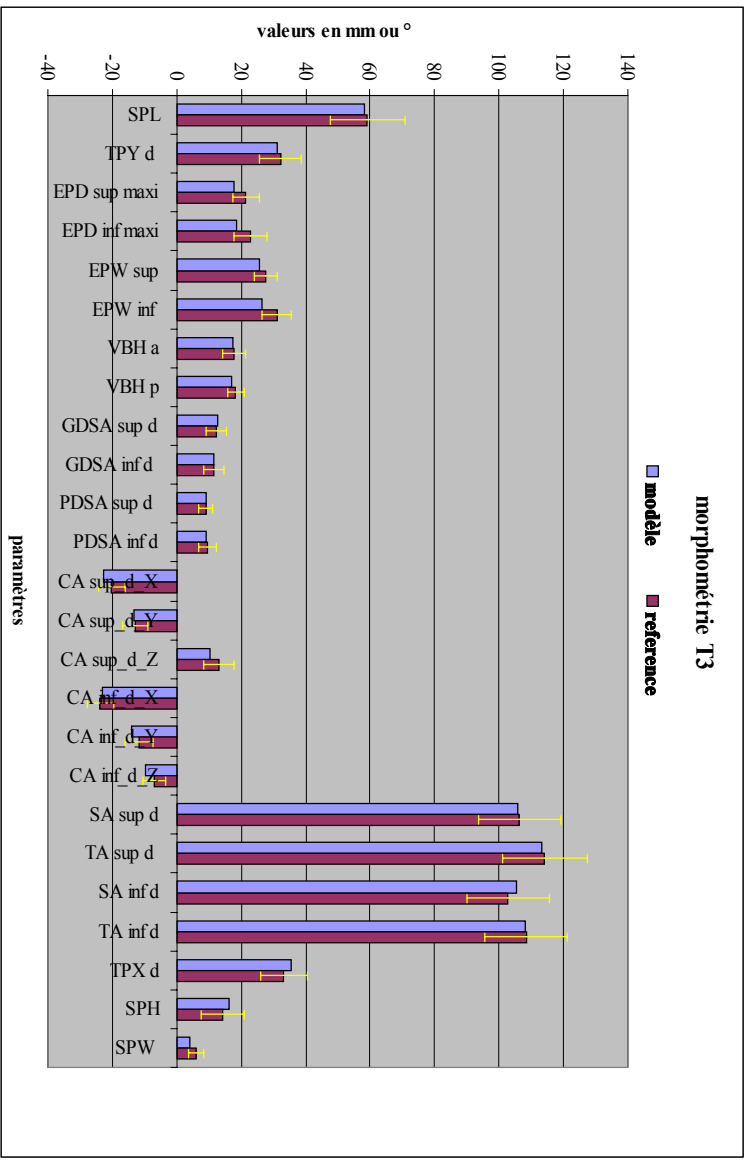


figure 3

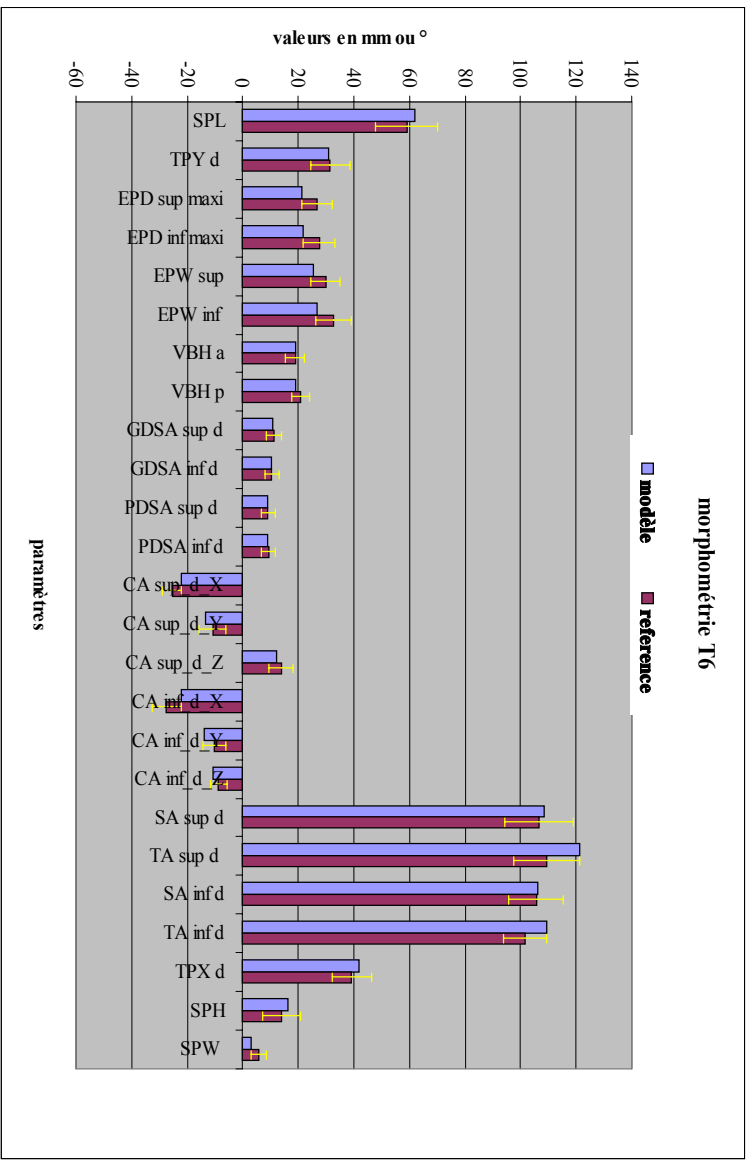


figure 5

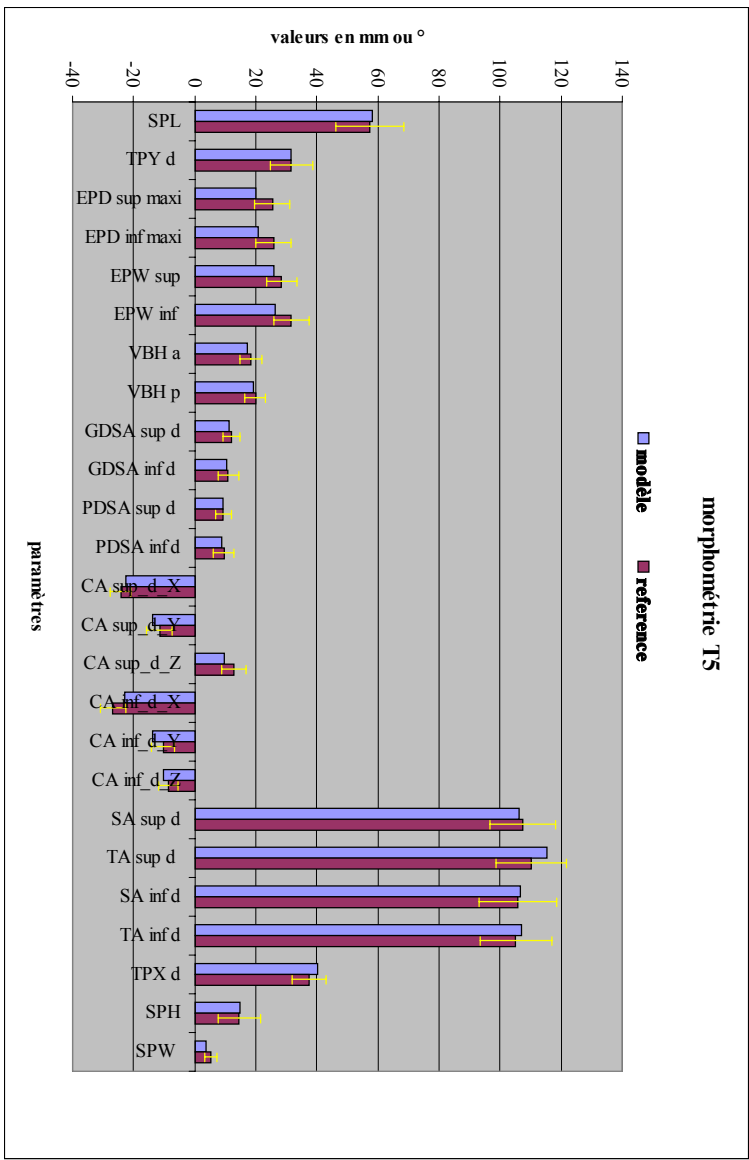


figure 6

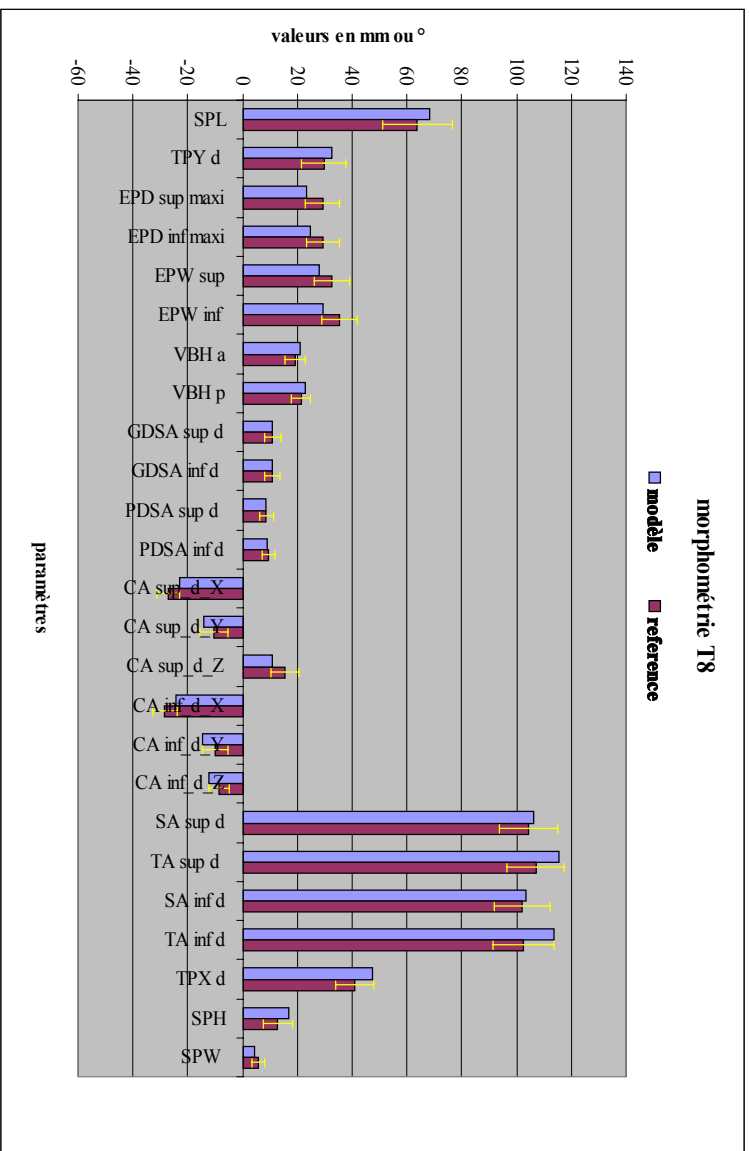


figure 8

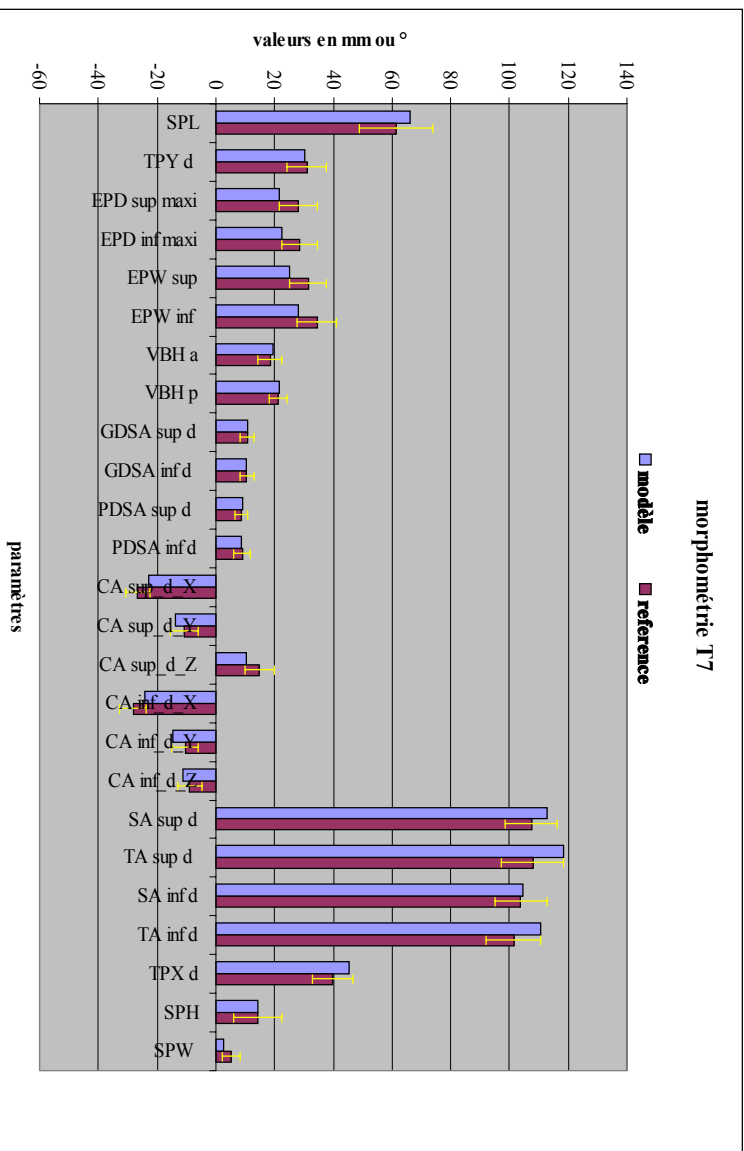


figure 7

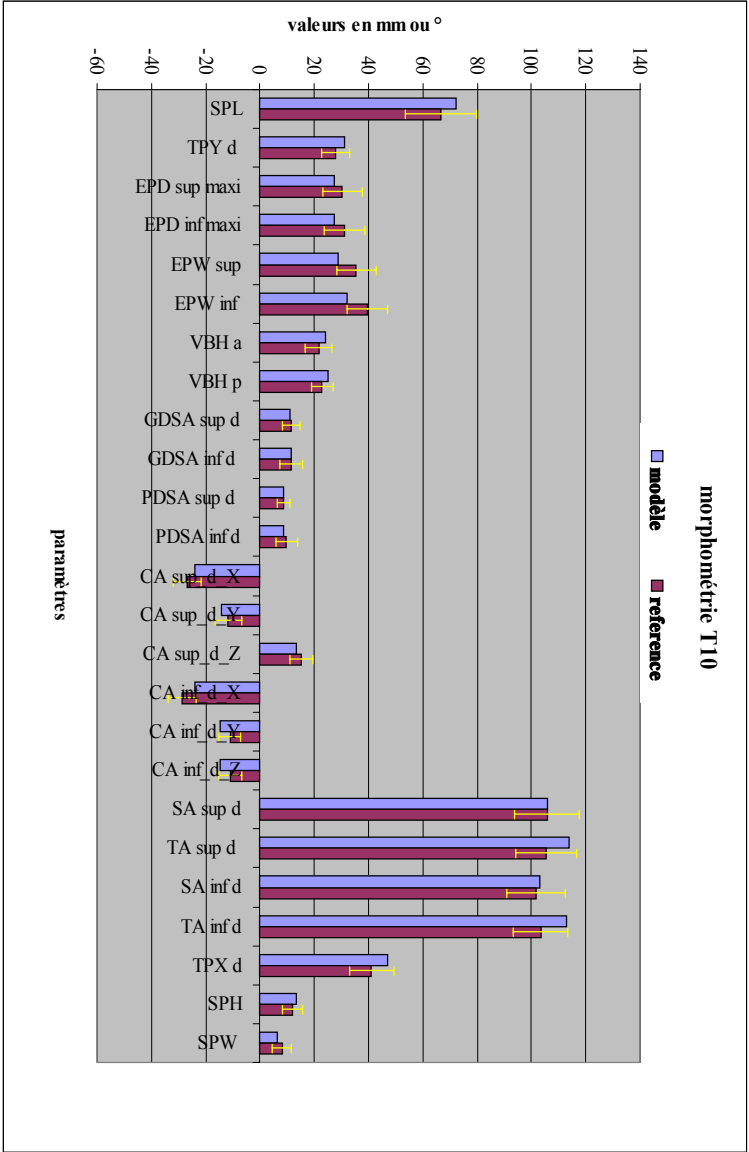


figure 10

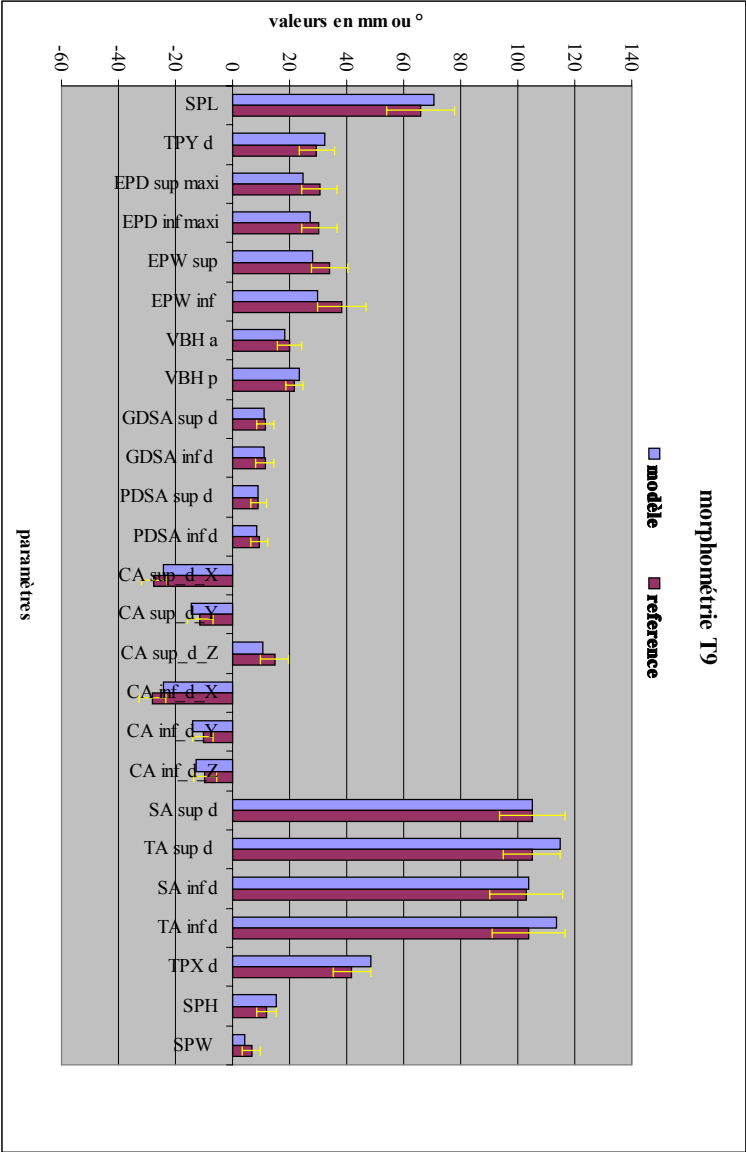


figure 9

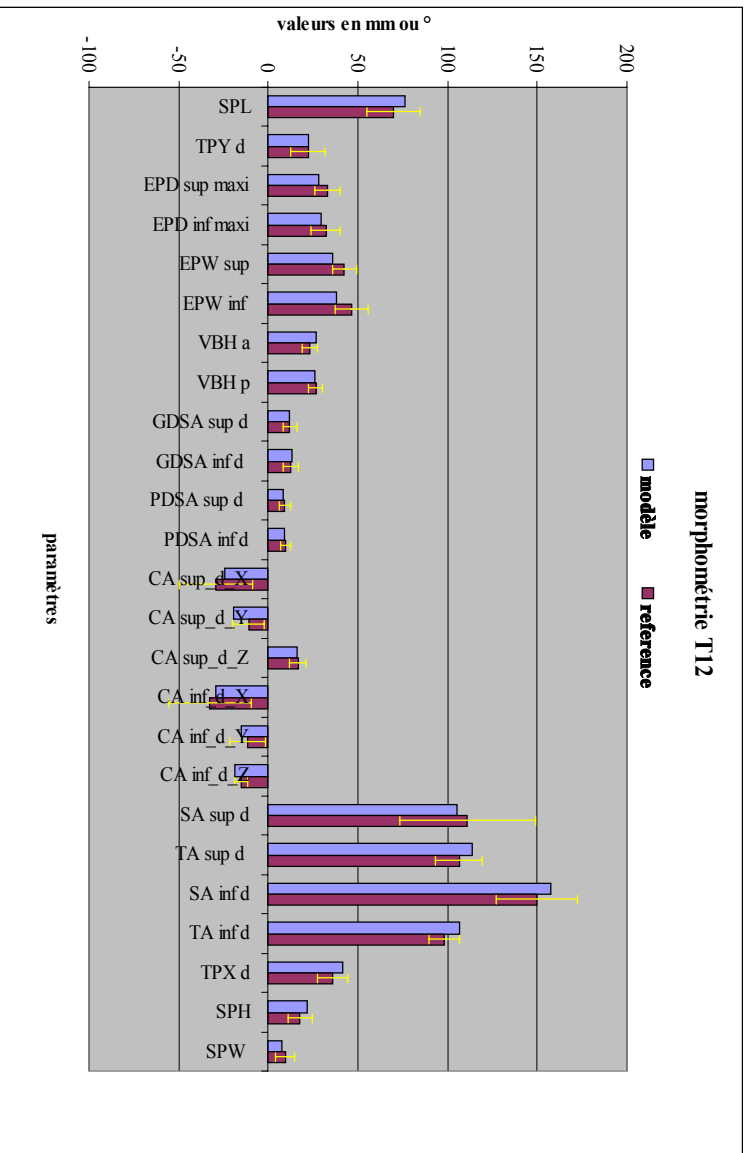


figure 12

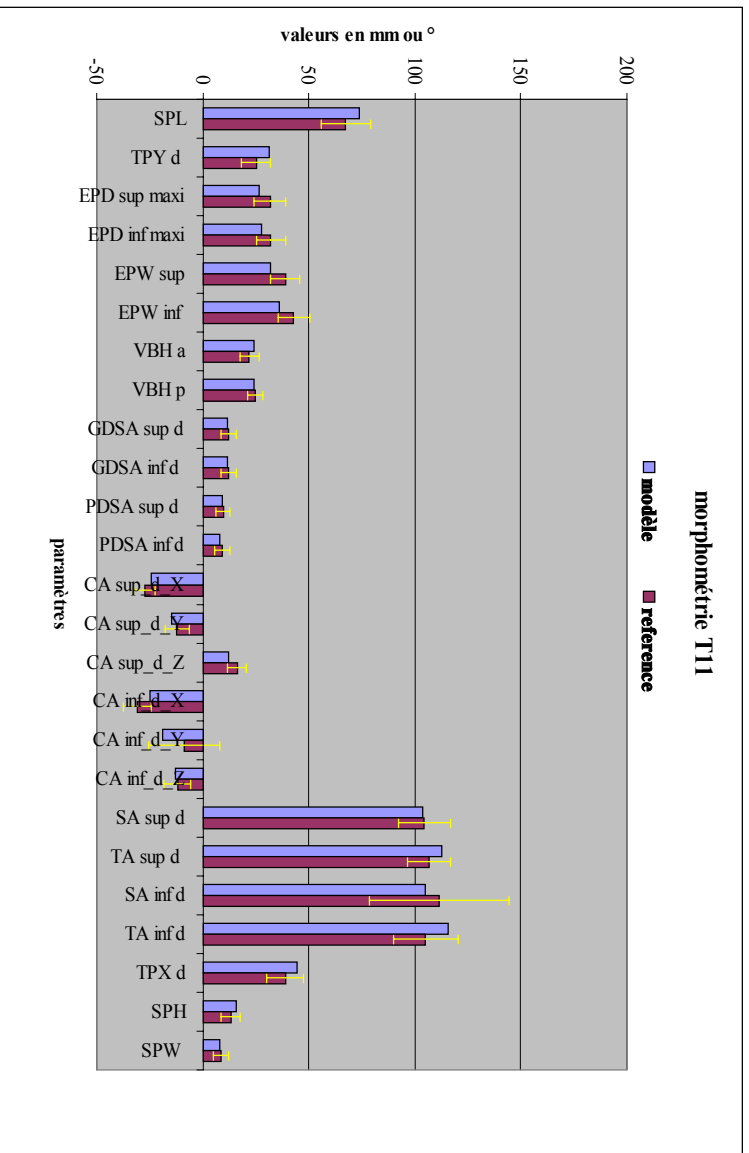


figure 11

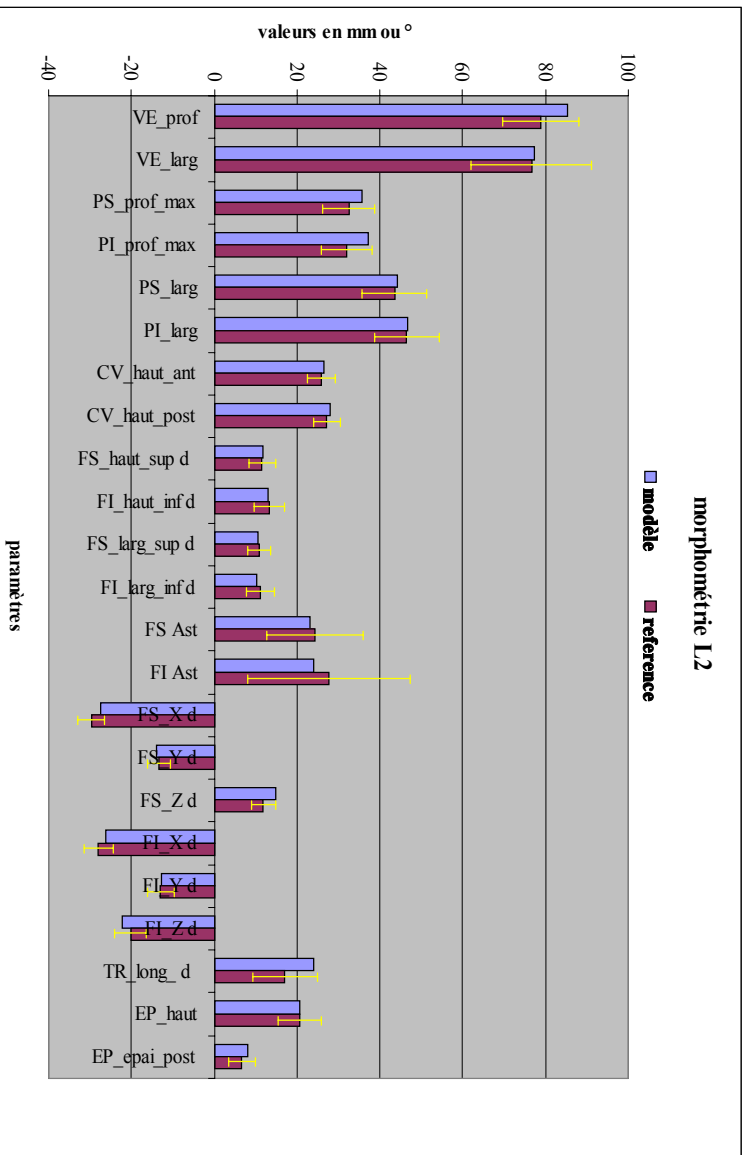


figure 14

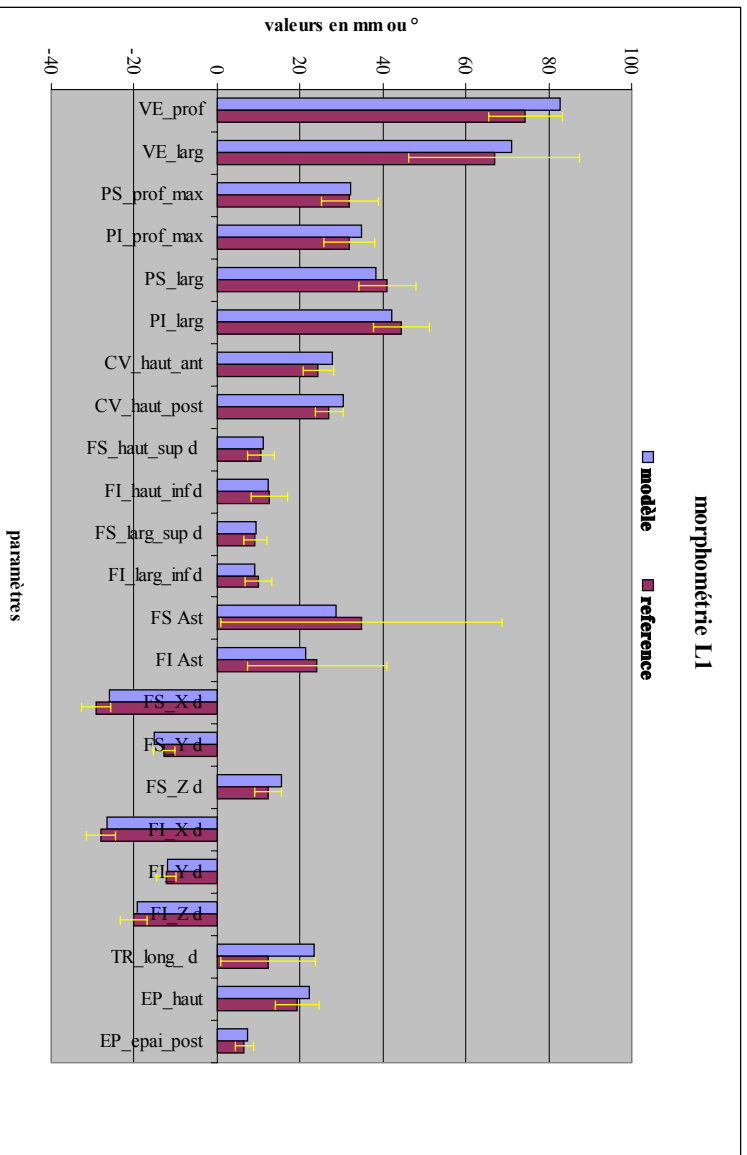


figure 13

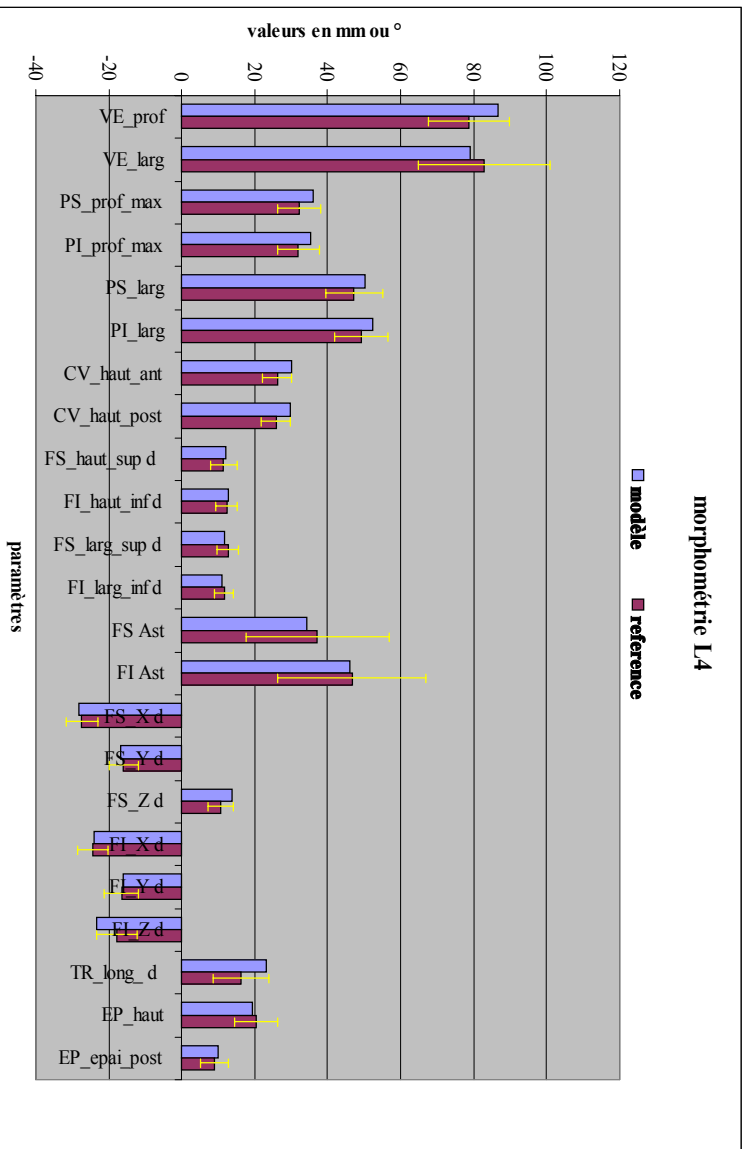


figure 16

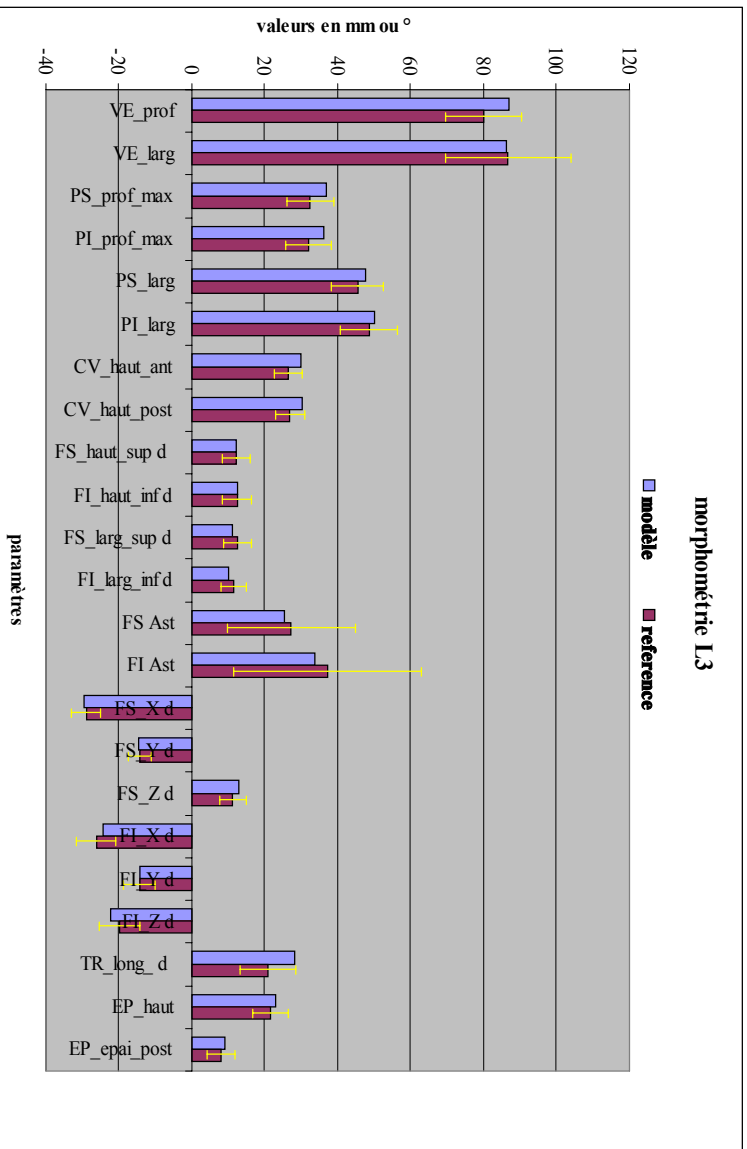


figure 15

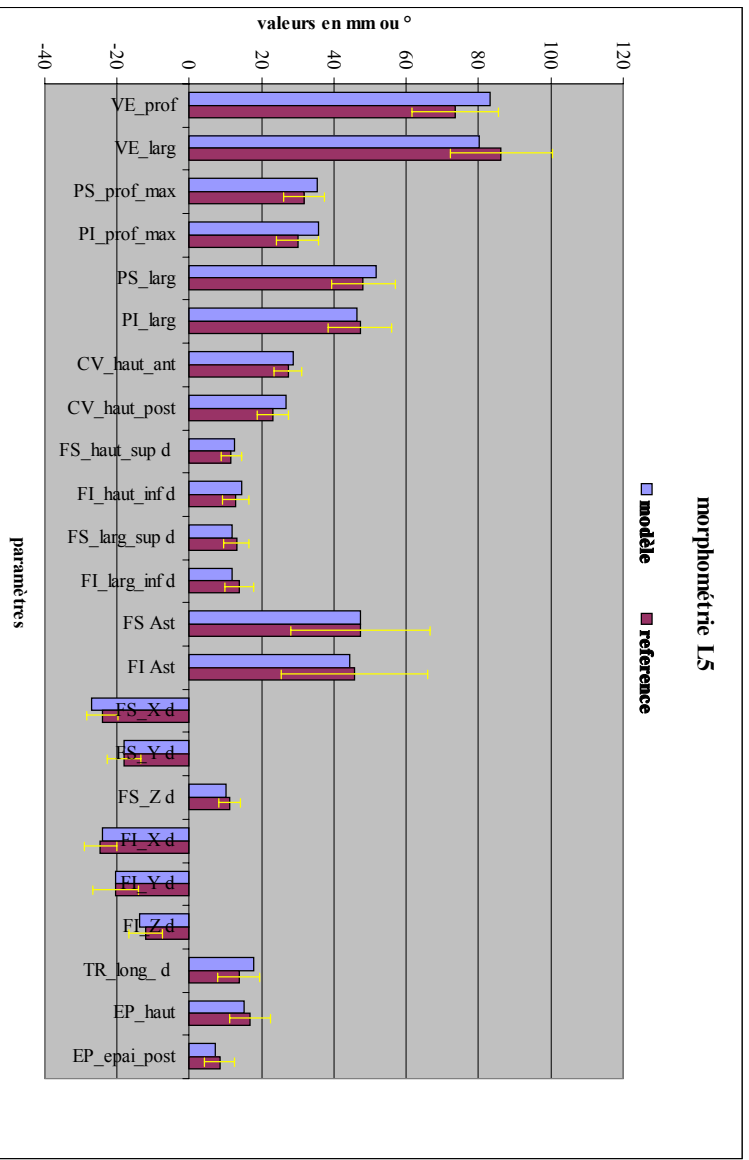


figure 17

1- Cahier des charges du banc dynamique

A. Aspect préliminaire

A partir des résultats obtenus par le modèle « être humain » [30-MOD], nous sommes en mesure de définir des seuils de vitesses, d'accélération et de Δ déplacements d'un segment vertébral lors d'un choc automobile et donc de formuler un besoin.

Le cahier des charges qui suit revêt un aspect théorique qui représente l'expression globale de notre besoin.

- ✓ Vitesses de rotation à atteindre

Vitesse entre deux vertèbres adjacentes = $1^\circ/\text{ms} = 1000^\circ/\text{sec} = 17.5 \text{ rad/sec}$

Vitesse entre deux vertèbres séparées par une vertèbre = $2^\circ/\text{ms} = 2000^\circ/\text{sec} = 34.9 \text{ rad/sec}$

- ✓ Modes de sollicitation

Dans un souci de simplicité et d'exhaustivité, nous avons choisi de solliciter le spécimen suivant trois modes principaux :

- ✓ Flexion pure
- ✓ Torsion pure
- ✓ Inflexion latérale pure

Par le terme « pure », nous entendons supprimer les effets d'efforts parasites comme la compression et le cisaillement.

- ✓ Type de segment à étudier.

Les segments testés seront issus de la région thoracique et de la région lombaire de la colonne vertébrale. Le choix s'est porté sur un ensemble de trois vertèbres et deux disques. Choisir un segment de deux vertèbres n'offrirait aucun résultat intéressant puisqu'une des deux vertèbres sera immobilisée et l'autre sera sollicitée. Les résultats obtenus ne seront alors que le reflet de ce que nous avons appliqué.

Si nous choisissons des segments plus longs, des problèmes de stabilité dans le maintien du segment se posent. Ainsi, l'utilisation d'un segment de trois vertèbres nous permet d'avoir des mouvements physiologiques pour la vertèbre centrale tout en ayant un faible encombrement du spécimen.

B. Sollicitation en déplacement

FONCTIONS	CRITERES d'appréciation	NIVEAUX	FLEXIBILITE des niveaux
Imposer une rotation autour d'un axe donné sur le spécimen en essai	<i>Vitesse angulaire maximale de la vertèbre sollicitée.</i>	2000 °/sec	± 10%
	<i>Temps d'atteinte de la vitesse angulaire.</i>	5 ms	
	<i>Temps de maintien de la vitesse angulaire.</i>	10 ms	
	<i>Débattement angulaire maximum</i>	60°	
	<i>Vibrations</i>	<i>Ne pas influencer le comportement du spécimen.</i>	

C. Mesures

FONCTIONS	CRITERES d'appréciation	NIVEAUX	FLEXIBILITE des niveaux
mesure effort	<i>Efforts et moments appliqués sur la vertèbre sollicitée et la vertèbre fixée.</i>	600daN 400 N.m	
mesure angulaire	<i>Vitesse angulaire autour des axes de rotation principaux des vertèbres en mouvement</i>	1000°/sec maxi entre deux vertèbres successives	
mesure linéaire	<i>Déplacements linéaires des vertèbres en mouvement.</i>	1 m/sec maxi	
	<i>Permettre la prise vue latérale.</i>		<i>dégager la surface latérale pour permettre d'éventuelles prises de vue</i>
	<i>Permettre la prise vue supérieure.</i>		<i>Dégager la surface supérieure pour permettre d'éventuelles prises de vue</i>

D. Surveillance de l'essai

FONCTIONS	CRITERES d'appréciation	NIVEAUX	FLEXIBILITE des niveaux
Voir le spécimen en essai	<i>directement (sans paroi intermédiaire)</i>	<i>pour prises de vue éventuelles</i>	
Visualiser l'état des paramètres de l'essai au déclenchement ou en cours.	<i>les seuils de déclenchement des sécurités l'état des défauts (limites dépassées) l'état des mesures lors du déclenchement d'une sécurité</i>		
Avertir l'opérateur en cas d'événement en essai	<i>signal sonore ou signal lumineux</i>		<i>négociable</i>

E. Réglage du moyen d'essai et mise en position du spécimen

FONCTIONS	CRITERES d'appréciation	NIVEAUX	FLEXIBILITE des niveaux
Positionnement du spécimen	<i>Plan d'appui des supports des vertèbres. Ces supports servent d'interface entre le banc et le spécimen</i>	<i>Absorber les dispersions inter-individuelles</i>	
	<i>Indicateur de position des plans</i>	<i>Précision : 1 mm</i>	

F. Mode opératoire

FONCTIONS	CRITERES d'appréciation	NIVEAUX	FLEXIBILITE des niveaux
Initialiser les conditions d'essais	<i>Immobiliser le spécimen avant essai. Relevé des positions initiales des trois vertèbres du spécimen.</i>		
Conduire le banc	<i>1/déclenchement du système d'acquisition 2/ montée en vitesse angulaire 3/ maintien de la vitesse 4/ décélération rotation fin d'essai normal</i>		
Remise à l'état initial	<i>1/ arrêt du système d'acquisition 2/ démontage du spécimen</i>		
Changement de configuration (exemple : passage de la configuration de flexion à la configuration de torsion)	<i>1/ Changement de la configuration du bâti 2/ montage du spécimen 3/ réalisation de l'essai suivant</i>		

G. Contraintes

FONCTIONS	CRITERES d'appréciation	NIVEAUX	FLEXIBILITE des niveaux
Ne pas perturber l'environnement (en émission)	<i>niveau sonore</i> <i>rayons électromagnétiques sur composants électroniques et électriques</i>	<i>70 dB au maximum admissible</i> <i>Norme CEM en émission</i>	
Dimensionner la structure du banc	<i>Déformation de la structure du banc sous sollicitations maximales</i> <i>Défauts géométriques de la structure en essai</i> <i>défaut alignement 2 points axe de rotation</i>	<i>0.1 mm sur X,Y,Z</i> <i>valeur de la déformée maximale</i> <i>0.1 mm</i>	
Protéger les personnes	<i>Protection contre les pièces mobiles en mouvement</i> <i>Protection contre les projections de fluides</i> <i>protection contre les coupures par angle vif</i>		
Ergonomie Aménager l'espace de travail autour du banc	<i>Couleur jaune pour les pièces en mouvement</i> <i>Couleur verte pour les pièces de structure immobile</i> <i>Hauteur de travail pour poser le spécimen</i> <i>Revêtement anticorrosion sur le bâti</i>	<i>Normes d'ergonomie.</i> <i>800 mm</i>	<i>10%</i>
Résister à l'environnement ambiant	<i>température ambiante (lampe éclairage)</i> <i>Protection contre la corrosion issue de lavage à l'eau et au glutaraldéhyde</i>	<i>jusque 70°C pendant 5 mn</i> <i>revêtement, peinture</i>	
S'assurer de la qualité des mesures (capabilité)	<i>Constat de vérification des chaînes de mesure</i> <i>Procédures, modes opératoires et moyens mis en œuvre</i>	<i>rattaché COFRAC ou équivalent</i>	
Avoir un moyen disponible	<i>Liste pièces de rechanges disponibles et consommables</i>		
Avoir un moyen fiable	<i>Taux de fiabilité et durée de vie</i>	<i>1000 essais</i>	

H. Schéma cinématique du montage

Figure 1 : configuration de flexion et d'inflexion

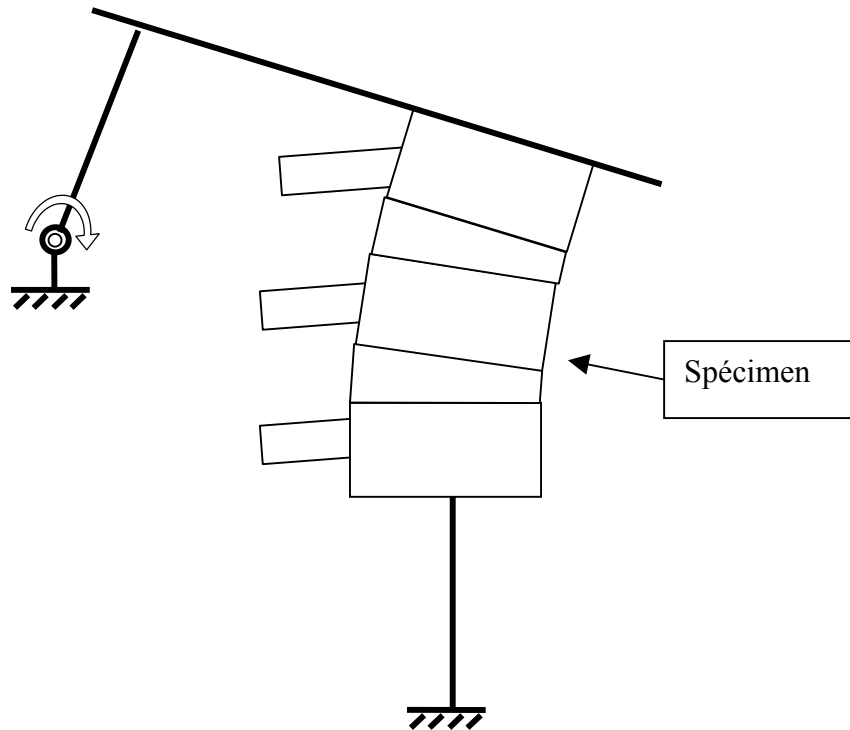
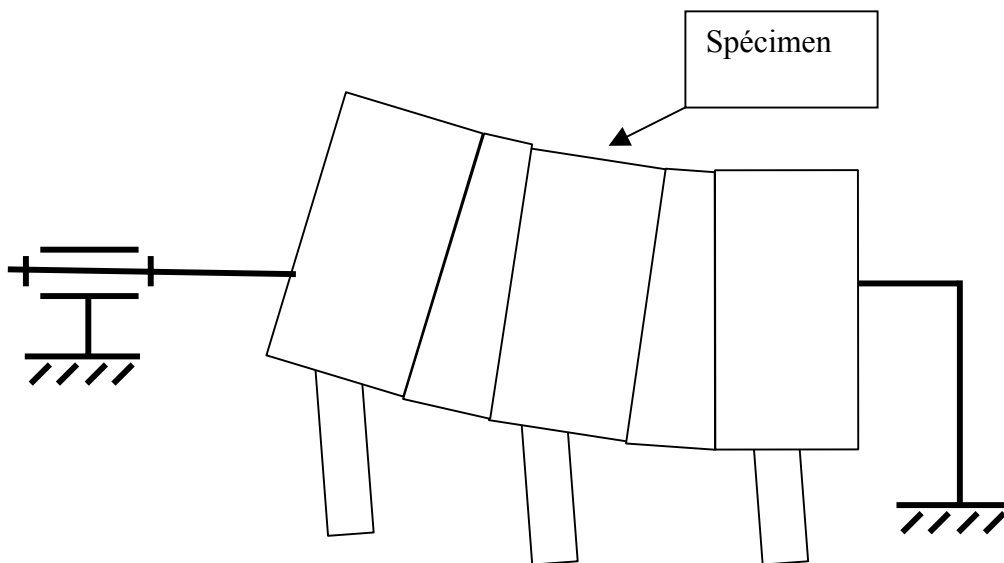


Figure 2 : configuration de torsion



2- Les types de montages proposés

Vu le coût de mise en œuvre d'un système à efforts imposés ainsi que les difficultés techniques liées à l'asservissement, nous n'envisagerons que des montages à énergie imposée, à déplacements imposés ou à vitesses imposées.

Les critères permettant d'évaluer les montages seront les suivants :

- Quel types de sollicitations peuvent être appliquées ?
- Ces sollicitations peuvent-elles être pures ?
- Le montage a-t-il déjà été utilisé au LAB ou au LBM et est-il encore disponible ?
- Le montage permet-il une bonne gestion du système de mesure des déplacements ?
- Le montage permet-il une bonne gestion du système de mesure des efforts ?
- Est-ce que le montage pose des problèmes de précharge liés à la position du spécimen ?

Nota : les représentations du spécimen sont symboliques et ne préfigurent pas dans la longueur des segments qui seront utilisés.

A. Montages à énergie imposée

MDNTAGE AVEC CHARIDT

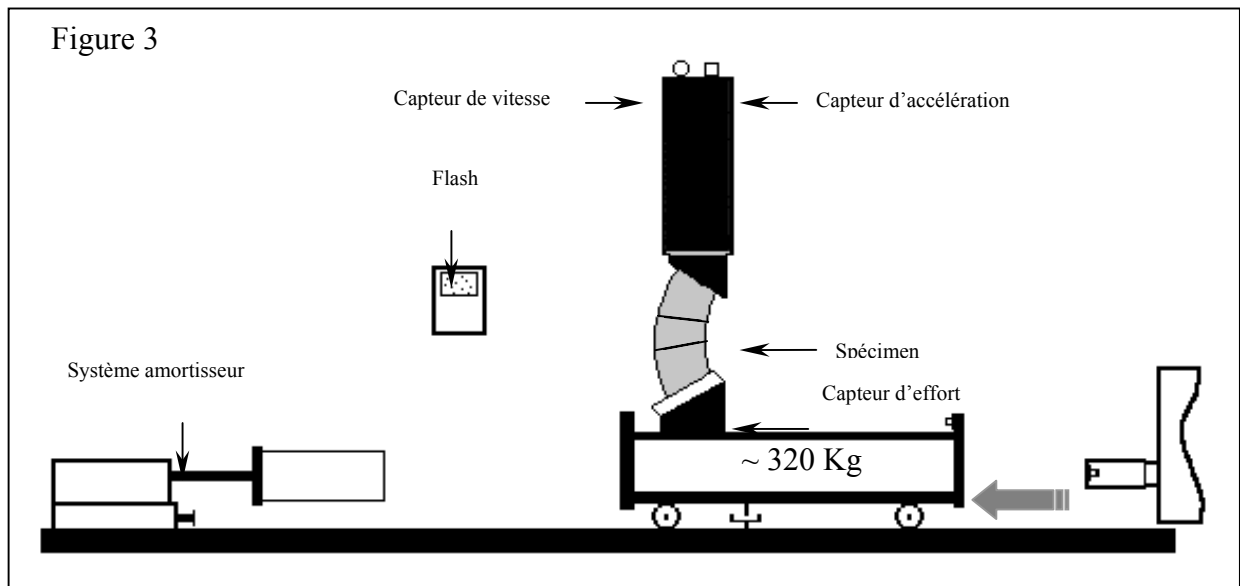


Tableau 9

Types de sollicitations applicables	Flexion – Extension – Inflexion
Sollicitations pures ?	Non
Si l'on désire des sollicitations combinées, peut-on les gérer facilement ?	Non
Montage disponible ?	Oui (LAB)
Gestion de la mesure des déplacements ?	Pas de problèmes particuliers quel que soit le système (accélérométrique, mécanique ou optique)
Gestion de la mesure des efforts ?	Pas de problèmes particuliers
Problèmes liés à la précharge ?	Instabilité du montage et moments induits
Vitesse limite	~ 8 m/s sur 1 mètre

MDNTAGE AVEC PENDULE

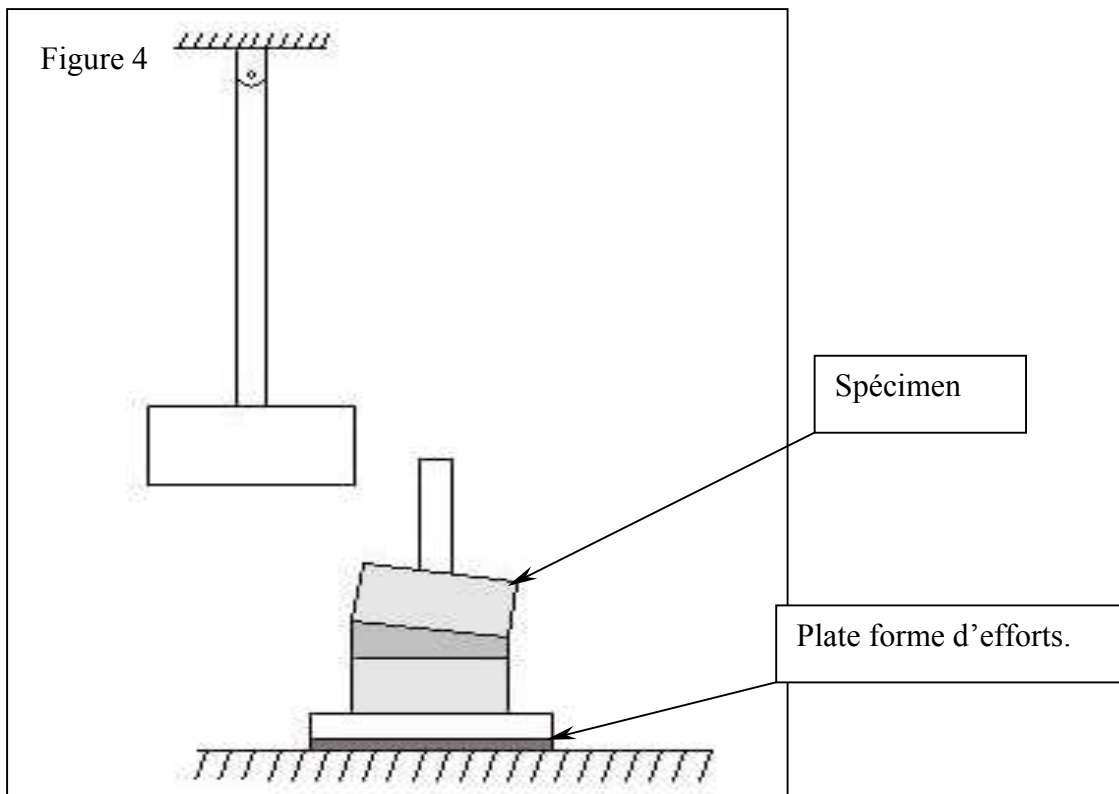


Tableau 10

Types de sollicitations applicables	Flexion – Extension – Inflexion La torsion est possible en rajoutant un bras de levier perpendiculaire à la tige fixée sur la coiffe de la vertèbre supérieure
Sollicitations pures ?	Non
Si l'on désire des sollicitations combinées, peut-on les gérer facilement ?	Plus le bras de levier est faible et plus les sollicitations sont combinées
Montage disponible ?	Oui (LAB)
Gestion de la mesure des déplacements ?	Pas de problèmes particuliers quel que soit le système (accélérométrique, mécanique ou optique)
Gestion de la mesure des efforts ?	Pas de problèmes particuliers
Problèmes liés à la précharge ?	Pas de problèmes particuliers
Vitesse limite	~ 4 m/s (vitesse tangentielle du pendule)

MONTAGE AVEC IMPACTEUR (A)

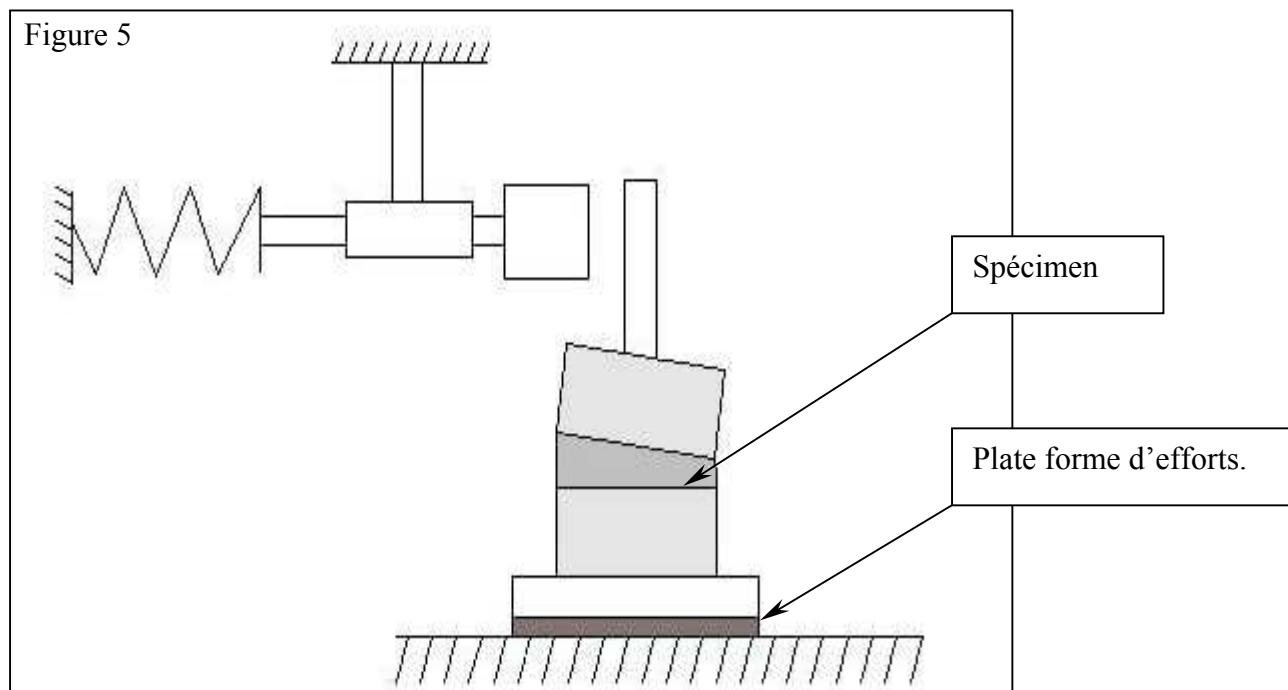


Tableau 11

Types de sollicitations applicables	Flexion – Extension – Inflexion La torsion est possible en rajoutant un bras de levier perpendiculaire à la tige fixée sur la coiffe de la vertèbre supérieure
Sollicitations pures ?	Non
Si l'on désire des sollicitations combinées, peut-on les gérer facilement ?	Plus le bras de levier est faible et plus les sollicitations sont combinées
Montage disponible ?	Oui(LAB)
Gestion de la mesure des déplacements ?	Pas de problèmes particuliers quel que soit le système (accélérométrique, mécanique ou optique)
Gestion de la mesure des efforts ?	Pas de problèmes particuliers
Problèmes liés à la précharge ?	Pas de problèmes particuliers
Vitesse limite	~ 12 m/s

MONTAGE AVEC IMPACTEUR (B)

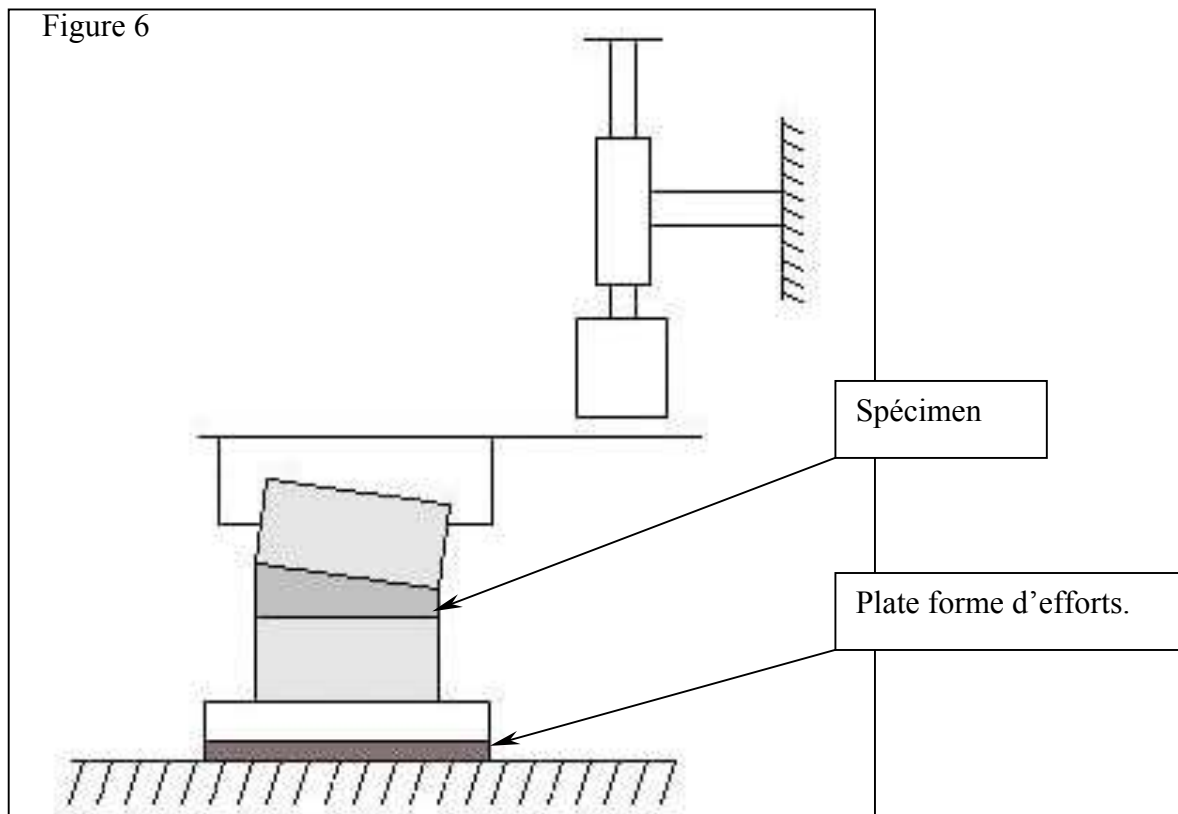
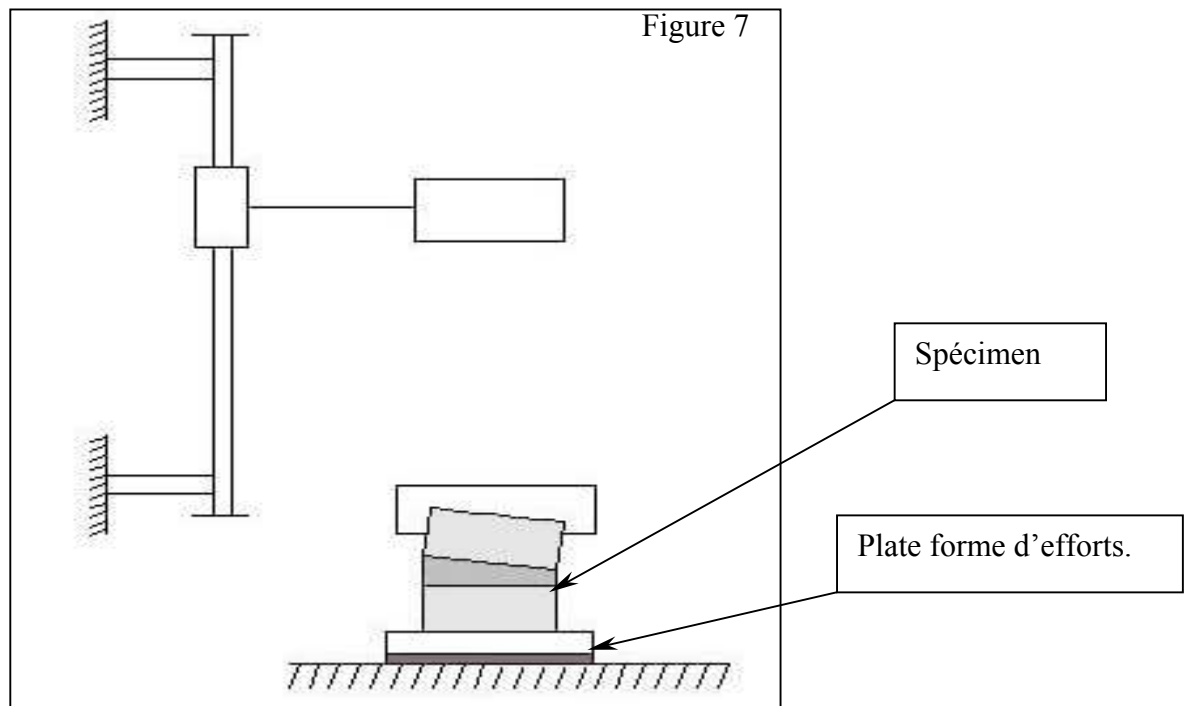


Tableau 12

Types de sollicitations applicables	Flexion – Extension – Inflexion La torsion est envisageable si le montage permet une rotation du dispositif impactant
Sollicitations pures ?	Non
Si l'on désire des sollicitations combinées, peut-on les gérer facilement ?	Plus le bras de levier est faible et plus les sollicitations sont combinées
Montage disponible ?	Non
Gestion de la mesure des déplacements ?	Pas de problèmes particuliers quel que soit le système (accélérométrique, mécanique ou optique)
Gestion de la mesure des efforts ?	Pas de problèmes particuliers
Problèmes liés à la précharge ?	Instabilité du montage et moments induits
Vitesse limite	~ 12 m/s

MDNTAGE AVEC PUIIS DE CHUTE



L'unité fonctionnelle ne peut être positionnée sur la partie coulissante du puits. En effet, la précharge induirait un déplacement important de la vertèbre supérieure et des problèmes se posent pour arrêter le spécimen.

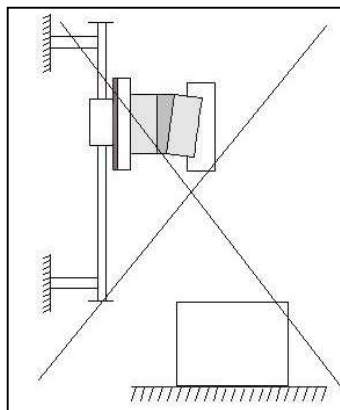


Figure 8

Tableau 13

Types de sollicitations applicables	Flexion – Extension – compression
Sollicitations pures ?	Non, sauf pour la compression
Si l'on désire des sollicitations combinées, peut-on les gérer facilement ?	L'excentration du spécimen permet d'accéder à des sollicitations combinées
Montage disponible ?	Oui (LAB)
Gestion de la mesure des déplacements ?	Pas de problèmes particuliers quel que soit le système (accélérométrique, mécanique ou optique)
Gestion de la mesure des efforts ?	Pas de problèmes particuliers
Problèmes liés à la précharge ?	Pas de problèmes particuliers
Vitesse limite	~ 9 m/s

MDNTAGE AVEC CÂBLES ET PDULIES (A)

Les câbles sont utilisés dans une phase de décharge en raison des problèmes posés par les vibrations induites lors de la mise en charge du câble. Une expérience faite avec un câble en kevlar (matériau très rigide) d'un diamètre de 4mm a montré que des problèmes vibratoires se posent à partir d'un lâcher vertical d'une masse de 15 Kg sur 20 cm.

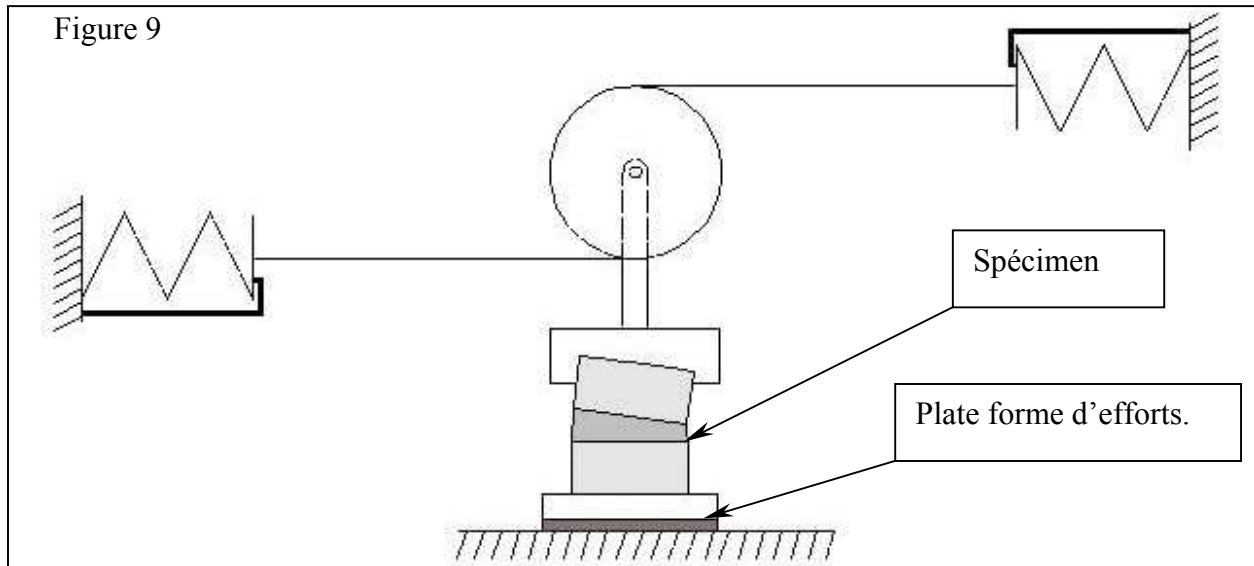


Tableau 14

Types de sollicitations applicables	Flexion – Extension – Inflexion La torsion est envisageable si le montage permet une rotation de la poulie
Sollicitations pures ?	Oui
Si l'on désire des sollicitations combinées, peut-on les gérer facilement ?	Non
Montage disponible ?	Non
Gestion de la mesure des déplacements ?	Pas de problèmes particuliers quel que soit le système (accélérométrique, mécanique ou optique)
Gestion de la mesure des efforts ?	Pas de problèmes particuliers
Problèmes liés à la précharge ?	Pas de problèmes particuliers
Vitesse limite	~0.2 m/s et 70 rad/s

MONTAGE AVEC CÂBLES ET POUTRES (DGDN))

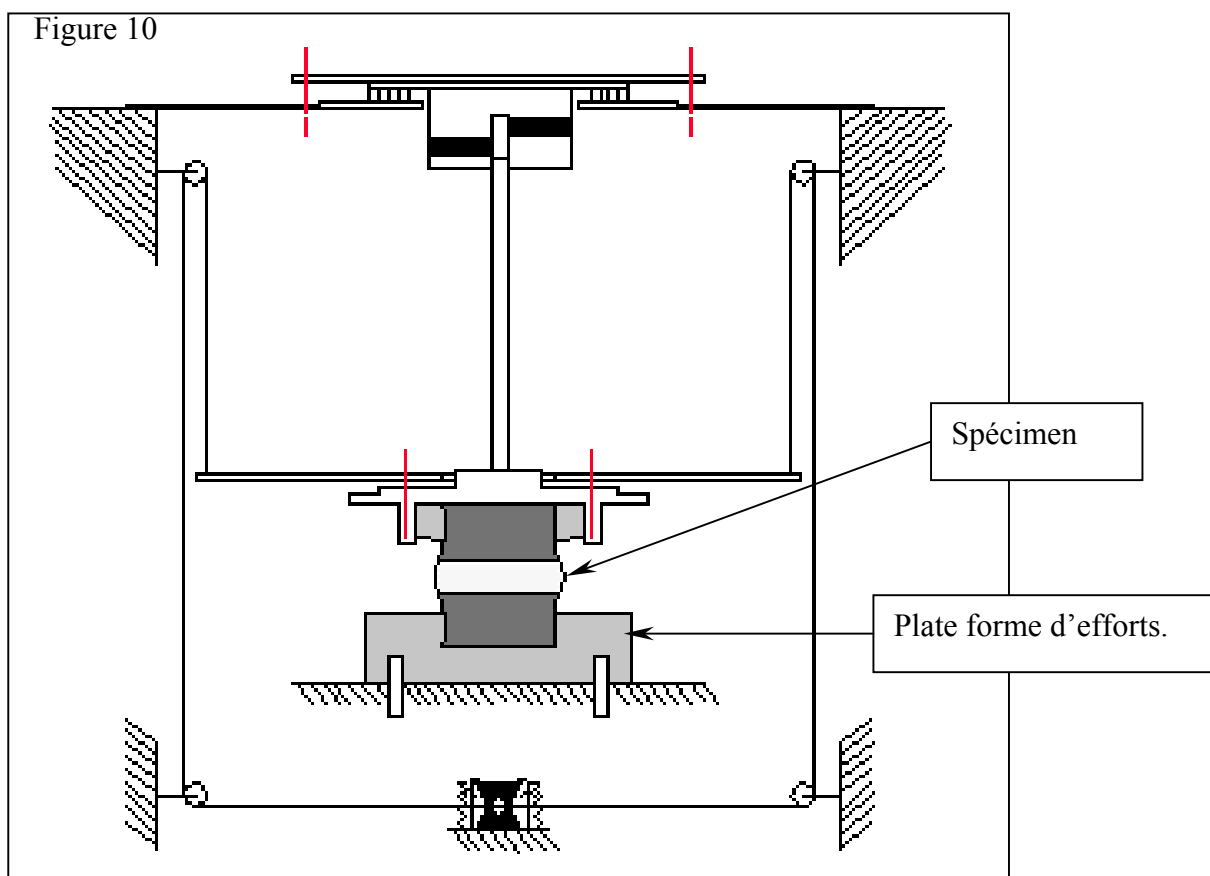


Tableau 15

Types de sollicitations applicables	Flexion – Extension – Inflexion
Sollicitations pures ?	Oui
Si l'on désire des sollicitations combinées, peut-on les gérer facilement ?	Non
Montage disponible ?	Non
Gestion de la mesure des déplacements ?	Pas de problème particulier quel que soit le système (accélérométrique, mécanique ou optique)
Gestion de la mesure des efforts ?	Pas de problèmes particuliers
Problèmes liés à la précharge ?	Pas de problèmes particuliers
Vitesse limite	~0.2 m/s et 70 rad/s

B. Montages à déplacements imposés

MDNTAGE AVEC PUIITS DE CHUTE

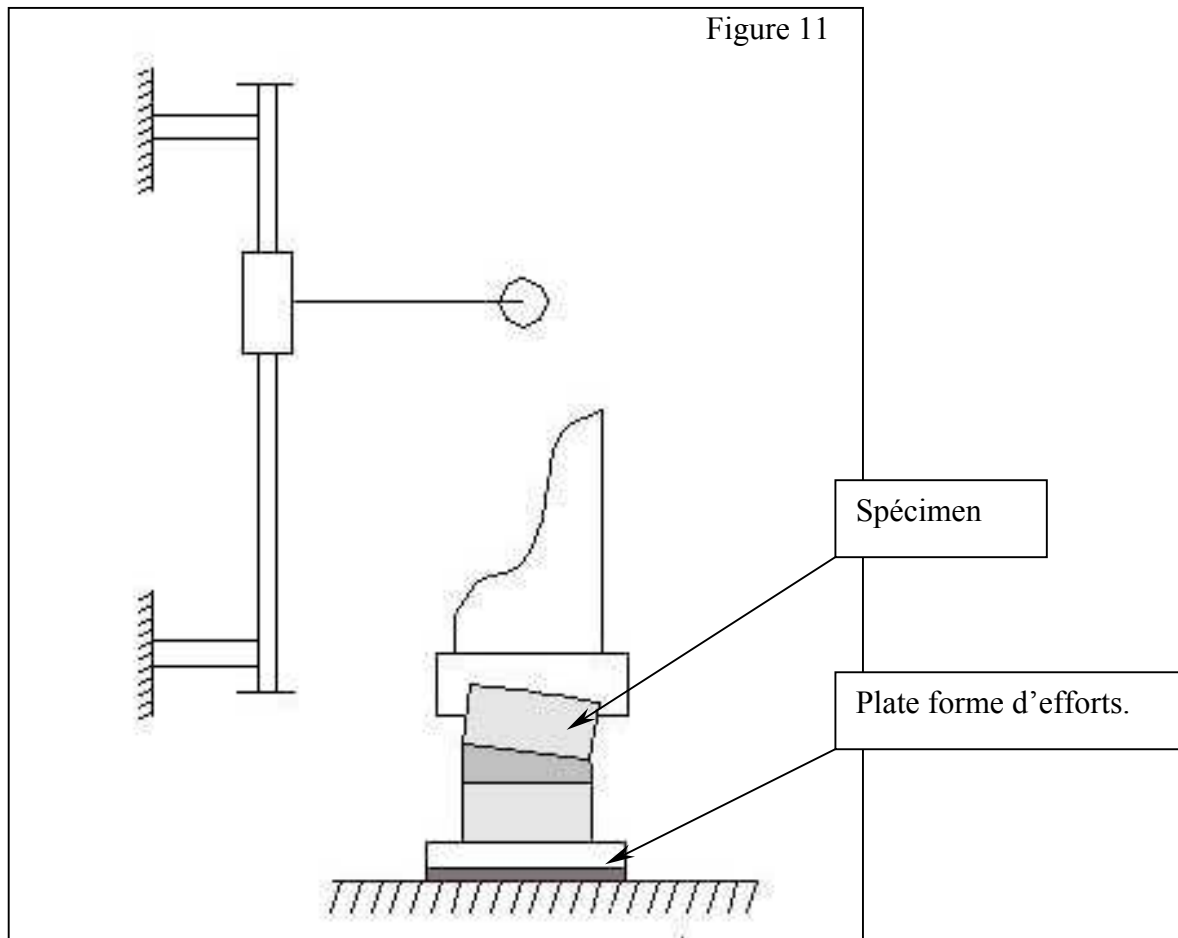


Tableau 16

Types de sollicitations applicables	Flexion – Extension – Inflexion
Sollicitations pures ?	Non
Si l'on désire des sollicitations combinées, peut-on les gérer facilement ?	Non
Montage disponible ?	Oui (LAB)
Gestion de la mesure des déplacements ?	Pas de problème particulier quel que soit le système (accélérométrique, mécanique ou optique)
Gestion de la mesure des efforts ?	Pas de problèmes particuliers
Problèmes liés à la précharge ?	Instabilité du montage et moments induits
Vitesse limite	~ 9 m/s

MONTAGE AVEC ROULETTE

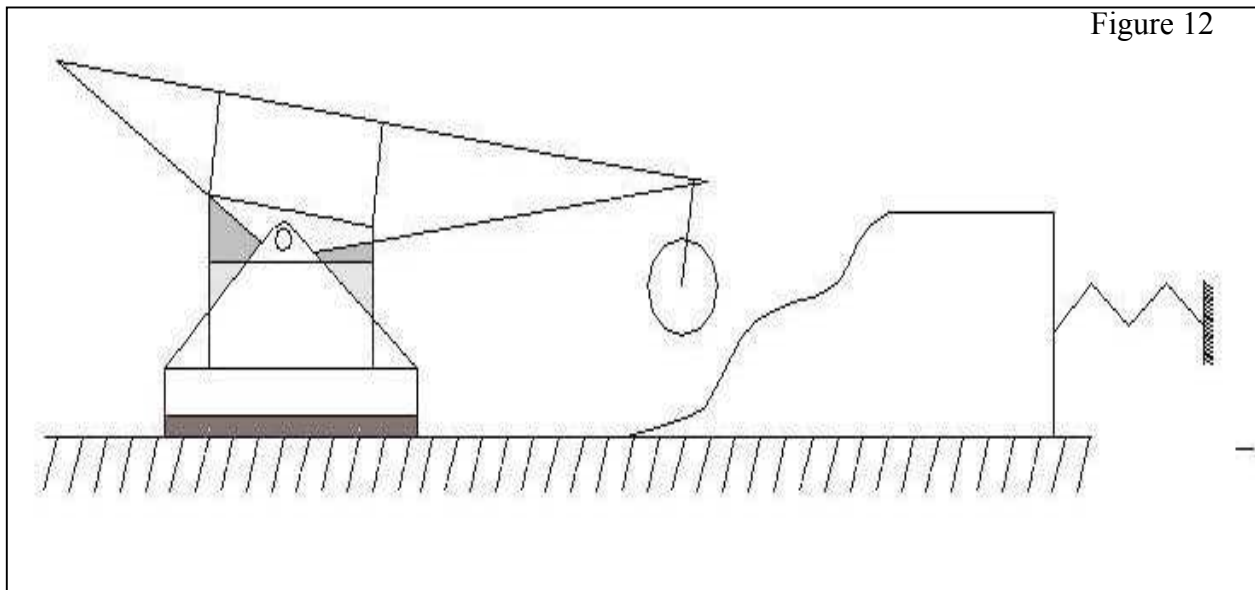


Figure 12

Tableau 17

Types de sollicitations applicables	Flexion – Extension – Inflexion La torsion est envisageable si le montage permet une rotation de la roulette et du plan incliné.
Sollicitations pures ?	Non
Si l'on désire des sollicitations combinées, peut-on les gérer facilement ?	Plus le bras de levier est faible et plus les sollicitations sont combinées
Montage disponible ?	Oui (LAB)
Gestion de la mesure des déplacements ?	Pas de problèmes particuliers quel que soit le système (accélérométrique, mécanique ou optique)
Gestion de la mesure des efforts ?	Pas de problèmes particuliers
Problèmes liés à la précharge ?	Pas de problèmes particuliers à conditions de mettre en contact la roulette et la plan incliné au début de l'expérience
Vitesse limite	~ 10 m/s

NOTA : toutes les vitesses indiquées sont données à titre indicatif. Des procédés spécifiques peuvent fournir des vitesses bien plus élevées. Des vitesses de l'ordre de 40 m/s sur 50mm peuvent être obtenues à l'aide d'un piston pyrotechnique (prétensionneur de ceinture).

IV- ASPECTS THEORIQUES

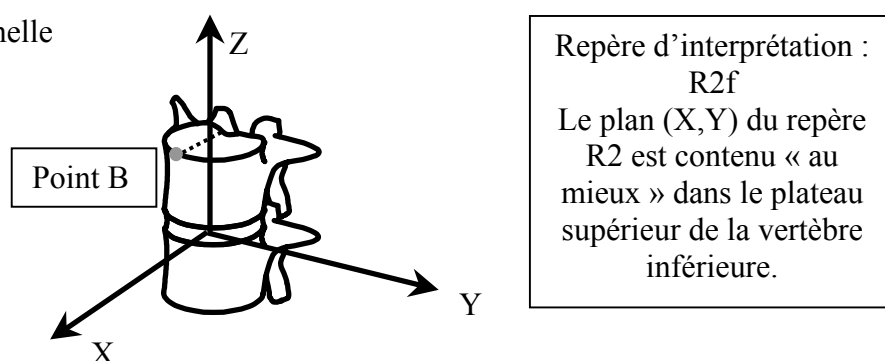
1- théorie liée aux déplacements d'un solide dans l'espace

Cet algorithme a été créé pour répondre à la question suivante :

Quel est le mouvement relatif entre deux vertèbres au cours du temps lorsque celles-ci évoluent dans l'espace de façon indépendante l'une de l'autre ?

Ce mouvement relatif est décomposé en trois rotations et trois translations (point B) autour d'un repère dit d'interprétation. Dans ce programme, ce rôle est joué par le repère de la vertèbre inférieure (indice 2) en position finale avec l'axe x en postéro-anterieur, l'axe y de droite à gauche et l'axe z de bas en haut.

Figure 13 : unité fonctionnelle



L'intérêt de cet algorithme provient du fait que ces courbes peuvent être considérées de façon indépendante les unes des autres. Ainsi, l'utilisateur n'a pas à réfléchir à l'ordre des rotations utilisés. La rotation autour de l'axe x correspond donc au mouvement d'inflexion latérale, la rotation autour de l'axe y correspond au mouvement de flexion-extension et la rotation autour de l'axe z correspond au mouvement de torsion.

ATTENTION : cet algorithme permet seulement de visualiser les mouvements d'inflexion (suivant x), de flexion (suivant y) et de torsion (suivant z) de façon simple, ces mouvements étant indépendants les uns des autres. Afin de s'affranchir de l'ordre des rotations, des séquences de rotations différentes ont été utilisées suivant que l'on s'intéressait aux angles autour de $X2f$, $Y2f$ ou $Z2f$ (position des axes du repère 2 en position finale). De ce fait, on peut considérer les trois rotations de façon indépendantes mais on ne peut plus reconstruire le mouvement.

N.B. : toute la théorie sur laquelle repose cet algorithme est synthétisée dans le document de Stéphane Véron intitulé « interprétation des déplacements dans l'espace » datant de juillet 1995. Ce document est disponible au L.B.M

Le schéma directeur du programme est le suivant :

- Les déplacements (x, y, z) de trois points pour chacune des vertèbres sont enregistrés au cours du temps. Ils doivent être exprimés dans un repère global fixe. Ces points sont nommés a1, b1 et c1 pour la vertèbre supérieure (déplacements dplxa1, dplya1, dplza1, dplxb1, dplyb1, dplzb1, dplxc1, dplyc1, dplzc1) et a2, b2 et c2 pour la vertèbre inférieure (déplacements dplxa2, dplya2, dplza2, dplxb2, dplyb2, dplzb2, dplxc2, dplyc2 et dplzc2)
- Il n'est pas nécessaire que les points ai, bi et ci des repères 1 et 2 forment un repère orthonormé.

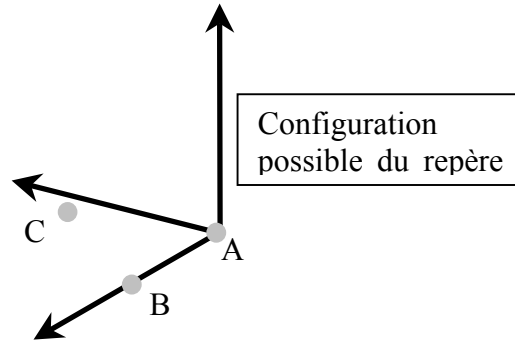


Figure 14 : repère

- Création d'une matrice par vertèbres dans lesquelles sont calculés les déplacements des repères 1 et 2 orthonormés au cours du temps.
- Calcul des rotations avec une combinaison pour chaque angle :
 - Angles de rotation autour de X2f : combinaison [C][B][A]
 - Angles de rotation autour de Y2f : combinaison [C][A][B]
 - Angles de rotation autour de Z2f : combinaison [B][A][C]
 Avec A, B et C les matrices de rotation élémentaires autour d'un axe x, y et z

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(x) & -\sin(x) \\ 0 & \sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \cos(y) & 0 & \sin(y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(y) & 0 & \cos(y) \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \cos(z) & -\sin(z) & 0 \\ \sin(z) & \cos(z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcul du déplacement des points B1 et B2.
Ainsi nous avons l'évolution du vecteur B1B2

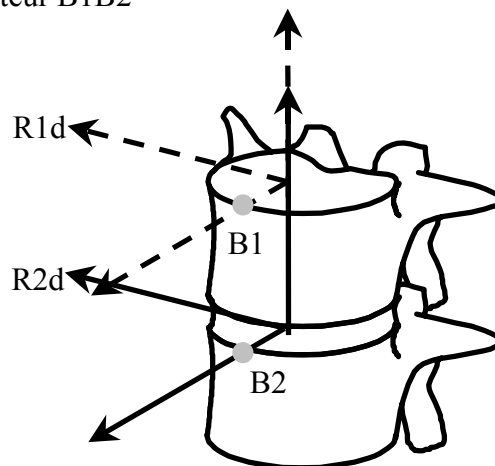


Figure 15

- Calcul des vitesses et des accélérations par dérivation pour les translations et les rotations.
- Représentation graphique

2- Théorie du cadre de mesure 8 capteurs

A. Présentation

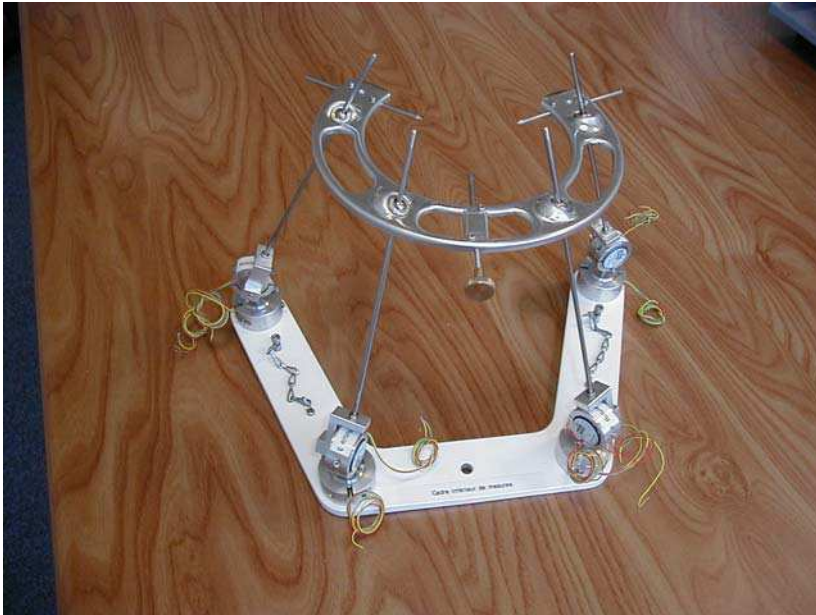


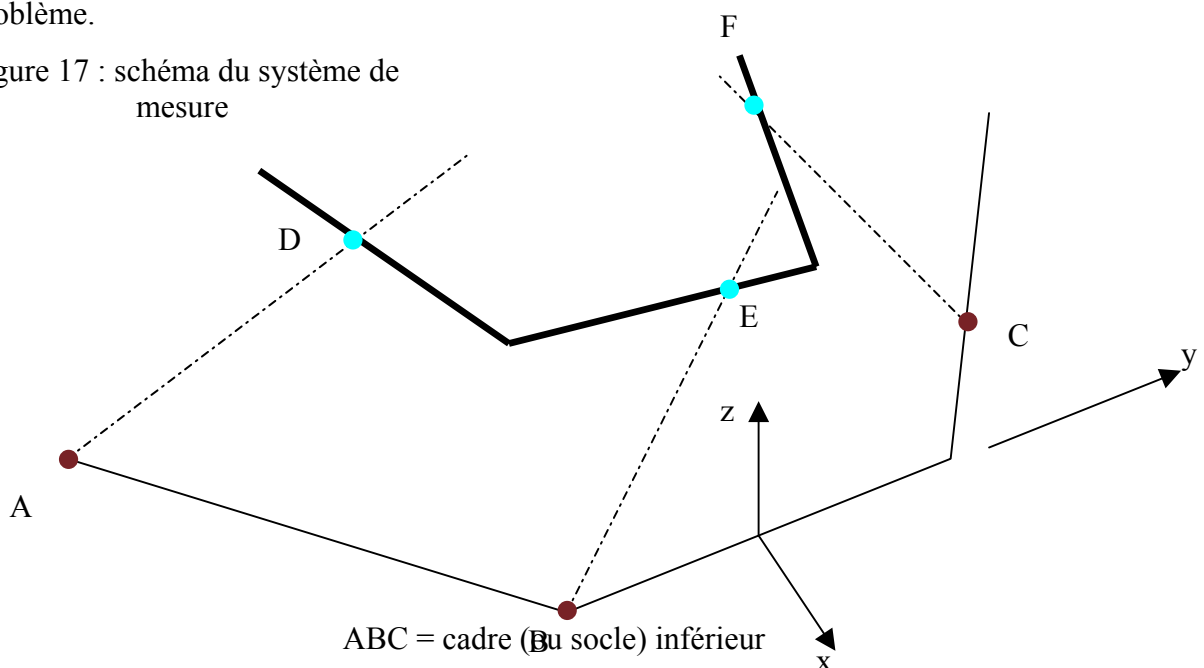
Figure 16 : photo du cadre de mesure

Ce système de mesure original permet, à l'aide de potentiomètres solidaires des tiges, de connaître la position des centres des rotules de l'étrier supérieur au cours du temps. Ainsi, en fixant une vertèbre à ce dernier, nous pouvons évoluer sa position dans l'espace durant une sollicitation quelconque. En plus des mesures potentiométriques, nous partons du fait que les distances entre rotules ainsi que leurs positions relatives ne changent pas au cours du temps (à la déformation du cadre près).

B. Utilisation de trois tiges des quatre tiges

Au début de notre recherche, nous avons postulé que trois tiges sur quatre suffisaient à résoudre ce problème.

Figure 17 : schéma du système de mesure



DEF = cadre (ou étrier) supérieur

Hypothèse :

On connaît à $t=0$, les positions des points A, B, C, D, E, F et donc les distances entre les points D et E, D et F, et E et F.

Description des angles des capteurs pour un point P quelconque

Pbas = angle mesuré par le potentiomètre du bas

Phaut = angle mesuré par le potentiomètre du haut

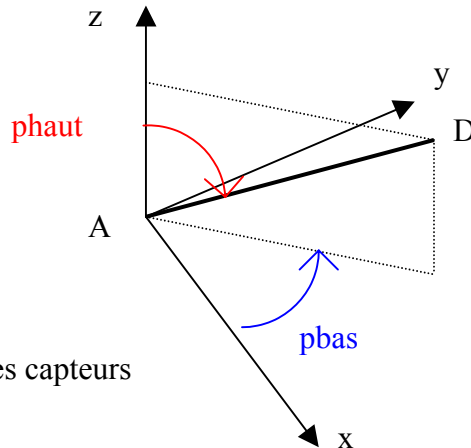


Figure 18 : repère des capteurs

Le but de ce système est d'arriver à déterminer les coordonnées des points D, E et F au cours de l'essai ce qui nous permettra de déterminer les mouvements de la vertèbre centrale puisque cette dernière est solidaire de la partie supérieure du cadre de mesure (étrier).

A un instant donné nous connaissons l'équation de la droite AD puisque nous savons qu'elle passe par le point fixe A et que son orientation est fournie par les données des deux capteurs de rotation placés en A.

Ecrivons son équation dans l'espace :

Droite AD :

Données connues : coordonnées du point A(x_a, y_a, z_a)

Pot_ah = Valeur de l'angle du potentiomètre placé en A en partie haute

Pot_ab = Valeur de l'angle du potentiomètre placé en A en partie basse

$$x_d \times \cos(\text{pot_ah}) - (z_d - z_a) \times \sin(\text{pot_ah}) \times \cos(\text{pot_ab}) = x_a \times \cos(\text{pot_ah})$$

$$y_d \times \cos(\text{pot_ah}) - (z_d - z_a) \times \sin(\text{pot_ah}) \times \sin(\text{pot_ab}) = y_a \times \cos(\text{pot_ah})$$

Droite BE :

$$x_e \times \cos(\text{pot_bh}) - (z_e - z_b) \times \sin(\text{pot_bh}) \times \cos(\text{pot_bb}) = x_b \times \cos(\text{pot_bh})$$

$$y_e \times \cos(\text{pot_bh}) - (z_e - z_b) \times \sin(\text{pot_bh}) \times \sin(\text{pot_bb}) = y_b \times \cos(\text{pot_bh})$$

Droite CF :

$$xf \times \cos(\text{pot_ch}) - (zf - zc) \times \sin(\text{pot_ch}) \times \cos(\text{pot_cb}) = xc \times \cos(\text{pot_ch})$$

$$yf \times \cos(\text{pot_ch}) - (zf - zc) \times \sin(\text{pot_ch}) \times \sin(\text{pot_cb}) = yc \times \cos(\text{pot_ch})$$

De plus la distance entre les points D, E, les points E, F et les points D, F est constante :

$$(xe - xd)^2 + (ye - yd)^2 + (ze - zd)^2 = Led^2$$

$$(xe - xf)^2 + (ye - yf)^2 + (ze - zf)^2 = Lef^2$$

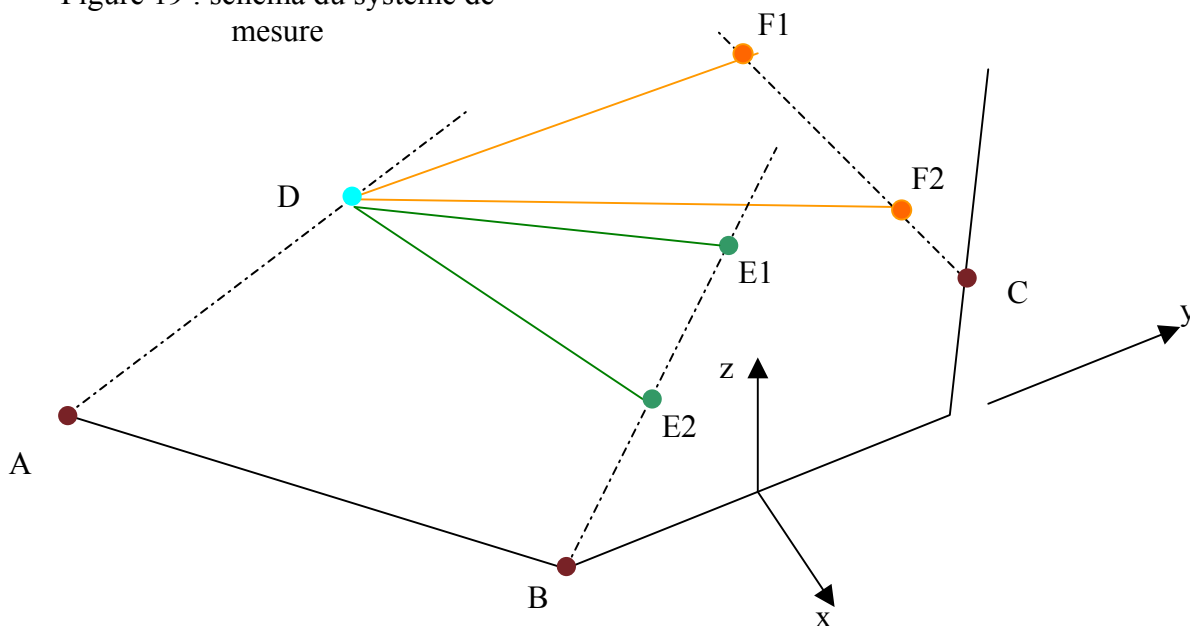
$$(xd - xf)^2 + (yd - yf)^2 + (zd - zf)^2 = Ldf^2$$

Nous avons donc 9 équations pour 9 inconnues (coordonnées des points D, E et F).
Nous pouvons donc déterminer la position de la vertèbre centrale au cours du temps.

Cependant, la solution donnée par ce système n'est pas unique.

Partons d'une position donnée sur la tige AD. Nous trouvons deux positions pour le point E tel que $DE = Lde_{\text{consigne}}$ et deux positions pour le point F tel que $DF = Ldf_{\text{consigne}}$ ce qui correspond aux intersections d'une droite avec une sphère.

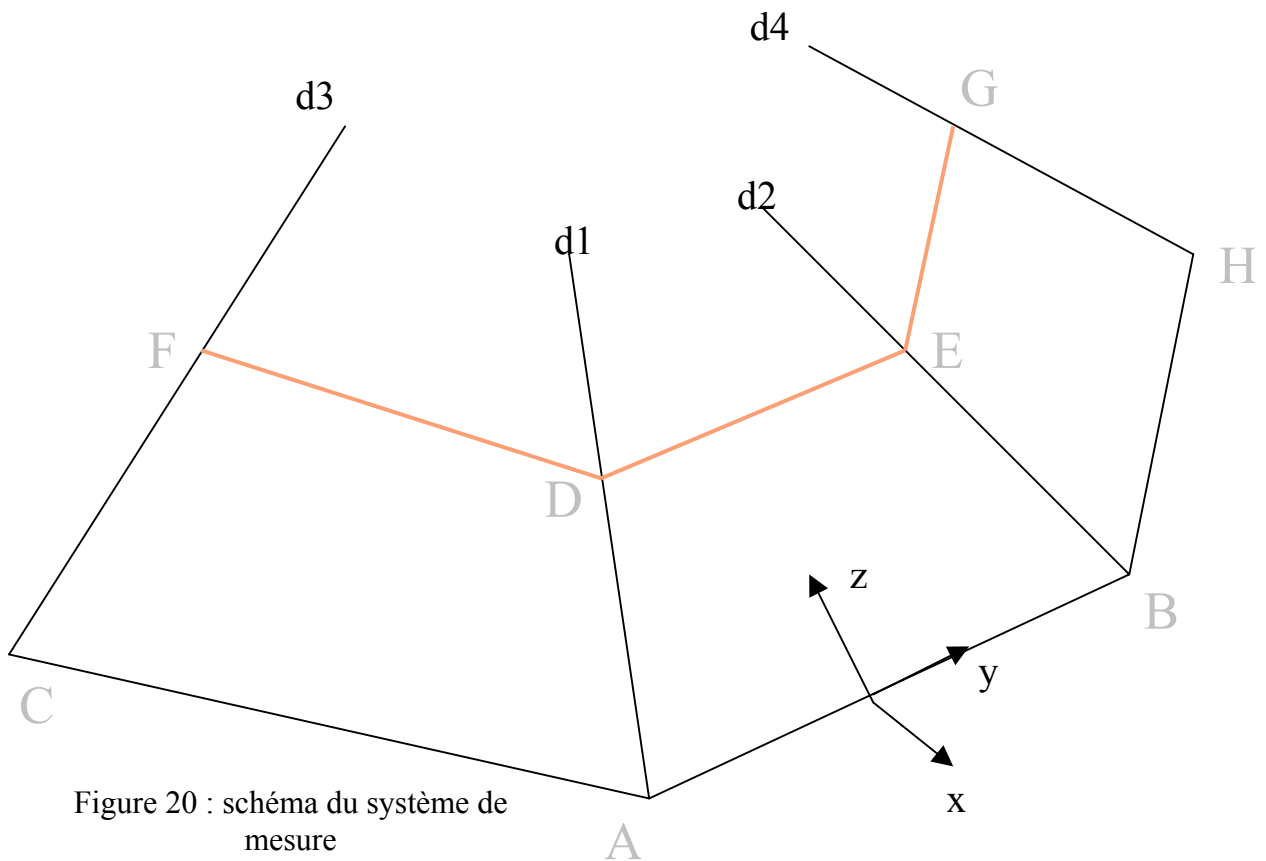
Figure 19 : schéma du système de mesure



Ainsi nous avons 4 possibilités (DE1F1, DE1F2, DE2F1, DE2F2) qui respectent les conditions de longueurs entre rotules pour DE et DF. Aussi, la solution doit être parmi ces quatre points pour la longueur EF. Or, il est apparu, lors d'essais de validation que des distances $EiFi$ pouvait être égales entre elles. Ceci étant du à des positions particulières de l'étrier associé aux incertitudes de mesure. Nous nous trouvons donc face à plusieurs cas qui respectait les consignes de longueurs et de position relative.

Il faut donc rajouter une quatrième tige pour lever l'indétermination.

C. Utilisation des quatre tiges



Les potentiomètres sont placés deux par deux aux points A, B, C et D qui forme le socle du cadre de mesure. Les points D, E, F et G représentent les rotules de l'étrier.

Les droites d1, d2, d3 et d4 sont représentées paramétriquement par les équations suivantes.

$$\left\{ \begin{array}{l} xd = xa + k1.a1 \\ yd = ya + k1.b1 \\ zd = za + k1.c1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} xe = xb + k2.a2 \\ ye = yb + k2.b2 \\ ze = zb + k2.c2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} xf = xc + k3.a3 \\ yf = yc + k3.b3 \\ zf = zc + k3.c3 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} xg = xh + k4.a4 \\ yg = yh + k4.b4 \\ zg = zh + k4.c4 \end{array} \right.$$

Les paramètres sont k1, k2, k3 et k4 et les vecteurs directeurs (a1, b1, c1), (a2, b2, c2), (a3, b3, c3), (a4, b4, c4) sont données par les mesures potentiométriques.

Les inconnus sont les paramètres et les coordonnées des points D, E, F et G.

Les données connues sont les vecteurs directeurs, les coordonnées des points A, B, C et H et les distances Lde, Ldf, Ldg, Lef, Leg, Lfg.

En outre on connaît à l'instant initial les coordonnées des points D, E, F et G.

La démarche est la suivante :

AD est la tige maître, BE et CF les tiges esclaves et HG la tige discriminante.

Partons de la tige maître AD.

- Calcul de la distance DE en fonction de k_1 et k_2 en utilisant :

$$DE^2 = (xe - xd)^2 + (ye - yd)^2 + (ze - zd)^2$$

- On doit avoir $DE = Lde$

On trouve donc $k_2 = f_2(k_1)$

Cette fonction étant du second degré, on trouve deux valeurs de k_2 : k_{2_1} et k_{2_2} qui correspondent aux points E1 et E2 et qui sont fonction de k_1 .

- Calcul de la distance DF en fonction de k_1 et k_3 en utilisant :

$$DF^2 = (xf - xd)^2 + (yf - yd)^2 + (zf - zd)^2$$

- On doit avoir $DF = Ldf$

On trouve donc $k_3 = f_3(k_1)$

Cette fonction étant du second degré, on trouve deux valeurs de k_3 : k_{3_1} et k_{3_2} qui correspondent aux points F1 et F2 et qui sont fonction de k_1 .

- Calcul de la distance DG en fonction de k_1 et k_4 en utilisant :

$$DG^2 = (xg - xd)^2 + (yg - yd)^2 + (zg - zd)^2$$

- On doit avoir $DG = Ldg$

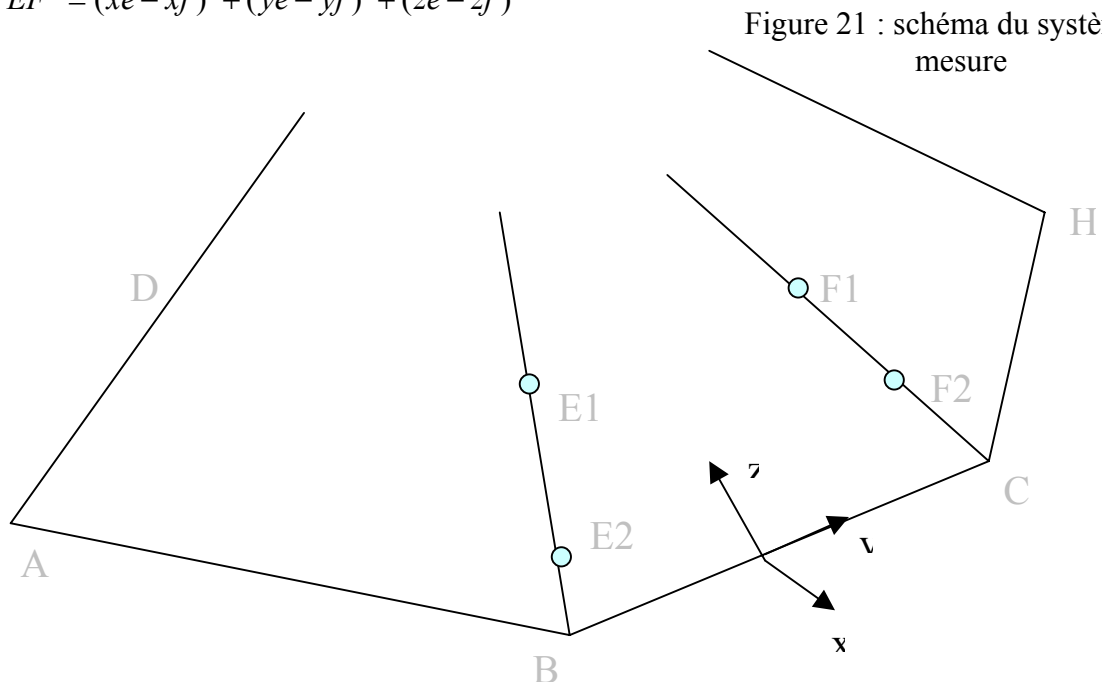
On trouve donc $k_4 = f_4(k_1)$

Cette fonction étant du second degré, on trouve deux valeurs de k_4 : k_{4_1} et k_{4_2} qui correspondent aux points G1 et G2 et qui sont fonction de k_1 .

Occupons-nous de la distance EF entre les tiges BE et CF.

Cette distance fonction de k_2 et k_3 est calculée à l'aide de :

$$EF^2 = (xe - xf)^2 + (ye - yf)^2 + (ze - zf)^2$$



Nous avons vu que pour avoir les distances DE et DF égaux à notre consigne (Lde et Ldf), il n'est pas possible de choisir les points E et F arbitrairement mais de façon à respecter les relations $k_2=f_2(k_1)$ et $k_3=f_3(k_1)$.

4 points conviennent, qui sont E1, E2, F1 et F2 et peuvent former 4 distances

E1F1 est fonction de k_{2_1} et k_{3_1} qui sont fonction de k_1 .

E1F2 est fonction de k_{2_1} et k_{3_2} qui sont fonction de k_1 .

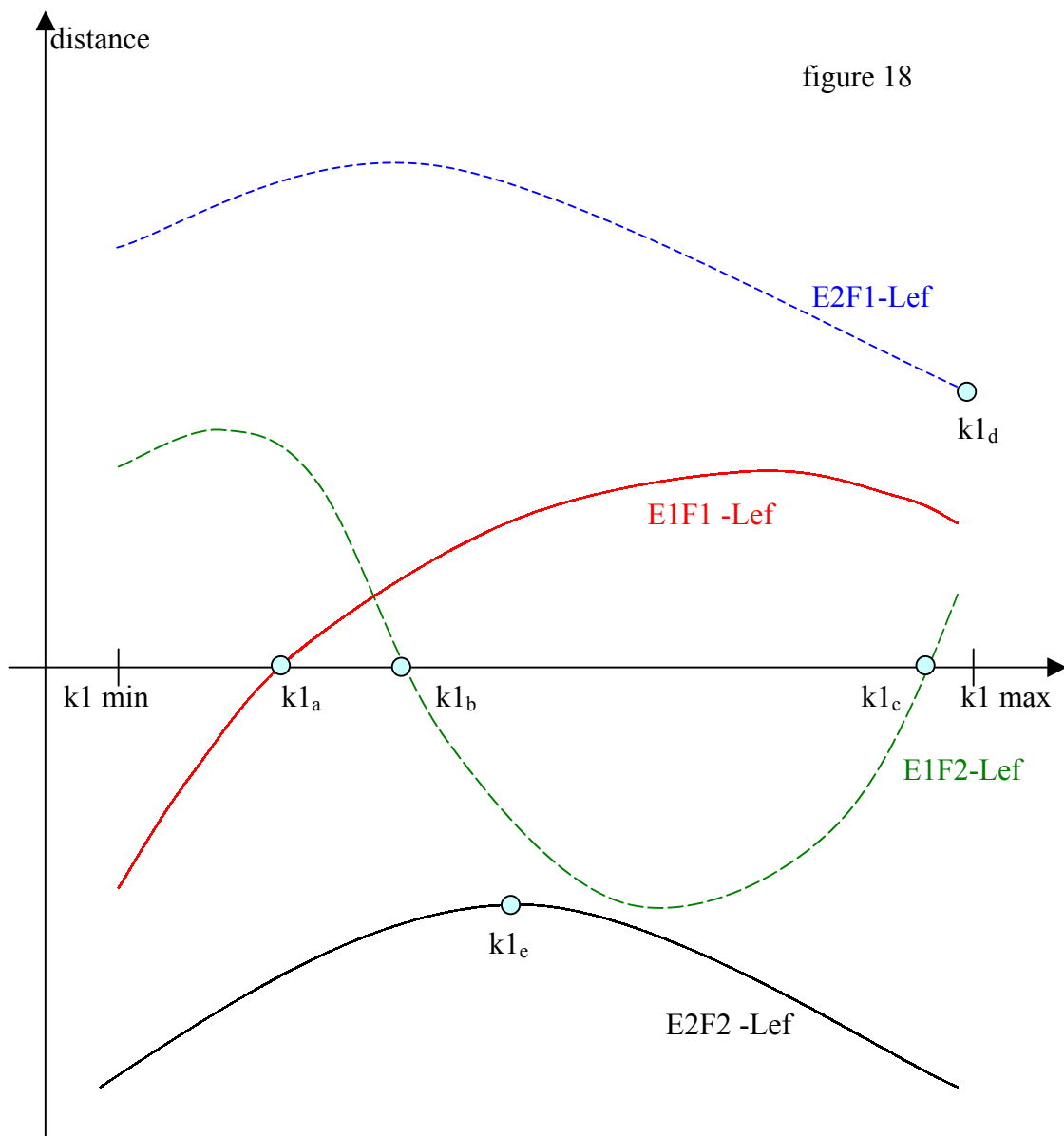
E2F1 est fonction de k_{2_2} et k_{3_1} qui sont fonction de k_1 .

E2F2 est fonction de k_{2_2} et k_{3_2} qui sont fonction de k_1 .

Si nous représentons sur un graphe les distances E1F1-Lef, E1F2-Lef, E2F1-Lef et E2F2-Lef, nous aurons les valeurs de k_1 tel sue $E_iF_i = L_{ef}$.

Ces valeurs de k_1 nous assurerons aussi $DE_i = L_{ed}$ et $DF_i = L_{fd}$

Exemple de graphe :



Nous avons sur ce graphique un exemple d'évolution des distances (EiFi – Lef) lorsque k_1 balaye un intervalle [$k_1 \text{ min} : k_1 \text{ max}$] sur lequel nous reviendrons plus tard.

Dans ce cas, trois valeurs de k_1 (k_{1a} , k_{1b} , k_{1c}) permettent d'avoir $DE=Led$, $DF=Ldf$ et $EF=Lef$.

Pour les valeurs k_{1d} , k_{1e} nous avons $DE=Led$, $DF=Ldf$ et $EF \sim Lef$ à un epsilon près.

Il est évident que ce sont les trois premières valeurs qui vont retenir notre attention.

A partir de ce moment, il va falloir discriminer ces trois cas à l'aide de la quatrième tige HG.

Pour k_{1a} :

D'une part, pour le point D correspondant à k_{1a} nous allons calculer les points $G_{1k_{1a}}$ et $G_{2k_{1a}}$ tel que $DG = Ldg$.

D'autre part, nous savons que la position relative du point G par rapport aux points D, E et F est invariante en considérant que le cadre est indéformable. Connaissant les coordonnées des points D, E, F et G à l'instant initial, nous pouvons calculer les coordonnées de G dans le repère (D, E, F).

Nous calculons ainsi sa position dans le repère ($D_{k_{1a}}$, E1, F1) et nous l'appelons $G_{11k_{1a}}$ (indice 1 pour E et 1 pour F)

Pour k_{1b} :

D'une part, pour le point D correspondant à k_{1b} nous allons calculer les points $G_{1k_{1b}}$ et $G_{2k_{1b}}$ tel que $DG = Ldg$.

D'autre part, nous savons que la position relative du point G par rapport aux points D, E et F est invariante en considérant que le cadre est indéformable. Connaissant les coordonnées des points D, E, F et G à l'instant initial, nous pouvons calculer les coordonnées de G dans le repère (D, E, F).

Nous calculons ainsi sa position dans le repère ($D_{k_{1b}}$, E1, F2) et nous l'appelons $G_{12k_{1b}}$ (indice 1 pour E et 2 pour F)

Pour k_{1c} :

D'une part, pour le point D correspondant à k_{1c} nous allons calculer les points $G_{1k_{1c}}$ et $G_{2k_{1c}}$ tel que $DG = Ldg$.

D'autre part, nous savons que la position relative du point G par rapport aux points D, E et F est invariante en considérant que le cadre est indéformable. Connaissant les coordonnées des points D, E, F et G à l'instant initial, nous pouvons calculer les coordonnées de G dans le repère (D, E, F).

Nous calculons ainsi sa position dans le repère ($D_{k_{1c}}$, E1, F2) et nous l'appelons $G_{12k_{1c}}$ (indice 1 pour E et 2 pour F)

La discrimination se fait en prenant le minimum des distances suivantes :

[$G_{1k_{1a}}$ $G_{11k_{1a}}$ $G_{2k_{1a}}$ $G_{11k_{1a}}$ $G_{1k_{1b}}$ $G_{12k_{1b}}$ $G_{2k_{1b}}$ $G_{12k_{1b}}$ $G_{1k_{1c}}$ $G_{12k_{1c}}$ $G_{2k_{1c}}$ $G_{12k_{1c}}$]

Si le minimum correspond à $G_{1k_{1b}}$ $G_{12k_{1b}}$, les points solutions sont :

$D_{k_{1b}}$, $E_{1k_{1b}}$, $F_{2k_{1b}}$, $G_{1k_{1b}}$

Ceci est un exemple de ce que l'on peut obtenir à un instant t. A un autre instant, on pourrait avoir plus de cas à discriminer. Essayons de connaître le nombre maximum d'extremum pour une courbe pour avoir une idée du nombre maximum de cas à discriminer.

Sur le nombre de racines :

Pour expliquer cela, intéressons-nous à E1F1 :

Si nous « fixons » F1 et faisons varier E1 par l'intermédiaire de k1 de façon à avoir toujours une consigne de distance entre D et E1. Nous constatons que la fonction norme (E1F1-Lef) peut avoir jusqu'à deux racines. De même « fixons » E1 et faisons varier F1 par l'intermédiaire de k1 de façon à avoir toujours une consigne de distance entre D et F1. Nous constatons que la fonction norme (E1F1-Lef) peut avoir aussi avoir jusqu'à deux racines. Ainsi la distance E1F1-Lef possède au maximum deux racines. Il peut y en avoir un ou zéro suivant l'intervalle de k1. En outre, avec deux racines au maximum, une courbe peut avoir un ou deux extremums.

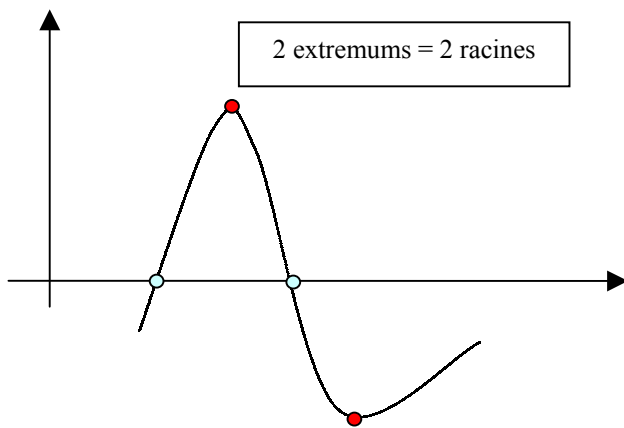


figure 19

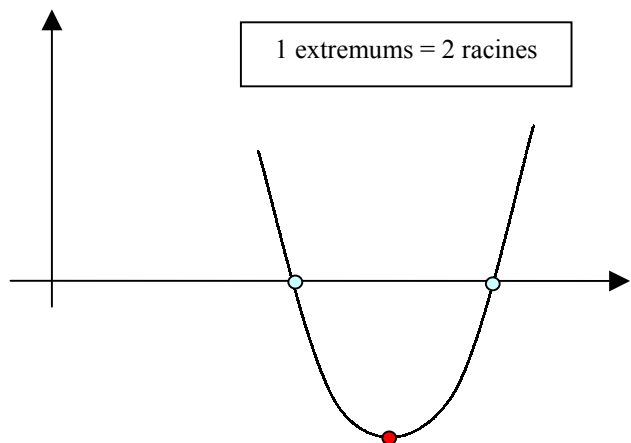


figure 20

Si nous poursuivons, une courbe avec deux extremums peut avoir jusqu'à trois racines. Bien que, dans notre cas, cette possibilité soit peu probable (et ceci est confirmé par nos essais), nous avons décidé d'incorporer dans le code de notre algorithme, la possibilité d'avoir trois racines par courbes et ceci par précaution.

Ainsi avec trois racines par courbe, nous pouvons avoir jusqu'à 12 cas à discriminer

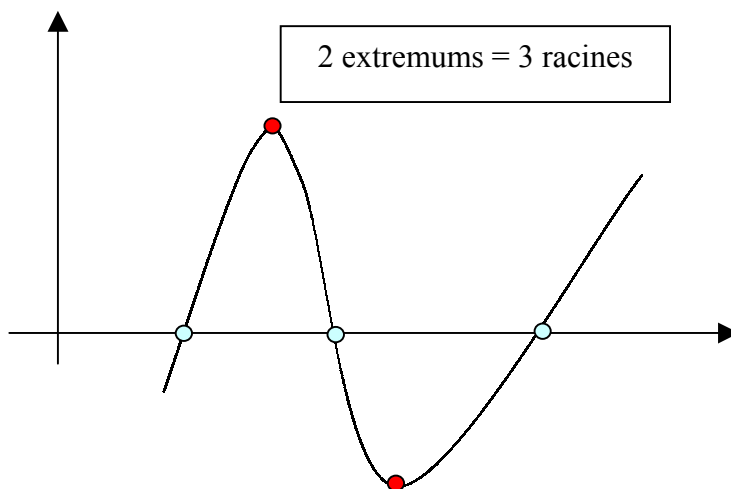


figure 21

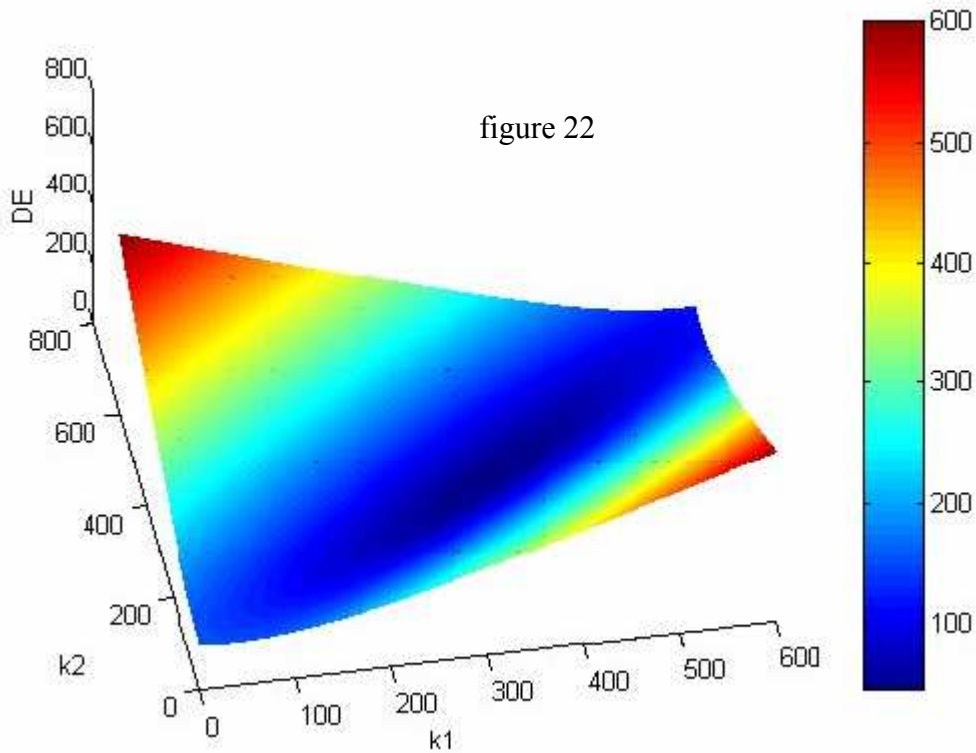
Calcul de k1 min et k1 max :

Prenons les tiges AD et BE

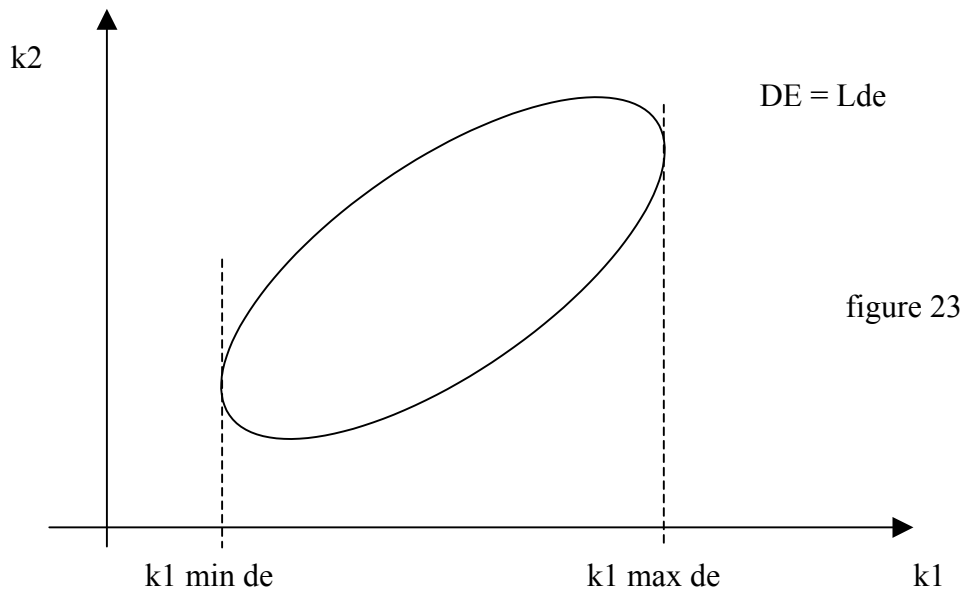
$$DE^2 = (xe - xd)^2 + (ye - yd)^2 + (ze - zd)^2$$

DE est fonction de k1 et k2.

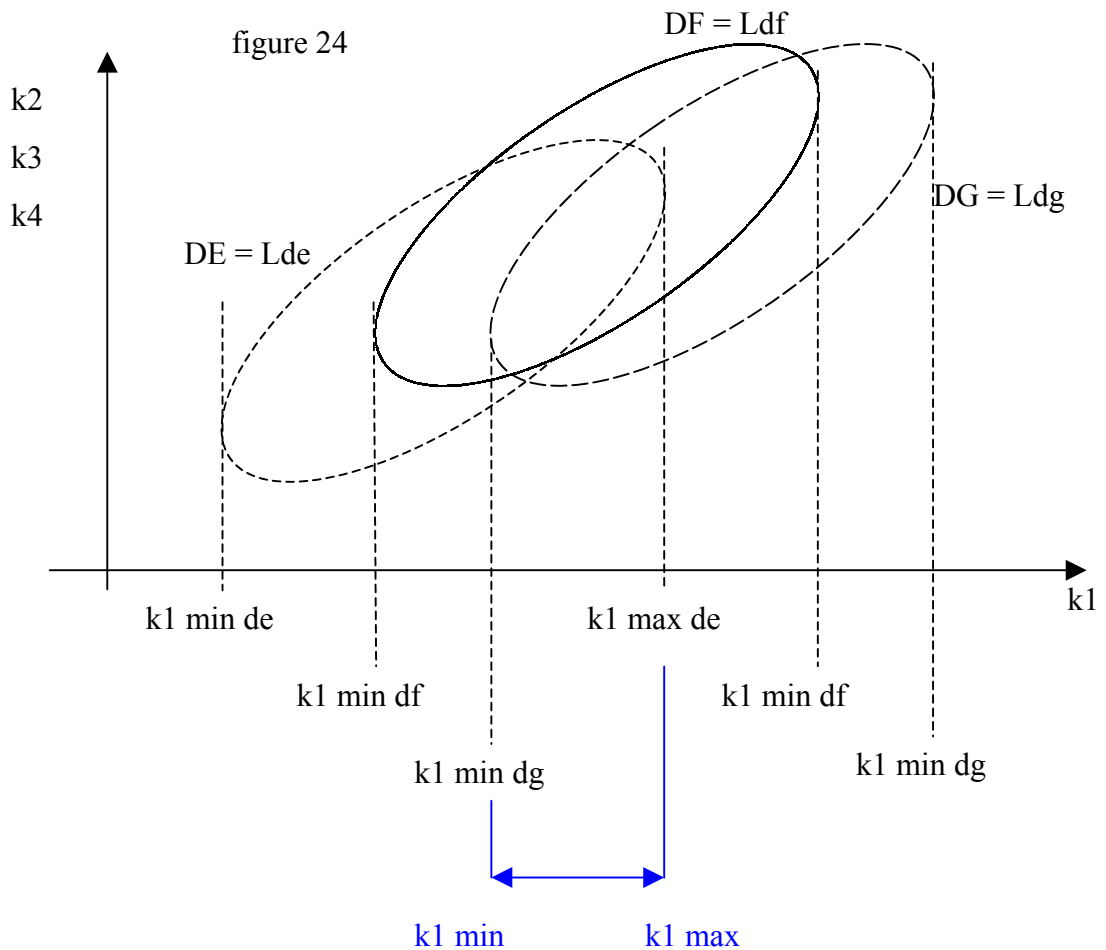
Si l'on représente DE en fonction de k1 et k2, on obtient une conique



En coupant cette conique à $DE = \text{consigne} = Lde$, on obtient une ellipse



En faisant de même pour les tiges AD et CF d'une part et AD et HG d'autre part, nous obtenons deux nouvelles ellipses pour DF = Ldf et DG = Ldg.
 En les superposant nous obtenons :



Ces ellipses sont toutes inclinées de 45° par rapport à l'axe des abscisses
 En effet, après réduction de l'équation :

$$DE^2 = (xe - xd)^2 + (ye - yd)^2 + (ze - zd)^2$$

On se retrouve avec une équation de la forme

$$k1^2 + k2^2 + A.k1.k2 + B.k1 + C.k2 + D = 0$$

Par définition, l'angle θ du repère propre par rapport au repère d'écriture est égal à :

$$\cotan(2\theta) = \frac{(\text{coeff de } k1)^2 - (\text{coeff de } k2)^2}{A}$$

D'où $\theta = 45^\circ$

Nota : d'autres variantes de cet algorithme ont été réalisées sans en améliorer les performances.
 Par exemple, nous avons essayé toutes les combinaisons entre les tiges maîtres, esclaves et discriminante, ou encore nous avons changé le test de discrimination du point G en utilisant la distance d'un point à une droite au lieu d'une distance entre deux points.

3- Théorie du cadre de mesure 9 capteurs

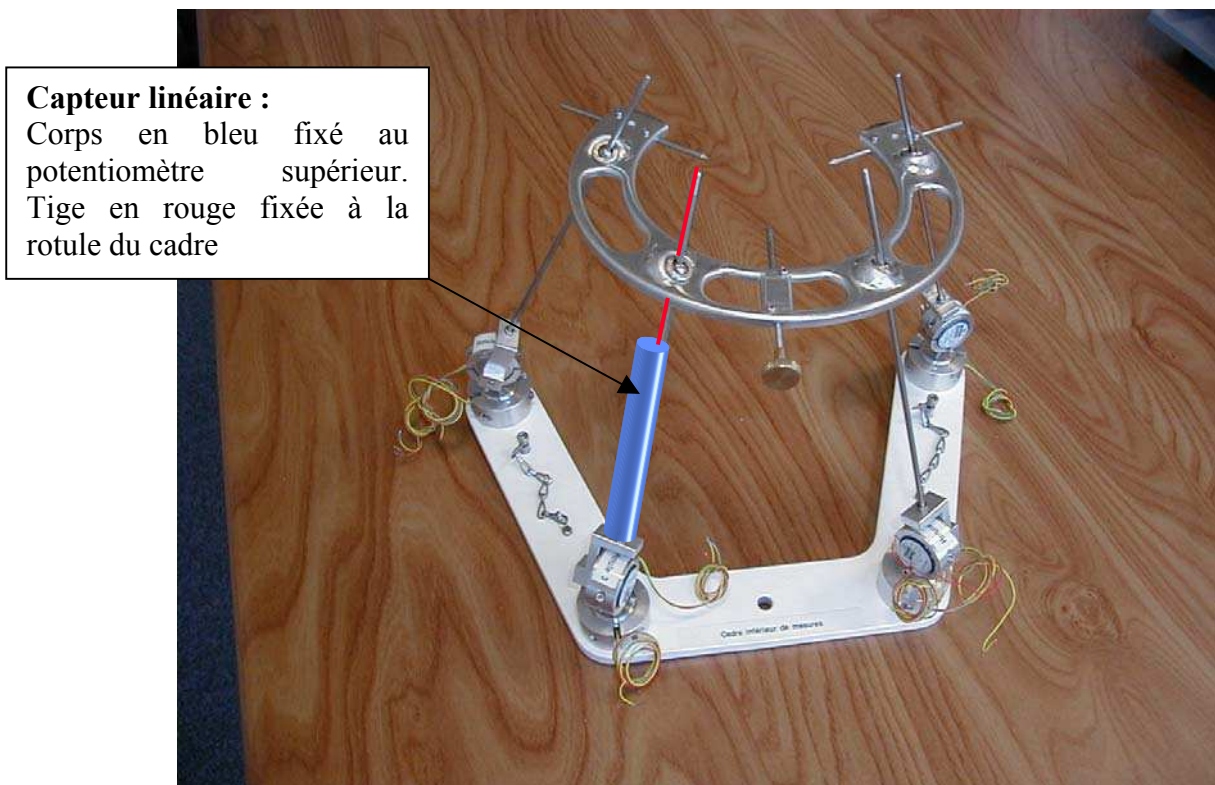


Figure 22 : photo du cadre de mesure avec son capteur linéaire

A. Présentation

Au cours de la mise au point du système, nous avons choisi de rajouter un potentiomètre linéaire résistif redondant afin d'augmenter la fiabilité du système. Ainsi, en cas de défaillance de l'un des potentiomètres angulaires, au cours d'un essai, les informations nécessaires au dépouillement et au traitement de l'essai seraient disponibles.

Ce capteur a été utilisé dans les quelques cas pour lesquels le système d'acquisition d'un potentiomètre angulaire ne s'est pas déclenché.

Donc, pour la tige où ce capteur est implanté, nous avons la position exacte du point de la rotule du cadre. En effet, les potentiomètres angulaires donnent la direction de la tige et le capteur linéaire la position sur cette tige.

Caractéristiques du potentiomètres supplémentaires du cadre de mesure :

- ❑ Marque : société MEIRI / modèle LP-50 FP
- ❑ Etendue de mesure : ~ 50 mm
- ❑ Erreur de linéarité : 0.2%

B. Utilisation des quatre tiges

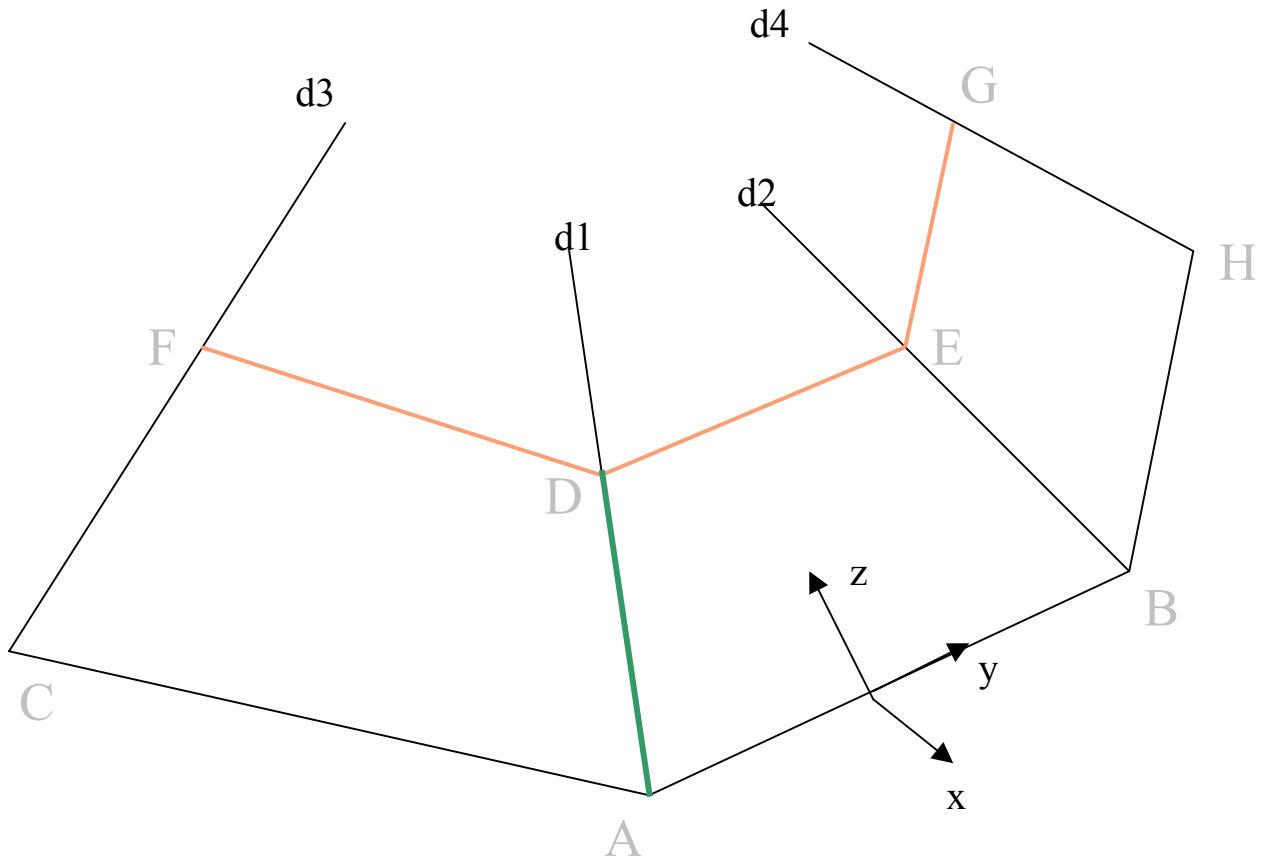


figure 23 : Schéma du système de mesure

Les potentiomètres sont placés deux par deux au points A, B, C et D qui forme le socle du cadre de mesure. Les points D, E, F et G représentent les rotules de l'étrier.

Les droites d1, d2, d3 et d4 sont représentées paramétriquement par les équations suivantes.

$$\left\{ \begin{array}{l} xd = xa + k1.a1 \\ yd = ya + k1.b1 \\ zd = za + k1.c1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} xe = xb + k2.a2 \\ ye = yb + k2.b2 \\ ze = zb + k2.c2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} xf = xc + k3.a3 \\ yf = yc + k3.b3 \\ zf = zc + k3.c3 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} xg = xh + k4.a4 \\ yg = yh + k4.b4 \\ zg = zh + k4.c4 \end{array} \right.$$

Les paramètres sont k1, k2, k3 et k4 et les vecteurs directeurs (a1,b1,c1), (a2,b2,c2), (a3,b3,c3), (a4,b4,c4) sont données par les mesures potentiométriques.

Les inconnus sont les paramètres et les coordonnées des points D, E, F et G.

Les données connues sont les vecteurs directeurs, la distance AD, les coordonnées des points A, B, C et H et les distances Lde, Ldf, Ldg, Lef, Leg, Lfg.

En outre on connaît à l'instant initial les coordonnées des points D, E, F et G.

La démarche est la suivante :

AD est la tige maître, BE et CF les tiges esclaves et HG la tige discriminante.

Partons de la tige maître AD.

- A l'aide des potentiomètres angulaires situés au point A et du capteur linéaire situé sur la tige AD, on détermine la position du point D de façon directe.

- Calcul de la distance DE en fonction de k_1 et k_2 en utilisant :

$$DE^2 = (xe - xd)^2 + (ye - yd)^2 + (ze - zd)^2$$

- On doit avoir $DE = L_{de}$

On trouve donc $k_2 = f_2(k_1)$

Cette fonction étant du second degré, on trouve deux valeurs de k_2 : k_{2_1} et k_{2_2} qui correspondent aux points E1 et E2 et qui sont fonction de k_1 .

- Calcul de la distance DF en fonction de k_1 et k_3 en utilisant :

$$DF^2 = (xf - xd)^2 + (yf - yd)^2 + (zf - zd)^2$$

- On doit avoir $DF = L_{df}$

On trouve donc $k_3 = f_3(k_1)$

Cette fonction étant du second degré, on trouve deux valeurs de k_3 : k_{3_1} et k_{3_2} qui correspondent aux points F1 et F2 et qui sont fonction de k_1 .

- Calcul de la distance DG en fonction de k_1 et k_4 en utilisant :

$$DG^2 = (xg - xd)^2 + (yg - yd)^2 + (zg - zd)^2$$

- On doit avoir $DG = L_{dg}$

On trouve donc $k_4 = f_4(k_1)$

Cette fonction étant du second degré, on trouve deux valeurs de k_4 : k_{4_1} et k_{4_2} qui correspondent aux points G1 et G2 et qui sont fonction de k_1 .

La mesure fournie par le capteur linéaire nous permet de connaître la valeur de k_1 à un instant t .

En effet k_1 est représentatif de la distance entre le point A et le point D.

$$\begin{cases} xd = xa + k_1.a_1 \\ yd = ya + k_1.b_1 \\ zd = za + k_1.c_1 \end{cases}$$

En combinant les équations, on obtient :

$$k_1^2 \times a_1^2 + k_1^2 \times b_1^2 + k_1^2 \times c_1^2 = (xd - xa)^2 + (yd - ya)^2 + (zd - za)^2$$

Le vecteur (a_1, b_1, c_1) est unitaire:

$$k_1^2 = \|AD\|^2$$

$$k_1 = AD$$

A l'aide de cette valeur nous calculons les coordonnées des points E1, E2, F1, F2, G1 et G2.

La situation est donc la suivante

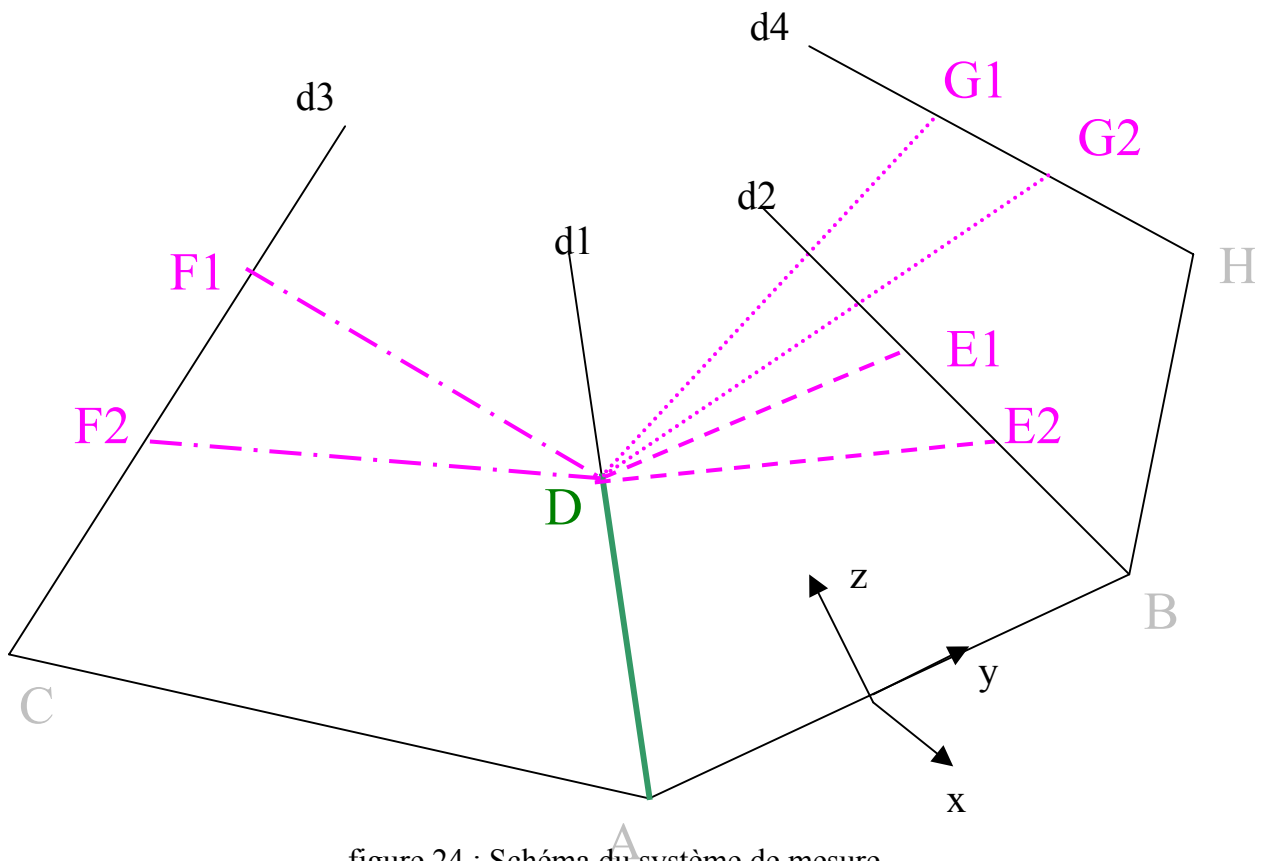


figure 24 : Schéma du système de mesure

Laissons les points G1 et G2 de côté pour le moment.

Nous savons que la position relative du point G par rapport aux points D, E et F est invariante en considérant que le cadre est indéformable. Connaissant les coordonnées des points D, E, F et G à l'instant initial, nous pouvons calculer les coordonnées de G dans le repère (D,E,F).

Pour chacune des combinaisons suivantes, nous sommes en mesure de retrouver la position du point G :

- Pour la combinaison D,E1 et F1, on trouve le point G11
- Pour la combinaison D,E1 et F2, on trouve le point G12
- Pour la combinaison D,E2 et F1, on trouve le point G21
- Pour la combinaison D,E2 et F2, on trouve le point G22

En raison des erreurs sur la mesure et de la précision d'étalonnage, ces points G_{ii} ne sont pas forcément sur la tige HG .

La situation est donc la suivante

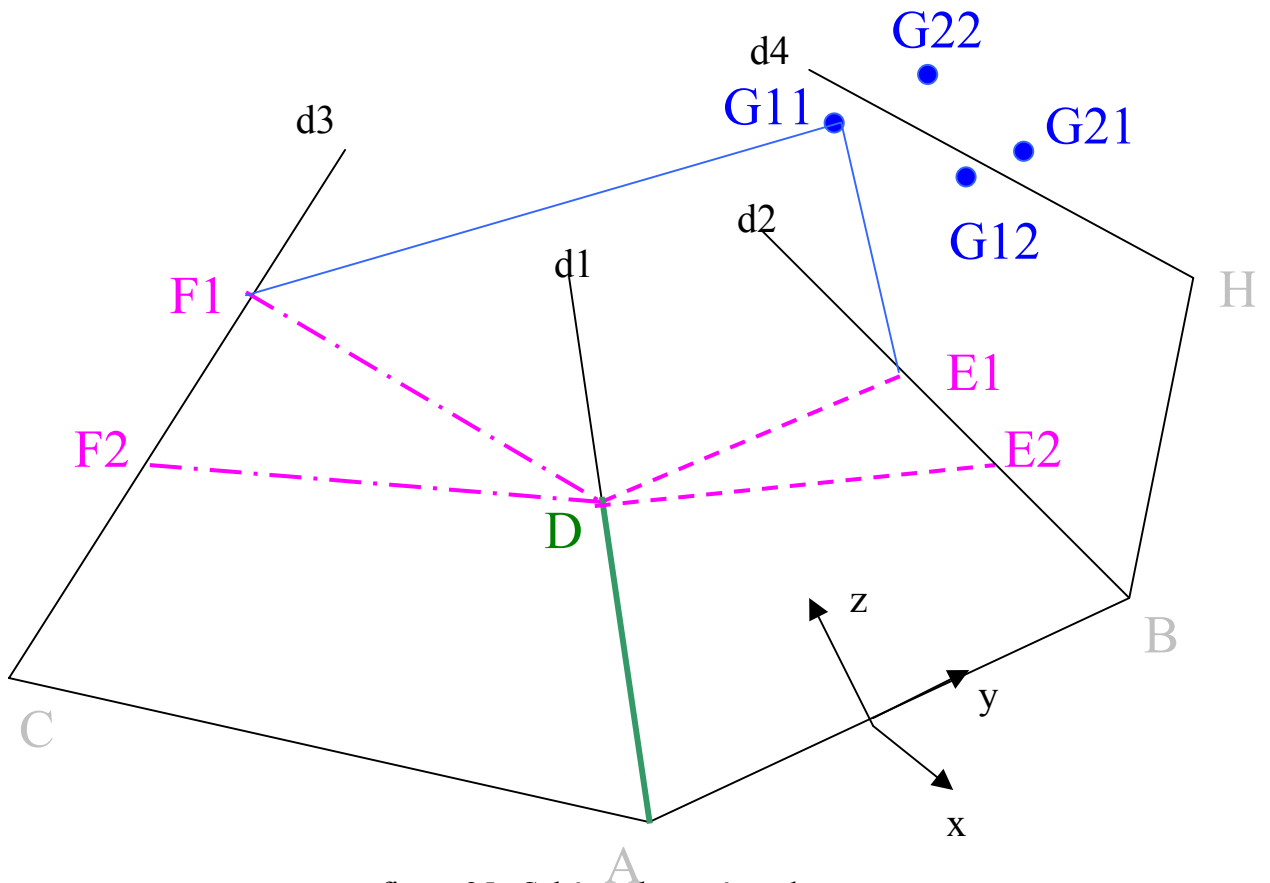


figure 25 : Schéma du système de mesure

Reste maintenant à trouver la bonne combinaison de points parmi les quatre possibles :
 D, E1, F1, G11 ou D, E1, F2, G12 ou D, E2, F1, G21 ou D, E2, F2, G22.

Pour cela, nous calculons les distances entre ces points G_{ii} et les points $G1$ et $G2$ calculés plus haut. Cela donne sous la forme d'un tableau :

[$G_{11}G_1$; $G_{11}G_2$; $G_{12}G_1$; $G_{12}G_2$; $G_{21}G_1$; $G_{21}G_2$; $G_{22}G_1$; $G_{22}G_2$]

La discrimination se fait en prenant le minimum parmi les 8 distances précédentes.

Si le minimum correspond à $G_{11}G_1$ ou $G_{11}G_2$ alors les points solutions sont :

D, E1, F1, G11

Si le minimum correspond à $G_{12}G_1$ ou $G_{12}G_2$ alors les points solutions sont :

D, E1, F1, G12

Si le minimum correspond à $G_{21}G_1$ ou $G_{21}G_2$ alors les points solutions sont :

D, E1, F1, G21

Si le minimum correspond à $G_{22}G_1$ ou $G_{22}G_2$ alors les points solutions sont :

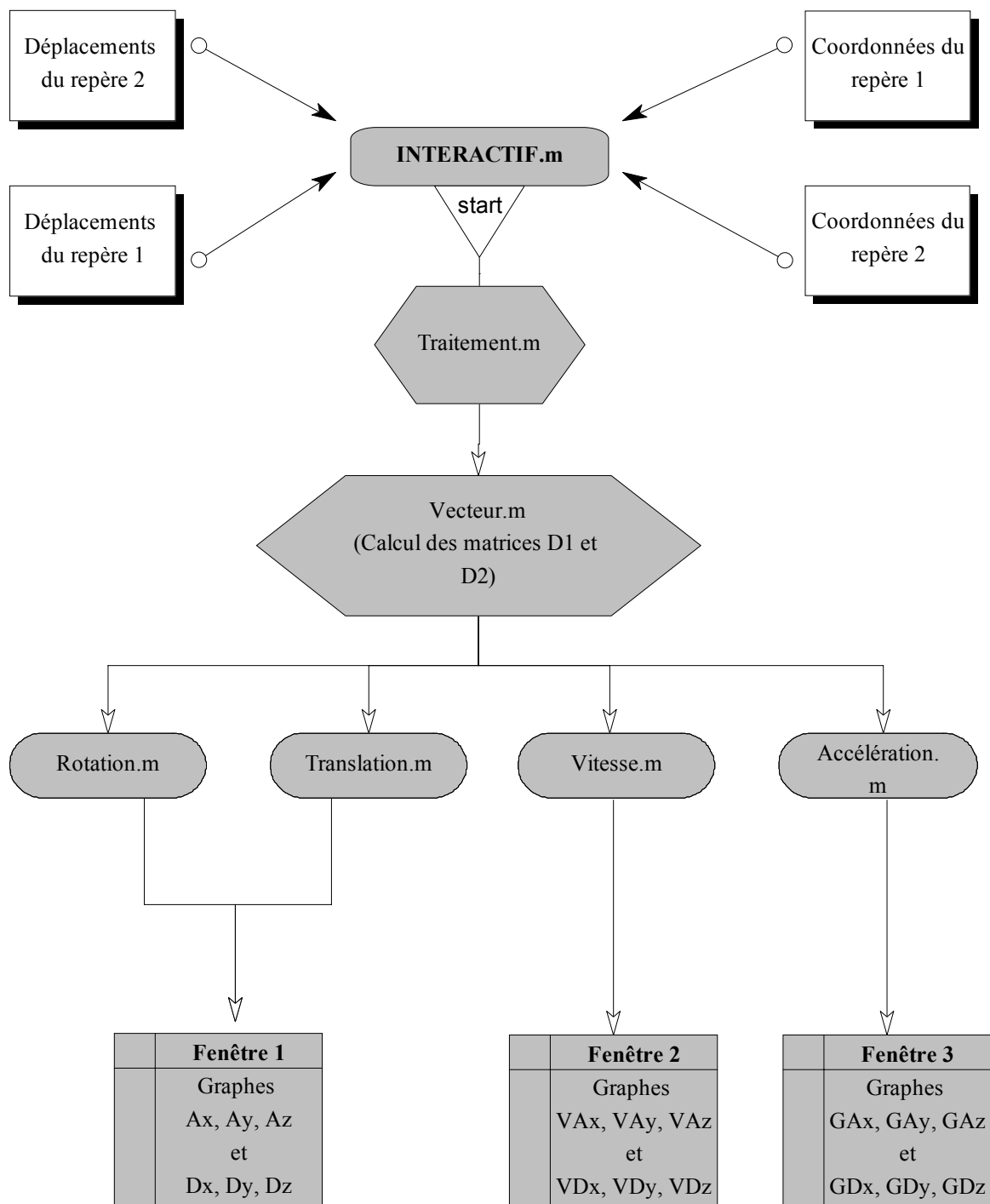
D, E1, F1, G22

V- CODE DES ALGORITHMES

Ces programmes ont été réalisés sur Matlab 5.3
Le sigle % indique un commentaire (couleur verte)

1- Algorithme de déplacement dans l'espace

A. Organigramme



B. Résumé

Nom du fichier de démarrage : *traitement*.

- **Traitement.m** : corps du programme faisant appel aux fonctions qui suivent et créant les graphes des courbes.
- **Vecteur.m** : fonction permet de créer les matrices D1 et D2 où sont donnés les déplacements des repères 1 et 2 au cours du temps. Cette fonction orthonorme les vecteurs des repères 1 et 2.
- **Rotation.m** : fonction calculant les angles de rotation A_x , A_y et A_z au cours du temps. Les courbes présentées donnent la succession de valeurs d'angles entre $t=0$ et t et non pas un cumul de valeur entre t et $t+1$.
- **Translation.m** : fonction calculant les valeurs des translations D_x , D_y et D_z au cours du temps. Les points suivis sont les points B1 et B2. Les courbes présentées donnent une succession de valeurs de déplacements entre $t=0$ et t et non pas un cumul de valeur entre t et $t+1$.
- **Vitesse.m** : fonction calculant les vitesses de rotation V_{Ax} , V_{Ay} et V_{Az} au cours du temps ainsi que les vitesses de translations V_{Dx} , V_{Dy} et V_{Dz} .
- **Accélération.m** : fonction calculant les accélérations angulaires G_{Ax} , G_{Ay} et G_{Az} au cours du temps ainsi que les accélérations linéaires G_{Dx} , G_{Dy} et G_{Dz} .

C. Code

traitement.m

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%% Chargement des courbes de déplacements %%  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
load dplxa1.txt;  
load dplxb1.txt;  
load dplxc1.txt;  
load dplya1.txt;  
load dplyb1.txt;  
load dplyc1.txt;  
load dplza1.txt;  
load dplzb1.txt;  
load dplzc1.txt;  
load dplxa2.txt;  
  
load dplxb2.txt;  
load dplxc2.txt;  
load dplya2.txt;  
load dplyb2.txt;  
load dplyc2.txt;  
load dplza2.txt;  
load dplzb2.txt;  
load dplzc2.txt;  
  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%% Coordonnées des points des repères %%  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
xa1= ? ? ?;  
ya1= ? ? ?;  
za1= ? ? ?;  
  
xb1= ? ? ?;  
yb1= ? ? ?;  
zb1= ? ? ?;  
  
xc1= ? ? ?;  
yc1= ? ? ?;  
zc1= ? ? ?;  
  
xa2= ? ? ?;  
ya2= ? ? ?;  
za2= ? ? ?;  
  
xb2= ? ? ?;  
yb2= ? ? ?;  
zb2= ? ? ?;
```

```

xc2= ? ? ?;
yc2= ? ? ?;
zc2= ? ? ?;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Calcul des rotations, des translations, des vitesses et des
accelerations %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

[D1] = vecteur (xa1,ya1,za1 , xb1,yb1,zb1 , xc1,yc1,zc1 ,
dplxa1,dplya1,dplza1 , dplxb1,dplyb1,dplzb1 ,
dplxc1,dplyc1,dplzc1);
[D2] = vecteur (xa2,ya2,za2 , xb2,yb2,zb2 , xc2,yc2,zc2 ,
dplxa2,dplya2,dplza2 , dplxb2,dplyb2,dplzb2 ,
dplxc2,dplyc2,dplzc2);

[Ax,Ay,Az]=rotation(D1,D2);

[Dx,Dy,Dz]=translation(D1,D2,xb1,yb1,zb1,xb2,yb2,zb2,dplxb1,dply
b1,dplzb1,dplxb2,dplyb2,dplzb2);

[VAx,VAy,VAz,VDx,VDy,VDz]=vitesse(Ax,Ay,Az,Dx,Dy,Dz);
[GAx,GAy,GAz,GDx,GDy,GDz]=acceleration(VAx,VAy,VAz,VDx,VDy,VDz);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Création des graphes%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

                %%%% Rotations et translations %%%%

figure(2);
set(2,'Position',[5 40 790 490]);
set(2,'Name','Affichage des rotations et des déplacements
relatifs dans R2f');
set(2,'Numbertitle','off');

a=subplot(2,1,1);
rot=plot(Ax(:,1),Ax(:,2),Ay(:,1),Ay(:,2),Az(:,1),Az(:,2));
set(rot,'LineWidth',2,{'LineStyle'},{'--';':';'-.'})
xlabel('temps (ms)','FontName','Times new roman')
ylabel('Rotation (°)','FontName','Times new roman')
grid on
legend('Ax','Ay','Az',0)

b=subplot(2,1,2);
tran=plot(Dx(:,1),Dx(:,2),Dy(:,1),Dy(:,2),Dz(:,1),Dz(:,2));
set(tran,'LineWidth',2,{'LineStyle'},{'--';':';'-.'})
xlabel('temps (ms)','FontName','Times new roman')
ylabel('Translation (mm)','FontName','Times new roman')
grid on

```

```

legend('Dx','Dy','Dz',0)

                %%%% Vitesses %%%%
figure(3);
set(3,'Position',[5 40 790 490]);
set(3,'Name','Affichage des vitesses angulaires et linéaires
relatives dans R2f');
set(3,'Numbertitle','off');

c=subplot(2,1,1);

GrafVA=plot(VAx(:,1),VAx(:,2),VAy(:,1),VAy(:,2),VAz(:,1),VAz(:,2)
));
set(GrafVA,'LineWidth',2,{'LineStyle'},{'--';':';'-.'})
xlabel('temps (ms)','FontName','Times new roman')
ylabel('vitesse angulaire (°/ms)','FontName','Times new roman')
grid on
legend('VAx','VAy','VAz',0)

d=subplot(2,1,2);

GrafVD=plot(VDx(:,1),VDx(:,2),VDy(:,1),VDy(:,2),VDz(:,1),VDz(:,2)
));
set(GrafVD,'LineWidth',2,{'LineStyle'},{'--';':';'-.'})
xlabel('temps (ms)','FontName','Times new roman')
ylabel('vitesse linéaire (mm/ms)','FontName','Times new roman')
grid on
legend('VDx','VDy','VDz',0)

                %%%% Accélérations %%%%
figure(4);
set(4,'Position',[5 40 790 490]);
set(4,'Name','Affichage des accélérations angulaires et
linéaires relatives dans R2f');
set(4,'Numbertitle','off');

e=subplot(2,1,1);

GrafGA=plot(GAx(:,1),GAx(:,2),GAY(:,1),GAY(:,2),GAz(:,1),GAz(:,2)
));
set(GrafGA,'LineWidth',2,{'LineStyle'},{'--';':';'-.'})
xlabel('temps (ms)','FontName','Times new roman')
ylabel('accélération angulaire (°/ms²)','FontName','Times new
roman')
grid on
legend('GAx','GAY','GAz',0)

f=subplot(2,1,2);

```

```

GrafGD=plot(GDx(:,1),GDx(:,2),GDy(:,1),GDy(:,2),GDz(:,1),GDz(:,2)
));
set(GrafGD,'LineWidth',2,{'LineStyle'},{'--';':';'-.'})
xlabel('temps (ms)','FontName','Times new roman')
ylabel('accélération linéaire (mm/ms2)','FontName','Times new
roman')
grid on
legend('GDx','GDy','GDz',0)

```

vecteur.m

```

function [D] = vecteur (xa,ya,za , xb,yb,zb , xc,yc,zc ,
dplxa,dplya,dplza , dplxb,dplyb,dplzb , dplxc,dplyc,dplzc)

%% Fonction qui calcule les coordonnées des vecteurs unitaires
% u,v et w dans le repère Ro en fonction du temps à partir des
% points a,b et c et de leurs déplacements dpla, dplb et dplc
% en fonction du temps.
% Les variations de coordonnées des vecteurs au cours du temps %
% seront représentés par une matrice D:
% t Ux Uy Uz Vx Vy Vz Wx Wy Wz
%
% |. . . . . . . . . |
% |. . . . . . . . . |
% |. . . . . . . . . |
% |. . . . . . . . . |
% |. . . . . . . . . |
% |. . . . . . . . . |
% |. . . . . . . . . |
% -

```

%% Prise en compte du temps de la simulation. Toutes les
% matrices dpl ont la même taille puisque le temps de la
% simulation est commun.

```

global taille
global temp
temp=dplxa;
taille = size(temp);

for i = 1:taille(1,1)

    %%% Colonne des temps
    T(i,1) = temp(i,1) ;

    %%% Création du vecteur U à t.

    U(i,1:3) = [xb+dplxb(i,2)-(xa+dplxa(i,2)) yb+dplyb(i,2)-
(ya+dplya(i,2)) zb+dplzb(i,2)-(za+dplza(i,2))] ;

```

```

        U(i,1:3) = [U(i,1)/norm(U(i,1:3))  U(i,2)/norm(U(i,1:3))
U(i,3)/norm(U(i,1:3))];

```

```

%% Création du vecteur A à t.

```

```

        A(i,1:3) = [xc+dplxc(i,2)-(xa+dplxa(i,2))  yc+dplyc(i,2)-
(ya+dplya(i,2))  zc+dplzc(i,2)-(za+dplza(i,2))];

```

```

        A(i,1:3) = [A(i,1)/norm(A(i,1:3))  A(i,2)/norm(A(i,1:3))
A(i,3)/norm(A(i,1:3))];

```

```

%% Création du vecteur W perpendiculaire à U et A.

```

```

W(i,1:3) = cross( U(i,1:3) , A(i,1:3)) ;

```

```

%% Création du Vecteur V

```

```

% produit vectoriel pour avoir un vecteur V perpendiculaire à
% U et W et créer un trièdre direct (U,V,W).

```

```

% produit vectoriel

```

```

V(i,1:3) = cross( W(i,1:3) , U(i,1:3)) ;

```

```

end

```

```

% Matrice des déplacements de u,v et w

```

```

D=[ T U V W ];

```

rotation.m

```

function [Ax,Ay,Az]=rotation(D1,D2)

```

```

% Fonction donnant les angles de rotation de la vertèbre
% supérieure(indice 1) par rapport à la vertèbre inférieure
% (indice 2).

```

```

% Les angles sont donnés dans le repère de la vertèbre
% inférieure situé sur la face supérieure avec x en postéro
% antérieur, z de bas en haut et y de droite à gauche.

```

```

global taille ;

```

```

global temp ;

```

```

for i = 1:taille(1,1)-1

```

```

% Les angles affichés résultent d'une différence de valeurs
% d'angles entre 1 et i. C'est à dire que Ax à t=3 est égal à
% Ax entre t=0 et t=3.
% Les courbes affichées représentent une succession de points
% entre l'instant t=0 et l'instant t qui peuvent être
% considéré comme des états "indépendants".
% Afin de s'affranchir de l'ordre des rotations, plusieurs
% séquences de rotations ont été utilisé pour calculer les
% angles autour de X2f, Y2f et Z2f.
% De ce fait, on peut considerer les trois rotations de façon
% indépendantes mais on ne peut plus reconstruire le
% mouvement.

```

```

%% Matrice Pror1d

```

```

Por1d=[D1(1,2) D1(1,5) D1(1,8); ...
       D1(1,3) D1(1,6) D1(1,9); ...
       D1(1,4) D1(1,7) D1(1,10) ];

```

```

%% Matrice Pror1f

```

```

Por1f=[D1(i+1,2) D1(i+1,5) D1(i+1,8); ...
       D1(i+1,3) D1(i+1,6) D1(i+1,9); ...
       D1(i+1,4) D1(i+1,7) D1(i+1,10) ];

```

```

%% Matrice Pror2d

```

```

Por2d=[D2(1,2) D2(1,5) D2(1,8); ...
       D2(1,3) D2(1,6) D2(1,9); ...
       D2(1,4) D2(1,7) D2(1,10) ];

```

```

%% Matrice Pror2f

```

```

Por2f=[D2(i+1,2) D2(i+1,5) D2(i+1,8); ...
       D2(i+1,3) D2(i+1,6) D2(i+1,9); ...
       D2(i+1,4) D2(i+1,7) D2(i+1,10) ];

```

```

%% MATRICE P avec R2f comme repère d'interprétation.

```

```

P=Por2f'*Por1f*Por1d'*Por2d ;

```

```

%% Angles de rotation autour de X2f:combinaison [C][B][A]

```

```

Aiy(1,1)=0;
Aiy(1,2)=0;
Aiy(i+1,1) = temp(i+1,1) ;
Aiy(i+1,2) = (asin(-P(3,1)))*180/pi;

```

```

Ax(1,1)=0;
Ax(1,2)=0;
Ax(i+1,1) = temp(i+1,1) ;
Ax(i+1,2) = (asin(P(3,2)/cos((Aiy(i+1,2))*pi/180)))*180/pi;

```

```

%% Angles de rotation autour de Y2f:combinaison [C][A][B]

```

```

Aix(1,1)=0;
Aix(1,2)=0;
Aix(i+1,1) = temp(i+1,1) ;
Aix(i+1,2) = (asin(P(3,2)))*180/pi;

Ay(1,1)=0;
Ay(1,2)=0;
Ay(i+1,1) = temp(i+1,1) ;
Ay(i+1,2) = (asin(-P(3,1)/cos((Aix(i+1,2))*pi/180)))*180/pi;

%% Angles de rotation autour de Z2f:combinaison [B][A][C]

Aix(1,1)=0;
Aix(1,2)=0;
Aix(i+1,1) = temp(i+1,1) ;
Aix(i+1,2) = (asin(-P(2,3)))*180/pi;

Az(1,1)=0;
Az(1,2)=0;
Az(i+1,1) = temp(i+1,1) ;
Az(i+1,2) = (asin(P(2,1)/cos((Aix(i+1,2))*pi/180)))*180/pi;

end

```

translation.m

```
function
```

```
[Dx,Dy,Dz]=translation(D1,D2,xb1,yb1,zb1,xb2,yb2,zb2,dplx1,dply1,
dplx2,dply2,dplz1,dplz2)
```

```
% Fonction donnant les valeurs de translation de la vertèbre
% supérieure (indice 1) par rapport à la vertèbre inférieure
% (indice 2). Les points suivis sont les points b1 et b2.
% Les déplacements sont donnés dans le repère de la vertèbre
% inférieure situé sur la face supérieure avec x en postéro
% antérieur, z de bas en haut et y de droite à gauche.
```

```
global taille ;
global temp ;
```

```
for i = 1:taille(1,1)
```

```

% Les angles affichés résultent d'une différence de valeurs
% d'angles entre 1 et i. C'est à dire que Dx à t=3 est égal à
% Dx entre t=0 et t=3.
% Les courbes affichées représentent une succession de points
% entre l'instant t=0 et l'instant t qui peuvent être
% considéré comme des états "indépendants" étant donné que la
% notion d'ordre n'existe pas pour les translations.

```

```

%% Matrice Pror2d
Por2d=[D2(1,2) D2(1,5) D2(1,8); ...
        D2(1,3) D2(1,6) D2(1,9); ...
        D2(1,4) D2(1,7) D2(1,10) ];

%% Matrice Pror2f
Por2f=[D2(i,2) D2(i,5) D2(i,8); ...
        D2(i,3) D2(i,6) D2(i,9); ...
        D2(i,4) D2(i,7) D2(i,10) ];

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Notation: le vecteur bla blf est noté bla.blf
%
% On cherche à quantifier le vecteur bla.blf dans le repère
% R2f.
% Dans le repère Ro on a:
% bla.blf = bla.b2f + b2f.blf
% bla.blf = b2f.blf - b2f.b1a
% Or b2f.b1a = [Rot(R2d->R2f)]Ro * b2d.b1d = [Por2f]*
% [Por2d]' * b2d.b1d
% Donc dans Ro, on a:
% bla.blf = b2f.blf - [Por2f]* [Por2d]' * b2d.b1d
% bla.blf = (O.b1f-O.b2f) - [Por2f]* [Por2d]' * (O.b1d-O.b2d)
% Avec , par exemple, la coordonnée sur x du repère Ro de
% O.b1f = xb1+dplxb1
% et la coordonnée sur x du repère Ro de O.b1d = xb1
% Pour avoir la valeur du vecteur bla.blf dans R2f, il suffit
% d'utiliser la matrice de passage de Ro à R2f
% On pose D = (bla.blf dans R2f) = Por2f' * bla.blf

b2fb1f=[xb1+dplxb1(i,2)-xb2-dplxb2(i,2) ;...
        yb1+dplyb1(i,2)-yb2-dplyb2(i,2) ;...
        zb1+dplzb1(i,2)-zb2-dplzb2(i,2) ];

b2db1d=[xb1-xb2 ;...
        yb1-yb2;...
        zb1-zb2];
b1ab1f = b2fb1f - [Por2f]* [Por2d] '*b2db1d;

D = Por2f'*b1ab1f ;

% Valeur des translations

Dx(i,1) = temp(i,1);
Dx(i,2) = D(1,1);

Dy(i,1) = temp(i,1);
Dy(i,2) = D(2,1);

```



```
Dz(i,1) = temp(i,1);  
Dz(i,2) = D(3,1) ;
```

```
end
```

vitesse.m

```
function [VAx,VAy,VAz,VDx,VDy,VDz]=vitesse(Ax,Ay,Az,Dx,Dy,Dz)
```

```
% Cette fonction permet de calculer les vitesses angulaires et  
% linéaires du repère 1 par rapport au repère 2.
```

```
global taille ;
```

```
global temp ;
```

```
%VAx : vitesse angulaire autour de l'axe x
```

```
ax=diff(Ax(:,1));
```

```
bx=diff(Ax(:,2));
```

```
for i = 1:taille(1,1)-1
```

```
    VAx(i,1)=temp(i,1);
```

```
    VAx(i,2)=bx(i,1)/ax(i,1);
```

```
end
```

```
%VAy : vitesse angulaire autour de l'axe y
```

```
ay=diff(Ay(:,1));
```

```
by=diff(Ay(:,2));
```

```
for i = 1:taille(1,1)-1
```

```
    VAy(i,1)=temp(i,1);
```

```
    VAy(i,2)=by(i,1)/ay(i,1);
```

```
end
```

```
%VAz : vitesse angulaire autour de l'axe z
```

```
az=diff(Az(:,1));
```

```
bz=diff(Az(:,2));
```

```
for i = 1:taille(1,1)-1
```

```
    VAz(i,1)=temp(i,1);
```

```
    VAz(i,2)=bz(i,1)/az(i,1);
```

```
end
```

```
%VDx : vitesse linéaire autour de l'axe x
```

```
cx=diff(Dx(:,1));
```

```
dx=diff(Dx(:,2));
```

```
for i = 1:taille(1,1)-1
```

```
    VDx(i,1)=temp(i,1);
```

```
    VDx(i,2)=dx(i,1)/cx(i,1);
```

```
end
```

```

%VDy : vitesse linéaire autour de l'axe y
cy=diff(Dy(:,1));
dy=diff(Dy(:,2));

for i = 1:taille(1,1)-1
    VDy(i,1)=temp(i,1);
    VDy(i,2)=dy(i,1)/cy(i,1);
end

%VDz : vitesse linéaire autour de l'axe z
cz=diff(Dz(:,1));
dz=diff(Dz(:,2));

for i = 1:taille(1,1)-1
    VDz(i,1)=temp(i,1);
    VDz(i,2)=dz(i,1)/cz(i,1);
end

```

acceleration.m

```

function
[GAx,GAY,GAz,GDx,GDy,GDz]=acceleration(VAx,VAy,VAz,VDx,VDy,VDz)

% Cette fonction permet de calculer les accélérations angulaires
% et linéaires du repère 1 par rapport au repère 2.
global taille ;
global temp ;

%GAx : accélération angulaire autour de l'axe x
ex=diff(VAx(:,1));
fx=diff(VAx(:,2));

for i = 1:taille(1,1)-2
    GAx(i,1)=temp(i,1);
    GAx(i,2)=fx(i,1)/ex(i,1);
end

%GAY : accélération angulaire autour de l'axe y
ey=diff(VAy(:,1));
fy=diff(VAy(:,2));

for i = 1:taille(1,1)-2
    GAY(i,1)=temp(i,1);
    GAY(i,2)=fy(i,1)/ey(i,1);
end

%GAz : accélération angulaire autour de l'axe z
ez=diff(VAz(:,1));

```

```

fz=diff(VAz(:,2));

for i = 1:taille(1,1)-2
    GAz(i,1)=temp(i,1);
    GAz(i,2)=fz(i,1)/ez(i,1);
end

%GDx : accélération linéaire autour de l'axe x
gx=diff(VDx(:,1));
hx=diff(VDx(:,2));

for i = 1:taille(1,1)-2
    GDx(i,1)=temp(i,1);
    GDx(i,2)=hx(i,1)/gx(i,1);
end

%GDy : accélération linéaire autour de l'axe y
gy=diff(VDy(:,1));
hy=diff(VDy(:,2));

for i = 1:taille(1,1)-2
    GDy(i,1)=temp(i,1);
    GDy(i,2)=hy(i,1)/gy(i,1);
end

%GDz : accélération linéaire autour de l'axe z
gz=diff(VDz(:,1));
hz=diff(VDz(:,2));

for i = 1:taille(1,1)-2
    GDz(i,1)=temp(i,1);
    GDz(i,2)=hz(i,1)/gz(i,1);
end

```

2- Algorithme lié au cadre de mesure à 8 capteurs

A. Organigramme

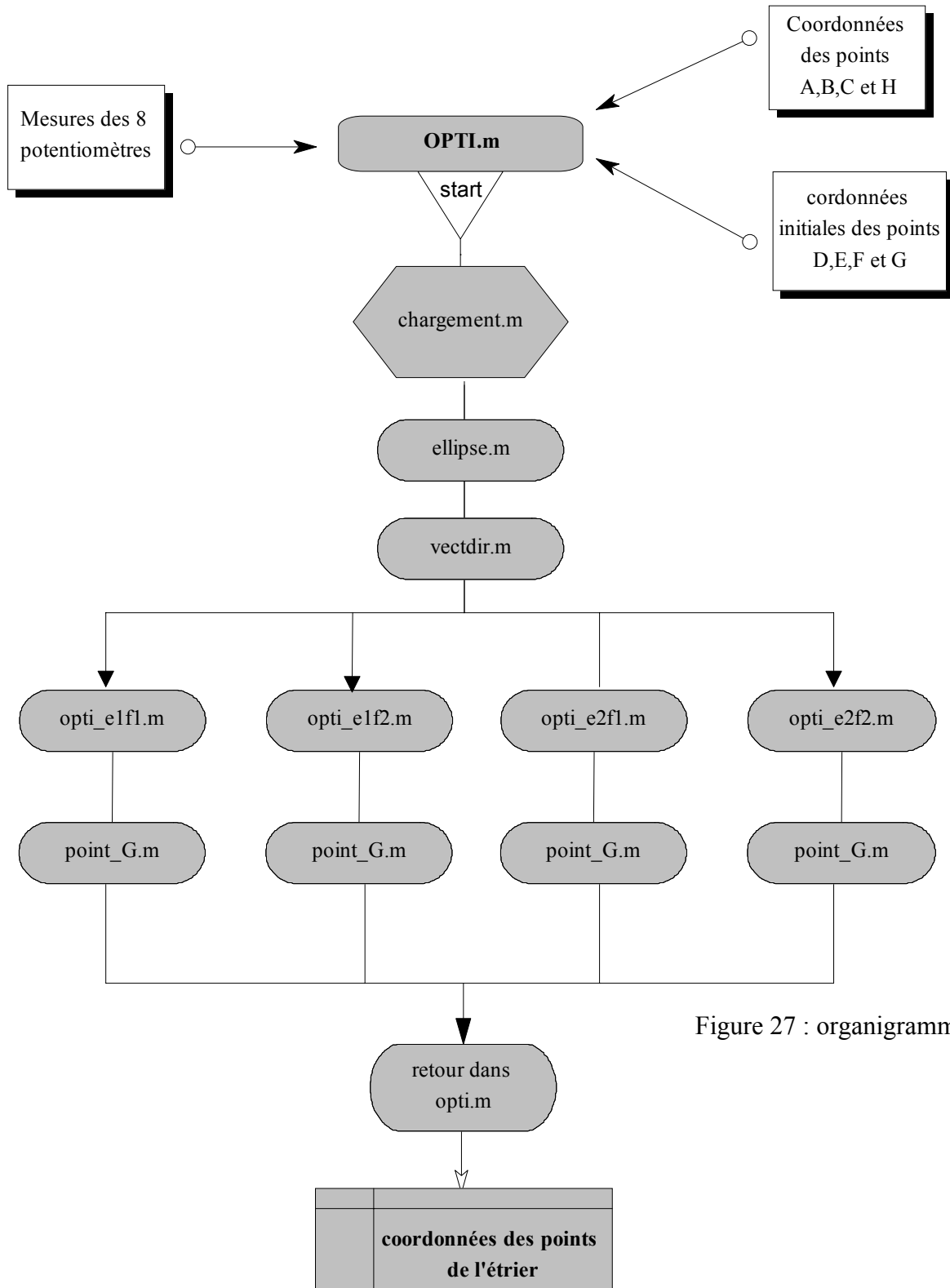


Figure 27 : organigramme

B. Résumé

Nom du fichier de démarrage : *opti*.

- **opti.m** : corps du programme faisant appel aux fonctions qui suivent et effectuant la discrimination de chacune des solutions potentielles. Il donne les coordonnées des points des rotules au cours du temps
- **chargement.m** : script définissant les constantes
- **ellipse.m** : fonction définissant les maxi et mini des paramètres de deux tiges pour une consigne de distances fixée.
- **vectdir.m** : fonction calculant les coordonnées d'un vecteur directeur d'une tige à partir des mesures des deux potentiomètres qui y sont associés.
- **point_G.m** : script calculant la position du point G de l'étrier à l'aide des points D, E et F en respectant leurs positions relatives.
- **opti_e1f1.m** : script qui permet de connaître les valeurs de k_1 associées aux points E1 et F1 respectant les consignes de longueur entre rotules du cadre.
- **opti_e1f2.m** : script qui permet de connaître les valeurs de k_1 associées aux points E1 et F2 respectant les consignes de longueur entre rotules du cadre.
- **opti_e2f1.m** : script qui permet de connaître les valeurs de k_1 associées aux points E2 et F1 respectant les consignes de longueur entre rotules du cadre.
- **opti_e2f2.m** : script qui permet de connaître les valeurs de k_1 associées aux points E2 et F2 respectant les consignes de longueur entre rotules du cadre.
- **dist_e1f1.m** : fonction définissant de façon explicite la longueur (E1F1-Lef) en fonction de k_1 .
- **deriv_e1f1.m** : fonction définissant de façon explicite la dérivée de la longueur (E1F1-Lef) en fonction de k_1 .
- **dist_e1f2.m** : fonction définissant de façon explicite la longueur (E1F2-Lef) en fonction de k_1 .
- **deriv_e1f2.m** : fonction définissant de façon explicite la dérivée de la longueur (E1F2-Lef) en fonction de k_1 .
- **dist_e2f1.m** : fonction définissant de façon explicite la longueur (E2F1-Lef) en fonction de k_1 .
- **deriv_e2f1.m** : fonction définissant de façon explicite la dérivée de la longueur (E2F1-Lef) en fonction de k_1 .
- **dist_e2f2.m** : fonction définissant de façon explicite la longueur (E2F2-Lef) en fonction de k_1 .
- **deriv_e2f2.m** : fonction définissant de façon explicite la dérivée de la longueur (E2F2-Lef) en fonction de k_1 .

C. Code

opti.m

```
clear;
clear global;
clc;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Chargement des points de mesure potentiométriques

% Le fichier potah.txt concerne le capteur au point A en haut
% Le fichier potab.txt concerne le capteur au point A en bas
% Le fichier potbh.txt concerne le capteur au point B en haut
% Le fichier potbb.txt concerne le capteur au point B en bas
% Le fichier potch.txt concerne le capteur au point C en haut
% Le fichier potcb.txt concerne le capteur au point C en bas
% Le fichier pothh.txt concerne le capteur au point H en haut
% Le fichier pothb.txt concerne le capteur au point H en bas

load potah.txt;
load potab.txt;
load potbh.txt;
load potbb.txt;
load potch.txt;
load potcb.txt;
load pothh.txt;
load pothb.txt;

% Réglage des options des fonctions "feval" et "fzero" de matlab
options=optimset('display','off');

for i=2: length(potah(:,1))

    %compteurs incrémental
    avancement = i

    % Lancement du script "chargement"
    chargement;

    A=[xa;ya;za];
    B=[xb;yb;zb];
    C=[xc;yc;zc];
    H=[xh;yh;zh];
    AD = [D(1,1)-A(1,1) ; D(2,1)-A(2,1) ; D(3,1)-A(3,1)];
    BE = [E(1,1)-B(1,1) ; E(2,1)-B(2,1) ; E(3,1)-B(3,1)];
    CF = [F(1,1)-C(1,1) ; F(2,1)-C(2,1) ; F(3,1)-C(3,1)];
    HG = [G(1,1)-H(1,1) ; G(2,1)-H(2,1) ; G(3,1)-H(3,1)];
    vars(1,:) = [ D' E' F' G'];
```

```

% Remarque:
% Calculons la distance AD
%  $AD^2 = (xa-xd)^2 + (ya-yd)^2 + (za-zd)^2 =$ 
%  $k1.a1)^2 + (k1.b1)^2 + (k1.c1)^2 = k1^2.(a1^2+b1^2+c1^2) = k1^2$ 
% car le vecteur [a1 b1 c1] est unitaire.
% Donc k1=AD. De même, k2=BE, k3=CF et k4=HG

k1(1,1) = norm(AD);
k2(1,1) = norm(BE);
k3(1,1) = norm(CF);
k4(1,1) = norm(HG);

% Lancement du script "opti_elf1"
opti_elf1;
% Lancement du script "opti_elf2"
opti_elf2;
% Lancement du script "opti_e2f1"
opti_e2f1;
% Lancement du script "opti_e2f2"
opti_e2f2;

% NORM regroupe les valeurs des normes entre les points G
% pour chacune des distances elf1, elf2, e2f1 et e2f2.
% Pour l'explication de ces normes voir le chapitre
% expliquant la démarche de résolution de la position de
% l'étrier.
NORM = [norme_11_1 norme_11_2 norme_11_3 norme_11_4
norme_11_5 norme_11_6 norme_12_1 norme_12_2 norme_12_3
norme_12_4 norme_12_5 norme_12_6 norme_21_1 norme_21_2
norme_21_3 norme_21_4 norme_21_5 norme_21_6 norme_22_1
norme_22_2 norme_22_3 norme_22_4 norme_22_5 norme_22_6];

toto=1;
while toto==1

% calcul de la ligne (do) et de la colonne (du) ou l'on
% trouve le minimum de la matrice NORM.
[do,du] = find(NORM==min(NORM));

if du==1 | du==2
Df = [xd11_a yd11_a zd11_a];
Ef = [xe11_a ye11_a ze11_a];
Ff = [xf11_a yf11_a zf11_a];
Gf = [xg11_a yg11_a zg11_a];
k1(i,1) = norm(Df'-A);
k2(i,1) = norm(Ef'-B);
k3(i,1) = norm(Ff'-C);
k4(i,1) = norm(Gf'-H);
elseif du==3 | du==4
Df = [xd11_b yd11_b zd11_b];
Ef = [xe11_b ye11_b ze11_b];

```

```

Ff = [xf11_b yf11_b zf11_b];
Gf = [xg11_b yg11_b zg11_b];
k1(i,1) = norm(Df'-A);
k2(i,1) = norm(Ef'-B);
k3(i,1) = norm(Ff'-C);
k4(i,1) = norm(Gf'-H);
elseif du==5 | du==6
Df = [xd11_c yd11_c zd11_c];
Ef = [xe11_c ye11_c ze11_c];
Ff = [xf11_c yf11_c zf11_c];
Gf = [xg11_c yg11_c zg11_c];
k1(i,1) = norm(Df'-A);
k2(i,1) = norm(Ef'-B);
k3(i,1) = norm(Ff'-C);
k4(i,1) = norm(Gf'-H);

elseif du==7 | du==8
Df = [xd12_a yd12_a zd12_a];
Ef = [xe12_a ye12_a ze12_a];
Ff = [xf12_a yf12_a zf12_a];
Gf = [xg12_a yg12_a zg12_a];
k1(i,1) = norm(Df'-A);
k2(i,1) = norm(Ef'-B);
k3(i,1) = norm(Ff'-C);
k4(i,1) = norm(Gf'-H);
elseif du==9 | du==10
Df = [xd12_b yd12_b zd12_b];
Ef = [xe12_b ye12_b ze12_b];
Ff = [xf12_b yf12_b zf12_b];
Gf = [xg12_b yg12_b zg12_b];
k1(i,1) = norm(Df'-A);
k2(i,1) = norm(Ef'-B);
k3(i,1) = norm(Ff'-C);
k4(i,1) = norm(Gf'-H);
elseif du==11 | du==12
Df = [xd12_c yd12_c zd12_c];
Ef = [xe12_c ye12_c ze12_c];
Ff = [xf12_c yf12_c zf12_c];
Gf = [xg12_c yg12_c zg12_c];
k1(i,1) = norm(Df'-A);
k2(i,1) = norm(Ef'-B);
k3(i,1) = norm(Ff'-C);
k4(i,1) = norm(Gf'-H);

elseif du==13 | du==14
Df = [xd21_a yd21_a zd21_a];
Ef = [xe21_a ye21_a ze21_a];
Ff = [xf21_a yf21_a zf21_a];
Gf = [xg21_a yg21_a zg21_a];
k1(i,1) = norm(Df'-A);
k2(i,1) = norm(Ef'-B);

```



```

    k3(i,1) = norm(Ff'-C);
    k4(i,1) = norm(Gf'-H);
elseif du==15 | du==16
    Df = [xd21_b yd21_b zd21_b];
    Ef = [xe21_b ye21_b ze21_b];
    Ff = [xf21_b yf21_b zf21_b];
    Gf = [xg21_b yg21_b zg21_b];
    k1(i,1) = norm(Df'-A);
    k2(i,1) = norm(Ef'-B);
    k3(i,1) = norm(Ff'-C);
    k4(i,1) = norm(Gf'-H);
elseif du==17 | du==18
    Df = [xd21_c yd21_c zd21_c];
    Ef = [xe21_c ye21_c ze21_c];
    Ff = [xf21_c yf21_c zf21_c];
    Gf = [xg21_c yg21_c zg21_c];
    k1(i,1) = norm(Df'-A);
    k2(i,1) = norm(Ef'-B);
    k3(i,1) = norm(Ff'-C);
    k4(i,1) = norm(Gf'-H);

elseif du==19 | du==20
    Df = [xd22_a yd22_a zd22_a];
    Ef = [xe22_a ye22_a ze22_a];
    Ff = [xf22_a yf22_a zf22_a];
    Gf = [xg22_a yg22_a zg22_a];
    k1(i,1) = norm(Df'-A);
    k2(i,1) = norm(Ef'-B);
    k3(i,1) = norm(Ff'-C);
    k4(i,1) = norm(Gf'-H);
elseif du==21 | du==22
    Df = [xd22_b yd22_b zd22_b];
    Ef = [xe22_b ye22_b ze22_b];
    Ff = [xf22_b yf22_b zf22_b];
    Gf = [xg22_b yg22_b zg22_b];
    k1(i,1) = norm(Df'-A);
    k2(i,1) = norm(Ef'-B);
    k3(i,1) = norm(Ff'-C);
    k4(i,1) = norm(Gf'-H);
elseif du==23 | du==24
    Df = [xd22_c yd22_c zd22_c];
    Ef = [xe22_c ye22_c ze22_c];
    Ff = [xf22_c yf22_c zf22_c];
    Gf = [xg22_c yg22_c zg22_c];
    k1(i,1) = norm(Df'-A);
    k2(i,1) = norm(Ef'-B);
    k3(i,1) = norm(Ff'-C);
    k4(i,1) = norm(Gf'-H);

else
    'erreur dans opti.m au niveau des conditions'

```

```

end

% Début des tests:
%
% VERIF crée un tableau calculant chacune des différences
% entre les distances inter-rotules et leur consigne.
%
% "epsilon" est une consigne à régler MANUELLEMENT pour
% chacun des dépouillement d'essai
%
VERIF = [Led-norm([Ef-Df]) Ldf-norm([Df-Ff]) Lgd-norm([Gf-
Df]) Lgf-norm([Gf-Ff]) Lge-norm([Ef-Gf]) Lef-norm([Ef-Ff])]
epsilon = 10;

    if max(abs(VERIF)) < 15 & abs(k1(i)-k1(i-1))<epsilon &
abs(k2(i)-k2(i-1))<epsilon & abs(k3(i)-k3(i-1))<epsilon &
abs(k4(i)-k4(i-1))<epsilon
        % Si le maximum de la matrtice VERIF est inférieur à 15
        % (valeur arbitraire).
        % Si chacun des paramètres ne subit pas de variation
        % trop importante (le contraire signifierai
        % que l'on est sur une solution non réaliste) entre
        % l'instant t et l'instant t+dt
        % Alors , on considère que les coordonnées des points
        % D, E, f et G sont les bonnes et on les consigne dans
        % un tableau appelé VARS.
        vars(i,:) = [Df(1,1) Df(1,2) Df(1,3) Ef(1,1) Ef(1,2)
Ef(1,3) Ff(1,1) Ff(1,2) Ff(1,3) Gf(1,1) Gf(1,2) Gf(1,3)];
        toto=2;
    else
        NORM (do,du) = 1000;
        % Si les tests ne sont pas vérifiés on donne à la norme
        % en cours la valeur 1000.
        % C'est une facon de ne plus en tenir compte pour les
        % prochaines itérations vu sa grande valeur
        toto=1;
    end
end
end
end

```

```

global Lef,global Led,global Ldf,global Lgd,global Lge,global
Lgf,global k1,global k2,global k3,global k4
global xa,global ya,global za,global xb,global yb,global
zb,global xc,global yc,global zc,global xh,global yh,global zh
global a1,global b1,global c1,global a2,global b2,global
c2,global a3,global b3,global c3,global a4,global b4,global c4
global D, global E, global F, global G

```

```

%%%%%%%%%%
%%  DONNEES  %%
%%%%%%%%%%

```

```
%Point A (socle)
```

```

xa=0.125;
ya=-78.35;
za=39.9;

```

```
%Point B (socle)
```

```

xb=-0.075;
yb=77.6;
zb=39.5;

```

```
%Point C (socle)
```

```

xc=-148.4;
yc=-130.6;
zc=40;

```

```
%Point H (socle)
```

```

xh=-145.45;
yh=133.25;
zh=39.9;

```

```
%Point D (étrier)
```

```
D = [ -37.9 ; -10.3 ; 158.8];
```

```
%Point E (étrier)
```

```
E = [ -76 ; 65.6 ; 158.9];
```

```
%Point F (étrier)
```

```
F = [ -95.8 ; -73 ; 159.3];
```

```
%Point G (étrier)
```

```
G = [ -162.1 ; 56.3 ; 158.5];
```

```
%% Distances entre les points D,E,F et G de l'étrier
```

```

Lef=(((E(1,1)-F(1,1))^2+(E(2,1)-F(2,1))^2+(E(3,1)-
F(3,1))^2)^0.5);

```

```

Led=(((E(1,1)-D(1,1))^2+(E(2,1)-D(2,1))^2+(E(3,1)-
D(3,1))^2)^0.5);

```

```

Ldf=(((D(1,1)-F(1,1))^2+(D(2,1)-F(2,1))^2+(D(3,1)-
F(3,1))^2)^0.5);

```

```

Lgd=(((D(1,1)-G(1,1))^2+(D(2,1)-G(2,1))^2+(D(3,1)-
G(3,1))^2)^0.5);
Lge=(((E(1,1)-G(1,1))^2+(E(2,1)-G(2,1))^2+(E(3,1)-
G(3,1))^2)^0.5);
Lgf=(((F(1,1)-G(1,1))^2+(F(2,1)-G(2,1))^2+(F(3,1)-
G(3,1))^2)^0.5);

%% Angles initiaux des tiges
AnglePotah      =      180/pi*atan(((D(1,1)-xa)^2+(D(2,1)-
ya)^2)^0.5)/(D(3,1)-za));
AnglePotab = 90-180/pi*atan((D(1,1)-xa)/(D(2,1)-ya));

AnglePotbh      =      180/pi*atan(((E(1,1)-xb)^2+(E(2,1)-
yb)^2)^0.5)/(E(3,1)-zb));
AnglePotbb = 180+180/pi*atan((E(2,1)-yb)/(E(1,1)-xb));

AnglePotch      =      180/pi*atan(((F(1,1)-xc)^2+(F(2,1)-
yc)^2)^0.5)/(F(3,1)-zc));
AnglePotcb = 180/pi*atan((F(2,1)-yc)/(F(1,1)-xc));

AnglePothh      =      180/pi*atan(((G(1,1)-xh)^2+(G(2,1)-
yh)^2)^0.5)/(G(3,1)-zh));
AnglePothb = 270-180/pi*atan((G(1,1)-xh)/(G(2,1)-yh));

%% Données capteurs en degrés

Potah = potah(i,2);
Potab = potab(i,2);
Potbh = potbh(i,2);
Potbb = potbb(i,2);
Potch = potch(i,2);
Potcb = potcb(i,2);
Pothh = pothh(i,2);
Pothb = pothb(i,2);

%% Calcul du vecteur directeur de la tige AD
[a1,b1,c1] = vectdir (AnglePotab,AnglePotah,Potah,Potab);

%% Calcul du vecteur directeur de la tige BE
[a2,b2,c2] = vectdir (AnglePotbb,AnglePotbh,Potbh,Potbb);

%% Calcul du vecteur directeur de la tige CF
[a3,b3,c3] = vectdir (AnglePotcb,AnglePotch,Potch,Potcb);

%% Calcul du vecteur directeur de la tige HG
[a4,b4,c4] = vectdir (AnglePothb,AnglePothh,Pothh,Pothb);

```

```

%% Calcul du kmin et du kmax pour dconsigne = ED pour le point
%% D (droite AD) et le point E (droite BE)
[klmin_de,klmax_de,k2min_de,k2max_de] = ellipse
(xa,ya,za,xb,yb,zb,a1,b1,c1,a2,b2,c2,Led);

%% Calcul du kmin et du kmax pour dconsigne = DF pour le point
%% D (droite AD) et le point F (droite CF)
[klmin_df,klmax_df,k3min_df,k3max_df] = ellipse
(xa,ya,za,xc,yc,zc,a1,b1,c1,a3,b3,c3,Ldf);

%% Calcul du kmin et du kmax pour dconsigne = GD pour le point
%% D (droite AD) et le point G (droite HG)
[klmin_gd,klmax_gd,k4min_gd,k4max_gd] = ellipse
(xa,ya,za,xh,yh,zh,a1,b1,c1,a4,b4,c4,Lgd);

%% Reduction de l'intervalle de k1 (droite AD)
S_ad = [ klmin_de klmax_de klmin_df klmax_df klmin_gd klmax_gd];
RS_ad = sort (S_ad);
kmin_ad = RS_ad(1,3);
kmax_ad = RS_ad(1,4);

%% Définition de kmin
kmin=kmin_ad;

%% Définition de kmax
%% Comme les tiges font 210 mm de long, il est inutile de
%% prendre un kmax (qui est égale à AD) supérieur à cette valeur.
%% Le contraire voudrait dire que la rotule est n'est plus sur
%% la tige.
if kmax_ad >210
    kmax=210;
else
    kmax=kmax_ad;
end

```

vectdir.m

```

function [a,b,c] = vectdir (potbas0,pothaut0,poth,potb)

%% Calcul du vecteur directeur de la tige en fonction de l'angle
%% initiale de cette dernière et des données des potentiomètres

angleb = (potbas0 + potb)*pi/180;
angleh = (pothaut0 + poth)*pi/180;

a = sin(angleh)*cos(angleb);
b = sin(angleh)*sin(angleb);
c = cos(angleh);

```

```

function [k1min,k1max,k2min,k2max] = ellipse
(xa, ya, za, xb, yb, zb, a1, b1, c1, a2, b2, c2, Lconsigne)

%% Theorie : exemple avec les droites AD et BE.
%% On cherche a border les valeurs de k1 de la droite AD et les
%% valeurs de k2 de la droite BE de facon à avoir la distance
%% DE = dist entre les rotules du cadre

%%  $L^2 = Lconsigne^2 = (xe-xd)^2 + (ye-yd)^2 + (ze-zd)^2$ 

%% Avec:
%%  $xd = xa + k1.a1$ 
%%  $yd = ya + k1.b1$ 
%%  $zd = za + k1.c1$ 

%%  $xe = xb + k2.a2$ 
%%  $ye = yb + k2.b2$ 
%%  $ze = zb + k2.c2$ 

%% En remplacant on obtient:

%%  $Lconsigne^2 = k1^2 + k2^2 - 2.k1.k2.(a1.a2+b1.b2+c1.c2) +$ 
%%  $k1[2.a1.(xa-xb)+2.b1.(ya-yb)+2.c1.(za-zb)] +$ 
%%  $k2[(2.a2.(xb-xa)+2.b2.(yb-ya)+2.c2.(zb-za)] +$ 
%%  $xa^2+ya^2+za^2+xb^2+yb^2+zb^2-2.xb.xa-2.yb.ya-2.zb.za$ 

%% On pose :
%%  $A = -2.(a1.a2+b1.b2+c1.c2);$ 
%%  $B = 2.a1.(xa-xb)+2.b1.(ya-yb)+2.c1.(za-zb);$ 
%%  $C = (2.a2.(xb-xa)+2.b2.(yb-ya)+2.c2.(zb-za);$ 
%%  $D = xa^2+ya^2+za^2+xb^2+yb^2+zb^2-2.xb.xa-2.yb.ya-2.zb.za-consigne^2$ 

%% On se retrouve avec une equation de la forme:
%%  $k1^2 + k2^2 + A.k1.k2 + B.k1 + C.k2 + D = 0$ 
%% Après réduction, cette équation s'avère être celle d'une
%% ellipse le plus simple consiste à utiliser le fait que les
%% derives soient nulles aux extremités

%% Pour k1:
%% (E) :  $k1^2 + k2^2 + A.k1.k2 + B.k1 + C.k2 + D = 0$ 
%%  $d(E)/dk2 = 2.k2+A.k1+C = 0$ 
%% En remplacant  $k2 = -(A.k1+C)/2$  on obtient:

%%  $k1^2.(1-0.25.A^2) + k1.(B-0.5*A.C) + D-0.25.C^2$ 
%%  $deltak1 = (B-0.5*A.C)^2 - 4.(1-0.25.A^2).(D-0.25.C^2)$ 
%%  $k1max = (-(B-0.5*A.C)+sqrt(deltak1))/(2.(1-0.25.A^2))$ 

```

```

%% k1min =  $(-(B-0.5*A*C)-\sqrt{\text{deltak1}})/(2*(1-0.25*A^2))$ 

%% Pour k2:
%% (E) :  $k1^2 + k2^2 + A.k1.k2 + B.k1 + C.k2 + D = 0$ 
%%  $d(E)/dk1 = 2.k1+A.k2+B = 0$ 

%% En remplaçant  $k1 = -(A.k2+B)/2$  on obtient:

%%  $k2^2.(1-0.25.A^2) + k2.(C-0.5*A.B) + D-0.25.B^2$ 
%%  $\text{deltak2} = (C-0.5*A.B)^2 - 4.(1-0.25.A^2).(D-0.25.B^2)$ 
%%  $k2\text{max} = (-(C-0.5*A.B)+\sqrt{\text{deltak2}})/(2.(1-0.25.A^2))$ 
%%  $k2\text{min} = (-(C-0.5*A.B)-\sqrt{\text{deltak2}})/(2.(1-0.25.A^2))$ 

A = -2*(a1*a2+b1*b2+c1*c2);
B = 2*a1*(xa-xb)+2*b1*(ya-yb)+2*c1*(za-zb);
C = 2*a2*(xb-xa)+2*b2*(yb-ya)+2*c2*(zb-za);
D = xa^2+ya^2+za^2+xb^2+yb^2+zb^2-2*xb*xa-2*yb*ya-2*zb*za-
Lconsigne^2;

%Pour k1:
deltak1 = (B-0.5*A*C)^2 - 4*(1-0.25*A^2)*(D-0.25*C^2);
k1max = (-(B-0.5*A*C)+sqrt(deltak1))/(2*(1-0.25*A^2));
k1min = (-(B-0.5*A*C)-sqrt(deltak1))/(2*(1-0.25*A^2));

%Pour k2:
deltak2 = (C-0.5*A*B)^2 - 4*(1-0.25*A^2)*(D-0.25*B^2);
k2max = (-(C-0.5*A*B)+sqrt(deltak2))/(2*(1-0.25*A^2));
k2min = (-(C-0.5*A*B)-sqrt(deltak2))/(2*(1-0.25*A^2));

```

point_G.m

```

function [xg,yg,zg] = point_G (xd,yd,zd,xe,ye,ze,xf,yf,zf)

global D, global E, global F, global G
global xh,global yh,global zh,global a4,global b4,global c4

%% fonction permettant d'avoir les coordonnées du point G en
%% ayant celle de D, E et F

%% Coordonnées initiales des points D, E F et G
DE = E-D;
DF = F-D;
DG = G-D;

uo = DE/norm(DE);
wo = cross(DE,DF)/norm(cross(DE,DF));
vo = cross(wo,uo);
Po = [uo vo wo];

```

```

%% On pose DG = uo*alpha + vo*beta + wo*gamma = Po*coef
%% Avec coef=[alpha beta gamma] coefficients barycentriques
%% Po=[uo vo wo] matrice du repère formé par les points D,E et F

coef = inv(Po) * DG;

%% A un instant t

Df = [xd yd zd];
Ef = [xe ye ze];
Ff = [xf yf zf];
DEf = Ef - Df;
DFf = Ff - Df;

%% On pose DGf = uf*alpha + vf*beta + wf*gamma = Pf*coef
uf = DEf/norm(DEf);
wf = cross(DEf,DFf)/norm(cross(DEf,DFf));
vf = cross(wf,uf);
Pf = [uf' vf' wf'];
DGf = Pf*coef;
DGf = DGf';

%% Nouvelles coordonnées de G
Gf = Df + DGf;

xg = Gf(1,1);
yg = Gf(1,2);
zg = Gf(1,3);

```

opti_elf1.m

```

global Lef,global Led,global Ldf,global Lgd,global Lge,global
Lgf
global xa,global ya,global za,global xb,global yb,global
zb,global xc,global yc,global zc,global xh,global yh,global zh
global a1,global b1,global c1,global a2,global b2,global
c2,global a3,global b3,global c3,global a4,global b4,global c4

%% Calcul des valeurs de k1 pour lesquelles la dérivé de la
%% distance E1F1-Lef s'annule.
%% On utilise les changements de signe des valeurs extremes et
%% médiane pour connaître le nombre de fois où la dérivé
%% s'annule.

fa = feval('deriv_elf1',kmin+0.001);
fb = feval('deriv_elf1',(kmax+kmin)/2);
fc = feval('deriv_elf1',kmax-0.001);

```



```

if (sign(fa) == sign(fb)) & (sign(fb) == sign(fc))
    'Il n,y a pas de minimum dans cet interval';
    val=0;
elseif (sign(fa) ~= sign(fb)) & (sign(fb) == sign(fc))
    'Il y a un minimum';
    val=1;
        dko_1      =      fzero('deriv_elf1',[kmin+0.001
(kmax+kmin)/2],options);
elseif (sign(fa) == sign(fb)) & (sign(fb) ~= sign(fc))
    'Il y a un minimum';
    val=1;
        dko_1      =      fzero('deriv_elf1',[ (kmax+kmin)/2      kmax-
0.001],options);
else
    'il y a deux minimums';
    val = 2;
        dko_1      =      fzero('deriv_elf1',[kmin+0.001
(kmax+kmin)/2],options);
        dko_2      =      fzero('deriv_elf1',[ (kmax+kmin)/2      kmax-
0.001],options);
end

%% Calcul des valeurs de k1 pour lesquelles la distance E1F1
%% -Lef est minimale. On utilise les changements de signe des
%% valeurs extremes et d'annulation de la dérivé pour connaître
%% le nombre de fois où la fonction E1F1-Lef s'annule.

if val==2
    ga = feval('dist_elf1',kmin+0.001);
    gb = feval('dist_elf1',dko_1);
    gc = feval('dist_elf1',dko_2);
    gd = feval('dist_elf1',kmax-0.001);

        if      (sign(ga)==sign(gb))      &      (sign(gb)==sign(gc))      &
(sign(gc)==sign(gd))
            cas = 0;
            'val=2, cas=0 : il n`y a pas de valeur telle que
norm(E1F1)=Lef, on prends une valeur au mieux';
            Di = [abs(ga) abs(gb) abs(gc) abs(gd)];
            [l,c] = find(Di==min(Di));
            if c==1
                k1_a=kmin+0.001;
            elseif c==2
                k1_a=dko_1;
            elseif c==3
                k1_a=dko_2;
            else
                k1_a=kmax-0.001;
            end
end

```

```

        elseif (sign(ga)~=sign(gb) & sign(gb)==sign(gc) &
sign(gc)==sign(gd)) | (sign(ga)==sign(gb) & sign(gb)~=sign(gc) &
sign(gc)==sign(gd)) | (sign(ga)==sign(gb) & sign(gb)==sign(gc) &
sign(gc)~=sign(gd))
            cas = 1;
            'val=2, cas=1 : il y a une valeur telle que
norm(E1F1)=Lef';
            if (sign(ga)~=sign(gb)) & (sign(gb)==sign(gc)) &
(sign(gc)==sign(gd))
                k1_a = fzero('dist_elf1',[kmin+0.001 dko_1],options);
            elseif (sign(ga)==sign(gb)) & (sign(gb)~=sign(gc)) &
(sign(gc)==sign(gd))
                k1_a = fzero('dist_elf1',[dko_1 dko_2],options);
            elseif (sign(ga)==sign(gb)) & (sign(gb)==sign(gc)) &
(sign(gc)~=sign(gd))
                k1_a = fzero('dist_elf1',[dko_2 kmax-0.001],options);
            end

            elseif (sign(ga)==sign(gb) & sign(gb)~=sign(gc) &
sign(gc)~=sign(gd)) | (sign(ga)~=sign(gb) & sign(gb)~=sign(gc) &
sign(gc)==sign(gd))
                cas = 2;
                'val=2, cas=2 : il y a deux valeur telle que
norm(E1F1)=Lef';
                if (sign(ga)~=sign(gb)) & (sign(gb)~=sign(gc)) &
(sign(gc)==sign(gd))
                    k1_a = fzero('dist_elf1',[kmin+0.001 dko_1],options);
                    k1_b = fzero('dist_elf1',[dko_1 dko_2],options);
                elseif (sign(ga)==sign(gb)) & (sign(gb)~=sign(gc)) &
(sign(gc)~=sign(gd))
                    k1_a = fzero('dist_elf1',[dko_1 dko_2],options);
                    k1_b = fzero('dist_elf1',[dko_2 kmax-0.001],options);
                elseif (sign(ga)~=sign(gb)) & (sign(gb)~=sign(gc)) &
(sign(gc)~=sign(gd))
                    cas = 3;
                    'val=2, cas=3 : il y a trois valeur telle que
norm(E1F1)=Lef';
                    k1_a = fzero('dist_elf1',[kmin+0.001 dko_1],options);
                    k1_b = fzero('dist_elf1',[dko_1 dko_2],options);
                    k1_c = fzero('dist_elf1',[dko_2 kmax-0.001],options);
                end
            else
                'erreur dans val=2 / E1F1'
            end
end

```

```

elseif val==1
    ga = feval('dist_elf1',kmin+0.001);
    gb = feval('dist_elf1',dko_1);
    gc = feval('dist_elf1',kmax-0.001);

    if (sign(ga) == sign(gb)) & (sign(gb) == sign(gc))
        cas = 0;
        'val=1 cas=0 : il n`y a pas de valeur telle que
norm(E1F1)=Lef';
        Di = [abs(ga) abs(gb) abs(gc)];
        [l,c] = find(Di==min(Di));
        if c==1
            k1_a=kmin+0.001;
        elseif c==2
            k1_a=dko_1;
        else
            k1_a=kmax-0.001;
        end

        elseif (sign(ga) ~= sign(gb) & sign(gb) == sign(gc)) |
(sign(ga) == sign(gb) & sign(gb) ~= sign(gc))
            cas = 1;
            'val=1 cas =1 : il y a une valeur telle que
norm(E1F1)=Lef';
            if (sign(ga) ~= sign(gb)) & (sign(gb) == sign(gc))
                k1_a = fzero('dist_elf1',[kmin+0.001 dko_1],options);
            else
                k1_a = fzero('dist_elf1',[dko_1 kmax-0.001],options);
            end

        elseif (sign(ga) ~= sign(gb)) & (sign(gb) ~= sign(gc))
            cas = 2;
            'val=1 cas =2 : il y a deux valeur telle que
norm(E1F1)=Lef';
            k1_a = fzero('dist_elf1',[kmin+0.001 dko_1],options);
            k1_b = fzero('dist_elf1',[dko_1 kmax-0.001],options);

        else
            'erreur dans val=1 / E1F1'
        end

elseif val==0
    ga = feval('dist_elf1',kmin+0.001);
    gc = feval('dist_elf1',kmax-0.001);

    if sign(ga)~=sign(gc)
        cas = 1;
        'val =0 cas=1 il n`y a pas de minimum mais on a une valeur
telle que norm(E1F1)=Lef';

```

```

        k1_a = fzero('dist_elf1',[kmin+0.001 kmax-0.001],options);
elseif sign(ga)==sign(gc)
    cas = 0;
    'val =0 cas =0 il n`y a pas de minimum et il n`y a pas de
valeur telle que norm(E1F1)=Lef';
    if abs(ga)<abs(gc)
        k1_a=kmin+0.001;
    else
        k1_a=kmax-0.001;
    end
else
    'erreur dans val=0 / E1F1'
end
end

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Coordonnées des points D, E, F et G %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Point D_a
xd11_a = xa + k1_a*a1;
yd11_a = ya + k1_a*b1;
zd11_a = za + k1_a*c1;
% Point E_a
k21_a = 0.5*(-(2*a2*(xb-xa-k1_a*a1)+2*b2*(yb-ya-
k1_a*b1)+2*c2*(zb-za-k1_a*c1))-sqrt([2*a2*(xb-xa-
k1_a*a1)+2*b2*(yb-ya-k1_a*b1)+2*c2*(zb-za-k1_a*c1)]^2 - 4*[(xb-
xa-k1_a*a1)^2+(yb-ya-k1_a*b1)^2+(zb-za-k1_a*c1)^2-Led^2]));
xe11_a = xb + k21_a*a2;
ye11_a = yb + k21_a*b2;
ze11_a = zb + k21_a*c2;
% Point F_a
k31_a = 0.5*(-(2*a3*(xc-xa-k1_a*a1)+2*b3*(yc-ya-
k1_a*b1)+2*c3*(zc-za-k1_a*c1))-sqrt([2*a3*(xc-xa-
k1_a*a1)+2*b3*(yc-ya-k1_a*b1)+2*c3*(zc-za-k1_a*c1)]^2 - 4*[(xc-
xa-k1_a*a1)^2+(yc-ya-k1_a*b1)^2+(zc-za-k1_a*c1)^2-Ldf^2]));
xf11_a = xc + k31_a*a3;
yf11_a = yc + k31_a*b3;
zf11_a = zc + k31_a*c3;
% Calcul du point G_a
[xg11_a,yg11_a,zg11_a] = point_G
(xd11_a,yd11_a,zd11_a,xe11_a,ye11_a,ze11_a,xf11_a,yf11_a,zf11_a)
;

%% Calcul des points G1 et G2 obtenus à partir de DG = Lgd =
%% consigne
delta4 = [2*a4*(xh-xa-k1_a*a1)+2*b4*(yh-ya-k1_a*b1)+2*c4*(zh-za-
k1_a*c1)]^2 - 4*[(xh-xa-k1_a*a1)^2+(yh-ya-k1_a*b1)^2+(zh-za-
k1_a*c1)^2-Lgd^2];

```

```

sim4    =    2*a4*(xh-xa-k1_a*a1)+2*b4*(yh-ya-k1_a*b1)+2*c4*(zh-za-
k1_a*c1);
k41_a = (-sim4-sqrt(delta4))/2;
k42_a = (-sim4+sqrt(delta4))/2;
% PointG1
xg1_a = xh + k41_a*a4;
yg1_a = yh + k41_a*b4;
zg1_a = zh + k41_a*c4;
g11_1a_consigne = [xg1_a yg1_a zg1_a];
% PointG2
xg2_a = xh + k42_a*a4;
yg2_a = yh + k42_a*b4;
zg2_a = zh + k42_a*c4;
g11_2a_consigne = [xg2_a yg2_a zg2_a];

%% Calcul des normes entre (g11_a et g11_1_consigne) et (g11_a
%% et g11_2_consigne)
norme_11_1 = norm([xg1_a - xg11_a ; yg1_a - yg11_a ; zg1_a -
zg11_a]);
norme_11_2 = norm([xg2_a - xg11_a ; yg2_a - yg11_a ; zg2_a -
zg11_a]);
norme_11_3 = 1000;
norme_11_4 = 1000;
norme_11_5 = 1000;
norme_11_6 = 1000;

if (val==1 & cas==2) | (val==2 & cas==2) | (val==2 & cas==3)

    % Point D_b
    xd11_b = xa + k1_b*a1;
    yd11_b = ya + k1_b*b1;
    zd11_b = za + k1_b*c1;
    % Point E_b
    k21_b    =    0.5*(-(2*a2*(xb-xa-k1_b*a1)+2*b2*(yb-ya-
k1_b*b1)+2*c2*(zb-za-k1_b*c1))-sqrt([2*a2*(xb-xa-
k1_b*a1)+2*b2*(yb-ya-k1_b*b1)+2*c2*(zb-za-k1_b*c1)]^2 - 4*[(xb-
xa-k1_b*a1)^2+(yb-ya-k1_b*b1)^2+(zb-za-k1_b*c1)^2-Led^2]));
    xe11_b = xb + k21_b*a2;
    ye11_b = yb + k21_b*b2;
    ze11_b = zb + k21_b*c2;
    % Point F_b
    k31_b    =    0.5*(-(2*a3*(xc-xa-k1_b*a1)+2*b3*(yc-ya-
k1_b*b1)+2*c3*(zc-za-k1_b*c1))-sqrt([2*a3*(xc-xa-
k1_b*a1)+2*b3*(yc-ya-k1_b*b1)+2*c3*(zc-za-k1_b*c1)]^2 - 4*[(xc-
xa-k1_b*a1)^2+(yc-ya-k1_b*b1)^2+(zc-za-k1_b*c1)^2-Ldf^2]));
    xf11_b = xc + k31_b*a3;
    yf11_b = yc + k31_b*b3;
    zf11_b = zc + k31_b*c3;

```

```

% Calcul du point G_b
                                [xg11_b, yg11_b, zg11_b] = point_G
(xd11_b, yd11_b, zd11_b, xe11_b, ye11_b, ze11_b, xf11_b, yf11_b, zf11_b)
;

%% Calcul des points G1 et G2 obtenus à partir de DG = Lgd =
%% consigne
delta4 = [2*a4*(xh-xa-k1_b*a1)+2*b4*(yh-ya-k1_b*b1)+2*c4*(zh-
za-k1_b*c1)]^2 - 4*[(xh-xa-k1_b*a1)^2+(yh-ya-k1_b*b1)^2+(zh-za-
k1_b*c1)^2-Lgd^2];
sim4 = 2*a4*(xh-xa-k1_b*a1)+2*b4*(yh-ya-k1_b*b1)+2*c4*(zh-za-
k1_b*c1);
k41_b = (-sim4-sqrt(delta4))/2;
k42_b = (-sim4+sqrt(delta4))/2;
% PointG1
xg1_b = xh + k41_b*a4;
yg1_b = yh + k41_b*b4;
zg1_b = zh + k41_b*c4;
g11_1b_consigne = [xg1_b yg1_b zg1_b];
% PointG2
xg2_b = xh + k42_b*a4;
yg2_b = yh + k42_b*b4;
zg2_b = zh + k42_b*c4;
g11_2b_consigne = [xg2_b yg2_b zg2_b];

%% Calcul des normes entre (g11_b et g11_1_consigne) et
%% (g11_b et g11_2_consigne)
norme_11_3 = norm([xg1_b - xg11_b ; yg1_b - yg11_b ; zg1_b -
zg11_b]);
norme_11_4 = norm([xg2_b - xg11_b ; yg2_b - yg11_b ; zg2_b -
zg11_b]);

if val==2 & cas==3
% Point D_c
xd11_c = xa + k1_c*a1;
yd11_c = ya + k1_c*b1;
zd11_c = za + k1_c*c1;
% Point E_c
k21_c = 0.5*(-(2*a2*(xb-xa-k1_c*a1)+2*b2*(yb-ya-
k1_c*b1)+2*c2*(zb-za-k1_c*c1))-sqrt([2*a2*(xb-xa-
k1_c*a1)+2*b2*(yb-ya-k1_c*b1)+2*c2*(zb-za-k1_c*c1)]^2 - 4*[(xb-
xa-k1_c*a1)^2+(yb-ya-k1_c*b1)^2+(zb-za-k1_c*c1)^2-Led^2]));
xe11_c = xb + k21_c*a2;
ye11_c = yb + k21_c*b2;
ze11_c = zb + k21_c*c2;
% Point F_c
k31_c = 0.5*(-(2*a3*(xc-xa-k1_c*a1)+2*b3*(yc-ya-
k1_c*b1)+2*c3*(zc-za-k1_c*c1))-sqrt([2*a3*(xc-xa-

```

```

k1_c*a1)+2*b3*(yc-ya-k1_c*b1)+2*c3*(zc-za-k1_c*c1)]^2 - 4*[(xc-
xa-k1_c*a1)^2+(yc-ya-k1_c*b1)^2+(zc-za-k1_c*c1)^2-Ldf^2]));
    xf11_c = xc + k31_c*a3;
    yf11_c = yc + k31_c*b3;
    zf11_c = zc + k31_c*c3;
    % Calcul du point G_c
    [xg11_c,yg11_c,zg11_c] = point_G
(xd11_c,yd11_c,zd11_c,xell_c,yell_c,zell_c,xf11_c,yf11_c,zf11_c)
;

    % Calcul des points G1 et G2 obtenus à partir de DG = Lgd
    % = consigne
    delta4 = [2*a4*(xh-xa-k1_c*a1)+2*b4*(yh-ya-
k1_c*b1)+2*c4*(zh-za-k1_c*c1)]^2 - 4*[(xh-xa-k1_c*a1)^2+(yh-ya-
k1_c*b1)^2+(zh-za-k1_c*c1)^2-Lgd^2];
    sim4 = 2*a4*(xh-xa-k1_c*a1)+2*b4*(yh-ya-k1_c*b1)+2*c4*(zh-
za-k1_c*c1);
    k41_c = (-sim4-sqrt(delta4))/2;
    k42_c = (-sim4+sqrt(delta4))/2;
    % PointG1
    xg1_c = xh + k41_c*a4;
    yg1_c = yh + k41_c*b4;
    zg1_c = zh + k41_c*c4;
    g11_1c_consigne = [xg1_c yg1_c zg1_c];
    % PointG2
    xg2_c = xh + k42_c*a4;
    yg2_c = yh + k42_c*b4;
    zg2_c = zh + k42_c*c4;
    g11_2c_consigne = [xg2_c yg2_c zg2_c];

    % Calcul des normes entre (g11_b et g11_1_consigne) et
    % (g11_b et g11_2_consigne)
    norme_11_5 = norm([xg1_c - xg11_c ; yg1_c - yg11_c ; zg1_c
- zg11_c]);
    norme_11_6 = norm([xg2_c - xg11_c ; yg2_c - yg11_c ; zg2_c
- zg11_c]);

    end
end

```

opti_elf2.m

```

global Lef,global Led,global Ldf,global Lgd,global Lge,global
Lgf,global k1,global k2,global k3,global k4
global xa,global ya,global za,global xb,global yb,global
zb,global xc,global yc,global zc,global xh,global yh,global zh
global a1,global b1,global c1,global a2,global b2,global
c2,global a3,global b3,global c3,global a4,global b4,global c4

```

```

global D, global E, global F, global G

%% Calcul des valeurs de k1 pour lesquelles la dérivé de la
%% distance E1F2-Lef s'annule.
%% On utilise les changements de signe des valeurs extremes et
%% médiane pour connaître le
%% nombre de fois où la dérivé s'annule.

fa = feval('deriv_elf2',kmin+0.001);
fb = feval('deriv_elf2',(kmax+kmin)/2);
fc = feval('deriv_elf2',kmax-0.001);

if (sign(fa) == sign(fb)) & (sign(fb) == sign(fc))
    'Il n,y a pas de minimum dans cet interval';
    val=0;
elseif (sign(fa) ~= sign(fb)) & (sign(fb) == sign(fc))
    'Il y a un minimum';
    val=1;
        dko_1      =      fzero('deriv_elf2',[kmin+0.001
(kmax+kmin)/2],options);
elseif (sign(fa) == sign(fb)) & (sign(fb) ~= sign(fc))
    'Il y a un minimum';
    val=1;
        dko_1      =      fzero('deriv_elf2',[ (kmax+kmin)/2      kmax-
0.001],options);
else
    'il y a deux minimums';
    val = 2;
        dko_1      =      fzero('deriv_elf2',[kmin+0.001
(kmax+kmin)/2],options);
        dko_2      =      fzero('deriv_elf2',[ (kmax+kmin)/2      kmax-
0.001],options);
end

%% Calcul des valeurs de k1 pour lesquelles la distance E1F2-
%% Lef est minimale
%% On utilise les changements de signe des valeurs extremes et
%% d'annulation de la dérive pour connaître le nombre de fois
%% où la fonction E1F2-Lef s'annule.

if val==2
    ga = feval('dist_elf2',kmin+0.001);
    gb = feval('dist_elf2',dko_1);
    gc = feval('dist_elf2',dko_2);
    gd = feval('dist_elf2',kmax-0.001);

        if      (sign(ga)==sign(gb))      &      (sign(gb)==sign(gc))      &
(sign(gc)==sign(gd))
            cas = 0;
            'val=2, cas=0 : il n`y a pas de valeur telle que
norm(elf2)=Lef, on prends une valeur au mieux';

```



```

Di = [abs(ga) abs(gb) abs(gc) abs(gd)];
[l,c] = find(Di==min(Di));
if c==1
    k1_a=kmin+0.001;
elseif c==2
    k1_a=dko_1;
elseif c==3
    k1_a=dko_2;
else
    k1_a=kmax-0.001;
end

elseif (sign(ga)~=sign(gb) & sign(gb)==sign(gc) &
sign(gc)==sign(gd)) | (sign(ga)==sign(gb) & sign(gb)~=sign(gc) &
sign(gc)==sign(gd)) | (sign(ga)==sign(gb) & sign(gb)==sign(gc) &
sign(gc)~=sign(gd))
    cas = 1;
    'val=2, cas=1 : il y a une valeur telle que
norm(elf2)=Lef';
    if (sign(ga)~=sign(gb)) & (sign(gb)==sign(gc)) &
(sign(gc)==sign(gd))
        k1_a = fzero('dist_elf2',[kmin+0.001 dko_1],options);
    elseif (sign(ga)==sign(gb)) & (sign(gb)~=sign(gc)) &
(sign(gc)==sign(gd))
        k1_a = fzero('dist_elf2',[dko_1 dko_2],options);
    elseif (sign(ga)==sign(gb)) & (sign(gb)==sign(gc)) &
(sign(gc)~=sign(gd))
        k1_a = fzero('dist_elf2',[dko_2 kmax-0.001],options);
    end

elseif (sign(ga)==sign(gb) & sign(gb)~=sign(gc) &
sign(gc)~=sign(gd)) | (sign(ga)~=sign(gb) & sign(gb)~=sign(gc) &
sign(gc)==sign(gd))
    cas = 2;
    'val=2, cas=2 : il y a deux valeur telle que
norm(elf2)=Lef';
    if (sign(ga)~=sign(gb)) & (sign(gb)~=sign(gc)) &
(sign(gc)==sign(gd))
        k1_a = fzero('dist_elf2',[kmin+0.001 dko_1],options);
        k1_b = fzero('dist_elf2',[dko_1 dko_2],options);
    elseif (sign(ga)==sign(gb)) & (sign(gb)~=sign(gc)) &
(sign(gc)~=sign(gd))
        k1_a = fzero('dist_elf2',[dko_1 dko_2],options);
        k1_b = fzero('dist_elf2',[dko_2 kmax-0.001],options);
    elseif (sign(ga)~=sign(gb)) & (sign(gb)~=sign(gc)) &
(sign(gc)~=sign(gd))
        cas = 3;
        'val=2, cas=3 : il y a trois valeur telle que
norm(elf2)=Lef';

```

```

        k1_a = fzero('dist_elf2',[kmin+0.001 dko_1],options);
        k1_b = fzero('dist_elf2',[dko_1 dko_2],options);
        k1_c = fzero('dist_elf2',[dko_2 kmax-0.001],options);
    end
else
    'erreur dans val=2 / elf2'
end

elseif val==1
    ga = feval('dist_elf2',kmin+0.001);
    gb = feval('dist_elf2',dko_1);
    gc = feval('dist_elf2',kmax-0.001);

    if (sign(ga) == sign(gb)) & (sign(gb) == sign(gc))
        cas = 0;
        'val=1 cas=0 : il n`y a pas de valeur telle que
norm(elf2)=Lef';
        Di = [abs(ga) abs(gb) abs(gc)];
        [l,c] = find(Di==min(Di));
        if c==1
            k1_a=kmin+0.001;
        elseif c==2
            k1_a=dko_1;
        else
            k1_a=kmax-0.001;
        end

        elseif (sign(ga) ~= sign(gb) & sign(gb) == sign(gc)) |
(sign(ga) == sign(gb) & sign(gb) ~= sign(gc))
            cas = 1;
            'val=1 cas =1 : il y a une valeur telle que
norm(elf2)=Lef';
            if (sign(ga) ~= sign(gb)) & (sign(gb) == sign(gc))
                k1_a = fzero('dist_elf2',[kmin+0.001 dko_1],options);
            else
                k1_a = fzero('dist_elf2',[dko_1 kmax-0.001],options);
            end

            elseif (sign(ga) ~= sign(gb)) & (sign(gb) ~= sign(gc))
                cas = 2;
                'val=1 cas =2 : il y a deux valeur telle que
norm(elf2)=Lef';
                k1_a = fzero('dist_elf2',[kmin+0.001 dko_1],options);
                k1_b = fzero('dist_elf2',[dko_1 kmax-0.001],options);

            else
                'erreur dans val=1 / elf2'
            end
    end
end

```

```

elseif val==0
    ga = feval('dist_elf2',kmin+0.001);
    gc = feval('dist_elf2',kmax-0.001);

    if sign(ga)~=sign(gc)
        cas = 1;
        'val =0 cas=1 il n`y a pas de minimum mais on a une valeur
telle que norm(elf2)=Lef';
        k1_a = fzero('dist_elf2',[kmin+0.001 kmax-0.001],options);
    elseif sign(ga)==sign(gc)
        cas = 0;
        'val =0 cas =0 il n`y a pas de minimum et il n`y a pas de
valeur telle que norm(elf2)=Lef';
        if abs(ga)<abs(gc)
            k1_a=kmin+0.001;
        else
            k1_a=kmax-0.001;
        end
    else
        'erreur dans val=0 / elf2'
    end
end
end

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Coordonnées des points D, E, F et G %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

% Point D_a
xd12_a = xa + k1_a*a1;
yd12_a = ya + k1_a*b1;
zd12_a = za + k1_a*c1;
% Point E_a
k21_a = 0.5*(-(2*a2*(xb-xa-k1_a*a1)+2*b2*(yb-ya-
k1_a*b1)+2*c2*(zb-za-k1_a*c1))-sqrt([2*a2*(xb-xa-
k1_a*a1)+2*b2*(yb-ya-k1_a*b1)+2*c2*(zb-za-k1_a*c1)]^2 - 4*[(xb-
xa-k1_a*a1)^2+(yb-ya-k1_a*b1)^2+(zb-za-k1_a*c1)^2-Led^2]));
xe12_a = xb + k21_a*a2;
ye12_a = yb + k21_a*b2;
ze12_a = zb + k21_a*c2;
% Point F_a
k32_a = 0.5*(-(2*a3*(xc-xa-k1_a*a1)+2*b3*(yc-ya-
k1_a*b1)+2*c3*(zc-za-k1_a*c1))+sqrt([2*a3*(xc-xa-
k1_a*a1)+2*b3*(yc-ya-k1_a*b1)+2*c3*(zc-za-k1_a*c1)]^2 - 4*[(xc-
xa-k1_a*a1)^2+(yc-ya-k1_a*b1)^2+(zc-za-k1_a*c1)^2-Ldf^2]));
xf12_a = xc + k32_a*a3;
yf12_a = yc + k32_a*b3;
zf12_a = zc + k32_a*c3;

```

```

% Calcul du point G_a
[xg12_a,yg12_a,zg12_a] = point_G
(xd12_a,yd12_a,zd12_a,xel12_a,yel12_a,zel12_a,xf12_a,yf12_a,zf12_a)
;

%% Calcul des points G1 et G2 obtenus à partir de DG = Lgd =
%% consigne
delta4 = [2*a4*(xh-xa-k1_a*a1)+2*b4*(yh-ya-k1_a*b1)+2*c4*(zh-za-
k1_a*c1)]^2 - 4*[(xh-xa-k1_a*a1)^2+(yh-ya-k1_a*b1)^2+(zh-za-
k1_a*c1)^2-Lgd^2];
sim4 = 2*a4*(xh-xa-k1_a*a1)+2*b4*(yh-ya-k1_a*b1)+2*c4*(zh-za-
k1_a*c1);
k41_a = (-sim4-sqrt(delta4))/2;
k42_a = (-sim4+sqrt(delta4))/2;
% PointG1
xg1_a = xh + k41_a*a4;
yg1_a = yh + k41_a*b4;
zg1_a = zh + k41_a*c4;
g12_1a_consigne = [xg1_a yg1_a zg1_a];
% PointG2
xg2_a = xh + k42_a*a4;
yg2_a = yh + k42_a*b4;
zg2_a = zh + k42_a*c4;
g12_2a_consigne = [xg2_a yg2_a zg2_a];

%% Calcul des normes entre (g12_a et g12_1_consigne) et (g12_a
%% et g12_2_consigne)
norme_12_1 = norm([xg1_a - xg12_a ; yg1_a - yg12_a ; zg1_a -
zg12_a]);
norme_12_2 = norm([xg2_a - xg12_a ; yg2_a - yg12_a ; zg2_a -
zg12_a]);
norme_12_3 = 1000;
norme_12_4 = 1000;
norme_12_5 = 1000;
norme_12_6 = 1000;

if (val==1 & cas==2) | (val==2 & cas==2) | (val==2 & cas==3)

% Point D_b
xd12_b = xa + k1_b*a1;
yd12_b = ya + k1_b*b1;
zd12_b = za + k1_b*c1;
% Point E_b
k21_b = 0.5*(-(2*a2*(xb-xa-k1_b*a1)+2*b2*(yb-ya-
k1_b*b1)+2*c2*(zb-za-k1_b*c1))-sqrt([2*a2*(xb-xa-
k1_b*a1)+2*b2*(yb-ya-k1_b*b1)+2*c2*(zb-za-k1_b*c1)]^2 - 4*[(xb-
xa-k1_b*a1)^2+(yb-ya-k1_b*b1)^2+(zb-za-k1_b*c1)^2-Led^2]));
xel12_b = xb + k21_b*a2;

```

```

ye12_b = yb + k21_b*b2;
ze12_b = zb + k21_b*c2;
% Point F_b
k32_b = 0.5*(-(2*a3*(xc-xa-k1_b*a1)+2*b3*(yc-ya-
k1_b*b1)+2*c3*(zc-za-k1_b*c1))+sqrt([2*a3*(xc-xa-
k1_b*a1)+2*b3*(yc-ya-k1_b*b1)+2*c3*(zc-za-k1_b*c1)]^2 - 4*[(xc-
xa-k1_b*a1)^2+(yc-ya-k1_b*b1)^2+(zc-za-k1_b*c1)^2-Ldf^2]));
xf12_b = xc + k32_b*a3;
yf12_b = yc + k32_b*b3;
zf12_b = zc + k32_b*c3;
% Calcul du point G_b
[xg12_b,yg12_b,zg12_b] = point_G
(xd12_b,yd12_b,zd12_b,xel12_b,yel12_b,zel12_b,xf12_b,yf12_b,zf12_b)
;

%% Calcul des points G1 et G2 obtenus à partir de DG = Lgd =
%% consigne
delta4 = [2*a4*(xh-xa-k1_b*a1)+2*b4*(yh-ya-k1_b*b1)+2*c4*(zh-
za-k1_b*c1)]^2 - 4*[(xh-xa-k1_b*a1)^2+(yh-ya-k1_b*b1)^2+(zh-za-
k1_b*c1)^2-Lgd^2];
sim4 = 2*a4*(xh-xa-k1_b*a1)+2*b4*(yh-ya-k1_b*b1)+2*c4*(zh-za-
k1_b*c1);
k41_b = (-sim4-sqrt(delta4))/2;
k42_b = (-sim4+sqrt(delta4))/2;
% PointG1
xg1_b = xh + k41_b*a4;
yg1_b = yh + k41_b*b4;
zg1_b = zh + k41_b*c4;
g12_1b_consigne = [xg1_b yg1_b zg1_b];
% PointG2
xg2_b = xh + k42_b*a4;
yg2_b = yh + k42_b*b4;
zg2_b = zh + k42_b*c4;
g12_2b_consigne = [xg2_b yg2_b zg2_b];

%% Calcul des normes entre (g12_b et g12_1_consigne) et
%% (g12_b et g12_2_consigne)
norme_12_3 = norm([xg1_b - xg12_b ; yg1_b - yg12_b ; zg1_b -
zg12_b]);
norme_12_4 = norm([xg2_b - xg12_b ; yg2_b - yg12_b ; zg2_b -
zg12_b]);

if val==2 & cas==3
% Point D_c
xd12_c = xa + k1_c*a1;
yd12_c = ya + k1_c*b1;
zd12_c = za + k1_c*c1;
% Point E_c
k21_c = 0.5*(-(2*a2*(xb-xa-k1_c*a1)+2*b2*(yb-ya-
k1_c*b1)+2*c2*(zb-za-k1_c*c1))-sqrt([2*a2*(xb-xa-

```

```

k1_c*a1)+2*b2*(yb-ya-k1_c*b1)+2*c2*(zb-za-k1_c*c1)]^2 - 4*[(xb-
xa-k1_c*a1)^2+(yb-ya-k1_c*b1)^2+(zb-za-k1_c*c1)^2-Led^2]));
    xe12_c = xb + k21_c*a2;
    ye12_c = yb + k21_c*b2;
    ze12_c = zb + k21_c*c2;
    % Point F_c
        k32_c = 0.5*(-(2*a3*(xc-xa-k1_c*a1)+2*b3*(yc-ya-
k1_c*b1)+2*c3*(zc-za-k1_c*c1))+sqrt([2*a3*(xc-xa-
k1_c*a1)+2*b3*(yc-ya-k1_c*b1)+2*c3*(zc-za-k1_c*c1)]^2 - 4*[(xc-
xa-k1_c*a1)^2+(yc-ya-k1_c*b1)^2+(zc-za-k1_c*c1)^2-Ldf^2]));
    xf12_c = xc + k32_c*a3;
    yf12_c = yc + k32_c*b3;
    zf12_c = zc + k32_c*c3;
    % Calcul du point G_c
        [xg12_c,yg12_c,zg12_c] = point_G
(xd12_c,yd12_c,zd12_c,xe12_c,ye12_c,ze12_c,xf12_c,yf12_c,zf12_c)
;

    %% Calcul des points G1 et G2 obtenus à partir de DG = Lgd
    %% = consigne
        delta4 = [2*a4*(xh-xa-k1_c*a1)+2*b4*(yh-ya-
k1_c*b1)+2*c4*(zh-za-k1_c*c1)]^2 - 4*[(xh-xa-k1_c*a1)^2+(yh-ya-
k1_c*b1)^2+(zh-za-k1_c*c1)^2-Lgd^2];
        sim4 = 2*a4*(xh-xa-k1_c*a1)+2*b4*(yh-ya-k1_c*b1)+2*c4*(zh-
za-k1_c*c1);
        k41_c = (-sim4-sqrt(delta4))/2;
        k42_c = (-sim4+sqrt(delta4))/2;
        % PointG1
        xg1_c = xh + k41_c*a4;
        yg1_c = yh + k41_c*b4;
        zg1_c = zh + k41_c*c4;
        g12_1c_consigne = [xg1_c yg1_c zg1_c];
        % PointG2
        xg2_c = xh + k42_c*a4;
        yg2_c = yh + k42_c*b4;
        zg2_c = zh + k42_c*c4;
        g12_2c_consigne = [xg2_c yg2_c zg2_c];

    %% Calcul des normes entre (g12_b et g12_1_consigne) et
    %% (g12_b et g12_2_consigne)
        norme_12_5 = norm([xg1_c - xg12_c ; yg1_c - yg12_c ; zg1_c
- zg12_c]);
        norme_12_6 = norm([xg2_c - xg12_c ; yg2_c - yg12_c ; zg2_c
- zg12_c]);

    end
end

```

```

global Lef,global Led,global Ldf,global Lgd,global Lge,global
Lgf,global k1,global k2,global k3,global k4
global xa,global ya,global za,global xb,global yb,global
zb,global xc,global yc,global zc,global xh,global yh,global zh
global a1,global b1,global c1,global a2,global b2,global
c2,global a3,global b3,global c3,global a4,global b4,global c4
global D, global E, global F, global G

%% Calcul des valeurs de k1 pour lesquelles la dérivé de la
%% distance E2F1-Lef s'annule.
%% On utilise les changements de signe des valeurs extremes et
%% médiane pour connaître le nombre de fois où la dérivé
%% s'annule.

fa = feval('deriv_e2f1',kmin+0.001);
fb = feval('deriv_e2f1',(kmax+kmin)/2);
fc = feval('deriv_e2f1',kmax-0.001);

if (sign(fa) == sign(fb)) & (sign(fb) == sign(fc))
    'Il n,y a pas de minimum dans cet interval';
    val=0;
elseif (sign(fa) ~= sign(fb)) & (sign(fb) == sign(fc))
    'Il y a un minimum';
    val=1;
        dko_1 = fzero('deriv_e2f1',[kmin+0.001
(kmax+kmin)/2],options);
elseif (sign(fa) == sign(fb)) & (sign(fb) ~= sign(fc))
    'Il y a un minimum';
    val=1;
        dko_1 = fzero('deriv_e2f1',[(kmax+kmin)/2 kmax-
0.001],options);
else
    'il y a deux minimums'
    val = 2;
        dko_1 = fzero('deriv_e2f1',[kmin+0.001
(kmax+kmin)/2],options);
        dko_2 = fzero('deriv_e2f1',[(kmax+kmin)/2 kmax-
0.001],options);
end

%% Calcul des valeurs de k1 pour lesquelles la distance E2F1-
%% Lef est minimale
%% On utilise les changements de signe des valeurs extremes et
%% d'annulation de la dérive pour connaître le nombre de fois
%% où la fonction E2F1-Lef s'annule.

if val==2

```

```

ga = feval('dist_e2f1',kmin+0.001);
gb = feval('dist_e2f1',dko_1);
gc = feval('dist_e2f1',dko_2);
gd = feval('dist_e2f1',kmax-0.001);

    if (sign(ga)==sign(gb)) & (sign(gb)==sign(gc)) &
(sign(gc)==sign(gd))
        cas = 0;
        'val=2, cas=0 : il n`y a pas de valeur telle que
norm(e2f1)=Lef, on prends une valeur au mieux';
        Di = [abs(ga) abs(gb) abs(gc) abs(gd)];
        [l,c] = find(Di==min(Di));
        if c==1
            k1_a=kmin+0.001;
        elseif c==2
            k1_a=dko_1;
        elseif c==3
            k1_a=dko_2;
        else
            k1_a=kmax-0.001;
        end

        elseif (sign(ga)~=sign(gb) & sign(gb)==sign(gc) &
sign(gc)==sign(gd)) | (sign(ga)==sign(gb) & sign(gb)~=sign(gc) &
sign(gc)==sign(gd)) | (sign(ga)==sign(gb) & sign(gb)==sign(gc) &
sign(gc)~=sign(gd))
            cas = 1;
            'val=2, cas=1 : il y a une valeur telle que
norm(e2f1)=Lef';
            if (sign(ga)~=sign(gb)) & (sign(gb)==sign(gc)) &
(sign(gc)==sign(gd))
                k1_a = fzero('dist_e2f1',[kmin+0.001 dko_1],options);
            elseif (sign(ga)==sign(gb)) & (sign(gb)~=sign(gc)) &
(sign(gc)==sign(gd))
                k1_a = fzero('dist_e2f1',[dko_1 dko_2],options);
            elseif (sign(ga)==sign(gb)) & (sign(gb)==sign(gc)) &
(sign(gc)~=sign(gd))
                k1_a = fzero('dist_e2f1',[dko_2 kmax-0.001],options);
            end

        elseif (sign(ga)==sign(gb) & sign(gb)~=sign(gc) &
sign(gc)~=sign(gd)) | (sign(ga)~=sign(gb) & sign(gb)~=sign(gc) &
sign(gc)==sign(gd))
            cas = 2;
            'val=2, cas=2 : il y a deux valeur telle que
norm(e2f1)=Lef';
            if (sign(ga)~=sign(gb)) & (sign(gb)~=sign(gc)) &
(sign(gc)==sign(gd))
                k1_a = fzero('dist_e2f1',[kmin+0.001 dko_1],options);

```



```

        k1_b = fzero('dist_e2f1',[dko_1 dko_2],options);
        elseif (sign(ga)==sign(gb)) & (sign(gb)~=sign(gc)) &
(sign(gc)~=sign(gd))
        k1_a = fzero('dist_e2f1',[dko_1 dko_2],options);
        k1_b = fzero('dist_e2f1',[dko_2 kmax-0.001],options);
        elseif (sign(ga)~=sign(gb)) & (sign(gb)~=sign(gc)) &
(sign(gc)~=sign(gd))
        cas = 3;
        'val=2, cas=3 : il y a trois valeur telle que
norm(e2f1)=Lef';
        k1_a = fzero('dist_e2f1',[kmin+0.001 dko_1],options);
        k1_b = fzero('dist_e2f1',[dko_1 dko_2],options);
        k1_c = fzero('dist_e2f1',[dko_2 kmax-0.001],options);
    end
else
    'erreur dans val=2 / e2f1'
end

elseif val==1
    ga = feval('dist_e2f1',kmin+0.001);
    gb = feval('dist_e2f1',dko_1);
    gc = feval('dist_e2f1',kmax-0.001);

    if (sign(ga) == sign(gb)) & (sign(gb) == sign(gc))
        cas = 0;
        'val=1 cas=0 : il n`y a pas de valeur telle que
norm(e2f1)=Lef';
        Di = [abs(ga) abs(gb) abs(gc)];
        [l,c] = find(Di==min(Di));
        if c==1
            k1_a=kmin+0.001;
        elseif c==2
            k1_a=dko_1;
        else
            k1_a=kmax-0.001;
        end

        elseif (sign(ga) ~= sign(gb) & sign(gb) == sign(gc)) |
(sign(ga) == sign(gb) & sign(gb) ~= sign(gc))
            cas = 1;
            'val=1 cas =1 : il y a une valeur telle que
norm(e2f1)=Lef';
            if (sign(ga) ~= sign(gb)) & (sign(gb) == sign(gc))
                k1_a = fzero('dist_e2f1',[kmin+0.001 dko_1],options);
            else
                k1_a = fzero('dist_e2f1',[dko_1 kmax-0.001],options);
            end

            elseif (sign(ga) ~= sign(gb)) & (sign(gb) ~= sign(gc))
                cas = 2;

```

```

        'val=1 cas =2 : il y a deux valeur telle que
norm(e2f1)=Lef';
        k1_a = fzero('dist_e2f1',[kmin+0.001 dko_1],options);
        k1_b = fzero('dist_e2f1',[dko_1 kmax-0.001],options);

else
    'erreur dans val=1 / e2f1'
end

elseif val==0
    ga = feval('dist_e2f1',kmin+0.001);
    gc = feval('dist_e2f1',kmax-0.001);

    if sign(ga)~=sign(gc)
        cas = 1;
        'val =0 cas=1 il n`y a pas de minimum mais on a une valeur
telle que norm(e2f1)=Lef';
        k1_a = fzero('dist_e2f1',[kmin+0.001 kmax-0.001],options);
    elseif sign(ga)==sign(gc)
        cas = 0;
        'val =0 cas =0 il n`y a pas de minimum et il n`y a pas de
valeur telle que norm(e2f1)=Lef';
        if abs(ga)<abs(gc)
            k1_a=kmin+0.001;
        else
            k1_a=kmax-0.001;
        end
    else
        'erreur dans val=0 / e2f1'
    end
end

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Coordonnées des points D, E, F et G %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Point D_a
xd21_a = xa + k1_a*a1;
yd21_a = ya + k1_a*b1;
zd21_a = za + k1_a*c1;
% Point E_a
k22_a = 0.5*(-(2*a2*(xb-xa-k1_a*a1)+2*b2*(yb-ya-
k1_a*b1)+2*c2*(zb-za-k1_a*c1))+sqrt([2*a2*(xb-xa-
k1_a*a1)+2*b2*(yb-ya-k1_a*b1)+2*c2*(zb-za-k1_a*c1)]^2 - 4*[(xb-
xa-k1_a*a1)^2+(yb-ya-k1_a*b1)^2+(zb-za-k1_a*c1)^2-Led^2]));
xe21_a = xb + k22_a*a2;
ye21_a = yb + k22_a*b2;
ze21_a = zb + k22_a*c2;

```

```

% Point F_a
k31_a = 0.5*(-(2*a3*(xc-xa-k1_a*a1)+2*b3*(yc-ya-
k1_a*b1)+2*c3*(zc-za-k1_a*c1))-sqrt([2*a3*(xc-xa-
k1_a*a1)+2*b3*(yc-ya-k1_a*b1)+2*c3*(zc-za-k1_a*c1)]^2 - 4*[(xc-
xa-k1_a*a1)^2+(yc-ya-k1_a*b1)^2+(zc-za-k1_a*c1)^2-Ldf^2]));
xf21_a = xc + k31_a*a3;
yf21_a = yc + k31_a*b3;
zf21_a = zc + k31_a*c3;
% Calcul du point G_a
[xg21_a,yg21_a,zg21_a] = point_G
(xd21_a,yd21_a,zd21_a,xe21_a,ye21_a,ze21_a,xf21_a,yf21_a,zf21_a)
;

%% Calcul des points G1 et G2 obtenus à partir de DG = Lgd =
%% consigne
delta4 = [2*a4*(xh-xa-k1_a*a1)+2*b4*(yh-ya-k1_a*b1)+2*c4*(zh-za-
k1_a*c1)]^2 - 4*[(xh-xa-k1_a*a1)^2+(yh-ya-k1_a*b1)^2+(zh-za-
k1_a*c1)^2-Lgd^2];
sim4 = 2*a4*(xh-xa-k1_a*a1)+2*b4*(yh-ya-k1_a*b1)+2*c4*(zh-za-
k1_a*c1);
k41_a = (-sim4-sqrt(delta4))/2;
k42_a = (-sim4+sqrt(delta4))/2;
% PointG1
xg1_a = xh + k41_a*a4;
yg1_a = yh + k41_a*b4;
zg1_a = zh + k41_a*c4;
g21_1a_consigne = [xg1_a yg1_a zg1_a];
% PointG2
xg2_a = xh + k42_a*a4;
yg2_a = yh + k42_a*b4;
zg2_a = zh + k42_a*c4;
g21_2a_consigne = [xg2_a yg2_a zg2_a];

%% Calcul des normes entre (g21_a et g21_1_consigne) et (g21_a
%% et g21_2_consigne)
norme_21_1 = norm([xg1_a - xg21_a ; yg1_a - yg21_a ; zg1_a -
zg21_a]);
norme_21_2 = norm([xg2_a - xg21_a ; yg2_a - yg21_a ; zg2_a -
zg21_a]);
norme_21_3 = 1000;
norme_21_4 = 1000;
norme_21_5 = 1000;
norme_21_6 = 1000;

if (val==1 & cas==2) | (val==2 & cas==2) | (val==2 & cas==3)

% Point D_b
xd21_b = xa + k1_b*a1;
yd21_b = ya + k1_b*b1;

```

```

zd21_b = za + k1_b*c1;
% Point E_b
k22_b = 0.5*(-(2*a2*(xb-xa-k1_b*a1)+2*b2*(yb-ya-
k1_b*b1)+2*c2*(zb-za-k1_b*c1))+sqrt([2*a2*(xb-xa-
k1_b*a1)+2*b2*(yb-ya-k1_b*b1)+2*c2*(zb-za-k1_b*c1)]^2 - 4*[(xb-
xa-k1_b*a1)^2+(yb-ya-k1_b*b1)^2+(zb-za-k1_b*c1)^2-Led^2]));
xe21_b = xb + k22_b*a2;
ye21_b = yb + k22_b*b2;
ze21_b = zb + k22_b*c2;
% Point F_b
k31_b = 0.5*(-(2*a3*(xc-xa-k1_b*a1)+2*b3*(yc-ya-
k1_b*b1)+2*c3*(zc-za-k1_b*c1))-sqrt([2*a3*(xc-xa-
k1_b*a1)+2*b3*(yc-ya-k1_b*b1)+2*c3*(zc-za-k1_b*c1)]^2 - 4*[(xc-
xa-k1_b*a1)^2+(yc-ya-k1_b*b1)^2+(zc-za-k1_b*c1)^2-Ldf^2]));
xf21_b = xc + k31_b*a3;
yf21_b = yc + k31_b*b3;
zf21_b = zc + k31_b*c3;
% Calcul du point G_b
[xg21_b,yg21_b,zg21_b] = point_G
(xd21_b,yd21_b,zd21_b,xe21_b,ye21_b,ze21_b,xf21_b,yf21_b,zf21_b)
;

%% Calcul des points G1 et G2 obtenus à partir de DG = Lgd =
%% consigne
delta4 = [2*a4*(xh-xa-k1_b*a1)+2*b4*(yh-ya-k1_b*b1)+2*c4*(zh-
za-k1_b*c1)]^2 - 4*[(xh-xa-k1_b*a1)^2+(yh-ya-k1_b*b1)^2+(zh-za-
k1_b*c1)^2-Lgd^2];
sim4 = 2*a4*(xh-xa-k1_b*a1)+2*b4*(yh-ya-k1_b*b1)+2*c4*(zh-za-
k1_b*c1);
k41_b = (-sim4-sqrt(delta4))/2;
k42_b = (-sim4+sqrt(delta4))/2;
% PointG1
xg1_b = xh + k41_b*a4;
yg1_b = yh + k41_b*b4;
zg1_b = zh + k41_b*c4;
g21_1b_consigne = [xg1_b yg1_b zg1_b];
% PointG2
xg2_b = xh + k42_b*a4;
yg2_b = yh + k42_b*b4;
zg2_b = zh + k42_b*c4;
g21_2b_consigne = [xg2_b yg2_b zg2_b];

%% Calcul des normes entre (g21_b et g21_1_consigne) et
%% (g21_b et g21_2_consigne)
norme_21_3 = norm([xg1_b - xg21_b ; yg1_b - yg21_b ; zg1_b -
zg21_b]);
norme_21_4 = norm([xg2_b - xg21_b ; yg2_b - yg21_b ; zg2_b -
zg21_b]);

if val==2 & cas==3

```

```

% Point D_c
xd21_c = xa + k1_c*a1;
yd21_c = ya + k1_c*b1;
zd21_c = za + k1_c*c1;
% Point E_c
k22_c = 0.5*(-(2*a2*(xb-xa-k1_c*a1)+2*b2*(yb-ya-
k1_c*b1)+2*c2*(zb-za-k1_c*c1))+sqrt([2*a2*(xb-xa-
k1_c*a1)+2*b2*(yb-ya-k1_c*b1)+2*c2*(zb-za-k1_c*c1)]^2 - 4*[(xb-
xa-k1_c*a1)^2+(yb-ya-k1_c*b1)^2+(zb-za-k1_c*c1)^2-Led^2]));
xe21_c = xb + k22_c*a2;
ye21_c = yb + k22_c*b2;
ze21_c = zb + k22_c*c2;
% Point F_c
k31_c = 0.5*(-(2*a3*(xc-xa-k1_c*a1)+2*b3*(yc-ya-
k1_c*b1)+2*c3*(zc-za-k1_c*c1))-sqrt([2*a3*(xc-xa-
k1_c*a1)+2*b3*(yc-ya-k1_c*b1)+2*c3*(zc-za-k1_c*c1)]^2 - 4*[(xc-
xa-k1_c*a1)^2+(yc-ya-k1_c*b1)^2+(zc-za-k1_c*c1)^2-Ldf^2]));
xf21_c = xc + k31_c*a3;
yf21_c = yc + k31_c*b3;
zf21_c = zc + k31_c*c3;
% Calcul du point G_c
[xg21_c, yg21_c, zg21_c] = point_G
(xd21_c, yd21_c, zd21_c, xe21_c, ye21_c, ze21_c, xf21_c, yf21_c, zf21_c)
;

% Calcul des points G1 et G2 obtenus à partir de DG = Lgd

% = consigne
delta4 = [2*a4*(xh-xa-k1_c*a1)+2*b4*(yh-ya-
k1_c*b1)+2*c4*(zh-za-k1_c*c1)]^2 - 4*[(xh-xa-k1_c*a1)^2+(yh-ya-
k1_c*b1)^2+(zh-za-k1_c*c1)^2-Lgd^2];
sim4 = 2*a4*(xh-xa-k1_c*a1)+2*b4*(yh-ya-k1_c*b1)+2*c4*(zh-
za-k1_c*c1);
k41_c = (-sim4-sqrt(delta4))/2;
k42_c = (-sim4+sqrt(delta4))/2;
% PointG1
xg1_c = xh + k41_c*a4;
yg1_c = yh + k41_c*b4;
zg1_c = zh + k41_c*c4;
g21_1c_consigne = [xg1_c yg1_c zg1_c];
% PointG2
xg2_c = xh + k42_c*a4;
yg2_c = yh + k42_c*b4;
zg2_c = zh + k42_c*c4;
g21_2c_consigne = [xg2_c yg2_c zg2_c];

% Calcul des normes entre (g21_b et g21_1_consigne) et
% (g21_b et g21_2_consigne)
norme_21_5 = norm([xg1_c - xg21_c ; yg1_c - yg21_c ; zg1_c
- zg21_c]);

```

```

norme_21_6 = norm([xg2_c - xg21_c ; yg2_c - yg21_c ; zg2_c
- zg21_c]);

end
end

```

opti_e2f2.m

```

global Lef,global Led,global Ldf,global Lgd,global Lge,global
Lgf,global k1,global k2,global k3,global k4
global xa,global ya,global za,global xb,global yb,global
zb,global xc,global yc,global zc,global xh,global yh,global zh
global a1,global b1,global c1,global a2,global b2,global
c2,global a3,global b3,global c3,global a4,global b4,global c4
global D, global E, global F, global G

%% Calcul des valeurs de k1 pour lesquelles la dérivé de la
%% distance E2F2-Lef s'annule.
%% On utilise les changements de signe des valeurs extremes et
%% médiane pour connaître le nombre de fois où la dérivé
%% s'annule.

fa = feval('deriv_e2f2',kmin+0.001);
fb = feval('deriv_e2f2',(kmax+kmin)/2);
fc = feval('deriv_e2f2',kmax-0.001);

if (sign(fa) == sign(fb)) & (sign(fb) == sign(fc))
    'Il n,y a pas de minimum dans cet interval';
    val=0;
elseif (sign(fa) ~= sign(fb)) & (sign(fb) == sign(fc))
    'Il y a un minimum';
    val=1;
        dko_1 = fzero('deriv_e2f2',[kmin+0.001
(kmax+kmin)/2],options);
elseif (sign(fa) == sign(fb)) & (sign(fb) ~= sign(fc))
    'Il y a un minimum';
    val=1;
        dko_1 = fzero('deriv_e2f2',[(kmax+kmin)/2 kmax-
0.001],options);
else
    'il y a deux minimums';
    val = 2;
        dko_1 = fzero('deriv_e2f2',[kmin+0.001
(kmax+kmin)/2],options);
        dko_2 = fzero('deriv_e2f2',[(kmax+kmin)/2 kmax-
0.001],options);
end

%% Calcul des valeurs de k1 pour lesquelles la distance E2F2-

```

```

%% Lef est minimale
%% On utilise les changements de signe des valeurs extremes et
%% d'annulation de la dérive pour connaître le nombre de fois
%% où la fonction E2F2-Lef s'annule.

if val==2
    ga = feval('dist_e2f2',kmin+0.001);
    gb = feval('dist_e2f2',dko_1);
    gc = feval('dist_e2f2',dko_2);
    gd = feval('dist_e2f2',kmax-0.001);

        if (sign(ga)==sign(gb)) & (sign(gb)==sign(gc)) &
(sign(gc)==sign(gd))
            cas = 0;
                'val=2, cas=0 : il n`y a pas de valeur telle que
norm(e2f2)=Lef, on prends une valeur au mieux';
                Di = [abs(ga) abs(gb) abs(gc) abs(gd)];
                [l,c] = find(Di==min(Di));
                if c==1
                    k1_a=kmin+0.001;
                elseif c==2
                    k1_a=dko_1;
                elseif c==3
                    k1_a=dko_2;
                else
                    k1_a=kmax-0.001;
                end

                    elseif (sign(ga)~=sign(gb) & sign(gb)==sign(gc) &
sign(gc)==sign(gd)) | (sign(ga)==sign(gb) & sign(gb)~=sign(gc) &
sign(gc)==sign(gd)) | (sign(ga)==sign(gb) & sign(gb)==sign(gc) &
sign(gc)~=sign(gd))
                        cas = 1;
                            'val=2, cas=1 : il y a une valeur telle que
norm(e2f2)=Lef';
                            if (sign(ga)~=sign(gb)) & (sign(gb)==sign(gc)) &
(sign(gc)==sign(gd))
                                k1_a = fzero('dist_e2f2',[kmin+0.001 dko_1],options);
                            elseif (sign(ga)==sign(gb)) & (sign(gb)~=sign(gc)) &
(sign(gc)==sign(gd))
                                k1_a = fzero('dist_e2f2',[dko_1 dko_2],options);
                            elseif (sign(ga)==sign(gb)) & (sign(gb)==sign(gc)) &
(sign(gc)~=sign(gd))
                                k1_a = fzero('dist_e2f2',[dko_2 kmax-0.001],options);
                            end

                                elseif (sign(ga)==sign(gb) & sign(gb)~=sign(gc) &
sign(gc)~=sign(gd)) | (sign(ga)~=sign(gb) & sign(gb)~=sign(gc) &
sign(gc)==sign(gd))

```

```

        cas = 2;
        'val=2, cas=2 : il y a deux valeur telle que
norm(e2f2)=Lef';
        if (sign(ga)~=sign(gb)) & (sign(gb)~=sign(gc)) &
(sign(gc)==sign(gd))
            k1_a = fzero('dist_e2f2',[kmin+0.001 dko_1],options);
            k1_b = fzero('dist_e2f2',[dko_1 dko_2],options);
        elseif (sign(ga)==sign(gb)) & (sign(gb)~=sign(gc)) &
(sign(gc)~=sign(gd))
            k1_a = fzero('dist_e2f2',[dko_1 dko_2],options);
            k1_b = fzero('dist_e2f2',[dko_2 kmax-0.001],options);
        elseif (sign(ga)~=sign(gb)) & (sign(gb)~=sign(gc)) &
(sign(gc)~=sign(gd))
            cas = 3;
            'val=2, cas=3 : il y a trois valeur telle que
norm(e2f2)=Lef';
            k1_a = fzero('dist_e2f2',[kmin+0.001 dko_1],options);
            k1_b = fzero('dist_e2f2',[dko_1 dko_2],options);
            k1_c = fzero('dist_e2f2',[dko_2 kmax-0.001],options);
        end
    else
        'erreur dans val=2 / e2f2'
    end

elseif val==1
    ga = feval('dist_e2f2',kmin+0.001);
    gb = feval('dist_e2f2',dko_1);
    gc = feval('dist_e2f2',kmax-0.001);

    if (sign(ga) == sign(gb)) & (sign(gb) == sign(gc))
        cas = 0;
        'val=1 cas=0 : il n`y a pas de valeur telle que
norm(e2f2)=Lef';
        Di = [abs(ga) abs(gb) abs(gc)];
        [l,c] = find(Di==min(Di));
        if c==1
            k1_a=kmin+0.001;
        elseif c==2
            k1_a=dko_1;
        else
            k1_a=kmax-0.001;
        end

        elseif (sign(ga) ~= sign(gb) & sign(gb) == sign(gc)) |
(sign(ga) == sign(gb) & sign(gb) ~= sign(gc))
            cas = 1;
            'val=1 cas =1 : il y a une valeur telle que
norm(e2f2)=Lef';
            if (sign(ga) ~= sign(gb)) & (sign(gb) == sign(gc))
                k1_a = fzero('dist_e2f2',[kmin+0.001 dko_1],options);
            end
        end
    end
end

```



```

else
    k1_a = fzero('dist_e2f2',[dko_1 kmax-0.001],options);
end

elseif (sign(ga) ~= sign(gb)) & (sign(gb) ~= sign(gc))
    cas = 2;
    'val=1 cas =2 : il y a deux valeur telle que
norm(e2f2)=Lef';
    k1_a = fzero('dist_e2f2',[kmin+0.001 dko_1],options);
    k1_b = fzero('dist_e2f2',[dko_1 kmax-0.001],options);

else
    'erreur dans val=1 / e2f2'
end

elseif val==0
    ga = feval('dist_e2f2',kmin+0.001);
    gc = feval('dist_e2f2',kmax-0.001);

    if sign(ga)~=sign(gc)
        cas = 1;
        'val =0 cas=1 il n`y a pas de minimum mais on a une valeur
telle que norm(e2f2)=Lef';
        k1_a = fzero('dist_e2f2',[kmin+0.001 kmax-0.001],options);
    elseif sign(ga)==sign(gc)
        cas = 0;
        'val =0 cas =0 il n`y a pas de minimum et il n`y a pas de
valeur telle que norm(e2f2)=Lef';
        if abs(ga)<abs(gc)
            k1_a=kmin+0.001;
        else
            k1_a=kmax-0.001;
        end
    else
        'erreur dans val=0 / e2f2'
    end
end

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Coordonnées des points D, E, F et G %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Point D_a
xd22_a = xa + k1_a*a1;
yd22_a = ya + k1_a*b1;
zd22_a = za + k1_a*c1;
% Point E_a

```

```

k22_a          =          0.5*(-(2*a2*(xb-xa-k1_a*a1)+2*b2*(yb-ya-
k1_a*b1)+2*c2*(zb-za-k1_a*c1))+sqrt([2*a2*(xb-xa-
k1_a*a1)+2*b2*(yb-ya-k1_a*b1)+2*c2*(zb-za-k1_a*c1)]^2 - 4*[(xb-
xa-k1_a*a1)^2+(yb-ya-k1_a*b1)^2+(zb-za-k1_a*c1)^2-Led^2]));
xe22_a = xb + k22_a*a2;
ye22_a = yb + k22_a*b2;
ze22_a = zb + k22_a*c2;
% Point F_a
k32_a          =          0.5*(-(2*a3*(xc-xa-k1_a*a1)+2*b3*(yc-ya-
k1_a*b1)+2*c3*(zc-za-k1_a*c1))+sqrt([2*a3*(xc-xa-
k1_a*a1)+2*b3*(yc-ya-k1_a*b1)+2*c3*(zc-za-k1_a*c1)]^2 - 4*[(xc-
xa-k1_a*a1)^2+(yc-ya-k1_a*b1)^2+(zc-za-k1_a*c1)^2-Ldf^2]));
xf22_a = xc + k32_a*a3;
yf22_a = yc + k32_a*b3;
zf22_a = zc + k32_a*c3;
% Calcul du point G_a
[xg22_a,yg22_a,zg22_a]          =          point_G
(xd22_a,yd22_a,zd22_a,xe22_a,ye22_a,ze22_a,xf22_a,yf22_a,zf22_a)
;

%% Calcul des points G1 et G2 obtenus à partir de DG = Lgd =
%% consigne
delta4 = [2*a4*(xh-xa-k1_a*a1)+2*b4*(yh-ya-k1_a*b1)+2*c4*(zh-za-
k1_a*c1)]^2 - 4*[(xh-xa-k1_a*a1)^2+(yh-ya-k1_a*b1)^2+(zh-za-
k1_a*c1)^2-Lgd^2];
sim4 = 2*a4*(xh-xa-k1_a*a1)+2*b4*(yh-ya-k1_a*b1)+2*c4*(zh-za-
k1_a*c1);
k41_a = (-sim4-sqrt(delta4))/2;
k42_a = (-sim4+sqrt(delta4))/2;
% PointG1
xg1_a = xh + k41_a*a4;
yg1_a = yh + k41_a*b4;
zg1_a = zh + k41_a*c4;
g22_1a_consigne = [xg1_a yg1_a zg1_a];
% PointG2
xg2_a = xh + k42_a*a4;
yg2_a = yh + k42_a*b4;
zg2_a = zh + k42_a*c4;
g22_2a_consigne = [xg2_a yg2_a zg2_a];

%% Calcul des normes entre (g22_a et g22_1_consigne) et (g22_a
%% et g22_2_consigne)
norme_22_1 = norm([xg1_a - xg22_a ; yg1_a - yg22_a ; zg1_a -
zg22_a]);
norme_22_2 = norm([xg2_a - xg22_a ; yg2_a - yg22_a ; zg2_a -
zg22_a]);
norme_22_3 = 1000;
norme_22_4 = 1000;
norme_22_5 = 1000;
norme_22_6 = 1000;

```

```

if (val==1 & cas==2) | (val==2 & cas==2) | (val==2 & cas==3)

% Point D_b
xd22_b = xa + k1_b*a1;
yd22_b = ya + k1_b*b1;
zd22_b = za + k1_b*c1;
% Point E_b
k22_b = 0.5*(-(2*a2*(xb-xa-k1_b*a1)+2*b2*(yb-ya-
k1_b*b1)+2*c2*(zb-za-k1_b*c1))+sqrt([2*a2*(xb-xa-
k1_b*a1)+2*b2*(yb-ya-k1_b*b1)+2*c2*(zb-za-k1_b*c1)]^2 - 4*[(xb-
xa-k1_b*a1)^2+(yb-ya-k1_b*b1)^2+(zb-za-k1_b*c1)^2-Led^2]));
xe22_b = xb + k22_b*a2;
ye22_b = yb + k22_b*b2;
ze22_b = zb + k22_b*c2;
% Point F_b
k32_b = 0.5*(-(2*a3*(xc-xa-k1_b*a1)+2*b3*(yc-ya-
k1_b*b1)+2*c3*(zc-za-k1_b*c1))+sqrt([2*a3*(xc-xa-
k1_b*a1)+2*b3*(yc-ya-k1_b*b1)+2*c3*(zc-za-k1_b*c1)]^2 - 4*[(xc-
xa-k1_b*a1)^2+(yc-ya-k1_b*b1)^2+(zc-za-k1_b*c1)^2-Ldf^2]));
xf22_b = xc + k32_b*a3;
yf22_b = yc + k32_b*b3;
zf22_b = zc + k32_b*c3;
% Calcul du point G_b
[xg22_b,yg22_b,zg22_b] = point_G
(xd22_b,yd22_b,zd22_b,xe22_b,ye22_b,ze22_b,xf22_b,yf22_b,zf22_b)
;

%% Calcul des points G1 et G2 obtenus à partir de DG = Lgd =
%% consigne
delta4 = [2*a4*(xh-xa-k1_b*a1)+2*b4*(yh-ya-k1_b*b1)+2*c4*(zh-
za-k1_b*c1)]^2 - 4*[(xh-xa-k1_b*a1)^2+(yh-ya-k1_b*b1)^2+(zh-za-
k1_b*c1)^2-Lgd^2];
sim4 = 2*a4*(xh-xa-k1_b*a1)+2*b4*(yh-ya-k1_b*b1)+2*c4*(zh-za-
k1_b*c1);
k41_b = (-sim4-sqrt(delta4))/2;
k42_b = (-sim4+sqrt(delta4))/2;
% PointG1
xg1_b = xh + k41_b*a4;
yg1_b = yh + k41_b*b4;
zg1_b = zh + k41_b*c4;
g22_1b_consigne = [xg1_b yg1_b zg1_b];
% PointG2
xg2_b = xh + k42_b*a4;
yg2_b = yh + k42_b*b4;
zg2_b = zh + k42_b*c4;
g22_2b_consigne = [xg2_b yg2_b zg2_b];

```

```

%% Calcul des normes entre (g22_b et g22_1_consigne) et
%% (g22_b et g22_2_consigne)
norme_22_3 = norm([xg1_b - xg22_b ; yg1_b - yg22_b ; zg1_b -
zg22_b]);
norme_22_4 = norm([xg2_b - xg22_b ; yg2_b - yg22_b ; zg2_b -
zg22_b]);

if val==2 & cas==3
% Point D_c
xd22_c = xa + k1_c*a1;
yd22_c = ya + k1_c*b1;
zd22_c = za + k1_c*c1;
% Point E_c
k22_c = 0.5*(-(2*a2*(xb-xa-k1_c*a1)+2*b2*(yb-ya-
k1_c*b1)+2*c2*(zb-za-k1_c*c1))+sqrt([2*a2*(xb-xa-
k1_c*a1)+2*b2*(yb-ya-k1_c*b1)+2*c2*(zb-za-k1_c*c1)]^2 - 4*[(xb-
xa-k1_c*a1)^2+(yb-ya-k1_c*b1)^2+(zb-za-k1_c*c1)^2-Led^2]));
xe22_c = xb + k22_c*a2;
ye22_c = yb + k22_c*b2;
ze22_c = zb + k22_c*c2;
% Point F_c
k32_c = 0.5*(-(2*a3*(xc-xa-k1_c*a1)+2*b3*(yc-ya-
k1_c*b1)+2*c3*(zc-za-k1_c*c1))+sqrt([2*a3*(xc-xa-
k1_c*a1)+2*b3*(yc-ya-k1_c*b1)+2*c3*(zc-za-k1_c*c1)]^2 - 4*[(xc-
xa-k1_c*a1)^2+(yc-ya-k1_c*b1)^2+(zc-za-k1_c*c1)^2-Ldf^2]));
xf22_c = xc + k32_c*a3;
yf22_c = yc + k32_c*b3;
zf22_c = zc + k32_c*c3;
% Calcul du point G_c
[xg22_c,yg22_c,zg22_c] = point_G
(xd22_c,yd22_c,zd22_c,xe22_c,ye22_c,ze22_c,xf22_c,yf22_c,zf22_c)
;

%% Calcul des points G1 et G2 obtenus à partir de DG = Lgd

%% = consigne
delta4 = [2*a4*(xh-xa-k1_c*a1)+2*b4*(yh-ya-
k1_c*b1)+2*c4*(zh-za-k1_c*c1)]^2 - 4*[(xh-xa-k1_c*a1)^2+(yh-ya-
k1_c*b1)^2+(zh-za-k1_c*c1)^2-Lgd^2];
sim4 = 2*a4*(xh-xa-k1_c*a1)+2*b4*(yh-ya-k1_c*b1)+2*c4*(zh-
za-k1_c*c1);
k41_c = (-sim4-sqrt(delta4))/2;
k42_c = (-sim4+sqrt(delta4))/2;
% PointG1
xg1_c = xh + k41_c*a4;
yg1_c = yh + k41_c*b4;
zg1_c = zh + k41_c*c4;
g22_1c_consigne = [xg1_c yg1_c zg1_c];
% PointG2
xg2_c = xh + k42_c*a4;
yg2_c = yh + k42_c*b4;

```

```

zg2_c = zh + k42_c*c4;
g22_2c_consigne = [xg2_c yg2_c zg2_c];

    %% Calcul des normes entre (g22_b et g22_1_consigne) et
    %% (g22_b et g22_2_consigne)
    norme_22_5 = norm([xg1_c - xg22_c ; yg1_c - yg22_c ; zg1_c
- zg22_c]);
    norme_22_6 = norm([xg2_c - xg22_c ; yg2_c - yg22_c ; zg2_c
- zg22_c]);

    end
end

```

dist_elf1.m

```

function valeur_elf1= dist_elf1(k1)

global xa,global ya,global za,global xb,global
yb,global zb,global xc,global yc,global zc
global Led,global Ldf,global Lef,global a1,global b1,global
c1,global a2,global b2,global c2,global a3,global b3,global c3

%% fonction calculant la norme de (E1F1-Lef) en fonction de k1

%% Calcul de k2 en fonction de k1 en utilisant DE = Lde
%% On obtient deux valeurs car c'est une equation de degré 2:
%% k21 et k22. Ici on choisit k21 (indice 1 car on s'occupe
%% de la distance "E1"f1)
k21 = 0.5*(-(2*a2*(xb-xa-k1*a1)+2*b2*(yb-ya-k1*b1)+2*c2*(zb-za-
k1*c1))-sqrt([2*a2*(xb-xa-k1*a1)+2*b2*(yb-ya-k1*b1)+2*c2*(zb-za-
k1*c1)]^2 - 4*[(xb-xa-k1*a1)^2+(yb-ya-k1*b1)^2+(zb-za-k1*c1)^2-
Led^2]));
%% Calcul de k3 en fonction de k1 en utilisant DF = Ldf
%% On obtient deux valeurs puisque c'est une equation de degré
%% 2: k31 et k32. Ici on choisit k31 (indice 1 car on s'occupe
%% de la distance e1"F1")
k31 = 0.5*(-(2*a3*(xc-xa-k1*a1)+2*b3*(yc-ya-k1*b1)+2*c3*(zc-za-
k1*c1))-sqrt([2*a3*(xc-xa-k1*a1)+2*b3*(yc-ya-k1*b1)+2*c3*(zc-za-
k1*c1)]^2 - 4*[(xc-xa-k1*a1)^2+(yc-ya-k1*b1)^2+(zc-za-k1*c1)^2-
Ldf^2]));

%% Calcul de norm(E1F1)-Lef
valeur_elf1 = sqrt((xb + k21*a2 - xc - k31*a3)^2+(yb + k21*b2 -
yc - k31*b3)^2+(zb + k21*c2 - zc - k31*c3)^2)-Lef;

```

```

function valeur_d_elf1= deriv_elf1(k1)

global xa,global ya,global za,global xb,global
yb,global zb,global xc,global yc,global zc
global Led,global Ldf,global a1,global b1,global c1,global
a2,global b2,global c2,global a3,global b3,global c3

%% fonction calculant la norme de la dérivée de (E1F1-Lef) par
%% rapport à k1
%% norme(E1F1-Lef) = racine[(xe1-xf1)^2+(ye1-yf1)^2+(ze1-zf1)^2]
%% En posant (xe1-xf1)^2+(ye1-yf1)^2+(ze1-zf1)^2 = v (qui est
%% fonction de k1), on a norme(E1F1-Lef) = racine(v)
%% La dérivée est donc égale à 0.5*dv/racine(v)

%% Calcul de k2 en fonction de k1 en utilisant DE = Lde
%% On obtient deux valeurs car c'est une equation de degré 2:
%% k21 et k22
%% Ici on choisit k21 (indice 1 car on s'occupe de la distance
%% "E1"f1)
k21 = 0.5*(-(2*a2*(xb-xa-k1*a1)+2*b2*(yb-ya-k1*b1)+2*c2*(zb-za-
k1*c1))-sqrt([(2*a2*(xb-xa-k1*a1)+2*b2*(yb-ya-k1*b1)+2*c2*(zb-za-
k1*c1)]^2 - 4*[(xb-xa-k1*a1)^2+(yb-ya-k1*b1)^2+(zb-za-k1*c1)^2-
Led^2]));
%% Dérivé de k21 par rapport à k1
dk21 = 0.5*(2*a1*a2+2*b1*b2+2*c1*c2-0.5*(2*(2*a2*(xb-xa-
k1*a1)+2*b2*(yb-ya-k1*b1)+2*c2*(zb-za-k1*c1))*(-2*a1*a2-2*b1*b2-
2*c1*c2)-4*(-2*a1*(xb-xa-k1*a1)-2*b1*(yb-ya-k1*b1)-2*c1*(zb-za-
k1*c1)))/sqrt([(2*a2*(xb-xa-k1*a1)+2*b2*(yb-ya-k1*b1)+2*c2*(zb-
za-k1*c1)]^2-4*[(xb-xa-k1*a1)^2+(yb-ya-k1*b1)^2+(zb-za-k1*c1)^2-
Led^2]));
%% Calcul de k3 en fonction de k1 en utilisant DF = Ldf
%% On obtient deux valeurs car c'est une equation de degré 2:
%% k31 et k32
%% Ici on choisit k31 (indice 1 car on s'occupe de la distance
%% e1"F1")
k31 = 0.5*(-(2*a3*(xc-xa-k1*a1)+2*b3*(yc-ya-k1*b1)+2*c3*(zc-za-
k1*c1))-sqrt([(2*a3*(xc-xa-k1*a1)+2*b3*(yc-ya-k1*b1)+2*c3*(zc-za-
k1*c1)]^2 - 4*[(xc-xa-k1*a1)^2+(yc-ya-k1*b1)^2+(zc-za-k1*c1)^2-
Ldf^2]));
%% Dérivé de k31 par rapport à k1
dk31 = 0.5*(2*a1*a3+2*b1*b3+2*c1*c3-0.5*(2*(2*a3*(xc-xa-
k1*a1)+2*b3*(yc-ya-k1*b1)+2*c3*(zc-za-k1*c1))*(-2*a1*a3-2*b1*b3-
2*c1*c3)-4*(-2*a1*(xc-xa-k1*a1)-2*b1*(yc-ya-k1*b1)-2*c1*(zc-za-
k1*c1)))/sqrt([(2*a3*(xc-xa-k1*a1)+2*b3*(yc-ya-k1*b1)+2*c3*(zc-
za-k1*c1)]^2-4*[(xc-xa-k1*a1)^2+(yc-ya-k1*b1)^2+(zc-za-k1*c1)^2-
Ldf^2]));

```

```

v = (xb + k21*a2 - xc - k31*a3)^2+(yb + k21*b2 - yc -
k31*b3)^2+(zb + k21*c2 - zc - k31*c3)^2;
dv = 2*(xb+k21*a2-xc-k31*a3)*(a2*dk21-a3*dk31) + 2*(yb+k21*b2-
yc-k31*b3)*(b2*dk21-b3*dk31) + 2*(zb+k21*c2-zc-k31*c3)*(c2*dk21-
c3*dk31);

valeur_d_elf1 = 0.5*dv/sqrt(v);

```

dist_elf2.m

```

function valeur_elf2= dist_elf2(k1)

global xa,global ya,global za,global xb,global
yb,global zb,global xc,global yc,global zc
global Led,global Ldf,global Lef,global a1,global b1,global
c1,global a2,global b2,global c2,global a3,global b3,global c3

%% fonction calculant la norme de (E1F2-Lef) en fonction de k1

%% Calcul de k2 en fonction de k1 en utilisant DE = Lde
%% On obtient deux valeurs car c'est une equation de degré 2:
%% k21 et k22
%% Ici on choisit k21 (indice 1 car on s'occupe de la distance
%% "E1"f2)
k21 = 0.5*(-(2*a2*(xb-xa-k1*a1)+2*b2*(yb-ya-k1*b1)+2*c2*(zb-za-
k1*c1))-sqrt([2*a2*(xb-xa-k1*a1)+2*b2*(yb-ya-k1*b1)+2*c2*(zb-za-
k1*c1)]^2 - 4*[(xb-xa-k1*a1)^2+(yb-ya-k1*b1)^2+(zb-za-k1*c1)^2-
Led^2]));
%% Calcul de k3 en fonction de k1 en utilisant DF = Ldf
%% On obtient deux valeurs car c'est une equation de degré 2:
%% k31 et k32
%% Ici on choisit k32 (indice 2 car on s'occupe de la distance
%% e1"F2")
k32 = 0.5*(-(2*a3*(xc-xa-k1*a1)+2*b3*(yc-ya-k1*b1)+2*c3*(zc-za-
k1*c1))+sqrt([2*a3*(xc-xa-k1*a1)+2*b3*(yc-ya-k1*b1)+2*c3*(zc-za-
k1*c1)]^2 - 4*[(xc-xa-k1*a1)^2+(yc-ya-k1*b1)^2+(zc-za-k1*c1)^2-
Ldf^2]));

%% Calcul de norm(E1F2)-Lef
valeur_elf2 = sqrt((xb + k21*a2 - xc - k32*a3)^2+(yb + k21*b2 -
yc - k32*b3)^2+(zb + k21*c2 - zc - k32*c3)^2)-Lef;

```

deriv_elf2.m

```

function valeur_d_elf2= deriv_elf2(k1)

global xa,global ya,global za,global xb,global
yb,global zb,global xc,global yc,global zc

```

```

global Led,global Ldf,global a1,global b1,global c1,global
a2,global b2,global c2,global a3,global b3,global c3

%% fonction calculant la norme de la dérivée de (E1F2-Lef) par
%% rapport à k1
%% norme(E1F2-Lef) = racine[(xe1-xf2)^2+(ye1-yf2)^2+(ze1-zf2)^2]
%% En posant (xe1-xf2)^2+(ye1-yf2)^2+(ze1-zf2)^2 = v (qui est
%% fonction de k1)
%% On a norme(E1F2-Lef) = racine(v)
%% La dérivée est donc égale à 0.5*dv/racine(v)

%% Calcul de k2 en fonction de k1 en utilisant DE = Lde
%% On obtient deux valeurs car c'est une equation de degré 2:
%% k21 et k22
%% Ici on choisit k21 (indice 1 car on s'occupe de la distance
%% "E1" f2)
k21 = 0.5*(-(2*a2*(xb-xa-k1*a1)+2*b2*(yb-ya-k1*b1)+2*c2*(zb-za-
k1*c1))-sqrt([(2*a2*(xb-xa-k1*a1)+2*b2*(yb-ya-k1*b1)+2*c2*(zb-za-
k1*c1)]^2 - 4*[(xb-xa-k1*a1)^2+(yb-ya-k1*b1)^2+(zb-za-k1*c1)^2-
Led^2]));
%% Dérivé de k21 par rapport à k1
dk21 = 0.5*(2*a1*a2+2*b1*b2+2*c1*c2-0.5*(2*(2*a2*(xb-xa-
k1*a1)+2*b2*(yb-ya-k1*b1)+2*c2*(zb-za-k1*c1))*(-2*a1*a2-2*b1*b2-
2*c1*c2)-4*(-2*a1*(xb-xa-k1*a1)-2*b1*(yb-ya-k1*b1)-2*c1*(zb-za-
k1*c1)))/sqrt([(2*a2*(xb-xa-k1*a1)+2*b2*(yb-ya-k1*b1)+2*c2*(zb-
za-k1*c1)]^2-4*[(xb-xa-k1*a1)^2+(yb-ya-k1*b1)^2+(zb-za-k1*c1)^2-
Led^2]));
%% Calcul de k3 en fonction de k1 en utilisant DF = Ldf
%% On obtient deux valeurs car c'est une equation de degré 2:
%% k31 et k32
%% Ici on choisit k32 (indice 2 car on s'occupe de la distance
%% e1" F2")
k32 = 0.5*(-(2*a3*(xc-xa-k1*a1)+2*b3*(yc-ya-k1*b1)+2*c3*(zc-za-
k1*c1))+sqrt([(2*a3*(xc-xa-k1*a1)+2*b3*(yc-ya-k1*b1)+2*c3*(zc-za-
k1*c1)]^2 - 4*[(xc-xa-k1*a1)^2+(yc-ya-k1*b1)^2+(zc-za-k1*c1)^2-
Ldf^2]));
%% Dérivé de k32 par rapport à k1
dk32 = 0.5*(2*a1*a3+2*b1*b3+2*c1*c3+0.5*(2*(2*a3*(xc-xa-
k1*a1)+2*b3*(yc-ya-k1*b1)+2*c3*(zc-za-k1*c1))*(-2*a1*a3-2*b1*b3-
2*c1*c3)-4*(-2*a1*(xc-xa-k1*a1)-2*b1*(yc-ya-k1*b1)-2*c1*(zc-za-
k1*c1)))/sqrt([(2*a3*(xc-xa-k1*a1)+2*b3*(yc-ya-k1*b1)+2*c3*(zc-
za-k1*c1)]^2-4*[(xc-xa-k1*a1)^2+(yc-ya-k1*b1)^2+(zc-za-k1*c1)^2-
Ldf^2]));

v = (xb + k21*a2 - xc - k32*a3)^2+(yb + k21*b2 - yc -
k32*b3)^2+(zb + k21*c2 - zc - k32*c3)^2;
dv = 2*(xb+k21*a2-xc-k32*a3)*(a2*dk21-a3*dk32) + 2*(yb+k21*b2-
yc-k32*b3)*(b2*dk21-b3*dk32) + 2*(zb+k21*c2-zc-k32*c3)*(c2*dk21-
c3*dk32);

```



```
valeur_d_elf2 = 0.5*dv/sqrt(v);
```

dist_e2f1.m

```
function valeur_e2f1= dist_e2f1(k1)

global xa,global ya,global za,global xb,global
yb,global zb,global xc,global yc,global zc
global Led,global Ldf,global Lef,global a1,global b1,global
c1,global a2,global b2,global c2,global a3,global b3,global c3

%% fonction calculant la norme de (E2F1-Lef) en fonction de k1

%% Calcul de k2 en fonction de k1 en utilisant DE = Lde
%% On obtient deux valeurs car c'est une equation de degré 2:
%% k21 et k22
%% Ici on choisit k22 (indice 2 car on s'occupe de la distance
%% "E2"f1)
k22 = 0.5*(-(2*a2*(xb-xa-k1*a1)+2*b2*(yb-ya-k1*b1)+2*c2*(zb-za-
k1*c1))+sqrt([2*a2*(xb-xa-k1*a1)+2*b2*(yb-ya-k1*b1)+2*c2*(zb-za-
k1*c1)]^2 - 4*[(xb-xa-k1*a1)^2+(yb-ya-k1*b1)^2+(zb-za-k1*c1)^2-
Led^2]));
%% Calcul de k3 en fonction de k1 en utilisant DF = Ldf
%% On obtient deux valeurs car c'est une equation de degré 2:
%% k31 et k32
%% Ici on choisit k31 (indice 1 car on s'occupe de la distance
%% e2"F1")
k31 = 0.5*(-(2*a3*(xc-xa-k1*a1)+2*b3*(yc-ya-k1*b1)+2*c3*(zc-za-
k1*c1))-sqrt([2*a3*(xc-xa-k1*a1)+2*b3*(yc-ya-k1*b1)+2*c3*(zc-za-
k1*c1)]^2 - 4*[(xc-xa-k1*a1)^2+(yc-ya-k1*b1)^2+(zc-za-k1*c1)^2-
Ldf^2]));

%% Calcul de norm(E2F1)-Lef
valeur_e2f1 = sqrt((xb + k22*a2 - xc - k31*a3)^2+(yb + k22*b2 -
yc - k31*b3)^2+(zb + k22*c2 - zc - k31*c3)^2)-Lef;
```

deriv_e2f1.m

```
function valeur_d_e2f1= deriv_e2f1(k1)

global xa,global ya,global za,global xb,global
yb,global zb,global xc,global yc,global zc
global Led,global Ldf,global a1,global b1,global c1,global
a2,global b2,global c2,global a3,global b3,global c3
```

```

%% fonction calculant la norme de la dérivée de (E2F1-Lef) par
%% rapport à k1
%% norme(E2F1-Lef) = racine[(xe2-xf1)^2+(ye2-yf1)^2+(ze2-zf1)^2]
%% En posant (xe2-xf1)^2+(ye2-yf1)^2+(ze2-zf1)^2 = v (qui est
%% fonction de k1)
%% On a norme(E2F1-Lef) = racine(v)
%% La dérivée est donc égale à 0.5*dv/racine(v)

%% Calcul de k2 en fonction de k1 en utilisant DE = Lde
%% On obtient deux valeurs car c'est une equation de degré 2:
%% k21 et k22
%% Ici on choisit k22 (indice 2 car on s'occupe de la distance
%% "E2"f1)
k22 = 0.5*(-(2*a2*(xb-xa-k1*a1)+2*b2*(yb-ya-k1*b1)+2*c2*(zb-za-
k1*c1))+sqrt([2*a2*(xb-xa-k1*a1)+2*b2*(yb-ya-k1*b1)+2*c2*(zb-za-
k1*c1)]^2 - 4*[(xb-xa-k1*a1)^2+(yb-ya-k1*b1)^2+(zb-za-k1*c1)^2-
Led^2]));
%% Dérivé de k22 par rapport à k1
dk22 = 0.5*(2*a1*a2+2*b1*b2+2*c1*c2+0.5*(2*(2*a2*(xb-xa-
k1*a1)+2*b2*(yb-ya-k1*b1)+2*c2*(zb-za-k1*c1))*(-2*a1*a2-2*b1*b2-
2*c1*c2)-4*(-2*a1*(xb-xa-k1*a1)-2*b1*(yb-ya-k1*b1)-2*c1*(zb-za-
k1*c1)))/sqrt([2*a2*(xb-xa-k1*a1)+2*b2*(yb-ya-k1*b1)+2*c2*(zb-
za-k1*c1)]^2-4*[(xb-xa-k1*a1)^2+(yb-ya-k1*b1)^2+(zb-za-k1*c1)^2-
Led^2]));
%% Calcul de k3 en fonction de k1 en utilisant DF = Ldf
%% On obtient deux valeurs car c'est une equation de degré 2:
%% k31 et k32
%% Ici on choisit k31 (indice 1 car on s'occupe de la distance
%% e2"F1")
k31 = 0.5*(-(2*a3*(xc-xa-k1*a1)+2*b3*(yc-ya-k1*b1)+2*c3*(zc-za-
k1*c1))-sqrt([2*a3*(xc-xa-k1*a1)+2*b3*(yc-ya-k1*b1)+2*c3*(zc-za-
k1*c1)]^2 - 4*[(xc-xa-k1*a1)^2+(yc-ya-k1*b1)^2+(zc-za-k1*c1)^2-
Ldf^2]));
%% Dérivé de k31 par rapport à k1
dk31 = 0.5*(2*a1*a3+2*b1*b3+2*c1*c3-0.5*(2*(2*a3*(xc-xa-
k1*a1)+2*b3*(yc-ya-k1*b1)+2*c3*(zc-za-k1*c1))*(-2*a1*a3-2*b1*b3-
2*c1*c3)-4*(-2*a1*(xc-xa-k1*a1)-2*b1*(yc-ya-k1*b1)-2*c1*(zc-za-
k1*c1)))/sqrt([2*a3*(xc-xa-k1*a1)+2*b3*(yc-ya-k1*b1)+2*c3*(zc-
za-k1*c1)]^2-4*[(xc-xa-k1*a1)^2+(yc-ya-k1*b1)^2+(zc-za-k1*c1)^2-
Ldf^2]));

v = (xb + k22*a2 - xc - k31*a3)^2+(yb + k22*b2 - yc -
k31*b3)^2+(zb + k22*c2 - zc - k31*c3)^2;
dv = 2*(xb+k22*a2-xc-k31*a3)*(a2*dk22-a3*dk31) + 2*(yb+k22*b2-
yc-k31*b3)*(b2*dk22-b3*dk31) + 2*(zb+k22*c2-zc-k31*c3)*(c2*dk22-
c3*dk31);

valeur_d_e2f1 = 0.5*dv/sqrt(v);

```

dist_e2f2.m

```
function valeur_e2f2= dist_e2f2(k1)

global xa,global ya,global za,global xb,global
yb,global zb,global xc,global yc,global zc
global Led,global Ldf,global Lef,global a1,global b1,global
c1,global a2,global b2,global c2,global a3,global b3,global c3

%% fonction calculant la norme de (E2F2-Lef) en fonction de k1

%% Calcul de k2 en fonction de k1 en utilisant DE = Lde
%% On obtient deux valeurs car c'est une equation de degré 2: k21

%% et k22
%% Ici on choisit k22 (indice 2 car on s'occupe de la distance
%% "E2" f2)
k22 = 0.5*(-(2*a2*(xb-xa-k1*a1)+2*b2*(yb-ya-k1*b1)+2*c2*(zb-za-
k1*c1))+sqrt([2*a2*(xb-xa-k1*a1)+2*b2*(yb-ya-k1*b1)+2*c2*(zb-za-
k1*c1)]^2 - 4*[(xb-xa-k1*a1)^2+(yb-ya-k1*b1)^2+(zb-za-k1*c1)^2-
Led^2]));
%% Calcul de k3 en fonction de k1 en utilisant DF = Ldf
%% On obtient deux valeurs car c'est une equation de degré 2:
%% k31 et k32
%% Ici on choisit k32 (indice 2 car on s'occupe de la distance
%% e1" F2")
k32 = 0.5*(-(2*a3*(xc-xa-k1*a1)+2*b3*(yc-ya-k1*b1)+2*c3*(zc-za-
k1*c1))+sqrt([2*a3*(xc-xa-k1*a1)+2*b3*(yc-ya-k1*b1)+2*c3*(zc-za-
k1*c1)]^2 - 4*[(xc-xa-k1*a1)^2+(yc-ya-k1*b1)^2+(zc-za-k1*c1)^2-
Ldf^2]));

%% Calcul de norm(E2F2)-Lef
valeur_e2f2 = sqrt((xb + k22*a2 - xc - k32*a3)^2+(yb + k22*b2 -
yc - k32*b3)^2+(zb + k22*c2 - zc - k32*c3)^2)-Lef;
```

deriv_e2f2.m

```
function valeur_d_e2f2= deriv_e2f2(k1)

global xa,global ya,global za,global xb,global
yb,global zb,global xc,global yc,global zc
global Led,global Ldf,global a1,global b1,global c1,global
a2,global b2,global c2,global a3,global b3,global c3

%% fonction calculant la norme de la dérivée de (e2f2-Lef) par
```

```

%% rapport à k1
%% norme(e2f2-Lef) = racine[(xe2-xf2)^2+(ye2-yf2)^2+(ze2-zf2)^2]
%% En posant (xe2-xf2)^2+(ye2-yf2)^2+(ze2-zf2)^2 = v (qui est
%% fonction de k1)
%% On a norme(e2f2-Lef) = racine(v)
%% La dérivée est donc égale à 0.5*dv/racine(v)

%% Calcul de k2 en fonction de k1 en utilisant DE = Lde
%% On obtient deux valeurs car c'est une equation de degré 2:
%% k21 et k22
%% Ici on choisit k22 (indice 2 car on s'occupe de la distance
%% "E2"f2)
k22 = 0.5*(-(2*a2*(xb-xa-k1*a1)+2*b2*(yb-ya-k1*b1)+2*c2*(zb-za-
k1*c1))+sqrt([2*a2*(xb-xa-k1*a1)+2*b2*(yb-ya-k1*b1)+2*c2*(zb-za-
k1*c1)]^2 - 4*[(xb-xa-k1*a1)^2+(yb-ya-k1*b1)^2+(zb-za-k1*c1)^2-
Led^2]));
%% Dérivé de k22 par rapport à k1
dk22 = 0.5*(2*a1*a2+2*b1*b2+2*c1*c2+0.5*(2*(2*a2*(xb-xa-
k1*a1)+2*b2*(yb-ya-k1*b1)+2*c2*(zb-za-k1*c1))*(-2*a1*a2-2*b1*b2-
2*c1*c2)-4*(-2*a1*(xb-xa-k1*a1)-2*b1*(yb-ya-k1*b1)-2*c1*(zb-za-
k1*c1)))/sqrt([2*a2*(xb-xa-k1*a1)+2*b2*(yb-ya-k1*b1)+2*c2*(zb-
za-k1*c1)]^2-4*[(xb-xa-k1*a1)^2+(yb-ya-k1*b1)^2+(zb-za-k1*c1)^2-
Led^2]));
%% Calcul de k3 en fonction de k1 en utilisant DF = Ldf
%% On obtient deux valeurs car c'est une equation de degré 2:
%% k31 et k32
%% Ici on choisit k32 (indice 2 car on s'occupe de la distance
%% e2"F2")
k32 = 0.5*(-(2*a3*(xc-xa-k1*a1)+2*b3*(yc-ya-k1*b1)+2*c3*(zc-za-
k1*c1))+sqrt([2*a3*(xc-xa-k1*a1)+2*b3*(yc-ya-k1*b1)+2*c3*(zc-za-
k1*c1)]^2 - 4*[(xc-xa-k1*a1)^2+(yc-ya-k1*b1)^2+(zc-za-k1*c1)^2-
Ldf^2]));
%% Dérivé de k32 par rapport à k1
dk32 = 0.5*(2*a1*a3+2*b1*b3+2*c1*c3+0.5*(2*(2*a3*(xc-xa-
k1*a1)+2*b3*(yc-ya-k1*b1)+2*c3*(zc-za-k1*c1))*(-2*a1*a3-2*b1*b3-
2*c1*c3)-4*(-2*a1*(xc-xa-k1*a1)-2*b1*(yc-ya-k1*b1)-2*c1*(zc-za-
k1*c1)))/sqrt([2*a3*(xc-xa-k1*a1)+2*b3*(yc-ya-k1*b1)+2*c3*(zc-
za-k1*c1)]^2-4*[(xc-xa-k1*a1)^2+(yc-ya-k1*b1)^2+(zc-za-k1*c1)^2-
Ldf^2]));

v = (xb + k22*a2 - xc - k32*a3)^2+(yb + k22*b2 - yc -
k32*b3)^2+(zb + k22*c2 - zc - k32*c3)^2;
dv = 2*(xb+k22*a2-xc-k32*a3)*(a2*dk22-a3*dk32) + 2*(yb+k22*b2-
yc-k32*b3)*(b2*dk22-b3*dk32) + 2*(zb+k22*c2-zc-k32*c3)*(c2*dk22-
c3*dk32);

valeur_d_e2f2 = 0.5*dv/sqrt(v);

```

3- Algorithme lié au cadre de mesure à 9 capteurs

A. Organigramme

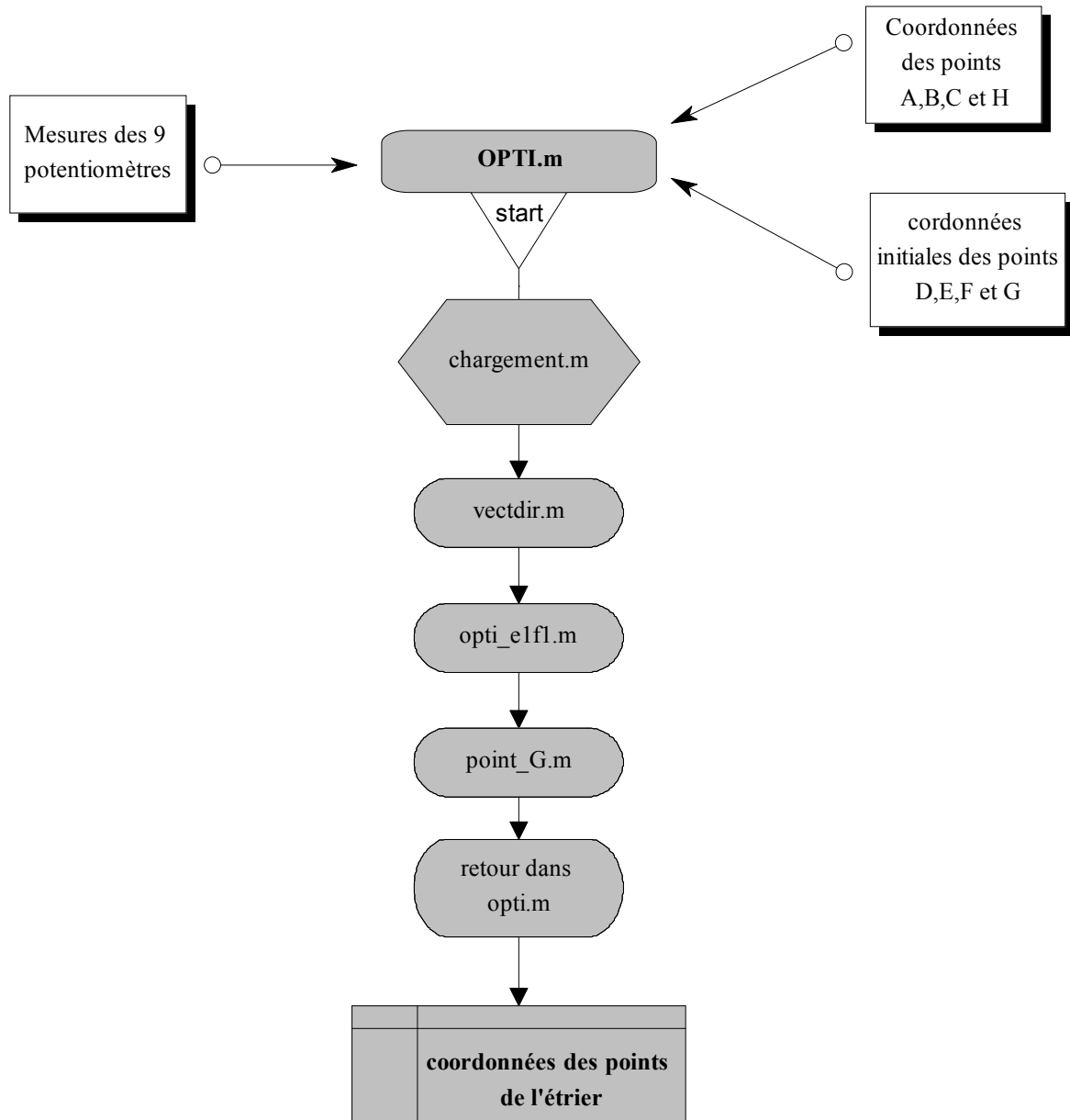


Figure 28 : organigramme

B. Résumé

Nom du fichier de démarrage : *opti*.

- **opti.m** : corps du programme faisant appel aux fonctions qui suivent et effectuant la discrimination de chacune des solutions potentielles. Il donne les coordonnées des points des rotules au cours du temps
- **chargement.m** : script définissant les constantes
- **vectdir.m** : fonction calculant les coordonnées d'un vecteur directeur d'une tige à partir des mesures des deux potentiomètres qui y sont associés.
- **point_G.m** : script calculant la position du point G de l'étrier à l'aide des points D, E et F en respectant leurs positions relatives.
- **opti_e1f1.m** : script qui permet de connaître l'ensemble des coordonnées des points G possibles respectant les consignes de longueur entre rotules du cadre.

C. Code

opti.m

```
clear;
clear global;
clc;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Chargement des points de mesure potentiométriques

% Le fichier potah.txt concerne le capteur au point A en haut
% Le fichier potab.txt concerne le capteur au point A en bas
% Le fichier potbh.txt concerne le capteur au point B en haut
% Le fichier potbb.txt concerne le capteur au point B en bas
% Le fichier potch.txt concerne le capteur au point C en haut
% Le fichier potcb.txt concerne le capteur au point C en bas
% Le fichier pothh.txt concerne le capteur au point H en haut
% Le fichier pothb.txt concerne le capteur au point H en bas

load potah.txt;
load potab.txt;
load potbh.txt;
load potbb.txt;
load potch.txt;
load potcb.txt;
load pothh.txt;
load pothb.txt;

% Réglage des options des fonctions "feval" et "fzero" de matlab
options=optimset('display','off');

for i=2: length(potah(:,1))

    %compteurs incrémental
    avancement = i

    % Lancement du script "chargement"
    chargement;

    A=[xa;ya;za];
    B=[xb;yb;zb];
    C=[xc;yc;zc];
    H=[xh;yh;zh];
    AD = [D(1,1)-A(1,1) ; D(2,1)-A(2,1) ; D(3,1)-A(3,1)];
    BE = [E(1,1)-B(1,1) ; E(2,1)-B(2,1) ; E(3,1)-B(3,1)];
    CF = [F(1,1)-C(1,1) ; F(2,1)-C(2,1) ; F(3,1)-C(3,1)];
    HG = [G(1,1)-H(1,1) ; G(2,1)-H(2,1) ; G(3,1)-H(3,1)];
    vars(1,:) = [ D' E' F' G'];
```

```

% Lancement du script "opti_elf1"
opti_elf1;

% NORM regroupe les valeurs des normes entre les points G
% pour chacune des distances elf1, elf2, e2f1 et e2f2.
% Pour l'explication de ces normes voir le chapitre
% expliquant la démarche de résolution de la position de
% l'étrier.
NORM = [norme_11 norme_11 norme_11 norme_11]

toto=1 ;

while toto==1

    [do,du] = find(NORM==min(NORM));
    DU(i,1) = du;

    if du==1
        Df = [xd_t yd_t zd_t];
        Ef = [xe1 ye1 ze1];
        Ff = [xf1 yf1 zf1];
        Gf = [xg11 yg11 zg11];

    elseif du==2
        Df = [xd_t yd_t zd_t];
        Ef = [xe1 ye1 ze1];
        Ff = [xf2 yf2 zf2];
        Gf = [xg12 yg12 zg12];

    elseif du==3
        Df = [xd_t yd_t zd_t];
        Ef = [xe2 ye2 ze2];
        Ff = [xf1 yf1 zf1];
        Gf = [xg21 yg21 zg21];

    elseif du==4
        Df = [xd_t yd_t zd_t];
        Ef = [xe2 ye2 ze2];
        Ff = [xf2 yf2 zf2];
        Gf = [xg22 yg22 zg22];

    else
        'erreur dans opti.m au niveau des conditions'
    end
end

```



```

% Début des tests:
%
% VERIF crée un tableau calculant chacune des différences
% entre les distances inter-rotules et leur consigne.
%
% "epsilon" est une consigne à régler MANUELLEMENT pour
% chacun des dépouillement d'essai
%
      VERIF = [Led-norm([Ef-Df])  Ldf-norm([Df-Ff])  Lgd-
norm([Gf-Df])  Lgf-norm([Gf-Ff])  Lge-norm([Ef-Gf])  Lef-
norm([Ef-Ff])]

if max(abs(VERIF)) < 5
    % Si le maximum de la matrtice VERIF est inférieur à 15
    % (valeur arbitraire).
    % Si chacun des paramètres ne subit pas de variation
    % trop importante (le contraire signifierai
    % que l'on est sur une solution non réaliste) entre
    % l'instant t et l'instant t+dt
    % Alors , on considère que les coordonnées des points
    % D, E, f et G sont les bonnes et on les consigne dans
    % un tableau appelé VARS.
    vars(i,:) = [Df(1,1) Df(1,2) Df(1,3) Ef(1,1) Ef(1,2)
Ef(1,3) Ff(1,1) Ff(1,2) Ff(1,3) Gf(1,1) Gf(1,2) Gf(1,3)];
    toto=2;
else
    NORM (do,du) = 1000;
    % Si les tests ne sont pas vérifiés on donne à la norme
    % en cours la valeur 1000.
    % C'est une facon de ne plus en tenir compte pour les
    % prochaines itérations vu sa grande valeur
    toto=1;
end
end
end

```

```

global Lef,global Led,global Ldf,global Lgd,global Lge,global
Lgf,global k1,global k2,global k3,global k4
global xa,global ya,global za,global xb,global yb,global
zb,global xc,global yc,global zc,global xh,global yh,global zh
global a1,global b1,global c1,global a2,global b2,global
c2,global a3,global b3,global c3,global a4,global b4,global c4
global D, global E, global F, global G

```

```

%%%%%%%%%%
%%  DONNEES  %%
%%%%%%%%%%

```

```

%Point A (socle)

```

```

xa=0.125;
ya=-78.35;
za=39.9;

```

```

%Point B (socle)

```

```

xb=-0.075;
yb=77.6;
zb=39.5;

```

```

%Point C (socle)

```

```

xc=-148.4;
yc=-130.6;
zc=40;

```

```

%Point H (socle)

```

```

xh=-145.45;
yh=133.25;
zh=39.9;

```

```

%Point D (étrier)

```

```

D = [ -37.9 ; -10.3 ; 158.8];

```

```

%Point E (étrier)

```

```

E = [ -76 ; 65.6 ; 158.9];

```

```

%Point F (étrier)

```

```

F = [ -95.8 ; -73 ; 159.3];

```

```

%Point G (étrier)

```

```

G = [ -162.1 ; 56.3 ; 158.5];

```

```

%% Distances entre les points D,E,F et G de l'étrier

```

```

Lef=(((E(1,1)-F(1,1))^2+(E(2,1)-F(2,1))^2+(E(3,1)-
F(3,1))^2)^0.5);

```

```

Led=(((E(1,1)-D(1,1))^2+(E(2,1)-D(2,1))^2+(E(3,1)-
D(3,1))^2)^0.5);

```

```

Ldf=(((D(1,1)-F(1,1))^2+(D(2,1)-F(2,1))^2+(D(3,1)-
F(3,1))^2)^0.5);

```

```

Lgd=(((D(1,1)-G(1,1))^2+(D(2,1)-G(2,1))^2+(D(3,1)-
G(3,1))^2)^0.5);
Lge=(((E(1,1)-G(1,1))^2+(E(2,1)-G(2,1))^2+(E(3,1)-
G(3,1))^2)^0.5);
Lgf=(((F(1,1)-G(1,1))^2+(F(2,1)-G(2,1))^2+(F(3,1)-
G(3,1))^2)^0.5);

%% Angles initiaux des tiges
AnglePotah      =      180/pi*atan(((D(1,1)-xa)^2+(D(2,1)-
ya)^2)^0.5)/(D(3,1)-za));
AnglePotab = 90-180/pi*atan((D(1,1)-xa)/(D(2,1)-ya));

AnglePotbh      =      180/pi*atan(((E(1,1)-xb)^2+(E(2,1)-
yb)^2)^0.5)/(E(3,1)-zb));
AnglePotbb = 180+180/pi*atan((E(2,1)-yb)/(E(1,1)-xb));

AnglePotch      =      180/pi*atan(((F(1,1)-xc)^2+(F(2,1)-
yc)^2)^0.5)/(F(3,1)-zc));
AnglePotcb = 180/pi*atan((F(2,1)-yc)/(F(1,1)-xc));

AnglePothh      =      180/pi*atan(((G(1,1)-xh)^2+(G(2,1)-
yh)^2)^0.5)/(G(3,1)-zh));
AnglePothb = 270-180/pi*atan((G(1,1)-xh)/(G(2,1)-yh));

%% Données capteurs en degrés

Potah = potah(i,2);
Potab = potab(i,2);
Potbh = potbh(i,2);
Potbb = potbb(i,2);
Potch = potch(i,2);
Potcb = potcb(i,2);
Pothh = pothh(i,2);
Pothb = pothb(i,2);

%% Calcul du vecteur directeur de la tige AD
[a1,b1,c1] = vectdir (AnglePotab,AnglePotah,Potah,Potab);

%% Calcul du vecteur directeur de la tige BE
[a2,b2,c2] = vectdir (AnglePotbb,AnglePotbh,Potbh,Potbb);

%% Calcul du vecteur directeur de la tige CF
[a3,b3,c3] = vectdir (AnglePotcb,AnglePotch,Potch,Potcb);

%% Calcul du vecteur directeur de la tige HG
[a4,b4,c4] = vectdir (AnglePothb,AnglePothh,Pothh,Pothb);

```

vectdir.m

```
function [a,b,c] = vectdir (potbas0,pothaut0,poth,potb)

%% Calcul du vecteur directeur de la tige en fonction de l'angle
%% initiale de cette dernière et des données des potentiomètres

angleb = (potbas0 + potb)*pi/180;
angleh = (pothaut0 + poth)*pi/180;

a = sin(angleh)*cos(angleb);
b = sin(angleh)*sin(angleb);
c = cos(angleh);
```

point_G.m

```
function [xg,yg,zg] = point_G (xd,yd,zd,xe,ye,ze,xf,yf,zf)

global D, global E, global F, global G
global xh,global yh,global zh,global a4,global b4,global c4

%% fonction permettant d'avoir les coordonnées du point G en
%% ayant celle de D, E et F

%% Coordonnées initiales des points D, E F et G
DE = E-D;
DF = F-D;
DG = G-D;

uo = DE/norm(DE);
wo = cross(DE,DF)/norm(cross(DE,DF));
vo = cross(wo,uo);
Po = [uo vo wo];

%% On pose DG = uo*alpha + vo*beta + wo*gamma = Po*coef
%% Avec coef=[alpha beta gamma] coefficients barycentriques
%% Po=[uo vo wo] matrice du repère formé par les points D,E et F

coef = inv(Po) * DG;

%% A un instant t

Df = [xd yd zd];
Ef = [xe ye ze];
Ff = [xf yf zf];
DEf = Ef - Df;
DFf = Ff - Df;
```

```

%% On pose DGf = uf*alpha + vf*beta + wf*gamma = Pf*coef
uf = DDef/norm(DDef);
wf = cross(DDef,DFf)/norm(cross(DDef,DFf));
vf = cross(wf,uf);
Pf = [uf' vf' wf'];
DGf = Pf*coef;
DGf = DGf';

%% Nouvelles coordonnées de G
Gf = Df + DGf;

xg = Gf(1,1);
yg = Gf(1,2);
zg = Gf(1,3);

```

opti_elfl.m

```

global Lef,global Led,global Ldf,global Lgd,global Lge,global
Lgf
global xa,global ya,global za,global xb,global yb,global
zb,global xc,global yc,global zc,global xh,global yh,global zh
global a1,global b1,global c1,global a2,global b2,global
c2,global a3,global b3,global c3,global a4,global b4,global c4

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%% CALCUL DES POINTS D,E,F et G
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

% Point D

```

```

xd_t = xa + k1*a1;
yd_t = ya + k1*b1;
zd_t = za + k1*c1;

```

```

% Point E

```

```

% En raison des incertitudes de mesure, il peut arriver que la
% distance minimum entre la tige BE et le point D soit
% légèrement plus grande que la consigne Led. Dans ce cas nous
% effectuons une correction de la distance de consigne.

```

```

[d] = dpointmin(xb,yb,zb,a2,b2,c2,xd_t,yd_t,zd_t);

```

```

if d>Led

```

```

    Led=d+0.001;

```

```

end

```

```

k21 = 0.5*(-(2*a2*(xb-xa-k1*a1)+2*b2*(yb-ya-k1*b1)+2*c2*(zb-za-
k1*c1))-sqrt([2*a2*(xb-xa-k1*a1)+2*b2*(yb-ya-k1*b1)+2*c2*(zb-za-
k1*c1)]^2 - 4*[(xb-xa-k1*a1)^2+(yb-ya-k1*b1)^2+(zb-za-k1*c1)^2-
Led^2]));

```

```

xe1 = xb + k21*a2;

```

```

ye1 = yb + k21*b2;
ze1 = zb + k21*c2;
k22 = 0.5*(-(2*a2*(xb-xa-k1*a1)+2*b2*(yb-ya-k1*b1)+2*c2*(zb-za-
k1*c1))+sqrt([2*a2*(xb-xa-k1*a1)+2*b2*(yb-ya-k1*b1)+2*c2*(zb-za-
k1*c1)]^2 - 4*[(xb-xa-k1*a1)^2+(yb-ya-k1*b1)^2+(zb-za-k1*c1)^2-
Led^2]));
xe2 = xb + k22*a2;
ye2 = yb + k22*b2;
ze2 = zb + k22*c2;

```

```
% Point F
```

```
% En raison des incertitudes de mesure, il peut arriver que la
% distance minimum entre la tige CF et le point D soit
% légèrement plus grande que la consigne Led. Dans ce cas nous
% effectuons une correction de la distance de consigne.
```

```
[d] = dpointmin(xc,yc,zc,a3,b3,c3,xd_t,yd_t,zd_t);
if d>Ldf
    Ldf=d+0.001;
end
```

```
k31 = 0.5*(-(2*a3*(xc-xa-k1*a1)+2*b3*(yc-ya-k1*b1)+2*c3*(zc-za-
k1*c1))-sqrt([2*a3*(xc-xa-k1*a1)+2*b3*(yc-ya-k1*b1)+2*c3*(zc-za-
k1*c1)]^2 - 4*[(xc-xa-k1*a1)^2+(yc-ya-k1*b1)^2+(zc-za-k1*c1)^2-
Ldf^2]));
xf1 = xc + k31*a3;
yf1 = yc + k31*b3;
zf1 = zc + k31*c3;
k32 = 0.5*(-(2*a3*(xc-xa-k1*a1)+2*b3*(yc-ya-k1*b1)+2*c3*(zc-za-
k1*c1))+sqrt([2*a3*(xc-xa-k1*a1)+2*b3*(yc-ya-k1*b1)+2*c3*(zc-za-
k1*c1)]^2 - 4*[(xc-xa-k1*a1)^2+(yc-ya-k1*b1)^2+(zc-za-k1*c1)^2-
Ldf^2]));
xf2 = xc + k32*a3;
yf2 = yc + k32*b3;
zf2 = zc + k32*c3;

```

```
% Calcul du point G
```

```
[xg11,yg11,zg11] = point_G
(xd_t,yd_t,zd_t,xe1,ye1,ze1,xf1,yf1,zf1);
[xg12,yg12,zg12] = point_G
(xd_t,yd_t,zd_t,xe1,ye1,ze1,xf2,yf2,zf2);
[xg21,yg21,zg21] = point_G
(xd_t,yd_t,zd_t,xe2,ye2,ze2,xf1,yf1,zf1);
[xg22,yg22,zg22] = point_G
(xd_t,yd_t,zd_t,xe2,ye2,ze2,xf2,yf2,zf2);

```

```
%% Calcul des points G1 et G2 obtenus à partir de DG = Lgd =
%% consigne.
```

```
% En raison des incertitudes de mesure, il peut arriver que la
% distance minimum entre la tige HG et le point D soit
% légèrement plus grande que la consigne Led. Dans ce cas nous
% effectuons une correction de la distance de consigne.
```

```

[d] = dpointmin(xh,yh,zh,a4,b4,c4,xd_t,yd_t,zd_t);
if d>Lgd
    Lgd=d+0.001;
end
delta4 = [2*a4*(xh-xa-k1*a1)+2*b4*(yh-ya-k1*b1)+2*c4*(zh-za-
k1*c1)]^2 - 4*[(xh-xa-k1*a1)^2+(yh-ya-k1*b1)^2+(zh-za-k1*c1)^2-
Lgd^2];
sim4 = 2*a4*(xh-xa-k1*a1)+2*b4*(yh-ya-k1*b1)+2*c4*(zh-za-k1*c1);
k41 = (-sim4-sqrt(delta4))/2;
k42 = (-sim4+sqrt(delta4))/2;

% PointG1
xg1 = xh + k41*a4;
yg1 = yh + k41*b4;
zg1 = zh + k41*c4;
% PointG2
xg2 = xh + k42*a4;
yg2 = yh + k42*b4;
zg2 = zh + k42*c4;

%% Calcul des normes entre (g11 et gconsigne) et (g11 et
%% gconsigne)
norme_11 = norm([xg1 - xg11 ; yg1 - yg11 ; zg1 - zg11]);
norme_12 = norm([xg1 - xg12 ; yg1 - yg12 ; zg1 - zg12]);
norme_21 = norm([xg1 - xg21 ; yg1 - yg21 ; zg1 - zg21]);
norme_22 = norm([xg1 - xg22 ; yg1 - yg22 ; zg1 - zg22]);

```

4- Script de verification de l'algorithme à 8 ou 9 capteurs

Ce script permet de créer des fichiers de mesure (fichiers potentiométriques) suivant la rotation et la translation souhaitée.

Il crée aussi un fichier donnant les positions des rotules d'après ces rotations et ces translations

```
clear;
clc;

%% Données du problème
%% Exemple de variation des angles au cours du temps
VangA1 = [0 0; 10 0 ; 20 0 ; 30 0 ; 40 10 ; 50 0
; 60 0];
VangA2 = [0 0; 10 0 ; 20 0 ; 30 0 ; 40 0 ; 50 0
; 60 10];
VangA3 = [0 0; 10 0 ; 20 0 ; 30 55 ; 40 0 ; 50 0
; 60 0];
%% Centre de rotation
Cr = [-112.3 ;0.75 ;0];

%% Exemple de variation des translations au cours du temps
VtraT1 = [0 0; 10 0 ; 20 0 ; 30 0 ; 40 0 ; 50 0
; 60 0];
VtraT2 = [0 0; 10 0 ; 20 0 ; 30 0 ; 40 0 ; 50 0
; 60 0];
VtraT3 = [0 0; 10 -29.9 ; 20 0 ; 30 0 ; 40 0 ; 50 0
; 60 0];

%% Parasite sur la mesure du potentiomètre en A, partie haute
parasite_ah = 0
%% Parasite sur la mesure du potentiomètre en A, partie basse
parasite_ab = 0
%% Parasite sur la mesure du potentiomètre en B, partie haute
parasite_bh = 0
%% Parasite sur la mesure du potentiomètre en B, partie basse
parasite_bb = 0
%% Parasite sur la mesure du potentiomètre en C, partie haute
parasite_ch = 0
%% Parasite sur la mesure du potentiomètre en C, partie basse
parasite_cb = 0
%% Parasite sur la mesure du potentiomètre en H, partie haute
parasite_hh = 0
%% Parasite sur la mesure du potentiomètre en H, partie basse
parasite_hb = 0

%% Coordonnées des points du socle
A = [ 0.125 ; -78.35 ; 39.9]
B = [ -0.075 ; 77.6 ; 39.5]
C = [ -148.4 ; -130.6 ; 40]
H = [ -145.45 ; 133.25 ; 39.9]
```



```

%% Coordonnées des points de l'étrier
%Point D
D = [ -37.9 ; -10.3 ; 158.8];
%Point E
E = [ -76 ; 65.6 ; 158.9];
%Point F
F = [ -95.8 ; -73 ; 159.3];
%Point G
G = [ -162.1 ; 56.3 ; 158.5];

%% Création des vecteurs AD, BE, CF et HG
AD = [D(1,1)-A(1,1) ; D(2,1)-A(2,1) ; D(3,1)-A(3,1)];
BE = [E(1,1)-B(1,1) ; E(2,1)-B(2,1) ; E(3,1)-B(3,1)];
CF = [F(1,1)-C(1,1) ; F(2,1)-C(2,1) ; F(3,1)-C(3,1)];
HG = [G(1,1)-H(1,1) ; G(2,1)-H(2,1) ; G(3,1)-H(3,1)];

%% Calcul des angles initiaux des tiges
AnglePotah = 180/pi*atan( ((D(1,1)-A(1,1))^2+(D(2,1)-A(2,1))^2)^0.5 / (D(3,1)-A(3,1)) );
AnglePotab = 90-180/pi*atan( (D(1,1)-A(1,1)) / (D(2,1)-A(2,1)) );

AnglePotbh = 180/pi*atan( ((E(1,1)-B(1,1))^2+(E(2,1)-B(2,1))^2)^0.5 / (E(3,1)-B(3,1)) );
AnglePotbb = 180+180/pi*atan( (E(2,1)-B(2,1)) / (E(1,1)-B(1,1)) );

AnglePotch = 180/pi*atan( ((F(1,1)-C(1,1))^2+(F(2,1)-C(2,1))^2)^0.5 / (F(3,1)-C(3,1)) );
AnglePotcb = 180/pi*atan( (F(2,1)-C(2,1)) / (F(1,1)-C(1,1)) );

AnglePothh = 180/pi*atan( ((G(1,1)-H(1,1))^2+(G(2,1)-H(2,1))^2)^0.5 / (G(3,1)-H(3,1)) );
AnglePothb = 270-180/pi*atan( (G(1,1)-H(1,1)) / (G(2,1)-H(2,1)) );

%% Calcul des normes entre rotules
Lef=(((E(1,1)-F(1,1))^2+(E(2,1)-F(2,1))^2+(E(3,1)-F(3,1))^2)^0.5);
Led=(((E(1,1)-D(1,1))^2+(E(2,1)-D(2,1))^2+(E(3,1)-D(3,1))^2)^0.5);
Ldf=(((D(1,1)-F(1,1))^2+(D(2,1)-F(2,1))^2+(D(3,1)-F(3,1))^2)^0.5);
Ldg=(((D(1,1)-G(1,1))^2+(D(2,1)-G(2,1))^2+(D(3,1)-G(3,1))^2)^0.5);
Lge=(((E(1,1)-G(1,1))^2+(E(2,1)-G(2,1))^2+(E(3,1)-G(3,1))^2)^0.5);
Lgf=(((F(1,1)-G(1,1))^2+(F(2,1)-G(2,1))^2+(F(3,1)-G(3,1))^2)^0.5);
%
siz=size(VangA3);

```

```

%
for i=1:siz(1,1)

    %Matrice de rotation
    A1 = pi/180*VangA1(i,2);
    A2 = pi/180*VangA2(i,2);
    A3 = pi/180*VangA3(i,2);

    M = [cos(A2)*cos(A3)  sin(A1)*sin(A2)*cos(A3)-cos(A1)*sin(A3)
cos(A1)*sin(A2)*cos(A3)+sin(A1)*sin(A3)  ;...
        cos(A2)*sin(A3)  sin(A1)*sin(A2)*sin(A3)+cos(A1)*cos(A3)
cos(A1)*sin(A2)*sin(A3)-sin(A1)*cos(A3)  ;...
        -sin(A2)                                     sin(A1)*cos(A2)
cos(A1)*cos(A2)  ];

    %Translation
    T = [ VtraT1(i,2) ; VtraT2(i,2) ; VtraT3(i,2) ];

    % Transformé des points D, E et F par la translation
    Dt = D+T;
    Et = E+T;
    Ft = F+T;
    Gt = G+T;

    % Transformé des points Dt, Et et Ft par la rotation
    Df = Cr + M * (Dt-Cr);
    Ef = Cr + M * (Et-Cr);
    Ff = Cr + M * (Ft-Cr);
    Gf = Cr + M * (Gt-Cr);

    %%%
    %% Angles des potentiomètres
    %%%

    %coordonnees des vecteurs ADf, BEf et CFf
    ADf = [Df(1,1)-A(1,1) ; Df(2,1)-A(2,1) ; Df(3,1)-A(3,1)];
    BEf = [Ef(1,1)-B(1,1) ; Ef(2,1)-B(2,1) ; Ef(3,1)-B(3,1)];
    CFf = [Ff(1,1)-C(1,1) ; Ff(2,1)-C(2,1) ; Ff(3,1)-C(3,1)];
    HGf = [Gf(1,1)-H(1,1) ; Gf(2,1)-H(2,1) ; Gf(3,1)-H(3,1)];

    k1(i,1) = norm(ADf);
    k2(i,1) = norm(BEf);
    k3(i,1) = norm(CFf);
    k4(i,1) = norm(HGf);

    if k1(i,1) > 210 | k2(i,1) > 210 | k3(i,1) > 210 | k4(i,1) >
210
        'Le deplacement est trop important pour le cadre (les
rotules sortent des tiges)'
        break
    end
end

```

```

end

%%%Angle ay et az du point A
%% L'angle ay correspond au potentiomètre du haut
%% L'angle az correspond au potentiomètre du bas
%
tanay = sqrt(ADf(1,1)^2+ADf(2,1)^2)/ADf(3,1);
ay = 180/pi*atan(tanay)-AnglePotah;
%
AD2 = [D(1,1)-A(1,1) ; D(2,1)-A(2,1)];
ADf2 = [Df(1,1)-A(1,1) ; Df(2,1)-A(2,1)];
DDf2 = [Df(1,1)-D(1,1) ; Df(2,1)-D(2,1)];
    if Df(2,1) > Df(1,1)*((D(2,1)-A(2,1))/(D(1,1)-A(1,1))) +
(A(2,1)*D(1,1)-A(1,1)*D(2,1))/(D(1,1)-A(1,1))
        az = -180/pi*acos((norm(ADf2)^2+norm(AD2)^2-
norm(DDf2)^2)/(2*norm(ADf2)*norm(AD2)));
    else
        az = 180/pi*acos((norm(ADf2)^2+norm(AD2)^2-
norm(DDf2)^2)/(2*norm(ADf2)*norm(AD2)));
    end

%%%Angle by et bz du point B
%% L'angle by correspond au potentiomètre du haut
%% L'angle bz correspond au potentiomètre du bas
%
tanby = sqrt(BEf(1,1)^2+BEf(2,1)^2)/BEf(3,1);
by = 180/pi*atan(tanby)-AnglePotbh;
%
BE2 = [E(1,1)-B(1,1) ; E(2,1)-B(2,1)];
BEf2 = [Ef(1,1)-B(1,1) ; Ef(2,1)-B(2,1)];
EEf2 = [Ef(1,1)-E(1,1) ; Ef(2,1)-E(2,1)];
    if Ef(2,1) > Ef(1,1)*((E(2,1)-B(2,1))/(E(1,1)-B(1,1))) +
(B(2,1)*E(1,1)-B(1,1)*E(2,1))/(E(1,1)-B(1,1))
        bz = -180/pi*acos((norm(BEf2)^2+norm(BE2)^2-
norm(EEf2)^2)/(2*norm(BEf2)*norm(BE2)));
    else
        bz = 180/pi*acos((norm(BEf2)^2+norm(BE2)^2-
norm(EEf2)^2)/(2*norm(BEf2)*norm(BE2)));
    end

%%%Angle cy et cz du point C
%% L'angle cy correspond au potentiomètre du haut
%% L'angle cz correspond au potentiomètre du bas
%
tancy = sqrt(CFf(1,1)^2+CFf(2,1)^2)/CFf(3,1);
cy = 180/pi*atan(tancy)-AnglePotch;
%
CF2 = [F(1,1)-C(1,1) ; F(2,1)-C(2,1)];

```

```

CFf2 = [Ff(1,1)-C(1,1) ; Ff(2,1)-C(2,1)];
FFf2 = [Ff(1,1)-F(1,1) ; Ff(2,1)-F(2,1)];
    if Ff(2,1) > Ff(1,1)*((F(2,1)-C(2,1))/(F(1,1)-C(1,1))) +
(C(2,1)*F(1,1)-C(1,1)*F(2,1))/(F(1,1)-C(1,1))
        cz = 180/pi*acos((norm(CFf2)^2+norm(CF2)^2-
norm(FFf2)^2)/(2*norm(CFf2)*norm(CF2)));
    else
        cz = -180/pi*acos((norm(CFf2)^2+norm(CF2)^2-
norm(FFf2)^2)/(2*norm(CFf2)*norm(CF2)));
    end

%%%Angle hy et hz du point H
%% L'angle hy correspond au potentiometre du haut
%% L'angle hz correspond au potentiometre du bas
%
tanhy = sqrt(HGf(1,1)^2+HGf(2,1)^2)/HGf(3,1);
hy = 180/pi*atan(tanhy)-AnglePothh;
%
HG2 = [G(1,1)-H(1,1) ; G(2,1)-H(2,1)];
HGf2 = [Gf(1,1)-H(1,1) ; Gf(2,1)-H(2,1)];
GGf2 = [Gf(1,1)-G(1,1) ; Gf(2,1)-G(2,1)];
    if Gf(2,1) > Gf(1,1)*((G(2,1)-H(2,1))/(G(1,1)-H(1,1))) +
(H(2,1)*G(1,1)-H(1,1)*G(2,1))/(G(1,1)-H(1,1))
        hz = -180/pi*acos((norm(HGf2)^2+norm(HG2)^2-
norm(GGf2)^2)/(2*norm(HGf2)*norm(HG2)));
    else
        hz = 180/pi*acos((norm(HGf2)^2+norm(HG2)^2-
norm(GGf2)^2)/(2*norm(HGf2)*norm(HG2)));
    end

potah(i,1) = VangA1(i,1);
potah(i,2) = ay+parasite_ah;

potab(i,1) = VangA1(i,1);
potab(i,2) = az+parasite_ab;

potbh(i,1) = VangA1(i,1);
potbh(i,2) = by+parasite_bh;

potbb(i,1) = VangA1(i,1);
potbb(i,2) = bz+parasite_bb;

potch(i,1) = VangA1(i,1);
potch(i,2) = cy+parasite_ch;

potcb(i,1) = VangA1(i,1);
potcb(i,2) = cz+parasite_cb;

pothh(i,1) = VangA1(i,1);

```

```

pothh(i,2) = hy+parasite_hh;

pothb(i,1) = VangA1(i,1);
pothb(i,2) = hz+parasite_hb;

%% Varstheorique corresponds aux coordonnées des points de
%% l'étrier quand il n'y a pas de parasite
varstheorique(i,:) = [Df(1,1) Df(2,1) Df(3,1) Ef(1,1) Ef(2,1)
Ef(3,1) Ff(1,1) Ff(2,1) Ff(3,1) Gf(1,1) Gf(2,1) Gf(3,1)];

end

save potah.txt potah -ascii -tabs;
save potab.txt potab -ascii -tabs;
save potbh.txt potbh -ascii -tabs;
save potbb.txt potbb -ascii -tabs;
save potch.txt potch -ascii -tabs;
save potcb.txt potcb -ascii -tabs;
save pothh.txt pothh -ascii -tabs;
save pothb.txt pothb -ascii -tabs;
save varstheorique.txt varstheorique -ascii -tabs

```

1- Repères d'interprétations

A. Efforts et moments

Les résultats issus du capteur supérieur sont donnés au centre de la vertèbre supérieure et les résultats issus du capteur inférieur sont donnés au centre de la vertèbre inférieure. Les efforts et les moments sont ceux des capteurs sur la pièce anatomique. L'orientation des repères est suivant le repère labo.

Ces conventions sont valables pour les essais statiques et dynamiques.

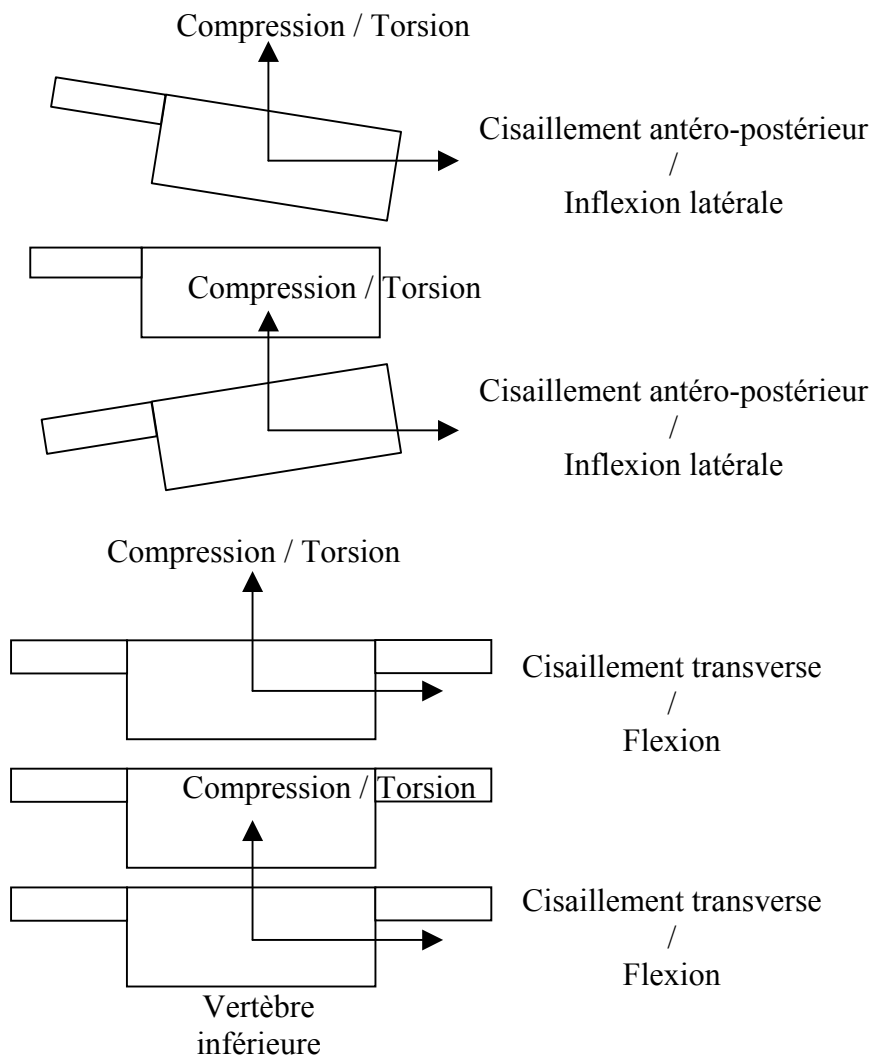


Figure 29 : conventions d'interprétations en flexion, inflexion et torsion

Pour ce qui est du capteur de couple utilisé lors des essais statiques, son orientation permet de mesurer les sollicitations dans l'axe vertical du spécimen.

B. Rotations et déplacements

Mesures relatives à la vertèbre centrale

Ces conventions sont valables pour les essais statiques et dynamiques.

Le repère d'interprétation est situé sur la vertèbre centrale. Les déplacements sont ceux du point gris (bord antérieur du plateau supérieur de la vertèbre centrale).

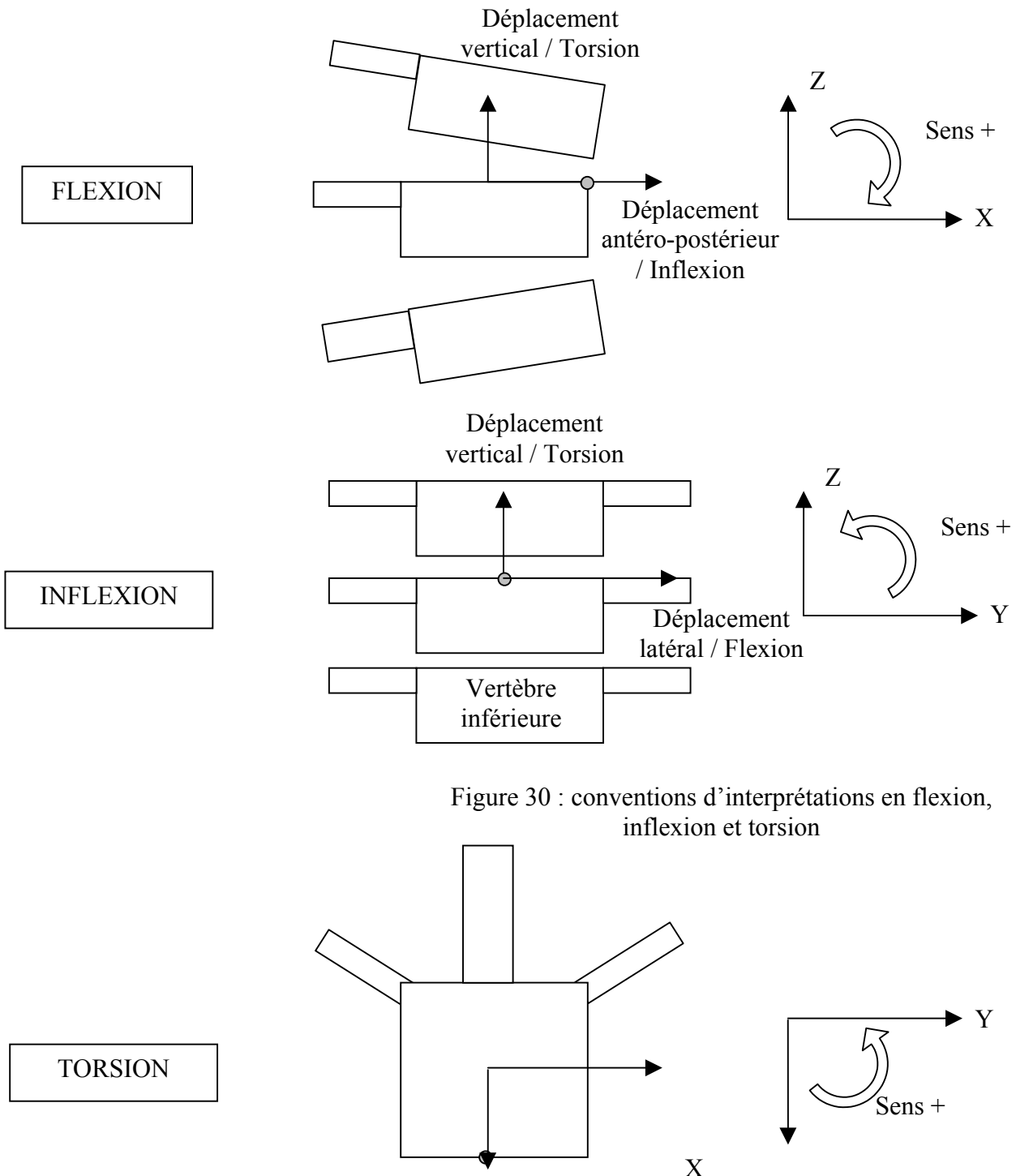


Figure 30 : conventions d'interprétations en flexion, inflexion et torsion

Les capteurs angulaires situés sur le banc statique et le banc dynamique sont orientés suivant le repère laboratoire. Ainsi, il existe une légère différence entre le repère de ces capteurs et celui de la vertèbre centrale qui est due à l'orientation du spécimen par rapport au montage. Cette différence est négligeable car nous nous sommes attachés, lors de la préparation de la pièce, à la positionner en adéquation avec le repère labo.

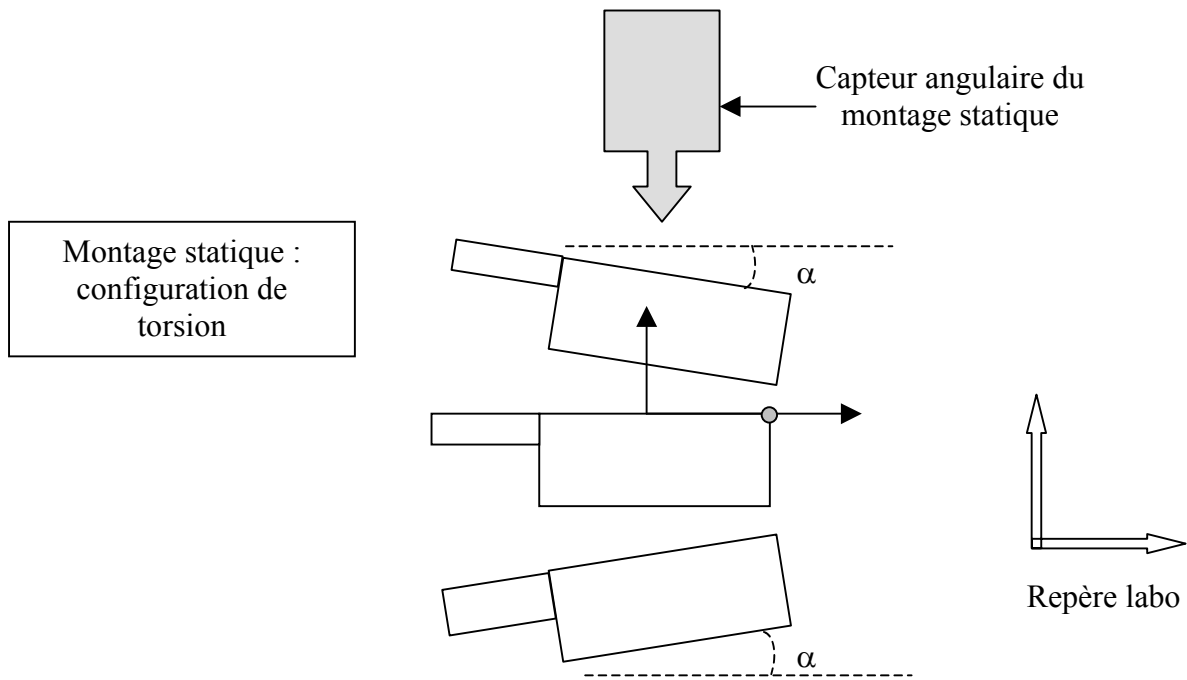
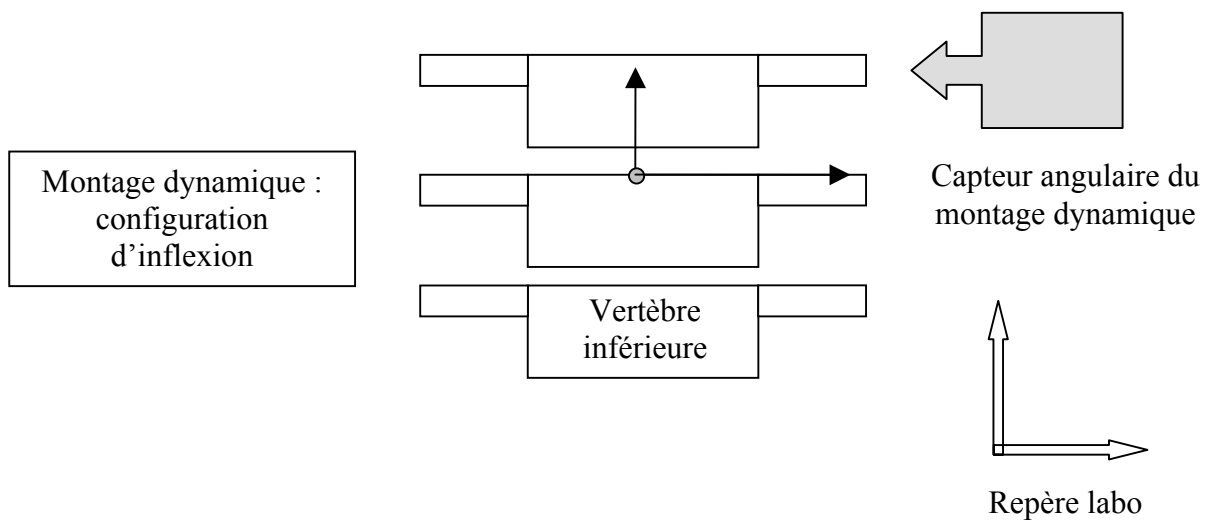


Figure 31 : position du capteur angulaire en dynamique



2- Essais statiques

Chacune des pièces a été testée une seule fois en statique . Les résultats sont regroupés en trois figures par pièce :

- ✓ La première figure représente trois vertèbres schématisées sur laquelle s’affiche le tracé des axes instantanés de la vertèbre supérieure par rapport à la vertèbre centrale ainsi que l’axe moyen.
- ✓ La deuxième figure est constituée de trois graphes :
Le premier graphe représente la rotation de la vertèbre supérieure ainsi que le couple de flexion appliqué à cette dernière.
Le second graphe représente l’évolution des rotations de la vertèbre centrale au cours du temps (inflexion, flexion et torsion).
Le troisième graphe représente l’évolution des translations de l’extrémité antérieure du plateau supérieure de la vertèbre centrale au cours du temps (déplacement antéro-postérieur, latéral et vertical).
- ✓ La troisième figure est aussi constituée de trois graphes.
Le premier graphe représente la rotation de la vertèbre supérieure ainsi que le couple de flexion appliqué à cette dernière.
Le second graphe représente l’évolution des efforts transitant par la vertèbre inférieure au cours du temps (cisaillement antéro-postérieur, cisaillement transverse et compression).
Le troisième graphe représente l’évolution des moments transitant par la vertèbre inférieure au cours du temps (flexion, inflexion et torsion).

3- Essais dynamiques

Certains essais n’ont pas pu être achevés (lésion d’au moins trois ligaments successivement) en raison de la rupture partielle ou totale des structures ligamentaires lors des essais précédant ces lésions.

Les résultats sont donnés par ordre chronologique des lésions effectuées (section des ligaments). Les résultats de chaque configuration (saine, lésion du ligament x, lésion du ligament y etc...) sont donnés sous la forme de trois figures constituées chacune de trois graphes :

- ✓ La première figure est constituée de trois graphes :
Le premier graphe représente la rotation de la vertèbre supérieure ainsi que la vitesse angulaire (en degrés par centième de seconde) de cette dernière.
Le second graphe représente l’évolution des rotations de la vertèbre centrale au cours du temps (inflexion, flexion et torsion).
Le troisième graphe représente l’évolution des translations de l’extrémité antérieure du plateau supérieure de la vertèbre centrale au cours du temps (déplacement antéro-postérieur, latéral et vertical).
- ✓ La deuxième figure est constituée de trois graphes :
Le premier graphe représente la rotation de la vertèbre supérieure ainsi que la vitesse angulaire (en degrés par centième de seconde) de cette dernière.
Le second graphe représente l’évolution des efforts transitant par la vertèbre supérieure au cours du temps (cisaillement antéro-postérieur, cisaillement transverse et compression).
Le troisième graphe représente l’évolution des moments transitant par la vertèbre supérieure au cours du temps (flexion, inflexion et torsion).
- ✓ La troisième figure est constituée de trois graphes :
Le premier graphe représente la rotation de la vertèbre supérieure ainsi que la vitesse angulaire (en degrés par centième de seconde) de cette dernière.

Le second graphe représente l'évolution des efforts transitant par la vertèbre inférieure au cours du temps (cisaillement antéro-postérieur, cisaillement transverse et compression).

Le troisième graphe représente l'évolution des moments transitant par la vertèbre inférieure au cours du temps (flexion, inflexion et torsion).

La même structure est respectée quelle que soit la configuration.

Ne pouvant donner toutes les courbes dans le mémoire, nous avons choisi de donner des résultats « types » pour chaque mode de sollicitation (flexion, inflexion et torsion) et de fournir des tableaux résumant chacun des essais.

Caractéristiques des courbes présentées :

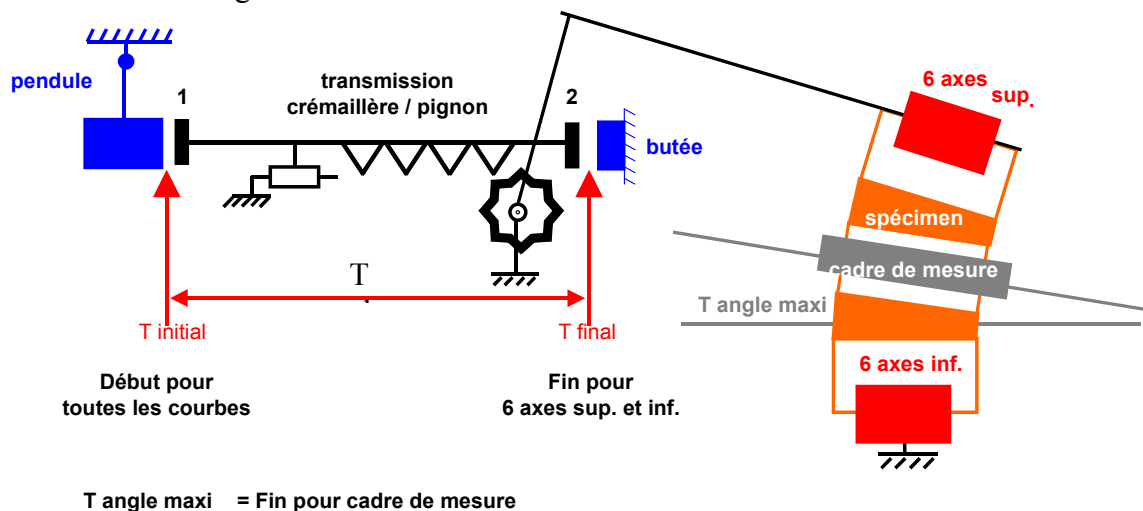
Le schéma suivant décrit les moments choisis pour le début et la fin des courbes présentées :

L'instant initial correspond au contact entre le pendule et la crémaillère.

L'instant final choisi pour les capteurs d'efforts et moments correspond au choc entre la crémaillère et la butée d'arrêt.

L'instant final choisi pour le mouvement de la vertèbre centrale est l'instant pour lequel sa position finale est atteinte. En raison d'un décalage existant entre le début du mouvement de la vertèbre supérieure (donc de l'arbre pignon) et le début du mouvement de la vertèbre centrale, il était évident de ne pas choisir le même instant final que pour la vertèbre supérieure.

Figure 32 : instants de début et de fin des courbes données



$T_{angle\ maxi} = Fin\ pour\ cadre\ de\ mesure$

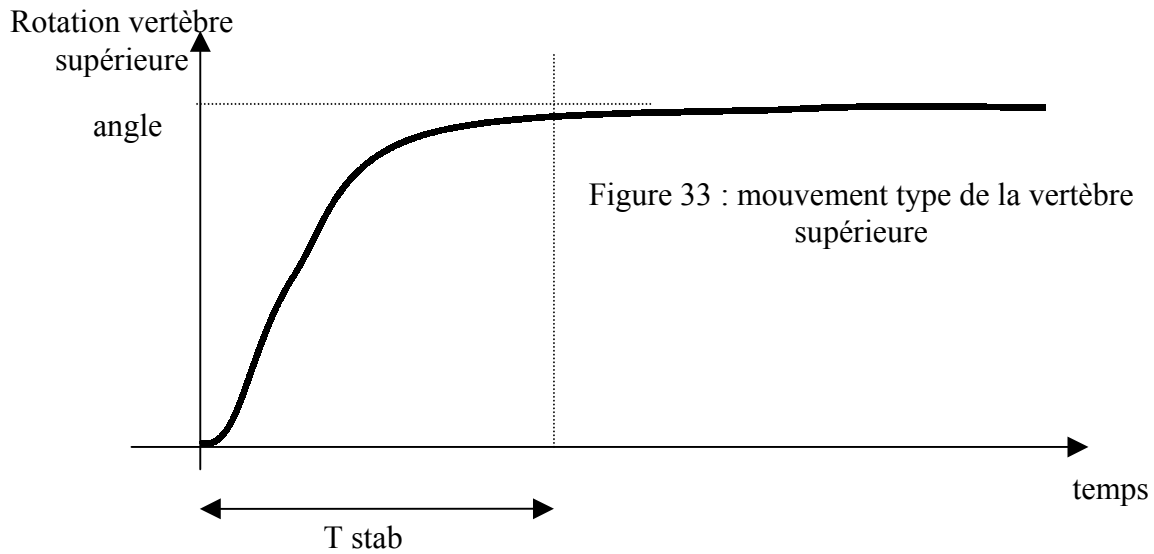
Caractéristiques des tableaux présentés :

Ils sont au nombre de trois pour chaque configuration :

Le premier tableau récapitule les résultats relatifs à la cinématique de la vertèbre supérieure et de la vertèbre centrale. Les résultats sont divisés en trois parties suivant l'étage vertébral testé. Chacune des parties est divisée suivant les configurations (sain, épineux = ligament épineux coupé, etc...). Le numéro commençant l'intitulé correspond à un numéro d'essai (exemple : 1-L2L4-sain).

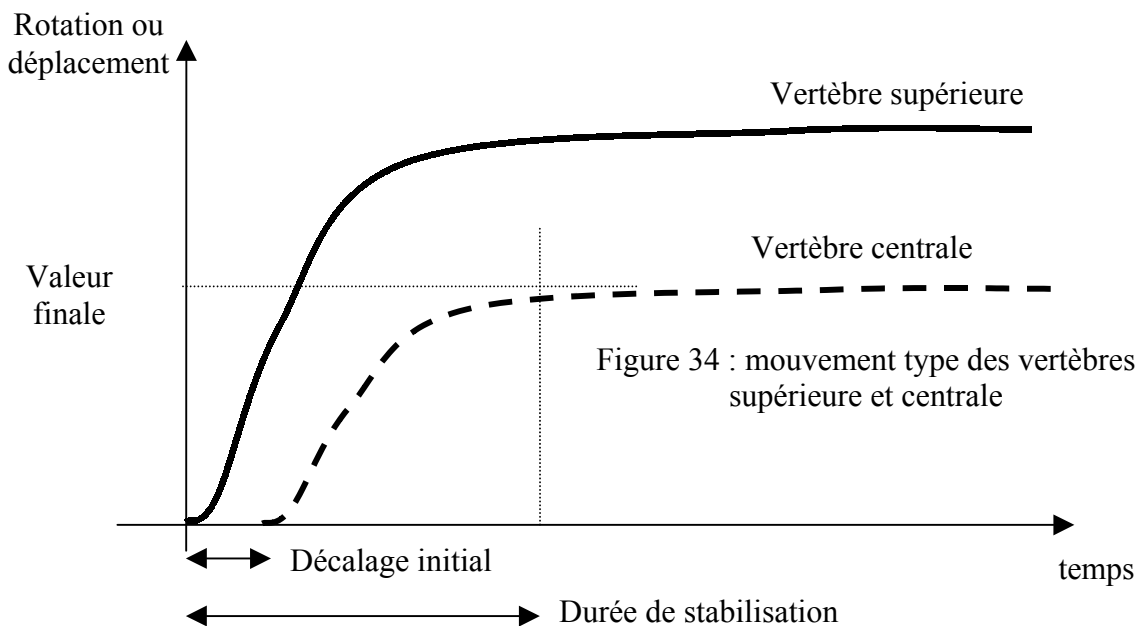
Pour la vertèbre supérieure, les paramètres sont :

- ✓ T_{stab} = temps que met cette vertèbre pour atteindre son maximum.
- ✓ Angle = valeur maximale de l'angle de la vertèbre supérieure.



Pour la vertèbre centrale, les paramètres sont :

- ✓ Décalage initial = intervalle de temps entre le début du mouvement de la vertèbre supérieure et le début du mouvement de la vertèbre centrale
- ✓ Durée de stabilisation = temps que met la vertèbre centrale pour atteindre son maximum
- ✓ Valeur finale = valeur des angles et des déplacements maximaux de la vertèbre centrale (inflexion, flexion, inflexion, déplacement antéro-postérieur, latéral et vertical)



Le deuxième et le troisième tableau présentent les résultats relatifs aux efforts et aux moments transitant par la vertèbre supérieure (deuxième tableau) et inférieure (troisième tableau).

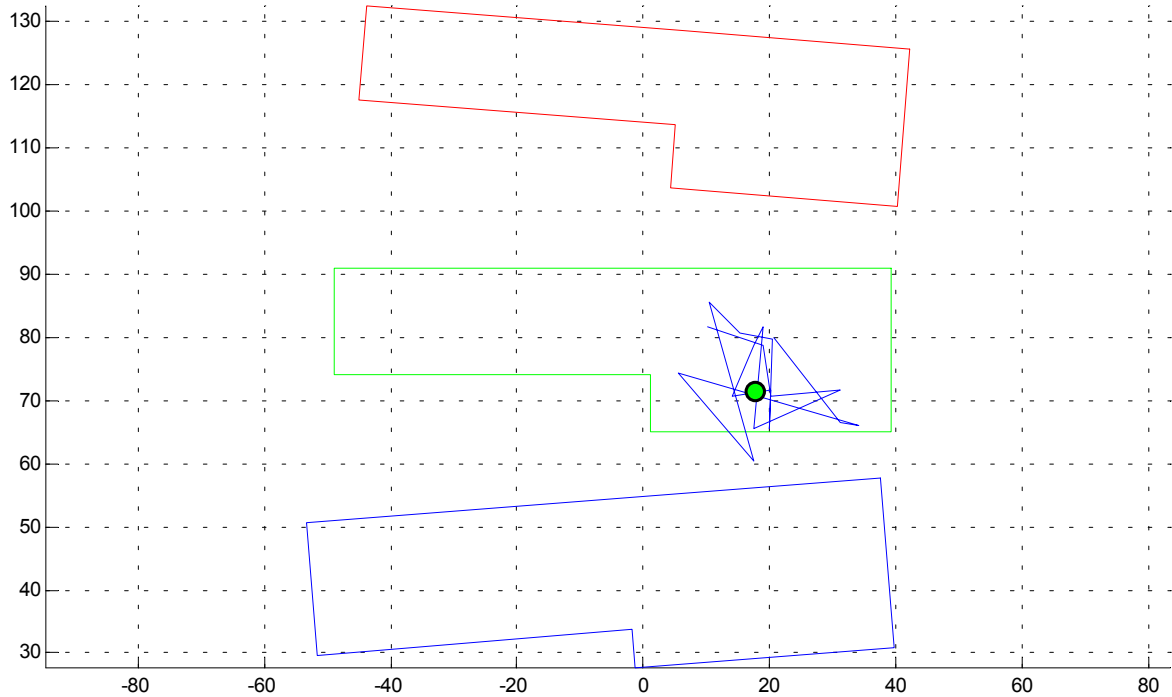
Ils correspondent au cisaillement antéro-postérieur, transverse, à la compression, au moment de flexion, d'inflexion et de torsion.

Etant donné qu'il existe un décalage temporel entre les phénomènes supérieurs et inférieurs (temps de transit des efforts entre la vertèbre supérieure et inférieure), les valeurs indiquées sont les maximums des courbes dans la zone de début de mouvement pour le capteur supérieur et la zone de milieu / fin de mouvement pour le capteur inférieur.

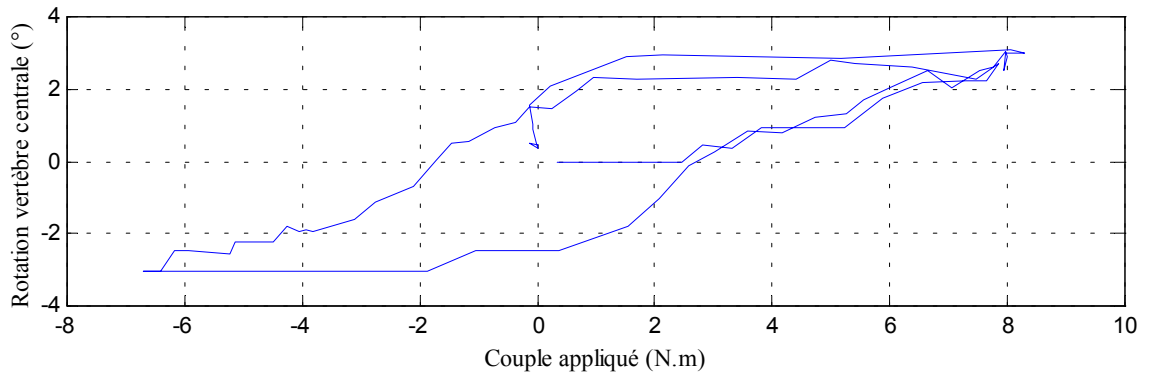
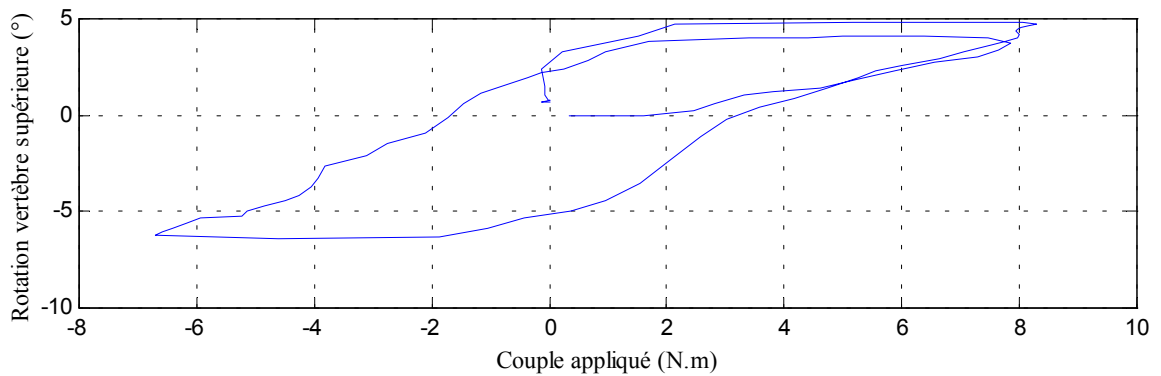
1- Essai 01 – L2L4 – flexion

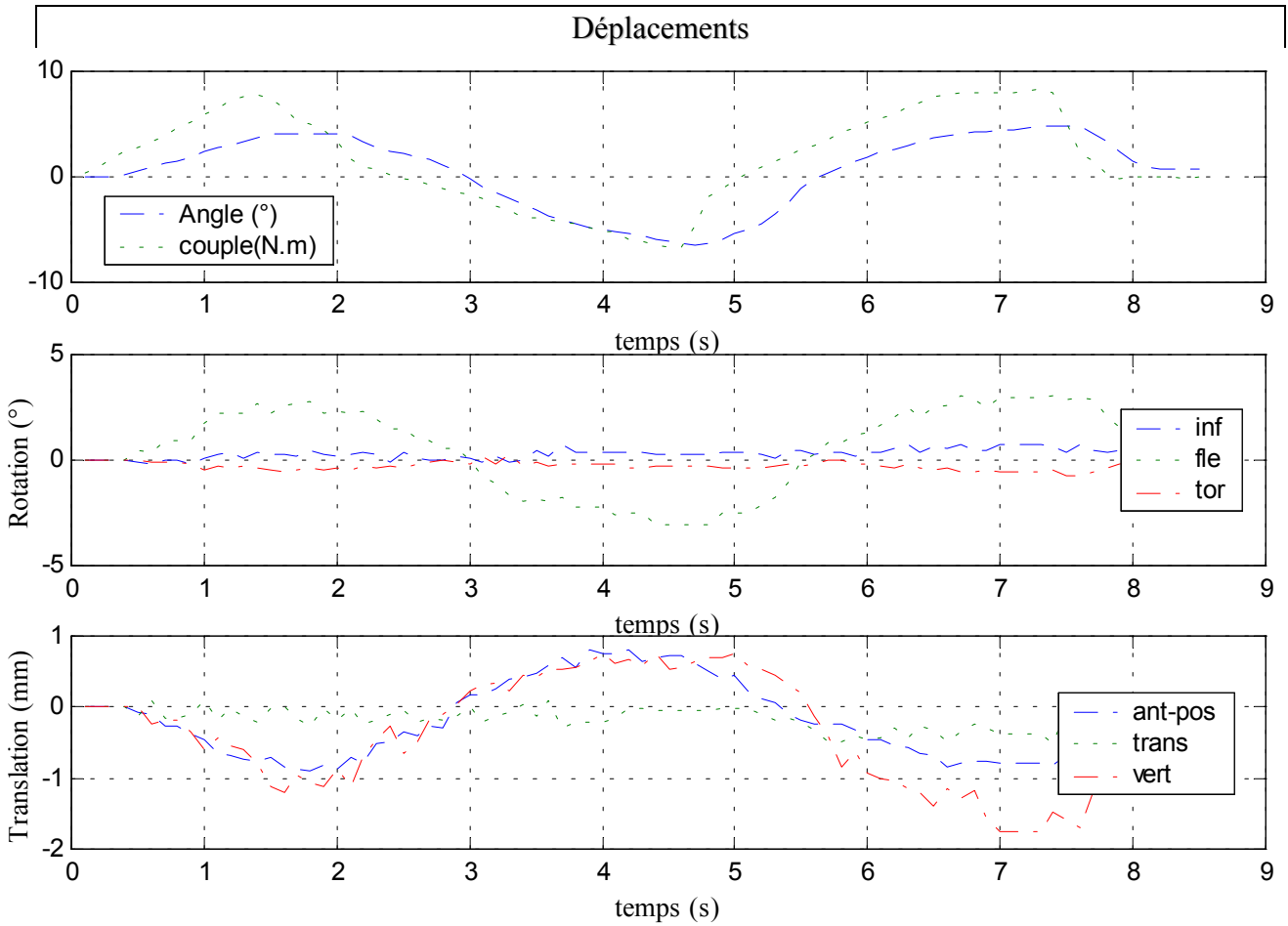
A. Statique

Centre instantané de rotation

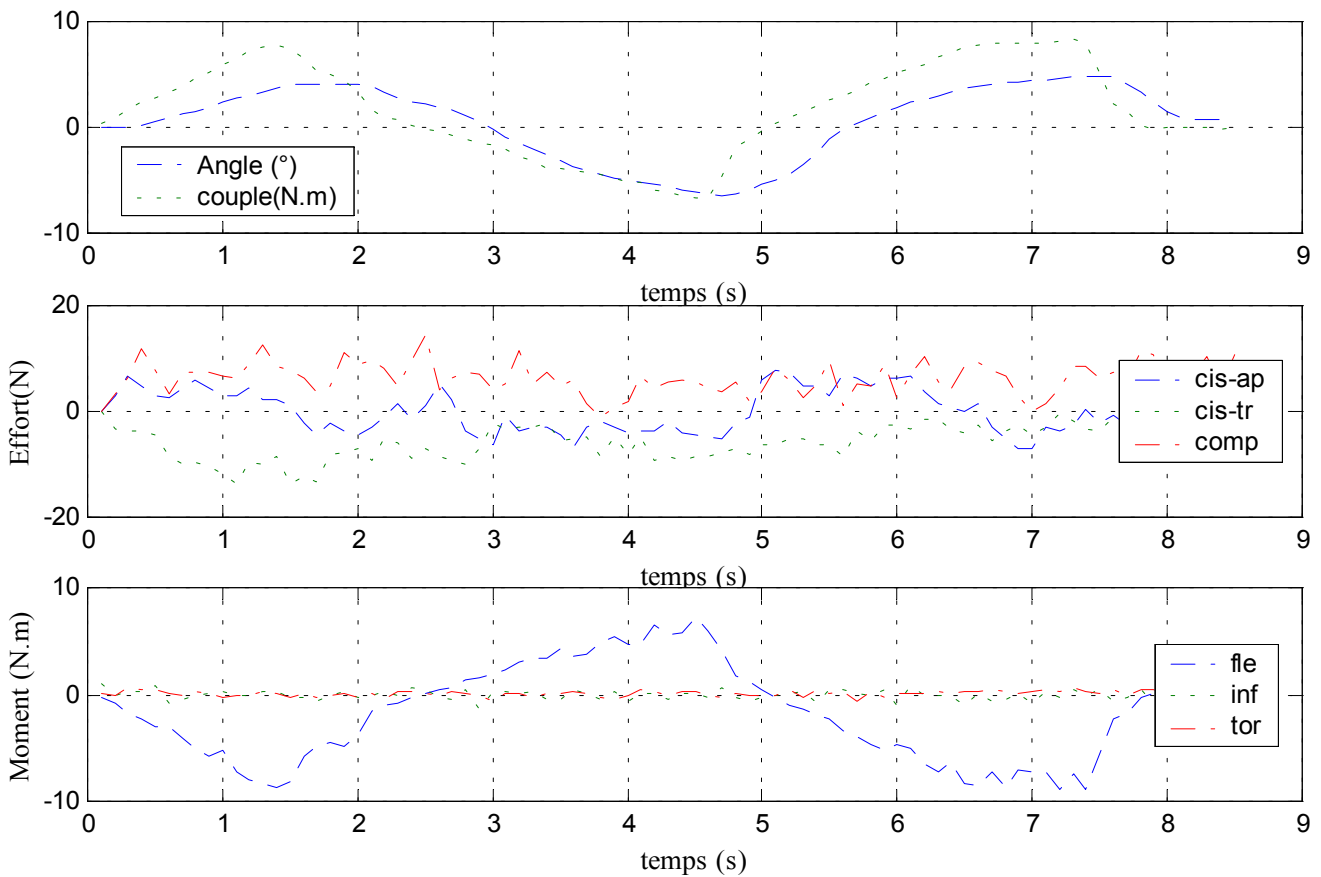


Courbe rotation-couple en hystérésis



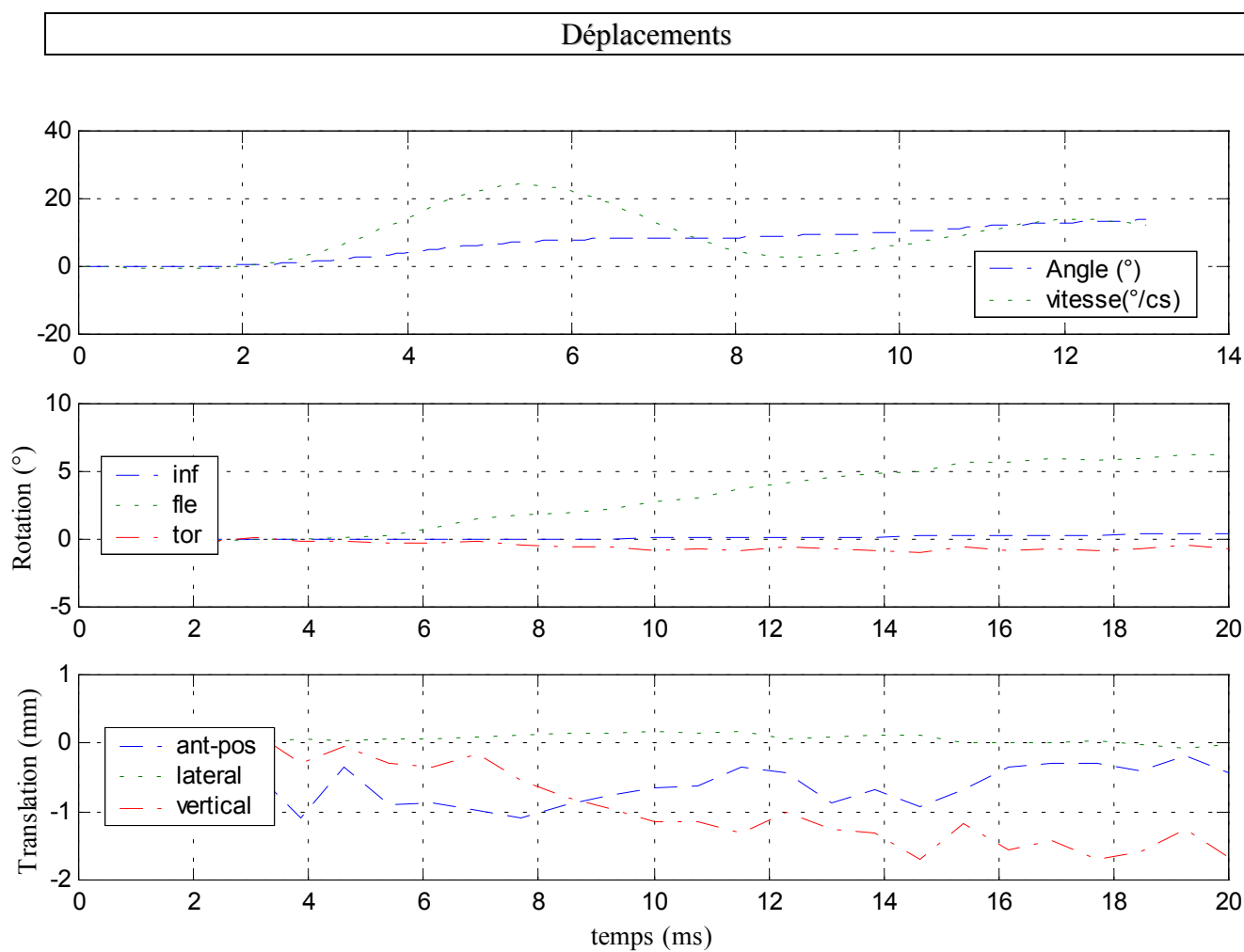


Efforts et moments inférieurs

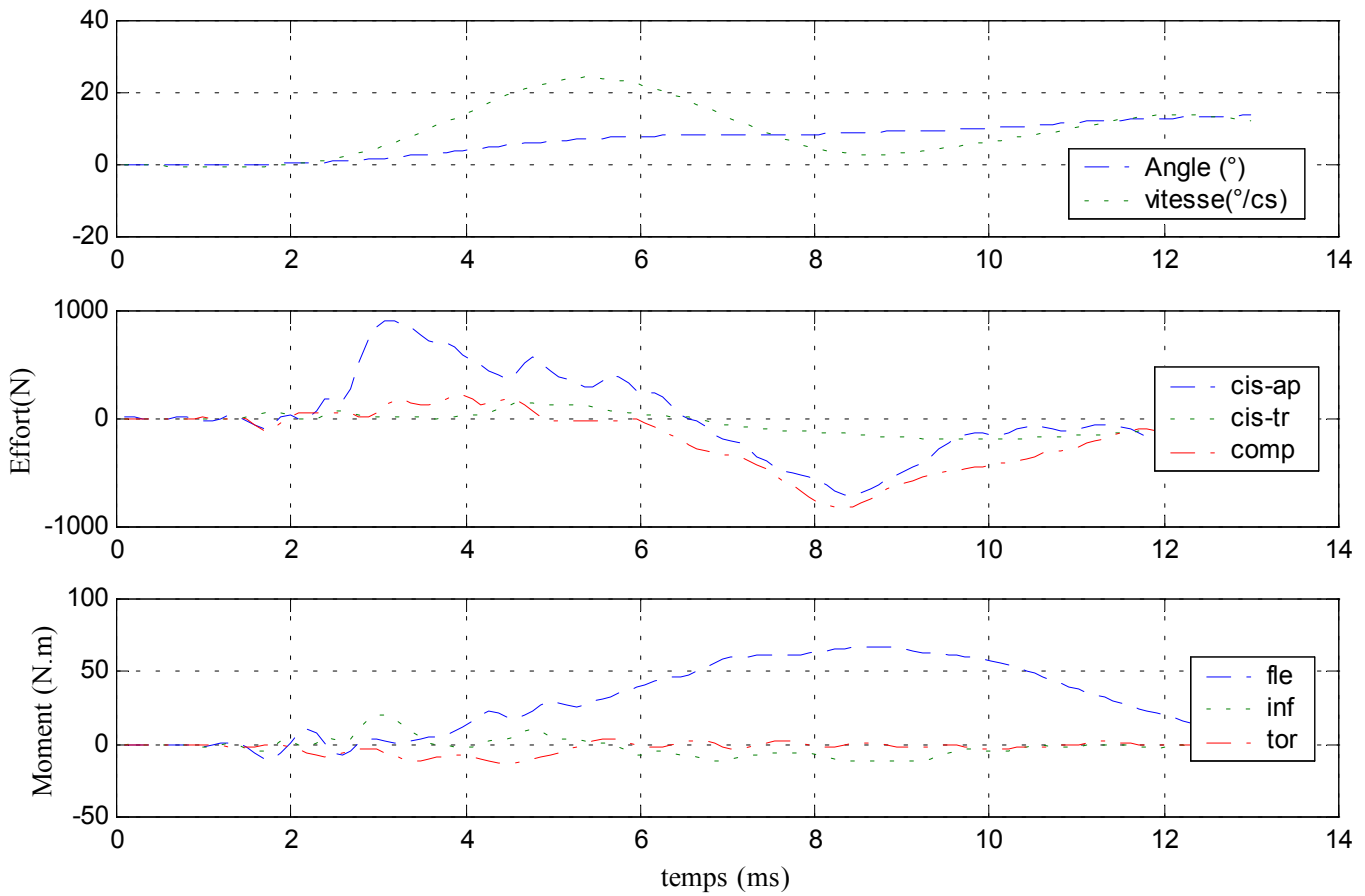


B. Dynamique

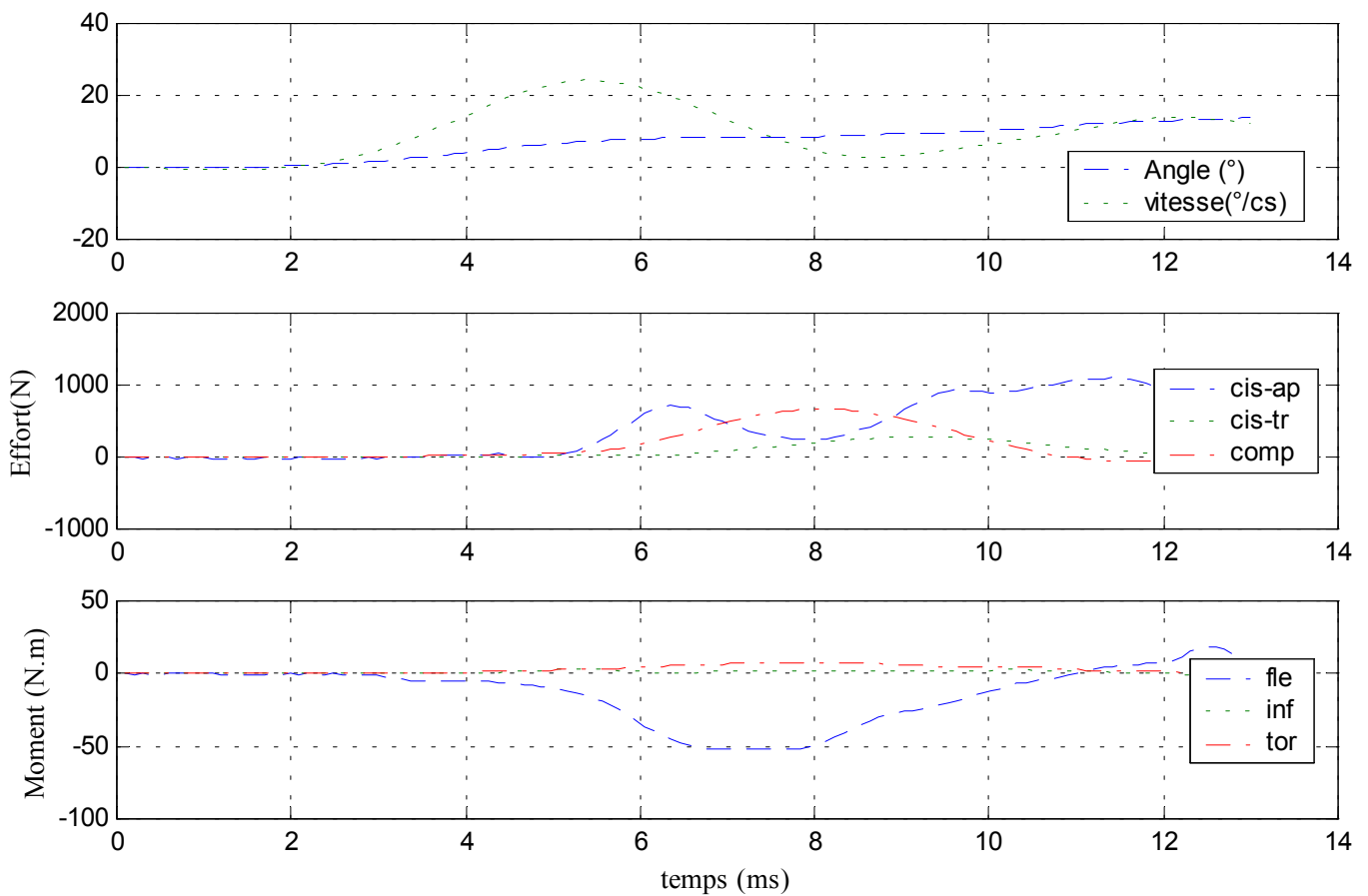
✓ Configuration saine



Efforts et moments supérieurs

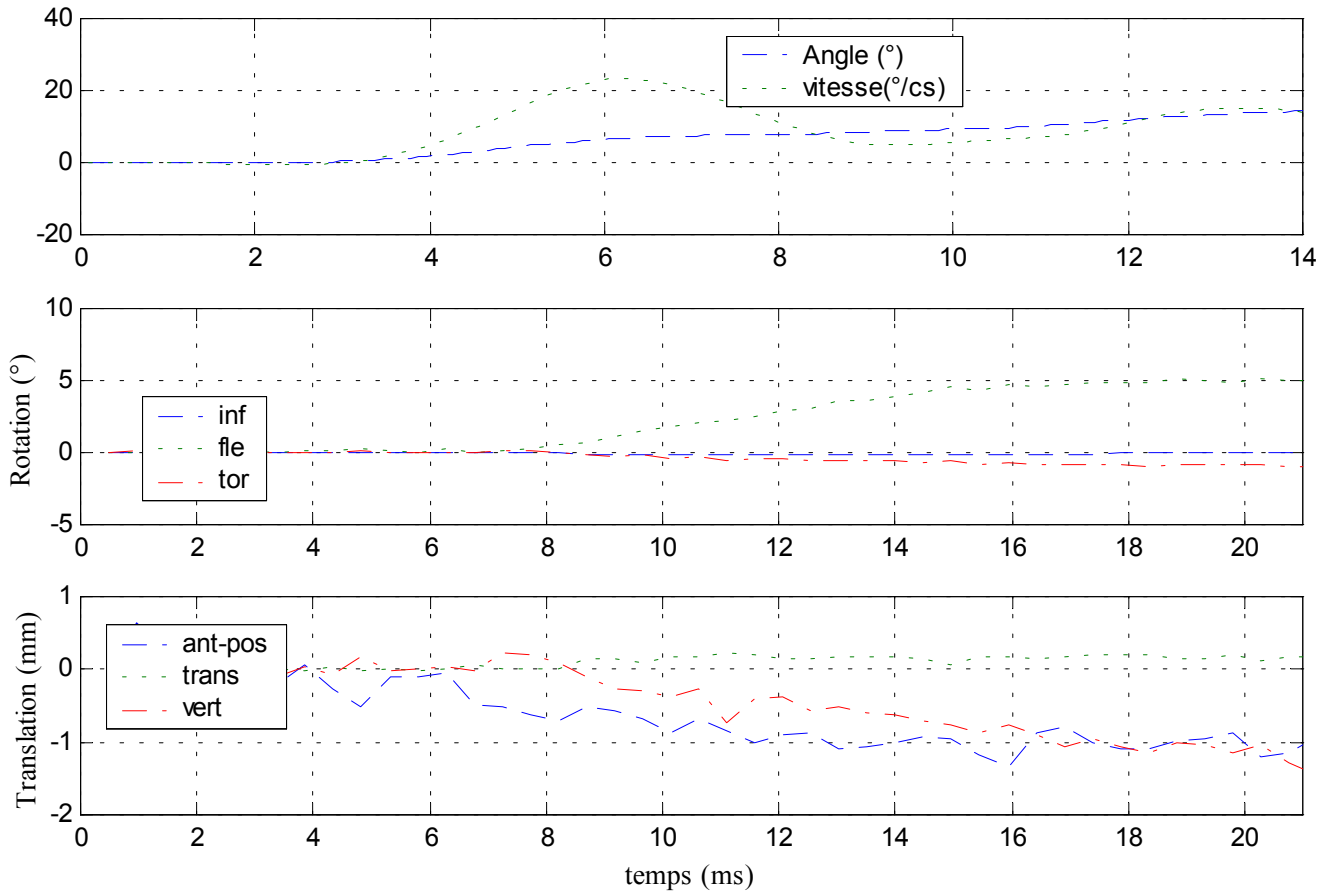


Efforts et moments inférieurs

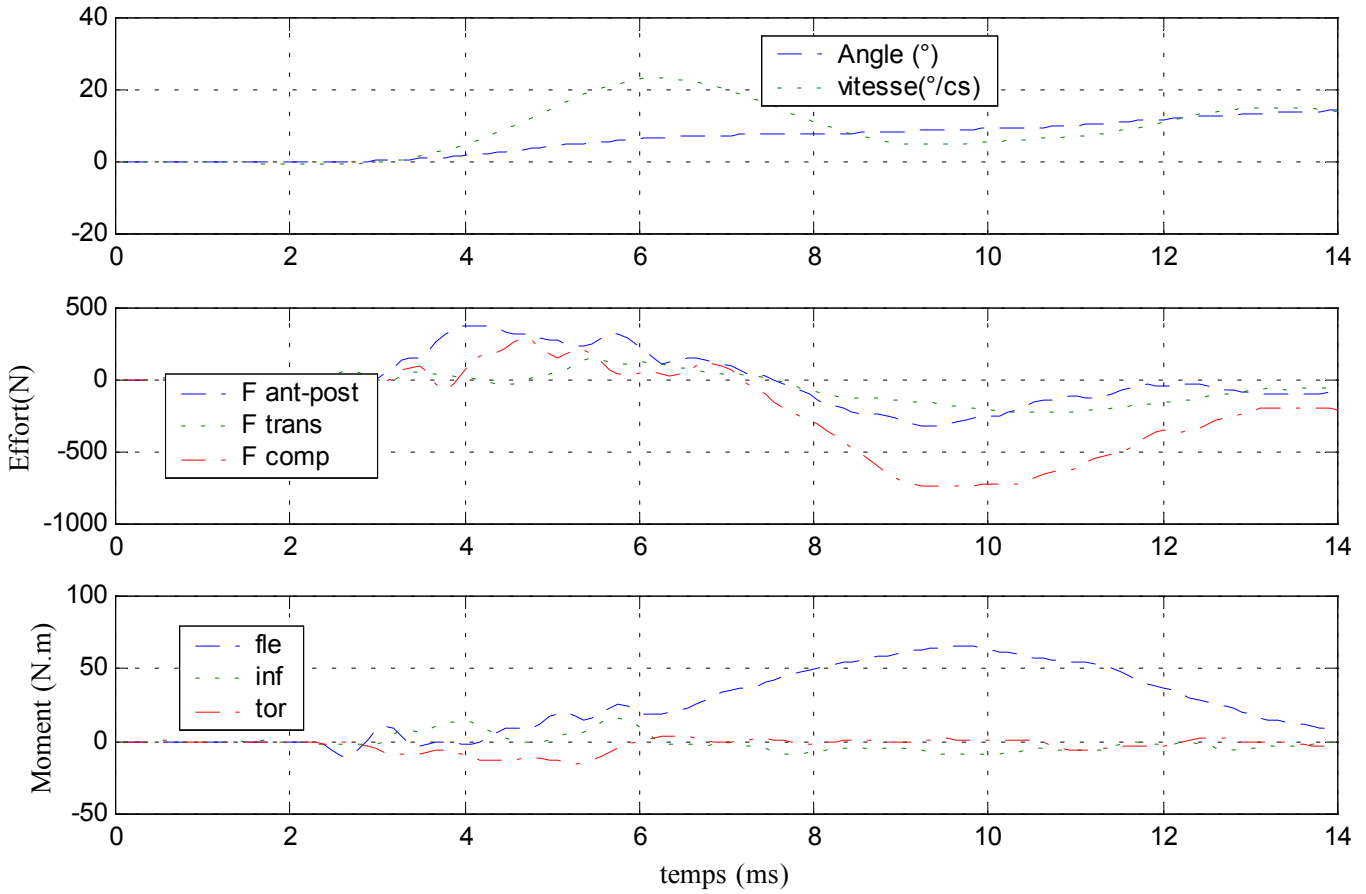


✓ Configuration avec ligaments épineux coupés

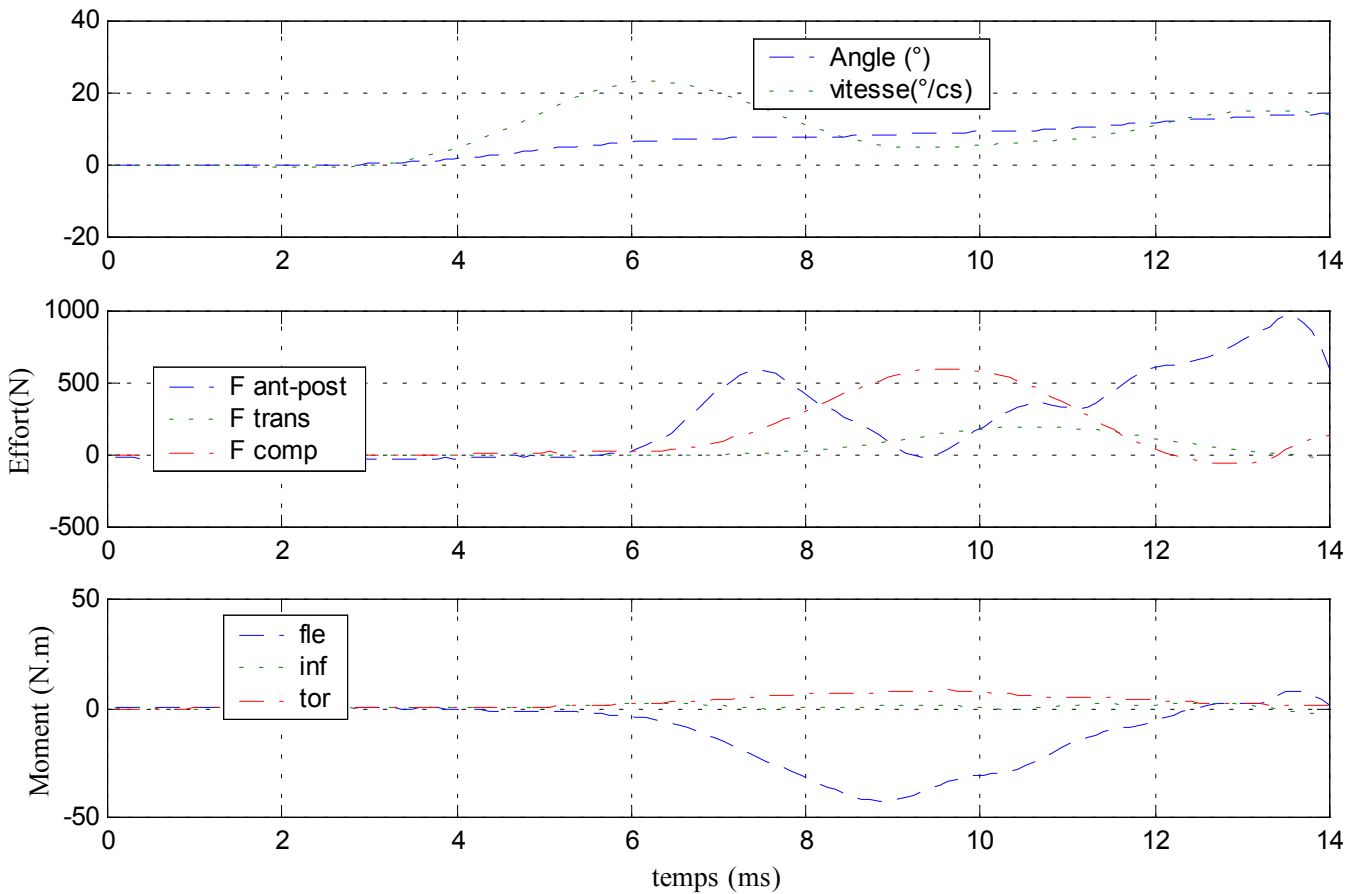
Déplacements



Efforts et moments supérieurs



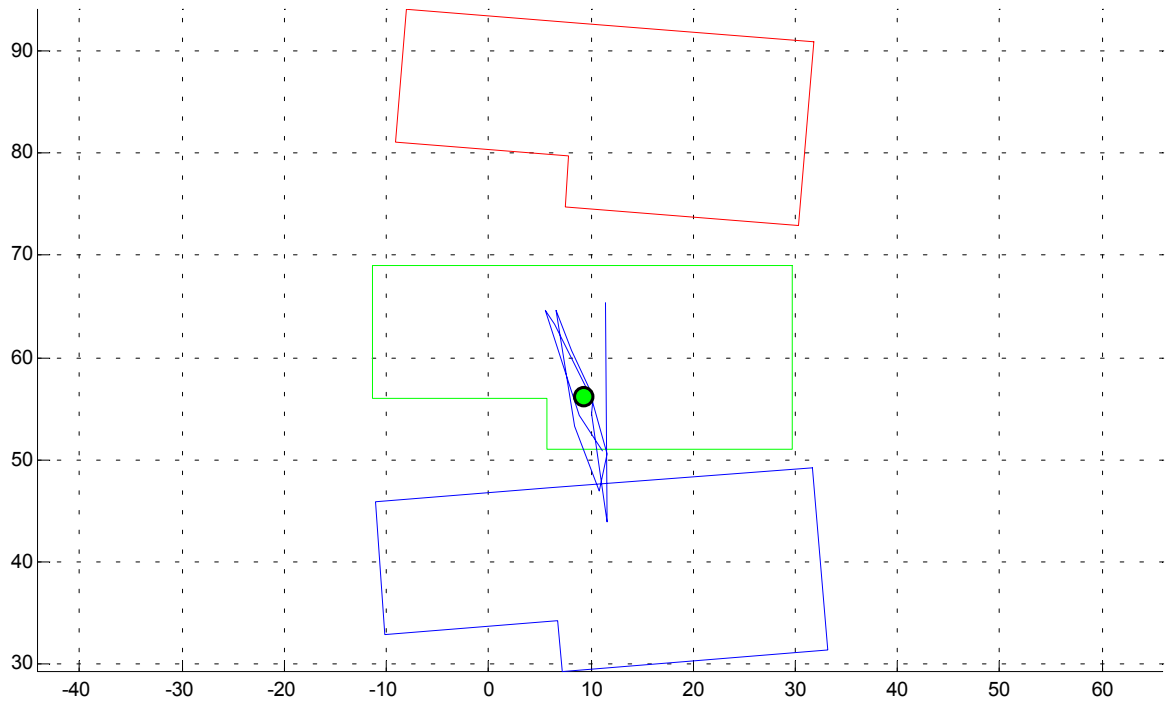
Efforts et moments inférieurs



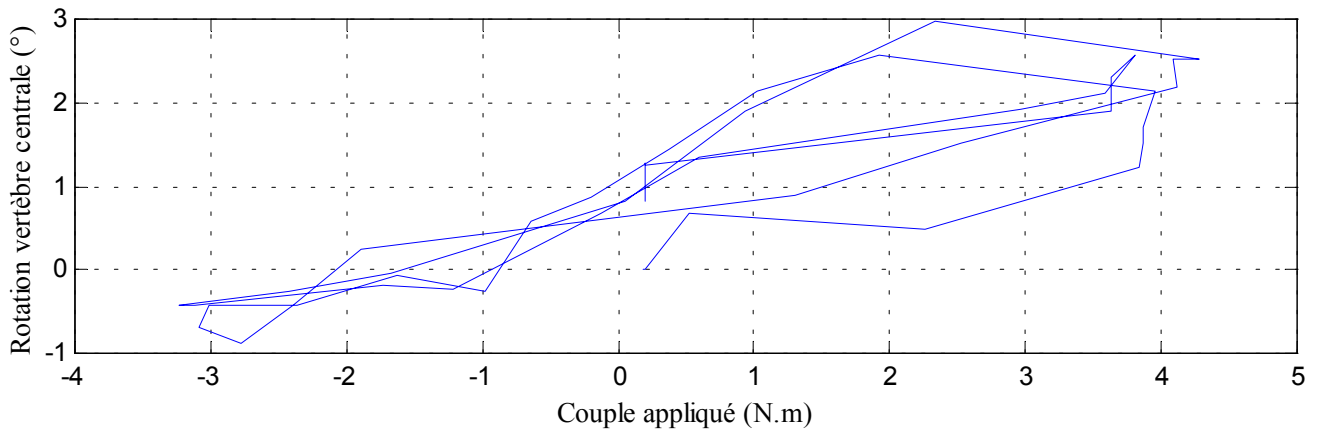
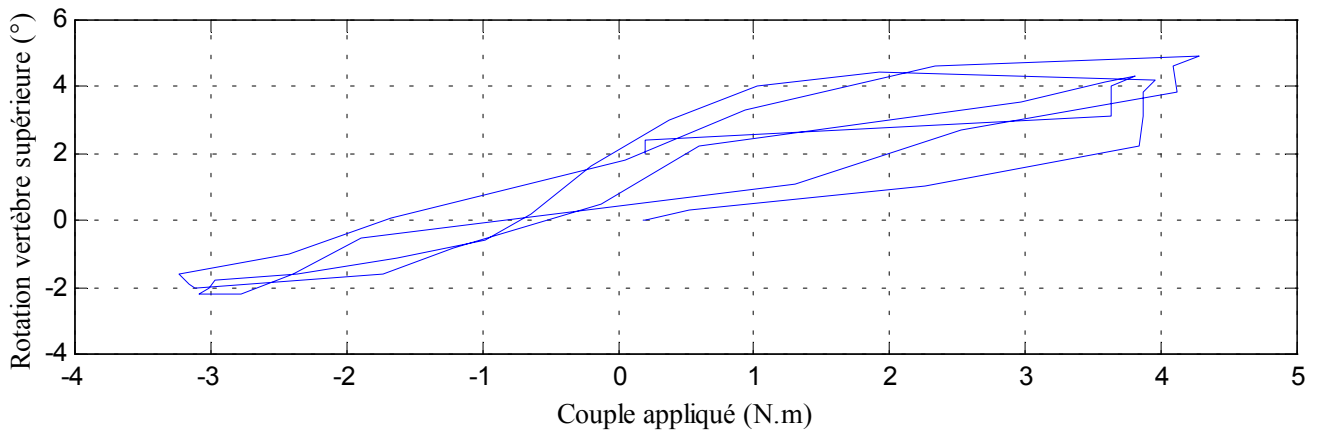
2- Essai 02 – T3T5 – flexion

A. Statique

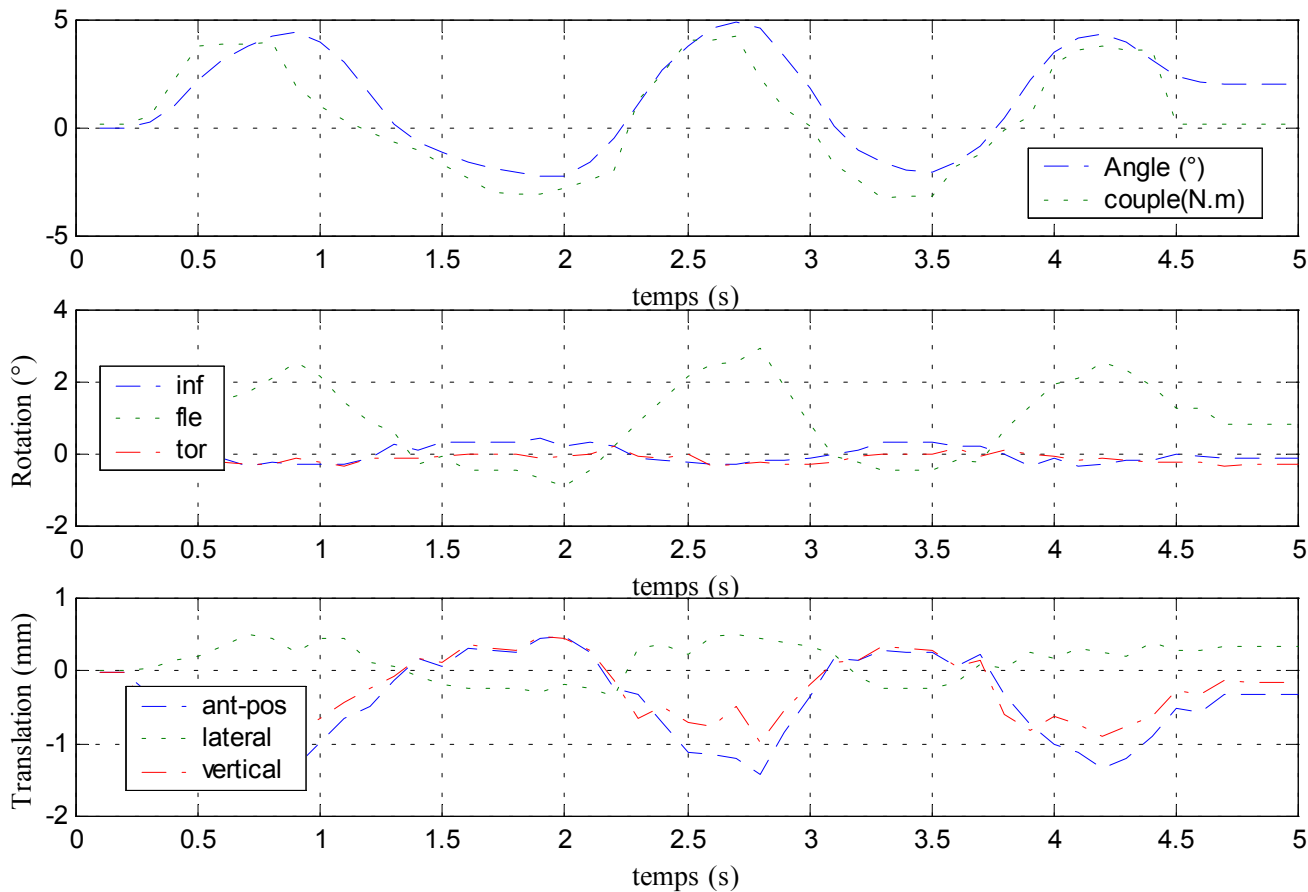
Centre instantané de rotation



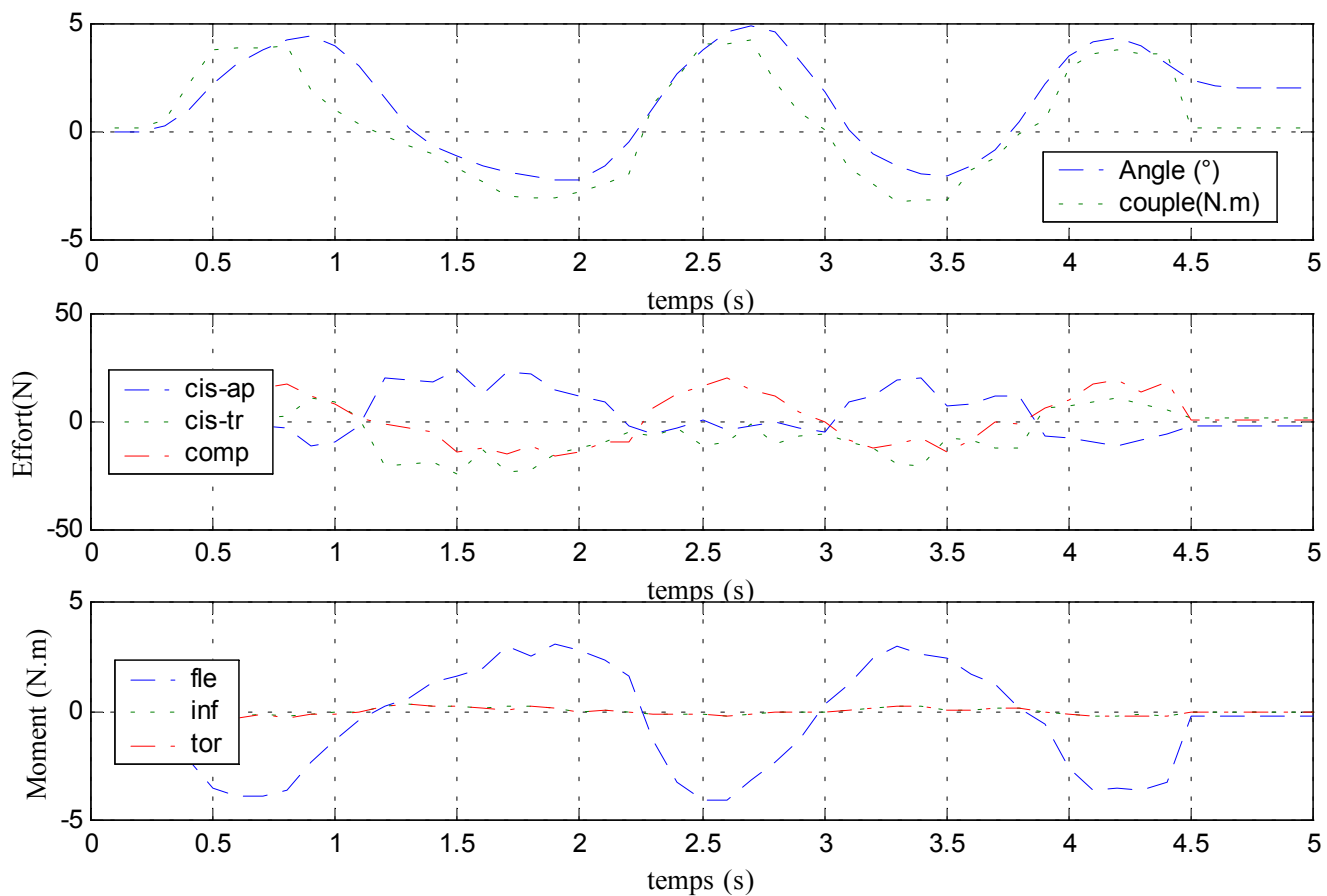
Courbe rotation-couple en hystérésis



Déplacements



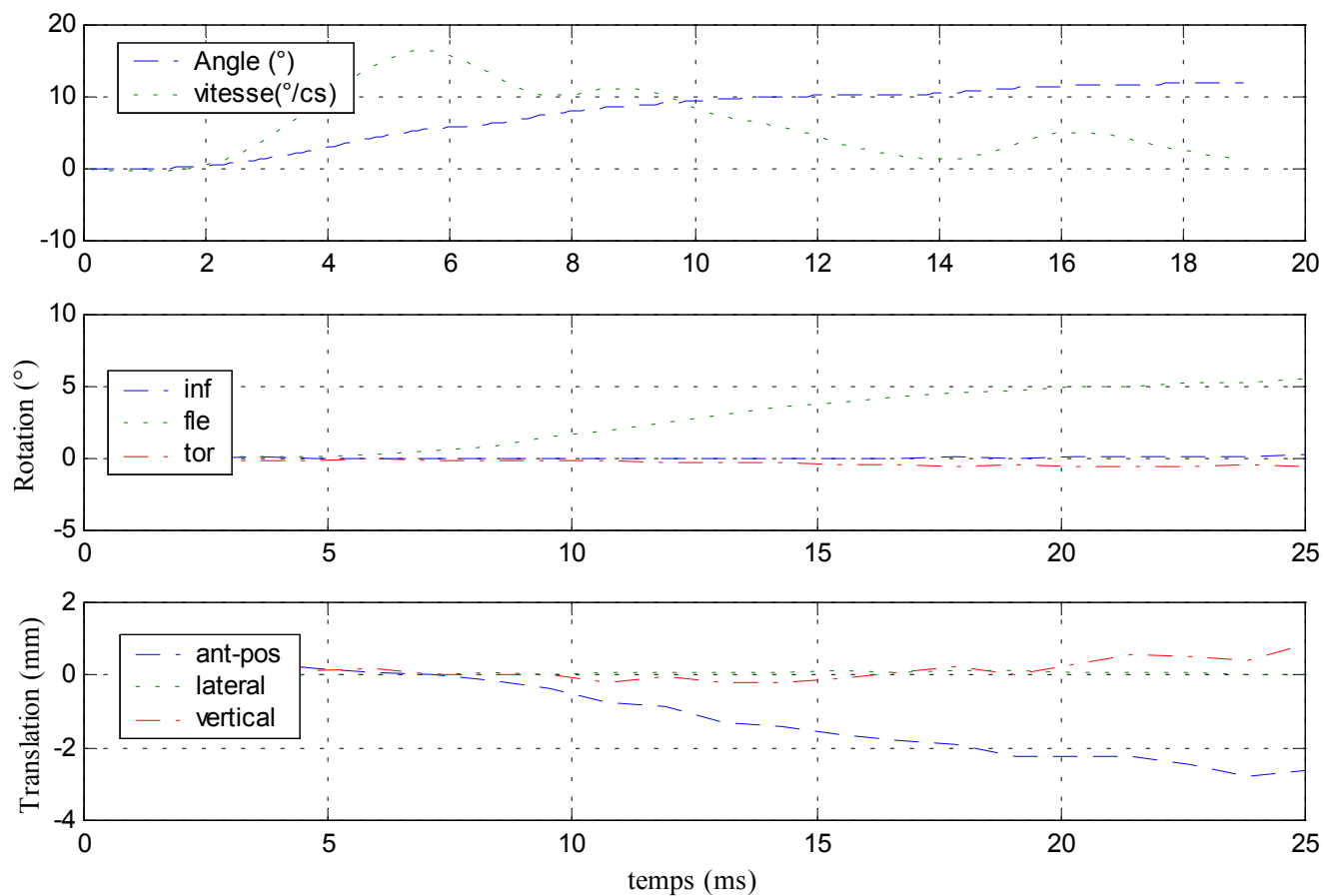
Efforts et moments inférieurs



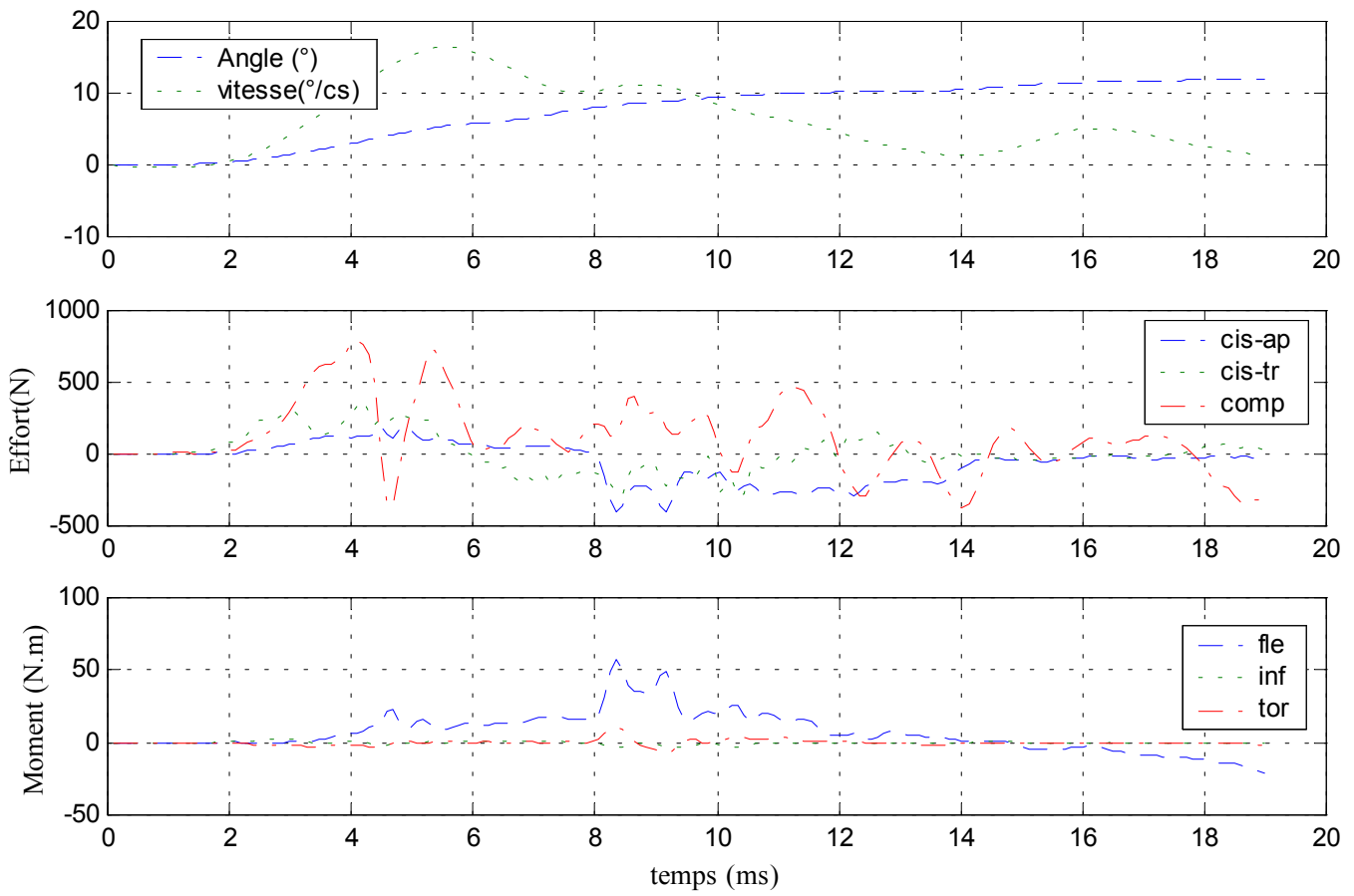
B. Dynamique

✓ Configuration saine

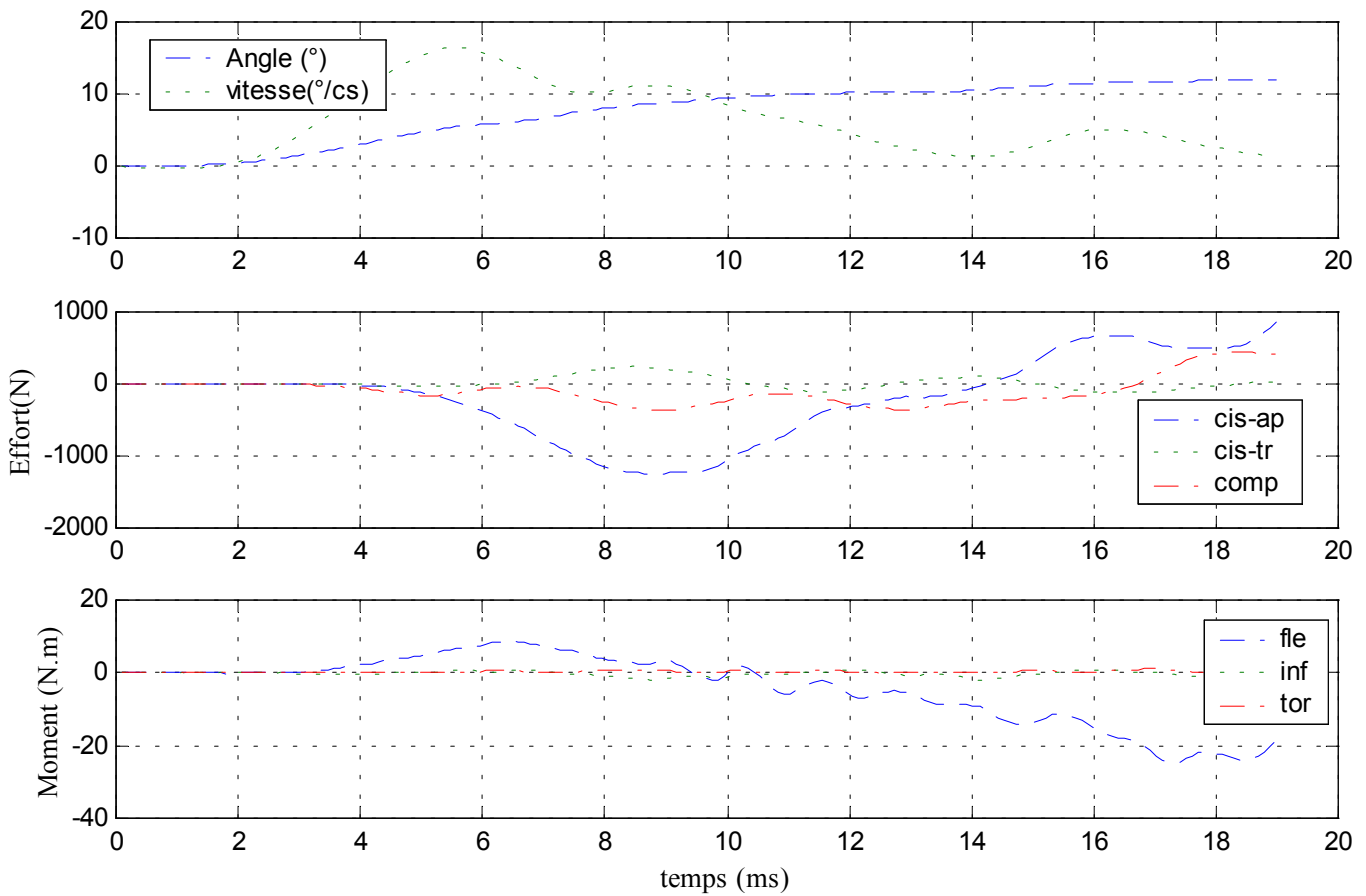
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

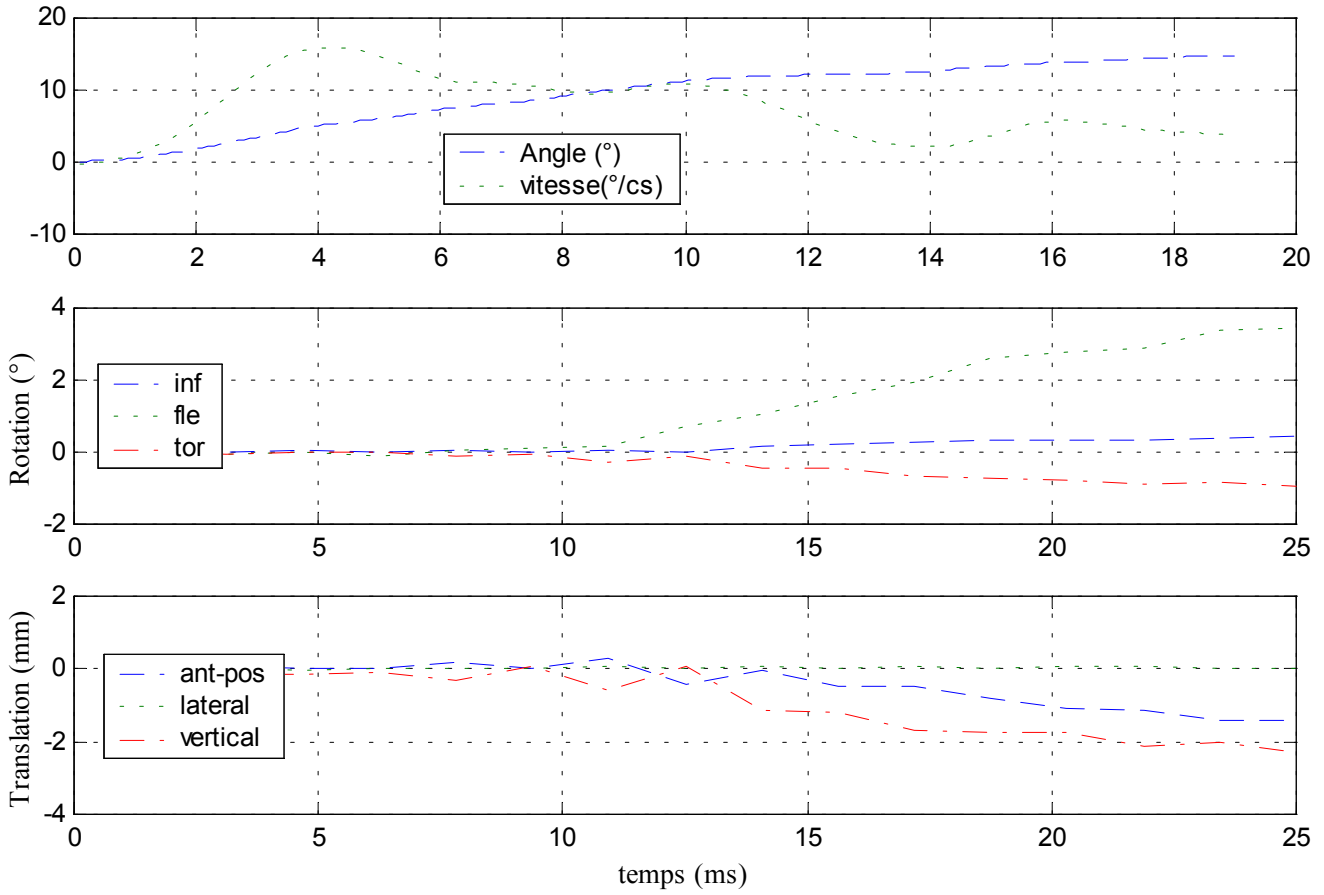


Efforts et moments inférieurs

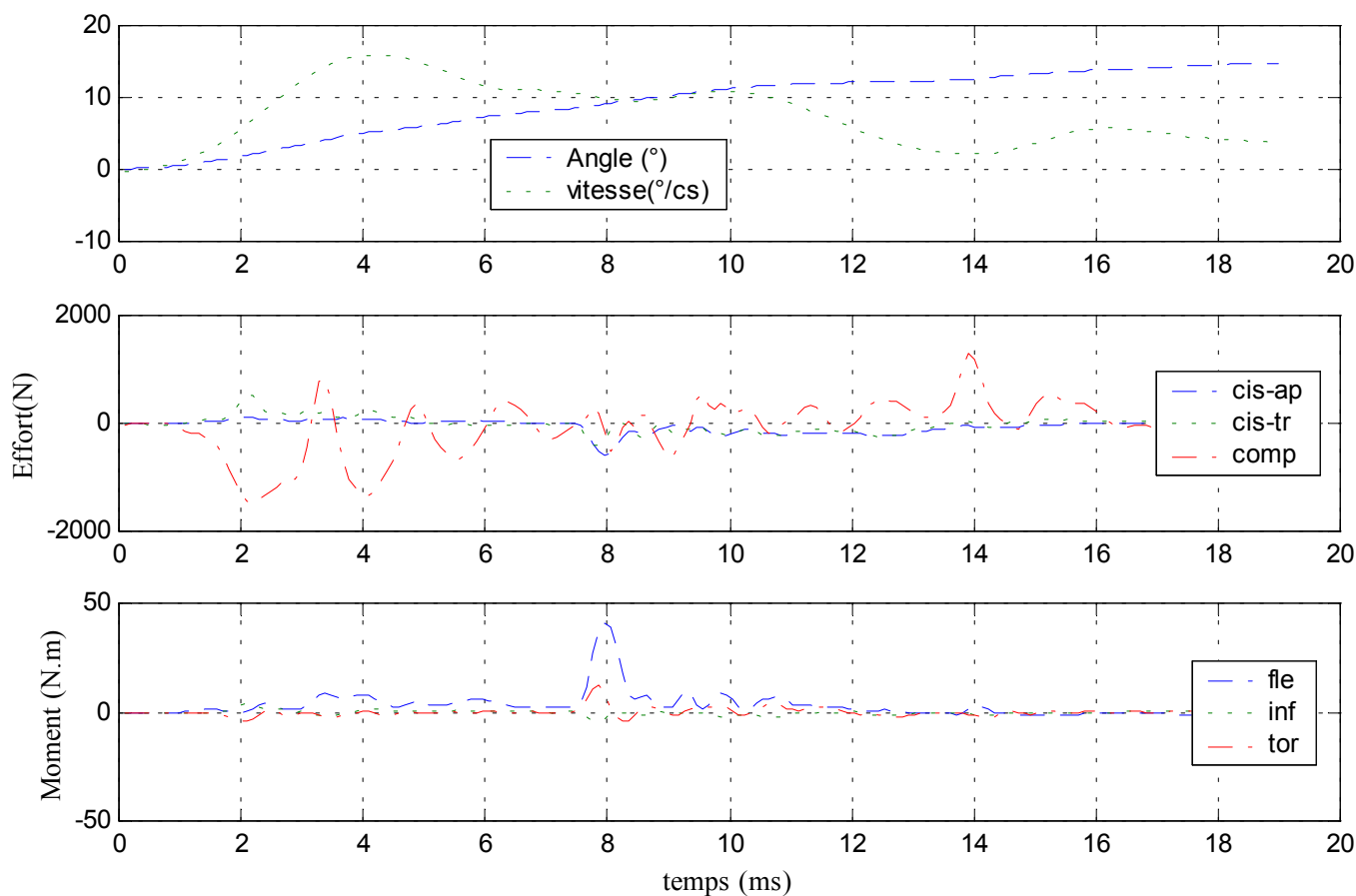


✓ Configuration avec ligaments jaunes coupés

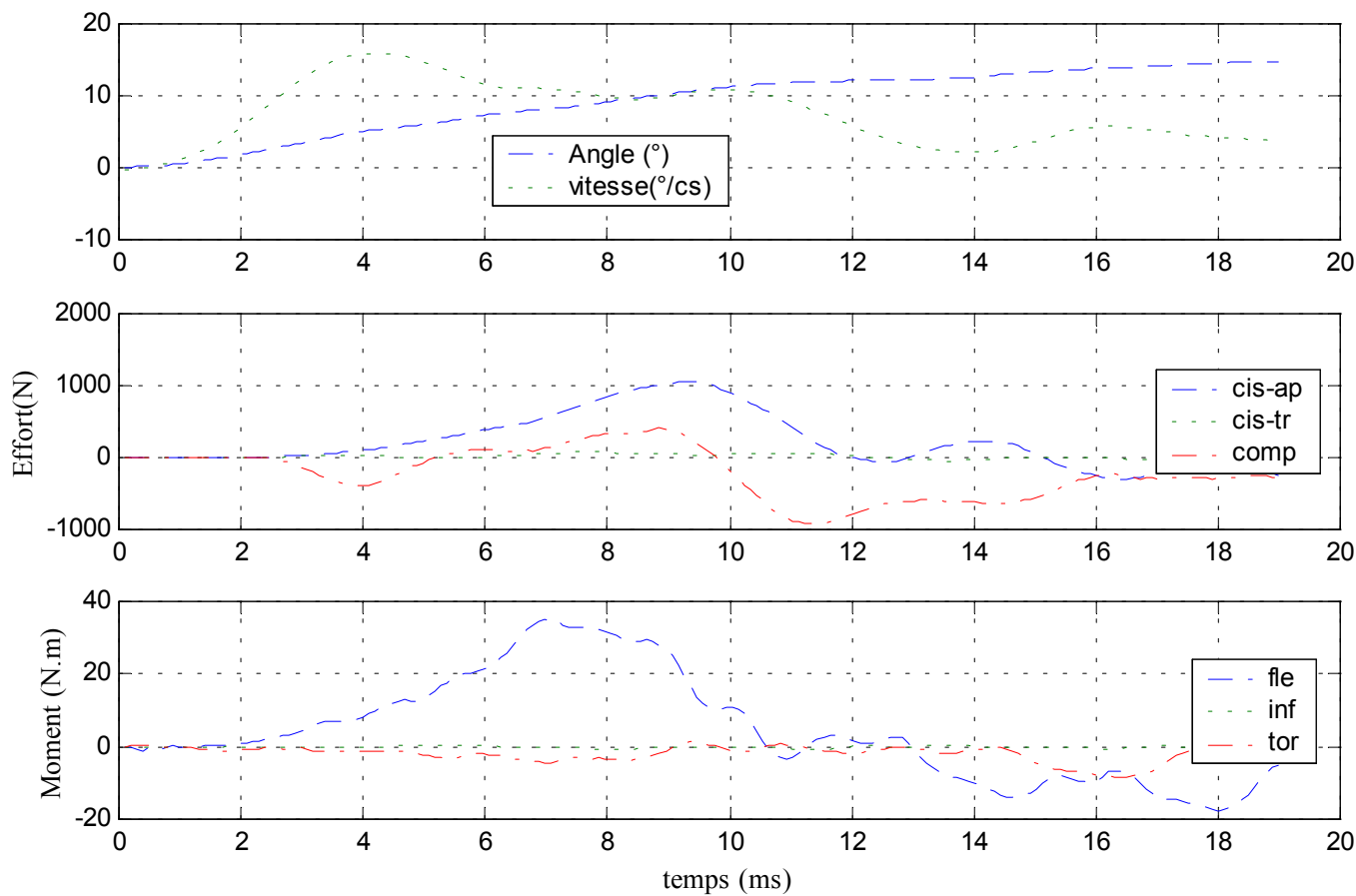
Déplacements



Efforts et moments supérieurs



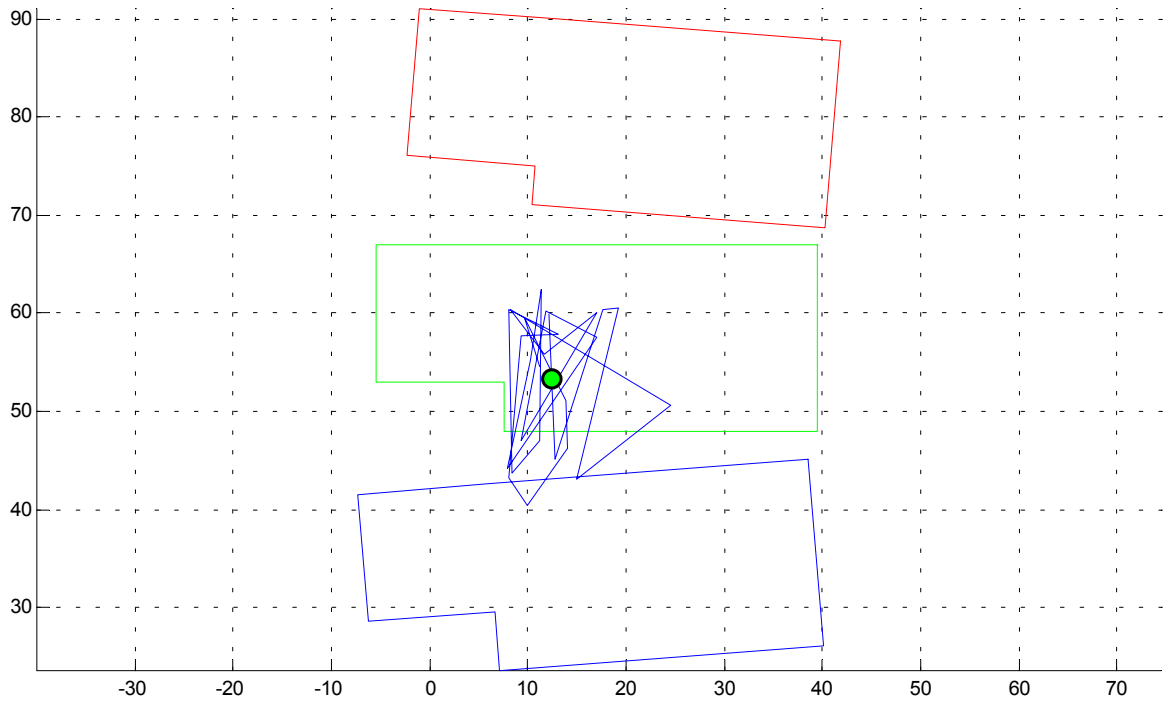
Efforts et moments inférieurs



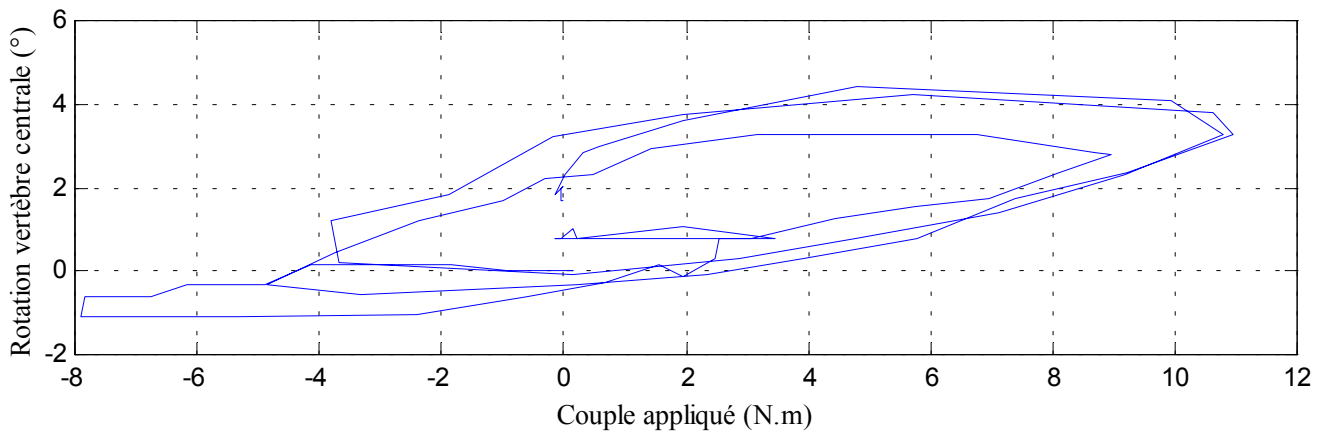
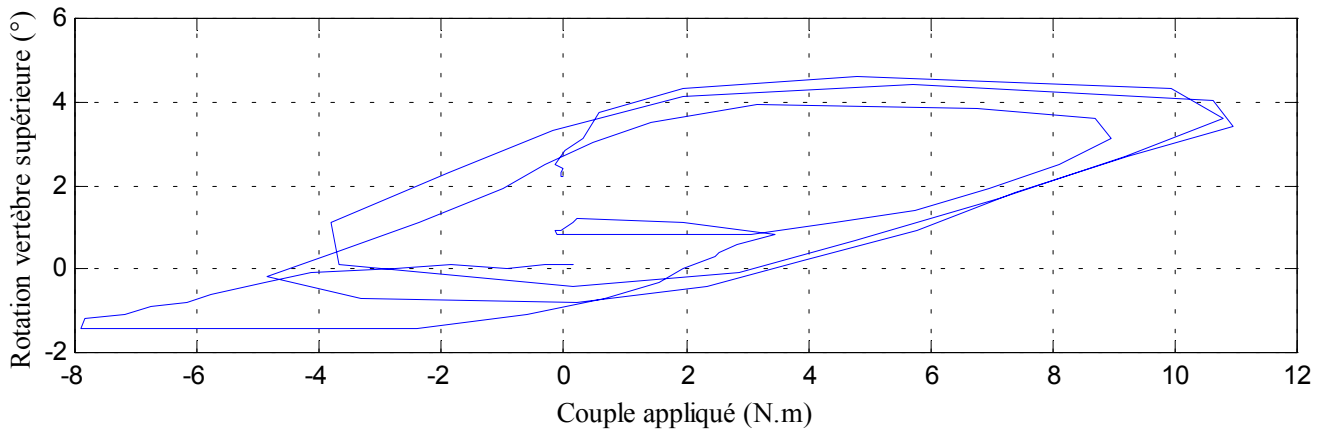
3- Essai 03 – T11L1 – flexion

A. Statique

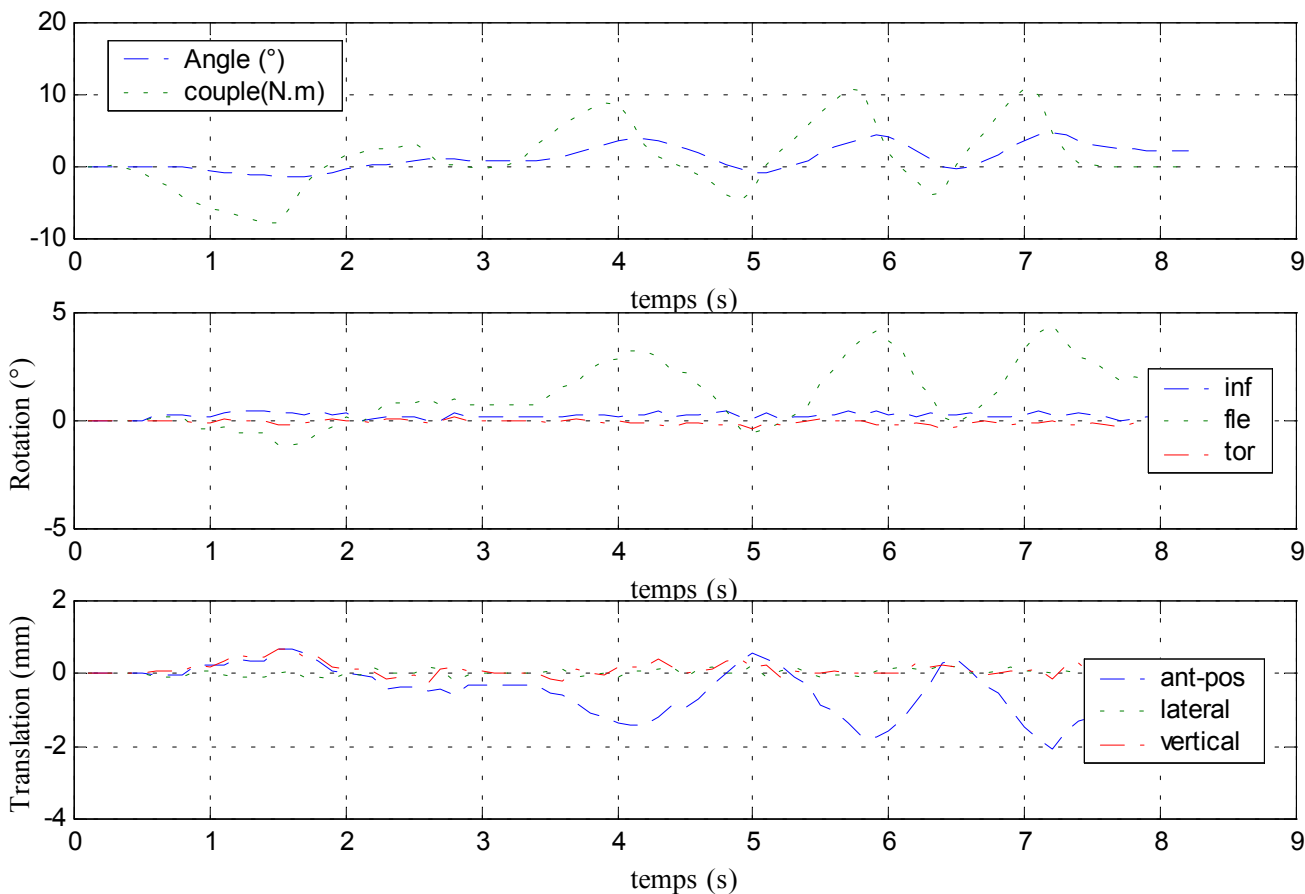
Centre instantané de rotation



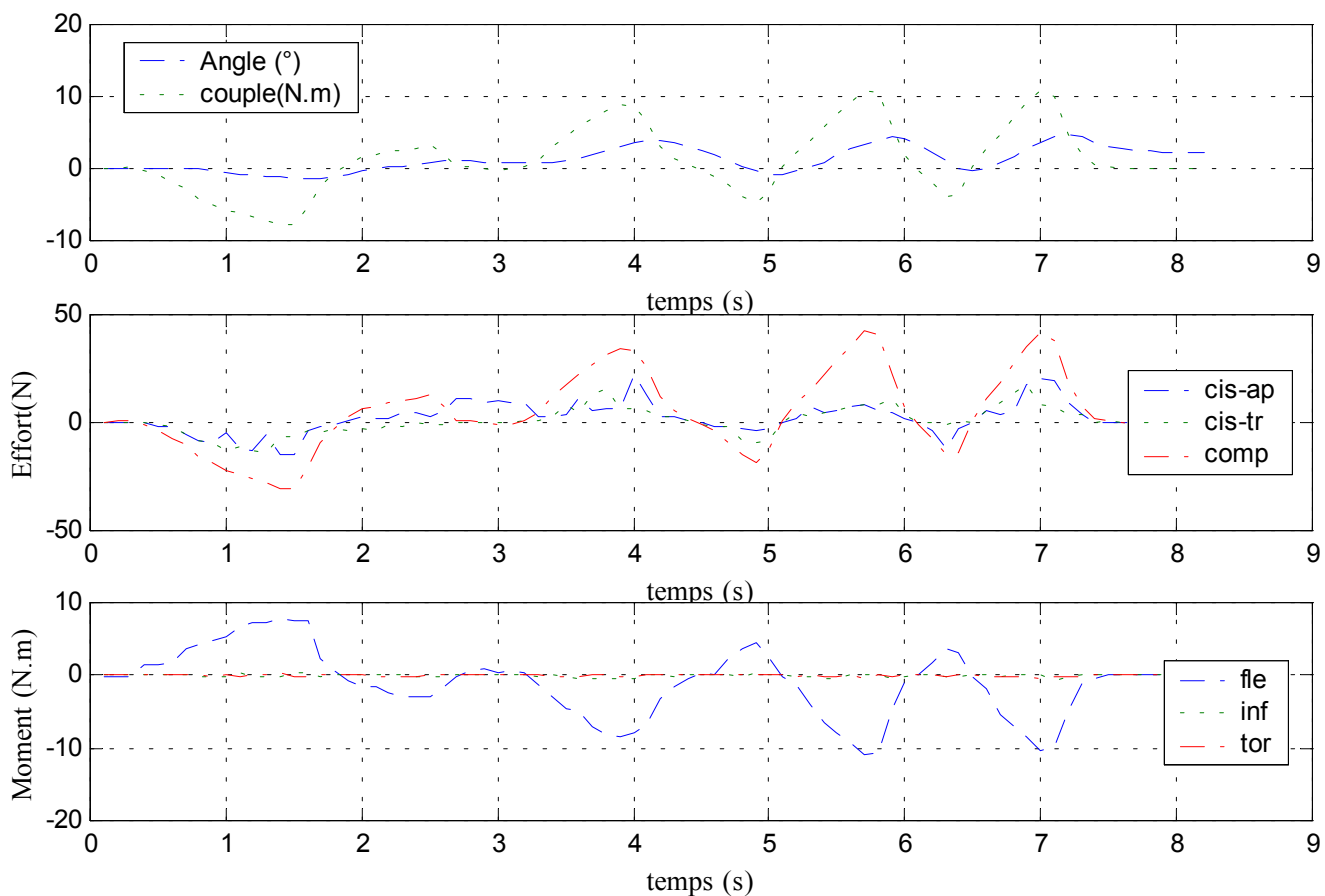
Courbe rotation-couple en hystérésis



Déplacements



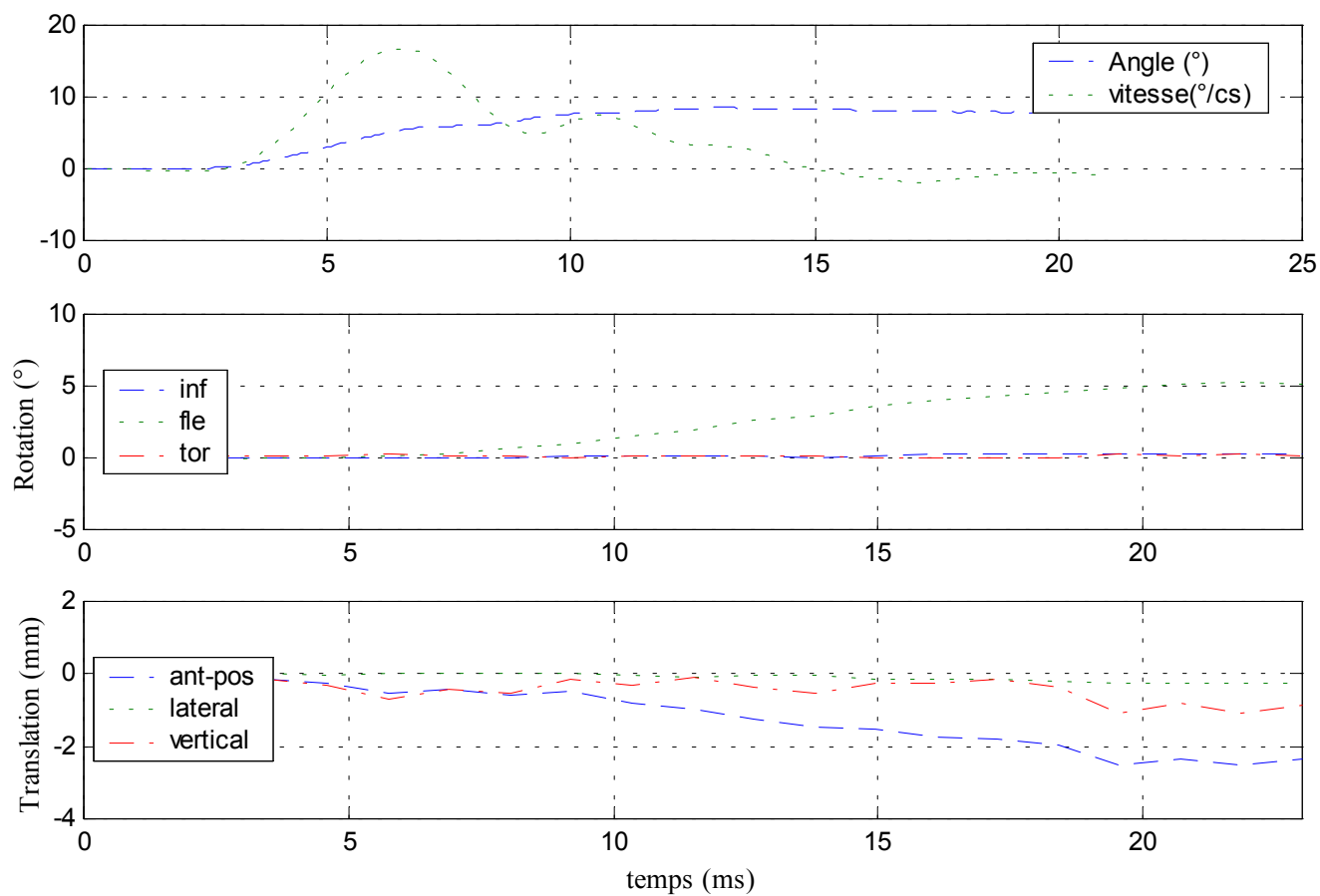
Efforts et moments inférieurs



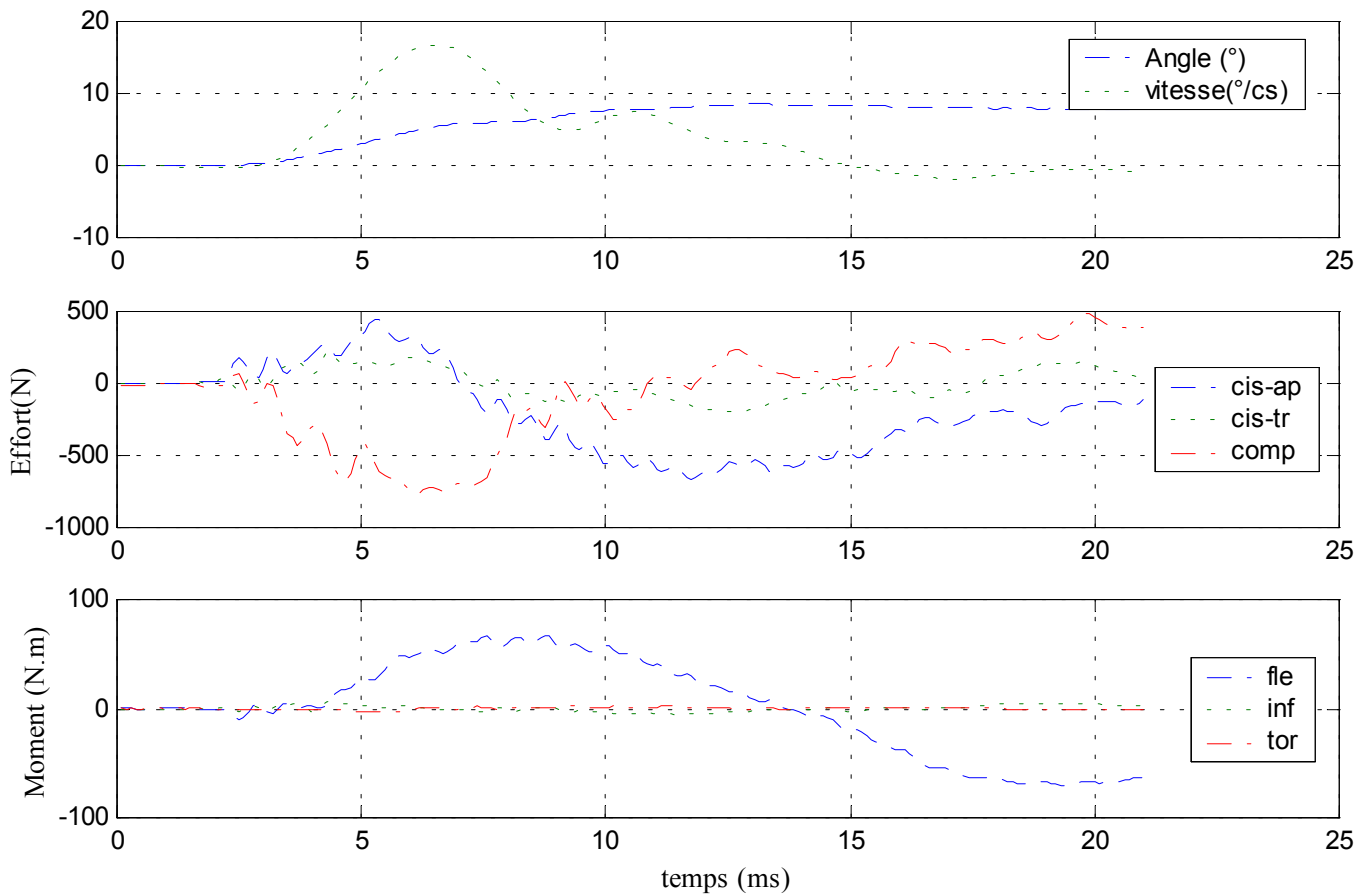
B. Dynamique

✓ Configuration saine

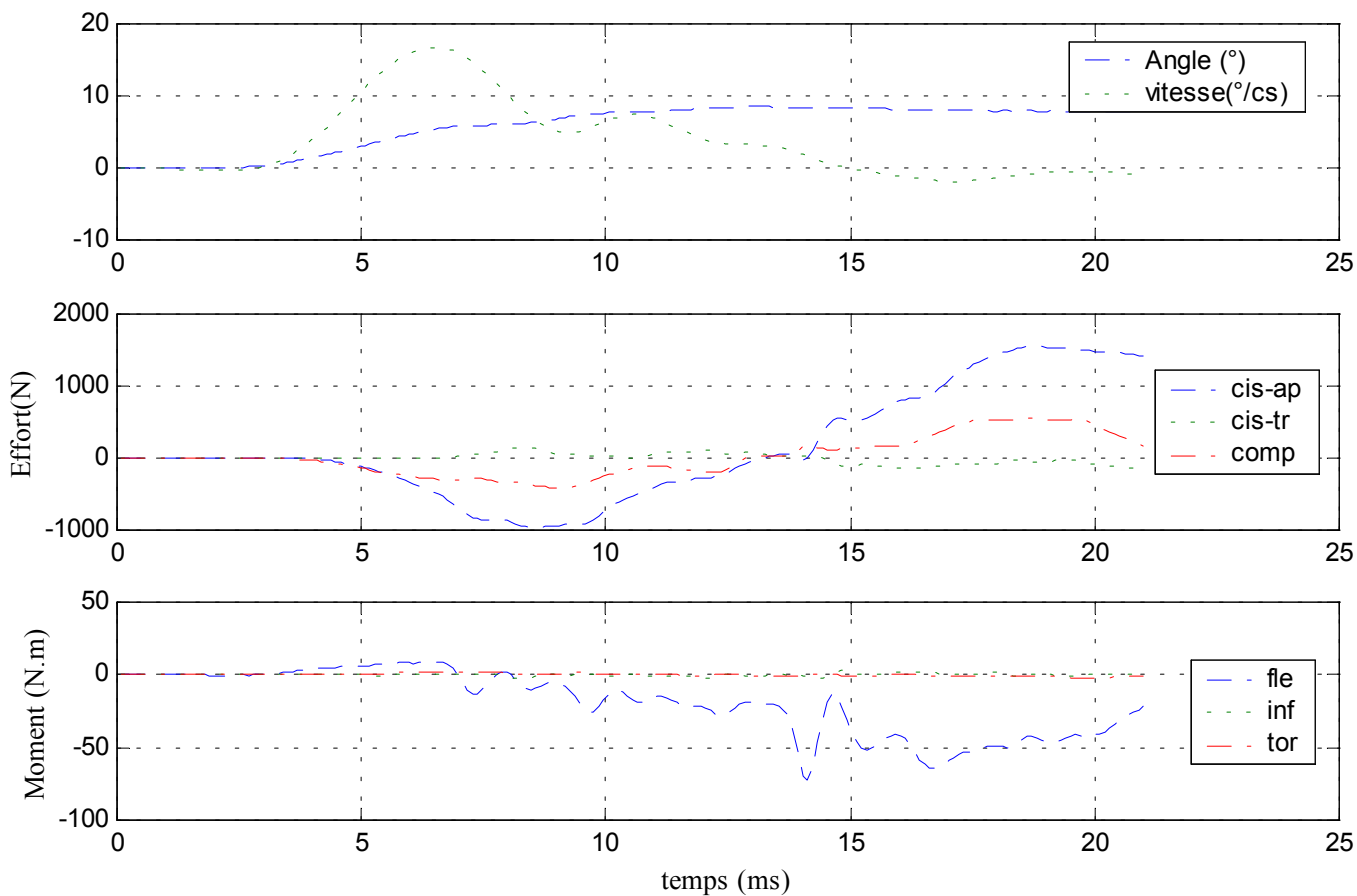
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

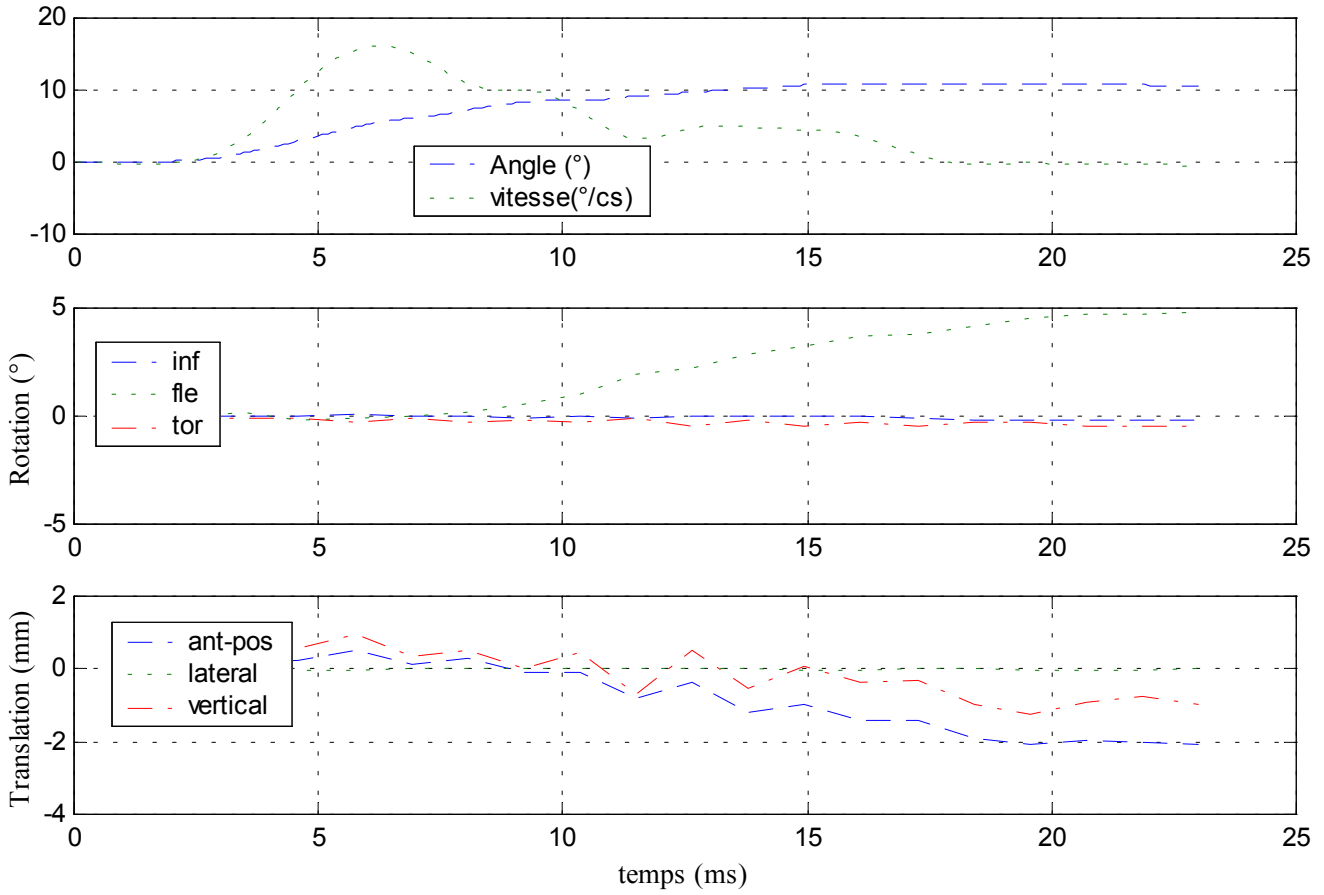


Efforts et moments inférieurs

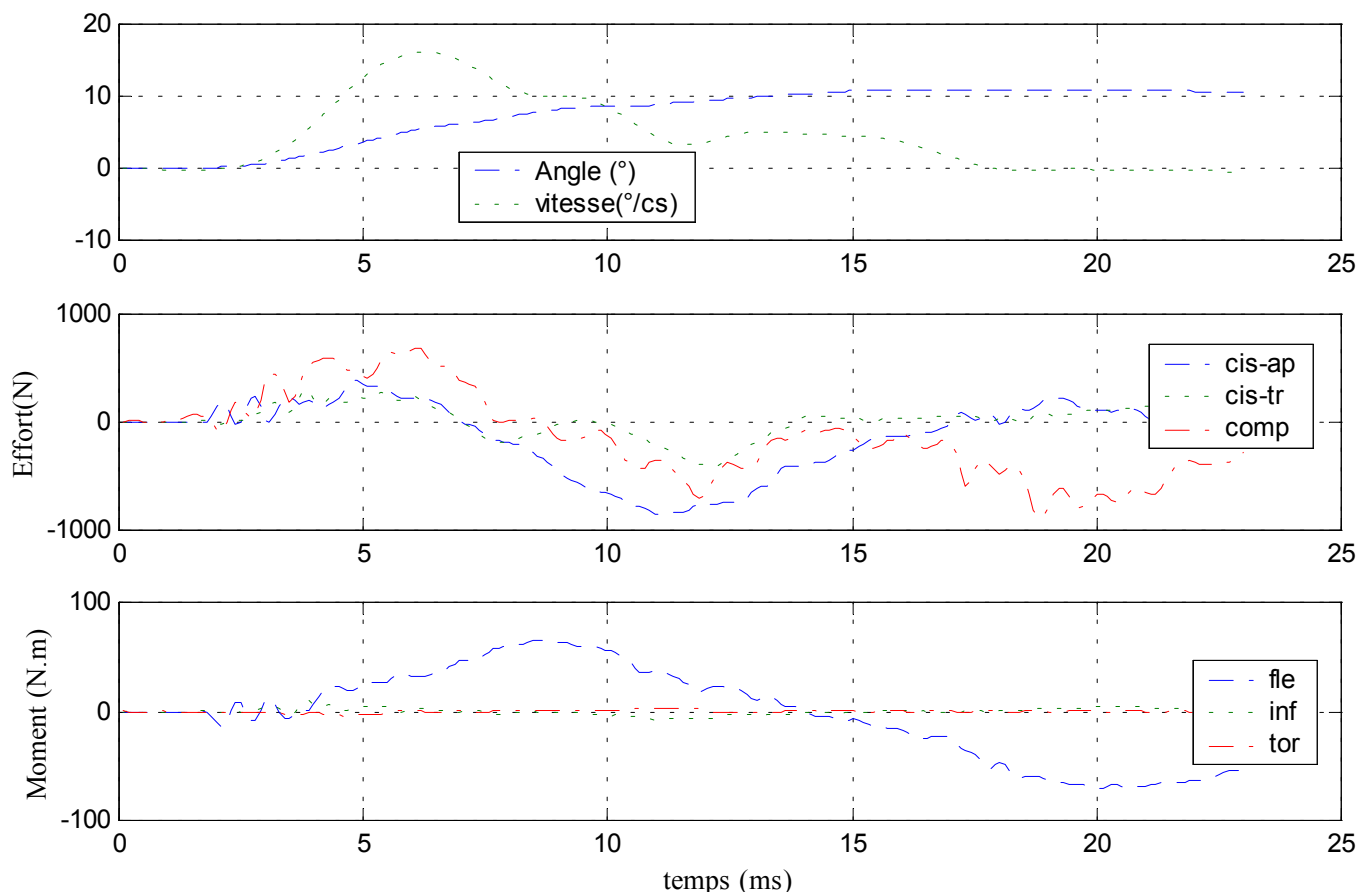


✓ Configuration avec ligaments épineux coupés

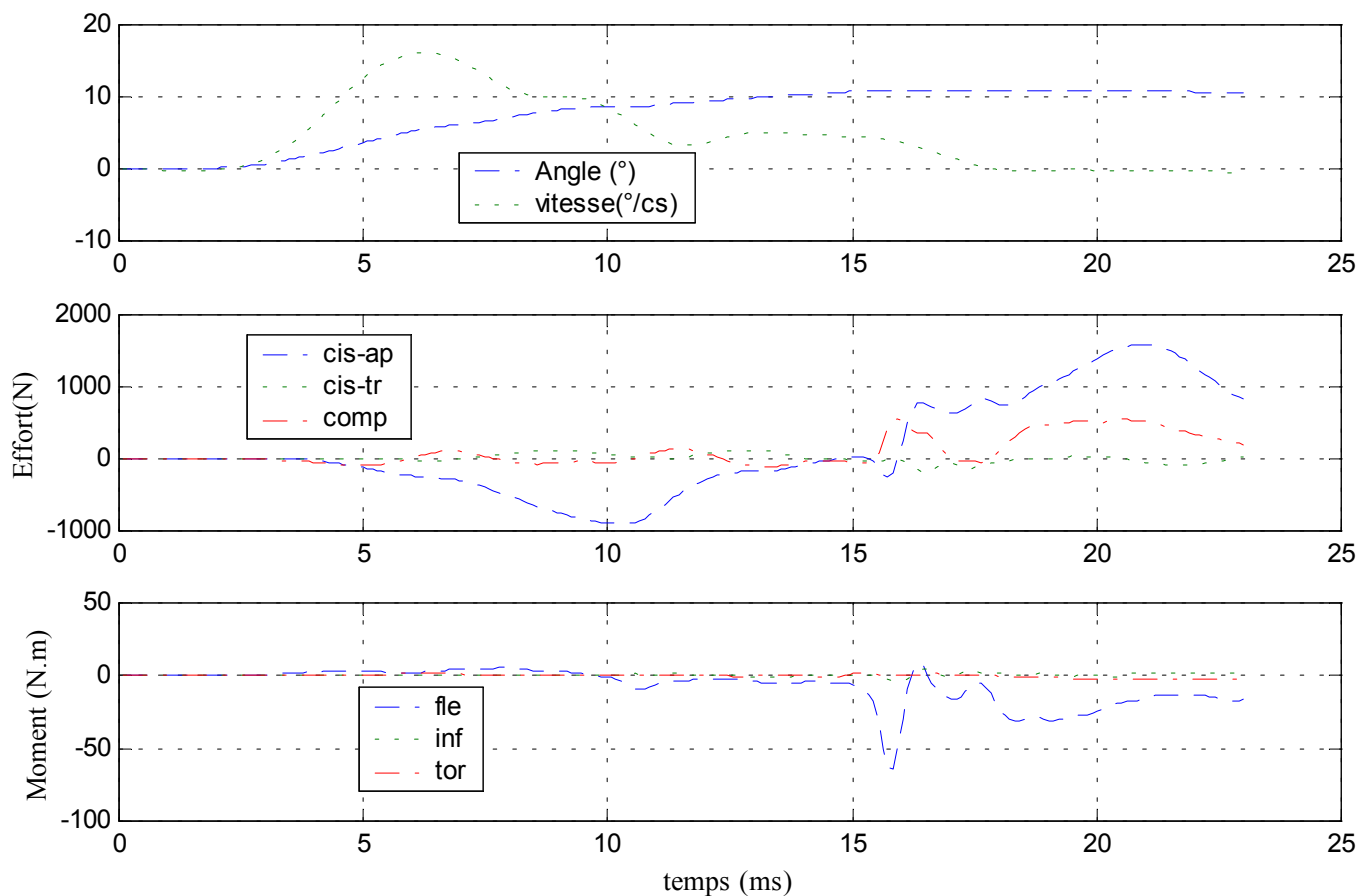
Déplacements



Efforts et moments supérieurs



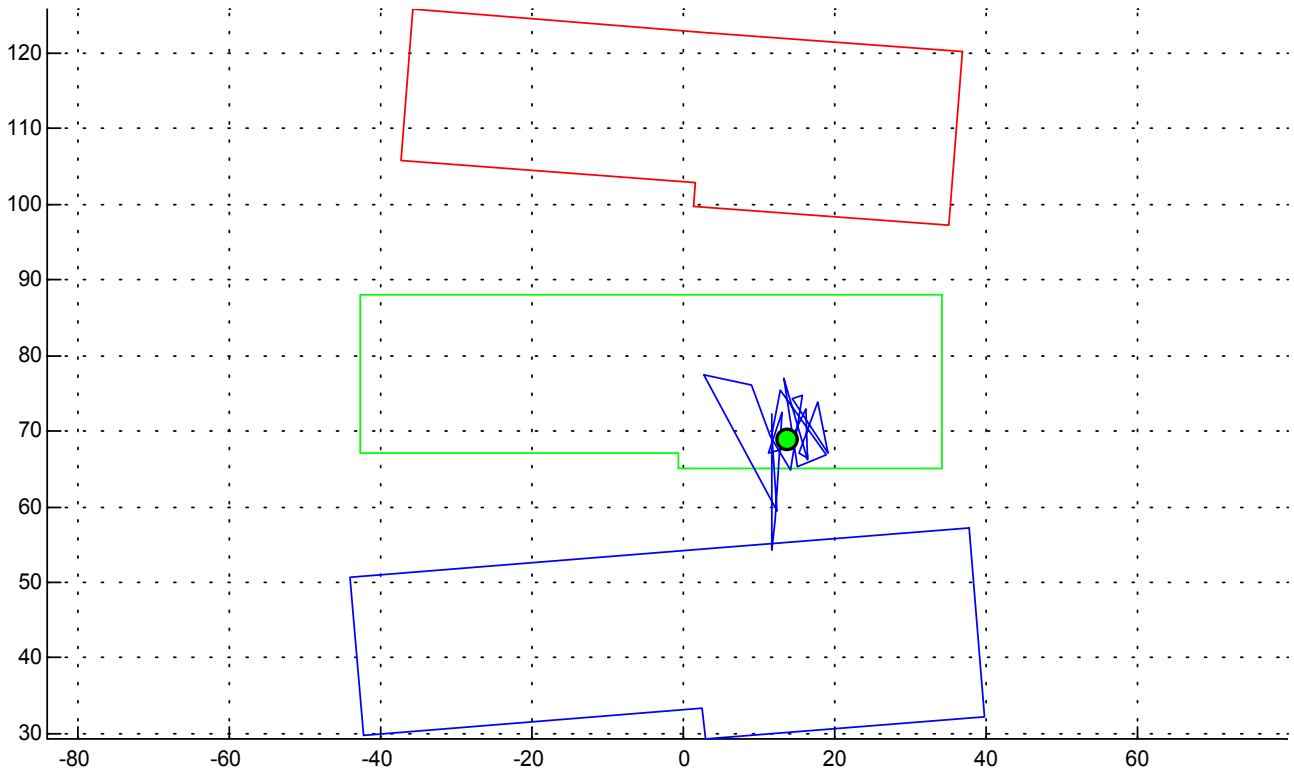
Efforts et moments inférieurs



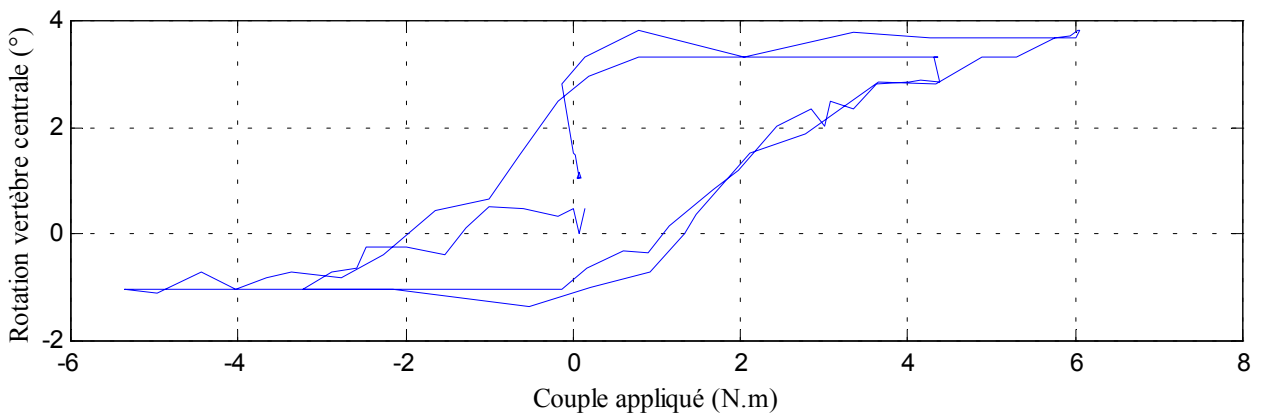
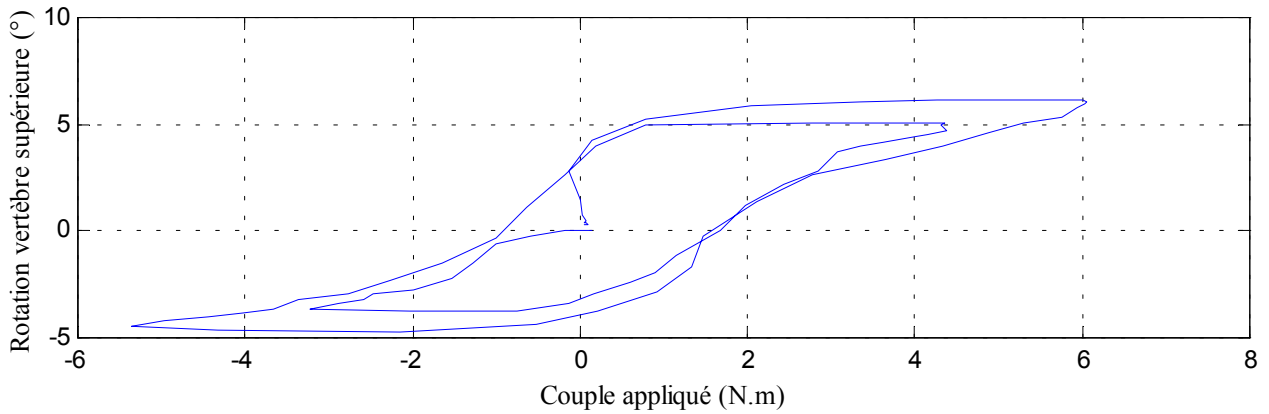
4- Essai 04 – L2L4 – flexion

A. Statique

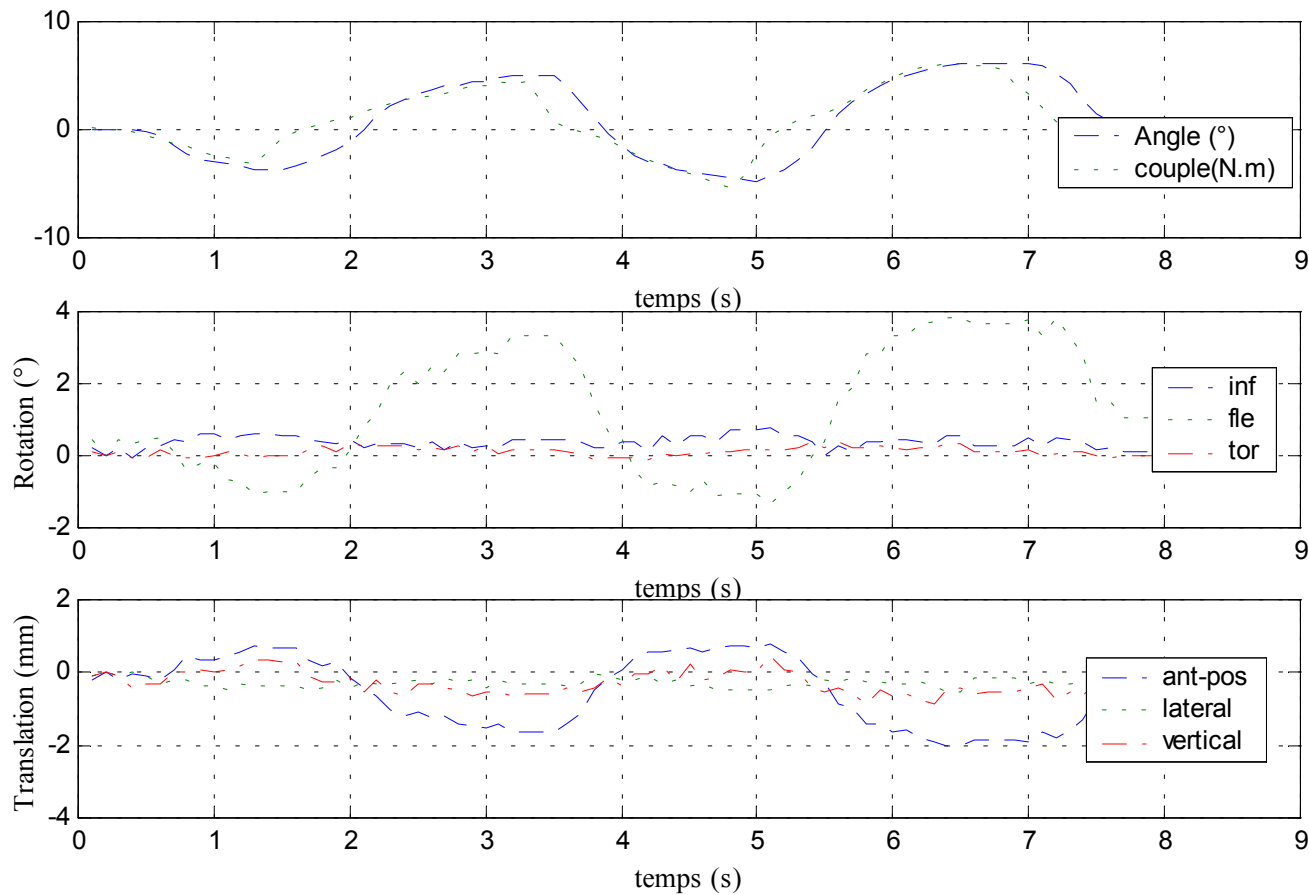
Centre instantané de rotation



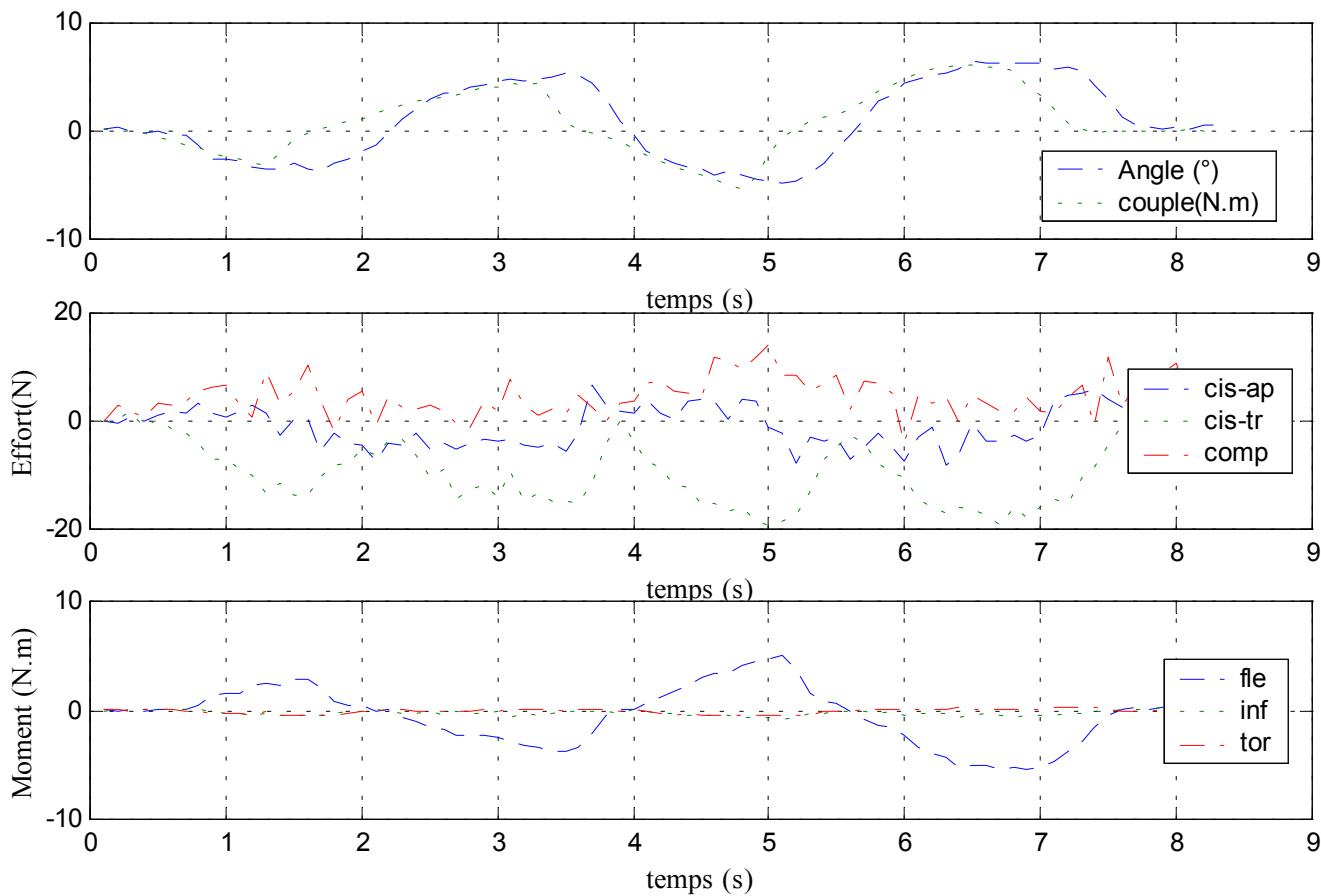
Courbe rotation-couple en hystérésis



Déplacements



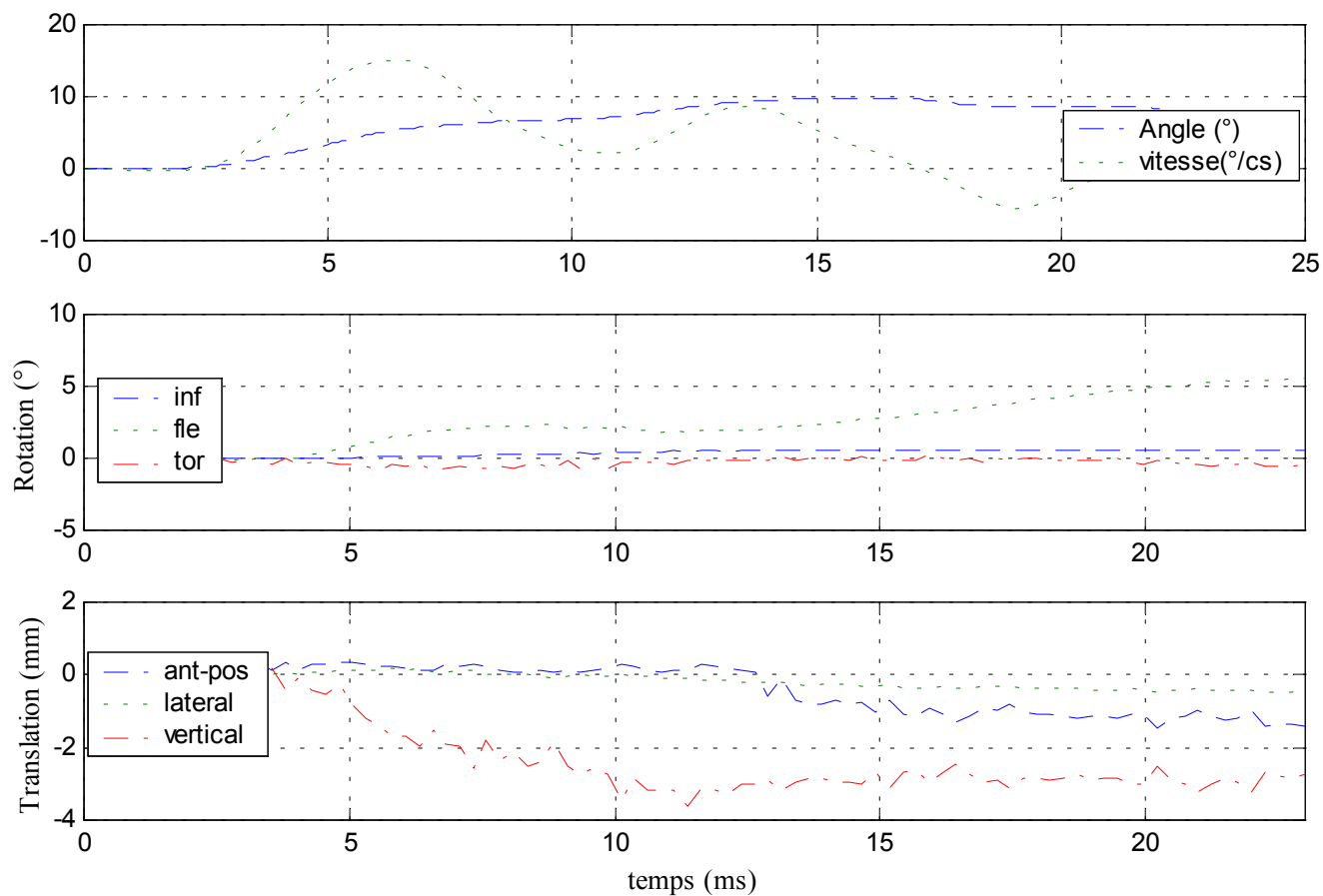
Efforts et moments inférieurs



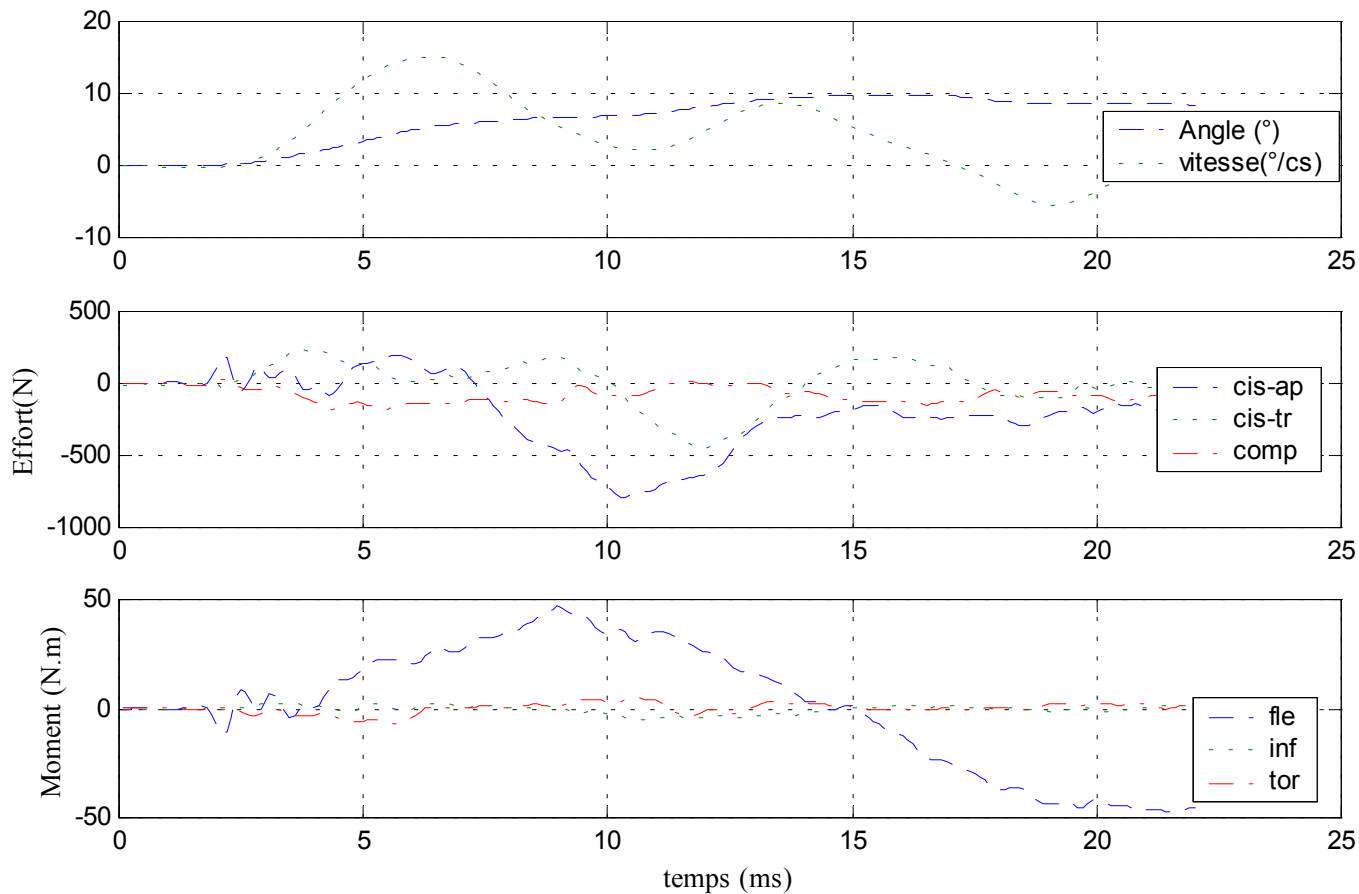
B. Dynamique

✓ Configuration saine

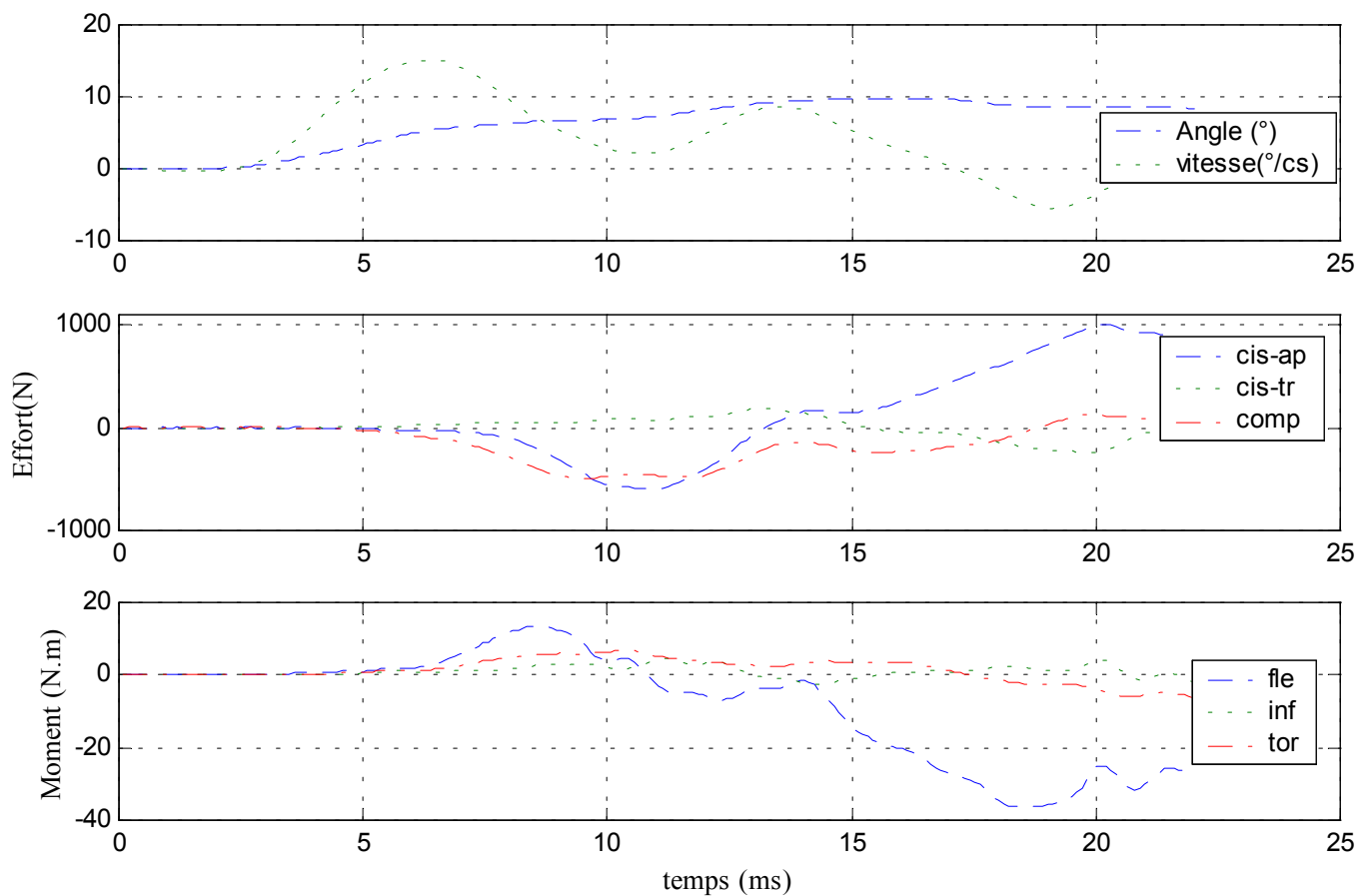
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

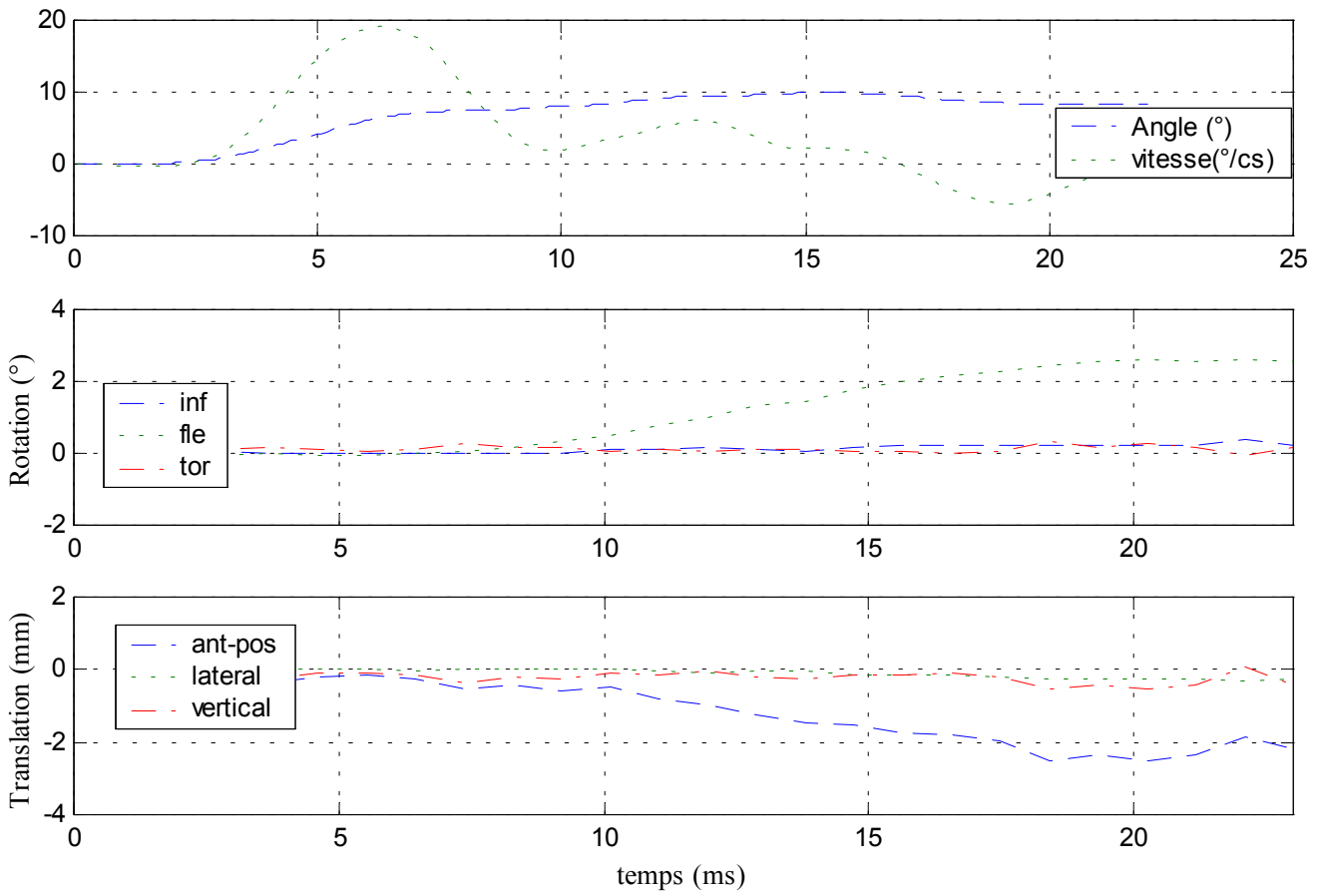


Efforts et moments inférieurs

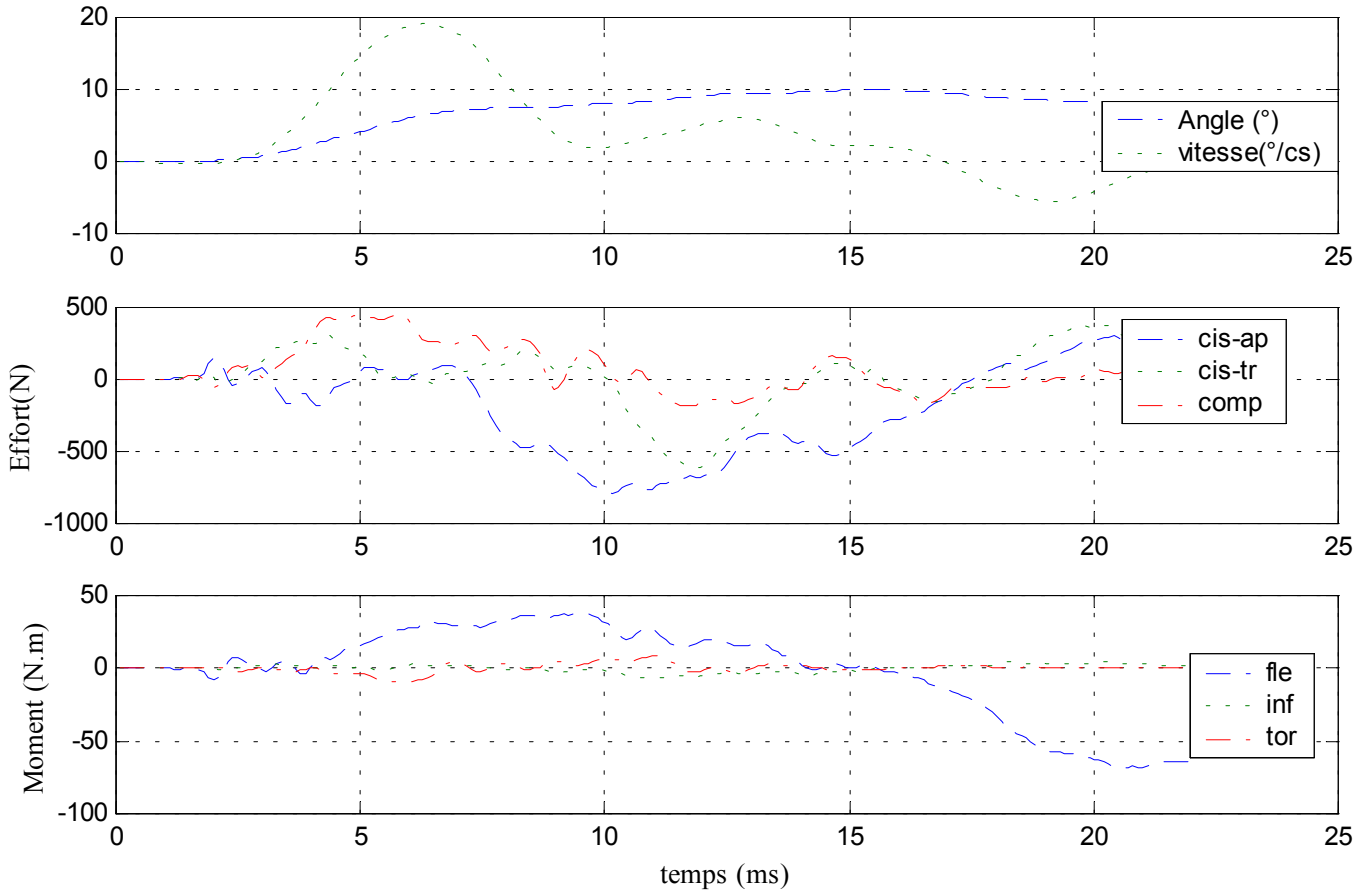


✓ Configuration avec ligaments épineux coupés

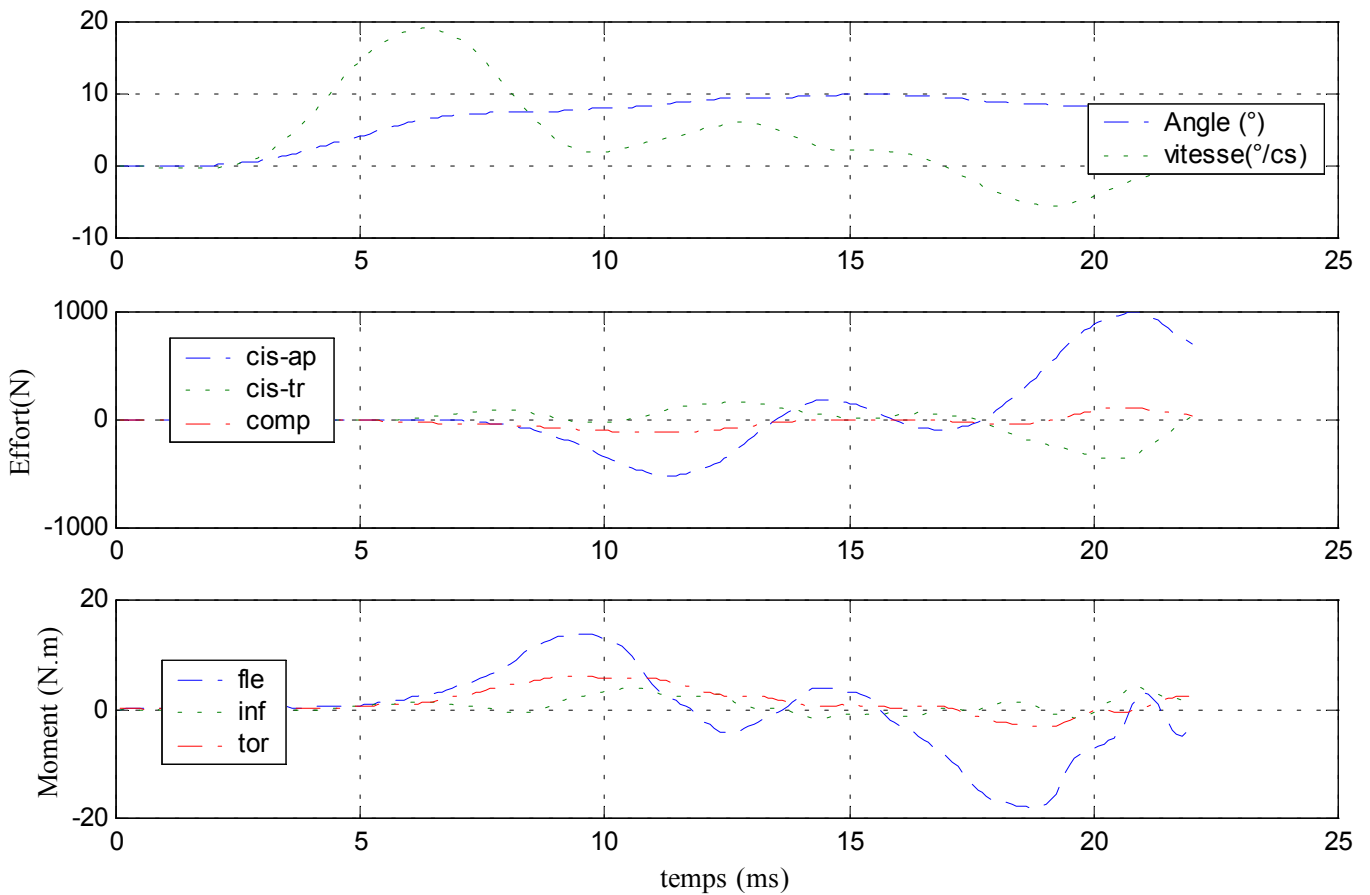
Déplacements



Efforts et moments supérieurs



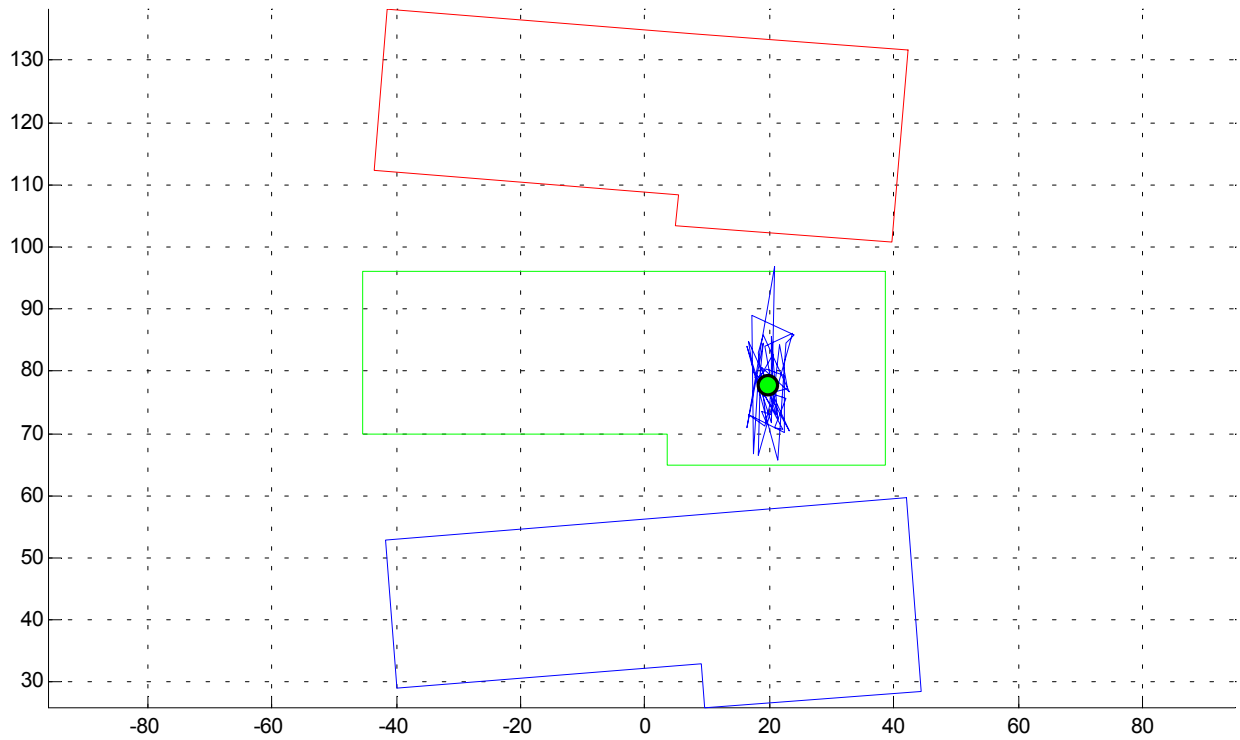
Efforts et moments inférieurs



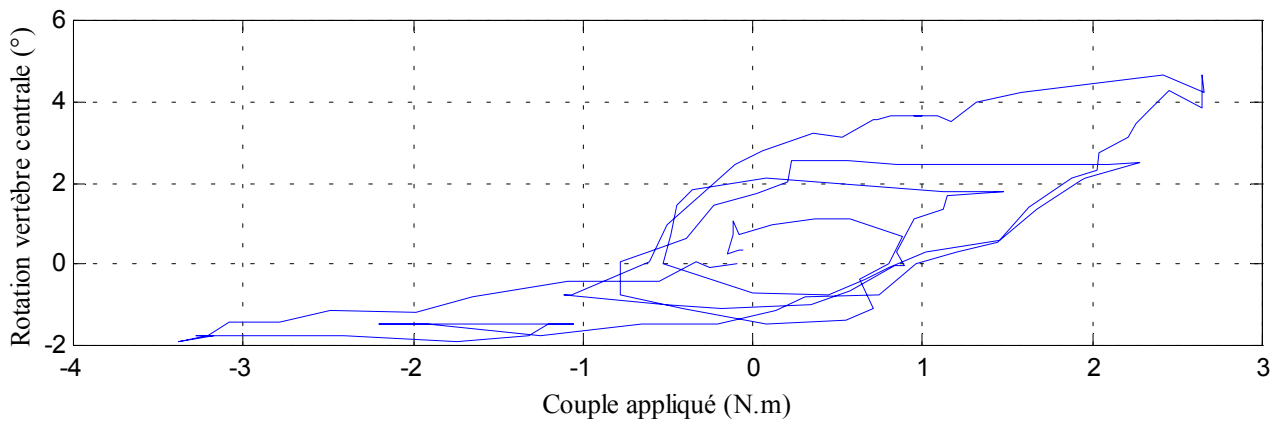
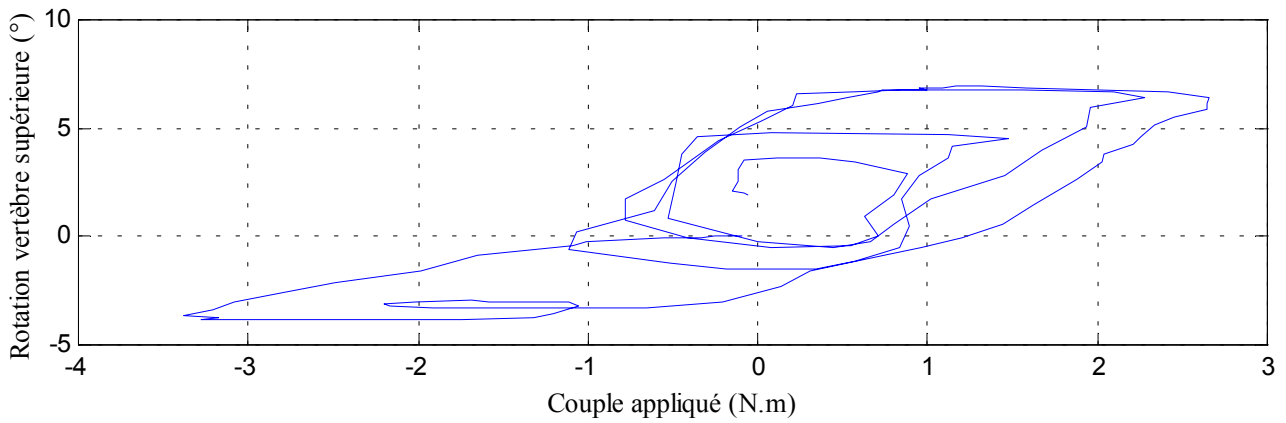
5- Essai 05 – L2L4 – flexion

A. Statique

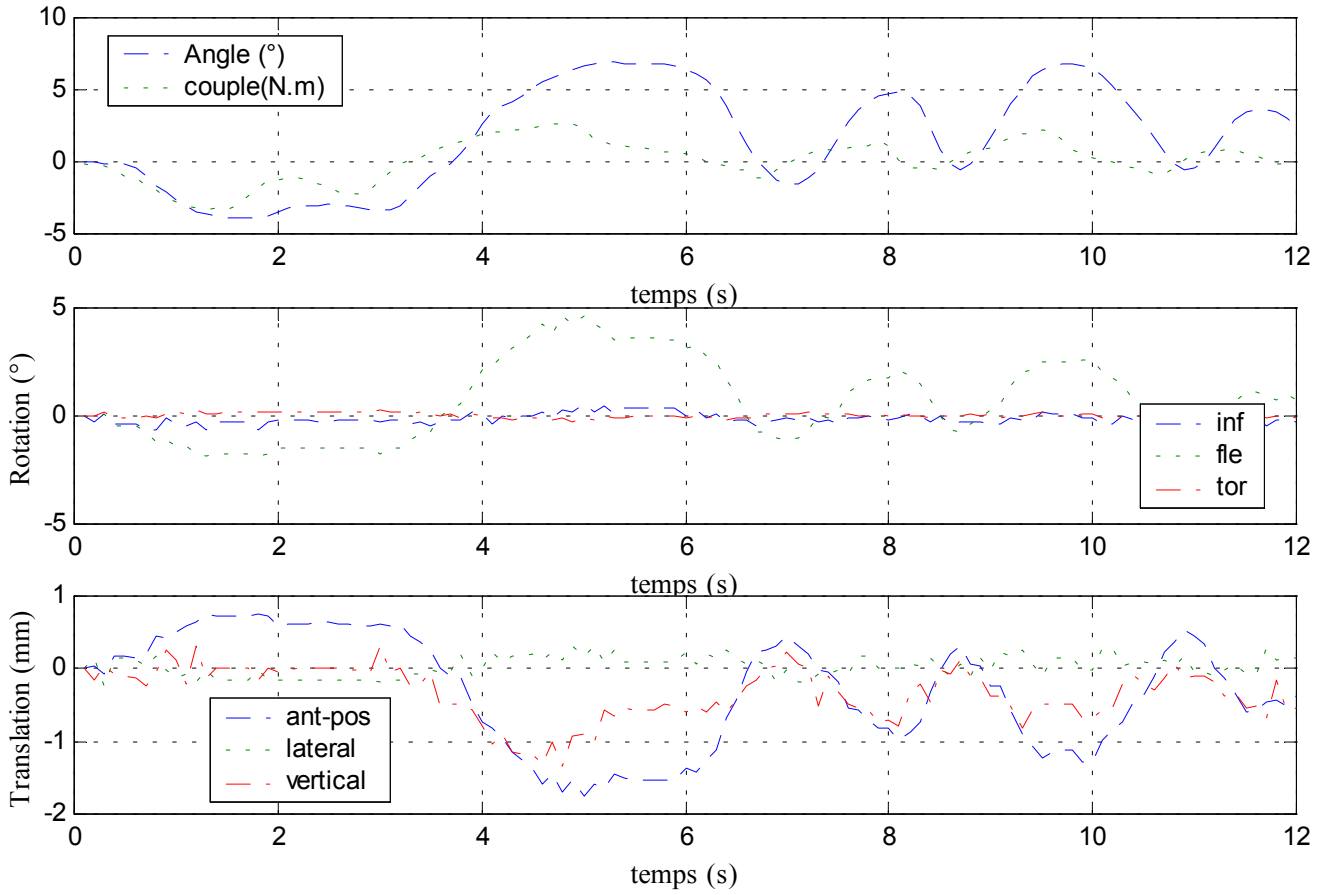
Centre instantané de rotation



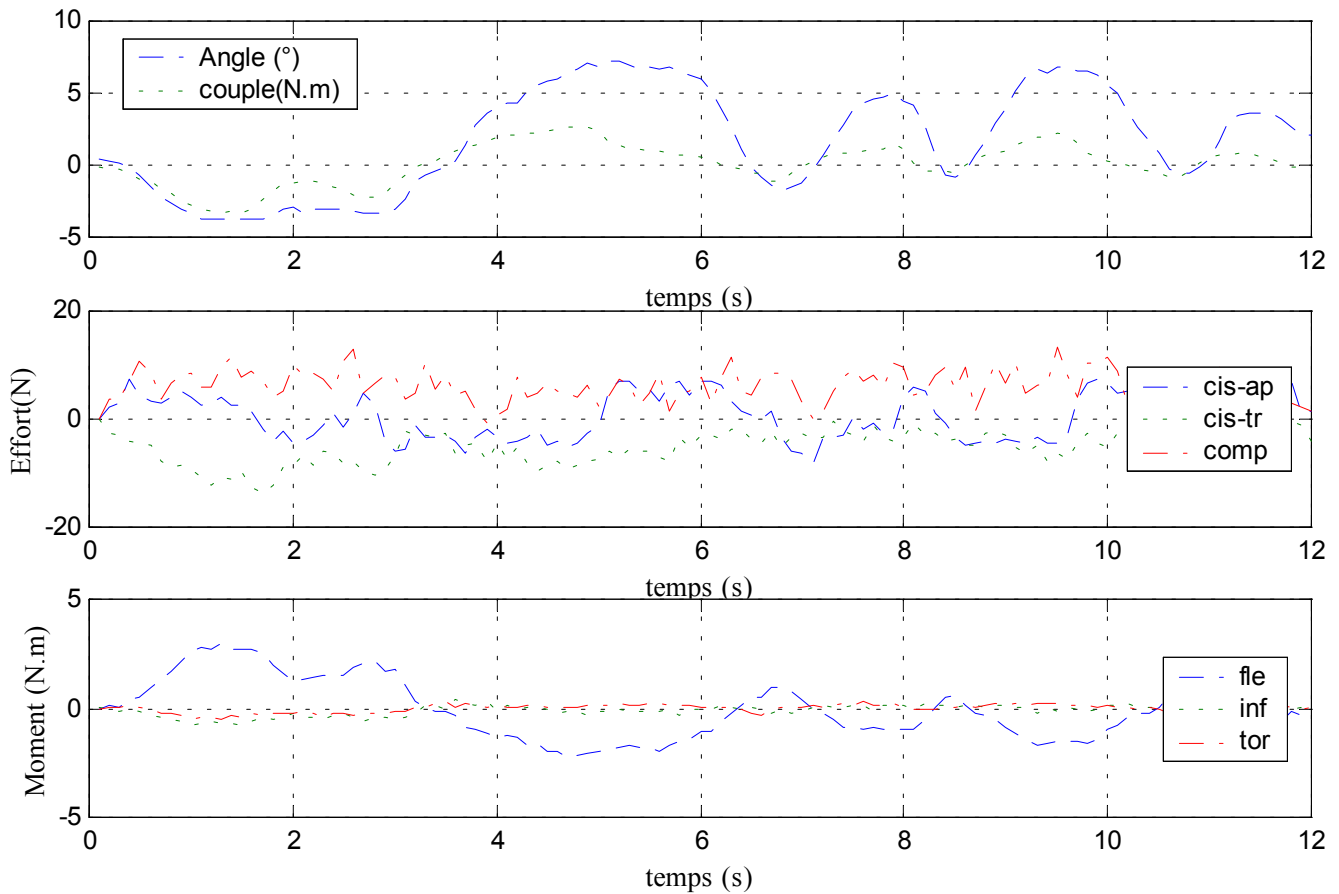
Courbe rotation-couple en hystérésis



Déplacements



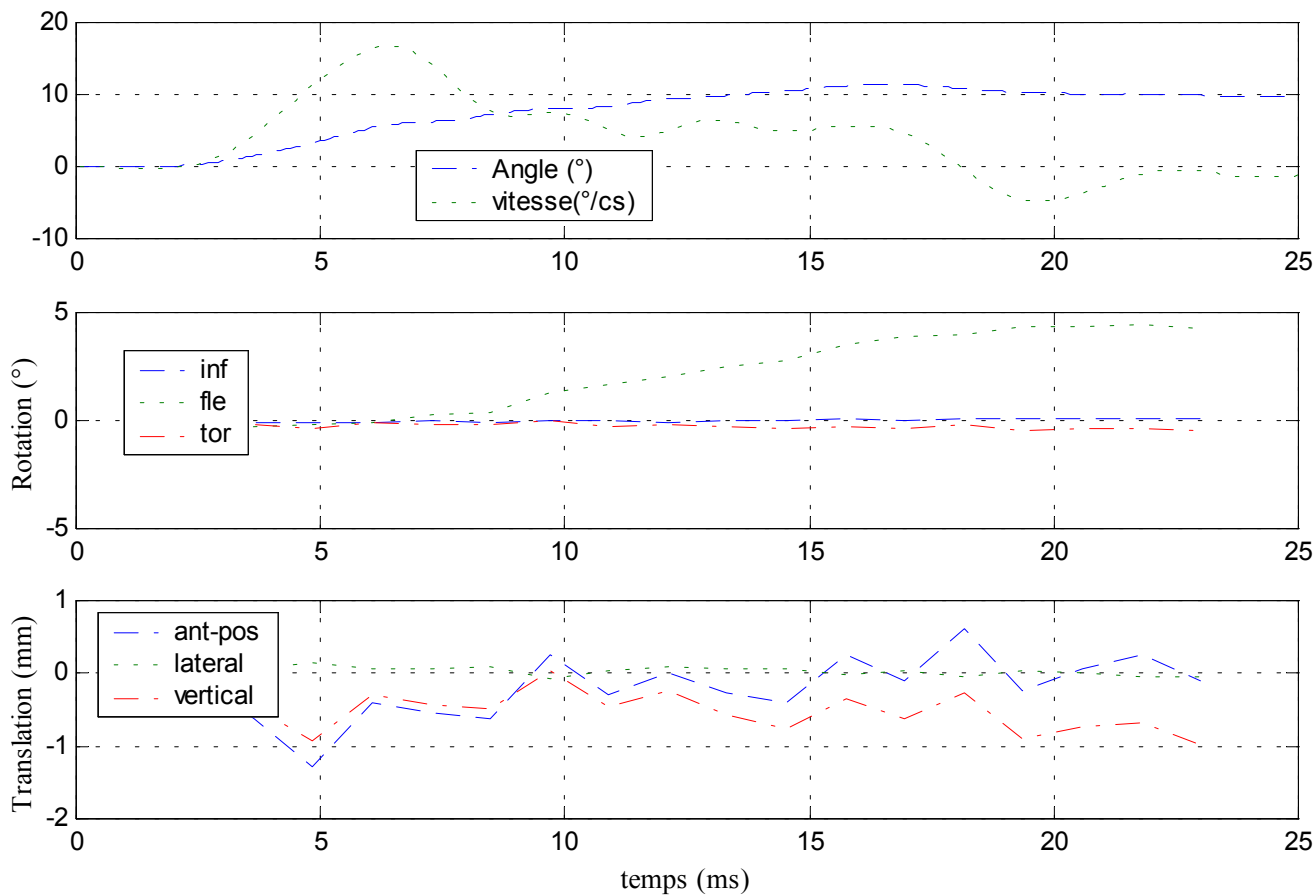
Efforts et moments inférieurs



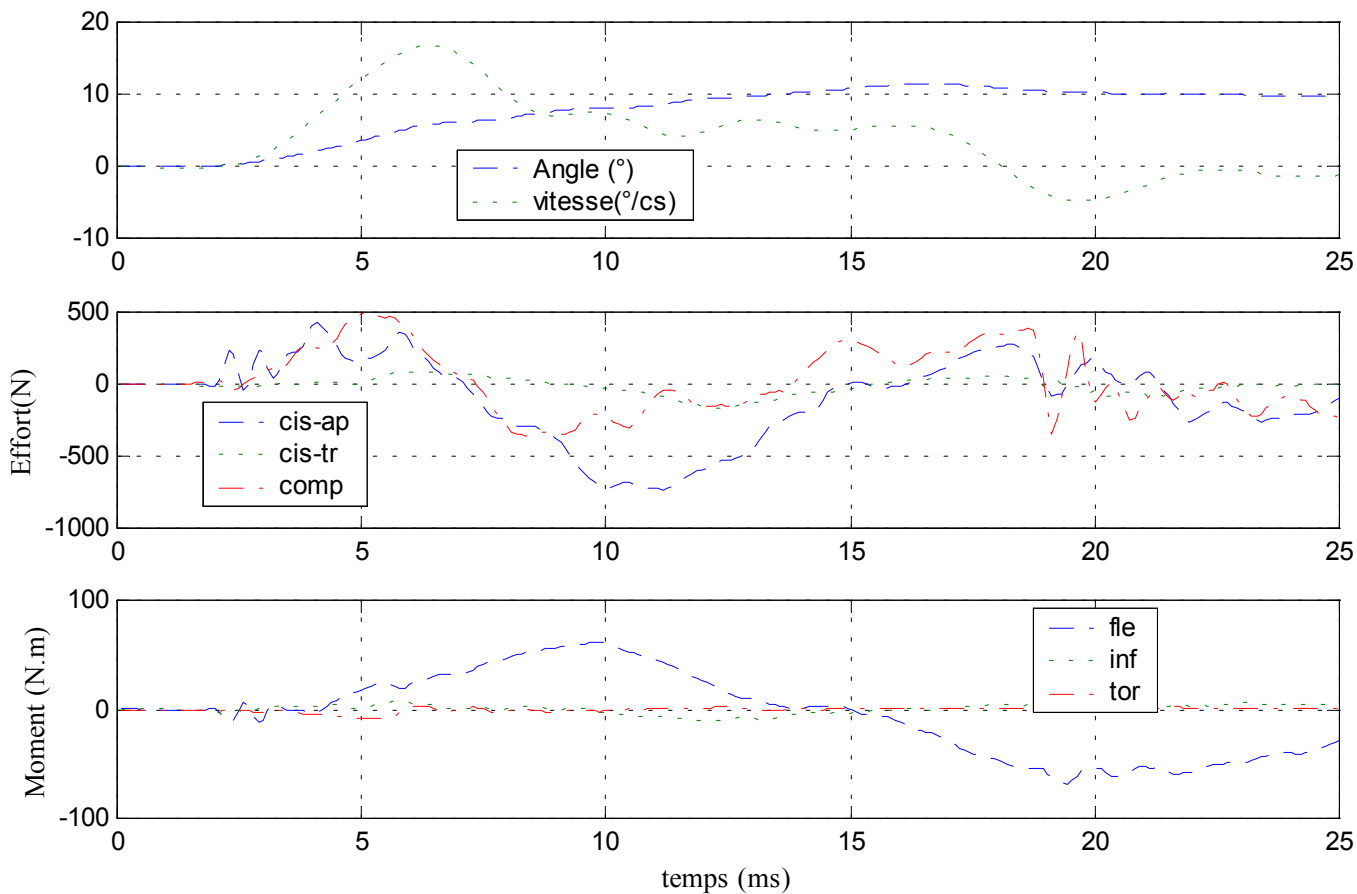
B. Dynamique

✓ Configuration saine

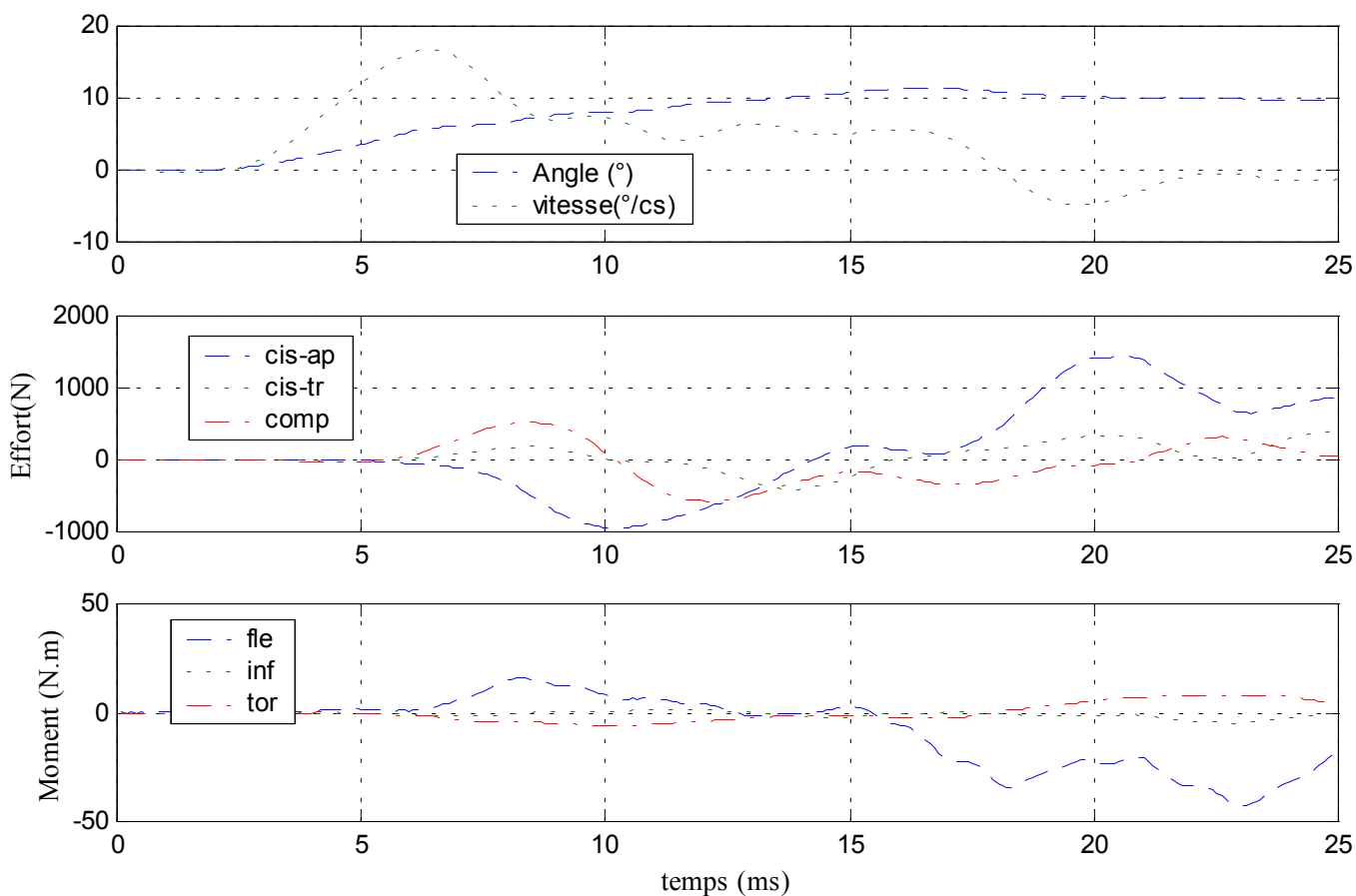
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

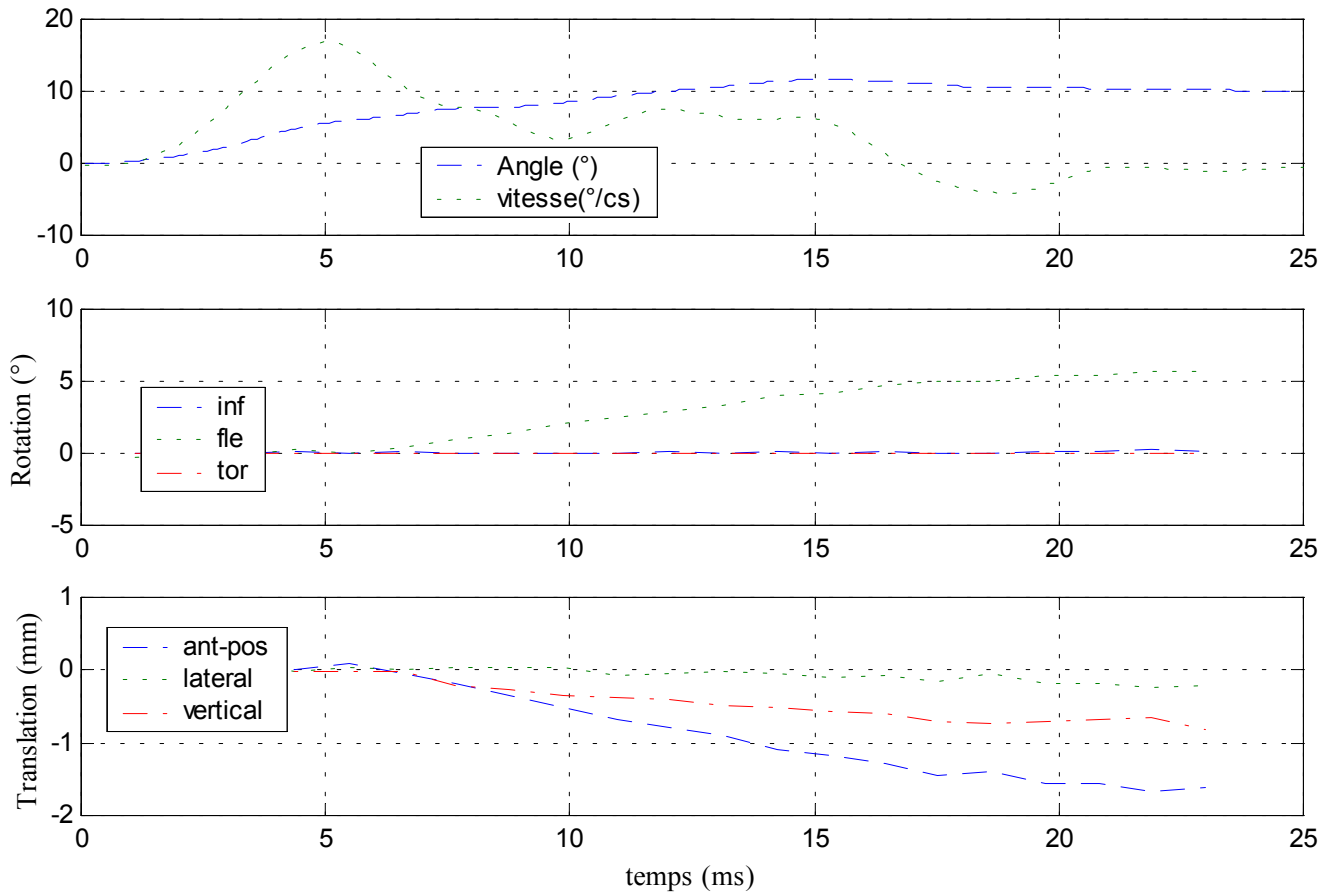


Efforts et moments inférieurs

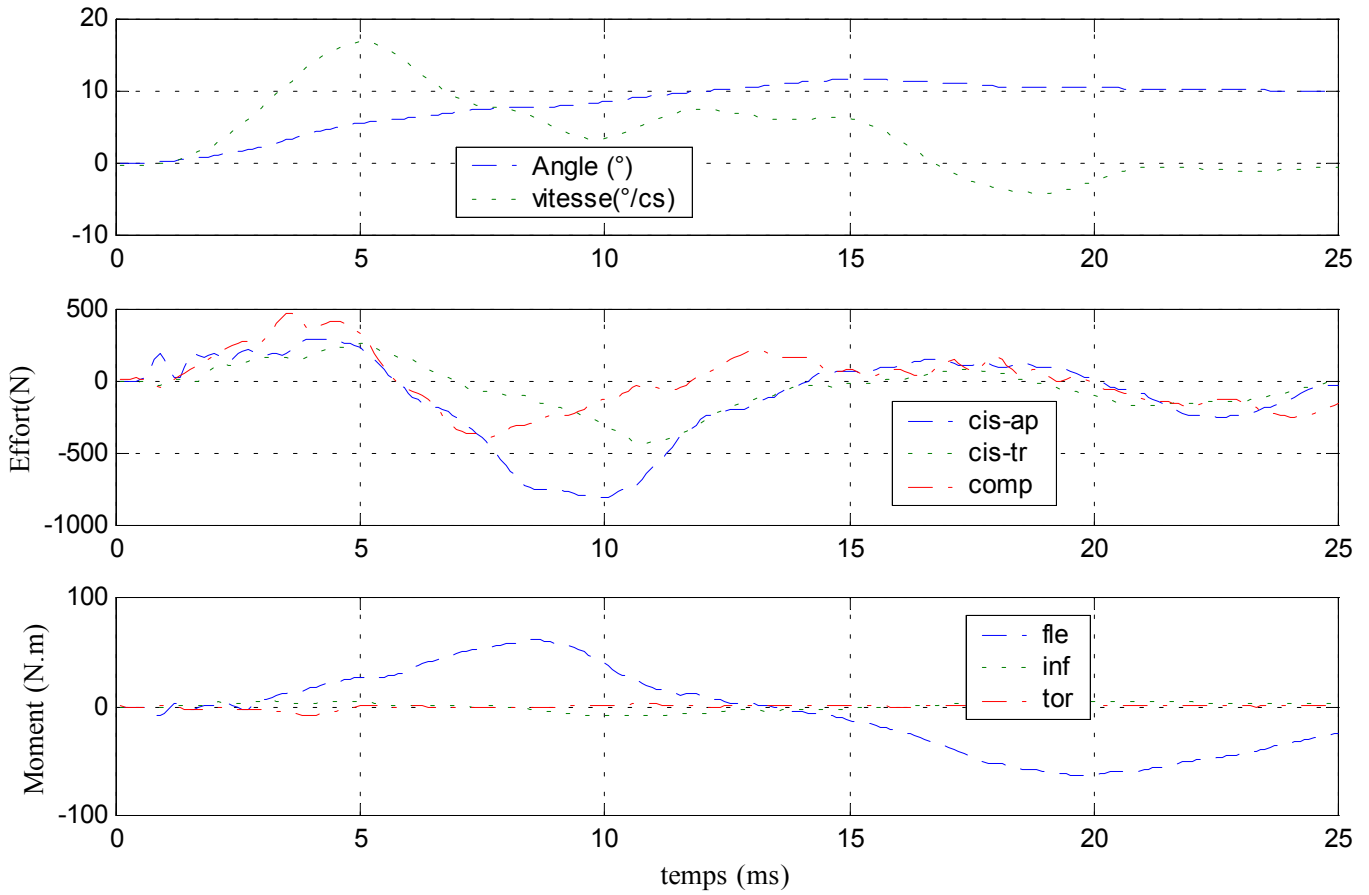


✓ Configuration avec ligaments épineux coupés

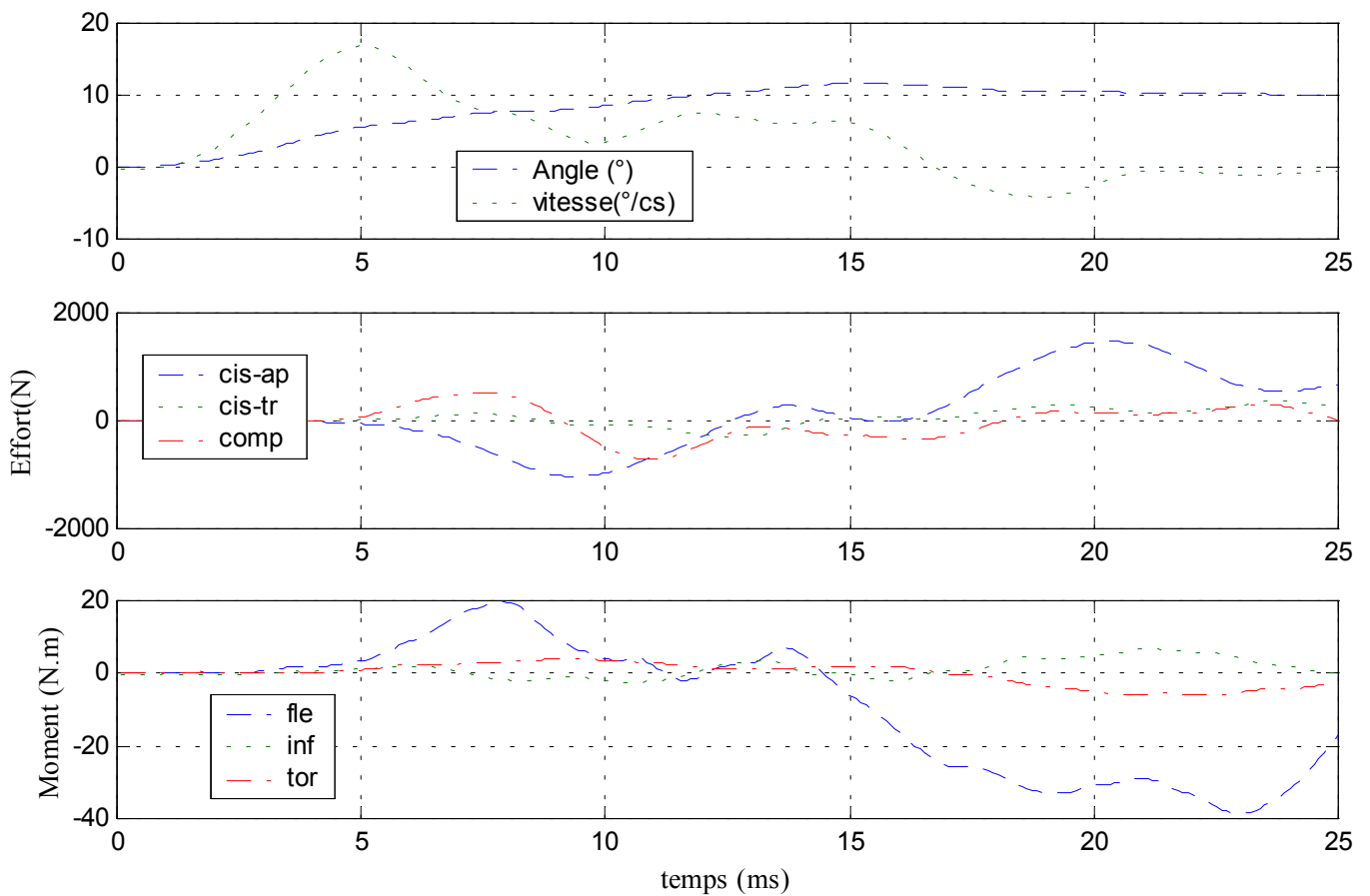
Déplacements



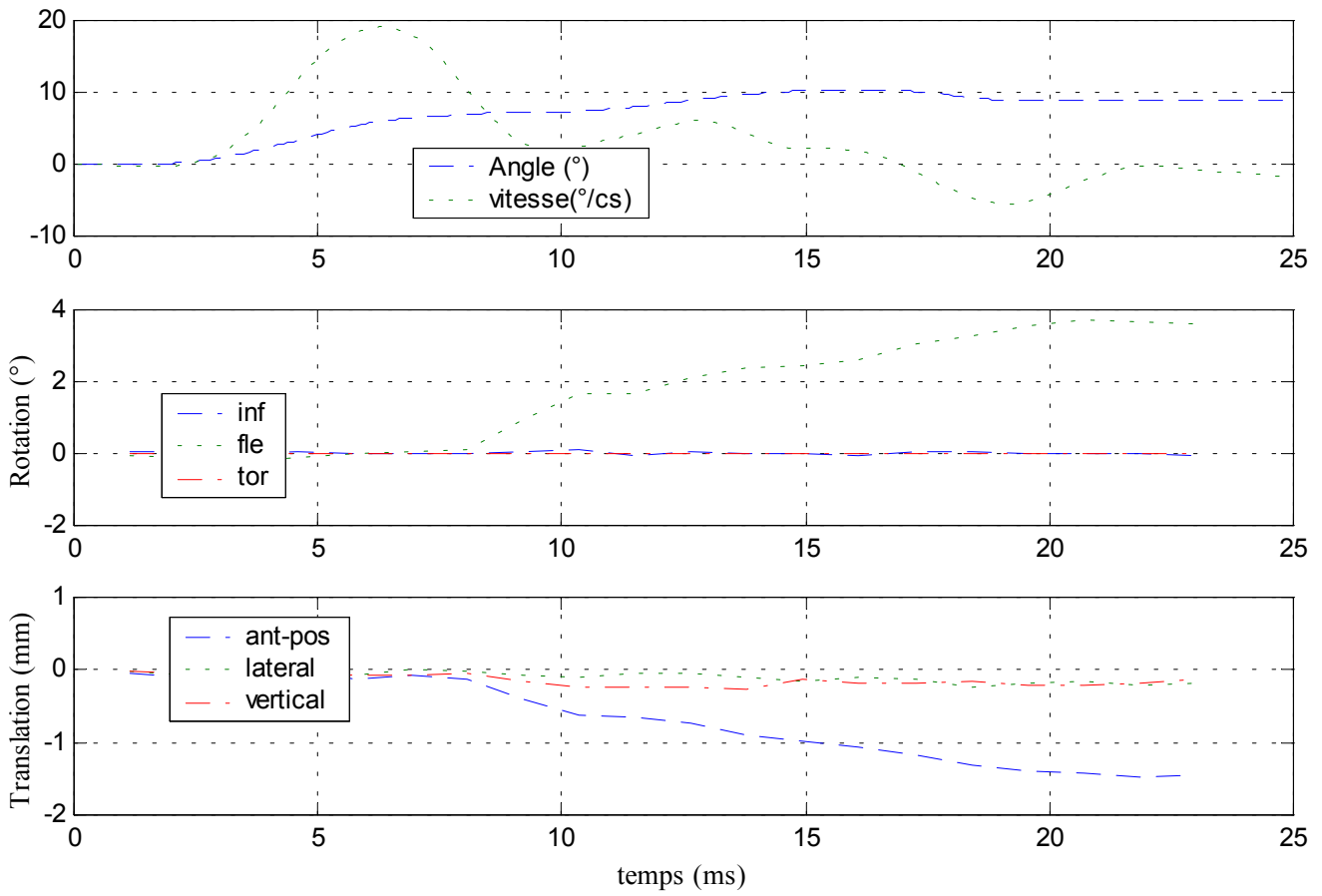
Efforts et moments supérieurs



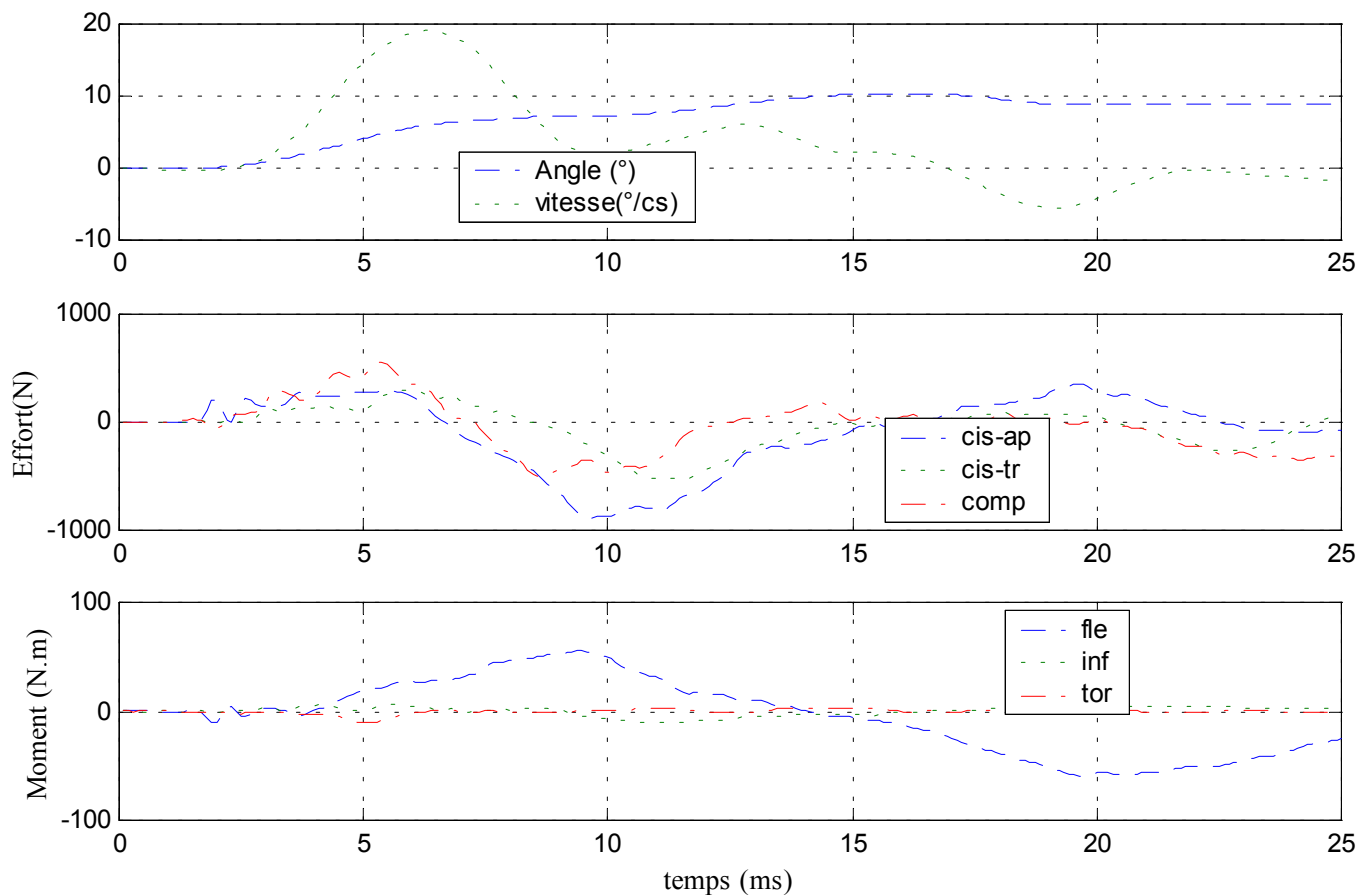
Efforts et moments inférieurs



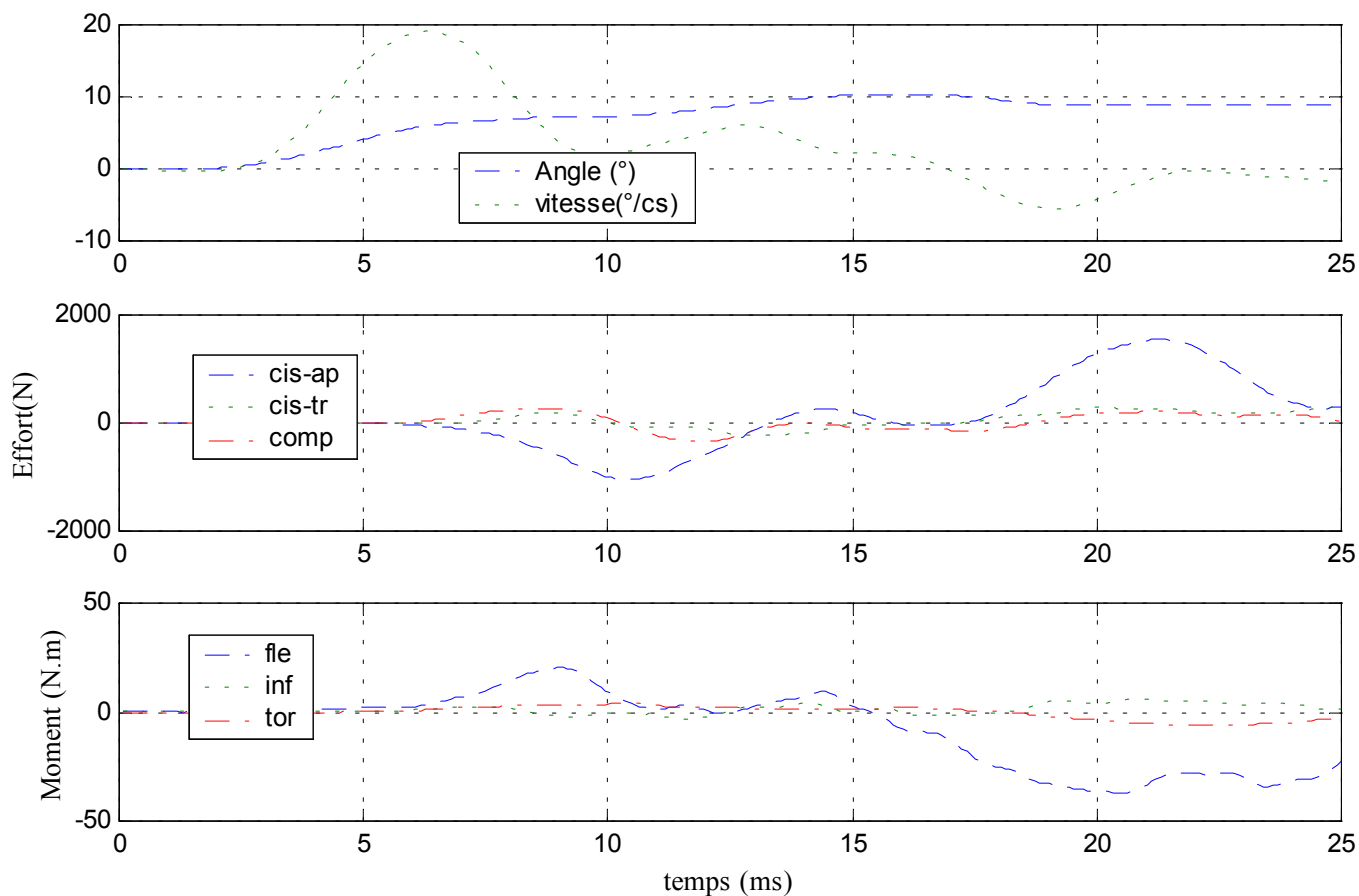
Déplacements



Efforts et moments supérieurs



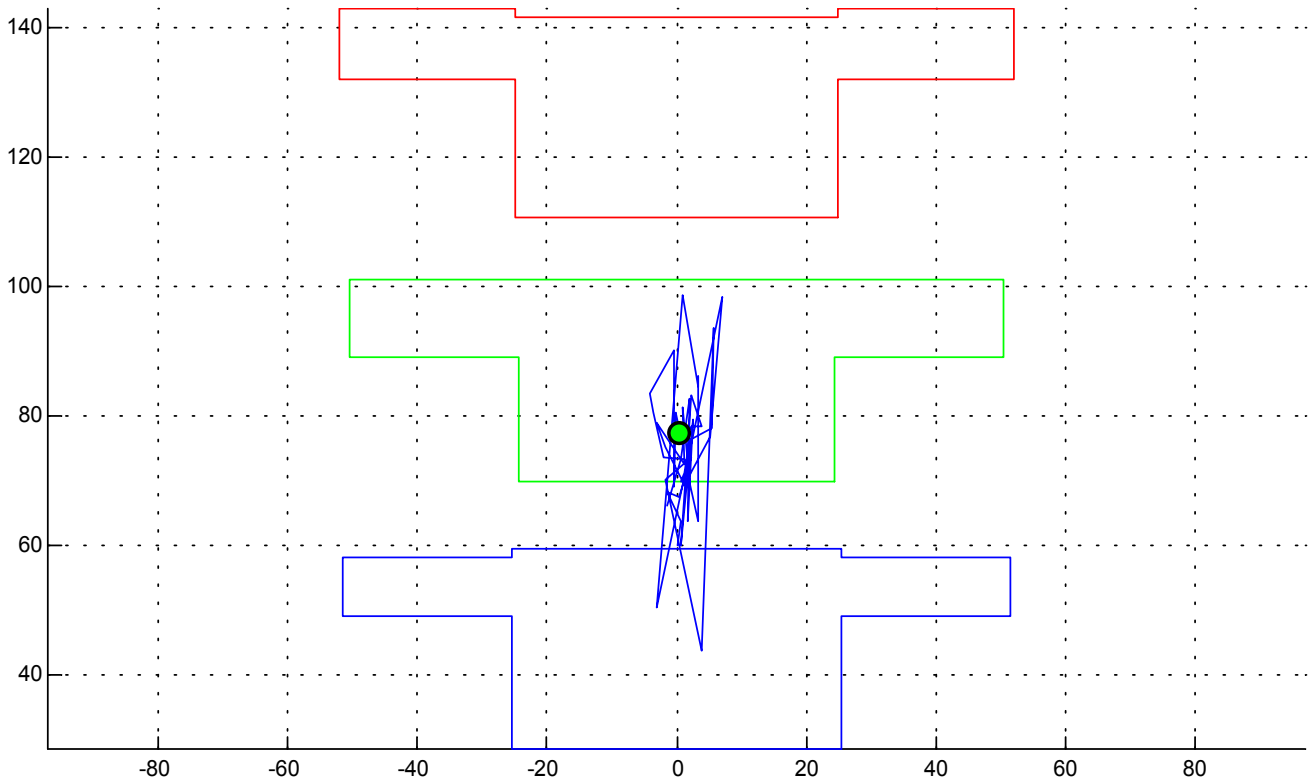
Efforts et moments inférieurs



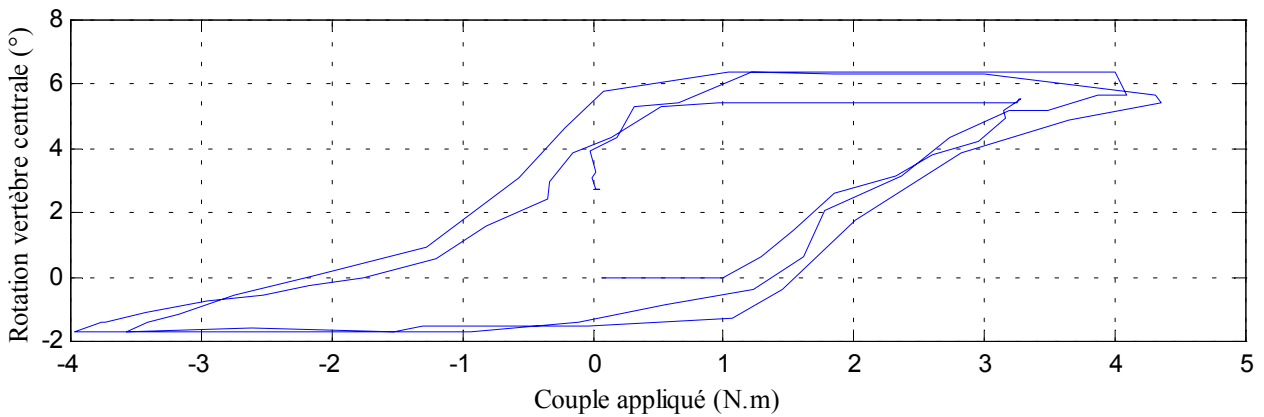
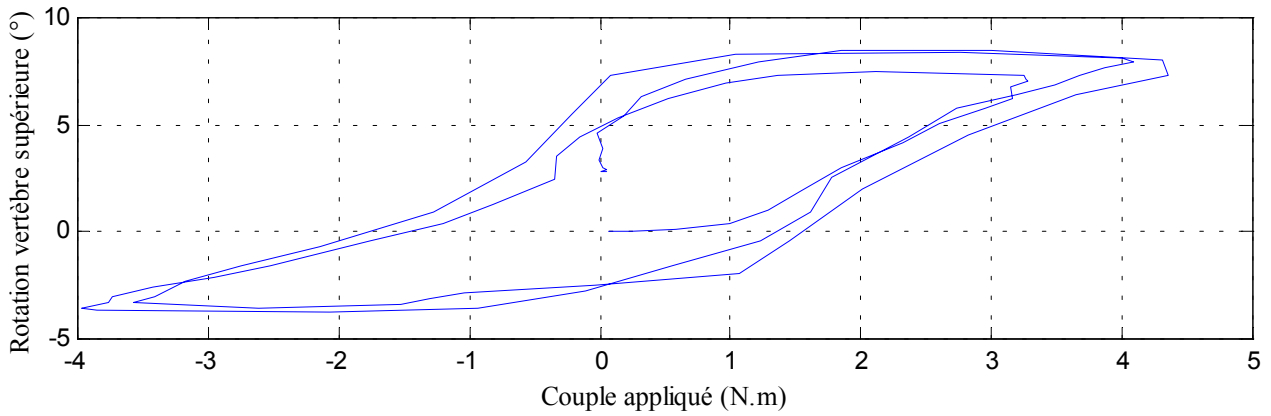
6- Essai 06 – L2L4 – inflexion

A. Statique

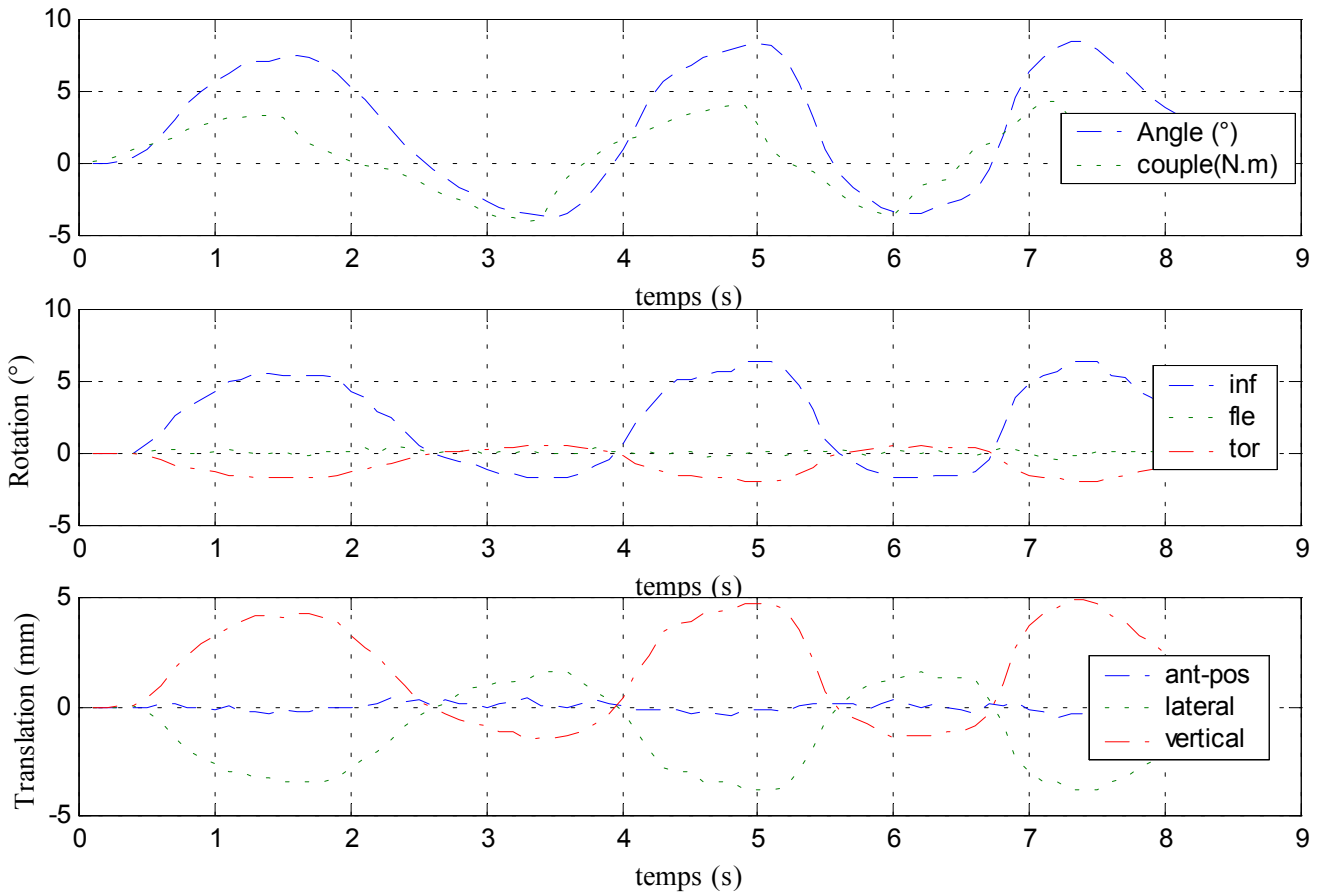
Centre instantané de rotation



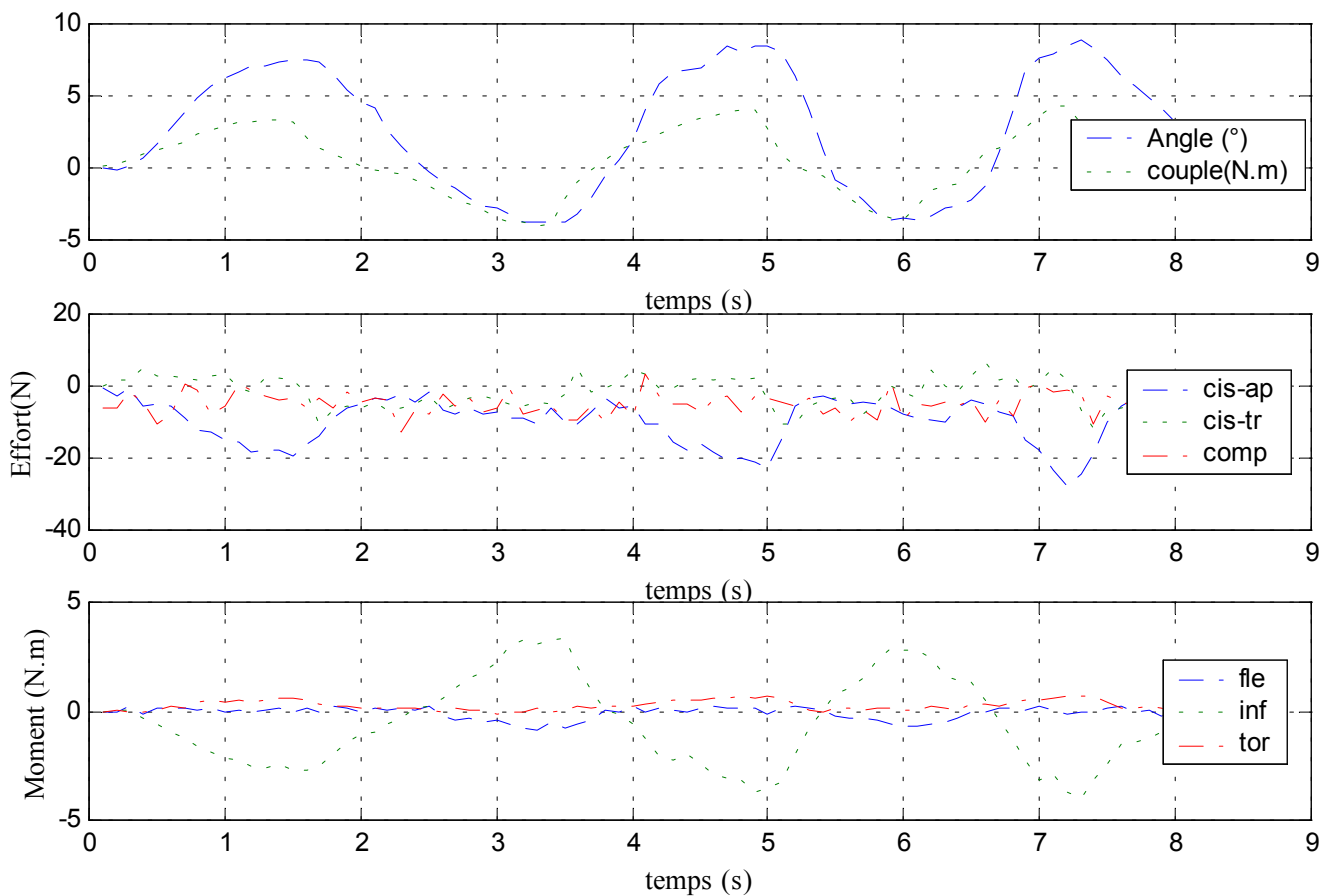
Courbe rotation-couple en hystérésis



Déplacements



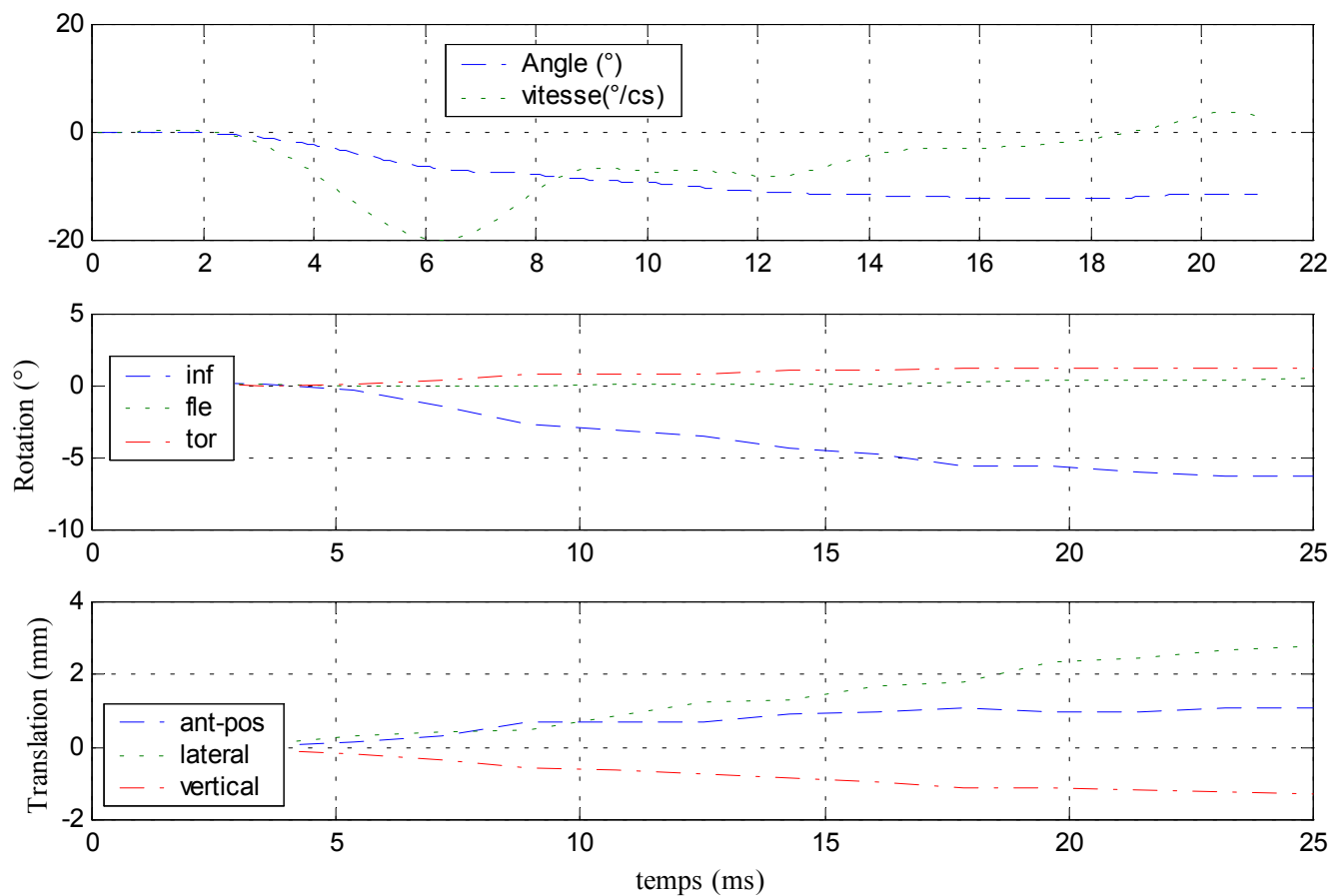
Efforts et moments inférieurs



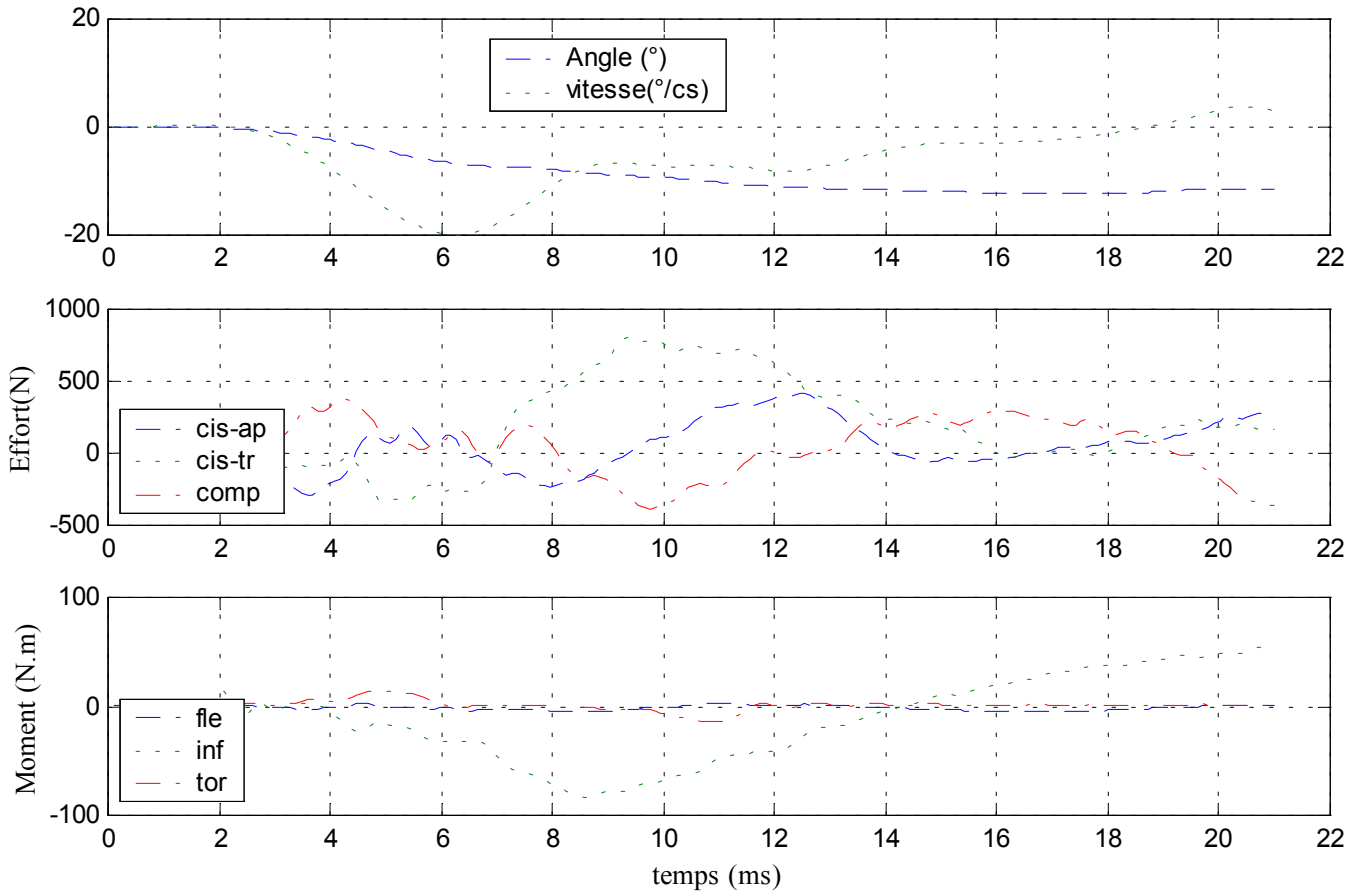
B. Dynamique

✓ Configuration saine

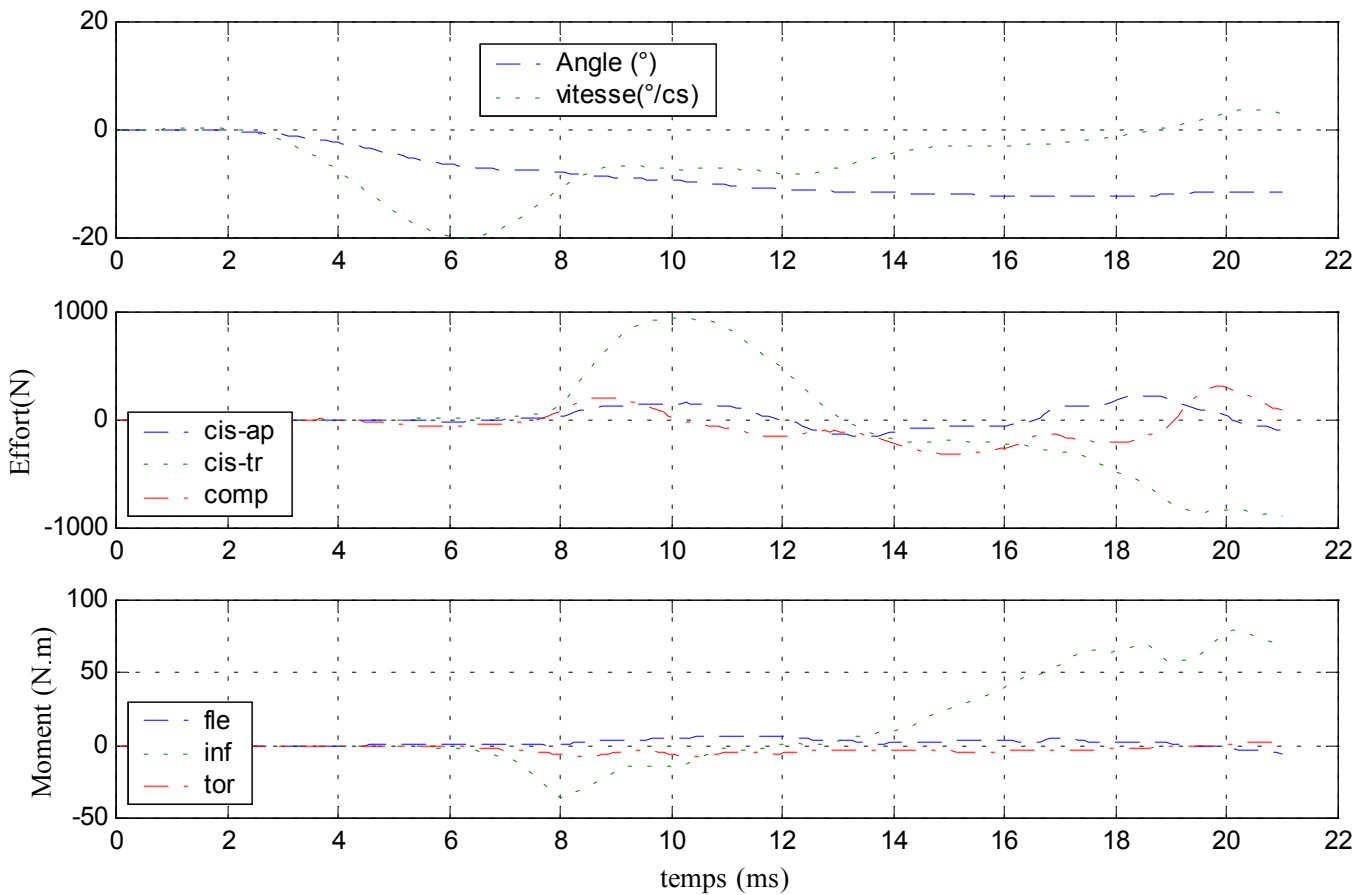
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

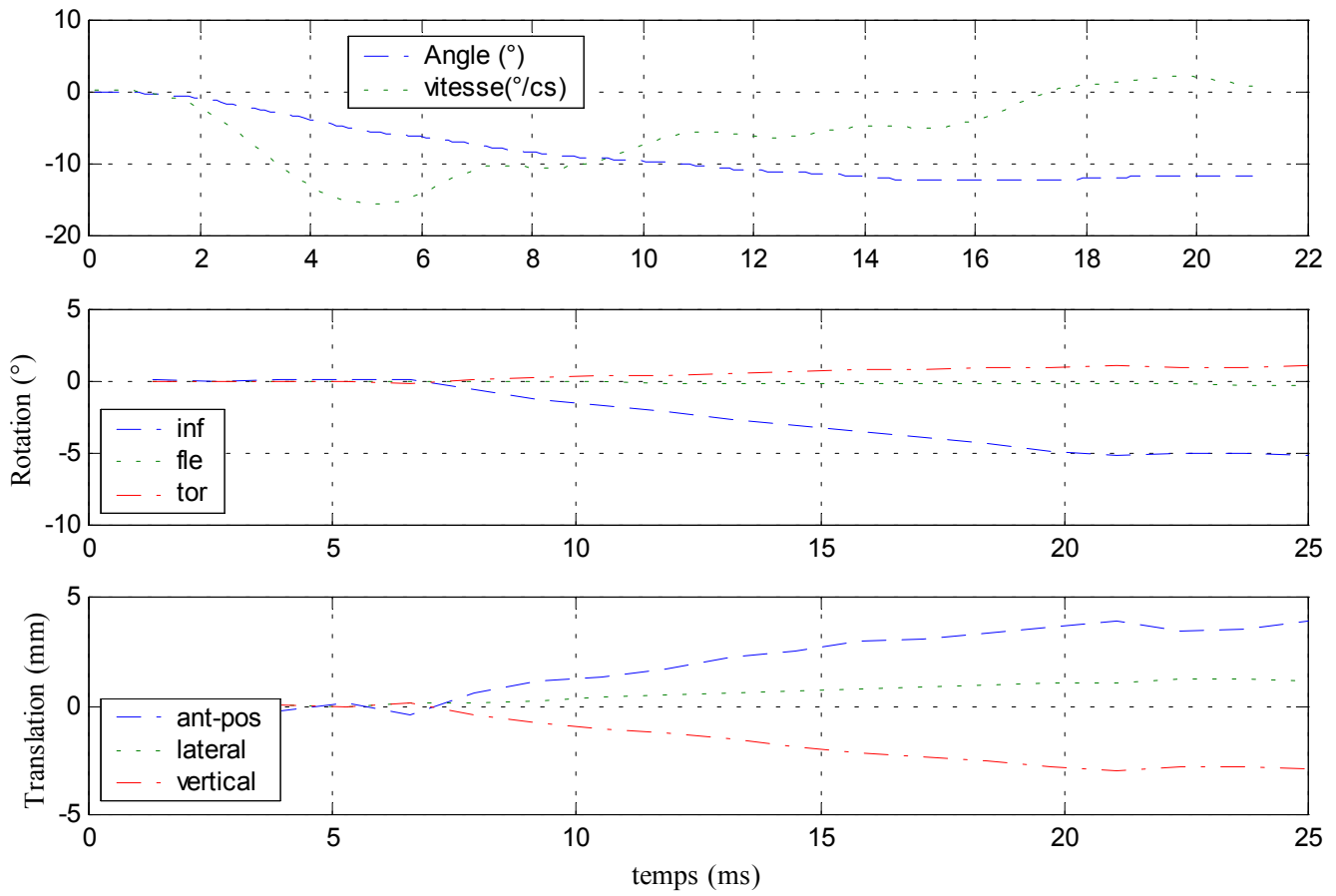


Efforts et moments inférieurs

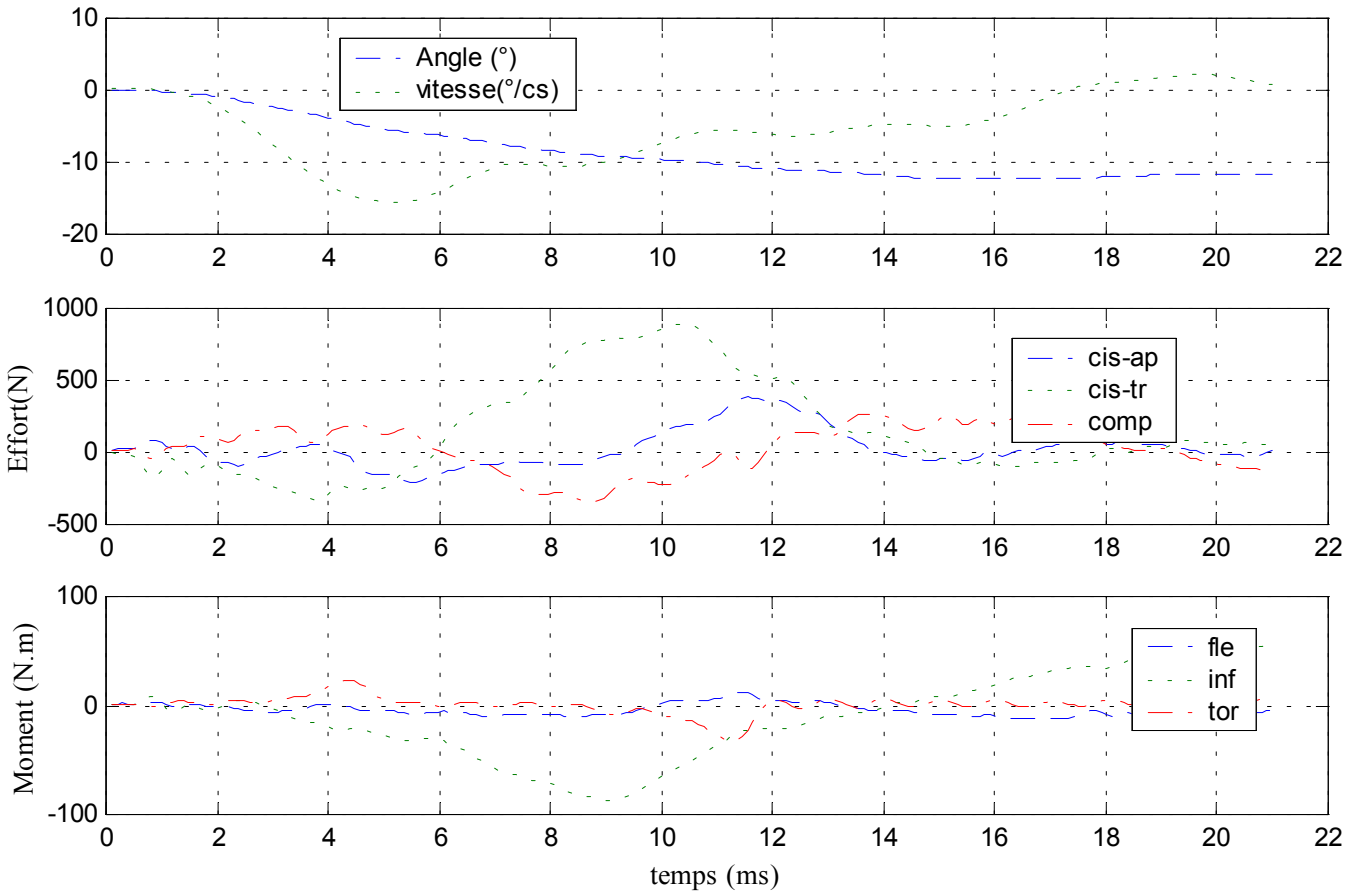


✓ Configuration avec ligaments capsulaires coupés

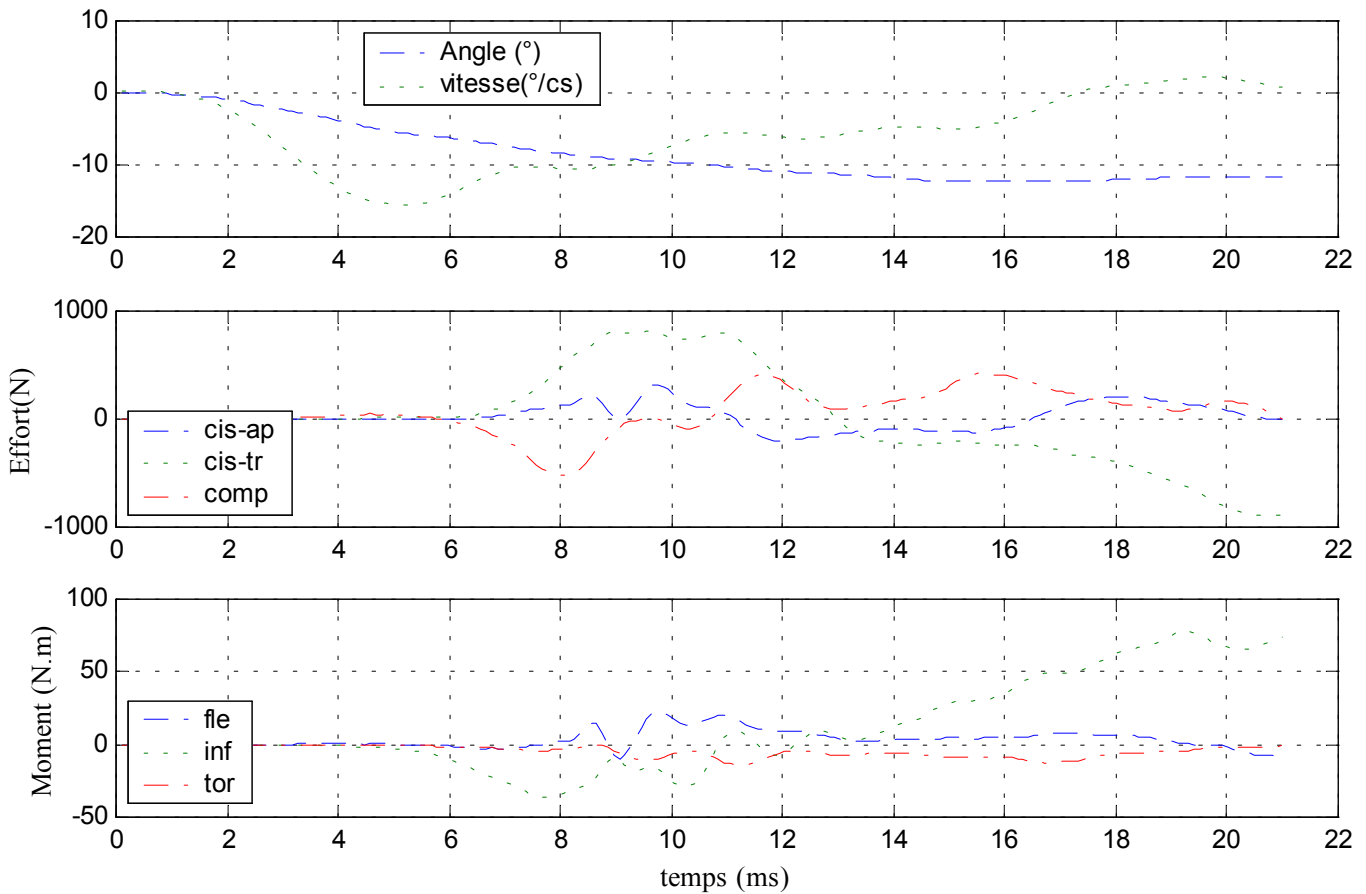
Déplacements



Efforts et moments supérieurs



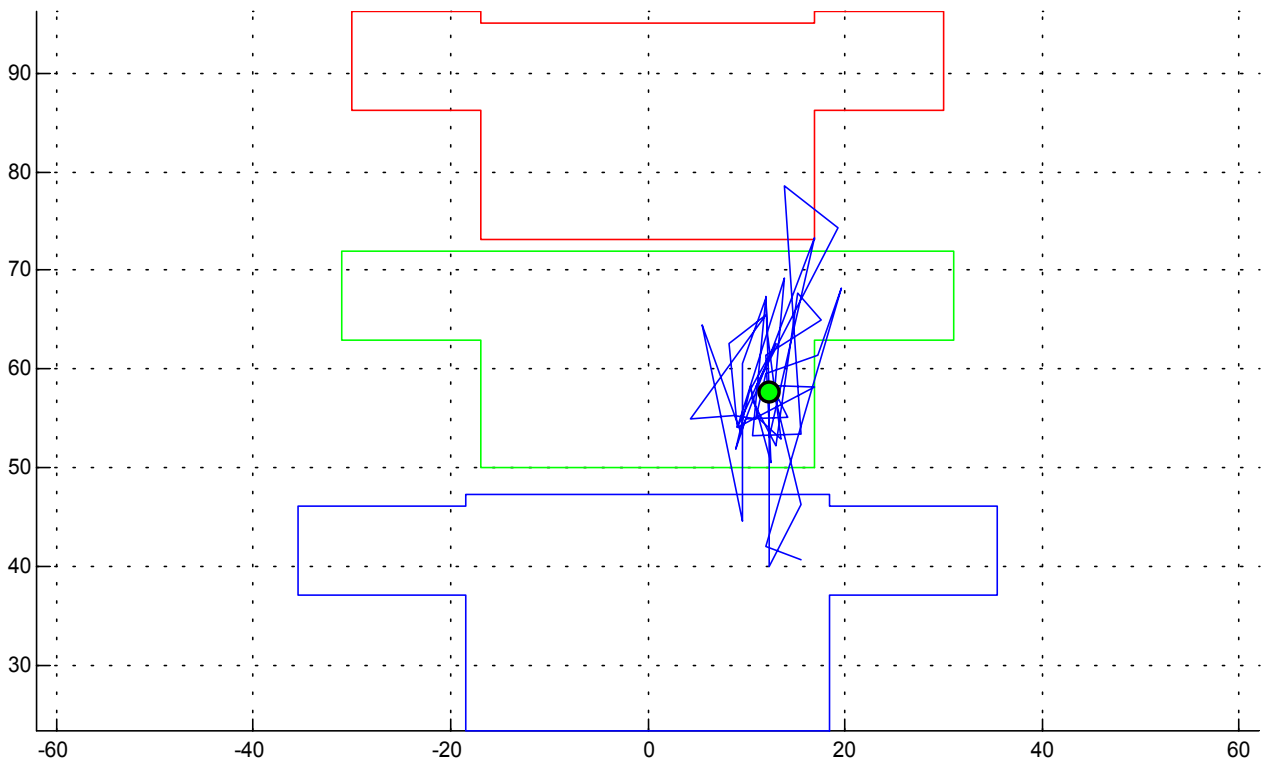
Efforts et moments inférieurs



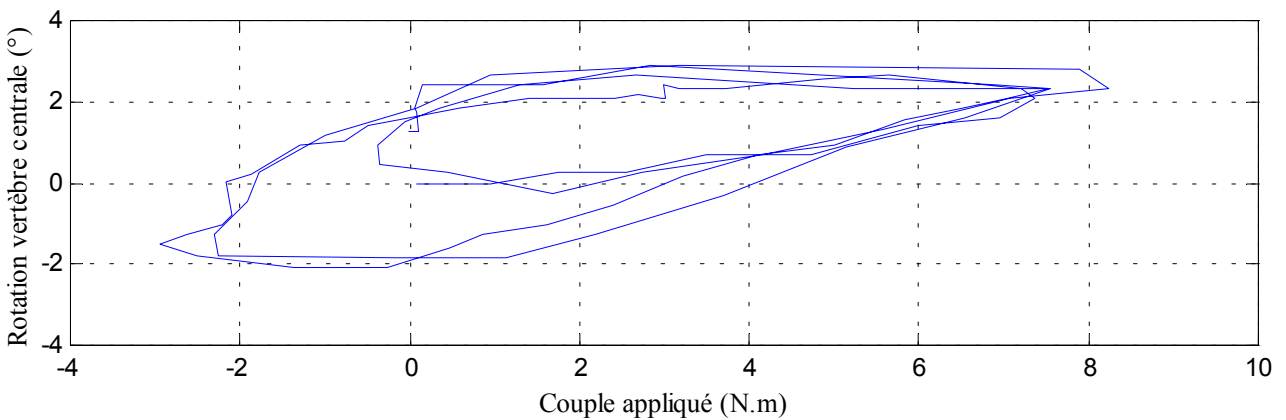
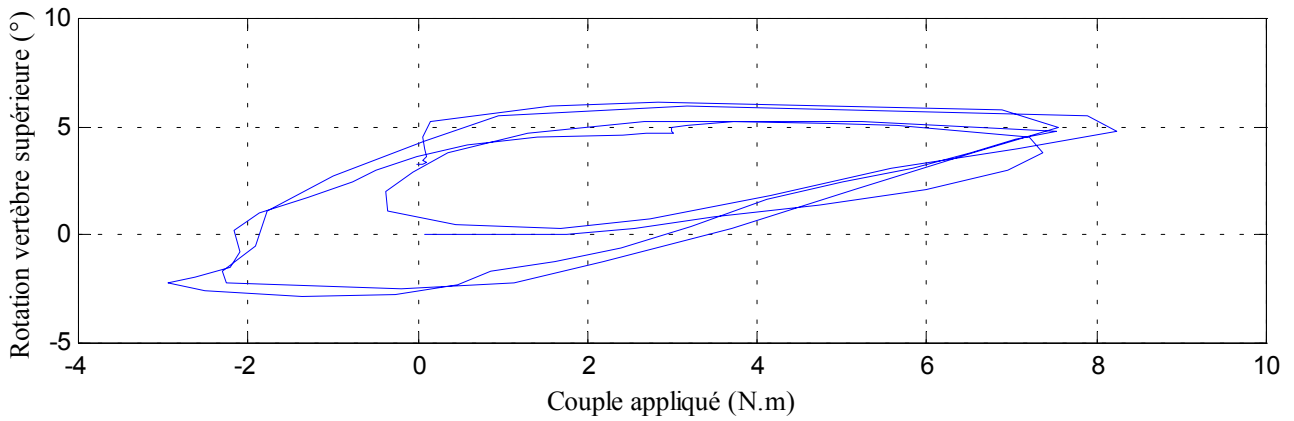
7- Essai 07 – L2L4 – inflexion

A. Statique

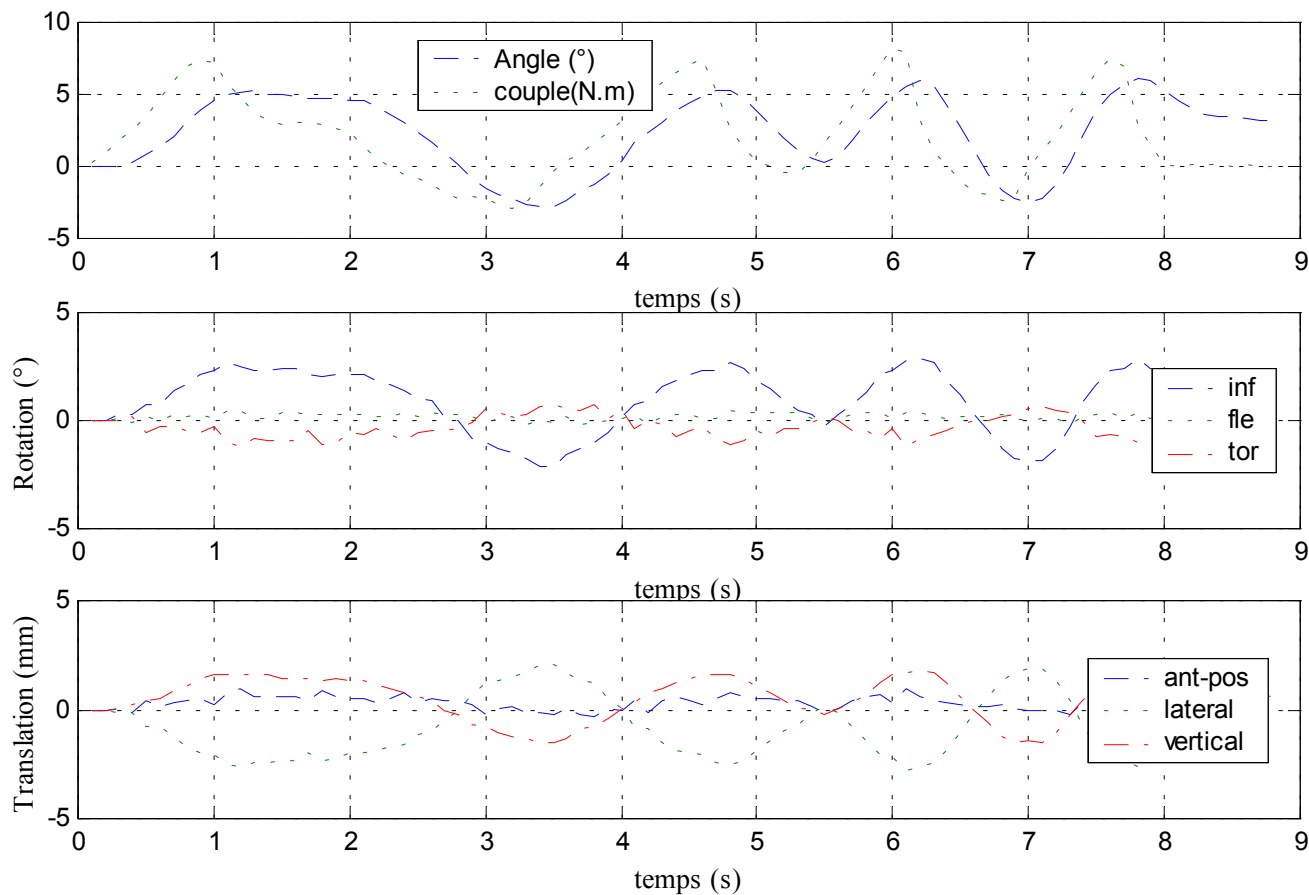
Centre instantané de rotation



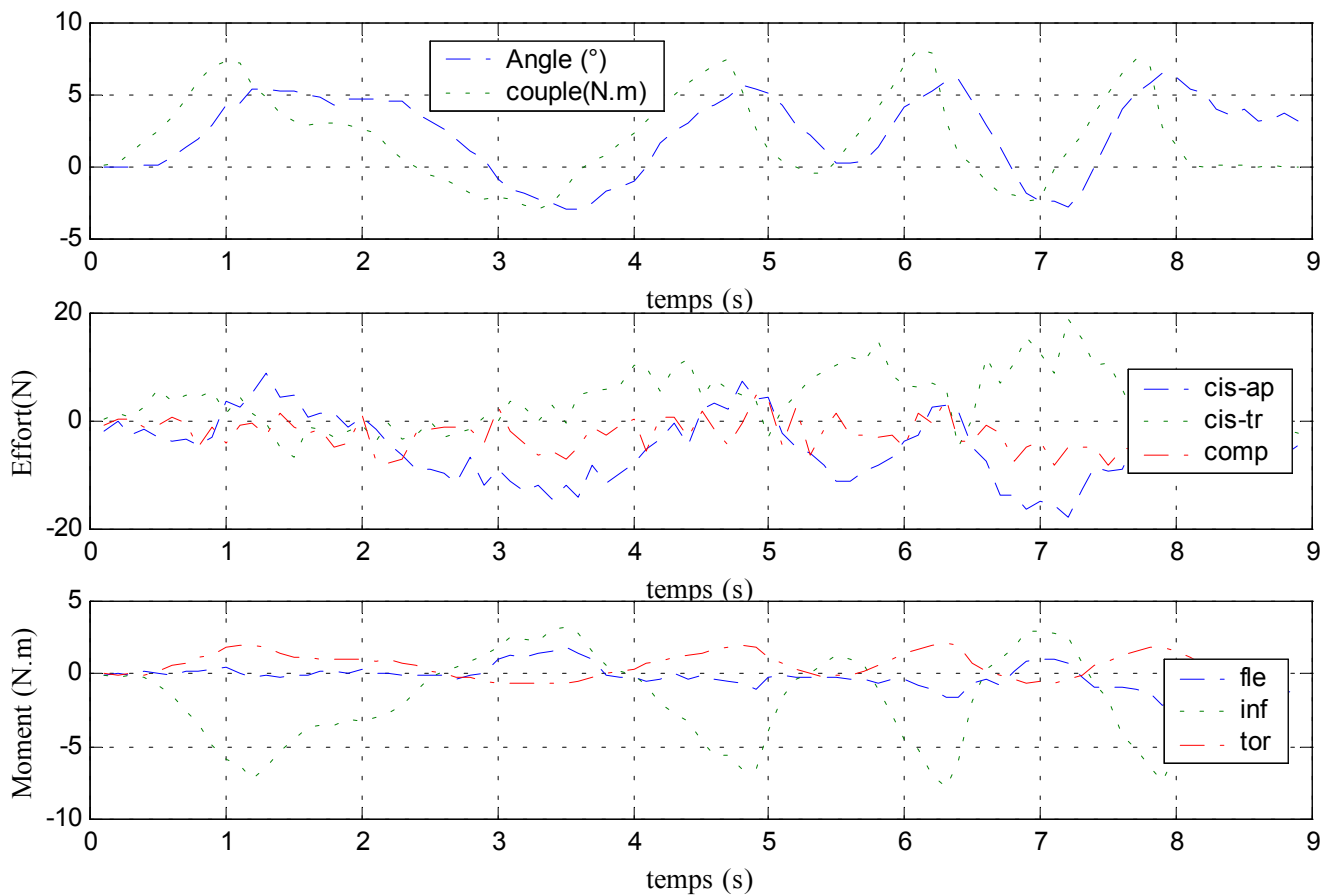
Courbe rotation-couple en hystérésis



Déplacements



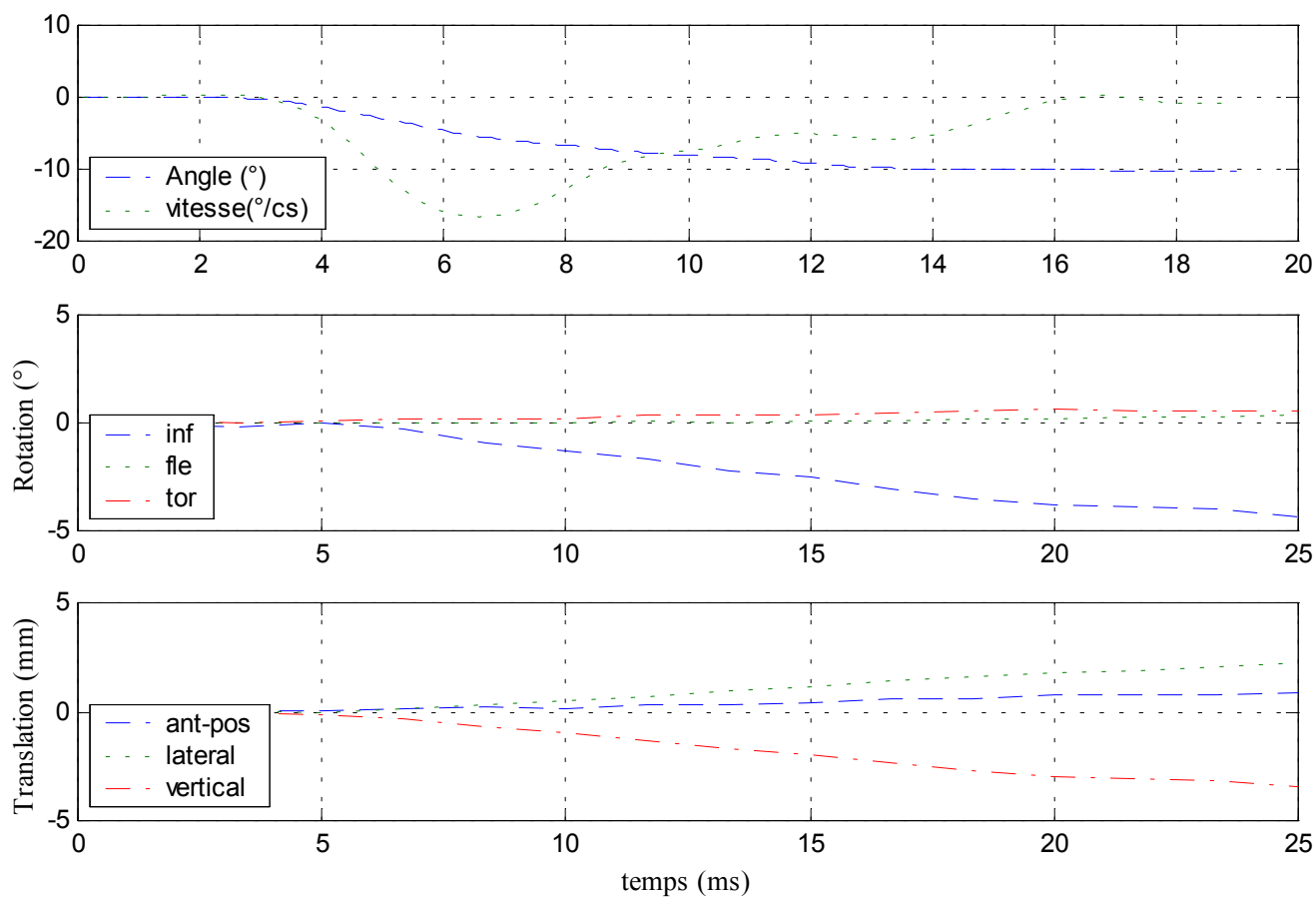
Efforts et moments inférieurs



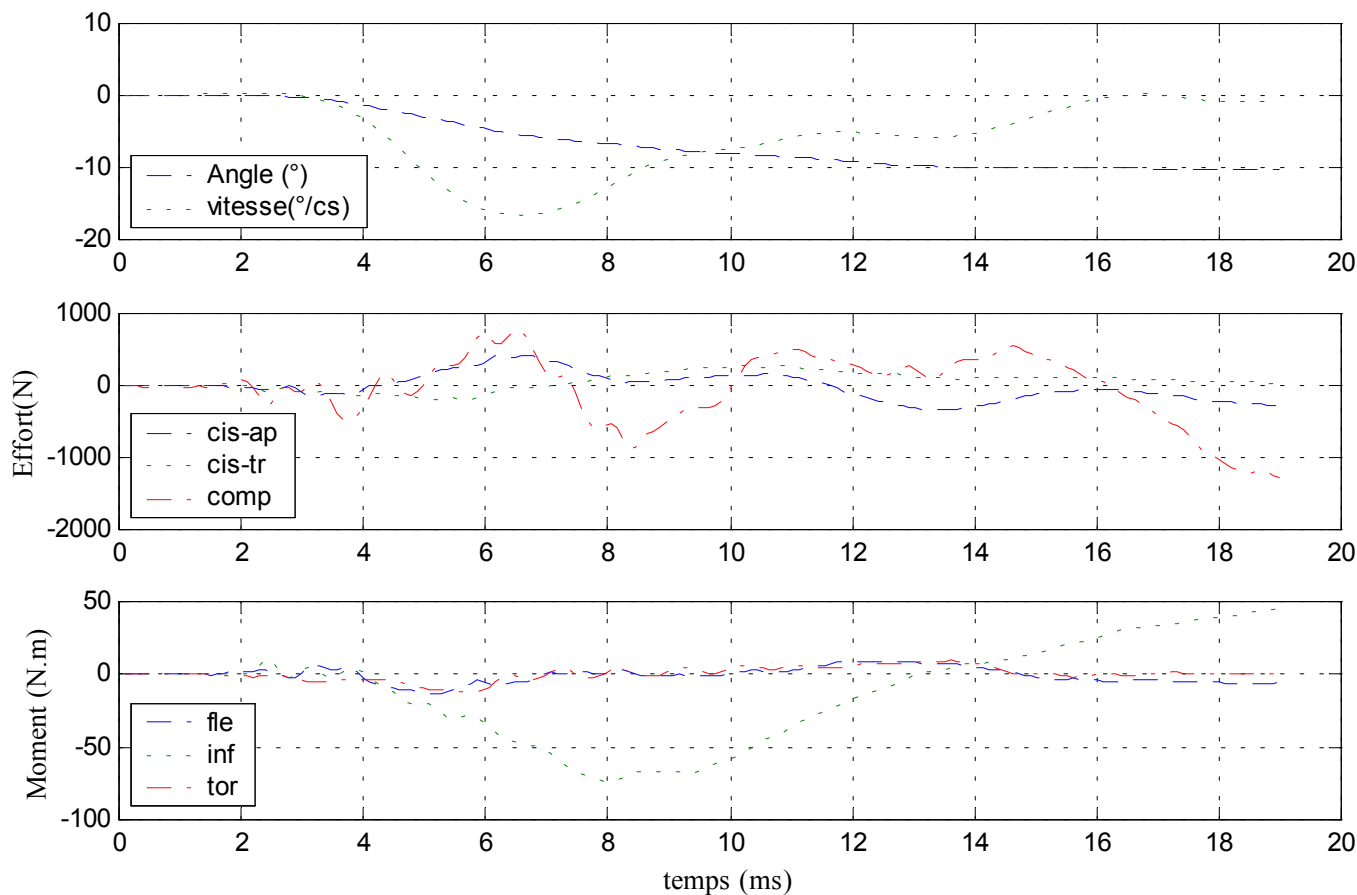
B. Dynamique

✓ Configuration saine

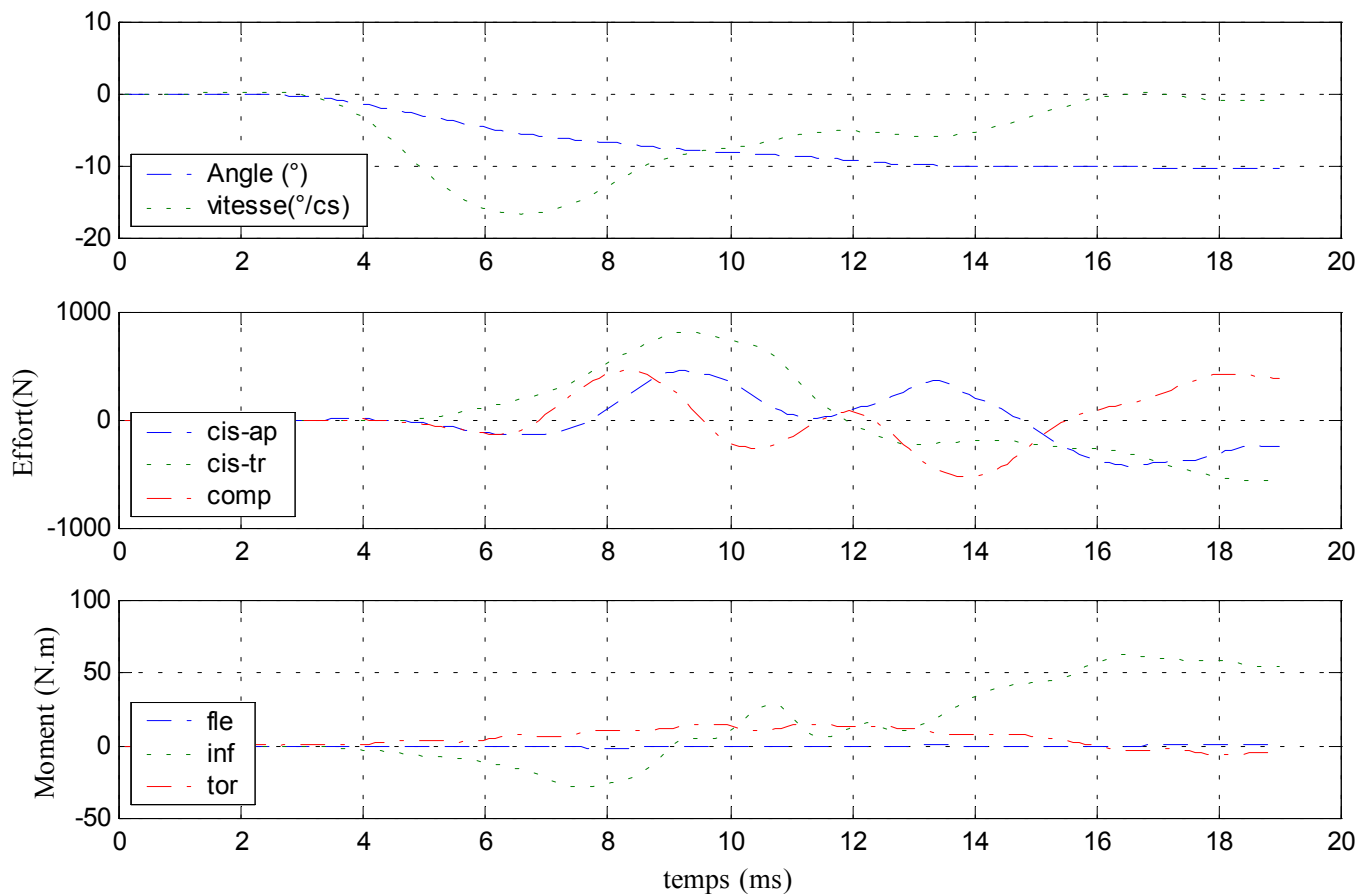
Déplacements



Efforts et moments supérieurs



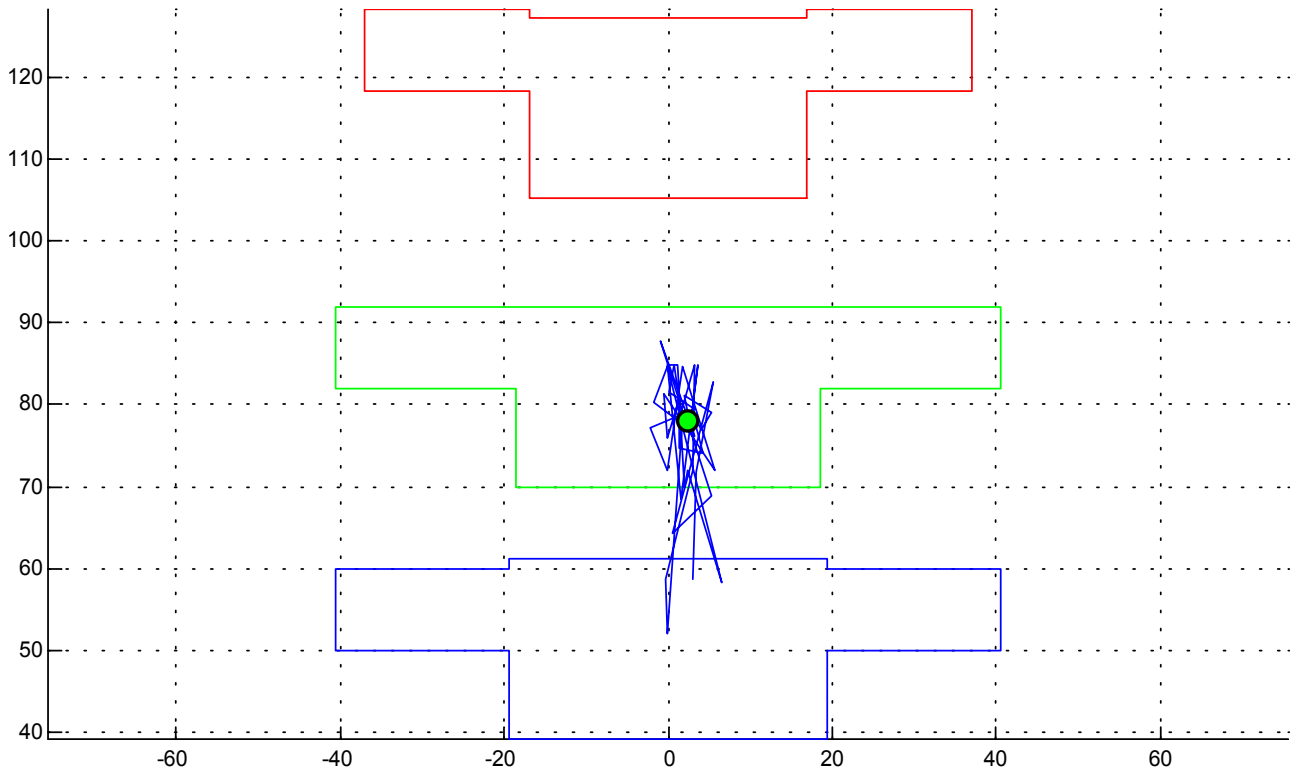
Efforts et moments inférieurs



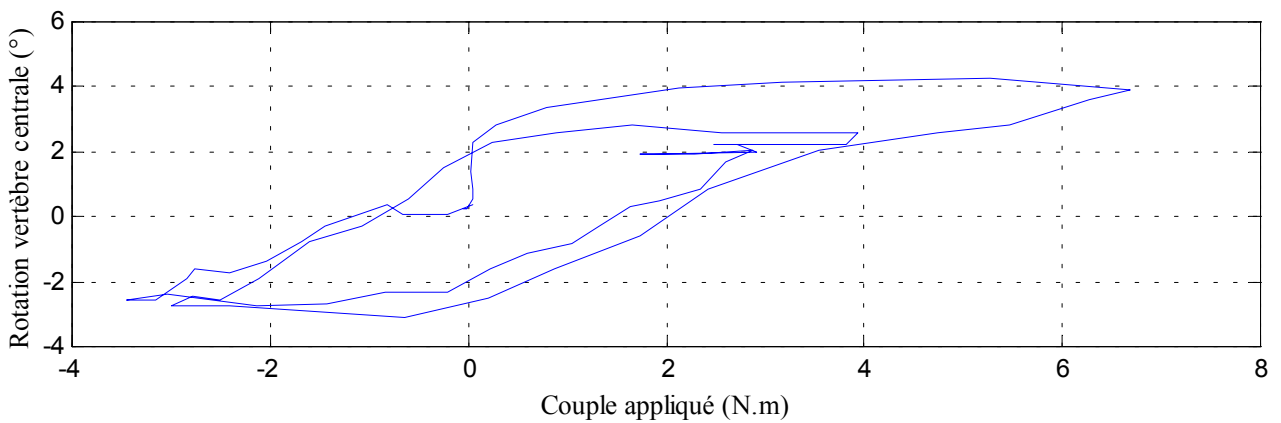
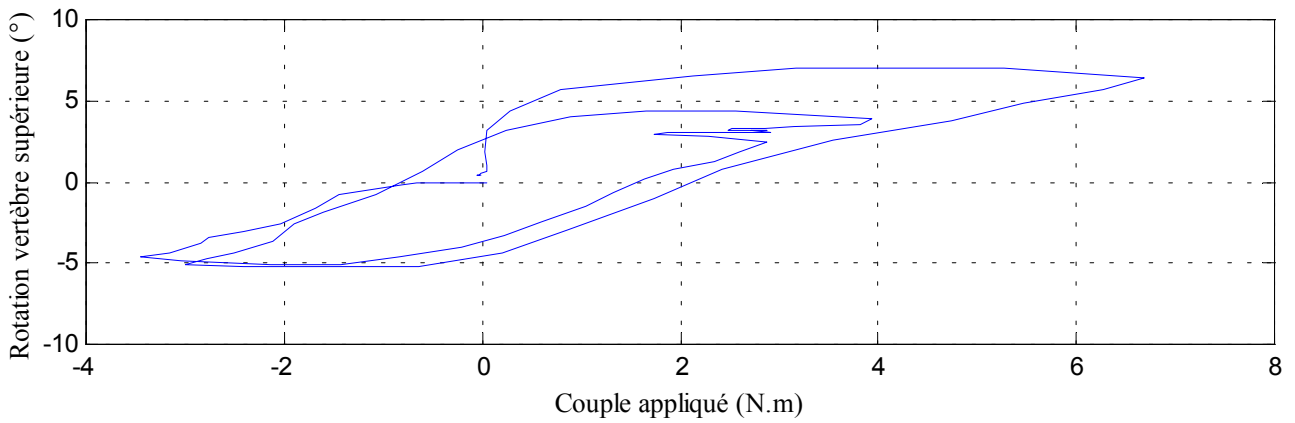
8- Essai 08 – L2L4 – inflexion

A. Statique

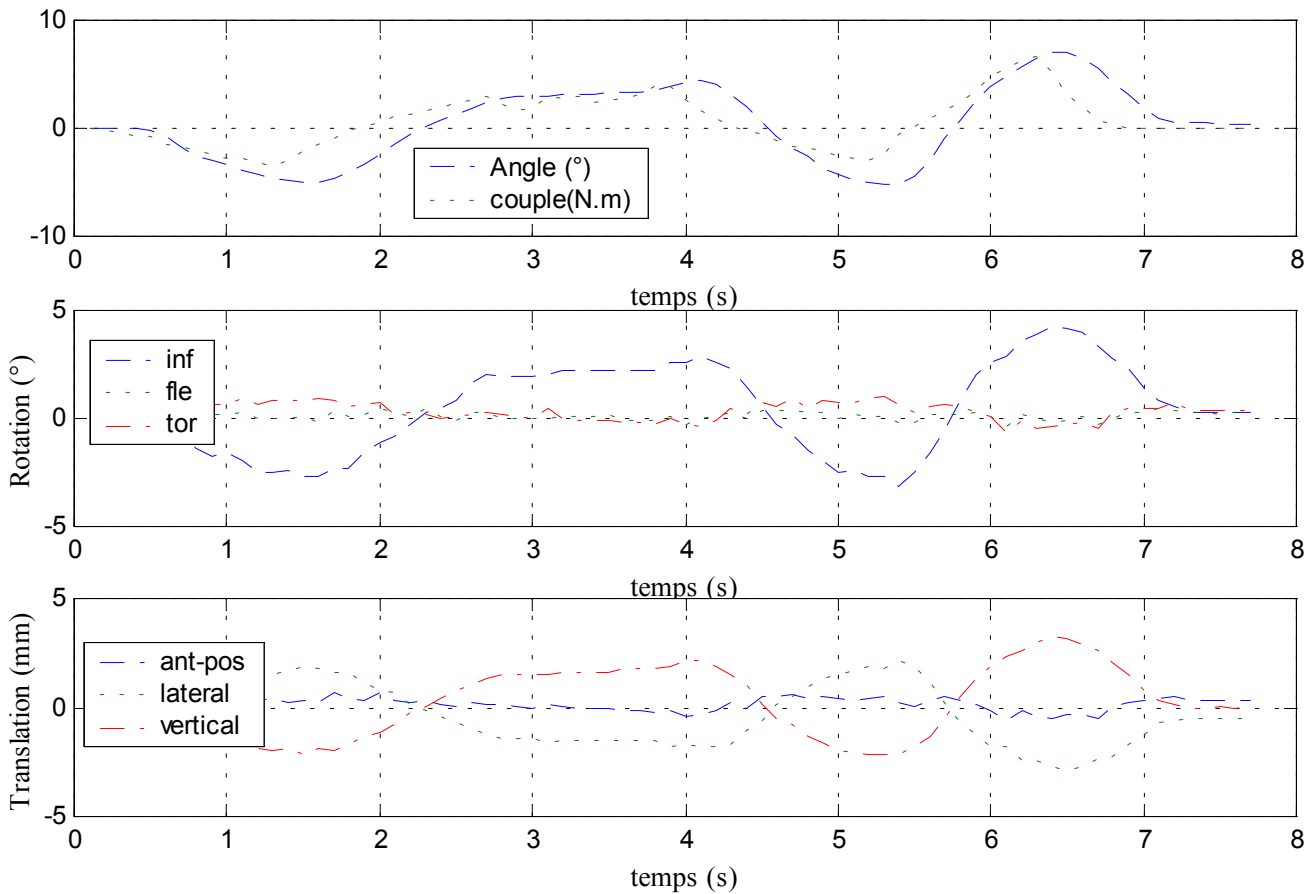
Centre instantané de rotation



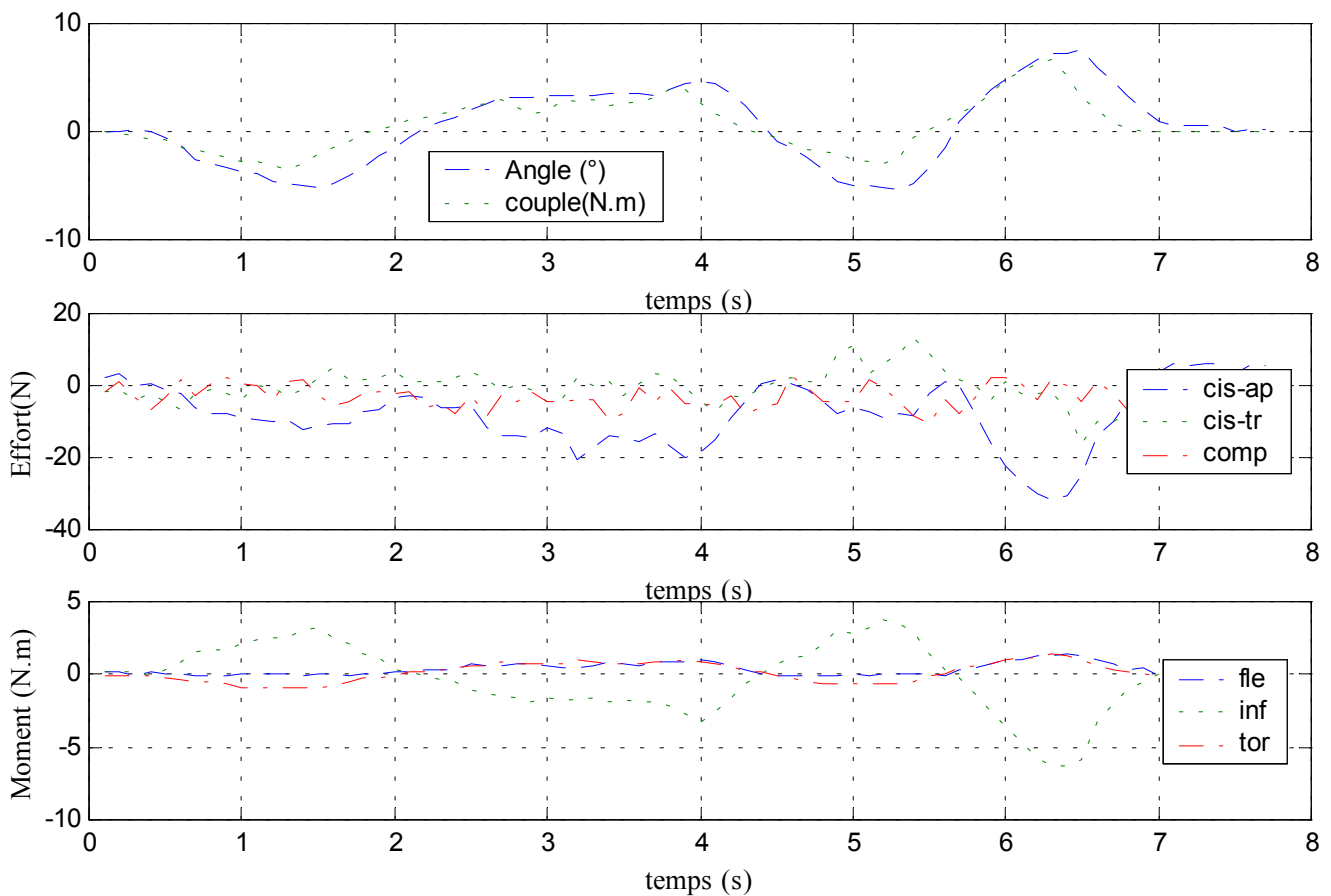
Courbe rotation-couple en hystérésis



Déplacements



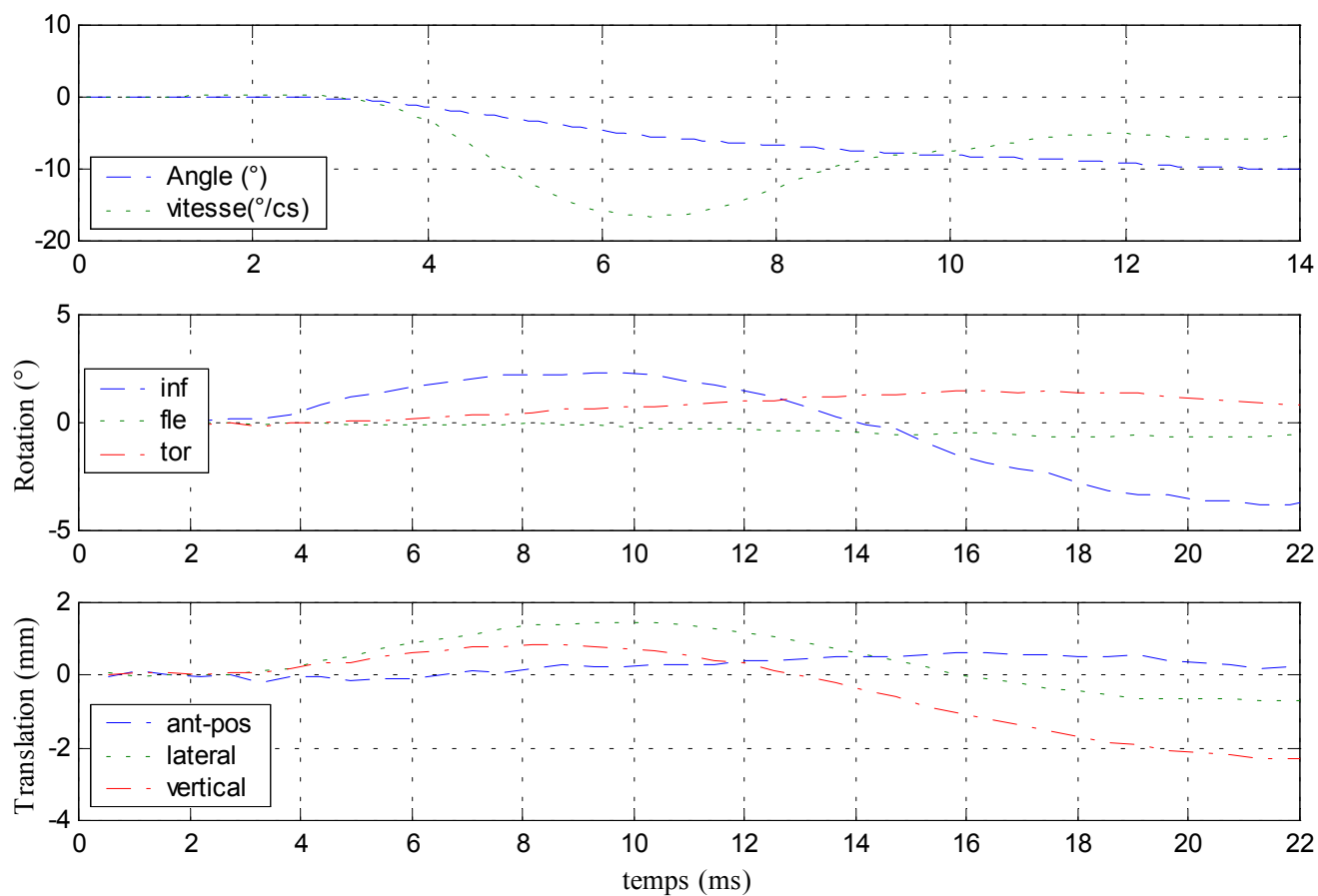
Efforts et moments inférieurs



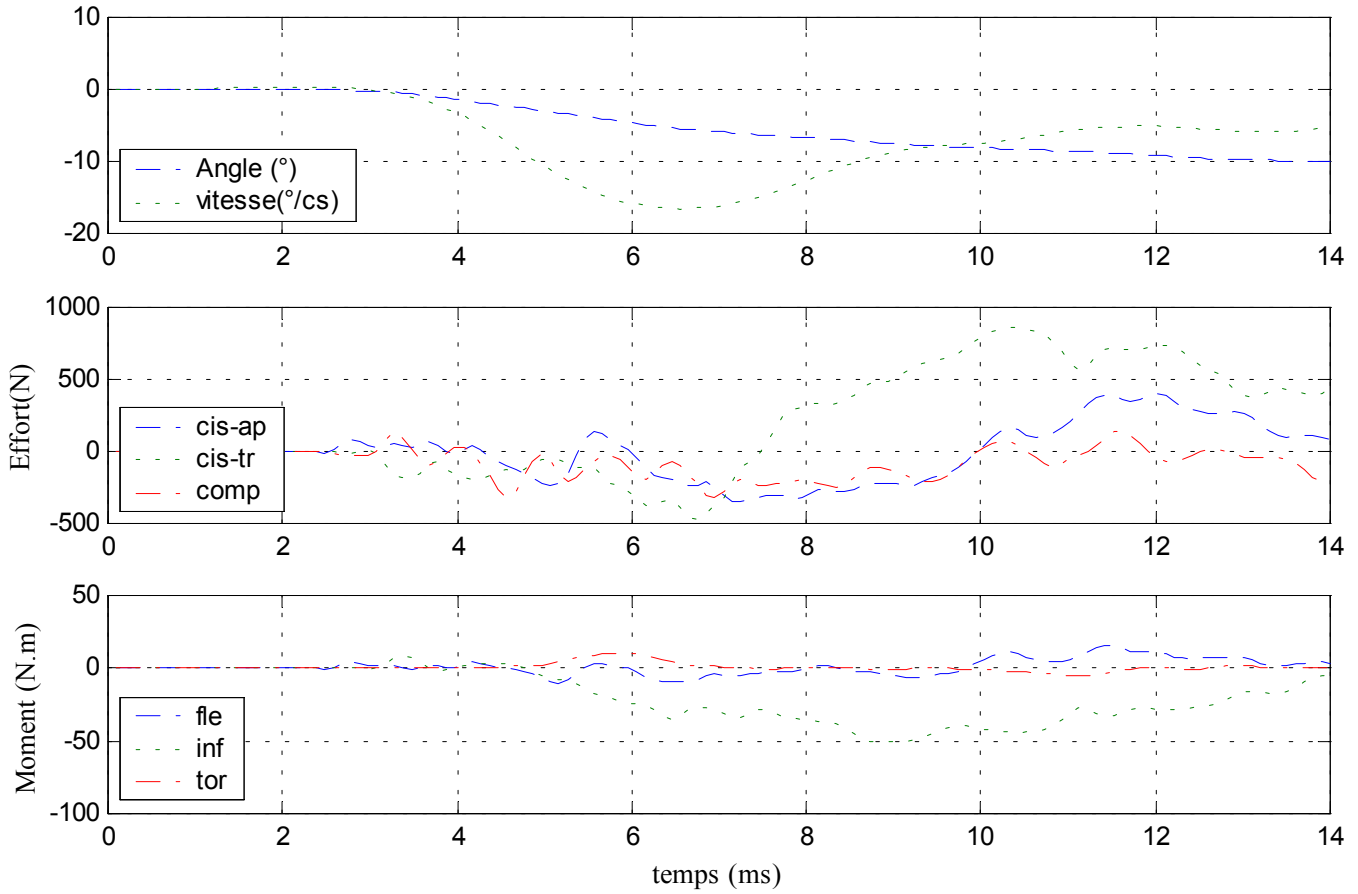
B. Dynamique

✓ Configuration saine

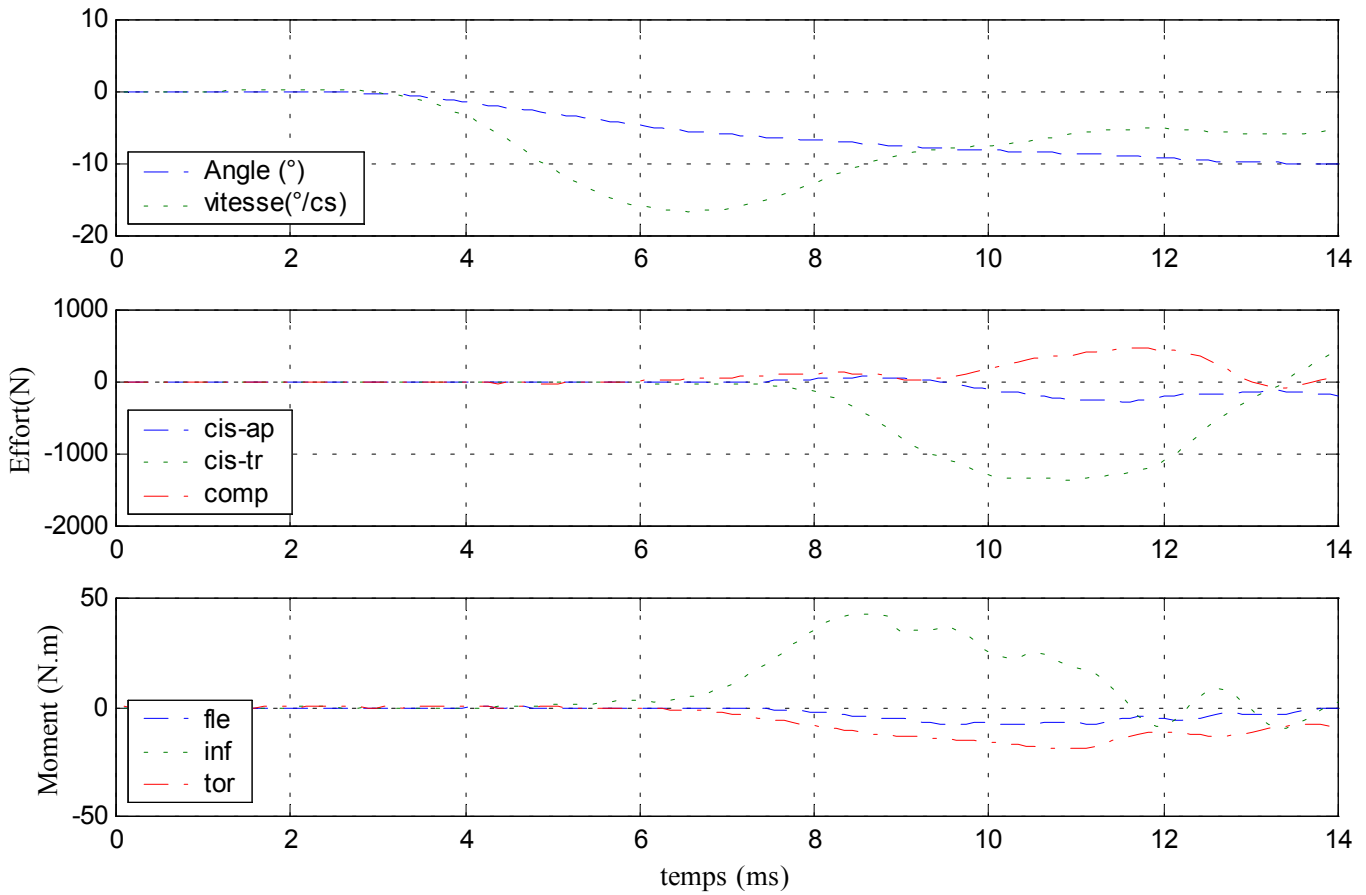
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

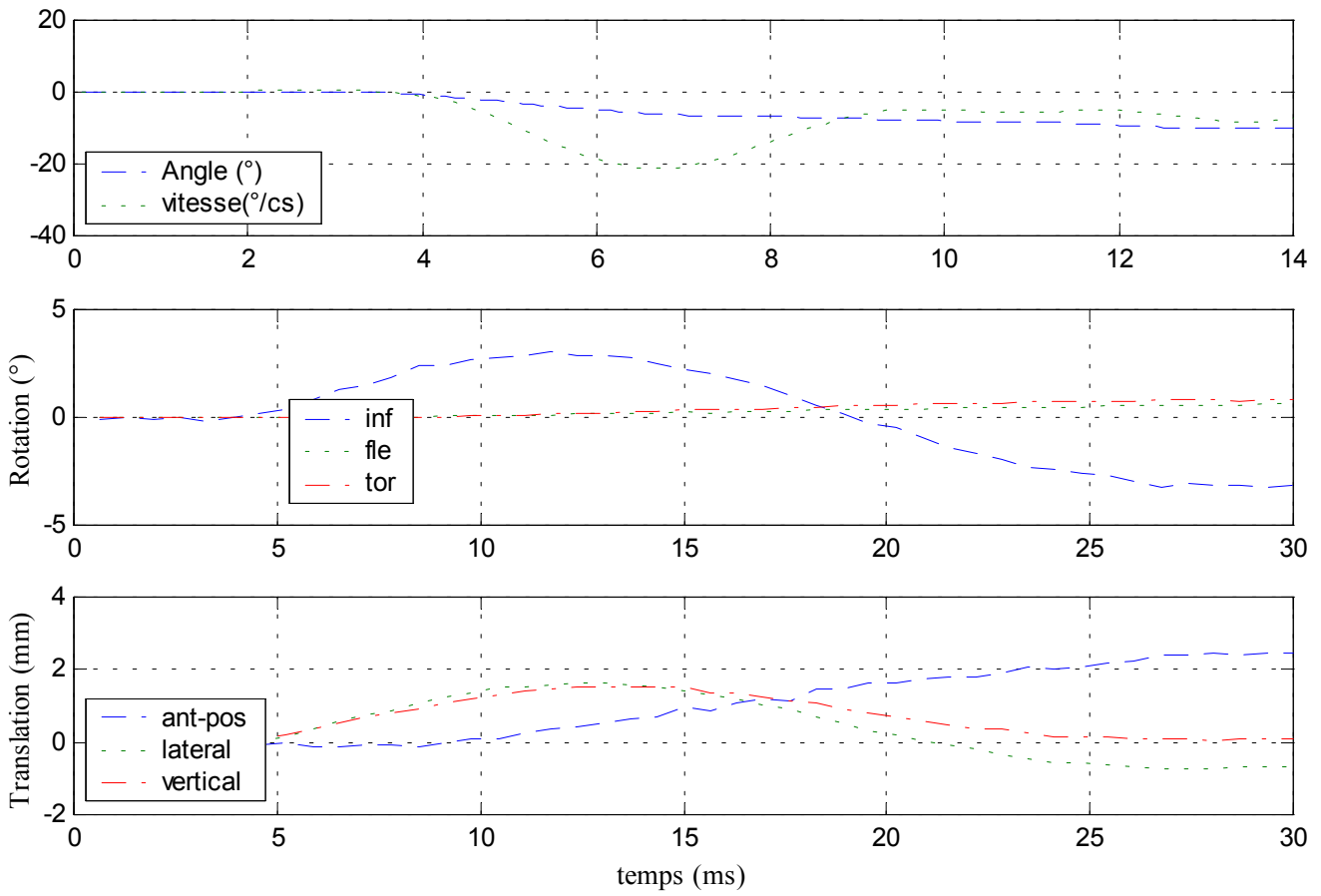


Efforts et moments inférieurs

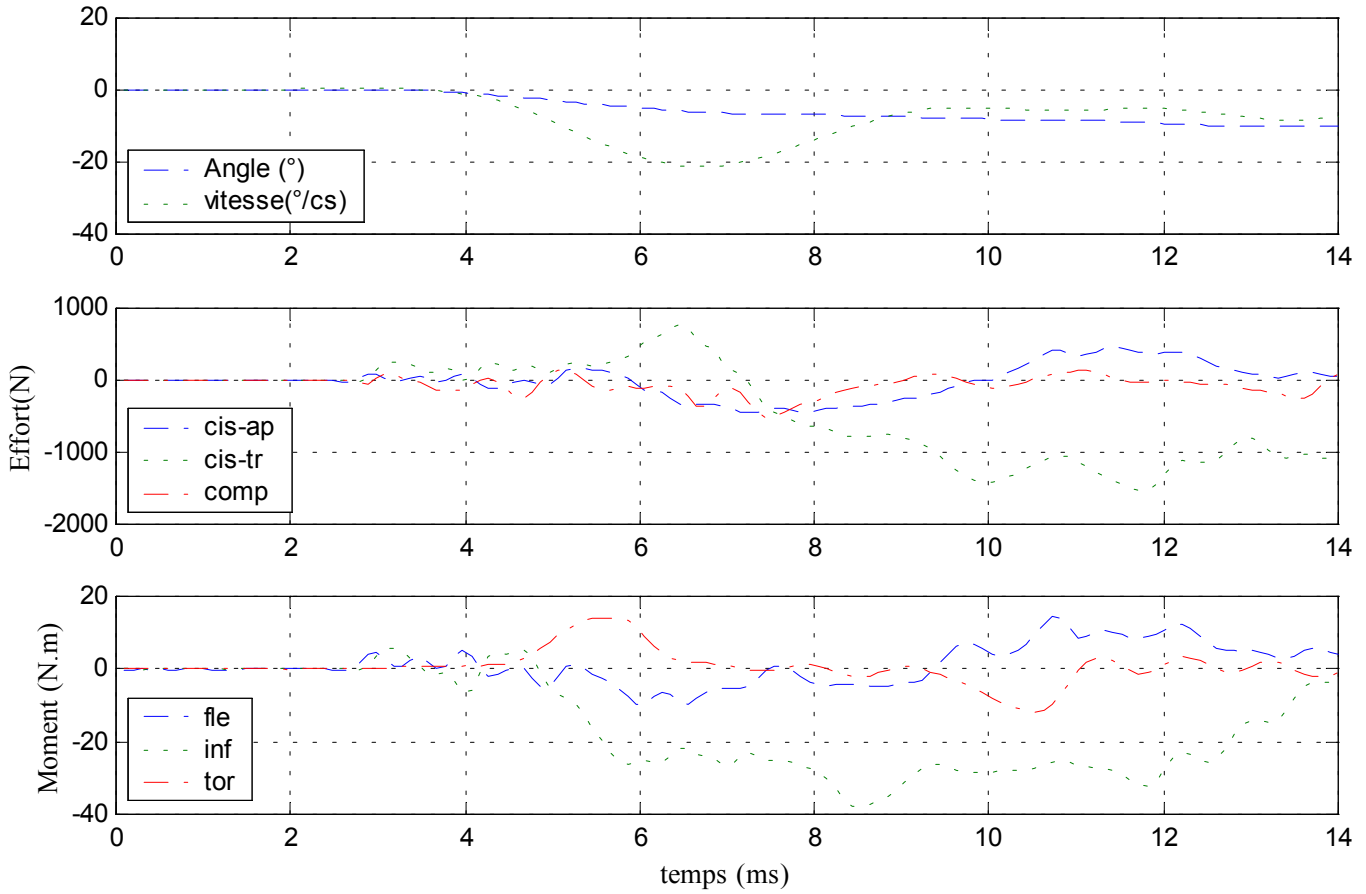


✓ Configuration avec ligaments jaunes coupés

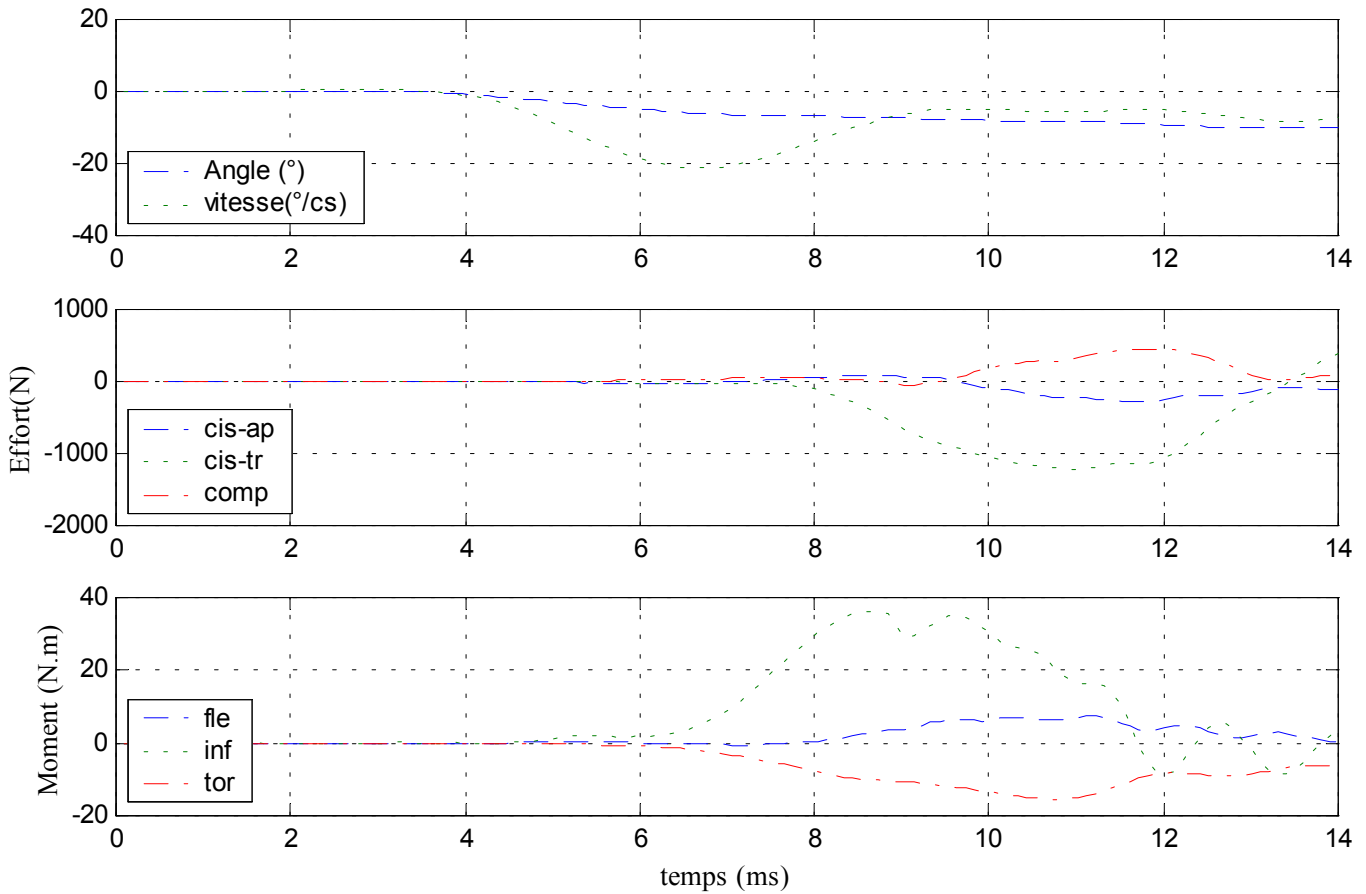
Déplacements



Efforts et moments supérieurs



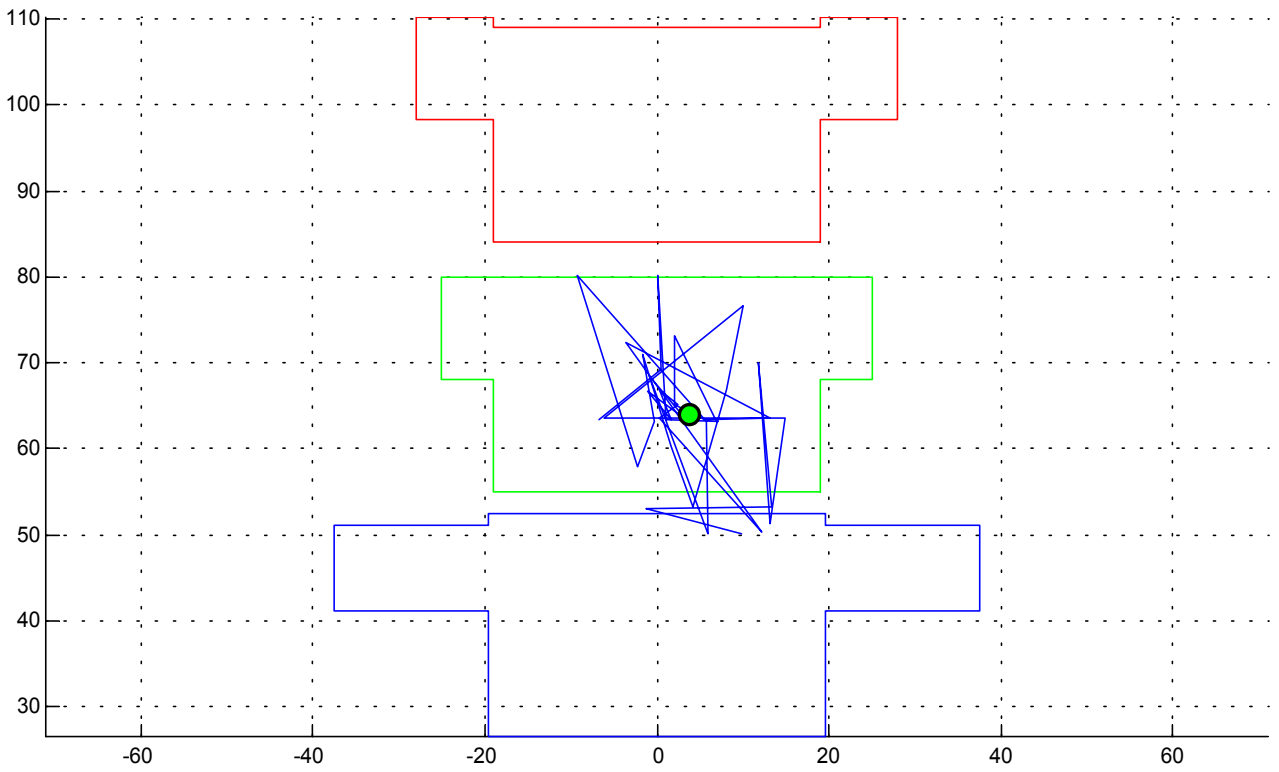
Efforts et moments inférieurs



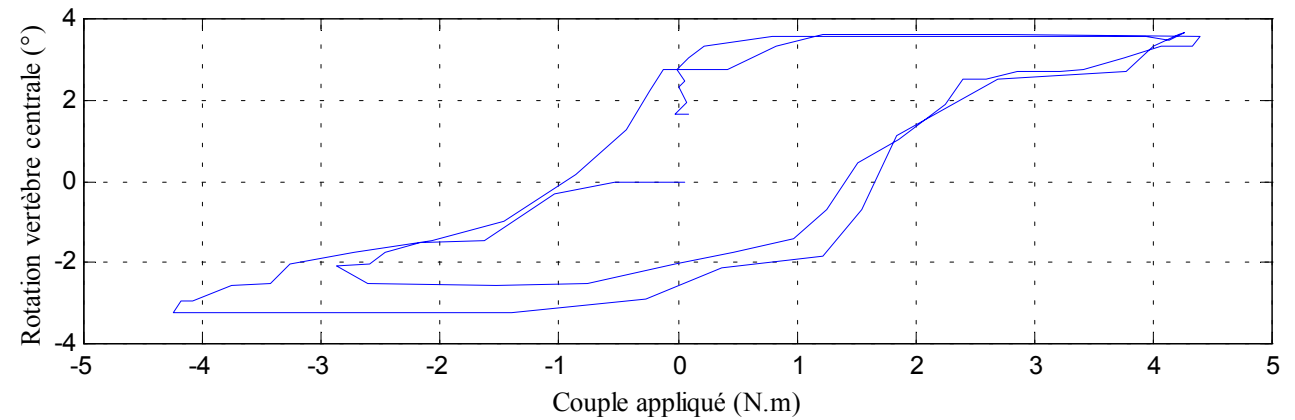
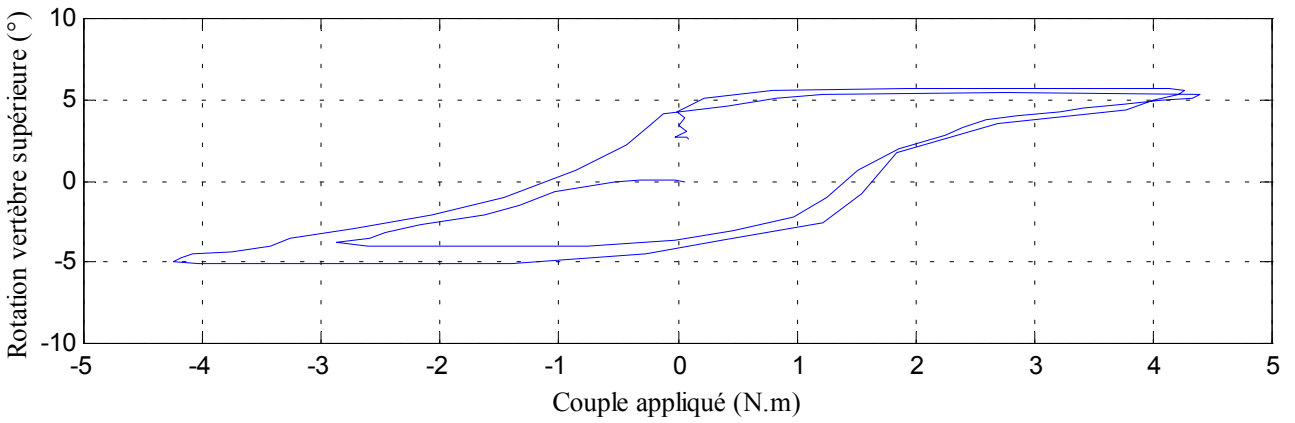
9- Essai 09 – T11L1 – inflexion

A. Statique

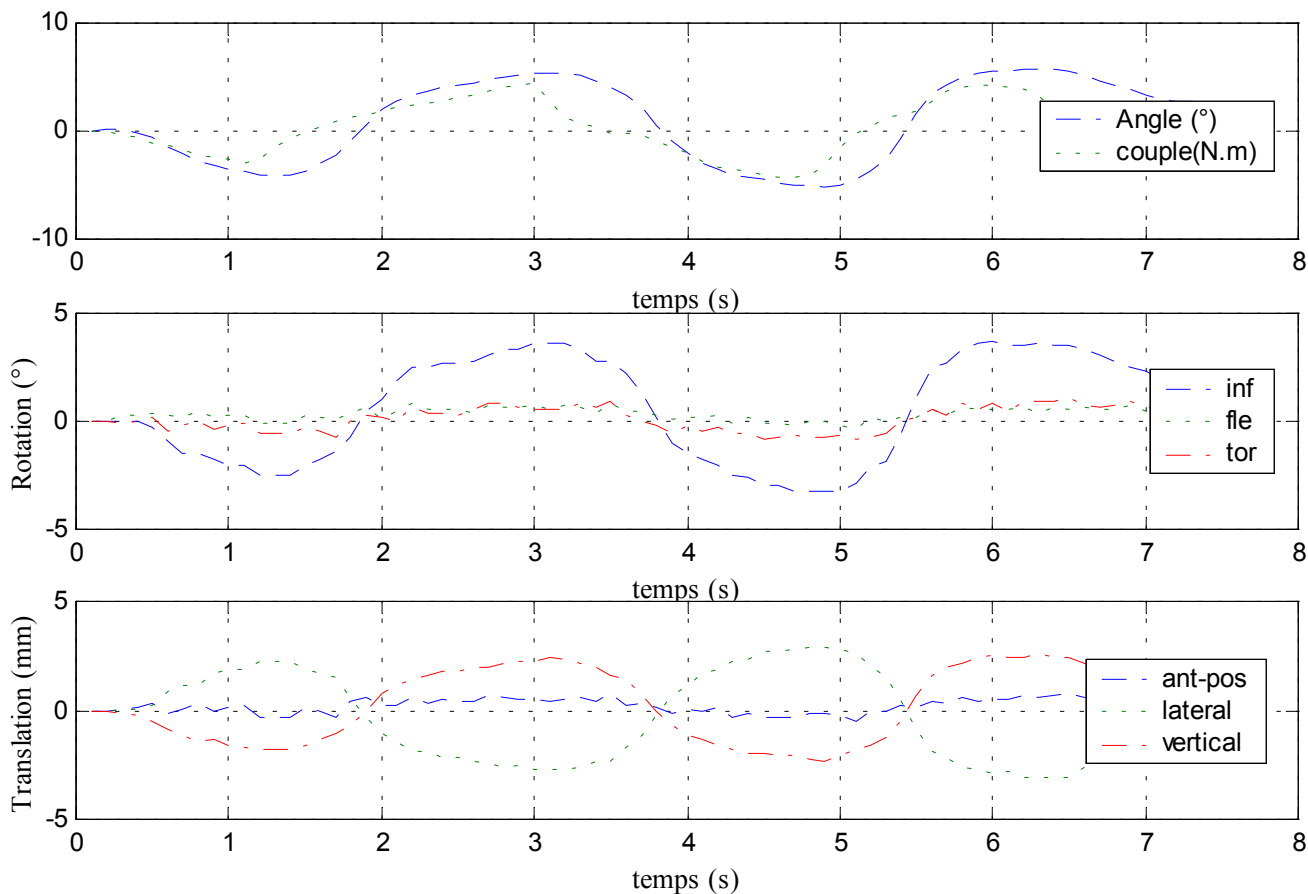
Centre instantané de rotation



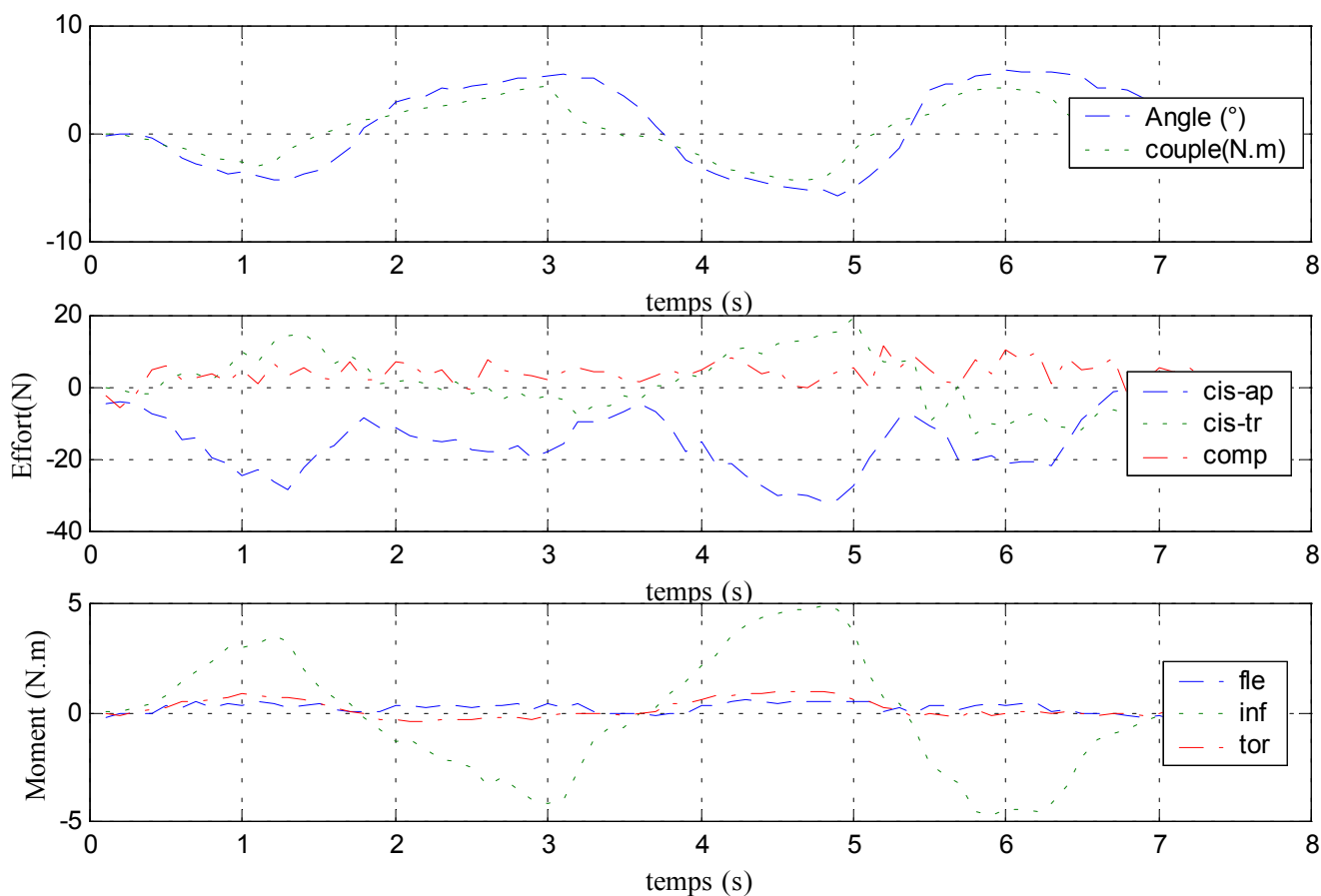
Courbe rotation-couple en hystérésis



Déplacements



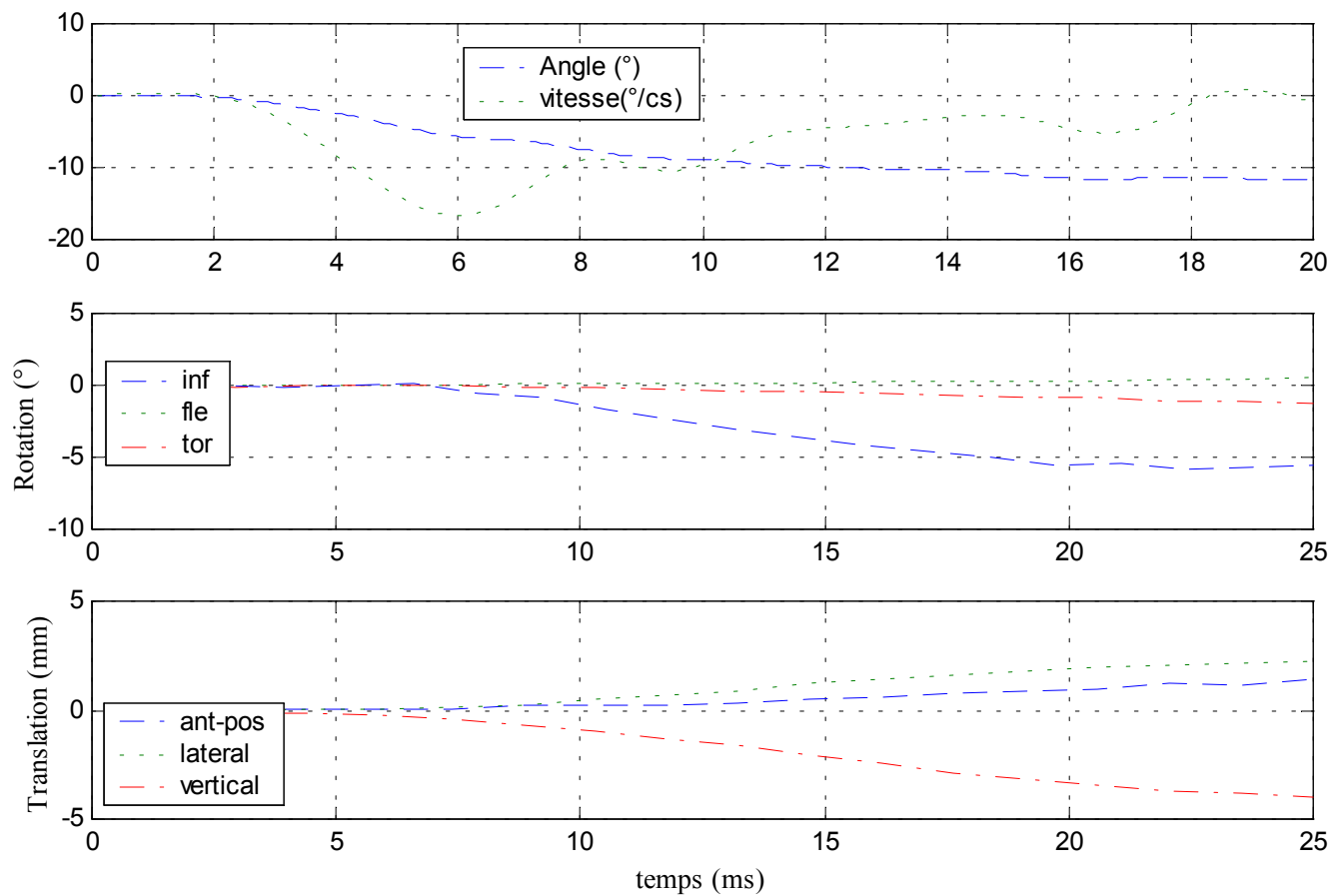
Efforts et moments inférieurs



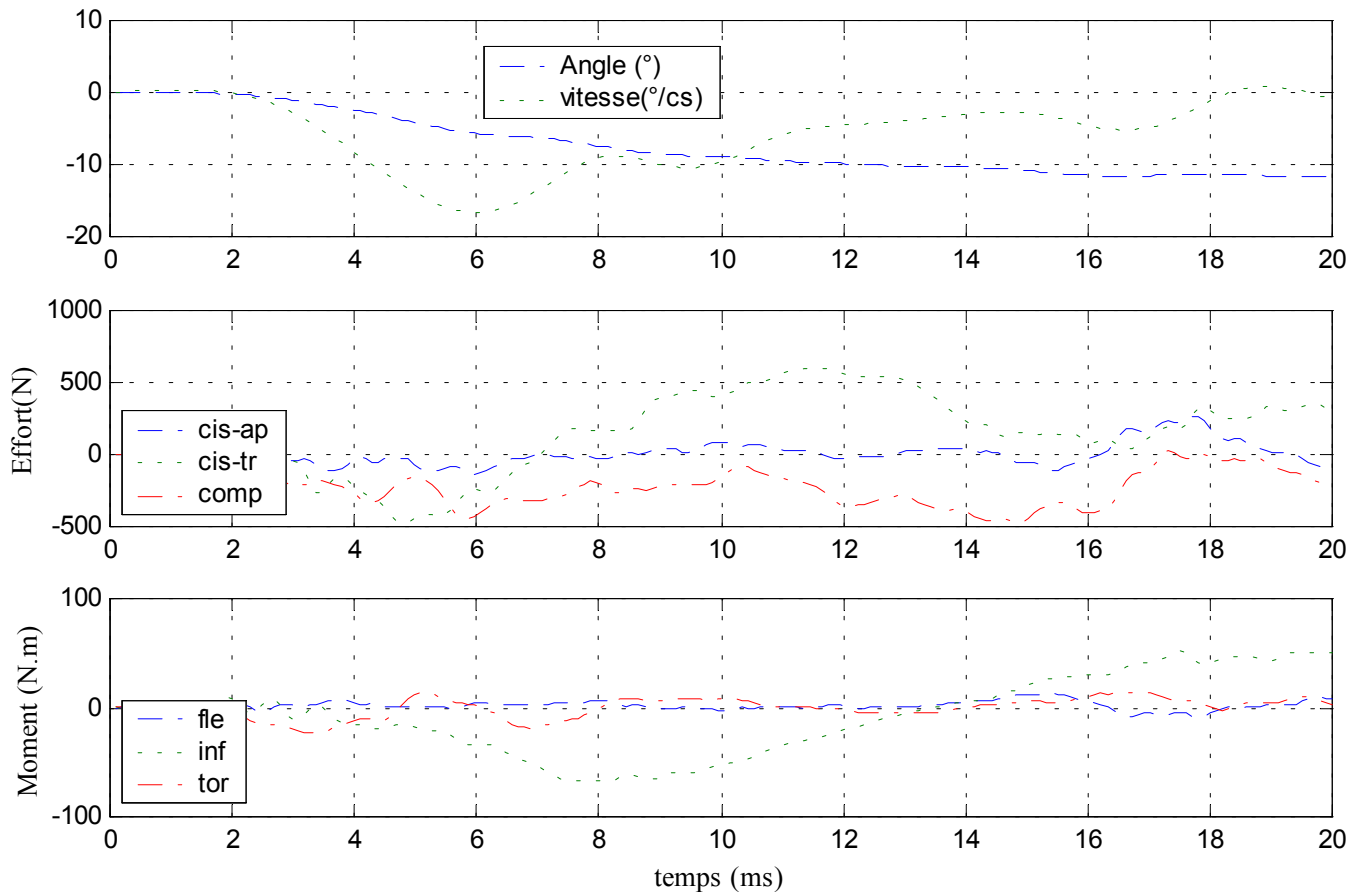
B. Dynamique

✓ Configuration saine

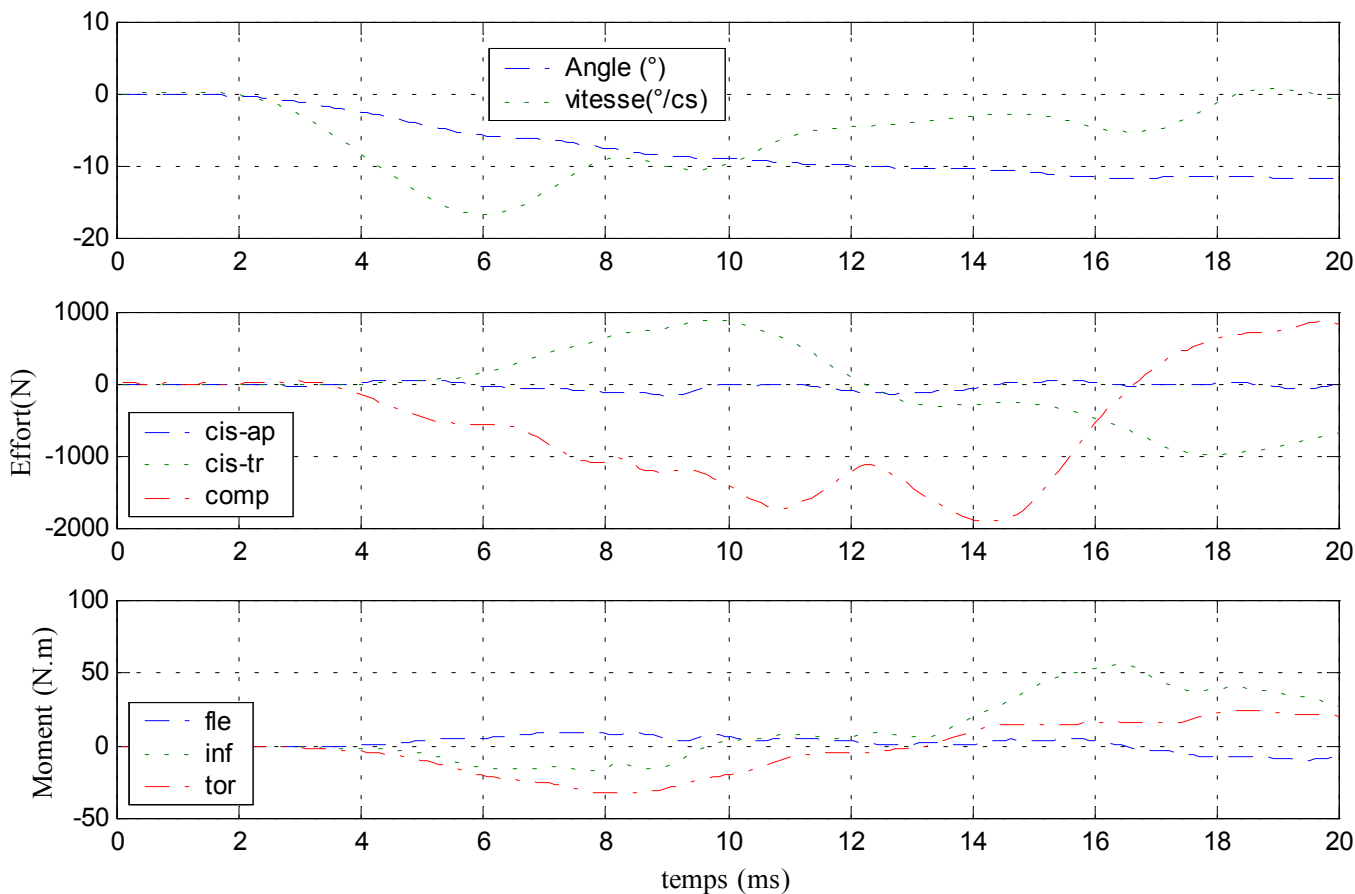
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

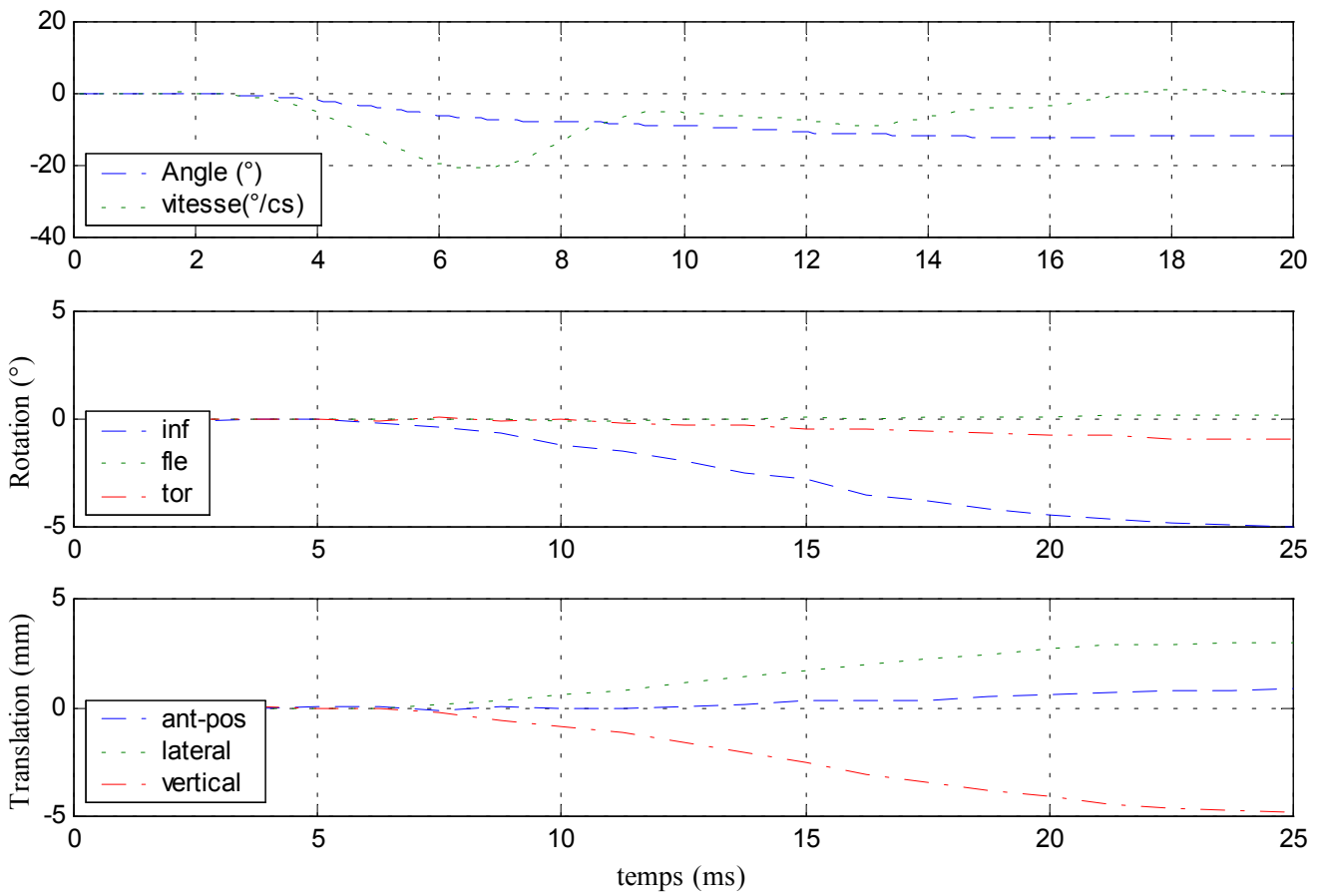


Efforts et moments inférieurs

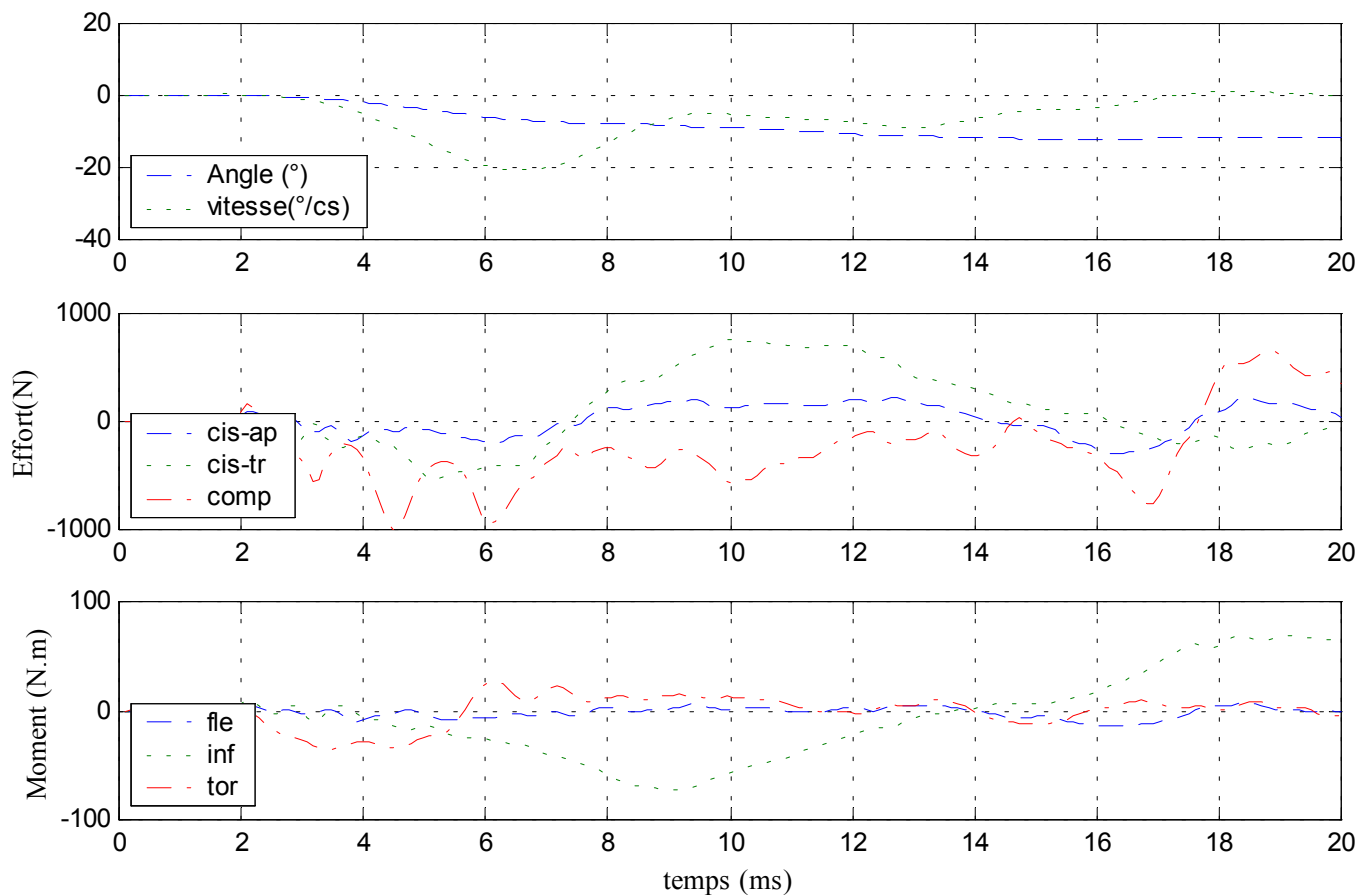


✓ Configuration avec ligaments épineux coupés

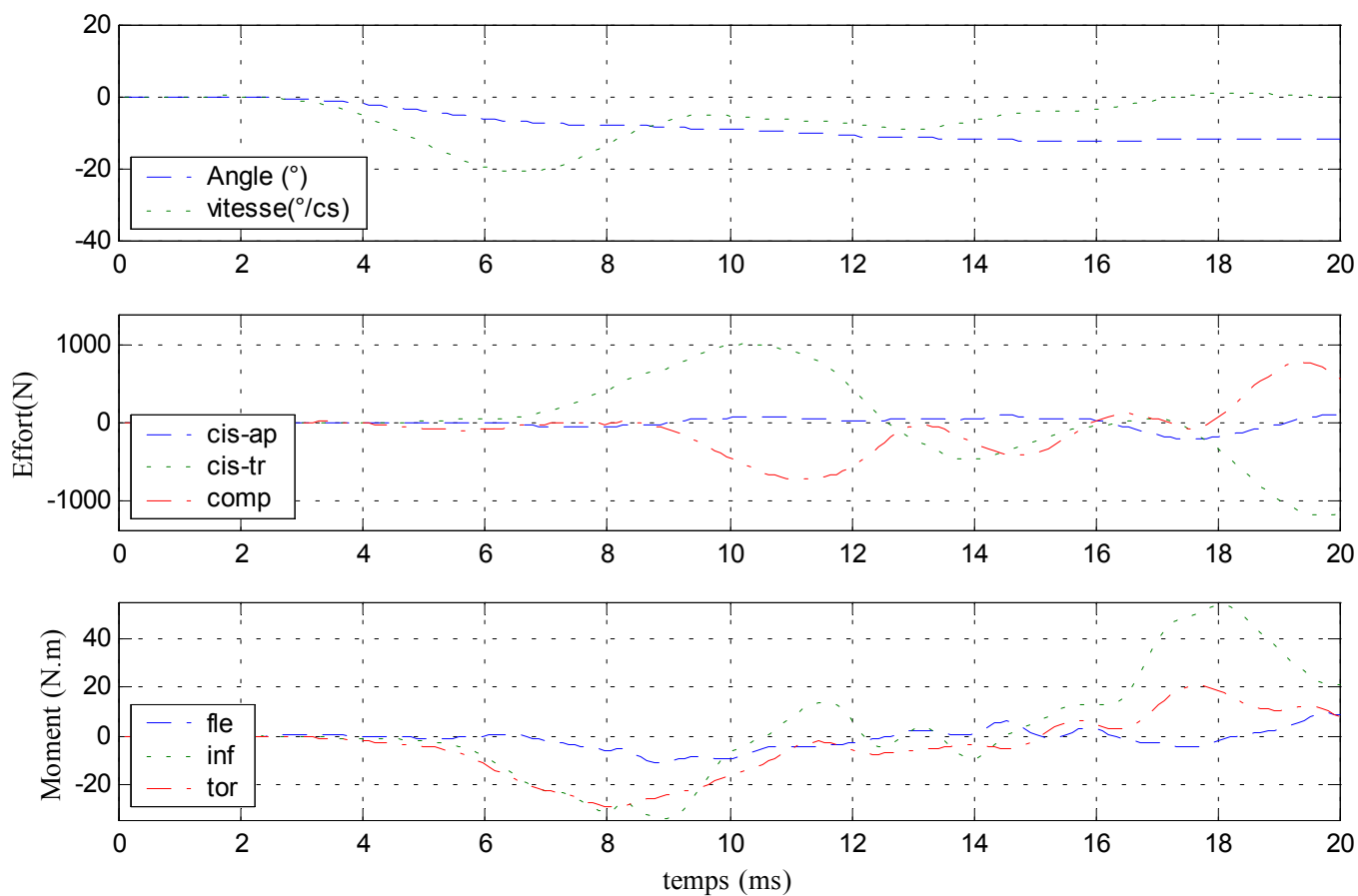
Déplacements



Efforts et moments supérieurs



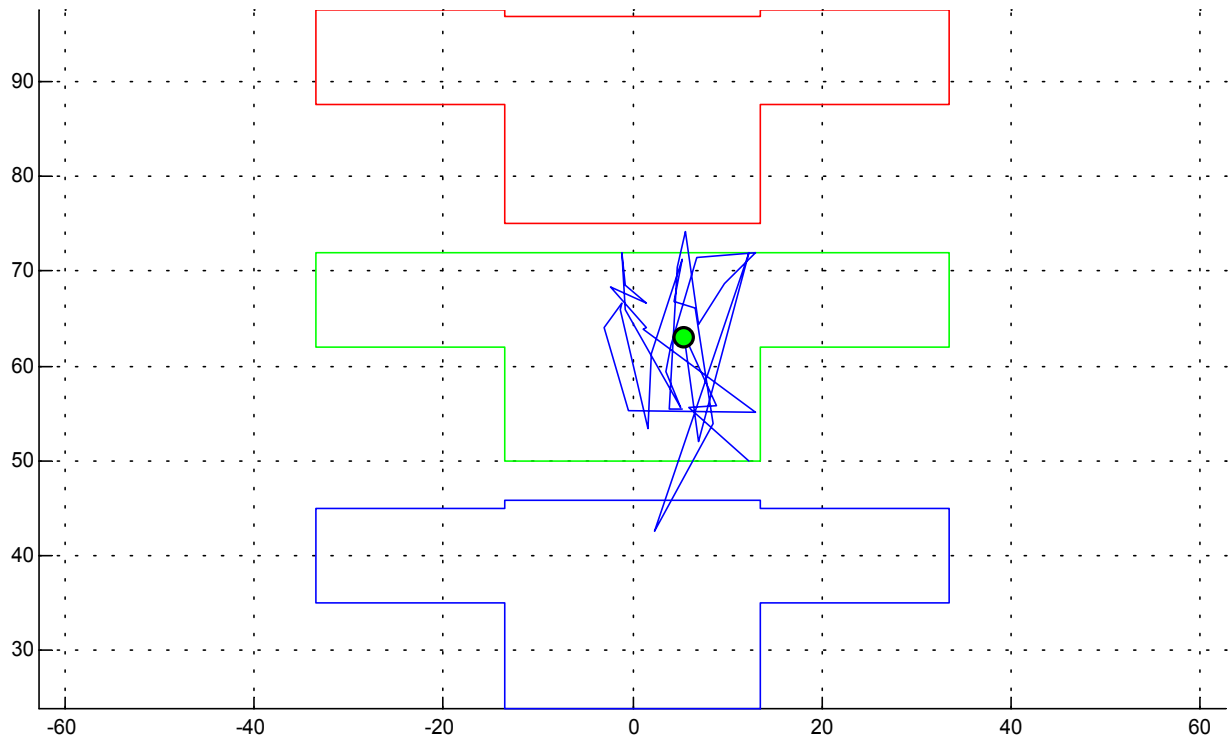
Efforts et moments inférieurs



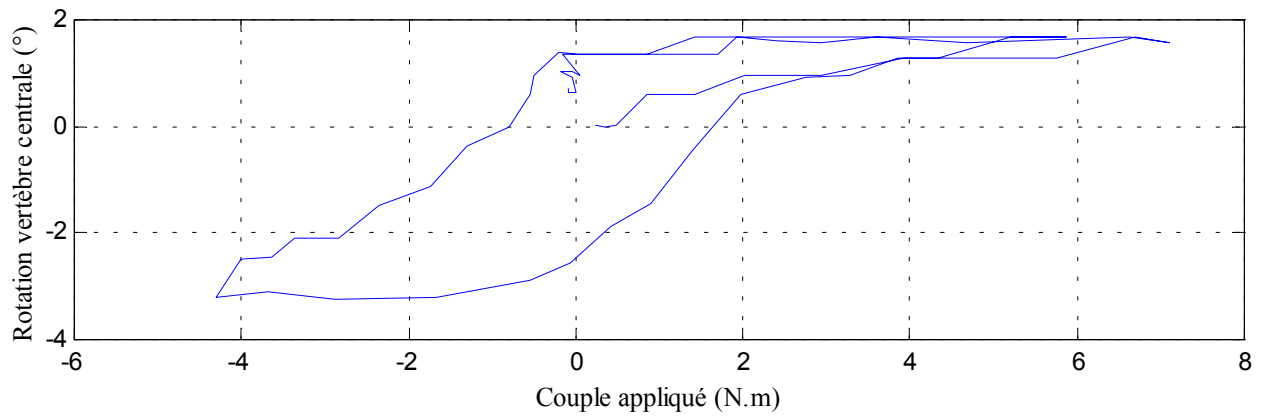
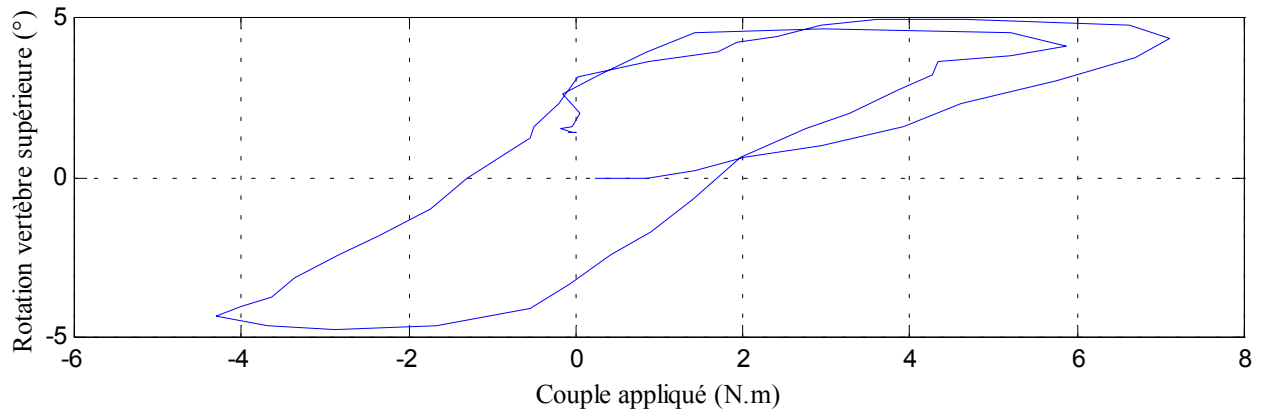
10- Essai 10 – T3T5 – inflexion

A. Statique

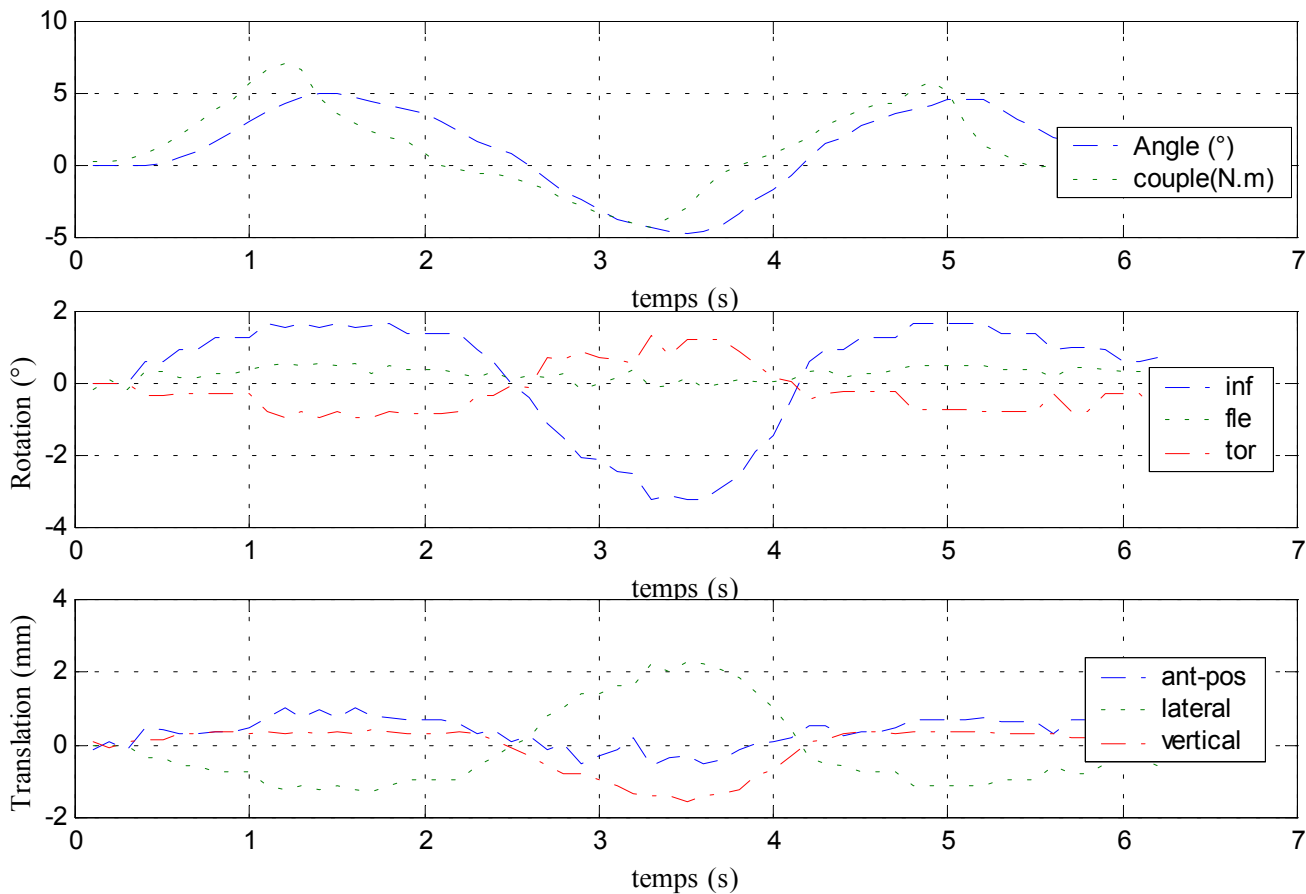
Centre instantané de rotation



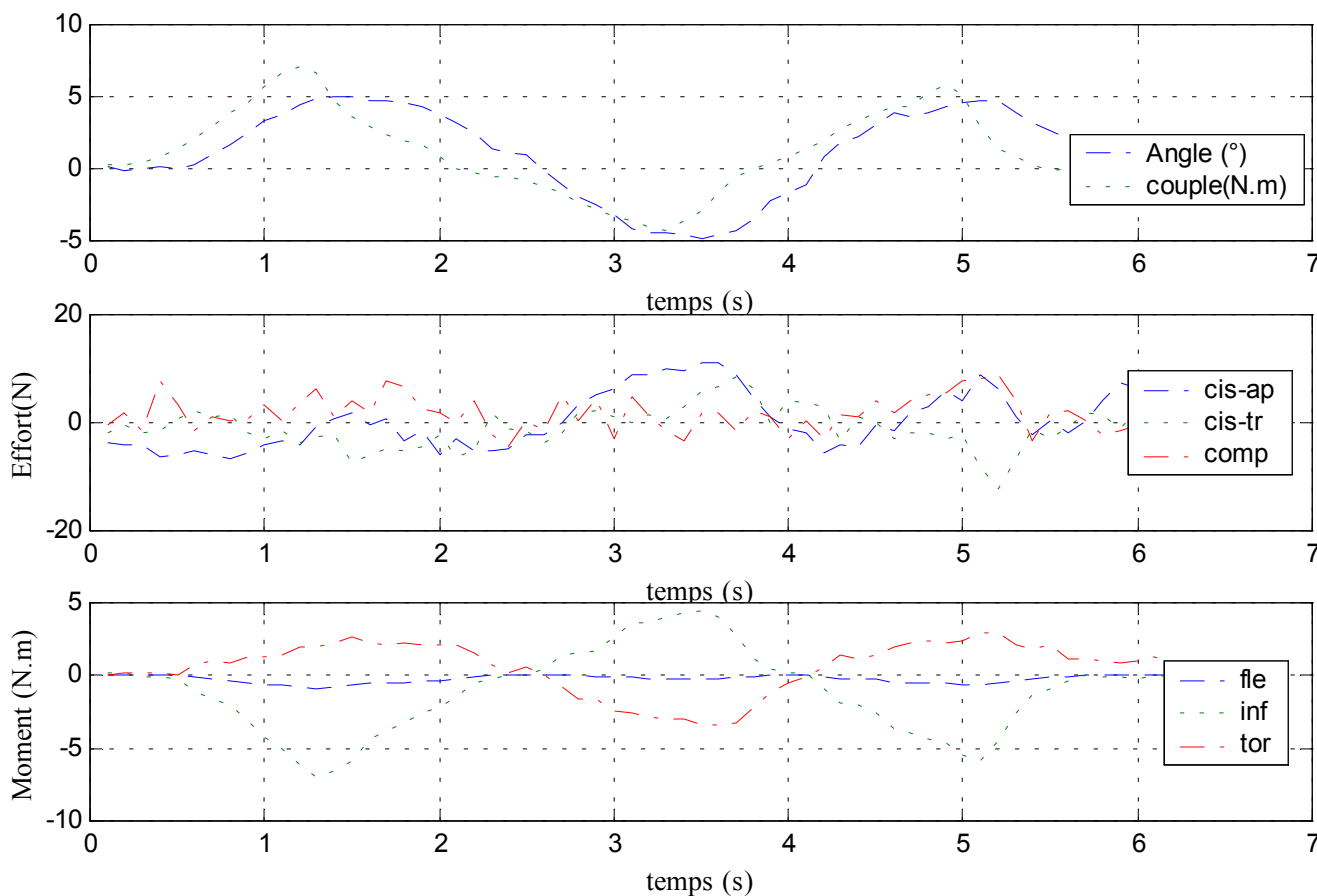
Courbe rotation-couple en hystérésis



Déplacements



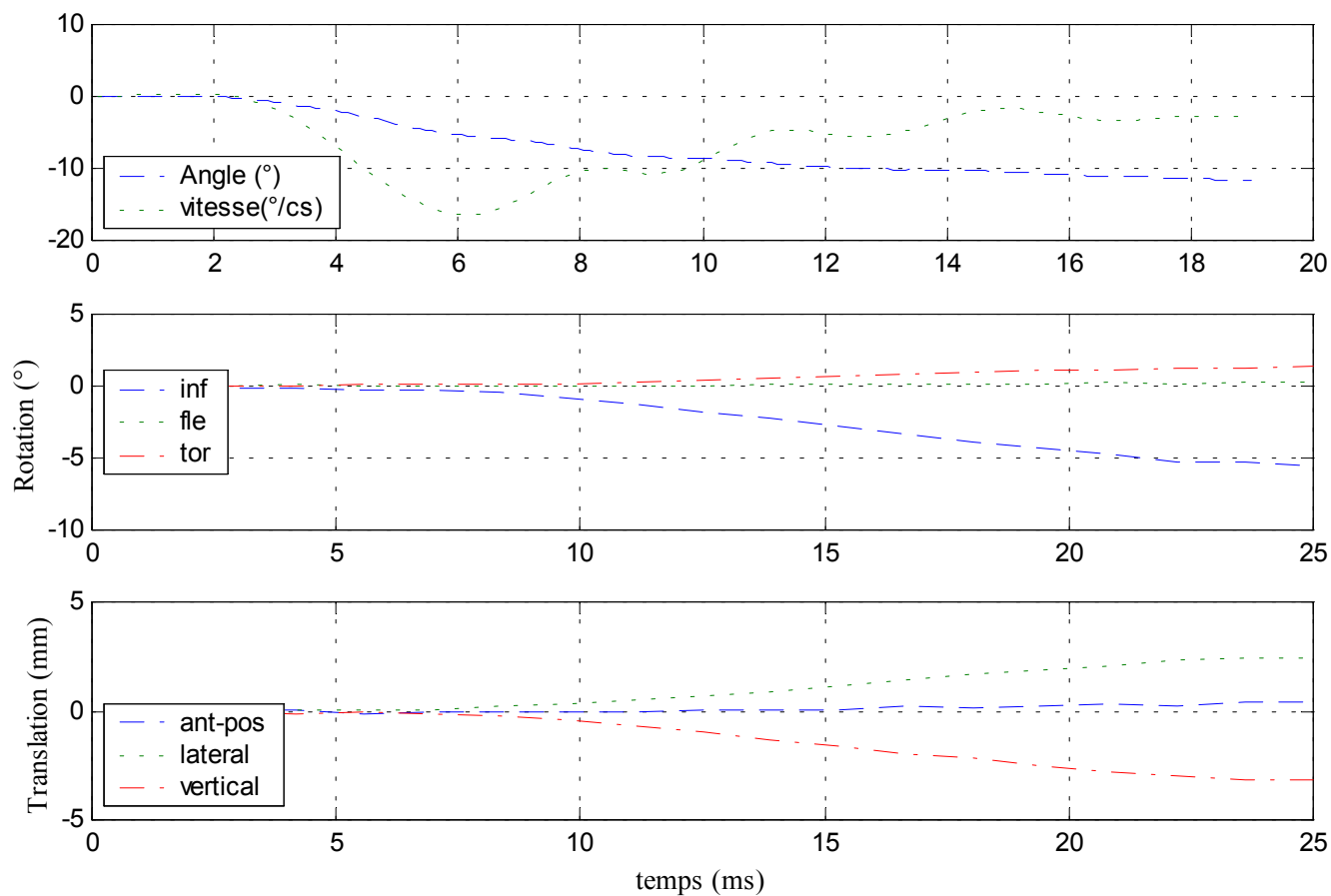
Efforts et moments inférieurs



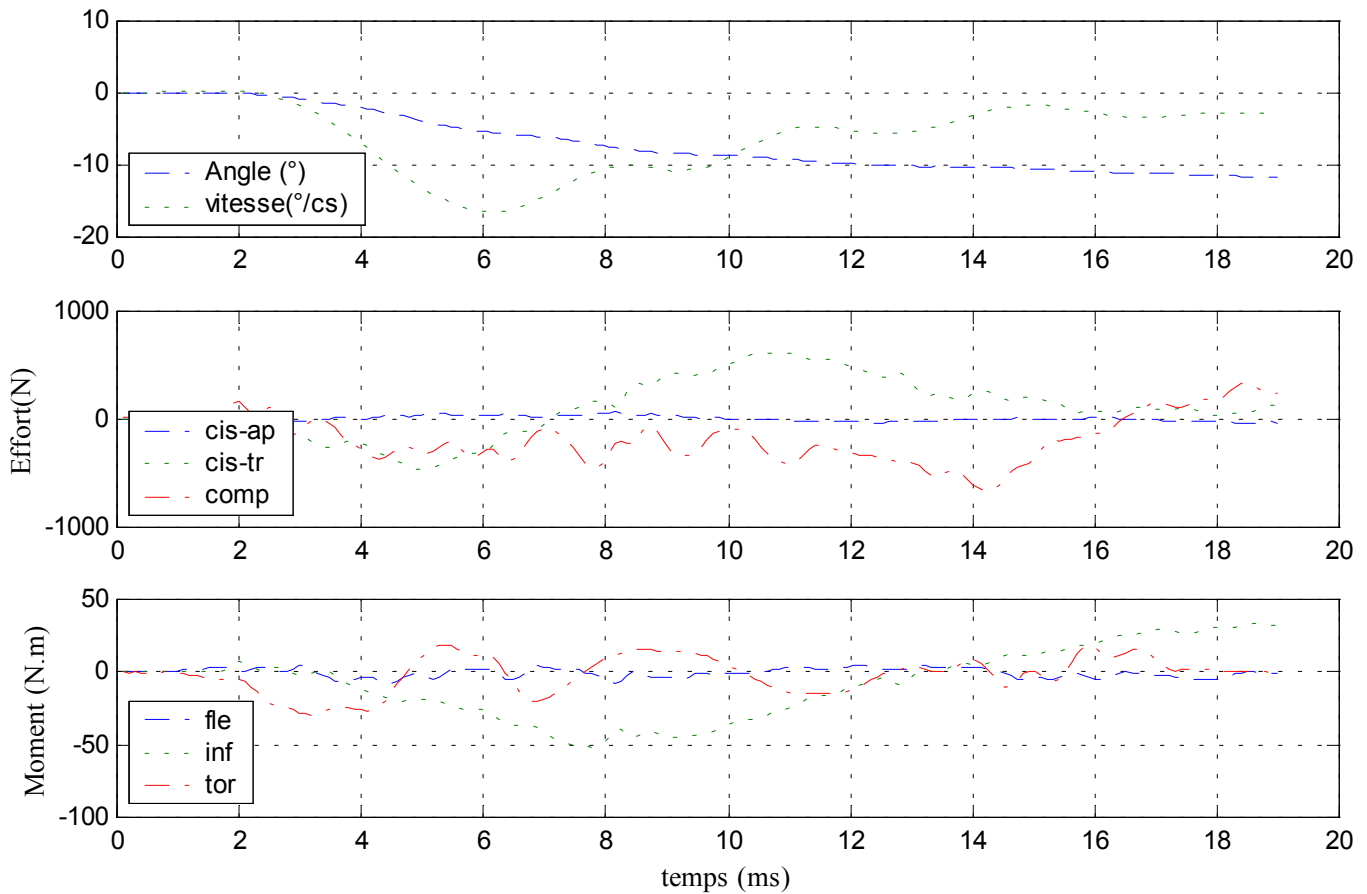
B. Dynamique

✓ Configuration saine

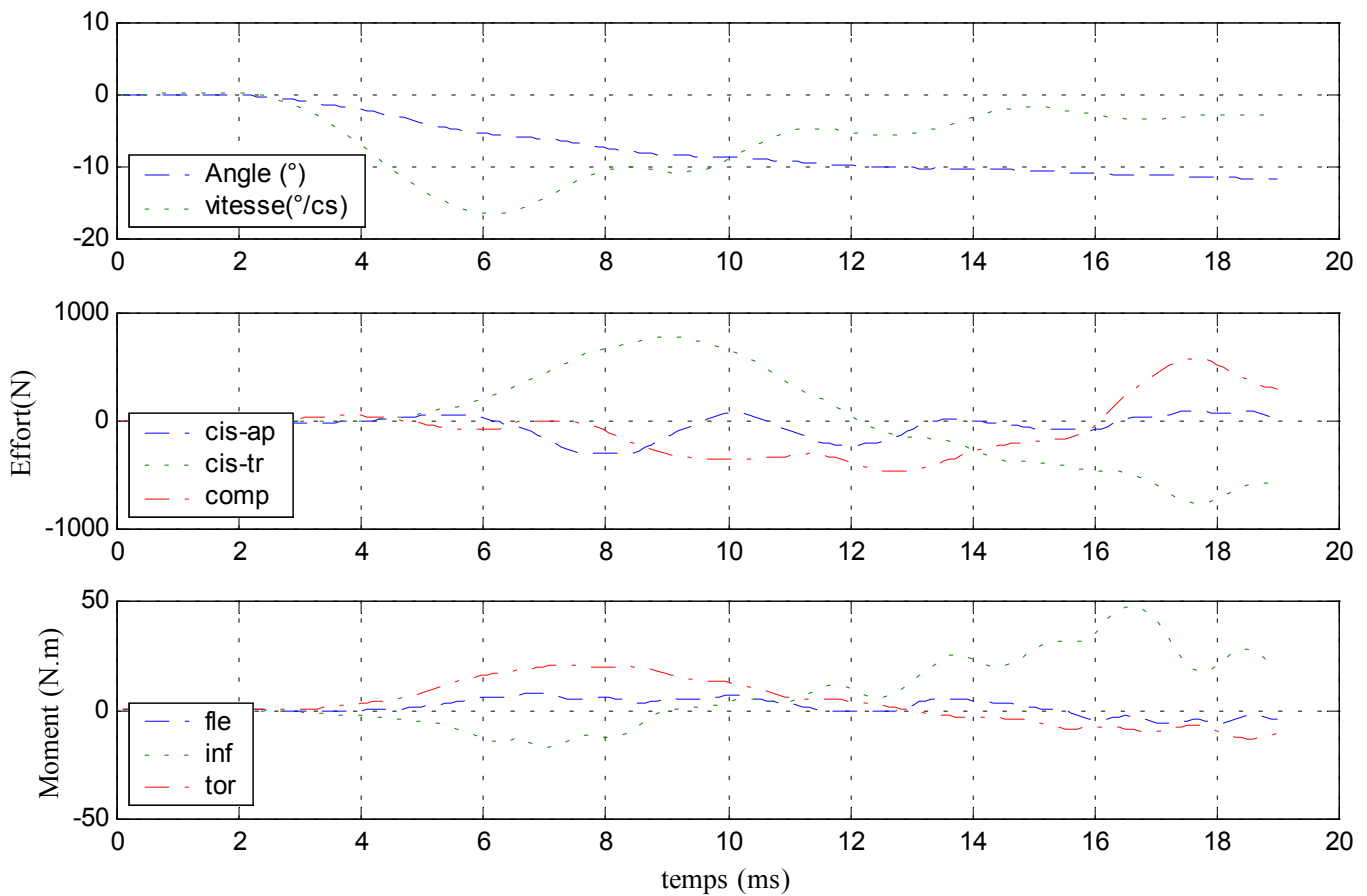
Déplacements



Efforts et moments supérieurs



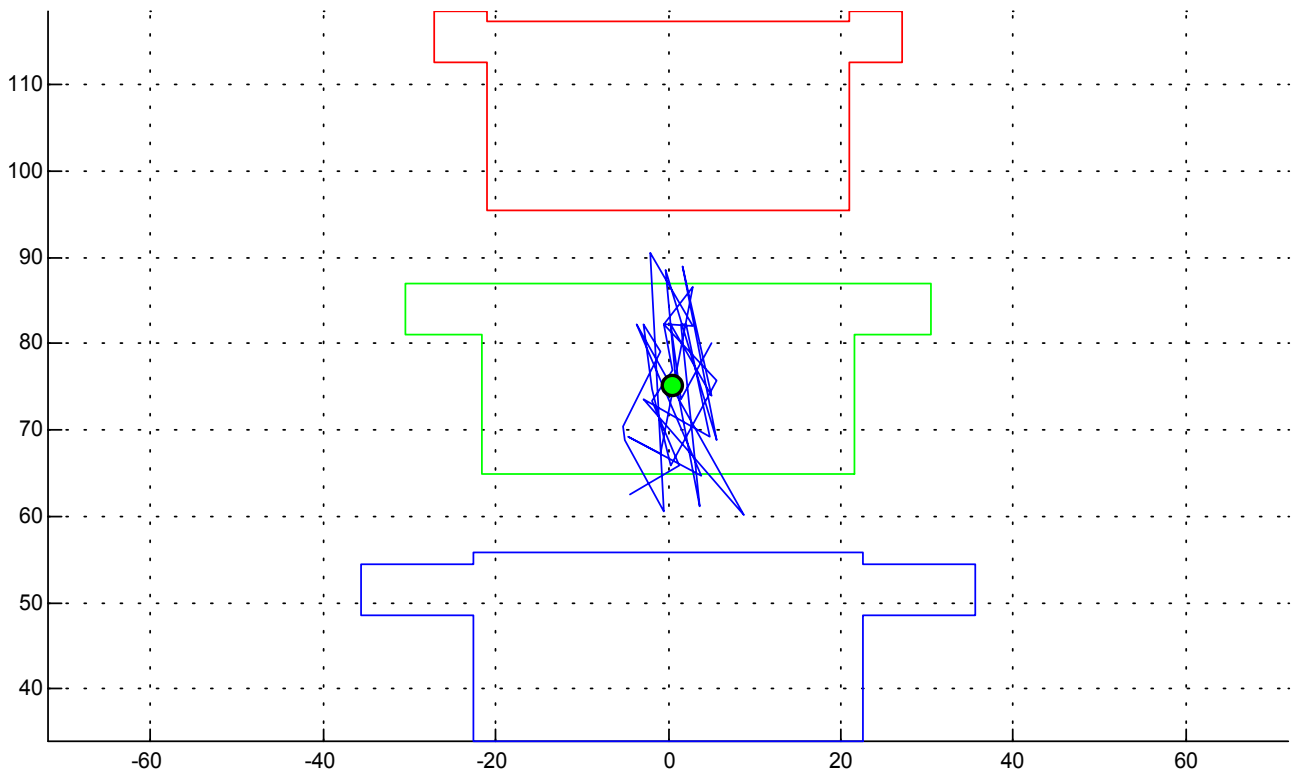
Efforts et moments inférieurs



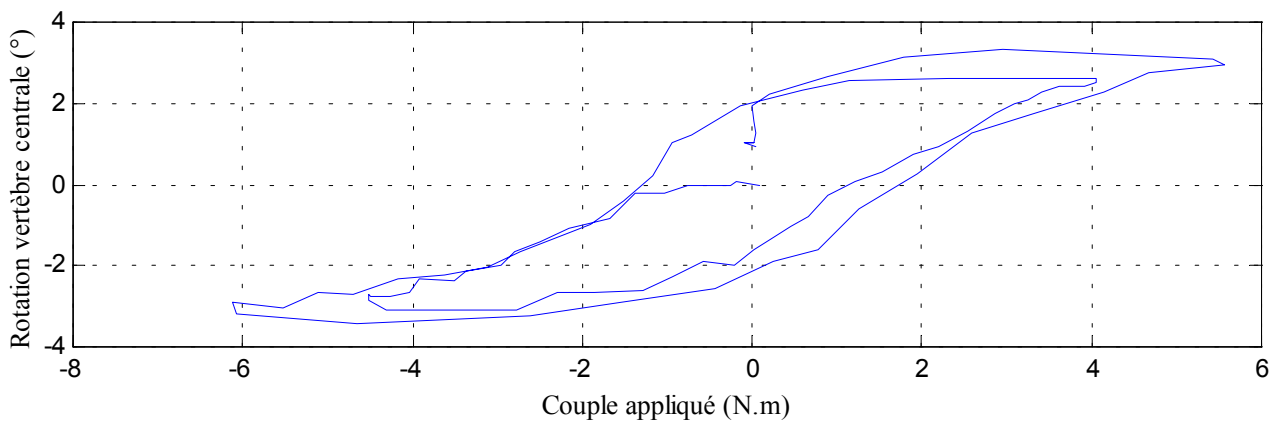
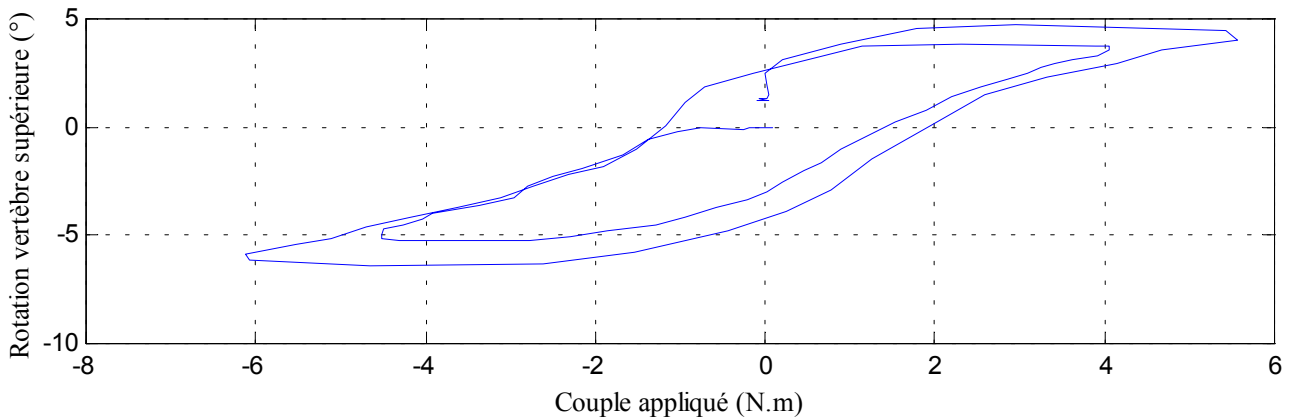
11- Essai 11 – T11L1 – inflexion

A. Statique

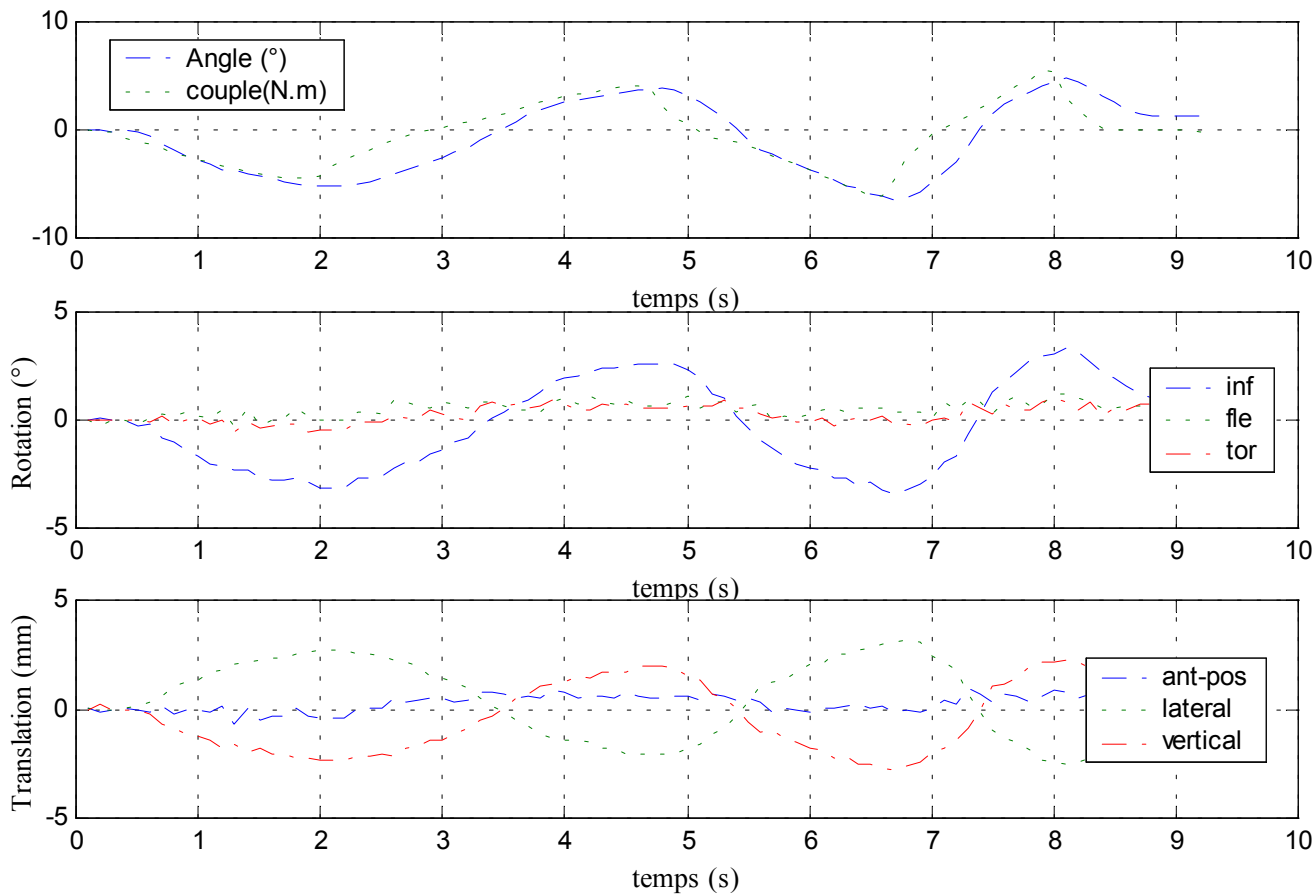
Centre instantané de rotation



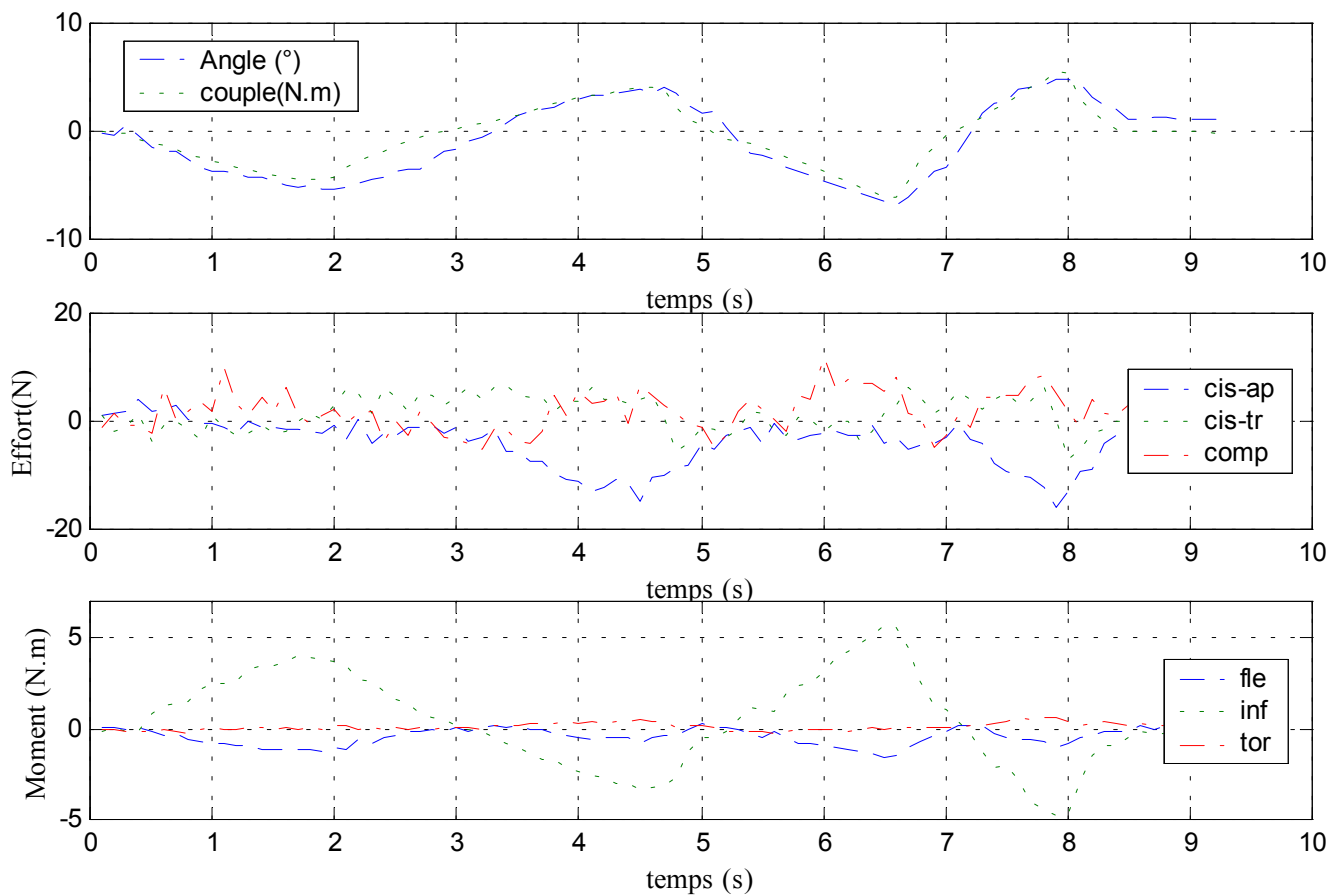
Courbe rotation-couple en hystérésis



Déplacements



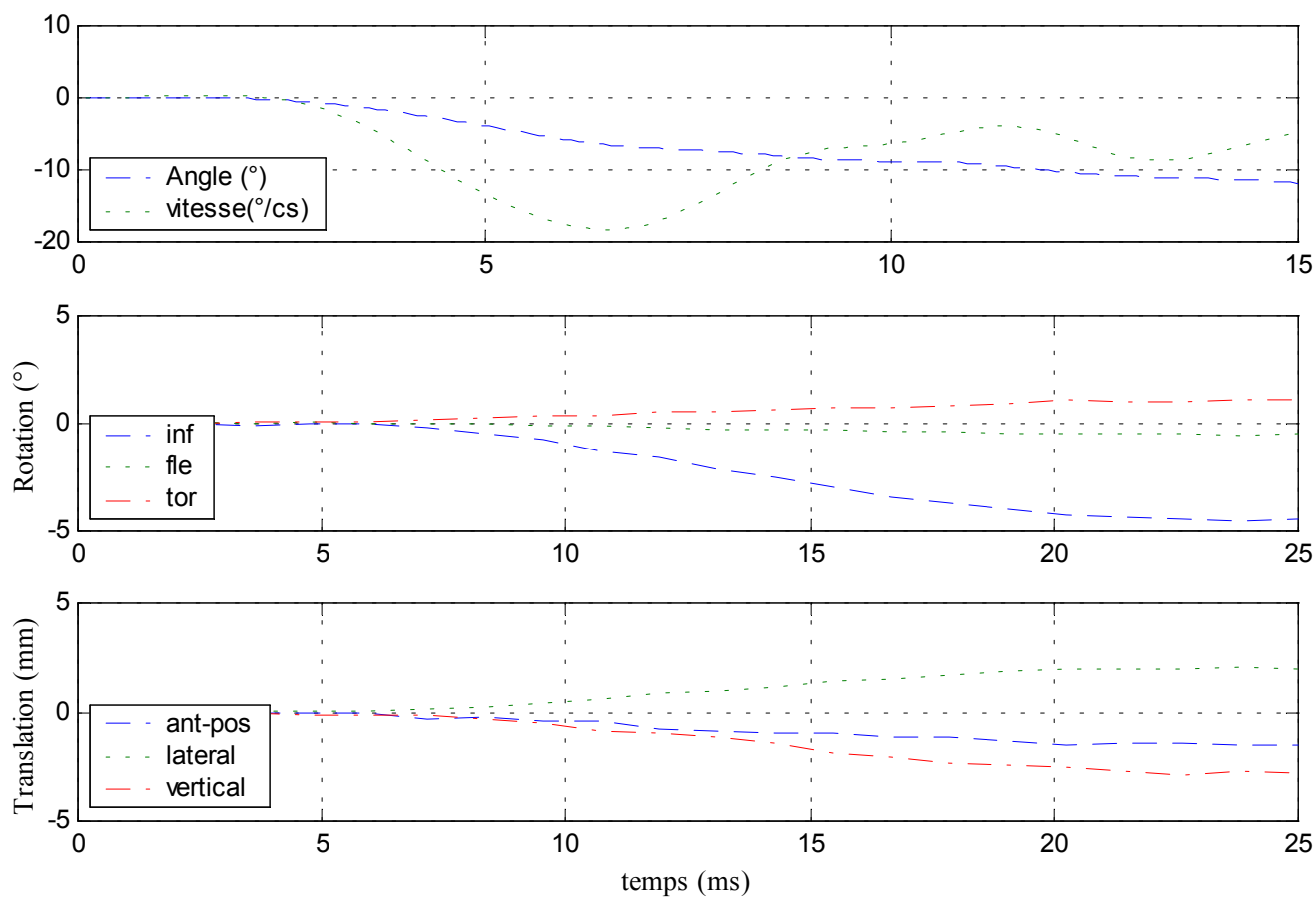
Efforts et moments inférieurs



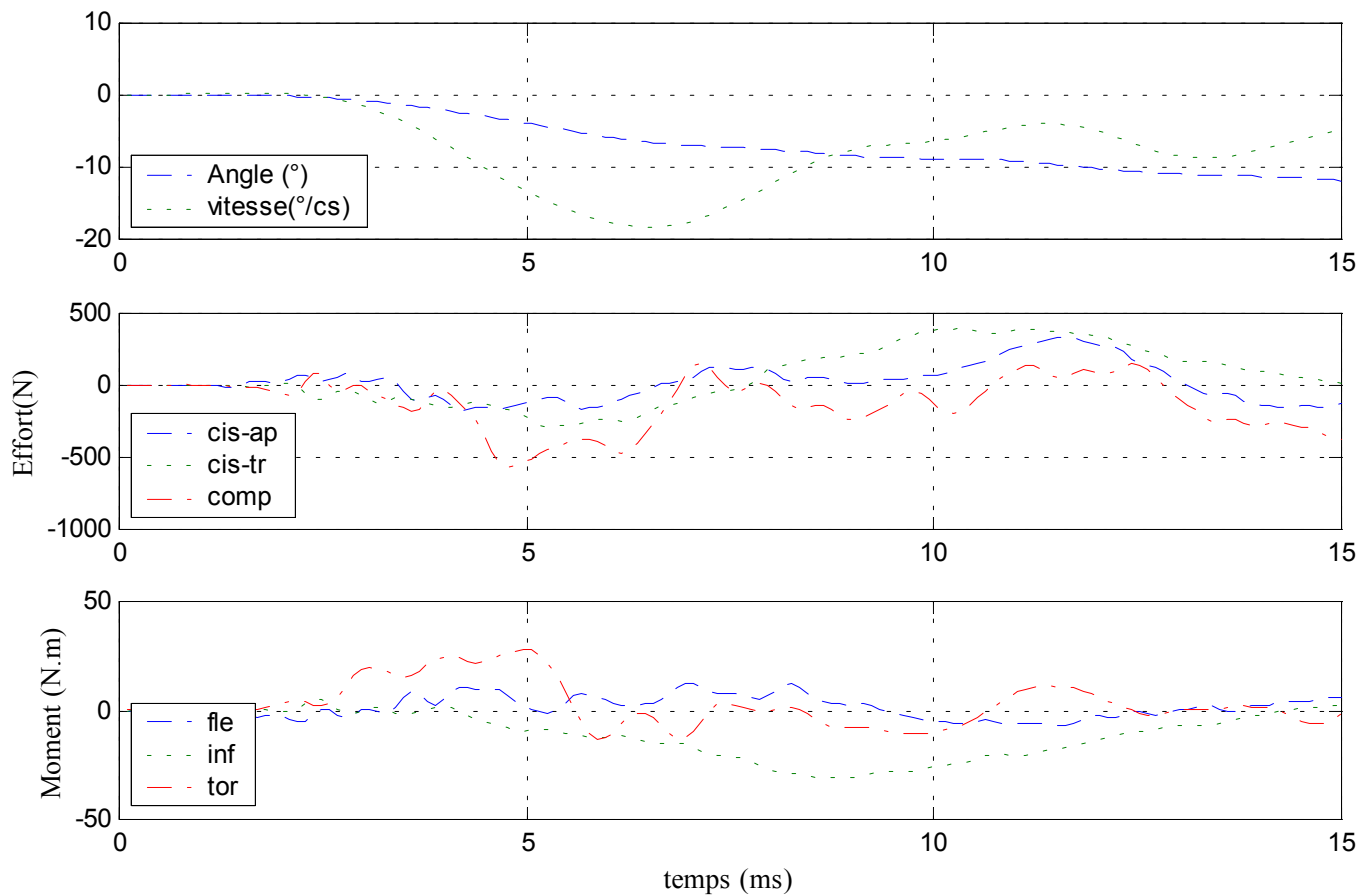
B. Dynamique

✓ Configuration saine

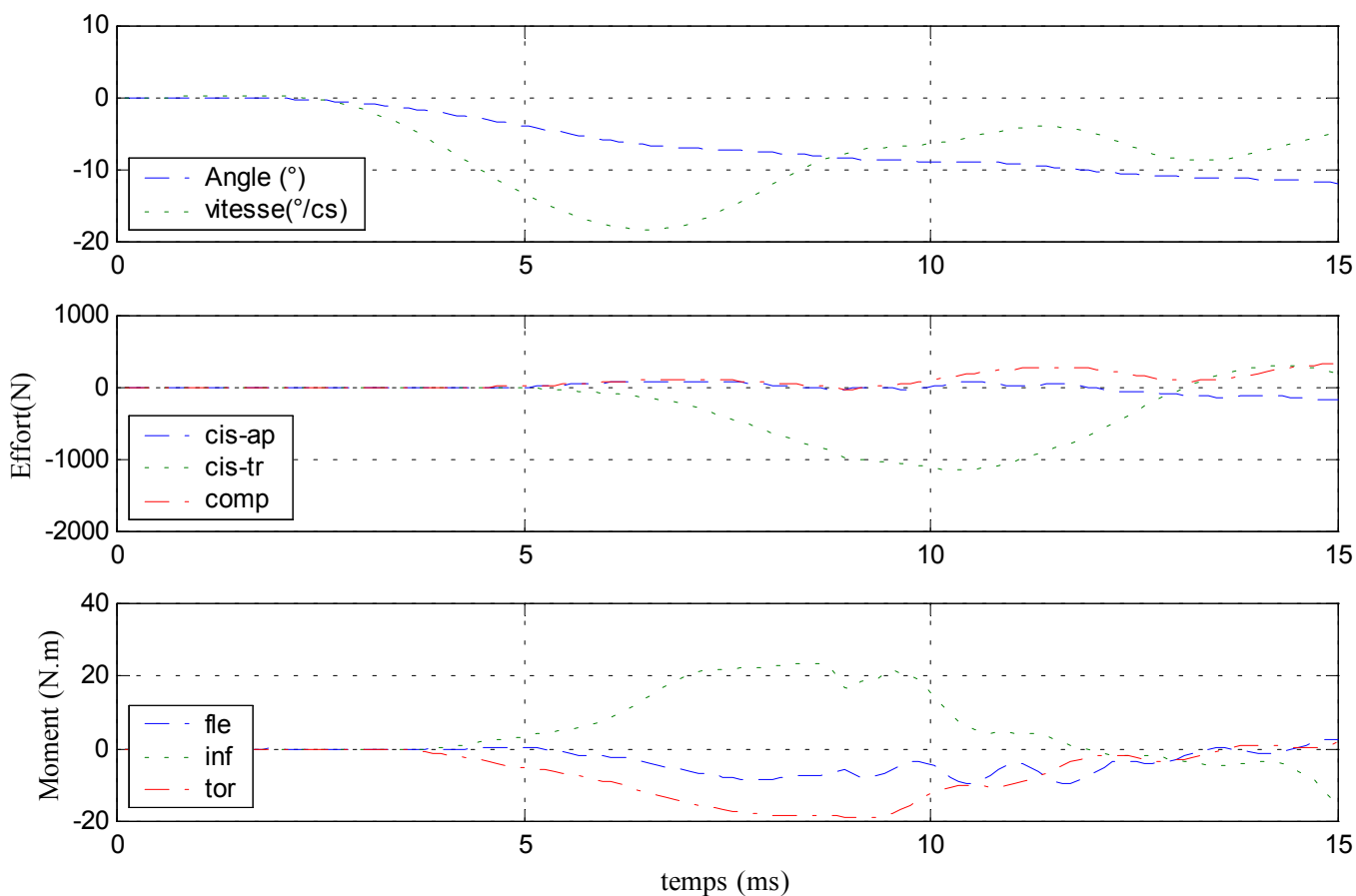
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

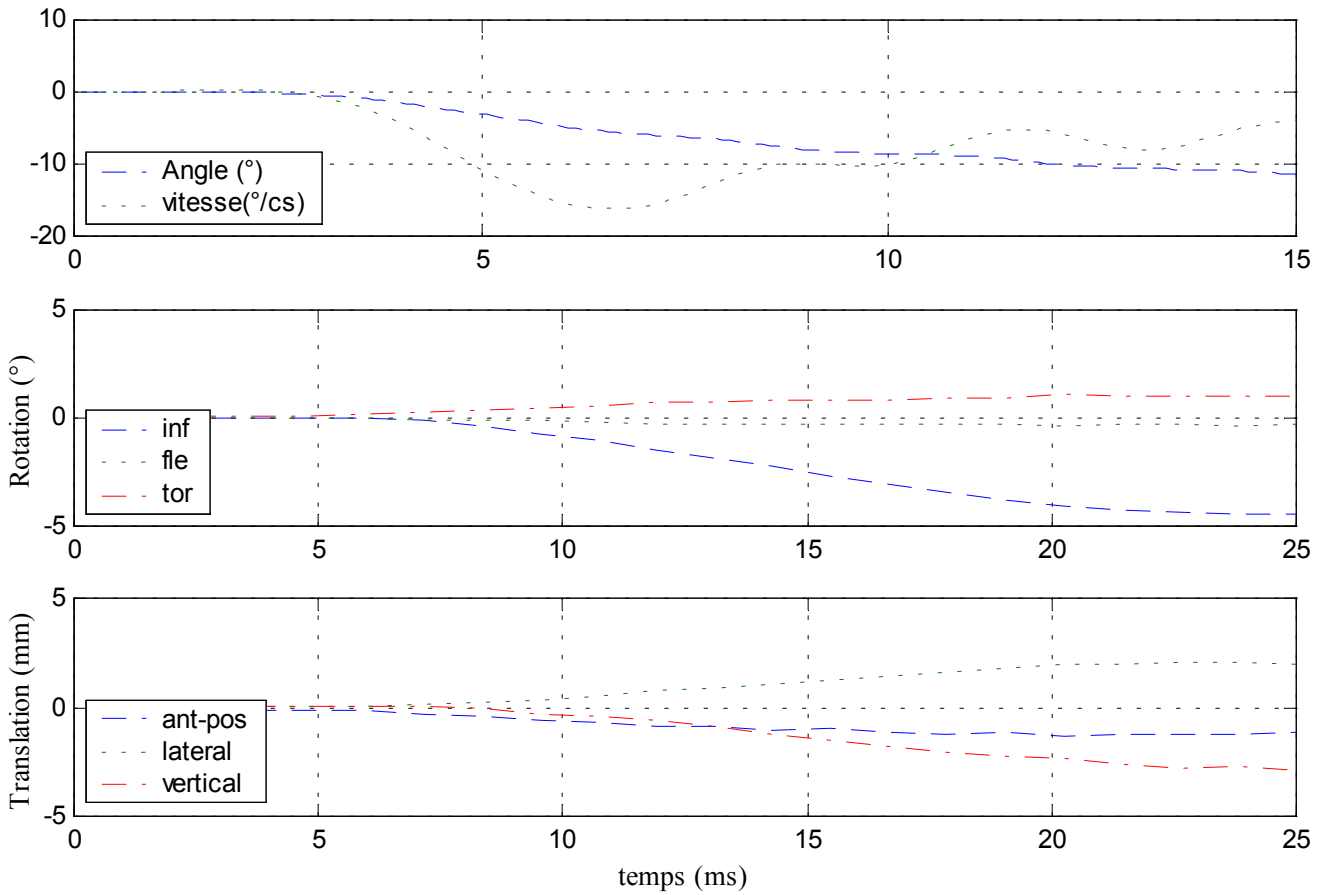


Efforts et moments inférieurs

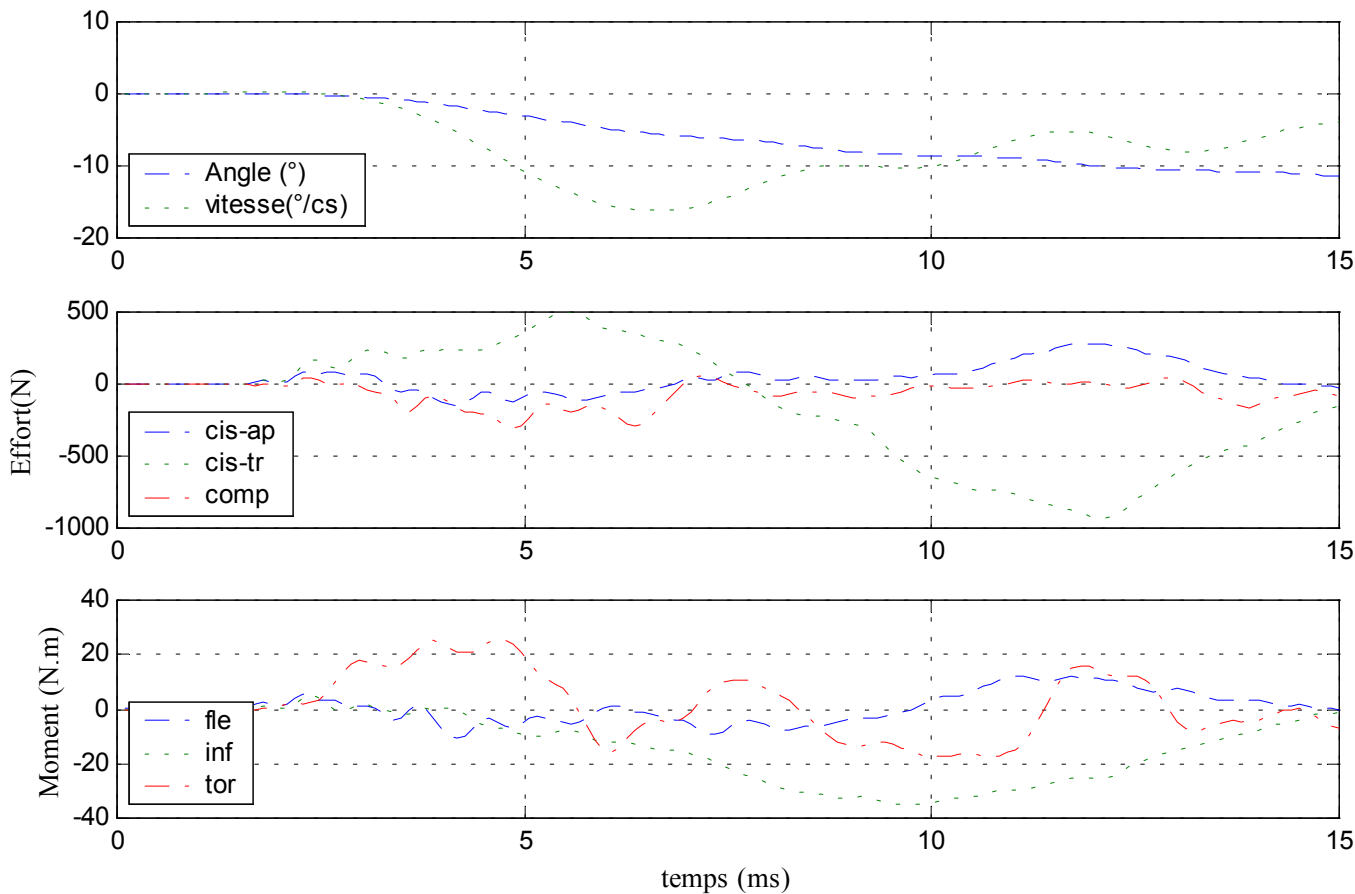


✓ Configuration avec ligaments capsulaires coupés

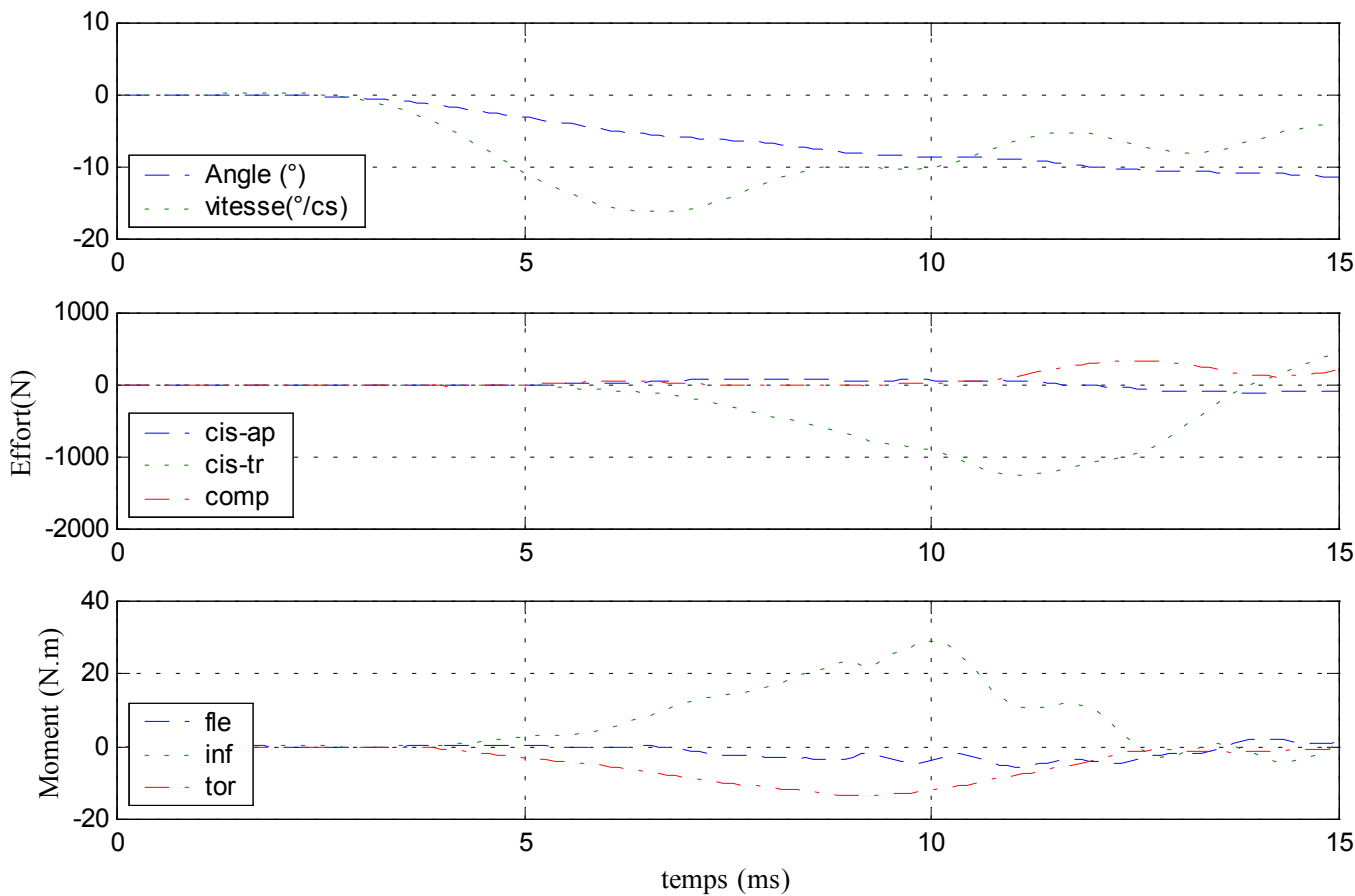
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

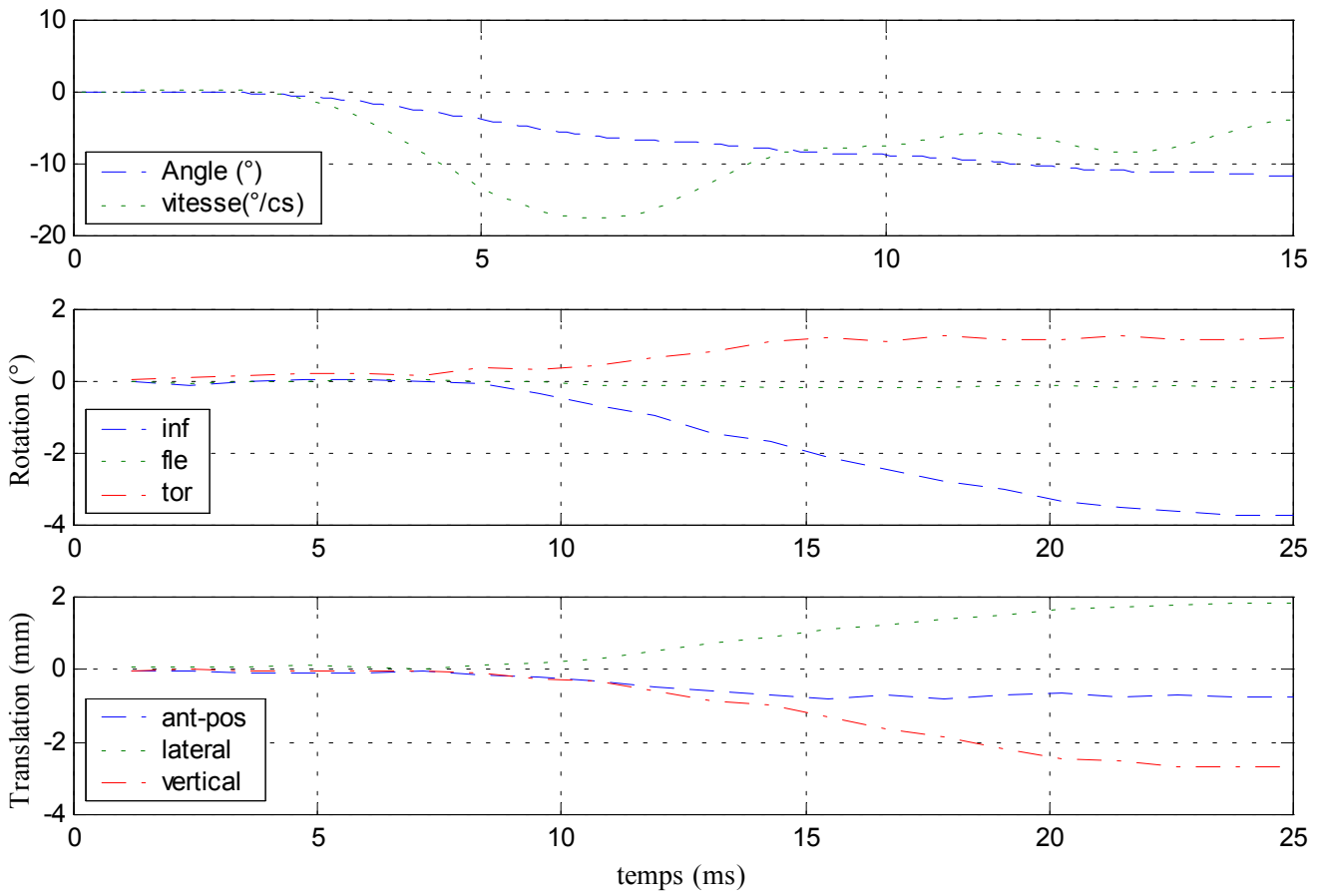


Efforts et moments inférieurs

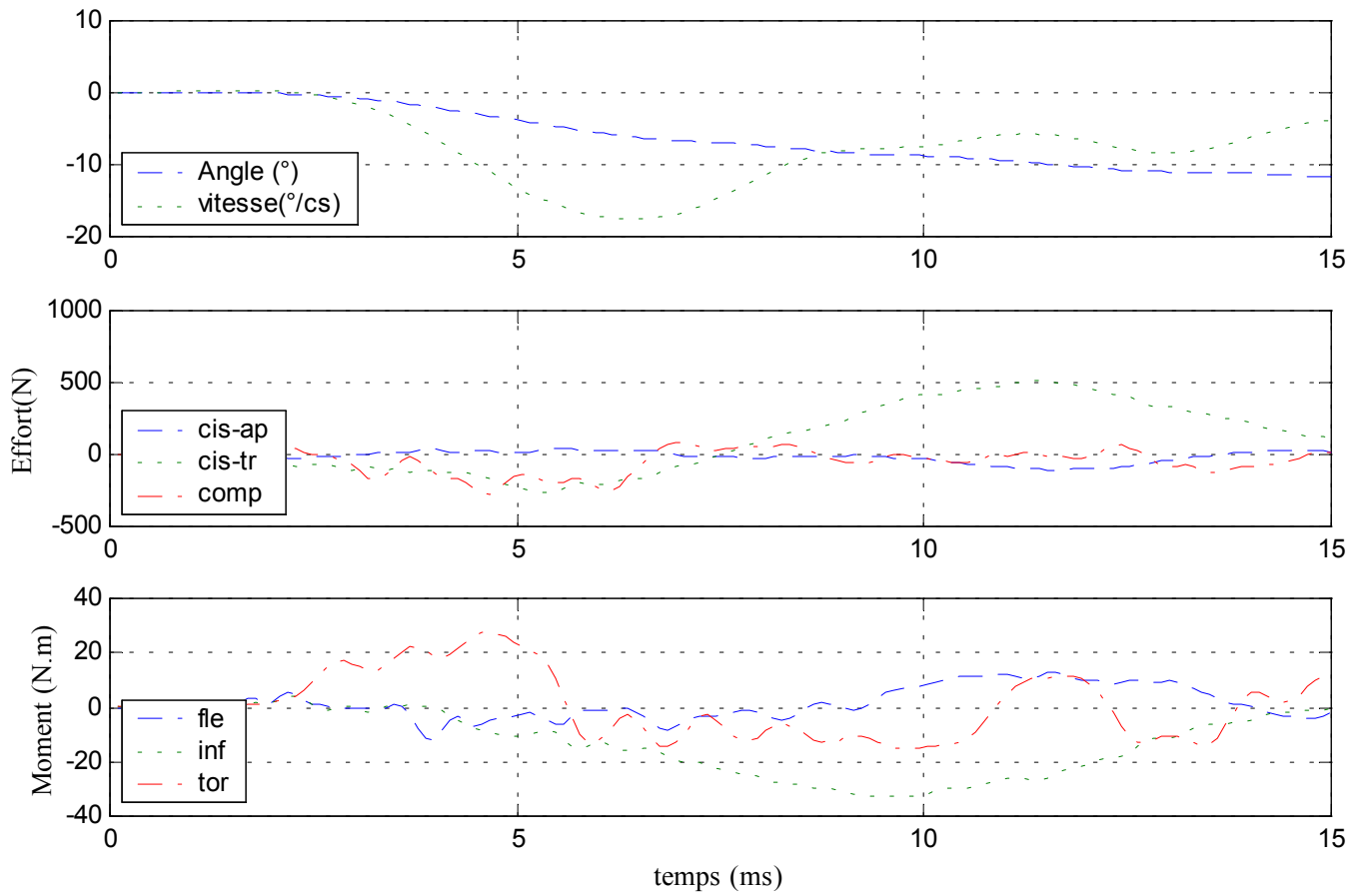


✓ Configuration avec ligaments jaunes coupés

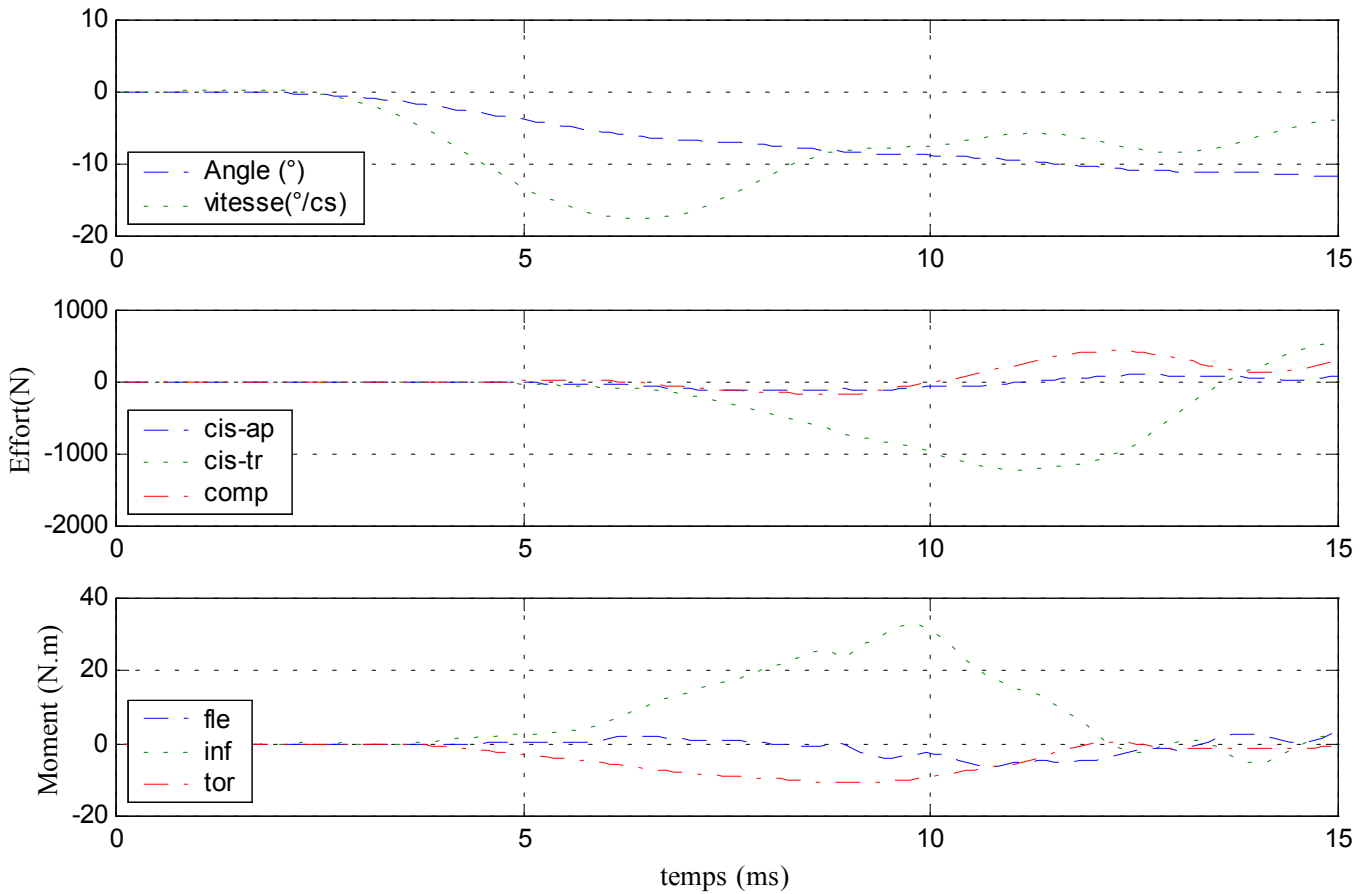
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

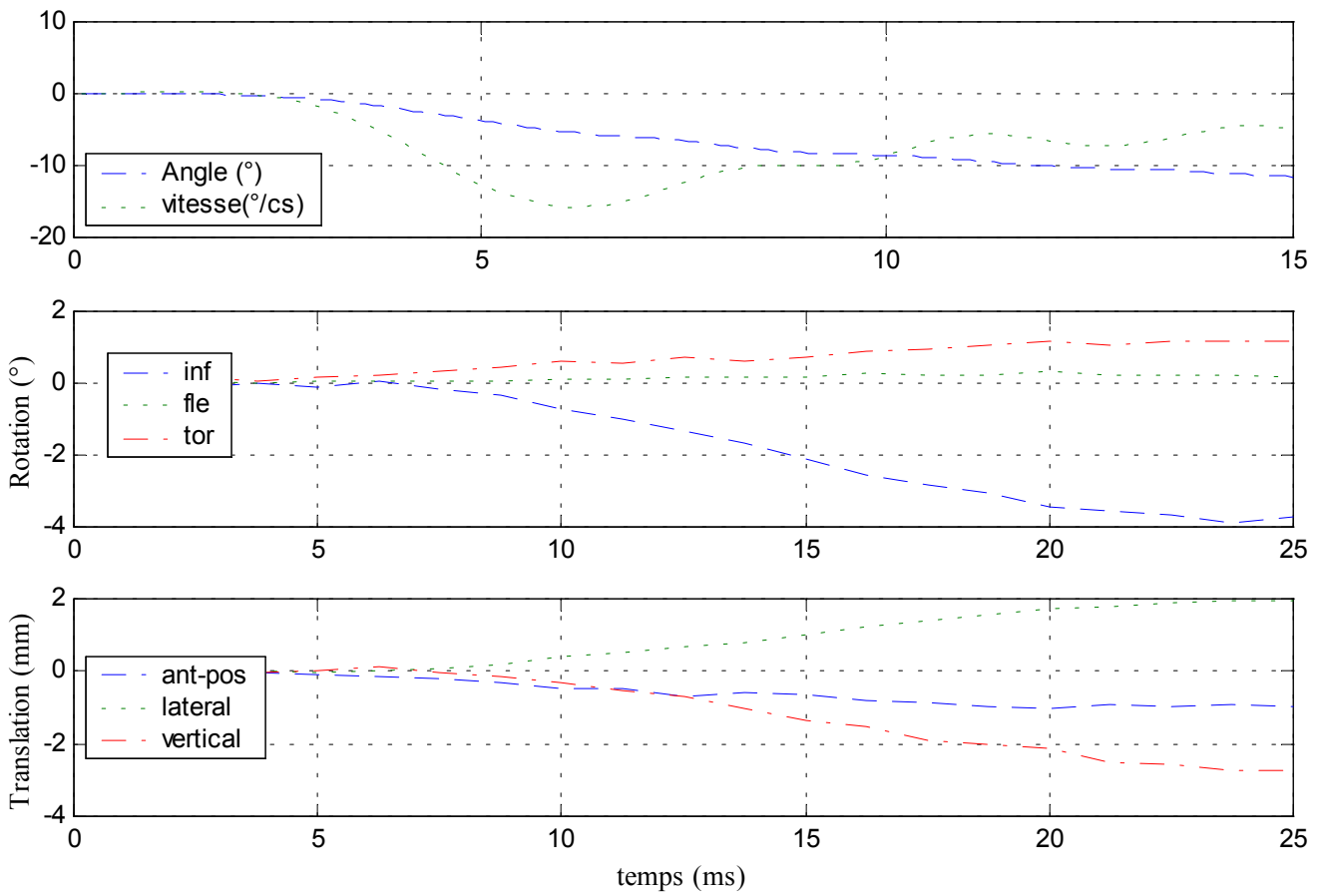


Efforts et moments inférieurs

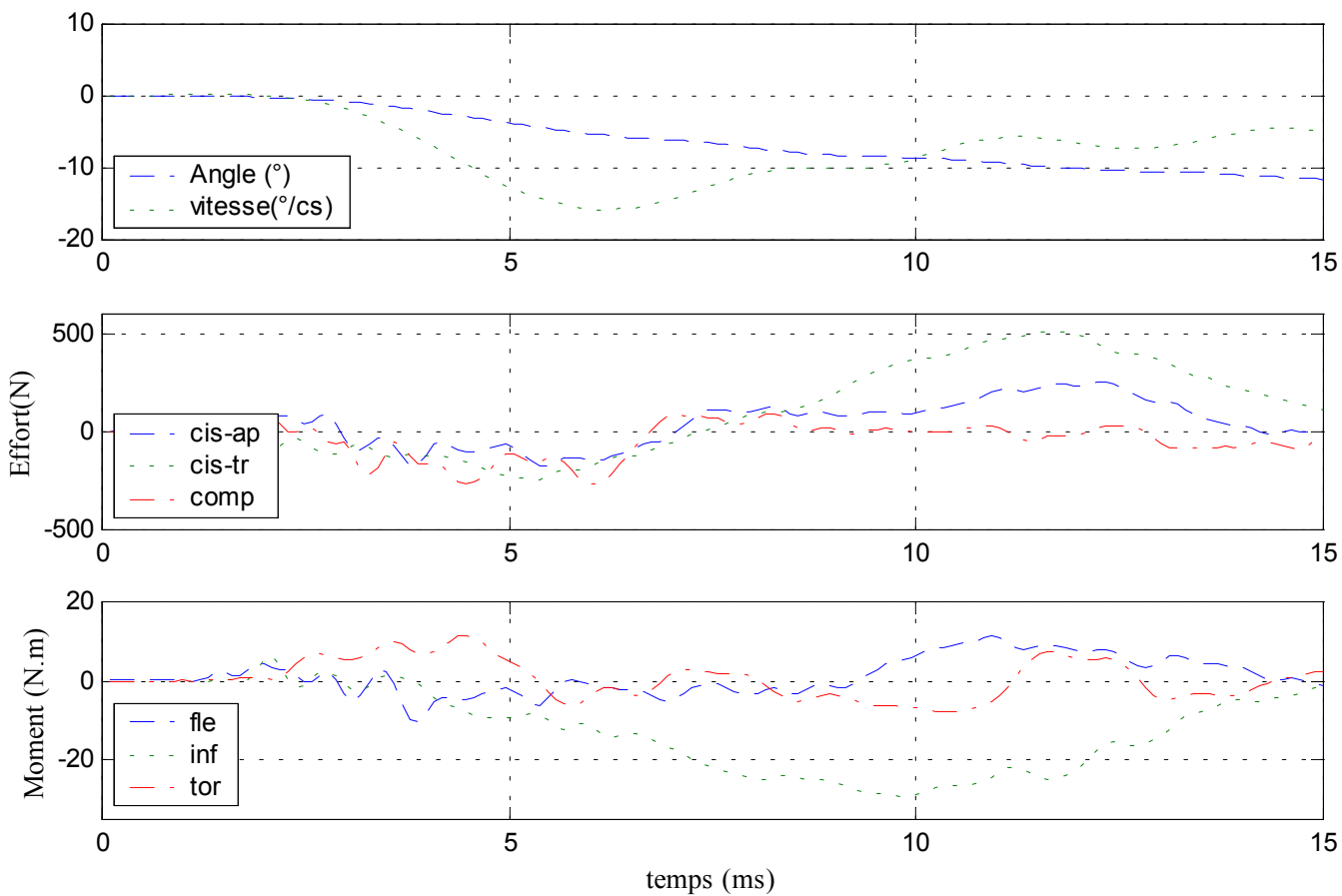


✓ Configuration avec ligaments épineux coupés

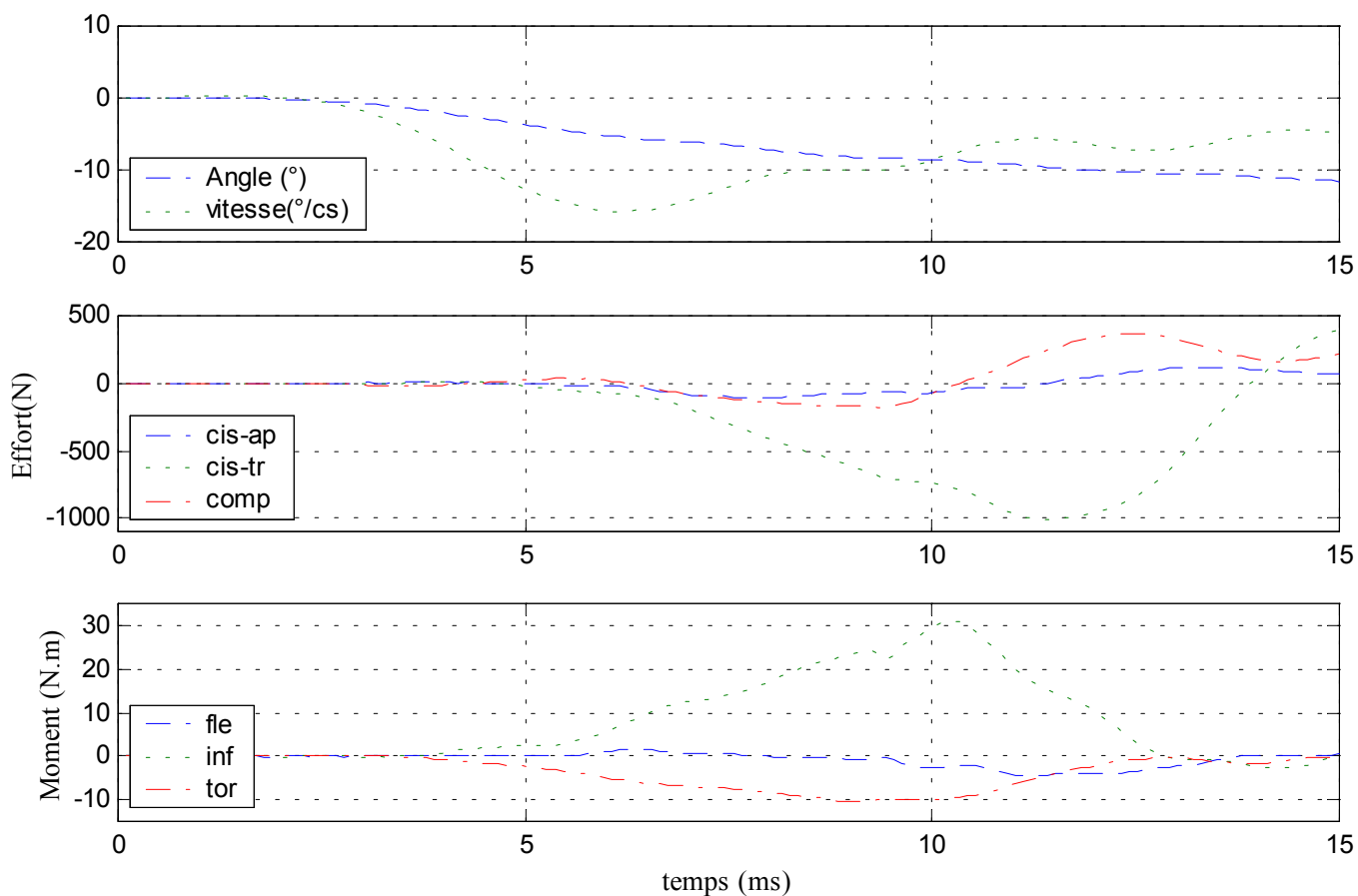
Déplacements



Efforts et moments supérieurs



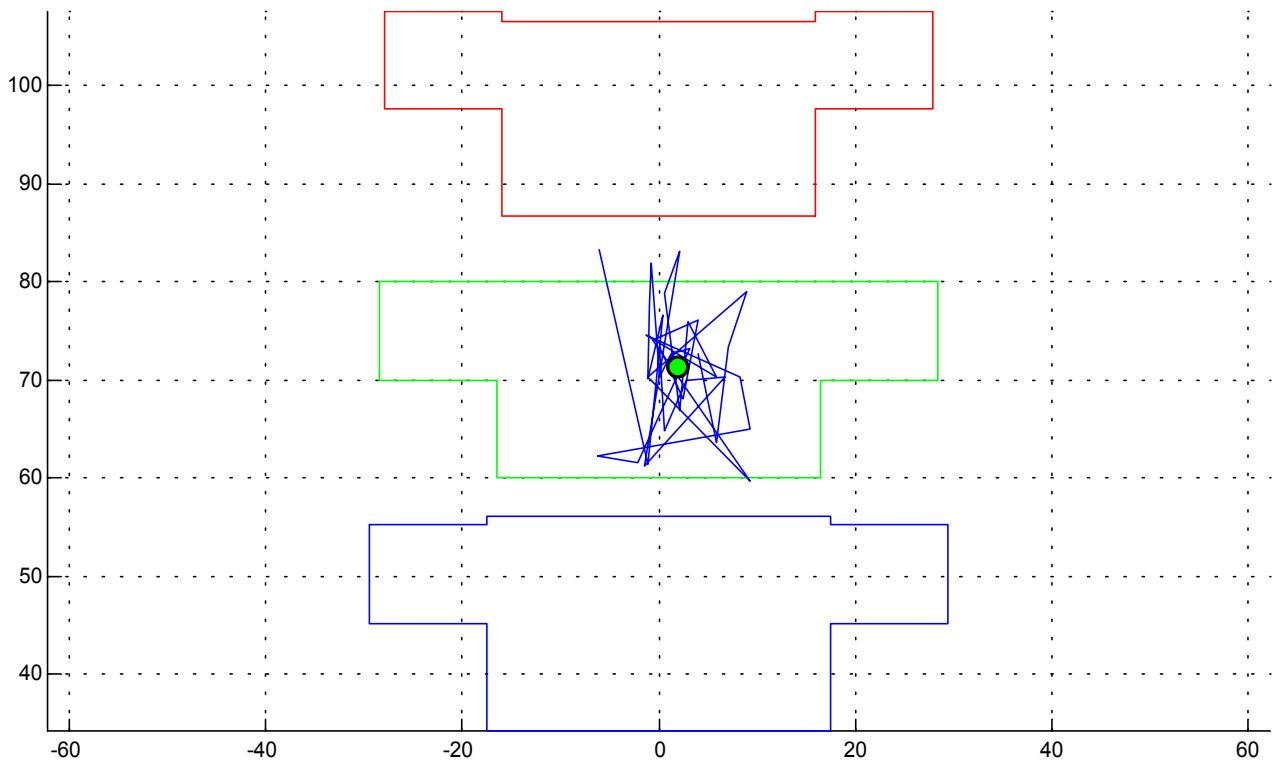
Efforts et moments inférieurs



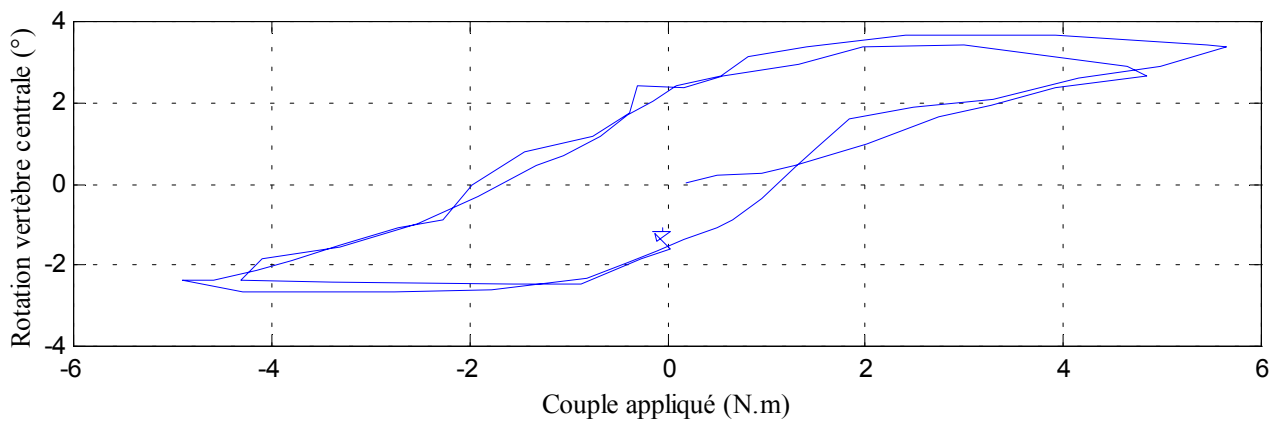
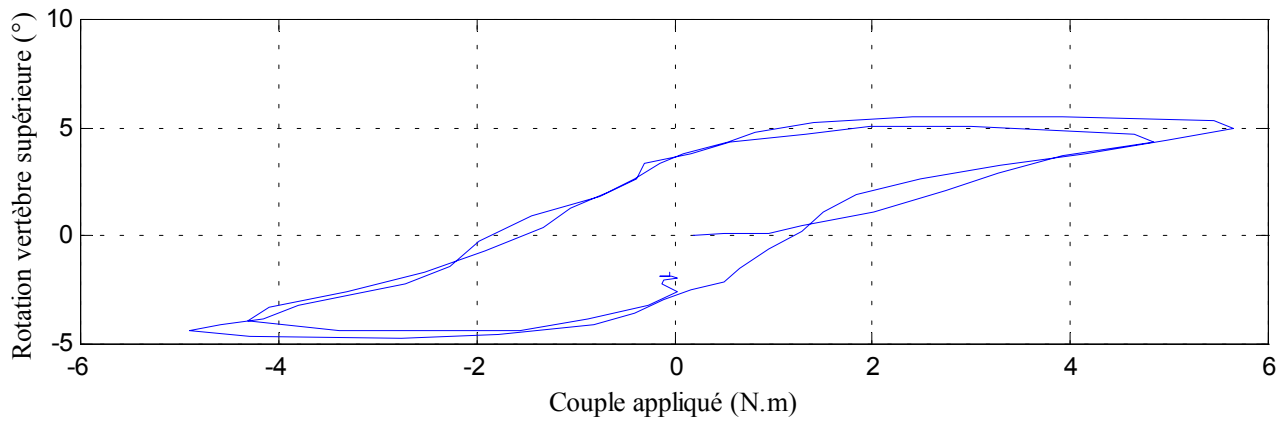
12- Essai 12 – T7T9 – inflexion

A. Statique

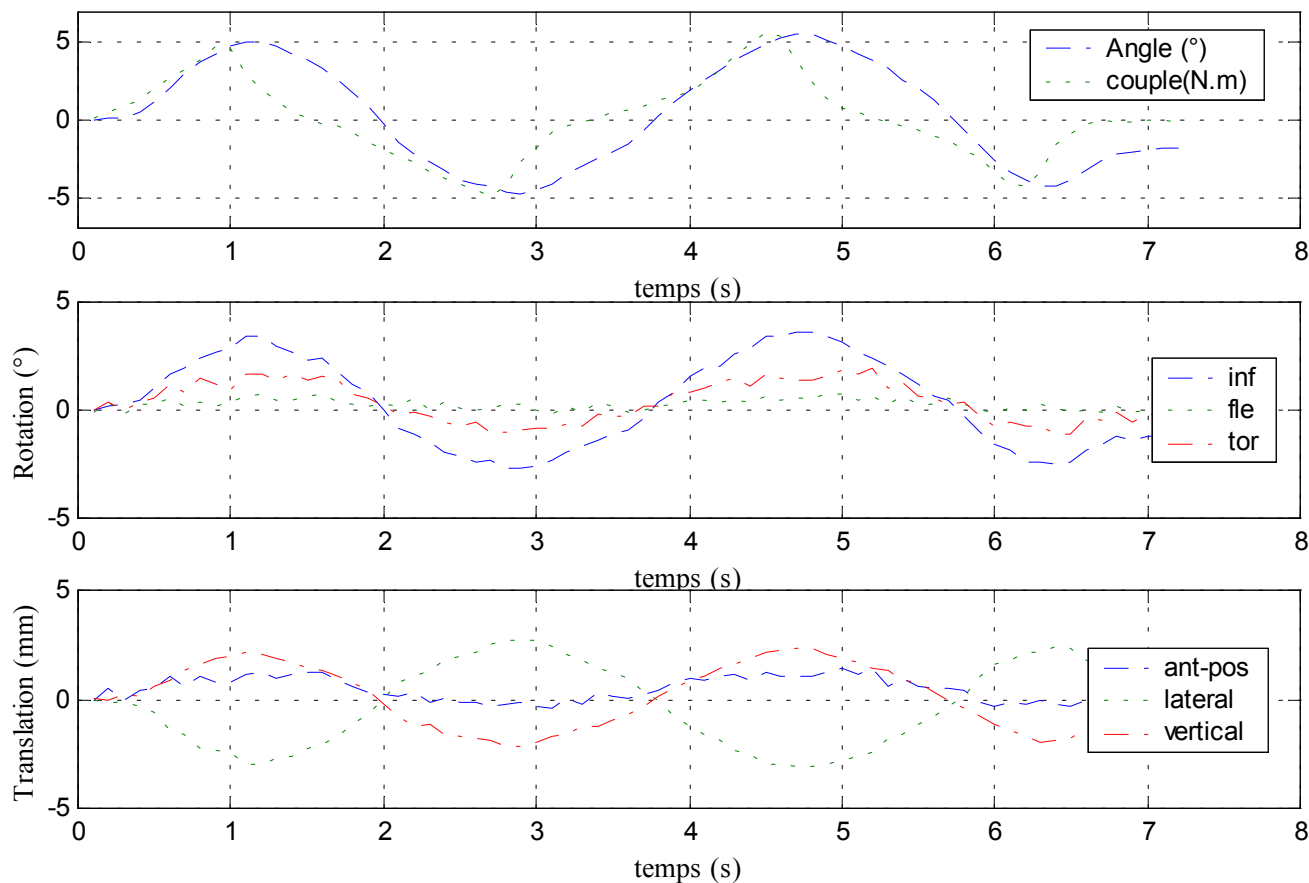
Centre instantané de rotation



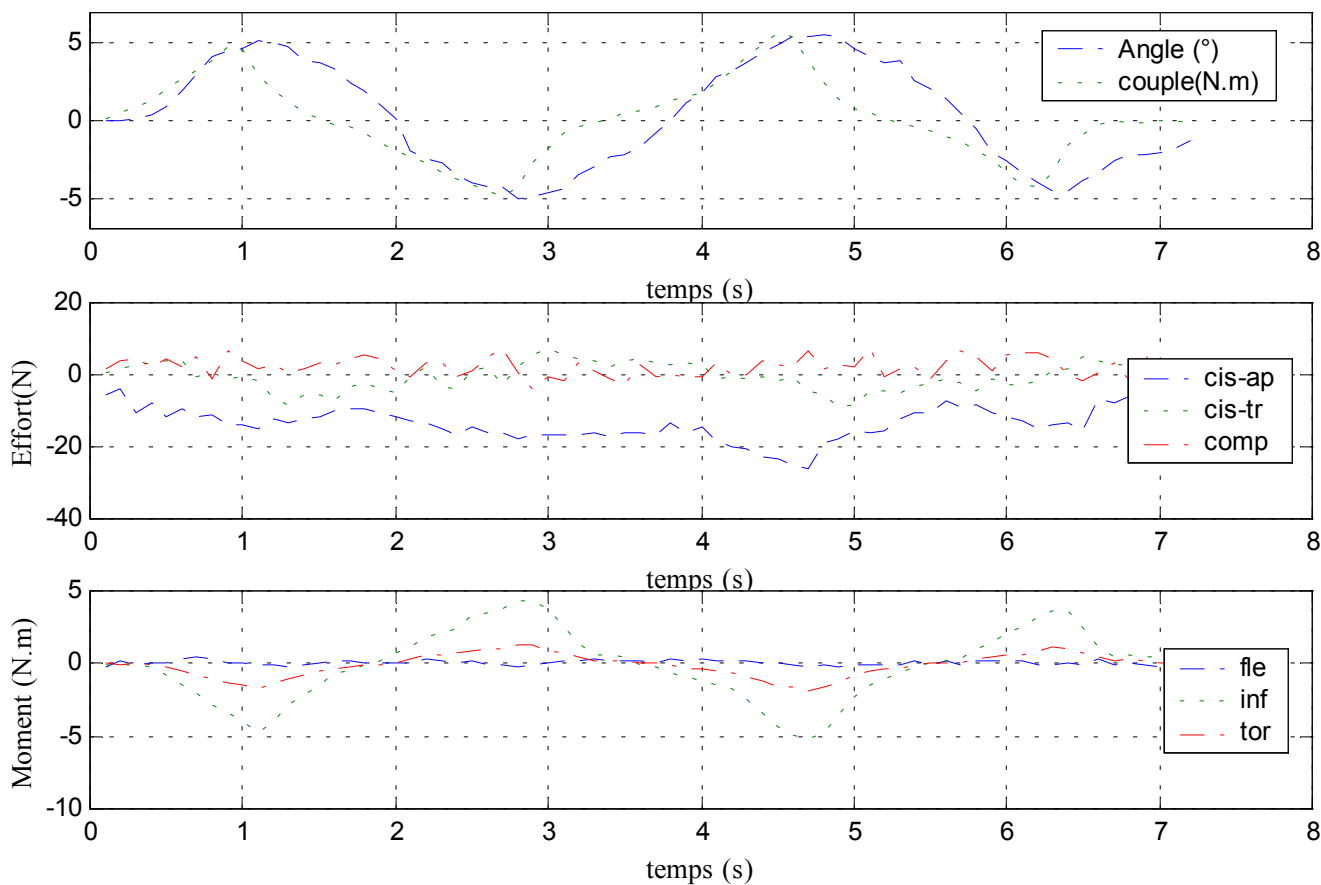
Courbe rotation-couple en hystérésis



Déplacements



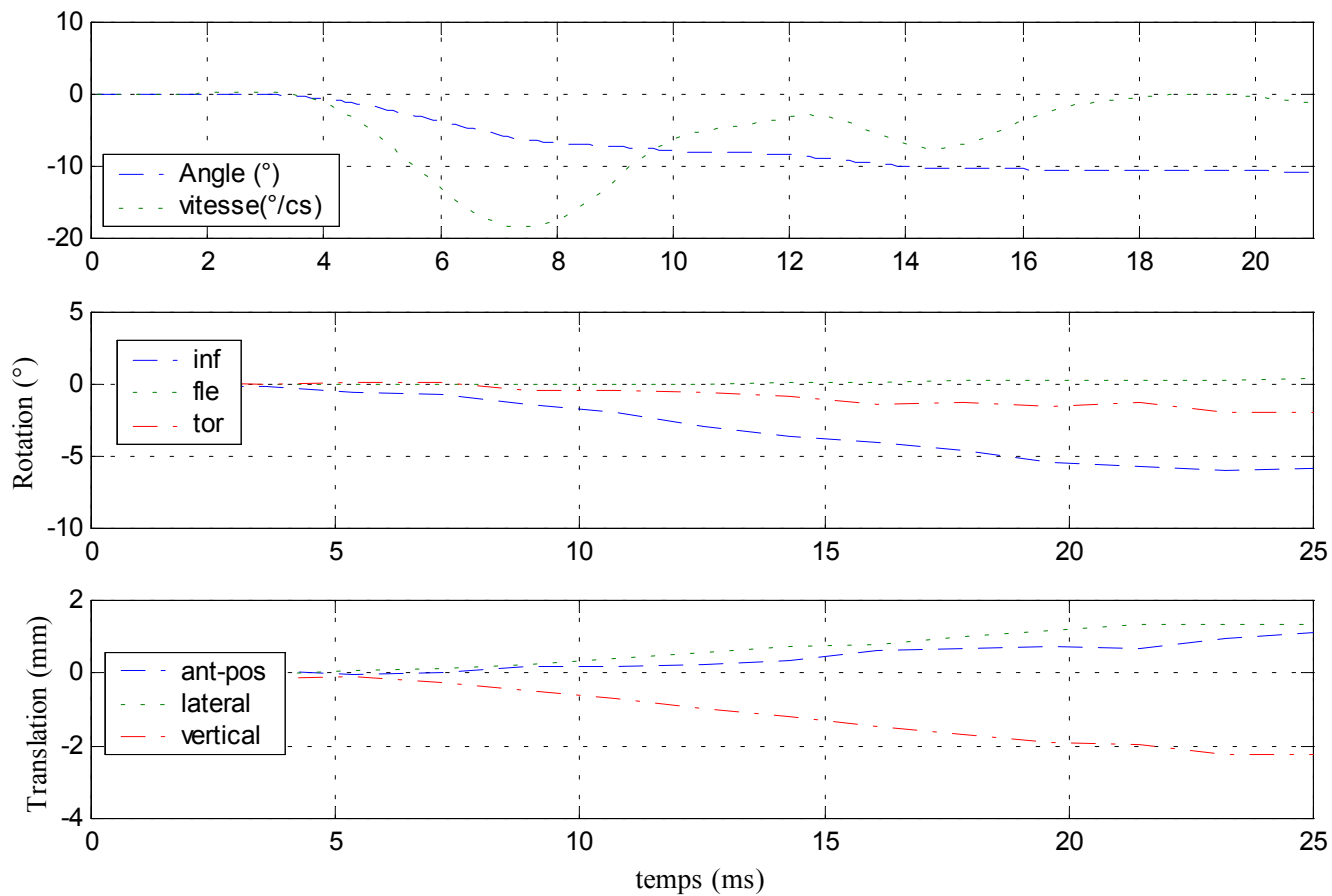
Efforts et moments inférieurs



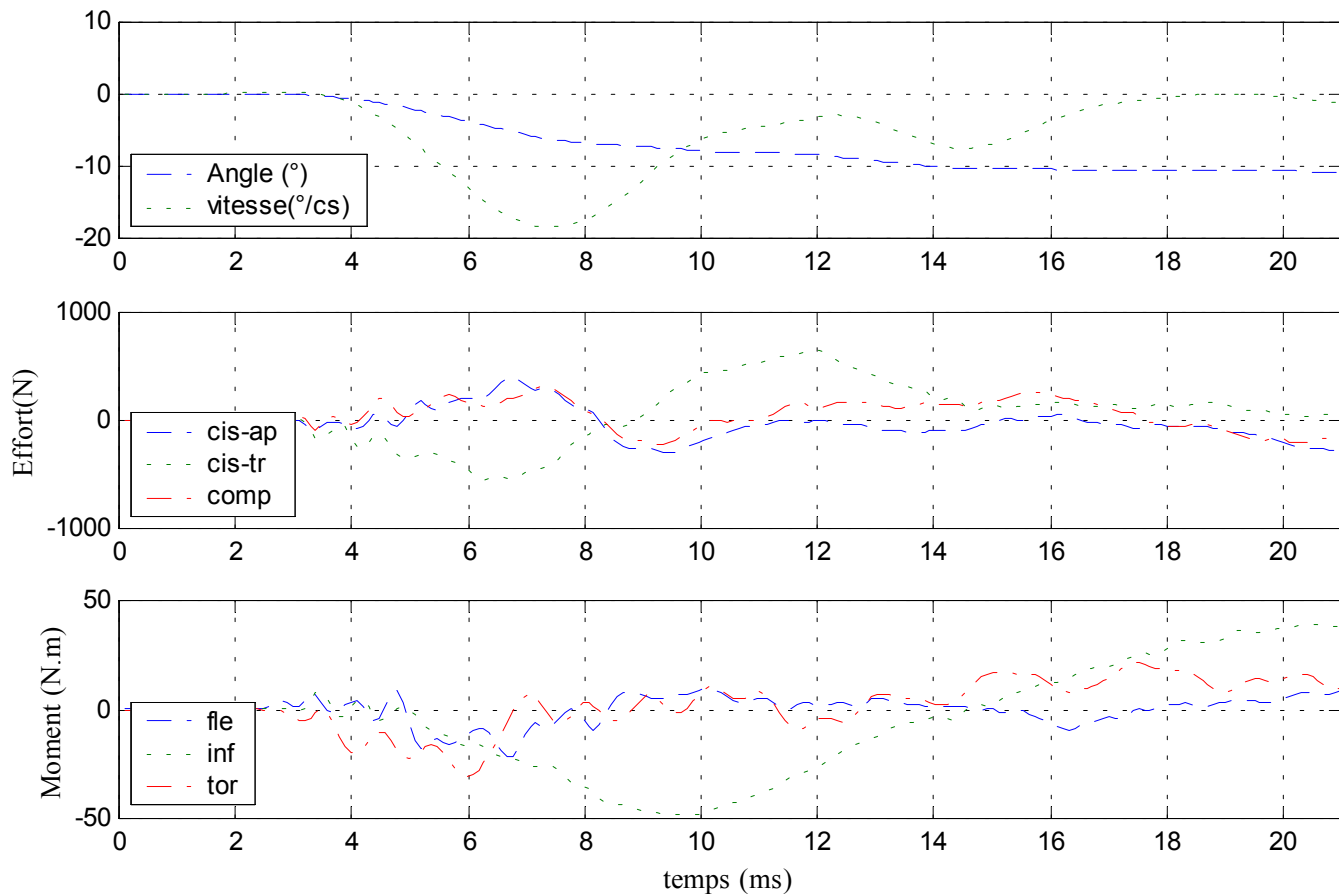
B. Dynamique

✓ Configuration saine

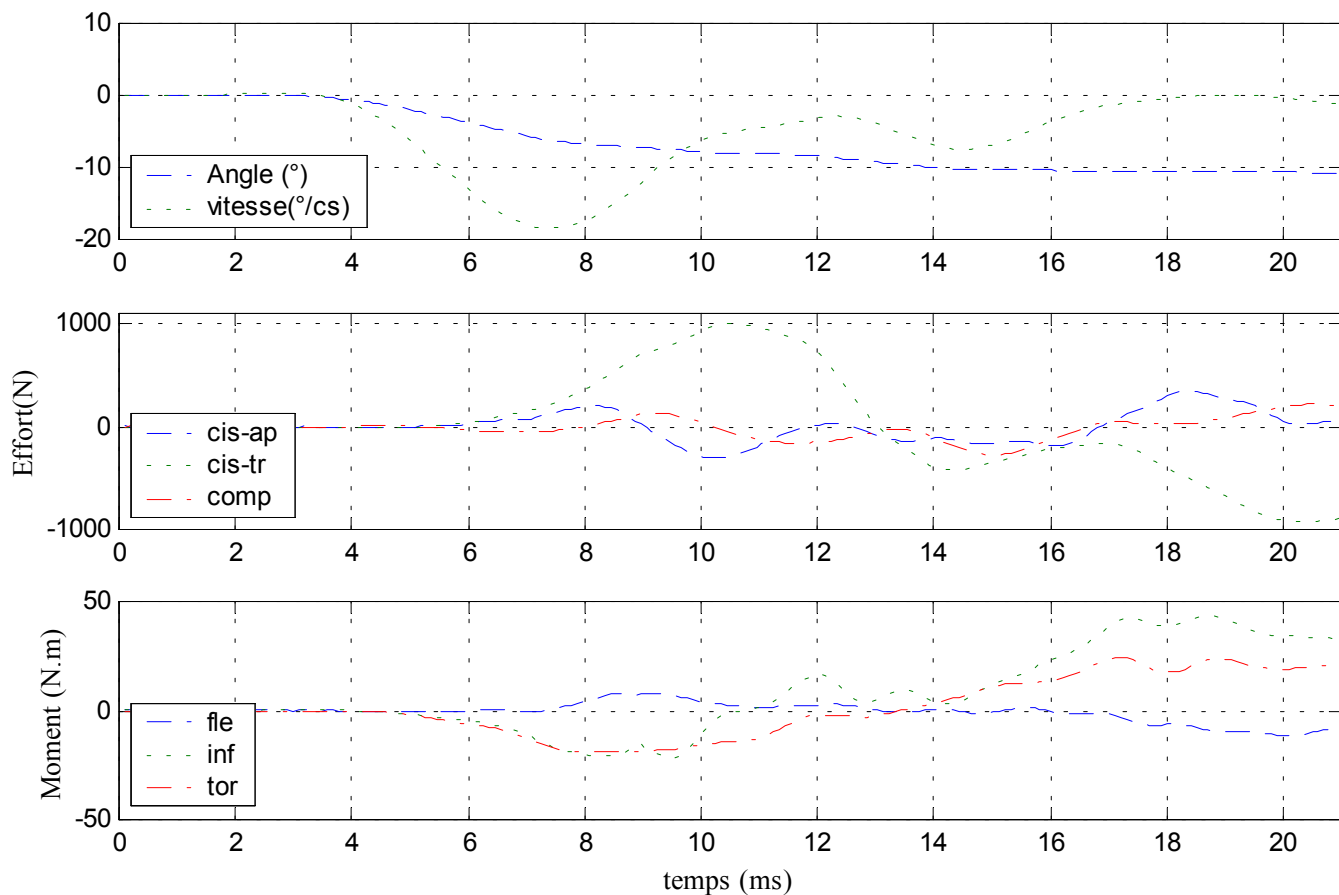
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

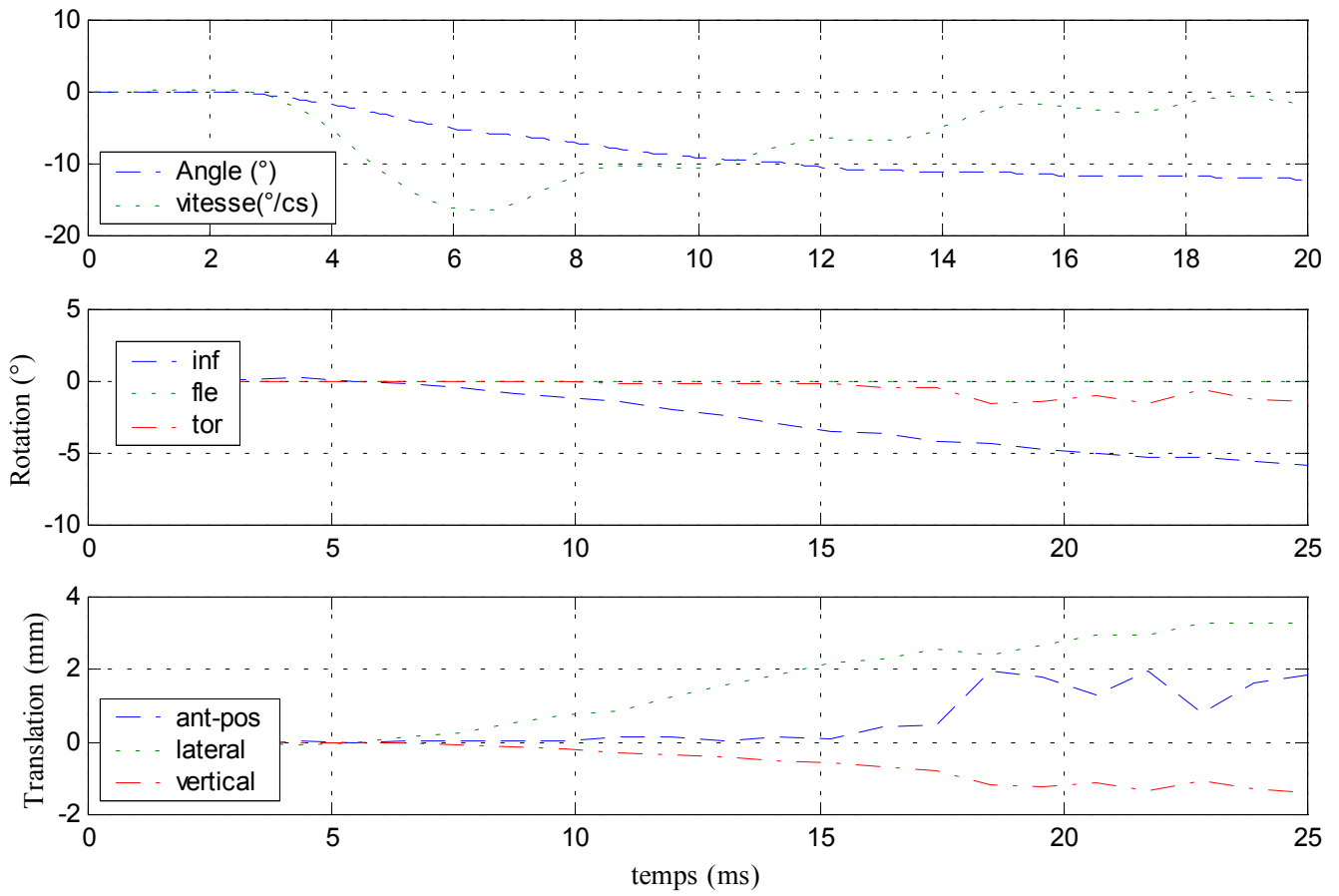


Efforts et moments inférieurs

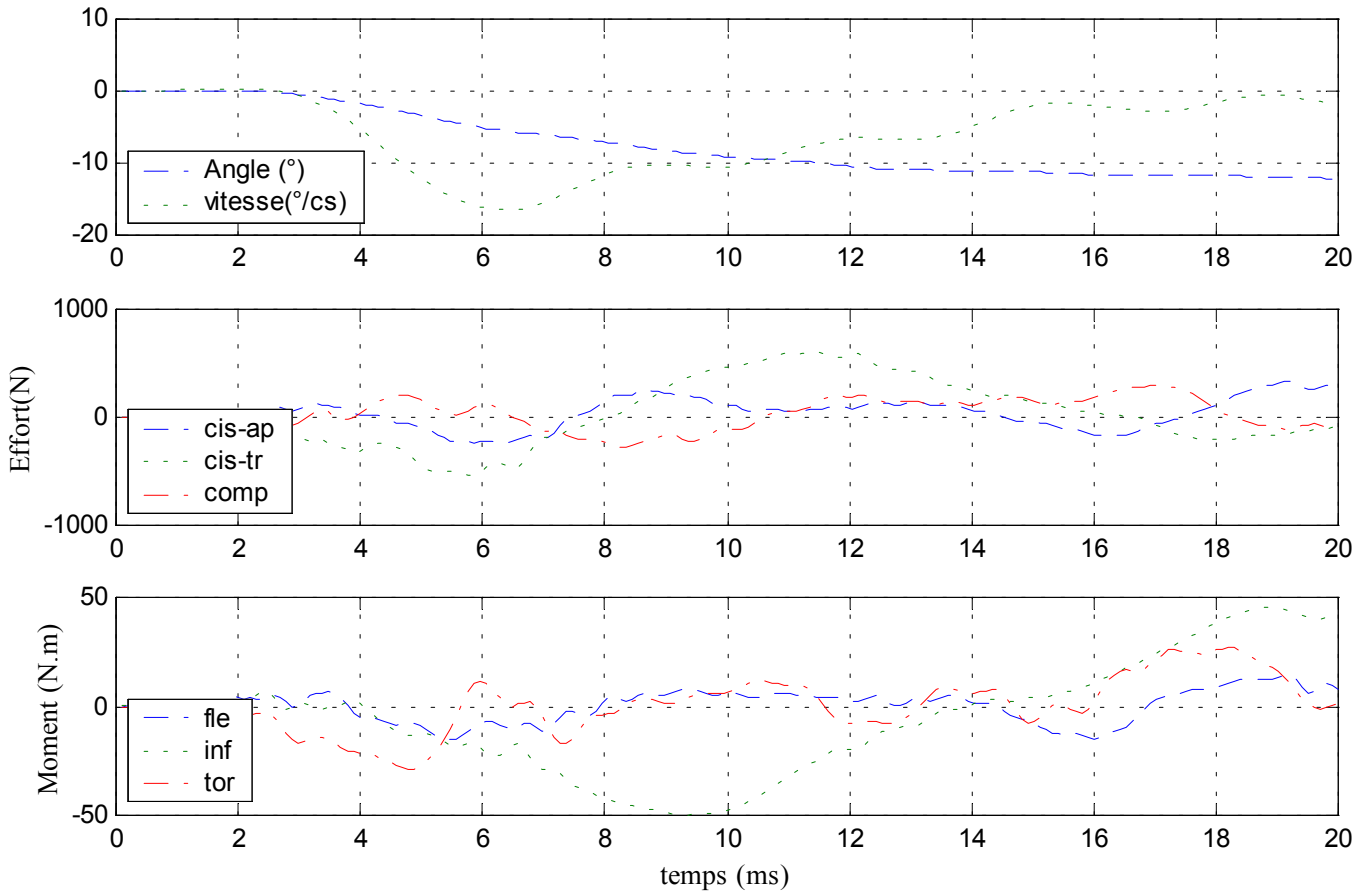


✓ Configuration avec ligaments transverses coupés

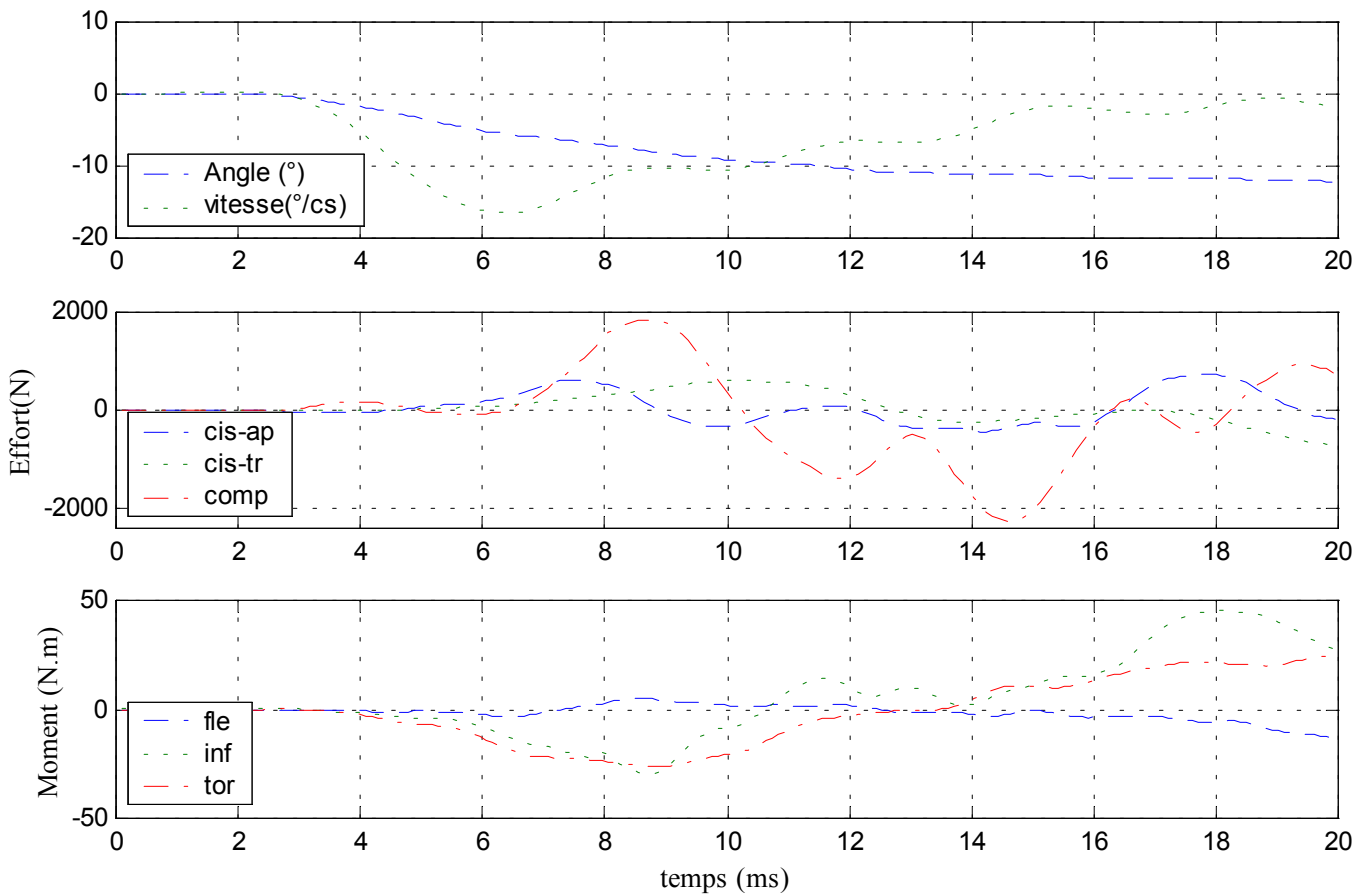
Déplacements



Efforts et moments supérieurs



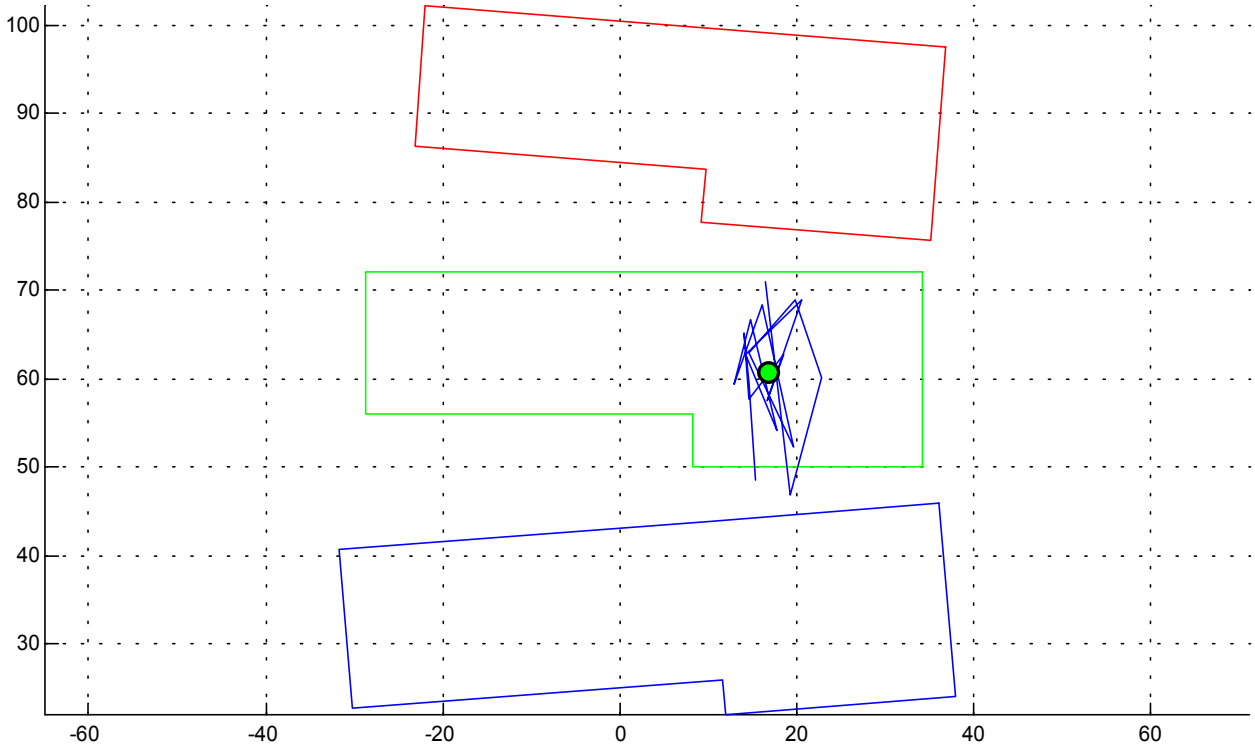
Efforts et moments inférieurs



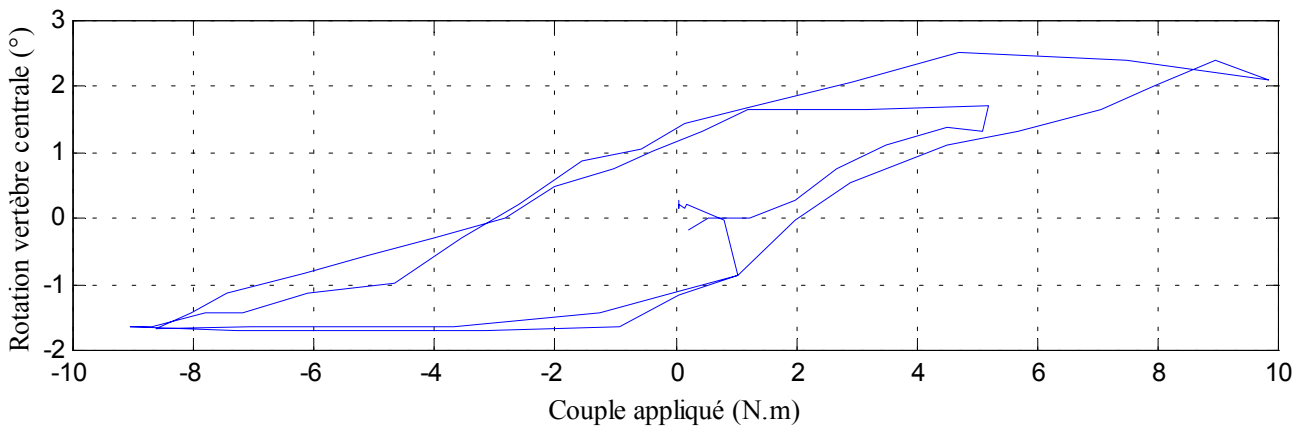
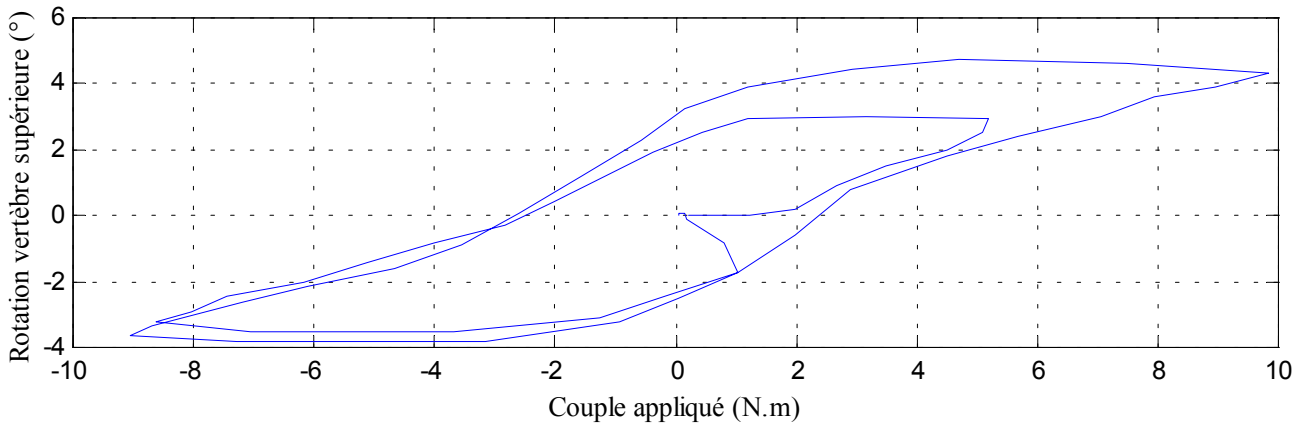
13- Essai 13 – T7T9 – flexion

A. Statique

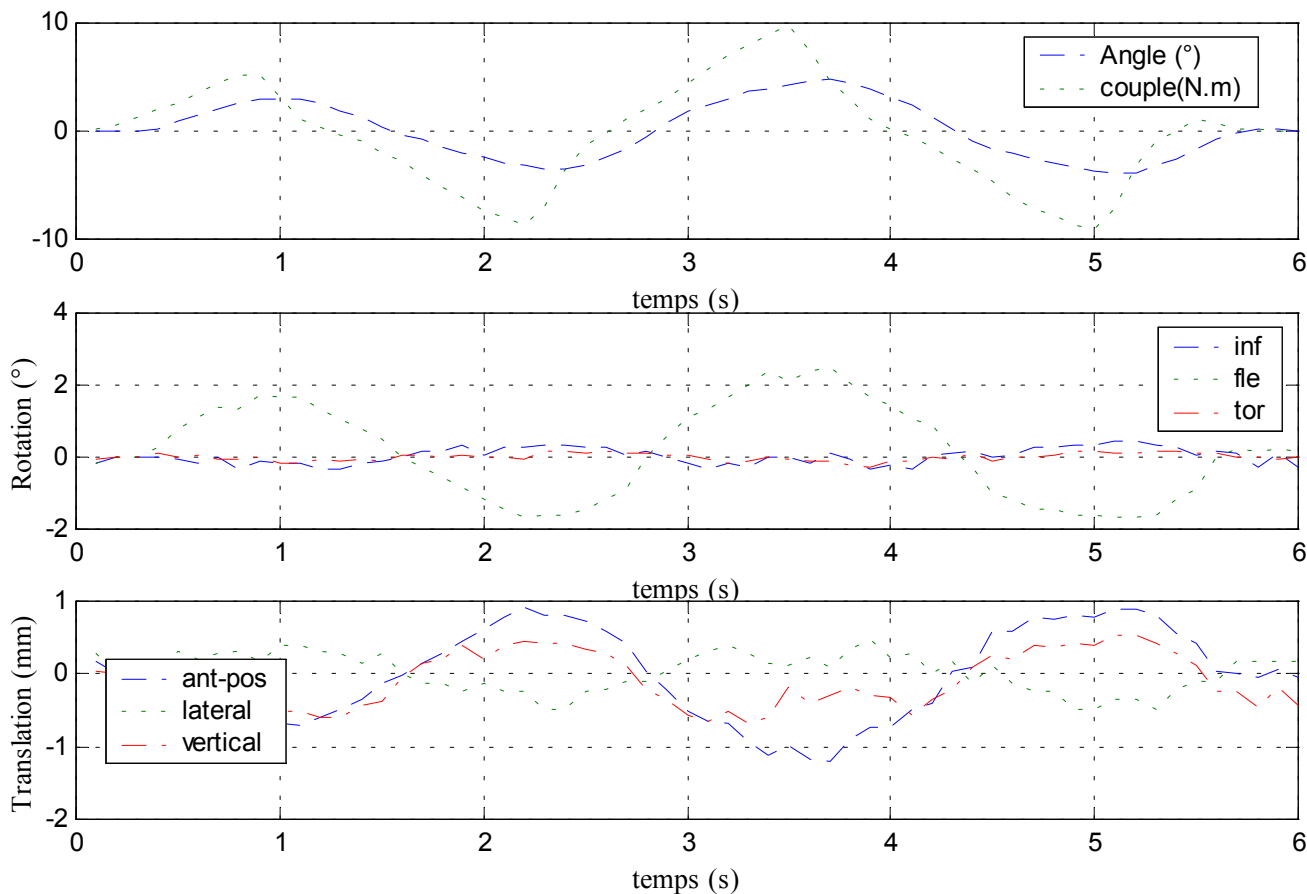
Centre instantané de rotation



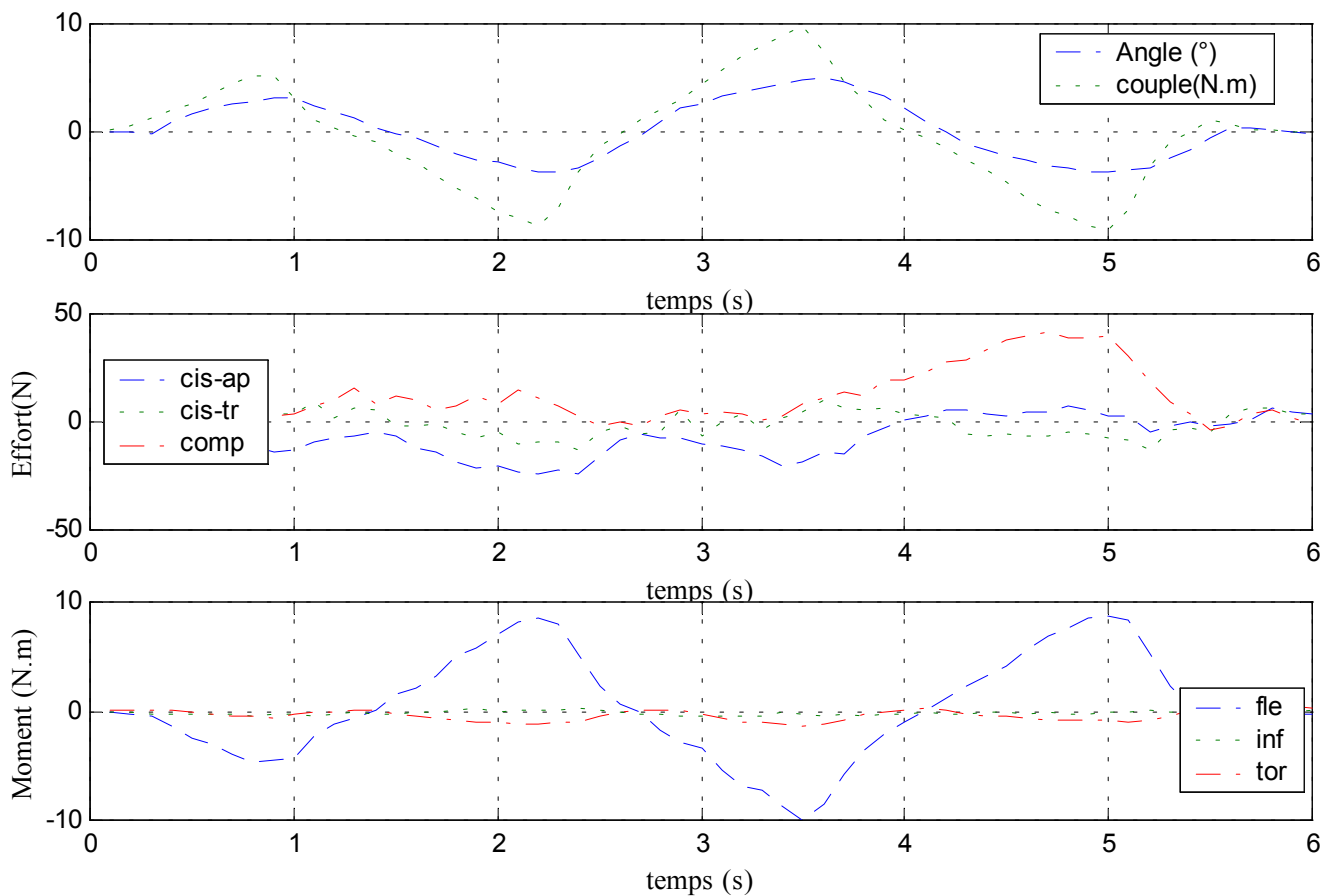
Courbe rotation-couple en hystérésis



Déplacements



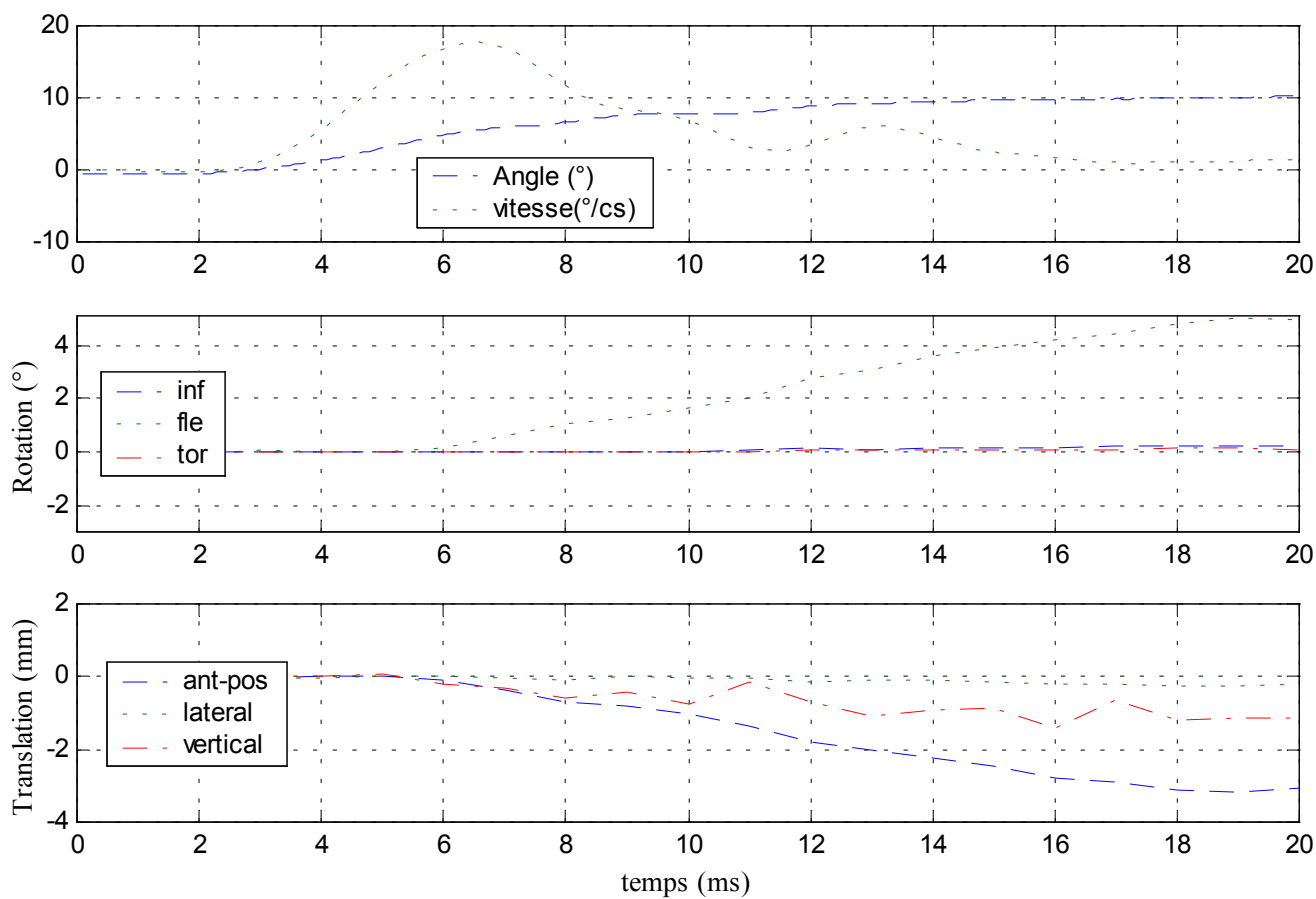
Efforts et moments inférieurs



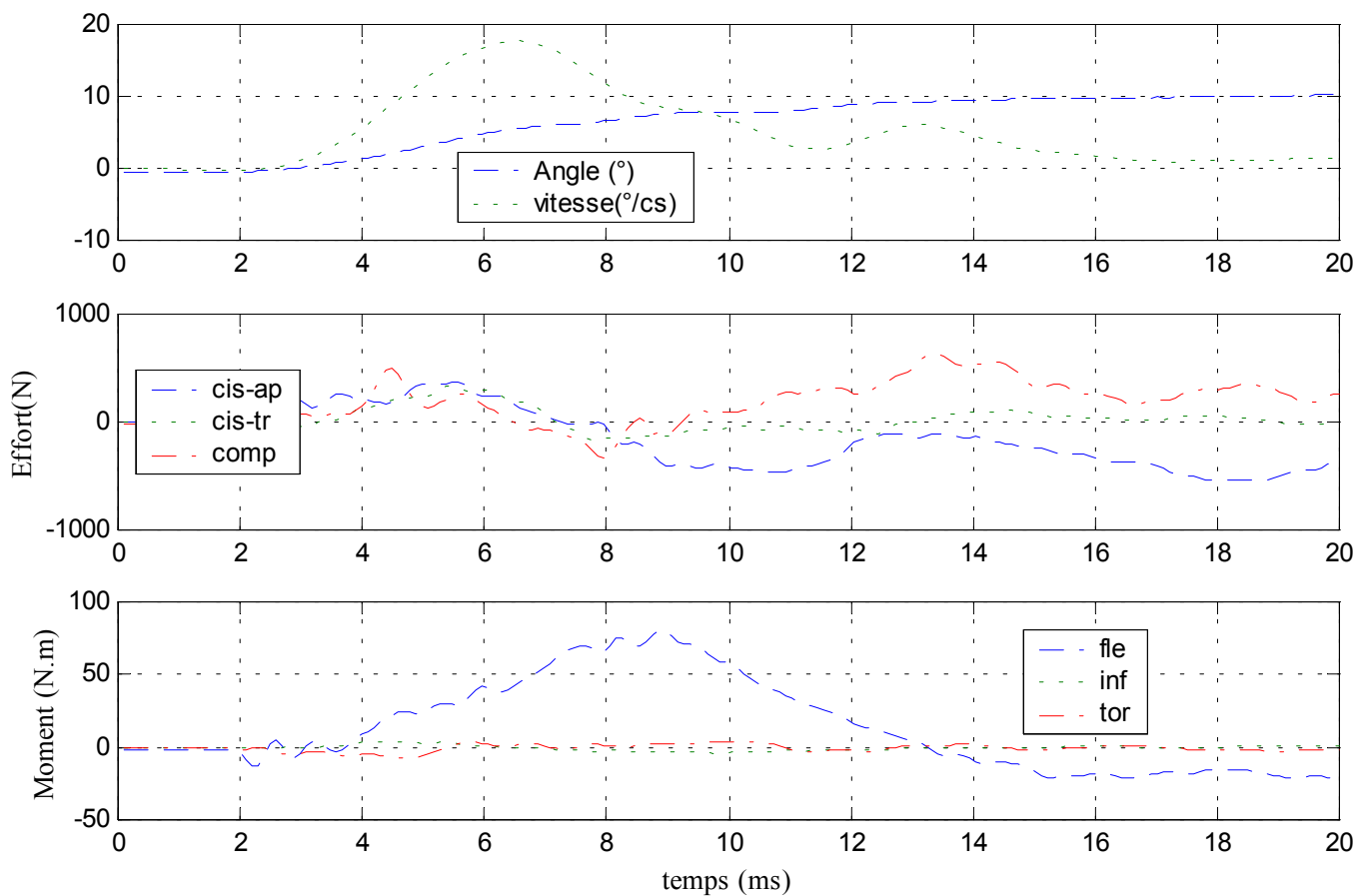
B. Dynamique

✓ Configuration saine

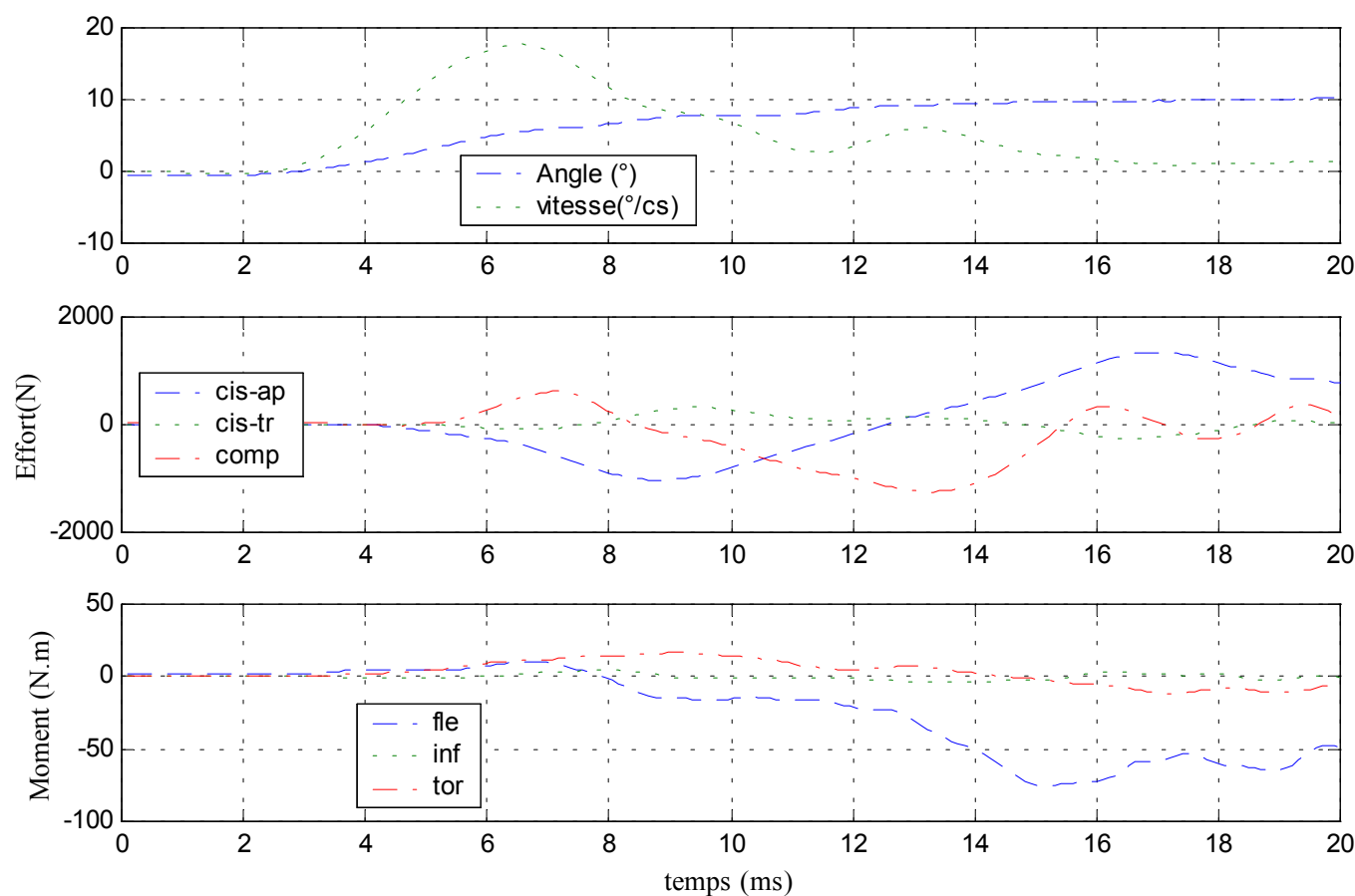
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

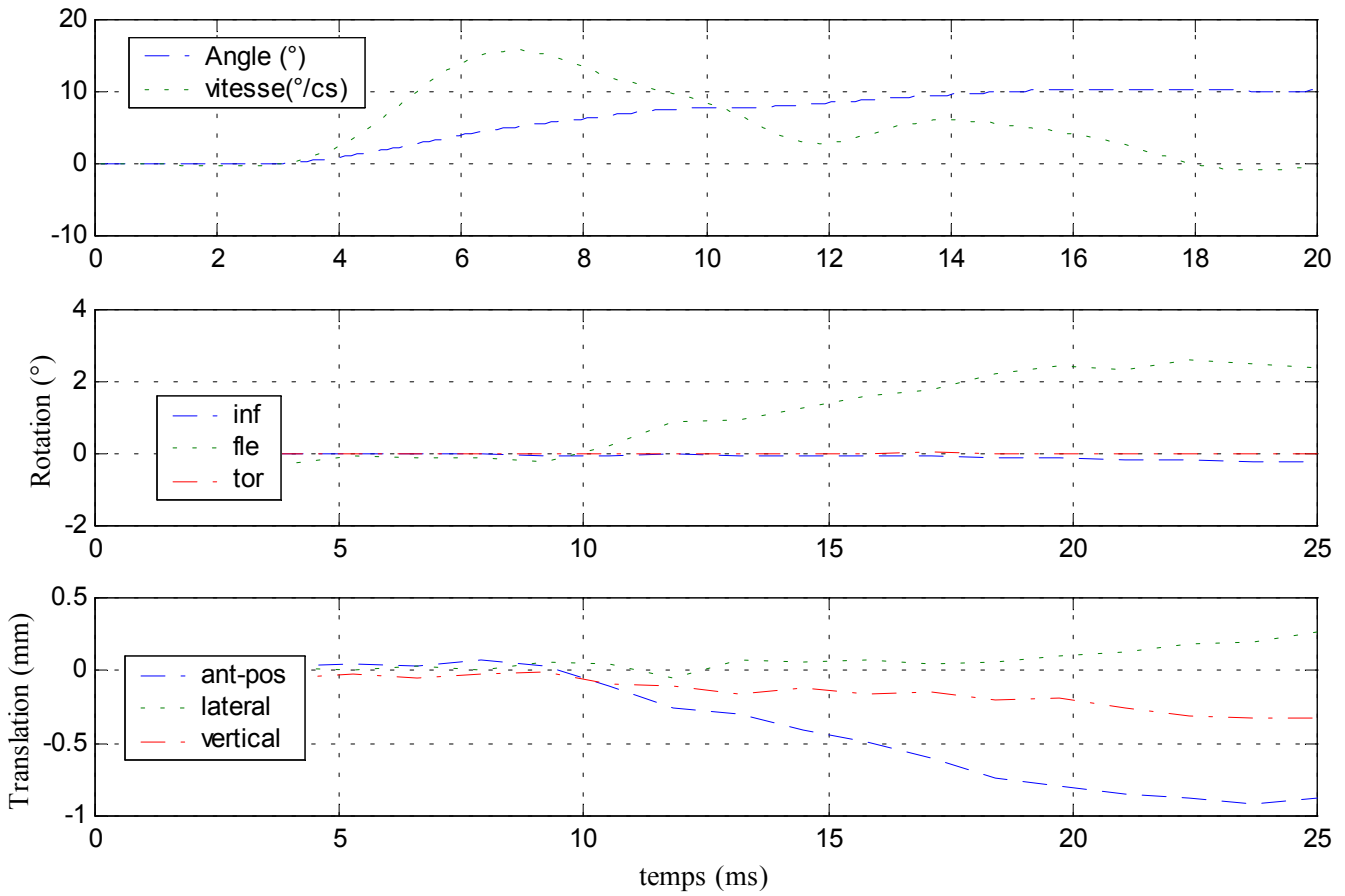


Efforts et moments inférieurs

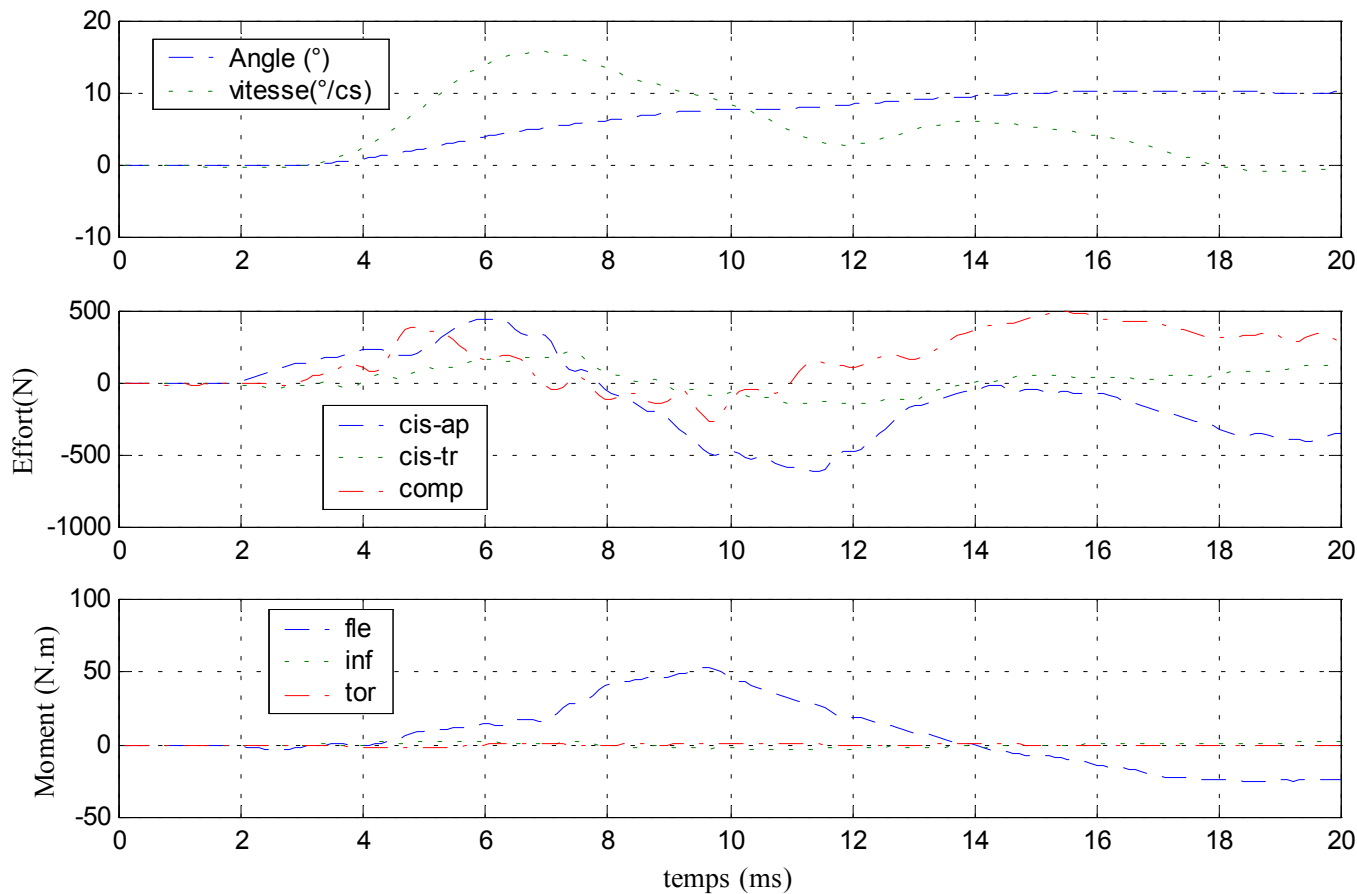


✓ Configuration avec ligaments épineux coupés

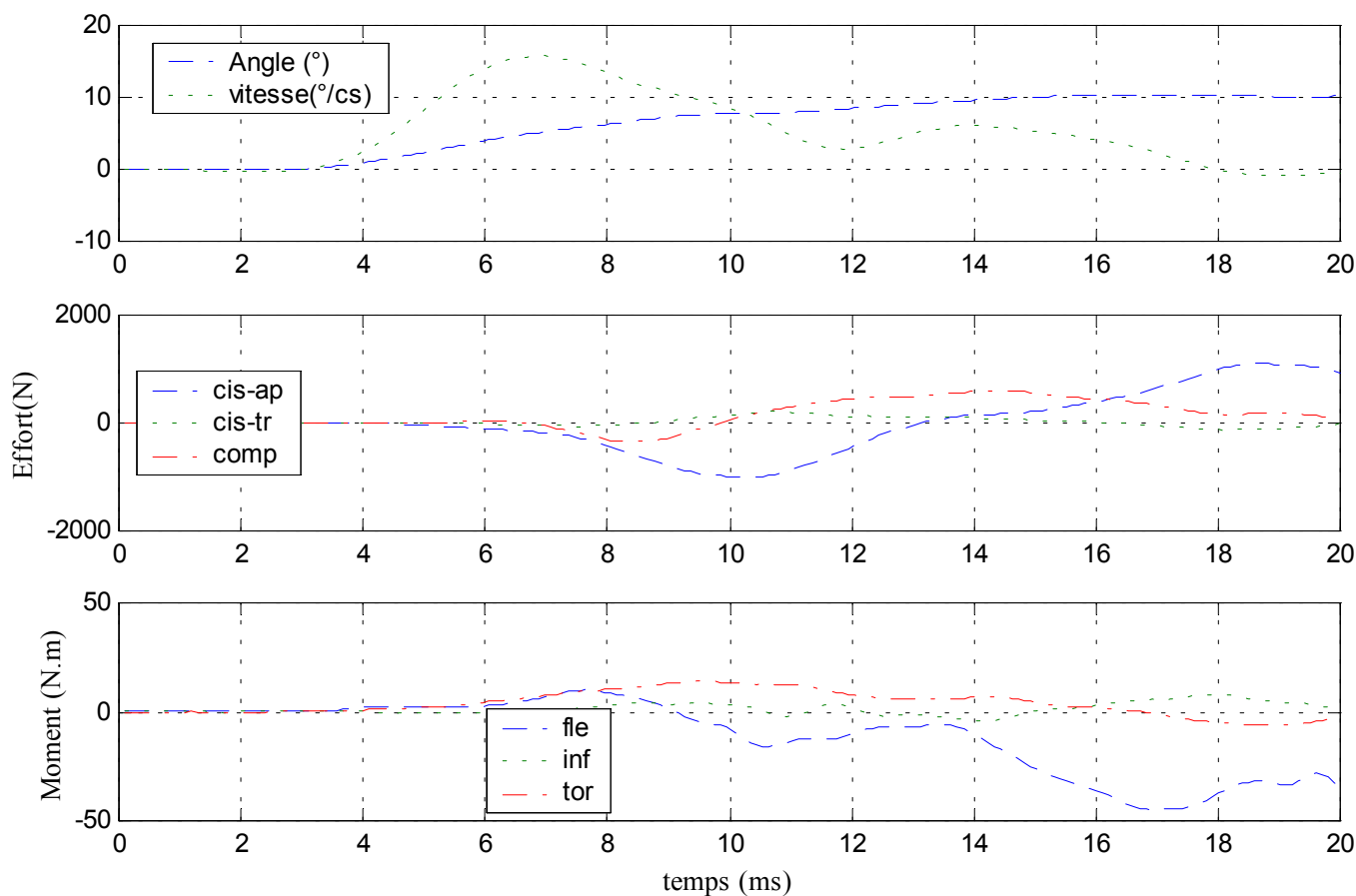
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

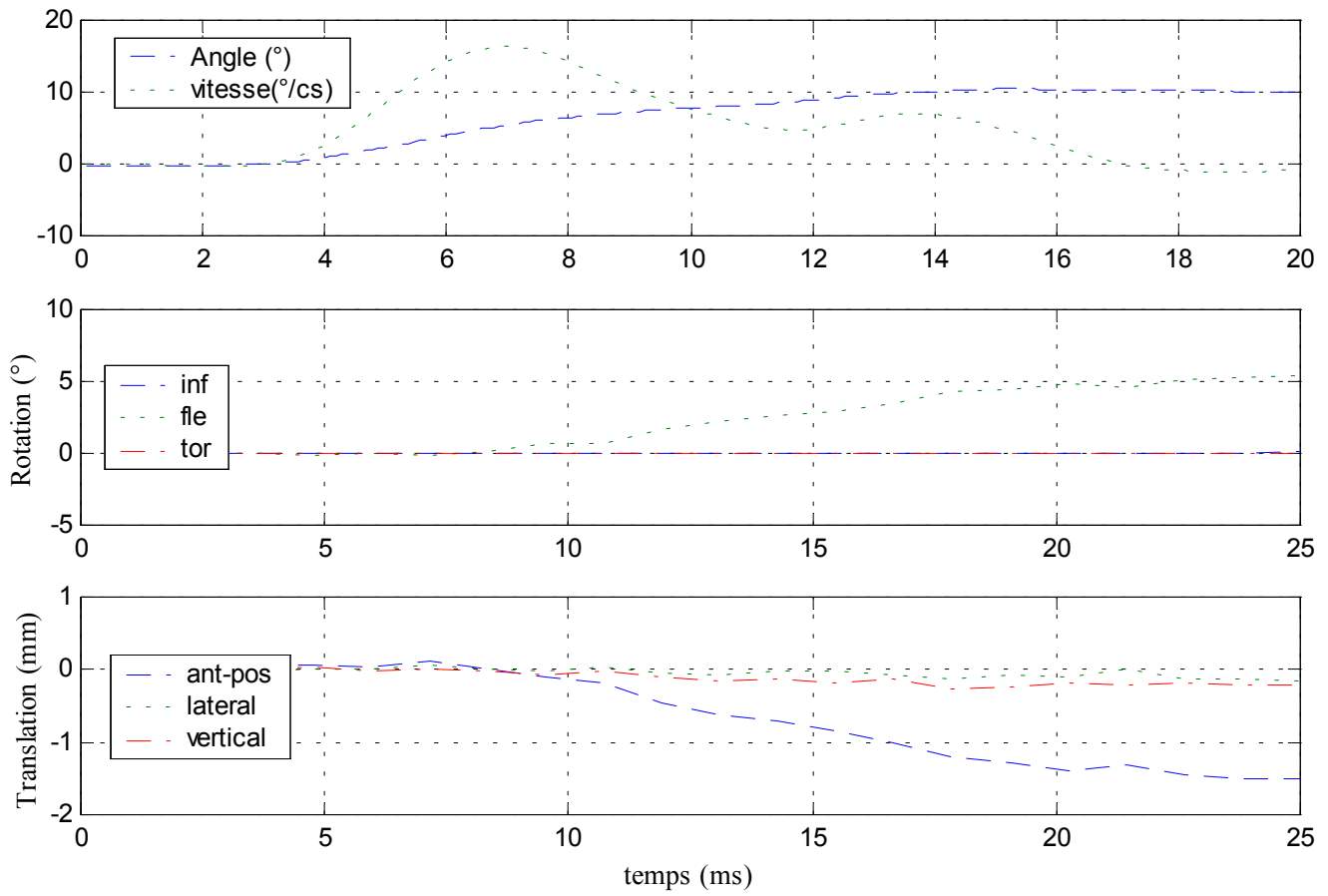


Efforts et moments inférieurs

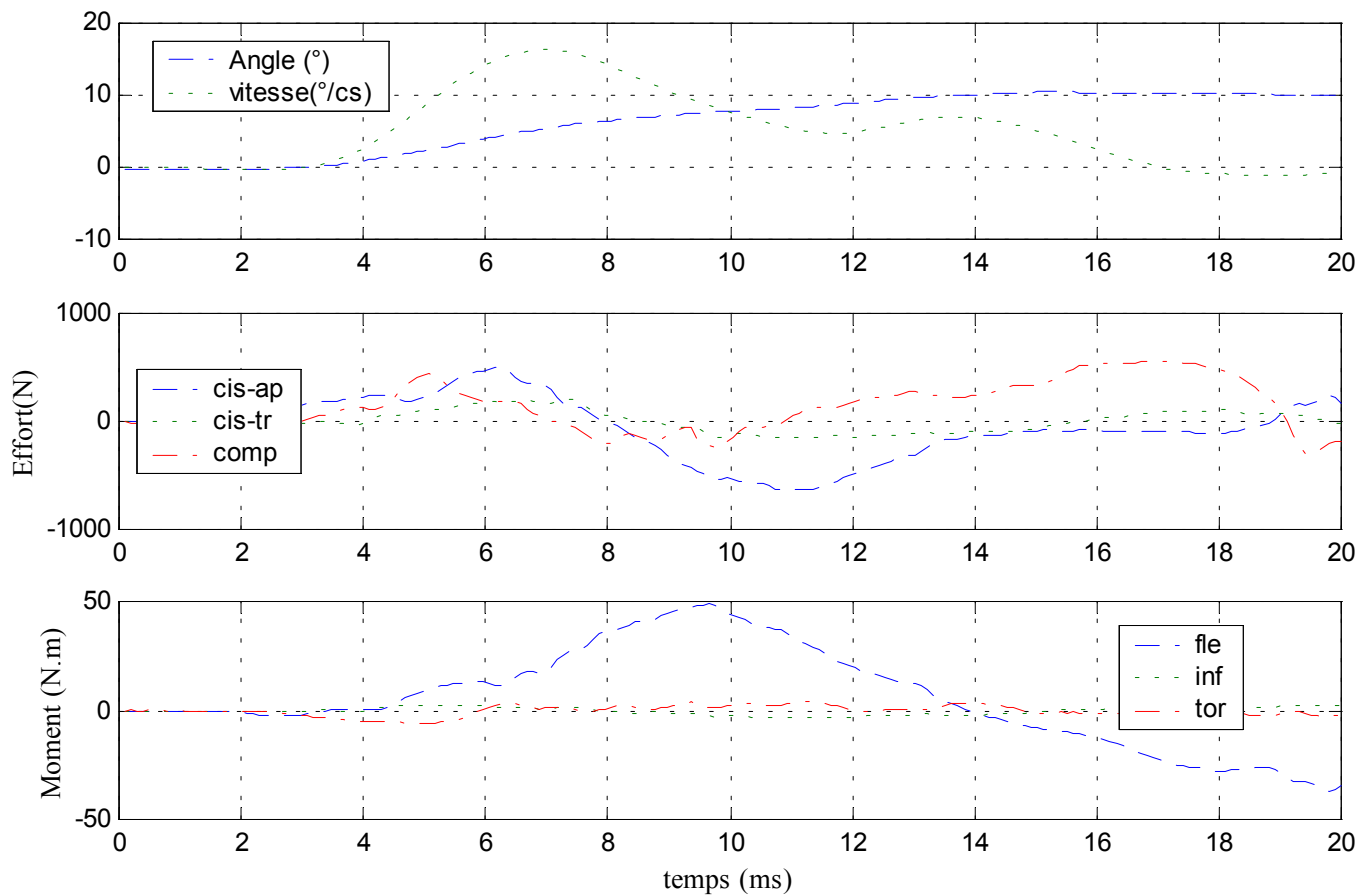


✓ Configuration avec ligaments capsulaires coupés

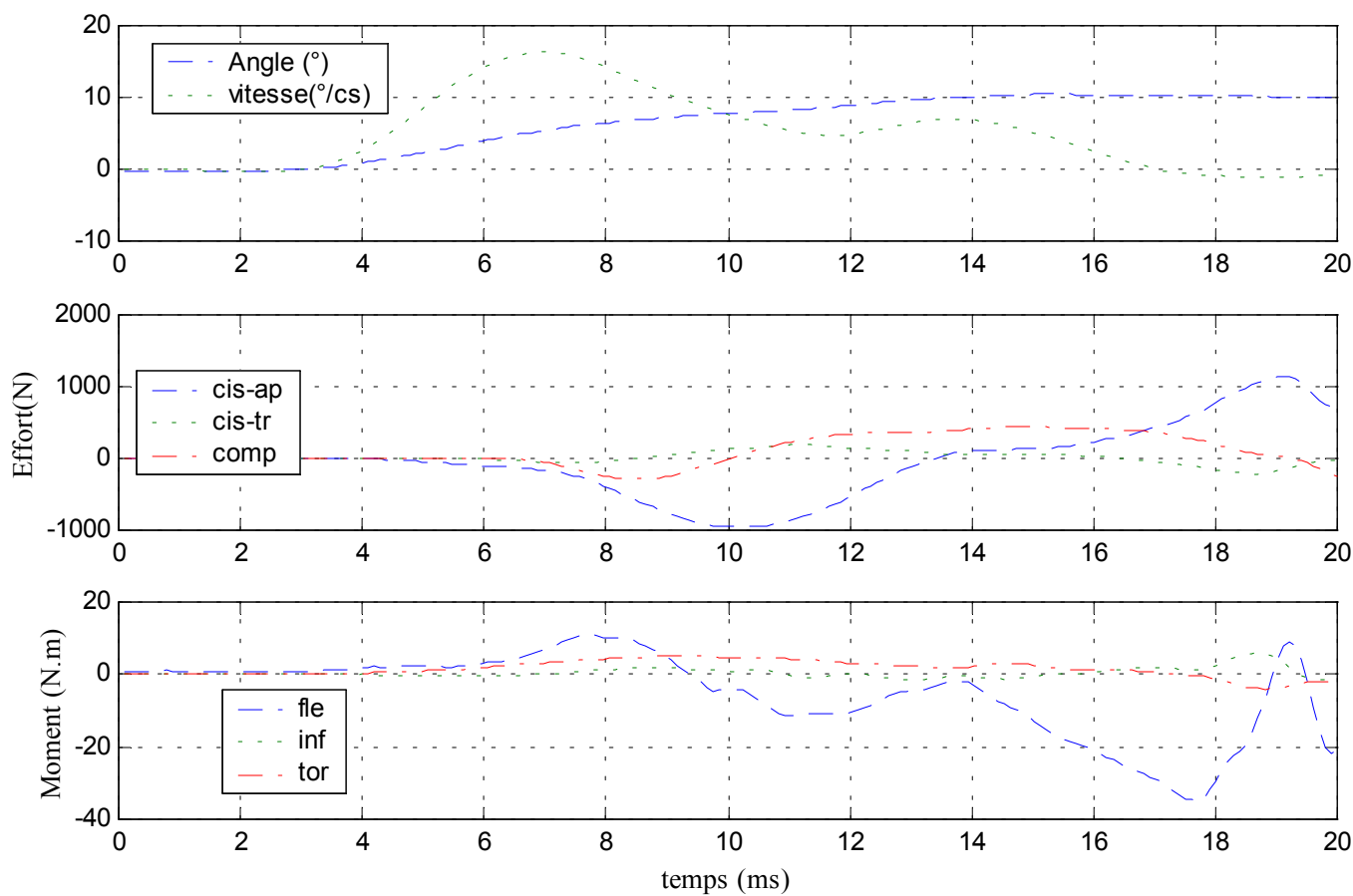
Déplacements



Efforts et moments supérieurs



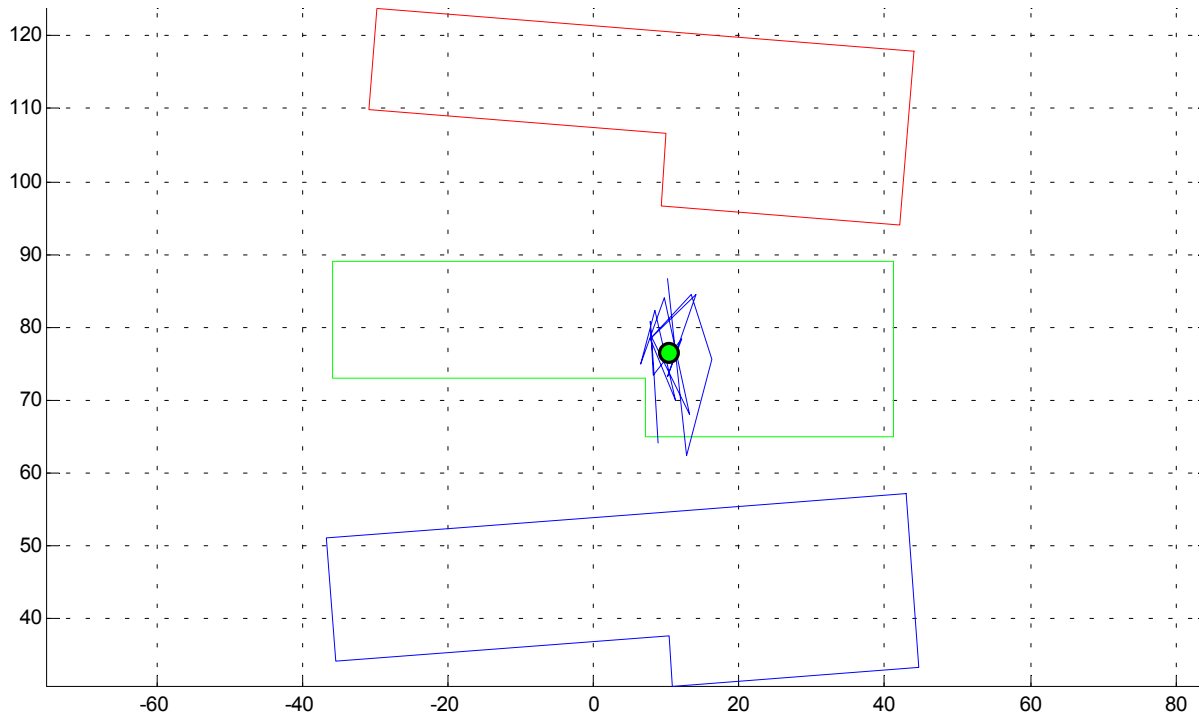
Efforts et moments inférieurs



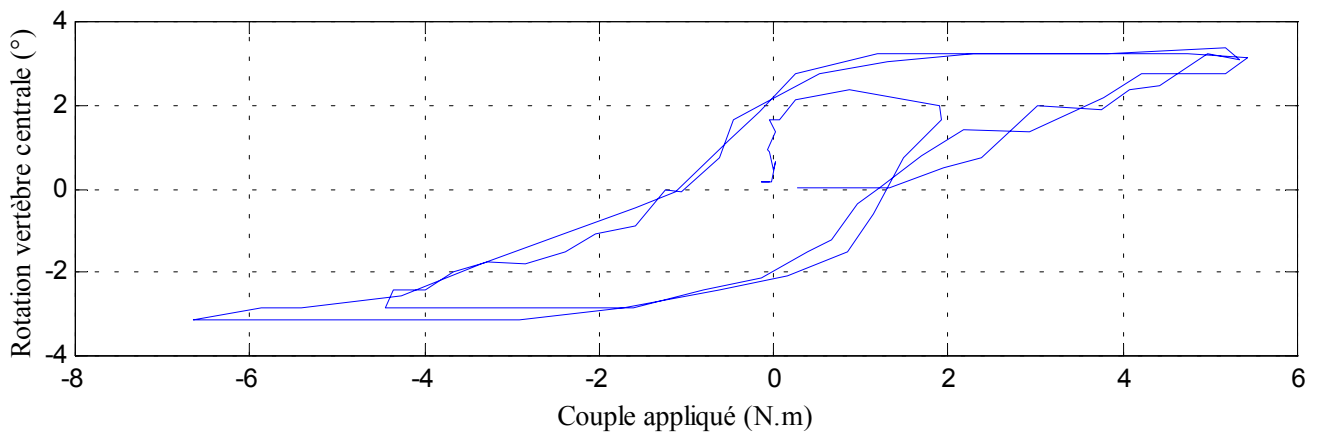
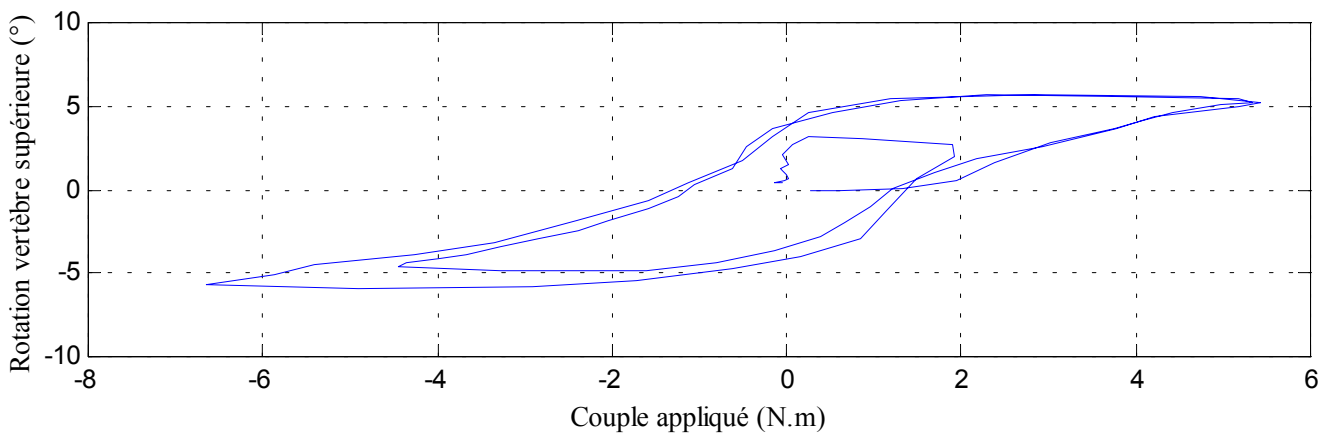
14- Essai 14 – T11L1 – flexion

A. Statique

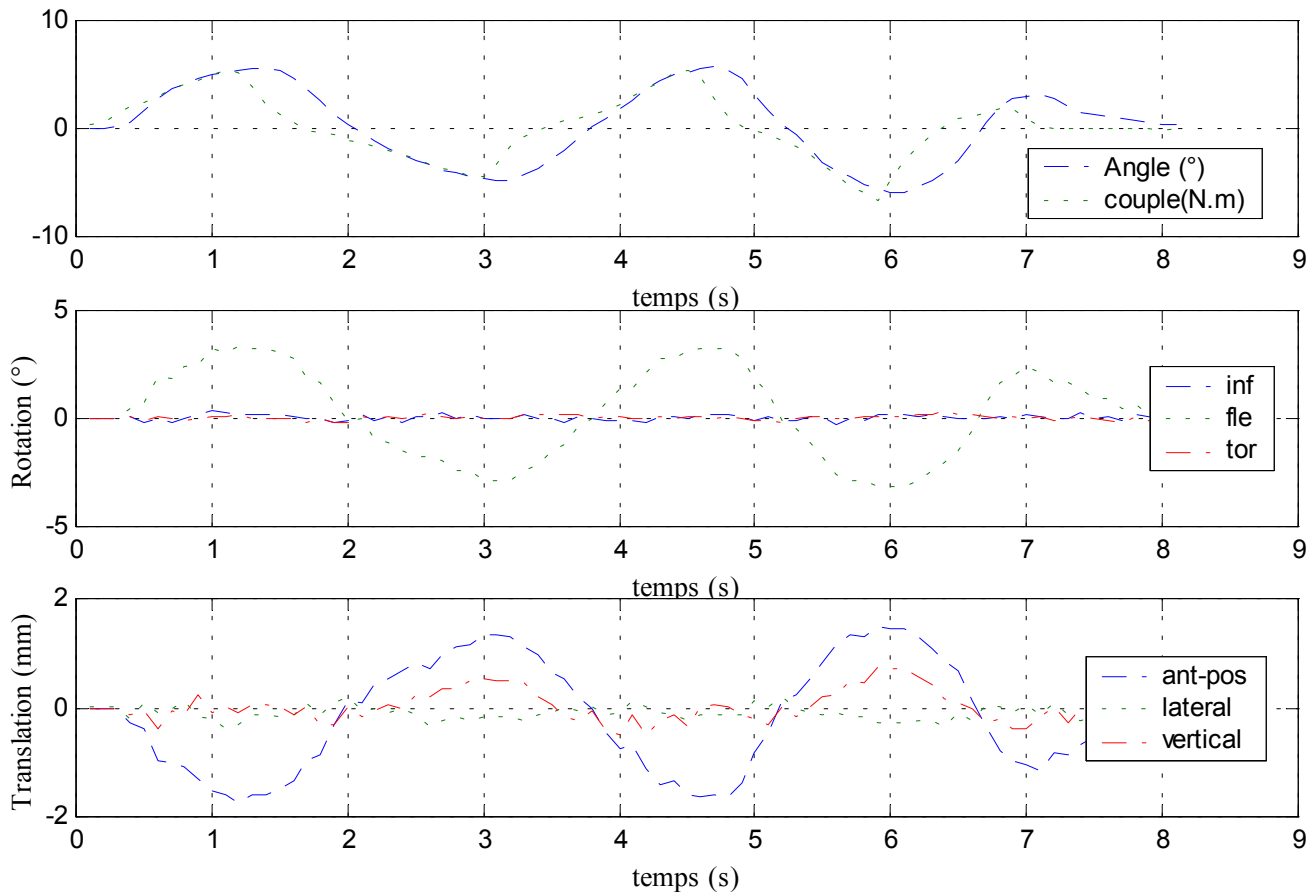
Centre instantané de rotation



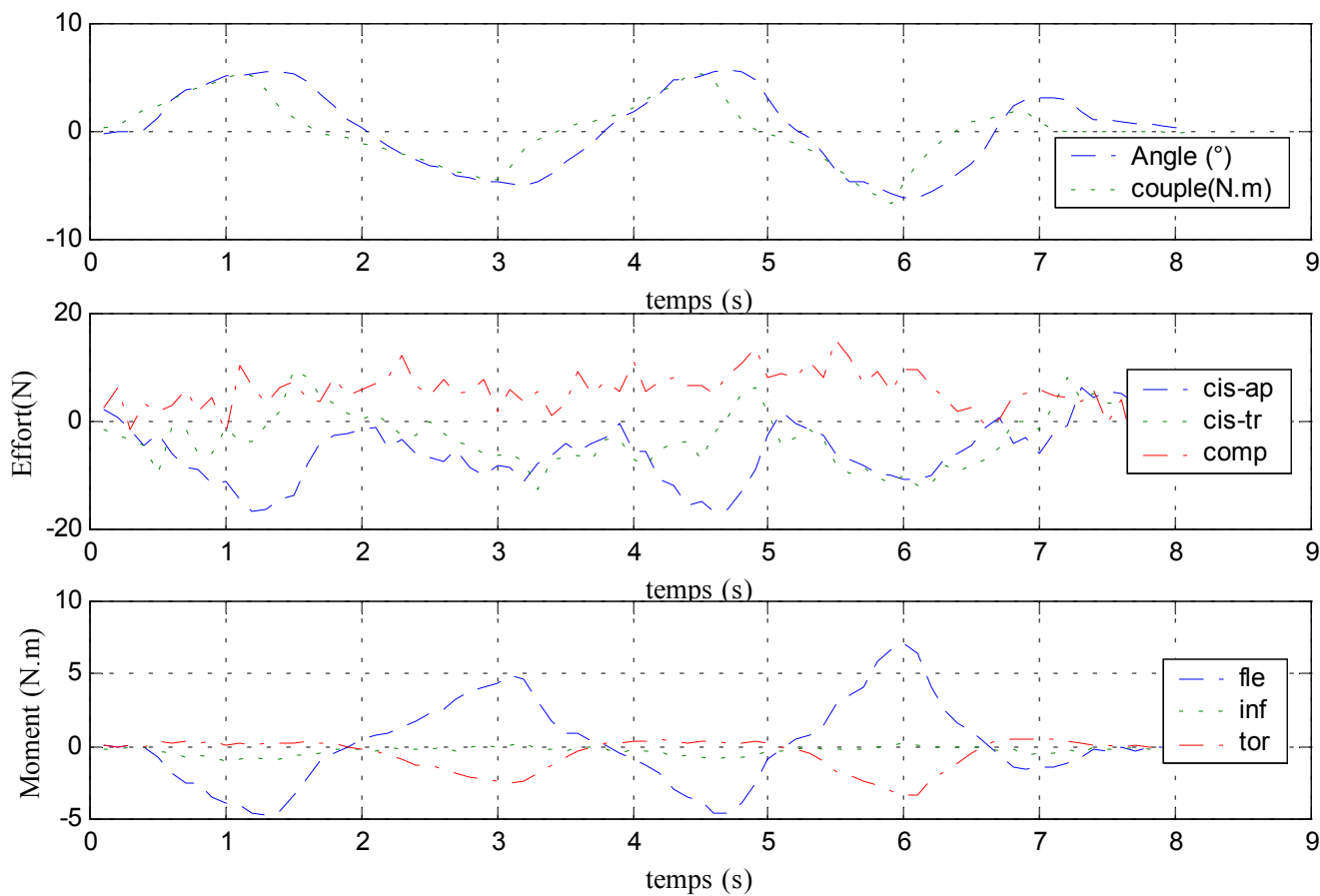
Courbe rotation-couple en hystérésis



Déplacements



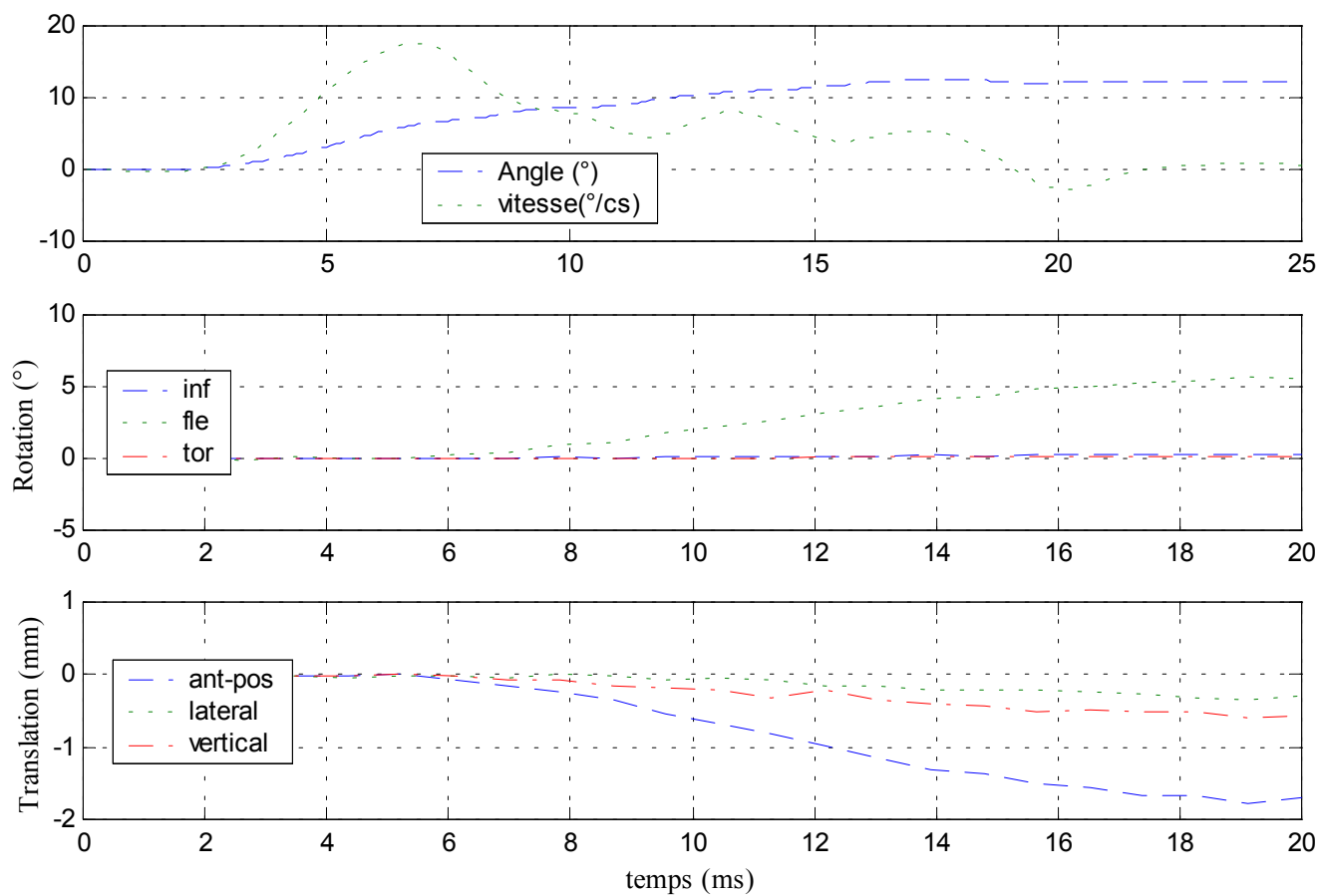
Efforts et moments inférieurs



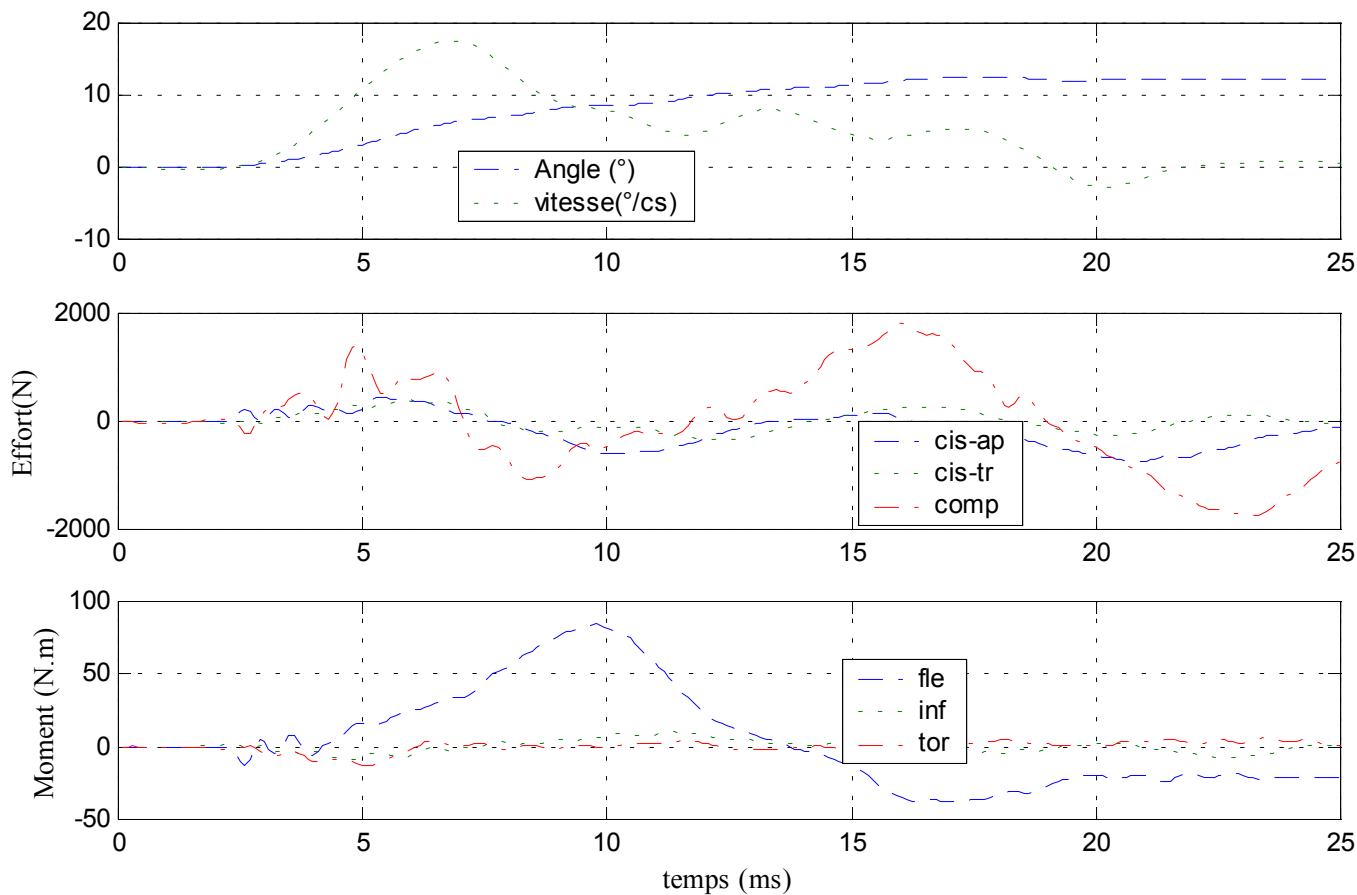
B. Dynamique

✓ Configuration saine

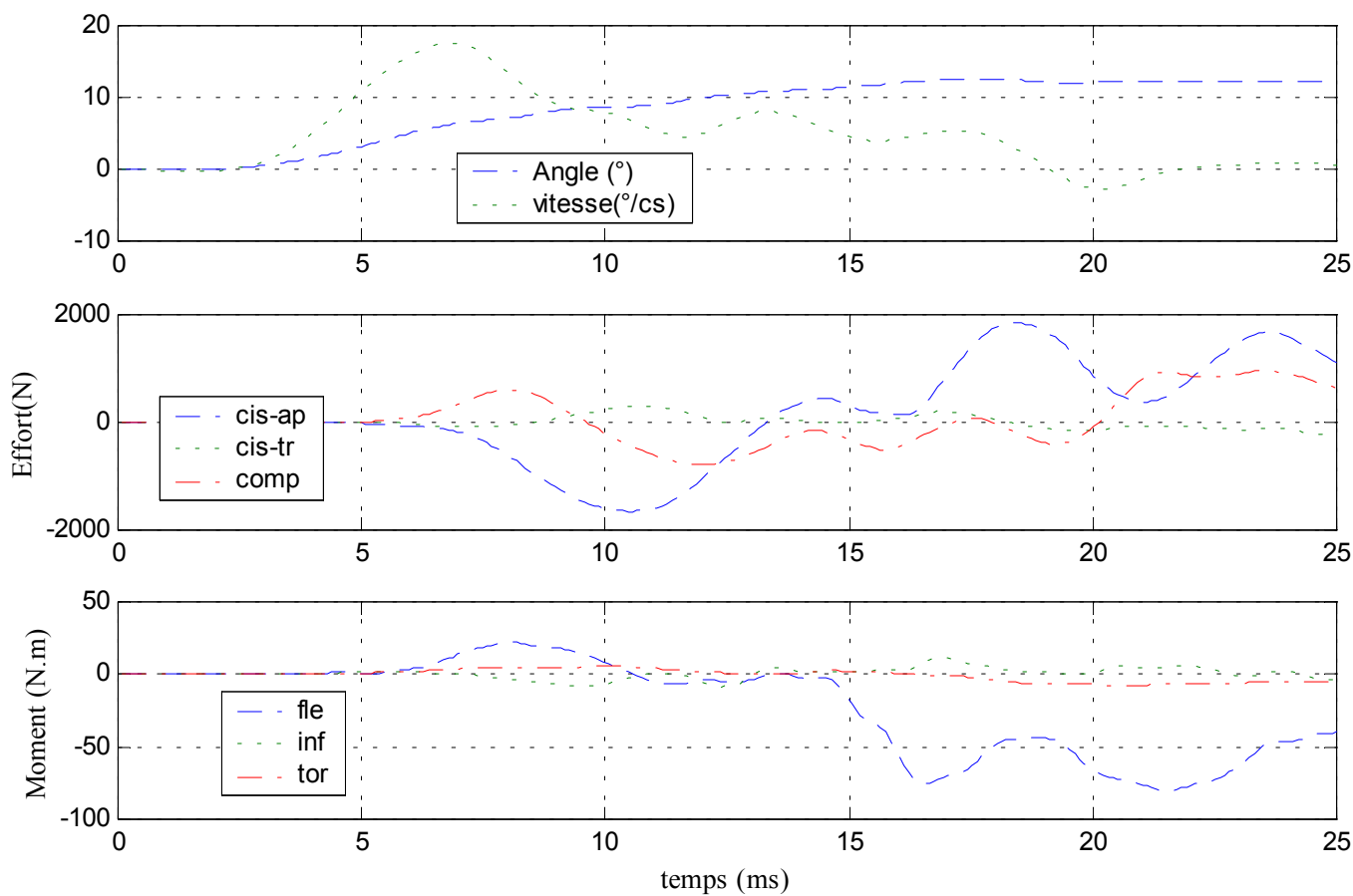
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

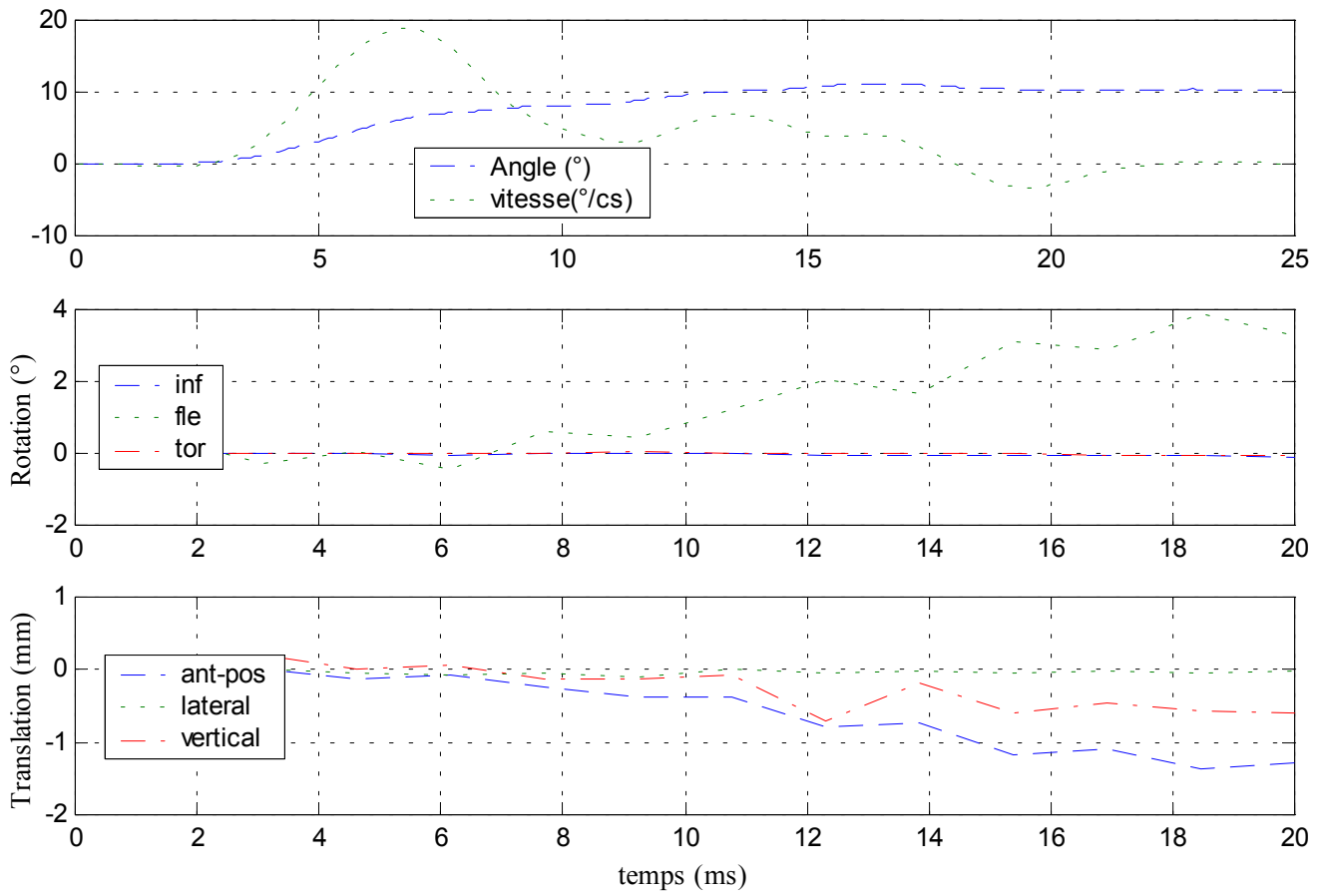


Efforts et moments inférieurs

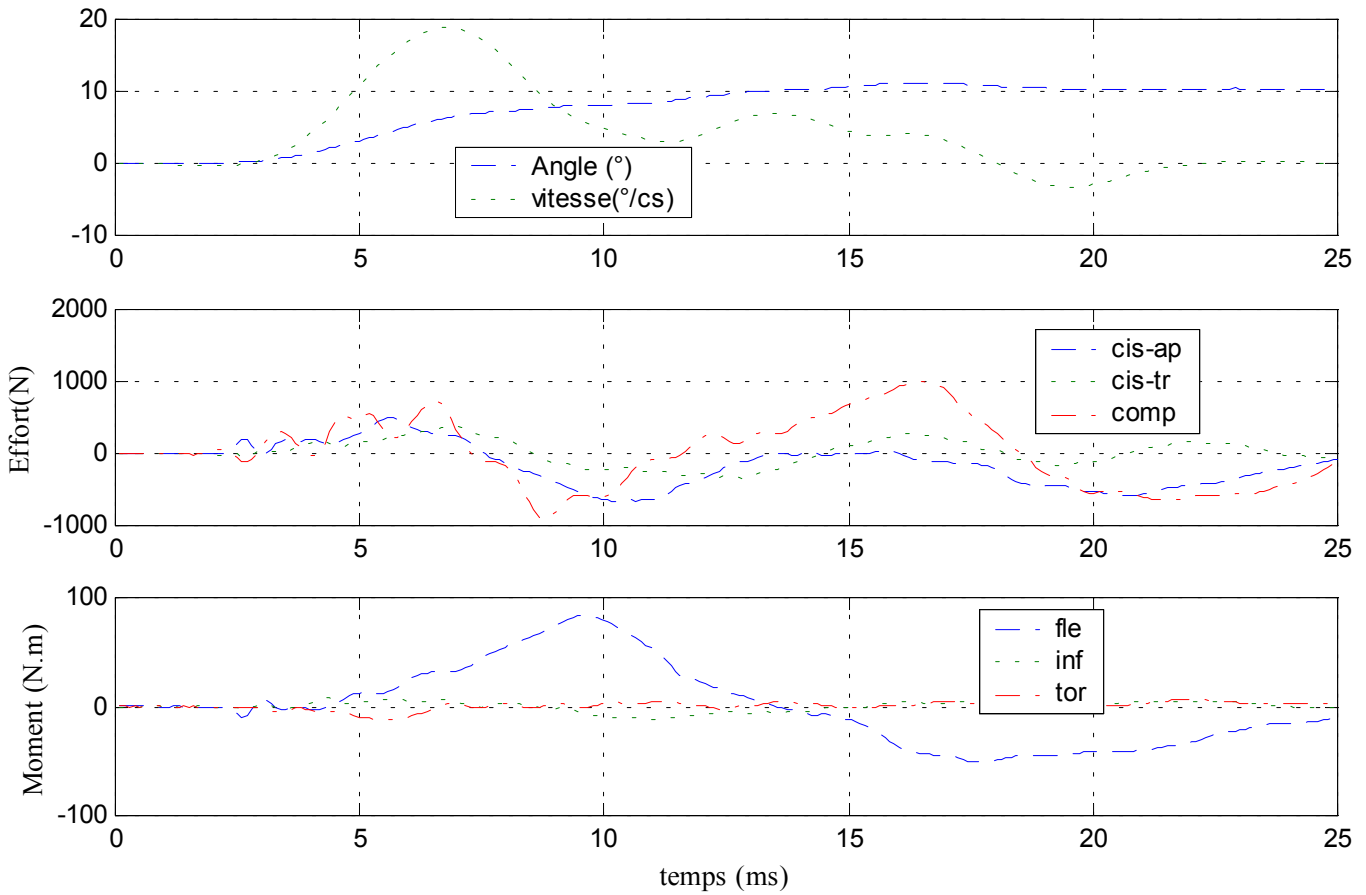


✓ Configuration avec ligaments épineux coupés

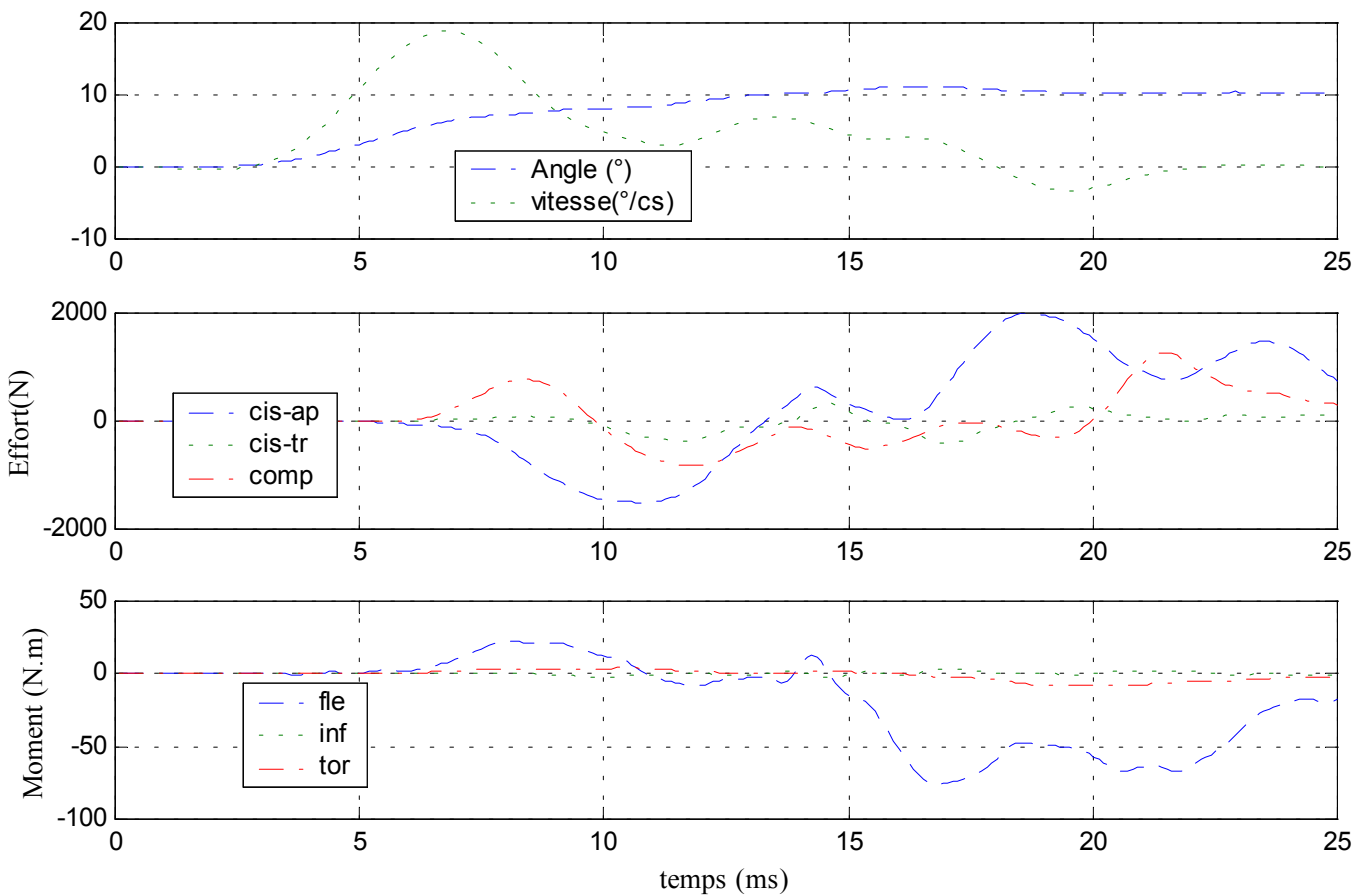
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

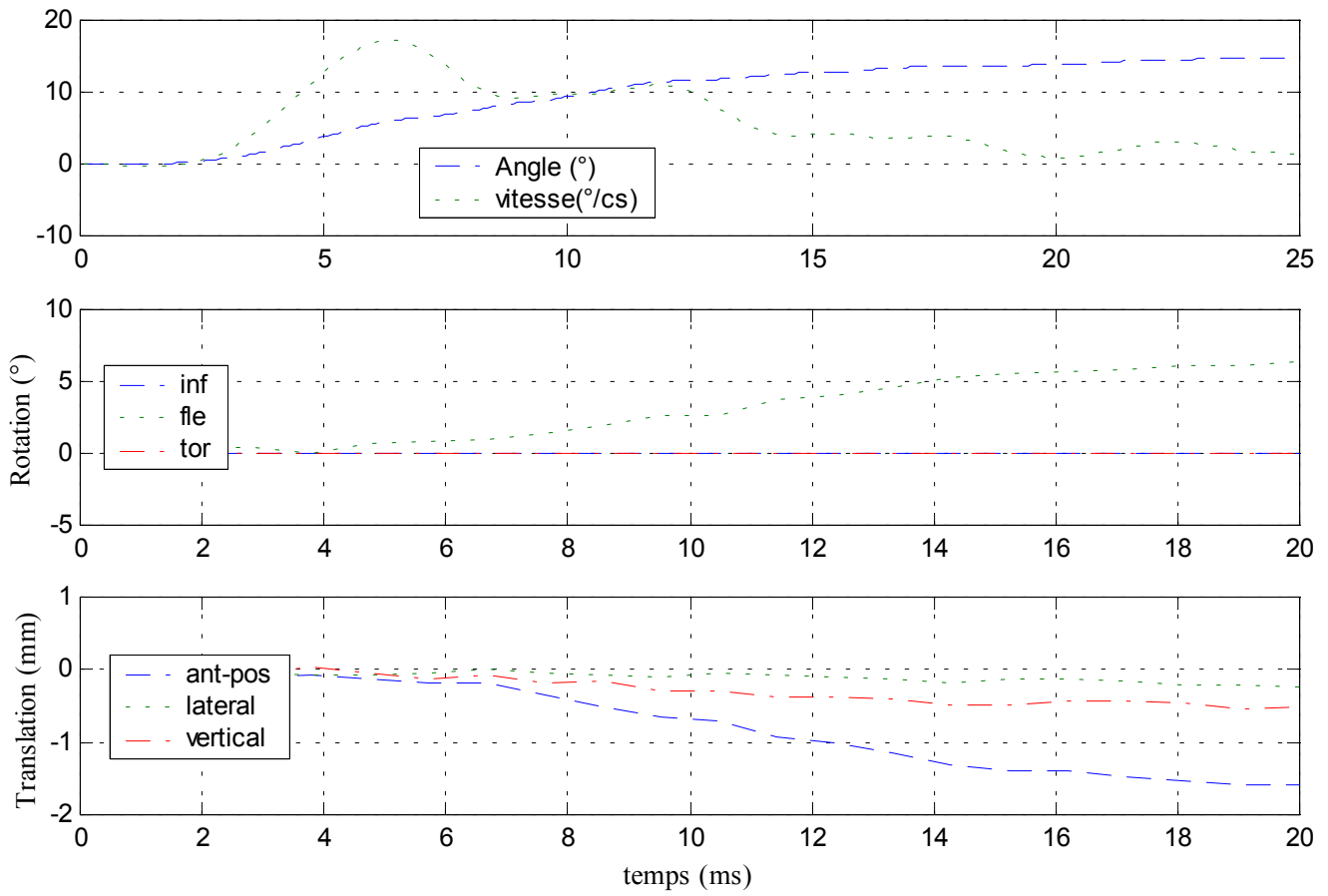


Efforts et moments inférieurs

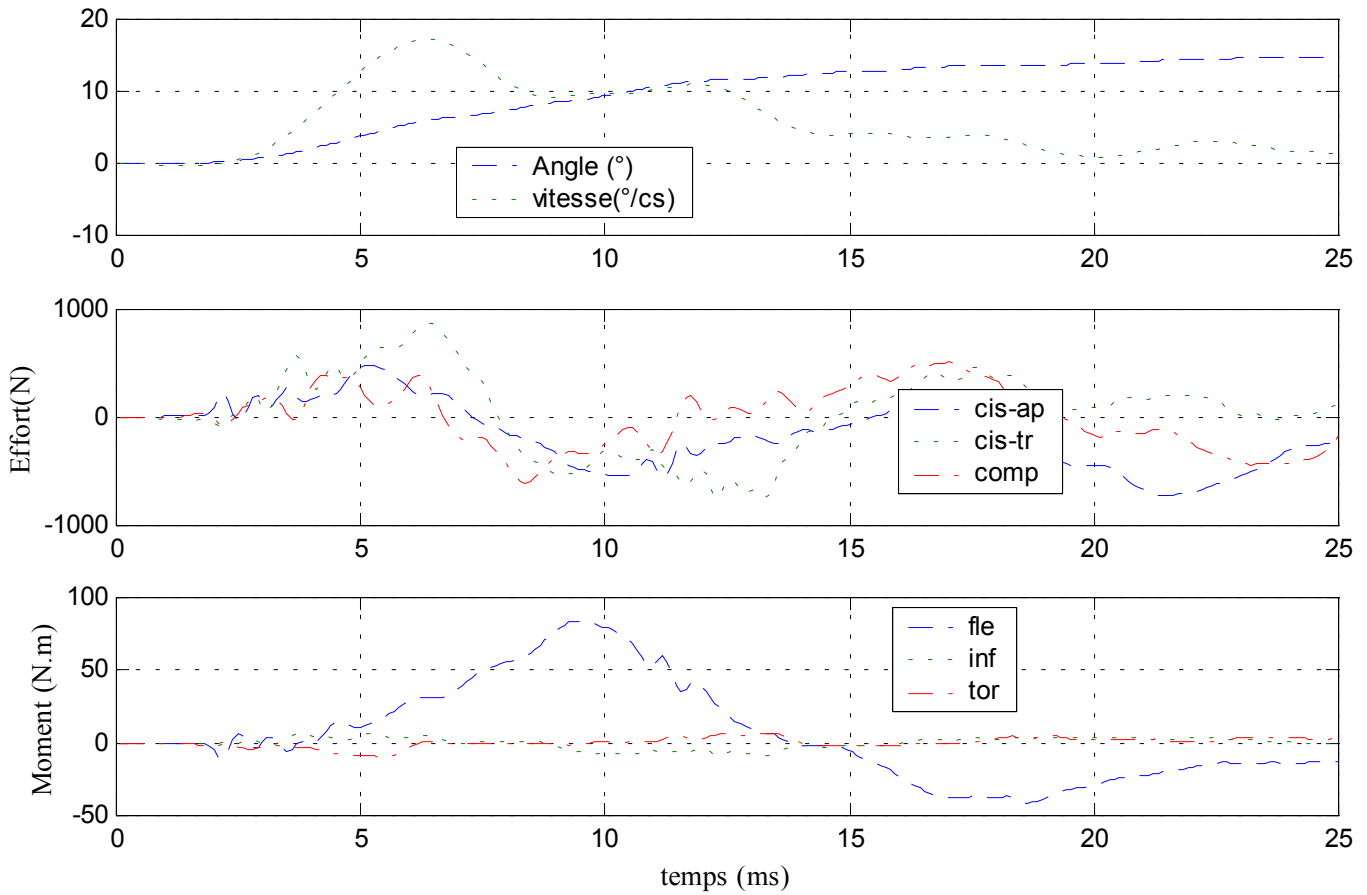


✓ Configuration avec ligaments capsulaires coupés

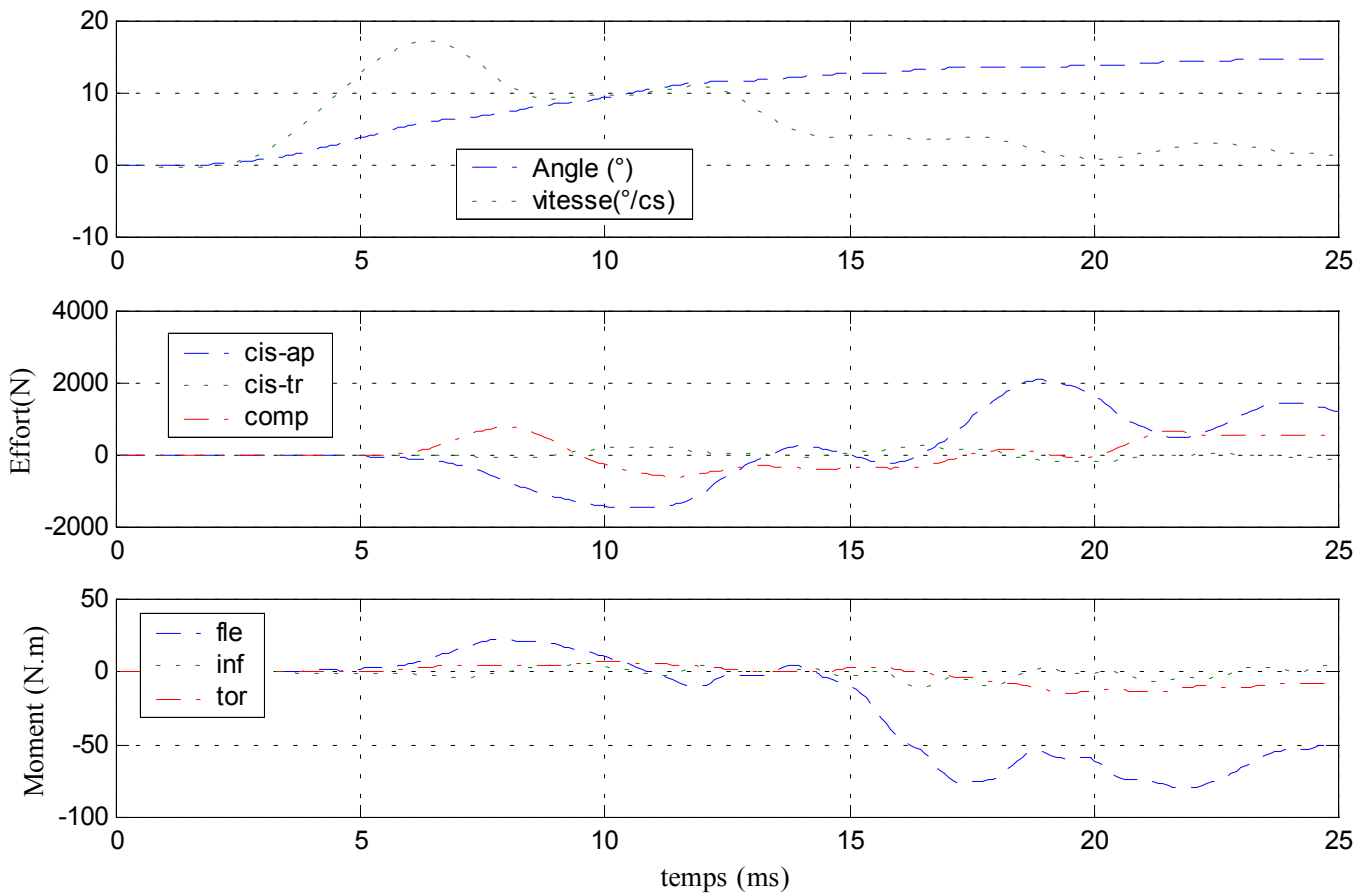
Déplacements



Efforts et moments supérieurs



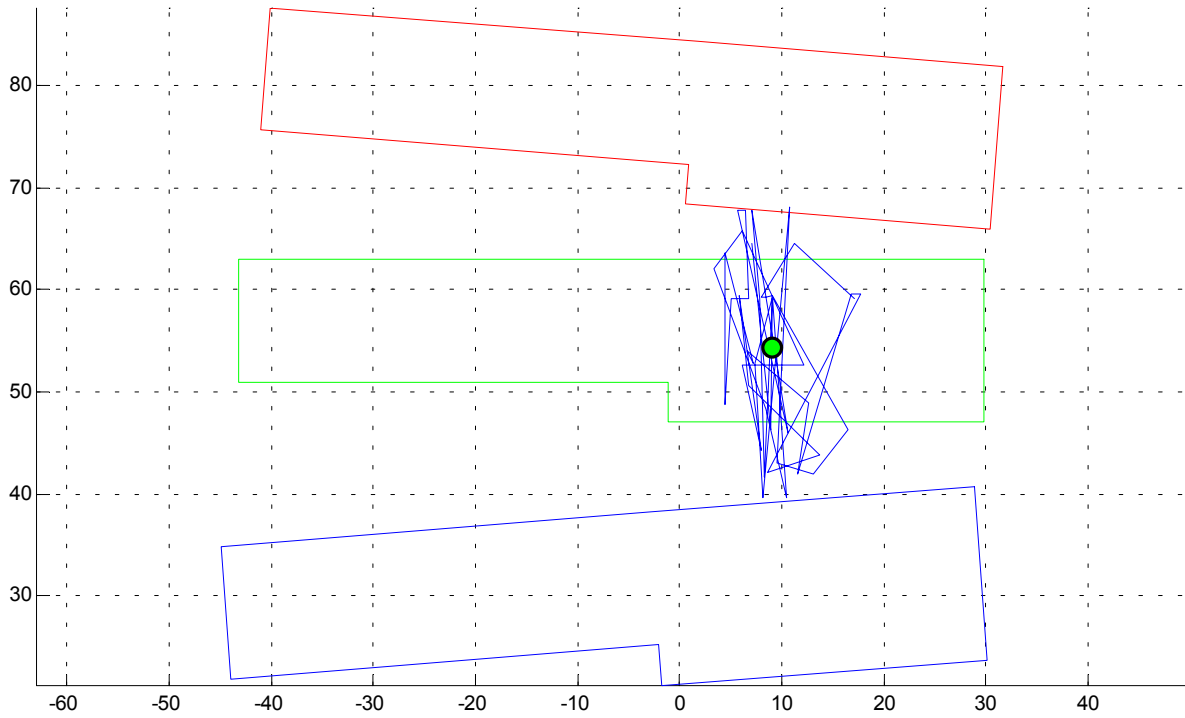
Efforts et moments inférieurs



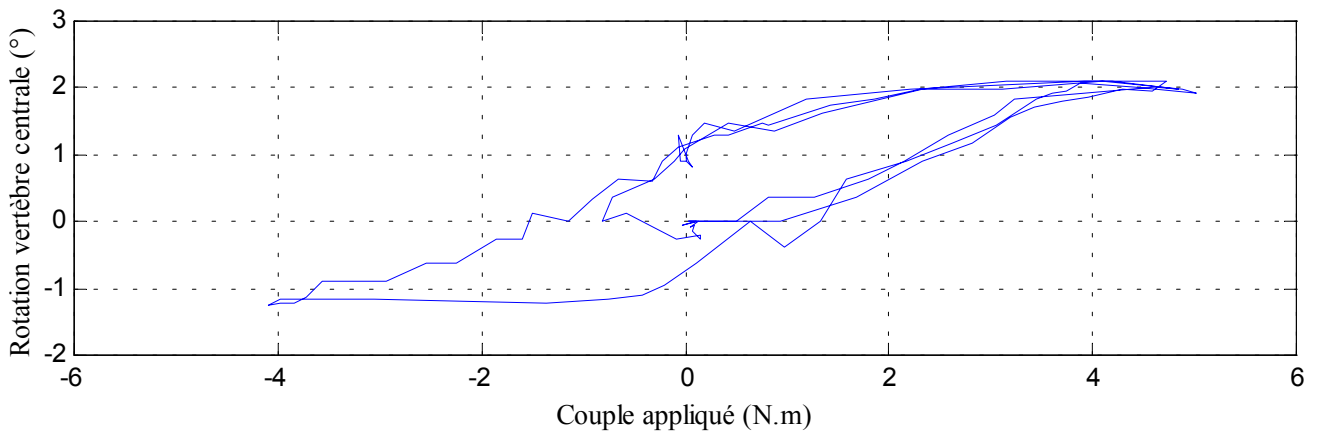
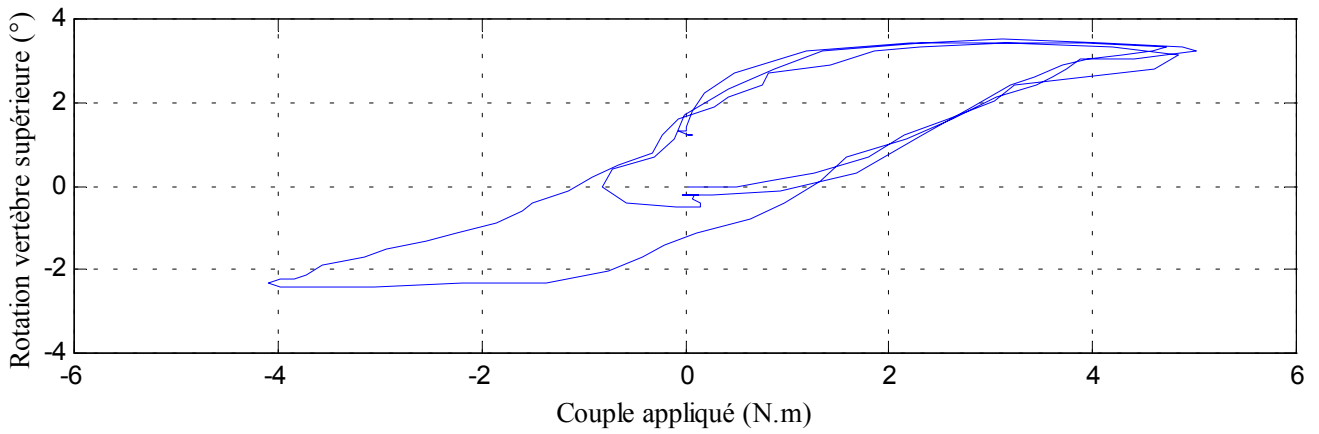
15- Essai 15 – T7T9 – flexion

A. Statique

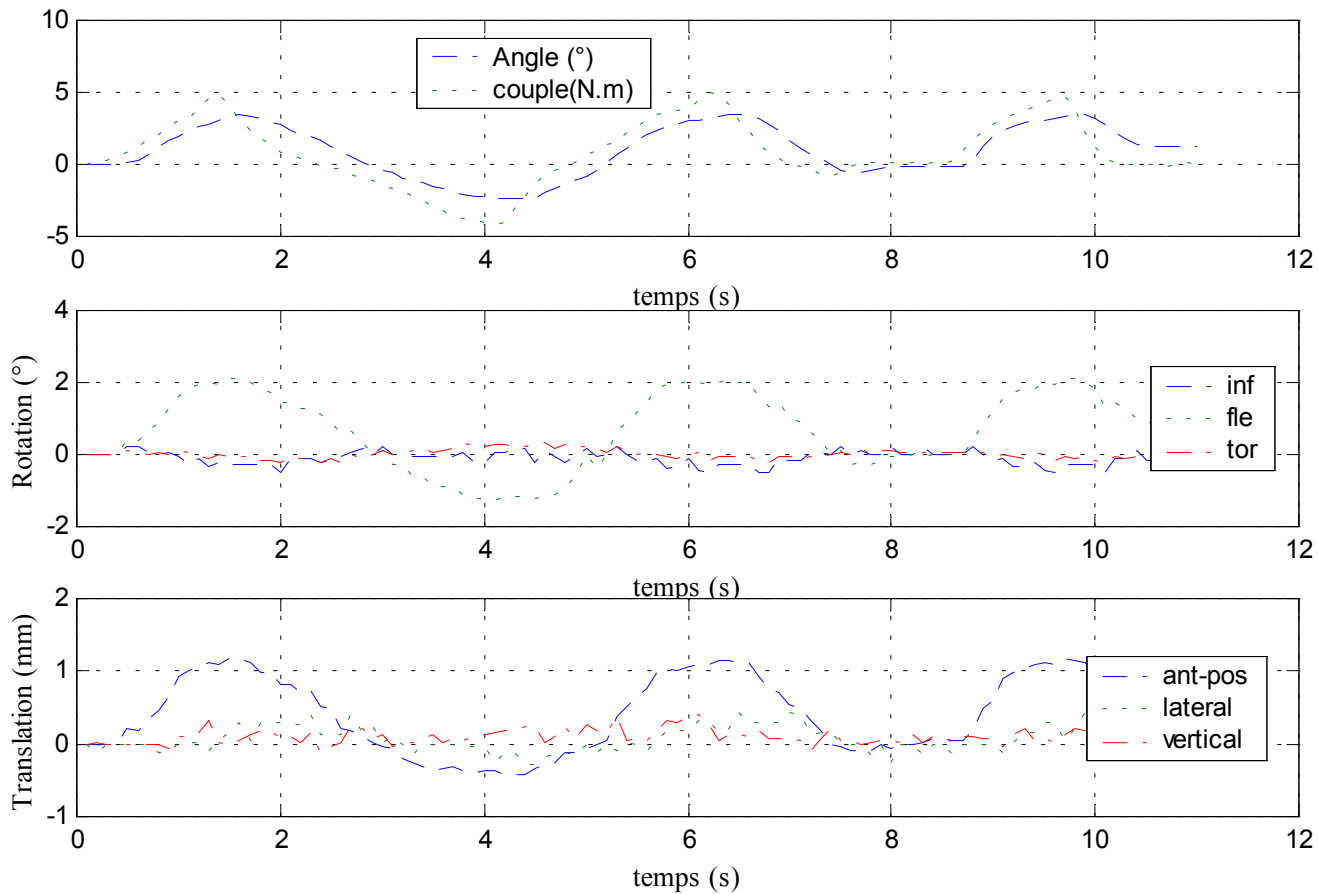
Centre instantané de rotation



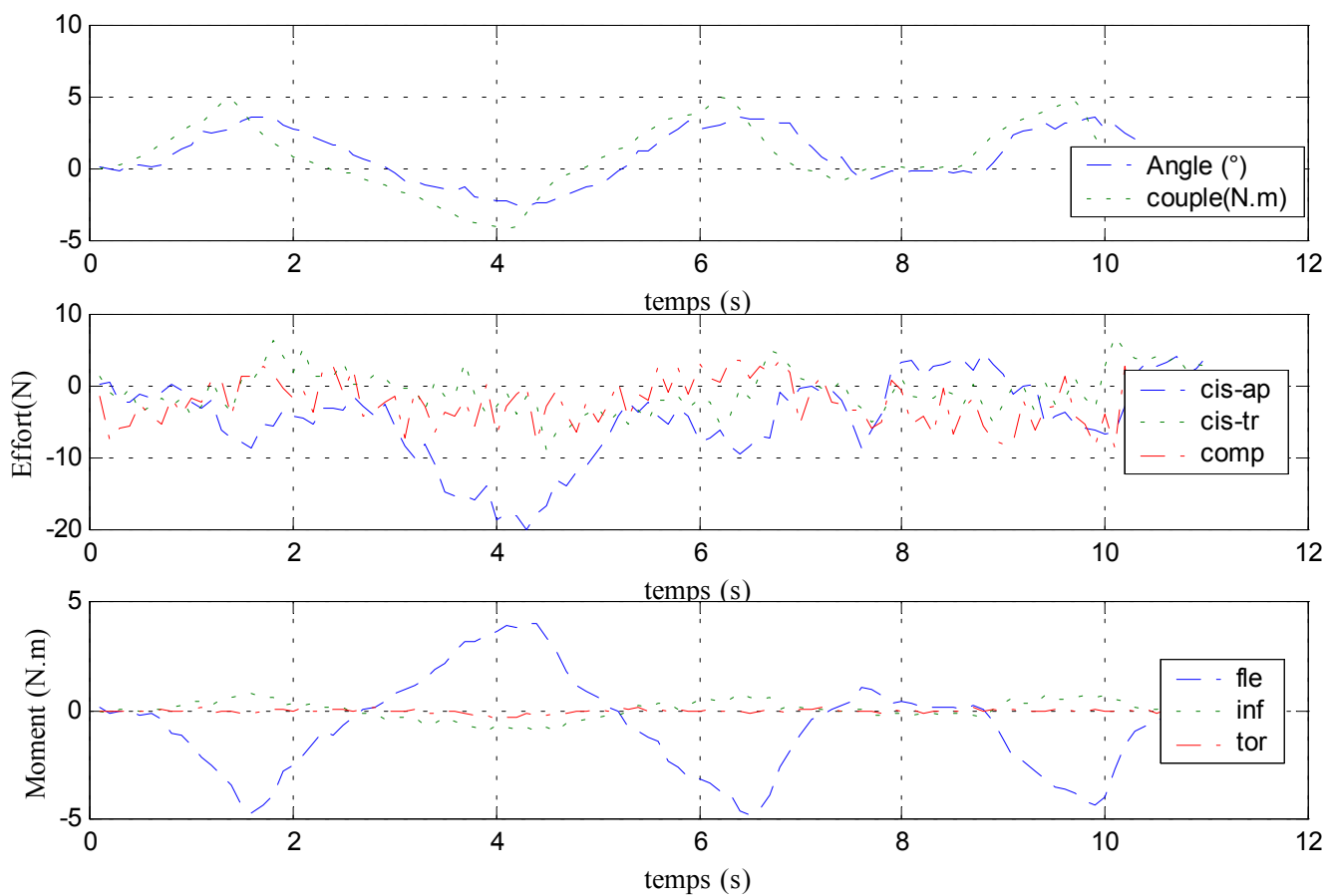
Courbe rotation-couple en hystérésis



Déplacements



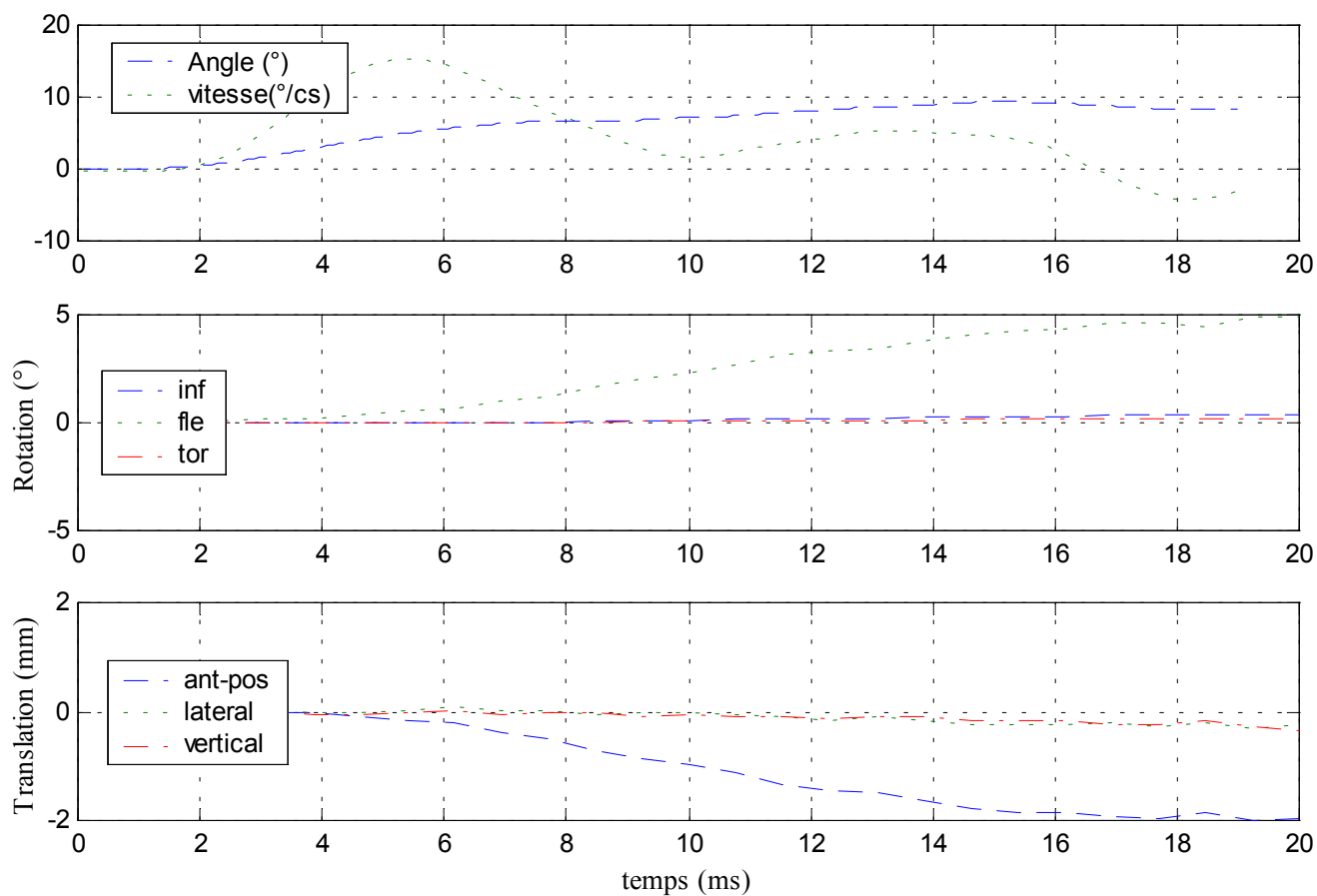
Efforts et moments inférieurs



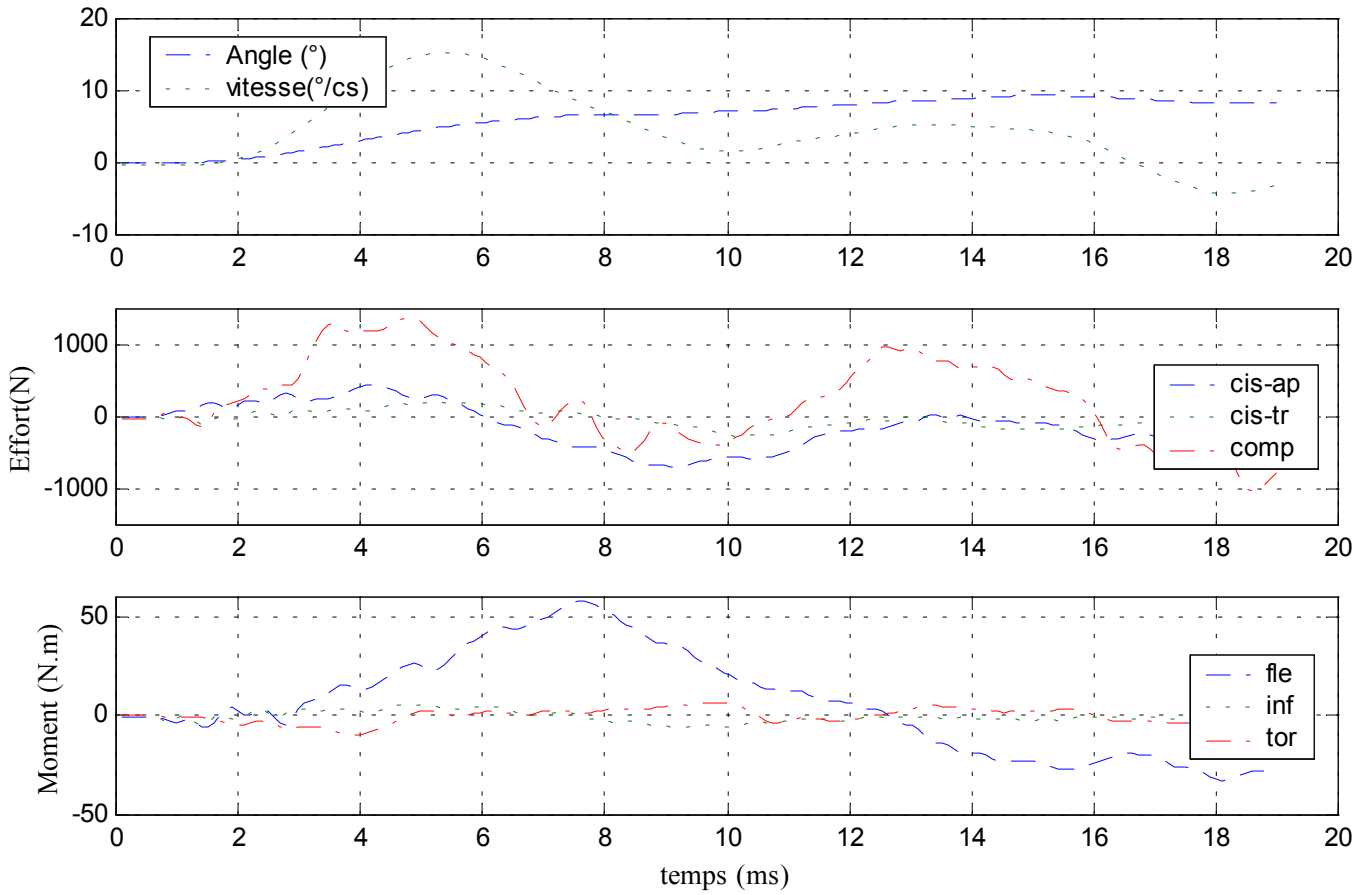
B. Dynamique

✓ Configuration saine

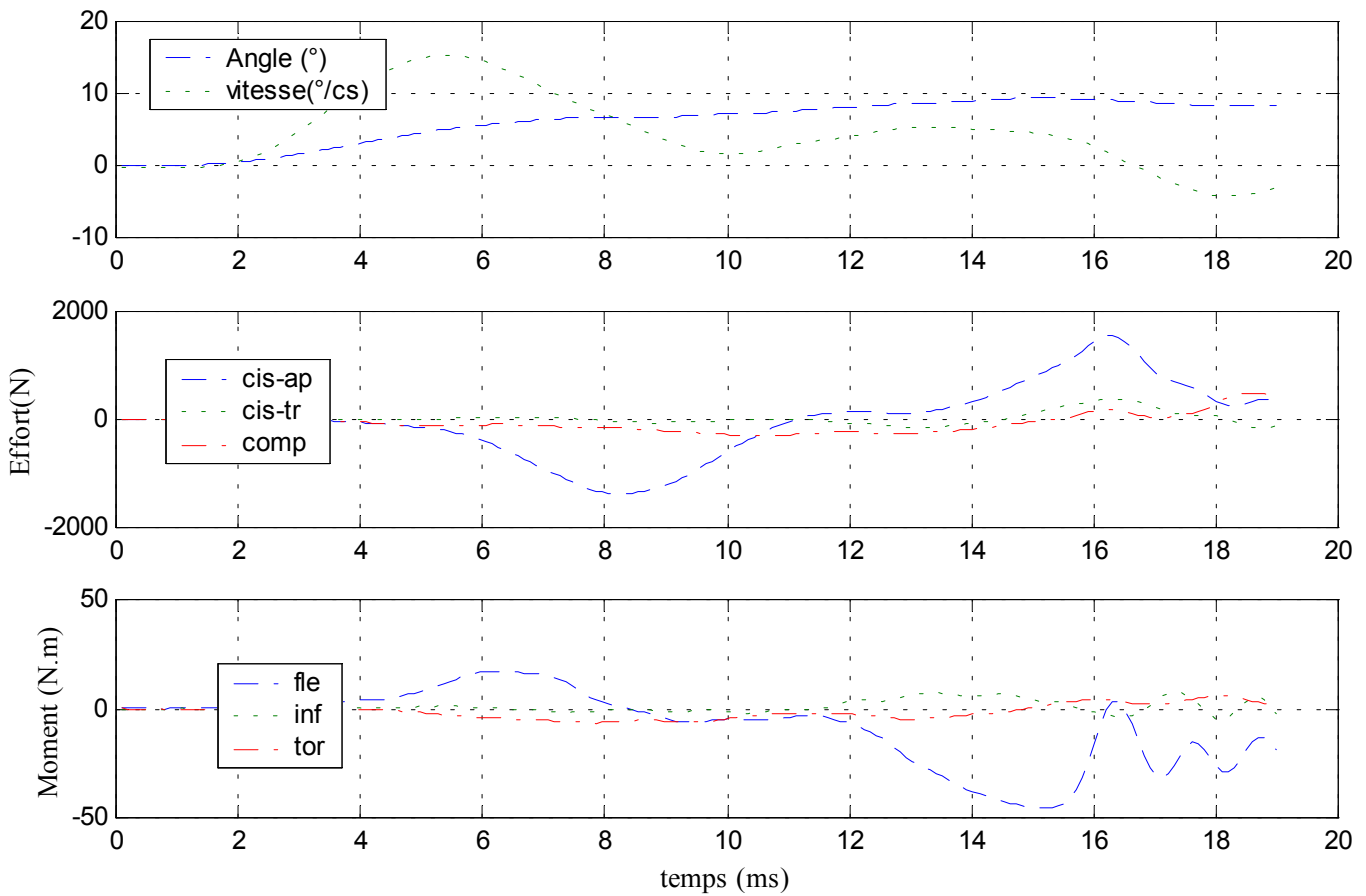
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

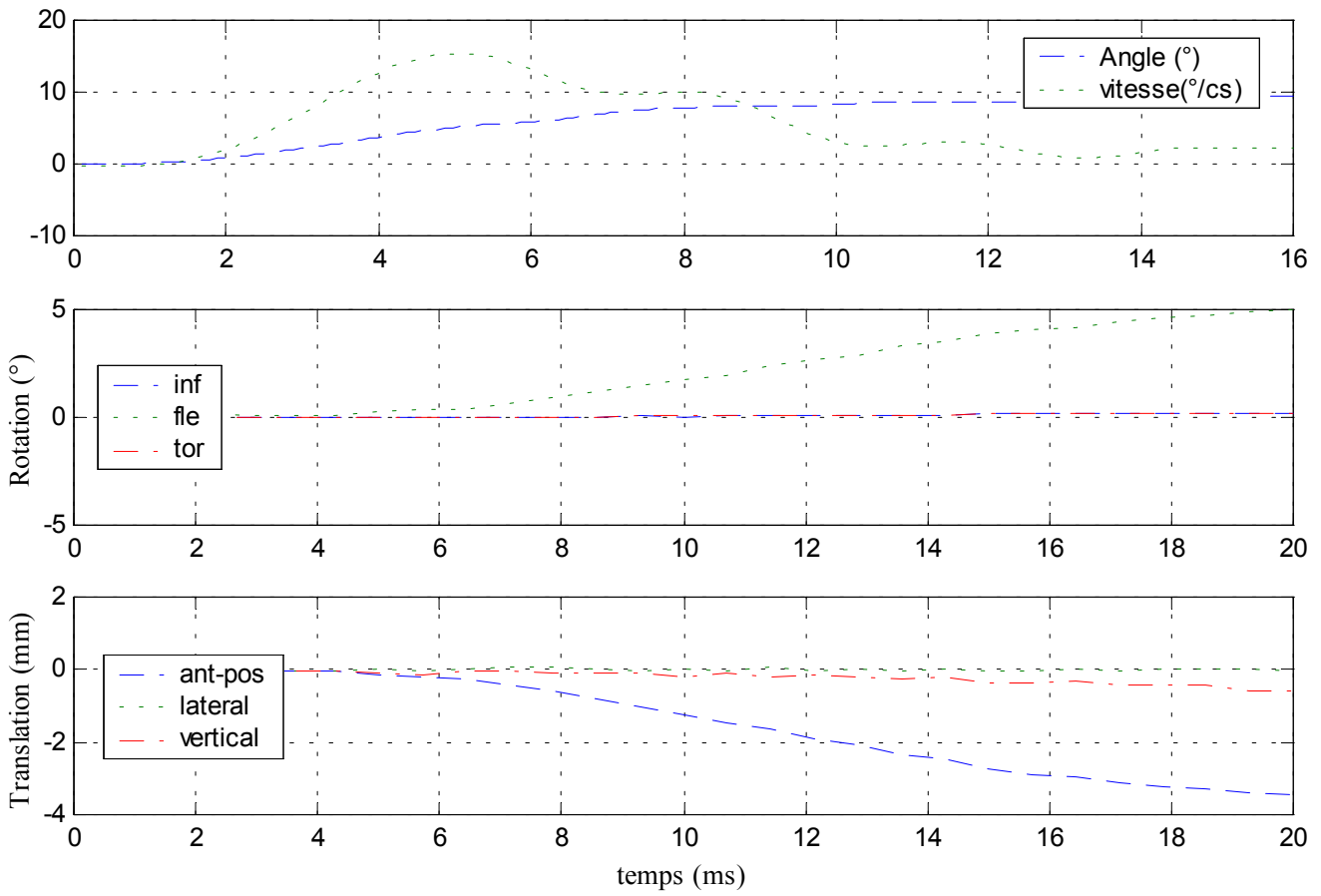


Efforts et moments inférieurs

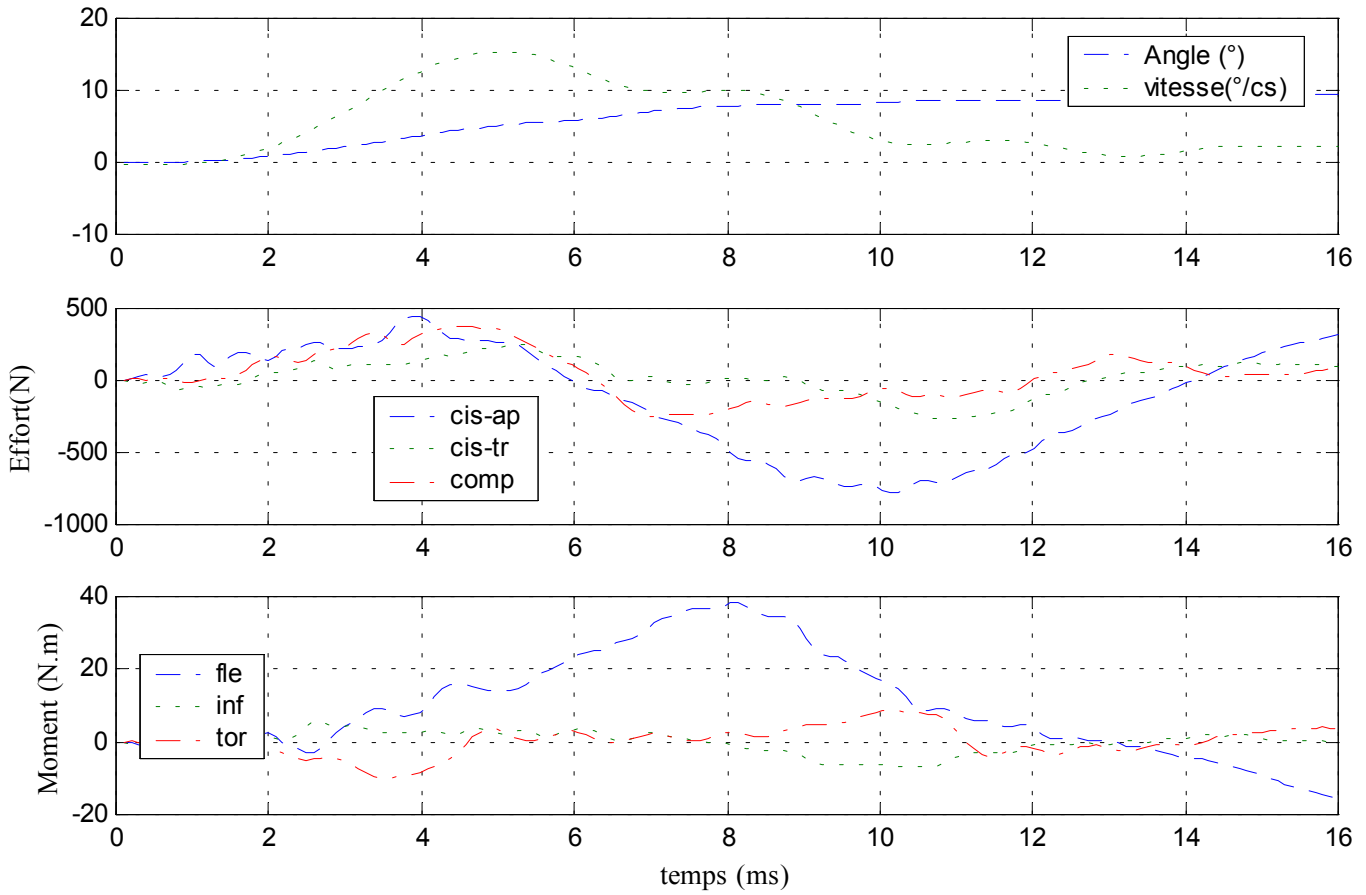


✓ Configuration avec ligaments épineux coupés

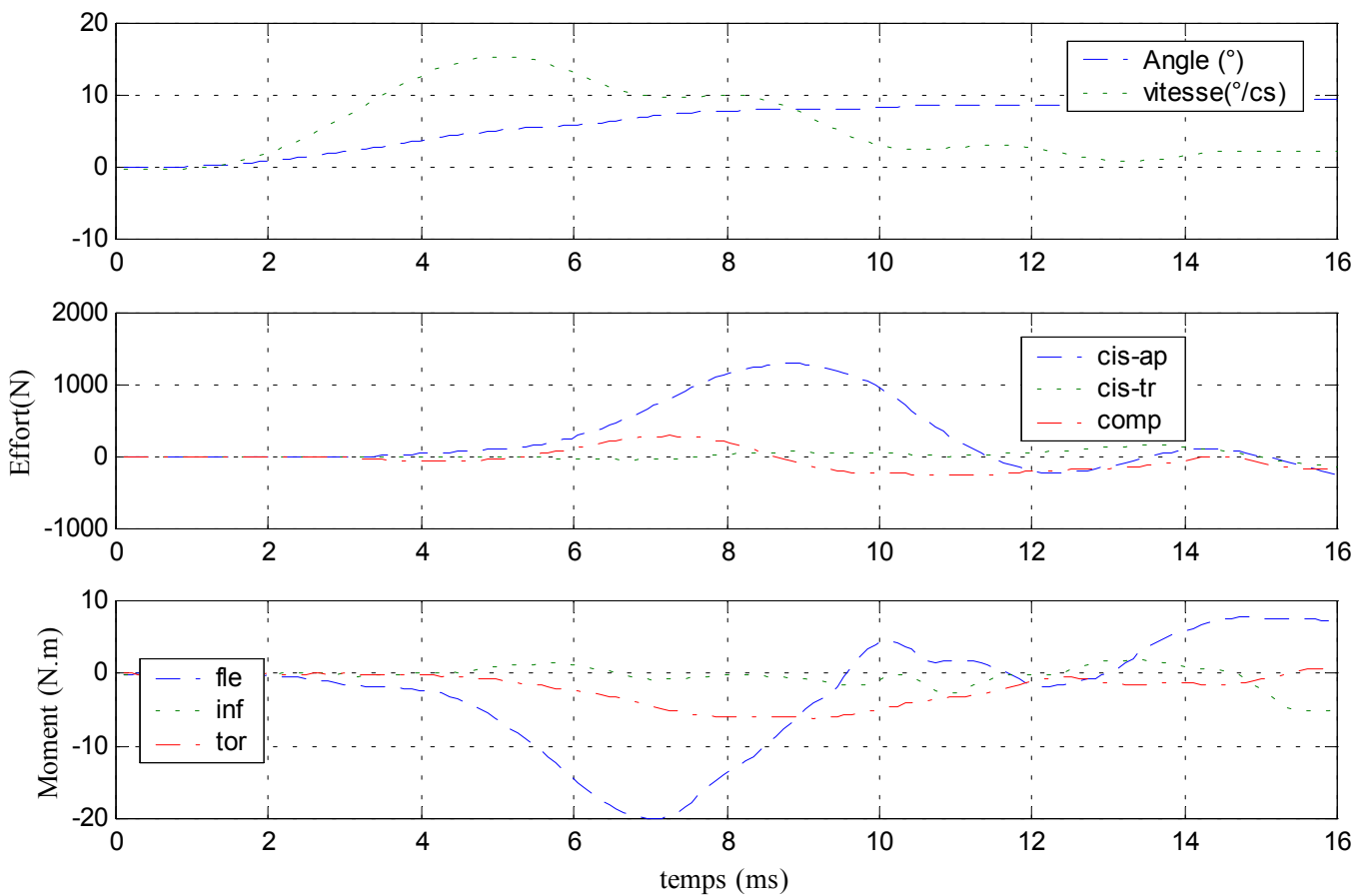
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

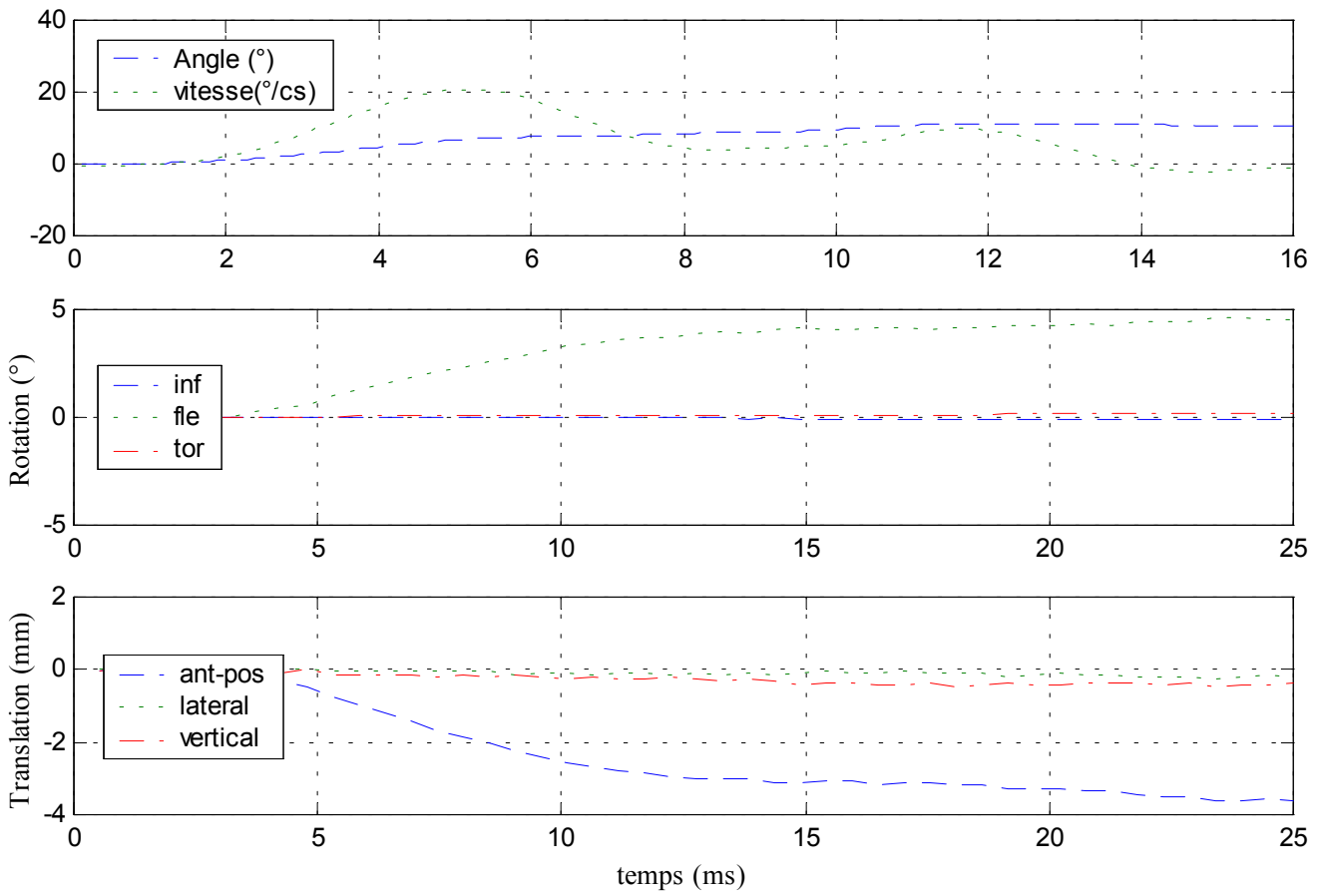


Efforts et moments inférieurs

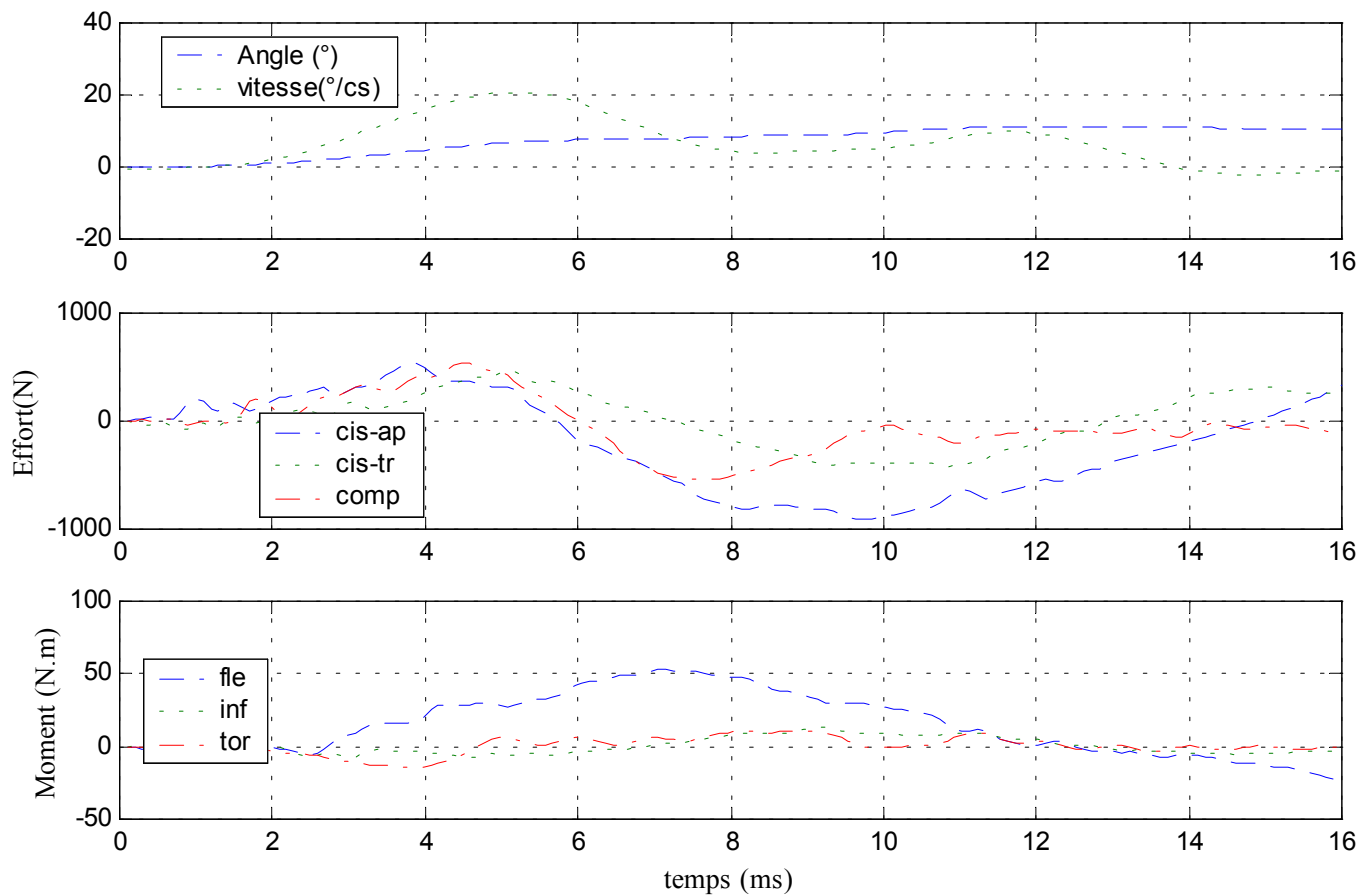


✓ Configuration avec ligaments jaunes coupés

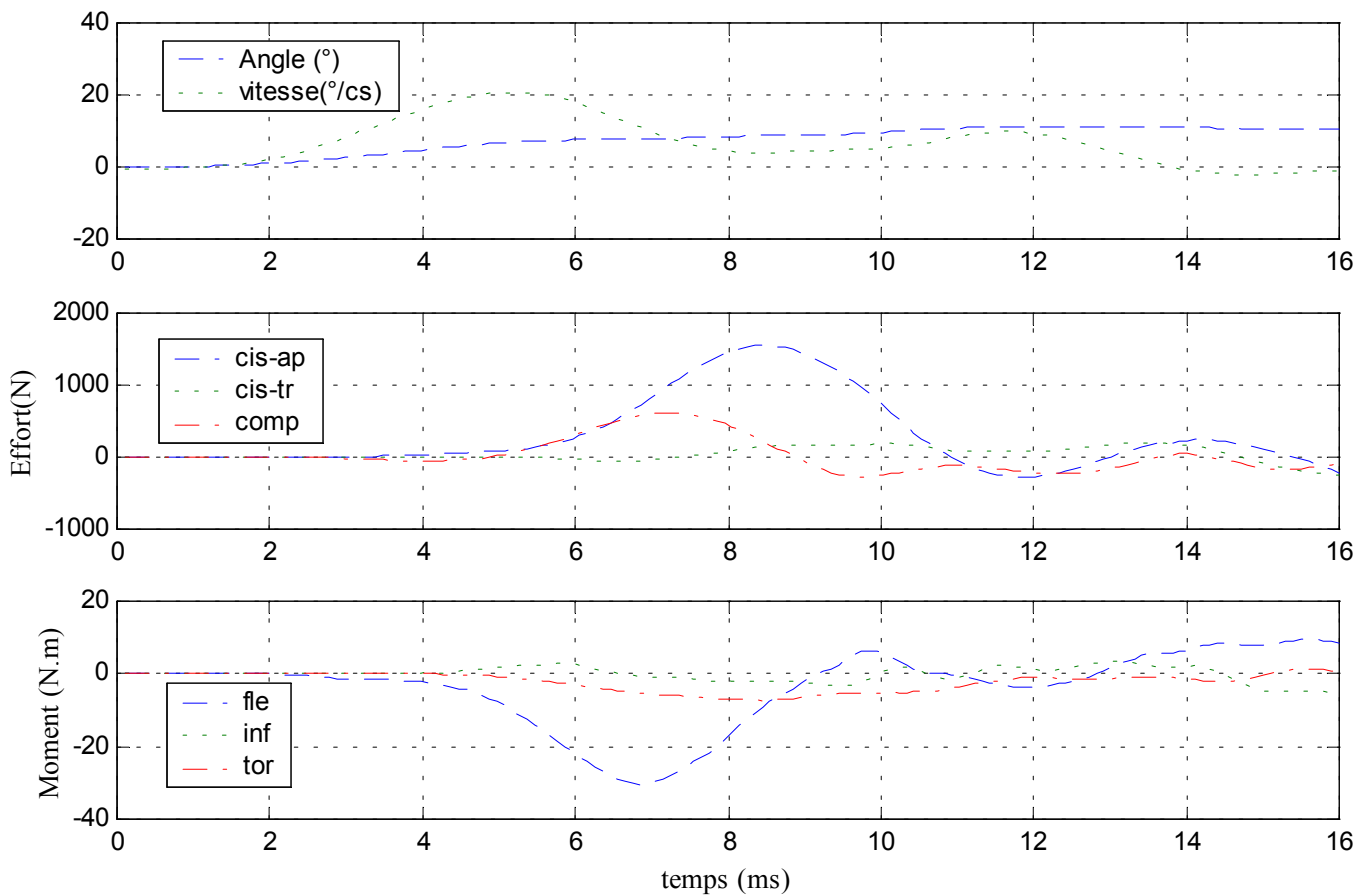
Déplacements



Efforts et moments supérieurs



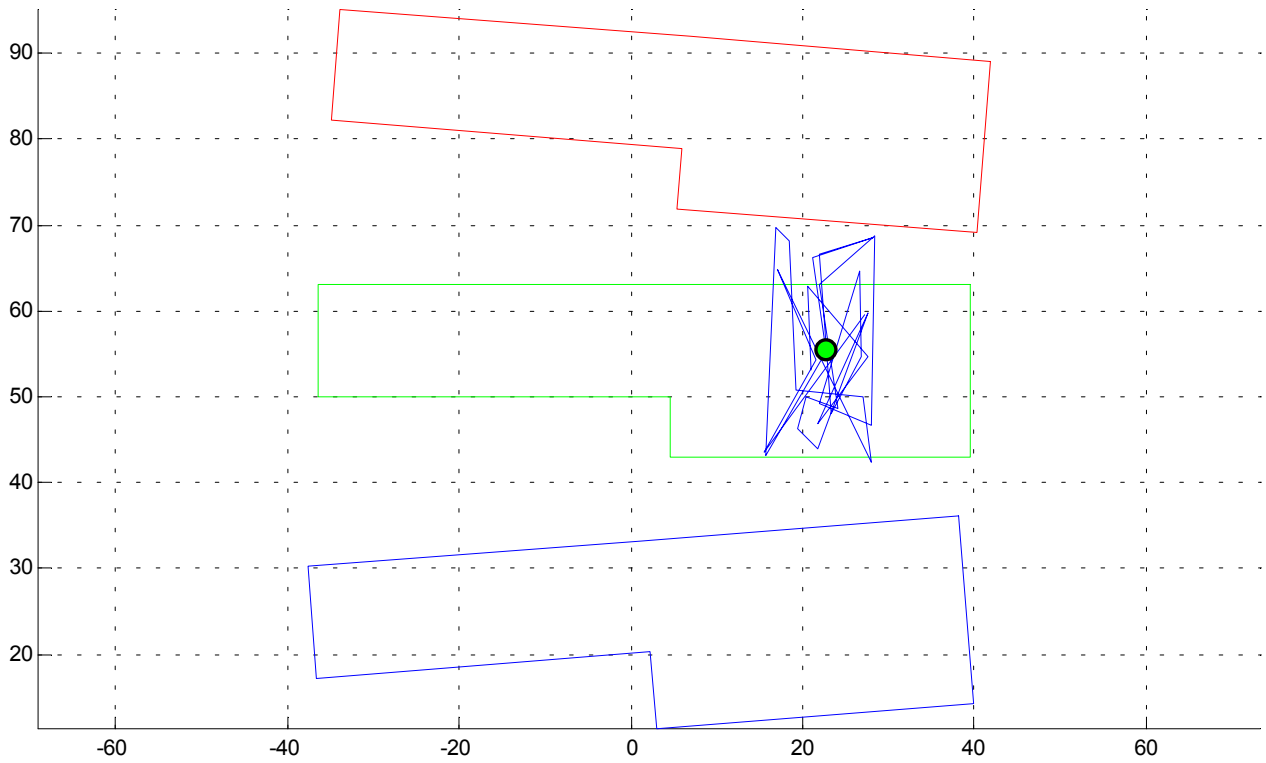
Efforts et moments inférieurs



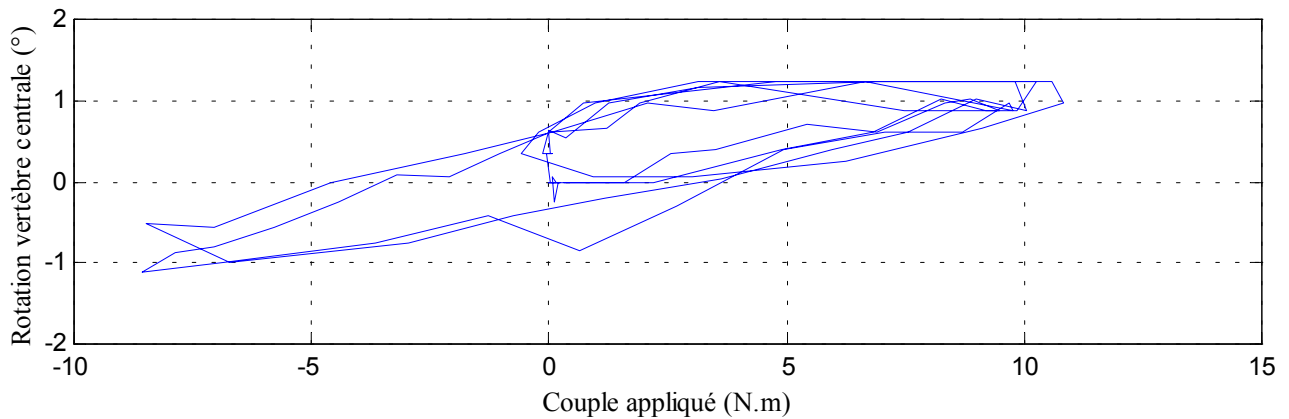
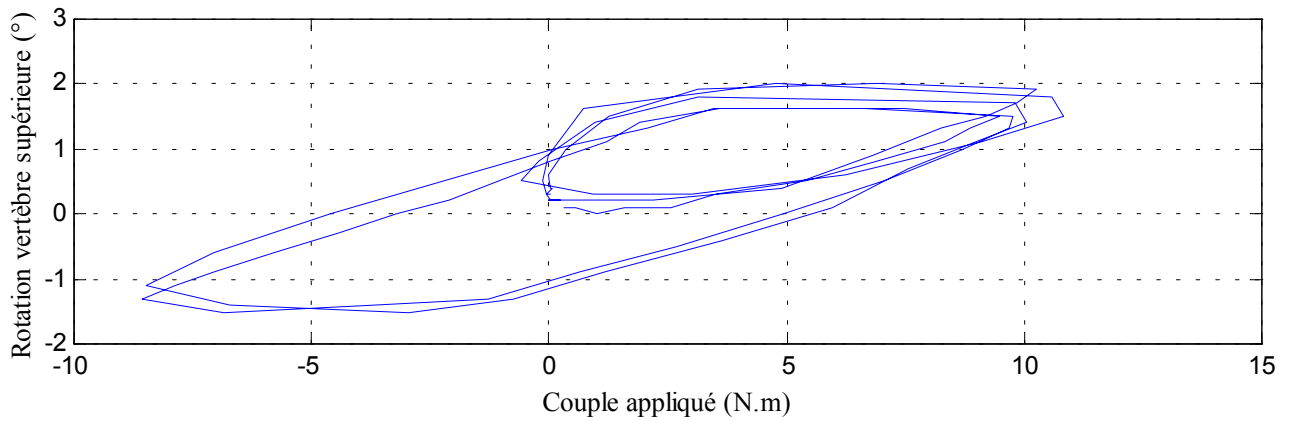
16- Essai 16 – T11L1 – flexion

A. Statique

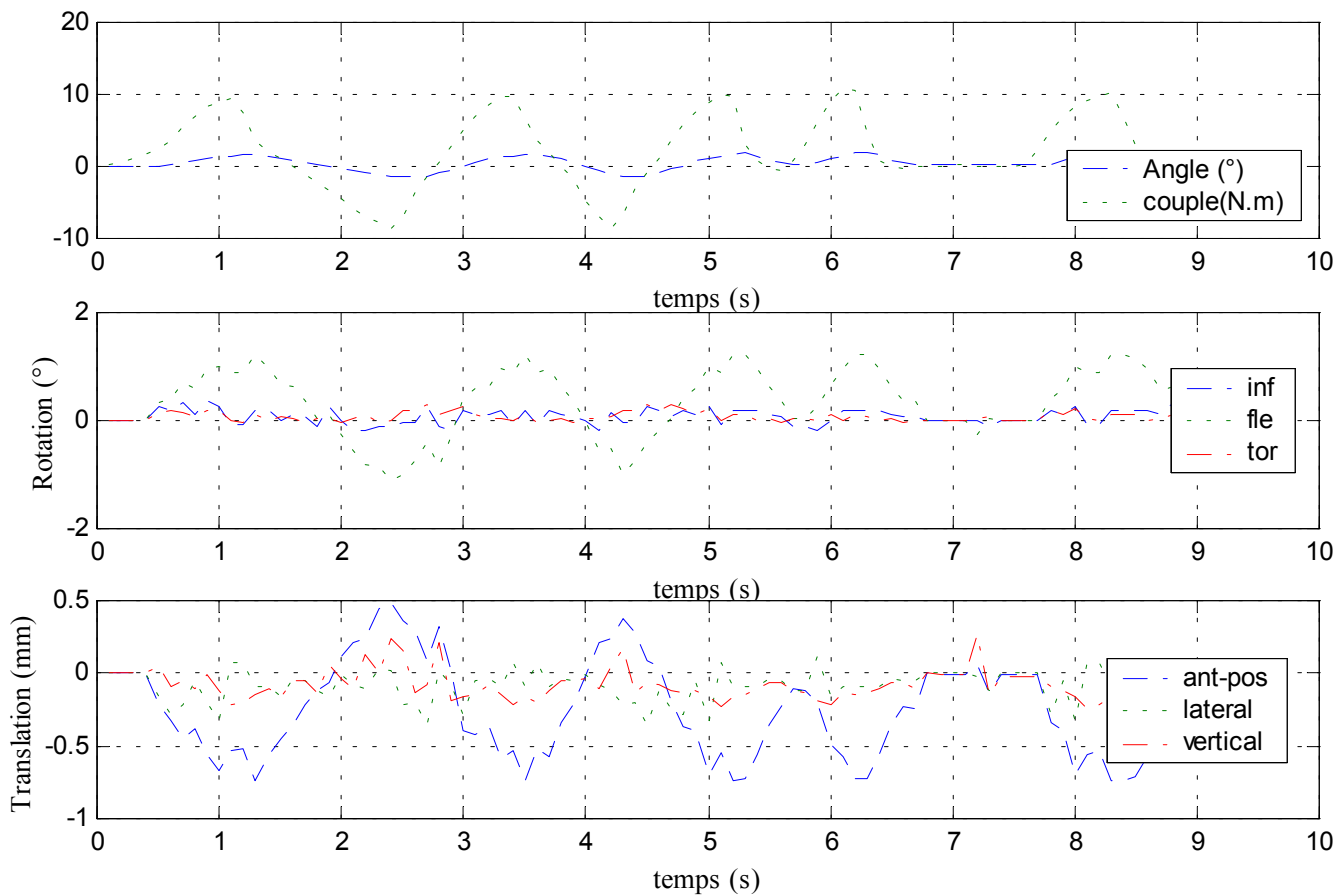
Centre instantané de rotation



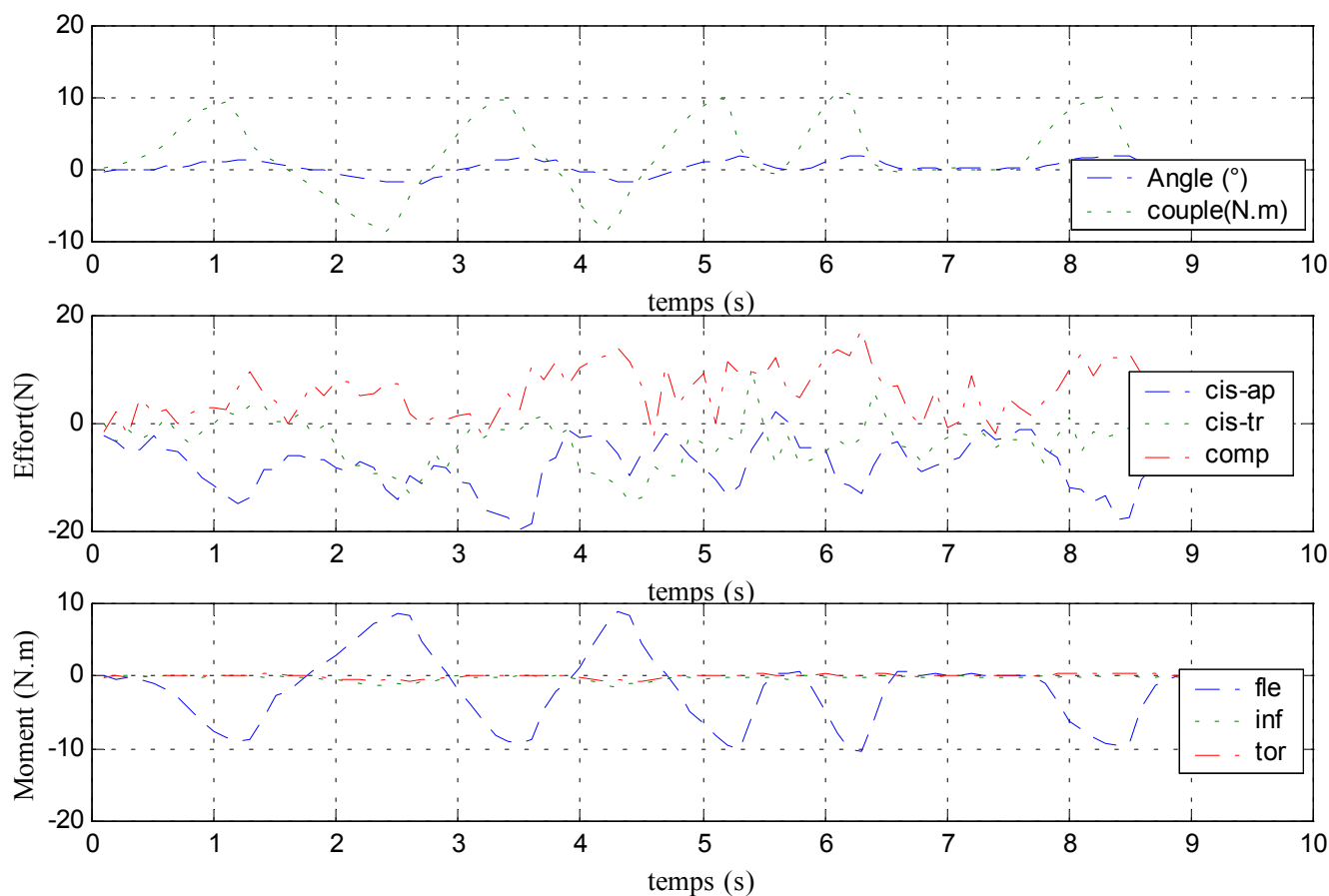
Courbe rotation-couple en hystérésis



Déplacements



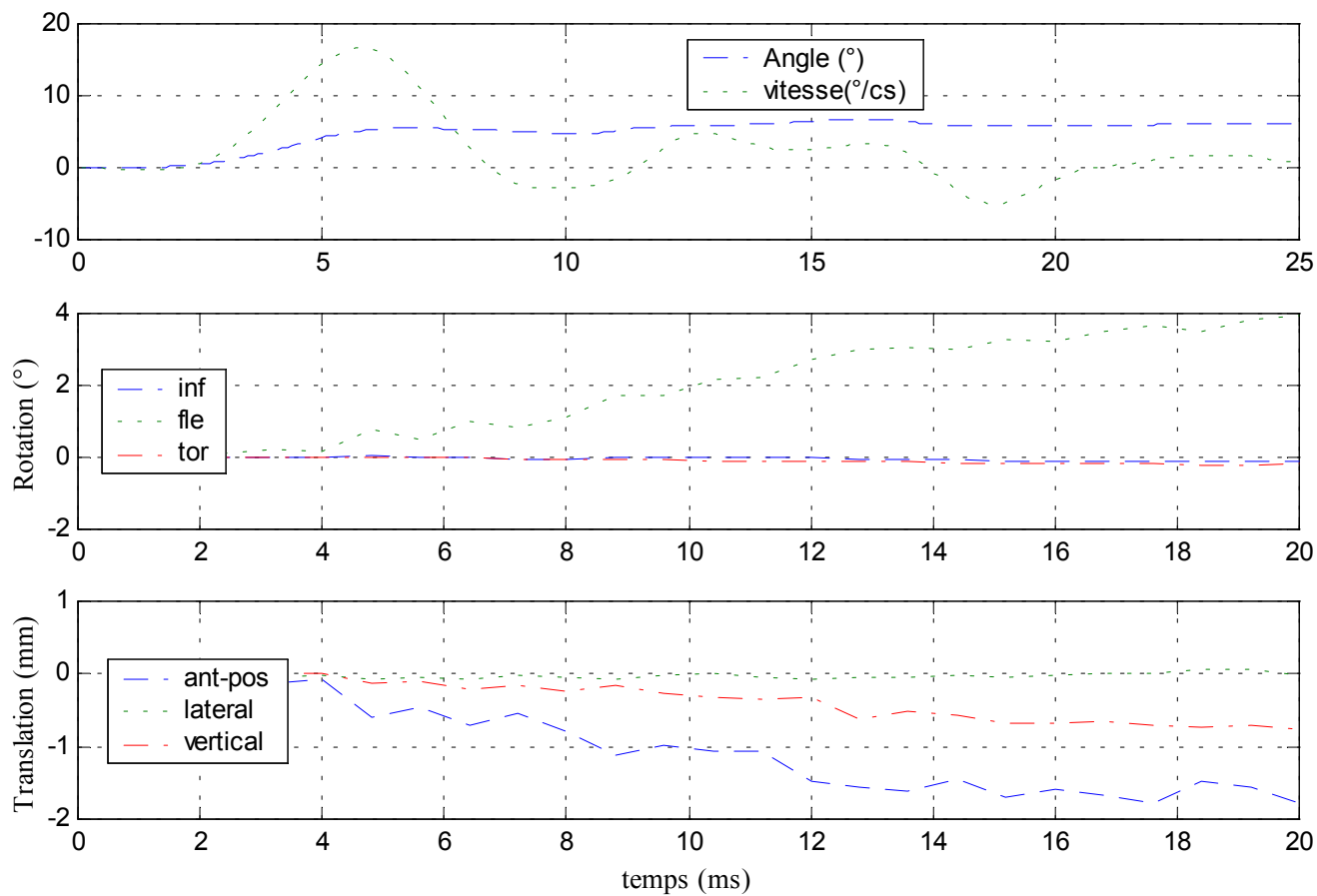
Efforts et moments inférieurs



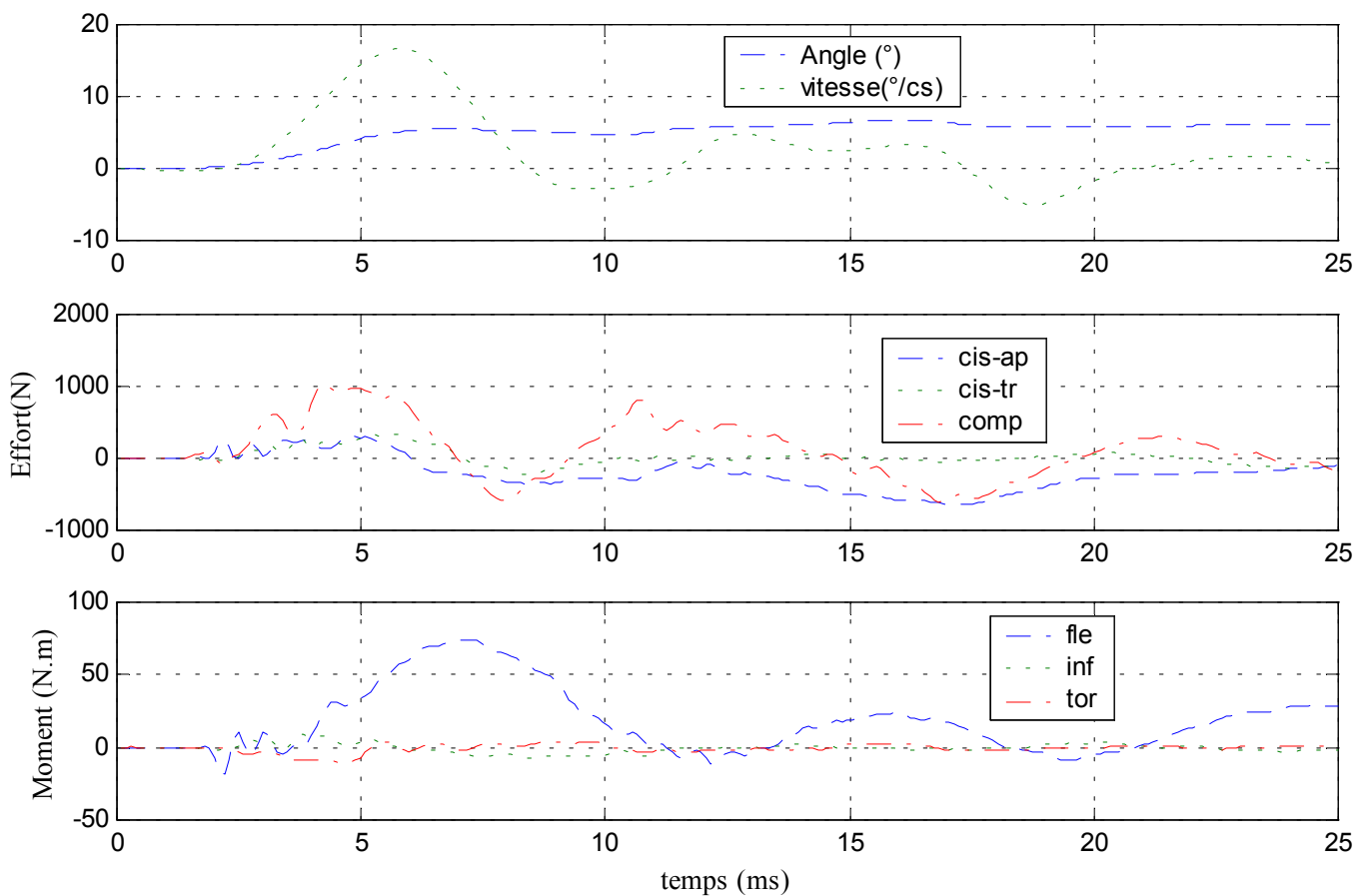
B. Dynamique

✓ Configuration saine

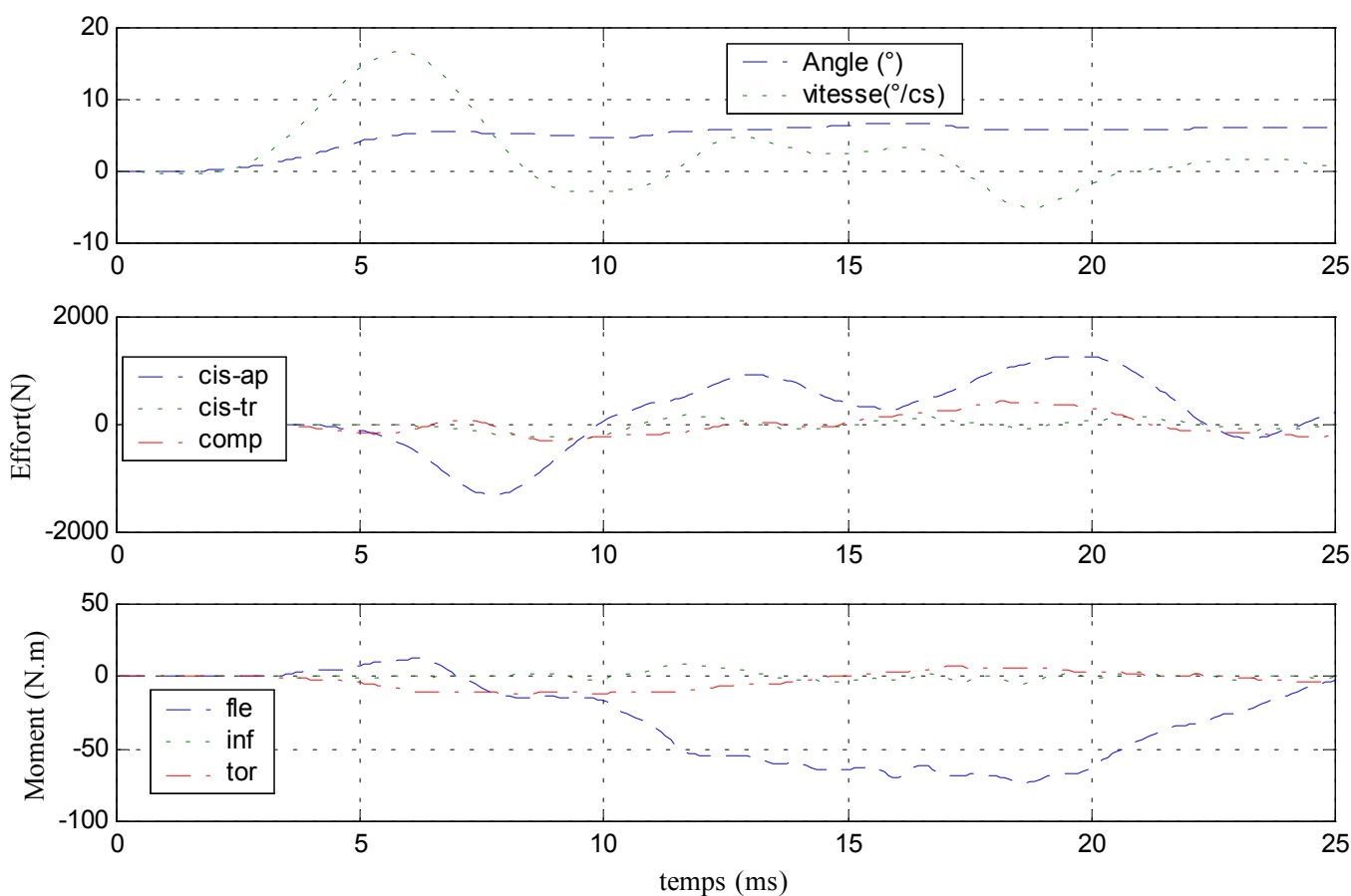
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

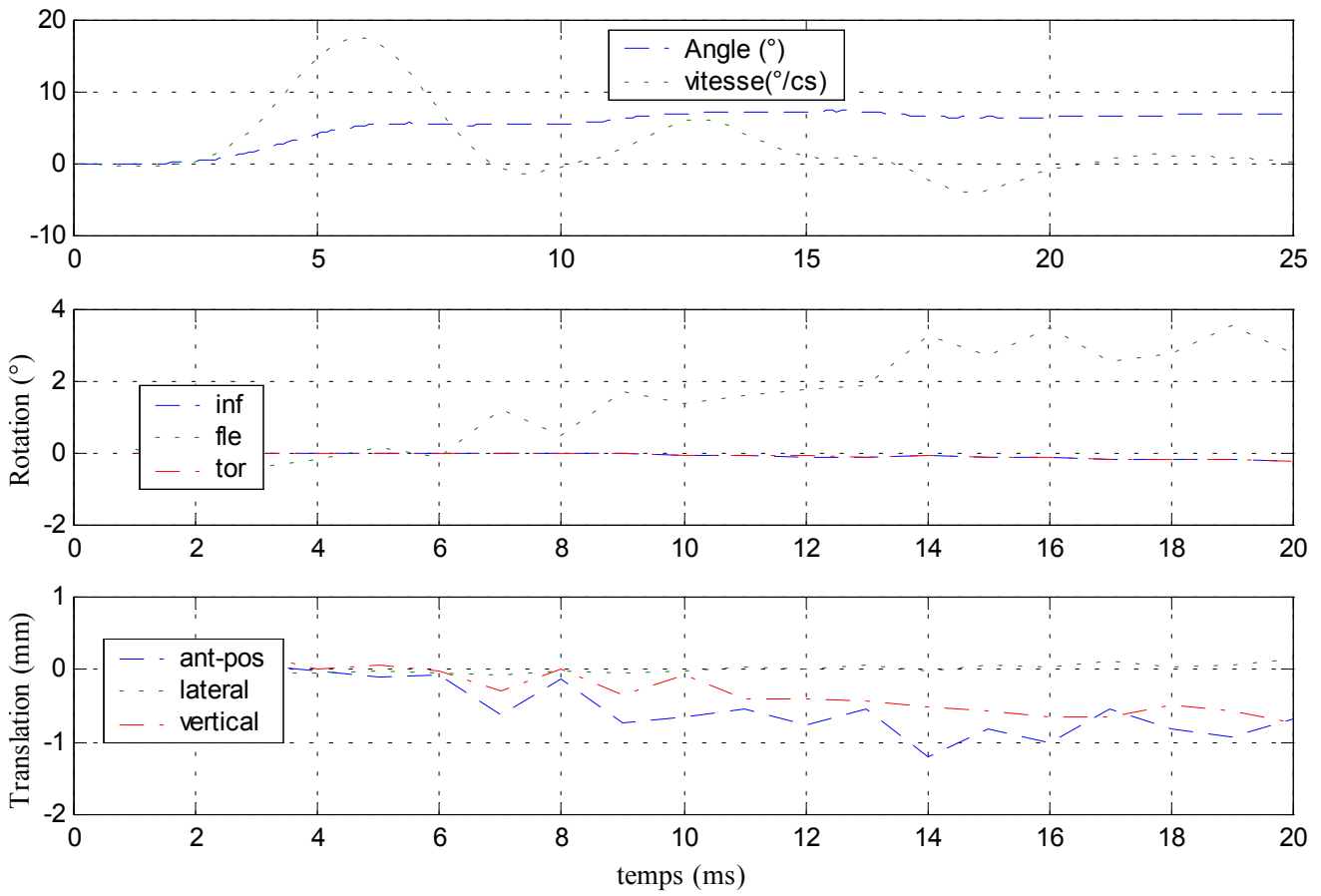


Efforts et moments inférieurs

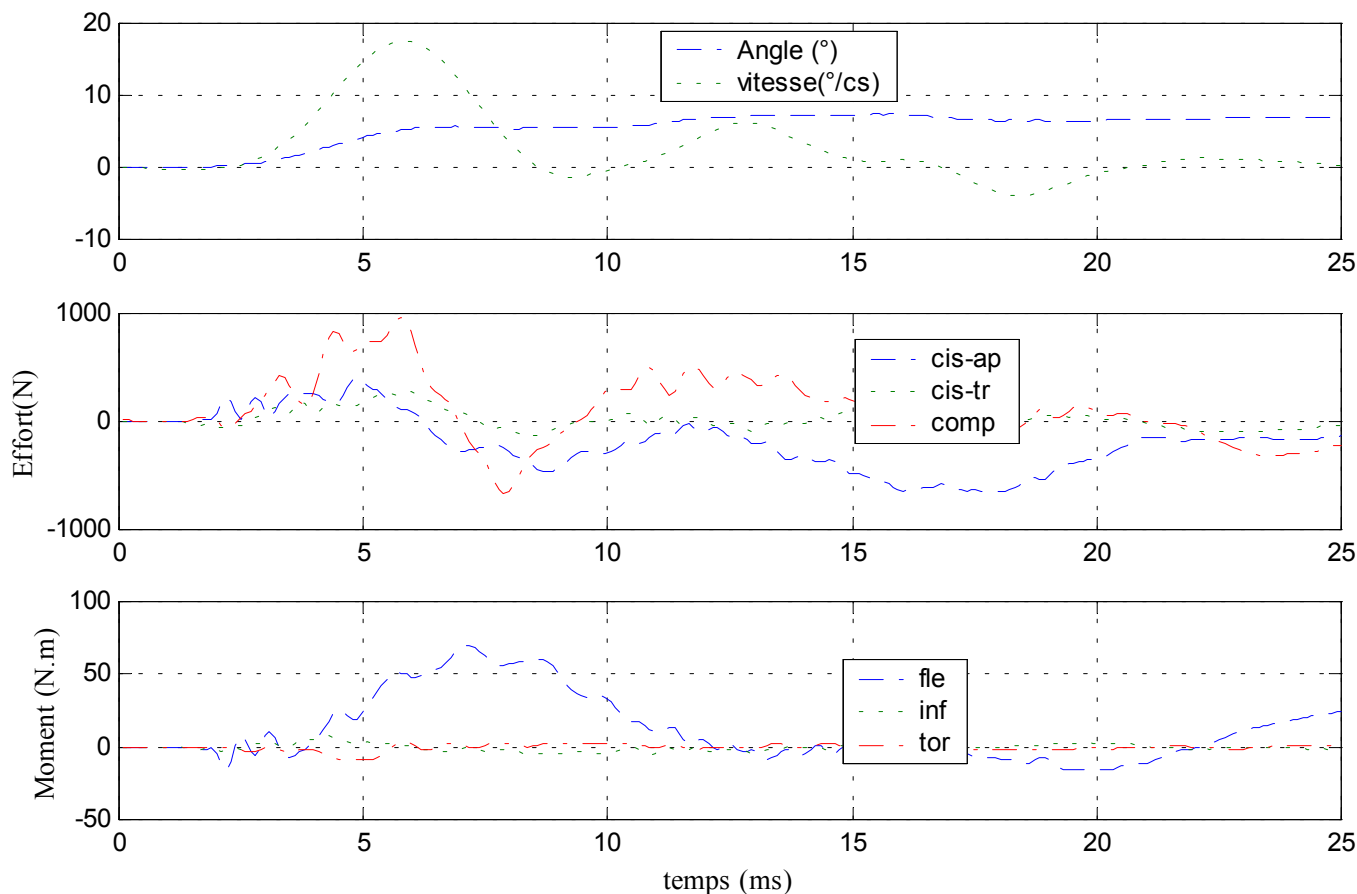


✓ Configuration avec ligaments épineux coupés

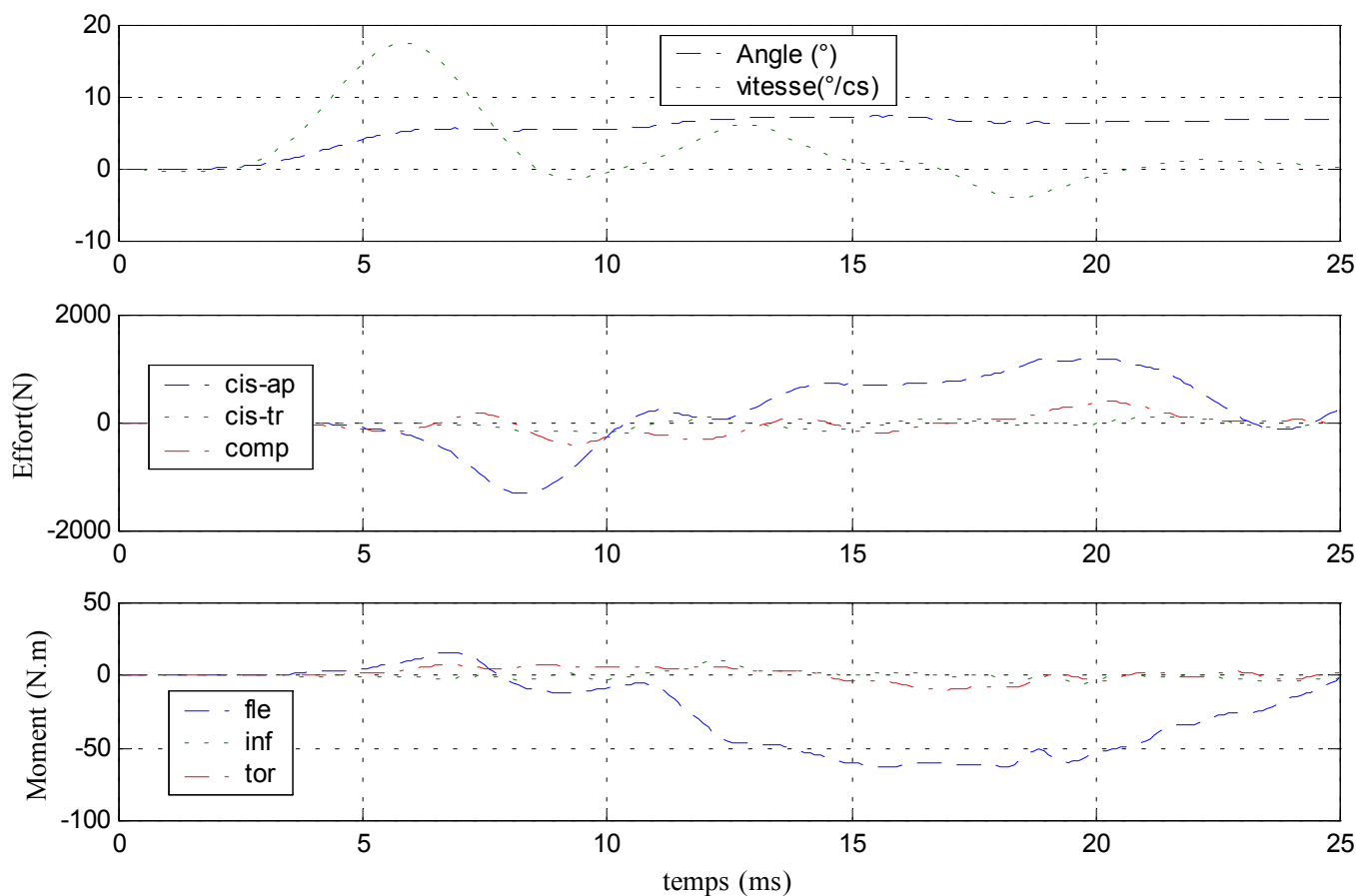
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

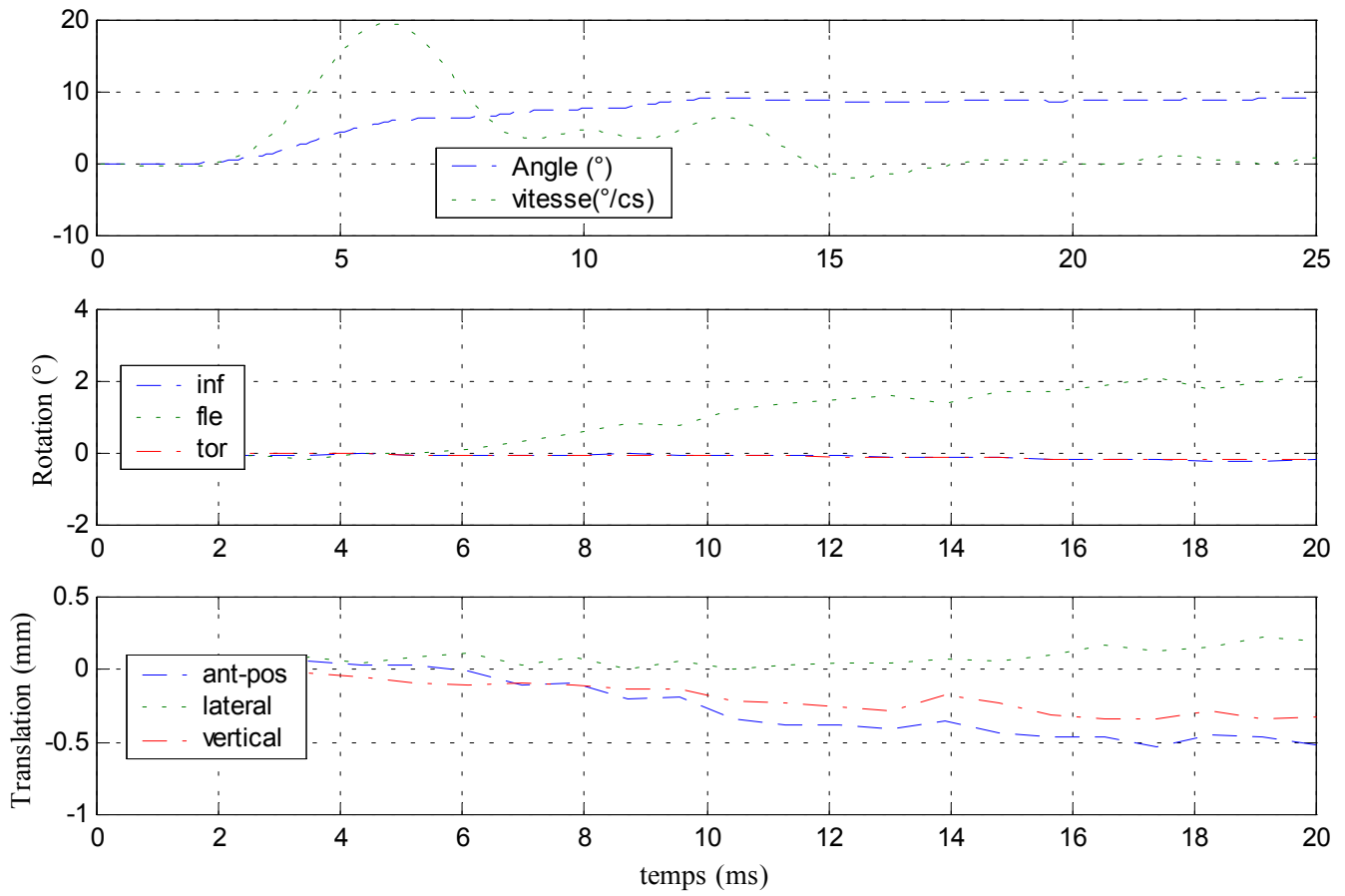


Efforts et moments inférieurs

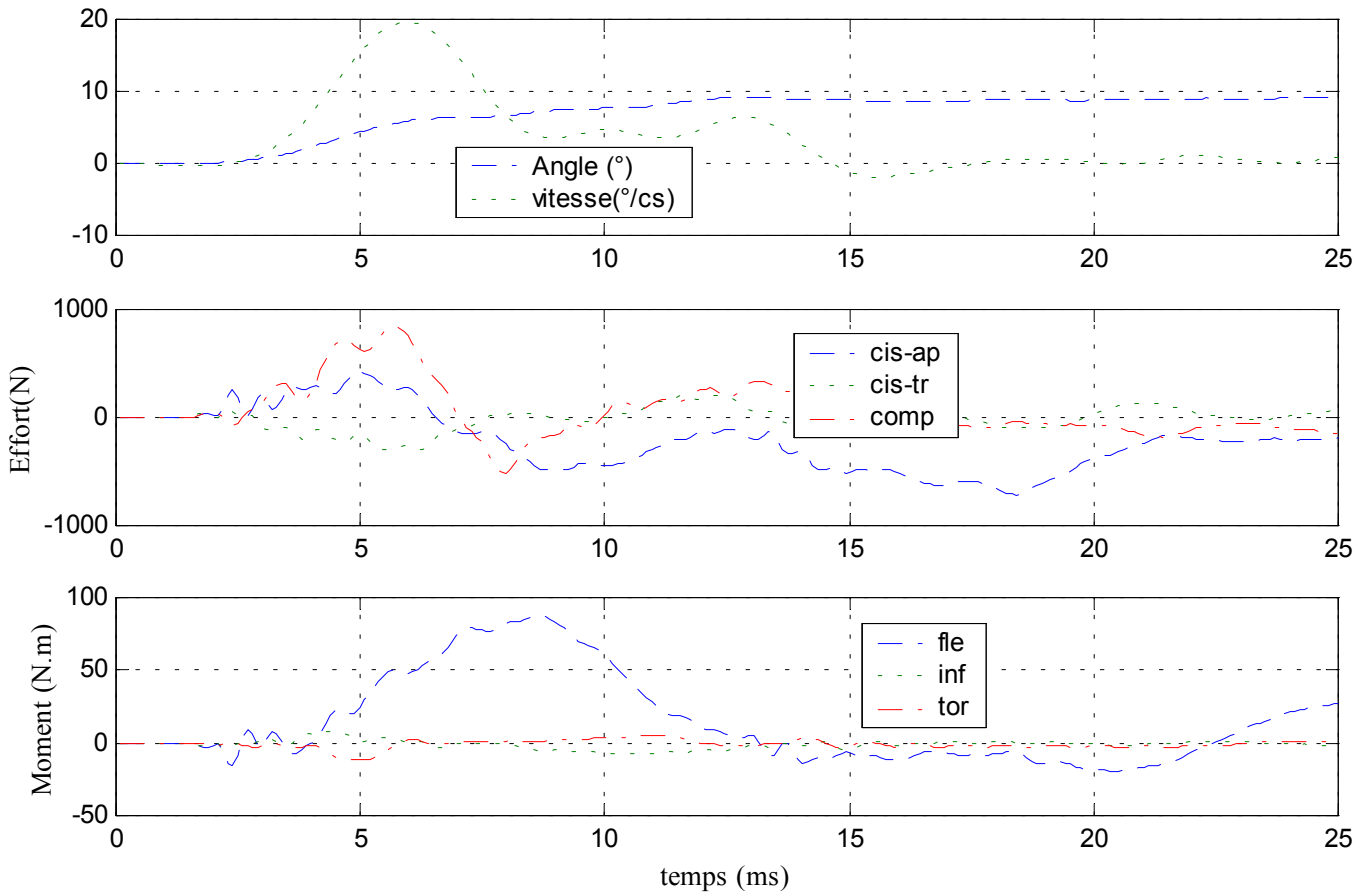


✓ Configuration avec ligaments capsulaires coupés

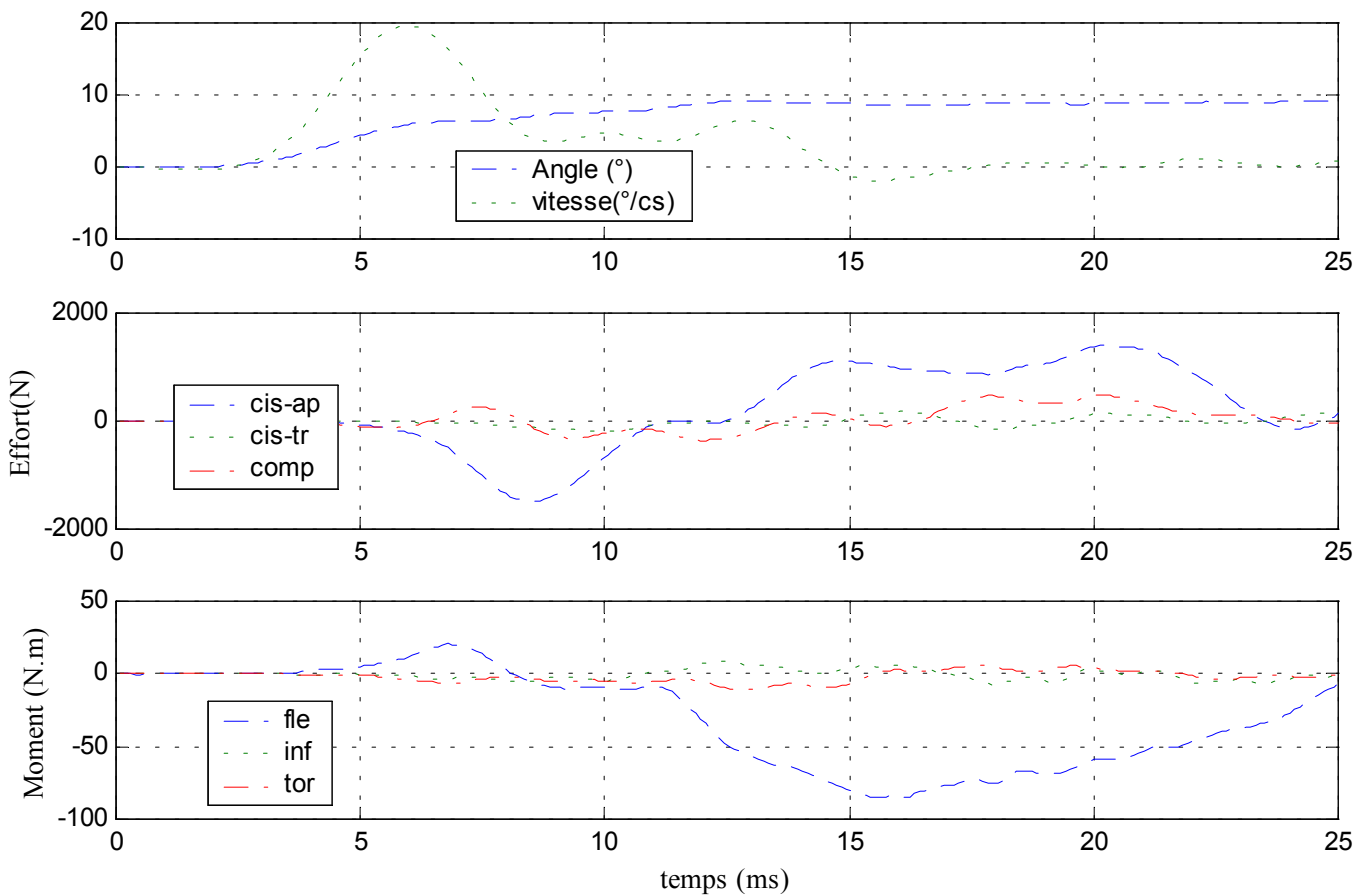
Déplacements



Efforts et moments supérieurs



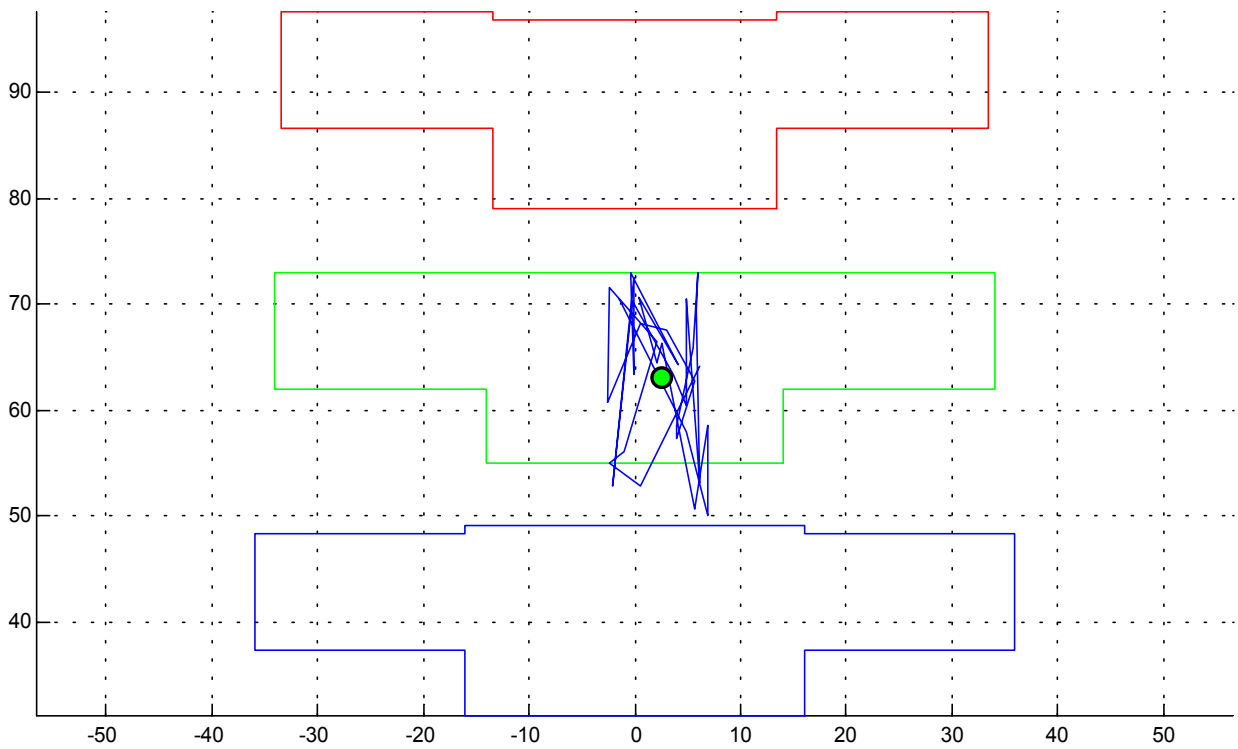
Efforts et moments inférieurs



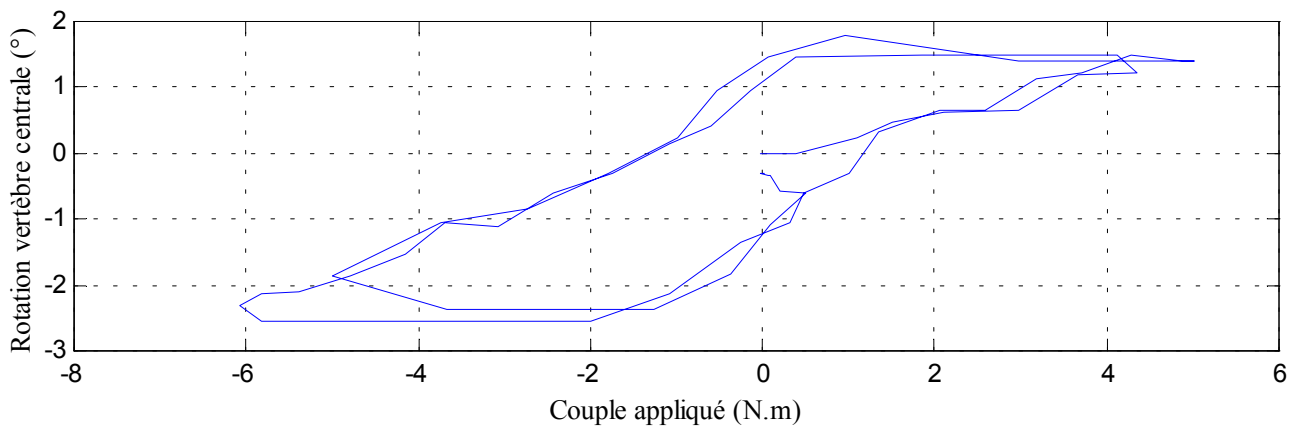
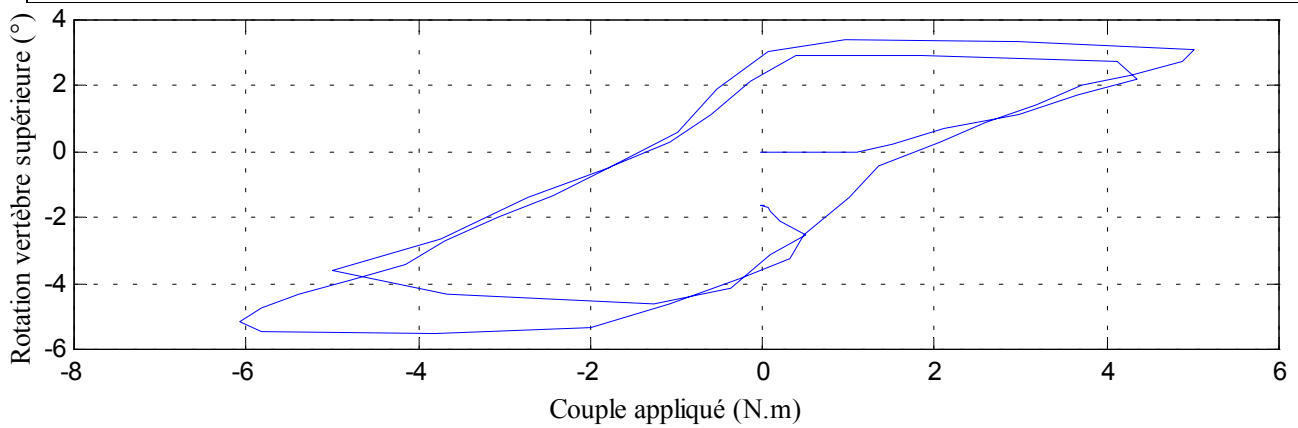
17- Essai 17 – T7T9 – inflexion

A. Statique

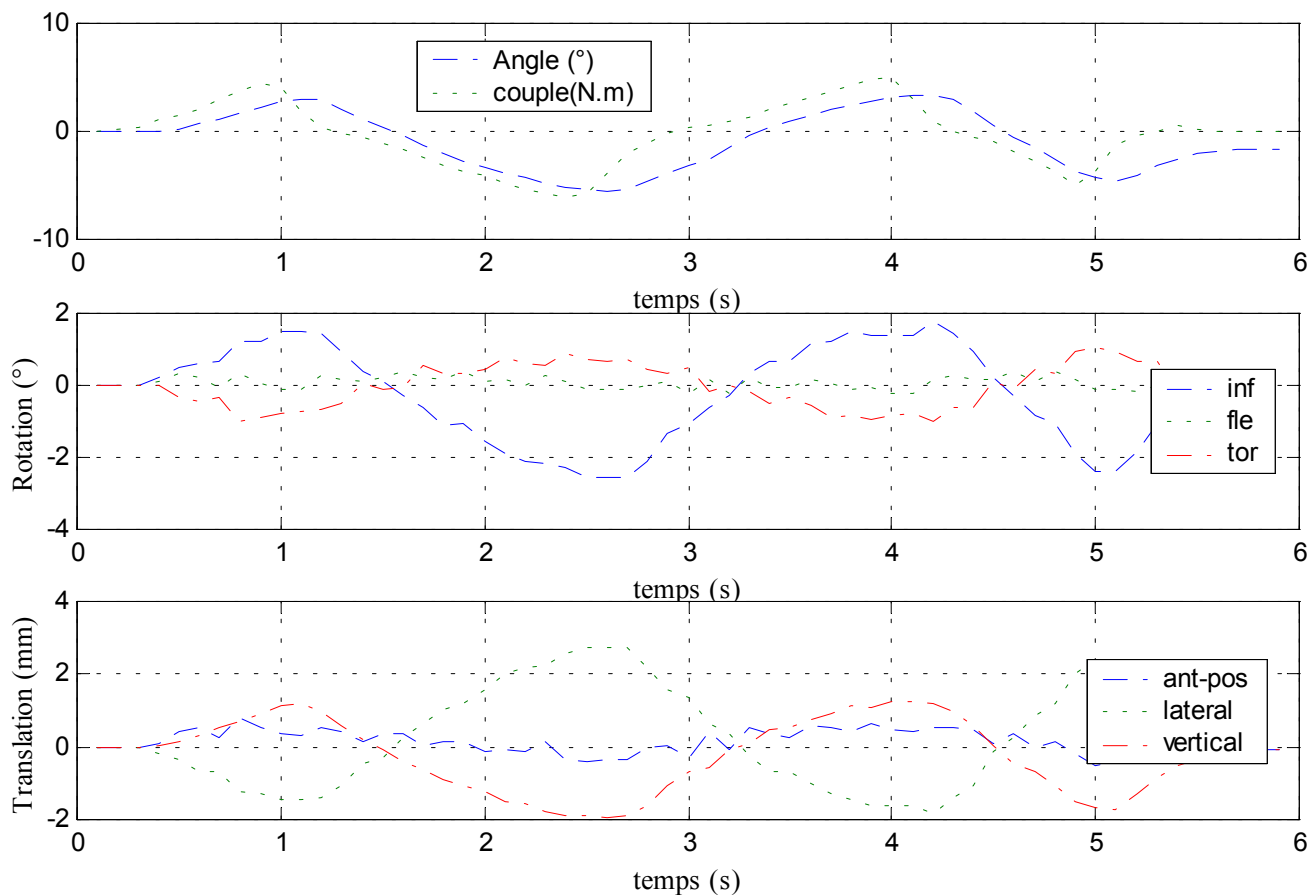
Centre instantané de rotation



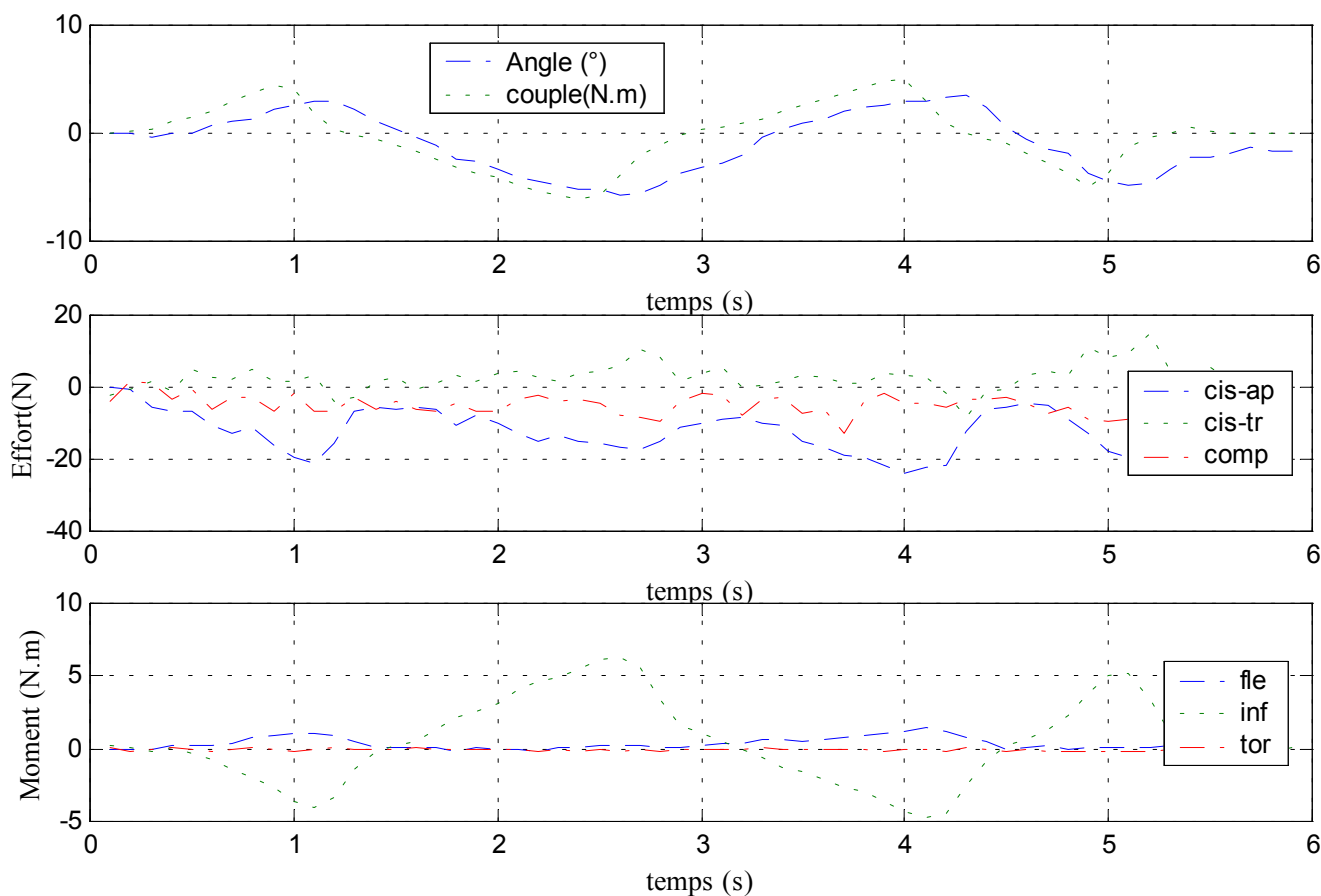
Courbe rotation-couple en hystérésis



Déplacements



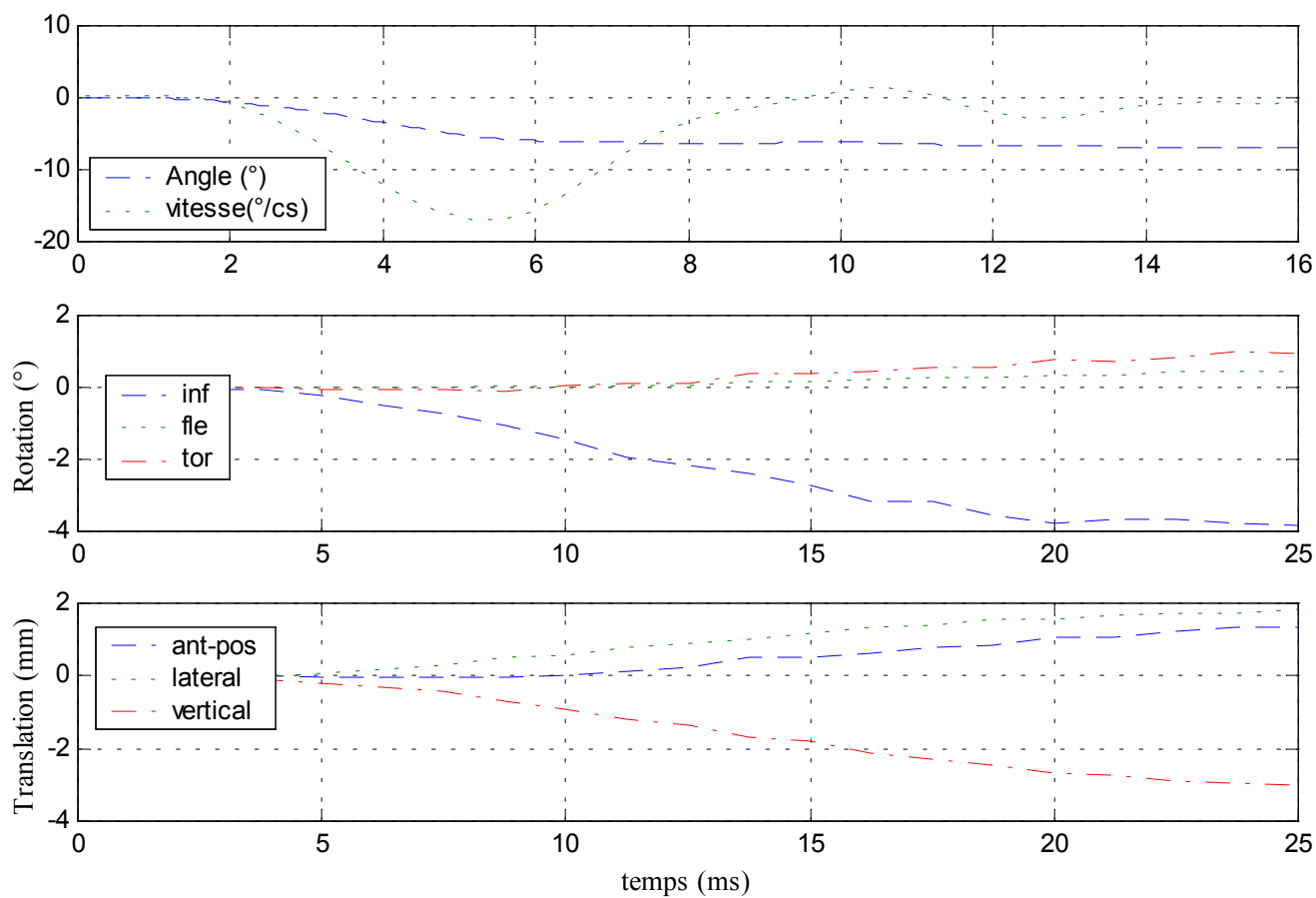
Efforts et moments inférieurs



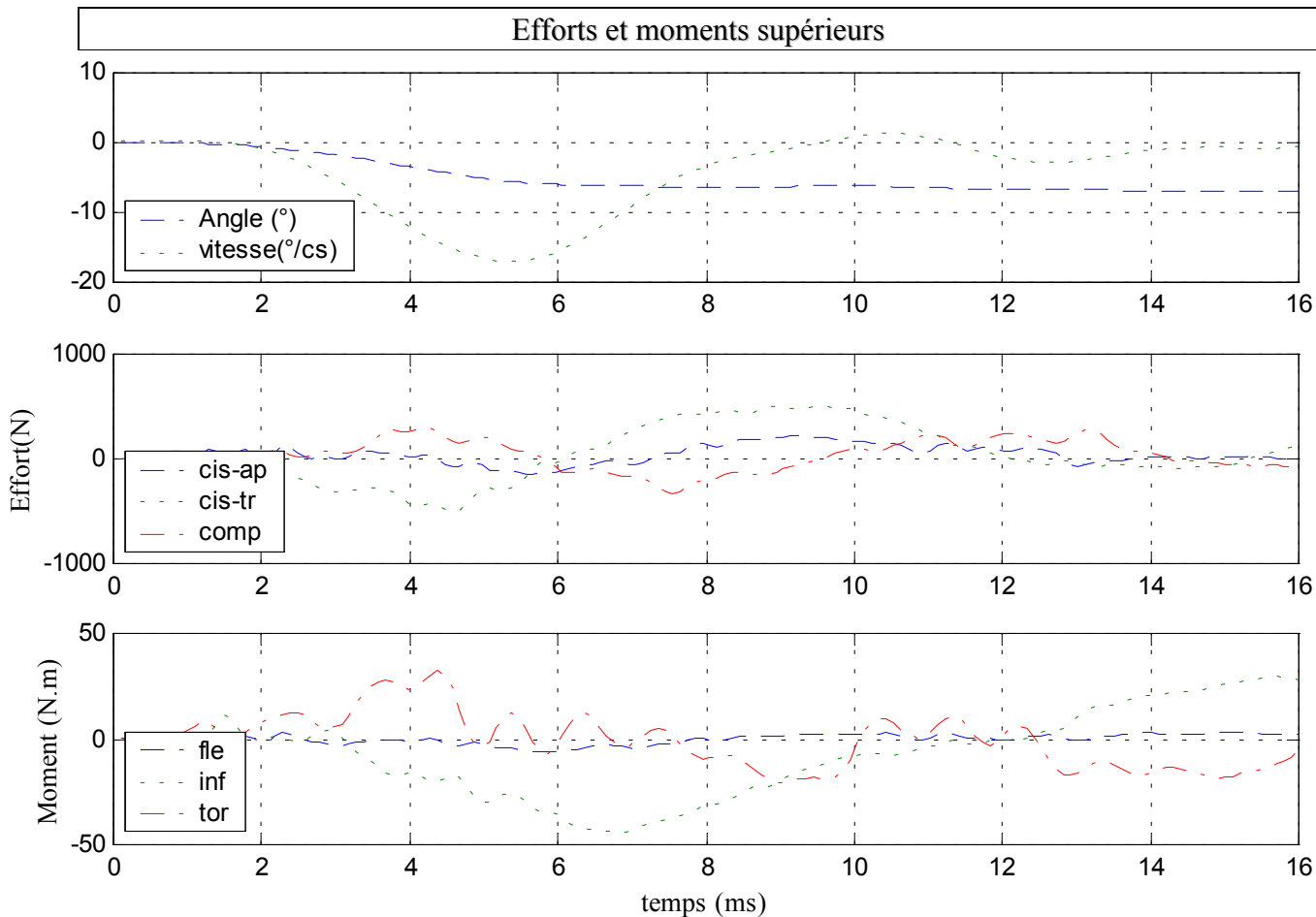
B. Dynamique

✓ Configuration saine

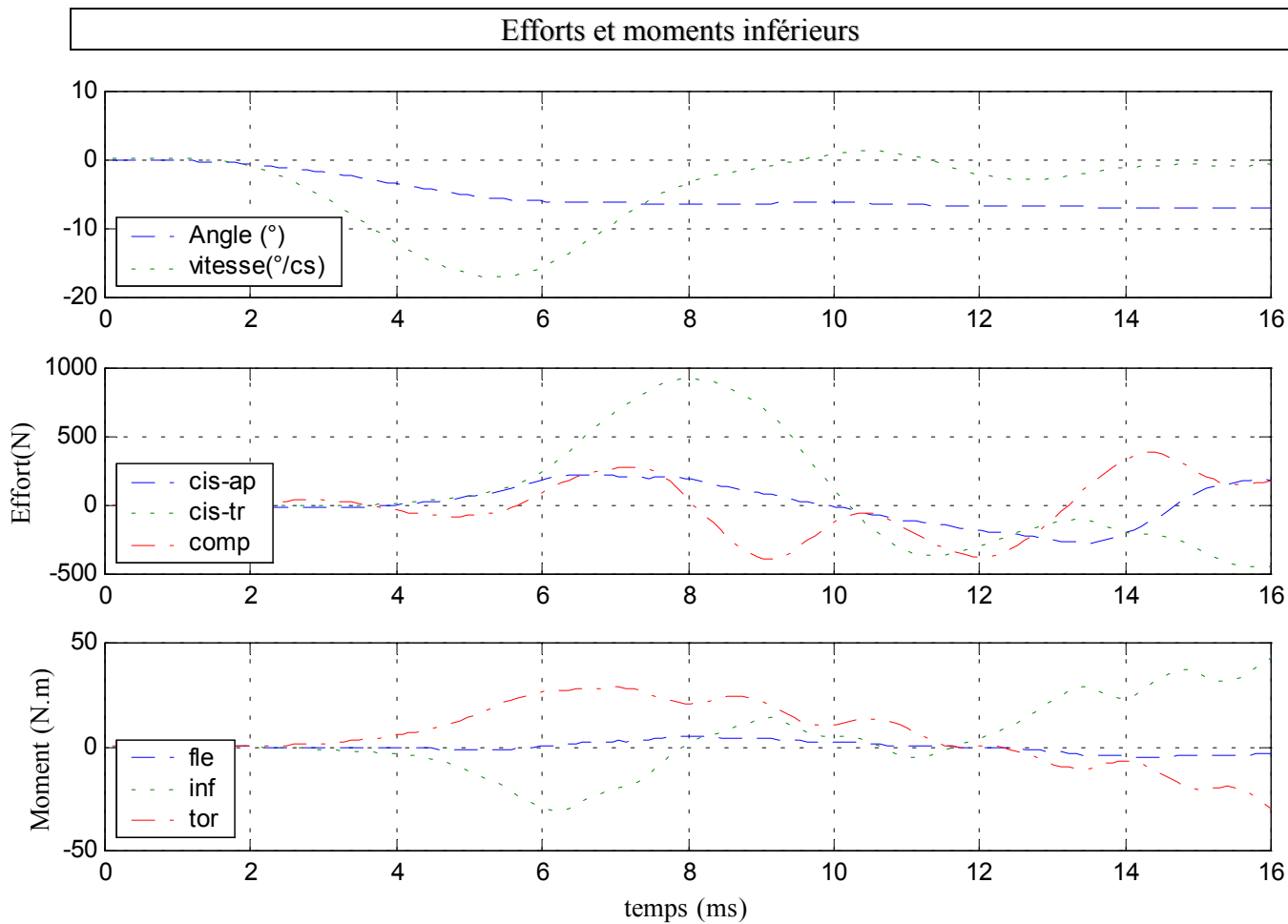
Déplacements



Efforts et moments supérieurs



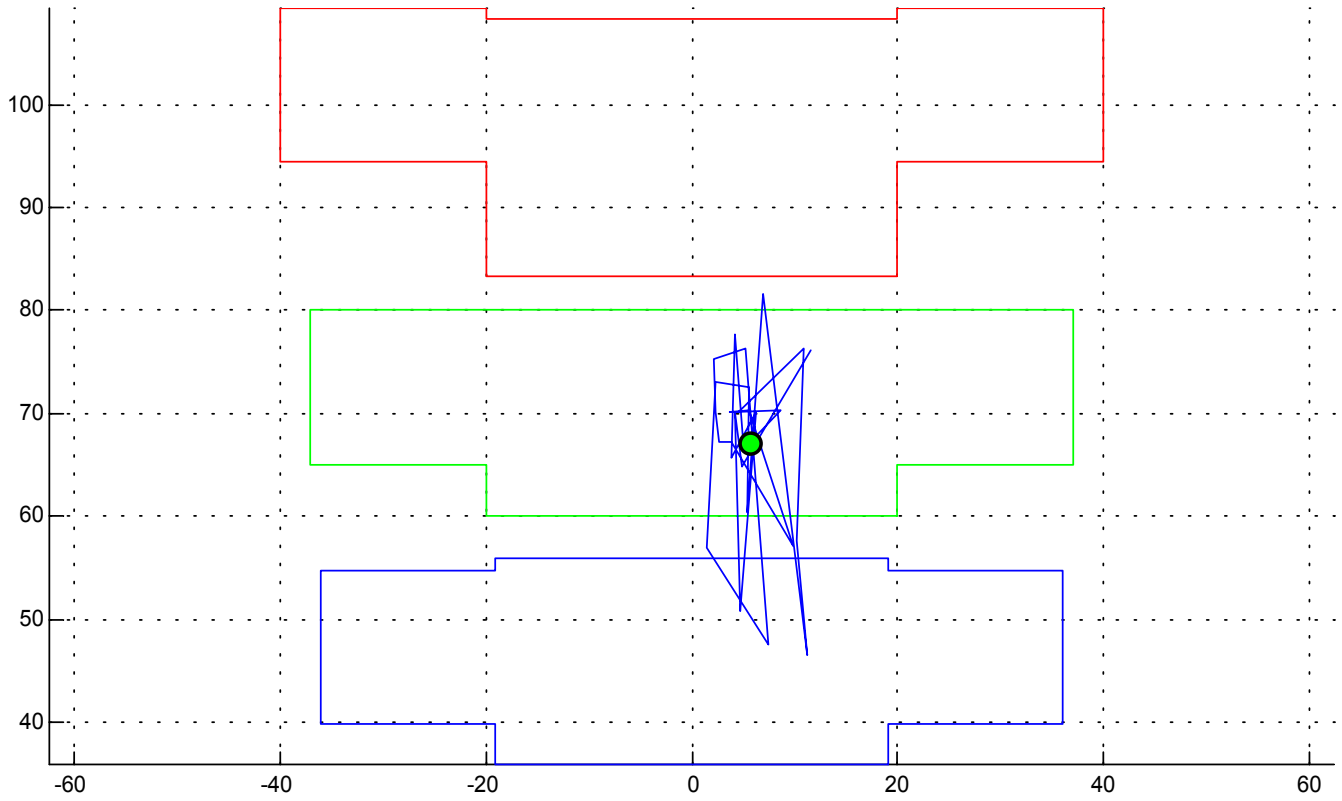
Efforts et moments inférieurs



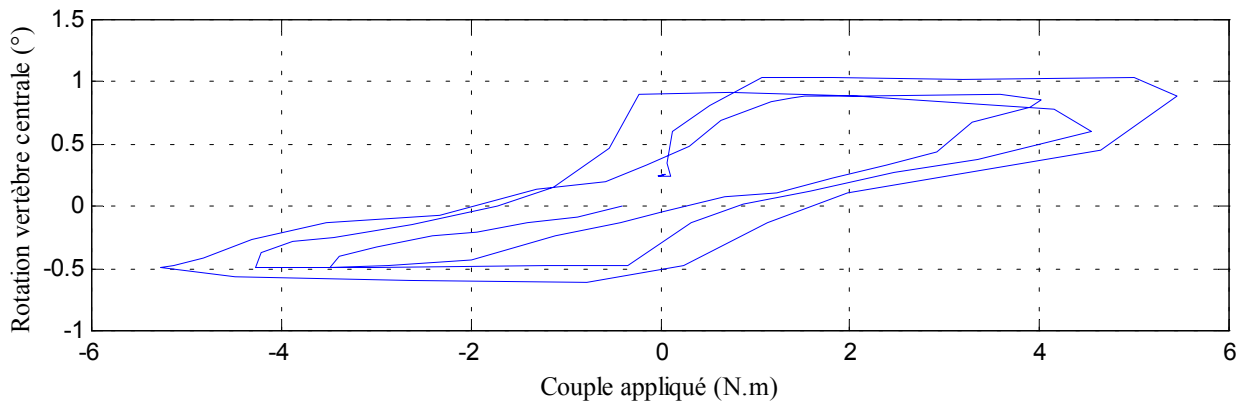
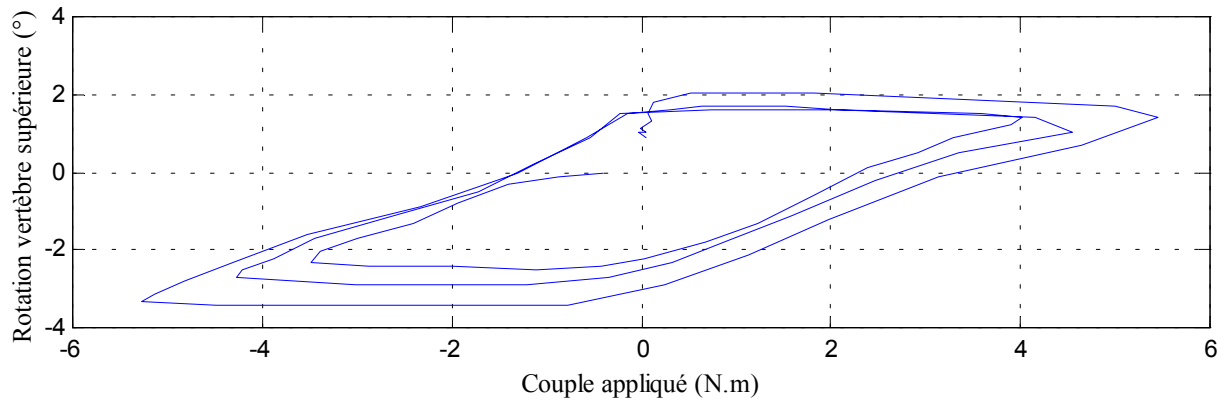
18- Essai 18 – T11L1 – inflexion

A. Statique

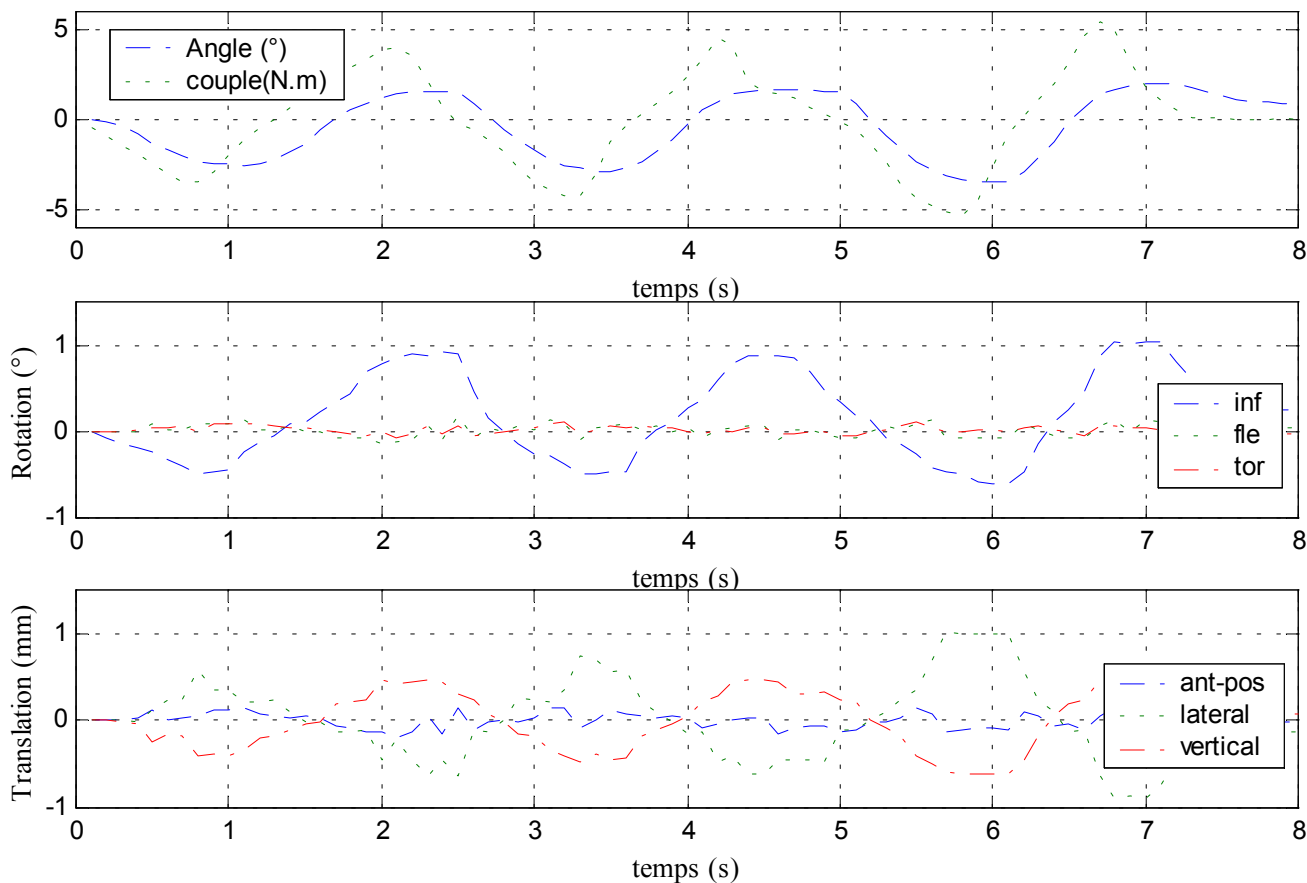
Centre instantané de rotation



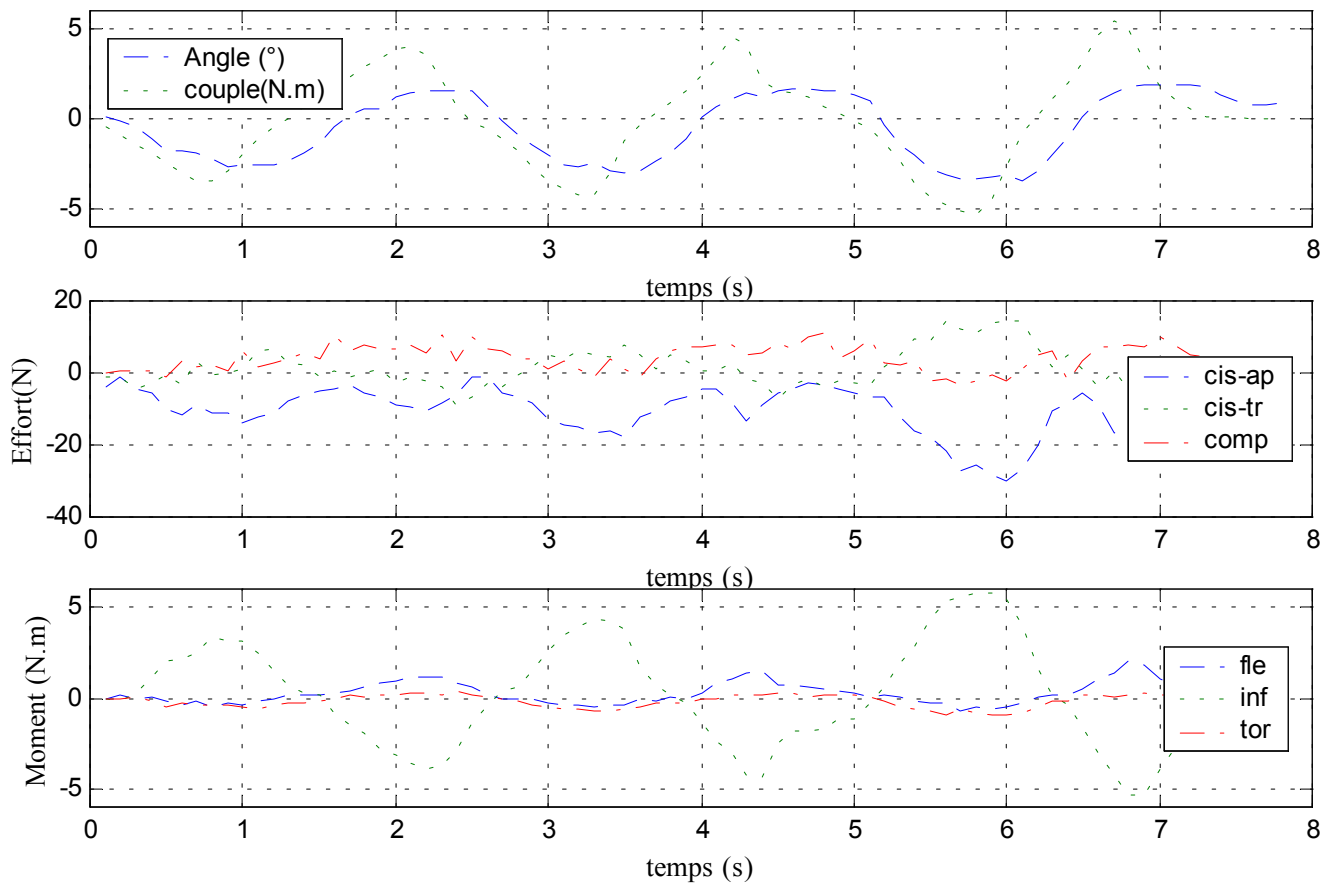
Courbe rotation-couple en hystérésis



Déplacements



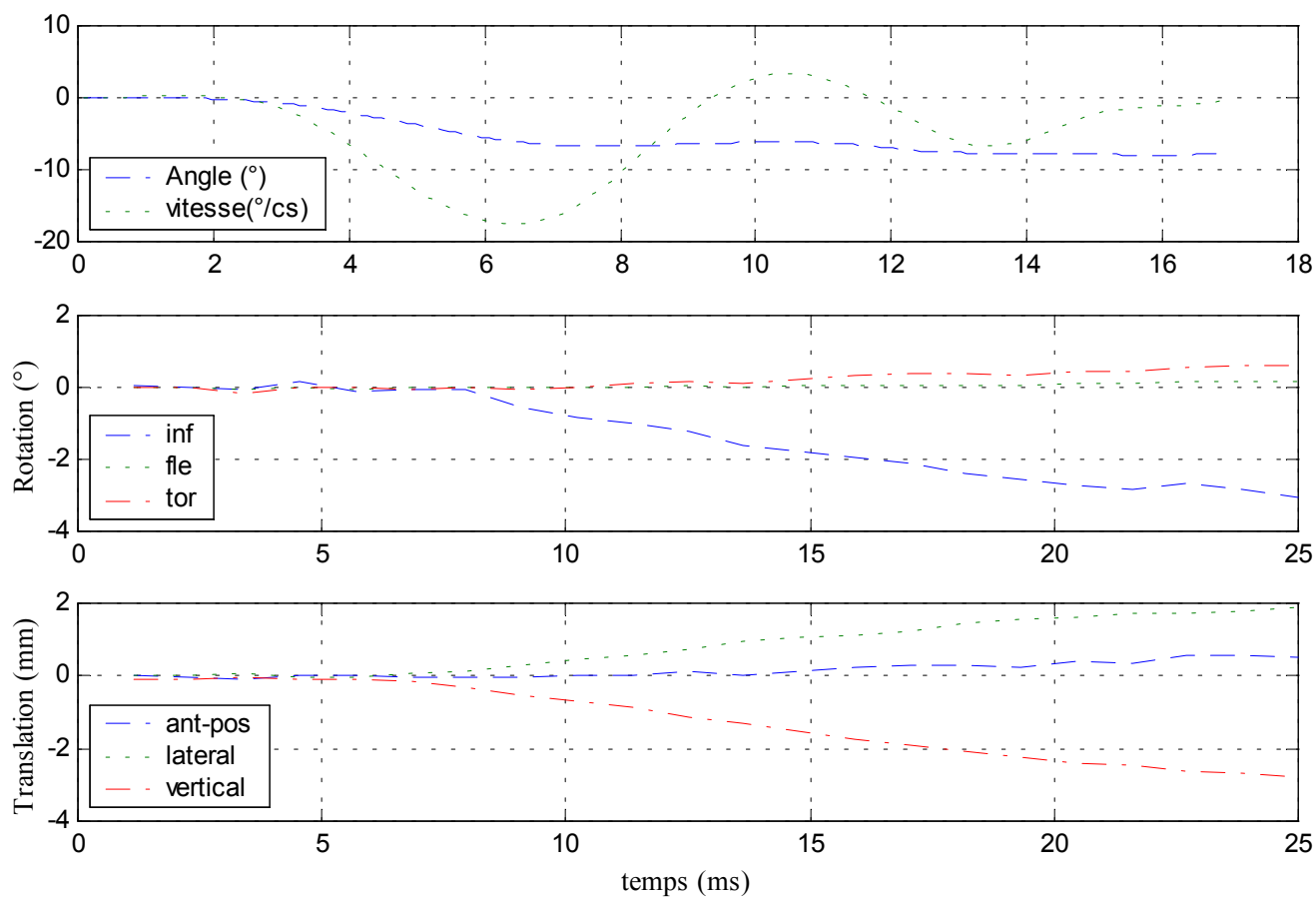
Efforts et moments inférieurs



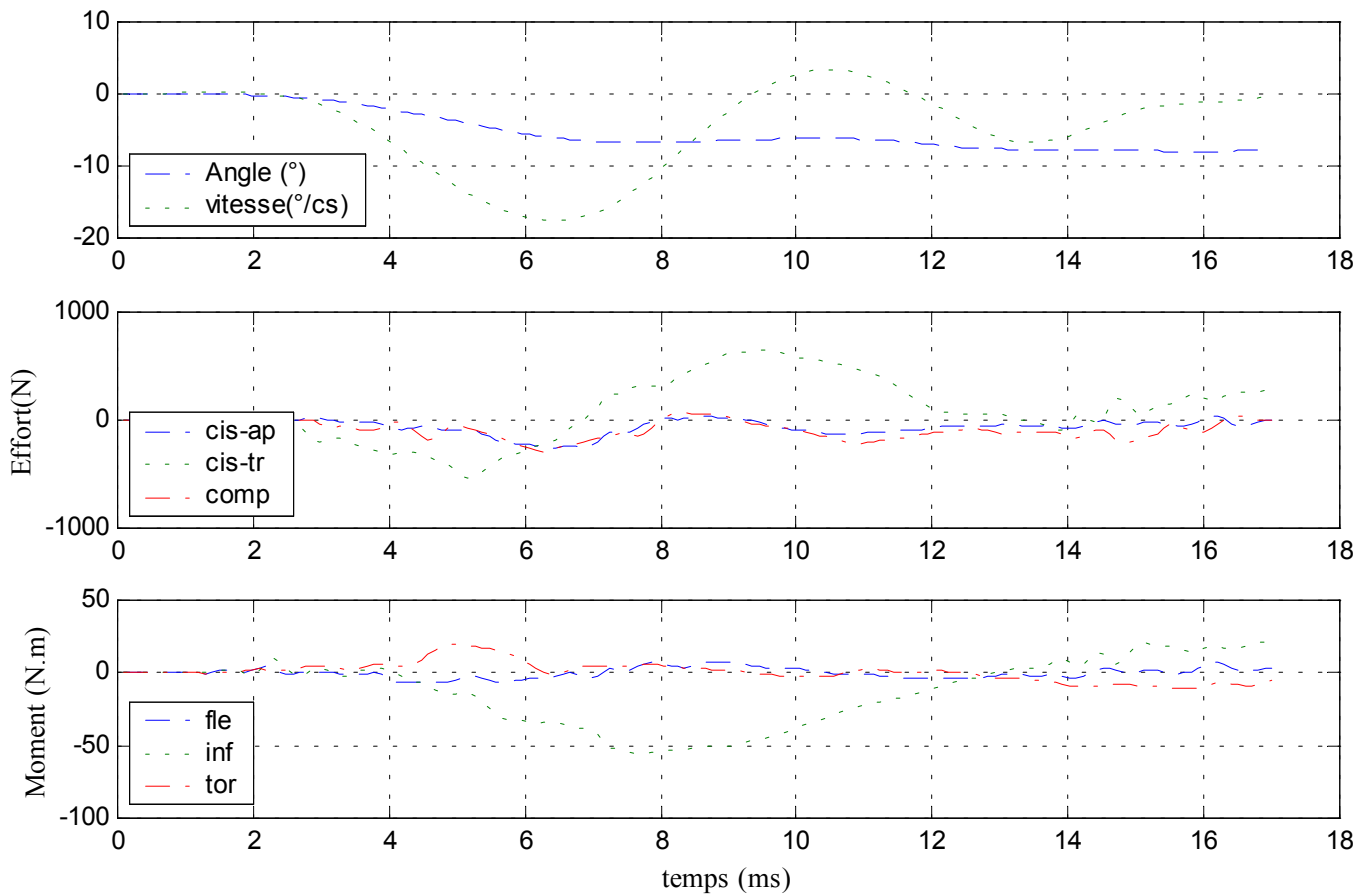
B. Dynamique

✓ Configuration saine

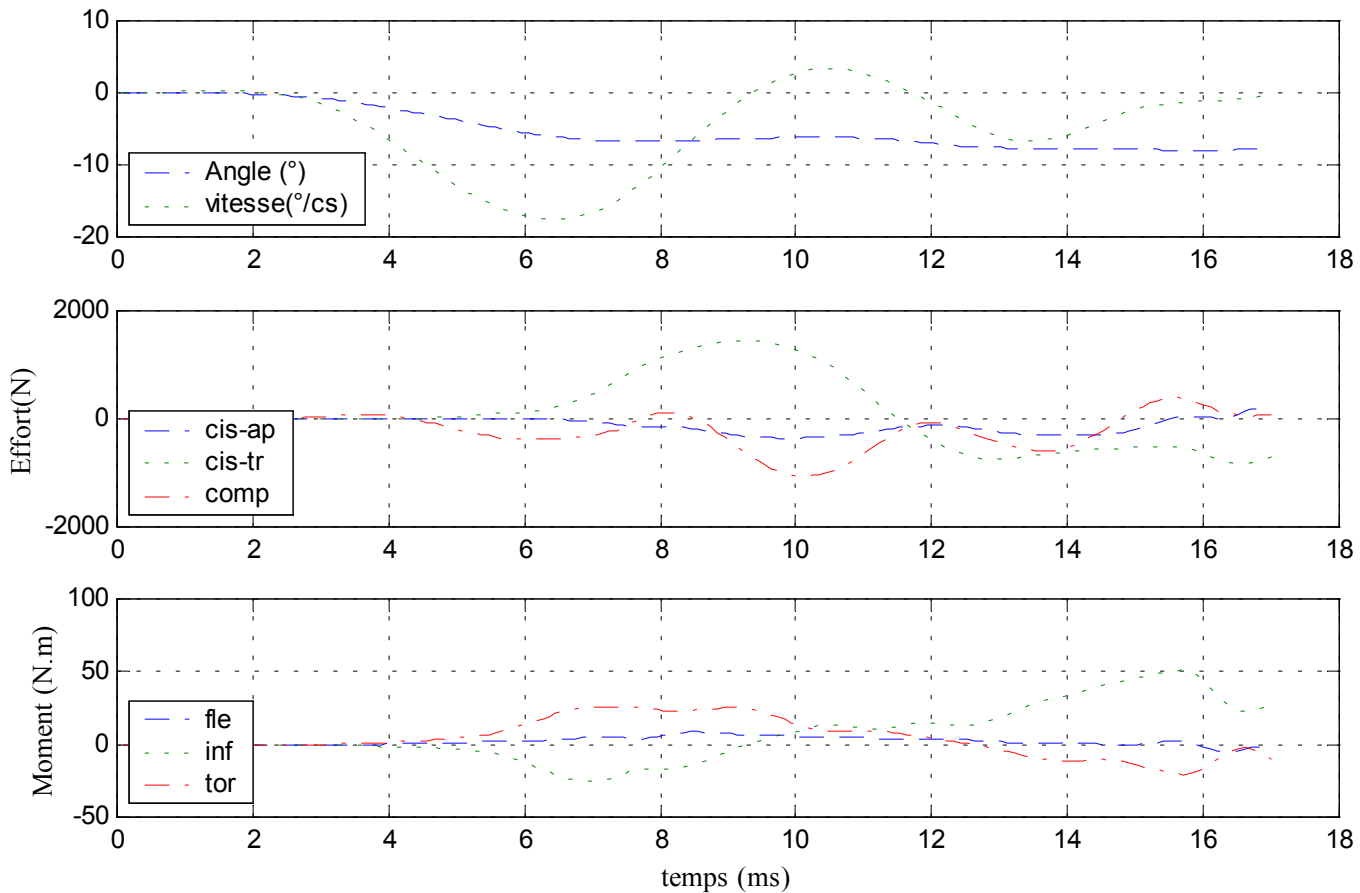
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

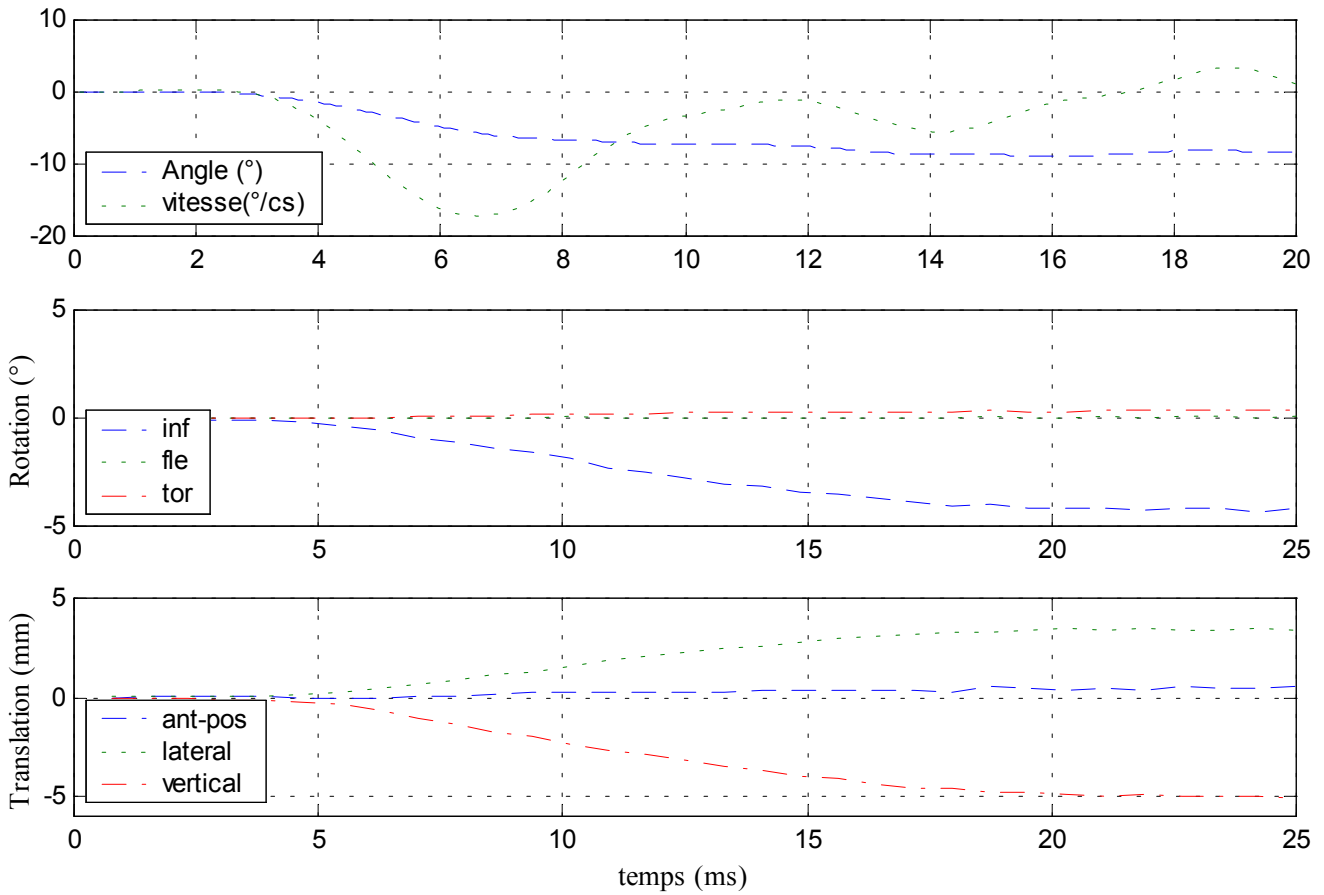


Efforts et moments inférieurs

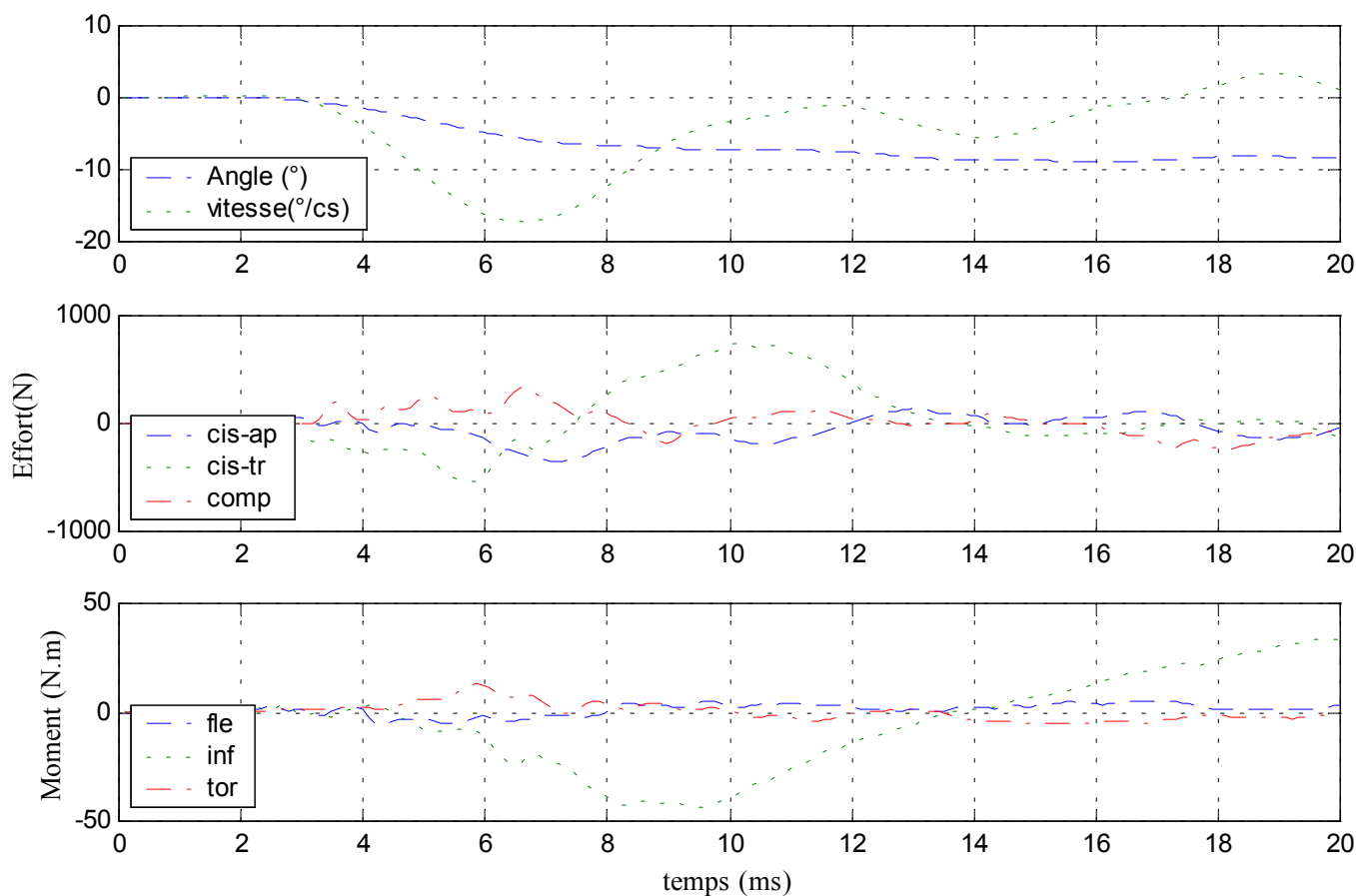


✓ Configuration avec ligaments capsulaires coupés

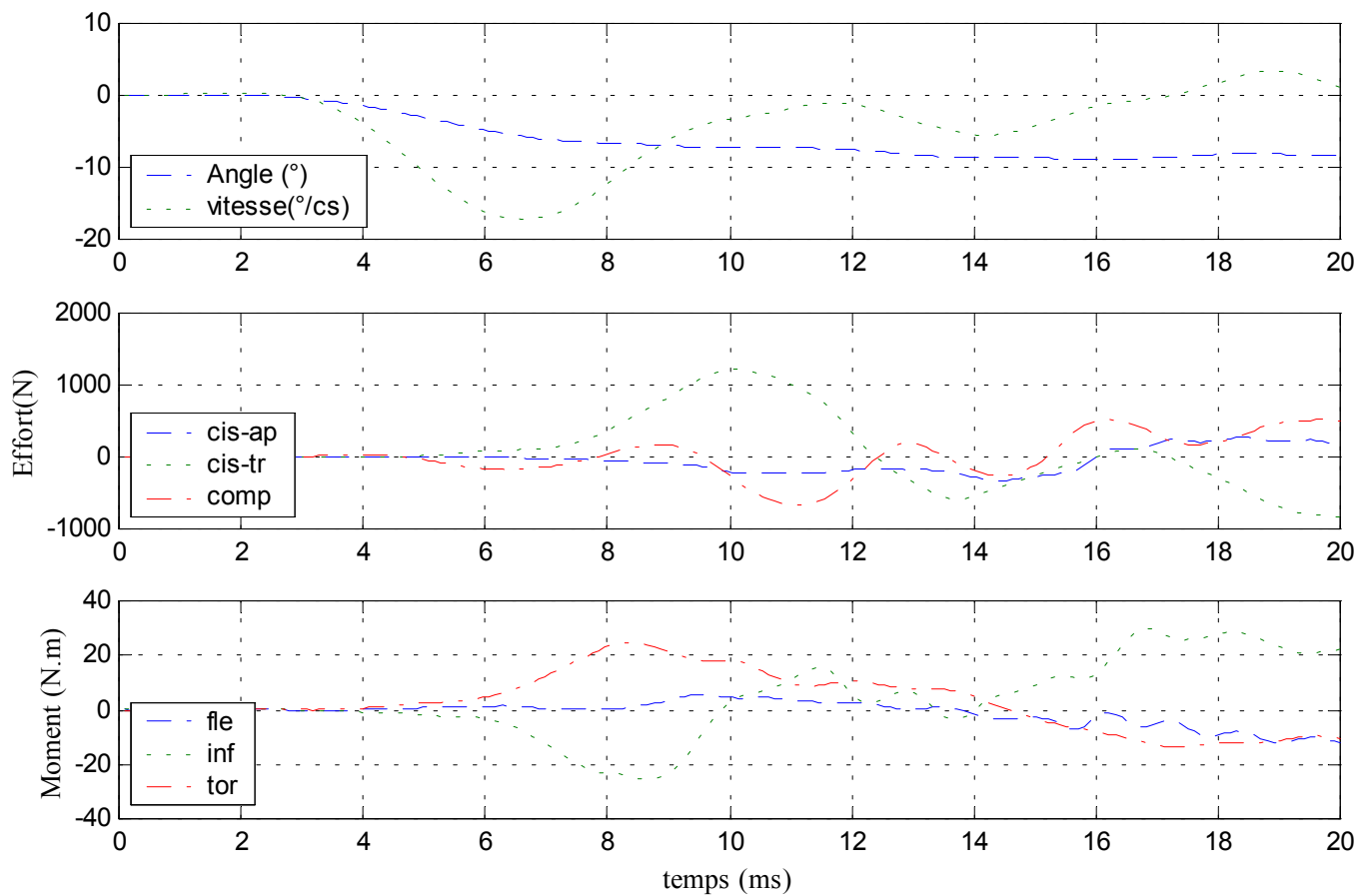
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

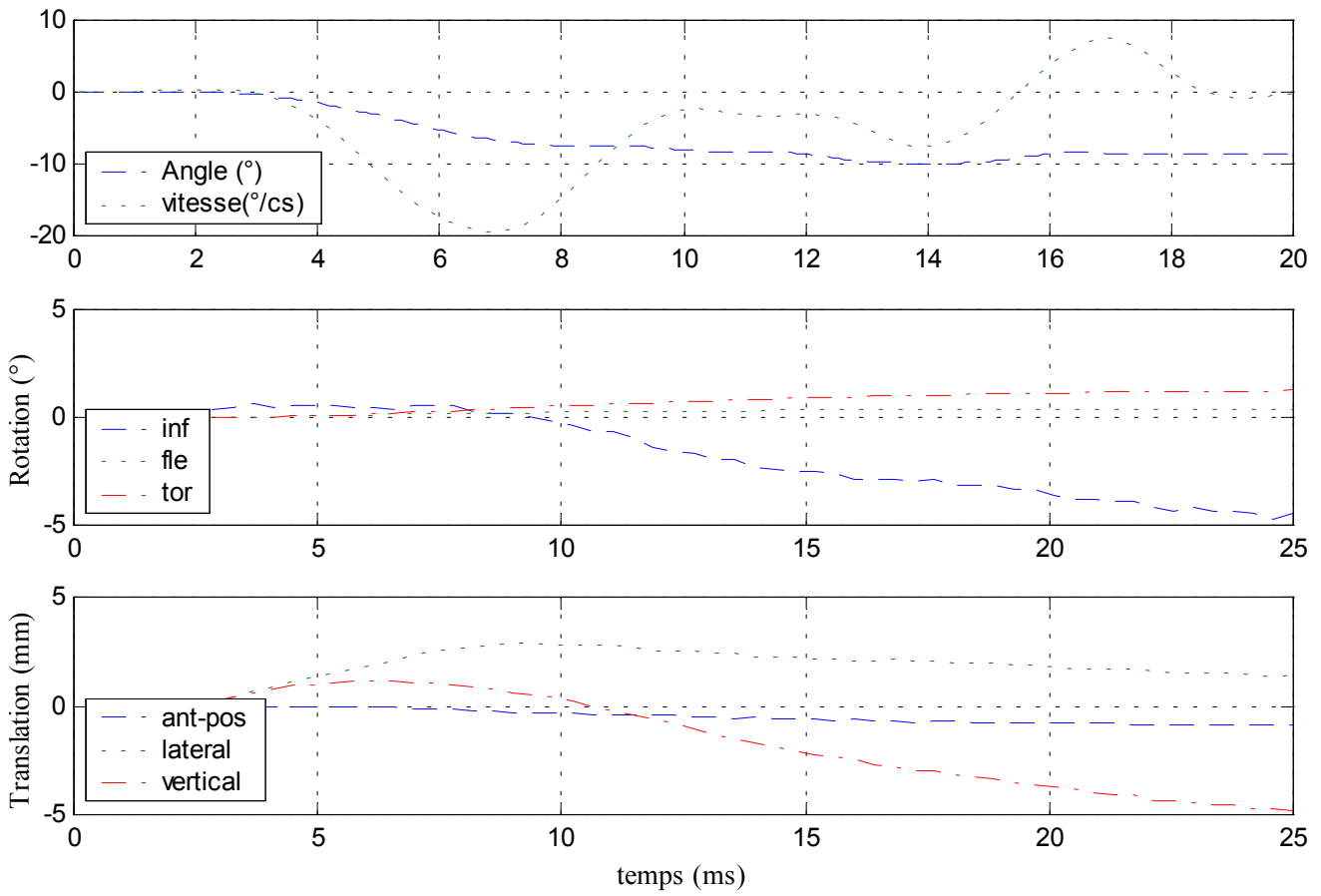


Efforts et moments inférieurs

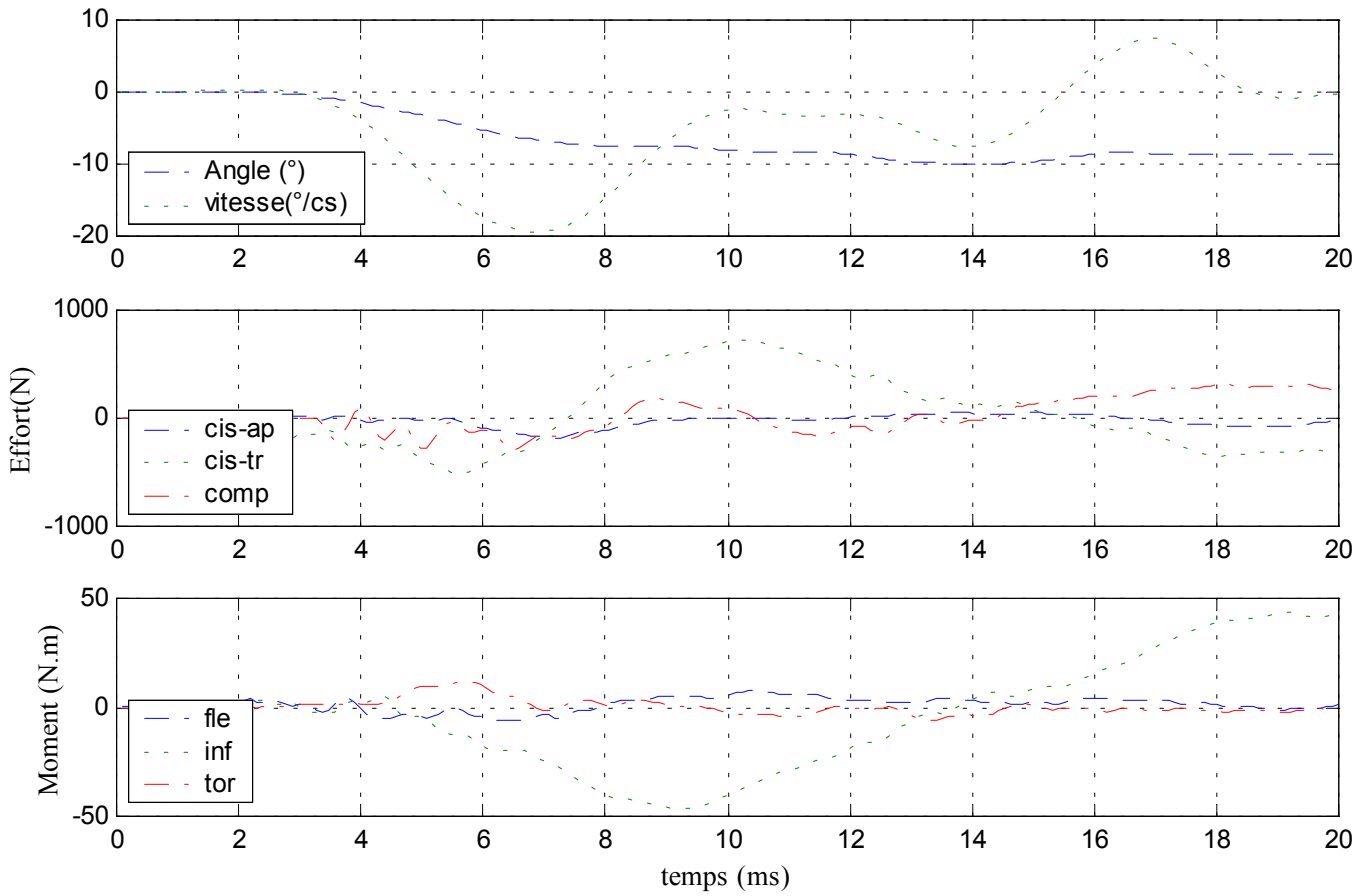


✓ Configuration avec ligaments jaunes coupés

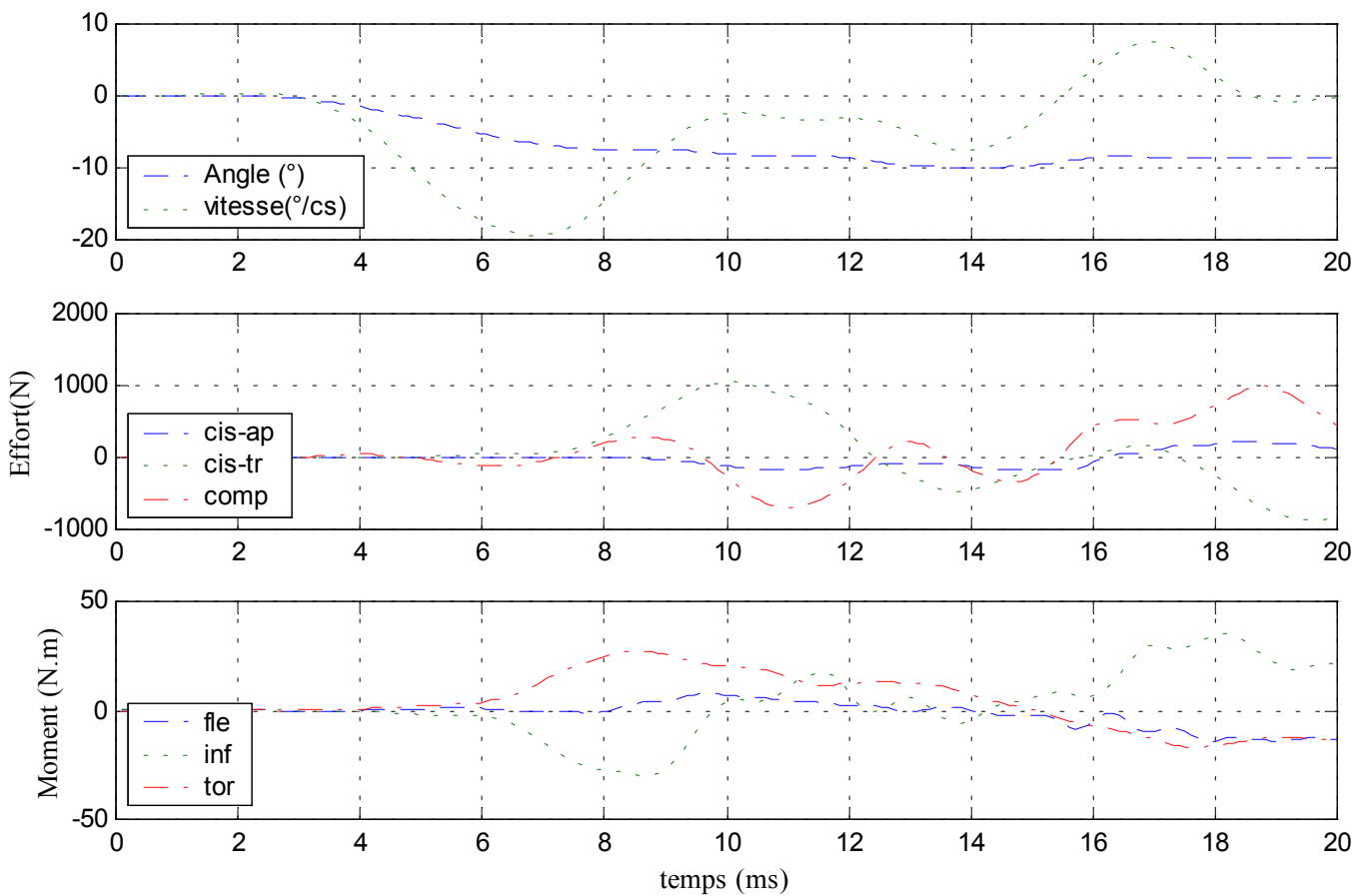
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

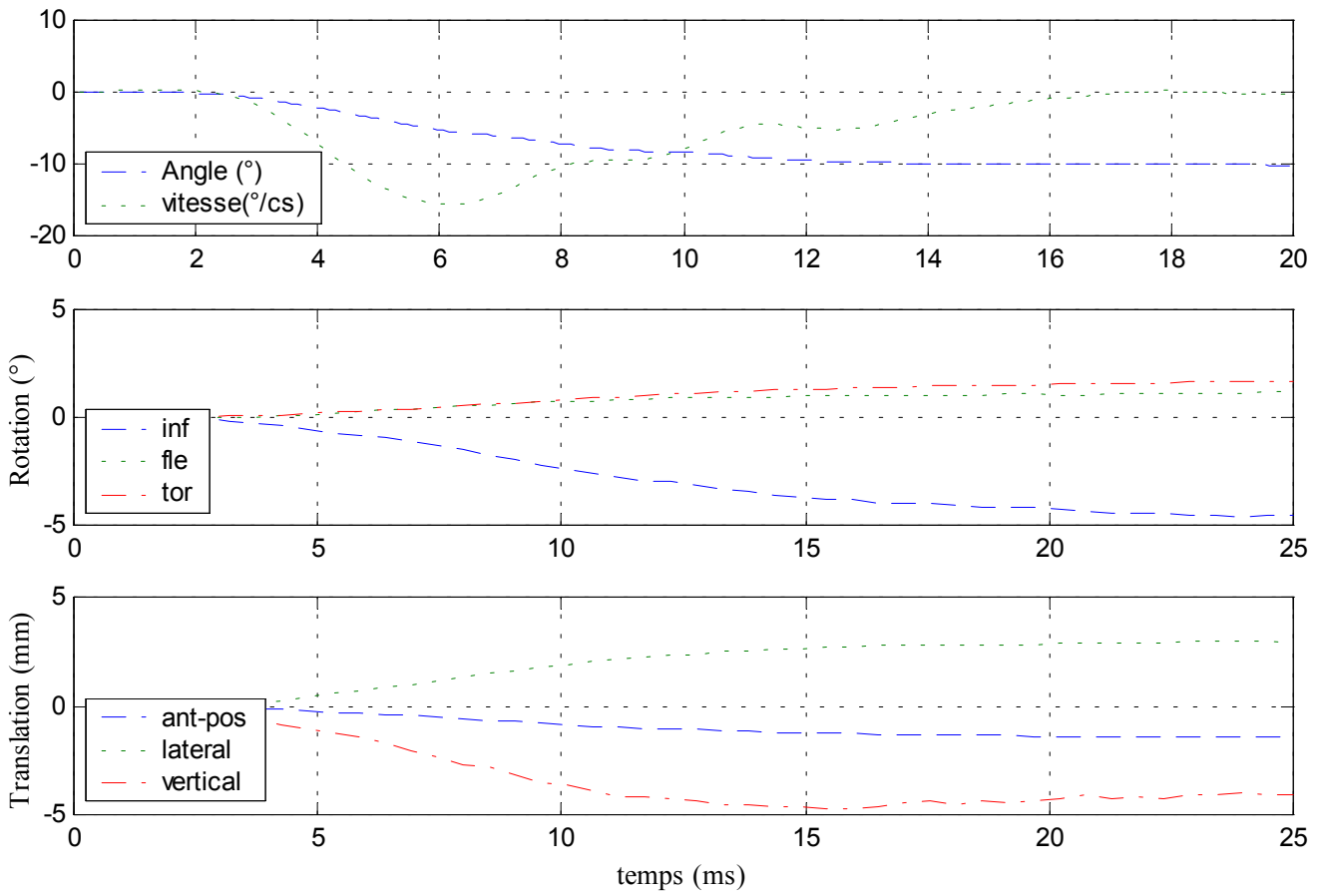


Efforts et moments inférieurs

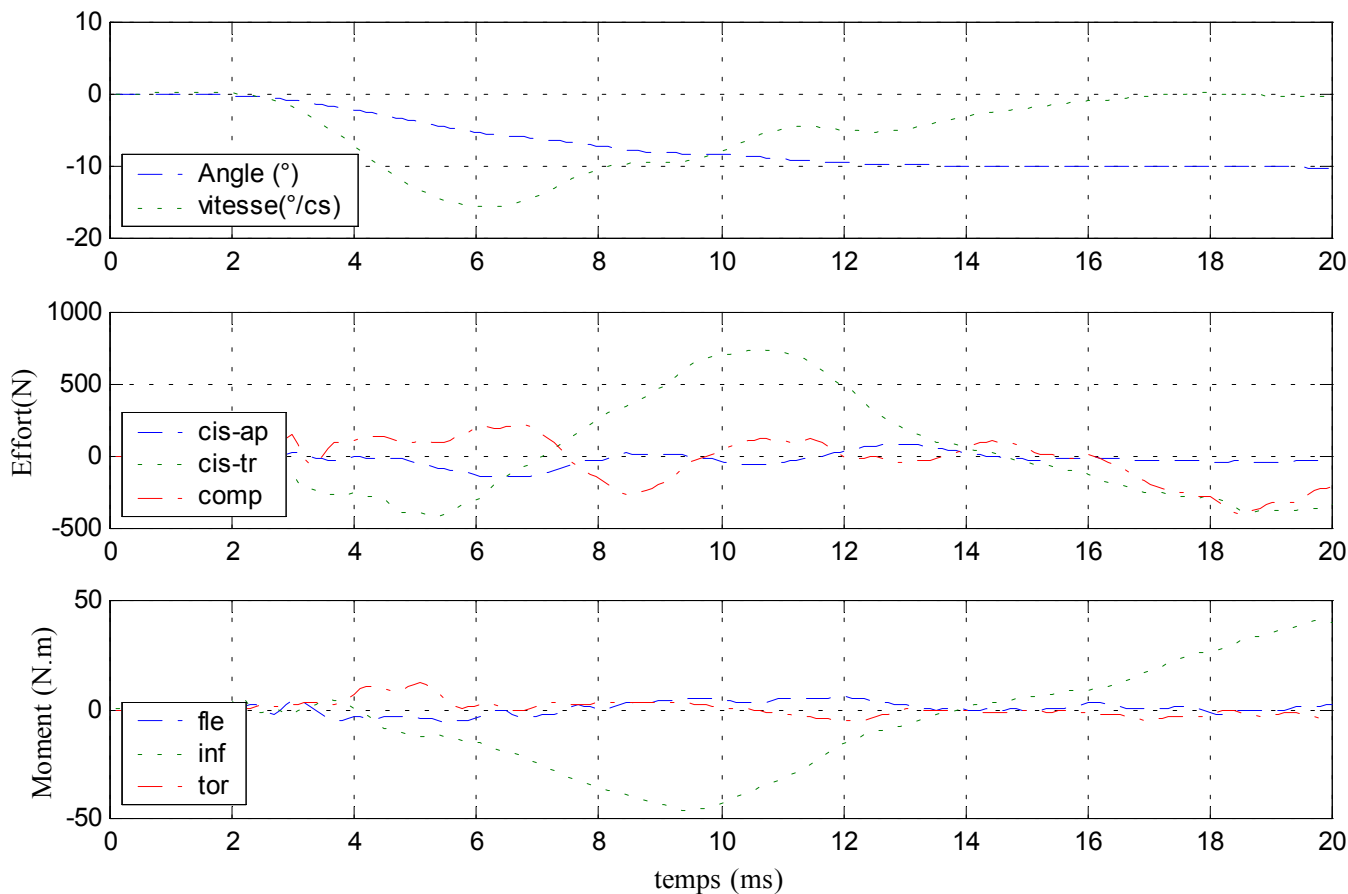


✓ Configuration avec ligaments épineux coupés

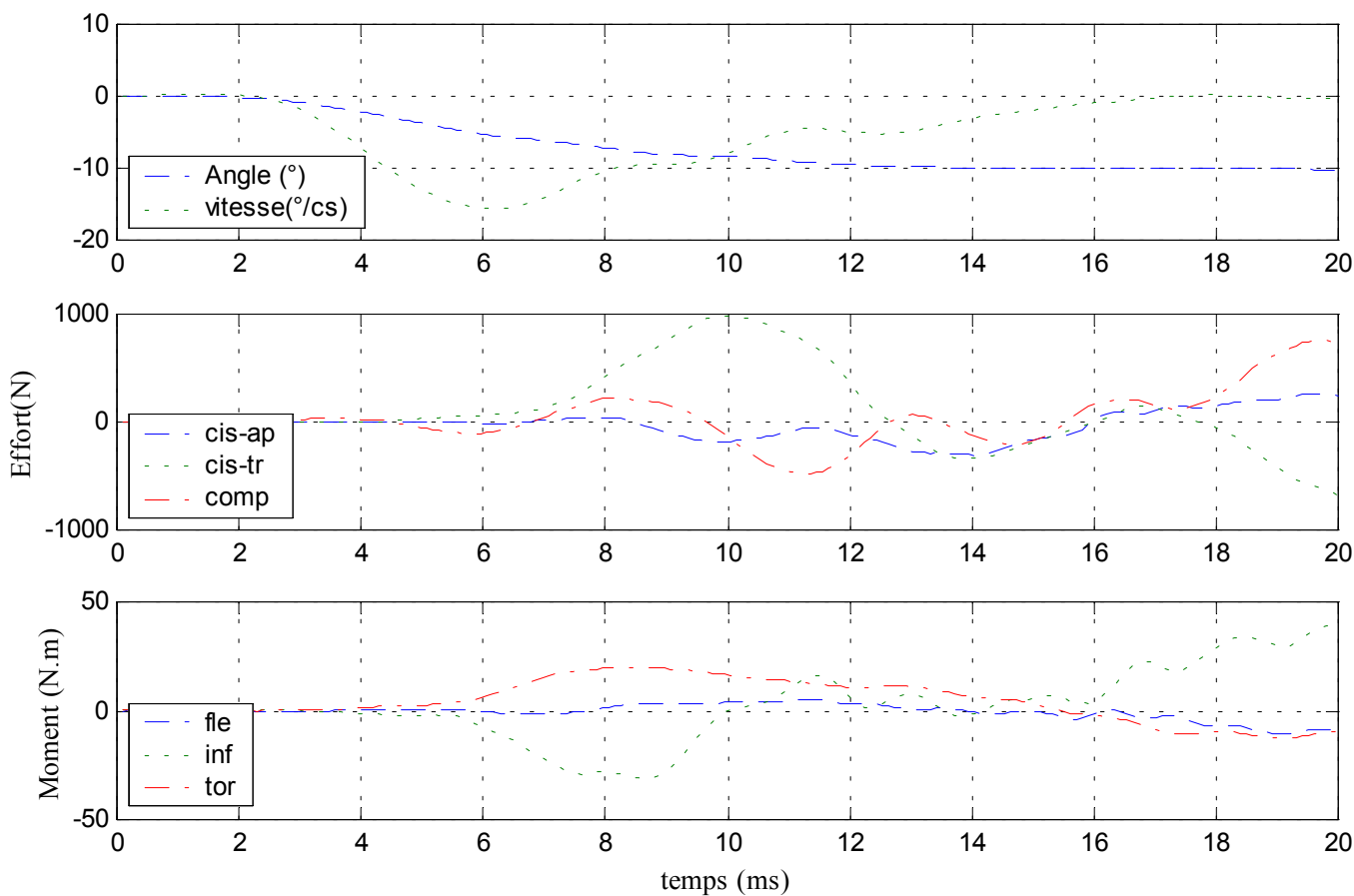
Déplacements



Efforts et moments supérieurs



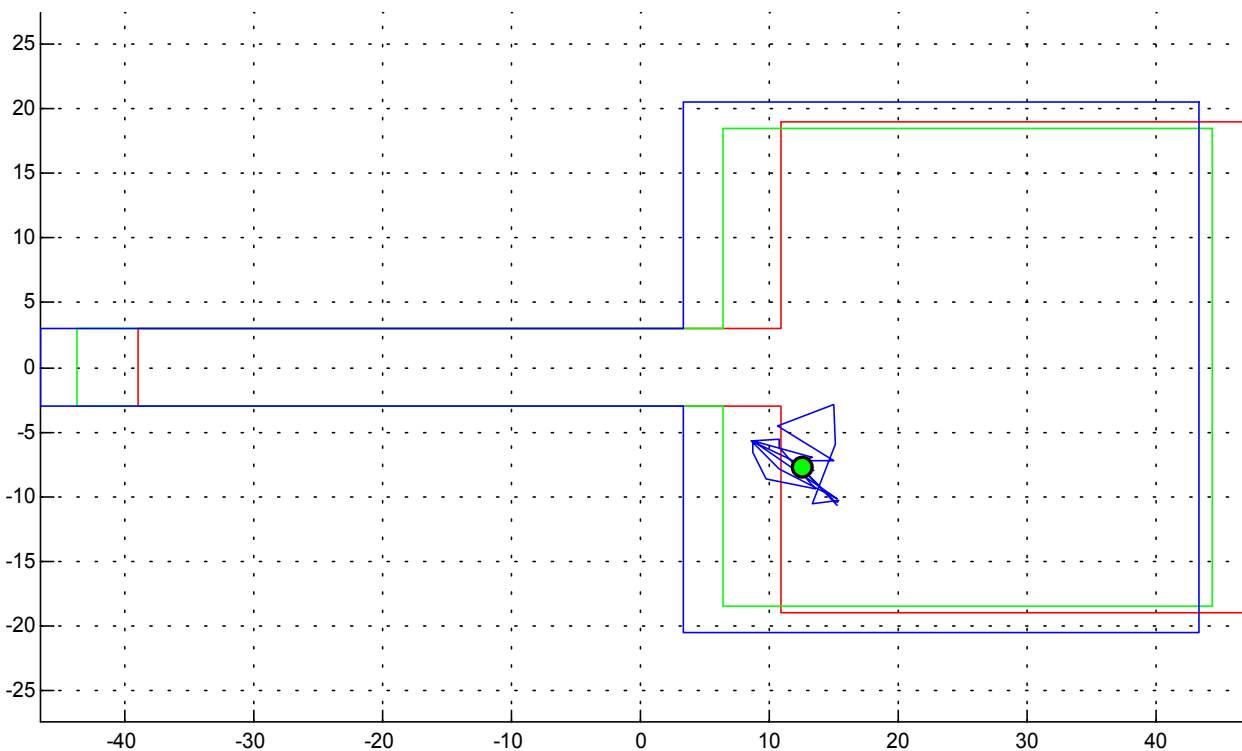
Efforts et moments inférieurs



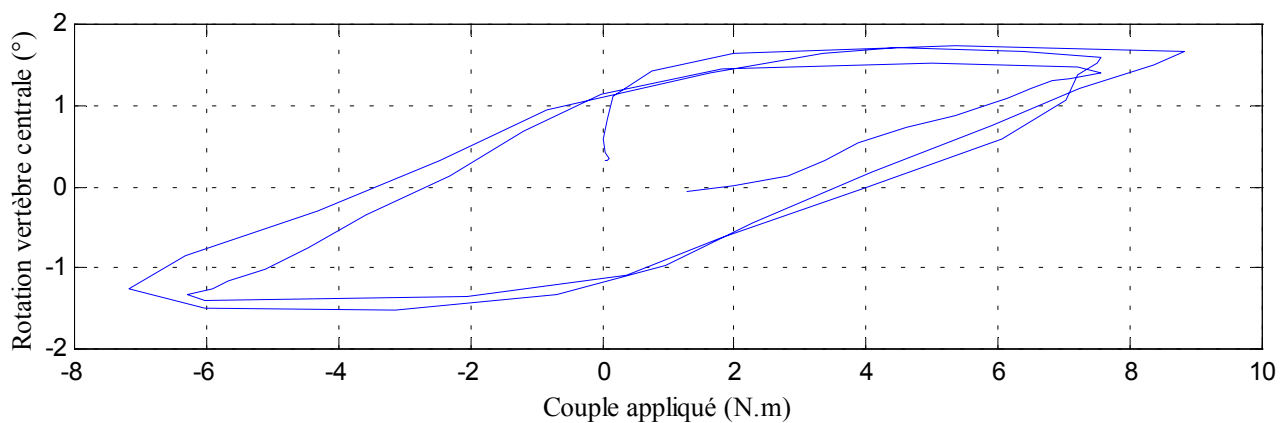
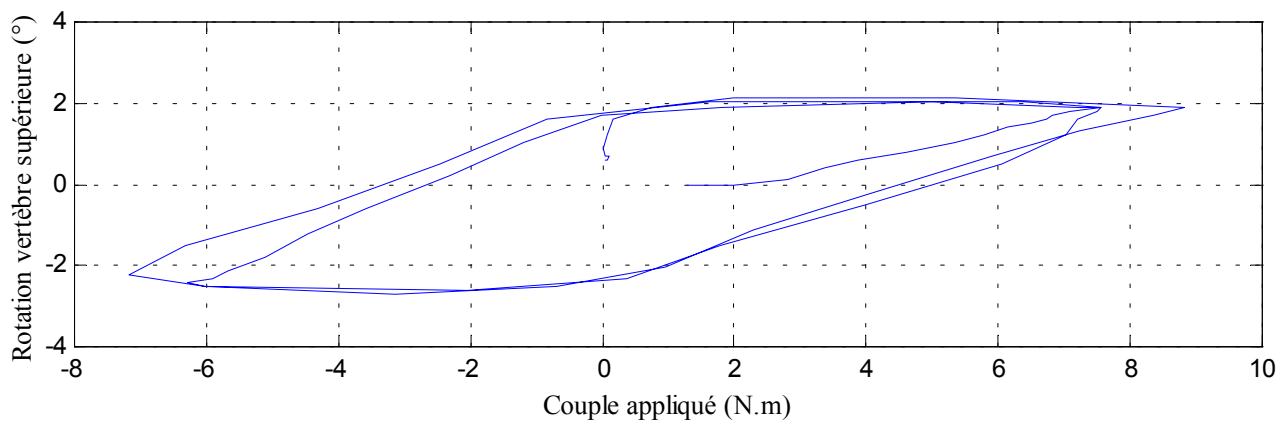
19- Essai 19 – L2L4 – torsion

A. Statique

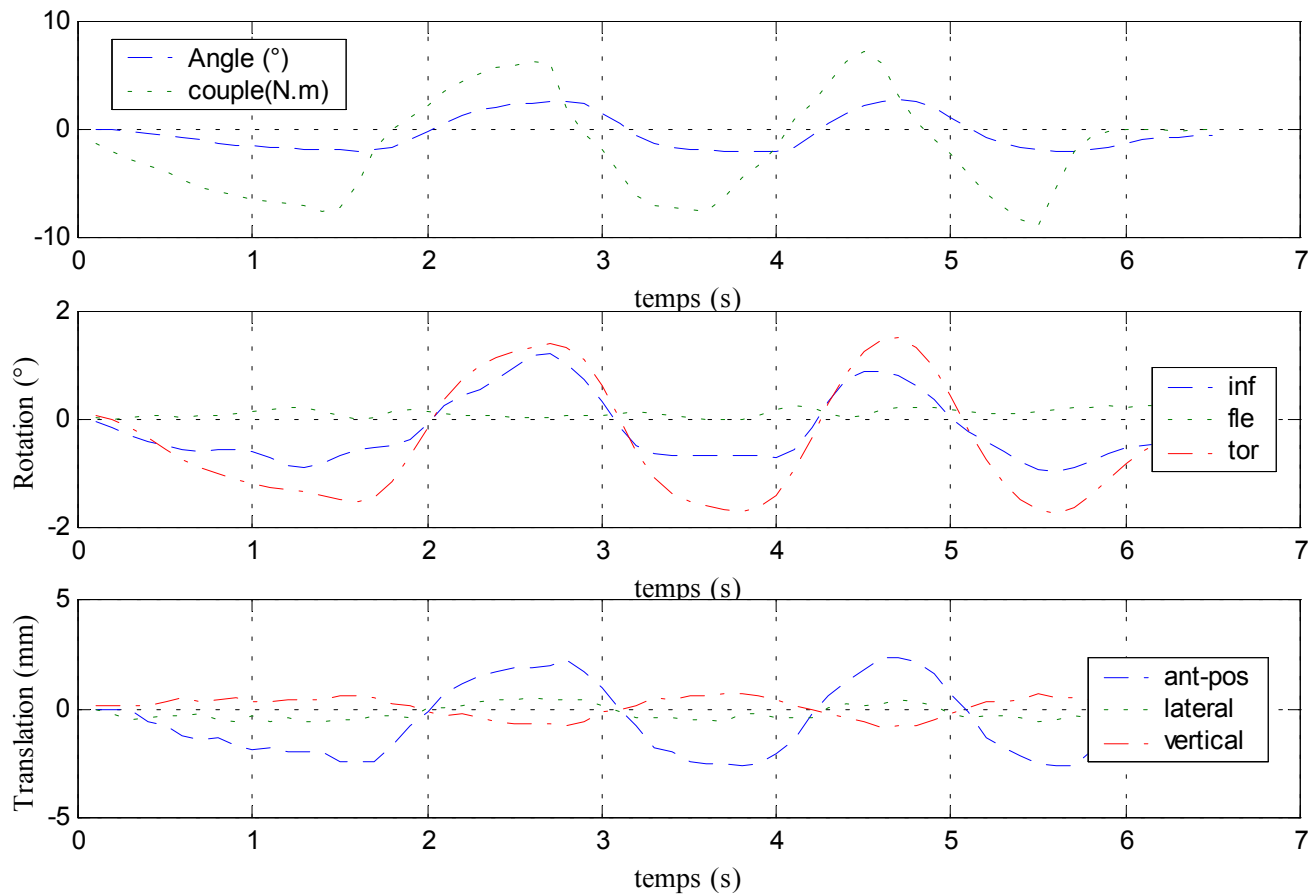
Centre instantané de rotation



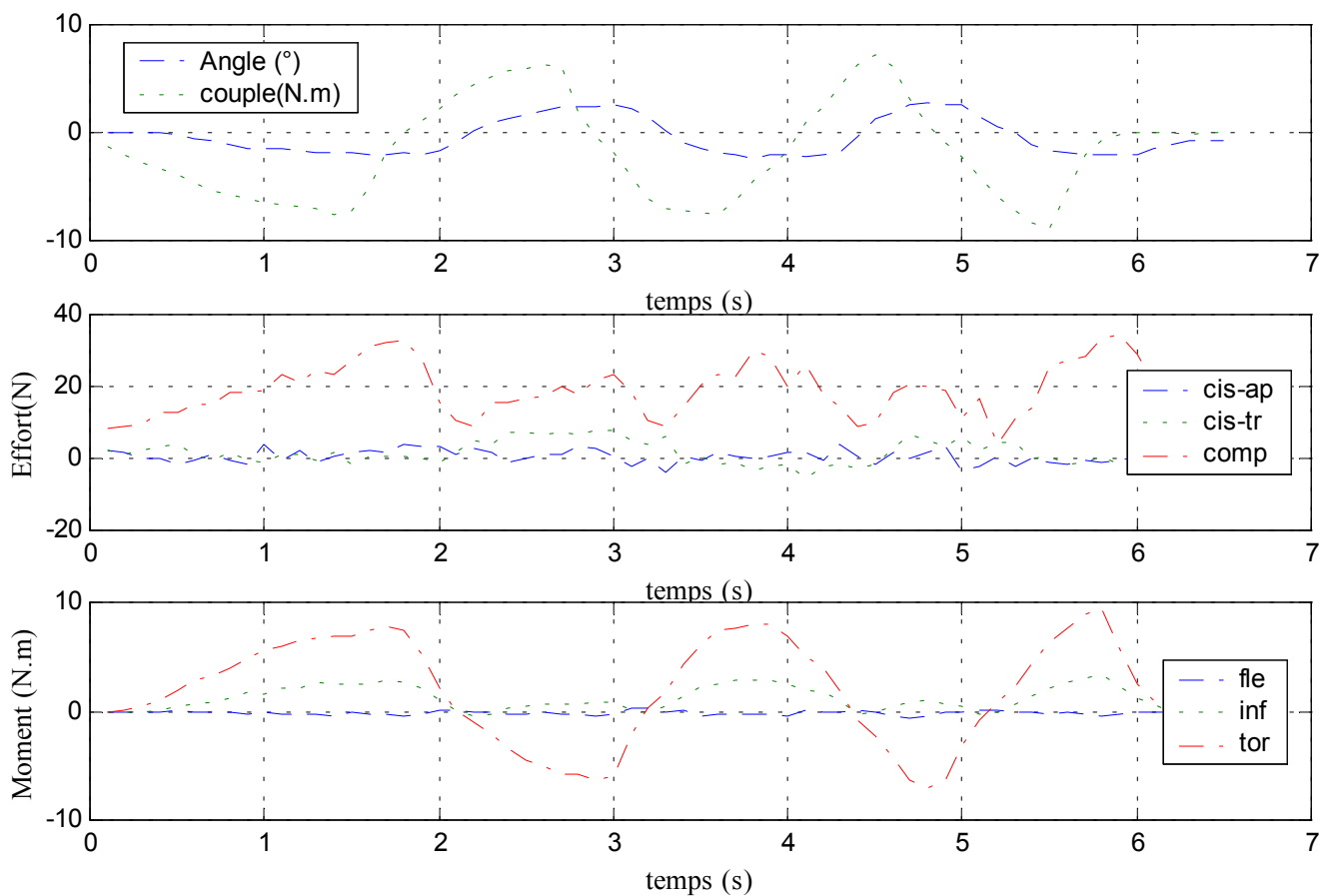
Courbe rotation-couple en hystérésis



Déplacements



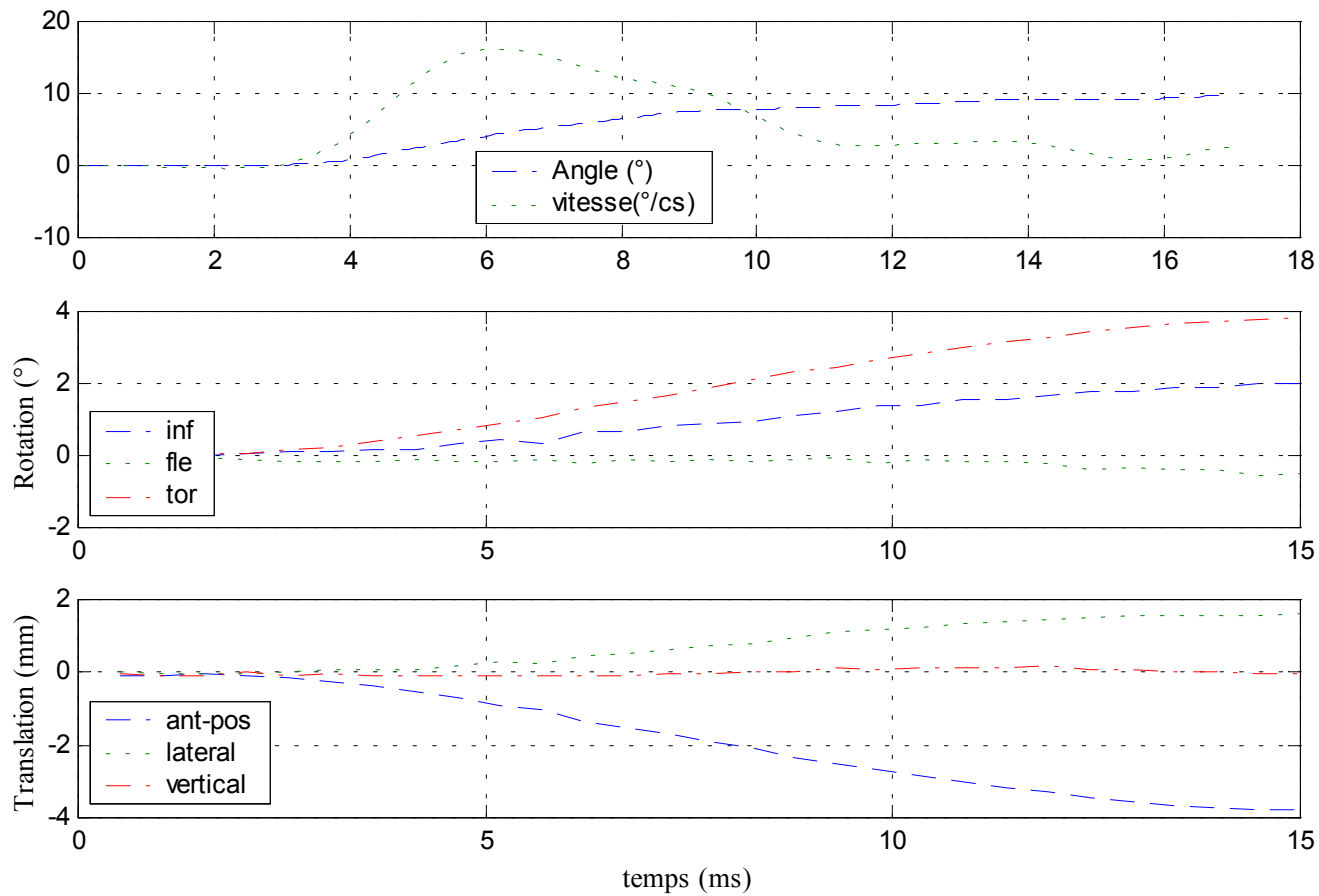
Efforts et moments inférieurs



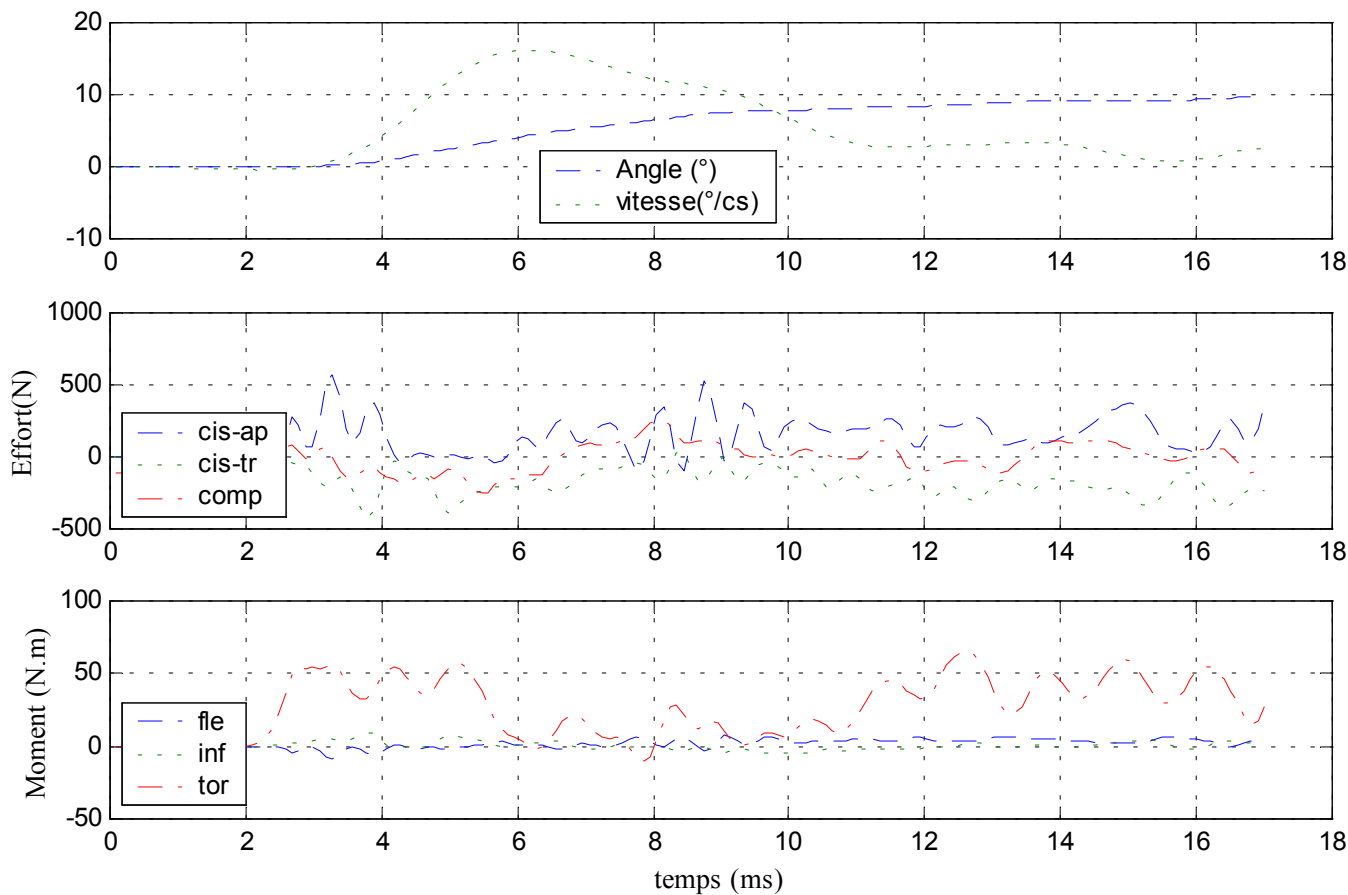
B. Dynamique

✓ Configuration saine

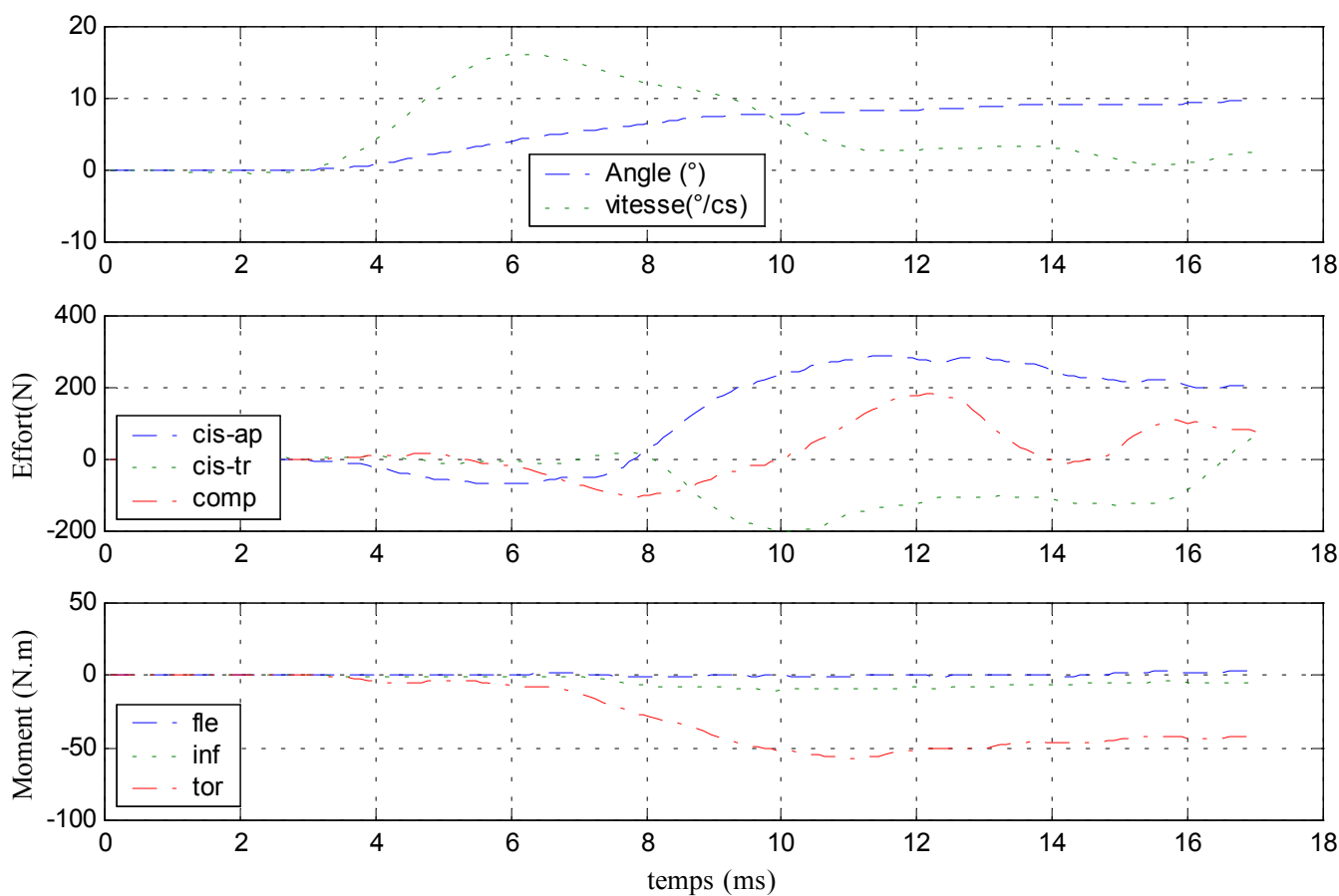
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

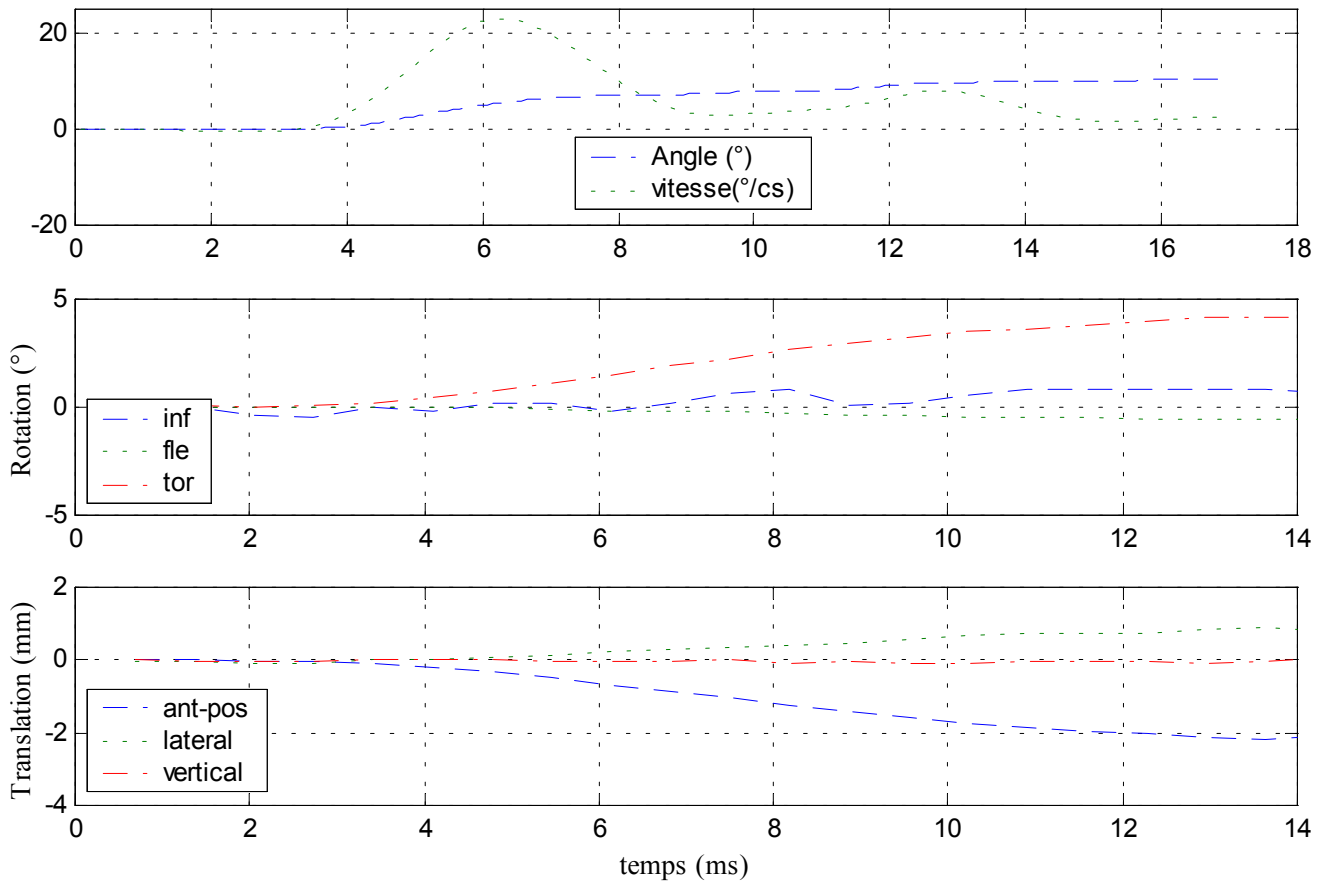


Efforts et moments inférieurs

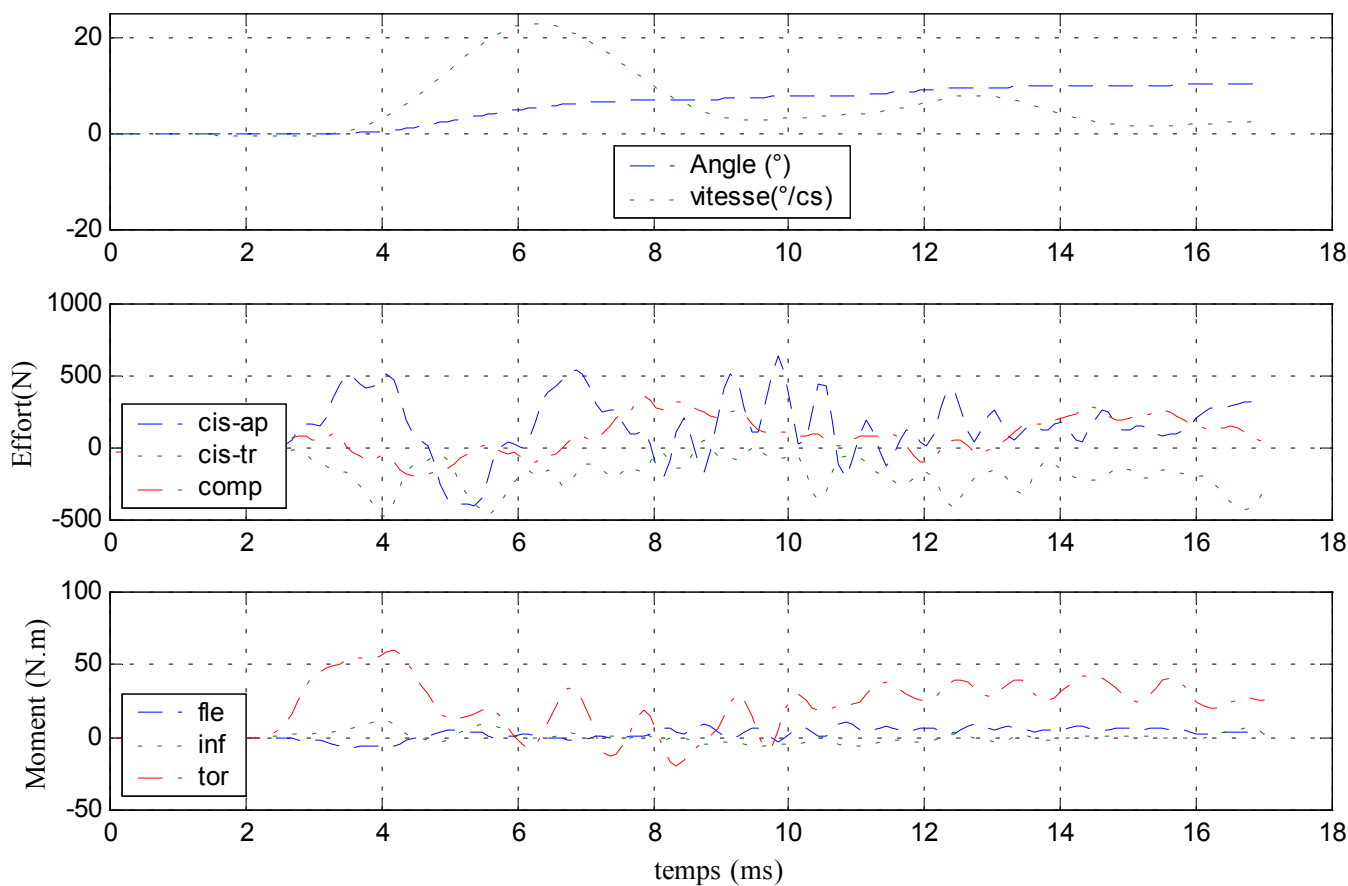


✓ Configuration avec ligaments épineux coupés

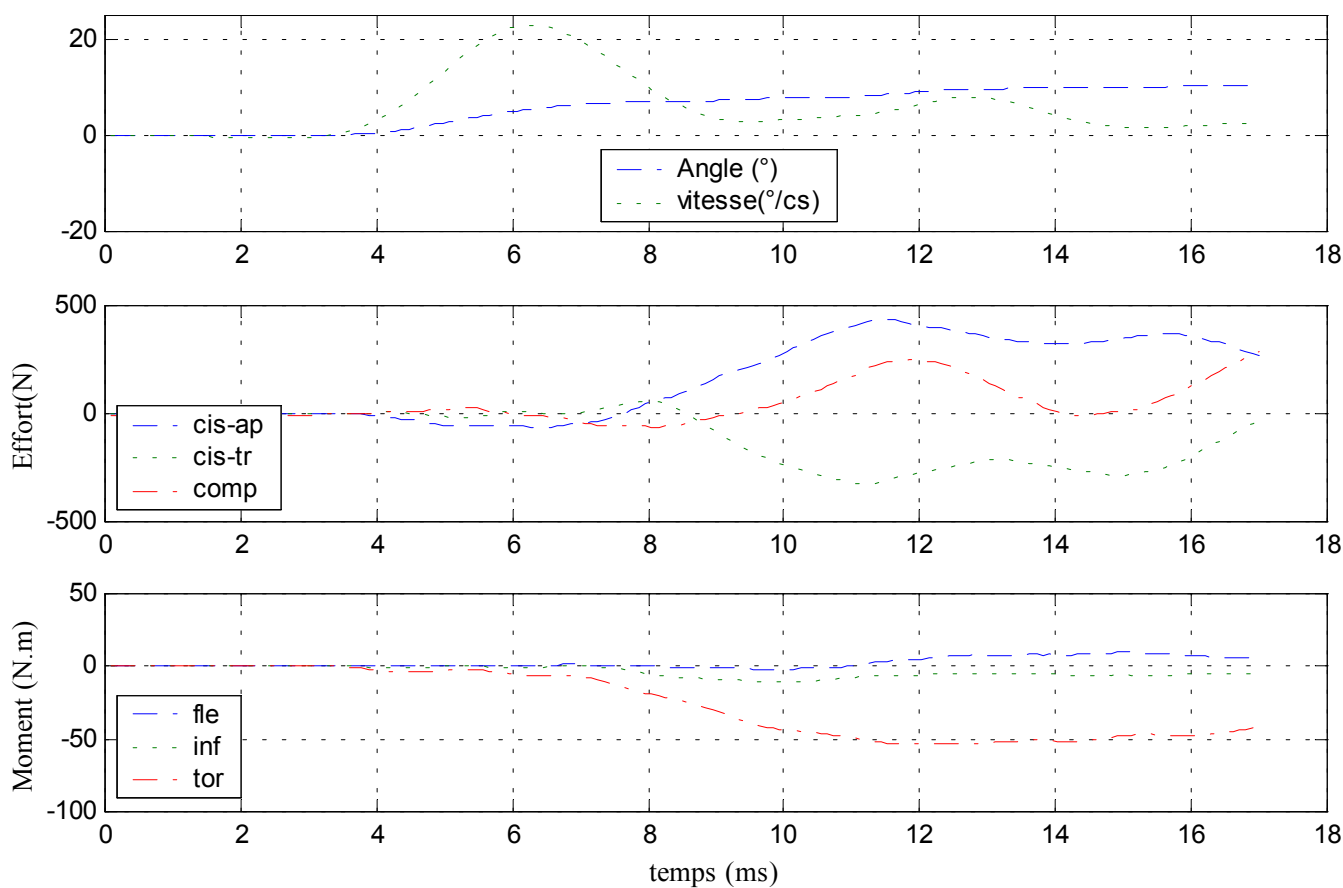
Déplacements



Efforts et moments supérieurs



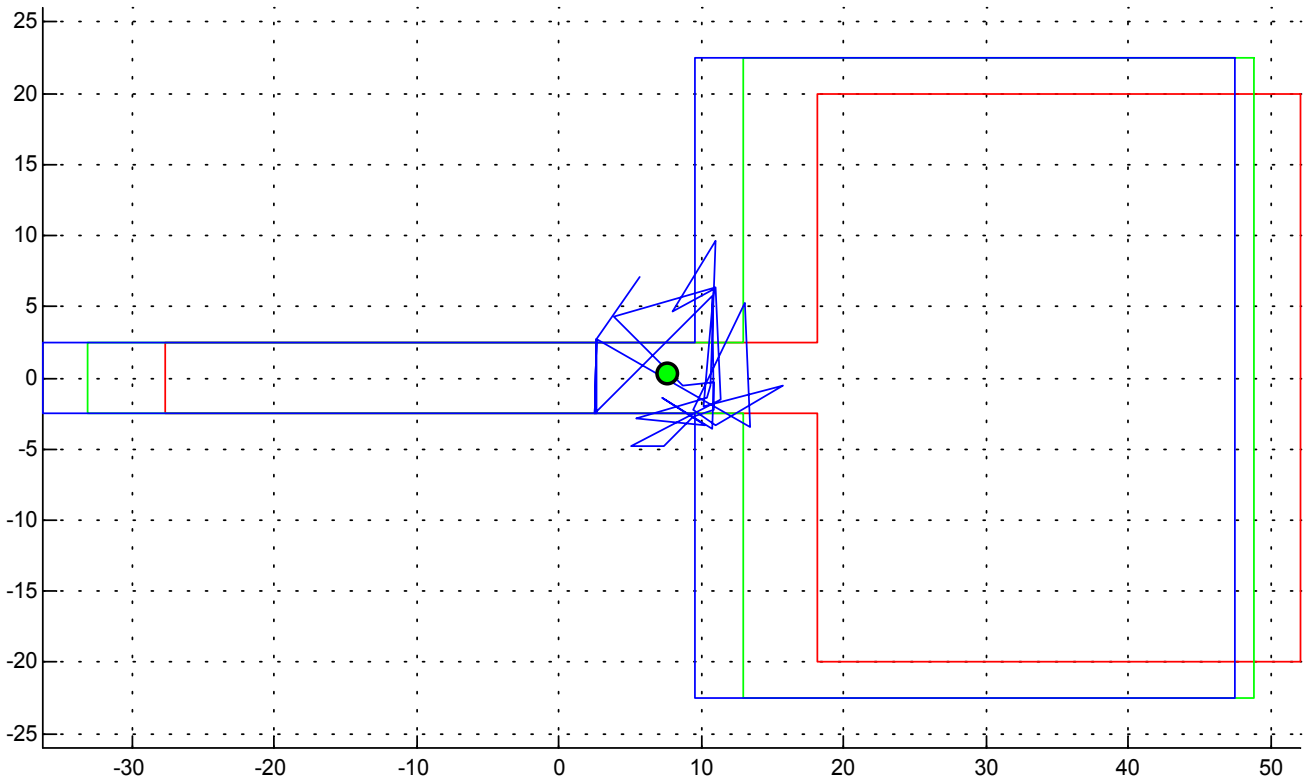
Efforts et moments inférieurs



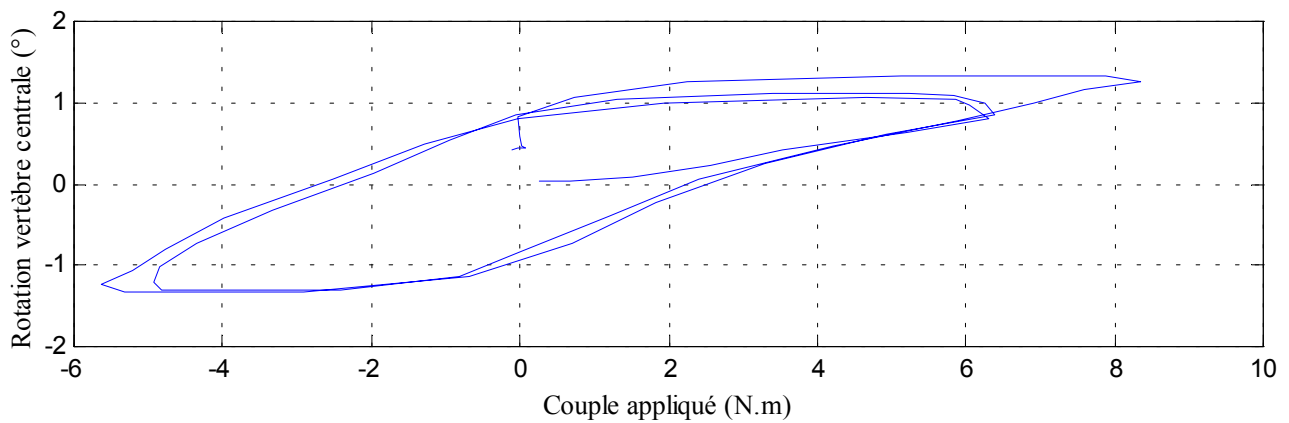
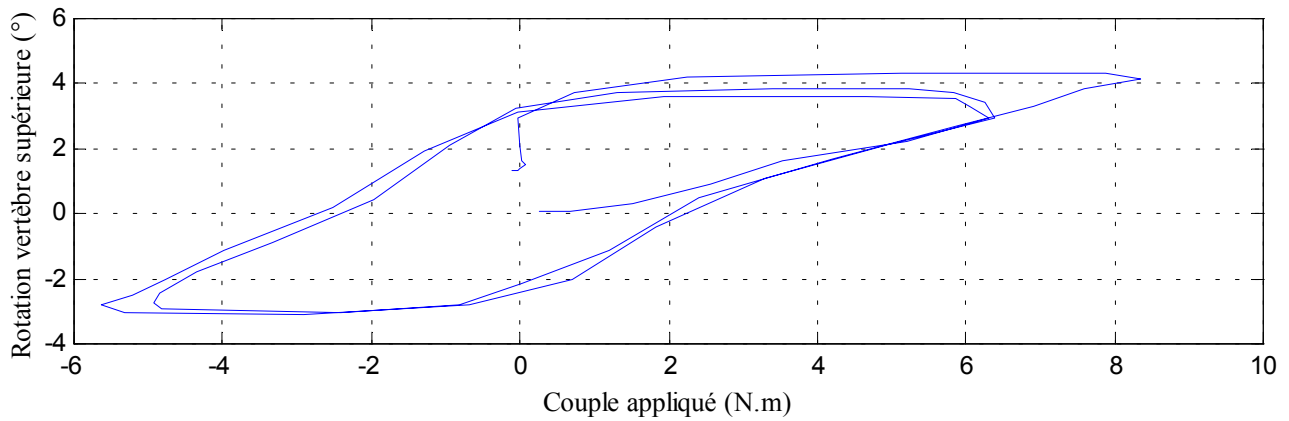
20- Essai 20 – L2L4 – torsion

A. Statique

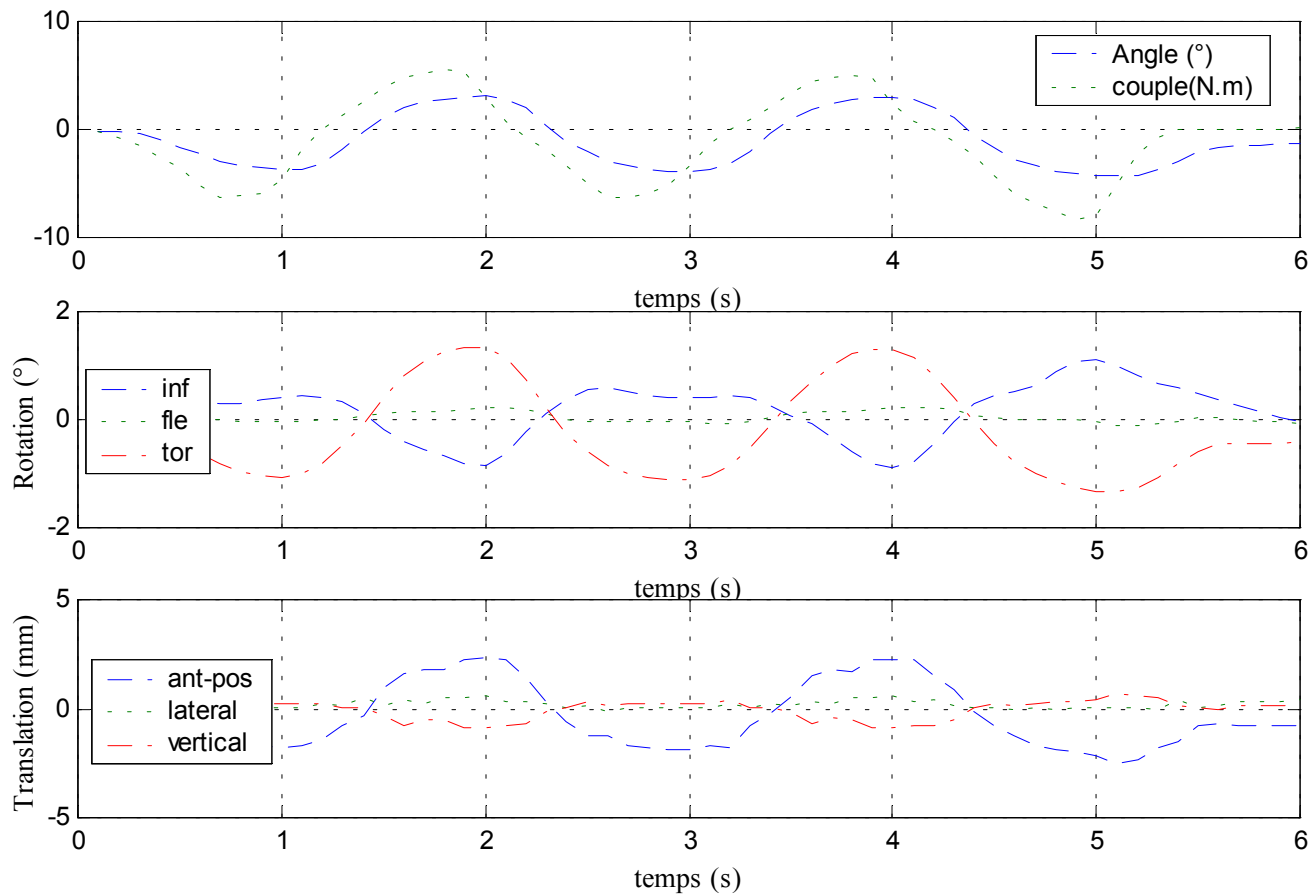
Centre instantané de rotation



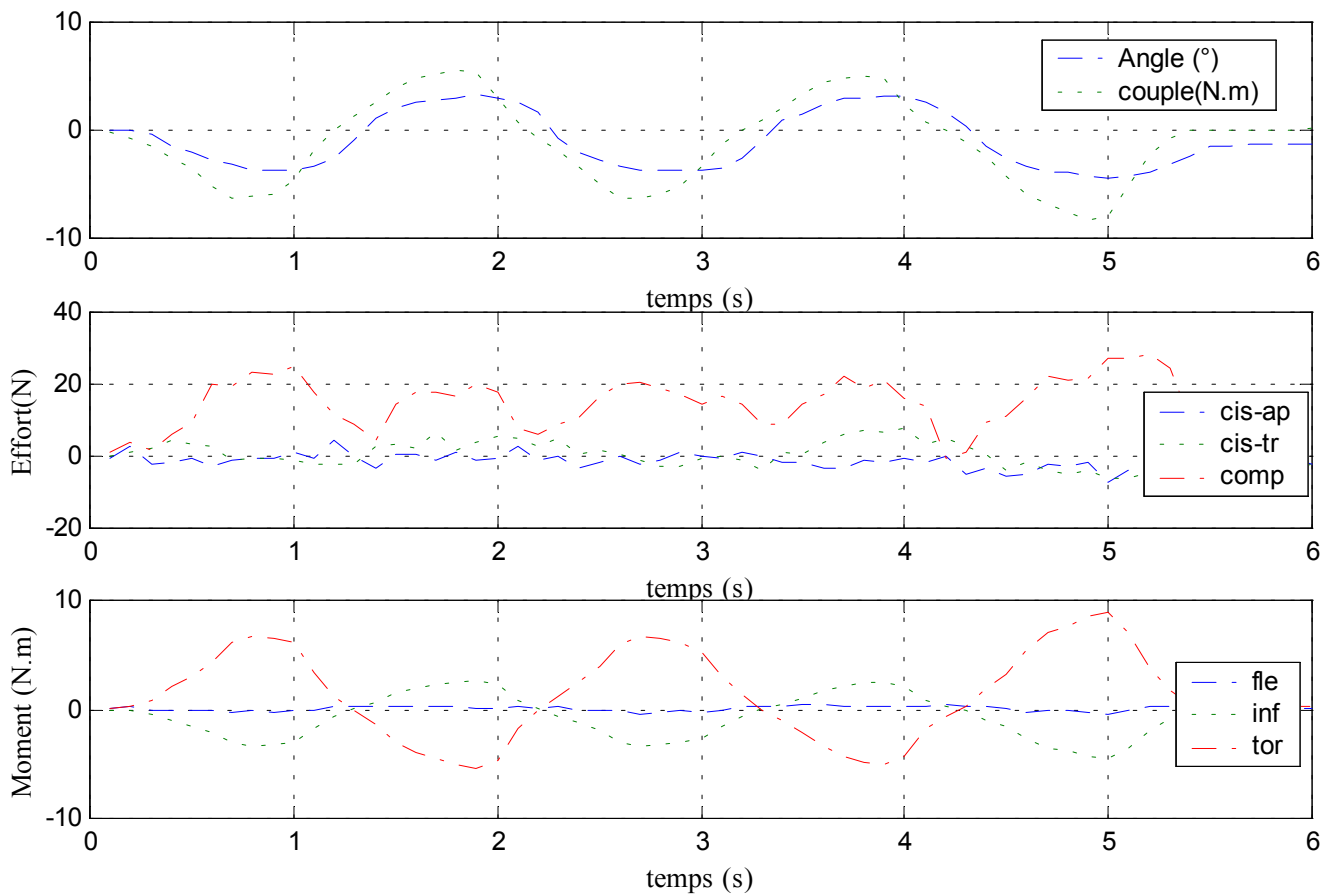
Courbe rotation-couple en hystérésis



Déplacements



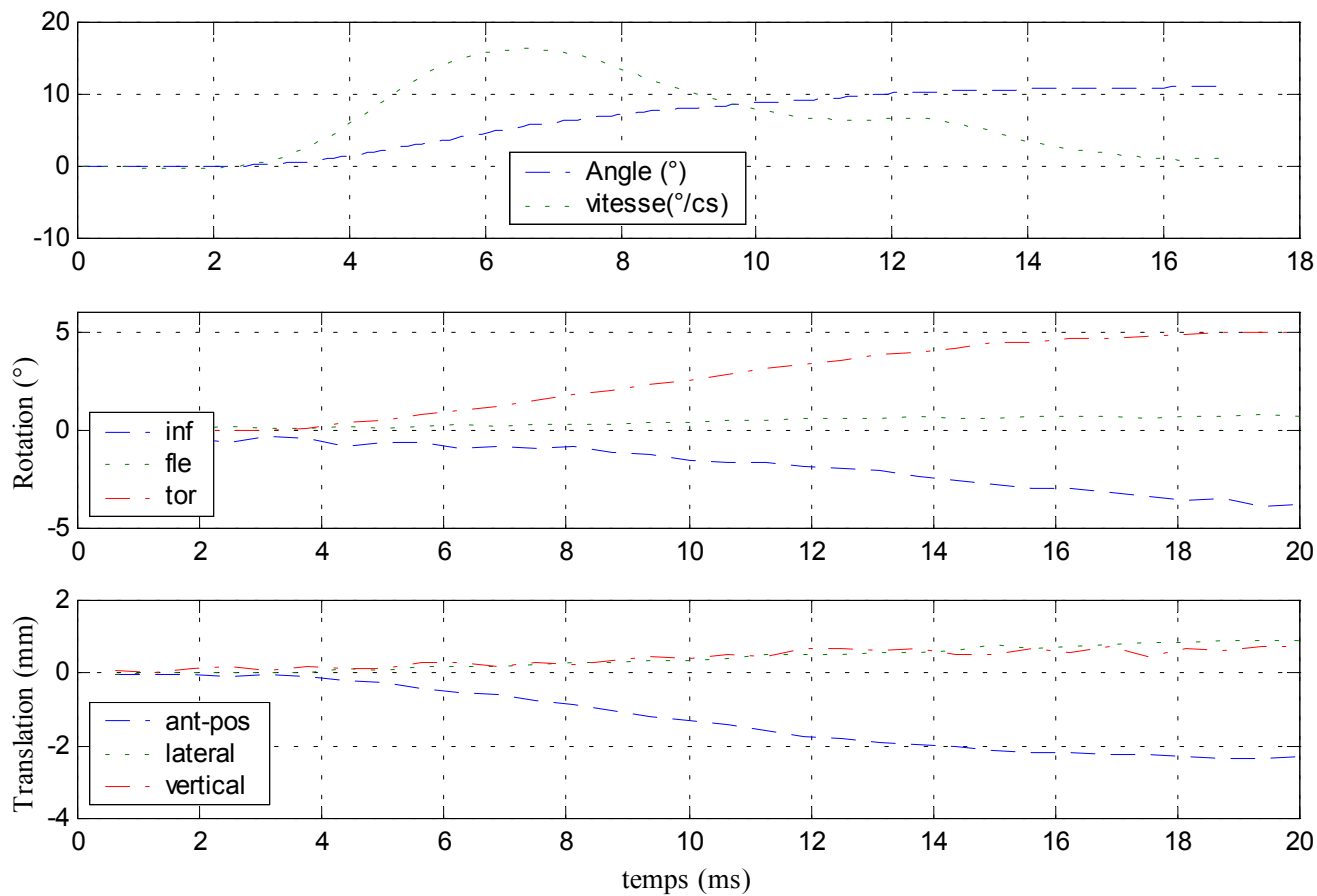
Efforts et moments inférieurs



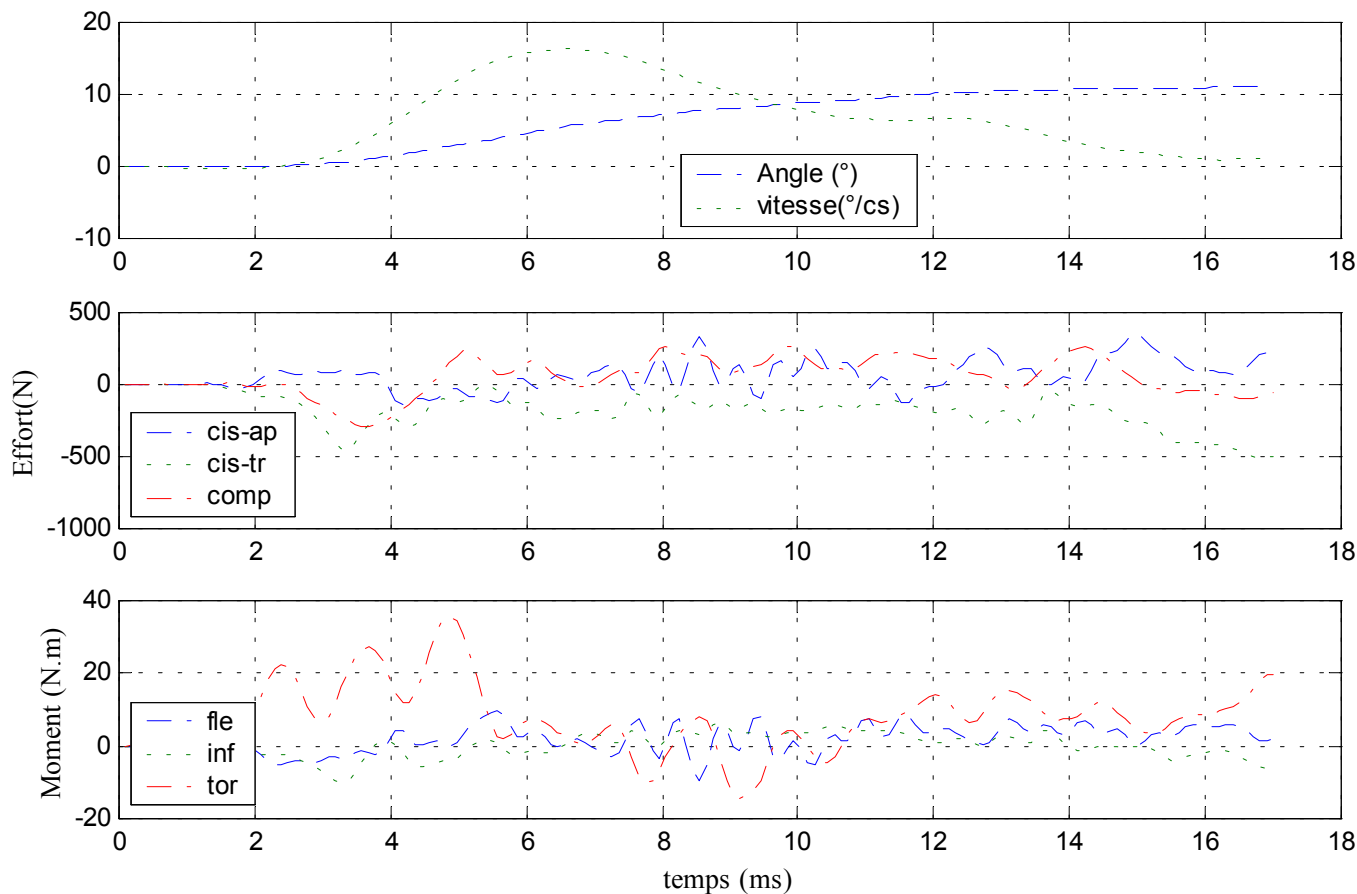
B. Dynamique

✓ Configuration saine

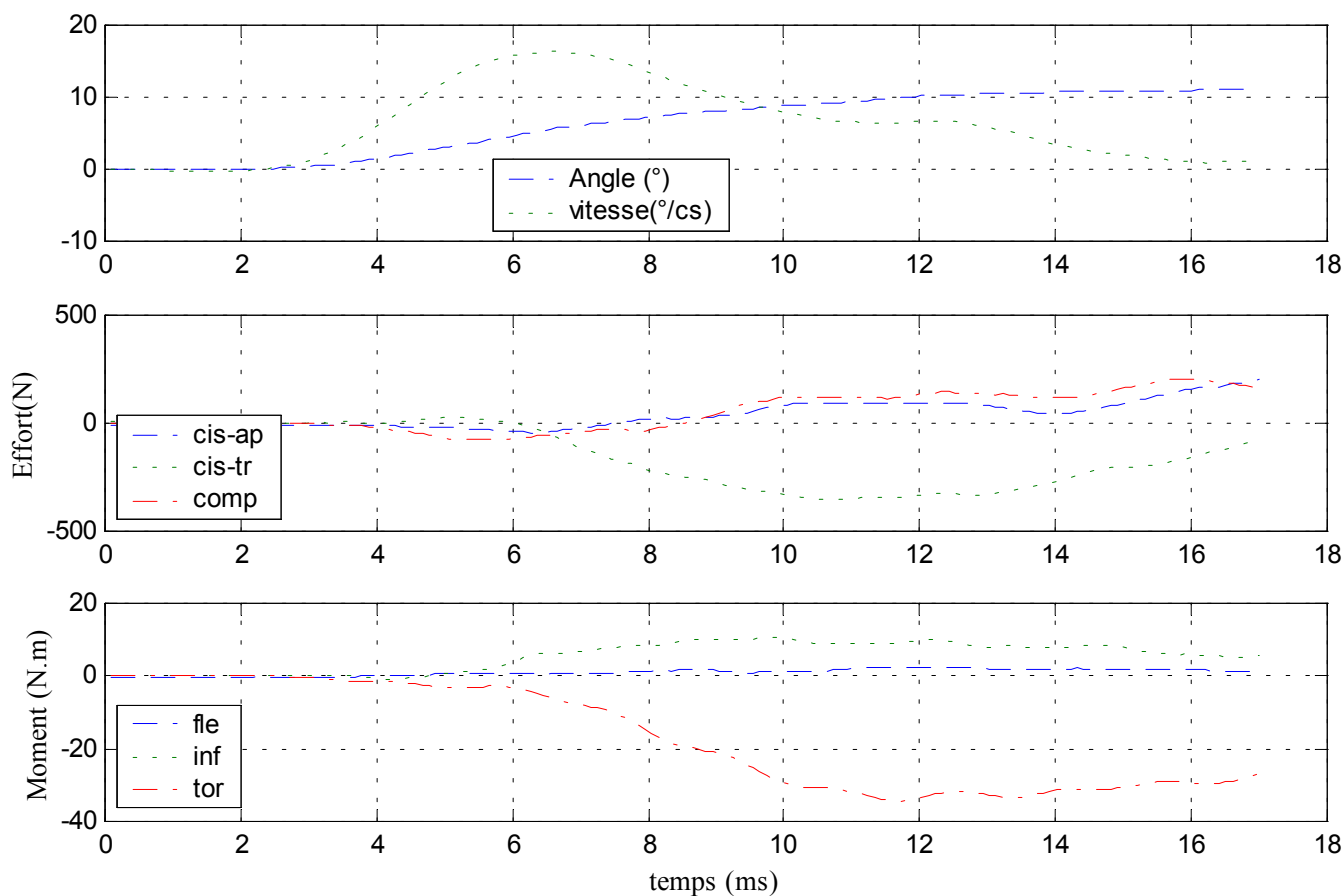
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

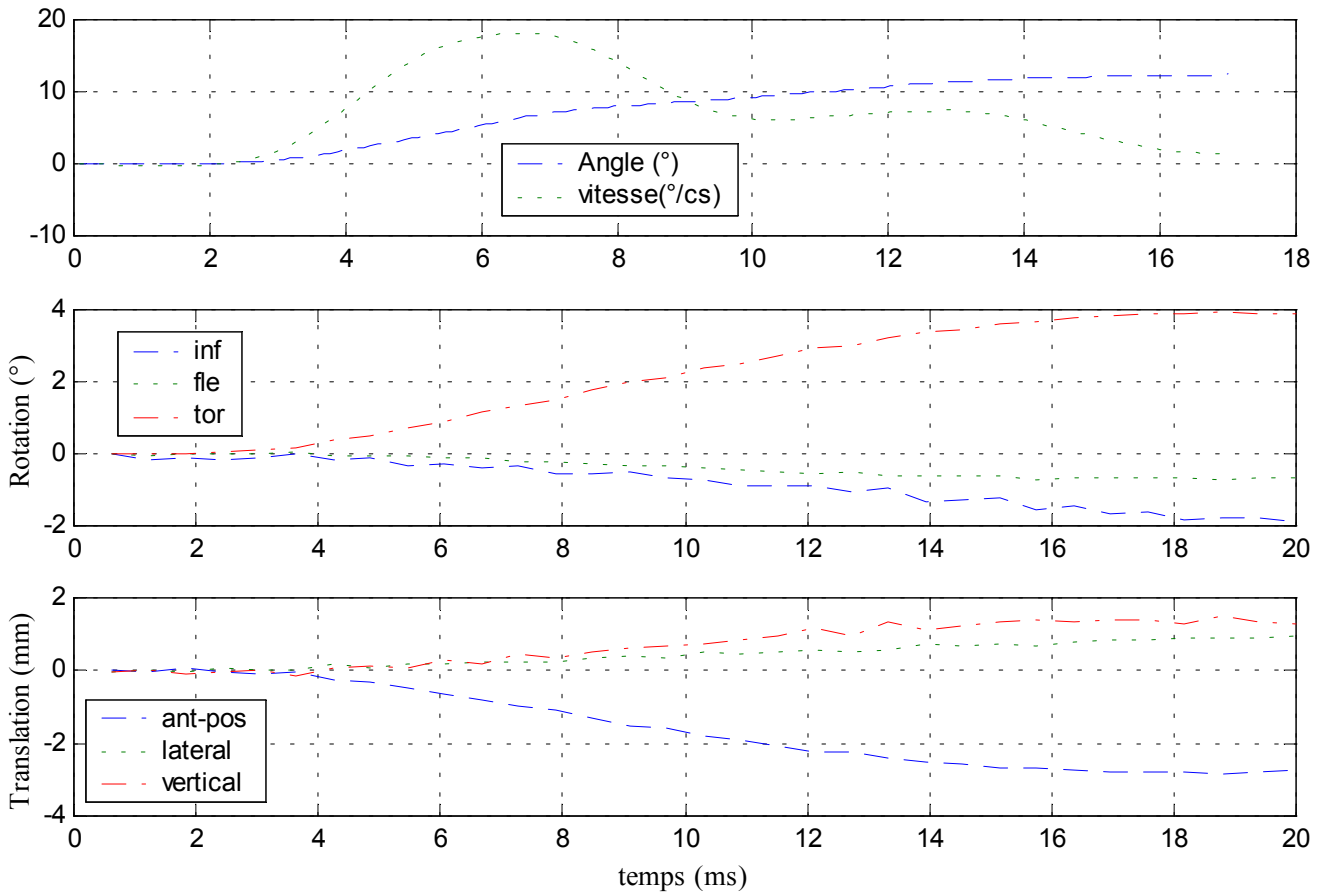


Efforts et moments inférieurs

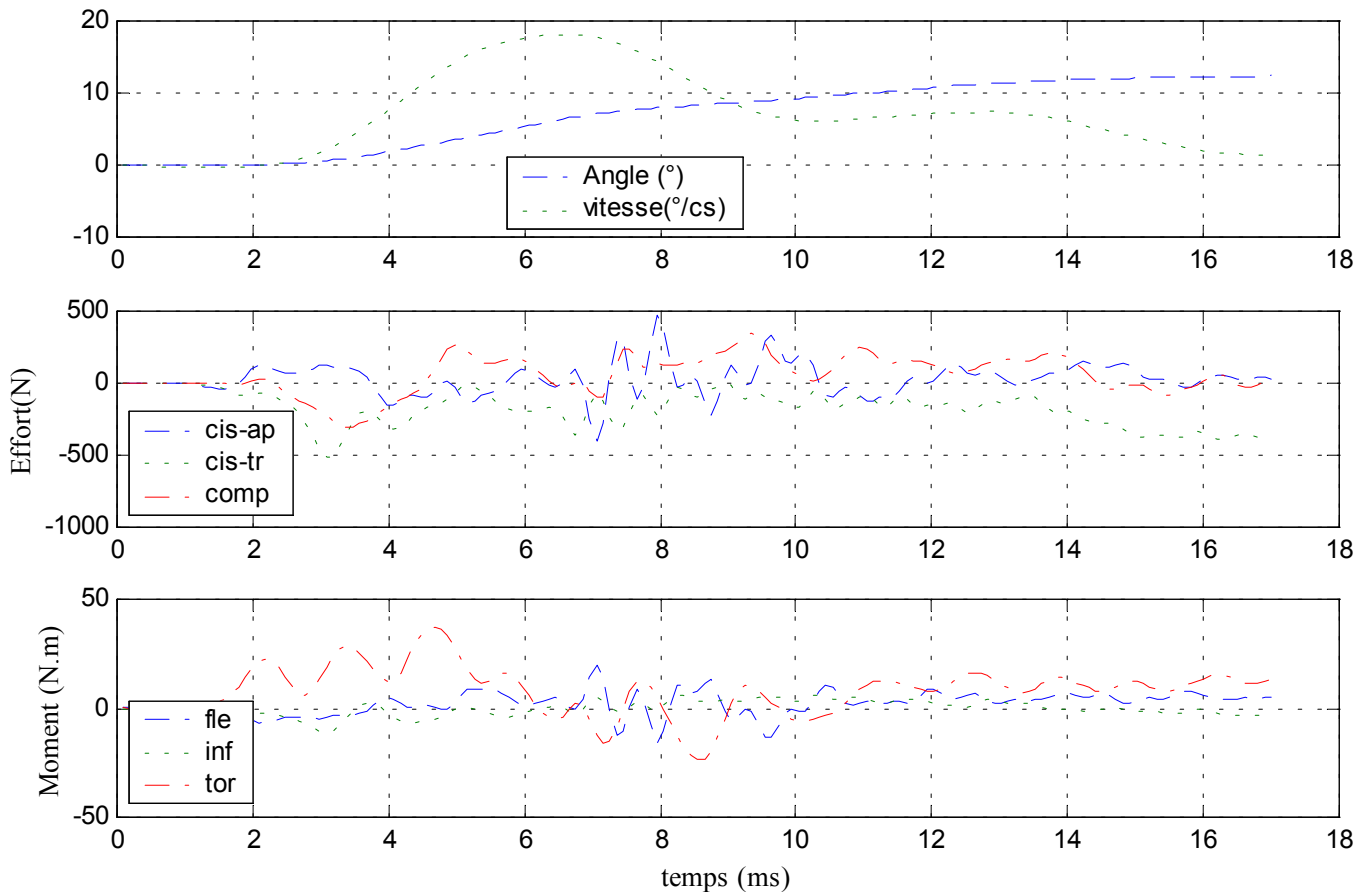


✓ Configuration avec ligaments capsulaires coupés

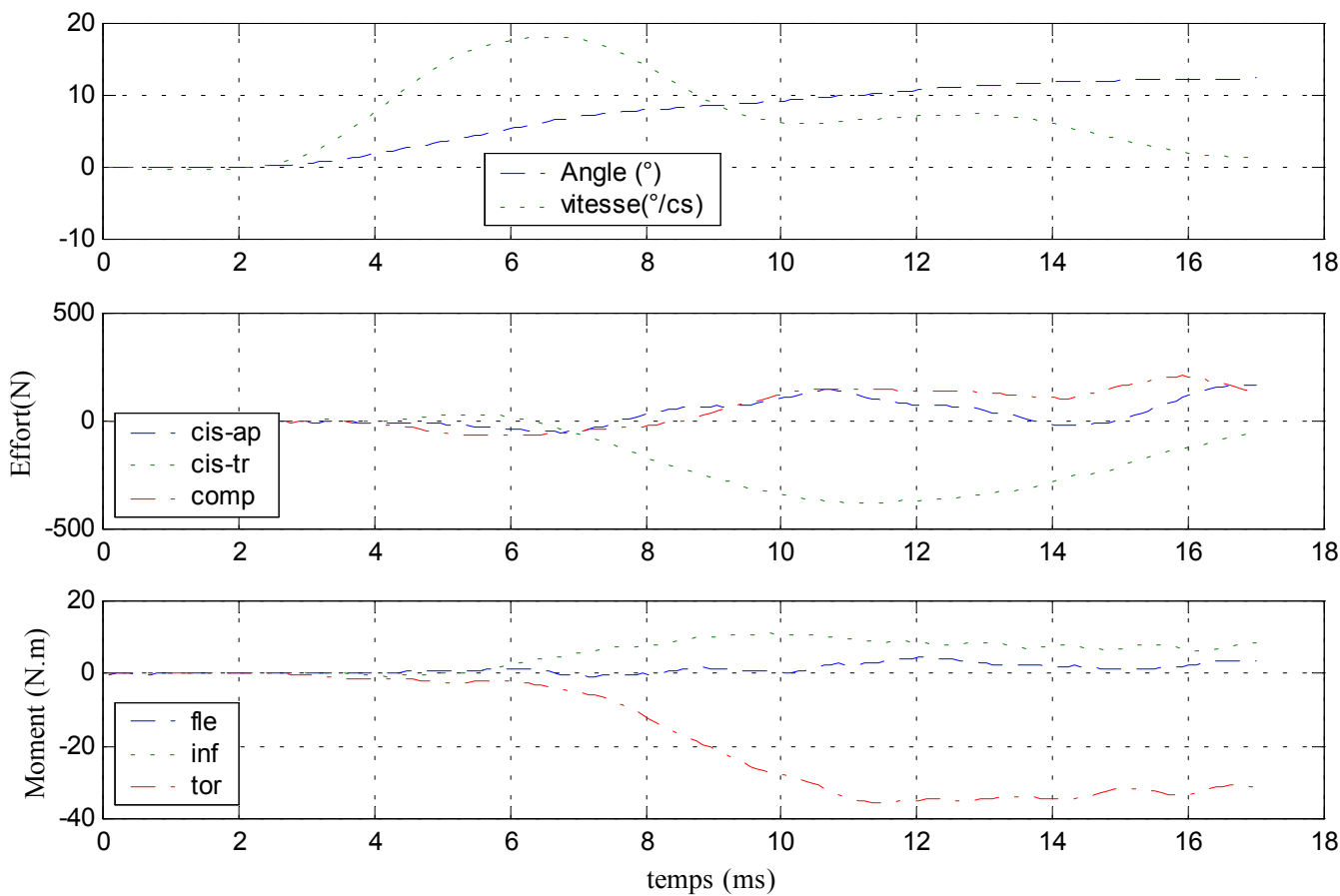
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

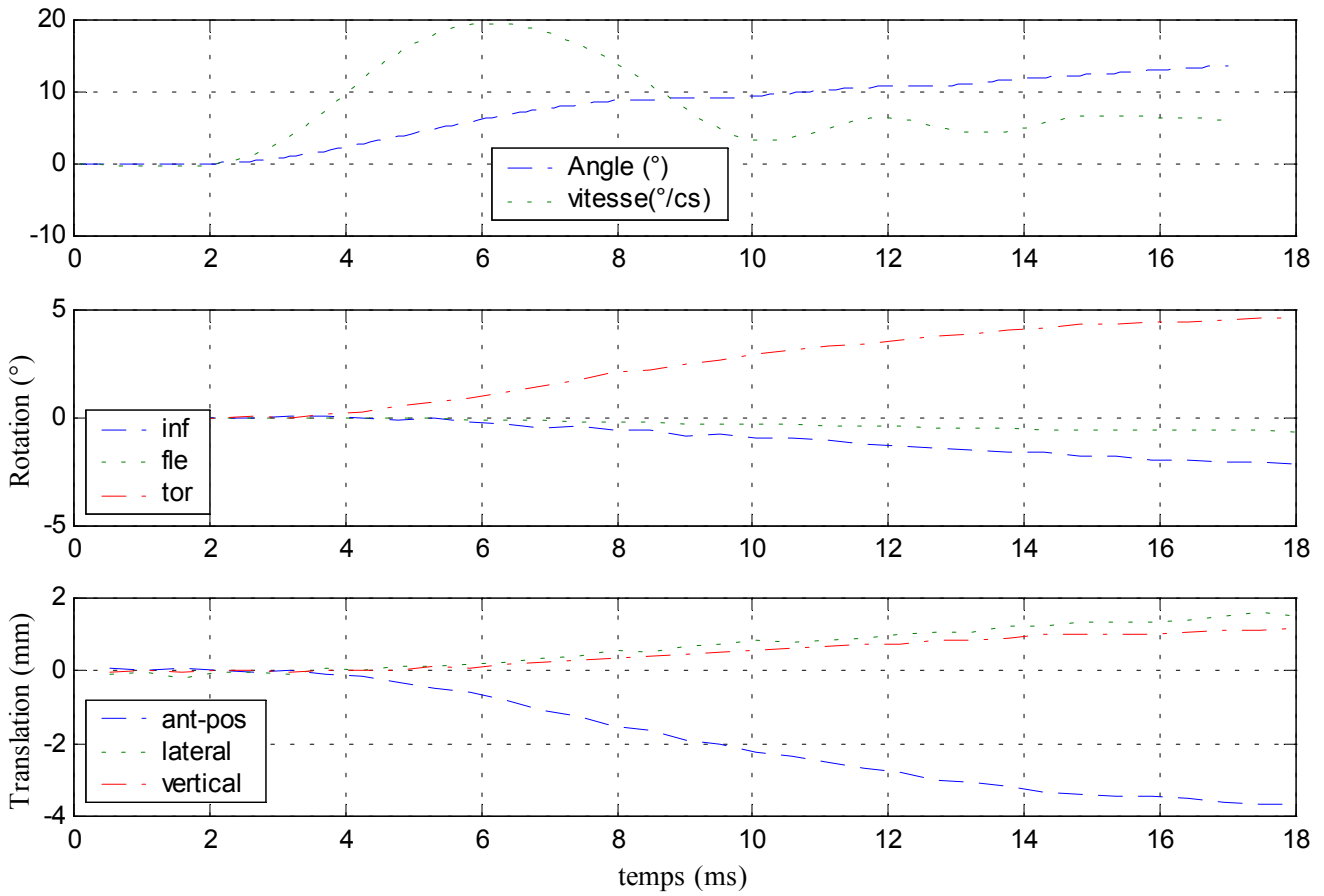


Efforts et moments inférieurs

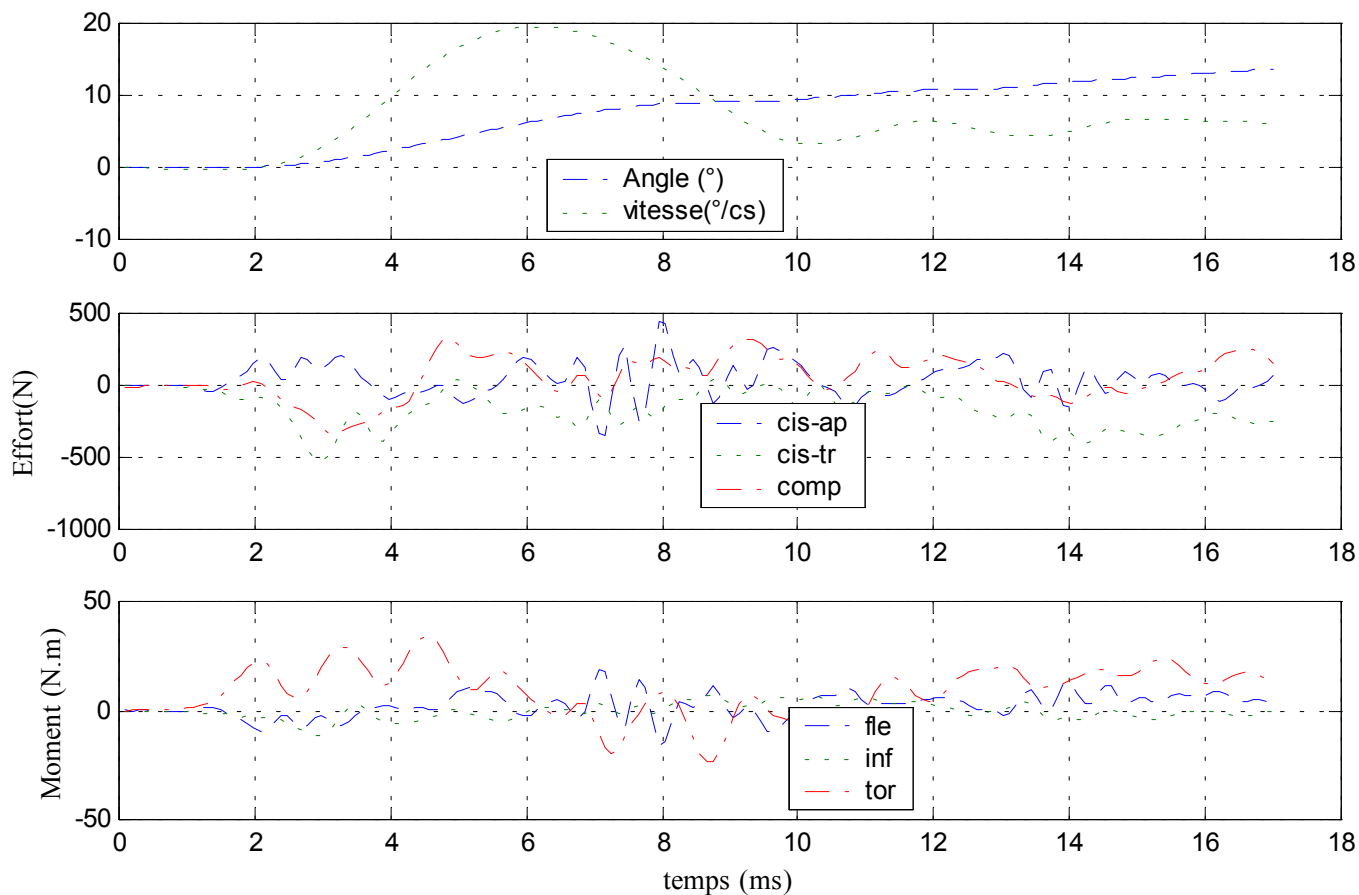


✓ Configuration avec ligaments jaunes coupés

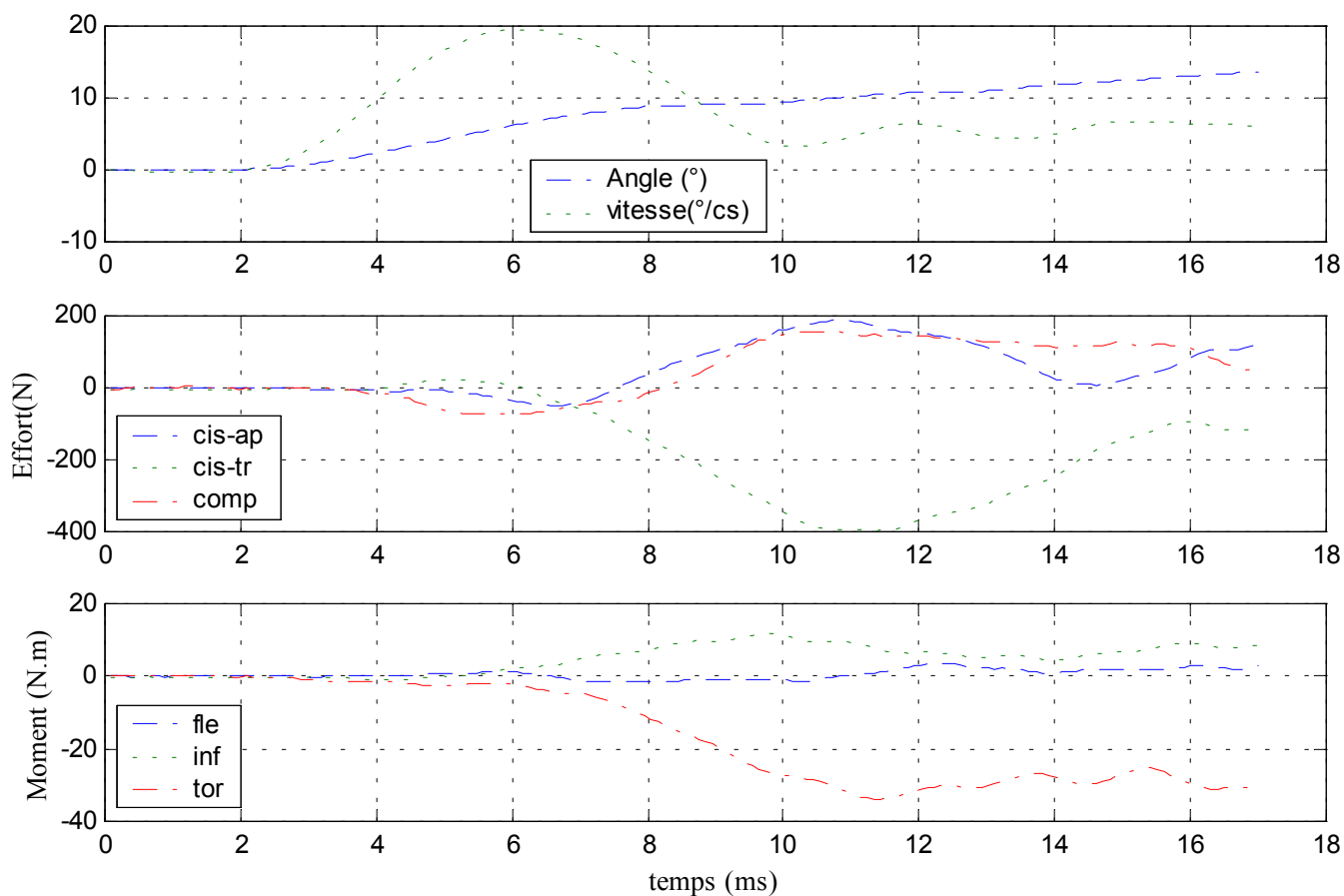
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

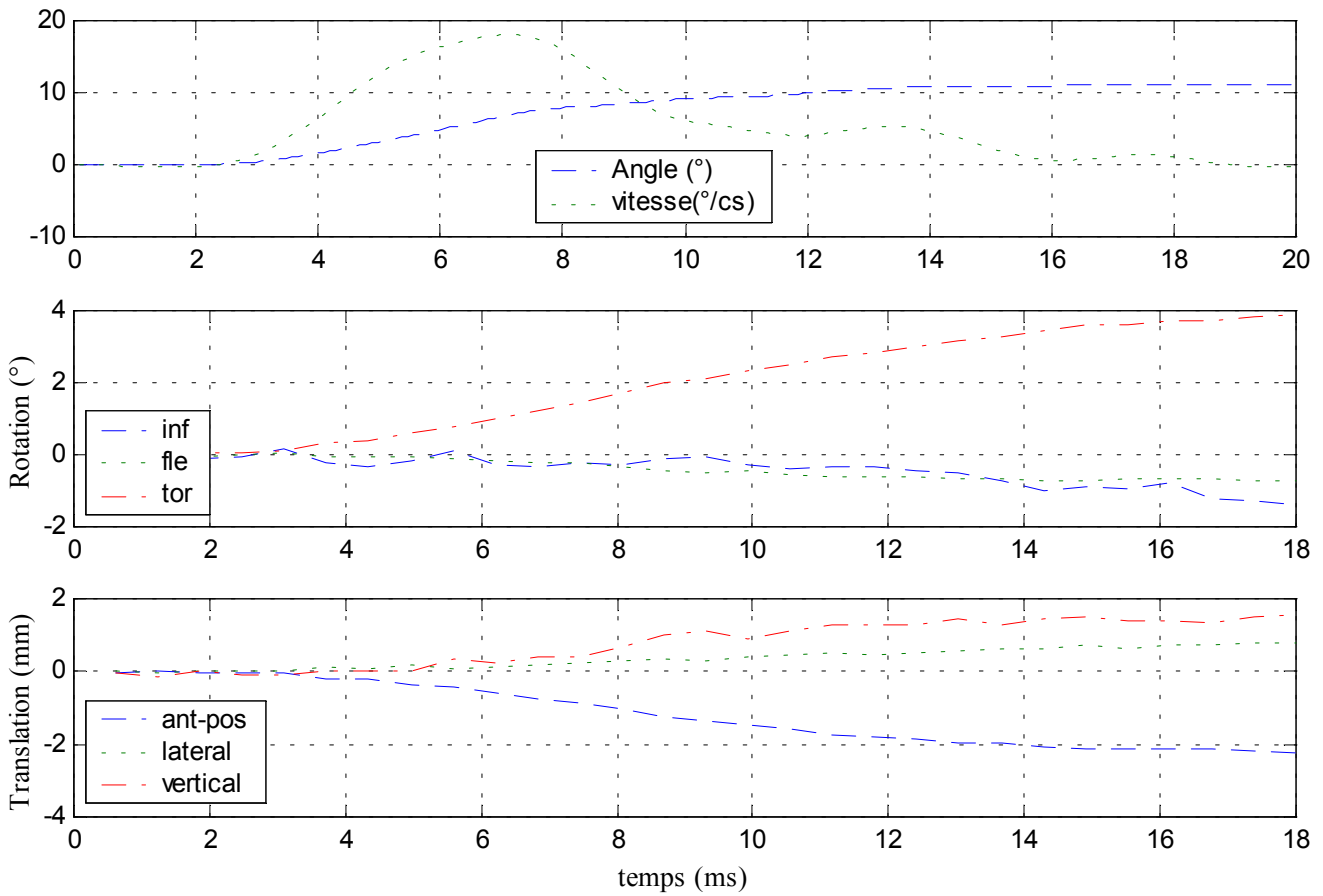


Efforts et moments inférieurs

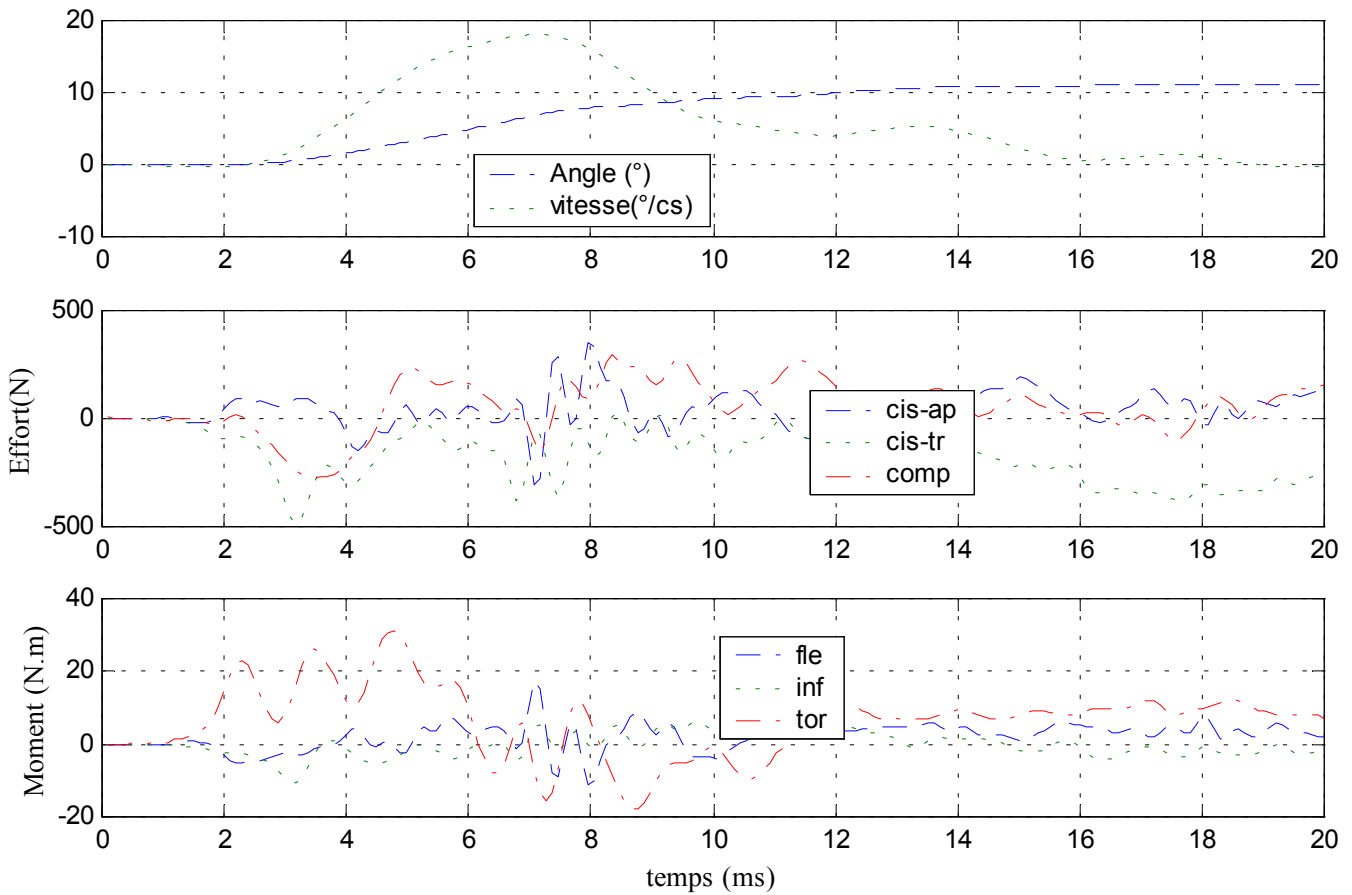


✓ Configuration avec ligaments épineux coupés

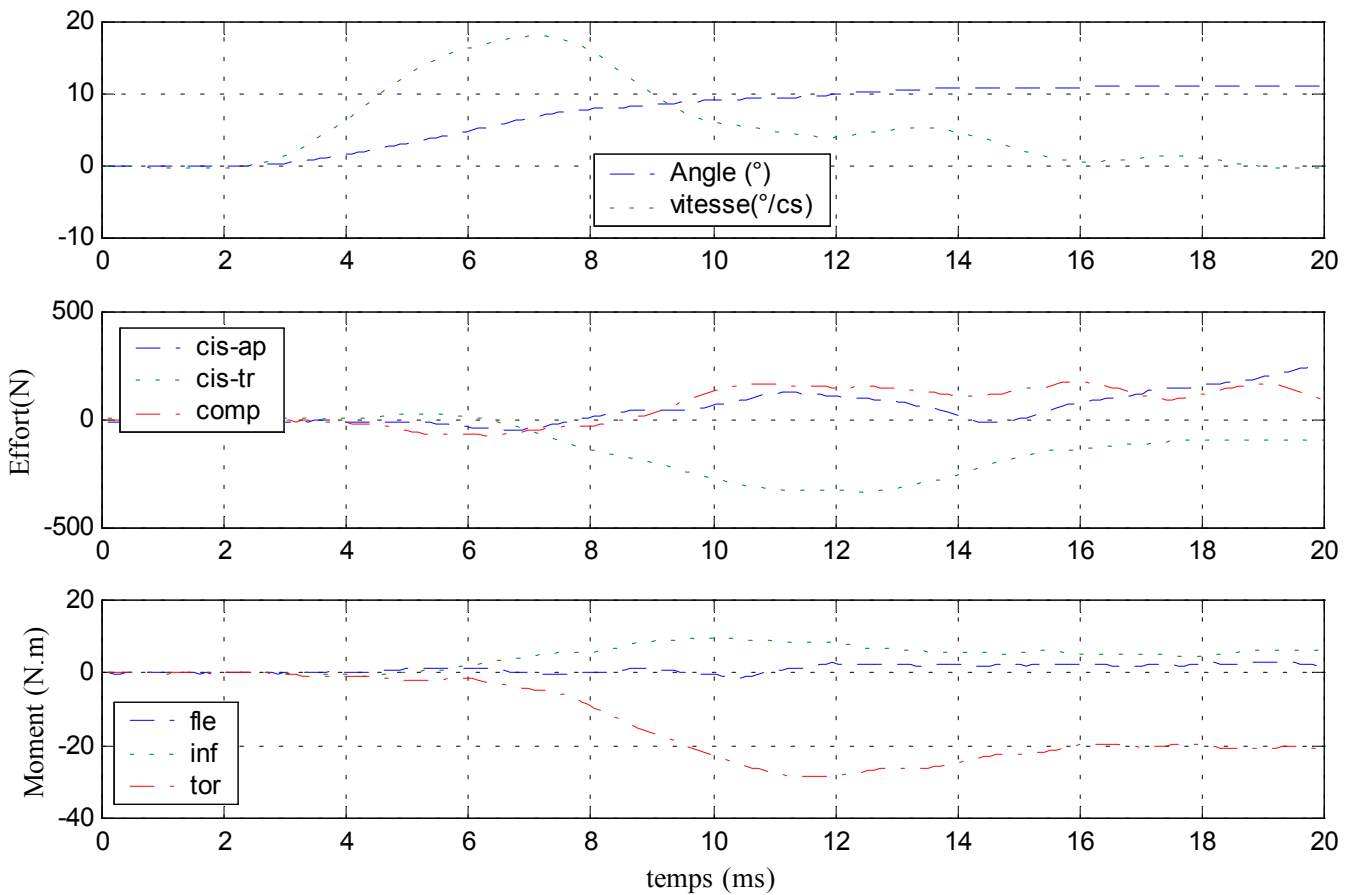
Déplacements



Efforts et moments supérieurs



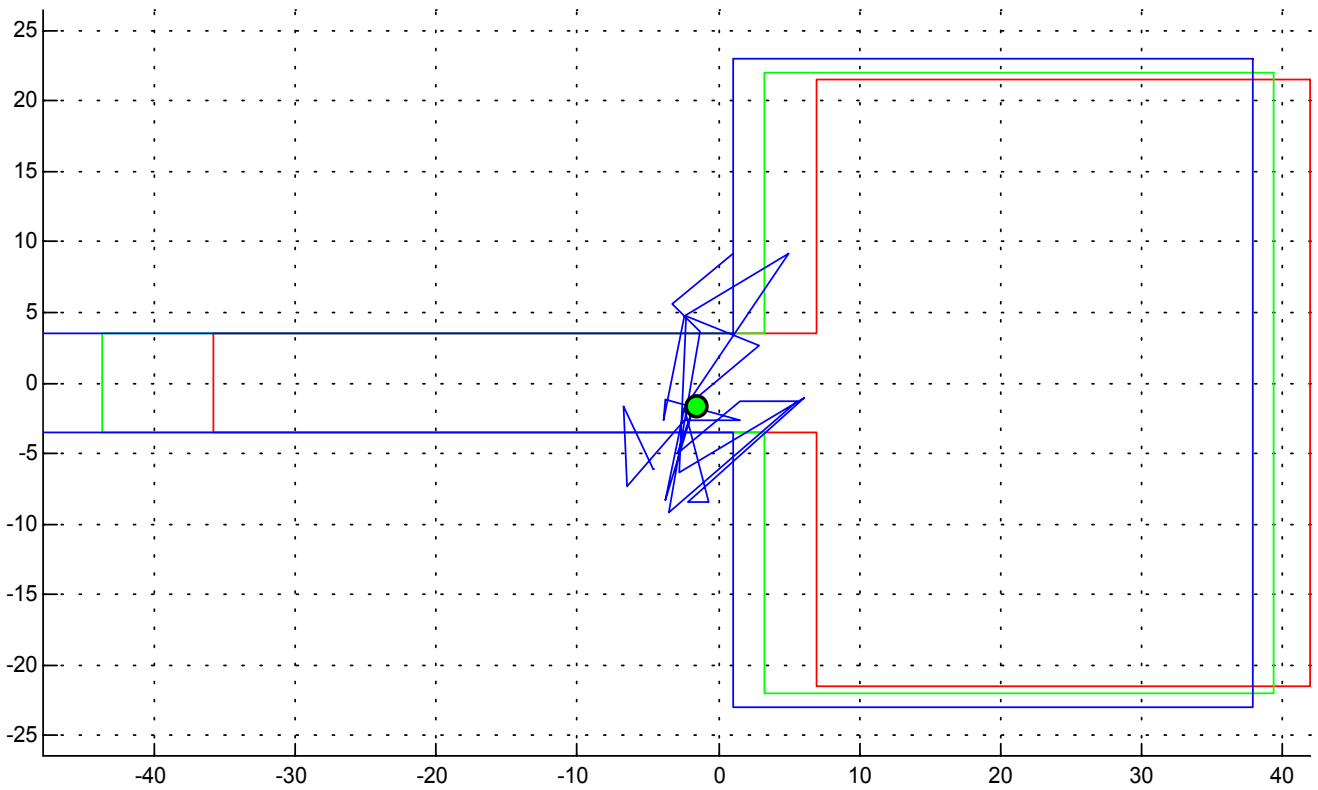
Efforts et moments inférieurs



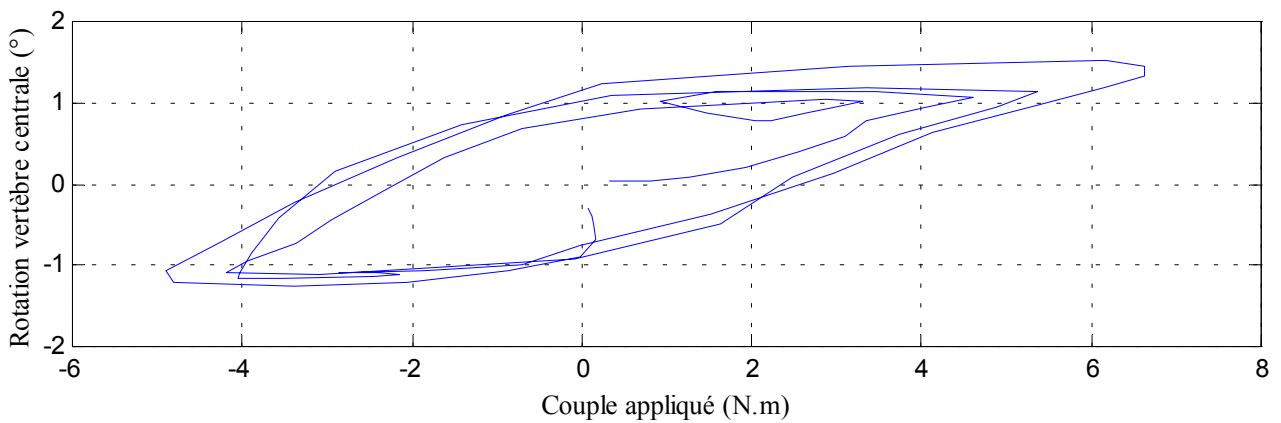
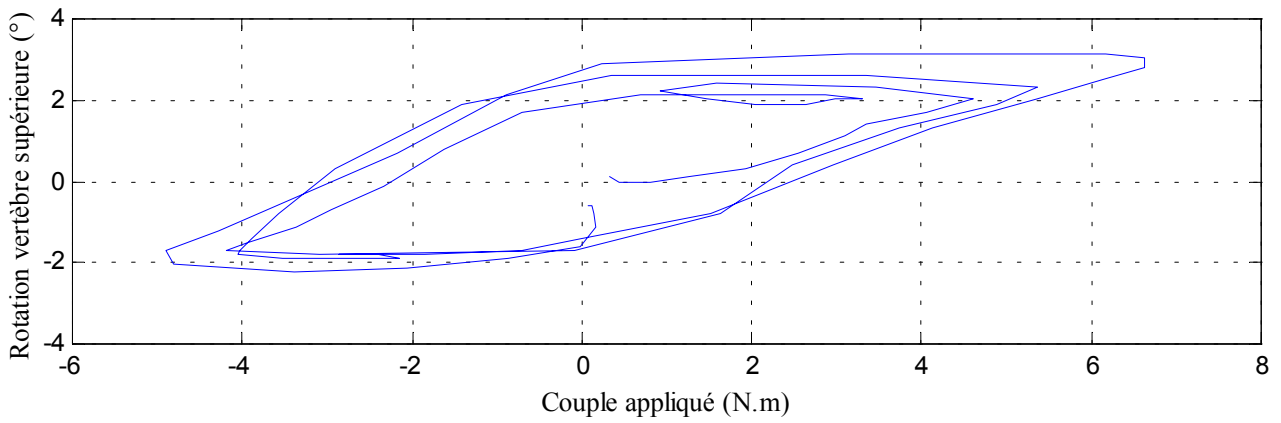
21- Essai 21 – T11L1 – torsion

A. Statique

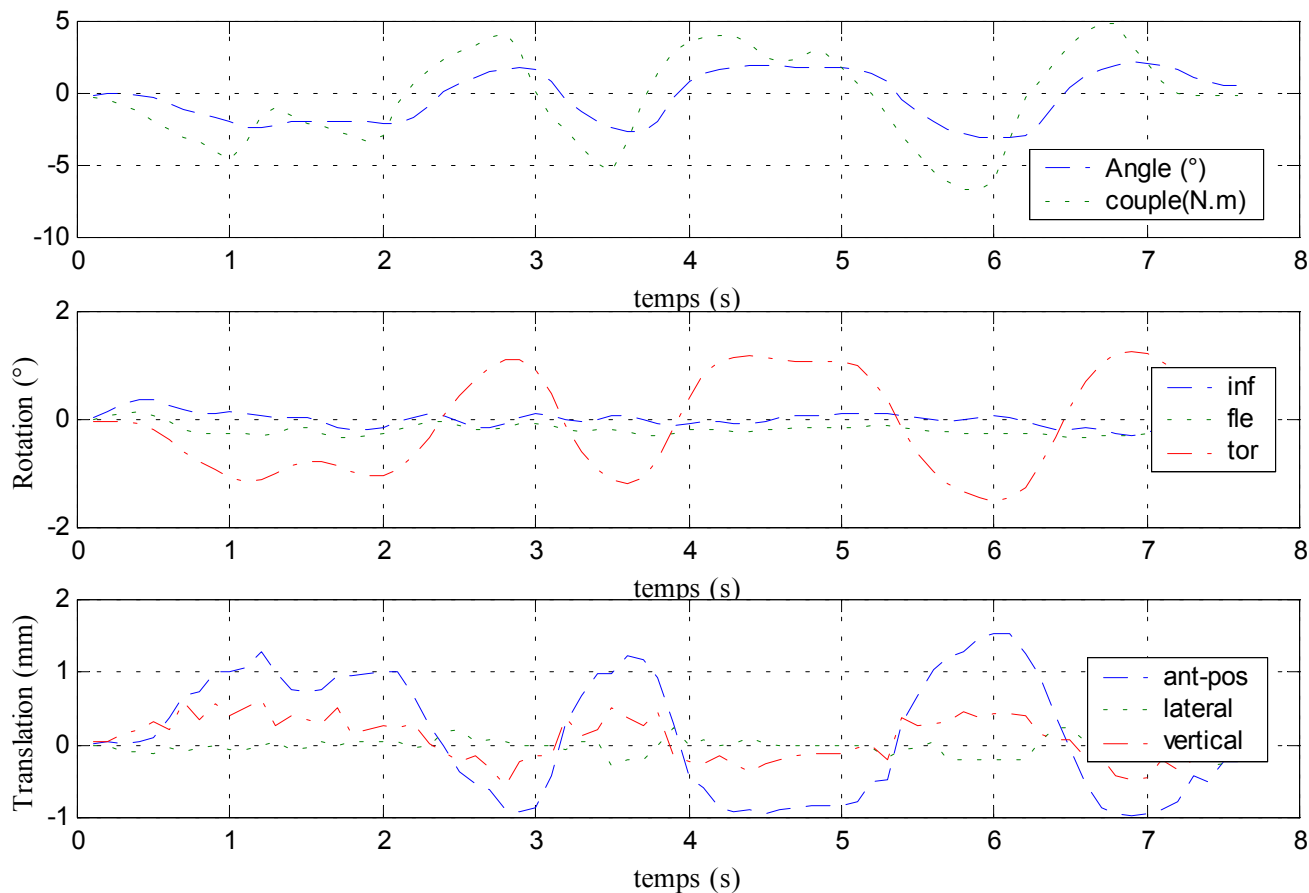
Centre instantané de rotation



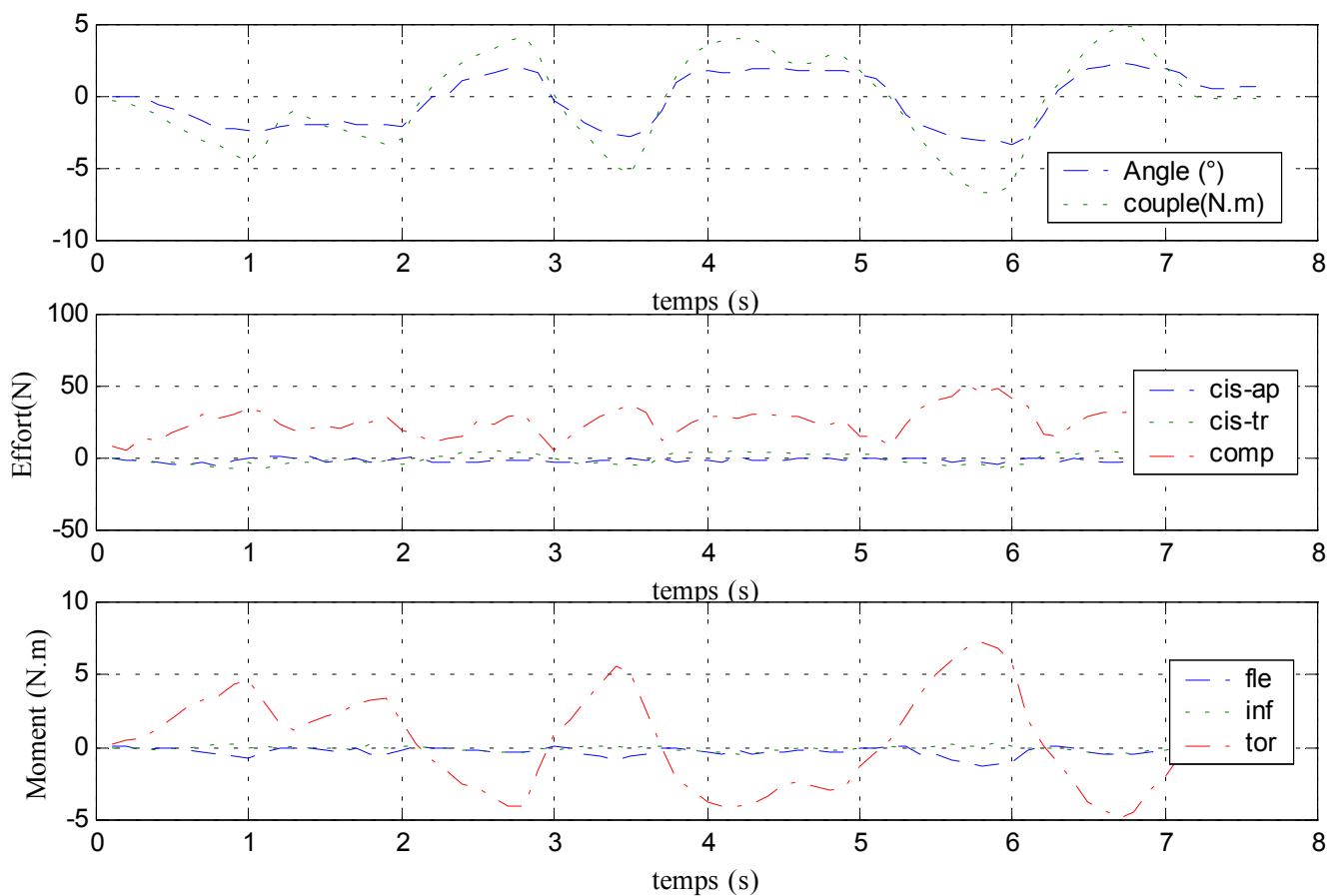
Courbe rotation-couple en hystérésis



Déplacements



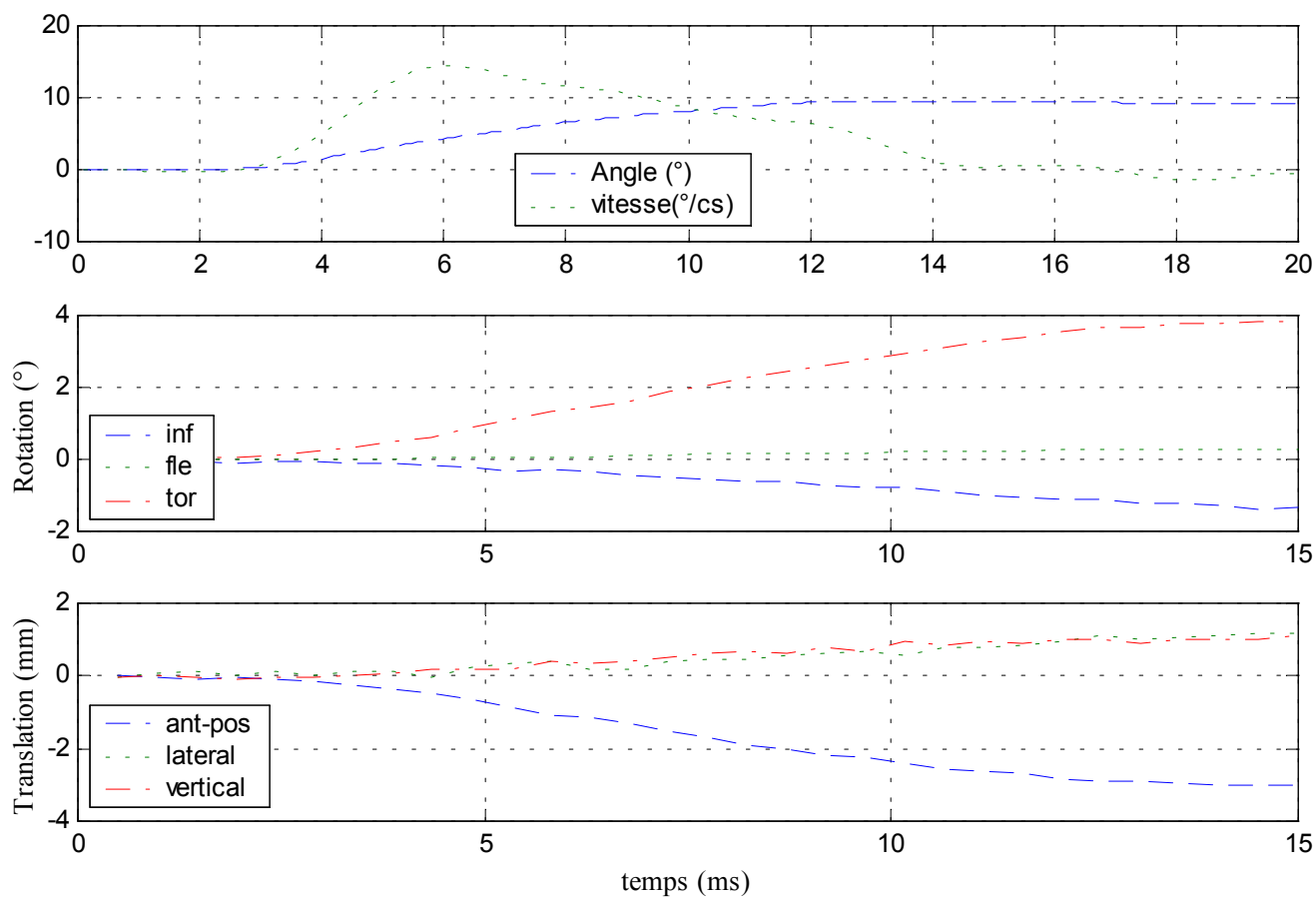
Efforts et moments inférieurs



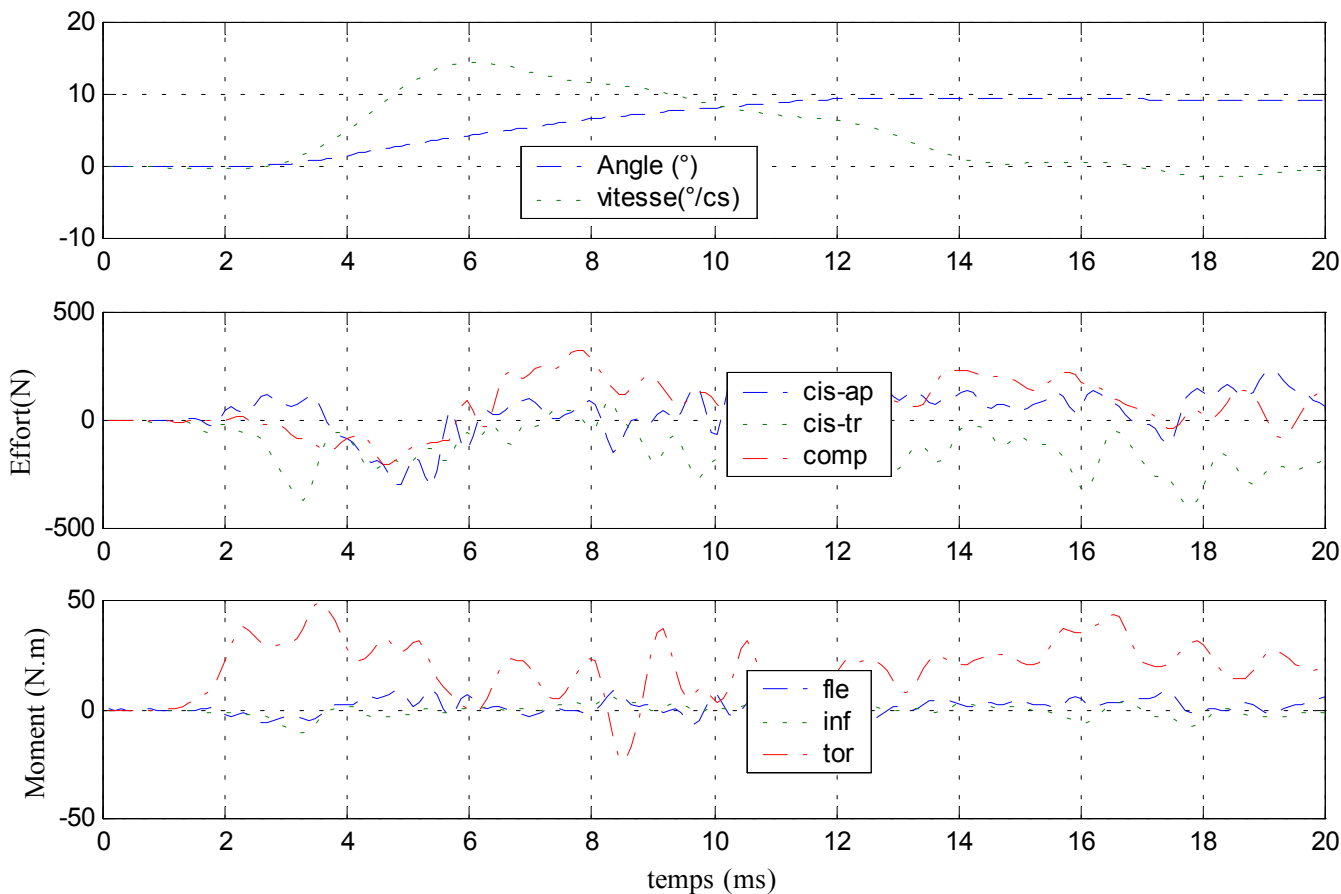
B. Dynamique

✓ Configuration saine

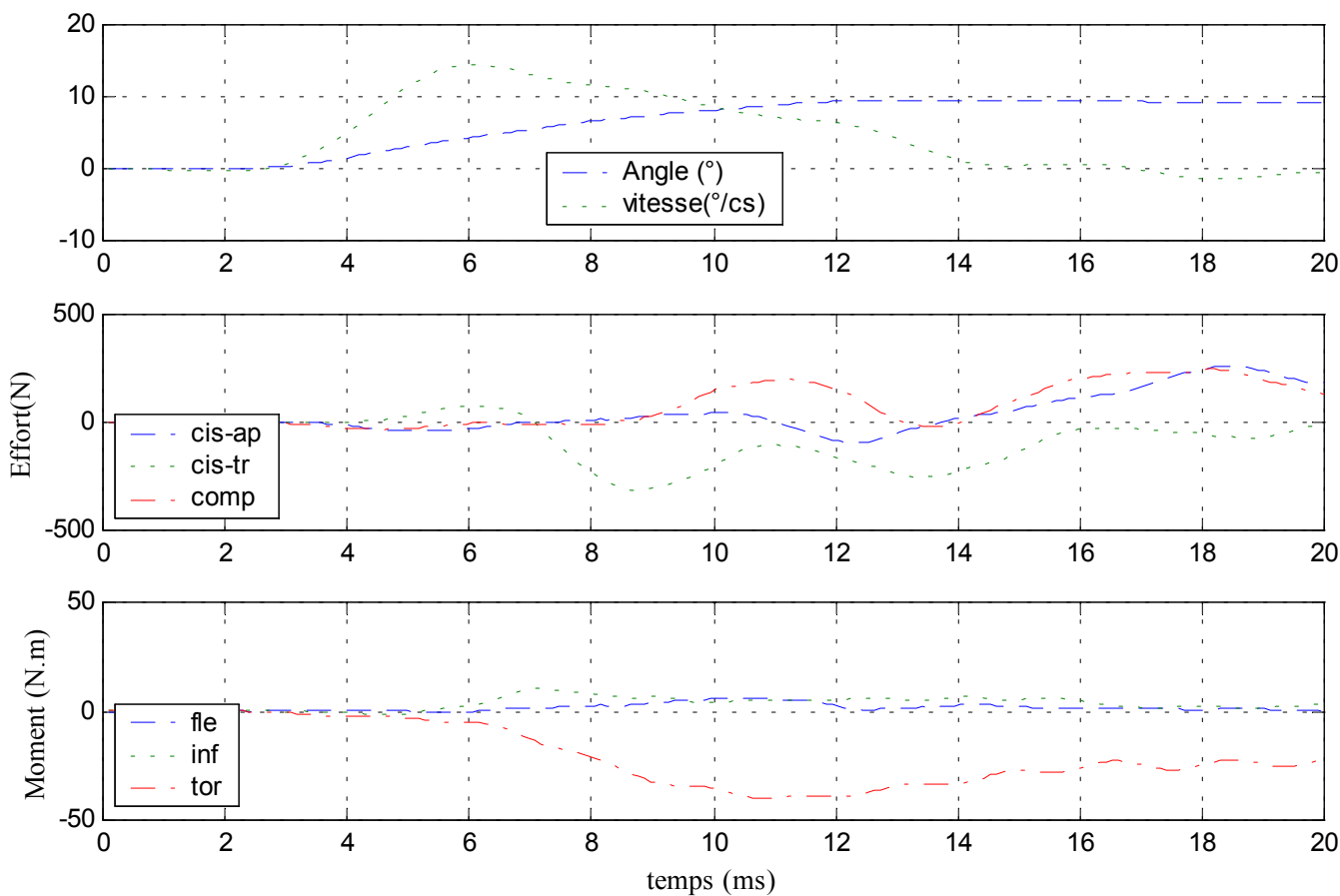
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

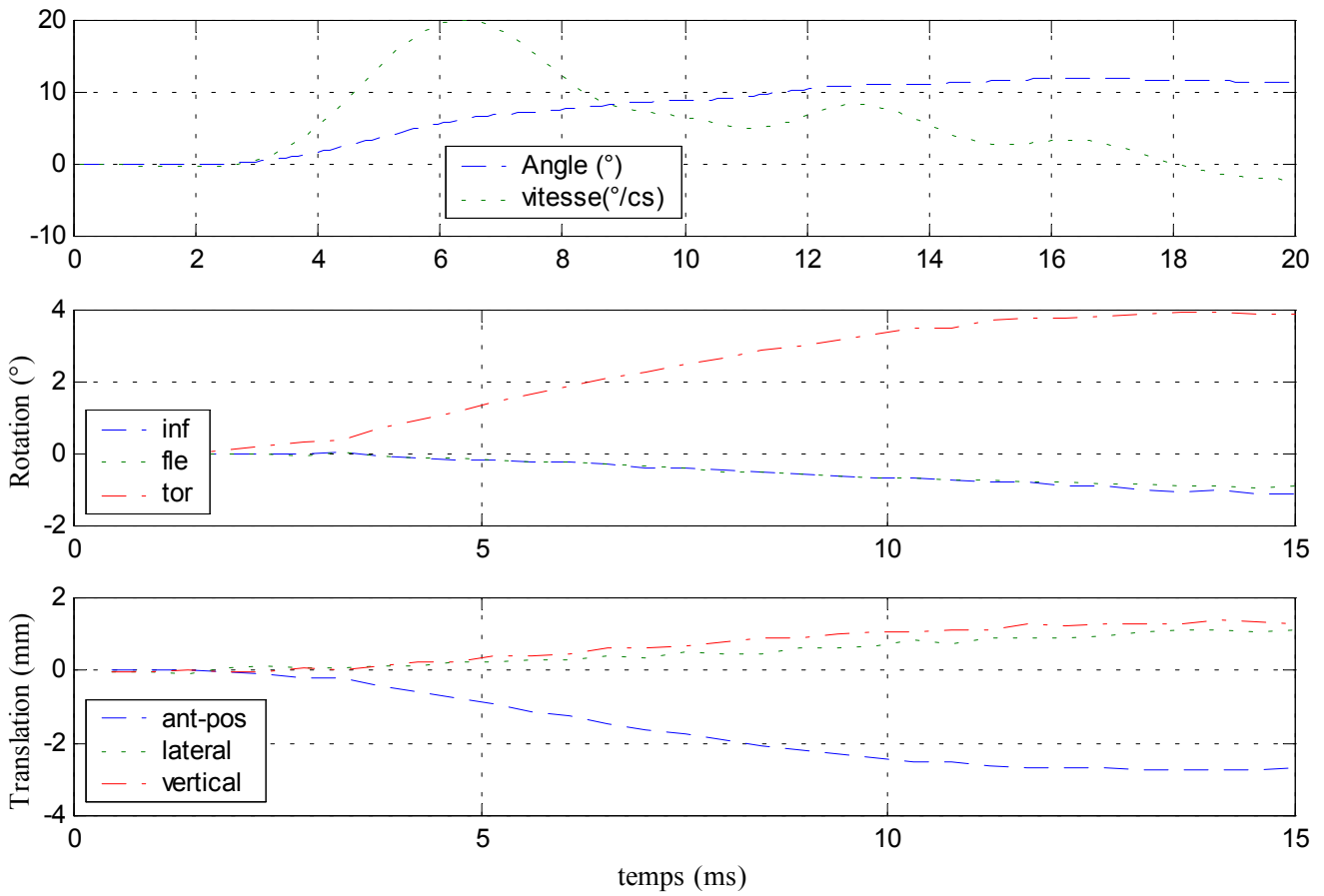


Efforts et moments inférieurs

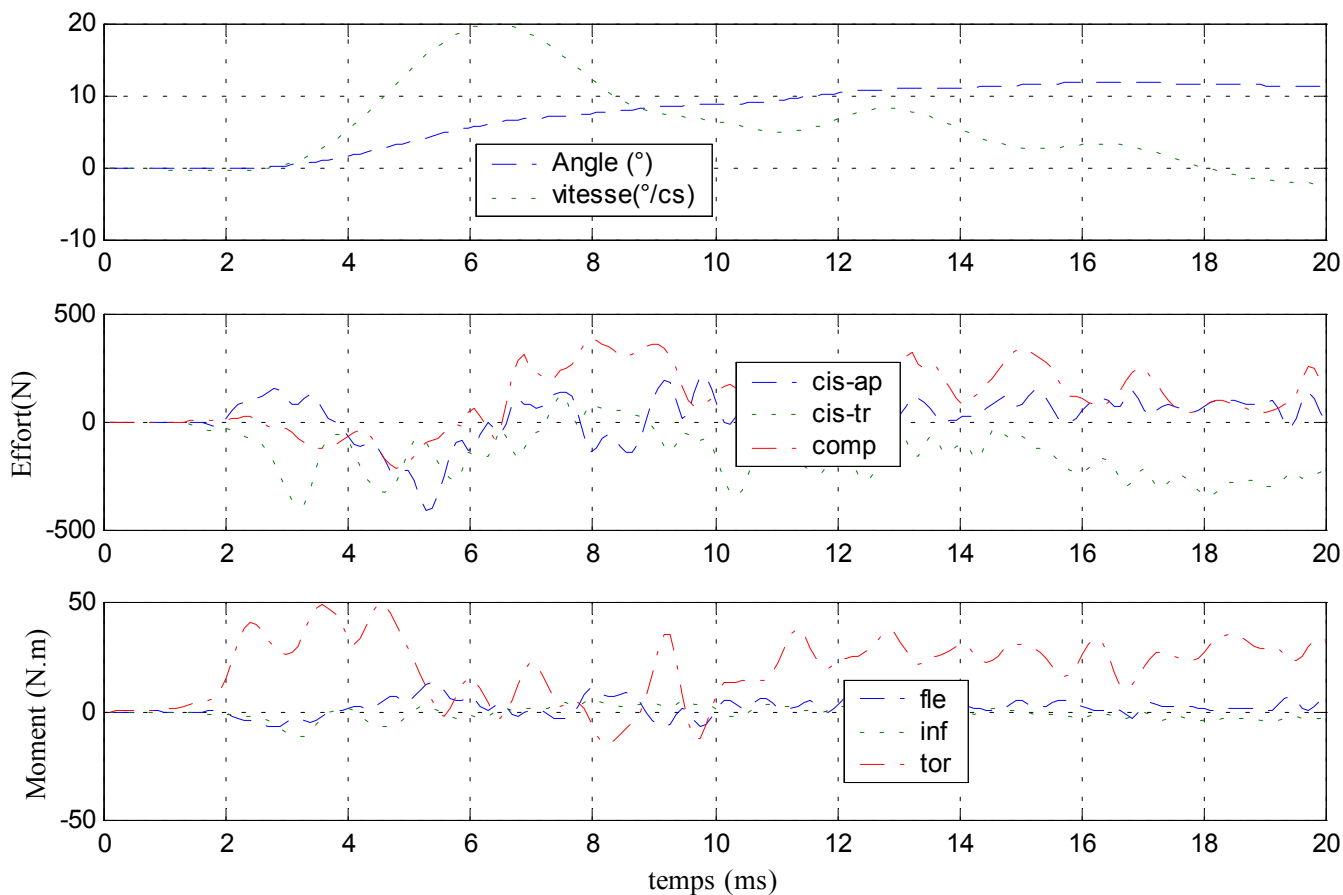


✓ Configuration avec ligaments jaunes coupés

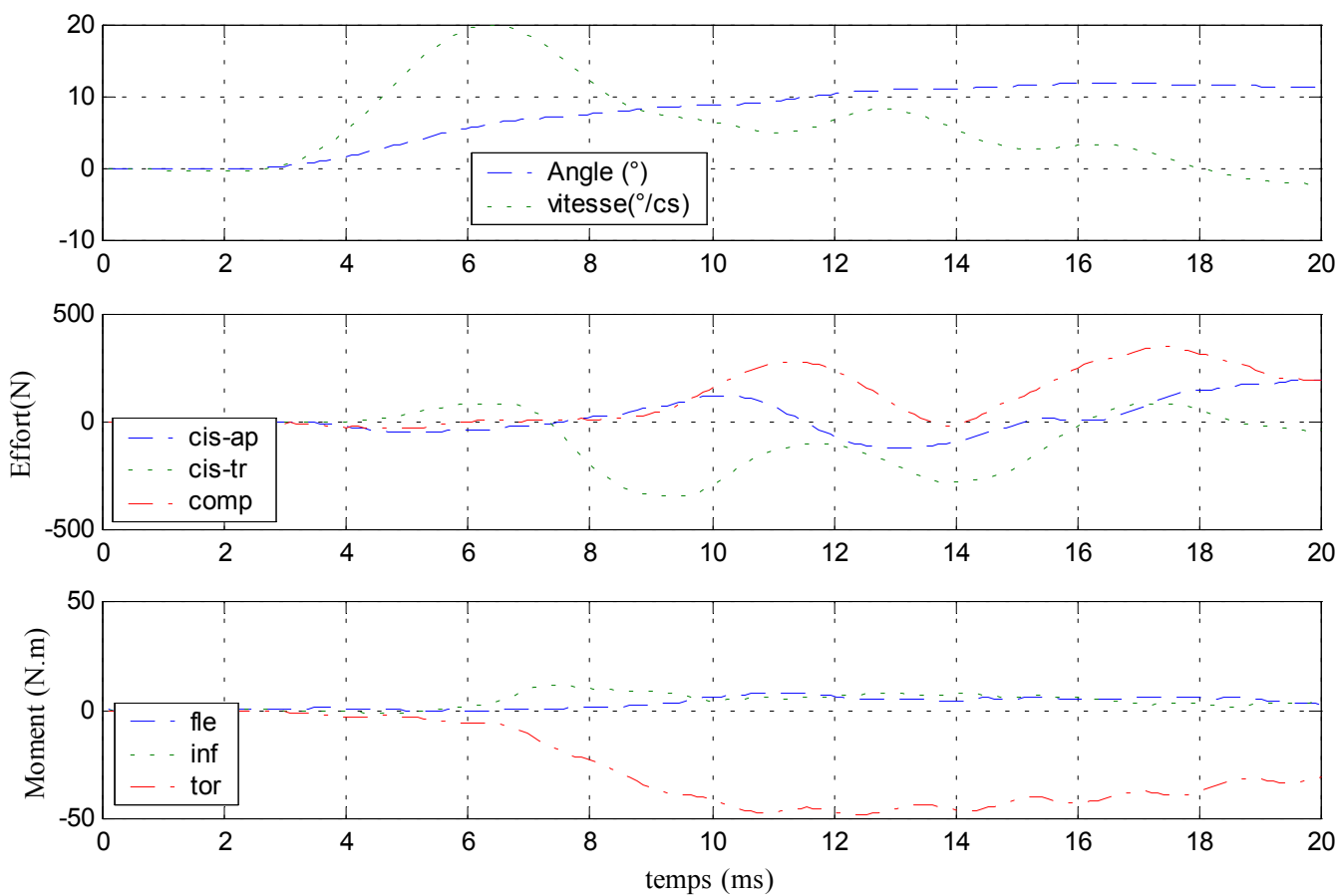
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

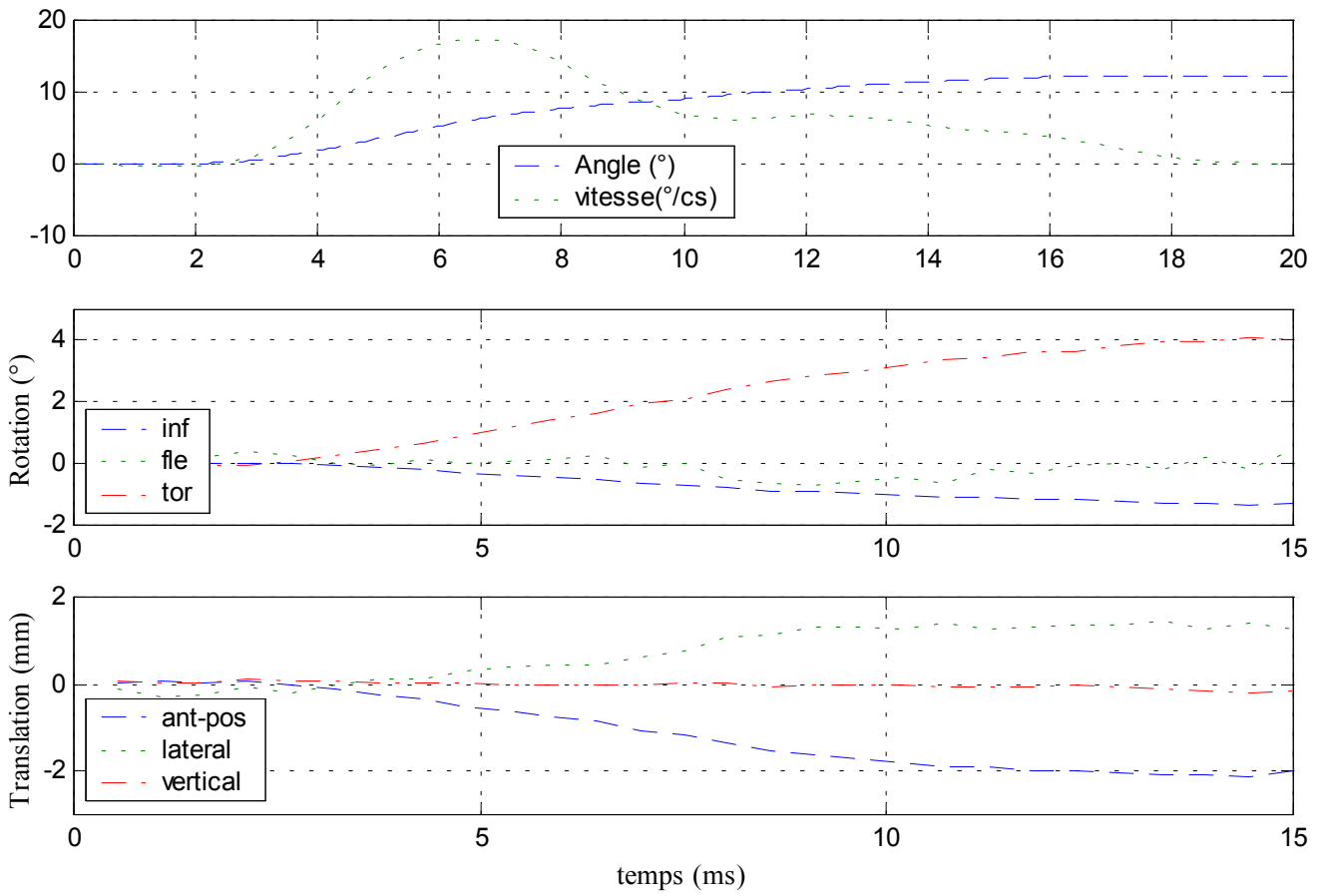


Efforts et moments inférieurs

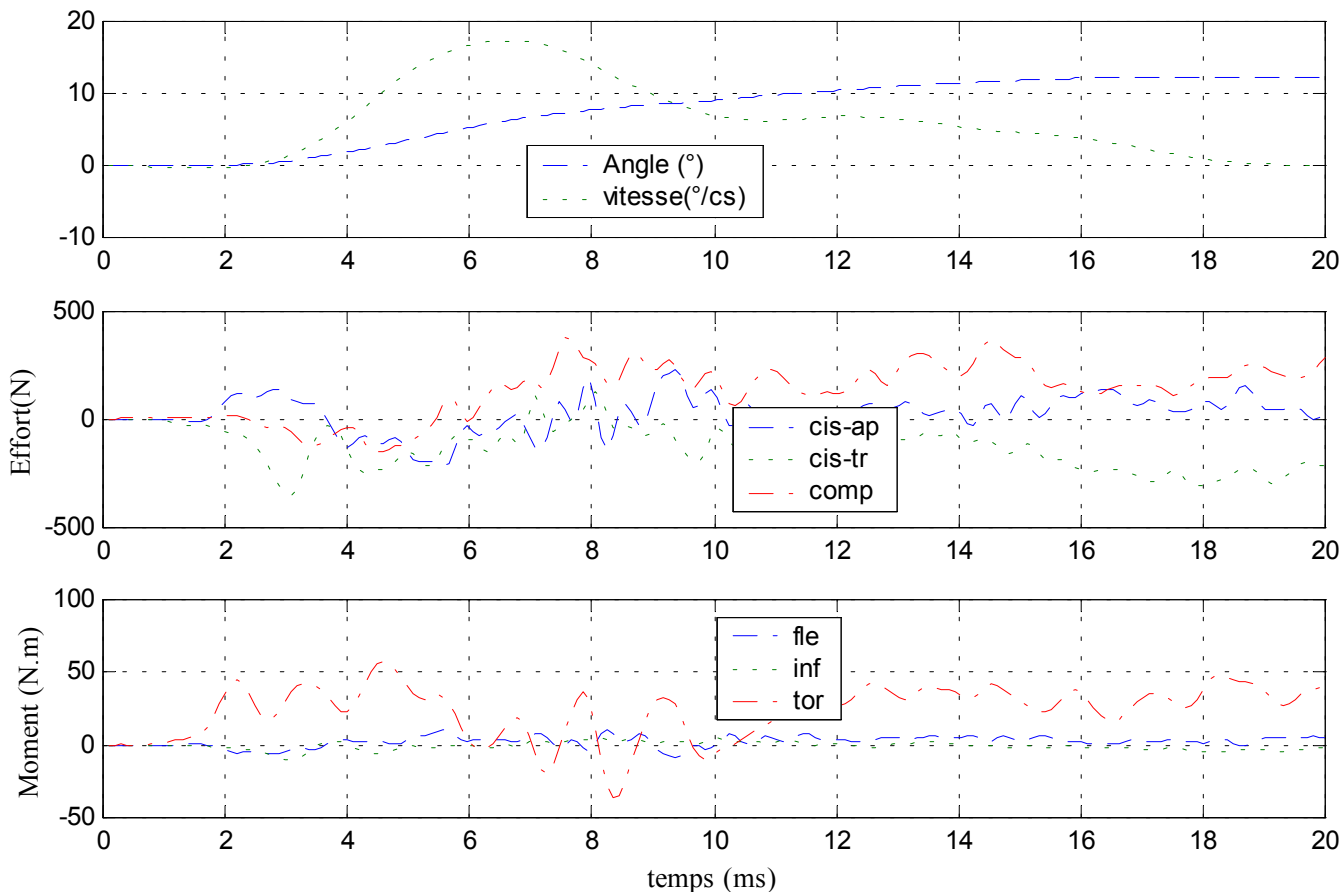


✓ Configuration avec ligaments épineux coupés

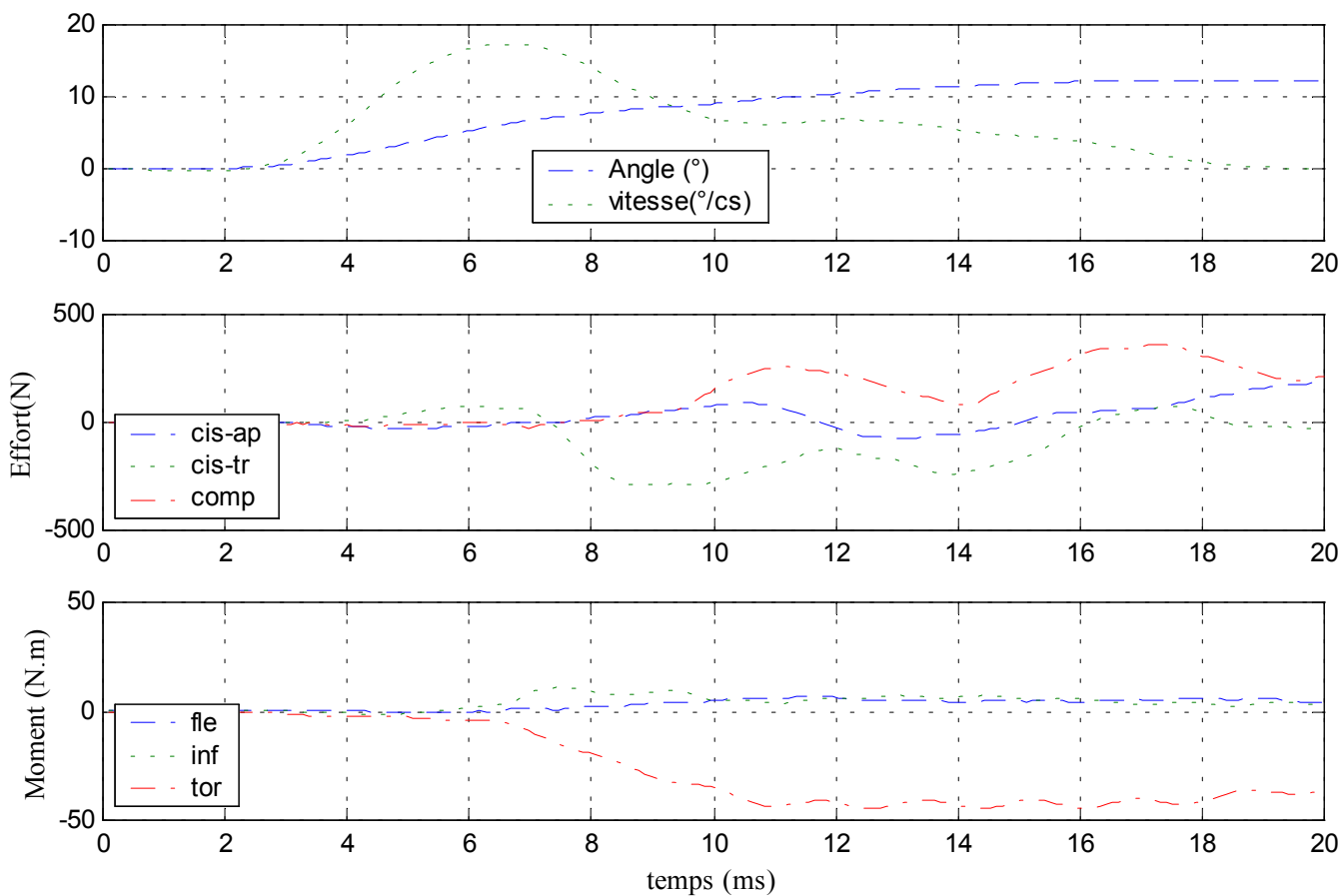
Déplacements



Efforts et moments supérieurs



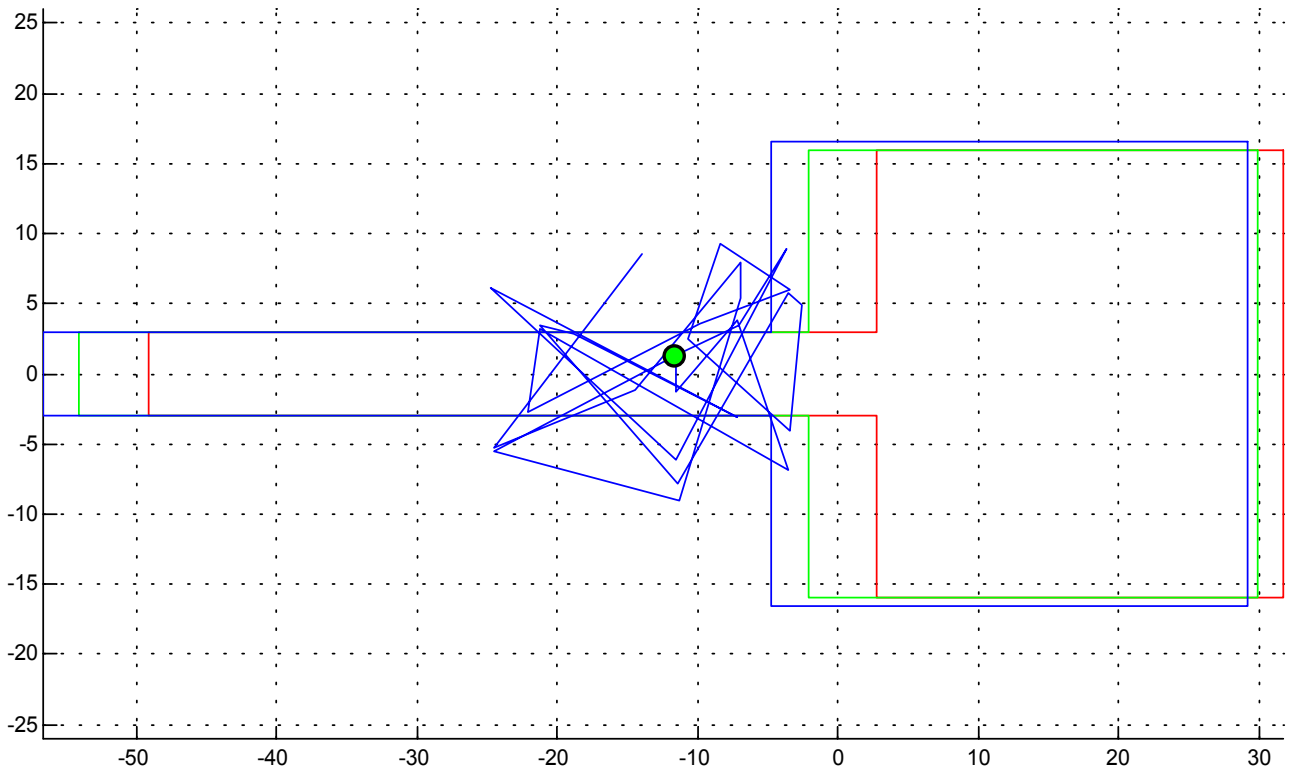
Efforts et moments inférieurs



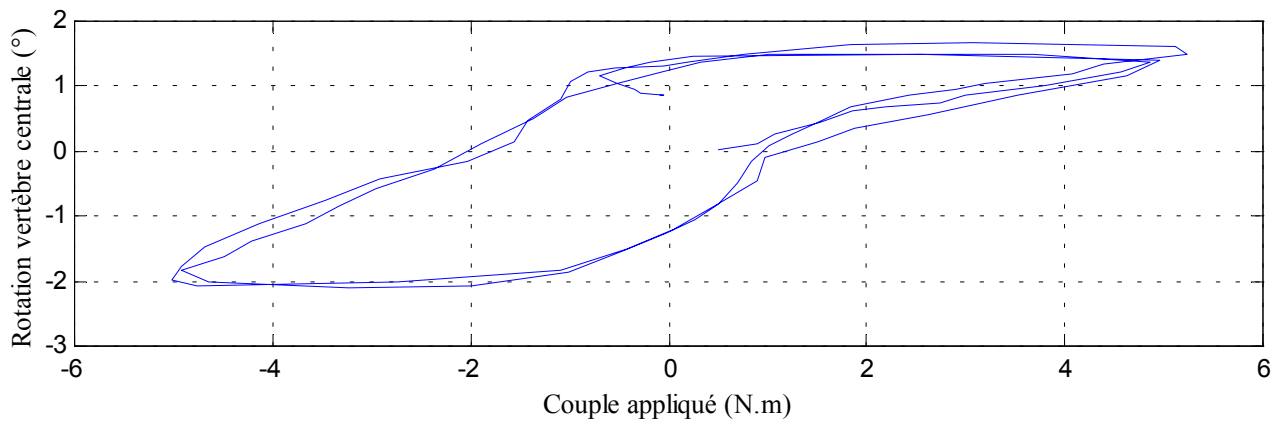
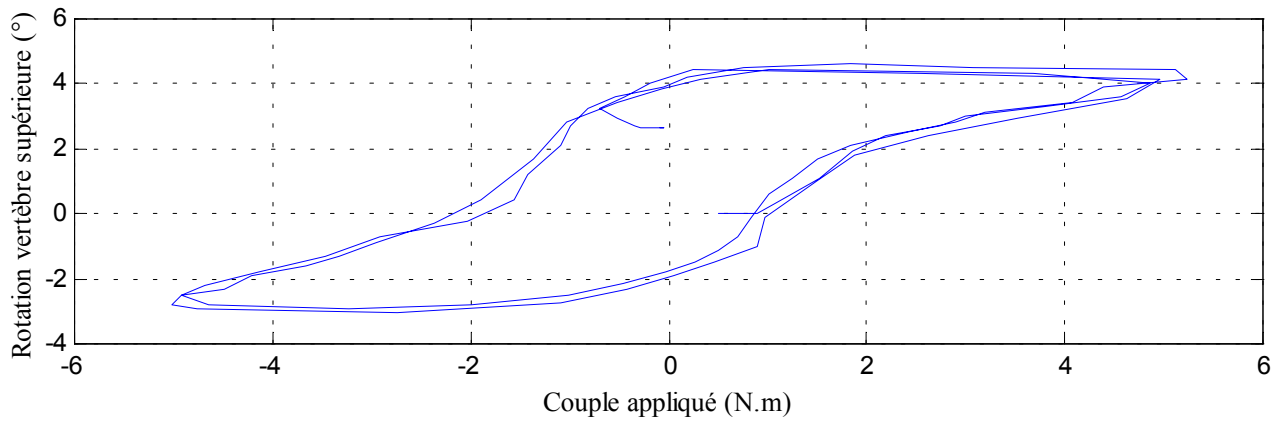
22- Essai 22 – T7T9 – torsion

A. Statique

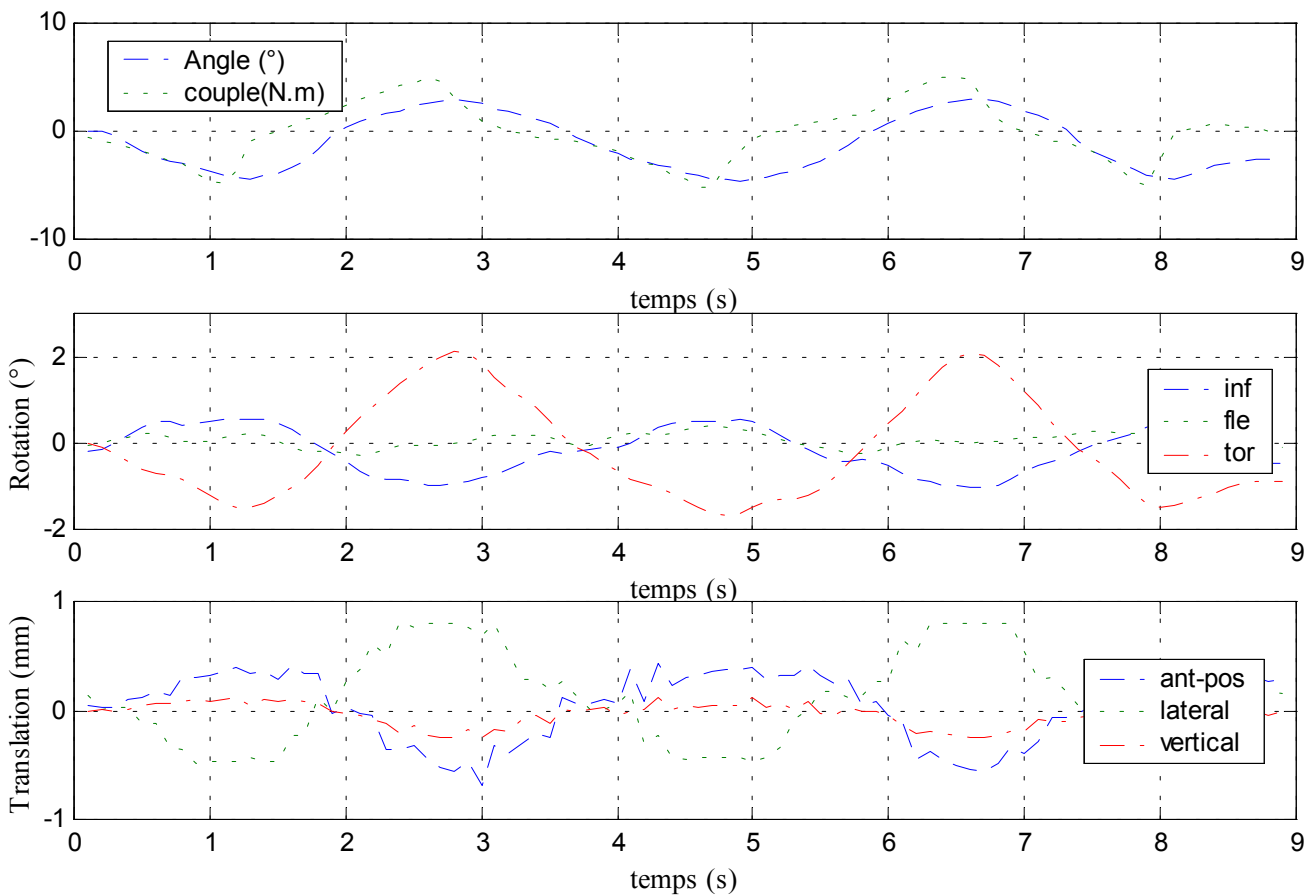
Centre instantané de rotation



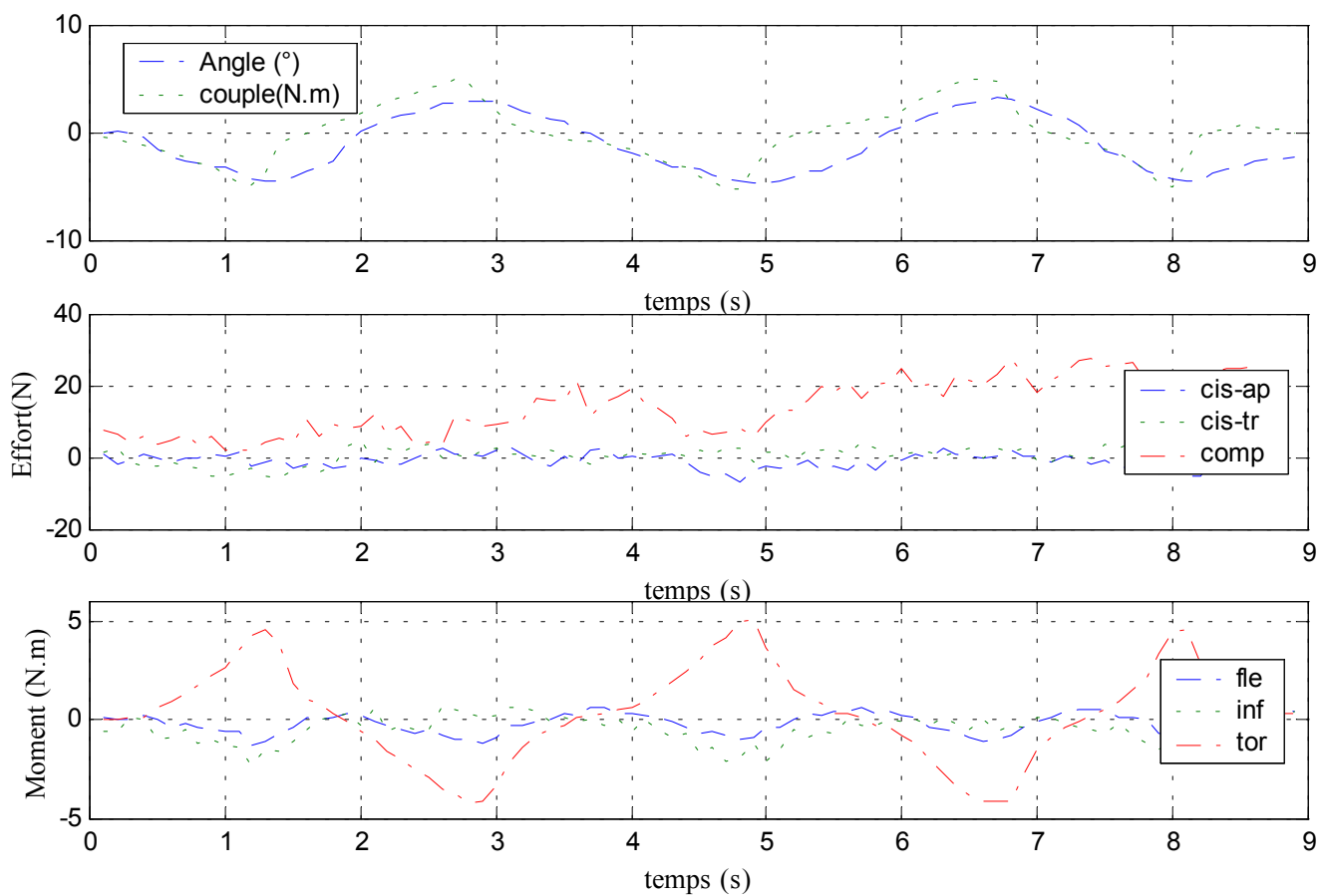
Courbe rotation-couple en hystérésis



Déplacements



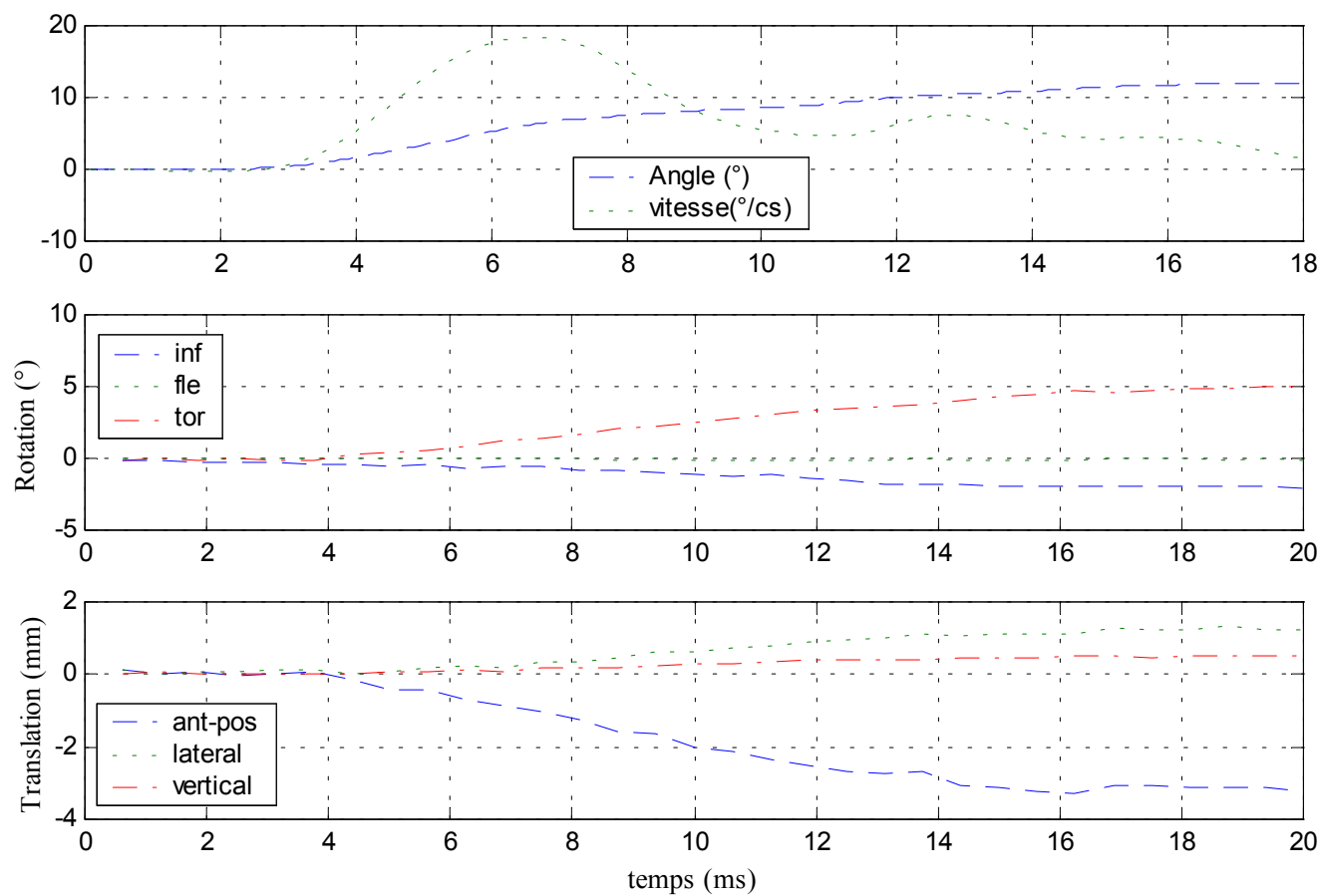
Efforts et moments inférieurs



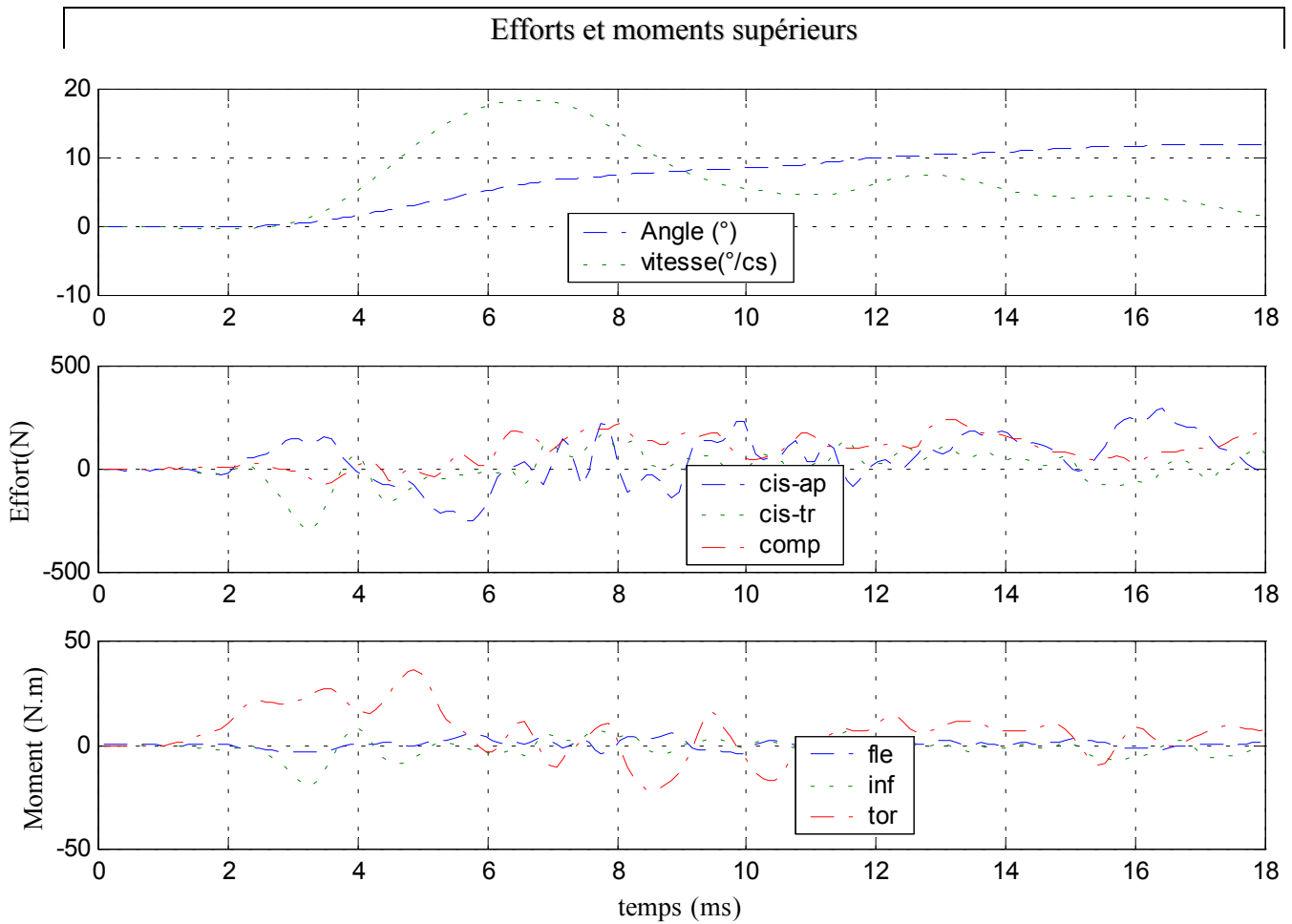
B. Dynamique

✓ Configuration saine

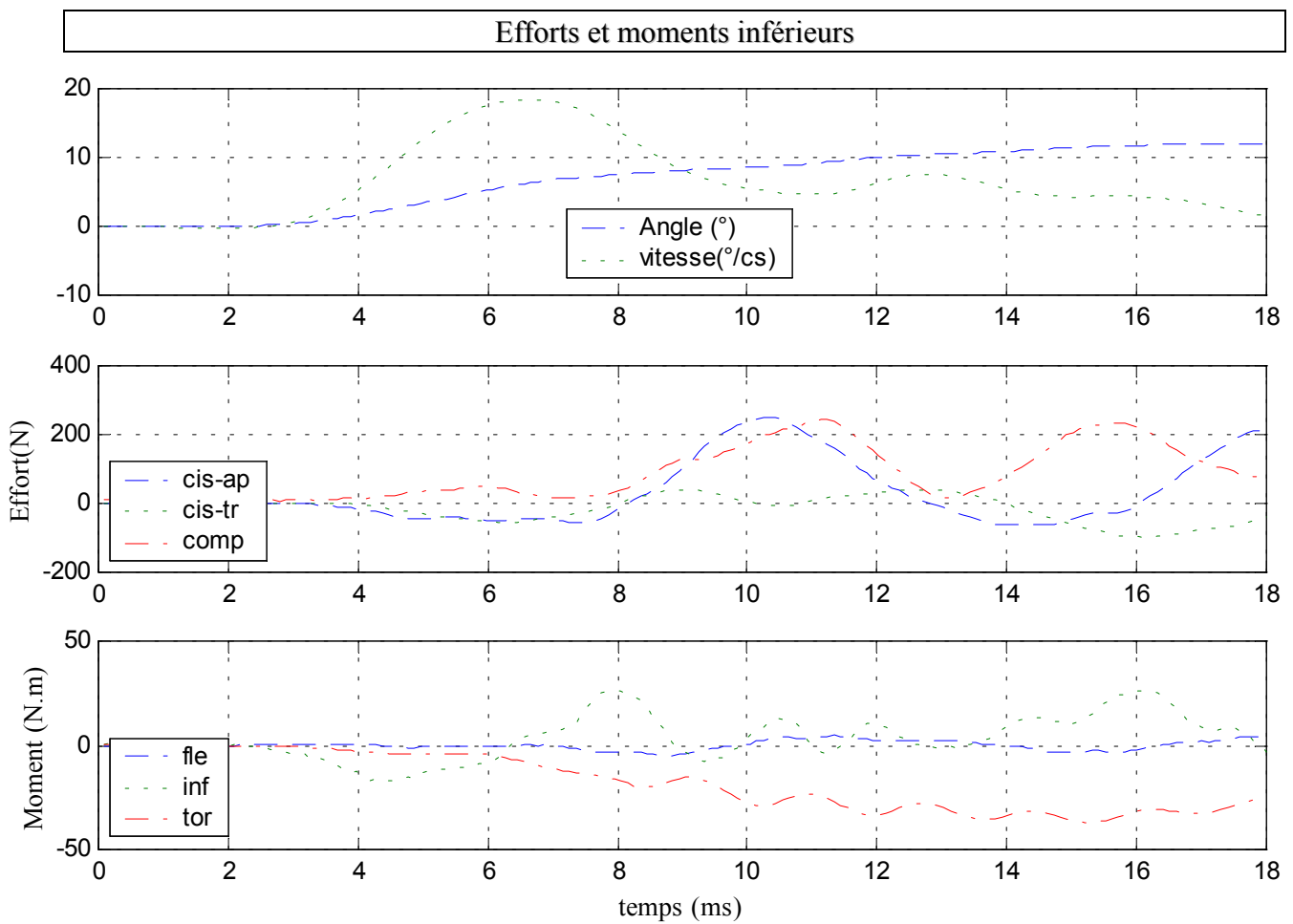
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

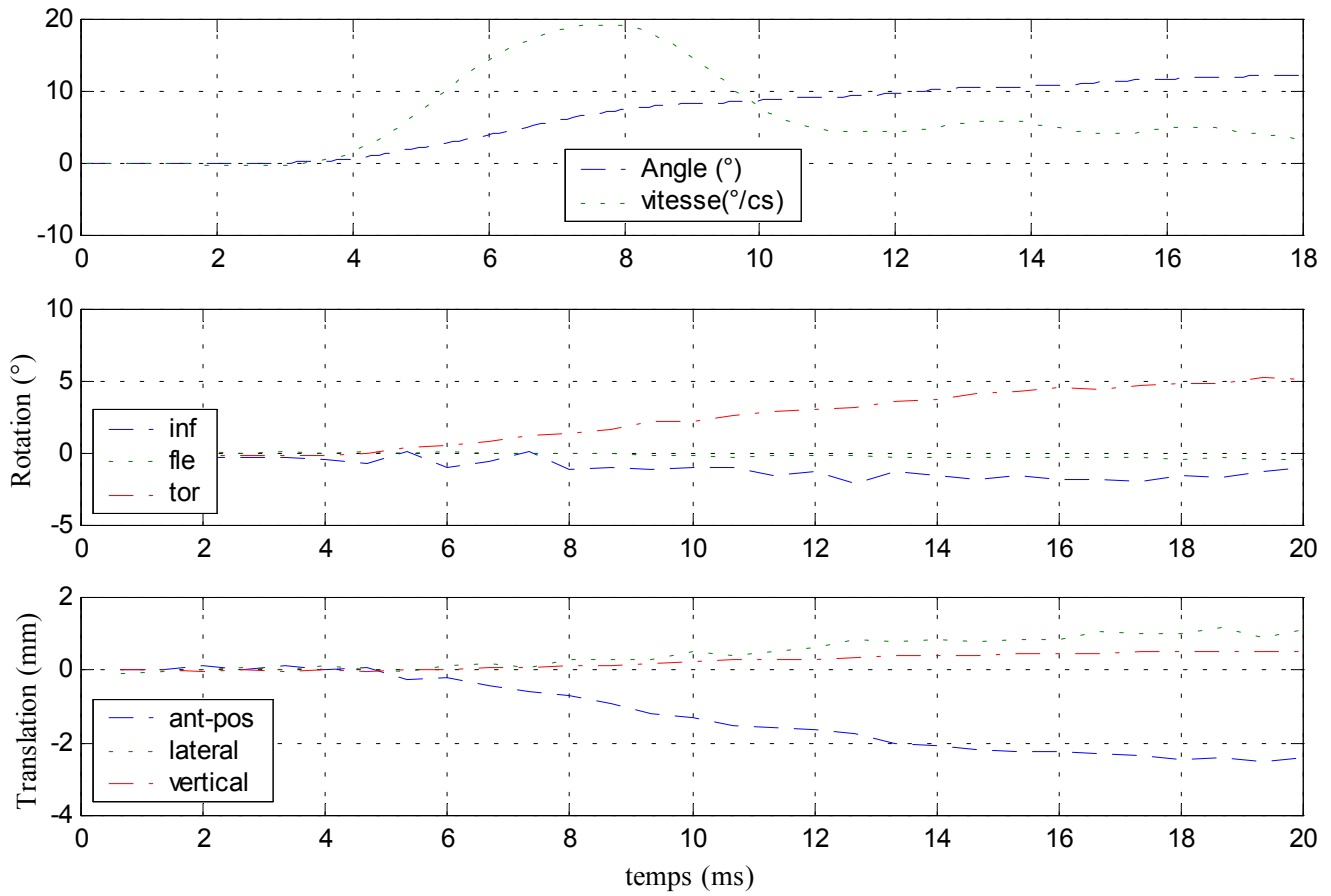


Efforts et moments inférieurs

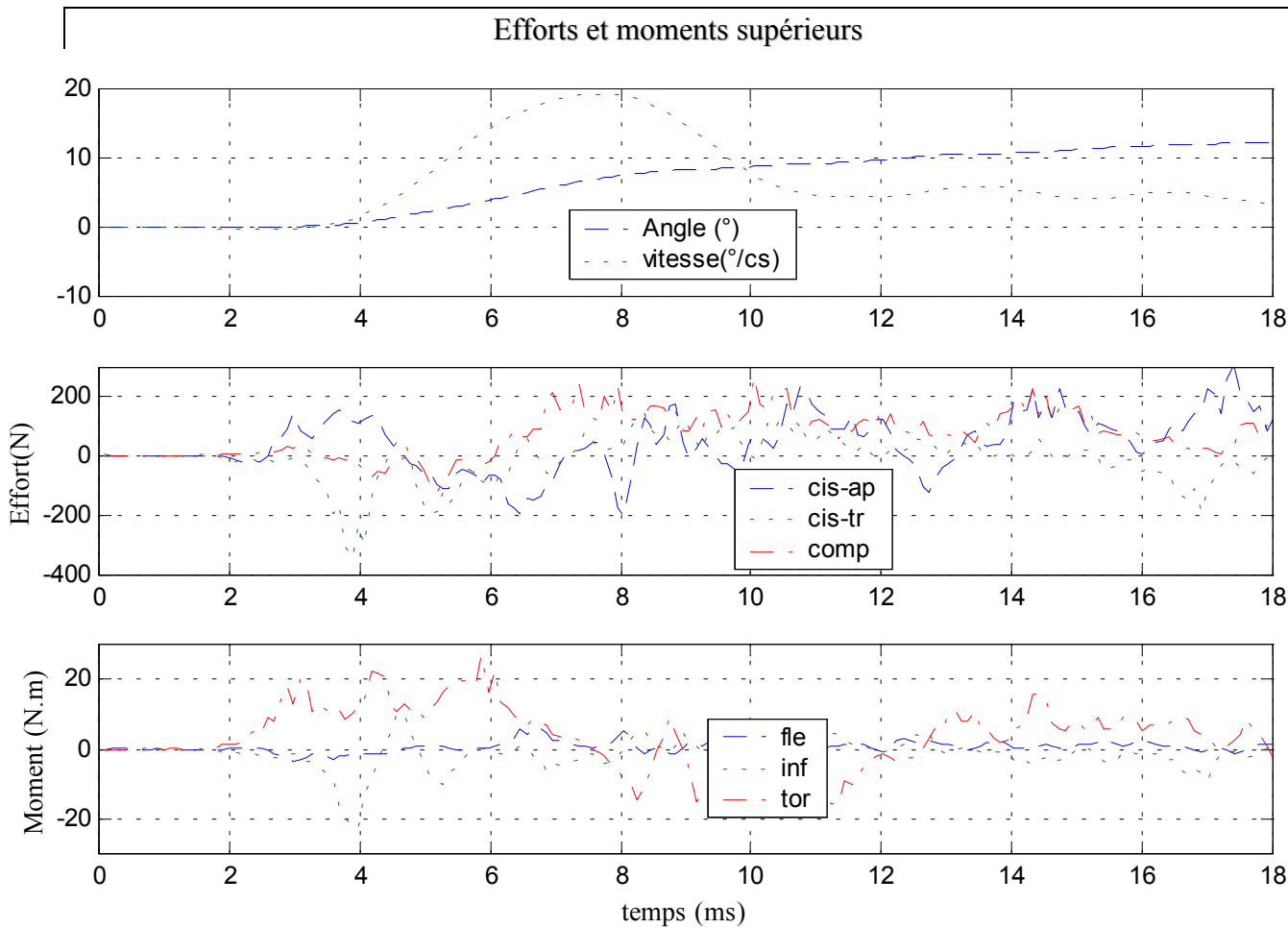


✓ Configuration avec ligaments épineux coupés

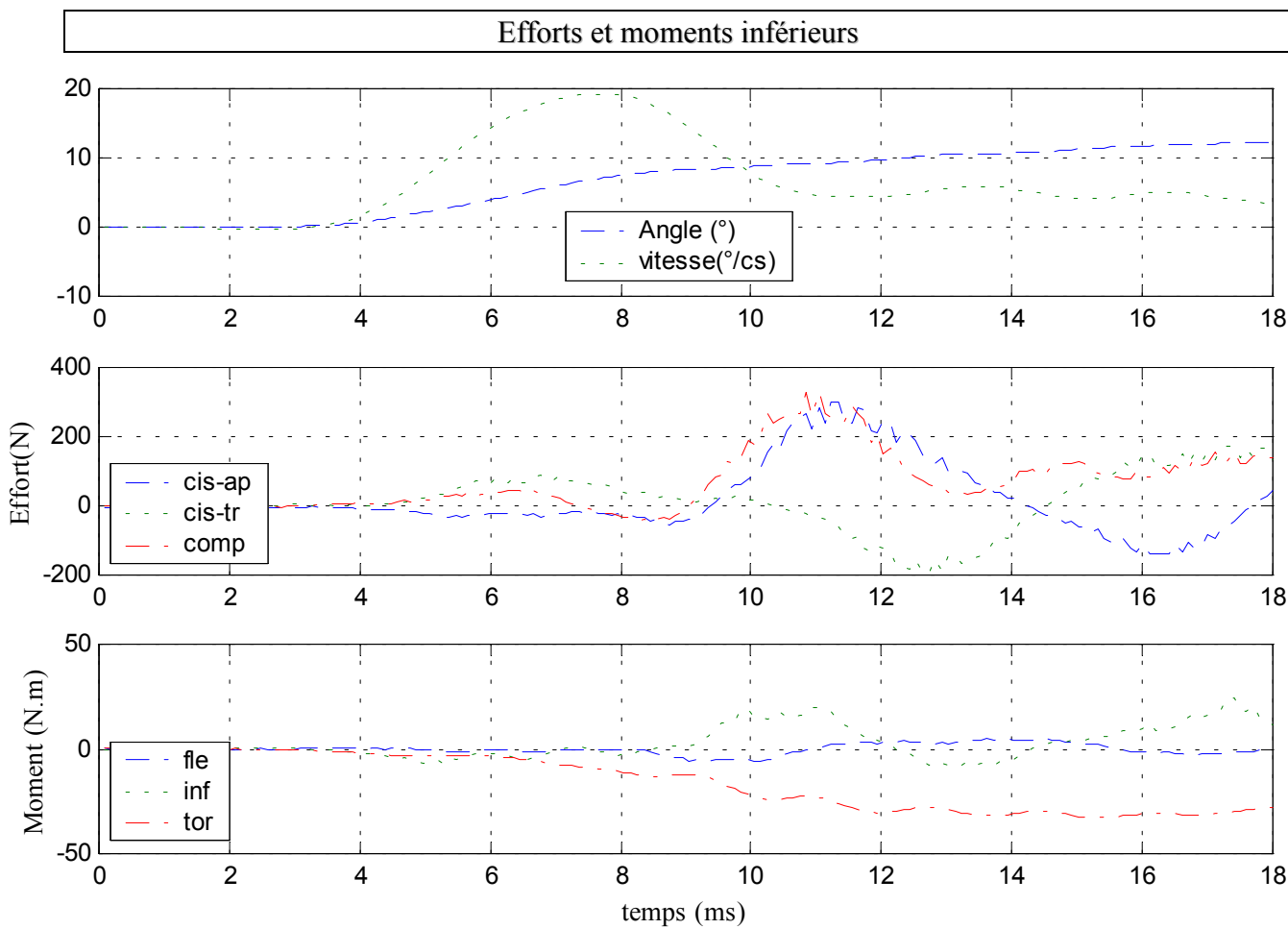
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

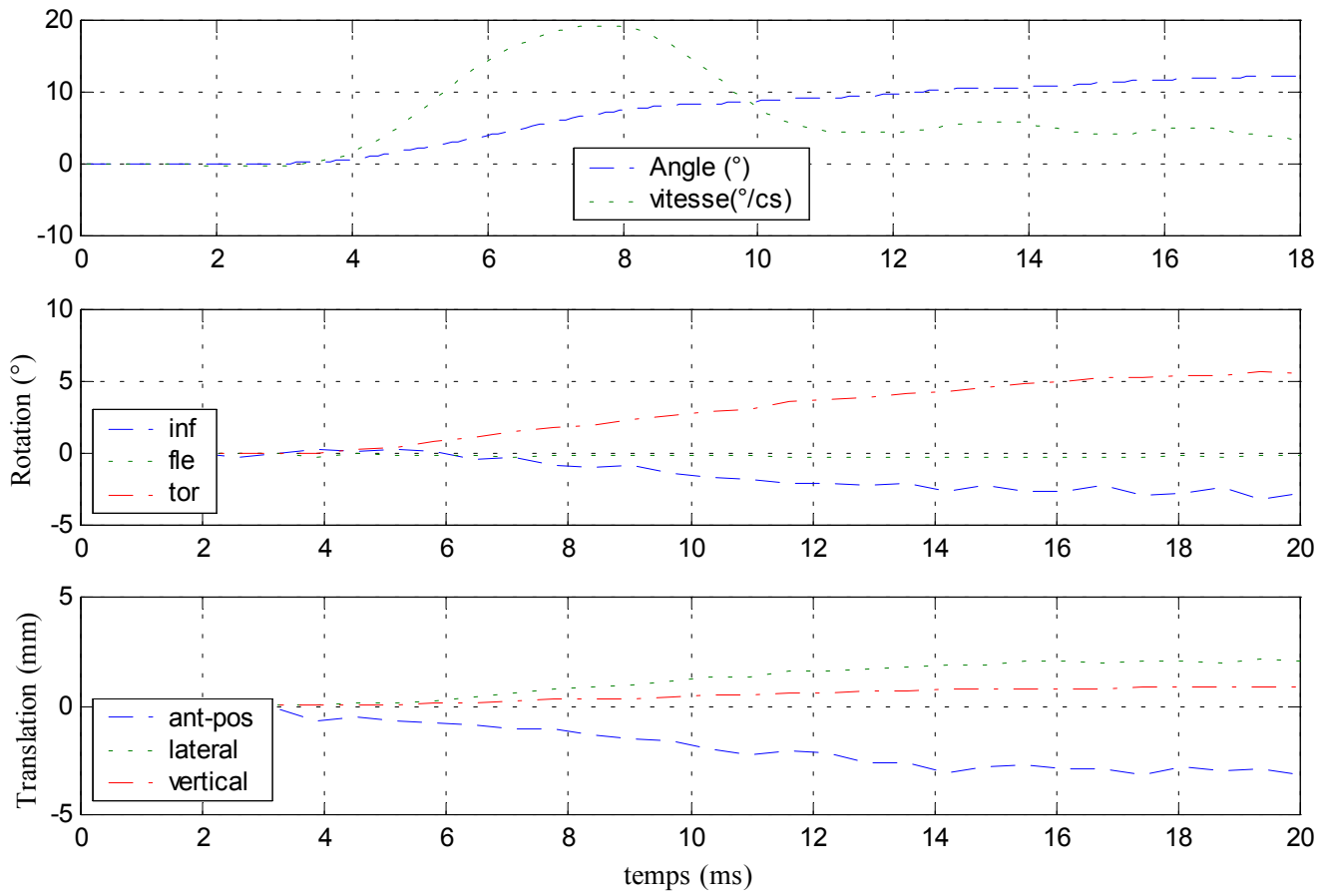


Efforts et moments inférieurs

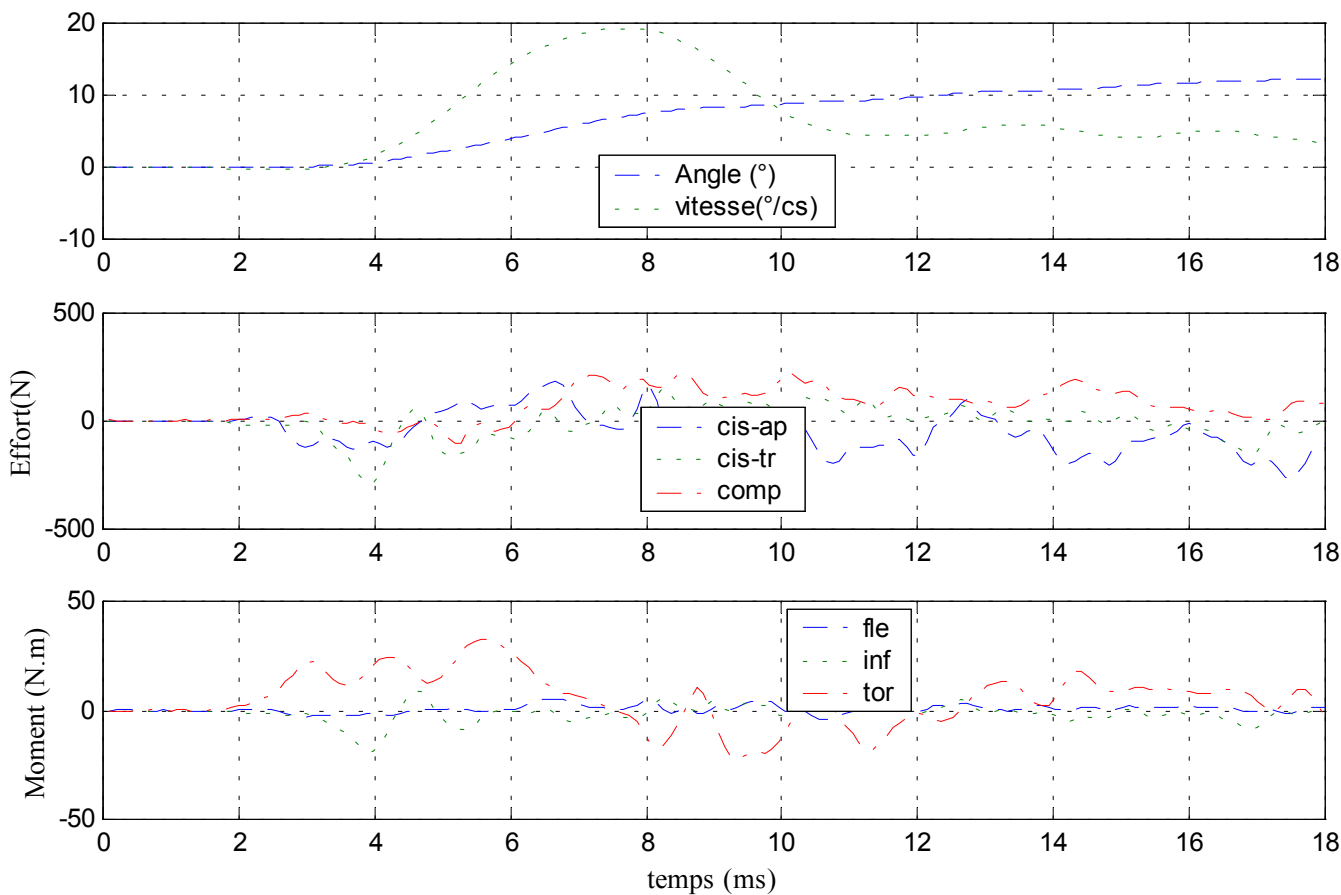


✓ Configuration avec ligaments capsulaires coupés

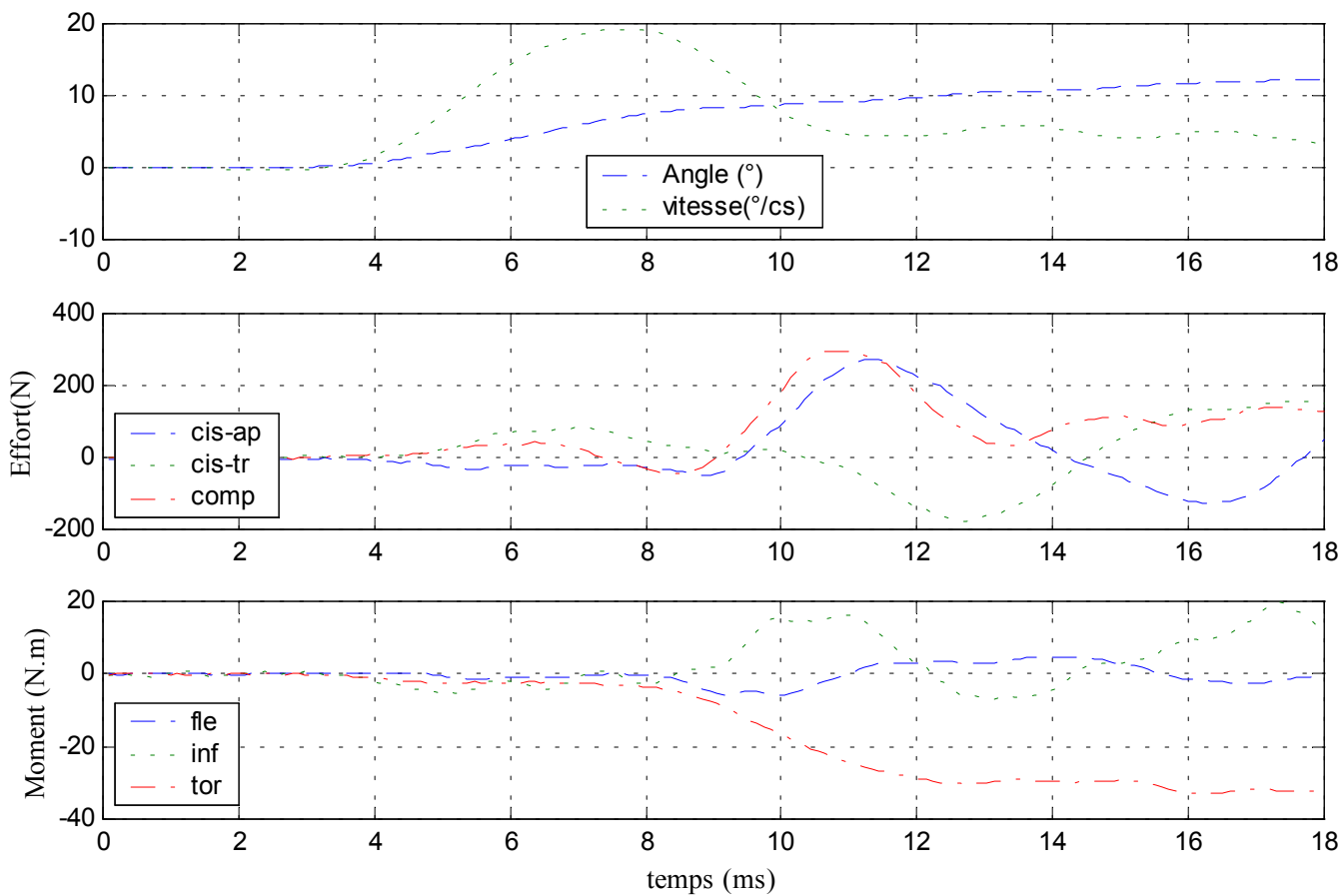
Déplacements



Efforts et moments supérieurs



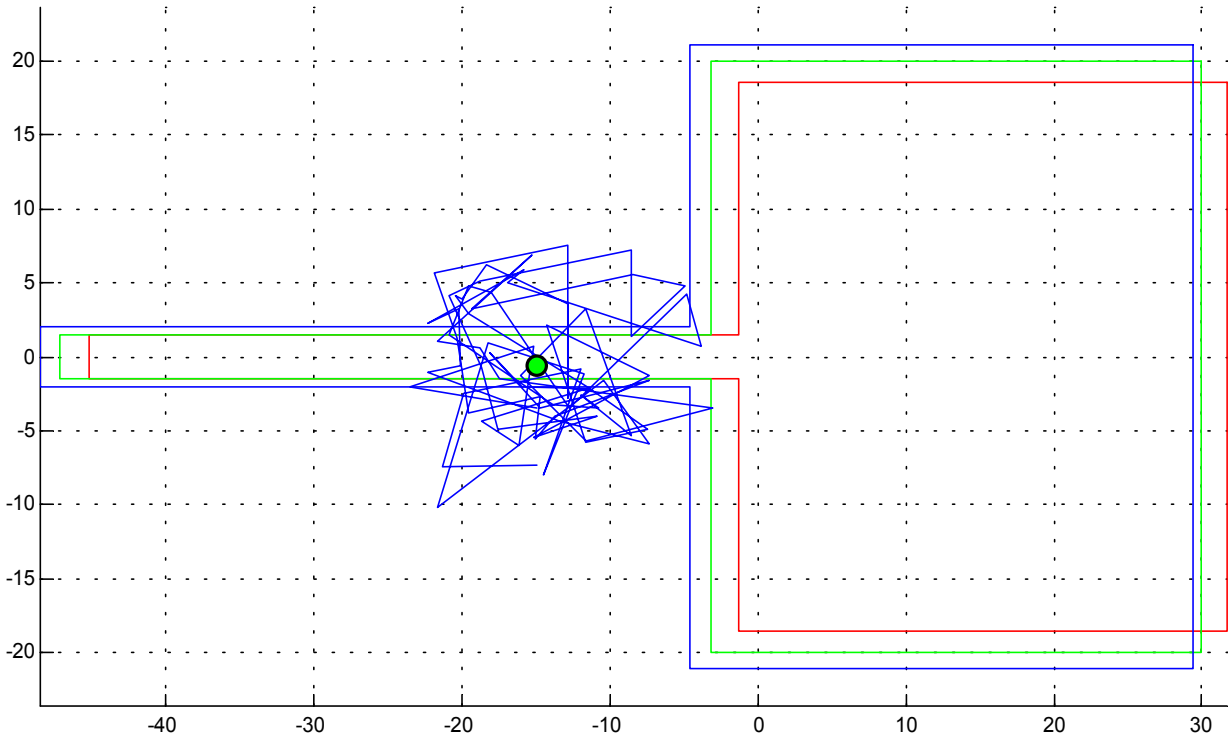
Efforts et moments inférieurs



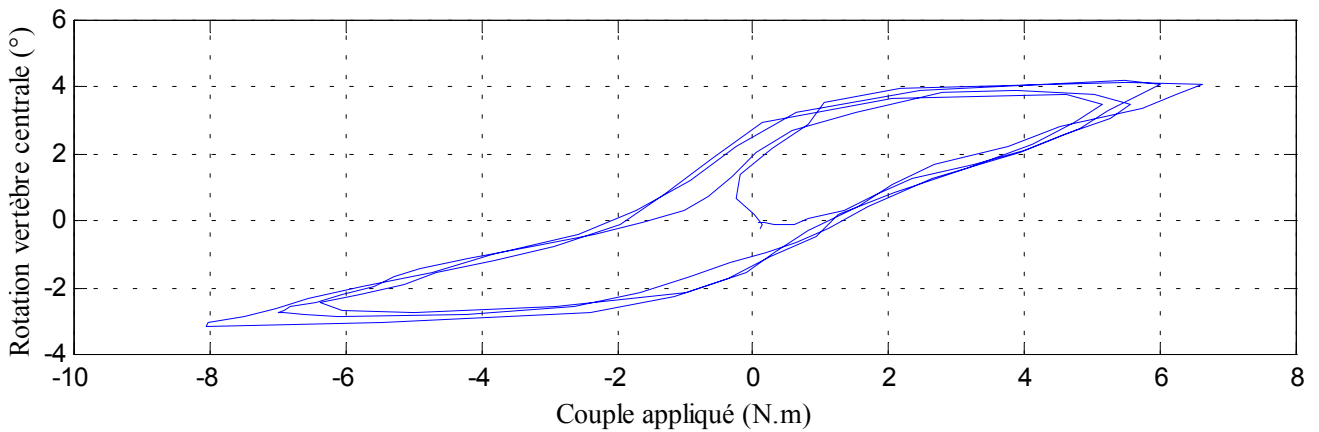
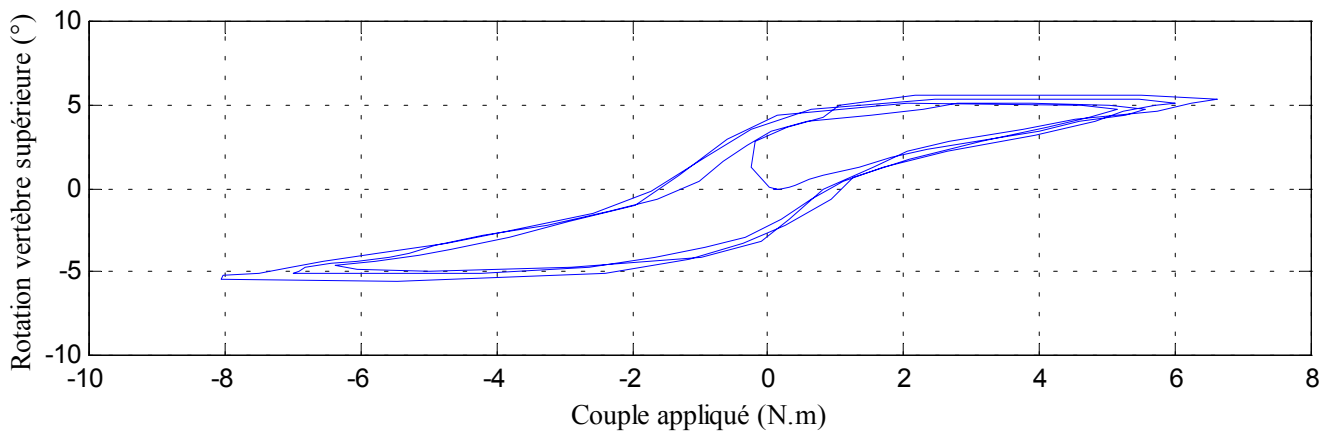
23- Essai 23 – T10T12 – torsion

A. Statique

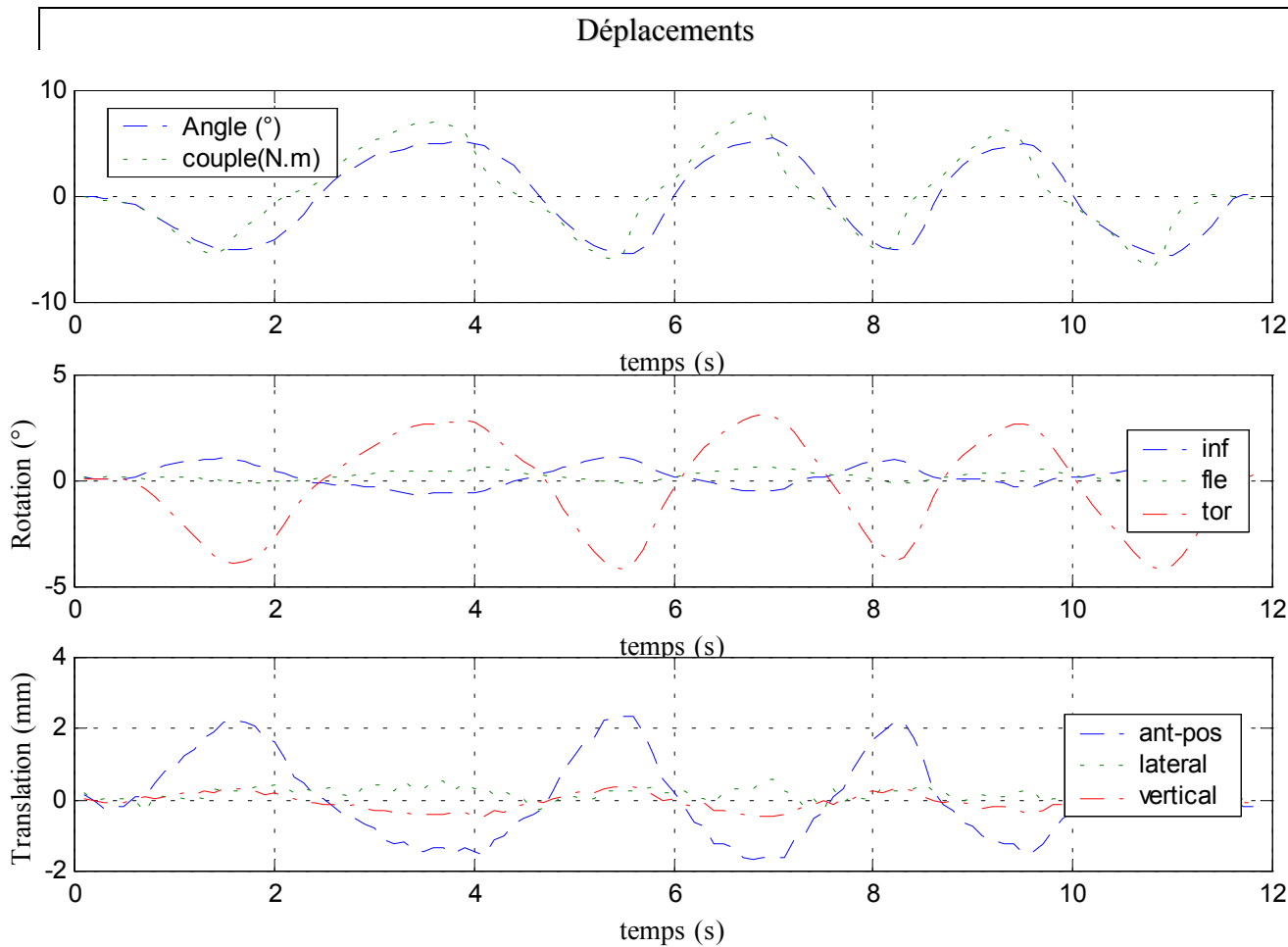
Centre instantané de rotation



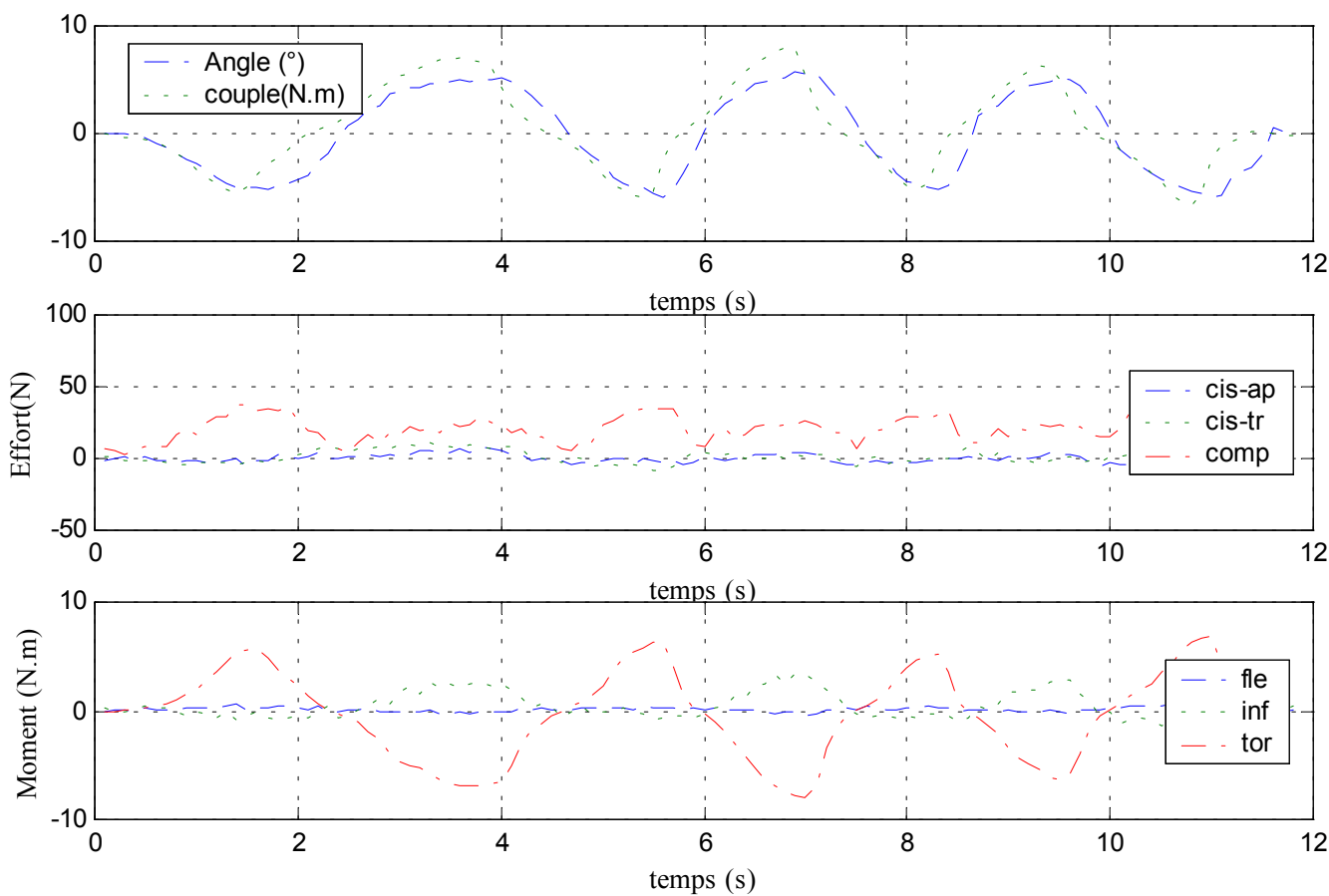
Courbe rotation-couple en hystérésis



Déplacements



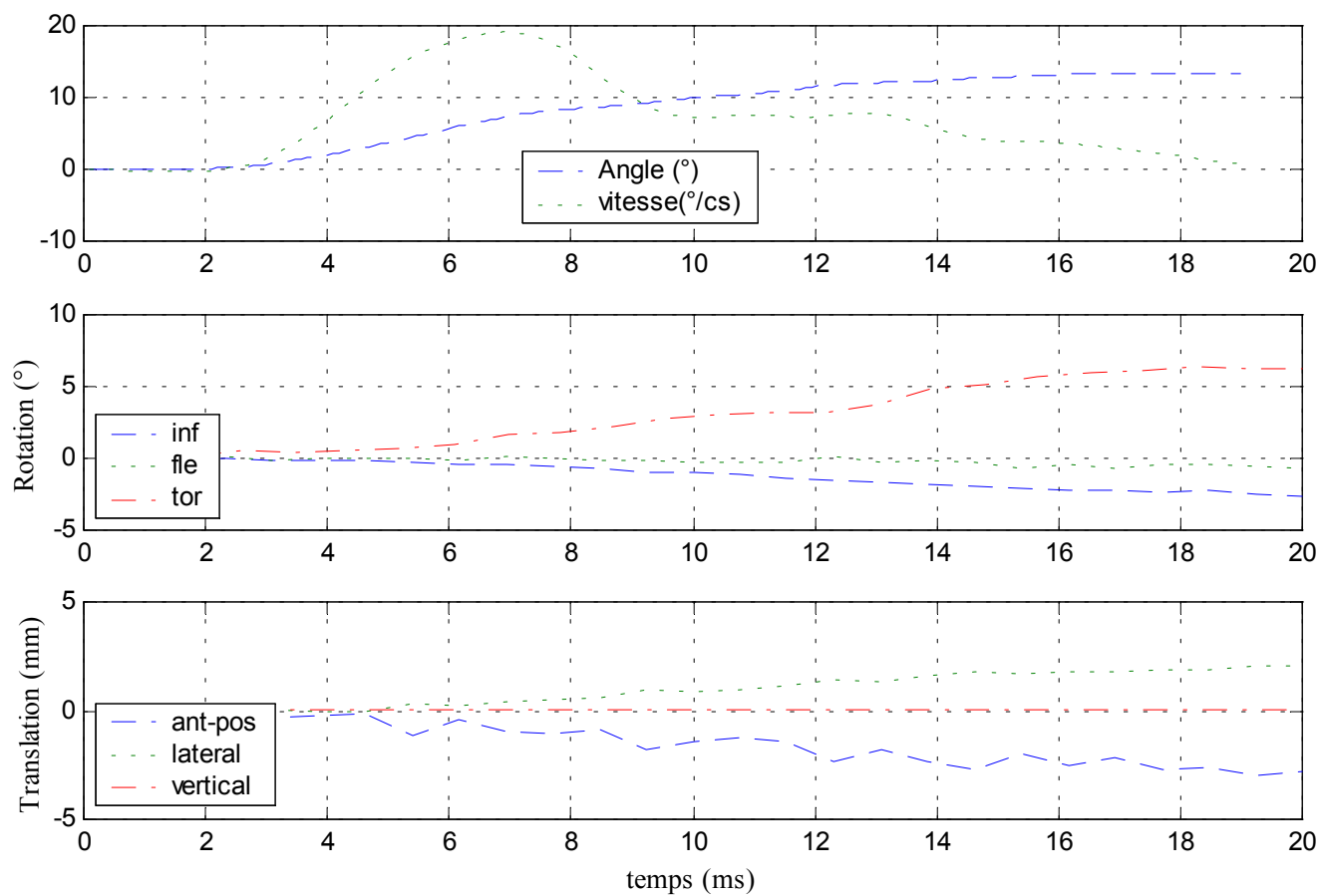
Efforts et moments inférieurs



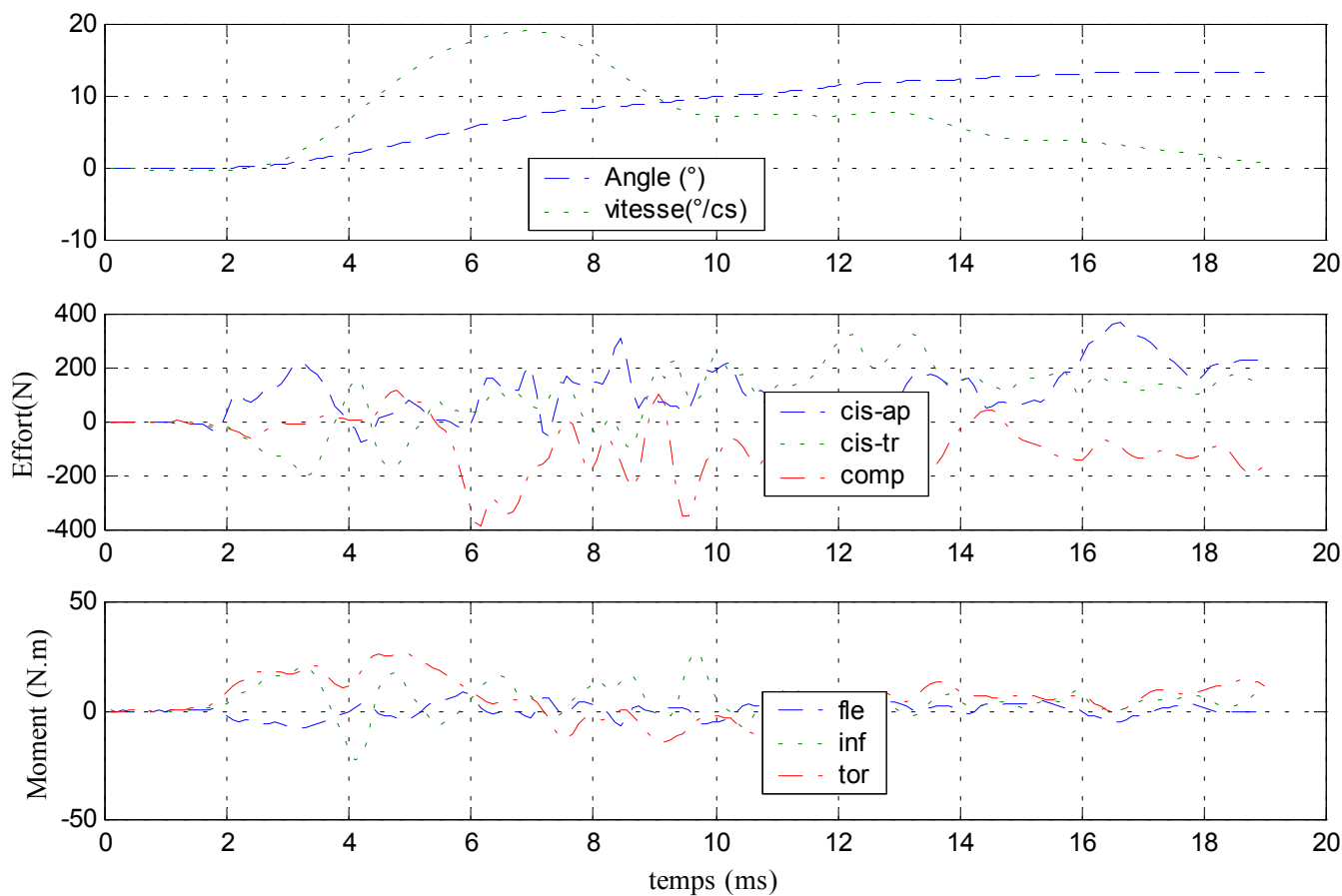
B. Dynamique

✓ Configuration saine

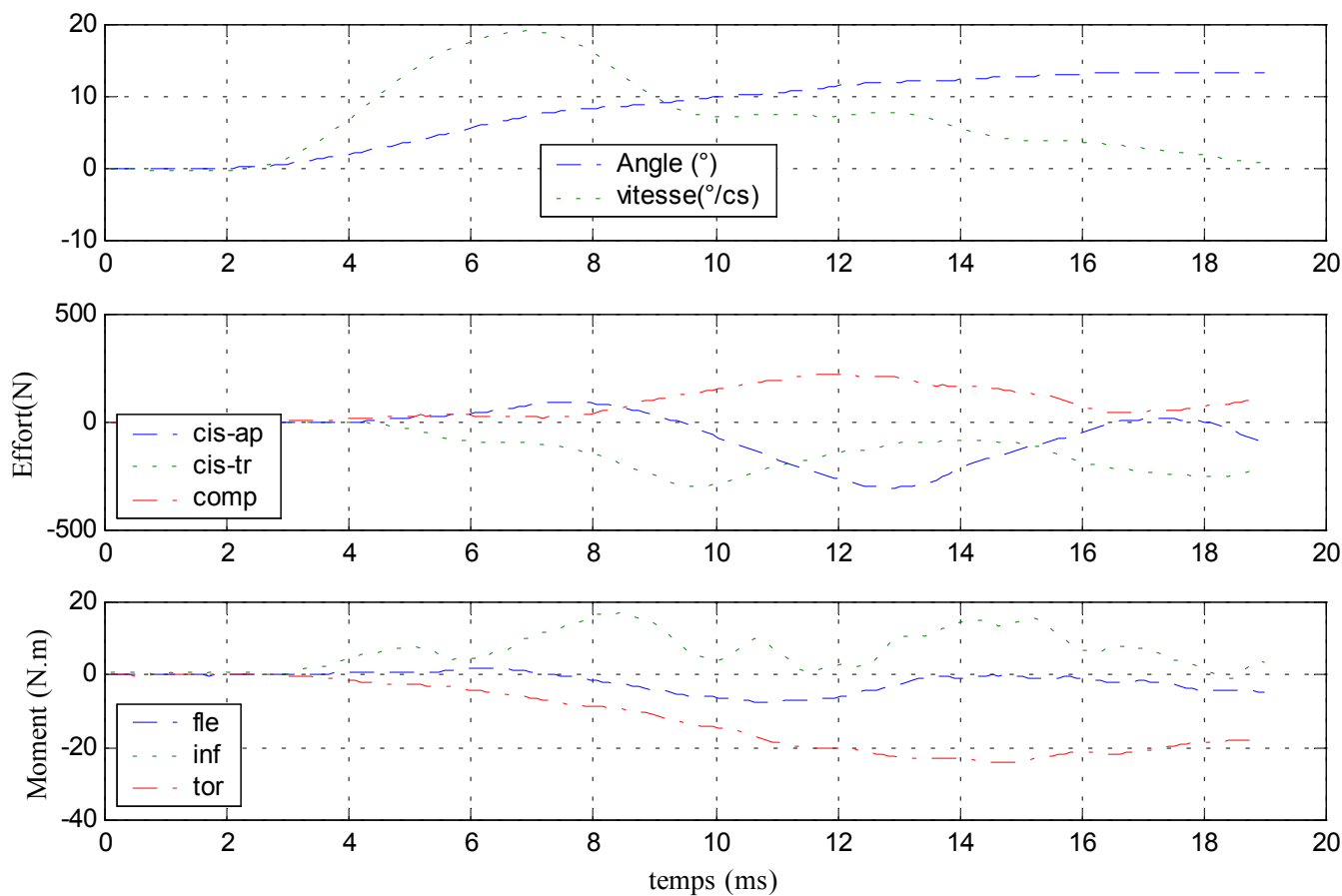
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

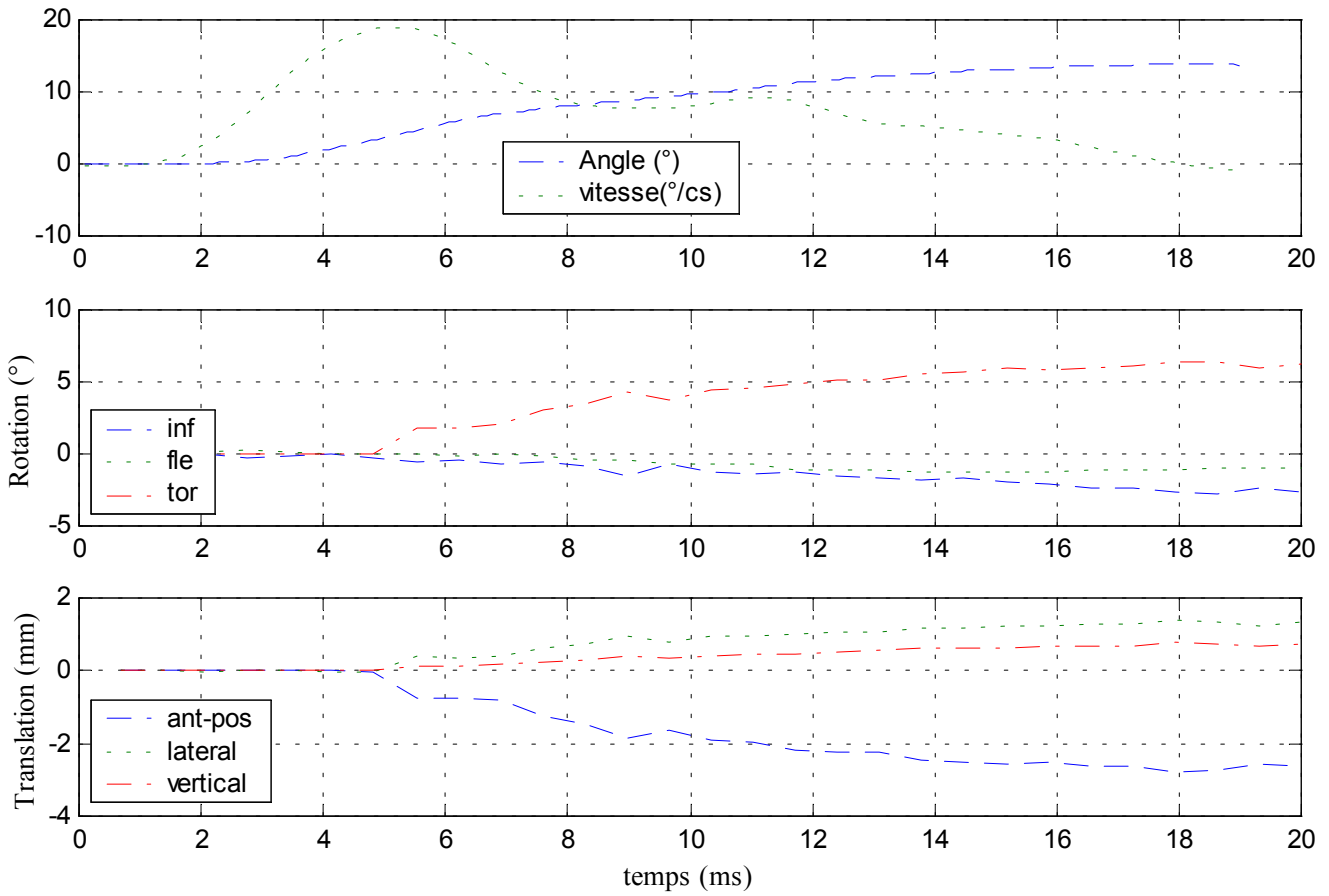


Efforts et moments inférieurs

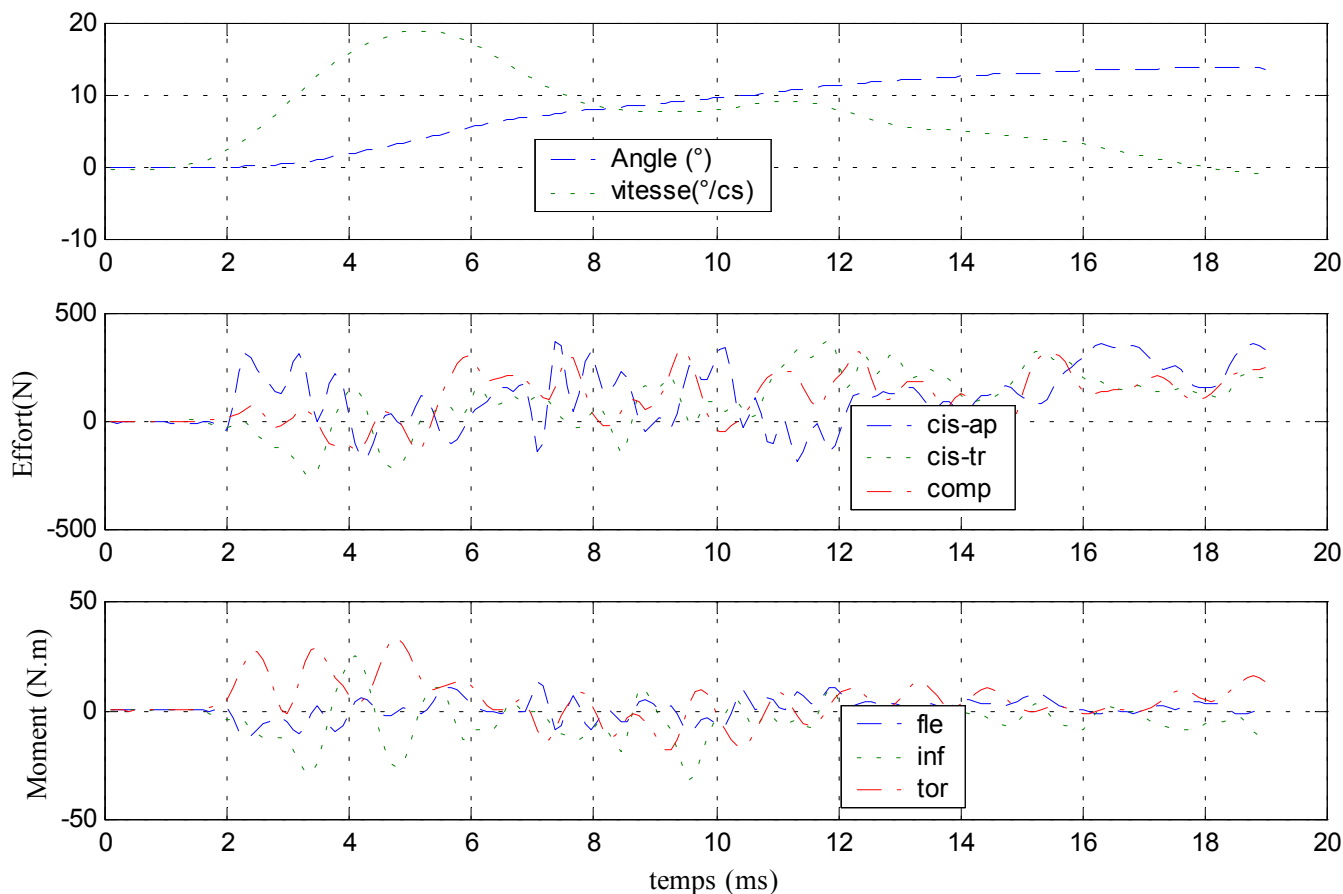


✓ Configuration avec ligaments épineux coupés

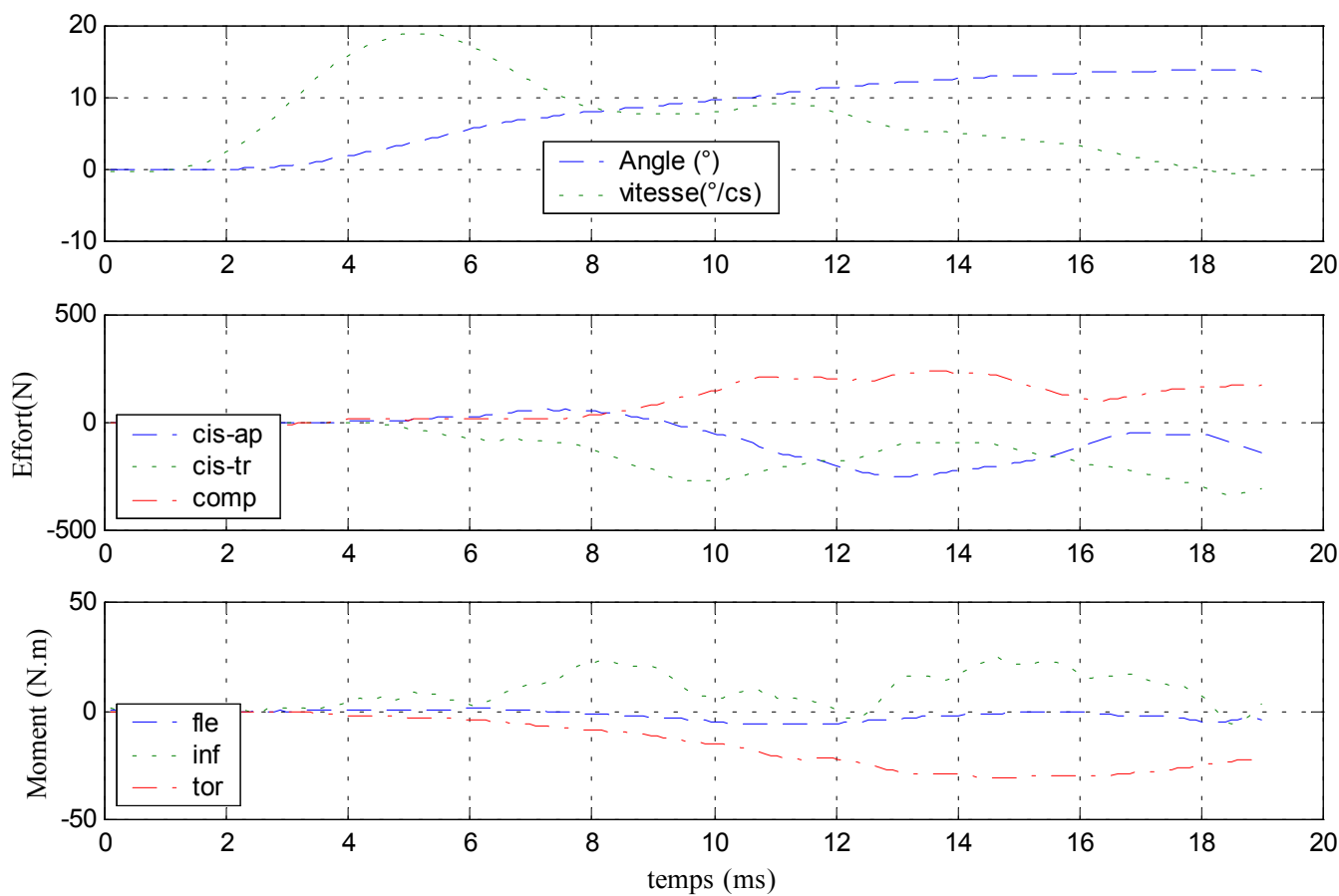
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

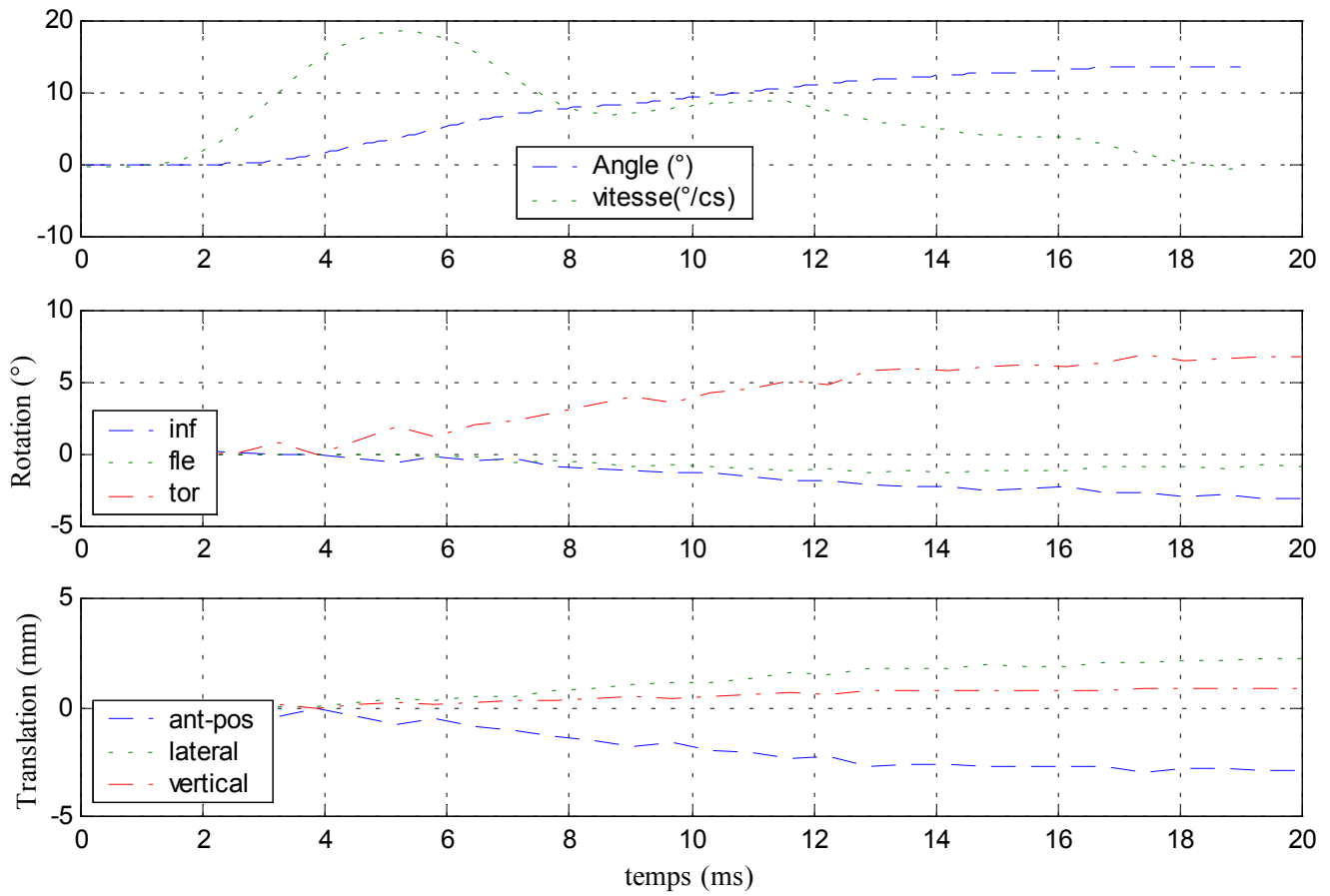


Efforts et moments inférieurs

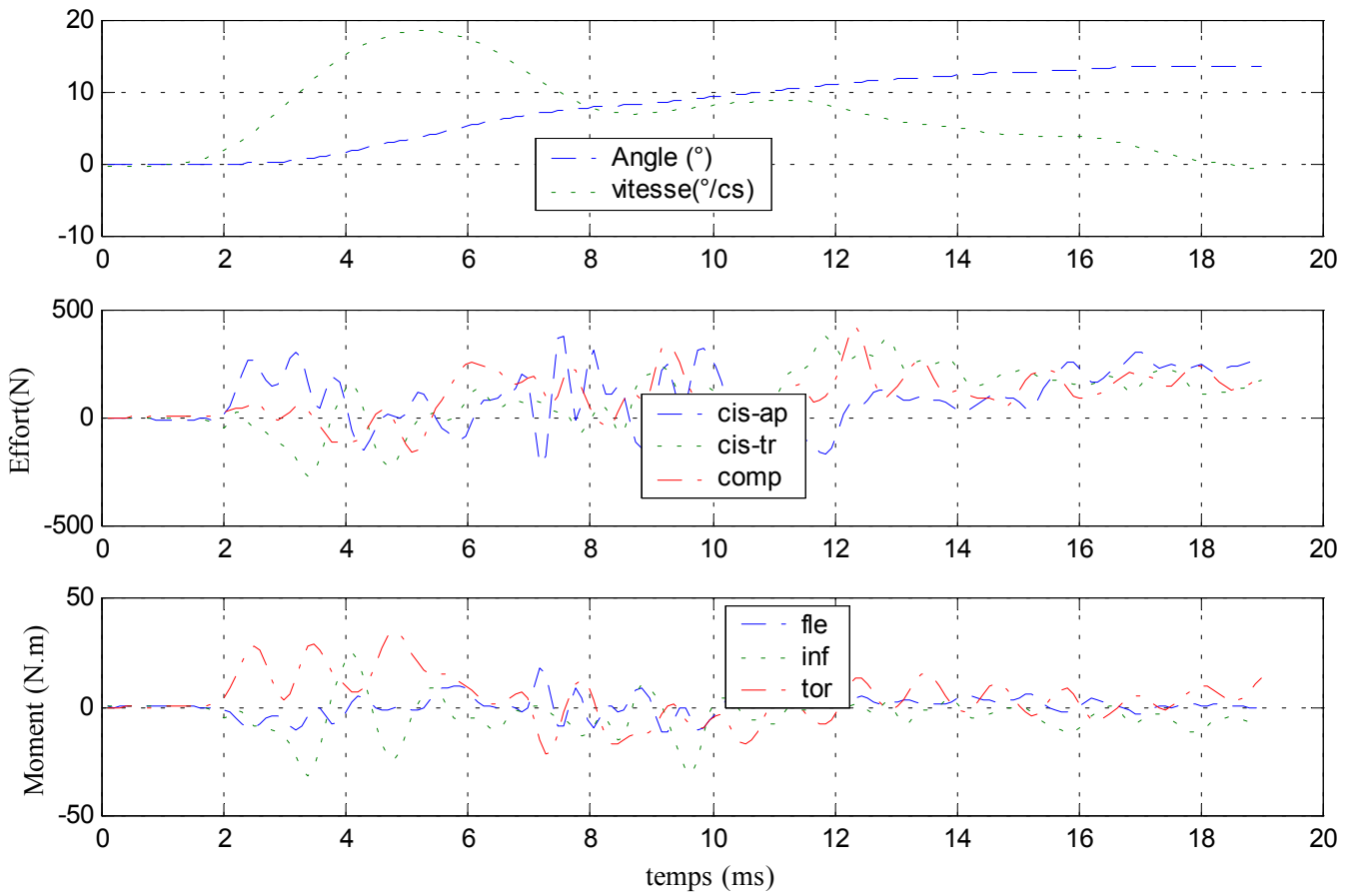


✓ Configuration avec ligaments capsulaires coupés

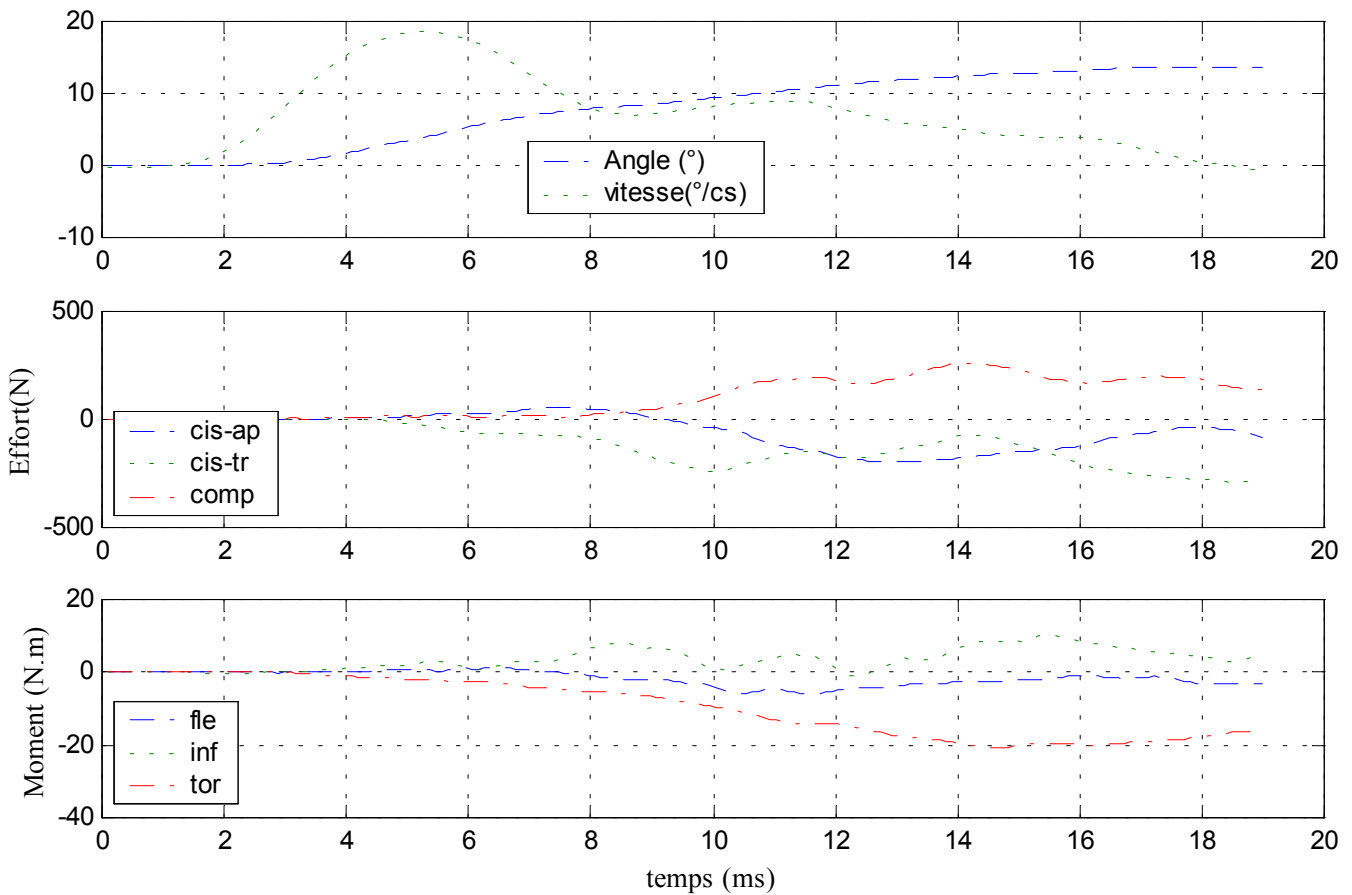
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

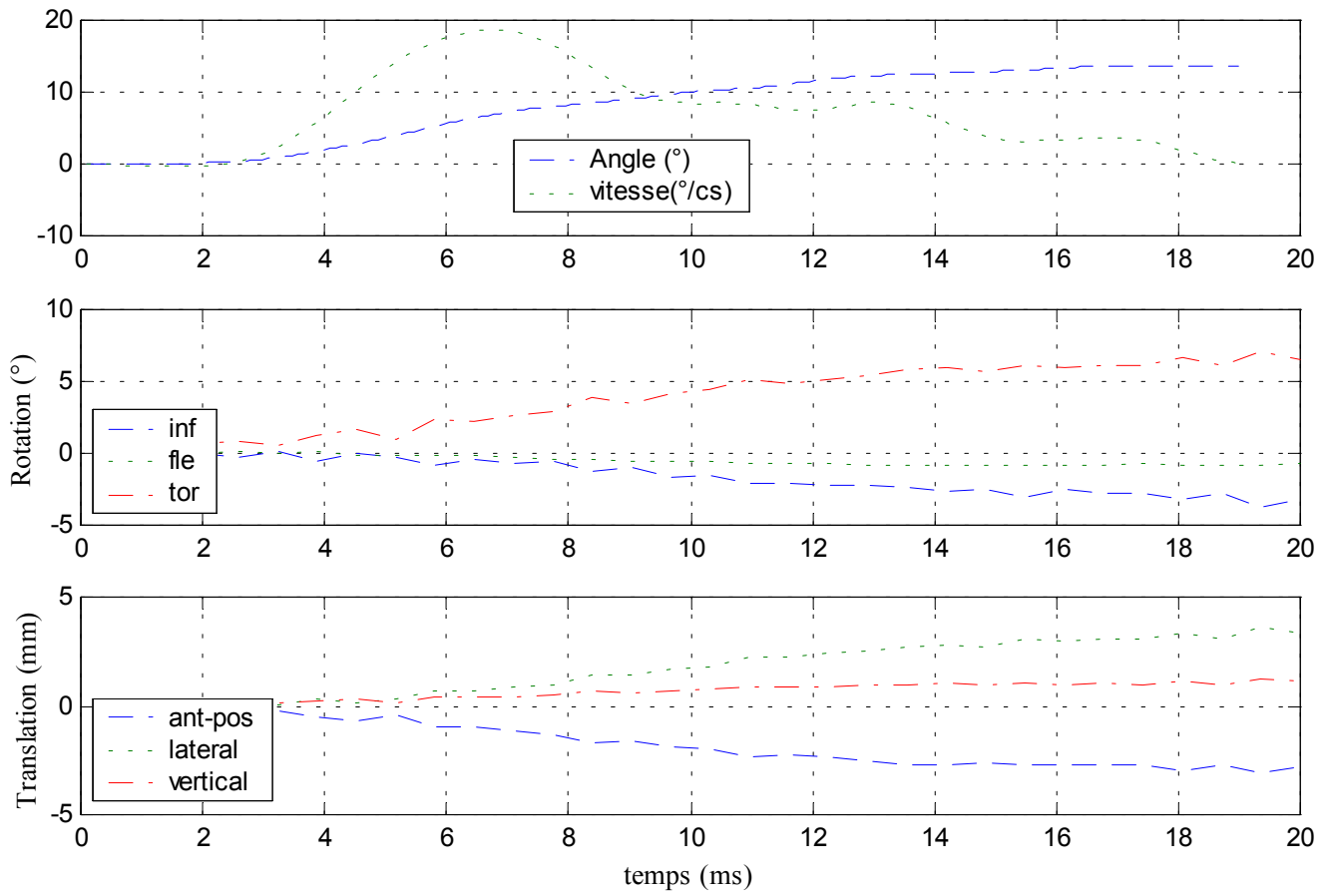


Efforts et moments inférieurs

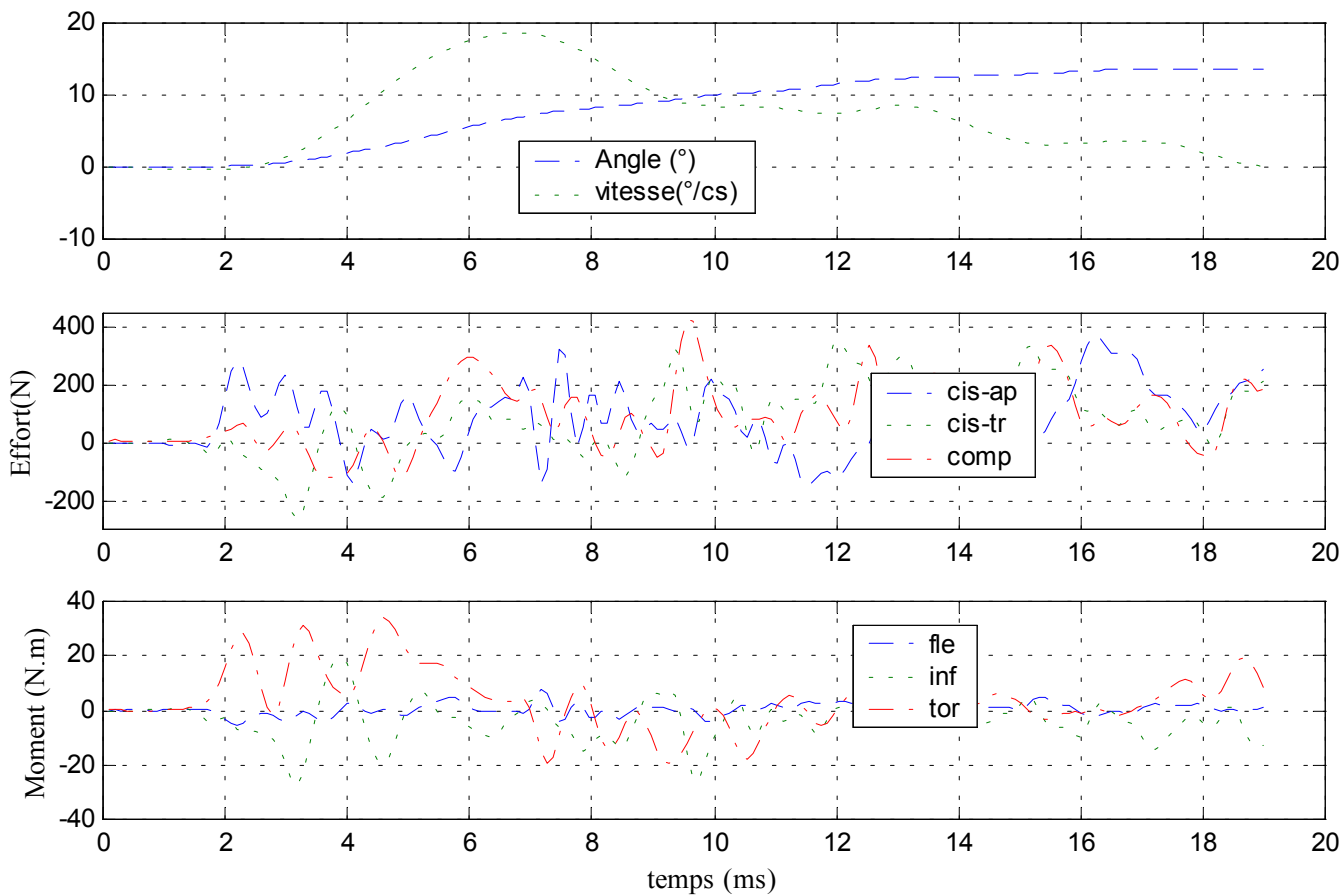


✓ Configuration avec ligaments jaunes coupés

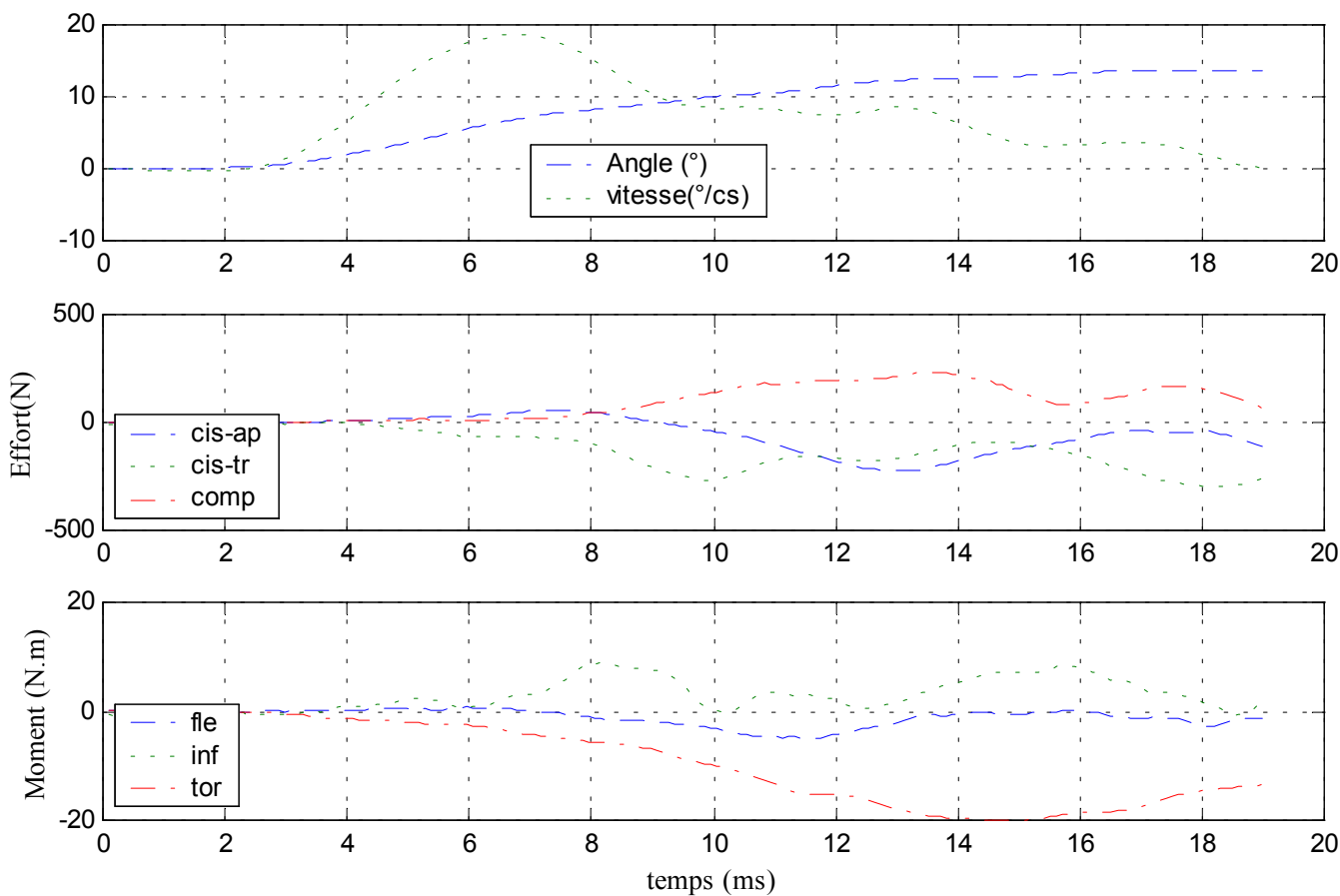
Déplacements



Efforts et moments supérieurs



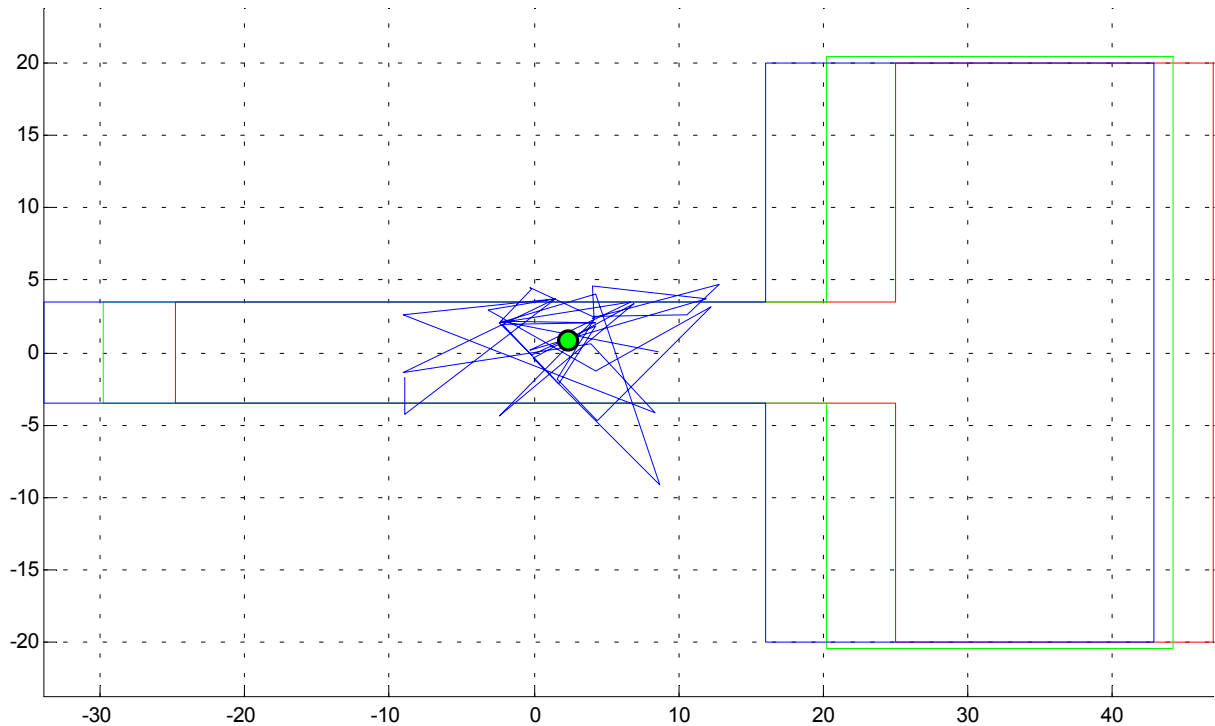
Efforts et moments inférieurs



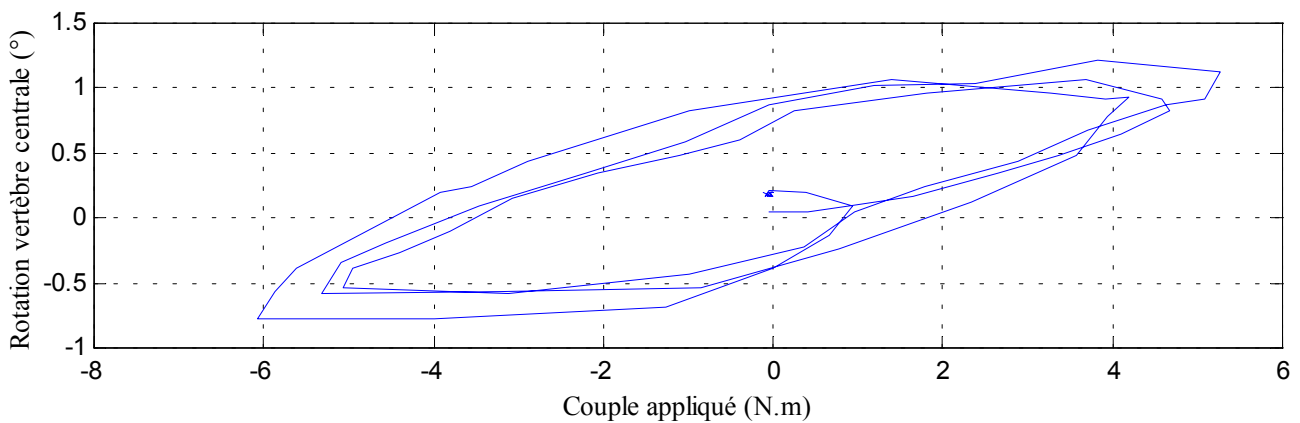
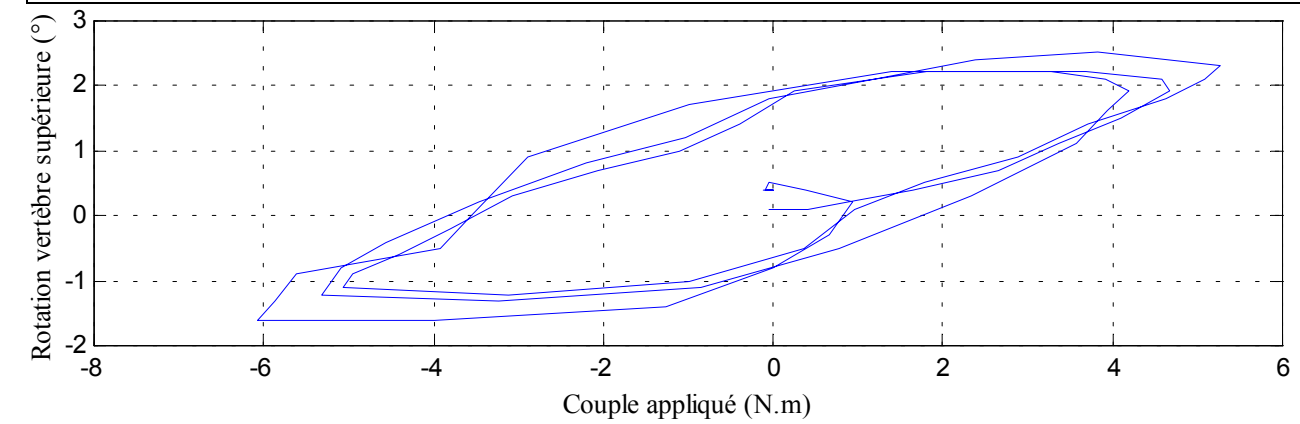
24- Essai 24 – T11L1 – torsion

A. Statique

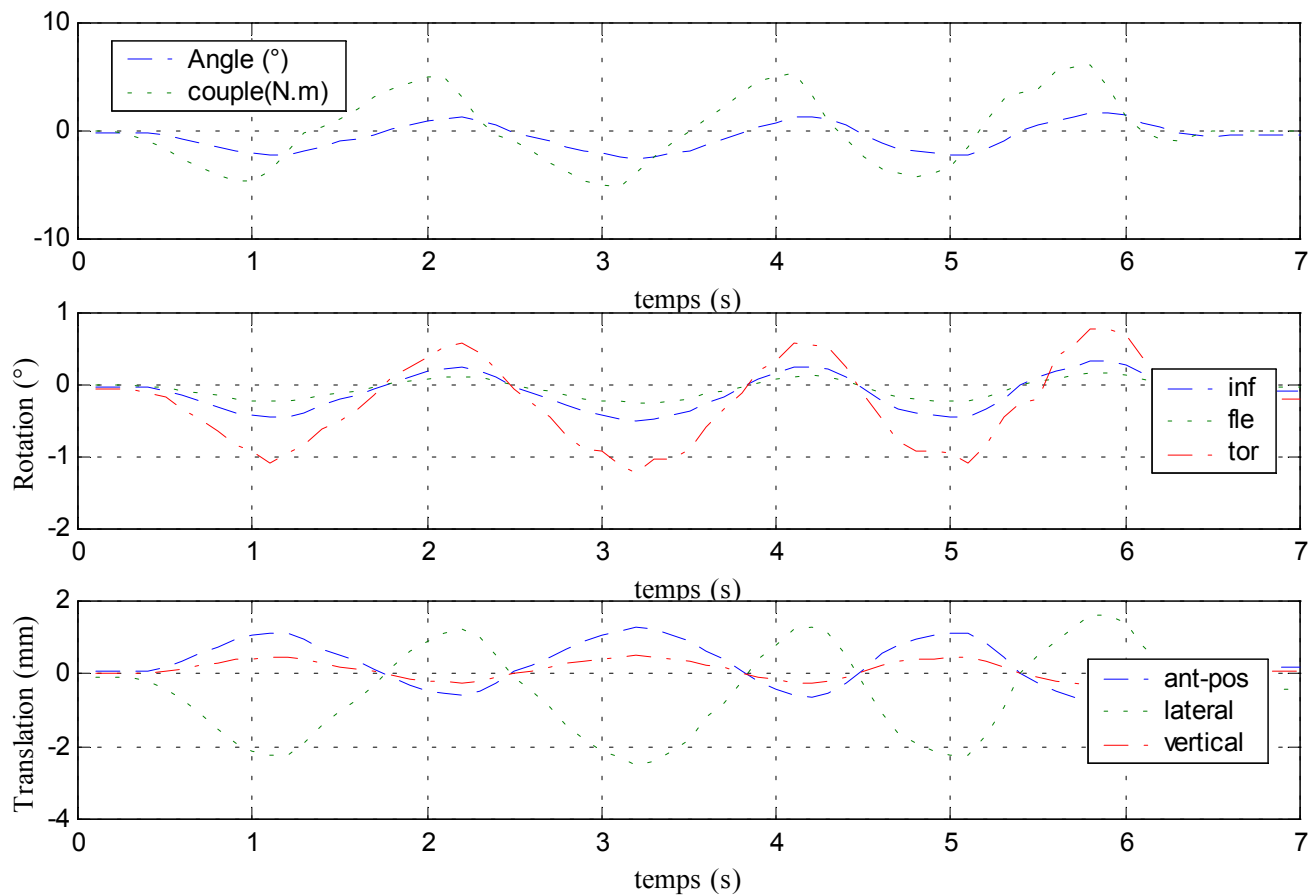
Centre instantané de rotation



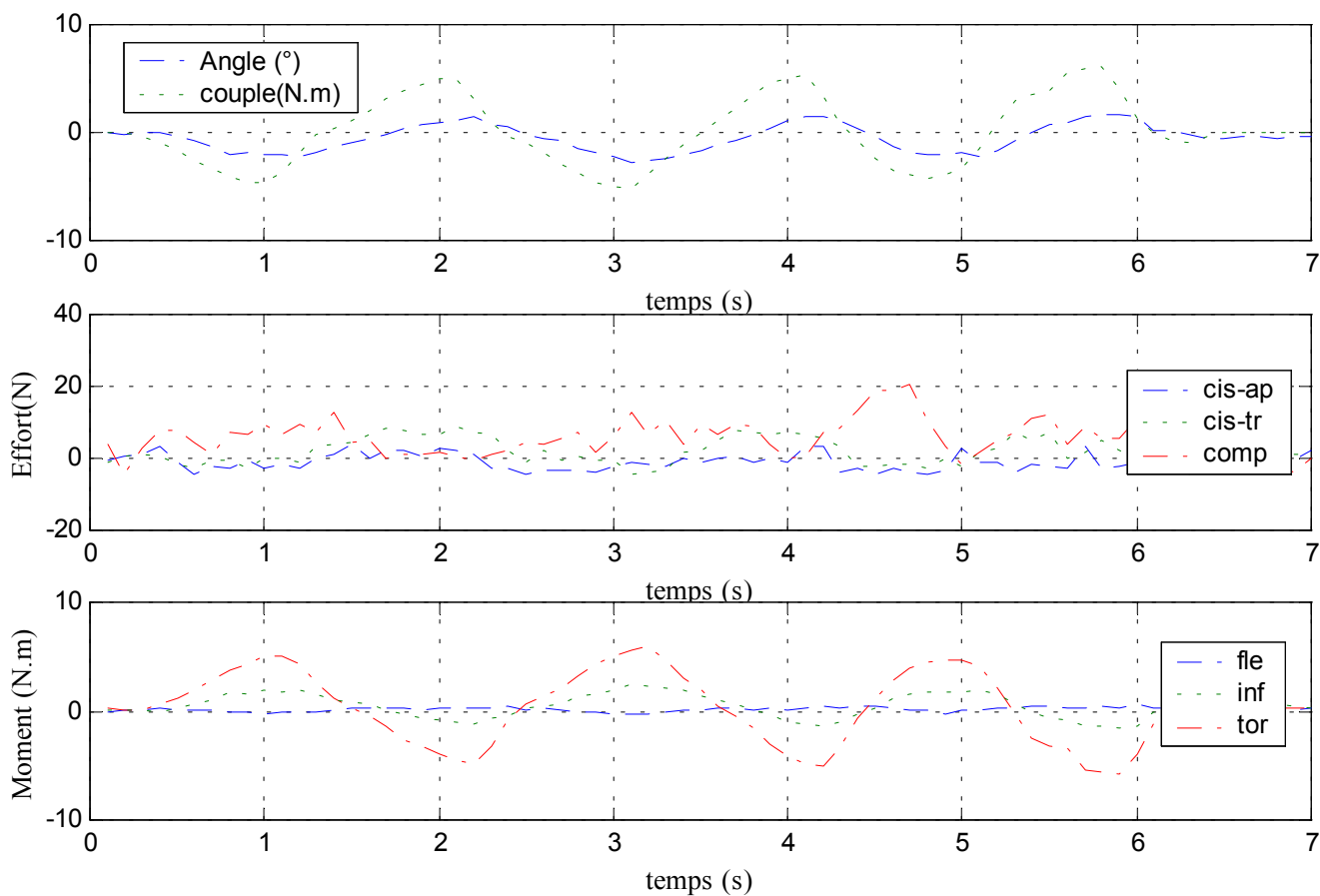
Courbe rotation-couple en hystérésis



Déplacements



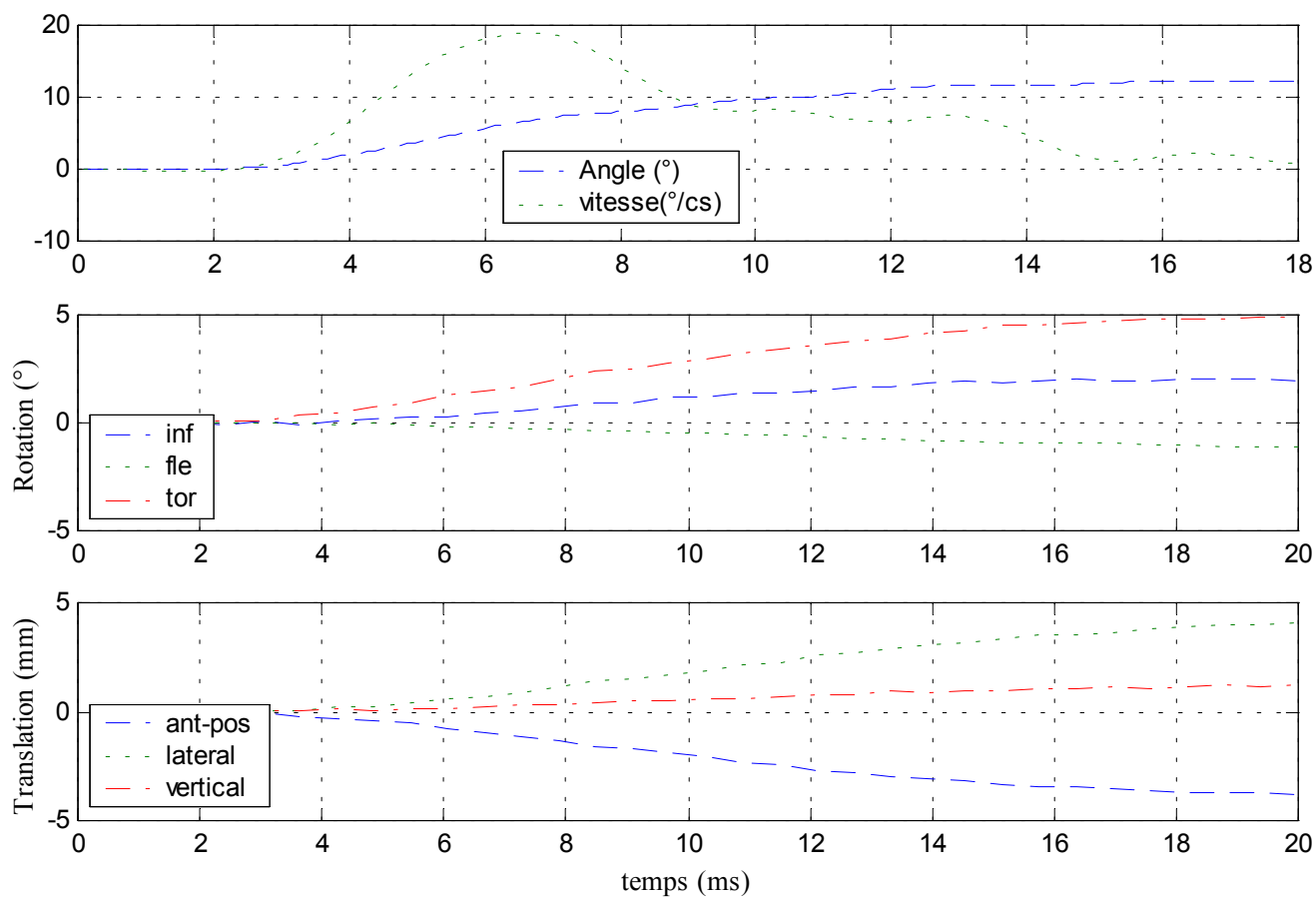
Efforts et moments inférieurs



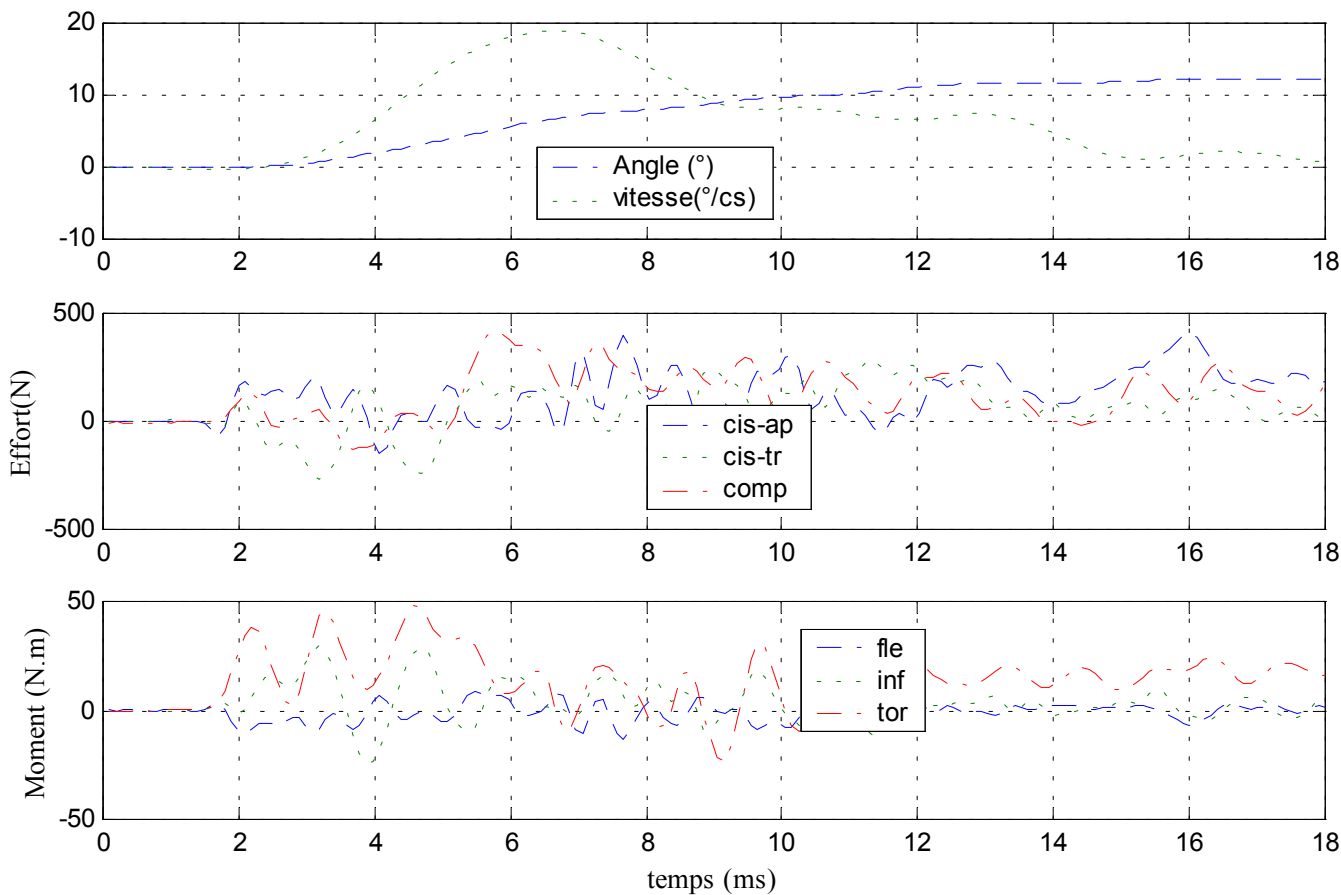
B. Dynamique

✓ Configuration saine

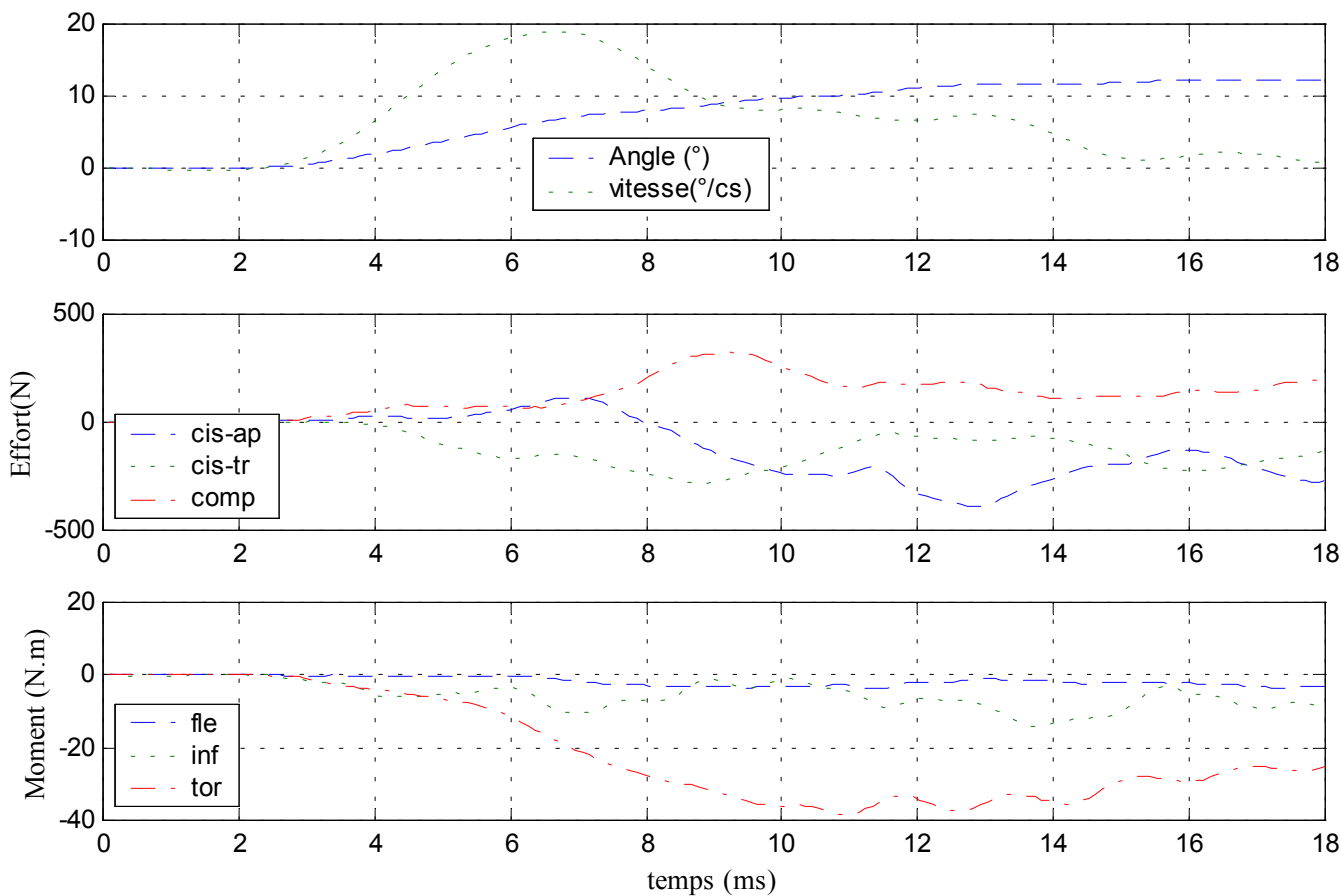
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

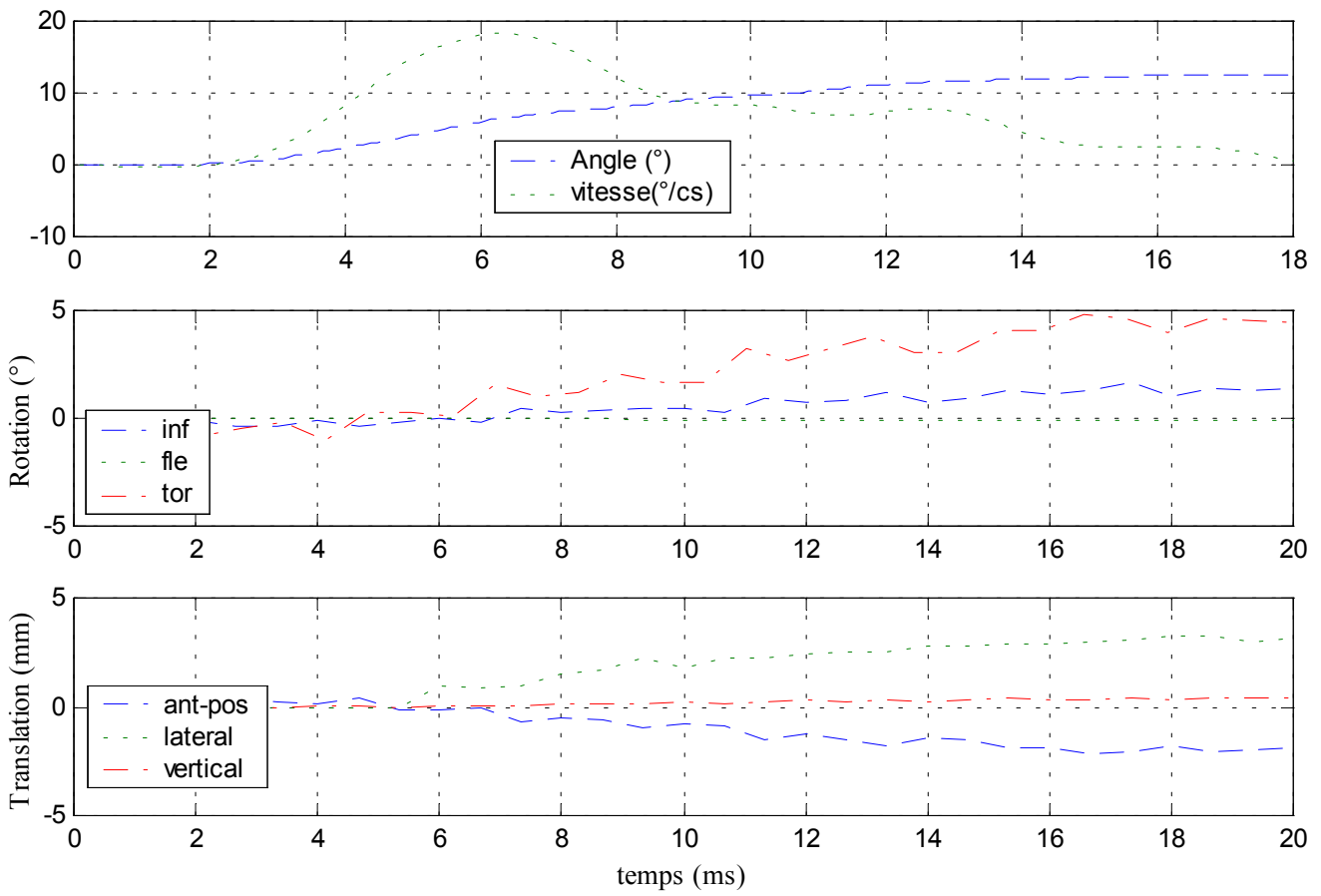


Efforts et moments inférieurs

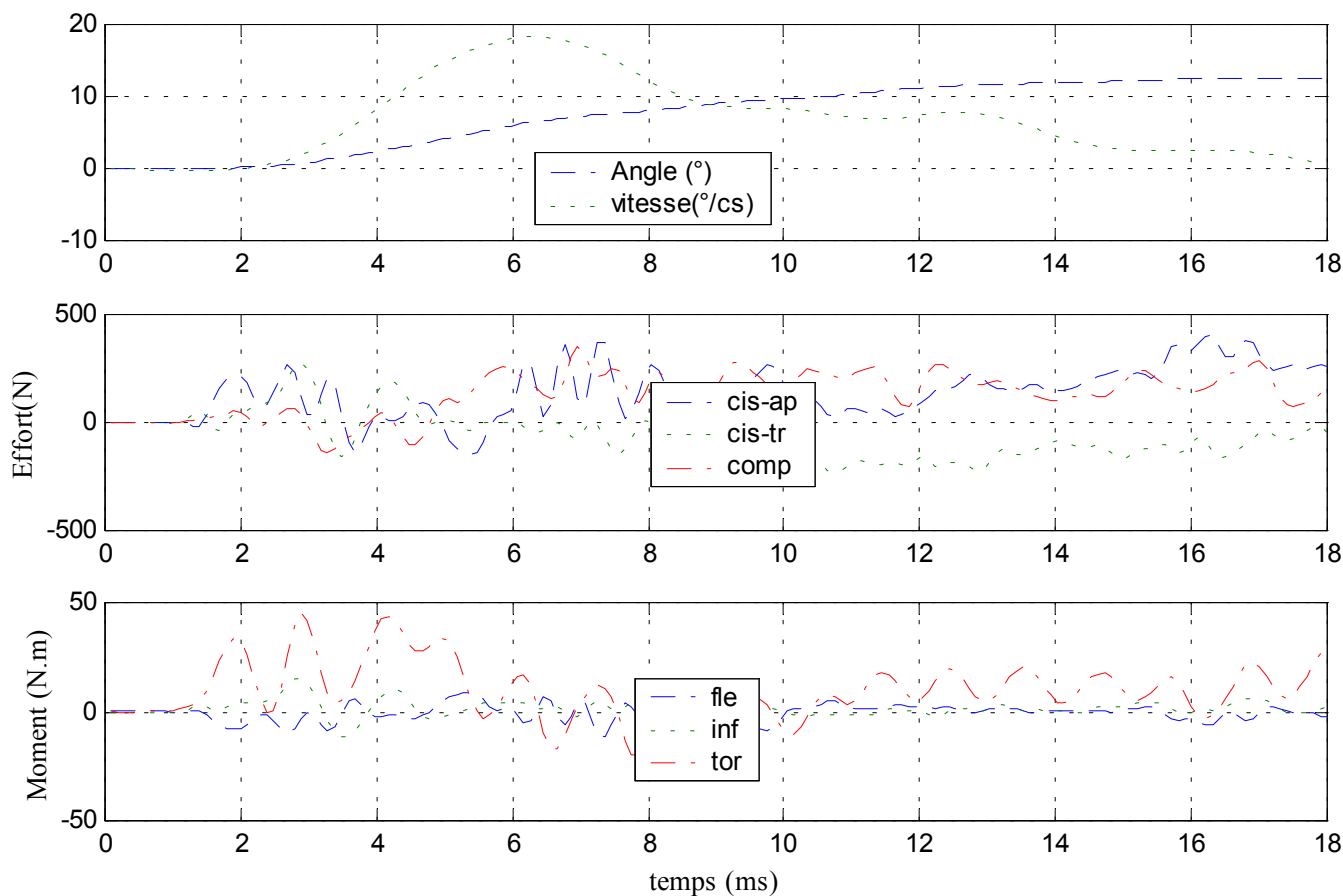


✓ Configuration avec ligaments épineux coupés

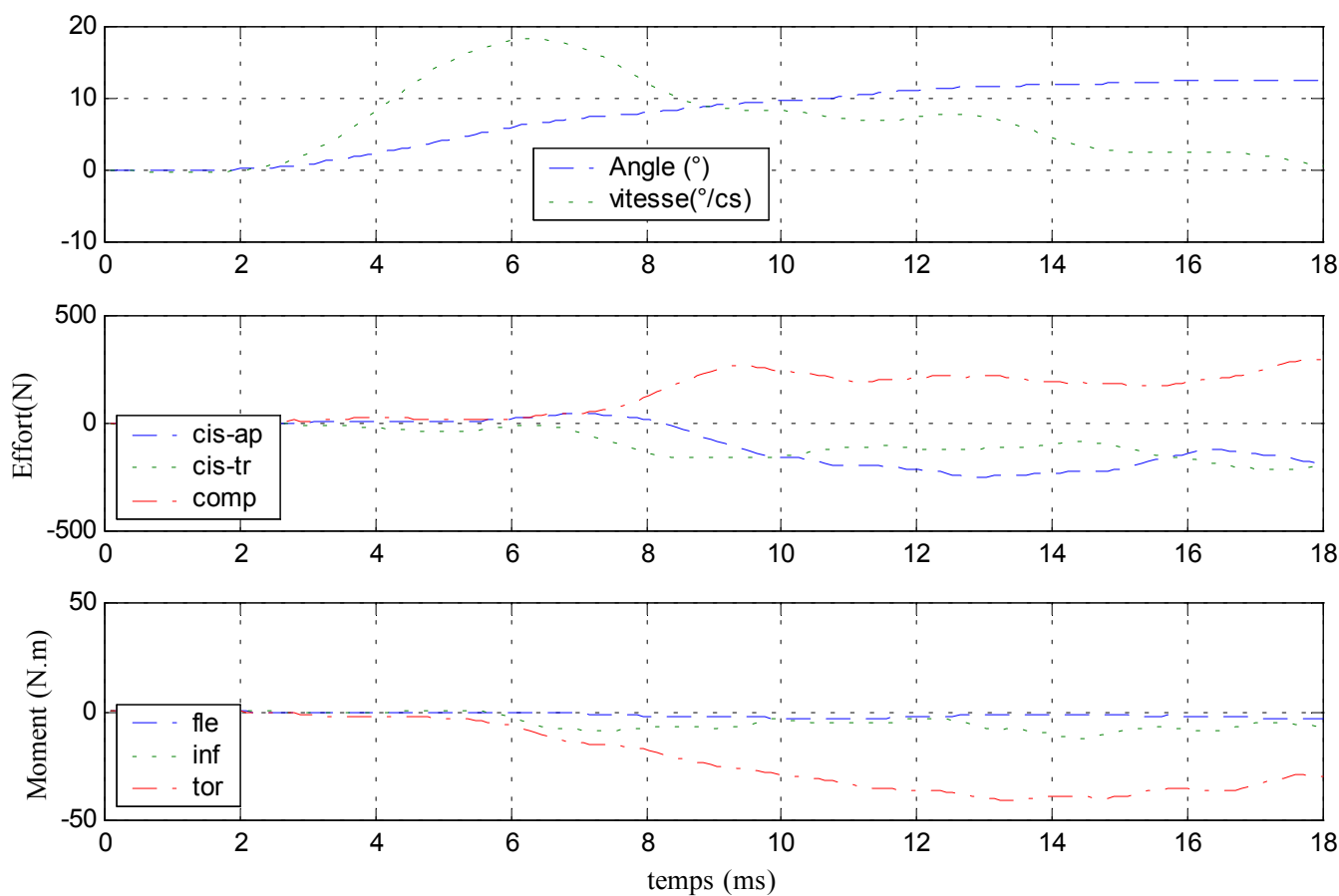
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

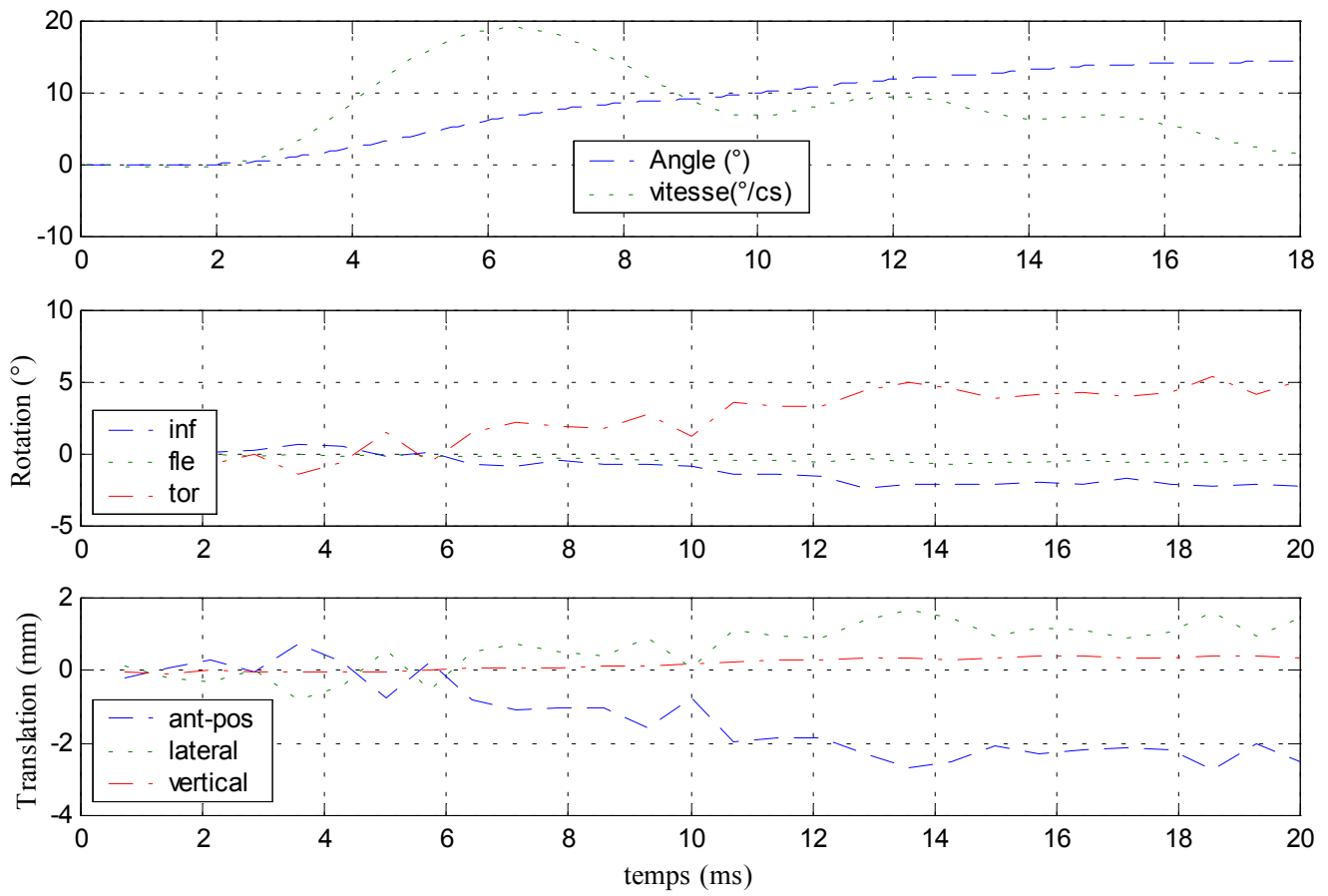


Efforts et moments inférieurs

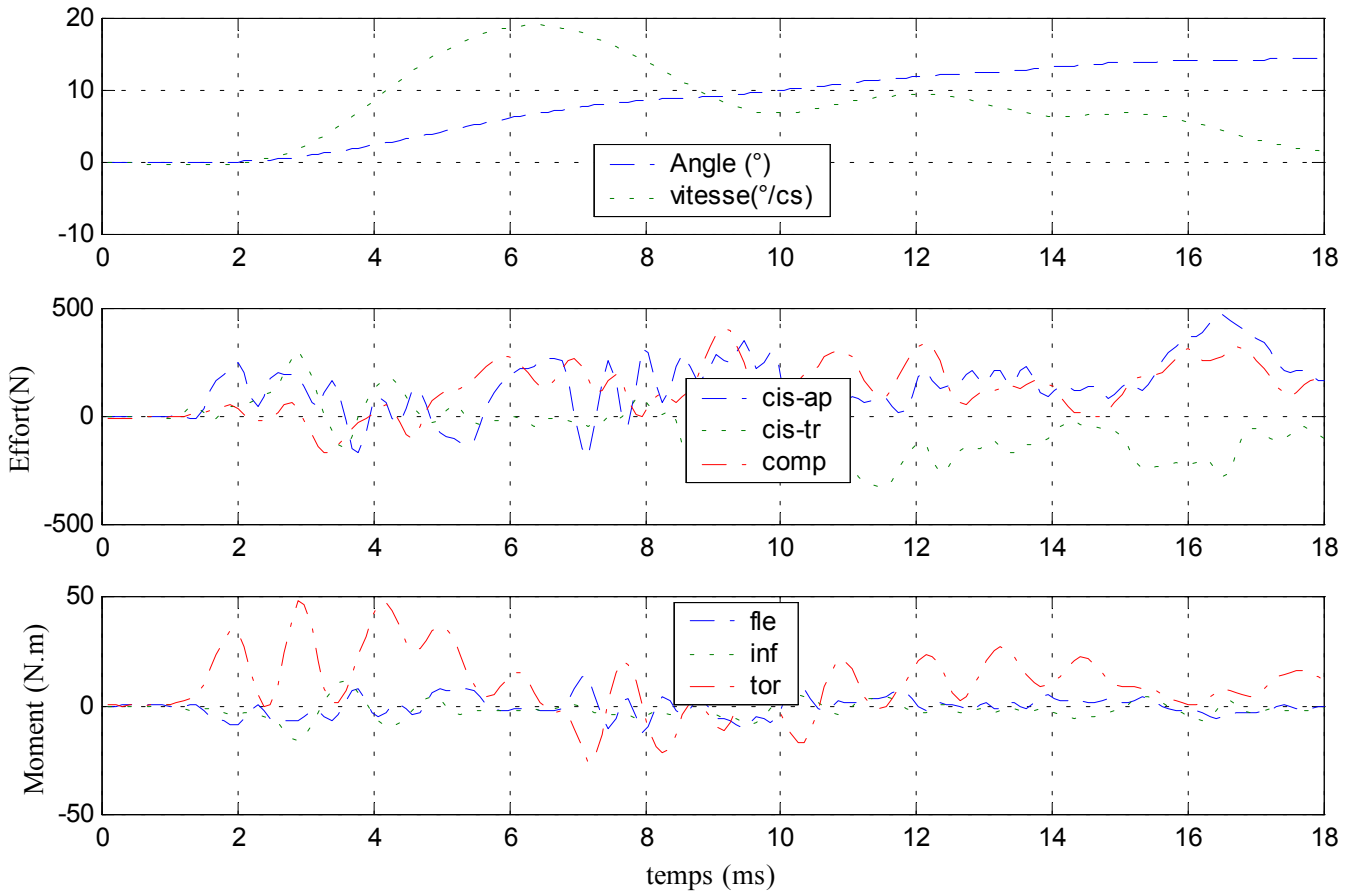


✓ Configuration avec ligaments capsulaires coupés

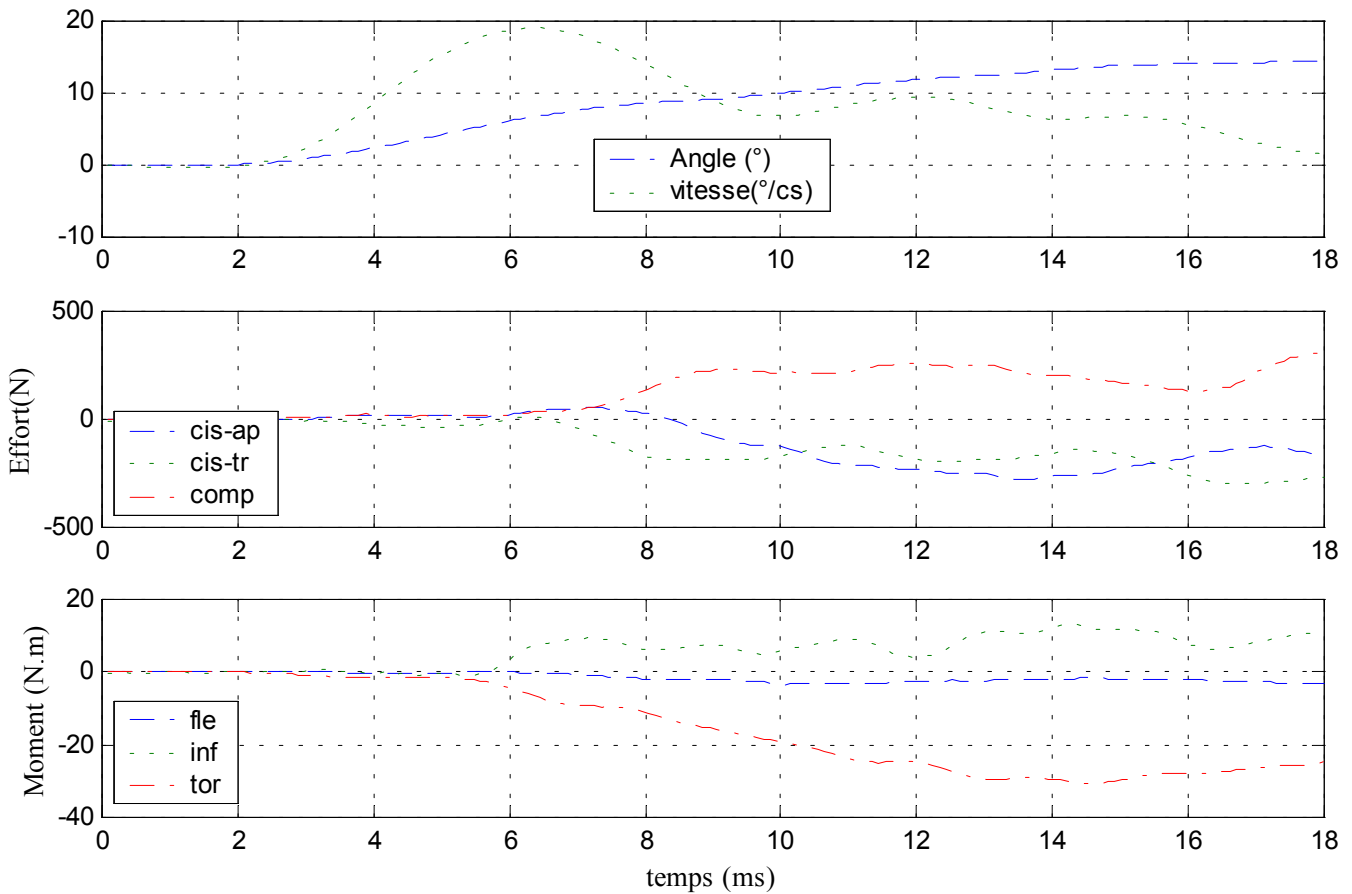
Déplacements



Efforts et moments supérieurs

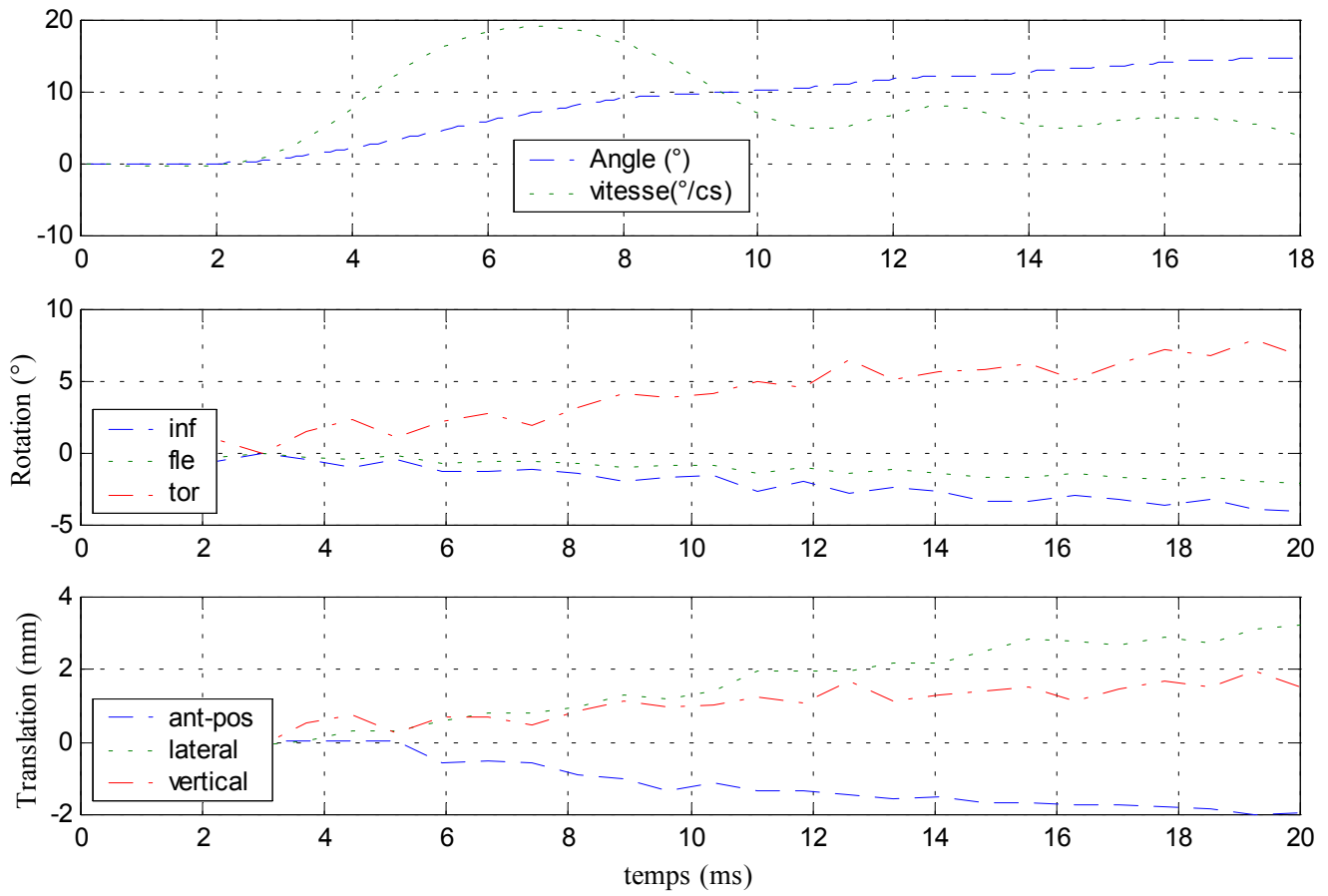


Efforts et moments inférieurs

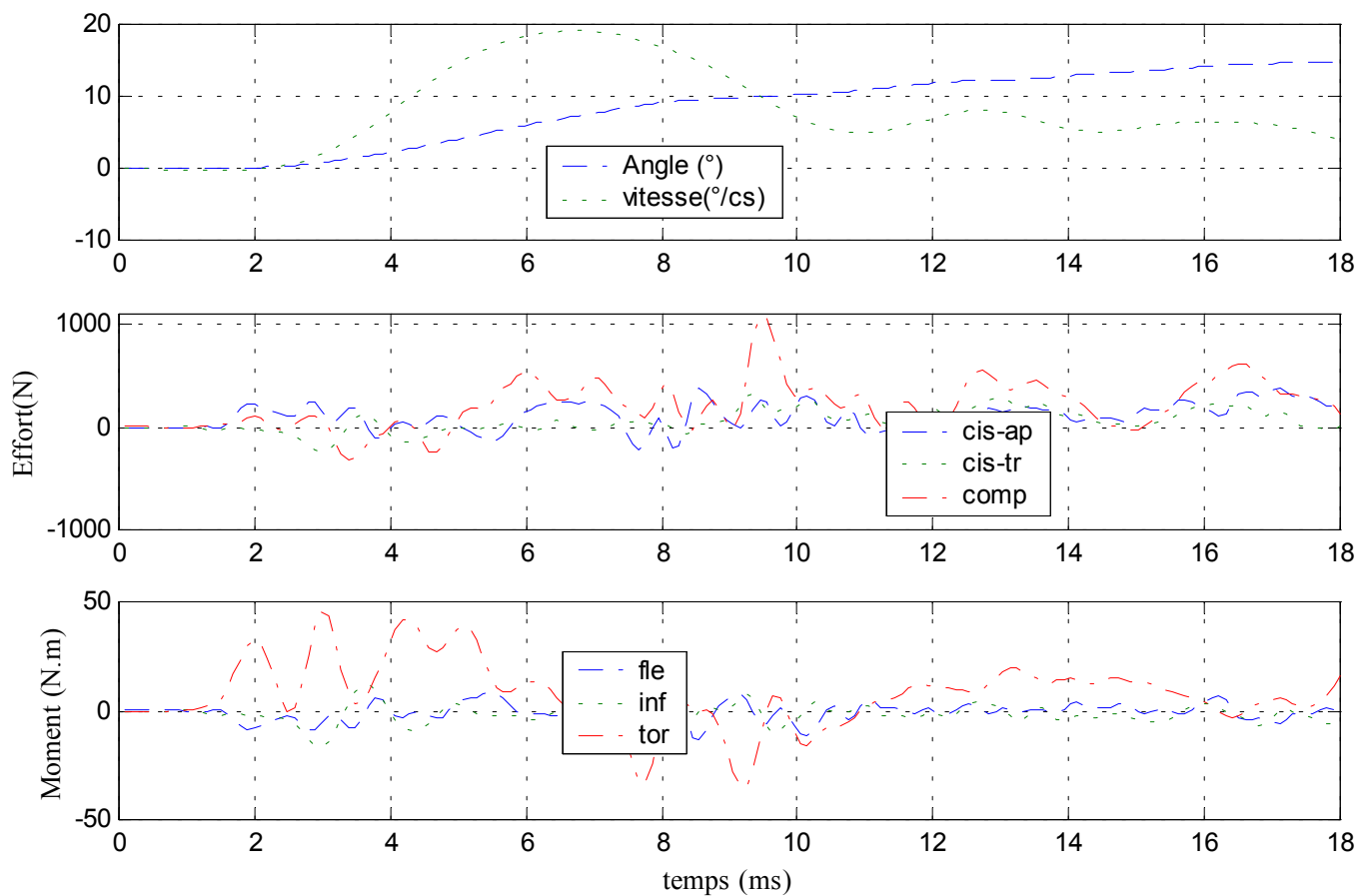


✓ Configuration avec ligaments jaunes coupés

Déplacements



Efforts et moments supérieurs



Efforts et moments inférieurs

